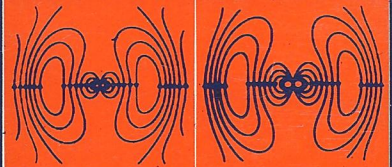
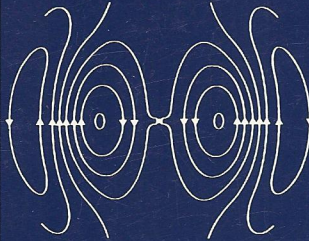
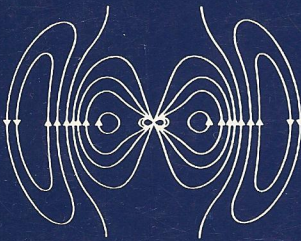
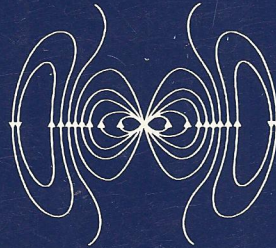
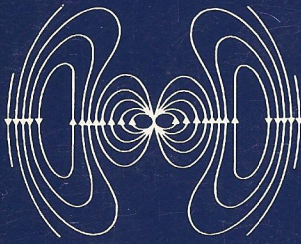




الکترو دینامیک کلاسیک

ہانس سی. اوہانیاں



ترجمہ محی الدین شیخ الاسلامی

الکترو دینامیک کلاسیک

هانس سی. اوہانیاں

ترجمہ محی الدین شیخ الاسلامی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران



Classical Electrodynamics
Hans C. Ohanian
Allyn and Bacon, Inc., 1988

الکترو دینامیک کلاسیک
تألیف هانس سی. اوهانیان
ترجمه محی الدین شیخ الاسلامی
ویراسته هاله المعی
نسخه پرداز: محمدعلی رزاقی
حروفچین: منیژه دیارمند
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۷۸
تعداد ۲۰۰۰
چاپ: محمد امین
حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است
فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Ohanian, Hans	اهانیان، هانس
الکترو دینامیک کلاسیک / هانس سی. اوهانیان؛ ترجمه محی الدین شیخ الاسلامی. — تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۸.	
هفت، ۶۴۲ ص. — (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۹۴۴؛ فیزیک؛ ۸۶)	
ISBN 964-01-0944-4	
فهرست نویسی براساس اطلاعات فیبا.	
Classical electrodynamics.	عنوان اصلی:
۱. الکترو دینامیک. الف. شیخ الاسلامی، محی الدین، مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.	
۵۳۷/۶	۷ الف ۱۹ الف / QC۶۳۱
۱۳۷۸	
۳۷۸-۱۲۲۲۸	کتابخانه ملی ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار
۳	۱ حساب برداری
۴	۱-۱ زرده‌ایها، بردارها و تانسورها
۱۶	۲-۱ میدانها و عملگرهای دیفرانسیلی
۲۲	۳-۱ مختصات استوانه‌ای و کروی
۲۷	۴-۱ قضیه‌های گاوس و استوکس
۳۵	۵-۱ معادله پیوستگی؛ پایداری بار
۳۹	مراجع
۳۹	مسائل
۴۴	۲ الکتروستاتیک
۴۵	۱-۲ قانون کولن
۵۰	۲-۲ میدان الکتریکی؛ قانون گاوس
۵۹	۳-۲ پتانسیل الکتروستاتیک؛ معادله پواسون
۶۴	۴-۲ دو قطبی الکتریکی
۶۹	۵-۲ قضیه مقدار میانگین
۷۲	مراجع

۷۲	مسائل	
۷۹	مسئله مقدار مرزی	۳
۸۰	قضیه یکتایی	۱-۳
۸۷	معادله لاپلاس در مختصات دکارتی	۲-۳
۹۳	معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای	۳-۳
۹۹	معادله لاپلاس در مختصات کروی	۴-۳
۱۰۸	بسط چندقطبی	۵-۳
۱۱۵	مراجع	
۱۱۵	مسائل	
۱۲۰	دی‌الکتریکها	۴
۱۲۰	قطبیدگی	۱-۴
۱۲۴	میدان جابه‌جایی الکتریکی	۲-۴
۱۲۷	مسئله مقدار مرزی در دی‌الکتریکها	۳-۴
۱۳۸	دی‌الکتریکها از دید میکروسکوپی	۴-۴
۱۴۱	میدان موضعی	۵-۴
۱۴۵	مسائل	
۱۵۰	انرژی الکتریکی	۵
۱۵۱	انرژی در میدان الکتریکی	۱-۵
۱۵۷	انرژی در دی‌الکتریکها	۲-۵
۱۶۳	انرژی جسم باردار در میدان خارجی	۳-۵
۱۶۴	خازنها	۴-۵
۱۶۹	مسائل	
۱۷۳	نظریه نسبیت خاص	۶
۱۷۴	فضا-زمان و نسبیت در فیزیک نیوتونی	۱-۶
۱۷۷	اصل نسبیت اینشتین	۲-۶
۱۸۴	بازه فضا-زمانی	۳-۶
۱۹۰	تبدیل لورنتس	۴-۶

۱۹۸	اتساع زمان	۵-۶
۲۰۷	انقباض طول	۶-۶
۲۱۰	مراجع	
۲۱۱	مسائل	
۲۲۰	حساب برداری در فضا-زمان	۷
۲۲۰	چار بردارها و تانسورها	۱-۷
۲۲۸	بردار انرژی-تکانه	۲-۷
۲۴۲	عملگرهای دیفرانسیلی در فضا- زمان	۳-۷
۲۴۵	چار بردار جریان	۴-۷
۲۴۸	مراجع	
۲۴۸	مسائل	
۲۵۶	الکترو دینامیک نسبیتی	۸
۲۵۶	چار بردار پتانسیل	۱-۸
۲۶۱	تانسور میدان و معادله حرکت	۲-۸
۲۷۰	معادلات ماکسول	۳-۸
۲۷۴	تانسور انرژی-تکانه	۴-۸
۲۸۲	مسائل	
۲۸۷	مغناطوستاتیک	۹
۲۸۷	میدان مغناطیسی بار نقطه‌ای	۱-۹
۲۹۰	جریانهای پایا؛ قانون اهم	۲-۹
۲۹۶	میدان مغناطیسی استاتیک؛ قانون آمپر و قانون بیو-ساوار	۳-۹
۳۰۳	پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی؛ دو قطبی مغناطیسی	۴-۹
۳۰۸	حرکت ذرات در میدانهای مغناطیسی	۵-۹
۳۱۴	نیروی مغناطیسی بر جریان	۶-۹
۳۱۷	تک قطبی مغناطیسی	۷-۹
۳۲۴	مراجع	
۳۲۵	مسائل	

۳۳۴	القای الکترومغناطیسی	۱۰
۳۳۴	قانون القای فاراده	۱-۱۰
۳۴۶	القاییدگی	۲-۱۰
۳۵۱	مدار LCR	۳-۱۰
۳۵۵	حرکت در میدان مغناطیسی با تغییرات کند	۴-۱۰
۳۶۰	جریان جابه‌جایی	۵-۱۰
۳۶۲	مسائل	
۳۷۲	دو قطبیه‌های مغناطیسی و مواد مغناطیسی	۱۱
۳۷۲	دوقطبی مغناطیسی در میدان خارجی	۱-۱۱
۳۸۰	مغناطش	۲-۱۱
۳۸۴	میدان H مغناطیسی	۳-۱۱
۳۸۸	پتانسیل مغناطیسی و مسئله مقدار مرزی	۴-۱۱
۳۹۴	انرژی در میدان مغناطیسی	۵-۱۱
۳۹۹	مسائل	
۴۰۴	امواج الکترومغناطیسی	۱۲
۴۰۴	امواج تخت در خلأ	۱-۱۲
۴۱۱	چاربردار موج؛ انتقال دوپلر و ابیراهی	۲-۱۲
۴۱۴	انرژی، تکانه، و تکانه زاویه‌ای در موج تخت	۳-۱۲
۴۲۰	امواج تخت در محیط نارسانا	۴-۱۲
۴۳۱	شکست	۵-۱۲
۴۳۹	بازتاب داخلی کلی	۶-۱۲
۴۴۱	امواج تخت در محیط رسانا	۷-۱۲
۴۴۷	رسیدن به تعادل در رسانای خوب	۸-۱۲
۴۴۹	مراجع	
۴۴۹	مسائل	
۴۵۹	تابش بارنقطه‌ای	۱۳
۴۶۰	پتانسیل تأخیری	۱-۱۳
۴۶۴	پتانسیل لینارد-ویشرت	۲-۱۳

۴۶۸	میدانهای تابش	۳-۱۳
۴۷۳	نقش تابش	۴-۱۳
۴۸۱	تابش در محیط دی الکتریک؛ اثر چرنکوف	۵-۱۳
۴۸۴	مسائل	
۴۸۹	تابش دستگاه بار	۱۴
۴۹۰	میدانهای تابش	۱-۱۴
۴۹۳	آنتن نیم موج	۲-۱۴
۴۹۷	بسط چندقطبی؛ تابش دوقطبی	۳-۱۴
۵۰۳	تابش دوقطبی مغناطیسی	۴-۱۴
۵۰۶	تابش چارقطبی الکتریکی	۵-۱۴
۵۱۲	مسائل	
۵۱۷	کاواکهای تشدید و موجبرها	۱۵
۵۱۷	مسئله ویژه مقداری برای کاواک	۱-۱۵
۵۲۱	کاواکهای استوانه‌ای	۲-۱۵
۵۲۳	کاواکهای مستطیلی	۳-۱۵
۵۲۸	اتلاف انرژی در کاواک	۴-۱۵
۵۲۹	موجبرها	۵-۱۵
۵۳۷	موجبرهای دی الکتریک	۶-۱۵
۵۴۱	مسائل	
۵۴۵	پراکندگی و پراش	۱۶
۵۴۶	پراکندگی تامسون	۱-۱۶
۵۵۱	دامنه پراکندگی پیشرو؛ قضیه اپتیکی	۲-۱۶
۵۵۳	انتگرال کیرشهوف	۳-۱۶
۵۶۱	پراش فرانوفر	۴-۱۶
۵۶۹	پراش فرنل	۵-۱۶
۵۷۹	مسائل	
۵۸۳	پیوست ۱ ثابتهای اساسی	

پیوست ۲ رابطه بین یکاهای SI و CGS

۵۸۷

حل مسائل زوج

۵۹۱

کتابشناسی

۶۰۷

شجره نامه نظریه الکترومغناطیس

۶۱۸

فهرست راهنما

۶۲۰

پیشگفتار

مقاله برجسته اینشتین با عنوان "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" عموماً اولین سنگ بنای نسبیت دانسته شده است. اما این مقاله را باید آخرین سنگ بنای الکترودینامیک نیز به حساب آورد (نگاه کنید به صفحات آخر کتاب). در این مقاله، اینشتین به وحدت کامل الکتریسیته و مغناطیس دست یافته است. او نشان داد که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی صرفاً نموده‌های متفاوت یک موجود زیربنایی واحد تانسور میدان چهار بعدی هستند. اینکه چه چیزی الکتریکی و چه چیز مغناطیسی است بستگی به دیدگاه ناظر دارد. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی تحت تبدیلات لورنتس کم و بیش به یکدیگر تبدیل می‌شوند. با اقتباس از گفته مشهور مینکوفسکی درباره وحدت نسبیتی فضا و زمان، می‌توان گفت که «از این پس، میدان الکتریکی تنها و میدان مغناطیسی تنها محکوم به حاشیه‌نشینی‌اند، و فقط نوعی وحدت این دو دارای واقعیت مستقل خواهد بود.» بدین ترتیب، اینشتین الکترودینامیک را به‌عنوان اولین نمونه نظریه وحدت مشخص کرد.

متأسفانه، سه ربع قرن پس از اینشتین، اکثر کتابهای درسی الکترودینامیک با میدانهای الکتریکی و مغناطیسی هنوز هم همچون پدیده‌های مستقل رفتار می‌کنند. البته، این میدانها از طریق معادلات ماکسول به هم مربوط می‌شوند؛ اما در فرمولبندی سه بعدی این معادلات، این ارتباط عمده‌تاً به‌عنوان یک برهم‌کنش صرف بین میدانها سوءتعبیر می‌شود. برای دریافت بینش عمیقتری از وحدت اساسی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، باید فرمولبندی چهار بعدی معادلات ماکسول را در نظر داشته باشیم. نخستین کتاب درسی که به الکترودینامیک از دیدگاه نسبیتی پرداخته است، به عقیده من، اصول الکترودینامیک تألیف ام‌شوارتز است. من این رهیافت را چندین سال در پلی تکنیک رنسلر برای دوره لیسانس تدریس کردم، و به تدریج مجموعه‌ای از یادداشتهای درسی برای دانشجویان تهیه کردم. این کتاب از آن یادداشتهای فراهم آمده است.

پنج فصل اول شامل مقدمات الکتریسیته به همان طریق رایج است: حساب برداری، میدان و پتانسیل الکتروستاتیک، مسائل مقدار مرزی، دی‌الکتریکها، و انرژی الکتریکی. فصلهای ۶ و ۷ یک

پیچ تند در این راه به طرف قلمرو نسبیتی اند. این دو فصل یک دید کلی از مبانی فیزیکی نسبیت خاص و صورتبندی تانسوری چهاربعدی به دست می‌دهند. ادامهٔ راه به قلب کتاب در فصل ۸ می‌رسد؛ در اینجا، خواهیم دید چگونه از ترکیب قانون کولن با قوانین نسبیت خاص صورت نسبیتی معادلات ماکسول حاصل می‌شود. از فصل ۹ تا ۱۶، این راه به کاربردهای معادلات ماکسول منسحب می‌شود: مغناطوستاتیک، القا، مواد مغناطیسی، امواج الکترومغناطیسی، تابش بار نقطه‌ای و دستگاه بار، کاواکها و موجبرها، پراکندگی و پراش.

در تمام فصلها، به شواهد تجربی که منشأ پیشرفت نظری بوده‌اند توجه دقیق کرده‌ام. مثلاً، فصلهای ۱ و ۲ شامل بحثی دربارهٔ شواهد پایستگی بار و قانون نیروی $1/r^2$ اند؛ و فصل ۶ شامل خلاصهٔ کاملی از شواهد مربوط به نسبیت خاص است. اما، به بحث دربارهٔ شواهد تجربی قانون نیروی مغناطیسی یا قانون القا نپرداخته‌ام، زیرا این قوانین صرفاً پیامدهای قوانین اثبات شدهٔ قبلی‌اند. منظور من کوچک شمردن دستاوردهای ژان باپتیست بیو، فلیکس ساوار، یا مایکل فاراده نیست. برعکس، همیشه از بیو و ساوار با احترام و شگفتی یاد کرده‌ام زیرا هیچگاه نتوانسته‌ام درک کنم چگونه کسی می‌تواند چیزی به پیچیدگی قانون آنها را از داده‌های تجربی پراکنده فراهم کند. به‌عنوان ستایش از کارهای حیرت‌انگیز چندین نسل از دانشمندی که صبورانه هرم بزرگ الکترومغناطیس را بنا کرده‌اند، شجره‌نامه‌ای فراهم کرده‌ام (صفحات آخر کتاب). این نمودار تنها خطوط عمدهٔ روابط بین کشفیات و کاشفان را نشان می‌دهد؛ بسیاری از بستگیهای جنبی با رعایت احتیاط حذف شده‌اند.

علاوه بر مسائل آخر هر فصل، این کتاب شامل تمرینهایی است که در همهٔ فصلها پراکنده‌اند. هدف از این تمرینها انجام جزئیات محاسبات، تعمیم بحثها، یا معرفی مطالب اضافی است. خواننده‌ای که مطالب هر فصل را دنبال می‌کند بهتر است گاهگاهی توقف کند و به یکی از این تمرینها بپردازد.

در این کتاب یکاهای CGS الکتروستاتیک را به‌کار برده‌ام. (جدولی از هم‌ارزی بین یکاهای SI و CGS، و جدولی برای تبدیل معادلات CGS به معادلات SI در پیوست آمده است.) دلیل ارجحیت دادن به این یکاها در یک متن نسبیتی کاملاً روشن است: چون میدانهای الکتریکی و مغناطیسی صرفاً نمودهای مختلف موجود زیربنایی واحدی هستند، باید با یکاهای یکسانی اندازه‌گیری شوند. البته، همین استدلال برای فضا و زمان هم صادق است. این دو را نیز باید با یکاهای یکسانی اندازه گرفت. در یکی از پیش‌نویسهای اولیه همین‌کار را کردم، اما در طرح نهایی کتاب ناچار شدم از سانتیمتر و ثانیه استفاده کنم. تعریف جدیدتر (۱۹۸۳) برحسب فاصلهٔ طی شده توسط نور در یک بازهٔ زمانی معین گام قابل ستایشی به‌سوی رفتار یکسان با یکاهای طول و زمان است. گام منطقی بعدی این خواهد بود که سرعت نور به‌عنوان ضریب تبدیل یکاهای طول و زمان در نظر گرفته شود. همان‌طور که ای اف تیلور و جی ای ویلر در کتاب *Spacetime Physics* پیشنهاد کرده‌اند. امیدوارم تا چند 10^{18} سانتی‌متر دیگر، سرانجام زمان سانتیمتر فرا رسیده باشد.



حساب برداری

حساب برداری با بردارها و مشتقات و انتگرالهای آنها سروکار دارد. این مبحث در مطالعه نظریه الکترومغناطیسی نقشی محوری دارد. معادله‌های مربوط به میدانهای الکتریکی و مغناطیسی (معادلات ماکسول) مؤلفه‌های این میدانها در راستاهای مختلف را به هم مربوط می‌کنند؛ این معادلات را می‌توان در نمادنگاری برداری به‌طور کاملاً فشرده‌ای بیان کرد. در واقع، بیشتر حساب برداری به‌خاطر ساده‌سازی معادله‌های نظریه الکترومغناطیس ابداع شده است. برای پی‌بردن به مزیت‌های نمادنگاری برداری تنها کافی است فرمولهای پیچیده کتاب قدیمی الکتریسیته و مغناطیس ماکسول را با فرمولهای بسیار ساده‌تر کتابهای درسی جدید مقایسه کرد.

این فصل اول اکثراً ریاضیات است. در اینجا یک نمادنگاری فشرده برای بردارها و تانسورها معرفی می‌شود و چند نتیجه ریاضی با ارزش به‌دست می‌آیند که در فصلهای بعدی کاربرد زیادی دارند. تنها در آخرین بخش این فصل به کاربردی از این فرمولهای ریاضی در یک مسئله فیزیکی می‌پردازیم.^۱

۱. خواننده‌ای که حوصله ریاضیات را ندارد می‌تواند از همین بخش آخر شروع کند و به بخشهای قبلی در صورت احتیاج مراجعه کند.

۱-۱ نرده‌ایها، بردارها و تانسورها

به زبان ساده بردار کمیتی است که بزرگی و راستا دارد، و به علاوه تحت عملیات جمع و ضرب در و تحت چرخش مانند بردار مکان رفتار می‌کند. بدین ترتیب، بردار مکان را باید به عنوان یک الگو برای تمام بردارها در نظر گرفت. در این بخش ابتدا تعریف دقیق بردار مکان را می‌گوییم و بعداً به تفصیل بیان می‌کنیم چگونه بردارهای دیگر «مانند بردار مکان رفتار می‌کنند».

نقاط فضا را با مختصات دکارتی x, y, z ، و z آنها نسبت به یک دستگاه مختصات قائم توصیف می‌کنیم (شکل ۱-۱). اکنون تعریف زیر را ارائه می‌کنیم.

تعریف: بردار مکان یک نقطه با مختصات معلوم x, y, z ، عبارت است از شیء سه مؤلفه‌ای

$$(x, y, z) \quad (1-1)$$

گاهی بردار مکان را به صورت زیر می‌نویسیم

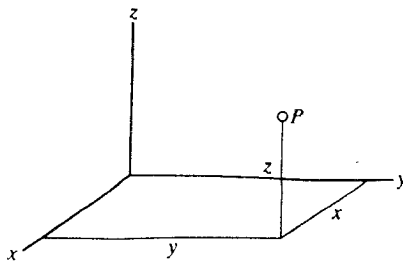
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2-1)$$

۱-۱ را بردار سطری و ۲-۱ را بردار ستونی می‌نامند. به جای (x, y, z) از نمادنگاری

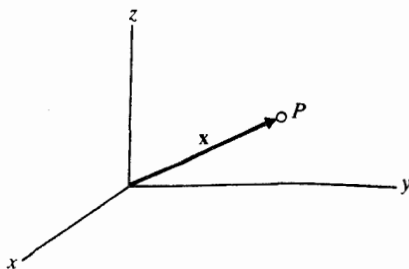
$$(x^1, x^2, x^3) \quad (3-1)$$

استفاده می‌کنیم و آن را معمولاً به صورت مختصر زیر می‌نویسیم

$$x^k \quad (4-1)$$



شکل ۱-۱ نقطه P با مختصات دکارتی x, y, z .



شکل ۲-۱ بردار مکان نقطه P .

که در آن شاخص k مقادیر ۱، ۲، و ۳ را می‌گیرد. به بیان دقیق، x^k مؤلفه k ام بردار است. اما به منظور اختصار غالباً از عبارت «بردار x^k » استفاده می‌کنیم؛ بدین قرار، x^k نشاندهنده مجموعه هر سه مؤلفه، یعنی تمامی بردار، است. نمادنگاری با شاخص بالا دارای این مزیت است که به آسانی به بردارهای چهاربعدی، که در مطالعه نسبت (فصل ۷) به آنها احتیاج داریم، تعمیم می‌یابد. عبارتهای ۱-۱ تا ۴-۱ نمادنگاری مؤلفه‌ای برای بردار مکان هستند. همچنین مناسب است از نمادنگاری انتزاعی (یا هندسی)

$$x \quad (5-1)$$

به جای ۱-۱ تا ۴-۱ استفاده کنیم. بردار x را می‌توان به‌طور نموداری به‌صورت یک پاره‌خط جهتدار نمایش داد (شکل ۲-۱).

جمع بردارها به‌صورت جمع مؤلفه‌های آنها تعریف می‌شود، مثلاً

$$(5, 3, 0) + (-1, 0, 2) = (4, 3, 2)$$

ضرب یک بردار در یک عدد به‌صورت ضرب آن عدد در هر مؤلفه تعریف می‌شود، به‌عنوان مثال

$$2(-1, 0, 2) = (-2, 0, 4)$$

بردارهای یکه در امتداد محورهای قائم به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$(1, 0, 0) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 0, 1) \quad (6-1)$$

در نمادنگاری انتزاعی این بردارهای یکه را به صورت زیر می نویسیم^۱

$$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \quad (7-1)$$

بردار اختیاری x را می توانیم به صورت برهم نهشی از بردارهای یکه بنویسیم:

$$x = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

یا

$$x = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (8-1)$$

حاصلضرب زده‌ای یا حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار x و x' عبارت است از

$$x \cdot x' = xx' + yy' + zz' \quad (9-1)$$

این تعریف معادل است با تعریف مقدماتی حاصلضرب زده‌ای به صورت حاصلضرب بزرگی بردارها و کسینوس زاویه بین آنها.

تمرین ۱- تحقیق کنید که از معادله ۹-۱ به دست می آوریم

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \quad \text{و} \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0$$

همچنین می توانیم معادله ۹-۱ را به صورت زیر بنویسیم

$$\sum_{k=1}^3 x^k x'^k \quad (10-1)$$

در اینجا قرارداد جمع اینشتین را معرفی می کنیم: اگر شاخص لاتین بردارها دوبار در یک حاصلضرب ظاهر شود روی این شاخص عمل جمع انجام می گیرد. بدین ترتیب

$$x^k x'^k \quad (11-1)$$

۱. باید توجه کرد که بردار یکه \hat{x} در راستای بردار مکان x نیست. بردار یکه در راستای بردار مکان x را با \hat{r} نشان می دهیم. در یک نمادنگاری دیگر که در کتابهای درسی مقدماتی متداول است، برای بردارهای یکه از \hat{i} ، \hat{j} و \hat{k} استفاده می شود. اما این در الکترومغناطیس مناسب نیست زیرا \hat{j} و \hat{k} را بترتیب برای نشان دادن چگالی جریان الکتریکی و بردار موج به کار می بریم.

همان ۱-۱۰ است. باید توجه کرد که k یک شاخص ظاهری است یعنی روی آن جمع زده می‌شود و هنگامی که جمع به صورت گسترده، مانند معادله ۱-۹، نوشته شود از بین می‌رود؛ بنابراین تفاوتی نمی‌کند که بنویسیم $x^k x'^k$ یا $x^n x'^n$ یا هر شاخص ظاهری دیگری. بزرگی بردار از

$$|\mathbf{x}| = (x^k x'^k)^{1/2} \quad (12-1)$$

به دست می‌آید.

حاصلضرب برداری دو بردار \mathbf{x} و \mathbf{x}' عبارت است از^۱

$$\mathbf{x} \times \mathbf{x}' = (yz' - zy')\hat{\mathbf{x}} + (zx' - xz')\hat{\mathbf{y}} + (xy' - yx')\hat{\mathbf{z}} \quad (13-1)$$

این تعریف معادل است با تعریف حاصلضرب برداری به صورت یک بردار که بزرگی آن برابر است با حاصلضرب بزرگی دو بردار و سینوس زاویه بین آنها و جهت آن از قاعده دست راست تعیین می‌شود. برای نوشتن معادله ۱-۱۳ در نمادنگاری مؤلفه‌ای، تانسور تناوب ε^{klm} را معرفی می‌کنیم؛ این تانسور یک ماتریس $3 \times 3 \times 3$ است که عنصرهای آن همگی صفرند بجز

$$\begin{aligned} \varepsilon^{123} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{312} &= 1 \\ \varepsilon^{213} = \varepsilon^{132} = \varepsilon^{321} &= -1 \end{aligned} \quad (14-1)$$

بدین ترتیب، مؤلفه‌های مخالف صفر ε^{klm} برابرند با $+1$ یا -1 ، بسته به اینکه klm با تعداد زوج یا فرد جایگشت شاخصهای مجاور از ۱۲۳ به دست آمده باشد. حاصلضرب برداری x^l و x'^m برحسب ε^{klm} به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\varepsilon^{klm} x^l x'^m \quad (15-1)$$

بنابه قرارداد جمع، معادله ۱-۱۵ شامل دو جمع (جداگانه) روی m و l است. صورت صریح معادله ۱-۱۵ عبارت است از

$$\varepsilon^{klm} x^l x'^m = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \varepsilon^{klm} x^l x'^m$$

۱. برای به خاطر سپردن عبارت طرف راست می‌توانیم از درمیان زیر استفاده کنیم

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

تمرین ۲- تحقیق کنید که مؤلفه‌های معادله ۱۵-۱ با مؤلفه‌های معادله ۱۳-۱ توافق دارند. ■

تمرین ۳- ثابت کنید حاصلضرب برداری از قانون پادجابه‌جایی تبعیت می‌کند:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{x}' = -\mathbf{x}' \times \mathbf{x} \quad (۱۶-۱)$$

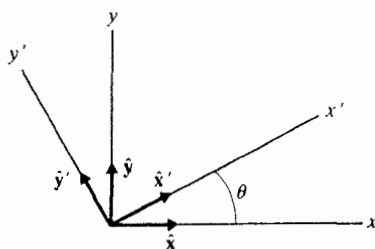
بردارهای یک‌ه \hat{x} ، \hat{y} و \hat{z} به یک مجموعه خاص از محورهای قائم تعلق دارند. هر مجموعه محورها بردارهای یک‌ه خاص خود را دارد. شکل ۳-۱ بردارهای یک‌ه متعلق به محورهای x ، y و x' را نشان می‌دهد که در آن مجموعه دوم محورها از چرخش مجموعه اول به اندازه زاویه θ در صفحه xy به دست آمده است. اگر مؤلفه‌های بردار \mathbf{x} نسبت به مجموعه اول محورها و x'^k مؤلفه‌های همین بردار نسبت به مجموعه دوم باشند^۱، این مؤلفه‌ها به صورت زیر به هم مربوط می‌شوند

$$\begin{aligned} x'^1 &= x^1 \cos \theta + x^2 \sin \theta \\ x'^2 &= -x^1 \sin \theta + x^2 \cos \theta \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \quad (۱۷-۱)$$

تمرین ۴- معادله ۱۷-۱ را به دست آورید

رابطه ۱۷-۱ مثالی است از یک تبدیل خطی، و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$x'^k = a^{kn} x^n \quad (۱۸-۱)$$



شکل ۳-۱ بردارهای یک‌ه \hat{x} ، \hat{y} و \hat{x}' ، \hat{y}' .

۱. باید توجه کرد که در اینجا از پریم برای متمایز کردن مؤلفه‌های یک بردار نسبت به مجموعه‌های مختلف محورها استفاده شده است، درحالی‌که در ۹-۱ تا ۱۶-۱ پریم برای متمایز کردن مؤلفه‌های دو بردار مختلف نسبت به یک مجموعه محورها به‌کار برده شده است.

که در آن a^{kn} یک ماتریس 3×3 با عناصر زیر است

$$\begin{aligned} a^{11} &= \cos \theta & a^{12} &= \sin \theta & a^{13} &= 0 \\ a^{21} &= -\sin \theta & a^{22} &= \cos \theta & a^{23} &= 0 \\ a^{31} &= 0 & a^{32} &= 0 & a^{33} &= 1 \end{aligned} \quad (19-1)$$

یا در نمادنگاری فشرده

$$a^{kn} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20-1)$$

در اینجا شاخص اول (k) به سطرهاى ماتریس و شاخص دوم (n) به ستونهای آن مربوط می شود.

■ تمرین ۵- بررسی کنید که معادله ۱۸-۱ با معادله ۱۷-۱ توافق دارد.

باید توجه کرد که طرف راست رابطه ۱۸-۱ معادل است با حاصلضرب بردار ستونی در ماتریس بنابر قاعده ضرب سطر در ستون:

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

ماتریس ۲۰-۱ یک مورد کاملاً ساده از چرخش محورها را توصیف می کند زیرا محور z ثابت مانده است. به طور کلی، برای توصیف چرخش از یک مجموعه محورها به دیگری به سه زاویه مستقل نیاز داریم. اما حتی در این مورد کلی رابطه بین مؤلفه های قدیم و جدید بردار مکان باز هم یک رابطه خطی است به صورت

$$x'^k = a^{kn} x^n \quad (21-1)$$

که در آن ضرایب a^{kn} توابعی از زاویه های بین محورها هستند. به آسانی می توان علت خطی بودن تبدیل مؤلفه های بردار مکان را فهمید: یک صفحه معین که از مبدأ می گذرد (دستگاه مختصات قائمی که برای توصیف آن به کار رفته است هر چه باشد) باید یک معادله خطی داشته باشد یعنی معادله ای به صورت $Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 = 0$.

تذکر چند نکته کلی درباره چرخش مفید است. فرض کنید دو چرخش متوالی روی محورهای مختصات انجام دهیم. اگر چرخش اول مؤلفه‌های یک بردار مکان معین را از x^n به

$$x'^k = a^{kn} x^n \quad (22-1)$$

و چرخش دوم مؤلفه‌ها را از x'^k به

$$x''^m = b^{mk} x'^k \quad (23-1)$$

تغییر دهد آنگاه از جاگذاری معادله دوم در معادله اول درمی‌یابیم که x^n و x''^m به صورت زیر به هم مربوط می‌شوند

$$x''^m = b^{mk} a^{kn} x^n \quad (24-1)$$

می‌توانیم رابطه اخیر را به صورت

$$x''^m = c^{mn} x^n \quad (25-1)$$

بنویسیم که در آن

$$c^{mn} = b^{mk} a^{kn} \quad (26-1)$$

قاعده ۲۶-۱ برای ترکیب دو ماتریس همان قاعده آشناى ضرب سطر در ستون است.

تمرین ۶- نشان دهید اگر a^{kn} با معادله ۲۰-۱ داده شده باشد و

$$b^{mk} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (27-1)$$

آنگاه از ضرب ماتریسی به دست می‌آوریم

$$c^{mn} = \begin{pmatrix} \cos(\phi + \theta) & \sin(\phi + \theta) & 0 \\ -\sin(\phi + \theta) & \cos(\phi + \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (28-1)$$

توضیح دهید چرا انتظار داریم مجموع زاویه‌های ϕ و θ در معادله ۲۸-۱ ظاهر شود. ■
 اگر زاویه ϕ در ۲۷-۱ برابر با $-\theta$ باشد، آنگاه

$$b^{mk} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (29-1)$$

و

$$c^{mn} = b^{mk} a^{kn} = \delta^{mn} \quad (30-1)$$

که در آن δ^{mn} دلتای کرونکر (یا ماتریس واحد) است:

$$\delta^{mn} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } m = n \\ 0 & \text{اگر } m \neq n \end{cases} \quad (31-1)$$

ماتریس b^{mk} در معادله ۲۹-۱ وارون ماتریس a^{kn} است؛ این دو ماتریس چرخشهای مخالف هم را نمایش می‌دهند و یکدیگر را خنثی می‌کنند، و بنا به معادله ۳۰-۱ حاصلضرب آنها برابر با ماتریس واحد است.

مقایسه معادله‌های ۲۹-۱ و ۲۰-۱ نشان می‌دهد که ماتریس b^{mk} ترانهاد ماتریس a^{kn} است، یعنی می‌توان ماتریس معادله ۲۹-۱ را با تعویض سطرها و ستونهای ماتریس معادله ۲۰-۱ به دست آورد. پس وارون ماتریس چرخش برابر است با ترانهاد این ماتریس. ماتریسی که این شرط را برآورده کند متعامد نامیده می‌شود. به طور کلی، هر ماتریس نمایشگر چرخش این شرط را برآورده می‌کند، همچنان‌که اکنون ثابت می‌کنیم.

قضیه: اگر a^{kn} ماتریس چرخش و $(a^T)^{mk}$ ماتریس ترانهاد باشد آنگاه حاصلضرب آنها برابر است با ماتریس واحد:

$$(a^T)^{mk} a^{kn} = \delta^{mn} \quad (32-1)$$

برای اثبات از این واقعیت استفاده می‌شود که اگرچه مؤلفه‌های بردار تحت چرخش مختصات تغییر می‌کنند، طول بردار ثابت می‌ماند:

$$x'^k x'^k = x^l x^l \quad (33-1)$$

رابطه بالا با توجه به معادله ۲۱-۱ چنین می شود

$$a^{km} x^m a^{kl} x^l = x^l x^l \quad (۳۴-۱)$$

در طرف راست معادله ۳۴-۱ از اتحاد

$$x^l = \delta^{ml} x^m \quad (۳۵-۱)$$

استفاده می کنیم و به دست می آوریم

$$a^{km} x^m a^{kl} x^l = \delta^{ml} x^m x^l \quad (۳۶-۱)$$

یا

$$x^l x^m (a^{km} a^{kl} - \delta^{ml}) = 0 \quad (۳۷-۱)$$

اما این رابطه نمی تواند به ازای تمام مقادیر ممکن x^m و x^l درست باشد مگر اینکه

$$a^{km} a^{kl} = \delta^{ml} \quad (۳۸-۱)$$

تمرین ۷- نشان دهید اگر معادله ۳۸-۱ درست نباشد می توانیم x^m و x^l ی پیدا کنیم که به ازای آنها معادله ۳۷-۱ درست نیست.

چون عنصر km هر ماتریس برابر است با عنصر mk ماتریس ترانهاد، می توان معادله ۳۸-۱ را به صورت زیر نوشت

$$(a^T)^{mk} a^{kl} = \delta^{ml} \quad (۳۹-۱)$$

که با معادله ۳۲-۱ توافق دارد.

می توانیم با استفاده از ماتریس وارون، x^m را بر حسب x'^k بیان کنیم. اگر

$$x'^k = a^{kn} x^n \quad (۴۰-۱)$$

را در a^{kn} ضرب کنیم و روی k جمع بزنیم، به دست می آوریم

$$a^{km} x'^k = a^{km} a^{kn} x^n \quad (۴۱-۱)$$

بنابه معادلهٔ ۱-۳۸، طرف راست معادلهٔ ۱-۴۱ برابر است با $x^m = \delta^{mn} x^n$. در نتیجه می‌توانیم x^m را به صورت زیر برحسب x'^k بنویسیم

$$x^m = a^{km} x'^k \quad (۴۲-۱)$$

معادلهٔ ۱-۴۰ تبدیل مؤلفه‌های قدیم بردار مکان را به مؤلفه‌های جدید بیان می‌کند؛ معادلهٔ ۱-۴۲ تبدیل وارون یعنی تبدیل مؤلفه‌های جدید به مؤلفه‌های قدیم را بیان می‌کند. اکنون آماده‌ایم تا تعریف کلی بردار را ارائه کنیم. برای بردار از نمادنگاری (B_x, B_y, B_z) یا (B^1, B^2, B^3) یا B^k یا \mathbf{B} استفاده می‌کنیم.

تعریف: بردار شیئی است با سه مؤلفه که تحت چرخش به صورت زیر تبدیل می‌شوند

$$B'^k = a^{kn} B^n \quad (۴۳-۱)$$

روشن است که ماتریس a^{kn} دقیقاً همان ماتریسی است که در معادلهٔ ۱-۲۱ آمده است. آنچه تعریف بالا می‌گوید این است که هر بردار باید تحت چرخش به همان صورتی تبدیل شود که بردار مکان تبدیل می‌شود. با این تعریف، فوراً می‌توان نشان داد که هرگاه A^k و B^k بردار باشند، آنگاه هر ترکیب خطی $\alpha A^k + \beta B^k$ (با ضرایب عددی اختیاری α و β) نیز بردار است. بدین ترتیب، این تعریف به بردارها دقیقاً همان خواصی را می‌دهد که ریاضیدانها در جبر خطی برای بردارها احتیاج دارند.

تمرین ۸- نشان دهید اگر A^k و B^k بردار باشند، $\alpha A^k + \beta B^k$ نیز بردار است. ■

تعریف یک نرده‌ای نیز به رفتار تحت چرخش بستگی دارد.

تعریف: نرده‌ای شیئی است یک مؤلفه‌ای که تحت چرخش بدون تغییر می‌ماند. بدیهی است که طول بردار و مجذور این طول نرده‌ای هستند (معادلهٔ ۱-۳۳). به‌طور کلی، می‌توانیم نشان دهیم اگر A^k و B^k بردار باشند، آنگاه حاصلضرب نقطه‌ای $A^k B^k$ الزاماً یک نرده‌ای است. آنچه باید ثابت کنیم این است که

$$A'^k B'^k = A^k B^k \quad (۴۴-۱)$$

طرف چپ این معادله را در نظر بگیرید. از قانون تبدیل ۱-۴۳ برای بردارها به دست می‌آوریم

$$A'^k B'^k = a^{km} A^m a^{kn} B^n = (a^T)^{mk} a^{kn} A^m B^n = \delta^{mn} A^m B^n = A^n B^n \quad (۴۵-۱)$$

آخرین عبارت با طرف راست ۱-۴۴ تطابق دارد.

در فیزیک با مثالهای بسیاری از نرده‌ایها و بردارها مواجه می‌شویم. جرم و زمان (در فیزیک غیر نسبیتی) نرده‌ای هستند زیرا هر چرخشی که روی محورهای مختصات انجام دهیم جرم یک ذره و زمان ثبت شده توسط یک ساعت تغییر نمی‌کنند. انرژی جنبشی یک نرده‌ای است زیرا تنها به جرم و به بزرگی سرعت بستگی دارد. سرعت یک بردار است چرا که حاصلضرب بردار dx و نرده‌ای $1/dt$ است. شتاب، تکانه و نیرو به دلایل مشابهی بردار هستند. سرانجام، تعریف تانسور را ارائه می‌کنیم. فرض کنید مجموعه‌ای از ۹ عدد داریم که در قالب یک ماتریس 3×3 درآورده شده باشند. برای این ماتریس از نمادنگاری T^{kl} استفاده می‌کنیم. تحت چه شرایطی این ماتریس یک تانسور است؟

تعریف: تانسور شیئی است با n مؤلفه که تحت چرخش به صورت زیر تبدیل می‌شوند

$$T'^{kl} = a^{kn} a^{lm} T^{nm} \quad (46-1)$$

این رابطه به سادگی بیان می‌کند که T^{kl} باید روی هر شاخص مانند بردار تبدیل شود (با ۱-۴۳ مقایسه کنید). توجه کنید که هر ماتریسی تانسور نیست. بستگی به این دارد که عناصر ماتریس از قانون تبدیل صحیح تحت چرخش پیروی می‌کنند یا نه.

تمرین ۹- نشان دهید اگر T^{kl} و Q^{kl} تانسور باشند، $\alpha T^{kl} + \beta Q^{kl}$ نیز تانسور است. ■

تمرین ۱۰- نشان دهید دلتای کرونکر تانسور است، یعنی نشان دهید

$$\delta'^{kl} = a^{kn} a^{lm} \delta^{nm} \quad (47-1)$$

تمرین ۱۱- نشان دهید ترانهاد هر تانسوری یک تانسور است. ■

روش ساده‌ای برای ساختن یک تانسور این است که از دو بردار A^k و B^l شروع کنیم؛ سپس مؤلفه kl تانسور را به صورت حاصلضرب مؤلفه k بردار اول در مؤلفه l بردار دوم تعریف کنیم. از این راه شیئی n مؤلفه‌ای زیر را به دست می‌آوریم

$$Q^{kl} = A^k B^l \quad (48-1)$$

با استفاده از قانون تبدیل بردارها، می‌توانیم واریسی کنیم که این شیء n مؤلفه‌ای قانون تبدیل تانسور را برآورده می‌کند:

$$Q'^{kl} = A'^k B'^l = a^{kn} A^n a^{lm} B^m = a^{kn} a^{lm} A^n B^m = a^{kn} a^{lm} Q^{nm} \quad (49-1)$$

مثالی از این نوع تانسور عبارت است از تانسور گشتاور لختی که در مکانیک به‌کار می‌رود. برای ذره‌ای به جرم m و مکان x^k ، این تانسور برابر است با

$$I^{kl} = m(-x^k x^l + \delta^{kl} x^n x^n) \quad (50-1)$$

توجه کنید که جملهٔ دوم پراتنز حاصلضرب تانسور δ^{kl} در زده‌ای $x^n x^n$ است. اگر T^{kl} تانسور و B^l بردار باشد، حاصلضرب $T^{kl} B^l$ یک بردار است. برای اثبات باید از قوانین تبدیل تانسور و بردار شروع کنیم و محاسبه‌ای کاملاً شبیه به آنچه در ۱-۴۵ آمده است انجام دهیم. این محاسبه را به‌عنوان تمرین انجام دهید.

■ تمرین ۱۲- نشان دهید اگر T^{kl} تانسور و B^l بردار باشد، آنگاه $T^{kl} B^l$ بردار است.

■ تمرین ۱۳- نشان دهید اگر T^{kl} و Q^{ln} تانسور باشند، آنگاه $T^{kl} Q^{ln}$ یک تانسور است.

■ تمرین ۱۴- نشان دهید اگر T^{kl} تانسور باشد، T^{ll} زده‌ای است. این زده‌ای را رد تانسور می‌نامند.

تانسور را متقارن می‌گوییم اگر

$$T^{kl} = T^{lk} \quad (51-1)$$

و آن را پادمقارن می‌گوییم اگر

$$T^{kl} = -T^{lk} \quad (52-1)$$

هر تانسور اختیاری را می‌توان به‌صورت جمع یک تانسور متقارن و یک تانسور پاد متقارن نوشت. این را از اتحاد بدیهی زیر می‌توان دید:

$$T^{kl} = \frac{1}{2}(T^{kl} + T^{lk}) + \frac{1}{2}(T^{kl} - T^{lk}) \quad (53-1)$$

روشن است که پراتنز اول یک تانسور متقارن و پراتنز دوم یک تانسور پاد متقارن است. تانسورهای 3×3 بی‌بی که تاکنون در نظر گرفته‌ایم تانسورهای رتبهٔ دوم نامیده می‌شوند. می‌توانیم به روش مشابهی تانسورهای با رتبهٔ بیشتر را تعریف کنیم. مثلاً تانسور رتبهٔ سوم یک شیء T^{klm} با $3 \times 3 \times 3$ مؤلفه است که تحت چرخش به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$T'klm = a^{kn} a^{lr} a^{ms} T^{nrs} \quad (54-1)$$

تانسور تناوب ε^{klm} که در ۱۴-۱ تعریف شده است یک تانسور رتبه سوم است.

تمرین ۱۵- نشان دهید اگر A^k ، B^l و C^m بردار باشند، آنگاه $A^k B^l C^m$ یک تانسور رتبه سوم است.

تمرین ۱۶- نشان دهید تانسور تناوب ε^{klm} یک تانسور رتبه سوم است، یعنی نشان دهید

$$\varepsilon'^{klm} = a^{kn} a^{lr} a^{ms} \varepsilon^{nrs} \quad (55-1)$$

که در آن $\varepsilon^{312} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{123} = 1$ و $\varepsilon^{213} = \varepsilon^{132} = \varepsilon^{321} = -1$ و بقیه مؤلفه‌های ε'^{klm} صفر هستند. [راهنمایی: با استفاده از ۱-۲۰ برای ماتریس چرخش، طرف راست ۵۵-۱ را به طور صریح محاسبه کنید].

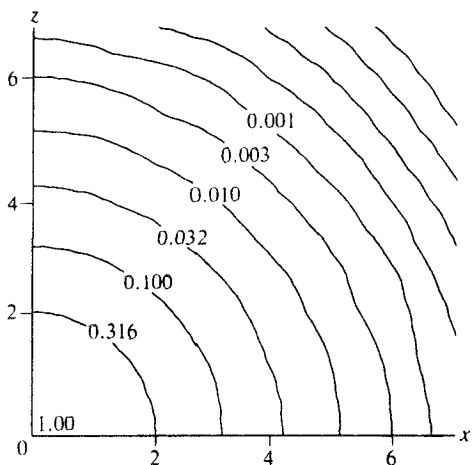
تمرین ۱۷- نشان دهید اگر A^l و B^m بردار باشند، آنگاه $\varepsilon^{klm} A^l B^m$ یک بردار است. در نتیجه، از ضرب خارجی بردارها واقعاً یک بردار به دست می‌آید.

۲-۱ میدانها و عملگرهای دیفرانسیلی

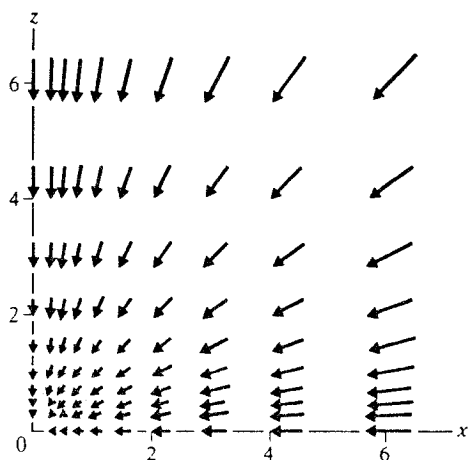
منظور از میدان تابعی است از بردار مکان x . میدانها می‌توانند نرده‌ای، بردار یا تانسور باشند. در فیزیک، از میدانها برای توصیف حالت دستگاههای پیوسته استفاده می‌کنیم. به‌عنوان مثال، گاز تشکیل‌دهنده یک ستاره را در نظر بگیرید. این گاز دارای چگالی (جرمی) ρ است که تابعی است از مکان، روشن است که چگالی در یک نقطه معین بستگی به نحوه انتخاب مختصات ندارد؛ در نتیجه چگالی یک نرده‌ای است و $\rho(x)$ یک میدان نرده‌ای است. اگر ستاره در تعادل استاتیکی نباشد، گاز در هر نقطه دارای سرعتی است مانند v که بستگی به مکان دارد؛ تابع $v(x)$ یک میدان برداری است. به‌طور نموداری، می‌توانیم میدان نرده‌ای $\rho(x)$ را با ترسیم سطوح $\rho(x) = \text{const}$ نمایش دهیم. برای مثال، شکل ۱-۴ سطوح چگالی ثابت را داخل یک ستاره در حال رمبش گرانشی در یک لحظه از زمان نشان می‌دهد. میدان برداری $v(x)$ را می‌توانیم با ترسیم بردار سرعت مرتبط به هر نقطه نمایش دهیم (شکل ۱-۵). گاهی می‌توان میدانهای برداری را با ترسیم خطوط میدان نمایش داد، اما این روش تنها برای میدانهای برداری بسیار خاصی مثل میدان سرعت یک شاره تراکم‌ناپذیر یا میدان الکتریکی عملی است؛ خطوط میدان را بعداً مورد بحث قرار می‌دهیم. با داشتن میدان نرده‌ای اختیاری $\Phi(x)$ می‌توانیم میدان برداری زیر را بسازیم

$$A^k = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad (56-1)$$

۱. خطوط میدان را تنها می‌توان برای میدانهای برداری رسم کرد که واگرایی آنها (معادله ۱-۶۷) صفر است.



شکل ۴-۱ پربندهای چگالی ثابت در صفحه xz برای یک ستاره تحت رمبش گرانشی. مقادیر چگالی نسبت به چگالی مرکزی سنجیده شده‌اند.



شکل ۵-۱ بردارهای سرعت برای یک ستاره رمبده.

یا در نمادنگاری فشرده

$$A^k = \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} \quad (57-1)$$

این میدان برداری را گرادیان Φ می‌نامند. برای اینکه نشان دهیم A^k یک میدان برداری است می‌نویسیم، بنا به قاعده مشتقات زنجیره‌ای

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'^k} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \quad (58-1)$$

اما بنا به معادله ۱-۴۲ داریم

$$x^l = a^{nl} x'^n \quad (59-1)$$

به طوری که

$$\frac{\partial x^l}{\partial x'^k} = a^{kl} \quad (60-1)$$

و در نتیجه

$$A'^k = \frac{\partial \Phi}{\partial x'^k} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^l} a^{kl} = a^{kl} A^l \quad (61-1)$$

این همان قانون تبدیل برای بردارهاست. آنچه در بالا نشان داده‌ایم این است که عملگر دیفرانسیلی $\partial/\partial x^k$ از قانون تبدیل بردار پیروی می‌کند (معادله ۱-۵۸):

$$\frac{\partial}{\partial x'^k} = a^{kl} \frac{\partial}{\partial x^l} \quad (62-1)$$

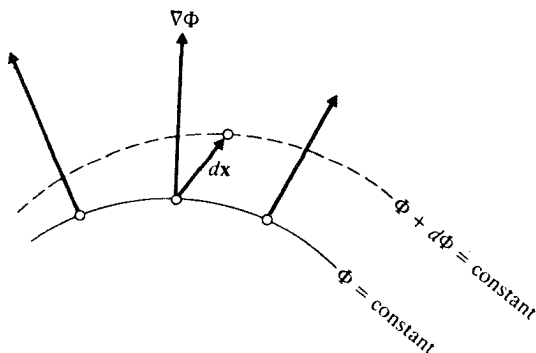
عملگر $\partial/\partial x^k$ را عملگر گرادیان یا عملگر del می‌نامیم. این عملگر را غالباً به صورت ∇ می‌نویسند:

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (63-1)$$

در نتیجه معادله ۱-۵۶ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathbf{A} = \nabla \Phi = \hat{x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (64-1)$$

می‌توانیم از گرادیان برای به دست آوردن تغییر جزئی تابع به علت تغییر جزئی جابه‌جایی استفاده کنیم. دو نقطه را در نظر بگیرید که به اندازه جابه‌جایی جزئی $dx = \hat{x} + \hat{y} dy + \hat{z} dz$ از هم جدا شده‌اند (شکل ۱-۶). تفاضل مقادیر تابع Φ در این دو نقطه برابر است با



شکل ۱-۶ با جابه‌جایی جزئی dx از سطح $\Phi = \text{const}$ به سطح $\Phi + d\Phi = \text{const}$ می‌رسیم. گرادیان Φ بر سطح $\Phi = \text{const}$ عمود است.

$$d\Phi = \Phi(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}) = dx \frac{\partial \Phi}{\partial x} + dy \frac{\partial \Phi}{\partial y} + dz \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (۶۵-۱)$$

رابطه بالا، با استفاده از فرمول ۱-۶۴ برای گرادیان، به صورت زیر درمی‌آید

$$d\Phi = d\mathbf{x} \cdot \nabla \Phi \quad (۶۶-۱)$$

بدین ترتیب، تغییر تابع در راستای $d\mathbf{x}$ برابر است با مؤلفه $\nabla \Phi$ در این راستا ضربدر $|d\mathbf{x}|$. از معادله ۱-۶۶ نتیجه می‌شود که راستای $\nabla \Phi$ بر سطح $\Phi = \text{const}$ عمود است. برای اثبات، کافی است جابه‌جایی $d\mathbf{x}$ را موازی با یکی از سطوح $\Phi = \text{const}$ بگیریم. آنگاه از معادله ۱-۶۶ داریم $d\Phi = 0$ که نشان می‌دهد این جابه‌جایی و $\nabla \Phi$ برهم عمودند. در شکل ۱-۶ راستای گرادیان در چند نقطه از سطح $\Phi = \text{const}$ نشان داده شده است. چون $\partial/\partial x^k$ مانند بردار رفتار می‌کند، از حاصلضرب نرده‌ای $\partial/\partial x^k$ و یک میدان برداری B^k میدان نرده‌ای زیر را به دست می‌آوریم^۱

$$\frac{\partial B^k}{\partial x^k} \quad (۶۷-۱)$$

این میدان نرده‌ای را واگرایی میدان برداری B^k می‌نامند. به جای ۱-۶۷ غالباً از نمادنگاری $\nabla \cdot \mathbf{B}$

۱. می‌توانستیم حاصلضرب نرده‌ای را با ترتیب معکوس یعنی $B^k \partial/\partial x^k$ به دست آوریم. اما این یک عملگر دیفرانسیلی است. مثالی از این عملگر در معادله ۱-۶۶ آمده است.

استفاده می‌شود. صورت گستردهٔ واگرایی عبارت است از

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z \quad (۶۸-۱)$$

علاوه بر این، می‌توانیم $\partial/\partial x^l$ را در B^m ضرب برداری کنیم و به دست آوریم

$$\varepsilon^{klm} \frac{\partial}{\partial x^l} B^m \quad (۶۹-۱)$$

این حاصلضرب برداری را تاو میدان برداری B^k می‌نامند. به جای نمادنگاری مؤلفه‌ای ۶۹-۱ غالباً از نمادنگاری $\nabla \times \mathbf{B}$ استفاده می‌کنند. صورت گستردهٔ تاو چنین است

$$\nabla \times \mathbf{B} = \hat{x} \left(\frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial}{\partial z} B_x - \frac{\partial}{\partial x} B_z \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial}{\partial x} B_y - \frac{\partial}{\partial y} B_x \right) \quad (۷۰-۱)$$

تمرین ۱۸- نشان دهید اگر B^m گرادیان میدان زده‌ای Φ باشد، تاو آن متحد با صفر است:

$$\varepsilon^{klm} \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial \Phi}{\partial x^m} = 0 \quad (۷۱-۱)$$

یا

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0$$

تمرین ۱۹- نشان دهید برای هر بردار B^m واگرایی تاو متحد با صفر است:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \varepsilon^{klm} \frac{\partial}{\partial x^l} B^m = 0$$

یا

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 \quad (۷۲-۱)$$

دیدیم که اگر $\Phi(\mathbf{x})$ زده‌ای باشد، آنگاه $\partial\Phi/\partial x^k$ یک بردار است. با واگرایی گرفتن از این بردار، زده‌ای زیر را به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \Phi \right) \quad (۷۳-۱)$$

عملگر دیفرانسیلی $\partial^2 / \partial x^k \partial x^k$ ، که می‌توانیم آن را با $\nabla \cdot \nabla$ یا ∇^2 نیز نشان دهیم، لاپلاسی نامیده می‌شود. به‌طور صریح، داریم

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (74-1)$$

این عملگر دیفرانسیلی نقش مهمی در نظریهٔ پتانسیل دارد (فصل ۴). در ۷۳-۱ عملگر لاپلاسی روی یک نرده‌ای عمل می‌کند و نتیجه یک نرده‌ای است. اما می‌توانیم این عملگر را روی یک بردار نیز اعمال کنیم؛ در اینجا نتیجه یک بردار است:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^k} A^i \quad (75-1)$$

یا در نمادنگاری برداری

$$\nabla^2 \mathbf{A} \quad (76-1)$$

به‌صورت گسترده، داریم

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \hat{x} \nabla^2 A_x + \hat{y} \nabla^2 A_y + \hat{z} \nabla^2 A_z \quad (77-1)$$

در یکی از فصلهای بعد، مواردی پیش می‌آید که از اتحاد زیر استفاده کنیم

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (78-1)$$

این اتحاد از اتحاد برداری زیر، با جاگذاری $\mathbf{C} = \nabla$ و $\mathbf{B} = \nabla$ ، به‌دست می‌آید

$$\mathbf{C} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = \mathbf{BC} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{BA} \quad (79-1)$$

چون مؤلفه‌های ∇ در حاصلضرب نرده‌ای و در حاصلضرب برداری به‌گونهٔ مؤلفه‌های برداری معمولی ظاهر می‌شوند (معادله‌های ۶۸-۱ و ۷۰-۱) اتحاد ۷۹-۱ با جاگذاری بالا معتبر می‌ماند. توجه کنید که \mathbf{A} را مخصوصاً در طرف راست جمله‌های معادلهٔ ۷۹-۱ نوشته‌ایم؛ اهمیت این کار در این است که وقتی به‌جای \mathbf{B} و \mathbf{C} عملگر می‌گذاریم، هر دو باید روی \mathbf{A} عمل کنند.

۳-۱ مختصات استوانه‌ای و کروی

معادلهٔ ۶۳-۱ عملگر گرادینان ∇ را در مختصات قائم بیان می‌کند. برای کارهای بعدی، به بیان ∇ در مختصات استوانه‌ای و کروی نیاز داریم. شکل ۷-۱ مختصات استوانه‌ای ρ ، ϕ و z مربوط به یک نقطه و بردارهای یکه $\hat{\rho}$ ، $\hat{\phi}$ و \hat{z} را نشان می‌دهد. این بردارها دویسه‌دو برهم عمودند، و جهت آنها به ترتیب در جهت افزایش ρ ، ϕ و z است. باید توجه کرد که $\hat{\phi}$ و $\hat{\rho}$ هر دو به مکان بستگی دارند.

رابطهٔ بین مختصات استوانه‌ای و دکارتی و بردارهای یکه به صورت زیر است

$$x = \rho \cos \phi \quad y = \rho \sin \phi \quad z = z \quad (۸۰-۱)$$

$$\hat{\rho} = \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi \quad \hat{\phi} = -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi \quad \hat{z} = \hat{z} \quad (۸۱-۱)$$

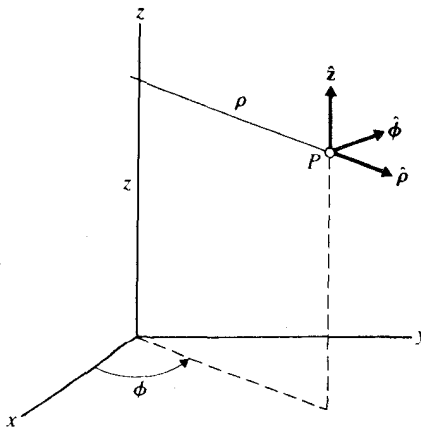
تمرین ۲۰- نشان دهید

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi} = \hat{\phi} \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} = -\hat{\rho} \quad (۸۲-۱)$$

سایر مشتقات بردارهای یکه صفر هستند.

یک بردار اختیاری \mathbf{A} را می‌توان به صورت برهم نهشی از بردارهای یکه نوشت

$$\mathbf{A} = \hat{\rho} A_\rho + \hat{\phi} A_\phi + \hat{z} A_z \quad (۸۳-۱)$$



شکل ۷-۱ مختصات استوانه‌ای و بردارهای یکه $\hat{\rho}$ ، $\hat{\phi}$ و \hat{z} .

که در آن A_ρ ، A_ϕ و A_z مؤلفه‌های استوانه‌ای بردار هستند. این مؤلفه‌ها را می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم

$$A_\rho = \hat{\rho} \cdot \mathbf{A} \quad A_\phi = \hat{\phi} \cdot \mathbf{A} \quad A_z = \hat{z} \cdot \mathbf{A}$$

صورت عملگر گرادین در مختصات استوانه‌ای چنین است

$$\nabla = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (۸۴-۱)$$

این را می‌توان با استفاده از قاعده مشتقات جزئی زنجیره‌ای برای بیان $\partial/\partial\rho$ و $\partial/\partial\phi$ برحسب $\partial/\partial x$ ، $\partial/\partial y$ و $\partial/\partial z$ با استفاده از معادله ۸۱-۱ برای بیان $\hat{\rho}$ و $\hat{\phi}$ برحسب \hat{x} و \hat{y} ، تحقیق کرد.

تمرین ۲۱- محاسبات لازم برای رسیدن به ۸۴-۱ را انجام دهید. ■

روش زیباتری برای به دست آوردن معادله ۸۴-۱ به صورت زیر است. اگر $f(\mathbf{x})$ یک تابع اختیاری باشد، آنگاه تغییر تابع به علت جابه‌جایی $d\mathbf{x} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$ برابر است با

$$df = d\mathbf{x} \cdot \nabla f \quad (۸۵-۱)$$

این عبارت در مختصات استوانه‌ای نیز معتبر است اما روشن است که باید $d\mathbf{x}$ و ∇f را در این مختصات بیان کرد. چون در مختصات استوانه‌ای

$$d\mathbf{x} = \hat{\rho} d\rho + \hat{\phi} \rho d\phi + \hat{z} dz \quad (۸۶-۱)$$

به دست می‌آوریم

$$df = d\rho \hat{\rho} \cdot \nabla f + \rho d\phi \hat{\phi} \cdot \nabla f + dz \hat{z} \cdot \nabla f \quad (۸۷-۱)$$

از مقایسه این رابطه با

$$df = d\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \rho d\phi \frac{\partial f}{\partial \phi} + dz \frac{\partial f}{\partial z} \quad (۸۸-۱)$$

می‌بینیم که مؤلفه‌های ∇ باید به صورت زیر باشند

$$\hat{\rho} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial \rho} \quad \hat{\phi} \cdot \nabla = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad \hat{z} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial z} \quad (۸۹-۱)$$

و در نتیجه

$$\nabla = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (۹۰-۱)$$

واگرایی یک بردار در مختصات استوانه‌ای عبارت است از

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{\rho} A_\rho + \hat{\phi} A_\phi + \hat{z} A_z) \quad (۹۱-۱)$$

در انجام عملیات در طرف راست، باید به خاطر داشته باشیم که از بردارهای یک‌ه در پراوتر دوم مشتق گرفته می‌شود. برای مثال

$$\left(\hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \cdot (\hat{\rho} A_\rho) = \hat{\phi} \cdot \hat{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} A_\rho \hat{\phi} \cdot \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi} \quad (۹۲-۱)$$

در جمله اول طرف راست، داریم $\hat{\phi} \cdot \hat{\rho} = 0$ ؛ اما در جمله دوم

$$\hat{\phi} \cdot \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi} = \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} = 1 \quad (۹۳-۱)$$

و در نتیجه عبارت ۹۲-۱ به $(1/\rho)A_\rho$ منجر می‌شود. با محاسبه تمام مشتقها در معادله ۹۱-۱، سرانجام به دست می‌آوریم

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} A_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (۹۴-۱)$$

■ تمرین ۲۲- عملیاتی را که منجر به معادله ۹۴-۱ می‌شود انجام دهید.

تمرین ۲۳- نشان دهید معادله ۹۴-۱ را می‌توان به صورت زیرهم نوشت

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (۹۵-۱)$$

■ توجه کنید که حاصلضرب نرده‌ای بردارهای \mathbf{A} و \mathbf{B} در مختصات استوانه‌ای عبارت است از

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = B_\rho A_\rho + B_\phi A_\phi + B_z A_z \quad (۹۶-۱)$$

در مقایسه با این عبارت، حاصلضرب نزده‌ای ۱-۹۴ مربوط به عملگر برداری ∇ و بردار \mathbf{A} دارای جمله اضافی $(1/\rho)A_\rho$ است. اینگونه جمله‌های اضافی از مشخصات مختصات خمیده خط هستند؛ همچنانکه در مورد معادله ۱-۹۲ دیدیم، جمله اضافی از مشتگیری بردارهای یک‌ه ناشی می‌شود. بردارهای یک‌ه تنها در مختصات قائم ثابت هستند و حاصلضربهای شامل عملگرهای برداری به حاصلضربهای معمولی شباهت دارند (معادله ۱-۶۸).

عملگر لاپلاسی را می‌توان با محاسبه مستقیم از ۱-۹۰ به دست آورد:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

باز هم باید توجه داشته باشیم که در عملیات در طرف راست از بردارهای یک‌ه مشتق بگیریم. نتیجه نهایی عبارت است از

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (۹۷-۱)$$

■ تمرین ۲۴- عملیاتی را که منجر به معادله ۱-۹۷ می‌شود انجام دهید.

تمرین ۲۵- نشان دهید معادله ۱-۹۷ را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (۹۸-۱)$$

■ اکنون باید به مختصات کروی بپردازیم. شکل ۱-۸ مختصات کروی r ، θ و ϕ و بردارهای یک‌ه \hat{r} ، $\hat{\theta}$ و $\hat{\phi}$ را نشان می‌دهد. این بردارها دوه‌دو برهم عمودند و جهت آنها به ترتیب در جهت افزایش r ، θ و ϕ است. تمام این بردارها به مکان بستگی دارند. رابطه بین مختصات کروی و دکارتی و بردارهای یک‌ه به صورت زیر است

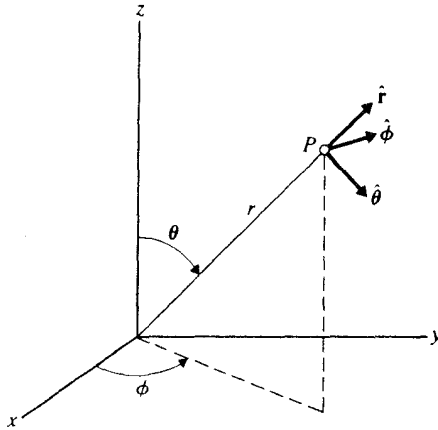
$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta \quad (۹۹-۱)$$

و

$$\hat{r} = \hat{x} \sin \theta \cos \phi + \hat{y} \sin \theta \sin \phi + \hat{z} \cos \theta$$

$$\hat{\theta} = \hat{x} \cos \theta \cos \phi + \hat{y} \cos \theta \sin \phi - \hat{z} \sin \theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi \quad (۱۰۰-۱)$$



شکل ۸-۱ مختصات کروی و بردارهای یکه \hat{r} ، $\hat{\theta}$ و $\hat{\phi}$.

تمرین ۲۶- نشان دهید

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} &= \hat{\theta} & \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} &= \hat{\phi} \sin \theta \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} &= -\hat{r} & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} &= \hat{\phi} \cos \theta \\ \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} &= -\hat{r} \sin \theta - \hat{\theta} \cos \theta \end{aligned} \quad (۱۰۱-۱)$$

سایر مشتقات صفر هستند.

یک بردار اختیاری را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi} \quad (۱۰۲-۱)$$

که در آن A_r ، A_θ و A_ϕ به ترتیب مؤلفه‌های بردار در راستای \hat{r} ، $\hat{\theta}$ و $\hat{\phi}$ هستند. عملگر گرادیان در مختصات کروی عبارت است از

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (۱۰۳-۱)$$

واگرایی یک بردار عبارت است از

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (104-1)$$

عملگر لاپلاسی عبارت است از

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (105-1)$$

تمرین ۲۷- معادله‌های ۱۰۳-۱، ۱۰۴-۱ و ۱۰۵-۱ را به همان روشی که در مورد استوانه‌ای به کار رفت، به دست آورید.

تمرین ۲۸- نشان دهید عملگر لاپلاسی را می‌توان به صورت زیر هم نوشت

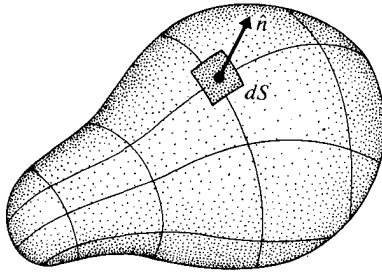
$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (106-1)$$

تذکر: اتحاد ۷۸-۱ در مختصات استوانه‌ای و کروی معتبر نیست. اشکال در این است که اگر چه اتحاد برداری ۷۹-۱ در این مختصات معتبر است اما نمی‌توانیم آن را با جاگذاریهایی ساده $\mathbf{C} = \nabla$ و $\mathbf{B} = \nabla$ به یک اتحاد عملگری تبدیل کنیم زیرا همچنان که در بحث بعد از معادله ۹۴-۱ دیدیم حاصلضربهای شامل عملگرهای برداری در مختصات خمیده خط دارای جمله‌های اضافی هستند.

در جدول عملگرهای دیفرانسیلی آخر کتاب عبارتهای مربوط به گرادیان، لاپلاسی، واگرایی و تاو در مختصات قائم، استوانه‌ای و کروی آورده شده‌اند (عبارتهای مربوط به تاو را می‌توان با استدلالی مشابه با آنچه برای واگرایی به کار می‌رود به دست آورد؛ مسائل ۲۴-۱ و ۲۵-۱ را ببینید).

۴-۱ قضیه‌های گاوس و استوکس

واگرایی یک میدان برداری در قضیه مهمی به نام قضیه گاوس صدق می‌کند. شکل ۹-۱ یک سطح بسته را نشان می‌دهد؛ در بحث زیر از نماد \hat{n} برای بردار یکه عمود بر این سطح که جهت آن به طرف خارج است استفاده می‌کنیم. فرض کنید \mathbf{A} یک میدان برداری است که در تمام حجم احاطه شده توسط این سطح تعریف شده است. اکنون می‌توانیم قضیه را به صورت زیر بیان کنیم.



شکل ۹-۱ یک سطح بسته اختیاری. بردار بکه \hat{n} به طرف خارج بر این سطح عمود است.

قضیه گاوس: اگر S یک سطح بسته و V حجم احاطه شده توسط S باشد، آنگاه

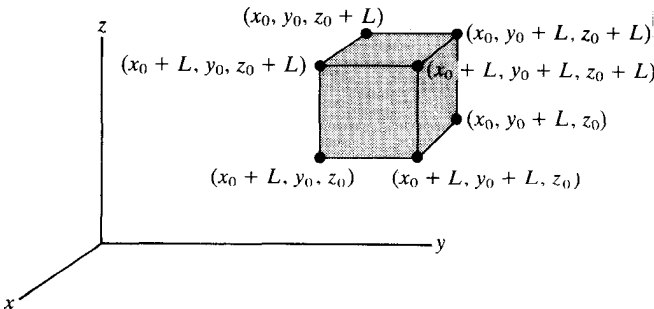
$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (۱۰۷-۱)$$

که در آن

$$d\mathbf{S} = \hat{n} dS$$

توجه کنید که بردار $d\mathbf{S}$ مربوط به عنصر سطحی است و بزرگی آن برابر با dS و جهت آن به طرف خارج است.

این قضیه را می‌توانیم ابتدا با انتخاب حجمی به شکل مکعب اثبات کنیم؛ هر حجم دیگری را می‌توان متشکل از مکعبهای کوچک در نظر گرفت. فرض کنید این مکعب ناحیه $x = x_0$ تا $x = x_0 + L$ ، $y = y_0$ تا $y = y_0 + L$ و $z = z_0$ تا $z = z_0 + L$ را اشغال کرده باشد (شکل ۱۰-۱). انتگرال



شکل ۱۰-۱ یک سطح بسته به شکل مکعب.

حجمی $\int \nabla \cdot \mathbf{A}$ چنین می‌شود

$$\begin{aligned} & \iiint \left(\frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z \right) dx dy dz \\ &= \iint \left(\int \frac{\partial A_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \iint \left(\int \frac{\partial A_y}{\partial y} dy \right) dx dz \\ & \quad + \iint \left(\int \frac{\partial A_z}{\partial z} dz \right) dx dy \\ &= \iint (A_x|_{x=x_0+L} - A_x|_{x=x_0}) dy dz \\ & \quad + \iint (A_y|_{y=y_0+L} - A_y|_{y=y_0}) dx dz \\ & \quad + \iint (A_z|_{z=z_0+L} - A_z|_{z=z_0}) dx dy \end{aligned} \quad (108-1)$$

از طرف دیگر، اگر انتگرال سطحی $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ را روی دو وجه مکعب در $x = x_0 + L$ و $x = x_0$ محاسبه کنیم به دست می‌آوریم

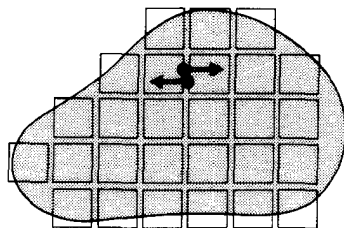
$$\iint A_x|_{x=x_0+L} dy dz - \iint A_x|_{x=x_0} dy dz \quad (109-1)$$

که در آن علامت منفی ناشی از این است که در $x = x_0$ جهت $d\mathbf{S}$ مخالف جهت \hat{x} است. عبارت ۱۰۹-۱ با انتگرال اول در طرف راست ۱۰۸-۱ یکی است. دو انتگرال باقیمانده در ۱۰۸-۱ با آنچه از انتگرال سطحی روی وجوه باقیمانده مکعب به دست می‌آید برابر هستند.

تمرین ۲۹- جمله‌های باقیمانده را واریسی کنید.

بدین ترتیب، قضیه گاوس برای مکعب ثابت می‌شود. اگر یک حجم اختیاری را با چندین مکعب مجاور تقریب بگیریم (شکل ۱۱-۱)، مجموع انتگرالهای $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ روی سطح تمام این مکعبها تنها از وجوهی سهم می‌گیرد که به طرف خارج واقع شده‌اند؛ سهمهای ناشی از وجوه داخلی مجاور دوه‌دو یکدیگر را خنثی می‌کنند چرا که بردارهای بیکه در دو جهت مخالف هستند (شکل ۱۱-۱). بنابراین، جمع روی تمام مکعبها به نتیجه نهایی ۱۰۷-۱ منتهی می‌شود.^۱ اگر میدان برداری دارای واگرایی صفر باشد، قضیه گاوس بیان می‌کند که برای هر سطح بسته

۱. عمود بر وجه مکعب به عمود بر سطح خمیده نمی‌گراید؛ حتی در حد مکعبهای بینهایت کوچک، عمودهای مربوط به وجوه مکعب تنها می‌توانند در جهت سه راستای متعامد باشند. اما این اهمیتی ندارد زیرا اگر مکعبها را به اندازه کافی کوچک بگیریم این عمودها به‌طور میانگین برهم منطبق می‌شوند.



شکل ۱۱-۱ یک حجم اختیاری با مجموعه‌ای از مکعبهای کوچک تقریب گرفته شده است. بردارهای یکهٔ وجوه مجاور در جهت مخالف هم هستند.

اختیاری داریم

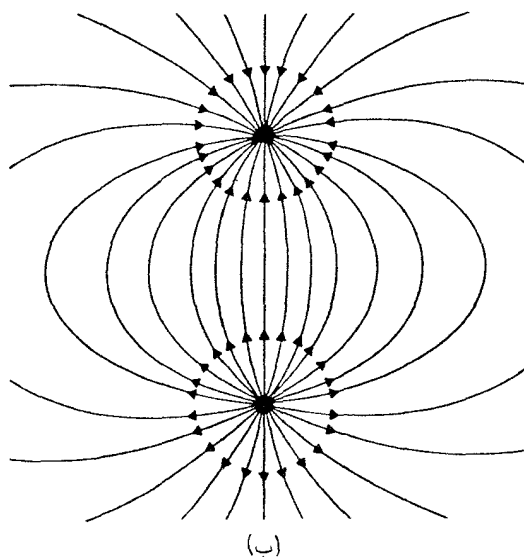
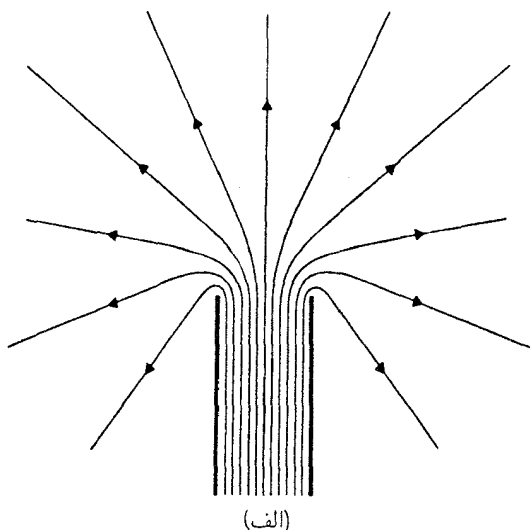
$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (11-1)$$

هر میدان برداری که این شرط را برآورده کند می‌تواند به‌طور نموداری با خطوط میدان نمایش داده شود به‌طوری‌که راستای این خطها در هر نقطه راستای بردار را تعیین می‌کند و چگالی خطوط — یا تعداد خطهایی که از سطح واحد عمود بر آنها می‌گذرند — بزرگی بردار را به‌دست می‌دهد. البته، این نمایش نموداری همیشه در یک نقطه در هر میدان برداری امکانپذیر است اما نمی‌توان خطوط میدان را به‌طور پیوسته در تمام فضا امتداد داد مگر اینکه تعداد خطوط وارد شده به هر حجم معینی با تعداد خطوط خارج شده از این حجم برابر باشد، یعنی شار خطوط صفر باشد. معادلهٔ ۱۱-۱ این شرط صفر بودن شار را بیان می‌کند. پس یک میدان برداری را می‌توان با خطوط میدان نمایش داد هر گاه واگرایی آن صفر باشد. شکل ۱۲-۱ دو مورد از اینگونه میدانهای برداری را که با خطوط نمایش داده شده‌اند نشان می‌دهد.

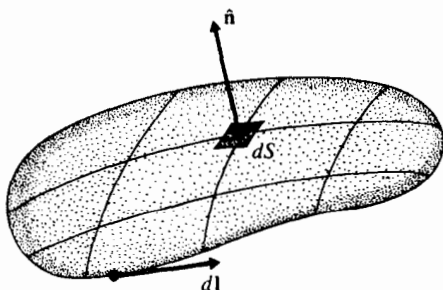
تاو یک میدان برداری نیز در یک قضیهٔ مهم به‌نام قضیهٔ استوکس صدق می‌کند. شکل ۱۳-۱ یک سطح باز را نشان می‌دهد؛ در اینجا نیز \hat{n} بردار یکهٔ عمود بر سطح است، و dl یک جابه‌جایی جزئی در امتداد مرز سطح است. توجه کنید که جهت dl بنا به قاعدهٔ دست راست به جهت \hat{n} مربوط می‌شود (شکل ۱۳-۱)؛ اگر \hat{n} به طرف خارج صفحهٔ کتاب باشد جابه‌جایی dl پاد ساعتگرد است). اکنون می‌توانیم قضیهٔ زیر را اثبات کنیم.

قضیهٔ استوکس: فرض کنید S یک سطح باز و C مرز آن باشد. آنگاه

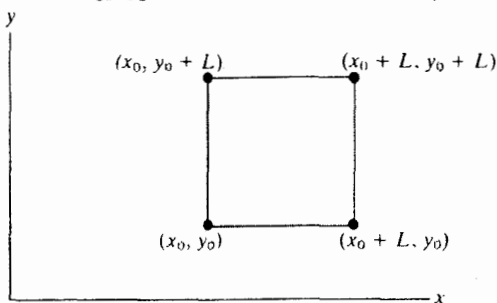
$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (111-1)$$



شکل ۱-۱۲ (الف) خطوط شارش نمایشگر سرعت یک شارۀ تراکم ناپذیر که از لوله‌ای که در یک مخزن بزرگ فرو برده شده است خارج می‌شود. در این نمودار خطوط شارش برای یک دستگاه دویعدی محاسبه شده‌اند. (ب) خطوط شارش نمایشگر سرعت یک شارۀ تراکم ناپذیر که از یک چشمه نقطه‌ای به یک چاهک نقطه‌ای جریان دارد. واگرایی این میدان سرعت همه جا صفر است مگر در نقاط چشمه و چاهک.



شکل ۱۳-۱ یک سطح باز اختیاری. بردار بیکه بر این سطح عمود است. انگشت شست دست راست در امتداد \$\hat{n}\$ قرار می‌گیرد هرگاه چهار انگشت دیگر در امتداد \$dl\$ قرار گیرند.

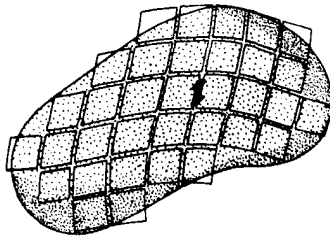


شکل ۱۴-۱ یک سطح مربع.

ابتدا قضیه را در مورد یک مربع واقع در صفحه \$x - y\$ اثبات می‌کنیم. اگر این مربع ناحیه \$x = x_0 + L\$ تا \$x = x_0\$ و \$y = y_0 + L\$ تا \$y = y_0\$ را در بر گرفته باشد (شکل ۱۴-۱)، آنگاه

$$\begin{aligned}
 \int \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \iint \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{z} \, dx \, dy \\
 &= \iint \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right) dx \, dy \\
 &= \int \left(A_y \Big|_{x=x_0+L} - A_y \Big|_{x=x_0} \right) dy \\
 &\quad - \int \left(A_x \Big|_{y=y_0+L} - A_x \Big|_{y=y_0} \right) dx \qquad (112-1)
 \end{aligned}$$

اما این برابر است با \$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\$ روی چهار ضلع مربع؛ بنابراین، معادله ۱۱۱-۱ برقرار است. برای تعمیم نتیجه بالا، ملاحظه می‌کنیم که این نتیجه مستقل از سمتگیری مربع است زیرا در مورد یک مربع معین همیشه می‌توانیم محورهای \$x\$ و \$y\$ را طوری انتخاب کنیم که در امتداد اضلاع مربع قرار گیرند و معادله ۱۱۱-۱ را به روشی که گفتیم اثبات کنیم. یک سطح تخت با



شکل ۱۵-۱ یک سطح اختیاری با مربعهای کوچک تقریب گرفته شده است. در اضلاع مجاور بردارهای dl مخالف هم هستند.

شکل اختیاری را می‌توان با تعداد زیادی مربعهای کوچک مجاور تقریب گرفت. در جمع انتگرالهای $\int A \cdot dS$ روی اضلاع تمام این مربعها، سهمهای مربوط به اضلاع مجاور یکدیگر را خنثی می‌کنند زیرا اضلاع مجاور دارای جابه‌جایی dl مخالف هستند (شکل ۱۵-۱). بنابراین، معادله ۱۱۱-۱ برای این سطح تخت اختیاری برقرار است. سطحی که تخت نباشد را می‌توان با سطوح تخت چند ضلعی تقریب گرفت؛ در نتیجه معادله ۱۱۱-۱ به‌طور کلی برقرار است. میدان برداری $A(x)$ را پایستار می‌گوییم اگر انتگرال مسیر A روی هر مسیر بسته اختیاری برابر با صفر باشد:

$$\int_C A \cdot dl = 0 \quad (113-1)$$

این‌گونه میدان برداری را می‌توان به‌صورت گرادینان یک تابع نرده‌ای یا تابع پتانسیل نوشت:

$$A(x) = \nabla \Phi(x) \quad (114-1)$$

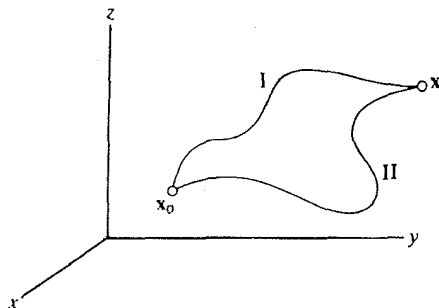
برای اثبات وجود این نرده‌ای، تابع نرده‌ای را با فرمول زیر می‌سازیم

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^x A \cdot dl \quad (115-1)$$

که در آن x_0 یک نقطه مرجع است و انتگرال در امتداد هر مسیری از x_0 به x گرفته می‌شود. با استفاده از قاعده مشتقگیری از انتگرال مستقیماً به معادله ۱۱۴-۱ می‌رسیم.

تمرین ۳۰- با $dl = \hat{x}dx' + \hat{y}dy' + \hat{z}dz'$ ، معادله ۱۱۵-۱ چنین می‌شود

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^x A_x dx' + \int_{y_0}^y A_y dy' + \int_{z_0}^z A_z dz'$$

شکل ۱-۱۶ دو مسیر مجزا از نقطه x_0 به x .

■ نشان دهید گرادیان این تابع برابر است با $\mathbf{A}(x)$.

باید توجه کرد که اساس روش بالا استقلال انتگرال ۱-۱۱۵ از مسیر است. اگر این انتگرال هر گونه وابستگی به شکل مسیر از x_0 به x داشته باشد، آنگاه Φ تابع این مسیر است و نه تابع نقاط انتهایی. این استقلال از معادله ۱-۱۱۳ نتیجه می‌شود. دو مسیر مجزا را از x_0 به x در نظر بگیرید (شکل ۱-۱۶). داریم

$$\int_I \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{II} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1-116)$$

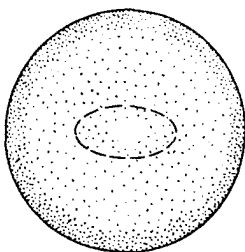
یا

$$\int_I \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{II} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{II} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-117)$$

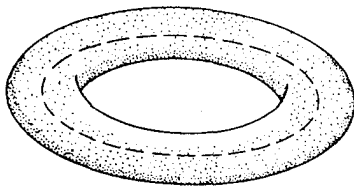
در نتیجه انتگرالهای مربوط به دو مسیر با هم برابرند. بدین ترتیب، ثابت کرده‌ایم که هر بردار پایداری گرادیان یک زده‌ای است (و بر عکس، گرادیان هر زده‌ای یک بردار پایستار است). قضیه استوکس در اثبات قضیه بعدی به‌کار می‌رود. بنابه این قضیه اگر یک میدان برداری در یک ناحیه (که به‌طور مناسب محدود باشد) تاو صفر داشته باشد، این میدان برداری در این ناحیه پایستار است، و در نتیجه می‌توان آن را به‌صورت گرادیان یک تابع زده‌ای بیان کرد.

قضیه: فرض کنید تاو میدان برداری \mathbf{A} در ناحیه همبند ساده V برابر با صفر باشد. آنگاه، میدان برداری در این ناحیه پایستار است، و یک تابع زده‌ای Φ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mathbf{A}(x) = \nabla\Phi(x)$$



(الف)



(ب)

شکل ۱-۱۷ (الف) درون کره یک ناحیه همبند ساده است. هر مسیر بسته‌ای را می‌توان در حالی که داخل ناحیه باقی می‌ماند به یک نقطه تبدیل کرد. (ب) درون چنبره یک ناحیه همبند چندگانه است. مسیر نشان داده شده را نمی‌توان بدون خارج شدن از ناحیه به یک نقطه تبدیل کرد.

اگر در یک ناحیه از فضا هر منحنی بسته‌ای قابل تبدیل به یک نقطه باشد این ناحیه را همبند ساده می‌گوییم. درون یک کره، بیرون یک کره و یک پوسته کروی مثالهایی از ناحیه همبند ساده هستند. درون یک چنبره، بیرون یک چنبره و بیرون یک استوانه بینهایت دراز مثالهایی از ناحیه‌های همبند چندگانه هستند (شکل ۱-۱۷).

برای اثبات قضیه، مسیر بسته C را در ناحیه V در نظر می‌گیریم. چون V همبند ساده است، می‌توانیم یک سطح S در درون V انتخاب کنیم که C مرز آن باشد. بنابه قضیه استوکس، انتگرال روی A این مسیر عبارت است از

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

چون $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ ، در نتیجه

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

بقیه اثبات همان است که در معادله‌های ۱-۱۱۴ تا ۱-۱۱۷ به‌کار رفته است.

۵-۱ معادله پیوستگی؛ پایستگی بار

ماده معمولی از الکترون، پروتون و نوترون ساخته شده است. فقط دو ذره اول حامل بار الکتریکی هستند، الکترون بار الکتریکی منفی و پروتون بار الکتریکی مثبت دارد. در بحث زیر، تنها الکترونها مورد توجه ما هستند زیرا جریانهای الکتریکی معمولاً از حرکت الکترونها ایجاد می‌شوند؛ اما به‌آسانی می‌توانیم بحث را به پروتونها تعمیم دهیم.

الکترونیهای آزاد (رسانش) در یک فلز، الکترونیهای موجود در یک پلاسما یا در یک باریکه الکترونی که از تفنگ الکترونی ایجاد شده را در نظر بگیرید. به جای اینکه این الکترونها را ذرات منفرد با مکانها و سرعتهای منفرد فرض کنیم، آنها را به صورت یک شاره که در هر نقطه از فضا دارای چگالی و سرعت وابسته به زمان است در نظر می‌گیریم. چگالی این شاره، یا تعداد الکترونها در واحد حجم، یک تابع $n(t, \mathbf{x})$ از زمان و مکان است. همچنین، سرعت شارش این شاره تابعی است مانند $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$. در نتیجه، چگالی بار الکتریکی عبارت است از چگالی تعداد الکترونها ضربدر بار هر الکترون. این چگالی بار را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\rho(t, \mathbf{x}) = -en(t, \mathbf{x}) \quad (118-1)$$

که در آن e قدر مطلق بار الکترون است. مقدار e در دستگاه یکاهای CGS الکتروستاتیک برابر است با

$$e = 4.8 \times 10^{-10} \text{ esu} \quad (119-1)$$

و در دستگاه یکاهای SI برابر است با

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (120-1)$$

تعریف واحد بار را در فصل ۲ بیان می‌کنیم. چگالی جریان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \rho(t, \mathbf{x})\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = -en(t, \mathbf{x})\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad (121-1)$$

چگالی جریان تعیین‌کننده آهنگ شارش چگالی الکتریکی از واحد سطح است. برای مثال، j_x یعنی مؤلفه x چگالی جریان نشان می‌دهد که چه مقدار بار از واحد سطح عمود بر محور x در واحد زمان می‌گذرد. در دستگاه CGS الکتروستاتیک، واحد شدت جریان عبارت است از ایستا آمپر:

$$1 \text{ statA} = 1 \text{ esu/s}$$

و واحد چگالی جریان ایستا آمپر بر سانتی‌متر مربع است. مدرک تجربی محکمی وجود دارد که بار الکتریکی پایسته است. بنابراین، بار الکتریکی در یک حجم معین تنها در صورتی می‌تواند تغییر کند که بار از مرز این حجم عبور کند؛ بار نه ایجاد

می‌شود و نه از بین می‌رود. درباره این دلیل تجربی بعداً بحث خواهیم کرد و فعلاً پایستگی بار را به‌عنوان فرض می‌پذیریم. در نتیجه می‌توانیم ثابت کنیم که ρ و \mathbf{j} باید در رابطه زیر صدق کنند

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (122-1)$$

برای اثبات، ابتدا قضیه گاوس را در مورد یک حجم کوچک V به‌کار می‌بریم (شکل ۱-۹):

$$\int \nabla \cdot \mathbf{j} dV = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (123-1)$$

اما

$$\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = dS \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j} = dS \times (\text{مؤلفه چگالی جریان در راستای عمود بر } dS) \\ = (\text{مقدار باری که از سطح } dS \text{ در واحد زمان خارج می‌شود}) \quad (124-1)$$

در نتیجه

$$\int \nabla \cdot \mathbf{j} dV = (\text{آهنگ خروج بار از } V) \quad (125-1)$$

کم شدن بار از حجم V را می‌توان به‌صورت زیر هم بیان کرد

$$-\frac{d}{dt} \int \rho dV = - \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (126-1)$$

بنابه پایستگی بار، این آهنگ کم‌شدن باید با آهنگ خروج بار از حجم V تطبیق کند:

$$\int \nabla \cdot \mathbf{j} dV = - \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (127-1)$$

اگر حجم کوچک باشد، جمله‌های زیرانتگرال را می‌توان تقریباً ثابت گرفت. در نتیجه

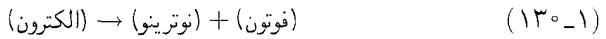
$$\nabla \cdot \mathbf{j} \Delta x \Delta y \Delta z = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (128-1)$$

یا

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (129-1)$$

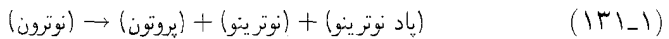
رابطه ۱-۱۲۹ را معادله پیوستگی می‌نامند؛ این معادله صورت دیفرانسیلی قانون پایستگی بار است.

دقیقترین مدرک تجربی به نفع پایستگی بار از بررسی پایداری الکترون به دست می‌آید. چرا الکترون پایدار است؟ جواب این است که پایستگی بار مانع واپاشی الکترون است [۱]. یک ذره تنها می‌تواند به ذراتی با جرم کمتر واپاشیده شود؛ ذراتی که جرم آنها از جرم الکترون کمتر است تنها نوترینوها، فوتونها و گراویتونها^۱ هستند؛ چون این ذرات همگی خنثی هستند، واپاشی الکترون به آنها الزاماً با نابودی یک بار الکترونی همراه است. بدین ترتیب، می‌بینیم که پایستگی بار پایداری الکترون را ایجاب می‌کند. اما می‌توانیم این استدلال را معکوس کنیم: پایداری الکترون پایستگی بار را ایجاب می‌کند. دلیل این است که واکنشی مانند



تنها به علت پایستگی بار ممنوع است. این واکنش هیچ قانون پایستگی دیگری را نقض نمی‌کند و اگر پایستگی بار می‌توانست نقض شود انجام می‌شد.

امکان واپاشی الکترون با جستجو برای گسیل خودبه‌خودی پرتوهای X توسط اتمها، بررسی شده است. اگر یک الکترون در لایه^۲ درونی اتم ناگهان نابود شود، یکی از الکترونهای بیرونی باید به «حفره» حاصل از این نابودی جهش کند؛ و در طی این جهش باید یک پرتو X گسیل شود. در آزمایشهای دقیق باید و ژرمانیم [۲]، هیچ پرتوی مشاهده نشده است؛ و نتیجه گرفته شده است که طول عمر الکترون مسلماً بیشتر از 2×10^{22} سال است. این بدان معنی است که بار الکترون، به‌طور متوسط، با آهنگی نابود می‌شود که از 10^{-31} esu در سال برای هر الکترون بیشتر نیست. استدلال مشابهی را می‌توان در مورد واپاشی نوترون انجام داد. واپاشی عادی نوترون—به پروتون، الکترون و نوترینو—از پایستگی بار پیروی می‌کند. اما می‌توانیم امکان یک واپاشی غیرعادی را در نظر بگیریم مانند



که تنها به علت پایستگی بار ممنوع است. بنابراین، عدم تحقق این واکنش مدرکی است برای پایستگی بار. حدود دقیق آهنگ این واکنش در آزمایشهایی با ایزوتوپهای روبیدیم و گالیم [۳] به دست آورده شده‌اند. برای مثال، اگر نوترونها هسته^۳ روبیدیم می‌توانستند بنا به واکنش ۱-۱۳۱ واپاشند، آنگاه روبیدیم باید با گسیل نوترینو تبدیل به استرونتیم می‌شد. در مشاهداتی که روی یک نمونه^۴ روبیدیم انجام شده است، چنین تبدیلی دیده نشده است؛ و ثابت شده است که طول عمر نوترون نسبت به واکنش ۱-۱۳۱ بیشتر از 3×10^{18} سال است.

۱. گراویتون کوانتوم گرانی است همچنانکه فوتون کوانتوم نور است.

با این مدرک، می‌توانیم کاملاً مطمئن باشیم که بار ذرات باردار ناگهان ناپدید نمی‌شود. اما، ممکن است نگران نقض پایستگی بار به یک نحو دیگر باشیم: آیا «ثابت» e ، که نشاندهنده واحد بنیادی بار در فیزیک اتمی است، می‌تواند با گذشت زمان تغییر کند؟ گاموف [۴] به دنبال نظراتی که قبلاً توسط دیراک درباره تغییر «ثابت‌های» بنیادی مطرح شده بود اظهار داشت که e^2 ممکن است متناسب با عمر جهان باشد. می‌توانیم با مطالعه دقیق فراوانی و آهنگ واپاشی ایزوتوپهای پرتوزا مانند U^{238} ، K^{40} و Re^{187} که در سنگهای زمینی یافت می‌شوند مدرکی علیه فرضیه بالا به دست آوریم [۵]. آهنگ واپاشی این ایزوتوپها به مقدار e حساس است، و می‌توان یک حد بالا به اندازه 10^{-23} esu در سال برای آهنگ تغییر e تعیین کرد [۵]. با این حد بسیار ناچیز، از این پس فرض می‌کنیم بار دقیقاً پایسته است.^۱

مراجع

1. G. Feinberg and M. Goldhaber, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **45**, 1201 (1959).
2. R. I. Steinberg et al., *Phys. Rev. D* **12**, 2582 (1975); E. Belotti et al., *Phys. Lett. B* **124**, 435 (1983).
3. S. C. Vaidya et al., *Phys. Rev. D* **27**, 486 (1983); I. R. Barabanov et al., *JETP Lett.* **32**, 359 (1980).
4. G. Gamow, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 759 (1967).
5. F. J. Dyson, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1291 (1967); R. Gold, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 219 (1968).

مسائل

۱-۱ نشان دهید اگر \mathbf{A} و \mathbf{B} دو بردار اختیاری باشند، آنگاه

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \phi$$

و $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \phi$ که در آنها ϕ زاویه بین دو بردار است. [راهنمایی: محورهای مختصات را طوری بگیرید که \mathbf{A} روی محور x و \mathbf{B} در صفحه xy واقع شود.]

۱-۲ بردار یکه‌ای به دست آورید که بر $\hat{x} + \hat{y} + 3\hat{z}$ و $\hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}$ عمود باشد.

۱-۳ زاویه بین قطر یک مکعب و یکی از یالهایی که از آن می‌گذرد را به روش برداری به دست آورید.

۱. شایان تذکر است که چون e در معادلات فیزیک اتمی به عنوان یک پارامتر تعیین‌کننده شدت نیروی الکتریکی وارد می‌شود، هر تغییری در e می‌تواند به عنوان تغییر ثابت دی‌الکتریک خلا تغییر شود که همان اثر را روی شدت نیرو دارد. اگر مدرکی برای تغییر e وجود داشت، چنین تغییری به ما امکان می‌داد که هیچ‌گونه تعارضی با پایستگی بار یا معادلات ماکسول نداشته باشیم.

۱-۴ بردار بیکه‌ای به دست آورید که راستای آن زاویه بین $\hat{z} - 2\hat{y} + \hat{x}$ و $\hat{z} - 4\hat{x} - 3\hat{y}$ را نصف کند.

۱-۵ نشان دهید $(\mathbf{x} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = 0$ معادله صفحه‌ای است شامل نقطه \mathbf{A} و عمود بر \mathbf{B} .

۱-۶ اگر $\mathbf{A} = \hat{x} - \hat{y} + 3\hat{z}$ و $\mathbf{B} = \hat{x} - 2\hat{y} - 2\hat{z}$ ، مؤلفه \mathbf{B} عمود بر راستای \mathbf{A} در صفحه \mathbf{A} و \mathbf{B} را به دست آورید.

۱-۷ اگر \mathbf{A} یک بردار اختیاری و \hat{n} یک بردار بیکه باشد، نشان دهید این رابطه \mathbf{A} را به صورت مجموع یک بردار موازی با \hat{n} و یا بردار عمود بر \hat{n} بیان می‌کند.

۱-۸ با استفاده از ۱-۸، $\hat{\rho} \times \hat{z}$ و $\hat{\phi} \times \hat{z}$ را محاسبه کنید.

۱-۹ با استفاده از ۱-۱۰، $\hat{r} \times \hat{\theta}$ و $\hat{\theta} \times \hat{\phi}$ را محاسبه کنید.

۱-۱۰ نشان دهید معادله‌های زیر برای بردارهای اختیاری \mathbf{A} ، \mathbf{B} و \mathbf{C} برقرارند

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \quad (\text{ب})$$

۱-۱۱ نشان دهید اگر \mathbf{A} ، \mathbf{B} و \mathbf{C} سه بردار اختیاری باشند، آنگاه

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \epsilon^{klm} A^k B^l C^m = \begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ C^1 & C^2 & C^3 \end{vmatrix}$$

و نشان دهید این حاصلضرب دوگانه حجم یک متوازی‌السطوح است که یالهای آن \mathbf{A} ، \mathbf{B} و \mathbf{C} هستند.

۱-۱۲ ثابت کنید $\epsilon^{klm} Q^{k1} Q^{l2} Q^{m3}$ دترمینان ماتریس Q^{kl} است.

۱-۱۳ فرض کنید شیء سه مؤلفه‌ای $(4, 1, -2)$ وقتی مختصات به اندازه 45° حول محور z بچرخد به $(0, 1, -2)$ تبدیل شود. آیا این شیء یک بردار است؟

۱-۱۴ فرض کنید محورهای xyz را به اندازه ϕ حول محور z بچرخانیم و محورهای جدید $x'y'z'$ را به دست آوریم. سپس محورهای $x''y''z''$ را به اندازه θ حول محور x' بچرخانیم و محورهای جدید $x''y''z''$ را به دست آوریم. ماتریس نمایش چرخش از محورهای xyz به محورهای $x''y''z''$ و ابرون آن را به دست آورید.

۱۵-۱ نشان دهید اگر T^{kl} و Q^{lm} تانسور باشند، آنگاه $T^{kl}Q^{lm}$ تانسور است.

۱۶-۱ یک بردار که در نقطه $(0, -1, 2)$ تعریف شده است در مختصات قائم دارای مؤلفه‌های $(3, -1, -2)$ است. مؤلفه‌های این بردار را در مختصات استوانه‌ای و همچنین در مختصات کروی به دست آورید. چرا باید نقطه‌ای که بردار در آن تعریف شده است را مشخص کنیم.

۱۷-۱ الف) \hat{x} و \hat{y} را برحسب بردارهای یک‌تایی استوانه‌ای $\hat{\rho}$ و $\hat{\phi}$ بیان کنید. ب) \hat{x} ، \hat{y} و \hat{z} را برحسب بردارهای یک‌تایی کروی \hat{r} ، $\hat{\theta}$ و $\hat{\phi}$ بیان کنید.

۱۸-۱ درستی معادلات زیر را نشان دهید

$$\nabla \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (\text{ب})$$

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x}|} = 0 \quad (\text{ج})$$

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{x} = \mathbf{B} \quad (\text{د})$$

۱۹-۱ اتحادهای زیر را ثابت کنید:

$$\nabla(\Phi\Psi) = \Phi\nabla\Psi + \Psi\nabla\Phi \quad (\text{الف})$$

$$\nabla \cdot (\Phi\mathbf{A}) = \Phi\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla\Phi \quad (\text{ب})$$

$$\nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = \Phi\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla\Phi \quad (\text{ج})$$

۲۰-۱ اتحادهای زیر را ثابت کنید:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (\text{الف})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (\text{ب})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{ج})$$

۲۱-۱ اگر $\Phi(\mathbf{x}) = (z^2 - x^2 - y^2)/(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}$ و $\nabla^2\Phi$ را محاسبه کنید.

۲۲-۱ فرض کنید $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = r^n \mathbf{x}$ که در آن $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. الف) نشان دهید

$\nabla \times \mathbf{A} = 0$ ، و میدان نرده‌ای Φ را طوری به دست آورید که $\mathbf{A} = \nabla\Phi$. ب) به ازای چه مقداری از n داریم $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ؟

۲۳-۱ الف) اگر $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 4xy\hat{x} + 2x^2\hat{y} + 3xz^2\hat{z}$ ، میدان نرده‌ای $\Phi(\mathbf{x})$ را طوری به دست

آورید که $\mathbf{A} = \nabla\Phi$. ب) اگر $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 4xy\hat{x} + 3x^2\hat{y} + 3xz^2\hat{z}$ ، نشان دهید هیچ میدان نرده‌ای وجود ندارد که \mathbf{A} گرادیان آن باشد.

۲۴-۱ نشان دهید مؤلفه‌های $\nabla \times \mathbf{A}$ در مختصات استوانه‌ای عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{A})_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\(\nabla \times \mathbf{A})_\phi &= \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\(\nabla \times \mathbf{A})_z &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]\end{aligned}$$

۲۵-۱ نشان دهید مؤلفه‌های $\nabla \times \mathbf{A}$ در مختصات کروی عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\(\nabla \times \mathbf{A})_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \\(\nabla \times \mathbf{A})_\phi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]\end{aligned}$$

۲۶-۱ ثابت کنید اگر S یک سطح بسته باشد به‌ازای هر میدان برداری \mathbf{A} داریم

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

۲۷-۱ ثابت کنید اگر S سطح بسته‌ای باشد که حجم V را احاطه می‌کند، به‌ازای هر میدان نرده‌ای Φ داریم

$$\int_V \nabla \Phi \, dV = \int_S \Phi \, d\mathbf{S}$$

۲۸-۱ نشان دهید اگر S یک سطح باز و C مرز آن باشد، آنگاه به‌ازای هر میدان نرده‌ای Φ

$$-\int_S \nabla \Phi \times d\mathbf{S} = \oint_C \Phi \, d\mathbf{l}$$

۲۹-۱ ثابت کنید به‌ازای هر حجمی که مبدأ را دربرگیرد

$$\int \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x}|} \, dV = -4\pi$$

که نشان می‌دهد $-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 (1/|\mathbf{x}|)$ یک تابع دلتا است. [راهنمایی: چون $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ ، جمله زیر انتگرال یک واگرایی است. حجم انتگرال‌گیری را به کره کوچکی به مرکز مبدأ تبدیل کنید، و قضیه گاوس را به کار ببرید.]

۱-۳۰ نشان دهید اگر S یک سطح بسته و V حجم درون آن باشد به ازای هر میدان برداری \mathbf{A} داریم

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A} \, dV = - \int_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$$

۱-۳۱ شارش یک شاره تراکم‌ناپذیر حول استوانه‌ای به شعاع R به ازای $\rho^2 = x^2 + y^2 > R^2$ توسط میدان سرعت

$$v_x = v_0 \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2} \right) + 2v_0 \frac{y^2 R^2}{\rho^4} \quad v_y = -2v_0 \frac{xy R^2}{\rho^4} \quad v_z = 0$$

توصیف می‌شود. نشان دهید $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. معنی فیزیکی این نتیجه چیست؟

۱-۳۲ فرض کنید چگالی جریان الکتریکی در یک ناحیه پراز پلاسما برابر باشد با $\mathbf{j} = C(xr\hat{\mathbf{x}} + yr\hat{\mathbf{y}})$ که در آن C یک ثابت است. آهنگ تغییر بار الکتریکی در ناحیه کروی محدود به $r = R$ را به دست آورید.

الکتروستاتیک

الکترونها، پروتونها و بعضی از ذرات دیگر (ذرات «باردار») یک نیروی دوربرد به یکدیگر وارد می‌کنند. این نیرو مانند گرانش با مجذور فاصله بین ذرات نسبت عکس دارد؛ اما بسته به اینکه چه ذراتی درگیر باشند جاذبه یا دافعه است. از این گذشته، این نیرو بسیار بزرگتر از گرانش است. در مورد یک الکترون و یک پروتون تقریباً $10^{39} \times 2$ مرتبه بزرگتر است. این نیرو را نیروی الکتریکی می‌نامند، و ذرات اعمال‌کننده این نیروها را حامل بار الکتریکی می‌گویند. بنابه تعریف، بار الکتریکی الکترون را منفی می‌گیریم و بار الکتریکی هر ذره دیگری بسته به اینکه الکترونها را جذب یا دفع کند مثبت یا منفی است. نیروهای الکتریکی ماکروسکوپی، مثلاً نیروی الکتریکی بین دو صفحه یک خازن، نتیجه برهم‌نهمش نیروهای الکتریکی جاذبه و دافعه تعداد زیادی الکترون و پروتون است.

در این فصل، توصیف نیرو برحسب میدان و پتانسیل الکتریکی را مطالعه می‌کنیم. در تمام این فصل و سه فصل آینده، فرض می‌کنیم که بارهای اعمال‌کننده این نیروها یا ساکن هستند یا بسیار کند حرکت می‌کنند؛ نیروهای ایجاد شده تحت این شرایط را نیروهای الکتروستاتیک می‌نامند. در فصلهای بعد، خواهیم دید وقتی ذرات با سرعت زیاد یا با شتاب حرکت کنند چگونه این نیروها تغییر می‌یابند.

۱-۲ قانون کولن

بزرگی نیرویی که بار نقطه‌ای q' روی بار نقطه‌ای q در فاصله r اعمال می‌کند برابر است با

$$F_{q \text{ روی } q'} = \frac{|qq'|}{r^2} \quad (۱-۲)$$

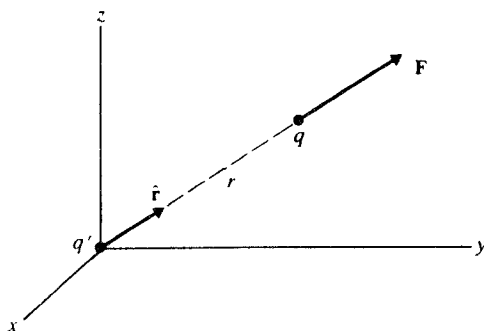
این نیرو در امتداد خط واصل بارهاست (شکل ۱-۲). این نیرو دافعه است اگر بارها دارای علامت یکسان باشند و جاذبه است اگر علامت مخالف داشته باشند. اگر بار q' در مبدأ مختصات باشد، می‌توانیم این نیرو را در نمادنگاری برداری به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{F}_{q \text{ روی } q'} = qq' \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (۲-۲)$$

این قانون نیرو قانون کولن است.

در معادله ۲-۲، تمام کمیتها در دستگاه یکاهای CGS الکتروستاتیک بیان شده‌اند. در این دستگاه، بار برحسب یکای الکتروستاتیک (esu) اندازه‌گیری می‌شود که تعریف آن

$$1 \text{ dyn} = \frac{(1 \text{ esu})^2}{(1 \text{ cm})^2}$$



شکل ۱-۲ نیروی الکتریکی که بار نقطه‌ای q' روی بار نقطه‌ای q وارد می‌کند. اگر بارها هم علامت باشند این نیرو دافعه است.

۱. دستگاه CGS الکتروستاتیک را دستگاه گاوسی نیز می‌نامند. این نامگذاری گاهی به اشتباه برای دستگاه CGS الکترومغناطیس نیز به کار برده می‌شود؛ تفاوت این دستگاه با دستگاه CGS الکتروستاتیک به خاطر وارد شدن ضرایب مختلف C در تعریف یکاهای الکتریکی است. در این کتاب، تنها از CGS الکتروستاتیک استفاده می‌کنیم؛ به منظور مقایسه، روابط عددی بین یکاها در دستگاه CGS الکتروستاتیک و SI در جدولی در پیوست آورده شده‌اند.

به صورت زیر است: دوبار یکسان را در فاصله ۱ سانتیمتر از یکدیگر قرار می‌دهیم؛ بزرگی هر بار را γ_{esu} می‌گوییم اگر نیروی بین آنها ۱ دین باشد. به عبارت دیگر، یکای بار از فرمول زیر تعیین می‌شود، یعنی

$$\gamma_{esu} = 1 \text{ cm} \sqrt{1 \text{ dyn}} = 1 (\text{cm})^{3/2} (\text{g})^{1/2} / \text{s} \quad (3-2)$$

چون طرف راست معادله ۳-۲ ترکیب پیچیده‌ای دارد، این یکا را γ_{esu} می‌نامیم، اما باید به خاطر داشته باشیم که این یکا ترکیبی است از سانتیمتر، گرم و ثانیه. بار الکترون $-e$ ، بار پروتون $+e$ و بار نوترون صفر است. مقدار e برحسب یکاهای الکتروستاتیک، مطابق با بهترین اندازه‌گیری‌های موجود، برابر است با^۱

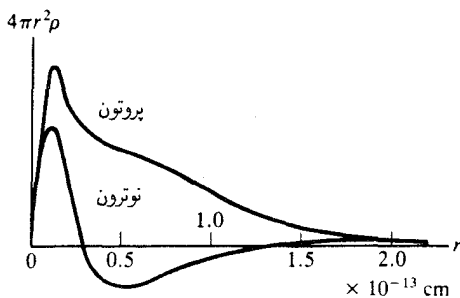
$$e = 4.803207 \times 10^{-10} \text{ esu} \quad (4-2)$$

در ضمن، اختلاف قدرمطلق بارهای الکترون و پروتون بیشتر از یک روی 10^{21} نیست. بار نوترون از 10^{-21} مرتبه بار پروتون بیشتر نیست. این حدود دقیق از آزمایش‌هایی روی خنثی بودن مولکولهای یک گاز و خنثی بودن کره‌های پولادی کوچک که در هوا سقوط می‌کنند، به دست آمده‌اند [۱].
بارهای الکتریکی ذرات بنیادی که تاکنون کشف شده‌اند مضربهای درستی از e هستند؛ بنابراین، بار الکتریکی کوانتیده است:

$$q = ne \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5-2)$$

دلیل این امر به خوبی معلوم نیست. اما، بعضی نظریه‌های جدید که به نیروهای بنیادی فیزیک وحدت می‌دهند آنها را جنبه‌های مختلف یک نیروی زیربنایی در نظر می‌گیرند— نتیجه‌بخش نیستند مگر اینکه بار کوانتیده باشد. بنابراین، وحدت دادن به تمام نیروها احتیاج به کوانتس بار دارد. قانون کولن به صورتی که در بالا بیان شد در مورد بارهای نقطه‌ای به کار می‌رود. نیروی بین اجسامی که بار قابل ملاحظه‌ای دارند معمولاً از قانون عکس مجذوری ساده منحرف می‌شود؛ اینگونه انحرافها را بعداً مورد بحث قرار خواهیم داد. اجسام را در صورتی می‌توانیم با بارهای نقطه‌ای تقریب بگیریم که فاصله بین آنها در مقایسه با اندازه آنها بسیار زیاد باشد. چون الکترونها و پروتونها بسیار کوچک‌اند، برای محاسبه مدارشان در میدانهای الکتریکی یا مغناطیسی شتاب‌دهنده‌ها، لامپهای تلویزیونی یا وسایل ماکروسکوپی دیگر، همیشه می‌توان آنها را به صورت بارهای نقطه‌ای

۱. در SI، بار برحسب کولن سنجیده می‌شود و $e = 1.602177 \times 10^{-19} \text{ C}$. رابطه بین یکاهای CGS و SI عبارت است از $1 \text{ esu} \Leftrightarrow 3 \times 10^9 \text{ C}$ (این عدد از مقدار سرعت نور ناشی می‌شود). توجه کنید که رابطه بالا را به صورت یک هم‌ارزی نوشته‌ایم و نه یک تساوی. در SI، قانون کولن شامل یک ضریب اضافی $1/4\pi\epsilon_0$ است، و در نتیجه کولن و esu از لحاظ ابعادی متفاوت‌اند؛ نمی‌توان آنها را در دو طرف یک تساوی قرار داد.



شکل ۲-۲ توزیع بار پروتون و نوترون حاصل از آزمایشهای پراکنش.

در نظر گرفت^۱، اما، در برخورد بین مثلاً الکترونها و پروتونها فاصله این ذرات می تواند آنقدر کم باشد که انحراف از قانون کولن اهمیت پیدا کند. از مطالعه برخوردهای پراثری بین الکترونها و پروتونها معلوم شده است که پروتونها بارهای دقیقاً نقطه‌ای نیستند، بلکه به گویهای باردار با یک توزیع بار حجمی پیچیده شباهت دارند (شکل ۲-۲). نوترونها خنثی هستند؛ اما یک توزیع بار حجمی با مقادیر مساوی بار مثبت و منفی دارند (شکل ۲-۲). برعکس، الکترونها بارهای نقطه‌ای (مکانیک کوانتومی) هستند؛ داخل الکترون هرگونه ساختاری باشد، مسلماً کوچکتر از 10^{-16} cm است.

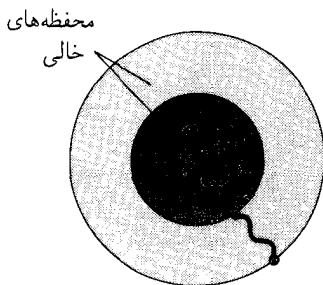
از کجا می دانیم نیروی الکتریکی دقیقاً به صورت $1/r^2$ تغییر می کند؟ بهتر است این سؤال را برحسب انرژی پتانسیل بیان کنیم. تعریف دقیق انرژی پتانسیل را بعداً خواهیم گفت. در اینجا کافی است متذکر شویم اگر نیرو به صورت $1/r^2$ تغییر کند انرژی پتانسیل باید به صورت $1/r$ تغییر کند. انرژی پتانسیل مربوط به نیروی کولن برابر است با

$$U(r) = \frac{qq'}{r} \quad (۶-۲)$$

اکنون می توانیم سؤال بالا را چنین بیان کنیم: از کجا می دانیم انرژی پتانسیل به صورت $1/r$ تغییر می کند؟ قبل از رجوع به شواهد تجربی، متذکر می شویم که، بنابه دلایل نظری کلی، انرژی پتانسیل باید به صورت زیر باشد

$$U(r) = qq' \frac{e^{-\kappa r}}{r} \quad (۷-۲)$$

که در آن ثابت κ یا مثبت است یا صفر. بنابراین، پتانسیلهایی به صورت $1/r^2$ ، $1/r^{1+\epsilon}$ یا $1/r^{1-\epsilon}$ یا شاید لازم باشد در نظر داشته باشیم که این دو ذره نه تنها بار الکتریکی بلکه گشتاور دوقطبی مغناطیسی نیز دارند.



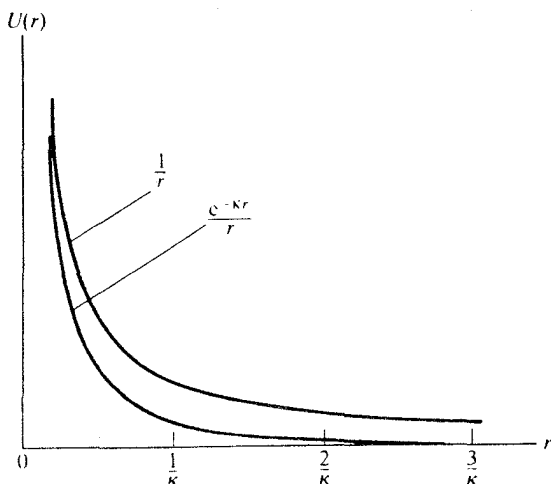
شکل ۲-۳ دو پوستهٔ فلزی هم‌مرکز که با سیم به هم وصل شده‌اند. قانون کولن ایجاب می‌کند که تحت شرایط تعادل استاتیک تمام بارها روی سطح خارجی رسانای بیرونی قرار گیرند.

(۲-۵، $r + 10^{-5}$) را باید کنار گذاشت. استدلالی که منجر به رابطهٔ ۲-۷ می‌شود مبتنی بر بعضی نظرات اساسی نسبیّت و نظریهٔ میدان است، و ما نمی‌توانیم در اینجا به این جزئیات بپردازیم. تابعی را که در معادلهٔ ۲-۷ آمده است پتانسیل یوکاوا می‌نامند. اگر κ برابر با صفر باشد، معادلهٔ ۲-۷ با معادلهٔ ۲-۶ یکی می‌شود. پس سؤال خود را می‌توانیم به صورت زیر بازگو کنیم: آیا κ برابر با صفر است؟

کاندیش، ماکسول، و اخیراً پلیمتون و لاتون، و ویلیامز، فالر و هیل [۲] آزمونهایی روی قانون کولن انجام داده‌اند. آزمایشهای آنها مبتنی بر این ویژگی قانون کولن است: تحت شرایط تعادل استاتیک بار یک رسانا روی سطح آن قرار می‌گیرد؛ به علاوه، هر محفظهٔ بسته‌ای در رسانا روی سطحش هیچ باری ندارد. برای مثال، اگر رسانا به شکل دو پوستهٔ کروی هم‌مرکز باشد که با سیم به هم وصل شده‌اند (شکل ۲-۳)، بار تنها می‌تواند روی خارجی‌ترین سطح قرار گیرد؛ تمام سطحهای دیگر در مقابل محفظه‌های خالی قرار می‌گیرند و باید بدون بار باشند. این قضیه، که آن را بعداً اثبات می‌کنیم، بستگی اساسی به قانون عکس مجذور دارد. بنابراین، به‌عنوان یک آزمون برای این قانون می‌توان بار را روی لایهٔ خارجی شکل ۲-۳ قرار داد و بررسی کرد که چیزی از آن به لایهٔ داخلی منتقل می‌شود یا نه. دقیقترین آزمایش از این نوع توسط ویلیامز، فالر و هیل انجام شد و آنها دریافتند که پتانسیل متناسب با $10^{-16} \pm 10^{-15} r$ است. بنابه بحث بالا، انحراف پتانسیل از $1/r$ باید به صورت یک تابع نمایی (معادلهٔ ۲-۷) باشد نه تغییر در توان r . ویلیامز و همکارانش با تحلیل داده‌های خود، نشان دادند که باید یک حد بالا برای κ وجود داشته باشد، به طوری که

$$\kappa < 3 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1} \quad (۲-۸)$$

اگر $\kappa > 0$ ، قانون کولن برای فواصل کوچک بین بارها (جایی که $e^{-\kappa r} \simeq 1$) تقریب خوبی است اما در فواصل بزرگ (جایی که $e^{-\kappa r} \ll 1$) این قانون کارایی ندارد. نارسایی قانون کولن



شکل ۲-۴ پتانسیل کولن و پتانسیل یوکاوا.

هنگامی جدی می شود که

$$e^{-\kappa r} \simeq e^{-1}$$

یعنی، وقتی که

$$r \simeq \frac{1}{\kappa} \quad (9-2)$$

دورتر از این فاصله، عامل نمایی در معادله ۲-۶ باعث کاهش شدید پتانسیل می شود و آن را سریعاً به مقادیر غیر قابل ملاحظه می رساند (شکل ۲-۴). کمیت $1/\kappa$ را برد پتانسیل می نامند. توجه کنید که قانون کولن، با $\kappa = 0$ ، برد نامتناهی دارد. نتیجه ۲-۸ نشان می دهد قانون کولن تقریب خوبی است اگر فاصله بسیار کوچکتر از مقدار زیر باشد

$$\frac{1}{3 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}} \simeq 10^9 \text{ cm}$$

حد نسبتاً بهتری برای κ از روشی تعیین می شود که اولین بار از طرف شرودینگر مطرح شده است. اگر معادلات مربوط به میدان الکتروستاتیک مطابق با ۲-۷ تغییر یابند، لازم است تغییرات متناظری نیز در معادلات مربوط به میدان مغناطیسی صورت گیرند [۳]. برای مثال، باید عامل $e^{-\kappa r}$

در میدان مغناطیسی یک دوقطبی مغناطیسی ظاهر شود که بر کاهش میدان در فواصل دور تأثیر می‌گذارد. می‌توانیم امتحان کنیم که میدان مغناطیسی زمین، که توسط ماهواره‌ها اندازه‌گیری شده است، با این تغییرات توافق دارد. همچنین، می‌توانیم این آزمون را برای میدان مغناطیسی مشتری به‌کار ببریم. میدان مغناطیسی این سیاره تا فاصله‌های بسیار زیاد ادامه دارد و در نتیجه حساسیت آن به حضور عامل نمایی از میدان مغناطیسی زمین نیز بیشتر است. اندازه‌گیرهای دقیق میدان مغناطیسی مشتری با سفینه فضایی پاونیر ۱۰ انجام گرفته است؛ از این اندازه‌گیرها حد زیر به‌دست می‌آید [۴]

$$\kappa < 2 \times 10^{-11} \text{ cm}^{-1} \quad (10-2)$$

این حد پیشرفت مهمی نسبت به حد ۲-۸ است. حد دقیقتری را می‌توان از بررسی میدان مغناطیسی کهکشان به‌دست آورد؛ می‌دانیم که این میدان مغناطیسی تا هزاران سال نوری گسترش دارد، و این به ما امکان می‌دهد نتیجه بگیریم که

$$\kappa < 1 \times 10^{-22} \text{ cm}^{-1} \quad (11-2)$$

روشن است که مقدار κ مسلماً بسیار کوچک و احتمالاً برابر با صفر است.

تذکر: مقدار κ به جرم فوتون مربوط می‌شود. اگر κ صفر نباشد جرم فوتون برابر خواهد بود با

$$m = \frac{h\kappa}{2\pi c} \quad (12-2)$$

که در آن c سرعت نور و h ثابت پلانک است. حدی که برای κ به‌دست آمده است ایجاب می‌کند که جرم فوتون یا صفر باشد یا بسیار کوچک:

$$m < 3 \times 10^{-60} \text{ g} \quad (13-2)$$

۲-۲ میدان الکتریکی؛ قانون گاوس

برای بار q' واقع در مبدأ مختصات، میدان الکتریکی ایجاد شده توسط این بار در فاصله r را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{E}(r) = q' \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (14-2)$$

پس می‌توانیم، بنابه معادلهٔ ۲-۲، نیروی وارد بر بار دیگر q را به صورت زیر بیان کنیم

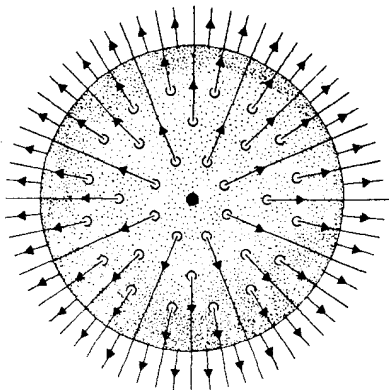
$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (۱۵-۲)$$

این معادله می‌گوید که میدان الکتریکی برابر است با نیرو به ازای 1 esu بار (مثبت). یکای CGS الکتروستاتیک میدان الکتریکی عبارت است از دین بر esu (این واحد با ایستاولت بر سانتیمتر یکی است؛ بخش ۲-۳).

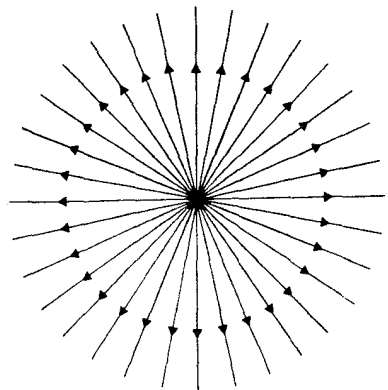
■ تمرین ۱- دین بر esu را برحسب سانتیمتر، گرم و ثانیه بیان کنید.

اغلب گفته می‌شود که \mathbf{E} باید با گرفتن حد $q \rightarrow 0$ تعریف شود، اما چون معادلهٔ ۲-۱۴ کاملاً مستقل از q است این حدگیری لازم نیست. دلیل اینکه به حدگیری احتیاجی نیست این است که قبلاً فرض کرده‌ایم مکان q' کاملاً ثابت می‌ماند. اما در عمل، غالباً مکان بارهای ایجادکنندهٔ میدان دقیقاً ثابت نمی‌ماند؛ اگر در نقطه‌ای بار آزمون q را قرار دهیم، نیروی الکتریکی این بار معمولاً بارهای دیگر را تا اندازه‌ای جابه‌جا می‌کند و تغییری در میدان مؤثر بر q به وجود می‌آورد. این آشفتگیها را می‌توان با حدگیری $q \rightarrow 0$ حذف کرد.

میدان الکتریکی معادلهٔ ۲-۱۴ را به طور نموداری می‌توانیم با خطوط میدان نمایش دهیم به طوری که راستای این خطوط راستای \mathbf{E} است و چگالی آنها به گونه‌ای است که تعداد خطهایی که از سطح واحد عمود بر این خطها عبور می‌کنند متناسب با بزرگی $|\mathbf{E}|$ است. شکل ۲-۵ (الف) این خطوط میدان را برای بار مثبت q' نشان می‌دهد. توجه کنید که این شکل میدان را در سه بعد نشان



(الف)



(ب)

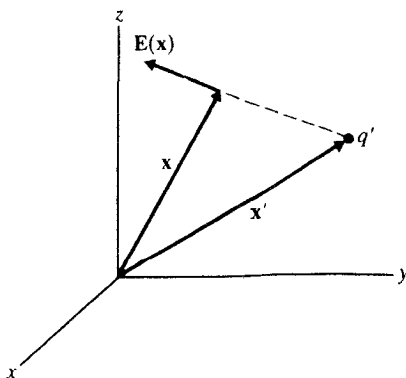
شکل ۲-۵ (الف) خطوط میدان یک بار مثبت آنطور که در سه بعد دیده می‌شود. (ب) خطوط میدان یک بار مثبت آنطور که در دو بعد دیده می‌شود.

می‌دهد. چون ترسیم این نمودارها مشکل است، غالباً خطوط میدان را در دو بعد نشان می‌دهند (شکل ۲-۵ب). اما این کار تا اندازه‌ای گمراه‌کننده است. در دو بعد، چگالی خطوط میدان تنها به صورت $1/r$ کاهش می‌یابد و در نتیجه نمی‌توان شدت کاهش خطوط میدان در سه بعد را از روی آن به خوبی احساس کرد.

میدان الکتریکی مفهوم مفیدی است زیرا به ما امکان می‌دهد آثار الکتریکی ناشی از کنش موضعی، یا کنش از طریق تماس را تصور کنیم. به عبارت دیگر، می‌توانیم نیروی وارد بر بار را ناشی از حالت تغییر یافته فضای اطراف بار فرض کنیم نه ناشی از کنش از دور بار دیگر. کنش از دور غیر قابل قبول است زیرا با نسبیت توافق ندارد: اگر باری می‌توانست مستقیماً روی بار دیگری اثر کند هر تغییری در مکان اولی باید بلافاصله توسط دومی احساس می‌شد و این امر امکان می‌داد که علامت با سرعتی بیشتر از سرعت نور منتشر شوند. اگر کنش بین بارها با واسطه میدان انجام شود این انتشار آنی دیگر وجود ندارد. هر تغییری در مکان بار اول یک آشفتگی در میدان مجاور آن ایجاد می‌کند؛ و این آشفتگی مانند موجی با سرعت نور از بار اول به بار دوم گسترش می‌یابد. همچنان‌که بعداً خواهیم دید، میدانها انرژی دارند، بنابراین صورتی از ماده هستند. میدانها را می‌توان حالت پنجم ماده در نظر گرفت (جامد، مایع، گاز و پلاسما چهار حالت دیگر ماده هستند). اگر بار q' که میدان الکتریکی را ایجاد می‌کند در نقطه x' قرار گرفته باشد، میدان الکتریکی در نقطه x از معادله زیر به دست می‌آید

$$E(x) = q' \frac{x - x'}{|x - x'|^3} \quad (۱۶-۲)$$

توجه کنید که بزرگی عبارت برداری در طرف راست این معادله برابر است با $1/|x - x'|^2$ ، و جهت، چنانکه باید، از x' به x است (شکل ۲-۶). در معادله ۱۶-۲، E را تابعی از x در نظر



شکل ۲-۶ بار q' واقع در نقطه x' میدان الکتریکی $E(x)$ را در نقطه x ایجاد می‌کند.

می‌گیریم زیرا \mathbf{x}' ثابت است.

میدان الکتریکی از اصل برهم‌نهی خطی پیروی می‌کند: میدان الکتریکی چندین بار که همزمان عمل می‌کنند عبارت است از مجموع برداری تک‌تک میدانهای الکتریکی. بدین ترتیب، اگر بارها q_1, q_2, q_3, \dots با مکانهای $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$ باشند، میدان الکتریکی در \mathbf{x} برابر است با

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_j q_j \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|^3} \quad (17-2)$$

این اصل برهم‌نهی خطی میدانهای الکتریکی، واصل متناظری برای میدانهای مغناطیسی، اساس اکثر محاسبات الکترودینامیک را تشکیل می‌دهد. توافق عالی این محاسبات با آزمایش شاهدهی است بر اینکه انحراف از برهم‌نهی خطی، اگر هم وجود داشته باشد، حتماً بسیار کوچک است. پدیده‌های مربوط به اپتیک «غیر خطی» که با نور لیزر مشاهده می‌شوند ناقض برهم‌نهی خطی نیستند. آنچه در این مورد غیرخطی است برهم‌نهی میدانهای الکتریکی نیست بلکه عکس‌العمل ماده‌ی الکتریک به میدان الکتریکی شدید (قطبیدگی) است. به‌طور خلاصه، می‌توانیم بگوییم خلاط خطی است اما مواد دی‌الکتریک (گاهی) غیرخطی هستند.

اگر چه شواهد تجربی موجود با خطی بودن میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در خلا توافق دارد، محاسبات نظری انحرافهایی از خطی بودن در شرایط غیر متعارف را پیش‌بینی می‌کند. یکی از این نوع انحرافها به یک اثر کوانتومی یعنی پراکنش نور توسط نور مربوط می‌شود. اگر رفتار میدانهای الکترو مغناطیسی دقیقاً خطی بود، دو باریکه نور می‌توانستند همدیگر را قطع کنند و بدون تغییر از هم جدا شوند. اما نظریه کوانتومی نسبیتهی پیش‌بینی می‌کند که دو باریکه نور که شدشان بسیار زیاد باشد هنگام تقاطع الزاماً با یکدیگر برهم‌کنش خواهند داشت. این اثر تنها وقتی محسوس می‌شود که شدت میدان الکتریکی حدود 10^{16} statV/cm (حدود 10^{18} V/cm) باشد و این بسیار فراتر از آن چیزی است که لیزرهای امروزی می‌توانند ایجاد کنند. بنابراین، برای مواردی که ما با آنها سروکار داریم، می‌توانیم از انحراف از خطی بودن با اطمینان صرف‌نظر کنیم.

در محاسبه میدانهای الکتریکی، غالباً با تقریب کافی می‌توان از ماهیت گسسته بارهای بنیادی چشمپوشی کرد و توزیع بار را با چگالی بار پیوسته $\rho(\mathbf{x}')$ توصیف کرد. چون $\rho(\mathbf{x}') dx' dy' dz'$ مقدار بار در حجم $dx' dy' dz'$ در نزدیکی نقطه \mathbf{x}' است، معادله ۱۷-۲ چنین می‌شود

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \iiint \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dx' dy' dz' \quad (18-2)$$

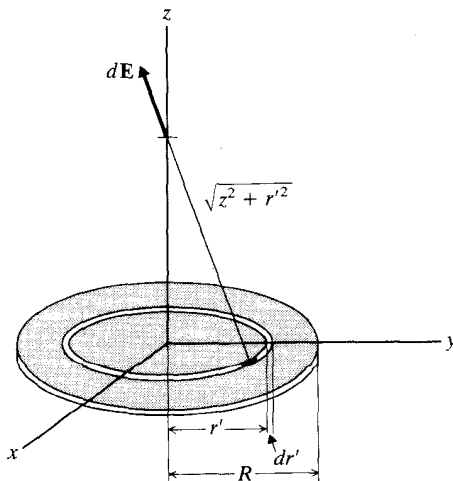
یا در یک نمادنگاری فشرده‌تر

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV' \quad (۱۹-۲)$$

این معادله صرف‌نظر از اینکه نقطه \mathbf{x} خارج یا داخل توزیع بار باشد معتبر است. در مورد دوم، از یک نگاه سطحی به معادله ۱۹-۲ استنباط می‌شود که وقتی $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ صفر شود جمله زیر انتگرال تکینگی دارد. اما بررسی دقیق نشان می‌دهد که اینطور نیست زیرا اگر فرض کنیم مبدأ بر نقطه \mathbf{x} منطبق است و \mathbf{x}' را به \mathbf{x} میل دهیم، کمیت $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3 dV'$ مانند (عامل زاویه‌ای) $(1/r'^2) r'^2 dr' \times$ رفتار می‌کند که تکینگی ندارد.

به‌عنوان مثالی از محاسبه میدان الکتریکی یک توزیع بار پیوسته، میدان الکتریکی را روی محور یک قرص نازک که بار Q به‌طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است حساب می‌کنیم. شکل ۷-۲ این قرص را در صفحه xy نشان می‌دهد؛ شعاع قرص برابر با R است و در نتیجه بار واحد سطح برابر است با $Q/\pi R^2$. یک قطعه کوچک قرص به مساحت $r' d\phi' dr'$ دارای بار $(Q/\pi R^2) r' d\phi' dr'$ است؛ این بار کوچک در ارتفاع z از قرص یک میدان الکتریکی ایجاد می‌کند با بزرگی

$$dE = \frac{(Q/\pi R^2) r' d\phi' dr'}{z^2 + r'^2} \quad (۲۰-۲)$$



شکل ۷-۲ یک قرص نازک باردار در صفحه xy .

این میدان الکتریکی دارای مؤلفه‌های قائم و افقی است. به علت تقارن توزیع بار، مؤلفه‌های افقی در انتگرال‌گیری حذف می‌شوند. بنابراین، کافی است مؤلفه قائم را در نظر بگیریم:

$$dE_z = \cos\theta \frac{(Q/\pi R^2)r' d\phi' dr'}{z^2 + r'^2}$$

$$= \frac{z}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} \frac{(Q/\pi R^2)r' d\phi' dr'}{z^2 + r'^2} \quad (21-2)$$

پس از انتگرال گرفتن داریم

$$E_z = \frac{Q}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{zr'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} d\phi' dr'$$

$$= \frac{2Q}{R^2} \left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \quad (22-2)$$

از فرمول مربوط به میدان الکتریکی قرص می‌توانیم با حدگیری $R \rightarrow \infty$ میدان الکتریکی یک صفحه بسیار بزرگ بار را به دست آوریم. قبل از حد گرفتن، باید معادله ۲۲-۲ را برحسب بار واحد سطح یعنی $\sigma = Q/\pi R^2$ بیان کنیم. آنگاه

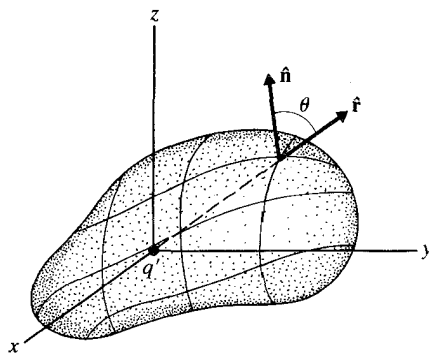
$$E_z = \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi\sigma \left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] = 2\pi\sigma \quad (23-2)$$

محاسبه مستقیم میدانهای الکتریکی از معادله ۱۹-۲ غالباً به انتگرالهایی منجر می‌شود که جوابشان را نمی‌دانیم؛ بنابراین، حائز اهمیت است که روش دیگری برای محاسبه، با استفاده از بعضی خواص عمومی ریاضی میدانهای الکتریکی، به دست آوریم.

میدان الکتریکی هر توزیع بار معین $\rho(\mathbf{x})$ در معادله زیر صدق می‌کند

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 4\pi\rho(\mathbf{x}) \quad (24-2)$$

این معادله را صورت دیفرانسیلی قانون گاوس می‌نامند. برای اثبات ۲۴-۲، بهتر است که از میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q شروع کنیم. یک سطح فرضی اختیاری را در نظر بگیرید که این بار نقطه‌ای را احاطه کرده است (شکل ۸-۲)، و $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ را روی این سطح حساب کنید. اگر $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه



شکل ۸-۲ بار نقطه‌ای q' در مبدأ مختصات. بردار یکه \hat{n} بر سطح عمود است، و بردار یکه \hat{r} در راستای شعاعی است.

عمود بر سطح و \hat{r} بردار یکه شعاعی باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = q' \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \hat{n} dS \\ &= q' \frac{\cos\theta dS}{r^2} \end{aligned} \quad (25-2)$$

اما $\cos\theta dS$ تصویر سطح dS روی صفحه عمود بر \hat{r} است؛ در نتیجه، $\cos\theta dS/r^2$ عبارت است از زاویه فضایی $d\Omega$ که روی dS (وقتی از مکان بار نقطه‌ای نگاه کنیم) ساخته می‌شود.^۱ چون زاویه فضایی روی یک سطح بسته 4π است با انتگرال گرفتن از معادله ۲۵-۲ روی تمام سطح به دست می‌آوریم

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int q' d\Omega = 4\pi q' \quad (26-2)$$

اگر سطح به جای یک بار نقطه‌ای q' توزیعی از چندین بار را احاطه کند، آنگاه

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q \quad (27-2)$$

که در آن \mathbf{E} میدان الکتریکی کل است که توسط تمام بارهای درون سطح بسته ایجاد شده است و Q بار کل است.

۱. زاویه فضایی که روی یک مستطیل کوچک ساخته می‌شود برابر است با حاصلضرب عرض و طول زاویه‌ای.

معادله ۲۷-۲ صورت انتگرالی قانون گاوس است. برای تبدیل آن به صورت دیفرانسیلی، یادآوری می‌کنیم که بنابه قضیه گاوس، $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ برابر است با $\int \nabla \cdot \mathbf{E} dV$ که در آن انتگرال حجمی روی ناحیه‌ای گرفته می‌شود که توسط سطح احاطه شده است. در نتیجه

$$\int \nabla \cdot \mathbf{E} dV = 4\pi Q \quad (28-2)$$

برای یک توزیع بار پیوسته $\rho(\mathbf{x})$ ، معادله ۲۸-۲ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\int \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) dV = 4\pi \int \rho(\mathbf{x}) dV \quad (29-2)$$

چون این معادله برای هر حجمی درست است آن را در مورد یک حجم بسیار کوچک $\Delta x \Delta y \Delta z$ در نزدیکی نقطه \mathbf{x} به کار می‌بریم. در نتیجه، معادله ۲۹-۲ چنین می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) \Delta x \Delta y \Delta z = 4\pi \rho(\mathbf{x}) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (30-2)$$

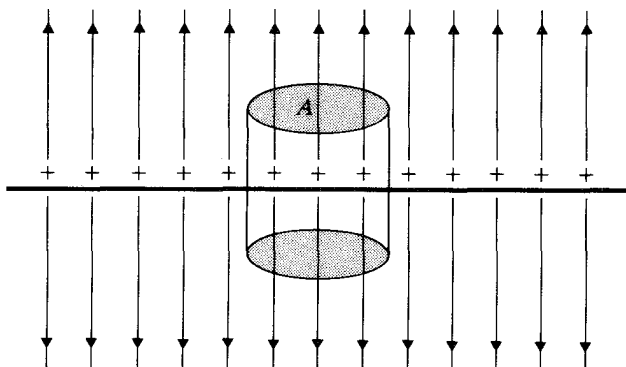
یا، پس از حذف حجم:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 4\pi \rho(\mathbf{x}) \quad (31-2)$$

و در اینجا اثبات معادله ۲۴-۲ کامل می‌شود.

باید توجه کرد که در هر ناحیه بدون بار، واگرایی میدان الکتریکی صفر است و در نتیجه، بنا به استدلال بخش ۱-۴، می‌توان آن را با خطوط میدان نمایش داد. اما اگر در ناحیه‌ای چگالی باری مانند $\rho(\mathbf{x})$ وجود داشته باشد، واگرایی میدان الکتریکی مخالف صفر است و نمی‌توان آن را با خطوط میدان نمایش داد.

اگر چه معادله‌های ۲۴-۲ و ۲۷-۲ از لحاظ ریاضی هم‌ارز هستند، بعضی محاسبات مربوط به میدانهای الکتریکی، که شامل توزیع بار با تقارن بسیار زیاد باشند، با صورت انتگرالی قانون گاوس از همه بهتر انجام می‌شوند. برای مثال، باز هم یک صفحه نامتناهی بار را در نظر بگیرید، که می‌توان میدان الکتریکی آن را با انتگرال‌گیری مستقیم به دست آورد (معادله ۲۳-۲). برای محاسبه این میدان الکتریکی از قانون گاوس، از ملاحظات تقارن توزیع بار که ایجاب می‌کند خطوط میدان بر صفحه عمود باشند استفاده می‌کنیم (شکل ۲-۹). پس اگر $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ را برای یک حجم استوانه‌ای کوچک با قاعده A حساب کنیم، می‌بینیم که تنها قاعده‌های استوانه در این انتگرال سهم دارند، به طوری که $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2E_z A$. بنابه قانون گاوس، این انتگرال باید متناسب با بار درون



شکل ۹-۲ خطوط میدان یک صفحه باردار یکنواخت بسیار بزرگ.

استوانه باشد: بنابراین

$$2E_z A = 4\pi(\sigma A)$$

یا

$$E_z = 2\pi\sigma \quad (32-2)$$

که همان نتیجه‌ای است که قبلاً به دست آوردیم.

تمرین ۲- کره‌ای به شعاع R دارای بار Q است که به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است. با استفاده از صورت انتگرالی قانون گاوس نشان دهید میدان الکتریکی برابر است با

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r) &= Q \frac{\hat{r}}{r^2} & r \geq R \text{ به ازای} \\ \mathbf{E}(r) &= Q \frac{r\hat{r}}{R^3} & r \leq R \text{ به ازای} \end{aligned} \quad (33-2)$$

میدان الکتریکی یک توزیع بار استاتیک در معادله زیر نیز صدق می‌کند

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (34-2)$$

مانند اثبات قانون گاوس، بهتر از همه این است که از میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای q' شروع کنیم. اگر این بار در نقطه \mathbf{x}' باشد میدان الکتریکی آن برابر است با

$$E(\mathbf{x}) = q' \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

مؤلفه x مربوط به $\nabla \times \mathbf{E}$ عبارت است از (معادله ۱-۷۰)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{q'(z-z')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \\ &- \frac{\partial}{\partial z} \frac{q'(y-y')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (35-2)$$

با مشتق‌گیری مستقیماً به این نتیجه می‌رسیم که جمله‌های طرف راست یکدیگر را حذف می‌کنند؛ یعنی مؤلفه x مربوط به $\nabla \times \mathbf{E}$ صفر است. به همین ترتیب، مؤلفه‌های y و z صفر هستند. پس معادله ۲-۳۴ برای یک بار نقطه‌ای ثابت می‌شود. چون یک توزیع بار اختیاری را می‌توان به‌عنوان مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای در نظر گرفت، نتیجه می‌گیریم که معادله ۲-۳۴ باید به‌طور کلی درست باشد.

معادله‌های ۲-۲۴ و ۲-۳۴ مربوط به همگرایی و تاو میدان \mathbf{E} دو تا از معادلات ماکسول هستند اما به‌صورتی که برای مورد خاص میدانهای استاتیک اعتبار دارند. همچنان‌که در فصل ۸ خواهیم دید، معادله ۲-۲۴ حتی برای میدانهایی که استاتیک نیستند نیز برقرار است؛ اما باید به معادله ۲-۳۴ جمله‌ای شامل مشتق زمانی میدان مغناطیسی اضافه کنیم (معادله ۸-۶۴).

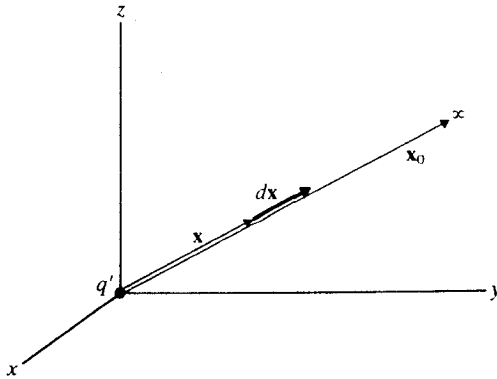
۳-۲ پتانسیل الکتروستاتیک؛ معادله پواسون

از بخش ۱-۴ می‌دانیم که یک میدان برداری با تاو صفر پایستار است و می‌توان آن را به‌صورت گرادیان یک تابع نرده‌ای بیان کرد. میدان الکتروستاتیک شرط صفر بودن تاو را برآورده می‌کند و بنابراین پایستار است؛ یعنی برای هر مسیر بسته‌ای داریم

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

و این میدان را می‌توان به‌صورت گرادیان یک تابع نرده‌ای نوشت:

$$E(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x}) \quad (36-2)$$



شکل ۱۰-۲ مسیر انتگرال‌گیری برای پتانسیل بار نقطه‌ای q' .

تابع $\Phi(x)$ را پتانسیل الکتروستاتیک می‌نامند. توجه کنید که معادله ۲-۳۶، برخلاف معادله ۱-۱۱۴، در طرف راست دارای علامت منهای است. این علامت منهای را برای این اضافه کرده‌ایم که پتانسیل هم علامت با انرژی پتانسیل بار آزمون مثبت باشد. بنابه معادله ۱-۱۱۵، می‌توانیم پتانسیل الکتروستاتیک را برحسب میدان الکتریکی به صورت زیر بیان کنیم

$$\Phi(x) = - \int_{x_0}^x E(x') \cdot dx' \quad (37-2)$$

که در آن x نقطه مرجعی است که در آن بنابه تعریف پتانسیل صفر است، $\Phi(x_0) \equiv 0$. اگر میدان الکتریکی مربوط به بار نقطه‌ای q' واقع در مبدأ مختصات باشد (شکل ۱۰-۲) بهتر است نقطه مرجع را در بینهایت بگیریم. مسیر انتگرال‌گیری را می‌توانیم یک خط راست انتخاب کنیم. مسیر انتگرال‌گیری از x_0 به x هر چه باشد نتیجه انتگرال معادله ۲-۳۷ یکسان است. بنابراین، برای سادگی می‌توانیم یک مسیر شعاعی مستقیم را که برای آن $dx' = \hat{r} dr'$ انتخاب کنیم (شکل ۱۰-۲). آنگاه انتگرال معادله ۲-۳۷ چنین می‌شود

$$\Phi(r) = - \int_{\infty}^r q' \frac{\hat{r}}{r'^2} \cdot \hat{r} dr' = - \int_{\infty}^r \frac{q'}{r'^2} dr'$$

یعنی

$$\Phi(r) = \frac{q'}{r} \quad (38-2)$$

این فرمول که پتانسیل بار نقطه‌ای واقع در مبدأ مختصات را تعیین می‌کند نشان می‌دهد پتانسیل

با فاصله نسبت عکس دارد. برای بار نقطه‌ای در نقطه اختیاری x' ، پتانسیل عبارت است از

$$\Phi(x) = \frac{q'}{|x - x'|} \quad (39-2)$$

به علاوه، پتانسیل یک توزیع بار اختیاری با چگالی بار $\rho(x')$ برابر است با

$$\Phi(x) = \int \frac{\rho(x')}{|x - x'|} dV' \quad (40-2)$$

تذکر: معادله ۲-۴۰ برای هر توزیع باری با گسترش متناهی معتبر است. اما اگر توزیع بار تا بینهایت ادامه باید (مثلاً یک صفحه باردار نامتناهی) معادله ۲-۴۰ کارایی ندارد زیرا برای این نوع توزیع بار نمی‌توان نقطه در بینهایت را به عنوان مرجع با پتانسیل صفر انتخاب کرد. در این مورد باید از معادله ۲-۳۷ استفاده کنیم و نقطه دیگری را مرجع بگیریم.

تمرین ۳- گرادیان معادله ۲-۳۹ را با مشتق‌گیری مستقیم محاسبه کنید و نشان دهید نتیجه به دست آمده منجر به معادله ۲-۱۶ می‌شود. همچنین، گرادیان معادله ۲-۴۰ را محاسبه کنید و نشان دهید نتیجه به دست آمده منجر به معادله ۲-۱۹ می‌شود. ■

به عنوان مثالی از کاربرد معادله ۲-۴۰ برای محاسبه پتانسیل، باز هم قرص نازکی را مانند بخش قبلی در نظر می‌گیریم (شکل ۲-۷). قطعه کوچکی از این قرص حامل بار $(Q/\pi R^2)r' d\phi' dr'$ است و در نتیجه سهم آن در پتانسیل برابر است با

$$d\Phi = \frac{(Q/\pi R^2)r' d\phi' dr'}{(z^2 + r'^2)^{1/2}}$$

پتانسیل ایجاد شده توسط تمام قرص را از انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{Q}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r'}{(z^2 + r'^2)^{1/2}} d\phi' dr' \\ &= \frac{2Q}{R^2} [(z^2 + R^2)^{1/2} - z] \end{aligned}$$

اگر میدان الکتریکی را از این پتانسیل با استفاده از $E_z = -\partial\Phi/\partial z$ حساب کنیم نتیجه ۲-۲۲ را دوباره به دست می‌آوریم. این روش محاسبه میدان الکتریکی از طریق پتانسیل غالباً از محاسبه مستقیم مناسبتر است، زیرا معادله ۲-۴۰ برای پتانسیل شامل انتگرال‌گیری از یک

کمیت نرده‌ای است در حالی که معادله ۲-۱۹ برای میدان الکتریکی شامل انتگرال‌گیری از بردار با سه مؤلفه جداگانه است. اما اگر توزیع بار به اندازه کافی تقارن داشته باشد تا بتوانیم محاسبه میدان الکتریکی را از طریق صورت انتگرالی قانون گاوس انجام دهیم شاید بهتر این باشد که ابتدا میدان الکتریکی را حساب کنیم و سپس (اگر لازم باشد) پتانسیل را از معادله ۲-۳۷ به دست آوریم.

تمرین ۴- با شروع از معادله ۲-۳۳ نشان دهید پتانسیل ایجاد شده توسط کره‌ای با توزیع یکنواخت بار برابر است با

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \frac{Q}{r} \quad r \geq R \text{ به ازای } R \\ \Phi(r) &= Q \left(-\frac{1}{2} \frac{r^2}{R^3} + \frac{3}{2} \frac{1}{R} \right) \quad r \leq R \text{ به ازای } R \end{aligned} \quad (41-2)$$

تعبیر فیزیکی پتانسیل چنین است: فرض کنید بار نقطه‌ای q را در یک میدان الکتریکی (که توسط بارهای دیگری ایجاد شده است) قرار دهیم. $q\mathbf{E}$ نیروی الکتریکی وارد بر بار q است و بنابه معادله ۲-۳۷، $q\Phi$ انرژی پتانسیل بار q است:

$$U(\mathbf{x}) = q\Phi(\mathbf{x}) \quad (42-2)$$

پس پتانسیل الکتریکی برابر است با انرژی پتانسیل 1esu بار (مثبت).
یکای CGS الکتروستاتیک پتانسیل عبارت است از ایستاولت:

$$1 \text{statV} = 1 \text{erg} / 1 \text{esu} \quad (43-2)$$

در موارد عملی، مناسب است ضریب تبدیل از ایستاولت به ولت را بدانیم^۱:

$$1 \text{statV} \Leftrightarrow 299792458 \text{V} \simeq 300 \text{V} \quad (44-2)$$

میدان الکتریکی را می‌توان برحسب ایستاولت بر سانتیمتر، یا برابر با آن دین بر سانتیمتر، اندازه‌گیری کرد.

تمرین ۵- ایستاولت را برحسب سانتیمتر، گرم و ثانیه به دست آورید.

۱. ضریب عددی این رابطه از سرعت نور ناشی می‌شود. مانند یکاهای بار الکتریکی (بخش ۲-۱)، رابطه بالا را به صورت هم‌ارزی نوشته‌ایم و نه تساوی زیرا یکاهای CGS و SI برای پتانسیل دارای ابعاد یکسان نیستند.

اگر صورت دیفرانسیلی قانون گاوس (معادله ۲-۲۴) را با $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ترکیب کنیم، به دست می‌آوریم

$$\nabla \cdot \nabla\Phi(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x})$$

یعنی

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}) \quad (۴۵-۲)$$

که معادله پواسون نامیده می‌شود. در هر ناحیه خالی از بار، که $\rho(\mathbf{x}) = 0$ ، این معادله تبدیل می‌شود به

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (۴۶-۲)$$

که معادله لاپلاس نامیده می‌شود.

معادله‌های ۴۵-۲ و ۴۶-۲ معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم هستند. در فصل بعد بعضی روشهای حل این معادله‌ها را بررسی می‌کنیم. قضیه زیر یک نتیجه بلافصل معادله لاپلاس است.

قضیه ارنشاو: در یک ناحیه خالی از بار پتانسیل نمی‌تواند ماکسیمم یا مینیمم داشته باشد. برای اثبات این قضیه، متذکر می‌شویم اگر تابع Φ در نقطه‌ای ماکسیمم داشته باشد آنگاه باید مشتقهای اول $\partial\Phi/\partial x$ ، $\partial\Phi/\partial y$ و $\partial\Phi/\partial z$ صفر و مشتقهای دوم $\partial^2\Phi/\partial x^2$ ، $\partial^2\Phi/\partial y^2$ و $\partial^2\Phi/\partial z^2$ منفی باشند. اما اگر هر یک از مشتقهای دوم منفی باشد جمع آنها نمی‌تواند صفر باشد و این برخلاف معادله لاپلاس است. پس امکان وجود ماکسیمم رد می‌شود؛ با استدلال مشابهی امکان وجود مینیمم نیز رد می‌شود.

بنا به این قضیه، دستگاهی از بارهای نقطه‌ای تحت تاثیر نیروهای الکتریکی متقابل آنها نمی‌تواند در تعادل استاتیک پایدار باشد. هر یک از بارها در معرض میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی سایر بارها قرار دارد؛ پس هر یک از بارها را می‌توان به صورتی در نظر گرفت که در یک ناحیه خالی از بار واقع شده است؛ و چون در این ناحیه پتانسیل نمی‌تواند ماکسیمم یا مینیمم داشته باشد تعادل پایدار ناممکن است. این ناپایداری فیزیکدانها را به این نتیجه رساند که ساختار اتمها و مولکولها را نمی‌توان با فیزیک کلاسیک توصیف کرد. همچنان‌که جینز در ۱۹۲۰ نوشت:

«یک کاربرد فیزیکی قضیه ارنشاو فوق‌العاده حائز اهمیت است. این قضیه نشان می‌دهد که اگر فرض شود نیروهای جاذبه و دافعه بین یک الکترون و سایر بارها از قانون عکس مجذور

فاصله تبعیت می‌کنند الکترون نمی‌تواند تحت این نیروها در تعادل پایدار باقی بماند. بدین ترتیب، اگر یک مولکول به صورت تجمعی از الکترونها و بارهای مثبت در نظر گرفته شود... آنگاه قانون نیرو باید چیزی غیر از عکس مجذوری باشد... بنابراین، قضیهٔ ارشائو ما را بر سر دوراهی قرار می‌دهد. یا مولکولها شامل مجموعه‌ای از الکترونهای در حال سکون نسبی نیستند یا اینکه قانون عکس مجذوری در فواصل مولکولی برقرار نیست.

بررسیهای تجربی اخیر مشخصاً بر ضد راه دوم و به نفع راه اول حکم می‌کند. آزمایشهای اخیر روی انحراف ذرات α که بار مثبت دارند توسط ماده نشان می‌دهند که قانون عکس مجذورتا فاصله‌هایی حداقل از مرتبهٔ 10^{-11} cm برقرار است، یعنی فاصله‌ای که از چند هزارم شعاع اتم هیدروژن کمتر است، و انبوهی از مدارک دیگر دلالت بر این دارد که با احتمال قریب به یقین الکترونها در یک اتم یا مولکول باید در حرکت مداری سریع باشند. بدین ترتیب مسئلهٔ ساختار مولکول از قلمرو قضیهٔ ارشائو خارج است [۶].»

متأسفانه، حرکت مداری الکترونها به تعارض دیگری با فیزیک کلاسیک منجر می‌شود. بنابه نظریهٔ الکترومغناطیس کلاسیک، الکترونها در حال حرکت مداری سریع باید تابش کنند. بنابراین، الکترون باید انرژی خود را به علت تابش از دست بدهد و با حرکت مارپیچی سرانجام به روی هسته بیفتد و در نتیجه نباید اتمی موجود باشد. بدین ترتیب، پایداری اتمها با فیزیک کلاسیک تناقض آشکار دارد— فیزیک اتمی باید فیزیک کوانتومی باشد.

در پایان، متذکر می‌شویم که قضیهٔ ارشائو واقعیت زیر را ایجاب می‌کند: اگر ناحیهٔ خالی از بار مرز داشته باشد، مقدار ماکسیمم و مقدار مینیمم پتانسیل الزاماً روی این مرز واقع می‌شوند.

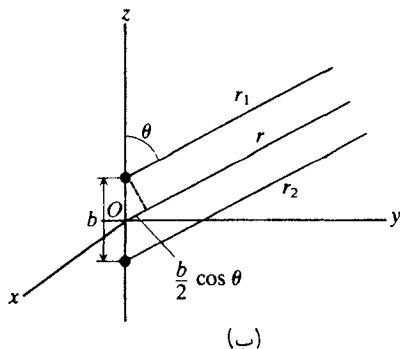
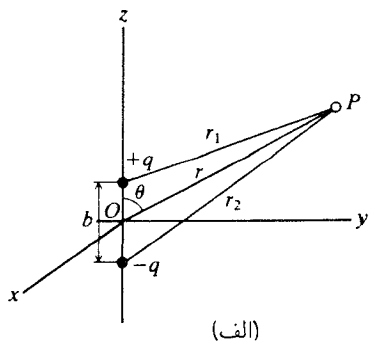
۴-۲ دوقطبی الکتریکی

دوقطبی الکتریکی از دو بار نقطه‌ای با علامت مخالف و مقدار یکسان که فاصلهٔ کمی از هم دارند تشکیل شده است (شکل ۱۱-۲). در این تعریف، «فاصلهٔ کم» به معنای این است که فاصلهٔ بین بارها از فاصلهٔ بارها تا نقطهٔ x خیلی کمتر است. می‌توانیم میدان الکتریکی این دوقطبی را مستقیماً از جمع میدانهای کولنی بارها محاسبه کنیم، اما بهتر این است که میدان را از طریق پتانسیل به دست آوریم.

اگر بارهای $\pm q$ روی محور z در $z = \pm b/2$ قرار گرفته باشند (شکل ۱۱-۲ الف) پتانسیل در نقطهٔ x برابر است با

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \quad (47-2)$$

برای به دست آوردن یک عبارت تقریبی برای r_1 ، ابتدا از قانون کسینوسها در مثلث qOP استفاده



شکل ۱۱-۲ (الف) یک دوقطبی الکتریکی متشکل از دو بار نقطه‌ای $\pm q$ در $z = \pm b/2$ (ب) تقریب ۴۹-۲ معادل است با این فرض که r_1 و r_2 تقریباً موازی‌اند و در نتیجه $r_1 = r - \frac{1}{2}b \cos \theta$.

می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2(b/2)r \cos \theta + (b/2)^2}} \\ &= \frac{1}{r \sqrt{1 - (b/2r) \cos \theta + (b/2r)^2}} \end{aligned} \quad (48-2)$$

اگر $b \ll r$ ، می‌توانیم ریشه دوم را با یک بسط رشته تیلور تقریب بگیریم و تنها دو جمله اول را نگه داریم. در نتیجه

$$\frac{1}{r_1} \simeq \frac{1}{r} + \frac{b}{2r^2} \cos \theta \quad (49-2)$$

این تقریب معادل با این فرض است که r_1 و r_2 تقریباً موازی هستند (شکل ۱۱-۲ ب). به همین ترتیب:

$$\frac{1}{r_2} \simeq \frac{1}{r} - \frac{b}{2r^2} \cos \theta$$

پس رابطه ۴۷-۲ برای پتانسیل تبدیل می‌شود به

$$\Phi(r, \theta) \simeq qb \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (50-2)$$

حاصلضرب qb را گشتاور دوقطبی می‌نامند، و با p نشان می‌دهند:

$$p = qb \quad (۵۱-۲)$$

در نتیجه

$$\Phi(r, \theta) \simeq p \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (۵۲-۲)$$

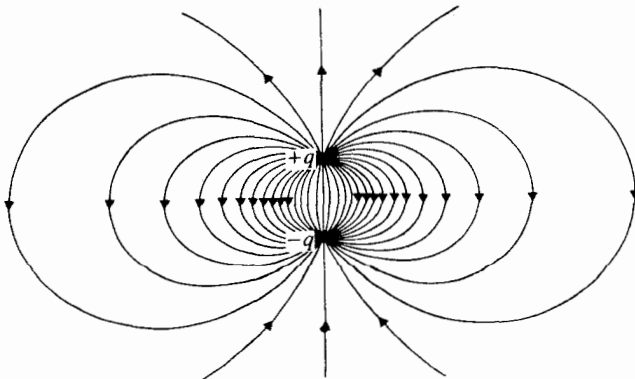
چون این معادله پتانسیل را به صورت تابعی از مختصات کروی بیان می‌کند، بهتر است مؤلفه‌های میدان الکتریکی را در این مختصات محاسبه کنیم. از محاسبه گرادیان Φ در مختصات کروی به دست می‌آوریم

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \simeq 2p \frac{\cos \theta}{r^3} \quad (۵۳-۲)$$

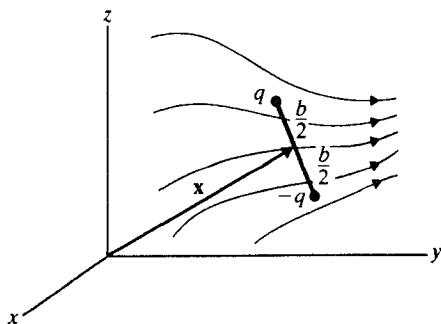
$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \simeq p \frac{\sin \theta}{r^3} \quad (۵۴-۲)$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = 0 \quad (۵۵-۲)$$

توجه کنید که شدت میدان الکتریکی دوقطبی با مکعب فاصله کاهش می‌یابد. این کاهش ناشی از حذف (جزئی) میدانهای الکتریکی دوبار مخالف است. شکل ۱۲-۲ خطوط میدان دوقطبی را نشان می‌دهد.



شکل ۱۲-۲ خطوط میدان یک دوقطبی آن‌طور که در دو بعد دیده می‌شود.



شکل ۲-۱۳ دوقطبی واقع در یک میدان الکتریکی خارجی اختیاری. جابه‌جایی از $-q$ به q برابر با b است.

با معادلات ۲-۵۳ تا ۲-۵۵، می‌توانیم نیرویی را که دوقطبی به یک بار یا توزیعی از بارهای واقع در میدان الکتریکی دوقطبی وارد می‌کند به دست آوریم. برعکس، یک بار یا توزیعی از بارهای میدان الکتریکی ایجاد می‌کند و اگر دوقطبی را در این میدان قرار دهیم برآن نیرو وارد می‌شود. می‌خواهیم این نیروی «خارجی» روی دوقطبی را که از یک میدان الکتریکی «خارجی» معین وارد شده است حساب کنیم. فرض می‌کنیم بارهای $\pm q$ مربوط به دوقطبی با یک قید مکانیکی در مکانهای ثابتی نسبت به هم قرار گرفته باشند به طوری که می‌توانیم دوقطبی را به‌عنوان یک جسم صلب با فاصله ثابت بین بارهای $\pm q$ در نظر بگیریم. اگر میدان الکتریکی خارجی یکنواخت باشد، نیروی وارد بر بار q نیروی وارد بر بار $-q$ را کاملاً خنثی می‌کند و هیچ نیروی خارجی بر دوقطبی وارد نمی‌شود. اما اگر این میدان الکتریکی یکنواخت نباشد نیرویی وجود خواهد داشت.

شکل ۲-۱۳ دوقطبی واقع در میدان الکتریکی اختیاری $E(x)$ را نشان می‌دهد. مرکز دوقطبی در نقطه x است. مؤلفه x نیروی وارد بر بار q برابر است با

$$qE_x\left(x + \frac{b}{\hat{y}}\right) \simeq qE_x(x) + q\frac{b}{\hat{y}} \cdot \nabla E_x(x) \quad (56-2)$$

همچنین، مؤلفه x نیروی وارد بر بار $-q$ برابر است با

$$-qE_x\left(x - \frac{b}{\hat{y}}\right) \simeq -qE_x(x) + q\frac{b}{\hat{y}} \cdot \nabla E_x(x) \quad (57-2)$$

مؤلفه x نیروی کل وارد بر دوقطبی برابر است با مجموع این مؤلفه‌ها:

$$F_x = q(b \cdot \nabla)E_x(x) \quad (58-2)$$

از روابط متناظری برای مؤلفه‌های دیگر نیرو نتیجه می‌گیریم که

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad (۵۹-۲)$$

اگر گشتاور دوقطبی را به صورت بردار

$$\mathbf{p} = q\mathbf{b} \quad (۶۰-۲)$$

در نظر بگیریم که جهت آن از بار منفی به بار مثبت است، می‌توانیم نیرو را به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad (۶۱-۲)$$

بنابه این معادله، یک دوقطبی هم‌جهت با میدان در جهت افزایش شدت میدان کشیده می‌شود درحالی‌که یک دوقطبی در خلاف جهت میدان در جهت مخالف کشیده می‌شود. این مطلب را می‌توان با توجه به نیروهای وارد بر بارها به آسانی درک کرد: اگر میدان الکتریکی ثابت نباشد نیروی وارد بر یکی از بارها بزرگتر از نیروی وارد بر دیگری است و نیروی وارد بر دوقطبی مخالف صفر است.

با همین روش می‌توانیم انرژی پتانسیل دوقطبی را که از مکان آن در میدان الکتریکی خارجی ناشی می‌شود محاسبه کنیم. اگر پتانسیل در مرکز دوقطبی $\Phi(\mathbf{x})$ باشد، انرژیهای پتانسیل بارهای $\pm q$ برابرند با $\pm q[\Phi(\mathbf{x}) \pm \frac{1}{4}\mathbf{b} \cdot \Delta\Phi] \simeq \pm q\Phi(\mathbf{x} \pm \mathbf{b}/2)$ و

$$\begin{aligned} U &= q\Phi\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{b}}{2}\right) - q\Phi\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{b}}{2}\right) \\ &\simeq q\Phi(\mathbf{x}) + q\frac{\mathbf{b}}{4} \cdot \nabla\Phi - q\Phi(\mathbf{x}) + q\frac{\mathbf{b}}{4} \cdot \nabla\Phi \end{aligned} \quad (۶۲-۲)$$

چون $\nabla\Phi = -\mathbf{E}$ ، رابطه بالا چنین می‌شود

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad (۶۳-۲)$$

توجه کنید که این انرژی پتانسیل انرژی «داخلی» دوقطبی یعنی انرژی بارها به علت مکانشان نسبت به هم را شامل نمی‌شود. انرژی داخلی در محاسبه نیروی خارجی وارد بر دوقطبی دخالت ندارد.

روشن است که می‌توانیم نیروی خارجی وارد بر دوقطبی را با گرادیان گرفتن از پتانسیل در معادله ۶۳-۲ به دست آوریم:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \nabla[\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})] \quad (۶۴-۲)$$

اگر چه این فرمول نیرو با فرمول قبلی ۶۱-۲ متفاوت به نظر می‌رسد، از هر دو فرمول نتیجه یکسانی برای نیرو به دست می‌آید.

تمرین ۶- اتحاد برداری

$$\mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}$$

را ثابت کنید و سپس با استفاده از $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ نشان دهید معادله‌های ۶۱-۲ و ۶۴-۲ یکی هستند.

علاوه بر این نیروی انتقالی، میدان الکتریکی خارجی گشتاور نیروی چرخشی نیز بر دوقطبی وارد می‌کند. به آسانی می‌توان نشان داد این گشتاور نیرو برابر است با

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (۶۵-۲)$$

که در آن از نایکنواختی \mathbf{E} ، اگر هم وجود داشته باشد، صرف‌نظر شده است. رابطه بالا را می‌توان با مشتق گرفتن از انرژی پتانسیل ۶۳-۲ نسبت به زاویه بین امتداد دوقطبی و میدان الکتریکی نیز به دست آورد.

تمرین ۷- تحقیق کنید با مشتق‌گیری از معادله ۶۳-۲ گشتاور نیرویی به دست می‌آید که بزرگی و راستای آن با معادله ۶۵-۲ مشخص می‌شود. [راهنمایی: معادله ۶۳-۲ را به صورت $U = -pE \cos \alpha$ بنویسید.]

۵-۲ قضیه مقدار میانگین

در بخش قبلی دیدیم پتانسیل الکتروستاتیک در هر ناحیه آزاد از بار از معادله لاپلاس $\nabla^2 \Phi = 0$ پیروی می‌کند. قضیه زیر برای هر تابعی که در این معادله صدق کند معتبر است.

قضیه مقدار میانگین: اگر S سطح یک کره باشد که درون آن باری وجود ندارد، پتانسیل در مرکز برابر است با پتانسیل متوسط روی سطح S .

برای اثبات این قضیه، کره‌ای به شعاع r در نظر می‌گیریم. متوسط Φ روی S برابر است با

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \Phi \, dS = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \Phi r^2 \, d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_S \Phi \, d\Omega \quad (۶۶-۲)$$

که در آن زاویه فضایی مربوط به dS است. داریم

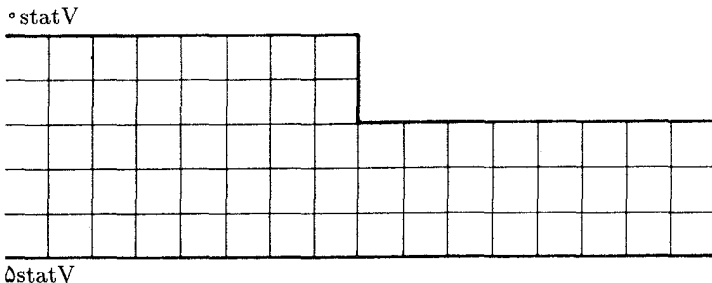
$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \Phi}{\partial r} d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int \nabla \Phi \cdot \hat{n} d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int \nabla \Phi \cdot d\mathbf{S}\end{aligned}\quad (۶۷-۲)$$

بنابه قضیه گاوس، آخرین عبارت برابر است با

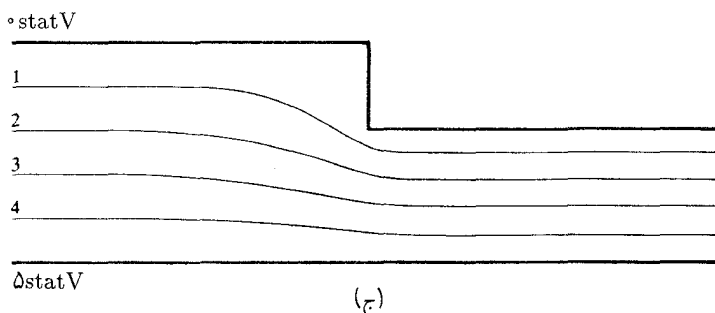
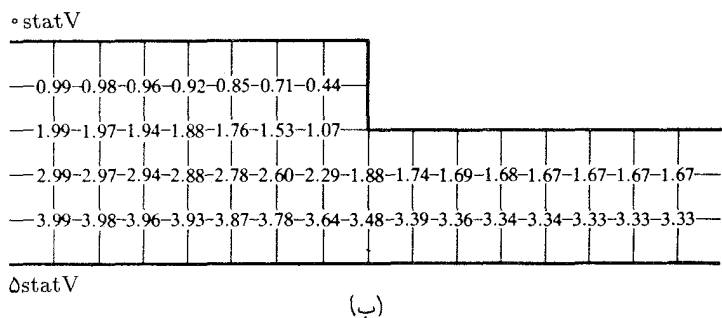
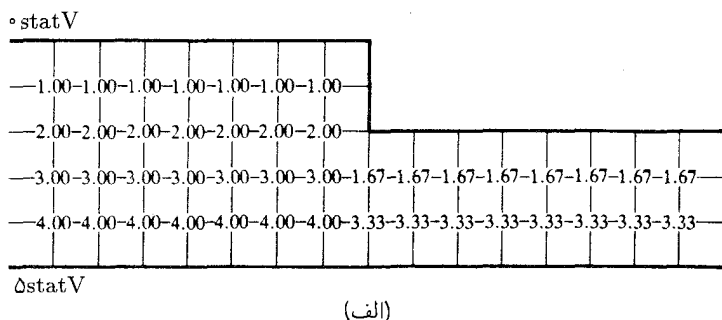
$$\frac{1}{4\pi r^2} \int \nabla \cdot \nabla \Phi dV \quad (۶۸-۲)$$

اما در یک ناحیه خالی از بار $\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = 0$ ؛ در نتیجه $\partial \bar{\Phi} / \partial r = 0$. بنابراین، $\bar{\Phi}$ مستقل از r است. پس کره بسیار کوچکی به شعاع $r \rightarrow 0$ انتخاب می‌کنیم. روشن است که در این مورد $\bar{\Phi} = \Phi_{\text{مرکز}}$ ، و قضیه اثبات می‌شود.

این قضیه کاربرد عملی مهمی در روش واهلش برای حل عددی معادله لاپلاس دارد. در این روش، بر مبنای قضیه مقدار میانگین، جواب را با تقریبهای متوالی با شروع از یک حدس به عنوان تقریب اول به دست می‌آوریم. به جای ارائه دستورالعملی کلی، این روش را با یک مثال توضیح می‌دهیم. شکل ۲-۱۴ یک جفت صفحه رسانای بزرگ موازی را نشان می‌دهد که یکی از آنها دارای پله است. فرض کنید این صفحه‌ها سطوح هم‌پتانسیل هستند؛ پتانسیل صفحه پایینی صفر و پتانسیل صفحه بالایی ۵ ایستاولت است. می‌خواهیم پتانسیل در فضای بین دو صفحه را به دست آوریم. برای به‌کار بردن روشهای عددی در مورد این مسئله، باید فضای بین صفحه‌ها را با مجموعه گسسته‌ای از نقاط نمایش دهیم. شکل ۲-۱۴ یک شبکه مختصاتی را که روی صفحه‌ها قرار گرفته است نشان می‌دهد. هدف ما یافتن مقادیر تقریبی پتانسیل در نقاط تقاطعی این شبکه است.



شکل ۲-۱۴ دو صفحه رسانای بزرگ موازی که یکی از آنها دارای پله است. پتانسیل صفحه پایینی ۰ statV و پتانسیل صفحه بالایی ۵ statV است. شبکه مختصاتی از مربعهای هم‌اندازه تشکیل شده است.



شکل ۲-۱۵ (الف) تقریب اول برای پتانسیل در فضای بین دو صفحه. (ب) تقریب پانزدهم. این مقادیر تا دو رقم اعشاری باهم سازگار هستند. (ج) همپتانسیلها، که از درون یابی مقادیر مربوط به قسمت (ب) به دست آمده‌اند.

توجه کنید که شبکه دو بعدی است. از بعد سوم (خارج از صفحه شکل) می‌توان صرف نظر کرد زیرا پتانسیل در تمام نقاط زیر و بالای صفحه با پتانسیل در نقاط نشان داده شده در شکل برابر است. پتانسیل در نقاط شبکه را از راه تقریبات متوالی به دست می‌آوریم: از یک حدس معقول برای پتانسیل شروع می‌کنیم. چون پتانسیل بین دو صفحه تخت باید به صورت تابعی خطی از مکان از °

به ۵ ایستاولت افزایش یابد، مقادیر نشان داده شده در شکل ۲-۱۵ (الف) یک تقریب اول معقول برای پتانسیل است. برای به دست آوردن تقریب دوم، از قضیه مقدار میانگین استفاده می‌کنیم. بنا به این قضیه، پتانسیل در هر نقطه‌ای برابر است با میانگین پتانسیل‌های تمام نقاطی که به فاصله مساوی از نقطه مفروض قرار دارند. در نقاط شبکه، این میانگین را می‌توان با میانگین روی چهار نقطه مجاور تقریب گرفت. بنابراین، به جای پتانسیل در هر نقطه میانگین پتانسیل‌های چهار نقطه مجاور را قرار می‌دهیم و یک تقریب دوم به دست می‌آوریم. سپس با تکرار این روند تقریب‌های سوم، چهارم و غیره را به دست می‌آوریم.

از این روند تکراری پس از چند مرحله متوالی مقادیر «واهلیده» مناسبی برای پتانسیل به دست می‌آیند، یعنی مقادیری که از یک مرحله به مرحله بعد به طور قابل ملاحظه‌ای تغییر نمی‌کنند (شکل ۲-۱۵ ب). این مقادیر یک جواب تقریبی برای مسئله تشکیل می‌دهند. سطوح هم‌پتانسیل را می‌توان با درون‌یابی مقادیر پتانسیل به دست آورد (شکل ۲-۱۵ ج). مؤلفه‌های میدان الکتریکی از محاسبه عددی مشتق‌های پتانسیل در راستاهای افقی و عمودی به دست می‌آیند.

برای واریسی این تقریبگیری، می‌توانیم محاسبه را با شبکه ریزتری تکرار کنیم. این کار پر زحمت است، اما برای این روش می‌توان از کامپیوتر استفاده کرد. همچنین، اگر برای هندسه مسئله مناسبتر باشد می‌توانیم این روش را برای شبکه‌های مختصاتی استوانه‌ای و کروی به کار ببریم [۷].

مراجع

1. H. F. Dylla and J. G. King, *Phys. Rev. A* **7**, 1224 (1973); M. Marinelli and G. Mopurgo, *Phys. Lett. B* **137**, 439 (1984).
2. S. J. Plimpton and W. E. Lawton, *Phys. Rev.* **50**, 1066 (1936); E. R. Williams, J. E. Faller, and H. A. Hill, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 721 (1971).
3. For a general review of limits that can be set on κ by magnetic and electromagnetic methods, see A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **43**, 277 (1971); see also Williams et al., ref. 2.
4. L. Davis, A. S. Goldhaber, and M. M. Nieto, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 567 (1968); *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1402 (1975).
5. G. V. Chibisov, *Sov. Phys. Usp.* **19**, 624 (1976).
6. J. H. Jeans, *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism* (University Press, Cambridge, 1920), p. 168.
7. M. DiStasio and W. C. McHarris, *Am. J. Phys.* **47**, 5 (1979).

مسائل

۱-۲ نسبت بزرگی نیروهای الکتریکی و گرانشی بین یک الکترون و یک پروتون را که به فاصله معینی از هم قرار دارند محاسبه کنید.

۲-۲ فرض کنید پتانسیل یک بار نقطه‌ای پتانسیل کولن نباشد بلکه پتانسیل یوکاوا باشد:

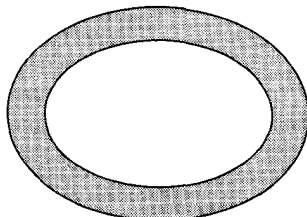
$$\Phi = \frac{qe^{-\kappa r}}{r}$$

میدان الکتریکی $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ را به دست آورید. آیا قانون گاوس برای این میدان الکتریکی معتبر است؟ آیا $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ؟

۳-۲ هسته اورانیم شعاعی برابر با $10^{-12} \times 7r_4$ cm دارد و بار آن $92e$ است که به طور یکنواخت در حجمش توزیع شده است. (الف) میدان الکتریکی را در سطح هسته و در مرکز هسته به دست آورید. جواب را برحسب ایستاولت برسانیمتر و ولت بر متر تعیین کنید. (ب) پتانسیل را در سطح هسته و در مرکز هسته به دست آورید. جواب را برحسب ایستاولت و ولت تعیین کنید.

۴-۲ دو میله باریک یکسان پلاستیکی هر یک به طول L و بار Q که به طور یکنواخت در طول هر میله توزیع شده است طوری در یک امتداد قرار گرفته‌اند که فاصله دو سر نزدیک آنها برابر با d است. نیروی الکتریکی دافعه‌ای را که هر میله به دیگری وارد می‌کند محاسبه کنید.

۵-۲ پوسته بیضیوار کلفتی را در نظر بگیرید (شکل ۲-۱۶). این پوسته دارای توزیع باری با چگالی یکنواخت است. قضیه نیوتن را ثابت کنید: نیروی وارد بر بار نقطه‌ای واقع در هر جایی از فضای خالی داخل پوسته صفر است. [راهنمایی: یک پوسته بیضیوار نازک انتخاب کنید. مخروط دوگانه باریکی که رأس آن روی بار نقطه‌ای واقع است در نظر بگیرید و نشان دهید نیروهایی که از طرف بارهای واقع در ناحیه‌های مشترک این مخروط و پوسته بیضیوار نازک بر بار نقطه‌ای وارد می‌شوند یکدیگر را خنثی می‌کنند.]



شکل ۲-۱۶ یک پوسته بیضیوار.

۶-۲ یک تسمه دایره‌ای به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 دارای چگالی بار سطحی یکنواخت σ است. میدان الکتریکی را روی محور تسمه در فاصله z از مرکز به دست آورید.

۷-۲ دو میلهٔ باریک بسیار دراز یکی روی محور x از $x = 0$ تا $x = \infty$ و دیگری روی محور y از $y = 0$ تا $y = \infty$ قرار گرفته‌اند. هر دو میله دارای چگالی بار خطی یکنواخت λ هستند. میدان الکتریکی را در ربع اول صفحهٔ xy به دست آورید.

۸-۲ در الگوی کلاسیک تامسون، اتم تشکیل شده است از بار مثبت به صورت ابری که داخل آن الکترونها منفی توسط نیروهای الکتریکی در مکانهای تعادل خود نگه داشته شده‌اند. فرض کنید در اتم هیدروژن ابر بار مثبت e در کره‌ای به شعاع 5Å در مرکز قرار گرفته‌اند. به طور یکنواخت توزیع شده است و مکان تعادل الکترون در مرکز است. بسامد نوسانهای کوچک الکترون حول این مکان تعادل را تعیین کنید.

۹-۲ بنابه الگوی تامسون (مسئلهٔ ۸-۲)، اتم هلیوم تشکیل شده است از بار مثبت $2e$ که در کره‌ای به طور یکنواخت توزیع شده است. فرض کنید شعاع این کره 5Å است و دو الکترون هلیوم نسبت به مرکز به طور متقارن قرار گرفته‌اند. (الف) فاصلهٔ تعادلی الکترونها را به دست آورید. (ب) بسامد نوسانهای کوچک الکترونها در راستای شعاعی را محاسبه کنید. فرض کنید الکترونها در یک فاز (با جابه‌جاییهای مساوی) حرکت می‌کنند. (ج) قسمت (ب) را با این فرض تکرار کنید که الکترونها در فاز مخالف (با جابه‌جاییهای مخالف) حرکت می‌کنند.

۱۰-۲ اگر بار نقطه‌ای q به جرم m با سرعت زیاد v از کنار بار نقطه‌ای ساکن q' عبور کند، می‌توان تأثیر نیروی الکتریکی را به صورت یک تکان عرضی توصیف کرد که یک انحراف عرضی (کوچک) در راستای حرکت ایجاد می‌کند. در تقریب اول، می‌توانیم از این انحراف صرف‌نظر کنیم؛ و می‌توانیم فرض کنیم بار نقطه‌ای q تقریباً در امتداد یک خط راست مثلاً محور x حرکت می‌کند. بار نقطه‌ای ساکن q' را روی محور y در $y = -b$ بگیرید. تکان عرضی q برابر است با

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_y dt = \frac{q}{v} \int_{-\infty}^{\infty} E_y dx$$

که در آن E_y میدان الکتریکی مربوط به q' است. با استفاده از قانون گاوس، انتگرال $\int E_y dx$ را حساب کنید، و نشان دهید تکان عرضی برابر است با $2qq'/vb$. از اینجا نتیجه بگیرید که انحراف زاویه‌ای عرضی تقریباً $2qq'/mv^2b$ است. این انحراف زاویه‌ای را برای یک ذرهٔ آلفا با انرژی 6 MeV که از کنار هستهٔ سرب با ضریب برخورد $10^{-1} \times 10^8 \text{ cm}$ عبور می‌کند محاسبه کنید.

۱۱-۲ در یک ناحیه از فضا میدان الکتریکی موازی با محور x است؛ یعنی $E_x \neq 0$ ، $E_y = 0$ و $E_z = 0$. نشان دهید در این ناحیه میدان الکتریکی مستقل از y و z است. ثابت کنید اگر در این ناحیه چگالی بار وجود نداشته باشد، میدان الکتریکی از x نیز مستقل است.

۱۲-۲ فرض کنید فضای (نامتناهی) بین صفحه‌های $x = +D$ و $x = -D$ از یک توزیع بار یکنواخت با چگالی ρ پر شده است. (الف) میدان الکتریکی را در ناحیه‌های $-D < x < +D$

۱۳-۲ $x \leq -D$ و $x \geq +D$ به دست آورید. (ب) اختلاف پتانسیل بین نقاط $x = -D$ و $x = +D$ را محاسبه کنید.

۱۳-۲ کره‌ای به شعاع R دارای بار Q است که در حجم آن به طور یکنواخت توزیع شده است. از داخل این کره کره‌ای به شعاع R' در می‌آوریم. محفظه‌ی کروی ایجاد شده با کره هم‌مرکز نیست. نشان دهید میدان الکتریکی در محفظه ثابت است، و بزرگی این میدان الکتریکی را به دست آورید.

۱۴-۲ یک استوانه بسیار دراز به شعاع R دارای باری است که به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است. مقدار بار در واحد طول استوانه برابر با λ است. از این استوانه استوانه‌ای به شعاع R' در می‌آوریم به طوری که محورهای آنها با هم موازی‌اند. میدان الکتریکی را در محفظه ایجاد شده به دست آورید.

۱۵-۲ یک میله بسیار دراز شیشه‌ای به شعاع R_1 با یک پوسته نازک شیشه‌ای استوانه‌ای هم‌محور به شعاع R_2 احاطه شده است. بار مثبت به طور یکنواخت در حجم میله و روی پوسته توزیع شده است؛ مقدار بار واحد طول میله و پوسته $\pm \lambda$ است. اختلاف پتانسیل بین پوسته و مرکز میله را محاسبه کنید.

۱۶-۲ بار Q به طور یکنواخت روی یک میله پلاستیکی باریک به طول L توزیع شده است. میله روی محور x از $x = -L/2$ تا $x = +L/2$ قرار گرفته است. (الف) پتانسیل را در فضای اطراف میله به دست آورید. (ب) نشان دهید سطوح هم‌پتانسیل بیضیوارهای دورانی هستند که کانونهای آنها منطبق بر دو سر میله‌اند.

۱۷-۲ سه میله شیشه‌ای باریک به طول L تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع داده‌اند. هر میله حامل بار Q است که به طور یکنواخت در طول آن توزیع شده است. میدان الکتریکی و پتانسیل را روی خط عمود بر مثلث که از مرکز آن می‌گذرد به صورت تابعی از فاصله به دست آورید.

۱۸-۲ یک لوله مقوایی به شعاع R و طول L دارای بار Q است که به طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است. میدان الکتریکی و پتانسیل را در نقطه‌ای روی محور لوله به فاصله d از مرکز به دست آورید.

۱۹-۲ مقدار بار Q در یک حجم استوانه‌ای به شعاع R و طول L به طور یکنواخت توزیع شده است. میدان الکتریکی و پتانسیل را در نقطه‌ای روی محور استوانه به فاصله d از مرکز حساب کنید.

۲۰-۲ یک توزیع بار متقارن کروی دارای چگالی $\rho = kr^n$ است که در آن k ثابت است و $n > -3$. (الف) میدان الکتریکی را به صورت تابعی از r تعیین کنید. (ب) اختلاف پتانسیل بین نقاط $r = a$ و $r = b$ را به دست آورید.

۲۱-۲ فرض کنید پتانسیل در ناحیه‌ای از رابطه

$$\Phi(x, y, z) = ax^2 + by^2$$

تعیین می‌شود. چگالی بار را در این ناحیه به دست آورید.

۲۲-۲ دوقطبی شکل ۱۱-۲ (الف) را در نظر بگیرید. بدون فرض $b \gg r$ ، پتانسیل دقیق و میدان الکتریکی دقیق را در یک نقطه اختیاری حساب کنید. جواب را در مختصات کروی بیان کنید.

۲۳-۲ معادله خطوط میدان شکل ۱۲-۲ را به دست آورید. [راهنمایی: در امتداد هر خط میدان داریم $.E_r/E_\theta = dr/d\theta$]

۲۴-۲ یک دوقطبی از بارهای (بدون جرم) $+q$ و $-q$ متصل به دو سر میله باریک یکنواختی به طول b و جرم m تشکیل شده است. این دوقطبی را در یک میدان الکتریکی یکنواخت \mathbf{E} می‌گذاریم. بسامد نوسانهای کوچک دورانی این دوقطبی حول مرکز جرمش را تعیین کنید.

۲۵-۲ (الف) با استفاده از معادله ۶۱-۲ نیرویی را که بار نقطه‌ای q' بر یک دوقطبی با گشتاور p وارد می‌کند به دست آورید. فرض کنید بار نقطه‌ای در مکان r و θ است و دوقطبی در مبدأ در امتداد محور z قرار گرفته است. (ب) با استفاده از معادله‌های ۵۳-۲ و ۵۴-۲ نیرویی را که دوقطبی بر بار نقطه‌ای وارد می‌کند حساب کنید. آیا نتایج به دست آمده با قانون سوم نیوتون توافق دارند؟

۲۶-۲ گشتاور نیرویی را که بار نقطه‌ای q' بر یک دوقطبی با گشتاور p وارد می‌کند به دست آورید. فرض کنید بار نقطه‌ای در مکان r و θ است و دوقطبی در مبدأ در امتداد محور z قرار دارد. ابتدا، گشتاور نیرو را نسبت به مرکز دوقطبی حساب کنید. سپس گشتاور نیرو را نسبت به بار نقطه‌ای به دست آورید.

۲۷-۲ یک چارقطبی الکتریکی تشکیل شده است از سه بار نقطه‌ای که روی محور z قرار گرفته‌اند: بار $+q$ در $z = b$ ، بار $-2q$ در $z = 0$ و بار $+q$ در $z = -b$. نشان دهید پتانسیل به‌ازای $b \gg r$ تقریباً برابر است با

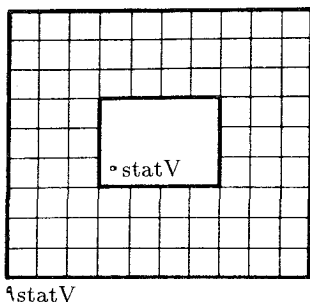
$$\Phi(r, \theta) = \frac{2qb^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}$$

میدان الکتریکی را به صورت تابعی از مختصات کروی r ، θ و ϕ به دست آورید. [راهنمایی: در بسط رشته تیلور معادله ۴۸-۲ جمله‌های تا مرتبه $1/r^2$ را نگاه دارید.]

۲۸-۲ یک توزیع بار کروی را در میدان الکتریکی معینی که توسط بارهای خارج از توزیع کروی ایجاد شده است می‌گذاریم. ثابت کنید نیروی وارد بر توزیع کروی را می‌توان ناشی از تمرکز تمام بار در مرکز توزیع فرض کرد. [راهنمایی: از قضیه مقدار میانگین استفاده کنید].

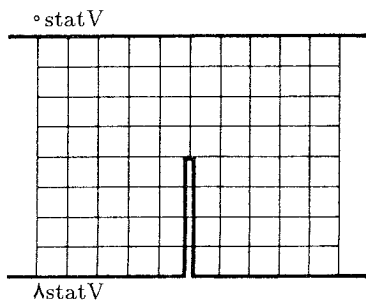
۲۹-۲ (الف) خطوط میدان مربوط به شکل ۱۵-۲ (ب) را رسم کنید. (ب) با مشتق‌گیری عددی از مقادیر پتانسیل در شکل ۱۵-۲ (ب)، مؤلفه‌های میدان الکتریکی E_x و E_y را در نقاط شبکه به دست آورید. فرض کنید مربعهای شبکه $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ هستند.

۳۰-۲ دو لوله هم‌محور دراز از ورق فلز دارای مقطع مستطیلی هستند (شکل ۱۷-۲). مستطیل خارجی در پتانسیل 9 statV و مستطیل داخلی در پتانسیل صفر است. با استفاده از روش عددی واهلس، پتانسیل در نقاط شبکه شکل ۱۷-۲ (تا سه رقم اعشاری) به دست آورید.



شکل ۱۷-۲ مقطع دو لوله مستطیلی هم‌محور.

۳۱-۲ دو صفحه رسانای بزرگ موازی در نظر بگیرید که یکی در پتانسیل صفر است و دیگری که یک خرپشته قائم باریک دارد در پتانسیل 8 statV است (شکل ۱۸-۲). با استفاده از روش عددی

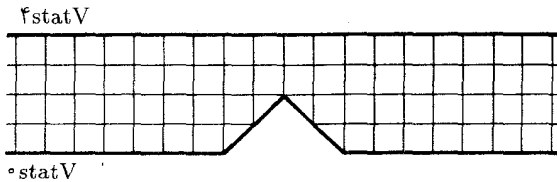


شکل ۱۸-۲ دو صفحه رسانای موازی بزرگ، با خرپشته‌ای در صفحه پایین.

واهلش پتانسیل در نقاط شبکه را دست کم تا دو رقم اعشاری به دست آورید. هم پتانسیلها را به طور تقریبی رسم کنید (خطوط میدان را با ترسیم مسیرهای عمود بر هم پتانسیلها به طور تقریبی بکشید).

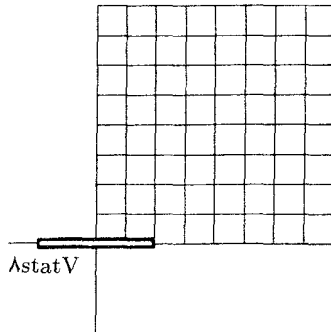
۲-۳۲ با استفاده از یک شبکه مختصاتی که فاصله خطهای آن نصف فاصله خطهای شبکه شکل ۲-۱۴ است، محاسبه عددی پتانسیل را برای این شکل تکرار کنید. نتیجه به دست آمده را با نتیجه قبلی مقایسه کنید.

۲-۳۳ دو صفحه رسانای موازی بزرگ به ترتیب در پتانسیل صفر و 4statV هستند. یکی از این صفحه‌ها دارای یک برجستگی مثلثی است (شکل ۲-۱۹). مقادیر پتانسیل در نقاط شبکه مربوط را تا دو رقم اعشاری به دست آورید.



شکل ۲-۱۹ دو صفحه رسانای موازی بزرگ، با یک برجستگی در صفحه پایین.

۲-۳۴ یک نوار رسانای دراز در فضای خالی در پتانسیل 8statV است. شکل ۲-۲۰ مقطع این نوار و یک شبکه در مجاورت آن را نشان می‌دهد. مقادیر پتانسیل در نقاط شبکه را تا دو رقم اعشاری به دست آورید.



شکل ۲-۲۰ مقطع یک نوار رسانای دراز.

مسئله مقدار مرزی

حل مسئله یافتن میدان الکتریکی یک توزیع بار معین چیزی جز یک جمع یا یک انتگرال روی میدانهای الکتریکی تک تک تمام بارها نیست (معادله‌های ۲-۱۷ و ۲-۱۸). بنابراین، حل این نوع مسئله تمرینی است کم اهمیت، و احتمالاً خسته‌کننده، برای جمع زدن یا انتگرال گرفتن. اما، در بسیاری از مسائل الکتروستاتیک توزیع بار از قبل کاملاً مشخص نیست. در عوض، در این مسائل پتانسیل روی بعضی سطوح رسانا معلوم است و پتانسیلها و میدانهای الکتریکی در فضاهای اطراف این سطوح را باید به دست آورد.

در عمل، این نوع مسئله وقتی پیش می‌آید که اجسام رسانا را به باتری یا منبع نیروی الکتروموتوری دیگری که اختلاف پتانسیل معینی بین این اجسام برقرار می‌کند وصل کنیم. به عنوان مثال، ممکن است صفحه‌های یک خازن را به باتری وصل کنیم و سپس بخواهیم پتانسیل و میدان الکتریکی در فضای بین صفحه‌ها را تعیین کنیم. اگر این صفحه‌ها شکل پیچیده‌ای داشته باشند حل مسئله کاملاً مشکل است. به علاوه، ممکن است بارهایی نیز در فضای بین صفحه‌ها واقع باشند، که این باعث می‌شود مسئله مشکلتر شود.

این نوع مسئله یک مسئله مقدار مرزی است، که عبارت است از محاسبه پتانسیل و میدان الکتریکی در یک ناحیه معین فضا با استفاده از مقادیر معلوم پتانسیل (یا میدان الکتریکی) در مرزهای این ناحیه و مقادیر معلوم بار الکتریکی در ناحیه.

۱-۳ قضیه یکتایی

مسئله مقدار مرزی را می‌توانیم به زبان ریاضی به‌گونه زیر بیان کنیم: فرض کنید ناحیه‌ای مانند V با چگالی بار معین $\rho(\mathbf{x})$ داریم. فرض کنید این ناحیه مرزی مانند سطح S دارد (لازم نیست این سطح یک سطح همبند باشد؛ شکل ۱-۳)، می‌خواهیم معادله پواسون زیر را در ناحیه V حل کنیم:

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho \quad (1-3)$$

این معادله دیفرانسیل جوابهای متعددی دارد. برای مشخص کردن جواب مقتضی با مسئله بالا، باید شرایط مرزی را که Φ روی سطح S برآورده می‌کند در نظر بگیریم. یک شرط مرزی ممکن شرط دیریکله است:

$$\Phi(\mathbf{x}) \text{ روی } S \text{ تعیین شده است} \quad (2-3)$$

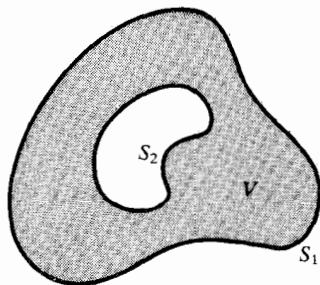
یک شرط ممکن دیگر شرط نویمان است:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} \text{ روی } S \text{ تعیین شده است} \quad (3-3)$$

در آن $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Phi$ مؤلفه \mathbf{E} عمود بر S است.

