

ويليام ه. هيت

الكتر و مغناطيس

ترجمة خداداد القاني - ألن باعداساريان

کول

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z \quad \text{قائم}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) \vec{a}_r + \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \vec{a}_\varphi \quad \text{استوانه‌ای}$$
$$+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right] \vec{a}_z$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(H_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{a}_r \quad \text{کروی}$$
$$+ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} \right] \vec{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \vec{a}_\varphi$$

لاپلاسین

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{قائم}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{استوانه‌ای}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \quad \text{کروی}$$

دیورژانس

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad \text{قائم}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad \text{استوانه‌ای}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (D_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} \quad \text{کروی}$$

گرادیان

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{a}_z \quad \text{قائم}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{a}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{a}_z \quad \text{استوانه‌ای}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{a}_\varphi \quad \text{کروی}$$

الکترومغناطیس مهندسی

ویلیام ه. هیت



مؤسسہ انتشارات علمی دانشگاہ صنعتی شریف

مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی آریامهر
تهران - خیابان ولیعصر - پلاک ۱۰۰

مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی آریامهر



مقدمه مترجمان

کتاب الکترومغناطیس مهندسی تألیف ویلیام هیت در بسیاری از دانشگاه‌های امریکا به عنوان کتاب اصلی درس الکترومغناطیس در دوره لیسانس مهندسی برق مورد استفاده قرار می‌گیرد. در تدریس الکترومغناطیس از دوروش استفاده می‌شود: یکی اینکه قوانین ماکسول را از ابتدا به عنوان اصل قبول کرده کلیه قوانین تجربی الکترومغناطیس را از آنها نتیجه‌گیری می‌کند؛ و دوم، به پیروی از سیر تاریخی، از قوانین تجربی شروع می‌کند و با ترکیب و تعمیم آنها قوانین کلی ماکسول را بدست می‌آورد. برای درسی پایه‌ای در رشته مهندسی برق روش اول برتر است، چون در آن تجسم و تعبیر فیزیکی قوانین الکترومغناطیس برای دانشجو به مراتب آسان‌تر است. در این کتاب نیز از روش اول استفاده شده است و قوانین الکترومغناطیس و ریاضیات مربوط به آن به صورت ساده، همراه با تجسم فیزیکی مناسب و تأکید بر جنبه‌های مهندسی و محاسباتی آن شرح داده شده است. بدین ترتیب، در پایان کار تعبیر فیزیکی معادلات ماکسول، که به صورت چهارمعادله مختصر برداری است، به صورت واضح‌تر و روشن‌تری نمایان می‌گردد.

هنگامی که تصمیم گرفته شد برای درس الکترومغناطیس کتابی خوب انتخاب و به فارسی ترجمه شود، جلسات چندی از طرف مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی آریامهر با حضور صاحب‌نظران تشکیل گردید. طی این جلسات کتابهای ازین دست باهم مقایسه شد و به اتفاق نظر کتاب «هیت» از میان آنها انتخاب گردید. پس از پایان ترجمه و تحویل آن به مؤسسه انتشارات علمی ویرایش کتاب با مقایسه جمله به جمله با متن آغاز گردید و همزمان با این کار واژگان کتاب یکدست و مشخص شد و آماده گردید تا در پایان کتاب به صورت واژه‌نامه‌ای مستقل بیاید. چون دمواردی از واژه‌های معمول، وجوه صرفی مورد نیاز بدست نمی‌آمد، یا رسائی

تدوین شد. ناچار شدیم رصیح و اژه جدید کنیم. در این گونه موارد، همیشه به واژه معمول قدیمی در کنار واژه جدید، اشاره شده است.

هنگام ترجمه و ویرایش سعی بر این بود که اصالت متن به طور کامل حفظ شود. از این رو، تمام فصول و قسمت‌ها با تعابیر و مثال‌های مؤلف به صورت اصلی به فارسی برگردانده شد. چنانکه نویسنده کتاب نیز در نظر داشته، و بدان اشاره نموده است، هر مدرس می‌تواند، با توجه به وقت درس و اندازه نیاز دانشجویان، خود پاره‌ای از بخش‌ها را برگزیند و حاجت خویش را آن چنان که می‌خواهد بر آورده سازد.

در برنامه‌های لیسانس مهندسی برق این درس می‌تواند پس از فیزیک الکتروسیسته و آنالیز به عنوان درسی اجباری تلقی شود و پایه رشته‌های تخصصی برق قرار گیرد. همچنین، این درس برای رشته تخصصی علوم ارتباطی و مایکروویو پیش نیاز دروسهای میدانها و امواج و آنتن‌ها، و نیز برای رشته تخصصی «قدرت»، پیش نیاز دروسهای مربوط به ماشین‌های الکتریکی و انتقال انرژی محسوب می‌شود.

در مورد نویسنده کتاب لازم دیدیم اشاره‌ای بکنیم تا خواننده از مراتب علمی و فنی او آگاه گردد:

ویلیام ه. هیت^۱، مؤلف این کتاب، در اول ژوئیه ۱۹۲۵ در شهر ویلمت از ایالت ایلینوی^۲ آمریکا متولد شد. تحصیلات خود را در دانشگاه ایالتی ایلینوی پایان آورد و در سال ۱۹۵۴ درجه دکتری در مهندسی برق گرفت. از ۱۹۴۸ تا کنون، در مقام‌های استادیاری، دانشیاری و استادی دانشگاه پردو^۳ در رشته الکترومغناطیس به تدریس و تحقیق مشغول بوده و از سال ۱۹۶۲ تا ۱۹۷۵ ریاست دانشکده بسرق این دانشگاه را عهده‌دار بوده است.

علاوه بر این، آقای هیت عضو انجمن آمریکائی تدریس مهندسی و همچنین عضو انجمن مهندسان برق و الکترونیک^۴ آمریکا می‌باشد.

خ. الثانی - آ. باغدا ساریان

1. William H. Hayt

2. Wilmette, Illinois

3. Purdue

4. IEEE

زیر نظر علیرضا حیدری

الکترومغناطیس مهندسی
Engineering Electromagnetics

نوشته ویلیام ه. هیت

William H. Hayt, Jr.

ترجمه خداداد القابی - آلن باغداساریان

(از چاپ ۱۹۷۴ - مک گروہیل)

ویراستار : سروش حبیبی

طراح : ضیاء پساوند

طرح صفحه بندی و روجلد : ع. ح. همایون

نظارت چاپ : ابوالفضل نادری

چاپ : چاپخانه زر

تعداد ۳۳۰۰ نسخه

حق چاپ و هرگونه نقل خاص مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی آریامهر است.

شماره ثبت کتابخانه ملی ۱۸۵۳ به تاریخ ۲۵/۱۰/۲۵۳۶

فهرست مطالب

۱

پیشگفتار

۵

۱- آنالیز برداری

شمارواره‌ها (اسکالرها) و بردارها. جبر برداری. دستگاه محورهای مختصات دکارتی (قائم). مؤلفه‌های برداری و بردارهای واحد. میدان برداری. حاصلضرب داخلی. حاصلضرب چلیپائی (خارجی). دستگاههای مختصات دیگر: مختصات استوانه‌ای مستدیر. دستگاه مختصات کروی. تبدیل دستگاههای مختصات یکدیگر. مراجعی که توصیه می‌شوند. مسائل.

۳۹

۲- قانون کولن و شدت میدان الکتریکی

قانون تجربی کولن. شدت میدان الکتریکی. میدان π بار نقطه‌ای. میدان ناشی از توزیع پیوسته بار حجمی. میدان بار خطی. میدان يك صفحه باردار. خطوط شار و ترسیم میدانها. مراجعی که توصیه می‌شوند. مسائل.

۷۱

۳- چگالی شار الکتریکی، قانون گاوس و دیورژانس

چگالی شار الکتریکی. قانون گاوس. کاربرد قانون گاوس: چند نوع توزیع متقارن بار. کاربرد قانون گاوس: عنصر حجم دیفرانسیلی. دیورژانس. معادله اول ماکسول (الکتریسته ساکن). اپراتور برداری ∇ و قضیه دیورژانس. مراجعی که توصیه می‌شوند. مسائل.

۱۰۴

۴- انرژی و پتانسیل

انرژی مصرف شده در حرکت دادن يك بار نقطه‌ای در يك میدان الکتریکی. اشتغال خطی. تعریف اختلاف پتانسیل و پتانسیل. میدان پتانسیل يك بار نقطه‌ای. میدان پتانسیل يك مجموعه بار - خاصیت بقاء. گرادیان پتانسیل. دو قطبی. چگالی انرژی در میدان الکتریسته ساکن. مراجعی که توصیه می‌شوند. مسائل.

۱۴۶

۵- هادیها، عایق‌ها و ظرفیت

جریان و چگالی جریان. پیوستگی جریان. هادیهای فلزی. خواص هادیها. نیم هادیها. ماهیت موادعایق. شرایط مرزی برای عایق‌های کامل. ظرفیت. چند مثال محاسبه ظرفیت. ظرفیت يك خط دو سیمه. مراجعی که توصیه می‌شوند. مسائل.

۱۹۵

۶- روش‌های ترسیم تجربی خطوط میدان

مربع‌های منحنی الخط. مدل‌های فیزیکی. تشابه‌های جریان. نقشه‌های جریان سیال. روش تکرار. مراجعی که توصیه می‌شوند. مسائل.

۲۲۵

۷- معادلات پواسن و لاپلاس

معادلات پواسن و لاپلاس. قضیه یگانگی جواب. چند مثال از حل معادله لاپلاس. مثالی از حل معادله پواسن. راه حل حاصلضربی معادله لاپلاس. مراجعی که توصیه می‌شوند. مسائل.

۲۶۳

۸- میدان مغناطیسی پایدار

قانون بیوساوار. قانون مداری آمپر. کرل. قضیه استوکس. شار مغناطیسی و چگالی شار مغناطیسی. پتانسیل‌های مغناطیسی شمارواره‌ای (اسکالر) و برداری. به‌دست آوردن قوانین میدانهای مغناطیسی ساکن. مراجعی که توصیه می‌شوند. مسائل.

۳۲۲

۹- نیروهای مغناطیسی، مواد مغناطیسی و ضریب خود القاء

نیروی مؤثر بر بار متحرک. نیروی مؤثر بر يك عنصر دیفرانسیلی جریان. نیروی بین عناصر دیفرانسیلی جریان. نیرو و گشتاور نیروی مؤثر روی مدار بسته. ماهیت مواد مغناطیسی. آهن ربا سازی و قابلیت نفوذ. شرایط مرزی مغناطیسی. مدار مغناطیسی. انرژی پتانسیل و نیروهای مؤثر بر مواد مغناطیسی. ضریب خود القایی و ضریب القایی متقابل. مراجعی که توصیه می‌شوند. مسائل.

۳۷۶ ۱۰- میدانهای متغیر با زمان و معادلات ماکسول

قانون فارادی. جریان جابجائی. معادلات ماکسول به شکل نقطه‌ای. شکل انتگرالی معادلات ماکسول. پتانسیل‌های معوق. مراجعی که توصیه می‌شوند. مسائل.

۴۰۹ ۱۱- موج مسطح یکنواخت

حرکت موج در فضای آزاد. حرکت موج در عایق کامل. امواج مسطح در عایق با تلفات. بردار پوینتینگ و بررسی توان. انتشار در هادی خوب: اثر پوستی. انعکاس امواج مسطح یکنواخت. نسبت موج ساکن. مراجعی که توصیه می‌شوند. مسائل.

۴۶۵ ۱۲- خطوط انتقال

معادلات خط انتقال. پارامترهای خط انتقال. چند مثال مربوط به خطوط انتقال. روش‌های ترسیم. چند مسئله عملی. مراجعی که توصیه می‌شوند. مسائل.

۵۰۴ ۱۳- چند کاربرد دیگر معادلات ماکسول

قوانین نظریه مدار. حفره تشدید هم محور. تشعشع. مراجعی که توصیه می‌شوند. مسائل.

۵۳۷ ضمیمه ۱- آنالیز برداری

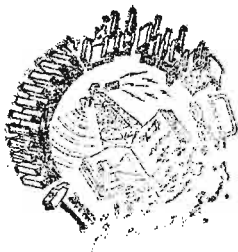
مختصات کلی منحنی الخط. دیورژانس، گرادیان و کرل در مختصات کلی منحنی الخط. اتحادهای برداری.

۵۴۳ ضمیمه ۲- آحاد

۵۵۱ ضمیمه ۳- ضرائب مواد

۵۵۶ ضمیمه ۴- جوابهای مسائل شماره فرد

۵۶۶ واژه‌نامه



پیشگفتار

گرچه اکثر برنامه‌های درسی مهندسی برق با بررسی مدارهای الکتریکی و مغناطیسی شروع می‌شوند و لسی اکنون پی برده‌اند که بررسی نظریه میدانهای مغناطیسی و الکتریکی به نحوی اساسی‌تر سزاوار توجه مجددی طی برنامه است. بررسی نظریه میدان در سال سوم از طریق آشنائی به مفاهیم مداری و همین‌طور به آنالیز امکان پذیر می‌گردد و این کار از طریق معادلات ماکسول ادامه می‌یابد و تقریباتی را که منجر به تئوری مدار می‌شوند قابل قبول می‌سازد.

در این کتاب از معادلات ماکسول به عنوان مطلب اصلی استفاده شده است. بسط این معادلات با برداشتی تاریخی صورت گرفته است، که در آن چند قانون تجربی به تدریج معرفی شده و با کمک دانش پیوسته افزاینده‌ای از آنالیز برداری مورد غور قرار گرفته‌اند. معادلات ماکسول، حتی در مورد میدانهای ساکن، در ضمن کار و برحسب پیش‌آمد معرفی شده‌اند به طوری که بعد از تکمیل نظریه، نوعی احساس کمال و حتی الفت بوجود می‌آید. کاربردهائی چند از این معادلات از جمله حرکت موجی و اثر پوستی و پدیده‌های خط انتقال و نظریه مدار و تشعشع در بخشهای آخری توصیف شده‌اند.

مطالب ارائه شده برای درسی يك نیمسال کاملاً کافی است. ممکن است به تناسب سطح آموزش لازم شود که قسمتهائی از فصلهای مربوط به روشهای نقشه برداری تجربی و جوابهای معادله لاپلاس و کاربرد معادلات ماکسول یا خطوط انتقال حذف شوند.

هدف در تنظیم این کتاب آن بوده است که دانشجو حتی المقدور خود به آسانی مطالب را بیاموزد. برای نیل به این هدف بر میزان دشواری مطالب هر فصل، و همچنین فصلها نسبت به هم، به تدریج افزوده، و مثالهای بسیاری به منظور تفسیر و کاربرد نتایج مهم ارائه شده است و نیز هر جا که ممکن بوده مثالهای عددی آورده شده و

همچنین تعداد بسیاری تمرینها یا جواب منظور گردیده و از اتکاء بیش از حد بر همدسته تحلیلی و برداری و کاربرد آنها در تعبیر میدانها اجتناب شده است.

مطالب مشککتر در پایان فصلها یا درخاتمه بررسی مراحل خاصی از موضوع گنجانده شده‌اند. به این ترتیب دانشجویان ضعیفتر که بنا به اعتقاد عمومی نمی‌توانند بهمان اندازه دانشجویان برجسته‌تر آن مطالب را درک کنند، به موضوعهای ساده‌تر اساسی ابتدای هر فصل جلب خواهند شد. از آنجائی که معمولاً موضوع فصول بعد به مطالب پیشرفته‌تر فصول قبل بستگی ندارد، دانشجوی می‌تواند با اطلاعات کم ولی کافی خود مطالعه هر فصل را بی تسلط کامل بر مطالب فصل گذشته آغاز کند. با وجود این مطالب پیشرفته‌تر موجب تحریص شاگردان مستعدتر می‌گردد.

تمرینها در پایان اغلب بخشهایی که در آنها فرمولی یا قانونی قابل بیان بصورت مسأله به بحث وارد شده، منظور شده است. این تمرینها معمولاً دارای چند قسمتند و همه جوابها بلافاصله در زیر هر یک از آنها به همان ترتیب بخشهای مسأله داده شده‌اند تا کمکی برای خودآموزی باشد. مسائل آخر فصلها اندکی مشککتر و شاید کمی جالبترند. جوابهای مسائلی که شماره آنها فرد است در ضمیمه (ت) داده شده و حل تمام مسائل در جزوه‌ای که می‌توان از ناشر دریافت کرد چاپ شده است. همچنین هر فصل شامل دو مسأله است که حل آنها مستلزم استفاده از بعضی مراجع مشخص است. این مراجع یا بصورت کتاب درسی دیگری است که دانشجوی باید به آشنا شدن با آنها تشویق شود یا مقاله‌ای در مجله‌ای که برای مهندسان برق حائز اهمیت است. به استثنای این دو نکته ترتیب مسائل بهمان ترتیب مواد درسی است.

بیشتر مسائل این چاپ تغییر یافته‌اند، گرچه چهار یا پنج عدد از آنها که در بسط مطالب درسی دخالت دارند به صورت سابق باقی مانده‌اند. چند مسأله دیگر که مورد علاقه نویسنده‌اند با تغییر شکلی ظاهری دوباره بکار رفته‌اند. از راه تذکری حاشیه‌ای لازم است به معلمان یادآوری شود که اکثر مسائل دو چاپ اخیر هنوز به خوبی قابل استفاده‌اند گرچه باید گاه‌گاه غلامتی را تغییر داد. گسترش کاربرد ماشینهای تکثیر و روشهای چاپ استفاده از این مسائل قدیمی‌تر را آسان می‌کند و ناشر اجازه می‌دهد که از مسائل چاپهای قبلی استفاده شود.

اغلب هدفهای دو چاپ اول در این چاپ نیز همچنان به اعتبار خود باقی است. با این حال در ضمن ۱۵ سال استفاده از این کتاب، بسیاری از دانشجویان و همکاران و کسانی که با من مکاتبه کرده‌اند، به ارائه پیشنهادهای اصلاحی ترغیب شده‌اند.

در این چاپ از مواد اصلی کتاب چیز مهمی حذف نشده است. مطالب اضافه شده به‌طور کلی در جهت تفهیم بهتر مواد چاپهای قبلی به کمک تصاویر و مثالهای اضافی است. این مطالب اضافی در نزدیک به ۲۰ محل در کتاب پراکنده‌اند.

مراجع بیشتری توصیه شده‌اند، که بعضی از آنها دربارهٔ ریاضیات و فیزیک‌اند و دانشجویان می‌بایست تاکنون با آنها آشنا شده باشند و بعضی دیگر دربارهٔ مواد پیشرفته‌ترند و بسیاری نیز در سطح همین کتابند تا بررسی از دیدگاه‌های متفاوتی میسر گردد. کتابشناسی نیز سراسر مورد تجدید نظر قرار گرفته است.

هم ضمیمهٔ (ب) در خصوص آحاد و هم ضمیمهٔ (پ) دربارهٔ ضرائب مواد به کمک جدولهای تبدیلی میسوطر و از طریق گنجاندن مواد عایق و هادی بسیار دیگری در آنها و ارائهٔ ضرائب تانژانت تلفات مربوط به آنها و نیز منظور کردن ضریب قابلیت نفوذ نسبی گروه نمونه‌ای از مواد مغناطیسی، حاوی اطلاعات مفیدتری شده‌اند. نویسنده مجدداً از پروفیسور ویکز^۱ از دانشگاه پردیو^۲ که دستویس این کتاب را سراسر خوانده‌اند و نیز از بابت پیشنهادهای مفیدی که کرده‌اند، حقشناسانه تشکر می‌کند. بسیاری افراد ناشناس نیز اصلاحاتی در این چاپ پیشنهاد کرده‌اند که به عمل آمده است، همچنین گروهی از دانشجویان اشتباهات و جملات نامفهوم را یادآور شده‌اند. از بابت همهٔ این کمکها از آنها تشکر می‌کنم و صمیمانه امیدوارم که این همکاری گروهی ادامه یابد.

ویلیام. ایچ. هایت. (پسر)



آنالیز برداری

آنالیز برداری مبحثی ریاضی است و تعلیم آن توسط ریاضیدانان بسیار بهتر از مهندسان انجام می‌شود. با این حال گرچه احتمالاً بسیاری از مفاهیم مقدماتی برداری و عملیات مربوط به بردار، در دروسهای اولیهٔ ریاضیات مورد بحث قرار گرفته است اغلب دانشجویان سالهای سوم و چهارم، وقت و فرصت کافی (و شاید هم تمایل لازم) را برای شرکت در یک دورهٔ درس آنالیز برداری نداشته‌اند. در این فصل این مفاهیم و عملیات مقدماتی مطرح می‌شوند و وقتی که می‌بایست صرف مطالعهٔ آنها شود به‌میزان آشنائی قبلی با آنها بستگی دارد.

دیدگاه ما اینجا، دیدگاه مهندس یا فیزیکدان، و نه از آن ریاضیدان است؛ یعنی به‌عوض آنکه قضایا را ثابت و آنها را به‌تفصیل تفسیر کنیم، به‌اشاره به آنها اکتفا و نیز بر تعبیرهای فیزیکی تأکید کرده‌ایم. برای مهندسان آسان‌تر آن است که پس از این که با چند تصویر فیزیکی و موارد استعمال آنها آشنا شدند، در درسی دقیق‌تر و کاملتر در رشتهٔ ریاضی شرکت کنند.

می‌توان الکتروسیسته و مغناطیس را بی‌استفاده از آنالیز برداری مطالعه کرد، کما اینکه بعضی از دانشجویان مهندسی در گذشته احتمالاً در دروس مهندسی برق با مبانی فیزیک چنین می‌کرده‌اند. ولی اگر بخواهیم این روش ابتدائی را اندکی بیشتر ادامه دهیم، به‌زودی با معادلات طولیلی مواجه می‌شویم که از جملاتی شبیه به هم مرکب‌اند و بی‌بدن به‌مفهوم فیزیکی‌شان با نگاهی کوتاه بر آنها میسر نیست و حتی ممکن است به‌کم حرمتی به‌دوستی قدیمی منجر گردد.

آنالیز برداری نوعی تند نویسی ریاضی است. دارای علائم (سمبولها) و قواعد تازه‌ایست و مانند بیشتر زمینه‌های جدید گاهگاه دامها و لغزشگاه‌های گائی در راه خود پنهان دارد، و به تمرکز و دقت و تمرین نیازمند است. تمرین‌هایی را که اول بار در پایان بخش ۴.۱ با آنها مواجه می‌شوید می‌بایست به‌عنوان جزء لاینفک متن تلقی و همه را حل کنید و اگر مطالبی را که در بخش مربوط به آنها مورد بحث قرار گرفته‌اند کاملاً فهمیده باشید حل آنها دشوار نخواهد بود. مطالعه این فصل به این طریق مستلزم صرف وقت بیشتری است ولی این صرف وقت به‌منزله سرمایه‌گذاری است که بهره‌ای غیر منتظر دربر خواهد داشت.

۱.۱ شمارواره‌ها (اسکالر‌ها) و بردارها

اصطلاح شمارواره (اسکالر)، اشاره به کمیتی است که مقدار آن را بتوان با یک عدد حقیقی نشان داد. مثلاً w و y و z که در جبر مقدماتی از آنها استفاده می‌شود و کمیت‌هایی که توسط آنها نمایش داده می‌شود شمارواره (اسکالر) اند. هنگامی که از جسمی که در زمان t به‌قدر فاصله L فرو می‌افتد، یا از درجه حرارت T در هر نقطه به‌مختصات w و y و z کاسه آشی سخن می‌گوئیم L و t و T و w و y و z همه شمارواره (اسکالر) اند. کمیت‌های شمارواره‌ای دیگر عبارتند از جرم و چگالی و فشار (ولی نه نیرو) و حجم و مقاومت مخصوص حجمی. و لثاؤ نیز کمیتی شمارواره‌ای است، گرچه نمایش یک‌ولتاژ سینوسی شکل، به کمک اعداد مختلط، که تدبیری است مصنوعی، شمارواره‌ای مختلط یا فیزر بوجود می‌آورد که برای نمایش آن دو عدد حقیقی، مانند دامنه و زاویه فاز، که همان قسمت حقیقی و قسمت موهومی عدد مختلطند، لازم است. یک کمیت برداری، دارای اندازه^۱ و جهتی در فضا است. ما در این کتاب فقط با فضاهای دو، یا سه بعدی سروکار داریم، اما در موارد استعمال پیشرفته‌تر، بردار ممکن است در فضائی n بعدی تعریف شود. بطور مثال نیرو و سرعت و شتاب و خطی که سر مثبت یک باتری را به‌سر منفی آن وصل می‌کند، بردارند. هسریک از این کمیتها با اندازه و جهت هردو مشخصند.

ما بیشتر با میدانهای برداری و شمارواره‌ای (اسکالر) مواجهیم. یک میدان (اعم از برداری یا شمارواره‌ای) را می‌توان به‌زبان ریاضی، به‌صورت تابعی از برداری تعریف کرد، که میدائی دلخواه را به‌هر نقطه از فضا وصل می‌کند. معمولاً مشاهده می‌شود که می‌توانیم بعضی اثرات فیزیکی را با میدانی مربوط کنیم، مانند نیروی مؤثر بر عقربه یک قطب‌نما در میدان مغناطیسی زمینی، یا حرکت ذرات دود در

۱. اینجا قرار می‌گذاریم که مراد از «اندازه»، «مقدار مطلق» است. بنابراین اندازه هر کمیتی همیشه مثبت است.

میدانی که توسط بردار سرعت هوا در ناحیه‌ای از فضا تعریف می‌شود. باید توجه کرد که تصور کلی میدان عموماً به منطقه‌ای مربوط است. بعضی از کمیتها در هر نقطه از آن منطقه معینند. میدانها ممکن است شماراواهای (اسکالر) یا برداری باشند. بطور مثال، درجه حرارت داخل يك ظرف سوپ، یا جرم مخصوص (چگالی) در هر نقطه از زمین میدانهای شماراواهند زیرا يك کمیت شماراواهی، در هریک از نقاط ناحیه مزبور دارای مقداری مشخص است که معمولاً برحسب مکان و زمان متغیر است. میدانهای جاذبه و مغناطیسی زمین و گرادبان و لثاژ در يك کابل و گرادبان درجه حرارت در نوك يك هویه نمونه‌هایی از میدان برداری‌اند.

در این کتاب، مانند کتابهای دیگری که در آنها از علائم برداری استفاده می‌شود: بردارها توسط حروف لاتینی خط دار، مثل \vec{A} مشخص می‌گردند. حال آن که شماراواها (اسکالر) توسط حروف لاتینی ایتالیک نمایش داده می‌شوند. (توجه: و این اولین دام است. بی‌بند و باری در نوشتن علائم مانند حذف تیره یا پیکان از روی علامت بردار منشأ اصلی اشتباهات در آنالیز برداری است).

۲.۹ جبر برداری

حال که بردارها و میدانهای برداری را تعریف کردیم، می‌توانیم به تعریف قواعد حساب برداری و جبر برداری و (بعدها) آنالیز برداری پردازیم. بعضی از این قواعد مشابه قواعد جبر شماراواهی (اسکالر)‌اند، و برخی از آنها اختلاف مختصری با آنها دارند و پاره‌ای دیگر کاملاً جدید و ناآشنایند. و این مطلب غیرمنتظری نیست، زیرا بردار حاوی اطلاعاتی بیشتر از شماراواه (اسکالر) است و مثلاً ضرب دو بردار، از ضرب دو شماراواه (اسکالر) پیچیده‌تر است.

این قواعد مربوط به شاخه‌ای از ریاضیات است که به استواری ریشه گرفته است و مورد قبول و استفاده همه است، و ما البته به آنها فقط نظری خواهیم افکند و آنها را تعبیر خواهیم کرد. با وجود این باید دانست که می‌توانیم خود را در این زمینه پیشقدم به حساب آوریم. ما قواعدی خاص خود می‌اندیشیم و می‌توانیم هر قاعده‌ای که بخواهیم وضع کنیم. برای این کار تنها شرط لازم آنست که قواعد ما با هم متناقض نباشند. البته بهتر است که این قواعد تا جائی که ممکن است با قواعد جبر شماراواهای سازگار باشند و از آن بهتر آن که به کمک این قواعد بتوانیم بعضی مسائل عملی را حل کنیم.

انسان نباید به‌دام «ستایش جبر» بیفتد و معتقد باشد که قوانین جبر دانشگاهی از روز ازل به بشر داده شده است. خاصیت این قواعد فقط آنست که با هم سازگار، و فوق‌العاده مفیدند. اما جبرهایی نیز وجود دارند که کمتر متداولند و

قواعدی بسیار متفاوت دارند. در جبر بول حاصلضرب AB ممکن است فقط صفر یا یک باشد. جبر برداری دارای مجموعه قواعد مختص به خود است و ما می‌بایست پیوسته مراقب نیروهائی که از قواعد آشنا تر جبر شمارواره‌ای بردهن ما اعمال می‌شود باشیم.

جمع برداری از قانون متوازی‌الاضلاع تبعیت می‌کند و این عمل از طریق ترسیم، اگر چه نادقیق، اما آسانتر است. شکل ۱.۱ جمع دو بردار \vec{A} و \vec{B} را نشان می‌دهد. به آسانی می‌توان مشاهده کرد که $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ و به عبارت دیگر جمع برداری از قانون نقل پذیری تبعیت می‌کند. جمع برداری همچنین از قانون شرکت پذیری پیروی می‌کند.

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$



شکل ۱.۱ جمع ترسیمی دو بردار را می‌توان به دو صورت انجام داد. در یک حالت دو بردار را از یک مبدأ مشترک رسم می‌کنند و متوازی‌الاضلاع را کامل می‌کنند و در حالت دیگر بردار دوم را از انتهای بردار اول رسم و مثلث را کامل می‌کنند. هر یک از این دو روش را می‌توان به آسانی برای سه بردار یا بیشتر تعمیم داد.

بردارهای هم صفحه، یعنی بردارهایی را که در یک صفحه مشترک قرار دارند - شبیه بردارهای شکل (۱.۱)، که هر دو در صفحه کاغذ واقع اند - می‌توان با تجزیه هر یک به مؤلفه‌های افقی و عمودی و جمع مؤلفه‌های نظیر با یکدیگر، جمع کرد.

بردارهای سه بعدی را نیز به همین ترتیب می‌توان با تجزیه بردار به سه مؤلفه و جمع مؤلفه‌های نظیر با یکدیگر، جمع کرد. مثالهایی برای این طریقه جمع کردن را بعد از آن که مؤلفه‌های برداری در بخش (۴.۱) مورد بحث قرار گرفت ارائه خواهیم کرد.

قاعده تفریق دو بردار را از هم می‌توان به سهولت از قاعده جمع برداری

نتیجه گرفت، زیرا همواره می‌توانیم بنویسیم $\bar{A} - \bar{B} = \bar{A} + (-\bar{B})$ ، یعنی برای تفریق يك بردار از دیگری کافی است علامت آن بردار و جهت آن را معکوس و سپس با استفاده از قاعده جمع برداری آن را با بردار اولی جمع کنیم.

بردارها را می‌توان در شمارواره‌ها (اسکالر) ضرب کرد. اگر شمارواره مثبت باشد، اندازه بردار تغییر می‌کند ولی جهت آن ثابت می‌ماند اما اگر شمارواره منفی باشد، جهت آن نیز معکوس می‌شود. ضرب يك بردار در يك شمارواره (اسکالر) نیز از قوانین شرکت پذیری و توزیع پذیری جبری تبعیت می‌کند، به طوری که

$$(r+s)(\bar{A} + \bar{B}) = r(\bar{A} + \bar{B}) + s(\bar{A} + \bar{B}) = r\bar{A} + r\bar{B} + s\bar{A} + s\bar{B}$$

تقسیم يك بردار بر يك شمارواره (اسکالر) همان ضرب آن بردار در معکوس آن شمارواره (اسکالر) است. ضرب يك بردار در بردار دیگر در بخشهای (۶.۱) و (۷.۱) مورد بحث قرار خواهد گرفت.

دو بردار به شرطی با هم مساویند که تفاضل آنها از هم صفر باشد به عبارت دیگر

$$\bar{A} - \bar{B} = \mathbf{0} \implies \bar{A} = \bar{B}$$

در این کتاب، هر جا از میدانهای برداری استفاده می‌کنیم، همواره با جمع و تفریق بردارهایی سروکار داریم که در يك نقطه واحد معینند. بطور مثال میدان مغناطیسی کلی مؤثر در اطراف يك مغناطیس کوچک نعلی شکل برآیند میدانهای مغناطیسی زمین و خود مغناطیس خواهد بود. میدان کل در هر نقطه عبارتست از مجموع تك تك میدانهای مؤثر در آن نقطه.

اما در حالتی که با يك میدان برداری سروکار نداشته باشیم، می‌توانیم بردارهایی را با هم جمع، یا از هم تفریق کنیم که همه در يك نقطه نیستند. مثلاً مجموع نیروی ثقل زمین مؤثر روی مردی ۱۵۰ پوندی (پوند نیرو) در قطب شمال و نیروی ثقل مؤثر روی مردی ۱۷۵ پوندی در قطب جنوب را می‌توان بدین صورت به دست آورد که هر دو بردار نیرو را قبل از عمل جمع به قطب جنوب منتقل کنیم. نتیجه يك نیروی ۲۵ پوندی از قطب جنوب در جهت مرکز زمین خواهد بود. اگر می‌خواستیم سختگیرتر باشیم، می‌توانستیم این نیروی ۲۵ پوندی را در قطب شمال از مرکز کره زمین به خارج (یا به سمت بالا) در نظر بگیریم.^۱

۳.۱ دستگاه محورهای مختصات دکارتی (قائم)

برای مشخص کردن دقیق يك بردار، طولها و جهات و زوایا و تصاویر یا مؤلفه‌های خاصی می‌بایست در دست باشد. برای این کار، سه روش ساده، و تقریباً هشت الی

۱. همچنین شخصی اشاره کرده است به این که می‌توان این نیرو را در خط استوا رو به شمال فرض کرد. اما این تفصیل بی مورد است.

ده روش دیگر وجود دارد، که در موارد بسیار خاص مفیدند. ما در اینجا فقط سه روش ساده را مورد استفاده قرار می‌دهیم و ساده‌ترین این سه روش دستگاه مختصات دکارتی یا قائم است.

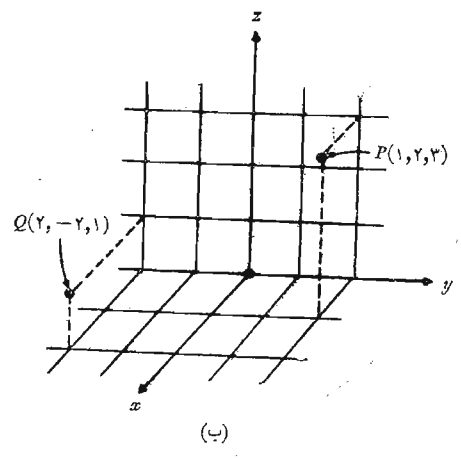
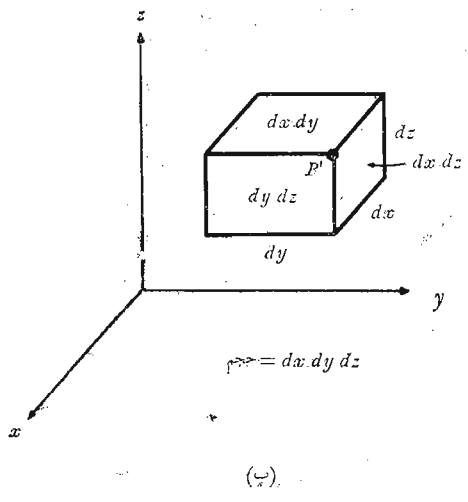
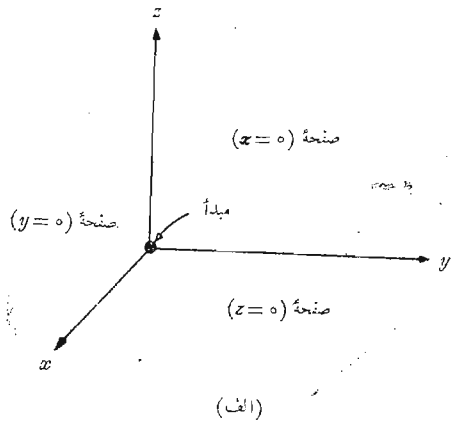
در دستگاه مختصات دکارتی سه محور مختصات برقرار می‌کنیم که دو به دو برهم عمودند و آنها را محورهای x و y و z می‌نامیم. معمولاً از دستگاه مختصات راست‌گرد استفاده می‌شود که در آن دوران محور z به سمت محور y از طریق زاویه کوچکتر طوری است که پیچ راست‌گردی را در جهت محور z پیش می‌برد.