اکنون قضیه‌ای را اثبات می‌کنیم که تضمین می‌کند از هر یک از این دو شرط مرزی جوابی یکتا برای میدان الکتریکی به دست می‌آید.

قضیه یکتایی: اگر Φ_1 و Φ_2 دو جواب معادله پواسون با چگالی بار یکسان و شرایط مرزی یکسان باشند، آنگاه اختلاف این دو جواب حداکثر به اندازه یک ثابت جمعی است.



شکل ۱-۳ مثالی از یک ناحیه V که مرز آن از دو سطح جدای S_1 و S_2 تشکیل شده است.

برای اثبات این قضیه، ψ را به عنوان تفاضل Φ_2 و Φ_1 تعریف می‌کنیم:

$$\psi \equiv \Phi_2 - \Phi_1 \quad (4-3)$$

و ملاحظه می‌کنیم که

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 \Phi_2 - \nabla^2 \Phi_1 = -4\pi\rho + 4\pi\rho = 0 \quad (5-3)$$

در نتیجه

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \psi) = (\nabla \psi)^2 + \psi \nabla^2 \psi = (\nabla \psi)^2 \quad (6-3)$$

اگر از معادله ۶-۳ روی حجم V انتگرال بگیریم و قضیه گاوس را به کار ببریم، به دست می‌آوریم

$$\int (\nabla \psi)^2 dV = \int \nabla \cdot (\psi \nabla \psi) dV = \int \hat{n} \cdot (\psi \nabla \psi) dS \quad (7-3)$$

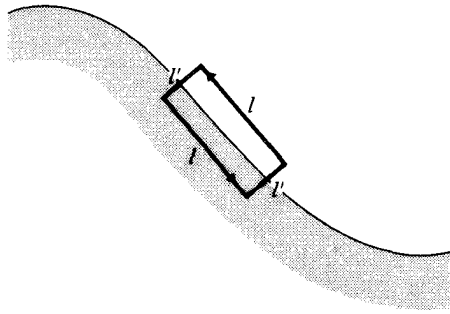
به ازای شرط مرزی دیریکله، روی S داریم $\psi = 0$ ؛ به ازای شرط مرزی نویمان، روی S داریم $\hat{n} \cdot \nabla \psi = 0$. در هر دو مورد، انتگرال سطحی در معادله ۷-۳ صفر می‌شود، و بنابراین

$$\int (\nabla \psi)^2 dV = 0 \quad (8-3)$$

اما این غیرممکن است مگر اینکه همه جا $\nabla \psi = 0$. نتیجه می‌گیریم که ψ در تمام ناحیه V مقداری ثابت است، همچنان‌که می‌خواستیم نشان دهیم.

در مورد شرایط مرزی دیریکله، می‌توانیم یک گام جلوتر برویم و نتیجه بگیریم که، چون اختلاف بین Φ_2 و Φ_1 روی مرز صفر می‌شود، باید همه جا این اختلاف صفر شود؛ بنابراین پتانسیل‌های Φ_2 و Φ_1 دقیقاً مساوی خواهند بود. در مورد شرایط مرزی نویمان، نمی‌توانیم اختلاف ثابتی بین Φ_2 و Φ_1 وضع کنیم، اما این امر در یکتایی فیزیکی جواب تأثیری ندارد چون میدانهای الکتریکی $-\nabla\Phi_2$ و $-\nabla\Phi_1$ دقیقاً یکسان خواهند بود.

در عمل، بهترین راه برای ایجاد شرایط مرزی این است که سطوح رسانا با شکل مناسب را به منابعی وصل کنیم که پتانسیل‌های مورد نظر را تولید می‌کنند. فلزات و سایر مواد رسانای همگن دارای این ویژگی متمایز هستند که تحت شرایط تعادل استاتیک تمام نقاطشان در یک پتانسیل‌اند، یعنی میدان الکتریکی در درون آنها همه جا صفر است. دلیل این امر را به آسانی می‌توان درک کرد. در یک فلز، بخش زیادی از الکترون‌ها آزاد هستند، بدین معنی که به اتم خاصی مقید نیستند



شکل ۲-۳ مسیر انتگرال‌گیری برای معادله ۹-۳. نیمی از مسیر داخل رسانا و نیمی خارج آن است.

و می‌توانند داخل فلز حرکت کنند. اگر پتانسیل یکنواخت نباشد، این الکترون‌ها به طرف ناحیه‌هایی حرکت می‌کنند که پتانسیل بیشتر است و تجمع الکترون‌ها که بار منفی دارند پتانسیل را کاهش می‌دهد. تعادل موقعی به وجود می‌آید که تمام ناحیه‌ها در یک پتانسیل باشند و میدان الکتریکی همه جا صفر باشد.^۱

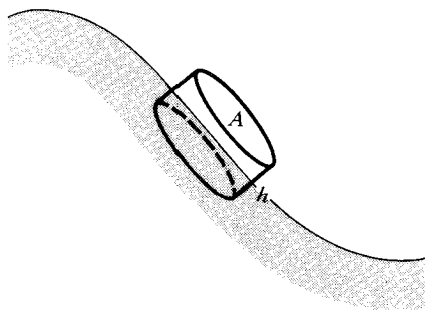
درباره میدان الکتریکی در مجاورت سطح رسانا نیز می‌توان بحث کرد: در سطح یک رسانا، میدان الکتریکی باید بر این سطح عمود باشد. این مطلب روشن است زیرا سطح رسانا یک سطح هم‌پتانسیل است و بنابراین $\nabla\Phi$ الزاماً بر سطح $\Phi = \text{const}$ عمود است.

راه دیگری برای رسیدن به این نتیجه این است که میدانهای الکتریکی داخل و خارج رسانا را باهم مقایسه کنیم. چون تاو میدان الکتریکی صفر است، انتگرال خطی \mathbf{E} روی هر مسیر بسته‌ای صفر است:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (9-3)$$

طرف چپ این رابطه را حول یک مسیر مستطیلی کوچک به ابعاد $l \times l'$ که نیمی از آن در خارج رسانا و نیمی در داخل آن است (شکل ۲-۳) حساب می‌کنیم. در حد $l' \rightarrow 0$ می‌توانیم از سهم مربوط به اضلاع کوچک صرف‌نظر کنیم. با توجه به اینکه میدان الکتریکی درونی صفر است،

۱. باید به خاطر داشته باشیم که وقتی دو فلز مختلف را به هم وصل می‌کنیم، پتانسیل در هر دو دقیقاً یکسان نیست؛ یک اختلاف پتانسیل تماس، نوعاً به مقدار $1/2$ تا 1 ولت، وجود دارد. علت این اختلاف پتانسیل این است: الکترون‌های «آزاد» در یک فلز در قید این فلز هستند؛ آزادی آنها تنها محدود به خود فلز است. اگر دو فلز مختلف را به هم وصل کنیم، فلزی که نیروی بستگی بیشتری دارد الکترون‌هایی را از فلز دیگر می‌گیرد؛ تجمع بار منجر به اختلاف پتانسیل می‌شود. معمولاً از این پتانسیل تماس صرف‌نظر می‌شود.



شکل ۳-۳ سطح انتگرال‌گیری برای معادله ۳-۱۱. نیمی از سطح داخل رسانا و نیمی خارج آن است.

به دست می‌آوریم

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = lE_{||}^{\text{بیرونی}} - lE_{||}^{\text{درونی}} = lE_{||}^{\text{بیرونی}} \quad (۱۰-۳)$$

که در آن $E_{||}$ مؤلفه \mathbf{E} موازی با ضلع بزرگ را نشان می‌دهد. چون انتگرال خطی صفر است، از معادله ۳-۱۰ نتیجه می‌گیریم که مؤلفه $E_{||}^{\text{بیرونی}}$ موازی با سطح برابر با صفر است، یعنی تنها مؤلفه عمودی میدان الکتریکی می‌تواند وجود داشته باشد.

بزرگی مؤلفه عمودی میدان الکتریکی روی رسانا را می‌توان به چگالی بار سطحی مربوط کرد. متذکر می‌شویم که چگالی بار حجمی در رسانا نمی‌تواند وجود داشته باشد. این مطلب از معادله ۲-۲۴ نتیجه می‌شود: اگر در ناحیه‌ای $\mathbf{E} = 0$ ، آنگاه در این ناحیه الزاماً $\rho = 0$ پس، اگر رسانا بار داشته باشد، این بار تنها باید روی سطح واقع باشد. چگالی بار سطحی σ را به صورت مقدار بار در واحد سطح تعریف می‌کنیم؛ چگالی بار سطحی تابعی است از مکان در امتداد سطح. اکنون، انتگرال سطحی

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

را روی سطح یک استوانه کوچک با قاعده A و ارتفاع h که نیمی از آن داخل رسانا و نیمی خارج از آن است (شکل ۳-۳) حساب می‌کنیم. در حد $h \rightarrow 0$ ، می‌توانیم از سهم مربوط به سطح جانبی صرف‌نظر کنیم. با توجه به اینکه میدان الکتریکی درونی صفر است، به دست می‌آوریم

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = AE_{\perp}^{\text{بیرونی}} - AE_{\perp}^{\text{درونی}} = AE_{\perp}^{\text{بیرونی}} \quad (۱۱-۳)$$

که در آن E_{\perp} مؤلفه E عمود بر سطح را نشان می‌دهد (E_{\perp} مثبت است اگر هم جهت با عمود برونسو باشد). اما بنابه قانون گاوس داریم

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q = 4\pi\sigma A \quad (۱۲-۳)$$

مقایسه معادله‌های ۱۱-۳ و ۱۲-۳ نشان می‌دهد که

$$E_{\perp \text{ بیرونی}} = 4\pi\sigma \quad (۱۳-۳)$$

پس، بزرگی میدان الکتریکی روی رسانا متناسب است با چگالی بار سطحی موضعی رسانا. در ارتباط با معادله ۱۳-۳ سؤال جالبی مطرح می‌شود: میدان الکتریکی چه نیروی بر بار سطحی وارد می‌کند؟ در نظر اول، ممکن است فکر کنیم نیرو در واحد سطح برابر است با $E_{\perp \text{ بیرونی}} = 4\pi\sigma$. اما این اشتباه است، زیرا $E_{\perp \text{ بیرونی}}$ شامل سهمی است که توسط بار سطحی موضعی σ ایجاد شده است، و خود-نیروها را (که بار بر خودش وارد می‌کند) باید کنار گذاشت. برای اینکه ببینیم چه مقدار از $E_{\perp \text{ بیرونی}}$ ناشی از بار سطحی موضعی است، قسمتی از سطح را با یک صفحه تقریب می‌گیریم. اگر به اندازه کافی به سطح نزدیک شویم، اثرات لبه بی‌اهمیت می‌شوند و می‌توانیم صفحه را نامتناهی فرض کنیم. میدان الکتریکی ناشی از این صفحه نامتناهی برابر با $2\pi\sigma$ است (معادله ۲-۲۳). بنابراین، دقیقاً نیمی از میدان ۱۳-۳ خود-میدان است که توسط بار سطحی موضعی ایجاد شده است:

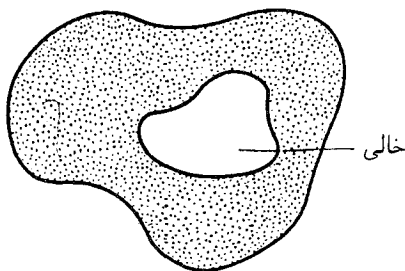
$$E_{\text{خود}} = 2\pi\sigma \quad (۱۴-۳)$$

بقیه میدان الکتریکی باید توسط بارهای دیگر (مثلاً بارهای روی بقیه سطح رسانا، بارهای روی رساناهای دیگر، و غیره) ایجاد شده باشد:

$$E_{\text{دیگر}} = 2\pi\sigma \quad (۱۵-۳)$$

در نتیجه، نیروی واحد سطحی که میدان الکتریکی بر سطح رسانا وارد می‌کند، برابر است با $2\pi\sigma^2$.

روی رسانا، از جمع سهمهای «خود» و «دیگر» به دست می‌آوریم $E_{\perp \text{ بیرونی}} = 4\pi\sigma$. داخل رسانا، سهمهای «خود» و «دیگر» باهم خنثی می‌شوند و داریم $E = 0$. بنابراین، نبود میدان در یک رسانا ناشی از این نیست که میدان الکتریکی نمی‌تواند در رسانا نفوذ کند (میدان الکتریکی یک بار همواره از معادله ۲-۱۴ تعیین می‌شود)، بلکه ناشی از این است که میدانهای بارهای سطحی یکدیگر را خنثی می‌کنند.



شکل ۳-۴ رسانا با یک محفظه بسته خالی.

اگر رسانا در درون خود یک محفظه بسته خالی داشته باشد (شکل ۳-۴) میدان الکتریکی در این محفظه صفر است. این نتیجه مستقیماً از قضیه یکتایی گرفته می‌شود: محفظه خالی را به صورت ناحیه‌ای از فضا در نظر می‌گیریم که در آن پتانسیل از معادله لاپلاس $\nabla^2 \Phi = 0$ تبعیت می‌کند. شرط مرزی تحمیل شده به جواب این معادله این است که روی دیواره محفظه باید $\Phi = \text{const}$ (شرط دیریکله). پس روشن است که $\Phi(x) = \text{const}$ یک جواب ممکن معادله لاپلاس در محفظه است. بنا به قضیه یکتایی این تنها جواب است. بدین ترتیب، پتانسیل در تمام محفظه ثابت است، و میدان الکتریکی صفر است. از صفر بودن میدان الکتریکی می‌توانیم نتیجه دیگری بگیریم: نبود میدان الکتریکی در محفظه نبود بار روی دیواره محفظه را ایجاد می‌کند (معادله ۳-۱۳)؛ پس، بار الکتریکی رسانا باید منحصراً روی سطح خارجی رسانا قرار گیرد.

روشن است که استدلال بالا مبتنی بر صفر بودن میدان الکتریکی در ماده رساناست، و از این رو جای بحث دارد. تحلیل آزمایشهایی که روی سقوط آزاد الکترونها در میدان گرانشی زمین انجام شده‌اند [۱] این سؤال را پیش می‌آورد که آیا میدان الکتریکی داخل یک اتاقک خلاً (فلزی) دقیقاً صفر است؟ از استدلال کیفی زیر استنباط می‌شود که تأثیر میدان گرانشی زمین روی فلز یک میدان الکتریکی در فلز ایجاد می‌کند. یک الکترون «آزاد» در فلز را در نظر بگیرید. نیروی گرانشی $m_e g$ الکترون را به طرف پایین می‌کشد؛ برای تعادل، این نیرو باید توسط میدان الکتریکی

$$E = \frac{-m_e g}{e} \quad (۱۶-۳)$$

که به طرف پایین است خنثی شود. اما قبل از گرفتن این نتیجه عجولانه که ۳-۱۶ نشاندهنده یک میدان الکتریکی نوعی در داخل فلز است، ببینیم اگر هسته اتم (با عدد اتمی Z) را در نظر بگیریم چه پیش می‌آید. نیروی گرانشی روی این هسته برابر با Mg است؛ برای تعادل، این نیرو باید توسط

میدان الکتریکی

$$E = \frac{+Mg}{Ze} \quad (17-3)$$

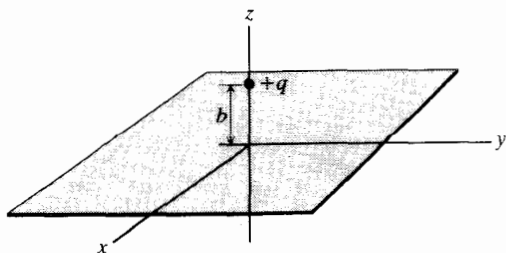
که به طرف بالا است خنثی شود.

چون بیشتر حجم اتم را الکترونها اشغال می‌کنند، انتظار داریم که سهم غالب در میدان الکتریکی متوسط در فلز از معادله ۱۶-۳ باشد نه از معادله ۱۷-۳. اما، محاسبات دقیق مکانیک کوانتومی، با به حساب آوردن اثرات تراکم شبکه، نشان می‌دهد که بزرگی میدان باید از مرتبه‌ای باشد که از معادله ۱۷-۳ به دست می‌آید. پس میدان داخل محفظه متعلق به رسانا نیز باید از همین مرتبه بزرگی باشد.

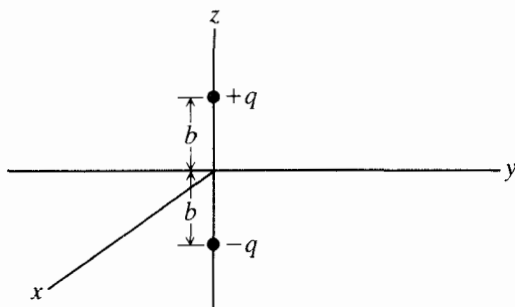
تمرین ۱- نشان دهید که برای یک فلز نوعی، میدان بر مبنای معادله ۱۷-۳ حدود 10^{-11} statV/cm یا حدود 10^{-7} V/m است. ■

تذکر: به نظر می‌رسد آزمایشهای سقوط آزاد روی الکترونها با معادله ۱۷-۳ توافق ندارند. عقیده بر این است که بعضی اثرات سطحی خارجی در دیواره محفظه باعث این عدم توافق هستند [۲]. اکنون که شرایط مرزی در رساناها را مورد بحث قرار داده‌ایم می‌توانیم مسئله حل کنیم. بررسی منظم جوابهای تحلیلی معادله لاپلاس را از بخش بعد شروع می‌کنیم. اما، گاهی می‌توان مسائل الکتروستاتیک را با لمهای هوشیارانه‌ای حل کرد. یکی از این لمها روش تصویر است که در آن مسئله‌ای که می‌خواهیم حل کنیم را با مسئله‌ای عوض می‌کنیم که جواب آن را می‌دانیم و دارای همان توزیع بار است و همان شرایط مرزی را برآورده می‌کند. بنابه قضیه یکتایی جواب این مسئله با جواب مسئله اولی یکی است.

ساده‌ترین مثال این روش به قرار زیر است: فرض کنید یک صفحه رسانای بزرگ (نامتناهی) در پتانسیل صفر (متصل به زمین) و یک بار نقطه‌ای q واقع در فاصله‌ای از این صفحه داریم و می‌خواهیم پتانسیل $\Phi(x)$ را به دست آوریم. شکل ۵-۳ این صفحه (صفحه xy) و بار در $z = b$



شکل ۵-۳ بار نقطه‌ای q واقع در بالای یک صفحه رسانای بزرگ.



شکل ۳-۶ دو بار نقطه‌ای $\pm q$ بدون صفحه رسانا.

را نشان می‌دهد. ابتدا مسئله دیگری را در نظر می‌گیریم: دو بار $\pm q$ به فاصله $2b$ بدون صفحه رسانا (شکل ۳-۶).

■ **تمرین ۲-** نشان دهید صفحه xy در شکل ۳-۶ یک سطح هم‌پتانسیل است.

تمرین بالا نشان می‌دهد که در مرزهای ناحیه $0 \leq z \leq \infty$ ، این دو مسئله دقیقاً شرط مرزی یکسانی را برآورده می‌کنند؛ همچنین، چگالیهای بار در این ناحیه یکی هستند. چون پتانسیل برای مسئله دوم برابر است با

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - b)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + b)^2}} \quad (18-3)$$

پتانسیل برای مسئله اول نیز باید همین باشد (اما تنها به‌ازای $z \geq 0$). تا آنجا که به ناحیه $z \geq 0$ مربوط می‌شود، اثر بار $-q$ را می‌توان جانشین اثر صفحه رسانا کرد. (بار مجازی $-q$ را بار تصویر می‌نامند. توجه کنید که چون بار تصویر اثر صفحه رسانا را ایجاد می‌کند، می‌توانیم بلافاصله نتیجه بگیریم نیرویی که صفحه بر بار q وارد می‌کند برابر با $q^2/4b^2$ است.

مسئله بار نقطه‌ای در مجاورت یک کره رسانا (مسئله ۳-۴)، مسئله بار نقطه‌ای در مجاورت صفحه جدایی دو دی‌الکتریک مختلف، و چند مسئله خاص دیگر را می‌توان به‌روش تصویر حل کرد.

۲-۳ معادله لاپلاس در مختصات دکارتی

استفاده از مختصات دکارتی، استوانه‌ای یا کروی در حل یک مسئله معین بستگی به تقارن مسئله دارد. در مورد مرزهای قائم، مختصات دکارتی از همه مناسبتر است. در این مورد، معادله لاپلاس

$\nabla^2 \Phi = 0$ به صورت زیر نوشته می شود

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi(x, y, z) = 0 \quad (19-3)$$

این یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم بر حسب x, y و z است. ما جوابهای خصوصی از نوع

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (20-3)$$

را می خواهیم که در آن Φ حاصلضربی است از یک تابع x ، یک تابع y و یک تابع z . روشن است که تابع $1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ، که یک جواب معادله ۱۹-۳ است و پتانسیل بار نقطه‌ای واقع در مبدأ را نشان می دهد به صورت ۲۰-۳ نیست؛ بنابراین، قصد نداریم تمام جوابهای ممکن معادله لاپلاس را به دست آوریم. اما، معلوم شده است که اگر تمام جوابهای ممکن از نوع ۲۰-۳ را بگیریم و آنها را به طور مناسب با هم ترکیب کنیم می توانیم عمومی ترین جواب را بسازیم. توابع $X(x)Y(y)Z(z)$ یک مجموعه کامل تشکیل می دهند: تمام جوابهای معادله لاپلاس را می توانیم به صورت برهم نهشی از این توابع بنویسیم.

از جاگذاری ۲۰-۳ در ۱۹-۳ به دست می آوریم

$$YZ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + XZ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

یا

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (21-3)$$

جمله اول تابعی تنها از x ، دومی تابعی تنها از y و سومی تابعی تنها از z است. هر یک از این جمله ها باید با یک ثابت برابر باشد. برای اثبات، فرض کنید $(1/X)d^2 X/dx^2$ ثابت نیست؛ اگر x را تغییر دهیم درحالی که y و z را ثابت نگه داشته ایم، جمله اول در ۲۱-۳ تغییر می کند در حالی که دو جمله دیگر تغییر نمی کنند، و این غیرممکن است زیرا مجموع سه جمله باید صفر بماند. بنابراین

داریم

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2 \quad (22-3)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \beta^2 \quad (23-3)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2 \quad (24-3)$$

که در آنها α ، β و γ ثابت هستند. اکنون به جای یک معادله دیفرانسیل جزئی سه معادله دیفرانسیل معمولی جداگانه از x ، y و z داریم. این روش حل معادله دیفرانسیل جزئی را جداسازی متغیرها می‌نامند.

معادله ۲۱-۳ در صورتی برآورده می‌شود که

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \quad (25-3)$$

این رابطه نشان می‌دهد که دست کم یکی از این ثابتها باید عدد مختلط باشد.

تمرین ۳- نشان دهید جوابهای معادله‌های ۲۲-۳، ۲۳-۳ و ۲۴-۳ با تقریب یک ضریب ثابت عبارت‌اند از

$$X = e^{\alpha x}, e^{-\alpha x} \quad (26-3)$$

$$Y = e^{\beta y}, e^{-\beta y} \quad (27-3)$$

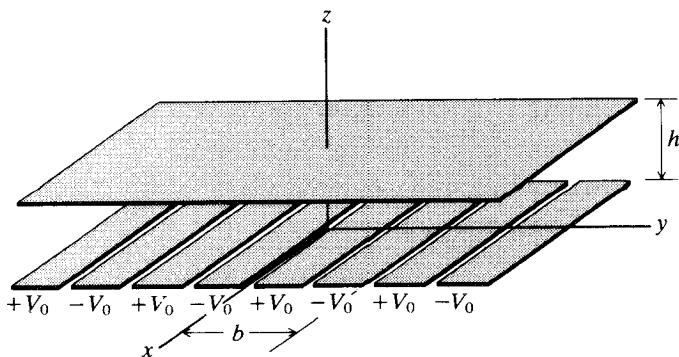
$$Z = e^{\gamma z}, e^{-\gamma z} \quad (28-3)$$

بنابراین، جواب مورد نظر ما برای $\Phi(x, y, z)$ برابر است با

$$\Phi(x, y, z) = e^{\pm \alpha x} e^{\pm \beta y} e^{\pm \gamma z} \quad (29-3)$$

که در یک ثابت اختیاری ضرب می‌شود.

مثال زیر نشان می‌دهد چگونه می‌توان از برهم‌نهی جوابهای از نوع ۲۹-۳ در حل یک مسئله استفاده کرد. شکل ۷-۳ دو صفحه موازی بزرگ (نامتناهی) را نشان می‌دهد. صفحه $z = h$ در پتانسیل $\Phi = 0$ است. صفحه $z = 0$ به نوارهایی با عرض $b/2$ تقسیم شده است؛ این نوارها



شکل ۳-۷ دو صفحه موازی بزرگ. صفحه پایین به توارهایی به تناوب در پتانسیلهای $\pm V_0$ تقسیم شده است. صفحه بالا در پتانسیل صفر است.

به ترتیب در پتانسیلهای $+V_0, -V_0, +V_0, -V_0, +V_0, -V_0, +V_0, -V_0$ هستند. می خواهیم پتانسیل در ناحیه بین دو صفحه را به دست آوریم.

چون مسئله به x بستگی ندارد باید $\alpha = 0$. چون آرایش نسبت به y دوره ای است، با دوره b ، باید بستگی به y نیز همین دوره را داشته باشد؛ برای اینکه این منظور برآورده شود قرار می دهیم $\beta = 2\pi in/b$ که در آن n یک عدد درست مثبت یا منفی است. پس معادله ۳-۲۹ عبارت است از

$$\Phi \propto e^{2\pi in(y/b)} e^{\pm \gamma z} \quad (30-3)$$

بنابه معادله ۳-۲۵، γ باید مقدار $2\pi n/b$ داشته باشد. باقی می ماند تعیین ضرابی که باید جلو جوابهای ۳-۳۰ قرار دهیم. شرط مرزی $\Phi = 0$ در $z = h$ ایجاب می کند ترکیبی از $e^{-\gamma z}$ و $e^{+\gamma z}$ به کار ببریم که در $z = h$ صفر شود. ترکیب زیر این شرط را برآورده می کند:

$$\frac{e^{-\gamma h} e^{\gamma z} - e^{\gamma h} e^{-\gamma z}}{e^{-\gamma h} - e^{\gamma h}} \quad (31-3)$$

اکنون می توانیم بنویسیم

$$\Phi(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{2\pi iny/b} \left(\frac{e^{-2\pi nh/b} e^{2\pi nz/b} - e^{2\pi nh/b} e^{-2\pi nz/b}}{e^{-2\pi nh/b} - e^{2\pi nh/b}} \right) \quad (32-3)$$

ضرایب A_n را طوری تنظیم می‌کنیم که شرط مرزی در $z = 0$ برآورده شود. در $z = 0$ معادله ۳۲-۳ چنین می‌شود

$$\Phi(y, 0) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{\gamma \pi i n y / b} \quad (33-3)$$

برای یافتن A_m ، دو طرف معادله ۳۳-۳ را در $e^{-\gamma \pi i m y / b}$ ضرب می‌کنیم و روی y از 0 تا $y = b$ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^b \Phi(y, 0) e^{-\gamma \pi i m y / b} dy = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n \int_0^b e^{\gamma \pi i (n-m) y / b} dy \quad (34-3)$$

تمرین ۴- نشان دهید

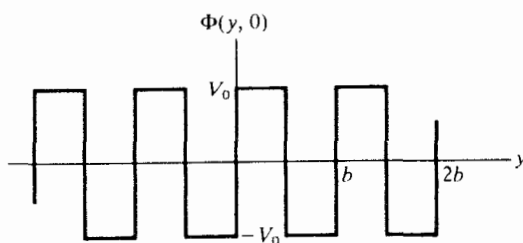
$$\int_0^b e^{\gamma \pi i (n-m) y / b} dy = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ b & n = m \end{cases} \quad (35-3)$$

با توجه به معادله ۳۵-۳، طرف راست معادله ۳۴-۳ تبدیل به $b A_m$ می‌شود و به دست می‌آوریم

$$A_m = \frac{1}{b} \int_0^b \Phi(y, 0) e^{-\gamma \pi i m y / b} dy \quad (36-3)$$

تابع $\Phi(y, 0)$ در شکل ۸-۳ رسم شده است. این تابع را در معادله ۳۶-۳ می‌گذاریم و به دست می‌آوریم

$$A_m = \frac{-V_0}{\pi i m} (e^{-\pi i m} - 1) \quad (37-3)$$



شکل ۸-۳ پتانسیل صفحه پایین به صورت تابعی از y .

تمرین ۵- معادله ۳-۳۷ را با انتگرال گرفتن از معادله ۳-۳۶ به دست آورید.

توجه کنید استدلالی که منجر به معادله ۳-۳۶ شد برای هر تابع اختیاری $\Phi(y)$ معتبر است. معادله ۳-۳۳ رشته فوریه برای یک تابع دوره‌ای اختیاری از y (با دوره b) است. این رشته تابع را به صورت برهم‌نهی از نمایه‌های مختلط، یا معادل آن سینوسها و کسینوسها، بیان می‌کند. معادله ۳-۳۶ ضرایب فوریه را که باید در این رشته به کار برده شوند تعیین می‌کند. استدلال ما شامل این فرض ضمنی است که رشته به تابع $\Phi(y)$ می‌گراید. در این باره کافی است بگوییم که در مورد تابع رسم شده در شکل ۳-۸، رشته بجز در نقاط ناپیوستگی به تابع می‌گراید؛ انحراف در این نقاط منزوی اهمیت فیزیکی ندارد.

اگر معادله ۳-۳۷ را در معادله ۳-۳۲ بگذاریم تابع پتانسیلی را که جواب مسئله است به دست می‌آوریم:

$$\Phi(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{-V_0}{\pi i n} (e^{-\pi i n} - 1) e^{\gamma \pi i n y / b} \frac{e^{-\gamma \pi n h / b} e^{\gamma \pi n z / b} - e^{\gamma \pi n h / b} e^{-\gamma \pi n z / b}}{e^{-\gamma \pi n h / b} - e^{\gamma \pi n h / b}} \quad (38-3)$$

تمرین ۶- نشان دهید عبارت طرف راست معادله ۳-۳۸ یک تابع حقیقی است و رشته فوریه را بر حسب سینوسها و کسینوسها بیان کنید.

جالب توجه است که معادله ۳-۳۸ را در مورد خاصی که $h \gg b$ بررسی کنیم.

تمرین ۷- نشان دهید در حد $h/b \rightarrow \infty$ داریم

$$\left[\frac{e^{\gamma \pi n (z-h) / b} - e^{-\gamma \pi n (z-h) / b}}{e^{-\gamma \pi n h / b} - e^{\gamma \pi n h / b}} \right] \rightarrow e^{-\gamma \pi n z / b}$$

و

$$\Phi(y, z) \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{-V_0}{\pi i n} (e^{-\pi i n} - 1) e^{\gamma \pi i n y / b} e^{-\gamma \pi n z / b} \quad (39-3)$$

اگر z خیلی کوچک نباشد، سهم عمده در سیگمای معادله ۳-۳۹ از جمله‌های مربوط به n های کوچک ناشی می‌شود؛ وقتی z افزایش می‌یابد جمله‌های مربوط به n های بزرگ سریعاً افت می‌کنند. اگر تنها $n = \pm 1$ را در معادله ۳-۳۹ نگاه داریم، به دست می‌آوریم

$$\Phi(y, z) \simeq \frac{4V_0}{\pi} \sin \frac{\gamma \pi y}{b} e^{-\gamma \pi z / b} \quad (40-3)$$

معادله ۳-۴ نشان می‌دهد وقتی z افزایش می‌یابد پتانسیل به طور نمایی به صفر میل می‌کند. میدان الکتریکی نیز به طور نمایی کاهش می‌یابد— به ازای $z > b$ میدان بسیار کوچکی داریم. در فاصله‌ای که نسبت به b بزرگ است، «نوار» واقع در $z = 0$ شباهت بسیار زیادی به یک صفحه متصل به زمین پیدا می‌کند.

تمرین ۸- مؤلفه‌های E_z و E_{ϕ} را از معادله ۳-۴ به دست آورید، و تحقیق کنید این مؤلفه‌ها نسبت به z به طور نمایی کاهش می‌یابند. ■

کاهش نمایی میدان اصول قفس فاراده را که اتاقکی است از یک توری سیمی ظریف توضیح می‌دهد. سیمها و فضاها بین آنها تقریباً مانند نوارهای مسئله بالا هستند. میدان الکتریکی خارجی وقتی بخواهد در توری نفوذ کند به طور نمایی ضعیف می‌شود، و درون قفس میدان (تقریباً) وجود ندارد. برای اینکه میدان را دقیقاً به صفر برسانیم باید از اتاقک بسته‌ای استفاده کنیم که از ورق فلز ساخته شده باشد. همچنان‌که در بخش قبلی دیدیم، در یک محفظه خالی (یعنی بدون بار) در یک رسانا میدان الکتریکی وجود ندارد.

۳-۳ معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای

عملگر دیفرانسیلی ∇^2 در مختصات استوانه‌ای ρ ، ϕ و z را در فصل ۱ گفتیم. در این مختصات، معادله لاپلاس به صورت زیر است

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (41-3)$$

(مختصه شعاعی استوانه‌ای ρ را با چگالی بار حجمی اشتباه نگیرید.) ابتدا فرض می‌کنیم با مسئله‌ای سروکار داریم که در آن وابستگی به z وجود ندارد، مانند موردی که بارها، بارهای خطی موازی و سطوح رسانا استوانه‌های موازی (با مقطع اختیاری) هستند. پس باید معادله زیر را حل کنیم

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (42-3)$$

در اینجا نیز از جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم:

$$\Phi(\rho, \phi) = R(\rho)Q(\phi) \quad (43-3)$$

تمرین ۹- نشان دهید فرض بالا به معادله‌های دیفرانسیل معمولی زیر منجر می‌شود

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = k^2 \quad (۴۴-۳)$$

و

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -k^2 \quad (۴۵-۳)$$

که در آنها k ثابت است.

تمرین ۱۰- نشان دهید جوابهای معادله ۴۵-۳ عبارت‌اند از

$$Q(\phi) = \begin{cases} \cos k\phi, \sin k\phi & \text{اگر } k \neq 0 \\ a_0 + a_1\phi & \text{اگر } k = 0 \end{cases} \quad (۴۶-۳)$$

که در آن a_0 و a_1 ثابت هستند.

وقتی ϕ را به اندازه 2π افزایش دهیم پتانسیل باید بدون تغییر بماند (پتانسیل تک مقداری است)؛ در نتیجه، k باید یک عدد درست باشد، و مقدار a_1 باید صفر باشد. پس توابع ممکن $Q(\phi)$ عبارت‌اند از

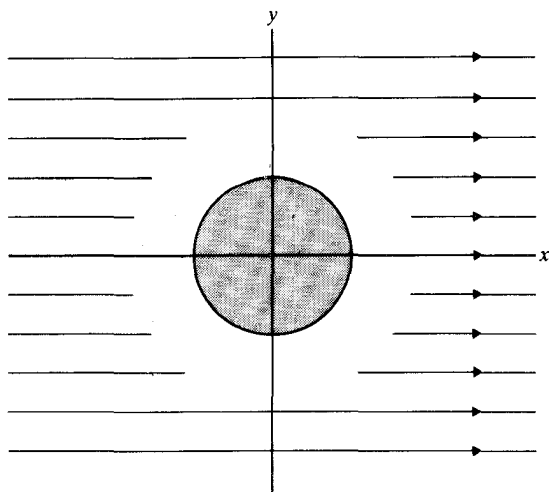
$$Q(\phi) = \cos n\phi, \sin n\phi \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (۴۷-۳)$$

اکنون باید معادله شعاعی زیر را حل کنیم

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = n^2 R \quad (۴۸-۳)$$

تمرین ۱۱- نشان دهید جوابهای معادله بالا عبارت‌اند از

$$R(\rho) = \begin{cases} \rho^n, \rho^{-n} & \text{اگر } n \neq 0 \\ b_0 + b_1 \log \rho & \text{اگر } n = 0 \end{cases} \quad (۴۹-۳)$$



شکل ۹-۳ استوانه رسانا واقع در میدان الکتریکی (قبلاً) یکنواخت.

از ترکیب نتایج بالا، جوابهای زیر را به دست می‌آوریم

$$\Phi(\rho, \phi) = \log \rho, \rho^{\pm n} \cos n\phi, \rho^{\pm n} \sin n\phi \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (50-3)$$

مسئله زیر را به عنوان مثال بررسی می‌کنیم. یک استوانه رسانای بسیار دراز به شعاع R را در یک میدان الکتریکی یکنواخت می‌گذاریم به طوری که محور استوانه بر میدان الکتریکی عمود است. می‌خواهیم پتانسیل را در همه نقاط به دست آوریم.

میدان یکنواخت را در راستای x می‌گیریم (شکل ۹-۳). پتانسیل مربوط به میدان یکنواختی باشد E_0 برابر با $-E_0 x$ ، یا در مختصات استوانه‌ای $-E_0 \rho \cos \phi$ است. استوانه تنها می‌تواند پتانسیل در نزدیکی خود را تغییر دهد؛ در فواصل زیاد، پتانسیل بدون تغییر می‌ماند. از اینجا شرط مرزی زیر نتیجه می‌شود

$$\Phi \rightarrow -E_0 \rho \cos \phi \quad \text{وقتی} \quad \rho \rightarrow \infty \quad (51-3)$$

شرط مرزی دیگری این است که میدان الکتریکی در سطح استوانه باید بر این سطح عمود باشد:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = 0 \quad \text{در} \quad \rho = R \quad (52-3)$$

بنابه معادله ۵۱-۳، پتانسیل در همه نقاط فضا برابر است با $-E_0 \rho \cos \phi$ به علاوه جمله‌های دیگری که به‌ازای $\rho \rightarrow \infty$ صفر می‌شوند. از مجموعه جوابهای ۵۰-۳، تنها $\rho^{-n} \cos n\phi$ و $\rho^{-n} \sin n\phi$ این ویژگی را دارند؛ بنابراین، پتانسیل باید به‌صورت زیر باشد

$$\Phi(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \rho^{-n} \cos n\phi + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \rho^{-n} \sin n\phi \quad (53-3)$$

ضرایب A_n و B_n از شرط مرزی در $\rho = R$ به‌دست می‌آیند:

$$0 = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right|_R = E_0 R \sin \phi - \sum_n A_n R^{-n} n \sin n\phi + \sum_n B_n R^{-n} \cos n\phi \quad (54-3)$$

معادله ۵۴-۳ نمی‌تواند به‌ازای تمام مقادیر ϕ درست باشد، مگر اینکه

$$\begin{aligned} A_1 &= E_0 R^2 \\ A_2 &= A_3 = A_4 = \dots = 0 \\ B_1 &= B_2 = B_3 = \dots = 0 \end{aligned} \quad (55-3)$$

پس جواب نهایی برابر است با

$$\Phi(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + E_0 \frac{R^2}{\rho} \cos \phi \quad (56-3)$$

تمرین ۱۲- مؤلفه‌های میدان الکتریکی در شکل ۱۰-۳ نشان داده شده‌اند. چگالی بار سطحی روی حساب کنید.

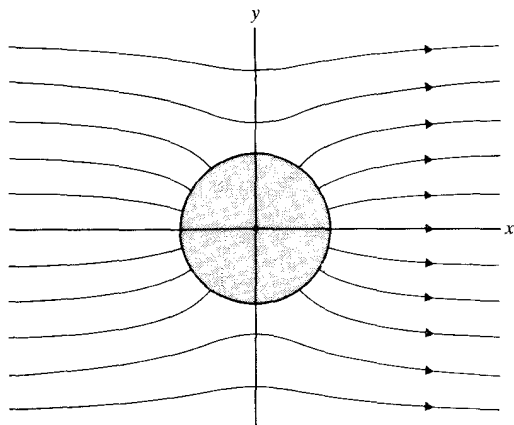
خطوط میدان این میدان الکتریکی در شکل ۱۰-۳ نشان داده شده‌اند. چگالی بار سطحی روی استوانه را می‌توان از مقدار میدان الکتریکی محاسبه کرد.

روش جداسازی متغیرها را در موردی که وابستگی به z در معادله ۴۱-۳ را نگاه داریم نیز می‌توان به‌کار برد. اگر فرض کنیم

$$\Phi(\rho, \phi, z) = R(\rho)Q(\phi)Z(z) \quad (57-3)$$

آنگاه معادله لاپلاس چنین می‌شود

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{\rho^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = 0 \quad (58-3)$$



شکل ۳-۱۰ خطوط میدان اطراف استوانهٔ مسافت.

تنها جملهٔ سوم تابع ϕ است. در نتیجه، جملهٔ سوم باید یک ثابت باشد، و باز هم معادلهٔ ۳-۴۵ را به دست می‌آوریم؛ پس جواب Q مانند سابق است. معادلهٔ ۳-۵۸ را بر ρ^2 تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{n^2}{\rho^2} = 0 \quad (59-3)$$

تنها جملهٔ دوم تابع z است. در نتیجه

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2 \quad (60-3)$$

و

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{n^2}{\rho^2} = -\gamma^2 \quad (61-3)$$

که در آنها γ یک ثابت است. جوابهای معادلهٔ ۳-۶۰ عبارتند از

$$Z(z) = e^{\pm \gamma z}$$

به دست آوردن جوابهای معادلهٔ ۳-۶۱ نسبتاً مشکلتر است. مناسب است که متغیر جدیدی

را وارد کنیم:

$$\xi = \gamma\rho \quad (۶۲-۳)$$

معادله دیفرانسیل ۶۱-۳ برحسب این متغیر به صورت زیر درمی آید

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dR}{d\xi} \right) + \left(1 - \frac{n^2}{\xi^2} \right) R = 0 \quad (۶۳-۳)$$

این معادله را معادله بسل و جوابهای آن را توابع بسل می نامند. توابع بسل را معمولاً با J_n و N_n نشان می دهند و می توان آنها را به صورت رشته های نامتناهی برحسب ξ نوشت:^۱

$$J_n(\xi) = \left(\frac{\xi}{2} \right)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(j+n)!} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{2j} \quad (۶۴-۳)$$

$$N_n(\xi) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{dJ_n(\xi)}{dn} - (-1)^n \frac{d}{dn} J_{-n}(\xi) \right] \quad (۶۵-۳)$$

استدلالی که منجر به معادله های ۶۴-۳ و ۶۵-۳ می شود را بیان نمی کنیم. شکل ۱۱-۳ نمودارهای چند تابع J_n و N_n را نشان می دهد. تمام توابع N_n در $\xi = 0$ تکین هستند.

تمرین ۱۳- تحقیق کنید که عبارت ۶۴-۳ در معادله ۶۳-۳ صدق می کند.

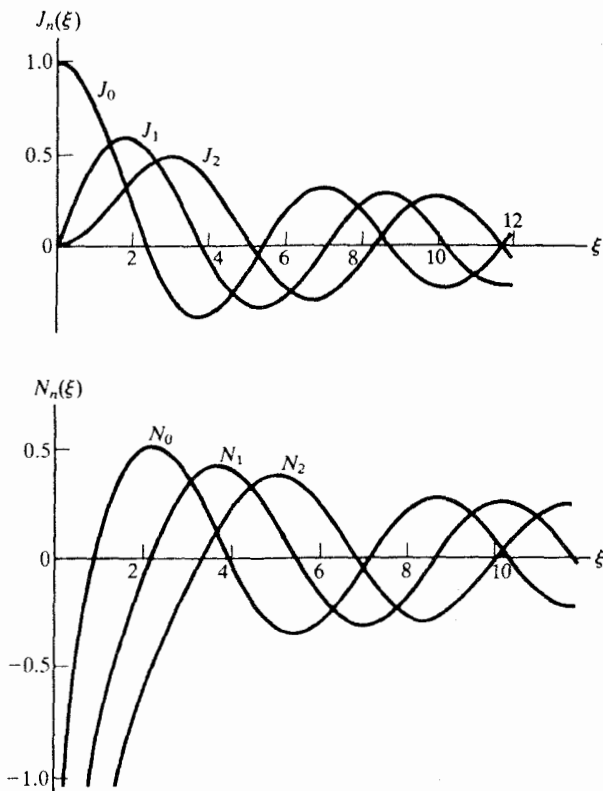
پس جوابهای معادله لاپلاس برحسب توابع J_n و N_n عبارت اند از

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \begin{cases} J_n(\gamma\rho) \sin n\phi e^{\pm\gamma z} & J_n(\gamma\rho) \cos n\phi e^{\pm\gamma z} \\ N_n(\gamma\rho) \sin n\phi e^{\pm\gamma z} & N_n(\gamma\rho) \cos n\phi e^{\pm\gamma z} \end{cases} \quad (۶۶-۳)$$

این جوابها به ازای $\gamma \neq 0$ برقرارند. در مورد $\gamma = 0$ (عدم بستگی به z)، روشن است که باید به معادله ۵-۳ برگردیم.

۱. این تعریف N_n برای مقادیر درست n معتبر است؛ تعریف جداگانه ای برای مقادیر غیردرست n (که مورد علاقه ما نیست) وجود دارد. تعریف مشتق تابع فاکتوریل در معادله ۶۵-۳ چنین است

$$\frac{dn!}{dn} = n! \left[-0.5772 \dots + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k(n+k)} \right]$$



شکل ۱۱-۳ توابع بسل $J_n(\xi)$ و $N_n(\xi)$.

۴-۳ معادله لاپلاس در مختصات کروی

در مختصات کروی r ، θ و ϕ ، معادله لاپلاس عبارت است از

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (۶۷-۳)$$

مناسب است که متغیر زیر را جانشین θ کنیم

$$\mu = \cos \theta$$

(۶۸-۳)

تمرین ۱۴- نشان دهید معادله ۶۷-۳ بر حسب μ چنین می شود

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (69-3)$$

برای سادگی، فرض می کنیم مسئله ای که می خواهیم حل کنیم دارای تقارن محوری است، و در نتیجه وابستگی به ϕ وجود ندارد. پس معادله بالا تبدیل می شود به

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right] = 0 \quad (70-3)$$

این معادله را می توان با جداسازی متغیرها حل کرد.

تمرین ۱۵- نشان دهید با فرض

$$\Phi(r, \mu) = F(r)P(\mu) \quad (71-3)$$

معادله های دیفرانسیل معمولی زیر را به دست می آوریم

$$\frac{r}{F} \frac{d^2}{dr^2} (rF) = l(l+1) \quad (72-3)$$

و

$$\frac{1}{P} \frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{dP}{d\mu} \right] = -l(l+1) \quad (73-3)$$

در معادله های بالا، ثابت جداسازی را به شکل عجیب $l(l+1)$ نوشته ایم؛ مناسب این کار بعداً معلوم می شود. در این مرحله l کاملاً اختیاری است.

تمرین ۱۶- نشان دهید توابع

$$F(r) = r^l, r^{-l-1} \quad (74-3)$$

جوابهای معادله ۷۲-۳ هستند.

جواب معادله ۷۳-۳ تا این حد واضح نیست. اما اگر فرض کنیم l یک عدد درست ($l \geq 0$) است، آنگاه می‌توان از این معادله با یکی دو لم انتگرال گرفت. اگر l را به مقادیر درست محدود کنیم، عمومی‌ترین جواب معادله ۷۳-۳ را به دست خواهیم آورد؛ اما از این لحاظ نباید چندان نگران باشیم زیرا قبلاً با اتخاذ صورت خاص ۷۱-۳ برای $\Phi(r, \theta)$ از عمومیت جواب صرف‌نظر کرده‌ایم. آنچه اهمیت دارد این است که توابعی که سرانجام به دست می‌آوریم تشکیل مجموعه‌ای می‌دهند که می‌توان هر جواب (مقارن محوری) را به صورت برهم‌نهی از آنها بیان کرد؛ در واقع کار ما همین است.

اگر مشتق را با نماد پریم نشان دهیم معادله ۷۳-۳ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$[(\mu^2 - 1)P']' = l(l+1)P \quad (75-3)$$

اکنون $P(\mu)$ را به صورت l امین مشتق یک تابع کمکی $u(\mu)$ می‌نویسیم^۱:

$$P(\mu) = \frac{d^l u(\mu)}{d\mu} \equiv u^{(l)}(\mu) \quad (76-3)$$

پس معادله ۷۵-۳ چنین می‌شود

$$[(\mu^2 - 1)u^{(l+1)}]' = l(l+1)u^{(l)}$$

اگر یک‌بار از این معادله مشتق بگیریم به دست می‌آوریم

$$(\mu^2 - 1)u^{(l+1)} = l(l+1)u^{(l-1)} \quad (77-3)$$

در اینجا از ثابت انتگرال‌گیری صرف‌نظر کرده‌ایم؛ هنوز در جستجوی فقط یک جواب خصوصی معادله ۷۳-۳ هستیم. با افزودن $2\mu lu^{(l)} + l(l-1)u^{(l-1)}$ به دو طرف معادله ۷۷-۳، به دست می‌آوریم

$$(\mu^2 - 1)u^{(l+1)} + l(l-1)u^{(l-1)} + 2\mu lu^{(l)} = 2l^2 u^{(l-1)} + 2\mu lu^{(l)} \quad (78-3)$$

که دارای این ویژگی جالب است که دو طرف معادله مشتق کامل هستند، یعنی

$$(\mu^2 - 1)u^{(l+1)} + l(l-1)u^{(l-1)} + 2\mu lu^{(l)} \equiv [(\mu^2 - 1)u^{(l)}]' \quad (79-3)$$

۱. از نمادنگاری $u^{(l)}$ برای نشان دادن مشتق l ام استفاده می‌کنیم.

$$2l^2 u^{(l-1)} + 2\mu l u^{(l)} \equiv (2l\mu u)^{(l)} \quad (80-3)$$

تمرین ۱۷- نتایج بالا را واریسی کنید.

پس معادله ۷۸-۳ تبدیل می‌شود به

$$[(\mu^2 - 1)u']^{(l)} = (2l\mu u)^{(l)} \quad (81-3)$$

و اگر l بار از معادله بالا انتگرال بگیریم به دست می‌آوریم

$$(\mu^2 - 1)u' = 2l\mu u \quad (82-3)$$

جواب این معادله عبارت است از

$$u = (\mu^2 - 1)^l$$

پس بنا به معادله ۷۶-۳، تابع P به صورت زیر است

$$P(\mu) = \frac{d^l}{d\mu^l} (\mu^2 - 1)^l \quad (83-3)$$

مرسوم است که این توابع را در $1/(2^l l!)$ ضرب می‌کنند و نتیجه را با P_l نشان می‌دهند:

$$P_l(\mu) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\mu^l} (\mu^2 - 1)^l \quad (84-3)$$

این توابع را چندجمله‌ایهای لژاندر و معادله ۸۴-۳ را فرمول رودریگز می‌نامند. چون $(\mu^2 - 1)^l$ یک چندجمله‌ای از درجه $2l$ است، نتیجه می‌شود که P_l یک چندجمله‌ای از درجه l است.

تمرین ۱۸- نشان دهید از معادله ۸۴-۳ داریم

$$P_l(1) = 1 \quad (85-3)$$

$$P_l(-1) = (-1)^l \quad (86-3)$$

- [راهنمایی: معادله ۳-۸۴ را به صورت $(\mu + 1)^l(\mu - 1)^l(d^l/d\mu^l)(1/2^l l!)$ بنویسید.]

تمرین ۱۹- نشان دهید

$$P_l(-\mu) = (-1)^l P_l(\mu) \quad (۸۷-۳)$$

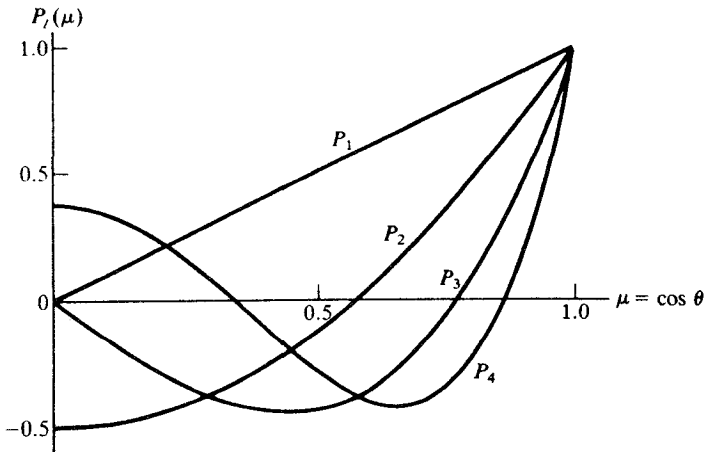
تمرین ۲۰- نشان دهید

$$\begin{aligned} P_0(\mu) &= 1 & P_1(\mu) &= \mu \\ P_2(\mu) &= \frac{3\mu^2 - 1}{2} & P_3(\mu) &= \frac{5\mu^3 - 3\mu}{2} \end{aligned} \quad (۸۸-۳)$$

شکل ۳-۱۲ نمودار چند تابع $P_l(\mu)$ ، یا $P_l(\cos \theta)$ ، را نشان می‌دهد. پس جوابهای معادله لاپلاس به صورت زیر هستند

$$\Phi(r, \theta) = r^l P_l(\cos \theta), r^{-l-1} P_l(\cos \theta) \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (۸۹-۳)$$

این جوابها برای ما به اندازه کافی عمومی هستند زیرا توابع $P_l(\cos \theta)$ یک مجموعه کامل تشکیل می‌دهند: هر تابعی از θ را می‌توان به صورت برهم‌نهشی از چندجمله‌ایهای لژاندر بیان کرد.



شکل ۳-۱۲ چندجمله‌ایهای لژاندر $P_l(\mu)$.

پیش از اینکه به مثالی در مورد استفاده از این توابع بپردازیم، لازم است نکاتی درباره انتگرال گرفتن از این توابع بدانیم. تمرینهای زیر به دو نتیجه مهم مربوط می‌شوند.

تمرین ۲۱- نشان دهید

$$\int_{-1}^1 P_l(\mu)P_n(\mu)d\mu = 0 \quad \text{اگر } l \neq n \quad (90-3)$$

[راهنمایی: اگر $l > n$ ، پس از l بار انتگرال‌گیری جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$\int_{-1}^1 \frac{d^l}{d\mu^l}(\mu^2 - 1)^l \frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2 - 1)^n d\mu = (-1)^l \int_{-1}^1 (\mu^2 - 1)^l \frac{d^{l+n}}{d\mu^{l+n}}(\mu^2 - 1)^n d\mu$$

این عبارت برابر با صفر است زیرا $(l+n)$ امین مشتق یک چندجمله‌ای درجه $2n$ به ازای $l > n$ برابر با صفر است.]

تمرین ۲۲- نشان دهید

$$\int_{-1}^1 P_l(\mu)P_l(\mu)d\mu = \frac{2}{2l+1} \quad (91-3)$$

[راهنمایی: اگر از انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده کنید جمله زیر انتگرال ساده می‌شود.]

به‌عنوان مثالی از حل معادله لاپلاس در مختصات کروی، می‌خواهیم پتانسیل در فضای بین دو پوسته کروی هم‌مرکز را به دست آوریم (شکل ۳-۱۳). پوسته داخلی به شعاع R و در پتانسیل صفر است. پوسته خارجی به شعاع R' است و به دو نیمکره یکی در پتانسیل $+V$ و دیگری در پتانسیل $-V$ تقسیم شده است. پس پتانسیل در ناحیه $R \leq r \leq R'$ به صورت زیر است

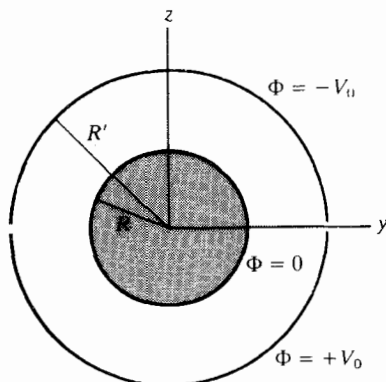
$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l P_l(\cos \theta) + B_l r^{-l-1} P_l(\cos \theta)] \quad (92-3)$$

از شرط مرزی در $r = R$ داریم

$$0 = \sum_l [A_l R^l P_l(\cos \theta) + B_l R^{-l-1} P_l(\cos \theta)] \quad (93-3)$$

و در نتیجه

$$A_l R^l + B_l R^{-l-1} = 0 \quad (94-3)$$



شکل ۳-۱۳ دو پوسته کروی هم مرکز. پوسته خارجی به دو نیمکره در پتانسیلهای $\pm V_0$ تقسیم شده است. پوسته داخلی در پتانسیل صفر است.

یا

$$B_l = -A_l R'^{2l+1} \quad (۹۵-۳)$$

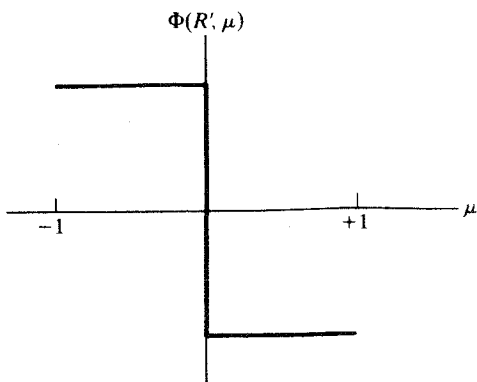
پس در $r = R'$ پتانسیل چنین می شود

$$\Phi(R', \theta) = \sum_l \left(A_l R'^l - A_l \frac{R'^{2l+1}}{R'^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (۹۶-۳)$$

برای به دست آوردن A_m ، دوطرف معادله ۹۶-۳ را در $P_m(\cos \theta) \sin \theta$ ضرب می کنیم و روی θ از $\theta = 0$ تا $\theta = \pi$ انتگرال می گیریم:

$$\int_0^\pi \Phi(R', \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \sum_l A_l \left(R'^l - \frac{R'^{2l+1}}{R'^{l+1}} \right) \times \int_0^\pi P_m(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (۹۷-۳)$$

با تعویض متغیر انتگرال گیری به $\mu = \cos \theta$ ، می بینیم که انتگرال طرف راست بنا به معادله ۳-۹۰ صفر است مگر اینکه $l = m$ و اگر $l = m$ ، این انتگرال بنا به معادله ۳-۹۱ برابر است با $2/(2m+1)$. بنابراین، در سیگمای طرف راست تنها یک جمله شامل ضریب A_m باقی می ماند.



شکل ۱۴-۳ پتانسیل پوسته خارجی به صورت تابعی از $\mu = \cos \theta$.

از حل معادله ۹۷-۳ برای این ضریب، به دست می‌آوریم

$$A_m = \frac{(2m+1)/2}{R'^m - R'^{2m+1}/R'^{m+1}} \int_0^\pi \Phi(R', \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (98-3)$$

در محاسبه این انتگرال، باز هم بهتر است از تعویض متغیر $\mu = \cos \theta$ استفاده کنیم، و در نتیجه

$$\int_0^\pi \Phi(R', \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 \Phi(R', \mu) P_m(\mu) d\mu \quad (99-3)$$

$\Phi(R', \mu)$ یک تابع فرد از μ است (شکل ۱۴-۳)؛ تابع $P_m(\mu)$ زوج است اگر m زوج باشد و فرد است اگر m فرد باشد (معادله ۸۷-۳). در نتیجه، به ازای مقادیر زوج m انتگرال در معادله ۹۹-۳ صفر می‌شود، یعنی $A_m = 0$. به ازای مقادیر فرد m ، می‌توانیم انتگرال در معادله ۹۹-۳ را به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^0 V \cdot P_m(\mu) d\mu &= 2V \cdot \int_{-1}^0 \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{d\mu^m} (\mu^2 - 1)^m d\mu \\ &= 2V \cdot \left[\frac{1}{2^m m!} \frac{d^{m-1}}{d\mu^{m-1}} (\mu^2 - 1)^m \right]_{-1}^0 \quad (100-3) \end{aligned}$$

که در آن از شرط مرزی در $r = R'$ استفاده کرده‌ایم.

تمرین ۲۳- نشان دهید

$$\left[\frac{1}{r^m m!} \frac{d^{m-1}}{d\mu^{m-1}} (\mu^2 - 1)^m \right]_{-1}^0 = \frac{1}{r^{m+1}} \frac{(-1)^{m/2+1/2}}{[(m/2 + 1/2)!]^2} \frac{(m+1)!}{m} \quad (10.1-3)$$

[راهنمایی: سهم مربوط به حد پایین ($\mu = -1$) صفر است؛ سهم مربوط به حد بالا ($\mu = 0$) بستگی به ضریب μ^{m-1} در چندجمله‌ای $(\mu^2 - 1)^m$ دارد. این ضریب را از قضیه دوجمله‌ای زیر

$$(x - 1)^m = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m-k)!k!} (-1)^k x^{m-k}$$

به‌ازای $x = \mu^2$ به‌دست آورید.]

پس برای A_m داریم

$$A_m = \frac{(2m+1)V_0}{R'^m - R^{2m+1}/R'^{m+1}} \frac{1}{r^{m+1}} \frac{(-1)^{m/2+1/2}}{[(m/2 + 1/2)!]^2} \frac{(m+1)!}{m} \quad (10.2-3)$$

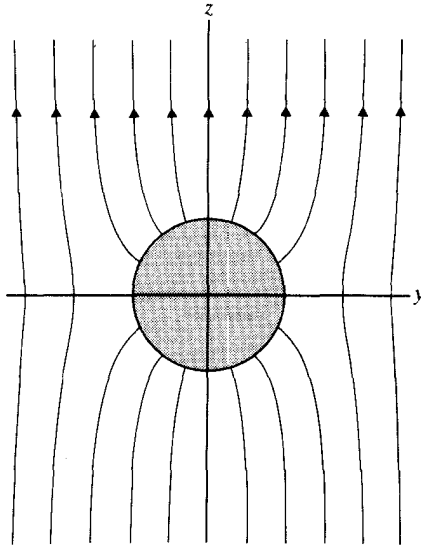
و برای پتانسیل ۹۲-۳ داریم

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l \text{ فرد}} \left[\frac{(2l+1)V_0}{R'^l - R^{2l+1}/R'^{l+1}} \frac{1}{r^{l+1}} \frac{(-1)^{l/2+1/2}}{[(l/2 + 1/2)!]^2} \frac{(l+1)!}{l} \right] \times \left[r^l P_l(\cos \theta) - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \right] \quad (10.3-3)$$

از عبارت بالا یک مورد خاص و جالب توجه حاصل می‌شود اگر حد $R' \rightarrow \infty$ و به‌طور همزمان حد $V_0 \rightarrow \infty$ را بگیریم به طوری که $3/2V_0/R' = E_0 = \text{const}$. در این مورد، تنها جمله‌های مربوط به $l = 1$ در سیگما باقی می‌مانند، و در نتیجه

$$\Phi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + E_0 \frac{R^2}{r^2} \cos \theta \quad (10.4-3)$$

به‌ازای مقادیر بزرگ r ، برای این پتانسیل به‌دست می‌آوریم $\Phi(r, \theta) \rightarrow -E_0 r \cos \theta = -E_0 z$. بدین ترتیب، معادله ۱۰۴-۳ معادله ۱۰۴-۳ پتانسیل مربوط به میدان الکتریکی یکنواخت E_0 در راستای z است.

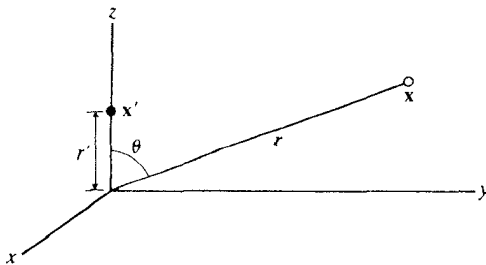


شکل ۱۵-۳ خطوط میدان اطراف یک کره رسانا واقع در میدان الکتریکی (قبلاً) یکنواخت.

نشانه‌دهنده پتانسیل برای یک کره رسانا واقع در میدان الکتریکی یکنواخت است. (بدیهی است که می‌توانستیم معادله ۱۰۴-۳ را به روشی که در محاسبه پتانسیل یک استوانه رسانا واقع در میدان الکتریکی یکنواخت انجام دادیم به دست آوریم؛ معادله‌های ۵۱-۳ تا ۵۶-۳ را ببینید.) شکل ۱۵-۳ خطوط میدان مربوط به میدان الکتریکی در اطراف این کره رسانا را نشان می‌دهد.

۵-۳ بسط چندقطبی

بار نقطه‌ای q واقع بر روی محور z به فاصله r' از مبدأ را در نظر بگیرید (شکل ۱۶-۳). پتانسیل



شکل ۱۶-۳ بار نقطه‌ای q در نقطه x' روی محور z .

این بار نقطه‌ای حول خودش متقارن کروی است. اما این پتانسیل حول مبدأ متقارن کروی نیست، و تنها متقارن محوری است. برحسب مختصات کروی، داریم

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta} \quad (۱۰۵-۳)$$

و در نتیجه

$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} \quad (۱۰۶-۳)$$

بنابه آنچه در بخش قبل گفته شد، باید بتوانیم معادله ۱۰۶-۳ را به صورت برهم‌نهی از توابع ۸۹-۳ بیان کنیم. می‌خواهیم این برهم‌نهی را به دست آوریم. خواسته ما بسطی است به صورت

$$\frac{q}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta) \quad (۱۰۷-۳)$$

ناحیه‌های $r > r'$ و $r < r'$ را باید جداگانه بررسی کنیم؛ توجه ما معطوف به $r > r'$ است. روشن است که در این مورد $A_l = 0$ ، زیرا در غیر این صورت طرف راست در بینهایت به صفر میل نمی‌کرد. برای تعیین مقادیر B_l ، مورد خاص $\cos \theta = 1$ را در نظر می‌گیریم، چون $P_l(1) = 1$ داریم

$$\frac{1}{r - r'} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} \quad (۱۰۸-۳)$$

اما بسط رشته‌ای $1/(r - r')$ را می‌دانیم: اگر $r > r'$ ، آنگاه

$$\frac{1}{r - r'} = \frac{1}{r} \frac{1}{1 - r'/r} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \dots \right] \quad (۱۰۹-۳)$$

مقایسه معادله‌های ۱۰۸-۳ و ۱۰۹-۳ نشان می‌دهد که $B_l = (r')^l$ ، و در نتیجه

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(r')^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad r > r' \quad (۱۱۰-۳)$$

برای به دست آوردن پتانسیل، باید دوطرف را در q ضرب کنیم.

معادله ۱-۱۱۰ اتحاد بسیار مفیدی است و غالباً آن را به عنوان تعریف $P_l(\cos \theta)$ به کار می‌برند. اتحاد مشابهی نیز برای مورد $r < r'$ وجود دارد:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{(r')^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad r < r' \text{ به‌زای (۱۱۱-۳)}$$

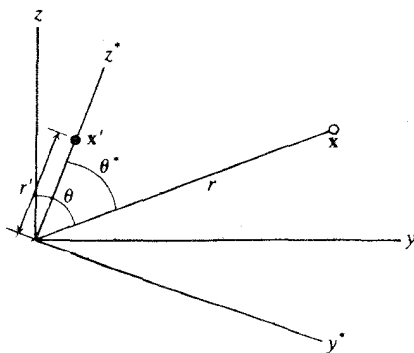
تمرین ۲۴- اتحاد بالا را به دست آورید.

چند جمله اول پتانسیلی که از معادله ۳-۱۱۰ به دست آمده است را بررسی می‌کنیم:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{r} + \frac{qr'}{r^2} \cos \theta + \frac{qr'^2}{r^3} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} + \dots \quad (۱۱۲-۳)$$

ضرایب (qr') و (qr'^2) در جلو توابع r و θ در معادله ۳-۱۱۲ را به ترتیب گشتاور دوقطبی و گشتاور چارقطبی می‌نامند. توجه کنید که بار نقطه‌ای می‌تواند گشتاور دوقطبی داشته باشد؛ اگر بار نقطه‌ای در مبدأ باشد ($r' = 0$) گشتاور دوقطبی آن صفر است اما اگر بار از مبدأ فاصله داشته باشد گشتاور مخالف صفر است. از اینجا معلوم می‌شود که مقدار گشتاور دوقطبی— و همچنین گشتاور چارقطبی— بستگی به مکان بار نسبت به مبدأ دارد.

اکنون یک بار نقطه‌ای را در نظر بگیرید که بردار مکان آن روی محور z نیست. می‌خواهیم بسطی برحسب توانهای $1/r$ مشابه با معادله ۳-۱۱۲ به دست آوریم. یک روش مناسب به صورت زیر است: یک دستگاه مختصات دکارتی کمکی x^*, y^*, z^* و z^* معرفی می‌کنیم به طوری که z^* از بار نقطه‌ای بگذرد (شکل ۳-۱۷). اگر θ^* زاویه قطبی نقطه میدانی x در این مختصات باشد،



شکل ۳-۱۷. بار نقطه‌ای q واقع در نقطه x' خارج از محور z ؛ محور z^* از این بار نقطه‌ای می‌گذرد.

$$\Phi(r, \theta^*) = \frac{q}{r} + \frac{qr'}{r^2} \cos \theta^* + \frac{qr'^2}{r^3} \frac{3 \cos^2 \theta^* - 1}{2} + \dots \quad (113-3)$$

اما $\cos \theta^* = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x} / r r'$ و معادله ۱۱۳-۳ چنین می‌شود

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{r} + \frac{q}{r^2} \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x} + \frac{q}{r^5} \frac{1}{2} [3(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x})^2 - r'^2 r^2] + \dots \quad (114-3)$$

عبارت بالا بستگی صریح به مختصات x^* , y^* و z^* ندارد؛ می‌توانیم این مختصات را فراموش کنیم و حاصلضرب نوده‌ای $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}$ را، در صورت لزوم، در مختصات اصلی محاسبه کنیم. می‌توانیم از رابطه ۱۱۴-۳ برای یافتن بسطی برحسب توانهای $1/r$ برای پتانسیل یک توزیع بار اختیاری استفاده کنیم. اگر چگالی بار باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{r} \int \rho dV' + \frac{1}{r^2} \int \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' \rho dV' \\ &+ \frac{1}{r^5} \frac{1}{2} \int [3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2 - r^2 r'^2] \rho dV' + \dots \quad (115-3) \end{aligned}$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{r} + \frac{1}{r^2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{r^5} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r x^i x^j Q^{ij} + \dots \quad (116-3)$$

که در آن

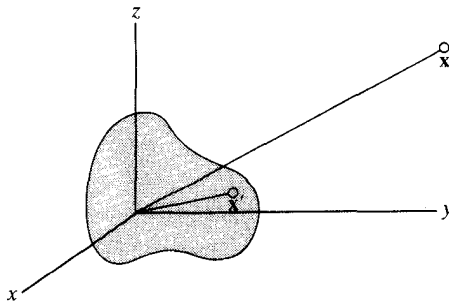
$$Q \equiv \int \rho(\mathbf{x}') dV' \quad (117-3)$$

$$\mathbf{p} \equiv \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') dV' \quad (118-3)$$

$$Q^{ij} \equiv \int (3x^i x^j - \delta^{ij} r'^2) \rho(\mathbf{x}') dV' \quad (119-3)$$

روشن است که کمیت Q بار کل توزیع است؛ \mathbf{p} بردار گشتاور دوقطبی است؛ و Q^{ij} تانسور گشتاور چارقطبی است.

عبارت ۱۱۶-۳ را بسط چندقطبی پتانسیل می‌نامند؛ این عبارت تنها برای نقاط \mathbf{x} خارج از توزیع بار معتبر است (شکل ۱۸-۳). در حد $r \rightarrow \infty$ جمله غالب در ۱۱۶-۳ عبارت است از



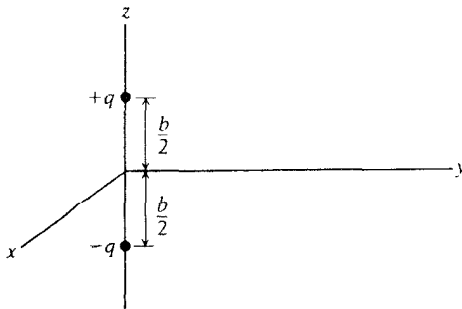
شکل ۳-۱۸ توزیع بار (ناحیه خاکستری). نقطه x خارج از توزیع بار است.

Q/r ؛ در نتیجه، هر توزیع باری در یک فاصله بسیار دور شبیه به بار نقطه‌ای به نظر می‌رسد. به تدریج که به توزیع بار نزدیک می‌شویم، جمله دوقطبی اهمیت می‌یابد، و سپس جمله چارقطبی، و غیره. در پایان، چند مورد خاص از معادله ۳-۱۱۵ را بررسی می‌کنیم. شکل ۳-۱۹ دوبار نقطه‌ای $\pm q$ را در $z' = \pm b/2$ روی محور z نشان می‌دهد. این بارها یک دوقطبی تشکیل می‌دهند. قبلاً پتانسیل (تقریبی) را برای این توزیع بار در بخش ۲-۴ بررسی کردیم؛ در اینجا این پتانسیل را از بسط چندقطبی به دست می‌آوریم. بدیهی است که بار کل $Q = 0$ گشتاور دوقطبی برابر است با

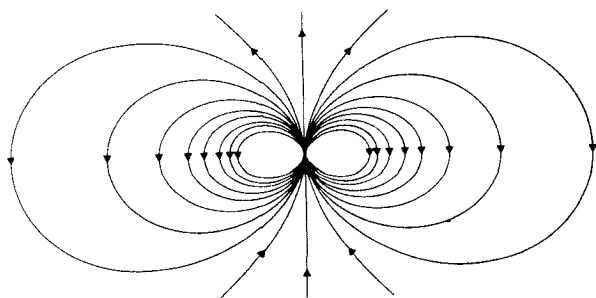
$$p_z = \int z' \rho dV' = q \frac{b}{2} + (-q) \left(\frac{-b}{2} \right) = qb$$

$$p_x = p_y = 0 \quad (3-120)$$

و تانسور گشتاور چارقطبی صفر است.



شکل ۳-۱۹ توزیع باری شامل یک جفت بار $\pm q$ روی محور z .



شکل ۳-۲۰ خطوط میدان دوقطبی محض.

تمرین ۲۵- نشان دهید Q^{ij} برای توزیع بار بالا صفر است.

پس تنها جمله‌هایی که در معادله ۳-۱۱۶ باقی می‌مانند عبارت‌اند از جمله دوم یعنی $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}/r^3)$ و جمله‌های مرتبه بالاتر که با نقطه نشان داده شده‌اند. اگر حد $q \rightarrow \infty$ و $b \rightarrow 0$ را به طوری که qb ثابت بماند بگیریم، این جمله‌های مرتبه بالاتر در معادله ۳-۱۱۶ حذف می‌شوند (این جمله‌ها متناسب با qb^3 ، qb^4 و غیره هستند). آنگاه آنچه می‌ماند پتانسیل یک دوقطبی ایده‌آل، یا دوقطبی محض است:

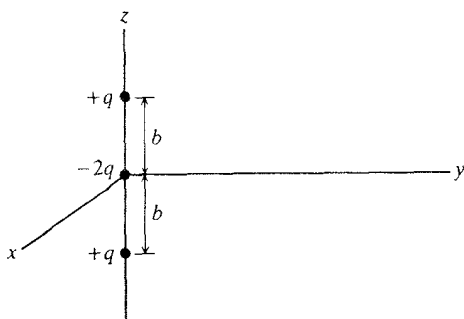
$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{r^3} \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = p_z \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (۳-۱۲۱)$$

میدان الکتریکی این دوقطبی از معادله‌های ۲-۵۳ تا ۲-۵۵ به دست می‌آیند. این میدان الکتریکی نسبت به فاصله به صورت $1/r^3$ کاهش می‌یابد. خطوط میدان دوقطبی محض در شکل ۳-۲۰ نشان داده شده‌اند.

تمرین ۲۶- نشان دهید گشتاور دوقطبی بارهای $\pm q$ مستقل از مکان مرکز دوقطبی است. ثابت کنید این نتیجه برای هر توزیع باری که بار کل آن صفر باشد عموماً درست است.

تمرین ۲۷- نشان دهید یک دوقطبی محض (که البته بار کل آن صفر است) واقع در نقطه \mathbf{x}' پتانسیل زیر را ایجاد می‌کند

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{p} \quad (۳-۱۲۲)$$



شکل ۳-۲۱ بارهای $+q$ ، $-2q$ ، $+q$ روی محور z .

ثابت کنید عبارت بالا را می‌توان به صورتهای زیر هم نوشت

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (۱۲۳-۳)$$

و

$$\Phi(\mathbf{x}) = +\mathbf{p} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (۱۲۴-۳)$$

شکل ۳-۲۱ سه بار را روی محور z نشان می‌دهد: بار $+q$ در $z' = b$ ، بار $-2q$ در $z' = 0$ و بار $+q$ در $z' = -b$. این توزیع بار را چارقطبی خطی می‌نامند. این توزیع بار دارای بار کل صفر و گشتاور دوقطبی صفر است. تانسور گشتاور چارقطبی آن عبارت است از

$$Q^{ij} = \int (\rho x'^i x'^j - \delta^{ij} r'^2) \rho(\mathbf{x}') dV' = \begin{pmatrix} -2qb^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2qb^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4qb^2 \end{pmatrix} \quad (۱۲۵-۳)$$

پس در بسط چندقطبی ۳-۱۱۶ تنها جمله چارقطبی و جمله‌های مرتبه بالاتر وجود دارند. اگر حد $q \rightarrow \infty$ و $b \rightarrow 0$ را به طوری که qb^2 ثابت بماند بگیریم، این جمله‌های مرتبه بالاتر همگی حذف می‌شوند. آنچه می‌ماند پتانسیل یک چارقطبی محض است:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{r^5} \frac{1}{4} 2qb^2 (2z^2 - x^2 - y^2) \\ &= \frac{2qb^2}{r^3} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \end{aligned} \quad (۱۲۶-۳)$$

میدان الکتریکی محاسبه شده از این پتانسیل نسبت به فاصله به صورت $1/r^3$ کاهش می‌یابد.

مراجع

1. F. C. Witteborn and W. M. Fairbanks, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1049 (1967).
2. L. I. Schiff, *Phys. Rev. B* **1**, 4649 (1970).

مسائل

۳-۱ اگر روغن زیتون داخل یک قوطی حلبی بسته نازک دارای بار Q باشد، ثابت کنید همین مقدار بار روی سطح خارجی قوطی القا می‌شود.

۳-۲ یک سطح رسانای استوانه‌ای باردار با مقطع اختیاری (که الزاماً دایره‌ای نیست) در نظر بگیرید. با استفاده از قانون گاوس نشان دهید در سطح استوانه مشتق میدان الکتریکی در راستای عمودی برابر است با

$$\frac{\partial E}{\partial l} = -\frac{E}{R}$$

که در آن R شعاع انحنای (موضعی) سطح است.

۳-۳ دو صفحه رسانای نامتناهی متصل به زمین (صفحه xz و صفحه yz) یکدیگر را با زاویه 90° قطع کرده‌اند. بار نقطه‌ای q در $(b, b, 0)$ واقع است. با استفاده از روش تصویر، پتانسیل را در ناحیه $x > 0$ و $y > 0$ به دست آورید. نیرویی را که صفحه‌های رسانا بر بار نقطه‌ای وارد می‌کنند تعیین کنید.

۳-۴ یک کره رسانای متصل به زمین به شعاع a در مبدأ قرار دارد. بار نقطه‌ای q روی محور x در $x = 3a$ واقع شده است. پتانسیل را در همه جا به دست آورید. چگالی بار سطحی σ که روی کره القا شده است را پیدا کنید. [راهنمایی: بار تصویر q' در $x = b$ را امتحان کنید؛ q' و b را طوری تعیین کنید که سطح کره هم‌پتانسیل شود.]

۳-۵ دو صفحه رسانای نامتناهی موازی به اندازه $2d$ از یکدیگر فاصله دارند؛ این صفحه‌ها به زمین متصل‌اند. یک بار نقطه‌ای را در وسط فاصله بین دو صفحه قرار می‌دهیم. پتانسیل در ناحیه بین دو صفحه را به دست آورید. [راهنمایی: یک دنباله نامتناهی از بارهای تصویر را امتحان کنید. پتانسیل یک رشته نامتناهی است.]

۳-۶ یک رشته بسیار دراز با چگالی بار خطی λ در امتداد محور x قرار دارد. یک صفحه رسانای

بسیار بزرگ متصل به زمین در $z = -b$ واقع شده است. پتانسیل در ناحیه $z \geq -b$ را به دست آورید.

۷-۳ در بخش ۱-۳، پتانسیل الکتروستاتیک ناشی از یک بار نقطه‌ای واقع در فاصله b از یک صفحه رسانای بسیار بزرگ را به دست آوردیم. (الف) چگالی بار سطحی روی صفحه را محاسبه کنید. (ب) میدان الکتریکی روی صفحه را حساب کنید. (ج) با انتگرال گرفتن از نیروی واحد سطح (معادله ۱۵-۳) نیروی کل وارد بر صفحه را به دست آورید، و با نیروی $q^2/4b^2$ که صفحه بر بار نقطه‌ای وارد می‌کند مقایسه کنید.

۸-۳ یک بار نقطه‌ای به فاصله b از یک صفحه رسانای بزرگ قرار دارد. (الف) کار لازم برای بردن بار نقطه‌ای از فاصله b به بینهایت را حساب کنید. آیا این مقدار کار با انرژی پتانسیل متقابل بین بار و بار (مجازی) تصویر توافق دارد؟ (ب) فرض کنید الکترونی را در فاصله دور از صفحه رسانا رها کنیم. وقتی الکترون به فاصله 10^8 \AA از صفحه می‌رسد انرژی جنبشی آن چه اندازه است؟

۹-۳ پتانسیل در ناحیه (خالی) بین دو صفحه موازی نامتناهی را با شرایط مرزی زیر به دست آورید. صفحه پایینی بر صفحه xy منطبق است و پتانسیل روی آن عبارت است از

$$\Phi(x, y, 0) = 5 \sin(4x) \cos(3y)$$

صفحه بالایی در $z = 2/5$ است و پتانسیل روی آن عبارت است از

$$\Phi(x, y, \frac{2}{5}) = 2 \sin(4x) \cos(3y)$$

۱۰-۳ پتانسیل در درون یک مکعب (خالی) با یال L را با این فرض به دست آورید که پتانسیل روی یک وجه مکعب برابر با V_0 و روی سایر وجوه برابر با صفر است.

۱۱-۳ دو استوانه دراز هم محور از ورق فلز یکی به شعاع a و در پتانسیل V_a و دیگری به شعاع b و در پتانسیل V_b را در نظر بگیرید. ناحیه بین این دو سطح استوانه‌ای با توزیع بار یکنواختی با چگالی ρ پر شده است. پتانسیل در این ناحیه را به دست آورید.

۱۲-۳ یک استوانه رسانای دراز در یک میدان الکتریکی (قبلاً) یکنواخت قرار دارد (بخش ۳-۳). چگالی بار سطحی روی این استوانه را حساب کنید.

۱۳-۳ یک استوانه رسانای افقی دراز به شعاع 1 cm در میدان الکتریکی قائم قبلاً یکنواخت $E_0 = 20 \text{ statV/cm}$ قرار دارد. نیروی واحد سطح میدان الکتریکی وارد بر استوانه را در بالاترین

نقطه آن حساب کنید.

۳-۱۴ یک استوانهٔ رسانای بسیار دراز به شعاع R را توسط صفحه‌های عایق نازک که از محور استوانه می‌گذرند به چهار قطاع 90° درجه‌ای تقسیم کرده‌ایم. این قطاعها به‌ترتیب در پتانسیلهای $+V_0$ ، $-V_0$ ، $+V_0$ و $-V_0$ هستند. پتانسیل در ناحیهٔ خارج از استوانه را محاسبه کنید.

۳-۱۵ روی یک سطح استوانه‌ای به شعاع R که محور آن در امتداد محور z است، پتانسیل در شرط مرزی زیر صدق می‌کند

$$\Phi(R, \phi) = \begin{cases} 0 & \text{به‌ازای } \frac{-\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{4} \\ V_0 & \text{به‌ازای } \frac{\pi}{4} < \phi < \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

پتانسیل در داخل استوانه را به‌دست آورید.

۳-۱۶ یک قوطی خالی به شکل قطاعی از یک استوانه را در نظر بگیرید. حجم این قوطی با مختصات استوانه‌ای $0 \leq \rho \leq R$ ، $0 \leq \phi \leq \pi/2$ ، و $-\infty < z < \infty$ تعریف می‌شود. سطح $\rho = R$ در پتانسیل V_0 است. پتانسیل را در همهٔ نقاط داخل قوطی به‌دست آورید.

۳-۱۷ ثابت کنید چند جمله‌ایهای لژاندر به‌استثنای P_0 دارای مقدار متوسط صفر هستند، یعنی

$$\int_{-1}^1 P_l(\mu) d\mu = 0$$

۳-۱۸ پوستهٔ کروی نصف شده‌ای که در بخش ۳-۴ گفته شد را در نظر بگیرید. پتانسیل در ناحیهٔ بیرون این پوسته را به‌دست آورید.

۳-۱۹ معادلهٔ ۳-۱۰ پتانسیل الکتروستاتیک را در ناحیهٔ اطراف یک کرهٔ رسانا واقع در یک میدان الکتریکی قبلاً یکنواخت تعیین می‌کند. (الف) میدان الکتریکی روی سطح کره و چگالی بار سطحی روی کره را محاسبه کنید. (ب) نیروی الکتریکی وارد بر نیمهٔ بالایی کره ($0 < \theta < \pi/2$) و نیروی الکتریکی وارد بر نیمهٔ پایینی کره ($\pi/2 < \theta < \pi$) را حساب کنید.

۳-۲۰ باری به مقدار Q روی کره‌ای رسانا به شعاع R قرار دارد، و کره در میدان الکتریکی یکنواخت \mathbf{E} که در راستای z است گذاشته شده است. پتانسیل در ناحیهٔ اطراف کره را به‌دست آورید.

۳-۲۱ در یک صفحهٔ رسانای افقی بسیار بزرگ یک برجستگی به‌شکل نیمکره‌ای به شعاع R در مرکز وجود دارد. این صفحه را در یک میدان الکتریکی که در فاصلهٔ دور در بالای صفحهٔ قائم و

شدت آن E_0 است قرار می‌دهیم. پتانسیل در ناحیه بالای صفحه را به دست آورید، و چگالی بار سطحی روی صفحه و روی نیمکره را حساب کنید.

۲۲-۳ مرکز یک پوسته کروی نازک از جنس عایق در مبدأ واقع است. این پوسته دارای شعاع R و چگالی بار سطحی $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ است. ثابت کنید این توزیع بار یک میدان الکتریکی یکنواخت در ناحیه کروی داخل پوسته ایجاد می‌کند، و بزرگی این میدان الکتریکی را به دست آورید. ثابت کنید میدان الکتریکی در ناحیه خارج پوسته میدان الکتریکی یک دوقطبی است، و گشتاور دوقطبی را حساب کنید. [راهنمایی: میدان الکتریکی داخل را ثابت بگیرید، و از قضیه یکتایی استفاده کنید.]

۲۳-۳ پتانسیل الکتروستاتیک درون یک حجم کروی را با این فرض به دست آورید که این حجم دارای چگالی بار حجمی یکنواخت ρ_0 است و پتانسیل در سطح $r = R$ برابر است با

$$\Phi(R, \theta) = V_0 (2 + 5 \cos \theta)$$

۲۴-۳ ناحیه محصور بین دو سطح کروی هم‌مرکز از چگالی بار حجمی یکنواخت ρ_0 پر شده است. روی مرز داخلی این ناحیه ($r = a$) پتانسیل برابر است با

$$\Phi(a, \theta, \phi) = V_0 \cos \theta$$

روی مرز خارجی ($r = b$) پتانسیل برابر است با

$$\Phi(b, \theta, \phi) = 2V_0$$

جواب معادله پواسون را در ناحیه $a < r < b$ به دست آورید.

۲۵-۳ از بسط رشته تیلور $1/\sqrt{r^2 + r'^2} - 2rr' \cos \theta$ حول $r' = 0$ ، معادله ۱۱۲-۳ را به دست آورید.

۲۶-۳ بارکل Q روی حلقه‌ای به شعاع b به طور یکنواخت توزیع شده است. تانسور گشتاور چارقطبی این توزیع بار را به دست آورید، و سه جمله اول بسط چندقطبی پتانسیل را بنویسید. حلقه را در صفحه xy و مرکز آن را در مبدأ بگیرید.

۲۷-۳ در مورد حلقه بار مسئله ۲۶-۳، بسط چندقطبی به‌آزای $r < b$ معتبر نیست. بسطی برای پتانسیل به دست آورید که در این ناحیه معتبر باشد.

۲۸-۳ معادله ۱۱۶-۳ سه جمله اول در بسط دوقطبی را به دست می‌دهد. جمله بعدی در این بسط را پیدا کنید.

۲۹-۳ بیضیواری که توسط معادله

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

تعریف می شود دارای بار Q است که در حجم آن به طور یکنواخت توزیع شده است. تانسور گشتاور چارقطبی این بیضیوار را به دست آورید.

۳۰-۳ یک توزیع بار کوچک با تانسور گشتاور چارقطبی Q^{ij} و بار صفر ($Q = 0$) و گشتاور دوقطبی صفر ($p = 0$) در میدان الکتریکی خارجی $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ قرار دارد. نشان دهید نیروی این میدان الکتریکی وارد بر توزیع بار تقریباً برابر است با

$$F^k = \frac{1}{\epsilon} Q^{ij} \frac{\partial^2 E^j}{\partial x^k \partial x^i} + \dots$$

۳۱-۳ استوانه‌ای به شعاع b و ارتفاع h دارای بار Q است که به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است. با فرض اینکه محور استوانه در امتداد محور z و مرکز آن در مبدأ قرار دارد، پتانسیل را توسط بسط چندقطبی (معادله ۳-۱۱۶) در ناحیه خارج استوانه حساب کنید.

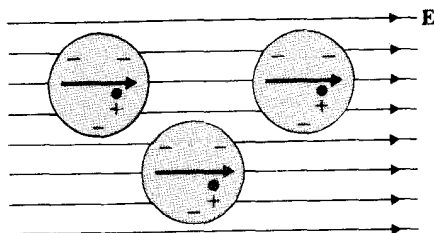
۳۲-۳ یک ورق کاغذ بزرگ واقع در صفحه xy حامل چگالی بار سطحی یکنواخت σ است. از این ورق یک تسمه دایره‌ای باریک به شعاع خارجی $R + \Delta R/2$ و به شعاع داخلی $R - \Delta R/2$ و به مرکز مبدأ می‌بریم. با استفاده از بسط چندقطبی، پتانسیل را در فاصله $R \gg r$ به دست آورید.

دی الکتریکها

رساناها دارای الکترونهاى آزاد (یا بارهاى متحرک دیگر) در درون خود هستند. وقتی یک رسانا را در میدان الکتریکی قرار می‌دهیم الکترونهاى آزاد ترتیب خود را تغییر می‌دهند و به هیئت تعادل جدیدی درمی‌آیند به طوری که میدان الکتریکی در درون رسانا کلاً حذف می‌شود. عایقها فاقد الکترونهاى آزاد یا سایر بارهاى آزاد هستند. اگر عایقی را در یک میدان الکتریکی بگذاریم میدان دست کم حذف نخواهد شد. عایقها دارای بارهاى مقید هستند. در واکنش نسبت به میدان الکتریکی، حرکت محدودی از این بارهاى مقید بروز می‌کند که منجر به حذف جزئی میدان الکتریکی می‌شود. بارهاى مقید ترتیب خود را به گونه‌ای تغییر می‌دهند که جدایی کمی بین مکانهای متوسط بارهاى مثبت و منفی به وجود می‌آید؛ این جدایی را قطبیدگی توزیع بار می‌نامند. موادی را که هنگام قرارگرفتن در میدان الکتریکی دارای قطبیدگی می‌شوند دی الکتریک می‌نامند.

۴-۱ قطبیدگی

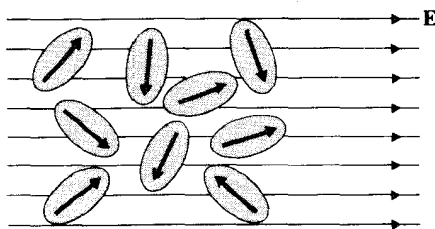
می‌توانیم تأثیر میدان الکتریکی بر یک ماده دی الکتریک را در این عبارت خلاصه کنیم که در این ماده دو قطبیهایی ایجاد می‌شوند. چون آنچه واقعاً در اینجا روی می‌دهد جدایی بار است، روشن



شکل ۱-۴ در این اتمها، نیروهای الکتریکی مراکز ثقل توزیع بارهای منفی و هستهها (نقطهها) را جابه‌جا کرده‌اند. بردارها نمایشگر گشتاورهای دوقطبی هستند.

است که نه تنها دوقطبها بلکه چارقطبها و چندقطبهای مرتبه بالاتر نیز به وجود می‌آیند؛ از همه اینها به جز دوقطبها صرف‌نظر می‌کنیم. یک نحوه ایجاد دوقطبها در یک ماده این است که توزیع بارها در داخل اتم به هم می‌خورد. اگر اتمی را در میدان الکتریکی قرار دهیم نیروی وارد بر الکترونها و هسته در جهتهای مخالف خواهد بود؛ این امر باعث یک جدایی کوچک بین مراکز ثقل توزیع بارهای منفی و مثبت می‌شود و به اتم یک گشتاور دوقطبی القایی می‌دهد (شکل ۱-۴). نحوه دیگر مبتنی است بر وجود مولکولهایی که گشتاور دوقطبی دائمی دارند. در مواد سیال سم‌تگیری این مولکولها به علت حرکت گرمایی معمولاً اتفاقی است، و مؤلفه گشتاور دوقطبی در هر راستایی به طور متوسط صفر است. اما اگر این مواد را در میدان الکتریکی قرار دهیم نیروهای وارد بر مولکولها می‌خواهند گشتاورهای دوقطبی را با میدان الکتریکی هم جهت کنند؛ این هم‌جهتی کامل نیست زیرا حرکت‌های گرمایی اتفاقی بی‌نظمی را به وجود می‌آورند، اما مؤلفه متوسط گشتاور دوقطبی در راستای میدان الکتریکی مثبت خواهد بود (شکل ۲-۴).

فرض کنید در حضور میدان الکتریکی خارجی، گشتاور دوقطبی (القایی یا دائمی) متوسط



شکل ۲-۴ در این نمونه از مولکولهای دارای گشتاور دوقطبی دائمی، نیروهایی الکتریکی یک هم‌جهتی جزئی ایجاد کرده‌اند—بیشتر گشتاورها به سمت راست هستند. گشتاور دوقطبی کل به طرف راست است.

یک اتم یا مولکول در راستای میدان الکتریکی برابر با \mathbf{p} باشد. آنگاه گشتاور دوقطبی در واحد حجم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} \quad (۱-۴)$$

که در آن n تعداد اتمها یا مولکولها در واحد حجم است. بردار \mathbf{P} را قطبیدگی می‌نامند. به طور کلی، \mathbf{P} تابعی است از مکان زیرا \mathbf{p} برحسب شدت میدان الکتریکی تغییر می‌کند و همچنین n لزوماً در تمام ماده ثابت نیست. بنابه معادله ۳-۱۲۴، پتانسیل مربوط به دوقطبیهای حجم جزئی dV' برحسب $\mathbf{P}(\mathbf{x}')$ برابر است با

$$d\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (۲-۴)$$

علاوه بر این، اگر مقدار معینی بار آزاد با چگالی $\rho_F(\mathbf{x}')$ در دی الکتریک توزیع شده باشد، این بار پتانسیل زیر را ایجاد می‌کند

$$d\Phi(\mathbf{x}) = \frac{\rho_F(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (۳-۴)$$

در نتیجه، پتانسیل کل ناشی از بارهای آزاد و مقید در دی الکتریک برابر است با

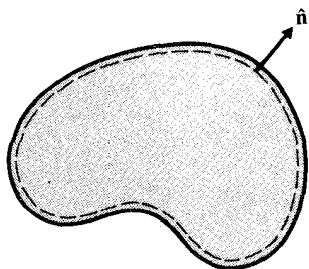
$$\Phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho_F(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \int \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (۴-۴)$$

این معادله برای تمام نقاط \mathbf{x} در خارج یا داخل دی الکتریک معتبر است. اگر نقطه \mathbf{x} در داخل دی الکتریک باشد، آنگاه معادله ۲-۴، که مبتنی بر تقریب دوقطبی است، وقتی \mathbf{x}' به \mathbf{x} نزدیک می‌شود دیگر کارایی ندارد. اما آن دسته از نقاط \mathbf{x}' که در مجاورت بلافاصله \mathbf{x} هستند سهمی در معادله ۴-۴ ایجاد می‌کنند که قابل چشمپوشی است و تأثیری بر اعتبار این معادله ندارد. انتگرال دوم در معادله ۴-۴ متحد است با

$$\int \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV' - \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P} dV' \quad (۵-۴)$$

قضیه گاوس را در مورد انتگرال اول عبارت ۵-۴ به کار می‌بریم. سطح گاوس را داخل دی الکتریک و نزدیک سطح آن می‌گیریم (شکل ۳-۴).^۱ پس

۱. انتخاب بهتری وجود ندارد. ممکن است بخواهیم سطح گاوس را بیرون سطح دی الکتریک بگیریم تا انتگرال سطحی در ۶-۴ صفر شود. اما باید توجه داشت که در سطح دی الکتریک \mathbf{P} ناپیوسته است و $\nabla' \cdot \mathbf{P}$ وجود ندارد.



شکل ۳-۴ یک دی‌الکتریک (ناحیهٔ خاکستری) و یک سطح گاوس زیر سطح دی‌الکتریک.

$$\int \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV' = \int \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS' \quad (۶-۴)$$

از ترکیب نتایج بالا، به دست می‌آوریم

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho_F}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \int \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS' + \int \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (۷-۴)$$

معادلهٔ ۷-۴ تعبیر جالبی دارد. پتانسیل $\Phi(\mathbf{x})$ از سه توزیع بار جداگانه ایجاد شده است: چگالی بار ρ_F در حجم دی‌الکتریک، چگالی بار سطحی $\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ در سطح دی‌الکتریک و چگالی بار $-\nabla' \cdot \mathbf{P}$ در حجم دی‌الکتریک. کمیت

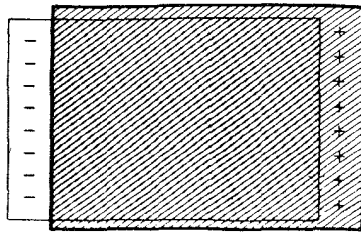
$$\rho_P(\mathbf{x}') = -\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}') \quad (۸-۴)$$

را چگالی بار قطبشی می‌نامند، و کمیت

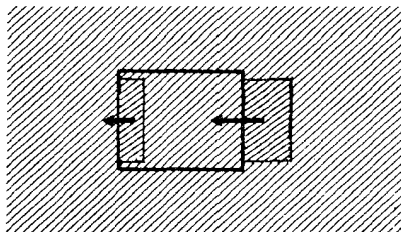
$$\sigma_P(\mathbf{x}') = \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (۹-۴)$$

را چگالی بار سطحی قطبشی می‌نامند.

چگالیهای بار ۸-۴ و ۹-۴ ناشی از بارهای مقید هستند، و از جابه‌جایی بارهای مقید از مکان تعادلشان به وجود آمده‌اند. برای اینکه درک بهتری از چگونگی به‌وجود آمدن چگالی بار سطحی قطبشی ۹-۴ داشته باشیم، یک قطعه دی‌الکتریک با قطبیدگی یکنواخت \mathbf{P} در نظر می‌گیریم. این قطبیدگی یکنواخت به معنی آن است که بارهای مثبت و منفی به یک مقدار ثابت جابه‌جا شده‌اند (شکل ۴-۴). روشن است که انتهای چپ دی‌الکتریک دارای بار اضافی منفی و انتهای راست آن دارای بار اضافی مثبت است؛ این امر با معادلهٔ ۹-۴ توافق دارد.



شکل ۴-۴ توزیع بارهای منفی به سمت چپ توزیع بارهای مثبت جابه‌جا شده است.



شکل ۴-۵ مستطیل بزرگ مقطع یک عنصر حجمی در دی الکتریک را نشان می‌دهد. قطبیدگی دی الکتریک بعضی بارهای منفی (خاکستری) را به درون عنصر حجمی و بعضی را به بیرون آن منتقل می‌کند.

اگر قطبیدگی در دی الکتریک یکنواخت نباشد، معمولاً یک چگالی بار حجمی در دی الکتریک وجود خواهد داشت. این مطلب را می‌توان از شکل ۴-۵ درک کرد؛ این شکل یک عنصر حجمی را در درون یک دی الکتریک با قطبیدگی P که از چپ به راست افزایش می‌یابد نشان می‌دهد. برای سادگی، فرض کنید این قطبیدگی تماماً از جابه‌جایی بارهای منفی که قبلاً توزیع یکنواخت داشته‌اند ناشی شده است. جابه‌جایی این بارها تمام بارهای منفی در ناحیه خاکستری طرف چپ را به بیرون عنصر حجمی و تمام بارهای منفی در ناحیه خاکستری طرف راست را به درون عنصر حجمی منتقل می‌کند. چون جابه‌جایی در طرف راست از جابه‌جایی در طرف چپ بزرگتر است، بار منفی منتقل شده به درون عنصر حجمی از بار منفی منتقل شده به بیرون آن بیشتر است، و نتیجه عبارت است از یک چگالی بار منفی.

۴-۲ میدان جابه‌جایی الکتریکی

برای نوشتن قانون گاوس برای داخل یک دی الکتریک، باید از چگالی بار حجمی کل استفاده کنیم، که شامل چگالی بار مفید و آزاد است:

$$\rho = \rho_F + \rho_P \quad (۴-۱۰)$$

$$\rho = \rho_F - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (۱۱-۴)$$

پس میدان الکتریکی در معادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon \pi (\rho_F + \rho_P) = \epsilon \pi (\rho_F - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad (۱۲-۴)$$

در نتیجه

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + \epsilon \pi \mathbf{P}) = \epsilon \pi \rho_F \quad (۱۳-۴)$$

مرسوم است که جابه‌جایی الکتریکی \mathbf{D} را به صورت زیر تعریف کنند

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \epsilon \pi \mathbf{P} \quad (۱۴-۴)$$

به طوری که

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon \pi \rho_F \quad (۱۵-۴)$$

این رابطه قانون گاوس در دی‌الکتریک است. بدیهی است که می‌توانیم این قانون را به صورت انتگرال بنویسیم:

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_F \quad (۱۶-۴)$$

اگرچه معادلهٔ دیفرانسیلی ۱۵-۴ برای \mathbf{D} تنها شامل چگالی بارهای آزاد ρ_F است، نباید بی‌تأمل نتیجه بگیریم که \mathbf{D} مستقل از چگالی بارهای مقید است. به طور کلی، معادلهٔ ۱۵-۴ برای تعیین \mathbf{D} کافی نیست (کافی بود اگر \mathbf{D} مشتق از پتانسیل بود، اما چنین نیست). در نتیجه، وقتی می‌خواهیم \mathbf{D} را برای توزیع معینی از بارها و دی‌الکتریکها تعیین کنیم، باید از معادلهٔ ۱۴-۴ یا معادل آن استفاده کنیم؛ از اینجاست که قطبیدگی و توزیع بارهای مقید ربط پیدا می‌کنند. در بخش بعد بیشتر در این باره خواهیم گفت.

حائز اهمیت است که به خاطر داشته باشیم قطبیدگی $\mathbf{P}(\mathbf{x}')$ با یک روش متوسط‌گیری تعریف شده است: باید یک حجم کوچک مثلاً یک مکعب $۱۰^{-۴} \text{cm} \times ۱۰^{-۴} \text{cm} \times ۱۰^{-۴} \text{cm}$ از

ماده محیط بر نقطه x' انتخاب کنیم، مجموع تمام گشتاورهای دوقطبیهای موجود در این حجم را حساب کنیم و بر 10^{12}cm^{-3} تقسیم کنیم تا گشتاور دوقطبی در واحد حجم به دست آید. اگر چه از لحاظ ریاضی رفتن به حد یک حجم بینهایت کوچک قابل توصیف است، اما این حد بی معنی است زیرا اگر عنصر حجمی در مقایسه با ابعاد اتمی کوچک باشد دوقطبی در آن وجود ندارد، صرفنظر از اینکه عنصر حجمی خارج از اتم باشد یا داخل آن (در مورد اخیر این حجم می تواند حاوی مقداری بار باشد نه گشتاور دوقطبی اتمی). برای تعریف P ، باید عنصری حجمی انتخاب کنیم که در مقایسه با ابعاد ابزار اندازه گیری میکروسکوپی کوچک است اما در قیاس با ابعاد اتمی بزرگ است و در نتیجه تعداد زیادی اتم را در برمی گیرد. اینگونه عناصر حجمی را به جای بینهایت کوچک ریاضی، بینهایت کوچک فیزیکی می نامند. قطبیدگی P تنها در سطح میکروسکوپی تعریف می شود، و در سطح میکروسکوپی بی معنی است.

میدان الکتریکی $E(x)$ نیز که بنا به معادله ۴-۱۲ از P محاسبه می شود یک میدان میکروسکوپی است. البته می توانیم میدان الکتریکی میکروسکوپی را میدانی تعریف کنیم که مثلاً یک الکترون وقتی در نقطه معینی واقع می شود احساس می کند؛ میدان میکروسکوپی صرفاً یک میانگین روی میدان میکروسکوپی در یک عنصر حجمی کوچک، اما نه خیلی کوچک، است. برای تأکید بر ماهیت میکروسکوپی یا متوسط میدان $E(x)$ در معادله ۴-۱۲، غالباً از نمادنگاری $\overline{E(x)}$ استفاده می کنند. ما این نمادنگاری را به کار نمی بریم زیرا از بحث معلوم است که منظور میدان الکتریکی میکروسکوپی است یا میکروسکوپی. هرگاه از میدان در ماده سخن می گوئیم منظور میدان میکروسکوپی است مگر اینکه چیز دیگری صریحاً گفته شود. برای مثال، وقتی می گوئیم میدان در رسانا صفر است میدان میکروسکوپی را در نظر داریم؛ میدان میکروسکوپی در درون اتمهای سازنده رسانا مسلماً صفر نیست (در نزدیکی هسته شدت میدان نوعاً 10^{17}statV/cm است).

میدان الکتریکی جابه جایی $D(x)$ که از رابطه ۴-۱۴ تعریف می شود تنها در سطح میکروسکوپی معنی پیدا می کند. به علاوه، شایان تذکر است که رابطه ۴-۱۴ دقیق نیست زیرا از گشتاورهای چارقتبی و چندقطبیهای مرتبه بالاتر صرفنظر شده است. اگر گشتاور چارقتبی اتمها را در نظر بگیریم، آنگاه روابط ۴-۸ و ۴-۱۴ به صورت زیر درمی آیند (در نمادنگاری مؤلفه ای)

$$\rho_p = -\frac{\partial}{\partial x^k} P^k + \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^l} Q^{kl} \quad (17-4)$$

$$D^k = E^k + 4\pi P^k - 4\pi \frac{\partial}{\partial x^l} Q^{kl} \quad (18-4)$$

که در آنها $Q^{kl}(x)$ گشتاور چارقتبی در واحد حجم است. جمله های چارقتبی معمولاً بسیار کوچکتر از جمله های دوقطبی هستند.

برای اینکه بتوانیم معادله‌های مربوط به میدان الکتریکی ناشی از توزیع معین بارهای آزاد در حضور دی الکتریکهای معین را حل کنیم باید وابستگی قطبیدگی به میدان الکتریکی را معلوم کنیم. برای بسیاری از مواد، قطبیدگی تقریباً متناسب با میدان الکتریکی است:

$$P = \chi E \quad (19-4)$$

ثابت χ را پذیرفتاری الکتریکی می‌نامند. تأکید می‌کنیم که معادله ۱۹-۴ یک تقریب است. طرف راست این معادله را می‌توان به‌عنوان اولین جمله در بسط رشته تیلور P برحسب E در نظر گرفت. برای میدانهای الکتریکی شدید، رابطه بین P و E غیرخطی می‌شود (این امر در اپتیک غیرخطی اهمیت قطعی دارد). به‌علاوه، در اکثر بلورها و دیگر مواد ناهمسانگرد معادله ۱۹-۴ حتی برای میدانهای ضعیف نیز برقرار نیست زیرا P و E لزوماً هم‌جهت نیستند؛ در اینجا باید پذیرفتاری الکتریکی را به‌عنوان یک ماتریس که در E ضرب می‌شود در نظر گرفت، اما در این کتاب با این مورد سروکار نداریم.

اگر معادله ۱۹-۴ برقرار باشد دی الکتریک را خطی و همسانگرد می‌نامند. آنگاه جابه‌جایی الکتریکی با میدان الکتریکی متناسب است:

$$D = E + 4\pi P = E + 4\pi\chi E \quad (20-4)$$

یعنی

$$D = \epsilon E \quad (21-4)$$

که در آن

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi \quad (22-4)$$

ϵ را ثابت دی الکتریک ماده می‌نامند. χ و ϵ از خواص اتمی دی الکتریک تعیین می‌شوند. در یکی از بخشهای بعد بررسی می‌کنیم که چگونه این ثابتها به ساختار اتمی بستگی دارند. در جدول ۱-۴ ثابت دی الکتریک چند ماده آورده شده است.

۳-۴ مسئله مقدار مرزی در دی الکتریکها

معادله ۷-۴ پتانسیل را برحسب توزیع بارهای آزاد و مقید تعیین می‌کند. متأسفانه، این معادله در محاسبه پتانسیل ناشی از توزیع معلومی از بارهای آزاد در حضور دی الکتریکهای معلوم چندان

جدول ۱-۴ ثابت دی‌الکتریک چند ماده^۱

ماده	ϵ
هلیوم	۱٫۰۰۰۰۰۶۳۷
هوا	۱٫۰۰۰۰۵۵۰
دی‌اکسید کربن	۱٫۰۰۰۰۹۱۸
آب مقطر	۸۰٫۳۶
کربن تتراکلرید	۲٫۲۳۸
بنزن	۲٫۲۸۴
موم زرد	۲٫۹
اپوکسی رزین	۳٫۶
شیشه	۶٫۷۵
نایلون	۳٫۵
پلکسی گلاس	۳٫۴
پلی‌اتیلن	۲٫۳
چینی	۶٫۰-۸٫۰
لاستیک سفت	۲٫۸

۱. در دمای اتاق (20°C) و ۱ جو.

مفید نیست. در اکثر این مسائل، قطبیدگی— و در نتیجه توزیع بارهای مقید— از ابتدا معلوم نیست و تنها پس از محاسبه پتانسیل و میدان الکتریکی می‌توان آن را تعیین کرد (معادله ۴-۱۹). این مشکل را می‌توانیم با بیان \mathbf{P} برحسب \mathbf{E} ، و در نتیجه حذف \mathbf{P} از معادلات، رفع کنیم.

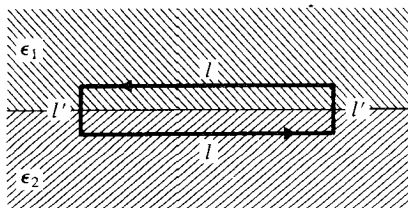
اگر دی‌الکتریک خطی باشد به دست آوردن معادلاتی که در آنها \mathbf{P} وجود نداشته باشد کاملاً آسان است. برای این منظور، بهتر است به جای معادله ۴-۷ از معادله ۴-۱۵ شروع کنیم. در یک دی‌الکتریک خطی، با $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ، می‌توانیم معادله ۴-۱۵ را برحسب میدان الکتریکی بیان کنیم:

$$\nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho_F \quad (23-4)$$

یا برحسب پتانسیل:

$$\nabla \cdot (\epsilon\nabla\Phi) = -4\pi\rho_F \quad (24-4)$$

اگر دی‌الکتریک ناهمگن باشد ϵ بستگی به مکان خواهد داشت. برای سادگی، فرض می‌کنیم دی‌الکتریک از چند قطعه همگن تشکیل شده است به طوری که ϵ در هر قطعه ثابت است و تنها



شکل ۴-۶ مسیر انتگرال گیری برای معادله ۴-۲۶.

از یک قطعه به قطعه دیگر تغییر می کند (یعنی ϵ یک تابع ثابت مقطع با ناپیوستگی در سطوح جدایی قطعه های دی الکتریک است). پس معادله ای که باید حل کنیم عبارت است از

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho_F}{\epsilon} \quad (25-4)$$

مسئله را با این روش حل می کنیم: ابتدا جواب معادله ۴-۲۵ را در هر یک از قطعه های همگن دی الکتریک به دست می آوریم؛ سپس این جوابها را با تحمیل شرایط مرزی در سطوح جدایی قطعه های مختلف دی الکتریک به هم متصل می کنیم.

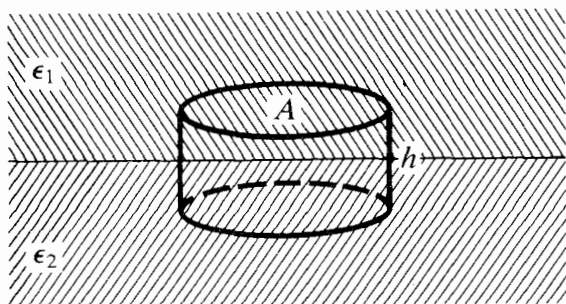
برای به دست آوردن شرایط مرزی که \mathbf{E} و \mathbf{D} باید برآورده کنند، سطح جدایی بین دو دی الکتریک با ثابتهای دی الکتریک ϵ_1 و ϵ_2 را در نظر می گیریم. شرط مرزی روی \mathbf{E} از محاسبه $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ روی یک مسیر مستطیلی کوچک به ابعاد $l \times l'$ که نیمی از آن در یک دی الکتریک و نیمی در دی الکتریک دیگر واقع است به دست می آید (شکل ۴-۶). از سهمهای مربوط به اضلاع کوچک در حد $l' \rightarrow 0$ می توانیم صرف نظر کنیم، و در نتیجه

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = lE_{2\parallel} - lE_{1\parallel} \quad (26-4)$$

که در آن E_{\parallel} مؤلفه موازی با سطح جدایی است. چون انتگرال \mathbf{E} روی هر مسیر بسته ای صفر است، نتیجه می گیریم که

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \quad (27-4)$$

بنابراین، مؤلفه موازی با سطح جدایی \mathbf{E} پیوسته است. قبلاً موقع بررسی شرط مرزی روی سطوح فلزی مورد خاصی از معادله ۴-۲۷ را مشاهده کردیم؛ در این مورد، پیوستگی مؤلفه موازی منجر به صفر شدن این مؤلفه در سطح می شود (معادله ۳-۱۰).



شکل ۷-۴ سطح انتگرال‌گیری برای معادله ۲۸-۴.

شرط مرزی روی \mathbf{D} از محاسبه $\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ روی سطح یک قوطی استوانه‌ای کوچک با قاعده A و ارتفاع h که نیمی از آن در یک دی الکتریک و نیمی در دی الکتریک دیگر واقع است به دست می‌آید (شکل ۷-۴). از سهم مربوط به سطح جانبی در این انتگرال سطحی در حد $h \rightarrow 0$ می‌توان صرف‌نظر کرد، و در نتیجه

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = AD_{\perp 1} - AD_{\perp 2} \quad (28-4)$$

که در آن D_{\perp} مؤلفه عمود بر سطح است. با فرض اینکه در سطح جدایی چگالی بار سطحی آزاد وجود ندارد^۱، می‌توان نوشت

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot \mathbf{D} dV = 0 \quad (29-4)$$

و بنابراین از معادله ۲۸-۴ نتیجه می‌گیریم که

$$D_{\perp 1} = D_{\perp 2} \quad (30-4)$$

این معادله نشان می‌دهد مؤلفه عمود بر سطح جدایی \mathbf{D} پیوسته است. توجه کنید که در حالت کلی، D_{\parallel} و E_{\perp} پیوسته نیستند. معادله‌های ۲۷-۴ و ۳۰-۴ ایجاب می‌کنند که

$$\frac{1}{\epsilon_1} D_{\parallel 1} = \frac{1}{\epsilon_2} D_{\parallel 2} \quad (31-4)$$

۱. یک چگالی بار سطحی قطبشی روی هر یک از دی الکتریکها در سطح جدایی الزاماً وجود دارد (معادله ۹-۴).

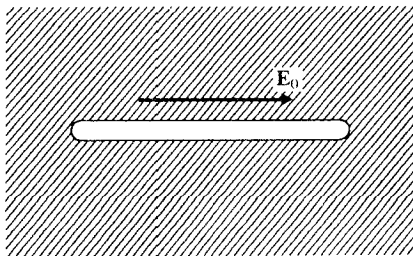
$$\varepsilon_1 E_{\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp} \quad (32-4)$$

تمرین ۱- نشان دهید اگر چگالی بار سطحی آزاد σ_F در سطح جدایی وجود داشته باشد، آنگاه شرط مرزی ۴-۳۰ تبدیل می شود به

$$D_{2\perp} - D_{1\perp} = 4\pi\sigma_F \quad (33-4)$$

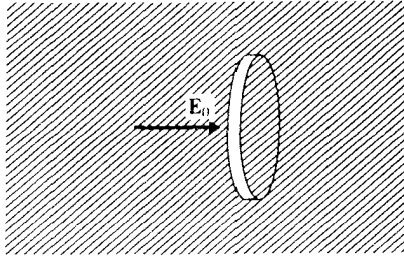
کاربرد ساده‌ای از این شرایط مرزی را بررسی کنیم. فرض کنید یک دی الکتریک با ثابت دی الکتریک ε داریم که در درون آن میدان الکتریکی \mathbf{E} وجود دارد. در این دی الکتریک یک محفظه باریک و دراز (به شکل سوزن) در امتداد \mathbf{E} ایجاد می کنیم (شکل ۴-۸). می خواهیم میدان الکتریکی در این محفظه خالی را تعیین کنیم. این میدان را می توان مستقیماً از شرط مرزی ۴-۲۷ روی \mathbf{E} به دست آورد. چون تقریباً تمام نقاط محفظه در نزدیک سطحی هستند (سطح جانبی سوزن) که در آن \mathbf{E} پیوسته است، میدان در درون محفظه برابر است با $E_{\parallel} = E_{\circ\parallel} = E_{\circ}$. داخل محفظه E_{\perp} نداریم، زیرا $E_{\perp} = \varepsilon E_{\circ\perp} = 0$.

فرض کنید به جای محفظه سوزنی شکل محفظه‌ای کوچک به شکل قرص داشته باشیم که بر \mathbf{E}_{\circ} عمود است (شکل ۴-۹). می خواهیم میدان الکتریکی را در این محفظه به دست آوریم. در اینجا، تقریباً تمام نقاط محفظه نزدیک سطوحی هستند (دو وجه قرص) که در آنها D_{\perp} پیوسته است. در نتیجه، میدان برابر است با $E_{\perp} = \varepsilon E_{\circ\perp} = \varepsilon E_{\circ}$. در این مورد، E_{\parallel} وجود ندارد زیرا $E_{\parallel} = E_{\circ\parallel} = 0$.



شکل ۴-۸ محفظه سوزنی شکل در یک دی الکتریک؛ محور بزرگ محفظه موازی با میدان الکتریکی است.

۱. این استدلال در دو سر سوزن کارایی ندارد؛ از این دو ناحیه صرف نظر می کنیم.

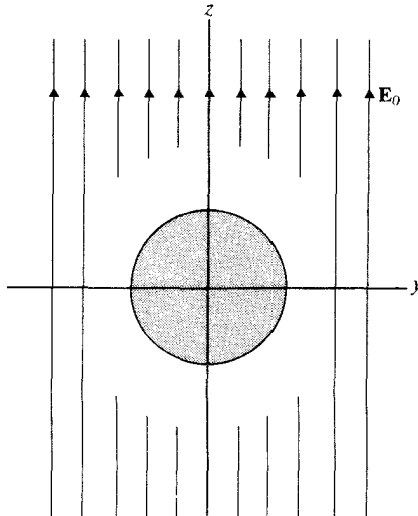


شکل ۹-۴ محفظه قرص مانند در یک دی الکتریک؛ سطح تخت بر میدان الکتریکی عمود هستند.

به طور خلاصه: در محفظه سوزنی شکل میدان الکتریکی با میدان الکتریکی در دی الکتریک یکسان است؛ در محفظه قرص مانند میدان الکتریکی ϵ مرتبه بزرگتر است.

تمرین ۲- چگالی بار سطحی (مقید) را روی دو وجه محفظه قرص مانندی که بر \mathbf{E}_0 عمود است به دست آورید. این چگالی بار سطحی چه سهمی در میدان داخل محفظه دارد؟ ■

به عنوان مثالی از مسئله مقدار مرزی با دی الکتریکها، یک کره دی الکتریک به شعاع R و ثابت دی الکتریک ϵ_2 در نظر بگیرید که در محیطی با ثابت دی الکتریک ϵ_1 (مثلاً یک سیال) که در آن میدان الکتریکی قبلاً یکنواخت \mathbf{E}_0 وجود دارد قرار گرفته است (شکل ۴-۱۰). می خواهیم



شکل ۴-۱۰ یک کره دی الکتریک در محیطی با میدان الکتریکی قبلاً یکنواخت.

پتانسیل در اطراف این کره را به دست آوریم. اگر محور z را در امتداد میدان \mathbf{E}_0 بگیریم، پتانسیل مربوط به این میدان یکنواخت برابر است با

$$-E_0 z = -E_0 r \cos \theta \quad (34-4)$$

از این معادله یک شرط مرزی روی Φ به دست می آید:

$$\Phi \rightarrow -E_0 r \cos \theta \quad \text{وقتی} \quad r \rightarrow \infty \quad (35-4)$$

شرایط مرزی دیگر عبارتند از پیوستگی E_{\parallel} و D_{\perp} در $r = R$:

$$\left. \frac{\partial \Phi_1(r, \theta)}{\partial \theta} \right|_{r=R} = \left. \frac{\partial \Phi_2(r, \theta)}{\partial \theta} \right|_{r=R} \quad (36-4)$$

و

$$\varepsilon_1 \left. \frac{\partial \Phi_1(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=R} = \varepsilon_2 \left. \frac{\partial \Phi_2(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (37-4)$$

که در آنها Φ_1 و Φ_2 به ترتیب توابع پتانسیل در ناحیه های $r > R$ و $r < R$ هستند. بهتر است به جای شرط مرزی ۳۶-۴ از شرط مرزی زیر استفاده کنیم

$$\left. \Phi_1(r, \theta) \right|_{r=R} = \left. \Phi_2(r, \theta) \right|_{r=R} \quad (38-4)$$

اگر از معادله ۳۸-۴ نسبت به θ مشتق بگیریم معادله ۳۶-۴ را به دست خواهیم آورد. در نتیجه، معادله ۳۸-۴ یک شرط کافی است. برای اثبات لازم بودن آن، ملاحظه می کنیم که پیوستگی Φ از $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ ایجاب می شود زیرا بنابه این معادله هرگونه ناپیوستگی در Φ یک تکینگی در \mathbf{E} به وجود می آورد (مشتق Φ در نقطه ناپیوستگی بینهایت می شود).

معادله دیفرانسیلی که Φ باید در ناحیه های $r < R$ و $r > R$ برآورده کند عبارت است از معادله ۲۵-۴ با $\rho_p = 0$ (بار آزاد وجود ندارد)، یعنی

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (39-4)$$

چیزی جز معادله لاپلاس نیست. جوابهای معادله ۴-۳۹ را در بخش ۳-۴ گفتیم. بنابراین، تابع پتانسیل در ناحیه $r > R$ باید به صورت زیر باشد

$$\Phi_1(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=1}^{\infty} A_l \frac{P_l(\cos \theta)}{r^{l+1}} \quad (40-4)$$

در این معادله بنابه شرط مرزی ۴-۳۵ تمام جمله‌های مربوط به توانهای مثبت مرتبه‌های بالاتر r حذف شده‌اند؛ به علاوه، جمله A_0/r نیز حذف شده است زیرا این جمله معرف وجود بار الکتریکی روی کره دی الکتریک است. در ناحیه $r < R$ ، تابع پتانسیل به صورت زیر است

$$\Phi_2(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (41-4)$$

در اینجا توانهای منفی r را حذف کرده‌ایم زیرا در غیر این صورت تابع پتانسیل در $r = \infty$ واگرا می‌بود. شرط مرزی ۴-۳۸ ایجاب می‌کند که

$$-E_0 R \cos \theta + \sum_{l=1}^{\infty} A_l \frac{P_l(\cos \theta)}{R^{l+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} B_l R^l P_l(\cos \theta) \quad (42-4)$$

تمرین ۳- نشان دهید اگر بخواهیم معادله بالا به ازای تمام مقادیر θ معتبر باشد، باید

$$\begin{aligned} 0 &= B_0 - E_0 R + \frac{A_1}{R^2} = B_1 R \\ \frac{A_2}{R^3} &= B_2 R^2 & \frac{A_r}{R^r} &= B_r R^r \end{aligned} \quad (43-4)$$

و غیره.

شرط مرزی ۴-۳۷ ایجاب می‌کند که

$$\varepsilon_1 \left[-E_0 \cos \theta - \sum_{l=1}^{\infty} (l+1) A_l \frac{P_l(\cos \theta)}{R^{l+2}} \right] = \varepsilon_2 \sum_{l=1}^{\infty} l B_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) \quad (44-4)$$

تمرین ۴- نشان دهید از معادله ۴۴-۴ نتیجه می‌شود که

$$\varepsilon_1 \left(-E_0 - \frac{2A_1}{R^2} \right) = \varepsilon_2 B_1, \quad \varepsilon_1 \left(\frac{-3A_2}{R^3} \right) = \varepsilon_2 (2B_2 R), \quad \varepsilon_1 \left(\frac{-4A_3}{R^4} \right) = \varepsilon_2 (3B_3 R^2) \quad (45-4)$$

و غیره.

معادله‌های ۴۳-۴ و ۴۵-۴ دستگاه معادلات خطی بر حسب مجهولهای $A_1, A_2, A_3, \dots, B_1, B_2, B_3, \dots$ هستند. جواب این دستگاه عبارت است از

$$A_1 = R^2 E_0 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \quad A_2 = A_3 = \dots = 0$$

$$B_1 = -E_0 \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \quad B_2 = B_3 = B_4 = \dots = 0 \quad (46-4)$$

تمرین ۵- جواب بالا را واریس کنید.

نتیجه نهایی برای پتانسیل عبارت است از

$$\Phi_1(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + R^2 E_0 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad r > R \quad \text{به‌ازای} \quad (47-4)$$

$$\Phi_2(r, \theta) = -E_0 \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} r \cos \theta \quad r < R \quad \text{به‌ازای} \quad (48-4)$$

این معادله‌ها نشان می‌دهند که میدان الکتریکی در درون کره ($r < R$) یکنواخت و بزرگی آن برابر است با

$$\frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_0$$

و میدان الکتریکی در بیرون کره ($r > R$) میدان یک دوقطبی محض با گشتاور

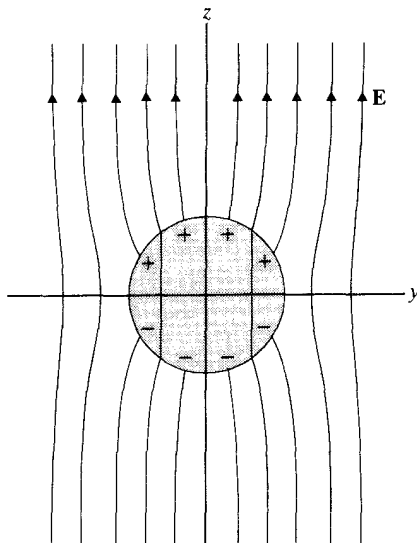
$$R^3 E_0 [(\epsilon_2 - \epsilon_1) / (\epsilon_1 + 2\epsilon_2)]$$

به‌علاوه میدان ثابت E_0 است. شکل ۱۱-۴ خطوط میدان الکتریکی E و شکل ۱۲-۴ خطوط میدان جابه‌جایی D را نشان می‌دهد. توجه کنید که خطوط D پیوسته‌اند اما خطوط E چشمه‌ها و چاهکهایی در مکان بارهای (مقید) قطبشی در سطح کره دارند. قطبیدگی بر حسب میدانها برابر است با

$$\mathbf{P} = \frac{(\mathbf{D} - \mathbf{E})}{4\pi} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E} = -\frac{\epsilon - 1}{4\pi} \nabla \Phi \quad (49-4)$$

از این معادله برای ناحیه درونی به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{P}_2 = \frac{\epsilon_2 - 1}{4\pi} \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_0 \hat{z} \quad (50-4)$$



شکل ۱۱-۴ خطوط میدان E داخل و اطراف یک کره دی الکتریک. توجه کنید که بعضی از خطوط میدان به بارهای قطبشی در سطح کره ختم می شوند.

در نتیجه، چگالی بار (مقید) سطحی قطبشی روی کره برابر است با

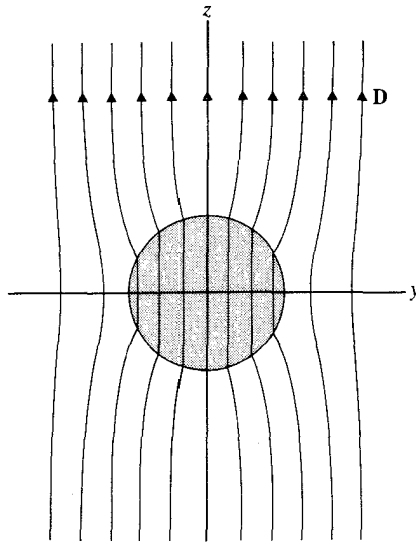
$$\sigma_{P_r} = \mathbf{P}_r \cdot \hat{\mathbf{r}} = P_r \cos \theta = \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi} \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_r + 2\epsilon_1} E_0 \cos \theta \quad (51-4)$$

این چگالی بار روی نیمکره بالایی مثبت و روی نیمکره پایینی منفی است.

اما چگالی بار سطحی تنها ۵۱-۴ نیست. سطح $r = R$ سطح جدایی دو دی الکتریک است و هر یک از دی الکتریکها یک چگالی بار سطحی قطبشی دارد. سطح دی الکتریک خارجی یک محفظه کروی تشکیل می دهد که بردار عمودی آن $-\hat{\mathbf{r}}$ و چگالی بار آن عبارت است از

$$\sigma_{P_1} = -\mathbf{P}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (52-4)$$

برای محاسبه σ_{P_1} ، بهتر است \mathbf{P}_1 را برحسب \mathbf{D}_1 بیان کنیم و آنگاه شرط مرزی روی مؤلفه عمودی \mathbf{D} یعنی $\mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}$ را به کار ببریم. این امر به ما امکان می دهد که σ_{P_1} را برحسب σ_{P_r} بیان



شکل ۱۲-۴ خطوط میدان D داخل و اطراف کره دی الکتریک.

کنیم:

$$\begin{aligned} \sigma_{P_1} &= -\frac{1 - 1/\epsilon_1}{4\pi} D_1 \cdot \hat{r} = -\frac{1 - 1/\epsilon_1}{4\pi} D_{r1} \cdot \hat{r} \\ &= -\frac{1 - 1/\epsilon_1}{4\pi} \frac{4\pi}{1 - 1/\epsilon_2} P_{r2} \cdot \hat{r} = -\frac{1 - 1/\epsilon_1}{1 - 1/\epsilon_2} \sigma_{P_2} \end{aligned} \quad (53-4)$$

در نتیجه، چگالی بار سطحی کل روی سطح جدایی برابر است با

$$\sigma_P = \sigma_{P_1} + \sigma_{P_2} = \left(1 - \frac{1 - 1/\epsilon_1}{1 - 1/\epsilon_2}\right) \frac{\epsilon_2 - 1}{4\pi} \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \cos \theta \quad (54-4)$$

تمرین ۶- نشان دهید در مورد خاص یک محفظه کروی خالی ($\epsilon_2 = 1$) در یک دی الکتریک، از معادله ۵۴-۴ به دست می آید

$$\sigma_P = -\frac{1}{4\pi} \frac{3(\epsilon_1 - 1)}{1 + 2\epsilon_1} \cos \theta$$

توجه کنید که در مثال بالا، دی الکتریک روی سطح خود دارای چگالی بار قطبشی است اما در حجم خود چگالی بار قطبشی ندارد. نبود چگالی بار قطبشی در حجم دی الکتریک را

می‌توان پیامد نتیجهٔ زیر که در تمام دی الکتریکهای همگن خطی معتبر است دانست. چگالی بار قطبشی در حجم متناسب با چگالی بار آزاد است. این نتیجه مستقیماً از متناسب بودن \mathbf{D} و \mathbf{P} گرفته می‌شود (معادلهٔ ۴-۴۹):

$$\mathbf{P} = \left(\frac{1 - 1/\epsilon}{4\pi} \right) \mathbf{D}$$

که اگر در عبارت مربوط به چگالی بار قطبشی بگذاریم رابطهٔ زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \rho_p &= -\nabla \cdot \mathbf{P} = - \left(\frac{1 - 1/\epsilon}{4} \right) \nabla \cdot \mathbf{D} \\ &= - \left(\frac{1 - 1/\epsilon}{4\pi} \right) 4\pi \rho_F = - \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \rho_F \end{aligned} \quad (55-4)$$

در ضمن، این معادله نشان می‌دهد که برای دی الکتریکهای با $\epsilon > 1$ ، بار قطبیدگی ρ_p و بار آزاد ρ_F همیشه علامتهای مخالف هم دارند.

۴-۴ دی الکتریکها از دید میکروسکوپی

پذیرفتاری الکتریکی χ و ثابت دی الکتریک ϵ از ساختار اتمی دی الکتریک تعیین می‌شوند. برای مثال، گازی از اتمهایی که گشتاور دوقطبی دائمی ندارند در نظر بگیرید. قطبیدگی در این گاز بستگی به گشتاورهای دوقطبی القایی که میدان الکتریکی در آنها ایجاد می‌کند دارد. برای محاسبهٔ تأثیر میدان الکتریکی روی یک اتم، از یک الگوی بسیار سادهٔ کلاسیک استفاده می‌کنیم: اتم شامل الکترونی است که توسط نیروی کشسانی با ثابت فنر κ به درونهٔ متقارن کروی مقید شده است. جابه‌جایی الکترون از مکان تعادلش گشتاور دوقطبی القایی را به وجود می‌آورد. اگر میدان الکتریکی \mathbf{E} به الکترون اعمال شود مقدار کشیدگی فنر توسط نیروی الکتریکی و جابه‌جایی الکترون از مکان تعادل خود برابر است با

$$\Delta \mathbf{x} = - \frac{e\mathbf{E}}{\kappa} \quad (56-4)$$

گشتاور دوقطبی متناظر عبارت است از

$$\mathbf{p} = -e \Delta \mathbf{x} = \frac{e^2 \mathbf{E}}{\kappa} \quad (57-4)$$

اگر n اتم در واحد حجم وجود داشته باشد، گشتاور دوقطبی در واحد حجم برابر خواهد بود با

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = \frac{ne^{\tau}\mathbf{E}}{\kappa} \quad (58-4)$$

بنابراین، پذیرفتاری و ثابت دی الکترونیک به ترتیب برابرند با

$$\chi = \frac{ne^{\tau}}{\kappa} \quad (59-4)$$

و

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi ne^{\tau}}{\kappa} \quad (60-4)$$

ثابت فز κ برحسب جرم الکترون و بسامد نوسان عبارت است از $m_e\omega^{\tau}$ و در نتیجه

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi ne^{\tau}}{m_e\omega^{\tau}} \quad (61-4)$$

به رغم سادگیهای بسیار زیادی که الگوی بالا دارد، نتیجه ۶۱-۴ اساساً درست است. یک محاسبه دقیقتر مکانیک کوانتومی نشان می دهد که بسامد ω را باید بسامد شدید (بسامد جذب) اتم گرفت. به علاوه، سهم هر یک از بسامدهای شدید اتم در طرف راست معادله ۶۱-۴ جمله ای است به صورت $4\pi ne^{\tau}/m_e\omega^{\tau}$ با ضریبی که برابر است با احتمال اینکه الکترون یک گذار شدید انجام دهد. اما، حتی بدون این دقیق، معادله ۶۱-۴ نتایج قابل قبولی به دست می دهد. به عنوان مثال، بسامد شدید برای هلیوم نوعاً برابر است با $\omega = 3.71 \times 10^{16}/s$ با چگالی $n = 2.69 \times 10^{19}/cm^3$ (برای شرایط متعارف دما و فشار) مقدار ثابت دی الکترونیک از معادله ۶۱-۴ برابر است با

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi \times 2.69 \times 10^{19}/cm^3 \times (4.8 \times 10^{-10}esu)^{\tau}}{9.1 \times 10^{-28}g \times (3.71 \times 10^{16}/s)^{\tau}} = 1 + 6.2 \times 10^{-5}$$

این نتیجه توافق خوبی با مقدار تجربی $\varepsilon = 1 + 6.84 \times 10^{-5}$ دارد.

اگر گاز از مولکولهایی که گشتاور دوقطبی دائمی دارند تشکیل شده باشد، قطبیدگی (عمدتاً) بستگی به هم جهتی این مولکولها دارد. اگر گشتاور دوقطبی یک مولکول \mathbf{p} باشد، آنگاه انرژی پتانسیل مولکول در میدان الکترونیکی \mathbf{E} برابر است با $U(\theta) = -pE \cos \theta$ که در آن θ زاویه

بین \mathbf{E} و \mathbf{p} است. در غیاب حرکت گرمایی، تمام مولکولها باید در هیئت کمترین انرژی قرار گیرند که در آن \mathbf{p} دقیقاً هم جهت با \mathbf{E} است. حرکت گرمایی این هم جهتی کامل را از بین می برد؛ اما یک هم جهتی جزئی باقی می ماند، و به طور متوسط \mathbf{p} یک مؤلفه مثبت در جهت \mathbf{E} دارد. محاسبه این مؤلفه متوسط یک مسئله ساده مکانیک آماری است. بنابه مکانیک آماری، احتمال اینکه مولکول در زاویه ای بین θ و $\theta + d\theta$ نسبت به میدان الکتریکی سمتگیری کند متناسب است با $e^{-U(\theta)/kT}$ که در آن T دمای مطلق و k ثابت بولتزمن ($k = 1.38 \times 10^{-16}$ erg/K) است. این احتمال همچنین متناسب است با مقدار زاویه فضایی بین θ و $\theta + d\theta$ ؛ بنابراین

$$(\text{احتمال سمتگیری بین } \theta \text{ و } \theta + d\theta) \propto e^{pE \cos \theta / kT} 2\pi \sin \theta d\theta \quad (62-4)$$

برای سادگی در نوشتن، محور z را در امتداد \mathbf{E} می گیریم. آنگاه مؤلفه \mathbf{p} در امتداد \mathbf{E} برابر است با $p_z = p \cos \theta$ ، و مؤلفه متوسط \mathbf{p} در امتداد \mathbf{E} برابر است با

$$\langle p_z \rangle = \frac{\int_0^\pi p \cos \theta e^{pE \cos \theta / kT} 2\pi \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{pE \cos \theta / kT} 2\pi \sin \theta d\theta} \quad (63-4)$$

با تعویض متغیر $\mu = \cos \theta$ ، انتگرالهای رابطه بالا را می توان به آسانی محاسبه کرد، و در نتیجه

$$\langle p_z \rangle = p \left(\coth \frac{pE}{kT} - \frac{kT}{pE} \right) \quad (64-4)$$

■ تمرین ۷- نتیجه بالا را واریسی کنید.

تمرین ۸- در دمای اتاق (یا بالاتر)، pE/kT برای مولکولها مقدار کمی دارد حتی اگر میدان الکتریکی به بزرگی 10^7 statV/cm باشد. نشان دهید به ازای $pE/kT \ll 1$ ، فرمول ۶۴-۴ را می توان با فرمول زیر تقریب گرفت

$$\langle p_z \rangle \simeq \frac{p^3 E}{3kT} \quad (65-4)$$

■ اگر n مولکول در واحد حجم وجود داشته باشد، بنابه تقریب ۶۵-۴ گشتاور دوقطبی در واحد حجم برابر است با

$$\mathbf{P} = \frac{np^3 \mathbf{E}}{3kT} \quad (66-4)$$

در نتیجه، پذیرفتاری و ثابت دی‌الکتریک برابرند با

$$\chi = \frac{np^2}{3kT} \quad (۶۷-۴)$$

و

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi np^2}{3kT} \quad (۶۸-۴)$$

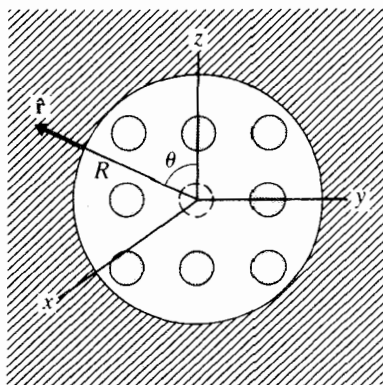
برای گازهایی که از مولکولهای دارای گشتاور دوقطبی دائمی تشکیل شده‌اند— مانند HCl، HBr و H₂S— مقادیر ثابت دی‌الکتریک که از معادله ۶۸-۴ محاسبه می‌شوند از مقادیر تجربی کمی کمترند؛ این تفاوت غیرمنتظره نیست، زیرا این مولکولها وقتی در میدان الکتریکی قرار بگیرند یک گشتاور دوقطبی القایی نیز به دست می‌آورند.

۵-۴ میدان موضعی

محاسبه نظری خواص دی‌الکتریکی برای مایعات و جامدات بسیار مشکلتر از گازهاست. آنچه مسئله را در مورد مایعات و جامدات پیچیده می‌کند این است که اتمهای مجاور با یکدیگر برهم‌کنش دارند— حالت هر اتم بستگی به حالت اتمهای مجاورش دارد. بدین ترتیب، دانستن واکنش یک اتم منزوی نسبت به میدان الکتریکی برای محاسبه واکنش این اتم هنگامی که با اتمهای مجاورش احاطه شده است کافی نیست.

در مایعات و جامدات پیچیدگی دیگری نیز وجود دارد: میدانی که روی اتم یا مولکول اثر می‌کند با میدان الکتریکی ماکروسکوپی E یکسان نیست. دلیل این امر این است که میدان الکتریکی ماکروسکوپی که در مکان مولکول محاسبه می‌شود شامل سهمی است که توسط آن مولکول ایجاد شده است، و اگر بخواهیم میدان الکتریکی اعمال شده به مولکول را محاسبه کنیم باید آن سهم را حذف کنیم. میدان الکتریکی که بر مولکول اثر می‌کند برای متمایز کردن آن از میدان ماکروسکوپی، میدان موضعی نامیده می‌شود.

لورنتس مقدار این میدان محلی را برحسب میدان ماکروسکوپی E و قطبیدگی P به روش زیر محاسبه کرده است. کره‌ای به شعاع R حول مولکول مفروض در نظر بگیرید. این کره را آن قدر بزرگ می‌گیریم که تعداد زیادی مولکول را دربر بگیرد و آن قدر کوچک می‌گیریم که میدان الکتریکی E در آن تقریباً ثابت باشد (به‌طور خلاصه، کره از لحاظ میکروسکوپی بزرگ و از لحاظ ماکروسکوپی کوچک است). این کره دی‌الکتریک را به دو قسمت تقسیم کرده است: قسمتی خارج از کره و قسمتی داخل آن. در محاسبه لورنتس این دو قسمت جداگانه بررسی می‌شوند (شکل ۴-۱۳). میدان حاصل از بارهای (مقید و آزاد) خارج از کره را باید با انتگرال‌گیری روی این بارها محاسبه



شکل ۴-۱۳ در قسمتی از دی الکتریک که خارج از سطح کروی است توزیع بار را پیوسته در نظر می‌گیریم. قسمت داخل سطح کروی را شامل مولکولهای منفرد در نظر می‌گیریم. مولکول واقع در مرکز (خط چین) حذف شده است.

کرد. میدان ناشی از بارهای داخل کره را باید با جمع‌زدن روی مولکولهای منفرد داخل کره بجز مولکول واقع در مرکز که این میدانها روی آن اثر می‌کنند محاسبه کرد.

برای محاسبه این چند سهم تفاوت بین محاسبه لورنتس و محاسبه متداول را مورد توجه قرار می‌دهیم. در محاسبه متداول روی تمام دی الکتریک انتگرال می‌گیریم و نتیجه \mathbf{E} یعنی میدان الکتریکی ماکروسکوپی است. در محاسبه لورنتس کره به شعاع R از انتگرال‌گیری حذف می‌شود و در نتیجه سه تصحیح به \mathbf{E} افزوده می‌شود: (۱) حجم کره را از انتگرال حجمی روی دی الکتریک حذف می‌کنیم؛ (۲) سطح کره را به انتگرال سطحی روی دی الکتریک اضافه می‌کنیم؛ (۳) جمع گسسته روی مولکولهای داخل کره را اضافه می‌کنیم. از قلم اول می‌توان صرف‌نظر کرد زیرا کره آن قدر کوچک است که می‌توانیم \mathbf{P} را در آن تقریباً ثابت بگیریم؛ بدین ترتیب، سهم مربوط به بار مقید ($\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$) در میدان الکتریکی تقریباً صفر است. قلم دوم سهمی به اندازه

$$\int -\frac{\sigma_p \hat{\mathbf{r}}}{R^2} dS \quad (۶۹-۴)$$

در میدان الکتریکی در مرکز کره دارد (شکل ۴-۱۳). و قلم سوم سهمی به اندازه

$$\sum_i \mathbf{E}_i \quad (۷۰-۴)$$

دارد که در آن میدان الکتریکی است که یک مولکول منفرد در مرکز کره ایجاد می‌کند. با در

نظر گرفتن این تصحیحات، میدان موضعی برابر است با

$$\mathbf{E}_{\text{موضعی}} = \mathbf{E} + \int -\frac{\sigma_P \hat{\mathbf{r}}}{R^2} dS + \sum_i \mathbf{E}_i \quad (۷۱-۴)$$

چگالی بار سطحی عبارت است از $\sigma_P = -\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{P}$. اگر محور z در امتداد \mathbf{P} باشد، داریم $\sigma_P = -P \cos \theta$. در محاسبه انتگرال سطحی در معادله ۷۱-۴، تنها مؤلفه موازی با \mathbf{P} باقی می‌ماند. این مؤلفه عبارت است از (شکل ۱۳-۴)

$$\int -\frac{\sigma_P \cos \theta}{R^2} dS = \int_0^\pi \frac{P \cos^2 \theta}{R^2} 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{3} P \quad (۷۲-۴)$$

در نتیجه

$$\mathbf{E}_{\text{موضعی}} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} + \sum_i \mathbf{E}_i \quad (۷۳-۴)$$

در محاسبه جمع گسسته در معادله ۷۳-۴ لازم است مکان مولکولهای منفرد را بدانیم. اگر با یک مایع سروکار داشته باشیم، که در آن مکان مولکولها اتفاقی است، سهم مربوط به این مولکولها به طور متوسط صفر است. در نتیجه

$$\mathbf{E}_{\text{موضعی}} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \quad (۷۴-۴)$$

اگر با جامدی سروکار داشته باشیم که شبکه آن مکعبی است، تقارن مکان مولکولها منجر به حذف شدن سهمهای انفرادی مولکولها توسط یکدیگر می‌شود؛ و نتیجه نهایی باز هم صفر است. برای جامدهایی با شبکه‌های دیگر، این حذف‌شدگی کامل نیست و جمع گسسته در معادله ۷۳-۴ صفر نخواهد بود، اگرچه معمولاً کوچک و غالباً قابل صرف‌نظر کردن است.

روشن است که معادله ۷۴-۴ برای گازها نیز معتبر است. تحت شرایط عادی، قطبیدگی در یک گاز در مقایسه با میدان الکتریکی کوچک است؛ در نتیجه، $\mathbf{E}_{\text{موضعی}} \simeq \mathbf{E}$. این تقریب را قبلاً در بخش ۴-۴، که فرض کردیم میدان ماکروسکوپی همان میدان موضعی است که روی مولکول عمل می‌کند، به‌کار بردیم (معادله ۴-۵۶). اما، اگر گاز تحت فشار بسیار زیادی باشد آنگاه چگالی آن با چگالی مایع قابل مقایسه است و از اختلاف موضعی \mathbf{E} و $\mathbf{E}_{\text{موضعی}}$ نمی‌توان صرف‌نظر کرد. اندازه‌گیری روی گازهای تحت فشار بسیار زیاد یک آزمون تجربی مستقیم درباره ۷۴-۴ را امکان‌پذیر می‌سازد. یک مولکول از این گاز تحت تأثیر میدان الکتریکی موضعی \mathbf{E} یک گشتاور دوقطبی به‌دست می‌آورد

که با این میدان متناسب است (معادله‌های ۴-۵۷ و ۴-۶۵):

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\text{موضعی}} \quad (۷۵-۴)$$

ثابت تناسب α را قطبیدگی‌پذیری مولکولی می‌نامند. مقدار این ثابت بستگی به نحوهٔ ایجاد گشتاور دوقطبی دارد. به‌عنوان مثال، به‌ازای گشتاور دوقطبی القایی معادلهٔ ۴-۵۷ داریم $\alpha = e^2/\kappa$ و به‌ازای گشتاور دوقطبی دائمی معادلهٔ ۴-۶۵ داریم $\alpha = p^2/3kT$. گشتاور دوقطبی در واحد حجم برحسب ثابت α عبارت است از

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n\alpha \mathbf{E}_{\text{موضعی}} \quad (۷۶-۴)$$

با توجه به عبارت ۴-۷۴ برای $\mathbf{E}_{\text{موضعی}}$ ، رابطهٔ بالا به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{P} = n\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \right) \quad (۷۷-۴)$$

اما بنا به معادله‌های ۴-۱۹ و ۴-۲۲ داریم

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} (\epsilon - 1) \mathbf{E} \quad (۷۸-۴)$$

بنابراین

$$\frac{1}{4\pi} (\epsilon - 1) \mathbf{E} = n\alpha \left[\mathbf{E} + \frac{1}{3} (\epsilon - 1) \mathbf{E} \right] \quad (۷۹-۴)$$

از این معادله، پس از حذف \mathbf{E} ، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{n\alpha}{3} \quad (۸۰-۴)$$

این معادله را معادلهٔ کلاؤسیوس-موساتی می‌نامند. این معادله اصولاً بیان می‌کند که $(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2)$ با چگالی گاز متناسب مستقیم دارد. این تناسب در آزمایشهایی روی هلیوم و آرگن با چگالیهای مختلف، از چگالی عادی تا چگالی هزاران بار بیشتر از چگالی عادی، تأیید شده است. در عمل، معادلهٔ ۴-۸۰ را غالباً برای تعیین قطبیدگی‌پذیری مولکول از مقدار اندازه‌گیری شدهٔ ثابت دی‌الکتریک به‌کار می‌برند.

مسائل

۱-۴ با شروع از معادله‌های ۸-۴ و ۹-۴ ثابت کنید بار قطبشی کل در حجم و روی سطح یک جسم دی‌الکتریک همیشه صفر است.

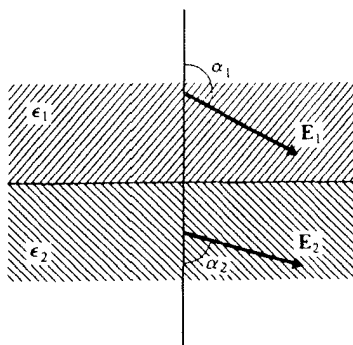
۲-۴ معادله ۱۷-۴ را از رابطه ۱۱۶-۳ که شامل سهم چارقطبی در پتانسیل است به دست آورید. معادله زیر برای چگالی بار سطحی قطبشی را به دست آورید

$$\sigma_P = \hat{n}^k P^k - \hat{n}^k \frac{\partial}{\partial x^l} Q^{kl}$$

همچنین نشان دهید معادله ۱۷-۴ منجر به معادله ۱۸-۴ می‌شود.

۳-۴ دو استوانهٔ دراز هم‌محور از ورق فلزی یکی به شعاع R و دیگری به شعاع $3R$ در نظر بگیرید. فضای بین آنها از گازی با ثابت دی‌الکتریک ϵ پر شده است. اگر اختلاف پتانسیل بین استوانه‌ها V باشد، میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{D} را در ناحیهٔ بین استوانه‌ها به دست آورید.

۴-۴ در سطح جدایی دو دی‌الکتریک (یکی با ثابت ϵ_1 و دیگری با ثابت ϵ_2) میدان الکتریکی در دی‌الکتریک اول دارای بزرگی E_1 است و با عمود بر سطح جدایی زاویهٔ α_1 می‌سازد (شکل ۱۴-۴). زاویه‌ای که میدان الکتریکی در دی‌الکتریک دوم می‌سازد و بزرگی این میدان الکتریکی را به دست آورید.



شکل ۱۴-۴ سطح جدایی بین دو دی‌الکتریک.

۵-۴ یک ورق نازک کاغذ با ثابت دی‌الکتریک $\epsilon = 2.5$ در یک میدان الکتریکی یکنواخت با بزرگی 20 statV/cm قرار دارد. با استفاده از شرایط مرزی، یک مقدار تقریبی برای میدان

الکتریکی در داخل کاغذ به دست آورید. (الف) فرض کنید کاغذ موازی با میدان الکتریکی است. (ب) فرض کنید کاغذ عمود بر میدان الکتریکی است.

۶-۴ (الف) میدان الکتریکی و پتانسیل الکتروستاتیک مربوط به بار نقطه‌ای q واقع در محیطی با ثابت دی الکتریک ϵ را به دست آورید. (ب) اگر یک یون مثبت آرسنیک در قطعه‌ای از سیلیسیم قرار داده شود، میدان الکتریکی اطراف این یون را می‌توان به صورت میدان الکتریکی بار نقطه‌ای $q = +e$ واقع در یک محیط دی الکتریک با ثابت دی الکتریک سیلیسیم، $\epsilon = 11.7$ ، در نظر گرفت. بنابه الگوی بور، شعاع کوچکترین مداری که یک الکترون روی آن حول یون حرکت می‌کند را به دست آورید. انرژی بستگی الکترون را محاسبه کنید. (تذکر: برای بررسی دقیقتر این مسئله، باید جرم مؤثر تغییر یافته الکترون را به کار ببریم؛ اما از این تصحیح صرف نظر کنید.)

۷-۴ یک کره دی الکتریک به شعاع R و با ثابت دی الکتریک ϵ دارای بار Q است که به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است. این کره را فضای خالی احاطه کرده است. \mathbf{E} و \mathbf{D} را در داخل و خارج کره به دست آورید. چگالیهای بار حجمی و سطحی قطبشی و همچنین بارهای حجمی و سطحی قطبشی کل را محاسبه کنید.

۸-۴ بار نقطه‌ای q بالای یک دریاچه بزرگ از مایعی با ثابت دی الکتریک ϵ به فاصله d از سطح آن قرار دارد. با استفاده از روش تصویر، پتانسیل الکتروستاتیک را در ناحیه بالای سطح و در ناحیه زیر سطح به دست آورید. [راهنمایی: برای ناحیه بالای سطح، بار تصویر q' را در فاصله d زیر سطح بگیرید؛ برای ناحیه زیر سطح، بار q را حذف کنید و بار تصویر q'' را در فاصله d بالای سطح بگیرید. آنگاه با استفاده از شرایط مرزی ۴-۲۷ و ۴-۳۰ در سطح دی الکتریک، مقادیر q' و q'' را به دست آورید.]

۹-۴ در سطح جدایی تخت بین دو دی الکتریک با $\epsilon_1 = 2$ و $\epsilon_2 = 6$ ، میدان الکتریکی در دی الکتریک اول دارای بزرگی 8 statV/cm است و راستای آن با عمود بر این صفحه زاویه 40° می‌سازد (شکل ۴-۱۴). (الف) بزرگی و راستای میدان الکتریکی و جابه‌جایی الکتریکی را در دی الکتریک دوم به دست آورید. (ب) فرض کنید سطح جدایی حامل چگالی بار سطحی آزاد $+5 \text{ esu/cm}^2$ است. بزرگی و راستای میدان الکتریکی و جابه‌جایی الکتریکی در دی الکتریک دوم را در این مورد به دست آورید.

۱۰-۴ یک صفحه بزرگ شیشه‌ای با کلفتی d و ثابت دی الکتریک ϵ در میدان الکتریکی یکنواخت \mathbf{E}_0 قرار دارد. این صفحه با میدان الکتریکی زاویه θ می‌سازد. (الف) نشان دهید اگر $\theta \ll 1$ ، آنگاه میدان الکتریکی داخل صفحه با سطح صفحه زاویه $\theta' = \theta/\epsilon$ می‌سازد و بزرگی میدان برابر است با

$$E = E_0 \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{\theta^2}{2} \right]$$

(ب) خطوط جابه‌جایی الکتریکی D و همچنین خطوط میدان الکتریکی E را در داخل و خارج صفحه رسم کنید. فرض کنید $\epsilon > 1$.

۴-۱۱) نیمی از یک کره رسانا به شعاع R در دریاچه‌ای از روغن با ثابت دی‌الکتریک ϵ فرو رفته است. کره حامل بار آزاد Q است. (الف) E و D را در روغن و در خلأ بالای روغن به دست آورید. (ب) چگالی بار سطحی آزاد را روی نیمه‌های بالایی و پایینی کره رسانا به دست آورید، و نیروی الکتریکی کل وارد بر کره را محاسبه کنید. آیا این نیرو کره را به درون روغن می‌کشد یا به بیرون آن؟

۴-۱۲) یک خازن تخت موازی پر از ماده‌ای است که ثابت دی‌الکتریک آن از یک صفحه به صفحه دیگر خازن به‌طور خطی زیاد می‌شود، یعنی

$$\epsilon = a + bz$$

که در آن z فاصله از یک صفحه خازن است. اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن برابر با V_0 و فاصله آنها برابر با d است. پتانسیل الکتروستاتیک، میدان الکتریکی و چگالی بار قطبشی را به‌صورت تابعی از z به دست آورید. چگالی بار سطحی قطبشی را در سطوح دی‌الکتریک در مجاورت صفحه‌های خازن به دست آورید. از اثرات لبه صرف‌نظر کنید.

۴-۱۳) یک سیم مسی دراز به قطر 4 mm در جو زمین به‌طور افقی کشیده شده است. اطراف این سیم توسط یک عایق لاستیکی به کلفتی 1 mm و با ثابت دی‌الکتریک $\epsilon = 3$ پوشانده شده است. شدت میدان الکتریکی اولیه جو 10^5 V/m یا 33 statV/m ، و جهت آن به طرف پایین است. میدان الکتریکی را در بالای سیم و در پایین سیم به دست آورید؛ فرض کنید سیم به زمین متصل نیست. اگر دو سر سیم را به زمین متصل کنیم، جوابها به‌طور کیفی چه تغییری می‌کنند؟

۴-۱۴) داخل مقدار زیادی روغن مبدل با ثابت دی‌الکتریک $\epsilon = 3$ یک حباب کروی از هوا وجود دارد. ماکسیم شدت میدان الکتریکی اولیه در روغن مبدل چه اندازه می‌تواند باشد تا هوای داخل حباب در معرض تخلیه الکتریکی قرار نگیرد؟ شدت بحرانی برای تخلیه الکتریکی در هوا $3 \times 10^6\text{ V/m}$ یا $1 \times 10^4\text{ statV/m}$ است. اگر این حباب در راستای میدان الکتریکی کشیده شود، یا پهن شود، جواب به‌طور کیفی چه تغییری می‌کند؟

۴-۱۵) یک استوانه دی‌الکتریک دراز به شعاع R_1 توسط یک پوسته دی‌الکتریک هم‌محور با آن به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 احاطه شده است. ثابتهای دی‌الکتریک استوانه و پوسته به ترتیب عبارت‌اند از ϵ_1 و ϵ_2 . استوانه و پوسته را در میدان الکتریکی قبلاً یکنواخت E_0 که عمود بر

محور استوانه است قرار می‌دهیم. پتانسیل الکتروستاتیک را در استوانه و در پوسته به دست آورید. مقادیر ماکسیمم میدان الکتریکی را در استوانه و در پوسته محاسبه کنید.

۴-۱۶ یک قطعه بسیار بزرگ از ماده دی الکتریک با ثابت دی الکتریک ϵ در درون خود دارای میدان الکتریکی یکنواخت E است. یک حفره استوانه‌ای دراز عمود بر میدان الکتریکی و به شعاع R در دی الکتریک ایجاد می‌کنیم. پتانسیل الکتروستاتیک و میدان الکتریکی را در حفره و در دی الکتریک به دست آورید. چگالی بار سطحی قطبشی روی دیواره حفره را محاسبه کنید.

۴-۱۷ یک استوانه دی الکتریک بسیار دراز با ثابت دی الکتریک ϵ و به شعاع R در میدان الکتریکی قبلاً یکنواخت E که بر محور استوانه عمود است قرار دارد. استوانه دارای مقدار بار آزاد λ واحد طول است که به طور یکنواخت در سطح آن توزیع شده است. پتانسیل و میدان الکتریکی را در داخل و خارج استوانه به دست آورید.

۴-۱۸ به یک صفحه رسانای افقی بسیار بزرگ یک خریشته دراز از جنس دی الکتریک با ثابت ϵ متصل شده است. این خریشته دارای مقطع نیم‌دایره‌ای به شعاع R است، و طرف تخت آن با صفحه تماس دارد. صفحه در میدان الکتریکی قائم (قبلاً) یکنواخت E قرار گرفته است. پتانسیل الکتروستاتیک را در دی الکتریک و در فضای خالی بالای صفحه به دست آورید.

۴-۱۹ در یک کره دی الکتریک به شعاع R نیمه بالایی دارای ثابت دی الکتریک ϵ_1 و نیمه پایینی دارای ثابت دی الکتریک ϵ_2 است. کره در میدان الکتریکی قبلاً یکنواخت E با راستای قائم قرار دارد. پتانسیل الکتروستاتیک را در داخل و خارج کره به دست آورید.

۴-۲۰ (الف) در تمام فضا، پتانسیل الکتروستاتیک دارای مقدار اولیه زیر است

$$\Phi(r, \theta) = Ar^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right)$$

میدان الکتریکی متناظر را محاسبه کنید. (ب) فرض کنید یک کره دی الکتریک یکنواخت به شعاع R ، با ثابت دی الکتریک ϵ و به مرکز مبدأ در این میدان الکتریکی قرار داده شود. پتانسیل جدید را به ازای $r > R$ و به ازای $r < R$ به دست آورید. (ج) نیروی انتقالی وارد بر کره از طرف میدان الکتریکی را محاسبه کنید.

۴-۲۱ یک کره رسانا به شعاع R و در پتانسیل صفر توسط یک پوسته دی الکتریک کروی هم‌مرکز به شعاع داخلی R و شعاع خارجی $2R$ و با ثابت دی الکتریک $\epsilon = 7/5$ احاطه شده است. این کره و

پوسته را در میدان الکتریکی قبلاً یکنواخت \mathbf{E}_0 قرار داده ایم. (الف) نشان دهید پتانسیل برابر است با

$$\Phi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{2E_0 R^2}{r^2} \cos \theta \quad \text{برای } r > 2R$$

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{6}{5}E_0 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta \quad \text{برای } R < r < 2R$$

(ب) چگالی بار سطحی (آزاد) القا شده روی سطح کره رسانا را (به صورت تابعی از θ) به دست آورید. (ج) چگالی بار (مقید) القا شده روی سطح دی الکتریک در $r = R$ را به دست آورید.

۲۲-۴ یک پوسته کروی از جنس دی الکتریک دارای شعاع داخلی R_1 ، شعاع خارجی R_2 و ثابت دی الکتریک ϵ است. این پوسته در میدان الکتریکی قبلاً یکنواخت \mathbf{E}_0 قرار گرفته است. پتانسیل الکتروستاتیک را در سه ناحیه $r < R_1$ ، $R_1 < r < R_2$ و $r > R_2$ به دست آورید. میدان الکتریکی در ناحیه $r < R_1$ را تعیین کنید.

۲۳-۴ گشتاور دوقطبی الکتریکی مولکول آب برابر با $1.8 \times 10^{-18} \text{ esucm}$ است. ثابت دی الکتریک بخار آب خالص در فشار جو و دمای 140°C را حساب کنید، و با مقدار اندازه گیری شده 1.785×10^2 مقایسه کنید.

انرژی الکتریکی

در فصل ۲ دیدیم که انرژی پتانسیل دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 به فاصله r از هم برابر است با $q_1 q_2 / r$. این یک انرژی پتانسیل متقابل است که به طور مشترک به هر دو بار نقطه‌ای تعلق دارد. این انرژی پتانسیل برابر است با کاری که باید انجام شود تا بارها از بینهایت به فاصله r از یکدیگر آورده شوند. در این فصل، برای انرژی پتانسیل یک دستگاه اختیاری از بارهای نقطه‌ای یک عبارت کلی به دست می‌آوریم، و خواهیم دید که این انرژی پتانسیل را می‌توان به صورت انتگرالی از چگالی انرژی که متناسب با E^2 است بیان کرد.

در تعبیر انرژی پتانسیل الکتریکی با این سؤال مواجه هستیم: آیا انرژی پتانسیل در بارهای نقطه‌ای واقع شده است یا در میدانهای الکتریکی؟ این سؤال در الکتروستاتیک پاسخی ندارد. نتیجه آزمایشهای الکتروستاتیک مستقل از جایی است که انرژی واقع شده است. اصولاً می‌توانستیم این سؤال را با یک آزمایش گرانشی پاسخ دهیم. تمام صورتهای انرژی جاذبه‌های گرانشی وارد می‌کنند، و اگر انرژی الکتروستاتیک در میدان الکتریکی توزیع شده باشد این میدان باید جاذبه‌های گرانشی وارد کند. متأسفانه این اثرات گرانشی آن قدر کوچک‌اند که اندازه‌گیری مستقیم امکان‌پذیر نیست. برای تعیین جایی که انرژی پتانسیل واقع شده است باید از الکتروستاتیک فراتر برویم. باید به امواج الکترومغناطیس، مانند نور یا امواج رادیویی، توجه کنیم. این امواج از یک نقطه به نقطه دیگر انرژی حمل می‌کنند؛ پس بدون تردید میدان الکتریکی این امواج حاوی انرژی است. برای اینکه تناقضی

پیش نیاید، باید فرض کنیم که میدان الکتریکی توزیعی از بارهای ساکن نیز حاوی انرژی است. در نتیجه میدانها باید صورتی از ماده باشند. اگر جامدات، مایعات، گازها و پلاسماها را به عنوان چهار حالت اول ماده در نظر بگیریم، میدانها را باید حالت پنجم ماده به شمار آوریم.

۱-۵ انرژی در میدان الکتریکی

فرض کنید مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای، با بارهای $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ و در مکانهای $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n$ داریم. می‌خواهیم انرژی پتانسیل این توزیع بار را به دست آوریم. به عبارت دیگر، می‌خواهیم تعیین کنیم چه مقدار کار باید انجام شود تا تمام این بارها جداگانه از بینهایت به مکانهای خود آورده شوند. برای محاسبه این مقدار کار، فرض کنید این بارها را یکی پس از دیگری به مکانهایشان می‌آوریم. ابتدا بار q_1 را (از بینهایت) به \mathbf{x}_1 می‌آوریم؛ آنگاه بار q_2 را به \mathbf{x}_2 می‌آوریم، و غیره. هنگامی که بار q_j را برای پیوستن به $j-1$ بار قبلی می‌آوریم، پتانسیل ناشی از بارهای اخیر عبارت است از

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{q_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} \quad (1-5)$$

وقتی بار q_j را بیاوریم افزایش انرژی پتانسیل برابر است با

$$q_j \Phi(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{q_j q_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} \quad (2-5)$$

پس هنگامی که تمام بارها را به مکانهایشان بیاوریم، افزایش کل انرژی پتانسیل برابر است با

$$U = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \frac{q_j q_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} \quad (3-5)$$

این عبارت صرفاً برابر است با مجموع تمام انرژیهای پتانسیل متقابل $q_i q_j / |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|$ به ازای تمام جفتهای ممکن از بارهای q_i و q_j .

معادله ۳-۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_j q_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} \quad (4-5)$$

زیرا هر جمله از سیگمای معادله ۳-۵ دو بار در سیگمای معادله ۴-۵ آمده است. (توجه کنید که در معادله ۴-۵ جمله مربوط به $i = j$ را نباید وارد کرد.) معادله ۴-۵ را به صورت دیگری نیز می توان نوشت:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n q_j \Phi_{j, \text{دیگر}}(\mathbf{x}_j) \quad (5-5)$$

که در آن $\Phi_{j, \text{دیگر}}(\mathbf{x}_j)$ عبارت است از پتانسیل الکتروستاتیک که در \mathbf{x}_j توسط تمام بارها غیر از q_j ایجاد شده است، یعنی

$$\Phi_{j, \text{دیگر}}(\mathbf{x}_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|}$$

برای توزیع بار پیوسته‌ای با چگالی بار $\rho(\mathbf{x})$ ، معادله‌های ۴-۵ و ۵-۵ چنین می شوند

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV dV' \quad (6-5)$$

و

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x}) dV \quad (7-5)$$

توجه کنید که در معادله‌های ۴-۵ و ۵-۵ حذف جمله مربوط به $i = j$ را صریحاً نشان داده‌ایم اما در معادله‌های ۶-۵ و ۷-۵ این حذف صورت نگرفته است. لازم نیست نقاط $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ را در انتگرال‌گیری حذف کنیم زیرا اگر چگالی بار همه جا متناهی باشد جمله زیر انتگرال در مثلاً معادله ۶-۵ در این نقاط خوش رفتار است. برای اثبات، نقطه معین \mathbf{x} را مبدأ مختصات می‌گیریم. آنگاه $r' = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ ، و انتگرال روی \mathbf{x}' چنین می‌شود

$$\int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{r'} r'^2 dr' d\Omega$$

جمله زیر انتگرال در حد $r' \rightarrow 0$ صفر می‌شود و این نقطه سهمی در انتگرال بالا ایجاد نمی‌کند.^۱

۱. برای یک بار نقطه‌ای، $\rho(\mathbf{x})$ همه جا متناهی نیست (چگالی بار در مکان بار نقطه‌ای نامتناهی است) و انتگرال در معادله ۶-۵ یک سهم اضافی (نامتناهی) از $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ دارد. این سهم اضافی خود-انرژی بار نقطه‌ای است که در معادله ۴-۵ حذف شده است. در مثالی در انتهای این بخش خواهیم دید که چگونه مسئله خود-انرژی بار را بررسی کنیم.

در انتگرال معادلهٔ ۷-۵ از $\rho(x) = \nabla \cdot \mathbf{E} / 4\pi$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} \Phi \, dV = \frac{1}{8\pi} \int (\nabla \cdot (\mathbf{E}\Phi) - \mathbf{E} \cdot \nabla \Phi) \, dV \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_S (\mathbf{E}\Phi) \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \, dV \end{aligned} \quad (۸-۵)$$

در اینجا از قضیهٔ گاوس برای تبدیل انتگرال حجمی روی حجمی که در آن میدان وجود دارد به انتگرال سطحی روی سطح S که حجم را احاطه کرده است استفاده کرده‌ایم. به‌طور کلی، میدانها به یک حجم متناهی محدود نمی‌شوند و در نتیجه سطح S را باید در بینهایت گرفت. چون در فواصل زیاد از یک توزیع بار اختیاری، میدان الکتریکی به‌صورت $1/r^2$ (یا سریعتر) و پتانسیل به‌صورت $1/r$ افت می‌کند، جملهٔ زیر انتگرال سطحی در حد $r \rightarrow \infty$ به‌صورت $1/r^3$ به صفر میل می‌کند. در این حد مساحت سطح به‌صورت r^2 نامتناهی می‌شود، و در نتیجه انتگرال سطحی به صفر میل می‌کند. پس آنچه می‌ماند عبارت است از

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 \, dV \quad (۹-۵)$$

این رابطهٔ دیگری است برای انرژی پتانسیل الکتروستاتیک کل مربوط به یک توزیع بار. روشن است میدانی که در معادلهٔ ۹-۵ آمده است میدان میکروسکوپی است، و انتگرال انرژی پتانسیل کل ذخیره‌شده در تمام میدانهای الکتریکی تمام بارها، چه آزاد و چه مقید، را تعیین می‌کند. جملهٔ زیر انتگرال در معادلهٔ ۹-۵ را می‌توان به‌عنوان چگالی انرژی میدان الکتریکی در نظر گرفت:

$$T^{**} = \frac{1}{8\pi} E^2 \quad (۱۰-۵)$$

برای چگالی انرژی از نمادنگاری T^{**} استفاده کرده‌ایم زیرا چگالی انرژی یکی از مؤلفه‌های تانسور انرژی-تکانه است (فصل ۸). معادلهٔ ۹-۵ نشان می‌دهد که انرژی در میدان الکتریکی متمرکز است، در حالی که از معادلهٔ ۶-۵ استنباط می‌شود که انرژی در بارهای الکتریکی متمرکز است. چون این معادله‌ها از لحاظ ریاضی هم‌ارز هستند، الکتروستاتیک تعیین نمی‌کند که انرژی کجا قرار گرفته است. همچنانکه در مقدمهٔ این فصل گفتیم، برای رفع این ابهام باید از الکتروستاتیک فراتر برویم. در فصل ۱۲ خواهیم دید که میدانهای امواج الکترومغناطیس حاوی انرژی هستند، و در نتیجه این دیدگاه را می‌پذیریم که توزیع استاتیک بارها نیز حاوی انرژی است به‌طوری‌که چگالی انرژی از معادلهٔ ۱۰-۵ تعیین می‌شود.

برای روشن شدن این مفهوم که انرژی در میدان ذخیره شده است، مثال یک کره باردار یکنواخت را بررسی می‌کنیم. اگر کره دارای شعاع R و بار Q که به‌طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است باشد، میدان الکتریکی در خارج و داخل کره برابر است با (۲-۳۳ را ببینید)

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad r \geq R \text{ به‌ازای} \quad (۱۱-۵)$$

و

$$\mathbf{E} = \frac{Qr}{R^3} \hat{\mathbf{r}} \quad r \leq R \text{ به‌ازای} \quad (۱۲-۵)$$

در این میدان الکتریکی، انرژی برابر است با

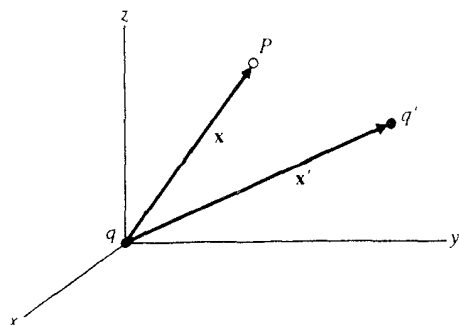
$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int E^2 dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{Q^2 r^2}{R^6} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{Q^2}{r^2} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr \\ &= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{3}{8} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned} \quad (۱۳-۵)$$

فرمول ۵-۱۳ کاربرد عملی مهمی دارد: از این فرمول می‌توانیم برای محاسبه انرژی الکتروستاتیک هسته اتم استفاده کنیم. برای مثال، هسته اورانیم دارای بار $92e$ و شعاع 7.4×10^{-12} cm است. اگر هسته اورانیم را به‌صورت یک کره باردار یکنواخت در نظر بگیریم، از معادله ۵-۱۳ داریم

$$U = \frac{3}{8} \times \frac{(92 \times 4.8 \times 10^{-10} \text{ esu})^2}{7.4 \times 10^{-12} \text{ cm}} = 1.6 \times 10^{-2} \text{ erg} = 990 \text{ MeV}$$

انرژی آزادشده در شکافت اورانیم از این مقدار عظیم انرژی الکتروستاتیک ذخیره‌شده در هسته حاصل می‌شود. انرژی الکتروستاتیک هسته اورانیم نه‌تنها انرژی جنبشی محصولات شکافت بلکه افزایش انرژی «قوی» هسته‌ای را که در فرایند شکافت روی می‌دهد نیز تأمین می‌کند (نیروهای «قوی» با شکافت مخالفت می‌کنند، و انرژی «قوی» محصولات شکافت از انرژی قوی هسته اورانیم بیشتر است). بدین ترتیب، انرژی آزادشده در رآکتورهای هسته‌ای و بمبهای هسته‌ای در واقع انرژی الکتروستاتیک هستند.

به‌عنوان مثالی دیگر، مورد دو بار نقطه‌ای q و q' را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم انرژی را از T° محاسبه کنیم. اگر یکی از بارها در مبدأ و دیگری در \mathbf{x}' باشد (شکل ۵-۱) آنگاه میدان الکتریکی عبارت است از



شکل ۱-۵ بار نقطه‌ای q در مبدأ و بار نقطه‌ای q' در x' .

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{q'(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (۱۴-۵)$$

و چگالی انرژی برابر است با

$$T^{**} = \frac{1}{\lambda\pi} E^{\nu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda\pi} \left[\frac{q^{\nu}}{r^{\nu}} + \frac{q'^{\nu}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{\nu}} + 2qq' \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x}|^3 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] \quad (۱۵-۵)$$

از انتگرال این چگالی انرژی به دست می‌آوریم

$$U = \frac{1}{\lambda\pi} \int \frac{q^{\nu}}{r^{\nu}} dV + \frac{1}{\lambda\pi} \int \frac{q'^{\nu}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{\nu}} dV + \frac{2qq'}{\lambda\pi} \int \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x}|^3 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV \quad (۱۶-۵)$$

جمله اول را بررسی می‌کنیم؛ این جمله انرژی الکتروستاتیک مربوط به یک بار نقطه‌ای منزوی q است و خود-انرژی این بار نامیده می‌شود. می‌توانیم انتگرال را در مختصات کروی به آسانی محاسبه کنیم:

$$\frac{1}{\lambda\pi} \int \frac{q^{\nu}}{r^{\nu}} dV = \frac{1}{\lambda\pi} \int \int \int \frac{q^{\nu}}{r^{\nu}} r^{\nu} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr = \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} \frac{q^{\nu}}{r^{\nu}} dr = -\frac{q^{\nu}}{\nu} \left[\frac{1}{r} \right]_0^{\infty} \quad (۱۷-۵)$$

این انتگرال در حد پایین واگراست: خود-انرژی یک بار نقطه‌ای منزوی نامتناهی است.^۱ محاسبه واقع‌بینانه‌تر خود-انرژی بار نقطه‌ای را باید در الکترودینامیک کوانتومی انجام داد نه در

۱. توجه کنید که ضرایب عددی در معادله‌های ۱۷-۵ و ۱۳-۵ تا اندازه‌ای متفاوت‌اند. پس بار نقطه‌ای با گوی باردار یکنواختی که شعاعش صفر می‌شود کاملاً یکسان نیست. تفاوت ضرایب عددی در این معادله‌ها ناشی از این واقعیت

الکتروستاتیک کلاسیک. اما در الکتروستاتیک کوانتومی نیز برای بار نقطه‌ای خود-انرژی نامتناهی به دست می‌آید. یک راه برای اجتناب از این فاجعه این است که فرض کنیم بارهای نقطه‌ای وجود ندارند. اما این فرض احتمالاً یک خیال خوش است — تا آنجا که می‌دانیم، الکترونها بار نقطه‌ای هستند؛ هیچکس تاکنون مغز سخت (یا نرم) در الکترون پیدا نکرده است. اینکه الکترون چگونه خود-انرژی‌اش را متناهی نگه می‌دارد به صورت راز باقی مانده است. یک پیشنهاد که برای حل این معما شده است این است که شاید این انرژی الکتروستاتیک نامتناهی مثبت با یک انرژی گرانشی نامتناهی منفی خنثی می‌شود؛ محاسباتی که اخیراً انجام شده است این نظر را تأیید می‌کند، اما درک ما از مسئله خود-انرژیها برای نتیجه‌گیری قطعی هنوز کافی نیست. خوشبختانه، در عمل نباید زیاد نگران این مسئله باشیم. خود-انرژی ۱۷.۵ یک ثابت است، و می‌توانیم از ثابتهای جمعی صرف‌نظر کنیم. آنچه واقعاً اهمیت دارد جمله‌هایی در انرژی هستند که برحسب مکان بارها تغییر می‌کنند. در معادله ۱۶-۵، انتگرال اول خود-انرژی بار q است، انتگرال دوم خود-انرژی بار q' است، و تنها انتگرال سوم بستگی به مکان بارها دارد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$U = \text{const} + qq' \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x}|^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} dV \quad (18-5)$$

و توجه خود را به این انتگرال معطوف کنیم. جمله زیر انتگرال حاصلضرب دو گرادیان است:

$$\frac{qq'}{4\pi} \int \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x}|^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} dV = \frac{qq'}{4\pi} \int \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

از انتگرال‌گیری جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$-\frac{qq'}{4\pi} \int \left(\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

چون $\nabla^2(1/|\mathbf{x}|) = 0$ مگر در $\mathbf{x} = 0$ ، این انتگرال تنها از همسایگی بلافاصله $\mathbf{x} = 0$ سهم می‌گیرد. بنابراین می‌توانیم حجم انتگرال‌گیری را به یک کره کوچک به مرکز مبدأ تبدیل کنیم؛ و است که گوی باردار در درون خودمقداری انرژی دارد در حالی که بار نقطه‌ای تنها در بیرون خود دارای انرژی است. اگر بخواهیم بار نقطه‌ای را حد یک توزیع بار که شعاع آن صفر می‌شود در نظر بگیریم باید از یک پوسته کروی نازک شروع کنیم.

۱. خوانندگانی که با تابع دلتا آشنایی دارند و می‌دانند که $\delta(\mathbf{x}) = -(\nabla^2(1/4\pi))$ ، می‌توانند مستقیماً به نتیجه نهایی ۲۰-۵ بپردازند.

می‌توانیم $1/|x'|$ را جانشین عامل $1/|x - x'|$ کنیم و مانند یک ثابت در نظر بگیریم. بدین ترتیب، انتگرال چنین می‌شود

$$-\frac{qq'}{4\pi} \frac{1}{|x'|} \int \nabla \cdot \nabla \frac{1}{|x|} dV \quad (19-5)$$

اکنون جمله زیر انتگرال یک واگرایی است، و بنا به قضیه گاوس می‌توانیم انتگرال حجمی را به یک انتگرال سطحی روی سطح این کره کوچک تبدیل کنیم. این انتگرال سطحی را می‌توان در مختصات کروی حساب کرد و نتیجه نهایی زیر را به دست آورد

$$U = \text{const} + \frac{qq'}{|x'|} \quad (20-5)$$

تمرین ۱- انتگرال ۱۹-۵ را محاسبه کنید.

نتیجه ۲۰-۵ نشان می‌دهد که انرژی پتانسیل معمولی چیزی جز انرژی میدان نیست. نیروی دافعه بین مثلاً بارهای همنام از افزایش انرژی میدان هنگامی که این بارها نزدیک هم آورده می‌شوند ناشی می‌شود. روشن است که این استدلال تا اندازه‌ای دوری است: نقطه شروع محاسبه عبارت مربوط به انرژی میدان عبارت متداول برای انرژی پتانسیل است. در صورتی می‌توانیم از این استدلال دوری اجتناب کنیم که بتوانیم عبارت ۱۰-۵ برای انرژی میدان را بدون توسل به پتانسیل بارهای نقطه‌ای به دست آوریم. این کار را می‌توان انجام داد اما احتیاج به یک بحث کلی انرژی در میدانها دارد، و این بحث بدون وارد شدن به قلمرو نظریه میدان ممکن نیست.

۲-۵ انرژی در دی الکتریکها

عبارت ۱۰-۵ که با میدان میکروسکوپی دقیق E محاسبه شده است مقدار صحیح انرژی میدان الکتروستاتیک را در تمام موارد تعیین می‌کند. اما، گاهی آنچه می‌خواهیم انرژی میدان نیست. فرض کنید چند جسم دی الکتریک داریم و یک توزیع بار آزاد نزدیک یا روی این اجسام قرار می‌دهیم. معمولاً آنچه برای ما مهم است انرژی میدان نیست بلکه مقدار انرژی است که باید صرف کنیم تا بارها را در جایی که می‌خواهیم قرار دهیم. کاری که برای گردآوری توزیع بار باید انجام دهیم، علاوه بر انرژی میدان کار انجام شده در تغییر شکل آنها، کار انجام شده در تغییر انرژی جنبشی الکترونها، کار انجام شده در گرم شدن دی الکتریک، و غیره را نیز شامل می‌شود.

برای به دست آوردن مقدار کار کل به صورت زیر عمل می‌کنیم: فرض کنید توزیع بار آزاد مورد نظر ما با چگالی $\rho_p(x)$ مشخص می‌شود. برای گردآوردن این توزیع بار، از بار صفر شروع

۱. باردار کردن دی الکتریکی که از لحاظ گرمایی عایق بندی شده است معمولاً باعث می‌شود که دما کمی افزایش یابد.

می‌کنیم و با آوردن مقادیر کم بار $\delta\rho_F$ به طور متوالی بار را به ρ_F می‌رسانیم. در یک مرحله از این فرایند، پتانسیل برابر با $\Phi(\mathbf{x})$ است و در نتیجه کاری که برای آوردن یک مقدار کم بار باید انجام دهیم برابر است با

$$\delta W = \int \delta\rho_F(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})dV \quad (21-5)$$

در اینجا با استفاده از $\delta\rho_F(\mathbf{x}) = \nabla \cdot (\delta\mathbf{D})/4\pi$ انتگرال بالا را با محاسبه‌ای شبیه به آنچه در ۸-۵ انجام شد تبدیل می‌کنیم. نتیجه عبارت است از

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} dV \quad (22-5)$$

آخرین مرحله جمع‌زدن تمام این مقادیر جزیی کار است یعنی انتگرال گرفتن روی \mathbf{D} از مقدار اولیه صفر (مربوط به بار آزاد صفر) تا مقدار نهایی آن (مربوط به بار آزاد ρ_F). برای این انتگرال‌گیری باید وابستگی \mathbf{E} به \mathbf{D} را بدانیم. اگر تمام دی‌الکتریکها خطی باشند، با ثابت دی‌الکتریک معین، آنگاه $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ متناسب با $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ است و

$$\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} = \frac{1}{\epsilon} \delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \quad (23-5)$$

پس

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})dV$$

و

$$W = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}dV \quad (24-5)$$

بدیهی است که در این معادله نهایی میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{D} مربوط به توزیع بار نهایی ρ_F هستند. کار انجام شده برای گردآوری توزیع بار را می‌توان به عنوان انرژی پتانسیل ذخیره شده در میدانها و دی‌الکتریکها در نظر گرفت. بنابه معادله ۲۴-۵، این انرژی پتانسیل برابر است با

$$U = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}dV \quad (25-5)$$

پس چگالی انرژی عبارت است از

$$u = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (26-5)$$

لازم است به خاطر بسپاریم که معادله‌های ۲۵-۵ و ۲۶-۵ تنها برای دی‌الکتریکهای خطی معتبرند. در انواع دیگر دی‌الکتریکها، برای محاسبه کار باید از معادله ۲۲-۵ استفاده کنیم و روی \mathbf{D} انتگرال بگیریم. در این نوع دی‌الکتریکها، رابطه بین \mathbf{D} و \mathbf{E} خطی نیست (معادله ۲۳-۵ برقرار نیست) و به علاوه، این رابطه غالباً بستگی به وضع گذشته دی‌الکتریک (پسماند) دارد. وابستگی به گذشته معرف این است که نیروها در دی‌الکتریک ناپایستار هستند — دی‌الکتریک به خاطر اصطکاک مقداری انرژی تلف می‌کند. پس نمی‌توان کار انجام شده برای گردآوردن توزیع بار را به‌عنوان انرژی پتانسیل تعبیر کرد.

روشن است که انرژی پتانسیل برای دستگاهی با دی‌الکتریکهای خطی را باید با میدان الکتریکی ماکروسکوپی محاسبه کرد. برای تأکید بر این امر از نماد E برای این میدان استفاده می‌کنیم، و معادله ۲۵-۵ را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{D} \, dV \quad (27-5)$$

و اگر دی‌الکتریک هم خطی و هم همسانگرد باشد می‌نویسیم

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon \bar{\mathbf{E}}^2 \, dV \quad (28-5)$$

این انرژی را با انرژی میدان میکروسکوپی (معادله ۹-۵) مقایسه می‌کنیم. بدین منظور، از این واقعیت استفاده می‌کنیم که مواد معمولی دستگاههایی هستند از ذراتی که با نیروی عکس مجذوری (کولن) کنار هم نگاه داشته شده‌اند.^۱ برای دستگاهی متشکل از ذراتی که با نیروی عکس مجذوری با یکدیگر برهم‌کنش دارند، رابطه بین انرژیهای جنبشی و پتانسیل متوسط از قضیه ویريال تعیین می‌شود: انرژی جنبشی متوسط ذرات برابر است با $1/2$ — انرژی پتانسیل متوسط^۲ یعنی

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \bar{V} \quad (29-5)$$

تمرین ۲- تحقیق کنید که معادله ۲۹-۵ برای یک ذره باردار در مدار دایره‌ای در میدان کولن برقرار است.

۱. البته نیروهای مغناطیسی هم در مواد وجود دارند اما از آنها صرف‌نظر می‌کنیم.

۲. این قضیه در مکانیک کوانتومی نیز معتبر است.

انرژی کل دستگاه ذرات برابر است با $\bar{T} + \bar{V} = 1/2 \bar{V}$ ، و تغییر انرژی کل عبارت است از

$$\Delta W = \frac{1}{2} \Delta \bar{V} \quad (30-5)$$

اما می‌دانیم که تغییر انرژی کل برابر است با

$$\Delta W = \frac{1}{8\pi} \Delta \int \bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{D} \, dV$$

و تغییر انرژی پتانسیل، بنابه بحث بعد از معادله ۲۰-۵، برابر است با

$$\Delta \bar{V} = \frac{1}{8\pi} \Delta \int \mathbf{E}^2 \, dV$$

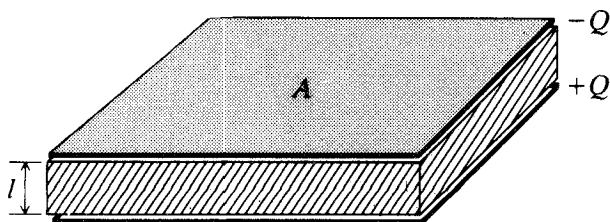
از جاگذاری عبارتهای ΔW و $\Delta \bar{V}$ در معادله ۳۰-۵، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{8\pi} \Delta \int \bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{D} \, dV = \frac{1}{2} \frac{1}{8\pi} \Delta \int \mathbf{E}^2 \, dV \quad (31-5)$$

این معادله نشان می‌دهد وقتی دی‌الکتریک بار بگیرد تغییر انرژی میدان دو برابر کار ماکروسکوپی انجام شده در فرایند بارگرفتن است. انرژی اضافی منتقل شده به میدانهای الکتریکی از کاهش انرژی جنبشی الکترونهای اتمهای ماده حاصل می‌شود (الکترونها به مدارهای کوانتومی مربوط به انرژی جنبشی کمتر اما انرژی پتانسیل بیشتر، یعنی به مدارهای بزرگتر، گذار انجام می‌دهند). توجه کنید که اگر از تمایز بین میدانهای الکتریکی ماکروسکوپی و میکروسکوپی که باید به ترتیب در معادله‌های ۹-۵ و ۲۸-۵ به کار روند غفلت می‌کردیم به این نتیجه (نادرست) می‌رسیدیم که کار انجام شده ε مرتبه بیشتر از تغییر انرژی میدان است.

رابطه ۲۴-۵ برای کار انجام شده در گردآوری توزیع بار، در محاسبه نیروهای ماکروسکوپی وارد بر اجسام باردار مفید است. برای مثال، دو صفحه فلزی موازی به مساحت A و به فاصله l از یکدیگر در نظر بگیرید؛ ناحیه بین صفحه‌ها از یک ماده دی‌الکتریک (مثلاً گاز) با ثابت دی‌الکتریک ε پر شده است (شکل ۲-۵). اگر بارهای روی صفحه‌ها $\pm Q$ باشند چگالیهای بار سطحی برابرند با $\sigma = \pm Q/A$ و میدان جابه‌جایی، با صرف نظر کردن از اثرات لبه، برابر است با

$$D = 4\pi\sigma = \frac{4\pi Q}{A} \quad (32-5)$$



شکل ۲-۵ دو صفحه فلزی بزرگ موازی که با یک ماده دی الکتریک از هم جدا شده اند. صفحه ها حامل بارهای $\pm Q$ هستند.

کار لازم برای باردار کردن دستگاه عبارت است از

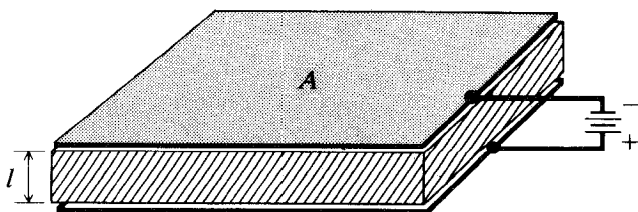
$$W = \frac{1}{\lambda\pi\epsilon} \int \mathbf{D}^T dV = \frac{1}{\lambda\pi\epsilon} \left(\frac{4\pi Q}{A} \right)^2 Al = \frac{2\pi Q^2 l}{\epsilon A} \quad (33-5)$$

این معادله نشان می دهد (به ازای Q ی معین) انرژی با l افزایش می یابد. بنابراین، صفحه های موازی یکدیگر را با نیروی زیر جذب می کنند

$$F = -\frac{\partial W}{\partial l} = -\frac{2\pi Q^2}{\epsilon A} \quad (34-5)$$

از طرف دیگر، اگر صفحه ها به یک باتری که اختلاف پتانسیل ثابت $\Delta\Phi$ بین آنها برقرار می کند وصل شوند (شکل ۳-۵)، آنگاه $E = \Delta\Phi/l$ ، و کار لازم برای باردار کردن صفحه ها برابر است با

$$W = \frac{\epsilon}{\lambda\pi} \int \mathbf{E}^T dV = \frac{\epsilon}{\lambda\pi} \left(\frac{\Delta\Phi}{l} \right)^2 Al = \frac{\epsilon A (\Delta\Phi)^2}{\lambda\pi l} \quad (35-5)$$



شکل ۳-۵ دو صفحه فلزی بزرگ موازی که توسط یک دی الکتریک از هم جدا شده اند. صفحه ها به یک باتری که اختلاف پتانسیل ثابت ایجاد می کند وصل شده اند.

در این مورد، انرژی (به ازای $\Delta\Phi$ ی معین) با افزایش l کاهش می‌یابد، و از اینجا استنباط می‌شود که نیرو باید دافعه باشد. اما، در محاسبهٔ نیرو باید کاری که لازم است در برابر باتری هنگام حرکت دادن صفحه‌ها انجام شود را نیز به حساب آوریم. چون بار روی صفحه‌ها برابر است با

$$Q = \frac{AD}{\epsilon\pi} = \frac{A\epsilon}{4\pi} \frac{\Delta\Phi}{l} \quad (36-5)$$

پس تغییر l منجر به تغییر بار زیر می‌شود

$$dQ = -\frac{\epsilon A}{4\pi} \frac{\Delta\Phi}{l^2} dl \quad (37-5)$$

و کار لازم برای انتقال این مقدار بار به باتری برابر است با

$$-\Delta\Phi dQ = \frac{\epsilon A}{4\pi} \left(\frac{\Delta\Phi}{l}\right)^2 dl \quad (38-5)$$

کار کل لازم برای افزایش فاصلهٔ صفحه‌ها به اندازهٔ dl عبارت است از

$$dW - \Delta\Phi dQ = \left[-\frac{\epsilon A}{8\pi} \left(\frac{\Delta\Phi}{l}\right)^2 + \frac{\epsilon A}{4\pi} \left(\frac{\Delta\Phi}{l}\right)^2 \right] dl = \frac{\epsilon A}{8\pi} \left(\frac{\Delta\Phi}{l}\right)^2 dl \quad (39-5)$$

در نتیجه، صفحه‌های موازی یکدیگر را با نیروی زیر جذب می‌کنند

$$F = -\frac{(dW - \Delta\Phi dQ)}{dl} = -\frac{\epsilon A}{8\pi} \left(\frac{\Delta\Phi}{l}\right)^2 \quad (40-5)$$

توجه کنید که این عبارت نهایی برای نیرو دارای بزرگی یکسان اما علامت مخالف با عبارتی است که از معادلهٔ ۳۵-۵ به دست خواهیم آورد اگر به‌طور ساده از فرمول $F = -\partial W/\partial l$ استفاده کنیم. این تغییر علامت از اینجا ناشی می‌شود که در معادلهٔ ۳۹-۵ جملهٔ $-\Delta\Phi dQ$ دو برابر جملهٔ dW و دارای علامت مخالف است. می‌توان به آسانی نشان داد عبارت مربوط به نیرو در معادلهٔ ۴۰-۵ با معادلهٔ ۳۴-۵ یکی است.

تمرین ۴- نشان دهید اگر اختلاف پتانسیل $\Delta\Phi$ برحسب بار متناظر Q روی صفحه‌ها بیان شود، طرف راست معادله‌های ۳۴-۵ و ۴۰-۵ یکسان می‌شوند. ■

۳-۵ انرژی جسم باردار در میدان خارجی

منظور از میدان خارجی میدان یک توزیع بار معین و ثابت است. فرض کنید چنین میدانی وجود دارد و جسم بارداری را در آن قرار می‌دهیم. این جسم باردار را به عنوان جسم آزمون در نظر می‌گیریم؛ یعنی، فرض می‌کنیم حضور این جسم میدان خارجی مفروض را آشفته نمی‌کند. می‌خواهیم تحت این شرایط نیروی وارد بر جسم باردار را به دست آوریم. اگر جسم باردار بار نقطه‌ای q باشد، نیروی وارد بر آن برابر است با

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (۴۱-۵)$$

که در آن \mathbf{E} میدان خارجی معین است. اما اگر جسم باردار ابعاد متناهی و توزیع بار پیچیده‌ای داشته باشد چه پیش می‌آید؟ در این مورد، می‌توانیم نیرو را از انرژی حساب کنیم. فرض کنید توزیع بار جسم $\rho(\mathbf{x})$ و پتانسیل مربوط به میدان خارجی $\Phi(\mathbf{x})$ باشد. پس انرژی پتانسیل جسم باردار در میدان خارجی عبارت است از

$$U = \int \rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})dV$$

که در آن انتگرال روی حجم جسم گرفته می‌شود. مکان مرکز جرم جسم را با \mathbf{x}_0 نشان می‌دهیم.^۱ بسط رشته تیلور پتانسیل میدان خارجی حول \mathbf{x}_0 را می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \Phi(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla\Phi(\mathbf{x}_0) + \dots \\ &= \Phi(\mathbf{x}_0) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}_0) + \dots \end{aligned} \quad (۴۲-۵)$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} U &= \int \rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x}_0)dV - \int \rho(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}_0)dV + \dots \\ &= Q\Phi(\mathbf{x}_0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}_0) + \dots \end{aligned} \quad (۴۳-۵)$$

که در آن \mathbf{p} گشتاور دوقطبی جسم باردار است که نسبت به \mathbf{x}_0 محاسبه شده است:

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)dV \quad (۴۴-۵)$$

۱. در اینجا \mathbf{x}_0 می‌تواند نشان‌دهنده هر نقطه معین دیگری از جسم نیز باشد، اما انتخاب مرکز جرم معمولاً مناسبتر است.

پس نیروی وارد بر جسم برابر است با

$$\begin{aligned} F^k &= -\frac{\partial U}{\partial x^k} = -Q \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^k} + \dots \\ &= QE^k(\mathbf{x}_0) + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^k} + \dots \end{aligned} \quad (45-5)$$

جمله دوم طرف راست معادله ۴۵-۵ نشان می‌دهد که حتی بر یک جسم خنثی ($Q = 0$) می‌تواند نیرویی وارد شود به شرط اینکه این جسم توزیع باری با گشتاور دوقطبی داشته باشد و به شرط اینکه میدان خارجی یکنواخت نباشد. این جمله دوم همان قالب ریاضی نیروی وارد بر دوقطبی ساده متشکل از یک جفت بار $\pm q$ را دارد (معادله ۲-۶۱).

می‌توانیم گشتاور نیرویی را که میدان بر جسم باردار وارد می‌کند نیز محاسبه کنیم. اگر زاویه بین \mathbf{p} و \mathbf{E} باشد از معادله ۴۳-۵ داریم

$$U = Q\Phi - |\mathbf{p}||\mathbf{E}| \cos \theta \quad (46-5)$$

گشتاور نیرو نسبت به محوری که بر \mathbf{p} و \mathbf{E} عمود باشد عبارت است از

$$\tau = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = |\mathbf{p}||\mathbf{E}| \sin \theta \quad (47-5)$$

یعنی

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (48-5)$$

پس بر جسم باردار در میدان الکتریکی گشتاور نیرویی وارد می‌شود که مایل است گشتاور دوقطبی آن را با میدان هم‌جهت کند. این نتیجه تعمیمی است از نتیجه‌ای که برای گشتاور نیروی وارد بر دوقطبی به دست آوردیم (معادله ۲-۶۵).

۴-۵ خازنها

خازن دستگاهی است متشکل از رساناها و دی‌الکتریکها که برای ذخیره بار الکتریکی و انرژی الکتریکی به‌کار می‌رود. ساده‌ترین خازن از یک قطعه منفرد از ماده رسانا تشکیل می‌شود. ظرفیت این دستگاه بنا به تعریف عبارت است از نسبت بار به پتانسیل:

$$C = \frac{Q}{\Phi} \quad (49-5)$$

که در آن پتانسیل نسبت به بینهایت گرفته شده است. در مورد خاص یک کره فلزی به شعاع R داریم

$$\Phi = \frac{Q}{R} \quad (50-5)$$

و

$$C = R \quad (51-5)$$

توجه کنید که در اینجا ظرفیت تنها بستگی به شعاع کره دارد. به طور کلی، ظرفیت یک خازن بستگی به شکل، اندازه و ثابت دی الکتریک آن دارد اما از مقدار بار ذخیره شده و پتانسیل مستقل است. همچنانکه از معادله ۵۱-۵ دیده می شود، یکای ظرفیت در CGS الکتروستاتیک سانتیمتر است. بدین ترتیب، ظرفیت کره از لحاظ عددی با شعاع آن برحسب سانتیمتر برابر است.^۱

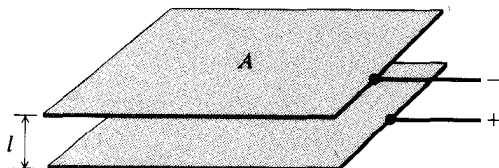
رایجترین نوع خازن از دو رسانای جدا یکی حامل بار $+Q$ و دیگری حامل بار $-Q$ تشکیل می شود. خازن تخت موازی (شکل ۴-۵) از این نوع است. دستگاههای ممکن دیگر عبارت اند از پوسته های کروی هم مرکز، پوسته های استوانه ای هم محور، و غیره. ظرفیت این نوع دستگاهها به صورت زیر تعریف می شود

$$C = \frac{Q}{\Delta\Phi} \quad (52-5)$$

که در آن $\Delta\Phi$ اختلاف پتانسیل بین رساناهاست.

انرژی الکتریکی ذخیره شده در این نوع خازن، بنابه معادله ۷-۵، برابر است با

$$U = \frac{1}{2}Q_1\Phi_1 + \frac{1}{2}Q_2\Phi_2 = \frac{1}{2}Q\Phi_1 + \frac{1}{2}(-Q)\Phi_2 = \frac{1}{2}Q\Delta\Phi \quad (53-5)$$



شکل ۴-۵ خازن تخت موازی.

۱. در SI یکای ظرفیت فاراد است، و $1 \text{ cm} \leftrightarrow 9 \times 10^{11} \text{ cm}$ فاراد. رابطه بین یکاهای ظرفیت در SI و CGS را به صورت هم ارزی نوشته ایم (نه تساوی) زیرا بنابه اختلاف تعاریف یکاهای بار، یکاهای ظرفیت ابعاد یکسان ندارند.

این انرژی را به صورت زیر نیز می توان نوشت

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta\Phi)^2 \quad (54-5)$$

یا

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (55-5)$$

تمرین ۵- نشان دهید برای خازن تخت موازی (شکل ۴-۵) داریم

$$C = \frac{A}{4\pi l} \quad (56-5)$$

برای دستگاه خازن متشکل از n رسانا، ضرایب ظرفیت را به صورت زیر تعریف می کنیم: فرض کنید رساناها دارای بارهای Q_1, Q_2, \dots, Q_n و در پتانسیلهای $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ باشند. آنگاه، این بارها و پتانسیلها باید به طور خطی به هم مربوط باشند. دلیل این امر این است که \mathbf{D} به طور خطی به ρ_F مربوط است (معادله ۴-۱۵)، \mathbf{E} به طور خطی به \mathbf{D} مربوط است (معادله ۴-۲۱) و Φ به طور خطی به \mathbf{E} مربوط است.^۱ بنابراین می توانیم بنویسیم

$$Q_k = \sum_l c_{kl} \Phi_l \quad (57-5)$$

ثابت‌های c_{kl} را ضرایب ظرفیت می نامند. این ثابتها تماماً از شکل، اندازه و ثابتهای دی الکتریک دستگاه خازن تعیین می شوند. ضرایب ظرفیت در رابطه تقارن صدق می کنند:

$$c_{kl} = c_{lk} \quad (58-5)$$

معادله ۵۸-۵ فرع قضیه زیر است که قضیه وارونگی گرین نامیده می شود.

قضیه: فرض کنید به ازای بارهای Q_1, Q_2, \dots, Q_n روی رساناها، پتانسیلها $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ باشند. فرض کنید هنگامی که بارها را به Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_n و Q'_n تبدیل کنیم پتانسیلها

۱. توجه کنید که اگر ثابت دی الکتریک بستگی به شدت میدان داشته باشد (ماده غیرخطی)، استدلال بالا معتبر نیست.

به Φ'_1, Φ'_2, \dots و Φ'_n تبدیل شوند. آنگاه

$$\sum_k^n Q_k \Phi'_k = \sum_k^n Q'_k \Phi_k \quad (59-5)$$

برای اثبات این قضیه، هریک از بارهای Q_k را به N عنصر بار به مقدار $q_k = Q_k/N$ تقسیم می‌کنیم. اگر مکانهای این عنصرهای بار $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ و \mathbf{x}_{nN} باشند، پتانسیل در مکان یکی از آنها عبارت است از

$$\Phi_k = \sum_{l \neq k}^{nN} \frac{q_l}{|\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k|} \quad (60-5)$$

در این عبارت، سهمی که عنصر بار q_k در مکان خودش در پتانسیل دارد حذف شده است زیرا این سهم در حد $N \rightarrow \infty$ صفر می‌شود. به همین ترتیب، داریم

$$\Phi'_k = \sum_{l \neq k}^{nN} \frac{q'_l}{|\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k|} \quad (61-5)$$

در نتیجه

$$\sum_k^{nN} q_k \Phi'_k = \sum_k^{nN} \sum_{l \neq k}^{nN} \frac{q_k q'_l}{|\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k|} = \sum_l^{nN} \sum_{k \neq l}^{nN} \frac{q'_l q_k}{|\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k|} = \sum_l^{nN} q'_l \Phi_l \quad (62-5)$$

این رابطه قضیه را برحسب عنصرهای بار q_k اثبات می‌کند. به‌عنوان آخرین مرحله اثبات، متذکر می‌شویم که تمام عنصرهای بار روی یک رسانای معین در یک پتانسیل هستند؛ در نتیجه می‌توانیم جمع را روی عنصرهای بار مربوط به هریک از رساناها در معادله ۶۲-۵ انجام دهیم. آنچه به‌دست می‌آید عبارتی است که تنها شامل بارهای Q_k روی هریک از رساناهاست، یعنی معادله ۵۹-۵ را به‌دست می‌آوریم.

برای محاسبه معادله ۵۸-۵، معادله ۵۹-۵ را برحسب ضرایب ظرفیت می‌نویسیم:

$$\sum_k \sum_l c_{kl} \Phi_l \Phi'_k = \sum_k \sum_l c_{kl} \Phi'_l \Phi_k = \sum_l \sum_k c_{lk} \Phi'_k \Phi_l \quad (63-5)$$

از دو طرف این معادله مشتق جزئی $\partial^2 / \partial \Phi_r \partial \Phi_s$ را می‌گیریم و به‌دست می‌آوریم

$$c_{rs} = c_{sr} \quad (64-5)$$

که می‌خواستیم ثابت کنیم.

این رابطه تقارن دارای پیامد جالب زیر است. فرض کنید رسانای ۳ متصل به زمین و حامل بار Q باشد در حالی که رسانای ۴ در پتانسیل Φ است. اکنون اگر رسانای ۴ را متصل به زمین کنیم در حالی که رسانای ۳ را به پتانسیل Φ برده‌ایم (تمام رساناهای دیگر در پتانسیلهای اصلی خود نگه‌داشته شده‌اند)، آنگاه بار روی پتانسیل ۴ باید الزاماً Q باشد.

معادله ۵-۵۷ را نیز می‌توان برای پتانسیل Φ_l برحسب بارهای Q_k حل کرد:

$$\Phi_l = \sum_k p_{lk} Q_k \quad (۶۵-۵)$$

کمیت‌های p_{kl} را ضرایب پتانسیل می‌نامند. اگر Φ_l و Q_l را به‌عنوان بردارهایی در یک فضای n بعدی در نظر بگیریم، آنگاه c_{kl} و p_{kl} در این فضا ماتریسهای $n \times n$ هستند، و این ماتریسها وارون یکدیگرند. چون c_{kl} متقارن است، p_{kl} نیز باید متقارن باشد:

$$p_{kl} = p_{lk} \quad (۶۶-۵)$$

این رابطه دارای پیامد زیر است: فرض کنید مثلاً رسانای ۳ دارای بار صفر و در پتانسیل Φ است در حالی که رسانای ۴ بار Q دارد. اکنون اگر بار Q را به رسانای ۳ منتقل کنیم (بارهای روی تمام رساناهای دیگر ثابت نگه‌داشته شده‌اند). رسانای ۴ در پتانسیل Φ خواهد بود.

انرژی الکتریکی ذخیره‌شده در دستگاه خازن برابر است با

$$U = \frac{1}{2} \sum_k Q_k \Phi_k$$

با استفاده از معادله‌های ۵-۵۷ و ۵-۶۵ می‌توانیم این انرژی را به دو صورت جانشین بنویسیم:

$$U = \frac{1}{2} \sum_k \sum_l c_{kl} \Phi_k \Phi_l \quad (۶۷-۵)$$

و

$$U = \frac{1}{2} \sum_k \sum_l p_{kl} Q_k Q_l \quad (۶۸-۵)$$

این دو معادله مشابه با معادله‌های ۵-۵۴ و ۵-۵۵ برای دستگاه دو خازن هستند.

۱-۵ مطابق با الگوی ذره آلفایی هسته فرض می‌شود بعضی از هسته‌ها از ذرات آلفا با آرایش منظم هندسی تشکیل شده‌اند. برای مثال، هسته ^{16}O بنابه فرض از چهار ذره آلفا واقع در رؤس یک چهاروجهی تشکیل شده است. اگر یال این چهاروجهی $10^{-13} \text{cm} \times 3r_0$ باشد انرژی پتانسیل الکتروستاتیک این هیئت را به دست آورید. ذرات آلفا را کره‌های کوچکی در نظر بگیرید، و از خود-انرژی آنها صرف‌نظر کنید.

۲-۵ دو میله پلاستیکی باریک یکسان به طول L دارای بارهای یکسان Q هستند که در طول آنها به‌طور یکنواخت توزیع شده است. میله‌ها در یک امتداد و به‌گونه‌ای قرار گرفته‌اند که فاصله دو سر نزدیک آنها برابر با d است. انرژی پتانسیل متقابل آنها را محاسبه کنید. از خود-انرژی میله‌ها صرف‌نظر کنید. نیروی دافعه را از این انرژی پتانسیل به دست آورید.

۳-۵ انرژی الکتروستاتیک یک بلور یونی مانند NaCl را می‌توان از جمع انرژیهای پتانسیل تمام یونهای شبکه به دست آورد. چون این یونها کروی هستند، می‌توان آنها را بارهای نقطه‌ای در نظر گرفت. انرژی الکتروستاتیک یک «بلور» کوچک NaCl متشکل از چهار یون Na^+ و چهار یون Cl^- که به تناوب در رؤس مکعبی با یال 2.81Å قرار گرفته‌اند را حساب کنید.

۴-۵ توزیع باری با تقارن کروی دارای چگالی بار $\rho(r) = kr^{-n}$ است که در آن k و n ثابتهای مثبت هستند و $0 \leq r < R$. انرژی پتانسیل الکتروستاتیک این توزیع بار را به دست آورید. به‌ازای چه مقادیری از n این انرژی متناهی است.

۵-۵ از پراکنش الکترونیهای پراثری توسط پروتونها برای به دست آوردن توزیع بار داخل پروتون استفاده می‌شود. از این آزمایشها معلوم شده است که چگالی بار پروتون تقریباً یک تابع نمایی از فاصله است: $\rho = (e/\lambda\pi a^3)e^{-r/a}$ که در آن $\rho = 2.3 \times 10^{-13} \text{cm}^{-3}$ و $a = 0.23 \text{cm}$. میدان الکتریکی این توزیع بار را به صورت تابعی از شعاع به دست آورید. در چه شعاعی این میدان ماکسیمم است؟ خود-انرژی الکتروستاتیک را محاسبه کنید، و آن را با انرژی جرم سکون پروتون مقایسه کنید.

۶-۵ هسته ^{238}U کره‌ای است به شعاع $7.4 \times 10^{-13} \text{cm}$ و بار $92e$. فرض کنید این هسته در یک شکافت به دو هسته کروی ^{119}Pd به شعاع $5.9 \times 10^{-13} \text{cm}$ تقسیم می‌شود. (الف) انرژی الکتروستاتیک هسته ^{238}U را قبل از شکافت به دست آورید. چگالی بار هسته را یکنواخت بگیرید. (ب) انرژی الکتروستاتیک را بلافاصله پس از شکافت حساب کنید. فرض کنید در این لحظه فاصله دو هسته جدید 1.5 برابر قطر آنهاست و خود-انرژی را نیز به حساب آورید. (ج) انرژی الکتروستاتیک را مدتی پس از شکافت که فاصله هسته‌ها بسیار زیاد شده است به دست آورید.

۷-۵ مطابق با یک الگوی ابتدایی، نوترون تشکیل شده است از یک مغز داخلی با بار مثبت که

توسط یک پوسته خارجی با بار منفی احاطه شده است. بار مثبت را $+e$ بگیریید که در کره‌ای به شعاع $10^{-13} \text{cm} \times 0.5$ به طور یکنواخت توزیع شده است. بار منفی را $-e$ بگیریید که در پوسته‌ای کروی به شعاع داخلی $10^{-13} \text{cm} \times 0.5$ و شعاع خارجی $10^{-13} \text{cm} \times 1.0$ به طور یکنواخت توزیع شده است. چگالی انرژی در میدان الکتروستاتیک را (به صورت تابعی از شعاع) به دست آورید. با انتگرال گرفتن از این چگالی انرژی، انرژی الکتروستاتیک در نوترون را محاسبه کنید؛ جواب را بر حسب MeV بنویسید.

۵-۸ کره‌ای به شعاع R و بار Q که به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است در مبدأ قرار دارد. بار نقطه‌ای q روی محور z و به فاصله $d > R$ از مرکز کره واقع شده است. (الف) میدان الکتریکی مشترک کره و بار نقطه‌ای را به دست آورید. (ب) با انتگرال گرفتن از چگالی انرژی $E^2/8\pi$ ، انرژی پتانسیل الکتروستاتیک ذخیره شده در میدان را محاسبه کنید. نشان دهید این انرژی را می‌توان به صورت $U = \text{const} + Qq/d$ بیان کرد.

۵-۹ یک کره رسانا به شعاع R در میدان الکتریکی قبلاً یکنواخت \mathbf{E}_0 قرار دارد. چگالی انرژی در فضای اطراف کره را به دست آورید. اختلاف انرژی الکتروستاتیک میدان الکتریکی یکنواخت (در غیاب کره) و انرژی الکتروستاتیک میدان در حضور کره را محاسبه کنید.

۵-۱۰ بار نقطه‌ای q در میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E} = E_0 \hat{z}$ قرار دارد. با فرض اینکه بار نقطه‌ای روی محور z است چگالی انرژی را در میدان حاصل از جمع میدان الکتریکی یکنواخت و میدان بار نقطه‌ای به دست آورید. با انتگرال گرفتن از چگالی انرژی، نشان دهید انرژی الکتروستاتیک به صورت $U = \text{const} - qE_0 z$ است. [راهنمایی: روش محاسبه معادله ۵-۱۹ را به کار ببرید.]

۵-۱۱ یک ورق کاغذ با ثابت دی‌الکتریک $\epsilon_r = 2.5$ در میدان الکتریکی یکنواخت با شدت 20 statV/cm قرار دارد (با مسئله ۵-۴ مقایسه کنید). مساحت این ورق $28 \text{cm} \times 22 \text{cm}$ و کلفتی آن 0.06cm است. اگر ورق موازی با میدان الکتریکی باشد کار لازم برای اینکه به صورت عمود بر میدان الکتریکی درآورده شود را (به طور تقریبی) حساب کنید.

۵-۱۲ کره‌ای الکتریکی به شعاع R و ثابت دی‌الکتریک ϵ_r در محیطی با ثابت دی‌الکتریک ϵ_1 و میدان الکتریکی (قبلاً) یکنواخت \mathbf{E}_0 قرار دارد. اختلاف انرژی الکتروستاتیک میدان یکنواخت (در غیاب کره‌ای الکتریکی) و انرژی الکتروستاتیک میدان در حضور کره‌ای الکتریکی را به دست آورید.

۵-۱۳ یک خازن تخت موازی از دو صفحه رسانا به مساحت A و فاصله d از یکدیگر تشکیل شده است. یک قطعه دی‌الکتریک به کلفتی $d' < d$ و مساحت $A' < A$ را بین دو صفحه و موازی با آنها قرار می‌دهیم. ظرفیت خازن را به دست آورید. از اثرات لبه صرف نظر کنید.

۱۴-۵ یک خازن تک‌رسانایی از کره‌ای فلزی به شعاع R که نیمی از آن در دریاچه‌ای بزرگ از روغن با ثابت دی‌الکتریک ϵ فرو رفته است تشکیل شده است. ظرفیت این کره را به دست آورید.

۱۵-۵ یک خازن استوانه‌ای از دو لولهٔ دراز هم‌محور از ورق فلز به شعاعهای R_1 و R_2 تشکیل شده است. فضای بین لوله‌ها از ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک ϵ پر شده است. ظرفیت در واحد طول را محاسبه کنید.

۱۶-۵ یک خازن کروی از دو پوستهٔ کروی هم‌مرکز به شعاعهای R و $3R$ تشکیل شده است. فضای بین پوسته‌ها از ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک ϵ پر شده است. (الف) ظرفیت این خازن را به دست آورید. (ب) فرض کنید اختلاف پتانسیل بین پوسته‌ها $\Delta\Phi$ است. میدان الکتریکی را بین پوسته‌ها و انرژی الکتروستاتیک را با انتگرال گرفتن از چگالی انرژی محاسبه کنید. جواب را با $U = \frac{1}{2}C(\Delta\Phi)^2$ مقایسه کنید.

۱۷-۵ یک خازن کروی از دو پوستهٔ هم‌مرکز از ورق فلز به شعاعهای a و b تشکیل شده است. نیمهٔ بالایی فضای بین پوسته‌ها از ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک ϵ_1 و نیمهٔ پایینی آن از ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک ϵ_2 پر شده است. ظرفیت این دستگاه را به دست آورید.

۱۸-۵ مساحت هر یک از صفحه‌های یک خازن تخت موازی $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ و فاصلهٔ آنها از یکدیگر 1 mm است. بین دو صفحهٔ خازن یک ورق دی‌الکتریک با همان مساحت و به کلفتی 1 mm و با $\epsilon = 3.5$ وجود دارد که می‌تواند آزادانه حرکت کند. فرض کنید ورق از یک طرف خازن کمی بیرون آمده است، و اختلاف پتانسیل 10 statV به خازن اعمال شده است. نشان دهید صفحه‌ها ورق را به داخل خازن می‌کشند، و بزرگی نیرو را به دست آورید. از اثرات لبه صرف‌نظر کنید.

۱۹-۵ یک خازن استوانه‌ای از دو پوستهٔ رسانای دراز هم‌محور به شعاعهای a و b و ارتفاع h تشکیل شده است. رسانای داخلی بار Q و رسانای خارجی بار $-Q$ دارد. جامدی با ثابت دی‌الکتریک ϵ فضای بین دو پوسته را پر کرده است و می‌تواند به بالا و پایین حرکت کند. فرض کنید این جامد از طرف پایین به اندازهٔ $h - l$ از خازن خارج شده است. (الف) میدان الکتریکی \mathbf{E} را در ناحیهٔ پر و ناحیهٔ خالی خازن به دست آورید. چگالی بار سطحی آزاد را در قسمتی از پوستهٔ داخلی که توسط دی‌الکتریک احاطه شده است و در قسمتی که توسط دی‌الکتریک احاطه نشده است محاسبه کنید. از اثرات لبه در دو انتهای خازن صرف‌نظر کنید. (ب) انرژی لازم برای پر کردن خازن را به دست آورید. (ج) نیرویی را که استوانه‌های رسانا به طرف بالا بر دی‌الکتریک وارد می‌کنند محاسبه کنید.

۲۰-۵ یک دستگاه خازن از سه پوستهٔ کروی هم‌مرکز به شعاعهای R ، $2R$ و $3R$ تشکیل شده است. پوسته‌ها در خلأ هستند و فضای بین آنها خالی است. (الف) ضرایب ظرفیت و ضرایب

پتانسیل را حساب کنید. (ب) اگر بار روی پوسته‌ها (از داخل به خارج) Q ، Q و $2Q$ - باشد، انرژی ذخیره‌شده در این دستگاه خازن را به دست آورید.

۵-۲۱ یک خازن دورسانایی از دو پوستهٔ کروی هم‌مرکز به شعاعهای R_1 و $R_2 > R_1$ تشکیل شده است. (الف) فرض کنید پوستهٔ ۱ در پتانسیل صفر (نسبت به بینهایت) و پوستهٔ ۲ در پتانسیل V باشد. بار هریک از پوسته‌ها را به دست آورید. (ب) فرض کنید پوستهٔ ۱ در پتانسیل V و پوستهٔ ۲ در پتانسیل صفر باشد. بار هریک از پوسته‌ها را در این مورد تعیین کنید. آیا نتایج به دست آمده با قضیهٔ وارونگی توافق دارند؟

نظریه نسبیت خاص

در فصلهای قبل مثالهایی از میدانهایی که توسط بارهای ساکن ایجاد شده‌اند بررسی کردیم؛ این میدانها تابع فضا هستند. در فصلهای بعد با میدانهایی که توسط بارهای متحرک ایجاد شده‌اند سروکار داریم. این میدانها تابع فضا و زمان هستند. بدین ترتیب، فضا-زمان صحنه‌ای است که میدانها در آن بازی خود را انجام می‌دهند؛ و پیش از مطالعه قوانین دینامیکی حاکم بر این بازی، بهتر این است که هندسه فضا-زمان را بررسی کنیم.

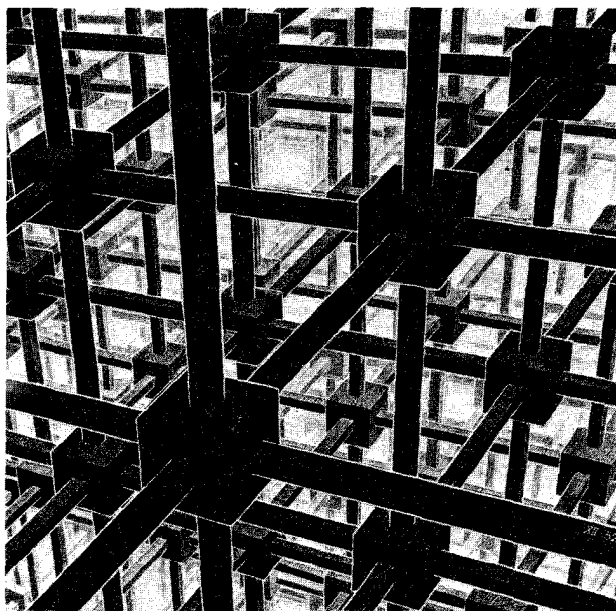
در فیزیک نیوتونی طول و زمان مطلق هستند. این دید از هندسه فضا-زمان در ذهن ما عمیقاً حک شده است، و ریشه در تجربه روزمره دارد. این دیدی است که صدها سال بلامعارض پابرجا بود اما در سال ۱۹۰۵ توسط اینشتین با نظریه نسبیت خاص ناگهان نفی شد. در فیزیک نسبیتی نه طول مطلق است و نه زمان. در عوض، تنها یک کمیت مطلق وجود دارد که هندسه فضا-زمان را مشخص می‌کند: بازه فضا-زمانی. این بازه فضا-زمانی از بازه‌های فضایی و بازه‌هایی زمانی که به هم پیوند خورده‌اند تشکیل شده است. همچنان‌که مینکوفسکی نوشته است: «از این پس فضای تنها و زمان تنها مطرود هستند، و تنها نوعی اتحاد از آن دو وجود مستقلی خواهد داشت» [۱].

قبل از پرداختن به بحث نظریه اینشتین، خواص فضا-زمان و مفهوم نسبیت در فیزیک نیوتونی را به اختصار مرور می‌کنیم.

۱-۶ فضا-زمان و نسبیت در فیزیک نیوتونی

هندسه فضا-زمان فیزیک نیوتونی متکی بر چند فرض است که مستقیماً از تجربه روزمره گرفته شده‌اند. اساسی‌ترین فرض این است که فضا-زمان چهاربعدی است. این فرض صرفاً به معنی این است که هر «رویداد» یا نقطه فضا-زمان با چهار مختصه به‌طور یکتا جایگزین می‌شود: یک مختصه زمانی و سه مختصه فضایی.

برای تعیین مختصات یک نقطه فضا-زمان ابتدا باید یک چارچوب مرجع بسازیم. این چارچوب مرجع صرفاً آرایه‌ای از مترها و ساعت‌های همزمان شده است (شکل ۱-۶). فرض بر این است که تمام ساعت‌های چارچوب‌های مرجع دارای ساختمان و تنظیم واحدی هستند؛ یعنی همه ساعت‌های استاندارد یکسانی هستند. برای هر نقطه فضا-زمان، مترها اندازه‌گیری مستقیم مختصات قائم x, y, z و نزدیکترین ساعت اندازه‌گیری مستقیم مختصه زمانی t را امکان‌پذیر می‌سازند. البته استفاده از آرایه قائم ضروری نیست. یک آرایه کروی از مترها و نقاله‌ها به همان اندازه کارایی دارد و مختصات قطبی r, θ, ϕ را تعیین می‌کند. این آزادی در انتخاب مختصات تمایزی بین چارچوب مرجع و دستگاه مختصات ایجاد می‌کند. مختصات قائم، کروی، استوانه‌ای و غیره صرفاً راه‌های مختلف



شکل ۱-۶ اگر مکعب‌های سیاه را ساعت و میله‌ها را متر بگیریم، این لیتوگرافی اثر م. ایشر نمایشگر یک چارچوب مرجع است.

تعیین نقاط فضا در یک چارچوب مرجع هستند. تنها اگر دو آرایه مختصاتی در حرکت نسبی باشند می‌گوییم چارچوب مرجع عوض شده است. اما از آنجا که در نسبیت خاص از مختصات قائم تقریباً به‌طور انحصاری استفاده می‌شود تمایز چندانی بین چارچوب مرجع و دستگاه مختصات در نظر نمی‌گیریم.

چارچوبهای مرجع مختلف نسبت به هم در حرکت انتقالی یا دورانی هستند. فرض می‌کنیم مترها و ساعتها در تمام چارچوبهای مرجع مطابق با یک استاندارد مدرج‌سازی و تنظیم شده‌اند. آنگاه این سؤال دارای معنی است: اندازه‌گیرهای طول و زمان که در دو چارچوب مرجع مختلف انجام شده‌اند چگونه باهم مقایسه می‌شوند؟ در فیزیک نیوتونی طول مطلق است. معنی این گفته این است: دو نقطه از فضا در نظر بگیرید که مختصات آنها در یک چارچوب معین عبارت‌اند از x, y, z و $x + dx, y + dy, z + dz$ و در یک زمان t اندازه‌گیری شده‌اند. آنگاه طول یا فاصله بین این نقطه‌ها از رابطه زیر تعیین می‌شود

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (۱-۶)$$

این فاصله dl مطلق یا ناورداست زیرا به چارچوب مرجعی که در آن محاسبه شده است بستگی ندارد. به‌عنوان مثال، ناظرهای چارچوب مرجع زمین و ناظرهای چارچوب مرجع هواپیمایی که در حال پرواز است در مورد فاصله دو فرودگاه که اندازه‌گیری کرده‌اند توافق دارند.

به همین ترتیب، در فیزیک نیوتونی بازه زمانی مطلق است یا ناورداست. معنی این گفته این است که بازه زمانی dt بین دو نقطه فضا-زمان (در یک یا چند نقطه فضا) به چارچوب مرجعی که این بازه در آن اندازه‌گیری شده است بستگی ندارد. بدین ترتیب، ناظرهای زمین و هواپیما در مورد زمان اندازه‌گیری شده بین مثلاً برخاستن و نشست هواپیما توافق دارند.

به‌علت این سرشت مطلق طول و بازه زمانی هندسه فضا-زمان به دو هندسه مجزا تقسیم می‌شود: یک هندسه اقلیدسی سه‌بعدی برای فضا و یک هندسه اقلیدسی یک‌بعدی برای زمان. تا آنجا که به سینماتیک مربوط می‌شود تمام چارچوبهای مرجع به یک اندازه مناسب هستند. اما برای دینامیک بعضی چارچوبهای مرجع مناسب‌ترند. قانون اول نیوتون از مجموعه تمام چارچوبهای مرجع ممکن یک زیرمجموعه مرجع انتخاب می‌کند: چارچوبهای مرجع لخت. در این چارچوبها یک جسم آزاد یا در سکون است یا در حرکت انتقالی یکنواخت.

دو چارچوب مرجع لخت می‌توانند تنها در حرکت انتقالی یکنواخت باهم تفاوت داشته باشند. در تمام این چارچوبهای مرجع لخت تمام قوانین مکانیک نیوتونی به یک اندازه معتبر هستند. بدین ترتیب، هیچ آزمایش مکانیکی درونی وجود ندارد که بتواند یک چارچوب مرجع لخت را از دیگری متمایز کند. برای مثال، نمی‌توانیم سرعت یک هواپیما را (که در حرکت بدون شتاب است)

۱. البته دو چارچوب مرجع می‌توانند مبداهای متفاوت داشته باشند یا نسبت به هم چرخیده باشند اما در بحث ما این تفاوتها بی‌اهمیت هستند.

با آزمایش در داخل هواپیما اندازه‌گیری کنیم. تنها می‌توانیم سرعت هواپیما نسبت به هوا (سرعت هوایی) را با خارج کردن اسباب اندازه‌گیری از هواپیما، یا سرعت هواپیما نسبت به زمین (سرعت زمینی) را با مشاهده علائم روی زمین اندازه‌گیری کنیم. سرعت یک چارچوب مرجع هیچگاه یک سرعت مطلق نیست بلکه تنها یک سرعت نسبی است که در مقایسه با یک چارچوب مرجع دیگر اندازه‌گیری می‌شود.

این حکم که تمام قوانین مکانیک در تمام چارچوبهای مرجع لخت یکسان هستند اصل نسبیت گالیله نامیده می‌شود. این اصل نسبیت یک اصل تقارن است؛ این اصل بیان می‌دارد که بعضی عملیات (تبدیلات چارچوب مرجع) قوانین فیزیک را ناوردا می‌گذارد.

در فیزیک نیوتونی، تبدیلات مختصات فضایی و زمانی از یک چارچوب مرجع به چارچوب مرجع دیگر را معادلات تبدیل گالیله می‌نامند. برای سادگی، فرض می‌کنیم سرعت چارچوب مرجع دوم (چارچوب مرجع $x'y'z't'$) در امتداد محور x چارچوب مرجع اول (چارچوب مرجع xyz) است و مبدأهای O' و O متعلق به این چارچوبهای مرجع در زمان صفر برهم منطبق هستند. اگر سرعت چارچوب مرجع دوم نسبت به اولی V باشد، آنگاه تبدیل مختصات گالیله عبارت است از

$$t' = t \quad (۲-۶)$$

$$x' = x - Vt \quad (۳-۶)$$

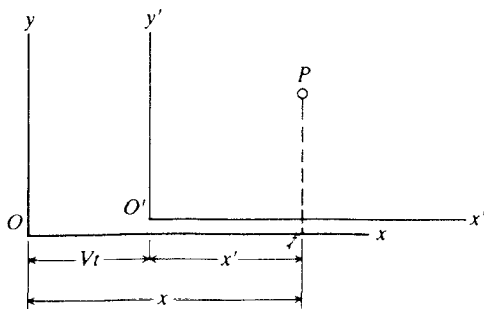
$$y' = y \quad (۴-۶)$$

$$z' = z \quad (۵-۶)$$

اولین معادله سرشت مطلق زمان را بیان می‌کند؛ در هر دو چارچوب مرجع، ساعتها با یک آهنگ کار می‌کنند و در نتیجه هر دو مجموعه ساعتها را می‌توان با یکدیگر به طور دائم همزمان کرد؛ بنابراین، مختصه‌های زمانی t و t' برای هر نقطه فضا-زمان یکی هستند. سه معادله دیگر مبتنی بر سرشت مطلق طول هستند. به عنوان مثال، بنابر معادله ۳-۶، فاصله افقی x' از مبدأ O' تا نقطه P برابر است با فاصله افقی x از O تا P منهای فاصله Vt از O تا O' (شکل ۲-۶). فاصله x' در چارچوب مرجع دوم و فاصله‌های x و Vt در چارچوب مرجع اول اندازه‌گیری شده‌اند؛ x' و $x - Vt$ را باهم برابر قرار داده‌ایم زیرا این دو، بنا به فرض، طول (مطلق) یکسانی را که در چارچوبهای مرجع مختلف بیان شده است نمایش می‌دهند.

با مشتق گرفتن از معادله‌های ۳-۶ تا ۵-۶ نسبت به t یا t' ، به دست می‌آوریم

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - V \quad (۶-۶)$$



شکل ۲-۶ مختصه‌های x' و x در دو چارچوب مرجع.

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} \quad (۷-۶)$$

$$\frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} \quad (۸-۶)$$

این معادله‌ها قوانین جمع گالیله برای سرعت هستند. از لحاظ شهودی، این معادله‌ها کاملاً بدیهی به نظر می‌رسند.

۲-۶ اصل نسبیت اینشتین

اگر قانون جمع گالیله برای سرعت را در مورد موج نور به کار ببریم فوراً به تناقض می‌رسیم. فرض کنید در یک چارچوب مرجع سرعت نور در خلأ c است و فرض کنید ناظری با سرعت V در جهت موج نور حرکت می‌کند. آنگاه و بنا به قانون جمع گالیله، سرعت موج نور نسبت به ناظر $c - V$ است. در مورد خاص $c = V$ ، سرعت موج نور نسبت به ناظر صفر است؛ تحت این شرایط، ناظر همراه با موج حرکت می‌کند و در نتیجه این موج الکترومغناطیسی را به صورت یک میدان الکتریکی و مغناطیسی استاتیک مشاهده می‌کند. اما این نوع میدان با معادلات ماکسول تناقض دارد — میدانهای الکتریکی و مغناطیسی استاتیک می‌توانند تنها در همسایگی بارهای ساکن و جریانهای پایا وجود داشته باشند؛ این میدانها وقتی فضا همه‌جا خالی است نمی‌توانند وجود داشته باشند.

این تناقض اینشتین را به اصل نسبیت رهنمون شد. همچنانکه در یادداشتهای روزانه‌اش نوشته است:

پس از ده سال تفکر چنین اصلی از تناقضی که در سن شانزده سالگی با آن مواجه شده بودم نتیجه شد: اگر یک باریکه نور را با سرعت c (سرعت نور در خلأ) تعقیب کنم، این باریکه را

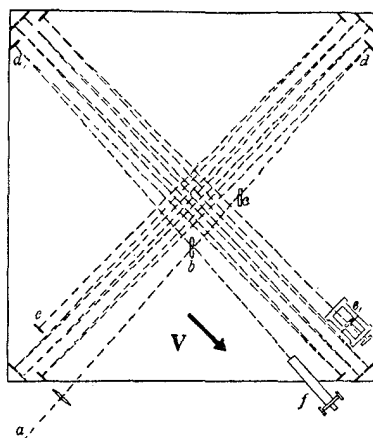
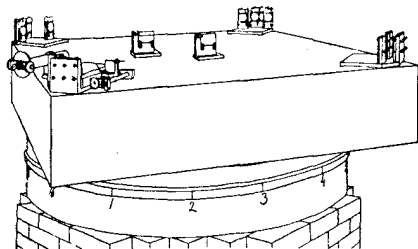
باید به صورت یک میدان الکترومغناطیسی ثابت در زمان و دوره‌ای در فضا مشاهده کنم. اما به نظر می‌رسد که چنین چیزی وجود ندارد، نه براساس تجربه نه بنا بر معادلهٔ ماکسول [۲...].

این تناقض اینشتین را بر سر دو راهی قرار داد: یا معادلات ماکسول در تمام چارچوبهای مرجع بجز یکی (چارچوب «اتر») غلط هستند یا اینکه فضا-زمان فیزیک نیوتونی غلط است. اینشتین راه دوم را انتخاب کرد، و اصل نسبیت خاص زیر را برای تمام قوانین فیزیک وضع کرد:

اصل: تمام قوانین فیزیک، و ثابتهای عددی آنها، در تمام چارچوبهای مرجع لخت دقیقاً یکسان هستند. به خصوص، سرعت نور در تمام چارچوبهای مرجع لخت دارای مقدار ثابت یکسانی است. کار بعدی اینشتین یافتن هندسه‌ای برای فضا-زمان بود به طوری که معادلات ماکسول در تمام چارچوبهای مرجع لخت برقرار باشند. چنانکه بعداً خواهیم دید، هندسهٔ مورد نیاز مستقیماً از این شرط نتیجه می‌شود که سرعت نور در تمام چارچوبهای مرجع لخت یکی است. اصلاح نسبیتی اساسی در مفاهیم فضا و زمان احتیاج به اصلاح متناظری در قوانین مکانیک دارد. قوانین مکانیک نیوتون در تمام چارچوبهای مرجع لخت برقرارند اگر، و تنها اگر، فضا-زمان نیوتونی باشد. برای فضا-زمان نسبیتی، اینشتین و پیروانش باید مجموعهٔ جدیدی از معادلات مکانیک به دست می‌آوردند که در تمام چارچوبهای مرجع لخت برقرار باشند.

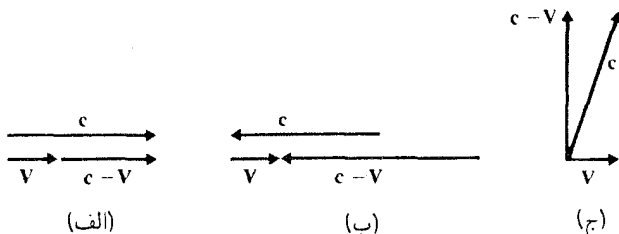
چون استقلال سرعت نور از حالت حرکت یکنواخت ناظر نقشی اساسی در نسبیت خاص دارد مروری بر شواهد تجربی موجود انجام می‌دهیم. آزمایش مایکلسون-مورلی مشهورترین آزمایشی است که برای آشکارسازی تأثیر حرکت زمین روی انتشار نور انجام شده است، اما اولین آزمایش از این دست نیست. در اوایل قرن نوزدهم فیزیکدانها به این نتیجه رسیدند که باید نور را به صورت نوسانی در «اتر فروزان» در نظر بگیرند؛ این اتر محیط رقیق شبیح‌گونه‌ای است که فرض می‌شود تمام فضا را پر کرده است و محملی است برای انتقال امواج نور همانگونه که هوا محملی است برای انتقال امواج صوت. یک رشته آزمایش نشان داد که حرکت زمین تأثیری بر انتشار نور در مواد شفاف چگال، مانند آب و شیشه، ندارد؛ این نتیجه به این صورت تعبیر شد که مادهٔ شفاف تا اندازه‌ای اتر را به همراه خود می‌کشد (کشش فرنل). آزمایش مایکلسون-مورلی اصلاً به عنوان آزمونی بود که معلوم کند مادهٔ جامد زمین مقداری از اتر نافذ در جو را به همراه خود می‌کشد یا نه. مایکلسون نتیجهٔ منفی آزمایش خود را تأییدی بر فرضیهٔ کشش اتری در نظر گرفت. اما، آزمایش دیگری توسط مایکلسون و گیبل [۳] نشان داد حرکت دورانی زمین — برخلاف حرکت انتقالی — روی انتشار نور تأثیر دارد و این با فرضیهٔ کشش اتری توافق ندارد. بنابراین، برای تحلیل داده‌های آزمایشی در وضعیت فضا-زمین نیوتونی فرض می‌کنیم اتر از حرکت زمین آشفته نمی‌شود.

شکل ۳-۶ طرحی از تداخل‌سنج مایکلسون و مورلی را نشان می‌دهد. این تداخل‌سنج دو بازوی مساوی دارد یکی موازی با راستای حرکت (مفروض) زمین و دیگری عمود بر آن. نوری که از چشمهٔ a می‌آید توسط آینهٔ نیم‌نقره‌اندود b به دو باریکه تقسیم می‌شود؛ این دو باریکه به علت



شکل ۳-۶ تداخل سنج مایکلسون و مورلی. آینه‌های معرف بازوهای تداخل سنج روی تخته سنگی شناور در تشتک جیوه تعبیه شده‌اند.

بازتابش از آینه‌هایی که در دو سر هر یک از بازوها قرار دارند چندین بار به عقب و جلو حرکت می‌کنند؛ در نهایت، باریکه‌های نور دوباره به آینه نیم‌نقره‌اندود b بازتابیده می‌شوند و در f به هم می‌رسند و تداخل می‌کنند و تشکیل نوارهای تداخلی می‌دهند. بنا به فیزیک نیوتونی، سرعت باریکه نور نسبت به آزمایشگاه بستگی به سرعت نور نسبت به اتر و سرعت زمین نسبت به اتر دارد (معادله ۳-۶). شکل ۳-۶ نشان می‌دهد چگونه بردارهای سرعت نور c و سرعت زمین V را باید از هم کم کرد تا سرعت برآیند نور نسبت به آزمایشگاه به دست آید. برای باریکه موازی، سرعت برآیند $c - V$ یا $c + V$ است (بسته به اینکه نور هم جهت با زمین حرکت کند یا در خلاف جهت آن). برای باریکه عمودی سرعت $\sqrt{c^2 - V^2}$ است. این تغییرات سرعت را می‌توان ناشی از «باد



شکل ۳-۶ سرعت علامت نوری نسبت به زمین $c - V$ است. بزرگی این سرعت بستگی به جهت دارد. (الف) $c - V$ موازی با V یا (ب) پاد موازی با V است. (ج) $c - V$ عمود بر V است؛ بزرگی $c - V$ برابر با $\sqrt{c^2 - V^2}$ است.

اتر» که در آزمایشگاه می‌وزد و نور را به همراه می‌برد دانست. اختلاف سرعتها اختلاف فازی بین باریکه‌های موازی و عمودی که به نقطهٔ f می‌رسند ایجاد می‌کند.

تمرین ۱- برای سادگی، فرض کنید باریکه‌های نور تنها پس از یک بازتابش در d_1 یا d به آینهٔ نیم‌نقره‌اندود b می‌رسند. نشان دهید سرعت متوسط برای حرکت رفت و برگشت باریکهٔ موازی از b به d_1 به b برابر با $c(1 - V^2/c^2)$ است. نشان دهید اگر $V/c \ll 1$ ، اختلاف فاز بین باریکه‌های موازی و عمودی که به نقطهٔ f می‌رسند تقریباً برابر است با

$$\Delta \phi = \left[\frac{L}{c(1 - V^2/c^2)} - \frac{L}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right] \frac{c}{\lambda} \approx \frac{LV^2}{\lambda c^2} \quad (9-6)$$

که در آن L فاصلهٔ bd_1 یا bd است و λ طول موج نور است.

اختلاف فاز را می‌توان به آسانی با چرخاندن تداخل‌سنج به اندازهٔ 90° آشکارسازی کرد؛ این چرخش جای بازوهای موازی و عمودی را عوض می‌کند و باعث می‌شود نوارهای تداخل در نقطهٔ f حرکت کنند. پیش‌بینی فیزیک نیوتونی در تعارض آشکار با پیش‌بینی فیزیک نسبیتی است. بنا به اصل نسبیت خاص، سرعت نور در امتداد هر دو بازوی تداخل‌سنج یکی است، و اختلاف فازی بین دو باریکهٔ نور وجود ندارد.

در جدول ۱-۶ نتایج تکرار آزمایش مایکلسون-مورلی، با شروع از اولین آزمایش از این نوع در ۱۸۸۱، خلاصه شده است. در هیچ‌یک از این آزمایشها، در محدودهٔ خطای آزمایش، هیچ انتقال نواری مشاهده نشده است. در آخرین ستون جدول (V_{eff}) حد بالایی سرعت «باد اتر» نسبت به زمین آمده است که با خطای آزمایش در انتقال نوار سازگاری دارد؛ این سرعت بنا بر فیزیک نیوتونی (معادلهٔ ۹-۶) محاسبه شده است. آخرین آزمایش تداخل‌سنجی دقیق توسط جوس و جنا در ۱۹۳۰ انجام شد [۴] که حد 1.5 km/s را برای «باد اتر» تعیین می‌کند.

در آزمایشهای جدیدتر مایکلسون-مورلی که در جدول ۱-۶ آورده شده‌اند فاز باریکه‌های نور که عمود برهم حرکت می‌کنند باهم مقایسه نشده‌اند بلکه بسامد امواج ایستاده در محفظه‌های تشدید متعامد باهم مقایسه شده‌اند. بسامد این نوع موج ایستاده با سرعت موج تناسب مستقیم دارد؛ اگر دو محفظه دارای طولهای یکسان باشند آنگاه هر اختلافی در بسامدها اختلافی در سرعتهای نور را ایجاد می‌کند. اگر اختلاف بسامد وجود داشته باشد می‌توان آن را با برهم‌نهی امواج تابش شده از دو محفظه به طور دقیق آشکارسازی کرد؛ اختلاف بسامد باعث زنش در موج مرکب می‌شود. در آزمایش جاسجا، جوان، موری و تاونز [۵] لیزرهایی با بسامد $3 \times 10^{14} \text{ Hz}$ به عنوان کاواک تشدید اپتیکی به کار برده شده‌اند. مانند آزمایش معمولی مایکلسون-مورلی، آزمایشگران دستگاه خود را به اندازهٔ 90° چرخاندند و بدین ترتیب جای لیزرهای موازی و عمودی را عوض کردند. آنها پی‌بردند که این چرخش در محدودهٔ خطای آزمایش $3000 \text{ Hz} \pm$ تأثیر مهمی روی بسامد زنش ندارد؛ و آنها توانستند حد 1 km/s را برای «باد اتر» تعیین کنند.

جدول ۶-۱ آزمایشهای مایکلسون-مورلی^۱

مشاهده‌گر	سال	$V_{\text{eff}}(\text{km/s})$
مایکلسون	۱۸۸۱	۲۱
مایکلسون و مورلی	۱۸۸۷	۴٫۷
مورلی و میلر	۱۹۰۲ تا ۱۹۰۴	۳٫۳
میلر ^۲	۱۹۲۱	۷٫۷
میلر	۱۹۲۳ تا ۱۹۲۴	۷٫۵
میلر (نور خورشید)	۱۹۲۴	۳٫۳
توماشک (نور ستاره)	۱۹۲۴	۷٫۷
میلر	۱۹۲۵ تا ۱۹۲۶	۸٫۳
کندی	۱۹۲۶	۵٫۰
ایلینگورث	۱۹۲۷	۲٫۲
پیکارد و اشتاهل	۱۹۲۷	۶٫۸
مایکلسون و دیگران	۱۹۲۹	۳٫۱
جوس [۴]	۱۹۳۰	۱٫۵
اسن (بسامد کاواک میکروموج) [۷]	۱۹۵۵	۲٫۵
جاسجا و دیگران (بسامد لیزر) [۵]	۱۹۶۴	۰٫۹۵
بريله و هال (بسامد اتالون فابری-پرو) [۸]	۱۹۷۹	۰٫۱۵

۱. براساس جدولی از شنکلند و دیگران [۶].

۲. نتایج آزمایشهای میلر در این جدول توسط شنکلند و دیگران با استفاده از داده‌های میلر محاسبه شده‌اند.

در جدیدترین آزمایش مایکلسون-مورلی توسط بريله و هال [۸] از یک اتالون فابری-پروکه با لیزر کار می‌کرد به‌عنوان کاواک تشدید اپتیکی استفاده شد. این اتالون و لیزر روی یک میز چرخان تعبیه شده بودند، و بسامد موج ایستاده در اتالون با مقایسه با یک لیزر دیگر که در آزمایشگاه ثابت شده بود و به عنوان بسامد استاندارد به‌کار می‌رفت مورد مشاهده قرار گرفت. چون هیچ‌گونه وابستگی بسامد به سمتگیری اتالون نسبت به ثوابت مشاهده نشد، آزمایشگران توانستند حدی تقریباً برابر با 15 m/s برای «باد اتر» تعیین کنند. این حد بسیار کمتر از سرعت زمین حول خورشید (30 km/s) یا سرعت خورشید حول مرکز کهکشان (تقریباً 200 km/s) است. روشن است که «باد اتر» مورد انتظار قابل مشاهده نیست.

با آزمایشهایی برمبنای انتقال دوپلر بین فرستنده و گیرنده نور که هر دو در حال حرکت هستند، حدهای مشابهی برای «باد اتر» تعیین شده‌اند. بنا به فیزیک نیوتونی، انتقال دوپلر بستگی به سرعت‌های

فرستنده و گیرنده نسبت به اتر دارد؛ پس اگر «باد اتر» وجود داشته باشد می‌توان برای آشکارسازی آن از انتقال دوپلر استفاده کرد. فرض کنید فرستنده و گیرنده به ترتیب دارای سرعت‌های \mathbf{V}_s و \mathbf{V}_r نسبت به اتر باشند؛ آنگاه می‌توانیم بسامد گرفته شده را برحسب بسامد فرستاده شده با فرمول زیر بیان کنیم

$$\nu_r = \nu_s \frac{1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}_r / c}{1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}_s / c} \quad (۱۰-۶)$$

که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ برداریکه عمود بر جبهه موج نور است.

تمرین ۲- معادله ۱۰-۶ را به دست آورید. [راهنمایی: نشان دهید بسامد در چارچوب مرجع اتر به صورت

$$\nu_s = \nu \left(1 - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}_s}{c} \right) \quad \text{و} \quad \nu_r = \frac{\nu (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}_r)}{c}$$

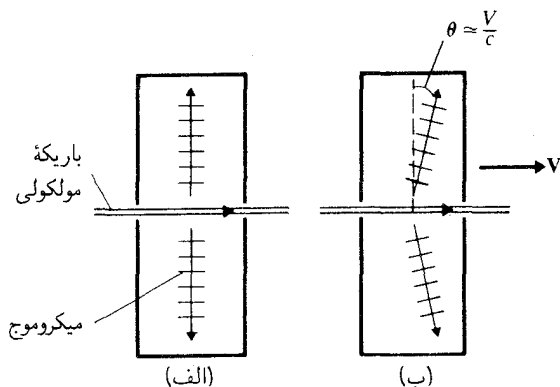
به بسامد در چارچوب‌های مرجع فرستنده و گیرنده مربوط می‌شود.]

برای سرعت‌های کم، از معادله ۱۰-۶ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \nu_r &\simeq \nu_s \left(1 - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}_r}{c} \right) \left(\frac{c + \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}_s}{c} + \dots \right) \\ &\simeq \nu_s \left[1 + \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{V}_s - \mathbf{V}_r)}{c} \right] + \dots \end{aligned} \quad (۱۱-۶)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که انتقال دوپلر عمدتاً به سرعت فرستنده نسبت به گیرنده ($\mathbf{V}_s - \mathbf{V}_r$) بستگی دارد؛ اما این انتقال به سرعت نسبت به اتر نیز کمی بستگی دارد زیرا جهت انتشار $\hat{\mathbf{n}}$ با حرکت دستگاه تغییر می‌کند (ایبراهی).

در آزمایش میزر سدارهولم، بلاند، هاونز و تاؤنر [۹] از یک باریکه مولکولی با سرعتی به طرف شرق به عنوان فرستنده استفاده می‌شود. نور به صورت میکروموج عمود بر این باریکه به طرف جنوب یا شمال حرکت می‌کند [جهت انتشار امواج توسط کاواکی که باریکه را احاطه کرده است تعیین می‌شود؛ شکل ۵-۶ الف]. اگر در چارچوب مرجع اتر به امواج فرستاده شده نگاه کنیم، در می‌یابیم که راستای انتشار امواج باید کمی به جلو تحت زاویه (تقریبی) V/c منحرف شود تا با سرعت رو به جلو V مربوط به کاواک تطبیق پیدا کند (شکل ۵-۶ ب). اگر «گیرنده» در آزمایشگاه ساکن باشد، سرعت $\mathbf{V}_s - \mathbf{V}_r$ همان سرعت مولکول‌های فرستنده نسبت به آزمایشگاه است. آنگاه زاویه بین این سرعت و عمود بر جبهه موج برابر با $V/c - \pi/2$ است، و بنا به معادله ۱۱-۶



شکل ۵-۶ گسیل میکروموج توسط باریکه مولکولی یک میزر. (الف) اگر میزر نسبت به اتر ساکن باشد راستای انتشار میکروموج بر باریکه عمود است. (ب) اگر میزر دارای سرعت V نسبت به اتر باشد، راستای انتشار به اندازه زاویه V/c به طرف جلو منحرف می‌شود.

داریم

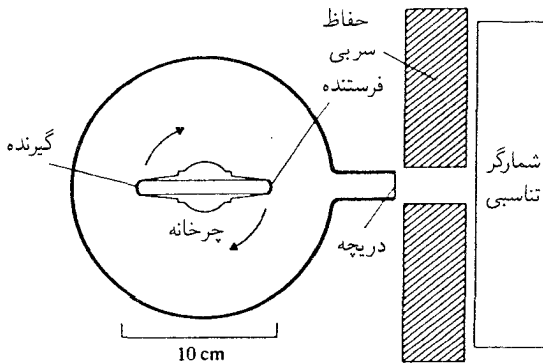
$$v_r \approx v_s \left[1 + (V_s - V_r) \frac{V}{c^2} \right] \quad (۱۲-۶)$$

برای آشکارسازی این انتقال دوپلر، آزمایشگران از یک میزر دیگر با باریکه مولکولی که سرعتش به طرف غرب بود استفاده کردند و بسامد میکروموجهای گسیل شده از این دو میزر را با هم مقایسه کردند. نبود هیچگونه انتقال دوپلر قابل مشاهده حدی برای V تعیین می‌کند. توجه کنید که انتقال دوپلر ۶-۱۲ بستگی به توان اول V/c دارد؛ در حالی که در آزمایش مایکلسون-مورلی انتقال نوار بستگی به توان دوم V/c دارد. این امر آزمایش انتقال دوپلر را به «باد اتر» حساستر می‌کند.

آزمایشهایی با استفاده از اثر موسباوئر ترتیب یافته‌اند که حدهای کمتری برای «باد اتر» تعیین می‌کنند (جدول ۲-۶). اسبابی که توسط چامپنی، ایساک و خان [۱۱] به‌کار رفت شامل یک چرخانه است که با سرعت زیاد حول محور قائم خود می‌چرخد (شکل ۶-۶). در دو سرفطر این چرخانه نمونه‌هایی از ^{57}Fe تعبیه شده‌اند. در یکی از این نمونه‌ها هسته‌های آهن در حالت برانگیخته‌اند و با گذارهای بدون پس‌زنی پرتوهای γ گسیل می‌کنند (عدم پس‌زنی هسته‌ها اساساً اثر موسباوئر است). این پرتوهای γ را می‌توان با جذب تشدیدی در نمونه دیگر آهن گیر انداخت. بنا به فیزیک نیوتونی، باید انتقال دوپلر بین فرستنده و گیرنده مشاهده شود. وقتی فرستنده و گیرنده (به‌طور لحظه‌ای) در خط شمال-جنوب هستند، یکی از آنها به طرف شرق و دیگری به طرف غرب حرکت می‌کند، و انتقال دوپلر از معادله ۶-۱۲ به‌دست می‌آید. علامت این انتقال دوپلر در هر نیم‌دور

جدول ۲-۶ آزمایشهای انتقال دوپلر

$V_{\text{eff}}(\text{m/s})$	سال	آزمایشگرها
۳۰	۱۹۵۸	سدار هولم و دیگران (میزر) [۹]
۱۰	۱۹۶۳	کرانشاو و هی (اثر موسباوئر) [۱۰]
$۱٫۶ \pm ۲٫۸$	۱۹۶۳	چامپنی و دیگران (اثر موسباوئر) [۱۱]
$۲٫۲ \pm ۸٫۴$	۱۹۶۳	ترنز و هیل (اثر موسباوئر) [۱۲]
$۰٫۵$	۱۹۷۰	ایساک (اثر موسباوئر) [۱۳]



شکل ۶-۶ اسباب چامپنی و دیگران.

چرخانه عوض می‌شود. عدم تطبیق بسامدهای گیرنده و فرستنده مانع جذب تشدید پرتوهای γ می‌شود. در این آزمایش عدم جذبی از این نوع مشاهده نشد، و با توجه به خطاهای آزمایش حد بالای $۱٫۶ \pm ۲٫۸ \text{ m/s}$ برای «باد اتر» تعیین شد. بعداً یک گونه اصلاح شده این آزمایش [۱۳] این حد را به ۵ cm/s کاهش داد. این کمترین حدی است که تا امروز به دست آمده است. به طور خلاصه: تمام آزمایشها بر این امر توافق دارند که انتشار نور تحت تأثیر حرکت آزمایشگاه قرار نمی‌گیرد. سرعت نور آشکارا در تمام چارچوبهای مرجع لخت یکی است، دقیقاً همانگونه که اصل نسبیت خاص وضع کرده است.

۳-۶ بازه فضا-زمانی

بدهی است که فضا-زمان فیزیک نسبیتی نیز چهاربعدی است. برای تعیین مختصات یک نقطه فضا-زمان، مانند فیزیک نیوتونی، چارچوب مرجعی از مترها و ساعتهای همزمان شده را مورد استفاده قرار می‌دهیم. همزمان کردن ساعتها را می‌توان به روشی که ایششتین پیشنهاد کرده است توسط علامت نوری از همه آسانتر انجام داد: در زمان صفر یک علامت نوری از ساعت A به طرف

ساعت B می‌فرستیم؛ فرض کنید وقتی علامت به ساعت B می‌رسد این ساعت رقم T_B را نشان می‌دهد. بلافاصله یک علامت بازگشتی به ساعت A فرستاده می‌شود؛ فرض کنید وقتی علامت به ساعت A می‌رسد این ساعت رقم T_A را نشان می‌دهد. اگر $T_A = 2T_B$ ، ساعتها از قبل همزمان شده‌اند؛ اگر چنین نباشد باید ساعت B را به مقدار $T_A - T_B$ جلو ببریم. توجه کنید که این روش همزمان کردن متکی به برابری سرعتهای دو علامت نوری است؛ یعنی بنا به اصل نسبیت سرعت باید مستقل از جهت باشد. به علاوه، در تمام چارچوبهای مرجع لخت از همین روش می‌توان استفاده کرد. (در فیزیک نیوتونی، این روش همزمان کردن تنها در چارچوب «اتر» اعتبار دارد؛ در چارچوبهای مرجع دیگر باید بستگی سرعت نور به جهت را به حساب آورد.)

چون بنا به فرض سرعت نور یک ثابت جهانی است، یعنی در تمام چارچوبهای مرجع یکی است، انتخاب یکاهای طول و زمان به گونه‌ای که سرعت نور برابر با یکای سرعت باشد بسیار مناسب است. یک راه برای انجام این کار این است که زمان را بر حسب طول اندازه‌گیری کنیم. یک سانتیمتر زمان مقدار زمانی است که نور برای پیمودن فاصله 1cm صرف می‌کند:

$$1\text{cm} \Leftrightarrow \frac{1}{3 \times 10^{10}} \text{s}$$

توجه کنید که این رابطه را به صورت یک هم‌ارزی نوشته‌ایم نه یک تساوی؛ یکاهای طول و زمان در CGS (سانتیمتر و ثانیه) از لحاظ ابعادی غیرقابل مقایسه‌اند و نمی‌توانند دقیقاً برابر باشند. چون، همانگونه که خواهیم دید، تبدیلات لورنتس فضا و زمان را باهم «آمیخته» می‌کند، کاملاً طبیعی است که فضا و زمان را با یک یکا، مثلاً سانتیمتر، اندازه بگیریم.

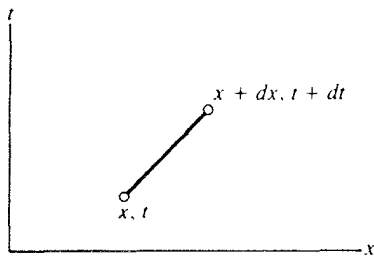
سرعت نور c برابر است با $3 \times 10^{10} \text{cm/s}$ یا $3 \times 10^{10} \text{cm}/(3 \times 10^{-3} \text{s})$ یا

$$c \Leftrightarrow 1$$

از این پس برای سادگی در نمادنگاری، رابطه بالا را به صورت $c = 1$ می‌نویسیم. با این انتخاب یکا، تمام سرعتها به عنوان مضاربی از سرعت نور در نظر گرفته می‌شوند؛ مثلاً، $V = 10^{-3}$ به معنی $V = 10^{-3}c$ یا $V = 3 \times 10^7 \text{cm/s}$ است.

اکنون فرض کنید در نقطه t, x, y و z از فضا-زمان یک جرقه نور گسیل می‌شود. این جرقه یک رویداد یا حادثه در یک نقطه معین از فضا در یک زمان معین است. فرض کنید این علامت نوری در نقطه $t + dt, x + dx, y + dy$ و $z + dz$ جذب شود. این هم یک رویداد است. شکل ۶-۷ مکانهای هر دو این رویداد را در نمودار tx نشان می‌دهد. در این شکل فرض

۱. در سال ۱۹۸۳، کنفرانس عمومی اوزان و مقادیر تعریف جدیدی برای متر به صورت فاصله‌ای که نور در خلأ در $299792458/1$ ثانیه طی می‌کند پذیرفت. پس سرعت نور اکنون استاندارد سرعت است با $299792458 \text{m/s} = c$ بنا به تعریف. معمولاً این عدد را به $3 \times 10^8 \text{m/s} = c$ گرد می‌کنیم.



شکل ۷-۶ جهانخط یک علامت نوری بین دو نقطه فضا-زمان.

شده است نور در جهت مثبت x حرکت می‌کند. خط واصل این دو نقطه فضا-زمان را جهانخط علامت نوری می‌نامند؛ این جهانخط صرفاً رسم مکان علامت نوری به صورت تابعی از زمان است. کمیت زیر را در نظر بگیرید

$$d\tau^2 \equiv dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (۱۳-۶)$$

که بازه فضا-زمانی نامیده می‌شود.^۱ چون با یکایی که انتخاب کردیم $c = ۱$ ، در امتداد جهانخط علامت نوری داریم

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} = dt \quad (۱۴-۶)$$

در نتیجه، بازه فضا-زمانی بین دو نقطه مذکور عبارت است از

$$d\tau^2 = 0 \quad (۱۵-۶)$$

یعنی بازه فضا-زمانی بین دو نقطه فضا-زمان که با علامت نوری به هم وصل شده‌اند برابر با صفر است. اگر به این دو رویداد از یک چارچوب مرجع لخت دیگر نگاه کنیم، مختصات آنها به ترتیب t' ، x' ، y' و z' و $t' + dt'$ ، $x' + dx'$ ، $y' + dy'$ و $z' + dz'$ خواهند بود. اما بازه فضا-زمانی

$$d\tau'^2 \equiv dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \quad (۱۶-۶)$$

که در این چارچوب مرجع اندازه‌گیری شده است باز هم صفر است:

$$d\tau'^2 = 0 \quad (۱۷-۶)$$

۱. مطابق این نامگذاری، $d\tau^2$ را بازه فضا-زمانی و $d\tau$ را جذر بازه فضا-زمانی می‌نامند. (توجه کنید که اگر $d\tau^2 < 0$ این جذر انگاری است). غالباً هم $d\tau$ و $d\tau^2$ را بازه فضا-زمانی می‌نامند.

این رابطهٔ بدیهی است زیرا سرعت نور دقیقاً مانند سابق است. بدین ترتیب، نشان داده‌ایم هرگاه بازهٔ فضا-زمانی در یک چارچوب مرجع لخت صفر باشد در هر چارچوب مرجع لخت دیگری نیز صفر است.

اکنون دو رویداد اختیاری را که با علامت نوری به هم وصل نمی‌شوند در نظر می‌گیریم. بازهٔ فضا-زمانی بین آنها عبارت است از

$$d\tau^2 \equiv dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \neq 0 \quad (18-6)$$

نشان می‌دهیم این بازهٔ فضا-زمانی وقتی در یک چارچوب مرجع لخت دیگر اندازه‌گیری شود دقیقاً دارای همین مقدار عددی است:

$$d\tau'^2 = d\tau^2 \quad (19-6)$$

یا اگر به طور کامل بنویسیم:

$$dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (20-6)$$

برای سادگی در نوشتن، از ابعاد y و z صرف‌نظر می‌کنیم و تنها «نسبیت یک‌بعدی» را بررسی می‌کنیم که در آن تمام جابه‌جاییها و سرعتها در امتداد محور x هستند. آنگاه مقادیر t' و x' توابعی از t و x خواهند بود؛ و دیرانسلیهای dt' و dx' ترکیبهایی خطی از دیرانسلیهای dt و dx هستند. اگر $dt'^2 - dx'^2 = dt^2 - dx^2$ را برحسب dt و dx بیان کنیم، داریم

$$dt'^2 - dx'^2 = A dt^2 + B dx^2 + C dx dt \quad (21-6)$$

که در آن ضرایب A ، B و C ممکن است بستگی به t و x داشته باشند اما نمی‌توانند به dt و dx بستگی داشته باشند. معادلهٔ ۲۱-۶ به‌طور ساده بیان می‌کند که چون طرف چپ برحسب دیرانسلیها از مرتبهٔ دوم است طرف راست نیز باید از مرتبهٔ دوم باشد. از قبل می‌دانیم که اگر $dx = \pm dt$ ، آنگاه $dx' = \pm dt'$. در نتیجه، در این مورد خاص، معادلهٔ ۲۱-۶ تبدیل می‌شود به

$$0 = A dx^2 + B dx^2 + C dx^2 \quad (22-6)$$

۱. برای مثال

$$dt' = \frac{\partial t'}{\partial t} dt + \frac{\partial t'}{\partial x} dx$$

چون علامت جلو C هر چه باشد معادله بالا باید برقرار باشد، لازم است که $C = 0$. پس معادله ۲۲-۶ ایجاب می‌کند که $A = -B$ ، و در نتیجه معادله ۲۱-۶ چنین می‌شود

$$dt'^2 - dx'^2 = A(dt^2 \pm dx^2) \quad (23-6)$$

باقی می‌ماند محاسبه ضریب A . پیش از همه، همگنی فضا و زمان ایجاب می‌کند که A مستقل از x و t باشد. در نتیجه، A تنها می‌تواند بستگی به سرعت نسبی بین دو چارچوب مرجع داشته باشد. به علاوه، A نمی‌تواند بستگی به جهت این سرعت داشته باشد زیرا تغییر سرعت از V به $-V$ (بنا به همسانگردی فضا) معادل است با تغییر جهت محور x ؛ اما تغییر x به $-x$ هیچ تغییری در dt'^2 ، dx'^2 و dt^2 ایجاد نمی‌کند و در نتیجه نمی‌تواند A را تغییر دهد (معادله ۲۳-۶). پس A باید تابعی از بزرگی سرعت نسبی بین دو چارچوب مرجع باشد، و بنابراین

$$d\tau'^2 = A(|V|)d\tau^2 \quad (24-6)$$

این معادله $d\tau'$ را بر حسب $d\tau$ بیان می‌کند. همچنین می‌توانیم $d\tau$ را بر حسب $d\tau'$ بیان کنیم. چون چارچوبهای مرجع لخت از لحاظ فیزیکی معادل هم‌اند، ضریب A که عمل تبدیل از $d\tau$ به $d\tau'$ را انجام می‌دهد باید همان تابعی از V باشد که قبلاً بود. تنها اختلاف در این است که اگر V سرعت چارچوب $x't'$ نسبت به چارچوب xt باشد، آنگاه سرعت xt نسبت به $x't'$ برابر با $-V$ است. پس

$$d\tau^2 = A(|-V|)d\tau'^2 = A(|V|)d\tau'^2 \quad (25-6)$$

مقایسه معادله‌های ۲۴-۶ و ۲۵-۶ نشان می‌دهد که $A(|V|) = 1$ ، و بنابراین

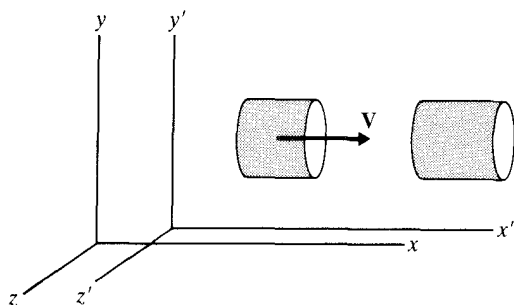
$$d\tau'^2 = d\tau^2 \quad (26-6)$$

در محاسبه معادله ۲۶-۶ مختصات y و z را وارد نکردیم. اما اگر این مختصات را هم در نظر بگیریم باز هم معادله ۲۶-۶ معتبر می‌ماند. به آسانی می‌توان نشان داد

$$dy'^2 + dz'^2 = dy^2 + dz^2 \quad (27-6)$$

که در آن مثل همیشه فرض کرده‌ایم سرعت نسبی بین دو چارچوب مرجع لخت در امتداد محور x است. معادله ۲۷-۶ بیان می‌کند که طولهای عمود بر این سرعت تحت تبدیل چارچوبهای مرجع

۱. اگر $A = A(x, t)$ ، آنگاه A یک میدان است و می‌تواند برای متمایز کردن یک نقطه از فضا-زمان از یک نقطه دیگر مورد استفاده قرار گیرد.



شکل ۸-۶ دو قطعه لوله، یکی ساکن در چارچوب $xyzt$ و دیگری ساکن در چارچوب $x'y'z't'$.

بدون تغییر می‌مانند. در این مورد استدلال ساده‌ای وجود دارد: دو قطعه لولهٔ یکسان در نظر بگیرید یکی ساکن در چارچوب $xyzt$ و موازی با محور x و دیگری ساکن در چارچوب $x'y'z't'$ و موازی با محور x' است (شکل ۸-۶). اگر حرکت لولهٔ دوم باعث انقباض قطر آن شود، آنگاه — بنا به اصل نسبیت — حرکت لولهٔ اول نسبت به دومی باید باعث انقباض قطر لولهٔ اول شود. این اثرات انقباض متقابلاً ناقض یکدیگرند زیرا در مورد اول لولهٔ دوم در لولهٔ اول جا می‌گیرد و در مورد دوم لولهٔ اول در لولهٔ دوم جا می‌گیرد. تنها راه منطقی این است که هیچ‌یک از لوله‌ها منقبض نشود؛ یعنی همچنانکه معادلهٔ ۶-۲۷ نشان می‌دهد طولهای عمودی بدون تغییر باشند. با در نظر گرفتن این معادله، می‌بینیم که دیرانسیلهای y و z تأثیری بر مساوی بودن دو طرف معادلهٔ ۶-۲۰ ندارند. بدین ترتیب، اعتبار کلی معادلهٔ ۶-۱۹ برای بازهٔ فضا-زمانی اثبات می‌شود.

آنچه نشان داده‌ایم این است که بازهٔ فضا-زمانی بین دو رویداد اختیاری نسبت به تعویض چارچوبهای مرجع ناورداست. تمایز اساسی بین هندسهٔ فضا-زمان نسبیتی و هندسهٔ فضا-زمان نیوتونی این است که در دومی هم بازهٔ طولی dl (در یک زمان معین) و هم بازهٔ زمانی dt ناوردا هستند، در حالی که در اولی تنها بازهٔ فضا-زمانی $d\tau^2$ ناورداست (جدول ۶-۳).

هندسهٔ فضا-زمان نیوتونی از دو هندسهٔ اقلیدسی مجزا برای فضا و برای زمان تشکیل شده است. هندسهٔ فضا-زمان نسبیتی از یک هندسهٔ شبه‌اقلیدسی تشکیل شده است (اصطلاح شبه‌اقلیدسی به وجود علامتهای منفی در معادلهٔ ۶-۱۳ مربوط می‌شود که به معنی این است که بازهٔ فضا-زمانی مثبت معین نیست).

جدول ۶-۳ مقایسهٔ فضا-زمانها

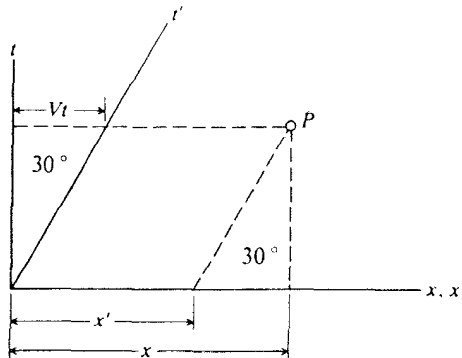
فضا-زمان نیوتونی	فضا-زمان نسبیتی
t, x, y, z	t, x, y, z
مختصات رویداد	
$d\tau^2 = dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ (در $dt = 0$)	$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$
ناورداها	

۴-۶ تبدیل لورنتس

چنانکه از بخش ۱-۶ می‌دانیم، در فضا-زمان نیوتونی تبدیل از یک مجموعه مختصات قائم لخت به مجموعه دیگری که با سرعت V در امتداد محور x مجموعه اول حرکت می‌کند، تبدیل گالیله است:

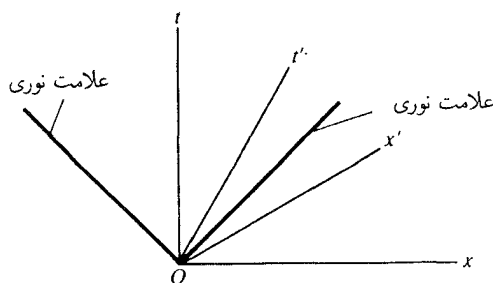
$$\begin{aligned} t' &= t & y' &= y \\ x' &= x - Vt & z' &= z \end{aligned}$$

که در آن طبق معمول فرض کرده‌ایم مبدا‌های دو مجموعه مختصات در $t = 0$ برهم منطبق‌اند. با این تبدیل فاصله‌ها (در یک زمان معین) و بازه‌های زمانی ناورد می‌مانند. از لحاظ هندسی، این تبدیل را می‌توان به‌عنوان تبدیل از محورهای قائم به محورهای مایل به محورهای مابلی که در شکل ۹-۶ نشان داده شده است توصیف کرد. محور x' بر محور x منطبق است، و محور t' در امتداد خط $x = Vt$ است. معنی این گفته این است که محور t' همچنان‌که باید، جهانخط مبدأ مختصات متحرک ($x' = 0$) است. برای به‌دست‌آوردن تبدیل مقتضی با فضا-زمان نسبیتی، از رسم جهانخط یک علامت نوری که در $t = 0$ و $x = 0$ گسیل شده است آغاز می‌کنیم. چون $c = 1$ ، جهانخط علامتی که در جهت مثبت x گسیل شده است در وسط محورهای t و x واقع می‌شود؛ و جهانخط علامتی که در جهت $-x$ گسیل شده است در وسط محورهای t و $-x$ واقع می‌شود (شکل ۹-۶). محورهای t' و x' را در این نمودار چگونه باید رسم کنیم؟ محور t' باید در امتداد خط $x = Vt$ که جهانخط مبدأ مختصات متحرک است قرار گیرد. محور x' باید یک خط راست باشد^۱، و جهانخط علامت نوری باز هم باید وسط محورهای t' و x' واقع شود. از اینجا مکان محور x' در مکان



شکل ۹-۶ نمایش ترسیمی تبدیل گالیله. مطابق این نمودار، $x' = x - Vt$.

۱. محور x' باید یک خط راست باشد به گونه‌ای که جهانخط‌های ذرات آزاد، که خط‌های راستی هستند که با معادلات خطی برحسب t و x نمایش داده می‌شوند، برحسب t' و x' نیز با معادلات خطی نمایش داده شوند.



شکل ۶-۱۰ جهانخط‌های علامتهای نوری که از مبدأ گسیل شده‌اند. محورهای t' و x' باید نسبت به این جهانخط‌ها به طور متقارن قرار گیرند.

مقارنی که در شکل ۶-۱۰ نشان داده شده است به طور یکتا تعیین می‌شود. آنگاه معادلات تبدیل بین محورهای قائم و مایل عبارت‌اند از

$$t' \propto t - Vx \quad (۲۸-۶)$$

$$x' \propto x - Vt \quad (۲۹-۶)$$

این فرمولها متقارن هستند. در معادله‌های ۶-۲۸ و ۶-۲۹ علامت مساوی به‌کار نبرده‌ایم زیرا یک نکته را در نظر نگرفته‌ایم. استدلال بالا ایجاب می‌کند که محورهای t' و x' نسبت به جهانخط علامت نوری به‌طور متقارن قرار گیرند، اما مقیاس این محورها را معلوم نمی‌کند. در نتیجه، باید بنویسیم

$$t' = \gamma(t - Vx) \quad (۳۰-۶)$$

$$x' = \gamma(x - Vt) \quad (۳۱-۶)$$

که در آنها ضریب γ را باید تعیین کنیم. اینکه γ باید چه باشد از ناوردایی بازهٔ فضا-زمانی (معادلهٔ ۶-۲۶) نتیجه می‌شود. اگر از معادله‌های ۶-۳۰ و ۶-۳۱ برای بیان $dt'^2 - dx'^2$ برحسب dx و dt استفاده کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$[\gamma(dt - Vdx)]^2 - [\gamma(dx - Vdt)]^2 = dt^2 - dx^2$$

$$\gamma^2(1 - V^2)dt^2 - \gamma^2(1 - V^2)dx^2 = dt^2 - dx^2 \quad (۳۲-۶)$$

این معادله ایجاب می‌کند که

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (۳۳-۶)$$

در نتیجه، تبدیلات مورد نظر عبارت‌اند از

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}}(t - Vx) \quad (۳۴-۶)$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}}(x - Vt) \quad (۳۵-۶)$$

وقتی با سه بعد فضا سروکار داریم باید y و z را نیز در نظر بگیریم. از معادله ۲۷-۶ می‌دانیم که

$$dy'^2 + dz'^2 = dy^2 + dz^2$$

بنابراین، بدون اینکه به کلیت بحث زیاد لطمه بخورد می‌توانیم فرض کنیم که

$$y' = y \quad (۳۶-۶)$$

$$z' = z \quad (۳۷-۶)$$

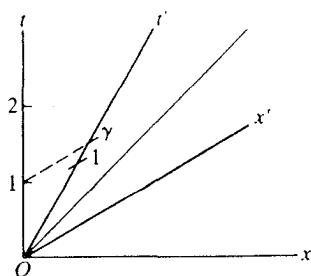
تنها جانشین ممکن برای معادله‌های ۳۶-۶ و ۳۷-۶ متضمن چرخش صفحه yz حول محور x است؛ اما این جانشین مورد توجه ما نیست.

تبدیلات ۳۴-۶ تا ۳۷-۶ را تبدیلات لورنتس می‌نامند.

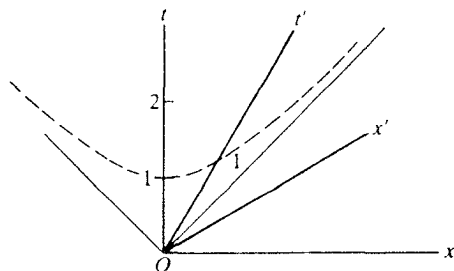
از لحاظ نموداری، وجود ضریب γ در معادله‌های ۳۰-۶ و ۳۱-۶ به معنی این است که خطی که از نقطه واحد $t = 1$ روی محور t موازی با محور x' رسم شود محور t' را در $t = \gamma$ قطع می‌کند؛ در نتیجه، نقطه واحد روی محور t' باید از این نقطه تقاطع به اندازه ضریب $1/\gamma$ به مبدأ نزدیکتر باشد (شکل ۱۱-۶ الف). از اینجا مقیاس نمودار تعیین می‌شود.

روش زیباتری برای به دست آوردن مقیاس نمودار استفاده از نوردایی بازه است. هذلولی زیر را در نظر بگیرید

$$t^2 - x^2 = 1 \quad (۳۸-۶)$$



(الف)



(ب)

شکل ۱۱-۶ مدرج‌سازی محور t' . (الف) مختصه t' نقطه $t = 1, x = 0$ عبارت است از $t' = \gamma$. (ب) هذلولی $t^2 - x^2 = 1$ (یا $t'^2 - x'^2 = 1$) از نقطه $t = 1, x = 0$ و نقطه $t' = 1, x' = 0$ می‌گذرد.

این هذلولی از نقطه واحد روی محور t می‌گذرد. اما چون بازه فضا-زمانی (متاهی) $t^2 - x^2$ ناورداست، معادله هذلولی را به صورت زیر نیز می‌توانیم بنویسیم

$$t'^2 - x'^2 = 1 \quad (۳۹-۶)$$

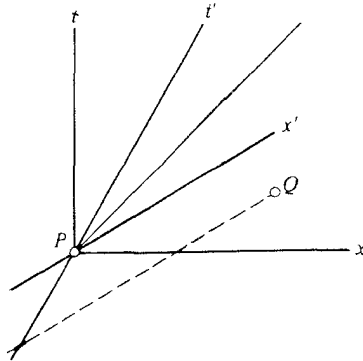
که نشان می‌دهد هذلولی از نقطه واحد محور t' می‌گذرد. در نتیجه، این هذلولی نقاط واحد روی محورهای زمان را به هم وصل می‌کند (شکل ۱۱-۶ ب). در حالت حدی سرعت‌های کم، تبدیلات لورنتس چنین می‌شوند

$$x' = x - Vt \quad (۴۰-۶)$$

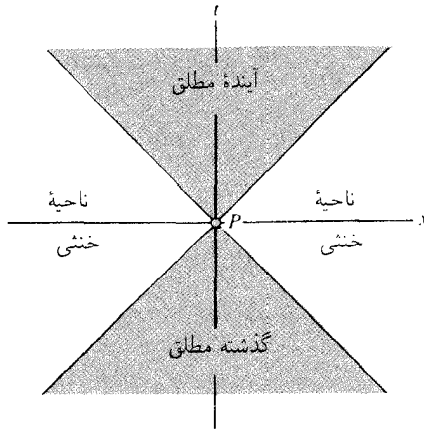
$$t' = t - Vx \quad (۴۱-۶)$$

به‌علاوه، از جمله Vx در معادله ۴۱-۶ غالباً می‌توان صرف‌نظر کرد. برای مثال، اگر $V = 10^{-7}$ (از مرتبه 10^0 km/h) و $x = 10^7 \text{ m}$ ، آنگاه $x \sim 1 \text{ m}$ و $Vx \sim 10^{-1} \text{ s}$ اما زمان تنها $3 \times 10^{-9} \text{ s}$ است و از این زمان کم معمولاً می‌توان صرف‌نظر کرد. در این مورد، معادله‌های ۴۰-۶ و ۴۱-۶ به معادلات گالیله تبدیل می‌شوند. اما باید به خاطر داشته باشیم که اگر x بزرگ باشد، آنگاه Vx می‌تواند مهم باشد حتی اگر V کم باشد — در حد سرعت‌های کم همیشه اثرات نسبیتی از بین نمی‌روند.

یکی از چشمگیرترین پیامدهای تبدیلات لورنتس این است که ترتیب زمانی دو رویداد الزاماً مطلق نیست. برای مثال، رویدادهای P (در $x = 0, t = 0$) و Q را در نظر بگیرید (شکل ۱۲-۶). در دستگاه مختصات t, x روشن است که Q بعد از P است. اما در دستگاه t', x' ، Q دارای مختصه t' منفی است و قبل از P است. تعویض ساده چارجوب مرجع ترتیب زمانی دو رویداد را وارون کرده است.

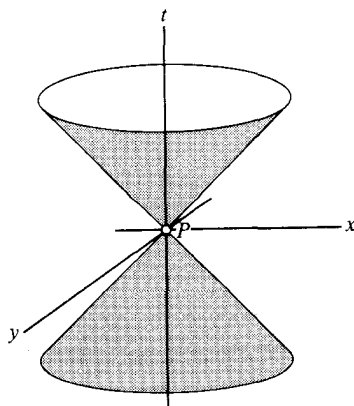


شکل ۱۲-۶ مختصه t ی Q مثبت است، اما مختصه t' آن منفی است.



شکل ۱۳-۶ آینده مطلق، گذشته مطلق و ناحیه خنثی نسبت به نقطه P .

روشن است که این وارونی تنها موقعی صورت می‌پذیرد که Q پایین‌تر از خط 45° (جهانخط نور) که از P رسم می‌شود باشد؛ این خط مکان حدی محور x' را نشان می‌دهد. نسبت به نقطه P ، تمام فضا-زمان به سه ناحیه تقسیم می‌شود: آینده مطلق، گذشته مطلق و ناحیه خنثی (شکل ۱۳-۶). هر چیزی که در آینده یا گذشته مطلق روی دهد، در هر چارچوب مرجعی به ترتیب بعد از P یا قبل از P دیده می‌شود. هر چیزی که در ناحیه خنثی روی دهد می‌تواند، بسته به انتخاب چارچوب مرجع، قبل از P ، همزمان با P یا بعد از P باشد. مرز بین این ناحیه‌ها عبارت است از جهانخط‌های تمام علامتهای نوری ممکن که از P گسیل یا به P وارد می‌شوند. این مرز را مخروط نور می‌نامند. اگر نمودار فضا-زمان را با دو محور فضایی و یک محور زمانی رسم کنیم (شکل ۱۴-۶)، آنگاه این مرز واقعاً به شکل مخروط است؛ برای سه بعد فضا، این مرز قابل تجسم



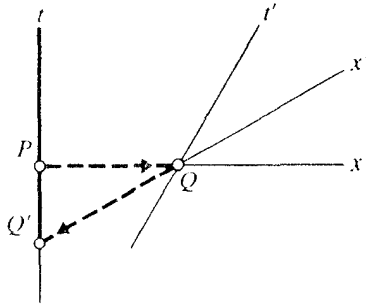
شکل ۶-۱۴ مخروط نور.

نیست.

بین آنچه در P روی می‌دهد و آنچه در جایی از منطقه خنثی روی می‌دهد هیچ رابطه علی نمی‌تواند وجود داشته باشد. علت (بنا به تعریف) باید قبل از معلول خود باشد، اما اینکه نقطه Q در منطقه خنثی قبل یا بعد از P است کاملاً به انتخاب چارچوب مرجع بستگی دارد. اگر Q در آینده مطلق P باشد، آنگاه P می‌تواند علت Q باشد. اگر Q در گذشته مطلق P باشد، آنگاه Q می‌تواند علت P باشد.

چون وجود علامت بین دو رویداد به آنها امکان می‌دهد تا باهم رابطه علی داشته باشند، نتیجه می‌گیریم که هیچ علامتی نمی‌تواند از P به ناحیه خنثی فرستاده شود؛ بنابراین، هیچ علامتی نمی‌توان فرستاد که سرعت آن از سرعت نور بیشتر باشد. توجه کنید که اگر چنین علامتی را می‌شد از P به Q در شکل ۶-۱۲ فرستاد، آنگاه در دستگاه مختصات $t'x'$ این علامت پیش از آنکه از P فرستاده شود در Q دریافت می‌شد.

علاوه بر این، اگر علامتی وجود داشته باشد که با سرعتی بیشتر از سرعت نور انتشار یابد، آنگاه می‌توانیم به گذشته خود علامت بفرستیم. برای سادگی، فرض کنید علامتی در اختیار داشته باشیم که سرعت آن نامتناهی است (علامتی با سرعت بیشتر از سرعت نور در یکی از چارچوبهای مرجع دارای سرعت نامتناهی است). شکل ۶-۱۵ جهانخط ما (خط قائم) و همچنین جهانخط این علامت که ما از P فرستاده‌ایم را نشان می‌دهد. این علامت در امتداد محور x حرکت می‌کند و در نقطه Q توسط اسبابی در یک سفینه فضایی که با سرعت زیاد از P دور می‌شود دریافت می‌شود. اگر در چارچوب مرجع این سفینه علامت مشابهی با سرعت نامتناهی در امتداد محور x' باز فرستاده شود، آنگاه این علامت جهانخطی را که P بر آن واقع است در Q' قطع می‌کند. نقطه Q' در گذشته P است — علامتی از خودمان را پیش از آنکه بفرستیم دریافت می‌کنیم. این نتیجه به تناقضات منطقی منجر می‌شود، زیرا ما می‌توانیم طوری برنامه‌ریزی کنیم که علامتی را



شکل ۱۵-۶ علامتهای تاخیر از P به Q و از Q به Q'.

بفرستیم اگر و تنها اگر آن را دریافت نکرده باشیم.

درباره تاخیرها، یعنی ذراتی که سریعتر از نور حرکت می‌کنند، تحقیقاتی نظری انجام شده است. بنا به استدلالهای بالا، وجود این ذرات به تناقضات منطقی منجر می‌شود. بعضی پژوهشهای تجربی برای یافتن تاخیرها انجام شده‌اند اما موفقیتی نداشته‌اند.

نبود علائمی با سرعتی بیشتر از سرعت نور نبود اجسام صلب را ایجاد می‌کند. از ضربه به میله‌ای از ماده کاملاً صلب می‌توان برای فرستادن علامت از یک سر آن به سر دیگر با سرعت نامتناهی استفاده کرد. چون این علامت در واقع یک موج صوت (موج شوکی تراکمی) است که در میله حرکت می‌کند، نتیجه می‌گیریم که بیشترین صلبیت مجاز برای ماده صلبیتی است که به امواج صوت سرعتی برابر با سرعت نور می‌دهد.

فرمول نسبیتی برای تبدیل سرعت از مشتق‌گرفتن از معادله‌های ۳۴-۶ و ۳۵-۶ به دست می‌آید:

$$dx' = \gamma(dx - V dt) \quad dt' = \gamma(dt - V dx) \quad (۴۲-۶)$$

در نتیجه

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - V dt}{dt - V dx} = \frac{(dx/dt) - V}{1 - V(dx/dt)} \quad (۴۳-۶)$$

اگر بنویسیم $u'_x \equiv dx'/dt'$ و $u_x \equiv dx/dt$ آنگاه

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - u_x V} \quad (۴۴-۶)$$

می‌توانیم این معادله را برای u_x حل کنیم و تبدیل وارون را به دست آوریم:

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + u'_x V} \quad (۴۵-۶)$$

این معادله‌ها فرمولهای تبدیل برای مؤلفه x سرعت هستند؛ فرمولهای متناظری برای مؤلفه‌های y و z به آسانی محاسبه می‌شوند.

تمرین ۳- نشان دهید

$$u'_y = u_y \frac{\sqrt{1 - V^2}}{1 - u_x V} \quad (۴۶-۶)$$

$$u'_z = u_z \frac{\sqrt{1 - V^2}}{1 - u_x V} \quad (۴۷-۶)$$

بنا به معادله ۴۵-۶، علامتی نوری با سرعت $u'_x = 1$ که از یک چشمه نور که با سرعت V به آزمایشگاه نزدیک می‌شود گسیل شده است در آزمایشگاه دارای سرعتی است برابر با

$$u_x = \frac{1 + V}{1 + V} = 1$$

این نتیجه تأیید می‌کند که فرمولهای نسبیتی ترکیب سرعتها شرط اساسی ناوردا بودن سرعت نور را برآورده می‌کنند. آزمونهای مستقیم این فرمول ترکیب سرعت با پرتوهای γ که توسط مزونهای بسیار سریع π^0 گسیل می‌شوند انجام شده‌اند. این مزونها خودبه‌خود به دو پرتو γ وامی‌باشند:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma \quad (۴۸-۶)$$

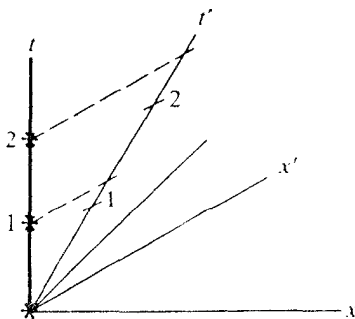
که هر یک از آنها در چارچوب مرجع π^0 دارای سرعت c است. در آزمایشی توسط آلوآگر و همکاران [۱۴] سرعت مزونهای π^0 بیشتر از $0.99975c$ بود. با وجود این، از اندازه‌گیری مستقیم سرعت فوتونهای پرتو γ که به سمت (تقریباً) جلو گسیل شده بودند نتیجه‌ای برابر با $c(0.99992 \pm 0.00013)$ در چارچوب مرجع آزمایشگاه به دست آمد — برابر با سرعت نور در محدوده خطاهای آزمایش. برای مقایسه، قانون جمع گالیله برای سرعتها پیش‌بینی می‌کند که فوتونهایی که توسط این مزونهای π^0 به سمت جلو گسیل شوند دارای سرعتی حدود $2c$ نسبت به آزمایشگاه هستند.

تأیید دیگری برای فرمول نسبیتی ترکیب سرعت از تحلیل داده‌های رصدی در مورد تپهای پرتو X که از چشمه‌های مزدوج تپنده پرتو X ، مانند هرکول $X-1$ ، گسیل می‌شوند به دست می‌آید

[۱۵]. این چشمه از یک ستاره نوترونی که حول یک ستاره معمولی دوران می‌کند تشکیل شده است. همچنان که ستاره نوترونی در مدار خود حرکت می‌کند مؤلفه سرعت آن در امتداد خط دید ما به اندازه تقریباً 300 km/s تغییر می‌کند. اگر این تغییر سرعت اثری روی سرعت پرتوهای X گسیل شده از ستاره نوترونی داشت، تپهای مربوط به قسمتهای مختلف مدار باید با سرعتهای مختلف به طرف زمین حرکت کنند و بعضی از تپهایی که در زمانهای متفاوت گسیل شده‌اند باید در یک زمان به زمین برسند. بدین ترتیب، ناظر زمینی چندین تپ روی هم افتاده یا «شبح» را باید ببیند. از نبود چنین تپهایی در داده‌های رصدی می‌توان برای تغییر سرعت پرتوهای X ناشی از حرکت مداری حد بالایی استنباط کرد: سرعت پرتوهای X که در زمانهای متفاوت گسیل می‌شوند بیشتر از $6 \times 10^{-7} \text{ km/s}$ تغییر نمی‌کند، در حالی که بنا به فیزیک نیوتونی تغییری برابر 300 km/s را انتظار داریم.

۵-۶ اتساع زمان

فرض کنید چارچوب مرجع $x'y'z't'$ با سرعت زیاد در آزمایشگاه حرکت می‌کند. می‌خواهیم آهنگ کار ساعت‌های متعلق به این چارچوب مرجع را با آهنگ کار ساعت‌های آزمایشگاه مقایسه کنیم. شکل ۱۶-۶ محوره‌های چارچوب $x'y'z't'$ و چارچوب آزمایشگاه یا چارچوب xyz را نشان می‌دهد. ساعتی که در آزمایشگاه ساکن است دارای جهانخطی است که بر محور t منطبق است. این ساعت در بازه‌های یکنواخت یک ثانیه‌ای تیک تیک می‌کند. هر تیک یک رویداد است. می‌خواهیم بازه زمانی بین این رویدادها را آن‌طور که در چارچوب $x'y'z't'$ اندازه‌گیری می‌شود به دست آوریم. اگر خطهایی موازی با محور t' رسم کنیم این خطها محور t' را بالاتر از علامت مدرج‌سازی قطع می‌کنند. در نتیجه، از دید ساعت‌های $x'y'z't'$ ساعت آزمایشگاه به‌کندی کار می‌کند. از مقیاس نمودار محورها می‌دانیم که علامت مدرج‌سازی روی محور t' با نقاط تلاقی خطهای موازی با x' به اندازه ضریب γ اختلاف دارند. نتیجه می‌گیریم که وقتی ساعت آزمایشگاه زمان طی شده Δt



شکل ۱۶-۶ تیک تیک ساعت ساکن در آزمایشگاه.

را نشان می‌دهد، ساعت‌های $x'y'z't'$ این زمان را به مقدار زیر نشان می‌دهند

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-V^2}} \quad (\text{ساعت ساکن در چارچوب } xyz) \quad (49-6)$$

راه سریعتری برای رسیدن به این نتیجه این است که از ناوردایی بازه فضا-زمانی بین دو تیک متوالی ساعت آزمایشگاه استفاده کنیم:

$$\Delta t^2 - \Delta x^2 = \Delta t'^2 - \Delta x'^2 \quad (50-6)$$

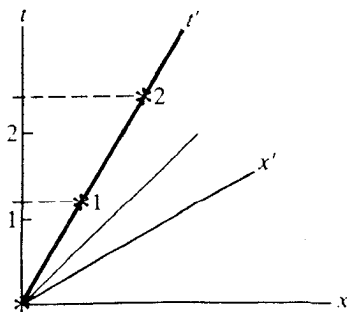
در چارچوب آزمایشگاه، این ساعت ساکن است و در نتیجه $\Delta x = 0$ ؛ در چارچوب $x'y'z'$ ، این ساعت به سمت عقب حرکت می‌کند، و $\Delta x' = -V\Delta t'$ در نتیجه

$$\Delta t^2 = \Delta t'^2 - V^2 \Delta t'^2$$

که هم‌ارز معادله ۴۹-۶ است.

همچنین می‌توانیم تعیین کنیم که اگر ساعت چارچوب $x'y'z't'$ زمان طی شده $\Delta t'$ را نشان دهد این زمان از دید ساعت‌های آزمایشگاه چه اندازه است. در این مورد، نمودار به صورتی است که در شکل ۱۷-۶ نشان داده شده است، و ساعت $x'y'z't'$ کند است. می‌توان به آسانی واریسی کرد که ضریب بین بازه‌های زمانی باز هم γ است:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-V^2}} \quad (\text{ساعت ساکن در } x'y'z't') \quad (51-6)$$



شکل ۱۷-۶ تیک‌تیک ساعت ساکن در چارچوب $x'y'z't'$

این نتیجه نشان می‌دهد که اثر اتساع زمان متقارن است: در یک چارچوب مرجع لخت معین، ساعت متحرک همیشه متحمل اتساع زمان می‌شود. می‌توانیم معادله‌های ۴۹-۶ و ۵۱-۶ را در یک معادله خلاصه کنیم:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (52-6)$$

که در آن $d\tau$ بازه زمانی است که ساعت در چارچوب مرجع خودش اندازه‌گیری می‌کند (زمانی که ساعت نشان می‌دهد) و dt زمان اندازه‌گیری شده در چارچوب مرجع لختی است که ساعت در آن دارای سرعت V است. کمیت $d\tau$ را ویژه‌زمان می‌نامند. چون $\sqrt{dt^2 - dx^2} = dt\sqrt{1 - V^2} = d\tau$ روشن است که ویژه‌زمان همان مجذور بازه فضا-زمانی است که در امتداد جهانخط ساعت متحرک محاسبه می‌شود.

نوشتن معادله ۵۲-۶ به صورت دیفرانسیلی دارای این مزیت است که می‌توانیم آن را برای ساعتی که حرکتش شتابدار است نیز به‌کار ببریم؛ در اینجا باید از سرعت لحظه‌ای استفاده کنیم. معادله ۵۲-۶ در این مورد معتبر می‌ماند زیرا می‌توانیم حرکت شتابدار (جهانخط خمیده) را با دنباله‌ای از قطعه‌های مربوط به سرعت یکتواخت تقریب بگیریم. زمان کلی که ساعت متحرک ثبت می‌کند از انتگرال‌گیری از معادله ۵۲-۶ به‌دست می‌آید:

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - V^2(t)} dt \quad (53-6)$$

موقع استفاده از فرمول اتساع زمان برای حرکت شتابدار، باید به‌خاطر داشته باشیم که در این مورد تقارن وجود ندارد — نمی‌توانیم ساعت لخت را با ساعت شتابدار اندازه‌گیری کنیم و اتساع زمان به‌دست آوریم. درباره این تقارن در «پارادوکس» دوقلوها در انتهای این بخش بیشتر بحث خواهیم کرد. کندشدن آهنگ گذشت زمان برای تمام فرایندهای فیزیکی صادق است. این اثر به اتساع قابل ملاحظه طول عمر ذرات بنیادی که با سرعت بسیار زیاد حرکت می‌کنند منجر می‌شود. برای مثال، ذره ناپایداری مانند مزون μ وقتی در آزمایشگاه ساکن است تنها $10^{-6} \times 2.2$ s عمر می‌کند. اما اگر این مزون با سرعت $0.995c$ در آزمایشگاه حرکت کند، طول عمر آن به اندازه ضریب

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.995)^2}} \approx 10 \quad (54-6)$$

اتساع می‌یابد. افزایش طول عمری با این مرتبه بزرگی برای مزونهای μ که از برخورد پرتوهای کیهانی اولیه در بالای جو به وجود آمده‌اند مشاهده شده است. این مزونها فاصله ۱۰ یا ۲۰ کیلومتر از بالای جو تا زمین را طی می‌کنند؛ اما اگر آنها از اتساع زمان برخوردار نبودند می‌توانستند قبل از واپاشی

حداکثر $0.6 \text{ km} \approx 0.6 \times 10^{-6} \text{ s} \times c \approx 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$ حرکت کنند، و هرگز به زمین نمی‌رسند. اندازه‌گیری کمی طول عمر این مزونهای μ به صورت تابعی از سرعت ابتدا توسط رسی و هال در ۱۹۴۱ انجام شد [۱۶]. اجرای بعدی این آزمایش فرمول نسبیتی را با عدم قطعیت تجربی ۴٪ تأیید کرد [۱۷]. دقیقترین اندازه‌گیریهای افزایش طول عمر با مزونهای μ و π که توسط شتابدهنده به وجود می‌آیند انجام شده‌اند [۱۸ و ۱۹]؛ عدم قطعیت آزمایش در این اندازه‌گیریها از مرتبه ۱٪ است. اثر اتساع زمان منجر به انتقال عرضی دوپلر می‌شود؛ یعنی، انتقال بسامد نور گسیل شده از یک چشمه متحرک وقتی خط دید عمود بر راستای حرکت چشمه است. بنا به فیزیک نیوتونی، در این مورد نباید انتقال دوپلر وجود داشته باشد (معادله ۶-۱۰). اما بنا به فیزیک نسبیتی، اتساع زمان بسامد را به اندازه ضریب $\sqrt{1 - V^2}$ کاهش می‌دهد؛ بدین ترتیب، اگر بسامد نور در چارچوب مرجع چشمه ν_0 باشد، در چارچوب مرجع آزمایشگاه برابر است با

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - V^2} \quad (55-6)$$

اگر $V \ll 1$ ، می‌توانیم از تقریب $1 - V^2/2 \approx \sqrt{1 - V^2}$ استفاده کنیم، و معادله ۵۵-۶ به انتقال بسامد نسبی زیر منجر می‌شود

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \approx -\frac{V^2}{2} \quad (56-6)$$

توجه کنید که این انتقال عرضی دوپلر برحسب V از مرتبه دوم است، در حالی که انتقال معمولی دوپلر برحسب V از مرتبه اول است.

این انتقال بسامد مرتبه دوم در نور گسیل شده از باریکه‌های انتهایی هیدروژن بسیار سریع با $V = 3 \times 10^{-2}$ اندازه‌گیری شده است. به ازای این سرعت داریم

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \approx -4 \times 10^{-6}$$

چون این اثر کوچک است آشکارسازی مستقیم انتقال مرتبه دوم دوپلر در نوری که عمود بر باریکه دریافت می‌شود میسر نیست — کمترین انحراف از وضعیت عمودی یک انتقال مرتبه اول دوپلر اضافی بسیار بزرگتر ایجاد می‌کند که انتقال مرتبه دوم موردنظر را کاملاً می‌پوشاند. این مشکل را می‌توان با روشی نبوغ آمیز که ابتدا توسط ایوز و استیل‌ول پیشنهاد شد رفع کرد [۲۰]؛ آنها متوسط انتقالهای دوپلر را برای نور گسیل شده به سمت جلو و عقب باریکه اتمی اندازه‌گیری کردند. به آسانی می‌توان نشان داد که این انتقال متوسط دوپلر با انتقال عرضی دوپلر برابر است. اجرایی از این آزمایش [۲۱] اتساع زمان نسبیتی را در محدوده تقریبی ۵٪ تأیید کرده است.

آزمونهای دقیقتر اتساع زمان نسبیتی با طیف‌نمایی لیزری انجام شده‌اند که در آنها نمونه‌ای از گاز در معرض باریکه یک لیزر قابل تنظیم قرار می‌گیرد و بسامد این لیزر به گونه‌ای تنظیم می‌شود که جذب تشدید نور لیزر توسط آنها انجام شود. این وضعیت تشدید نشان می‌دهد که بسامدها دقیقاً تطبیق یافته‌اند و تعیین فوق‌العاده دقیق بسامد گذار اتمی را امکانپذیر می‌سازد. اسپنדר و هال [۲۲] از طیف‌نمایی لیزری استفاده کردند تا بسامد تشدید اتمهای نئون در یک سلول تخلیه را با بسامد تشدید این اتمها در یک باریکه اتمی سریع که باریکه لیزری را به‌طور عمودی قطع می‌کند مقایسه کنند. آنها توانستند برای اتمهای با سرعت حدود $10^{-3}c$ اتساع زمان را در محدوده تقریبی ۵.۰٪ تحقیق کنند. کی‌ولا و همکاران [۲۳] از تکنیک جذب دو فوتون استفاده کردند که در آن اتمهای باریکه اتمی سریع در طی یک گذار دو فوتون متوالی به‌طور تشدید جذب می‌کنند. یکی از این فوتونها از یک باریکه لیزری که در امتداد باریکه اتمی به سمت جلو جهت گرفته است تأمین می‌شود، و فوتون دیگر از یک باریکه لیزری که به سمت عقب جهت گرفته است تأمین می‌شود؛ بدین ترتیب، انتقال متوسط دوپلر این دو فوتون همان انتقال عرضی دوپلر است (مانند آزمایش ایوز-استیل‌ول). آزمایش کی‌ولا و همکاران اتساع زمان نسبیتی را در محدوده $10^{-3} \times 4\%$ تأیید کرد که این دقیقترین نتیجه‌ای است که تاکنون به‌دست آمده است.

چندین آزمون اتساع زمان نسبیتی با استفاده از اثر موسباوئر انجام شده‌اند. اگر چه آزمایشهای لیزر از آزمایشهای موسباوئر دقیقتر شده‌اند اما آزمایشهای موسباوئر باز هم جالب توجه‌اند زیرا به‌عنوان مدرک تجربی نشان می‌دهند که شتاب تأثیر مستقیم بر اتساع زمان ندارد. در یکی از این آزمایشها توسط کوندیگ و همکاران [۲۴] نمونه‌هایی از ^{57}Fe به‌عنوان فرستنده و گیرنده پرتوهای γ به ترتیب در مرکز و در لبه یک چرخانه بسیار سریع تعبیه شدند. به‌ازای 35000 دور در دقیقه، سرعت گیرنده نسبت به فرستنده برابر با 10^4 cm/s بود. اتساع زمان باعث انتقال بسامد بین بسامدهای تشدید ارتعاش گیرنده و فرستنده می‌شود. این انتقال بسامد همان انتقال عرضی دوپلر است (معادله‌های ۵۵-۶ و ۵۶-۶). چون $v = (3.4 \times 10^4 \text{ cm/s}) / (3 \times 10^{11} \text{ cm/s}) = 1.1 \times 10^{-6}$ ، انتقال بسامد نسبی پیش‌بینی شده برابر است با

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \simeq -6 \times 10^{-13}$$

اگر چه این انتقال بسامد کاملاً کوچک است، کاهشی در جذب تشدید پرتوهای γ ایجاد می‌کند که قابل آشکارسازی است. در این آزمایش اتساع زمان در محدوده ۱.۱٪ واریسی شده است. آزمون دیگری برای اتساع زمان از انتقال گرمایی موسباوئر به‌دست می‌آید. فرض کنید نمونه‌هایی از ^{57}Fe به‌عنوان فرستنده و گیرنده پرتوهای γ در آزمایشگاه ساکن‌اند. با وجود این، اتمها و هسته‌های منفرد دارای حرکت گرمایی هستند. اثر این حرکت گرمایی را با استفاده از معادله ۵۳-۶ حساب می‌کنیم. این معادله ایجاب می‌کند که محاسبات از دید یک چارچوب مرجع لخت مثلاً چارچوب

آزمایشگاه انجام شوند. پس، به ازای بازه زمانی معین Δt ، ویژه زمان طی شده برای اتمی با سرعت $V(t)$ برابر است با

$$\Delta\tau = \int_0^{\Delta t} \sqrt{1 - V^2(t)} dt \simeq \int_0^{\Delta t} \left[1 - \frac{V^2(t)}{2} \right] dt \quad (57-6)$$

رابطه سرعت گرمایی متوسط با دما عبارت است از

$$\overline{V^2(t)} = \frac{3kT}{m} \quad (58-6)$$

که در آن m جرم اتم است. در نتیجه،

$$\Delta\tau = \left(1 - \frac{3}{2} \frac{kT}{m} \right) \Delta t \quad (59-6)$$

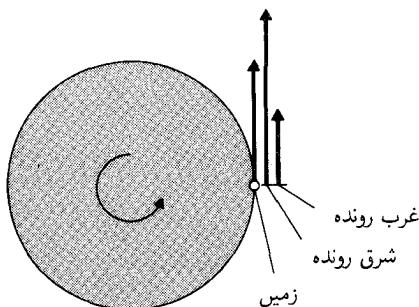
پس می‌توان $(1 - 3kT/2m)$ را ضریب اتساع زمان برای اتمی که در حرکت گرمایی است در نظر گرفت. این اتساع زمان بسامد ارتعاش هسته‌ها را که در آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شود کاهش می‌دهد. اگر دمای نمونه‌های فرستنده و گیرنده به ترتیب T_s و T_a باشد، اختلاف بسامد هسته‌ها عبارت است از

$$\nu_s - \nu_a = \left(1 - \frac{3}{2} \frac{kT_s}{m} \right) \nu_0 - \left(1 - \frac{3}{2} \frac{kT_a}{m} \right) \nu_0 = \frac{3}{2} \frac{k}{m} (T_a - T_s) \nu_0 \quad (60-6)$$

و اختلاف بسامد نسبی برابر است با

$$\frac{\nu_s - \nu_a}{\nu_0} = \frac{3}{2} \frac{k}{m} (T_a - T_s) \quad (61-6)$$

برای نمونه‌های ^{57}Fe این اختلاف بسامد تقریباً به 10^{-15} بر کلومین می‌رسد. اثر موسباوئر آشکارسازی چنین انتقال بسامد کوچکی را امکانپذیر می‌سازد. اندازه‌گیری انتقال گرمایی موسباوئر توسط پوند و ربکا [۲۵] اتساع زمان را در محدوده تقریبی 10% تأیید کرده است. این اندازه‌گیری همچنین تأیید کرده است که اتساع زمان (مستقیماً) به شتاب بستگی ندارد. هسته‌های آهن در حرکت گرمایی خود شتابهایی تا $10^{16} g$ می‌گیرند، اما این شتابها اثر قابل مشاهده‌ای بر آهنگ ارتعاش آنها ندارند.



شکل ۶-۱۸ سرعت ساعت‌های واقع در هواپیما و ساعت واقع بر زمین (بدون مقیاس یکسان).

اثر اتساع زمان با ساعت‌های اتمی نیز آزمون شده است. هافل و کیتینگ [۲۶] ساعت‌های اتمی را با هواپیما به دور دنیا حمل کردند و سپس آنها را با ساعتی که روی زمین گذاشته بودند مقایسه کردند. از دید یک چارچوب مرجع لخت (که با زمین نمی‌چرخد) ساعت‌هایی که به سمت شرق حمل می‌شوند سرعتی بیشتر از ساعت زمینی دارند و ساعت‌هایی که به سمت غرب حمل می‌شوند سرعتی کمتر از ساعت زمینی دارند (شکل ۶-۱۸). در نتیجه، در مقایسه با ساعت زمینی ساعت‌هایی که به سمت شرق حرکت می‌کنند متحمل اتساع زمان و ساعت‌هایی که به سمت غرب حرکت می‌کنند متحمل انقباض زمان می‌شوند. این آزمایش، موافق با این پیش‌بینی، نشان داد که نسبت به ساعت زمینی ساعت‌های غرب رونده عقب می‌افتند و ساعت‌های شرق رونده جلو می‌افتند. بزرگی عقب‌افتادگی یا جلوافتادگی از مرتبه 10^{-7} s برای یک گردش کامل به دور زمین بود. این اندازه‌گیری‌های تجربی را نمی‌توان مستقیماً با پیش‌بینی نسبیت خاص مقایسه کرد زیرا ساعت‌های واقع در هواپیما یک اثر گرانشی اضافی را نیز متحمل می‌شوند: ساعتی که بالاتر از سطح زمین واقع است، جایی که پتانسیل گرانشی زیادتر است، از ساعت واقع بر سطح زمین تندتر کار می‌کند.^۱ واقع امر این است که آزمایشی که با ساعت‌های مسافر انجام شد در اصل به قصد آزمون این اثر گرانشی که نسبت عام پیش‌بینی می‌کند بود. اما از این آزمایش برای آزمون اثر اتساع زمان نسبیت خاص نیز استفاده می‌شود زیرا ساعت‌های شرق‌رونده و غرب‌رونده (اگر در یک ارتفاع واقع باشند) اثر گرانشی یکسانی را متحمل می‌شوند؛ در نتیجه، اختلاف بین این ساعت‌ها را باید به اختلاف سرعت آنها نسبت داد.

اتساع زمان پیش‌بینی شده از داده‌های پرواز هواپیما محاسبه شد. برای اینکه برداشتی از مقادیر مربوط داشته باشیم، فرض می‌کنیم هواپیما در امتداد استوا و به سمت شرق پرواز می‌کند. ویژه‌زمانی که ساعت هواپیما ثبت می‌کند برابر است با

$$\Delta\tau_1 = \int_0^t \sqrt{1 - V_1^2} dt \quad (۶۲-۶)$$

۱. ارتفاع پرواز هواپیمای معمولی حدود 10000 متر است.

که در آن V_1 سرعتی است که از یک چارچوب لخت اندازه‌گیری می‌شود) و ویژه‌زمان برای ساعتی که روی زمین در استوا واقع است برابر است با

$$\Delta\tau_2 = \int_0^t \sqrt{1 - V_2^2} dt \quad (۶۳-۶)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \Delta\tau_2 - \Delta\tau_1 &\simeq \int_0^t \left(\frac{-V_2^2}{2} + \frac{V_1^2}{2} \right) dt \simeq \int_0^t \frac{1}{2} (V_1 - V_2)(V_1 + V_2) dt \\ &\simeq \frac{1}{2} t (V_1 - V_2)(V_1 + V_2) \end{aligned} \quad (۶۴-۶)$$

که در آن فرض شده است V_1 دارای بزرگی تقریباً ثابتی است. چون $V_1 - V_2$ سرعت زمینی هواپیماست، $(V_1 - V_2)t$ فاصله‌ای است که هواپیما نسبت به زمین طی می‌کند؛ پس برای گردش کامل به دور زمین داریم

$$\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1 = \frac{(2\pi r)(V_1 + V_2)}{2} \quad (۶۵-۶)$$

که در آن شعاع زمین است.^۱ این معادله یک عقب‌افتادگی در حدود $10^{-7} \times 2$ برای ساعت هواپیما پیش‌بینی می‌کند. در این آزمایشها، عقب‌افتادگی (یا جلو افتادگی) زمانی در محدوده تقریبی ۱۰٪ اندازه‌گیری شد که با عقب‌افتادگی زمانی پیش‌بینی شده به خوبی توافق دارد. مدارک تجربی اتساع زمان در جدول ۶-۴ خلاصه شده است.

در پایان، «پارادوکس» مشهور دوقلوها را مورد بحث قرار می‌دهیم. فرض کنید الف و ب دوقلو و ۳۰ ساله هستند. الف زمین را (که چارچوب لخت در نظر گرفته می‌شود) با موشکی با سرعت $V = 1/2$ ترک می‌کند؛ سپس دور می‌زند (تقریباً به طور لحظه‌ای) و زمانی که به زمین باز می‌گردد ب ۴۰ ساله است. الف چند سال دارد؟ ویژه زمان طی شده (برحسب سال) در امتداد جهانخط الف برابر است با

$$\Delta\tau = \int_{30}^{40} \sqrt{1 - V^2} dt = \int_{30}^{40} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} dt \simeq 8.7 \text{ سال} \quad (۶۶-۶)$$

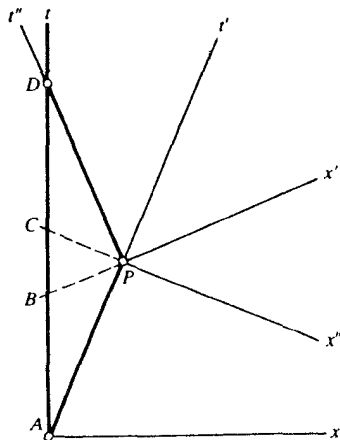
بنابراین، الف تنها ۳۸٫۷ سال دارد. اما، ازدید چارچوب مرجع الف، ب با سرعت $V = 1/2$ حرکت می‌کند و به نظر می‌رسد که این ب است که متحمل اتساع زمان می‌شود. این را «پارادوکس» دوقلوها می‌گویند.

۱. توجه کنید که برای ساعتی که با سرعت کم ($V_1 - V_2 \ll V_2$) حمل می‌شود، طرف راست معادله ۶۵-۶ تقریباً برابر با $2\pi r V_2$ و مستقل از V_1 است.

جدول ۴-۶ آزمایشهای اتساع زمان

آزمایشگران	سال	عدم قطعیت آزمایش
ایوز و استیلول [۲۰]	۱۹۳۸	٪۳
زسی و هال [۱۶]	۱۹۴۱	~ ٪۵۰
پوند و ربکا [۲۵]	۱۹۶۰	٪۱۰
هافل و کیتینگ [۲۶]	۱۹۶۲	٪۳
ماندلبرگ و ویتن [۲۱]	۱۹۶۲	٪۵
فریش و اسمیت [۱۷]	۱۹۶۳	٪۴
کونریگ [۲۴]	۱۹۶۳	٪۱
آیرس و همکاران [۱۹]	۱۹۷۱	٪۰٫۴
اسنیدر و هال [۲۲]	۱۹۷۵	٪۰٫۵
بیلی و همکاران [۱۸]	۱۹۷۷	٪۰٫۱
کی‌ولا و همکاران [۲۳]	۱۹۸۵	$10^{-3} \times ٪۴$

حل این «پارادوکس» متکی بر این واقعیت است که چارچوب مرجع الف لخت نیست — برای دورزدن و بازگشت به زمین الف باید شتاب بگیرد. اگر چه این شتاب تأثیری بر عمر الف که توسط ب اندازه‌گیری می‌شود ندارد، اما بر عمر ب که توسط الف اندازه‌گیری می‌شود اثر می‌گذارد. شکل ۱۹-۶ جهانخط‌های الف و ب را نشان می‌دهد. دو چارچوب مرجع $t'x'$ و $t''x''$ به ترتیب



شکل ۱۹-۶ جهانخط‌های الف (APD) و ب ($ABCD$)

چارچوبهای سکون الف در قسمت رفت و قسمت برگشت سفر او هستند. چارچوب مرجع $t'x'$ دارای سرعت V در امتداد محور x چارچوب tx و چارچوب مرجع $t''x''$ در امتداد همین محور دارای سرعت $-V$ است. مبداهای این چارچوبهای مرجع طوری انتخاب شده‌اند که نقطه بازگشت P مربوط به $t' = 0$ و $t'' = 0$ می‌شود.

تا جایی که به الف مربوط می‌شود، این مسافت از A و در زمان $t'_A < 0$ آغاز می‌شود. الف در زمان $t' = 0$ به نقطه بازگشت P می‌رسد. در این بین، b در امتداد جهانخط خود حرکت می‌کند و در $t' = 0$ به نقطه B می‌رسد. بین A و B ، ساعت b افزایش ویژه زمان $t_B - t_A$ را نشان می‌دهد. ازدید الف این بازه زمانی اتساع یافته است:

$$t_B - t_A = \sqrt{1 - V^2} |t'_A| \quad (۶۷-۶)$$

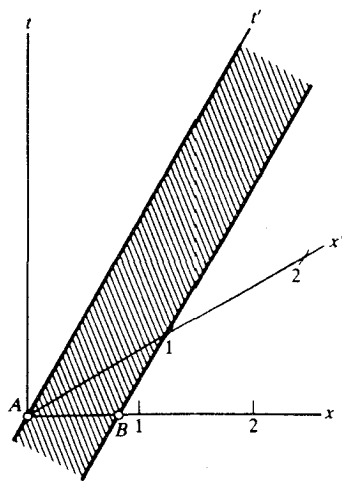
الف پس از عبور از نقطه بازگشت P در چارچوب $t''x''$ ساکن است، و در زمان t''_D به زمین باز می‌گردد. در بازه زمانی از $t'' = 0$ تا t''_D ، الف مشاهده می‌کند که b از C به D می‌رسد. ساعت b افزایش زمانی برابر با $t_D - t_C$ نشان می‌دهد، و الف نظر می‌دهد که این بازه اتساع یافته است:

$$t_D - t_C = \sqrt{1 - V^2} t''_D \quad (۶۸-۶)$$

اما زمان کلی که ساعت b ثبت می‌کند نه تنها شامل بازه‌های AB و CD است بلکه بازه BC را نیز دربر می‌گیرد. این بازه BC نه به مقادیر منفی t' مربوط می‌شود و نه به مقادیر مثبت t'' . بازه زمانی متناهی $t_C - t_B$ که ساعت b نشان می‌دهد متناظر با یک لحظه است که در آن الف باید در $t' = t'' = 0$ از یک چارچوب مرجع لخت به دیگری منتقل شود. ازدید الف در لحظه بین $t' = 0^-$ و $t'' = 0^+$ ، عقربه ساعت b به اندازه $t_C - t_B$ جلو می‌پرد. روشن است که این ناپیوستگی غیر فیزیکی است و مسئولیت آن را باید به عهده جهانخط غیر فیزیکی الف گذاشت — فرض کردیم که تغییر سرعت در نقطه P لحظه‌ای است. اگر فرض معقولتری می‌کردیم — تغییر تدریجی سرعت الف — می‌دیدیم که ساعت b جهش نمی‌کند بلکه در مدتی که الف شتاب می‌گیرد صرفاً تندتر کار می‌کند. این تندتر کار کردن ساعت b بیشتر از آن است که با اتساع زمان در قسمتهای دیگر جهانخط جبران شود (معادله‌های ۶۷-۶ و ۶۸-۶) و، چارچوب مرجعی که برای محاسبه سن به‌کار می‌رود هرچه باشد، b را مستتر می‌کند.

۶-۶ انقباض طول

فرض کنید میله‌ای به طول یک متر در چارچوب مرجع $t'y'z'/t'$ که با سرعت زیاد در آزمایشگاه حرکت می‌کند ساکن است. شکل ۶-۲۰ جهانخط‌های ابتدا و انتهای این میله را نشان می‌دهد.



شکل ۲۰-۶ جهانخط‌های ابتدا و انتهای میله ساکن در چارچوب $x'y'z't'$.

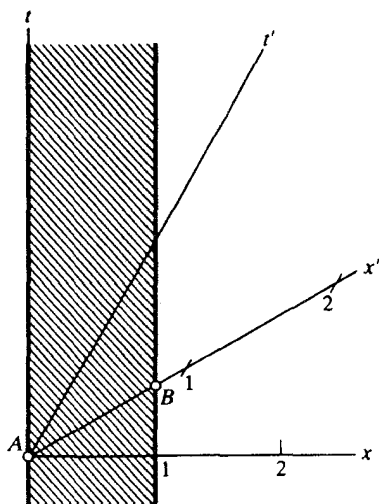
این میله ناحیه‌ای از فضا-زمان را که با خطوط مورب نشان داده شده است اشغال می‌کند. طول این میله در چارچوب آزمایشگاه چه اندازه است؟ در یک لحظه معین ($t = 0$) ابتدای میله در A و انتهای آن در B است. چون نقطه B از علامت واحد مدرج‌سازی به مبدأ نزدیکتر است، طول اندازه‌گیری شده میله در چارچوب آزمایشگاه از ۱ متر کمتر است. بنا به نحوه مدرج‌سازی محورها، ضریب انقباض طول $1/5$ است:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} = \sqrt{1 - V^2} \Delta x' \quad (x'y'z't' \text{ در چارچوب میله ساکن}) \quad (۶۹-۶)$$

وضعیت برای میله‌ای که در چارچوب آزمایشگاه ساکن است در شکل ۲۱-۶ نشان داده شده است. طول اندازه‌گیری شده در چارچوب $x'y'z't'$ عبارت از AB ، و این طول نیز از ۱ متر کمتر است:

$$\Delta x' = \sqrt{1 - V^2} \Delta x \quad (xyzt \text{ در چارچوب میله ساکن}) \quad (۷۰-۶)$$

پس نتیجه کلی این است که اجسام متحرک همیشه در راستای حرکتشان کوتاه می‌شوند. توجه کنید که اندازه‌ها در راستاهای عرضی تغییر نمی‌کنند. یک پیامد این انقباض این است که اگر جسمی در چارچوب مرجع خود دارای حجم $\Delta x \Delta y \Delta z$ باشد، حجم آن در چارچوب مرجع



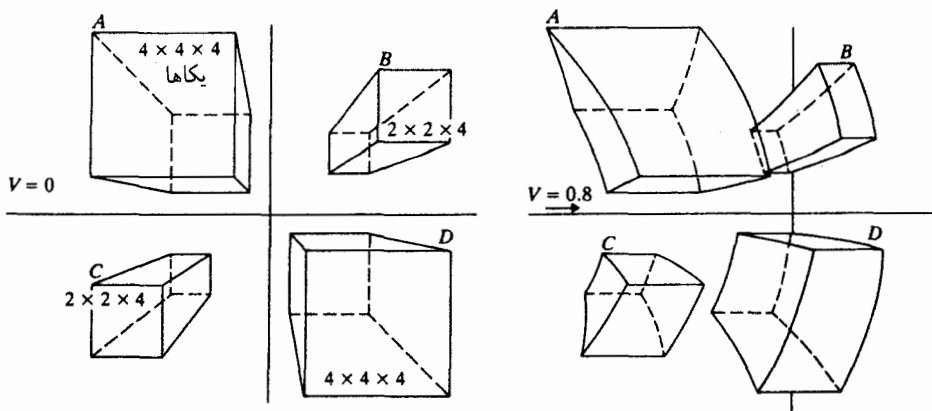
شکل ۶-۲۱ جهانخط‌های ابتدا و انتهای میله ساکن در آزمایشگاه.

لختی که جسم در آن با سرعت V حرکت می‌کند برابر است با

$$\Delta x' \Delta y' \Delta z' = \sqrt{1 - V^2} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (۷۱-۶)$$

اگرچه انقباض طول واقعیت دارد، مشاهده آن مشکل است، حتی اگر جسم بزرگی در اختیار داشته باشیم که با سرعت نسبی از برابر ما عبور کند. اگر بخواهیم از این جسم عکس بگیریم، اثر انقباض به علت اثرات تأخیر زمانی ضایع می‌شود. عکس یک جسم متحرک نشان نمی‌دهد که این جسم در یک زمان معین در کجاست، بلکه نوری را که در یک زمان معین به جعبه عکاسی می‌رسد نشان می‌دهد. بدین معنی که نور از قسمتهایی از جسم که از جعبه دورترند باید از نور مربوط به قسمتهای نزدیکتر زودتر گسیل شود. در نتیجه، کاملاً جدا از هرگونه انقباض طولی، عکس یک جسم سریع همیشه دارای اعوجاج است.

شکل ۶-۲۲ نشان می‌دهد که عکس مجموعه‌ای از چهار متوازی‌السطوح چگونه باید باشد [۲۷]؛ هم انقباض طول و هم اعوجاج ناشی از تأخیرات زمانی مربوط به انتشار نور به حساب آورده شده‌اند. انقباض دو متوازی‌السطوح جلو آشکار است اما دو متوازی‌السطوح دیگر متسع به نظر می‌رسند.



شکل ۶-۲۲ عکس فرضی مجموعه‌ای از چهار متوازی‌السطوح که با سرعت زیاد از مقابل عبور می‌کنند.

مراجع

1. H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, and H. Weyl, *The Principle of Relativity* (Dover, New York), p. 75.
2. A. Einstein, in *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, ed. P. Schilpp (Tudor, New York, 1951), p. 53.
3. A. A. Michelson and H. G. Gale, *Astrophys. J.* **61**, 1401 (1925).
4. G. Joos, *Ann. Phys. (Leipzig)* **7**, 385 (1930); *Naturwissenschaften* **38**, 784 (1931).
5. T. S. Jaseja, A. Javan, J. Murray, and C. H. Townes, *Phys. Rev. A.* **133**, 1221 (1964).
6. R. S. Shankland, S. W. McCuskey, F. C. Leone, and G. Kuerti, *Rev. Mod. Phys.* **27**, 167 (1955).
7. L. Essen, *Nature* **175**, 793 (1955).
8. A. Brilliet and J. L. Hall, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 549 (1979).
9. J. P. Cedarholm, G. F. Bland, B. L. Havens, and C. H. Townes, *Phys. Rev. Lett.* **1**, 342 (1958).
10. T. E. Cranshaw and H. J. Hay, quoted by Champeney et al., Ref. 11.
11. D. C. Champeney, G. R. Isaak, and A. M. Khan, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 469 (1964); *Nature* **198**, 1186 (1963).
12. K. C. Turner and H. A. Hill, *Bull. Am. Phys. Soc.* **8**, 28 (1963).
13. G. R. Isaak, *Phys. Bull.* **21**, 255 (1970).
14. T. Alväger, F. J. M. Farley, J. Kjellman, and I. Wallin, *Phys. Lett.* **12**, 260 (1964).

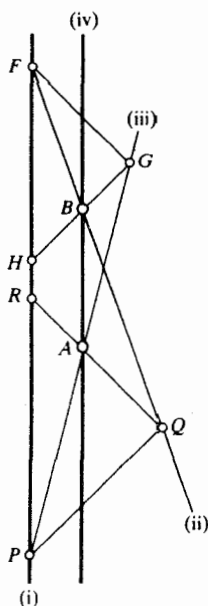
15. K. Brecher, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1051 (1977).
16. B. Rossi and D. B. Hall, *Phys. Rev.* **59**, 223 (1941).
17. D. H. Frisch and J. H. Smith, *Am. J. Phys.* **31**, 342 (1963).
18. J. Bailey, K. Borer, K. Combley, H. Drumm, F. Krienen, F. Lange, E. Picasso, W. von Ruden, F. J. Farley, J. H. Field, and P. M. Hattersley, *Nature* **268**, 301 (1977).
19. D. S. Ayres, A. M. Cormack, A. J. Greenberg, R. W. Kenney, D. O. Cladwell, V. B. Elings, W. P. Hesse, and R. J. Morrison, *Phys. Rev. D.* **3**, 1051 (1971).
20. H. E. Ives and G. R. Stilwell, *J. Opt. Soc. Am.* **28**, 215 (1938).
21. H. I. Mandelberg and L. Witten, *J. Opt. Soc. Am.* **52**, 529 (1962).
22. J. J. Snyder and J. L. Hall, in *Laser Spectroscopy*, ed. S. Haroche et al. (Springer-Verlag, New York, 1975).
23. M. Kaivola, O. Poulsen, E. Riis, and S. A. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 255 (1985).
24. W. Kündig, *Phys. Rev.* **129**, 2371 (1963).
25. R. V. Pound and G. A. Rebka, *Phys. Rev. Lett.* **4**, 274 (1960).
26. J. C. Häfele and R. E. Keating, *Science* **177**, 168 (1962).
27. G. D. Scott and M. R. Viner, *Am. J. Phys.* **33**, 534 (1965).

مسائل

۱-۶ معادله ۹-۶ اختلاف فاز دو باریکه نور خروجی را در حالتی نشان می‌دهد که یکی از بازوهای تداخل سنج موازی با راستای حرکت زمین در اتر و دیگری عمود بر آن است. اگر یکی از بازوها با راستای حرکت زاویه θ و دیگری زاویه $90^\circ + \theta$ بسازد معادله مربوط به اختلاف فاز را به دست آورید.

۲-۶ اثر موسباوئر مبتنی بر گسیل بدون پس‌زنی پرتو γ از هسته‌ای است که در شبکه بلور قرار دارد و می‌تواند تکانه پس‌زنی را بدون کاهش انرژی فوتون جذب کند. در مقابل، گسیل پرتو γ از یک هسته آزاد با کاهش انرژی فوتون همراه است و این امر جذب تشدیدی این فوتون توسط یک هسته دیگر را غیر ممکن می‌کند. (الف) انرژی فوتون گسیل شده از هسته برانگیخته ^{57}Fe (که از واپاشی پرتوزای ^{60}Co ایجاد شده است) برابر با 14.4keV است، و تکانه آن $14.4\text{keV}/c$ است. انرژی پس‌زنی هسته ^{57}Fe را به دست آورید. جرم این هسته 56.94u است. (ب) کاهش نسبی انرژی فوتون را در مقایسه با انرژی فوتونی که بدون پس‌زنی گسیل می‌شود محاسبه کنید. (ج) پهنای نسبی $\Delta E/E$ مربوط به قله جذب تشدید برای ^{57}Fe برابر با 10^{-13} است. آیا فوتون گسیل شده از یک هسته آزاد می‌تواند توسط یک هسته دیگر جذب شود؟

۳-۶ ساعت هندسودینامیکی مارتسکه و ویلر یک ساعت نوری است (با مسئله ۶-۱۶ مقایسه کنید) متشکل از دو آینه که بین آنها یک تپ نوری به جلو و عقب حرکت می‌کند. اما به جای اینکه آینه‌ها با یک قید مکانیکی در فاصله ثابتی از یکدیگر ننگ داشته شوند، می‌توانند آزادانه حرکت کنند و فاصله آنها به کمک علائم نوری و آینه‌های دیگری به روش آزمایش و خطا واریسی می‌شود. این روش اساساً متکی بر ساختن جهانخط‌های موازی است، زیرا جهانخط‌های موازی در نمودار فضا-زمان فاصله ثابت فضایی را ایجاد می‌کنند. شکل ۶-۲۳ جهانخط مستقیم PF مربوط به آینه آزاد (i) را که در حرکت یکنواخت است نشان می‌دهد. برای ساختن یک جهانخط موازی با PF از آینه آزاد کمکی (ii) استفاده می‌کنیم که جهانخط QF آن در آینده PF را در نقطه‌ای مانند F قطع می‌کند. علامت نوری PQR از آینه (i) تابیده می‌شود، از (ii) بازتابیده می‌شود، و به (i) باز می‌گردد. آینه کمکی دیگر (iii) را به کار می‌بریم که جهانخط PG آن PF را در P قطع می‌کند. علامت نوری HGF از آینه (i) تابیده می‌شود، از (iii) بازتابیده می‌شود و به (i) باز می‌گردد. نشان دهید اگر آینه آزاد (iv) جهانخطی داشته باشد که از نقاط تلاقی A و B می‌گذرد، جهانخط AB این آینه با PF موازی است.



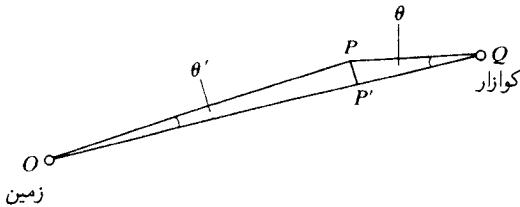
شکل ۶-۲۳ ساختن جهانخط‌های موازی برای ساعت هندسودینامیکی.

۴-۶ دیده شده است که بعضی کوازارها، مانند ۳۴۵، گلوله‌های نورانی گاز پرتاب می‌کنند و به نظر می‌رسد که اینها با سرعت عرضی بیشتر از سرعت نور از کوازار دور می‌شوند. توضیح این خطای

دید می‌تواند این باشد که گلوله در واقع با سرعتی بسیار نزدیک به سرعت نور در راستایی حرکت می‌کند که با خط دید زاویه کوچکی می‌سازد (شکل ۶-۲۴). نور گسیل شده هنگام ایجاد گلوله در Q و نور گسیل شده هنگام رسیدن گلوله به P تقریباً همزمان به زمین می‌رسند و این خطای دید را ایجاد می‌کنند که گلوله تقریباً در یک لحظه از Q به P می‌رود. (الف) فرض کنید بازه زمانی بین ایجاد گلوله در Q و رسیدن آن به P برابر Δt_0 باشد. نشان دهید اگر $\theta \ll 1$ ، بازه زمانی بین رسیدن نور گسیل شده در Q به زمین و نور گسیل شده در P برابر است با $\Delta t = (1 - V)\Delta t_0$ که در آن V سرعت گلوله است. (ب) ثابت کنید سرعت عرضی ظاهری برابر است با

$$\frac{PP'}{\Delta t} \simeq \frac{OP}{QP} \frac{\theta'V}{1 - V}$$

و با مثالی عددی نشان دهید این سرعت می‌تواند از سرعت نور بیشتر باشد.



شکل ۶-۲۴ گلوله نورانی در مدت Δt از P به Q می‌رود.

۵-۶ سرعت صوت در شاره بستگی به مشتق فشار نسبت به چگالی دارد:

$$v^2 = \frac{dP}{d\rho}$$

چون سرعت صوت باید از سرعت نور کمتر باشد، نتیجه می‌گیریم که حد بالای مشتق فشار نسبت به چگالی عبارت است از

$$\frac{dP}{d\rho} \leq c^2$$

می‌توانیم از این نامساوی برای تعیین حد ماکزیموم فشار مجاز در ستاره‌های نوترونی، که در آنها معادله حالت ماده را به خوبی نمی‌دانیم، استفاده کنیم. (الف) با انتگرال‌گیری نشان دهید

$$P \leq P_0 + (\rho - \rho_0)c^2$$

که در آن P_0 فشار به‌ازای یک چگالی معین ρ_0 است. (ب) بنا به محاسبات هاریسون و ویلر، فشار در ماده ستاره نوترونی برابر با $10^{34} \text{g/cm} \cdot \text{s}^2$ یا $1.22 \times 10^{34} \text{g/cm}^3$ در چگالی 10^{14}g/cm^3 است. فشار در چگالی 10^{12}g/cm^3 و در چگالی 10^{10}g/cm^3 را به دست آورید.

۶-۶ (الف) نشان دهید تبدیلات لورنتس را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$x' = x \cosh \theta - t \sinh \theta$$

$$t' = -x \sinh \theta + t \cosh \theta$$

که در آن θ پارامتر سرعت است و با $V = \tanh \theta$ تعریف می‌شود. (ب) نشان دهید دو تبدیل متوالی لورنتس با پارامترهای سرعت θ_1 و θ_2 معادل یک تبدیل لورنتس است با پارامتر سرعت $\theta = \theta_1 + \theta_2$.

۷-۶ (الف) نشان دهید ترکیب دو تبدیل متوالی لورنتس با سرعت‌های V_1 و V_2 در یک راستا (محور x) معادل یک تبدیل لورنتس است با سرعت

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + V_1 V_2}$$

(ب) نشان دهید مجموعه تمام تبدیلهای لورنتس با این قاعده ترکیب یک گروه تشکیل می‌دهند.

۸-۶ اخترشناسان واقع بر سطح زمین (به‌عنوان چارچوب مرجع لخت) دو نواختر را می‌بینند که به‌طور همزمان ظهور می‌کنند. یکی از نواخترها در فاصله $10^4 \times 10^4$ سال نوری و در صورت فلکی اژدها است؛ نواختر دیگر در همین فاصله اما در سمت مقابل (نسبت به زمین) و در صورت فلکی توکان است. از دید اخترشناسان واقع در هواپیمایی که با سرعت 750 km/h در امتداد خطی از اژدها به توکان پرواز می‌کند این نواخترها همزمان نیستند. کدام نواختر از دید این اخترشناسان زودتر ظاهر می‌شود؟ و چه مدت؟

۹-۶ رأس ساعت ۱۴ در شهر الف آذرخشی زده می‌شود. و در ساعت ۱۴ و $3^\circ 00'$ ثانیه در شهر ب به‌فاصله 1140 کیلومتر از (الف) آذرخش دیگری زده می‌شود. سرعت چارچوب مرجعی را نسبت به زمین پیدا کنید که در آن آذرخش دوم قبل از آذرخش اول روی بدهد.

۶-۱۰ فرمولهای تبدیل لورنتسی شتاب را به دست آورید:

$$a'_x = (1 - V^2)^{3/2} \frac{a_x}{(1 - Vu_x)^3}$$

$$a'_y = (1 - V^2) \frac{a_y}{(1 - Vu_x)^2} + (1 - V^2) \frac{Vu_y a_x}{(1 - Vu_x)^3}$$

$$a'_z = (1 - V^2) \frac{a_z}{(1 - Vu_x)^2} + (1 - V^2) \frac{Vu_z a_x}{(1 - Vu_x)^3}$$

۶-۱۱ فرض کنید موتور یک سفینه فضایی طوری کار می‌کند که شتاب سفینه در چارچوب مرجع خود ثابت است: $a'_x = \text{const}$. (الف) نشان دهید معادله جهانخط سفینه فضایی عبارت است از

$$x = \frac{1}{a'_x} \left(\sqrt{1 + (a'_x)^2 t^2} - 1 \right)$$

[راهنمایی: بنا به معادله‌های تبدیل شتاب (مسئله ۶-۱۰) داریم

$$a_x = (1 - V^2)^{3/2} \frac{a'_x}{(1 + Vu'_x)^3}$$

که در آن $u'_x = 0$ و $a_x = dV/dt$. (ب) نشان دهید از معادله بالا به‌ازای سرعت‌های کم نتیجه آشنای $x = 1/2 a'_x t^2$ به دست می‌آید.

۶-۱۲ ذره‌ای در چارچوب مرجع $x'y'z'$ با سرعت u' در صفحه $x'y'$ در امتداد خط راستی حرکت می‌کند که با محور x' زاویه θ' می‌سازد. (الف) اگر θ زاویه‌ای باشد که راستای حرکت این ذره در چارچوب مرجع xyz با محور x می‌سازد، نشان دهید

$$\tan \theta = \frac{u' \sqrt{1 - V^2} \sin \theta'}{u' \cos \theta' + V}$$

(ب) فرض کنید چشمه‌ای در مبدأ چارچوب مرجع $x'y'z'$ ذراتی در تمام جهات گسیل می‌کند. نشان دهید به‌ازای $V \rightarrow 1$ ، تمام این ذرات بجز آنهایی که دقیقاً به سمت عقب گسیل می‌شوند ($\theta' = 180^\circ$) در چارچوب مرجع xyz باریکه‌ای کم‌عرض به سمت جلو ($\theta = 0^\circ$) تشکیل می‌دهند.

۶-۱۳ در محیط شفاف با ضریب شکست n ، سرعت نور نسبت به محیط c/n است. با استفاده از فرمول ترکیب سرعتها نشان دهید اگر سرعت محیط نسبت به آزمایشگاه V باشد سرعت نور

نسبت به آزمایشگاه تقریباً برابر است با

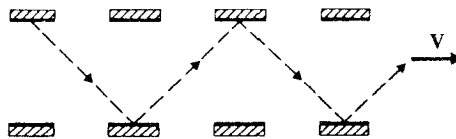
$$c' = \frac{c}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) V$$

که در آن علامت بعلاوه مربوط به موردی است که نور و محیط در یک جهت حرکت می‌کنند و علامت منها هنگامی است که نور و محیط در دو جهت مخالف حرکت می‌کنند. [این فرمول را ابتدا فرنل به دست آورد که فکر می‌کرد محیط متحرک اثر را به طور جزئی با خود می‌کشد و به آن سرعت کششی $V(1 - 1/n^2)$ می‌دهد.]

۱۴-۶ در شتابدهنده آزمایشگاه فرمی، پروتونها با انرژی 1000 GeV یا 1 TeV در مسیری دایره‌ای به شعاع 1 km حرکت می‌کنند. دوره این حرکت را برحسب ویژه‌زمان به دست آورید.

۱۵-۶ سومین سرشنین ایستگاه فضایی اسکایلب مدت 84 روز در آن به سر برد. در این مدت، اثر اتساع زمان نسبیت خاص ساعت او را نسبت به ساعت‌های زمینی چند ثانیه عقب انداخته است؟ سرعت اسکایلب را 7.7 km/s و سرعت ساعت‌های زمینی را سرعت استوا در حرکت چرخشی زمین بگیرید.

۱۶-۶ ساعت نوری ساده از دو آینه موازی به فاصله ثابت L تشکیل شده است. یک تپ نوری بین دو آینه به جلو و عقب بازتابیده می‌شود و هر بازتابش یک تیک ساعت به حساب می‌آید. در چارچوب سکون این ساعت، تپ نوری عمود بر آینه‌ها حرکت می‌کند و بنابراین زمان بین تیکها برابر با L است. با محاسبه مستقیم نشان دهید در چارچوب مرجعی که ساعت نسبت به آن در راستایی موازی با آینه‌ها با سرعت V حرکت می‌کند (شکل ۲۵-۶) زمان بین تیکها برابر با $L/(\sqrt{1-V^2})$ است.



شکل ۲۵-۶ دو آینه موازی که به طرف راست حرکت می‌کنند. مسیر علامت نوری با خط چین نشان داده شده است.

۱۷-۶ یک سفینه فضایی با سرعت $V = 0.8c$ از زمین برمی‌خیزد و در همین لحظه تخم مرغی در سفینه در دستگاه مخصوص جوجه‌کشی قرار می‌گیرد. هنگامی که جوجه سراز تخم در می‌آورد سفینه علامتی رادیویی به زمین می‌فرستد. چه مدت (از دید ساعت‌های زمینی) پس از برخاستن سفینه این علامت به زمین می‌رسد؟ دوره عادی جوجه‌کشی 21 روز است.

۱۸-۶ برای همزمان کردن دقیق ساعتهای اتمی در اداره ملی استانداردها در بولدرکلورادو و اداره بین‌المللی ساعت در پاریس، دانشمندان ساعتهای اتمی قابل حمل را از یک محل به محل دیگر منتقل کردند. تخمین بزنید چنین ساعت متحرکی ضمن انتقال از بولدر به پاریس چند ثانیه از ساعتهای ساکن در سطح زمین عقب می‌افتد.

۱۹-۶ فرض کنید یک سفینه فضایی که با سوخت ماده-پادماده کار می‌کند زمین را به قصد ستاره بارنارد ترک کند. مکان سفینه به صورت تابعی از زمان عبارت است از

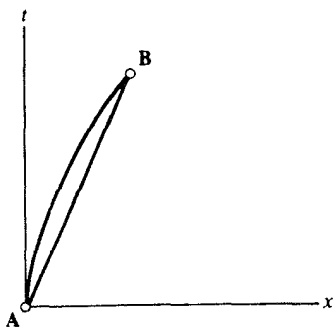
$$x = \frac{c^2}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}} - 1 \right)$$

که در آن t زمانی است که در چارچوب مرجع زمین اندازه‌گیری می‌شود، و $t = 0$ آغاز سفر است، و g شتاب سفینه در چارچوب مرجع خود است. به خاطر آسایش سرنشینان، مقدار شتاب برابر با $g = 981 \text{ cm/s}^2$ (الف) نشان دهید

$$v = \frac{gt}{\sqrt{1 + g^2 t^2 / c^2}}$$

(ب) هنگامی که در چارچوب مرجع زمین ۲ سال گذشته است، در چارچوب مرجع سفینه چه مدت گذشته است؟ (ج) اگر در این زمان سفینه فضایی علامتی رادیویی به زمین بفرستد، چه وقت این علامت به زمین می‌رسد؟ (د) اگر این علامت با بسامد $1 \times 10^9 \text{ Hz}$ (در چارچوب مرجع سفینه) فرستاده شود با چه بسامدی (در چارچوب مرجع زمین) گرفته می‌شود؟

۲۰-۶ در شکل ۲۶-۶ جهانخط‌های دو ساعت یکسان که از A به B حرکت می‌کنند نشان داده شده‌اند. اولین ساعت دارای جهانخط مستقیم $x = V_0 t$ است که در آن V_0 ثابت است. دومین



شکل ۲۶-۶ جهانخط‌های دو ساعت.

ساعت دارای جهانخط $x = 1/2 a_0 t^2$ است که در آن a_0 ثابت است. ویژه زمان طی شده بین A و B را برای هر یک از ساعتها به دست آورید. کدام ساعت ویژه زمان طولانی تری را نشان می دهد؟

۲۱-۶ A و B دو نقطه فضا-زمان با فاصله زمانگونه هستند. جهانخط مستقیم و جهانخطهای خمیده بین A و B را در نظر بگیرید. نشان دهید ویژه زمان بین A و B یعنی

$$\Delta\tau = \int_A^B d\tau = \int_A^B \sqrt{1 - V^2} dt$$

در امتداد جهانخط مستقیم از همه بیشتر است. بنابراین، جهانخط ذره آزاد را می توان به عنوان منحنی فضا-زمانی ویژه زمان ماکسیمم تعیین کرد. [راهنمایی: از چارچوب مرجعی استفاده کنید که در آن ذره ای که جهانخط مستقیم دارد ساکن است.]

۲۲-۶ ستاره کاپلا در فاصله ۴۶ سال نوری از زمین است. کیهان نوردی می خواهد در مدتی که از دید ساعت های واقع در سفینه فضایی اش از ۲۰ سال بیشتر نیست از زمین به کاپلا سفر کند. او با چه سرعتی باید حرکت کند؟ از دید ساعت های واقع در زمین این سفر چه مدت طول می کشد؟

۲۳-۶ سفینه فضایی با جهانخطی که در مسئله ۶-۱۱ توصیف شد را در نظر بگیرید. نشان دهید ویژه زمانی که ساعت واقع در این سفینه (از $t = 0$) ثبت می کند برابر است با

$$\Delta\tau = \frac{1}{a'_x} \sinh^{-1}(a'_x t)$$

۲۴-۶ نشان دهید اگر یک فرستنده امواج رادیویی با سرعت V از گیرنده دور شود رابطه بین بسامد ν موج رادیویی در چارچوب مرجع فرستنده و بسامد ν در چارچوب مرجع گیرنده عبارت است از

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - V}{1 + V}}$$

[راهنمایی: در فیزیک نیوتونی، این بسامدها با فرمول دوپلر برای فرستنده متحرک و گیرنده ساکن، یعنی $\nu = \nu_0 / (1 + V)$ ، به هم مربوط می شوند. اثر اتساع زمان نسبیتی را در این فرمول دخالت دهید.]

۲۵-۶ زمین با سرعت 30 km/s دور خورشید حرکت می کند. فرض کنید زمین در چارچوب مرجع خود کره ای است کامل با شعاع $10^6 \text{ m} \times 4.6$. در چارچوب مرجع خورشید، زمین متحمل انقباض طول نسبیتی در راستای شرقی-غربی می شود. قطر شرقی-غربی زمین چند متر منقبض می شود؟ حجم زمین چند متر مکعب منقبض می شود؟

۲۶-۶ پارادوکس میله-انبار به شرح زیر است: شخصی که میله‌ای افقی در دست دارد با سرعت بسیار زیاد وارد انباری که دیوار انتهایی آن صلب است می‌شود. طول میله در چارچوب سکونش فرضاً ۶ متر و طول انبار در چارچوب سکونش فرضاً ۵ متر است. در چارچوب مرجع انبار، میله انقباض طول می‌یابد و تمام میله در انبار جا می‌گیرد. اما در چارچوب مرجع میله، انبار انقباض طول می‌یابد و به نظر می‌رسد که میله نمی‌تواند در انبار جا بگیرد. این پارادوکس را با رسم نمودار فضا-زمانی که جهانخط‌های ابتدا و انتهای میله متحرک و انبار ساکن را نمایش می‌دهد حل کنید. بر اساس این نمودار، نشان دهید در چارچوب مرجع میله موجی (تراکمی) که به علت برخورد سر میله با انتهای انبار به سمت عقب میله حرکت می‌کند تنها پس از اینکه تمام میله وارد انبار شد به انتهای میله می‌رسد. بدین ترتیب، در چارچوب مرجع میله، میله در انبار جا می‌گیرد زیرا الزاماً متراکم می‌شود.



حساب برداری در فضا-زمان

در این فصل با حساب برداری در فضا-زمان چهاربعدی آشنا می‌شویم. بسیاری از فرمولهای این فصل به وضوح مشابه چهاربعدی معادله‌های سه‌بعدی فصل ۱ هستند. هرگاه بخواهیم معادلات نسبیتی حرکت برای ذرات یا میدانها را بنویسیم صورتبندی که در این فصل شرح و بسط می‌دهیم بسیار مفید خواهد بود.

۱-۷ چار بردارها و تانسورها

در یک چارچوب مرجع لخت، مختصات یک رویداد یا نقطه فضا-زمان عبارت‌اند از t, x, y و z . شیء چهارمؤلفه‌ای (t, x, y, z) بردار مکان این نقطه فضا-زمان است؛ این بردار چهار بعدی یا یک چار بردار است. مناسب است از نمادنگاری (x^0, x^1, x^2, x^3) استفاده کنیم که در آن^۱

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (1-7)$$

۱. در این فصل به یکاهای CGS بازمی‌گردیم؛ به همین دلیل ضریب c در تعریف x^0 و همچنین در معادلات تبدیل لورنتس وارد می‌شود (معادله ۴-۷).

در نمادنگاری فشرده، چاربردار مکان را غالباً به صورت زیر می‌نویسیم

$$x^\mu \quad (2-7)$$

که در آن قرارداد می‌کنیم که $\mu = 0, 1, 2, 3$.

تبدیل لورنتس به‌ازای سرعت V در امتداد محور x (معادله ۳۴-۶ تا ۳۷-۶) در اینجا به صورت زیر نوشته می‌شود

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 a^\mu{}_\nu x^\nu \quad (3-7)$$

که در آن $a^\mu{}_\nu$ عبارت است از ماتریس

$$a^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & -V/c & 0 & 0 \\ \frac{-V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4-7)$$

(شاخص اول یعنی μ معرف سطر و شاخص دوم یعنی ν معرف ستون است).

بنابراین قرارداد اینشتین برای جمع روی شاخصهای یونانی که دوبار در حاصلضرب ظاهر می‌شوند، معادله ۳-۷ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu \quad (5-7)$$

به تفاوت شاخصهای لاتین و یونانی توجه کنید: روی شاخصهای لاتین از ۱ تا ۳ و روی شاخصهای یونانی از ۰ تا ۳ جمع می‌زنیم.

از بخش ۳-۶ می‌دانیم که بازه فضا-زمانی بین دو رویداد اختیاری ناورد است. در نمادنگاری ما، بازه فضا-زمانی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$d\tau^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (6-7)$$

یا به صورت

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (7-7)$$

که در آن $\eta_{\mu\nu}$ عبارت است از ماتریس

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۸-۷)$$

کمیت $\eta_{\mu\nu}$ را تانسور متریک فضا-زمان یا تانسور مینکوفسکی فضا-زمان می‌نامند؛ این تانسور «فاصله» ناورد در فضا-زمان را تعیین می‌کند.

در فصل ۱ دیدیم که هر ماتریس توصیف‌کنندهٔ چرخش در سه بعد باید شرط ۳۸-۱ را برآورده کند. شرط متناظری برای $a^\mu{}_\nu$ وجود دارد که عبارت است از

$$a^\alpha{}_\mu \eta_{\alpha\beta} a^\beta{}_\nu = \eta_{\mu\nu} \quad (۹-۷)$$

تمرین ۱- صریحاً بررسی کنید که ماتریس مربوط به تبدیل خاص لورنتس که در معادلهٔ ۴-۷ داده شده است معادلهٔ ۹-۷ را برآورده می‌کند.

برای به دست آوردن نتیجهٔ کلی فرض می‌کنیم $a^\mu{}_\nu$ نمایشگر تبدیل اختیاری لورنتس (که الزاماً به سرعت در امتداد محور x مربوط نیست) باشد. این تبدیل باید هر بازهٔ فضا-زمانی را ناورد بگذارد؛ پس برای بازهٔ متناهی از مبدأ تا x^μ داریم

$$\eta_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (۱۰-۷)$$

از جاگذاری $x'^\alpha = a^\alpha{}_\mu x^\mu$ در این معادله، به دست می‌آوریم

$$\eta_{\alpha\beta} a^\alpha{}_\mu x^\mu a^\beta{}_\nu x^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (۱۱-۷)$$

یا

$$x^\mu x^\nu (a^\alpha{}_\mu \eta_{\alpha\beta} a^\beta{}_\nu - \eta_{\mu\nu}) = 0 \quad (۱۲-۷)$$

چون $x^\mu x^\nu$ اختیاری است به معادلهٔ ۹-۷ می‌رسیم.

توجه کنید که اگر در ماتریس $a^\mu{}_\nu$ قرار دهیم $a^\mu{}_\mu = 1$ و $a^\mu{}_\nu = 0$ و $a^\nu{}_\mu = 0$ ، معادلهٔ ۳۸-۱ را به عنوان یک مورد خاص از معادلهٔ ۹-۷ به دست می‌آوریم.

تمرین ۲- این مطلب را واریسی کنید.

بنابراین، تبدیلاتی از این نوع خاص که مختصه زمانی را بدون تغییر می‌گذارد ($x'^0 = x^0$)، چرخشهای فضایی معمولی هستند. هر تبدیلی که در معادله ۷-۹ صدق می‌کند تبدیل (عام) لورنتس نامیده می‌شود. پس چرخشهای فضایی را نیز تبدیل لورنتس در نظر می‌گیریم؛ و برای متمایز کردن چرخش فضایی از تبدیل «واقعی» لورنتس با سرعت غیر صفر، تبدیل اخیر را تبدیل محض لورنتس یا خیز می‌نامیم.

مناسب است مؤلفه‌های هموردای بردار مکان را تعریف کنیم:

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \quad (۱۳-۷)$$

به‌طور صریح، این مؤلفه‌ها عبارت‌اند از

$$x_0 = ct, \quad x_1 = -x, \quad x_2 = -y, \quad x_3 = -z \quad (۱۴-۷)$$

برای تمایز، مؤلفه‌های x^μ را که در معادله ۷-۱۲ داده شده‌اند، مؤلفه‌های پادوردای بردار مکان می‌نامیم. این دو نحوه نمایش مؤلفه‌های بردار را با جای شاخص متمایز می‌کنیم: مؤلفه‌های پادوردا دارای شاخص بالا و مؤلفه‌های هموردا دارای شاخص پایین هستند. در مورد این شاخصها باید دقت کنید؛ برای مثال $x^1 = x$ و $x_1 = -x$ ، و غیره.

وارون معادله ۷-۱۳ عبارت است از

$$x^\nu = \eta^{\nu\mu} x_\mu \quad (۱۵-۷)$$

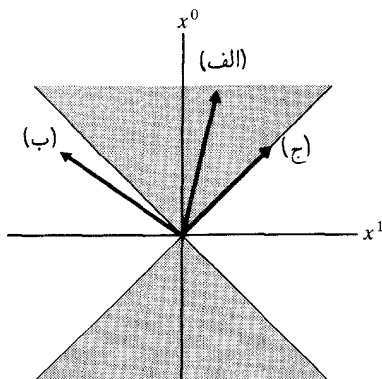
که در آن

$$\eta^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۱۶-۷)$$

تمرین ۳- نشان دهید معادله ۷-۱۵ با معادله ۷-۱۳ توافق دارد.

اکنون می‌توانیم بازه فضا-زمانی را به‌صورت زیر بنویسیم

$$d\tau^2 = dx^\mu dx_\mu \quad (۱۷-۷)$$



شکل ۷-۱ مثالی از بردارهای مکان: (الف) زمانگونه، (ب) فضاگونه، و (ج) نورگونه. این نمودار محور زمان و یکی از محورهای فضا را نشان می‌دهد.

برای جابه‌جایی متناهی از مبدأ به نقطه x^μ ، بازه فضا-زمانی عبارت است از

$$\Delta\tau^2 = x^\mu x_\mu \quad (18-7)$$

بردار x^μ را زمانگونه، فضاگونه، یا نورگونه می‌نامیم بسته به اینکه $x^\mu x_\mu$ مثبت، منفی، یا صفر باشد. شکل ۷-۱ مثالی از این سه نوع بردار را نشان می‌دهد. راستای بردارهای زمانگونه در آینده (یا گذشته) مطلق، فضاگونه در ناحیه خنثی، و نورگونه در امتداد مخروط نور است. قانون تبدیل برای x_μ را می‌توانیم از معادله ۷-۵ به دست آوریم:

$$x'_\mu = \eta_{\mu\nu} x'^\nu = \eta_{\mu\nu} a^\nu_\alpha x^\alpha = \eta_{\mu\nu} a^\nu_\alpha \eta^{\alpha\beta} x_\beta \quad (19-7)$$

اگر تعریف کنیم

$$a_\mu^\beta \equiv \eta_{\mu\nu} a^\nu_\alpha \eta^{\alpha\beta} \quad (20-7)$$

آنگاه معادله ۱۹-۷ به صورت زیر در می‌آید

$$x'_\mu = a_\mu^\beta x_\beta \quad (21-7)$$

۱. در این گونه نمودارها همیشه مؤلفه‌های یادردای x^μ نشان داده می‌شوند. مؤلفه‌های هموردا x_μ هرگز در این نمودارها نیستند.

تمرین ۴- اگر ماتریس a^ν_α با معادله ۴-۷ داده شده باشد، نشان دهید

$$a_\mu^\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & \frac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22-7)$$

تمرین ۵- نشان دهید ماتریسهای موجود در معادله‌های ۴-۷ و ۲۲-۷ وارون یکدیگرند.

به آسانی می‌توان نشان داد که برای هر تبدیل عام لورنتس ماتریسهای a^α_ν و a_α^μ وارون یکدیگر هستند، یعنی

$$a_\alpha^\mu a^\alpha_\nu = \delta_\nu^\mu \quad (23-7)$$

که در آن δ_ν^μ دلتای کرونکر در چهار بعد است:

$$\delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \mu = \nu \\ 0 & \text{اگر } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (24-7)$$

توجه کنید که در معادله ۲۳-۷ شاخصی که باید روی آن جمع زده شود اولین شاخص در a_α^μ و اولین شاخص در a^α_ν است.

تمرین ۶- معادله ۲۳-۷ را به دست آورید. [راهنمایی: دو طرف معادله ۹-۷ را در $\eta^{\nu\sigma}$ ضرب کنید و رابطه

$$\eta^{\nu\sigma} \eta_{\mu\nu} = \delta_\mu^\sigma \quad (25-7)$$

را اثبات کنید.]

معادله ۲۳-۷ معادل است با

$$(a^T)_\mu^\alpha a^\alpha_\nu = \delta_\nu^\mu \quad (26-7)$$

که مشابه معادله ۳۲-۱ است.

اکنون می‌توانیم تعریف کلی بردارها و تانسورها را در فضا-زمان چهاربعدی ارائه کنیم. مانند مورد سه‌بعدی، بردار مکان را به‌عنوان نمونه‌ای برای تمام بردارهای دیگر در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که خواص تبدیل لورنتس مربوط به بردار مکان الگویی برای خواص تبدیل تمام بردارهای دیگر است.

تعریف: چاربرداری شیئی است یا چهار مؤلفه که تحت تبدیلات لورنتس به‌صورت زیر تبدیل می‌شوند

$$B'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} B^{\nu} \quad (27-7)$$

دیدیم که چگونه مؤلفه‌های هموردای بردار مکان را از مؤلفه‌های پادوردا بسازیم (معادله ۷-۱۳). به‌طور کلی، اگر B^{μ} مؤلفه‌های پادوردای یک بردار باشند، مؤلفه‌های هموردا عبارت‌اند از

$$B_{\mu} = \eta_{\mu\nu} B^{\nu} \quad (28-7)$$

برعکس

$$B^{\nu} = \eta^{\nu\mu} B_{\mu} \quad (29-7)$$

عملیاتی که در معادله‌های ۷-۲۸ و ۷-۲۹ انجام می‌شوند را به‌ترتیب پایین آوردن و بالا بردن شاخص می‌نامند.

مؤلفه‌های هموردای یک بردار دارای قانون تبدیل زیر هستند

$$B'_{\mu} = a_{\mu}^{\nu} B_{\nu} \quad (30-7)$$

این رابطه را می‌توانیم با استدلالی مشابه با آنچه که معادله ۷-۲۱ را از معادله ۷-۱۹ به‌دست داد اثبات کنیم.

تعریف تانسور تعمیم مستقیم معادله ۷-۲۷ است.

تعریف: تانسور رتبه دوم شیئی است با ۱۶ مؤلفه که تحت تبدیلات لورنتس به‌صورت زیر تبدیل می‌شوند

$$T'^{\mu\nu} = a^{\mu}_{\alpha} a^{\nu}_{\beta} T^{\alpha\beta} \quad (31-7)$$

تانسور را می‌توان برحسب مؤلفه‌های پادورد، مؤلفه‌های همورد، یا مؤلفه‌های آمیخته‌اش نوشت. این مؤلفه‌ها به صورت زیر به هم مربوط می‌شوند

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}T^{\alpha\beta} \quad (۳۲-۷)$$

$$T_{\mu}{}^{\nu} = \eta_{\mu\alpha}T^{\alpha\nu} \quad (۳۳-۷)$$

و قانونهای تبدیل آنها عبارت‌اند از

$$T'_{\mu\nu} = a_{\mu}{}^{\alpha}a_{\nu}{}^{\beta}T_{\alpha\beta} \quad (۳۴-۷)$$

$$T'_{\nu}{}^{\mu} = a^{\mu}{}_{\alpha}a_{\nu}{}^{\beta}T^{\alpha\beta} \quad (۳۵-۷)$$

تمرینهای زیر به مثالهای خاصی از تانسورها مربوط می‌شوند که قانونهای تبدیل آنها به ترتیب عبارت‌اند از معادله‌های ۳۱-۷، ۳۵-۷، و ۳۴-۷.

■ تمرین ۷- نشان دهید $x^{\mu}x^{\nu}$ تانسور است.

■ تمرین ۸- نشان دهید δ_{ν}^{μ} تانسور است.

■ تمرین ۹- نشان دهید $\eta_{\mu\nu}$ تانسور است.

تانسور رتبه دوم را متقارن می‌گویند هرگاه $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ ، و آن را پاد متقارن می‌گویند هرگاه $T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}$.

می‌توانیم تانسورهای رتبه بالاتر را نیز تعریف کنیم. برای مثال، تانسور رتبه سوم شبیهی است با ۶۴ مؤلفه با قانون تبدیل

$$T'^{\mu\nu\sigma} = a^{\mu}{}_{\alpha}a^{\nu}{}_{\beta}a^{\sigma}{}_{\delta}T^{\alpha\beta\delta} \quad (۳۶-۷)$$

ما نیازی به تانسورهای رتبه بالاتر نداریم، اما آنها نقش مهمی در نظریه نسبیتی گرانس (نسبیت عام) دارند.

نردهای شبیهی است یک مؤلفه‌ای که تحت تبدیل لورنتس بدون تغییر می‌ماند. بازه فضاهای زمانی $dx^{\mu}dx_{\mu}$ مثال واضحی است از نرده‌ایها. به طور کلی، حاصلضرب «نرده‌ای» $A^{\mu}B_{\mu}$ از دو بردار اختیاری یک نرده‌ای است. صورت گسترده این حاصلضرب نرده‌ای عبارت است از

$$A^{\mu}B_{\mu} = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 \quad (۳۷-۷)$$

- تمرین ۱۰- با استفاده از قانونهای تبدیل A^μ و B_μ نشان دهید $A'^\mu B'_\mu = A^\mu B_\mu$.
- تمرین ۱۱- نشان دهید اگر B^μ بردار و $A_{\alpha\mu}$ تانسور باشد، آنگاه $A_{\alpha\mu} B^\mu$ تانسور است.
- تمرین ۱۲- نشان دهید اگر $T^{\mu\nu}$ تانسور باشد، آنگاه $T^\mu{}_\mu$ نرده‌ای است.
 نرده‌ای $T^\mu{}_\mu$ را رد تانسور $T^{\mu\nu}$ می‌نامند.

۲-۷ بردار انرژی-تکانه

در فیزیک نیوتونی، تکانه یک ذره عبارت است از حاصلضرب جرم در سرعت:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (38-7)$$

تکانه دستگامی از ذرات از یک قانون مهم پایستگی تبعیت می‌کند: در غیاب نیروهای خارجی، تکانه کل دستگاه ذرات ثابت است. این قانون پایستگی نتیجه مستقیم قوانین دوم و سوم نیوتون است. در مورد ساده‌ای که دستگاه تنها از دو ذره برهم‌کنش‌دار (A و B) تشکیل شده است اثبات به صورت زیر است

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B) = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = \mathbf{F}_A - (\mathbf{F}_A) = 0 \quad (39-7)$$

که در آن اولین تساوی به قانون دوم وابسته است و تساوی بعدی به قانون سوم وابسته است، و \mathbf{F}_A و \mathbf{F}_B یک جفت کنش - واکنش هستند.

در فیزیک نسبیتی، از این راه نمی‌توانیم پایستگی تکانه را به دست آوریم. مشکل این است که قانون سوم نیوتون کارایی ندارد- نسبی بودن همزمانی توازن لحظه‌ای کنش و واکنش را بی‌معنی می‌کند. برای مثال، دو ذره باردار را در نظر بگیرید که ضمن حرکت نیروهای کولنی برهم وارد می‌کنند. در اینجا کنش و واکنش در دو نقطه مختلف فضا (مکانهای دو ذره) تعریف شده‌اند، و هر دو با زمان تغییر می‌کنند. توازن دائمی کنش و واکنش ایجاب می‌کند که این تغییرات در تمام چارچوبهای مرجع همزمان باشند؛ اما این غیر ممکن است زیرا نسبی بودن همزمانی به ما می‌گوید که رویدادهای در نقاط مختلف فضا نمی‌توانند در تمام چارچوبهای مرجع همزمان باشند. معلوم می‌شود که عدم توازن کنش و واکنش، و نتیجه آن یعنی نقض پایستگی تکانه دستگاه ذرات، با انتقال تکانه به میدانهای نیروی احاطه‌کننده ذرات رفع می‌شود- این میدانها به‌عنوان انبار ذخیره تکانه به‌گونه‌ای عمل می‌کنند که تکانه کل ذرات و میدانها پایسته است. اما برای اثبات قانون کلی

پایستگی احتیاج به نظریهٔ کاملی برای تکانه و انرژی ذخیره شده در میدانها داریم، و این از اهداف این کتاب فراتر می‌رود.

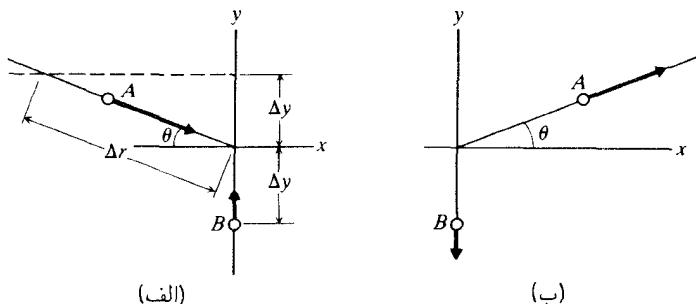
در اینجا به بحث پایستگی تکانه برای مورد سادهٔ خاص نیروهای تماسی اکتفا می‌کنیم. در این مورد، کنش و واکنش در یک نقطهٔ فضا (نقطهٔ برخورد) تعریف می‌شود، و در نتیجه نسبی بودن همزمانی با قانون سوم نیوتون تداخل ندارد. پس انتظار داریم در هر برخوردی که نیروهای تماسی دخالت دارند تکانهٔ کل پایسته باشد. اما چنانکه بعداً خواهیم دید این انتظار تنها در صورتی برآورده می‌شود که تکانه در فیزیک نسبیتی را با فرمولی تعریف کنیم که تا حدی پیچیده‌تر از فرمول سادهٔ فیزیک نیوتونی (معادلهٔ ۷-۳۸) است.

به‌عنوان نقطهٔ آغاز محاسبهٔ فرمول نسبیتی تکانه، فرض می‌کنیم راستای تکانه موازی با راستای سرعت است، یعنی

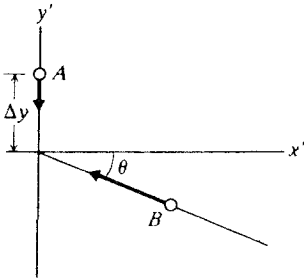
$$\mathbf{p} = f(v^2) m \mathbf{v} \quad (۷-۴۰)$$

این فرض بدیهی است زیرا راستای سرعت تنها راستای مرجح موجود برای ذرهٔ آزاد است. تابع زده‌ای $f(v^2)$ تنها بستگی به بزرگی سرعت دارد و مقید به این قید است که اگر $v \rightarrow 0$ آنگاه $f(v^2) \rightarrow 1$ ؛ این قید اطمینان می‌دهد که برای سرعت‌های کم (غیر نسبیتی) فرمول ۷-۴۰ با فرمول نیوتونی تطبیق می‌کند.

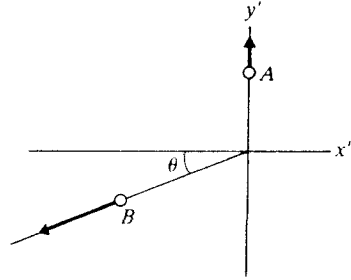
اکنون باید $f(v^2)$ را طوری انتخاب کنیم که تکانهٔ کل دستگاه ذرات برخوردکننده پایسته باشد. برای این مقصود، از همه ساده‌تر این است که برخورد بین دو گوی کشسان هموار یکسان به جرم m را در نظر بگیریم. مؤلفه‌های y تکانهٔ این گویها در دو جهت مخالف و از لحاظ بزرگی باهم برابرند، و تفاوت گوی A با B در این است که تکانهٔ آن دارای یک مؤلفهٔ بزرگ x نیز هست. شکل ۷-۲ این گویها را در چارچوب مرجع xyz قبل از برخورد و بعد از برخورد نشان می‌دهد. شکل ۷-۳



شکل ۷-۲ بردارهای تکانهٔ گویها از دید چارچوب xyz . (الف) قبل از برخورد. (ب) بعد از برخورد.



(الف)



(ب)

شکل ۳-۷ بردارهای تکانه گویها از دید چارچوب $x'y'z't'$. (الف) قبل از برخورد. (ب) بعد از برخورد.

این گویها را در چارچوب مرجع $x'y'z't'$ که با سرعتی برابر با مؤلفه x سرعت A به طرف راست حرکت می‌کند، نشان می‌دهد. در این چارچوب مرجع، دارای تکانه‌ای بزرگ در جهت منفی x است. به تقارن بین دو چارچوب مرجع توجه کنید: به استثنای جهت‌های مخالف، هر چه گوی A در چارچوب $xyzzt$ دارد گوی B در چارچوب $x'y'z't'$ دارد، و برعکس. این تقارن مبین اصل نسبیت است، و تضمین می‌کند که اگر تکانه در یکی از این چارچوبهای مرجع پایسته باشد در دیگری نیز پایسته است.

طی برخورد، مؤلفه y تکانه هر یک از گویها برعکس می‌شود. اگر $\Delta p_{A,y}$ و $\Delta p_{B,y}$ تغییر تکانه‌ها در چارچوب $xyzzt$ باشند، پایستگی تکانه ایجاب می‌کند که

$$\Delta p_{A,y} = -\Delta p_{B,y} \quad (41-7)$$

به علت تقارن بین گویها و چارچوبهای مرجع، تغییر تکانه گوی B در چارچوب $xyzzt$ با منفی تغییر تکانه گوی A در چارچوب $x'y'z't'$ برابر است:

$$\Delta p_{B,y} = -\Delta p'_{A,y} \quad (42-7)$$

با ترکیب این رابطه و رابطه قبلی داریم:

$$\Delta p_{A,y} = \Delta p'_{A,y} \quad (43-7)$$

این رابطه بین مؤلفه‌های عرضی تکانه را می‌توانیم با استفاده از معادله ۷-۴۰ برحسب سرعت

بیان کنیم:

$$\gamma f(v^2)mv_y = \gamma f(v'^2)mv'_y$$

یا

$$\gamma f(v^2)mv_y = \gamma f\left(\frac{v_y^2}{1 - v_x^2/c^2}\right) m \frac{v_y}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} \quad (44-7)$$

زیرا $v'_y = v_y / \sqrt{1 - v_x^2/c^2}$ و $v' = v'_y$ (از معادله ۶-۴۶ به ازای $v_x = V = u_x$). اگر حد $v_y \rightarrow 0$ را بگیریم، به دست می آوریم

$$\gamma f(v^2)mv_y = \gamma f(0)m \frac{v_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

و از اینجا نتیجه می گیریم که $f(v^2) = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. بنابراین، معادله ۷-۴۰ به صورت زیر درمی آید

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (45-7)$$

این فرمول نسبیتی تکانه است. جرم در معادله ۷-۴۵ جرم سکون است. یعنی جرمی که برای ذره در چارچوب مرجعی که در آن ساکن است اندازه گیری می شود. در این کتاب، نماد m همیشه به معنی جرم سکون است. به ازای یک سرعت معین، تکانه ۷-۴۵ از مقدار نیوتونی به اندازه ضریب $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ بزرگتر است. به ازای $v \rightarrow c$ ، تکانه به بینهایت میل می کند.

توجه کنید که استدلال بالا تنها ثابت می کند که مجموع تکانه های به دست آمده از رابطه ۷-۴۵ در مورد برخورد کشسان متقارنی که بررسی کردیم پایسته است. در یک برخورد اختیاری بین تعداد زیادی ذره که برهم کنش غیر کشسان دارند چه روی می دهد؟ در اینجا پایستگی تکانه را بدون استفاده از نظریه کلی برهم کنشها (نظریه میدان) نمی توانیم اثبات کنیم. اما می توانیم بگوییم که اگر تکانه پایسته ای وجود داشته باشد باید از معادله ۷-۴۵ به دست آید، زیرا در غیراین صورت تکانه در مورد خاص برخورد کشسان متقارن پایسته نیست. بنابراین، نقیصه ای که در محاسبه عبارت مربوط به تکانه نسبیتی به چشم می خورد منجر به فقدان اثبات وجود می شود. خوشبختانه، وجود تکانه پایسته بدون مته به خشخاش گذاشتن نیز قابل قبول است.

سه مؤلفه تکانه که از معادله ۷-۴۵ به دست می آیند را می توان سه مؤلفه آخر شیئی چهارمؤلفه ای

\mathcal{P}^{μ} در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}
 p^\mu &= \left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, p_x, p_y, p_z \right) \\
 &= \left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dx}{dt}, \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dy}{dt}, \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dz}{dt} \right)
 \end{aligned} \quad (۴۶-۷)$$

این رابطه را به صورت زیر نیز می‌توانیم بنویسیم

$$p^\mu = m u^\mu \quad (۴۷-۷)$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 u^\mu &= \left(\frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dx}{dt}, \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dy}{dt}, \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dz}{dt} \right) \\
 &= \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right) = \frac{dx^\mu}{d\tau}
 \end{aligned} \quad (۴۸-۷)$$

چون dx^μ چاربردار و $d\tau$ نرده‌ای است نتیجه می‌شود که u^μ چاربردار است، که آن را چارسرعت می‌نامند. بنابراین، p^μ نیز چاربردار است.

تمرین ۱۳- نشان دهید

$$u_\mu u^\mu = c^2 \quad (۴۹-۷)$$

تعبیر فیزیکی مؤلفهٔ p^0 چیست؟ معلوم می‌شود که کمیت cp^0 انرژی ذره است:

$$cp^0 = E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (۵۰-۷)$$

برای توجیه تعبیر cp^0 به‌عنوان انرژی، ملاحظه می‌کنیم که در حد غیر نسبیتی ($v \ll c$) داریم:

$$cp^0 \simeq \frac{mc^2}{1 - \frac{1}{2}v^2/c^2} \simeq mc^2 + \frac{mv^2}{2} \quad (۵۱-۷)$$

کمیت $mv^2/2$ همان انرژی جنبشی غیرنسبیتی است. کمیت mc^2 در معادله ۷-۵ به منزله یک ثابت جمعی در انرژی است؛ این ثابت جمعی انرژی جرم سکون ذره است (مفهوم فیزیکی این انرژی جرم سکون را در آخرین بخش با تفصیل بیشتری مورد بحث قرار می‌دهیم). انرژی جنبشی نسبیتی عبارت است از تفاضل انرژی نسبیتی و انرژی جرم سکون:

$$T = E - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 \quad (52-7)$$

تذکر: وقتی فیزیکدانها از ذره‌ای مثلاً پروتونهای با انرژی ۲ GeV صحبت می‌کنند، منظور آنها انرژی جنبشی است.^۱

فرمولهای نسبیتی ۷-۴۵ و ۷-۵۲ مربوط به تکانه و انرژی را می‌توان با اندازه‌گیری روی ذرات سریع مستقیماً آزمون کرد. اما در چنین آزمایشهایی مشکل می‌توان به دقت زیاد رسید. بهترین اندازه‌گیریهای مستقیم موجود در مورد تکانه و سرعت تأیید معادله ۷-۴۵ را در محدوده تقریبی ۱٪ امکانپذیر می‌سازند [۱ و ۲]. این اندازه‌گیریها روی پروتونهای با انرژی جنبشی چندصد MeV انجام شدند؛ تکانه از شعاع مدار دایره‌ای پروتونها در یک میدان مغناطیسی معلوم تعیین شد، و سرعت از دوره مدار به دست آمد.

بعضی از نتایج فرمولهای نسبیتی با دقت بسیار زیاد قابل آزمون هستند. برای مثال، معادله ۷-۵۲ ایجاب می‌کند که وقتی سرعت به سرعت نور نزدیک می‌شود، انرژی و اگرآ شود؛ به عبارت دیگر، وقتی انرژی زیاد می‌شود سرعت مستقل از انرژی می‌شود. این پیش‌بینی در یک آزمایش زیبا در شتابدهنده خطی استانفورد آزمون شده است [۳]. مسابقه‌ای بین الکترونیهای با انرژی ۱۵ تا ۲۰ GeV و فوتونهایی که از نفوذ الکترون در هدف نازک ایجاد شده بودند (تابش ترمزی) در یک فاصله ۱۰۰۰ متری ترتیب داده شد. اما در پایان فوتونها چندان از الکترونها جلو نیفتاده بودند. این آزمایش اثبات کرد که الکترونهای ۱۵ تا ۲۰ GeV در محدوده $2/10^7$ سرعتی برابر با سرعت نور دارند.

دقیقترین آزمون موجود در مورد فرمولهای نسبیتی مربوط به تکانه و انرژی به‌طور غیرمستقیم از آزمایشهای اندازه‌گیری گشتاور مغناطیسی ذاتی الکترون (ضریب g الکترون) حاصل می‌شود [۴]. در این آزمایشهای بسیار دقیق گشتاور مغناطیسی از مقایسه بسامد حرکت تقدیمی گشتاور مغناطیسی در میدان مغناطیسی با بسامد حرکت مداری الکترون در همان میدان مغناطیسی تعیین شد. یکی از این آزمایشها با الکترونیهای با انرژی نزدیک به صفر ($5 \times 10^{-4} \text{ eV}$) انجام شد؛ آزمایش دیگر با الکترونیهای با انرژی نسبیتی (۱۱ MeV) انجام گرفت. مقایسه گشتاورهای مغناطیسی که در این دو آزمایش به دست آمدند اثبات می‌کند که کمیت $1 - \sqrt{1 - v^2/c^2} (p/m)(dp/dE)$ که

۱. فیزیکدانهای ذره‌ای عموماً انرژی را برحسب GeV، تکانه را برحسب GeV/c و جرم را برحسب GeV/c² اندازه می‌گیرند.

در این مقایسه وارد می‌شود، در محدوده ۵ قسمت در 10^9 برابر با صفر است. بنا به فرمولهای نسبیتی مربوط به تکانه و انرژی، این کمیت دقیقاً صفر است. بدین ترتیب، این آزمایشها تأیید فوق‌العاده دقیقی برای نسبیت فراهم می‌آورند. اما، علاوه بر فرمولهای مربوط به تکانه و انرژی، چندین جنبه دیگر نسبیت در تحلیل این آزمایشها ناگزیر دخالت می‌کنند. بنابراین، اگرچه این آزمایشها آزمونی برای فرمولهای مربوط به تکانه و انرژی فراهم می‌آورند اما این آزمون را نمی‌توان قاطع دانست.

پس از این بحث فرعی درباره آزمایشها، به معادله ۷-۴۶ می‌پردازیم. معادله ۷-۴۶ را برحسب انرژی نسبیتی E به صورت زیر می‌نویسیم

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) \quad (53-7)$$

عبارت ۷-۵۳ را چاربردار انرژی-تکانه می‌نامند. برای مراجعه بعدی، تبدیل لورنتس را برای p^μ می‌نویسیم؛ اگر سرعت V در امتداد محور x باشد، این تبدیل عبارت است از

$$\begin{aligned} E' &= \frac{E - V p_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & p'_y &= p_y \\ p'_x &= \frac{p_x - VE/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & p'_z &= p_z \end{aligned} \quad (54-7)$$

توجه کنید که این معادلات تبدیل لورنتس انرژی و تکانه را باهم ترکیب می‌کنند. این امر پیامدهای مهمی برای پایستگی انرژی دارد: در هر برخوردی، انرژی نسبیتی کل دستگاه ذرات به شرطی پایسته است که تکانه پایسته باشد. برای اثبات این قانون پایستگی، فرض کنید E انرژی کل و \mathbf{P} تکانه کل دستگاه ذرات باشد:

$$E = \sum_A E_A \quad \mathbf{P} = \sum_A \mathbf{p}_A$$

که در آنها جمع روی تمام ذرات دستگاه زده می‌شود. چون $P^\mu = (E/c, P_x, P_y, P_z)$ چاربردار است، تغییر ΔP^μ در P^μ که از برخورد ایجاد می‌شود نیز چاربردار است و از قانون تبدیل لورنتس تبعیت می‌کند:

$$\Delta E' = \frac{\Delta E - V \Delta P_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (55-7)$$

$$\Delta P'_x = \frac{\Delta P_x - V \Delta E/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (56-7)$$

با این فرض که تکانه پایسته است (در هر دو چارچوب مرجع)، داریم $\Delta P_x = \Delta P'_x = 0$ ، و از معادله‌های ۵۵-۷ و ۵۶-۷ نتیجه می‌شود که $\Delta E = \Delta E' = 0$. این نتیجه نشان می‌دهد که پایستگی انرژی پیامدی از پایستگی تکانه است. این دو قانون پایستگی مستقل نیستند زیرا انرژی و تکانه چیزی جز مؤلفه‌های یک شیئی P^μ نیستند.

این محاسبه سؤال حیرت‌انگیزی پیش می‌آورد: چگونه یک برخورد ناکشسان که اتلاف انرژی جنبشی به‌همراه دارد، منجر به پایستگی انرژی کل می‌شود؟ جواب این است که هر اتلاف انرژی جنبشی ناشی از فرایندهای «اصطکاکي» با کسب انرژی جرم سکون جبران می‌شود به طوری که انرژی کل E ثابت می‌ماند. برای مثال، در برخورد کاملاً ناکشسان دو گلولهٔ خمیر، انرژی جنبشی به انرژی گرمایی داخلی گلوله‌ها تبدیل می‌شود؛ این انرژی گرمایی در انرژی جرم سکون گلوله‌ها شرکت می‌کند. پس از برخورد جرم گلوله‌ها کمی بیشتر شده است. مؤلفه‌های هموردای بردار انرژی - تکانه عبارت‌اند از

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -p_x, -p_y, -p_z \right) \quad (57-7)$$

و حاصلضرب نرده‌ای ۵۷-۷ و ۵۳-۷ عبارت است از

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 \quad (58-7)$$

از فرمولهای نسبیتی E و \mathbf{p} به آسانی می‌توان واریسی کرد که

$$\frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2 c^2 \quad (59-7)$$

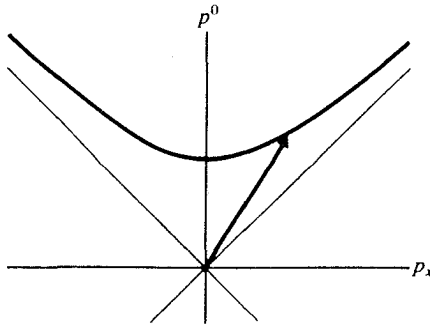
به طوری که

$$p_\mu p^\mu = m^2 c^2 \quad (60-7)$$

تمرین ۱۴- معادلهٔ ۵۹-۷ را واریسی کنید.

فیزیکدانها، و مخصوصاً فیزیکدانهای کوانتومی، از فضای تکانه زیاد استفاده می‌کنند؛ این فضا یک فضای چهاربعدی با محورهای p^0, p_x, p_y, p_z است. در این فضا معادلهٔ

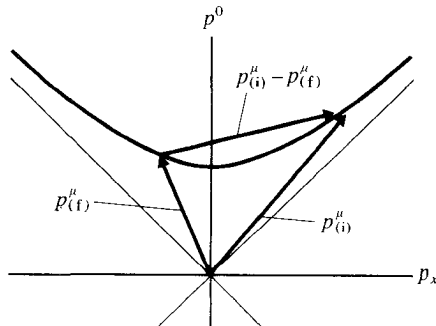
$$p^{\circ 2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2 c^2 \quad (61-7)$$



شکل ۴-۷ پوستهٔ جرم در فضای تکانه. این نمودار تنها یکی از محورهای فضا، و بنابراین مقطع هذلولیوار را نشان می‌دهد. تنها شاخهٔ بالایی هذلولیوار، با $p^0 > 0$ ، دارای معنی فیزیکی است.

یک هذلولیوار به نام پوستهٔ جرم تعریف می‌کند. بردار انرژی-تکانه p^μ باید مبدأ را به نقطه‌ای روی پوستهٔ جرم متصل کند (شکل ۴-۷). چون $p^0 \geq 0$ ، بردار انرژی-تکانه باید همیشه به سمت بالا، داخل ناحیه‌ای که در نمودار فضا-زمان با آیندهٔ مطلق نشان داده می‌شود، باشد (با شکل ۶-۱۳ مقایسه کنید). در مورد خاصی که ذره دارای جرم سکون صفر است (فوتون، گراویتون، نوترینو)، $m = 0$ و هذلولیوار به یک مخروط تبدیل می‌شود؛ بردار انرژی-تکانهٔ چنین ذره‌ای با محور p^0 همیشه زاویهٔ 45° می‌سازد.

نمودارهای فضای تکانه گاهی به ما امکان می‌دهند تا با یک نگاه پی ببریم که بعضی از واکنشها بنا به پایستگی انرژی-تکانه ممنوع هستند. برای مثال، گسیل فوتون توسط ذرهٔ متحرکی را در نظر بگیرید. شکل ۵-۷ بردارهای انرژی-تکانهٔ اولیهٔ (i) و نهایی (f) این ذره را نشان می‌دهد.



شکل ۵-۷ بردارهای انرژی-تکانهٔ اولیه و نهایی برای ذره‌ای که می‌خواهد فوتون گسیل کند. تفاضل این بردارها بردار انرژی-تکانهٔ این فوتون را نمایش می‌دهد.

تفاضل $p_{(i)}^{\mu} - p_{(f)}^{\mu}$ ، که در این شکل نشان داده شده است، تکانه فوتون (فرضی) را نمایش می‌دهد. $p_{(i)}^{\mu}$ و $p_{(f)}^{\mu}$ را هر طور انتخاب کنیم بدیهی است که این تفاضل نمی‌تواند با محور p° زاویه 45° بسازد؛ در نتیجه، این تفاضل نمی‌تواند نمایشگر تکانه فوتون باشد، و این واکنش غیرممکن است. در این استدلال ضرورت دارد که $p_{(i)}^{\mu}$ و $p_{(f)}^{\mu}$ روی یک پوسته جرم واقع باشند (عدم تغییر جرم ذره). گسیل فوتون تنها در صورتی ممکن است که جرم فرستنده تغییر کند. وقتی سرعت ذره به سرعت نور میل می‌کند ($v \rightarrow c$) انرژی به بینهایت میل می‌کند:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \rightarrow \infty \quad (62-7)$$

در نتیجه، سرعت ذرات دارای جرم سکون متناهی را نمی‌توان به سرعت نور رسانید. ذراتی که جرم سکونشان صفر است دارای سرعت $v = c$ هستند، و معادله ۶۲-۷ مبهم می‌شود. این امر به سادگی نشان می‌دهد که انرژی را نمی‌توان از سرعت محاسبه کرد؛ تمام ذرات دارای سرعت یکسان c هستند. اما، معادله ۵۹-۷ معتبر می‌ماند و از آن به دست می‌آوریم

$$E = c|p| \quad (63-7)$$

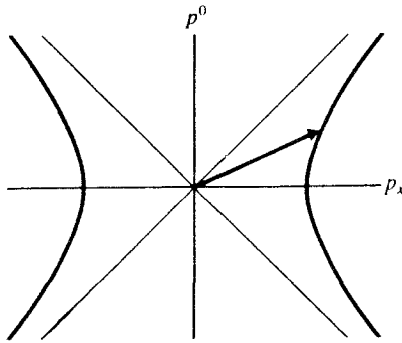
توجه کنید که معادله ۶۳-۷، که برای ذرات با جرم سکون صفر دقیق است، تقریب خوبی برای ذراتی است که جرم سکون آنها صفر نیست به شرطی که $E \gg mc^2$ ، یعنی $v \simeq c$. اگرچه معادله ۶۲-۷ نشان می‌دهد که غیرممکن است سرعت ذره معمولی را بیشتر از سرعت نور کرد، وجود ذره‌ای را که سرعت $v > c$ دارد، و همیشه داشته است، رد نمی‌کند. نکته این است که انرژی اگرچه در $v = c$ واگراست به ازای $v > c$ متناهی است. روشن است که اگر جرم سکون حقیقی باشد، آنگاه به ازای $v > c$ انرژی انگاری (و بنابراین بی‌معنی) می‌شود. اما برای ذره‌ای که همیشه با سرعت $v > c$ حرکت می‌کند حق داریم فرض کنیم که جرم یک عدد انگاری محض است:

$$m = i|m| \quad (64-7)$$

و

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{i|m|c^2}{i\sqrt{v^2/c^2 - 1}} = \frac{|m|c^2}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} \quad v > c \quad (65-7)$$

در اینجا بردار انرژی - تکانه عبارت است از



شکل ۶-۷ پوستهٔ جرم برای تاخون.

$$p^\mu = \left(\frac{|m|c}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}, \frac{|m|}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} \frac{dx}{dt}, \frac{|m|}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} \frac{dy}{dt}, \frac{|m|}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} \frac{dz}{dt} \right)$$

به‌ازای $v > c$ (۶۶-۷)

و

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = -|m|^2 c^2 \quad (۶۷-۷)$$

ذرات با $v > c$ را تاخون می‌نامند. شکل ۶-۷ پوستهٔ جرم را برای این نوع ذرات نشان می‌دهد. چنانکه قبلاً در بخش ۴-۶ اشاره شد، انتقال علامت توسط تاخونها ما را در مورد مفهوم علیت به دردرس می‌اندازد. هیچ تاخیونی تاکنون کشف نشده است. اکنون انرژی جرم سکون را با تفصیل بیشتری مورد بحث قرار می‌دهیم. بنابه معادلهٔ ۷-۵، انرژی ذرهٔ ساکن برابر است با

$$E_0 = mc^2 \quad (۶۸-۷)$$

تا وقتی با ذرهٔ معینی که جرم ثابت معلومی دارد سروکار داریم انرژی جرم سکون چیزی جز یک ثابت جمعی در انرژی نیست، و معنی فیزیکی ندارد. انرژی جرم سکون تنها وقتی معنی فیزیکی پیدا می‌کند که ذره متحمل واکنشی شود که جرم سکون آن را تغییر دهد، و این با تبدیل انرژی جرم سکون به انواع دیگر انرژی همراه است. واکنشهایی که جرم سکون را تغییر می‌دهند تنها در صورتی امکان دارند که ذره دارای ساختار داخلی باشد— مثلاً اگر این «ذره» هسته، اتم یا

دستگاهی متشکل از چندین اتم باشد. این نوع «ذره» را می‌توان دستگاهی از ذرات نقطه مانند در نظر گرفت. ثابت می‌کنیم که رابطهٔ ۶۸-۷ برای چنین دستگاهی همیشه صادق است، یعنی انرژی سکون کل دستگاه با جرم آن برابر است.

اما ابتدا باید تعریف دقیقی از چارچوب سکون و انرژی سکون ارائه کنیم. منظور از چارچوب سکون چارچوب مرجعی است که دستگاه در آن دارای تکانهٔ صفر است؛ این چارچوب مرجع را غالباً چارچوب مرکز تکانه یا CM نیز می‌نامند.^۱ انرژی سکون E_0 دستگاه را انرژی اندازه‌گیری شده در چارچوب سکون تعریف می‌کنیم. اگر CM با سرعت v در آزمایشگاه حرکت کند، از تبدیلات لورنتس برای انرژی و تکانهٔ دستگاه در چارچوب آزمایشگاه داریم

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (۶۹-۷)$$

$$\mathbf{P} = \frac{E_0 \mathbf{v}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (۷۰-۷)$$

تمرین ۱۵- معادله‌های ۶۹-۷ و ۷۰-۷ را به دست آورید.

اما، اگر دستگاهی به جرم M داشته باشیم که با سرعت v حرکت می‌کند، انرژی و تکانهٔ آن باید برابر باشد با

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (۷۱-۷)$$

$$\mathbf{P} = \frac{M\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (۷۲-۷)$$

مقایسهٔ معادله‌های ۶۹-۷ و ۷۰-۷ با معادله‌های ۷۱-۷ و ۷۲-۷ نشان می‌دهد که

$$E_0 = Mc^2 \quad (۷۳-۷)$$

یعنی انرژی CM هر دستگاهی با جرم آن برابر است.

به‌عنوان یک مثال، معادلهٔ ۷۳-۷ را در مورد دستگاه مقیدی مانند اتم یا هسته به‌کار می‌بریم. انرژی CM کل دستگاه عبارت است از انرژیهای ذرات به‌علاوهٔ انرژی پتانسیل، و در نتیجه جرم

۱. در فیزیک غیرنسبیتی، چارچوب مرکز تکانه با چارچوب مرکزجرم یکی است. در فیزیک نسبیتی این مطلب صحیح نیست، و ما چارچوب مرکز جرم را کلاً کنار می‌گذاریم.

دستگاه برابر است با

$$M = \sum_i \frac{m_{(i)}}{\sqrt{1 - v_{(i)}^2/c^2}} + U/c^2 \quad (74-7)$$

که در آن جمع روی تمام ذرات دستگاه زده می‌شود. مناسب است که انرژیهای ذرات را به انرژیهای جنبشی و جرم سکون تفکیک کنیم:

$$M = \sum_i m_{(i)} + \left(\sum_i T_i + U \right) / c^2 \quad (75-7)$$

که در آن

$$T_i = \frac{m_{(i)}c^2}{\sqrt{1 - v_{(i)}^2/c^2}} - m_{(i)}c^2 \quad (76-7)$$

برای دستگاه مقید جمله داخل پراتز در معادله ۷۵-۷ منفی است. این جمله انرژی بستگی است. در نتیجه، جرم کل کمتر از مجموع جرمهای سکون ذرات است. برای هسته‌ها انرژی بستگی بسیار زیاد است، و اختلاف جرم هسته و مجموع جرمهای ذرات به چندین درصد می‌رسد.

برای دستگاهی متشکل از ذرات آزاد، جرم از معادله ۷۵-۷ به‌ازای $U = 0$ به‌دست می‌آید. جرم کل چنین دستگاهی بزرگتر از یا برابر با مجموع جرمهای سکون ذرات است. برای محاسبه معادله ۷۵-۷ باید به چارچوب CM برویم. این کار همیشه راحت نیست، و روش سریعتری برای محاسبه جرم به‌قرار زیر است: اگر انرژی-تکانه کل در چارچوب CM را با P'^{μ} نشان دهیم، آنگاه

$$P'^{\mu} = (Mc, 0, 0, 0) \quad (77-7)$$

اگر بردار انرژی-تکانه را در چارچوب آزمایشگاه با P^{μ} نشان دهیم، آنگاه

$$P'^{\mu} P'_{\mu} = P^{\mu} P_{\mu} \quad (78-7)$$

طرف چپ این معادله $M^2 c^2$ است؛ در نتیجه

$$M^2 c^2 = P^{\mu} P_{\mu} \quad (79-7)$$

این معادله جرم دستگاه را برحسب مقادیر آزمایشگاه بیان می‌کند. به‌خاطر معادله ۷-۷۹،
 $(P^\mu P_\mu)^{1/2} / c$ را غالباً جرم ناوردای دستگاه می‌نامند.