شکل ۲۰۱ الف، يك دستگاه مختصات دکارتی راست‌گرد را نشان می‌دهد. محل هر نقطه توسط مختصات آن x و y و z مشخص می‌شود. این مقادیر به ترتیب فواصل مبدأ مختصات تا پای قائم‌هائی است که از نقطه مورد نظر بر هر يك از محورهای x و y و z فرود آیند. روش دیگری برای تعبیر مقادیر مختصات نقطه، که نیز همان روشی است که می‌بایست در کلیه دستگاه‌های مختصات دیگر مورد استفاده قرار گیرد، اینست که نقطه مورد نظر را محل تقاطع مشترك سه صفحه یعنی صفحات «ثابت $x =$ »، «ثابت $y =$ » و «ثابت $z =$ » فرض کنیم، که مقادیر ثابت x و y و z همان مختصات نقطه‌اند.

شکل ۲۰۱ ب، نقاط P و Q را که مختصات آنها به ترتیب $(۱, ۲, ۳)$ و $(۱, ۲, -۲)$ اند نشان می‌دهد. بدین ترتیب نقطه P در محل تقاطع مشترك سه صفحه $x = ۱$ و $y = ۲$ و $z = ۳$ قرار دارد در حالی که نقطه Q در محل تقاطع مشترك سه صفحه $x = ۲$ و $y = -۲$ و $z = ۱$ واقع است.

هنگامی که در بخش‌های ۸۰۱ و ۹۰۱ دستگاه‌های مختصات دیگر را بررسی می‌کنیم می‌بایست انتظار داشته باشیم که نقاط در محل تقاطع مشترك سه سطح که لازم نیست مستوی باشند، اما دو به دو در نقطه تقاطع برهم عمودند، قرار داشته باشند. اگر سه صفحه متقاطع در نقطه دلخواه P با مختصات x و y و z را در نظر مجسم کنیم، می‌توانیم مقدار هر مختصه را به اندازه دیرانسلی اضافه کنیم. در این صورت سه صفحه بدست خواهیم آورد که اندکی جا به جا شده‌اند و در نقطه P' متقاطع‌اند، که مختصات آن $x + dx$ و $y + dy$ و $z + dz$ است. این شش صفحه يك متوازی‌السطوح راست گوشه را با حجم $dv = dx dy dz$ معین می‌کنند. مساحت‌های دیرانسلی dS سطوح این متوازی‌السطوح $dx dy$ و $dy dz$ و $dz dx$ خواهند بود. و سرانجام dL فاصله P از P' قطر متوازی‌السطوح، و طول آن $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ خواهد بود. شکل ۲۰۱ پ، این عنصر حجم را نشان می‌دهد، نقطه P' در این شکل مشخص شده است ولی نقطه P در تنها گوشه غیر قابل رؤیت آن قرار دارد.

همه از مثلثات و هندسه ترسیمی با این مطالب، که تا اینجا فقط شامل کمیتهای



شکل ۲۰۱ (الف) يك دستگاه مختصات قائم راست گرد . اگر انگشتان خم شده دست راست جهت دوران محور x را برای قرار گرفتن روی محور y نشان دهند ، انگشت شست جهت محور z را نشان می‌دهد . (ب) محل نقطه $P(1, 2, 3)$ و نقطه $Q(2, -2, 1)$ (ب) يك جزء دیفرانسیلی حجم به ابعاد dx و dy و dz در مختصات قائم معمولاً دیفرانسیلهای مستقل اند.

شمارواره‌ای بود آشنائی داریم. در بخش بعد شروع به توصیف بردارها از طریق دستگاه مختصات خواهیم کرد.

۴.۱ مؤلفه‌های برداری و بردارهای واحد

برای توصیف يك بردار در دستگاه مختصات دکارتی (فائتم) ابتدا بردار \vec{r} را، که از مبدأ به خارج متوجه است، در نظر می‌گیریم. يك روش منطقی برای شناختن این بردار مشخص کردن سه بردار مؤلفه‌ای آنست که در روی سه محور مختصات قرار دارند و مجموع آنها می‌بایست بردار \vec{r} را بوجود آورد. اگر \vec{x} و \vec{y} و \vec{z} بردارهای مؤلفه‌ای بردار \vec{r} باشند، در این صورت خواهیم داشت

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$$

بردارهای مؤلفه‌ای در شکل ۳.۱ الف، نشان داده شده‌اند. به این ترتیب به جای يك بردار با سه بردار سر و کار داریم و این خود قدمی به پیش است، چه این سه بردار بسیار ساده‌اند زیرا هر يك همیشه بر روی یکی از محورهای مختصات قرار دارند. به عبارت دیگر، اندازه بردارهای مؤلفه‌ای به اندازه بردار مفروض (مانند بردار \vec{r}) بستگی دارد ولی جهت آنها همواره ثابت و مشخص است. این نکته بکار بردن بردارهای واحد را به ما القا می‌کند که اندازه آن طبق تعریف مساوی واحد و راستای آن روی محور مختصات و جهت آن به سمت افزایش مقدار مختصات است. علامت \vec{a} را برای بردار واحد در نظر می‌گیریم و امتداد آن را با يك اندیس مناسب مشخص می‌کنیم. بدین ترتیب \vec{a}_x و \vec{a}_y و \vec{a}_z بردارهای واحد دستگاه مختصات دکارتی (فائتم) اند و چنان که در شکل ۳.۱ ب، دیده می‌شود به ترتیب در راستای محورهای x و y و z قرار دارند.

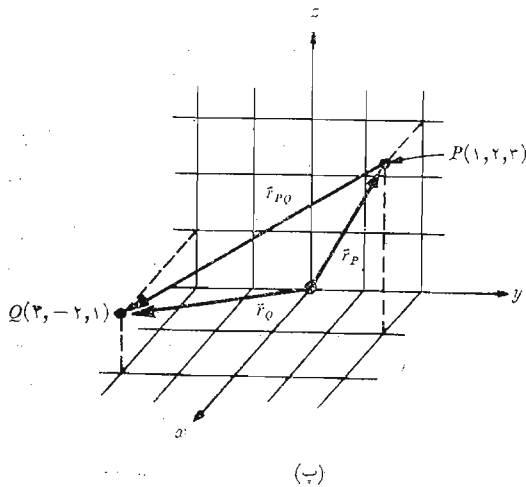
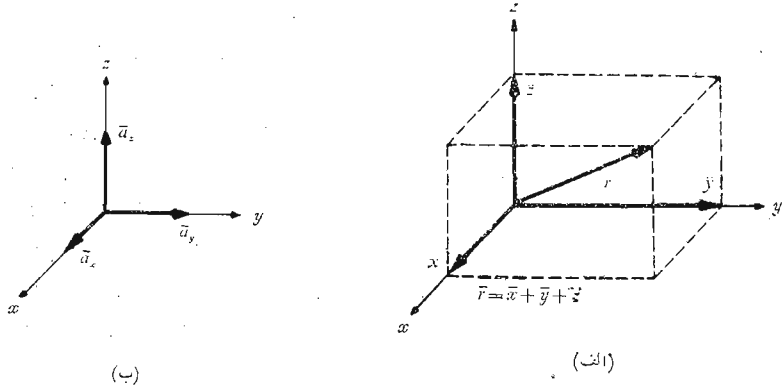
اگر اندازه بردار مؤلفه‌ای ۲ واحد و جهت آن در سمت افزایش مقدار y باشد، در این صورت می‌نویسیم $2\vec{a}_y = \vec{r}$. بردار \vec{r}_P را که نقطه مبدأ را به نقطه $P(1, 2, 3)$ وصل می‌کند می‌توان به این صورت نوشت: $\vec{r}_P = \vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 3\vec{a}_z$. برداری را که از P به Q امتداد دارد، می‌توان با استفاده از قاعده جمع برداری بدست آورد. این قاعده نشان می‌دهد که مجموع بردار مبدأ تا نقطه P و بردار P تا Q مساوی است با بردار مبدأ تا Q . در نتیجه بردار مطلوب $P(1, 2, 3)$ تا $Q(2, -2, 1)$ مساوی است با

$$\begin{aligned}\vec{r}_{PQ} &= \vec{r}_Q - \vec{r}_P = (2 - 1)\vec{a}_x + (-2 - 2)\vec{a}_y + (1 - 3)\vec{a}_z \\ &= \vec{a}_x - 4\vec{a}_y - 2\vec{a}_z\end{aligned}$$

۱. کاربرد علائم \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} نیز برای بردارهای واحد دستگاه مختصات دکارتی متداول است.

آقالیز برداری ۱۳

بردارهای \vec{r}_P و \vec{r}_{PQ} در شکل ۳.۱ پ، نشان داده شده‌اند. این بردار آخری مانند بردار \vec{r} ، که قبلاً آن را بررسی کردیم، از مبدأ



شکل ۳.۱ (الف) \vec{x} و \vec{y} و \vec{z} بردارهای مؤلفه‌ای بردار \vec{r} . (ب) بردارهای واحد دستگاه مختصات دکارتی (قائم) دارای اندازه واحدند و جهت آنها به سمت افزایش متغیرهای مربوط به آنهاست. (ب) بردار \vec{r}_{PQ} مساوی است با تفاضل برداری $\vec{r}_Q - \vec{r}_P$.

به سمت خارج امتداد ندارد. اما بطوری که پیش از این آموخته ایم، بردارهایی که اندازه شان مساوی و جهتشان یکی باشد با هم برابرند، از این رو می توانیم برای تجسم بهتر، هر برداری را نخست به مبدأ مختصات بلغزانیم و سپس بردارهای مؤلفه ای آن را معین کنیم. البته بردار می بایست به موازات خود لغزانده شود.

هنگام بررسی يك بردار نیروی \vec{F} یا هر بردار دیگری مگر از نوع بردار تغییر مکان^۱ مانند بردار \vec{r} ، مسئله انتخاب حروف مناسب برای سه بردار مؤلفه ای آن مطرح می شود. این بردارها را نمی توان \vec{x} و \vec{y} و \vec{z} نامید، چه اینها تغییر مکان یا فواصلی جهت دارند و به متر (بطور مخفف m) یا واحدهای دیگر طول اندازه گرفته می شوند. این مشکل اغلب با به کار بردن شماره واحدهای مؤلفه ای یا بطور خلاصه مؤلفه های F_x و F_y و F_z برطرف می شود مؤلفه ها اندازه های علامت دار بردارهای مؤلفه ایند. بنا براین می توان نوشت: $\vec{F} = F_x \vec{a}_x + F_y \vec{a}_y + F_z \vec{a}_z$ و بردارهای مؤلفه ای عبارتند از $F_x \vec{a}_x$ و $F_y \vec{a}_y$ و $F_z \vec{a}_z$ ، این طریق نمایش به قدری ساده است، که معمولاً از نظام نامگذاری دیگری استفاده نمی شود.

بنا براین هر برداری مانند \vec{B} را می توان بصورت $\vec{B} = B_x \vec{a}_x + B_y \vec{a}_y + B_z \vec{a}_z$ توصیف کرد و اندازه \vec{B} ، که بصورت $|\vec{B}|$ یا بطور خلاصه B نوشته می شود، با رابطه زیر داده می شود:

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

هر يك از سه دستگاه مختصاتی که مورد بحث ماست دارای سه بردار واحد و دو به دو عمود برهم اند که برای تجزیه هر بردار به بردارهای مؤلفه ای آن مورد استفاده قرار می گیرند. اما موارد استعمال بردارهای واحد به آنچه گفته شد محدود نمی شود. اغلب مفید است که بتوان بردار واحدی که دارای جهت مشخصی باشد نوشت. و این کار آسانی است. زیرا به وضوح مشهود است که واحد در جهتی مفروض عبارتست از حاصل تقسیم برداری در آن جهت بر اندازه خود آن بردار. يك بردار واحد در جهت \vec{r} مساوی است با $\vec{r} / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ و يك بردار واحد در جهت \vec{B} مساوی است با

$$\vec{a}_B = \frac{\vec{B}}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$$

۱. بردار تغییر مکان برداری است که از محل ابتدائی ذره ای به محل بعدی آن رسم شود.

به عنوان مثال، بردار واحدی را که از مبدأ به نقطه $G(2, -2, -1)$ امتداد دارد، می توان بدین ترتیب بدست آورد که ابتدا بردار \vec{G} را که از مبدأ به نقطه $G(2, -2, -1)$ امتداد دارد مشخص کنیم،

$$\vec{G} = 2\vec{a}_x - 2\vec{a}_y - \vec{a}_z$$

و سپس اندازه بردار \vec{G} را بدست آوریم،

$$|\vec{G}| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$$

و سرانجام بردار واحد مورد نظر را بصورت خارج قسمت زیر بیان داریم،

$$\vec{a}_G = \frac{\vec{G}}{|\vec{G}|} = \frac{2}{3}\vec{a}_x - \frac{2}{3}\vec{a}_y - \frac{1}{3}\vec{a}_z$$

برای اینکه چگونگی یک بردار واحد را بی درنگ بتوانیم تشخیص دهیم می بایست برای آن علامت مشخصه مخصوصی بکار ببریم. علائمی که برای این کار مورد استفاده قرار گرفته اند عبارتند از \vec{u}_B و \vec{a}_B و $\vec{1}_B$ یا حتی \vec{b} . علامتی که همیشه از آن استفاده خواهیم کرد علامت \vec{a} با یک اندیس مناسب خواهد بود.

[توجه: در متن کتاب تمرینها متعاقب بخشهایی پیش بینی شده اند که در آنها اصل تازه ای مطرح شده است تا دانشجو به کمک آنها بتواند درک خود را از مطلب اساسی آزمایش کند. این مسائل برای آشنا شدن با اصطلاحات و افکار جدید مفیدند و می بایست همه آنها را حل کرد. مسائل کلی تر در پایان هر فصل منظور شده است. جواب تمرینها به همان ترتیب بخشهای مسأله داده شده اند.]

تمرین ۱۰۱

(الف) برداری که از نقطه $A(-2, 4, 3)$ به نقطه $B(1, 4, 0)$ امتداد دارد بدست آورید.

(ب) بردار واحدی را که از نقطه $C(1, 2, 3)$ به نقطه $D(-3, 6, -4)$ امتداد دارد بدست آورید.

(پ) اگر $\vec{A} = 4\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + 6\vec{a}_z$ و $\vec{B} = -3\vec{a}_x + 3\vec{a}_y + \vec{a}_z$ باشد $|\vec{A} - \vec{B}|$ را بدست آورید.

جوابها: $3\vec{a}_x - 3\vec{a}_z$ و $-\frac{4}{9}\vec{a}_x + \frac{4}{9}\vec{a}_y - \frac{7}{9}\vec{a}_z$ و $\frac{1}{2}\sqrt{99}$

۵.۱ میدان برداری

پیش از این یک میدان برداری را به صورت یک تابع برداری، برداری مکانی تعریف کردیم: به طور کلی اندازه و جهت تابع وقتی که در ناحیه مورد نظر حرکت می کنیم

تغییری کند و مقدار آن می‌بایست بر حسب مقادیر مختصات نقطه مورد نظر تعیین شود. از آنجائی که ما فقط دستگاه مختصات دکارتی (قائم) را در نظر گرفته‌ایم، می‌بایست انتظار داشته باشیم که بردار، تابعی از متغیرهای x و y و z باشد.

اگر سرعت حرکت آب اقیانوسی را در ناحیه‌ای نزدیک به سطح آب، که اثر جذر و مد و جریانهای آب شدید است، مورد توجه قرار دهیم، می‌توانیم آن را با بردار سرعتی نمایش دهیم که ممکن است هرامتداد و جهتی حتی به سوی پائین یا بالا را اختیار کند. اگر جهت محور z را به سمت بالا و محور x را به سمت شمال و محور y را به سمت غرب و مبدأ مختصات را بر سطح آب اختیار کنیم، دستگاه مختصات راست‌گردی در دست داریم و بردار سرعت را می‌توانیم بصورت $\vec{U} = U_x \vec{a}_x + U_y \vec{a}_y + U_z \vec{a}_z$ بنویسیم که در آن هر يك از مؤلفه‌های U_x و U_y و U_z ممکن است تابعی از سه متغیر x و y و z باشند. اگر مسأله را ساده کنیم، به‌این معنی که ناحیه مورد نظر را در قسمتی از کلف استریم فرض کنیم که حرکت آب فقط به سمت شمال است، در این صورت U_x و U_y صفر خواهند بود. می‌توانیم فرضهای ساده‌کننده دیگری بکنیم، مثلاً این که سرعت آب با افزایش عمق به‌تندی کم شود و در امتداد شمال و جنوب و شرق یا غرب نیز بسیار به‌تندی تغییر کند. رابطه $\vec{U} = 2e^{-10z} \vec{a}_z$ را می‌توان رابطه مناسبی دانست. طبق این رابطه سرعت در سطح آب برابر 2 m/s (متر بر ثانیه) و در عمق 100 متری ($z = -100$) برابر 0.736 m/s ($2 = 0.736 \times 100$) خواهد بود و با افزایش عمق از اندازه آن همچنان کاسته می‌شود. جهت سرعت در این مثال ثابت است.

اگرچه مثالی که در بالا آورده شد، بسیار ساده و تقریبی کلی از وضعی فیزیکی است، توصیف دقیق‌تر آن به‌همان نسبت پیچیده‌تر و دشوارتر خواهد بود. ضمن مطالعه در زمینه‌های الکتریسته و مغناطیس به میدانهای بسیاری برخورد کرده‌ایم که ساده‌تر از مثال میدان سرعتند، که در آن فقط با يك مؤلفه و يك متغیر (مؤلفه z و متغیر z) سروکار داشتیم. میدانهای پیچیده‌تری را نیز بررسی خواهیم کرد و روش تعبیر فیزیکی روابط مربوط به آنها را هم آنجا مورد بحث قرار خواهیم داد.

تمرین ۳.۱

يك میدان سرعت به‌صورت $\vec{U} = 2y \vec{a}_x - (2x - 3z - 3) \vec{a}_y - (3y + 1) \vec{a}_z$ متر بر ثانیه داده شده است. (الف) اندازه سرعت و (ب) بردار واحدی که جهت آنرا مشخص کند بدست آورید.

$$\text{جوابها: } \frac{1}{3} \vec{a}_x - \frac{2}{3} \vec{a}_y - \frac{2}{3} \vec{a}_z \text{ و } 6 \text{ m/s}$$

۹.۱ حاصلضرب داخلی

اکنون نوع اول از دو نوع ضرب برداری را بررسی می‌کنیم و راجع به نوع دوم در بخش بعد صحبت خواهیم کرد.

دو بردار \vec{A} و \vec{B} داده شده‌اند. حاصلضرب نقطه‌ای یا حاصلضرب شمارواده‌ای (اسکالر) یا داخلی این دو بردار طبق تعریف برابر است با حاصلضرب اندازه \vec{A} و اندازه \vec{B} در کسینوس کوچکترین زاویه بین آنها:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta_{AB}$$

نقطه بین دو بردار گذاشته می‌شود و می‌بایست به منظور تأکید پررنگ شود. حاصلضرب نقطه‌ای یا شمارواده‌ای (اسکالر) چنان‌که از یکی از نام‌هایش پیداست، یک شمارواده است و از قانون نقل‌پذیری تبعیت می‌کند زیرا علامت زاویه بر مقدار کسینوس اثری ندارد:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

رابطه $\vec{A} \cdot \vec{B}$ خوانده می‌شود «نقطه \vec{A} ».

شاید معمولترین مورد استعمال حاصلضرب داخلی در مکانیک، موردی باشد که نیروی ثابت \vec{F} که طی فاصله مستقیم \vec{L} اعمال شود، مقدار کار $FL \cos \theta$ را که بطور ساده $\vec{F} \cdot \vec{L}$ نوشته می‌شود انجام می‌دهد. یکی از نتایجی که در فصل ۴ بدست می‌آید، و ما در اینجا پیشاپیش از آن یاد می‌کنیم اینست که اگر نیرو در طول مسیر متغیر باشد، باید برای بدست آوردن کار کل، انتگرال گرفت:

$$\text{کار} = \int \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

مثال دیگر را می‌توان از میدانهای مغناطیسی، که بعدها راجع به آنها بحث بسیار خواهیم داشت، اقتباس کرد. اگر B چگالی شار مغناطیسی که از سطحی به مساحت S عبور می‌کند در تمام سطح S یکسان و عمود بر آن باشد، شار کل Φ مساوی BS است. اگر سطح برداری \vec{S} را برداری تعریف کنیم که اندازه آن مساوی مساحت معمولی و جهت آن عمود بر سطح باشد، (ابتدا از این موضوع که کدام یک از دو عمود بر سطح را در نظر بگیریم صرف نظر می‌کنیم)، در این صورت شار گذرنده از سطح مساوی $\vec{B} \cdot \vec{S}$ خواهد بود. جهت چگالی شار یکنواخت هرچه باشد، این رابطه صادق است. اما هنگامی که چگالی شار در روی سطح ثابت نباشد. شار کل مساوی $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ خواهد بود. در فصل ۳ با انتگرالهایی که دارای این شکل کلی اند آشنا خواهیم شد.

از آنجائی که پیدا کردن زاویه بین دو بردار در يك فضای سه بعدی کاری است که ترجیح می دهیم از آن اجتناب کنیم، حاصلضرب داخلی را معمولاً بصورت اصلی آن مورد استفاده قرار نمی دهیم. راه ساده تر اینست که دو برداری را مورد بررسی قرار دهیم که مؤلفه های قائم آنها داده شده باشد. مثلاً

$$\vec{B} = B_x \vec{a}_x + B_y \vec{a}_y + B_z \vec{a}_z \quad \text{و} \quad \vec{A} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$$

حاصلضرب نقطه ای یا داخلی نیز از قانون توزیع پذیری تبعیت می کند. بنا بر این $\vec{A} \cdot \vec{B}$ مجموع نه جمله شمارواره ای (اسکالر) است که هر يك شامل حاصلضرب داخلی دو بردار واحد خواهند بود. چون زاویه بین دو بردار واحد مختلف در دستگاه مختصات قائم همواره 90° است، می توانیم بنویسیم

$$\vec{a}_x \cdot \vec{a}_y = \vec{a}_y \cdot \vec{a}_x = \vec{a}_x \cdot \vec{a}_z = \vec{a}_z \cdot \vec{a}_x = \vec{a}_y \cdot \vec{a}_z = \vec{a}_z \cdot \vec{a}_y = 0$$

سه جمله باقیمانده شامل حاصلضرب داخلی يك بردار واحد در خود آن است که مساوی يك است و در نتیجه

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}$$

که رابطه ای مستقل از زاویه است.

حاصلضرب داخلی يك بردار در خود آن مساوی مربع اندازه آن بردار خواهد بود:

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2 = |\vec{A}|^2}$$

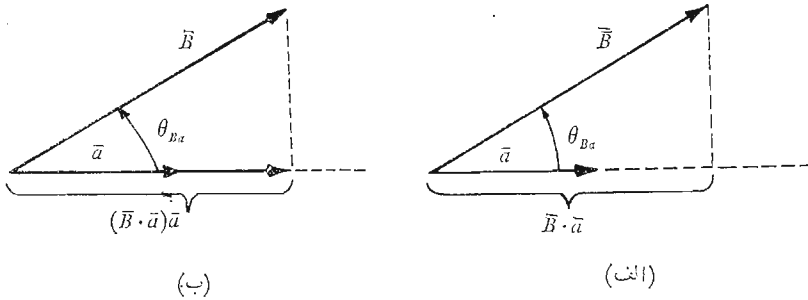
و حاصلضرب داخلی هر بردار واحد در خودش مساوی يك است $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i = 1$ یکی از مهمترین موارد استعمال حاصلضرب داخلی بدست آوردن مؤلفه بردار در امتدادی معین است. با توجه به شکل ۴.۱ الف می توان مؤلفه (شمارواره ای) \vec{B} را در جهتی که توسط بردار واحد \vec{a} مشخص می شود بدین ترتیب بدست آورد،

$$\vec{B} \cdot \vec{a} = |\vec{B}| |\vec{a}| \cos \theta_{Ba} = |\vec{B}| \cos \theta_{Ba}$$

علامت مؤلفه اگر $\theta_{Ba} < 90^\circ$ ، مثبت و اگر $90^\circ < \theta_{Ba} \leq 180^\circ$ ، منفی خواهد بود. برای بدست آوردن مؤلفه برداری \vec{B} در جهت \vec{a} کافی است مؤلفه (شمارواره ای) آن را همانطور که در شکل ۴.۱ ب نشان داده شده است، در \vec{a} ضرب کنیم. مثلاً مؤلفه بردار \vec{B} در جهت \vec{a}_x مساوی $B_x = \vec{B} \cdot \vec{a}_x$ و مؤلفه برداری آن $B_x \vec{a}_x$ یا $(\vec{B} \cdot \vec{a}_x) \vec{a}_x$ است. بدین ترتیب مسأله بدست آوردن مؤلفه هر بردار در هر جهت دلخواه به مسأله تعیین بردار واحد در آن جهت تبدیل می شود. و این کاری است که به سهولت میسر است.

اصطلاح هندسی تصویر نیز در مورد حاصلضرب داخلی به کار می رود. بدین

ترتیب $\vec{B} \cdot \vec{a}$ تصویر \vec{B} در امتداد \vec{a} است.



شکل ۴.۱ الف) مؤلفه (شمارواره‌ای) \vec{B} در جهت بردار واحد \vec{a} مساوی $\vec{B} \cdot \vec{a}$ است. ب) مؤلفه برداری \vec{B} در جهت بردار واحد \vec{a} مساوی $\vec{B} \cdot \vec{a}$ است.

تمرین ۳.۱

دو بردار $\vec{A} = 2\vec{a}_x - 3\vec{a}_y - 6\vec{a}_z$ و $\vec{B} = \vec{a}_x + 2\vec{a}_y - 2\vec{a}_z$ داده شده‌اند. الف) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ را بدست آورید. ب) زاویه بین \vec{A} و \vec{B} چه اندازه است؟ ب) مؤلفه \vec{A} را در جهت \vec{B} (یا در جهت \vec{a}_B که بردار واحدی در جهت \vec{B} است) بدست آورید. ت) تصویر برداری \vec{A} روی \vec{B} را پیدا کنید.

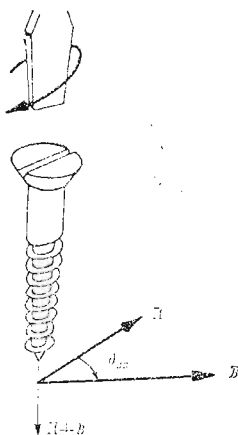
جوابها: $\frac{8}{9}\vec{a}_x + \frac{16}{9}\vec{a}_y - \frac{16}{9}\vec{a}_z$ ، 296° ، 67.6° ، 8

۷.۱ حاصلضرب چلیپائی^۱ (خارجی)

دو بردار \vec{A} و \vec{B} مفروضند حاصلضرب چلیپائی (خارجی) یا حاصلضرب برداری \vec{A} و \vec{B} را با نوشتن يك ضربدر (چلیپا) بین دو بردار به صورت $\vec{A} \times \vec{B}$ مشخص می‌کنیم و آن را «ضربدر \vec{B} » می‌خوانیم و بدین بیان تعریف کنیم: حاصلضرب خارجی $\vec{A} \times \vec{B}$ برداری است که اندازه آن مساوی حاصلضرب اندازه‌های دو بردار \vec{A} و \vec{B} در سینوس کوچکترین زاویه بین \vec{A} و \vec{B} است و جهت آن عمود بر صفحه شامل \vec{A} و \vec{B} در جهت پیش روی پیچ راست‌گردی است که از \vec{A} به طرف \vec{B} بچرخد. این جهت در شکل (۵.۱) نمایش داده شده است.

به خاطر داشته باشید که هر يك از دو بردار را می‌توان با ثابت نگاه داشتن امتداد و جهت آنها به دلخواه جا به جا کرد تا هر دو بردار دارای مبدأ مشترکی شوند.

1. cross product



شکل ۵.۱ جهت $\vec{A} \times \vec{B}$ همان جهت پیشروی پیچ راست‌گردی است که از \vec{A} به طرف \vec{B} بچرخد.

به این ترتیب صفحه‌ای که شامل هر دو است تعیین می‌شود. در هر صورت در اغلب موارد استعمال با بردارهای سروکار داریم که در یک نقطه معینند. حاصلضرب خارجی را می‌توانیم بصورت رابطه زیر بنویسیم:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \bar{a}_N |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta_{AB}$$

که توضیحی اضافی، مانند آن که در بالا داده شد، برای بیان امتداد بردار واحد \bar{a}_N لازم است. اندیس بردار واحد \bar{a}_N مشخص عمود بودن آن است. عوض کردن ترتیب بردارهای \vec{A} و \vec{B} باعث معکوس شدن جهت بردار واحد می‌شود و بدین ترتیب مشاهده می‌شود که حاصلضرب خارجی از قانون نقل‌پذیری تبعیت نمی‌کند برای اینکه

$$\vec{B} \times \vec{A} = -(\vec{A} \times \vec{B})$$

اگر تعریف حاصلضرب خارجی را در مورد بردارهای واحد \bar{a}_y و \bar{a}_x بکار بندیم مشاهده می‌کنیم که $\bar{a}_x \times \bar{a}_y = \bar{a}_z$. برای اینکه اندازه هر بردار مساوی واحد است و دو بردار برهم عمودند و دوران \bar{a}_x بر روی \bar{a}_y طبق تعریف دستگاه مختصات راست‌گرد جهت مثبت z را نشان می‌دهد. به همین ترتیب $\bar{a}_y \times \bar{a}_z = \bar{a}_x$ و $\bar{a}_z \times \bar{a}_x = \bar{a}_y$ ؛ در این روابط تقارنی القبائی وجود دارد که باید به آن توجه شود. تا

زمانی که سه بردار \vec{a}_x و \vec{a}_y و \vec{a}_z به ترتیب نوشته شوند (و \vec{a}_x را متعاقب \vec{a}_z فرض کنیم، مثل سه فیل که بطور دایره‌ای پشت سرهم قرار گرفته باشند، به طوری که بتوان نوشت \vec{a}_x ، \vec{a}_z ، \vec{a}_y یا \vec{a}_y ، \vec{a}_z ، \vec{a}_x) می‌توان علامت ضرب برد و مساوی را در هر یک از دو فاصله خالی جا داد. بدیهی است که برای تعریف یک دستگاه مختصات قائم راست‌گرد ساده‌تر آنست که بگوئیم

$$\vec{a}_x \times \vec{a}_y = \vec{a}_z$$

مثال ساده‌ای از مورد استعمال حاصلضرب خارجی را می‌توان از هندسه یا مثلثات اقتباس کرد. مساحت یک متوازی‌الاضلاع مساوی است با حاصلضرب طولهای دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آنها. با استفاده از علامت بردار برای دو ضلع می‌توانیم مساحت (شمارواره) متوازی‌الاضلاع را بصورت اندازه $|\vec{A} \times \vec{B}|$ یا $|\vec{B} \times \vec{A}|$ بنویسیم. از حاصلضرب خارجی می‌توان به جای قاعده دست راست، که مهندسان برق همه با آن آشناوند، استفاده کرد. نیروی مؤثر روی یک هادی مستقیم به طول \vec{L} را در نظر بگیرید. جهتی که برای \vec{L} تعیین می‌شود همان جهت جریان ثابت I است. و میدان مغناطیسی یک‌نواختی با شاری به چگالی \vec{B} نیز موجود است. با استفاده از علامت بردار می‌توان نیروی وارد برسیم را به‌طور ساده به‌صورت زیر نوشت $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$. این رابطه را در آینده در فصل ۹ به‌دست خواهیم آورد.

محاسبه حاصلضرب خارجی از طریق تعریف آن نسبت به محاسبه حاصلضرب داخلی از روی تعریف آن مستلزم کار بیشتری است، زیرا نه فقط باید زاویه بین دو بردار را بدست آورد، بلکه باید رابطه‌ای هم برای بردار واحد \vec{a}_N یافت. با استفاده از مؤلفه‌های مختصات قائم بردارهای \vec{A} و \vec{B} و بسط دادن حاصلضرب خارجی بصورت مجموع نه حاصلضرب خارجی ساده‌تر، که هر یک شامل دو بردار واحدند، می‌توان از این کار اجتناب کرد.