برای مثال، اگر دستگاه از یک پروتون با بردار انرژی-تکانه

$$p_{(p)}^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) \quad (۸۰-۷)$$

و یک نوترون ساکن با

$$p_{(n)}^\mu = (m_n c, 0, 0, 0) \quad (۸۱-۷)$$

تشکیل شده باشد، آنگاه جرم این دستگاه از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} M &= \frac{(P^\mu P_\mu)^{1/2}}{c} = \frac{[(p_{(p)}^\mu + p_{(n)}^\mu)(p_{\mu(p)} + p_{\mu(n)})]^{1/2}}{c} \\ &= \frac{[p_{(p)}^\mu p_{\mu(p)} + 2p_{(n)}^\mu p_{\mu(n)} + 2p_{(p)}^\mu p_{\mu(n)}]^{1/2}}{c} = \left(m_p^2 + m_n^2 + \frac{2Em_n}{c^2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (۸۲-۷)$$

اگر بخواهیم از برخورد این پروتون و نوترون یک پیوند مطابق با واکنش



ایجاد شود کمترین مقدار انرژی پروتون هنگامی است که محصولات واکنش یعنی p و π^- در چارچوب CM ساکن باشند. در این مورد، انرژی CM بعد از واکنش برابر است با

$$m_p + m_p + m_\pi \quad (۸۴-۷)$$

این مقدار، بنا به پایداری انرژی، باید برابر با انرژی CM قبل از واکنش باشد — یعنی معادله‌های ۷-۸۲ و ۷-۸۴ باید برابر باشند:

$$\left(m_p^2 + m_n^2 + \frac{2Em_n}{c^2} \right)^{1/2} = m_p + m_p + m_\pi \quad (۸۵-۷)$$

$$E = \frac{(m_p + m_p + m_\pi)^2 - m_p^2 - m_\pi^2}{2m_n} c^2 \quad (۸۶-۷)$$

این معادله انرژی مینیمم (انرژی آستانه) را برای واکنش تعیین می‌کند.

انرژی چارچوب مرکز تکانه M که از معادله ۸۲-۷ تعیین می‌شود بیان می‌کند که چه مقدار انرژی برای تولید ذره موجود است. توجه کنید که در حد بسیار نسبی ($E \gg m_p$)، به دست می‌آوریم

$$Mc^2 \simeq \sqrt{2Em_n} c^2 \quad (۸۷-۷)$$

چون $m_n \simeq 1 \text{ GeV}$ ، پروتونهای با انرژی $E \simeq 200 \text{ GeV}$ در برخورد با نوترونها حدود تنها 20 GeV انرژی CM می‌دهند. این امر نشان می‌دهد که استفاده از باریکه‌های برخوردکننده‌ای از ذرات که تکانه‌های مخالف دارند بسیار مفید است؛ در اینجا چارچوب CM چارچوب آزمایشگاه است، و انرژی CM مجموع انرژیهای ذرات است.

۳-۷ عملگرهای دیفرانسیلی در فضا-زمان

میدان الکتریکی یا مغناطیسی در حالت کلی تابعی است از فضا و زمان، یعنی میدانی در فضا-زمان است. برای فرمولبندی کردن معادلات نسبی برای این میدان فضا-زمانی لازم است مشتقات نسبت به فضا و زمان را به دست آوریم. از این لحاظ، عملگر گرادیان چهاربعدی نقشی اساسی دارد. عملگر گرادیان چهاربعدی دارای چهار مؤلفه است:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (۸۸-۷)$$

به جای $\partial/\partial x^\mu$ غالباً از نماد اختصاری ∂_μ استفاده می‌شود. قانون تبدیل برای ∂_μ عبارت است از

$$\partial'_\mu = a_\mu^\nu \partial_\nu \quad (۸۹-۷)$$

برای محاسبه رابطه بالا، ملاحظه می‌کنیم که از ضرب

$$x'^\alpha = a^\alpha_\nu x^\nu \quad (۹۰-۷)$$

در a_{α}^{μ} بنا به معادله ۷-۲۳، به دست می آوریم

$$a_{\alpha}^{\mu} x'^{\alpha} = a_{\alpha}^{\mu} a^{\alpha}_{\nu} x^{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = x^{\mu} \quad (91-7)$$

یعنی

$$x^{\mu} = a_{\alpha}^{\mu} x'^{\alpha} \quad (92-7)$$

این نتیجه صرفاً بیانگر این واقعیت است که a_{α}^{μ} تبدیل وارون a^{α}_{ν} را تعیین می کند. از قاعده مشتقات زنجیره ای نتیجه می گیریم که

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = a_{\alpha}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$$

که هم ارز معادله ۷-۸۹ است.

مؤلفه های عملگر ∂_{μ} ، همچنان که از شاخص پایین آنها استنباط می شود، به طور هموردا تبدیل می شوند. همچنین می توانیم عملگر زیر را معرفی کنیم

$$\partial^{\mu} = \eta^{\mu\nu} \partial_{\nu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (93-7)$$

که مؤلفه های آن به طور پادوردا تبدیل می شوند. پس حاصلضرب نرده ای

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (94-7)$$

ناورد است:

$$\partial'_{\mu} \partial'^{\mu} = \partial_{\mu} \partial^{\mu}$$

عملگر دیفرانسیلی مرتبه دوم $\partial_{\mu} \partial^{\mu}$ را عملگر موج یا دالامبری می نامند. این عملگر مشابه چهار بعدی عملگر لاپلاسی (معادله ۱-۷۴) است. همچنین، مشابه چهار بعدی معادله لاپلاس عبارت است از

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} \Phi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (95-7)$$

این یک معادله موج است. برای مثال، اگر تابع Φ تنها به t و x بستگی داشته باشد، معادله ۹۵-۷ تبدیل می‌شود به

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi(t, x) = 0 \quad (96-7)$$

که دارای جواب مشهور زیر است

$$\Phi(t, x) = f(ct \pm x)$$

که در آن f یک تابع اختیاری یک متغیره است. تابع $f(ct - x)$ نمایشگر موجی است که در جهت مثبت x حرکت می‌کند، و تابع $f(ct + x)$ نمایشگر موجی است که در جهت منفی x حرکت می‌کند.

تمرین ۱۶- نشان دهید $f(ct \pm x)$ جواب معادله ۹۶-۷ است. ■

یک میدان در فضا- زمان می‌تواند میدان نرده‌ای، برداری، یا تانسوری باشد. در هر نقطه معین از فضا- زمان، این میدان باید قانون تبدیل مناسبی را که از تعاریف بخش قبل مشخص می‌شود برآورده کند. برای مثال، در هر نقطه معین از فضا- زمان، میدان نرده‌ای Φ باید تحت تبدیلات لورنتس ناوردا بماند:

$$\Phi'(P) = \Phi(P) \quad (97-7)$$

اگر نقطه فضا- زمان P را با مختصات x^μ آن توصیف کنیم، معادله ۹۷-۷ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\Phi'(x'^\mu) = \Phi(x^\mu) \quad (98-7)$$

یا

$$\Phi'(x'^\mu) = \Phi(a_\alpha{}^\mu x'^\alpha) \quad (99-7)$$

اگر تابع $\Phi(x^\mu)$ معلوم باشد، معادله ۹۹-۷ تابع $\Phi'(x'^\mu)$ را به طور کامل تعیین می‌کند. توجه کنید که Φ' همان تابعی از x'^μ نیست که Φ از x^μ است. برای مثال، اگر $\Phi(x^\mu) = ax^\circ + bx^1$ از

تبدیل لورنتس ۴-۷ داریم

$$\Phi'(x'^{\mu}) = a \frac{x'^0 + Vx'^1/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} + b \frac{x'^1 + Vx'^0/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (100-7)$$

اما در هر نقطه معین — با مختصات هم‌ارز x'^{μ} و x^{μ} — توابع Φ و Φ' دارای مقدار عددی یکسانی هستند.

هرگاه عملگر دیفرانسیلی ∂_{μ} روی یک میدان فضا-زمانی عمل کند، میدان فضا-زمانی دیگری ایجاد می‌کند. اگر ∂_{μ} روی میدان نرده‌ای Φ عمل کند، میدان برداری

$$\partial_{\mu}\Phi \quad (101-7)$$

را ایجاد می‌کند. اگر ∂_{μ} روی میدان برداری B_{ν} عمل کند، میدان تانسوری

$$\partial_{\mu}B_{\nu} \quad (102-7)$$

را به وجود می‌آورد. و اگر ∂_{μ} روی میدان تانسوری $F_{\alpha\beta}$ عمل کند، میدان تانسوری رتبه سوم زیر را ایجاد می‌کند

$$\partial_{\mu}F_{\alpha\beta} \quad (103-7)$$

اما، هرگاه عملگر دیفرانسیلی $\partial^{\mu}\partial_{\mu}$ که مانند نرده‌ای رفتار می‌کند — روی یک نرده‌ای، بردار، یا تانسور عمل کند، تنها یک نرده‌ای، بردار، یا تانسور جدید ($\partial_{\mu}\partial^{\mu}\Phi$ ، $\partial_{\mu}\partial^{\mu}B_{\nu}$ ، یا $\partial_{\mu}\partial^{\mu}F_{\alpha\beta}$) به وجود می‌آورد.

۴-۷ چاربردار جریان

در بخش ۵-۱ مفاهیم چگالی بار $[\rho(t, \mathbf{x})]$ و چگالی جریان $[\mathbf{j}(t, \mathbf{x})]$ را برای توصیف توزیع پیوسته بار معرفی کردیم. این چگالیه‌ها از معادله پیوستگی زیر تبعیت می‌کنند

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (104-7)$$

که بیانگر پایستگی بار الکتریکی است. در این بخش خواهیم دید که معادله ۱۰۴-۷ در نمادنگاری چهاربعدی چگونه نوشته می‌شود.

ابتدا ثابت می‌کنیم شیئی چهار مؤلفه‌ای

$$j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z) \quad (۱۰۵-۷)$$

یک چار بردار یا دقیقتر یک میدان چار برداری است. برای این مقصود، در آغاز ρ و \mathbf{j} را برحسب چگالی و سرعت ذرات باردار می‌نویسیم (با معادله‌های ۱۱۸-۱ و ۱۲۱-۱ مقایسه کنید)

$$\rho = qn \quad (۱۰۶-۷)$$

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{v} \quad (۱۰۷-۷)$$

که در آنها n چگالی ذرات و \mathbf{v} سرعت آنهاست؛ به‌طور کلی، این دو کمیت بستگی به مکان دارند. توجه کنید که فرض کرده‌ایم تنها یک نوع ذره با بار q در چگالی بار و چگالی جریان سهم دارد. اگر چند نوع ذره داشته باشیم، باید چگالیهای بار آنها را با هم و چگالیهای جریان آنها را با هم جمع کنیم. اگر در یک نقطه فضا-زمان سرعت ذرات \mathbf{v} باشد، در آن نقطه چگالی n که در آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شود و چگالی ویژه n_0 که در چارچوب سکون ذرات اندازه‌گیری می‌شود با رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند

$$n = \frac{n_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (۱۰۸-۷)$$

این رابطه نتیجه بلاواسطه فرمول انقباض حجم ۷۱-۶ است—حجم مربوط به تعداد ثابتی از ذرات وقتی در آزمایشگاه اندازه‌گیری شود کمتر است تا هنگامی که در چارچوب سکون آنها اندازه‌گیری شود، و در نتیجه چگالی در آزمایشگاه بیشتر است تا در چارچوب سکون. اگر چگالی بار و چگالی جریان را برحسب n_0 بیان کنیم، به‌دست می‌آوریم:

$$\rho = \frac{qn_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (۱۰۹-۷)$$

$$\mathbf{j} = \frac{qn_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (۱۱۰-۷)$$

پس معادله ۱۰۵-۷ به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$j^\mu = qn_0 \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{v_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{v_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \quad (۱۱۱-۷)$$

شیء چهار مؤلفه‌ای در طرف راست این معادله چارسرعت u^μ است؛ در نتیجه

$$j^\mu = qn \cdot u^\mu \quad (۱۱۲-۷)$$

در اینجا، q و $n \cdot u^\mu$ نرده‌ای (و تحت تبدیلات لورنتس ناوردا) هستند،^۱ و u^μ یک چاربردار است. پس حاصلضرب $qn \cdot u^\mu$ یا j^μ نیز چاربردار است، که آن را چاربردار جریان می‌نامند. معادله پیوستگی ۷-۱۰۴ برحسب j^μ به صورت فشرده زیر نوشته می‌شود

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (۱۱۳-۷)$$

با نوشتن معادله پیوستگی به صورت بالا، بلافاصله پی می‌بریم که قانون پایستگی بار اصل نسبیت را برآورده می‌کند. معادله ۷-۱۱۳ تحت تبدیل لورنتس به صورت زیر درمی‌آید

$$\partial'_\mu j'^\mu = 0 \quad (۱۱۴-۷)$$

که قالب ریاضی معادله اصلی ۷-۱۱۳ را دارد — این معادله‌ها در هر دوچارچوب مرجع شبیه به هم‌اند. این نتیجه دقیقاً همان چیزی است که اصل نسبیت ایجاب می‌کند.

تمرین ۱۷- از معادلات تبدیل لورنتس برای چاربردار جریان، یعنی

$$\rho' = \frac{\rho - Vj_x/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (۱۱۵-۷)$$

$$j'_x = \frac{j_x - V\rho}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (۱۱۶-۷)$$

نشان دهید اگر سیمی در امتداد محور x در چارچوب xyz از لحاظ الکتریکی خنثی اما حامل جریان باشد، این سیم در چارچوب $x'y'z'$ خنثی نیست. ■

۱. اگر q ناوردا نباشد، بار مثلاً الکترون به حالت حرکت آن بستگی خواهد داشت. این نتیجه را می‌توان با استدلالهای نظری رد کرد زیرا منجر به نقض پایستگی بار (نقض معادله ۷-۱۱۳) می‌شود، و این به ناسازگارهایی می‌رسد که تغییرات غیرقابل قبولی در معادلات اساسی الکترودینامیک ایجاب می‌کنند. نتیجه مزبور را می‌توان بر پایه تجربی مستقیم نیز رد کرد زیرا وابستگی بار الکترون به حالت حرکت آن باعث می‌شود آنها دیگر خنثی نباشند. این امر با اندازه‌گیریهای تجربی ذکر شده در بخش ۲-۱، که ثابت می‌کند آنها با دقت ۱ بر $۱۰^{۲۱}$ خنثی هستند، تناقض دارد.

مراجع

1. D. J. Grove and J. G. Fox, *Phys. Rev.* **90**, 378 (1953).
2. V. P. Zrelov, A. A. Tyapkin, and P. S. Farrago, *Sov. Phys. JETP* **7**, 384 (1958).
3. Z. G. T. Guiragossian, G. B. Rothbart, M. R. Yearian, R. Á. Gearhart, and J. J. Murray, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 335 (1975).
4. D. Newman, G. W. Ford, A. Rich, and E. Sweetman, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 1355 (1978).

مسائل

۱-۷. ماتریس تبدیل برای چرخش حول محور z (معادله ۱-۲۰) عبارت است از

$$a_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

صریحاً وارسی کنید که این ماتریس شرایط تبدیل (عام) لورنتس را برآورده می‌کند.

۲-۷. الف) فرض کنید شیء $A(\mu, \nu)$ با دو شاخص این خاصیت را دارد که هرگاه B^{μ} یک بردار اختیاری باشد $A(\mu, \nu)B^{\mu}$ بردار است. نشان دهید $A(\mu, \nu)$ تانسور است. ب) فرض کنید شیء $A(\mu, \nu)$ این خاصیت را دارد که به‌ازای هر تانسور اختیاری $C^{\mu\nu}$ ، $A(\mu, \nu)C^{\mu\nu}$ نرده‌ای است. آیا می‌توان ثابت کرد که $A(\mu, \nu)$ تانسور است؟

۳-۷. دو بردار دارای این خاصیت‌اند که $A^{\mu}B_{\mu} = 0$. الف) فرض کنید $A^{\mu}A_{\mu} > 0$. نشان دهید $B^{\mu}B_{\mu} < 0$. ب) فرض کنید $A^{\mu}A_{\mu} = 0$. نشان دهید B^{μ} یا متناسب با A^{μ} است (یعنی $B^{\mu} = kA^{\mu}$) یا اینکه $B^{\mu}B_{\mu} < 0$.

۴-۷. فرض کنید X ماتریس زیر باشد

$$X = \begin{pmatrix} x^0 + x^2 & x^1 - ix^3 \\ x^1 + ix^3 & x^0 - x^2 \end{pmatrix}$$

الف) نشان دهید دترمینان این ماتریس $\eta_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}$ است. ب) فرض کنید ماتریس جدید X'

را با $X' = UXU^\dagger$ تعریف کنیم، که در آن

$$X' = \begin{pmatrix} x'^0 + x'^2 & x'^1 - ix'^3 \\ x'^1 + ix'^3 & x'^0 - x'^2 \end{pmatrix}$$

U یک ماتریس مختلط 2×2 است، و U^\dagger همیوگ هرmitی آن است؛ درمینان U برابر با ۱ است. نشان دهید x'^μ و x^μ با تبدیل خطی زیر به هم مربوط می‌شوند

$$x'^\mu = B^\mu{}_\nu x^\nu$$

که در آن ماتریس $B^\mu{}_\nu$ حقیقی است و تمام شرایط لازم را برای اینکه ماتریس تبدیل لورنتس باشد برآورده می‌کند. (ج) برای به دست آوردن تبدیل لورنتس ۴-۷ چه عناصری برای ماتریس U باید انتخاب کنیم؟

۷-۵ فرض کنید تانسور رتبه n (شاخص) نسبت به هر جفت از شاخصها متقارن است، و رد آن روی هر جفت از شاخصها صفر است، یعنی

$$A^{\mu\nu\alpha\beta\dots} = A^{\nu\mu\alpha\beta\dots} = A^{\mu\alpha\nu\beta\dots} = \dots$$

و

$$A_\mu{}^{\mu\alpha\beta\dots} = A_\mu{}^{\nu\mu\alpha\dots} = A_\mu{}^{\nu\alpha\mu\dots} = \dots = 0$$

نشان دهید این تانسور $(n+1)^2$ مؤلفه مستقل دارد. [راهنمایی: نشان دهید تانسوری که نسبت به هر جفت از شاخصهای متقارن است و تحت قید دیگری نیست دارای $(n+3)!/(3!n!)$ مؤلفه است.]

۷-۶ تانسور تناوب رتبه چهارم $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ به صورت زیر تعریف می‌شود: $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = 0$ مگر اینکه تمام شاخصها متفاوت باشند، $\varepsilon^{0123} = 1$ ، اگر $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = 1$ جایگشتی از ۰۱۲۳ با تعداد زوج ترانهش جفتهای مجاور باشد (مثلاً، $\varepsilon^{1032} = 1$)، اگر $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -1$ جایگشتی از ۰۱۲۳ با تعداد فرد ترانهش جفتهای مجاور باشد (مثلاً، $\varepsilon^{1023} = -1$). نشان دهید این تانسور تحت تبدیلات لورنتس به خودش تبدیل می‌شود.

۷-۷ الف) ذره‌ای در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند به طوری که شتاب آن همیشه موازی با سرعت است. در این مورد، می‌توانیم «جرم مؤثر» $m(v)$ را به عنوان ثابت تناسب بین dp/dt و

dv/dt تعریف کنیم:

$$\frac{dp}{dt} = m(v) \frac{dv}{dt}$$

نشان دهید $m(v) = m/(1 - v^2/c^2)^{3/2}$ ، که گاهی آن را جرم طولی می‌نامند. (ب) ذره‌ای روی یک دایره دارای حرکت دورانی یکتواخت است به طوری که شتاب آن همیشه بر سرعت عمود است. نشان دهید در این مورد $m(v) = m/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ ، که گاهی آن را جرم عرضی می‌نامند. (ج) نشان دهید اگر شتاب نه موازی با سرعت باشد نه عمود بر آن، آنگاه dp/dt همراستا با dv/dt نیست؛ در نتیجه نمی‌توان در حالت کلی جرم مؤثر تعریف کرد.

۷-۸ فرض کنید تاحیونی با سرعت نامتناهی ($v = \infty$) به یک پروتون ساکن برخورد. نشان دهید پروتون نمی‌تواند این تاحیون را جذب کند. [راهنمایی: هذلولی جرم را برای پروتون در فضای تکانه رسم کنید. تکانه‌های اولیه و نهایی پروتون را مشخص کنید.]

۷-۹ (الف) نشان دهید برای ذره بسیار نسبیتی با $v \simeq c$ ، تفاضل سرعت ذره و سرعت نور برابر است با

$$c - v = \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2$$

(ب) در شتابدهنده آزمایشگاه فرمی، پروتونها انرژی 1000 GeV یا 1 TeV به دست می‌آورند. تفاضل $c - v$ را برای این پروتونها محاسبه کنید. (ج) در شتابدهنده خطی استانفورد، الکترونها انرژی 40 GeV به دست می‌آورند. تفاضل $c - v$ را برای این الکترونها حساب کنید.

۷-۱۰ سرعت مرکز جرم دستگاهی از ذرات عبارت است از

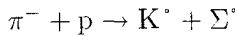
$$\mathbf{v}_{\text{مركز جرم}} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots + m_n \mathbf{v}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

سرعت مرکز تکانه برابر است با $\mathbf{v}_{\text{CM}} = \mathbf{P}/E$ (معادله‌های ۷-۶۹ و ۷-۷۰). با یک مثال خاص نشان دهید این سرعتها برای ذرات نسبیتی مختلف‌اند؛ بنابراین، چارچوب مرکز جرم با چارچوب مرکز تکانه یکی نیست.

۷-۱۱ در سنکروترون سوپر پروتون سرن، پروتونها و پادپروتونهای 27 GeV باهم برخورد رو در رو داده می‌شوند. در اینجا انرژی CM برابر با 54 GeV است. فرض کنید بخواهیم همین مقدار انرژی CM را در برخورد یک پروتون متحرک با یک پروتون ساکن به دست آوریم. پروتون متحرک چه مقدار انرژی باید داشته باشد؟

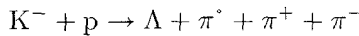
۷-۱۲ در حلقهٔ اصلی آزمایشگاه فرمی پروتونها با انرژی 1000 GeV یا 1 TeV را با پروتونهای ساکن برخورد می‌دهند. سرعت چارچوب مرکز تکانه را به دست آورید.

۷-۱۳ باریکه‌ای از مزونهای π^- به یک هدف هیدروژنی ساکن فرود می‌آید. مینیمم انرژی جنبشی را که π^- باید داشته باشد تا واکنش زیر شروع شود به دست آورید



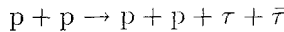
نتیجه را برحسب جرمهای سکون m_1, m_2, m_3 و m_4 به ترتیب مربوط به π^-, p, K^0 و Σ^0 بیان کنید.

۷-۱۴ باریکه‌ای پر انرژی از مزونهای K^- برای بمباران هدف هیدروژنی ساکن مورد استفاده قرار می‌گیرد. انرژی جنبشی مینیمم مزونهای K^- را که برای واکنش زیر لازم است به دست آورید



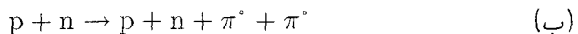
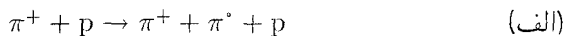
جرم ذرات p, K^-, Λ و π^0, π^+, π^- را به ترتیب $938 \text{ MeV}/c^2, 494 \text{ MeV}/c^2, 938 \text{ MeV}/c^2$ و $137 \text{ MeV}/c^2$ بگیرد.

۷-۱۵ فیزیکدانی می‌خواهد با واکنش زیر از برخورد پروتونها ذرات تاو ایجاد کند (τ نمایشگر ذره تاو و $\bar{\tau}$ نمایشگر ذره پادتاو است)



جرم پروتون $938 \text{ MeV}/c^2$ و جرم تاو (و پادتاو) $1781 \text{ MeV}/c^2$ است. (الف) اگر هدف پروتونی با باریکهٔ پروتونی بمباران شود، مینیمم انرژی جنبشی پروتونهای باریکه چه مقدار باید باشد تا واکنش بالا انجام شود؟ (ب) اگر از دو باریکهٔ پروتونی در برخورد رو در رو («باریکه‌های متصادف») استفاده شود، مینیمم انرژی جنبشی پروتونها را به دست آورید.

۷-۱۶ در هر یک از واکنشهای زیر، انرژی جنبشی آستانه را برای ذرات فرودی به دست آورید:



در هر واکنش ابتدا ذرهٔ فرودی نوشته شده است، و ذرهٔ هدف ساکن است. جرم پيونهای π^+ و π^0 به ترتیب برابر است با $137 \text{ MeV}/c^2$ و $135 \text{ MeV}/c^2$.

۱۷-۷ الف) ذره ساکنی به جرم m به n ذره به جرمهای m_1, m_2, \dots, m_n و امی باشد. نشان دهید انرژی جنبشی ماکزیمومی که ذره i می تواند داشته باشد برابر است با

$$\Delta mc^2 \left(1 - \frac{m_i}{m} - \frac{\Delta m}{2m} \right)$$

که در آن

$$\Delta m = m - \sum_{i=1}^n m_i$$

[راهنمایی: ذره i وقتی ماکزیموم انرژی به دست می آورد که تمام ذرات دیگر کنار هم بمانند و در جهت مخالف i پس بزنند.] (ب) بیشترین مقدار ممکن انرژی جنبشی هر یک از محصولات واپاشی را در واکنش زیر به دست آورید

$$\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu$$

جرم π^+ و π^0 به ترتیب $139,567 \text{ MeV}/c^2$ و $134,963 \text{ MeV}/c^2$ است.

۱۸-۷ یک مزون π^0 با انرژی کل 250 MeV به دو پرتو گاما و امی باشد به طوری که یکی از آنها در جهت حرکت مزون و دیگری در خلاف جهت آن گسیل می شود. انرژی هر یک از پرتوهای گاما را به دست آورید.

۱۹-۷ دو پرتو گاما، هر یک با انرژی $E > m_e c^2$ ، باهم برخورد می کنند. اگر زاویه بین راستاهای انتشار آنها برابر با $\phi = 180^\circ$ باشد (برخورد رودررو) ایجاد الکترون-پوزیترون امکانپذیر است. اگر این زاویه برابر با $\phi = 0^\circ$ باشد ایجاد ممکن نیست. زاویه بحرانی ϕ چه اندازه باشد تا ایجاد در آستانه وقوع قرار گیرد؟

۲۰-۷ الف) نشان دهید در فیزیک نسبیتی سرعت نهایی v موشکی که در فضای تهی توسط موتور شتاب می گیرد از رابطه زیر به دست می آید

$$\frac{M_i}{M} = \left(\frac{c+v}{c-v} \right)^{c/2v_{ex}}$$

که در آن M_i جرم اولیه موشک (شامل سوخت) در موقع پرتاب است، M جرم نهایی آن در اتمام سوخت است، و v_{ex} سرعت گازهای سوخته که از موشک خارج می شوند نسبت به موشک

است. [راهنمایی: به ازای جرم جزئی dm از گاز سوخته، پایستگی انرژی و تکانه در چارچوب سکون لحظه‌ای موشک ($x'y'z't'$) ایجاب می‌کند که

$$c^\tau dM = \frac{-c^\tau dm}{\sqrt{1 - v_{ex}^2/c^2}} \quad \text{و} \quad M dv' = \frac{v_{ex} dm}{\sqrt{1 - v_{ex}^2/c^2}}$$

به علاوه، رابطه

$$v + dv = \frac{v + dv'}{1 + v dv'/c^2}$$

از فرمول ترکیب سرعت به دست می‌آید.

(ب) برای سوخته‌های شیمیایی متداول $v_{ex} = 3 \times 10^5 \text{ cm/s}$. چه مقدار سوخت لازم است تا به ازای جرم نهایی ۱ تن سرعت نهایی $c/10$ به دست آید؟ (ج) از سوخت ماده-پادماده $v = c$ به دست می‌آید («گاز سوخته» فوتون است). در این مورد چه مقدار سوخت لازم است؟

۲۱-۷ با فرض اینکه $A^\mu(t, x)$ یک میدان برداری با مؤلفه‌های زیر باشد

$$A^\mu(t, x) = (0, \cos(\Delta x - \Upsilon ct), \cos(\Delta x - \Upsilon ct), 0)$$

میدان برداری $A'^\mu(t', x')$ را تعیین کنید، که در آن t' و x' با تبدیل لورنتس ۴-۷ به t و x مربوط می‌شوند. جواب را به صورت تابعی از t' و x' بنویسید.

۲۲-۷ با فرض اینکه $\Phi(t, x)$ یک میدان نرده‌ای باشد، نشان دهید انتگرال

$$\int \Phi(t, x) dV dt$$

که روی حجم چهار بعدی معینی از فضا-زمان گرفته می‌شود نرده‌ای است. [راهنمایی: برای تبدیل $dV dt$ از انقباض حجم و اتساع زمان استفاده کنید؛ یا از درمیان ژاکوبی استفاده کنید.]

۲۳-۷ با فرض اینکه چگالی جریان j^μ تنها در حجمی متناهی در راستاهای x ، y و z مخالف صفر است، نشان دهید بار کل

$$Q = \int j^0 dV$$

تحت تبدیلات لورنتس نرده‌ای است. [راهنمایی: از $\partial_\mu J^\mu = 0$ روی حجم یک جهانلوله چهاربعدی که ناحیه مورد نظر را در برمی‌گیرد و از $x^0 = \text{const}$ تا $x^0 = \text{const}$ کشیده شده است انتگرال بگیرید. انتگرال حجمی چهاربعدی را با استفاده از قضیه گاوس به انتگرال سطحی تبدیل کنید].

۲۴-۷ با فرض اینکه میدان برداری $J^\mu(t, \mathbf{x})$ در معادله دیفرانسیل

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

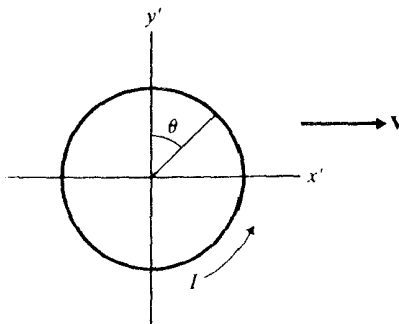
صدق می‌کند و تنها در حجمی متناهی در راستاهای x, y و z مخالف صفر است، نشان دهید

$$\frac{d}{dt} \left(\int J^0 dV \right) = 0$$

[راهنمایی: از $\partial_\mu J^\mu = 0$ روی حجم یک جهانلوله چهاربعدی که ناحیه مورد نظر را در برمی‌گیرد و از $x^0 = \text{const}$ تا $x^0 = \text{const}$ کشیده شده است انتگرال بگیرید. انتگرال حجمی چهاربعدی را با استفاده از قضیه گاوس به انتگرال سطحی تبدیل کنید].

۲۵-۷ یک سیم مستقیم نازک حامل جریان $3 \times 10^{11} \text{ esu/s}$ (100 آمپر) است. این سیم در چارچوب مرجع آزمایشگاه $xyzt$ از لحاظ الکتریکی خنثی است. در چارچوب مرجع $x'y'z't'$ که با $V = 0.8c$ در راستای موازی با سیم حرکت می‌کند بار واحد طول سیم را به دست آورید.

۲۶-۷ در چارچوب سکون یک حلقه دایره‌ای از سیم، جریان ثابت I در حلقه برقرار است. فرض کنید این حلقه با سرعت V از مقابل شما عبور کند؛ این سرعت در صفحه حلقه است (شکل ۷-۷). چه چگالی باری (بار واحد طولی) در حلقه مشاهده می‌کنید؟ جواب خود را به صورت تابعی از



شکل ۷-۷ حلقه دایره‌ای سیمی با جریان I که با سرعت V حرکت می‌کند.

زاویه مرکزی θ که در چارچوب سکون حلقه تعریف می‌شود بیان کنید.

۷-۲۷ در دو صفحه رسانای موازی افقی بزرگ جریانهایی در دو جهت مخالف x منفی و x مثبت برقرارند. در هر صفحه جریان به‌طور یکنواخت توزیع شده است، و در راستای عمود بر جریان در هر سانتیمتر مقدار بار k esu در ثانیه عبور می‌کند. نشان دهید در چارچوب مرجعی که با سرعت V در جهت مثبت x حرکت می‌کند صفحه‌ها حامل جریان و چگالی بار هستند، و میدان الکتریکی ناشی از این چگالی بار را به‌دست آورید.



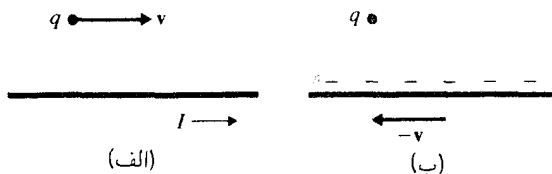
الکترو دینامیک نسبیتی

اکنون می‌خواهیم برای برهم‌کنشهای الکتریکی نظریه‌ای نسبیتی بسازیم. یعنی می‌خواهیم معادلات الکتروستاتیک غیرنسبیتی فصل ۲ را به‌گونه‌ای تعمیم دهیم که اصل نسبیت را برآورده کنند. معلوم می‌شود که نتیجه‌ای که به دست می‌آوریم یکتاست: یک و تنها یک مجموعه از معادلات نسبیتی وجود دارد که در حد استاتیک به معادلات الکتروستاتیک تبدیل می‌شود. یک نتیجه فرعی این بررسیها این است که میدان الکتریکی برای توصیف برهم‌کنشهای بین بارها کفایت نمی‌کند؛ هرگاه با بارهای متحرک سروکار داشته باشیم یک میدان دیگر — میدان مغناطیسی — ضرورت پیدا می‌کند.

۸-۱ چار بردار پتانسیل

در الکتروستاتیک، چگالی بار ρ مستقل از زمان است، و چگالی جریان \mathbf{j} صفر است. تحت این شرایط، معادلات فصل ۲ توصیف کاملی از برهم‌کنشهای الکتریکی به دست می‌دهند که برحسب یک تابع فضایی است: پتانسیل Φ . اگر \mathbf{j} صفر نباشد این تابع پتانسیل برای توصیف برهم‌کنشهای الکتریکی ناکافی است. این مطلب را با مثال ساده‌ی زیر روشن می‌کنیم.

سیم مستقیم درازی در نظر بگیرید که حامل چگالی جریان یکنواختی است اما چگالی بار ندارد. مثلاً، سیم می‌تواند حامل جریانی از الکترونهای رسانایی باشد که چگالی بار منفی آنها با چگالی بار یونهای مثبت شبکه بلوری سیم خنثی می‌شود. اکنون بار نقطه‌ای q را در نظر بگیرید



شکل ۱-۸ (الف) در چارچوب مرجع آزمایشگاه، سیم ساکن است و بار نقطه‌ای q به سمت راست حرکت می‌کند. سیم حامل جریان است اما از لحاظ الکتریکی خنثی است. (ب) در چارچوب $x'y'z't'$ بار نقطه‌ای q ساکن است و سیم به سمت چپ حرکت می‌کند. در اینجا سیم چگالی بار منفی دارد.

که با سرعت v موازی با سیم حرکت می‌کند (شکل ۱-۸ الف). چون بار کل سیم صفر است، در چارچوب آزمایشگاه (چارچوب $xyzt$) میدان الکتریکی وجود ندارد. با این همه، سیم نیرویی بر بار متحرک وارد می‌کند. برای پی بردن به این امر، به چارچوب سکون بار q (چارچوب $x'y'z't'$) می‌رویم (شکل ۱-۸ ب). در این چارچوب مرجع، بنابه معادلات تبدیل چگالی‌های بار و جریان (معادله‌های ۱۱۵-۷ و ۱۱۶-۷) داریم

$$\rho' = \frac{\rho - vj_x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -\frac{vj_x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (۱-۸)$$

$$j'_x = \frac{j_x - v\rho}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{j_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (۲-۸)$$

باتوجه به معادله ۱-۸، چگالی بار مخالف صفر است، و بنابراین در این چارچوب مرجع میدان الکتریکی وجود دارد. این میدان الکتریکی نیرویی بر بار q وارد می‌کند.

تمرین ۱- نشان دهید در چارچوب سکون بار q سیم با یک میدان الکتریکی شعاعی احاطه شده است که بزرگی آن برابر است با

$$E' = \frac{2\pi R^2 \rho'}{r} = -\frac{2\pi R^2 v j_x / c^2}{r \sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (۳-۸)$$

که در آن R شعاع سیم است.

اگر بار q مثبت و سرعت آن هم جهت با z باشد، آنگاه نیروی وارد بر این بار جاذبه است (شکل ۱-۸ ب). وجود این نیروی شعاعی در چارچوب $x'y'z't'$ وجود نیروی متناظری را در چارچوب اصلی یعنی آزمایشگاه ایجاب می‌کند. چون در این چارچوب چگالی بار نداریم، این نیرو باید به نحوی از جریان ناشی شده باشد. پس نتیجه‌ای که از این مثال می‌گیریم این است که جریان

به بار متحرک نیرو وارد می‌کند. پتانسیل Φ این نوع جدید نیرو را منظور نمی‌کند. در مثال بالا، نیرو را نمی‌توان از پتانسیل در چارچوب آزمایشگاه محاسبه کرد. هدف ما این است که معادلات توصیف‌کننده این نوع نیروها را از نظریه نسبیتی برهم‌کنشهای الکتریکی به دست آوریم. آنچه احتیاج داریم مجموعه جدیدی از معادلات است که نه تنها چگالی بار بلکه چگالی جریان را نیز دربر بگیرند. برای به دست آوردن این معادلات، از معادله الکتروستاتیک زیر شروع می‌کنیم

$$-\nabla^2 \Phi = 4\pi\rho \quad (4-8)$$

و می‌کوشیم به تعمیمی برسیم که سه شرط زیر برای آن صادق باشند: اصل نسبیت را برآورده کند، وابستگی زمانی در ρ و Φ را ممکن کند، و اگر ρ و Φ مستقل از زمان باشند به معادله ۴-۸ منجر شود. معادله ۴-۸ به همین صورت که هست، اصل نسبیت را برآورده نمی‌کند. اگر این معادله در یک چارچوب مرجع برقرار باشد نمی‌تواند در یک چارچوب دیگر همین صورت را داشته باشد زیرا تبدیل لورنتس مشتقات صرفاً فضایی در معادله ۴-۸ را به مشتقات فضایی و زمانی مبدل می‌کند. اولین کاری که باید انجام دهیم تا مجموعه‌ای از معادلات صورت خود را تحت تبدیلات لورنتس حفظ کنند این است که یک عملگر دیفرانسیلی لورنتس-ناوردا را جانشین عملگر دیفرانسیلی $-\nabla^2$ کنیم. روشن است که عملگر لورنتس-ناوردای صحیح $\partial_\mu \partial^\mu$ است، زیرا این عملگری است که در موارد مستقل از زمان به $-\nabla^2$ تبدیل می‌شود. با این تغییر، معادله ۴-۸ به صورت زیر درمی‌آید

$$\partial^\mu \partial_\mu \Phi = 4\pi\rho \quad (5-8)$$

چون $c\rho$ مؤلفه j^0 چاربردار جریان است، معادله بالا را به صورت زیر نیز می‌توانیم بنویسیم

$$\partial^\mu \partial_\mu \Phi = \frac{4\pi}{c} j^0 \quad (6-8)$$

اگر بخواهیم این معادله در تمام چارچوبهای مرجع معتبر باشد دوطرف آن باید یکسان تبدیل شوند، یعنی دوطرف باید مؤلفه‌های تانسوری همونوع باشند. طرف راست مؤلفه زمانی یک چاربردار است. چون عملگر دیفرانسیلی $\partial^\mu \partial_\mu$ نرده‌ای است، Φ الزاماً باید مؤلفه زمانی یک چاربردار باشد. این چاربردار را با A^μ نشان می‌دهیم؛ بنابه تعریف، $A^0 \equiv \Phi$ ، به طوری که

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\Phi, A_x, A_y, A_z) \quad (7-8)$$

این چاربردار را چاربردار پتانسیل می‌نامند. مؤلفه‌های فضایی آن یعنی $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ پتانسیل برداری می‌نامند. در این مرحله، هنوز تعبیری فیزیکی برای مؤلفه‌های فضایی نداریم. اما انتظار داریم نیروهایی که از طرف جریانها وارد می‌شوند به نحوی با این مؤلفه‌ها مربوط باشند.

معادلهٔ مربوط به پتانسیل برحسب A° عبارت است از

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\circ = \frac{4\pi}{c} j^\circ \quad (۸-۸)$$

چون تبدیلات لورنتس مؤلفه‌های چاربردار را آمیخته می‌کند، معادلهٔ مربوط به مؤلفهٔ زمانی بالا نمی‌تواند در تمام چارچوبهای مرجع معتبر باشد، مگر اینکه تمام مؤلفه‌های دیگر در معادله‌های مشابهی صدق کنند:

$$\partial^\mu \partial_\mu A^1 = \frac{4\pi}{c} j^1 \quad \partial^\mu \partial_\mu A^2 = \frac{4\pi}{c} j^2 \quad \partial^\mu \partial_\mu A^z = \frac{4\pi}{c} j^z \quad (۹-۸)$$

تمرین ۲- نشان دهید اگر یکی از معادله‌های ۸-۹ در یک چارچوب مرجع معین صادق نباشد، یک چارچوب مرجع دیگری وجود دارد که معادلهٔ مربوط به مؤلفهٔ زمانی در آن صادق نیست، یعنی $\partial'^\mu \partial'_\mu A'^\circ \neq 4\pi j'^\circ / c$.

از ترکیب معادله‌های ۸-۸ و ۹-۸ معادلهٔ دیفرانسیلی زیر را برای چاربردار پتانسیل به دست می‌آوریم

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (۱۰-۸)$$

این معادله صورت خود را تحت تبدیلات لورنتس حفظ می‌کند، یعنی تنها تغییری که تحت تبدیلات لورنتس در معادله رخ می‌دهد این است که تمام کمیتها پریم می‌گیرند:

$$\partial'^\mu \partial'_\mu A'^\nu = \frac{4\pi}{c} j'^\nu$$

پس این معادله اصل نسبیّت را برآورده می‌کند.

معادلهٔ ۱۰-۸ معادلهٔ اساسی میدان در الکترودینامیک نسبیّتی است. این یک معادلهٔ موج است که در آن چاربردار جریان چشمهٔ موج است— چگالی بار به منزلهٔ چشمهٔ پتانسیل (معادلهٔ ۸-۸) و چگالی جریان به منزلهٔ چشمهٔ پتانسیل برداری (معادلهٔ ۹-۸) عمل می‌کند. به طور شهودی، این معادله قابل درک است؛ هرگاه چگالی باریا جریان به نحوی تغییر کند، انتظار داریم میدان الکترودینامیکی در فضای محیط متحمل آشفتگی شود، و انتظار داریم این آشفتگی شکل موجی را داشته باشد که با سرعت نور از چشمهٔ خود دور می‌شود.

چاربردار پتانسیل علاوه بر معادلهٔ ۸-۱۰ باید در معادلهٔ زیر هم صدق کند

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \quad (۱۱-۸)$$

این معادله را شرط لورنتس می‌نامند. برای اینکه به منشأ این معادله پی ببریم، عملگر دیفرانسیلی ∂_ν را به دو طرف معادلهٔ ۸-۱۰ اعمال می‌کنیم:

$$\partial^\mu \partial_\mu (\partial_\nu A^\nu) = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu j^\nu \quad (۱۲-۸)$$

بنابه قانون پایستگی بار الکتریکی باید $\partial_\nu j^\nu = 0$ (معادلهٔ ۷-۱۱۳) و در نتیجه

$$\partial^\mu \partial_\mu (\partial_\nu A^\nu) = 0 \quad (۱۳-۸)$$

اگر قرار دهیم $\partial_\nu A^\nu = \Psi$ ، می‌توانیم معادلهٔ بالا را به صورت زیر بنویسیم

$$\partial^\mu \partial_\mu \Psi = 0 \quad (۱۴-۸)$$

این یک معادلهٔ موج است، و جوابهای آن «امواج Ψ » هستند که با سرعت نور منتشر می‌شوند. اما از آنجا که j^μ در معادلهٔ ۸-۱۴ ظاهر نمی‌شود این امواج کاملاً مستقل از چگالیهای بار و جریان هستند. بدین ترتیب امواج Ψ امواج آزادی هستند که هیچگاه با ذرات باردار برهم‌کنش ندارند؛ بنابراین، در مطالعهٔ الکترو دینامیک اهمیت فیزیکی ندارند، و می‌توانیم از آنها صرف‌نظر کنیم. پس بدون نقض کلیت می‌توانیم فرض کنیم $\Psi = 0$ یا $\partial_\nu A^\nu = 0$.

برای درک بهتر معادلهٔ ۸-۱۱، مورد الکتروستاتیک را بررسی می‌کنیم. اگر $A^k = 0$ ، معادلهٔ ۸-۱۱ منجر به $\partial A^0 / \partial x^0 = 0$ می‌شود؛ یعنی

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (۱۵-۸)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که Φ مستقل از زمان است. معادلهٔ ۸-۱۵ بدیهی نیست زیرا پتانسیل در الکتروستاتیک هم می‌تواند وابسته به زمان باشد. دلیل این مطلب این است که اگرچه میدان الکتریکی در الکتروستاتیک باید مستقل از زمان باشد اما این امر پتانسیل مستقل از زمان را ایجاب نمی‌کند. برای مثال، میدان الکتریکی با بزرگی E_0 در امتداد محور x را می‌توان هم با پتانسیل

$$\Phi(x) = -E_0 x \quad (۱۶-۸)$$

نمایش داد و هم با پتانسیل

$$\Phi(x) = -E \cdot x + bt \quad (۱۷-۸)$$

که در آن b یک ثابت اختیاری است.

تمرین ۳- واریسی کنید که از ۱۶-۸ و ۱۷-۸ میدان الکتریکی یکسانی به دست می آید. ■

در بحثهایی که قبلاً در الکتروستاتیک داشتیم همیشه به طور ضمنی فرض کرده ایم که در پتانسیل تابع جمعی زمانی وجود ندارد. معادله ۱۵-۸ این فرض را تصریح می کند، و می توان معادله ۱۱-۸ را تعمیم نسبیتی معادله ۱۵-۸ در نظر گرفت.

شرط لورنتس ۱۱-۸ معادله نسبیتی پتانسیل ۱۰-۸ را با قانون پایستگی بار الکتریکی سازگار می کند. اما راه دیگری هم برای رسیدن به این سازگاری وجود دارد. فرض کنید معادله ۱۰-۸ را با افزودن جمله $-\partial^\nu \partial_\mu A^\mu$ به طرف چپ تغییر دهیم؛ پس معادله جدید عبارت است از

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (۱۸-۸)$$

اگر عملگر ∂_ν را به دو طرف معادله بالا اعمال کنیم، به دست می آوریم

$$\partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu j^\nu \quad (۱۹-۸)$$

چون μ و ν شاخصهای ظاهری هستند (هر دو تکرار می شوند، که به معنی جمع روی آنهاست)، طرف چپ متحد با صفر است. بنابراین، بدون احتیاج به $\partial_\nu A^\nu = 0$ ، به سازگاری با پایستگی جریان می رسمیم.

روشن است که معادله تغییر یافته ۱۸-۸ اصل نسبیت را برآورده می کند. به علاوه، اگر A^ν مستقل از زمان باشد، مؤلفه زمانی این معادله ($\nu = 0$) با معادله الکتروستاتیک (معادله ۴-۸) توافق دارد. بدین ترتیب، معادله ۱۸-۸ جانشین قابل قبولی برای معادله چاربردار پتانسیل است. پس، در جستجوی تعمیم نسبیتی معادله پتانسیل به دو نتیجه می رسمیم. اما این ابهام نباید نگران کننده باشد. هر دو معادله پتانسیل به معادلات یکسانی برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی منجر می شوند. چنانکه خواهیم دید این میدانها یکتا و عاری از هر ابهامی هستند.

۲-۸ تانسور میدان و معادله حرکت

اکنون باید معنی فیزیکی مؤلفه های چاربردار پتانسیل A^μ را به دست آوریم. در این مرحله، تنها معنی A^ν را می دانیم؛ این مؤلفه پتانسیل الکتریکی است. در مورد استاتیک، منفی گرادیان پتانسیل

الکتریکی برابر است با میدان الکتریکی:

$$E^1 = \partial^1 A^0 \quad E^2 = \partial^2 A^0 \quad E^3 = \partial^3 A^0 \quad (20-8)$$

این معادلات چیزی دربارهٔ خواص تبدیل لورنتس میدان الکتریکی می‌گویند: E^1 ، E^2 و E^3 به ترتیب عبارت‌اند از مؤلفه‌های 1^0 ، 2^0 و 3^0 تانسور $\partial^\mu A^\nu$. شاید این مطلب کمی عجیب به نظر برسد. در سه بعد، عادت کرده‌ایم که E را یک کمیت برداری در نظر بگیریم؛ و ممکن است به سادگی انتظار داشته باشیم که در چهار بعد، E به نحوی به یک کمیت چاربرداری تعمیم یابد. اما مؤلفه‌های $\partial^k A^0$ در معادلهٔ 2^0-8 قسمتی از یک تانسور هستند و در نتیجه مؤلفه‌های E^k نیز از این قرارند. باید به خاطر داشته باشیم که معادلهٔ 2^0-8 تنها در مورد توزیع بار استاتیکی برقرار است. در مورد کلی توزیع بار وابسته به زمان، هنوز نمی‌دانیم چگونه میدان الکتریکی را از چاربردار پتانسیل محاسبه کنیم. به طور کلی، آنچه می‌توانیم از بحث خود با اطمینان نتیجه بگیریم این است که E^k قسمتی از تانسوری مانند $F^{\mu\nu}$ است:

$$E^k = F^{k0} \quad (21-8)$$

تانسور $F^{\mu\nu}$ را تانسور میدان می‌نامند. از این تانسور چه می‌دانیم؟

ذره‌ای با بار q در نظر بگیرید که در مجاورت توزیعی اختیاری از بار و جریان حرکت می‌کند. این بارها و جریانها بر ذره نیروهای الکتریکی و همچنین نیروهای دیگری وارد می‌کنند؛ این نیروهای دیگر نیروهای مغناطیسی هستند. برای اینکه نیروهای الکتریکی و مغناطیسی را به روشنی از هم تفکیک کنیم، به چارچوب سکون لحظه‌ای ذرهٔ q می‌رویم. بنابه تعریف، نیرویی را که ذره در چارچوب سکون خود متحمل می‌شود نیروی الکتریکی محض می‌گیریم، و میدان الکتریکی در این چارچوب مرجع را نیرو بر واحد بار تعریف می‌کنیم. این تعریف با تعریفی که در فصل ۲ گفتیم یکی است، اما در اینجا به چارچوب سکون ذره محدود شده است. (اگر بخواهیم میدان الکتریکی را در یک چارچوب مرجع دیگر بدانیم، باید از ذره‌ای که در این چارچوب مرجع ساکن است استفاده کنیم.) پس نیروی وارد بر ذره یا آهنگ تغییر تکانهٔ ذره در چارچوب سکون لحظه‌ای آن، برابر است با

$$\frac{dp'^k}{dt'} = qE'^k \quad (22-8)$$

چون در این چارچوب مرجع $dt' = d\tau$ می‌توانیم معادلهٔ $22-8$ را به صورت زیر نیز بنویسیم

$$\frac{dp'^k}{d\tau} = qE'^k \quad (23-8)$$

۱. توجه کنید که $\partial^1 = -\partial/\partial x$ در نتیجه، در معادلهٔ 2^0-8 علامتها درست هستند.

یا به صورت

$$\frac{dp'^k}{d\tau} = qF'^{k0} \quad (24-8)$$

این معادله را می‌توان تعریف عملیاتی مؤلفه‌های F'^{k0} مربوط به تانسور میدان $F'^{\mu\nu}$ در نظر گرفت. بنا به مشابهت با معادله ۲۴-۸، مؤلفه F'^{00} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\frac{dp'^0}{d\tau} = qE'^{00} \quad (25-8)$$

توجه کنید که در چارچوب سکون لحظه‌ای داریم

$$\frac{dp'^0}{d\tau} = \left(\frac{d}{d\tau} \right) \left[\frac{mc^2}{(\gamma - v^2/c^2)^{1/2}} \right] = \frac{mv}{(\gamma - v^2/c^2)^{3/2}} = 0$$

بنابراین، معادله ۲۵-۸ ایجاب می‌کند که $F'^{00} = 0$ ، اما این نتیجه تعریف را بی‌اعتبار نمی‌کند. از ترکیب معادله‌های ۲۴-۸ و ۲۵-۸، معادله چهار مؤلفه‌ای زیر را به دست می‌آوریم

$$\frac{dp'^\mu}{d\tau} = qF'^{\mu 0} \quad (26-8)$$

چون در چارچوب سکون $p'_\nu = m(c, 0, 0, 0)$ ، این معادله با معادله زیر یکسان است

$$\frac{dp'^\mu}{d\tau} = \frac{q}{mc} p'_\nu F'^{\mu\nu} \quad (27-8)$$

مزیت معادله ۲۷-۸ این است که خواص تبدیل لورنتس آن واضح‌اند، و با انتقال از چارچوب سکون به چارچوب آزمایشگاه، به دست می‌آوریم

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{mc} p_\nu F^{\mu\nu} \quad (28-8)$$

این معادله نسبیتهی حرکت ذره در میدان الکترومغناطیسی است. بعداً این معادله را دقیقتر بررسی خواهیم کرد.

اگر معادله ۲۸-۸ را در p_μ ضرب کنیم به دست می‌آوریم

$$p_\mu \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{mc} p_\mu p_\nu F^{\mu\nu} \quad (29-8)$$

طرف چپ این معادله متحد با صفر است.

تمرین ۴- نشان دهید $\circ \equiv p_\mu dp^\mu / d\tau = \text{const}$ [راهنمایی: $p_\mu p^\mu = m^2 c^2 = \text{const}$].
در نتیجه، طرف راست معادله ۸-۲۹ نیز باید متحد با صفر باشد. یعنی به ازای p_μ اختیاری داریم

$$p_\mu p_\nu F^{\mu\nu} = \circ \quad (۸-۳۰)$$

که تنها در صورتی ممکن است که

$$F^{\alpha\beta} + F^{\beta\alpha} = \circ \quad (۸-۳۱)$$

این معادله نشان می‌دهد $F^{\mu\nu}$ یک تانسور پادمتقارن است.

تمرین ۵- معادله ۸-۳۱ را به دست آورید. [راهنمایی: از معادله ۸-۳۰ نسبت به p_α و p_β مشتق بگیرید. توجه کنید که می‌توانیم از قید $p^\alpha p_\alpha = m^2 c^2$ صرف‌نظر کنیم زیرا معادله ۸-۳۰ باید به ازای تمام مقادیر ممکن جرم برقرار باشد].

تا اینجا پیشرفت قابل ملاحظه‌ای در ساختن الکترودینامیک نسبیتی داشته‌ایم. می‌دانیم چگونه جریان چاربردار پتانسیل ایجاد می‌کند (معادله ۸-۱۰)، و می‌دانیم چگونه تانسور میدان به ذره باردار نیرو وارد می‌کند (معادله ۸-۲۸). اما رابطه بین تانسور میدان $F^{\mu\nu}$ و چاربردار پتانسیل A^ν را به طور کامل نمی‌دانیم؛ در این باره تنها می‌دانیم که در مورد استاتیک $F^{k0} = \partial^k A^0$ و اینکه $F^{\mu\nu}$ به طور کلی پادمتقارن است. اما معلوم می‌شود که این اطلاعات برای تعیین کامل رابطه تقریباً کافی است. تنها فرض دیگری که احتیاج داریم این است که عبارت مربوط به تانسور میدان باید برحسب پتانسیل خطی باشد؛ این فرض بسیار طبیعی است و ایجاب می‌کند نیروی الکترودینامیکی (معادله ۸-۲۸) به جریان که میدان ایجاد می‌کند (معادله ۸-۱۰) به طور خطی مربوط باشد. این فرض را به علت سادگی آن می‌پذیریم.^۱ پس می‌توانیم به صورت زیر استدلال کنیم: برای ساختن تانسور $F^{\mu\nu}$ تنها بردار A^μ و «بردار» ∂^ν را در اختیار داریم. تنها تانسور پادمتقارنی که از این دو کمیت می‌توانیم بسازیم عبارت است از

$$\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (۸-۳۲)$$

۱. به جای تکیه بر سادگی، می‌توانیم رابطه خطی بین میدان و جریان را به عنوان تقریبی که در حد جریانهای ضعیف معتبر است توجیه کنیم. در این حد، این رابطه خطی جمله کمترین مرتبه را در بسط رشته تیلور میدان برحسب جریان نمایش می‌دهد.

که ممکن است حداکثر در یک نرده‌ای ضرب شود. دلیل این است که اگر شاخصهای μ و ν روی شیئی یکسانی ظاهر شوند (مثلاً $A^\mu A^\nu$ یا $\partial^\mu \partial^\nu$) پادمتقارن بودن باعث صفرشدن این ترکیب می‌شود. تنها نرده‌ایهایی که ممکن است در عبارت ۳۲-۸ ضرب شوند $A_\alpha \partial^\alpha$, $\partial^\alpha A_\alpha$, $A^\alpha A_\alpha$ و $\partial^\alpha \partial_\alpha$ یا تابعی از آنها [مثلاً $(A^\alpha A_\alpha)^{r/2}$] هستند؛ سه نرده‌ای اول غیرقابل قبول‌اند زیرا خطی بودن عبارت ۳۲-۸ را از بین می‌برند؛ نرده‌ای آخر غیرقابل قبول است زیرا عبارت ۳۲-۸ با عملگر اضافی $\partial^\alpha \partial_\alpha$ دیگر دارای حد استاتیک لازم $\partial^k A^*$ نیست. بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (۳۳-۸)$$

این معادله رابطه موردنظر بین $F^{\mu\nu}$ و A^ν است.

صورت گسترده $F^{\mu\nu}$ عبارت است از

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 & \partial^0 A^2 - \partial^2 A^0 & \partial^0 A^3 - \partial^3 A^0 \\ \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 & 0 & \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 & \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 \\ \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 & \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 & 0 & \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 \\ \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3 & \partial^3 A^1 - \partial^1 A^3 & \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3 & 0 \end{pmatrix} \quad (۳۴-۸)$$

یا

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} & 0 & -(\nabla \times \mathbf{A})_z & (\nabla \times \mathbf{A})_y \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} & (\nabla \times \mathbf{A})_z & 0 & -(\nabla \times \mathbf{A})_x \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} & -(\nabla \times \mathbf{A})_y & (\nabla \times \mathbf{A})_x & 0 \end{pmatrix} \quad (۳۵-۸)$$

از معادله ۳۵-۸ دیده می‌شود که میدان الکتریکی ($E^k = F^{k*}$) عبارت است از

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (۳۶-۸)$$

به علاوه، میدان برداری \mathbf{B} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (۳۷-۸)$$

این میدان برداری میدان مغناطیسی است. در بخش بعد، با اثبات اینکه $\nabla \times \mathbf{A}$ تمام خواص مورد انتظار میدان مغناطیسی را دارد — از جریان الکتریکی به وجود می‌آید و به بار متحرک نیرو وارد می‌کند — تعریف بالا را توجیه می‌کنیم. تانسور میدان برحسب \mathbf{E} و \mathbf{B} به صورت زیر نوشته می‌شود

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (۳۸-۸)$$

می‌توانیم این تانسور میدان را به طور فشرده به صورت زیر خلاصه کنیم

$$F^{k0} = E^k \quad F^{mn} = -\varepsilon^{mnl} B^l \quad (۳۹-۸)$$

تمرین ۶- معادله ۳۹-۸ را واریسی کنید.

توجه کنید که اگرچه مؤلفه‌های \mathbf{B} ، مانند مؤلفه‌های \mathbf{E} ، در سه بعد تشکیل بردار می‌دهند در چهار بعد مؤلفه‌های یک تانسور هستند.

آنچه در معادله ۳۸-۸ دیده می‌شود این است که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی رابطه نزدیکی باهم دارند؛ این میدانها موجودات سه بعدی مستقلی نیستند بلکه صرفاً مؤلفه‌های مختلف یک موجود چهار بعدی، یعنی تانسور میدان، هستند. به همین ترتیب، معادلات دیفرانسیل مربوط به میدانهای الکتریکی و مغناطیسی صرفاً مؤلفه‌های مختلف معادله مربوط به تانسور میدان هستند. رابطه بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی به همان نزدیکی رابطه بین مؤلفه‌های فضایی و زمانی بردار مکان است. نسبت خاص فضا و زمان را در قالب فضا-زمان متحد می‌کند و به میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در قالب تانسور میدان وحدت می‌دهد. چنانکه بعداً خواهیم دید، این وحدت در تبدیل لورنتس میدانها به وضوح آشکار می‌شود — تبدیلات لورنتس درست همانطور که مؤلفه‌های فضایی و زمانی بردار مکان x^μ را به هم می‌آمیزند مؤلفه‌های الکتریکی و مغناطیسی تانسور الکترومغناطیسی $F^{\mu\nu}$ را نیز به هم می‌آمیزند.

یکای میدان مغناطیسی در CGS الکتروستاتیک را گاوس می‌نامند. این یکا از لحاظ ابعادی برابر با ایستولت برسانتیمتر است. بدین ترتیب، در دستگاه CGS الکتروستاتیک، \mathbf{E} و \mathbf{B}

برحسب یکاهای اساساً یکسانی اندازه‌گیری می‌شوند. چون \mathbf{E} و \mathbf{B} صرفاً مؤلفه‌های مختلف یک تانسور $F^{\mu\nu}$ هستند کاملاً با معنی است که آنها را برحسب یکاهای یکسانی اندازه‌گیری کنیم.^۱

اکنون بینیم میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} تحت تبدیل لورنتس چه می‌شوند. قانون تبدیل $F^{\mu\nu}$ قانون تبدیل تانسورهاست:

$$F'^{\mu\nu} = a^\mu_\alpha a^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \quad (۴۰-۸)$$

برای تبدیل محض لورنتس در امتداد محور x ، ماتریس a^μ_α (باعلامت اختصاری $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$) عبارت است از

$$a^\mu_\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\gamma V}{c} & 0 & 0 \\ -\frac{\gamma V}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۴۱-۸)$$

می‌توانیم طرف راست معادله ۴۰-۸ را حاصلضرب سه ماتریس، با جمع روی شاخصهای مجاور در نظر بگیریم که از قاعده آشنای ضرب سطر در ستون محاسبه می‌شود:

$$F'^{\mu\nu} = a^\mu_\alpha F^{\alpha\beta} (a^T)^\beta_\nu$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\gamma V}{c} & 0 & 0 \\ -\frac{\gamma V}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

۱. اما در دستگاه SI، یکاهای \mathbf{E} و \mathbf{B} یکی نیستند؛ این باعث وارد شدن ضرایب اضافی c در عبارت ۳۸-۸ مربوط به تانسور میدان می‌شود. یکای SI میدان مغناطیسی تسلا است: $1\text{T} \Leftrightarrow 10^{10}\text{G}$. برای مقایسه‌ای بین این یکاها، به پیوست مراجعه کنید.

$$\times \begin{pmatrix} \gamma & \frac{-\gamma V}{c} & 0 & 0 \\ \frac{-\gamma V}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -\gamma \left(E_y - \frac{VB_z}{c} \right) & -\gamma \left(E_z + \frac{VB_y}{c} \right) \\ E_x & 0 & -\gamma \left(B_z - \frac{VE_y}{c} \right) & \gamma \left(B_y + \frac{VE_z}{c} \right) \\ \gamma \left(E_y - \frac{VB_z}{c} \right) & \gamma \left(B_z - \frac{VE_y}{c} \right) & 0 & -B_x \\ \gamma \left(E_z + \frac{VB_y}{c} \right) & -\gamma \left(B_y + \frac{VE_z}{c} \right) & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (۴۲-۸)$$

تمرین ۷- برای به دست آوردن معادله ۴۲-۸ ضربهای ماتریسی لازم را انجام دهید. ■

معادله ۴۲-۸ بیان می‌کند که $E'_x = E_x$ ، $E'_y = \gamma(E_y - VB_z/c)$ ، و غیره. رابطه بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در دو چارچوب مرجع را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (۴۳-۸)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E} \right) \quad (۴۴-۸)$$

که در آنها \mathbf{E}_{\parallel} ، \mathbf{B}_{\parallel} و \mathbf{E}_{\perp} ، \mathbf{B}_{\perp} به ترتیب مؤلفه‌های موازی با و عمود بر سرعت هستند؛ یعنی مؤلفه موازی عبارت است از مؤلفه x ، و مؤلفه‌های عمودی عبارت‌اند از مؤلفه‌های y و z و $\mathbf{E}_{\perp} = \hat{y}E_y + \hat{z}E_z$ ، $\mathbf{E}_{\parallel} = \hat{x}E_x$ ، و غیره). این معادله‌ها نشان می‌دهند میدانهای الکتریکی و مغناطیسی تحت تبدیلات لورنتس به یکدیگر مبدل می‌شوند. میدانهای برداری سه‌بعدی \mathbf{E} و \mathbf{B} صرفاً نموده‌های مختلف تانسور میدان چهاربعدی $F^{\mu\nu}$ هستند. آنچه یک ناظر الکتریکی و یا مغناطیسی می‌بیند بستگی به چارچوب مرجعش دارد.

تمرین ۸- معادله‌های ۴۳-۸ و ۴۴-۸ را از معادله ۴۲-۸ به دست آورید. ■

به عنوان کار بردی از معادله های ۴۳-۸ و ۴۴-۸، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی باری نقطه‌ای را که با سرعت یکنواخت در آزمایشگاه حرکت می‌کند محاسبه می‌کنیم. در چارچوب سکون t' ، x' ، y' ، z' مربوط به این بار نقطه‌ای، میدان کاملاً الکتریکی است؛ اگر بار در مبدأ باشد، آنگاه

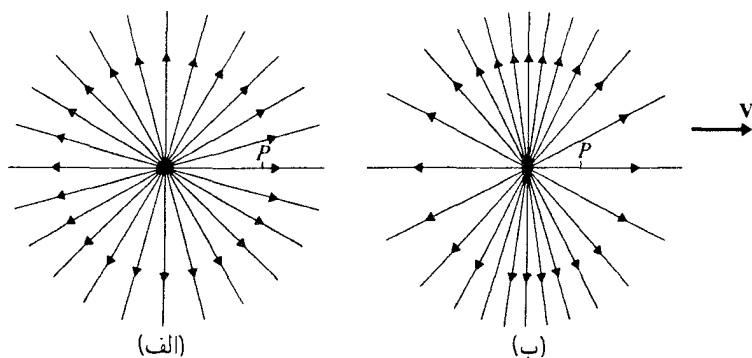
$$\mathbf{E}' = q \frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|^3} \quad (45-8)$$

برای به دست آوردن میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} در چارچوب آزمایشگاه، از وارون معادله های ۴۳-۸ و ۴۴-۸، یعنی از معادله‌هایی که جای پریمها عوض شده است و $-\mathbf{V}$ به جای \mathbf{V} قرار گرفته است شروع می‌کنیم. پس داریم

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel} \quad \mathbf{E}_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{E}'_{\perp} - \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B}' \right) = \gamma \mathbf{E}'_{\perp} \quad (46-8)$$

$$\mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel} = 0 \quad \mathbf{B}_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{B}'_{\perp} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E}' \right) = \gamma \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E}' \quad (47-8)$$

این معادله‌ها نشان می‌دهند که در نقطه‌ای با ویژه فاصله معین از بار، مثلاً $|\mathbf{x}'| = 1$ ، میدان الکتریکی موازی تحت تبدیلات لورنتس تغییر نمی‌کند، در حالی که میدان الکتریکی عمودی به اندازه ضریب γ زیاد می‌شود. بنابراین، نقش خطوط میدان باردار به خاطر تراکم طولی به اندازه ضریب $1/\gamma$ با نقش خطوط میدان ذره ساکن تفاوت می‌یابد (شکل ۲-۸). روشن است که این



شکل ۲-۸ میدان الکتریکی بار نقطه‌ای متحرک. (الف) در چارچوب سکون، نقش خطوط میدان الکتریکی متقارن کروی است. (ب) در چارچوب آزمایشگاه، نقش میدان الکتریکی در راستای حرکت متراکم شده است.

«تراکم» چگالی خطوط میدان عرضی را افزایش می‌دهد. همچنین از شکل ۲-۸ استنباط می‌شود که چگالی خطوط میدان طولی کاهش یافته است. اما این‌طور نیست زیرا باید چگالیهای خطوط در شکلهای ۲-۸ (الف) و ۲-۸ (ب) را در یک ویژه فاصله معین از بار، مثلاً در نقطه‌ای مانند P به فاصله $1 = |x'|$ ، باهم مقایسه کنیم؛ در این نقطه چگالیهای خطوط افقی یکی هستند. بار نقطه‌ای متحرک دارای میدان مغناطیسی می‌شود، که بنا به معادله ۴۷-۸ همه جا بر سرعت V عمود است. خطوط میدان مغناطیسی دایره‌های بسته‌ای به مرکز خط حرکت هستند. بحث تفصیلی میدانهای مغناطیسی را به فصل بعد موکول می‌کنیم.

۳-۸ معادلات ماکسول

معادله ۱۸-۸ یا ۱۰-۸ معادله میدان برای A^μ است؛ این معادله تعیین می‌کند که چگونه یک چارجریان معین j^ν چاربردار پتانسیل ایجاد می‌کند. اکنون می‌خواهیم معادلات میدان مربوط به $F^{\mu\nu}$ را به دست آوریم. چون

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (48-8)$$

داریم

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu \quad (49-8)$$

در جمله اول طرف راست می‌توانیم از معادله ۱۰-۸ استفاده کنیم؛ جمله دوم بنا به معادله ۱۱-۸ صفر می‌شود. در نتیجه

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (50-8)$$

این معادله یکی از معادلات میدان برای $F^{\mu\nu}$ است. معادله دیگری که $F^{\mu\nu}$ در آن صدق می‌کند عبارت است از

$$\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0 \quad (51-8)$$

می‌توان این معادله را با جاگذاری $F^{\mu\nu}$ از معادله ۴۸-۸ مستقیماً واریسی کرد.

تمرین ۹- این جاگذاری را در معادله ۵۱-۸ انجام دهید، و نشان دهید تمام جمله‌ها حذف می‌شوند.

تمرین ۱۰-۸ نشان دهید اگر به جای معادله‌های ۸-۱۰ و ۸-۱۱ از معادله ۸-۱۸ استفاده کنیم بازهم به معادله ۸-۵۰ می‌رسیم.

معادله‌های میدان بالا برحسب میدان تانسوری $F^{\mu\nu}$ بیان شده‌اند. همچنین می‌توانیم این معادله‌ها را برحسب میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} بیان کنیم. برای مثال:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \frac{4\pi}{c} j^0 \quad (52-8)$$

عبارت است از

$$\frac{\partial}{\partial x^k} E^k = 4\pi\rho \quad (53-8)$$

یا

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (54-8)$$

البته این معادله را از فصل ۲ می‌شناسیم. به‌عنوان مثالی دیگر، داریم

$$\partial_\mu F^{\mu r} = \frac{4\pi}{c} j^r \quad (55-8)$$

این رابطه برحسب \mathbf{E} و \mathbf{B} به صورت زیر بیان می‌شود

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x^0} + \frac{\partial B_y}{\partial x^1} - \frac{\partial B_x}{\partial x^2} = \frac{4\pi}{c} j^r \quad (56-8)$$

یعنی

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (57-8)$$

به‌عنوان آخرین مثال:

$$\partial^r F^{1r} + \partial^1 F^{2r} + \partial^2 F^{r1} = 0 \quad (58-8)$$

این رابطه معادل است با

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x^2}\right)(-B_z) + \left(-\frac{\partial}{\partial x^1}\right)(-B_x) + \left(-\frac{\partial}{\partial x^3}\right)(-B_y) = 0 \quad (59-8)$$

یا

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (60-8)$$

با در نظر گرفتن تمام مؤلفه‌های معادله‌های ۵۰-۸ و ۵۱-۸، کلاً هشت معادله دیفرانسیل شامل \mathbf{E} و \mathbf{B} به دست می‌آوریم که می‌توان آنها را به صورت زیر نوشت

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (61-8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (62-8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (63-8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (64-8)$$

تمرین ۱۱- معادله ۶۴-۸ را از معادله ۵۱-۸ به دست آورید.

معادله‌های ۶۱-۸ تا ۶۴-۸ معادلات ماکسول برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی هستند. با اولین معادله از فصل ۲ آشنا هستیم؛ این معادله نشان می‌دهد چگونه توزیع بار میدان الکتریکی ایجاد می‌کند. آخرین معادله (معادله ۶۴-۸) نشان می‌دهد میدان الکتریکی می‌تواند از میدان مغناطیسی وابسته به زمان نیز ایجاد شود (القای الکترومغناطیسی). دومین معادله (معادله ۶۲-۸) می‌گوید چگونه میدان مغناطیسی از توزیع جریان و از میدان الکتریکی وابسته به زمان به وجود می‌آید. سومین معادله (معادله ۶۳-۸) بیانگر نبود «بار» مغناطیسی است. این معادلات در ابتدا براساس بررسیهای تجربی که دو قرن طول کشید مستقل از هم کشف شدند (به پیوست مراجعه کنید)؛ و توسط ماکسول در ۱۸۶۱ به صورت نهایی خود—معادله‌های ۶۱-۸ تا ۶۴-۸—درآمدند، اما ۴۰ سال دیگر طول کشید تا اینشتین کشف کرد که تمام این معادلات با تبدیلات لورنتس به هم مربوط اند. محاسباتی که در بالا انجام شدند روشن می‌کند که معادلات سه بعدی ماکسول ۶۱-۸ تا ۶۴-۸ صرفاً مؤلفه‌های مختلف معادله‌های تانسوری چهار بعدی ۵۰-۸ و ۵۱-۸ هستند.

فصلهای باقیمانده این کتاب را می‌توان نتایج معادلات ماکسول در نظر گرفت. در فصلهای بعد، از این معادلات برای محاسبه میدانهای مغناطیسی ناشی از جریانها و برای محاسبه میدانهای

الکتریکی ناشی از القای مغناطیسی استفاده می‌کنیم. در فصلهای آینده، خواهیم دید چگونه این معادلات وجود امواج الکترومغناطیسی را ایجاد می‌کنند. در محاسبه میدانهای ناشی از توزیع معینی از بارها و جریانها، معادلات ماکسول ۸-۶۱ تا ۸-۶۴ از معادله‌های تانسوری ۸-۵۰ و ۸-۵۱ معمولاً مناسبترند اما این اشکال را دارند که رفتارشان تحت تبدیلات لورنتس روشن نیست. برای تبدیل معادلات ماکسول به یک چارچوب مرجع دیگر، بهترین روش این است که ابتدا آنها را با معادله‌های هم‌ارز ۸-۵۰ و ۸-۵۱ تعویض کنیم. سپس تبدیل لورنتس را روی این معادله‌ها مطابق با قانون تبدیل لورنتس واضحی که شاخصهای بردار و تانسور مشخص می‌کنند اعمال می‌کنیم. سرانجام، معادلات مربوط به $F'^{\mu\nu}$ را به معادلات مربوط به \mathbf{E}' و \mathbf{B}' تبدیل می‌کنیم. نتیجه‌ای که به دست می‌آید مجموعه‌ای است از معادلات نظیر ۸-۶۱ تا ۸-۶۴ که روی همه چیز علامت پریم قرار دارد.

اکنون می‌خواهیم معادله حرکت (معادله ۸-۲۸) را برحسب \mathbf{E} و \mathbf{B} بیان کنیم: مؤلفه $\mu = 1$ مربوط به این معادله را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \frac{dp^1}{d\tau} &= \frac{q}{mc} p_\nu F^{1\nu} \\ &= \frac{q}{mc} (p_0 F^{10} + p_1 F^{11} + p_2 F^{12} + p_3 F^{13}) \end{aligned} \quad (65-8)$$

از اینجا به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{dp^1}{d\tau} &= \frac{q}{mc} [p_0 E^1 + (-p^2)(-B_z) + (-p^3)(B_y)] \\ &= \frac{q}{mc} \left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} E_x + \frac{mv_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} B_z - \frac{mv_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} B_y \right) \end{aligned} \quad (66-8)$$

یا، با توجه به $d\tau = \sqrt{1-v^2/c^2} dt$ داریم

$$\frac{dp_x}{dt} = qE_x + q \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)_x \quad (67-8)$$

تمرین ۱۲- نشان دهید با در نظر گرفتن سایر مؤلفه‌ها معادله حرکت به دست می‌آید:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \quad (68-8)$$

روشن است که تکانه \mathbf{p} در این معادله تکانه نسبیتی $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$ است. در تقریب غیر نسبیتی داریم $\mathbf{p} \simeq m\mathbf{v}$ ، و معادله تبدیل می شود به

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \quad (۶۹-۸)$$

توجه کنید که صورت عبارت نیروی وارد بر ذره (طرف راست معادله های ۶۸-۸ و ۶۹-۸) در مورد های نسبیتی و غیرنسبیتی یکسان است؛ آنچه تغییر می کند عبارت تکانه است. طرف راست معادله های ۶۸-۸ و ۶۹-۸ را نیروی لورنتس می نامند. نیروی ناشی از میدان مغناطیسی همیشه بر \mathbf{B} و \mathbf{v} عمود است. در نتیجه، این نیرو نمی تواند بزرگی تکانه را تغییر دهد، و تنها راستای حرکت را تغییر می دهد.

۴-۸ تانسور انرژی-تکانه

در بخش قبل دیدیم نیرویی که میدان الکترومغناطیسی بر ذره ای با بار q وارد می کند عبارت است از

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \quad (۷۰-۸)$$

فرض کنید توزیعی از ذرات با بار q داریم که چگالی ذرات آن n است. پس می توانیم یک چگالی نیرو تعریف کنیم:

$$\mathbf{f} = n\mathbf{F} \quad (۷۱-۸)$$

این چگالی نیرو در واقع نیروی کل در واحد حجم است که از طرف میدان به ذرات وارد می شود. بنا به معادله ۷۰-۸ داریم

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \frac{\mathbf{j}}{c} \times \mathbf{B} \quad (۷۲-۸)$$

مؤلفه x را با نمادنگاری چارتانسوری می نویسیم:

$$\begin{aligned} f_x = f^1 &= \rho E^1 + \frac{j^2 B^3 - j^3 B^2}{c} = \rho F^{10} + \frac{-j^2 F^{12} - j^3 F^{13}}{c} \\ &= \frac{F^{10} j_0 + F^{12} j_2 + F^{13} j_3}{c} \end{aligned} \quad (۷۳-۸)$$

اگر جمله $F^{11}j_1/c$ را که متحد با صفر است به طرف راست اضافه کنیم، داریم

$$f^1 = \frac{1}{c} F^{1\nu} j_\nu \quad (74-8)$$

و به طور کلی

$$f^k = \frac{1}{c} F^{k\nu} j_\nu \quad (75-8)$$

اکنون f° را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f^\circ = \frac{1}{c} F^{\circ\nu} j_\nu \quad (76-8)$$

در نتیجه

$$f^\mu = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu \quad (77-8)$$

روشن است که شیء چهار مؤلفه‌ای f^μ بردار است زیرا «حاصلضرب» تانسور $F^{\mu\nu}$ و بردار j_ν است.

معنی f° چیست؟ اگر f° را از روی معادله ۷۷-۸ حساب کنیم، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} f^\circ &= \frac{1}{c} F^{\circ\nu} j_\nu = \frac{1}{c} F^{\circ k} j_k = \frac{1}{c} (-E^1 j_1 - E^2 j_2 - E^3 j_3) \\ &= \frac{1}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (78-8)$$

این نتیجه را با حاصلضرب نرده‌ای \mathbf{v} و \mathbf{f} مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} &= \mathbf{v} \cdot \left(\rho \mathbf{E} + \rho \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + \circ \\ &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (79-8)$$

پس $c f^\circ$ برابر با $\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}$ است. اما کمیت اخیر عبارت است از کاری که میدانها روی ذرات در واحد زمان و واحد حجم انجام می‌دهند. بنابراین، می‌توانیم معنی f^μ را به صورت زیر خلاصه کنیم

$$f^\circ = \frac{1}{c} \times (\text{آهنگ تغییر انرژی ذرات در واحد حجم}) \quad (80-8)$$

$$f^k = (\text{آهنگ تغییر تکانه ذرات در واحد حجم}) \quad (81-8)$$

اکنون می‌خواهیم چند تبدیل روی طرف راست معادله ۸-۷۷ انجام دهیم. هدف از این تبدیلات (که تا اندازه‌ای پرزحمت‌اند) بیان طرف راست این معادله به صورت یک واگرایی چهاربعدهی از حاصلضرب تانسورهای میدان است. از جاگذاری معادله میدان

$$j_\nu = \frac{c}{4\pi} \partial_\alpha F^{\alpha\nu} \quad (۸۲-۸)$$

شروع می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$f^\mu = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial_\alpha F^{\alpha\nu} \quad (۸۳-۸)$$

به علاوه، می‌توانیم در طرف راست از اتحاد زیر استفاده کنیم

$$F^{\mu\nu} \partial_\alpha F^{\alpha\nu} = \partial_\alpha (F^{\mu\nu} F^{\alpha\nu}) - \partial_\alpha F^{\mu\nu} F^{\alpha\nu} \quad (۸۴-۸)$$

که در آن آخرین جمله را به صورت زیر درمی‌آوریم

$$\begin{aligned} \partial_\alpha F^{\mu\nu} F^{\alpha\nu} &= \partial^\alpha F^{\mu\nu} F_{\alpha\nu} = \partial^\nu F^{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} = \partial^\nu F^{\alpha\mu} F_{\alpha\nu} \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\nu F^{\alpha\mu} + \partial^\alpha F^{\mu\nu}) F_{\alpha\nu} \end{aligned} \quad (۸۵-۸)$$

بنا به معادله ۸-۵۱، جمله داخل پرانتز برابر با $-\partial^\mu F^{\nu\alpha}$ است. در نتیجه

$$\begin{aligned} \partial_\alpha F^{\mu\nu} F^{\alpha\nu} &= -\frac{1}{2} \partial^\mu F^{\nu\alpha} F_{\alpha\nu} = \frac{1}{2} \partial^\mu F^{\nu\alpha} F_{\nu\alpha} \\ &= \frac{1}{4} \partial^\mu (F^{\nu\alpha} F_{\nu\alpha}) \end{aligned} \quad (۸۶-۸)$$

با توجه به تمام اینها، نتیجه می‌گیریم معادله ۸-۸۳ هم‌ارز است با

$$f^\mu = \frac{1}{4\pi} \left[\partial_\alpha (F^{\mu\nu} F^{\alpha\nu}) - \frac{1}{4} \partial^\mu (F^{\nu\alpha} F_{\nu\alpha}) \right] \quad (۸۷-۸)$$

این معادله را به صورت زیر نیز می‌توانیم بنویسیم

$$f^\mu = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{\mu\alpha} \quad (۸۸-۸)$$

که در آن $T^{\mu\alpha}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$T^{\mu\alpha} = -\frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\nu} F^{\alpha}_{\nu} - \frac{1}{4} \eta^{\alpha\nu} F^{\nu\beta} F_{\nu\beta} \right) \quad (۸۹-۸)$$

تانسور $T^{\mu\alpha}$ را تانسور انرژی-تکانه میدان الکترومغناطیس می نامند. قبل از اینکه به تعبیر فیزیکی این تانسور بپردازیم آن را برای مراجعه بعدی برحسب \mathbf{E} و \mathbf{B} بیان می کنیم.

تمرین ۱۳- نشان دهید $T^{\mu\alpha}$ یک تانسور متقارن است.

تمرین ۱۴- نتایج زیر را از معادله ۸۹-۸ به دست آورید:

$$T^{00} = \frac{1}{4\pi} (E^2 + B^2) \quad (۹۰-۸)$$

$$T^{0i} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_x \quad (۹۱-۸)$$

$$T^{ij} = \frac{1}{4\pi} (E_x^2 + E_y^2 - E_x^2 + B_y^2 + B_z^2 - B_x^2) \quad (۹۲-۸)$$

$$T^{i2} = \frac{-1}{4\pi} (E_x E_y + B_x B_y) \quad (۹۳-۸)$$

رابطه کلی T^{mn} (به ازای $m, n = 1, 2, 3$) عبارت است از

$$T^{mn} = \frac{1}{4\pi} \left[-E^m E^n - B^m B^n + \frac{1}{4} \delta^{mn} (E^2 + B^2) \right] \quad (۹۴-۸)$$

کمیت T^{mn} را تانسور تنش ماکسول می نامند.

رابطه کامل $T^{\mu\nu}$ عبارت است از

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi} (E^2 + B^2) & \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_x & \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_y & \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_z \\ \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_x & & & \\ \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_y & & T^{mn} & \\ \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_z & & & \end{pmatrix} \quad (۹۵-۸)$$

مؤلفه‌های $T^{k^{\circ}}$ (یا $T^{k^{\circ}}$) یک بردار سه بعدی تشکیل می‌دهند؛ این بردار با ضریب اضافی c را بردار پوینتینگ می‌نامند:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (۹۶-۸)$$

برای اینکه بینیم تانسور $T^{\mu\nu}$ چه ربطی به انرژی و تکانه دارد، از عبارت نیرو در واحد حجم (معادله ۸۸-۸) برای محاسبه تبادل انرژی و تکانه بین ذرات و میدانها استفاده می‌کنیم. مؤلفه‌های فضایی معادله ۸۸-۸ عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} f^m &= -\frac{\partial T^{m\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{\partial T^{mn}}{\partial x^n} - \frac{1}{c} \frac{\partial T^{m^{\circ}}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial T^{mn}}{\partial x^n} - \frac{1}{c^{\prime}} \frac{\partial S^m}{\partial t} \end{aligned} \quad (۹۷-۸)$$

اگر از این معادله روی حجمی که قسمتی از ذرات و میدانها را در برمی‌گیرد انتگرال بگیریم، به دست می‌آوریم

$$\int f^m dV = - \int \frac{\partial}{\partial x^n} T^{mn} dV - \frac{1}{c^{\prime}} \frac{d}{dt} \int S^m dV \quad (۹۸-۸)$$

اما چون f^m چگالی نیرو است انتگرال آن نیروی کل است که باید با آهنگ تغییر تکانه ذرات برابر باشد:

$$\int f^m dV = F^m = \frac{dP^m}{dt} \quad (۹۹-۸)$$

اگر تعریف کنیم

$$G^m = \frac{1}{c^{\prime}} \int S^m dV \quad (۱۰۰-۸)$$

آنگاه معادله ۹۸-۸ به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d}{dt}(P^m + G^m) = - \int \frac{\partial}{\partial x^n} T^{mn} dV \quad (۱۰۱-۸)$$

بنا به قضیه گاوس، می‌توانیم طرف راست را به انتگرال سطحی روی مرز حجم انتگرال‌گیری تبدیل کنیم:

$$\frac{d}{dt}(P^m + G^m) = - \int T^{mn} ds^n \quad (102A)$$

اکنون فرض کنید حجم انتگرال‌گیری آن قدر بزرگ است که تمام میدانها در دستگاه ما را در برمی‌گیرد. در این مورد، \mathbf{E} و \mathbf{B} روی مرز صفرند، و در نتیجه

$$\frac{d}{dt}(P^m + G^m) = 0 \quad (103A)$$

این رابطه نشان می‌دهد آهنگ تغییر تکانه ذرات با تغییر G^m جبران می‌شود؛ یعنی، هر تکانه‌ای که ذرات از دست بدهند به G^m می‌رسد. بنابراین، کمیت اخیر باید تکانه در میدانهای الکترومغناطیسی باشد. اینکه میدانها می‌توانند حاوی تکانه باشند نباید تعجب‌آور باشد؛ قبلاً دیدیم (در فصل ۵) که میدانها حاوی انرژی‌اند، و از لحاظ نسبیتی هر چیزی که انرژی داشته باشد وقتی در حرکت است تکانه دارد. پس نتیجه می‌گیریم

$$(تکانه در میدانهای الکترومغناطیسی) = G^m = \frac{1}{c^2} \int S^m dV \quad (104A)$$

با نمادنگاری برداری سه‌بعدی، می‌توانیم G^m را به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{G} = \frac{1}{c^2} \int \mathbf{S} dV = \int \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV \quad (105A)$$

جمله \mathbf{S}/c^2 یا

$$\frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (106A)$$

را می‌توان چگالی تکانه در میدانها در نظر گرفت.

به معادله ۱۰۲-۸ برمی‌گردیم. اگر حجم انتگرال‌گیری تمام میدانها را در برنگیرد، آنگاه $d/dt(P^m + G^m) \neq 0$ و تکانه کل در حجم مورد نظر نسبت به زمان تغییر می‌کند. طرف راست معادله ۱۰۲-۸ نمایشگر تکانه‌ای است که حجم به دست می‌آورد، و بنابراین $T^{mn} ds^n$ باید مقدار مؤلفه m تکانه باشد که از سطح ds^n در واحد زمان خارج می‌شود. شار تکانه، یا شارش

در واحد سطح و در واحد زمان، باید T^{mn} باشد:

$$T^{mn} = (n \text{ تکانه در راستای } m \text{ شار مؤلفه } m) \quad (۱۰۷-۸)$$

مثلاً $T^{۱۲}$ مقدار مؤلفه x تکانه است که در راستای y از واحد سطح در واحد زمان عبور می‌کند. می‌توانیم محاسبه مشابهی را با مؤلفه زمانی معادله ۸-۸۸ انجام دهیم:

$$cf^{\circ} = -c \frac{\partial T^{\circ\nu}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{\partial T^{\circ\circ}}{\partial t} - \frac{\partial S^n}{\partial x^n} \quad (۱۰۸-۸)$$

از انتگرال‌گیری داریم

$$\int cf^{\circ} dV = -\frac{d}{dt} \int T^{\circ\circ} dV - \int \frac{\partial S^n}{\partial x^n} dV \quad (۱۰۹-۸)$$

کمیت طرف چپ آهنگ تغییر انرژی ذرات است. بنابراین می‌توانیم معادله ۸-۱۰۹ را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{d}{dt}(P^{\circ} + U) = - \int S^n ds^n \quad (۱۱۰-۸)$$

که در آن تعریف کرده‌ایم

$$U \equiv \int T^{\circ\circ} dV \quad (۱۱۱-۸)$$

در اینجا نیز ابتدا فرض می‌کنیم حجم انتگرال‌گیری تمام میدانها را دربرمی‌گیرد. پس طرف راست معادله ۸-۱۱۰ صفر می‌شود، و می‌توانیم کمیت U را انرژی در میدانها در نظر بگیریم:

$$(انرژی در میدانهای الکترومغناطیسی) = U = \frac{1}{8\pi} \int (E^{\nu} + B^{\nu}) dV \quad (۱۱۲-۸)$$

در نتیجه، چگالی انرژی در میدانها عبارت است از

$$T^{\circ\circ} = \frac{1}{8\pi} (E^{\nu} + B^{\nu}) \quad (۱۱۳-۸)$$

روشن است که سهم میدانهای الکتریکی در چگالی انرژی با آنچه در فصل ۵ به دست آوردیم (معادله ۵-۱۰) توافق دارد.

اگر به معادله ۸-۱۱ برگردیم، درمی یابیم که $S^n ds^n$ باید مقدار انرژی باشد که از سطح ds در واحد زمان خارج می شود، یعنی بردار پوئینتینگ

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (۱۱۴-۸)$$

شار انرژی در میدانهاست.

در خاتمه، آنچه دربارهٔ تعبیر فیزیکی مؤلفه های $T^{\mu\nu}$ یاد گرفته ایم خلاصه می کنیم:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \text{چگالی انرژی} & \frac{1}{c} (\text{شار انرژی}) \\ \text{یا} & \text{چگالی تکانه} \times c \\ \frac{1}{c} (\text{شار انرژی}) & \text{شار تکانه} \\ \text{یا} & \\ \text{چگالی تکانه} \times c & \end{pmatrix} \quad (۱۱۵-۸)$$

به عنوان مثال ساده ای از کاربرد تانسور انرژی-تکانه، نیرویی را که میدان الکتریکی بین صفحه های یک خازن مسطح به این صفحه ها وارد می کند محاسبه می کنیم. فرض کنید این صفحه ها افقی و موازی با صفحه xy هستند، و میدان الکتریکی قائم است، $\mathbf{E} = E_0 \hat{z}$. پس تانسور انرژی-تکانه عبارت است از

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi} E_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\pi} E_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4\pi} E_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4\pi} E_0^2 \end{pmatrix}$$

نیرویی که بر واحد سطح یکی از صفحه ها — مثلاً صفحه بالایی — وارد می شود چیزی جز شار تکانه از صفحه نیست؛ یعنی این نیرو عبارت است از مؤلفه T^{zz} تانسور انرژی-تکانه:

$$\frac{F}{A} = T^{zz} = -\frac{1}{4\pi} E_0^2$$

میدان الکتريکی برحسب چگالی بار سطحی عبارت است از $E_0 = 4\pi\sigma$ (معادله ۳-۱۵). در نتیجه می‌توانیم نیرو در واحد سطح را به صورت $F/A = 2\pi\sigma^2$ بیان کنیم. این عبارت نیرو با نتیجه‌ای که در بخش ۱-۳ به دست آمد توافق دارد. توجه کنید که در این محاسبه نیرو از تانسور انرژي-تکانه، برخلاف محاسبه بخش ۱-۳، تفکیک میدان نزدیک صفحه به سهم «خود» و سهم «دیگر» ضرورت نداشته است.

مسائل

۱-۸ تبدیل $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi$ را که در آن χ یک تابع نرده‌ای اختیاری است تبدیل پیمانه‌ای می‌نامند. (الف) نشان دهید معادله ۱۸-۸ تحت تبدیلات پیمانه‌ای ناورداست، یعنی نشان دهید اگر A^μ جواب معادله ۱۸-۸ باشد، آنگاه $A^\mu + \partial^\mu \chi$ نیز جواب این معادله است. (ب) نشان دهید میدانهای الکتريکی و مغناطیسی تحت تبدیلات پیمانه‌ای ناوردا هستند، یعنی نشان دهید میدانهای الکتريکی و مغناطیسی که از $A^\mu + \partial^\mu \chi$ محاسبه می‌شوند دقیقاً یکسان هستند.

۲-۸ ذره ساکنی به جرم m و بار q تحت تأثیر میدان الکتريکی یکنواخت \mathbf{E} در راستای محور x قرار می‌گیرد. نشان دهید جواب معادله نسبیتی حرکت عبارت است از

$$x = \frac{c}{qE} \sqrt{m^2 c^2 + (qEt)^2} - \frac{mc^2}{qE}$$

وارسی کنید اگر $t \rightarrow \infty$ آنگاه $c \rightarrow dx/dt$. واریسی کنید که جواب بالا در حد غیرنسبیتی صورت مورد انتظار را دارد.

۳-۸ معادله ۳۸-۸ بیانگر $F^{\mu\nu}$ است. $F_{\mu\nu}$ ، $F^{\mu\nu}$ و $F_{\mu\nu}$ را بنویسید.

۴-۸ یک پروتون پرتوکیهانی با انرژی 10^{12} GeV نزدیک جو از کنار الکترون ساکنی عبور می‌کند. پروتون روی خط راست حرکت می‌کند، و نزدیکترین فاصله به الکترون 10^8 cm است. بزرگی میدانهای الکتريکی و مغناطیسی را که روی الکترون اثر می‌کنند (در چارچوب سکون الکترون) در لحظه مربوط به نزدیکترین فاصله به دست آورید. نمودار نمایشگر راستای میدانها را رسم کنید.

۵-۸ در یک ناحیه استوانه‌ای دراز به شعاع R گازی از ذرات باردار جریان دارد. در آزمایشگاه، چگالی بار این گاز ρ و چگالی جریان \mathbf{j} است؛ ρ و \mathbf{j} درون استوانه ثابت و بیرون آن صفرند. (الف) سرعت چارچوب مرجع $x'y'z'$ را طوری به دست آورید که چگالی جریان \mathbf{j}' در این چارچوب دقیقاً صفر باشد. چگالی بار ρ' را در این چارچوب تعیین کنید. (ب) میدان الکتريکی \mathbf{E}' را که چگالی بار ρ' در چارچوب $x'y'z'$ ایجاد می‌کند به دست آورید. تنها ناحیه بیرون استوانه را در نظر بگیرید. (ج) با استفاده از قوانین تبدیل لورنتس برای میدانهای الکتريکی و مغناطیسی،

مقادیر E و B در چارچوب آزمایشگاه را از مقادیر معلوم E' و B' در چارچوب $x'y'z'$ به دست آورید.

۸-۶ یک سیمولوله استوانه‌ای دراز به شعاع R در چارچوب سکون خود در داخل دارای میدان مغناطیسی یکنواخت B است و در خارج آن میدان مغناطیسی وجود ندارد. اگر این سیمولوله با سرعت V در راستای عمود بر محور حرکت کند میدان الکتریکی سیمولوله را به دست آورید. خطوط میدان این میدان را در نموداری رسم کنید. آیا این میدان الکتریکی پایدار است؟

۸-۷ یک دو قطبی الکتریکی محض با گشتاور p با سرعت یکنواخت V در راستای عمود بر p حرکت می‌کند. میدان مغناطیسی لحظه‌ای این دو قطبی را به دست آورید. فرض کنید حرکت غیرنسبیتی است.

۸-۸ در مورد میدان الکتریکی E و میدان مغناطیسی B مربوط به بار نقطه‌ای متحرک (معادله‌های ۸-۴۶ و ۸-۴۷) نشان دهید بزرگی E در هر نقطه از بزرگی B بیشتر است.

۸-۹ الف) پتانسیل Φ ، یا A° ، مربوط به بار نقطه‌ای q را که با سرعت یکنواخت در آزمایشگاه حرکت می‌کند به دست آورید. شکل سطوح هم‌پتانسیل در یک لحظه از زمان را به طور تقریبی توصیف کنید. ب) پتانسیل برداری A را برای این بار نقطه‌ای به دست آورید.

۸-۱۰ الکترونی را در کوچکترین مدار بور (به شعاع 5.29 \AA) حول پروتون در نظر بگیرید. با فرض حرکت کلاسیک، میدان مغناطیسی ناشی از حرکت پروتون در چارچوب سکون الکترون را در مکان الکترون محاسبه کنید.

۸-۱۱ الف) در آزمایشگاه، یک سیمولوله استوانه‌ای بسیار دراز با میدان مغناطیسی یکنواخت در راستای عمود بر محور حرکت می‌کند. بنابر معادلات تبدیل لورنتس برای طول و برای میدان مغناطیسی، نشان دهید شار مغناطیسی که مقطع سیمولوله قطع می‌کند در چارچوب آزمایشگاه و چارچوب سکون یکسان است. ب) در آزمایشگاه، یک خازن مسطح موازی بسیار بزرگ با میدان الکتریکی یکنواخت در راستای موازی با صفحه‌هایش حرکت می‌کند. نشان دهید شار الکتریکی که از صفحه‌ای بین دو صفحه خازن عبور می‌کند در چارچوب آزمایشگاه و چارچوب سکون یکسان است.

۸-۱۲ یک استوانه بسیار دراز از ماده‌ی الکتریک به شعاع R دارای بار λ در واحد طول است که به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است. استوانه با سرعت V در راستای عمود بر محور حرکت می‌کند. فرض کنید حرکت غیرنسبیتی است. میدان مغناطیسی لحظه‌ای را به ازای $r < R$ و $r > R$ به دست آورید.

۸-۱۳ فرض کنید در چارچوب آزمایشگاه میدان الکتریکی با بزرگی 5° statV/cm در جهت

محور z و میدان مغناطیسی با بزرگی $30^\circ \text{ statV/cm}$ در جهت محور y وجود دارد. (الف) بزرگی و جهت سرعت چارچوب مرجع $x'y'z'$ را که میدان مغناطیسی در آن صفر است به دست آورید. بزرگی میدان الکتریکی را در این چارچوب مرجع تعیین کنید. (ب) آیا چارچوب مرجع دیگری وجود دارد که میدان الکتریکی در آن صفر باشد؟ اگر جواب مثبت است بزرگی میدان مغناطیسی را در این چارچوب تعیین کنید. اگر جواب منفی است توضیح دهید.

۱۴-۸ یک خازن مسطح موازی وقتی ساکن است بین صفحه‌های خود دارای میدان الکتریکی یکنواخت \mathbf{E} است. فرض کنید این خازن را با سرعت \mathbf{V} در راستای موازی با صفحه‌هایش حرکت دهیم. در قسمتهای زیر از معادلات تبدیل لورنتس برای میدان، پتانسیل و چگالیهای بار و جریان استفاده کنید. (الف) میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بین صفحه‌های خازن متحرک را به دست آورید. (ب) فرض کنید در چارچوب سکون خازن پتانسیل الکتروستاتیک در یکی از صفحه‌های خازن صفر است. پتانسیل و پتانسیل برداری را بین صفحه‌های خازن متحرک به دست آورید، و صریحاً تحقیق کنید که با مشتق‌گیری از این پتانسیلها می‌توان میدانهای الکتریکی و مغناطیسی قسمت (الف) را تعیین کرد. (ج) چگالی بار و چگالی جریان را در صفحه‌های خازن متحرک به دست آورید. آیا رابطه میدان الکتریکی قسمت (الف) با این چگالی بار همان است که انتظار می‌رود؟

۱۵-۸ (الف) ثابت کنید $E^2 - B^2$ و $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ تحت تبدیل خاص لورنتس ۸-۴۱ ناوردا هستند. (ب) ثابت کنید $E^2 - B^2$ و $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ تحت تبدیل عام لورنتس ناوردا هستند. [راهنمایی: $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ و $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}$ را محاسبه کنید؛ تانسور $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ در مسئله ۷-۶ تعریف شده است.]

۱۶-۸ با انجام عملیاتی روی معادلات ماکسول ۸-۶۱ تا ۸-۶۴، قانون پایستگی بار الکتریکی را به دست آورید:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

۱۷-۸ نشان دهید رد تانسور انرژی-تکانه $T^{\mu\alpha}$ (معادله ۸-۸۹) صفر است، یعنی $T^{\mu}_{\mu} = 0$.

۱۸-۸ با فرض اینکه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در ناحیه‌ای از فضا یکنواخت و برهم عمودند، $\mathbf{E} = E_x \hat{x}$ و $\mathbf{B} = B_y \hat{y}$ ، تمام مؤلفه‌های تانسور انرژی-تکانه را به دست آورید.

۱۹-۸ بار نقطه‌ای q در مبدأ مختصات قرار دارد. مؤلفه‌های تانسور انرژی-تکانه را در نقطه اختیاری x ، با مختصات x ، y و z ، محاسبه کنید.

۲۰-۸ فرض کنید در چارچوب مرجع xyz میدان الکتریکی الکتروستاتیکی با چگالی انرژی

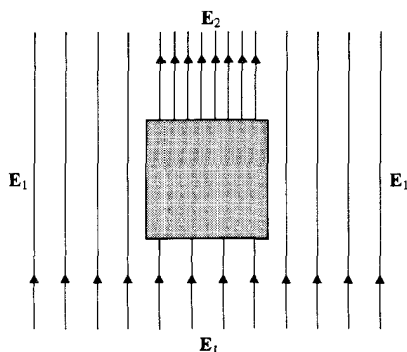
$E^2/8\pi$ وجود دارد. اگر این میدان را از چارچوب مرجع $x'y'z'$ که با سرعت کم (غیر نسبیتی) V حرکت می‌کند مشاهده کنیم طبعاً انتظار داریم شار انرژی مورد مشاهده ما تقریباً برابر با حاصلضرب سرعت و چگالی انرژی، یعنی $-VE^2/8\pi$ باشد. آیا این نتیجه صحیح است؟ اگر صحیح است آن را اثبات کنید؛ اگر غلط است آن را با یک مثال رد کنید.

۲۱-۸ میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E} = E_0 \hat{x}$ را در نظر بگیرید. (الف) تمام مؤلفه‌های تانسور انرژی-تکانه این میدان را به دست آورید. (ب) میدانهای \mathbf{E}' و \mathbf{B}' را در چارچوب مرجع $x'y'z'$ که با سرعت V در راستای x حرکت می‌کند به دست آورید. مؤلفه‌های تانسور انرژی-تکانه را در این چارچوب مرجع محاسبه کنید. (ج) قسمت (ب) را برای چارچوب مرجعی که با سرعت V در راستای y حرکت می‌کند تکرار کنید.

۲۲-۸ بردار پوینتینگ را در نقطه‌ای از صفحه xy برای میدان الکترومغناطیس بار نقطه‌ای متحرک (معادله‌های ۴۶-۸ و ۴۷-۸) به دست آورید.

۲۳-۸ میدان الکتریکی بین صفحه‌های یک خازن مسطح موازی را یکنواخت و با بزرگی E_0 بگیرید (از اثرات لبه صرف‌نظر کنید). مساحت هر یک از صفحه‌ها A است. با استفاده از تانسور تنش ماکسول، آهنگ انتقال تکانه از میدان الکتریکی به هر صفحه را محاسبه کنید. تحقیق کنید که این آهنگ انتقال تکانه با مقدار نیرویی که به روشهای مقدماتی محاسبه می‌شود توافق دارد.

۲۴-۸ مکعبی به ابعاد $L \times L \times L$ را در یک میدان الکتریکی که همه جا در راستای z است قرار می‌دهیم. این میدان در جوه پایینی و جانبی مکعب دارای بزرگی ثابت E_1 و در جوه بالایی دارای بزرگی ثابت E_2 است (شکل ۳-۸). نیرویی را که میدان بر مکعب وارد می‌کند به دست آورید. توجه کنید: چیزی درباره توزیع بار و ثابت دی‌الکتریک مکعب نمی‌دانیم.



شکل ۳-۸ مکعبی به ابعاد $L \times L \times L$ در یک میدان الکتریکی غیریکنواخت.

۲۵-۸ سحابی امراةالمسلسله در فاصله $۱۰^۶ \times ۲۲$ سال نوری از زمین است. فرض کنید ناظری با سرعت $۰.۹۹c$ به طرف این سحابی از کنار زمین می‌گذرد. (الف) اگر این ناظر قطر ظاهری امراةالمسلسله را اندازه‌گیری کند و نتیجه را بر قطر عرضی (معلوم) آن تقسیم کند چه فاصله‌ای به دست می‌آورد؟ [راهنمایی: از فرمول زیر برای تبدیل قطر ظاهری استفاده کنید

$$\theta' = \theta \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}$$

این فرمول را می‌توان از فرمول کلی ابیراهی تور (معادله ۱۲-۵۱) به دست آورد؛ این فرمول برای نوری که در راستاهای نزدیک به راستای حرکت وارد می‌شود، یعنی $\theta \ll ۱$ ، معتبر است. [ب) اگر ناظر روشنایی ظاهری (erg/cm²s) امراةالمسلسله را اندازه‌گیری کند و نتیجه را با درخشندگی ذاتی (erg/s) آن — که معلوم است — مقایسه کند چه فاصله‌ای به دست می‌آورد؟ [راهنمایی: از خواص تبدیل لورنتس بردار پوینتینگ استفاده کنید.]

مغناطوستاتیک

در فصل قبل دیدیم که میدان مغناطیسی خویشاوند نسبیتهی میدان الکتریکی است. هر دو میدان مؤلفه‌های تانسور میدان $F^{\mu\nu}$ هستند، و تحت تبدیلات لورنتس، میدان الکتریکی می‌تواند به‌طور جزئی به میدان مغناطیسی تغییر ماهیت دهد، و برعکس. همچنین معادلات میدان را که تعیین‌کننده میدانهای مغناطیسی ناشی از جریانهای معین به‌دست آوردیم. در این فصل، میدانهای مغناطیسی ناشی از بارهایی که با سرعت ثابت حرکت می‌کنند و میدانهای مغناطیسی ناشی از جریانهای پایا (مستقل از زمان) را به‌تفصیل بررسی می‌کنیم. اگر جریان مستقل از زمان باشد میدان مغناطیسی نیز مستقل از زمان است. خواهیم دید چگونه این میدانهای مغناطیسی را مستقیماً از قانون بیو-ساوار یا قانون آمپر و به‌طور غیرمستقیم از پتانسیل برداری محاسبه کنیم. و خواهیم دید چگونه حرکت ذرات باردار را در یک میدان مغناطیسی معین محاسبه کنیم.

۱-۹ میدان مغناطیسی بار نقطه‌ای

هیچ چیز نمی‌تواند بستگی بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را روشنتر از محاسبه میدان مغناطیسی بار نقطه‌ای متحرک که در بخش ۸-۲ انجام دادیم توضیح دهد. بار نقطه‌ای در چارچوب مرجع خود، یا چارچوب $x'y'z't'$ تنها دارای میدانی الکتریکی یا کولنی است. اگر بار نقطه‌ای

در مبدأ باشد داریم

$$\mathbf{E}' = q' \frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|^3} \quad (۱-۹)$$

معادلات تبدیل لورنتس برای تانسور میدان به ما امکان می‌دهند میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در چارچوب آزمایشگاه را از معادله ۱-۹ به دست آوریم. بنا به معادله ۸-۴۷، میدان مغناطیسی مزبور عبارت است از

$$\mathbf{B}_\perp = \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}' \quad (۲-۹)$$

که در آن \mathbf{v} سرعت بار نقطه‌ای در آزمایشگاه است. چون \mathbf{B}_\perp تنها مؤلفه مخالف صفر میدان مغناطیسی است، می‌توانیم علامت \perp را حذف کنیم و بنویسیم

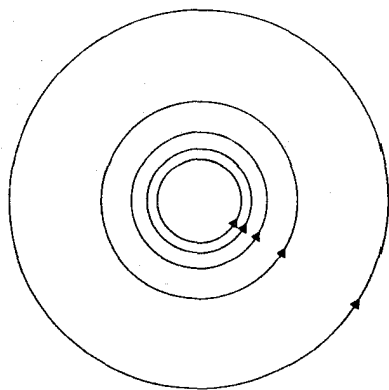
$$\mathbf{B} = \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}' \quad (۳-۹)$$

به‌خاطر سادگی، فرض می‌کنیم سرعت غیرنسبیتی است ($v \gg c$). پس $\gamma \simeq ۱$ و بنابراین $\mathbf{x}' \simeq \mathbf{x} - \mathbf{x}_{q'}$ یا $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{q'}$ که در آن $\mathbf{x}_{q'} = \mathbf{v}t$ مکان لحظه‌ای بار نقطه‌ای است. بنابراین

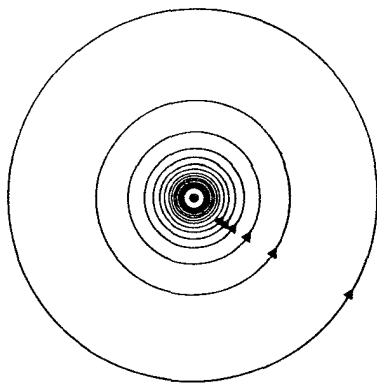
$$\mathbf{B} = q' \frac{\mathbf{v}}{c} \times \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{q'})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{q'}|^3} \quad (۴-۹)$$

در امتداد هر خط شعاعی که با بردار سرعت زاویه ثابتی می‌سازد، شدت این میدان مغناطیسی به‌صورت عکس مجذور فاصله کاهش می‌یابد.

میدانهای مغناطیسی را می‌توان با خطوط میدان به‌طور نموداری نمایش داد. شکل ۱-۹ خطوط میدان را برای باری که به‌طور یکنواخت حرکت می‌کند نشان می‌دهد. این خطوط میدان دایره‌هایی هستند که مرکز مشترک آنها روی خط حرکت واقع است. راستای خطوط میدان از قاعده دست راست تعیین می‌شود. اگر شست در جهت حرکت بار مثبت قرار گیرد، سایر انگشتان در جهت خطوط میدان می‌پیچند. توجه کنید که خطوط میدان مغناطیسی برای هر میدان مغناطیسی اختیاری همیشه حلقه‌های بسته‌ای تشکیل می‌دهند؛ این مطلب نتیجه‌ای است از $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (معادله ۸-۶۳) که نشان می‌دهد هیچ «بار مغناطیسی» وجود ندارد که خطوط میدان بتوانند از آن شروع یا به آن ختم شوند. (اما بخش ۹-۷ را ببینید که در آنجا از بعضی تحقیقات اخیر در مورد «بار» مغناطیسی یک تک‌قطبی مغناطیسی بحث شده است.)



(الف)



(ب)

شکل ۹-۱ خطوط میدان مغناطیسی بار نقطه‌ای متحرک مثبت. سرعت عمود بر صفحه کاغذ و به طرف خارج آن است. (الف) در اینجا بار پشت صفحه کاغذ است (هنوز به این صفحه نرسیده است). خطوط میدان جلو بار را می‌بینیم. میدان در مرکز صفر است. (ب) اکنون بار نقطه‌ای، که با نقطه نشان داده شده است، در صفحه کاغذ است. میدان در مرکز نامتناهی است.

از معادله ۹-۴ می‌توان نیروی مغناطیسی را که به بار نقطه‌ای q موقع حرکت در میدان مغناطیسی ناشی از بار نقطه‌ای q' وارد می‌شود محاسبه کرد. اگر سرعت بار مزبور \mathbf{u} باشد، داریم

$$\mathbf{F}_{q \text{ روی } q'} = q \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} \quad (۵-۹)$$

یا

$$\mathbf{F}_{q \text{ روی } q'} = \frac{qq'}{c^2} \mathbf{u} \times \left[\mathbf{v} \times \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{q'})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{q'}|^3} \right] \quad (۶-۹)$$

این قانون نیروی مغناطیسی وارد بر q از طرف q' را می‌توان «قانون کولن» مغناطیس دانست. می‌توانیم این قانون نیرو را، همانگونه که با قانون کولن در الکتروستاتیک عمل کردیم، نقطه شروع محاسبات در مغناطوستاتیک بگیریم. اما از آنجا که معادلات میدان برای میدان مغناطیسی را از قبل می‌دانیم از این راه نخواهیم رفت.

تمرین ۱- نشان دهید نیروی مغناطیسی وارد به q' از طرف q برابر است با

$$\mathbf{F}_{q' \text{ روی } q} = \frac{q'q}{c^2} \mathbf{v} \times \left[\mathbf{u} \times \frac{(\mathbf{x}_{q'} - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}_{q'} - \mathbf{x}|^3} \right] \quad (۷-۹)$$

نشان دهید به طور کلی $\mathbf{F}_q \neq -\mathbf{F}_{q'}$ ؛ یعنی قانون سوم نیوتون برای نیروهای مغناطیسی که بارهای نقطه‌ای به هم وارد می‌کنند اعتبار ندارد. (عدم توازن حاصل در پایستگی تکانه با انتقال تکانه به میدانهای الکترومغناطیسی خشی می‌شود).

روشن است که در محاسبه نیروی بین بارهای نقطه‌ای باید نیروی الکتریکی را هم به حساب آوریم؛ این نیرو معمولاً بزرگتر از نیروی مغناطیسی است. به علاوه، در مقایسه نیروهای الکتریکی و مغناطیسی، در مورد ضریب γ در معادله ۸-۴۳ باید محتاط باشیم. چون معادله ۹-۷ از مرتبه wv/c^2 است، سازگاری ایجاب می‌کند جمله‌های از مرتبه v^2/c^2 را در معادله ۸-۴۳ نگه داریم؛ یعنی باید تقریب $\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}v^2/c^2$ را بگیریم.

۲-۹ جریانهای پایا؛ قانون اهم

جریان الکتریکی در فلزات، پلاسماها یا الکترولیتها از شارش الکترونها و یونها تشکیل می‌شود. در برخورد بین این ذرات باردار متحرک و اتمها یا مولکولهای ساکن در مادهٔ رسانا، از ذرات انرژی و تکانه گرفته می‌شود؛ اگر بخواهیم جریان را پایا کنیم، این اتلاف باید توسط نیروی محرکه‌ای که میدان الکتریکی داخل رسانا تأمین می‌کند جبران شود. قانون اهم بیان می‌کند که چگالی جریان مستقیماً متناسب با این میدان الکتریکی است. این تناسب را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (8-9)$$

یا به صورت

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{E}}{\rho} \quad (9-9)$$

که در آنها ثابت σ رسانندگی و $\rho = 1/\sigma$ مقاومت ویژه است. این ثابتها بستگی به مشخصات مادهٔ رسانا دارند. یکای CGS الکتروستاتیک مقاومت ویژه ایستا اهم سانتیمتر است^۱، که برابر است با یکای زمان (statΩcm = 1s).

برای محاسبه ساده معادله ۹-۸ از این واقعیت شروع می‌کنیم که ذرات باردار در رسانا دارای سرعتهای اتفاقی بزرگی هستند؛ مثلاً الکترونهاى رسانش در یک فلز گازی از الکترونهاى آزاد با سرعتهای اتفاقی از مرتبه 10^8 cm/s (که معرف مقدار سرعت فرمی در فلزات است) تشکیل می‌دهند. میدان الکتریکی سرعت رانش متوسطی به این گاز می‌دهد، اما بزرگی این سرعت همیشه بسیار کمتر از بزرگی سرعت اتفاقی است. بنابراین، مقدار برخوردهای یک الکترون با اتمهای مادهٔ رسانا در واحد زمان تقریباً از سرعت رانش و میدان الکتریکی مستقل است. این آهنگ

۱. یکای SI مقاومت ویژه اهم متر است، و $1 \text{ stat}\Omega\text{cm} \Leftrightarrow 10^{-9} \times 113 \text{ m}\Omega$.

برخورد یعنی تعداد برخوردها در واحد زمان برای هر الکترون را با ν/τ نشان می‌دهیم. اگر سرعت رانش متوسط الکترون \mathbf{v} باشد، آنگاه تکانه متوسط $m_e \mathbf{v}_d$ است. انتظار داریم که الکترون در هر برخورد تمام این تکانه را از دست بدهد و تنها حرکت اتفاقی برایش بماند. پس آهنگ افت تکانه در برخوردها $m_e \mathbf{v}_d / \tau$ است. از طرف دیگر، آهنگ کسب تکانه به علت نیروی محرکه الکتریکی برابر با $-e\mathbf{E}$ است. در وضعیت پایا، آهنگ افت باید با آهنگ کسب تطبیق کند:

$$\frac{m_e \mathbf{v}_d}{\tau} = -e\mathbf{E}$$

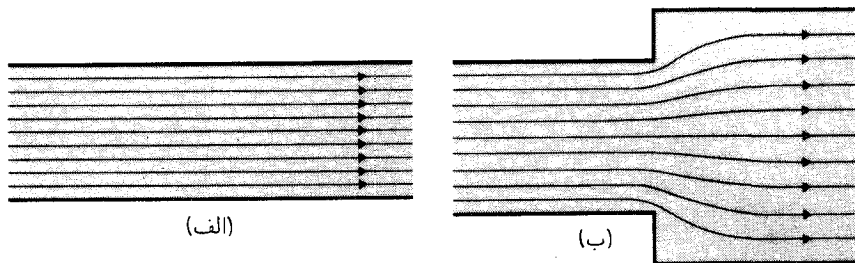
یا

$$\mathbf{v}_d = \frac{-e\mathbf{E}\tau}{m_e} \quad (۱۰-۹)$$

اگر چگالی الکترونهاى آزاد n باشد، چگالی جریان برابر است با

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_d = \frac{e^2 n \tau}{m_e} \mathbf{E} \quad (۱۱-۹)$$

این رابطه نشان می‌دهد \mathbf{j} متناسب با \mathbf{E} است، و محاسبه قانون اهم در اینجا کامل می‌شود. در رسانایی با مقطع یکنواخت—مانند یک سیم یکنواخت دراز—چگالی جریان در تمام نقاط داخل رسانا یکسان است (شکل ۹-۲ الف). پس بنا به معادله ۹-۹، میدان الکتریکی نیز در رسانا یکنواخت خواهد بود. به دلیل این یکنواختی، می‌توانیم چگالی جریان را به صورت $\mathbf{j} = I/A$ بیان کنیم که در آن I جریانی است که سیم حمل می‌کند و A مساحت مقطع سیم است؛ و میدان



شکل ۹-۲ خطوط شارش جریان داخل یک رسانا (بنا به معادله ۹-۸، این خطوط بر خطوط میدان الکتریکی منطبق‌اند). (الف) رسانا با مقطع یکنواخت. چگالی جریان ثابت است. (ب) رسانا با مقطع غیر یکنواخت (پهنای قائم به صورت پله افزایش می‌یابد؛ پهنای افقی، که بر صفحه کاغذ عمود است، ثابت می‌ماند). چگالی جریان تابع مکان است.

الکتریکی را می‌توانیم به صورت $E = \Delta V / \Delta l$ بیان کنیم که در آن ΔV اختلاف پتانسیل بین دو سر سیم است و Δl طول سیم است. با جاگذاری این عبارتهای z و E در معادله ۹-۹، می‌بینیم که قانون اهم به صورت ساده و آشنای زیر درمی‌آید

$$I = \frac{\Delta V}{R} \quad (۱۲-۹)$$

که در آن ثابت

$$R = \rho \frac{\Delta l}{A}$$

مقاومت سیم است. یکای CGS الکتروستاتیک مقاومت ایستا اهم است.^۱ در رسانایی با شکل اختیاری، و با مقطع غیر یکنواخت (به‌عنوان مثال، مانند شکل ۲-۹ ب) چگالی جریان تابع مکان است. توزیع دقیق جریان در حجم رسانا را می‌توان از روی معادله پیوستگی

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

محاسبه کرد. در وضعیت پایا، داریم $\partial \rho / \partial t = 0$ ، و

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (۱۳-۹)$$

به‌ازای $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ ، رابطه بالا به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = 0 \quad (۱۴-۹)$$

اگر رسانا را همگن بگیریم، ضریب σ در این معادله ثابت است و می‌توان آن را حذف کرد. با توجه به $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ ، از معادله بالا به دست می‌آوریم

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (۱۵-۹)$$

این معادله نشان می‌دهد رسانای همگن حامل جریان پایا در درون خود بار خالص ندارد.^۲ در سطوح جانبی رسانا، مؤلفه عمودی چگالی جریان باید صفر باشد؛ بنابراین، $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j} = 0$ یا

۱. یکای SI مقاومت اهم است، و $1 \Omega \Leftrightarrow 10^9 \text{ stat}\Omega$.

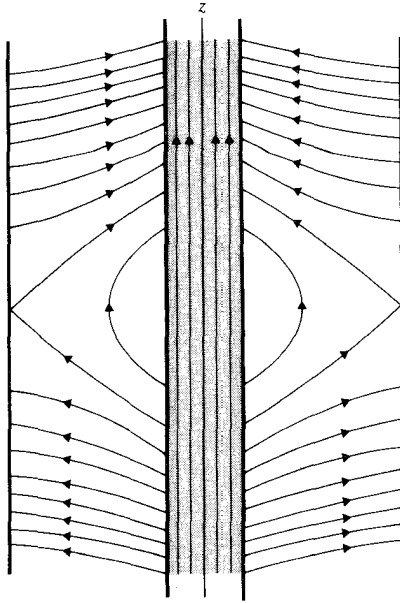
۲. از این لحاظ، رسانای حامل جریان در وضعیت پایا شبیه به رسانا در وضعیت الکتروستاتیک است. اما رسانای اولی در درون خود دارای میدان الکتریکی است در حالی‌که رسانای دومی فاقد آن است.

$\mathbf{\hat{n}} \cdot \mathbf{E} = 0$. فرض می‌کنیم در وجه انتهایی رسانا که از آنجا جریان وارد یا خارج می‌شود، چگالی جریان معلوم است، یعنی $\mathbf{\hat{n}} \cdot \mathbf{E}$ معلوم است؛ یا اینکه پتانسیل معلوم است. بدین ترتیب، جواب معادله ۹-۱۵ یا تحت شرایط مرزی نویمان قرار دارد یا تحت شرایط مرزی آمیخته نویمان-دیریکله، و بنابراین با تقریب یک ثابت جمعی یکتا است (بخش ۳-۱). همین‌که پتانسیل Φ معلوم شد، توزیع جریان در تمام حجم رسانا از $\mathbf{j} = -\sigma \nabla \Phi$ به دست می‌آید. اگر با هیدرودینامیک آشنا باشید ملاحظه خواهید کرد که محاسبه توزیع جریان در رسانا از لحاظ ریاضی با محاسبه میدان سرعت برای شارش سیال تراکم‌ناپذیر (شارش «پتانسیل») هم ارز است.

به علاوه، همین‌که پتانسیل در سطح رسانا معلوم شد، میدان الکتریکی در خارج رسانا را می‌توان از حل $\nabla^2 \Phi$ در ناحیه خارج رسانا به دست آورد. این یک مسئله دیریکله است: در سطح این ناحیه Φ معلوم است اما $\mathbf{\hat{n}} \cdot \mathbf{E}$ معلوم نیست. مؤلفه عمودی میدان الکتریکی در سطح جانبی رسانا معمولاً دارای ناپیوستگی است. این امر ناشی از تجمع یک لایه ایستای بار روی این سطح است. این لایه بار نقش مهمی در شکل‌گیری خطوط میدان در درون رسانا دارد و تضمین می‌کند که این خطوط رسانا می‌مانند (شکل ۹-۲). این لایه بار همچنین حجم رسانا را در برابر میدانهای الکتریکی خارجی می‌پوشاند و تضمین می‌کند که جریان مستقل از آشفتگیهای الکتریکی خارجی می‌ماند (به استثنای وقتی که این آشفتگیها در وجود انتهایی رسانا عمل کنند).

تعیین میدان الکتریکی در ناحیه خارج رسانا معمولاً یک مسئله نسبتاً پیچیده ریاضی است که احتیاج به مشخص کردن کامل شرایط مرزی روی تمام سطوح رسانای اطراف آن رسانا دارد. چون جریان در رسانا مستقل از میدان الکتریکی خارجی است این مسئله اهمیت عملی چندان زیادی ندارد، و کمتر به حل دقیق آن پرداخته‌اند. شکل ۹-۳ موردی را نشان می‌دهد که برای آن جواب دقیق موجود است: یک رسانای استوانه‌ای یا سیم دراز که با پوسته هم‌محور احاطه شده است. چگالی جریان و میدان الکتریکی در این رسانای استوانه‌ای یکنواخت هستند؛ راستای آنها موازی با محور استوانه یا محور z است. پتانسیل پوسته محیط صفر فرض شده است. این فرض مسئله مقدار مرزی خوش تعریفی برای ناحیه بین استوانه و پوسته وضع می‌کند: روی پوسته $\Phi = 0$ ، و روی استوانه $\Phi = -E_0 z$ ، که در آن E_0 بزرگی میدان الکتریکی یکنواخت است. معادله لاپلاس جواب بسیار ساده‌ای دارد (مسئله ۹-۵). شکل ۹-۳ خطوط میدان الکتریکی را نشان می‌دهد. توجه کنید که خطوط میدان خارجی بر سطح استوانه ختم می‌شوند- نیمه پایینی استوانه حامل بار سطحی مثبت و نیمه بالایی حامل بار سطحی منفی است.

در پایان، می‌خواهیم کاربردی از قانون اهم در مسئله میل به تعادل الکتروستاتیک در رسانا را بررسی کنیم. تجربه نشان می‌دهد وقتی مقداری بار در انتهای یک رسانا قرار دهیم این بار مجدداً توزیع می‌شود، و رسانا بسیار سریع به تعادل استاتیک (جریان صفر) می‌رسد. به همین ترتیب، وقتی دو سر یک رسانا را به یک باتری که نیروی محرکه الکتریکی ثابتی ایجاد می‌کند وصل کنیم رسانا بسیار سریع به وضعیت پایا (جریان ثابت) می‌رسد. اکنون می‌خواهیم زمانی را که طول



شکل ۳-۹ خطوط میدان الکتریکی در داخل و مجاورت یک رسانای استوانه‌ای حامل جریان الکتریکی. این رسانا با یک پوسته رسانا در پتانسیل صفر احاطه شده است.

می‌کشد تا رسانا به تعادل یا وضعیت پایا برسد محاسبه کنیم. برای رسانای ضعیف، محاسبه به قرار زیر است: با شروع از معادله پیوستگی

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (۱۶-۹)$$

و جاگذاری $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ بنا به قانون اهم، به دست می‌آوریم

$$\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

اما $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon$ در نتیجه

$$\frac{\rho}{\epsilon} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (۱۷-۹)$$

جواب این معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$\rho(t) = \rho(0)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (18-9)$$

این جواب نشان می‌دهد بار همه‌جا داخل رسانا به طور نمایی کاهش می‌یابد؛ یعنی بار به طرف سطح رسانا جریان می‌یابد و در آنجا جمع می‌شود. تعادل متناظر است با $\rho = 0$. زمانی که تابع نمایی به $1/e$ می‌رسد برابر است با

$$t_0 = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma} \quad (19-9)$$

این زمان سرعت میل رسانا به تعادل الکتروستاتیک را نشان می‌دهد، و آن را زمان واهلش رسانا می‌نامند. به‌عنوان مثال، برای آب مقطر داریم $\sigma = 2 \times 10^{-6} \text{S}^{-1}$ و $\epsilon \simeq 80$ ؛ در نتیجه $t_0 \simeq 3 \times 10^{-6} \text{s}$.

باید قویاً تأکید کنیم که برخلاف آنچه در بعضی کتابهای درسی الکتروسیسته بیان شده است محاسبه بالا برای رساناهای خوب مانند فلزات معتبر نیست. اگر مرتکب این اشتباه شویم که رسانندگی یک فلز—مثلاً مس با $\sigma = 5 \times 10^{16} \text{S}^{-1}$ — را در معادله ۹-۱۹ جاگذاری کنیم، مقدار $t_0 \simeq 1/(4\pi\sigma) \simeq 2 \times 10^{-19} \text{s}$ را به دست می‌آوریم که به‌طور مضحکی کوچک است. این عدد کوچک با فرض اساسی قانون اهم ناسازگار است—در مقیاس زمانی 10^{-19}s ، قانون اهم معتبر نیست. دلیل این امر این است که موازنهٔ تکانه (معادلهٔ ۹-۱۰) که اساس قانون اهم است نمی‌تواند در زمانی کمتر از زمان برخورد τ تحقق یابد. برای مس داریم $\tau \simeq 2 \times 10^{-14} \text{s}$ ، و در مقیاس زمانی کمتر از این نمی‌توانیم به قانون اهم استناد کنیم.

همین‌که به قلمرو اعتبار قانون اهم وارد شویم، انتظار داریم بارهای آزاد با سرعت زیاد به سطح فلز بروند. از اینجا استنباط می‌شود که زمان واهلش برای بیرون کردن بارهای آزاد از حجم رسانا باید حدوداً برابر با زمان برخورد باشد، و این نتیجه را محاسبات مفصل میرایی نوسانهای پلاسمای ذرات آزاد تأیید کرده است. اما بیرون شدن بارهای آزاد از حجم رسانا تنها قدم اول در رسیدن به تعادل الکتروستاتیکی است. بارهای متحرک جریانی تشکیل می‌دهند، که میدان مغناطیسی وابسته به زمان ایجاد می‌کند، که (از راه القا) میدانی الکتریکی بوجود می‌آورد، که جریانی اضافی می‌کشد، و ... رسانا برای رسیدن به تعادل الکتروستاتیک و مغناطوستاتیک باید این میدانها و جریانهای دینامیکی هم‌نگهدار را حذف کند. بدین ترتیب، در تحلیل رسیدن به تعادل در رسانای خوب باید به تمام معادلات ماکسول توجه کافی داشته باشیم—این کار را در بخش ۱۲-۸ انجام می‌دهیم. به‌طور شهودی، انتظار داریم در یک رسانای خوب زمان واهلش متناسب با رسانندگی باشد؛ در این رسانا، زمان واهلش باید طولانی باشد زیرا «اصطکاک» کمی برای از بین بردن میدانها و جریانهای دینامیکی وجود دارد. در بخش ۱۲-۸ خواهیم دید که محاسبه این انتظارات را تأیید می‌کند.

۳-۹ میدان مغناطیسی استاتیک؛ قانون آمپر و قانون بیو-ساوار
 برای میدان مغناطیسی مستقل از زمانی که از جریان پایا ایجاد شده است، معادله‌های ماکسول
 ۶۲-۸ و ۶۳-۸ به صورت زیر درمی‌آیند

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0 \quad (۲۰-۹)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad (۲۱-۹)$$

معادله دومی را قانون آمپر می‌نامند. از دو طرف این معادله روی یک سطح باز اختیاری انتگرال
 می‌گیریم:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (۲۲-۹)$$

با استفاده از قضیه استوکس، می‌توانیم طرف چپ را به انتگرال روی مرز سطح تبدیل کنیم:

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (۲۳-۹)$$

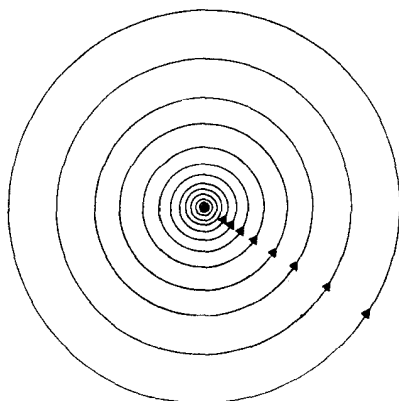
این رابطه صورت انتگرالی قانون آمپر است، و نشان می‌دهد انتگرال \mathbf{B} روی هر مسیر بسته‌ای برابر
 است با جریانی که از سطح محدود به این مسیر عبور می‌کند.

اگر توزیع جریان خیلی متقارن باشد، میدان مغناطیسی با یک محاسبه بسیار ساده و سر راست
 از معادله ۲۳-۹ به دست می‌آید: مثال کلاسیک در این مورد محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از
 جریان I در یک سیم بسیار دراز مستقیم است. بنا به معادله ۲۰-۹، خطوط میدان مغناطیسی
 باید حلقه‌های بسته باشند. نقشهای خطوط میدان که با تقارن استوانه‌ای جریان سازگار هستند
 تنها عبارت‌اند از دایره‌های هم‌مرکز، خطوط شعاعی، یا خطوط موازی با راستای جریان؛ از میان
 اینها تنها نقش دایره‌های هم‌مرکز (شکل ۹-۴) با این شرط سازگار است که خطوط میدان باید
 حلقه‌های بسته باشند. از محاسبه $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ روی یکی از این دایره‌ها کمیت $2\pi r B$ به دست می‌آید؛
 و $\int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ برابر است با جریان I در سیم. بنابراین

$$2\pi r B = \frac{4\pi}{c} I \quad (۲۴-۹)$$

یا

$$B = \frac{2I}{c r} \quad (۲۵-۹)$$



شکل ۹-۴ خطوط میدان مغناطیسی اطراف سیم مستقیم بسیار دراز. سیم عمود بر صفحه کاغذ است.

برای توزیعهای پیچیدهتر جریان که در مورد آنها محاسبات ساده با صورت انتگرالی قانون آمپر ممکن نیست، جواب عمومی را باید از معادله‌های ۹-۲۰ و ۹-۲۱ تعیین کنیم. به کمک پتانسیل برداری \mathbf{A} جواب به آسانترین راه به دست می‌آید. در مورد مستقل از زمان، هر مؤلفه پتانسیل برداری در یک معادله پواسون (معادله ۸-۹) صدق می‌کند:

$$\nabla^2 A_x(\mathbf{x}) = -\frac{4\pi}{c} j_x(\mathbf{x}) \quad (۲۶-۹)$$

$$\nabla^2 A_y(\mathbf{x}) = -\frac{4\pi}{c} j_y(\mathbf{x}) \quad (۲۷-۹)$$

$$\nabla^2 A_z(\mathbf{x}) = -\frac{4\pi}{c} j_z(\mathbf{x}) \quad (۲۸-۹)$$

از فصل ۲ می‌دانیم که معادله پواسون برای پتانسیل الکتروستاتیک، یعنی

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}) \quad (۲۹-۹)$$

دارای جواب زیر است

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (۳۰-۹)$$

بنا به تشابه، می‌بینیم که جوابهای معادله‌های ۹-۲۶ تا ۹-۲۸ باید به صورت

$$A_x(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{j_x(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (۳۱-۹)$$

و دو رابطهٔ متناظر برای $A_y(\mathbf{x})$ و $A_z(\mathbf{x})$ باشند. از ترکیب این جوابها معادلهٔ برداری زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (۳۲-۹)$$

با توجه به این پتانسیل برداری، میدان مغناطیسی عبارت است از

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (۳۳-۹)$$

در این معادله، عملگر دیفرانسیلی ∇ تنها روی \mathbf{x} عمل می‌کند؛ بنابراین می‌توانیم جملهٔ زیر انتگرال را به صورت زیر بنویسیم

$$\nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \mathbf{j}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (۳۴-۹)$$

با توجه به رابطهٔ بالا، برای $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ داریم

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV' \quad (۳۵-۹)$$

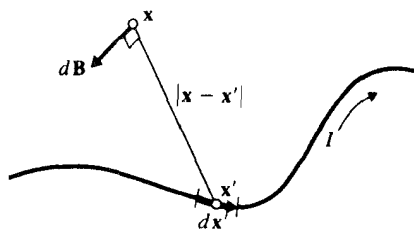
در بسیاری از کاربردهای عملی، جریان در یک (یا چند) سیم برقرار است. در این مورد، انتگرال‌گیری در معادلهٔ ۳۵-۹ به حجم سیم محدود می‌شود. برای سیم باریک، موقع انتگرال‌گرفتن روی مقطع سیم می‌توانیم $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3$ را ثابت بگیریم. پس انتگرال سه بعدی در معادلهٔ ۳۵-۹ به انتگرال یک بعدی در امتداد سیم تبدیل می‌شود:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{I}{c} \int d\mathbf{x}' \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (۳۶-۹)$$

که در آن I بزرگی جریانی است که از سیم می‌گذرد و $d\mathbf{x}'$ جابه‌جایی در جهت جریان است (شکل ۵-۹). رابطهٔ بالا را قانون بیوساوار می‌نامند.

تمرین ۲- نشان دهید از معادلهٔ ۳۵-۹ با انتگرال‌گرفتن روی مقطع سیم معادلهٔ ۳۶-۹ به دست

می‌آید.

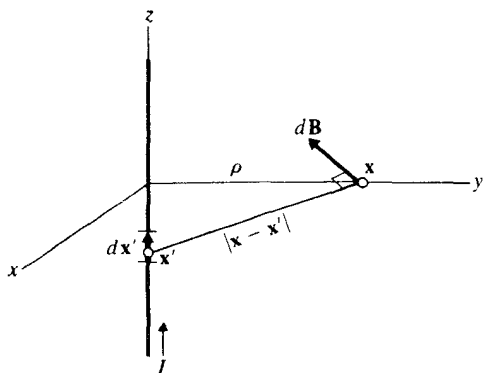


شکل ۵-۹ یک قطعه کوچک dx' از سیم و سهم آن در میدان مغناطیسی.

در بقیه این بخش چند مثال از محاسبه میدان مغناطیسی را بررسی می‌کنیم. به‌عنوان اولین مثال، محاسبه میدان مغناطیسی یک سیم مستقیم بسیار دراز را با استفاده از پتانسیل برداری تکرار می‌کنیم. شکل ۶-۹ این سیم را نشان می‌دهد که در امتداد محور z قرار گرفته است. با فرض باریک بودن سیم، $1/|x - x'|$ در مقطع سیم ثابت است.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left(\iint \mathbf{j} dx' dy' \right) dz' \end{aligned} \quad (37-9)$$

$$= \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} I \hat{z} dz' \quad (38-9)$$



شکل ۶-۹ سیم بسیار دراز مستقیم در امتداد محور z .

با توجه به مختصات در شکل ۹-۶، انتگرال به صورت زیر نوشته می شود

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{I}{c} \hat{\mathbf{z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \quad (39-9)$$

این انتگرال به طور لگاریتمی واگراست. اشکال این است که رابطه ۹-۳۲ برای پتانسیل برداری به طور ضمنی فرض می کند که در بینهایت (در تمام راستاها) $\mathbf{A} \rightarrow 0$ ؛ این مطلب برای سیمی با طول نامتناهی درست نیست. بنابراین باید ثابت جمعی پتانسیل را از نو تعیین کنیم. برای انجام این کار از همه ساده تر این است که معادله ۹-۳۹ را ابتدا برای سیمی با طول متناهی محاسبه کنیم:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{I}{c} \hat{\mathbf{z}} \int_{-L}^L \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} = \frac{2I}{c} \hat{\mathbf{z}} \int_0^L \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \quad (40-9)$$

$$= \frac{2I}{c} \hat{\mathbf{z}} [-\log \rho + \log(L + \sqrt{\rho^2 + L^2})] \quad (41-9)$$

اگر $L \gg \rho$ ، آنگاه دومین تابع لگاریتمی تقریباً ثابت است؛ بنابراین داریم

$$\mathbf{A} = -\frac{2I}{c} \hat{\mathbf{z}} \log \rho + \text{const} \quad (42-9)$$

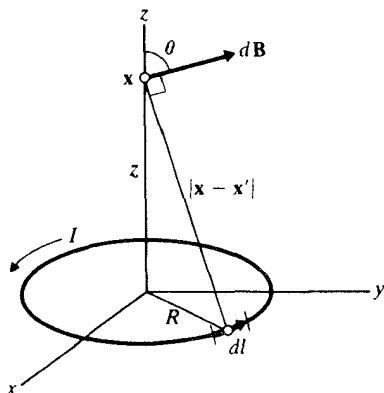
با استفاده از عملگر گرادین در مختصات استوانه ای، بلافاصله به دست می آوریم

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{2I}{c} \frac{1}{\rho} \hat{\phi} \quad (43-9)$$

که با معادله ۹-۲۵ توافق دارد.

■ تمرین ۳- $\nabla \times \mathbf{A}$ را حساب کنید و نشان دهید معادله ۹-۴۳ به دست می آید.

مثال دیگری که اهمیت عملی زیادی دارد محاسبه میدان مغناطیسی حلقه دایره ای جریان است (شکل ۹-۷). در اینجا تنها میدان مغناطیسی روی محور حلقه را بررسی می کنیم و محاسبه کلی تری را در بخش بعد انجام می دهیم. برای نقاط روی محور، از همه ساده تر این است که مستقیماً از قانون بیوساوار استفاده کنیم (برای استفاده از پتانسیل برداری ابتدا باید این پتانسیل را در نقاط خارج از محور به دست آوریم تا بتوانیم مشتقات را محاسبه کنیم؛ این کار بسیار پردردسر است).



شکل ۷-۹. حلقه دایره‌ای جریان در صفحه xy و به مرکز مبدأ.

شکل ۷-۹ حلقه‌ای به شعاع R و جریان I را نشان می‌دهد. بنا به معادله ۹-۳۶، میدان مغناطیسی ناشی از قسمت کوچکی از حلقه برابر است با

$$dB = \frac{I}{c} \frac{dl}{R^2 + z^2} \quad (۴۴-۹)$$

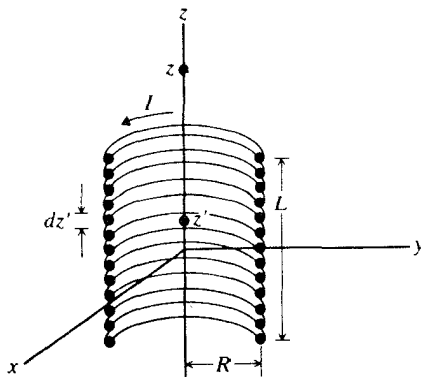
در آن $\sqrt{R^2 + z^2} = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ فاصله بین \mathbf{x} و \mathbf{x}' است. این جزء از میدان مغناطیسی بر خط واصل \mathbf{x} و \mathbf{x}' عمود است. به علت تقارن دورانی، مؤلفه‌های افقی میدان مغناطیسی در انتگرال‌گیری حذف می‌شوند و تنها مؤلفه قائم باقی می‌ماند:

$$B_z = \frac{I}{c} \int \frac{\cos \theta dl}{R^2 + z^2} = \frac{I}{c} \frac{2\pi R \cos \theta}{R^2 + z^2} \quad (۴۵-۹)$$

$$= \frac{I}{c} \frac{2\pi R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (۴۶-۹)$$

از رابطه میدان مغناطیسی حلقه می‌توانیم میدان مغناطیسی روی محور یک سیمولوله را به دست آوریم. شکل ۸-۹ سیمولوله‌ای به طول متناهی L را نشان می‌دهد. این سیمولوله را می‌توانیم به صورت تعداد زیادی حلقه که نزدیک به هم قرار گرفته‌اند در نظر بگیریم. فرض کنید تعداد حلقه‌ها در واحد طول برابر با n است و جریان I از آنها عبور می‌کند. پس تعداد حلقه‌ها در جزء dz' سیمولوله برابر با $n dz'$ است، و میدان مغناطیسی ناشی از این جزء عبارت است از

$$dB_z = \frac{I}{c} \frac{2\pi R^2}{[(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}]} n dz' \quad (۴۷-۹)$$



شکل ۸-۹. مقطع طولی سیمولوله‌ای با طول متناهی.

به طوری که

$$B_z = \frac{I}{c} 2\pi R^2 n \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

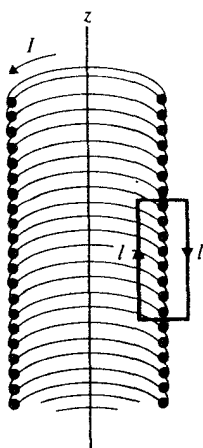
$$= \frac{I}{c} 2\pi n \left[\frac{L/2 - z}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} + \frac{L/2 + z}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} \right] \quad (48-9)$$

برای سیمولوله بینهایت دراز باید حد $L \rightarrow \infty$ را بگیریم، و در نتیجه داریم

$$B_z = 4\pi n \frac{I}{c} \quad (49-9)$$

این نتیجه را همچنین می‌توانیم از قانون آمپر (معادله ۹-۲۳) خیلی سریع به دست آوریم. برای این منظور، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که خطوط میدان موازی با محور تنها نقشی است که هم با تقارن توزیع جریان سازگار است و هم با این شرط که خطوط میدان در سیمولوله هیچ جا شروع نمی‌شوند و به پایان نمی‌رسند. آنگاه می‌توانیم قانون آمپر را برای مسیر مستطیلی شکل ۹-۹ به کار ببریم. انتگرال $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ از اضلاع کوچک که عمود بر میدان مغناطیسی هستند و همچنین از ضلع بزرگی که خارج از سیمولوله است سهمی ندارد. سهم مربوط به ضلع بزرگ داخل سیمولوله برابر با $B_z \Delta l$ است. جریانی که از سطح مستطیل عبور می‌کند $nI \Delta l$ است. در نتیجه، بنا به قانون آمپر داریم

$$B_z \Delta l = \frac{4\pi}{c} nI \Delta l \quad (50-9)$$



شکل ۹-۹. سیمولوله‌ای با طول نامتناهی، و مسیر مربوط به قانون آمپر.

که با معادله ۹-۴۹ هم‌ارز است. یک مزیت مهم این محاسبه مبتنی بر قانون آمپر این است که به تقارن استوانه‌ای سیمولوله متکی نیست؛ پس هر سیمولوله‌ای با مقطع یکنواخت اختیاری—مثلاً سیمولوله‌ای با مقطع مربع—میدان مغناطیسی یکنواختی ایجاد می‌کند که شدت آن از معادله ۹-۴۹ تعیین می‌شود.

تمرین ۴- با استفاده از قانون آمپر نشان دهید میدان مغناطیسی بین دو صفحه رسانای بزرگ موازی که حامل چگالی جریانی سطحی یکنواخت \$k\$ ایستا آمپر در سانتیمتر در جهت‌های مخالف هستند برابر است با

$$B = \frac{4\pi k}{c} \quad (51-9)$$

۴-۹ پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی؛ دوقطبی مغناطیسی

در هر ناحیه خالی از جریان، معادله ۹-۲۱ به $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ تبدیل می‌شود. بنابراین می‌توانیم قضیه‌ای که در بخش ۴-۱ گفته شد را به‌کار ببریم که مطابق با آن می‌توان میدان \mathbf{B} را به‌صورت گرادیان تابع پتانسیل بیان کرد. این قضیه و محدودیت‌های آن را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.

قضیه: فرض کنید ناحیه V همبند ساده و خالی از جریان است. آنگاه داخل این ناحیه تابعی مانند $\Phi_M(\mathbf{x})$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi_M(\mathbf{x}) \quad (52-9)$$

تابع $\Phi_M(x)$ را پتانسیل زده‌ای مغناطیسی می‌نامند. با توجه به معادله ۹-۲۰، این پتانسیل مغناطیسی از معادله لاپلاس تبعیت می‌کند:

$$\nabla^2 \Phi_M = 0 \quad (53-9)$$

بنابراین می‌توانیم روش‌های ریاضی فصل ۳ را برای حل مسائل مغناطوساتیک به‌کار ببریم. اما باید همیشه به‌خاطر داشته باشیم که پتانسیل مغناطیسی متحمل محدودیتی اساسی است. این پتانسیل تنها در ناحیه‌های همبند ساده خالی از جریان تعریف می‌شود. برای مثال، برای میدان مغناطیسی مربوط به حلقه جریان (که در بخش قبل بحث شد) یافتن یک پتانسیل مغناطیسی که در تمام فضا معتبر باشد غیرممکن است. می‌توانیم پتانسیلی برای ناحیه $z > 0$ و پتانسیل مغناطیسی جداگانه‌ای برای ناحیه $z < 0$ به‌دست آوریم؛ اما این دو پتانسیل در صفحه $z = 0$ به‌طور پیوسته به‌هم متصل نمی‌شوند.

برای به‌دست آوردن پتانسیل مغناطیسی مربوط به حلقه‌ای با جریان I ، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که میدان مغناطیسی روی محور z ، یعنی

$$B_z = \frac{I}{c} \frac{2\pi R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (54-9)$$

را می‌توان به‌صورت گرادیان بیان کرد:

$$B_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{2\pi I}{c} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right] \quad (55-9)$$

در نتیجه، می‌توانیم تابع زیر را پتانسیل مغناطیسی روی محور z بگیریم

$$\Phi_M = -\frac{2\pi I}{c} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \quad (56-9)$$

برای یافتن عبارت کلی میدان مغناطیسی باید ناحیه همبند ساده‌ای انتخاب کنیم که حلقه جریان را در برنگیرد. فرض کنید ناحیه $r > R$ را انتخاب کنیم. در این ناحیه، عبارت ۹-۵۶ دارای بسط رشته توانی زیر است

$$\Phi_M = -\frac{2\pi I}{c} \left(1 - \frac{R^2}{2z^2} + \frac{3R^4}{8z^4} - \frac{5R^6}{16z^6} + \dots \right) \quad (57-9)$$

از بخش ۳-۴ می‌دانیم که جواب عمومی معادله لاپلاس با تقارن سمتی عبارت است از

$$\Phi_M = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l P_l(\cos \theta) + B_l r^{-l-1} P_l(\cos \theta)] \quad (58-9)$$

از مقایسه این معادله با معادله ۵۷-۹ دیده می‌شود که تمام ضرایب A_l صفرند بجز A_0 :

$$A_0 = -\frac{2\pi I}{c} \quad (59-9)$$

و ضرایب B_l عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} B_0 &= 0 & B_1 &= \frac{2\pi I R^2}{c} & B_2 &= 0 \\ B_3 &= -\frac{2\pi I 3R^2}{c} & B_4 &= 0 \end{aligned} \quad (60-9)$$

و غیره، بنابراین، پتانسیل مغناطیسی برابر است با

$$\Phi_M = \frac{2\pi I}{c} \left[-1 + \frac{R^2}{2r^2} \cos \theta - \frac{3R^2}{16r^2} (\Delta \cos^2 \theta - 3 \cos \theta) + \dots \right] \quad (61-9)$$

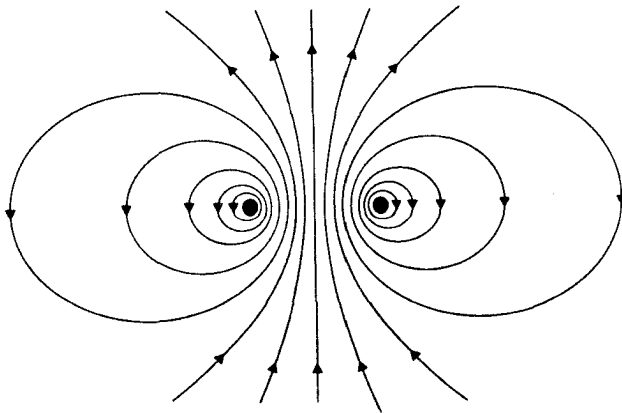
از اینجا می‌توان مؤلفه‌های میدان مغناطیسی را محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} B_r &= -\frac{\partial \Phi_M}{\partial r} = \frac{2\pi I}{c} \left[\frac{R^2}{r^3} \cos \theta - \frac{3R^2}{4r^5} (\Delta \cos^2 \theta - 3 \cos \theta) + \dots \right] \\ B_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta} = \frac{2\pi I}{c} \left[\frac{R^2}{2r^2} \sin \theta - \frac{9R^2}{16r^5} (\Delta \cos^2 \theta - 1) \sin \theta + \dots \right] \\ B_\phi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi_M}{\partial \phi} = 0 \end{aligned} \quad (62-9)$$

محاسبه میدان مغناطیسی در ناحیه همبند ساده $r < R$ را می‌توانیم به همین روش انجام دهیم. شکل ۹-۱۰ خطوط میدان مغناطیسی اطراف حلقه را نشان می‌دهد. به ازای $R \gg r$ ، می‌توانیم میدان مغناطیسی را به صورت زیر تقریب بگیریم:

$$B_r = \frac{2\pi I R^2 \cos \theta}{c r^3} \quad (63-9)$$

$$B_\theta = \frac{\pi I R^2 \sin \theta}{c r^3} \quad (64-9)$$



شکل ۹-۱۰ خطوط میدان مغناطیسی اطراف حلقهٔ جریان. حلقه بر صفحهٔ کاغذ عمود است.

این معادلات میدان مغناطیسی یک دوقطبی مغناطیسی ایده‌آل یا محض را بیان می‌کنند. حاصلضرب مساحت و جریان را به‌عنوان گشتاور دوقطبی مغناطیسی تعریف می‌کنیم:

$$m = \frac{\pi R^2 I}{c} \quad (۹-۶۵)$$

بنابراین، معادلات ۹-۶۳ و ۹-۶۴ به‌صورت زیر نوشته می‌شوند

$$B_r = 2m \frac{\cos \theta}{r^3} \quad (۹-۶۶)$$

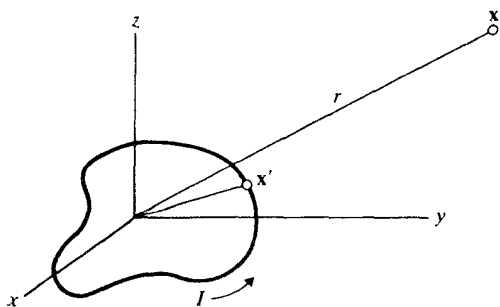
$$B_\theta = m \frac{\sin \theta}{r^3} \quad (۹-۶۷)$$

هر حلقهٔ جریان بستهٔ اختیاری یک میدان دوقطبی مغناطیسی در فواصل دور ایجاد می‌کند. این مطلب را می‌توان از قانون بیوساوار (معادلهٔ ۹-۳۶) به‌آسانی مشاهده کرد. این قانون را دوباره می‌نویسیم:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{I}{c} \int d\mathbf{x}' \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (۹-۶۸)$$

فرض کنید حلقه نزدیک مبدأ مختصات باشد (شکل ۹-۱۱) و نقطهٔ \mathbf{x} در فاصله‌ای دور از حلقه باشد. پس می‌توانیم از تقریب زیر استفاده کنیم (معادلهٔ ۳-۱۱۴)

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \simeq \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^3} + \dots \quad (۹-۶۹)$$



شکل ۹-۱۱ حلقهٔ جریان با شکل اختیاری. نقطهٔ x در فاصله‌ای دور از حلقه است.

یا

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \simeq \frac{1}{r^2} + \frac{3\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^5} + \dots \quad (70-9)$$

این تقریب را در معادلهٔ ۹-۶۸ می‌گذاریم، و چهار جمله به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{I}{c} \left[\int \frac{1}{r^2} d\mathbf{x}' \times \mathbf{x} + \int \frac{3\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^5} d\mathbf{x}' \times \mathbf{x} \right. \\ \left. - \int \frac{1}{r^2} d\mathbf{x}' \times \mathbf{x}' - \int \frac{3\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^5} d\mathbf{x}' \times \mathbf{x}' \right] + \dots \end{aligned} \quad (71-9)$$

جملهٔ اول برابر است با $\int d\mathbf{x}' \times \mathbf{x}$ (بردار ثابت)، که برای حلقهٔ بسته صفر است. آخرین جمله شامل توان اول \mathbf{x} در صورت کسر است و بنابراین از مرتبهٔ r^{-2} است و می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. دو جملهٔ باقیمانده (دومی و سومی) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \quad (72-9)$$

که در آن گشتاور مغناطیسی \mathbf{m} به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2c} \int \mathbf{x}' \times d\mathbf{x}' \quad (73-9)$$

تمرین ۵- معادلهٔ ۹-۷۲ را تحقیق کنید. [راهنمایی: بهتر است از معادلهٔ ۹-۷۲ به ۹-۷۱ برسید.

از جاگذاری

$$\frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{r^3} = \mathbf{m} + \frac{(\mathbf{m} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{x}}{r^3}$$

در معادله ۹-۷۲ شروع کنید. چون \mathbf{m} انتگرال حاصلضرب برداری است، $\mathbf{m} \times \mathbf{x}$ انتگرال حاصلضرب سه‌گانه برداری است؛ این حاصلضرب را با استفاده از معادله ۱-۷۹ بسط دهید، و سپس با انتگرال‌گیری جزء به جزء نشان دهید دو جمله این بسط مساوی هستند. ■

اگر محور z در راستای \mathbf{m} باشد، مؤلفه‌های معادله ۹-۷۲ عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} B_r &= 2m \frac{\cos \theta}{r^3} \\ B_\theta &= m \frac{\sin \theta}{r^3} \end{aligned} \quad (9-74)$$

این نتیجه با معادله‌های ۹-۶۶ و ۹-۶۷ توافق دارد و نشان می‌دهد \mathbf{m} گشتاور دوقطبی حلقه جریان است که به صورت بردار بیان شده است. توجه کنید که در انتگرال ۹-۷۳ مربوط به بردار گشتاور دوقطبی، جهت انتگرال‌گیری منطبق بر جهت جریان است. برای حلقه تخت، بردار گشتاور دوقطبی با قاعده دست راست به جهت جریان مربوط می‌شود: شست دست راست جهت \mathbf{m} را تعیین می‌کند هرگاه سایر انگشتها در جهت جریان قرار گیرند. برای حلقه سه‌بعدی، جهت \mathbf{m} را باید با محاسبه انتگرال ۹-۷۳ تعیین کرد، و قاعده دست راست حداکثر یک تعیین تقریبی را ممکن می‌سازد.

تمرین ۶- نشان دهید میدان مغناطیسی ۹-۷۲ را می‌توان از پتانسیل مغناطیسی زیر به دست آورد

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}}{r^3} \quad (9-75)$$

۹-۵ حرکت ذرات در میدانهای مغناطیسی

معادله حرکت ذره باردار در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی عبارت است از

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} \quad (9-76)$$

ابتدا حرکت ذره در میدان مغناطیسی محض ($\mathbf{E} = 0$) را بررسی می‌کنیم. در این مورد، از معادلهٔ ۷۶-۹ داریم $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{p}/dt = 0$ چون

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \mathbf{u} \cdot \frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ &= \frac{m}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{mu^2/c^2}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \end{aligned} \quad (77-9)$$

می‌توان بلافاصله نتیجه گرفت که u^2 باید ثابت بماند. از اینجا این نتیجهٔ مشهور اثبات می‌شود که میدان مغناطیسی نه بزرگی سرعت ذره را تغییر می‌دهد و نه انرژی را. بنابراین، آهنگ تغییر تکانه در میدان مغناطیسی کاملاً ناشی از تغییر جهت سرعت است:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad (78-9)$$

و معادلهٔ ۷۶-۹ تبدیل می‌شود به

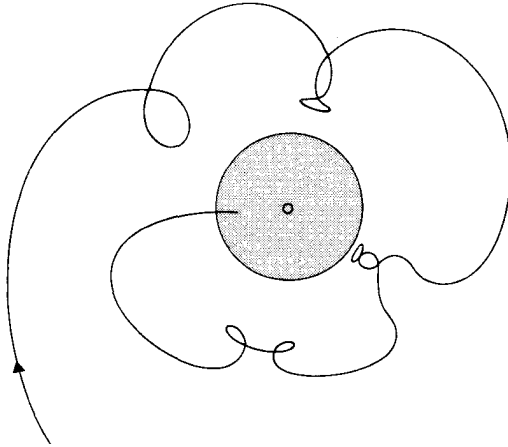
$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{q}{mc} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (79-9)$$

اگر میدان مغناطیسی تابعی از فضا باشد، از معادلهٔ ۷۹-۹ مدارهای نسبتاً پیچیده‌ای به دست می‌آیند. برای مثال، حرکت یک ذرهٔ پرتوکیهانی در میدان مغناطیسی زمین (که یک میدان دوقطبی است) در شکل ۱۲-۹ نشان داده شده است. ما تنها حرکت در میدان مغناطیسی ثابت را بررسی می‌کنیم. بنا به معادلهٔ ۷۹-۹، بردار تغییر سرعت همیشه بر سرعت و بر میدان مغناطیسی عمود است. اگر \mathbf{B} ثابت باشد، آنگاه \mathbf{u} حول \mathbf{B} به‌طور یکنواخت حرکت تقدیمی انجام می‌دهد (شکل ۱۳-۹)؛ مؤلفهٔ $\mathbf{u}_{||}$ موازی با \mathbf{B} ثابت می‌ماند، و مؤلفهٔ \mathbf{u}_{\perp} عمود بر \mathbf{B} با حرکت دایره‌ای یکنواخت نوسان می‌کند. بسامد این حرکت یکنواخت دایره‌ای برابر است با

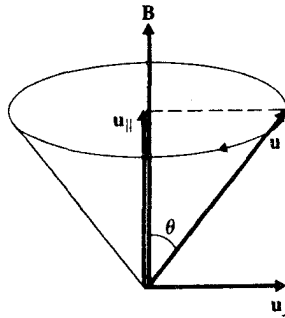
$$\omega = \frac{qB}{mc} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (80-9)$$

برای به دست آوردن معادلهٔ بالا کافی است بزرگی معادلهٔ ۷۹-۹، یعنی

$$\left| \frac{d\mathbf{u}_{\perp}}{dt} \right| = u_{\perp} \frac{qB}{mc} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (81-9)$$



شکل ۹-۱۲ مسیر ذره پرتو کیهانی در میدان مغناطیسی زمین. این مسیر سه بعدی است. نمودار بالا تصویر مسیر روی صفحه استوایی (مغناطیسی) را نشان می‌دهد.



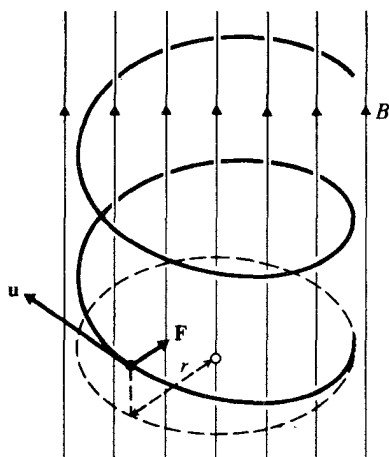
شکل ۹-۱۳ بردار سرعت u حول B حرکت تقدیمی دارد. زاویه θ بین u و B ثابت می‌ماند.

را مقایسه کنیم با تعریف شتاب مرکز گرا در حرکت دایره‌ای یکنواخت، یعنی

$$(82-9) \quad (\text{سرعت در صفحه حرکت}) \times \omega = (\text{شتاب مرکز گرا})$$

بسامد ۹-۸۰ را بسامد سیکلوترون می‌نامند. برای سرعت‌های کم ($u/c \ll 1$) بسامد سیکلوترون برابر با qB/mc ، مستقل از سرعت است؛ اما برای سرعت‌های نسبی، این بسامد از qB/mc کوچکتر است. شعاع حرکت دایره‌ای عبارت است از

$$(83-9) \quad r = \frac{u_{\perp}}{\omega} = \frac{u_{\perp} mc}{qB \sqrt{1 - u^2/c^2}}$$



شکل ۹-۱۴ در میدان مغناطیسی یکنواخت، مدار ذره یک پیچ است که محور آن موازی با \mathbf{B} است.

یا

$$r = \frac{cp_{\perp}}{qB} \quad (۹-۸۴)$$

برای یک میدان مغناطیسی معین، شعاع حرکت دایره‌ای مستقیماً متناسب با تکانه است. استفاده از رابطه بالا برای تعیین تکانه ذره از شعاع اندازه‌گیری شده ردی که ذره در اتاقک حباب از خود به جا می‌گذارد کار روزمره فیزیکدانهای انرژی زیاد است.

از ترکیب حرکت دایره‌ای عمود بر میدان مغناطیسی و حرکت انتقالی موازی با میدان مغناطیسی یک پیچ ایجاد می‌شود (شکل ۹-۱۴).

اکنون می‌خواهیم حرکت ذره را تحت تأثیر همزمان میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بررسی کنیم. برای سادگی، فرض می‌کنیم میدانهای \mathbf{B} و \mathbf{E} ثابت و برهم عمودند (میدانهای «قائم»). شکل ۹-۱۵ یک میدان مغناطیسی ثابت در امتداد محور x و یک میدان الکتریکی ثابت در امتداد محور z را نشان می‌دهد. تحت این شرایط، مؤلفه x سرعت ثابت می‌ماند. از این مؤلفه حرکت صرفنظر می‌کنیم و توجه خود را به مؤلفه‌های y و z معطوف می‌کنیم.

برای تحلیل حرکت در صفحه yz از روش زیر استفاده می‌کنیم: به چارچوب مرجع $x'y'z't'$ که در آن \mathbf{E}' یا \mathbf{B}' صفر است می‌رویم. از معادلات تبدیل لورنتس برای میدانها (معادله‌های ۸-۴۶

و (۸-۴۷) داریم

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad (۸۵-۹)$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (۸۶-۹)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad (۸۷-۹)$$

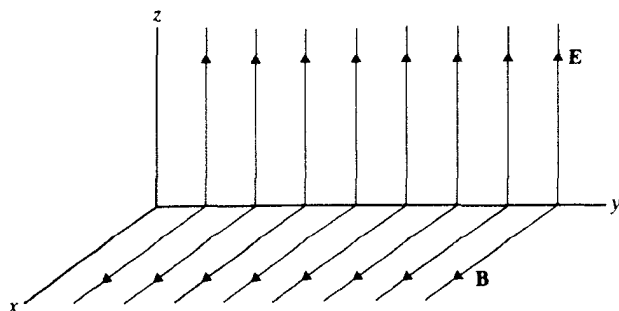
$$\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E} \right) \quad (۸۸-۹)$$

که در آنها $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ معلوم می‌شود اگر در چارچوب مرجع اصلی $B > E$ آنگاه می‌توانیم \mathbf{E}' را صفر کنیم؛ و اگر $E > B$ ، می‌توانیم \mathbf{B}' را صفر کنیم. مورد اول را در نظر می‌گیریم و مقدار زیر را به \mathbf{V} نسبت می‌دهیم

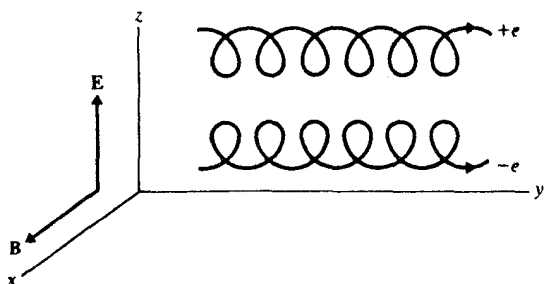
$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} c \quad (۸۹-۹)$$

این سرعت امکانپذیر است، زیرا $V = (EB/B^2)c = (E/B)c < c$. سرعت \mathbf{V} هم بر \mathbf{E} و هم بر \mathbf{B} عمود است (در شکل ۹-۱۵ سرعت در راستای y است). در نتیجه مؤلفه‌های موازی در معادله‌های ۹-۸۵ و ۹-۸۷ صفر می‌شوند. بنابراین، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی با مؤلفه‌های عمودی خود برابرند. از معادله‌های ۹-۸۶ و ۹-۸۸ داریم

$$\mathbf{E}' = \gamma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \times \mathbf{B} \right) = \gamma(\mathbf{E} - \mathbf{E}) = \mathbf{0} \quad (۹۰-۹)$$



شکل ۹-۱۵ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی قائم ثابت. میدان مغناطیسی در راستای x و میدان الکتریکی در راستای z است.



شکل ۹-۱۶ حرکت ذرات باردار مثبت و منفی در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی قائم ثابت با $B > E$. سرعت رانش بر \mathbf{E} و \mathbf{B} عمود است.

و

$$\mathbf{B}' = \gamma \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \times \mathbf{E} \right) = \gamma \left(\mathbf{B} - \frac{E^2}{B^2} \mathbf{B} \right) = B \sqrt{1 - \frac{E^2}{B^2}} \quad (9-19)$$

بدین ترتیب، در چارچوب مرجع $x'y'z't'$ میدان مغناطیسی محض داریم. در این چارچوب مرجع حرکت yz ذرهٔ باردار دایره‌ای یکنواخت است.

در چارچوب آزمایشگاه این حرکت چگونه به نظر می‌رسد؟ این حرکتی است دایره‌ای که با حرکتی انتقالی با سرعت $\mathbf{V} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2)c$ ترکیب شده است. در نتیجه، یک حرکت سیکلوئیدی یا بهتر بگوییم شبه سیکلوئیدی به دست می‌آید (شکل ۹-۱۶). مدارها دقیقاً سیکلوئید نیستند زیرا نسبی بودن همزمانی و انقباض طول یکنواختی حرکت دایره‌ای را از بین می‌برند. اگر از ژیراسیونهای ذره صرفنظر کنیم، می‌بینیم حرکت متوسط (یا حرکت «دیریا») یک رانش تدریجی در جهت $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ است که آن را رانش $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ می‌نامند. توجه کنید که جهت این رانش مستقل از علامت بار ذره است. از دیدگاه چارچوب آزمایشگاه، این رانش نتیجهٔ تأثیر متقابل نیروهای الکتریکی و مغناطیسی است. به‌طور کیفی، آنچه برای ذرهٔ باردار مثبت پیش می‌آید این است (شکل ۹-۱۶): در پایین‌ترین نقطهٔ مدار، ذره دارای سرعت کمی است و میدان مغناطیسی آن را به حرکت روی کمان فشرده‌ای با شعاع انحنا کم وادار می‌کند؛ همچنان‌که ذره به طرف بالا حرکت می‌کند از میدان الکتریکی انرژی می‌گیرد؛ پس میدان مغناطیسی نمی‌تواند ذره را روی کمان فشرده نگه دارد، و شعاع انحنا زیاد می‌شود. همین‌که ذره از بالاترین نقطهٔ مدارش گذشت و شروع به پایین رفتن کرد، به میدان الکتریکی انرژی می‌دهد و مدار دوباره به‌صورت کمان فشرده درمی‌آید؛ و ... نتیجهٔ کلی این است که ذره حرکتی اضافی به سمت راست دارد.

توجه کنید که اگر سرعت ذره با سرعت چارچوب $x'y'z't'$ یکی باشد ($\mathbf{u} = c(\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2)$) همیشه در این چارچوب مرجع ساکن می‌ماند. در چارچوب آزمایشگاه، این ذره روی خط راست

با سرعتی برابر با سرعت رانش حرکت می‌کند.

تمرین ۷- مورد $E > B$ را در نظر بگیرید. چه مقداری باید به \mathbf{V} نسبت دهیم تا $\mathbf{B}' = 0$ شود؟ حرکت ذره را به‌طور کیفی توصیف کنید.

۹-۶ نیروی مغناطیسی بر جریان

اگر سیم حامل جریان را در میدان مغناطیسی بگذاریم نیرویی بر آن وارد می‌شود. چون جریان از بارهای متحرک تشکیل می‌شود، می‌توانیم نیروی وارد بر این سیم را از انتگرال نیروهای وارد بر این بارهای متحرک محاسبه کنیم. قسمت کوچکی از سیم را در نظر بگیرید؛ جریان در این قسمت از بار dq که با سرعت \mathbf{u} حرکت می‌کند تشکیل می‌شود. نیروی مغناطیسی وارد بر این بار عبارت است از

$$d\mathbf{F} = dq \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} dq \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{dq}{dt} d\mathbf{x} \times \mathbf{B} \quad (92-9)$$

در نتیجه، نیروی مغناطیسی وارد بر قسمت $d\mathbf{x}$ را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c} d\mathbf{x} \times \mathbf{B} \quad (93-9)$$

نیروی کل وارد بر سیم برابر است با انتگرال این معادله:

$$F_{I_{\text{کل}}} = \frac{I}{c} \int d\mathbf{x} \times \mathbf{B} \quad (94-9)$$

برای حلقه بسته داریم $\oint d\mathbf{x} = 0$ ؛ بنابراین، از معادله ۹۴-۹ نتیجه می‌شود که نیروی کل وارد بر یک حلقه بسته در میدان مغناطیسی ثابت صفر است. اما بر این حلقه گشتاور نیرو وارد می‌شود. گشتاور نیروی وارد بر یک قسمت کوچک را می‌توانیم از معادله ۹۳-۹ محاسبه کنیم:

$$d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{x} \times d\mathbf{F} = \frac{I}{c} \mathbf{x} \times (d\mathbf{x} \times \mathbf{B}) \quad (95-9)$$

به‌طوری‌که گشتاور نیروی کل عبارت است از

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{I}{c} \int \mathbf{x} \times (d\mathbf{x} \times \mathbf{B}) \quad (96-9)$$

برای میدان مغناطیسی ثابت، این انتگرال برابر است با

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{I}{2c} \int (\mathbf{x} \times d\mathbf{x}) \times \mathbf{B} \quad (97-9)$$

برای اینکه نشان دهیم انتگرالهای معادله‌های ۹۶-۹ و ۹۷-۹ یکی هستند، حاصلضرب سه‌گانهٔ خارجی را در هر یک بسط می‌دهیم:

$$\int \mathbf{x} \times (d\mathbf{x} \times \mathbf{B}) = \int \mathbf{x} \cdot \mathbf{B} d\mathbf{x} - \int \mathbf{B}\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \quad (98-9)$$

و

$$\frac{1}{2} \int (\mathbf{x} \times d\mathbf{x}) \times \mathbf{B} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x} \cdot \mathbf{B} d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int \mathbf{x}\mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} \quad (99-9)$$

در معادلهٔ ۹۸-۹، جملهٔ دوم طرف راست شامل انتگرال روی دیفرانسیل کامل است، که برای حلقهٔ بسته صفر می‌شود:

$$- \int \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = -\frac{1}{2} \int d(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = 0 \quad (100-9)$$

در معادلهٔ ۹۹-۹، می‌توانیم از جملهٔ دوم طرف راست انتگرال جزء‌به‌جزء بگیریم؛ آنگاه می‌بینیم که جملهٔ دوم برابر با جملهٔ اول است. پس طرفهای معادله‌های ۹۸-۹ و ۹۹-۹ یکی هستند — هر دو برابرند با $\int \mathbf{x} \cdot \mathbf{B} d\mathbf{x}$. از اینجا ثابت می‌شود که معادله‌های ۹۶-۹ و ۹۷-۹ نیز یکسان هستند. معادلهٔ ۹۷-۹ نشان می‌دهد گشتاور نیروی وارد بر حلقه بستگی به گشتاور مغناطیسی دارد:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (101-9)$$

این گشتاور نیرو تمایل دارد گشتاور مغناطیسی را در امتداد میدان مغناطیسی قرار دهد. توجه کنید که معادلهٔ ۱۰۱-۹ تنها برای میدان مغناطیسی ثابت معتبر است. اگر میدان مغناطیسی \mathbf{B} ثابت نباشد باید از معادلهٔ ۹۶-۹ استفاده کنیم.

اگر میدان مغناطیسی \mathbf{B} که نیروی وارد بر سیم را ایجاد می‌کند از سیم دیگری که حامل جریان I' است به‌وجود آمده باشد، می‌توانیم از ترکیب معادلهٔ ۹۴-۹ و قانون بیوساوار رابطه‌ای برای نیروی وارد بر سیم حامل جریان I به‌دست آوریم:

$$\mathbf{F}_{I_{روی}} = \frac{II'}{c^2} \iint d\mathbf{x} \times \left(d\mathbf{x}' \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) \quad (102-9)$$

به همین ترتیب، می‌توانیم نیروی وارد بر سیم حامل جریان I' را به دست آوریم:

$$\mathbf{F}_{I' روی} = \frac{II'}{c^2} \iint d\mathbf{x}' \times \left(d\mathbf{x} \times \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) \quad (۱۰۳-۹)$$

در بخش ۹-۱ دیدیم که نیروهای مغناطیسی متقابل مربوط به بارهای متحرک از قانون سوم نیوتون تبعیت نمی‌کنند. این امر را ناشی از انتقال تکانه به میدانهای الکتریکی و مغناطیسی دانستیم. دربارهٔ نیروهای مغناطیسی متقابل مربوط به حلقه‌های جریان چه می‌توان گفت؟ از نگاه سطحی به معادله‌های ۹-۱۰۲ و ۹-۱۰۳ استنباط می‌شود که این نیروها نیز از قانون سوم نیوتون پیروی نمی‌کنند. اما محاسبه نشان می‌دهد انتگرالهای این معادله‌ها را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$-\iint \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}' \quad \text{و} \quad -\iint \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}' \quad (۱۰۴-۹)$$

و از اینجا روشن است که $\mathbf{F}_{I' روی} = -\mathbf{F}_{I روی}$. این نتیجه حائز اهمیت است زیرا در مورد جریانهای پایا در حلقه‌های بسته میدانها باعث نقض قانون سوم نمی‌شوند (برخلاف تمرین ۱) — میدانها ثابت‌اند و تکانه آنها هم اگر وجود داشته باشد ثابت است.

برای تبدیل انتگرال در معادلهٔ ۹-۱۰۲ به صورت ۹-۱۰۴، از بسط حاصلضرب سه‌گانه برداری شروع می‌کنیم:

$$\iint d\mathbf{x} \times \left(d\mathbf{x}' \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) = \iint d\mathbf{x}' \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot d\mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} - \iint \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}' \quad (۱۰۵-۹)$$

چون $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3 = -\nabla(1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$ ، اولین جملهٔ طرف راست این معادله برابر است با

$$-\iint d\mathbf{x}' \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot d\mathbf{x} \quad (۱۰۶-۹)$$

بنابه قضیهٔ استوکس، انتگرال حول حلقهٔ I را می‌توان به صورت انتگرال سطحی روی سطح محدود به این حلقه بیان کرد. بنابراین، رابطهٔ ۹-۱۰۶ به صورت زیر درمی‌آید

$$-\iint d\mathbf{x}' \left(\nabla \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

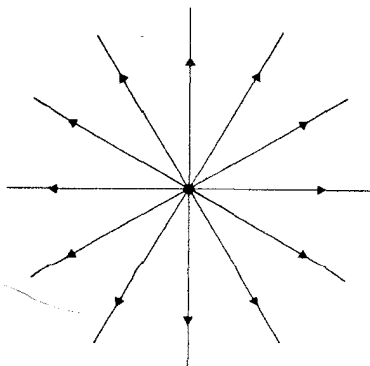
اما این انتگرال صفر است زیرا تاوگرادیان متحد با صفر است. پس در طرف راست معادلهٔ ۹-۱۰۵ تنها جملهٔ دوم باقی می‌ماند که همان جملهٔ ۹-۱۰۴ است.

۷-۹ تک قطبی مغناطیسی

تک قطبی مغناطیسی مشابه مغناطیسی بار الکتریکی است. تک قطبی چشمه خطوط میدان مغناطیسی است درست همان طور که بار چشمه خطوط میدان الکتریکی است. شکل ۹-۱۷ خطوط میدان مغناطیسی مربوط به یک تک قطبی را نشان می دهد. اگر بار مغناطیسی را با g نشان دهیم، میدان مغناطیسی تک قطبی واقع در مبدأ برابر است با

$$\mathbf{B} = g \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (9-107)$$

روشن است که این رابطه مشابه مغناطیسی فرمول آشنای $\mathbf{E} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|^2$ برای میدان کولنی است. تک قطبی مغناطیسی ابتدا توسط دیراک در ۱۹۳۱ مطرح شد [۱]. اخیراً تک قطبیهای مغناطیسی دوباره مورد توجه واقع شده اند زیرا آنها ویژگی جنبی نظریه های وحدت بزرگ نوین (GUTها) بین برهم کنشهای ضعیف، الکترومغناطیسی و قوی هستند؛ این نظریه ها در قلمرو فیزیک کوانتومی قرار می گیرند و نمی توانیم آنها را در اینجا بررسی کنیم. در قلمرو فیزیک کلاسیک، انگیزه وارد کردن تک قطبیها در نظریه الکترومغناطیس از عدم تقارن در معادلات ماکسول (معادله های ۸-۶۱ تا ۸-۶۴) ناشی می شود. بررسی این معادلات نشان می دهد میدانهای الکتریکی و مغناطیسی تقریباً به طور متقارن ظاهر می شوند. میدانهای مغناطیسی وابسته به زمان میدانهای الکتریکی را القا می کنند و میدانهای الکتریکی وابسته به زمان میدانهای مغناطیسی را. اما تقارن بین این میدانها به علت حضور چگالیهای جریان و بار الکتریکی در معادلات ماکسول، یا بهتر بگوییم به علت غیبت چگالیهای جریان و بار مغناطیسی نقض می شود. از اینجا استنباط می کنیم که باید با گنجاندن چگالی بار مغناطیسی ρ_m و چگالی جریان \mathbf{j}_m در معادلات ماکسول تقارن به وجود



شکل ۹-۱۷ خطوط میدان مغناطیسی مربوط به تک قطبی مغناطیسی مثبت.

آوریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (108-9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (109-9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_m \quad (110-9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_m - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (111-9)$$

اکنون این معادله‌ها نسبت به \mathbf{E} و \mathbf{B} مقارن هستند. از لحاظ ریاضی، می‌توانیم این تقارن را به صورت زیر بیان کنیم: این معادله‌ها تحت جاگذاری زیر ناوردا هستند:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B} \quad \mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}_m \quad \rho \rightarrow \rho_m \quad (112-9)$$

$$\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E} \quad \mathbf{j}_m \rightarrow -\mathbf{j} \quad \rho_m \rightarrow -\rho \quad (113-9)$$

این جاگذاری را تبدیل دوگانگی می‌نامند.

اگرچه تعمیم معادلات ماکسول به صورت بالا کاملاً سراسر است به نظر می‌رسد، اما بعضی اشکالهای مخفی دارد که وقتی ظاهر می‌شوند که بخواهیم میدان مغناطیسی را به صورت ناو پتانسیل برداری بیان کنیم:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (114-9)$$

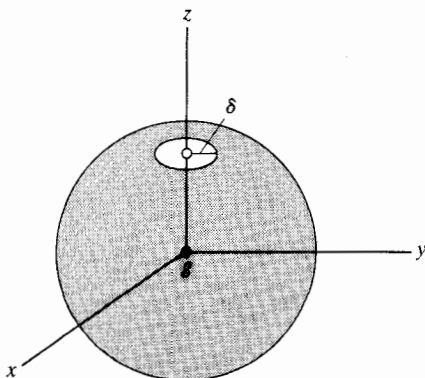
برای اینکه ببینیم چرا این امر ایجاد اشکال می‌کند از معادله ۹-۱۱۰ روی حجم کره‌ای حاوی تک قطبی مغناطیسی g انتگرال می‌گیریم. بنابه قضیه گاوس، به دست می‌آوریم

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi g \quad (115-9)$$

یا

$$\int \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi g \quad (116-9)$$

اکنون طرف چپ این معادله را در نظر می‌گیریم. انتگرال $\nabla \times \mathbf{A}$ روی سطح کره‌ای بسته را می‌توانیم به این طریق به دست آوریم که ابتدا آن را روی یک سطح باز متشکل از سطح کره‌ای منهای



شکل ۹-۱۸ سطح کروی انتگرال‌گیری مربوط به معادله ۹-۱۱۶. دایره کوچکی به شعاع δ از این سطح کروی درآورده شده است.

دایره کوچکی به شعاع δ (شکل ۹-۱۸) محاسبه کنیم؛ و سپس δ را به سمت صفر میل دهیم. بنا به قضیه استوکس، انتگرال $\nabla \times \mathbf{A}$ روی این سطح کروی «باز شده» برابر است با انتگرال \mathbf{A} حول دایره کوچک:

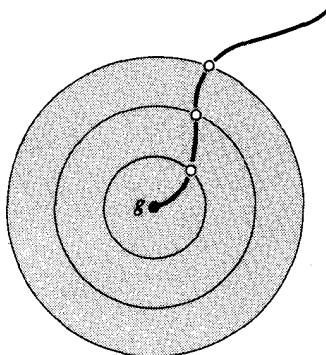
$$\int \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (9-117)$$

اگر \mathbf{A} تکینگی نداشته باشد وقتی δ به صفر میل می‌کند \mathbf{A} به یک ثابت میل می‌کند. پس طرف راست معادله ۹-۱۱۷ تبدیل می‌شود به $\mathbf{A} \cdot \int d\mathbf{l}$ ، که صفر است؛ یعنی

$$\int \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (9-118)$$

اما این نتیجه با معادله ۹-۱۱۶ تناقض دارد!

برای احتراز از این مشکل، باید وجود تکینگی‌هایی را در $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ بپذیریم: در هر سطح بسته محیط بر تک قطبی مغناطیسی، باید دست‌کم یک نقطه باشد که در آن \mathbf{A} تکین است به طوری که وقتی $\delta \rightarrow 0$ حول این تکینه برابر با $4\pi g$ شود. اگر فرض کنیم تک قطبی مغناطیسی توسط یک رشته سطوح کروی هم‌مرکز با شعاعهای افزاینده احاطه شده است ملاحظه می‌کنیم که نقاط تکین روی این سطوح تشکیل خطی می‌دهند که از تک قطبی تا بینهایت ادامه دارد (شکل ۹-۱۹)؛ این خط تکینه‌ها را ریسمان دیراک تک قطبی می‌نامند.



شکل ۹-۱۹ ریمان دیراک یک تک قطبی.

تمرین ۸- نشان دهید به ازای $0 < \theta \leq \pi$ از پتانسیل برداری

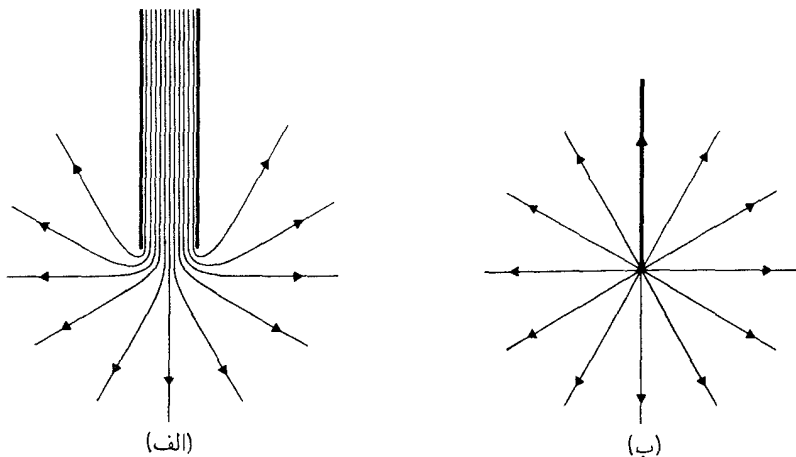
$$\mathbf{A} = g \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \hat{\phi} \quad (۱۱۹-۹)$$

میدان مغناطیسی ۹-۱۰۷ برای تک قطبی به دست می آید. نشان دهید با این انتخاب \mathbf{A} ریمان دیراک در امتداد محور z مثبت قرار می گیرد. (برای \mathbf{A} انتخابهای دیگری نیز وجود دارند که به همین \mathbf{B} منجر می شوند.)

تذکر: پتانسیل برداری ۹-۱۱۹ در واقع متعلق به یک سیمولوله بینهایت نازک است که در طول محور z مثبت از مبدأ تا بینهایت امتداد دارد. برای این سیمولوله بینهایت نازک خطوط میدانی که از سر پایینی آن خارج می شوند (شکلهای ۹-۲۰ الف و ۹-۲۰ ب) شعاعی هستند. این خطوط شبیه به خطوط میدان تک قطبی مغناطیسی هستند. این توافق بین میدانهای سیمولوله بینهایت نازک و تک قطبی مغناطیسی روی محور z مثبت برقرار نیست؛ در آنجا میدان سیمولوله نامتناهی است اما میدان تک قطبی متناهی می ماند. ریمان دیراک مکان هندسی نقاط اختلاف است؛ ریمان بر سیمولوله منطبق است.

باید تأکید کنیم که میدان مغناطیسی روی ریمان دیراک خوش رفتار است؛ تنها پتانسیل برداری تکین است. در زمینه الکترودینامیک کلاسیک، تنها میدان مغناطیسی مشاهده پذیر است؛ بنابراین، تکنیکی ریاضی در پتانسیل برداری مضمون فیزیکی ندارد و می توان از آن صرف نظر کرد. اما در نظریه کوانتومی، پتانسیل برداری مشاهده پذیر است. این پتانسیل روی فاز تابع موجهای مکانیک کوانتومی تأثیر دارد و اثرات تداخلی ایجاد می کند و باید تکنیکی را مورد نظر قرار داد. معلوم می شود اگر بارهای الکتریکی و تک قطبی کوانتیده باشند (ادامه بحث را ببینید)، اختلاف فازی که ریمان ایجاد می کند همیشه مضربی از 2π است که مشاهده ناپذیر است [۲].

شاید جذابترین پیامد نظریه تک قطبی مغناطیسی شرط کوانتس برای بار الکتریکی باشد



شکل ۹-۲۰ (الف) خطوط میدان که از سر سیملوله باریک خارج می شوند. (ب) حد سیملوله ای با ضخامت بینهایت کم.

که وقتی پیش می آید که تکانه زاویه ای در میدانهای الکترومغناطیسی را امتحان کنیم. تک قطبی مغناطیسی g و در فاصله ای از آن بار الکتریکی q را در نظر بگیرید (شکل ۹-۲۱). بنا به معادله ۸-۱۰۶، چگالی تکانه در میدانها برابر با $\mathbf{E} \times \mathbf{B} / (4\pi c)$ است. این بردار بر \mathbf{E} و \mathbf{B} عمود است؛ بنابراین، در شکل ۹-۲۱ تکانه در دایره هایی حول محور z جریان دارد، که منجر به ایجاد یک تکانه زاویه ای در امتداد محور z می شود. این تکانه زاویه ای برابر است با

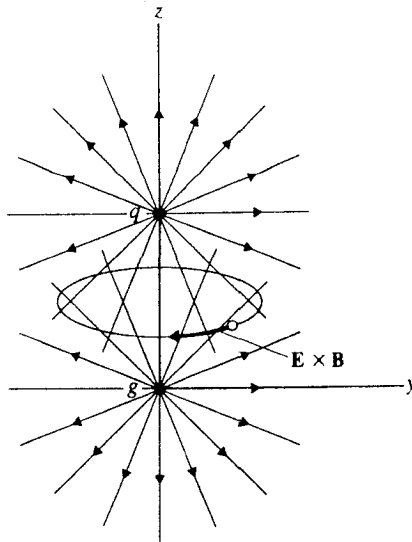
$$\mathbf{J} = \int \mathbf{r} \times \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi c} \right) dV = \frac{1}{4\pi c} \int (\mathbf{E} \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) dV \quad (9-120)$$

اگر این معادله را برحسب مؤلفه ها بنویسیم و قرار دهیم $B^k = g x^k / |\mathbf{x}|^2$ ، به دست می آوریم

$$J^k = \frac{g}{4\pi c} \int \left(E^k \frac{1}{|\mathbf{x}|} - \frac{x^k x^n}{|\mathbf{x}|^2} E^n \right) dV = \frac{g}{4\pi c} \int E^n \frac{\partial}{\partial x^n} \frac{x^k}{|\mathbf{x}|} dV \quad (9-121)$$

این معادله با انتگرال گیری جزء به جزء به صورت زیر درمی آید

$$J^k = -\frac{g}{4\pi c} \int \frac{x^k}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial x^n} E^n dV \quad (9-122)$$



شکل ۹-۲۱ تک قطبی مغناطیسی g در مبدأ و بار الکتریکی q در فاصله‌ای بالای آن.

اما در تمام نقاط به استثنای مکان بار الکتریکی داریم $\nabla \cdot \mathbf{E} = \partial E^n / \partial x^n = 0$. بنابراین، انتگرال گیری در معادله ۹-۱۲۲ را می توان به کره بسیار کوچکی حول بار الکتریکی محدود کرد. در این کره، $x^k / |\mathbf{x}|$ تقریباً ثابت است و تنها مؤلفه مخالف صفر آن عبارت است از $z / |\mathbf{x}| = z / z = 1$. پس به دست می آوریم

$$J_z = -\frac{g}{4\pi c} \int \nabla \cdot \mathbf{E} dV \quad (9-123)$$

که بنا به قضیه گاوس برابر است با

$$J_z = -\frac{gq}{c} \quad (9-124)$$

بنابراین، تکانه زاویه‌ای در این میدانها مستقل از فاصله بین بارهاست.

برای به دست آوردن شرط کوانتس باید به قلمرو مکانیک کوانتومی برویم. در آنجا باید از قاعده مشهور کوانتس تکانه زاویه‌ای استفاده کنیم: مؤلفه z تکانه زاویه‌ای مضربی درست یا نیم درست از \hbar است. چون تکانه زاویه‌ای ۹-۱۲۴ مداری نیست معقول به نظر می رسد که مضارب نیم درست

را هم در نظر بگیریم:

$$J_z = \frac{1}{2} n \hbar, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (۱۲۵-۹)$$

یا

$$\frac{gq}{c} = \frac{1}{2} n \hbar \quad (۱۲۶-۹)$$

این نتیجه را شرط کوانتش دیراک می‌نامند. این شرط را در اینجا با استدلالی نسبتاً ساده و غیر دقیق به دست آورده‌ایم، اما می‌توان آن را با تحلیل دقیقتر مکانیک کوانتومی تحکیم کرد [۲]. از معادله ۱۲۶-۹ به این نتیجه قابل ملاحظه می‌رسیم که هم بار الکتریکی و هم بار مغناطیسی کوانتیده‌اند: به ازای یک g معین، q متناسب با عدد درست n است؛ و به ازای یک q معین، g متناسب با عدد درست n است. بدین ترتیب، تک‌قطبی مغناطیسی در توضیح کوانتش بار الکتریکی مفید واقع می‌شود. در نظریه‌های وحدت بزرگ برهم‌کنشهای قوی، الکترومغناطیسی و ضعیف که اخیراً مطرح شده‌اند، توضیح کوانتش بار الکتریکی مبتنی بر استدلالی است که بیان نسبتاً پیچیده‌تر استدلال ساده بالا است. از معادلات میدان کوانتومی در این نظریه‌ها جوابهای تک‌قطبی به دست می‌آید، و در نتیجه سازگاری این معادله‌ها معادله ۱۲۶-۹ را ایجاب می‌کند؛ اما برخلاف استدلال ساده بالا، در این نظریه‌ها وجود تک‌قطبها در جهان ما از قبل فرض نشده است. اگر در معادله ۱۲۶-۹ قرار دهیم $q = e$ و $n = 1$ ، واحد بنیادی بار مغناطیسی را به دست می‌آوریم:

$$g = \frac{c \hbar}{2e} \quad (۱۲۷-۹)$$

این رابطه نشان می‌دهد به ازای یک فاصله معین نسبت نیروی دافعه مغناطیسی بین دو تک‌قطبی مغناطیسی به نیروی دافعه الکتریکی بین دو الکترون برابر است با

$$\frac{g^2}{e^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{c \hbar}{e r} \right)^2 \simeq \frac{1}{4} (137)^2 \simeq 5 \times 10^3 \quad (۱۲۸-۹)$$

شدت نیروهای تک‌قطبی بسیار بیشتر از شدت نیروهای الکتریکی است! بیشتر بودن شدت نیروی تک‌قطبی از مقایسه نیروی وارد بر تک‌قطبی در یک میدان مغناطیسی معین با نیروی وارد بر الکترون در یک میدان الکتریکی با همان بزرگی ($E = B$) نیز دیده می‌شود؛ نیروی وارد بر تک‌قطبی به اندازه ضریب $137/2$ بزرگتر است.

پژوهشهای تجربی [۳] برای یافتن تک قطبیهای مغناطیسی روی پدیده‌های طبیعی متمرکز شده‌اند زیرا امید به ایجاد تک قطبی در آزمایشگاه بسیار ضعیف است—جرم تک قطبی احتمالاً بیشتر از $10^{16} \text{ GeV}/c^2$ است، یعنی بسیار بیشتر از آنچه بتوان با قویترین شتابدهنده‌های موجود تولید کرد: از تخمینهای نظری استنباط می‌شود که ممکن است تعداد قابل توجهی تک قطبی در طی مراحل اولیهٔ مه‌بانگ ایجاد شده باشند؛ به علاوه، برخورد پرتوهای کیهانی پرنانرژی با زمین به احتمال زیاد تک قطبیهایی ایجاد می‌کند. میدان مغناطیسی زمین این تک قطبیها را به سطح زمین می‌کشد، و احتمالاً آنها در کف اقیانوسها مخصوصاً در مواد فرومغناطیس جمع می‌شوند. هدف بیشتر آزمایشها استخراج تک قطبیها از نمونه‌های مواد با اعمال میدان مغناطیسی قوی است. این روش نه تنها تک قطبی را از نمونه خارج می‌کند بلکه به آن انرژی جنبشی قابل توجهی هم می‌دهد. آنگاه می‌توان تک قطبی را از رد یونشی که موقع عبور از لایهٔ حساس یا ورقهٔ پلاستیک از خود به جا می‌گذارد آشکارسازی کرد. متأسفانه از هیچ‌یک از پژوهشهای تجربی تک قطبی یافت نشده است. تک قطبیها اگر وجود داشته باشند یا بسیار کم‌اند یا خوب مخفی شده‌اند. از این آزمایشها حد بالایی برای شار تک قطبی فرودی از تمام راستاها به سطح صاف معینی نزدیک زمین به دست می‌آید که برابر با تقریباً $10^{-10} / \text{cm}^2 \text{s}$ است.

حد کمتری را می‌توان از تداوم میدان مغناطیسی کهکشان به دست آورد. اگر تک قطبیهای آزاد در فضای بین ستاره‌ها فراوان بودند باید این میدان مغناطیسی را خنثی می‌کردند همان‌طور که بارهای الکتریکی آزاد در یک خازن میدان الکتریکی را خنثی می‌کنند. تداوم میدان مغناطیسی کهکشان ایجاب می‌کند شار تک قطبی کمتر از تقریباً $10^{-15} / \text{cm}^2 \text{s}$ باشد [۴]. برای فراوانی تک قطبیها حدی که از این هم کمتر است اما به این اندازه قابل اعتماد نیست از پیش‌بینیهای نظری برهم‌کنشهای تک قطبیها با نوترونها در ستاره‌های نوترونی به دست آمده است. بنا به نظریهٔ وحدت بزرگ، برخورد تک قطبی با پروتون یا نوترون احتمالاً واسطهٔ واپاشی آنها به لپتونهاست که با آزاد شدن مقدار زیادی انرژی همراه است. بنابراین، تک قطبیهایی که توسط ستاره‌های نوترونی گیر می‌افتند باید درخشندگی زیادی در این ستاره‌ها، عمدتاً به صورت پرتوهای x ، ایجاد کنند. در نتیجه از حد رصد شدهٔ درخشندگی پرتو x در آسمان می‌توان حدی برای شار تک قطبی به دست آورد که تقریباً $10^{-21} / \text{cm}^2 \text{s}$ است [۵].

مراجع

1. P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **133**, 60 (1931).
2. P. Goddard and D. I. Olive, *Rep. Prog. Phys., Phys. Soc. London* **41**, 1357 (1978).
3. M. Longo, *Phys. Rev. D* **25**, 2399 (1982).
4. M. S. Turner, E. N. Parker, and T. J. Bogdan, *Phys. Rev. D* **26**, 1296 (1982).
5. E. W. Kolb, *Ann. N.Y. Acad. Sci.* **422**, 33 (1984).

مسائل

۱-۹ نشان دهید برای ذره بسیار نسبیتهی ($v \simeq c$) میدان مغناطیسی (معادله ۳-۹) و میدان الکتریکی (معادله ۸-۴۶) دارای بزرگیهای تقریباً یکسانی هستند. نشان دهید این میدانها تقریباً برهم عمودند و $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ جهت حرکت است. این میدانها را با میدانهای الکتریکی و مغناطیسی موج الکترومغناطیس مقایسه کنید.