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= A_x B_x \vec{a}_x \times \vec{a}_x + A_x B_y \vec{a}_x \times \vec{a}_y + A_x B_z \vec{a}_x \times \vec{a}_z \\ &\quad + A_y B_x \vec{a}_y \times \vec{a}_x + A_y B_y \vec{a}_y \times \vec{a}_y + A_y B_z \vec{a}_y \times \vec{a}_z \\ &\quad + A_z B_x \vec{a}_z \times \vec{a}_x + A_z B_y \vec{a}_z \times \vec{a}_y + A_z B_z \vec{a}_z \times \vec{a}_z \end{aligned}$$

و پیش از این دیدیم که $\vec{a}_x \times \vec{a}_y = \vec{a}_z$ و $\vec{a}_y \times \vec{a}_z = \vec{a}_x$ و $\vec{a}_z \times \vec{a}_x = \vec{a}_y$ و در نتیجه $\vec{a}_x \times \vec{a}_z = -\vec{a}_y$ و $\vec{a}_z \times \vec{a}_y = -\vec{a}_x$ و $\vec{a}_y \times \vec{a}_x = -\vec{a}_z$ سه جمله باقیمانده صفرند، برای اینکه حاصلضرب خارجی هر بردار در خود آن بردار مساوی صفر است، زیرا زاویه بین آنها صفر است. با ترکیب این نتایج خواهیم داشت:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{a}_z$$

یا اگر آن را به‌صورت دترمینان، که به‌خاطر سپردن آن آسانتر است، بنویسیم خواهیم داشت:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

بنابراین اگر، $\vec{A} = 2\vec{a}_x - 3\vec{a}_y + \vec{a}_z$ و $\vec{B} = -4\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + 5\vec{a}_z$ خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= [(-3)(5) - (1)(-2)]\vec{a}_x - [(2)(5) - (1)(-4)]\vec{a}_y \\ &\quad + [(2)(-2) - (-3)(-4)]\vec{a}_z \\ &= -13\vec{a}_x - 14\vec{a}_y - 16\vec{a}_z \end{aligned}$$

آنهایی که بسط دترمینان را فراموش کرده‌اند به شماره ۳ ضمیمه ۱ که در پایان این فصل ذکر شده است، مراجعه کنند

تمرین ۴.۱

اگر $\vec{A} = 2\vec{a}_x - 5\vec{a}_y + 3\vec{a}_z$ تعیین کنید

(الف) $\vec{A} \times \vec{B}$ ، به شرطی که $\vec{B} = -3\vec{a}_x - 4\vec{a}_y + \vec{a}_z$

(ب) $\vec{a}_z \times \vec{A}$ (ب) $\vec{a}_y \times (\vec{a}_z \times \vec{A})$

جوابها: $-5\vec{a}_z$ ، $5\vec{a}_x + 2\vec{a}_y$ ، $7\vec{a}_x - 11\vec{a}_y - 23\vec{a}_z$

۸.۱ دستگاههای مختصات دیگر: دستگاه مختصات استوانه‌ای مدور

بطورکافی دانشجویان ترجیح می‌دهند که هر مسأله‌ای را در دستگاه مختصات دکارتی (قائم) حل کنند، و این اغلب مستلزم زحمت بسیار بیشتر برای آنهاست، زیرا بسیاری از مسائل دارای نوعی تقارنند که طرز عمل منطقی‌تری را ایجاب می‌کنند. به‌جای آنکه بعدها برای هر مسأله‌ای که دارای تقارن استوانه‌ای یا کروی است متحمل زحمتی مساوی یا بیشتر نشویم، بهتر است هم اکنون یک باره، زحمت لازم را برای آشنا شدن با مختصات استوانه‌ای و کروی قبول کنیم. با توجه به این صرفه جوئی در کار آتی، دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی را با دقت و بی‌شتاب مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

دستگاه مختصات استوانه‌ای مستدبر، شکل سه بعدی مختصات قطبی هندسه تحلیلی است. در مختصات قطبی دو بعدی، محل یک نقطه در صفحه توسط فاصله آن r از مبدأ و زاویه φ بین خط واصل مبدأ به نقطه و یک خط شعاعی اختیاری $\varphi = 0$

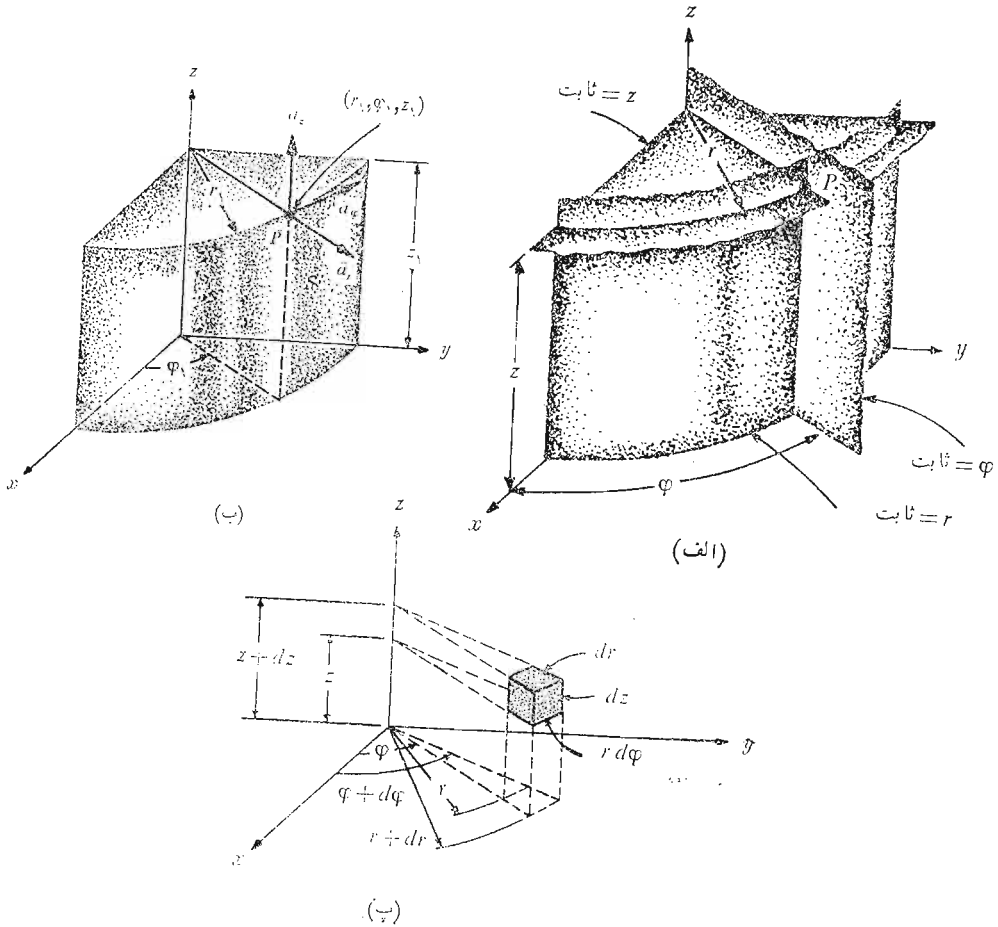
مشخص می‌شود. مختصات استوانه‌ای مستدیر، که يك دستگاه مختصات سه بعدی است نیز با مشخص کردن z ، یعنی فاصله نقطه از صفحه دلخواه مقایسه $z = 0$ که بر خط $z = 0$ عمود است، حاصل می‌شود. برای سهولت مختصات استوانه‌ای مستدیر را مختصات استوانه‌ای می‌نامیم. این موضوع در مطالعه این کتاب باعث اشتباه نخواهد شد، اما باید یادآور شد که مختصات استوانه‌ای بیضوی و هذلولوی و سهموی و انواع دیگر نیز وجود دارد.

در اینجا دیگر مانند دستگاه مختصات قائم سه محور رسم نمی‌کنیم، بلکه هر نقطه را محل تقاطع سه سطح، که بطور متقابل برهم عمودند، در نظر می‌گیریم. این سطوح عبارتند از، یکی استوانه‌ای مدور (ثابت r) و يك صفحه مسطح (ثابت φ) و صفحه مسطح دیگری (ثابت z)، همانطور که جای يك نقطه در دستگاه مختصات قائم، در محل تقاطع سه صفحه (ثابت $z = z_0$ و ثابت $y = y_0$ و ثابت $x = x_0$) تعیین می‌شوند. شکل ۶.۱ الف سه سطح دستگاه مختصات استوانه‌ای را نشان می‌دهد. باید توجه داشت که چنین سه صفحه‌ای از هر نقطه‌ای ممکن است بگذرد، مگر اینکه نقطه روی محور z قرار داشته باشد که در این حالت يك صفحه کافی است. همچنین می‌بایست سه بردار واحد تعریف کنیم؛ اما دیگر آنها را در امتداد «محورهای مختصات» نمی‌گیریم: چه، این محورها فقط در دستگاه مختصات قائم وجود دارند، بلکه بردارهای واحد مختصات قائم را با دید وسیع‌تری در نظر می‌گیریم، و پی می‌بریم به این که این بردارها در جهت افزایش مختصاتند و بر سطحی که مقدار آن مختصه ثابت است عمودند، یعنی بردار واحد \vec{a}_z بر صفحه «ثابت $z = z_0$ » عمود و جهت آن به طرف مقادیر بزرگتر z است. به طریقی نظیر همین، می‌توانیم سه بردار واحد مختصات استوانه‌ای تعریف کنیم کسه عبارتند از:

$$\vec{a}_z \text{ و } \vec{a}_\varphi \text{ و } \vec{a}_r$$

جهت بردار واحد \vec{a}_r در هر نقطه $P(r_0, \varphi_0, z_0)$ بطور شعاعی به سمت خارج و عمود بر سطح استوانه‌ای $r = r_0$ است. این بردار در صفحه‌های $z = z_0$ و $\varphi = \varphi_0$ قرار دارد. بردار واحد \vec{a}_φ عمود بر صفحه $\varphi = \varphi_0$ و در جهت افزایش مقدار φ است و در صفحه $z = z_0$ قرار دارد و مماس بر سطح استوانه‌ای $r = r_0$ است. بردار واحد \vec{a}_z همان بردار واحد \vec{a}_z در دستگاه مختصات قائم است. شکل ۶.۱ ب سه بردار واحد مختصات استوانه‌ای را نشان می‌دهد. جهت (و نه اندازه) دو بردار از این بردارها با تغییر محل نقطه، عوض می‌شود، حال آنکه در دستگاه

۱. معمولاً در مختصات قطبی از θ برای زاویه استفاده می‌شود، ولی ما در مختصات استوانه‌ای مدور به جای آن φ را به کار می‌بریم، بسدین ترتیب انتقال بین مختصات استوانه‌ای و کروی روانتر انجام می‌شود.



شکل ۶.۱ (الف) سه سطح دستگاه مختصات استوانه‌ای که متقابلاً برهم عمودند (ب) سه بردار واحد دستگاه مختصات استوانه‌ای (پ) واحد حجم دیفرانسیلی در دستگاه مختصات استوانه‌ای؛ dr و $r d\varphi$ و dz همه عناصر طولی اند.

مختصات قائم چنین چیزی نیست.

بردارهای واحد اینجا هم بطور متقابل برهم عمودند، چسه هر يك از آنها عمود بر یکی از سه صفحه‌ای است که خود بطور متقابل برهم عمودند. دستگاه مختصات استوانه‌ای راست گرد بنا به تعریف دستگاهی است که در آن $\vec{a}_r \times \vec{a}_\varphi = \vec{a}_z$ باشد یا برای کسانی که انگشتانی نرم دارند، دستگاهی است که انگشتان شست و سیاه و میانی دست راست به ترتیب جهت افزایش r و φ و z را نشان دهند.

در دستگاه مختصات استوانه‌ای می‌توان يك عنصر حجم دیفرانسیلی را با افزایش r و φ و z به اندازه مقادیر دیفرانسیل dr و $d\varphi$ و dz بدست آورد. بدین ترتیب دو استوانه به شعاعهای r و $r + dr$ و دو صفحه شعاعی به زوایای φ و $\varphi + d\varphi$ و دو صفحه افقی به ارتفاعهای z و $z + dz$ حجم کوچکی را در برمی‌گیرند که در شکل ۶.۱ پ، نشان داده شده است و شبیه يك گوه بی‌سراست. وقتی عنصر حجم خیلی کوچک شود شکل آن به يك متوازی‌السطوح راست گوشه با اضلاعی به طولهای dr و $r d\varphi$ و dz نزدیک می‌گردد. باید به این نکته توجه کرد که dr و dz دارای بعد طولند ولی $d\varphi$ بعد طول ندارد بلکه $r \cdot d\varphi$ از جنس طول است. مساحت سطوح مساویند با $r dr d\varphi$ و $dr dz$ و $r dz$ و $r d\varphi dz$ و اندازه حجم برابر است با $r dr d\varphi dz$

تمرین ۵.۱

بعد از مشخص کردن نقاط روی طرحی شبیه به شکل ۶.۱ پ، فاصله نقطه $P(10, 90^\circ, 5)$ را از (الف) نقطه $A(15, 90^\circ, 5)$ و (ب) نقطه $B(10, 270^\circ, 5)$ و (پ) از نقطه $C(10, 90^\circ, 15)$ و (ت) از نقطه $D(0, 120^\circ, 4.83)$ و (ث) از $E(10, 0^\circ, 0)$ پیدا کنید.
جوابها: ۵ ، ۲۰ ، ۱۰ ، ۱۰ ، ۱۵

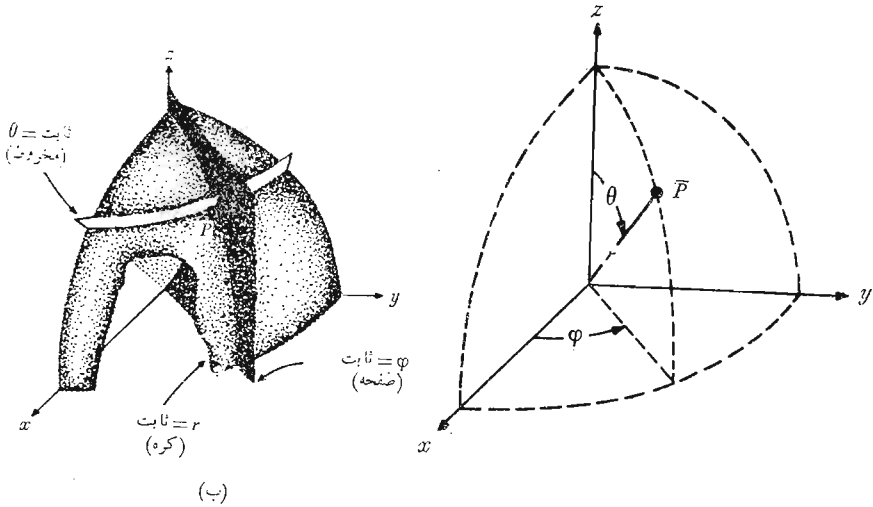
۹.۱ دستگاه مختصات کروی

برخلاف دستگاه مختصات استوانه‌ای، دستگاه مختصاتی دو بعدی که ما را در فهم دستگاه مختصات سه بعدی کروی کمک کند در دست نداریم. از پاره‌ای جهات می‌توانیم از دانش خود درباره دستگاه مختصات طول و عرض جغرافیائی برای مشخص کردن نقطه‌ای در سطح کره زمین توسط طول و عرض جغرافیائی استفاده کنیم، ولی در این مورد فقط نقاط روی سطح را در نظر می‌گیریم و کاری به نقاط پائین و بالای سطح زمین نداریم.

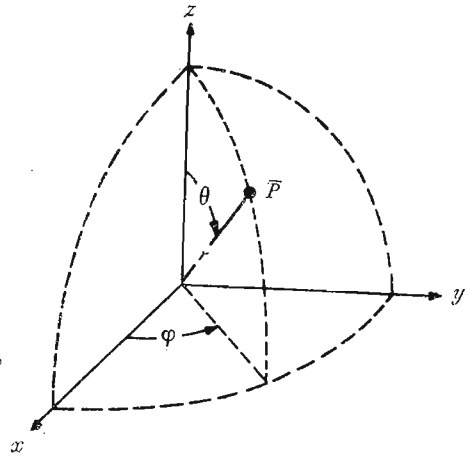
مطالعه خود را با در نظر گرفتن يك دستگاه مختصات کروی روی سه محور مختصات قائم آغاز می‌کنیم شکل ۷.۱ الف. ابتدا فاصله نقطه مبدأ از هر نقطه را r تعریف می‌کنیم. در دستگاه مختصات استوانه‌ای از همین حرف برای مشخص کردن فاصله از يك خط استفاده کردیم که البته مفهوم دو مورد استعمال یکی نیست. و این اشتباهی در نامگذاری است که همه آن را تأیید می‌کنند اما از رفع آن عاجزند. بنابراین، هر گاه به حرف r برمی‌خوریم از متن تشخیص می‌دهیم که مربوط به دستگاه مختصات کروی است یا استوانه‌ای. در مختصات کروی سطح «ثابت r » سطحی کروی است.

مختصه دوم زاویه θ بین محور z و خط واصل مبدأ به نقطه مورد نظر است.

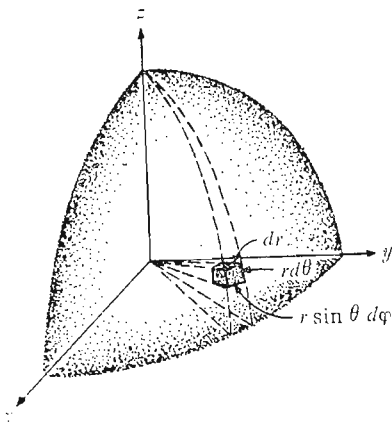
سطح «ثابت θ » مخروطی است و دو سطح کروی و مخروطی در همه جا در طول فصل مشترکشان که دایره ایست به شعاع $r \sin \theta$ برهم عمودند. مختصه θ نظیر عرض



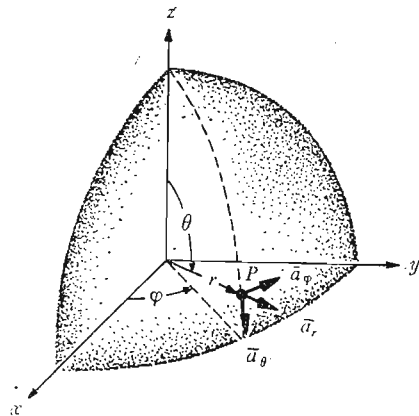
(ب)



(الف)



(ت)



(ب)

شکل ۷.۱ الف) سه مختصات کروی (ب) سه سطح متعامد دستگاه مختصات کروی (پ) سه بردار واحد مختصات کروی $\vec{a}_r \times \vec{a}_\theta = \vec{a}_\phi$ (ت) عنصر حجمی دیرانسیلی در دستگاه مختصات کروی

جغرافیائی است، با این تفاوت که عرض جغرافیائی نسبت به استوا ولی θ نسبت به «قطب شمال» اندازه گیری می شود.

مختصه سوم φ نیز يك زاویه است و در این حالت عیناً مانند زاویه φ دستگاه مختصات استوانه‌ای است. زاویه φ زاویه واقع بین محور x و تصویر خط واصل مبدأ و نقطه مسورد نظر روی صفحه $z = 0$ است. این زاویه نظیر زاویه طول جغرافیائی است ولی در جهت «شرق» افزایش می یابد. سطح «ثابت $\varphi = \text{ثابت}$ » صفحه‌ای است که از خط $z = 0$ (یا محور z) می گذرد.

در اینجا نیز هر نقطه را محل تقاطع سه سطح متعامد کروی و مخروطی و مستوی در نظر می گیریم، که به ترتیبی که در بالا به آن اشاره شد، قرار گرفته اند. شکل ۷.۱ ب سه سطح نامبرده را نشان می دهد.

اینجا نیز می توان سه بردار واحد را در هر نقطه تعریف کرد. هر بردار واحد بر یکی از سه سطح متعامد عمودست و جهت آن جهت افزایش مختصه است. بردار واحد \vec{a}_r بطور شعاعی به سمت خارج متوجه و بر سطح «ثابت $r = \text{ثابت}$ » عمود است و در مخروط «ثابت $\theta = \text{ثابت}$ » و صفحه «ثابت $\varphi = \text{ثابت}$ » قرار دارد. بردار واحد \vec{a}_θ عمود بر سطح مخروطی است و در صفحه قرار دارد و بر کره مماس است. این بردار در راستای «طول جغرافیائی» قرار دارد و به سوی «جنوب» متوجه است. بردار واحد سوم \vec{a}_φ همانست که در مختصات استوانه‌ای دیدیم و بر صفحه عمود و بر هر دو سطح مخروط و کره مماس است و جهت آن به سمت «شرق» است.

شکل (۷.۱ پ) سه بردار واحد را نشان می دهد. این سه بردار البته بطور متقابل برهم عمودند و هرگاه $\vec{a}_r \times \vec{a}_\theta = \vec{a}_\varphi$ ، دستگاه مختصات را راست گرد می نامیم. چنانکه از مطالعه شکل ۷.۱ پ دیده می شود، دستگاه مختصات ما زمانی راست گرد است که با تعریف حاصلضرب خارجی سازگار باشد. بنا به قاعده دست راست، انگشت وشست انگشت سبابه و انگشت میانی به ترتیب با جهت افزایش r و θ و φ منطبق اند. (باید توجه داشت که این ترتیب در مختصات استوانه‌ای r و φ و z و در دستگاه مختصات قائم x و y و z است).

يك عنصر دیرانسیلی حجم در دستگاه مختصات کروی را می توان با افزایش r و θ و φ به اندازه dr و $d\theta$ و $d\varphi$ همانطور که در شکل ۷.۱ ت می بینیم ساخت. فاصله بین دو سطح کروی به شعاعهای r و $r + dr$ مساوی dr و فاصله بین دو سطح مخروطی با زوایای مولد θ و $\theta + d\theta$ مساوی $r d\theta$ است و پس از اندکی تفکر مثلاً می بینیم که فاصله بین دو صفحه شعاعی به زوایای φ و $\varphi + d\varphi$ برابر $r \sin \theta dr d\varphi$ است. مساحت سطوح به ترتیب برابر است با $r \sin \theta dr d\varphi$ و $r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ و حجم عنصر دیرانسیلی برابر است با $r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ در ضمیمه الف این کتاب دستگاه مختصات منحنی الخط توصیف شده است.

که دستگاههای مختصات قائم و استوانه‌ای و کروی حالات خاص آنند. بخش اول این ضمیمه را می‌توان هم اکنون بطور اجمالی بررسی کرد:

تقریب ۶.۱

با استفاده از طرحی تقریبی، فاصله بین نقاط $P(10, 60^\circ, 90^\circ)$ و $(الف)$ $A(5, 60^\circ, 90^\circ)$ و $(ب)$ $B(10, 120^\circ, 90^\circ)$ و $(پ)$ $C(10, 120^\circ, 270^\circ)$ و $(ت)$ $D(10, 60^\circ, 270^\circ)$ را بدست آورید. مختصات نقاط به ترتیب مختصات راست گرد عبارتند از φ, θ, r
 جوابها: $5, 10, 20, 10/\sqrt{3}$

۱۰.۱ تبدیل دستگاههای مختصات به یکدیگر

پس از آن که از آنالیز برداری برای حل مسائل مربوط به میدانهای الکتریکی و مغناطیسی استفاده کردیم، با مسائل دشوارتری روبرو خواهیم شد که حل آنها در مرحله اول در دستگاه مختصات قائم آسانتر است و لی جواب مسأله را می‌بایست بصورت رابطه‌ای در دستگاه مختصات استوانه‌ای یا کروی بنویسیم. گاهی اوقات تبدیل دستگاههای مختصات در جهت عکس مورد نظر است و همچنین گاهگاه به‌موردی برمی‌خوریم که برای مسأله خاصی، که در هر سطر آن اساساً ناچار از تبدیل دستگاه مختصاتیم از دستگاه مختصات مختلطی استفاده کنیم. تبدیل دستگاههای مختصات به یکدیگر، که در این بخش راجع به آن بحث می‌شود، فقط گاهگاهی در بقیه این کتاب مورد استفاده قرار می‌گیرد و نمی‌توان گفت که این موارد دارای اهمیت حیاتیند و لی در هر صورت به توضیح و تفهیم مفاهیم برداری که ما مطالعه کردیم کمک می‌کند.

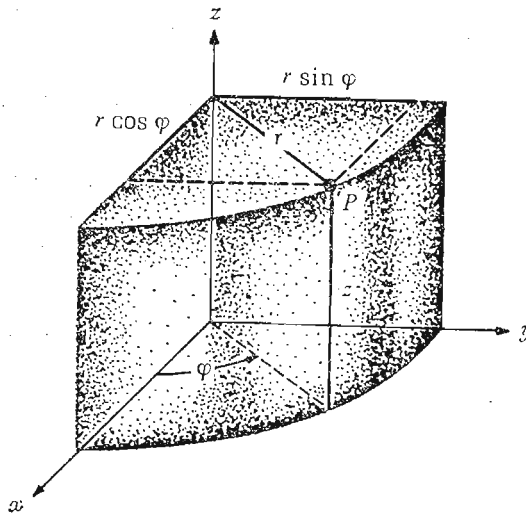
ابتدا تبدیل يك بردار در دستگاه مختصات دکارتی (قائم) را به يك بردار در دستگاه مختصات استوانه‌ای بطور اخص در نظر می‌گیریم. این کار اساساً در دو مرحله انجام می‌شود که عبارتند از یکی تبدیل متغیرها و دیگری تبدیل مؤلفه‌ها. يك بردار در دستگاه مختصاتی دکارتی (قائم) $\vec{A} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$ که در آن A_x و A_y و A_z توابع x و y و z اند، می‌بایست به يك بردار در دستگاه مختصات استوانه‌ای یعنی، $\vec{A} = A_r \vec{a}_r + A_\varphi \vec{a}_\varphi + A_z \vec{a}_z$ که در آن A_r و A_φ و A_z توابع r و φ و z اند، تبدیل شود.

این که کدام مرحله اول و کدام بعد انجام شود دارای اهمیت چندانی نیست. می‌توانیم ابتدا تبدیل متغیرها را بررسی کنیم. اگر دستگاههای مختصات را بطوری که در شکل ۸.۱ نشان داده شده است در نظر بگیریم، یعنی صفحات $z=0$ روی هم قرار بگیرند و صفحه $z=0$ با صفحه $\varphi=0$ یکی شود. در این صورت در يك

نقطه دلخواه P روابط زیر بین متغیرها وجود دارد:

$x = r \cos \varphi$	$y = r \sin \varphi$	$z = z$
$r^2 = x^2 + y^2$	$\tan \varphi = \frac{y}{x}$	$z = z$

از سطر اول x و y و z بر حسب r و φ و z بدست می آید و از سطر دوم r و φ و z بر حسب x و y و z تعیین می شود. به طوری که مشاهده می شود، متغیر z در دو دستگاه مختصات و همچنین بردار واحد \vec{a}_z در هر دو دستگاه یکی است.



شکل ۸.۱ رابطه بین متغیرهای x و y و z مختصات قائم و متغیرهای r و φ و z مختصات استوانه‌ای. متغیر z در هر دو دستگاه مختصات یکی است.

برای تشریح تبدیل متغیرها بردار

$$\vec{B} = z\vec{a}_x + (1-x)\vec{a}_y + \frac{y}{x}\vec{a}_z$$

را در نظر می گیریم، که به $z\vec{a}_x + (1-r \cos \varphi)\vec{a}_y + \tan \varphi \vec{a}_z$ تبدیل می شود. این اولین قدم در تبدیل دو دستگاه مختصات است.

اکنون تبدیل مؤلفه‌ها را بررسی می کنیم. بطور کلی، ما سه مؤلفه قائم A_x و A_y و A_z بردار \vec{A} را در دست داریم و می خواهیم مؤلفه‌های استوانه‌ای A_φ و A_z آن را بدست آوریم. از آنجائی که بردارهای واحد \vec{a}_z در هر دو دستگاه یکسانند، مؤلفه‌های A_z بردار در دو دستگاه نیز یکی خواهد بود. برای بدست آوردن

مؤلفه A_r ، بحث مربوط به حاصلضرب داخلی را به یاد می آوریم که بنا بر آن مؤلفه یک بردار در یک جهت دلخواه مساوی حاصلضرب داخلی آن بردار در بردار واحد در همان جهت است.

بنابراین:

$$A_r = \vec{A} \cdot \vec{a}_r$$

و

$$A_\varphi = \vec{A} \cdot \vec{a}_\varphi$$

با بسط این حاصلضربهای داخلی داریم

$$A_r = (A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z) \cdot \vec{a}_r = A_x \vec{a}_x \cdot \vec{a}_r + A_y \vec{a}_y \cdot \vec{a}_r$$

و

$$A_\varphi = (A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z) \cdot \vec{a}_\varphi = A_x \vec{a}_x \cdot \vec{a}_\varphi + A_y \vec{a}_y \cdot \vec{a}_\varphi$$

چون $\vec{a}_z \cdot \vec{a}_r = 0$ و $\vec{a}_z \cdot \vec{a}_\varphi = 0$ مساوی صفراند.

برای تکمیل تبدیل مؤلفهها لازم است که حاصلضربهای داخلی $\vec{a}_x \cdot \vec{a}_r$ و $\vec{a}_y \cdot \vec{a}_r$ و $\vec{a}_x \cdot \vec{a}_\varphi$ و $\vec{a}_y \cdot \vec{a}_\varphi$ را بدست آوریم. با استفاده از تعریف حاصلضرب داخلی دو بردار و با توجه به اینکه ما در این حاصلضربها فقط با بردارهای واحد سروکار داریم، مشاهده می کنیم که نتیجه این حاصلضربها فقط کسینوس زاویه بین دو بردار واحد مورد نظر خواهد بود. با توجه به شکل ۸.۱ و دقت بسیار خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_x \cdot \vec{a}_r = \cos \varphi \\ \vec{a}_y \cdot \vec{a}_r = \sin \varphi \\ \vec{a}_x \cdot \vec{a}_\varphi = -\sin \varphi \\ \vec{a}_y \cdot \vec{a}_\varphi = \cos \varphi \end{array} \right.$$

با استفاده از مجموع این نتایج، رابطه نهائی تبدیل بردار \vec{A} از دستگاه

مختصات قائم به دستگاه مختصات استوانه ای را بدست می آوریم،

$$(1) \vec{A} = (A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi) \vec{a}_r + (-A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi) \vec{a}_\varphi + A_z \vec{a}_z$$

برای تکمیل مثالی که زده شد بردار \vec{B} را نیز با استفاده از رابطه (۱) تبدیل می کنیم.

$$\vec{B} = (z \cos \varphi + \sin \varphi - r \sin \varphi \cos \varphi) \vec{a}_r$$

$$+ (-z \sin \varphi + \cos \varphi - r \cos^2 \varphi) \vec{a}_\varphi + \tan \varphi \vec{a}_z$$

به طوری که مشاهده می شود، در این مثال نتیجه در دستگاه مختصات دکارتی (قائم)

خیلی ساده تر است.

مسأله تبدیل دو دستگاه مختصات اساساً ساده است: ابتدا متغیرها و سپس

مؤلفهها را باید تغییر داد و روش تبدیل خود روشن و ساده است اما جزئیات آن

اغلب پیچیده است. خالی از فایده نیست که جدولی شامل معادلات تبدیل متغیرها در

$$\vec{A} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$$

هر سو و همچنین مؤلفه‌های هر دستگاه بر حسب مؤلفه‌های دستگاه‌های دیگر تهیه کنیم. جدول ۱.۱ نمونه‌ای از آن است.

جدول ۱.۱

روابط بین متغیرها و مؤلفه‌های دستگاه مختصات قائم و دستگاه مختصات استوانه‌ای

مختصات قائم به استوانه‌ای	مختصات استوانه‌ای به قائم
$x = r \cos \varphi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r \sin \varphi$	$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \cos^{-1} \frac{x}{r} = \sin^{-1} \frac{y}{r}$
$z = z$	$z = z$
$A_r = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi$	$A_x = A_r \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - A_\varphi \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
$A_\varphi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi$	$A_y = A_r \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + A_\varphi \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
$A_z = A_z$	$A_z = A_z$

به‌طوریکه مشاهده می‌شود، این جدول نتایج تبدیل درجهت‌عکس را نیز در بردارد، زیرا روابط مؤلفه‌ها در دستگاه مختصات قائم بر حسب مؤلفه‌های دستگاه مختصات استوانه‌ای نیز در آن داده شده است. این نتایج با استفاده از همان طریقی بدست آمده‌اند که برای پیدا کردن فرمول (۱) به کار رفت و نیز از روابط مربوط به حاصلضرب داخلی بردارهای واحد، که راجع به آن بحث شد، در آنها استفاده شده است.

تبدیل یک بردار از دستگاه مختصات قائم به دستگاه مختصات کروی یا به‌عکس را می‌توان با سه کار بردن یک روش کلی مشترک انجام داد. روابط بین متغیرها اندکی پیچیده‌تر است ولی به آسانی به کمک شکل ۷.۱ الف بدست می‌آیند:

$$\begin{array}{l}
 x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta \\
 r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}
 \end{array}$$

حاصلضربهای داخلی بردارهای واحد دو دستگاه مختصات به کمک شکل ۷.۱ پ و

کمی عملیات مثلثاتی بدست می‌آیند. از آنجائی که حاصلضرب داخلی هر بردار واحد دستگاه مختصات کروی در هر بردار واحد دستگاه مختصات دکارتی (قائم) مؤلفه بردار مختصات کروی در جهت بردار مختصات دکارتی (قائم) است، حاصلضربهای داخلی با \vec{a}_z مساویند با:

$$\begin{aligned}\vec{a}_r \cdot \vec{a}_z &= \vec{a}_z \cdot \vec{a}_r = \cos \theta \\ \vec{a}_\theta \cdot \vec{a}_z &= \vec{a}_z \cdot \vec{a}_\theta = -\sin \theta \\ \vec{a}_\varphi \cdot \vec{a}_z &= \vec{a}_z \cdot \vec{a}_\varphi = 0\end{aligned}$$

برای بدست آوردن حاصلضربهای داخلی که شامل \vec{a}_y و \vec{a}_x اند لازم است که ابتدا بردار واحد دستگاه مختصات کروی را روی صفحه xy و سپس نتیجه را روی محور مورد نظر تصویر کنیم. به عنوان مثال، برای بدست آوردن $\vec{a}_r \cdot \vec{a}_x$ می‌بایست که ابتدا \vec{a}_r را روی صفحه xy تصویر کنیم، که نتیجه آن $\sin \theta$ است، و سپس $\sin \theta$ را روی محور x تصویر کنیم که نتیجه مساوی $\sin \theta \cos \varphi$ می‌شود. حاصلضربهای داخلی باقیمانده مساویند با:

$$\begin{aligned}\vec{a}_r \cdot \vec{a}_x &= \sin \theta \cos \varphi \\ \vec{a}_\theta \cdot \vec{a}_x &= \cos \theta \cos \varphi \\ \vec{a}_\varphi \cdot \vec{a}_x &= -\sin \varphi \\ \vec{a}_r \cdot \vec{a}_y &= \sin \theta \sin \varphi \\ \vec{a}_\theta \cdot \vec{a}_y &= \cos \theta \sin \varphi \\ \vec{a}_\varphi \cdot \vec{a}_y &= \cos \varphi\end{aligned}$$

اکنون با این اطلاعات می‌توانیم مؤلفه‌های A_r و A_θ و A_φ را برحسب A_x و A_y و A_z یا بعکس بنویسیم. این اطلاعات در جدول (۲.۱) جمع‌آوری شده‌اند و می‌توانیم به‌هنگام نیاز و برای تبدیل مختصات دکارتی (قائم) و مختصات کروی به یکدیگر به آن مراجعه کنیم.

تمرین ۲.۱

مختصات قائم‌نقاط: (الف) $A(۸, ۱۲۰^\circ, ۵)$ (استوانه‌ای) و (ب) $B(۸, ۱۲۰^\circ, ۳۰^\circ)$ کروی را پیدا کنید
جوابها: $(-۴, ۴\sqrt{۳}, ۵)$ و $(۶, ۲\sqrt{۳}, -۴)$

تمرین ۸.۱

محل نقطه $(۳, -۱, ۲)$ را در: (الف) مختصات استوانه‌ای و (ب) مختصات کروی بدست آورید.

جوابها: $(\sqrt{۵}, ۳۳۳۳۴^\circ, ۳)$ و $(\sqrt{۱۴}, ۳۶۷^\circ)$

روابط بین متغیرها و مؤلفه‌های دستگاههای مختصات قائم و کروی

مختصات قائم به کروی	مختصات کروی به قائم
$x = r \sin \theta \cos \varphi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$y = r \sin \theta \sin \varphi$	$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
$z = r \cos \theta$	$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$
$A_r = A_x \sin \theta \cos \varphi$ $+ A_y \sin \theta \sin \varphi$ $+ A_z \sin \theta$	$A_x = \frac{A_r x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ $+ \frac{A_\theta x z}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)}}$ $- \frac{A_\varphi y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
$A_\theta = A_x \cos \theta \cos \varphi$ $+ A_y \cos \theta \sin \varphi$ $- A_z \sin \theta$	$A_y = \frac{A_r y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ $+ \frac{A_\theta y z}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)}}$ $+ \frac{A_\varphi x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
$A_\varphi = -A_x \sin \varphi$ $+ A_y \cos \varphi$	$A_z = \frac{A_r z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ $- \frac{A_\theta \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

تمرین ۹.۱

بردار $\vec{F} = y\vec{a}_x - x\vec{a}_y + z\vec{a}_z$ را در: (الف) مختصات استوانه‌ای و (ب) مختصات

کروی بنویسید.

جوابها: $r \cos^2 \theta \bar{a}_r - r \sin \theta \cos \theta \bar{a}_\theta - r \sin \theta a_\phi$ و $-r \bar{a}_\phi + z \bar{a}_z$

تمرین (۱۰.۱)

بردارهای زیر را به بردارهایی در مختصات قائم تبدیل کنید:

(الف) $r(\bar{a}_\phi + \bar{a}_z)$ (استوانه‌ای)

(ب) $r(\bar{a}_\theta + \bar{a}_\phi)$ (کروی)

جوابها: $-y \bar{a}_x + x \bar{a}_y + \sqrt{x^2 + y^2} \bar{a}_z$ و

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} [(xz - y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \bar{a}_x + (yz + x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \bar{a}_y - (x^2 + y^2) \bar{a}_z]$$

مراجعی که توصیه می‌شوند.

1- Purcell, E. J.: «Calculus with Analytic Geometrie, 2d ed., Appleton - Century - Crofts, New York, 1972.

جبر برداری، که در این فصل مورد بحث قرار گرفت در فصل ۱۹ این کتاب مقدماتی آنالیز، آمده است. در فصل ۲۱ نیز محاسبات برداری دیگری یافت می‌شوند.

2- Spiegel, M. R.: «Vector Analysis», Schaum Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

مثالها و مسائل بسیار با جواب در این جلد ارزان و مختصر از سلسله کتب

فوق وجود دارد.

3- Thomas, G. B.: «Calculus and Analytic Geometry», 4th ed., Addison Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1968.

جبر برداری و سه دستگاه مختصات مورد استفاده ما در فصل ۱۲ کتاب فوق

مورد بحث قرار گرفته‌اند. تمام آنالیز برداری را که ما مورد استفاده قرار خواهیم داد می‌توان در فصلهای ۱۵ و ۱۷ آن یافت.

مسائل

۱- دوگوشه یک مکعب مستطیل در نقاط (۳، ۱، ۰) و (۰، ۲، ۴) قرار دارند. اگر لبه‌ها موازی محورهای مختصات باشند، حجم و مساحت کل سطوح آن را بدست آورید.