۲-۹ دو الکترون دارای سرعتهای لحظه‌ای یکسان $3 \times 10^8 \text{ cm/s}$ هستند. یکی از الکترونها در امتداد محور x مثبت حرکت می‌کند، و مکان لحظه‌ای آن $x = 4 \times 10^{-9} \text{ cm}$ است. الکترون دیگر در امتداد محور y مثبت حرکت می‌کند، و مکان لحظه‌ای آن $y = 0$ است. نیروی مغناطیسی الکترون اول روی الکترون دوم و الکترون دوم روی الکترون اول را به دست آورید. آهنگ تغییر لحظه‌ای تکانه این دستگاه دو الکترونی را تعیین کنید.

۳-۹ الکترون اتم هیدروژن را در کوچکترین مدار بور به شعاع 0.529 \AA در نظر بگیرید. بزرگی میدان مغناطیسی را که این الکترون در مکان هسته ایجاد می‌کند به دست آورید. حرکت الکترون را کلاسیک فرض کنید.

۴-۹ نشان دهید نیروی مغناطیسی که بار نقطه‌ای q با حرکت یکنواخت روی بار نقطه‌ای q' وارد می‌کند هیچگاه بزرگتر از نیروی الکتریکی نیست. از عبارت نسبیتهی دقیق برای میدان مغناطیسی (معادله ۳-۹) و عبارت متناظر برای میدان الکتریکی استفاده کنید.

۵-۹ در مختصات استوانه‌ای، پتانسیل الکتریکی داخل و خارج رسانای استوانه‌ای در شکل ۳-۹ برابر است با

$$\Phi = -E_0 z \quad \rho \leq R$$

$$\Phi = -E_0 z \frac{\ln(\rho/R')}{\ln(R/R')} \quad \rho \geq R$$

که در آن R شعاع رسانای استوانه‌ای و R' شعاع پوسته هم‌محور در پتانسیل صفر است. (الف) نشان دهید این پتانسیل جواب معادله لاپلاس است، و نشان دهید شرایط مرزی در $\rho = R$ و $\rho = R'$ را برآورده می‌کند. (ب) میدان الکتریکی روی سطح $\rho = R$ استوانه را به دست آورید. (ج) چگالی بار سطحی در سطح استوانه را تعیین کنید.

۶-۹ جریان I در یک حلقه مربعی به ابعاد $L \times L$ برقرار است. میدان مغناطیسی در فاصله z از مرکز حلقه در راستای عمود بر صفحه حلقه را به دست آورید.

۷-۹ جریان I در یک حلقهٔ مربعی به ابعاد $L \times L$ برقرار است. اضلاع این حلقه یا قائم هستند یا افقی. پتانسیل برداری را به دست آورید، و میدان مغناطیسی را در صفحهٔ حلقه در فاصلهٔ افقی x و فاصلهٔ قائم y از مرکز حلقه به دست آورید.

۸-۹ دو ورق نازک بسیار بزرگ از مادهٔ رسانا یکدیگر را تحت زاویهٔ قائمه قطع کرده‌اند. یکی از ورقها در صفحهٔ xz و دیگری در صفحهٔ yz واقع است. در هر ورق جریان سطحی k ایستا آمپر بر سانتیمتر در جهت z برقرار است. میدان مغناطیسی را در چهار ناحیهٔ بین ورقها به دست آورید.

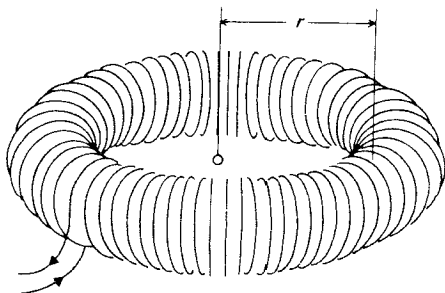
۹-۹ یک سیملولهٔ کلفت دارای شعاع داخلی a ، شعاع خارجی b و طول متناهی L است. جریان کل I در سیملوله برقرار است، و به‌طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است. میدان مغناطیسی را داخل سیملوله روی محور به دست آورید.

۱۰-۹ دو صفحهٔ موازی حاصل جریان را که در تمرین ۴ توصیف شدند در نظر بگیرید. نیرو بر واحد سطح یا فشاری را که میدان مغناطیسی هر صفحه بر صفحهٔ دیگر وارد می‌کند به دست آورید. نشان دهید این فشار را می‌توان به صورت $B^2/8\pi$ بیان کرد.

۱۱-۹ چنبره‌وار عبارت است از سیمی که حول سطح یک چنبره به‌طور فشرده پیچیده شده است (شکل ۹-۲۲). تعداد حلقه‌ها را N و جریان در آنها را I می‌گیریم. نشان دهید میدان مغناطیسی داخل این چنبره‌وار برابر است با

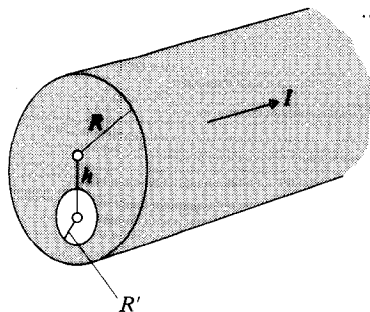
$$B = \frac{2NI}{cr}$$

آیا این نتیجه به شکل مقطع چنبره‌وار بستگی دارد؟



شکل ۹-۲۲ یک چنبره‌وار.

۹-۱۲ یک محفظه استوانه‌ای به شعاع R' در یک رسانای استوانه‌ای طولی به شعاع R ایجاد کرده‌ایم به طوری که محور محفظه موازی با محور رسانا و در فاصله h از آن واقع است (شکل ۹-۲۳). رسانا حامل جریان I است که به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است. میدان مغناطیسی را در محفظه به دست آورید.



شکل ۹-۲۳ یک رسانای استوانه‌ای با یک محفظه.

۹-۱۳ یک سیمولوه دراز با مقطع مستطیلی در امتداد محور z قرار دارد. بزرگی میدان مغناطیسی داخل این سیمولوه B است. (الف) تمام مؤلفه‌های تانسور تنش ماکسول (معادله ۸-۹۴) را به دست آورید. (ب) از این تانسور تنش نیروی مغناطیسی وارد بر واحد سطح دیواره‌های سیمولوه را به دست آورید.

۹-۱۴ نشان دهید پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی را می‌توان برای یک حلقه سیمی بسته که حامل جریان I است به صورت زیر نوشت

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = \frac{I\Omega}{c}$$

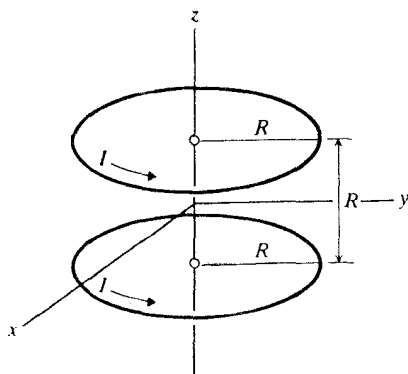
که در آن Ω زاویه فضایی است که در نقطه x روی حلقه بسته ساخته می‌شود. [راهنمایی: یک حلقه بزرگ جریان را می‌توان متشکل از چندین حلقه کوچک مجاور هم که سطح حلقه بزرگ را پر می‌کنند در نظر گرفت. برای یک حلقه کوچک به شعاع R ، معادله ۹-۶۱ نشان می‌دهد پتانسیل مغناطیسی با تقریب یک ثابت جمعی بی‌اثر تقریباً برابر است با

$$d\Phi_M(\mathbf{x}) = \frac{2\pi I R^2}{c} \frac{\cos\theta}{r^2}$$

این رابطه را برحسب زاویه فضایی $d\Omega$ که روی این حلقه کوچک ساخته می‌شود بیان کنید.]

۹-۱۵ برای ایجاد میدان مغناطیسی نسبتاً یکنواخت در آزمایشگاهها غالباً از حلقه‌های هلمهولتز استفاده می‌شود. این حلقه‌ها دو سیم پیچ به شعاع R هستند که روی یک محور مشترک به فاصله

R از یکدیگر قرار دارند (شکل ۹-۲۴). حلقه‌ها حامل جریانهای مساوی و هم‌جهت I هستند. فرض کنید این حلقه‌ها موازی با صفحه xy و مراکز آنها در $z = \pm R/2$ قرار دارند. (الف) میدان مغناطیسی B_z را روی محور z به دست آورید. (ب) نشان دهید به ازای $z = 0$ مشتقهای اول، دوم و سوم dB_z/dz ، d^2B_z/dz^2 و d^3B_z/dz^3 صفر می‌شوند اما مشتق چهارم d^4B_z/dz^4 صفر نمی‌شود.



شکل ۹-۲۴ حلقه‌های هلمهولتز.

۹-۱۶ گشتاور دوقطبی مغناطیسی یک قرص کاغذی به شعاع R را که با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد و بار Q روی سطح آن به طور یکنواخت توزیع شده است به دست آورید.

۹-۱۷ کره‌ای به شعاع R دارای بار Q است که به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است. این کره حول یکی از قطرهایش با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. (الف) میدان مغناطیسی را در مرکز کره به دست آورید. (ب) میدان مغناطیسی را روی محور چرخش در فاصله زیاد از کره محاسبه کنید. گشتاور دوقطبی مغناطیسی را تعیین کنید.

۹-۱۸ نشان دهید پتانسیل برداری برای یک دوقطبی مغناطیسی ایده‌آل $\mathbf{m} \times \mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$ است.

۹-۱۹ ثابت کنید اگر دوقطبی مغناطیسی ایده‌آلی که گشتاور آن \mathbf{m} است با سرعت یکنواخت \mathbf{V} حرکت کند میدان الکتریکی وابسته عبارت است از میدان الکتریکی مربوط به یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور

$$\mathbf{p} = \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{m}$$

۹-۲۰ میدان مغناطیسی زمین یک میدان دوقطبی است. بزرگی این میدان در استوای مغناطیسی در سطح زمین برابر با 31° گاوس است. (الف) مقدار گشتاور مغناطیسی را محاسبه کنید. (ب) مؤلفه‌های افقی و قائم این میدان مغناطیسی را در نقطه‌ای به عرض مغناطیسی 40° به دست آورید. شعاع زمین را $10^3 \times 64$ کیلومتر بگیرید.

۹-۲۱ میدان مغناطیسی یک دوقطبی مغناطیسی را در نظر بگیرید. نشان دهید معادله خط میدانی که در $r = r_0$ از صفحه استوایی می‌گذرد عبارت است از $r = r_0 \sin^2 \theta$ که در آن θ زاویه قطبی معمولی است که از محور دوقطبی سنجیده می‌شود. [راهنمایی: در امتداد خط میدان داریم $r \frac{d\theta}{dr} = B_0 / B_r$ چرا؟]

۹-۲۲ استوانه‌ای به شعاع R و طول L که با سرعت زاویه‌ای ω حول محورش می‌چرخد دارای بار Q است که در حجم آن به‌طور یکنواخت توزیع شده است. (الف) میدان مغناطیسی را خارج استوانه روی محور آن به دست آورید. مرکز استوانه را مبدأ مختصات بگیرید. (ب) یک بسط رشته‌ای برای میدان مغناطیسی در نقاطی غیر از محور به دست آورید؛ فرض کنید $r > R + \frac{L}{4}$.

۹-۲۳ حلقه جریانی را که در بخش ۹-۴ توصیف شد در نظر بگیرید. پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی و میدان مغناطیسی را در ناحیه $r < R$ به دست آورید.

۹-۲۴ یک قرص کاغذی به شعاع R دارای بار Q است که به‌طور یکنواخت در سطح آن توزیع شده است. این قرص با سرعت زاویه‌ای ω حول محورش می‌چرخد. (الف) میدان مغناطیسی را روی محور قرص به دست آورید. (ب) یک بسط رشته‌ای برای میدان مغناطیسی در نقاطی که روی محور نیستند به دست آورید؛ فرض کنید $r > R$.

۹-۲۵ کره‌ای به شعاع R حامل بار Q است که در سطح آن به‌طور یکنواخت توزیع شده است. اگر این کره با سرعت زاویه‌ای ω بچرخد میدان مغناطیسی را در ناحیه داخل کره به دست آورید.

۹-۲۶ میدان مغناطیسی زمین یک میدان دوقطبی است. در استوای مغناطیسی زمین این میدان به سمت شمال است و بزرگی آن برابر است با 31° گاوس. (الف) میدان مغناطیسی را در ارتفاع 3×10^3 کیلومتری استوا به دست آورید. (ب) یک پروتون چه تکانه‌ای باید داشته باشد تا بتواند در ارتفاع 3×10^3 کیلومتری استوا در مداری دایره‌ای حول مرکز زمین باقی بماند؟ جواب را بر حسب GeV/c بیان کنید.

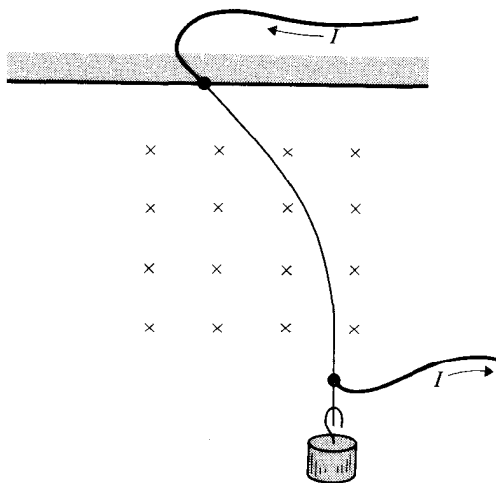
۹-۲۷ یک ذره غیرنسبیتی به جرم m و بار q در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$ قرار دارد. مکان اولیه این ذره $x = 0$ ، $y = 0$ ، $z = 0$ است؛ بزرگی تکانه آن p_0 است. تکانه چه راستایی باید داشته باشد تا ذره در کمترین زمان ممکن به نقطه $x = a < 2cp_0/qB_0$ ، $y = 0$ ، $z = 0$ برسد؟ این زمان را به دست آورید.

۹-۲۸ الکترونی در میدانهای موازی و یکنواخت $\mathbf{E} = E_0 \cdot \hat{z}$ و $\mathbf{B} = B_0 \cdot \hat{z}$ حرکت می‌کند. مکان الکترون را به صورت تابعی از زمان با شرایط اولیه $x = a$, $y = 0$, $z = 0$, $v_x = 0$, $v_y = 0$, $v_z = 0$ به دست آورید. حرکت را غیرنسبیتی بگیرید.

۹-۲۹ قضیه زیر را که قضیه بلیکنی نامیده می‌شود اثبات کنید. اگر یک یون (غیر نسبیتی) به جرم M و سرعت اولیه صفر روی مسیری در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی \mathbf{E} و \mathbf{B} حرکت کند، یونی به جرم kM و همان بار روی همان مسیر در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی \mathbf{E}/k و \mathbf{B} حرکت خواهد کرد. [راهنمایی: تغییر مقیاس زمان در معادله حرکت یون دوم را امتحان کنید].

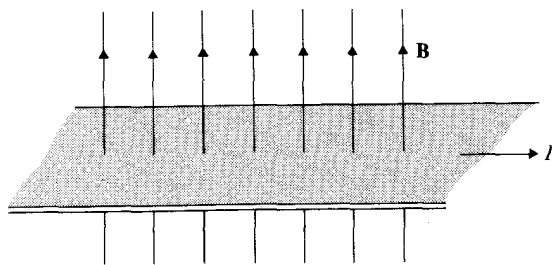
۹-۳۰ عقربه یک قطب‌نما میله باریکی است به جرم ۵ گرم و طول ۲ سانتیمتر. گشتاور دوقطبی این عقربه ۹ گاوس سانتیمتر مکعب است. عقربه می‌تواند حول محور قائمی که از مرکزش می‌گذرد آزادانه بچرخد. اگر قطب‌نما را در میدان مغناطیسی افقی ۲ رگاوسی قرار دهیم بسامد نوسانهای کوچک عقربه آن را حول راستای شمال-جنوب به دست آورید.

۹-۳۱ سیم قابل انعطاف باریکی حامل جریان I در یک میدان مغناطیسی یکنواخت آویزان است (شکل ۹-۲۵). وزنه‌ای که به انتهای سیم متصل شده است کشش T را ایجاد می‌کند. (الف) نشان دهید این سیم در میدان مغناطیسی به شکل کمانی از دایره به شعاع $r = cT/(BI)$ درمی‌آید. (ب) نشان دهید این کمان دایره بر مدار ذره بارداری با تکانه $p = qT/I$ منطبق است. پس شکل سیم شبیه به شکل مدار است. از این موضوع برای تعیین تجربی مدارهای ذرات باردار در آهنرباها استفاده می‌شود.



شکل ۹-۲۵ سیم قابل انعطاف آویزان در میدان مغناطیسی یکنواخت.

۳۲-۹ یک نوار فلزی با پهنای d حامل جریان I عمود بر میدان مغناطیسی خارجی \mathbf{B} است. شکل ۲۶-۹ جهت جریان و جهت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد. روشن است که شارش الکترونهاى آزاد در نوار فلزی در جهت مخالف جریان است. ثابت کنید در وضعیت حالت پایا باید در فلز یک میدان الکتریکی عرضی با بزرگی vB/c و در نتیجه اختلاف پتانسیل vBd/c در عرض نوار وجود داشته باشد. این پدیده را اثر هال می‌نامند. کدام لبه رسانا پتانسیل بیشتری دارد؟ اگر جریان از شارش بارهای مثبت ایجاد شده باشد پتانسیل کدام لبه بیشتر است؟



شکل ۲۶-۹ نوار فلزی حامل جریان عمود بر میدان مغناطیسی.

۳۳-۹ ذره‌ای به جرم m و بار e را بدون سرعت اولیه در میدان گرانشی یکنواخت و میدان مغناطیسی یکنواخت که عمود بر میدان گرانشی است رها می‌کنیم. مکان ذره را به صورت تابعی از زمان به دست آورید. فرض کنید $B > mq/e$ و حرکت را غیرنسبیتی بگیرید.

۳۴-۹ میدان مغناطیسی زمین تقریباً میدان یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاور m است. اگر از دستگاه مختصات (r, θ, ϕ) که مبدأ آن مرکز زمین و محور z آن در جهت شمال مغناطیسی است استفاده کنیم پتانسیل برداری برابر است با

$$\mathbf{A} = -\frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{\phi}$$

نشان دهید برای ذره‌ای (نسبیتی) با بار q و تکانه $|\mathbf{p}|$ که در این میدان حرکت می‌کند کمیت زیر یک ثابت حرکت است (قضیه اشترومر):

$$-r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi/dt}{|\mathbf{u}|} + \frac{mq \sin^2 \theta}{|\mathbf{p}|c r}$$

نشان دهید برای یک پرتو کیهانی که از فاصله دور در صفحه استوای زمین ($\theta = 0$) نزدیک می‌شود این ثابت برابر است با $\pm b$ که b ضریب برخورد است. [راه‌نمایی: لاگرانژی عبارت است از $L = -Mc^2 \sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2} + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}/c$. زاویه ϕ یک مختصه قابل چشمپوشی است.]

۳۵-۹ نشان دهید در نمادنگاری تانسور چهاربعدی، معادله‌های ۱۰۸-۹ تا ۱۱۱-۹ به صورت زیر هستند

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad \partial_\mu^* F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} k^\nu$$

که در آنها $k^\nu = (c\rho_m, j_{m,x}, j_{m,y}, j_{m,z})$ و $*F^{\mu\nu} = 1/2 \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ (تانسور $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ مسئله ۶-۷ تعریف شده است).

۳۶-۹ تبدیل دوگانی که در بخش ۷-۹ گفته شد یک مورد خاص از تبدیل دوگانی عام زیر است:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\rightarrow \mathbf{E} \cos \theta + \mathbf{B} \sin \theta & \mathbf{B} &\rightarrow -\mathbf{E} \sin \theta + \mathbf{B} \cos \theta \\ \rho &\rightarrow \rho \cos \theta + \rho_m \sin \theta & \rho_m &\rightarrow -\rho \sin \theta + \rho_m \cos \theta \\ \mathbf{j} &\rightarrow \mathbf{j} \cos \theta + \mathbf{j}_m \sin \theta & \mathbf{j}_m &\rightarrow -\mathbf{j} \sin \theta + \mathbf{j}_m \cos \theta \end{aligned}$$

که در آنها θ یک پارامتر حقیقی اختیاری است. نشان دهید تحت این تبدیل معادله‌های ۱۰۸-۹ تا ۱۱۱-۹ ناوردا هستند. به علت این ناوردایی، برای برهم‌کنشهای الکترومغناطیسی از لحاظ فیزیکی بین دستگاهی از ذرات با ترکیبی از بارهای الکتریکی و مغناطیسی به نسبت (جهانی) ثابت و دستگاهی از ذرات با بارهای صرفاً الکتریکی تمایزی وجود ندارد.

۳۷-۹ با اعمال تبدیل لورنتس روی میدان تک‌قطبی ساکن، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی تک‌قطبی متحرک را به دست آورید.

۳۸-۹ با انجام عملیات روی معادلات تغییر یافتهٔ ماکسول ۱۰۸-۹ تا ۱۱۱-۹، قانون پایستگی زیر را برای بار مغناطیسی تک‌قطبیها به دست آورید

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_m = 0$$

۳۹-۹ حرکت ذره‌ای با بار الکتریکی q_1 و بار مغناطیسی g_1 را در میدانهای ذره‌ای با بار الکتریکی q_2 و بار مغناطیسی g_2 در نظر بگیرید. (الف) نشان دهید اگر ذرهٔ دوم در مبدأ ساکن باشد، معادلهٔ حرکت ذرهٔ اول عبارت است از

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (q_1 q_2 + g_1 g_2) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + (q_1 g_2 - q_2 g_1) \frac{\mathbf{v}}{c} \times \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{x}|^2}$$

(ب) \mathbf{x} را در این معادله حرکت ضرب برداری کنید و از اینجا نشان دهید کمیت برداری زیر یک ثابت حرکت است

$$\mathbf{J} = \mathbf{x} \times m\mathbf{v} - \frac{1}{c}(q_1g_2 - q_2g_1) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

این ثابت حرکت تکانه زاویه‌ای دستگاه است. (ج) نشان دهید کوانتس مولفه تکانه زاویه‌ای در امتداد خط واصل دو ذره منجر به رابطه زیر می‌شود

$$(q_2g_1 - q_1g_2) = \frac{1}{\hbar} n\hbar c$$

و نشان دهید این شرط کوانتس عام معادله ۹-۱۲۶ را به‌عنوان یک مورد خاص شامل می‌شود.

۹-۴۰ بنا به تخمینهای نظری، جرم تک قطبی مغناطیسی تقریباً 10^{-8} گرم است. برای نگه داشتن تک قطبی مغناطیسی با بار مغناطیسی واحد در میدان گرانشی نزدیک سطح زمین میدان مغناطیسی لازم را به‌دست آورید.

۹-۴۱ یک تک قطبی مغناطیسی با بار g و جرم m بدون سرعت اولیه از بینهایت به سطح یک سیاره سقوط می‌کند. جرم سیاره M و گشتاور دوقطبی مغناطیسی آن m است. اگر این تک قطبی در عرض مغناطیسی θ به سطح سیاره برخورد، سرعت برخورد را به‌دست آورید. مقدار عددی را برای زمین محاسبه کنید؛ فرض کنید $g = \hbar c / 2e$ و $m = 1 \times 10^{-8} \text{g}$ و از اصطکاک جو صرف‌نظر کنید. گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین $10^{25} \times 10^8 \text{gauss}$ سانتیمتر مکعب است.

۹-۴۲ بنا به معادله ۹-۱۱۱، جریان تک قطبی یک میدان الکتریکی به‌وجود می‌آورد که در «قانون آمپر» به‌صورت زیر صدق می‌کند

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{4\pi}{c} I_m$$

بنابراین، جریان دوقطبی حول هر مسیر بسته‌ای که آن را احاطه کند یک نیروی محرکه الکتریکی به‌وجود می‌آورد؛ و اگر حلقه‌ای از سیم روی این مسیر بسته قرار گیرد، نیروی محرکه الکتریکی یک جریان (الکتریکی) در حلقه برقرار می‌کند. این پدیده در آزمایشی برای آشکارسازی تک قطبیهها مورد استفاده قرار گرفته است. نمونه‌ای از سنگ ماه که گمان می‌رفت دارای تک قطبی باشد تقریباً هر چهار ثانیه یکبار از میان سیم پیچی شامل 1200 حلقه عبور داده شد و جریان در سیم پیچ تحت مراقبت قرار گرفت. با فرض اینکه نمونه دارای یک تک قطبی با $g = \hbar c / 2e$ بوده است، میانگین زمانی نیروی محرکه الکتریکی در سیم پیچ را به‌دست آورید.

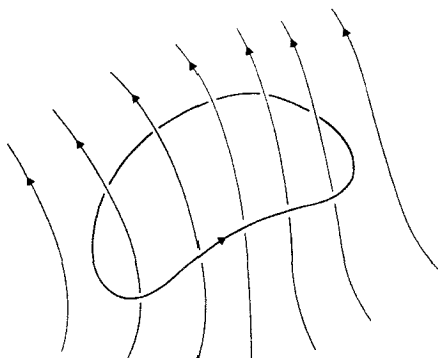
القای الکترومغناطیسی

علاوه بر میدانهای الکتریکی ناشی از بارهای ساکن، میدانهای الکتریکی ناشی از میدانهای مغناطیسی وابسته به زمان هم وجود دارند؛ این میدانهای الکتریکی را میدانهای القایی می‌نامند. در این فصل، قوانین حاکم بر القا را از معادلات ماکسول به دست می‌آوریم و کاربردهایی از آنها را با چند مثال بیان می‌کنیم.

با در نظر گرفتن وابستگی زمانی برای میدانها، صحنه محدود الکتروستاتیک و مغناطوستاتیک را ترک می‌کنیم و به عرصه گسترده الکترودینامیک وارد می‌شویم. نه تنها میدانهای مغناطیسی وابسته به زمان میدانهای الکتریکی القا می‌کنند، بلکه میدانهای الکتریکی وابسته به زمان هم میدانهای مغناطیسی القا می‌کنند. این اثرهای القای متقابل نقشی اساسی در امواج الکترومغناطیسی و نوسانهای کاواک الکترومغناطیسی، که در فصلهای ۱۲ و ۱۵ به آنها می‌پردازیم، دارند.

۱-۱۰ قانون القای فاراده

در فصل ۲ دیدیم که انتگرال مسیر میدان الکتروستاتیک روی هر مسیر بسته‌ای صفر است. اما انتگرال مسیر میدان الکتریکی القایی روی مسیر بسته صفر نیست. این انتگرال را نیروی محرکه الکتریکی یا emf برای مسیر بسته می‌نامند. قانون فاراده emf برای مسیر بسته را به آهنگ تغییر شار مغناطیسی که از سطح محدود به مسیر می‌گذرد مربوط می‌کند.



شکل ۱-۱۰ مسیر بسته ساکن در میدان مغناطیسی وابسته به زمان.

به خاطر سادگی، ابتدا مورد خاص مسیر بسته ساکن را بررسی می‌کنیم. شکل ۱-۱۰ این مسیر را که در یک میدان مغناطیسی وابسته به زمان اختیاری قرار دارد نشان می‌دهد. \mathcal{E} القایی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-10)$$

اگر مسیر بر یک سیم رسانا منطبق باشد این \mathcal{E} نمایشگر ولتاژ محرکی است که جریانی را در سیم ایجاد می‌کند. اما تعریف ۱-۱۰ برای هر مسیر بسته‌ای معتبر است خواه این مسیر بر سیمی رسانا منطبق باشد یا نباشد. برای به دست آوردن قانون فاراده، از معادلهٔ ماکسول ۸-۶۴ شروع می‌کنیم:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

از دو طرف این معادله روی سطح محدود به مسیر انتگرال می‌گیریم:

$$\int \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (2-10)$$

در طرف چپ، می‌توانیم با استفاده از قضیهٔ استوکس انتگرال سطحی را به انتگرال مسیر تبدیل کنیم. در طرف راست، چون سطح ثابت است و تنها \mathbf{B} وابسته به زمان است، می‌توانیم مشتق زمانی را از انتگرال خارج کنیم. در نتیجه

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3-10)$$

$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ را شار مغناطیسی عبوری از سطح می‌نامند:

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (۴-۱۰)$$

بنابراین، emf القایی عبارت است از

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (۵-۱۰)$$

این رابطه قانون فاراده است: emf القایی با آهنگ تغییر شار مغناطیسی متناسب است. توجه کنید که در معادله ۳-۱۰، جهت انتگرال‌گیری برای انتگرال مسیر با قاعده دست راست، همچنان‌که قضیه استوکس ایجاب می‌کند، به جهت بردار عمود برای انتگرال سطحی مربوط می‌شود: اگر شست دست راست در جهت $d\mathbf{S}$ باشد سایر انگشتان در جهت $d\mathbf{l}$ روی مسیر می‌پیچند. این قاعده بیانی از قانون لنز است؛ این قانون علامتهای emf القایی و شار مغناطیسی را در معادله ۵-۱۰ تعیین می‌کند. بیان معمولی قانون لنز عبارت از این است که جریان القایی (اگر وجود داشته باشد) میدانی مغناطیسی ایجاد می‌کند که شار آن با تغییر شار اصلی مخالفت می‌کند. چنانکه در مثالهای زیر خواهیم دید، این بیانهای قانون لنز معادل هم‌اند.

اکنون مورد کلی مسیر بسته متحرک را بررسی می‌کنیم. حرکت مسیر می‌تواند انتقالی صلب، تغییر شکل، یا ترکیبی از این دو باشد. تعریف ۱-۱۰ برای emf را در مورد این نوع مسیر باید تغییر دهیم. در اینجا emf باید برحسب میدان الکتریکی \mathbf{E}' که در چارچوب سکون لحظه‌ای قطعه $d\mathbf{l}$ مسیر اندازه‌گیری می‌شود تعریف شود:

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \quad (۶-۱۰)$$

اگر \mathbf{v} سرعت قطعه $d\mathbf{l}$ باشد، معادلات تبدیل لورنتس برای میدان الکتریکی به‌ما امکان می‌دهند میدان \mathbf{E}' در چارچوب سکون را به صورت تابعی از میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} در چارچوب آزمایشگاه بیان کنیم. با تقریب $\gamma \simeq 1$ ، می‌توان معادله‌های ۴۳-۸ برای \mathbf{E}'_{\parallel} و \mathbf{E}'_{\perp} را به صورت یک معادله نوشت:

$$\mathbf{E}' \simeq \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \quad (۷-۱۰)$$

تقریب $\gamma \simeq 1$ رضایت‌بخش است زیرا در بیشتر کاربردهای عملی مسیر متحرک منطبق بر سیم یا رسانای دیگری است که با سرعت غیرنسبیتی حرکت می‌کند. پس می‌توانیم emf را به صورت زیر بنویسیم

$$\mathcal{E} = \int_C \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{l} \quad (۸-۱۰)$$

برای به دست آوردن قانون فاراده، از معادله ۱۰-۲ که هم برای مسیر متحرک و هم برای مسیر ساکن معتبر است استفاده می‌کنیم. در طرف چپ این معادله، باز هم با استفاده از قضیه استوکس انتگرال سطحی را به انتگرال مسیر تبدیل می‌کنیم؛ اما در طرف راست، نمی‌توانیم مشتق زمانی را جلو انتگرال قرار دهیم زیرا حدود انتگرال، که توسط مسیر تعیین می‌شوند، به زمان بستگی دارند. پس معادله‌ای که به دست می‌آوریم به صورت زیر است

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (9-10)$$

اگر $\int \mathbf{v}/c \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ را به دو طرف این معادله اضافه کنیم طرف چپ بنا به معادله ۱۰-۸ تعریف emf می‌شود. طرف راست به صورت زیر درمی‌آید

$$-\frac{1}{c} \left(\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \int_C \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \right) \quad (10-10)$$

در این عبارت، جمله اول داخل پرانتز نمایشگر آهنگ تغییر شار مغناطیسی است که تنها از وابستگی زمانی میدان مغناطیسی ناشی می‌شود. جمله دوم نمایشگر آهنگ تغییر شار مغناطیسی است که تنها از حرکت مسیر ناشی می‌شود. این مطلب را می‌توان با نوشتن جمله دوم به صورت زیر به آسانی درک کرد

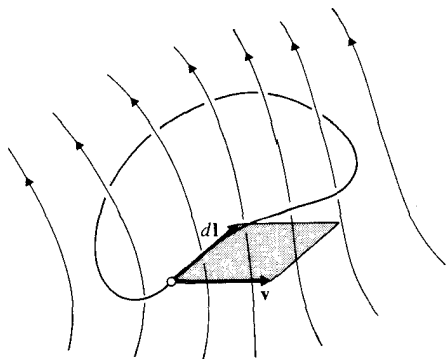
$$+ \int_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \times d\mathbf{l} \quad (11-10)$$

در اینجا $d\mathbf{l} \times \mathbf{v}$ مساحتی است که قطعه $d\mathbf{l}$ مسیر در واحد زمان جاروب می‌کند (شکل ۱۰-۲). بنابراین، $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \times d\mathbf{l}$ شاری است که از این مساحت در واحد زمان می‌گذرد، و انتگرال ۱۱-۱۰ شاری است که از مساحتی که تمام مسیر در واحد زمان جاروب می‌کند می‌گذرد. در نتیجه، مجموع دو جمله در عبارت ۱۰-۱۱ آهنگ تغییر شار کل است. بدین ترتیب، معادله ۱۰-۹ به صورت زیر درمی‌آید

$$\int_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_B}{dt}$$

یا

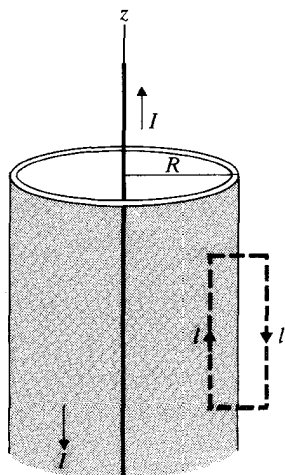
$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (12-10)$$



شکل ۱-۲. قطعه کوچک dl از مسیر متحرک. سرعت این قطعه v است. حاصلضرب برداری $v \times dl$ مساحتی است که قطعه در واحد زمان جاروب می‌کند.

که دقیقاً مانند رابطه مربوط به حلقه ساکن است. این نتیجه نشان می‌دهد قانون فاراده هم برای حلقه ساکن و هم برای حلقه متحرک معتبر است. مثالهای زیر چند کاربرد از قانون فاراده هستند.

کابل هم‌محور. کابل هم‌محور سیم رسانای باریکی است که با پوسته رسانای استوانه‌ای هم‌محوری به شعاع R احاطه شده است. سیم و پوسته حامل جریانهای یکسان I در جهت‌های مخالف هستند (شکل ۱-۳). با فرض اینکه I وابسته به زمان است، می‌خواهیم میدان الکتریکی



شکل ۱-۳. یک کابل هم‌محور مستقیم بسیار دراز به شعاع R . خط‌چین مسیر انتگرال‌گیری برای قانون فاراده را نشان می‌دهد.

القایی را برای یک کابل هم‌محور مستقیم بسیار دراز در فضای داخل پوسته به دست آوریم. برای این منظور، باید میدان مغناطیسی را بدانیم. محاسبه ساده‌ای با قانون آمپر نشان می‌دهد میدان مغناطیسی دارای مؤلفه سمتی است:

$$B_{\phi}(\rho) = \frac{\mu I}{c\rho} \quad \text{به‌ازای } \rho < R \quad (۱۳-۱۰)$$

$$B_{\phi}(\rho) = 0 \quad \text{به‌ازای } \rho > R$$

تمرین ۱- عبارتهای بالا برای میدان مغناطیسی را به دست آورید.

بنابه تقارن، خطوط میدان الکتریکی القایی باید با خطوطی شعاعی باشند یا دایره‌هایی هم‌مرکز حول سیم یا خطوطی موازی در راستای سیم. خطوط شعاعی وجود بار خالص در سیم را ایجاب می‌کنند که با خنثی بودن سیم ناسازگار است. دایره‌های هم‌مرکز با قانون فاراده سازگار نیستند زیرا میدان مغناطیسی ۱۳-۱۰ هیچ شاری از دایره‌های عمود بر سیم نمی‌گذراند. پس نتیجه می‌گیریم میدان الکتریکی القایی باید موازی با سیم باشد. برای به دست آوردن بزرگی این میدان، مسیر بسته شکل ۳-۱۰ را در نظر می‌گیریم. برای این مسیر، emf تنها از قطعه l داخل پوسته سهم می‌گیرد؛ این سهم برابر است با $lE_z(\rho)$. برای مساحت محدود به مسیر، آهنگ تغییر شار مغناطیسی عبارت است از

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\rho}^R \frac{\mu I}{c\rho'} l d\rho' = \frac{\mu l}{c} \frac{dI}{dt} \ln \frac{R}{\rho} \quad (۱۴-۱۰)$$

بنابراین، از قانون فاراده داریم

$$lE_z(\rho) = -\frac{\mu l}{c^2} \frac{dI}{dt} \ln \frac{R}{\rho} \quad (۱۵-۱۰)$$

یا

$$E_z(\rho) = -\frac{\mu}{c^2} \frac{dI}{dt} \ln \frac{R}{\rho} \quad \text{به‌ازای } \rho < R \quad (۱۶-۱۰)$$

اگر dI/dt مثبت باشد، آنگاه E_z منفی است. این جهت برای میدان الکتریکی القایی خودبه‌خود از محاسبه معلوم می‌شود زیرا از روی قاعده دست راست جهت صحیح را برای مسیر انتگرال‌گیری تعیین کرده‌ایم. این جهت میدان الکتریکی القایی با بیان معمولی قانون لنز توافق دارد: اگر در کابل هم‌محور ماده‌ای رسانا وجود داشت، میدان الکتریکی القایی یک جریان القایی در جهت z منفی به وجود می‌آورد که میدان مغناطیسی آن با میدان مغناطیسی زیادشونده جریان اصلی مخالفت می‌کرد.

این میدان الکتریکی القایی را می‌توانیم از پتانسیل برداری (معادله ۸-۳۶) نیز به دست آوریم:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (17-10)$$

در ناحیه $\rho < R$ ، پتانسیل برداری برای این کابل هم‌محور با پتانسیل برداری برای یک سیم مستقیم بسیار دراز (معادله ۹-۴۲) یکی است:

$$A_z(\rho) = -\frac{2I}{c} \ln \rho + \text{const} \quad (18-10)$$

در بخش ۹-۳، از ثابت جمعی در معادله ۱۰-۱۸ با خیال راحت صرف‌نظر کردیم. در اینجا باید این ثابت را با دقت به حساب بیاوریم—این «ثابت» وابسته به زمان است و سهمی در معادله ۱۰-۱۷ دارد. برای محاسبه این «ثابت»، متذکر می‌شویم که در نقاط خارج کابل هم‌محور ($\rho > R$) پتانسیل برداری صفر است.

تمرین ۲- نشان دهید به ازای $\rho > R$ داریم $A_z(\rho) = 0$. [راهنمایی: چون سیم و پوسته هم‌محور حامل جریانهای مخالف هستند، پتانسیل برداری به ازای $\rho > R$ باید ثابت باشد؛ این ثابت را با استفاده از معادله ۹-۳۷ به ازای $\rho \gg R$ تعیین کنید.] ■

بنابراین باید شرط مرزی $A_z(R) = 0$ را روی پتانسیل برداری تحمیل کنیم. از اینجا «ثابت» جمعی در معادله ۱۰-۱۸ به دست می‌آید:

$$A_z(\rho) = -\frac{2I}{c} \ln \frac{\rho}{R} \quad (19-10)$$

پس میدان الکتریکی القایی عبارت است از

$$E_z(\rho) = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{2I}{c} \ln \frac{\rho}{R} \right) \quad (20-10)$$

$$= -\frac{2}{c^2} \frac{dI}{dt} \ln \frac{R}{\rho} \quad (21-10)$$

که با نتیجه قبل یکی است.

توجه کنید که محاسبه بالا مبتنی بر این فرض ضمنی است که میدان مغناطیسی شبه‌استاتیکی است، به طوری که عبارت ساده ۱۰-۱۳ میدان مغناطیسی صحیح را به دست می‌دهد حتی وقتی جریان وابسته به زمان است. این نتیجه دقیق نیست اما اگر جریان به اندازه کافی آهسته تغییر کند

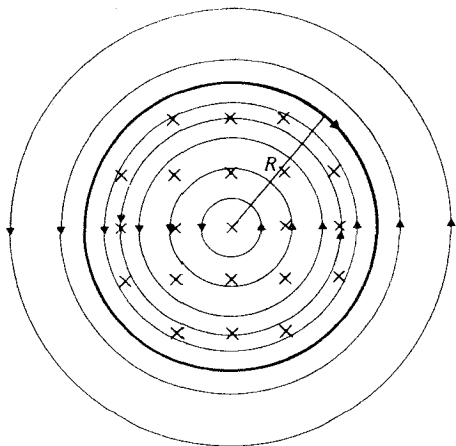
تقریب خوبی است. اگر جریان خیلی سریع تغییر کند به میدان مغناطیسی شبه‌استاتیک یک میدان مغناطیسی القایی ناشی از میدان الکتریکی وابسته به زمان اضافه می‌شود (بخش ۱۰-۵). محاسبهٔ اثرات القای متقابل کامل مربوط به میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بسیار پیچیده است. در این محاسبه یک معادلهٔ موج وارد می‌شود (فصل ۱۵).

بتاترون. اگر میدان مغناطیسی یک آهنربای الکتریکی با قطبهای استوانه‌ای را برحسب زمان افزایش دهیم، میدان الکتریکی القایی با خطوط میدان دایره‌ای ایجاد می‌شود. در بتاترون این میدان مغناطیسی زیادشونده الکترونها را در مدار یا شعاع ثابت نگه می‌دارد و در همین حال میدان الکتریکی القایی با شتاب دادن به این الکترونها انرژی آنها را افزایش می‌دهد. فرض کنید شعاع مدار R باشد (شکل ۱۰-۴). بنا به تقارن، مؤلفهٔ مماسی میدان الکتریکی در این شعاع ثابت است، و از قانون فاراده داریم

$$2\pi R E_{\phi}(R) = \frac{1}{c} \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (22-10)$$

یا

$$E_{\phi}(R) = \frac{1}{2\pi R c} \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (23-10)$$



شکل ۱۰-۴ مدار الکترون (دایرهٔ ساعتگرد) در میدان مغناطیسی بتاترون. خطوط میدان مغناطیسی که با علامت ضربدر مشخص شده‌اند به طرف داخل صفحهٔ کاغذ هستند. خطوط میدان الکتریکی القایی دایره‌های هم‌مرکز در صفحهٔ کاغذ هستند.

بنابراین، آهنگ افزایش بزرگی تکانه الکترون برابر است با

$$\frac{dp}{dt} = eE_{\phi}(R) = \frac{e}{2\pi Rc} \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (24-10)$$

برای مدار دایره‌ای در میدان مغناطیسی داریم $p = eRB(R)/c$ و معادله ۲۴-۱۰ به صورت زیر درمی‌آید

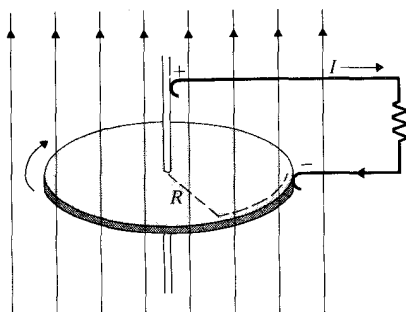
$$\frac{eR}{c} \frac{dB(R)}{dt} = \frac{e}{2\pi Rc} \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (25-10)$$

با انتگرال گرفتن از این رابطه به دست می‌آوریم

$$\Phi_B = 2\pi R^2 B(R) \quad (26-10)$$

اگر بخواهیم الکترون با وجود افزایش انرژی در مدار خود با شعاع ثابت باقی بماند باید این وابستگی بین شار داخل مدار و میدان مغناطیسی در مدار در تمام زمانها برقرار باشد. توجه کنید که برای میدان مغناطیسی یکنواخت شار $\pi R^2 B$ است که برای برقراری معادله ۲۶-۱۰ کافی نیست؛ پس در بتاترون میدان مغناطیسی باید داخل مدار شدیدتر از روی مدار باشد.

قرص فاراده. یک قرص دایره‌ای از ماده رسانا را که حول محورش می‌چرخد در نظر بگیرید؛ این قرص در یک میدان مغناطیسی یکنواخت و ثابت موازی با محور قرار دارد (شکل ۵-۱۰). اتصالات لغزنده محور و لبه قرص را به مداری خارجی وصل می‌کنند. تحت این شرایط، قرص emf به وجود می‌آورد که باعث برقراری جریانی در مدار می‌شود. می‌توانیم این emf را از



شکل ۵-۱۰ قرص رسانای چرخان در میدان مغناطیسی یکنواخت و ثابت. خط چین مسیر انتگرال‌گیری را نشان می‌دهد؛ قطعه شعاعی و قطعه مماسی نسبت به قرص بی‌حرکت هستند.

قانون فاراده محاسبه کنیم، اما در انتخاب مسیر انتگرال‌گیری باید مواظب باشیم. قانون فاراده برای هر مسیری معتبر است حتی برای مسیری در فضای خالی که منطبق بر هیچ‌یک از رساناهای شکل ۵-۱۰ نیست. اما آنچه می‌خواهیم emf داده‌شده به جریانی است که در مدار خارجی متصل به قرص برقرار است، و در نتیجه باید مسیری را برای انتگرال گرفتن انتخاب کنیم که حرکت بارهای آزاد حول مدار را دنبال کند. در قرص، بارهای آزاد تقریباً ساکن هستند (سرعت رانش الکترونی‌های رسانش بسیار کند است، و سرعت اتفاقی را به حساب نمی‌آوریم). در نتیجه، مسیر مربوط باید نسبت به قرص ساکن باشد؛ برای مثال، می‌توانیم مسیر شکل ۵-۱۰ را انتخاب کنیم. همچنانکه قرص می‌چرخد، قطعه شعاعی این مسیر مساحتی را با آهنگ زیر جاروب می‌کند

$$\frac{dA}{dt} = \nu \pi R^2$$

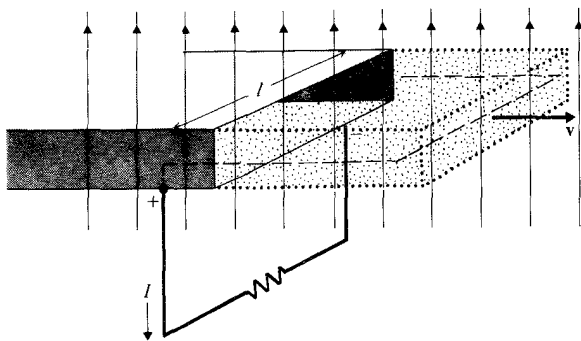
که در آن ν بسامد چرخش و R شعاع قرص است. بنابراین، آهنگ تغییر شار مغناطیسی $B \, dA/dt$ است، و emf القایی برابر است با

$$\mathcal{E} = \frac{\nu \pi R^2 B}{c}$$

اگر جهت چرخش و جهت میدان مغناطیسی مانند شکل ۵-۱۰ باشد، لبه قرص به‌عنوان سر منفی یک منبع emf و محور قرص به‌عنوان سر مثبت آن عمل می‌کنند. ماشینهای قرصی از این نوع به‌نام مولدهای هم‌قطبی — در کاربردهای عملی، مثل روکش‌کاری الکتریکی که به جریانهایی زیاد اما ولتاژهای متوسط احتیاج دارد، به‌کار برده می‌شوند.

مولد مغناطوئیدرودینامیکی. مولد مغناطوئیدرودینامیکی، یا MHD، عبارت است از یک کانال مستطیلی که از پلاسمایی پر شده است که با سرعت زیاد در آن جاری است. این پلاسما یک گاز یونیده بسیار داغ شامل مقدار زیادی الکترون آزاد و یون آزاد است و بنابراین رسانای خوبی است. کانال در یک میدان مغناطیسی قوی قرار دارد (شکل ۶-۱۰). بالا و پایین کانال از عایق و دیواره‌های مقابل از رسانا ساخته شده‌اند؛ این دیواره‌ها به یک مدار خارجی وصل شده‌اند. محاسبه emf القایی بسیار شبیه به‌مثال قبل است. این ستون پلاسما رسانای خوبی است، و مسیر انتگرال‌گیری باید در این رسانا ساکن باشد. یک مسیر ممکن در شکل ۶-۱۰ نشان داده شده است. اگر سرعت شارش پلاسما v باشد، قطعه عرضی l مربوط به این مسیر مساحتی با آهنگ vl و شاری با آهنگ vlB جاروب می‌کند. پس قانون فاراده به emf القایی زیر منجر می‌شود

$$\mathcal{E} = \frac{vlB}{c} \quad (۶-۱۰)$$



شکل ۱-۶ مولد مغناطوهیدرودینامیکی. میدان مغناطیسی بر شارش پلاسما در کانال عمود است. مسیر انتگرال‌گیری که قطعه عرضی آن نسبت به پلاسما بی‌حرکت است، با خط چین نشان داده شده است.

این نتیجه را می‌توانیم به‌سادگی با تبدیل لورنتس میدان مغناطیسی نیز به‌دست آوریم. اگر از معادله تبدیل لورنتس $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ به‌ازای $\mathbf{E} = 0$ استفاده کنیم، میدان الکتریکی در چارچوب سکون پلاسما را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$$

بنابراین، emf یا اختلاف پتانسیل بین دیواره‌های مقابل در ستون پلاسما برابر است با

$$E'l = \frac{vBl}{c}$$

این رابطه با نتیجه بالا توافق دارد—چون قانون فاراده معادله تبدیل لورنتسی $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ را دربر دارد، این توافق غیرمنتظره نیست.

emf $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ را غالباً emf حرکتی می‌نامند زیرا از حرکت رسانا در میدان مغناطیسی به‌وجود آمده است. هر رسانایی که در میدان مغناطیسی حرکت کند emf را ایجاد می‌کند. برای مثال، معادله $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ در مورد الکترولیتی که در یک کانال جاری است یا میله‌ای فلزی که بین جاروبکهای ساکن اتصال می‌لغزد نیز به‌کار می‌رود.

در محاسبه بالا برای emf القایی از میدان الکتریکی ناشی از بارهای مثبت و منفی که ممکن است روی دیواره‌های کانال حاوی پلاسما جمع شوند صرف‌نظر کرده‌ایم. چون میدان الکتریکی این بارها (ی ساکن) یک میدان الکتروستاتیک پایستار است، در emf ای که حول مسیر بسته محاسبه شود سهمی ندارد. اما اگر بخواهیم جریان الکتریکی را که در پلاسما از یک دیواره به دیواره دیگر کانال برقرار است محاسبه کنیم باید این میدان را به‌حساب آوریم. اگر این میدان را در چارچوب

آزمایشگاه با \mathbf{E} نشان دهیم، از معادله $10-7$ به دست می آوریم که میدان الکتریکی کل در چارچوب سکون پلاسما برابر است با

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$$

برای محاسبه جریان در پلاسما می توانیم از قانون اهم استفاده کنیم اما باید به خاطر داشته باشیم که این قانون تنها در چارچوب سکون رسانا معتبر است (این محدودیت در فرضهای اساسی محاسبه قانون اهم نهفته است). بدین ترتیب، جریان با میدان الکتریکی کل در چارچوب سکون پلاسما متناسب است:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}' = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (10-28)$$

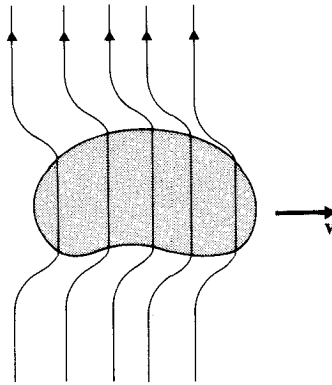
این معادله به سادگی نشان می دهد که جریان هم از میدان الکتروستاتیک \mathbf{E} و هم از میدان الکتریکی القایی $\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$ ایجاد می شود.

خطوط میدان منجمد در پلاسما. در دماهای فوق العاده زیاد، یونیدگی پلاسما بسیار زیاد است و تعداد زیادی الکترون آزاد و یون آزاد وجود دارد. پس رسانایی نیز بسیار زیاد است. برای مثال، رسانایی پلاسمای هیدروژن تقریباً 10^{10} بار بیشتر از مس است. در بسیاری از کاربردها، می توانیم رسانایی را نامتناهی فرض کنیم. آنگاه از معادله $10-28$ بلافاصله نتیجه می شود که میدان الکتریکی در چارچوب سکون لحظه ای یک حجم باید صفر باشد، یعنی $\mathbf{E}' = 0$. بنابراین، برحسب میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در چارچوب آزمایشگاه، داریم

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} = 0 \quad (10-29)$$

این نتیجه را می توان یک قید روی سرعت پلاسما در نظر گرفت. اگر $\mathbf{E} = 0$ ، باید $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$ باشد که ایجاب می کند پلاسما تنها بتواند در جهت خطوط میدان مغناطیسی حرکت کند.^۱ اگر بخواهیم با اعمال نیروی خارجی قوی پلاسما را در جهت دیگری سوق دهیم خطوط میدان مغناطیسی را با خود می کشد. این مطلب را از قانون فاراده نیز می توان نتیجه گرفت: چون $\mathbf{E}' = 0$ ، از معادله $10-12$ برای هر مسیر ساکن در پلاسما داریم $d\Phi_B/dt = 0$ ؛ یعنی تعداد خطوطی که از مسیر می گذرند باید ثابت بماند. خطوط میدان همراه پلاسما می روند، آنها در پلاسما «منجمد» شده اند (شکل $10-7$).

۱. توجه کنید که پلاسما در مولد MHD از این قید پیروی نمی کند. این پلاسما دارای رسانایی نامتناهی نیست، و به حرکت در عرض خطوط میدان مغناطیسی واداشته می شود.

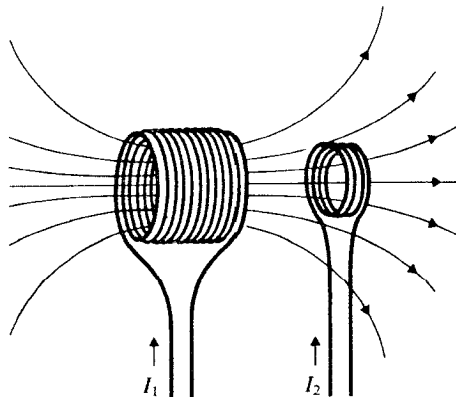


شکل ۱۰-۷ پلاسمای با رسانایی نامتناهی که در میدان مغناطیسی حرکت می‌کند خطوط میدان را با خود می‌کشد.

۱۰-۲ القاییدگی

در بسیاری از کاربردهای عملی، لازم است emf ای را محاسبه کنیم که یک مدار در مدار دیگری در مجاورت خود القا می‌کند. این‌گونه اثرات القای متقابل هنگامی روی می‌دهند که خطوط میدان مغناطیسی مربوط به یک مدار از مدار دیگر نشت کنند به طوری که تغییر جریانی در یکی باعث تغییر شار در دیگری شود (شکل ۱۰-۸).

برای دستگاهی کلی شامل تعدادی مدار جداگانه، شار در هر مدار باید به طور خطی به جریانه‌ها مربوط شود. دلیل این امر این است که میدانهای مغناطیسی به طور خطی به جریانه‌های ایجادکننده



شکل ۱۰-۸ دو مدار که خطوط میدان مغناطیسی مربوط به یکی از آنها از دیگری نشت می‌کنند.

آنها مربوط می‌شوند (معادله ۹-۳۵)، و میدانهای مغناطیسی ناشی از جریانها از اصل برهم‌نهی پیروی می‌کنند و مجموعاً یک میدان مغناطیسی کل و یک شار کل می‌سازند (معادله ۱۰-۴). بنابراین، شار در مدار n را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\Phi_{B,n} = c \sum_k M_{nk} I_k \quad (۱۰-۳۰)$$

که در آن ثابتهای M_{nk} را ضرایب القای القابیدگی (متقابل) می‌نامند. توجه کنید که این معادله مبتنی بر این فرض ضمنی است که مدارها در خلأ یا در ماده خطی قرار دارند. این معادله برای مدارها در حضور ماده فرومغناطیس معتبر نیست. یکای CGS الکتروستاتیک القابیدگی s^2/cm است.^۱ القابیدگی بستگی به شکل، اندازه و مکان مدارها دارد. می‌توانیم فرمول صریحی برای این ضرایب به قرار زیر به دست آوریم: جمله $cM_{nk} I_k$ در معادله ۱۰-۳۰ شار مغناطیسی است که مدار k در مدار n ایجاد می‌کند. یعنی

$$cM_{nk} I_k = \int \mathbf{B}_k \cdot d\mathbf{S}_n \quad (۱۰-۳۱)$$

که در آن \mathbf{B}_k میدان مغناطیسی است که مدار k ایجاد کرده است و $d\mathbf{S}_n$ عنصر سطح برای مدار n است. با توجه به $\mathbf{B}_k = \nabla \times \mathbf{A}_k$ و قضیه استوکس، معادله ۱۰-۳۱ به صورت زیر درمی‌آید

$$cM_{nk} I_k = \int \nabla \times \mathbf{A}_k \cdot d\mathbf{S}_n = \int \mathbf{A}_k \cdot d\mathbf{l}_n$$

چون پتانسیل برداری هر مدار عبارت است از (بامعادله ۹-۳۲ مقایسه کنید)

$$\mathbf{A}_k = \frac{1}{c} \int \frac{I_k}{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_n|} d\mathbf{l}_k$$

به آسانی به دست می‌آوریم

$$M_{nk} = \frac{1}{c^2} \iint \frac{1}{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_n|} d\mathbf{l}_k \cdot d\mathbf{l}_n \quad (۱۰-۳۲)$$

۱. این یکا (که نام خاصی ندارد) با تناظر زیر به یکای SI (هنری) مربوط می‌شود

$$1 \text{ H} \Leftrightarrow 10^{11} \times 10^{-12} \text{ s}^2/\text{cm}^2$$

این رابطه را فرمول نویمان می‌نامند. از این فرمول بلافاصله دیده می‌شود که القاییدگیها از یک رابطه تقارن تبعیت می‌کنند:

$$M_{nk} = M_{kn} \quad (۳۳-۱۰)$$

که به معنی این است که هرگاه جریانهای مدارهای n و k باهم برابر باشند شارهایی که هریک از این مدارها در دیگری ایجاد می‌کند نیز باهم برابرند.

اگر مدارها صلب و ساکن باشند، ضرایب القا مستقل از زمان خواهند بود. آنگاه emf القایی در مدار n را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathcal{E}_n = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{B,n}}{dt} = -\sum_k M_{nk} \frac{dI_k}{dt} \quad (۳۴-۱۰)$$

ضرایب مربوط به $n = k$ را خودالقایدگی می‌نامند و معمولاً با L_n نشان می‌دهند

$$L_n = M_{nn} \quad (۳۵-۱۰)$$

این ضرایب نشان می‌دهند مدار n چه emf ای در خودش القا می‌کند هنگامی که جریانش تغییر می‌کند. این emf را خود-emf یا پس-emf مدار می‌نامند.

تذکره: به ازای $n = k$ ، فرمول نویمان کارایی ندارد—نتیجه‌ای واگرا به دست می‌دهد زیرا میدان مغناطیسی یک سیم بینهایت باریک در مکان سیم نامتناهی است. اگر بخواهیم خودالقایدگی یک مدار را محاسبه کنیم باید کلفتی سیم را به حساب آوریم.

انرژی مغناطیسی در دستگاه مدارها را می‌توان برحسب القایدگی به صورت زیر نوشت

$$U = \frac{1}{2} \sum_n \sum_k M_{nk} I_k I_n \quad (۳۶-۱۰)$$

برای به دست آوردن این فرمول، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که هرگاه جریان در هریک از مدارها را تغییر دهیم باید توان لازم را از یک منبع خارجی emf تأمین کنیم. توانی که مدار n جذب می‌کند، بنا به معادله ۳۴-۱۰، عبارت است از

$$-I_n \mathcal{E}_n = \sum_k M_{nk} I_n \frac{dI_k}{dt}$$

و توان کل جذب شده توسط تمام مدارها برابر است با

$$\frac{dU}{dt} = - \sum_n I_n \mathcal{E}_n = \sum_n \sum_k M_{nk} I_n \frac{dI_k}{dt}$$

بنا به رابطهٔ تقارن ۳۳-۱۰، معادلهٔ بالا را به صورت زیر هم می توان نوشت

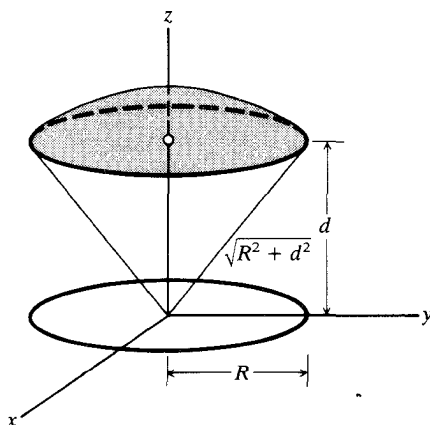
$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} \sum_n \sum_k M_{nk} \frac{d}{dt} (I_n I_k) \quad (۳۷-۱۰)$$

با انتگرال گرفتن از این معادله می توانیم انرژی ذخیره شده در دستگاه مدارها را وقتی جریانه‌ها به تدریج از مقدار اولیه (صفر) به مقدار نهایی (I_n) می رسند محاسبه کنیم. از اینجا معادلهٔ ۳۶-۱۰ را به دست می آوریم.

در مورد خاص یک مدار با خودالقایدگی L ، فرمول کلی ۳۶-۱۰ به رابطهٔ مشهور زیر برای انرژی مغناطیسی در یک القاگر تبدیل می شود:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \quad (۳۸-۱۰)$$

این بخش را با دو مثال از محاسبهٔ القایدگی به پایان می بریم. ابتدا، القایدگی متقابل دو حلقه سیم هم محور (شکل ۹-۱۰) به شعاع R و به فاصلهٔ d را (به طور تقریبی) محاسبه می کنیم. هندسهٔ



شکل ۹-۱۰ دو حلقهٔ هم محور. یک عرقچین کروی فرضی به شعاع $r = \sqrt{R^2 + d^2}$ یکی از حلقه‌ها را می پوشاند.

دستگاه انتگرال‌گیری از فرمول نویمان را نسبتاً مشکل می‌کند (به انتگرالهای بیضوی می‌رسیم)، و بهتر است به معادلهٔ $10^\circ-30^\circ$ بازگردیم. اگر جریان I_1 در حلقهٔ اول شار $\Phi_{B,2}$ را در حلقهٔ دوم ایجاد کند، از معادلهٔ $10^\circ-30^\circ$ داریم

$$M_{21} = \frac{1}{c} \frac{\Phi_{B,2}}{I_1}$$

به‌خاطر سادگی، فرض می‌کنیم $l > d$ ، و در نتیجه می‌توانیم از رشتهٔ توانی $9-62$ برای میدان مغناطیسی حلقهٔ اول استفاده کنیم:

$$B_r = \frac{2\pi I_1}{cR} \left[\frac{R^r \cos \theta}{r^r} - \frac{3}{4} \frac{R^{\Delta}}{r^{\Delta}} (\Delta \cos^r \theta - 3 \cos \theta) + \dots \right]$$

برای محاسبهٔ شار از حلقهٔ ۲ بهتر از همه این است که از B_r روی عرقچینی کروی به شعاع $r = \sqrt{R^2 + d^2}$ را می‌پوشاند (شکل $10-9$) انتگرال بگیریم:

$$\Phi_{B,2} = \iint B_r (R^r + d^r) \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

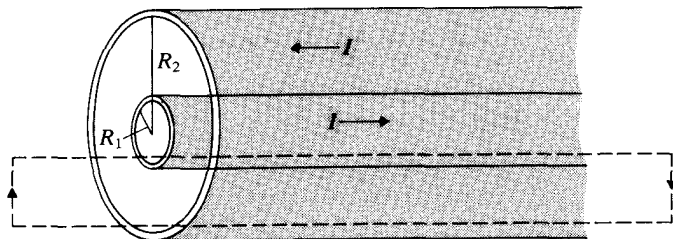
با قراردادن $\mu = \cos \theta$ ، رابطهٔ بالا چنین می‌شود

$$\begin{aligned} \Phi_{B,2} &= 2\pi \int_{-d/\sqrt{R^2+d^2}}^{d/\sqrt{R^2+d^2}} \frac{2\pi I_1}{cR} \\ &\times \left[\frac{R^r \mu}{(R^r + d^r)^{1/2}} - \frac{3}{4} \frac{R^{\Delta}}{(R^r + d^r)^{3/2}} (\Delta \mu^r - 3\mu) + \dots \right] d\mu \\ &= 2\pi^2 \frac{I_1}{c} \frac{R^r d^r}{(R^r + d^r)^{r/2}} \left[1 + \frac{3}{8} \frac{R^r (d^r + 6R^r)}{(R^r + d^r)^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

از اینجا دیده می‌شود که القابیدگی متقابل برابر است با

$$M_{21} = \frac{1}{c} \frac{\Phi_{B,2}}{I_1} = \frac{2\pi^2 R^r d^r}{c^r (R^r + d^r)^{r/2}} \left[1 + \frac{3}{8} \frac{R^r (d^r + 6R^r)}{(R^r + d^r)^2} + \dots \right]$$

به‌عنوان مثال دوم، می‌خواهیم خودالقابیدگی واحد طول یک خط انتقال هم‌محور متشکل از پوستهٔ رسانای استوانه‌ای درازی به شعاع R_1 که با پوسته‌ای به شعاع R_2 احاطه شده است را محاسبه کنیم (شکل $10-10$). پوسته‌ها را نازک می‌گیریم (اگر یک یا هر دو پوسته دارای کلفتی



شکل ۱۰-۱۰ خط انتقال هم محور متشکل از دو پوسته رسانای نازک. مستطیل خطچین مسیر یک بار فرضی را که در رسانای داخلی به طرف راست و در رسانای خارجی به طرف چپ حرکت می کند نشان می دهد.

متناهی باشد، یا اگر به جای پوسته داخلی یک استوانه توپر داشته باشیم، محاسبه مشکلتر می شود؛ بخش ۵-۱۱ را ببینید). رسانای داخلی حامل جریان I به طرف راست و رسانای داخلی حامل جریان بازگشتی به طرف چپ است. بدین ترتیب، میدان مغناطیسی با معادله ۱۰-۱۳ داده می شود. مستطیل شکل ۱۰-۱۰ مسیر یک بار فرضی را نشان می دهد؛ روشن است که تمام خطوط میدان مغناطیسی بین دو رسانا از سطح این مستطیل می گذرند. پس شار Φ_B مربوط به طول l از این سیم هم محور عبارت است از

$$\Phi_B = l \int_{R_1}^{R_2} B_\phi d\rho = l \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{c} \frac{\rho}{\rho} d\rho = \frac{\mu_0 I l}{c} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

در نتیجه، خودالقابیدگی برابر است با

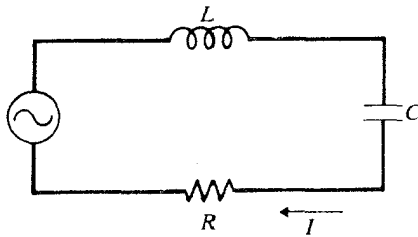
$$L = \frac{\mu_0 \Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 l}{c^2} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

و خودالقابیدگی واحد طول برابر است با

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{c^2} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (۱۰-۳۹)$$

۱۰-۳ مدار LCR

در مدارهایی که جریان در آنها نوسانی یا به طریق دیگری وابسته به زمان است، خودالقابیدگی منجر به اثرات «سختی» مهمی می شود. در اینجا تنها مورد ساده ای را بررسی می کنیم که عبارت است از مداری که در آن یک القاگر، یک خازن، یک مقاومت و یک منبع خارجی emf نوسانی به طور متوالی به هم متصل شده اند (شکل ۱۰-۱۱). معادله حرکت برای این مدار LCR واداشته از قاعده



شکل ۱۰-۱۱ یک مدار LCR واداشته با منبع خارجی emf.

کیرشهوف نتیجه می‌شود: مجموع emfها و افت ولتاژها در مدار باید صفر باشد. این قاعده بیان پایستگی انرژی است: وقتی باری حول مدار حرکت می‌کند مجموع تمام انرژی‌هایی که به دست می‌آورد یا از دست می‌دهد باید صفر باشد. برای این مدار داریم

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI - V \cos \omega t = 0 \quad (40-10)$$

در اینجا، عبارت LdI/dt عبارت است از emf خودالقایی در سیم‌پیچ، Q/C افت ولتاژ در خازن است، RI افت ولتاژ در مقاومت است، و $V \cos \omega t$ عبارت است از emf منبع خارجی. اگر از معادله ۱۰-۴۰ نسبت به زمان مشتق بگیریم و I را به جای dQ/dt قرار دهیم، به دست می‌آوریم

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} I + R \frac{dI}{dt} = -\omega V \sin \omega t \quad (41-10)$$

مقایسه معادله بالا با معادله متعارف برای نوسانگر هماهنگ ساده مکانیکی یعنی

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx + b \frac{dx}{dt} = F \sin \omega t$$

نشان می‌دهد L مشابه جرم نوسانگر مکانیکی، $1/C$ مشابه ثابت فنر، و R مشابه ثابت میرایی اصطکاکی است.

برای به دست آوردن جواب حالت پایا برای نوسانهای مدار، بهتر است که معادله ۱۰-۴۱ را قسمت حقیقی معادله مختلط زیر در نظر بگیریم

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} I + R \frac{dI}{dt} = -i\omega V e^{-i\omega t} \quad (42-10)$$

پس از حل کردن این معادلهٔ مختلط، قسمت حقیقی جواب را به عنوان جریان فیزیکی به دست می آوریم. با گزینه متداول

$$I = Ae^{-i\omega t} \quad (۴۳-۱۰)$$

در معادلهٔ مختلط، به معادلهٔ زیر می رسیم

$$-A\omega^2 L + \frac{1}{C}A - Ri\omega A = -i\omega V_0 \quad (۴۴-۱۰)$$

که از آن داریم

$$A = \frac{-i\omega V_0}{-\omega^2 L - i\omega R + 1/C} \quad (۴۵-۱۰)$$

بنابراین، جریان مختلط برابر است با

$$I = \frac{-i\omega V_0 e^{-i\omega t}}{-\omega^2 L - i\omega R + 1/C} \quad (۴۶-۱۰)$$

یا

$$I = \frac{V_0 e^{-i\omega t}}{Z} \quad (۴۷-۱۰)$$

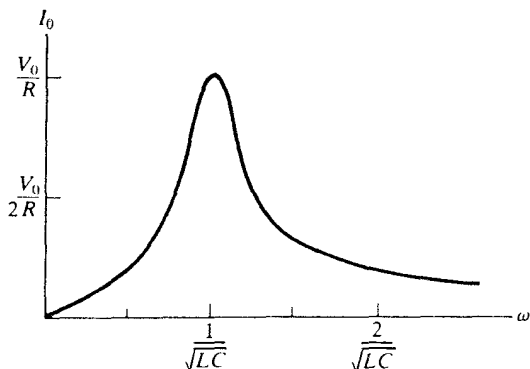
که در آن

$$Z = -i\omega L + R + \frac{i}{\omega C} \quad (۴۸-۱۰)$$

کمیت Z را امپدانس می نامند. برای مداری که فاقد القاگر و خازن باشد ($C = \infty$ و $L = 0$)، Z به R تبدیل می شود و $I = V/Z = V/R$ ، به طور کلی، Z را می توان «مقاومت» مختلط مدار در نظر گرفت.

جریان فیزیکی قسمت حقیقی معادلهٔ ۴۷-۱۰ است:

$$I = \frac{V_0 \cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (۴۹-۱۰)$$



شکل ۱۰-۱۲ دامنهٔ جریان به صورت تابعی از بسامد محرک.

که در آن

$$\phi = \tan^{-1} \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (۵۰-۱۰)$$

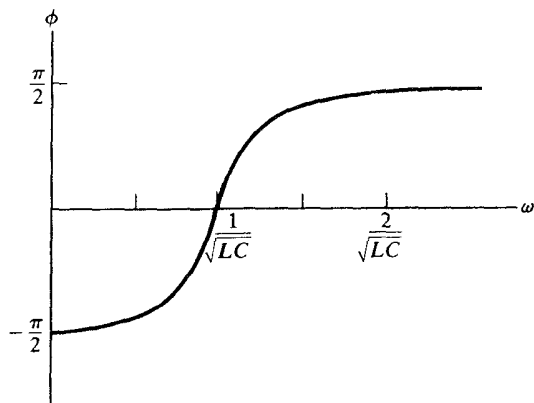
شکل ۱۰-۱۲ دامنهٔ جریان را به صورت تابعی از بسامد محرک نشان می‌دهد. جریان دارای ماکسیممی است در بسامد

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (۵۱-۱۰)$$

این بسامد را بسامد تشدید می‌نامند. شکل ۱۰-۱۳ زاویهٔ فاز ϕ را به صورت تابعی از بسامد محرک نشان می‌دهد. در تشدید، زاویهٔ فاز صفر است — یعنی، جریان همفاز با ولتاژ محرک است، و در نتیجه

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_0 \cos \omega t}{R} \quad (۵۲-۱۰)$$

به‌ازای $\omega < \omega_0$ ، جریان از ولتاژ «جلو می‌افتد» ($\phi < 0$)؛ به‌ازای $\omega > \omega_0$ ، جریان از ولتاژ «عقب می‌افتد» ($\phi > 0$).



شکل ۱۰-۱۳ زاویه فاز به صورت تابعی از بسامد محرک.

۴-۱۰ حرکت در میدان مغناطیسی با تغییرات کند

در بخش ۵-۹ دیدیم که مدار ذره باردار در میدان مغناطیسی یکنواخت و ثابت ماریپیچ است به شعاع

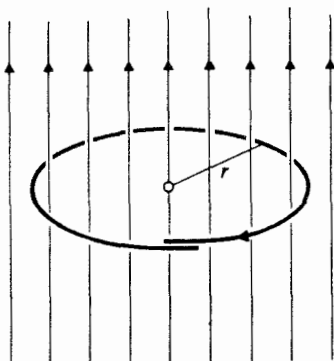
$$r = \frac{cp_{\perp}}{qB} \quad (۵۳-۱۰)$$

که در آن p_{\perp} مؤلفهٔ تکانه عمود بر میدان مغناطیسی است. در این بخش می‌خواهیم بررسی کنیم اگر شدت میدان مغناطیسی را به تدریج کم یا زیاد کنیم چه اتفاقی برای مدار ذره روی می‌دهد. روشن است که اگر میدان مغناطیسی به‌کندی تغییر کند، مدار در هر لحظه (تقریباً) دایره یا ماریپیچ است؛ اما شعاع این مدار تغییر خواهد کرد زیرا میدان الکتریکی القایی انرژی ذره را افزایش یا کاهش می‌دهد. ثابت می‌کنیم شعاع مدار طوری تغییر می‌کند که

$$Br^2 = \text{const} \quad (۵۴-۱۰)$$

یعنی، شاری که از مدار می‌گذرد ثابت می‌ماند.

برای اثبات این نتیجه، ابتدا ذره در مدار دایره‌ای را بررسی می‌کنیم، و مورد عمومی‌تر مدار ماریپیچ را به بعد موکول می‌کنیم. شکل ۱۰-۱۴ یک دور کامل ذره را نشان می‌دهد؛ چون میدان مغناطیسی به‌کندی تغییر می‌کند، تغییر شعاع مدار در این شکل به‌زحمت قابل ملاحظه است. بنا



شکل ۱۰-۱۴ مدار ذره باردار در یک میدان مغناطیسی که به کندی افزایش می‌یابد. مدار تقریباً یک دایره بسته است.

به قانون فاراده، emf القایی حول این مدار برابر است با

$$\mathcal{E} = \frac{\pi r^2}{c} \frac{dB}{dt} \quad (۱۰-۵۵)$$

اگر رابطه بالا را در بار ذره ضرب کنیم، نمو انرژی جنبشی ذره را در یک مدار به دست می‌آوریم. این نمو برحسب نمو تکانه برابر است با $v \Delta p$ ، به طوری که

$$v \Delta p = q \frac{\pi r^2}{c} \frac{dB}{dt} \quad (۱۰-۵۶)$$

اگر این رابطه را بر زمان Δt مربوط به یک دور تقسیم کنیم و سرعت v را با $2\pi r / \Delta t$ حذف کنیم، به دست می‌آوریم

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{qr}{2c} \frac{dB}{dt} \quad (۱۰-۵۷)$$

برای مدار دایره‌ای داریم

$$r = \frac{cp}{qB} \quad (۱۰-۵۸)$$

به طوری که

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p}{2B} \frac{dB}{dt} \quad (۱۰-۵۹)$$

اگر از این معادله انتگرال بگیریم به دست می‌آوریم

$$\frac{B}{p^2} = \text{const} \quad (۶۰-۱۰)$$

با توجه به معادلهٔ ۵۸-۱۰، رابطهٔ بالا معادل است با

$$Br^2 = \text{const} \quad (۶۱-۱۰)$$

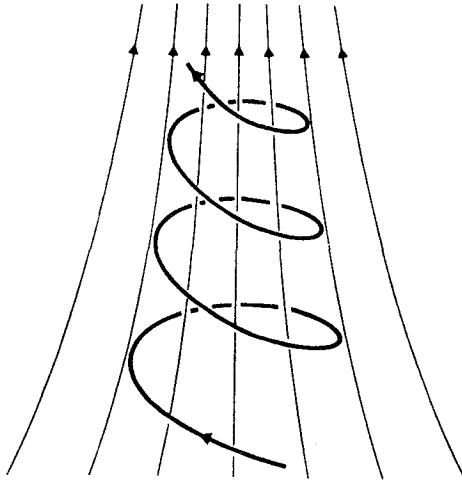
که نتیجهٔ موردنظر را برای مورد خاص مدار دایره‌ای اثبات می‌کند.

برای کامل شدن اثبات باید مورد عمومی مدار مارپیچ را بررسی کنیم. این کار را می‌توانیم با یک لم انجام دهیم: اگر مدار در چارچوب مرجع آزمایشگاه مارپیچ باشد به چارچوب مرجع جدیدی می‌رویم که ذره در آن موازی با میدان مغناطیسی سرعت ندارد و در نتیجه مدار دایره‌ای است. چون سرعت این چارچوب مرجع جدید موازی با میدان مغناطیسی است، معادلهٔ تبدیل لورنتس (معادلهٔ ۸-۴۴) نشان می‌دهد میدانهای مغناطیسی در چارچوب مرجع جدید و در چارچوب آزمایشگاه یکسان هستند. به علاوه، معادلهٔ تبدیل لورنتس برای فواصل عرضی نشان می‌دهد که شعاعهای مدارها در دو چارچوب مرجع نیز یکسان هستند. با توجه به اینکه معادلهٔ ۱۰-۶۱ برای مدار دایره‌ای در چارچوب مرجع جدید معتبر است، بلافاصله نتیجه می‌گیریم که این معادله برای مدار مارپیچ در چارچوب مرجع آزمایشگاه نیز معتبر است.

در مکانیک، کمیتی را که هنگام تغییرات کند یکی از پارامترهای حرکت ثابت می‌ماند ناوردای بی‌دررو می‌نامند. بدین ترتیب، برای ذرهٔ متحرک در یک میدان مغناطیسی با تغییرات کند، شار Br^2 یک ناوردای بی‌دررو است. این مطلب نه تنها برای میدان مغناطیسی متغیر نسبت به زمان بلکه برای میدان مغناطیسی متغیر نسبت به فضا هم درست است—از دیدگاه ذره‌ای که در میدان مغناطیسی حرکت حلزونی انجام می‌دهد تغییرات کند فضایی معادل تغییرات کند زمانی است. برای مثال، شکل ۱۰-۱۵ ذره‌ای را نشان می‌دهد که در یک میدان مغناطیسی که از پایین به بالا تدریجاً افزایش می‌یابد حرکت حلزونی دارد. همچنان‌که ذره به بالا کشیده می‌شود با میدانی مغناطیسی که با زمان افزایش می‌یابد روبه‌رو است. در این میدان مغناطیسی شعاع مدار مطابق با معادلهٔ ۱۰-۵۴ به تدریج کم می‌شود.

این کوچک شدن مدار در میدان مغناطیسی افزایشده می‌تواند باعث انعکاس ذره از ناحیه‌ای شود که میدان مغناطیسی در آن شدید است. برای اینکه بینیم چگونه این امر اتفاق می‌افتد،

۱. میدان الکتریکی در معادلهٔ ۸-۴۴ را می‌توان صفر گرفت (در این مرحله از محاسبه از میدان الکتریکی القایی صرف‌نظر می‌کنیم).



شکل ۱۰-۱۵ مدار ذره باردار در میدان مغناطیسی ناهمگن.

می‌گذاریم: $r = cp_{\perp} / (qB)$ را در معادله ۱۰-۵۴

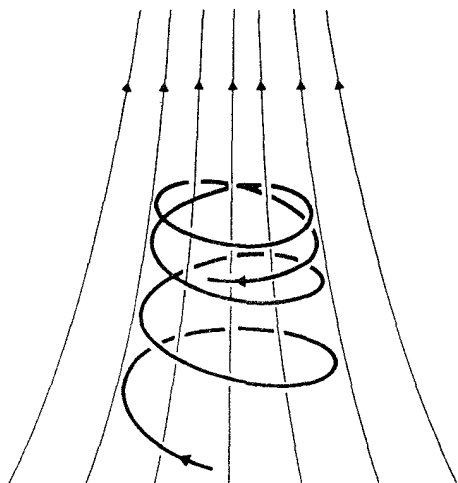
$$\frac{p_{\perp}^2}{B} = \text{const} \quad (۱۰-۶۲)$$

این نتیجه نشان می‌دهد وقتی ذره به ناحیه میدان مغناطیسی شدید کشیده می‌شود p_{\perp} باید زیاد شود. اما p_{\perp} نمی‌تواند به طور نامحدود زیاد شود. در میدان مغناطیسی ایستا انرژی جنبشی ثابت است و بنابراین، مؤلفه‌های عمودی و موازی تکانه تابع قید زیر هستند

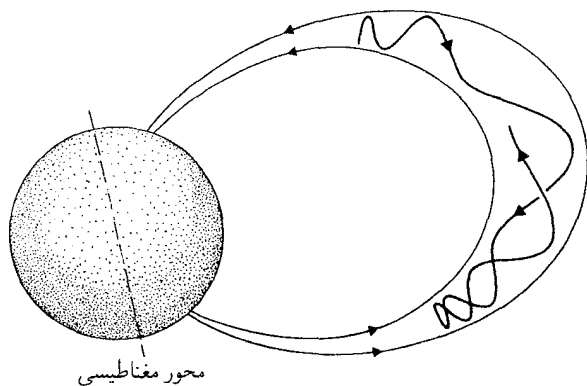
$$p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 = \text{const} \quad (۱۰-۶۳)$$

وقتی p_{\perp} افزایش می‌یابد، p_{\parallel} باید کاهش یابد. بیشترین مقدار p_{\perp} وقتی است که $p_{\parallel} = 0$ ؛ در این نقطه، حرکت رانشی ذره باید برعکس شود (شکل ۱۰-۱۶). توجه کنید که جهت حرکت دورانی در سراسر فرایند انعکاس یکسان می‌ماند. تنها حرکت رانشی وارونه می‌شود.

کمربندهای وان‌آلن که زمین را احاطه کرده‌اند از الکترون‌ها و پروتون‌هایی تشکیل شده‌اند که با این نوع فرایند انعکاس در میدان مغناطیسی زمین گیر افتاده‌اند. این ذرات حول خطوط میدان مغناطیسی حرکت حلزونی انجام می‌دهند (شکل ۱۰-۱۷) و بین ناحیه‌های قطبی شمال و جنوب، که خطوط همگرایی میدان مغناطیسی آنها را منعکس می‌کنند، به عقب و جلو حرکت می‌کنند.



شکل ۱۰-۱۶ انعکاس ذره باردار از ناحیه میدان مغناطیسی شدید.



شکل ۱۰-۱۷ مدار الکترون در یکی از کمربندهای وان آلن.

در بعضی طرحهای محدودسازی پلاسما در آزمایشهای گداخت، از اثر انعکاسی مشابهی استفاده می‌شود. پلاسما در یک «بطری مغناطیسی» که در دو انتهای آن یک «آینه مغناطیسی» وجود دارد نگه داشته می‌شود. در ماشینهای پلاسمایی اخیر از چندین آینه متوالی در هر سراسفاده می‌شود، و خطوط همگرایی میدان به طرز بسیار پیچیده‌ای ترتیب یافته‌اند تا بازدهی انعکاس بیشتر شود و از فرار ذراتی هم که در امتداد محور بطری دارای مؤلفه‌های بزرگ حرکت هستند جلوگیری شود.

۵-۱۰ جریان جابه‌جایی

اگر معادله‌های ماکسول برای $\nabla \times \mathbf{E}$ و $\nabla \times \mathbf{B}$ ، یعنی

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۶۴-۱۰)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (۶۵-۱۰)$$

را باهم مقایسه کنیم می‌بینیم، صرفنظر از جمله \mathbf{j} ($4\pi/c$)، این معادله‌ها از لحاظ ریاضی کاملاً شبیه هم‌اند. معادله اول نشان می‌دهد میدان مغناطیسی متغیر میدان الکتریکی القا می‌کند؛ معادله دوم نشان می‌دهد میدان الکتریکی متغیر میدان مغناطیسی القا می‌کند. با انتگرال‌گرفتن از معادله ۶۵-۱۰ روی سطح بازی که به یک مسیر ساکن اختیاری محدود باشد، به دست می‌آوریم

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

یا

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (۶۶-۱۰)$$

که در آن $\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ شار الکتریکی است.

تمرین ۳- نشان دهید برای یک مسیر متحرک معادله ۶۶-۱۰ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\int_C \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (۶۷-۱۰)$$

■ که در آن \mathbf{B}' میدان مغناطیسی در چارچوب سکون لحظه‌ای قطعه $d\mathbf{l}$ مسیر است.

این قانون القا برای میدانهای مغناطیسی یک بیان تعمیم‌یافته قانون آمپر است؛ اختلاف آن با قانون آمپر در جمله اضافی $\int \partial \mathbf{E} / \partial t \cdot d\mathbf{S}$ ($1/c$) است. روشن است که \mathbf{j} و $\partial \mathbf{E} / \partial t$ تأثیر یکسانی روی میدان مغناطیسی دارند. هر دو به‌عنوان چشمه میدان مغناطیسی عمل می‌کنند. برای تأکید بر این تشابه، می‌توانیم چگالی جریان جابه‌جایی

$$\mathbf{j}_D = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (۶۸-۱۰)$$

را تعریف کنیم که برحسب آن معادلهٔ ۱۰-۶۶ به صورت زیر درمی‌آید

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int (\mathbf{j} + \mathbf{j}_D) \cdot d\mathbf{S} \quad (۶۹-۱۰)$$

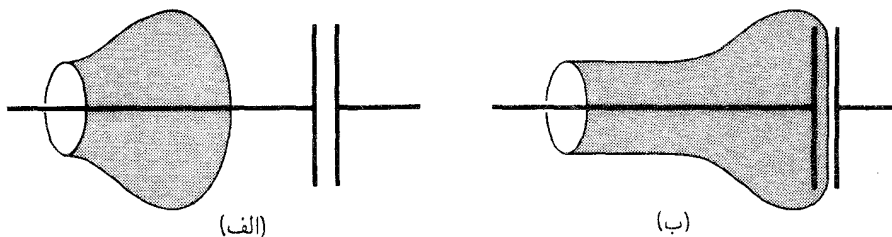
این جریان جابه‌جایی را می‌توان ادامهٔ جریان حقیقی «با وسایل دیگر» در نظر گرفت. به‌آسانی می‌توان نشان داد مجموع $\mathbf{j} + \mathbf{j}_D$ هیچ چشمه یا چاهکی ندارد؛ یعنی واگرایی آن صفر است:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{j} + \mathbf{j}_D) &= \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (4\pi\rho) \end{aligned} \quad (۷۰-۱۰)$$

طرف راست بنا به معادلهٔ پیوستگی صفر می‌شود.

یک مثال متداول دربارهٔ اینکه جریان جابه‌جایی چگونه به‌منزلهٔ ادامهٔ جریان حقیقی عمل می‌کند در شکل ۱۰-۱۸ تشریح شده است. دو سیم مستقیم دراز ثابتی را به یک خازن می‌رسانند. می‌خواهیم $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ را برای مسیر بسته‌ای حول سیم محاسبه کنیم. به‌خاطر سادگی، فرض می‌کنیم مسیر آنقدر از خازن دور است که میدان الکتریکی لبهٔ خازن حتی به‌نزدیکی آن هم نمی‌رسد. شکلهای ۱۰-۱۸ (الف) و ۱۰-۱۸ (ب) دو سطح جانشین هم را نشان می‌دهد که این مسیر مرز آنهاست. در شکل ۱۰-۱۸ (الف)، سطح انتگرال‌گیری جریان حقیقی را قطع می‌کند اما جریان جابه‌جایی را قطع نمی‌کند؛ بنابراین داریم

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I \quad (۷۱-۱۰)$$



شکل ۱۰-۱۸ دو سیم مستقیم دراز متصل به یک خازن. (الف) یک سطح ممکن انتگرال‌گیری که مسیر مفروض مرز آن است. این سطح جریان سیم را قطع می‌کند. (ب) سطح انتگرال‌گیری ممکن دیگری که همان مسیر مرز آن است. این سطح از بین صفحه‌های خازن می‌گذرد.

در شکل ۱۰-۱۸ (ب)، سطح انتگرال‌گیری جانشین تنها جریان جابه‌جایی را قطع می‌کند؛ پس به‌دست می‌آوریم

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 \pi}{c} \int \mathbf{j}_D \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (۱۰-۷۲)$$

چون تمام خطوط میدان الکتریکی که از یکی از صفحه‌ها شروع می‌شوند باید این سطح انتگرال‌گیری را قطع کنند، $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ برابر است با $\mu_0 \pi$ ضربدر بار روی آن صفحه. در نتیجه معادله ۱۰-۷۲ تبدیل می‌شود به

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{c} \frac{dQ}{dt} \quad (۱۰-۷۳)$$

که همان معادله ۱۰-۷۱ است. بدین ترتیب، جریان جابه‌جایی و جریان حقیقی دارای بزرگی یکسانی هستند، و میدان مغناطیسی یکسانی را ایجاد می‌کنند.

مسائل

۱۰-۱ یک سیم‌لوله استوانه‌ای ایده‌آل به شعاع R و طول نامتناهی دارای میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} در درون خود است. این سیم‌لوله با سرعت \mathbf{V} عمود بر محورش حرکت می‌کند. (الف) نشان دهید سیم‌لوله در نتیجه این حرکت دارای میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E} \simeq (\mathbf{V}/c) \times \mathbf{B}$ در درون خود خواهد بود؛ از جمله‌های مرتبه V^2/c^2 صرف‌نظر کنید. (ب) آیا این میدان الکتریکی یک میدان پایستار است؟ (ج) خطوط میدان \mathbf{E} از دیواره‌های سیم‌لوله شروع و به آنها ختم می‌شوند. چگالی بار سطحی روی دیواره‌ها را به‌دست آورید. (د) فرض کنید این چگالی بار سطحی روی یک لوله استوانه‌ای ساکن از جنس کاغذ و با شعاعی برابر با شعاع سیم‌لوله قرار دارد. میدان الکتریکی داخل و خارج لوله را به‌طور کیفی تعیین کنید. خطوط میدان این میدان پایستار چه تفاوتی با خطوط میدان مربوط به میدان قسمتهای (الف) تا (ج) دارند؟

۱۰-۲ یک سیم مستقیم بسیار دراز حامل جریان I است. میله‌ای به طول l و موازی با سیم با سرعت v به طرف سیم حرکت می‌کند. emf حرکتی القا شده بین دو سر میله را به‌صورت تابعی از فاصله سیم تا میله به‌دست آورید. میدان الکتریکی القایی را در چارچوب سکون میله به‌دست آورید.

۱۰-۳ دو ضلع یک حلقه مربعی با ابعاد $l \times l$ با یک سیم مستقیم بسیار دراز که در صفحه حلقه قرار دارد موازی هستند. این سیم حامل جریان I است و با سرعت v از حلقه دور می‌شود. اگر فاصله لحظه‌ای سیم تا نزدیکترین ضلع حلقه h باشد، emf القا شده حول حلقه را به‌دست آورید.

۱۰-۴ یک القاگر پشتکزن برای اندازه‌گیری شدت میدان مغناطیسی به‌کار برده می‌شود. این القاگر یک حلقه‌سیمی کوچک با N دور و مساحت A است؛ مقاومت سیم R است. القاگر در میدان مغناطیسی ایستاده است و ناگهان سر و ته می‌شود. طی این عمل، جریان القایی باعث شارش بار کل Q حول حلقه می‌شود. بزرگی میدان مغناطیسی را برحسب Q, R, A و N بیان کنید.

۱۰-۵ یک صفحه بزرگ فلزی بین قطبهای یک آهنربا می‌لغزد. آهنربا میدان مغناطیسی یکنواخت B را ایجاد می‌کند که عمود بر صفحه است و در ناحیه نسبتاً کوچک $l \times l$ در صفحه نفوذ می‌کند. کلفتی صفحه h ، رسانندگی فلز σ ، و سرعت (لحظه‌ای) صفحه v است. نشان دهید جریانهای القایی، یا جریانهای گردابی، در صفحه باعث نیروی رانشی تقریبی $v\sigma h l^2 B^2/c^2$ می‌شوند که با حرکت صفحه مخالفت می‌کند. [راهنمایی: در محاسبه جریانی که از ضلع مربع $l \times l$ به ضلع مقابل برقرار می‌شود، یک تقریب معقول این است که از مقاومتی که جریان بازگشتی در ناحیه (بزرگ) اطراف مربع با آن مواجه می‌شود صرف‌نظر کنیم. چرا؟]

۱۰-۶ نشان دهید اگر جریان در یک سیم مستقیم بینهایت دراز با آهنگی متناهی تغییر کند یک میدان الکتریکی نامتناهی موازی با سیم القا می‌شود.

۱۰-۷ دو سیم مستقیم نامتناهی با فاصله d حامل جریانهای یکسانی در دو جهت مخالف هستند. اگر این جریانها با آهنگ dI/dt تغییر کنند، میدان الکتریکی القایی را در یک نقطه اختیاری از صفحه این دو سیم به‌دست آورید.

۱۰-۸ یک خط انتقال هم‌محور از دو پوسته رسانای نازک استوانه‌ای هم‌محور تشکیل شده است. شعاع پوسته داخلی ۱ میلی‌متر و شعاع پوسته خارجی ۳ میلی‌متر است. پوسته‌ها حامل جریانهای یکسان AC با دامنه $10^1 \times 2$ ر. ایستا آمپر و بسامد ۲۰۰۰ هرتز در جهت‌های مخالف هستند؛ این جریانها به‌طور یکنواخت در پوسته‌ها توزیع شده‌اند. ماکسیمم بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از جریان را به‌دست آورید. ماکسیمم بزرگی میدان الکتریکی القایی ناشی از میدان مغناطیسی را به‌دست آورید.

۱۰-۹ یک حلقه دایره‌ای به‌جرم m ، شعاع r ، و از جنس سیمی با مقاومت الکتریکی R که در میدان مغناطیسی یکنواخت افقی B قرار دارد، می‌تواند حول قطر قائم خود آزادانه بچرخد. معادله حرکت چرخشی حلقه را به‌دست آورید.

۱۰-۱۰ یک کره رسانا به شعاع R که به‌طور یکنواخت آهنربا شده است میدان مغناطیسی ثابت

$$B = B_0 \hat{z} \quad r < R$$

را در درون خود و میدان دوقطبی

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r^3} B_0 R^3 \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \quad r > R \text{ به‌ازای}$$

را در بیرون خود ایجاد می‌کند. فرض کنید این کره را با سرعت زاویه‌ای (غیر نسبی) ω حول محور z به‌چرخش درآوریم. (الف) با استفاده از قانون القای فاراده یا تبدیلات لورنتس برای میدانهای الکترومغناطیسی، نشان دهید در چارچوب آزمایشگاه میدان الکتریکی در درون کره برابر است با

$$\mathbf{E} = -\frac{B_0 \omega r \sin \theta}{c} \hat{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\mathbf{z}}$$

و نشان دهید پتانسیل الکتریکی در سطح کره به‌صورت زیر است

$$\Phi(R, \theta) = \frac{B_0 \omega}{2c} R^3 \sin^2 \theta + \text{const}$$

(ب) از پتانسیل داده‌شده $\Phi(R, \theta)$ در سطح کره، پتانسیل $\Phi(r, \theta)$ در بیرون کره را به‌دست آورید، و نشان دهید میدان الکتریکی در بیرون برابر است با

$$\mathbf{E} = \frac{B_0 \omega R^3}{2c} \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3} \hat{\mathbf{r}} + \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^3} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)$$

این میدان الکتریکی مربوط به چارچوبی است.

۱۰-۱۱ دو ضلع یک حلقه مربعی سیمی با ابعاد $l \times l$ موازی با یک سیم مستقیم دراز است که در صفحه حلقه و به‌فاصله h از نزدیکترین ضلع قرار دارد. فرض کنید این سیم دراز در بینهایت بسته می‌شود به‌طوری‌که سیم و حلقه دو مدار جداگانه تشکیل می‌دهند. القاییدگی متقابل را از فرمول نویمان محاسبه کنید.

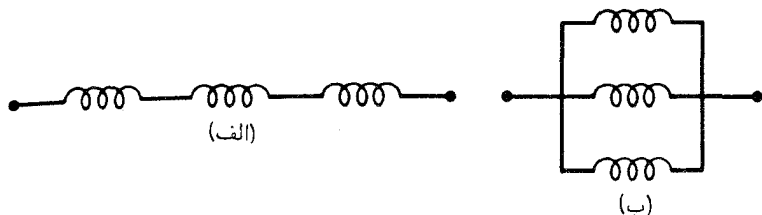
۱۰-۱۲ دو نوار نازک بسیار دراز رسانا موازی و روبروی هم قرار دارند. پهنای نوارها n و فاصله آنها از هم d است. این نوارها حامل جریانهای مساوی و در جهتهای مخالف هستند و می‌توان آنها را تشکیل‌دهنده یک مدار واحد در نظر گرفت. فرض کنید جریانها به‌طور یکنواخت در نوارها توزیع شده‌اند، و فرض کنید $h \gg d$ به‌طوری‌که اثرات لبه جزئی‌اند و میدان مغناطیسی بین نوارها را می‌توان یکنواخت گرفت. خودالقایدگی در واحد طول را برای این جفت نوار به‌دست آورید.

۱۰-۱۳ چند القاگر با خود القایدگیهای L_1, L_2, L_3, \dots به طور متوالی (شکل ۱۰-۱۹ الف) یا موازی (شکل ۱۰-۱۹ ب) بهم وصل شده‌اند. القایدگیهای متقابل آنها قابل چشمپوشی است. نشان دهید خود القایدگی کل مؤثر برای ترکیب متوالی برابر است با

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots$$

و برای ترکیب موازی برابر است با

$$L = \frac{1}{1/L_1 + 1/L_2 + 1/L_3 + \dots}$$



شکل ۱۰-۱۹ الف) القاگرهای متوالی. ب) القاگرهای موازی.

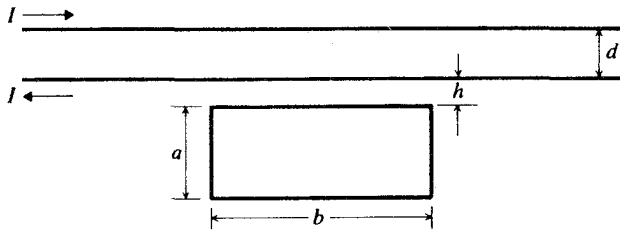
۱۰-۱۴ دو القاگر با خود القایدگیهای L_1 و L_2 و القایدگی متقابل M به طور متوالی بهم وصل شده‌اند. نشان دهید القایدگی مؤثر این ترکیب برابر است با $L_1 + L_2 \pm 2M$ که در آن علامت جمله آخر بستگی به این دارد که القاگرها در یک جهت سیم‌پیچی شده‌اند یا در جهت‌های مخالف.

۱۰-۱۵ دو القاگر با خود القایدگیهای L_1 و L_2 و القایدگی متقابل M به طور موازی بهم وصل شده‌اند. نشان دهید القایدگی مؤثر این ترکیب برابر است با

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}$$

که در آن علامت در مخرج بستگی به این دارد که القاگرها در یک جهت سیم‌پیچی شده‌اند یا در جهت‌های مخالف.

۱۰-۱۶ شکل ۱۰-۲۰ دو سیم موازی دراز با جریانهای مساوی اما در جهت‌های مخالف را نشان می‌دهد. در صفحه این سیمها یک حلقه سیمی مستطیلی قرار دارد. اگر جریانهای سیمها با آهنگ

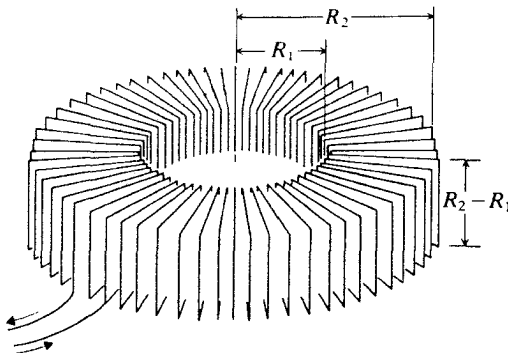


شکل ۱۰-۲۰ دو سیم موازی دراز حامل جریانهای I و یک حلقهٔ سیمی مستطیلی.

dI/dt تغییر کنند، emf القاشده در حلقه را محاسبه کنید. القاییدگی متقابل بین حلقه و جفت سیم را به دست آورید.

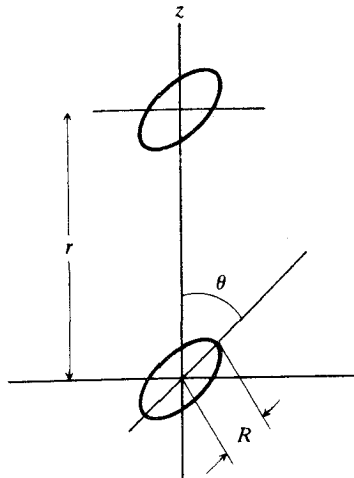
۱۰-۱۷ الف) یک سیمولوهٔ استوانه‌ای بسیار دراز دارای شعاع R و n دور در واحد طول است. خودالقایدگی در واحد طول را به دست آورید. (ب) فرض کنید این سیمولوه با سیمولوهٔ هم‌محور دیگری به شعاع $2R$ و n' دور در واحد طول احاطه شده است. القاییدگی متقابل را به دست آورید.

۱۰-۱۸ یک سیمولوهٔ چنبره‌ای با مقطع مربع دارای شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 است (شکل ۱۰-۲۱). تعداد کل دورها در سیمولوه N است؛ فرض کنید N بسیار بزرگ است. خودالقایدگی را به دست آورید.



شکل ۱۰-۲۱ سیمولوهٔ چنبره‌ای با مقطع مربع.

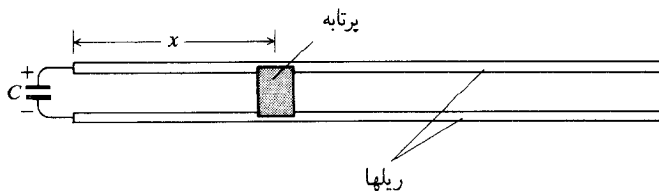
۱۰-۱۹ شکل ۱۰-۲۲ دو حلقهٔ دایره‌ای از سیم نازک به شعاع R را نشان می‌دهد؛ فاصلهٔ مراکز حلقه‌ها از یکدیگر r است، و صفحه‌های حلقه‌ها باهم موازی‌اند. القاییدگی متقابل را به صورت تابعی از θ به دست آورید. فرض کنید $r \gg R$ به طوری که میدان مغناطیسی هر



شکل ۱۰-۲۲ دو حلقه دایره‌ای موازی از سیم.

حلقه در سطح حلقه دیگر تقریباً یکنواخت است. القایدگی متقابل تحت چه زاویه‌ای ماکسیمم است؟

۱۰-۲۰ یک پرتابگر الکترومغناطیسی یا تنگ ریلی از دو ریل رسانای موازی که از یک طرف به منبع ولتاژ زیاد (معمولاً یک خازن بزرگ) وصل شده‌اند تشکیل شده است. پرتابه که یک جسم رساناست روی ریلها می‌لغزد و مدار را کامل می‌کند (شکل ۱۰-۲۳). جریان زیاد در این مدار باعث یک میدان مغناطیسی شدید می‌شود که با جریانی که از پرتابه می‌گذرد برهم‌کنش می‌کند و به آن در امتداد ریلها شتاب می‌دهد. (الف) نشان دهید نیروی وارد بر پرتابه با حاصلضرب مجذور جریان و خود القایدگی در واحد طول ریلها تناسب مستقیم دارد. [راهنمایی: برای یک مقدار لحظه‌ای معین جریان، نیروی وارد بر پرتابه $F = d(1/2LI)^2/dx$ است؛ در اینجا، علامت مثبت جلو مشتق به خاطر این است که منبع emf انرژی می‌دهد (بحث درباره علامت مثبت مشابهی برای نیروی الکتریکی را در ارتباط با معادله‌های ۵-۳۹ و ۵-۴۰ ببینید). اگر دو سر مدار



شکل ۱۰-۲۳ یک پرتابگر الکترومغناطیسی با خازنی که منبع emf است.

(منبع emf و پرتابه) کاملاً از هم جدا باشند اثرات انتهایی صرفاً یک ثابت به L اضافه می‌کند و می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. پس می‌توانیم L را به القاییدگی در واحد طول مربوط کنیم. [(ب) فرض کنید القاییدگی در واحد طول $2/c'$ باشد. برای اینکه به پرتابه‌ای 200 گرمی در یک تفنگ 10 متری سرعت دهانه‌ای برابر با 3000 m/s داده شود جریان لازم را تخمین بزنید.

۲۱-۱۰ سه سیم‌لوله هم‌محور بسیار دراز دارای شعاعهای $R_1 < R_2 < R_3$ و تعداد دور در واحد طول n_1, n_2, n_3 هستند. تمام ضرایب القا (در واحد طول) را محاسبه کنید؛ جواب را به صورت یک ماتریس 3×3 بنویسید.

۲۲-۱۰ حلقه کوچکی از سیم باریک به شعاع R با حلقه بزرگ هم‌مرکزی به شعاع R' و در همان صفحه احاطه شده است. یک عبارت تقریبی برای القاییدگی متقابل به دست آورید. جواب باید یک رشته توانی بر حسب R/R' باشد.

۲۳-۱۰ معادله دیفرانسیل برای مدار LCR نوسان‌کننده آزاد (بدون منبع emf خارجی) عبارت است از

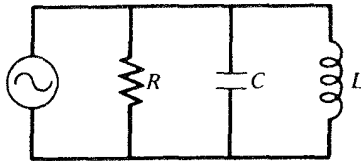
$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI = 0$$

(الف) این معادله را با شرایط اولیه $I = I_0$ و $Q = Q_0$ حل کنید. (ب) نشان دهید انرژی در مدار به‌طور نمایی کاهش می‌یابد، و ثابت زمانی را برای این‌افت نمایی به دست آورید.

۲۴-۱۰ از معادله ۴۹-۱۰ توان لحظه‌ای را که منبع خارجی emf به مدار می‌دهد به دست آورید. توان متوسط زمانی را محاسبه کنید. نشان دهید اگر $R = 0$ ، توان متوسط زمانی صفر است.

۲۵-۱۰ مدار LR واداشته‌ای را در نظر بگیرید که از یک القاگر و یک مقاومت که به‌طور متوالی به منبع خارجی emf نوسانی وصل شده‌اند تشکیل شده است. جریان حالت پایای لحظه‌ای و همچنین امپدانس را به دست آورید. نشان دهید این جوابها با معادله‌های ۴۷-۱۰ و ۴۸-۱۰ در حالت حدی $C \rightarrow \infty$ توافق دارند.

۲۶-۱۰ یک مدار LCR موازی تشکیل شده است از یک القاگر، یک خازن، یک مقاومت، و یک منبع emf نوسانی با $\mathcal{E} = V_0 \cos \omega t$ که همگی به‌طور موازی به هم وصل شده‌اند (شکل ۲۴-۱۰). امپدانس (مختلط) این مدار را به دست آورید. به‌ازای چه مقادیری برای بسامد ω جریان ماکسیمم و مینیمم است؟

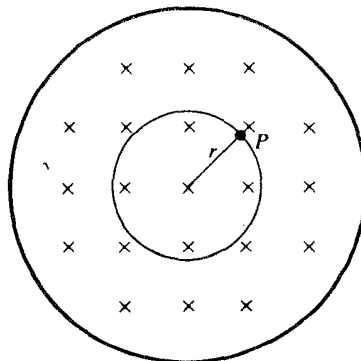


شکل ۱۰-۲۴ مدار LCR موازی.

۱۰-۲۷ نشان دهید برای ذره باردار متحرکی در میدان مغناطیسی با تغییرات کند، گشتاور مغناطیسی مربوط به حرکت مداری ثابت است.

۱۰-۲۸ پروتونی با انرژی 10 MeV در ابتدا در صفحه استوای مغناطیسی زمین به فاصله $1.5 R_e$ از مرکز زمین واقع است (R_e شعاع زمین است). میدان مغناطیسی زمین در مسئله ۹-۲۰ توصیف شده است. (الف) تکانه این پروتون را برحسب MeV/c به دست آورید. بزرگی سرعت آن را محاسبه کنید. اگر سرعت پروتون در صفحه استوا باشد، شعاع مدار آن را به دست آورید. (ب) فرض کنید سرعت اولیه با صفحه استوا زاویه α می‌سازد. در چه ارتفاعی پروتون توسط خطوط میدان مغناطیسی همگرا منعکس می‌شود؟ [راهنمایی: این پروتون حول خط میدانی که معادله آن $r = 1.5 R_e \sin^2 \theta$ است مارپیچ انجام می‌دهد (مسئله ۹-۲۱)]. (ج) ارتفاع انعکاس را برحسب α رسم کنید. اگر α بیش از حد بزرگ باشد، پروتون قبل از انعکاس به سطح زمین می‌خورد. مقدار بحرانی α را به دست آورید.

۱۰-۲۹ یک سیملوله استوانه‌ای بزرگ دارای میدان مغناطیسی یکنواخت در درون خود است. تحت تأثیر این میدان مغناطیسی ذره‌ای با بار q و تکانه p در یک مدار مسطح دایره‌ای عمود بر \mathbf{B} که مرکز آن بر محور سیملوله واقع است حرکت می‌کند (شکل ۱۰-۲۵). (الف) ذره را در لحظه‌ای که



شکل ۱۰-۲۵ سیملوله با میدان مغناطیسی یکنواخت. نقطه P مکان لحظه‌ای اولیه ذره را نشان می‌دهد.

در نقطه P است در نظر بگیرید. در این لحظه میدان مغناطیسی ناگهان (تقریباً به طور آنی) قطع می‌شود. مسیر ذره را پس از این زمان رسم کنید. تکانه جدید ذره را به دست آورید. (ب) فرض کنید میدان مغناطیسی ناگهان قطع نمی‌شود بلکه خیلی کند کاهش می‌یابد. مدار را در این مورد رسم کنید. تکانه را در حد $B \rightarrow 0$ به دست آورید. می‌توانید فرض کنید حرکت ذره غیرنسبیتی است.

۱۰-۳۰ یک خط انتقال هم‌محور از دو پوسته رسانای نازک استوانه‌ای هم‌محور تشکیل شده است. شعاع پوسته داخلی a و شعاع پوسته خارجی b است. این پوسته‌ها حامل جریانهای AC با قدرمطلق $I \cos \omega t$ در جهت‌های مخالف هستند. میدان الکتریکی بین پوسته‌ها را حساب کنید و سپس میدان مغناطیسی القاشده توسط این میدان الکتریکی را به دست آورید.

۱۰-۳۱ یک خازن مسطح موازی با صفحه‌های دایره‌ای بزرگ به منبع تغذیه AC وصل شده است. بارهای روی صفحه‌ها در تقریب اول میدان الکتریکی یکنواختی تولید می‌کنند که بزرگی آن عبارت است از

$$E_{(1)} = E_0 \sin \omega t$$

(الف) میدان مغناطیسی $B_{(1)}$ را که میدان الکتریکی $E_{(1)}$ در ناحیه بین صفحه‌ها القا می‌کند به صورت تابعی از فاصله شعاعی ρ از محور به دست آورید. (از اثرات لبه صرف نظر کنید). (ب) میدان الکتریکی $E_{(2)}$ را که میدان مغناطیسی $B_{(1)}$ القا می‌کند حساب کنید. فرض کنید $E_{(2)}$ روی محور خازن صفر است. (ج) میدان مغناطیسی $B_{(2)}$ را که میدان الکتریکی $E_{(2)}$ القا می‌کند تعیین کنید. (د) این محاسبه را اگر ادامه دهیم یک رشته توانی برحسب ρ به دست می‌آوریم. محاسبه را در این مرحله متوقف کنید و میدان الکتریکی کل $E_{(1)} + E_{(2)}$ و میدان مغناطیسی کل $B_{(1)} + B_{(2)}$ را به صورت تابعی از فاصله شعاعی درباره $\rho = 0$ تا $\rho = 2c/\omega$ رسم کنید.

۱۰-۳۲ یک سیمولوله استوانه‌ای بسیار دراز به شعاع R حامل جریان AC است. این جریان میدان مغناطیسی یکنواخت زیر را داخل سیمولوله ایجاد می‌کند

$$B_{(1)} = B_0 \cos \omega t$$

(الف) میدان الکتریکی $E_{(1)}$ را که میدان مغناطیسی $B_{(1)}$ القا می‌کند به صورت تابعی از فاصله شعاعی ρ از محور سیمولوله محاسبه کنید. (ب) میدان مغناطیسی $B_{(2)}$ را که میدان الکتریکی $E_{(1)}$ القا می‌کند به دست آورید. (ج) میدان الکتریکی $E_{(2)}$ را که میدان مغناطیسی $B_{(2)}$ القا می‌کند حساب کنید. (د) اگر این محاسبه را ادامه دهیم یک رشته توانی برحسب ρ به دست می‌آید.

محاسبه را در این مرحله متوقف کنید و میدان مغناطیسی کل $B_{(1)} + B_{(2)}$ و میدان الکتریکی کل $E_{(1)} + E_{(2)}$ را به صورت تابعی از ρ رسم کنید.

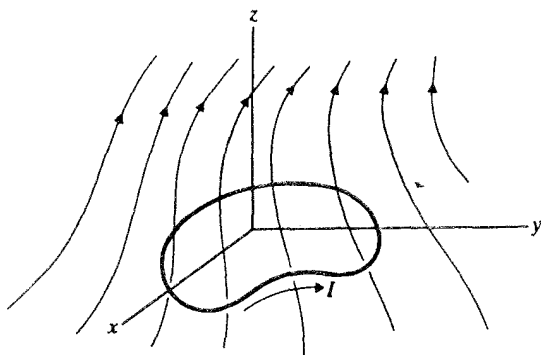
۱۵-۳۳ نشان دهید میدان مغناطیسی بار نقطه‌ای با حرکت یکنواخت (معادله ۹-۴) را می‌توان میدان مغناطیسی القایی مربوط به میدان الکتریکی متغیر در چارچوب آزمایشگاه در نظر گرفت. [راهنمایی: یک مسیر دایره‌ای ساکن که مرکز آن روی خط حرکت بار نقطه‌ای است در نظر بگیرید؛ جریان جابه‌جایی را که از سطح این دایره می‌گذرد محاسبه کنید؛ سپس، از معادله ۱۰-۶۶ استفاده کنید.]

دو قطبهای مغناطیسی و مواد مغناطیسی

داخل اتمهای تمام مواد الکترونها دائماً در حرکت اند و این حرکت هم مداری است و هم اسپینی. این بارهای دوران کننده جریانهایی ایجاد می کنند که به اتم گشتاور مغناطیسی می دهد؛ این گشتاور مغناطیسی در اطراف اتم میدان مغناطیسی ایجاد می کند. وقتی ماده ای را در یک میدان مغناطیسی خارجی قرار می دهیم آرایش گشتاورهای مغناطیسی اتمی تغییر می کند، و در نتیجه میدانهای مغناطیسی این گشتاورها میدان مغناطیسی خارجی اصلی را تغییر می دهند. بزرگی و جهت این تغییر بستگی به نوع ماده مغناطیسی دارد. در مواد پارامغناطیسی و فرومغناطیسی بازآرایی عمده داخل ماده مغناطیسی عبارت است از هم جهتی گشتاورهای مغناطیسی اتمی با میدان خارجی. این امر باعث تقویت میدان مغناطیسی می شود. در ماده فرومغناطیسی میدان مغناطیسی می تواند چند هزار بار تقویت شود. در مواد دیامغناطیسی بازآرایی عمده از جریانها و گشتاورهای مغناطیسی ناشی می شود که توسط میدان مغناطیسی خارجی در آنها القا نشده اند. چنانکه خواهیم دید، این امر باعث تضعیف میدان مغناطیسی می شود.

۱-۱۱ دو قطبی مغناطیسی در میدان خارجی

بنابه نتایج بخش ۹-۶، گشتاور نیرویی که میدان مغناطیسی خارجی B بر حلقه بسته ای حامل جریان پایای I اعمال می کند برابر است با



شکل ۱-۱۱ حلقهٔ جریان در میدان مغناطیسی.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (۱-۱۱)$$

که در آن m عبارت است از گشتاور مغناطیسی حلقه (شکل ۱-۱۱):

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2c} \int \mathbf{x} \times d\mathbf{l} \quad (۲-۱۱)$$

معادلهٔ ۱-۱۱ برای میدان مغناطیسی ثابت به طور دقیق برقرار است؛ اما این معادله برای حلقه‌ای کوچک در یک میدان مغناطیسی اختیاری تقریب خوبی است. در این مورد، میدان مغناطیسی در معادلهٔ ۱-۱۱ را باید در مجاورت حلقه حساب کنیم. اگر حلقه در مبدأ یا نزدیک آن باشد (شکل ۱-۱۱)، می‌توانیم \mathbf{B} را در مبدأ محاسبه کنیم. آنگاه

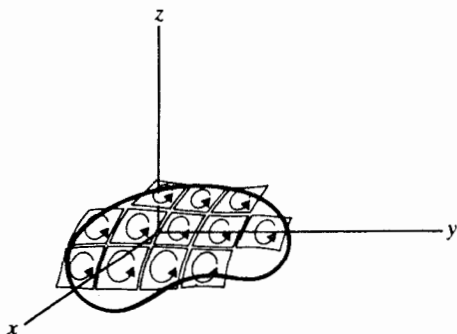
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}(\circ) \quad (۳-۱۱)$$

اگر انرژی پتانسیلی به صورت زیر تعریف کنیم

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\circ) \quad (۴-۱۱)$$

آنگاه گشتاور نیرو برابر است با منفی مشتق انرژی پتانسیل نسبت به زاویه‌ای که دو قطبی با میدان مغناطیسی می‌سازد.

تمرین ۱- این مطلب را تحقیق کنید. [راهنمایی: معادلهٔ ۴-۱۱ را به صورت $U = -mB \cos \alpha$

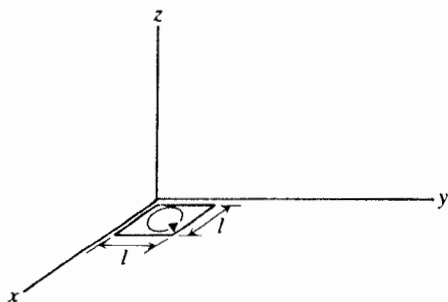


شکل ۲-۱۱ حلقه جریانی را می‌توان متشکل از تعداد زیادی حلقه مربعی کوچک در نظر گرفت.

وقتی حلقه در میدان مغناطیسی وابسته به مکان قرار داده شود، نه تنها گشتاور نیرو بلکه نیروی انتقالی نیز بر آن وارد می‌شود. می‌توان ثابت کرد این نیرو برابر است با منفی گرادیان انرژی پتانسیلی که در بالا تعریف شد:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \nabla[\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x})] \quad (۵-۱۱)$$

اثبات ساده‌ای برای این عبارت نیرو به قرار زیر است: فرض می‌کنیم حلقه از تعداد زیادی حلقه مسطح مربعی کوچک ساخته شده است (شکل ۲-۱۱) که همگی حامل جریان یکسانی هستند. هر جا که حلقه‌های کوچک مجاور با یکدیگر تماس دارند جریانه‌های آنها عملاً حذف می‌شوند؛ آنچه باقی می‌ماند جریانی است که در امتداد مرز حلقه اصلی برقرار است. پس اثر مغناطیسی کل این مجموعه حلقه‌های کوچک معادل اثر حلقه اصلی است—کافی است معادله ۵-۱۱ را برای حلقه‌های کوچک اثبات کنیم. شکل ۳-۱۱ یکی از این حلقه‌های کوچک را نشان می‌دهد که برای



شکل ۳-۱۱ یکی از حلقه‌های مربعی کوچک واقع در صفحه xy .

سادگی در صفحه xy نزدیک مبدأ قرار داده شده است. نیروی وارد بر این حلقه برابر است با

$$\mathbf{F} = \frac{I}{c} \int d\mathbf{x}' \times \mathbf{B} \quad (۶-۱۱)$$

مؤلفه z این نیرو را در نظر می‌گیریم:

$$F_z = \frac{I}{c} \int (dx' B_y - dy' B_x) \quad (۷-۱۱)$$

برای یک حلقه کوچک، می‌توانیم با تقریب خوب از بسط رشته تیلور برای میدان مغناطیسی استفاده کنیم؛ از اینجا عبارت زیر را برای مؤلفه x میدان مغناطیسی (و عبارتهای مشابهی را برای مؤلفه‌های دیگر) به دست می‌آوریم:

$$B_x(\mathbf{x}') = B_x(\circ) + x' \frac{\partial B_x}{\partial x} + y' \frac{\partial B_x}{\partial y} + z' \frac{\partial B_x}{\partial z} + \dots \quad (۸-۱۱)$$

که در آن تمام مشتقها در مبدأ محاسبه شده‌اند. در معادله ۷-۱۱، انتگرال جمله ثابت $B_x(\circ)$ حذف می‌شود. بنابراین، از این جمله و جمله‌های ثابت دیگر در سایر مؤلفه‌های میدان مغناطیسی می‌توانیم صرفنظر کنیم. با انتگرال گرفتن روی چهار ضلع حلقه، به دست می‌آوریم

$$F_z = \frac{I}{c} \left[\int_0^l x' \frac{\partial B_y}{\partial x} dx' - \int_0^l \left(l \frac{\partial B_x}{\partial x} + y' \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) dy' + \int_l^0 \left(l \frac{\partial B_y}{\partial y} + x' \frac{\partial B_x}{\partial x} \right) dx' - \int_l^0 y' \frac{\partial B_y}{\partial y} dy' \right] \quad (۹-۱۱)$$

$$= -\frac{I}{c} l^2 \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) \quad (۱۰-۱۱)$$

چون $\nabla \cdot \mathbf{B} = \partial B_x / \partial x + \partial B_y / \partial y + \partial B_z / \partial z = 0$ ، رابطه بالا برابر است با

$$F_z = \frac{Il^2}{c} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (۱۱-۱۱)$$

گشتاور مغناطیسی این حلقه کوچک برابر است با $\mathbf{m} = \hat{z} Il^2 / c$ ، و در نتیجه معادله ۱۱-۱۱ به صورت زیر در می‌آید

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad (۱۲-۱۱)$$

که با معادلهٔ ۵-۱۱ توافق دارد. به آسانی می‌توان وارسی کرد که F_x و F_y هم با این معادله توافق دارند. بدین ترتیب، محاسبه کامل می‌شود.

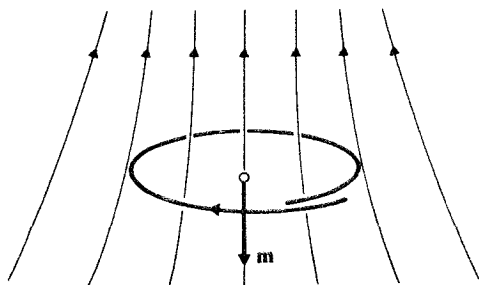
تمرین ۲- F_z و F_y را وارسی کنید.

توجه کنید که بنابه معادلهٔ ۵-۱۱، اگر m موازی با B باشد دوقطبی مغناطیسی توسط ناحیهٔ میدان مغناطیسی قوی جذب می‌شود و اگر m با B پادموازی باشد دفع می‌شود. این هم توضیح دیگری است دربارهٔ اثر انعکاس برای ذره‌ای که در میدان مغناطیسی حرکت حلزونی دارد (بخش ۱-۴). گشتاور مغناطیسی مربوط به حرکت مداری چنین ذره‌ای همیشه با B پاد موازی است (شکل ۴-۱۱)؛ در نتیجه، نیروی وارد بر گشتاور مغناطیسی باعث می‌شود ذره از ناحیه‌ای که در آن میدان مغناطیسی قوی است دور شود.

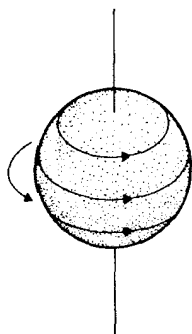
اگرچه تابع U در معادلهٔ ۴-۱۱ انرژی پتانسیل مؤثر برای حرکت دورانی و انتقالی دوقطبی است، تمام تبدلات انرژی بین دوقطبی و میدان مغناطیسی در آن منظور نشده است. وقتی یک حلقهٔ جریان در میدان مغناطیسی حرکت می‌کند emf‌های القایی روی جریان کار انجام می‌دهند. این امر باعث افزایش یا کاهش جریان (و گشتاور مغناطیسی) می‌شود مگر اینکه یک منبع داخلی emf جریان را ثابت نگه دارد. معادلهٔ ۴-۱۱ نه شامل کار emf‌های القایی می‌شود و نه انرژی مغناطیسی «داخلی» یا دیگر انرژی‌های حلقهٔ جریان.

روابط بالا برای گشتاور نیرو و نیرو در مورد توزیع پیوستهٔ جریانهای پایای محدود به حجم کراندار نیز معتبر هستند. تعریف گشتاور مغناطیسی برای توزیع پیوستهٔ جریانها عبارت است از

$$\mathbf{m} = \frac{1}{c} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') dV' \quad (۱۱-۱۳)$$



شکل ۴-۱۱ ذره با حرکت حلزونی در میدان مغناطیسی. گشتاور مغناطیسی مربوط به مؤلفهٔ دورانی حرکت مداری با میدان مغناطیسی پاد موازی است.



شکل ۵-۱۱ مثالی از توزیع جریان پیوسته: کره صلب چرخان حامل چگالی بار یکنواخت. تمام بارها روی مسیرهایی دایره‌ای حرکت می‌کنند که حلقه‌های جریان بسته‌ای تشکیل می‌دهند.

معادله ۱۳-۱۱ را می‌توانیم از تعمیم استدلالی که منتهی به معادله ۲-۱۱ شد به دست آوریم. اما نیازی به این کار نیست زیرا معادله ۱۳-۱۱ تقریباً بدیهی است: در توزیع جریان پایای پیوسته، بارها روی حلقه‌های بسته حرکت می‌کنند (شکل ۵-۱۱)؛ در نتیجه این توزیع را می‌توان به صورت ترکیبی از تعداد زیادی حلقهٔ جریان در نظر گرفت، و گشتاور مغناطیسی مجموع گشتاورهای مغناطیسی این حلقه‌های جریان است. دو انتگرال‌گیری اضافی در معادله ۱۳-۱۱ در مقایسه با معادله ۲-۱۱، این عمل جمع روی حلقه‌های جریان را انجام می‌دهند.

تغییری جزئی در معادله ۱۳-۱۱ محاسبهٔ گشتاور مغناطیسی ناشی از حرکت مداری الکترونها در اتم را امکانپذیر می‌سازد. در این مورد، جمع روی تک تک الکترونها باید جانشین انتگرال شود:

$$\mathbf{m}_{\text{مداری}} = \frac{1}{2e} \sum_i (-e)(\mathbf{x}'_i \times \mathbf{v}_i) \quad (14-11)$$

که در آن \mathbf{x}'_i و \mathbf{v}_i مکانها و سرعت‌های الکترونها هستند. چون تکانه‌های زاویه‌ای مداری الکترونها عبارت‌اند از $\mathbf{L}_i = m_e(\mathbf{x}'_i \times \mathbf{v}_i)$ ، معادله ۱۴-۱۱ به صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{m}_{\text{مداری}} = \frac{-e}{2m_e c} \sum_i \mathbf{L}_i = \frac{-e}{2m_e c} \mathbf{L} \quad (15-11)$$

بدین ترتیب، گشتاور مغناطیسی مربوط به حرکت مداری با تکانهٔ زاویه‌ای کل اتم تناسب مستقیم دارد. این نتیجه با محاسبهٔ پیچیده‌تری بر اساس مکانیک کوانتومی تأیید می‌شود. از طرف دیگر، گشتاور مغناطیسی مربوط به اسپین از این فرمول به دست نمی‌آید. گشتاور

مغناطیسی مربوط به تکانه زاویه‌ای اسپینی یک یا چند الکترون برابر است با

$$\mathbf{m}_{\text{اسپینی}} = -\frac{e}{2m_e c} g \mathbf{S} \quad (16-11)$$

که در آن g ضریب ژیرومغناطیسی الکترون و مقدار آن 2.0023 است. برای الکترونی که اسپین آن در جهت محور z است، داریم $S_z = \hbar/2$ و

$$m_{z \text{ اسپینی}} = -\frac{e\hbar}{2m_e c} \frac{g}{2} \simeq -\frac{e\hbar}{2m_e c} \quad (17-11)$$

اسپینهای ذرات دیگر نیز گشتاور مغناطیسی دارند. برای مثال، گشتاورهای مغناطیسی پروتون و نوترون، با $S_z = \hbar/2$ ، به ترتیب برابرند با

$$m_{z \text{ اسپینی}} = \frac{e\hbar}{2m_p c} \times 2.7928 \quad (18-11)$$

و

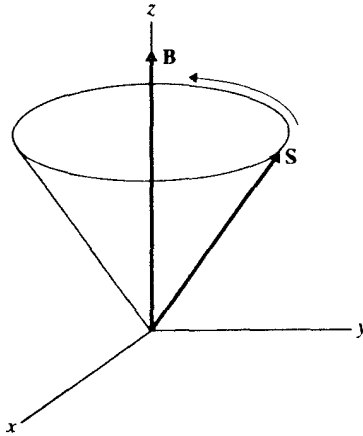
$$m_{z \text{ اسپینی}} = -\frac{e\hbar}{2m_p c} \times 1.9130 \quad (19-11)$$

که در آن m_p جرم پروتون است. این گشتاورهای مغناطیسی بسیار کوچکتر از گشتاور مغناطیسی الکترون هستند و در محاسبه گشتاور مغناطیسی اتم می‌توان از آنها صرف‌نظر کرد.

از دیدگاه کلاسیک، تفاوت معادله‌های ۱۱-۱۵ و ۱۱-۱۶ معرف این است که بار و جرم در جسم چرخان به‌طور یکسان توزیع نشده‌اند؛ برای داشتن $g > 1$ ، باید جرم نزدیک مرکز و بار نزدیک سطح متمرکز شده باشد. اما این‌گونه الگوها ارزش بررسی مفصل ندارند زیرا الکترون یک ذره نقطه‌ای مکانیک-کوانتومی است و اسپین آن از اثرات کوانتومی نسبیتی در میدان موج الکترون ناشی می‌شود نه از چرخش جسم صلب (اسپین مشابه تکانه زاویه‌ای است که موج الکترومغناطیس قطبیده دایره‌ای با خود حمل می‌کند؛ بخش ۱۲-۳ را ببینید).

اما مفید است که حرکت اتم یا ذره زیراتمی، با تکانه زاویه‌ای ذاتی و تکانه مغناطیسی معین، وقتی در یک میدان مغناطیسی (یکنواخت) واقع می‌شود بررسی شود. از معادله ۱۱-۱ می‌دانیم که روی چنین جسمی گشتاور نیروی $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$ وارد می‌شود؛ این گشتاور نیرو باید برابر با آهنگ تغییر اسپین باشد:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{m}_{\text{اسپینی}} \times \mathbf{B} \quad (20-11)$$



شکل ۱۱-۶ میدان مغناطیسی باعث حرکت تقدیمی اسپین الکترون حول راستای میدان می‌شود.

یا

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = -g \frac{e}{2m_e c} \mathbf{S} \times \mathbf{B} \quad (۲۱-۱۱)$$

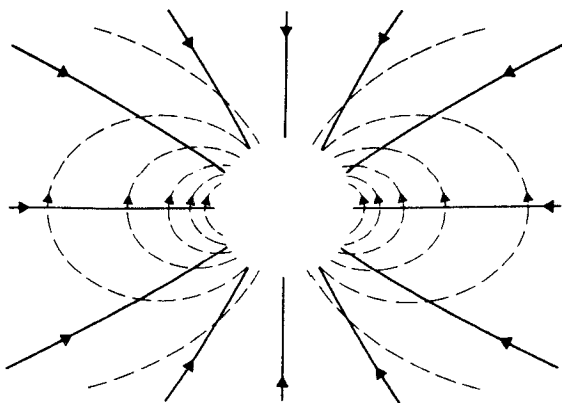
این رابطه نشان می‌دهد تغییر **S** همیشه بر **S** عمود است؛ پس **S** حول **B** حرکت تقدیمی انجام می‌دهد (شکل ۱۱-۶). بسامد این حرکت تقدیمی برابر است با

$$\omega = g \frac{eB}{2m_e c} \quad (۲۲-۱۱)$$

این نتیجه با محاسبه مکانیک کوانتومی تأیید می‌شود. اما این بسامد را باید بسامد تغییر جهت اسپین الکترون از حالت اسپین موازی با **B** (اسپین بالا) به حالت اسپین پادموازی با **B** (اسپین پایین) تعبیر کرد.

اگرچه بحث اصلی این بخش برهم‌کنش دوقطبی مغناطیسی با میدان مغناطیسی خارجی است، باید به خاطر داشت که گشتاور مغناطیسی از خودش میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند. برای مثال، الکترونی که در مبدأ ساکن است و گشتاور مغناطیسی آن در جهت محور *z* است به طوری که

$$m_{z \text{ اسپینی}} = -\frac{e\hbar}{2m_e c} g \quad (۲۳-۱۱)$$



شکل ۷-۱۱ میدان الکتریکی (خط چین) و میدان مغناطیسی (خط پر) مربوط به الکترون. این میدان مغناطیسی متعلق به دو قطبی است. ناحیه خالی نزدیک مرکز توسط الکترون (به طور دقیقتر توسط بسته موج الکترون) اشغال شده است.

یک میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند که برابر است با (معادله‌های ۹-۶۶ و ۹-۶۷)

$$B_r = -2 \left(\frac{e\hbar}{2m_e c} \frac{g}{2} \right) \frac{\cos \theta}{r^3}$$

$$B_\theta = - \left(\frac{e\hbar}{2m_e c} \frac{g}{2} \right) \frac{\sin \theta}{r^3} \quad (۱۱-۲۴)$$

بدین ترتیب، الکترون همیشه توسط میدانهای الکتریکی و مغناطیسی احاطه شده است (شکل ۷-۱۱). میدانهای مغناطیسی ناشی از الکترونها حاکم بر رفتار مواد مغناطیسی هستند.

۲-۱۱ مغناطش

به خاطر حرکت مداری و اسپین الکترونها، بیشتر آنها گشتاور دو قطبی مغناطیسی دائمی دارند. وقتی قطعه‌ای از ماده را در میدان مغناطیسی خارجی قرار دهیم گشتاور نیروهای وارد بر این گشتاورهای دو قطبی دائمی می‌خواهند آنها را با میدان هم جهت کنند. آنگاه این گشتاورهای دو قطبی هم جهت یک میدان مغناطیسی از خودشان ایجاد می‌کنند که چنانکه خواهیم دید شدت میدان اصلی را افزایش می‌دهد. افزایش میدان اصلی در موارد پارامغناطیسی متوسط است. اما در ماده فرومغناطیسی افزایش میدان اصلی می‌تواند بسیار زیاد باشد — ضرایب چند هزار غیر معمول نیستند.

اگر اتمهای ماده گشتاور دوقطبی مغناطیسی دائمی نداشته باشند، اثرات مغناطیسی ماده بستگی به گشتاورهای دوقطبی القایی دارند. بنابه قانون لِنز، جهت گشتاور دوقطبی القایی مخالف جهت میدان مغناطیسی است. در نتیجه این گشتاورهای دوقطبی میدانی مغناطیسی به وجود می‌آورند که شدت میدان اصلی را کاهش می‌دهد. این امر مبنای رفتار مواد دیامغناطیسی است. چون جریانهای اتمی در حلقه‌هایی با اندازه متناهی گردش می‌کنند نه تنها میدانهای دوقطبی بلکه چندقطبیهای بالاتر را هم ایجاد می‌کنند. چون این چندقطبیهای بالاتر کوچک‌اند در محاسبات زیر از آنها صرف‌نظر می‌کنیم.

فرض کنید گشتاور دوقطبی مغناطیسی متوسط یک اتم یا مولکول \mathbf{m} باشد. در حضور میدان مغناطیسی خارجی، \mathbf{m} مخالف صفر است و در جهت میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد. اگر تعداد اتمها در واحد حجم n باشد آنگاه گشتاور مغناطیسی در واحد حجم برابر است با

$$\mathbf{M} = n\mathbf{m} \quad (25-11)$$

بردار \mathbf{M} را مغناطیدگی می‌نامند. اگر ماده یا میدان مغناطیسی یا هر دو ناهمگن باشند، \mathbf{M} تابع مکان خواهد بود. می‌خواهیم میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبیها در ماده را به صورت انتگرالی از \mathbf{M} بیان کنیم. برای این منظور، ابتدا عبارت مربوط به میدان مغناطیسی یک دوقطبی اتمی \mathbf{m} واقع در مکان \mathbf{x}' را می‌نویسیم. بنابه معادله ۹-۷۵، پتانسیل مغناطیسی برای این دوقطبی برابر است با

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (26-11)$$

$$= -\mathbf{m} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (27-11)$$

در نتیجه

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\nabla \Phi_M(\mathbf{x}) = \nabla \left(\mathbf{m} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \quad (28-11)$$

با استفاده از اتحاد عملگری

$$\nabla \times (\mathbf{m} \times \nabla) = \mathbf{m} \nabla \cdot \nabla - \nabla (\mathbf{m} \cdot \nabla) \quad (29-11)$$

می‌توانیم معادله ۲۸-۱۱ را به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{m} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \quad (30-11)$$

اما $\nabla^2(1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = 0$ و در نتیجه

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\nabla \times \left(\mathbf{m} \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \quad (31-11)$$

چون $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ، معادله بالا نشان می‌دهد پتانسیل برداری دوقطبی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\mathbf{m} \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (32-11)$$

اکنون می‌توانیم میدان مغناطیسی ناشی از یک قطعه ماده مغناطیده را محاسبه کنیم. گشتاور دوقطبی مربوط به حجم جزئی dV' عبارت است از $\mathbf{M}(\mathbf{x}')dV'$ ، و این گشتاور دوقطبی در پتانسیل برداری سهمی دارد که برابر است با

$$d\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (33-11)$$

اکنون باید از این رابطه روی حجم ماده مغناطیده انتگرال بگیریم:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\int \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (34-11)$$

$$= \int \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (35-11)$$

$$\equiv -\int \nabla' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (36-11)$$

اولین انتگرال حجمی را می‌توان با استفاده از اتحاد زیر به انتگرال سطحی تبدیل کرد:

$$\int \nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{x}') dV' = -\int \mathbf{F}(\mathbf{x}') \times d\mathbf{S}' \quad (37-11)$$

که در آن $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ یک تابع برداری اختیاری است.

تمرین ۳- این اتحاد برداری را اثبات کنید: [راهنمایی: مؤلفه‌های معادله ۳۷-۱۱ را جداگانه در نظر بگیرید، و اتحاد را ابتدا برای یک حجم مکعبی اثبات کنید].



با این تبدیل، معادله ۱۱-۳۶ به صورت زیر در می آید

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \times d\mathbf{S}' + \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (38-11)$$

که در آن اولین انتگرال روی سطح قطعه ماده مغناطیده گرفته می شود. پتانسیل برداری مربوط به تمام جریانهای رسانشی ناشی از حرکت بارهای آزاد را هم باید به رابطه بالا اضافه کنیم. با نشان دادن چگالی جریان حقیقی با \mathbf{j}_F ، نتیجه نهایی عبارت است از (معادله ۹-۳۲)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_F(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \times d\mathbf{S}' + \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (39-11)$$

توجه کنید که نقطه \mathbf{x} چه خارج از ماده مغناطیده باشد چه داخل آن معادله بالا معتبر است (بحث مربوط به معادله ۴-۴ را ملاحظه کنید).

اگر اولین جمله این معادله را با دو جمله دیگر مقایسه کنیم می بینیم ماده مغناطیده به گونه ای عمل می کند که انگار دارای چگالیهای جریان حجمی و سطحی زیر است

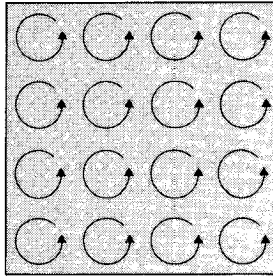
$$\mathbf{j}_M(\mathbf{x}') = c \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}') \quad (40-11)$$

و

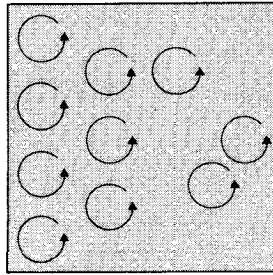
$$\mathbf{k}_M(\mathbf{x}') = c \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \hat{\mathbf{n}}' \quad (41-11)$$

که به ترتیب در حجم و سطح آن توزیع شده اند. این کمیتها را چگالیهای جریان مغناطشی می نامند.

جریانهای مغناطشی از شارش بارها در داخل آنها و مولکولها ناشی می شوند. از استدلال ساده زیر می توان دید که چگونه این جریانها به وجود می آیند: شکل ۱۱-۸ قطعه ای از ماده مغناطیده با توزیع یکنواخت دوقطبیهای مغناطیسی هم جهت را نشان می دهد. جریانهای حلقه های کوچک همه جا داخل ماده یکدیگر را خنثی می کنند و تنها یک جریان مؤثر روی سطح ماده باقی می ماند، که عبارت است از چگالی جریان سطحی ۱۱-۴۱. اگر بخواهیم چگالی جریان حجمی داشته باشیم باید ماده ای با مغناطش غیر یکنواخت داشته باشیم. برای مثال، شکل ۱۱-۹ ماده ای با چگالی غیر یکنواخت دوقطبیهای هم جهت را نشان می دهد. در اینجا جریانهای مجاور در حلقه های کوچک یکدیگر را خنثی نمی کنند و یک جریان مؤثر در حجم ماده به سمت بالا حاصل می شود. این جریان چگالی جریان حجمی ۱۱-۴۰ است.



شکل ۸-۱۱ قطعه‌ای از یک ماده مغناطیده یکنواخت حاوی حلقه‌های کوچک جریان.



شکل ۹-۱۱ قطعه‌ای از ماده مغناطیده غیریکنواخت. به علت چگالی زیادتر حلقه‌های کوچک جریان در طرف چپ، مغناطش در این ناحیه بیشتر است.

۳-۱۱ میدان H مغناطیسی

چون اثرات مغناطیسی ماده تماماً از جریان مغناطش ناشی می‌شوند، می‌توانیم معادله ۹-۲۱ مربوط به میدان مغناطیسی ایستا را در هر نقطه داخل ماده به صورت زیر بنویسیم

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_F + \mathbf{j}_M) \quad (42-11)$$

$$= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_F + 4\pi \nabla \times \mathbf{M} \quad (43-11)$$

یا

$$\nabla \times (\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_F \quad (44-11)$$

در اینجا می‌توانیم کمیت میدانی جدیدی را تعریف کنیم:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \quad (45-11)$$

که برحسب آن معادله ۴۴-۱۱ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_F \quad (46-11)$$

این میدان جدید را میدان \mathbf{H} مغناطیسی می‌نامیم. بنابه آنچه متداول است، این میدان \mathbf{H} مغناطیسی را «میدان مغناطیسی» و میدان \mathbf{B} را «القای مغناطیسی» می‌نامند. این نامگذاری بسیار اشتباه انگیز است و نباید خود را گرفتار آن کنیم. همچنان‌که از فصل‌های ۸ تا ۱۰ کاملاً روشن است، \mathbf{B} میدان مغناطیسی بنیادی است — این کمیت مشابه مغناطیسی میدان الکتریکی \mathbf{E} است. از طرف دیگر، \mathbf{H} صرفاً یک ابزار ریاضی کمکی است که برای ساده کردن معادله ۴۴-۱۱ طرح شده است — این کمیت مشابه میدان جابه‌جایی \mathbf{D} است. از لحاظ تاریخی، این اشتباه تأسف انگیز در نامگذاری از اینجا ناشی شده است که الکتروسیسته‌دانان قرن نوزدهم قادر نبودند تمایز آشکاری بین \mathbf{H} و \mathbf{B} را در محیط‌های مادی ببینند؛ آنها خلأ را مانند محیطی مادی حاوی اتر می‌دانستند، و نتوانستند مفهوم اساسی معادلات ماکسول در خلأ را بفهمند.

توجه کنید که بردار مغناطیدگی $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ ، مانند بردار قطبندگی $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ (فصل ۴)، تنها به معنی متوسط تعریف شده است؛ باید متوسط گشتاورهای دوقطبی اتمی در حجم کوچکی حول نقطه \mathbf{x} را بگیریم، حجمی که در معیار ماکروسکوپی کوچک است اما آنقدر بزرگ است که تعداد زیادی اتم را در برمی‌گیرد. برای سازگار بودن معادله ۴۵-۱۱، باید میدان \mathbf{B} مغناطیسی و میدان \mathbf{H} مغناطیسی را هم که در معادلات این بخش ظاهر می‌شوند میدانهای ماکروسکوپی متوسط بگیریم.

برای حل مسائل مغناطوستاتیک در حضور مواد مغناطیسی، باید علاوه بر معادله ۴۶-۱۱ معادله دیگر ماکسول برای میدان مغناطیسی را نیز در نظر بگیریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (47-11)$$

این دو معادله کافی هستند به شرط آنکه رابطه بین \mathbf{B} و \mathbf{H} ، یا معادل آن رابطه بین \mathbf{M} و \mathbf{H} ، را بدانیم. در مواد مغناطیسی خطی و همسانگرد، مغناطیدگی با میدان \mathbf{H} تناسب مستقیم دارد:

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad (48-11)$$

جدول ۱-۱۱ پذیرفتاری بعضی از مواد^۱

$4\pi\chi$	مواد دیامغناطیسی	$4\pi\chi$	مواد پارامغناطیسی
-۱.۹×10^{-5}	بیسموت	3.04×10^{-5}	هوا
-۱.۳×10^{-5}	بریلیم	۱۳۳×10^{-5}	اکسیژن
-۳.۱×10^{-5}	متان	۳۲۷×10^{-5}	اکسیژن (مایع، -۱۹۰°C)
-۲.۰×10^{-5}	اتیلن	۱۳۴×10^{-5}	منگنز کلرید
-۱.۴×10^{-5}	آمونیاک	۶۷.۵×10^{-5}	نیکل مونوکسید
-۰.۵۳×10^{-5}	کربن دیوکسید	۱۲.۴×10^{-5}	منگنز
-۱.۵×10^{-5}	شیشه (سرب دار)	۱۳.۸×10^{-5}	پلاتین
		۰.۸۱۷×10^{-5}	آلومینیم

۱. در دمای اتاق (۲۰°C) و ۱atm به استثنای آنچه صریحاً ذکر شده است.

ثابت χ را پذیرفتاری مغناطیسی می نامند،^۱ از اینجا داریم

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} = (1 + 4\pi\chi)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \quad (۴۹-۱۱)$$

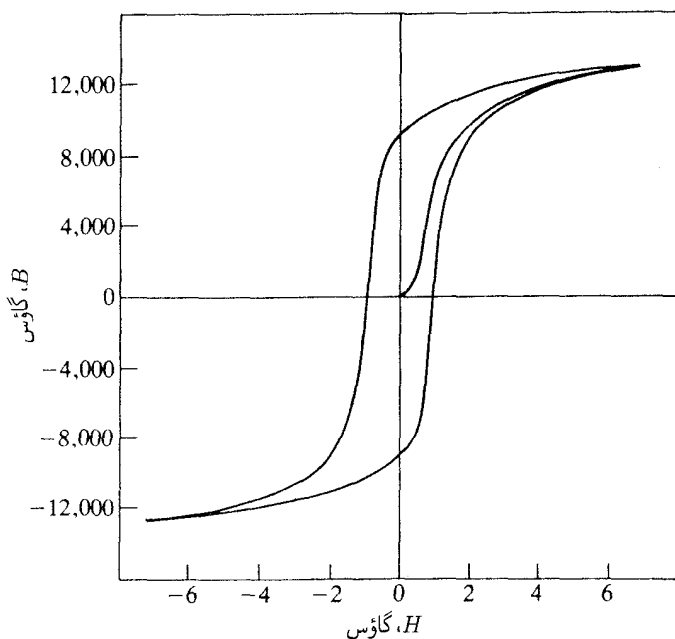
که در آن ثابت μ را گذردهی مغناطیسی می نامند.

رابطه خطی ۴۸-۱۱ در مواد پارامغناطیسی و دیامغناطیسی تقریب خوبی است. برای پارامغناطیسها $\chi > 0$ و $\mu > 1$ ، به طوری که میدان مغناطیسی در ماده از مقدار آن در غیاب ماده بیشتر می شود. برای دیامغناطیسها $\chi < 0$ و $\mu < 1$ ، و در نتیجه میدان مغناطیسی در ماده کاهش می یابد. چنانکه در بخش ۱۱-۲ گفته شد، این کاهش میدان مغناطیسی از ایجاد گشتاورهای دوقطبی القایی در ماده که پادموازی با میدان مغناطیسی هستند ناشی می شود. چون تمام انواع آنها وقتی در میدان مغناطیسی واقع می شوند این اثر القایی را نشان می دهند، تمام انواع مواد کم و بیش دارای خاصیت دیا مغناطیسی هستند اما در بیشتر مواد اثرهای دیامغناطیسی تحت الشعاع آثار پارامغناطیسی اند.^۲ جدول ۱-۱۱ مقادیر پذیرفتاری مغناطیسی را برای بعضی از مواد پارامغناطیسی و دیامغناطیسی نشان می دهد.

رابطه خطی ۴۸-۱۱ برای مواد فرومغناطیسی کارایی ندارد. در این مواد، \mathbf{B} و \mathbf{M} توابع غیر خطی پیچیده ای از \mathbf{H} هستند. شکل ۱۰-۱۱ نموداری از B را برحسب H برای آهن تجارتي

۱. بنا به شباهت با معادله ۱۹-۴، با معنی تر بود اگر می نوشتیم $\mathbf{M} = \chi\mathbf{B}$ ، اما معادله ۴۸-۱۱ بنا به سنت جنبه تقدس پیدا کرده است.

۲. بنا به یک قضیه مکانیک آماری کلاسیک (قضیه ون لیوون)، در هر دستگاهی از ذرات نقطه ای کلاسیک (بدون اسپین) در تعادل گرمایی سهم دیامغناطیسی در مغناطیدگی دقیقاً سهم پارامغناطیسی را حذف می کند. این قضیه چیزی جز کنجکاو بی مورد نیست، زیرا ذرات داخل آنها از قوانین فیزیک کلاسیک تبعیت نمی کنند.



شکل ۱۱-۱۰ B به صورت تابعی از H برای آهن تجارتي. توجه کنید که محورها با مقیاسهای متفاوت مدرج شده‌اند.

نشان می‌دهد. تابع $B = B(H)$ غیر خطی و چند مقداری است. این تابع از چند شاخه تشکیل شده است که بستگی به گذشته ماده دارند — این وابستگی به گذشته را پسماند می‌نامند. برای مثال، اگر نمونه آهن (گرم شده) در ابتدا آهسته سرد شده باشد، به ازای $H = 0$ داریم $B = 0$. فرض کنید این نمونه را در یک آهنربای الکتریکی قرار دهیم و H را به تدریج زیاد کنیم. این کار باعث افزایش سریع B می‌شود تا اینکه به تقریباً 10^4 گاوس برسد (شکل ۱۱-۱۰). بعد از این نقطه، B متناسب با افزایش H به‌کندی افزایش می‌یابد (شیب منحنی به سمت ۱ میل می‌کند). آنچه روی داده است این است که در 10^4 گاوس تمام دوقطبیهای مغناطیسی موجود در آهن به هم جهتی کامل رسیده‌اند؛ بدین ترتیب، M به بیشترین مقدار خود (اشباع) رسیده است، و افزایش بیشتر B باید مستقیماً از H ناشی شود (معادله ۱۱-۴۵). اگر شروع به کم کردن H کنیم، B مطابق با شاخه بالایی شکل ۱۱-۱۰ کاهش می‌یابد. وقتی H به صفر برسد B صفر نخواهد بود، یعنی نمونه آهن تبدیل به آهنربای دائمی شده است. برای اینکه B را به صفر برگردانیم باید H را منفی کنیم. اگر به تغییر دادن H ادامه دهیم، B مطابق با حلقه خارجی شکل ۱۱-۱۰ تغییر خواهد کرد. این حلقه را حلقه پسماند می‌نامند. اندازه حلقه پسماند، با شروع از نمونه آهسته سرد شده ($H = 0, B = 0$) بستگی به نماد اولیه H دارد. اگر قبل از اینکه ماده به نقطه اشباع برسد

اقدام به کم کردن H کنیم، B مطابق با یک حلقهٔ پسماند کوچک تغییر خواهد کرد.

مغناطش در مواد فرومغناطیسی ناشی از گشتاور مغناطیسی اسپینی الکترونها است. مغناطیدگی تابع بسیار پیچیده‌ای از H است زیرا اسپینهای الکترونها حتی در غیاب میدان مغناطیسی خارجی تمایل به هم جهت شدن خودبه‌خودی دارند. این هم‌جهت‌های خودبه‌خودی از یک برهم‌کنش مکانیک-کوانتومی بین اسپینهای مجاور ناشی می‌شوند. مادهٔ فرومغناطیسی در مقیاس کوچک همیشه مغناطیده است؛ این ماده از تعداد زیادی ناحیهٔ کوچک که عرض آنها از مرتبهٔ میلیمتر است تشکیل شده است که داخل هر یک از آنها اسپینهای الکترونها ظرفیت کاملاً هم‌جهت‌اند. اما در مقیاس بزرگ این مغناطش خود را نشان نمی‌دهد زیرا ناحیه‌های مزبور به‌طور اتفاقی نسبت به هم جهت‌گیری کرده‌اند. وقتی ماده را در میدان مغناطیسی خارجی قرار می‌دهیم، این ناحیه‌ها تمایل دارند در جهت میدان مغناطیسی قرار گیرند و در نتیجه مغناطش در مقیاس بزرگ پدید می‌آید. بزرگی مغناطیدگی ناحیه‌ها یک تابع نزولی از دما است زیرا آشفته‌گیهای گرمایی اتفاقی مانع هم‌جهتی اسپینها می‌شوند. در یک دمای بحرانی، که دمای کوری نامیده می‌شود، آشفته‌گیهای گرمایی پیوندهای مکانیک کوانتومی را که اسپینهای مجاور را هم‌جهت نگه می‌دارند قطع می‌کنند. بعد از این دما، فرومغناطیس مانند پارامغناطیس ساده رفتار می‌کند. برای آهن، دمای کوری 1040 K است.

۱۱-۴ پتانسیل مغناطیسی و مسئلهٔ مقدار مرزی

قبلاً دیدیم پتانسیل مغناطیسی می‌تواند در حل مسائل میدان مغناطیسی در ناحیهٔ خالی از جریان مفید باشد. بنابه قضیهٔ بخش ۹-۴، وجود پتانسیل مغناطیسی برای \mathbf{B} از $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ ناشی می‌شود: در هر ناحیهٔ همبند ساده‌ای که در آن جریان صفر باشد میدان مغناطیسی \mathbf{B} را می‌توان به‌صورت گرادیان یک پتانسیل بیان کرد. چون مواد مغناطیسی حامل جریانهای مغناطشی هستند شرایط این قضیه را برآورده نمی‌کنند. اما هر جا که جریانهای آزاد صفر باشند میدان \mathbf{H} مغناطیسی حتی در حضور جریانهای مغناطشی شرط $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ را برآورده می‌کنند. در نتیجه، قضیهٔ بخش ۹-۴ برای میدان \mathbf{H} مغناطیسی معتبر است: در هر ناحیهٔ همبند سادهٔ خالی از جریانهای رسانشی، این میدان را می‌توان به‌صورت گرادیان یک پتانسیل مغناطیسی بیان کرد:

$$\mathbf{H} = -\nabla\Phi_M \quad (50-11)$$

معادلهٔ پواسون برای Φ_M از $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ نتیجه می‌شود:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}) = -\nabla^2\Phi_M + 4\pi\nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (51-11)$$

$$\nabla^2 \Phi_M = 4\pi \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (52-11)$$

اگر چگالی قطب مغناطیسی مجازی:

$$\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (53-11)$$

را تعریف کنیم آنگاه معادله پواسون برای پتانسیل مغناطیسی به صورت آشنای زیر در می آید

$$\nabla^2 \Phi_M = -4\pi \rho_M \quad (54-11)$$

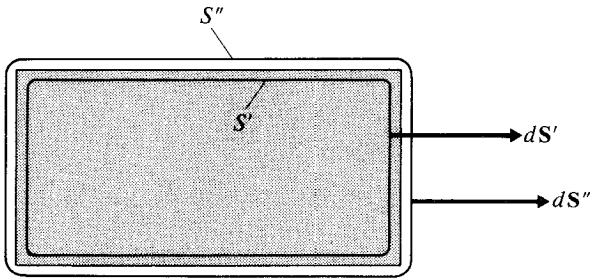
در مورد معادله ۵۴-۱۱ باید به خاطر داشته باشیم که چگالی قطب یا بار مغناطیسی ρ_M چیزی جز یک ابزار ریاضی نیست؛ معادله ۵۴-۱۱ وجود بارهای مغناطیسی حقیقی را ایجاب نمی کند. از الکتروستاتیک می دانیم که پتانسیل توزیع بار پیوسته عبارت است از انتگرال روی این توزیع بار؛ بنابراین

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho_M(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' = - \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (55-11)$$

در اینجا، حجم انتگرال گیری باید تمام جسم مغناطیده (از جمله سطح آن) را در بر بگیرد. چون مغناطیدگی در سطح این جسم ناپیوستگی دارد (داخل آن صفر و بیرون آن مخالف صفر است) مشتقات در $\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}')$ در سطح دارای تکینگی هستند. بهتر است این تکینگیها را با تفکیک معادله ۵۵-۱۱ به یک انتگرال حجمی روی درون جسم مغناطیده (بدون سطح) و یک انتگرال دیگر روی سطح آن، منزوی کنیم. شکل ۱۱-۱۱ حجم انتگرال گیری را برای معادله ۵۵-۱۱ نشان می دهد؛ این حجم تشکیل شده است از یک حجم که کاملاً داخل جسم قرار دارد و حجم پوسته نازکی که سطح را در بر می گیرد:

$$- \int_{\text{پوسته}} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' = - \int_{\text{پوسته}} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV' + \int_{\text{پوسته}} \mathbf{M} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (56-11)$$

اولین انتگرال طرف راست را می توان با استفاده از قضیه گاوس به یک انتگرال سطحی روی سطوح S' و S'' که در شکل ۱۱-۱۱ نشان داده شده اند تبدیل کرد. دومین انتگرال تکینگی مهمی در



شکل ۱۱-۱۱ حجم انتگرال‌گیری جسم مغناطیده (خاکستری) که سطح آن را هم در بر می‌گیرد. این حجم از یک قسمت که کاملاً داخل جسم قرار دارد و قسمت دیگری به صورت پوسته نازکی که سطح جسم را در بر می‌گیرد تشکیل شده است. توجه کنید که به بردار عمود dS' در داخل پوسته جهتی مخالف با آنچه برای قضیه گاوس مرسوم است داده شده است — اختلاف علامت دو جمله معادله ۱۱-۵۷ از اینجا ناشی می‌شود.

تابع زیر انتگرال ندارد؛ بنابراین، اگر به حد کلفتی بینهایت کوچک پوسته برویم این انتگرال صفر می‌شود. پس دو انتگرال زیر را داریم

$$+ \int_{S'} \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot d\mathbf{S}' - \int_{S''} \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot d\mathbf{S}'' \quad (۵۷-۱۱)$$

روی سطح S'' که درست خارج از جسم مغناطیده است داریم $\mathbf{M} = 0$. روی سطح S' که درست داخل جسم است داریم $\mathbf{M} \neq 0$. در نتیجه، جمله اول در عبارت ۱۱-۵۷ نمایشگر تمام سهم ناشی از پوسته نازک است. با توجه به این امر، رابطه Φ_M به صورت زیر درمی‌آید

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = - \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot d\mathbf{S}' \quad (۵۸-۱۱)$$

که در آن اکنون سطح جسم از حجم انتگرال‌گیری حذف شده است. روشن است که این معادله به سطح جسم چگالی قطب مغناطیسی مجازی زیر را نسبت می‌دهد

$$\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (۵۹-۱۱)$$

اگر مغناطیدگی $\mathbf{M}(\mathbf{x}')$ معلوم باشد، معادله ۱۱-۵۸ جواب صریحی برای پتانسیل مغناطیسی تعیین می‌کند. اما غالباً مناسبتر است به معادله پواسون ۱۱-۵۴ بازگردیم و آن را به عنوان یک مسئله مقدار مرزی حل کنیم. در این مورد مثالی بیان خواهیم کرد، اما ابتدا باید شرایط مرزی را برای

میدانهای مغناطیسی وضع کنیم. چون $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ (در ناحیه خالی از جریانهای رسانشی) و $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ، استدلالهای بخش ۳-۴ (معادله‌های ۲۶-۴ تا ۳۰-۴) نشان می‌دهند مؤلفه مماسی \mathbf{H} و مؤلفه عمودی \mathbf{B} باید در سطح جدایی دو محیط مغناطیسی پیوسته باشند:

$$\mathbf{H}_{1\parallel} = \mathbf{H}_{2\parallel} \quad (۶۰-۱۱)$$

$$\mathbf{B}_{1\perp} = \mathbf{B}_{2\perp} \quad (۶۱-۱۱)$$

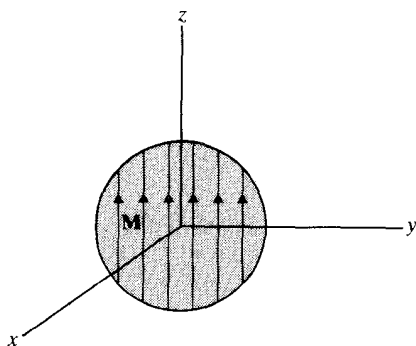
■ تمرین ۴- شرایط مرزی ۶۰-۱۱ و ۶۱-۱۱ را به دست آورید.

تمرین ۵- نشان دهید ناپوستگی مؤلفه عمودی \mathbf{H} با چگالی قطب مغناطیسی در سطح جدایی تناسب مستقیم دارد:

$$\mathbf{H}_{2\perp} - \mathbf{H}_{1\perp} = 4\pi\sigma_M \quad (۶۲-۱۱)$$

■ اکنون می‌توانیم یک مثال بیان کنیم. شکل ۱۱-۱۲ کره‌ای به شعاع R از ماده مغناطیده یکنواختی را نشان می‌دهد. مغناطیدگی \mathbf{M} در جهت محور z است. می‌خواهیم میدانهای مغناطیسی در ناحیه‌های $r > R$ و $r < R$ را به دست آوریم. در این مسئله، جریان رسانشی همه‌جا صفر است — اثرات مغناطیسی تماماً از مغناطیس دائمی کره ناشی می‌شوند. بنابراین، پتانسیل مغناطیسی در تمام فضا تعریف می‌شود. به‌ازای مغناطیدگی یکنواخت $\mathbf{M} = M\hat{z}$ ، چگالی قطب مغناطیسی در حجم کره صفر است:

$$\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (۶۳-۱۱)$$



شکل ۱۱-۱۲ کره مغناطیده یکنواخت. مغناطیدگی \mathbf{M} در جهت z است.

و در سطح کره برابر است با

$$\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} = M \cos \theta \quad (۶۴-۱۱)$$

پس مسئله تبدیل می‌شود به یافتن پتانسیل ناشی از چگالی بار سطحی ۶۴-۱۱. اگرچه می‌توانیم جواب را با محاسبه انتگرال سطحی در معادله ۵۸-۱۱ به دست آوریم، اما معادله ۵۴-۱۱ را برای حل مسئله انتخاب می‌کنیم. این معادله به ازای $\rho_M = 0$ معادله لاپلاس است. از فصل ۳ می‌دانیم که جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$\Phi_{M\lambda} = \sum_{l=1}^{\infty} A_l \frac{P_l(\cos \theta)}{r^{l+1}} \quad \text{به ازای } r > R \quad (۶۵-۱۱)$$

$$\Phi_{M\gamma} = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^l P_l(\cos \theta) \quad \text{به ازای } r < R \quad (۶۶-۱۱)$$

شرایط مرزی در $r = R$ عبارت‌اند از پیوستگی \mathbf{H}_{\parallel} :

$$\frac{\partial \Phi_{M\lambda}}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi_{M\gamma}}{\partial \theta} \quad (۶۷-۱۱)$$

و پیوستگی \mathbf{B}_{\perp} یا $\mathbf{H}_{\perp} + 4\pi \mathbf{M}_{\perp}$:

$$-\frac{\partial \Phi_{M\lambda}}{\partial r} = -\frac{\partial \Phi_{M\gamma}}{\partial r} + 4\pi M \cos \theta \quad (۶۸-۱۱)$$

مانند حل مسئله کره دی‌الکتریک (بخش ۴-۳) می‌توانیم به جای معادله ۶۷-۱۱ از شرط معادل زیر استفاده کنیم

$$\Phi_{M\lambda} = \Phi_{M\gamma} \quad (۶۹-۱۱)$$

با توجه به فرمولهای $\Phi_{M\lambda}$ و $\Phi_{M\gamma}$ ، این شرایط مرزی به صورت زیر در می‌آیند

$$\sum_{l=1}^{\infty} A_l \frac{P_l(\cos \theta)}{R^{l+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} B_l R^l P_l(\cos \theta) \quad (۷۰-۱۱)$$

و

$$\sum_{l=1}^{\infty} (l+1) A_l \frac{P_l(\cos \theta)}{R^{l+2}} = - \sum_{l=1}^{\infty} l B_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) + 4\pi M \cos \theta \quad (۷۱-۱۱)$$

تمرین ۶- نشان دهید از حل این معادله‌ها به دست می‌آوریم

$$A_1 = \frac{4\pi}{3} MR^2 \quad (72-11)$$

$$B_1 = \frac{4\pi}{3} M \quad (73-11)$$

و سایر A_l ها و B_l ها برابر با صفرند.

پس پتانسیل مغناطیسی برابر است با

$$\Phi_{M1} = \frac{4\pi}{3} \frac{MR^2}{r^2} \cos \theta \quad \text{به ازای } r > R \quad (74-11)$$

و

$$\Phi_{M2} = \frac{4\pi}{3} Mr \cos \theta = \frac{4\pi}{3} Mz \quad \text{به ازای } r < R \quad (75-11)$$

از اینجا میدان \mathbf{H} مغناطیسی خارج و داخل کره به دست می‌آید:

$$\mathbf{H} = -\nabla \Phi_{M1} = \frac{4\pi}{3} MR^2 \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \quad (76-11)$$

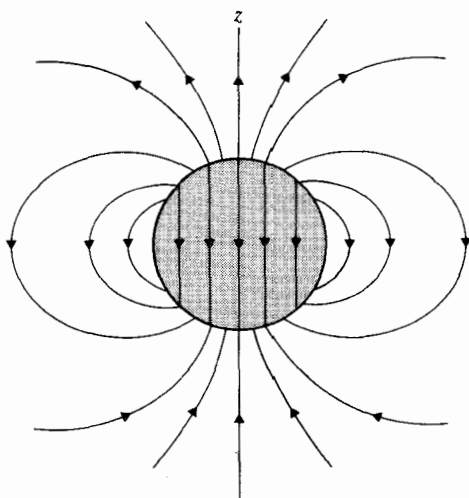
و

$$\mathbf{H} = -\nabla \Phi_{M2} = -\frac{4\pi}{3} M \hat{\mathbf{z}} = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{M} \quad (77-11)$$

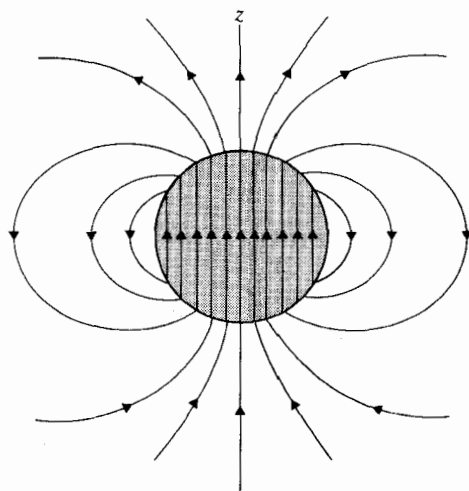
خارج از کره میدان \mathbf{B} مغناطیسی با میدان \mathbf{H} مغناطیسی یکی است. میدان مغناطیسی داخل کره برابر است با

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M} = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{M} + 4\pi \mathbf{M} = \frac{8\pi}{3} \mathbf{M} \quad (78-11)$$

شکلهای ۱۱-۱۳ و ۱۱-۱۴ خطوط میدان را برای \mathbf{H} و \mathbf{B} نشان می‌دهند. داخل کره این میدانها یکنواخت هستند. خارج از کره این میدانها، میدانهای یک دو قطبی مغناطیسی ایده‌آل با گشتاور $(4\pi/3)MR^2$ هستند (این گشتاور، چنانکه باید، حاصل ضرب حجم و گشتاور دو قطبی در واحد حجم است).



شکل ۱۱-۱۳ میدان مغناطیسی H مربوط به کره مغناطیده یکنواخت. توجه کنید که سطح کره به منزله چشمه خطوط میدان H عمل می‌کند.



شکل ۱۱-۱۴ میدان مغناطیسی B مربوط به کره مغناطیده یکنواخت. خطوط B هیچ چشمه یا چاهکی ندارند.

۱۱-۵ انرژی در میدان مغناطیسی

از بررسی تانسور انرژی-تکانه برای میدان الکترومغناطیسی (بخش ۸-۴) معلوم شد که چگالی انرژی در میدان مغناطیسی B در خلاء عبارت است از

$$T^{00} = \frac{1}{4\pi} B^2 \quad (۷۹-۱۱)$$

بنابراین، انرژی کل در میدان مغناطیسی برابر است با

$$U = \int \frac{1}{4\pi} B^2 dV \quad (۸۰-۱۱)$$

روشن است که این انتگرال انرژی میدان باید به‌ازای میدان میکروسکوپی $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ محاسبه شود.

اگرچه معادله ۸۰-۱۱ در حضور مواد مغناطیسی معتبر می‌ماند اما کارایی ندارد. در ماده مغناطیسی میدانهای میکروسکوپی دقیق رانمی‌دانیم؛ و اگر هم بدانیم، انرژی میدان واقعاً مهم نیست بلکه آنچه اهمیت دارد تنها مقدار کاری است که باید صرف کنیم تا میدانهای ماکروسکوپی را به‌طریقی تغییر دهیم. این مقدار کار عبارت است از تغییرات انرژی میدان و همچنین تغییرات انرژیهای پتانسیل و جنبشی آنها که از نیروهای ناشی از میدانها ایجاد می‌شوند.

کار لازم برای ایجاد تغییر کوچکی در میدان مغناطیسی را می‌توانیم با استدلال زیر به‌دست آوریم: فرض کنید چگالی جریانی که میدان مغناطیسی را به‌وجود می‌آورد $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ باشد. اگر جریان را کمی زیاد کنیم و افزایش $\delta\mathbf{B}$ در میدان مغناطیسی را در مدت δt ایجاد کنیم یک میدان الکتریکی القایی \mathbf{E} نیز ایجاد خواهیم کرد. بنا به قانون لنز، این میدان الکتریکی با زیاد شدن جریان مخالفت می‌کند — روی جریان کار انجام می‌دهد و با آهنگ زیر انرژی می‌گیرد

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV \quad (۸۱-۱۱)$$

کاری که ما باید انجام دهیم تا تغییر $\delta\mathbf{B}$ را ایجاد کنیم باید با کار انجام شده توسط میدان الکتریکی القایی موازنه شود. پس توانی که باید صرف کنیم برابر است با

$$\frac{\delta W}{\delta t} = - \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV \quad (۸۲-۱۱)$$

میدان الکتریکی القایی برحسب پتانسیل برداری عبارت است از (معادله ۱۰-۱۷)

$$\mathbf{E} = -(\nabla/c)\delta\mathbf{A}/\delta t$$

در نتیجه

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \frac{1}{c} \int \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} \cdot \mathbf{j} dV \quad (۸۳-۱۱)$$

یا

$$\delta W = \frac{1}{c} \int \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV \quad (۸۴-۱۱)$$

این رابطه با استفاده از معادله $\nabla \times \mathbf{H} = (\frac{4\pi}{c})\mathbf{j}$ به صورت زیر در می‌آید

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \delta \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H} dV \quad (۸۵-۱۱)$$

با توجه به اتحاد برداری

$$\mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G} = \nabla \cdot (\mathbf{G} \times \mathbf{F}) + \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} \quad (۸۶-۱۱)$$

داریم

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \nabla \times \delta \mathbf{A} dV + \frac{1}{4\pi} \int \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \delta \mathbf{A}) dV \quad (۸۷-۱۱)$$

بنابه قضیه گاوس، دومین انتگرال برابر است با انتگرال سطحی روی سطحی که تمام حجم انتگرال‌گیری را احاطه کرده است، یعنی سطح کره‌ای با شعاع نامتناهی؛ برای توزیع جریان متناهی \mathbf{H} در بینهایت صفر است، و این انتگرال سطحی را می‌توان حذف کرد. پس باقی می‌ماند

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \nabla \times \delta \mathbf{A} dV$$

یا

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} dV \quad (۸۸-۱۱)$$

برای به دست آوردن کار متناهی مربوط به تغییر متناهی میدان مغناطیسی، باید از مقادیر جزئی کار δW انتگرال بگیریم. این عمل تنها در صورتی ممکن است که رابطه بین \mathbf{H} و \mathbf{B} را بدانیم.

در ماده مغناطیسی خطی، \mathbf{H} متناسب با \mathbf{B} است و بنابراین

$$\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} = \frac{1}{\chi} \delta(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (۸۹-۱۱)$$

پس

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \delta(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV \quad (۹۰-۱۱)$$

و

$$W = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV \quad (۹۱-۱۱)$$

این W را می‌توان انرژی پتانسیل ذخیره شده در میدانهای ماکروسکوپی در ماده مغناطیسی دانست. بنابراین، می‌توانیم کمیت

$$u = \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (۹۲-۱۱)$$

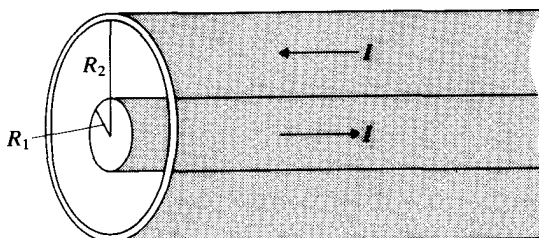
را چگالی انرژی در ماده مغناطیسی تعبیر کنیم. وقتی از معادله‌های ۹۱-۱۱ یا ۹۲-۱۱ استفاده می‌کنیم نباید فراموش کنیم که میدانها در مورد فعلی میدانهای ماکروسکوپی هستند.

روشن است که در ماده مغناطیسی غیرخطی معادله‌های ۸۹-۱۱ تا ۹۲-۱۱ معتبر نیستند. اما معادله ۸۸-۱۱ معتبر می‌ماند زیرا مبتنی بر هیچ فرض خاصی درباره ماده نیست. اگر بخواهیم تغییرات متناهی انرژی را محاسبه کنیم باید به این معادله برگردیم و با استفاده از منحنی پسماند و انتخاب مناسب شاخه‌های آن \mathbf{H} را برحسب \mathbf{B} بیان کنیم.

به‌عنوان مثالی برای استفاده از این فرمولها، انرژی مغناطیسی در واحد طول یک خط انتقال هم‌محور دراز را محاسبه می‌کنیم که تشکیل شده است از یک رسانای استوانه‌ای توپر به شعاع R_1 که با پوسته استوانه‌ای نازکی به شعاع R_2 احاطه شده است (شکل ۱۱-۱۵). رسانای داخلی حامل جریان I به طرف راست و رسانای خارجی حامل جریان I به طرف چپ است؛ این جریانه‌ها به‌طور یکنواخت در ماده رسانا توزیع شده‌اند. با فرض اینکه ماده رسانا غیرمغناطیسی است، میدانها را در ناحیه‌های $R_1 < \rho < R_2$ و $\rho < R_1$ از روی قانون آمپر به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{B}_\phi(\rho) = \frac{2I\rho}{cR_1^2} \quad \text{به‌ازای } \rho < R_1$$

$$\mathbf{B}_\phi(\rho) = \frac{2I}{c\rho} \quad \text{به‌ازای } R_1 < \rho < R_2 \quad (۹۳-۱۱)$$



شکل ۱۱-۱۵ خط انتقال هم‌محور متشکل از رسانای استوانه‌ای توپری که با پوسته استوانه‌ای نازکی احاطه شده است.

بنابراین، انرژی مغناطیسی در طول l خط انتقال عبارت است از

$$U = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dV = 2\pi l \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{2I\rho}{cR_1} \right)^2 \rho d\rho + 2\pi l \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{2I}{c\rho} \right)^2 \rho d\rho$$

$$= \frac{lI^2}{c^2} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (۹۴-۱۱)$$

پس انرژی در واحد طول برابر است با

$$\frac{U}{l} = \frac{I^2}{c^2} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (۹۵-۱۱)$$

تذکر: از این رابطه انرژی می‌توانیم خودالقاییدگی در واحد طول را به دست آوریم. بنابه معادله ۱۰-۳۸ داریم

$$\frac{U}{l} = \frac{1}{2} \frac{L}{l} I^2 \quad (۹۶-۱۱)$$

از مقایسه معادله‌های ۱۱-۹۵ و ۱۱-۹۶، بلافاصله معلوم می‌شود که

$$\frac{L}{l} = \frac{2}{c^2} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (۹۷-۱۱)$$

توجه کنید که این نتیجه با نتیجه متناظر برای خط انتقال با رسانای داخلی توخالی (معادله ۱۰-۳۹) به اندازه جمله اضافی $1/4$ داخل پراستز اختلاف دارد؛ این $1/4$ اضافی نمایشگر سهم میدان و شار مغناطیسی داخل رسانای داخلی است.

۱۱-۱ زاویه ای $\hbar/2$ حول محور خود می‌چرخد. فرض کنید R ده برابر طول کامپتون است — یعنی $R = 10 \hbar/m_e c$ — و جرم الکترون به‌طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است. سرعت زاویه‌ای چرخش و سرعت خطی در استوای الکترون را به‌دست آورید. فرض کنید بار الکتريکی $-e$ به‌طور یکنواخت در سطح الکترون توزیع شده است. توزیعی را تعیین کنید که گشتاور مغناطیسی صحیح را برای الکترون به‌دست می‌دهد. چه دلیل نظری یا تجربی مخالف این الگو می‌توان ارائه کرد؟

۱۱-۲ فرض کنید پروتونی در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد. پروتون را فرفره کلاسیک بگیرید و نشان دهید بسامد حرکت تقدیمی اسپین پروتون برابر است با

$$\omega = 2\pi \cdot 7928 \frac{e}{m_p c} B$$

این بسامد عبارت است از بسامد شدید مغناطیسی-هسته‌ای پروتون. اگر میدان مغناطیسی 3000 گاوس باشد مقدار عددی این بسامد را به‌دست آورید.

۱۱-۳ حلقه جریانی شکل ۱۱-۳ در چارچوب سکون خود دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی \mathbf{m} است اما گشتاور دوقطبی الکتريکی ندارد. با استفاده از معادلات تبدیل لورنتس برای بار و جریانی (معادله‌های ۱۱۵-۷ و ۱۱۶-۷) ثابت کنید در چارچوب مرجعی که حلقه جریانی نسبت به آن با سرعت \mathbf{v} در جهت x حرکت می‌کند حلقه دارای گشتاور دوقطبی الکتريکی $\mathbf{p} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}/c$ است.

۱۱-۴ یک باریکه الکترونی وارد آهنربایی می‌شود که دارای میدان مغناطیسی قائمی است که شدت آن در جهت قائم زیاد می‌شود (یعنی $\partial B_z/\partial z > 0$). سرعت الکترونها $10^8 \times 30^\circ$ سانتیمتر بر ثانیه و طول آهنربا 40 سانتیمتر است. اگر بخواهیم الکترونها را اسپین بالا و اسپین پایین موقع خروجی از آهنربا 30° میلیمتر فاصله داشته باشند بزرگی گرادیان میدان $\partial B_z/\partial z$ را تعیین کنید.

۱۱-۵ (الف) چگالی تکانه $\mathbf{E} \times \mathbf{B}/4\pi c$ در میدانهای الکتريکی و مغناطیسی را برای الکترون به‌دست آورید (معادله ۱۱-۲۴). (ب) چگالی تکانه زاویه‌ای را محاسبه کنید. با انتگرال گرفتن از این چگالی از $r = R$ تا $r = \infty$ ، تکانه زاویه‌ای الکترومغناطیسی (کلاسیک) در میدانهای الکترون را به‌دست آورید. (ج) برای این محاسبه کلاسیک باید فرض کنیم R بسیار بیشتر از طول موج کامپتون $\hbar/m_e c$ است زیرا اثرات میدانی کوانتومی در فواصل کم نقش غالب را دارند. نشان دهید با فرض $R \gg \hbar/m_e c$ ، تکانه زاویه‌ای الکترومغناطیسی بسیار کمتر از $\hbar/2$ است.

۱۱-۶ الکترونی را در کوچکترین مدار دایره‌ای بور ($r = a_0 = \hbar^2/m_e e^2$) حول یک پروتون ثابت در نظر بگیرید. (الف) حرکت را کلاسیک بگیرید و نشان دهید اگر این مدار را در میدان مغناطیسی بکنواخت B عمود بر صفحهٔ مدار قرار دهیم تغییر بسامد زاویه‌ای حرکت تقریباً برابر است با

$$\Delta\omega = \pm \frac{eB}{2m_e c}$$

و نشان دهید شعاع مدار ثابت می‌ماند. [راهنمایی: ثابت کنید تغییر انرژی الکترون ناشی از emf القایی حول مدار به خاطر فرارگرفتن در میدان مغناطیسی برابر است با تغییر انرژی جنبشی ناشی از تغییر بسامد در شعاع ثابت.] (ب) اکنون نشان دهید تغییر سهم مداری گشتاور مغناطیسی تقریباً برابر است با

$$\frac{e^2 B}{4m_e c^2} a_0^2$$

این تغییر گشتاور مغناطیسی منجر به دیامغناطیس می‌شود. با فرض اینکه تمام اتمهای هیدروژن در مقداری گاز هیدروژن در STP سهمی به اندازهٔ بالا در مغناطیدگی دیامغناطیسی دارند، مقدار پذیرفتاری را محاسبه کنید.

۱۱-۷ چون تمام گشتاورهای مغناطیسی اتمی وابسته به تکانه‌های زاویه‌ای هستند، وارونه شدن مغناطیدگی جسم مغناطیده موجب تغییر تکانه‌های زاویه‌ای اتمی می‌شود. اگر جسم تحت گشتاور نیروی خارجی نباشد، تغییر تکانه‌های زاویه‌ای اتمی باید با تغییر حالت چرخشی کلی جسم موازنه شود، یعنی جسم باید طی وارونه شدن مغناطیدگی شروع به چرخیدن کند. این پدیده را اثر اینشتین-دهاس می‌نامند. فرض کنید یک استوانهٔ آهنی به طور قائم در میدان مغناطیسی قائمی آویزان است. طول استوانه 20 سانتیمتر، شعاع آن 30° سانتیمتر، و جرم آن 44 گرم است. استوانه به طور یکنواخت با $M = 900$ گاوس مغناطیس شده است. اگر به استوانهٔ آویزان هیچ گشتاور نیرویی حول محور آن از خارج وارد نشود و مغناطیدگی ناگهان برعکس شود، سرعت زاویه‌ای چرخشی را که استوانه پیدا می‌کند محاسبه کنید. توضیح دهید اندازه‌گیری این سرعت زاویه‌ای چگونه می‌تواند برای تأیید تجربی این واقعیت مورد استفاده قرار گیرد که مغناطیدگی از اسپینهای الکترونی هم جهت ناشی می‌شود نه از تکانه‌های زاویه‌ای مداری هم جهت.

۱۱-۸ دو سیم موازی بسیار دراز حامل جریانهای I را در ماده‌ای پارامغناطیسی با گذردهی μ قرار داده‌ایم. بزرگی نیرو در واحد طول را که یکی از سیمها بر دیگری وارد می‌کند به دست آورید.

۱۱-۹ شکل ۱۱-۱۰ B را برحسب H برای نمونه‌ای از آهن تجارتي نشان می‌دهد. از داده‌های عددی این شکل، بیشترین مقدار مغناطیدگی M در این نمونه را به دست آورید. با این فرض که

مغناطیدگی تماماً ناشی از هم‌جهتی اسپین‌های الکترونی است، تعیین کنید چند الکترون در هر اتم در این مغناطیدگی سهمیم هستند. چگالی نمونه آهن 7.8 g/cm^3 است.

۱۱-۱۰ الف) یک محفظهٔ باریک دراز (سوزنی شکل) در ماده‌ای مغناطیسی با گذردهی μ ایجاد کرده‌ایم. میدان در ماده B و موازی با محفظه است. میدانهای H و B را در محفظه به دست آورید. ب) محاسبه را برای محفظه‌ای پهن (قرص مانند) با میدان B عمود بر صفحهٔ آن تکرار کنید.

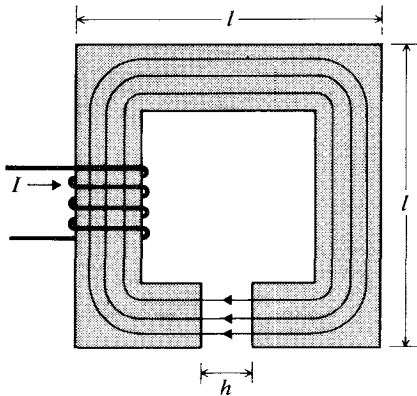
۱۱-۱۱ آیا در یک مادهٔ مغناطیسی $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ ؟ جواب خود را اثبات کنید.

۱۱-۱۲ سیم‌لولهٔ بسیار درازی با فولاد مبدل (ترانسفورماتور) پر شده است. سیم‌لوله دارای ۱۵ دور بر سانتیمتر و حامل جریان $10^8 \times 2.2 \text{ A}$ ایستا آمپر است. میدانهای B و H مغناطیسی در سیم‌لوله را به دست آورید. مغناطیدگی M در فولاد را محاسبه کنید. چگالی جریان مغناطیسی در امتداد سطح فولاد را تعیین کنید. جدول زیر خواص مغناطیسی فولاد مبدل را نشان می‌دهد.

B (گاوس)	H (گاوس)
۲۰۰۰	۰٫۶۰
۴۰۰۰	۰٫۸۷
۶۰۰۰	۱٫۱۰
۸۰۰۰	۱٫۴۸
۱۰۰۰۰	۲٫۲۸
۱۲۰۰۰	۳٫۸۵
۱۴۰۰۰	۱۰٫۹
۱۶۰۰۰	۴۳٫۰
۱۸۰۰۰	۱۴۹

۱۱-۱۳ یک سیم مستقیم دراز مسی با پوستهٔ کلفت هم‌محوری از فولاد مبدل به شعاع داخلی $r_1 = 2 \text{ cm}$ سانتیمتر و شعاع خارجی $r_2 = 4 \text{ cm}$ سانتیمتر احاطه شده است. سیم حامل جریان $10^{11} \times 1.7 \text{ A}$ ایستا آمپر است. میدان مغناطیسی B را در $r = 1 \text{ cm}$ ، $r = 3 \text{ cm}$ و $r = 5 \text{ cm}$ به دست آورید. (جدول مسئلهٔ ۱۱-۱۲).

۱۱-۱۴ شکل ۱۱-۱۶ یک آهنربای الکتریکی را که از فولاد مبدل ساخته شده است نشان می‌دهد. مساحت مقطع فولاد A است؛ سیم‌پیچ دارای N دور و حامل جریان I است. اگر $NI = 16 \times 10^{12} \text{ stat A}$ ، $h = 5 \text{ cm}$ ، $l = 10 \text{ cm}$ و $A = 10 \text{ cm}^2$ ، شدت تقریبی



شکل ۱۱-۱۶ یک آهنربای الکتریکی.

میدان مغناطیسی در شکاف را به دست آورید. از تمام اثرات لبه صرف نظر کنید. جدول خواص مغناطیسی فولاد مبدل در مسئله ۱۱-۱۲ آمده است. [راهنمایی: فرض کنید میدان B همه جا در آهن و شکاف بزرگی ثابتی دارد؛ خطوط میدان تقریباً به صورتی است که در شکل ۱۱-۱۶ نشان داده می‌شود. از $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\mathcal{F}\pi/c)NI$ روی مسیری منطبق بر یکی از خطوط میدان، داریم $(\mathcal{F}\pi/c)NI = hB + (l-h)H$. با استفاده از این معادله و جدول وابستگی H به B ، مسئله را به طور عددی حل کنید.]

۱۱-۱۵ استوانه بسیار درازی از ماده‌ای مغناطیسی به شعاع R دارای مغناطیدگی یکنواخت \mathbf{M} عمود بر محور استوانه است. میدان مغناطیسی \mathbf{B} را خارج و داخل استوانه به دست آورید.

۱۱-۱۶ یک استوانه آهنی توپر به طول L و شعاع R در حجم خود دارای مغناطیدگی یکنواخت \mathbf{M} است؛ راستای \mathbf{M} موازی با محور استوانه است. (الف) میدان مغناطیسی را در خارج استوانه روی محور آن به دست آورید. (ب) با استفاده از روش بخش ۹-۴، دو جمله اول در بسط رشته توانی میدان مغناطیسی (برحسب $1/r$) را در فضای اطراف استوانه تعیین کنید.

۱۱-۱۷ کره‌ای به شعاع R از ماده پارامغناطیسی با گذردهی μ را در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$ قرار می‌دهیم. میدان مغناطیسی را داخل کره و خارج از کره به دست آورید.

۱۱-۱۸ پوسته کروی کلفتی از ماده پارامغناطیسی با گذردهی μ دارای شعاع داخلی a و شعاع خارجی b است. این پوسته را در میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B}_0 قرار می‌دهیم. پتانسیل مغناطیسی و میدانهای \mathbf{B} و \mathbf{H} را در ناحیه‌های $a < r < b$ ، $r < a$ و $r > b$ به دست آورید. با چه نسبتی میدان مغناطیسی داخل پوسته کوچکتر از B_0 است؟

۱۱-۱۹ یک لوله استوانه‌ای بسیار دراز دارای شعاع داخلی a و شعاع خارجی b است. این لوله از ماده مغناطیس شده یکنواختی با مغناطیدگی \mathbf{M} عمود بر محور لوله ساخته شده است. با انتخاب محور z در امتداد محور لوله، میدان مغناطیسی را در ناحیه‌های $\rho < a$ ، $a < \rho < b$ و $\rho > b$ به دست آورید.

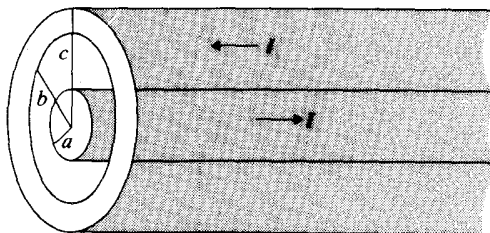
۱۱-۲۰ (الف) با انتگرال گرفتن از معادله ۱۱-۸۴ نشان دهید انرژی مغناطیسی در ماده مغناطیسی خطی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$W = \frac{1}{2c} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} \, dV$$

(ب) نشان دهید در ماده نامغناطیسی این انرژی تبدیل می‌شود به

$$W = \frac{1}{2c^2} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \, dV' \, dV$$

۱۱-۲۱ خط انتقال هم‌محوری تشکیل شده است از یک استوانه رسانای توپر به شعاع a که با پوسته استوانه‌ای رسانای کلفتی به شعاع داخلی b و شعاع خارجی c احاطه شده است (شکل ۱۱-۱۷). رساناها حامل جریانهای یکسان I در جهت‌های مخالف هستند. انرژی مغناطیسی را در قطعه‌ای به طول l از خط انتقال محاسبه کنید، و خودالقاییدگی در واحد طول را به دست آورید.



شکل ۱۱-۱۷ یک خط انتقال هم‌محور.

امواج الکترومغناطیسی

بنابه قوانین القا، میدانهای مغناطیسی متغیر میدانهای الکتریکی القا می‌کنند، و برعکس. این پدیده القای متقابل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی منجر به نوسانهای الکترومغناطیسی خود نگهدار در فضا می‌شود. چنانکه خواهیم دید، این نوسانها به صورت امواجی هستند که با سرعت نور منتشر می‌شوند. البته برای شروع نوسانها آشفتگی اولیه‌ای لازم است. برای مثال، می‌توانیم یک بار نقطه‌ای را بگیریم و آن را ناگهان تکان دهیم تا اغتشاشی در میدان الکتریکی آن شروع شود، این اغتشاش یک میدان مغناطیسی القایی ایجاد می‌کند، که یک میدان الکتریکی القایی ایجاد می‌کند، و تب الکترومغناطیسی ایجاد شده به صورت یک موج کروی از بار نقطه‌ای دور می‌شود. در فواصل دور از چشمه آشفتگی، قسمت کوچکی از این موج کروی را می‌توان تقریباً یک موج تخت گرفت. در این فصل، انتشار امواج الکترومغناطیسی تخت را در خلا و در محیطهای مادی همگن مطالعه می‌کنیم، و تحلیل مفصل چگونگی ایجاد امواج از تغییرات ناگهانی حرکت بارها را به یک فصل دیگر موکول می‌کنیم.

۱۲-۱ امواج تخت در خلا

اگر میدان الکترومغناطیسی را با چاربردار پتانسیل توصیف کنیم، معادله اساسی میدان معادله ۸-۱۰ خواهد بود:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (1-12)$$

در خلا این معادله به صورت زیر در می‌آید

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 \quad (2-12)$$

به این معادله باید شرط لورنتس را اضافه کنیم:

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \quad (3-12)$$

معادله ۲-۱۲ یک معادله موج ساده‌ترین جوابهای آن عبارت‌اند از امواج تخت با وابستگی هماهنگ به فضا و زمان. برای مثال، اگر جهت انتشار را در امتداد محور z فرض کنیم، می‌توانیم جواب معادله ۲-۱۲ را به صورت زیر بگیریم

$$A^\nu = \varepsilon^\nu \sin(\omega t - kz) \quad (4-12)$$

که در آن ω و k ثابت‌اند و ε^ν یک چاربردار با مؤلفه‌های ثابت است. ثابتهای k و ω به ترتیب عدد موج (یا بزرگی بردار موج) و بسامد زاویه‌ای موج هستند. برحسب طول موج و بسامد داریم

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = 2\pi\nu \quad (5-12)$$

از جاگذاری معادله ۴-۱۲ در معادله ۲-۱۲ به دست می‌آوریم

$$\left(-\frac{1}{c^2} \omega^2 + k^2\right) \varepsilon^\nu \sin(\omega t - kz) = 0 \quad (6-12)$$

این رابطه ایجاب می‌کند که

$$k = \pm \frac{\omega}{c} \quad (7-12)$$

بنا به قرارداد، ω همیشه مثبت است؛ در نتیجه، برای موجی که در جهت $+z$ منتشر می‌شود k نیز باید مثبت باشد:

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (8-12)$$

سرعت موج برابر است با

$$v = \frac{\omega}{k} = c \quad (۹-۱۲)$$

بدین ترتیب، سرعت موج با سرعت نور برابر است. این برابری اتفاقی نیست— نور موج الکترومغناطیسی است.

اکنون باید شرط لورنتس را منظور کنیم. از جاگذاری رابطه ۹-۱۲ در $\partial_\nu A^\nu = 0$ به دست می‌آوریم

$$\left(\frac{\omega}{c}\varepsilon^0 - k\varepsilon^z\right) \cos(\omega t - kz) = 0 \quad (۱۰-۱۲)$$

که ایجاب می‌کند

$$\varepsilon^0 = \varepsilon^z \quad (۱۱-۱۲)$$

این نتیجه نشان می‌دهد تنها سه مؤلفه ε^ν مستقل هستند. پس کلی‌ترین بردار ε^ν باید برهم‌نهشی از سه بردار زیر باشد

$$\varepsilon_{(1)}^\nu = (0, 1, 0, 0) \quad \varepsilon_{(2)}^\nu = (0, 0, 1, 0) \quad \varepsilon_{(3)}^\nu = (1, 0, 0, 1) \quad (۱۲-۱۲)$$

تمرین ۱- نشان دهید هر چاربرداری که در معادله ۱۱-۱۲ صدق کند را می‌توان به صورت برهم‌نهشی از سه بردار پایه ۱۲-۱۲ نوشت.

برای موج تخت

$$A^\nu = A\varepsilon_{(1)}^\nu \sin(\omega t - kz) = A(0, 1, 0, 0) \sin(\omega t - kz) \quad (۱۳-۱۲)$$

میدانهای الکتریکی و مغناطیسی عبارت‌اند از

$$E_x = F^{10} = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 = -\partial^0 A^1 = -A \frac{\omega}{c} \cos(\omega t - kz)$$

$$B_y = F^{1z} = \partial^1 A^z - \partial^z A^1 = \partial^z A^1 = -A \frac{\omega}{c} \cos(\omega t - kz)$$

$$E_y = E_z = B_x = B_z = 0 \quad (۱۴-۱۲)$$

این روابط نشان می‌دهند میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بر یکدیگر و بر راستای انتشار عمودند، بزرگیهای یکسانی دارند،^۱ و همفاز نوسان می‌کنند.

برای موج تخت

$$A^{\nu} = A \varepsilon_{(\nu)}^{\nu} \sin(\omega t - kz) = A(0, 0, 1, 0) \sin(\omega t - kz) \quad (15-12)$$

میدانها عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} E_y &= -A \frac{\omega}{c} \cos(\omega t - kz) \\ B_x &= A \frac{\omega}{c} \cos(\omega t - kz) \\ E_x &= E_z = B_y = B_z = 0 \end{aligned} \quad (16-12)$$

در اینجا نیز این میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بر یکدیگر و بر راستای انتشار عمودند، بزرگیهای یکسانی دارند، و همفاز نوسان می‌کنند.

سرانجام، برای موج تخت

$$A^{\nu} = A \varepsilon_{(\nu)}^{\nu} \sin(\omega t - kz) = A(1, 0, 0, 1) \sin(\omega t - kz) \quad (17-12)$$

تمام مؤلفه‌های میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متحد باصفرند.

تمرین ۲- نشان دهید از معادله ۱۲-۱۷ به دست می‌آوریم $F^{\mu\nu} = 0$.

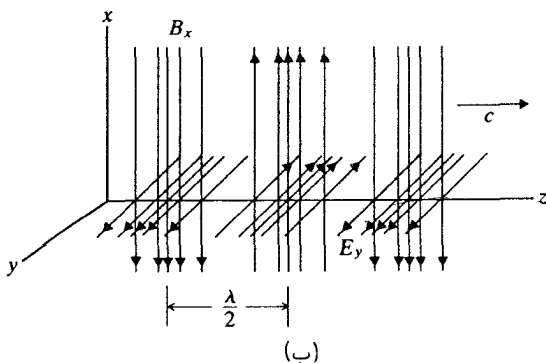
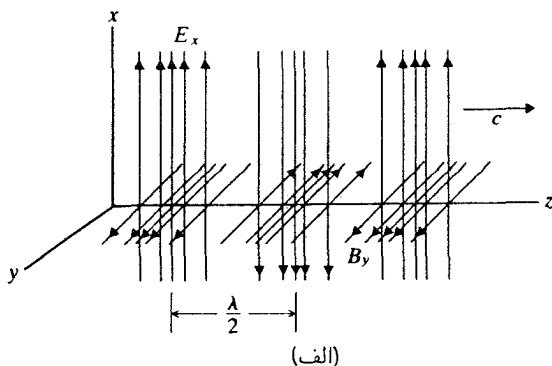
بنابراین، سومین جواب نمایشگر موج فیزیکی نیست. سومین جواب یک «شبح» است: حامل هیچ انرژی یا تکانه‌ای نیست و هیچ نیرویی بر ذرات باردار وارد نمی‌کند. می‌توانیم از این جواب صرف‌نظر کنیم.