۲- اگر محور x به سمت بالا و محور y به سمت جنوب متوجه باشد، جهت

محور z در يك دستگاه مختصات راست گرد کدام است؟
 ۳- اگر $\vec{A} = 4\vec{a}_x - 6\vec{a}_y - 4\vec{a}_z$ و $\vec{B} = -\vec{a}_x + 2\vec{a}_y - 3\vec{a}_z$ باشد، بردار
 واحدی در جهت‌های (الف) $\vec{A} + \vec{B}$ و (ب) $\vec{A} - \vec{B}$ بدست آورید.
 ۴- نقاط $A(2, -1, 4)$ و $B(-1, 3, 2)$ و $C(-4, 0, 4)$ داده شده‌اند،
 مطلوب است:

(الف) برداری که از A به B امتداد دارد،

(ب) فاصله بین C و B

(پ) بردار واحدی که از نقطه وسط AB به C امتداد دارد

۵- اگر قطرهای يك متوازی‌الاضلاع به وسیله بردارهای

$$\vec{A} = 2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y - 5\vec{a}_z \quad \text{و} \quad \vec{B} = -4\vec{a}_x - \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

مشخص شوند، اضلاع متوازی‌الاضلاع را به صورت برداری بیان کنید

۶- روابط $2\vec{A} + \vec{B} = -\vec{a}_x - \vec{a}_y + 2\vec{a}_z$ و $4\vec{A} - 3\vec{B} = 2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y - \vec{a}_z$
 داده شده‌اند. بردارهای \vec{A} و $|\vec{A} + \vec{B}|$ را بدست آورید.

۷- يك میدان تشعشی به صورت $20(y-z)\vec{a}_x + 10x\vec{a}_y - 10z\vec{a}_z \text{ W/m}^2$
 داده شده است.

(الف) جهت و اندازه میدان را در $P(2, 1, 0)$ مشخص کنید.

(ب) بیشینه (ماکزیمم) اندازه میدان در ناحیه محصور توسط

$$z = \pm 1 \quad \text{و} \quad y \quad \text{و} \quad x \text{ چقدر است؟}$$

۸- مسأله‌ای مشابه با تغییرات سرعت بادی را که يك هواپیمای جت قاره پیمای با
 آن درگیر است در نظر بگیرید. ارتفاع پرواز را ثابت و کوره زمین را مسطح و پرواز
 را در امتداد محور x از ۰ تا ۱۰ واحد فرض می‌کنیم. سرعت مؤلفه عمودی ندارد
 و با زمان نیز تغییر نمی‌کند. فرض کنید که \vec{a}_x در امتداد شرق و \vec{a}_y متوجه شمال باشد.
 سرعت باد در این ارتفاع را

$$[(1000 + 400y^2)^{-1}][(-3x^2 + 48x - 20)\vec{a}_x - (6x - 20)\vec{a}_y]$$

در نظر می‌گیریم.

(الف) محل و اندازه بیشینه (ماکزیمم) باد پشت سر (در جهت حرکت)

را که هواپیمای با آن روبرو می‌شود بدست آورید.

(ب) همین عمل را درباره باد مخالف تکرار کنید.

(پ) همین عمل را برای باد جانبی انجام دهید.

(ت) آیا در عرضهای جغرافیائی دیگر پشت سر مناسبتری وجود

خواهد داشت، اگر وجود خواهد داشت، در کجا؟

۹- سه رأس مثلثی در نقاط $A(4, 1, 2)$ و $B(1, -1, 0)$ و $C(5, -3, -4)$

قرار دارند.

(الف) دو ضلع مثلث را به صورت بردار بنویسید و زاویه داخلی C را به دست آورید.

(ب) با استفاده از حاصلضرب داخلی نشان دهید که این مثلث قائم الزاویه است یا نه؟

۱۰- بردارهای $\vec{A} = 4\vec{a}_x - 3\vec{a}_y + \vec{a}_z$ و $\vec{B} = -3\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 8\vec{a}_z$ داده شده اند.

(الف) مؤلفه شمارواره ای (اسکالر) \vec{A} را در جهت \vec{B} به دست آورید.

(ب) مؤلفه \vec{B} را در جهت \vec{A} تعیین کنید.

(پ) مؤلفه برداری \vec{A} را در جهت \vec{B} تعیین کنید.

(ت) تصویر برداری \vec{A} روی \vec{B} را به دست آورید.

۱۱- مؤلفه شمارواره ای (اسکالر) و تصویر برداری $\vec{F} = 10y\vec{a}_x - 10x\vec{a}_y + 5\vec{a}_z$ را در جهت خطی که از نقطه $(2, 1, 3)$ به نقطه $(-1, 1, 2)$ کشیده می شود به دست آورید.

۱۲- نشان دهید که آیا نقاط $(3, -1, 6)$ و $(-1, 2, 4)$ و $(1, -2, -5)$ می توانند سه رأس یک مربع مستطیل باشند.

۱۳- سه رأس یک متوازی الاضلاع در نقاط $A(2, 2, -1)$ و $B(-3, 1, 0)$ و $C(1, 4, 2)$ قرار دارند مساحت آن را تعیین کنید.

۱۴- اگر $\vec{A} = 10\vec{a}_x - 10\vec{a}_y + 5\vec{a}_z$ و $\vec{B} = 4\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + 5\vec{a}_z$ دو ضلع مثلثی باشند مساحت این مثلث چقدر است؟

۱۵- اگر بردار واحد \vec{a}_1 بردار واحد \vec{a}_2 از مبدأ به نقطه $(2, 1, -2)$ باشد، (الف) بردار واحد \vec{a}_3 را که موازی با صفحه $x=0$ و عمود بر \vec{a}_1 است به دست آورید. (ب) بردار واحد عمود بر \vec{a}_1 و \vec{a}_3 را تعیین کنید.

۱۶- زاویه بین دو میدان $\vec{E} = 5x\vec{a}_x - 5y\vec{a}_y + 10\vec{a}_z$ و $\vec{B} = 0.01(y\vec{a}_x - x\vec{a}_y + 2\vec{a}_z)$

در نقطه $P(2, 1, 3)$ به دست آورید.

۱۷- بردارهای $\vec{A} = 2\vec{a}_x - 3\vec{a}_y + \vec{a}_z$ و $\vec{B} = 3\vec{a}_x - 3\vec{a}_y - \vec{a}_z$ و

$\vec{C} = 4\vec{a}_x - 3\vec{a}_y + \vec{a}_z$ داده شده اند.

(الف) $(\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}))$ را حساب کنید، (ب) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ را تعیین کنید،

(پ) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ را بدست آورید، (ت) $(\vec{A} \cdot \vec{A})(\vec{B} \cdot \vec{B})$

را معین کنید.

۱۸- با استفاده از مقادیر داده شده در مسئله ۱۷ مقادیر زیر را حساب کنید:

(الف) $(\vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}))$ ، $(\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A}$ ، (ب) $(\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A}$ ، (پ) $(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{A} \times \vec{B})$

(ت) $[(\vec{A} \times \vec{a}_x) \times \vec{a}_y] \times \vec{a}_z$

۱۹- میدان \vec{F} در مختصات استوانه ای به صورت

$$\vec{F} = r^2 \sin \varphi \vec{a}_r + r^2 \cos \varphi \vec{a}_\varphi$$

داده شده است. اندازه میدان را تعیین کنید و بردار واحدی که جهت آن را در $r = 2$ برای 270° و 180° و 90° و 0° مشخص می کند به دست آورید. چهار بردار واحد را در يك شكل نشان دهید.

۲۰- میدان الکتریکی $\vec{E} = (2/r) \vec{a}_r + 30z \vec{a}_z$ (ولت بر متر) در منطقه استوانه‌ای $0 < r \leq 1$ و $0 \leq z \leq 1$ داده شده است. (الف) جهت میدان در نقطه (۰٫۵ و 90° و 0°) کدام است؟ این جهت را توسط يك بردار واحد در مختصات قائم مشخص کنید. (ب) در کجا میدان در جهت \vec{a}_φ است؟ (پ) در کجا اندازه میدان 50 V/m است؟

۲۱- فاصله بین دو نقطه $P(3, 0^\circ, 4)$ و $Q(6, 120^\circ, 5)$ را در مختصات استوانه‌ای به دست آورید.

۲۲- فصل مشترك سطوح زیر در مختصات کروی را به کمک طرحی همراه با ابعاد مربوطه نشان دهید:

$$\text{(الف) } r = 4 \text{ و } \theta = 60^\circ \text{ ؛ (ب) } r = 4 \text{ و } \varphi = 45^\circ$$

$$\text{(پ) } \theta = 60^\circ \text{ و } \varphi = 45^\circ$$

۲۳- فاصله بین دو نقطه $P(4, \theta = 60^\circ, \varphi = 0^\circ)$ و $Q(6, 120^\circ, 120^\circ)$ را در مختصات کروی به دست آورید.

۲۴- میدانی به صورت

$$\vec{G} = 10[x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\sqrt{x^2 + y^2}\vec{a}_z] / \sqrt{x^2 + y^2}$$

در مختصات قائم داده شده است. جهت میدان را در نقطه $(3, 4, -2)$ با ارائه بردار واحد در: (الف) مختصات قائم و (ب) مختصات استوانه‌ای و (پ) مختصات کروی تعیین کنید.

۲۵- میدان $\vec{F} = r\vec{a}_r - 3\vec{a}_z$ در مختصات استوانه‌ای داده شده است. جهت میدان را در $(2, 60^\circ, 2)$ با ارائه يك بردار واحد (الف) مختصات قائم (ب) مختصات استوانه‌ای و (پ) مختصات کروی تعیین کنید.

۲۶- میدانی در مختصات کروی به صورت $\vec{A} = \frac{100}{r^3} \vec{a}_r$ تعریف شده است. اندازه

میدان را در نقطه $(-3, 4, 10)$ به دست آورید و زاویه‌ای را که با بردار $\vec{D} = 2\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + \vec{a}_z$ می سازد تعیین کنید.

۲۷- میدانی در مختصات استوانه‌ای به صورت $\vec{A} = \frac{100}{r^3} \vec{a}_r$ بیان شده است.

اندازه میدان را در نقطه $(-3, 4, 10)$ به دست آورید و زاویه‌ای را که با بردار

$\vec{D} = 2\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + \vec{a}_z$ می‌سازد تعیین کنید.

۲۸- زاویه بین میدانهای $\vec{G}_1 = \frac{10}{r} \vec{a}_r$ (استوانه‌ای) و $\vec{G}_2 = \frac{10}{r} \vec{a}_r$ (کروی)

را در نقطه (۱, ۲, ۳) (قائم) به دست آورید.

۲۹- در سه مرجع توصیف شده قبل از این مسائل چه دستگاههای منبری و چه بردارهای واحدی، برای دستگاههای مختصات قائم و استوانه‌ای و کروی به کار رفته‌اند؟

۳۰- در مقاله

L. S. Tsai, «A Numerical Solution for the Near and Far Fields of an Antenna Ring of Magnetic Current,»
IEEE Transactions, Antennas and Propagation, AP-20
pp. 569-576 Sept. 1972

شش کمیتی را که در معادله (۷) آن ظاهر می‌شود تعیین کنید و نشان دهید که معادله صحیح است.

۲

قانون کولن و شدت میدان الکتریکی

حال که زبان جدیدی را در فصل اول این کتاب عرضه داشتیم، چند اصل بنیادی الکتریسته را بنا می‌گذاریم و می‌کوشیم که آنها را به کمک آن زبان بیان کنیم. اگر چند سالی می‌بود که با آنالیز برداری آشنا بودیم، و هم اکنون تصورات درستی در مورد الکتریسته و مغناطیس می‌داشتیم، می‌توانستیم دلیرانه جستی بکنیم و معادلاتی چند، از جمله معادلات ماکسول و چند معادلهٔ کمکی دیگر را ارائه دهیم، و به کمک دانشی که اکنون از آنالیز برداری داریم به توصیف فیزیکی آنها پردازیم. شاید روش آرمانی همین می‌بود که کار را از کلی‌ترین نتایج شروع کنیم و نشان دهیم که قوانین اهم^۱ و گاوس^۲ و کولن^۳ و فارادی^۴ و آمپر^۵ و بیو-سوار^۶ و کیرشهف^۷ و چند قانون کمتر آشنای دیگر، همه حالات خاصی از این معادلاتند. فکر در دست داشتن کلی‌ترین نتایج و احساس اینکه می‌توانیم نتایج لازم را برای هر حالت خاصی به دلخواه از آنها به دست آوریم از نظر فلسفی ارضا کننده است. ولی چنین جستی به بلند شدن فریادهای دیوانه‌وار «کمک» و غرق شدن دانشجویان بسیاری خواهد انجامید.

به جای این کار، در اینجا در فواصل مناسب، قوانین تجربی بالا را ارائه خواهیم کرد و هر یک را با علائم برداری بیان خواهیم داشت، و با استفاده از آنها چند مسألهٔ ساده را حل خواهیم کرد. بدین ترتیب، آشنائی ما هم با آنالیز برداری به

-
1. Ohm
 2. Gauss
 3. Coulomb
 4. Faraday
 5. Ampère
 6. Biot - Savart
 7. Kirchhoff

تدریج افزایش خواهد یافت و هم با میدانهای الکتریکی و مغناطیسی؛ و هنگامی که سرانجام به معادلات کلی مورد نظر خود رسیدیم، دیگر توضیح اضافی چندان زیادی لازم نخواهیم داشت. بدین ترتیب، سراسر میدان نظریه الکترومغناطیس به روی ما گشوده می‌شود و می‌توانیم با استفاده از معادلات ماکسول انتشار امواج و تشعشع آنها، اثر پوستی و لوله‌های هدایت موج و خطوط انتقال و لامپهای امواج متحرک را توصیف کنیم و حتی بصیرت تازه‌ای در مورد میدانهای معمولی قدرت به دست آوریم. در این فصل توجه خود را به میدانهای ایستای (استاتیکی) الکتریکی در خلاء یا فضای آزاد محدود خواهیم کرد. این گونه میدانها مثلاً در دستگاههای متمرکز کننده یا منحرف کننده لوله‌های اشعه کاتدی الکترو استاتیکی دیده می‌شوند. در کلیه موارد عملی، نتایج حاصل برای هوا و گازهای دیگر نیز صادق خواهد بود. محیط‌هایی از مواد دیگر در فصل پنجم و میدانهای متغیر نسبت به زمان در فصل دهم بررسی خواهد شد.

کار خود را با بررسی يك آزمایش کمی، که در قرن هفدهم انجام شده است آغاز می‌کنیم.

۱۰۳ قانون تجربی کولن

مدارکی که حداقل از ۶۰۰ سال ق. م باقی مانده است به اطلاع بشر از الکتریسته ساکن دلالت می‌کند. یونانیها واژه «الکتریسته» را از معادل یونانی کهربا گرفته‌اند. آنها بسیاری از ساعات فراغت خود را صرف آن می‌کردند که قطعه‌ای کهربا را بر آستین خود بمالند و سپس مشاهده کنند، که چگونه کهربا ذرات پارچه و کرک را جذب می‌کند. با وجود این علاقه اصلی آنها به‌جای علوم تجربی متوجه فلسفه و منطق بود و تا چند قرن این پدیده جذب ذرات را چیزی جز جادو یا «نیروی زندگی» نمی‌پنداشتند.

اولین کسی که آزمایشهای واقعی روی این اثر به عمل آورد، دکتر گیلبرت^۱ پزشک دربار ملکه انگلستان بود که در سال ۱۶۰۰ بیان داشت که موادی مانند شیشه و گوگرد و کهربا و دیگر موادی که نام می‌برد «نه تنها ذرات گاه و پوست حبوبات را به‌سوی خود می‌کشند بلکه براده فلزات و چوب و برگ درخت و سنگ و خاک و حتی آب و روغن را نیز جذب می‌کنند.»

کمی بعد از آن، يك سرهنگ صنف مهندسی ارتش فرانسه، به نام سرهنگ شارل کولن، که افسری دقیق و متفکر بود و ذهنی منظم داشت، يك رشته آزمایشهای سنجیده انجام داد، تا نیروی مؤثر بین دو شیء را که هر يك دارای بار الکتریکی

1. Gilbert

ساکن بودند با استفاده از ترازوی پیچشی ظریفی، که خود اختراع کرده بود به طور چندی (کمی) معین کند. امروزه تمام دانش آموزان دبیرستان با نتایج انتشار یافته آزمایشهای او آشنایند. این نتایج به قانون ثقل نیوتن (که در حدود یکصد سال قبل از آن کشف شده بود) شباهت بسیار دارد. کولن بیان داشت که نیروی مؤثر بین دو شیء بسیار کوچک واقع در خلاء یا فضای آزاد، که نسبت به هم به فاصله‌ای (در مقایسه با اندازه‌شان) زیاد قرار دارند با بار هر یک نسبت مستقیم و با مربع فاصله بین آنها نسبت معکوس دارد.

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \quad (1)$$

Q_1 و Q_2 مقادیر بارهای مثبت یا منفی و R فاصله بین آنها و k ضریب تناسب است. اگر از دستگاه واحدهای بین‌المللی^۲ استفاده شود، Q به کولن (C) و R به متر و نیرو به نیوتن (N) اندازه گرفته می‌شود. برای این کار لازم است که ضریب ثابت تناسب فرمول (۱) مساوی باشد با

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

که در آن عامل 4π که اینجا در مخرج فرمول قانون کولن ظاهر می‌شود، در معادلات مفیدتری (از جمله معادلات ماکسول) که به کمک قانون کولن به دست می‌آیند پیش نخواهد آمد. ضریب ثابت جدید ϵ_0 ضریب دی الکتریک فضای آزاد نامیده می‌شود و مقدار آن برحسب فاراد بر متر (F/m) عبارت است از:

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \approx \frac{1}{36\pi} 10^{-9} F/m \quad (2)$$

مقدار ϵ_0 بی واحد نیست، چه فرمول کولن نشان می‌دهد که باید واحد آن $C^2/N \cdot m^2$ باشد. فاراد را بعدها تعریف خواهیم کرد و نشان خواهیم داد، که واحد آن $C^2/N \cdot m$ است. و با استفاده از واحد F/m در فرمول (۲) به استقبال این تعریف رفتیم.

۱. منظور فضای آزاد از میدان الکتریکی ۲. دستگاه واحدهای بین‌المللی (سیستم mks) در ضمیمه ب شرح داده شده است. علائم اختصاری واحدها در جدول ب. ۱ درج گردیده است. در جدول ب. ۲ نحوه تبدیل به دیگر سیستمهای واحدها داده شده است و جدول ب. ۳ پیشوندهای مشخص کننده قوای ده سیستم بین‌المللی واحدها را نشان می‌دهد.

بدین ترتیب قانون کولن به صورت زیر است:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

(۳)

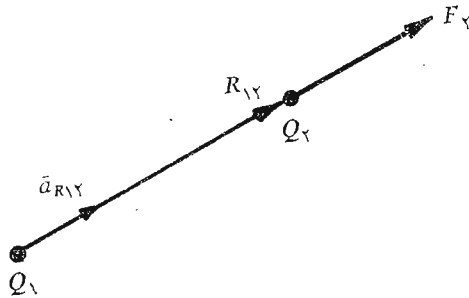
باید توجه کرد که همه واحدهای دستگاه آحاد بین‌المللی به پایه آحاد انگلیسی که مورد استعمال روزانه ما است متداول نیستند. اما اکنون در مهندسی برق و فیزیک استاندارد شده‌اند. نیوتن واحد نیرو است و مساوی ۰.۲۲۴۸ lb_f است و آن نیروئی است که می‌بایست بر جرم یک کیلوگرم اعمال شود تا به آن شتابی برابر یک متر در مجذور ثانیه (m/s^2) بدهد. کولن برای بار الکتریکی واحد بی‌نهایت بزرگی است، چه کمترین مقدار بار شناخته شده بار یک الکترون (منفی) یا یک پروتون (مثبت) است که در دستگاه mks برابر $(۱.۶۰۲۱۹ \times ۱۰^{-۱۹} \text{ C})$ است و بدین ترتیب یک کولن بار منفی نماینده حدود ۶×۱۰^{۱۸} الکترون است. قانون کولن نشان می‌دهد که نیروی بین دو بار الکتریکی، که هر یک برابر یک کولن باشند و به فاصله یک متر از یکدیگر قرار گیرند مساوی $۹ \times ۱۰^۹ \text{ N}$ یا تقریباً یک میلیون تن است، الکترون در حالت سکون دارای جرمی برابر با ۹.۱۰۹۵۶×۱۰^{-۳۱} کیلوگرم و شعاعی در حدود ۳.۸×۱۰^{-۱۵} متر است. مفهوم این موضوع این نیست که شکل الکترون کروی است، بلکه این فقط اندازه ناحیه‌ای را مشخص می‌کند که احتمال وجود یک الکترون کند حرکت در آن از همه بیشتر است. تمام ذرات باردار شناخته شده دیگر، از جمله پروتون نسبت به الکترون، دارای اجرامی بیشتر و شعاعهائی بزرگترند و از نظر احتمالات حجم بزرگتری را اشغال می‌کنند.

برای نوشتن شکل برداری فرمول (۳) به‌واقعیت دیگری، (که آن نیز توسط سرهنگ کولن ارائه شده) نیازمندیم و آن عبارت است از اینکه نیرو در امتداد خط واصل دو بار عمل می‌کند. و این نیرو دافعه است اگر دو بار همنام، و جاذبه است اگر دو بار غیر همنام باشند. فرض کنیم که بردار $\vec{R}_{۱۲}$ قطعه خط جهت‌دار واصل Q_1 به Q_2 همانطور که شکل (۱.۲) نشان می‌دهد، نیروی مؤثر بر Q_2 باشد. بردار \vec{F}_2 برای حالتی که Q_1 و Q_2 هم علامتند نشان داده شده است. شکل برداری قانون کولن عبارت از،

$$\vec{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{۱۲}^2} \vec{a}_{R_{۱۲}} \quad (۴)$$

که در آن $\vec{a}_{R_{۱۲}} = a$ بردار واحد در امتداد $\vec{R}_{۱۲}$ است، یا

$$\vec{a}_{R_{۱۲}} = \frac{\vec{R}_{۱۲}}{|\vec{R}_{۱۲}|} = \frac{\vec{R}_{۱۲}}{R_{۱۲}} \quad (۵)$$



شکل ۱۰۲ اگر Q_1 و Q_2 هم علامت باشند بردار نیروی \vec{F}_2 مؤثر بر Q_2 در همان جهت بردار R_{12} است.

به عنوان يك مثال برای استعمال شکل برداری قانون کولن بساری برابر $3 \times 10^{-4} \text{C}$ را در نقطه $P(1, 2, 3)$ و بساری معادل 10^{-4}C را در نقطه $Q(2, 0, 5)$ در خلاء در نظر می گیریم. بدین ترتیب

$$Q_1 = 3 \times 10^{-4} \quad \text{و} \quad Q_2 = -10^{-4}$$

$$\vec{R}_{12} = (2-1)\vec{a}_x + (0-2)\vec{a}_y + (5-3)\vec{a}_z = \vec{a}_x - 2\vec{a}_y + 2\vec{a}_z$$

$$\vec{a}_{R_{12}} = \frac{\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + 2\vec{a}_z}{3}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{3 \times 10^{-4} (-10^{-4})}{4\pi(1/36\pi)10^{-9} \times 9} \left(\frac{\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + 2\vec{a}_z}{3} \right)$$

$$= -30 \left(\frac{\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + 2\vec{a}_z}{3} \right) \text{ N}$$

اندازه نیرو ۳۰ نیوتن (یا تقریباً ۷ lb_f) است و جهت آن توسط برداری واحد که برای مشخص کردن اندازه نیرو در پراونتز نوشته شده است، تعیین می شود. نیروی مؤثر بر Q_2 را نیز می توان به صورت نیروئی مرکب از سه مؤلفه در نظر گرفت،

$$\vec{F}_2 = -10\vec{a}_x + 20\vec{a}_y - 20\vec{a}_z$$

نیروئی که توسط قانون کولن بیان شده است، نیروئی متقابل است، زیرا که بر هر یک از دوبار نیروئی با اندازه مساوی ولی در جهت عکس یکدیگر وارد می شود.

بنابراین می توانیم بنویسیم

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \vec{a}_{R_{12}} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \vec{a}_{R_{12}}$$

قانون کولن را بطنه‌ای خطی است، زیرا اگر Q_1 در عامل n ضرب شود، نیروی مؤثر بر Q_2 نیز n برابر خواهد شد. همچنین نیروی وارد بر يك بار در مجاورت چند بار ديگر مساوی مجموع نیروهای مؤثر بر آن بار است که توسط هر يك از بارهای ديگر به تنهایی اعمال می‌شود.

تمرین ۱.۲

باری برابر $10^{-3}C$ در خلاء در نقطه $P(30, -10, 15)$ قرار دارد. نیروی اعمال شده بر این بار توسط هر يك از بارهای زیر را به دست آورید:

$$\text{(الف)} \quad 6 \times 10^{-4}C \text{ در نقطه } (20, 10, 25)$$

$$\text{(ب)} \quad 6 \times 10^{-4}C \text{ در مبدأ}$$

جوابها: $3067(\vec{a}_x - 2\vec{a}_y - \vec{a}_z)$ ، $10889\vec{a}_z$ ، $10259\vec{a}_y - 3078\vec{a}_x$ نیوتن

۲.۲ شدت میدان الکتریکی

حال اگر باری مانند Q_1 را ثابت در نظر بگیریم، و بار دیگری را به آهستگی به اطراف حرکت دهیم، مشاهده خواهیم کرد که در هر نقطه از فضا نیروئی بر آن اعمال می‌شود. به عبارت دیگر این بار دوم وجود میدان نیروئی را مدلل می‌دارد. چنانچه این بار دوم را باری آزمایشی Q_2 بنامیم، نیروی مؤثر بر آن توسط قانون کولن تعیین می‌گردد،

$$\vec{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \vec{a}_{R_{12}}$$

یا اگر این نیرو را به صورت نیروی وارد بر واحد بار بنویسیم خواهیم داشت

$$\frac{\vec{F}_2}{Q_2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \vec{a}_{R_{12}} \quad (1)$$

کمیت طرف راست معادله (۱) فقط تابع بار Q_1 و پاره خط جهت‌دار واصل Q_1 به بار آزمایشی است. بنا بر این رابطه فوق يك میدان برداری را توصیف می‌کند که شدت میدان الکتریکی نامیده می‌شود.

شدت میدان الکتریکی برحسب تعریف نیروئی برداری است که بر واحد بار آزمایشی مثبت وارد می‌شود. البته نمی‌توانیم این نیرو را به‌طور تجربی از طریق تعیین نیروی مؤثر بر بار یک کولن اندازه بگیریم، زیرا این کار چه‌بسا موجب اعمال چنان نیروئی بر بار Q_1 بشود، که احتمالاً باعث تغییر محل آن گردد.

شدت میدان الکتریکی می‌بایست برحسب نیوتن بر کولن، یعنی نیرو بر واحد بار اندازه‌گیری شود. اگر باز به پیش‌باز بعد جدیدی مانند ولت که در فصل ۴ تشریح خواهد شد برویم و آن را معادل یک ژول بر کولن (J/C) یا نیوتن - متر بر کولن ($N \cdot m/C$) بدانیم، می‌توانیم بی‌درنگ شدت میدان الکتریکی را برحسب آحاد ولت بر متر (V/m) اندازه بگیریم. اگر برای شدت میدان الکتریکی از حرف \bar{E} استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}_t}{Q_t} \quad (2)$$

$$\bar{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \bar{a}_{R_1} \quad (3)$$

معادله (۲) تعریف‌کننده شدت میدان الکتریکی و رابطه (۳) شدت میدان الکتریکی ناشی از یک بار نقطه‌ای Q_1 در خلاء است. در قسمتهای آینده روابط شدت میدان الکتریکی ناشی از آرایشهای پیچیده‌تر بارها را به دست می‌آوریم و به تعبیر آنها می‌پردازیم. اما اکنون می‌خواهیم ببینیم که چه اطلاعاتی می‌توانیم از معادله (۳) یعنی میدان ناشی از یک بار نقطه‌ای، به دست آوریم.

ابتدا اندیسهای رابطه (۳) را حذف می‌کنیم و این‌حق را محفوظ می‌داریم که آنها را هر گاه امکان اشتباه وجود داشته باشد مجدداً بکار ببریم بدین ترتیب رابطه ساده‌زیر به دست می‌آید.

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \bar{a}_R \quad (4)$$

یادآوری می‌کنیم که R اندازه بردار \bar{R} است و پاره خط جهت‌داری است که از نقطه محل بار Q به نقطه‌ای که \bar{E} شدت میدان آن مورد نظر است کشیده شده باشد و \bar{a}_R بردار واحد در امتداد \bar{R} است.

۱. می‌بایست به تأکید از اشتباه کردن r و \bar{a}_r با R و \bar{a}_R اجتناب کنیم. دو علامت اول مربوط به دستگاه مختصات کروی یا استوانه‌ای‌اند. در حالی که R و \bar{a}_R رابطه‌ای با هیچ دستگاه مختصاتی ندارند. و در انتخاب آنها هنوز آزادیم.

فرض کنیم که بار Q_1 در مبدأ یک دستگاه مختصات کروی قرار داشته باشد، بدین ترتیب بردار واحد \bar{a}_R به صورت بردار واحد شعاعی \bar{a}_r در خواهد آمد و R همان r خواهد بود. بنا براین:

$$\bar{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \bar{a}_r \quad (5)$$

یا

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

میدان فقط دارای یک مؤلفه شعاعی و آشکارا با عکس مجذور فاصله از مبدأ متناسب است.

در دستگاه مختصات قائم می‌توانیم این طور بنویسیم:

$$\bar{R} = \bar{r} = x\bar{a}_x + y\bar{a}_y + z\bar{a}_z$$

$$\bar{a}_R = \bar{a}_r = (x\bar{a}_x + y\bar{a}_y + z\bar{a}_z) / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{و}$$

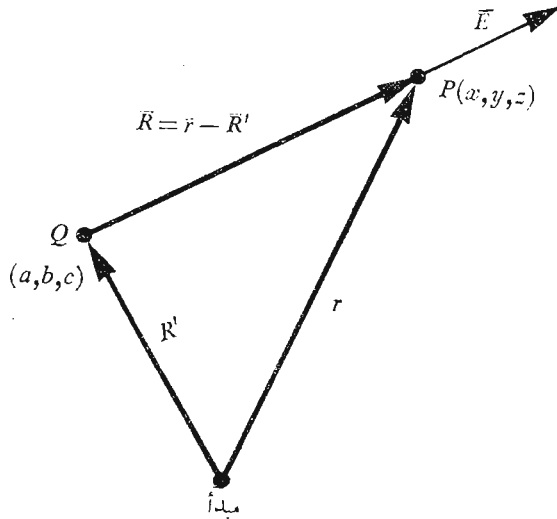
و سپس

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \bar{a}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \bar{a}_y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \bar{a}_z \right) \quad (6)$$

به طوری که مشاهده می‌شود، از این رابطه نمی‌توان دیگر به سهولت به ماهیت ساده میدان پی برد. این پیچیدگی به علت آن است که مسأله را که دارای تقارن کروی است در دستگاه مختصاتی که (موقتاً) با آن آشنائی بیشتری داریم حل می‌کنیم.

اگر نخواهیم از آنالیز برداری استفاده کنیم، اطلاعات نهفته در معادله (۶) را می‌بایست در سه معادله، هر یک برای یکی از مؤلفه‌ها، بیان کنیم و برای به دست آوردن این سه معادله می‌بایست اندازه شدت میدان الکتریکی را با تعیین تصویر آن روی هر یک از محورهای مختصات به سه مؤلفه تقسیم کنیم. وقتی از علائم برداری استفاده شود این عمل با نوشتن بردار واحد خود به خود انجام می‌گیرد.

اگر بار را در نقطه‌ای غیر از مبدأ مختصات در نظر بگیریم، در این صورت میدان دیگر دارای تقارن کروی نیست. (تقارن استوانه‌ای نیز ندارد مگر اینکه بار روی محور قرار داشته باشد) و می‌توانیم از دستگاه مختصات قائم نیز استفاده کنیم. همانطور که در شکل (۲.۲) نشان داده شده است برای باری مانند Q که در



شکل ۲.۲ بردار \vec{R}' محل بار نقطه‌ای Q و بردار \vec{r} نقطه دلخواه $P(x, y, z)$ را در فضا تعیین می‌کند و بدین ترتیب بردار \vec{R} از بار Q تا نقطه $P(x, y, z)$ مساوی است با $\vec{R} = \vec{r} - \vec{R}'$

$\vec{R}' = a\vec{a}_x + b\vec{a}_y + c\vec{a}_z$ قرار دارد، شدت میدان را در نقطه دلخواه $P(x, y, z)$ با قرار دادن $\vec{r} - \vec{R}'$ به جای \vec{r} بدین صورت به دست می‌آوریم:

$$\vec{E} = \frac{Q(\vec{r} - \vec{R}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{R}'|^3} = \frac{Q[(x-a)\vec{a}_x + (y-b)\vec{a}_y + (z-c)\vec{a}_z]}{4\pi\epsilon_0 [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}} \quad (7)$$

قبلاً، یک میدان برداری را به صورت تابعی برداری از یک بردار مکانی تعریف کردیم و این موضوع را می‌توان با گذاشتن علامت تابعی $\vec{E}(\vec{r})$ به جای \vec{E} مورد تأکید قرار داد.

معادله (۶) جز حالت خاصی از معادله (۷) که در آن $a=b=c=0$

نیست.

تمرین (۲.۲)

بار $Q = 7 \times 10^{-9} \text{ C}$ در نقطه (عره و ۳- و ۲-) در هوا قرار دارد. (الف) اندازه شدت میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به فاصله ۱ متر از بار به دست آورید. (ب) \vec{E} را در نقطه (۲- و ۱- و ۴-) محاسبه کنید.

جوابها: 63 و 1224 و 12 و 408 V/m

۳.۲ میدان n بار نقطه‌ای

نظر به اینکه نیروهای کولن خطی‌اند، شدت میدان الکتریکی حاصل از دو بار نقطه‌ای Q_1 و Q_2 مجموع نیروهائی است که توسط هر یک از دو بار Q_1 و Q_2 به تنهایی روی بار Q_3 در نقطه مورد نظر اعمال می‌شود، یا

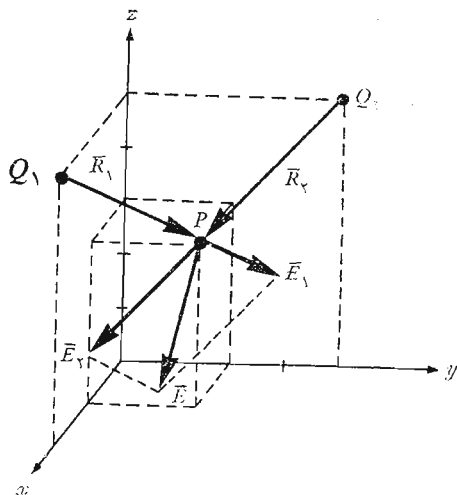
$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \vec{a}_{R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \vec{a}_{R_2}$$

بدیهی است که فواصل R_1 و R_2 و نیز بردارهای واحد \vec{a}_{R_1} و \vec{a}_{R_2} متفاوتند. به محض اینکه بار دوم اضافه شود، تقارن کروی از میان می‌رود و ساده‌ترین کار آن است که مسأله را در دستگاه مختصات قائم حل کنیم. میدان حاصل از هر بار به صورت مؤلفه‌های مختصات قائم به دست می‌آید و با جمع کردن این مؤلفه‌ها میدان کل حاصل می‌شود.

اگر تعداد بیشتری بار در نقاط دیگر اضافه کنیم، شدت میدان مثلاً برای n بار عبارت است از:

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \vec{a}_{R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \vec{a}_{R_2} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 R_n^2} \vec{a}_{R_n} \quad (1)$$

این رابطه را می‌توان با استفاده از علامت جمع Σ و عدد صحیح m ، که مقادیر بین ۱ و n را دارا خواهد بود، به صورت خلاصه‌تری نوشت،



شکل ۳.۲ ترکیب خطی دو میدان را نشان می‌دهد. جمع برداری شدت میدان کل ناشی از دو بار Q_1 و Q_2 در نقطه P در اثر خطی بودن قانون کولن امکان‌پذیر است.

$$\vec{E} = \sum_{m=1}^n \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0 R_m^2} \vec{a}_{Rm} \quad (۲)$$

به طوری که رابطه (۱) را می توان از بسط رابطه (۲) بدست آورد و کسانی که با علائم جمع بستن و سری ها آشنائی ندارند می توانند با انجام دادن عمل جمع نتیجه را کنترل کنند.