میدانهایی که با معادله‌های ۱۲-۱۴ و ۱۲-۱۶ داده شده‌اند نمایشگر امواج الکترومغناطیسی با دو قطبش خطی مستقل هستند. بنا به تعریف، صفحه قطبش موج صفحه بردار میدان الکتریکی است؛ بدین ترتیب، موج ۱۲-۱۴ در راستای x قطبیده است در حالی که موج ۱۲-۱۶ در راستای y قطبیده است. در نمادنگاری برداری سه‌بعدی، میدانهای موج اول عبارت‌اند از

$$\mathbf{E}_{(1)} = E_0 \hat{x} \cos(\omega t - kz) \quad (18-12)$$

$$\mathbf{B}_{(1)} = E_0 \hat{y} \cos(\omega t - kz) \quad (19-12)$$

۱. این برابری بزرگیهای \mathbf{E} و \mathbf{B} در یک موج (در خلا) ویژگی جالب دیگری از دستگاه یکاهای CGS است.



شکل ۱۲-۱ خطوط میدان الکتریکی و مغناطیسی برای امواج تخت. (الف) قطبیده در راستای x . (ب) قطبیده در راستای y .

و میدانهای موج دوم عبارت‌اند از

$$\mathbf{E}_{(r)} = E_0 \hat{y} \cos(\omega t - kz) \quad (۱۲-۲۰)$$

$$\mathbf{B}_{(r)} = -E_0 \hat{x} \cos(\omega t - kz) \quad (۱۲-۲۱)$$

که در آنها $E_0 = -A\omega/c$. شکل‌های ۱۲-۱(الف) و ۱۲-۱(ب) میدانهای این دو موج قطبیده خطی را نشان می‌دهند. توجه کنید که جهت‌های \mathbf{E} و \mathbf{B} با قاعده دست راست به هم مربوط می‌شوند: شست دست راست در جهت انتشار است هرگاه سایر انگشتان از \mathbf{E} به سمت \mathbf{B} خم شوند.

غالباً بهتر است تابع موجها را به صورت نمایی بیان کنیم. برای مثال، میدانهای الکتریکی ۱۲-۱۸

و ۱۲-۲۰ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E}_{(1)} = E_0 \hat{x} e^{-i(\omega t - kz)} \quad (22-12)$$

$$\mathbf{E}_{(2)} = E_0 \hat{y} e^{-i(\omega t - kz)} \quad (23-12)$$

که در آنها فرض بر این است که قسمت حقیقی نمایشگر میدان الکتریکی فیزیکی است، در حالی که قسمت‌انگاری باید کنار گذاشته شود. این تابع موجها را می‌توان به عنوان توابع پایه در نظر گرفت— هر موجی با راستای اختیاری قطبش برهم‌نهدی از توابع ۱۲-۲۲ و ۱۲-۲۳ (و میدانهای مغناطیسی متناظر آنها) است.

به جای این توابع پایه قطبیده خطی، می‌توانیم از توابع پایه قطبیده دایره‌ای استفاده کنیم. این توابع به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\mathbf{E}_+ = (\mathbf{E}_{(1)} + i\mathbf{E}_{(2)}) = E_0 (\hat{x} + i\hat{y}) e^{-i(\omega t - kz)} \quad (24-12)$$

$$\mathbf{E}_- = (\mathbf{E}_{(1)} - i\mathbf{E}_{(2)}) = E_0 (\hat{x} - i\hat{y}) e^{-i(\omega t - kz)} \quad (25-12)$$

و معادلات متناظری برای میدانهای مغناطیسی.

تمرین ۳- $\mathbf{E}_{(1)}$ و $\mathbf{E}_{(2)}$ را برحسب \mathbf{E}_+ و \mathbf{E}_- بیان کنید.

موج \mathbf{E}_+ را دارای پیچش مثبت و موج \mathbf{E}_- را دارای پیچش منفی می‌گویند؛ همچنین آنها را به ترتیب راستگرد و چپگرد می‌نامند.^۱

می‌توانیم میدان الکتریکی را با به دست آوردن قسمت حقیقی معادله ۱۲-۲۴ بررسی کنیم:

$$\text{Re } \mathbf{E}_+ = E_0 \hat{x} \cos(\omega t - kz) + E_0 \hat{y} \sin(\omega t - kz) \quad (26-12)$$

به ازای یک z معین، مثلاً $z = 0$ ، عبارت بالا $E_0 (\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t)$ می‌شود که نشان می‌دهد اگر از سمت z مثبت (جهت انتشار) نگاه کنیم میدان الکتریکی به طور پادساعتگرد حول محور z می‌چرخد. توجه کنید که جهتهای انتشار و چرخش با قاعده دست راست به هم مربوط می‌شوند. برعکس این مورد قسمت حقیقی معادله ۱۲-۲۵ یک میدان الکتریکی را که در جهت ساعتگرد می‌چرخد به دست می‌دهد.

تمرین ۴- قسمت حقیقی معادله ۱۲-۲۵ را مورد بررسی قرار دهید و جهت چرخش میدان الکتریکی را واریسی کنید.

۱. این نامگذاری در اینجا از فیزیک کوانتومی گرفته شده است. در اپتیک، راست و چپ معمولاً به جهتهای عکس گفته می‌شود.

همچنانکه در یکی از بخشهای بعد خواهیم دید، امواج الکترومغناطیسی حامل انرژی و تکانه هستند. علاوه بر این، امواج قطبیده حامل تکانه زاویه‌ای هستند. برای مثال، موج با پیشرفت مثبت ۱۲-۲۴ حامل تکانه زاویه‌ای با مؤلفه z مثبت است—شار تکانه زاویه‌ای ω^{-1} برابر شار انرژی است.

برای به دست آوردن خواص امواج الکترومغناطیسی در بالا، از معادله موج نسبیتی شروع کردیم. با محاسباتی روی معادلات ماکسول نیز می‌توانیم به همین نتایج برسیم. این راه اگر چه تا اندازه‌ای مشکلتر است اما آموزنده است زیرا نشان می‌دهد وجود امواج الکترومغناطیسی وابسته به جمله‌های القایی در معادلات ماکسول است. در خلا، معادله‌های ۸-۶۱ تا ۸-۶۴ به صورت زیر هستند

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (27-12)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (28-12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (29-12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (30-12)$$

برای به دست آوردن معادله موج مربوط به \mathbf{E} ، از آخرین معادله تاو می‌گیریم:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} \quad (31-12)$$

در طرف راست، معادله ۱۲-۲۸ را جاگذاری می‌کنیم. در طرف چپ، از اتحاد

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

استفاده می‌کنیم؛ با توجه به اینکه $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ، این اتحاد به $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E}$ تبدیل می‌شود. پس معادله ۱۲-۳۱ به صورت زیر در می‌آید

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (32-12)$$

که معادله موج برای میدان الکتریکی است.

تمرین ۵- نشان دهید میدان مغناطیسی در معادله موج مشابهی صدق می‌کند:

$$-\nabla^2 \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (33-12)$$

مانند محاسبه قبل، جوابهایی را می‌خواهیم که امواج تختی هستند که راستای انتشار آنها در امتداد محور z است. روشن است که معادله ۱۲-۳۲ دارای جواب زیر است

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kz) \quad (34-12)$$

که در آن \mathbf{E}_0 یک بردار ثابت است. از این رابطه \mathbf{E} به دست می‌آوریم

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = kE_{0z} \sin(\omega t - kz) \quad (35-12)$$

معادله ماکسول $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ایجاب می‌کند که $E_{0z} = 0$ ، یعنی بردار \mathbf{E}_0 باید عمود بر محور z باشد. بدین ترتیب، \mathbf{E}_0 برهم‌نهدی از \hat{x} و \hat{y} است، و باز هم دو موج قطبیده خطی مستقلی که معادله‌های ۱۲-۱۸ و ۱۲-۲۰ تبیین می‌کنند به دست می‌آیند. میدانهای مغناطیسی این دو موج از معادله ماکسول ۱۲-۳۰ به دست می‌آیند. برای مثال، اگر

$$\mathbf{E} = \hat{x}E_0 \cos(\omega t - kz) \quad (36-12)$$

آنگاه

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\nabla \times \mathbf{E} = -ck \hat{y}E_0 \sin(\omega t - kz) \quad (37-12)$$

از این رابطه نسبت به زمان انتگرال می‌گیریم:

$$\mathbf{B} = \frac{ck}{\omega} \hat{y}E_0 \cos(\omega t - kz) = \hat{y}E_0 \cos(\omega t - kz) \quad (38-12)$$

که با معادله ۱۲-۱۹ توافق دارد.

در بحث بالا، تنها امواج هماهنگ با بسامد معین (امواج تکفام) را در نظر گرفتیم. برای بررسی تپهای موج، با شکل اختیاری، می‌توانیم از قضیه فوریه استفاده کنیم: یک موج اختیاری (با جهت انتشار معین) برهم‌نهدی است از بینهایت موج هماهنگ با بسامدهای مختلف. مثالهایی از این نوع برهم‌نهدی را موقع بررسی انتشار تپهای موج در بخش ۱۲-۴ خواهیم دید.

۱۲-۲ چاربردار موج؛ انتقال دوپلر و ابیراهی

برای موج تختی که در راستایی غیر از راستای z منتشر می‌شود، باید به‌جای تابع موج $\sin(\omega t - kz)$ در معادلات بخش قبل تابع موج زیر را بگذاریم

$$\sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (39-12)$$

که در آن بردار موج \mathbf{k} در جهت انتشار است. تابع موج ۱۲-۳۹ به شرطی جواب معادله ۱۲-۲ است که

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (۱۲-۴۰)$$

تمرین ۶- واریسی کنید که معادله ۱۲-۲ معادله ۱۲-۴۰ را ایجاب می‌کند.

در نمادنگاری چهاربعدی، می‌توانیم شناسهٔ تابع سینوسی را به صورت زیر بنویسیم

$$\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k^\mu x_\mu \quad (۱۲-۴۱)$$

که در آن k^μ یک کمیت چهارمؤلفه‌ای است:

$$k^\mu = (k^0, k^1, k^2, k^3) = \left(\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z \right) \quad (۱۲-۴۲)$$

این کمیت در واقع یک چار بردار است که چار بردار موج نامیده می‌شود. برای اثبات اینکه مؤلفه‌های k^μ معادلات تبدیل لورنتس را برآورده می‌کنند ابتدا گره‌های موج را بررسی می‌کنیم، یعنی نقاطی که در آنها $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$. چون میدانها متناسب با $\cos(k^\mu x_\mu)$ هستند، شرط وجود گره این است که $k^\mu x_\mu = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \dots$. اگر در چارچوب آزمایشگاه $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ ، آنگاه در چارچوب $x'y'z't'$ نیز $\mathbf{E}' = \mathbf{B}' = 0$. بنابراین، $k'^\mu x'_\mu = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \dots$. که نشان می‌دهد $k'^\mu x'_\mu$ و $k^\mu x_\mu$ در گره‌ها مقادیر عددی یکسانی دارند. چون $k'^\mu x'_\mu$ و $k^\mu x_\mu$ توابع خطی از مختصات فضایی-زمان هستند، برابری آنها در دو نقطه ایجاب می‌کند همه جا بین این دو نقطه باهم برابر باشند؛ یعنی به طور کلی

$$k'^\mu x'_\mu = k^\mu x_\mu \quad (۱۲-۴۳)$$

با مشتق گرفتن از این رابطه نسبت به زمان به دست می‌آوریم

$$k'^\alpha = k^\mu \frac{\partial x_\mu}{\partial x'^\alpha} \quad (۱۲-۴۴)$$

چون $\partial x_\mu / \partial x'^\alpha = a_\mu^\alpha$ (معادله ۷-۲۱)، رابطهٔ بالا قانون تبدیل لورنتس برای چار بردار است. اگر

این تبدیل لورنتس مربوط به سرعت V در امتداد محور x باشد، آنگاه

$$k'_0 = \frac{k^0 - (V/c)k_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (۴۵-۱۲)$$

$$k'_x = \frac{k_x - (V/c)k^0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (۴۶-۱۲)$$

$$k'_y = k_y \quad (۴۷-۱۲)$$

$$k'_z = k_z \quad (۴۸-۱۲)$$

از اینجا می‌توانیم انتقال دوپلر و ابیراهی نور را به دست آوریم. فرض کنید در چارچوب آزمایشگاه بردار موج با محور x زاویه θ می‌سازد، و در نتیجه

$$k_x = k \cos \theta = \frac{\omega}{c} \cos \theta \quad (۴۹-۱۲)$$

که در آن $k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$ بزرگی بردار موج (سه بعدی) است. آنگاه از معادله ۴۵-۱۲ داریم

$$\omega' = \frac{\omega[1 - (V/c) \cos \theta]}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (۵۰-۱۲)$$

علاوه بر این، از معادله ۴۶-۱۲ داریم

$$\cos \theta' = \frac{k'_x}{k'} = \frac{k'_x}{\omega'/c} = \frac{(\omega/c) \cos \theta - V\omega/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{1}{\frac{\omega[1 - (V/c) \cos \theta]}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}}}$$

یا

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - V/c}{1 - (V/c) \cos \theta} \quad (۵۱-۱۲)$$

معادله ۵۰-۲ فرمول انتقال دوپلرنسبیتی است. این فرمول تغییر بسامد موج را به دست می‌دهد. معادله ۵۱-۲ فرمول ابیراهی نسبیتی است. این فرمول تغییر راستای انتشار موج را تعیین می‌کند. در مورد خاص $\theta = 0^\circ$ (انتشار در جهت مثبت محور x) انتقال دوپلر طولی را به دست می‌آوریم:

$$\omega' = \omega \frac{1 - V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \omega \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} \quad (۵۲-۱۲)$$

در مورد خاص $\theta = \pi/2$ ، انتقال دوپلر عرضی را به دست می آوریم:

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (53-12)$$

این رابطه ایجاب می کند موجی که از چشمه ای در چارچوب $x'y'z't'$ گسیل می شود و به آزمایشگاه از راستایی عمود بر سرعت چارچوب $x'y'z't'$ می رسد بسامد ω یی داشته باشد که به اندازه ضریب $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ از بسامد گسیل ω' کمتر است. این پدیده اصولاً اثر اتساع زمان است.

بنا به فرمول ابیراهی ۱۲-۵۱، راستای انتشار با محور x' زاویه بزرگتری می سازد تا با محور x آزمایشگاه. برای مثال، اگر بخواهیم موج با زاویه $\theta = \pi/2$ به آزمایشگاه برسد، باید از چارچوب $x'y'z't'$ با زاویه ای گسیل شود که برای آن

$$\cos \theta' = \frac{-V}{c} \quad (54-12)$$

یعنی موج باید در راستایی به عقب ($\theta' > \pi/2$) گسیل شود تا تأثیر حرکت چارچوب $x'y'z't'$ روی راستای انتشار جبران شود.

۱۲-۳ انرژی، تکانه، و تکانه زاویه ای در موج تخت

مؤلفه های تانسور انرژی-تکانه $T^{\mu\nu}$ (معادله ۸-۴) چگالی انرژی، شار انرژی، و شار تکانه را در میدانهای الکترومغناطیسی تعیین می کنند. در اینجا، این مؤلفه ها را برای میدانهای موج تخت، مثلاً میدانهایی که معادله های ۱۲-۱۸ و ۱۲-۱۹ توصیف می کنند، بررسی می کنیم. چگالی انرژی T^{00} است. با جاگذاری \mathbf{E} و \mathbf{B} در معادله ۸-۹، به دست می آوریم

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) = \frac{1}{4\pi} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \quad (55-12)$$

مؤلفه های شار انرژی، یا عبور انرژی از واحد سطح در واحد زمان، عبارت اند از cT^{0k} ؛ این مؤلفه ها بردار پوینتینگ S^k را تشکیل می دهند. از معادله ۸-۹۶ داریم

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} \frac{c}{4\pi} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \quad (56-12)$$

چنانکه انتظار می رود، جهت این شار انرژی بر جهت انتشار موج منطبق است. از مقایسه معادله های ۱۲-۵۵ و ۱۲-۵۶ می بینیم که

$$(\text{چگالی انرژی}) = c \times (\text{شار انرژی}) \quad (57-12)$$

این رابطه از لحاظ شهودی واضح است زیرا انرژی موج با سرعت نور همراه موج حرکت می‌کند. مؤلفه‌های شار تکانه T^{mn} هستند. از این مؤلفه‌ها تنها T^{zz} مخالف صفر است. از معادله ۸-۹۴ به دست می‌آوریم

$$T^{zz} = \frac{1}{4\pi} [-E_z E_z - B_z B_z + \frac{1}{2}(E^2 + B^2)] = \frac{1}{4\pi} E_z^2 \cos^2(\omega t - kz) \quad (58-12)$$

این نتیجه نشان می‌دهد موج حامل تکانه z در جهت z است. می‌بینیم که

$$(\text{شار تکانه}) = c \times (\text{شار انرژی}) \quad (59-12)$$

این رابطه از دیدگاه مکانیک کوانتومی واضح است: موج جویباری از فوتونهاست که هر یک از آنها تکانه p و انرژی cp دارند؛ و رابطه ۱۲-۵۹ صرفاً این تناظر بین انرژی و تکانه‌ای که فوتونها حمل می‌کنند را بیان می‌کند.

در کاربردهای عملی، به جای چگالی انرژی، شار انرژی یا شار تکانه لحظه‌ای غالباً متوسط زمانی این کمیتها مورد توجه‌اند. با متوسط گرفتن روی یک یا چند دوره موج، به دست می‌آوریم

$$\overline{T^{00}} = \frac{1}{8\pi} E_z^2 \quad (60-12)$$

$$\overline{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{z}} \frac{c}{8\pi} E_z^2 \quad (61-12)$$

$$\overline{T^{zz}} = \frac{1}{8\pi} E_z^2 \quad (62-12)$$

شار تکانه در موج الکترومغناطیسی می‌تواند فشار ایجاد کند، که آن را فشار نور می‌نامند. فرض کنید نور بدون بازتاب جذب شود. آنگاه، مقدار تکانه z که مساحت A در واحد زمان به‌طور متوسط جذب می‌کند برابر است با

$$\overline{T^{zz}} A = \frac{E_z^2}{8\pi} A$$

و نیروی وارد بر این مساحت عبارت است از

$$F = \frac{E_z^2}{8\pi} A$$

بنابراین، فشاری وجود دارد که برابر است با

$$\frac{F}{A} = \frac{E_0^2}{4\pi} = \frac{S}{c} \quad (۱۲-۶۳)$$

مثال جالبی از اثرات این فشار را می‌توان در دنباله‌دارها مشاهده کرد. دم خمیده یک دنباله‌دار از غباری تشکیل شده است که به علت فشار نور خورشید از سر دنباله‌دار فاصله پیدا کرده است. از معادلات تبدیل لورنتس برای تانسور انرژی-تکانه، می‌توانیم معادلات تبدیل برای شار انرژی را به دست آوریم. معادلات مربوط عبارت‌اند از

$$T'^{\alpha k} = a_{\mu}^{\alpha} a_{\nu}^k T^{\mu\nu}$$

اگر تانسور انرژی-تکانه مربوط به موج تختی باشد که در جهت z منتشر می‌شود (معادله‌های ۱۲-۵۵، ۱۲-۵۶ و ۱۲-۵۸)، تنها T^{00} ، T^{0z} و T^{zz} مخالف صفرند، و در نتیجه داریم

$$T'^{\alpha k} = a_0^{\alpha} a_0^k T^{00} + a_z^{\alpha} a_0^k T^{0z} + a_0^{\alpha} a_z^k T^{0z} + a_z^{\alpha} a_z^k T^{zz}$$

برای تبدیل لورنتس مربوط به سرعت V در جهت z ، از رابطه بالا به دست می‌آوریم

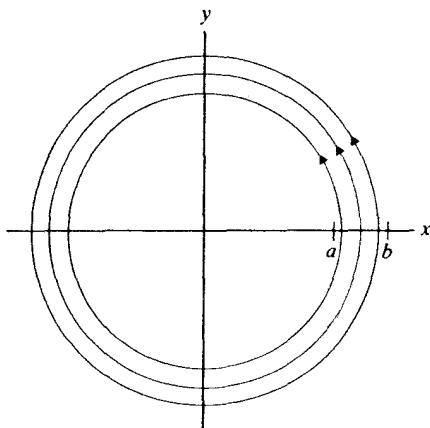
$$T'^{0z} = -\gamma^2 \frac{V}{c} T^{00} + \gamma^2 \left(\frac{V^2}{c^2} + 1 \right) T^{0z} - \gamma^2 \frac{V}{c} T^{zz}$$

و چون برای این موج $T^{00} = T^{0z} = T^{zz}$ پس

$$T'^{0z} = \gamma^2 \left(\frac{V^2}{c^2} + 1 - \frac{V}{c} \right) T^{0z} = \gamma^2 \left(1 - \frac{V}{c} \right)^2 T^{0z}$$

توجه کنید که به ازای $V/c \rightarrow 1$ داریم $T'^{0z} \rightarrow 0$. بنابراین، برای این موج در چارچوب مرجعی که با سرعت بسیار زیاد در جهت انتشار موج حرکت می‌کند، شار انرژی به صفر میل می‌کند؛ یعنی برای ناظر متعلق به این چارچوب مرجع، این موج (تقریباً) ناپدید می‌شود.

موج الکترومغناطیسی علاوه بر انرژی و تکانه می‌تواند تکانه زاویه‌ای نیز حمل کند. از بخش ۸-۴ می‌دانیم چگالی تکانه در میدانهای الکترومغناطیسی $\mathbf{E} \times \mathbf{B}/(4\pi c)$ است؛ بنابراین، چگالی تکانه زاویه‌ای $\mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})/(4\pi c)$ است. این چگالی تکانه زاویه‌ای را می‌توان ناشی از شارش انرژی دانست—انرژی متحرک هم‌ارز جرم متحرک است، که تکانه و تکانه زاویه‌ای دارد. در یک موج تخت نامتناهی، میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} همه جا عمود بر بردار موج‌اند، و شارش انرژی همه‌جا



شکل ۱۲-۲ این نقش خطوط شارش دایره‌ای نمایشگر شارش انرژی متوسط زمانی در یک موج قطبیده دایره‌ای است که در جهت z منتشر می‌شود. در یک جبهه موج معین، مثلاً $z = 0^\circ$ ، فرض شده است که میدانهای متوسط زمانی داخل دایره‌ای به شعاع a ثابت‌اند و بین شعاعهای a و b به صفر کاهش می‌یابند. این تصویر تنها شارش در راستاهای عرضی را نشان می‌دهد. شارش در جهت انتشار بسیار بیشتر است؛ شارش برآیند حلزونی است.

موازی با بردار موج است. بنابراین، تکانه زاویه‌ای این موج تنها می‌تواند تکانه زاویه‌ای «مداری» باشد، یعنی تکانه زاویه‌ای وابسته به حرکت انتقالی موج.^۱ اما، در موجی با گسترده‌گی عرضی متناهی، میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} نزدیک لبه موج دارای مؤلفه‌ای موازی با بردار موج هستند (خطوط میدان حلقه‌های بسته هستند)، و شارش انرژی دارای مؤلفه‌های عمود بر بردار موج است. برای مثال، شکل ۱۲-۲ شارش انرژی عرضی متوسط زمانی را در یک موج قطبیده دایره‌ای که در جهت z منتشر می‌شود نشان می‌دهد؛ این موج در راستاهای x و y دارای گسترده‌گی متناهی است، و حول محور z دارای تقارن محوری است. این موج علاوه بر شارش انرژی دورانی که در شکل ۱۲-۲ نشان داده شده است، دارای شارش انتقالی در جهت z است؛ بدین ترتیب، شارش انرژی کل حلزونی است. شارش انرژی دورانی در این موج وجود یک تکانه زاویه‌ای غیرمداری اضافی را ایجاد می‌کند که جهت آن موازی یا پادموازی با جهت انتشار است. این تکانه زاویه‌ای را اسپین موج می‌نامند.

برای به دست آوردن رابطه‌ای برای تکانه زاویه‌ای در موجی اختیاری با گسترده‌گی متناهی (بسته موج)، چگالی تکانه و چگالی تکانه زاویه‌ای را برحسب پتانسیل برداری بیان می‌کنیم:

۱. اگر موج تقارن محوری داشته باشد و محور تقارن از مبدأ بگذرد، روشن است که تکانه زاویه‌ای مداری کل صفر است.

$$\frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{4\pi c} [E^n \nabla A^n - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A}]$$

و

$$\frac{1}{4\pi c} \mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{x} \times [E^n \nabla A^n - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A}] \quad (۶۴-۱۲)$$

اگر از این چگالی تکانه زاویه‌ای روی تمام حجم موج انتگرال بگیریم تکانه زاویه‌ای کل را به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{x} \times (E^n \nabla A^n) dV - \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{x} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} dV \quad (۶۵-۱۲)$$

در انتگرال دوم از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \nabla^n (E^n \mathbf{x} \times \mathbf{A}) - \mathbf{x} \times \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{A} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{x}$$

چون $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ و $(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{x} = \mathbf{E}$ ، این اتحاد به صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \nabla^n (E^n \mathbf{x} \times \mathbf{A}) - \mathbf{E} \times \mathbf{A} \quad (۶۶-۱۲)$$

با استدلالی که در اثبات قضیه گاوس به کار رفت (بخش ۱-۴)، انتگرال حجمی جمله واگرایی را می‌توان به یک انتگرال سطحی بسته‌ای حول بسته موج تبدیل کرد:

$$\int \nabla^n (E^n \mathbf{x} \times \mathbf{A}) dV = \int E^n \mathbf{x} \times \mathbf{A} ds^n$$

این انتگرال سطحی صفر می‌شود زیرا میدان الکتریکی در تمام نقاط خارج از بسته موج صفر است. بنابراین، می‌توانیم از جمله واگرایی در معادله ۶۶-۱۲ صرف‌نظر کنیم، و با جاگذاری جمله باقیمانده در معادله ۶۵-۱۲ به دست می‌آوریم

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{x} \times (E^n \nabla A^n) dV + \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{E} \times \mathbf{A} dV \quad (۶۷-۱۲)$$

این معادله از لحاظ ریاضی هم‌ارز معادله ۶۵-۱۲ است، اما برای محاسبات بسیار مناسبتر است. برای مثال، این معادله محاسبه ساده و سراسر است اسپین یک موج شبه تخت را ممکن می‌سازد که تشکیل شده است از یک ناحیه داخلی با حجم زیاد که داخل آن دامنه‌های میدانهای الکتریکی و مغناطیسی تقریباً یکنواخت هستند، و آن را یک ناحیه خارجی با حجم کم احاطه کرده است

که داخل آن دامنه‌ها نزولی و غیر یکنواخت هستند. بنا به معادله ۱۲-۶۵، محاسبه تکانه زاویه‌ای اسپینی برای این موج احتیاج به دانستن میدانهای بسیار پیچیده در ناحیه خارجی دارد که در آنجا شارش انرژی حول موج دوران می‌کند. اما چنانکه در زیر خواهیم دید، بنا به معادله ۱۲-۶۷ بیشتر تکانه زاویه‌ای اسپینی از ناحیه داخلی ناشی می‌شود و می‌توانیم از ناحیه خارجی صرف‌نظر کنیم و از این رو محاسبه بسیار ساده می‌شود. اساساً با تبدیل ریاضی معادله ۱۲-۶۵ به معادله ۱۲-۶۷، به جای شارش انرژی در حلقه بزرگ حول لبه خارجی موج شارش انرژی فرضی معادلی قرار گرفته است که از چندین حلقه کوچک مجاور که تمام حجم موج را اشغال کرده‌اند تشکیل شده است. به همین ترتیب، سهمهای اسپینی این حلقه‌های کوچک در تمام حجم توزیع شده‌اند.

اولین انتگرال در طرف راست معادله ۱۲-۶۷ نمایشگر تکانه زاویه‌ای مداری است و دومین انتگرال نمایشگر اسپین است. برای توجیه این تعبیر، یک موج قطبیده دایره‌ای با پیش‌مثبت یا منفی در نظر می‌گیریم که میدان الکتریکی آن عبارت است از

$$\mathbf{E}_{\pm} = E_0 \hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t - kz) \pm E_0 \hat{\mathbf{y}} \sin(\omega t - kz) \quad (۱۲-۶۸)$$

پتانسیل برداری برای این موج برابر است با (معادله‌های ۱۲-۱۳ و ۱۲-۱۵)

$$\mathbf{A}_{\pm} = -\frac{cE_0}{\omega} \hat{\mathbf{x}} \sin(\omega t - kz) \pm \frac{cE_0}{\omega} \hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t - kz)$$

روشن است که در لبه موج باید تغییراتی در این میدان الکتریکی و پتانسیل برداری داده شود تا با میدانهای غیر یکنواخت نزولی تطبیق پیدا کنند؛ اما برای موج شبه تخت می‌توانیم از این تغییرات صرف‌نظر کنیم. با این روابط \mathbf{E} و \mathbf{A} ، مقادیر متوسط زمانی دو انتگرال معادله ۱۲-۶۷ عبارت‌اند از

$$\mathbf{L} = \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{x} \times (E^n \nabla A^n) dV = \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{x} \times (\hat{\mathbf{z}} E_0^2) dV$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{E} \times \mathbf{A} dV = \pm \frac{1}{4\pi} \int \hat{\mathbf{z}} \frac{E_0^2}{\omega} dV$$

تمرین ۷- این نتایج را به دست آورید.

ضریب $\hat{\mathbf{z}} E_0^2 / 4\pi c$ در تابع زیر انتگرال رابطه \mathbf{L} همان چگالی متوسط زمانی تکانه انتقالی در این موج قطبیده دایره‌ای است. بنابراین، \mathbf{L} واقعاً تکانه زاویه‌ای مداری است، و از این رو \mathbf{S} باید تکانه زاویه‌ای غیر مداری اضافی باشد یعنی باید اسپین باشد. جهت این اسپین بستگی به حالت

قطبش دارد: برای موجی با پیچش مثبت، اسپین موازی با جهت انتشار است ($S_z > 0$)؛ برای موجی با پیچش منفی، پادموازی است ($S_z < 0$). توجه کنید که اسپین ویژگی مشخصه امواج قطبیده دایره‌ای است—اسپین در موج قطبیده خطی صفر است.

تمرین ۸- نشان دهید برای موج قطبیده خطی $S = 0$.

آموزنده است که انرژی و اسپین در موج قطبیده دایره‌ای را با هم مقایسه کنیم. چگالی انرژی متوسط زمانی در موج قطبیده دایره‌ای ۱۲-۶۸ برابر است با $E_0^2/4\pi$. در نتیجه، نسبت اسپین به انرژی عبارت است از

$$\frac{S_z}{U} = \frac{\pm 1/4\pi \int E_0^2/\omega dV}{1/4\pi \int E_0^2 dV} = \pm \frac{1}{\omega} \quad (69-12)$$

از دیدگاه نظریه کوانتومی، این نتیجه صرفاً نسبت اسپین فوتون به انرژی آن است ($\hbar/\hbar\omega$)؛ بدین ترتیب، موج با پیچش مثبت از فوتونهایی با اسپین «بالا» تشکیل شده است، و موج با پیچش منفی از فوتونهایی با اسپین «پایین» تشکیل شده است.

تصویر فیزیکی اسپین که از محاسبات بالا ظاهر می‌شود مربوط به تکانه زاویه‌ای ناشی از شارش دورانی انرژی در میدان موج است. می‌توان ثابت کرد که این تصویر اعتبار عام دارد: در مورد امواج گرانشی، و همچنین تمام انواع امواج مکانیک کوانتومی به‌کار می‌رود. برای مثال، اسپین الکترون از شارش انرژی دورانی در میدان موج مکانیک کوانتومی الکترون ناشی می‌شود. بدین ترتیب، برخلاف یک سوءتفاهم رایج، اسپین الکترون ناشی از ساختار داخلی الکترون نیست—این اسپین از ساختار میدان موج الکترون ناشی می‌شود [۱].

۱۲-۴ امواج تخت در محیط نارسانا

تفاوت اساسی بین معادلات میدان در خلأ و در محیط مادی این است که در دومی بار و چگالی جریان صفر نیستند. اگر محیط نارسانا باشد، چگالی بار و چگالی جریان بارهای آزاد صفر هستند. اما، اگر محیط توانایی قطبش و مغناطش داشته باشد، چگالی بار و چگالی جریان بارهای مقید وجود دارند، و این چگالیه‌ها را باید در معادلات میدان منظور کرد. از بخش ۱۱-۲ می‌دانیم که مغناطیدگی ماده منشأ جریان مغناطشی است:

$$\mathbf{j}_M = c\nabla \times \mathbf{M} \quad (70-12)$$

اکنون نشان می‌دهیم قطبیدگی ماده منشأ جریان قطبشی است:

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (۷۱-۱۲)$$

یادآوری می‌کنیم که هر جا قطبیدگی ناهمگن باشد، چگالی بارهای مقید وجود دارد (معادله ۸-۴):

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (۷۲-۱۲)$$

جریان \mathbf{j}_P نمایشگر شارش بار مقیدی است که هر جا قطبیدگی برحسب زمان تغییر کند باید روی بدهد. بنا به تعریف، قطبیدگی عبارت است از گشتاور دوقطبی در واحد حجم. بنابراین، قطبیدگی را می‌توان برحسب مجموع تمام گشتاورهای دوقطبی بارهای مقید در یک حجم کوچک ΔV بیان کرد:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i q_i \mathbf{x}_i \quad (۷۳-۱۲)$$

اگر این بارها حرکت کنند، آنگاه^۱

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i q_i \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \quad (۷۴-۱۲)$$

در اینجا، چنانکه می‌خواستیم نشان دهیم، کمیت طرف راست چگالی جریان است. در ضمن، چگالی بار قطبشی و چگالی جریان قطبشی در معادله پیوستگی زیر صدق می‌کنند

$$\frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_P = 0 \quad (۷۵-۱۲)$$

این معادله نتیجه مستقیم معادله‌های ۷۱-۱۲ و ۷۲-۱۲ است.

در خلأ، دیدیم که می‌توانیم خواص امواج را یا از معادلات مربوط به چاربردار پتانسیل به دست آوریم یا از معادلات ماکسول. در محیط مادی، معادلات مربوط به چاربردار پتانسیل برای محاسبه کمی مشکل‌اند و ارجحیت را به معادلات ماکسول می‌دهیم. با در نظر گرفتن بار قطبشی، جریان

۱. توجه کنید که بارهای مقید تنها داخل اتمهای خود که ثابت‌اند حرکت می‌کنند. در نتیجه، حجم ΔV نسبت به زمان ثابت می‌ماند.

قطبشی، جریان مغناطیسی و جریان آزاد، معادلات ماکسول در محیط مادی عبارت‌اند از

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \rho_F - \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (۷۶-۱۲)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\epsilon_0}{c} \left(\mathbf{j}_F + c \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \quad (۷۷-۱۲)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۷۸-۱۲)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۷۹-۱۲)$$

برحسب میدان جابه‌جایی الکتریکی ($\mathbf{D} = \mathbf{E} + \epsilon_0 \nabla \times \mathbf{P}$) و میدان \mathbf{H} مغناطیسی ($\mathbf{H} = \mathbf{B} - \epsilon_0 \nabla \times \mathbf{M}$)، این معادلات به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon_0 \rho_F \quad (۸۰-۱۲)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{\epsilon_0}{c} \mathbf{j}_F \quad (۸۱-۱۲)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۸۲-۱۲)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۸۳-۱۲)$$

در این بخش می‌خواهیم امواج در محیط نارسانا را به‌ازای $\rho_F = 0$ و $\mathbf{j}_F = 0$ مورد مطالعه قرار دهیم. علاوه براین، محیط را خطی، همسانگرد و همگن می‌گیریم به طوری که $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ و $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ که در آنها ϵ و μ برحسب فضا و زمان ثابت‌اند. بدین ترتیب، می‌توانیم معادلات را به صورت زیر بنویسیم

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (۸۴-۱۲)$$

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (۸۵-۱۲)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۸۶-۱۲)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۸۷-۱۲)$$

این معادلات تنها در ضرایب ϵ و μ با معادلات خلأ تفاوت دارند. بنابراین، محاسبه معادله موج برای \mathbf{E} را می‌توان با همان روش بخش ۱۲-۱ انجام داد؛ در نتیجه داریم

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (۸۸-۱۲)$$

روشن است که جوابهای موج تخت این معادله موج با جهت انتشار در امتداد محور z به همان صورت معادله ۱۲-۳۴ است، اما رابطه k و ω اکنون عبارت است از

$$k = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} \quad (۸۹-۱۲)$$

و سرعت موج برابر است با

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (۹۰-۱۲)$$

محاسبه‌ای مشابه با محاسبه بخش ۱۲-۱ نشان می‌دهد میدان الکتریکی موج بازهم بر راستای انتشار عمود است؛ بدین ترتیب، دو موج قطبیده خطی مستقل داریم. میدان مغناطیسی در این موج بر میدان الکتریکی عمود است؛ اما بزرگی میدان مغناطیسی به اندازه ضریب $\sqrt{\mu\epsilon}$ با بزرگی میدان الکتریکی تفاوت دارد. دو موج قطبیده خطی مستقل عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(۱)} &= E_0 \hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t - kz) \\ \mathbf{B}_{(۱)} &= \sqrt{\mu\epsilon} E_0 \hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t - kz) \end{aligned} \quad (۹۱-۱۲)$$

و

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(۲)} &= E_0 \hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t - kz) \\ \mathbf{B}_{(۲)} &= -\sqrt{\mu\epsilon} E_0 \hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t - kz) \end{aligned} \quad (۹۲-۱۲)$$

■ تمرین ۹- فرمولهای میدان مغناطیسی را از فرمولهای میدان الکتریکی به دست آورید.

در یک محیط همسانگرد خطی با ثابت دی‌الکتریک ϵ و ثابت گذردهی μ ، چگالی انرژی در میدانهای الکترومغناطیسی عبارت است از (معادله‌های ۵-۲۶ و ۱۱-۹۲)

$$T^{**} = \frac{1}{\lambda\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{\lambda\pi} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda\pi} \left(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right) \quad (۹۳-۱۲)$$

در نتیجه، چگالی انرژی در موج تخت بالا برابر است با

$$T^{**} = \frac{\epsilon}{4\pi} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)$$

چون فرمولهای چگالی انرژی در محیط مادی و خلا باهم تفاوت دارند، انتظار داریم فرمول بردار پوینتینگ نیز تغییر کند. برای یافتن تغییر لازم، مشتق زمانی انرژی موجود در یک حجم معین را به دست می آوریم:

$$\frac{d}{dt} \int T^{\circ\circ} dV = \int \frac{1}{4\pi} \left(\epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV \quad (94-12)$$

با توجه به معادلات ماکسول ۸۵-۱۲ و ۸۷-۱۲، طرف راست این معادله به صورت زیر در می آید

$$\int \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}) dV$$

با استفاده از اتحاد

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \nabla^n (\epsilon^{nkl} E^k H^l) = E^k \epsilon^{nkl} \nabla^n H^l + H^l \epsilon^{nkl} \nabla^n E^l \\ &= -\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

عبارت بالا برابر است با

$$- \int \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV$$

با استفاده از قضیه گاوس، می توانیم این انتگرال حجمی را به یک انتگرال سطحی روی سطح در برگرفته حجم تبدیل کنیم:

$$- \int \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s}$$

با جاگذاری این عبارت در معادله ۹۴-۱۲، به دست می آوریم

$$\frac{d}{dt} \int T^{\circ\circ} dV = - \int \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s}$$

چون طرف چپ این معادله آهنگ تغییر انرژی در حجم مفروض است، طرف راست باید آهنگ شارش انرژی از سطح در برگرفته این حجم باشد، یعنی $(c/4\pi)(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s}$ باید آهنگ شارش انرژی از مساحت $d\mathbf{s}$ باشد. بدین ترتیب، بردار پوینتینگ که شار انرژی در محیط مادی را نمایش می دهد عبارت است از

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (95-12)$$

برای موج تختی که با معادله‌های ۹۱-۱۲ و ۹۲-۱۲ توصیف می‌شود، این شار انرژی برابر است با

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{z}} \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)$$

سرعت v_p را که با معادله ۹۰-۱۲ تعریف می‌شود سرعت فاز می‌نامند، زیرا حرکت قله‌های موج یا فرورفتگی‌های موج را توصیف می‌کند، یعنی سطوحی که در آنها $\omega t - kz = \text{const}$ اگر ضریب شکست را به صورت زیر تعریف کنیم

$$n = \sqrt{\mu\epsilon} \quad (۹۶-۱۲)$$

آنگاه

$$v_p = \frac{c}{n} \quad (۹۷-۱۲)$$

در محاسبه با این فرمول، باید به خاطر داشته باشیم که ضریب شکست تابعی از بسامد است—مثلاً مقدار ϵ برای نوری که در یک دی‌الکتریک منتشر می‌شود با مقدار استاتیکی آن که در فصل ۴ به کار برده شد بسیار متفاوت است. با استفاده از یک الگوی بسیار ساده برای رفتار الکترونی‌های مقید در دی‌الکتریک می‌توانیم بفهمیم که چگونه این وابستگی به بسامد روی می‌دهد. در این الگو فرض می‌شود که داخل اتمها الکترونها با نیروهای کشسان (مانند نیروی فنرها) نزدیک مکان تعادل خود نگه داشته می‌شوند. آنگاه، میدان الکتریکی یک موج نور باعث نوسان الکترونها حول نقطه تعادلشان می‌شود.

فرض کنید این موج نور دارای میدان الکتریکی زیر (در نمادنگاری مختلط) باشد

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{-i(\omega t - kz)}$$

الکترونی را با مکان تعادل $x = y = z = 0$ در نظر بگیرید. معادله حرکت این الکترون تحت تأثیر موج بالا عبارت است از^۱

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} + m_e \omega_0^2 x = -e E_0 e^{-i\omega t} \quad (۹۸-۱۲)$$

که در آن $m_e \omega_0^2$ ثابت فنر مربوط به نیروی کشسانی است که الکترون را داخل اتم نگه می‌دارد. ۱. از نیروی مغناطیسی موج نور روی الکترون صرف‌نظر می‌کنیم. اگر حرکت غیرنسبیتی باشد این تقریب خوبی است.

($k = m_e \omega_0^2$). جواب حالت پایایی این معادله به صورت زیر است

$$x = \frac{(-e/m_e)E_0 e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

پس گشتاور دوقطبی مربوط به این الکترون برابر است با

$$p = -ex = \frac{(e^2/m_e)E_0 e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (۹۹-۱۲)$$

بنابراین، اگر N تعداد الکترونها در واحد حجم باشد گشتاور دوقطبی در واحد حجم عبارت است از

$$P = Np = \frac{Ne^2/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2} E_0 e^{-i\omega t} = \frac{Ne^2/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2} E \quad (۱۰۰-۱۲)$$

از این معادله نتیجه می‌گیریم که پذیرفتاری الکتریکی برابر است با

$$\chi = \frac{Ne^2/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (۱۰۱-۱۲)$$

و ثابت دی‌الکتریک برابر است با

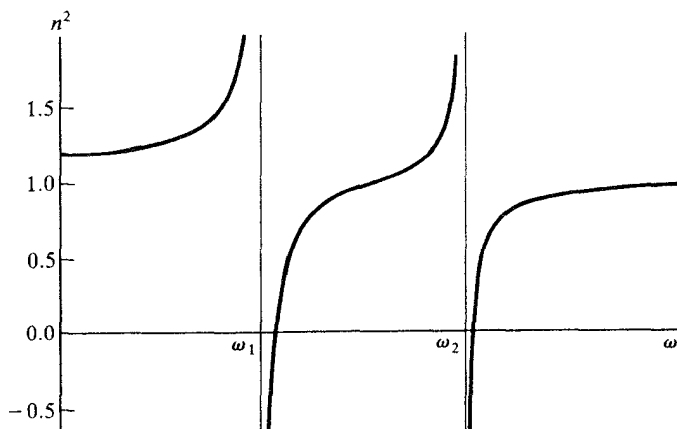
$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + \frac{4\pi Ne^2/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (۱۰۲-۱۲)$$

اگر فرض کنیم $\mu \simeq 1$ ، که تقریب خوبی برای اکثر مواد است، آنگاه $n^2 = \varepsilon$ ، یا

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi Ne^2/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (۱۰۳-۱۲)$$

این فرمول ساده را، که مبتنی بر یک الگوی ابتدایی است، می‌توان با یک اصلاح جزئی با اندازه‌گیریها تطبیق داد. به جای نسبت دادن ثابت فنی یکسانی به تمام الکترونها، فرض می‌کنیم کسر f_i الکترونها دارای ثابت فنی $m_e \omega_i^2$ باشند. بنابراین، به دست می‌آوریم

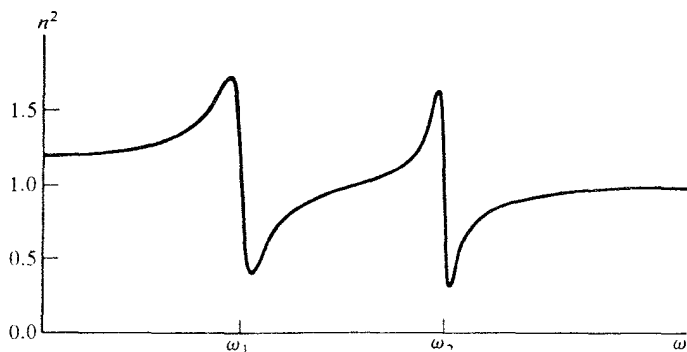
$$n^2 = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \quad (۱۰۴-۱۲)$$



شکل ۳-۱۲ مجذور ضریب شکست به صورت تابعی از بسامد. ضریب شکست در بسامدهای تشدید ω_1 و ω_2 واگراست.

این معادله را معادلهٔ زلمایر می‌نامند. با مقادیر مناسبی برای کسرهای f_i و بسامدهای تشدید ω_i ، این معادله توافق خوبی با داده‌های تجربی دارد.

شکل ۳-۱۲ نمودار n^2 بر حسب ω را برای ماده‌ای با دو بسامد تشدید مختلف ω_i نشان می‌دهد. در این بسامدهای تشدید، فرمول بالا کارایی ندارد و نتیجه‌ای واگرا به دست می‌دهد. برای اصلاح این وضعیت، باید نیروهای اصطکاکی وارد بر الکترونها را به حساب آوریم که مانع نامتناهی شدن دامنهٔ نوسان در تشدید می‌شوند. این اصلاح فرمول را در اینجا بررسی نمی‌کنیم. شکل ۴-۱۲



شکل ۴-۱۲ مجذور ضریب شکست به صورت تابعی از بسامد، شامل اثرات میرایی اصطکاکی. ضریب شکست به‌ازای تمام مقادیر بسامد متناهی است، اما در نزدیکی ω_1 و ω_2 سریعاً کاهش می‌یابد.

نمودار فرمول اصلاح شده شامل اثرات میرایی اصطکاکی را نشان می‌دهد.

تمرین ۱۰- معادله حرکت الکترون شامل نیروی اصطکاکی عبارت است از

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} + m_e \Gamma \frac{dx}{dt} + m_e \omega_e^2 x = -e E_0 e^{-i\omega t} \quad (105-12)$$

نشان دهید از جواب این معادله ضریب شکست زیر به دست می‌آید

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi N e^2 / m_e}{\omega_e^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \quad (106-12)$$

کمیتی که در شکل ۴-۱۲ رسم شده است قسمت حقیقی n^2 مربوط به موردی است با دو بسامد تشدید.

محیطی را که ضریب شکست آن بستگی به بسامد دارد محیط پاشنده می‌نامند. وقتی باریکه‌ای از نور سفید، شامل تمام رنگها، به سطح محیط پاشنده فرود آید، رنگهای مختلف با زاویه‌های مختلف شکسته می‌شوند—یعنی رنگها از هم پاشیده می‌شوند. اگر n با بسامد زیاد شود پاشندگی را عادی می‌گویند (مثلاً در شکل ۳-۱۲ در هر یک از سه فاصله $\omega_1 < \omega < \omega_2$ ، $\omega_1 < \omega < \omega_2$ ؛ اگر n با بسامد کم شود پاشندگی را غیرعادی می‌گویند (در شکل ۴-۱۲، ω در نزدیکی ω_1 و ω_2 سریعاً کاهش می‌یابد).

تاکنون بحث ما به انتشار امواج هماهنگ با تنها یک بسامد محدود بوده است. اکنون انتشار تپهای موج را به اختصار بررسی می‌کنیم. چنانکه در بخش ۱-۱۲ گفته شده، یک تپ موج اختیاری برهم‌نهدی است از بینهایت موج هماهنگ با بسامدهای مختلف. اگر هر یک از این موجهای مؤلف سرعت انتشار مختلفی داشته باشند کنار یکدیگر باقی نمی‌مانند، و تپ موج به تدریج اعوجاج می‌یابد. برای مثال، تپ موجی را در محیطی با ضریب شکست ۱۲-۱۰۴ در نظر بگیرید، و فرض کنید برای تمام موجهای مؤلف $\omega_i > \omega$. آنگاه مؤلفه‌های با بسامد زیاد در این تپ موج سرعت کمتری از مؤلفه‌های کم بسامد دارند. مؤلفه‌های اول عقب می‌افتند در حالی که مؤلفه‌های دوم جلو می‌افتند—تپ موج پخش می‌شود و با گذشت زمان بهتر می‌شود.

تپ موجی را که از برهم‌نهدی امواج هماهنگی با گستره نسبتاً باریکی از بسامدها تشکیل شده است گروه موج می‌نامند. سرعت قله این گروه موج را سرعت گروه می‌نامند. نشان می‌دهیم که این سرعت برابر است با

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (107-12)$$

که در آن فرض شده است که مشتق در طرف راست این معادله باید به ازای بسامد نمونه امواج گروه محاسبه شود.^۱

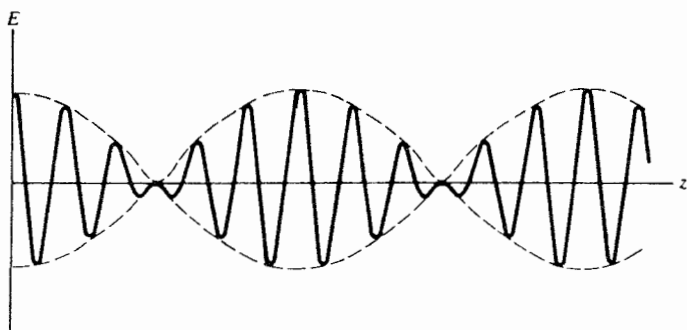
به خاطر سادگی در عملیات ریاضی، گروه موجی متشکل از برهم نهش تنها دو موج هماهنگ را بررسی می‌کنیم که دامنه‌های یکسان دارند اما بسامدها و طول موجهای آنها کمی باهم تفاوت دارند. اگر جهت انتشار در امتداد محور z باشد، می‌توانیم این برهم نهش را به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}E_0 \cos(\omega t - kz) + \hat{\mathbf{x}}E_0 \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)z] \quad (108-12)$$

یا

$$\mathbf{E} = 2\hat{\mathbf{x}}E_0 \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t - \frac{1}{2}\Delta k z\right) \cos\left[\left(\omega + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t - \left(k + \frac{1}{2}\Delta k\right)z\right] \quad (109-12)$$

شکل ۵-۱۲ این موج را در یک لحظه از زمان نشان می‌دهد. اگر سرعت فاز هر دو موج در معادله ۱۰۹-۱۲ یکی باشد (محیط ناپاشنده)، این موجها همیشه همگام می‌مانند. آنگاه تمام نقش شکل ۵-۱۲ بدون تغییر به طرف راست منتقل می‌شود، و قله پوش با سرعتی برابر با سرعت هر یک از موجها حرکت می‌کند. اما اگر سرعتهای فاز متفاوت باشند (محیط پاشنده)، قله پوش نسبت به موجهای مؤلفه حرکت می‌کند. برای به دست آوردن سرعت قله، ملاحظه می‌کنیم که اولین عامل



شکل ۵-۱۲ برهم نهش دو موج با بسامدها و طول موجهایی که تفاوتشان جزئی است. پوش موج مرکب نمایشگر ضربانهاست.

۱. چون تمام موجهای موردنظر در گستره باریکی از بسامدها واقع شده‌اند، برای تعیین سرعت گروه تعریف دقیق بسامد نمونه لازم نیست. توجه کنید که برای یک تپ موج کلی متشکل از برهم نهش امواج هماهنگ با گستره‌ای پهن از بسامدها، سرعت گروه به‌طور دقیق تعریف نمی‌شود؛ این تپ موج ضمن انتشار تغییرات سریع و زیادی از لحاظ شکل پیدا می‌کند؛ و نمی‌توانیم قله متمایزی را برای اندازه‌گیری سرعت آن تعیین کنیم.

در معادله ۱۲-۱۰۹ نمایشگر پوشی است که در شکل ۱۲-۵ نشان داده شده است. بنابراین، قله متناظر است با $\frac{1}{4}\Delta k z - \frac{1}{4}\Delta\omega t = \pi/2$ ، و در نتیجه سرعت قله برابر است با

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (12-110)$$

چون $\Delta\omega$ و Δk کوچک‌اند، نسبت $\Delta\omega/\Delta k$ را می‌توانیم با $d\omega/dk$ تقریب بگیریم، و بدین ترتیب معادله ۱۲-۱۰۷ به دست می‌آید.

سرعت گروه سرعت علائم موجی در محیط پاشنده است. علامت موجی باید از یک تب موج متناهی تشکیل شده باشد. هیچ علامتی را نمی‌توان با یک موج هماهنگ محض فرستاد-این موج همیشه ادامه دارد، دارای هیچ آغاز و پایانی نیست، و هیچ پیامی را منتقل نمی‌کند. برای انتقال پیام، باید موج هماهنگ را قطع و وصل کنیم (در اصطلاح رادیویی، باید موج حامل را مدوله کنیم). این کار همان ساختن تب موج متناهی است.

برای محاسبه سرعت گروه، معمولاً بهتر است k را به صورت تابعی از ω در نظر بگیریم، و در نتیجه

$$v_g = \frac{1}{dk(\omega)/d\omega} \quad (12-111)$$

برای مثال، اگر n را از معادله ۱۲-۱۰۳ به دست آوریم:

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \frac{4\pi N e^2 / m_e}{\omega_0^2 - \omega^2}} \quad (12-112)$$

و با توجه به رابطه

$$k(\omega) = \frac{\omega n(\omega)}{c}$$

داریم

$$v_g = \frac{1}{dk(\omega)/d\omega} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{c \sqrt{1 + \frac{4\pi N e^2 / m_e}{\omega_0^2 - \omega^2}}}{1 + \frac{4\pi e^2 N \omega_0^2 / m_e}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \quad (12-113)$$

به آسانی می‌توان واریسی کرد که به ازای تمام مقادیر ω به دست می‌آوریم $v_g < c$ ؛ پس علائم موجی این شرط نسبیت را برآورده می‌کنند که هیچ علامتی نمی‌تواند سریعتر از نور حرکت کند.

تمرین ۱۱- تحقیق کنید که بنابه معادله $v_g < c$.

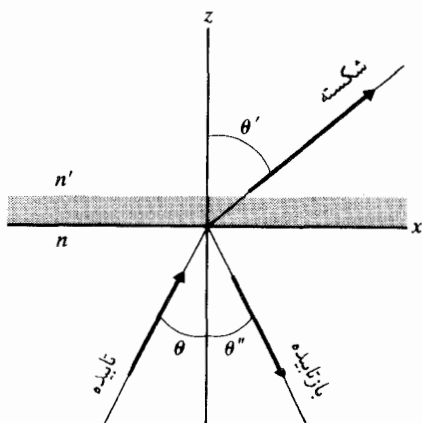
۱۲-۵ شکست

چنانکه می‌دانیم، وقتی موج نور از یک محیط به محیط دیگر وارد شود شکسته می‌شود. تغییر راستای انتشار موج در سطح جدایی دو محیط از قانون اسنل برای شکست به دست می‌آید:

$$n \sin \theta = n' \sin \theta' \quad (12-114)$$

که در آن n و n' ضرایب شکست دو محیط هستند، و θ و θ' زاویه‌هایی هستند که راستاهای انتشار با عمود بر سطح جدایی می‌سازند (شکل ۱۲-۶). در این بخش، با استفاده از معادلات ماکسول این قانون شکست و فرمولهای مربوط به شدت موجهای شکسته و بازتابیده را به دست می‌آوریم.

شکل ۱۲-۶ بردارهای موج مربوط به موجهای تابیده، شکسته و بازتابیده را نشان می‌دهد. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی این موجها به ترتیب عبارت‌اند از



شکل ۱۲-۶ بردارهای موج مربوط به موجهای تابیده، شکسته و بازتابیده، و زاویه‌های تابش، شکست و بازتاب.

تابش:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \quad (115-12)$$

$$\mathbf{B} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \quad (116-12)$$

شکست:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})} \quad (117-12)$$

$$\mathbf{B}' = \frac{c}{\omega} \mathbf{k}' \times \mathbf{E}'_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})} \quad (118-12)$$

بازتاب:

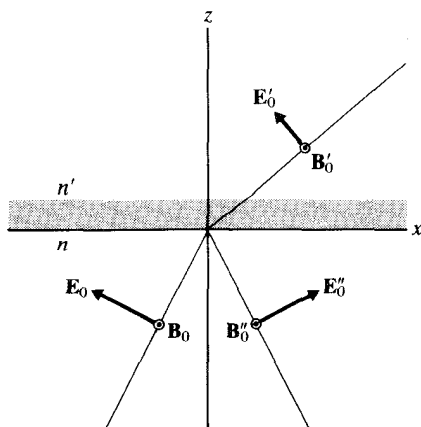
$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x})} \quad (119-12)$$

$$\mathbf{B}'' = \frac{c}{\omega} \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x})} \quad (120-12)$$

چون بزرگیهای بردارهای موج عبارتند از $k = n\omega/c$ ، $k' = n'\omega/c$ و $k'' = n\omega/c$ ، بزرگی هر یک از میدانهای مغناطیسی، چنانکه باید، برابر است با ضریب شکست ضربدر بزرگی میدان الکتریکی.

در معادلات بالا، به طور ضمنی فرض شده است که بسامدهای موجها یکسان هستند. اگر بسامدها یکسان نباشند شرایط مرزی نمیتواند در تمام زمانها برآورده شوند برای موجهایی با بسامدهای مختلف، شرایط مرزی در یک زمان اولیه میتواند برآورده شوند اما پس از آن موجها همگام نخواهند بود و شرایط مرزی نقض خواهند شد. این قاعده برابری بسامدهای تمام موجهای حاصل از یک موج تابیده، وابستگی ضریب شکست به مکان هرچه باشد و شکل مرزها هرچه باشد، به طور کلی برای هر محیط خطی تحت شرایط حالت پایا برقرار است. بدین ترتیب، موجهای حاصل از شکستها یا بازتابهای چندگانه یا پراش همگی دارای بسامد موج تابیده هستند، اما طول موج آنها مطابق با ضریب شکست تغییر میکند. بسامد تنها در صورتی تغییر میکند که ضریب شکست بستگی به زمان داشته باشد در تمام محاسبات در اینجا، ضریب شکست را مستقل از زمان میگیریم.

در سطح جدایی $z = 0$ ، میدانها باید شرایط مرزی ۴-۲۷، ۴-۳۰، ۱۱-۶۰ و ۱۱-۶۱ را که بیانگر پیوستگی مؤلفه‌های موازی با یا عمود بر سطح جدایی، مربوط به میدانهای الکتریکی و



شکل ۱۲-۷ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی موجهای تابیده، شکسته و بازتابیده. میدانهای الکتریکی موازی با (صفحه xz) هستند، و میدانهای مغناطیسی بر این صفحه عمودند. نقطه‌ها نوک پیکانهای نمایشگر میدانهای مغناطیسی را نشان می‌دهند. پیکانها قرارداد علامت را برای دامنه‌های E_0 ، E'_0 و E''_0 تعیین می‌کنند؛ دامنه مثبت است هرگاه میدان الکتریکی در جهت پیکان باشد، و منفی است هرگاه میدان الکتریکی در خلاف جهت پیکان باشد.

مغناطیسی مقتضی، هستند برآورده کنند:

$$E_{\parallel} + E''_{\parallel} = E'_{\parallel} \quad (۱۲۱-۱۲)$$

$$D_{\perp} + D''_{\perp} = D'_{\perp} \quad (۱۲۲-۱۲)$$

$$H_{\parallel} + H''_{\parallel} = H'_{\parallel} \quad (۱۲۳-۱۲)$$

$$B_{\perp} + B''_{\perp} = B'_{\perp} \quad (۱۲۴-۱۲)$$

برای بررسی این شرایط مرزی، بهتر است فرض کنیم موج تابیده دارای یکی از دو قطبش خطی است: میدان الکتریکی یا موازی با صفحه تابش (صفحه xz) است یا عمود بر صفحه تابش است. هر قطبش دیگری را می‌توان برهم‌نهمی از این دو قطبش پایه در نظر گرفت. شکل ۱۲-۷ راستای میدانها را برای مورد اول نشان می‌دهد؛ میدان الکتریکی موازی با صفحه تابش و میدان مغناطیسی عمود بر آن است. در اینجا، E_{\parallel} منطبق بر E_x ، D_{\perp} منطبق بر D_z ، H_{\parallel} منطبق بر H_y و B_{\perp} منطبق بر B_z است. بنابراین، در $z = 0$ شرایط موازی ۱۲۱-۱۲ و ۱۲۳-۱۲ عبارت‌اند از

$$-E_0 \cos \theta e^{-i(\omega t - kx \sin \theta)} + E''_0 \cos \theta'' e^{-i(\omega t - kx \sin \theta'')} \\ = -E'_0 \cos \theta' e^{-i(\omega t - k'x \sin \theta')} \quad (۱۲۵-۱۲)$$

$$\frac{n}{\mu} E_0 e^{-i(\omega t - kx \sin \theta)} + \frac{n}{\mu} E''_0 e^{-i(\omega t - kx \sin \theta'')} = \frac{n'}{\mu'} E'_0 e^{-i(\omega t - k'x \sin \theta')} \quad (12-126)$$

در معادله بالا می‌توانستیم ضرایب μ و μ' را، بدون نقض چندان زیاد کلیت، حذف کنیم زیرا موادی که موج نور یا میکروموج را از خود عبور می‌دهند معمولاً دارای پذیرفتاری مغناطیسی قابل چشمپوشی هستند. اما ضرایب μ و μ' را نگه می‌داریم زیرا زحمت زیادی ندارند.

چون وابستگی زمانی در این معادلات از طریق عامل مشترک $e^{-i\omega t}$ است، اگر این معادلات در یک زمان اولیه مثلاً $t = 0$ برقرار باشند در تمام زمانها برقرار خواهند بود. (قاعده برابری بسامد برای تمام موجها در اینجا وارد محاسبات می‌شود؛ اگر این قاعده را قبلاً فرض نمی‌کردیم، اکنون معادله‌های ۱۲-۱۲۵ و ۱۲-۱۲۶ ما را وادار به پذیرفتن آن می‌کنند.) اکنون می‌توانیم از وابستگی زمانی صرفنظر کنیم و عامل مشترک $e^{-i\omega t}$ را حذف کنیم.

شرایط مرزی باید همه‌جا در سطح جدایی برقرار باشند یعنی باید به‌ازای تمام مقادیر x برقرار باشند. این امر ایجاب می‌کند که عوامل $e^{ikx \sin \theta}$ ، $e^{ikx \sin \theta'}$ و $e^{ik'x \sin \theta'}$ باهم برابر باشند. در نتیجه

$$k \sin \theta = k \sin \theta'' \quad \text{و} \quad k \sin \theta = k' \sin \theta' \quad (12-127)$$

از معادله اول نتیجه می‌گیریم که زاویه‌های تابش و بازتاب باهم برابرند:

$$\theta = \theta'' \quad (12-128)$$

این رابطه قانون بازتاب است. با توجه به $k = n\omega/c$ و $k' = n'\omega/c$ از معادله دوم نتیجه می‌گیریم که

$$n \sin \theta = n' \sin \theta' \quad (12-129)$$

این رابطه قانون اسنل برای شکست است. توجه کنید که این دو قانون از جزئیات شرایط مرزی مستقل هستند؛ هر دو قانون تنها به‌وجود شرط مرزی بستگی دارند نه به نوع آن—معادله ۱۲-۱۲۵، و همچنین معادله ۱۲-۱۲۶ یا هر معادله‌ای که بیانگر برابری بعضی از میدانهای موج در سطح جدایی باشد، منجر به این دو قانون می‌شود.

اکنون می‌توانیم تمام عوامل نمایی را در معادله‌های ۱۲-۱۲۵ و ۱۲-۱۲۶ حذف کنیم:

$$-E_0 \cos \theta + E''_0 \cos \theta = -E'_0 \cos \theta' \quad (۱۳۰-۱۲)$$

$$\frac{n}{\mu} E_0 + \frac{n}{\mu} E''_0 = \frac{n'}{\mu'} E'_0 \quad (۱۳۱-۱۲)$$

از این معادلات E'_0 و E''_0 را برحسب E_0 به دست می‌آوریم:
وقتی E_0 موازی با صفحه تابش است:

$$E'_0 = \frac{2(n/\mu) \cos \theta}{(n'/\mu') \cos \theta + (n/\mu) \cos \theta'} E_0 \quad (۱۳۲-۱۲)$$

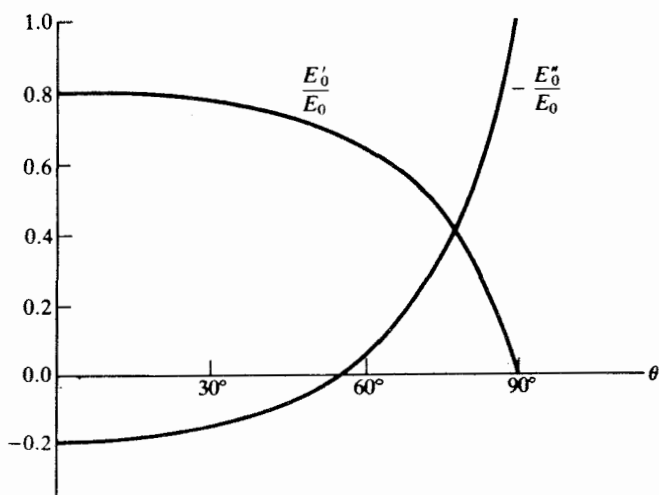
$$E''_0 = \frac{(n'/\mu') \cos \theta - (n/\mu) \cos \theta'}{(n'/\mu') \cos \theta + (n/\mu) \cos \theta'} E_0 \quad (۱۳۳-۱۲)$$

این روابط را معادلات فرنل می‌نامند. اگر موج تابیده عمود بر سطح جدایی بتابد $(\theta = \theta' = \theta'' = \pi/2)$ ، این معادلات به صورت زیر در می‌آیند

$$E'_0 = \frac{2(n/\mu)}{(n'/\mu') + (n/\mu)} E_0 \quad (۱۳۴-۱۲)$$

$$E''_0 = \frac{(n'/\mu') - (n/\mu)}{(n'/\mu') + (n/\mu)} E_0 \quad (۱۳۵-۱۲)$$

شکل ۱۲-۸ نمودار نسبت‌های E'_0/E_0 و E''_0/E_0 را به صورت تابع زاویه تابش نشان می‌دهد. در این نمودار فرض کرده‌ایم $n = ۱$ ، $n' = ۱.۵$ و $\mu = \mu' = ۱$. این اعداد مربوط به موج نوری است که از هوا وارد شیشه کرّاون می‌شود. نزدیک $\theta = \mu/2$ ، از شکل ۱۲-۸ دیده می‌شود که $E'_0 \rightarrow ۰$ و $E''_0 \rightarrow -۱$. این نتایج نشان می‌دهند چرا وقتی زاویه تابش بسیار کوچک است شیشه تخت و سایر مواد بازتاب شدید می‌دهند. در $\theta = ۰$ هم E'_0 و هم E''_0 متناهی می‌مانند؛ در این زاویه، دامنه بازتابیده ۲۰% دامنه تابیده است. برای گستره‌ای از زاویه‌ها نزدیک $\theta = ۰$ ، از شکل ۱۲-۸ دیده می‌شود که $E''_0/E_0 > ۰$. این امر نشان می‌دهد موج موقع بازتاب تغییر فازی به اندازه ۱۸۰° پیدا می‌کند—جهت میدان الکتریکی موج بازتابیده در خلاف جهت میدان الکتریکی موج تابیده است، یعنی جهت میدانها به صورتی است که در شکل ۱۲-۷ رسم شده است. توجه کنید که تغییر فاز برای زاویه‌های نزدیک $\theta = ۰$ نتیجه‌ای است از $n' > n$. اگر $n' < n$ ، این تغییر فاز وجود ندارد؛ اما در این مورد، تغییر فاز برای گستره‌ای از زاویه‌ها نزدیک $\pi/2$ وجود دارد.



شکل ۱۲-۸ دامنه موجهای شکسته و بازتابیده به صورت تابع زاویه تابش. (\mathbf{E}_0 موازی با صفحه تابش است.)

در یک زاویه میانه، شکل ۱۲-۸ نشان می‌دهد $E''_0 = 0$. در این زاویه، بازتاب صفر است. بنابه معادله ۱۲-۱۳۳، این زاویه بحرانی متناظر است با

$$\left(\frac{n'}{\mu'}\right) \cos \theta = \left(\frac{n}{\mu}\right) \cos \theta' \quad (12-136)$$

اگر $\mu = \mu' = 1$ ، می‌توانیم این رابطه را با ضرب کردن در قانون اسنل ساده کنیم؛ در نتیجه داریم

$$\sin \theta \cos \theta = \sin \theta' \cos \theta' \quad (12-137)$$

یا

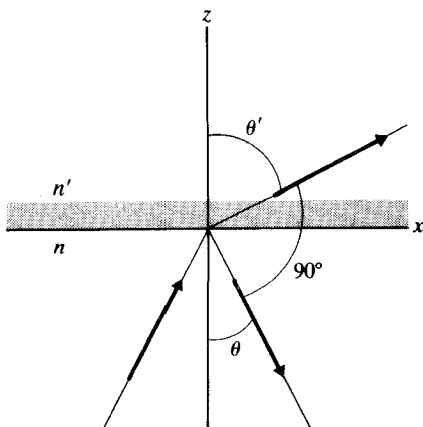
$$\frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta' \quad (12-138)$$

جواب مناسب این معادله عبارت است از

$$2\theta = \pi - 2\theta' \quad (12-139)$$

یا

$$\theta + \theta' = \frac{\pi}{2} \quad (12-140)$$



شکل ۹-۱۲ وقتی $\theta + \theta' = \pi/2$ ، موج بازتابیده دارای دامنه صفر است؛ بردار موج آن عمود بر بردار موج تابش شکسته است.

همچنان که از شکل ۹-۱۲ دیده می شود، این شرط ایجاب می کند بردار موج شکسته عمود بر بردار موج بازتابیده باشد. با استفاده مجدد از قانون اسنل، می توانیم شرط بازتاب صفر را برحسب زاویه تابش بیان کنیم:

$$\frac{n'}{n} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{\sin \theta}{\sin(\pi/2 - \theta)} = \tan \theta \quad (۱۴۱-۱۲)$$

زاویه $\tan^{-1}(n'/n)$ را زاویه بروستر می نامند.

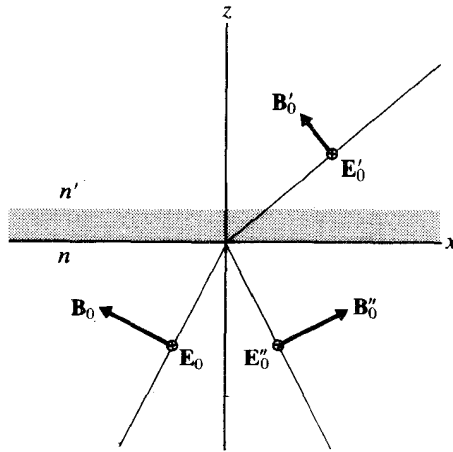
سپس باید مورد دوم را بررسی کنیم: موجی که عمود بر صفحه تابش قطبیده است. شکل ۱۲-۱۰ جهت میدانها را برای این مورد نشان می دهد؛ میدان الکتریکی عمود بر صفحه تابش و میدان مغناطیسی موازی با صفحه تابش است. آنگاه از شرایط مرزی معادلات فرنل زیر را به دست می آوریم:

وقتی \mathbf{E}_0 عمود بر صفحه تابش است:

$$E'_0 = \frac{2(n/\mu) \cos \theta}{(n/\mu) \cos \theta + (n'/\mu') \cos \theta'} E_0 \quad (۱۴۲-۱۲)$$

$$E''_0 = \frac{(n/\mu) \cos \theta - (n'/\mu') \cos \theta'}{(n/\mu) \cos \theta + (n'/\mu') \cos \theta'} E_0 \quad (۱۴۳-۱۲)$$

برای تابش عمودی ($\theta = \theta' = \theta'' = \pi/2$) این معادلات به همان معادلات مربوط به \mathbf{E}_0 موازی با صفحه تابش تبدیل می شوند. (معادله ۱۴۲-۱۲ تبدیل به معادله ۱۳۴-۱۲ می شود،



شکل ۱۰-۱۲ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی موجهای تابیده، شکسته و بازتابیده. میدانهای مغناطیسی موازی با صفحه تابش (صفحه xz) و میدانهای الکتریکی عمود بر صفحه تابش هستند. علامتهای ضرب دم بیکانهای نمایشگر میدانهای الکتریکی را نشان می‌دهند. مانند شکل ۷-۱۲، بیکانها قرارداد علامت برای دامنه‌های E_0 ، E'_0 و E''_0 را تعیین می‌کنند.

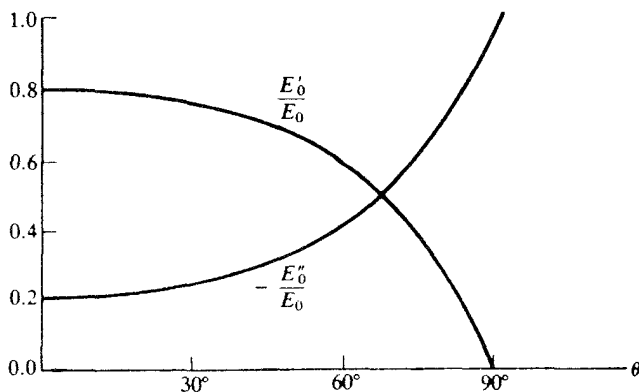
و معادله ۱۲-۱۴۳ با علامت مخالف تبدیل به معادله ۱۲-۱۳۵ می‌شود؛ این علامت مخالف ناشی از تفاوت قراردادهایی است که در شکل‌های ۷-۱۲ و ۱۰-۱۲ برای جهت‌های E_0 و E''_0 تعیین شده‌اند. این توافق را می‌توان از این ملاحظه درک کرد که اگر $\theta = 0^\circ$ ، صفحه تابش نامعین است—آنگاه تمایزی بین موارد E_0 موازی و عمود بر صفحه تابش وجود ندارد.

■ تمرین ۱۲- معادلات فرنل ۱۲-۱۴۲ و ۱۲-۱۴۳ را به دست آورید.

شکل ۱۱-۱۲ نمودارهای E'_0/E_0 و E''_0/E_0 را نشان می‌دهد. در اینجا نیز فرض کرده‌ایم $n = 1.5$ ، $n' = 1$ و $\mu = \mu' = 1$. می‌بینیم که به‌ازای تمام مقادیر θ داریم $E''_0/E_0 < 0$. این رابطه نشان می‌دهد موج بازتابیده تغییر فازی به اندازه 180° پیدا کرده است—جهت میدان الکتریکی موج بازتابیده مخالف جهت میدان الکتریکی موج تابیده است، یعنی مخالف با جهتی که در شکل ۱۰-۱۲ رسم شده است. توجه کنید که این تغییر فاز ناشی از $n' > n$ است؛ اگر $n' < n$ تغییر فازی وجود ندارد.

یک تفاوت مهم بین موارد E_0 موازی و E_0 عمود بر صفحه تابش این است که در مورد دوم موج بازتابیده هیچگاه صفر نیست و زاویه بروستر وجود ندارد. این تفاوت باعث پدیده قطبش

۱. اگر E_0 عمود بر صفحه تابش باشد، موج بازتابیده در صورتی می‌تواند صفر باشد که $n/n' < \mu/\mu'$ ، یعنی $1/1.5 < \mu/\mu'$ به‌ازای $n = 1$ و $n' = 1.5$. اما این اهمیت عملی چندانی ندارد.



شکل ۱۱-۱۲ دامنه‌های موجهای شکسته و بازتابیده به صورت تابع زاویه تابش. (E_0 عمود بر صفحه تابش است.)

بازتابی می‌شود. هر موج با جهت قطبش اختیاری را می‌توان برهم نهشی از دو قطبش پایه که قبلاً گفته شد در نظر گرفت. اگر این موج با زاویه بروستر به صفحه شیشه یا هر سطح دیگری فرود آید، موج بازتابیده حاصل تماماً از مؤلفه میدان الکتریکی عمود بر صفحه تابش تشکیل خواهد شد؛ یعنی موج بازتابیده حاصل عمود بر صفحه تابش قطبیده خواهد بود. اگر این موج با زاویه‌ای غیر از زاویه بروستر به سطح فرود آید، مؤلفه میدان الکتریکی موازی با صفحه تابش به طور کامل از بین نخواهد رفت؛ اما، مقایسه شکل‌های ۸-۱۲ و ۱۱-۱۲ نشان می‌دهد در موج بازتابیده این مؤلفه کوچکتر از مؤلفه عمود بر صفحه تابش است. این امر نشان می‌دهد چرا نور ناقطبیده خورشید مرکب از موجهایی با قطبشهای اتفاقی—موقع بازتاب از سطح آب به طور جزئی قطبیده می‌شود. این قطبش جزئی را می‌توان به سادگی با نگاه کردن به تصویر خورشید در عینکهای آفتابی پولاروید مشاهده کرد.

۱۲-۶ بازتاب داخلی کلی

اگر محیطی که در آن موج تابیده حرکت می‌کند دارای ضریب شکستی بزرگتر از ضریب شکست محیطی باشد که موج شکسته در آن حرکت می‌کند (یعنی $n > n'$)، آنگاه زاویه شکست به بیشترین مقدار خود 90° می‌رسد درحالی‌که زاویه تابش کمتر از 90° است. زاویه حد تابش از قانون اسنل به ازای $\sin \theta' = 1$ به دست می‌آید:

$$\sin \theta = \frac{n'}{n} \quad (۱۲-۱۴۴)$$

به عنوان مثال، برای شیشه کراون در هوا داریم $\sin \theta = 1/1.5$ و $\theta = 42^\circ$. هر زاویه تابشی که از آنچه معادله ۱۲-۱۴۴ تعیین می‌کند بیشتر باشد منجر به بازتاب داخلی کلی می‌شود. موج شکسته‌ای در محیط دوم منتشر نخواهد شد. اما، چنانکه خواهیم دید، تحت شرایط بازتاب داخلی کلی، برخی از موج تابیده به داخل محیط دوم نفوذ می‌کند و در امتداد سطح جدایی منتشر می‌شود. برای به دست آوردن معادلات میدان در محیط دوم، از شرایط مرزی شروع می‌کنیم. چون مقادیر n' یا n هر چه باشند این شرایط باید برآورده شوند، باز هم باید داشته باشیم

$$\sin \theta' = \frac{n}{n'} \sin \theta \quad (12-145)$$

تحت شرایط بازتاب داخلی کلی، $\sin \theta' > 1$; اگر θ' حقیقی باشد این نتیجه غیرممکن است، اما اگر θ' مختلط باشد ممکن است. در محاسبات خود مقدار θ' را لازم نداریم اما $\cos \theta'$ را لازم داریم:

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta'} = \pm i \sqrt{\sin^2 \theta' - 1} \\ &= \pm i \sqrt{\left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2 - 1} \end{aligned} \quad (12-146)$$

اگر مانند بخش ۱۲-۵ سطح جدایی صفحه xy و صفحه تابش صفحه xz باشد، موج در محیط دوم عبارت است از

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}' \cdot \exp[-i\omega t + ik'(x \sin \theta' + z \cos \theta')] \quad (12-147)$$

$$= \mathbf{E}' \cdot \exp \left[-i\omega t + ik'x \frac{n}{n'} \sin \theta \mp k'z \sqrt{\left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2 - 1} \right] \quad (12-148)$$

از علامت دوتایی \mp در تابع بالا، علامت-متناظر با علامت + در معادله ۱۲-۱۴۶ است، و علامت + متناظر با علامت - در معادله ۱۲-۱۴۶ است. روشن است که علامت + در معادله ۱۲-۱۴۸ قابل قبول نیست. این معادله به ازای $z \rightarrow \infty$ منجر به $\mathbf{E}' \rightarrow \infty$ می‌شود. بنابراین، باید در معادله ۱۲-۱۴۸ علامت - و در معادله ۱۲-۱۴۶ علامت + را انتخاب کنیم:

$$\cos \theta' = i \sqrt{\left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2 - 1} \quad (12-149)$$

این عبارت $\cos \theta'$ را باید در معادلات قبلی برای \mathbf{E}' و \mathbf{E}'' (معادله‌های ۱۲-۱۳۲ و ۱۲-۱۳۳، و معادله‌های ۱۲-۱۴۲ و ۱۲-۱۴۳) جاگذاری کنیم. مقدار انگاری $\cos \theta'$ باعث می‌شود \mathbf{E}' و

E'' مختلط شوند. موج در محیط دوم و موج بازتابیده در محیط اول نسبت به موج تابیده انتقال فاز دارند.

موج در محیط دوم را با دقت بیشتری بررسی می‌کنیم. با انتخاب درست علامت، معادله ۱۲-۱۴۸ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}' \cdot \exp \left[-i\omega t + ik'x \frac{n}{n'} \sin \theta - k'z \sqrt{\left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2 - 1} \right] \quad (12-150)$$

این موج در جهت x (با طول موج $2\pi n'/k'n \sin \theta$) منتشر می‌شود اما در جهت z بدون انتشار به طور نمایی و امی پاشد. در نتیجه، این موجی است که موازی با سطح جدایی حرکت می‌کند، و دامنه آن کوچک است مگر در مجاورت بلافضل سطح جدایی. اگر شناسه نمایی واپاشنده را برابر با -1 قرار دهیم، فاصله‌ای را به دست می‌آوریم، Δz ، که دامنه موج در آن به اندازه e^{-1} کاهش می‌یابد:

$$k' \Delta z \sqrt{\left(\frac{n}{n'} \sin \theta\right)^2 - 1} = 1 \quad (12-151)$$

یا

$$\Delta z = \frac{\lambda'}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(n/n' \sin \theta)^2 - 1}} \quad (12-152)$$

به طور تقریبی، این فاصله را می‌توانیم عمق نفوذ موج در محیط دوم در نظر بگیریم. برای مثال، اگر $n = 1$ ، $n' = 1$ و $\theta = 45^\circ$ ، عمق نفوذ برابر است با

$$\Delta z = 0.45 \lambda' \quad (12-153)$$

این نتیجه نشان می‌دهد موجی که به محیط دوم نفوذ می‌کند در لایه بسیار نازکی موازی با سطح جدایی باقی می‌ماند.

۱۲-۷ امواج تخت در محیط رسانا

اگر محیطی که موج در آن منتشر می‌شود رسانا باشد، میدان الکتریکی یک جریان رسانشی ایجاد می‌کند:

$$\mathbf{j}_F = \sigma \mathbf{E} \quad (12-154)$$

و این جریان روی انتشار موج اثر می‌گذارد. با منظور کردن این جریان رسانشی، معادلات ماکسول ۱۲-۸۰ تا ۱۲-۸۳ برای محیط خطی همسانگرد و همگن به صورت زیر در می‌آیند

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (155-12)$$

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} \quad (156-12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (157-12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (158-12)$$

که در آن طبق معمول فرض کرده‌ایم محیط حامل بار آزاد اضافی نیست، به طوری که $\rho_F = 0$. برای میدان الکتریکی نوسانی با وابستگی زمانی $e^{-i\omega t}$ داریم

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{E} \quad (159-12)$$

یا

$$\mathbf{E} = \frac{i}{\omega} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (160-12)$$

بنابراین، به جای معادله ۱۲-۱۵۶ می‌توانیم قرار دهیم

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \left(\varepsilon + \frac{4\pi i\sigma}{\omega} \right) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (161-12)$$

این معادله نشان می‌دهد وارد کردن جریان رسانشی ۱۲-۱۵۴ در معادلات ماکسول همان اثری را دارد که به جای ثابت دی‌الکتریک ε قرار دهیم $\varepsilon + 4\pi i\sigma/\omega$. بنابراین، می‌توانیم محیط رسانا را به صورتی در نظر بگیریم که دارای ضریب شکست مختلط زیر است

$$n = \sqrt{\left(\varepsilon + \frac{4\pi i\sigma}{\omega} \right) \mu} \quad (162-12)$$

با این عبارت جدید برای ضریب شکست، تمام معادلات بخش ۱۲-۴ معتبر باقی می‌مانند. برای مثال، بردار موج برابر است با

$$k = \frac{n\omega}{c} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\left(\varepsilon + \frac{4\pi i\sigma}{\omega} \right) \mu} \quad (163-12)$$

و میدان الکتریکی موج تختی که در جهت z حرکت می‌کند و دارای قطبش در جهت مثلاً x است، عبارت است از

$$\mathbf{E} = E \cdot \hat{x} e^{-i(\omega t - kz)} \quad (۱۶۴-۱۲)$$

$$= E \cdot \hat{x} \exp \left[-i\omega t + \frac{i\omega}{c} \sqrt{\left(\epsilon + \frac{4\pi i\sigma}{\omega} \right) \mu z} \right] \quad (۱۶۵-۱۲)$$

و میدان مغناطیسی آن عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= nE \cdot \hat{y} \exp \left[-i\omega t + \frac{i\omega}{c} \sqrt{\left(\epsilon + \frac{4\pi i\sigma}{\omega} \right) \mu z} \right] \\ &= \sqrt{\left(\epsilon + \frac{4\pi i\sigma}{\omega} \right) \mu} E \cdot \hat{y} \exp \left[-i\omega t + \frac{i\omega}{c} \sqrt{\left(\epsilon + \frac{4\pi i\sigma}{\omega} \right) \mu z} \right] \end{aligned} \quad (۱۶۶-۱۲)$$

چون ضریب شکست مختلط است، اختلاف فازی بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی وجود دارد.

آموزنده است دو مورد را به تفصیل بررسی کنیم: رسانای ضعیفی با $\epsilon \gg 4\pi\sigma/\omega$ و رسانای بسیار خوبی با $\epsilon \ll 4\pi\sigma/\omega$ در مورد اول داریم

$$k \simeq \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu} + \frac{2\pi i\sigma}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (۱۶۷-۱۲)$$

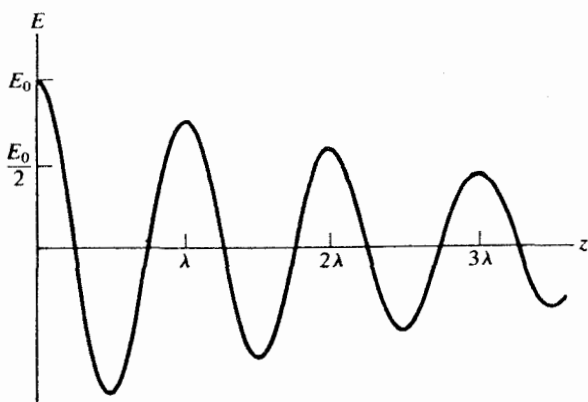
به طوری که موج ۱۶۵-۱۲ به صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{E} = E \cdot \hat{x} \exp \left(-i\omega t + \frac{i\omega}{c} \sqrt{\mu\epsilon} z - \frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} z \right) \quad (۱۶۸-۱۲)$$

این یک موج میراست—همچنان که در جهت z حرکت می‌کند دامنه آن به طور نمایی کاهش می‌یابد (شکل ۱۲-۱۲). فاصله واپاشی مشخصه‌ای که دامنه موج در آن به اندازه e^{-1} کاهش می‌یابد برابر است با

$$\Delta z = \frac{c}{2\pi\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \quad (۱۶۹-۱۲)$$

با توجه به فرض $\epsilon \gg 4\pi\sigma/\omega$ ، این فاصله واپاشی بسیار بیشتر از طول موج است.



شکل ۱۲-۱۲ میدان الکتریکی به صورت تابعی از مکان در موجی که در محیطی رسانا با رسانایی کم منتشر می‌شود. طول موج این موج برابر است با $\lambda = 2\pi c/\omega\sqrt{\mu\epsilon}$.

تمرین ۱۳- نشان دهید $\Delta z \gg \lambda$.

در مورد دوم (رسانای بسیار خوب) می‌توانیم در معادله ۱۲-۱۶ از ϵ صرف‌نظر کنیم. نتیجه داریم

$$k \simeq \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{4\pi i \sigma \mu}{\omega}} \quad (12-170)$$

یا، چون $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$:

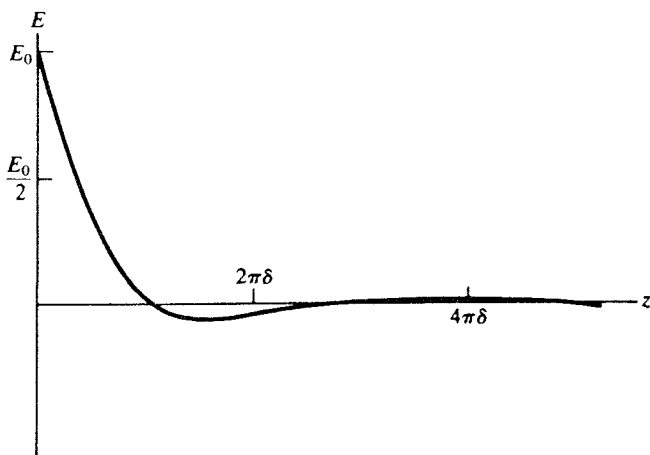
$$k \simeq (1+i) \frac{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}{c} \quad (12-171)$$

موج تخت در این مورد عبارت است از

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{x} \exp\left(-i\omega t + \frac{i}{c} \sqrt{2\pi\sigma\mu\omega} z - \frac{1}{c} \sqrt{2\pi\sigma\mu\omega} z\right) \quad (12-172)$$

این یک موج سریعاً میراست (شکل ۱۲-۱۳). این موج دارای فاصله واپاشی مشخصه زیر است

$$\Delta z = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}} \quad (12-173)$$



شکل ۱۲-۱۳ میدان الکتریکی به صورت تابعی از مکان برای موجی که در محیطی رسانا با رسانایی زیاد منتشر می‌شود.

این فاصله را عمق پوست می‌نامند و معمولاً با δ نشان می‌دهند:

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}} \quad (12-174)$$

توجه کنید که عمق پوست بستگی به بسامد دارد—معادله ۱۲-۱۷۴، علاوه بر بستگی صریح به $1/\sqrt{\omega}$ ، می‌تواند بستگی ضمنی هم به ω داشته باشد زیرا در بعضی رساناها σ تابع بسامد است. اما در فلزات، σ تقریباً ثابت است و بنابراین داریم $\delta \propto 1/\sqrt{\omega}$. برای مثال، مس دارای $\delta = 6.3 \times 10^{-2} \text{ cm}$ در 10^4 Hz و $\delta = 2.0 \times 10^{-2} \text{ cm}$ در 10^9 Hz است. بدین ترتیب، امواج با بسامد زیاد در رساناها بسیار سریع تضعیف می‌شوند و انرژی آنها تبدیل به گرمای ژول می‌شود. برای موجی که به یک رسانای خوب می‌تابد، نفوذ محدود به لایه‌ای نازک است؛ این پدیده را اثر پوست می‌نامند. این ناتوانی میدانهای الکتریکی نوسانی موج برای نفوذ در رسانا در مورد میدانهای الکتریکی نوسانی که به‌طور شبه‌استاتیکی توسط توزیع بار ایجاد می‌شوند نیز صادق است؛ برای مثال، اگر سیمی حامل جریانی با بسامد زیاد باشد میدان الکتریکی داخل سیم برخلاف مورد بسامد صفر (جریان پایا)، یکنواخت نخواهد بود؛ میدان الکتریکی در سطح سیم از همه جا بیشتر است و با عمق پوست ۱۲-۱۷۴ به‌طور نمایی واپاشیده می‌شود. دلیل اینکه چرا میدان الکتریکی متناوب با بسامد زیاد همان اثر پوست میدان موج را نشان می‌دهد این است که با صرف‌نظر کردن از ϵ در معادله ۱۲-۱۶۱ جریان جابه‌جایی را حذف می‌کنیم؛ با این حذف، معادله مربوط به میدان موج با معادله مربوط به میدان متناوب یکی می‌شود.

برای محاسبه دامنه‌های موجهای شکسته و بازتابیده در مورد موجی که به یک رسانا می‌تابد، می‌توانیم صرفاً از معادلات فرنل به‌ازای ضریب شکست مختلط $۱۲-۱۶۲$ استفاده می‌کنیم. معادلاتی که در این بخش به‌دست آوردیم برای امواج در پلاسما یا گاز یونیده نیز به‌کار می‌روند. فراوانی الکترونهاى آزاد و یونها رسانایی زیادی به پلاسما می‌دهد. الکترونهاى آزاد سهم عمده را در رسانایی دارند زیرا جرم کم آنها امکان پاسخ سریع به میدان الکتریکی را به آنها می‌دهد. با بررسی حرکت یک الکترون، همچنان‌که در بخش $۱۲-۴$ انجام دادیم، می‌توانیم فرمول ساده‌ای برای رسانایی پلاسما به‌دست آوریم. برای الکترون آزادی که تحت تأثیر یک موج الکترومغناطیسی قطبیده در جهت x است، معادله حرکت همان معادله $۱۲-۹۸$ به‌ازای $\omega_0 = 0$ است:

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -e E_0 e^{-i\omega t} \quad (۱۷۵-۱۲)$$

این معادله دارای جواب حالت پایای زیر است

$$x = \frac{e}{m_e \omega^2} E_0 e^{-i\omega t} \quad (۱۷۶-۱۲)$$

اگر N الکترون در واحد حجم وجود داشته باشد، چگالی جریان برابر است با

$$j_x = -Ne \frac{dx}{dt} = \frac{iNe^2}{m_e \omega} E_0 e^{-i\omega t} \quad (۱۷۷-۱۲)$$

از این رابطه دیده می‌شود که رسانایی پلاسما برابر است با

$$\sigma = \frac{iNe^2}{m_e \omega} \quad (۱۷۸-۱۲)$$

عامل‌انگاری در رسانایی صرفاً به این معنی است که جریان و میدان الکتریکی خارج از فاز هستند؛ جریان ۹۰° از میدان الکتریکی «عقب می‌افتد». با جاگذاری این عبارت رسانایی در معادله $۱۲-۱۶۳$ ، به‌دست می‌آوریم

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\left(\epsilon - \frac{4\pi Ne^2}{m_e \omega^2}\right) \mu} \quad (۱۷۹-۱۲)$$

این رابطه را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (۱۸۰-۱۲)$$

که در آن ω_p عبارت است از

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{\epsilon m_e}} \quad (12-181)$$

این کمیت را بسامد پلاسما می‌نامند. اگر ω کوچکتر از ω_p باشد، عدم‌موج‌انگاری محض می‌شود، و موج نمی‌تواند منتشر شود. بنابراین، بسامد پلاسما بسامد خاموشی امواج الکترومغناطیسی در پلاسما است. برای مثال، در یونسپهر زمین داریم $N \simeq 10^5/\text{cm}^3$ و $\epsilon \simeq 1$ ، که به‌ازای آنها از معادله ۱۲-۱۸۱ به‌دست آوریم $\omega_p \simeq 2 \times 10^7/\text{s} = 3\text{MHz}$. امواج رادیویی با بسامدی کمتر از این نمی‌توانند در یونسپهر نفوذ کنند.

۱۲-۸ رسیدن به تعادل در رسانای خوب

اثرات القایی در رسیدن به تعادل الکتروستاتیکی و مغناطوستاتیکی در رسانای خوب نقشی اساسی دارند. چنانکه در بخش ۹-۲ دیدیم، هر بار آزادی سریعاً، در زمانی حدود 10^{-14} ثانیه، از رسانای خوب به سمت بیرون رانده می‌شود. اما این جریان گذرا در رسانا یک میدان مغناطیسی وابسته به‌زمان ایجاد می‌کند، که یک میدان الکتریکی القا می‌کند، که یک جریان اضافی می‌کشد، و ... رسانای خوب مایل است این جریانها و میدانهای دینامیکی را برای مدتی طولانی نگه دارد. معادلات ماکسول ۱۲-۱۵۵ تا ۱۲-۱۵۸ حاکم بر این دفع تدریجی میدانها و جریانها هستند. چون در مورد کنونی، مشتقات زمانی کوچک‌اند در حالی که رسانایی بزرگ است می‌توانیم از $(\epsilon/c)\partial\mathbf{E}/\partial t$ در مقایسه با $\mathbf{E}(4\pi\sigma/c)$ صرف‌نظر کنیم؛ یعنی می‌توانیم از جریان جابه‌جایی در مقایسه با جریان حقیقی صرف‌نظر کنیم. پس معادله ۱۲-۱۵۶ تبدیل می‌شود به

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} \quad (12-182)$$

مانند محاسبه انتهای بخش ۱۲-۱، می‌توانیم از معادلات مرتبه اول ماکسول با گرفتن تاو معادله ۱۲-۱۸۲ و جاگذاری معادله‌های ۱۲-۱۵۷ و ۱۲-۱۵۸ یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برای \mathbf{B} به‌دست آوریم. به‌آسانی به‌دست می‌آوریم

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (12-183)$$

به همین ترتیب، با گرفتن تاو معادله ۱۲-۱۵۸، به‌دست می‌آوریم

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (12-184)$$

تمرین ۱۴- محاسبات لازم را برای به دست آوردن معادله‌های ۱۲-۱۸۳ و ۱۲-۱۸۴ انجام دهید. ■

معادلات دیفرانسیل ۱۲-۱۸۳ و ۱۲-۱۸۴، مشابه با معادلهٔ رسانش گرما، معادلات پخش هستند. این معادلات نشان می‌دهند چگونه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی از حجم رسانا «خارج می‌شوند». برای تخمین تقریبی زمان واهلش، متذکر می‌شویم که $\nabla^2 B$ از مرتبهٔ بزرگی B/l^2 است که در آن B مقداری است که میدان مغناطیسی نوعاً دارد و l طول مشخصه‌ای از رساناست؛ $\partial B/\partial t$ از مرتبهٔ بزرگی B/t_0 است که در آن t_0 زمان واهلش است. در نتیجه، بنابه معادلهٔ ۱۲-۱۸۳ داریم

$$\frac{B}{l^2} \simeq \frac{4\pi\mu\sigma B}{c^2 t_0} \quad (12-185)$$

پس زمانی که طول می‌کشد تا یک رسانای خوب به تعادل الکتروستاتیکی و مغناطوستاتیکی برسد تقریباً برابر است با

$$t_0 \simeq \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} l^2 \quad (12-186)$$

این عبارت زمان واهلش وابستگی معقولی به عوامل مربوط دارد—زمان واهلش با رسانایی زیاد می‌شود، و با طول رسانا نیز زیاد می‌شود. این عبارت همچنین مقادیر معقولی به دست می‌دهد. برای قطعه‌ای از مس به طول ۱ سانتیمتر، به‌ازای $\sigma \simeq 5 \times 10^{19} \text{s}^{-1}$ و $\mu \simeq 1$ ، به دست می‌آوریم

$$t_0 \simeq 10^{-2} \text{s} \quad (12-187)$$

روشن است که این نتیجه تنهاییک تخمین تقریبی است. برای به دست آوردن توصیف مفصل فرایند دفع میدانها و جریان از حجم رسانا، باید معادله‌های بخش ۱۲-۱۸۳ و ۱۲-۱۸۴ را با شرایط اولیه و شرایط مرزی مناسب حل کنیم. این یک مسئلهٔ کاملاً دشوار ریاضی است مگر اینکه پیکربندی اولیه از تقارن بسیار زیادی برخوردار باشد. برای چند مورد که هندسه‌های ساده‌ای دارند جوابهای دقیقی به دست آمده‌اند [۲].

پخش میدان مغناطیسی به خارج از حجم رسانا در روش زیبایی برای اندازه‌گیری رسانایی نمونه‌هایی از ماده کاربرد عملی پیدا می‌کند [۳]. چون زمان واهلش بستگی به رسانایی دارد (معادلهٔ ۱۲-۱۸۶)، اندازه‌گیری تجربی مستقیم زمان واهلش محاسبهٔ رسانایی را امکانپذیر می‌سازد به شرط اینکه عبارت دقیق زمان واهلش از حل دقیق ریاضی معادلهٔ پخش برای هندسهٔ قطعهٔ نمونه به دست آمده باشد. زمان واهلش میدان مغناطیسی اولیه‌ای که به رسانا داده شده است

را می‌توان از محصور کردن قطعه نمونه با سیم‌پیچ برگیر و مشاهده emf القا شده طی پخش و واپاشی میدان مغناطیسی اندازه‌گیری کرد. یک مزیت مهم این روش اندازه‌گیری رسانایی این است که به اتصالات الکتریکی به قطعه نمونه احتیاجی نیست؛ این اتصالات منشأ عمده عدم قطعیت در روشهای مرسوم دیگر هستند. علاوه بر این، روی نمونه‌های حجیم می‌توان به راحتی کار کرد.

کاربرد عملی دیگری برای پخش میدانهای مغناطیسی در آزمایشهایی پیش می‌آید که بخواهیم میدانهای مغناطیسی فوق‌العاده بزرگ (میدانهای مگاگاوس) را با تراکم کردن میدان مغناطیسی اولیه کوچکی در یک اتاقک با دیواره داخلی رسانا به وجود آوریم. شدت میدانی که می‌توان با این روش به دست آورد به علت پخش مقداری از میدان مغناطیسی به درون دیواره رسانا و به خارج آن، محدود است.

شایان تذکر است که دفع میدانها و جریانها از حجم رسانا آخرین مرحله رسیدن به تعادل الکتروستاتیک و مغناطوستاتیک نیست [۴]. رسانایی که درون آن در تعادل است می‌تواند هنوز هم جریانهای نوسانی در سطح و میدانهای موج نوسانی در اطراف خود داشته باشد. تعادل کامل موقعی به دست می‌آید که این نوسانها از بین رفته باشند. میدانهای موج نوسانی نزدیک رسانا (یا در محفظه داخل رسانا) را در فصل ۱۵ بررسی می‌کنیم. معلوم می‌شود که مقیاس زمانی برای میرایی این میدانها معمولاً بسیار کمتر از مقیاس زمانی برای دفع میدانها از حجم (معادله ۱۲-۱۸۶) است. در نتیجه، میرایی میدانهای موج سهم ناچیزی در کل زمان لازم برای رسیدن به تعادل دارد.

مراجع

1. H. C. Ohanian, *Am. J. Phys.* **54**, 500 (1986).
2. H. E. Wilhelm, *J. Math. Phys.* **23**, 10 (1982).
3. C. P. Bean, R. W. DeBlois, and L. B. Nesbitt, *J. Applied Phys.* **30**, 1976 (1959).
4. H. C. Ohanian, *Am. J. Phys.* **51**, 1020 (1983).

مسائل

۱۲-۱ یک موج الکترومغناطیسی تخت در خلأ دارای میدان الکتریکی زیر است

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{x} e^{-i(\omega t - kz)}$$

متوسط زمانی تمام مؤلفه‌های تانسور انرژی-تکانه $T^{\mu\nu}$ را برای این موج محاسبه کنید.

۱۲-۲ در آزمایشگاه، موج الکترومغناطیسی تختی با بسامد ω در جهت z حرکت می‌کند. فرض کنید چارچوب مرجع $x'y'z'$ دارای سرعت V در جهت x است. بسامد این موج را در چارچوب $x''y''z''$ به دست آورید. جهت انتشار موج را در این چارچوب تعیین کنید.

۱۲-۳ در آزمایشگاه، موج الکترومغناطیسی تختی در جهت z حرکت می‌کند. در یک مکان معین، بردار پوینتینگ لحظه‌ای این موج دارای بزرگی S و چگالی انرژی دارای بزرگی S/c است. بردار پوینتینگ و چگالی انرژی را در چارچوب مرجعی که با سرعت V در جهت x حرکت می‌کند به دست آورید.

۱۲-۴ سرعت مداری زمین حول خورشید 30 km/s است. نسبت به زمین، مکان زاویه‌ای ستاره دوری که درست بالای مدار زمین واقع است پس از ۶ ماه چه اندازه تغییر می‌کند؟ طول موج نور مرئی (سبز) ستاره دوری واقع در صفحه مدار زمین در ۶ ماه چه اندازه تغییر می‌کند؟ فرض کنید این ستاره ابتدا روی خط حرکت زمین است.

۱۲-۵ تپ تابشی در جهت z حرکت می‌کند. این تپ دارای طول نامتناهی در راستای z است اما در راستاهای x و y پهنای متناهی دارد. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی عبارتند از

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}(x, y)e^{-i(\omega t - k_z z)}$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{B}(x, y)e^{-i(\omega t - k_z z)}$$

(تذکر: این تپ موج تخت نیست، $\omega/c \neq k_z$). فرض کنید $E_z = 0$ ؛ این نوع موج را موج «الکتریکی عرضی» یا TE می‌نامند. الف) نشان دهید $B_z(x, y)$ در معادله زیر صدق می‌کند

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \right] B_z = 0$$

ب) فرض کنید یک تابع $B_z(x, y)$ داریم که در معادله بالا صدق می‌کند. با استفاده از معادلات ماکسول ۱۲-۲۸ و ۱۲-۳۰، عباراتی برای E_x ، E_y ، B_x و B_y برحسب این $B_z(x, y)$ به دست آورید. ج) نشان دهید برای این تپ تابش $\omega > ck_z$. د) نشان دهید اگر $B_z(x, y) = 0$ ، آنگاه میدانهای $E_x(x, y)$ و $E_y(x, y)$ باید ثابت باشند و تپ تابش در راستاهای x و y پهنای متناهی ندارد.

۱۲-۶ خلاصه‌ای (در یکی دو صفحه) دربارهٔ حدود تجربی که برای جرم فوتون به دست آمده‌اند بنویسید. لازم نیست تمام آزمایشها را بررسی کنید، اما باید چندتایی از آنها را مرور کنید و اصول نظری مربوط را نشان دهید. (مراجع خود را بنویسید.)

۱۲-۱۷ یک موج قطبیدهٔ دایره‌ای در جهت z حرکت می‌کند. این موج دارای گستردگی نامتناهی در راستای z و گستردگی متناهی در راستاهای x و y است. نشان دهید میدانهای

$$\mathbf{E}(t, x, y, z) = \left[E_0(x, y)(\hat{x} + i\hat{y}) + \frac{i}{k} \left(\frac{\partial E_0}{\partial x} + i \frac{\partial E_0}{\partial y} \right) \hat{z} \right] e^{-i(\omega t - kz)}$$

$$\mathbf{B}(t, x, y, z) = -i\mathbf{E}$$

یک جواب تقریبی معادلات ماکسول ۱۲-۲۷ تا ۱۲-۳۰ هستند. در اینجا، $E_0(x, y)$ تابعی است کُند تغییر که وقتی $\sqrt{x^2 + y^2}$ از یک فاصلهٔ متناهی بزرگتر می‌شود به صفر کاهش می‌یابد (منظور از «کُند تغییر» در اینجا این است که تغییر تابع و تغییر مشتق آن در فاصلهٔ $2\pi/k$ کم است).

۱۲-۸ ذرهٔ غباری از ماده‌ای با چگالی 2 g/cm^3 به شکل کره است. این ذره در فضای بین سیارات شناور است. نیروهای وارد بر ذره عبارت‌اند از جاذبهٔ گرانشی خورشید و فشار تابشی نور خورشید. این دو نیرو تابع قانون عکس مجذور هستند، اما نیروی گرانشی متناسب با حجم (یا جرم) ذره است درحالی‌که نیروی فشار تابشی متناسب با مساحت سطح آن است. اگر این نیروها در حالت موازنه باشند جرم و شعاع بحرانی ذره را به دست آورید. فرض کنید ذره نور خورشید را کاملاً جذب می‌کند. درخشندگی خورشید $1.0^{23} \text{ erg/s} \times 3.9$ است.

۱۲-۹ نشان دهید موج قطبیدهٔ دایره‌ای تحت تبدیلات لورنتس قطبیدهٔ دایره‌ای باقی می‌ماند. [راهنمایی: نشان دهید تحت تبدیلات لورنتس، دامنهٔ هریک از دو موج تخت در موج قطبیدهٔ دایره‌ای به نسبت $\gamma[1 - (V/c) \cos \theta]$ تغییر می‌کند، که در آن θ زاویهٔ بین جهت انتشار و سرعت V است.]

۱۲-۱۰ مطابق با معادلهٔ ۱۲-۶۴، چگالی تکانه در میدانهای الکترومغناطیسی را می‌توان به صورت مجموع دو جمله نوشت. نشان دهید انتگرال جملهٔ دوم روی حجم تپ موجی با گستردگی متناهی صفر است:

$$-\frac{1}{4\pi c} \int (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} \, dV = 0$$

در نتیجه، این جمله سهمی در تکانهٔ کل تپ موج ندارد.

۱۱-۱۲ یک موج قطبیده بیضوی دارای میدان الکتریکی زیر است

$$\mathbf{E} = (a\hat{x} + ib\hat{y})e^{-i(\omega t - kz)}$$

که در آن a و b ثابتهای حقیقی هستند. نسبت اسپین متوسط زمانی به انرژی متوسط زمانی را در این موج به دست آورید.

۱۲-۱۲ در مورد تبدیلات لورنتس میدانهای \mathbf{H} و \mathbf{D} در محیط مادی، می‌توانیم تانسور میدان

$$H^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

و تانسور گشتاور دو قطبی

$$M^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & P_x & P_y & P_z \\ -P_x & 0 & -M_z & M_y \\ -P_y & M_z & 0 & -M_x \\ -P_z & -M_y & M_x & 0 \end{pmatrix}$$

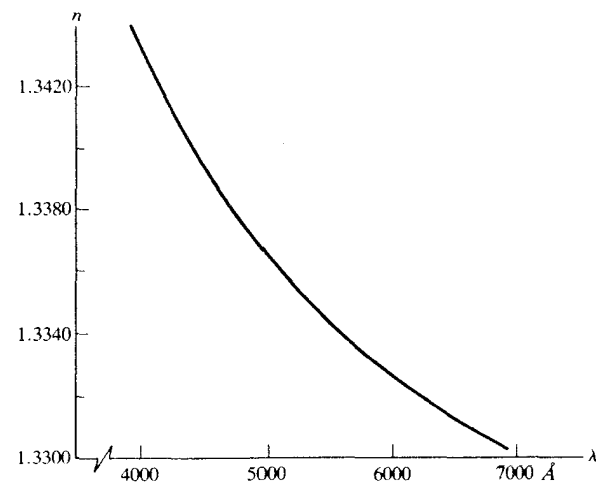
را تعریف کنیم. (الف) نشان دهید $H^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} - 4\pi M^{\mu\nu}$. (ب) نشان دهید معادلات ماکسول ۱۲-۸ و ۱۱-۸ را می‌توان به صورت لورنتس-ناوردای زیر نوشت

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_F^\nu$$

(ج) هم $H^{\mu\nu}$ و هم $M^{\mu\nu}$ دارای خواص تبدیل لورنتس تانسورهای مرتبه دوم هستند. معادلات تبدیل لورنتس مشابه با معادله‌های ۸-۴۳ و ۸-۴۴ را برای \mathbf{H} و \mathbf{D} و برای \mathbf{M} و \mathbf{P} به دست آورید.

۱۲-۱۳ ضریب شکست آب تابعی از بسامد یا طول موج است. شکل ۱۲-۱۴ وابستگی ضریب شکست به طول موج را نشان می‌دهد. (الف) به‌طور تقریبی، سرعت فاز و سرعت گروه را برای نور سرخ (7000 \AA) و نور بنفش (4000 \AA) به دست آورید. (ب) فرض کنید تپی از نور سفید در لایه‌ای از آب به کلفتی 300 متر منتشر شود. قسمتهای سرخ و بنفش این تپ تقریباً چه مقدار از هم جدا می‌شوند؟

۱۴-۱۲ پرتوی از نور سفید با زاویه تابش 5° به سطح آب فرود می‌آید. زاویه شکست را برای نور سرخ (7000 \AA)، نور سبز (5500 \AA) و نور بنفش (4000 \AA) به دست آورید. ضریب شکست آب به صورت تابع طول موج در شکل ۱۴-۱۲ نشان داده شده است.



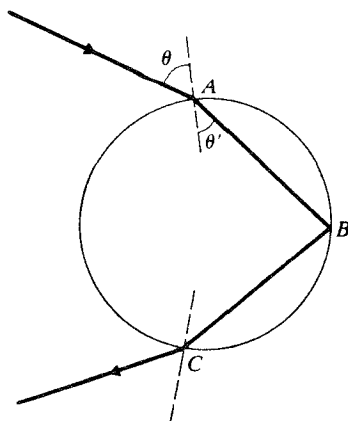
شکل ۱۴-۱۲ ضریب شکست آب به صورت تابع طول موج.

۱۵-۱۲ رنگین کمان از شکست نور خورشید توسط قطره‌های باران ایجاد می‌شود. شکل ۱۵-۱۲ مسیر پرتوی از نور را که وارد یک قطره کروی آب می‌شود نشان می‌دهد. θ زاویه تابش و θ' زاویه شکست در A است. (الف) ثابت کنید زاویه‌های تابش و بازتاب در B برابر با θ' هستند. ثابت کنید در C زاویه تابش برابر با θ' و زاویه شکست برابر با θ است. (ب) نشان دهید زاویه انحراف کل این پرتو توسط قطره باران برابر است با $\Delta = 2(\theta - \theta') + \pi - 2\theta'$. (ج) شرط تشکیل رنگین کمان این است که مشتق Δ نسبت به θ صفر شود. تحت این شرایط، تمام پرتوهای واقع در گستره کوچکی از زاویه‌های تابش (یا گستره کوچکی از نقاط فرود روی قطره) تقریباً با زاویه یکسانی خارج می‌شوند؛ از این رو پرتوها شدیداً متمرکز هستند (یک سطح سوزان تشکیل می‌دهند). نشان دهید زاویه بحرانی برای تشکیل رنگین کمان برابر است با

$$\theta = \cos^{-1} \sqrt{\frac{1}{3}(n^2 - 1)}$$

(د) با استفاده از معادله ۱۴-۱۲، این زاویه بحرانی را برای نور سرخ (7000 \AA) و نور بنفش

۴۰۰۰ Å) محاسبه کنید. زاویه بین جهت خورشید و جهت رنگین کمان را از دید یک ناظر زمینی به دست آورید. پهنای زاویه‌ای رنگین کمان را تعیین کنید. لبه بالایی رنگین کمان چه رنگی دارد؟



شکل ۱۲-۱۵ مسیر پرتو نور در قطره باران.

۱۶-۱۲ یک خطکش را به طور قائم تا نیمه در آب یک استخر فرو می‌بریم. (الف) فرض کنید چشم شما درست بالای سطح آب است. طول ظاهری نیمه داخل آب خطکش را به صورت تابعی از فاصله افقی تا چشم خود رسم کنید. (ب) فرض کنید چشم شما درست زیر سطح آب است. طول ظاهری نیمه بیرون از آب خطکش را به صورت تابعی از فاصله افقی رسم کنید.

۱۷-۱۲ یک موج نور به سطح جدایی دو دی‌الکتریک با $n' > n$ می‌تابد. فرض کنید میدان الکتریکی موازی با صفحه تابش است و $\mu = \mu' = 1$. نشان دهید اگر زاویه تابش از زاویه بروستر بزرگتر باشد میدانهای الکتریکی تابیده و بازتابیده همفاز هستند و در غیر این صورت خارج از فاز هستند.

۱۸-۱۲ علامت t را در معادله‌های ۱۲-۱۱۵ تا ۱۲-۱۳۳ عوض می‌کنیم. آیا نتیجه جواب معادله ماکسول است؟ تمام شرایط مرزی را در سطح جدایی برآورده می‌کند؟ چگونه می‌توان این موج «وارون زمانی» را به طور تجربی ایجاد کرد؟

۱۹-۱۲ نشان دهید معادلات فرنل را می‌توان به صورت زیر درآورد: اگر \mathbf{E} موازی با صفحه تابش باشد:

$$E'_\parallel = 2 \frac{n}{n' \mu' \sin 2\theta' + \mu \sin 2\theta} E_\parallel$$

$$E''_\parallel = \frac{\mu \sin 2\theta - \mu' \sin 2\theta'}{\mu' \sin 2\theta' + \mu \sin 2\theta} E_\parallel$$

اگر E_0 عمود بر صفحه تابش باشد:

$$E'_0 = \frac{2\mu' \tan \theta'}{\mu' \tan \theta' + \mu \tan \theta} E_0$$

$$E''_0 = \frac{\mu' \tan \theta' - \mu \tan \theta}{\mu' \tan \theta' + \mu \tan \theta} E_0$$

۱۲-۲۰ معادله ۱۲-۱۴۳ را به ازای $n' > n$ در نظر بگیرید. نشان دهید (الف) اگر $\mu = \mu'$ ، آنگاه از معادله ۱۲-۱۴۳ به ازای تمام مقادیر θ بین 0° و $\pi/2^\circ$ داریم $E''_0/E_0 < 0$. (ب) اگر $n'/\mu > n/\mu'$ ، آنگاه از معادله ۱۲-۱۴۳ به ازای تمام مقادیر θ بین 0° و $\pi/2^\circ$ داریم $E''_0 = 0$. ثابت کنید معادله زاویه بحرانی عبارت است از $\mu \tan \theta = \mu' \tan[\sin^{-1}(n/n' \sin \theta)]$.

۱۲-۲۱ برای موج تختی که به سطح جدایی دو محیط نارسانا می‌تابد می‌توانیم ضرایب بازتاب و عبور را به صورت زیر تعریف کنیم

$$R = \frac{|S''_z|}{|S_z|} \quad T = \frac{|S'_z|}{|S_z|}$$

که در آنها S_z ، S'_z و S''_z به ترتیب عبارت‌اند از مؤلفه‌های بردارهای پوئینتینگ عمود بر سطح جدایی برای موج تابیده، شکسته و بازتابیده. این ضرایب بازتاب و عبور نمایشگر کسری از انرژیهای بازتابیده و عبور کرده در سطح جدایی هستند. نشان دهید اگر $\mu = \mu'$ ، نتایج زیر از معادلات فرنل به دست می‌آیند:

اگر E_0 موازی با صفحه تابش باشد:

$$R = \left(\frac{n' \cos \theta - n \cos \theta'}{n' \cos \theta + n \cos \theta'} \right)^2$$

$$T = \frac{4nn' \cos \theta \cos \theta'}{(n' \cos \theta + n \cos \theta')^2}$$

اگر E_0 عمود بر صفحه تابش باشد:

$$R = \left(\frac{n \cos \theta - n' \cos \theta'}{n \cos \theta + n' \cos \theta'} \right)^2$$

$$T = \frac{4nn' \cos \theta \cos \theta'}{(n \cos \theta + n' \cos \theta')^2}$$

نشان دهید $R + T = 1$.

۱۲-۲۲ یک موج الکترومغناطیسی را که به طور عمود به سطح جدایی دو دی‌الکتریک می‌تابد در نظر بگیرید. نشان دهید قسمتی از انرژی موج که از سطح جدایی بازمی‌تابد بستگی به این ندارد که موج از کدام طرف بتابد.

۱۲-۲۳ نور ناقطبیده به لایه شیشه‌ای کلفتی با ضریب شکست ۱٫۵ می‌تابد. این نور مخلوطی است از موجهای با قطبش موازی صفحه تابش و قطبش عمود بر صفحه تابش که شدت آنها یکسان است. به این ترتیب نور بازتابیده به طور جزئی قطبیده است. درجه قطبش بنا به تعریف عبارت است از تفاضل شدتهای با قطبش موازی و با قطبش عمودی تقسیم بر مجموع دو شدت. درجه قطبش نور بازتابیده را برای زاویه‌های تابش 0° ، 20° ، 40° ، 60° و 80° محاسبه کنید.

۱۲-۲۴ برای پرتوهای x با طول موج 700 \AA ، ضریب شکست کلسیت برابر است با $n = 1.85 - 10^{-6}$. توضیح دهید چگونه می‌توان از کلسیت برای به دست آوردن بازتاب کلی پرتو x در سطح جدایی هوا-کلسیت استفاده کرد. زاویه تابش لازم را به دست آورید.

۱۲-۲۵ وقتی موج تختی در سطح جدایی شیشه-خلاً بازتاب داخلی کلی می‌کند، موج بازتابیده دارای بزرگی موج‌تابیده است اما با آن اختلاف فاز دارد. نشان دهید معادلات فرنل برای موج بازتابیده به ازای $\mu = 1$ تبدیل می‌شوند به

$$E''_o = e^{i\delta} E_o$$

که در آن

$$\tan \frac{\delta}{2} = - \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - (n'/n)^2}}{(n'/n)^2 \cos \theta} \quad \text{برای } \mathbf{E}_o \text{ موازی با صفحه تابش}$$

$$\tan \frac{\delta}{2} = - \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - (n'/n)^2}}{\cos \theta} \quad \text{برای } \mathbf{E}_o \text{ عمود بر صفحه تابش}$$

۱۲-۲۶ موج تختی در سطح جدایی شیشه-خلاً بازتاب داخلی کلی می‌کند. میدان الکتریکی موازی با صفحه تابش (صفحه xz) است. (الف) نشان دهید مؤلفه‌های x و z دامنه عبور کرده الکتریکی موج عبور کرده را در یک نقطه ثابت به صورت تابعی از زمان توصیف کنید. (ب) فرض کنید $n = 1.5$ و $\mu = 1$. بزرگیهای $E'_o{}_x/E_o$ و $E'_o{}_z/E_o$ را به صورت تابع θ در گستره 42° تا 90° رسم کنید.

۱۲-۲۷ نوری در سطح جدایی شیشه-خلاً بازتاب داخلی کلی می‌کند. با فرض اینکه میدان الکتریکی عمود بر صفحه تابش است، بردار پوئین‌تینگ متوسط زمانی را در ناحیه‌ی خلاً درست خارج از شیشه محاسبه کنید. نشان دهید این بردار موازی با سطح جدایی است.

۱۲-۲۸ یک لایه افقی دی‌الکتریک با $n' > ۱$ و $\mu' = ۱$ دارای کلفتی d است. فضای بالا و پایین دی‌الکتریک خالی است. موج تختی به‌طور عمودی به این لایه می‌تابد. دامنه موج بازتابیده کل و دامنه موج عبور کرده کل را به دست آورید.

۱۲-۲۹ فرض کنید آنتن بزرگی بتواند امواج رادیویی با بسامد فوق‌العاده کم را برای ارتباط با زبردربایها گسیل کند. بسامد این امواج ۷۵Hz است. عمق پوست را برای این امواج در آب شور با رسانندگی $5 \times 10^{10} / \text{stat}\Omega \cdot \text{cm}$ به دست آورید.

۱۲-۳۰ موج تختی از خلاً به یک رسانای بسیار خوب می‌تابد. میدان الکتریکی عمود بر صفحه تابش است. با استفاده از ضریب شکست $n' \simeq \sqrt{4\pi\sigma\mu' / \omega}$ در معادلات فرنل (معادله‌های ۱۲-۱۴۲ و ۱۲-۱۴۳) دامنه مختلط موج بازتابیده را به دست آورید. این دامنه را به صورت حاصلضرب یک بزرگی در یک فاز بنویسید. چه کسری از انرژی تابیده بازتابیده می‌شود؟

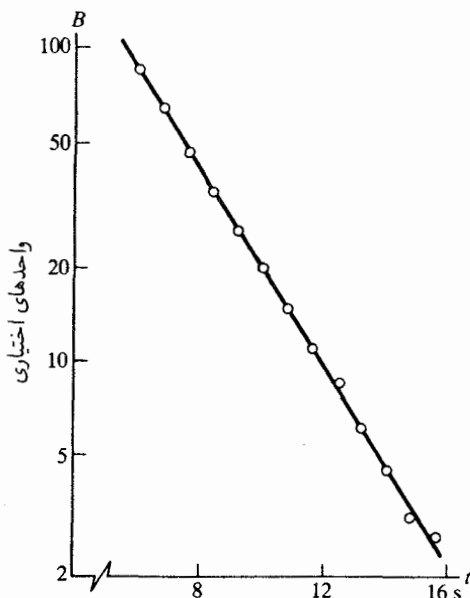
۱۲-۳۱ نشان دهید برای موج تختی در یک رسانای خوب بزرگی میدان مغناطیسی برابر است با $\sqrt{4\pi\sigma\mu' / \omega}$ ضربدر بزرگی میدان الکتریکی، و میدان مغناطیسی 45° با میدان الکتریکی اختلاف فاز دارد.

۱۲-۳۲ سفینه‌های فضایی موقع برگشت به جو دچار قطع ارتباط رادیویی می‌شوند زیرا اصطکاک باعث می‌شود هوای اطراف آنها گرم و یونیده شود. با فرض اینکه امواج رادیویی با بسامد 20 MHz نمی‌توانند به سفینه برسند، درباره چگالی الکترونهاي آزاد در مجاورت سفینه چه نتیجه‌ای می‌توانید بگیرد؟

۱۲-۳۳ شکل ۱۲-۱۶ داده‌هایی را نشان می‌دهد که از یک آزمایش تعیین رسانندگی نمونه‌ای از آلومینیم به‌روش پخش مغناطیسی که در انتهای بخش ۱۲-۸ توصیف شد به دست آمده‌اند. این نمونه، که در دمای 4.2K نگهداری می‌شد، به شکل میله‌ای بود با مقطع $1.2\text{cm} \times 1.1\text{cm}$ $a \times b =$ که از حل ریاضی مسئله پخش برای آن یک کاهش‌نمایی میدان مغناطیسی با زمان واهلش زیر به دست می‌آید

$$t_0 = 10^{-9} \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

از این داده‌ها رسانندگی نمونه آلومینیم را تعیین کنید.

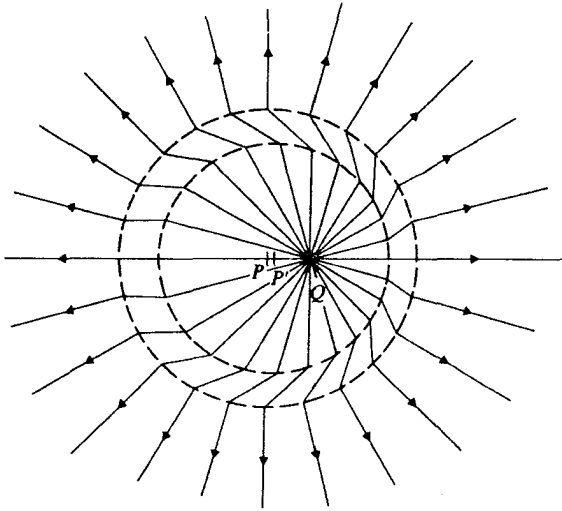


شکل ۱۲-۱۶ واپاشی میدان مغناطیسی در یک نمونه آلومینیومی.

تابش بارنقطه‌ای

یک بارنقطه‌ای که در حال سکون یا حرکت یکنواخت باشد با میدانهای الکتریکی و مغناطیسی استاتیک یا نیمه‌استاتیک احاطه می‌شود. تا وقتی بارنقطه‌ای در حالت سکون یا حرکت یکنواخت خود بماند این میدانها با آن حرکت می‌کنند به طوری که انگار محکم به آن متصل شده‌اند. اما اگر بارنقطه‌ای ناگهان شتابی ناشی از یک نیروی خارجی بگیرد، اجزای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی از بارنقطه‌ای جدا می‌شوند و به صورت تپ موج الکترومغناطیسی خود-نگهدار به اطراف منتشر می‌شوند.

این تپ موج اغتشاش میدانهای الکتریکی و مغناطیسی استاتیک یا نیمه استاتیک است. این اغتشاش از اینجا ناشی می‌شود که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی می‌خواهند از هیئت اولیه خود (قبل از شتاب) به هیئت جدیدی (بعد از شتاب) درآیند. شکل ۱۳-۱ نشان می‌دهد چگونه اغتشاش متحرک ترتیب مجدد میدان الکتریکی بارنقطه‌ای شتابدار را صورت می‌دهد. در ابتدا، بارنقطه‌ای در نقطه P ساکن است؛ سپس شتاب زیادی در فاصله PP' می‌گیرد؛ و سرانجام با سرعت یکنواخت در فاصله $P'Q$ حرکت می‌کند. خطوط میدان الکتریکی اولیه به نقطه P همگرا هستند؛ خطوط میدان الکتریکی نهایی به نقطه Q همگرا هستند. از نسبییت می‌دانیم که ترتیب مجدد میدان الکتریکی نمی‌تواند به طور لحظه‌ای انجام شود، بلکه با یک اغتشاش، یا پیچ تند، در خطوط میدان که با سرعت نور به اطراف منتشر می‌شود صورت می‌گیرد. در شکل ۱۳-۱ این



شکل ۱-۱۳ خطوط میدان الکتریکی اطراف یک بار نقطه‌ای که در فاصله PP' شتاب گرفته است و سپس با سرعت یکنواخت حرکت کرده است. خطوط میدان الکتریکی در این فاصله یک پیچ تند پیدا می‌کنند. این پیچ تند به اطراف منتشر می‌شود و باعث تنظیم مجدد میدان الکتریکی می‌شود.

اغتشاش متحرک یک تپ موج کروی تشکیل می‌دهد. داخل ناحیه اغتشاش، میدان الکتریکی هم مؤلفه طولی (شعاعی) دارد و هم مؤلفه عرضی (مماسی). مؤلفه طولی میدان کولنی معمولی است که با عکس مجذور فاصله متناسب است. مؤلفه عرضی عبارت است از میدان تابش. چنانکه در این فصل خواهیم دید، این میدان تابش با فاصله تناسب معکوس دارد. بنابراین، میدان تابش در مقایسه با میدان کولنی می‌تواند به فواصل بسیار دورتری برسد، و از بار شتابدار انرژی به اطراف حمل می‌کند.

۱-۱۳ پتانسیل تأخیری

چاربردار پتانسیل ناشی از توزیع بار و جریان از معادلات اساسی زیر پیروی می‌کند

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (1-13)$$

یا

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) A^\mu(t, \mathbf{x}) = \frac{4\pi}{c} j^\mu(t, \mathbf{x}) \quad (2-13)$$

بارنقطه‌ای مورد خاصی است از توزیع بار و جریان که در آن تمام بار و جریان در یک نقطه متمرکز شده‌اند. بنابراین، می‌توانیم از معادله ۱۳-۲ برای به‌دست آوردن پتانسیل بارنقطه‌ای شتابدار استفاده کنیم.

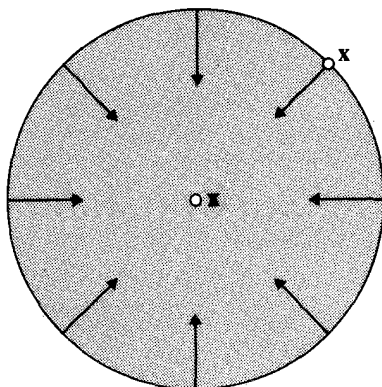
ابتدا، جواب عمومی معادله ۱۳-۲ را می‌نویسیم. این جواب عمومی هم برای محاسبه تابش بارنقطه‌ای به‌کار می‌آید و هم برای محاسبه تابش دستگاه بار، مانند بارهای روی یک آنتن (فصل ۱۴). این جواب عبارت است از یک انتگرال روی توزیع بار و جریان:

$$A^\mu(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{j^\mu(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (3-13)$$

این عبارت را چارپتانسیل تأخیری می‌نامند. با جاگذاری مستقیم در معادله ۱۳-۲ می‌توانیم تحقیق کنیم که این عبارت واقعاً جواب این معادله است. اما پیش از انجام این کار، انتگرال معادله ۱۳-۳ را با دقت بررسی می‌کنیم. روشن است که اگر توزیع جریان و بار مستقل از زمان باشد، این انتگرال تبدیل می‌شود به نتایج آشنای پتانسیل الکتروستاتیک و پتانسیل برداری (معادله‌های ۲-۴ و ۹-۳۲) که در آنها هر جزء کوچک بار یا جریان سهمی متناسب با معکوس فاصله دارد. اگر z^μ وابسته به زمان باشد، هر جزء کوچک بار یا جریان باز هم سهمی متناسب با معکوس فاصله دارد، اما این سهم باید در زمان $t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ محاسبه شود. این زمان را زمان تأخیری می‌نامند. زمان مؤخر دقیقاً به اندازه مدتی که طول می‌کشد تا نور از \mathbf{x}' به \mathbf{x} برسد پیش از زمان t است. بدین ترتیب، معادله ۱۳-۳ نمایشگر یک اغتشاش الکترومغناطیسی است که از بارها و جریانها به اطراف منتشر می‌شود.^۱ می‌توان تصویر شهودی زیر را پذیرفت: هر جزء کوچک بار یا جریان اغتشاشی در پتانسیل یا پتانسیل برداری ایجاد می‌کند که دامنه آن متناسب با z^μ است. این اغتشاش در حالی که دامنه‌اش متناسب با عکس فاصله کاهش می‌یابد با سرعت نور در تمام جهتها به اطراف منتشر می‌شود. برای به‌دست آوردن پتانسیل در نقطه \mathbf{x} در زمان t ، باید تمام سهمیهایی را که در این زمان به این نقطه وارد می‌شوند با هم جمع کنیم. در نتیجه، بارهای بسیار دور سهمیهایی مطابق با آنچه در زمانهای بسیار پیش انجام داده‌اند ایجاد می‌کنند. برای مثال، بارهایی در سحابی ام‌راة‌المسلسله — در فاصله $10^6 \times 2$ سال نوری — سهم پتانسیلی در زمین ایجاد می‌کنند که بستگی دارد به آنچه این بارها $10^6 \times 2$ سال پیش انجام داده‌اند.

در مسئله ریاضی محاسبه انتگرال ۱۳-۳، بهتر است از مفهوم پوسته جمع‌کننده اطلاعات استفاده کنیم. یک پوسته کروی (فرضی) نازک به مرکز نقطه \mathbf{x} در نظر بگیرید، و فرض کنید این

۱. اگر به جای زمان تأخیری $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ در معادله ۱۳-۳ زمان تعجیلی $t + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ را قرار دهیم، پتانسیل تعجیلی را به‌دست می‌آوریم که نیز یک جواب معادلات ماکسول است. اما این جواب غیرفیزیکی است زیرا نمایشگر اغتشاشی الکترومغناطیسی است که به سمت بارها و جریانها همگراست و توسط آنها دقیقاً جذب می‌شود (پتانسیل تعجیلی صرفاً وارون زمانی پتانسیل تأخیری است). این جذب دقیق امکانپذیر نیست مگر اینکه حرکت‌های بارها تماماً طوری از پیش تنظیم شده باشند که به‌نحوی دقیق با موجهای همگرایی که به طرف آنها می‌آیند تطبیق پیدا کنند.



شکل ۲-۱۳ پوسته جمع‌کننده اطلاعات در لحظه $t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ که از نقطه \mathbf{x}' می‌گذرد.

پوسته با سرعت نور به نقطه \mathbf{x} می‌گراید به طوری که در زمان t به این نقطه می‌رسد (شکل ۲-۱۳). در نتیجه، این پوسته در زمان تأخیری $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ از نقطه \mathbf{x}' می‌گذرد. برای محاسبه ۳-۱۳، می‌توانیم فرض کنیم هر جزء کوچک بار یا جریان مطابق با فرمولهای استاتیکی معمولی در پتانسیل سهم دارد اما مقدار جزء کوچک بار یا جریان باید در زمانی به حساب آید که پوسته جمع‌کننده اطلاعات از آن می‌گذرد.

اکنون باید تحقیق کنیم که عبارت ۳-۱۳ واقعاً یک جواب معادله دیفرانسیل ۲-۱۳ است. برای این منظور، به مشتقهای $\partial^\nu A^\mu / \partial t^\nu$ و $\nabla^\nu A^\mu$ احتیاج داریم. با توجه به

$$t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \quad (۴-۱۳)$$

داریم

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 \quad (۵-۱۳)$$

به طوری که

$$\frac{\partial^\nu A^\mu}{\partial t^\nu} = \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial^\nu}{\partial t'^\nu} j^\mu(t', \mathbf{x}') dV' \quad (۶-۱۳)$$

همچنین

$$\nabla A^\mu = \frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial}{\partial t'} j^\mu(t', \mathbf{x}') \nabla t' + j^\mu(t', \mathbf{x}') \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] dV' \quad (۷-۱۳)$$

$$\begin{aligned} \nabla^{\nu} A^{\mu} = \frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial^{\nu}}{\partial t'^{\nu}} j^{\mu}(t', \mathbf{x}') (\nabla t')^{\nu} + \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial}{\partial t'} j^{\mu}(t', \mathbf{x}') \nabla^{\nu} t' \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial t'} j^{\mu}(t', \mathbf{x}') \nabla t' \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + j^{\mu}(t', \mathbf{x}') \nabla^{\nu} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] dV' \end{aligned} \quad (۸-۱۳)$$

در اینجا، باید $\nabla^{\nu} t'$ و $\nabla t'$ را محاسبه کنیم.

تمرین ۱- نشان دهید

$$\nabla t' = -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (۹-۱۳)$$

$$\nabla^{\nu} t' = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (۱۰-۱۳)$$

با جاگذاری عبارتهای $\nabla t'$ و $\nabla^{\nu} t'$ در معادله ۸-۱۳، معلوم می‌شود که جمله‌های دوم و سوم در طرف راست حذف می‌شوند. بنابراین داریم

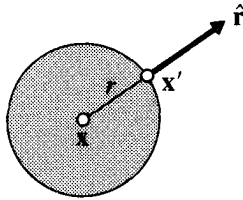
$$\nabla^{\nu} A^{\mu} = \frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c^{\nu}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial^{\nu}}{\partial t'^{\nu}} j^{\mu}(t', \mathbf{x}') + j^{\mu}(t', \mathbf{x}') \nabla^{\nu} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] dV' \quad (۱۱-۱۳)$$

از ترکیب این معادله با ۶-۱۳ به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{c^{\nu}} \frac{\partial^{\nu} A^{\mu}}{\partial t'^{\nu}} - \nabla^{\nu} A^{\mu} = -\frac{1}{c} \int j^{\mu}(t', \mathbf{x}') \nabla^{\nu} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (۱۲-۱۳)$$

این معادله باید با معادله ۲-۱۳ تطبیق کند. برای تحقیق این امر، محاسباتی در طرف راست انجام می‌دهیم. می‌دانیم که در تمام نقاط \mathbf{x}' به استثنای $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ داریم $\nabla^{\nu} (1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = 0$. بنابراین، انتگرال تنها از مجاورت بلافاصله نقطه \mathbf{x} سهم دارد. اگر تابع $j^{\mu}(t', \mathbf{x}')$ نزدیک این نقطه هموار باشد، طرف راست معادله ۱۲-۱۳ برابر است با

$$-\frac{1}{c} j^{\mu}(t, \mathbf{x}) \int \nabla^{\nu} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (۱۳-۱۳)$$



شکل ۱۳-۳ سطح گاوس کوچک به مرکز نقطه x و به شعاع $r = |x - x'|$

چون تابع زیر انتگرال صفر است مگر اینکه $x' = x$ ، می‌توانیم به جای انتگرال روی تمام حجم انتگرال روی کره کوچکی به مرکز x را محاسبه کنیم (شکل ۱۳-۳). با توجه به اینکه تابع زیر انتگرال یک واگرایی است، می‌توانیم از قضیه گاوس استفاده کنیم:

$$\int \nabla^2 \frac{1}{|x - x'|} dV' = \int \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{|x - x'|} \right) dV' = \int \nabla \frac{1}{|x - x'|} \cdot dS$$

اگر بنویسیم $|x - x'| = r$ ، آنگاه $\nabla(1/|x - x'|) = -\hat{r}/r^2$ ، بنابراین، $dS = \hat{r} dS$ ، آخرین انتگرال برابر است با -4π ، و عبارت ۱۳-۱۳، یا طرف راست معادله ۱۳-۱۲، برابر است با $(4\pi/c)j^\mu(t, x)$. این نتیجه تأیید می‌کند که چارپتانسیل تأخیری یک جواب معادله ۱۳-۲ است.

تمرین ۲- با استفاده از معادله پایستگی برای بارالکتریکی، ثابت کنید عبارتی که برای چارپتانسیل تأخیری به دست آورده‌ایم شرط لورنتس

$$\partial_\mu A^\mu(t, x) = 0 \quad (14-13)$$

را برآورده می‌کند.

۱۳-۲ پتانسیل لینارد-ویشرت

اکنون که جواب مربوط به چارپتانسیل ناشی از یک توزیع اختیاری وابسته به زمان بار و جریان را در اختیار داریم، می‌توانیم آن را در مورد بارنقطه‌ای به کار ببریم. بارنقطه‌ای را حد گوی کوچکی از بار در نظر می‌گیریم که شعاع آن به صفر میل می‌کند. پس مؤلفه‌های چارپتانسیل ۱۳-۳ عبارت‌اند

۱. خوانندگانی که با تابع دلتا آشنا هستند می‌دانند که $\nabla^2(1/|x - x'|) = -4\pi\delta(x - x')$.

از انتگرالهایی روی حجم این بارنقطه‌ای. برای مثال، مؤلفهٔ A^* برابر است با

$$A^*(t, \mathbf{x}) = \Phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right) dV' \quad (۱۵-۱۳)$$

چون حجم انتگرال‌گیری کوچک است، عامل $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ در تابع زیر انتگرال اصولاً ثابت است. اگر این عامل را فعلاً کنار بگذاریم، آنچه می‌ماند انتگرال روی چگالی بار است:

$$\int \rho \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right) dV' \quad (۱۶-۱۳)$$

اگر بارنقطه‌ای ساکن باشد، ρ مستقل از زمان است و

$$\rho(\mathbf{x}') dV' = dq \quad (۱۷-۱۳)$$

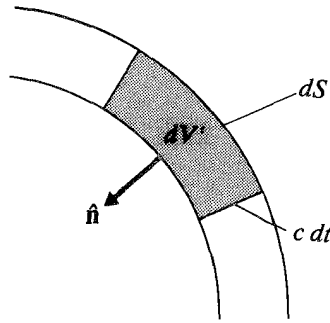
به طوری که انتگرال ۱۳-۱۶ صرفاً برابر است با بار کل بارنقطه‌ای. با توجه به آنچه دربارهٔ عامل $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ گفتیم، فوراً به دست می‌آوریم

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (۱۸-۱۳)$$

که در آن \mathbf{x}' مکان بارنقطه‌ای است (نه متغیر انتگرال‌گیری). اما اگر بارنقطه‌ای ساکن نباشد، آنگاه

$$\rho \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right) dV' \neq dq \quad (۱۹-۱۳)$$

و انتگرال ۱۳-۱۶ برابر با q نیست. با یادآوری اینکه انتگرال مربوط به پتانسیل تأخیری باید توسط پوستهٔ جمع‌کنندهٔ اطلاعات که در بخش ۱۳-۱ توصیف شد محاسبه شود، می‌توانیم به منشأ اختلاف بالا پی ببریم. زمانی مانند dt طول می‌کشد تا این پوسته حجم dV' را جاروب کند. در این مدت، قسمتی از بار از حجم خارج می‌شود و در نتیجه پوستهٔ کوچک شونده آن را قطع نمی‌کند. شکل ۱۳-۴ پوستهٔ جمع‌کنندهٔ اطلاعات را نشان می‌دهد که در مدت زمان dt حجم dV' را جاروب می‌کند. عنصر حجم dV' دارای مساحت رویی dS و کلفتی $c dt$ است. جهت فروریزی پوسته با برداریکهٔ $\hat{\mathbf{n}}$ از \mathbf{x}' مشخص شده است. اگر \mathbf{v}' سرعت بارها در حجم dV' باشد، مقدار باری که در لبهٔ داخلی در مدت dt از حجم خارج می‌شود برابر است با $\rho \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}' dt dS$ (این مقدار



شکل ۱۳-۴ در مدت \$dt\$ قسمتی از پوسته جمع‌کننده اطلاعات به مساحت \$dS\$ حجم \$dV' = c dt dS\$ را جاروب می‌کند.

مثبت است اگر بار از حجم خارج شود و منفی است اگر داخل شود). پس مقدار واقعی باری که توسط پوسته کوچک شونده قطع می‌شود برابر است با مقدار اولیه بار در \$dV'\$ منهای مقدار باری که خارج می‌شود:^۱

$$dq = \rho dV' - \rho \hat{n} \cdot \mathbf{v}' dt dS \quad (۱۳-۲۰)$$

چون \$dV' = c dt dS\$ این مقدار بار برابر است با

$$dq = \rho dV' - \rho \frac{\hat{n} \cdot \mathbf{v}'}{c} dV' \quad (۱۳-۲۱)$$

در نتیجه

$$\rho \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right) dV' = \frac{dq}{1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v}'/c} \quad (۱۳-۲۲)$$

با توجه به این رابطه جدید بین \$dq\$ و \$\rho dV'\$، انتگرال ۱۳-۱۶ برابر است با \$q/(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v}'/c)\$، و عبارت مربوط به \$\Phi\$ برابر است با

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{(1 - \hat{n} \cdot \mathbf{v}'/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (۱۳-۲۳)$$

۱. روشن است که اگر \$\mathbf{v}'\$ در عنصر حجم ثابت باشد همین مقدار بار در لبه خارجی وارد عنصر حجم می‌شود. اما این بار نمی‌تواند توسط پوسته کوچک‌شونده قطع شود و از این رو تأثیری در محاسبات ما ندارد.

مؤلفه‌های دیگر چارپتانسیل را می‌توان به روش مشابهی محاسبه کرد؛ و در نتیجه داریم

$$A(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{c} \frac{q\mathbf{v}'}{(\mathbf{1} - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (24-13)$$

توجه کنید که در عبارتهای مربوط به $\Phi(t, \mathbf{x})$ و $A(t, \mathbf{x})$ ، بردار \mathbf{x}' نمایشگر مکان بارنقطه‌ای در زمان تأخیری $t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ است. اگر مکان بارنقطه‌ای تابع معینی مانند $\xi(t)$ باشد، \mathbf{x}' به طور ضمنی با معادله زیر تعیین می‌شود

$$\mathbf{x}' = \xi \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right) \quad (25-13)$$

به همین ترتیب، سرعت \mathbf{v}' و بردار عمود $\hat{\mathbf{n}}$ را باید در زمان تأخیری محاسبه کرد. برای اینکه این تأخیرات را به یاد داشته باشیم، معادلات مربوط را با کروشه اضافی می‌نویسیم:

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \left[\frac{q}{(\mathbf{1} - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \quad (26-13)$$

$$A(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{c} \left[\frac{q\mathbf{v}'}{(\mathbf{1} - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \quad (27-13)$$

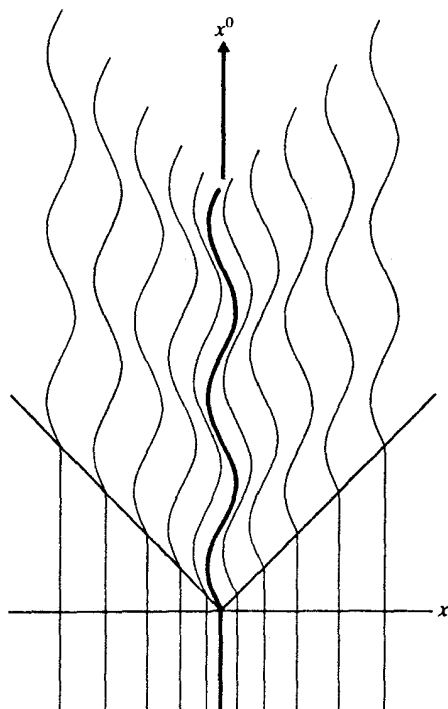
هر کمیتی که داخل این نوع کروشه اضافی باشد باید در زمان تأخیری محاسبه شود. عبارتهای ۱۳-۲۶ و ۱۳-۲۷ را پتانسیلهای لینارد-ویشرت می‌نامند.

در نمادنگاری چهار بعدی، می‌توانیم این پتانسیلها را به صورت زیر بنویسیم

$$A^\mu(t, \mathbf{x}) = \left[\frac{q\sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{v}'^2/c^2}u'^\mu}{(\mathbf{1} - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \quad (28-13)$$

که نشان می‌دهد جهت A^μ در فضا-زمان موازی با جهت چارسرعت در زمان تأخیری است. شرط لورنتس $\partial_\mu A^\mu = 0$ بیانگر این است که واگرایی چهار بعدی A^μ صفر است؛ بنابراین، A^μ را می‌توان با خطوط میدان در فضا-زمان نمایش داد. از اینجا می‌توانیم A^μ را به طور نموداری بسازیم: جهانخط بارنقطه‌ای ساکن یک خط راست است و خطوط میدان برای A^μ نیز خطهای راستی موازی با این جهانخط هستند، یعنی موازی با محور x^0 (شکل ۱۳-۵). اگر بارنقطه‌ای در زمان $x^0 = 0$ شتاب بگیرد، جهانخط آن به علت این شتاب منحنی خواهد بود. آنگاه خطوط میدان برای A^μ منحنیهای هم‌نهشت خواهند بود که با تأخیر مقتضی به زمانهای آینده جابه‌جا شده‌اند (شکل ۱۳-۵).^۱

۱. این نمودار زیبا اثر ر. لیختن‌اشتاین است.



شکل ۱۳-۵ خطوط میدان چارپتانسیل A^μ در فضا-زمان. این خطوط میدان المثنی‌های جهانخط ذره‌اند که در امتداد مخروط نور آینده جابه‌جا شده‌اند.

۱۳-۳ میدانهای تابش

میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بارنقطه‌ای شتابدار را می‌توان از پتانسیلهای لینارد-ویشرت با گرفتن مشتقات به روش معمولی، محاسبه کرد:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (۱۳-۲۹)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (۱۳-۳۰)$$

متأسفانه محاسبه این مشتقات نسبتاً مشکل است زیرا وابستگی پتانسیلها به مکان و زمان کاملاً پیچیده است. این پتانسیلها توابعی از زمان تأخیری هستند که به نوبه خود تابع مکان و زمان است. برای آسان کردن این مشکل، به محاسبه جمله‌هایی در \mathbf{E} و \mathbf{B} اکتفا می‌کنیم که دارای کمترین کاهش نسبت به فاصله هستند. این جمله‌ها میدانهای تابش هستند؛ چنانکه خواهیم دید، این

میدانها متناسب با $1/|x - x'|$ کاهش می‌یابند.

در این محاسبه، به مشتق زمان تأخیری نسبت به زمان احتیاج داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t'}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(t - \frac{|x - x'|}{c} \right) = 1 - \frac{1}{c} \frac{x - x'}{|x - x'|} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (-x') \\ &= 1 - \frac{\hat{n}}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (-x') \frac{\partial t'}{\partial t} = 1 + \frac{\hat{n} \cdot v'}{c} \frac{\partial t'}{\partial t} \end{aligned} \quad (31-13)$$

از اینجا $\partial t'/\partial t$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \hat{n} \cdot v'/c} \quad (32-13)$$

$\nabla t'$ را نیز لازم داریم:

$$\begin{aligned} \nabla t' &= \nabla \left(t - \frac{|x - x'|}{c} \right) = \frac{1}{c} \nabla |x - x'| \\ &= -\frac{\hat{n}}{c} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} |x - x'| \nabla t' \end{aligned} \quad (33-13)$$

در اینجا، جمله اول مستقیماً از مشتق‌گیری از x صریح در $|x - x'|$ در حالی که x' را ثابت گرفته‌ایم ناشی می‌شود؛ جمله دوم از مشتق‌گیری از x' (که از طریق t' بستگی ضمنی به x دارد) در حالی که x را ثابت گرفته‌ایم ناشی می‌شود. چون $(\partial/\partial t')|x - x'| = -\hat{n} \cdot v'$ ، معادله ۳۳-۱۳ به صورت زیر در می‌آید

$$\nabla t' = -\frac{\hat{n}}{c} + \frac{\hat{n} \cdot v'}{c} \nabla t' \quad (34-13)$$

که از آن به دست می‌آوریم

$$\nabla t' = -\frac{1}{c} \frac{\hat{n}}{1 - \hat{n} \cdot v'/c} \quad (35-13)$$

با این مقدمات، آماده‌ایم تا به محاسبه مشتقات پتانسیلها بپردازیم. از $\nabla \Phi$ شروع می‌کنیم. مانند معادله ۳۳-۱۳، در اینجا جمله‌هایی داریم که از x صریح ناشی می‌شوند — از جمله x در

۱. تفاوت این معادله با معادله ۵-۱۳ در این است که در اینجا x' مکان بارنقطه‌ای است و بستگی به زمان دارد، در حالی که در محاسبه‌ای که منجر به معادله ۵-۱۳ شد x' صرفاً یک متغیر انتگرال‌گیری بود و به زمان بستگی نداشت.

$\hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ و جمله‌هایی که از \mathbf{x}' ناشی می‌شوند:

$$\begin{aligned} \nabla\Phi &= \nabla \left[\frac{q}{(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \\ &= q \left[-\frac{-\mathbf{v}'/c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'\hat{\mathbf{n}})/c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)^2|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} - \frac{\hat{\mathbf{n}}}{(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\lambda}{(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla t' \right] \quad (۳۶-۱۳) \\ &= q \left[\frac{\mathbf{v}'/c - \hat{\mathbf{n}}}{(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)^2|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} + \frac{\nabla t'}{(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)^2|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial t'} \cdot \frac{\mathbf{v}'}{c} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathbf{a}'}{c} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nabla t'}{(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{v}' \right] \quad (۳۷-۱۳) \end{aligned}$$

از بررسی این عبارت می‌بینیم که تمام جمله‌ها برحسب فاصله به صورت $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2$ تغییر می‌کنند به‌استثنای جمله متناسب با شتاب \mathbf{a}' که به صورت $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ تغییر می‌کند. درحد $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty$ می‌توانیم از جمله‌های اولی صرفنظر کنیم و تنها جمله دومی را نگه داریم. از اینجا قسمت تابشی $\nabla\Phi$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \nabla\Phi &= \frac{q}{c} \left[\frac{\nabla t'}{(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)^2|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a}' \right] + \dots \\ &= -\frac{q}{c} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a}'/c}{(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)^2|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] + \dots \quad (۳۸-۱۳) \end{aligned}$$

اکنون می‌پردازیم به $\partial\mathbf{A}/\partial t$. بستگی \mathbf{A} به t ناشی از بستگی به t' است، و درنتیجه

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t'} \left[\frac{\partial t'}{\partial t} \right] = \frac{q}{c} \left[\frac{\partial}{\partial t'} \frac{\mathbf{v}'}{(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \left[\frac{\partial t'}{\partial t} \right] \quad (۳۹-۱۳)$$

موقع مشتق گرفتن از عامل اول درکروشه، باز هم از تمام جمله‌هایی که به صورت $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2$ تغییر می‌کنند صرفنظر می‌کنیم و تنها جمله‌هایی را نگه می‌داریم که به صورت $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ تغییر می‌کنند. بنابراین، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{q}{c} \left[\frac{\mathbf{a}'}{(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\mathbf{v}'\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a}'/c}{(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)^2|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \dots \right] \\ &\quad \times \left[\frac{\lambda}{\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c} \right] \quad (۴۰-۱۳) \end{aligned}$$

که در آن، مانند معادله ۱۳-۳۸، نقطه‌ها به جای جمله‌هایی هستند که از آنها صرفنظر کرده‌ایم. از ترکیب معادله‌های ۱۳-۳۸ و ۱۳-۴۰، جمله‌هایی از میدان الکتریکی را به دست می‌آوریم که به صورت $1/|x - x'|$ تغییر می‌کنند:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &= \frac{q}{c^2} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a}'}{(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)^2 |x - x'|} - \frac{\mathbf{a}'}{(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)^2 |x - x'|} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathbf{v}'\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a}'/c}{(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)^2 |x - x'|} \right] + \dots \end{aligned} \quad (41-13)$$

به آسانی می‌توان واری می‌کرد که این عبارت متحد است

$$\mathbf{E} = \frac{q}{c^2} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \times \{(\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{v}'/c) \times \mathbf{a}'\}}{(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)^2 |x - x'|} \right] + \dots \quad (42-13)$$

تمرین ۳- واری می‌کنید که طرفهای چپ معادله‌های ۱۳-۴۱ و ۱۳-۴۲ با هم برابرند. ■

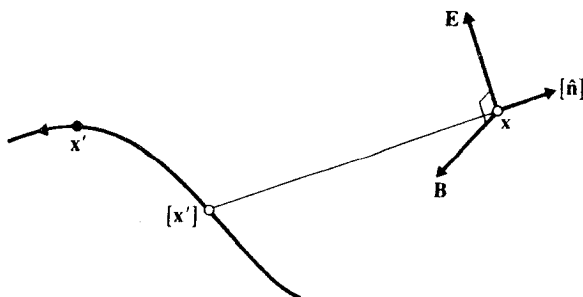
برای محاسبه میدان مغناطیسی، به $\nabla \times \mathbf{A}$ احتیاج داریم. مانند قبل، تنها جمله‌هایی را نگه می‌داریم که به صورت $1/|x - x'|$ تغییر می‌کنند؛ این جمله‌ها از وابستگی \mathbf{A} به t' ناشی می‌شوند نه از بستگی صریح به x :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla t' \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'} + \dots \\ &= -\frac{q}{c^2} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a}'(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c) + (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}')(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a}'/c)}{(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)^2 |x - x'|} \right] + \dots \end{aligned} \quad (43-13)$$

در نتیجه

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{q}{c^2} \left[\frac{-\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a}'(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c) - (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}'/c)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a}')}{(\lambda - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)^2 |x - x'|} \right] + \dots \quad (44-13)$$

میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ۱۳-۴۲ و ۱۳-۴۴ میدانهای تابش بارنقطه‌ای هستند. این میدانها با بزرگی شتاب \mathbf{a}' تناسب مستقیم و با فاصله تناسب معکوس دارند. این میدانهای



شکل ۱۳-۶ جهت‌های میدانهای تابش الکتریکی و مغناطیسی. E و B بر یکدیگر و بر برداریکه $[\hat{n}]$ عمود هستند.

الکتریکی و مغناطیسی عمود بر بردار \hat{n} هستند که جهت آن از مکان (تأخیری) بارنقطه‌ای دور می‌شود. به‌علاوه، از مقایسه معادله‌های ۱۳-۴۱ و ۱۳-۴۴ دیده می‌شود که

$$B = [\hat{n}] \times E \quad (۱۳-۴۵)$$

بدین ترتیب، B عمود بر E است و همان بزرگی را دارد، دقیقاً همان‌طور که برای امواج الکترومغناطیسی در خلأ انتظار می‌رود (شکل ۱۳-۶). روشن است که میدانهای تابش امواجی کروی هستند که از مکان بارنقطه‌ای به اطراف گسترده می‌شوند. تأخیر در معادلات مربوط دلالت بر این دارد که مدت زمان $|x - x'|/c$ طول می‌کشد تا تب موج ناشی از یک تب شتاب معین از x' به x برسد — یعنی تب موج با سرعت نور حرکت می‌کند.

در محاسبه مشتقات پتانسیل در بالا، تمام جمله‌هایی را که به صورت $1/|x - x'|^2$ تغییر می‌کنند حذف کردیم. این جمله‌ها بستگی به سرعت بارنقطه‌ای دارند نه به شتاب آن. سهمهای این جمله‌ها در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی میدان کولن با تصحیحات نسبیتهی آن و میدان مغناطیسی نیمه‌استاتیک با تصحیحات نسبیتهی آن را به‌دست می‌دهند. برای تمایز از میدانهای تابش، این میدانها را میدانهای نزدیک می‌نامند. این میدانها دقیقاً همانهایی هستند که در بخش ۸-۲ با تبدیل لورنتس به‌دست آوردیم به شرط اینکه در معادله‌های ۸-۴۶ و ۸-۴۷ سرعت بارنقطه‌ای را سرعت تأخیری لحظه‌ای تعبیر کنیم و مکان آن را مکان برونیافته لحظه‌ای، یعنی مکانی که بارنقطه‌ای باید به آن می‌رسید اگر با سرعت ثابت از مکان تأخیری خود حرکت کرده بود. بنابراین، اگر تمام این جمله‌ها را در محاسبه فعلی خود نگه‌داشته بودیم زحمت بیهوده‌ای بود و چیز تازه‌ای به‌دست نمی‌آوردیم.

۴-۱۳ نقش تابش

میدانهای تابش از بارنقطه‌ای انرژی به اطراف حمل می‌کنند. شار انرژی از بردار پوینتینگ به دست می‌آید:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (۴۶-۱۳)$$

با توجه به معادله ۴۵-۱۳، این بردار برابر است با

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} E^2 [\hat{\mathbf{n}}] \quad (۴۷-۱۳)$$

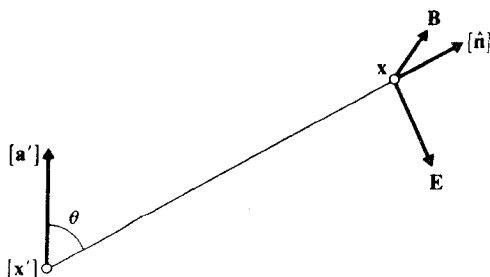
بهرتر است موارد غیرنسبیتی و نسبیتی را جداگانه بررسی کنیم.

حرکت غیرنسبیتی ($v' \ll c$). در تقریب $v' \ll c$ ، فرمول دقیق ۴۲-۱۳ برای میدان تابش تبدیل می‌شود به

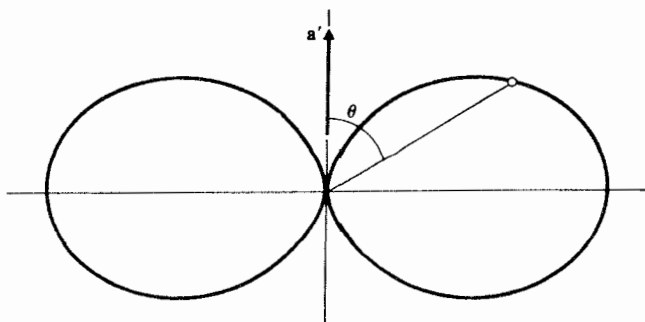
$$\mathbf{E} = \frac{q}{c^2} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \quad (۴۸-۱۳)$$

اگر θ زاویه بین $[\hat{\mathbf{n}}]$ و $[\mathbf{a}']$ باشد (شکل ۷-۱۳)، بزرگی این میدان الکتریکی عبارت است از

$$E = \frac{q}{c^2} \left[\frac{a' \sin \theta}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \quad (۴۹-۱۳)$$



شکل ۷-۱۳ جهت‌های میدانهای تابش الکتریکی و مغناطیسی برای بارنقطه‌ای شتابدار با حرکت غیرنسبیتی. میدان الکتریکی در صفحه $[\mathbf{a}']$ و $[\hat{\mathbf{n}}]$ است، و میدان مغناطیسی عمود بر این صفحه است.



شکل ۸-۱۳ نمودار قطبی $dP/d\Omega$ برای بارنقطه‌ای شتابدار با حرکت غیرنسبیتی. طول خط از مبدأ تا منحنی نمایشگر بزرگی $dP/d\Omega$ است.

بزرگی میدان مغناطیسی برابر است با بزرگی میدان الکتریکی:

$$B = \frac{q}{c^2} \left[\frac{a' \sin \theta}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \quad (۵۰-۱۳)$$

بنابراین، شار انرژی برابر است با

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} E'[\hat{\mathbf{n}}] = \frac{q^2}{4\pi c^2} \left[a'^2 \frac{\sin^2 \theta}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \hat{\mathbf{n}} \right] \quad (۵۱-۱۳)$$

توان لحظه‌ای تابش شده به زاویه فضایی $d\Omega$ با مساحت وابسته $d\Omega$ عبارت است از

$$dP = [|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2] S = d\Omega \quad (۵۲-۱۳)$$

و توان در واحد زاویه فضایی برابر است با

$$\frac{dP}{d\Omega} = [|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2] S \frac{q^2}{4\pi c^2} [a'^2 \sin^2 \theta] \quad (۵۳-۱۳)$$

شکل ۸-۱۳ نمودار این تابع را که نقش تابش دوقطبی نامیده می‌شود نشان می‌دهد. توان در واحد زاویه فضایی در راستای عمود بر راستای شتاب ($\theta = \pi/2$) ماکسیمم است و در راستای شتاب ($\theta = \pi; \theta = 0$) صفر است.

توان کل تابش شده به تمام جهتها برابر است با انتگرال $dP/d\Omega$ روی تمام زاویه فضایی:

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{dP}{d\Omega} \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{q^2}{4\pi c^3} [a'^2 \sin^2 \theta] \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (54-13)$$

یا

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} [a'^2] \quad (55-13)$$

این رابطه فرمول لازمور برای توان تابش شده از بار شتابدار است.

حرکت نسبیتی ($v' \simeq c$). برای باری با حرکت نسبیتی، نقش تابش بستگی به جهت شتاب و جهت سرعت دارد. تنها دو مورد خاص را بررسی می‌کنیم: شتاب موازی با سرعت و شتاب عمود بر سرعت. اگر شتاب موازی با سرعت باشد، آنگاه $\mathbf{v}' \times \mathbf{a}' = 0$ و از معادله ۱۳-۴۲ به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E} = \frac{q}{c^2} \left[\frac{1}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)^2} \frac{\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \quad (56-13)$$

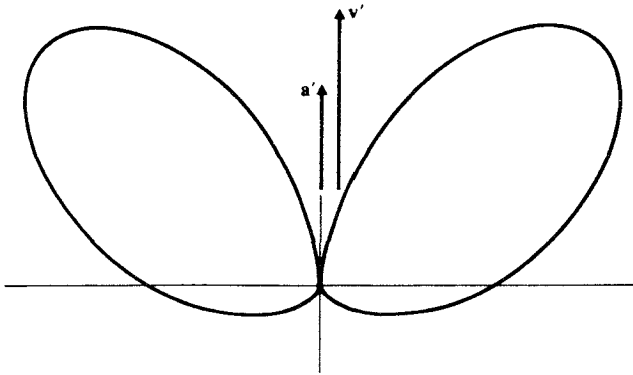
تفاوت این فرمول با فرمول غیرنسبیتی تنها در عامل اضافی

$$1/(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)^2 = 1/(1 - v' \cos \theta/c)^2$$

است. توان در واحد زاویه فضایی برابر است با

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \left[\frac{a'^2 \sin^2 \theta}{(1 - v' \cos \theta/c)^6} \right] \quad (57-13)$$

اگر v' قابل مقایسه با c باشد، عامل $1/(1 - v' \cos \theta/c)^6$ در این فرمول در جهت جلو ($\theta \simeq 0$) بزرگ است و از این رو تابش در جهت جلو به شدت تقویت می‌شود. شکل ۱۳-۹ نموداری از نقش تابش را نشان می‌دهد. از مقایسه این شکل با شکل ۱۳-۸ دیده می‌شود که نقش نسبیتی، گونه اعوجاج یافته‌ای از نقش غیرنسبیتی با کشیدگی شدیدی در جهت جلو است. این مطلب را می‌توان با توجه به فرمول ابیراهی نور (معادله ۱۲-۵۱) درک کرد. هر تابشی که در چارچوب سکون به عنوان مثال عمود بر راستای سرعت گسیل شود در چارچوب آزمایشگاه با زاویه کوچکتری ظاهر می‌شود؛ این امر منجر به باریکه شدن تابش در جهت جلو می‌شود.



شکل ۹-۱۳ نمودار قطبی $dP/d\Omega$ برای بارنقطه‌ای شتابدار با حرکت نسبیته به ازای $v' = 0.3c$. شتاب موازی با سرعت است.

برای حرکت فرین نسبیته ($v' \rightarrow c$)، باریکه جلو بسیار باریک و بسیار تیز می‌شود. با استفاده از تقریب زاویه کوچک در معادله ۵۷-۱۳، می‌توانیم به تخمین ساده‌ای از زاویه قله برسیم:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &\simeq \frac{q^2}{4\pi c^3} \left[a'^2 \frac{\theta^2}{(1 - v'/c + v'\theta^2/2c)^6} \right] \\ &\simeq \frac{q^2}{4\pi c^3} \left[a'^2 \frac{\theta^2}{(1 - v'/c + \theta^2/2)^6} \right] \end{aligned} \quad (58-13)$$

برای به دست آوردن ماکسیمم این عبارت باید شرط زیر را تحمیل کنیم

$$\frac{d}{d\theta} \frac{\theta^2}{(1 - v'/c + \theta^2/2)^6} = 0$$

که از آن نتیجه می‌گیریم که زاویه بین قله و خط حرکت برابر است با

$$\theta \simeq \sqrt{\frac{2}{5} \left(1 - \frac{v'}{c} \right)} \quad (59-13)$$

به ازای $v/c \simeq 1$ داریم

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + v'/c)(1 - v'/c)}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2(1 - v'/c)}}$$

$$\theta \simeq \frac{1}{\sqrt{\delta\gamma}} \quad (۶۰-۱۳)$$

چون γ متناسب با انرژی ذره است ($p^* = mc^2\gamma$)، معادله ۶۰-۱۳ نشان می‌دهد زاویه قله با انرژی متناسب معکوس دارد — اگر انرژی زیاد باشد این زاویه بسیار کوچک است. مثلاً برای الکترونی‌هایی با انرژی $p^* = 200 \text{ MeV}$ ، $\gamma = p^*/m_e c^2 = 390$ و $\theta \simeq 1.1 \times 10^{-2} \text{ rad}$. برای حرکت فرین نسبیتی، توان در واحد زاویه فضایی مربوط به قله در نقش پراش برابر است

با

$$\frac{dP}{d\Omega_{\max}} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \left[a'^2 \frac{1/\delta\gamma^2}{(1/2\gamma^2 + 1/10^2\gamma^2)^6} \right] \quad (۶۱-۱۳)$$

$$= \frac{2 \times 10^5}{6^6} \frac{q^2}{4\pi c^3} [a'^2 \gamma^{10}] \quad (۶۲-۱۳)$$

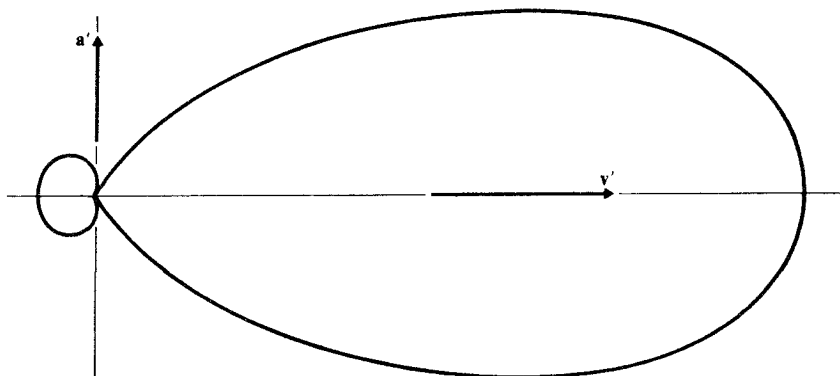
این کمیت متناسب با توان دهم انرژی ذره است. توان کل برابر است با انتگرال $dP/d\Omega$ روی تمام زاویه‌ها. این انتگرال را می‌توان به طور دقیق محاسبه کرد، اما تمام سهم آن تقریباً از باریکه تیز در نقش پراش ناشی می‌شود؛ و بنابراین می‌توانیم از تقریب ۶۲-۱۳ استفاده کنیم:

$$P \simeq \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{q^2}{4\pi c^3} \left[a'^2 \frac{\theta^2}{(1 - v'/c + \theta^2/2)^6} \right] \theta d\theta d\phi \quad (۶۳-۱۳)$$

حد بالا در انتگرال روی θ اهمیتی ندارد به شرط اینکه این حد بسیار بزرگتر از زاویه قله (معادله ۶۰-۱۳) باشد. برای سادگی، این حد را $\theta = \infty$ گرفته‌ایم. انتگرال‌گیری مشکلی ندارد و جواب این است

$$P \simeq \frac{1}{20} \frac{q^2}{c^3} \frac{a'^2}{(1 - v'/c)^2} \simeq \frac{4}{5} \frac{q^2}{c^3} a'^2 \gamma^8 \quad (۶۴-۱۳)$$

تذکر: در مقایسه فرمولهای توان تابش شده در این بخش و در بعضی کتابهای درسی^۱، باید به تفاوت بین توانی که به گیرنده ثابت وارد می‌شود و توانی که توسط ذره متحرک آزاد می‌شود توجه داشت: برای ذره‌ای با حرکت نسبیتی، این توانها مختلف هستند. برای اینکه ببینیم چگونه این اختلاف پیش می‌آید، فرض کنید ذره‌ای با سرعت زیاد از گیرنده دور می‌شود. اگر بخواهیم ذره مقدار



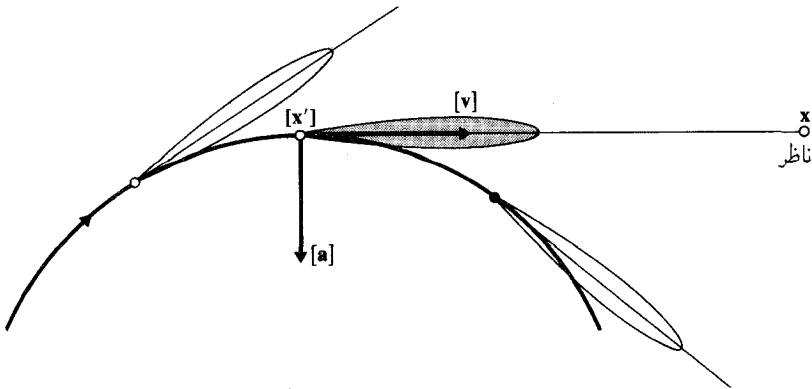
شکل ۱۳-۱۰ نمودار قطبی $dP/d\Omega$ برای بارنقطه‌ای شتابدار با حرکت نسبیتی به‌ازای $v' = 0.3c$. شتاب عمود بر سرعت است.

معینی توان درگیرنده ایجاد کند نه تنها باید این توان را تأمین کند بلکه باید توانی اضافی به فضای بین خود و گیرنده، که از میدانهای الکترومغناطیسی پر شده است و حجم آن دائماً افزایش می‌یابد، بدهد. بنابراین، برای ذره‌ی دورشونده توان دریافت شده کمتر از توان ایجاد شده است. برعکس، برای ذره‌ی نزدیک شونده توان دریافت شده بیشتر از توان ایجاد شده است. تمام معادلات ما برای توان، توان دریافت شده در یک نقطه‌ی ثابت را نشان می‌دهند. این کمیت در اکثر اندازه‌گیریهای تجربی مورد توجه است.

اگر شتاب عمود بر سرعت باشد فرمول مربوط به نقش پراش تا اندازه‌ای پیچیده‌تر از فرمولی است که در بالا برای مورد موازی به دست آوردیم، و ما به آن نمی‌پردازیم. شکل ۱۳-۱۰ نموداری از نقش پراش را نشان می‌دهد. در اینجا نیز نقش نسبیتی گونه‌ی اعوجاج یافته‌ای از نقش غیرنسبیتی با کشیدگی شدید در جهت جلو است. برای حرکت فرین نسبیتی، پهنای باریکه‌ی شدید جلو برابر است با $1/\gamma \simeq \theta$ ، که تقریباً همان پهنای باریکه برای مورد موازی (معادله ۱۳-۶۰) است. توان ماکسیمم در واحد زاویه‌ی فضایی و توان کل تقریباً به همان صورت معادله‌های ۱۳-۶۲ و ۱۳-۶۴ با تغییراتی جزئی در ضرایب عددی هستند.

برای ذره‌ای که در مداری دایره‌ای در یک میدان مغناطیسی حرکت می‌کند شتاب عمود بر سرعت است. اگر ذره نسبیتی باشد نقش تابش آن به صورتی است که در شکل ۱۳-۱۰ نشان داده شده است. تابش در صفحه‌ی مدار قطبیده است زیرا این صفحه صفحه‌ی شتاب است. ناظری که در مکان ثابتی در صفحه‌ی مدار قرار دارد هر زمان که باریکه‌ی جلو از مکان او بگذرد تپی شدید اما کوتاه دریافت می‌کند.

تابش ناشی از ذراتی که در میدان مغناطیسی می‌پیچند تابش سنکروترون نامیده می‌شود. در



شکل ۱۳-۱۱ درحالی که الکترون به طرف ناظر حرکت می‌کند باریکهٔ نقش تابش از ناظر می‌گذرد.

شناخته‌نده‌های سنکروترون الکترونها این نوع تابش را گسیل می‌کنند. برای الکترونها فرین نسبیته در مدار دایره‌ای، اتلاف انرژی از طریق تابش کاملاً زیاد است؛ این امر باعث ایجاد محدودیتهای عملی برای ماکسیمم انرژی الکترون قابل دسترس در شناخته‌نده‌های دایره‌ای، تقریباً 10^6 GeV می‌شود. برای رسیدن به انرژیهای زیادتر باید از شناخته‌نده‌های خطی استفاده کرد.

تابش سنکروترون جایگاه مهمی در اخترفیزیک دارد — بیشتر گسیلهای رادیویی از سحابیها و کهکشانها به همین طریق ایجاد می‌شود. الکترونها بسیار پرانرژی که در میدانهای مغناطیسی حرکت مداری دارند نه تنها در بسامدهای رادیویی بلکه در بسامدهای مرئی و بسامدهای پرتو X نیز گسیل می‌کنند. برای مثال، تابش سنکروترون سحابی خرچنگ گسترهٔ بسامدی از تقریباً 10^8 تا 10^{16} بر ثانیه را در برمی‌گیرد.

محاسبهٔ زیر تخمینی است از بسامد تابش سنکروترون که توسط الکترونی با حرکت فرین نسبیته گسیل می‌شود. برای این الکترون، تابش در باریکه‌ای با پهنای زاویه‌ای $\Delta\theta \simeq 1/\gamma$ متمرکز شده است (معادلهٔ ۱۳-۶۰). ناظری که در صفحهٔ مدار واقع است هر زمان که این باریکه از مکان او بگذرد تپ تیزی از تابش را دریافت می‌کند. اگر بسامد حرکت مداری الکترون ω باشد، مدت زمانی که طول می‌کشد تا الکترون گسیل تپ را کامل کند برابر است با

$$\Delta t' = \frac{\Delta\theta}{\omega} \simeq \frac{1}{\gamma\omega} \quad (۱۳-۶۵)$$

چون الکترون ضمن گسیل به طرف ناظر حرکت می‌کند (شکل ۱۳-۱۱)، ناظر تپ را در بازهٔ زمانی

کوتاهتر زیر دریافت می‌کند

$$\Delta t = \Delta t' \left(1 - \frac{v'}{c} \right) \quad (۶۶-۱۳)$$

(اگر این رابطه را در c ضرب کنیم واضح می‌شود:

$$c \Delta t = c \Delta t' - v' \Delta t' \quad (۶۷-۱۳)$$

که نشان می‌دهد طول Δt در فضا برابر است با طول آن در صورتی که الکترون به طرف ناظر حرکت نمی‌کرد منهای فاصله‌ای که الکترون طی گسیل حرکت کرده است.) با تقریب معمول $1 - v/c \simeq 1/(2\gamma^2)$ ، معادله ۶۶-۱۳ به صورت زیر در می‌آید

$$\Delta t \simeq \frac{1}{2\gamma^2\omega} \quad (۶۸-۱۳)$$

از آنالیز فوریه می‌دانیم اگر Δt طول بکشد شامل طیفی از بسامدهایی است که گستره آنها از صفر تا $1/\Delta t$ است. در نتیجه، بسامد ماکسیمم موجود در Δt تقریباً برابر است با

$$\omega_c \simeq \gamma^2 \omega. \quad (۶۹-۱۳)$$

این نتیجه نشان می‌دهد برای تابش سنکروترونی که از الکترونها فرین نسبیتی گسیل می‌شود، بسامد تابش می‌تواند بسیار بیشتر از بسامد مداری باشد. برای مثال، بسامد مداری الکترونها 10^6 MeV در میدان مغناطیسی 10^{-4} گاوس در سحابی خرچنگ برابر است با

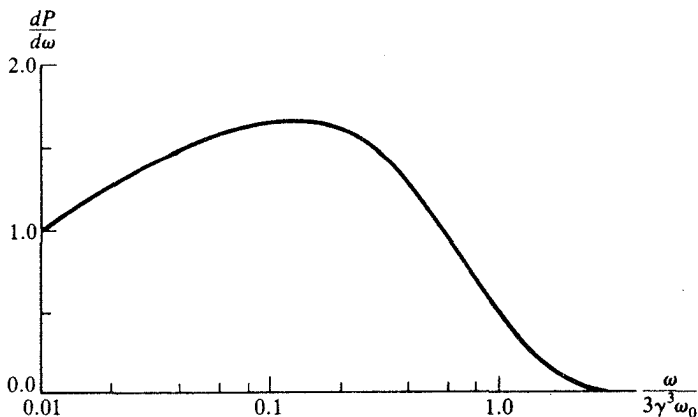
$$\omega_0 = \frac{eB}{m_e c \gamma} = 9 \times 10^{-4} / \text{s} \quad (۷۰-۱۳)$$

اما تابش سنکروترون این الکترونها دارای بسامدهایی است تا

$$\omega_c \simeq \gamma^2 \omega_0 \simeq 7 \times 10^{15} / \text{s} \quad (۷۱-۱۳)$$

بدین ترتیب، این الکترونها نور مرئی و فرابنفش گسیل می‌کنند.

شکل ۱۳-۱۲ توزیع طیفی (توان در واحد بازه بسامدی) تابش سنکروترون را نشان می‌دهد. این منحنی طیفی از محاسبات نظری مفصل به دست آمده است. توجه کنید که این طیف تا بسامدی حدود $\gamma^2 \omega_0$ ، که با تخمین تقریبی معادله ۶۹-۱۳ توافق دارد، ادامه دارد.



شکل ۱۳-۱۲ توزیع طیفی توان گسیل شده در تابش سنکروترون.

۵-۱۳ تابش در محیط دی الکتریک؛ اثر چرنکوف

اگر توزیع بار و چگالی در محیطی دی الکتریک، مثلاً پلاستیک یا گاز، قرار داشته باشد لازم است تغییراتی در فرمولهای بخشهای قبل بدهیم. محیط را خطی، همگن و همسانگرد با ثابت دی الکتریک ϵ ، ثابت گذردهی μ و ضریب شکست $n = \sqrt{\mu\epsilon}$ می گیریم. اگر میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را برحسب پتانسیل و پتانسیل برداری بیان کنیم $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - (1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t$ و $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ، معادلات ماکسول ۱۲-۸ و ۱۲-۸۱ به صورت زیر در می آیند

$$\frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho \quad (۷۲-۱۳)$$

$$\frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j} \quad (۷۳-۱۳)$$

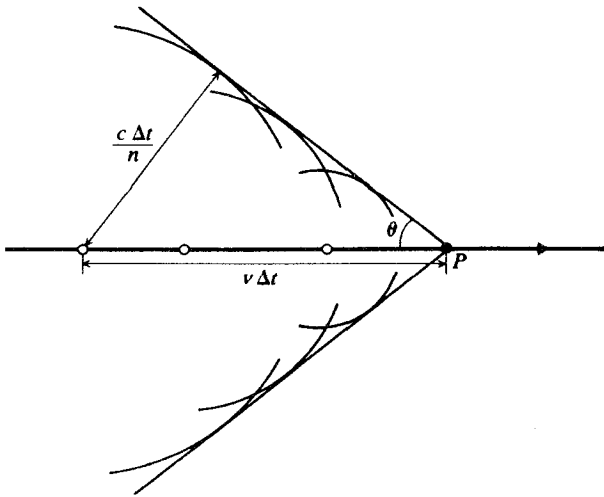
که در آنها شرط «تغییر یافته» لورنتس را به کار برده ایم:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + (\mu\epsilon/c)\partial\Phi/\partial t = 0$$

بنا به شباهت با معادله ۱۳-۳، بلافاصله دیده می شود که جوابهای معادله های بالا عبارت اند از

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon} \int \frac{\rho(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|n/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (۷۴-۱۳)$$

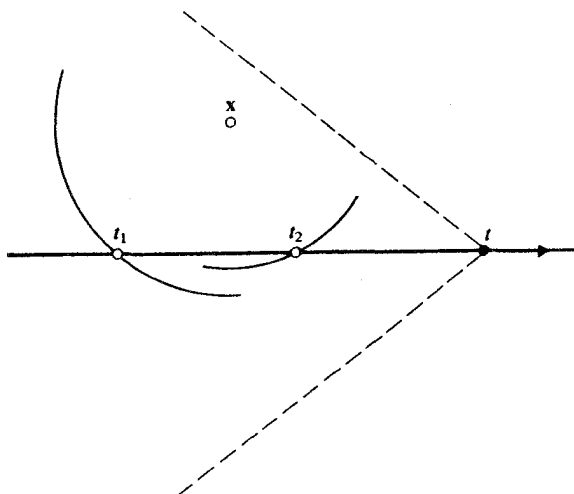
$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu}{c} \int \frac{\mathbf{j}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|n/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (۷۵-۱۳)$$



شکل ۱۳-۱۳ در یک لحظه از زمان ذره در نقطه P است. کمانهای دایره‌ها کرانه اغتشاشهای الکترومغناطیسی ناشی از ذره در زمانهای قبل را وقتی ذره در مکان نقاط توخالی بوده است نشان می‌دهند.

توجه کنید که این معادلات با معادلات متناظر برای خلا تنها در ضرایب کلی ϵ و μ و به خاطر تغییر زمان تأخیری $t' = t - |x - x'|n/c$ که در اینجا با سرعت نور c/n در محیط محاسبه می‌شود تفاوت دارند. بنابراین می‌توانیم تعبیر معادله ۱۳-۳ را برای این معادلات نیز معتبر بدانیم؛ هر جزء کوچک باری یا جریان اغتشاشی در پتانسیل یا پتانسیل برداری ایجاد می‌کند که با سرعت c/n به اطراف منتشر می‌شود.

می‌توانیم معادله‌های ۱۳-۷۴ و ۱۳-۷۵ را برای محاسبه میدانهای الکترومغناطیسی ذره برداری که در محیط حرکت می‌کند به‌کار ببریم. اگر سرعت ذره کمتر از سرعت نور در محیط باشد ($v < c/n$)، محاسبه را می‌توان به روش بخش ۱۳-۳ انجام داد. چون تفاوت تنها به علت وجود ضرایب ϵ ، μ و n در این معادلات است، نتایج از لحاظ کیفی شبیه به نتایج بخش ۱۳-۳ هستند. اما اگر سرعت ذره از سرعت نور در محیط زیادتر باشد ($v > c/n$) محاسبه نسبتاً پیچیده‌تر می‌شود، و نتایج نهایی کاملاً متفاوت‌اند. ذره‌ای از این نوع نه تنها وقتی دارای حرکت شتابدار است بلکه در حرکت یکنواخت نیز تابش گسیل می‌کند. گسیل تابش توسط ذره‌ای که با سرعتی بیشتر از سرعت نور در محیط حرکت یکنواخت دارد اثر چرنکوف نامیده می‌شود. تابش چرنکوف اساساً یک موج تکان نظیر صدای ناشی از هواپیمای فوق‌صوت است. این تابش به «مخروط ماخ» که دنبال ذره حرکت می‌کند محدود می‌شود — میدان الکترومغناطیسی در جلو ذره و تمام نقاط خارج از این مخروط صفر است. زاویه مخروط را می‌توان از شکل ۱۳-۱۳ به دست آورد؛ این شکل ذره را در یک لحظه از زمان و همچنین کرانه اغتشاشهای الکترومغناطیسی ناشی



شکل ۱۳-۱۴ پوسته جمع‌کننده اطلاعات در دو زمان t_1 و t_2 .

از ذره را در زمانهای قبل نشان می‌دهد. اغتشاش که Δt ثانیه قبل آغاز شده است تا فاصله $c \Delta t/n$ گسترش یافته است؛ در این مدت، ذره فاصله $v \Delta t$ را طی کرده است. بنابراین، زاویه مخروط از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\sin \theta = \frac{c}{nv} \quad (۱۳-۷۶)$$

میدان الکترومغناطیسی در هر نقطه داخل مخروط را می‌توان از معادله‌های کلی ۱۳-۷۴ و ۱۳-۷۵ مربوط به پتانسیلها به دست آورد، اما لازم است توجه داشته باشیم که همیشه دو مکان تأخیری متمایز برای ذره داریم که در هر لحظه معین در میدان سهم دارند — یعنی برای معادله ۱۳-۲۵ همیشه دو جواب x' داریم. این مطلب را می‌توان با استفاده از پوسته جمع‌کننده اطلاعات که در بخش ۱۳-۱ توصیف شد درک کرد. این پوسته به مرکز نقطه x است، و با سرعت c/n به سمت این نقطه متراکم می‌شود به طوری که در لحظه t به این نقطه می‌رسد. شکل ۱۳-۱۴ پوسته را در دو زمان t_1 و t_2 که قبل از t هستند نشان می‌دهد. ذره در t_1 وارد پوسته می‌شود و در t_2 که پوسته شعاع کوچکتری دارد از آن خارج می‌شود؛ بنابراین، ذره دوبار از پوسته عبور می‌کند. این عبور دوگانه برای ذره‌ای که با سرعتی کمتر از c/n حرکت می‌کند امکانپذیر نیست؛ این نوع ذره هیچگاه نمی‌تواند به پوسته برسد و از این رو نمی‌تواند وارد آن شود — این ذره می‌تواند تنها یک‌بار، موقع خروج، از پوسته عبور کند. به علت این پیچیدگیها میدانهای تابش چرنکوف را

محاسبه نمی‌کنیم؛ تنها کافی است بگوییم نتایج محاسبه این انتظار شهودی را تأیید می‌کنند که در سطح مخروط مایخ، که پتانسیلها ناگهان از صفر به یک مقدار متناهی افزایش می‌یابند، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بسیار شدید هستند. آشکارسازی که در مکان ثابتی خارج از مسیر ذره قرار دارد موقعی که مخروط از آن می‌گذرد تپ شدیدی از تابش را ثبت می‌کند. چون راستای انتشار تابش عمود بر مخروط است، از یک آشکارساز با حساسیت راستایی می‌توان برای تعیین زاویه مخروط استفاده کرد، و از اینجا می‌توان سرعت ذره را به دست آورد. از اثر چرنکوف عموماً در فیزیک انرژی زیاد برای تعیین سرعت ذرات سریع استفاده می‌شود. در شمارشگرهای چرنکوف که به همین منظور به کار برده می‌شوند محیط دی‌الکتریک عبارت است از یک پلاستیک شفاف یا گازی که تحت فشار زیاد قرار دارد.

مسائل

۱-۱۳ با استفاده از پتانسیلهای لینارد-ویشرت میدانهای الکتریکی و مغناطیسی مربوط به باری نقطه‌ای را که با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند به دست آورید، و نشان دهید نتیجه با میدانهای به دست آمده در بخش ۸-۲ توافق دارد.

۲-۱۳ یک بارنقطه‌ای که در امتداد محور x حرکت می‌کند به مبدأ نزدیک می‌شود، در مبدأ می‌ایستد، و سپس در امتداد محور x از مبدأ دور می‌شود. این ذره مطابق با معادله $x = \frac{1}{4}at^2$ با شتاب یکنواخت حرکت می‌کند. حرکت را غیرنسبیتی بگیرید. میدانهای تابش الکتریکی و مغناطیسی را روی محور y در نقطه $y = b$ در زمان $t = 0$ به دست آورید.

۳-۱۳ بارنقطه‌ای q روی دایره‌ای به شعاع R در صفحه xy حرکت می‌کند به طوری که بردار مکان آن عبارت است از

$$\mathbf{r} = \hat{x}R \cos \omega t + \hat{y}R \sin \omega t$$

که در آن ω ثابت است. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی دقیق ناشی از این بارنقطه‌ای را در $x = y = z = 0$ در زمان $t = 0$ به دست آورید. عبارتهای صریح E_x , E_y , E_z , B_x , B_y و B_z را در این زمان بنویسید. حرکت نسبیتی است.

۴-۱۳ یک الکترون آزاد در معرض موج الکترومغناطیسی تختی با بسامد ω و دامنه E قرار دارد. (الف) توان متوسطی را که الکترون هنگام شتاب گرفتن از میدان الکتریکی موج تابش می‌کند محاسبه کنید. (ب) در محاسبه قسمت (الف) معمولاً از تأثیر میدان مغناطیسی موج روی الکترون صرف نظر می‌شود. نشان دهید نتیجه تقریب خوبی است اگر $m_e c \omega / e \ll E$.

۵-۱۳ (الف) در شتابدهنده استاتنفورد لیناک الکترونها در امتداد مسیر مستقیمی به طول ۳۰۰۰

متر تا انرژی نهایی 40 GeV شتاب می‌گیرند. فرض کنید انرژی گرفته شده در واحد طول مسیر ثابت است. توان تابش شده را در آغاز فرایند شتابگیری و در پایان آن به دست آورید. (ب) در شتابدهنده دایره‌ای، توان تابش شده بسیار بیشتر است. برای مقایسه، فرض کنید الکترونی با انرژی 40 GeV روی مداری دایره‌ای به شعاع 30 متر قرار دارد. توان تابش شده را در این مورد محاسبه کنید.

۱۳-۶ فرض کنید در یک برخورد الکترون با پروتون کمترین فاصله برخورد 10^{-11} cm است. میدان تابش الکتریکی (تاخیری) را در فاصله 3 سانتیمتری از این نقطه در راستای عمود بر شتاب براساس فیزیک کلاسیک محاسبه کنید. نتیجه را با میدان الکتروستاتیک الکترون در همین فاصله مقایسه کنید.

۱۳-۷ ذره بارداری دارای سرعت v' و شتاب a' است. راستاهایی را (نسبت به v' و a') به دست آورید که در آنها هیچ تابشی گسیل نمی‌شود.

۱۳-۸ یک پروتون غیرنسبیتی با یک هسته ثابت برخورد رودرو انجام می‌دهد. نیروی وارد بر پروتون نیروی کولن Ze^2/r^2 است. پروتون در یک راستای شعاعی به هسته نزدیک می‌شود و باز می‌گردد. سرعت نزدیک شدن (در فاصله دور) v_0 است. انرژی کل تابش شده طی این برخورد را بنا بر الکتروپدینامیک کلاسیک به دست آورید. از تأثیر تابش روی حرکت پروتون صرف‌نظر کنید.

۱۳-۹ فرض کنید در یک اتم هیدروژن الکترون روی مدار دایره‌ای مطابق با مکانیک کلاسیک و الکتروپدینامیک کلاسیک حرکت می‌کند به طوری که توان تابش شده از معادله ۱۳-۵۵ تعیین می‌شود. الکترون به علت از دست دادن انرژی با حرکت حلزونی تدریجاً به هسته نزدیک می‌شود. فرض کنید در هر لحظه الکترون روی مداری دایره‌ای حرکت می‌کند به طوری که انرژی مداری آن تابعی است از شعاع به صورت $-e^2/2r$. آهنگ کاهش لحظه‌ای شعاع را محاسبه کنید. چه مدت طول می‌کشد تا الکترون از مدار بور به مرکز برسد؟

۱۳-۱۰ در یک اتم هیدروژن الکترون در مداری دایره‌ای به شعاع

$$r = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} n^2$$

حرکت می‌کند. توان تابش شده را بنا بر الکتروپدینامیک کلاسیک محاسبه کنید. تعیین کنید چه مدت طول می‌کشد تا الکترون مقدار انرژی زیر را تابش کند

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_e c^2 \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right]$$

نتیجه عددی را به‌ازای $n = 6$ به‌دست آورید و با مقداری که از مکانیک کوانتومی به‌دست می‌آید یعنی $10^{-68} \approx$ مقایسه کنید.

۱۱-۱۳ تابش ترمزی عبارت است از تابش گسیل شده وقتی که الکترونها در برخورد با هدف که معمولاً یک قطعه فلز است حرکت کندشونده پیدا می‌کنند. بیشتر این انرژی از برخورد الکترونها با هسته‌های هدف ناشی می‌شود. انرژی کل تابش شده توسط یک الکترون را که با پارامتر برخورد b به هسته‌های با بار Ze فرود می‌آید بر مبنای الکترو دینامیک کلاسیک محاسبه کنید. فرض کنید حرکت الکترون چنان سریع است که با تقریب خوب می‌توان مسیر را یک خط مستقیم (نامتناهی) گرفت که در هر نقطه آن الکترون دارای شتابی ناشی از نیروی کولن است (مانند مسئله ۲-۱۰)؛ انحراف از حرکت مستقیم‌الخط ناشی از این شتاب را مقدار کوچکی بگیرید که در تقریب اول باید از آن صرف‌نظر کرد). مسئله را برای الکترونی با انرژی 20 keV که با پارامتر برخورد 5×10^{-11} سانتیمتر به هسته مولیبدن فرود می‌آید به‌طور عددی محاسبه کنید.

۱۲-۱۳ بنا به معادله ۱۳-۵۵، ذره باردار غیرنسبیتی با آهنگ $2q^2 a'^2 / 3c^3$ انرژی تابش می‌کند. با توجه به این اتلاف انرژی، چه نیرویی لازم است تا ذره در حرکت مستقیم‌الخط با شتاب ثابت نگه داشته شود؟ مسئله را برای حرکت دایره‌ای حل کنید.

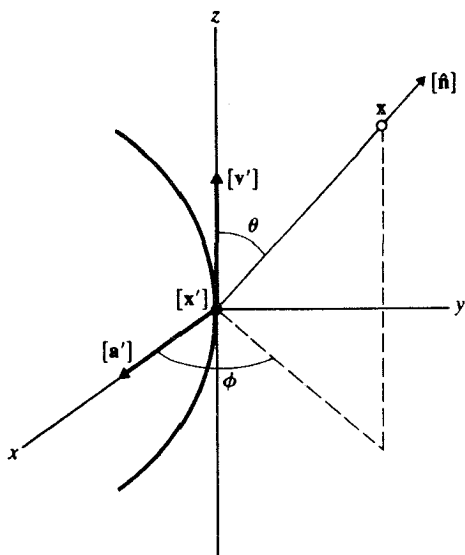
۱۳-۱۳ فرض کنید یک تک قطبی مغناطیسی با بار مغناطیسی g دارای شتاب a' است. (الف) فرمولهای متناظر با معادله‌های ۱۳-۴۸، ۱۳-۵۰ و ۱۳-۵۵ را برای میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی و توان تابش شده به‌دست آورید. حرکت را غیرنسبیتی بگیرید. (ب) آهنگ تابش را برای یک تک‌قطبی مغناطیسی با بار مغناطیسی $ch/2e$ و جرم $10^{-8} \times 1$ که در میدان گرانشی نزدیک سطح زمین سقوط آزاد می‌کند محاسبه کنید.

۱۴-۱۳ از معادله ۱۳-۵۷ روی تمام زاویه فضایی انتگرال بگیرید، و نشان دهید اگر حرکت فرین نسبیتی باشد ($\gamma \gg 1$) فرمول دقیق به‌دست آمده برای توان با معادله ۱۳-۶۴ توافق دارد.

۱۵-۱۳ شکل ۱۵-۱۳ قسمتی از مدار ذره‌ای را نشان می‌دهد که حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد (شتاب عمود بر سرعت است). (الف) ثابت کنید توان در واحد زاویه فضایی برابر است با

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \left[\frac{a'^2}{(1 - v' \cos \theta/c)^2} \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^2 (1 - v' \cos \theta/c)^2} \right\} \right]$$

که در آن زاویه‌های θ و ϕ در شکل تعریف شده‌اند. (ب) این نقش تابش در $\theta = 0$ دارای ماکسیمم است. این مقدار $dP/d\Omega$ را به‌دست آورید. (ج) ثابت کنید این نقش



شکل ۱۳-۱۵ قسمتی از مدار دایره‌ای در صفحه zx .

تابش در صفحه مدار دایره‌ای $(\phi = 0)$ در $\theta = \pm \cos^{-1}(v'/c)$ دارای صفر است. (د) با انتگرال گرفتن از $dP/d\Omega$ روی تمام زاویه فضایی توان تابش شده کل را به دست آورید.