تمرین ۳.۳

بارهای نقطه ای $4 \times 10^{-9} \text{C}$ و $-2 \times 10^{-9} \text{C}$ به ترتیب در نقاط $x=2$ و $x=6$ روی محور x در خلاء قرار دارند. اندازه و بردار واحد \vec{E} را در نقطه $(2, 1, 4)$ بیان کنید.

جواب: $4.27(0.937\vec{a}_x - 0.1562\vec{a}_y + 0.312\vec{a}_z) \text{ V/m}$

تمرین ۴.۲

جمع های زیر را محاسبه کنید

$$\sum_{m=0}^3 \frac{(-1)^m}{m^2 + 1} \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{k=1}^4 3(k-1)\vec{a}_x + k^2\vec{a}_y + \frac{6}{k}\vec{a}_z \quad (\text{ب})$$

جوابها: $18\vec{a}_x + 30\vec{a}_y + 12.5\vec{a}_z$ و 0.6

۴.۲ میدان حاصل از باری حجمی که به طور پیوسته توزیع شده باشد.

حال اگر منطقه ای از فضا را که با تعداد بسیار زیادی بار به فواصل بسیار کم از یکدیگر پر شده است (مانند فضای بین شبکه کنترل و کاتد مجموعه تفنگ الکترونی یک لامپ اشعه کاتدی که با بار فضائی کار می کند) در نظر بگیریم، ملاحظه خواهیم کرد که می توان به جای توزیع ذرات بسیار ریز، توزیع پیوسته بکنواخت را که به وسیله چگالی بار حجمی بیان می شود در نظر گرفت، درست همانطور که آب را، اگر چه از ذراتی به ابعاد اتمی و ملکولی تشکیل شده است دارای چگالی ۱ گرم بر سانتیمتر مکعب می دانیم. فقط وقتی می توانیم چنین تعریفی را به کار ببریم که از بی نظمیهای کوچک (یا موجهای) موجود در میدان هنگام حرکت از یک الکترون به الکترون دیگر صرف نظر کنیم، یا توجهی نداشته باشیم به این که جرم آب با اضافه شدن هر ملکول جدید به مقدار بسیار کم اما معین افزایش می یابد.

این فرض پیوسته بودن توزیع بار برای نتایج نهایی مورد نظر مهندسان برق که تقریباً همیشه به صورت جریانی در یک آنتن گیرنده یا ولتاژی در یک مدار الکترونیکی یا باری در یک خازن یا به طور کلی نتیجه‌ای با مقیاس بزرگ و به صورت کلان بینی است هیچ گونه محدودیتی به شمار نمی‌رود. بسیار به ندرت پیش می‌آید که به توصیف جریان الکترون به الکترون احتیاج داشته باشیم.

چگالی بار حجمی را که البته بر حسب کولن بر متر مکعب (C/m^3) اندازه گرفته می‌شود به حرف یونانی ρ نمایش می‌دهیم.

مقدار کوچک بار ΔQ در حجم کوچک Δv مساوی است با

$$\Delta Q = \rho \Delta v \quad (1)$$

ρ را می‌توان به طور ریاضی به صورت حد فرمول (۱) به نحو زیر تعریف کرد:

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} \quad (2)$$

و مقدار کلی بار در یک حجم معین با انتگرال گیری روی تمام آن حجم به دست می‌آید:

$$Q = \int_{\text{حجم}} dQ = \int_{\text{حجم}} \rho dv \quad (3)$$

در رابطه بالا بر حسب عادت از یک علامت انتگرال استفاده شده است ولی ديفرانسیل dv مشخص انتگرال حجمی و بدین ترتیب یک انتگرال سه گانه است. خوشبختانه می‌توانیم در اغلب موارد به انتگرال بالا قناعت کنیم، چه محاسبه انتگرالهای چند گانه مگر در مقارنترین مسائل بسیار دشوار است.

به عنوان یک مثال محاسبه انتگرال حجمی، بار کل موجود در داخل یک دسته اشعه الکترونی به طول ۲ سانتیمتر را، که در شکل (۴.۲) مشاهده می‌شود، به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم که چگالی بار حجمی در لحظه‌ای که نشان داده شده است مساوی باشد با

$$\rho = -5 \times 10^{-6} e^{-10^5 r z} \quad C/m^3$$

دیفرانسیل حجمی در مختصات استوانه‌ای در بخش ۸.۱ داده شده است و بدین ترتیب خواهیم داشت،

$$Q = \int_{0.02}^{0.04} \int_0^{2\pi} \int_0^{0.01} -5 \times 10^{-6} e^{-10^5 r z} r dr d\phi dz$$

ابتدا نسبت به ϕ انتگرال می‌گیریم، چون ساده تر است،

۵۱ قانون کولن و شدت میدان الکتریکی

$$Q = \int_{0.02}^{0.04} \int_0^{0.01} -10^{-5} \pi e^{-10^5 r z} r dr dz$$

و سپس نسبت به z انتگرال می‌گیریم، چون این کار انتگرال بعدی نسبت به r را ساده می‌کند،

$$Q = \int_0^{0.01} \left(\frac{-10^{-5} \pi}{-10^5 r} e^{-10^5 r z} r dr \right)_{z=0.02}^{z=0.04}$$

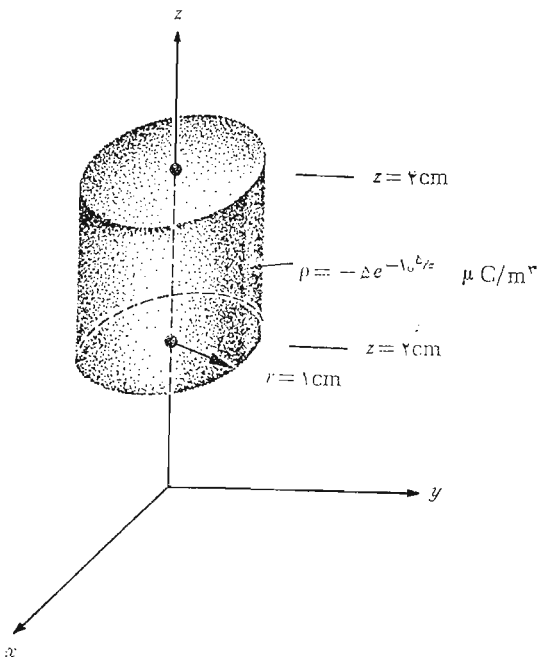
$$= \int_0^{0.01} -10^{-10} \pi (e^{-2000r} - e^{-4000r}) dr$$

و سرانجام خواهیم داشت

$$Q = -10^{-10} \pi \left(\frac{e^{-2000r}}{-2000} - \frac{e^{-4000r}}{-4000} \right)_{0.01}$$

و در نتیجه

$$Q = -10^{-10} \pi \left(\frac{1}{2000} - \frac{1}{4000} \right) = -\frac{\pi}{40} \text{ pC}$$



شکل ۴.۲ بارکل موجود در داخل یک استوانه مدور است که از طریق محاسبه $Q = \int_{\text{حجم}} \rho dv$ تعیین می‌شود.

که در آن pC مشخص پیکوکولن^۱ در سلسله واحدهای بین المللی است. اگر ضمن تخمینی بسیار تقریبی فرض کنیم که این الکترونها با سرعت ثابتی برابر ۱۰ درصد سرعت نور حرکت می کنند این گروه ۲ سانتیمتری الکترون طول دو سانتیمتر را در $\frac{2}{3}ns * 10^{-9}$ (ثانیه) طی می کند و جریان تقریباً مساوی خارج قسمت زیر می شود،

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{-(\pi/40)10^{-12}}{(2/3)10^{-9}}$$

که تقریباً مساوی $118 \mu A$ (میکروآمپر) است. نمو شدت میدان الکتریکی حاصل از نمو بار الکتریکی ΔQ برابر خواهد بود با:

$$\Delta \bar{E} = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \bar{a}_R = \frac{\rho \Delta v}{4\pi\epsilon_0 R^2} \bar{a}_R$$

اگر آثار حاصل از تمام بارهای حجمی را در منطقه ای معین با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$\bar{E} = \sum_{m=1}^n \frac{\rho \Delta v}{4\pi\epsilon_0 R^2} \bar{a}_R$$

سپس اگر n بینهایت بزرگ شود و عنصر حجم Δv به سمت صفر میل کند در این صورت مجموع فوق به صورت انتگرال در خواهد آمد

$$\bar{E} = \int_{\text{حجم}} \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} \bar{a}_R \quad (4)$$

و این باز انتگرال سه گانه است و ما کوشش خواهیم کرد که در عمل از محاسبه آن پرهیز کنیم.

معنی کمتهای مختلف زیر علامت انتگرال معادله (۴) با تعبیر آنها در معادله (۴) بخش (۲.۲) تفاوتی نکرده است. بردار واحد \bar{a}_R در جهت \bar{R} است که از محل عنصر بار ρdv به نقطه ای که شدت میدان الکتریکی آن مورد نظر است کشیده می شود. به طور کلی باید انتظار داشته باشیم که \bar{a}_R و ρ و R توابعی از متغیرهای انتگرال مانند w و y و z اند.

تمرین (۵.۲)

بار کل را در حجمهای معین شده زیر به دست آورید:

۱. پیشوندها و معانی و علائم اختصاری آنها در جدول ب. ۳ در ضمیمه ب گردآوری شده است. * nanosecond

(الف) $1 \leq z \leq 2$ و $0 \leq y \leq 2$ و $1 \leq x \leq 3$ ، $\rho = 10xy/z^2$

(ب) $1 \leq z \leq 4$ و $0 \leq \varphi \leq 30^\circ$ و $0 \leq r \leq 2$ ، $\rho = 30rz \cos \varphi$

(پ) $\rho = \frac{4}{r^2} e^{-5r} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$ در فضای لاینهای

جوابها: ۳۰۰ و ۳۳۵ و ۴۰

۵.۴ میدان يك بار خطی

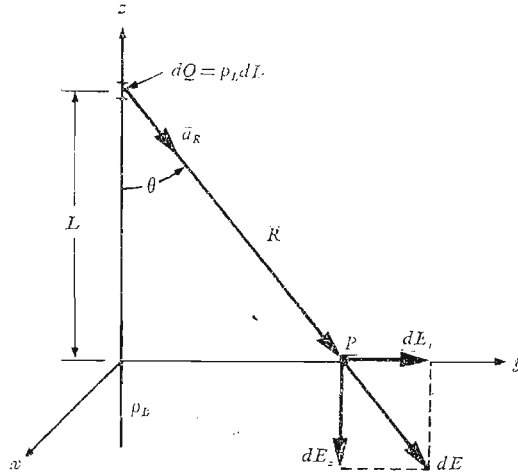
تا اینجا دو نوع توزیع بار را مورد نظر قرار داده ایم یکی بار نقطه‌ای و دیگری بار توزیع شده داخل يك حجم با چگالی $\rho \text{ C/in}^3$. اکنون اگر توزیعی رشته‌مانند از چگالی بار حجمی بصورت شعاع بسیار ظریف متمرکزی از الکترون را چنانکه در يك لامپ اشعه کاتدی یا يك هادی باردار بشعاع بسیار کوچک پیش می‌آید در نظر بگیریم، متوجه می‌شویم که بهتر است این بار را باری خطی به چگالی $\rho_L \text{ C/m}$ به حساب آوریم. در مورد دسته اشعه الکترونی بارها متحرکند و به راحتی با يك میدان الکتریسیته ساکن مواجه نیستیم. با وجود این، اگر سرعت حرکت الکترونها ثابت و یکنواخت باشد (مانند يك دسته اشعه جریان مستقیم) و اگر موقتاً میدان مغناطیسی را که ایجاد می‌شود نادیده بگیریم، می‌توانیم دسته اشعه الکترونی را به صورت مجموعه‌ای از الکترونها ساکن در نظر مجسم کنیم زیرا تصاویر لحظه‌ای که در هر آن گرفته شود توزیع بار یکسانی را خواهد داد.

حال، بار خطی مستقیمی را در امتداد محور z در دستگاه مختصاتی استوانه‌ای که از $-\infty$ تا $+\infty$ ادامه دارد، همانطور که در شکل (۵.۲) نشان داده شده است فرض می‌کنیم. می‌خواهیم شدت میدان الکتریکی E را در هر يك از نقاط در اثر بار خطی یکسان با چگالی ρ_L بدست آوریم.

در حل اینگونه مسائل باید همیشه ابتدا تقارن را برای تعیین دو موضوع خاص مورد توجه قرار داد: (۱) شدت میدان با چه مختصاتی تغییر نمی‌کند. (۲) کدام يك از مؤلفه‌های میدان وجود ندارد. جواب این سؤاها به ما نشان خواهد داد که چه مؤلفه‌هایی از میدان وجود دارند و با چه مختصاتی تغییر می‌کنند.

با توجه به شکل (۵.۲) می‌بینیم که اگر به دور بار خطی حرکت کنیم و φ تغییر کند در حالی که r و z ثابت بمانند بار خطی تحت همه زوایا یکسان به نظر می‌رسد. به عبارت دیگر، تقارن سمتی موجود است و هیچ مؤلفه میدان با φ تغییر نمی‌کند.

اکنون اگر r و φ را ثابت نگاه داریم و با تغییر z در امتداد بار خطی به



شکل ۵.۲ اثر نمو $d\vec{E} = dE_r \vec{a}_r + dE_z \vec{a}_z$ در شدت میدان الکتریکی ناشی از عنصر بار $dQ = \rho_L dL$ واقع در فاصله L از مبدأ چگالی بسار خطی، یکساخت و در امتداد تمام محور z ادامه دارد.

طرف بالا و پائین حرکت کنیم، بار خطی در هر دو جهت تا بینهایت ادامه دارد و تغییری در مسأله پیدا نمی‌شود. این تقارن محوری است و برای میدانهای وجود دارد که تابع z نیستند.

اگر φ و z را ثابت نگاه داریم و r را تغییر دهیم، مسأله عوض می‌شود و از روی قانون کولن می‌بایست انتظار داشته باشیم که میدان با افزایش r ضعیف‌تر گردد. و پس از انجام دادن عملیات ساده سازی از طریق حذف، به این نتیجه می‌رسیم که این میدان فقط با r تغییر می‌کند.

حال این سؤال مطرح می‌شود که کدام یک از مؤلفه‌ها وجود دارند؟ هر جزء طول بار خطی مانند یک بار نقطه‌ای عمل می‌کند و باعث تغییری جزئی در شدت میدان الکتریکی می‌شود که بار از آن جزء به طرف خارج متوجه است (با فرض مثبت بودن بار). هیچ عنصری از بار نیست که، مؤلفه‌ای از شدت میدان الکتریکی در جهت φ ایجاد کند و E_φ مساوی صفر است. اگرچه هر عنصر بار در ایجاد مؤلفه‌های E_r و E_z شرکت دارند ولی آثار E_z ناشی از عنصری از بار، که به فواصل مساوی بالا و پائین نقطه‌ای که تعیین شدت میدان آن مورد نظر است واقع‌اند مساوی و

مختلف علامه‌اند و یکدیگر را حذف می‌کنند.

بنا بر این به این نتیجه می‌رسیم که میدان فقط دارای مؤلفه E_r است و این مؤلفه فقط با r تغییر می‌کند. اکنون این مؤلفه را پیدا می‌کنیم.

نقطه P را که تعیین شدت میدان در آن مورد نظر است روی محور y انتخاب می‌کنیم. این نقطه با توجه به عدم تغییر میدان با φ و z نقطه‌ای کاملاً غیر مشخص است. با استفاده از معادله (۴) بخش (۲.۲) برای تعیین نمود جزئی میدان در P در اثر نمر جزئی بار $dQ = \rho_L dL$ داریم:

$$d\vec{E} = \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{a}_R \quad (1)$$

یا

$$dE_r = \frac{\rho_L dL \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{y}{R} = \frac{\rho_L dL r}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

اگر به جای R^2 مقدارش $L^2 + r^2$ را قرار دهیم و آثار ناشی از همه عناصر بار را با هم جمع کنیم خواهیم داشت،

$$E_r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L r dL}{4\pi\epsilon_0 (L^2 + r^2)^{3/2}}$$

اگر انتگرال را به کمک جدولهای انتگرال یا به روش تغییر متغیر، $L = r \cot \theta$ پیدا کنیم، داریم،

$$E_r = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} r \left(\frac{1}{r^2} \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}} \right)_{-\infty}^{\infty}$$

و

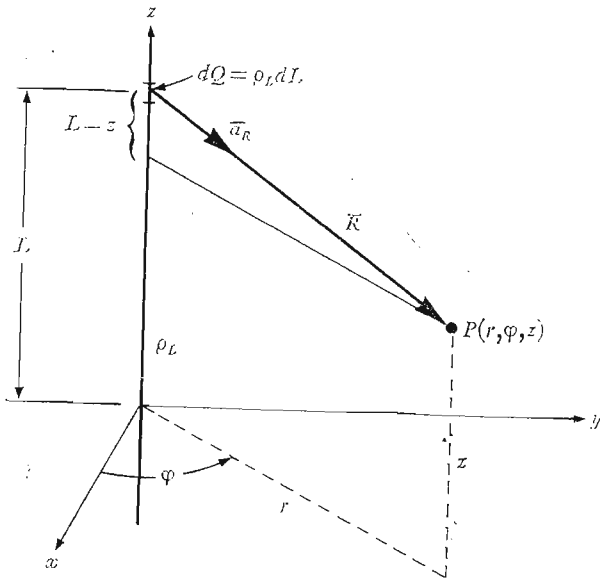
پیدا می‌کنیم

$$E_r = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(۲)

این همان جواب مورد نظر است که می‌توانستیم آن را از راههای متعدد دیگری نیز بدست آوریم. مثلاً می‌توانستیم زاویه θ را متغیر انتگرال گیری انتخاب کنیم چون با توجه به شکل (۵.۲) $L = r \cot \theta$ و $dL = -r \csc^2 \theta d\theta$ با توجه به این که $R = r \csc \theta$ ، انتگرال ما به صورت زیر ساده می‌شود،

$$dE_r = \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \theta = - \frac{\rho_L \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 r}$$



شکل ۴.۲ شکل هندسی مسأله میدان در اطراف یک بار خطی بی‌نهایت، وقتی تقارن نادیده گرفته شود، به انتگرال گیریهای مشکل تری منجر می‌گردد.

$$E_r = -\frac{\rho_L}{\epsilon_0} \int_{180^\circ}^{0^\circ} \sin \theta \, d\theta = \frac{\rho_L}{\epsilon_0} \cos \theta \Big|_{180^\circ}^{0^\circ} = \frac{\rho_L}{\epsilon_0}$$

مشاهده می‌شود که عمل انتگرال گیری در این حالت ساده‌تر بود ولی برای این که بتوانیم از همان اول ساده‌ترین متغیر انتگرال را بی‌اشتباه انتخاب کنیم به مقداری تجربه در این نوع مسائل نیازمندیم. همین‌طور می‌توانستیم معادله (۴) بخش (۴.۲) را به‌عنوان نقطه آغاز کار در نظر بگیریم.

$$\vec{E} = \int_{\text{حجم}} \frac{\rho \, dv}{\epsilon_0 R^2} \vec{a}_R$$

با قراردادن $\rho \, dv = \rho_L \, dL$ در امتداد خطی که اکنون در واقع «حجم» شامل تمام بارها است حساب می‌کنیم. فرض کنیم که همین کار را انجام دهیم و آنچه درباره تقارن مسأله آموخته‌ایم فراموش می‌کنیم و اکنون نقطه P را در محل کلی با

مختصات (r, φ, z) (شکل ۶.۲) انتخاب می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \bar{R} &= r\bar{a}_r - (L-z)\bar{a}_z \\ R &= \sqrt{r^2 + (L-z)^2} \\ \bar{a}_R &= \frac{r\bar{a}_r - (L-z)\bar{a}_z}{\sqrt{r^2 + (L-z)^2}} \\ \bar{E} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L dL [r\bar{a}_r - (L-z)\bar{a}_z]}{4\pi\epsilon_0 [r^2 + (L-z)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r dL \bar{a}_r}{[r^2 + (L-z)^2]^{3/2}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(L-z) dL \bar{a}_z}{[r^2 + (L-z)^2]^{3/2}} \right\} \end{aligned}$$

قبل از انتگرال‌گیری از یک رابطه برداری می‌بایست بدانیم که آیا بردار جلو علامت انتگرال (در این مورد بردارهای واحد \bar{a}_r و \bar{a}_z) به متغیر انتگرال (اینجا dL) بستگی دارد، یا نه. اگر بستگی نداشته باشد، در این صورت آن بردار ثابت است و می‌توان آن را از داخل انتگرال بیرون آورد به طوری که جز یک شمارواره (اسکالر) برای انتگرال‌گیری باقی نمی‌ماند و با استفاده از روشهای معمولی می‌توان از آن انتگرال گرفت. البته اندازه بردارهای واحد تغییر نمی‌کند ولی جهت آنها ممکن است تغییر کند. خوشبختانه، جهت بردار \bar{a}_r با L تغییر نمی‌کند (با r نیز تغییر نمی‌کند ولی با φ قابل تغییر است) و \bar{a}_z هم همواره ثابت است.

بنابراین، می‌توانیم بردارهای واحد را از پشت علامت انتگرال خارج کنیم و باز به کمک جدولها یا تغییر متغیر از عبارت باقیمانده انتگرال بگیریم.

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \bar{a}_r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r dL}{[r^2 + (L-z)^2]^{3/2}} - \bar{a}_z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(L-z) dL}{[r^2 + (L-z)^2]^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\bar{a}_r r \frac{1}{r^2 \sqrt{r^2 + (L-z)^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} - \left[\bar{a}_z \frac{1}{\sqrt{r^2 + (L-z)^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \right\} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\bar{a}_r \frac{2}{r} + \bar{a}_z (0) \right] = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 r} \bar{a}_r \end{aligned}$$

به طوری که مشاهده می‌شود، باز هم به همان نتیجه قبلی می‌رسیم، چون این روش هیچ عیبی ندارد، جز اینکه انتگرال‌گیری دشوارتر است و می‌بایست مقدار دو انتگرال را محاسبه کرد، و این جریمه عدم توجه به تقارن مسأله و سرسختانه در راه ریاضیات تاختن است. بنا براین قبل از انتگرال‌گرفتن باید فکر کرد. بعدها، پس از بررسی قانون گاوس و تعریف مفهوم پتانسیل، روشهای

دیگری برای حل این مسأله اساسی را مورد بحث قرار خواهیم داد. اکنون به جواب مسأله توجه می‌کنیم،

$$E_r = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r}$$

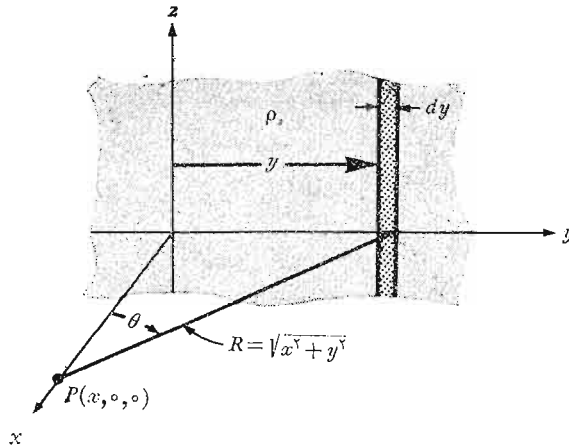
به طوری که مشاهده می‌شود، شدت میدان به نسبت عکس فاصله از خط باردار تنزل می‌کند، حال آنکه شدت میدان در مورد بار نقطه‌ای، به نسبت عکس مجذور فاصله کاهش می‌یافت. اگر فاصله ما از باری نقطه‌ای ده مرتبه افزایش یابد، شدت میدان به یک درصد مقدار قبلی تنزل می‌یابد، حال آنکه اگر فاصله از بار خطی ده مرتبه افزایش یابد، شدت میدان به ۱۰ درصد مقدار قبلی کاهش پیدا می‌کند. تشبیهی که می‌توان در این مورد بکار برد، شدت نور یک منبع روشنایی است، زیرا شدت نور یک منبع نقطه‌ای نور نیز به نسبت عکس مجذور فاصله از منبع کاهش می‌یابد. مثلاً میدان یک لامپ فلورسنت به طول نامحدود به نسبت عکس نمای اول فاصله شعاعی از لامپ تنزل می‌کند. و می‌بایست انتظار داشته باشیم که شدت نور فقط در نزدیکی لامپ از این قانون تبعیت کند. اما وقتی نقطه مورد مطالعه را از لامپی که طول آن محدود است دور و دورتر ببریم، زمانی می‌رسد که لامپ بصورت منبع نوری نقطه‌ای در می‌آید و شدت نور از بستگی عکس مجذور فاصله پیروی می‌کند. در بخش ۷.۲ به عنوان مثال با استفاده از میدان بار خطی، چگونگی ترسیم میدانها را تشریح خواهیم کرد.

تمرین ۶.۲

اندازه و جهت \vec{E} را در نقطه $(-3, 8, 6)$ واقع در فضای آزاد در صورتی که بار خطی یکنواختی به صورت $5 \times 10^{-9} \text{ C/m}$ در امتداد (الف) محور z و (ب) خط $x=9$ و $y=4$ قرار داشته باشد بدست آورید.
جوابها: $9(0.6\vec{a}_z + 0.8\vec{a}_y)$ و $18(-0.6\vec{a}_z + 0.8\vec{a}_y)$ (ولت بر متر)

۶.۲ میدان یک صفحه باردار

شکل اساسی دیگری از آرایش بار، صفحه نامحدودی از بار با چگالی یکنواخت $\rho_s \text{ C/m}^2$ است. چنین توزیع باری اغلب برای بدست آوردن تقریبی توزیع بار روی هادیهای یک خط انتقال نواری یا خازنهای صفحه موازی به کار می‌رود. به طوری که در فصل ۵ مشاهده خواهیم کرد، بار ساکن روی سطح هادیها جای می‌گیرد و نه در داخل آنها، بدین جهت، ρ_s را معمولاً چگالی بار سطحی می‌گویند. اکنون خانواده توزیع بار، مشتمل بر توزیع بار نقطه‌ای و خطی و صفحه‌ای و حجمی که به



شکل ۷.۲ لایه‌ای نامحدود از بار در صفحه yz و نقطه دلخواه P روی محور x و بار خطی با پهنای دیفرانسیلی به عنوان عنصر بار برای محاسبه شدت میدان در نقطه P به وسیله

$$d\vec{E} = \rho_s dy \vec{a}_R / \epsilon_0 R^2$$

ترتیب با حروف Q و ρ_L و ρ_s و ρ نشان داده می‌شود کامل می‌گردد. این لایه باردار را در صفحه yz فرض می‌کنیم و دوباره مسأله تقارن را مورد بررسی قرار می‌دهیم (شکل ۷.۲). ابتدا متوجه می‌شویم که میدان الکتریکی ممکن نیست با y یا z تغییر کند و دیگر اینکه مؤلفه‌های y و z ناشی از عناصر دیفرانسیلی بار که نسبت به نقطه مورد نظر متقارنند حذف می‌شوند. بنا بر این فقط E_x وجود دارد و این مؤلفه فقط تابعی از x است. اینجا نیز با مسأله انتخاب از میان روشهای متعددی برای محاسبه این مؤلفه مواجهیم ولی این بار فقط از یک روش استفاده می‌کنیم و راههای دیگر را برای تمرین بعد از ظهر آرام جمعه می‌گذاریم. با تقسیم لایه بار نامحدود به نوارهایی به پهنای دیفرانسیلی، از میدان بار خطی نامحدود [بخش ۵.۲، معادله (۲)] استفاده می‌کنیم. شکل (۷.۲) یک چنین نواری را نشان می‌دهد. چگالی بار خطی یا بار بر حسب واحد طول $\rho_L = \rho_s dy$ و فاصله نقطه دلخواه P روی محور x از این بار خطی $R = \sqrt{x^2 + y^2}$. اثر این نوار به پهنای دیفرانسیلی در مؤلفه E_x میدان در نقطه P برابر است با

$$dE_x = \frac{\rho_s dy}{\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} \cos \theta = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \frac{x dy}{x^2 + y^2}$$

وقتی اثر تمام نوارها را با هم جمع کنیم

$$E_x = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dy}{x^2 + y^2} = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \tan^{-1} \frac{y}{x} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \quad (1)$$

اگر نقطه P را روی نیمه منفی محور x انتخاب کنیم، در این صورت

$$E_x = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

زیرا شدت میدان الکتریکی همواره از بار مثبت به طرف خارج متوجه است. این اشکال در علامت شدت میدان را می توان معمولاً با تعریف يك بردار واحد \bar{a}_n ، که همیشه بر صفحه باردار عمود و به سمت خارج متوجه است، ازمیان برد. به این ترتیب

$$\bar{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \bar{a}_n \quad \text{شکل ۲}$$

این نتیجه شگفت آوری است، چه میدان از نظر اندازه و جهت ثابت است و در فاصله يك میلیون کیلومتری به همان اندازه است که در مجاورت صفحه. چنانچه به نمونه مشابه نور برگردیم، ملاحظه می کنیم که اگر منبع نور یکنواختی در سقف يك اتاق خیلی بزرگ داشته باشیم، روشنائی سطح يك فوت مربع در کف اتاق با روشنائی همان سطح در فاصله يك اینچی سقف مساوی است و بنا بر این اگر بخواهید مثلاً برای مطالعه يك کتاب از روشنائی بیشتری برخوردار باشید، نزدیک تر کردن کتاب به منبع نور فایده ای نخواهد داشت.

چنانچه لایه بار نامحدود دومی را با چگالی بار منفی $-\rho_s$ در صفحه $x = a$ فرض کنیم، شدت میدان کل، از جمع آثار هر يك از لایه ها در ایجاد شدت میدان بدست می آید. به طوری که در ناحیه $x > a$ خواهیم داشت

$$\bar{E}_+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \bar{a}_x \quad \bar{E}_- = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \bar{a}_x \quad \bar{E} = \bar{E}_+ + \bar{E}_- = 0$$

و برای $x < 0$

$$\bar{E}_+ = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \bar{a}_x \quad \bar{E}_- = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \bar{a}_x \quad \bar{E} = \bar{E}_+ + \bar{E}_- = 0$$

و وقتی $0 < x < a$

$$\bar{E}_+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \bar{a}_x \quad \bar{E}_- = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \bar{a}_x$$

برای هر دو سطح خطی موازی

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \vec{a}_x$$

(۳)

این جواب عملی مهمی است. چه رابطه فوق، میدان الکتریکی میان صفحات موازی خازنی است که عایق آن هوا باشد، به شرط اینکه ابعاد خطی صفحات خازن بسیار بزرگتر از فاصله بین آن دو باشد و نقطه مورد نظر را به اندازه کافی دور از لبه‌های صفحات در نظر بگیریم. شدت میدان در خارج از فضای بین صفحات، اگر مطابق حالت آرمانی بالا صفر نباشد، معمولاً قابل اغماض است.

تمرین (۷.۲)

لایه نامحدودی بار مثبت که روی صفحه $x = 5$ قرار دارد، میدانی الکتریکی ایجاد می‌کند که اندازه شدت آن در فضای آزاد برابر 30 V/m است. اندازه شدت میدان الکتریکی ناشی از لایه دیگری با بار مثبت در صفحه $y = 8$ برابر است با 40 V/m . \vec{E} را در نقاط زیر بدست آورید: (الف) $P_a(6, 10, -2)$ (ب) $P_b(6, 3, -2)$ (پ) $P_c(2, 9, 3)$ (ت) $P_d(2, 3, 4)$
 جوابها: $50(0.06\vec{a}_x + 0.8\vec{a}_y)$ و $50(0.06\vec{a}_x - 0.8\vec{a}_y)$ و $50(-0.06\vec{a}_x - 0.8\vec{a}_y)$ و $50(-0.06\vec{a}_x + 0.8\vec{a}_y)$ (ولت بر متر)

۷.۴ خطوط شار و ترسیم میدانها

اکنون معادلات برداری شدت میدان الکتریکی حاصل از چند آرایش مختلف بار را به دست آورده ایم و در تعبیر اندازه و جهت میدان از این معادلات نیز، با مشکلی روبرو نبوده ایم. متأسفانه کار در همه موارد به این سادگی نیست چه تا اینجا اغلب حالت‌های ساده را حل کرده ایم و توزیع‌های جدید بار به روابط پیچیده تری برای میدانها منجر، و مجسم کردن میدانها از روی معادلات مشکل تر می‌شود. در هر صورت، اینکه يك تصویر به‌هزار کلمه می‌ارزد حقیقت دارد، البته مشروط بر آنکه بدانیم چه تصویری را می‌بایست کشید.

میدان اطراف يك بار خطی را در نظر می‌گیریم،

$$\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{a}_r$$

شکل ۸.۲ الف مقطع عرضی يك بار خطی را نشان می‌دهد و عملی که ممکن است اولین کوشش ما در تجسم میدان به شمار آید، روی آن نشان داده شده است و آن

عبارت است از ترسیم پاره خطهای کوتاهی به طور پراکنده روی آن بطوری که اندازه آنها متناسب با اندازه E_z و جهت آنها جهت بردار E باشد. اما این شکل متقارن بودن میدان را نسبت به φ نشان نمی دهد. این نقیصه را در شکل ۸.۲ ب با رسم متقارن پاره خطها جبران می کنیم. اشکال واقعی اینجا پیش می آید و آن اینست که می بایست مناطقی را که شدتشان بیشتر است با خطوط طولانی تر مشخص کنیم. اگر از پاره خطهایی که طولشان مساوی ولی ضخامتشان متناسب با E است استفاده کنیم مشکلی حل نمی شود (شکل ۸.۲ پ). طرق دیگری نیز برای این کار توصیه شده است. مثلاً رسم خطوط کوتاه تر برای میدانهای قوی تر (که ذاتاً منحرف کننده است) یا استفاده از رنگهای تندتر برای نمایش میدانهای قوی تر (که کاری دشوار و پرهزینه است). بنا براین در حال حاضر قناعت می کنیم به این که فقط جهت E را با رسم خطوط پراز محل بار، که در همه جا مماس بر E است، نمایش دهیم. شکل ۸.۴ ت چنین مصالحه ای را نشان می دهد. توزیع متقارن خطوط (که هر يك نسبت به دیگری زاویه 45° می سازند) کیفیت تقارن سمتی میدان را مشخص می کنند و سوک پیکانها برای نشان دادن جهت E مورد استفاده قرار می گیرد.

این خطوط معمولاً خطوط سیلان، نامیده می شوند، گرچه اصطلاحات دیگری مانند خطوط شار و خطوط جهت نیز برای آنها به کار رفته است. اگر يك بار آزمایشی کوچک مثبت در هر نقطه از میدان قرار داده شود و بتواند آزادانه حرکت کند، در جهت خط شاری که از آن نقطه می گذرد شتابانده می شود. اگر این میدان سرعت يك مایع یا گاز را نشان دهد (که تصادفاً می بایست منبع آن در $z=0$ باشد)، در این صورت ذرات کوچک معلق در مایع یا گاز خطوط شار را رسم خواهند کرد. بعدها در خواهیم یافت که این طریق نمایش خطوط شار دارای این حسن است که می توان نشان داد اندازه میدان در بعضی حالتها و ویژه مهم به طور معکوس متناسب با فاصله بین خطوط شار است. هر اندازه خطوط شار به هم نزدیکتر باشند، میدان قوی تر است. آنگاه روش آسانتر و دقیق تری نیز برای رسم این نوع طرح خطوط شار خواهیم یافت.