۱۳-۱۶ اگر بخواهیم ذره‌ای در بازه زمانی dt مقدار انرژی $(dP/d\Omega)dt$ به یک آشکارساز منتقل کند این ذره باید در بازه زمانی تأخیری dt' به همین مقدار انرژی $(dP'/d\Omega)dt'$ تابش کند. بنابراین، توان دریافت شده $dP/d\Omega$ توسط آشکارساز و توان تابش شده $dP'/d\Omega$ توسط ذره برابر نیستند، و به اندازه ضریب dt/dt' تفاوت دارند:

$$\frac{dP'}{d\Omega} = \frac{dP}{d\Omega} \frac{dt}{dt'} = \frac{dP}{d\Omega} \left(1 - \hat{n} \cdot \frac{\mathbf{v}'}{c} \right)$$

با توجه به این رابطه نشان دهید توان تابش شده توسط ذره‌ای که شتاب و سرعت آن باهم موازی هستند برابر است با

$$\frac{dP'}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \left[\frac{a'^2 \sin^2 \theta}{(1 - v' \cos \theta/c)^5} \right]$$

از این رابطه روی تمام زاویه فضایی انتگرال بگیرید و نشان دهید اگر حرکت فرین نسبیتی باشد
($\gamma \gg 1$)

$$P' = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} a'^2 \gamma^6$$

آیا کمتر بودن این توان تابش شده از توان دریافت شده (معادله ۱۳-۶۴) معنی دارد؟

۱۳-۱۷ معادله‌های ۱۳-۷۴ و ۱۳-۷۵ را به دست آورید، و با استفاده از معادله پایستگی بارالکتریکی تحقیق کنید این معادله‌ها شرط لورنتس «تغییر یافته» را برآورده می‌کنند.

۱۳-۱۸ با شروع از معادله‌های ۱۳-۷۴ و ۱۳-۷۵، فرمولهای متناظر با معادله‌های ۱۳-۴۲ و ۱۳-۴۴ را برای میدانهای تابش الکتریکی و مغناطیسی بارنقطه‌ای q که در محیط دی‌الکتریک با سرعت $v < c/n$ حرکت می‌کند به دست آورید. تحقیق کنید $\mathbf{B} = \sqrt{\mu\epsilon}[\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}]$.

۱۳-۱۹ ضریب شکست یک نوع رزین شفاف ۱٫۵ است. زاویه گسیل تابش چرنکوف را برای پروتونی با انرژی 340 MeV که در این رزین حرکت می‌کند، و همچنین برای الکترونی با انرژی 340 MeV به دست آورید.

تابش دستگاه بار

موج الکترومغناطیس گسیل شده از مثلاً آنتن رادیو یا رادار برهم‌نهی هم‌دوسی است از میدانهای تابش انفرادی ناشی از تعداد زیادی الکترون که در امتداد آنتن رفت و برگشت می‌کنند. اصولاً می‌توانیم میدان تابش آنتن را با جمع زدن میدانهای تابش انفرادی تمام بارهای نقطه‌ای شتابدار روی آنتن، محاسبه کنیم. برای این منظور، باید جزئیات حرکت تمام بارهای نقطه‌ای را پیگیری کنیم. این کار غیرممکن است، و بسیار مناسبتر است که دستگاه بارهای نقطه‌ای را برحسب چگالی جریان j_μ توصیف کنیم. در این فصل روشی را برای محاسبه مستقیم میدانهای تابش الکتریکی و مغناطیسی از چگالی جریان شرح و بسط می‌دهیم. این روش شامل دو مرحله است: ابتدا با استفاده از معادله ۱۳-۳ چاربردار پتانسیل A_μ ناشی از چگالی جریان معین j_μ را می‌نویسیم، و سپس میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} را از این پتانسیل محاسبه می‌کنیم. چنانکه خواهیم دید، هرگونه وابستگی زمانی جریان منجر به گسیل تابش می‌شود.

روش و فرمولهای این فصل نه تنها برای تعیین تابش گسیل شده از آنتن بلکه برای تابش گسیل شده از اتم یا هسته نیز مفید هستند. میدان تابش اتم یا هسته را نمی‌توانیم از جزئیات حرکت الکترونها، پروتونها و نوترونها محاسبه کنیم زیرا مکان و سرعت این ذرات زیراتمی کاملاً معین نیستند— مکانیک کلاسیک در داخل اتم کارایی ندارد. اما معلوم می‌شود که مکانیک کوانتومی،

اگرچه جزئیات حرکت ذرات زیراتمی را تعیین نمی‌کند، رابطه‌ای برای چگالی جریان به دست می‌دهد که از آن می‌توانیم تابش را محاسبه کنیم.

۱-۱۴ میدانهای تابش

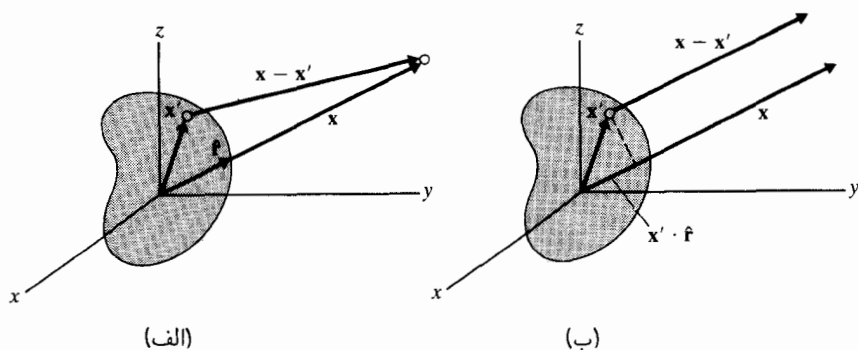
اگر دستگاه بار دارای چگالی جریان معین $j_\mu(t, \mathbf{x}')$ باشد، معادله ۳-۱۳ بیان می‌کند که چاربرد از پتانسیل متناظر در نقطه معین \mathbf{x} (شکل ۱-۱۴ الف) باید به صورت زیر باشد

$$A^\mu(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{j^\mu(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (1-14)$$

در محاسبه میدانهای تابش الکتریکی و مغناطیسی می‌توانیم فرض کنیم $r \equiv |\mathbf{x}|$ بسیار بزرگتر از اندازه دستگاه است. بنابراین، به ازای هر نقطه \mathbf{x}' در ناحیه انتگرال‌گیری، می‌توانیم بنویسیم

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \simeq r - \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (2-14)$$

این تقریب باعث می‌شود بتوانیم \mathbf{x} و $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ را تقریباً موازی بگیریم (شکل ۱-۱۴ ب). علاوه بر این، در انتگرال ۱-۱۴ تنها جمله‌هایی را لازم است نگه داریم که به صورت $1/r$ رفتار می‌کنند؛ جمله‌هایی که مانند $1/r^2$ ، $1/r^3$ و ... رفتار می‌کنند تأثیری در میدانهای تابش ندارند. در نتیجه، $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \simeq r$ تقریب کاملاً خوبی در مخرج تابع زیر انتگرال در معادله ۱-۱۴ است. با این



شکل ۱-۱۴ الف) دستگاه بار محدود به حجمی متناهی حول مبدأ. (ب) اگر $|\mathbf{x}|$ در مقایسه با $|\mathbf{x}'|$ بسیار بزرگ باشد، آنگاه \mathbf{x} و $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ تقریباً موازی هستند.

تقریبا، چاربردار پتانسیل به صورت زیر درمی آید

$$A^\mu(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{cr} \int j^\mu(1 - r/c + \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{r}}/c, \mathbf{x}') dV' \quad (3-14)$$

اکنون می توانیم میدان مغناطیسی را با تاو گرفتن از \mathbf{A} محاسبه کنیم:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \left(\frac{\nabla \times \mathbf{j}}{r} \right) + \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{j} dV' \quad (4-14)$$

از جمله دوم در تابع زیر انتگرال می توان صرف نظر کرد زیرا به صورت $1/r^2$ رفتار می کند. برای محاسبه $\nabla \times \mathbf{j}$ ، ملاحظه می کنیم که مشتقهای فضایی \mathbf{j} را می توان بنابر قاعده زیر بر حسب مشتقهای زمانی بیان کرد

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{j}(t - r/c + \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{r}}/c, \mathbf{x}') = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x} (-r + \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) \quad (5-14)$$

و قاعده های متناظری برای $\partial/\partial y$ و $\partial/\partial z$.

■ **تمرین ۱-** معادله ۵-۱۴ را از قاعده زنجیری برای مشتق زمانی به دست آورید.
از اینجا به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{j}(t - r/c + \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{r}}/c, \mathbf{x}') &= \frac{1}{c} \nabla(-r + \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) \times \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{c} [-\hat{\mathbf{r}} + \nabla(\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{r}})] \times \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \end{aligned}$$

به علاوه، می توانیم از $\nabla(\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{r}})$ صرف نظر کنیم زیرا منجر به یک جمله $1/r^2$ در میدان می شود. پس میدان تابش مغناطیسی برابر است با

$$\mathbf{B} = \int -\frac{1}{c^2} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \times \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} dV' = -\frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (6-14)$$

به همین طریق می توانیم میدان الکتریکی را نیز محاسبه کنیم:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A^0 \simeq -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial A^0}{\partial t} \quad (7-14)$$

تمرین ۲- معادله ۷-۱۴ را به دست آورید.

چون A^μ در شرط لورنتس

$$\frac{1}{c} \frac{\partial A^\mu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

صدق می‌کند، می‌توانیم به جای معادله ۷-۱۴ قرار دهیم

$$\mathbf{E} \simeq -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \hat{\mathbf{r}} \nabla \cdot \mathbf{A} \simeq -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (۸-۱۴)$$

در آخرین مرحله از این محاسبه باز هم مشتقات فضایی را برحسب مشتقات زمانی بیان کرده‌ایم (مانند معادله ۵-۱۴). دو جمله معادله ۸-۱۴ را می‌توانیم در یک حاصلضرب برداری دوگانه ترکیب کنیم:

$$\mathbf{E} \simeq \frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \times \left(\hat{\mathbf{r}} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (۹-۱۴)$$

و مقایسه با معادله ۶-۱۴ نشان می‌دهد رابطه بین میدان تابش الکتریکی با میدان تابش مغناطیسی به صورت زیر است

$$\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (۱۰-۱۴)$$

بنابراین، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی برهم عمودند و دارای بزرگی یکسانی هستند، درست همانطور که برای تابش انتظار داریم (بخش ۳-۱۳). در بحث زیر، بهتر است \mathbf{B} را از معادله ۶-۱۴ محاسبه کنیم و سپس \mathbf{E} را با استفاده از ۱۰-۱۴ به دست آوریم. پیش از اینکه به یک مثال پردازیم، فرضهایی را که در محاسبه میدانهای تابش در نظر گرفتیم به اختصار بیان می‌کنیم:

۱. تقریب ۲-۱۴ را اعمال کرده‌ایم. بنابه این تقریب، r بسیار بزرگتر از اندازه دستگاه است:

$$r \gg a \quad (۱۱-۱۴)$$

که در آن a (بزرگترین) اندازه دستگاه است.

۲. از جمله‌های $1/r^2$ در \mathbf{E} و \mathbf{B} صرف نظر کرده‌ایم. این جمله‌ها نوعاً از مرتبه

$$\approx \frac{1}{c} \int \frac{1}{r^2} \mathbf{j} dV' \quad (۱۲-۱۴)$$

هستند (معادله ۱۴-۴). جمله‌هایی که نگه‌داشته‌ایم از مرتبه

$$\approx \frac{1}{c^2} \int \frac{1}{r} \frac{\partial j}{\partial t} dV' \quad (13-14)$$

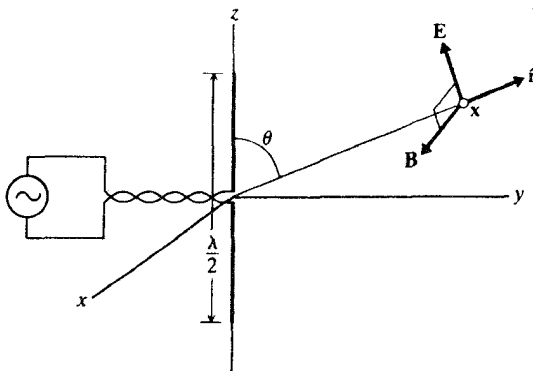
هستند. اگر تخمین بزنیم $|\partial j / \partial t| \approx |j|/T$ ، که در آن T دوره دستگاه یا زمان مشخصه لازم برای تغییر قابل ملاحظه جریان است، آنگاه می‌بینیم ۱۴-۱۲ به اندازه ضریب cT/r کوچکتر از ۱۴-۱۳ است. چون cT تقریباً طول موج تابش گسیل شده است، این ضریب را به صورت λ/r نیز می‌توانیم بیان کنیم، و شرط کوچک بودن این ضریب این است که

$$\lambda \ll r \quad (14-14)$$

۱۴-۲ آنتن نیم موج

یک آنتن بسیار ساده تشکیل شده است از دو قطعه سیم که در آنها جریانی نوسانی توسط مولد با بسامد زیاد ایجاد می‌شود (شکل ۱۴-۲). این توزیع بار نوسانی در آنتن امواج رادیویی گسیل می‌کند. در کاربردهای عملی، طول این نوع آنتنهای ساده را معمولاً نصف طول موج رادیویی انتخاب می‌کنند. آنگاه جریان در امتداد آنتن به صورت موج ایستاده است:

$$I = I_0 \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \omega t \quad (15-14)$$



شکل ۱۴-۲ آنتن نیم موج در امتداد محور z.

که در آن ω بسامد مولد است و $\lambda = 2\pi c/\omega$. این جریان در وسط آنتن ماکسیمم است، و در نقاط انتهایی $z = \pm \lambda/4$ صفر است. موج ایستاده به صورت زیر به وجود می‌آید: تپهای جریانی که توسط مولد در وسط آنتن ایجاد شده‌اند در امتداد آنتن حرکت می‌کنند، در نقاط انتهایی بازتابیده می‌شوند، و به نقطهٔ وسط باز می‌گردند. سرعت انتشار این تپها در آنتن تقریباً برابر سرعت نور است؛ بنابراین، طول موج ایستاده باید برابر با این سرعت ضربدر دورهٔ نوسان باشد، یعنی $c \times 2\pi/\omega$ معادلهٔ ۱۴-۱۵. یک مزیت مهم آنتن نیم‌موج این است که عامل $\cos 2\pi z/\lambda$ همه جا مثبت است، و در نتیجه تمام بارهای روی آنتن با علامت یکسانی در میدانهای تابش سهم دارند (تداخل سازنده). توصیف توزیع جریان بر حسب موج ایستادهٔ ساده تقریب چندان خوبی نیست. توصیف دقیق نوسانهای توزیع جریان در آنتنی با شکل معین مسئلهٔ مقدار مرزی بسیار پیچیده‌ای است، و به علت تابش امواج الکترومغناطیسی توسط جریان و در نتیجه اتلاف انرژی و کم شدن شدت این مسئله پیچیده‌تر می‌شود. در عمل، آنتنهای «نیم‌موج» را غالباً با قطعات تلسکوپی می‌سازند به طوری که طول آنها را می‌توان تنظیم کرد تا ماکسیمم توان تابش شده به دست آید. طول تنظیم شدهٔ آنتن «نیم‌موج» تا اندازه‌ای کمتر از نصف طول موج است؛ این مطلب را می‌توان با توجه به اینکه سرعت انتشار تپهای جریان در آنتن اندکی کمتر از سرعت نور است تا حدی توجیه کرد. در ضمن، آنتنی که در فرستنده‌های رادیویی مورد استفاده قرار می‌گیرد سیم قائمی است به طول $\lambda/4$ که نزدیک سطح زمین نصب می‌شود. چون زمین رسانا است عملاً به منزلهٔ آینه‌ای است که «تصویر» سیم در آن تشکیل می‌شود. سیم و «تصویر» آن مجموعاً یک آنتن نیم‌موج تشکیل می‌دهند. برای سادگی، از تمام این پیچیدگیها صرف‌نظر می‌کنیم، و محاسبهٔ میدانهای تابش را برای توزیع جریان سادهٔ ۱۴-۱۵ انجام می‌دهیم.

بنا به معادلهٔ ۱۴-۳، پتانسیل برداری برای این توزیع جریان برابر است با

$$A_z = A^r = \frac{1}{cr} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} I_0 \cos \frac{2\pi z'}{\lambda} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{z'}{c} \cos \theta \right) dz' \quad (16-14)$$

با استفاده از اتحاد

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

داریم

$$A_z = \frac{I_0}{2cr} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \left\{ \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + z' \left(\frac{2\pi}{\lambda} + \frac{\omega}{c} \cos \theta \right) \right] + \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - z' \left(\frac{2\pi}{\lambda} - \frac{\omega}{c} \cos \theta \right) \right] \right\} dz' \quad (17-14)$$

اگر از این رابطه انتگرال بگیریم و $\lambda = 2\pi c/\omega$ را به جای λ بگذاریم، به دست می آوریم

$$A_z = \frac{I_0}{2r} \left\{ \frac{\sin[\omega(t-r/c) + \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi \cos \theta] - \sin[\omega(t-r/c) - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi \cos \theta]}{\omega(1+\cos \theta)} \right. \\ \left. - \frac{\sin[\omega(t-r/c) - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi \cos \theta] - \sin[\omega(t-r/c) + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi \cos \theta]}{\omega(1-\cos \theta)} \right\} \\ = \frac{I_0}{2r} \left[\frac{2 \cos \omega(t-r/c) \sin(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi \cos \theta)}{\omega(1+\cos \theta)} \right. \\ \left. + \frac{2 \cos \omega(t-r/c) \sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi \cos \theta)}{\omega(1-\cos \theta)} \right] \quad (18-14)$$

چون $\sin(\frac{1}{4}\pi \pm \frac{1}{4}\pi \cos \theta) = \cos(\frac{1}{4}\pi \cos \theta)$ ، صورتهای دو جمله داخل کروشه باهم برابرند. پس از جمع کردن این جمله ها به دست می آوریم

$$A_z = \frac{2I_0}{r\omega} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{\cos(\frac{1}{4}\pi \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \quad (19-14)$$

این تنها مؤلفه مخالف صفر **A** است.

اکنون می توانیم میدان مغناطیسی را از معادله ۱۳-۶ محاسبه کنیم. چون $\partial \mathbf{A} / \partial t$ در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ است، میدان مغناطیسی در جهت $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}}$ است (شکل ۱۴-۲). بزرگی میدان مغناطیسی برابر است با

$$B = -\sin \theta \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{2I_0}{cr} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{\cos(\frac{1}{4}\pi \cos \theta)}{\sin \theta} \quad (20-14)$$

روشن است که میدان الکتریکی عمود بر میدان مغناطیسی است و دارای همان بزرگی است. بردار پوینتینگ در جهت $\hat{\mathbf{r}}$ است؛ بزرگی آن برابر است با

$$S = \frac{c}{4\pi} B^2 = I_0^2 \frac{I}{\pi cr^2} \sin^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{\cos^2(\frac{1}{4}\pi \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \quad (21-14)$$

بزرگی بردار پوینتینگ متوسط زمانی برابر است با

$$\bar{S} = \frac{I_0^2}{2} \frac{1}{\pi cr^2} \frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \quad (22-14)$$

توان متوسط زمانی که در واحد زاویه فضایی تابش می‌شود عبارت است از

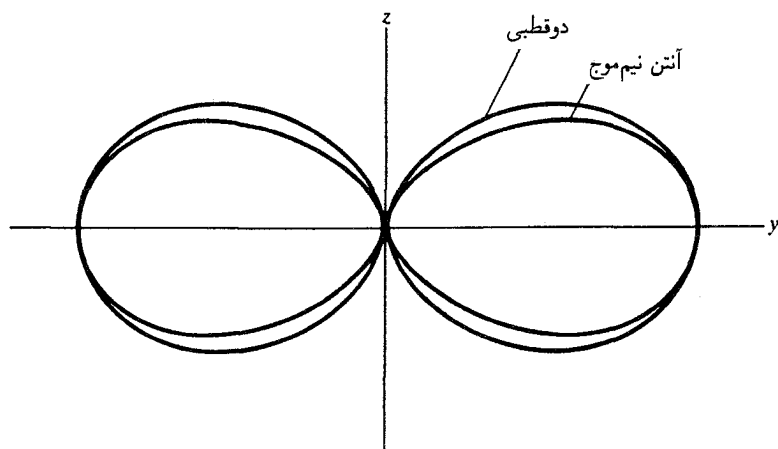
$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \bar{S}r^2 = \frac{I_0^2}{2\pi c} \frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \quad (23-14)$$

شکل ۳-۱۴ نمودار قطبی این نقش تابش را نشان می‌دهد؛ برای مقایسه، نمودار نقش تابش دوقطبی الکتریکی (بخش ۳-۱۴) نیز در این شکل آورده شده است. آنتن نیم‌موج تابش را در صفحه افقی بیشتر از دوقطبی به صورت باریکه درمی‌آورد.

توان تابش شده کل برابر است با انتگرال $d\bar{P}/d\Omega$ روی تمام زاویه فضایی:

$$\bar{P} = \int \frac{d\bar{P}}{d\Omega} d\Omega = \frac{I_0^2}{2c\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} d\theta d\phi$$

انتگرال روی θ را نمی‌توان برحسب توابع مقدماتی بیان کرد و باید به‌طور عددی محاسبه کرد. از



شکل ۳-۱۴ نمودارهای قطبی $d\bar{P}/d\Omega$ برای آنتن نیم‌موج و برای دوقطبی الکتریکی.

اینجا به دست می آوریم

$$\bar{P} = 1.22 \frac{I_0^2}{c} \quad (14-24)$$

تابش آنتن با شکل دیگری را برای توزیع جریان معین می توان به همین روش محاسبه کرد. تابش یک آرایه آنتنی شامل مثلاً چندین آنتن نیم موج را می توان از برهم نهش میدانهای هر یک از آنتنها به دست آورد.

۱۴-۳ بسط چندقطبی؛ تابش دوقطبی

اگر اندازه دستگاه تابش کننده در مقایسه با طول موج تابش کوچک باشد، غالباً بهتر است معادله ۱۴-۳ را با استفاده از بسط رشته توانی جریان محاسبه کنیم. این روش برای آنتنی که اندازه آن قابل مقایسه با طول موج باشد، مانند آنتن نیم موج، رضایت بخش نیست. رشته توانی یا همگرای کند است یا اصلاً همگرا نیست. اما برای اتم یا هسته که اندازه آنها بسیار کوچکتر از طول موج است، این روش کاملاً موفق است. یکی دو جمله رشته توانی غالباً کافی است تا تقریبی عالی برای میدانهای تابش به دست آید.

فرضهای ۱۴-۱۱ و ۱۴-۱۴ برای به دست آوردن روابط ۱۴-۶ و ۱۴-۱۰ برای میدانهای تابش کاملاً کفایت می کنند. اما برای بررسی میدانهای تابش ناشی از توزیع بار و جریانی با اندازه کوچک، فرض دیگری را نیز در نظر می گیریم:

۳. فرض می کنیم وابستگی جریان به جمله $\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{r}}/c$ را می توان به صورت رشته تیلور بیان کرد:

$$\mathbf{j}(t - r/c + \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{r}}/c, \mathbf{x}') = \mathbf{j}(t - r/c, \mathbf{x}') + \frac{1}{c} \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}(t - r/c, \mathbf{x}') + \dots \quad (14-25)$$

تفاوت جمله های اول و دوم در ضریبی از مرتبه a/cT است؛ رشته تیلور تقریب خوبی به دست می دهد به شرط اینکه این ضریب کوچک باشد:

$$a \ll cT \quad (14-26)$$

یا

$$a \ll \lambda \quad (14-27)$$

توجه کنید که a/T قابل مقایسه با، یا شاید بزرگتر از، سرعت v ای است که نوعاً ذرات در دستگاه دارند. بنابراین، معادله ۱۴-۲۶ ایجاب می‌کند که

$$v \ll c \quad (28-14)$$

که نشان می‌دهد آخرین فرض ما تنها برای دستگاه‌های غیرنسبیتی معتبر است. اگر شرایط ۱۴-۱۴ و ۱۴-۲۷ را ترکیب کنیم به دست می‌آوریم

$$a \ll \lambda \ll r \quad (29-14)$$

روشن است که این رابطه شرط ۱۴-۱۱ را ایجاب می‌کند و از این رو تمام فرضهای مورد لزوم را در خود خلاصه کرده است.

با گذاشتن رشته تیلور در معادله ۱۴-۳، بسط زیر را برای \mathbf{A} به دست می‌آوریم

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(t - r/c, \mathbf{x}') dV' + \frac{1}{c^2 r} \int \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}' \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}(t - r/c, \mathbf{x}') dV' + \dots \quad (30-14)$$

این رابطه را بسط چندقطبی برای تابش می‌نامند. جمله اول معرف تابش دوقطبی الکتریکی است؛ جمله دوم معرف تابش دوقطبی مغناطیسی و چارقطبی الکتریکی است؛ و جمله‌های از مرتبه بالاتر — با \dots نشان داده شده‌اند — معرف تابش چارقطبی مغناطیسی، تابش هشت‌قطبی الکتریکی و غیره هستند.

اکنون به جمله اول معادله ۱۴-۳۰ می‌پردازیم. از اتحاد زیر شروع می‌کنیم

$$\int \mathbf{j} dV' = - \int \mathbf{x}' (\nabla' \cdot \mathbf{j}) dV' \quad (31-14)$$

تمرین ۳- این اتحاد را به دست آورید. [راهنمایی: از طرف راست انتگرال جزء به جزء بگیرید.] ■

اما از پایستگی جریان داریم

$$\nabla' \cdot \mathbf{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (32-14)$$

و در نتیجه

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j} dV' = \frac{1}{cr} \int \mathbf{x}' \frac{\partial \rho}{\partial t} dV' = \frac{1}{cr} \frac{d}{dt} \int \mathbf{x}' \rho dV' \quad (33-14)$$

اگر گشتاور دوقطبی را به طریق معمول تعریف کنیم:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{x}' \rho \, dV' \quad (۳۴-۱۴)$$

آنگاه

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{cr} \left[\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right]_{t-r/c} \quad (۳۵-۱۴)$$

طرف راست در زمان $t - r/c$ محاسبه شده است زیرا این زمانی است که در معادله ۳۵-۱۴ با جریان ظاهر می‌شود.

میدان مغناطیسی متناظر با ۳۵-۱۴ عبارت است از

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times \left[\frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} \right]_{t-r/c} \quad (۳۶-۱۴)$$

بنابراین، در نمادنگاری فشرده، روابط زیر را برای میدانهای تابش دوقطبی داریم

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times [\ddot{\mathbf{p}}] \quad (۳۷-۱۴)$$

$$\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (۳۸-۱۴)$$

که در آنها کرشه تأخیر زمانی و نقطه‌ها مشتقات زمانی را نشان می‌دهند. بردار پوینتینگ عبارت است از

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \theta \quad (۳۹-۱۴)$$

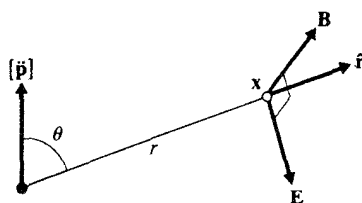
که در آن θ زاویه بین $[\ddot{\mathbf{p}}]$ و $\hat{\mathbf{r}}$ است (شکل ۴-۱۴).

توان گسیل شده در واحد زاویه فضایی برابر است با Sr^2 :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^2} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \theta \quad (۴۰-۱۴)$$

و توان کل گسیل شده در تمام راستاها برابر است با

$$P = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad (۴۱-۱۴)$$



شکل ۴-۱۴ جهت‌های $[\dot{\mathbf{p}}]$ و $\hat{\mathbf{r}}$ برای دوقطبی الکتریکی تابش‌کننده.

تمرین ۴- از معادله ۴-۱۴ روی تمام زاویه‌ها انتگرال بگیرید و معادله ۴۱-۱۴ را به دست آورید.

توجه کنید که اگر «دستگاه» بار تنها از یک بار نقطه‌ای تشکیل شده باشد آنگاه $\mathbf{p} = q\mathbf{x}'$ و نتیجه آشنای زیر را دوباره به دست می‌آوریم (با معادله ۵۵-۱۳ مقایسه کنید)

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} |\ddot{\mathbf{x}}|^2 \quad (۴۲-۱۴)$$

برای مورد خاص دوقطبی نوسان‌کننده‌ای متشکل از مثلاً ذره باردار که روی خط راست با گشتاور

$$\mathbf{p} = p \cos \omega t \quad (۴۳-۱۴)$$

حرکت هماهنگ ساده دارد، از معادله‌های ۳۷-۱۴ و ۳۸-۱۴ و ۴۰-۱۴ به دست می‌آوریم

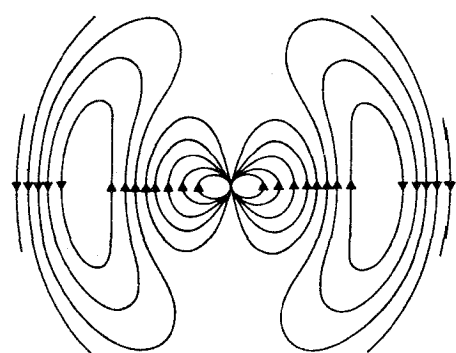
$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} \omega^2 \cos \omega(t - r/c) \quad (۴۴-۱۴)$$

$$\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (۴۵-۱۴)$$

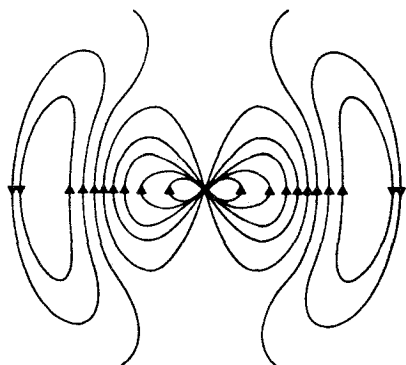
و

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3} p^2 \omega^4 \sin^2 \theta \cos^2 \omega(t - r/c) \quad (۴۶-۱۴)$$

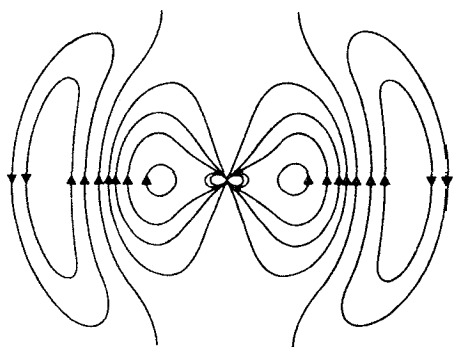
شکل ۵-۱۴ خطوط میدان الکتریکی را در لحظه‌های متوالی نشان می‌دهد. خطوط میدان مغناطیسی دایره‌هایی حول محور دوقطبی هستند؛ این خطوط عمود بر خطوط میدان الکتریکی



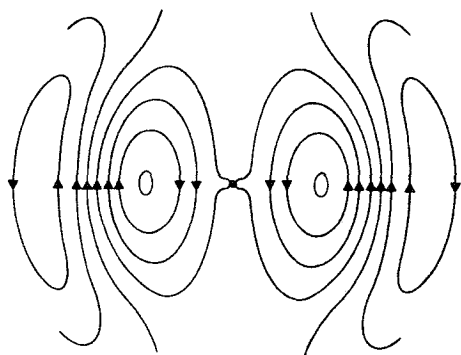
(الف)



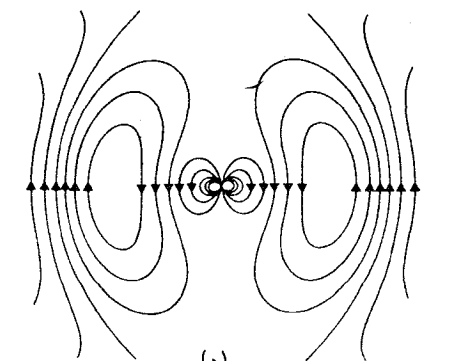
(ب)



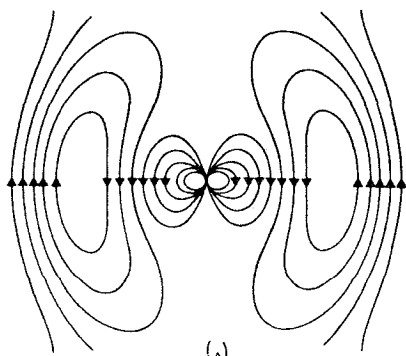
(ج)



(د)



(ه)



(و)

شکل ۱۴-۵ نقش خطوط میدان الکتریکی اطراف دو قطبی الکتریکی تابش کننده. نمودارهای (الف) تا (و) یک نیم دور را در بازه های $1/12$ دوره ای در برمی گیرند.

هستند. توزیع زاویه‌ای تابش متناسب با $\sin^2 \theta$ است (شکل ۱۴-۳). این نقش تابش با نقش تابش بار نقطه‌ای شتابدار (شکل ۱۳-۸) یکسان است. توان گسیل شده لحظه‌ای بین صفر و مقدار ماکسیمم زیر نوسان می‌کند

$$P = \frac{2}{3c^3} p_0^2 \omega^4 \cos^2 \omega(t - r/c)$$

توان گسیل شده متوسط زمانی برابر است با

$$\bar{P} = \frac{1}{3c^3} p_0^2 \omega^2 \quad (47-14)$$

مهم است که به خاطر داشته باشیم باری که حرکت هماهنگ ساده دارد نه تنها گشتاور دوقطبی نوسان‌کننده بلکه گشتاور چارقطبی نیز دارد. در نتیجه، این بار علاوه بر تابش دوقطبی تابش چارقطبی نیز گسیل می‌کند. اما در بخش ۵-۱۴ خواهیم دید که شدت تابش چارقطبی در ضریبی تقریباً برابر با λ^2 (اندازه دستگاه) که آن را کوچک می‌گیریم با شدت تابش دوقطبی تفاوت دارد. بنابراین، در تقریب اول می‌توانیم از تابش چارقطبی صرف‌نظر کنیم.

اتم مثال جالبی از دستگاه بارهای تابش‌کننده است. اندازه این دستگاه برابر است با $a \approx 1 \text{ \AA}$ ، و طول موج نور گسیل شده نوعاً برابر است با $\lambda \approx 5 \times 10^2 \text{ \AA}$ ؛ بنابراین، شرط $a \ll \lambda$ کاملاً برآورده می‌شود، و تقریب دوقطبی بسیار خوب است. اما باید خواص مکانیک کوانتومی دستگاه را در محاسبه وارد کنیم. آنگاه معلوم می‌شود که فرمول ۴۷-۱۴ باز هم درست است اما p_0 را باید بنا به قاعده زیر محاسبه کرد

$$p_0 = \left| -2 \int \psi_b^* (ex') \psi_a dV' \right| \quad (48-14)$$

که در آن ψ_b و ψ_a به ترتیب تابع موجهای مکانیک کوانتومی توصیف‌کننده حالت اولیه و نهایی دستگاه هستند. انتگرال معادله ۴۸-۱۴ را گشتاور دوقطبی گذار می‌نامند. مناسب است طول عمر τ را تعریف کنیم:

$$\tau = \frac{\hbar \omega}{\bar{P}} \quad (49-14)$$

این طول عمر مدت زمانی است که لازم است تا دستگاه مقدار انرژی $\hbar \omega$ گسیل کند. چون اتمی که با بسامد ω تابش می‌کند همیشه دقیقاً انرژی $\hbar \omega$ (یک فوتون) گسیل می‌کند، کمیت τ در واقع

نشان می‌دهد چقدر طول می‌کشد تا اتم فرایند گسیل را تمام کند. وارون τ را آهنگ‌گذار می‌نامند؛ بنا به معادله ۱۴-۴۷ داریم

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{1}{3c^3} \omega^4 p^2 \quad (50-14)$$

این فرمول آهنگ‌گذار درست است، اگرچه استدلالی که برای رسیدن به آن صورت گرفت تا اندازه‌ای قابل ایراد است (اگر دستگاه تنها یک فوتون گسیل کند توان تابش شده معنی چندانی ندارد!). برای تخمین آهنگ‌گذاری که یک دستگاه اتمی نوعاً دارد می‌توانیم فرض کنیم p_0 از مرتبه بزرگی اندازه اتم ضربدر بار الکترون است، به طوری که

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{1}{\hbar\omega} \frac{1}{3c^3} \omega^4 e^2 a^2 \quad (51-14)$$

به ازای بسامد اپتیکی نوعی، معادله ۱۴-۵۱ آهنگ‌گذاری به مقدار $10^7 \text{s}^{-1} \approx$ یا طول عمری به مقدار 10^{-7}s به دست می‌دهد.

معادله ۱۴-۵۱ را در مورد پرتوهای گامایی که هسته گسیل می‌کند نیز می‌توان به کار برد. آهنگ‌گذار در این مورد بسیار بزرگتر از مورد اتمی است زیرا تأثیر بسامد بزرگتر پرتوهای گاما از تأثیر اندازه کوچکتر هسته بیشتر است.

۱۴-۴ تابش دوقطبی مغناطیسی

اکنون به دومین انتگرال در معادله ۱۴-۳۰ می‌پردازیم. فعلاً از مشتق زمانی صرفنظر می‌کنیم؛ پس باید

$$\int \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}' \mathbf{j} dV' \quad (52-14)$$

را محاسبه کنیم. با استفاده از اتحاد

$$(\mathbf{x}' \times \mathbf{j}) \times \hat{\mathbf{r}} = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{j} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{x}' \quad (53-14)$$

می‌توانیم انتگرال ۱۴-۵۲ را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{1}{r} \int [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{j} + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{x}'] dV' + \frac{1}{r} \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{j}) \times \hat{\mathbf{r}} dV' \quad (54-14)$$

اولین انتگرال در ۵۴-۱۴ تابش چارقتبی الکتریکی را به دست می دهد؛ این مطلب را در بخش بعد بررسی می کنیم. دومین انتگرال سهم زیر را در \mathbf{A} ایجاد می کند

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{d}{dt} \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{j}) \times \hat{\mathbf{r}} dV'$$

این رابطه را هم می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{cr} \hat{\mathbf{r}} \times \left[\frac{d\mathbf{m}}{dt} \right] \quad (55-14)$$

که در آن بردار

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{j}) dV' \quad (56-14)$$

عبارت است از گشتاور دوقطبی مغناطیسی و کرشه نشاندهنده تأخیر است. اکنون میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ناشی از دوقطبی مغناطیسی فوراً به دست می آیند:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times [\ddot{\mathbf{m}}]) \quad (57-14)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times [\ddot{\mathbf{m}}] \quad (58-14)$$

تمرین ۵- معادله های ۵۷-۱۴ و ۵۸-۱۴ را به دست آورید.

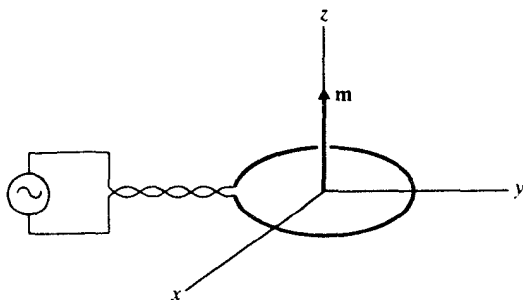
توان گسیل شده در واحد زاویه فضایی برابر است با

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3} [|\ddot{\mathbf{m}}|^2] \sin^2 \theta \quad (59-14)$$

که در آن θ زاویه بین $\hat{\mathbf{r}}$ و $\ddot{\mathbf{m}}$ است؛ و توان کل برابر است با

$$P = \frac{2}{3c^3} [|\ddot{\mathbf{m}}|^2] \quad (60-14)$$

دوقطبی مغناطیسی نوسان کننده را می توان با مثلاً یک حلقه دایره ای از سیمی که در آن جریان متناوب برقرار است ساخت (شکل ۶-۱۴).



شکل ۶-۱۴ آنتن دوقطبی مغناطیسی واقع در صفحه xy .

تمرین ۶- گشتاور مغناطیسی را برای این حلقه به دست آورید. نشان دهید گشتاورهای دوقطبی و چارقطبی الکتریکی صفر هستند.

نقش خطوط میدان برای دوقطبی مغناطیسی نوسان‌کننده کلاً به همان صورتی است که در شکل ۵-۱۴ نشان داده شده است اما خطوط \mathbf{E} اکنون خطوط \mathbf{B} هستند، و برعکس؛ علاوه بر این، تمام جهت‌های یکی از این مجموعه‌های خطوط (\mathbf{E} یا \mathbf{B}) را باید معکوس کنیم. روشن است که توزیع زاویه‌ای تابش با مورد دوقطبی الکتریکی یکسان است. متوسط زمانی توان گسیل شده کل برابر است با

$$\bar{P} = \frac{1}{3c^3} m_0^2 \omega^4 \quad (۶۱-۱۴)$$

که در آن m_0 مقدار ماکسیمم گشتاور مغناطیسی نوسان‌کننده است. می‌توانیم معادله ۶۱-۱۴ را برای دستگاه‌های اتمی هسته‌ای به کار ببریم و آهنگ‌گذار را به دست آوریم:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\hbar \omega} \frac{1}{3c^3} \omega^4 m_0^2 \quad (۶۲-۱۴)$$

که در آن m_0 را البته باید بنابر مکانیک کوانتومی محاسبه کنیم. برای تخمین، کافی است توجه کنیم که رابطه گشتاور مغناطیسی ناشی از حرکت مداری با تکانه زاویه‌ای عبارت است از

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2Mc} \mathbf{L} \quad (۶۳-۱۴)$$

که در آن M جرم ذره متحرک است. تکانه زاویه‌ای L نوعاً از مرتبه \hbar است، و در نتیجه

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{1}{\hbar \omega} \frac{1}{3c^3} \omega^4 \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right)^2 \quad (۶۴-۱۴)$$

این آهنگ‌گذار از مورد دوقطبی الکتریکی ۵۱-۱۴ به اندازه ضریب

$$\approx \left(\frac{\hbar}{Mca} \right)^2 \quad (۶۵-۱۴)$$

کوچکتر است. برای دستگاه‌های اتمی، این ضریب کاملاً کوچک و از مرتبه $۱۰^{-۵}$ است. بنابراین، احتمال گذار دوقطبی مغناطیسی معمولاً بسیار کمتر از گذار دوقطبی الکتریکی است؛ البته اگر گذار دوقطبی الکتریکی بنا به یک قاعده انتخاب ممنوع باشد گذار دوقطبی مغناطیسی حائز اهمیت می‌شود. برای دستگاه‌های هسته‌ای، ضریب ۶۵-۱۴ تا این حد کوچک نیست؛ به علاوه، اگر گشتاور مغناطیسی ۶۳-۱۴ از اسپین پروتون‌ها یا نوترون‌ها ناشی شود، این ضریب تا اندازه‌ای بزرگتر از مقدار تخمینی بالا است. گذارهای دوقطبی مغناطیسی برای هسته‌ها بسیار محتمل‌ترند تا برای اتمها.

۵-۱۴ تابش چارقطبی الکتریکی

سرانجام، به اولین انتگرال در معادله ۵۴-۱۴ می‌پردازیم. باید این انتگرال را با استفاده از اتحاد زیر تبدیل کنیم

$$\frac{1}{4\pi} \int [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}')\mathbf{j} + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{j})\mathbf{x}'] dV' = -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{x}'(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}')\nabla' \cdot \mathbf{j} dV' \quad (۶۶-۱۴)$$

تمرین ۷- این اتحاد را ثابت کنید. [راهنمایی: از طرف راست انتگرال جزء به جزء بگیرید.]

چون $\nabla' \cdot \mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t$ می‌توانیم معادله ۶۶-۱۴ را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{1}{4\pi} \int [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}')\mathbf{j} + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{j})\mathbf{x}'] dV' = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \int \mathbf{x}'(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}')\rho dV' \quad (۶۷-۱۴)$$

از اینجا \mathbf{A} را به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi c^2 r} \frac{d^2}{dt^2} \int \mathbf{x}'(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}')\rho dV' \quad (۶۸-۱۴)$$

می‌توانیم جمله

$$-\frac{1}{6c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \frac{d^2}{dt^2} \int r'^2 \rho dV' \quad (۶۹-۱۴)$$

را به ۶۸-۱۴ اضافه کنیم زیرا این جمله به هیچ وجه تأثیری روی میدان مغناطیسی ندارد. برای اثبات، کافی است توجه کنید که \mathbf{B} از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (۷۰-۱۴)$$

به طوری که اگر \mathbf{A} شامل ۶۹-۱۴ باشد این جمله تنها یک جمله متناسب با $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} = 0$ به ۷۰-۱۴ اضافه می‌کند.

بنابراین، رابطه جدید \mathbf{A} عبارت است از

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon c^2 r} \frac{d^2}{dt^2} \int [\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}} r'^2] \rho dV' \quad (۷۱-۱۴)$$

این رابطه را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon c^2 r} \frac{d^2}{dt^2} [\mathbf{D}] \quad (۷۲-۱۴)$$

که در آن

$$[\mathbf{D}] \equiv \int [\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}} r'^2] \rho dV' \quad (۷۳-۱۴)$$

بردار \mathbf{D} به گشتاور چارقتبی دستگاه مربوط است:

$$D^k = Q^{kl} n^l \quad (۷۴-۱۴)$$

که در آن n^l مؤلفه لام $\hat{\mathbf{r}}$ است و Q^{kl} تانسور گشتاور چارقتبی است:

$$Q^{kl} = \int (\mathbf{r}'^k x'^l - \delta^{kl} r'^2) \rho dV' \quad (۷۵-۱۴)$$

تمرین ۸- معادله ۷۴-۱۴ را تحقیق کنید.

میدان مغناطیسی ۷۰-۱۴ عبارت است از

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{\epsilon c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times [\dot{\mathbf{D}}] \quad (۷۶-۱۴)$$

۱. تغییر ۶۸-۱۴ به ۷۱-۱۴ یک تبدیل پیمانه‌ای \mathbf{A} است.

و توزیع زاویه‌ای توان گسیل شده برابر است با

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{144\pi c^5} |\dot{\hat{\mathbf{r}}} \times [\ddot{\mathbf{D}}]|^2 \quad (77-14)$$

این توزیع زاویه‌ای کاملاً پیچیده است، اما ویژگی ساده‌ قابل توجهی دارد: از $D^k = Q^{kl} n^l$ نتیجه می‌شود که هرگاه $\hat{\mathbf{r}}$ ویژه بردار \ddot{Q}^{kl} باشد آنگاه $\ddot{\mathbf{D}}$ متناسب با $\hat{\mathbf{r}}$ است و بنابراین ۷۷-۱۴ دقیقاً صفر است. چون \ddot{Q}^{kl} یک ماتریس متقارن است، سه ویژه بردار متعامد دارد؛ بنابراین، دست کم سه راستای عمود برهم با شدت صفر وجود دارند. (اگر دو ویژه بردار متعلق به یک ویژه مقدار باشند، شدت همه جا در صفحه حاوی این دو ویژه بردار نیز صفر است.) می‌توانیم توان گسیل شده کل را به طریق زیر محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{144\pi c^5} \int [\dot{\hat{\mathbf{r}}} \times \ddot{\mathbf{D}}] \cdot [\dot{\hat{\mathbf{r}}} \times \ddot{\mathbf{D}}] d\Omega = \frac{1}{144\pi c^5} \int \dot{\hat{\mathbf{r}}} \cdot [\ddot{\mathbf{D}} \times (\dot{\hat{\mathbf{r}}} \times \ddot{\mathbf{D}})] d\Omega \\ &= \frac{1}{144\pi c^5} \int \dot{\hat{\mathbf{r}}} \cdot [\dot{\hat{\mathbf{r}}} \ddot{\mathbf{D}} \cdot \ddot{\mathbf{D}} - (\ddot{\mathbf{D}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{r}}}) \ddot{\mathbf{D}}] d\Omega = \frac{1}{144\pi c^5} \int [(\ddot{\mathbf{D}})^2 - (\ddot{\mathbf{D}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{r}}})^2] d\Omega \\ &= \frac{1}{144\pi c^5} \int [\ddot{Q}^{kl} n^l \ddot{Q}^{kr} n^r - \ddot{Q}^{kl} n^l n^k \ddot{Q}^{rs} n^r n^s] d\Omega \quad (78-14) \end{aligned}$$

Q هایی که در معادله بالا ظاهر شده‌اند تا جایی که به انتگرال‌گیری زاویه‌ای مربوط می‌شود ثابت‌اند. بنابراین، تنها مقادیر انتگرالهای $\int n^l n^r d\Omega$ و $\int n^k n^l n^r n^s d\Omega$ را باید محاسبه کنیم. روشن است که اولین انتگرال صفر است مگر اینکه $l = r$ (به‌ازای $l \neq r$ تابع زیر انتگرال تحت وارونی جهت فرد است)؛ در نتیجه

$$\int n^l n^r d\Omega = b \delta^{lr} \quad (79-14)$$

که در آن b یک ثابت است. برای تعیین این ثابت، در معادله ۷۹-۱۴ قرار می‌دهیم $l = r$:

$$\int n^l n^l d\Omega = b \delta^{ll} \quad (80-14)$$

و روی l جمع می‌زنیم؛ اما n^l مؤلفه بردار یکه $\hat{\mathbf{r}}$ است و در نتیجه $n^l n^l = 1$ به علاوه $\delta^{ll} = 3$ ؛ پس معادله ۸۰-۱۴ تبدیل می‌شود به

$$\int d\Omega = 3b \quad (81-14)$$

بنابراین، داریم $b = 4\pi/3$ ، و

$$\int n^l n^r d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta^{lr} \quad (۸۲-۱۴)$$

به روش مشابهی به دست می‌آوریم

$$\int n^k n^l n^r n^s d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta^{kl} \delta^{rs} + \delta^{kr} \delta^{ls} + \delta^{ks} \delta^{lr}) \quad (۸۳-۱۴)$$

تمرین ۹- معادله ۸۳-۱۴ را محاسبه کنید. [راهنمایی: برای نتیجه مخالف صفر، شاخصها باید دوبه‌دو باهم برابر باشند؛ علاوه براین، طرف راست باید تحت تعویض هر یک از شاخصها متقارن باشد.] در نتیجه

$$\int n^k n^l n^r n^s d\Omega = b(\delta^{kl} \delta^{rs} + \delta^{kr} \delta^{ls} + \delta^{ks} \delta^{lr}) \quad (۸۴-۱۴)$$

اگر معادله‌های ۸۲-۱۴ و ۸۳-۱۴ را در معادله ۷۸-۱۴ بگذاریم توان کل به دست می‌آید:

$$P = \frac{1}{180c^5} [\ddot{Q}^{kr} \ddot{Q}^{kr}] \quad (۸۵-۱۴)$$

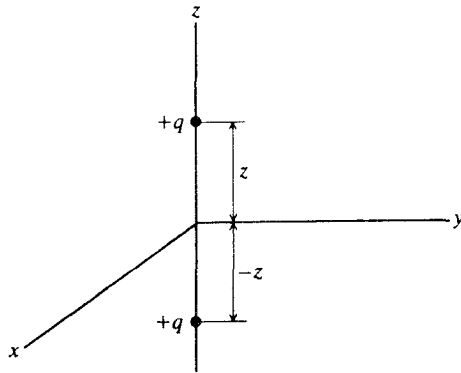
تمرین ۱۰- نتیجه بالا را به دست آورید.

تابشگر چارقطبی نوسان‌کننده ساده از دوبار $+q$ واقع در فواصل مساوی در دوطرف مبدأ تشکیل می‌شود (شکل ۷-۱۴). این دستگاه گشتاور دوقطبی الکتريکی و گشتاور دوقطبی مغناطیسی ندارد، اما دارای گشتاور چارقطبی الکتريکی و سایر گشتاورهای چندقطبی مرتبه بالاتر است. البته از این گشتاورهای بالاتر صرف‌نظر می‌کنیم. اگر محور z را مطابق شکل ۷-۱۴ بگیریم، از معادله ۷۵-۱۴ به دست می‌آوریم

$$Q^{11} = Q^{22} = -2z^2 q \quad (۸۶-۱۴)$$

$$Q^{33} = 4z^2 q$$

$$Q^{12} = Q^{13} = Q^{23} = 0 \quad (۸۷-۱۴)$$



شکل ۷-۱۴ دستگاه باری با گشتاور چارقتبی الکتریکی.

اگر z مطابق با

$$z = a \sin \omega t \quad (۸۸-۱۴)$$

نوسان کند آنگاه داریم

$$\left[\frac{d^2 z}{dt^2} \right] = \frac{d^2}{dt^2} a \sin \omega(t - r/c) = -\omega^2 a \sin 2\omega(t - r/c) \quad (۸۹-۱۴)$$

تمرین ۱۱- این معادله را وارسی کنید.

چون $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$ ، معادله ۸۹-۱۴ نشان می‌دهد Q باید با بسامد 2ω نوسان کند؛ بنابراین، تابش چارقتبی گسیل شده دارای بسامد 2ω است. این نتیجه معقول است زیرا پس از نیم‌دور حرکت مکانهای ذرات تعویض می‌شوند، و گشتاور دوقطبی همان است که در لحظه اولیه بوده است. به‌طور کلی، اگر مکانهای ذرات دارای نوسان هماهنگ با بسامد ω باشند، تابش دوقطبی گسیل شده دارای بسامد ω ، تابش چارقتبی دارای بسامد 2ω ، تابش چارقتبی دارای بسامد 3ω و همچنین ω خواهد بود، و غیره.

بردار $\ddot{\mathbf{D}}$ عبارت است از

$$\begin{aligned} (\ddot{D}^1, \ddot{D}^2, \ddot{D}^3) &= (\ddot{Q}^{1l} n^l, \ddot{Q}^{2l} n^l, \ddot{Q}^{3l} n^l) = (\ddot{Q}^{11} n^1, \ddot{Q}^{22} n^2, \ddot{Q}^{33} n^3) \\ &= -2q \frac{d^2 z}{dt^2} (n^1, n^2, -2n^3) \end{aligned} \quad (۹۰-۱۴)$$

و توزیع شدت زاویه‌ای برابر است با

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{1}{144\pi c^5} |\hat{\mathbf{r}} \times [\ddot{\mathbf{D}}]|^2 = |\ddot{\mathbf{D}}|^2 - |\ddot{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{r}}|^2 \\ &= \left(2q \left[\frac{d^2 z^2}{dt^2} \right] \right)^2 \{ (n^1)^2 + (n^2)^2 + 4(n^3)^2 - [(n^1)^2 + (n^2)^2 - 2(n^3)^2] \} \end{aligned} \quad (91-14)$$

با معرفی مختصات قطبی

$$n^1 = \sin \theta \cos \phi \quad (92-14)$$

$$n^2 = \sin \theta \sin \phi \quad (93-14)$$

$$n^3 = \cos \theta \quad (94-14)$$

معادله ۹۱-۱۴ به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{144\pi c^5} [\Lambda q \omega^2 a \sin^2 2\omega(t-r/c)]^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (95-14)$$

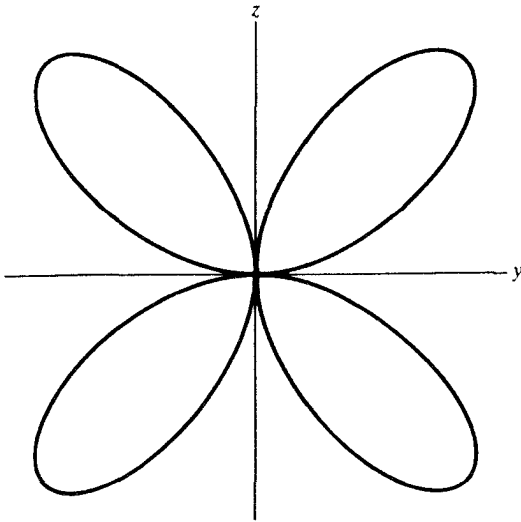
نمودار تابع $\sin^2 \theta \cos^2 \theta$ در شکل ۸-۱۴ نشان داده شده است. شدت روی محور z و همچنین در صفحه xy همه جا صفر است. توان تابش شده کل برابر است با

$$P = \frac{1}{180c^5} \ddot{Q}^{kl} \ddot{Q}^{kl} = \frac{6}{180c^5} [\Lambda q \omega^2 a \sin^2 2\omega(t-r/c)]^2 \quad (96-14)$$

تمرین ۱۲- عملیات لازم را برای رسیدن از معادله ۹۱-۱۴ به ۹۵-۱۴ و سپس به ۹۶-۱۴ انجام دهید.

برای به دست آوردن توان متوسط زمانی باید به جای $\sin^2 2\omega t$ بگذاریم $1/2$. توجه کنید که معادله ۹۶-۱۴ به صورت ω^6 تغییر می‌کند، و از این رو توان با بسامد سریعاً افزایش می‌یابد.

اگر در معادله ۹۶-۱۴ بگذاریم $q = e$ ، و a را از مرتبه بزرگی اندازه دستگاه‌های اتمی و هسته‌ای بگیریم، می‌توانیم آهنگ‌گذار را برای گسیل چارقتبی این دستگاه‌ها تخمین



شکل ۸-۱۴ نمودار قطبی $dP/d\Omega$ برای چارقطبی الکتريکی.

بزنيم:

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{1}{\hbar\omega} \frac{1}{c^3} \omega^6 (ea^2)^2 \quad (97-14)$$

اين آهنگ‌گذار از مورد دوقطبی الکتريکی به اندازه ضريب

$$\approx 3 \left(\frac{\omega^2 a^2}{c^2} \right) \approx 120 \frac{a^2}{\lambda^2} \quad (98-14)$$

کوچکتر است. برای اتم، تابش چارقطبی الکتريکی احتمال بسیار کمی دارد؛ اما برای هسته، اين احتمال قابل مقایسه با، یا کمی کمتر از، احتمال تابش دوقطبی مغناطیسی است.

مسائل

۱۴-۱ اگر جریان در آنتن نیم‌موج با معادله ۱۴-۱۵ داده شده باشد بار الکتريکی در واحد طول آنتن را به دست آورید. اگر آنتن را کوتاه کنیم به طوری که طول آن $L < \lambda/2$ ، آیا معادله ۱۴-۱۵

باز هم توصیف قابل قبولی از جریان در بازه $-L/2 \leq z \leq L/2$ هست؟

۱۴-۲ معادله ۱۴-۲۴ ظاهراً شبیه به معادله توان تلف شده در مدار AC با مقاومت معین و جریان معین $I_{\text{rms}} = I_0/\sqrt{2}$ است. بر اساس این شباهت، مقاومت مؤثر آنتن را به دست آورید. جواب را برحسب اهم به دست آورید.

۱۴-۳ آنتن تمام موج از دو آنتن نیم موج هم راستا که به دنبال هم قرار گرفته اند تشکیل می شود. جریانها در این دو آنتن همفاز هستند، یعنی همیشه در یک جهت هستند، و با رابطه $I = I_0 \sin(2\pi|z|/\lambda) \cos \omega t$ نمایش داده می شوند که در آن $-\lambda/2 \leq z \leq \lambda/2$. نشان دهید توان متوسط زمانی تابش شده در واحد زاویه فضایی برابر است با

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{2I_0^2 \cos^2\left(\frac{1}{2}\pi \cos \theta\right)}{\pi c \sin^2 \theta}$$

از این رابطه روی تمام زاویه فضایی به طور عددی انتگرال بگیرید و نشان دهید $\bar{P} = 3r^2 5I_0^2/c$.

۱۴-۴ آنتن تمام موج ناهمفاز را در نظر بگیرید که از دو آنتن نیم موج که به دنبال هم قرار گرفته اند و جریانهای آنها در جهتهای مخالف هستند تشکیل شده است. جریان در این آنتن با رابطه $I = I_0 \sin(2\pi z/\lambda) \cos \omega t$ نمایش داده می شود. توان متوسط زمانی تابش شده در واحد زاویه فضایی را به دست آورید، و با نتیجه مسئله قبل مقایسه کنید.

۱۴-۵ یک آرایه آنتن از دو آنتن نیم موج قائم که در راستای افق به اندازه نصف طول موج از هم فاصله دارند تشکیل شده است. اگر دو آنتن در یک فاز نوسان کنند توان متوسط زمانی تابش شده در واحد زاویه فضایی را محاسبه کنید. توان در واحد زاویه فضایی در چه جهتی ماکسیمم است؟

۱۴-۶ مسئله قبل را برای دو آنتنی حل کنید که با اختلاف فاز 180° نوسان می کنند.

۱۴-۷ یک آرایه آنتن از دو آنتن نیم موج هم راستای قائم که فاصله مراکز آنها یک طول موج است تشکیل شده است. این آنتنها در یک فاز نوسان می کنند. توان متوسط زمانی تابش شده در واحد زاویه فضایی مربوط به این آرایه را به دست آورید، و نموداری قطبی شبیه به شکل ۱۴-۳ تهیه کنید.

۱۴-۸ یک آنتن نیم موج موازی با ورق رسانای بسیار بزرگی و به فاصله $\lambda/4$ از آن قرار گرفته است. ورق رسانا را منطبق بر صفحه $z=x$ ، آنتن را موازی با محور z و مرکز آن را روی محور y بگیرید. توان متوسط زمانی تابش شده در واحد زاویه فضایی را محاسبه کنید.

۱۴-۹ فرض کنید یک اتم نوری با طول موج 550°Å گسیل می کند. آهنگ گذار را برای هر یک از

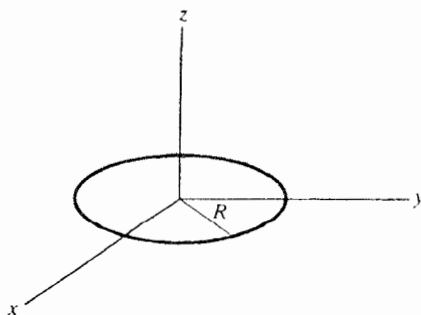
انواع تابش زیر تخمین بزنید. (الف) تابش دوقطبی الکتريکی. (ب) تابش دوقطبی مغناطیسی. (ج) تابش چارقطبی الکتريکی.

۱۴-۱۰ فرض کنید هسته‌ای با اندازه تقریبی 7×10^{-13} سانتیمتر پرتوگاما با انرژی 1 MeV گسیل می‌کند. آهنگ‌گذار را برای هریک از انواع تابش زیر تخمین بزنید. (الف) تابش دوقطبی الکتريکی. (ب) تابش دوقطبی مغناطیسی، ناشی از گشتاور مغناطیسی پروتون برابر با $2.79 e\hbar/2m_p c$. (ج) گشتاور چارقطبی الکتريکی.

۱۴-۱۱ زمین دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی 10^{25} erg/G است، و جهت این گشتاور با محور چرخش زاویه 11° می‌سازد. توان تابش شده توسط این دوقطبی را به دست آورید.

۱۴-۱۲ یک ستاره نوترونی دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی با بزرگی m است. این ستاره با سرعت زاویه‌ای ω حول محوری می‌چرخد که با محور مغناطیسی زاویه 45° می‌سازد. (الف) توان تابش شده توسط این دوقطبی مغناطیسی را به دست آورید. شعاع ستاره را 10 کیلومتر، سرعت زاویه‌ای آن را 10^4 رادیان بر ثانیه، و میدان مغناطیسی آن را 10^{12} گاوس در استوای مغناطیسی بگیرید؛ مقدار عددی توان گسیل شده را به دست آورید. (ب) محور z را محور چرخش بگیرید و نمودار قطبی نقش تابش را در صفحه yz در لحظه‌ای که گشتاور دوقطبی در این صفحه است رسم کنید. نقش تابش را در صفحه xz در همین لحظه رسم کنید. (ج) قطبش تابش گسیل شده در امتداد محور z و در امتداد محور x را تعیین کنید.

۱۴-۱۳ شکل ۹-۱۴ یک حلقه دایره‌ای از سیم به شعاع R واقع در صفحه xy را نشان می‌دهد. جریان نوسان کننده $I = I_0 \sin \omega t$ در حلقه برقرار است. (الف) بردار پوینتینگ لحظه‌ای وابسته به تابش دوقطبی مغناطیسی را در یک نقطه اختیاری با مختصات قطبی r و θ (به‌ازای $r \gg R$) به دست آورید؛ تأخیر را منظور کنید. (ب) جهت میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} را در چند نقطه



شکل ۹-۱۴ یک سیم دایره‌ای در صفحه xy .

شاخص با عبارت یا نمودار توصیف کنید.

۱۴-۱۴ کره‌ای دارای جرم M و بار Q است که به‌طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است. این کره که با تکانه زاویه‌ای اسپینی S حول محور خود به‌سرعت می‌چرخد، در میدان مغناطیسی یکنواخت B قرار دارد و حول این میدان حرکت تقدیمی انجام می‌دهد طوری‌که زاویه بین میدان و اسپین θ است. آهنگ تابش انرژی الکترومغناطیسی را به‌دست آورید.

۱۴-۱۵ الکترونی که ابتدا در فاصله‌ای دور ساکن بوده است به‌طرف یک پروتون جذب می‌شود. در فاصله‌ای که الکترون از $r = \infty$ به $r = r_0$ سقوط می‌کند انرژی تابش شده آن را به‌صورت تابش چارقتبی به‌دست آورید فرض کنید مکانیک کلاسیک معتبر است.

۱۴-۱۶ دستگاهی از دو الکترون در حال برخورد تشکیل شده است (پراکنش کولن الکترون از الکترون). در این برخورد پارامتر برخورد صفر نیست. این الکترونها را بارهای کلاسیک غیرنسبیتی بگیرید و از اسپین آنها صرف‌نظر کنید. (الف) نشان دهید این دستگاه تابش دوقطبی الکتریکی گسیل نمی‌کند. (ب) آیا دستگاه تابش دوقطبی مغناطیسی و تابش چارقتبی الکتریکی گسیل می‌کند؟ جواب خود را اثبات کنید اما به جزئیات محاسبه مقدار تابش نپردازید.

۱۴-۱۷ دستگاه A از ذره‌ای با بار q تشکیل شده است که بردار مکان آن با رابطه $\mathbf{r} = \hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t$ تعیین می‌شود. دستگاه B از دو ذره با بار q تشکیل شده است که بردارهای مکان آنها به‌ترتیب $\mathbf{r} = \hat{x} \cos \omega t$ و $\mathbf{r} = \hat{y} \sin \omega t$ هستند. آیا این دو دستگاه با آهنگ یکسانی تابش می‌کنند؟ جواب خود را اگر مثبت است اثبات کنید، و اگر منفی است اختلاف (تقریبی) آهنگ تابش را به‌دست آورید.

۱۴-۱۸ ذره‌ای با بار q در امتداد محور z حرکت می‌کند. مکان آن با $z = a \sin \omega t$ تعیین می‌شود. توان تابش شده در بسامد ω را به‌دست آورید.

۱۴-۱۹ میله‌ای به‌طول L دارای بار Q است که به‌طور یکنواخت در امتداد آن توزیع شده است. این میله حول محوری که بر آن عمود است و از مرکزش می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. آهنگ تقریبی تابش انرژی الکترومغناطیسی را به‌دست آورید. بسامد تابش را محاسبه کنید.

۱۴-۲۰ دو ذره یکسان به جرم m و بار q که ابتدا با سرعت v در جهتهای مخالف حرکت می‌کنند برخورد رودرو انجام می‌دهند. انرژی مغناطیسی تابش شده طی این برخورد را محاسبه کنید. فرض کنید حرکت غیرنسبیتی است و تنها نیروی وارد بر ذرات نیروی کولن متقابل آنها است؛ فاصله اولیه و نهایی ذرات را بسیار زیاد بگیرید. [راهنمایی: این مسئله موردی است از تابش چارقتبی الکتریکی].

۱۴-۲۱ روی محیط دایره‌ای که با بسامد ω می‌چرخد تعداد زوج N ذره باردار با بار q به فاصله

مساوی از یکدیگر قرار دارند. توان کل تابش شده را به دست آورید (تابش دوقطبی، دوقطبی مغناطیسی و چارقتبی را در نظر بگیرید). این جواب به ازای حد $N \rightarrow \infty$ و $q \rightarrow 0$ طوری که $Nq = \text{const}$ ، چه می شود؟

۱۴-۲۲ اگر دستگاه باری دارای گشتاور دوقطبی الکتریکی \mathbf{p} ، گشتاور دوقطبی مغناطیسی \mathbf{m} و گشتاور چارقتبی الکتریکی Q^{kl} باشد، میدان تابش مغناطیسی عبارت است از

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \left[-\frac{1}{rc^2} \hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}} + \frac{1}{rc^2} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{m}}) - \frac{1}{6rc^3} \hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{D}} \right]$$

شار انرژی در جهت $\hat{\mathbf{r}}$ متناسب با $|\mathbf{B}|^2$ است، و این کمیت شامل جمله‌های مربوط به تداخل چندقطبیه‌های مختلف است. نشان دهید این جمله‌های تداخلی سهمی در توان کل تابش شده توسط دستگاه ندارند یعنی نشان دهید انتگرال روی شار انرژی در تمام جهتها صرفاً برابر است با مجموع جمله‌های متداول:

$$P = P_{\text{چارقتبی الکتریکی}} + P_{\text{دوقطبی مغناطیسی}} + P_{\text{دوقطبی الکتریکی}}$$

کاواکهای تشدید و موجبرها

لوله ارگ مثالی است از یک کاواک تشدید صوتی. اگر یک لوله ارگ را به طور مکانیکی تحریک کنیم، ستون هوای داخل آن ارتعاش می‌کند. اگر بسامد تحریک برابر با یکی از ویژه بسامدهای لوله باشد، یک موج صوت ایستاده با دامنه بزرگ به وجود می‌آید—لوله تشدید.

در این فصل خواهیم دید هر ظرف بسته‌ای از جنس ماده رسانا به منزله کاواک تشدید الکترومغناطیسی است. ارتعاشات الکترومغناطیسی را می‌توان در این کاواک با آنتن کوچکی که داخل آن تعبیه می‌شود ایجاد کرد. اگر بسامد برابر با یکی از ویژه بسامدهای کاواک باشد امواج الکترومغناطیسی ایستاده با دامنه‌های بسیار بزرگ به وجود می‌آیند. اگر آنتن را حذف کنیم میدانهای الکترومغناطیسی به ارتعاش خود ادامه می‌دهند—در کاواکی از رسانای کامل ارتعاشات برای همیشه ادامه می‌یابند. در کاواکهای واقعی، جریانهای الکتریکی القایی در دیواره کاواک با اتلاف اهمی روبرو هستند و انرژی الکترومغناطیسی تدریجاً به گرما تبدیل می‌شود؛ این امر به معنی این است که ارتعاشات الکترومغناطیسی به علت «اصطکاک» جریان در دیواره میرا هستند.

۱-۱۵ مسئله ویژه مقداری برای کاواک

مسئله نوسانهای کاواک الکترومغناطیسی از لحاظ ریاضی بسیار پیچیده‌تر از مسئله صوتی متناظر است. باید دو میدان برداری E و B را به دست آوریم؛ این میدانها از طریق معادلات ماکسول به هم

مربوط اند، و باید شرایط مرزی خاص خود را برآورده کنند.

فرض می‌کنیم درون کاواک خالی است؛^۱ بنابراین، معادلات ماکسول ۸-۶۱ تا ۸-۶۴ عبارت‌اند از

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (۱-۱۵)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۲-۱۵)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (۳-۱۵)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۴-۱۵)$$

به روش معمول (بخش ۱۲-۱) می‌توانیم از معادلات بالا معادله‌های موج مربوط به \mathbf{E} و \mathbf{B} را به دست آوریم:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (۵-۱۵)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (۶-۱۵)$$

جوابهایی را می‌خواهیم که نسبت به زمان نوسان هماهنگ دارند. در نمادنگاری مختلط، میدانها باید به صورت زیر باشند

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad (۷-۱۵)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad (۸-۱۵)$$

که در آنها قسمت حقیقی عبارت است از میدان فیزیکی. پس معادله‌های موج مربوط به \mathbf{E} و \mathbf{B} به صورت زیر در می‌آیند

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad (۹-۱۵)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (۱۰-۱۵)$$

این معادله‌ها از نوع معادله ویژه‌مقداری هستند. مثلاً مؤلفه x معادله ۹-۱۵ عبارت است از

$$\nabla^2 E_x = -\frac{\omega^2}{c^2} E_x$$

۱. منظور کردن وجود ماده دی‌الکتریک با ثابت دی‌الکتریک معین بسیار ساده است.

که نشان می‌دهد E_x ویژه بردار عملگر ∇^2 با ویژه مقدار $c^2/\omega^2 -$ است.

پس مسئله ما عبارت است از حل معادله‌های ویژه مقدراری ۹-۱۵ و ۱۰-۱۵ با شرایط مرزی مناسب. اما در اینجا اشکالی وجود دارد: معادله‌های ویژه مقدراری ۹-۱۵ و ۱۰-۱۵ حامل تمام اطلاعات موجود در معادلات ماکسول نیستند. در جستجو برای جواب شش معادله ۹-۱۵ و ۱۰-۱۵ باید به خاطر داشته باشیم که مؤلفه‌های \mathbf{E} و \mathbf{B} همگی مستقل از یکدیگر نیستند. به طور کلی، این امر وضعیت را پیچیده‌تر می‌کند، اما در بخش بعد خواهیم دید که در مورد خاص کاواکها و موجبرهای استوانه‌ای این اشکالات را می‌توان رفع کرد.

شرایط مرزی در دیواره‌های کاواک در بخشهای ۴-۳ و ۱۱-۴ به دست آمدند: مؤلفه \mathbf{E} موازی با سطح و مؤلفه \mathbf{B} عمود بر سطح باید پیوسته باشند. برای سادگی، فرض می‌کنیم دیواره‌ها رسانای کامل هستند و از این رو تمام میدانها داخل دیواره دقیقاً صفرند. پیوستگی ایجاب می‌کند که در سطح

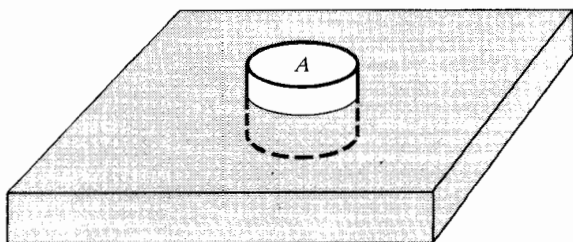
$$\mathbf{E}_{\parallel} = 0 \quad (11-15)$$

$$\mathbf{B}_{\perp} = 0 \quad (12-15)$$

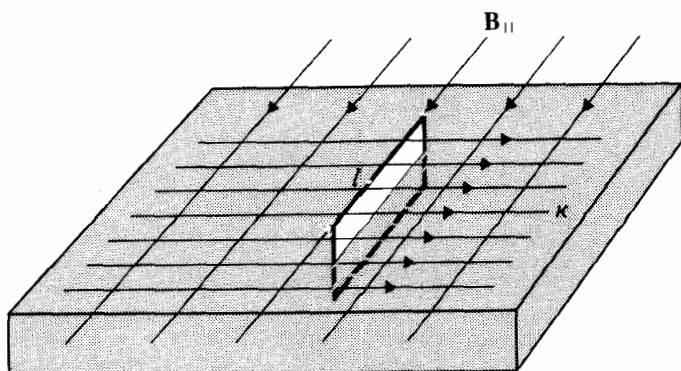
اگر دیواره‌ها رسانای کامل باشند دو معادله بالا تنها شرایط مرزی هستند که باید تحمیل کنیم. شرط متداول روی پیوستگی \mathbf{E}_{\perp} و \mathbf{B}_{\parallel} در این مورد کاربردی ندارد. برای اثبات، « قوطی » شکل ۱-۱۵ را در نظر می‌گیریم. بنابه قانون گاوس داریم

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \int \rho dV \quad (13-15)$$

سطح رسانا می‌تواند حامل چگالی بار سطحی σ باشد، و در نتیجه $\int \rho dV = \sigma A$. علاوه بر این، چون داخل رسانا داریم $\mathbf{E} = 0$ ، تنها سطح خارج از رسانا در $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ سهم دارد؛ پس مقدار



شکل ۱-۱۵ سطح گاوس استوانه‌ای بسته‌ای با قاعده A که توسط دیواره رسانای کامل قطع شده است. بار موجود در این سطح بسته σA است.



شکل ۲-۱۵ مسیر بسته‌ای که اضلاع کوتاه آن توسط دیواره رسانا قطع شده‌اند و یکی از دو ضلع بلند آن به طول l خارج از رسانا و دیگری داخل رسانا واقع شده است. این مسیر عمود بر جریان سطحی است و مقدار جریانی برابر با [چگالی] جریان سطحی $\times l$ از آن می‌گذرد.

این انتگرال صرفاً برابر است با $E_{\perp} A$. بدین ترتیب، معادله ۱۳-۱۵ ایجاب می‌کند که

$$E_{\perp} = \sigma \quad (۱۴-۱۵)$$

این معادله شرط مرزی روی E_{\perp} نیست، بلکه شرطی روی σ است: چگالی بار سطحی همیشه طوری خود را تنظیم می‌کند که معادله ۱۴-۱۵ صادق باشد. با استدلال مشابهی، بر مبنای شکل ۲-۱۵ و قانون آمپر، می‌توان نشان داد

$$B_{\parallel} = \frac{4\pi}{c} \kappa \quad (۱۵-۱۵)$$

که در آن κ چگالی جریان سطحی است، یا مقدار جریانی که در سطح رسانا از واحد طول موازی با B_{\parallel} می‌گذرد (شکل ۲-۱۵). جهت κ مطابق با قاعده دست راست عمود بر جهت B_{\parallel} است.

تمرین ۱- معادله ۵-۱۵ را به دست آورید. [راهنمایی: حلقه شکل ۲-۱۵ عمود بر جریان سطحی است].

می‌توانیم با استفاده از معادله‌های ۱۴-۱۵ و ۱۵-۱۵ بارها و جریانهای روی دیواره‌ها را پس از به دست آوردن میدانهای داخل کاواک محاسبه کنیم.

۲-۱۵ کاواکهای استوانه‌ای

اکنون مورد خاص کاواکهای استوانه‌ای را بررسی می‌کنیم. مقطع استوانه اختیاری است (برای مثال، مقطع مستطیلی یا مقطع دایره‌ای)، اما بنابه تعریف کلی استوانه این مقطع باید همه‌جا در امتداد طول استوانه یکسان بماند. محور z را در امتداد طول استوانه می‌گیریم (شکل ۳-۱۵).

در اینجا نیز فرض می‌کنیم وابستگی زمانی تمام میدانها به صورت $e^{-i\omega t}$ باشد، زیرا جوابهای نوسانی را می‌خواهیم. به‌علاوه، وابستگی تمام میدانها به z را به صورت $e^{\pm ikz}$ می‌گیریم (که در آن k ثابت است)؛ بنابراین

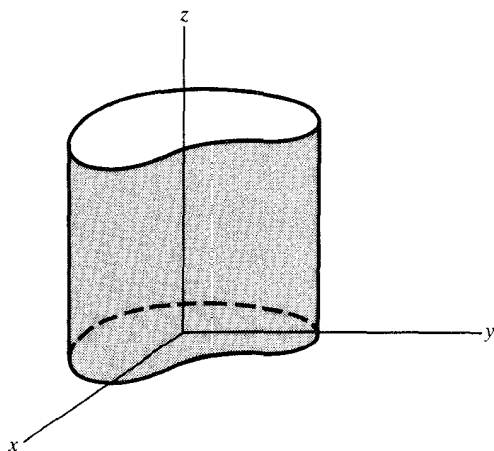
$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}(x, y)e^{-i\omega t \pm ikz} \quad (۱۶-۱۵)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{B}(x, y)e^{-i\omega t \pm ikz} \quad (۱۷-۱۵)$$

این فرض مربوط به وابستگی به z ناقص هیچ کلیتی نیست زیرا بنابه قضیه فوریه هر تابع اختیاری از z را می‌توانیم به صورت برهم‌نهشی از توابع نمایی بنویسیم.

روابط ۱۶-۱۵ و ۱۷-۱۵ نمایشگر امواج متحرک هستند. البته آنچه واقعاً برای نوسانهای کاواک می‌خواهیم امواج ایستاده‌اند. با وجود این، بهتر است محاسبات را با توابع ساده‌ی نمای در ۱۶-۱۵ و ۱۷-۱۵ انجام دهیم و بعداً امواج ایستاده را از برهم‌نهش در موج متحرک بسازیم.

با توجه به روابط ۱۶-۱۵ و ۱۷-۱۵، معادله‌های ماکسول ۳-۱۵ و ۴-۱۵ به صورت زیر در



شکل ۳-۱۵ استوانه‌ای با مقطع اختیاری.

می آیند

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} \mp ikB_y = -\frac{i\omega}{c}E_x \quad (18-15)$$

$$\pm ikB_x - \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{i\omega}{c}E_y \quad (19-15)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{i\omega}{c}E_z \quad (20-15)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} \mp ikE_y = \frac{i\omega}{c}B_x \quad (21-15)$$

$$\pm ikE_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{i\omega}{c}B_y \quad (22-15)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{i\omega}{c}B_z \quad (23-15)$$

تمرین ۲- این معادله‌ها را به دست آورید.

می‌توانیم معادله‌های ۱۸-۱۵، ۱۹-۱۵، ۲۱-۱۵ و ۲۲-۱۵ را به‌عنوان چهار معادله برای چهار مجهول E_x ، E_y ، B_x و B_y بگیریم، و هرچیز دیگری در این معادله‌ها را بنابه فرض معلوم در نظر می‌گیریم. آنگاه می‌توانیم این مؤلفه‌های میدان را برحسب E_z و B_z به دست آوریم. برای نمونه

$$E_x = \frac{1}{\omega^2/c^2 - k^2} \left(\pm ik \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{i\omega}{c} \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \quad (24-15)$$

چون $\pm ikE_z = \partial E_z / \partial z$ ، معادله ۲۴-۱۵ را به صورت زیر هم می‌توانیم بنویسیم

$$E_x = \frac{1}{\omega^2/c^2 - k^2} \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} + \frac{i\omega}{c} \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \quad (25-15)$$

نتایج متناظر برای سایر مؤلفه‌های میدان عبارت‌اند از

$$E_y = \frac{1}{\omega^2/c^2 - k^2} \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial z} - \frac{i\omega}{c} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \quad (26-15)$$

$$B_x = \frac{l}{\omega^2/c^2 - k^2} \left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial z} - \frac{i\omega}{c} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (27-15)$$

$$B_y = \frac{1}{\omega^2/c^2 - k^2} \left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial y \partial z} + \frac{i\omega}{c} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (28-15)$$

تمرین ۳- معادله‌های ۲۶-۱۵ تا ۲۸-۱۵ را از معادله‌های ۱۸-۱۵، ۱۹-۱۵، ۲۱-۱۵ و ۲۲-۱۵ به دست آورید.

توجه کنید که معادله‌های ۲۵-۱۵ تا ۲۸-۱۵ مستقل از علامت k هستند، و در نتیجه به ازای e^{-ikz} ، e^{+ikz} و هر برهم نهشی از اینها به طور یکسان برقرارند. بدین ترتیب، این معادله‌ها برای امواج ایستاده با وابستگی z به صورت $\cos kz$ یا $\sin kz$ نیز معتبرند.

اهمیت معادله‌های ۲۵-۱۵ تا ۲۸-۱۵ در این است که این معادله‌ها نشان می‌دهند اگر E_z و B_z معلوم باشند سایر مؤلفه‌ها را می‌توان به طور یکتا تعیین کرد. این امر به معنی این است که می‌توانیم با استفاده از روش کلی زیر نوسانهای کاواک را به دست آوریم: ابتدا معادله‌های ویژه مقدار

$$\nabla^2 E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} E_z \quad (29-15)$$

$$\nabla^2 B_z = -\frac{\omega^2}{c^2} B_z \quad (30-15)$$

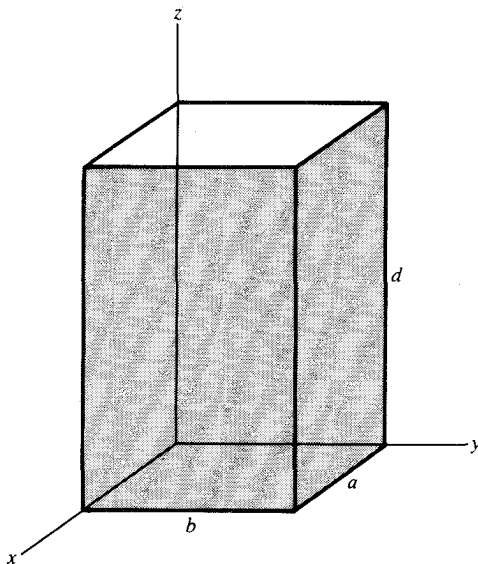
را برای E_z و B_z با توجه به شرایط مرزی ۱۱-۱۵ و ۱۲-۱۵ حل می‌کنیم. سپس، E_x ، E_y ، B_x و B_y را از E_z و B_z با استفاده از معادله‌های ۲۵-۱۵ تا ۲۸-۱۵ محاسبه می‌کنیم.

پیش از اینکه به چند مثال بپردازیم، متذکر می‌شویم که دو امکان مشخص وجود دارد: ممکن است $E_z = 0$ اما $B_z \neq 0$ ؛ آنگاه تنها باید معادله ۱۵-۳۰ را حل کنیم. این مد نوسان را الکتریکی عرضی (TE) می‌نامند زیرا میدان الکتریکی مؤلفه طولی ندارد. امکان دیگر این است که $B_z = 0$ اما $E_z \neq 0$ ؛ آنگاه تنها معادله ۱۵-۲۹ را لازم داریم. این مد را مغناطیسی عرضی (TM) می‌نامند. به وضوح بهتر است این دو مد را جداگانه بررسی کنیم؛ مد کلی نوسان را می‌توان بعداً به صورت برهم‌نهش مدهای TE و TM به دست آورد. مشخصات این دو مد را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

مد	E_z	B_z	معادله ویژه مقدار	شرط مرزی
TE	۰	$\neq 0$	$\nabla^2 B_z = -\frac{\omega^2}{c^2} B_z$	$\mathbf{B}_\perp = 0$ در سطح
TM	$\neq 0$	۰	$\nabla^2 E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} E_z$	$\mathbf{E}_\parallel = 0$ در سطح

۱۵-۳ کاوکهای مستطیلی

شکل ۱۵-۴ یک کاواک مستطیلی به ابعاد $a \times b \times d$ یا $a < b < d$ را نشان می‌دهد. می‌خواهیم مدهای TM این کاواک را به دست آوریم. بنا به بحث بالا باید معادله موج ۱۵-۲۹ را برای E_z



شکل ۱۵-۴ کاواک مستطیلی به ابعاد $a \times b \times d$ با $a < b < d$.

حل کنیم. به آسانی می‌توان واریسی کرد که ویژه‌جواب این معادله عبارت است از

$$E_z(x, y, z) = E \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left\{ \begin{array}{l} \sin kz \\ \text{یا} \\ \cos kz \end{array} \right\} \quad (31-15)$$

که مربوط است به ویژه‌مقدار

$$-\frac{\omega^2}{c^2} = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2 \quad (32-15)$$

تمرین ۴- واریسی کنید که ۳۱-۱۵ یک جواب معادله موج است، و نشان دهید اگر m و n اعداد درست باشند این جواب شرط مرزی $E_{||}$ در امتداد دیواره‌های کاواک را برآورده می‌کند (منظور از دیواره چهار صفحه $z = 0$, $x = a$, $x = 0$, $y = b$ و $y = 0$ است). ■

در بالا و پایین کاواک ($z = 0$ و $z = d$)، شرط مرزی $E_{||}$ ایجاب می‌کند که هم $E_x = 0$ و هم $E_y = 0$. اگر $\cos kz$ را در معادله ۳۱-۱۵ بگیریم، و E_x و E_y را بنابر معادله‌های ۱۵-۲۵

و ۲۶-۱۵ محاسبه کنیم، به دست می‌آوریم

$$E_x(x, y, z) = \frac{E_0}{\omega^2/c^2 - k^2} \left(-k \frac{m\pi}{a} \cos \right) \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \sin kz \quad (۳۳-۱۵)$$

$$E_y(x, y, z) = \frac{E_0}{\omega^2/c^2 - k^2} \left(-k \frac{n\pi}{b} \sin \right) \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \sin kz \quad (۳۴-۱۵)$$

روشن است که شرط مرزی در $z = d$ از ایجاب می‌کند که

$$k = \frac{l\pi}{d} \quad (۳۵-۱۵)$$

که در آن l یک عدد درست است. همچنین روشن است که اگر $\sin kz$ را در معادله ۳۱-۱۵ بگیریم، شرط مرزی در $z = 0$ نمی‌تواند برآورده شود.

بنابراین، ویژه تابع E_z عبارت است از

$$E_z(x, y, z) = E_0 \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \cos \left(\frac{l\pi z}{d} \right) \quad (۳۶-۱۵)$$

با ویژه بسامد

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d} \right)^2 \quad (۳۷-۱۵)$$

برای به دست آوردن وابستگی زمانی میدان، باید معادله را در $e^{-i\omega t}$ ضرب کنیم و قسمت حقیقی را بگیریم. با فرض اینکه E_0 حقیقی است، به نتیجه زیر می‌رسیم

$$E_z(t, x, y, z) = E_0 \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \cos \left(\frac{l\pi z}{d} \right) \cos \omega t \quad (۳۸-۱۵)$$

به همین ترتیب می‌توانیم E_x و E_y وابسته به زمان را از معادله‌های ۳۳-۱۵ و ۳۴-۱۵ به دست آوریم؛ وابستگی زمانی در اینجا نیز $\cos \omega t$ است.

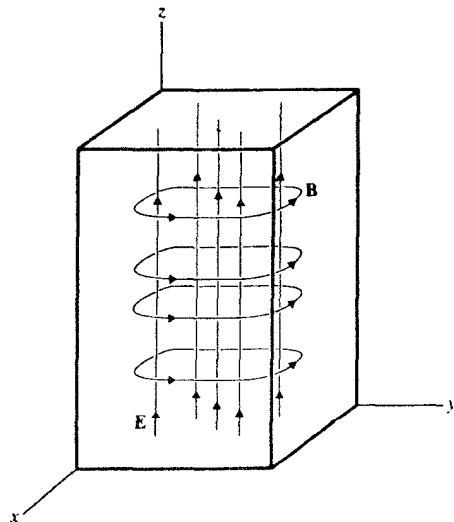
تمرین ۵- نشان دهید برای این مد TM داریم

$$B_x(x, y, z) = \frac{E_0}{\omega^2/c^2 - k^2} \left(-\frac{i\omega}{c}\right) \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{l\pi z}{d}\right) \quad (۳۹-۱۵)$$

$$B_y(x, y, z) = \frac{E_0}{\omega^2/c^2 - k^2} \frac{i\omega}{c} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{l\pi z}{d}\right) \quad (۴۰-۱۵)$$

تمرین ۶- نشان دهید وابستگی زمانی میدانهای B_x و B_y حقیقی عبارت است از $\sin \omega t$. در نتیجه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ربع دور خارج از فاز هستند؛ وقتی \mathbf{B} صفر است \mathbf{E} به ماکسیمم مقدار خود می‌رسد، و برعکس.

کمترین مقادیر m, n, l که به‌ازای آنها میدان غیرصفر E_z به‌دست می‌آید عبارت‌اند از $m = 1, n = 1, l = 0$. مد نوسان متناظر با این اعداد با TM_{011} نشان داده می‌شود (شاخصها به‌ترتیب کاهش ابعاد کاواک مرتب می‌شوند؛ اول l را می‌نویسیم زیرا فرض کردیم بعد d از همه بزرگتر است، سپس n را و سرانجام m را که مربوط به بعد a است که از همه کوچکتر است). خطوط میدان مربوط به \mathbf{E} و \mathbf{B} برای این مد در شکل ۵-۱۵ نشان داده شده‌اند. باید به‌خاطر داشت که



شکل ۵-۱۵ نقش خطوط میدان برای مد TM_{011} .

میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ماکسیمم (که در شکل ۵-۱۵ رسم شده‌اند) به‌طور همزمان روی نمی‌دهند بلکه به‌اندازهٔ ربع دور تأخیر زمانی دارند (تمرین ۶). ویژه بسامد این مد عبارت است از

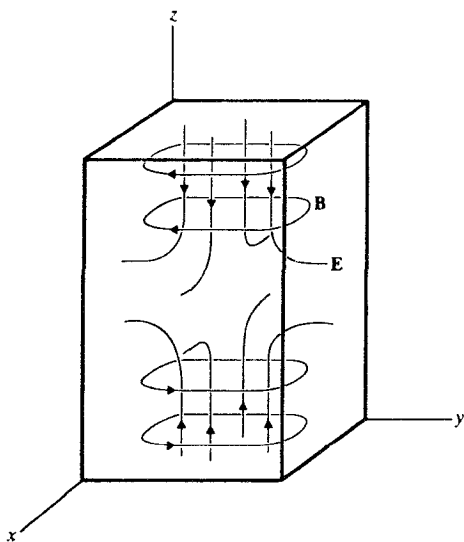
$$\omega_{011} = \pi c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \quad (۴۱-۱۵)$$

شکل ۶-۱۵ خطوط میدان را برای مد TM_{111} نشان می‌دهد؛ این مد دارای بسامد زیر است

$$\omega_{111} = \pi c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{d^2}} \quad (۴۲-۱۵)$$

توجه کنید که اگر در شکل ۵-۱۵ محور z را به‌جای محور x قرار دهیم این شکل به یک مد TE مربوط خواهد شد. به‌طور کلی اگر میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} همه‌جا برهم عمود باشند هر مد را بسته به انتخاب محورها می‌توان TE یا TM در نظر گرفت.

تمرین ۷- آیا می‌توان مد TM_{111} (در شکل ۶-۱۵) را با تغییر محورها به یک مد TE تبدیل کرد؟



شکل ۶-۱۵ نقش خطوط میدان برای مد TM_{111} .

۱۵-۴ اتلاف انرژی در کاواک

اکنون اتلاف انرژی در کاواکهای تشدید را به اختصار بررسی می‌کنیم. جوابی که برای کاواک رسانای کامل به دست آورده‌ایم شامل هیچگونه میرایی نیست. بنابر معادله ۱۵-۳۸، میدان بدون کاهش دامنه نوسان هماهنگ دارد. کاواکهای واقعی که از موادی با رسانندگی متناهی ساخته می‌شوند به تدریج انرژی الکترومغناطیسی از دست می‌دهند زیرا دیواره‌ها قسمتی از این انرژی را جذب می‌کنند. برای به دست آوردن تخمینی تقریبی از مقدار اتلاف انرژی الکترومغناطیسی در یک دور، می‌توانیم به طریق زیر استدلال کنیم: در درون کاواک چگالی انرژی برابر است با

$$T_{..} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2) \quad (۱۵-۴۳)$$

و انرژی کل عبارت است از انتگرال حجمی معادله ۱۵-۴۳. ما صرفاً مقدار متوسطی را که $T_{..}$ نوعاً دارد می‌گیریم و آن را در حجم کاواک ضرب می‌کنیم تا انرژی کل به دست آید:

$$[انرژی در کاواک] \approx T_{..} V \quad (۱۵-۴۴)$$

اگر دیواره‌ها دارای رسانندگی متناهی باشند میدانها حدوداً به اندازه عمق پوسته δ (معادله ۱۲-۱۷۴) در آنها نفوذ می‌کنند. در فاصله δ میدانها، و در نتیجه چگالی انرژی، قابل مقایسه با میدانهای داخل کاواک هستند؛ در عمق بیشتری در فلز، میدانها کاملاً کوچک‌اند. بنابراین، انرژی الکترومغناطیسی در لایه عمق پوسته تقریباً برابر است با

$$T_{..} \times (\text{حجم پوسته}) \approx T_{..} \times (A\delta) \quad (۱۵-۴۵)$$

که در آن A مساحت داخلی کاواک است.

کمیت ۱۵-۴۵ به طور تقریبی انرژی جذب شده توسط دیواره‌ها در یک دور است. با توجه به اینکه طول موج تابش در فلز تقریباً δ است^۱، این مطلب به آسانی قابل درک است؛ بنابراین، در یک دوره تمام انرژی که ابتدا در لایه عمق پوسته بوده است از این لایه خارج می‌شود و به عمق بیشتری در فلز می‌رود و در آنجا جذب می‌شود.

بهرتر است آهنگ اتلاف را برحسب کسر انرژی تلف شده در یک دور بیان کنیم. نسبت معادله‌های ۱۵-۴۴ و ۱۵-۴۵ عبارت است از

$$\frac{[انرژی]}{[انرژی تلف شده در یک دور]} \approx \frac{V}{A\delta} \quad (۱۵-۴۶)$$

۱. به طور دقیق $2\pi\delta$. معادله ۱۲-۱۷۱ را ببینید.

$$Q = \frac{[\text{انرژی}]}{[\text{انرژی تلف شده در یک دور}]} \quad (۴۷-۱۵)$$

را Q ی کاواک می نامند.^۱ معادله ۴۶-۱۵ نشان می دهد Q تقریباً برابر است با نسبت حجم کاواک به «حجم پوسته». بنابه یک محاسبه دقیقتر، معادله ۴۶-۱۵ به اندازه یک ضریب اضافی بدون بعد که بستگی به شکل کاواک دارد تغییر می کند.

Q ی کاواک معرف این است که چگونه انرژی به تدریج کاهش می یابد اگر انرژی اضافی برای جبران اتلافها به کاواک داده نشود. می توانیم معادله ۴۷-۱۵ را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{dU}{dT} = -\frac{\omega}{2\pi Q} U \quad (۴۸-۱۵)$$

که در آن U انرژی کل در کاواک است. با انتگرال گرفتن از این معادله به دست می آوریم

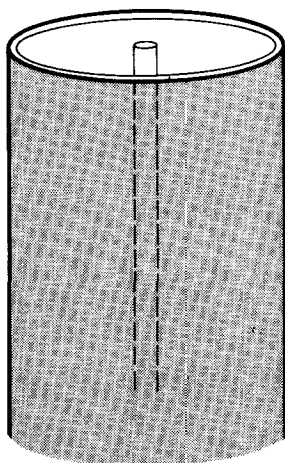
$$U = U_0 e^{-\omega t / 2\pi Q} \quad (۴۹-۱۵)$$

که نشان می دهد انرژی به طور نمایی با زمان میرایی $2\pi Q / \omega$ کاهش می یابد. به طور کیفی، می توانیم بگوییم پس از مدت زمانی قابل مقایسه با یا کمی بیشتر از $2\pi Q / \omega$ ، نوسانهای آزاد کاواک به طور قابل ملاحظه ای از بین می روند. باید توجه کرد که زمان میرایی یا زمان کاواک صرفاً عبارت است از (دوره کاواک) $\times Q$. برای یک کاواک خوب (از جنس رسانای خوب) Q می تواند به بزرگی 10^4 باشد به طوری که کاواک پس از اینکه به کار افتاد حدود 10^4 دور به خودی خود نوسان می کند. کاواکهای فرارسائیی که Q ی آنها به بزرگی 10^8 است برای استفاده در شتابدهنده ها ساخته شده اند.

۱۵-۵ موجبرها

موجبر لوله ای است که برای انتقال امواج الکترومغناطیسی با بسامد رادیویی به کار می رود. یکی از ساده ترین موجبرها کابل هم محور است که از یک پوسته استوانه ای خارجی که داخل آن استوانه توپر (سیم) هم محوری قرار دارد تشکیل شده است (شکل ۱۵-۷). ناحیه بین استوانه ها معمولاً از دی الکتریک پر می شود اما ما آن را خالی فرض می کنیم؛ همچنین فرض می کنیم ماده دیواره ها رسانای کامل است. به طور کلی، مدهای انتشار موج با هندسه استوانه ای بسیار پیچیده هستند. اما یک مد بسیار ساده انتشار برای کابل هم محور وجود دارد: مد TEM. در این مد، میدانهای

۱. تذکر: Q را گاهی برحسب انرژی تلف شده در یک رادیان تعریف می کنند.



شکل ۷-۱۵ کابل هم‌محور متشکل از سیمی که با پوسته استوانه‌ای احاطه شده است.

الکتریکی و مغناطیسی کاملاً عرضی هستند ($E_z = B_z = 0$). بنابراین، از معادله‌های ۱۵-۱۸، ۱۹-۱۵، ۲۱-۱۵ و ۲۲-۱۵ نتیجه می‌گیریم که

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (۵۰-۱۵)$$

و

$$B_y = \pm E_x \quad B_x = \mp E_y \quad (۵۱-۱۵)$$

تمرین ۸- معادله‌های ۱۵-۵۰ و ۱۵-۵۱ را به دست آورید.

در معادله ۱۵-۵۱، علامت بالا مربوط به انتشار در جهت $+z$ است، و علامت پایین مربوط به انتشار در جهت $-z$ است. این مطلب را می‌توان از وابستگی میدانها به z و t ، یعنی $e^{-i\omega t \pm ikz}$ مشاهده کرد (معادله‌های ۱۵-۱۶ و ۱۵-۱۷).

معادله ۱۵-۵۰ نشان می‌دهد رابطه بین k و ω برای موج TEM دقیقاً همان رابطه مربوط به موج الکترومغناطیسی آزاد است. معادله ۱۵-۵۱ نشان می‌دهد \mathbf{E} و \mathbf{B} برهم عمود و دارای بزرگی یکسانی هستند. باز هم درست مانند مورد موج آزاد. پس تنها یافتن نحوه وابستگی E_x

و E_y به x و y می‌ماند. برای این منظور، از معادله‌های ۱۵-۱ و ۱۵-۲۳ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (۵۲-۱۵)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (۵۳-۱۵)$$

این معادله‌ها دقیقاً معادله‌های آشنا برای میدان الکتروستاتیک در دو بعد هستند. بنابراین، وابستگی میدان الکتریکی به x و y دقیقاً با مورد میدانها در خازن استوانه‌ای یکسان است. این میدان الکتریکی را می‌توان به آسانی در مختصات استوانه‌ای بیان کرد:

$$E_\rho \propto \frac{1}{\rho}$$

پس بنابر معادله ۱۵-۵۱ میدان مغناطیسی عبارت است از

$$B_\phi \propto \pm \frac{1}{\rho}$$

با منظور کردن وابستگی این میدانها به z و t ، و با تعیین قسمت حقیقی، به دست می‌آوریم

$$E_\rho(t, \rho, \phi, z) = E_0 \frac{a}{\rho} \cos(\omega t \pm kz)$$

$$B_\phi(t, \rho, \phi, z) = \pm E_0 \frac{a}{\rho} \cos(\omega t \pm kz) \quad (۵۴-۱۵)$$

که در آنها E_0 بزرگی میدان الکتریکی به‌ارای شعاع a ، مثلاً شعاع رسانای داخلی است. نتایجی را که در مورد رفتار میدانهای TEM با هندسه استوانه‌ای دایره‌ای به دست آورده‌ایم می‌توان به سایر هندسه‌های استوانه‌ای تعمیم داد. روشن است که معادله‌های ۱۵-۵۰ تا ۱۵-۵۳ بستگی به فرض تقارن دورانی ندارند.

برای انتقال توان زیاد در بسامدهای بالا، موجبرهای توخالی از همه بهترند. در کابل هم‌محور در رسانای مرکزی که باید چگالیهای جریان زیادی را حمل کند و در دی الکتریکی که لازم است تا رسانای مرکزی را در جای خود نگه دارد ائتلاف بسیار زیادی وجود دارد. مقطع موجبرهای توخالی معمولاً مستطیلی است، و دیواره آنها نقره‌اندود می‌شوند تا رسانایی افزایش یابد.

تمرین ۹- ثابت کنید در موجبر مستطیلی توخالی یا هر نوع موجبر توخالی وجود مد TEM غیر

ممکن است. [راهنمایی: آیا شرط مرزی روی E جواب غیر صفر معادله‌های ۵۲-۱۵ و ۵۳-۱۵ را امکانپذیر می‌سازد؟]

البته هم مد TE و هم مد TM می‌توانند در موجبر مستطیلی وجود داشته باشند. شکل ۸-۱۵ یک موجبر مستطیلی با مقطع $a \times b$ را نشان می‌دهد. می‌خواهیم مد TE این موجبر را بررسی کنیم. پس باید معادله موج زیر را حل کنیم

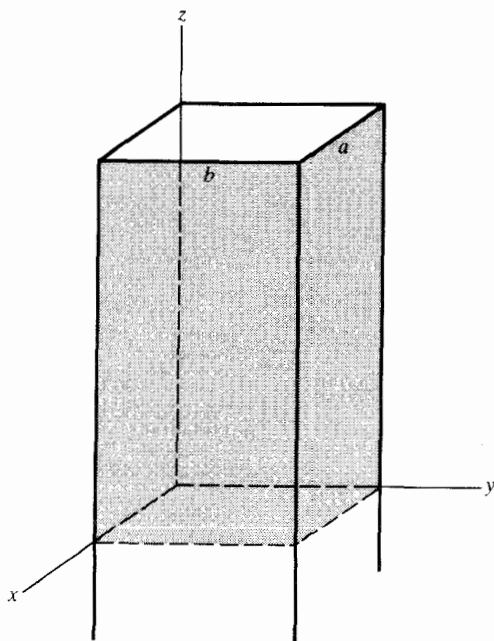
$$\nabla^2 B_z = -\frac{\omega^2}{c^2} B_z \quad (55-15)$$

برای موجی که در جهت $+z$ حرکت می‌کند باید

$$B_z = B_z(x, y)e^{-i\omega t + ikz} \quad (56-15)$$

بنابراین

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) B_z(x, y) = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right) B_z(x, y) \quad (57-15)$$



شکل ۸-۱۵ موجبر مستطیلی با مقطع $a \times b$

باز هم یک مسئله ویژه مقدراری داریم: B_z ویژه تابع $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ با ویژه مقدار $k^2 + \omega^2/c^2$ است. توجه کنید که در مورد کاواک تشدید ω^2/c^2 ویژه مقدار است، اما اکنون ω^2/c^2 پارامتر قابل تنظیمی است که مقدار آن توسط بسامد مولدی که موجبر را تغذیه می‌کند تعیین می‌شود؛ بدیهی است که می‌توانیم این مولد را با هر بسامدی که بخواهیم به کار بیندازیم.^۱ در نتیجه، پس از تعیین ویژه مقدار مربوط به معادله ۵۷-۱۵ مقدار k به دست می‌آید.

شرط مرزی روی \mathbf{B} عبارت است از $\mathbf{B}_\perp = 0$ در دیواره‌ها. جوابی که این شرط مرزی را برآورده می‌کند به صورت زیر است

$$B_z(x, y) = B \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (58-15)$$

که در آن m و n اعداد درست هستند (و دست کم یکی از آنها باید مخالف صفر باشد).

تمرین ۱۰- واری کنید که ۵۸-۱۵ یک جواب معادله ۵۷-۱۵ است.

ویژه مقدار وابسته به معادله ۵۸-۱۵ برابر است با $-(m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2$. در نتیجه

$$-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (59-15)$$

که از آن می‌توانیم k را به دست آوریم:

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (60-15)$$

این رابطه نشان می‌دهد اگر ω به اندازه کافی کوچک باشد k انگاری می‌شود. آنگاه به جای انتشار تضعیف‌نمایی میدانها را خواهیم داشت. بسامد خاموشی بحرانی، که کمتر از آن دیگر موجبر کار نمی‌کند، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\omega_{mn} = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (61-15)$$

این بسامد خاموشی مربوط به مد TE_{mn} است، اگرچه هرگاه ω کمتر از ω_{mn} باشد انتشار در این مد غیرممکن است، اگر مد دیگری با بسامد خاموشی کمتری وجود داشته باشد باز هم می‌توان موجی را از طریق موجبر منتقل کرد. اما اگر بسامد ω کمتر از تمام بسامدهای خاموشی موجبر

۱. اما معلوم می‌شود اگر بسامد خیلی کم باشد انتشار موج وجود نخواهد داشت (ادامه بحث را ببینید).

باشد، هر انتقالی غیر ممکن است. برای مثال، اگر $a > b$ ، آنگاه کمترین بسامد خاموشی مربوط به مُد TM_{10} است:

$$\omega_{10} = \frac{c\pi}{a} \quad (۶۲-۱۵)$$

و این بسامد کمترین بسامد لازم برای هرگونه انتقالی است.

تمرین ۱۱- تمام مؤلفه‌های میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را برای موجی که در مُد TE است محاسبه کنید. وابستگی به z و t را نیز منظور کنید. ■

خطوط میدان برای مد TE_{10} در شکل ۹-۱۵ نشان داده شده‌اند. برخلاف میدانهای کاواک، E و B در اینجا همفاز هستند، و شکل ۹-۱۵ آنها را در یک لحظه نشان می‌دهد. کل نقش خطوط میدان در امتداد موجبر با سرعت فاز موج حرکت می‌کند. در اینجا مسئله سرعت موج در موجهای منتقل شده مطرح می‌شود. سرعت فاز بزرگتر از c است:

$$v_p = \frac{\omega}{k} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - (m\pi c/a)^2 - (n\pi c/b)^2}} > c \quad (۶۳-۱۵)$$

اما سرعت گروه کوچکتر از c است:

$$v_g = \frac{l}{dk/d\omega} = \frac{c\sqrt{\omega^2 - (m\pi c/a)^2 - (n\pi c/b)^2}}{\omega} < c \quad (۶۴-۱۵)$$

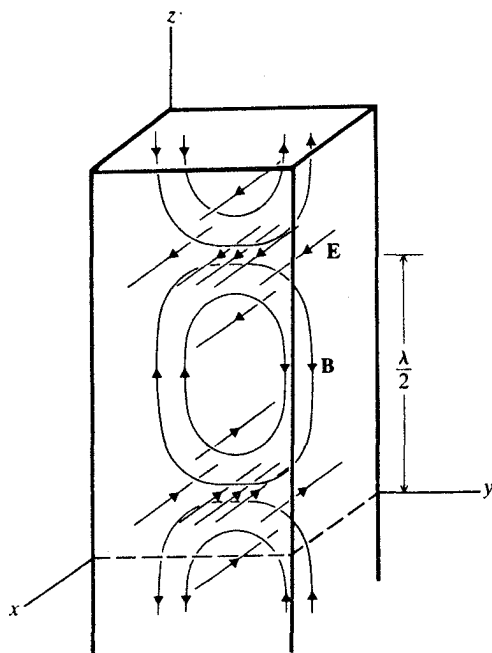
سرعت گروه سرعت حرکت علائم— و انرژی— در موجبر است.

برای اینکه علت تفاوت سرعتهای ۶۳-۱۵ و ۶۴-۱۵ را بهتر بفهمیم موج تخت آزادی را که به‌طور مایل به‌آینه می‌تابد در نظر می‌گیریم (شکل ۱۵-۱۰). نقطه تقاطع یک قله موج با آینه امتداد آینه با سرعت $c/\sin\theta$ حرکت می‌کند. اما انرژی با سرعت $c\sin\theta$ موازی آینه حرکت می‌کند. بنابراین، سرعتهای فاز و گروه برابرند با

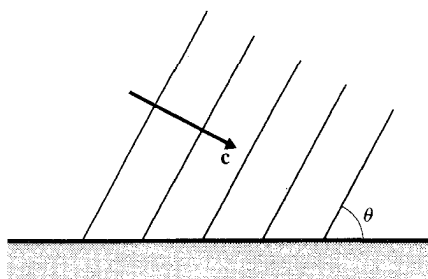
$$v_p = \frac{c}{\sin\theta} \quad (۶۵-۱۵)$$

$$v_g = c\sin\theta \quad (۶۶-۱۵)$$

دلیل اینکه چرا این مطلب به‌انتشار در موجبرها مربوط است این است که موج منتقل شده را می‌توان موج تختی در نظر گرفت که مرتباً بین دیواره‌ها منعکس می‌شود. شکل ۱۵-۱۱ انعکاسهای

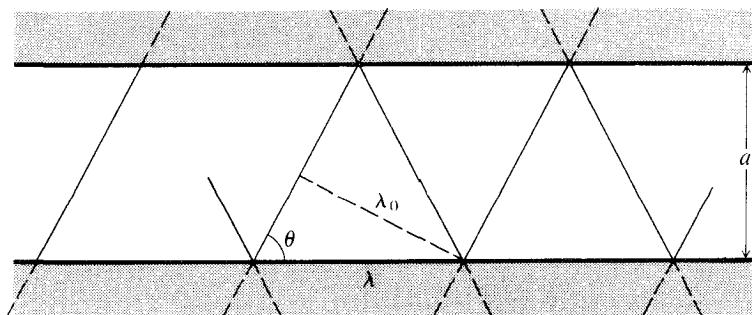


شکل ۱۵-۹ نقش خطوط میدان برای مد TE_{10} در موجبر مستطیلی.



شکل ۱۵-۱۰ قله‌های موج تابنده به آینه.

متوالی جبهه‌های موج مد TE_{10} را نشان می‌دهد (بردار میدان الکتریکی عمود بر صفحه شکل است). جبهه‌های موجی که به سمت گوشه بالایی طرف راست حرکت می‌کنند با جبهه‌هایی که به سمت گوشه پایینی طرف راست حرکت می‌کنند و آنها را قطع می‌کنند 180° اختلاف فاز دارند. در نتیجه، میدانی الکتریکی در دیواره‌ها حذف می‌شود، و شرط مرزی برآورده می‌شود. اکنون می‌توانیم با استدلال هندسی ساده‌ای بر مبنای شکل ۱۵-۱۱ ثابت کنیم معادله‌های ۱۵-۶۳



شکل ۱۵-۱۱ جبهه‌های موجی که بین دیواره‌های موازی موجبر مرتباً منعکس می‌شوند.

و ۱۵-۶۴ هم‌ارز معادله‌های ۱۵-۶۵ و ۱۵-۶۶ هستند. از این شکل دیده می‌شود که طول موج مربوط به موج منتقل شده (فاصله تکرار شده‌ای که در امتداد موجبر اندازه‌گیری می‌شود) برابر است با

$$\lambda = \frac{2a}{\tan \theta} \quad (۱۵-۶۷)$$

و طول موج مربوط به موج تخت (فاصله تکرار شده‌ای که عمود بر جبهه‌های موج اندازه‌گیری می‌شود) برابر است با

$$\lambda_0 = 2a \cos \theta \quad (۱۵-۶۸)$$

تمرین ۱۲- روابط بالا را واریسی کنید.

چون موج تخت دارای طول موج $\omega c / \pi$ است، از معادله ۱۵-۶۸ به دست می‌آوریم

$$\cos \theta = \frac{\pi c}{\omega a} \quad (۱۵-۶۹)$$

بنابراین، سرعت‌های فاز و گروه به صورت زیر در می‌آیند

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega a}\right)^2}} \quad (۱۵-۷۰)$$

$$v_g = c \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega a}\right)^2} \quad (۱۵-۷۱)$$

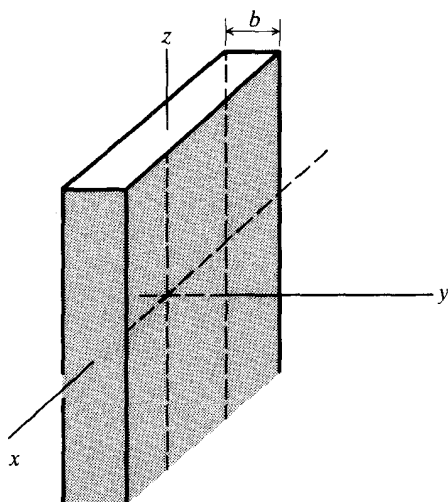
که با معادله‌های ۱۵-۶۳ و ۱۵-۶۴ توافق دارند.

۱۵-۶ موجبرهای دی‌الکتریک

موجبر دی‌الکتریک از میله‌ای از ماده‌ای الکترونیک تشکیل شده است که برای انتقال امواج الکترومغناطیسی به‌کار می‌رود. میله‌های نازکی از این نوع، که تار نوری نامیده می‌شوند، برای انتقال علائم نوری مدوله در شبکه‌های تلفنی جدید مورد استفاده قرار می‌گیرند. اصولاً موج نور با بازتاب داخلی کلی داخل دی‌الکتریک محصور می‌شود. این موج بدون احتیاج به دیوارهٔ رسانا محصور شده است. تارهای نوری بسیار باریک را می‌توان خیلی آسانتر از لوله‌های فلزی توخالی تولید کرد؛ اما همچنان‌که قبلاً گفتیم دی‌الکتریک تا حدی موج را جذب می‌کند.

بررسی ریاضی انتشار موج الکترومغناطیسی برای موجبر دی‌الکتریک نسبتاً مشکلتر از موجبر توخالی است. از بخش ۱۲-۶ می‌دانیم که موج بازتابیدهٔ داخلی تا فاصله‌ای به‌خارج از سطح دی‌الکتریک نفوذ می‌کند. این موج نسبت به فاصله تا دی‌الکتریک به‌طور نمایی تضعیف می‌شود. بنابراین، لازم است معادلات ماکسول را در خارج و داخل موجبر دی‌الکتریک حل کنیم و جوابها را با شرایط مرزی مقتضی باهم تطبیق دهیم. این مسئله از لحاظ ریاضی نسبتاً پیچیده است. علاوه بر این، دی‌الکتریکی که در تارهای نوری به‌کار برده می‌شود غالباً دارای وابستگی شعاعی به ضریب شکست است، و این امر منجر به پیچیدگیهای دیگری می‌شود.

در اینجا، تنها مورد بسیار ساده‌ای از موجبر دی‌الکتریک را بررسی می‌کنیم: یک ورق دی‌الکتریک همگن با کلفتی یکنواخت، مثلاً یک صفحهٔ شیشه‌ای بسیار بزرگ. این مورد ساده بیشتر ویژگیهایی را که نوعاً انتشار موج دارد نشان می‌دهد اما از لحاظ ریاضی نسبتاً آسان است. شکل ۱۵-۱۲



شکل ۱۵-۱۲ ورق دی‌الکتریک بسیار بزرگ با کلفتی b و موازی با صفحه xz .

ورقی از این نوع را نشان می‌دهد که کلفتی آن b است و صفحه میانی آن بر صفحه xz منطبق است. می‌توانیم این ورق را یک موجبر مستطیلی با پهنای نامتناهی در راستای x بدانیم. پس می‌توانیم فرض کنیم برای موجی که در این ورق در راستای z منتشر می‌شود وابستگی به x وجود ندارد. بنابراین، معادله دیفرانسیل مربوط به وابستگی به x و y موج (معادله ویژه مقدار ۱۵-۷۶) به یک معادله دیفرانسیل معمولی تنها مربوط به وابستگی به y تبدیل می‌شود، و حل این معادله آسان است.

در محیط دی‌الکتریک، باید معادله‌های ۱۵-۲۵ تا ۱۵-۳۰ را با وارد کردن ضرایب مناسب μ و ϵ تغییر دهیم. معادله‌های تغییر یافته عبارت‌اند از

$$E_x = \frac{1}{\mu\epsilon\omega^2/c^2 - k^2} \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} + \frac{i\omega}{c} \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \quad (72-15)$$

$$E_y = \frac{1}{\mu\epsilon\omega^2/c^2 - k^2} \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial z} - \frac{i\omega}{c} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \quad (73-15)$$

$$B_x = \frac{1}{\mu\epsilon\omega^2/c^2 - k^2} \left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial z} - \frac{i\omega}{c} \mu\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (74-15)$$

$$B_y = \frac{1}{\mu\epsilon\omega^2/c^2 - k^2} \left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial y \partial z} + \frac{i\omega}{c} \mu\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (75-15)$$

$$\nabla^2 E_z = -\frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} E_z \quad (76-15)$$

$$\nabla^2 B_z = -\frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} B_z \quad (77-15)$$

موج TM_۱ را می‌خواهیم که در راستای z منتشر می‌شود. این موج به y بستگی دارد نه به x . بنابراین

$$E_z = E_z(y)e^{-i\omega t \pm ikz} \quad (78-15)$$

و معادله ۱۵-۷۶ ایجاب می‌کند که

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} E_z(y) + \left(\frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_z(y) = 0 \quad (79-15)$$

معادله متناظر برای ورق به صورت زیر است

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} E_z(y) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_z(y) = 0 \quad (۸۰-۱۵)$$

جواب معادله ۷۹-۱۵ عبارت است از $\cos \gamma y$ یا $\sin \gamma y$ ، با

$$-\gamma^2 + \left(\frac{\mu \epsilon \omega^2}{c^2} - k^2 \right) = 0 \quad (۸۱-۱۵)$$

تحت وارونی محور y ، جواب کسینوسی متقارن است و جواب سینوسی پاد متقارن است. در اینجا، جواب کسینوسی را می‌گیریم (و جواب سینوسی را به مسئله ۱۵-۲۱ موکول می‌کنیم):

$$E_z(y) = E_0 \cos \gamma y \quad \text{به‌ازای } |y| \leq \frac{b}{2} \quad (۸۲-۱۵)$$

جواب معادله ۸۰-۱۵ عبارت است از

$$E_z(y) = \begin{cases} Ae^{-\beta y} & \text{به‌ازای } y \geq \frac{b}{2} \\ Ae^{+\beta y} & \text{به‌ازای } y \leq -\frac{b}{2} \end{cases} \quad (۸۳-۱۵)$$

همراه با

$$\beta^2 + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) = 0 \quad (۸۴-۱۵)$$

در اینجا، جوابی را انتخاب می‌کنیم که نسبت به فاصله از سطح ورق به‌طور نمایی کاهش می‌یابد. این کاهش میدانها نسبت به فاصله برای جلوگیری از فرار موج از موجبر ضروری است. شرایط مرزی کلی در سطح دی‌الکتریک $y = \pm b/2$ با معادله‌های ۱۲-۱۲۱ تا ۱۲-۱۲۴ داده می‌شوند. چون در سطح میدان \mathbf{B} عمودی وجود ندارد، سه معادله اول شرایط مرزی مربوط هستند: پیوستگی E_z ، پیوستگی D_y (یا ϵE_y) و پیوستگی H_x (یا B_x/μ). با توجه به معادله‌های ۱۵-۸۲ و ۱۵-۸۳، اولین شرط مرزی به صورت زیر در می‌آید

$$E_0 \cos \left(\gamma \frac{b}{2} \right) = Ae^{-\beta b/2} \quad (۸۵-۱۵)$$

برای شرط مرزی دوم، باید E_y را محاسبه کنیم که این کار را با استفاده از معادله ۱۵-۷۳ انجام می‌دهیم. به دست می‌آوریم

$$\frac{\varepsilon E_0}{\mu \varepsilon \omega^2 / c^2 - k^2} \left[-ik\gamma \sin\left(\frac{\gamma b}{2}\right) \right] = \frac{A}{\omega^2 / c^2 - k^2} (-ik\beta e^{-\beta b/2}) \quad (۸۶-۱۵)$$

می‌توان بررسی کرد که شرط مرزی سوم به معادله ۱۵-۸۶ منجر می‌شود و در نتیجه می‌توانیم از آن صرف‌نظر کنیم.

تمرین ۱۳- سومین شرط مرزی را وارسی کنید.

معادله ۱۵-۸۵ را بر معادله ۱۵-۸۶ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\varepsilon \gamma}{\mu \varepsilon \omega^2 / c^2 - k^2} \tan\left(\frac{\gamma b}{2}\right) = \frac{\beta}{\omega^2 / c^2 - k^2}$$

یا

$$\frac{\varepsilon}{\gamma} \tan\left(\frac{\gamma b}{2}\right) = -\frac{1}{\beta} \quad (۸۷-۱۵)$$

اگر معادله‌های ۱۵-۸۱ و ۱۵-۸۴ را باهم ترکیب کنیم می‌توانیم β را برحسب γ به دست آوریم:

$$\gamma^2 + \beta^2 = \frac{\omega^2(\mu\varepsilon - 1)}{c^2} \quad (۸۸-۱۵)$$

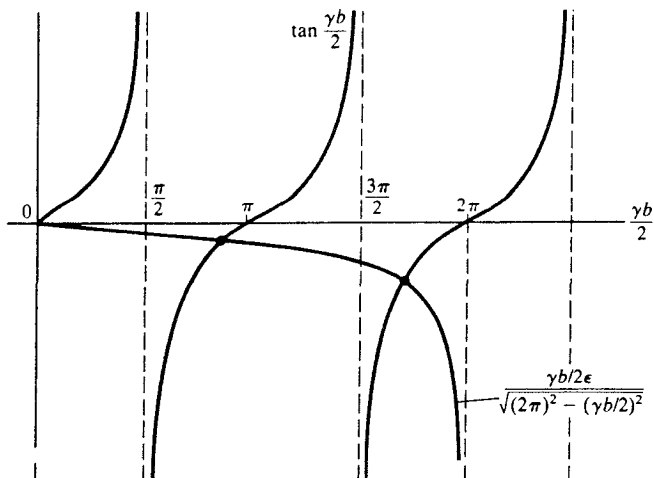
یا

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega^2(\mu\varepsilon - 1)}{c^2} - \gamma^2} \quad (۸۹-۱۵)$$

با توجه به این نتیجه، معادله ۱۵-۸۷ به صورت زیر در می‌آید

$$\tan\left(\frac{\gamma b}{2}\right) = \frac{\gamma/\varepsilon}{\sqrt{\omega^2(\mu\varepsilon - 1)/c^2 - \gamma^2}} \quad (۹۰-۱۵)$$

این معادله مقادیر مجاز γ را برای مدهای TM متقارن عرضی در موجبر دی‌الکتریک بالا، و در نتیجه مقادیر مجاز k را، تعیین می‌کند.



شکل ۱۵-۱۳ نمودارهای طرف راست و طرف چپ معادله ۱۵-۹۰ به صورت تابع $\gamma b/2$ مقدار بسامد برای رسم طرف راست برابر با $\omega = (4\pi c/b)/\sqrt{\mu\varepsilon - 1}$ گرفته شده است و $\varepsilon = 1$ را به ازای این بسامد، دو نقطه تقاطع، یعنی دو مد مجاز، وجود دارند.

جوابهای معادله ۱۵-۹۰ را باید به طور عددی یا به طور نموداری به دست آورد. برای کار ما، حل نموداری کفایت می‌کند. طرف راست و طرف چپ معادله ۱۵-۹۰ را روی یک نمودار، با $\gamma b/2$ به عنوان طول، رسم می‌کنیم (شکل ۱۵-۱۳)؛ نقاط تقاطع این دو منحنی جوابها را به دست می‌دهند. توجه کنید که تعداد این نقاط، یا تعداد مدهای مجاز، بستگی به بزرگی ω دارد. به ازای مقداری که در شکل ۱۵-۱۳ برای بسامد فرض شده است، دو مد مجاز وجود دارند. اگر نمودارهای مشابهی را برای مقادیر کمتر بسامد رسم کنیم معلوم خواهد شد که هیچ مد مجازی وجود ندارد مگر اینکه

$$\omega > \frac{\pi c/b}{\sqrt{\mu\varepsilon - 1}} \quad (۱۵-۹۱)$$

این رابطه کمترین بسامد لازم را برای انتشار مد TM در این موجبر دی‌الکتریک تعیین می‌کند؛ یعنی این رابطه بسامد خاموشی را تعیین می‌کند.

مسائل

۱۵-۱۱ از روابطی که در بخش ۱۵-۳ برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در کاواک مستطیلی که

در مد TM_{011} نوسان می‌کند داده شده‌اند، چگالی انرژی و انرژی کل در کاواک را به دست آورید.

۱۵-۲ خطوط میدان الکتریکی و مغناطیسی را برای کاواک مستطیلی که در مد TM_{112} نوسان می‌کند رسم کنید (از بالا، از روبرو، از نیمرخ).

۱۵-۳ مؤلفه‌های میدانهای الکتریکی و مغناطیسی شامل وابستگی زمانی را برای کاواکی مستطیلی به ابعاد $a \times b \times d$ که در مد TM نوسان می‌کند به دست آورید. خطوط میدان را برای مد TE_{110} رسم کنید.

۱۵-۴ یک کاواک مستطیلی به ابعاد $a \times b \times d$ را که در مد TM_{011} نوسان می‌کند در نظر بگیرید. چگالی بار در دیواره‌های کاواک را به دست آورید. چگالی جریان سطحی را تعیین کنید.

۱۵-۵ ابعاد یک کاواک مستطیلی با دیواره مسی $9.0 \text{ cm} \times 7.5 \text{ cm} \times 3.5 \text{ cm}$ است. کمترین بسامد برای مد TM را در این کاواک به دست آورید. زمان میرایی را برای این مد تخمین بزنید. رسانایی مس $10^{17} (\text{stat}\Omega\text{cm})^{-1}$ یا 5.22×10^{17} است.

۱۵-۶ فرض کنید کاواک مستطیلی از یک دی‌الکتریک با ضریب دی‌الکتریک E و ضریب گذردهی μ پر شده است. وجود این دی‌الکتریک چه تغییری در معادله‌های ۱۵-۳۲ تا ۱۵-۴۰ ایجاد می‌کند؟

۱۵-۷ یک موجر هم‌محور تشکیل شده است از استوانهٔ رسانای توپری به شعاع a که با پوستهٔ استوانه‌ای رسانایی به شعاع b احاطه شده است (شکل ۱۵-۷). اگر بسامد موج ω و دامنهٔ میدان الکتریکی در سطح رسانای داخلی E_0 باشد، توانی را که این موجر در مد TEM منتقل می‌کند به دست آورید.

۱۵-۸ یک موجر مستطیلی با مقطع $a \times b$ موجی را در مد TE_{11} منتشر می‌کند. خطوط میدان الکتریکی و مغناطیسی را رسم کنید.

۱۵-۹ یک موجر مستطیلی معمولی دارای مقطع $3.40 \text{ cm} \times 7.21 \text{ cm}$ است. (الف) بسامد خاموشی را برای مد TE_{10} به دست آورید. (ب) فرض کنید یک موج TE_{10} با بسامد 10^9 Hz یا 1.8×10^9 به این موجر داده‌ایم. در چه فاصله‌ای در امتداد موجر میدانها به اندازهٔ ضریب e تضعیف می‌شوند؟

۱۵-۱۰ متوسط زمانی توانی را محاسبه کنید که موجر مستطیلی با مقطع $a \times b$ در مد TE_{mn} با میدان مغناطیسی ۱۵-۵۸ منتقل می‌کند. مقدار توان را به ازای $\omega \rightarrow \infty$ تعیین کنید.

۱۵-۱۱ (الف) نشان دهید سرعتهای فاز و گروه برای موجر مستطیلی (معادله‌های ۱۵-۶۳ و ۱۵-۶۴) در اتحاد $v_p v_g = c^2$ صدق می‌کنند. (ب) نشان دهید این اتحاد به طور کلی برای هر موجبری معتبر است. [راهنمایی: ثابت کنید این اتحاد وقتی به دست می‌آید که مجذور بسامد و

مجذور عدد موج در رابطه‌ای خطی به صورت $\omega^2/c^2 - k^2 = \text{const}$ صدق کنند.]

۱۲-۱۵ موجبری مستطیلی را در نظر بگیرید که در مد TE_{mn} با میدان مغناطیسی ۱۵-۵۸ تحریک شده است. بردار پوینتینگ متوسط زمانی و چگالی انرژی متوسط زمانی را به دست آورید. تحقیق کنید که انتگرال بردار پوینتینگ متوسط زمانی روی مقطع موجبر برابر است با انتگرال چگالی انرژی متوسط زمانی روی مقطع ضرب در سرعت گروه:

$$\int \bar{S}_z dx dy = v_g \int \overline{T^{*0}} dx dy$$

۱۳-۱۵ یک موجبر مستطیلی با سطح مقطع $a \times b$ موجی در مد TM_{11} منتشر می‌کند. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را محاسبه کنید. خطوط میدان الکتریکی و خطوط میدان مغناطیسی را رسم کنید.

۱۴-۱۵ فرض کنید مؤلفه z میدان مغناطیسی در یک موجبر مستطیلی به صورت زیر است

$$B_z = B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-i\omega t \pm ikz}$$

سطوح جانبی این موجبر صفحه‌هایی هستند در $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ و چگالی جریان سطحی لحظه‌ای (تمام مؤلفه‌ها) و چگالی بار سطحی را در هر نقطه از سطوح جانبی موجبر به دست آورید.

۱۵-۱۵ نشان دهید برای موجی که در موجبری منتشر می‌شود که دیواره‌های آن رسانایی متناهی دارند، فاصله تضعیف یا فاصله‌ای که در آن شدت موج به اندازه ضریب e کاهش می‌یابد برابر است با (طول موج) $Q \times$. ثابت کنید برای موجبر مستطیلی فاصله تضعیف تقریباً برابر است با

$$\frac{ab}{2(a+b)\delta} \times (\text{طول موج})$$

۱۶-۱۵ جدول زیر ابعاد بعضی از موجبرهای تجارتي موجود را که از مس ساخته شده‌اند نشان می‌دهد. برای هر یک از این موجبرها، بسامد خاموشی را محاسبه کنید و فاصله تضعیف را برای موجی با بسامد دو برابر بسامد خاموشی تخمین بزنید (مسئله قبل). رسانایی مس $(\text{stat}\Omega\text{cm})^{-1} \times 10^{12} \times 5.22$ است.

مقطع موجبرها:

$$۳٫۴۸\text{cm} \times ۱٫۵۸\text{cm}$$

$$۴٫۷۵ \times ۲٫۲۱$$

$$۷٫۲۱ \times ۳٫۴۰$$

۱۷-۱۵ موجبری از دو سیم موازی باریک به فاصله d از یکدیگر تشکیل شده است. یک موج الکترومغناطیسی در امتداد این موجبر در مد TEM منتشر می‌شود. اگر بسامد ω باشد میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را به دست آورید. طول موج، سرعت فاز و سرعت گروه این موج را تعیین کنید.

۱۸-۱۵ دو صفحه کاملاً رسانای موازی بسیار بزرگ به فاصله b از یکدیگر قرار دارند. یکی از صفحه‌ها بر صفحه $y = 0$ و دیگری بر صفحه $y = b$ منطبق است. الف) میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را برای موج TEM ای که با بسامد ω در جهت z بین صفحه‌ها منتشر می‌شود به دست آورید. این میدانها را رسم کنید. طول موج، سرعت فاز و سرعت گروه این موج را تعیین کنید. ب) اگر صفحه‌ها رسانای کامل نباشند بلکه دارای رسانایی متناهی σ باشند، همچنان که موج پیش می‌رود دامنه آن به طور نمایی کاهش می‌یابد. تخمین بزنید در چه مسافتی در جهت z موج به اندازه ضریب e تضعیف می‌شود. جواب را بر حسب ω ، σ و b بیان کنید؛ فرض کنید کلفتی صفحه‌ها بسیار بیشتر از عمق پوسته است.

۱۹-۱۵ صفحه‌های موازی رسانایی را که در مسئله قبل توصیف شده‌اند در نظر بگیرید. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یک موج TE_{0n} با بسامد ω را که در راستای z بین این صفحه‌ها منتشر می‌شود به دست آورید. میدان الکتریکی این موج را موازی با صفحه‌ها در راستای x بگیرید.

۲۰-۱۵ ثابت کنید موج TEM نمی‌تواند در موجبر دی‌الکتریک منتشر شود.

۲۱-۱۵ فرض کنید وابستگی عرضی میدان الکتریکی یک موج TM در ورق دی‌الکتریکی که در بخش ۱۵-۶ توصیف شده است عبارت است از $E_z(y) = E_0 \sin \gamma y$. با این فرض، معادله‌ای متناظر با معادله ۱۵-۹۰ به دست آورید.

۲۲-۱۵ امواج TE را که در ورق دی‌الکتریک بخش ۱۵-۶ منتشر می‌شوند در نظر بگیرید. معادله‌ای متناظر با معادله ۱۵-۹۰ برای این امواج به دست آورید. کمترین بسامد مجاز برای امواج TE را تعیین کنید.

پراکندگی و پراش

وقتی موج الکترومغناطیسی به الکترونی آزاد یا الکترونی با پیوند ضعیف می‌خورد پراکنده می‌شود: موج الکترون را تکان می‌دهد و باعث گسیل تابش می‌شود؛ این تابش به صورت موجی کروی به اطراف منتشر می‌شود و قسمتی از انرژی موج تابیده اصلی را با خود حمل می‌کند. مثال آشنایی از این پدیده رنگ آبی آسمان است که از پراکندگی نور خورشید توسط الکترونهاى مولکولهای هوا ناشی می‌شود.

در این فصل، خواهیم دید که پراکندگی ناشی از یک الکترون را می‌توان به آسانی محاسبه کرد. اما اگر بخواهیم پراکندگی ناشی از ذره غبار، قطره آب یا مانع ماکروسکوپی دیگری را محاسبه کنیم باید اثرات همدوس تعداد زیادی الکترون را باهم جمع کنیم. این یک مسئله دشوار ریاضی است که بهتر است با معادلات ماکروسکوپی ماکسول بررسی شود تا با معادلات میکروسکوپی حرکت الکترونهاى انفرادی. پس با یک مسئله ویژه مقدراری روبرو هستیم: مانع محیطی است با ثابت دی‌الکتریک و رسانایی معین، و ما جواب معادله موج را برای یک موج تابیده معین می‌خواهیم. برای مانعی با شکل پیچیده، حل این مسئله کاملاً دشوار می‌شود. ما به جای جواب دقیق صرفاً به دنبال جوابی تقریبی هستیم که از انتگرال کیرشهوف به دست می‌آید. البته متداولترین کاربرد این انتگرال در پراش، یا خم شدن نور در اطراف مانع، است که می‌توان آن را مورد خاصی از پراکندگی دانست. اما انتگرال کیرشهوف جواب موارد کلی‌تر پراکندگی را نیز به دست می‌دهد.

۱-۱۶ پراکندگی تامسون

فرض کنید موج الکترومغناطیسی تختی به یک الکترون آزاد فرود آید. اگر این موج در جهت z منتشر شود و در جهت مثلاً z قطبیده باشد، میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E}_{\text{فرودی}} = E_0 \hat{x} e^{-i(\omega t - kz)} \quad (1-16)$$

در اینجا از نمادنگاری مختلط استفاده کرده‌ایم، و می‌دانیم که میدان الکتریکی فیزیکی قسمت حقیقی فرمول بالا است. الکترونی که در $z = 0$ واقع است تحت تأثیر این میدان الکتریکی شتابی در راستای x می‌گیرد:

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{e}{m_e} E_0 e^{-i\omega t} \quad (2-16)$$

بنا به معادله ۱۳-۵۳ توانی که الکترون در واحد زاویه فضایی تابش می‌کند متناسب با مجذور شتاب است. چون شتاب a مختلط است، قبل از مجذور کردن باید قسمت حقیقی را به دست آوریم:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \text{Re}(a) \cdot \text{Re}(a) \sin^2 \Theta \quad (3-16)$$

که در آن Θ زاویه بین جهش قطبش و جهت تابش است (شکل ۱-۱۶). در بحث پراکندگی، کمیتی که مورد توجه است توان لحظه‌ای نیست بلکه توان متوسط زمانی است:

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \overline{\text{Re}(a) \cdot \text{Re}(a)} \sin^2 \Theta \quad (4-16)$$

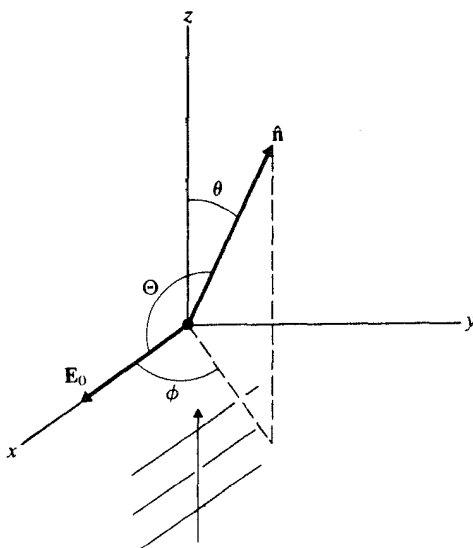
را می‌توان از فرمول زیر، که برای هر تابعی با وابستگی زمانی $e^{\pm i\omega t}$ معتبر است، محاسبه کرد

$$\overline{\text{Re}(a) \cdot \text{Re}(a)} = \frac{1}{2} \text{Re}(aa^*) \quad (5-16)$$

تمرین ۱- معادله ۵-۱۶ را اثبات کنید.

با شتاب $-(e/m_e)E_0 e^{-i\omega t}$ ، معادله ۴-۱۶ به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left(\frac{e}{m_e} E_0 \right)^2 \sin^2 \Theta \quad (6-16)$$



شکل ۱-۱۶ جهت قطبش موج تابیده و جهت شتاب الکترون موازی با محور x است. شدت تابش پراکنده تابعی است از زاویه Θ .

یا

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} r_e^2 E_0^2 \sin^2 \Theta \quad (۷-۱۶)$$

در اینجا r_e شعاع الکترون کلاسیک است:

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.82 \times 10^{-13} \text{ cm} \quad (۸-۱۶)$$

بنا به تعریف، مقطع پراکندگی دیفرانسیلی عبارت است از نسبت $d\bar{P}/d\Omega$ به متوسط زمانی شار انرژی تابیده:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{d\bar{P}/d\Omega}{[\text{شار تابیده}]} \quad (۹-۱۶)$$

کمیت $d\sigma/d\Omega$ دارای ابعاد مساحت است؛ این کمیت معرف مقدار توانی است که در زاویه فضایی $d\Omega$ پراکنده می‌شود:

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = [\text{شار تابیده}] \times \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (۱۰-۱۶)$$

توجه کنید که $d\sigma/d\Omega$ توان پراکنده در واحد شار است؛ شاید این عبارت آسانترین راه برای به یاد داشتن تعریف مقطع باشد.

در مورد فعلی، توان پراکنده با معادله ۷-۱۶ داده می‌شود و شارتابیده متوسط زمانی با معادله $\bar{S} = cE_e^2/(\lambda\pi)$ بنا بر این، مقطع دیفرانسیلی برابر است با

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(c/\lambda\pi)r_e^2 E_e^2 \sin^2 \Theta}{(c/\lambda\pi)E_e^2} = r_e^2 \sin^2 \Theta \quad (11-16)$$

برحسب زاویه‌های قطبی کروی داریم (شکل ۱-۱۶)

$$\sin^2 \Theta = 1 - \cos^2 \Theta = 1 - (\sin \theta \cos \phi)^2 \quad (12-16)$$

به طوری که $d\sigma/d\Omega$ تابعی است از θ و ϕ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \quad (13-16)$$

مقطع پراکندگی کل، یا توان پراکنده کل در واحد شار، برابر است با انتگرال $d\sigma/d\Omega$ روی تمام زاویه فضایی:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r_e^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \quad (14-16)$$

این نتیجه را مقطع تامسون می‌نامند و مقدار عددی آن عبارت است از

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 6,65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad (15-16)$$

مقطع تامسون مستقل از بسامد موج تابیده است. اما برای بسامدهای بسیار زیاد ($\omega \geq m_e c^2/\hbar$) محاسبه کلاسیک کارایی ندارد و اثرات کوانتومی اهمیت می‌یابند. آنگاه مقطع تابعی از بسامد می‌شود (مقطع کلاین-نیشینا).

اکنون می‌خواهیم پراکندگی از یک الکترون مقید در اتم را محاسبه کنیم. باز هم از الگوی ساده بخش ۱۲-۴ استفاده می‌کنیم: نیروی بستگی روی الکترون با نیروی بازگشت‌دهنده کشسان $-m_e \omega_e^2 x$ نشان داده می‌شود، و اتلاف انرژی الکترون با نیروی اصطکاک مؤثر $-m_e \Gamma dx/dt$ نمایش داده می‌شوند. پس معادله حرکت الکترون مقیدی که در معرض میدان الکتریکی ۱-۱۶

است عبارت است از (بمعادله ۱۲-۵۰ مقایسه کنید)

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} + m_e \Gamma \frac{dx}{dt} + m_e \omega_p^2 x = -e E_0 e^{-i\omega t} \quad (16-16)$$

تحت شرایط حالت پایا، شتابی به دست می‌آید که برابر است با

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{e}{m_e} \frac{\omega^2 E_0 e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_p^2 + i\Gamma\omega} \quad (17-16)$$

تمرین ۲- معادله ۱۶-۱۷ را محاسبه کنید.

این شتاب با شتاب الکترون آزاد (معادله ۱۶-۲) در ضریب اضافی زیر تفاوت دارد

$$\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2 + i\Gamma\omega} \quad (18-16)$$

بنابراین، مقطع فعلی با مقطع الکترون آزاد در ضریب اضافی زیر تفاوت دارد

$$\left| \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2 + i\Gamma\omega} \right|^2 = \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_p^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (19-16)$$

و مقطع پراکندگی کل برای الکترون مقید برابر است با

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_p^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (20-16)$$

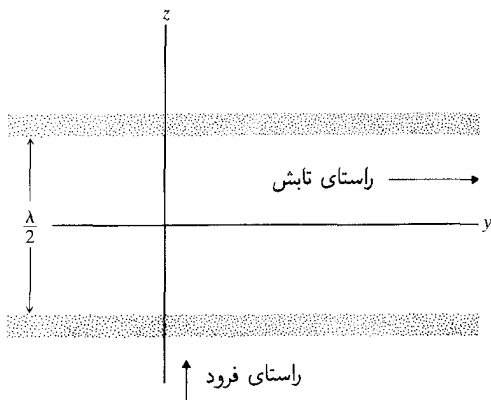
اگر $\omega \gg \Gamma$ و $\omega \gg \omega_p$ ، این نتیجه تبدیل می‌شود به $\sigma \simeq (8\pi/3) r_e^2$ ، یعنی مقطع الکترون آزاد. وقتی الکترون مقید در معرض موجی با بسامد زیاد قرار گیرد مانند الکترون آزاد تابش می‌کند زیرا نیروی بستگی حالت پایا در مقایسه با نیروی محرکه خارجی قابل صرف‌نظر کردن است. اگر $\omega \ll \omega_p$ ، معادله ۱۶-۲۰ تبدیل می‌شود به

$$\sigma \simeq \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^4 \quad (21-16)$$

بدین ترتیب، در بسامدهای کم، مقطع متناسب با توان چهارم بسامد افزایش می‌یابد؛ این وابستگی به بسامد را قانون ریلی می‌نامند.

رنگ آبی آسمان پیامدی است از قانون ریلی. مقطع پراکندگی برای مولکول هوا تقریباً به صورت معادله ۱۶-۲۱ است که به آن ضریب تصحیح مناسبی برای منظور کردن تعداد الکترونها مرتعش در مولکول افزوده می‌شود. بیشتر بسامدهای تشدید برای مولکولهای O_2 ، N_2 و H_2O در ناحیه فرابنفش هستند، و از این رو فرض $\omega \ll \omega$ به طور معقولی برای نور مرئی برآورده می‌شود. بنابراین، نور در قسمت آبی طیف ($\lambda \simeq 4000 \text{ \AA}$) از نور قسمت سرخ ($\lambda \simeq 7000 \text{ \AA}$) بیشتر پراکنده می‌شود — نسبت مقطعهای پراکندگی تقریباً برابر است با $9 \simeq (7/4)^4$. نور آبی از باریکه نور خورشید به خارج پراکنده می‌شود و تمام آسمان را پر می‌کند. اما در این توضیح ساده رنگ آبی آسمان از یک نکته دقیق غفلت کرده‌ایم. حجمی از هوا حاوی تعداد زیادی مولکول است؛ و این سؤال پیش می‌آید که سهمهای مولکولهای انفرادی چگونه باهم ترکیب می‌شوند؟ در توضیح بالا، به طور ضمنی فرض کرده‌ایم که مولکولهای انفرادی به طور ناهمدوس در پراکندگی کل سهم دارند. هر مولکول شدت پراکنده‌ای مطابق با معادله ۱۶-۷ ایجاد می‌کند، و شدت پراکنده کل مجموع این شدتها است. اعتبار این روند برای گاز یا پلاسمایی با چگالی بسیار کم که در آن پراکنده‌ها فاصله بسیار زیادی یعنی فاصله‌ای بسیار بیشتر از یک طول موج از یکدیگر دارند، بلافاصله روشن می‌شود. تحت این شرایط، شتابها و تابشهای پراکنده‌ها از لحاظ فاز به مقدار زیاد و اتفاقی باهم اختلاف دارند — پراکنده‌ها مانند چشمه‌های ناهمدوس عمل می‌کنند و شدت کل تابش پراکنده مجموع شدتهای انفرادی است. اما در هوا با چگالی عادی، الکترونها در مولکولهای مجاور به طور همفاز حرکت و تابش می‌کنند — این الکترونها مانند چشمه‌های همدوس عمل می‌کنند و دامنه کل تابش پراکنده مجموع دامنه‌های انفرادی است. پس شدت کل متناسب با مجذور دامنه کل است.

اگر هوا یک دی‌الکتریک کاملاً یکنواخت بود این نوع تابش همدوس منجر به دامنه کل صفر برای موج پراکنده می‌شد زیرا تابش مربوط به حجمهای مختلف هوا یکدیگر را با تداخل ویرانگر حذف می‌کردند. برای مثال، شکل ۱۶-۲ دو لایه مسای نازک از هوا یا ماده دی‌الکتریک دیگری را که عمود بر جهت فرود هستند نشان می‌دهد. این لایه‌ها به فاصله دقیقاً نصف طول موج از یکدیگر قرار دارند. تابش پراکنده‌ای را که عمود بر جهت فرود گسیل می‌شود در نظر بگیرید که در نهایت به ناظری که در فاصله دور روی محور x قرار دارد می‌رسد. موج فرودی در لایه اول همیشه دقیقاً 180° با موج فرودی در لایه دوم اختلاف فاز دارد. در نتیجه، تابشهای پراکنده ناشی از جفت مولکولهای واقع در نقاط متناظر در جفت لایه‌ها در مکان ناظر تداخل ویرانگر می‌کنند — دامنه پراکنده کل صفر است! اما این حذف کامل پراکندگی به علت یکنواختی کامل ماده دی‌الکتریک است. در هوا یکنواختی کامل وجود ندارد زیرا چگالی دارای افت‌وخیزهای کوچک اتفاقی است. دو حجم کوچک در شکل ۱۶-۲ به طور متوسط حاوی تعداد یکسان N مولکول هستند، اما در یک لحظه معین تعداد مولکولها عبارت‌اند از $N + \delta N_1$ و $N + \delta N_2$. دامنه پراکنده ناشی از هر حجم متناسب با تعداد مولکولهاست؛ چون این تابشها 180° اختلاف فاز دارند، دامنه کل متناسب با تفاضل تعداد مولکولهاست:



شکل ۲-۱۶ دو لایه نازک هوا به فاصله نصف طول موج.

$$[\text{دامنه}] \propto (N + \delta N_1) - (N + \delta N_2) = \delta N_1 - \delta N_2 \quad (22-16)$$

شدت متناسب با مجذور این تفاضل است:

$$[\text{شدت}] \propto (\delta N_1 - \delta N_2)^2 = \delta N_1^2 + \delta N_2^2 - 2\delta N_1\delta N_2 \quad (23-16)$$

بنابر مکانیک آماری، به طور متوسط داریم $\delta N_1^2 = \delta N_2^2 = N$ و $\delta N_1\delta N_2 = 0$ ، زیرا افت و خیزها ناهمبسته هستند و به طور اتفاقی مثبت و منفی اند، پس شدت کل متناسب با $2N$ است، یعنی متناسب با تعداد کل مولکولها در دو لایه است. بنابراین، سهم کل در پراکندگی دقیقاً برابر است با وقتی که پراکننده‌ها ناهمدوس باشند، و بدین ترتیب افت و خیزهای چگالی باعث می‌شود پراکندگی همدوس در هوا ناهمدوس به نظر برسد. این امر استفاده از مقطع برای توصیف پراکندگی نور در هوا را توجیه می‌کند. کشف نقش اساسی افت و خیزهای چگالی در پراکندگی نور در گازها یکی از یافته‌های اولیه اینشتین در فیزیک است.

۲-۱۶ دامنه پراکندگی پیشرو؛ قضیه اپتیکی

بنابه معادله ۴۹-۱۳، دامنه میدان تابش الکتریکی ناشی از الکترون شتابدار برابر است با

$$E_{\text{تابش}} = \frac{e}{c^2} \sin \Theta \frac{a(t - r/c)}{r} \quad (24-16)$$

که در آن Θ زاویه بین جهت تابش و جهت قطبش است (شکل ۱۶-۱). برای الکترون مقیدی که از موج فرودی شتاب می‌گیرد، شتاب $a(t)$ با معادله ۱۶-۱۷ داده می‌شود، و در نتیجه

$$E_{\text{تابش}} = -\frac{e^2}{m_e c^2} \frac{\omega^2 E_0 \sin \Theta}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\Gamma\omega} \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r} \quad (25-16)$$

عاملی را که در موج فرودی دورشونده $E_0 e^{-i(\omega t - kr)}/r$ ضرب شده است دامنه پراکندگی می‌نامند:

$$A = -\frac{e^2}{m_e c^2} \frac{\omega^2 \sin \Theta}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\Gamma\omega} \quad (26-16)$$

اگر این دامنه را در جهت پیشرو (جهت انتشار موج فرودی) محاسبه کنیم دامنه پراکندگی پیشرو را به دست می‌آوریم:

$$A_{\text{پیشرو}} = -\frac{e^2}{m_e c^2} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\Gamma\omega} \quad (27-16)$$

قسمت انگاری این تابع را بررسی می‌کنیم:

$$\text{Im}(A_{\text{پیشرو}}) = \frac{e^2}{m_e c^2} \frac{\Gamma\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \quad (28-16)$$

معلوم می‌شود که این عبارت به مقطع کل مربوط است، یعنی به آهنگ کلی که الکترون با آن از موج فرودی انرژی می‌گیرد. برای محاسبه این آهنگ، متذکر می‌شویم که تحت شرایط حالت پایا توانی که الکترون از موج فرودی جذب می‌کند باید با توانی که الکترون به علت اصطکاک از دست می‌دهد تطبیق کند:

$$P_{\text{جذب شده}} = -\frac{dx}{dt} \cdot F_{\text{اصطکاک}} = \frac{dx}{dt} \cdot \left(m_e \Gamma \frac{dx}{dt} \right) = m_e \Gamma \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (29-16)$$

با استفاده از فرمول ۵-۱۶، متوسط زمانی این توان جذب شده برابر است با

$$\bar{P}_{\text{جذب شده}} = \frac{m_e \Gamma}{2} \text{Re} \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx^*}{dt} \right) = \frac{m_e \Gamma}{2} \left(\frac{e}{m_e} \right)^2 \frac{\omega^2 E_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \quad (30-16)$$

مقطع کل به صورت نسبت جذب شده \bar{P} به متوسط زمانی شار انرژی فرودی تعریف می شود:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{کل}} &= \frac{\bar{P}_{\text{جذب شده}}}{(\text{شار فرودی})} = \frac{\bar{P}_{\text{جذب شده}}}{cE^2/(\lambda\pi)} \\ &= \frac{4\pi e^2}{c m_e} \frac{\Gamma\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}\end{aligned}\quad (31-16)$$

از مقایسه این معادله با معادله ۱۶-۲۸، می بینیم که

$$\sigma_{\text{کل}} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(A_{\text{پیشرو}}) \quad (32-16)$$

این معادله را قضیه اپتیکی می نامند. اگرچه این قضیه را تنها برای مورد خاص موج الکترومغناطیسی که توسط الکترونی با یونید کشسان پراکنده می شود به دست آوردیم، بیان تعمیم یافته ای از آن برای هر نوع موج که توسط هر نوع مانعی پراکنده شده باشد درست است. قضیه اپتیکی کاربردهای مهمی در محاسبه مقطع در نظریه کوانتومی دارد.

توجه کنید که مقطع کل شامل مقطع پراکندگی است. علت این امر این است که نیروی اصطکاک $-m_e\Gamma dx/dt$ شامل نیروی تابش-واکنش است، یعنی نیروی پس زنی که بر الکترون موقع گسیل تابش وارد می شود. نیروی تابش-واکنش با آهنگی برابر با توان تابش شده انرژی از الکترون می گیرد؛ بدین ترتیب، این نیرو منجر به نیروی اصطکاک مؤثر می شود. می توان نشان داد تحت شرایط حالت پایا نیروی تابش-واکنش برای الکترونی با حرکت هماهنگ برابر است با $(2/3)(e^2/c^3)\omega^2 dx/dt$ - که متناسب با سرعت است و می توان آن را جزو جمله اصطکاک می متداول در معادله ۱۶-۱۶ در نظر گرفت.^۱

۱۶-۳ انتگرال کیرشهوف

اگر موج نور به یک صفحه کدر بزرگ که دارای چند روزنه با شکل اختیاری است بتابد پراشیده می شود: موج به لبه های ناحیه سایه پشت صفحه نفوذ می کند و فریزهای روشن و تاریک به وجود می آورد. دامنه موج پشت صفحه را می توانیم برهم نهشی از موج تابیده و موج پراکنده ناشی از تابش همدوس الکترونها در اتمهای صفحه بدانیم. بنابراین، نبودن نور در ناحیه سایه به عنوان حذف موج تابیده و موج پراکنده تعبیر می شود - این امواج تداخل ویرانگر می کنند. بدین ترتیب، در فریزهای تاریک امواج تابیده و پراکنده تداخل ویرانگر می کنند در حالی که در فریزهای روشن تداخل سازنده می کنند.

۱. اگر حرکت هماهنگ نباشد، نیروی تابش-واکنش برابر است با $(2/3)(e^2/c^3)d^2x/dt^2$.

در محاسبات این بخش و بخشهای بعد، موج تابیده را تخت می‌گیریم:

$$\mathbf{E}_{\text{فرودی}} = E_0 \hat{x} e^{-i(\omega t - kz)}$$

سابقاً در بسیاری از کتابهای درسی اپتیک موج تابیده را کروی می‌گرفتند زیرا قبل از اختراع لیزرها تنها چشمه‌های نور همدوس موجود چشمه‌های نقطه‌مانند (روزنه‌های دایره‌ای) بودند که امواج کروی ایجاد می‌کنند. امروزه، تقریباً همه آزمایشهای پراش با چشمه‌های نور لیزر انجام می‌شوند که امواج تخت کم‌وبیش کاملی تولید می‌کنند.^۱ بنابراین، انتخاب امواج تخت با آزمایشهای نوین تطابق دارد. علاوه بر این، فرض می‌کنیم که موج به‌طور عمودی بر صفحه کدر فرود می‌آید؛ اما این فرض یک محدودیت اساسی نیست و بیشتر فرمولها را می‌توان برای فرود مایل تعمیم داد.

با استدلال زیر می‌توانیم عبارتی تقریبی برای میدان الکتریکی در نقطه‌ای پشت صفحه به‌دست آوریم: فرض کنید تمام روزنه‌های صفحه را با درپوشهای کدر مناسبی کاملاً ببندیم. آنگاه تمام ناحیه پشت صفحه تاریک می‌شود—یعنی میدان الکتریکی صفر است. همچنان‌که در بالا دیدیم، این میدان الکتریکی برهم‌نهدی است از میدان موج فرودی و میدان تمام الکترونها تابش‌کننده؛ بنابراین

$$\circ = \mathbf{E}_{\text{تابش}} + \mathbf{E}_{\text{فرودی}} \quad (۳۳-۱۶)$$

اما میدان الکتریکی تابش $\mathbf{E}_{\text{تابش}}$ شامل دو قسمت است: میدان الکتریکی تابش شده از الکترونها صفحه روزنه‌دار و میدان الکتریکی تابش شده از الکترونها در پوشها. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$\circ = \mathbf{E}_{\text{تابش درپوش}} + \mathbf{E}_{\text{تابش صفحه}} + \mathbf{E}_{\text{فرودی}} \quad (۳۴-۱۶)$$

در ضمن، متذکر می‌شویم که اتحاد بالا کاملاً دقیق نیست. صفحه بدون روزنه‌ای از ماده یک‌دست با صفحه روزنه‌داری با درپوش کامل اما جداگانه دقیقاً معادل نیست. حرکت الکترونها در صفحه روزنه‌دار و درپوش در معرض این قید است که الکترونها نمی‌توانند از مرز بین صفحه روزنه‌دار و درپوش عبور کنند؛ حرکت در صفحه بدون روزنه تحت این قید نیست. این تفاوت در شرایط مرزی منجر به انحرافهای کوچکی از معادله ۳۴-۱۶ می‌شود، اما این انحرافها تنها در ناحیه‌های بسیار نزدیک مرز صفحه-درپوش اهمیت دارند. در فاصله‌های دور، معادله ۳۴-۱۶ یک تقریب عالی است.

۱. موج تخت لیزر را می‌توان با عبور دادن از عدسی به موج کروی تبدیل کرد. امواج کروی در هولوگرافی اهمیت دارند. اما ما این بحث را بررسی نمی‌کنیم.

اکنون فرض کنید با برداشتن تمام درپوشها روزه‌های صفحه را باز کنیم. آنگاه میدان پراش پشت صفحه روزه‌دار عبارت است از

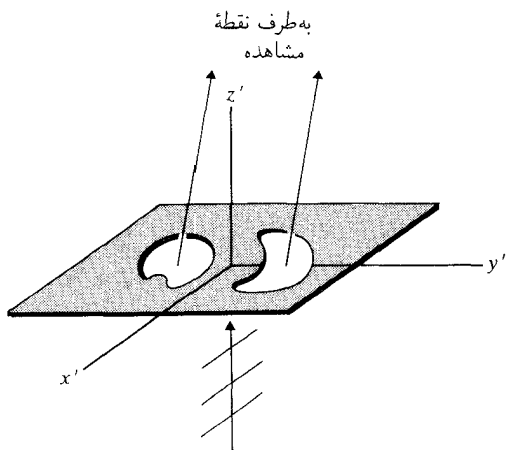
$$\mathbf{E}_{\text{صفحه}} = \mathbf{E}_{\text{فردی}} + \mathbf{E}_{\text{تابش}} \quad (۱۶-۳۵)$$

که با توجه به معادله ۱۶-۳۴ برابر است با

$$\mathbf{E}_{\text{صفحه}} = -\mathbf{E}_{\text{درپوش}} \quad (۱۶-۳۶)$$

این معادله نشان می‌دهد میدان پراش پشت صفحه روزه‌دار را می‌توانیم صرفاً با محاسبه تابش ناشی از الکترونها در پوشها تعیین کنیم. صرفنظر از علامت منها، معادله ۱۶-۳۶ از لحاظ ریاضی معادل است با اصل هویگنس-فرنل در اپتیک، که بیان می‌کند میدان الکتریکی پشت صفحه را می‌توان با این فرض محاسبه کرد که هر نقطه از روزه چشمه یک موج کروی است. علامت منها در معادله ۱۶-۳۶ نشان می‌دهد اصل هویگنس-فرنل شامل یک اشتباه علامتی است؛ اما این اشتباه تأثیری بر نتیجه نهایی برای شدت ندارد.

اکنون می‌خواهیم طرف راست معادله ۱۶-۳۶ را صریحاً به صورت انتگرالی روی الکترونها در پوشها بیان کنیم. چنانکه قبلاً گفتیم، فرض می‌کنیم موج به‌طور عمودی بر صفحه فرود آید (شکل ۱۶-۳). اگر تعداد الکترونها در واحد سطح صفحه و درپوشها η باشد، تعداد آنها در



شکل ۱۶-۳ صفحه کدر با چند روزه. موج از پایین تابیده می‌شود. اگر نقطه مشاهده به اندازه کافی دور باشد، روزه‌ها و درپوشهای مربوط زاویه کوچکی می‌سازند.

یک مساحت کوچک برابر است با $\eta dx' dy'$ ؛ و میدان الکتریکی ناشی از این مساحت بنابه معادله ۱۶-۲۵ عبارت است از

$$dE_{\text{صفحه}} = -dE_{\text{درویش}} = \frac{e^2}{m_e c^2} \frac{\omega^2 E_0 \sin \Theta}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\Gamma\omega} \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r} \eta dx' dy' \quad (۱۶-۳۷)$$

در اینجا مناسب است حاصلضرب تمام عاملهایی را که بستگی به خواص اتمی ماده دارند با یک علامت نشان دهیم:

$$C = \frac{e^2}{m_e c^2} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\Gamma\omega} \eta \quad (۱۶-۳۸)$$

بنابراین

$$dE_{\text{صفحه}} = CE_0 \sin \Theta \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r} dx' dy' \quad (۱۶-۳۹)$$

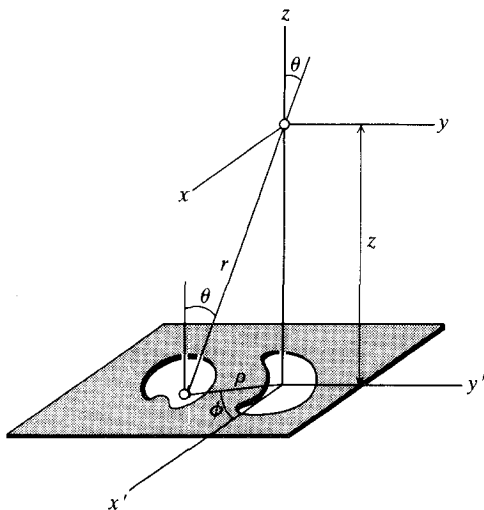
برای انتگرال گرفتن از این میدان الکتریکی، باید در نظر داشته باشیم که $dE_{\text{صفحه}}$ یک بردار است. اما در بیشتر مسائل عملی پراش، زاویه‌ای که ناحیه انتگرال‌گیری روی نقطه مشاهده می‌سازد کوچک است (شکل ۱۶-۳). بنابراین، بردارهای میدانهای الکتریکی تقریباً موازی هستند، و کافی است از بزرگی $dE_{\text{صفحه}}$ (معادله ۱۶-۳۹) انتگرال بگیریم. معنی این تقریب این است که $\sin \Theta$ را در ناحیه انتگرال‌گیری ثابت بگیریم. در نتیجه

$$E_{\text{صفحه}} = CE_0 \sin \Theta e^{-i\omega t} \int \int_{\text{روزنه}} \frac{e^{ikr}}{r} dx' dy' \quad (۱۶-۴۰)$$

سرانجام، باید ثابت C را طوری تنظیم کنیم که شرط کدر بودن صفحه برآورده شود؛ چون C به خواص اتمی صفحه مربوط است (معادله ۱۶-۳۸) این امر در واقع منجر به تنظیم این ثابتهای اتمی می‌شود؛ اما در آنچه در زیر می‌آید از بحث خواص میکروسکوپی ماده می‌گذریم. از لحاظ ریاضی، شرط کدر بودن صفحه همان معادله ۱۶-۳۳ است:

$$-\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{درد}} \quad (۱۶-۴۱)$$

طرف راست این معادله عبارت است از $E_0 \hat{x} e^{-i(\omega t - kz)}$. طرف چپ انتگرالی است به صورت ۱۶-۴۰ که ناحیه انتگرال‌گیری در آن تمام صفحه است. اما پیش از اینکه عبارتی برای این انتگرال بنویسیم باید دو تغییر جزئی در معادله ۱۶-۴۰ بدهیم. چون در اینجا



شکل ۴-۱۶ مختصات قطبی برای انتگرال‌گیری معادله ۴۲-۱۶. مبدأ در نقطه مشاهده است.

می‌خواهیم روی تمام صفحه انتگرال بگیریم، نمی‌توانیم $\sin \Theta$ را ثابت فرض کنیم، و باید آن را در تابع زیر انتگرال نگاه داریم. علاوه بر این، نمی‌توانیم تمام بردارهای میدانهای الکتریکی مربوط را موازی بگیریم، و باید مؤلفه میدان الکتریکی در راستای قطبش موج فرودی (راستای x) را در محاسبه وارد کنیم زیرا این تنها مؤلفه‌ای است که در انتگرال‌گیری باقی می‌ماند.

با منظور کردن این تغییرات، معادله ۴۱-۱۶ به صورت زیر در می‌آید

$$CE_s e^{-i\omega t} \iint \sin^2 \Theta \frac{e^{ikr}}{r} dx' dy' = E_s e^{-i(\omega t - kz)} \quad (42-16)$$

بهتر است انتگرال را در مختصات کروی به مبدأ نقطه مشاهده محاسبه کنیم (شکل ۴-۱۶). عنصر سطح در صفحه $\rho d\phi d\rho$ است که با توجه به $r^2 = \rho^2 + z^2$ برابر است با $r d\rho dr$. زاویه‌های قطبی θ و ϕ در نقطه مشاهده و نقطه تابش یکسان هستند. پس معادله ۴۲-۱۶ معتبر می‌ماند:

$$\sin^2 \Theta = 1 - (\sin \theta \cos \phi)^2 \quad (43-16)$$

بنابراین، انتگرال طرف چپ ۴۲-۱۶ عبارت است از

$$\begin{aligned} \int_z^\infty \int_0^{2\pi} [1 - (\sin \theta \cos \phi)^2] \frac{e^{ikr}}{r} r \, d\phi \, dr &= 2\pi \int_z^\infty (1 - \frac{1}{4} \sin^2 \theta) e^{ikr} \, dr \\ &= 2\pi \int_z^\infty \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta) e^{ikr} \, dr \\ &= \pi \int_z^\infty e^{ikr} \, dr + \pi \int_z^\infty \frac{z^2}{r^2} e^{ikr} \, dr \end{aligned} \quad (44-16)$$

انتگرال

$$\int_z^\infty e^{ikr} \, dr = \frac{1}{ik} (e^{ik\infty} - e^{ikz}) \quad (45-16)$$

در حد بالایی نامعین است. این ابهام را می‌توان ناشی از فرضهای غیر واقعی در باره موج تخت فرودی دانست: فرض کرده‌ایم که موج تخت در راستاهای x و y گسترده‌گی نامتناهی دارد. اگر به جای این موج تخت غیر واقعی موج تخت واقعی با گسترده‌گی بزرگ اما متناهی را بگذاریم دامنه E در حد بالایی انتگرال صفر می‌شود، و جمله $e^{ik\infty}$ حذف خواهد شد. انتگرال دیگر در معادله ۴۴-۱۶ با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} \int_z^\infty \frac{z^2}{r^2} e^{ikr} \, dr &= \left[\frac{1}{ik} \frac{z^2}{r^2} e^{ikr} \right]_z^\infty - \int_z^\infty \frac{-2z^2}{r^3} \frac{e^{ikr}}{ik} \, dr \\ &= -\frac{1}{ik} e^{ikz} + \int_z^\infty \frac{2z^2}{r^3} \frac{e^{ikr}}{ik} \, dr \end{aligned} \quad (46-16)$$

انتگرال‌گیرهای جزء به جزء متوالی یک رشته‌توانی بر حسب $1/(kz)$ به دست می‌دهد. اگر z بسیار بزرگتر از طول موج باشد، با تقریب خوب می‌توان از تمام جمله‌های رشته بجز جمله اول، یعنی $(1/ik)e^{ikz}$ صرف‌نظر کرد. بدین ترتیب، معادله ۴۲-۱۶ به صورت زیر در می‌آید

$$CE_0 e^{-i\omega t} \left(\frac{-2\pi e^{ikz}}{ik} \right) = E_0 e^{-i(\omega t - kz)} \quad (47-16)$$

که از آن به دست می‌آوریم

$$C = -\frac{ik}{2\pi} \quad (48-16)$$

پس صورت نهایی انتگرال پراش عبارت است از

$$E_{\text{صفحه}} = -\frac{ik}{4\pi} E_0 \sin \Theta e^{-i\omega t} \int \int_{\text{روزنه}} \frac{e^{ikr}}{r} dx' dy' \quad (۴۹-۱۶)$$

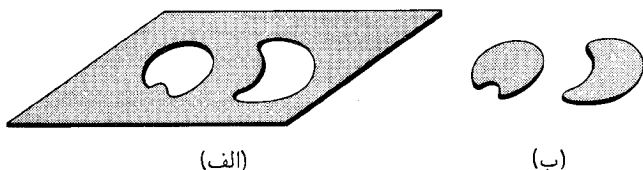
این رابطه را انتگرال کیرشهوف برای پراش می‌نامند. محدودیت اعتبار این انتگرال را باید به خاطر بسپاریم: زاویه Θ برای تمام روزنه‌ها حدوداً یکسان فرض می‌شود، و فاصله r بسیار بزرگتر از طول موج فرض می‌شود.^۱

پیش از آنکه به حل تفصیلی چند مثال از مسائل پراش بپردازیم، به روابطی که در آغاز این بخش به دست آمدند باز می‌گردیم و پیامدهای دیگری از آنها را به اختصار مورد بحث قرار می‌دهیم. می‌دانیم که میدان پراش ناشی از صفحه برابر است با منفی میدان تابش در پوش (معادله ۱۶-۳۶):

$$E_{\text{صفحه}} = -E_{\text{تابش در پوش}} \quad (۵۰-۱۶)$$

اگر صفحه روزنه‌دار را برداریم و به جای آن در پوشها را در مسیر موج فرودی قرار دهیم این در پوشها میدان پراش ایجاد خواهند کرد. این در پوشها را می‌توان به منزله صفحه جدیدی که مکمل صفحه اصلی است در نظر گرفت (شکل ۱۶-۵). با استدلالی مشابه با آنچه به معادله ۱۶-۵۰ منجر شد، میدان پراش ناشی از در پوشها برابر است با منفی میدان تابش صفحه اصلی:

$$E_{\text{تابش در پوش}} = -E_{\text{صفحه}} \quad (۵۱-۱۶)$$



شکل ۱۶-۵ (الف) صفحه کدر. (ب) صفحه مکمل.

۱. عامل زاویه‌ای $\sin \Theta$ در معادله ۱۶-۴۹، که ضریب میل نامیده می‌شود، با عاملهای زاویه‌ایی که در بعضی از کتابهای درسی دیگر درباره اپتیک یا الکتروپدینامیک آمده‌اند تفاوت دارد. تفاوت بین این عاملها نمایشگر تفاوت در روشهای تقریب‌گیری و تفاوت در فرضهای مربوط به مشخصات صفحه است. در تقریب متداولی که در اپتیک به کار می‌رود (برای مثال، اپتیک زومرفلد را ببینید) از قطبش صرفنظر می‌شود و فرض می‌شود میدان الکتریکی نزده‌ای است. در تقریب برداری که گاهی در الکتروپدینامیک به کار برده می‌شود (برای مثال، الکتروپدینامیک جکسون را ببینید) فرض می‌شود صفحه رسانای کامل با کلفتی صفر است. اگرچه روشهای متفاوت منجر به ضرایب میل متفاوت می‌شوند اما همگی منتهی به انتگرال پراش یکسانی مانند معادله ۱۶-۴۹ می‌شوند. در بیشتر کاربردهای عملی پراش، می‌توان از ضریب میل صرفنظر کرد زیرا نقطه مشاهده وقتی از روزنه دیده شود نزدیک به جهت جلو است، و در نتیجه $\sin \Theta \approx 1$.

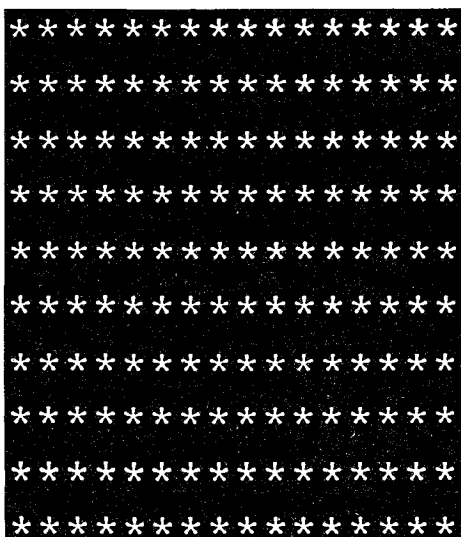
از جاگذاری این عبارتها در معادله ۱۶-۳۴، به دست می آوریم

$$E_{\text{فردی}} = E_{\text{درپوش}} + E_{\text{صفحه}} \quad (۱۶-۵۲)$$

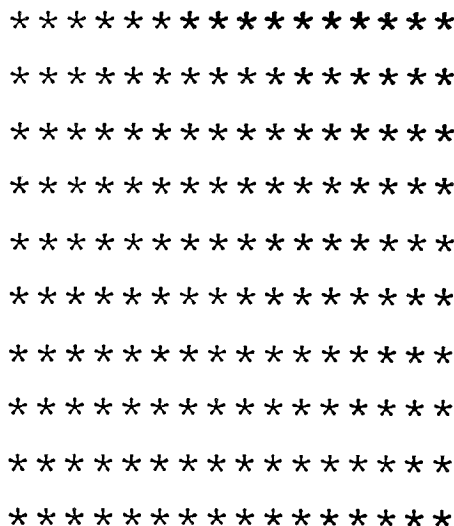
رابطه بین میدانهای پراش صفحه و مکمل آن را اصل باینه می نامند. این اصل نقش پراش ناشی از درپوشها را برحسب نقش پراش ناشی از صفحه بیان می کند، و برعکس؛ بدین ترتیب، می توانیم یکی از این نقشها را از دیگری محاسبه کنیم (برای مثالی در این باره، بخش بعد را ببینید). اما مؤثرترین کاربرد اصل باینه به قرار زیر است: فرض کنید موج فرودی دارای گسترده‌گی متناهی در راستای عرضی است؛ پس، در هر نقطه‌ی خارج از باریکه‌ی موج فرودی، میدان الکتریکی فرودی $E_{\text{فردی}}$ صفر است. در نتیجه

$$E_{\text{درپوش}} = -E_{\text{صفحه}} \quad (۱۶-۵۳)$$

این نتیجه به معنی این است که در نقاط مزبور شدتهای ناشی از صفحه و درپوشها باهم برابرند، یعنی صفحه‌های مکمل نقشهای یکسانی ایجاد می کنند. برای نمونه، صفحه‌ای با آرایه‌ای از روزنه‌های ستاره‌ای (شکل ۱۶-۶ الف) و «صفحه» مکمل یعنی ستاره‌هایی با همان آرایش (شکل ۱۶-۶ ب) نقشهای پراش یکسانی به وجود می آورند. شکل‌های ۱۶-۷ الف) و ۱۶-۷ ب) عکسهای این دو

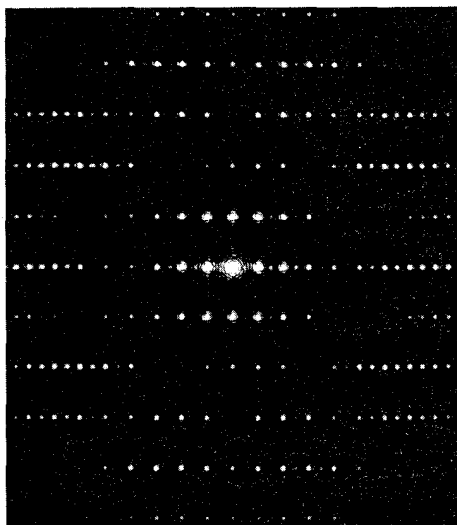


(الف)

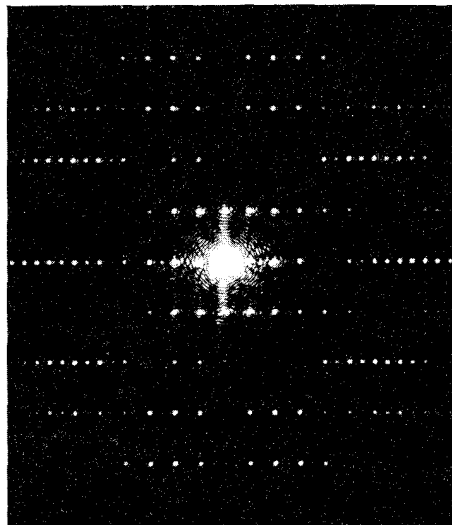


(ب)

شکل ۱۶-۶ الف) صفحه‌ی کدر؛ روزنه‌های ستاره‌ای. ب) صفحه‌ی مکمل؛ ستاره‌های کدر.



(الف)



(ب)

شکل ۷-۱۶ عکسهای نقشهای پراش صفحه‌های مکمل. (الف) نقش پراش صفحهٔ مربوط به شکل ۶-۱۶ (الف). (ب) نقش پراش صفحهٔ مربوط به شکل ۶-۱۶ (ب).

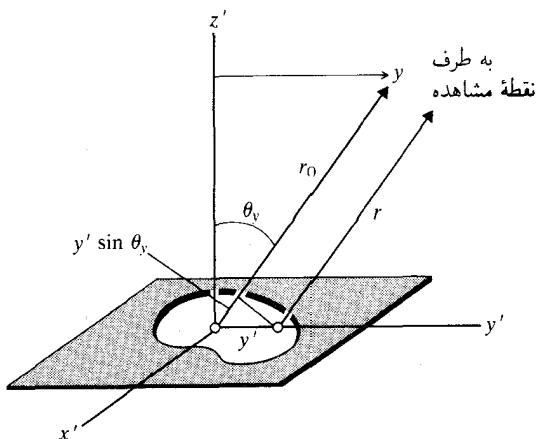
نقش پراش را نشان می‌دهند. چنانکه پیش‌بینی شد این عکسها باهم یکسان هستند، به‌استثنای ناحیهٔ مرکزی که در مسیر پرتو فرودی است.

۴-۱۶ پراش فرانهِوفَر

اکنون انتگرال کیرشهوف را برای چند مثال از پراش به‌کار می‌بریم. شکل ۸-۱۶ مختصات x' و y' نقطه‌ای در روزنهٔ صفحه و مختصات x, y, z نقطهٔ مشاهده را نشان می‌دهد. مبدأ $x' = y' = 0$ در مرکز روزنه یا نقطهٔ مناسبی در روزنه یا نزدیک روزنه انتخاب می‌شود. فاصلهٔ بین نقطه‌ای در روزنه و نقطهٔ مشاهده برابر است با

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} \quad (۵۴-۱۶)$$

تابع زیر انتگرال در معادلهٔ ۴۹-۱۶ بستگی به این فاصله دارد. برای آسان کردن محاسبهٔ



شکل ۸-۱۶. تمام پرتوها از روزنه به نقطه بسیار دور مشاهده تقریباً موازی هستند. اختلاف راه دو پرتو در صفحه $z' - y'$ برابر است با $y' \sin \theta_y = y' y / r$.

انتگرال، r را به صورت زیر تقریب می‌گیریم

$$r \simeq \sqrt{r_0^2 - 2xx' - 2yy'} + \dots \simeq r_0 - \frac{x}{r_0}x' - \frac{y}{r_0}y' + \dots \quad (۵۵-۱۶)$$

که در آن r_0 فاصله نقطه $x' = y' = 0$ تا نقطه مشاهده است:

$$r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (۵۶-۱۶)$$

تقریب ۵۵-۱۶ مشخصه پراش فرانیهوفر است. این تقریب در صورتی معتبر است که فاصله r_0 بسیار بیشتر از اندازه روزنه باشد ($r_0 \gg x'$ و $r_0 \gg y'$). با تقریب ۵۵-۱۶، انتگرال کیرشهوف به صورت زیر در می‌آید

$$E_{\text{صحنه}} = -\frac{ik}{2\pi} E_0 \sin \Theta \frac{e^{-i(\omega t - kr_0)}}{r_0} \iint e^{-ik(xx'/r_0 + yy'/r_0)} dx' dy' \quad (۵۷-۱۶)$$

توجه کنید که در مخرج تابع زیر انتگرال از تقریب $r \simeq r_0$ استفاده کرده‌ایم؛ این تقریب کفایت می‌کند زیرا مخرج تابع زیر انتگرال، برخلاف صورت آن، به تغییرات کوچک زیاد حساس نیست. از لحاظ هندسی، تقریب فرانیهوفر متناظر است با این فرض که نقطه مشاهده چنان دور است که پرتوهایی که از روزنه به این نقطه می‌رسند تقریباً موازی‌اند (شکل ۸-۱۶)؛ اختلاف راه پرتوی که

از $x' = y' = 0$ می‌آید با پرتوی که از یک نقطهٔ اختیاری در روزنه می‌آید برابر است با

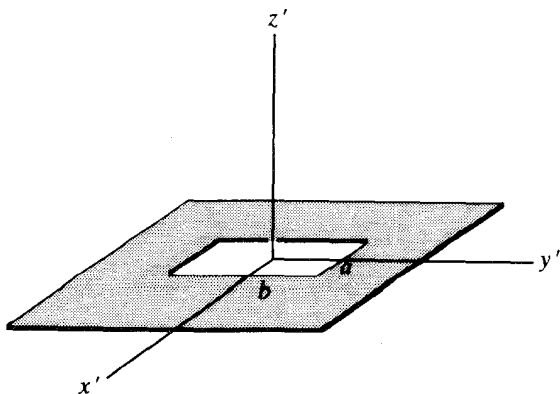
$$\begin{aligned} [\text{اختلاف راه}] &= x' \sin \theta_x + y' \sin \theta_y \\ &= \frac{x'x}{r_0} + \frac{y'y}{r_0} \end{aligned} \quad (58-16)$$

و اختلاف فاز برابر است با

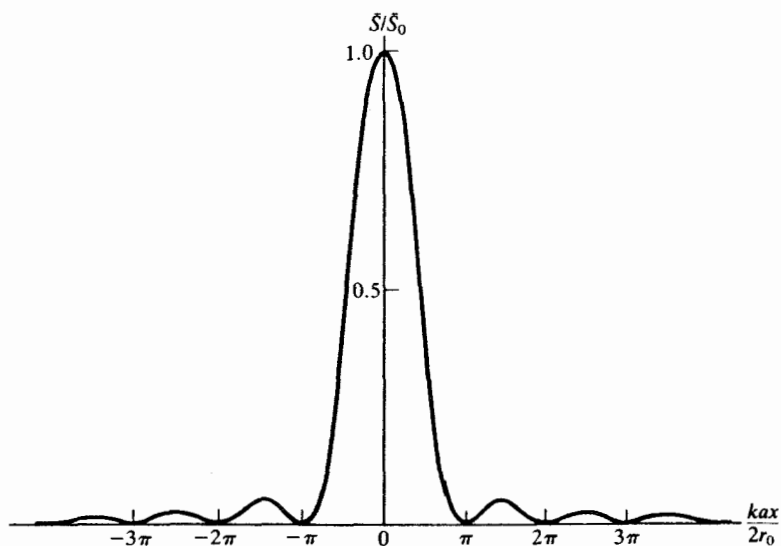
$$[\text{اختلاف فاز}] = k \times [\text{اختلاف راه}] = k \left(\frac{x'x}{r_0} + \frac{y'y}{r_0} \right) \quad (59-16)$$

این اختلاف فاز باعث عامل فاز در تابع زیر انتگرال معادله ۵۷-۱۶ است. اولین مثالی که بررسی می‌کنیم مربوط به روزنهٔ مستطیلی است. برای سادگی، فرض می‌کنیم x و y در مقایسه با r_0 کوچک‌اند، و در نتیجه $\sin \Theta \simeq 1$. شکل ۹-۱۶ روزنهٔ مستطیلی با ابعاد $a \times b$ را نشان می‌دهد. پس انتگرال ۵۷-۱۶ عبارت است از

$$\begin{aligned} E_{\text{صفحه}} &= -\frac{ik}{2\pi} E_0 \frac{e^{-i(\omega t - kr_0)}}{r_0} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ik(x'x'/r_0 + y'y'/r_0)} dx' dy' \quad (60-16) \\ &= -\frac{ik}{2\pi} E_0 \frac{e^{-i(\omega t - kr_0)}}{r_0} \frac{2r_0}{kx} \frac{2r_0}{ky} \sin \left(\frac{kax}{2r_0} \right) \sin \left(\frac{kby}{2r_0} \right) \quad (61-16) \end{aligned}$$



شکل ۹-۱۶ صفحهٔ کدر با روزنهٔ مستطیلی.



شکل ۱۶-۱۰ شدت به صورت تابع x برای نقش پراش روزنه مستطیلی.

شدت، یا بردار پوینتینگ متوسط زمانی، برابر است با

$$\bar{S} = \frac{c}{4\pi} |E_{\text{صحنه}}|^2 = \left(\frac{ck^2 a^2 b^2 E_0^2}{32\pi^2 r_0^2} \right) \frac{\sin^2(kax/2r_0)}{(kax/2r_0)^2} \frac{\sin^2(kby/2r_0)}{(kby/2r_0)^2} \quad (۶۲-۱۶)$$

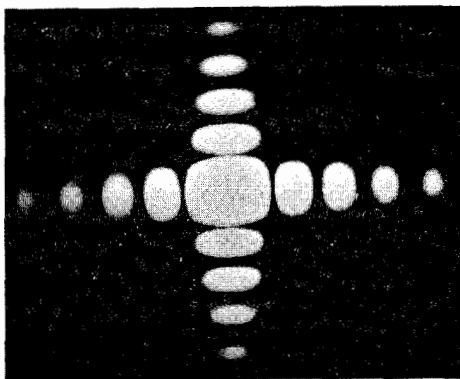
شکل ۱۶-۱۰ نمودار این شدت را به صورت تابع x به ازای $y = \text{const}$ نشان می‌دهد. این شدت در $a = y = 0$ دارای ماکسیمم مرکزی است، و یک رشته مینیمم و ماکسیمم ثانوی دارد. مینیمم در نقاط زیر قرار دارند

$$\frac{ka x}{2 r_0} = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots \quad \frac{kb y}{2 r_0} = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots \quad (۶۳-۱۶)$$

برحسب زاویه‌های $\theta_x = \sin^{-1}(x/r_0)$ و $\theta_y = \sin^{-1}(y/r_0)$ این نقاط را می‌توان به صورت آشنای زیر بیان کرد

$$a \sin \theta_x = \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots \quad b \sin \theta_y = \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots \quad (۶۴-۱۶)$$

شکل ۱۶-۱۱ عکسی از نقش پراش یک روزنه مستطیلی را نشان می‌دهد.



شکل ۱۶-۱۱ عکس نقش پراش روزنه مستطیلی با $a/b = 7/8$.

خاصیت جالب نتیجه‌ای که برای پراش فرانهور ناشی از روزنه مستطیلی به دست آوردیم این است که دامنه ۱۶-۶۱ با تقریب یک ضریب تناسب برابر است با تبدیل فوری تابع پله‌ای $H(x, y)$ که روزنه «محمل»^۱ آن است:

$$H(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } |x| \leq a/2, |y| \leq b/2 \\ 0 & \text{اگر } |x| > a/2, |y| > b/2 \end{cases} \quad (۶۵-۱۶)$$

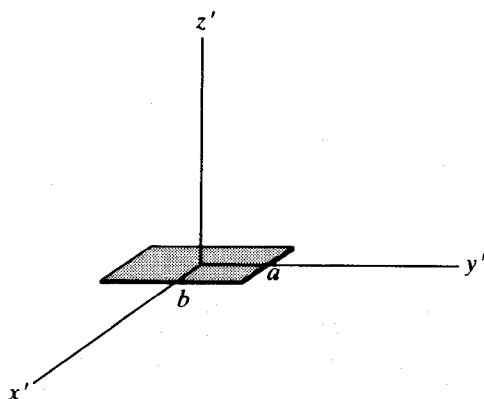
این خاصیت برای پراش فرانهور عمومیت دارد، و یک روش آنالوگ ابتیکی برای تعیین تبدیل فوری هر تابع پله‌ای دوبعدی با مرز اختیاری و پیچیده به دست می‌دهد. تنها باید صفحه‌ای را با روزنه‌ای که مرز آن به شکل صفحه است تهیه کنیم و موج تخت را به آن بتابانیم؛ نقش پراش نمایشگر تبدیل فوری خواهد بود. برای کاربرد دقیق این روش، البته باید جذر شدت مشاهده شده را بگیریم تا دامنه به دست آید.

درپوش مستطیلی کدر (شکل ۱۶-۱۲) مکمل صفحه دارای روزنه مستطیلی است. اصل باینه به ما امکان می‌دهد تا دامنه پراش برای این درپوش را مستقیماً بنویسیم:

$$E_{\text{درپوش}} = E_{\text{فرودی}} - E_{\text{صفحه}}$$

$$= E_0 e^{-i\omega t} \left[e^{ikz} + \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \frac{ik}{2\pi} \frac{2r_0}{kx} \frac{2r_0}{ky} \sin\left(\frac{kax}{2r_0}\right) \sin\left(\frac{kby}{2r_0}\right) \right] \quad (۶۶-۱۶)$$

۱. محمل تابع عبارت است از مجموعه نقاطی که به ازای آنها تابع مخالف صفر است.



شکل ۱۶-۱۲ مستطیل کدر، مکمل صفحه کدر شکل ۱۶-۹.

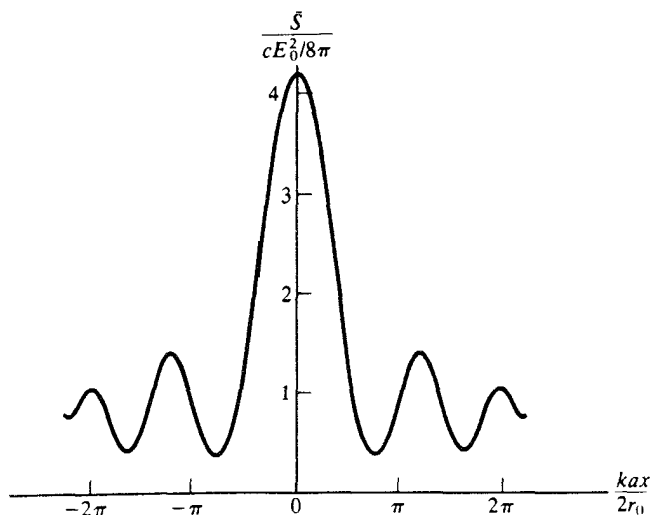
شدت متناظر عبارت است از

$$\bar{S} = \frac{cE_0^2}{\lambda\pi} \left[1 + \frac{k^2 a^2 b^2 \sin^2(kax/2r_0) \sin^2(kby/2r_0)}{4\pi^2 r_0^2 (kax/2r_0)^2 (kby/2r_0)^2} + \frac{k ab}{\pi r_0} \sin k(z - r_0) \frac{\sin(kax/2r_0)}{kax/2r_0} \frac{\sin(kby/2r_0)}{kby/2r_0} \right] \quad (67-16)$$

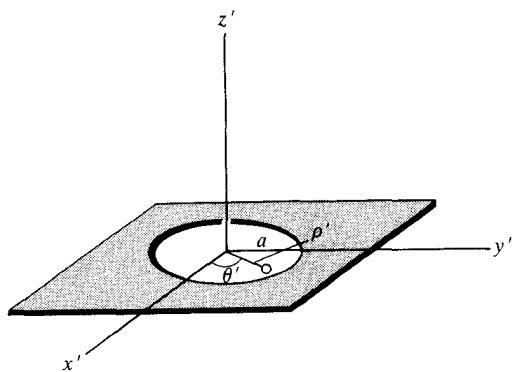
شکل ۱۶-۱۳ نمودار این شدت را به صورت تابع x به ازای $y = \text{const}$ نشان می‌دهد. توجه کنید که ناحیه تاریک مرکزی وجود ندارد— این صفحه سایه نمی‌اندازد. دلیل نبود سایه این است که با توجه به تقریب فرانهورف، نقطه مشاهده چنان دور است که نور کاملاً به ناحیه سایه پراشیده شده است. برای بررسی ریاضی سایه‌ای که توسط مانعی با اندازه متناهی ایجاد می‌شود باید در بسط رشته توانی ۱۶-۵۵ دست‌کم یک جمله دیگر را نیز نگه داریم؛ اما این کار منجر به تقریب فرنل (بخش بعد) می‌شود.

مثال دیگری که باید بررسی کنیم روزنه دایره‌ای است. شکل ۱۶-۱۴ روزنه‌ای به شعاع a را نشان می‌دهد. اگر تمام مختصات را با مختصات استوانه‌ای ρ' و θ' عوض کنیم، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \exp[-ik(xx'/r_0 + yy'/r_0)] &= \exp[-ik\rho\rho'(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta')/r_0] \\ &= \exp[-ik\rho\rho'\cos(\theta - \theta')/r_0] \end{aligned} \quad (68-16)$$



شکل ۱۳-۱۶ شدت به صورت تابع x برای نقش پراش مستطیل کدر با $ka = 15^\circ$ ، $kb = 15^\circ$ و $kr_0 = 2000$.



شکل ۱۴-۱۶ صفحه کدر با روزنه دایره‌ای.

آنگاه، بنابه تقریب فرانهور داریم

$$E_{\text{صحنه}} = -\frac{ik}{2\pi} E_0 \frac{e^{-i(\omega t - kr_0)}}{r_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-ik\rho\rho' \cos(\theta - \theta')/r_0} \rho' d\theta' d\rho' \quad (۶۹-۱۶)$$

چون از θ' روی تمام دایره انتگرال گرفته می‌شود، می‌توانیم $\cos \theta'$ را به جای $\cos(\theta - \theta')$

بگذاریم بدون اینکه مقدار انتگرال تغییر کند. با استفاده از اختصارات

$$u = \frac{k}{r_0} \rho a \quad v = \frac{k}{r_0} \rho \rho' \quad (70-16)$$

معادله ۶۹-۱۶ به صورت زیر در می آید

$$E_{\text{صحنه}} = -\frac{ik}{2\pi} E_0 \frac{e^{-i(\omega t - kr_0)}}{r_0} \frac{a^2}{u^2} \int_0^u \int_0^{2\pi} e^{-iv \cos \theta'} v \, d\theta' \, dv \quad (71-16)$$

برای محاسبه این انتگرال، بسط رشته توانی $e^{-iv \cos \theta'}$ را می نویسیم:

$$e^{-iv \cos \theta'} = 1 - iv \cos \theta' - \frac{1}{2!} v^2 \cos^2 \theta' + \frac{i}{3!} v^3 \cos^3 \theta' + \dots \quad (72-16)$$

و جمله به جمله نسبت به θ' و v انتگرال می گیریم. آنگاه به دست می آوریم

$$E_{\text{صحنه}} = -\frac{ik}{2\pi} E_0 \frac{e^{-i(\omega t - kr_0)}}{r_0} \frac{2\pi a^2}{u^2} \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{2^2} + \frac{u^6}{3 \cdot 2^2} - \dots \right] \quad (73-16)$$

تمرین ۳- از طرف راست معادله ۷۲-۱۶ جمله به جمله انتگرال بگیرد و معادله ۷۳-۱۶ را تحقیق کنید.

رشته ای را که در کوشه معادله ۷۳-۱۶ آمده است می توان به صورت فشرده زیر نوشت

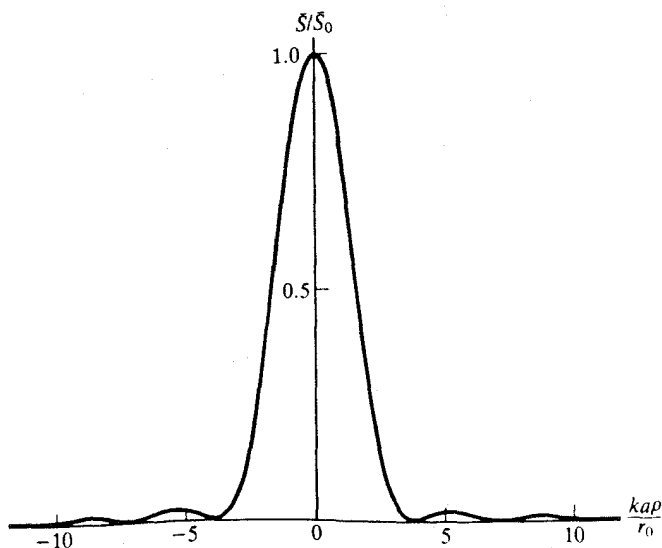
$$\frac{u^2}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(1+l)!} \left(\frac{u}{2}\right)^{2l} \quad (74-16)$$

مقایسه با معادله ۳-۶۴ نشان می دهد که این رشته چیزی جز $u J_1(u)$ نیست (J_1 تابع بسل مرتبه ۱ است). بنابراین، میدان پراش روزنه دایره ای عبارت است از

$$E_{\text{صحنه}} = -ik E_0 \frac{e^{-i(\omega t - kr_0)}}{r_0} a^2 \frac{J_1(u)}{u} \quad (75-16)$$

و شدت برابر است با

$$\bar{S} = \frac{c E_0^2}{4\pi} \frac{k^2 a^4}{r_0^2} \left[\frac{J_1(u)}{u} \right]^2 \quad (76-16)$$



شکل ۱۵-۱۶ شدت به صورت تابع ρ برای نقش پراش روزنه دایره‌ای.

شکل ۱۵-۱۶ نمودار این شدت را نشان می‌دهد. مانند روزنه مستطیلی، در اینجا نیز یک ماکسیمم مرکزی شدید و ماکسیممهای ثانوی ضعیفتر وجود دارند. مکانهای مینیممها از ریشه‌های تابع بسل J_1 به دست می‌آیند:

$$u = 3,83, 7,02, 10,17, \dots$$

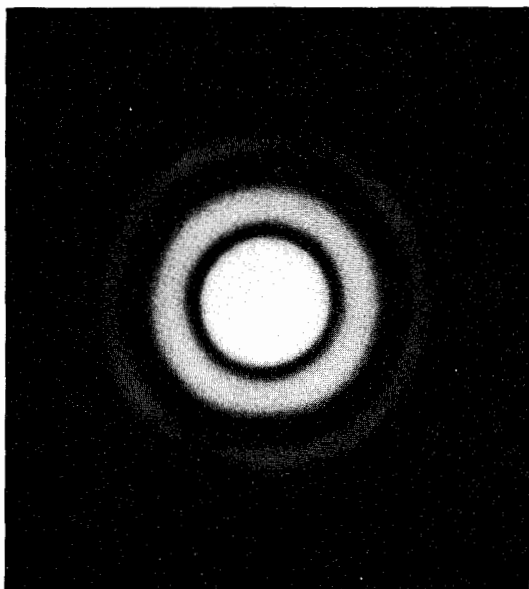
یا

$$\rho = 3,83 \frac{r_0}{ka}, 7,02 \frac{r_0}{ka}, 10,17 \frac{r_0}{ka}, \dots \quad (۱۶-۷۷)$$

شکل ۱۶-۱۶ عکسی از نقش پراش روزنه دایره‌ای را نشان می‌دهد.