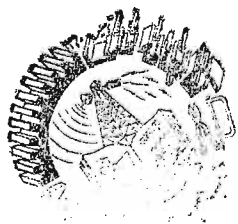
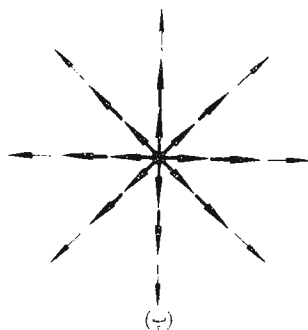
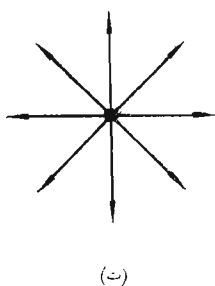
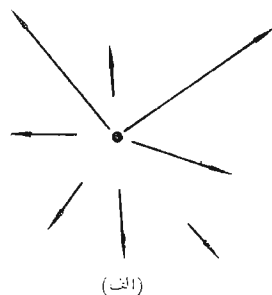
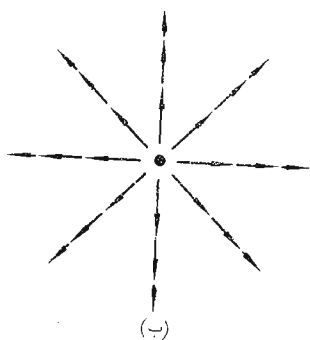
چنانچه سعی کنیم میدان بار نقطه ای را رسم کنیم، برای رسم تغییرات میدان از صفحه کاغذ به خارج و داخل دچار اشکالاتی خواهیم شد که اساساً رفع ناشدینند. از این رونمایش میدان معمولاً به میدانهای دو بعدی محدود می گردد.

برای حسالت میدان دو بعدی بطور دلخواه فرض می کنیم که $E_z = 0$. بدین ترتیب خطوط شار به صفحاتی که z آنها ثابت است محدود می شوند و رسم آنها برای تمام این صفحات یکسان است. شکل ۹.۲ چند خط شار را نشان می دهد و مؤلفه های E_x و E_y در يك نقطه دلخواه تعیین شده اند. با توجه به قواعد هندسی واضح است که:

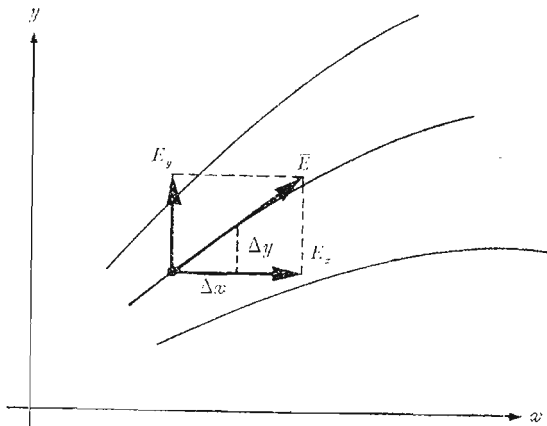
$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{dx} \quad (1)$$

اگر توابع E_x و E_y را داشته باشیم و بتوانیم معادله دیفرانسیل حاصل را حل کنیم، می‌توانیم معادلات خطوط شار را به دست آوریم. به منظور نمایش این روش میدان بارخطی یکنواختی با چگالی $\rho_L = 2\pi\epsilon_0$ را در نظر می‌گیریم،

$$\vec{E} = \frac{1}{r} \vec{a}_r$$



شکل ۸.۲ (الف)، نمایش بسیار بد و (ب) و (ب) (دو نمایش متوسط و (ت) طریق نمایش معمولی خطوط شار. در شکل آخر پیکانها جهت میدان را در هر نقطه در امتداد خط نشان می‌دهند و فاصله بین خطوط متناسب با عکس شدت میدان است.



شکل ۹.۴ بدست آوردن معادلهٔ يك خط شار از طريق حل معادلهٔ دیفرانسیل

$$E_y/E_x = dy/dx$$

در مختصات قائم داریم:

$$\vec{E} = \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{a}_x + \frac{y}{x^2 + y^2} \vec{a}_y$$

به این ترتیب معادلهٔ دیفرانسیل زیر بدست می‌آید:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{y}{x}$$

یا

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

بنابراین

$$\ln y = \ln x + C_1$$

یا

$$\ln y = \ln x + \ln C$$

که از آن معادلات خطوط شار بدست می‌آیند

$$y = Cx$$

هر خط سیلان (شار) با مقدار معینی برای C مربوط است. خطوط شعاعی

که در شکل (۸.۲) نشان داده شده است به‌ازای مقادیر $C = 0, 1, -1$ و

$$1/C = 0 \text{ به دست می آید.}$$

تمرین ۸.۲

میدان $\vec{E} = \psi x \vec{a}_x - \psi y \vec{a}_y$ داده شده است. معادله خطوط شاری که در ربع اول از نقاط زیر می گذرند به دست آورید.

(الف) (۱، ۱) ، (ب) (۲، ۶)

جوابها: $xy = 1$ و $xy = 12$

مراجعی که توصیه می شوند

1- Boast, W. B.: «Vector Fields,» Harper and Row, Publishers, Incorporated, New York, 1964.

این کتاب شامل تعداد زیادی مثال و طرح میدانهاست.

2- Della Torre, E. and C. L. Longo: «The Electromagnetic Field,» Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., 1969.

نویسندگان این کتاب تمام تئوری الکترومغناطیس را با بسطی دقیق و سختگیرانه بر اساس یک قانون تجربی، یعنی قانون کولن ارائه می دهند که در فصل ۱ آغاز می شود.

3- Schelkunoff, S. A.: «Electromagnetic Fields,» Blaisdell Publishing Company, New York, 1963.

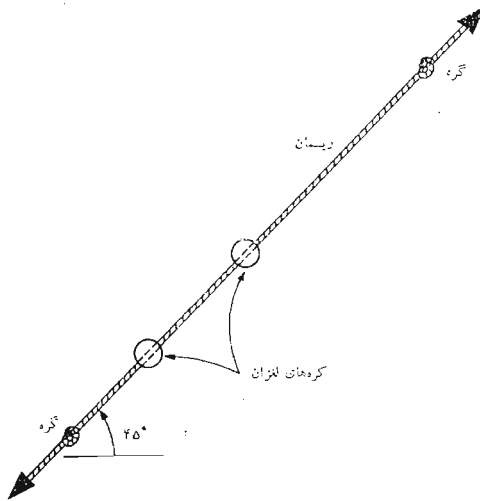
بسیاری از جنبه های فیزیکی میدانها در اوائل این کتاب بی استفاده از ریاضیات عالی تشریح شده است.

مسائل

۱- قانون جاذبه نیوتن را می توان بصورت $F = Gm_1 \cdot m_2 / R^2$ نوشت، که در آن m_1 و m_2 جرمهای نقطه ای بفاصله R از هم و G ضریب ثابت ثقل $6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$ است. (الف) دو ذره هریک به جرم ۱۰ میکروگرم به فاصله ۱ سانتیمتر از هم قرار دارند. نیروی جاذبه ثقلی را به دست آورید. (ب) چند الکترون باید به هر کدام از دو ذره اضافه کرد تا نیروی جاذبه خنثی شود.

۲- دو کره کوچک پلاستیکی طوری قرار دارند که می توانند آزادانه در امتداد یک تار عایق، که با افق زاویه 45° درجه می سازد بلغزند. شکل ۱۰.۲، اگر جرم هریک از دو ذره ۰.۱۰۰ باشد و به هر کدام بار 10^{-8} C داده شود، محل آنها را روی تار بدست آورید.

۳- دو بار $1/2$ کولنی در خلاء به فاصله ۲.۵ متر از محور z و ۱۲ متر از صفحه



شکل ۱۰۰۲ به مسأله ۲ مراجعه شود.

$z=0$ و 15 متر از صفحه yz قرار دارند. اگر مختصات yz و z هر دو بار مثبت باشند، نیروئی را که در يك هشتم اول صفحه مختصات به بار وارد می شود در مختصات قائم بدست آورید.

۴- چهار بار 1 میکروکولنی در نقاط $(\pm 1, \pm 1, 0)$ در هوا قرار گرفته اند. الف) \vec{E} را در نقطه $(4, 0, 0)$ بدست آورید. ب) چگونه این جواب با مقدار \vec{E} ناشی از يك تك بار 4 میکروکولنی واقع در مبدأ مقایسه می شود.

۵- بزرگترین اندازه \vec{E} را که می توان در مبدأ، با قرار دادن بارهای 1 ، 1 و $2nC$ در نقاط $(1, 0, 0)$ و $(2, 0, 0)$ و $(3, 0, 0)$ در خلاء و نه الزاماً با رعایت این ترتیب بدست آورد، چه اندازه است؟

۶- در فضای آزاد Q_1 در نقطه $(2, 0, 0)$ و Q_2 در نقطه $(-2, 0, 0)$ قرار دارد. رابطه بین Q_1 و Q_2 چه باید باشد تا در نقطه $(1, 2, 2)$ $E_y = 0$.

۷- ارقام تجربی چگالی الکترون که برای يك دسته اشعه استوانه ای الکترون به دست آمده اند عبارتند از: $10^{15} \times 0.1$ ، 1×10^{15} ، 2.5×10^{15} ، 4.5×10^{15} ، 5×10^{15} الکترون در هر متر مکعب به ترتیب در $200 \mu m$ ، 150 ، 100 ، 50 ، $r=0$ مقدار تقریبی بار در واحد طول دسته اشعه را بدست آورید.

۸- چگالی بار حجمی يك دیود با صفحات موازی هنگام کار با بار فضائی کامل بصورت

در محل $x=0$ و $x=d$ در محل $x=d$ واقع اند. اگر بار کل در ناحیه‌ای به سطح مقطع 2 سانتیمتر مربع، که از کاتد تا آنند ادامه دارد برابر با $100 pC$ - و $V_0 = 200V$ باشد، d را بدست آورید.

۹- اگر در هر رأس شبکه مکعبی به ضلع $10^{-1} m$ $2 \times 10^{-1} m$ یک الکترون آزاد قرار گرفته باشد، چگالی بار حجمی الکترونهاى آزاد را بدست آورید.

۱۰- اگر $\rho = 1/(r+1)$ ، بار کل موجود در داخل حجمهای زیر را بدست آورید: (الف) استوانه $0 \leq r \leq 1$ ، $0 \leq z \leq 1$ (ب) کره $0 \leq r \leq 1$

۱۱- چگالی بار حجمی در مبدأ $10^5 C/m^3$ است و مقدار آن به ازاء هر سانتیمتر فاصله از مبدأ نصف می‌شود. مقدار بار در این فضا چقدر است؟

۱۲- برآیند \vec{E} حاصل از ۲ بار خطی نامحدود $10^{-8} C/m$ در $x=0$ و $y=1$ و $10^{-8} C/m$ در $x=0$ و $y=-1$ واقع درخلاء را در نقاط زیر بدست آورید: (الف) نقطه $(0, 0, 0)$ ، (ب) نقطه $(1, 0, 0)$ و (پ) نقطه $(1, 1, 0)$ و (ت) نقطه $(1, 1, 1)$.

۱۳- چگالی بار خطی یکنواخت $\rho_L C/m$ در فضای آزاد در امتداد محور z از $z = -h$ تا $z = h$ ادامه دارد. (الف) \vec{E} را در صفحه $z = 0$ بدست آورید. (ب) \vec{E} را در نقطه $(0, 0, a)$ برای $a > h$ بدست آورید.

۱۴- محورهای مثبت x و y حامل چگالی بار خطی یکنواخت ρ_L اند. \vec{E} را در نقاط صفحه $z = 0$ که در آن $y = x$ و $x \geq 0$ است بدست آورید.

۱۵- دوبار خطی نامحدود و یکنواخت با چگالی $\rho_L = 50 n C/m$ در صفحه $z = 0$ در امتداد خطوط $y = \pm x$ قرار دارد. \vec{E} را در نقاط: (الف) $(0, 0, 2)$ و (ب) $(0, 2, 0)$ بدست آورید.

۱۶- چگالی یک بار خطی یکنواخت در دو ربع

$$-45^\circ \leq \varphi \leq 225^\circ \text{ و } 45^\circ \geq \varphi \geq -135^\circ$$

دایره $z = 0$ و $r = 2$ برابر ρ_L است. \vec{E} را در نقطه $(0, 0, h)$ بدست آورید.

۱۷- شدت میدان الکتریکی برداری حاصل از توزیع یکنواخت زیر در فضا را روی محور z بدست آورید. (الف) ρ_s روی یک حلقه بار یک $z = 0$ و $r_0 \leq r \leq r_0 + \Delta r$ (ب) ρ_s روی یک قرص $z = 0$ و $0 \leq r \leq a$ (پ) ρ_s روی یک نوار $z = 0$ و $-a \leq x \leq a$ و $-\infty < y < \infty$ و (ت) ρ_s روی یک مستطیل $-a \leq x \leq a$ و $y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y$.

۱۸- با استفاده از نتایج مسأله ۱۷ (پ)، مقدار \vec{E} ناشی از چگالی بار سطحی یکنواخت را روی محور z در حالات زیر بدست آورید: (الف) ρ_s روی تمام صفحه

$z = 0$ ، (ب) روی یک نوار باریک

$$-\infty < y < \infty \text{ و } -\frac{1}{4} \Delta x \leq x \leq \frac{1}{4} \Delta x$$

۱۹- سه لایه حامل چگالی بار سطحی یکنواخت را مشخص کنید که میدانی بصورت

$$\vec{E} = 100 \vec{a}_x - 50 \vec{a}_y + 20 \vec{a}_z \text{ V/m}$$

۲۰- با توجه به شکل ۱۱.۲، \vec{E} حاصل از باری به چگالی سطحی ρ_s گسترده روی

سطح استوانه‌ای $r = a$ از $z = -h$ تا $z = h$ را در نقطه $(0, 0, k)$ در فضای آزاد بدست آورید. تقارن را در نظر بگیرید. به منظور امتحان محاسبه، برای

$$\vec{E} = 0.1954 (\rho_s / \epsilon_0) \vec{a}_z \text{ که } k = 2h = 2a = 2$$

۲۱- باری یکنواخت به چگالی سطحی $\rho_s = 20 \epsilon_0 \text{ C/m}^2$ در فضای آزاد در ناحیه

مستطیل شکل $x = 0$ و $-1 \leq y \leq 1$ و $-10^{-3} \leq z \leq 10^{-3}$ قرار گرفته

است. با استفاده از روشهای ساده، مقدار تقریبی \vec{E} را در نقاط زیر بدست آورید:

(الف) $(0, 0, 2 \times 10^{-6})$ و (ب) $(0, 0, 2 \times 10^{-2})$ و (پ) $(0, 0, 200)$.

۲۲- مقدار قابل قبولی برای \vec{E} حاصل از دو لایه بار مربع به چگالی

$\rho_s = 10^5 \epsilon_0 \text{ C/m}^2$ ، برای $-a \leq x \leq a$ و $-a \leq y \leq a$ و $z = 10^{-4} \text{ m}$

و $-10^5 \epsilon_0$ برای $-a \leq x \leq a$ و $-a \leq y \leq a$ و $z = -10^{-4} \text{ m}$ که در

آن در فضای آزاد $a = 5 \text{ cm}$ بدست آورید. (ب) مقدار کل بار روی سطح فوقانی

چه اندازه است؟

۲۳- معادله گروه خطوط شار (سیلان) حاصل از $\vec{E} = (x + y) \vec{a}_x + (x - y) \vec{a}_y$

را تعیین و خطوط شاری که از مبدأ می‌گذرند رسم کنید.

راهنمائی: $xdy + ydx = d(xy)$

۲۴- یک میدان الکتریکی توسط $\vec{E} = \frac{4}{x} \vec{a}_x - \frac{1}{y} \vec{a}_y$ داده شده است. معادلات

خطوط شار را تعیین و تعدادی از آنها را رسم کنید.

۲۵- معادلات خطوط شار را برای میدان $\vec{E} = e^{-y} (\cos x \vec{a}_x - \sin x \vec{a}_y)$

بدست آورید و خط شاری که از مبدأ می‌گذرد رسم کنید.

۲۶- میدان نیروی $\vec{F} = (1 + \cos 2x) \vec{a}_x + 4\vec{a}_y$ داده شده است. معادله خط شار

را برای نقاط زیر بدست آورید و آنها را رسم کنید: (الف) مبدأ و (ب) نقطه

$(0, \pi/4)$ و (پ) جهت \vec{F} را در مبدأ تعیین کنید و نشان دهید که این قسمت با

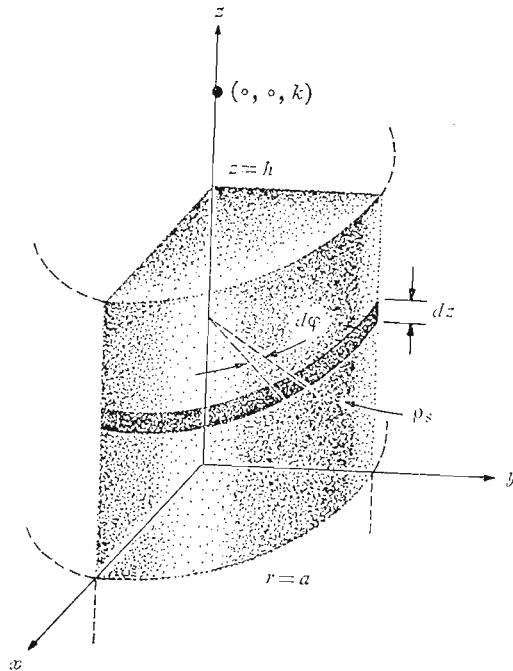
قسمت (الف) سازگار است.

۲۷- با مراجعه به

H. H. Skilling, «Exploring Electricity,» Ronald Press

Co., New York, 1948,

تعیین کنید چه کسی قبل از کولن قانون کولن را کشف کرد.
۲۸- مسأله ۸.۹.۲ صفحه ۶۷ کتاب مرجع Della Torre و Longo را حل کنید. توجه داشته باشید که جوابها در پشت کتاب داده شده‌اند.



شکل ۱۱.۴ به مسأله ۲۰ مراجعه شود

چگالی شار الکتریکی و قانون گاوس و دیورژانس

پس از آن که چند عدد از میدان‌هایی که در فصل قبل بررسی شد رسم کردیم و با مفهوم خطوط شار (سیلان)، که جهت نیروی مؤثر روی يك بار آزمایشی را در هر نقطه از میدان نشان می‌دهند آشنا شدیم، ناچار می‌بایست به این خطوط مفهومی فیزیکی مربوط کنیم و آنها را بصورت خطوط شار الکتریکی تصور کنیم. از يك بار نقطه‌ای هیچ ذره فیزیکی بطور شعاعی به خارج پرتاب نمی‌شود و هیچ شاخک فولادینی هم به آن نمی‌رسد که يك بار آزمایشی سرگردان را جذب یا دفع کند. اما وقتی خطوط شار را روی کاغذ بکشیم، به نظر می‌رسد که تصویر پرست و «چیزی» را نشان می‌دهد.

برای فهم مطالب بسیار مفید است که يك شار الکتریکی فرضی، منطبق با خطوط شار، تصور کنیم که بطور متقارن از بار نقطه‌ای به طرف خارج جریان دارد و سپس هر جا که يك میدان الکتریکی وجود دارد این شار الکتریکی را در نظر مجسم کنیم.

در این فصل مفهوم شار الکتریکی و چگالی شار الکتریکی مطرح می‌شود و برای حل مجدد مسأله‌هایی که در فصل قبل ارائه شد مورد استفاده قرار می‌گیرد. کار ما در این فصل، به علت تقارن فوق‌العاده مسائلی که حل آنها مورد نظر است، بسیار ساده‌تر است.

۱۰۳ چگالی شار الکتریکی

حدود سال ۱۸۳۷ مایکل فارادی^۱ مدیر انجمن سلطنتی در لندن نسبت به میدانهای الکتریکی ساکن و اثر عایقهای مختلف روی آنها توجه بسیار مبذول می‌داشت. این مسأله از ده سال پیش از آن، که او به آزمایشهای خود روی کار امروز معروفش، یعنی نیروی الکتروموتوری القائی، سرگرم بود، و ما در فصل دهم به بحث روی آن خواهیم پرداخت، ذهن او را به خود مشغول می‌داشت. فارادی، بعد از تکمیل این کار خود، دستور داد که دو کره فلزی هم مرکز ساخته شود که کره بیرونی از دو نیم کره تشکیل می‌شد که به هم چفت می‌شدند. او همچنین قشرهایی از مواد عایق (یا مواد دی‌الکتریک یا به سادگی دی‌الکتریک) تهیه کرد، که تمام حجم فضای بین دو کره هم مرکز را اشغال می‌کرد. در اینجا فعلاً از کشفهای او در مورد مواد دی‌الکتریک استفاده نخواهیم کرد، زیرا توجه ما تا فصل پنجم محدود به میدانها در فضای آزاد است. در فصل پنجم متوجه خواهیم شد، که موادی که او از آنها استفاده می‌کرد به عنوان دی‌الکتریکهای آرمانی طبقه بندی می‌شوند.

اساس آزمایش او شامل مراتب زیر بود:

- ۱- با برداشتن کره بیرونی، مقدار معینی بار مثبت به کره داخلی داده شد.
 - ۲- سپس دو نیم کره بیرونی حول کره باردار داخلی به هم چفت شدند در حالی که قشری از مواد عایق به ضخامت تقریباً ۲ سانتیمتر بین دو نیم کره قرار داده شد.
 - ۳- بارکره بیرونی با اتصال موقت آن به زمین تخلیه شد.
 - ۴- کره بیرونی با احتیاط از هم جدا شده و برای اینکه خدشه‌ای به بار القاء شده به آن وارد نیاید از ابزار و آلای ساخته شده از مواد عایق استفاده شد و بار منفی القاء شده روی هر نیم کره اندازه گیری گردید. فارادی پی برد به این که مجموع بار روی نیم کره بیرونی از لحاظ اندازه معادل بار اولیه‌ای بود که به نیم کره داخلی داده شده بود و این واقعیت با جنس عایقی که دو کره را از هم جدا می‌کرد بستگی نداشت. او نتیجه گرفت که نوعی «جا به جایی» بین کره داخلی و خارجی صورت گرفته که از جنس ماده واسط مستقل است و آن را اکنون شاد جا به جایی یا بطور ساده شار الکتریکی می‌نامیم.
- البته تجربه‌های فارادی همچنین نشان داد که اگر بار مثبت بیشتری به کسره داخلی داده شود، به همان نسبت بار منفی بیشتری به کره خارجی القاء می‌گردد. که

1. Michael Faraday

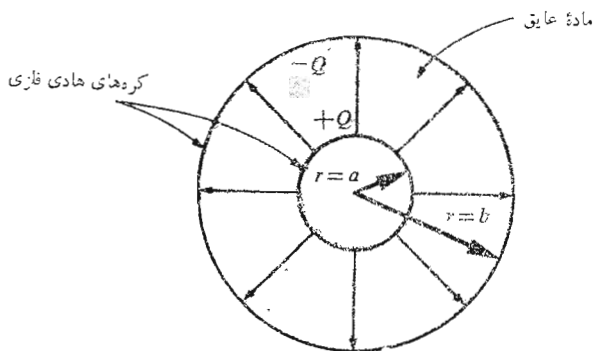
حاکمی از وجود یساک تناسب مستقیم بین شار الکتریکی و بسار کسره داخلی است. ضریب تناسب بستگی به دستگاه آحاد انتخاب شده دارد و خوشبختانه در دستگاه آحاد بین المللی مورد استعمال ما این ضریب مساوی واحد است. اگر شار الکتریکی با علامت Ψ و مجموع بار کسره داخلی با Q نمایش داده شود، به این ترتیب طبق آزمایش فارادی

$$\Psi = Q$$

و شار الکتریکی Ψ برحسب کولن اندازه گرفته می شود. برای بدست آوردن اطلاعات کمتری بیشتری کسره داخلی را به شعاع a و کسره بیرونی را به شعاع b و بارهای آنها را به ترتیب Q و $-Q$ فرض می کنیم. در (شکل ۱۰۳). مسیرهای شار الکتریکی که از کسره داخلی به کسره بیرونی ادامه دارند توسط خطوط شار متقارنی که بطور شعاعی دو کسره را به هم وصل می کنند نمایش داده شده اند.

در سطح کسره داخلی به اندازه Ψ کولن شار الکتریکی توسط بار $Q (= \Psi)$ ایجاد می شود که بطور یکنواخت روی سطحی به مساحت $4\pi a^2$ متر مربع توزیع می گردند. چگالی شار این سطح مساوی $\Psi / 4\pi a^2$ یا $Q / 4\pi a^2$ کولن بر متر مربع است و این کمیتی مهم و جدید است.

چگالی شاد الکتریکی، که برحسب کولن بر متر مربع اندازه گرفته می شود، (گاهی اوقات نیز به صورت «خطوط بر متر مربع» توصیف می شود چون



شکل ۱۰۳ شار الکتریکی در فضای بین دو کسره باردار هم مرکز. اندازه و جهت \vec{D} تابع دی الکتریک بین کره ها نیست.

هر خط زائیده يك كولين است) با حرف \bar{D} مشخص می‌گردد که در اصل از چگالی جا به جایی یا چگالی شار جا به جایی^۱ گرفته شده است. کلمه چگالی شار الکتریکی بهتر مطلب را توصیف می‌کند و از اینرو همواره همین واژه را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

چگالی شار الکتریکی \bar{D} میدانی برداری است و عضوی از گروه میدانهای «چگالی شار» است، در مقابل گروه «میدانهای نیرو» که شدت میدان الکتریکی \bar{E} از آن گروه است. جهت \bar{D} در هر نقطه همان جهت خطوط شار در آن نقطه است و اندازه آن مساوی است با تعداد خطوط شاری که از صفحه عمود بر آن خطوط می‌گذرد تقسیم بر مساحت سطح.

در شکل (۱۰۳) چگالی شار الکتریکی در جهت شعاعی و اندازه آن مساوی است با:

$$\bar{D} \Big|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2} \bar{a}_r \quad (\text{کره داخلی})$$

$$\bar{D} \Big|_{r=b} = \frac{Q}{4\pi b^2} \bar{a}_r \quad (\text{کره بیرونی})$$

و در فاصله شعاعی r که $a \leq r \leq b$

$$\bar{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \bar{a}_r$$

اگر کره داخلی را کوچک و کوچکتر کنیم، در حالی که بار Q روی آن ثابت بماند، در حد به باری نقطه‌ای تبدیل می‌شود ولی چگالی شار الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله r متر از بار نقطه‌ای، هنوز با رابطه زیر معین می‌شود:

$$\bar{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \bar{a}_r \quad (1)$$

زیرا تعداد Q خط شار که بطور متقارن از نقطه بار به خارج متوجه‌اند از يك سطح کروی فرضی به مساحت $4\pi r^2$ عبور می‌کنند.

این نتیجه را می‌توان با معادله (۵) بخش ۲.۲ مقایسه کرد که شدت میدان الکتریکی شعاعی يك بار نقطه‌ای در فضای آزاد را نشان می‌دهد،

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \bar{a}_r$$

بنابراین در فضای آزاد داریم،

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} \quad (۲)$$

گرچه رابطه (۲) فقط در مورد خلاء معتبر است، مع هذا تنها به میدان يك بار نقطه‌ای محدود نمی‌شود. برای يك توزیع حجمی بار دلخواه در فضای آزاد داشتیم

$$\bar{E} = \int_{\text{حجم}} \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 R^2} \bar{a}_R \quad (۳)$$

و این رابطه از میدان يك بار نقطه‌ای تنها بدست آمد. بطریقی مشابه رابطه (۱) به رابطه زیر منجر می‌شود

$$\bar{D} = \int_{\text{حجم}} \frac{\rho dv}{4\pi R^2} \bar{a}_R \quad (۴)$$

از اینرو رابطه (۲) برای هر آرایش باری در فضای آزاد صادق است و بدین ترتیب رابطه (۲) را رابطه‌ای خواهیم دانست که \bar{D} را در فضای آزاد معین می‌کند. به منظور آماده شدن برای مطالعه آتسی دی‌الکتریکها، شاید اینجا مناسب باشد متذکر شویم که نتایج فارادی برای يك بار نقطه‌ای محاط در يك محیط دی‌الکتریک آرمانی نامحدود، حاکی از آنست که رابطه (۱) و در نتیجه رابطه (۴) نیز هنوز معتبرند. اما معادله (۳) غیر قابل استعمال است و در نتیجه رابطه بین \bar{D} و \bar{E} کمی پیچیده‌تر از معادله (۲) خواهد بود.

از آنجائی که \bar{D} در فضای آزاد با \bar{E} مستقیماً متناسب است، به نظر نمی‌رسد که واقعاً لازم باشد که علامت جدیدی بکار ببریم. این کار را به چند علت انجام می‌دهیم. اول اینکه \bar{D} به مفهوم شار، که يك تصور مهم و جدید است، مربوط است. دوم اینکه میدانهای \bar{D} که بدست می‌آوریم کمی از میدانهای \bar{E} مربوط به آنها ساده‌تراند زیرا ϵ_0 در آن ظاهر نمی‌شود و بالاخره این کار به آشنا شدن با \bar{D} ، قبل از اینکه در فصل ۵ برای مواد عایق مورد استفاده قرار بگیرد، کمک می‌کند.

تمرین ۱۰۳

بار نقطه‌ای $5C$ در خلاء در مبدأ مختصات قرار گرفته است. (الف) $|D|$ را در نقطه $(3, -5, 3)$ بدست آورید. (ب) \bar{D} را در همان نقطه حساب کنید. (پ) شار الکتریکی کل که از اولین يك هشتم فضای گذرد تعیین کنید.
جوابها:

$$796C/m^2 \text{ و } 450a_z C/m^2 - 563\bar{a}_y + 338\bar{a}_x \text{ و } 625C$$

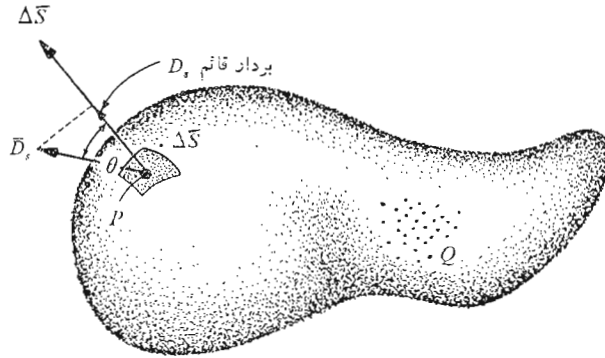
۲.۳ قانون گاوس

نتایج آزمایشهای فارادی روی کردهای هم مرکز را می توان بصورت يك قانون تجربی به این بیان خلاصه کرد که شار الکتریکی که از هر سطح کروی فرضی مابین دو کره هادی عبور می کند مساوی بار محاط در این سطح فرضی است. این بار محاط روی سطح کره داخلی توزیع شده است یا ممکن است در مرکز کره فرضی بصورت يك بار نقطه‌ای متمرکز باشد. در هر صورت، نظر به اینکه يك کولن شار الکتریکی ناشی از يك کولن بار الکتریکی است، اگر هادی داخلی يك مکعب یا يك کلید برنجی در نیز باشد، بار کل القاء شده روی کره خارجی همچنان تغییری نخواهد کرد. البته، چگالی شار دیگر مثل گذشته متقارن نخواهد بود و آرایش دیگری اختیار خواهد کرد ولی $+Q$ کولن بار روی هر نوع هادی داخلی به اندازه $-Q$ کولن بار روی کره محیطی القاء می کند. اگر يك قدم فراتر بگذاریم، می توانیم بجای دو نیم کره بیرونی يك قوطی حلبی خالی (ولی کاملاً بسته) سوپ قرار دهیم. وجود Q کولن بار روی کلید برنجی، به اندازه $Q =$ بلا خط شار الکتریکی بوجود می آورد و باعث القاء $-Q$ کولن بار روی ظرف حلبی^۱ سوپ می شود.

این تعمیمهای کلی آزمایش فارادی به بیان زیر، که به قانون گاوس معروف است، منجر می شود:

شار الکتریکی که از هر سطح بسته عبور می کند بسا مجموع بار محصور در آن سطح مساوی است. در واقع خدمت گاوس، که یکی از بزرگترین ریاضی دانهای بود که دنیا به خود دیده است، نه بیان قانون بصورت بالا، بلکه بیان آن به شکل ریاضی بود که اکنون آن را بدست خواهیم آورد.

۱. اگر خود سوپ عایق کامل می بود، می توانستیم آنرا نیز در ظرف باقی بگذاریم، بی آنکه در نتیجه تغییری به وجود آید.



شکل ۲.۳ چگالی شار الکتریکی D_s حاصل از بار Q در نقطه P . شار کلی که از ΔS عبور می کند برابر است با $\vec{D}_s \cdot \Delta \vec{S}$

باری را که مانند شکل (۲.۳) بصورت ابری از بارهای نقطه‌ای توزیع، و در سطح بسته‌ای با شکل دلخواه محاط شده است در نظر می گیریم. سطح بسته ممکن است سطح ماده‌ای واقعی باشد اما بطور کلی تر، هر سطح بسته‌ای است که بخواهیم در نظر آوریم. اگر بار کل Q باشد، Q کولن شار الکتریکی از سطح بسته می گذرد. در هر نقطه از سطح، بردار چگالی شار الکتریکی، \vec{D} مقداری برابر \vec{D}_s خواهد داشت. اندیس s یادآور این موضوع است که \vec{D} می بایست روی سطح محاسبه شود و در حالت کلی اندازه \vec{D}_s و جهت آن از یک نقطه به نقطه دیگر سطح تغییر می کند.

اکنون می بایست ماهیت یک عنصر نمودی سطح را در نظر بگیریم. یک عنصر نمودی سطح ΔS به جزئی از یک سطح مستوی بسیار نزدیک است و برای مشخص کردن کامل این عنصر سطح نه تنها اندازه ΔS ، بلکه جهت آن در فضا نیز می بایست مشخص بشود. به عبارت دیگر، عنصر نمودی سطحی ΔS کمیتی برداری است. تنها جهت منحصر به فردی که می توانیم برای ΔS (بردار عنصر نمودی سطحی) بیان کنیم، جهت خط عمود بر صفحه‌ای است که در نقطه مورد بحث بر سطح مماس باشد. البته دو عمود با این شرایط وجود دارد و هرگاه سطح بسته‌ای موجود و کلمه «خارج» دارای معنی مشخصی باشد ابهام با ذکر «متوجه به خارج» برطرف می شود.

عنصر نمو سطحی $\Delta \bar{S}$ را در هر نقطه دلخواه P در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم \bar{D}_s همان گونه که شکل ۲.۳ نشان می‌دهد، با $\Delta \bar{S}$ زاویه θ بسازد. در این حالت شاری که از $\Delta \bar{S}$ می‌گذرد حاصل ضرب مؤلفه عمودی \bar{D}_s و $\Delta \bar{S}$ خواهد بود.

$\Delta \Psi = \Delta S = D_s \cos \theta \Delta \bar{S} = \bar{D}_s \cdot \Delta \bar{S}$ می‌گذرد
 همانطور که مشاهده می‌شود می‌توانیم در اینجا از تعریف حاصلضرب داخلی که در فصل اول مورد بحث قرار گرفت، استفاده کنیم.

مجموع شاری را که از سطح بسته می‌گذرد می‌توان با جمع شارهایی که از عنصرهای دیرانسیلی $\Delta \bar{S}$ می‌گذرند بدست آورد،

$$\Psi = \int d\Psi = \oint_{\text{سطح بسته}} \bar{D}_s \cdot d\bar{S}$$

انتگرال حاصل یک انتگرال سطح بسته است و از آنجائی که عنصر سطحی $d\bar{S}$ همواره شامل دیرانسیلهای دو مختصه، مانند $dx dy$ یا $r d\varphi dr$ یا $\sin \theta d\theta d\varphi$ است، انتگرالی دوگانه است. معمولاً برای اختصار فقط از یک علامت انتگرال استفاده می‌شود و همیشه یک حرف s را زیر علامت انتگرال قرار می‌دهیم تا کیفیت سطحی بودن آن را مشخص کند هر چند که در واقع احتیاجی به این کار نیست، چه دیرانسیل $d\bar{S}$ خود به خود مشخص انتگرال سطحی است. رسم دیگر، گذاشتن یک دایره کوچک روی خود علامت انتگرال است که نشان می‌دهد انتگرال گیری می‌بایست روی سطحی بسته انجام شود. چنین سطحی را اغلب سطح گاوسی می‌گویند. به این ترتیب، بیان ریاضی قانون گاوس چنین است:

$$\Psi = \oint_s \bar{D}_s \cdot d\bar{S} = \text{بار محصور} = Q$$

بار محصور ممکن است از چندین بار نقطه‌ای تشکیل شده باشد که در این


حالت،

 $Q = \sum Q_n$

یا از یک بار خطی،

 $Q = \int \rho_L dL$

یا از یک بار سطحی،

 $Q = \int_s \rho_s dS$

یا باری که در حجمی توزیع شده باشد

$$Q = \int_{\text{حجم}} \rho \, dv$$

معمولاً از آخرین شکل استفاده می‌شود و اکنون توافق می‌کنیم که این رابطه نماینده هر نوع، یا تمام انواع دیگر توزیع بار باشد. با این توافق قانون گاوس را بر حسب توزیع بار می‌توان به این صورت نوشت:

$$\oint_S \vec{D}_s \cdot d\vec{S} = \int_{\text{حجم}} \rho \, dv \quad (1)$$

و معنی این بیان ریاضی چیزی نیست جز این که مجموع شار الکتریکی که از هر سطح بسته عبور می‌کند مساوی بار محصور شده در آن سطح است.

برای تشریح کاربرد قانون گاوس، نتایج تجربه فارادی را امتحان می‌کنیم، به این ترتیب که یک بار نقطه‌ای را در مبدأ دستگاه مختصاتی کروی قرار می‌دهیم (شکل ۳.۳) و کره‌ای به شعاع a را سطح بسته خود انتخاب می‌کنیم. شدت میدان الکتریکی بار نقطه‌ای به این صورت محاسبه شده است:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{a}_r$$

و چون،

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

مانند سابق خواهیم داشت،

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{a}_r$$

در سطح کره،

$$\vec{D}_s = \frac{Q}{4\pi a^2} \vec{a}_r$$

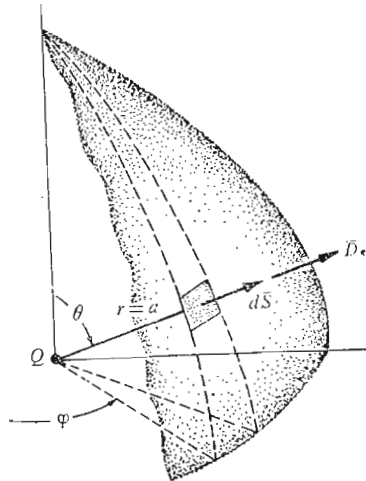
عنصر دفرانسیلی مساحت روی یک سطح کروی در مختصات کروی طبق فصل ۱ عبارتست از:

$$dS = r^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta = a^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta$$

یا

$$d\vec{S} = a^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, \vec{a}_r$$

و تابع زیر علامت انتگرال مساویست با:



شکل ۳.۳ کاربرد قانون گاوس در مورد میدان بار نقطه‌ای Q روی یک سطح کره‌ای بسته به شعاع a ، D در همه جا بر سطح کره عمود است و اندازه آن در هر نقطه روی سطح کره ثابت است.

$$\vec{D}_s \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi a^2} a^2 \sin \theta d\varphi d\theta \quad \vec{a}_r \cdot \vec{a}_r = \frac{Q}{4\pi} \sin \theta d\varphi d\theta$$

که به انتگرال سطح بسته زیر منجر می‌شود.

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin \theta d\varphi d\theta$$

که در آن حدود انتگرال طوری انتخاب شده‌اند که انتگرال گیری فقط یک بار روی تمام سطح کره انجام شود. نتیجه محاسبه انتگرال چنین است:

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin \theta 2\pi d\theta = \frac{Q}{2} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = Q$$

نتیجه بدست آمده نشان می‌دهد که همان‌گونه که انتظار می‌رفت Q کولن شار الکتریکی از سطح عبور می‌کند، زیرا بار محصور Q کولن است. قسمت زیر شامل

۱. باید توجه کرد که اگر θ و φ هر دو از ۰ تا 2π تغییر کنند، سطح کره دو بار طی می‌شود.

مثالهایی از موارد استعمال قانون گاوس برای حل تمرینهایی با تقارن ساده هندسی به منظور محاسبه شدت میدان الکتریکی است.

تمرین ۲.۳

مطلوب است شار الکتریکی کلی که از سطح کروی $r = 10$ خارج می شود در صورتی که توزیع کامل بار به صورت های زیر باشد: (الف) یک بار خطی غیر یکنواخت روی محور z ، به چگالی C/m $\rho_L = 2e^{2|z|}$ برای $-2 \leq z \leq 2$ و $\rho_L = 0$ در جاهای دیگر. (ب) بار سطحی غیر یکنواخت روی صفحه $z = 0$ ، به چگالی C/m^2 $\rho_s = 20e^{-4z}$ برای $0 \leq r \leq 2$ و $\rho_s = 0$ در جاهای دیگر
جوابها: $1072C$ و $783C$

تمرین ۳.۳

بارکل موجود در داخل استوانه $r = 3$ و $-2 \leq z \leq 2$ را وقتی \bar{D} مقادیر زیر را اختیار کند بدست آورید:

$$\left(\frac{20}{r}\right)\left(\frac{z}{|z|}\right) \bar{a}_z \text{ C/m}^2 \quad \text{(الف)}$$

$$5z^2 \sin \frac{1}{4} \varphi \bar{a}_r \text{ C/m}^2 \quad \text{(ب)}$$

جوابها: $754C$ و $320C$

۳.۳ کاربرد قانون گاوس: چند نوع توزیع متقارن بار

حال بررسی می کنیم که اگر توزیع بار معلوم باشد چگونه می توان از قانون گاوس،

$$Q = \oint_s \bar{D}_s \cdot d\bar{S}$$

برای محاسبه \bar{D}_s استفاده کرد. این نمونه ای از یک معادله انتگرالی است که در آن کمیت نامعلومی، که می بایست معین گردد، زیر علامت انتگرال ظاهر می شود.
حل این معادله به شرطی آسان است که بتوانیم سطح بسته ای انتخاب کنیم که دو شرط زیر را ارضاء کند:

۱- \bar{D}_s در همه جا یا بر سطح بسته عمود یا بر آن مماس باشد بطوری که $\bar{D}_s \cdot d\bar{S}$ به ترتیب $D_s dS$ ، یا صفر باشد.

۲) در بخشی از سطح بسته که $\vec{D}_s \cdot d\vec{S}$ صفر نیست، D_s ثابت باشد. این شرایط به ما اجازه می‌دهند که به جای حاصلضرب داخلی، حاصلضرب شمارواره‌های D_s و dS را بنویسیم و سپس D_s را از زیر علامت انتگرال خارج کنیم. در این صورت انتگرال باقیمانده، $\int_S dS$ روی قسمتی از سطح بسته است که \vec{D}_s بر آن عمود است و واضح است که انتگرال مساوی مساحت این قسمت از سطح بسته خواهد شد.

تنها علم به تقارن مسأله به ما اجازه می‌دهد که چنین سطح بسته‌ای را انتخاب کنیم و اگر به یادآوریم که شدت میدان الکتریکی ناشی از یک بار نقطه‌ای مثبت بطور شعاعی از آن بار به‌خارج متوجه است این آگاهی به‌سهولت حاصل می‌شود. مجدداً باری نقطه‌ای مانند Q را در مبدأ مختصات کروی در نظر می‌گیریم و سطح بسته مناسبی را، که متضمن دو شرط بالا باشد انتخاب می‌کنیم. بدیهی است که چنین سطحی، سطحی کروی به مرکز مبدأ و با شعاع دلخواه r است. \vec{D}_s در همه جا بر سطح عمود است و مقدار D_s در هر نقطه از سطح ثابت است. بنا بر این به ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Q &= \oint_S \vec{D}_s \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{کر}} D_s dS \\ &= D_s \oint_{\text{کر}} dS = D_s \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= 4\pi r^2 D_s \end{aligned}$$

از اینرو

$$D_s = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

چون r می‌تواند هر مقدار دلخواهی اختیار کند و نظر به اینکه \vec{D}_s به‌طور شعاعی به‌خارج متوجه است،

$$\boxed{\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{a}_r \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{a}_r}$$

که با نتایج بدست آمده در فصل ۲ مطابقت می‌کند. مثال فوق یک حالت خاص است و می‌توانیم خرده بگیریم که برای بدست آوردن جواب مسأله لازم بود که ابتدا تقارن میدان و جهت شعاعی آن را به‌خارج بدانیم. این موضوع درست است، و به این ترتیب را بطله قانون عکس مربع فاصله، به‌صورت تنها راه امتحانی می‌ماند که از

قانون گاوس بدست می آید. در هر صورت، مثال فوق برای بیان روش حل مسائل دیگری، از جمله چند مسأله ای که نمی توان از راه قانون کولن حل کرد، مفید است. آیا سطوح دیگری وجود دارند که دو شرط بالا را ا قناع کنند؟ دانشجو می بایست خود قانع شود که سطوح ساده ای مانند مکعب یا استوانه واجد این شرایط نیستند.

به عنوان دومین مثال، باری خطی با توزیع یکنواخت با چگالی ρ_L را در امتداد محور z دوباره در نظر می گیریم، که از $-\infty$ تا $+\infty$ ادامه دارد. ابتدا می بایست راجع به تقارن میدان تحقیق کنیم و اطلاعات ما هنگامی کامل است که به دو سؤال زیر پاسخ داده باشیم.

- ۱- میدان با چه مختصاتی تغییر می کند (یا D تابع چه متغیرهایی است)؟
- ۲- چه مؤلفه هایی از \vec{D} وجود دارند؟

همین سؤالا در بخش (۵.۲)، هنگامی که از قانون کولن برای حل این مسأله استفاده می کردیم مطرح بود و متوجه شدیم که اطلاعات حاصل از جواب دادن به آنها در تسهیل عمل انتگرال گیری بسیار مؤثر است. در آنجا می توانستیم مسأله را بی در نظر گرفتن تقارن حل کنیم (و این کار را هم کردیم) اما این کار مشکلتر بود.

اما در مورد استفاده از قانون گاوس مسأله این نیست که از تقارن برای ساده کردن حل استفاده کنیم، زیرا کاربرد قانون گاوس بستگی به وجود تقارن دارد و اگر نتوانیم وجود تقارن را ثابت کنیم نمی توانیم از قانون گاوس برای بدست آوردن راه حل استفاده کنیم. بنا بر این دو سؤال مطرح شده فوق «الزامی» اند.

از بررسیهای قبلی در مورد بار خطی یکنواخت می دانیم که مؤلفه شعاعی \vec{D} تنها مؤلفه موجود است، یا

$$\vec{D} = D_r \vec{a}_r$$

و این مؤلفه فقط به r بستگی دارد،

$$D_r = f(r)$$

بدین ترتیب انتخاب يك سطح بسته آسان است، زیرا سطح استوانه ای تنها سطحی است که D_r در همه جا بر آن عمود است و با دو صفحه عمود بر محور z بسته می شود. شکل ۴.۳ يك استوانه مدور بسته قائم به شعاع r از $z = 0$ تا $z = L$ را نشان می دهد.

با استفاده از قانون گاوس،

$$Q = \oint_{\text{استوانه}} \vec{D}_s \cdot d\vec{S} = D_s \int_{\text{سطح جایی}} dS + \circ \int_{\text{سطح فوقانی}} dS + \circ \int_{\text{سطح تحتانی}} dS$$

$$= D_s \int_{z=0}^L \int_{\varphi=0}^{2\pi} r \, d\varphi \, dz = D_s \, 2\pi r L$$

و در نتیجه

$$D_s = D_r = \frac{Q}{2\pi r L}$$

مجموع بار محصور بر حسب چگالی بار ρ_L مساوی است با

$$Q = \rho_L L$$

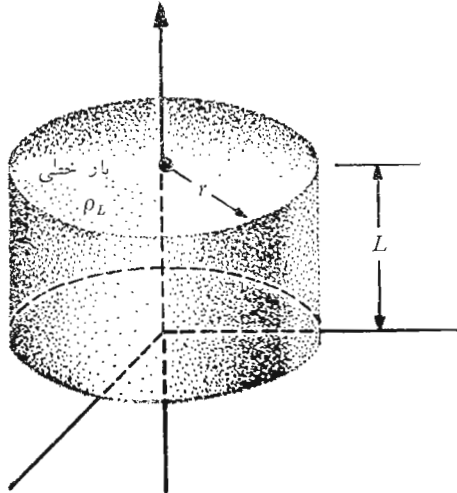
از آنجا

$$D_r = \frac{\rho_L}{2\pi r}$$

یا

$$E_r = \frac{\rho_L}{2\pi \epsilon_0 r}$$

مقایسه با معادله (۲) بخش (۵.۲) نشان می‌دهد که نتیجه صحیح بدست



شکل ۴.۳ سطح گاوسی برای یک بار خطی نامحدود، استوانه مدور راستی است به طول L و شعاع r . \bar{D} از لحاظ اندازه ثابت و در همه جا بر سطح استوانه عمود است. با دو سطح فوقانی و تحتانی موازی است.

آماده است و با کار بسیار کمتری. هنگامی که سطح مناسب انتخاب شد، عمل انتگرال گیری معمولاً فقط به نوشتن مساحت سطحی که \bar{D} بر آن عمود است محدود می شود.

مسئله کابل هم محور تقریباً مشابه مسئله بار خطی است و یک نمونه از مسائلی است که حل آنها از نقطه نظر قانون کولن فوق العاده مشکل است. فرض کنید، دو هادی استوانه ای هم محور، داخلی به شعاع a و خارجی به شعاع b ، هر یک به طول نامحدود، در دست داریم (شکل ۵.۳). چگالی توزیع بار را در سطح خارجی استوانه داخلی ρ_s فرض می کنیم.



شکل ۵.۳ دو هادی استوانه ای هم محور که یک کابل هم محور تشکیل می دهد شار الکتریکی به چگالی $D_r = a \rho_s / r$ بین دو استوانه به وجود می آورند.

با توجه به تقارن می بینیم که تنها مؤلفه D_r وجود دارد و فقط ممکن است تابع r باشد. استوانه مدور قائمی به طول L و شعاع r ، که در آن $a < r < b$ است، الزاماً به عنوان یک سطح گاوسی انتخاب می شود و ما بی زحمتی خواهیم داشت:

$$Q = D_s \ 2\pi rL$$

مجموع بار در طول L از هادی داخلی مساوی است با

$$Q = \int_{z=0}^L \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho_s a \, d\varphi \, dz = 2\pi aL \rho_s$$

که از آن بدست می آوریم

$$D_s = \frac{a\rho_s}{r} \quad \bar{D} = \frac{a\rho_s}{r} \bar{a}_r \quad (a < r < b)$$

این نتیجه را می‌توان برحسب بار در واحد طول بیان کرد، زیرا هادی داخلی در هر متر طول $2\pi a \rho_s$ کولن بار دارد، بنابراین با فرض اینکه $\rho_L = 2\pi a \rho_s$ خواهیم داشت

$$\bar{D} = \frac{\rho_L}{2\pi r} \bar{a}_r$$

و این جواب مشابه نتیجه بدست آمده برای بار خطی نامحدود است. نتیجه در مورد یک کابل همه محور به طول محدود، که هر دو انتهای آن باز باشد نیز قابل استفاده است، به شرط اینکه طول L چندین مرتبه از شعاع b بزرگتر باشد، به طوری که شرایط عدم تقارن دو انتها اثر محسوسی در جواب نداشته باشد. چنین وسیله‌ای را خازن هم محور نیز می‌نامند. کابل هم محور و خازن هم محور هر دو به دفعات در این کتاب مورد بررسی قرار خواهند گرفت. از آنجائی که هر خط شاری که از بار روی استوانه داخلی آغاز می‌شود می‌بایست به یک بار منفی روی سطح داخلی استوانه بیرونی پایان پذیرد، مجموع بار روی این سطح می‌بایست مساوی باشد با

$$Q = \text{استوانه داخلی } \rho_s = -2\pi a L$$

و بار سطحی روی استوانه بیرونی برابر باشد با

$$\rho_s = \text{استوانه بیرونی } \rho_s = -2\pi b L$$

یا

$$\rho_s = \text{استوانه داخلی } \rho_s = -\frac{a}{b}$$

اگر استوانه‌ای به شعاع r ، $r > b$ را به عنوان سطح گاوسی انتخاب کنیم، چه می‌شود؟ در این صورت مجموع بار محصور صفر خواهد بود، چون بارهای روی دو استوانه مساوی و مختلف‌العلامه‌اند. از اینرو

$$0 = D_s \cdot 2\pi r L \quad (r > b)$$

$$D_s = 0 \quad (r > b)$$

اگر $r < a$ نتیجه‌ای مشابه بدست خواهد آمد. به این ترتیب، این کابل یا خازن هم محور هیچ‌گونه میدان خارجی ندارد (ثابت کردیم که استوانه خارجی به منزله «حفاظی» است) و در داخل استوانه مرکزی نیز میدانی موجود نیست.

تمرین ۴.۳

سه لایه بار استوانه‌ای در فضای آزاد به ترتیب زیر وجود دارند:

$$r = 5 \text{ در } \rho_s = 5, \quad r = 2 \text{ در } \rho_s = -2, \quad r = 4 \text{ در } \rho_s = -3 \text{ در } r = 5$$

\bar{D} را در سطوح زیر بدست آورید:

(الف) $r = 1$ و (ب) $r = 3$ و (پ) $r = 4.5$ و (ت) $r = 6$

جوابها: 0 و $\bar{a}_r/3$ و 10 و $4\bar{a}_r/9$ و $4\bar{a}_r/6$ و 13

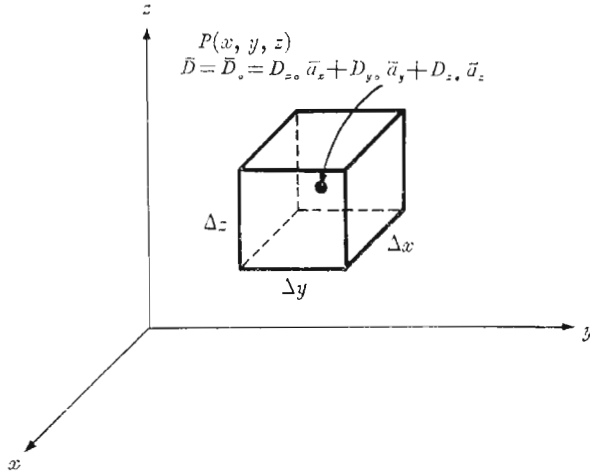
۴.۳ کاربرد قانون گاوس: عنصر حجم دیفرانسیلی

اکنون می‌خواهیم روشهای قانون گاوس را در مورد نوعی مسئله کمی متفاوت بکار ببریم که در آن هیچ گونه تقارن وجود ندارد. در نظر اول ممکن است وضع مایوس کننده بنماید، زیرا بی وجود تقارن نمی‌توان یک سطح ساده گاوسی طوری انتخاب کرد که مؤلفه قائم \bar{D} در هر نقطه از سطح ثابت یا صفر باشد، و بی چنین سطحی انتهای کار را نمی‌توان حساب کرد. تنها یک راه برای اجتناب از این مشکلات وجود دارد و آن اینست که سطح بسته را آنقدر کوچک انتخاب کنیم که \bar{D} تقریباً در تمام آن ثابت باشد و تغییرات جزئی D را می‌توان با دو جمله اول بسط سری تیلور آن با دقت کافی نمایش داد. هراندازه حجم محصور در سطح گاوسی کمتر شود نتیجه دقیق‌تر خواهد بود بطوری که وقتی در حد این حجم به صفر میل کند نتیجه کاملاً درست است.

تفاوت دیگری که این مثال با مثالهای قبلی دارد اینست که در اینجا مقدار \bar{D} را به عنوان جواب پیدا نخواهیم کرد، بلکه بجای آن اطلاعات بسیار با ارزشی درباره نحوه تغییرات D در ناحیه سطح کوچکمان بدست خواهیم آورد و این ما را مستقیماً به یکی از چهار معادله ماکسول، که در تمام نظریه الکترومغناطیس جنبه اساسی دارند هدایت می‌کند.

نقطه دلخواهی مانند P ، که در شکل ۴.۳ دیده می‌شود، و توسط دستگاه مختصات قائمی مشخص می‌گردد، در نظر می‌گیریم. مقدار \bar{D} در نقطه P را می‌توان با مؤلفه‌های قائم بیان کرد $\bar{D}_0 = D_{x_0} \bar{a}_x + D_{y_0} \bar{a}_y + D_{z_0} \bar{a}_z$. سطح جعبه‌ای شکل مکعب مستطیل کوچکی به مرکز P و به اضلاع Δx و Δy و Δz را به عنوان سطح بسته خود انتخاب و قانون گاوس را بکار می‌بریم،

$$\oint \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q$$



شکل ۶.۳ از یک سطح گاوسی حول نقطه P با ابعاد دیفرانسیل برای بررسی میزان تغییر فضائی \bar{D} در حوالی P استفاده می‌شود.

برای محاسبه انتگرال فوق روی سطح بسته باید آن را به شش انتگرال تجزیه کنیم؛ هر انتگرال روی یکی از وجوه:

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = \int_{\text{بایین}} + \int_{\text{بالا}} + \int_{\text{راست}} + \int_{\text{چپ}} + \int_{\text{پشت}} + \int_{\text{روبرو}}$$

ابتدا انتگرال اول را به تفصیل بررسی می‌کنیم. نظر به اینکه عنصر سطح بسیار کوچک است، \bar{D} (بر روی این قسمت از تمام سطح بسته) اساساً ثابت است و

$$\begin{aligned} \int_{\text{روبرو}} &\simeq \bar{D}_{\text{روبرو}} \cdot \Delta\bar{S}_{\text{روبرو}} \\ &\simeq \bar{D}_{\text{روبرو}} \cdot \Delta y \Delta z \bar{a}_x \\ &\simeq D_{x\text{روبرو}} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

که در آن فقط می‌بایست مقدار تقریبی D_x را در سطح روبرویی معین کنیم. سطح روبرویی به فاصله $\Delta x/2$ از نقطه P واقع است، از اینرو

$$D_{x\text{روبرو}} \simeq D_{x_0} + \frac{\Delta x}{2} \times (\text{برحسب } x)$$

$$\simeq D_{x_0} + \frac{\Delta x}{\gamma} \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

که در آن D_{x_0} مقدار D_x در نقطه P است و از آنجا که D_x بطور کلی با y و z نیز تغییر می‌کند، باید میزان تغییر D_x بر حسب x را با استفاده از یک مشتق نسبی بیان کرد. این رابطه را ممکن بود به وضع آشکارتری با استفاده از جمله ثابت و جمله شامل مشتق اول بسط تیلور بر حسب D_x در حوالی P بدست آورد. بنا براین

$$\int_{\text{روبرو}} \simeq \left(D_{x_0} + \frac{\Delta x}{\gamma} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

اکنون انتگرال روی سطح پشتی مکعب مستطیل را در نظر می‌گیریم،

$$\begin{aligned} \int_{\text{پشت}} &\simeq \bar{D}_{\text{پشت}} \cdot \Delta \bar{S} \\ &\simeq \bar{D}_{\text{پشت}} \cdot (-\Delta y \Delta z \bar{a}_x) \\ &\simeq -D_{x \text{پشت}} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

و

$$D_{x \text{پشت}} \simeq D_{x_0} - \frac{\Delta x}{\gamma} \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

و در نتیجه

$$\int_{\text{پشت}} \simeq \left(-D_{x_0} + \frac{\Delta x}{\gamma} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

با ترکیب دو انتگرال

$$\int_{\text{روبرو}} + \int_{\text{پشت}} \simeq \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

پس از عملیاتی کاملاً شبیه به عملیات بالا می‌بینیم که،

$$\int_{\text{داست}} + \int_{\text{چپ}} \simeq \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

و

$$\int_{\text{بالا}} + \int_{\text{پائین}} \simeq \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

و با جمع‌آوری این نتایج،

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \simeq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

یا،

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \simeq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta v \quad (1)$$

رابطه فوق تقریبی است و مقدار فوق هسرا اندازه Δv کوچکتر باشد به واقعیت نزدیکتر می گردد و ما در بخش آینده حجم Δv را به سوی صفر میل خواهیم داد. در حال حاضر، با استفاده از قانون گاوس در مورد يك سطح بسته با حجم محصور Δv رابطه تقریبی (۱) را بدست آورده ایم، که نشان می دهد،

$$\Delta v \text{ حجم بار محصور در حجم } \Delta v \simeq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \times \Delta v \text{ حجم}$$

به عنوان مثال، اگر $\vec{D} = e^{-x} \sin y \vec{a}_x - e^{-x} \cos y \vec{a}_y + 2z \vec{a}_z$ می بینیم که،

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = -e^{-x} \sin y$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} = e^{-x} \sin y$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 2$$

برای مثال اگر این جمله ها را در مبدأ اضافه کنیم، خواهیم دید که بار محصور در يك عنصر كوچك حجم در آنجا می بایست تقریباً مساوی $2\Delta v$ باشد. اگر $\Delta v = 10^{-9} \text{ m}^3$ ، بار محصور 2 nC خواهد بود.

تمرین ۵.۳

فرض کنید $\vec{D} = 2xyz^2 \vec{a}_x + x^2z^2 \vec{a}_y + 3x^2y z^2 \vec{a}_z \text{ C/m}^2$ و مقدار تقریبی بار کل داخل يك حجم كوچك 10^{-12} m^3 را در نقاط و حالت های زیر بدست آورید. (الف) $P_1(1, 2, 3)$ ، اگر عنصر حجم کروی باشد و (ب) $P_2(2, 2, 2)$ ، اگر عنصر حجم به شکلی شبیه يك جسم بیست سطحی با قاعده باشد.

جوابها: 144 pC و 128 pC

۵.۳ دیورژانس

اکنون با میل دادن Δv به سمت صفر را ببطء دقیقی از معادله (۱) بخش (۴.۳) بدست خواهیم آورد. این معادله را می‌توانیم بصورت زیر بنویسیم،

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \approx \frac{\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{S}}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$$

یا بصورت حد

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta v}$$

که در آن علامت تساوی جایگزین علامت تقریب شده است. روشن است که جمله آخر چگالی بار حجمی ρ است، و بدین ترتیب،

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{S}}{\Delta v} = \rho \quad (1)$$

اطلاعاتی که این معادله در بر دارد بیش از آن است که بتوانیم یکباره مورد بحث قرار دهیم، از این روان را بصورت دو معادله جدا می‌نویسیم،

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{S}}{\Delta v} \quad (2)$$

و نیز،

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \quad (3)$$

که رابطه (۳) را برای بحث در بخش بعدی کنار می‌گذاریم. معادله (۲) به چگالی بار ρ بستگی ندارد و روش بخش قبل را می‌توانستیم در مورد هر برداری مانند \bar{A} برای محاسبه $\oint_s \bar{A} \cdot d\bar{S}$ در یک سطح بسته کوچک بکار بریم. که به این نتیجه می‌رسید،

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_s \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta v} \quad (۴)$$

که در آن \vec{A} ممکن است نمایش دهندهٔ سرعت یا گرادیان درجهٔ حرارت یا نیرو یا هر میدان برداری دیگر باشد.

این عمل در بررسیهای فیزیکی قرن گذشته چنان به کرات ظاهر شده که اصطلاح دیورژانس را به خود گرفت. دیورژانس بردار \vec{A} طبق تعریف، بصورت زیر است:

$$\boxed{\vec{A} = \text{div } \vec{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_s \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta v}} \quad (۵)$$

که به اختصار آن را $\text{div } \vec{A}$ می‌نویسند. تعبیر فیزیکی دیورژانس يك بردار با شرح دقیق عملیاتی که در سمت راست معادلهٔ (۵) نهفته است بدست می‌آید. برای تسهیل تعبیر فیزیکی، \vec{A} را به‌عنوان برداری از خانوادهٔ چگالی شار در نظر می‌گیریم.

دیورژانس بردار چگالی شار \vec{A} جریان شاری است که در واحد حجم از يك سطح بسته کوچک وقتی که حجم به سمت صفر میل کند خارج می‌شود. این تعبیر فیزیکی دیورژانس اغلب در بدست آوردن اطلاعات کیفی دربارهٔ دیورژانس میدان برداری بی‌دست زدن به تحقیقات ریاضی به ما کمک می‌کند. برای مثال دیورژانس سرعت آب را در يك وان حمام بعد از گشودن منفذ فاضل آب آن در نظر می‌گیریم. برآیند جریان آب برای هر سطح بسته‌ای که کاملاً در داخل آب قرار داشته باشد صفر خواهد بود چه آب اساساً غیر قابل تراکم است و مقدار آبی که از نواحی مختلف سطح بسته وارد و خارج می‌شود مساوی است. از این رو دیورژانس این سرعت صفر است.

اما چنانچه سرعت جریان هوا را در يك لاستیک توئی، که تازه توسط میخی پنچر شده است، در نظر بگیریم، می‌بینیم که با کاهش فشار هوا منسب می‌شود و از این رو از يك سطح بسته در داخل لاستیک توئی مقداری هوا خارج می‌شود، دیورژانس این سرعت از صفر بزرگتر است.

دیورژانس مثبت هر کمیت برداری نشان وجود منبعی از آن کمیت در آن نقطه است و به‌همین ترتیب دیورژانس منفی نمایش يك چاله در همان نقطه است. از آنجائی که دیورژانس سرعت آب در مثال فوق صفر است، می‌توان گفت که در داخل

آب منبع یا چاله‌ای وجود ندارد. در هر صورت، انبساط هوا باعث ایجاد دیورژانس مثبت سرعت می‌شود و می‌توان هر نقطه داخلی را یک منبع به شمار آورد. رابطه (۴) را می‌توانیم با اصطلاح دیورژانس به این صورت بنویسیم،

$$\text{div } \bar{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (۶)$$

این رابطه نیز به شکلی است که به چگالی بار بستگی ندارد و نتیجه کاربرد تعریف دیورژانس یعنی رابطه (۵) در مورد یک عنصر حجم دیفرانسیلی در دستگاه مختصات قائم است.

چنانچه یک حجم دیفرانسیل واحد $r dr d\varphi dz$ در مختصات استوانه‌ای یا $r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ در مختصات کروی انتخاب شده بود، روابطی برای دیورژانس بدست می‌آید که شامل مؤلفه‌های بردار در آن دستگاه مختصات و مشتقاتی نسبی، نسبت به متغیرهای آن دستگاه می‌بود. این روابط در ضمیمه (الف) بدست آمده‌اند و ما آنها را به مناسبت در اینجا نقل می‌کنیم:

$$\text{div } \bar{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (\text{مختصات قائم}) \quad (۶)$$

$$\text{div } \bar{D} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (\text{مختصات استوانه‌ای}) \quad (۷)$$

$$\text{div } \bar{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} \quad (\text{مختصات کروی}) \quad (۸)$$

۱. اگر یک عنصر دیفرانسیلی حجم درون آب انتخاب کنیم، تنزل تدریجی سطح آب نسبت به زمان باعث می‌شود که عنصر حجم سرانجام در بالای سطح آب قرار بگیرد. در لحظه‌ای که سطح آب عنصر حجم را قطع کند، دیورژانس مثبت و عنصر حجم کوچک به منبع تبدیل می‌شود. با انتخاب نقطه در داخل آب از بروز این اشکال اجتناب شده است.

این روابط برای سهولت مراجعه در آستر بدرقه کتاب نیز درج شده است. در اینجا باید متذکر شد که گرچه دیورژانس عملی است که بر روی برداری انجام داده می‌شود، ولی نتیجه این عمل یک مقدار شمارواره‌ای (اسکالر) است. یادآور می‌شویم که حاصلضرب داخلی یا شمارواره‌ای (اسکالر) نیز که بر روی دو بردار انجام داده می‌شود یک مقدار اسکالر بود.

معلوم نیست به چه سبب نوآموزان عموماً به هنگام نخستین برخورد با مفهوم دیورژانس مرتکب این اشتباه می‌شوند و با همراه کردن بردارهای واحد با مشتقاتی نسبی به آن کیفیت برداری می‌دهند. دیورژانس فقط مشخص می‌کند که چه اندازه خطوط شار بر حسب واحد حجم از یک حجم کوچک خارج می‌شود و هیچ جهتی به آن وابسته نیست.

تمرین ۶.۳

دیورژانس یک بردار \vec{D} را که بصورت‌های زیر مفروض است، در نقطه $x = 1/2$ روی محور x بدست آورید.

$$\vec{D} = e^{-3x} e^{-4y} e^{-5z} (6 \vec{a}_x + 8 \vec{a}_y + 10 \vec{a}_z) \quad (\text{الف})$$

$$(1/r) \vec{a}_r \quad (\text{ب (استوانه‌ای)}) \quad (1/r^2) \vec{a}_r \quad (\text{ب (کروی)}) \quad (\text{ب (کروی)})$$

جوابها : ۲۲۳ - ۸۹ - ۴۹

۶.۳ معادله اول ماکسول (الکتریسیته ساکن)

اکنون می‌خواهیم نتایج حاصل از دو بخش گذشته را مستحکم کنیم و تعبیری برای دیورژانس چنانکه با چگالی شار الکتریکی مربوط می‌شود ارائه کنیم. روابطی را که در قسمتهای قبل بدست آوردیم می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\text{div} \vec{D} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\Delta v} \quad (1)$$

$$\text{div} \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (2)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad (3)$$

رابطه اول تعریف دیورژانس و رابطه دوم نتیجه کاربرد این تعریف در مورد یک عنصر حجم دیفرانسیلی در مختصات قائم است که به رابطه‌ای منجر می‌شود که به کمک آن می‌توانیم دیورژانس برداری را که در مختصات قائم مشخص شده است محاسبه کنیم

و معادله سوم چیزی نیست جز همان رابطه (۳) بخش گذشته که با استفاده از اصطلاح جدید $\text{div } \bar{D}$ نوشته شده است. معادله (۳)، در صورتی که با مفهوم دیورژانس چنانکه توسط رابطه (۱) تعریف شده است اندک آشنائی داشته باشیم نتیجه‌ای بدیهی است، زیرا با توجه به قانون گاوس،

$$\oint \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q$$

و برحسب واحد حجم، داریم،

$$\frac{\oint \bar{D} \cdot d\bar{S}}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$$

و هنگامی که حجم به سوی صفر میل می‌کند، داریم،

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{D} \cdot d\bar{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta v}$$

سمت چپ رابطه فوق $\text{div } \bar{D}$ و سمت راست آن چگالی بار حجمی است،

$$\boxed{\text{div } \bar{D} = \rho}$$

این اولین از چهار معادله ما کسول در مورد الکتریسیته ساکن و میدانهای مغناطیسی پایدار است و مشخص می‌کند که شار الکتریکی برحسب واحد حجم که از یک حجم خیلی کوچک متمایل به صفر خارج می‌شود دقیقاً با چگالی بار حجمی در آن نقطه مساوی است. معادله (۳) را به همین مناسبت شکل نقطه‌ای قانون گاوس می‌نامند. قانون گاوس شار خارج شده از هر سطح بسته را با بارمحصور در آن سطح مربوط می‌کند و معادله ما کسول همین رابطه را براساس واحد حجم برای یک حجم بسیار کوچک متمایل به صفر یا در یک نقطه مشخص می‌سازد. با توجه به اینکه دیورژانس را می‌توان بصورت مجموع سه مشتق‌نسی بیان داشت، معادله اول ما کسول را شکل معادله دیفرانسیلی قانون گاوس هم می‌نامند و بعکس قانون گاوس شکل انتگرالی معادله اول ما کسول شناخته می‌شود.

به عنوان یک مثال خاص، دیورژانس \bar{D} را در حوزه اطراف یک بار خطی (نه روی خود بار خطی) بطور کیفی بررسی می‌کنیم. در هر ناحیه بسته کوچک تعداد خطوط شار الکتریکی وارد شونده و خارج شونده برابر است، زیرا در داخل این ناحیه هیچ باری که یک خط شار به آن ختم شود وجود ندارد و از این رو دیورژانس \bar{D} می‌بایست صفر باشد. در هر نقطه از فضای اطراف این بار خطی مجزاً

$\text{div } \bar{D} = 0$ (اگر نقطه‌ای را روی خود بار خطی انتخاب کنیم، مشاهده می‌کنیم که $\text{div } \bar{D}$ بی‌نهایت می‌شود، زیرا چگالی بار حجمی بی‌نهایت است، به عبارت دیگر، بار خطی دارای مقدار معینی بار است ولی حجم آن صفر است). اثبات ساده ریاضی صفر بودن دیورژانس قسمتی از مسأله ۲۳ است.