۵-۱۶ پراش فرنل

اگر فاصله r_0 از روزنه تا نقطه مشاهده بسیار بزرگ نباشد، تقریبی که در معادله ۵۵-۱۶ به کار بردیم نارسا است. پس باید جمله‌های مرتبه بالاتری را در بسط رشته توانی r نگه داریم، مثلاً جمله‌های



شکل ۱۶-۱۶ عکس نقش پراش روزنه دایره‌ای.

مرتبه x'^2 و y'^2 را:

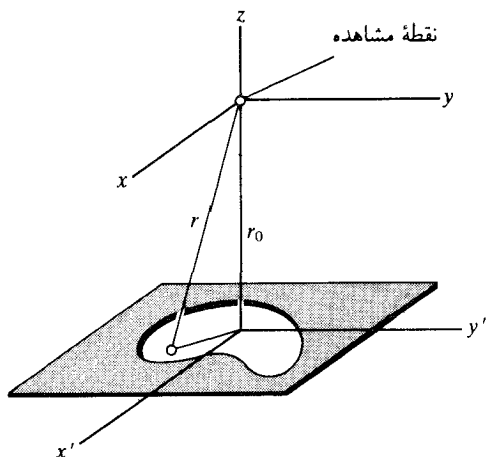
$$r = \sqrt{r_0^2 - 2xx' - 2yy' + x'^2 + y'^2}$$

$$\simeq r_0 - \frac{x}{r_0}x' - \frac{y}{r_0}y' + \frac{1}{2r_0}(x'^2 + y'^2) - \frac{1}{2r_0} \left(\frac{x}{r_0}x' + \frac{y}{r_0}y' \right)^2 + \dots \quad (78-16)$$

تقریب ۷۸-۱۶ پراش فرنل را مشخص می‌کند. پس تابع زیر انتگرال پراش عبارت است از

$$\frac{1}{r_0} \exp \left\{ ik \left[r_0 - \frac{x}{r_0}x' - \frac{y}{r_0}y' + \frac{1}{2r_0}(x'^2 + y'^2) - \frac{1}{2r_0} \left(\frac{x}{r_0}x' + \frac{y}{r_0}y' \right)^2 \right] \right\} \quad (79-16)$$

که در آن، مانند بخش قبل، از تقریب $r \simeq r_0$ در مخرج استفاده کرده‌ایم. چون شناسه تابع نمایی وابستگی نسبتاً آشفته‌ای به x' و y' دارد، بهتر است آن را با لم زیر ساده کنیم: برای هر نقطه معین مشاهده، مبدأ مختصات واقع در صفحه را طوری انتخاب می‌کنیم که درست در برابر نقطه مشاهده قرار گیرد (شکل ۱۶-۱۷): در نتیجه داریم $x = y = 0$ ، و تنها جمله زیر باقی ماند



شکل ۱۶-۱۷ انتخاب مبدأ مختصات برای پراش فرنل. این مبدأ به جایی منتقل شده است که درست روبروی (یا زیر) نقطه مشاهده قرار گیرد. مختصات نقطه مشاهده اکنون عبارتند از $x = 0$ و $y = 0$ و $z = r_0$.

$$\frac{1}{r_0} \exp \left\{ ik \left[r_0 + \frac{1}{2r_0} (x'^2 + y'^2) \right] \right\} \quad (۱۶-۸۰)$$

چون مبدأ را مناسب با نقطه مشاهده انتخاب کرده‌ایم، روشن است که حدود انتگرال بستگی به مکان نقطه مشاهده دارد؛ اما خواهیم دید که محاسبه با این وابستگی بسیار آسان است. با توجه به معادله ۱۶-۸۰، انتگرال پراش به صورت زیر درمی‌آید

$$E_{\text{صحنه}} = -\frac{ik}{2\pi} E_0 \sin \Theta \frac{e^{-i(\omega t - kr_0)}}{r_0} \iint e^{(ik/2)(x'^2 + y'^2)/r_0} dx' dy' \quad (۱۶-۸۱)$$

به عنوان اولین مثال از تقریب فرنل، به روزنه مستطیلی شکل ۱۶-۹ باز می‌گردیم. مانند سابق، فرض می‌کنیم $\sin \Theta \simeq 1$. اگر نقطه مشاهده دارای مختصات x و y نسبت به مرکز مستطیل باشد، این مرکز دارای مختصات $-x$ و $-y$ نسبت به نقطه مشاهده خواهد بود. بنابراین، با توجه به مبدأ منتقل شده مختصات، حدود انتگرال برای x' عبارتند از $-x - a/2$ و $-x + a/2$ ؛ و حدود انتگرال برای y' عبارتند از $-y - b/2$ و $-y + b/2$. با اختصارات

$$w_1 = \sqrt{\frac{k}{\pi r_0}} \left(-x - \frac{a}{2} \right) \quad w_2 = \sqrt{\frac{k}{\pi r_0}} \left(-x + \frac{a}{2} \right) \quad (۱۶-۸۲)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{\pi r_0}} \left(-y - \frac{b}{2} \right) \quad v_2 = \sqrt{\frac{k}{\pi r_0}} \left(-y + \frac{b}{2} \right) \quad (۱۶-۸۳)$$

از معادله ۸۱-۱۶ به دست می آوریم

$$E_{\text{صفحه}} = -\frac{i}{\gamma} E_0 e^{-i(\omega t - k r_0)} [F(w_2) - F(w_1)] [F(v_2) - F(v_1)] \quad (۸۴-۱۶)$$

که در آن

$$F(w) = \int_0^w e^{i\pi\tau^2/\gamma} d\tau \quad (۸۵-۱۶)$$

این انتگرال را انتگرال فرنل می نامند. انتگرال فرنل را معمولاً برحسب قسمتهای حقیقی و انگاری می نویسند:

$$F(w) = \mathcal{C}(w) + i\mathcal{S}(w) \quad (۸۶-۱۶)$$

که در آن

$$\mathcal{C}(w) = \int_0^w \cos\left(\frac{\pi\tau^2}{\gamma}\right) d\tau \quad (۸۷-۱۶)$$

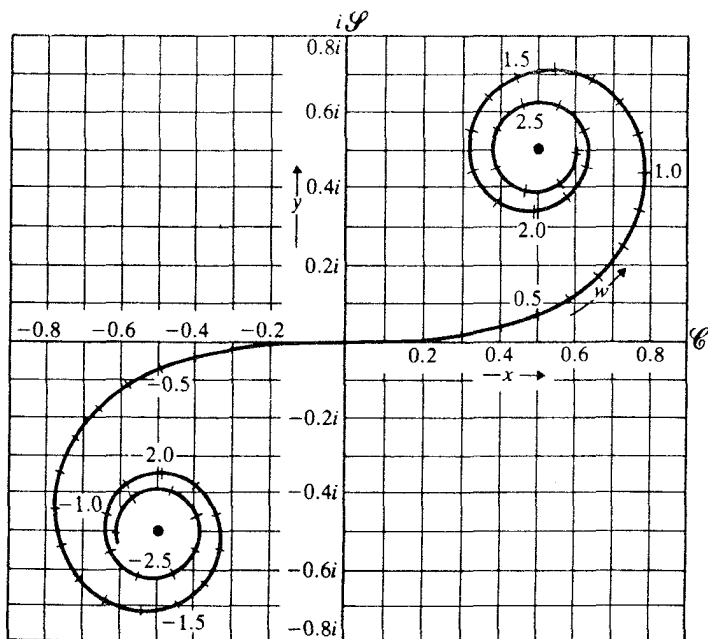
$$\mathcal{S}(w) = \int_0^w \sin\left(\frac{\pi\tau^2}{\gamma}\right) d\tau \quad (۸۸-۱۶)$$

این انتگرالها را نمی توان برحسب توابع مقدماتی محاسبه کرد، و باید آنها را به طور عددی به دست آورد.

شکل ۱۸-۱۶ نموداری از $F(w)$ را در صفحه مختلط نشان می دهد. در این صفحه قسمت حقیقی $F(w)$ مختصه افقی و قسمت انگاری آن مختصه قائم گرفته شده است، و w پارامتر است. مختصه های افقی و قائم به عنوان تابع w یک منحنی به وجود می آورند که ماریچ کورنو نامیده می شود. به ازای $w \rightarrow \pm\infty$ ، این ماریچ حول نقاط $(1+i)/2$ می پیچد. توجه کنید که کمیت $F(w_2) - F(w_1)$ در معادله ۸۴-۱۶ به صورت برداری که از نقطه w_1 روی ماریچ کورنو به نقطه w_2 کشیده می شود نمایش داده می شود.

شدت در نقش پراش برابر است با

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{c}{8\pi} |E_{\text{صفحه}}|^2 \\ &= \frac{cE_0^2}{32\pi} \{ [\mathcal{C}(w_2) - \mathcal{C}(w_1)]^2 + [\mathcal{S}(w_2) - \mathcal{S}(w_1)]^2 \} \\ &\quad \times \{ [\mathcal{C}(v_2) - \mathcal{C}(v_1)]^2 + [\mathcal{S}(v_2) - \mathcal{S}(v_1)]^2 \} \end{aligned} \quad (۸۹-۱۶)$$



شکل ۱۶-۱۸ مارییج کورنو.

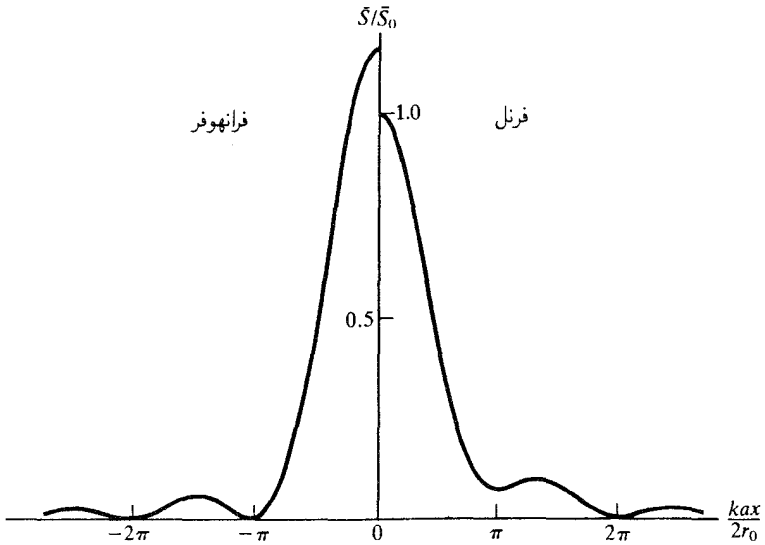
شکل ۱۶-۱۹ نمودار این نقش شدت را به ازای $y = \text{const}$ نشان می‌دهد. این نقش تا اندازه‌ای با نقش فرانهوفر تفاوت دارد، اما به ازای $r_0 \rightarrow \infty$ به نقش فرانهوفر میل می‌کند.

تمرین ۴- ثابت کنید وقتی $r_0 \rightarrow \infty$ ، فرمول شدت ۱۶-۸۹ به فرمول فرانهوفر ۱۶-۶۲ میل می‌کند.

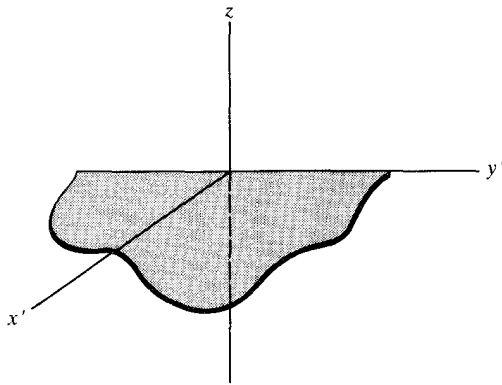
اگر در معادله ۱۶-۸۹ حد $w_1 \rightarrow -\infty$ و $v_1 \rightarrow -\infty$ و $v_2 \rightarrow \infty$ را بگیریم و قرار دهیم $w_2 = -\sqrt{k/\pi r_0} x$ ، نقش پراش ناشی از لبهٔ راست (نیم صفحهٔ کدر نامتناهی؛ شکل ۱۶-۲۰) به دست می‌آید. در نتیجه

$$\bar{S} = \frac{cE_0^2}{16\pi} \left\{ \left[\mathcal{C}(w_2) + \frac{1}{2} \right]^2 + \left[\mathcal{S}(w_2) + \frac{1}{2} \right]^2 \right\} \quad (۱۶-۹۰)$$

شکل ۱۶-۲۱ نمودار شدت را به صورت تابع فاصلهٔ x از لبهٔ سایهٔ هندسی نشان می‌دهد. در ناحیهٔ سایه ($x > 0$) شدت تدریجاً به صفر کاهش می‌یابد. در ناحیهٔ روشن ($x < 0$) شدت رشته‌ای



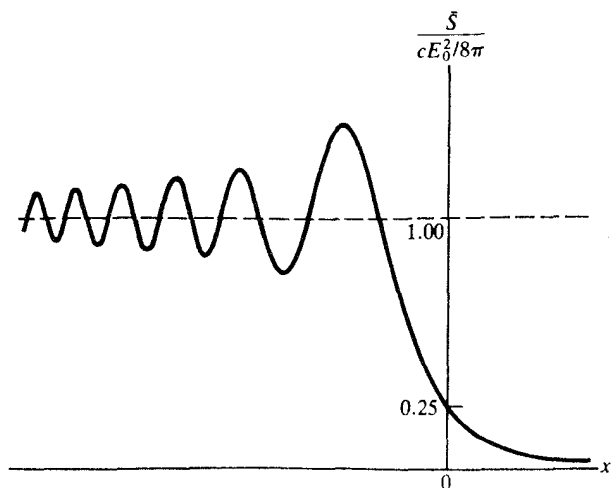
شکل ۱۶-۱۹ شدت به صورت تابع x برای نقش پراش روزنه مستطیلی به ازای $a\sqrt{k/\pi r_0} = 1.8^\circ$ برای مقایسه، طرف راست این نمودار مربوط به تقریب فرنل و طرف چپ مربوط به تقریب فرانیهوفر است.



شکل ۱۶-۲۰ صفحه کدری که صفحه $x'y'$ را از $x' = 0$ تا $x' = \infty$ اشغال کرده است. لبه این صفحه منطبق بر محور y' است.

از فریزهای پراش ایجاد می‌کند. در لبه سایه ($x = 0$) شدت دقیقاً $1/4$ شدت موج فرودی است.

اکنون مورد روزنه دایره‌ای را بررسی می‌کنیم. برای سادگی فرض می‌کنیم نقطه مشاهده روی



شکل ۲۱-۱۶ شدت به صورت تابع x برای نقش پراش لبه راست. ناحیه سایه مربوط به $x > 0$ است (شکل ۲۰-۱۶).

محور روزنه است. بنابراین، در مختصات قطبی انتگرال ۱۶-۸۱ به صورت زیر است

$$E_{\text{صحنه}} = -\frac{ik}{2\pi} E_0 \frac{e^{-i(\omega t - kr_0)}}{r_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{(ik/2)\rho'^2/r_0} \rho' d\phi' d\rho \quad (91-16)$$

پس از انتگرال گیری داریم

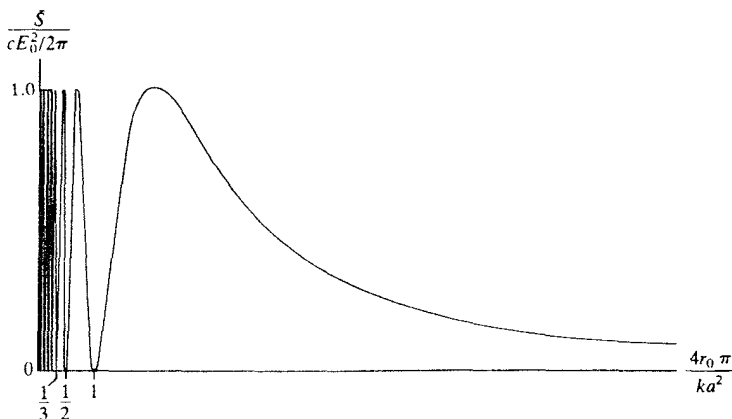
$$E_{\text{صحنه}} = -E_0 e^{-i(\omega t - kr_0)} [e^{(ik/2)a^2/r_0} - 1] \quad (92-16)$$

شدت برابر است با

$$\bar{S} = \frac{cE_0^2}{2\pi} \sin^2 \left(\frac{ka^2}{2r_0} \right) \quad (93-16)$$

این شدت، به عنوان تابع r_0 ، بین $cE_0^2/(2\pi)$ و صفر نوسان می کند (شکل ۱۶-۲۲) — در نقاطی روی محور روزنه نور وجود ندارد!

تمرین ۵- با استفاده از اصل باینه و معادله ۱۶-۹۲ نشان دهید شدت روی محور یک قرص کدر برابر است با $(8\pi) cE_0^2$ که با شدت موج فرودی یکسان است. بنابراین، محور قرص تاریک نیست. لکه روشن در مرکز سایه قرص را لکه پواسون می نامند. ■



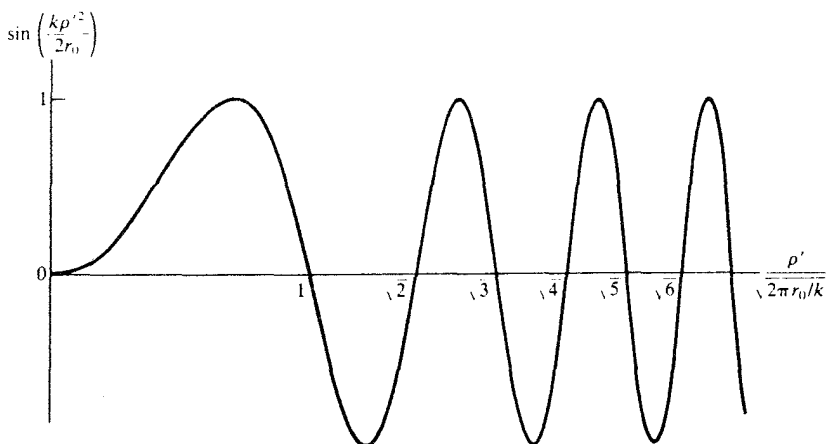
شکل ۱۶-۲۲ شدت روی محور روزنه دایره‌ای به صورت تابع فاصله r_0 .

معادله ۱۶-۹۳ ماکسیممی چهار برابر شدت نور فرودی به دست می‌دهد که تقویت شدت قابل ملاحظه‌ای است. تقویت‌های بسیار زیادتری را با صفحه منطقه‌ای که از حلقه‌های متناوباً کدر و شفاف هم‌مرکزی تشکیل می‌شود می‌توان ایجاد کرد. اندازه‌های این حلقه‌ها طوری انتخاب می‌شوند که حلقه‌های کدر فواصل شعاعی را که در معادله ۱۶-۹۱ منجر به تداخل ویرانگر می‌شوند می‌پوشانند. قسمت انگاری تابع زیر انتگرال در فاصله $\sqrt{2\pi r_0/k} < \rho' < \sqrt{4\pi r_0/k}$ مثبت است، در فاصله $\sqrt{4\pi r_0/k} < \rho' < \sqrt{6\pi r_0/k}$ منفی است، در فاصله بعدی مثبت است، و غیره (شکل ۱۶-۲۳). بنابراین، تابع زیر انتگرال در اولین فاصله فاز مثبت (بین 0° و 180°) دارد، در دومین فاصله فاز منفی (بین 0° و -180°) دارد، در سومین فاصله فاز مثبت دارد، و غیره. اگر صفحه‌ای با حلقه‌های کدر که تمام فاصله‌های شعاعی با فاز منفی را می‌پوشانند بسازیم، میدان پراش این صفحه دارای ماکسیمم بسیار شدیدی در نقطه‌ای از محور است که در آنجا امواج مربوط به حلقه‌های شفاف مجاور با فازهای مثبت به هم می‌رسند. شعاع‌های لازمی که مرزهای حلقه‌های کدر را تعیین می‌کنند عبارت‌اند از

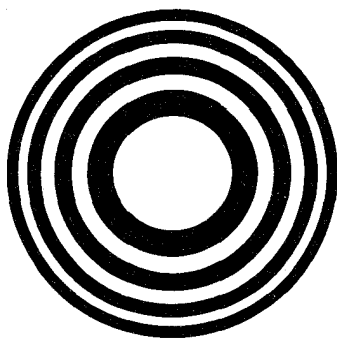
$$\rho_l = \sqrt{\frac{2\pi l r_0}{k}} = \sqrt{l r_0 \lambda} \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (16-94)$$

شکل ۱۶-۲۴ یک صفحه منطقه‌ای را نشان می‌دهد. این صفحه منطقه‌ای، با شعاع‌هایی که از معادله ۱۶-۹۴ تعیین می‌شوند، لکه روشن شدیدی در $r_0 = \rho_1^2/\lambda$ به دست می‌دهد.

تمرین ۶- نشان دهید این صفحه منطقه‌ای همچنین لکه‌های روشنی در فاصله‌های تقریبی



شکل ۲۳-۱۶ تابع $\sin(k\rho'^2/2r_0)$. این تابع در نقاط $\rho'_l = \sqrt{2\pi l r_0/k}$ تغییر علامت می‌دهد.



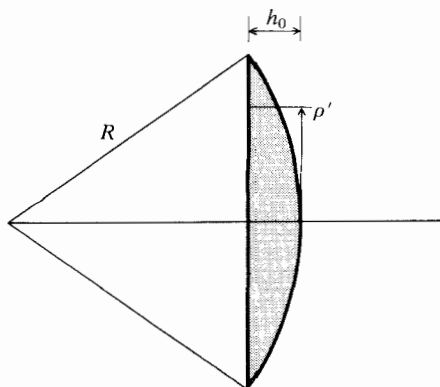
شکل ۲۴-۱۶ یک صفحه منطقه‌ای.

زیر به دست می‌دهد

$$r_0 = \rho_1^2/3\lambda, \rho_2^2/5\lambda, \rho_3^2/7\lambda, \dots \quad (۹۵-۱۶)$$

[راهنمایی: برای $r_0 = \rho_1^2/3\lambda$ ، فاز در هر فاصله شعاعی شفاف گستره‌ای به اندازه $3 \times 180^\circ$ در برمی‌گیرد.]

آخرین مثالی که ذکر می‌کنیم مسئله متفاوتی است. می‌خواهیم شدتی را محاسبه کنیم که یک عدسی وقتی موج تخت به آن می‌تابد ایجاد می‌کند. عدسی را می‌توان روزه دایره‌ای در نظر گرفت؛ پس می‌توانیم باز هم از انتگرال ۹۱-۱۶ استفاده کنیم. اما، تفاوت عدسی با روزه تھی در



شکل ۱۶-۲۵ یک عدسی نازک تخت-کوژ. شعاع سطح خمیده R است. کلفتی عدسی در مرکز h_0 است.

این است که فاز موجی را که از آن عبور می‌کند تغییر می‌دهد. برای مثال، عدسی را تخت-کوژ با شعاع R فرض کنید (شکل ۱۶-۲۵). پس کلفتی عدسی به صورت تابع مختصه شعاعی ρ' (به ازای $\rho' \ll R$) تقریباً برابر است با

$$h \simeq h_0 - \frac{1}{2} \frac{\rho'^2}{R} \quad (۹۶-۱۶)$$

اگر ضریب شکست n باشد، انتقال فازی که موج موقع عبور از عدسی در فاصله شعاعی ρ' پیدا می‌کند $n(\omega/c)h$ است. در نتیجه، انتقال فاز اضافی، در مقایسه با انتقال فاز مربوط به روزنه تهی، برابر است با

$$\delta(\rho') = (n - 1) \frac{\omega}{c} h = (n - 1) k h_0 - (n - 1) \frac{k \rho'^2}{2R} \quad (۹۷-۱۶)$$

که در آن k بردار موج در فضای تهی است: $k = \omega/c$. انتقال فاز ثابت $(n - 1) k h_0$ در معادله ۹۷-۱۶ پیامدی ندارد و می‌توان آن را حذف کرد. با منظور کردن این انتقال فاز اضافی، معادله ۹۱-۱۶ تبدیل می‌شود به

$$E_{\text{عدسی}} = -\frac{ik}{2\pi} E_0 \frac{e^{-i(\omega t - kr_0)}}{r_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{(ik/2)\rho'^2/r_0} e^{-i(n-1)k\rho'^2/2R} \rho' d\phi' d\rho' \quad (۹۸-۱۶)$$

البته این معادله تنها در امتداد محور عدسی معتبر است. پس از انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم

$$E_{\text{عدسی}} = -E_0 e^{-i(\omega t - kr_0)} \frac{\exp[ika^2/2r_0 - (ika^2/2R)(n-1)] - 1}{1 - (n-1)r_0/R} \quad (۹۹-۱۶)$$

برای سادگی، فرض می‌کنیم روزنه عدسی بسیار بزرگ است و بعد عرضی موج فرودی از این روزنه کوچکتر است. پس می‌توانیم سهم مربوط به حد بالایی انتگرال ($\rho' = a$) را حذف کنیم و معادله ۹۹-۱۶ را تبدیل کنیم به

$$E_{\text{عدسی}} = \frac{E_0 e^{-i(\omega t - kr_0)}}{1 - (n-1)r_0/R} \quad (۱۰۰-۱۶)$$

با توجه به این فرمول، دامنه میدان الکتریکی در نقطه

$$r_0 = \frac{R}{n-1} \quad (۱۰۱-۱۶)$$

وگراست. روشن است که این نقطه باید کانون عدسی باشد، و $R/(n-1)$ باید فاصله کانونی باشد. این نتیجه‌ای که برای فاصله کانونی به دست آورده‌ایم با نتیجه‌ای که در اپتیک هندسی به دست می‌آید (فرمول عدسی‌سازان) توافق دارد. محاسبه دقیقتر اثرات پراش نشان می‌دهد میدان الکتریکی در کانون بزرگ است اما نامتناهی نیست. توجه کنید که در کانون مخرج کسر معادله ۱۰۰-۱۶ تغییر علامت می‌دهد. این امر منجر به وارونی فاز در کانون می‌شود: میدان الکتریکی درست جلو کانون ۱۸۰° اختلاف فاز با میدان الکتریکی درست پشت کانون دارد.

مسائل

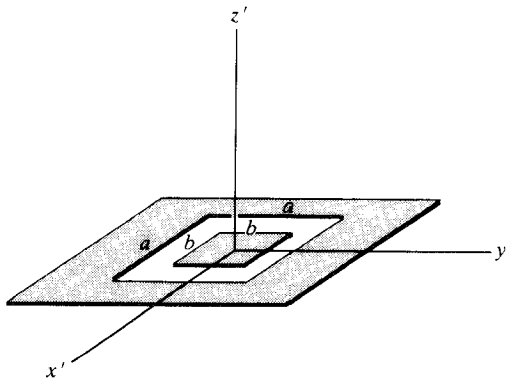
۱-۱۶ نور آبی پراکنده در آسمان به‌طور جزئی قطبیده است. این پدیده را می‌توان با عینک‌های آفتابی پولاروید مشاهده کرد. در چه جهتی نسبت به خورشید باید نگاه کنیم تا قطبش ماکسیمم را ببینیم؟ صفحه این قطبش ماکسیمم را تعیین کنید.

۲-۱۶ معادله ۶۶-۱۶ تقریب فرانوفر را برای دامنه نور پراکنده توسط صفحه مستطیلی به دست می‌دهد. مقطع پراکندگی دیفرانسیلی را به دست آورید؛ جواب را برحسب مختصات قطبی بنویسید. اگر از این عبارت مقطع دیفرانسیلی روی تمام زاویه فضایی انتگرال بگیریم، آیا مقطع پراکندگی کل صحیح را به دست می‌آوریم؟ توضیح دهید.

۳-۱۶ بنا بر معادله ۶۶-۱۶، دامنه پراکندگی پیشرو را برای صفحه مستطیلی به دست آورید. با استفاده از قضیه اپتیکی مقطع کل صفحه را محاسبه کنید، و با مقطع هندسی $a \times b$ مقایسه کنید.

۱۶-۴ بنا به اصل باینه، صفحه روزنه دار کدر S و درپوش کدر مکمل S' در راستاهایی که روی باریکه فرودی نیستند نقش پراش (شدت) یکسانی ایجاد می‌کنند. نشان دهید اگر درپوش S' کدر نباشد و از ماده شفافی ساخته شده باشد که نور عبوری را ۱۸۰° تغییر فاز می‌دهد (ماده عامل تأخیر فاز نیم موجی)، این درپوش S' همان نقش پراش صفحه روزنه دار S را ایجاد می‌کند اما شدت چهار بار بیشتر است.

۱۶-۵ نقش پراش فرانهوفر را برای روزنه‌ای مربعی به دست آورید که ابعاد آن $a \times a$ است و مرکز آن با مربع کوچکتری با ابعاد $b \times b$ پوشیده شده است (شکل ۱۶-۲۶). اگر $b = ۰.۵a$ ، مکان (زاویه‌ای) اولین مینیم را تعیین کنید؛ و همچنین اگر $b = ۰.۹a$.



شکل ۱۶-۲۶ روزنه مربعی با ابعاد $a \times a$ که در مرکز آن مربع کدری با ابعاد $b \times b$ قرار گرفته است.

۱۶-۶ نقش پراش فرانهوفر ناشی از روزنه مربعی با ابعاد $a \times a$ را محاسبه کنید اگر جهت فرود موج به اندازه زاویه α به طرف یکی از اضلاع مربع کج شده باشد. مکان زاویه‌ای ماکسیم مرکزی را تعیین کنید. پهنای زاویه‌ای این ماکسیم را در راستاهایی که بر یکدیگر و بر اضلاع مربع عمودند به دست آورید.

۱۶-۷ روزنه‌ای دایره‌ای به قطر D با دو چشمه نور نقطه‌ای بسیار دور—مانند دو ستاره—که فاصله زاویه‌ای کوچکی دارند روشن می‌شود. بنابراین، نوری که بر این روزنه فرود می‌آید از دو موج تقریباً تخت با دو راستای انتشار کمی متفاوت تشکیل شده است. این امواج دو نقش پراش به صورت ۱۶-۷۶ در پشت روزنه ایجاد می‌کنند که به طور جزئی روی هم قرار گرفته‌اند. مطابق با معیار ریلی این دو نقش را در آستانه تفکیک (در آستانه متمایز بودن) می‌گوییم اگر ماکسیم یکی از آنها روی اولین مینیم دیگری واقع شود. نشان دهید این معیار ایجاب می‌کند فاصله زاویه‌ای چشمه‌های نور $D \approx 2.2 \lambda$ باشد. این فاصله زاویه‌ای را برای تلسکوپ فضایی ($D = ۲.۴ \text{ cm}$, $\lambda = ۵۵۰ \text{ nm}$) و برای تلسکوپ رادیویی آرسیبو ($D = ۳۰۰ \text{ m}$, $\lambda = ۴ \text{ cm}$) محاسبه کنید. تفکیک زاویه‌ای کدام یک بهتر است؟

۱۶-۸ اگر در شکل ۱۶-۶ (الف) اندازه هر یک از ستاره‌ها را نصف کنیم، نقش نقاط در شکل ۱۶-۷ (ب) چه تغییری خواهد کرد؟ و اگر فاصله ستاره‌ها را دو برابر کنیم؟ به‌طور کیفی توضیح دهید.

۱۶-۹ یک تلسکوپ رادیویی متشکل از 2° آنتن است که روی یک خط راست قرار گرفته‌اند و فاصله آنها از یکدیگر 6° سانتیمتر است. اگر طول موج امواج رادیویی 1 متر باشد تفکیک زاویه‌ای تلسکوپ را به دست آورید، یعنی تعیین کنید فاصله زاویه‌ای مینیمم دو چشمه رادیویی نقطه‌ای در آسمان چه اندازه باید باشد تا در تلسکوپ جدا از هم دیده شوند.

۱۶-۱۰ رنگهای رنگین کمان از شکست نور خورشید توسط قطره‌های باران ناشی می‌شوند. برای تفکیک رنگی واضح، گسترده‌ی زاویه‌ای ناشی از پراش نور توسط قطره‌های باران باید به‌طور قابل ملاحظه‌ای، تقریباً 5° ، بزرگتر از پهنای رنگین کمان باشد. اگر این شرط برآورده نشود، رنگها روی هم می‌افتند و مبهم می‌شوند— نتیجه یک رنگین کمان سفید است. پهنای قله اصلی پراش ناشی از قطره بارانی به قطر 4 میلی‌متر را تخمین بزنید. مسئله را برای قطره بارانی به قطر 4 mm حل کنید.

۱۶-۱۱ یک صفحه مستطیلی از شیشه با ضریب شکست n دارای طول a ، عرض b و کلفتی d است. نقش پراش فرانوفر ناشی از این صفحه را محاسبه کنید. فرض کنید این شیشه نور فرودی را اصلاً منعکس نمی‌کند، یعنی تنها انتقال فاز ایجاد می‌کند.

۱۶-۱۲ نقش پراش فرانوفر را برای دو روزه مربعی مجاور هم در یک صفحه کدر به دست آورید. روزه‌ها ابعاد $a \times a$ دارند، دارای سمتگیری یکسانی هستند، و فاصله مراکز آنها عبارت است از $d > a$.

۱۶-۱۳ نقش پراش فرانوفر را برای صفحه کدری با دوشکاف بسیار دراز متعامد با پهنای a به دست آورید. نقش ناحیه‌های روشن در صفحه xy را به‌طور تقریبی رسم کنید.

۱۶-۱۴ نقطه $x = 16\lambda$ ، $y = 0$ ، $r_0 = 120\lambda$ را در میدان پراش روزه‌ای مستطیلی با $a = 12\lambda$ و $b = 6\lambda$ در نظر بگیرید. با استفاده از روش نموداری مبتنی بر ماریچ کورنو (شکل ۱۶-۱۸)، شدت ۱۶-۸۹ را در این نقطه به‌طور تقریبی محاسبه کنید.

۱۶-۱۵ بنا بر معادله ۱۶-۸۹، شدت نور در جهت جلو ($x = 0$ ، $y = 0$) را در پشت روزه‌ای مستطیلی به ابعاد $20\lambda \times 20\lambda$ به دست آورید. با استفاده از ماریچ کورنو شدت را به‌صورت تابع r_0 به‌ازای $r_0 = 50\lambda$ تا 600λ رسم کنید.

۱۶-۱۶ موج تختی را به یک نوار کدر بسیار دراز به پهنای a می‌تابانیم. با استفاده از تقریب فرنل شدت را به‌صورت تابع فاصله روی خط عمودی که از مرکز نوار می‌گذرد به دست آورید.

۱۶-۱۷ یک صفحه منطقه‌ای نواری تشکیل شده است از نوارهای موازی بسیار درازی که کنار هم قرار گرفته‌اند و متناوباً شفاف و کدر هستند. پهنای نوارهای متوالی چه اندازه باید باشند تا برای نوری با طول موج λ در امتداد موازی با خط مرکزی صفحه نواری در فاصله r در پشت آن تداخل سازنده داشته باشیم؟

۱۶-۱۸ با استفاده از معادله ۱۶-۸۴ و اصل باینه، نقش پراش فرنل را برای یک مستطیل کدر به دست آورید. شدت در جهت جلو ($x = 0, y = 0$) را تعیین کنید.

۱۶-۱۹ یک نیم صفحه شیشه‌ای نیمه پایینی صفحه xy ($y < 0$) را می‌پوشاند. ضریب شکست شیشه n و کلفتی آن d است. با استفاده از تقریب فرنل نقش پراش را محاسبه کنید. فرض کنید شیشه نور تابیده را منعکس نمی‌کند، یعنی تنها انتقال فاز ایجاد می‌کند.

۱۶-۲۰ نقش پراش فرنل را برای شکاف بسیار درازی با پهنای a در صفحه کدری که موج تخت به آن تابیده است به دست آورید. شدت را در جهت جلو ($x = 0, y = 0$) محاسبه کنید.

۱۶-۲۱ نقش پراش فرنل را برای نوار کدر بسیار درازی با پهنای a که موج تخت به آن تابیده است محاسبه کنید. محاسبه را به دو روش انجام دهید و نتایج را مقایسه کنید. (الف) از معادله ۱۶-۸۱ با حدود مناسب برای انتگرال روی ناحیه خارج از نوار استفاده کنید. (ب) از معادله ۱۶-۸۴ (به ازای $b = 0$) و اصل باینه استفاده کنید.

پیوست ۱

ثابتهای اساسی

یکای CGS	یکای SI	خطای نسبی pp m	مقدار (و خطا)	نماد	کمیت
10^2 cm s^{-1}	ms^{-1}	(دقیق)	۲۹۹۷۹۲۴۵۸	c	سرعت نور در خلا
-	10^{-7} NA^{-2}		4π	μ_0	تراوایی خلا
-	10^{-7} NA^{-2}	(دقیق)	$= 12,566370614 \dots$		
-	10^{-12} Fm^{-1}	(دقیق)	$1/\mu_0 \cdot c^2$	ϵ_0	گذردهی خلا
$10^{-8} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$	10^{-11}	(دقیق)	$= 8,854187817 \dots$		
-	$\text{m}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$	۱۲۸	۶,۶۷۲۵۹(۸۵)	G	ثابت گرانش نیوتون
10^{-27} erg s	10^{-24} Js	۰,۶۰	۶,۶۲۶۰۷۵۵(۴۰)	h	ثابت پلانک (الکترون ولت)
-	10^{-15} eVs	۰,۳۰	۴,۱۳۵۶۶۹۲(۱۲)		
10^{-27} erg s	10^{-24} Js	۰,۶۰	$1,05457266(63)$	\hbar	$(h/2\pi)$ (الکترون ولت)
-	10^{-16} eVs	۰,۳۰	۶,۵۸۲۱۲۲۰(۲۰)		
-	10^{-19} C	۰,۳۰	$1,60217733(49)$	e	بار بنیادی
10^{-10} esu	-	۰,۳۰	۴,۸۰۳۲۰۶۸(۱۵)		
10^{-7} Gcm^2	10^{-15} Wb	۰,۳۰	$2,067833461(61)$	Φ_0	کوآتوم شار مغناطیسی $hc/2e\lambda h/2e$
-	$10^{12} \text{ Hz V}^{-1}$	۰,۳۰	۴,۸۳۵۹۷۶۷(۱۴)	$2e/h$	نسبت ولتاژ-بسامد جوزفسون

CGS یکای	SI یکای	خطای نسبی pp m	مقدار (و خطا)	نماد	کمیت
-	$10^{-5} \text{s}\Omega^{-1}$	۰٫۴۵	$3,740,4614(17)$	e^2/h	رسانندگی کوانتیده هال
$10^7 \text{s}^{-1} \text{cm}$	-	۰٫۴۵	$3,481,819,03(16)$		
$10^{-21} \text{ergG}^{-1}$	10^{-24}J T^{-1}	۰٫۳۴	$9,274,0154(31)$	μ_B	مگنتون بور $e\hbar/2m_e c$ یا $e\hbar/2m_e$
-	10^{-5}eV T^{-1}	۰٫۸۹	$5,788,382,63(52)$		برحسب الکترون ولت
10^6Hz G^{-1}	10^{10}Hz T^{-1}	۰٫۳۰	$1,399,624,18(42)$		برحسب هرتز μ_B/h
$10^{-22} \text{erg G}^{-1}$	10^{-25}J T^{-1}	۰٫۳۴	$5,050,7866(17)$	μ_N	مگنتون هسته‌ای، یا $e\hbar/2m_p$
-	10^{-8}eV T^{-1}	۰٫۸۹	$3,152,451,66(28)$		$e\hbar/2m_p c$
10^7Hz G^{-1}	MHz T^{-1}	۰٫۳۰	$7,622,5914(23)$		برحسب الکترون ولت برحسب هرتز μ_N/h
					ثابت ساختار ریز $\mu_e c e^2 / 4\pi\hbar$
10^{-2}	10^{-2}	۰٫۴۵	$7,297,353,08(33)$	α	یا $e^2/\hbar c$
۱	۱	۰٫۴۵	$137,035,989,5(61)$	α^{-1}	معکوس ثابت ساختار ریز
10^{-1}cm^{-1}	m^{-1}	۰٫۰۱۲	$1,097,373,153,34(13)$	R_∞	ثابت ریذبرگ $1/2m_e c a^2/\hbar$
10^{15}Hz	10^{15}Hz	۰٫۰۱۲	$3,289,841,949,99(39)$		$R_\infty c$
10^{-11}erg	10^{-18}J	۰٫۶۰	$2,179,874,1(13)$		$R_\infty \hbar c$
-	eV	۰٫۳۰	$13,708,598,1(40)$		$R_\infty \hbar c$ برحسب الکترون ولت
10^{-8}cm	10^{-10}m	۰٫۴۵	$5,291,772,49(24)$	a_0	شعاع بور $\hbar/m_e c a$
10^{-11}erg	10^{-18}J	۰٫۶۰	$4,352,947,82(26)$	E_h	انرژی هارتزی، $2R_\infty \hbar c$ برحسب
-	eV	۰٫۳۰	$27,211,389,61(81)$		الکترون ولت
10^{-24}g	10^{-27}kg	۰٫۵۹	$9,109,382,91(54)$	m_e	جرم الکترون
-	10^{-2}u	۰٫۲۳	$5,485,799,03(13)$		
-	MeV	۰٫۳۰	$510,998,946(15)$		$m_e c^2$ برحسب الکترون ولت
10^{-2}	10^{-2}	۰٫۱۵	$4,836,321,8(71)$	m_e/m_μ	نسبت جرم الکترون موئون
10^{-2}	10^{-2}	۰٫۲۰	$5,485,799,03(13)$	m_e/m_p	نسبت جرم الکترون-پروتون
10^{-2}	10^{-2}	۰٫۲۰	$2,718,473,707(6)$	m_e/m_d	نسبت جرم الکترون-دوترون
10^{-2}	10^{-2}	۰٫۲۱	$1,370,938,254(3)$	m_e/m_α	نسبت جرم الکترون-ذره α
-	10^{11}C kg^{-1}	۰٫۳۰	$-1,758,811,962(53)$	$-e/m_e$	بارویژه الکترون
$10^{16} \text{esu g}^{-1}$	-	۰٫۳۰	$-5,272,808,6(16)$		
10^{-2}g/mol	10^{-3}kg/mol	۰٫۲۳	$5,485,799,03(13)$	M_e	جرم مولی الکترون
10^{-10}cm	10^{-12}m	۰٫۸۹	$2,426,310,58(22)$	λ_C	طول موج کامپتون، $\hbar/m_e c$
10^{-11}cm	10^{-13}m	۰٫۸۹	$2,486,159,23(35)$	λ_C	$\lambda_C/2\pi = \alpha a_0$ $= \alpha^2/4\pi R_\infty$
10^{-13}cm	10^{-15}m	۰٫۱۳	$2,817,940,92(38)$	r_e	شعاع کلاسیک الکترون، $\alpha^2 a_0$

یکای CGS	یکای SI	خطای نسبی pp m	مقدار (و خطا)	نماد	کمیت
10^{-22}cm^2	10^{-28}m^2	۰٫۲۷	$0.66524616(18)$	σ_e	مقطع مؤثر تامسون، $8\pi/3r_e^2$
$10^{-22} \text{erg G}^{-1}$	10^{-26}JT^{-1}	۰٫۳۴	$928.47701(31)$	μ_e	گشتاور مغناطیسی الکترون
۱	۱	1×10^{-5}	$1.001159652193(10)$	μ_e/μ_B	برحسب مگنتون بور
۱	۱	۰٫۲۰	$1838.282000(37)$	μ_e/μ_N	برحسب مگنتون هسته‌ای
10^{-2}	10^{-2}	۰٫۰۰۸۶	$1.159652193(10)$	a_e	بی‌هنجاری گشتاور مغناطیسی الکترون $(\mu_e/\mu_B)^{-1}$
۱	۱	11×10^{-5}	$2.002319304386(20)$	g_e	فاکتور g الکترون، $2(1 + a_e)$
10^{-25}g	10^{-28}kg	۰٫۶۱	$1.8835327(11)$	m_μ	جرم موئون
-	u	۰٫۱۵	$1.13428913(17)$		$m_\mu c^2$ برحسب الکترون ولت
-	MeV	۰٫۳۲	$105.658389(34)$		نسبت جرم موئون-الکترون
۱	۱	۰٫۱۵	$206.768262(30)$	m_μ/m_e	جرم مولی موئون
10^{-1}g/mol	10^{-3}kg/mol	۰٫۱۵	$1.13428913(17)$	M_μ	گشتاور مغناطیسی موئون
$10^{-22} \text{erg G}^{-1}$	10^{-26}JT^{-1}	۰٫۳۳	$4.4904514(15)$	μ_μ	برحسب مگنتون بور
10^{-2}	10^{-2}	۰٫۱۵	$4.84197097(71)$	μ_μ/μ_B	برحسب مگنتون هسته‌ای
۱	۱	۰٫۱۵	$8.9905981(13)$	μ_μ/μ_N	بی‌هنجاری گشتاور مغناطیسی موئون
10^{-2}	10^{-2}	۷٫۲	$1.1659230(84)$	a_μ	$\mu_\mu/\mu_B \cdot \mu^{-1}$
۱	۱	۰٫۰۰۸۴	$2.002331846(17)$	g_μ	فاکتور g موئون $2(1 + a_\mu)$
10^{-24}g	10^{-27}kg	۰٫۵۹	$1.6726231(10)$	m_p	جرم پروتون
-	u	۰٫۱۲	$1.007276470(12)$		$m_p c^2$
-	MeV	۰٫۳۰	$938.27231(28)$		برحسب الکترون ولت
۱	۱	۰٫۲۰	$1836.152701(37)$	m_p/m_e	نسبت جرم پروتون-الکترون
۱	۱	۰٫۱۵	$8.98802444(13)$	m_p/m_μ	نسبت جرم پروتون-موئون
-	10^7Ckg^{-1}	۰٫۳۰	$9.5788309(29)$	e/m_p	بار ویژه پروتون
$10^{12} \text{esu g}^{-1}$	-	۰٫۳۰	$2.87166126(86)$		جرم مولی پروتون
g/mol	10^{-3}kg/mol	۰٫۱۲	$1.007276470(12)$	M_p	
10^{-12}cm	10^{-15}m	۰٫۸۹	$1.32141002(12)$	$\lambda_{C,p}$	طول موج کامپتون پروتون، $h/m_p c$
10^{-12}cm	10^{-16}m	۰٫۸۹	$2.10308937(19)$	$\lambda_{C,p}$	$\lambda_{C,p}/2\pi$
$10^{-22} \text{erg G}^{-1}$	10^{-26}JT^{-1}	۰٫۳۴	$1.41060761(47)$	μ_p	گشتاور مغناطیسی پروتون
10^{-2}	10^{-2}	۰٫۱۰	$1.521032202(15)$	μ_p/μ_B	برحسب مگنتون بور
۱	۱	۰٫۲۳	$2.792847386(63)$	μ_p/μ_N	برحسب مگنتون هسته‌ای
$\text{s}^{-1} \text{G}^{-1}$	$10^7 \text{s}^{-1} \text{T}^{-1}$	۰٫۳۰	$26752.1218(81)$	γ_p	نسبت زیرو مغناطیسی پروتون
10^{-24}g	10^{-27}kg	۰٫۵۹	$1.6749286(10)$	m_n	جرم نوترون

یکای CGS	یکای SI	خطای نسبی pp m	مقدار (و خطا)	نماد	کمیت
-	u	۰٫۱۴	۱٫۰۰۸۶۶۴۹۰۴(۱۴)		$m_n c^2$ برحسب الکترون ولت
-	MeV	۰٫۳۰	۹۳۹٫۵۶۵۳(۲۸)		نسبت جرم نوترون-الکترون
۱	۱	۰٫۲۲	۱۸۳۸٫۶۸۳۶۶۲(۴۰)	m_n/m_e	نسبت جرم نوترون-پروتون
۱	۱	۰٫۰۰۹	۱٫۰۰۱۳۷۸۴۰۴(۹)	m_n/m_p	نسبت جرم نوترون-پروتون
g/mol	10^{-27} kg/mol	۰٫۱۴	۱٫۰۰۰۸۶۶۴۹۰۴(۱۴)	M_n	جرم مولی نوترون
10^{-12} cm	10^{-15} m	۰٫۸۹	۲٫۳۱۵۹۱۱۰(۱۲)	$\lambda_{C,n}$	طول موج کامپتون نوترون $h/m_n c$
10^{-14} cm	10^{-16} m	۰٫۸۹	۲٫۱۰۰۱۹۴۴۵(۱۹)	$\bar{\lambda}_{C,n}$	$\lambda_{C,n}/2\pi$
10^{-22} erg G ⁻¹	10^{-26} J T ⁻¹	۰٫۴۱	۰٫۹۶۶۲۳۷۰۷(۴۰)	μ_n	گشتاور مغناطیسی نوترون
10^{-2}	10^{-2}	۰٫۲۴	۱٫۰۴۱۸۷۵۶۳(۲۵)	μ_n/μ_B	برحسب مگنتون بور
۱	۱	۰٫۲۴	۱٫۹۱۳۰۴۲۷۵(۴۵)	μ_n/μ_N	برحسب مگنتون هسته‌ای
10^{22} mol ⁻¹	10^{23} mol ⁻¹	۰٫۵۹	۶٫۰۲۲۱۳۲۷(۳۶)	N_A	ثابت آووگادرو
10^{-24} g	10^{-27} kg	۰٫۵۹	۱٫۶۶۰۵۴۰۲(۱۰)	u	یکای جرم اتمی (^{12}C) $u = \frac{1}{12} m(^{12}C)$ برحسب الکترون ولت uc^2
-	MeV	۰٫۳۰	۹۳۱٫۴۹۴۳۲(۲۸)		
-	C mol ⁻¹	۰٫۳۰	۹۶۴۸۵٫۳۰۹(۲۹)	F	ثابت فاراده
10^{14} esu mol ⁻¹	-	۰٫۳۰	۲٫۸۹۲۵۵۶۸۰(۸۷)		
10^9 erg mol ⁻¹ K ⁻¹	J mol ⁻¹ K ⁻¹	۸٫۴	۸٫۳۱۴۵۱۰(۷۰)	R	ثابت مولی گاز
10^{-16} erg K ⁻¹	10^{-23} J K ⁻¹	۸٫۵	۱٫۳۸۰۶۵۸(۱۲)	k	ثابت بولتزمن، R/N_A
-	10^{-5} e V K ⁻¹	۸٫۴	۸٫۶۱۷۳۸۵(۷۳)		برحسب الکترون ولت
10^{10} Hz K ⁻¹	10^{10} Hz K ⁻¹	۸٫۴	۲٫۰۸۳۶۷۴(۱۸)		k/h برحسب هرتز حجم مولی (گاز کامل)، RT/p $T = ۲۷۳٫۱۵K$ $p = 10^{12} 25 Pa$
L/mol	L/mol	۸٫۴	۲۲٫۴۱۴۱۰(۱۹)	V_m	ثابت لوشمیت
10^{19} cm ⁻²	10^{25} m ⁻²	۸٫۵	۲٫۶۸۶۷۶۳(۲۳)	n_0	N_A/V_m
10^{-5} erg s ⁻¹ cm ⁻² K ⁻²	10^{-8} W m ⁻² K ⁻²	۳۴	۵٫۶۷۰۵۱(۱۹)	σ	ثابت استگان-بولتزمن
10^{-5} erg s ⁻¹ cm ²	10^{-16} W m ²	۰٫۶۰	۳٫۷۴۱۷۷۴۹(۲۲)	c_1	$(\pi^2/60) k^2 / h^2 c^2$
10^2 cm K	m K	۸٫۴	۰٫۱۴۳۸۷۶۹(۱۲)	c_2	ثابت تابش اول $2\pi hc^2$
10^{-1} cm K	10^{-2} m K	۸٫۴	۲٫۸۹۷۷۵۶(۲۴)	b	ثابت تابش دوم hc/k
					ثابت قانون جابه‌جایی وین $b = \lambda_{max} T =$ $c_2 / 4.96511423 \dots$

پیوست ۲

رابطه بین یکاهای SI و CGS

در دستگاه SI، یکاهای پایه‌ای که در الکترودینامیک به کار می‌روند عبارت‌اند از متر، کیلوگرم، ثانیه و آمپر؛ در نتیجه، این دستگاه راگاهی MKSA می‌نامند. آمپر (A) به صورت مقدار جریانی که بین دو سیم مستقیم موازی بسیار دراز نیروی مغناطیسی معینی در واحد طول ایجاد می‌کند تعریف می‌شود. یکای بار الکتریکی کولن (C) است که یکای فرعی محسوب می‌شود:

$$1 \text{ ثانیه} \times 1 \text{ آمپر} = 1 \text{ کولن}$$

معادلات الکترودینامیک در دستگاه CGS الکتروستاتیک یا گاوسی و دستگاه SI متفاوت‌اند زیرا در دستگاه SI خلاً مانند محیطی عادی با گذردهی ϵ_0 و تراوایی μ_0 در نظر گرفته می‌شود. علاوه بر این، ضرایب مختلف اضافی 4π برای ساده‌شدن فرمولهایی که در مهندسی زیاد به کار برده می‌شوند در بعضی معادلات وارد شده‌اند.

به علت این تفاوتها، یکاهای SI و CGS برای کمیتهای الکتریکی و مغناطیسی ابعاد یکسان ندارند، و نمی‌توان آنها را اضعاف یا اجزاء یکدیگر در نظر گرفت. اما برای هر مقدار معینی از یک کمیت فیزیکی — مثلاً بار الکتریکی الکترون — تناظری بین مقادیر عددی CGS و SI این بار وجود دارد. در جدول پ-۱ روابط بین مقادیر عددی کمیتهای فیزیکی در دستگاههای SI و CGS آورده شده‌اند. برای مثال، مطابق این جدول، ۱ کولن بار متناظر است با 10^9esu $\times 2.998$. در نتیجه، بار الکترون را، که در CGS برابر است با 10^{-10}esu $\times -4.80$ ، می‌توان در SI از تقسیم بر

جدول پ.۱ روابط عددی^۱

مقدار در یکاهای CGS	مقدار در یکاهای SI	کمیت فیزیکی
$۲۹۹۸ \times ۱۰^۹ \text{esu}$	$\Leftrightarrow ۱ \text{coulomb}(C)$	بار
$۲۹۹۸ \times ۱۰^۹ \text{esu/cm}^۲$	$\Leftrightarrow ۱ \text{coulomb/m}^۲(C/m^۲)$	چگالی بار
$۱/(۲۹۹۸) \times ۱۰^{-۹} \text{statV/cm}$	$\Leftrightarrow ۱ \text{volt/m}(V/m)$	میدان الکتریکی E
$۱/(۲۹۹۸) \text{statV}$	$\Leftrightarrow ۱ \text{volt}(V)$	پتانسیل
$۲۹۹۸ \times ۱۰^{۱۱} \text{esu.cm}$	$\Leftrightarrow ۱ \text{coulomb.m}(C.m)$	گشتاور دوقطبی
$۲۹۹۸ \times ۱۰^۵ \text{esu/cm}^۲$	$\Leftrightarrow ۱ \text{coulomb/m}^۲(C/m^۲)$	قطبش
$۲۹۹۸ \times ۴\pi \times ۱۰^۵ \text{statV/cm}$	$\Leftrightarrow ۱ \text{coulomb/m}^۲(C/m^۲)$	میدان الکتریکی D
$(۲۹۹۸)^۲ \times ۱۰^{۱۱} \text{cm}$	$\Leftrightarrow ۱ \text{farad}(F)$	ظرفیت
$۱۰^۹ G$	$\Leftrightarrow ۱ \text{tesla}(T)$	میدان مغناطیسی B
$۲۹۹۸ \times ۱۰^۹ \text{stat A}$	$\Leftrightarrow ۱ \text{ampere}(A)$	جریان
$۲۹۹۸ \times ۱۰^۵ \text{stat A/cm}^۲$	$\Leftrightarrow ۱ \text{ampere/m}^۲(A/m^۲)$	چگالی جریان
$(۲۹۹۸)^۲ \times ۱۰^۹ \text{s}^{-۱}$	$\Leftrightarrow ۱ \text{ohm}^{-۱}.m^{-۱}(\Omega^{-۱}.m^{-۱})$	رسانندگی
$۱/(۲۹۹۸)^۲ \times ۱۰^{-۹} \text{s}$	$\Leftrightarrow ۱ \text{ohm.m}(\Omega.m)$	مقاومت ویژه الکتریکی
$۱/(۲۹۹۸)^۲ \times ۱۰^{-۱۱} \text{scm}^{-۱}$	$\Leftrightarrow ۱ \text{ohm}(\Omega)$	مقاومت الکتریکی
$۱۰^۹ Gcm^۲$	$\Leftrightarrow ۱ \text{ampere.m}^۲(A.m^۲)$	گشتاور مغناطیسی
$۱۰^{-۹} G$	$\Leftrightarrow ۱ \text{ampere/m}(A/m)$	مغناطیدگی
$۴\pi \times ۱۰^{-۹} G$	$\Leftrightarrow ۱ \text{ampere.turn/m}(A/m)$	میدان مغناطیسی H
$۱۰^۹ G/cm^۲$	$\Leftrightarrow ۱ \text{weber}(Wb)$	شار مغناطیسی
$۱/(۲۹۹۸)^۲ \times ۱۰^{-۱۱} \text{s}^۲.cm^{-۱}$	$\Leftrightarrow ۱ \text{henry}(H)$	القائیدگی

۱. ضریب عددی ۲۹۹۸ که در این جدول ظاهر شده است همان ضریبی است که از سرعت نور ناشی می‌شود. مقدار دقیق آن ۲۹۹۷۹۲۴۵۸ است.

$۱۰^۹ \times ۲۹۹۸$ به دست آورد:

$$۴۷۸۰ \times ۱۰^{-۱۰} \text{esu} \Leftrightarrow \frac{۴۷۸۰ \times ۱۰^{-۱۰}}{۲۹۹۸ \times ۱۰^۹} C = ۱۶۰ \times ۱۰^{-۱۹} C$$

توجه کنید که این فرمول به صورت هم‌ارزی نوشته شده است نه تساوی، زیرا یکاهای CGS و SI از لحاظ ابعادی باهم تفاوت دارند.

هر یک از معادلات الکتروپوینامیک به زبان CGS (که در این کتاب به کار رفته است) را

می‌توان با تعویضهای مناسب تمام کمیات الکترومغناطیسی موجود در این معادلات به زبان SI ترجمه کرد. در جدول پ-۲ تعویضهایی که این ترجمه را از یک زبان به زبان دیگر انجام می‌دهند آورده شده‌اند. برای مثال، با تعویضهای مربوط به q ، \mathbf{E} ، \mathbf{B} و c که در جدول آمده‌اند، معادله نیروی لورنتس:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \text{ (CGS)}$$

به صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{F} = \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \sqrt{4\pi\epsilon_0} \mathbf{E} + \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \mathbf{v} \sqrt{\mu_0\epsilon_0} \times \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \mathbf{B}$$

یعنی

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ (SI)}$$

توجه کنید که می‌توان از این جدول برای ترجمه معادلات از زبان SI به زبان CGS نیز استفاده کرد. برای مثال، معادله SI برای واگرایی \mathbf{D} ، یعنی

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \text{ (SI)}$$

به صورت زیر در می‌آید

$$\nabla \cdot \left(\sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi}} \mathbf{D} \right) = \sqrt{4\pi\epsilon_0} \rho$$

پس از حذف عامل مشترک $\sqrt{\epsilon_0}$ به دست می‌آوریم

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \text{ (CGS)}$$

که در واقع معادله درست CGS است.

SI	CGS	کمیت
$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$	c	سرعت نور
$\frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	q	بار
$\frac{\rho}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	ρ	چگالی بار
$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \cdot \mathbf{E}$	\mathbf{E}	میدان الکتریکی E
$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \cdot \Phi$	Φ	پتانسیل
$\frac{\mathbf{P}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	\mathbf{P}	گشتاور دو قطبی
$\frac{\mathbf{P}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	\mathbf{P}	قطبش
$\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}} \mathbf{D}$	\mathbf{D}	میدان الکتریکی
$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$	ϵ	ثابت دی الکتریک
$\frac{C}{4\pi\epsilon_0}$	C	ظرفیت
$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \mathbf{B}$	\mathbf{B}	میدان مغناطیسی B
$\frac{I}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	I	جریان
$\frac{\mathbf{j}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	\mathbf{j}	چگالی جریان
$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}$	σ	رسانندگی
$4\pi\epsilon_0 \cdot \rho$	ρ	مقاومت ویژه الکتریکی
$4\pi\epsilon_0 \cdot R$	R	مقاومت الکتریکی
$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \mathbf{m}$	\mathbf{m}	گشتاور مغناطیسی
$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \mathbf{M}$	\mathbf{M}	مغناطیدگی
$\sqrt{4\pi\mu_0} \cdot \mathbf{H}$	\mathbf{H}	میدان مغناطیسی H
$\frac{\mu}{\mu_0}$	μ	شار مغناطیسی
$4\pi\epsilon_0 \cdot L$	L	القاییدگی

حل مسائل زوج

فصل ۱

$$\hat{n} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(-3\hat{x} + 4\hat{y} + 5\hat{z}). \quad ۲$$

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{17}}(19\hat{x} + 5\hat{y} - 22\hat{z}). \quad ۴$$

$$\left(1 + \frac{3}{\sqrt{11}}\right)\hat{x} - \left(2 + \frac{3}{\sqrt{11}}\right)\hat{y} - \left(2 - \frac{9}{\sqrt{11}}\right)\hat{z}. \quad ۶$$

$$\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{z}, \hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{\rho}, \hat{\rho} \times \hat{z} = -\hat{\phi}. \quad ۸$$

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad ۱۴$$

ماتریس وارون، ترانهاد این ماتریس است.

$$A_\rho = -\frac{3}{\sqrt{5}}, A_\phi = -\frac{4}{\sqrt{5}}, A_z = 3; A_r = -\frac{3}{\sqrt{5}}, A_\theta = -\frac{4}{\sqrt{5}}, A_\phi = -3. \quad ۱۶$$

$$n = -3 \text{ (ب)} \quad \Phi = \frac{1}{n+2} r^{n+2} \text{ (الف)}. \quad ۲۲$$

$$\frac{17\pi}{3} CR^2. \quad ۳۲$$

فصل ۲

$$E = \hat{r} \frac{q}{r^2} (1 + \kappa r) e^{-\kappa r} \text{ خیر!}. \quad ۲$$

$$F = \frac{L^2}{Q^2} \ln \left[\frac{(d+L)^2}{(d+2L)d} \right] \quad .۴$$

$$2\pi\sigma z \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + R_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R_2^2}} \right) \hat{z} \quad .۶$$

$$\nu = ۷,۲ \times ۱۰^{۱۵} \text{Hz} \quad .۸$$

۱۰. رادیان ۰.۳۹

۱۲. الف) برای $E_x = 4\pi\rho D$, $x \leq -D$ برای $E_x = -4\pi\rho D$, $-D < x < D$ برای $E_x = 4\pi\rho x$ (الف)
 ب) ۰

۱۴. $2\lambda a/R^2$ که در آن a بردار جابه‌جایی از محور استوانه به محور کاواک است.

$$\Phi = \frac{Q}{L} \ln \left[\frac{x + L/2 + \sqrt{(x + L/2)^2 + y^2 + z^2}}{x - L/2 + \sqrt{(x - L/2)^2 + y^2 + z^2}} \right] \quad \text{(الف)} \quad .۱۶$$

$$\Phi = \frac{Q}{L} \ln \left[\frac{d + L/2 + \sqrt{(d + L/2)^2 + R^2}}{d - L/2 + \sqrt{(d - L/2)^2 + R^2}} \right]; \quad .۱۸$$

$$E = -\frac{Q}{L} \left[\frac{1}{\sqrt{(d + L/2)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(d - L/2)^2 + R^2}} \right]$$

$$\Delta\Phi = \left(\frac{4\pi k}{(n+3)(n+2)} \right) (a^{n+2} - b^{n+2}) \quad \text{(ب)} \quad E = \frac{4\pi k r^{n+1}}{n+3} \hat{r} \quad \text{(الف)} \quad .۲۰$$

$$\Phi = \frac{q}{\sqrt{r^2 + b^2/4 + rb \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{r^2 + b^2/4 - rb \cos \theta}} \quad .۲۲$$

$$E_r = \frac{q(r + \frac{1}{2}b \cos \theta)}{(r^2 + b^2/4 + rb \cos \theta)^{3/2}} - \frac{q(r - \frac{1}{2}b \cos \theta)}{(r^2 + b^2/4 - rb \cos \theta)^{3/2}}$$

$$E_\theta = -\frac{qb \sin \theta}{(r^2 + b^2/4 + rb \cos \theta)^{3/2}} - \frac{qb \sin \theta}{(r^2 + b^2/4 - rb \cos \theta)^{3/2}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{12bqE}{ml^2}} \quad .۲۴$$

$$\tau_{\text{دو قطبی}} = -\frac{pq' \sin \theta}{r^2}; \tau_{\text{بار}} = \frac{pq' \sin \theta}{r^2} \quad .۲۶$$

$$\Phi = \frac{q}{\sqrt{r^2 - \epsilon ar \cos \alpha + a^2}} - \frac{q/a^3}{\sqrt{r^2 - \frac{\epsilon}{a} ar \cos \alpha + a^2/a^3}} \quad .۴$$

$$\sigma = \frac{q}{4\pi a^2} \frac{\lambda}{(1 - \epsilon \cos \alpha)^{3/2}}$$

$$\Phi = 2\lambda \ln \left[\frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{\sqrt{y^2 + (z + 2b)^2}} \right] \quad .۶$$

۰.۳۶eV (ب) $\frac{q^2}{4b}$ ، نه (الف) .۸

با $\Phi = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \sinh(\gamma_{mn} z)$.۱۰

$\gamma_{mn} = \sqrt{n^2 + m^2} \frac{\pi}{L}$ در آن $A_{mn} = \frac{4V_0}{\pi^2} \frac{[1 - (-1)^n][1 - (-1)^m]}{mn \sinh(\gamma_{mn} L)}$

$$\sigma = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) E \cdot \cos \phi \quad .۱۲$$

$$\Phi = - \sum_1^{\infty} \frac{4V_0}{\pi n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \frac{R^n}{\rho^n} \sin n\phi \quad .۱۴$$

$$\Phi = \sum_{\text{در } n} \frac{\lambda V_0}{\pi n} \frac{\rho^n}{R^n} \sin n\phi \quad .۱۶$$

$\Phi = \sum B_l R^{-l-1} P_l(\cos \theta)$ که در آن .۱۸

$$B_l = (2l + 1)V_0 R^{l+1} \frac{1}{2^{l+1}} \frac{(-1)^{(l+1)/2} (l+1)!}{\{[(l+1)/2]!\}^2} \frac{1}{l}$$

$$\Phi = -E \cdot r \cos \theta + E \cdot \frac{R^2}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{r} \quad .۲۰$$

$$E = 4\pi\sigma_0; p = 4\pi\sigma_0 R^2 \quad .۲۲$$

$$\Phi = -\frac{2}{3}\pi\rho \cdot r^3 + A_0 + A_1 r \cos \theta + \frac{B_0}{r} + \frac{B_1}{r^2} \cos \theta \quad .۲۴$$

$A_0 = \frac{2}{3}\pi\rho \cdot (a^3/b - b^3) - 2V_0$, $A_1 = \frac{V_0}{a - b^2/a^2}$ در آن

$$B_0 = \frac{2}{3}\pi\rho \cdot (b^3 - a^3) + 2V_0, B_1 = \frac{V_0}{1/a^2 - a/b^2}$$

$$Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{1}{2} b^2 Q, Q_{zz} = -b^2 Q, Q_{xy} = Q_{yz} = Q_{xz} = 0. \quad ۲۶$$

$$\Phi = \frac{Q}{r} + 0 + \frac{1}{r^3} \frac{b^2 Q}{4} (x^2 + y^2 - 2z^2)$$

$$\frac{q}{2r^2} [\Delta(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x})^2 - 2r'^2 r^2 \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}]. \quad ۲۸$$

$$\Phi = -2\pi\sigma z - \frac{1}{r^3} \frac{\pi R \Delta R \sigma b^2}{2} (x^2 + y^2 - 2z^2). \quad ۳۲$$

فصل ۴

$$\alpha_r = -\tan^{-1} \left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_1} \tan \alpha_1 \right); E_r = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_1 \cos \alpha_1}{\epsilon_r} \right)^2 + \sin^2 \alpha_1} E_1. \quad ۴$$

$$E_r = 1.9 \text{ kV/cm}, \quad E = \frac{q}{\epsilon r^2}, \quad \Phi = \frac{q}{\epsilon r} \text{ (الف)}. \quad ۶$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{2\epsilon}{\epsilon + 1} \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}|} \text{ بالا}; \quad \Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}|} - \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{q}{|\mathbf{x} + \mathbf{d}|} \text{ پایین}. \quad ۸$$

$$\Phi = \frac{V \ln(1 + bz/a)}{\ln(1 + bd/a)} + \text{const}; \quad E = -\frac{bV}{(a + bz) \ln(1 + bd/a)}. \quad ۱۲$$

$$\sigma_P = -\frac{1 - 1/(a + bd)}{4\pi} \frac{bV}{\ln(1 + bd/a)}; \quad \sigma_P = \frac{1 - 1/a}{4\pi} \frac{bV}{\ln(1 + bd/a)}$$

$$E_{\text{بحرانی}} = 7.8 \times 10^2 \text{ statV/m}; \quad E_{\text{بحرانی}} \text{ افزایش می یابد, } E_{\text{بحرانی}} \text{ کاهش می یابد}. \quad ۱۴$$

$$\mathbf{E} = \frac{2\epsilon E_0}{1 + \epsilon} \hat{\mathbf{x}} \text{ داخل حفره}; \quad \Phi = -\frac{2\epsilon E_0}{1 + \epsilon} \rho \cos \phi. \quad ۱۶$$

$$\Phi = -E_0 \rho \cos \phi + \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} E_0 R^2 \frac{\cos \phi}{\rho}$$

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{x}} + \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} E_0 R^2 \left(\frac{\cos \phi}{\rho^2} \hat{\rho} + \frac{\sin \phi}{\rho^2} \hat{\phi} \right); \quad \sigma_P = \frac{2E_0 \cos \phi}{4\pi} \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}$$

$$\Phi = -E_0 \rho \cos \phi + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} E_0 R^2 \frac{\cos \phi}{\rho}; \quad \text{داخل } \Phi = -\frac{2E_0}{\epsilon + 1} \rho \cos \phi. \quad ۱۸$$

$$E_r = -Ar(2 \cos^2 \theta - 1), \quad E_\theta = 2Ar \cos \theta \sin \theta \text{ (الف)}. \quad ۲۰$$

$$\Phi = Ar^2 \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2} + \frac{2AR^3}{r^2} \frac{1 - \epsilon}{2\epsilon + 3} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2} \text{ برای } r > R; \text{ (ب)}$$

$$\Phi = \frac{5Ar^2}{2\epsilon + 3} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{2} \text{ برای } r < R$$

$$\Phi = -E \cdot r \cos \theta, \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \text{ برای } r < R_1; \quad .۲۲$$

$$\Phi = -\frac{E_0}{3} \frac{1 + 2\epsilon}{\epsilon} r \cos \theta + \frac{E_0 R_1^3}{3} \frac{1 - \epsilon \cos \theta}{r^2} \text{ برای } R_1 < r < R_2;$$

$$\Phi = -E_0 \cdot r \cos \theta + E_0 (R_2^3 - R_1^3) \frac{\epsilon - 1 \cos \theta}{3\epsilon r^2} \text{ برای } r > R_2$$

فصل ۵

$$U = \frac{Q^2}{L^2} \left[(2L + d) \ln \left(\frac{2L + d}{L + d} \right) - d \ln \left(\frac{L + d}{d} \right) \right]; \quad .۲$$

$$F = -\frac{Q^2}{L^2} \left[\ln \left(1 + \frac{L}{L + d} \right) - \ln \left(1 + \frac{L}{d} \right) \right].$$

$$n < \frac{5}{2} \text{ برای } U = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi k}{3 - n} \right)^2 \frac{R^{5-2n}}{5 - 2n} \quad .۴$$

$$.۶ \text{ (الف) } 1.6 \times 10^{-2} \text{ erg} \quad \text{(ب) } 1.3 \times 10^{-2} \text{ erg} \quad \text{(ج) } 1.99 \times 10^{-2} \text{ erg}$$

.۸

$$\mathbf{E} = q \frac{\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{z}}d}{|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{z}}d|^3} + Q \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \text{ برای } |\mathbf{x}| > R; \quad \mathbf{E} = q \frac{\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{z}}d}{|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{z}}d|^3} + Q \frac{\mathbf{x}}{R^2} \text{ برای } |\mathbf{x}| < R \text{ (الف)}$$

$$R^2 E_r = \left[\frac{\epsilon_1}{3} \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \right)^2 + \frac{2\epsilon_2}{2} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \right)^2 \right] \quad .۱۲$$

$$C = \frac{1 + \epsilon}{2} R \quad .۱۴$$

$$E = \frac{3}{2} \frac{R \Delta \Phi}{r^2}, U = \frac{3}{4} \epsilon R (\Delta \Phi)^2 \text{ (ب)}, C = \frac{3}{2} \epsilon R \text{ (الف)} \quad .۱۶$$

$$F = -9.9 \times 10^7 \text{ dyne} \quad .۱۸$$

$$U = \frac{1}{12} \frac{Q^2}{R} \text{ (ب)} \quad c_{kl} = R \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & 9 \end{bmatrix} \text{ (الف)} \quad .۲۰$$

فصل ۶

$$.۲ \text{ (الف) } 1.95 \times 10^{-2} \text{ eV} \quad \text{(ب) } 1.35 \times 10^{-7} \quad \text{(ج) نه}$$

۸. توکان زودتر ظاهر می‌شود. ۱٫۲۲ ساعت

$$۱۴. ۲٫۰ \times ۱۰^{-۱۰} \text{s}$$

$$۱۸. ۶ \times ۱۰^{-۱۲} \text{s}$$

$$۲۰. \Delta\tau = \frac{1}{a_0} \left[V_0 \sqrt{1 - 4V_0^2} + \frac{1}{4} \sin^{-1} 2V_0 \right]; \Delta\tau = \frac{2V_0}{a_0} \sqrt{1 - V_0^2}$$

$$۲۲. V = ۰٫۹۲; ۵۰٫۲ \text{ سال}$$

فصل ۷

۲. (ب) بله

$$U = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} & -\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} & \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \end{bmatrix} e^{i\phi} \quad \text{۴. (ج)}$$

که در آن $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ و ϕ اختیاری است

$$۱۲. v = (1 - ۹٫۴ \times ۱۰^{-۲})c$$

$$۱۴. ۵۱ \text{ GeV}$$

$$۱۶. (الف) ۱۶۵ \text{ MeV} \quad (ب) ۵۷۸ \text{ MeV}$$

$$۱۸. ۱۹۸ \text{ MeV}, ۲۳۰ \text{ MeV}$$

$$۲۰. (ب) ۳٫۸ \times ۱۰^{۲۲} \text{ tons} \quad (ج) ۱۱ \text{ tons}$$

$$۲۶. -\frac{VI \sin \theta}{c^2 \sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

فصل ۸

$$۴. E = ۵ \text{ statV/cm}, B = ۵ \text{ G}$$

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{V}/c \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad .۶$$

$$1.3 \times 10^5 \text{G} \quad .۱۰$$

$$r > R \text{ برای } \mathbf{B} = \frac{2\lambda}{rc} \mathbf{V} \times \mathbf{r}; \quad r < R \text{ برای } \mathbf{B} = \frac{2\lambda r}{\epsilon R^2 c} \mathbf{V} \times \mathbf{r} \quad .۱۲$$

$$\Phi = -\gamma E_0 z, \quad \mathbf{A} = -\frac{\gamma V E_0}{c} z \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{ب}) \quad \mathbf{E} = \gamma \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{B} = \frac{\gamma}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{E}_0 \quad (\text{الف}) \quad .۱۴$$

$$\sigma = \pm \frac{\gamma E_0}{4\pi}, \quad \mathbf{j} = \pm \frac{\gamma V E_0}{4\pi} \hat{\mathbf{y}}; \quad (\text{ج})$$

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi} (E_0^2 + B_0^2) & 0 & 0 & \frac{1}{4\pi} E_0 B_0 \\ 0 & \frac{1}{4\pi} (B_0^2 - E_0^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4\pi} (E_0^2 - B_0^2) & 0 \\ \frac{1}{4\pi} E_0 B_0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\pi} (E_0^2 + B_0^2) \end{bmatrix} \quad .۱۸$$

۲۰. غلط است (برای حرکت موازی با \mathbf{E} بردار پوینتینگ واقعی صفر است).

۲۲.

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z = 0 \quad \text{که در آن } \mathbf{S} = \frac{V}{4\pi} \gamma q^2 \left(\gamma \frac{\gamma^2}{|\mathbf{x}'|^3} \hat{\mathbf{x}} - \frac{x' y'}{|\mathbf{x}'|^5} \hat{\mathbf{y}} \right)$$

$$F_z = \frac{L^2}{4\pi} (E_1^2 - E_2^2) \quad .۲۴$$

فصل ۹

$$, (1.4 \times 10^{-2} \text{dyne}) \hat{\mathbf{y}}; \quad (1.4 \times 10^{-2} \text{dyne}) \hat{\mathbf{y}} \quad .۲$$

$$\mathbf{B} = \frac{16}{c} \frac{IL^2}{(4z^2 + L^2) \sqrt{4z^2 + 2L^2}} \hat{\mathbf{z}} \quad .۶$$

$$\mathbf{B} = \frac{2\pi k}{c} (-\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}), \quad \frac{2\pi k}{c} (-\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}), \quad \frac{2\pi k}{c} (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}), \quad \frac{2\pi k}{c} (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) \quad .۸$$

به ترتیب برای ربع دایره‌های اول، دوم، سوم و چهارم.

$$10. \frac{2\pi k^2}{c^2}$$

$$11. B = 2Ih/cR^2 \text{ در جهت عمود برخط واصل بین مرکزها}$$

$$12. m = \frac{\omega Q}{4c} R^2$$

$$13. \text{(الف) } 8.1 \times 10^{25} \text{ Gcm}^2 \text{ (ب) قائم } 40^\circ, \text{ افقی } 24^\circ$$

$$14. B_z = \frac{2Q\omega}{cLR^2} \left[\sqrt{R^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2} \left(\frac{L}{2} - z\right) + \sqrt{R^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2} \left(\frac{L}{2} + z\right) + \left(\frac{L}{2} - z\right)^2 - \left(\frac{L}{2} + z\right)^2 \right] \text{ (الف)}$$

$$15. B_r = \frac{Q\omega}{2c} \left[\frac{R^2}{r^2} \cos \theta + \frac{1}{2r^3} \left(\frac{R^2 L^2}{2} - R^2 \right) (\Delta \cos^2 \theta - 3 \cos \theta) + \dots \right]; \text{ (ب)}$$

$$16. B_\theta = \frac{Q\omega}{2c} \left[\frac{R^2}{2r^2} \sin \theta + \frac{3}{4r^3} \left(\frac{R^2 L^2}{2} - R^2 \right) (\Delta \cos^2 \theta - 1) \sin \theta + \dots \right]$$

$$17. B_z = \frac{2Q\omega}{cR^2} \left[\frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2z \right] \text{ (الف)}$$

$$18. B_r = \frac{Q\omega}{2c} \left[\frac{R^2}{r^2} \cos \theta - \frac{R^2}{2r^3} (\Delta \cos^2 \theta - 3 \cos \theta) + \dots \right]; \text{ (ب)}$$

$$19. B_\theta = \frac{Q\omega}{2c} \left[\frac{R^2}{2r^2} \sin \theta - \frac{3R^2}{4r^3} (\Delta \cos^2 \theta - 1) \sin \theta + \dots \right]$$

$$20. \text{(الف) } 9.8 \text{ G } \text{(ب) } 28 \text{ GeV/c}$$

$$21. x = a \cos \omega t, y = a \sin \omega t, z = -\frac{1}{2} \frac{e}{m_e} E t^2, \omega = \frac{eB}{m_e c}$$

$$22. 30. 52 \text{ Hz}$$

۳۲. عقبی؛ جلویی.

۴۰. ۳۰۰ G

۴۲. $۱٫۲ \times ۱۰^{-۱۲}$ V یا $۴٫۱ \times ۱۰^{-۱۵}$ statV

فصل ۱۰

$$۲. \mathcal{E} = \frac{2Ivl}{c^2 r}; E' = \frac{2Iv}{c^2 r}$$

$$۴. B = \frac{cRQ}{AN}$$

۸. ۱۳ G; $۶٫۱ \times ۱۰^{-۷}$ statV/cm

$$۱۲. \frac{M}{l} = \frac{4\pi d}{c^2 h}$$

$$۱۶. \mathcal{E} = \frac{2b}{c^2} \frac{dI}{dt} \ln \left[\frac{(d+h+a)h}{(d+h)(h+a)} \right]; M = \frac{2b}{c^2} \ln \left[\frac{(d+h+a)h}{(d+h)(h+a)} \right]$$

$$۱۸. L = \frac{2N^2}{c^2} (R_1 - R_2) \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

۲۰. $I \simeq ۲٫۸ \times ۱۰^{۱۵}$ stat A

$$۲۲. M = \frac{2\pi^2}{c^2} R' \left[\frac{R'}{R} - \frac{3R'^2}{8R^2} - \frac{۱۵R'^5}{64R^5} + \dots \right]$$

$$۲۴. P = \frac{V_s^2 \cos(\omega t - \phi) \cos \omega t}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}; \bar{P} = \frac{V_s^2 \cos \phi}{2\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

$$۲۶. Z = \frac{1}{i/\omega L + 1/R - iL\omega}; \text{ماکسیمم برای } \omega = 0 \text{ و } \omega = \infty; \text{مینیمم برای}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

۲۸. (الف) ۵۰ km, $۱۵c$, ۱۳۷ MeV/c (ب) ارتفاع $۳۵٫۳^\circ$ (ج) $۵۱٫۷^\circ$ بحرانی α

.٣٠

$$E_z = \frac{\gamma\omega}{c^2} I. \sin \omega t \ln \frac{b}{\rho}; B_\phi = \frac{\gamma\omega^2}{c^2} I. \cos \omega t \left(-\rho \ln \frac{\rho}{b} + \frac{\rho}{4} + \frac{a^2}{\rho} \ln \frac{a}{b} - \frac{a^2}{4\rho} \right)$$

$$B_{(r)} = -\frac{\gamma\omega^2 B_0}{4c^2} \rho^2 \cos \omega t \quad (\text{ب}) \quad E_{(1)} = \frac{\omega B_0}{2c} \rho \sin \omega t \quad (\text{الف}) \quad .٣٢$$

$$E_{(r)} = -\frac{\gamma\omega^2 B_0}{16c^2} \rho^2 \sin \omega t \quad (\text{ج})$$

فصل ١١

$$\omega = 25 \times 10^6 \text{ rad/s} \quad .٢$$

$$B = 3.4 \times 10^5 \text{ G/cm} \quad .٤$$

$$\chi = 1.1 \times 10^{-10} \quad .٦$$

$$F = \frac{\gamma\mu II'}{c^2 d} \quad .٨$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0, \mathbf{H} = \mathbf{B}_0 \quad (\text{ب}) \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu}, \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu} \quad (\text{الف}) \quad .١٠$$

$$B = 5500 \text{ G}, H = 1.38 \text{ G}, M = \frac{B - H}{4\pi} \simeq 440 \text{ G}, \quad .١٢$$

$$k = 1.3 \times 10^{12} \text{ statA/cm}$$

$$B \simeq 11000 \text{ G} \quad .١٤$$

$$B_z = \gamma\pi M \left[\frac{L/2 - z}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} + \frac{L/2 + z}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} \right] \quad (\text{الف}) \quad .١٦$$

$$B_r = \gamma\pi ML \left[\frac{R^2}{r^2} \cos \theta + \frac{R^2}{4r^2} \left(\frac{L^2}{R^2} - 3 \right) (\Delta \cos^2 \theta - 3 \cos \theta) + \dots \right]; (\text{ب})$$

$$B_\theta = \gamma\pi ML \left[\frac{R^2}{2r^2} \sin \theta + \frac{3R^2}{16r^2} \left(\frac{L^2}{R^2} - 3 \right) (\Delta \cos^2 \theta - 1) \sin \theta + \dots \right]$$

$$K = \left[(2\mu + 1)(\mu + 2) - 2(\mu - 1)^2 \frac{a^2}{b^2} \right]^{-1},$$

$\Phi_M = -\mu B \cdot K r \cos \theta, H = -\nabla \Phi_M, B = H$ برای $r < a$;

$\Phi_M = -2(\mu + 1)B \cdot K r \cos \theta + \mu(\mu - 1)a^2 B \cdot K \frac{\cos \theta}{r^2}, H = -\nabla \Phi_M, B = \mu H$

برای $b > r > a$; $\Phi_M = -B \cdot r \cos \theta + (2\mu + 1)(\mu - 1)(b^2 - a^2)B \cdot K \frac{\cos \theta}{r^2}$

$H = -\nabla \Phi_M, B = H$ برای $r > b$

فصل ۱۲

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \theta' = \cos^{-1} \left(\frac{-V}{c} \right). ۲$$

۴۱s (ثانیه قوسی); $۱,۱ \text{ \AA}$. ۴

$۲,۹ \times ۱۰^{-۵} \text{ cm}, ۲,۱ \times ۱۰^{-۱۲} \text{ g}$. ۸

. ۱۲

$D'_{\parallel} = D_{\parallel}, D'_{\perp} = \gamma \left(D_{\perp} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{H} \right); \mathbf{H}'_{\parallel} = \mathbf{H}_{\parallel}, \mathbf{H}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{H}_{\perp} - \frac{V}{c} \times \mathbf{D} \right);$ (ج)

$\mathbf{P}'_{\parallel} = \mathbf{P}_{\parallel}, \mathbf{P}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{P}_{\perp} - \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{M} \right)$

$۳,۷۵۷^{\circ}, ۳,۷۴۵^{\circ}, ۳,۷۲۱^{\circ}$. ۱۴

$l^* = \frac{x}{\tan \{ \sin^{-1} [(1/1,۳۳) \sin(\tan^{-1} x / 0,5 \text{ m})] \}}$ (الف) . ۱۶

$l^* = \frac{x}{\tan \{ \sin^{-1} [(1/1,۳۳) \sin(\tan^{-1} x / 0,5 \text{ m})] \}}$ (ب)

۱۸. بله؛ بله؛ لازم است همزمان دو موج هم‌دوس از راست بالا و پایین بتابند.

$$۲۴. \theta \geq ۸۹,۸۸۹۸^\circ$$

۲۶. (الف) در صفحه xz می‌چرخد.

$$\frac{|E'_x|}{E_o} = \sqrt{(\gamma \beta \sin \theta)^2 - 1}, |E'_{oz}| = \gamma \beta \sin \theta \quad (\text{ب})$$

$$E''_o = -\frac{\gamma i(n'^2 - 1) \sin k'd}{e^{ik'd}(n' - 1)^2 - e^{-ik'd}(n' + 1)^2} E_o; \quad ۲۸$$

$$E'_o = -\frac{\gamma n' e^{ik'd}}{e^{ik'd}(n' - 1)^2 - e^{-ik'd}(n' + 1)^2} E_o$$

۳۰. با اختصارنویسی

$$\beta = \sqrt{\frac{\gamma \pi \sigma}{\mu' \omega}}$$

$$E''_o = \sqrt{\frac{(\cos \theta - \beta \cos \theta')^2 + \beta^2 \cos^2 \theta'}{(\cos \theta + \beta \cos \theta')^2 + \beta^2 \cos^2 \theta'}} E_o e^{i\delta}$$

$$\tan \delta = \frac{-2\beta \cos \theta \cos \theta'}{\cos^2 \theta - \beta^2 \cos^2 \theta'} \quad \text{که در آن}$$

$$\text{ضریب بازتاب} = \frac{(\cos \theta - \beta \cos \theta')^2 + \beta \cos^2 \theta'}{(\cos \theta + \beta \cos \theta')^2 + \beta \cos^2 \theta'}$$

$$۳۲. N > ۵,۱ \times ۱۰^8 / \text{cm}^2$$

فصل ۱۳

$$E_x = -\frac{qa^2 b}{\gamma c^2} \frac{1}{-1 + \sqrt{1 + b^2 a^2 / c^2}}, E_y = -\frac{qa^2}{\gamma c^2}, B_z = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \quad ۲$$

$$۶. ۷,۰ \times ۱۰^{-۲} \text{statV/cm} \text{ در مقایسه با } ۵,۳ \times ۱۰^{-۱۱} \text{statV/cm}$$

$$۸. E = \frac{\lambda}{45} \frac{mv_0^2}{c^2 Z} \quad ۸$$

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^{12} m_e^2}{c^2 \hbar^2 n^2}; t = \frac{3}{2} \frac{c^2 \hbar^2 n^2}{e^{10} m_e}; 1,4 \times 10^{-6} s; .10$$

$$ma + \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^2 v}; \frac{mv^2}{r} \text{ شعاعی}; \frac{2}{3} \frac{q^2 v^2}{c^2 r^2} \text{ ماسی}; .12$$

.14

$$P = \frac{q^2 a'^2}{2v^2} \left[\frac{3 - 2v'/c}{10(1 - v/c)^2} - \frac{3 + 2v'/c}{10(1 + v'/c)^2} - \frac{1}{3(1 - v'/c)^2} + \frac{1}{3(1 + v'/c)^2} \right]$$

.18

$$\mathbf{E} = \mu \frac{q}{c^2} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \times \{(\hat{\mathbf{n}} - \sqrt{\mu\epsilon} \mathbf{v}'/c) \times \mathbf{a}'\}}{(1 - \sqrt{\mu\epsilon} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]$$

$$\mathbf{B} = \mu \sqrt{\mu\epsilon} \frac{q}{c^2} \left[\frac{-\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a}'(1 - \sqrt{\mu\epsilon} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c) - \sqrt{\mu\epsilon}(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}'/c) \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a}'}{(1 - \sqrt{\mu\epsilon} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}'/c)^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]$$

فصل ۱۴

$$R = \frac{2,44}{c} = 8,13 \times 10^{-11} \text{ stat}\Omega \Leftrightarrow 73,1\Omega .2$$

۴. $\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{I_0^2 \sin^2(\pi \cos \theta)}{2\pi c \sin^2 \theta}$ ، این نقش تابش یک صفحه گرهی در $\theta = 90^\circ$ دارد، بر عکس نقش تابش آنتن تمام موج که یک ماکسیمم در $\theta = 90^\circ$ دارد.

۶. $\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{2I_0^2 \cos^2(\pi/2 \cos \theta)}{\pi c \sin^2 \theta} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \phi \right)$ ، این نقش تابش ماکسیممایی در $\theta = 90^\circ$ ، $\phi = 0^\circ$ و 180° دارد.

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{2I_0^2 \cos^2(\pi/2 \cos \theta)}{\pi c \sin^2 \theta} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \phi \right) .8$$

۱۰. الف) $5 \times 10^{15} / s$ (ب) $8 \times 10^{12} / s$ (ج) $2 \times 10^{13} / s$

۱۲. الف) $1,2 \times 10^{26} \text{ erg/s}$ (ج) دایره‌ای؛ خطی، در صفحه $x-y$

$$\bar{P} = \frac{1}{3c^2} \left(\frac{Q}{2Mc} \right)^2 S^2 B^2 .14$$

۱۶. (ب) خیر؛ بله.

$$P = \frac{1}{4\pi c^5} \left[4q\omega^2 a \sin^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]^2 \quad ۱۸$$

$$\frac{2}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{1}{15} \right)^2 \frac{mv^2}{c^5} \quad ۲۰$$

فصل ۱۵

۴. در $z = 0$ ، $z = d$: $\sigma = \pm \frac{E_0}{4\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos \omega t$

$$\kappa_x = \mp \frac{c^2 E_0}{4\omega a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin \omega t,$$

$$\kappa_y = \mp \frac{c^2 E_0}{4\omega b} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin \omega t.$$

در $x = 0$ ، $x = a$: $\sigma = 0$ ، $\kappa_z = \pm \frac{c^2 E_0}{4\omega a} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin \omega t$. در $y = 0$ ، $y = b$:

$$\sigma = 0$$
، $\kappa_z = \pm \frac{c^2 E_0}{4\omega b} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin \omega t.$

۶. معادله‌های ۷۲-۱۵ تا ۷۷-۱۵ را ببینید.

$$\bar{P} = \frac{B_0^2 ab \omega}{4\pi} \frac{\sqrt{\omega^2/c^2 - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2}}{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} \quad ۱۰$$

$$\bar{S}_z = \frac{B_0^2 \omega k}{4\pi [(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2]^2} \left[\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cos^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right. \\ \left. + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right] \quad ۱۲$$

$$\bar{T}^{xx} = \frac{B_0^2}{4\pi [(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2]} \left\{ \left[\left(\frac{\omega n \pi}{cb}\right)^2 + \left(\frac{kn\pi}{b}\right)^2 \right] \cos^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{\omega m \pi}{ca}\right)^2 + \left(\frac{km\pi}{a}\right)^2 \right] \sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] \cos^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right\}$$

$$x = 0, x = a : \kappa_y = \mp \frac{cB_0}{4\pi} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-i\omega t + ikz} \quad \text{در } ۱۴$$

$$\kappa_z = \mp \frac{cB_0}{4\pi} \frac{ik}{\omega^2/c^2 - k^2} \frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-i\omega t + ikz}, \sigma = \mp \frac{B_0}{4\pi} \frac{1}{\omega^2/c^2 - k^2} \\ \times \frac{i\omega\pi}{cb} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-i\omega t + ikz}$$

$$y = 0, y = b : \kappa_x = \pm \frac{cB_0}{4\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{b}\right) e^{-i\omega t + ikz} \quad \text{در}$$

$$\kappa_z = \pm \frac{cB_0}{4\pi} \frac{ik}{\omega^2/c^2 - k^2} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\omega t + ikz},$$

$$\sigma = \pm \frac{B_0}{4\pi} \frac{1}{\omega^2/c^2 - k^2} \frac{i\omega\pi}{ca} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\omega t + ikz}$$

۱۶

$$۴,۳۰ \times ۱۰^9 \text{ Hz}, ۳,۱۶ \times ۱۰^9 \text{ Hz}, ۲,۰۸ \times ۱۰^9 \text{ Hz}; ۲ \times ۱۰^5 \text{ cm}, ۳ \times ۱۰^5 \text{ cm},$$

$$۵ \times ۱۰^5 \text{ cm}$$

۱۸

$$E_x = 0, E_y = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}z\right), B_x = -E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}z\right), B_y = 0, \text{(الف)}$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}, v_p = c, v_g = c$$

$$Q\lambda, \frac{1}{2}\pi b \sqrt{\frac{\pi\sigma}{2\omega}} \text{(ب)}$$

$$\tan \gamma = \frac{\gamma b}{2} = -\frac{\gamma/h}{\sqrt{\omega^2(\mu\epsilon - 1)/c^2 - \gamma^2}}; \omega = \frac{\pi c/b}{\sqrt{\mu\epsilon - 1}} \quad ۲۲$$

فصل ۱۶

$$\text{خیر، تقریب فرانوفر در زاویه‌های} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^2 a^2 b^2 \sin^2(kax/2r_0) \sin^2(kby/2r_0)}{4\pi^2 (kax/2r_0)^2 (kby/2r_0)^2}; \quad ۲ \\ \text{بزرگ اعتبار ندارد.}$$

$$\bar{S} = \frac{ck^2 a^2 \cos^2 \alpha E_0^2 \sin^2\left(\frac{kax}{2r_0}\right) \sin^2\left(\frac{kay \cos \alpha}{2r_0}\right)}{4\pi^2 r_0^2 \left(\frac{kax}{2r_0}\right)^2 \left(\frac{kay \cos \alpha}{2r_0}\right)^2} \quad ۶$$

که در آن x و y فاصله عمودی از خط فرود است؛ ماکسیم مرکزی روی خط فرود است؛ پهناها عبارتند از $2\lambda/a \cos \alpha$ ، $2\lambda/a$.

۸. مدوله شدن شدت در نقاط (منطقه تاریک نقاط) با ضریب ۲ گسترش می یابد. فاصله های بین نقاط با ضریب ۲ فشرده می شود.

۱۰. 19° ; 19° .

$$\bar{S} = \frac{ck^2 a^2 b^2 E_0^2 \sin^2(kax/2r_0) \sin^2(kay/2r_0)}{\lambda \pi^2 r_0^2} \cos^2\left(\frac{kdx}{2r_0}\right) \quad .12$$

$$\bar{S} = \frac{cE_0^2}{32\pi} \times 0.064 \quad .14$$

$$\bar{S} = \frac{cE_0^2}{4\pi} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \mathcal{C}(w) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} - \mathcal{S}(w) \right]^2 \right\}, \text{ که در آن } w = \sqrt{\frac{k}{\pi r_0}} \frac{a}{2} \quad .16$$

$$\bar{S} = \frac{cE_0^2}{\lambda \pi} \left| 1 + \frac{i}{2} [\mathcal{C}(w_2) + i\mathcal{S}(w_2) - i\mathcal{C}(w_1) - i\mathcal{S}(w_1)] \right| \quad .18$$

$$\times [\mathcal{C}(v_2) + i\mathcal{S}(v_2) - \mathcal{C}(v_1) - i\mathcal{S}(v_1)] \Big|^2;$$

$$\bar{S} = \frac{cE_0^2}{\lambda \pi} |1 + 2i[\mathcal{C}(w) + i\mathcal{S}(w)][\mathcal{C}(v) + i\mathcal{S}(v)]|^2;$$

$$w = \sqrt{\frac{k}{\pi r_0}} \frac{a}{2}, v = \sqrt{\frac{k}{\pi r_0}} \frac{b}{2} \text{ که در آن}$$

۲۰.

$$\bar{S} = \frac{cE_0^2}{16\pi} \{ [\mathcal{C}(w_2) - \mathcal{C}(w_1)]^2 + [\mathcal{S}(w_2) - \mathcal{S}(w_1)]^2 \}; \bar{S} = \frac{cE_0^2}{4\pi} \{ [\mathcal{C}(w)]^2 + [\mathcal{S}(w)]^2 \}$$

$$w = \sqrt{\frac{k}{\pi r_0}} \frac{a}{2} \text{ که در آن}$$

کتابشناسی

در بخش اول این کتابشناسی بعضی کتابهای درسی دیگر در این زمینه معرفی می‌شود و در بخش دوم برای هر فصل مراجعی داده می‌شود.

کتابهای پیشنهادی

از کتابهای مربوط به دوره‌های تکمیلی کتابهای زیر جامع‌ترند

Jackson J D, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, 1975.

در این کتاب مفید تعادل معقولی بین دید فیزیکی و تکنیک ریاضی ایجاد شده، و مقدمه‌ی زیبایی بر تابع گرین آمده است.

Panofsky, W K H, & Phillips, M, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison Wesley, Reading Mass, 1962.

مرجع خوب دیگری در سطح لیسانس است.

Eyges L, *The Classical Electromagnetic Field*, Dover, New York, 1980.

یک کتاب بسیار خواندنی است که تلقی ماکروسکوپیک متداول از الکتریسیته و مغناطیس را به نقد می‌کشد، و نشان می‌دهد که میدان الکتریکی \mathbf{D} و میدان مغناطیسی \mathbf{H} زائدند.

Landau LD & Lifshitz E M, *Classical Theory of Fields*, Wiley, New York, 1962.

این کتاب مقدمه‌ی فشرده و واضحی بر الکتروپنایمیک، به‌عنوان یک نظریه‌ی میدان نسبیتی، بر مبنای رهیافت لاگرانژی است.

از کتابهایی که در سطح کارشناسی نوشته شده‌اند، کتابهای زیر قابل توجه‌اند

Booker H G, *Energy in Electromagnetism*, Institution of Electrical Engineers, London, 1982.

دید زنده و جذابی از الکترومغناطیس ایجاد می‌کند، که بیشتر به نقش نظری انرژی الکتریکی و مغناطیسی توجه دارد.

Carter G W, *The Electromagnetic Field*, 2nd ed, Elsevier, New York, 1967.

روی بعضی کاربردهای عملی که مورد توجه مهندسان است بیشتر تأکید شده، ولی با این حال توازن مطالب رعایت شده است.

Cook D M, *The Theory of the Electromagnetic Field*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N J, 1975.

شامل الگوریتم‌های کامپیوتر برای محاسبه انتگرالها و حل معادلات دیفرانسیل در الکترومغناطیس است (مثلاً، الگوریتمی برای ترسیم خطوط میدان).

Lorrain P, & Corson D, *Electromagnetic Fields and Waves* Freeman, San Francisco, 1970.

Reitz J R, Milford F J, & Christy R W, *Foundations of Electromagnetic Theory*, 3rd ed, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1979.

Wangsnes R K, *Electromagnetics Fields*, Wiley, New York, 1979.

نقص این شش کتاب این است که نسبتاً را به عنوان یک بحث جانبی در نظر گرفته‌اند، برعکس، Schwartz M, *Principles of Electrodynamics*, McGraw-Hill, New York, 1972.

رابطه نزدیک نسبیت و الکترودینامیک را قبول دارد و از این مطلب برای استنتاج قوانین ماکسول استفاده می‌کند.

در کتابهای زیر، با ریاضیات ساده‌تری، روی درک قوانین فیزیکی تأکید می‌شود:

Becker R, *Electromagnetics Fields and Interactions*, Dover, New York, 1982.

کتاب کلاسیکی است که سالها مورد استفاده بوده است. چاپ اول این کتاب، نوشته A. Föppl، قریب یکصد سال پیش منتشر شد و کتابی است که اینشتین با آن نظریه ماکسول را آموخت. این کتاب توسط M. Abraham و R. Becker مورد تجدید نظر قرار گرفته است. چاپ آخر آن نیز، مانند چاپهای قبل، از لحاظ نظم و انسجام مطالب ممتاز است.

Joos G, *Theoretical Physics*, Hafner Press, New York, 1950.

شامل بخش فشرده ولی جامعی درباره الکترودینامیک است.

Feynman R P, Leighton, R B, & Sands M, *The Feynman Lectures on Physics*, vols 1 & 2, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1964.

حاوی گنجینه‌ای از مباحث که دید دقیقی از فیزیک پایه و پدیده‌های پیچیده‌ای مانند انتشار نور در یک محیط مادی، نوسانهای الکترومغناطیسی خازن، انتقال فازهای ناشی از پتانسیل برداری،

و غیره به دست می دهد.

Duffin W J, *Electricity and Magnetism*, Wiley, New York, 1973.

تأکید بر مبانی تجربی الکترومغناطیس دارد و از نتایج استاندارد، به نتیجه های فرعی ساده و هوشمندانه ای می رسد. در تفسیرهای آخر هر فصل به سوالات سرگرم کننده ای که اغلب جدی گرفته نمی شوند، پرداخته شده است؛ از جمله اینکه، خطوط میدان الکتریکی در یک سیم حامل جریان، چگونه می توانند راه پریپیچ و خم یک شبکه معمولی را دنبال کنند.

Purcell E M, *Electricity and Magnetism*, McGraw-Hill, New York, 1965.

مباحث دقیق و روشنی در مورد اصول بنیادی الکترومغناطیس دارد، و بخصوص تحلیل زیبایی از میدان الکتریکی بارهای متحرک ارائه می کند، و اینکه چگونه اعمال نظریه نسبیت روی بار متحرک در یک سیم، منجر به این نتیجه می شود که میدان مغناطیسی باید وجود داشته باشد.

تحول تاریخی الکتریسیته و مغناطیس به تفصیل در کتاب زیر بحث شده است

Whittaker E A, *A History of the theories of Aether and Electricity*, Harper & Row, New York, 1960.

اگرچه Whittaker در مورد قرن هجدهم و قرن نوزدهم شرح کافی دارد، اما دیدگاهش در مورد قرن بیستم با این سعی نامعقول که در نظریه نسبیت به لورنتس بیش از اینشتین اهمیت بدهد، مخدوش شده است.

مراجع دیگر

فصل ۱- حساب برداری

Schey H M, *Div, Grad, Curl*, Norton, New York, 1973.

یک «متن درسی غیر رسمی» برای حساب برداری است که مروری فشرده و خواندنی بر عملیات دیفرانسیل و انتگرال گیری با بردارها دارد.

بررسیهای پیچیده تر و جدیتر درباره حساب برداری در کتابهای زیر پیدا می شود

Brand L, *Vector Analysis*, Wiley, New York, 1957.

که شامل فصلهایی در مورد کاربرد حساب برداری در مکانیک ذرات، مکانیک سیالات، و الکترو دینامیک است.

Margenau H, & Murphy G M, *The Mathematics of Physics and Chemistry*, Van Nostrand, Princeton, 1943.

Wills A P, *Vector Analysis with an Introduction to Tensor Analysis*, Dover, New York, 1958.

Wrede R C, *Introduction to Vector and Tensor Analysis*, Wiley, New York, 1963.

تعریف کلی بردارها و تانسورها از هر مرتبه‌ای، به وسیلهٔ خواص تبدیلی آنها تحت قیده‌های تبدیل به‌وضوح در کتاب Margenau و Murphy، و در Wrede، و نیز در مراجع زیر آمده است:
Bergmann P G, *Introduction to the Theory of Relativity*, Dover, New York, 1976.

Sokolnikoff I S, *Tensor Analysis*, Wiley, New York, 1951.

مقدمهٔ خوبی بر آنالیز برداری به‌زبان فرمهای دیفرانسیلی و حساب برونای کارتان در کتاب زیر آمده است:

Misner C W, Thorne K S & Wheeler J A, *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973, Chapters 2-4.

فرمهای دیفرانسیلی فرمولبندی بسیار منظم و موجز قوانین ماکسول را میسر می‌کنند، اما چیره‌دستی و مهارتی که در این فرمولبندی لازم است، فیزیک مسئله را کمرنگ می‌کند.

فصل ۲- الکتروستاتیک

مثالهای زیادی در مورد مسائل الکتروستاتیک شامل توزیع بارهای مختلف در کتابهای قدیمی‌تر بحث شده، مثلاً:

Webster, A. G., *The Theory of Electricity and Magnetism*, Macmillan, London, 1897.

Jeans, J., *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, University Press, Cambridge, 1960.

MacMillan, W. D., *The Theory of the Potential*, Dover, New York, 1958.

Smythe, W. R., *Static and Dynamic Electricity*, McGraw-Hill, New York, 1939.

فصل ۳- مسئلهٔ مقدار مرزی

بحث جامع مسائل مقدارمرزی همراه با مثال، در کتابهای زیر یافت می‌شود

Jackson, *op cit*, and Panofsky and Phillips, *op cit*

علاوه بر روش تصویر، دو فن دیگر برای حل معادلهٔ لاپلاس وجود دارد: روش معکوس کردن و روش تبدیل مختلط (در دو بعد). Panofsky و Phillips و Jeans دربارهٔ این روشها بحث می‌کنند و مثالهایی می‌آورند.

اطلاعات بیشتر دربارهٔ مسئله مقدارمرزی و توابع ویژه‌ای که در حل معادلهٔ لاپلاس پیش می‌آیند—مثل توابع بسل که به‌اختصار در بخش ۳-۳ دیدیم—در کتابهای فیزیک ریاضی یافت می‌شوند، از جمله:

Margenau and Murphy, *op, c t*.

Morse P H and Feshbach H, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1953, vol 2.

Sommerfeld A, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, New York, 1962.

Whittaker E T, & Watson G N, *A Course of Modern Analysis*, University Press, Cambridge, 1958.

قضایای عام با فرض وجود و یکتایی جوابها در کتاب زیر آورده شده:

Courant R & Hilbert D, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience, New York, 1966, Vol 2.

جدول مقادیر توابع خاص و فهرست معادلهها در مراجع زیر هست:

Jahnke E & Emde F, *Tables of Functions*, Dover, New York, 1945.

Abramowitz M & Steigman, I A *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Washington, D. C., 1964.

فصل ۴- دی الکتریکها

بررسی دقیقی از فرایندهای میانگین‌گیری که برای تعریف میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ماکروسکوپیک لازم است در مراجع زیر پیدا می‌شود

Eyges, *op cit*, Chapter 6.

Jackson, *op cit*, Section 6-7.

Rosenfeld L., *Theory of Electrons*, Dover, New York, 1965, Chapter. 2.

تعریف میدان D بستگی به این دارد که دقیقاً چه بارهایی مشمول قطبش‌اند. ممکن است بارهای «آزاد» به صورت یک جمله اضافی وارد قطبش شوند و به این ترتیب معادلات ماکسول از لحاظ صوری ساده‌تر بشوند. این مطلب در کتاب Booker، فصل ۲، آمده است.

فصل ۵- انرژی الکتریکی

برای بحث جامع و واضح درباره انرژی الکتریکی، و مبادله انرژی و تکانه بین میدان و بارها به فصل ۳ و ۴ کتاب Booker مراجعه کنید.

فصل ۶- نظریه نسبیت خاص

ترجمه انگلیسی نخستین مقاله اینشتین درباره نسبیت

“Zur Elektrodynamik bewegter Körper” [Ann. d. Physik 17, 891 1905]

در کتاب زیر آمده است

Lorentz H A, Einstein A, Minkowski H, and Weyl H, *The Principle of Relativity*, Dover, New York.

مقاله اینشتین فوق‌العاده کامل است؛ شامل اصل نسبیت، تعریف همزمانی، مشتق‌گیری از تبدیلات لورنتس، تبدیلات میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، و حتی معادلات حرکت و معادله انرژی یک ذره نسبیتی است.

بهترین کتاب مقدماتی برای نسبیت کتاب زیر است

Taylor E F, and Wheeler J A, *Spacetime Physics*, Freeman, San Francisco, 1963.

این کتاب تأکید بر این دارد که نظریه نسبیت یک نظریه هندسی فضا-زمان است. کتاب پر از معماها و پارادوکسهای متحیرکننده است.

یک کتاب مقدماتی خوب دیگر کتاب زیر است

French A P, *Special Relativity*, Norton, New York, 1968

که حاوی بحثهای ساده ولی جامعی از آزمایشهای مربوط به صحت نظریه نسبیت است. مراجع پیشرفته‌تر در مورد نظریه نسبیت عبارت‌اند از:

Anderson J L, *Principles of Relativity Physics*, Academic Press, New York, 1967

که شامل بحث دقیقی در مورد ساختار فضا-زمان با در نظر گرفتن فیزیک نیوتونی و فیزیک نسبیتی است.

Bergmann P G, *Introduction to the Theory of Relativity*, Dover, New York, 1976.

بخش اول این کتاب مقدمه‌ای بر نسبیت خاص، با تأکید بر فرمالیسم تانسور است.

Moller C, *The Theory of Relativity*, Clarendon Press, Oxford, England, 1952.

کتاب بسیار جامعی شامل بحث کلی انرژی نسبیتی، تکانه زاویه‌ای، و مرکز جرم اختیاری سیستمهای بسته.

Pauli W *Theory of Relativity*, Pergamon Press, London, 1958.

یک کتاب کلاسیک است که پاؤلی در زمان دانشجویی‌اش وقتی فقط ۲۱ سال داشت، نوشت. در زمان انتشارش در سال ۱۹۲۱، مرور کاملی بر تمام پیشرفتهای نظریه نسبیت داشت؛ حالا، بعضی قسمتها قدیمی شده است اما مباحث ریاضی هنوز معتبر و مفیدند.

Rindler W, *Essential Relativity*, Springer-Verlag, New York, 1977.

شش فصل اول با نسبیت خاص سروکار دارد، و با یک آزمون دقیق و روشن انتقادی، مبانی ادراکی نظریه را بررسی می‌کند. بحثهای کیفی بسیار جالبی هم در مورد انقباض طول و اتساع زمان دارد.

Synge J L, *Relativity: The Special Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1965

در باره دستگاه ذرات و برخوردها بحث می‌کند و تعریف ساده‌ای از تانسور انرژی-تکانه دارد.

فصل ۷- تانسورها و چاربردارها

مقدمه ساده‌ای بر بردار انرژی-تکانه ذرات در فصل دوم کتاب Wheeler و Taylor آمده است. در کتابهای زیر بحثهای بیشتری درباره بردار انرژی-تکانه و چاربردار دیگر آمده است.

Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, 1st ed. Wiley, New York, 1962, Chapter 12.

Panofsky and Philips, *op. cit.*, Chapter 17.

Aharoni, J., *The Special Theory of Relativity*, Dover, New York, 1965, Chapter 5.

Landau and Lifshitz, *op. cit.*, Chapter 2.

Hagedorn, R., *Relativistic Kinematics and Precession Polarization* (Benjamin, New York, 1963).

فصل ۸- الکترودینامیک نسبیتی

در مورد استنتاج همه معادلات ماکسول از قانون کولن، فصل ۳ کتاب Schwartz را ببینید. برای استخراج دقیقتر معادلات ماکسول از قانون کولن، نسبیت، و فرضهای مناسب کمکی، مراجع زیر را ببینید:

Frisch D H, and Wilets L, *Am J Phys*, **24**, 574, 1956.

Tessman J R, *Am J Phys*, **34**, 1048, 1966.

هر دوی این روشها بیشتر با میدانها سروکار دارند تا پتانسیلها، و به این دلیل قدری خسته‌کننده‌اند. رهیافت معمول، شروع از صورت سه‌بعدی معادلات ماکسول، و رسیدن به صورت چهار بعدی است. این رهیافت در کتابهای زیر است

Jackson, *op cit.*

Panofsky and Philips, *op cit.*

Marion J B, *Classical Electromagnetic Radiation*, Academic Press, New York, 1965.

بحث کلی الکترودینامیک به عنوان یک نظریه میدان در مراجع زیر یافت می‌شود

Aharoni, *op. cit.*, Chapters 3 and 4.

Landau and Lifshitz, *op. cit.*, Chapters 3 and 4.

Soper, D. E., *Classical Field Theory* (Wiley, New York, 1975).

Davis, W. R., *Classical Fields, Particles, and the Theory of Relativity* (Gordon and Breach, New York, 1970).

مقدمه بسیار خوبی برای فرمولبندی لاگرانژی برای میدانها در فصل آخر کتاب زیر هست
Goldstein H, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1959.

بحث جامع شار انرژی در میدانهای الکترومغناطیسی و انتقال انرژی و تکانه بین میدانهای
الکترومغناطیسی و ماده، با مثالهای تشریحی خوب در مراجع زیر است

Adler R B, Chu L J, & Fano R M, *Electromagnetic Energy Transmission and Radiation*, Wiley, New York, 1966.

Booker, *op cit*

فصل ۹- مغناطوستاتیک

نمونه‌های خوبی از حل دقیق مسائل شار جریان در رساناها و شار انرژی در مقاومتها و باریکه‌های
الکترون در کتاب زیر است

Magid L M, *Electromagnetic Fields, Energy and Waves*, Wiley, New York, 1972.

بعضی قضیه‌های کلی مربوط به مدارهای DC (مثلاً قضایای تونین و نورتون) و قضیه‌های دیگر
مربوط به میدانهای مغناطوستاتیک در فصلهای ۶ و ۷ و ۸ کتاب Duffin (که قبلاً مشخصاتش
داده شده) موجود است.

کاربردهای عملی نیروهای مغناطیسی روی مدارها در موتورهای الکتریکی در کتابهای زیر
بحث شده

Hague B, *The Principles of Electromagnetism Applied to Electric Machines*, Dover, New York, 1962.

Slemon G R, *Magnetolectric Devices*, Wiley, New York, 1966.

فصل ۱۰- القاییدگی الکترومغناطیسی

کاربرد قانون فاراده بعضی وقتها خالی از دردمر نیست. Feynman (در کتابی که بیشتر گفته
شد) نمونه‌هایی آورده است.

در بخش ۱-۱۰ محاسبه میدان الکتریکی القایی در یک باترون را می‌توان برای یک سیمولوله
استوانه‌ای به‌کار برد به شرط اینکه شار جریان کاملاً اطراف استوانه باشد. اما در سیمولوله‌ای که
به‌شکل مارپیچ پیچیده شده، شار جریان مؤلفه‌ای موازی با محور استوانه دارد. محاسبه دقیق با
به‌حساب آوردن این مؤلفه شار جریان و سهمش در میدان مغناطیسی، نشان می‌دهد که میدان

الکتریکی القایی در یک سیملوله ماریپیچی، مؤلفه بزرگ قابل توجهی موازی با محور دارد. در این مورد کتاب Magid را که قبلاً معرفی شد ببینید.

کاربردهای القا در مهندسی، در ژنراتورهای الکتریکی در کتاب Slemon آورده شده است. حرکت ذرات در یک میدان مغناطیسی در کتابهای زیر بحث شده است

Jackson, *op cit*, Chapter 12.

Fermi E, *Nuclear Physics*, University of Chicago, 1950, Chapter 10.

فصل ۱۱- دو قطبیه‌های مغناطیسی و مواد مغناطیسی

یک بررسی انتقادی از نقش میدان H در فصل ۹ کتاب Eyges (که قبلاً مشخصاتش داده شده) آمده است.

پدیده‌های دیگر در فرومغناطیس در کتاب زیر بحث شده است

Landau L D, and Lifshitz E M, *Electrodynamics of Continuous Media*, Addison-Wesley, Reading Mass, 1960, Chapter 5

خواص فیزیکی مواد فرومغناطیسی با جزئیات جامع در کتاب زیر آمده است

Bozorth R M, *Ferromagnetism*, Van Nostrand, New York, 1951.

محاسبه دقیق میدان مغناطیسی ناشی از سیمهای حامل جریان در نزدیکی اجسام آهنی و

نیروهای مغناطیسی وارد بر چنین سیمی در کتاب Hague آمده است.

فصل ۱۲- امواج الکترومغناطیسی

مقدمه جامع و منسجمی بر امواج الکترومغناطیسی، شامل فصل جالبی در مورد بازتاب امواج رادیویی توسط یونکره، در کتاب زیر آمده است

White F W G, *Electromagnetic Waves*, Methuen, London, New York, 1950.

مباحث ریاضی کمی پیچیده‌تر برای بررسی امواج کروی و استوانه‌ای در کتاب زیر مطرح شده

است:

Stratton J A, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.

بحث مفصلتری در مورد سرعت گروه در یک محیط پاشنده، به علاوه روابط پاشندگی

کرامرز-کرونینگ برای بخش حقیقی و انگاری ضریب شکست، در فصل ۷ کتاب Jackson، و فصل ۲۲ کتاب Panofsky و Philips هست.

بحث بیشتر درباره پاشندگی امواج در محیط مادی، و نیز محیطهای ناهمگن و ناهمسانگرد

در فصلهای ۵ و ۶ کتاب Rosenfeld و فصلهای ۹ و ۱۱ کتاب Landau و Lifshitz آمده است.

توصیف خوبی در مورد اینکه چگونه ضریب شکست، از برهم‌نهی موج فرودی و امواج تابشی پراکنده توسط الکترون از یک محیط مادی، ناشی می‌شود در کتاب Feynman و کتاب Schwartz (که قبلاً مشخصاتشان داده شده) آمده است.

امواج در پلاسما در مراجع زیر مورد بحث قرار گرفته است

Alfvén H, *Cosmical Electrodynamics*, Oxford University Press, 1950.

Jackson, *op cit*, Chapter 10.

جزئیات بیشتر در مورد اثر پوسته در اشکال هندسی مختلف، در کتاب زیر ارائه شده

King R W P, *Electromagnetic Engineering*, Vol 1, McGraw-Hill, New York, 1945.

فصل ۱۳- تابش بار نقطه‌ای

محاسبه کامل همه جمله‌ها در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یک بار نقطه‌ای شتابدار در فصل ۱۴ کتاب Jackson و فصل ۲۰ کتاب Panofsky و Philips آمده است.

مشتقگیری ساده‌ای از راستای انتشار تابش گسیل شده در اثر چرنکوف در کتاب زیر آمده است
Motz H and Schiff L I, *Am J Phys* 21, 258 1953.

نیروهای واکنش تابش در کتابهای زیر بحث شده است

Jackson, *op. cit*, Chapter 17.

Rohrlich F, *Classical Charged Particles*, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1965, Chapter 6.

فصل ۱۴- تابش دستگانه بار

بررسی مفصل تابش دستگانه بار، با مثالهایی از آنتنهای، در فصل ۹ کتاب Jackson و فصل ۸ کتاب Stratton آمده است.

مطالب بیشتری در مورد آنتن در مراجع زیر هست

Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Chapter 6.

Aharoni J, *Antennae: An Introduction to Their Theory*, Clarendon Press, Oxford, England, 1946.

فصل ۱۵- کاواکهای تشدید و موجبرها

کاواکهای تشدید با مقطع دایره‌ای در فصل ۸ کتاب Jackson بررسی شده‌اند.

انتشار امواج در رسانای دایره‌ای (سیم تلگراف) در فصل ۹ کتاب Stratton، و فصلهای ۲۲ و ۲۳ کتاب الکترومغناطیس، Sommerfeld، آورده شده است.

بررسی مفصل خواص کلی انتشار امواج در موجبرها و انتقال خطوط در کتاب Chu, Adler و Fano (که مشخصاتش قبلاً داده شده) و کتاب Magid آمده است. در کتابهای زیر بر کاربرد موجبرها تأکید شده است

Ramo S and Whinnery J R, *Fields and Waves in Modern Radio*, Wiley, New York, 1953.

Slater J C, *Microwave Transmission*, McGraw-Hill, New York, 1942.

Southworth G C, *Principles and Applications of Waveguide Transmission*, Van Nostrand, Princeton, 1950.

موجبرهای دی الکتریک و کاربردهای آنها در کتابهای زیر بحث شده است:

Cheo, P. K., *Fiber Optics* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1985).

Ghatak and Thyagarjjan, *Contemporary Optics* (Plenum, New York, 1978).

فصل ۱۶- پراکندگی و پراش

جنبه‌های مختلف پراکندگی امواج الکترومغناطیسی در فصل ۲۲ کتاب Philips و Panofsky و فصل ۱۴ کتاب Landau و Lifshitz، آمده است.

یک بحث بسیار جامع و کلی در مورد پراکندگی در کتاب زیر هست:

Newton R G, *Scattering Theory of Waves and Particles*, McGraw-Hill, New York, 1966, Part I.

بحثهای جامعتر و جدیدتر دربارهٔ انتگرال کیرشهوف و اصل باینه در مراجع زیر پیدا می‌شود:

Born M, and Wolff E, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, England, 1970, Chapters 8 and 11.

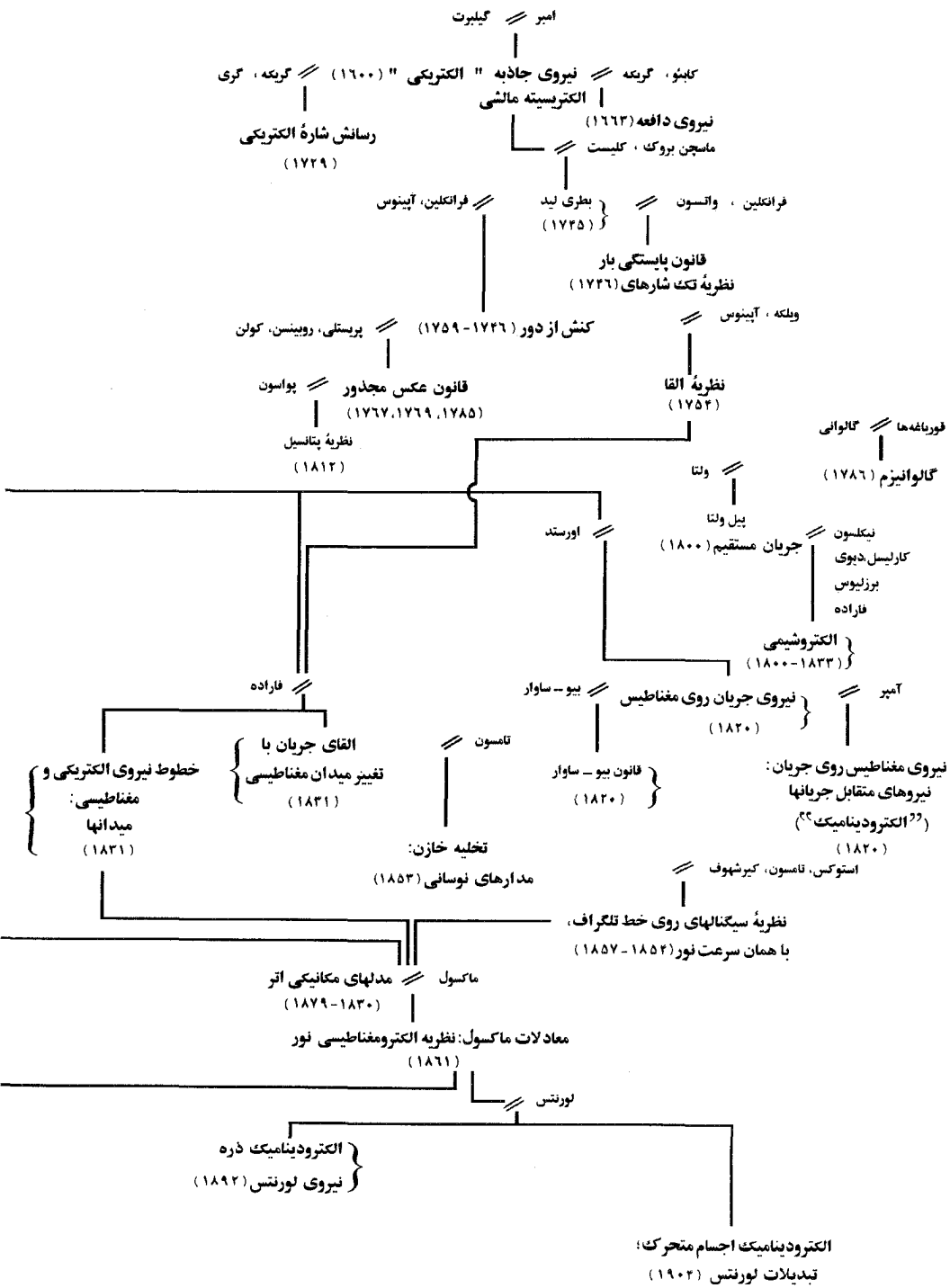
Jackson, *op cit*.

Sommerfeld A, *Optics*, Academic Press, New York, 1964, Chapter 5.

Baker B B, Copson E T, *The Mathematical Theory of Huygen's Principle*, Oxford University Press, 1939.

Jones D S, *The Theory of Electromagnetism*, Pergamon Press, Oxford, England, 1964.

که حل دقیق مسائل پراکندگی (استوانه‌ای، کروی) و پراش (نوار و صفحه نیم‌متناهی) را دارد.



شجره نامه نظریه الکترومغناطیس

۱۲۶۹

دروانوردان عرب // مغناطیس طبیعی // یوگارتینوس

قطب‌نما

(قرن یازدهم میلادی)

قطبهای مغناطیسی
(۱۲۶۹)

گیلبرت

مغناطیس زمین
(۱۶۰۰)

گریمالدی // نور // هوک

حلقه‌های نیوتون
(۱۶۶۶)

طیف
(۱۶۶۶)

پراش
(۱۶۶۷)

نور به عنوان موج
(۱۶۶۷)

هویگنس

اصل هویگنس؛
شکست (۱۶۹۰)

شکست دوگانه // مالوس

قطبش توسط شکست
(۱۸۰۸)

فرنل // نظریه پراش
(۱۸۱۶)

یانگ // نظریه موجی؛
تداخل
(۱۸۰۱)

کوشی، مک کولاف، نیومان
گرین، استوکس، رانکین، رایله

هرتز

گسیل امواج الکترومغناطیس (۱۸۸۹)

اینشتین

تعبیر فیزیکی تبدیلات لورنتس؛

اتحاد الکتریسته و مغناطیس (۱۹۰۵)

فهرست راهنما

- آب، ضریب شکست ۴۳۵
 آرایهٔ آنتن نیم‌موج ۴۹۷
 آزمایش
 استخراج تک قطبی مغناطیسی ۳۲۴
 مایکلسون-مورلی ۱۷۸
 آزمایش‌های جدیدتر ~ ۱۸۱، ۱۸۰
 آسمان، رنگ آبی ۵۴۸، ۵۴۹
 آمپر ۵۸۸
 آنتن نیم‌موج ۴۹۳
 بردار پوئین‌تینگ ~ ۴۹۶
 در امتداد محور ۴۹۳
 نقش تابش در ~ ۴۹۶
 آهنگ‌گذاری ۵۰۳، ۵۰۵، ۵۰۶
 آیندهٔ مطلق ۱۹۵
 آینده‌های مغناطیسی ۳۵۹
 آبراه‌ی ۴۱۳
 انتقال دوپلر ۴۱۳
 اپتیک غیرخطی ۵۳
 اتالون ۱۸۱
 ~ فابری-پرو ۱۸۱
 ۱۷۹، ۱۷۸ اثر
- باد ~ ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۴
 ~ فروزان ۱۷۸
 ~ فروزان مایکلسون ۱۷۸
 کشش ~ ۱۷۸
 اتساع زمان ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲
 ~ با ساعت‌های اتمی ۲۰۴
 ~ در انتقال عرضی دوپلر ۲۰۱
 ~ در طول انقباض ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹
 ~ مقارن ۲۰۰
 اتساع طول عمر ۲۰۰
 اتلاف انرژی در کاواک ۵۲۸
 اثر
 ~ اینشتین-دهاس ۴۰۰
 ~ پوست ۴۴۵
 ~ موسباوئر ۱۸۳، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۱۱
 ~ حال ۳۳۱
 ارتباط با زیردریاییها ۴۵۷
 اسپین
 ~ الکترون ۴۲۰، ۴۲۱
 ~ پروتون ۵۰۶
 ~ تشدید، الکترون ۳۷۹
 تشدید پروتون ~ ۳۹۹

- حرکت تقدیمی ~ ۳۷۹
 ~ در مواد فرومغناطیسی ۳۸۸
 ~ فوتون ۴۲۰
 ~ موازی ۳۷۹
 ~ در موج قطبیده دایره‌ای ۴۲۰
 اشعه گاما ۱۹۷، ۵۰۳، ۵۰۴
 اصل
 ~ باینه ۵۶۰، ۵۶۵، ۵۷۵
 ~ قفس فاراده ۹۳
 ~ گالیله ۱۷۶
 ~ نسبت ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۲۴۷، ۲۵۹
 ~ نسبت اینشتین ۱۷۷
 قانون جمع سرعت گالیله در ~ ۱۷۷،
 ۱۷۸، ۱۹۷، ۱۹۸
 ~ نیوتونی در نسبت ۱۷۶، ۱۷۷
 ~ هویگنس-فرنل ۵۵۵
 القای ۳۳۴، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۴۶، ۳۴۷
 القاگر
 ~ پشتک زن ۳۶۳
 ~ متوالی ۳۶۵
 ~ موازی ۳۶۵
 القای الکترومغناطیسی ۳۳۶، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۴۵،
 ۳۴۶
 ~ در میدان الکتریکی ۳۳۴، ۳۳۸
 القاییدگی ۳۴۶
 ~ دو عرقچین کروی ۳۴۹
 ~ روی عرقچین کروی ۳۵۰
 ضرایب ~ ۳۴۷
 ~ متقابل ۳۴۶، ۳۴۷
 یکاهای ~ ۳۴۷، ۵۸۸
 الکترودینامیک نسبتی ۲۵۶
 معادله میدان ~ ۲۵۹، ۲۶۰
 میدان مغناطیسی ~ ۲۶۶
 الکتروستاتیک ۴۴
 ~ ۴۶، ۴۵ CGS
 پایستگی SI ~ ۵۸۸، ۵۹۰
 پتانسیل ~ ۶۲، ۵۸۸
 جریان ~ ۳۶، ۵۸۸
 شار مغناطیسی ~ ۵۸۸
 گشتاور دو قطبی ~ ۵۸۸
 گشتاور مغناطیسی ~ ۵۸۸
 مغناطش ~ ۵۸۸
 میدان الکتریکی در ~ ۵۰، ۵۱، ۶۲، ۵۸۸
 الکترولیت ۲۹۰
 الکترومغناطیس ۴۰۴
 الکترون ۳۵
 ~ آزاد ۸۱، ۸۲، ۲۹۱
 ~ پتانسیل تماسی ۸۲
 اسپین ~ ۴۲۰، ۴۲۱
 اندازه ~ ۴۶
 بار ~ ۳۶، ۴۵، ۴۶
 ~ پایدار ۳۸
 توزیع بار ~ ۴۷
 گشتاور مغناطیسی ~ ۳۷۸
 واپاشی ~ ۳۸
 الکتریکی
 انرژی ~ ۱۵۷، ۱۵۰
 پذیرفتاری ~ ۱۲۷، ۱۳۹، ۱۴۰
 دو قطبی ~ ۶۴
 الگوی کلاسیک تامسون ۷۴
 امیدانس ۳۵۳
 ~ موج تخت ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۵۵۴
 امواج
 ~ تخت ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۵۵۴
 ~ هماهنگ ۴۰۵، ۴۱۱
 امواج الکترومغناطیسی
 ~ تکفام ۴۱۱
 ضریب شکست ~ ۴۲۵
 انتقال دوپلر ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۲۰۱، ۲۰۲، ۴۱۳
 ~ عرضی ۲۰۱، ۲۰۲، ۴۱۳

- فرمول ابراهمی ~ ۴۱۳
 ~ نسبتی ۴۱۳
 انتقال
- ~ متوسط ۱۵۹
 ~ در موج ۴۳، ۴۲۴
 ~ در میدان مغناطیسی ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰
 ۳۹۴، ۳۹۵، ۴۰۳، ۴۰۴
 ~ جرم سکون ۲۳۳، ۲۳۹، ۲۴۰
 ~ ذره ۲۳۳، ۲۳۹، ۲۴۰
 ~ جنبشی ۱۵۸
 متوسط ~ ۱۵۸، ۱۵۹
 ~ نسبتی ۲۳۳، ۲۳۴
 ~ در دی الکتريکها ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹
 ~ در میدان ۱۵۰، ۱۵۱
 ~ در میدان ماکروسکوپی و میدان میکروسکوپی ۱۵۹
 ~ دی الکتريکی در نیروی وارد بر صفحات موازی ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳
 ~ ذره ۲۳۱، ۲۳۲
 شار ~ ۲۸۱
 ظرفیت ~ ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۹، ۱۷۰
 ~ مرکز تکانه ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱
 ~ مغناطیسی ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۹۴، ۳۹۵
 ۴۰۳، ۴۰۴
 ~ نسبتی ۲۲۱، ۲۳۲
 آزمایشهای ~ ۲۳۳، ۲۳۴
 ~ کل ۲۳۴
 اهم ۲۹۱، ۲۹۲، ۵۸۸
 ایستا
 ~ آمپر ۳۶، ۵۸۸
 ~ اهم ۲۹۲، ۵۸۸
 ~ ولت ۶۲، ۵۸۸
- بار
- ~ آزاد ۱۲۷، ۱۲۸، ۴۲۰، ۴۲۱
 ~ الکتريکی ۳۶، ۴۴
 پایستگی ~ ۳۸
 چگالی ~ ۳۶
- ~ گرمایی موسباوئر ۲۰۲، ۲۰۳
 ~ موسباوئر ۲۰۲، ۲۰۳
 ~ نوار ۱۸۰
 انتگرال
 ~ فرزنل ۵۷۲
 ~ کیرشهوف ۵۵۹، ۵۶۱، ۵۶۲، ۵۶۳
 انعکاس ذره در میدان مغناطیسی ۳۵۷، ۳۵۸
 انقباض طول ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹
 ~ در عکس ۲۰۹، ۲۱۰
 انرژی
 ~ آستانه ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳
 ~ الکتريکی ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳
 چگالی انرژی در ~ ۱۵۳، ۱۵۴، ۲۸۰
 چگالی انرژی در میدان ~ ۱۵۳، ۱۵۴، ۲۸۰، ۱۵۹
 ~ در انرژی پتانسیل متقابل ۱۵۰، ۱۵۱
 ~ در دی الکتريکها ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹
 ~ در هسته ۱۵۴، ۱۵۵
 ظرفیت ~ ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۹، ۱۷۰
 ~ پتانسیل ۱۷، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۶، ۱۵۷
 ~ الکتريکی ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۷
 ~ الکتريکی جسم باردار در میدان ۱۶۳، ۱۶۴
 ~ الکتريکی در خازن ۱۶۵، ۱۶۶
 ۱۶۹، ۱۷۰
 ~ الکتريکی در دی الکتريک ۱۵۸، ۱۵۹
 ~ جسم باردار در میدان ۱۶۳، ۱۶۴
 ~ در دی الکتريک ۱۵۸، ۱۵۹
 ظرفیت ~ ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۹، ۱۷۰
 ~ متقابل ۱۵۰

- کوانتس ~ ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۳
 یکای ~ ۳۶، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۵۵۸
 ~ تصویر ۸۷، ۱۱۴، ۱۱۵
 ~ حرکت میدان مغناطیسی ۲۸۸، ۲۸۹
 کوانتس ~ ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۳۳
 معادله حرکت ~ ۲۷۲، ۲۷۳، ۳۰۹، ۳۱۰
 ~ مغناطیسی ۲۸۸، ۲۸۹، ۳۱۷، ۳۱۸
 ~ مقید ۱۲۰، ۱۲۳، ۱۲۴، ۴۲۰، ۴۲۱
 ~ در حجم دی الکتریک ۱۲۰، ۴۲۰، ۴۲۱
 ~ نقطه‌ای ۴۶
 پتانسیل ~ ۵۹، ۶۰
 ~ پتانسیل تأخیری ۴۶۷
 ~ پتانسیل لیناردویشرت ۴۶۷، ۴۶۸
 ~ تابش سنکروترون ۴۷۹
 ~ تابش میدان غیرنسبیتی ۴۷۳
 ~ میدان نسبیتی ۴۷۵
 توان لحظه‌ای ~ ۴۷۴، ۴۷۷، ۴۷۸
 ~ خطوط میدان ۵۲
 ~ خود-انرژی ۱۵۵، ۱۵۶
 ~ در تعادل استاتیک ۶۳
 ~ شتابدار ۴۵۹
 میدان الکتریکی ~ ۵۰، ۵۱
 ~ میدانهای نزدیک ۴۷۲
 نقش تابش ~ ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷
 بازتاب داخلی ۳۳۹، ۵۳۷
 ~ کلی ۴۳۹، ۴۴۰، ۵۳۷
 بازه فضا-زمانی ۱۸۴، ۱۸۶، ۱۸۹، ۱۹۰، ۲۲۱
 باریکه
 ~ برخوردکننده ۴۴۲
 ~ تابش ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹
 ~ مولکولی ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴
 بتاترون ۳۴۱
 برد
 ~ پتانسیل یوکاوا ۴۸۱
- ~ نیروی الکتریکی ۵۰
 بردار ۱۲، ۱۳، ۲۲۶، ۲۷
 ~ انرژی-تکانه ۲۴۱
 ~ در انرژی آستانه ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳
 ~ در پایداری تکانه ۲۲۸، ۲۳۴، ۲۳۵
 ~ تانسور مرتبه سوم ۲۲۸
 ~ پایه برای موج ۴۰۶
 ~ پتانسیل ۲۵۸، ۲۵۹
 ~ یوئین-تینگ ۲۷۸، ۲۸۱، ۴۱۴
 ~ برای آنتن ۴۹۶
 ~ برای دوقطبی تابش ۴۹۹
 ~ در محیط مادی ۴۲۴
 ~ تکانه-انرژی ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۴، ۲۳۵
 ~ برای تاخون ۲۳۷
 ~ تبدیلات لورنتس ۲۳۴، ۲۳۵
 حاصلضرب ~ ۶
 ~ زمانگونه ۲۲۴
 ~ ستونی ۴
 ~ سطری ۴
 ~ فضاگونه ۲۲۴
 ~ مغناطیسی ۳۳۰
 دوقطبی ~ ۳۳۱، ۳۳۱
 ~ مکان ۵
 ~ ستونی ۴
 ~ سطری ۴
 ~ زمانگونه، فضاگونه، نورگونه ۲۲۴
 ~ موج ۴۴۶
 ~ در پلازما ۴۴۶، ۴۴۷
 ~ در رسانای خوب ۴۴۴
 ~ در محیط مادی ۴۲۳
 ~ تاییده ۴۳۱
 ~ بازتاییده ۴۳۱
 ~ شکسته ۴۳۱
 میدان ~ ۱۵، ۱۶
 ~ نورگونه ۲۲۴

- ۵ یکه ~
 ~ استوانه‌ای ۲۲
 ~ کرووی ۲۲، ۲۵
 برهم‌نهی خطی ۵۳
 ~ در اپتیک غیرخطی ۵۳
 بسامد
 ~ تشدید برای مدار LCR ۳۵۳، ۳۵۴
 ~ خاموش ۵۵۳
 ~ بحرانی ۵۳۳، ۵۴۱
 ~ سیکلوترون ۳۱۰
 ~ طول موج ۴۰۵
 ~ فوق‌العاده کم (ELF) ۴۵۷
 ~ موج ۴۰۵
 بسط پتانسیل ۱۱۱
 بسط چندقطبی ۱۰۸
 ~ برای پتانسیل ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰
 ~ برای تابش ۴۹۸، ۴۹۸، ۴۹۹
 ~ دو چارقطبی خطی ۱۱۴
 ~ دو چارقطبی محض ۱۱۴
 بطری مغناطیسی ۳۵۹
 یاد متقارن ۱۵، ۲۲۷
 پارامغناطیس ۳۷۲، ۳۸۰، ۳۸۶
 پارادوکس دوقلوها ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷
 پارادوکس میله-انبار ۲۱۹
 پاشندگی
 ~ عادی ۴۲۸
 ~ غیرعادی ۴۲۸
 پایستگی
 ~ انرژی ۲۳۴، ۲۳۵
 ~ انرژی-تکانه ۲۳۴، ۲۳۵
 ~ بار ۳۸، ۲۴۷، ۲۶۰
 ~ بار الکتریکی ۳۸، ۲۴۷، ۲۶۰
 ~ تکانه ۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۴، ۲۳۵
 ~ تکانه-انرژی ۲۳۴، ۲۳۵
 پخش مغناطیسی ۴۴۹
 ~ و اندازه‌گیری مقاومت ۴۵۷
 پتانسیل الکتروستاتیکی ۵۹، ۶۰
 بسط چندقطبی ~ ۱۱۱
 ~ توسط بار کره ۶۲
 توزیع بار ~ ۶۱، ۶۲
 ~ چارقطبی ۱۱۱، ۱۱۴، ۱۱۵
 دوقطبی ~ ۶۵، ۶۶
 ~ کره دی‌الکتریک ۱۳۵
 ~ کره رسانا ۱۰۸، ۱۰۹
 ماکسیمم در ~ ۶۳
 یکای ~ ۶۲، ۵۸۸
 پتانسیل بار نقطه‌ای شتابدار ۴۶۱
 پتانسیل بردار ۳۱۹
 تکینگی ~ ۳۱۹
 ~ سیم مستقیم ۲۹۷
 پتانسیل
 ~ تعجیلی ۴۶۱
 ~ تماس ۸۲
 توزیع بار ~ ۶۱
 ~ چار بردار ۴۸۲
 ~ تأخیری در محیط مادی ۴۸۲
 ~ معادله میدان ۲۵۹، ۲۶۰
 ضرایب ~ ۱۶۸
 ~ کولن ۱۵۷
 ~ لینارد-ویشرت ۴۶۷، ۴۶۸
 ~ در محیط مادی ۴۷۲
 ~ ماکسیمم ۶۳
 ~ مغناطیسی ۳۰۳، ۳۰۴
 ~ نرده‌ای ۳۰۳، ۳۰۴
 ~ حلقه‌ای ۳۰۴، ۳۰۵
 ~ برای دوقطبی مغناطیسی ۳۰۸، ۳۰۹
 ~ مغناطیسی ۳۰۲، ۳۰۴
 ~ مغناطیسی حلقه ۳۰۴، ۳۲۷
 ~ دوقطبی مغناطیسی ۳۰۸، ۳۰۹

- پرتابگر الکترومغناطیس ۳۶۷
پرتو α ، ۱۹۸، ۱۹۹
پروتون
- اسپین ~ ۵۰۶
بار ~ ۴۶
توزیع بار ~ ۴۷
جرم ~ ۵۰، ۵۱
گشتاور مغناطیسی ~ ۳۷۸
پسماند ۳۸۷
حلقه ~ ۳۸۷
پس- 348emf
پلاسمای ۲۹، ۳۴۴، ۳۴۵
بسامد ~ ۴۴۷
رسانایی ~ ۴۴۶، ۴۴۷
محدودسازی ~ ۳۵۹
نوسانهای ~ ۲۹۵
~ و موج قطبیده ۴۴۶
پوسته
- جرم ۲۳۶، ۲۳۷ ~
~ برای تاخیر ۲۳۸
~ جمع‌کننده اطلاعات ۴۶۱
~ کروی رسانا ۱۰۴، ۱۰۵
~ هم‌مرکز ۱۰۵
- بیج ۳۱۱
بیجش ۳۰۹
- تابش
- ~ اتم ۶۴، ۴۹۶، ۵۰۰، ۵۰۳، ۵۰۵، ۵۰۶
~ از دستگاه بار ۴۸۹، ۴۹۷
~ باریکه نسبیته ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸،
۴۷۹
بسط چندقطبی برای ~ ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹
~ به وسیله آنتن نیم‌موج ۴۹۶
~ به وسیله آتم ۶۴، ۴۹۷، ۵۰۳، ۵۰۶،
۵۰۷، ۵۱۱، ۵۱۲
- یکای ~ ۶۲
~ یوکاوا ۴۸۱
برد ~ ۵۰
- پذیرفتاری الکتریکی ۱۲۷، ۱۳۹، ۱۴۰
پذیرفتاری مغناطیسی ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸
پراش ۵۴۵
- ~ انتگرال کیرشهوف ۵۵۹
~ به وسیله عدسی ۵۷۸
~ به وسیله لبه راست ۵۷۳، ۵۷۵
~ رشته-مینیمم، ماکسیمم ۵۶۴، ۵۶۹،
۵۷۶
~ روزنه دایره‌ای ۵۶۷، ۵۶۸، ۵۶۶
~ روزنه مستطیلی ۵۶۳، ۵۶۵، ۵۶۶
~ صفحه مکمل ۵۵۹
~ غیر همدوس ۵۵۰
~ فرانیهوفر ۵۶۱، ۵۶۴، ۵۶۶، ۵۶۷
~ و تبدیل فوریه ۵۶۵
~ فرزنل ۵۶۹، ۵۷۰
~ برای روزنه مستطیلی ۵۶۹، ۵۷۱،
۵۷۲
لبه راست ~ ۵۷۵
نقش ~ ۵۷۳
پراکندگی ۵۴۵، ۵۴۶
~ تامسون ۵۴۶
- ~ و پراش چگالی افت و خیز گاز ۵۵۰
دامنه ~ ۵۵۱، ۵۵۲
~ در تابش همدوس ۵۵۳، ۵۵۴
~ در هوا ۵۴۹
سطح مقطع ~ ۵۴۷
~ فریز ۵۵۴
~ غیر همدوس ۵۵۱
~ موج ۵۵۳، ۵۵۴
~ در مسئله ویژه مقداری ۵۴۵
~ همدوس ۵۵۰
پراکنش نور توسط نور ۵۳

- ~ به وسیله چارقطبی ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۱۱
 ~ به وسیله دوقطبی ۴۹۹، ۵۰۰
 ~ به وسیله هسته ۴۹۷، ۴۹۸، ۵۰۵، ۵۰۶
 ~ ترمزی ۴۸۶
 ~ توسط بار شتابدار ۴۵۹
 ~ توسط بار نقطه‌ای ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸
 ~ چرنکوف ۴۸۲
 حرکت نسبی ~ ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۸۰، ۴۷۹
 ~ دستگاه بار ۴۸۹
 ~ در تابش دوقطبی مغناطیسی ۵۰۳، ۵۰۴
 ~ دوقطبی ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰
 ~ الکتريکی ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۴، ۵۰۵
 توان ~ ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۴، ۵۰۵
 خطوط میدان ~ ۵۰۱
 ~ مغناطیسی ۵۰۳، ۵۰۴
 توان ~ مغناطیسی ۵۰۴، ۵۰۵
 نقش تابش در ~ مغناطیسی ۵۰۴، ۵۰۵
 نوسان‌کننده ~ ۵۰۰
 ~ سنکروترون ۴۷۹
 باریکه ~ ۴۷۹
 طیف ~ ۴۸۱
 ~ میدان به وسیله بار نقطه‌ای ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۲
 ~ واکنش ۵۵۳
 ~ هشت قطبی ۴۹۸، ۵۱۰
 ~ الکتريکی ۴۹۸، ۵۱۰
 ~ همدوس ۵۵۳، ۵۵۴
- ~ یک مجموعه کامل ۸۸، ۱۰۳
 تاخیر ۱۹۶، ۲۳۸
 ~ بردار انرژی-تکانه ۲۳۷
 پوسته جرم ~ ۲۳۸
 تار نوری ۵۳۷
 تانسور ۱۳، ۱۴، ۲۲۶، ۲۲۷
 ~ انرژی تکانه ۲۷۴
 چگالی نیرو ~ ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶
 رد ~ ۲۸۴
 ~ باد متقارن ۱۵، ۲۲۷، ۲۶۴
 ~ پادوردا و همورداد ۲۲۷
 تبدیلات ~ ۱۳، ۱۴، ۲۰۶، ۲۰۷
 ~ تبدیلات لورنتس ۲۲۶، ۲۲۷
 ~ تکانه-انرژی ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۷
 ~ تناوب ۷، ۱۶، ۲۱، ۲۴۹
 ~ رتبه چهارم ۲۴۹
 ~ تنش ۲۷۷
 ~ ماکسول ۲۷۷
 ~ رتبه دوم متقارن ۲۲۷
 رد ~ ۱۵، ۲۲۸
 چرخش ~ ۱۳، ۱۴
 ~ رتبه دوم ۲۲۷، ۲۲۸
 ~ گشتاور انرژی ۱۵۳، ۱۵۴
 ~ گشتاور چارقطبی ۱۱۱، ۱۱۴، ۵۰۷، ۵۰۸
 ~ گشتاور لختی ۱۵
 ~ متریک ۲۲۲
 ~ متریک فضا-زمان ۲۲۲
 ~ متناوب ۸، ۱۵، ۱۶، ۲۰، ۲۴۹
 ~ متقارن ۱۵، ۲۲۷
 ~ میدان ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۶۲، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶
 ~ میدان الکترودینامیک در الکترودینامیک
 نسبی ۲۶۱، ۲۶۲
 ~ میدان تبدیلات لورنتس ۲۶۶، ۲۶۷
- ~ بسل ۹۸، ۵۶۸
 ~ پله‌ای ۵۶۵
 ~ دلتا ۴۱، ۴۲

تبادل

~ استاتیک ۶۳
 ~ پایدار ۶۳
 ~ رسانا ۲۹۵، ۴۴۷
 تعریف
 ~ چار تانسور ۲۲۶
 ~ متر ۱۸۶
 تغییرات کند ۳۵۵
 تفنگ ریلی ۳۶۷، ۳۶۸
 تقریب
 ~ فرانزوفر ۵۶۲، ۵۶۵، ۵۶۷
 ~ فرنل ۵۶۹، ۵۷۰
 ~ متوالی معادله لاپلاس ۷۱
 تکانه ۲۲۸، ۲۲۹
 ~ در میدان ۲۷۹
 ~ دوقطبی مغناطیسی ۲۶۷
 ~ الکترون ۲۶۷، ۲۶۸
 ~ نوترون ۲۶۷، ۲۶۸
 ~ ذرات برخوردکننده پایسته ۲۲۹
 ~ زاویه‌ای موج قطبیده دایره‌ای ۴۲۰
 ~ شار در موج ۴۱۵
 فرمول نسبی ۲۲۳، ۲۷۲، ۲۷۳
 قاعده دست راست برای ~ مغناطیسی ۳۰۱
 ~ نسبی ۲۳۱، ۲۷۲، ۲۷۳
 آزمایشهای ~ ۲۳۳، ۲۳۴
 تک قطبی مغناطیسی ۳۱۷
 آزمایشهای ~ ۳۲۴
 بردار پتانسیل ~ ۳۱۹
 تبدیل دوگانگی ~ ۳۱۸، ۳۳۱
 شار ~ ۳۲۴
 ~ و کوانتش بار ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۳
 تکینگی در بردار پتانسیل ۳۱۹
 تلسکوپ رادیویی آرسیبو ۵۸۰
 توان
 ~ آنتن نیم موج ۴۹۷

~ مینکوفسکی ۲۲۲

تاو ۲۰ ۲۷، ۲۸، ۴۱، ۴۲
 تبدیل
 بردار ~ ۱۲، ۱۳
 ~ پیمانه‌ای ۲۸۲
 ~ تانسور ۱۳، ۱۴
 تانسور میدان ~ لورنتس ۲۶۶
 ~ چارچوب مرجع ۱۷۶، ۱۸۸، ۱۸۹
 ~ خاص لورنتس ۲۲۲، ۲۲۵
 ~ دوگانگی ۳۱۸
 ~ فوریه ۵۶۵
 ~ گالیه ۱۷۶، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱
 ~ لورنتس ۱۹۰، ۱۹۳
 تانسور ~ ۲۲۶، ۲۲۷
 ~ خاص ۲۲۲
 ماتریس ~ ۲۲۲، ۲۲۵، ۲۲۶
 میدان ~ ۲۴۵
 وارون ~ ۲۲۵، ۲۲۶
 ~ محض لورنتس ۲۲۳
 میدان الکتریکی ~ ۲۴۴، ۲۴۵
 میدان مغناطیسی ~ ۲۶۸، ۲۶۹
 ~ زده‌ای ۱۳، ۱۴
 ~ وارون ۱۳، ۱۴
 تداخل سنخ ۱۷۸
 ترانهاد ماتریس ۱۱
 ترکیب
 ~ سرعتهای گالیه ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۹۷
 ۱۹۸
 ~ سرعتهای نسبی ۱۹۷، ۱۹۸
 ~ ضرب سطر در ستون ۱۰
 تسلا ۲۶۷، ۲۶۷، ۵۸۸
 تشدید در مدار LCR ۳۵۳، ۳۵۴
 تشدید مغناطیسی-هسته‌ای پروتون ۳۹۹
 تصویر آنتن ۴۹۴

- معادله میدان ~ ۲۶۲، ۲۶۰، ۲۵۹
 ~ جریان ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۷۱
 ~ مکان ۲۲۰
 مکان گردابان و هموردایی ~ ۲۲۳، ۲۲۲
 چار پتانسیل ۲۵۸، ۲۵۹
 ~ تأخیری ۴۶۱
 ~ بار نقطه‌ای ۴۶۷
 ~ جریان اغتشاش ۴۸۲
 ~ تعجیلی ۴۶۱
 ~ خطوط میدان ۴۶۸
 معادله میدان ~ ۲۶۲، ۲۶۰، ۲۵۱
 چارچوب
 ~ سکون ۲۳۹
 ~ بار ۲۵۷
 ~ نسبیته ۲۳۸، ۲۳۹
 ~ فریزها ۵۵۳، ۵۷۴
 ~ مرجع ۱۷۴
 تبدیلات ~ ۱۷۶
 ~ سخت ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۸، ۱۷۹
 مرکز تکانه ~ ۲۳۸، ۲۳۹
 ~ مرجع ۲۳۹ CM
 چارخط
 ~ تأخیری ۴۶۱، ۴۹۰، ۴۹۱
 ~ سرعت ۲۳۲
 چار قطبی ۱۱۰
 بسامد تابش ~ ۵۰
 تابش ~ ۵۰۶، ۵۰۷
 توان زاویه‌ای ~ ۵۰۸، ۵۱۱، ۵۱۲
 ~ خطی ۱۱۴
 گشتاور ~ ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۲۶، ۵۰۷
 گشتاور ~ الکتريکی ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۴، ۵۰۷، ۵۰۸
 ~ محض ۱۱۴
 نقش تابش ~ ۵۰۸، ۵۱۱
 ~ نوسان‌کننده ۵۰۹
 تابش به وسیله آنتن نیم موج ۴۹۷
 ~ تأخیری دوقطبی ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۴
 ۵۰۵
 ~ لحظه‌ای توسط بار نقطه‌ای ۴۷۴، ۴۷۷
 ۴۷۸
 ~ زاویه‌ای چار قطبی ۵۱۱، ۵۱۲
 توزیع بار
 ~ آزاد ۱۲۷، ۱۲۸، ۴۲۰، ۴۲۱
 ~ میدان الکتريکی ۵۳، ۵۴
 ثابتهای اساسی ۵۸۳، ۵۸۷
 جداسازی متغیرها ۸۹، ۹۳، ۱۰۰
 جرم
 ~ سکون صفر ۲۳۷
 ~ فوتون ۵۰
 جریان
 ~ قطبش ۳۸۲، ۳۸۳، ۴۲۰، ۴۲۱
 ~ الکتريکی ۲۹۱، ۲۹۲
 ~ جابه‌جایی ۳۶۰
 ~ چار بردار تبدیلات لورنتس ۲۴۶، ۲۴۷
 ~ سیم مستقیم میدان مغناطیسی ۲۹۶، ۲۹۷
 ~ مغناطیسی ۳۱۷، ۳۷۸، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳
 یکاهای ~ ۳۶، ۵۸۸
 جسم باردار
 انرژی پتانسیل در میدان ~ ۱۶۳، ۱۶۴
 گشتاور بر روی ~ ۱۶۳، ۱۶۴
 نیرو بر روی ~ ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵
 جسم صلب ۱۹۶
 جهانخط ۱۸۶، ۱۹۱
 چار بردار ۲۲۰، ۲۲۶، ۲۲۷
 ~ پتانسیل ۲۵۶، ۲۵۸، ۲۵۹

چنبه‌وار ۳۲۶

حاصل‌ضرب

~ بردارهای ۷۰۶

~ زده‌ای ۶

~ نقطه‌ای ۶

حجم پوسته ۵۲۹

حرکت

~ پرتو کیهانی ۳۰۹

~ پیچ ۳۱۱، ۳۵۷

~ تقدیمی اسپین ۳۷۹

~ دو قطبی ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴

~ در میدان مغناطیسی ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۵۵

~ زمین ۳۰۹، ۳۱۰

~ در میدان قائم ۳۱۱

~ زمین بر اثر نور ۱۷۸، ۱۷۹

~ غیر نسبیتی ۴۷۳

معادله ~ ۲۷۲، ۲۷۳

emf ~ ۳۴۴

حساب برداری، ۳، ۲۲۰

بردارهای برخوردکننده در ~ در فضا-زمان

۴۲۴

~ جریان چاربردار ۲۲۰، ۲۲۶، ۲۲۷

~ در نسبیت خاص ۲۲۸

~ مؤلفه‌های هموردایی و پادوردایی ۲۲۳، ۲۲۴

۲۲۶، ۲۲۷

حل

~ عددی معادله لاپلاس ۷۰

~ معادله دیفرانسیل جزئی ۸۹

حلقه

~ پسماند ۳۸۷

~ جریان ۳۰۷

تکانه مغناطیسی ~ ۳۰۷

جریان گشتاور بر روی ~ ۳۱۴-۳۱۶،

۳۷۴-۳۷۶

چرخش ماتریس وارون ۱۱

چرنکوف

اثر ~ ۴۸۲

تابش ~ ۴۸۲

شمارشگر ~ ۴۸۴

مخروط ~ ۴۸۲

چشمه

~ پرتو ۱۹۸x، ۱۹۸

~ همدوس ۵۵۰

چگالی

~ افت و خیز در گاز ۵۵۰

~ انرژی الکتریکی ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۳،

۱۵۴

~ انرژی در موج ۴۱۴

~ انرژی در موج در محیط مادی ۴۲۴

~ انرژی در میدانها ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲

~ انرژی مغناطیسی ۳۹۳

~ بار ۳۶

~ تبدیلات لورنتس ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۵۷،

۲۵۷

~ بار سطحی ۸۳، ۱۳۶، ۱۳۷

قطبیدگی ~ ۱۲۳، ۱۲۴: ۲۴۴، ۲۴۵

یکاهای ~ ۳۶، ۵۸۸

~ تکانه ۲۷۹، ۲۸۱

~ در میدان ۲۷۹، ۲۸۱، ۲۸۲

~ جریان ۳۶، ۲۴۵، ۲۴۶

~ الکترون ۳۵، ۳۶

~ تبدیلات لورنتس ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۵۷،

۲۵۸

~ جابه‌جایی ۳۶۰

~ در رسانا ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳

یکاهای ~ ۳۶، ۵۸۸

~ قطب مغناطیسی ۳۸۹

~ نیرو ۲۷۵، ۲۷۶

چند جمله‌ایهای دژلندر ۱۰۲، ۱۰۹، ۱۱۰

- ~ دایره‌ای میدان مغناطیسی ۳۰۱
 ~ سیم بسته پتانسیل مغناطیسی ۳۲۷
 ~ هلمهولتز ۳۲۷
 ~ چگالی جریان ۳۶، ۵۵۸
 دمای کوری ۳۸۸
 دوقطبی
 ~ محض الکتریکی ۱۱۳
 ~ محض مغناطیسی ۳۰۵، ۳۰۶
 ~ مغناطیسی ۳۰۵، ۳۰۶
 بردار مغناطیسی ~ ۳۳۰
 ~ پتانسیل نرده‌ای ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۸۰
 ۳۸۱
 تکانه ~ ۳۰۵، ۳۰۶
 ~ حلقه جریان ۳۰۷، ۳۱۵، ۳۱۶
 گشتاور بر روی ~ ۳۱۵، ۳۱۶
 معادله حرکت ~ ۳۳۲
 میدان ~ ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۸، ۳۰۹
 یکاهای ~ ۵۸۸
 دوقطبی الکتریکی ۶۴
 تابش به وسیله ~ ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱
 گشتاور ~ ۶۹، ۴۹۹
 ~ محض ۱۱۳
 میدان ~ ۶۶
 نیرو بر ~ ۶۷، ۶۸
 نیروی کل وارد بر ~ ۶۷
 ~ ایده آل ۳۰۶، ۱۱۳
 دوقطبی تابش ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۴
 نقش ~ ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۴، ۵۰۵
 دوقطبی گشتاور مغناطیسی ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸
 ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۸۰
 دی الکتریک ۱۲۰
 انرژی در ~ ۱۵۸، ۱۵۹
 ثابت ~ ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۸، ۱۴۱
 ~ خطی ۱۲۷، ۱۵۸
 ~ در چگالی بار قطبشی ۱۲۳، ۱۲۴
 ۱۲۶، ۱۳۶، ۱۳۷
 ساختار میکروسکوپی ~ ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰
 سطح بار بر روی ~ ۸۲، ۸۳، ۱۳۷، ۱۳۸
 خازن ۱۶۴، ۱۶۵
 انرژی ~ ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۹، ۱۷۰
 ~ تخت موازی ۱۶۵، ۱۶۶
 خط
 ~ انتقال هم محور ۳۹۸
 ~ تکیه در ریسمان دیراک ۳۱۹
 ~ شارش شاره تراکم ناپذیر ۲۹۳، ۳۰۱
 ~ میدان ۳۰، ۵۱
 ~ الکتریکی ۵۱
 ~ چار پتانسیل ۴۶۸
 ~ در فضا-زمان ۴۶۸
 ~ مد ۵۳۸ TE
 ~ مغناطیسی ۲۸۸، ۲۸۹
 ~ منجمد ۳۴۵
 نقش ~ ۲۶۹، ۲۷۰
 خود القايدگی ۳۴۸
 ~ کابل هم محور ۳۵۰، ۳۹۸
 خود-انرژی ۱۵۵، ۱۵۶
 ~ الکتریکی ۱۵۵، ۱۵۶
 خود-نیرو ۸۴
 خود- emf ۳۴۸
 خیز ۲۲۳
 دامنه پراکندگی ۵۵۱، ۵۵۲
 ~ پیشرو ۵۵۱، ۵۵۲
 در ترمینان ۷
 درجه قطبش ۴۵۶
 دلتای کرونگر ۱۱، ۲۲۵
 دستگاه مختصات ۱۷۴، ۱۷۵
 دستگاه CGS الکتروستاتیک ۳۶
 چگالی بار در ~ ۳۶، ۵۵۸

- رویداد ۱۷۴، ۱۸۵، ۲۲۰
 ریسمان دیراک ۳۱۹
 زاویه
 ~ بروستر ۴۳۷
 ~ فاز برای جریان LCR ۳۵۴
 زمان
 اتساع ~ ۱۹۸، ۲۰۰، ۴۱۴
 اتساع ~ در آزمایشگاه ساکن ۲۰۰، ۲۰۵
 اتساع ~ برای حرکت شتابدهنده ۲۰۱
 ~ تأخیری ۴۶۱
 مشتقات ~ ۴۶۹، ۴۷۰
 ~ مطلق ۱۷۵، ۱۸۸، ۱۸۹
 ترتیب و وارون ~ ۱۹۳
 ~ میرایی ۵۲۹
 ~ برای کاواک تشدید ۵۲۹
 ~ نسبی ۱۹۳، ۱۹۴، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲
 ~ واهلش ۲۹۵
 رسانا در ~ ۴۴۸
 زمین، میدان مغناطیسی ۳۰۱، ۳۱۰، ۳۳۱
 ساختار
 ~ اتم ۶۳
 ~ مولکولها ۶۳
 ساعت
 اتساع زمان ~ ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۴۱۴
 ۴۱۵
 ~ اتمی ۲۰۴
 ~ مسافرت ۲۰۴
 ~ نور ۲۱۵، ۲۱۶
 همزمان سازی ~ ۱۸۴
 ~ هندسو دینامیکی ۲۱۲
 ~ مارتسکه و ویلر ۲۱۲
 سایه
 ~ در پراش ۵۶۶
- شرایط مرزی ~ ۱۲۱، ۱۳۰
 ~ غیر خطی ۵۳
 کرة ~ ۱۳۲
 محفظه ~ ۱۳۱
 موجبرهای ~ ۵۳۷، ۵۳۸
 میدان موضعی در ~ ۱۴۱، ۱۴۳، ۱۴۴
 ~ همسانگرد ۱۲۷، ۱۵۹
 دیامغناطیس ۳۷۲، ۳۸۱، ۳۸۶
 رانش $E \times B$ ۳۱۳
 ۱۵۵، ۲۲۸
 ~ تانسور انرژی-تکانه ۲۸۴
 رسانا(ی) ۸۲، ۲۹۱، ۲۹۲
 بار روی ~ ۸۴، ۸۵
 تعادل ~ ۲۹۵، ۴۴۷
 ~ درون محفظه ۸۵
 زمان واهلش ~ ۲۹۵، ۴۴۸
 ~ کامل ۵۱۹
 کره ~ ۱۰۸
 مسئله شرایط مرزی حجم ~ ۲۹۳
 میدان الکتریکی در ~ ۸۶، ۲۹۱
 رسانایی
 ~ استوانه‌ای ۹۳، ۹۴
 ~ پلاسما ۴۴۲، ۴۴۷
 یکاهای ~ ۲۹۰، ۲۹۱
 رسانندگی ۲۹۰
 رشته فوریه ۹۲
 رنگ آبی آسمان ۵۵۰
 رنگین کمان ۴۵۳
 ~ سفید ۵۸۱
 روزنه مستطیلی ۵۶۳
 ~ پراش فرانوفر ۵۶۳، ۵۶۴، ۵۶۵
 ~ پراش فرنل ۵۷۱، ۵۷۲
 روش تصویر ۸۶، ۱۱۴، ۱۱۵
 روش واهلیده برای معادله لاپلاس ۷۲

سیکلوئید ۳۱۳

قرص ۵۷۵

سیم

لبه راست ۵۷۴

~ در میدان مغناطیسی ۳۱۴، ۳۱۵

ستاره نوترون ۵۷۵

~ مقاومت ۲۹۱

سرعت

سیم آنتن نیم موج ۴۹۴

~ رانش ۲۹۱، ۳۱۳، ۳۱۴

سیملوله ۳۰، ۳۱۹، ۳۲۰

~ الکترون ۲۹۱، ۳۱۳، ۳۱۴

~ فاز ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵

شاخص

~ در موجبرها ۵۳۳

~ تانسور بالا بردن ۲۲۶

~ علائم ۴۳۰

~ تانسور پایین آوردن ۲۲۶

~ فرمی ۲۹۰

~ ظاهری ۷

قانون جمع گالیله برای ~ ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۹۷

~ لاتین بردارها ۶

۱۹۸

شار

~ گروه ۴۲۸، ۴۳۰، ۵۳۳

~ انرژی ۲۸۱

~ در موجبرها ۵۳۴

~ در موج ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶

~ موج ۴۲۵

~ در محیط مادی ۴۲۴

~ فاز در محیط مادی ۴۲۳، ۴۲۴

~ تکانه ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱

۴۲۵

~ در میدانها ۲۷۹، ۲۸۰

~ گروه در محیط مادی ۴۲۸، ۴۳۰

~ تک قطبی ۳۲۴

۵۳۳

~ زاویه ای موج ۴۱۰

~ میل رسانا به تعادل ۲۹۵، ۴۴۷

~ مغناطیسی ۳۳۶، ۳۴۵، ۳۴۶

~ نسبیتی ۱۹۷

یکاهای ~ ۵۸۸

ترکیب ~ ۱۹۷، ۱۹۸

شارش پتانسیل ۲۹۳

~ نور ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱

شماره تراکم ناپذیری ۳۱

~ زیاد ۲۱۲، ۲۱۳

شتابدهنده خطی استانفورد ۲۳۳

سطح

شرایط مرزی

~ رسانا ۸۱

~ برای پتانسیل ۸، ۸۱

~ استوانه ای ۹۳، ۹۴

~ برای جریان ۲۹۲، ۲۹۳

~ مقطع ۵۴۷

~ برای موج ۴۳۲، ۴۳۳

~ تامسون ۵۴۹، ۵۵۰

~ برای میدان الکتریکی ۸۲، ۸۳، ۱۲۸

~ پراکندگی ۵۴۷، ۵۵۱

۱۲۹

~ پراکندگی دیفرانسیلی ۵۴۷

~ برای میدان مغناطیسی ۳۹۰، ۳۹۱

~ دیفرانسیلی ۵۴۷

~ برای میدان D ۱۳۰، ۱۳۱

~ کل ۵۵۲

~ در روش تصویر ۸۶

~ کلاین-نیشینا ۵۴۸

~ در کاواک تشدید ۵۱۷

سفینه فضایی پایونیر ۵۰

~ فوریه ۹۲	~ در محفظه دی الکتریک ۱۳۱، ۱۳۲
~ میل ۵۵۹	~ در موجرها ۵۳۳
~ ۳۷۸ g	~ دی الکتریکی ۵۳۹
	~ دیریکله ۷۰، ۲۹۳
طول	~ نویمان ۸۰، ۸۱، ۲۹۳
~ عمر ۵۰۲، ۵۰۳	شرط
~ مطلق ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۸۹، ۱۹۰	~ کواتش دیراک ۳۲۳
~ نسبی ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹	~ لورنتس ۴۰۶، ۴۲۹
طیف‌نمایی لیزری ۲۰۲	تبدیل ~ ۲۶۰، ۴۸۱، ۴۸۲
ظرفیت ۱۶۴، ۱۶۵	~ برای جریان ۲۹۲، ۲۹۳
ضرایب ~ ۱۶۶	شعاع و مدار در میدان مغناطیسی ۳۱۰، ۳۱۱
یكاهای ~ ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۷	شکافت ۱۵۴
	شکست ۴۳۱، ۴۳۲
عدد مختلط ۸۹	~ در قانون اسنل ۴۳۱، ۴۳۴
عدسی	صفحه
روزنه دایره‌ای ~ ۵۷۷	~ بسیار بزرگ میدان الکتریکی ۵۵
فاصله کانونی ~ ۵۷۹	~ قطبش ۴۰۷
علائم درگذشته خود ۱۹۵	~ مکمل ۵۵۹
عمق	~ منطقه‌ای ۵۷۶، ۵۷۷
~ پوست ۴۴۵، ۵۲۸	~ موازی دارای نیرو ۱۶۱، ۱۶۲
~ نفوذ موج ۴۴۱	~ موج قطبش ۴۰۷
عملگر ۱۸، ۲۴۲، ۲۴۳	
~ دالامبری ۲۴۳	ضرایب
~ دیفرانسیلی ۱۸، ۲۰، ۲۴۲، ۲۴۳	~ القا یا القایدگی ۳۴۷
~ مرتبه دوم ۲۴۳	~ پتانسیل ۱۶۸
~ گزادیان ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۲۳، ۳۴، ۲۴۲	~ ژیرومغناطیسی ۳۷۸
~ در مختصات قائم ۲۲	~ شکست ۴۲۵، ۴۴۲
~ لاپلاسی ۲۵	~ آب ۴۵۳
~ موج ۲۴۳	~ پلاسمای ۴۴۶
~ ۱۸ del	~ در محیط رسانا ۴۴۲، ۴۴۳
فاراد ۱۶۵، ۵۸۸	~ مدل اتمی ۴۲۷
فاصله	~ مختلط ۴۴۲
~ تضعیف در موجرها ۵۴۳	~ معادله زلایر ۴۲۷
	~ ظرفیت ۱۶۶

- ~ نیوتونی ۱۷۵، ۱۷۶، ۲۲۷، ۲۲۸
- ~ طول موج ۴۴۱، ۴۴۳
- ~ کانونی ۵۷۹
- ~ واپاشی (واپاشنده) ۴۴۱، ۴۴۳
- قاعده
- ~ دست راست ۳۳۶
- ~ القایی ۳۳۶، ۳۳۷
- ~ برای تکانه مغناطیسی ۳۰۸
- ~ برای میدان مغناطیسی ۲۸۸
- ~ کیرشهوف ۳۵۱، ۳۵۲
- قانون
- ~ آمپر ۲۸۷، ۲۹۵
- تعمیم یافته ~ ۳۶۰
- ~ اسنل ۳۳۱
- ~ القای فاراده ۳۴۳
- مولد هم قطبی در ~ ۳۴۳
- ~ اول نیوتون ۱۷۵، ۱۷۶
- ~ اهم ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۵، ۲۹۶
- ~ برای رسانای حرکتی ۳۴۴، ۳۴۴
- ~ بازتاب ۴۳۴
- ~ بیوساوار ۲۸۷، ۲۹۸، ۳۱۵
- ~ پاد جابه جایی ۸
- ~ جمع گالیله برای سرعت ۱۷۷، ۱۷۸
- ~ ۱۹۷، ۱۹۸
- ~ نسبیته ۱۹۷
- ~ دوم نیوتون ۲۰۴
- ~ ریلی ۵۴۹
- ~ سوم نیوتون ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۹۰، ۳۱۵
- ~ ۳۱۶
- ~ فاراده ۳۳۴، ۳۳۸
- ~ کولن ۴۵
- ~ آزمایشهای ۴۸
- ~ گاوس ۵۰، ۵۱، ۵۵، ۵۷
- ~ لنز ۳۳۶
- قرار داد جمع اینشتین ۶، ۲۲۱
- قرص فاراده ۳۴۲
- قضیه ۵۵۳
- ~ رودریگز ۱۰۲
- ~ عدسی سازان ۵۷۹
- ~ لارمور ۴۷۵
- ~ نویمان ۳۴۷
- فرم مغناطیس ۳۷۲، ۳۸۰، ۳۸۶
- فریزها ۵۵۳، ۵۷۴
- فضا-زمان ۱۷۳، ۲۲۰
- بازه ~ ۱۸۴، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۹، ۱۹۰، ۲۲۱
- ~ در تبدیلات لورنتس ۱۹۰، ۱۹۳، ۱۹۴
- ~ چهار بعدی ۱۷۴
- ~ فیزیک نیوتونی ۱۷۴
- میدان در ~ ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶
- نمودار ~ ۱۸۶، ۲۲۴
- ~ نسبیته ۱۸۹
- ~ نیوتونی ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۸۹، ۱۹۰
- هندسه ~ ۱۷۴
- ~ نیوتونی ۱۸۹، ۱۹۰
- فضای
- ~ تلسکوپ ۵۸۰
- ~ تکانه ۲۳۵
- فشار و نور ۴۱۵
- فلز ۲۹۰
- فوتون
- اسپین ~ ۴۲۰
- انرژی و تکانه ~ ۴۱۵
- گسیل ~ ۲۳۶، ۲۳۷
- فیزیک
- ~ کوانتومی ۶۴

- ~ اپتیکی ۵۵۳
 ~ ارتشواوای ۶۳
 ~ استوکس ۳۰
 ~ بلیک نی ۳۳۰
 ~ گاؤس ۲۷
 ~ مقدار میانگین ۶۹
 ~ نیوتون ۷۳
 ~ وارونگی ۱۶۶
 ~ گرین ۱۶۶
 ~ ون لیون ۳۸۶
 ~ ویریال ۱۵۹
 ~ یکتایی ۸۱، ۸۰
 ~ شرط دیریکله ۸۰، ۸۱
 ~ شرط نویمان ۸۰
 قطبش
 ~ بار مقید ۴۲۱
 ~ جریان ۴۲۱
 ~ چپگرد ۴۰۹
 ~ خطی ۴۰۷
 ~ راستگرد ۴۰۹
 ~ موج ۴۰۷
 ~ بازتابی ۴۳۸، ۴۳۹
 ~ بردار پایه ۴۰۶
 ~ دایره‌ای ۴۰۹
 ~ درجه ۴۵۶
 ~ در نور خورشید ۴۳۹
 قطبیدگی ۵۳
 ~ بارهای مقید ۱۲۲
 ~ چگالی بار ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۶، ۱۳۶، ۱۳۷، ۴۲۰، ۴۲۱
 ~ در چگالی بار سطحی ۱۲۳، ۱۳۶
 ۱۳۷
 ~ ماکروسکوپی ۱۲۶
 ~ مولکول گاز ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱
 ~ بیضوی ۴۵۲
- ~ پذیرای مولکولی ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶
 ~ دایره‌ای ۴۰۹
 ~ مولکولی ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵
 ~ ناهمگن ۴۲۱
 قطع امواج رادیویی ۴۵۷
 قفس فاراده ۹۳
 کابل هم‌محور ۳۳۸، ۳۵۰، ۳۹۸، ۵۲۹
 ~ مد TEM ۵۲۹
 کار
 ~ ذخیره‌شده در دی‌الکتریک ۱۵۸
 ~ ماکروسکوپی ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰
 ~ و انرژی مغناطیسی ۳۹۵
 کانون عدسی ۵۷۹
 کاواک تشدید ۵۱۷
 اتلاف انرژی در ~ ۵۲۸
 ~ استوانه‌ای ۵۲۱
 ~ الکترومغناطیس ۵۱۷
 ~ الکتریکی و میدانهای مغناطیسی ۵۲۲، ۵۲۳
 ~ در مد TM ۵۲۳، ۵۲۸
 ~ در معادلهٔ ماکسول ۵۲۱
 ~ در مسئلهٔ ویژه مقدار ۵۱۷
 ~ در نوسان ۵۱۷، ۵۱۸
 ~ زمان میرایی ۵۲۹
 شرایط مرزی ~ ۵۱۹، ۵۲۰
 ~ فراسانایی ۵۲۹
 ~ مدها ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۸
 ~ مستطیلی ۵۲۳، ۵۲۴
 ~ در مد TE ۵۲۳
 ~ معادلهٔ ویژه مقدار ۵۱۸، ۵۲۲، ۵۲۳
 میدانهای داخل ~ ۵۲۰
 ~ ویژه بسامد ۵۳، ۵۴، ۵۱۷، ۵۲۶
 ~ Q ۵۲۹

- بار ~ ۵۸، ۶۲
 ~ دی الکتریک ۱۳۲
 ~ رسانا ۱۰۸
 ~ مغناطیده ۳۹۱
 ~ یکنواخت ۳۹۱
 کشش فرنل ۱۷۸، ۲۱۶
 کمربند وان آلن ۳۵۸
 کنش
 ~ از دور ۵۲
 ~ ثابت ۵۲
 ~ واکنش ۲۲۸
 ~ بر روی حلقه بسته ۳۱۵، ۳۱۶
 کوازار ۲۱۲، ۲۱۳
 کولن ۴۵، ۴۶
 کوانتش ۳۲۴
 ~ بار ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳
 ~ تکانه زاویه‌ای ۳۲۲، ۳۲۳
 شرط ~ دیراک ۳۲۳
 ~ و تکانه زاویه‌ای ۳۲۳
 گاز ۲۹۰
 الکترون آزاد ~ ۲۹۰، ۲۹۱
 ثابت دی الکتریک ~ ۱۳۹، ۱۴۰
 چگالی افت و خیز ~ ۵۵۰
 گاوس ۲۶۶، ۵۸۸
 گذردهی ۳۸۶
 ~ مغناطیسی ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸
 گذشته مطلق ۱۹۴
 گروه سرعت ۴۲۸، ۴۳۰
 گشتاور
 ~ بر روی جسم باردار ۱۶۳، ۱۶۴
 ~ چارقتبی الکتریکی ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲
 ۵۰۷، ۵۰۸، ۱۱۴
 ~ حلقه در میدان مغناطیسی ۳۱۴، ۳۱۵
 ~ حلقه‌های جریان ۳۷۳، ۳۷۴
 ~ دوقطبی ۶۵
 ~ القایی ۱۲۱
 ~ الکتریکی ۶۴، ۶۵، ۱۱۰
 ~ الکتریکی اتم ۱۳۸
 ~ الکتریکی القایی ۱۲۱
 ~ الکتریکی دائمی ۱۲۱
 ~ دائمی ۱۲۱
 ~ گذار ۵۰۲، ۵۰۳
 ~ مغناطیسی ۳۸۰، ۳۱۵، ۳۱۶، ۵۰۳، ۵۰۴
 ~ مولکول ۱۳۸، ۱۳۱، ۱۴۰، ۱۴۳، ۱۴۴
 ~ گاز ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱
 یکای ~ ۵۸۸
 ~ مغناطیسی ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۷۵، ۳۷۶
 اسپین ~ ۳۷۸، ۳۷۹
 ~ الکترون ۳۷۸، ۳۷۹
 ~ بر روی حلقه ۳۱۴
 ~ پروتون ۳۷۸، ۳۷۹
 توزیع ~ ۳۷۷
 ~ حرکت مدار ۳۷۸، ۳۷۹
 ~ نوترون ۳۷۸، ۳۷۹
 یکاهای ~ ۵۸۸
 ~ نیروی چرخشی ۶۹
 لاپلاسی ۲۱، ۲۵، ۲۷
 لبه راست پراش ۵۷۳، ۵۷۵
 لکه پواسون ۵۷۵
 لکه روشن پواسون ۵۷۵، ۵۷۶
 لوله استوانه‌ای ساکن ۳۶۲
 لیزر ۱۸۰، ۲۰۲، ۲۰۳، ۵۵۴
 ماتریس
 ترانهاد ~ ۱۱

مدهای)

کاواک تشدید $\sim 528, 523$
 در موجرها $541, 532$
 موجر مستطیلی $536, 532$
 $528, 524, 523$ TE \sim
 $531, 530, 529$ TEM \sim
 $533, 528, 524, 523$ TM \sim
 خطوط میدان $\sim 527, 526$
 موج $\sim 541, 538, 532, 528, 523$
 مرکز نکانه
 انرژی $\sim 241, 240, 239$
 چارچوب $\sim 239, 238$
 مزون
 $\sim 198\pi$
 $\sim 200\mu$
 مسئله شرایط مرزی
 برای کاواک تشدید $520, 519$
 برای موجرها 532
 مسئله مقدار مرزی $128, 127, 81, 80, 79$
 در شرایط نویمان $293, 80$
 مغناطیسی $389, 388$
 مسئله ویژه مقدار 517
 پراکندگی در ~ 545
 معادله
 ~ 98 بسل
 پخش 448
 الکترومغناطیسی 448
 پواسون $81, 80, 63$
 برای پتانسیل مغناطیسی 389
 پیوستگی $259, 247, 246, 245, 38$
 $293, 292$
 حرکت $310, 309, 273, 272$
 ذره $310, 309, 273, 272$
 نسبیتی $273, 272$
 دیفرانسیل جزئی 89

ترکیب ~ 10

چرخش $12, 11, 8$
 متعامد 11
 واحد 11
 وارون 11
 ماریچ کورنو $573, 572$
 ماکسیمم در پتانسیل 63
 متقارن $227, 15$
 متوسط انرژی
 پتانسیل $159, 158$
 جنبشی $159, 158$
 محمل تابع 565
 محفظه
 تشدید $517, 180$
 دی الکترونیک 131
 سوزنی دی الکترونیک $132, 131$
 محور چرخش 8
 محیط پاشنده 428
 در پاشندگی عادی و غیرعادی 428
 محیط رسانا و انتشار موج 442
 محیط همسانگر خطی 423
 مخروط ماخ 482
 مخروط نور 194
 مختصات
 استوانه‌ای 22
 تاو در 22
 دکارتی $22, 4$
 فضایی $221, 220$
 قائم $175, 174, 4$
 کروی $66, 22$
 تاو در 22
 مدار LCR 351
 امیدانس 353
 بسامد تشدید ~ 354
 زاویه فاز ~ 354

- مقدار مرزی حجم
 ~ جریان در رسانا ۲۹۳
 مقطع
 ~ تامسون ۵۴۸
 ~ کلاین-نیشینا ۵۴۸
 مقیاس
 ~ کوچک مغناطیسی ۳۸۸
 ~ مغناطیسی ۳۸۸
 مکانیک کوانتومی ۵۰۲
 منطقه خشی ۱۹۵
 موج تخت
 ~ در محیط مساوی ۴۲۲، ۴۲۳
 ~ در معادله محیط مادی ۴۲۲
 ~ قطبیده ۴۰۷
 موج
 اثر پوست میدان ~ ۴۵۵
 ~ بازتابیده ۴۳۱
 ~ داخلی کلی ۴۳۹
 ~ کلی ۴۳۹
 بردار پایه و قطبش ~ ۴۰۶
 پراکندگی ~ ۵۵۳، ۵۵۴
 تابع ~ ۲۴۳، ۲۴۴
 ~ تابیده ۴۳۱
 تپ ~ ۴۲۸
 چگالی انرژی در محیط مادی ~ ۴۲۴
 ~ در محیط رسانا ۴۴۱، ۴۴۲
 ~ در محیط مادی تخت ۴۲۳
 موج
 تکانه زاویه‌ای ~ ۴۱۰، ۴۱۵
 تپ و تابش ~ ۴۵۹
 ~ تکان ۴۸۲
 ~ تکفام ۴۱۱
 چار بردار ~ ۴۱۱، ۴۱۲
 چگالی انرژی ~ ۴۱۴
 ~ در پلاسما ۴۴۶، ۴۴۷
 ~ متغیرها ۸۹
 ~ زلمایر ۴۲۷
 ~ فریل ۴۳۵، ۴۳۷، ۴۵۴، ۴۵۷
 ~ کلاوسیوس-موساتی ۱۴۴
 ~ لاپلاس ۶۳
 حل عددی ~ ۷۰
 ~ در حل توسط تصویر ۸۶
 ~ در مختصات استوانه‌ای ۸۷، ۸۸، ۹۳
 ~ در مختصات کروی ۹۹، ۱۰۰
 ~ لورنتس-ناورد ۴۵۲
 ~ ماکسول ۱۷۷، ۲۷۲، ۲۷۳
 ~ با بار مغناطیسی ۳۱۷، ۳۱۸
 ~ برای کاواک تشدید و موج ۵۲۱
 ~ در محیط مادی ۴۲۲، ۴۲۴
 شکل چهاربعدی ~ ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲
 ~ موج نسبی ۲۵۹، ۲۶۰
 ~ موشک ۲۵۲، ۲۵۳
 ~ میدان الکتروستاتیک ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۴، ۲۶۶
 ~ میدان نسبی ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۲
 ~ ویژه مقدار ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۲
 مغناطش ۳۸۰، ۴۲۰، ۴۲۱
 جریان ~ ۳۸۳، ۳۸۴، ۴۲۰
 ~ در مواد فرومغناطیسی ۳۸۸
 یکاهای ~ ۵۸۸
 مغناطوستاتیک ۲۸۷
 بسامد سیکلوترون در ~ ۳۱۰
 ~ در تک قطبی مغناطیسی ۳۱۷
 ~ در کهکشان ۳۲۴
 میدان مغناطیسی در ~ ۲۸۸، ۲۸۹
 مقاومت ۲۹۱، ۲۹۲
 اندازه‌گیری توسط پخش مغناطیسی
 ~ ۴۵۷
 ~ ویژه ۲۹۰
 یکاهای ~ ۲۹۰، ۲۹۲، ۵۸۸

۳۴۳MHD ~

مؤلفه‌های

~ بردار مکان، ۴، ۲۰۲، ۲۰۳

~ پادوردا، ۲۲۳، ۲۲۶، ۲۲۷

~ مختصات دکارتی، ۴

~ هموردایی، ۲۲۳، ۲۲۶، ۲۲۷

مهبانگ ۳۲۴

میدان، ۱۵، ۱۶

~ الکترومغناطیسی واهلش، ۴۴۸

~ الکتریکی، ۵۰، ۲۶۲، ۲۶۶

~ استوانه‌ای، ۹۶، ۹۷

~ القایی، ۳۳۴، ۳۳۸، ۳۳۹

~ بار نقطه‌ای، ۵۰، ۵۱

برهم نهش ~ ۵۳

~ تبدیلات لورنتس، ۲۶۸، ۲۶۹

ترکیب تانسور ~ ۲۶۱، ۲۶۲

توزیع بار ~ ۵۳، ۵۴

~ خود-نیرو، ۸۴

~ در رسانا، ۸۶، ۲۹۱، ۲۹۲

~ دوقطبی، ۶۶

رسانای دیگر ~ ۸۴

روش متوسط‌گیری ماکروسکوپی

~ ۱۲۵، ۱۲۶

شرایط مرزی برای ~ ۸۳، ۸۴، ۴۳۲

۴۳۳

~ الکتریکی بار نقطه‌ای، ۴۷۱، ۷۲

~ موج، ۴۰۶، ۴۰۷

یکای ~ ۵۱، ۶۲، ۵۸۸

~ یک صفحه بسیار بزرگ، ۵۵، ۵۶

۵۷

~ یک کره، ۵۸

انرژی در ~ ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۳، ۱۵۴

۱۵۷، ۲۸۰

~ برداری، ۳۳

~ پایستار، ۳۳

سرعت فاز ~ ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵

سرعت گروه ~ ۴۲۸، ۴۳۰، ۴۳۳

شار انرژی ~ ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶

~ در محیط مادی، ۴۲۴

شار تکانه ~ ۴۱۵

شرایط مرزی ~ ۴۳۲، ۴۳۳

~ شکسته، ۴۳۱، ۴۳۲

عدد ~ ۴۰۵

عملگر ~ ۳۴۳

علائم ~ ۴۳۰

~ قطبیده، ۴۰۷، ۴۰۹، ۴۳۲، ۴۳۳

~ بیضوی، ۴۵۲

~ دایره‌ای، ۴۰۹، ۴۲۰

گروه ~ ۴۲۸

مدهای TEM ~ ۵۲۹، ۵۳۰

TM ~ ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۸، ۵۳۳

معادله ~ ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۱۰

معادله نسبیته ~ ۲۵۹، ۲۶۰

نور ~ ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۱۱

~ VELEf ۴۵۷

موجبرهای ۵۲۹

بسامد خاموشی ~ ۵۳۴، ۵۴۱

~ در کابل هم‌محور، ۵۲۹

~ در مسئله ویژه مقدار، ۵۳۳

~ دی‌الکتریک، ۵۳۷

تار نوری در ~ ۵۳۷

سرعت فاز ~ ۵۳۴

سرعت گروه ~ ۵۳۴

فاصله تضعیف ~ ۵۴۳

مدها در ~ ۵۳۲-۵۴۱

~ ورق، ۵۳۷

~ دی‌الکتریک، ۵۳۹

~ هم‌قطبی، ۳۴۳

~ مغناطو هیدرودینامیکی، ۳۴۳

- ~ موضعی ۱۴۱، ۱۴۳، ۱۴۴
 ~ میکروسکوپی ۱۲۶، ۱۵۹، ۱۶۰
 ~ انرژي ~ ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱
 ~ زنده‌ای ۱۶، ۲۴۳، ۲۴۴
 ~ واگرایی ۱۹
 ~ بردار، تانسور ۲۴۳، ۲۴۴
 ~ نزدیک ۴۷۲
 ~ ۳۸۵H
 ~ مغناطیسی ۳۸۵، ۴۲۲
 ~ میرایی میدانهای نزدیک رسانا ۴۴۹
 ~ میز ۱۸۳
 ~ مینیمم و ماکسیمم در پراش ۵۶۴، ۵۶۹، ۵۷۶
 ~ میکروموج ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴
 ناحیه
 ~ خشی ۱۹۴
 ~ سایه ۵۵۳، ۵۶۶، ۵۷۶
 ~ صفحه ۵۸۲
 ~ نوار کدر ۵۸۲
 ~ همبند ساده ۳۵
 ~ ناوردا (ی)
 ~ بی دررو ۳۵۷
 ~ تبدیل پیمانه‌ای ~ ۲۸۲، ۵۰۷
 ~ در فضا-زمان ۱۸۹
 ~ زنده‌ای ۱۳، ۱۴
 نسیت
 اصل ~ ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۲۴۷
 ۲۵۹
 ~ خاص ۱۷۳، ۲۲۸
 چارجوب مرجع ~ ۱۷۴
 ~ در چارجوب مرجع لخت ۱۷۵، ۱۷۶
 ۱۷۸، ۱۷۹
 ~ در طول مطلق ۱۷۵، ۱۶۷، ۱۸۹
 ۱۹۰
 ~ زمان مطلق ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۸۸، ۱۸۹
 ~ برهم‌نهشی ۵۳
 ~ تابش
 فرضهای ~ ۴۹۲، ۴۹۸
 ~ مغناطیسی بار نقطه‌ای ۴۷۱، ۴۷۲
 ~ نقطه بار ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۱، ۴۷۲
 ~ پایستار ۳۳
 ~ تبدیلات لورنتس ۲۴۴، ۲۴۵
 تکانه ~ ۲۷۹
 ~ جابه‌جایی ۱۲۵، ۱۲۶، ۴۲۲
 ~ الکتريکی ۱۲۶، ۴۲۲
 ~ ماکروسکوپی ۱۲۶
 ~ در فضا-زمان ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵
 ~ قائم ۳۱۱
 ~ ماکروسکوپی ۱۲۶، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰
 ~ انرژي در ~ ۱۵۸، ۱۵۹
 ~ متوسط‌گیری ماکروسکوپی ۱۲۵، ۱۲۶
 ۱۵۹، ۱۶۰
 ~ مغناطیسی ۲۵۶، ۲۶۶
 القای ~ ۳۳۴، ۳۳۹، ۳۴۰
 ~ الکترون ۳۷۹
 ترکیب تانسور ~ ۲۶۶
 ~ حرکت چنبره‌وار ۳۲۶
 حرکت بار ~ ۲۸۸، ۲۸۹
 ~ حلقه ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۴، ۳۰۵
 ~ حلقه دایره‌ای ۳۰۱
 خطوط ~ ۲۸۸، ۲۸۹
 ~ دوقطبی ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۸، ۳۰۹
 ~ زمین ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۳۱
 ~ سیموله ۳۰۲
 ~ سیم مستقیم ۲۹۶، ۲۹۷
 شرایط مرزی ~ ۳۹۰، ۳۹۱، ۴۳۲
 ۴۳۳
 شعاع و مدار ~ ۳۱۰، ۳۱۱
 ~ کهکشان ۳۲۴
 یکاهای ~ ۲۶۶، ۲۶۷، ۵۸۸

- نسبیتی
 زمان ~ ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۰
 طول ~ ۲۰۸، ۲۰۷
 نظریه ~ ۱۷۳
 همزمان سازی ~ ۲۲۹، ۲۲۸، ۱۹۵، ۱۹۴
 نظریه
 ~ نسبت خاص ۱۷۳
 ~ میدان ۱۵۷
 نقش
 ~ پراش روزنه دایره‌ای ۵۶۷
 ~ پراش فرانگوفر ۵۶۶
 ~ تابش آنتن نیم موج ۴۹۶
 ~ خطوط ۵۲۷
 ~ بردار مد ۵۲۷ T.M
 ~ میدان ۲۷۰، ۲۶۹
 ~ میدان تابش دوقطبی ۵۰۱
 نمادگذاری انتزاعی بردارهای یکه ۶
 نوترون
 پایداری ~ ۳۸
 توزیع بار ~ ۴۷
 گشتاور مغناطیسی ~ ۳۷۸
 نور
 پراکنش نور توسط ~ ۵۳
 جهانخط علامت ~ ۱۹۱، ۱۹۰
 ساعت ~ ۲۱۶، ۲۱۵
 سرعت ~ ۱۸۵، ۱۸۱، ۱۸۰، ۱۷۹، ۱۷۸
 ۵۸۳، ۱۸۶
 فشار ~ ۴۱۵
 ~ قطبیده خورشید ۴۳۹
 مخروط ~ ۱۹۵، ۱۹۴
 نیروی
 ~ الکتروستاتیک ۴۴
 ~ الکتریکی ۴۴
 ~ ماکروسکوپی ۴۴
 ~ بر روی جسم بردار ۱۶۴، ۱۶۳، ۱۶۵
- ~ بر روی حلقه جریان ۳۱۴، ۳۱۷، ۳۷۳، ۳۷۶
 ~ بر روی دوقطبی الکتریکی ۶۷، ۶۸
 ~ بر روی صفحه موازی ۱۶۱، ۱۶۲
 ~ تماسی ۲۲۹
 ~ جریان در میدان مغناطیسی ۳۱۴، ۳۱۵
 ~ قوسی ۱۵۴
 ~ کولن ۴۵
 ~ لورنتس ۲۷۴
 ~ محرکه الکتریکی ۳۳۴
 ~ مغناطیسی ۲۸۸، ۲۸۹
 ~ بر روی حلقه جریان ۳۱۴، ۳۱۵
 نیوتون
 قانون اول ~ ۱۷۵
 وارون زمانی پتانسیل تأخیری ۴۶۱
 واپاشی
 ~ الکترون ۳۸
 ~ نوترون ۳۸
 واکنش آستانه ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳
 واگرایی ۱۹، ۲۴، ۲۷، ۲۸
 وبر ۵۸۸
 وحدت بزرگ نوین ۳۱۷
 ولت ۶۲، ۵۸۸
 ویژه بسامد در کاواک تشدید ۵۱۷، ۵۲۶، ۵۲۷
 هانری ۳۴۷، ۵۸۸
 هرکول ۱ - ۱۹۷X، ۱۹۸
 هسته
 انرژی الکتریکی ~ ۱۵۴، ۱۵۵
 تابش به وسیله ~ ۴۹۷، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵
 شکافت ~ ۱۵۴
 همزمان سازی ۱۸۴، ۱۸۵
 همزمانی نسبی ۱۹۴، ۲۲۸، ۲۲۹
 هندسه

- ~ شبه اقلیدسی ۱۸۹
 ~ فضا-زمان ۱۷۵، ۱۷۹
 یکاها(ی) ۵۸۷، ۵۹۰
 ~ الکتروستاتیک CGS ۳۶، ۴۵، ۴۶
 ~ بار ۴۵، ۴۶، ۵۸۸
 ~ پتانسیل ۶۲، ۵۸۸
 ~ رسانندگی در ۲۹، ۵۸۸
 ~ ظرفیت ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۵۸۸
 ~ مقاومت ۲۹۰، ۵۸۸
 ~ esu ۳۶، ۴۵، ۵۸۸
 ~ SI ۳۶، ۴۵، ۴۶، ۵۸۸
 ~ القايدگي ۳۴۷، ۵۸۸
 ~ چگالی بار ۵۸۸
 برای بار ۳۶، ۴۶، ۵۸۸
 پتانسیل ۶۲، ۵۸۸
 ~ جریان ۵۸۸
 ~ چگالی جریان ۵۸۸
 رابطه بین ~ CGS و ~ ۵۸۷، ۵۸۰
 ~ رسانندگی در ۲۹۰
 ~ شار مغناطیسی ۵۸۸
 ~ ظرفیت در ۱۶۵، ۱۶۶، ۵۸۸
 ~ گشتاور دوقطبی ۵۸۸
 ~ گشتاور مغناطیسی ۵۸۸
 ~ مغناطش ۵۸۸
 ~ در معادلات دیفرانسیل ۵۸۸، ۵۹۰
 ~ میدان الکتریکی ۵۸۸
 ~ میدان مغناطیسی ۲۶۶، ۵۸۸
 ~ سرعت ۱۸۵
 یکای MKSA ۵۸۷
 ~ در بازه فضا-زمان ۱۸۵
 یکتای فیزیکی ۸۱
 ~ الکتروستاتیک ۴۵، ۴۶
 ~ گاوسی ۴۵، ۴۶
 ~ CGS ۴۵، ۴۶
 CGS الکتروستاتیک
 میدان مغناطیسی در ~ ۲۶۶، ۲۶۷، ۵۸۸
 ۳۳۴emf
 ~ القایی ۳۳۶
 ~ حرکتی ۳۴۴