دیورژانس فقط به چگالی شار الکتریکی محدود نمی‌شود بلکه می‌توان آن را در مورد هر میدان برداری دیگری بکار برد. در فصلهای آینده، آن را در مورد چند میدان الکترومغناطیسی دیگر بکار خواهیم برد.

تمرین ۷.۳

مطلوبست توزیع چگالی بار حجمی ρ که يك میدان \bar{D} در مختصات کروی بصورت‌های زیر ایجاد می‌کند:

$$(a) \quad (\bar{a}_\varphi \sin \varphi) / (r \sin \theta) \quad (\text{الف})$$

$$(b) \quad (\bar{a}_\theta \cos \theta) / r \quad (\text{ب})$$

جوابها: $(\cos \varphi) / (r^2 \sin^2 \theta)$ و $(\cos \vartheta) / (r^2 \sin \theta)$ و $4r$

۷.۳ اپراتور برداری ∇ و قضیه دیورژانس

اگر دوباره بخاطر آوریم که دیورژانس، درست مانند ضرب داخلی عملی است که روی بردارها صورت می‌گیرد و نتیجه آن کمیتی شمارواره‌ای است، بنظر می‌رسد که می‌بایست بتوانیم عاملی پیدا کنیم که وقتی بطور صوری در بردار \bar{D} ضرب داخلی شود شمارواره زیر حاصل گردد

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

واضح است که این نتیجه با استفاده از ضرب داخلی بدست نمی‌آید، بلکه از عملی شبیه آن حاصل می‌شود.

با توجه به این مطلب اپراتور دل ∇ را با عنوان اپراتوری برداری تعریف

می‌کنیم،

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \bar{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \bar{a}_z$$

(۱)

اپراتورهای شمارواره‌ای مشابهی در چند روش حل معادلات دیفرانسیل ظاهر می‌گردند،

که در آنها اغلب به جای d/dx علامت D و به جای d^2/dx^2 علامت D^2 و غیره^۱ گذاشته می‌شود. با توافق روی تعریف ∇ (تلفظ «دل») می‌توانیم از هر جهت آن را به عنوان یک بردار معمولی بکار ببریم با این اختلاف مهم که به جای حاصلضربهای شمارواره‌ای مشتق‌های نسبی از آن بدست می‌آیند.

حاصلضرب داخلی $\nabla \cdot \bar{D}$ را در نظر می‌گیریم، که برابر است با:

$$\nabla \cdot \bar{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \bar{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \bar{a}_z \right) \cdot (D_x \bar{a}_x + D_y \bar{a}_y + D_z \bar{a}_z)$$

ابتدا حاصلضربهای داخلی بردارهای واحد را با حذف شش جمله صفر انجام می‌دهیم. آنچه باقی می‌ماند،

$$\nabla \cdot \bar{D} = \frac{\partial}{\partial x} (D_x) + \frac{\partial}{\partial y} (D_y) + \frac{\partial}{\partial z} (D_z)$$

که در آن با انجام عمل دیفرانسیل‌گیری پرازنرها را برمی‌داریم:

$$\nabla \cdot \bar{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

که همان دیورژانس \bar{D} است، بطوری که می‌توانیم بنویسیم:

$$\boxed{\text{div } \bar{D} = \nabla \cdot \bar{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}}$$

استعمال $\nabla \cdot \bar{D}$ بسیار متداولتر از $\text{div } \bar{D}$ است، گرچه هر دو نوع دارای مزایایی خاص خودند. با نوشتن $\nabla \cdot \bar{D}$ می‌توانیم بسیار سریع و ساده مشتقات نسبی صحیح را، البته فقط در مختصات قائم همانطور که در زیر نشان داده خواهد شد، بدست آوریم. از طرف دیگر $\text{div } \bar{D}$ یادآور بسیار خوبی برای تعبیر فیزیکی دیورژانس است. از این به بعد برای مشخص کردن عمل دیورژانس از علامت اپراتور $\nabla \cdot \bar{D}$ استفاده خواهیم کرد.

اپراتور برداری ∇ نه فقط برای دیورژانس بکار می‌رود، بلکه در عملیات مهم دیگری نیز، که بعدها بررسی خواهد شد، ظاهر می‌شود، یکی از این موارد ∇u است، که در آن u یک مقدار شمارواره‌ای دلخواه است، و به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \bar{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \bar{a}_z \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{a}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{a}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{a}_z \quad (2)$$

۱. این اپراتور شمارواره‌ای (اسکالر) D را، که دیگر از آن استفاده نخواهیم کرد، نمی‌بایست با چگالی شارالکتریکی اشتباه کرد.

اپراتور ∇ در دیگر دستگاههای مختصات شکل خاصی ندارد، مثلاً اگر \bar{D} را در دستگاه مختصات استوانه‌ای در نظر بگیریم آنوقت $\nabla \cdot \bar{D}$ همچنان دیورژانس \bar{D} را مشخص می‌کند،

$$\nabla \cdot \bar{D} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rD_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

که از رابطهٔ مربوطه در بخش (۵.۳) گرفته شده است و برای اپراتور ∇ شکل خاصی که بتواند ما را در بدست آوردن این مشتقهای نسبی کمک کند نداریم. بدین معنی که ∇u را، که هنوز نامی ندارد اما چنانکه در فوق دیدیم در دستگاه مختصات قائم بسادگی نوشته می‌شود، درحال حاضر نمی‌توانیم در دستگاه مختصات استوانه‌ای بصورت رابطه‌ای بیان کنیم. اما بعد از آنکه ∇u را در فصل ۴ تعریف کردیم، این رابطه را ارائه خواهیم داد.

بحث خود را در مورد دیورژانس با ارائهٔ قضیه‌ای، که در فصلهای بعدی مکرر مورد احتیاج خواهد بود، خاتمه می‌دهیم و آن قضیهٔ دیورژانس است. در واقع، این قضیه را در گذشته بدست آورده بودیم و اکنون کاری نداریم جز آنکه بر آن تأکید کنیم و نامی بر آن بگذاریم، زیرا طبق قانون گاوس،

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q$$

و چون

$$Q = \int_{\text{حجم}} \rho \, dv$$

و نیز

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho$$

پس خواهیم داشت

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q = \int_{\text{حجم}} \rho \, dv = \int_{\text{حجم}} \nabla \cdot \bar{D} \, dv$$

جمله‌های اول و آخر همان قضیهٔ دیورژانس است،

$$Q = \boxed{\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = \int_{\text{حجم}} \nabla \cdot \bar{D} \, dv} \quad (۳)$$

که می‌توان آنرا بصورت زیر بیان کرد:

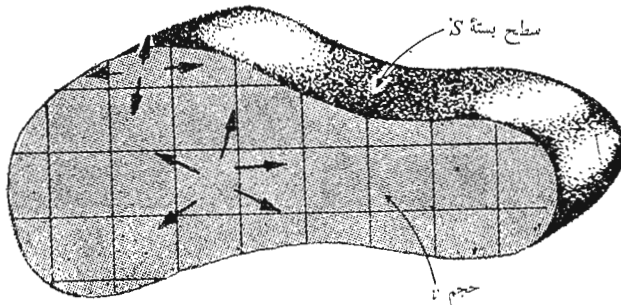
انتگرال مؤلفهٔ عمودی هر میدان برداری بر روی یک سطح بسته مساوی

است با انتگرال دیورژانس این میدان برداری روی حجم محصور توسط این سطح بسته .

باید متذکر شد که قضیه دیورژانس برای هر میدان برداری صادق است، گرچه آن را اختصاصاً برای چگالی شارالکتریکی \vec{D} بدست آوردیم و ما فرصت خواهیم داشت که آن را در مورد میدانهای مختلف دیگر بکار ببریم. فواید این قضیه در این است که انتگرال سه گانه روی یک حجم را به انتگرال مضاعف روی سطح همان حجم تبدیل می کند. به عنوان مثال اگر یک بطری پر از مایعی متلاطم را در نظر بگیریم و بخواهیم به وجود نشی در آن پی ببریم خیلی آسان تر است که سطح آن را بررسی کنیم تا اینکه سرعت مایع را در هر یک از نقاط داخل آن حساب کنیم.

قضیه دیورژانس در صورتی از نظر فیزیکی واضح می شود که حجم V را، که سطح مقطع آن در شکل (۷.۳) نشان داده شده، و توسط سطح بسته S محصور گردیده است در نظر بگیریم و اگر حجم را به تعدادی قسمتهای کوچک با ابعاد دیرانسلی تقسیم کنیم و یک جزء آن را مورد بررسی قرار دهیم می بینیم که شاری که از این جزء بیرون می رود به اجزاء مجاور آن وارد می شود، مگر آنکه این جزء شامل قسمتی از سطح خارجی باشد. خلاصه اینکه دیورژانس چگالی شار در داخل یک حجم منجر به محاسبه برآیند شاری خواهد شد که از سطح بسته عبور می کند.

به عنوان یک امتحان ساده از اعتبار قضیه، میدان $\vec{D} = (3/8)x^3y^2\vec{a}_z$ و سطح مکعبی به ضلع ۴ واحد را در نظر می گیریم که مرکز آن در مبدأ مختصات و یالهای



شکل ۷.۳ بنا به قضیه دیورژانس مجموع شاری که از سطح بسته ای عبور می کند مساوی انتگرال دیورژانس چگالی شار در تمام حجم محصور است. در این شکل مقطع حجم نشان داده شده است.

آن موازی محورها باشد. ابتدا بامحاسبه انتگرال سطحی متوجه می‌شویم که \bar{D} با چهار وجه از ϵ وجه مکعب موازی است و برای دو سطح باقیمانده خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \oint_s \bar{D} \cdot d\bar{S} &= \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \left(\frac{3}{\lambda} \lambda y^2 \bar{a}_x \right) \cdot (dy dz \bar{a}_x) \\ &+ \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \left(-\frac{3}{\lambda} \lambda y^2 \bar{a}_z \right) \cdot (-dy dz \bar{a}_z) \\ &= \int_{-2}^2 16 dz + \int_{-2}^2 16 dz = 128 \end{aligned}$$

از آنجائی که داریم:

$$\nabla \cdot \bar{D} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3}{\lambda} x^2 y^2 \right) = \frac{6}{\lambda} x y^2$$

انتگرال حجمی مساوی می‌شود با

$$\begin{aligned} \int_{\text{حجم}} \nabla \cdot \bar{D} dv &= \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \frac{6}{\lambda} x^2 y^2 dx dy dz \\ &= \frac{6}{\lambda} \times \frac{16}{3} \times \frac{16}{3} \times 4 = 128 \end{aligned}$$

و بدین ترتیب عمل امتحان انجام می‌شود. با یادآوری قانون گاوس مشاهده می‌کنیم که در آنجا نیز ما بارکل داخل مکعب را $128 C$ بدست آورده‌ایم.

تمرین ۸.۳

دو طرف قضیه دیورژانس را برای ناحیه $2 \leq x \leq 2$ ، $-2 \leq y \leq 1$ ، و $-3 \leq z \leq 3$ وقتی $\bar{D} = z \bar{a}_z$ بدست آورید.
جوابها: ۴۸، ۴۸

مراجعی که توصیه می‌شوند

1- Plonsey, R. E. Collin: «Principles and Applications of Electromagnetic Fields,» McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.

این کتاب، از کتاب حاضر دشوارتر است، ولی برای مطالعه بعد از این کتاب بسیار مناسب است. قانون گاوس در فصل دوم این کتاب آمده است.

2- Skilling, H. H.: «Fundamentals of Electric Waves» 2d

ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1948.
 عملیات دیفرانسیل و انتگرال گیری بردار در این کتاب به خوبی تشریح شده اند.
 دیورژانس در صفحات ۲۲ و ۳۸ مورد بحث قرار گرفته است و فصل ۱ برای مطالعه
 جالب توجه است.

3- Thomas, G. B. (به مراجع توصیه شده فصل ۱ مراجعه شود)
 قضیه دیورژانس مورد بحث قرار گرفته است. و از چند منظر در صفحات ۱۰۵-۶۰۵
 تشریح شده است.

مسائل

۱- يك قوطی رنگ فلزی خالی روی میزی که دارای صفحه‌ای شیشه‌ای است قرار دارد.
 در قوطی برداشته می‌شود و هر دو قسمت با تماس آنها به زمین به خوبی از نظر الکتریکی
 تخلیه می‌شوند. يك نخ نایلونی عایق به مرکز در قوطی چسبانده می‌شود هم‌بطنور يك
 سکه يك پنی و يك سکه ده سنتی طوری به نخ چسبانده می‌شوند که با یکدیگر تماس
 نداشته باشند بار $5 \text{ nC} +$ به سکه يك پنی داده می‌شود و سکه ۱۰ سنتی تخلیه
 می‌گردد. سپس هر دو سکه به داخل قوطی طوری آویزان می‌شوند که از بدنه فاصله
 داشته باشند و در قوطی آنها را نگاه دارد. سطح خارجی ظرف مجدداً تخلیه
 می‌شود. این مجموعه با دستکش و ابزار عایق از هم باز می‌شوند. (الف) چه باری
 روی هر يك از چهار قطعه فلزی یافت می‌شود؟ (ب) اگر باری $5 \text{ nC} +$ به سکه يك
 پنی و باری $2 \text{ nC} +$ به سکه ۱۰ سنتی داده می‌شد ترتیب نهایی بار چگونه
 می‌بود؟

۲- اگر يك بار نقطه‌ای 2 C در نقطه $(0, 0, 1)$ و باری خطی به چگالی
 $\rho_L = 3 \text{ C/m}$ روی محور z و باری سطحی به چگالی $\rho_s = 5 \text{ C/m}^2$ در صفحه
 $y = 6.5$ قرار داشته باشند، \vec{D} را در نقطه $(0, 0, 2)$ بدست آورید.

۳- اگر يك بار نقطه‌ای 100 mC در مبدأ مختصات قرار داشته باشد، چه
 مقدار شار الکتریکی از قسمت مشخص شده در زیر سطحی کروی به شعاع واحد، عبور
 می‌کند:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\pi}{5} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad (\text{ب})$$

۴- بار توزیع شده موضوع مسأله ۲ مفروض است. شار الکتریکی کلی را که از

سطوح بسته زیر می‌گذرد بدست آورید: (الف) کره‌ای به شعاع ۴ و به مرکز مبدأ، (ب) استوانه‌ای که محور آن z و شعاع آن ۳ و ارتفاع آن $۹ \leq z \leq ۱$ است. (پ) مکعبی به مرکز $(۰, ۳, ۰)$ با یالهای موازی با محور مختصات و هر ضلع برابر با ۸.

۵- در يك دستگاه مختصات کروی $\rho = \rho_0 (r/a)^{3/2}$ است. (الف) چه مقدار بار در داخل کره $r = a$ قرار دارد؟ (ب) \bar{D} را در $r = a$ بدست آورید.

۶- در يك دستگاه مختصات استوانه‌ای $\rho = \rho_0 (r/a)^{3/2}$ (الف) چه مقدار بار در داخل استوانه $r = a$ و $-a \leq z \leq a$ قرار دارد، (ب) \bar{D} را در $r = a$ و $z = (1/2)a$ بدست آورید.

۷- اگر $\bar{D} = 2xy \bar{a}_x + 3yz \bar{a}_y + 4zx \bar{a}_z$ باشد، چه مقدار شارالکتریکی از قسمتی از صفحه $z = 0$ که برای آن $-1 \leq y \leq 2$ و $0 \leq z \leq 4$ است می‌گذرد؟

۸- بعد از محقق داشتن تقارن، يك سطح گاوسی مناسب با توزیع باری به چگالی $\rho = 0.12x^3 \text{ C/m}^3$ انتخاب و \bar{D} را در نقطه (x_0, y_0, z_0) بدست آورید.

۹- ناحیه $3 \leq z \leq -3$ حامل باری به چگالی یکنواخت 2.5 C/m^3 است. يك سطح گاوسی انتخاب و \bar{D} را در (الف) $z = 4$ و (ب) $z = -4$ و (پ) $z = 2$ و (ت) $z = -2$ بدست آورید:

۱۰- به منظور بدست آوردن مقادیر تقریبی شدت میدان می‌توان سطوح گاوسی را خیلی نزدیک یا خیلی دور از آرایش بار در نظر گرفت. اگر قسمتی از صفحه $z = 0$ که در میان خطوط $x = \pm 1$ و $y = \pm 1$ محصور است در فضای آزاد حامل چگالی بار سطحی $n \text{ C/m}^2$ $1/(1+x^2)$ باشد، يك سطح گاوسی مناسب انتخاب و مقدار تقریبی \bar{E} را در (الف) $(0, 0, 0.1)$ و (ب) $(0, 0, 100)$ بدست آورید.

۱۱- ناحیه کروی $0 \leq r \leq 3$ حامل باری حجمی به چگالی یکنواخت 2 C/m^3 و در $5 \leq r \leq 6$ به چگالی $\rho = -1 \text{ C/m}^3$ است. اگر برای بقیه محلهای $\rho = 0$ باشد، با استفاده از قانون گاوس D_r را در حالات زیر بدست آورید: (الف) $r \leq 3$ و (ب) $3 \leq r \leq 5$ و (پ) $5 \leq r \leq 6$ و (ت) $r \geq 6$.

۱۲- سطوح استوانه‌ای $r = a$ و $r = b$ به ترتیب حامل چگالی بار سطحی ρ_{sa} و ρ_{sb} اند. رابطه لازم بین ρ_{sa} و ρ_{sb} را اگر $\bar{D} = 0$ باشد برای حالات زیر بدست آورید: (الف) $r < a$ و (ب) $a < r < b$ و (پ) $r > b$.

۱۳- اگر چگالی بار حجمی يك دسته اشعه الکترونی که سطح مقطع آن در تمام طول محور ثابت است $30(e^{-3r}/r) \text{ C/m}^3$ باشد، \bar{D} را بدست آورید.

۱۴- لایه‌های کروی باری به شعاعها و چگالیهای زیر داده شده‌اند: 10 C/m^2 در

۲، $r = 4$ C/m^۲ در $r = 4$ و $r = 2$ C/m^۲ -۲ در $\bar{D} \cdot r = 6$ را در تمام نواحی بدست آورید. بار نقطه‌ای در مبدأ مختصات چه مقدار می‌بسیاست باشد تا \bar{D} در $r > 6$ مساوی صفر شود؟

۱۵- با توجه به شکل (۶.۳) فرص می‌کنیم که مختصات نقطه P ، (۵، ۱، ۲) و $D_x = 5x^2y^3z$ باشد. اگر سطح بسته کوچک، مکعبی به ضلع 10^{-2} باشد، دو جمله اول رابطه شار تقریبی که سطح جلویی را ترک می‌کند بدست آورید. نسبت آنها چه اندازه است؟

۱۶- با شروع کار از یک عنصر حجمی کوچک و سطح محیط بر آن در دستگاه مختصات استوانه‌ای نشان دهید که معادله (۷) بخش (۵.۳) صحیح است.

۱۷- اگر

$$\bar{D} = (x + 1)(y + 2)(z + 3)[\bar{a}_x/(x + 1)^2 + \bar{a}_y/(y + 2)^2 + \bar{a}_z/(z + 3)^2] \text{ C/m}^2$$

تقریباً چقدر بار در داخل مکعبی به ضلع ۱ mm و به مرکز مبدأ محصور است؟
۱۸- اگر $G = G(x, y, z)$ ، با استفاده از مختصات قائم ثابت کنید که آیا دیورژانس G ، $G\bar{D}$ برابر دیورژانس \bar{D} هست یا نه.

۱۹- دیورژانس \bar{F} را در مبدأ برای حالات زیر بدست آورید:

$$\bar{F} = x^2y^2z^2\bar{a}_x + 9 \sin y \bar{a}_y + (y + z)\bar{a}_z \quad (\text{الف})$$

$$\bar{F} = x\bar{a}_x + y\bar{a}_y + z\bar{a}_z = \bar{r} \quad (\text{ب})$$

$$\bar{F} = 2r^2(\sin \varphi)\bar{a}_r + 3r^2(\sin \varphi)\bar{a}_\varphi + 7z\bar{a}_z \quad (\text{پ})$$

۲۰- توضیح دهید که آیا دیورژانس میدانهای برداری زیر مثبت، منفی یا صفر است:
(الف) جریان انرژی حرارتی (برحسب ژول بر متر مربع در ثانیه) در داخل نوك يك هویه برقی که تازه به برق وصل شده باشد و (ب) چگالی شار نورانی (برحسب لومن بر متر مربع) در نقطه‌ای بین رشته و شیشه يك لامپ رشته گذاخته و (پ) میزان جریان جرم (برحسب کیلوگرم بر متر مربع در ثانیه) در داخل يك بادکنک ضمن باد شدن و (ت) سرعت سقوط حشره (برحسب حشره بر متر مربع در ثانیه) در يك اطاق مملو از پشه بلافاصله پس از پاشیدن داروی ضد حشره و (ث) چگالی جریان (برحسب آمپر بر متر مربع) در نقطه‌ای در داخل يك دسته اشعه الکترونی جریان ثابت.

۲۱- فرض کنید که در دستگاه مختصات کروی $\bar{D} = D_r \bar{a}_r$ بستگی ρ را به r ، θ و φ توصیف کنید در صورتی که (الف) $D_r = f(\theta, \varphi)$ و (ب) $D_r = (1/r^2)f(\theta, \varphi)$ و (پ) $D_r = f(r)$ باشد.

۲۲- می‌دانیم که $\bar{D} = D_x \bar{a}_x$ و $\nabla \cdot \bar{D} = x + y$ ، جواب عام \bar{D} را بدست آورید.

۲۳- (الف) يك بار خطی یکنواخت به چگالی ρ_L در امتداد محور z قرار دارد.

نشان دهيد که در همه جا مگر در روی بار خطی $\nabla \cdot \bar{D} = 0$ است. (ب) به جای بار خطی بار حجمی یکنواختی به چگالی ρ_0 برای $a \leq r \leq 0$ قرار می‌دهیم. رابطه ρ_0 و ρ_L را طوری بدست آورید که مقدار بار در هر واحد طول تغییری نکند. سپس $\nabla \cdot \bar{D}$ را در همه جا تعیین کنید.

۲۴- (الف) بار نقطه‌ای Q در مبدأ قرار دارد. نشان دهید که در همه جا به استثنای مبدأ $\nabla \cdot \bar{D} = 0$ (ب) به جای Q یک بار حجمی یکنواخت معادل به چگالی ρ_0 به شکل کره‌ای به شعاع a قرار می‌دهیم، رابطه ρ_0 و Q را بدست آورید. $\nabla \cdot \bar{D}$ را در همه جا تعیین کنید.

۲۵- روی سطح $r = a$ باری بطور یکنواخت با چگالی ρ_0 توزیع شده است. در هیچ جای دیگر باری وجود ندارد (به استثنای احتمالاً در بی‌نهایت)، \bar{D} را برای $r < a$ و $r > a$ بدست آورید در صورتی که: (الف) r یکی از مختصات در دستگاه مختصات استوانه‌ای باشد، (ب) r یکی از مختصات در دستگاه مختصات کروی باشد.

۲۶- اگر $\bar{A} = x^2 y \bar{a}_x - 2xz \bar{a}_z$ ، با استفاده از تعریف اپراتور ∇ : (الف) $\nabla \cdot \bar{A}$ و (ب) $\nabla \times \bar{A}$ را حساب کنید.

۲۷- هر دو طرف قضیه دیورژانس را برای میدان $\bar{F} = 2r^2 \bar{a}_r$ در مورد حجمهای زیر بدست آورید:

(الف) کره $r = 3$ و (ب) استوانه $r = 3$ و $z \leq 2$ و $z \geq 0$

۲۸- چه تبدیری در صفحه ۷۸ کتاب

S. Ram, J. R. Whinnery, and T. Van Duzer, «Fields and Waves in Communication Electronics,» John Wiley & Sons., Inc., New York, 1965.

برای کمک به توضیح نظریه شارالکتريکي مورد استفاده قرار گرفته است.

۲۹- از قانون گاوس برای حل مسأله ۲.۳ صفحه کتاب

E. W. Cowan, «Basic Electromagnetism,» Academic Press, New York, 1968.

استفاده کنید.

انرژی و پتانسیل

در دو فصل گذشته با قانون کولن و کار برد آن در تعیین میدان الکتریکی در اطراف چند نوع آرایش ساده بار و نیز قانون گاوس و موارد استعمال آن در محاسبه میدان بارهائی که به طور متقارن توزیع شده بودند آشنا شدیم. دیدیم که استفاده از قانون گاوس برای این توزیعیهای متقارن به مراتب آسانتر است، زیرا مشکل انتگرال گیری با انتخاب يك سطح بسته مناسب از میان می رود.

با این حال هنگامی که می خواستیم میدان الکتریکی کمی پیچیده تری، مانند میدان دوبار نقطه ای غیر مساوی را که به فاصله کمی از هم قرار دارند، پیدا کنیم متوجه می شدیم که انتخاب يك سطح گاوسی مناسب و به دست آوردن جواب میسر نیست. از اینرو قانون کولن توانا تر و برای حل مسائلی که استفاده از قانون گاوس در مورد آنها ممکن نیست مناسبتر است. کاربرد قانون کولن دشوارتر و مفصلتر و اغلب بسیار پیچیده است و دلیل آن این است که شدت میدان الکتریکی، که میدانی برداری است می بایست مستقیماً از روی توزیع بارها محاسبه شود. در این روش به طور کلی به سه انتگرال گیری مختلف، برای هر يك از مؤلفه ها یکبار، احتیاج است و معمولاً تجزیه بردار به مؤلفه های آن بر پیچیدگی انتگرالها می افزاید.

اگر می توانستیم تابعی شمارواره ای (اسکالر) با فقط يك انتگرال که هنوز تعریف نشده است، پیدا کنیم و شدت میدان را با عملیات ساده و صریحی مانند مشتق گیری از این تابع به دست آوریم محققاً کار آسان می شد.

این تابع شمارواره ای (اسکالر) وجود دارد و پتانسیل یا میدان پتانسیل

نامیده و مشاهده خواهیم کرد که دارای تعبیر فیزیکی واقعی است و برای اکثر ما آشنا تر از میدان الکتریکی است که برای محاسبه آن مورد استفاده قرار می گیرد. بدین ترتیب، می توانیم انتظار داشته باشیم که بزودی روش سوم برای محاسبه میدانهای الکتریکی به دست آوریم که شامل فقط یک انتگرال شمارواره ای (اسکالر) و متعاقب آن یک مشتق گیری ساده است. گرچه ممکن است انتگرال مزبور به آن سادگی که دلخواه ما است نباشد. قسمت مشکل باقیمانده از کار، یعنی انتگرال گیری، را نیز در فصل ۷ از میان خواهیم برد.

۱.۴ انرژی مصرف شده در حرکت دادن یک بار نقطه‌ای در یک میدان الکتریکی

شدت میدان الکتریکی در هر نقطه طبق تعریف عبارت از نیروئی بود که بر یک بار آزمایشی واحد در آن نقطه وارد می شود. چنانچه بخواهیم این بار آزمایشی را در خلاف جهت میدان حرکت دهیم، می بایست نیروئی مساوی و مخالف با نیروی میدان بر آن وارد آوریم و این مستلزم صرف انرژی یا انجام دادن کار است. در صورتی که بخواهیم بار را در جهت میدان به حرکت آوریم انرژی مصرفی منفی خواهد شد، یعنی کار را ما انجام نمی دهیم، بلکه میدان انجام می دهد. فرض کنید بخواهیم بار Q را به اندازه dL در میدان الکتریکی \vec{E} حرکت دهیم. نیروی وارد بر Q در اثر میدان مساوی است با

$$\vec{F}_E = Q\vec{E}$$

اندیس نیرو نشان آنست که این نیرو از میدان ناشی می شود و مؤلفه آن در امتداد dL ، که می بایست بر آن غلبه کنیم، مساوی است با

$$F_{EL} = \vec{F}_E \cdot \vec{a}_L = Q\vec{E} \cdot \vec{a}_L$$

که در آن برداری واحد در امتداد dL است.

نیروئی که می بایست اعمال کنیم مساوی و مخالف نیروی حاصل از میدان است،

$$F_{app} = -Q\vec{E} \cdot \vec{a}_L$$

و انرژی مصرف شده حاصلضرب این نیرو در فاصله است. کار دیفرانسیلی انجام شده توسط منبع خارجی برای حرکت دادن Q مساوی است با

$$Q = -Q\vec{E} \cdot \vec{a}_L dL = -Q\vec{E} \cdot d\vec{L}$$

یا

$$\boxed{dW = -Q\vec{E} \cdot d\vec{L}} \quad (۱)$$

که در آن به جای $d\vec{L}$ رابطه ساده تر $\vec{a}_L \cdot d\vec{L}$ را گذاشته ایم. مقدار این کار ديفرانسیلی ممکن است در شرایطی، که توسط فرمول (۱) تعیین می‌شود، صفر باشد. حالت‌های کم اهمیت آنست که \vec{E} و Q یا $d\vec{L}$ صفر و حالت مهمتر اینکه \vec{E} و $d\vec{L}$ برهم عمود باشند و این هنگامی است که بار پیوسته در جهتی عمود بر امتداد میدان حرکت داده می‌شود. بین میدان الکتریکی و میدان ثقل تشابه خوبی وجود دارد زیرا در میدان ثقل نیز باید برای حرکت در جهت مخالف میدان، انرژی صرف کرد. هنگامی که جرمی را با سرعت ثابت روی سطحی ناهموار و بی اصطکاک حرکت دهیم هیچ کاری صورت نمی‌گیرد به شرطی که حرکت روی خط موازی با ارتفاع ثابت صورت گیرد، لیکن وقتی بخواهیم جسم مزبور را به سطحی بالاتر یا پائین تر انتقال دهیم می‌بایست به ترتیب کار مثبت یا منفی انجام دهیم.

برگردیم به موضوع بار در میدان الکتریکی. کار لازم برای حرکت يك بار در يك فاصله محدود توسط انتگرال زیر تعیین می‌شود:

$$\boxed{W = -Q \int_{\text{مبدأ}}^{\text{مقصد}} \vec{E} \cdot d\vec{L}} \quad (۲)$$

و برای محاسبه این انتگرال ابتدا می‌بایست مسیر را مشخص کرد. این انتگرال معین اساس نظریه میدان است و ما بخش بعدی را به توصیف و محاسبه آن اختصاص خواهیم داد.

تمرین ۱.۴

میدان الکتریکی $\vec{E} = 3x^2\vec{a}_x + 2z\vec{a}_y + 2y\vec{a}_z$ V/m داده شده است. با استفاده از رابطه (۱) کار انجام شده برای حرکت دادن بار آزمایشی $20\mu\text{C}$ را در امتداد مسیری ديفرانسیلی به طول 10^{-4} m که دارای جهت $0.6\vec{a}_z - 0.8\vec{a}_y + 0.48\vec{a}_x$ - و در محل: (الف) مبدأ مختصات و (ب) نقطه $(-5, -2, 2)$ قرار گرفته است به دست آورید.

جوابها: ۰ و 18.88 nJ

۴.۲ انتگرال خطی

را بطله انتگرال برای تعیین کار انجام شده برای حرکت دادن بار نقطه‌ای Q از يك نقطه به نقطه دیگر [بخش ۱۰.۴، معادله (۲)] نمونه‌ای از يك انتگرال خطی است که با استفاده از علائم آنالیز برداری همواره به صورت انتگرال حاصلضرب داخلی بردار يك میدان در طول بردار دیفرانسیلی مسیر $d\vec{L}$ در امتداد مسیری معین ظاهر می‌شود. اگر نمی‌خواستیم از آنالیز برداری استفاده کنیم می‌بایست بنویسیم

$$W = -Q \int_{\text{مبدأ}}^{\text{مقصد}} E_L dL$$

که در آن E_L مؤلفه بردار \vec{E} در امتداد $d\vec{L}$ است.

انتگرال خطی شبیه بسیاری انتگرالهای دیگر از جمله انتگرال سطحی قانون گاوس است که در آنالیز عالی به آن برخورد می‌کنیم به این معنی که اساساً توصیفی است. بیشتر ما بلیم به آن نگاه کنیم و کمتر علاقه‌مند به محاسبه آنیم. این انتگرال به ما می‌گوید که می‌بایست مسیری را انتخاب کنیم و آن را به تعداد بسیاری قطعات خطی بسیار کوچک تقسیم کنیم و طول هر يك را در مؤلفه‌ای از میدان که در امتداد آن قرار دارد ضرب کنیم و سپس این نتایج را با هم جمع کنیم. البته این کار يك عمل جمع است و مقدار دقیق انتگرال هنگامی به دست می‌آید که تعداد قطعات خطی به سمت بینهایت میل کند.

شکل ۱۰.۴ این روش را نشان می‌دهد. در این شکل مسیر مورد نظر از نقطه اولیه دلخواه B به نقطه نهائی A انتخاب شده است^۱ و برای سادگی عمل میدان الکتریکی یکنواخت فرض گردیده است. این مسیر به شش قطعه ΔL_1 و ΔL_2 و ... ΔL_6 تقسیم شده است و مؤلفه‌های E در امتداد هر قطعه با E_{L1} تا E_{L6} مشخص گردیده‌اند. در این صورت کار لازم برای حرکت بار Q از B به A تقریباً مساوی است با:

$$W = -Q(E\Delta L_1 + E_{L2} \Delta L_2 + \dots + E_{L6} \Delta L_6)$$

با اگر علائم برداری به کار ببریم،

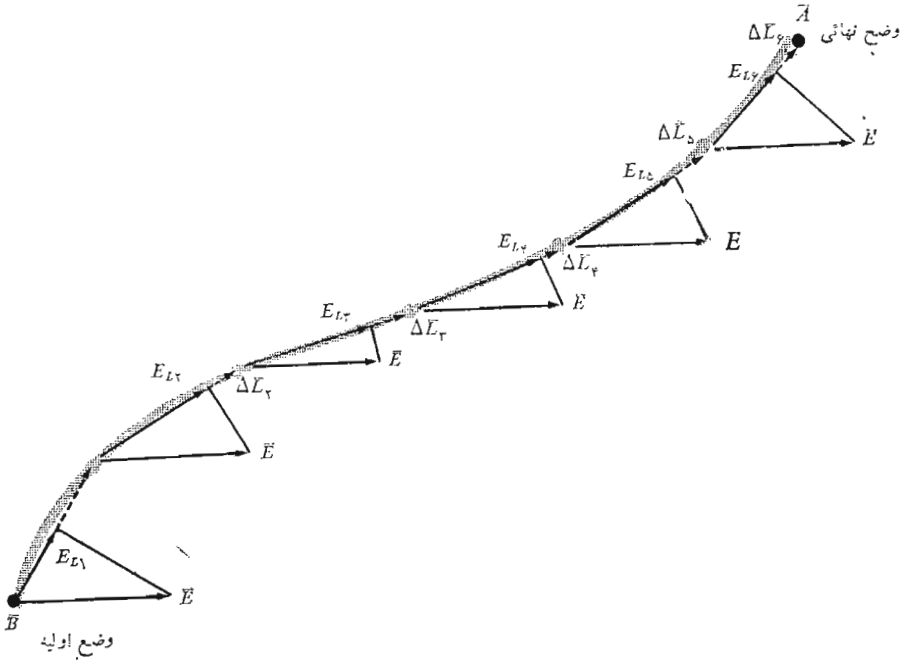
$$W = -Q(\vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{L}_1 + \vec{E}_2 \cdot \Delta \vec{L}_2 + \dots + \vec{E}_6 \cdot \Delta \vec{L}_6)$$

و چون میدان را یکنواخت فرض کرده‌ایم،

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \dots = \vec{E}_6$$

$$W = -Q\vec{E} \cdot (\Delta \vec{L}_1 + \Delta \vec{L}_2 + \dots + \Delta \vec{L}_6)$$

۱. نقطه نهائی A نامیده شده است تا با علامتی که در بحث اختلاف پتانسیل در بخش آینده انتخاب گردیده مطابقت داشته باشد.



شکل ۱۰۴ تعبیر تریسمی یک انتگرال خطی در یک میدان یکنواخت. انتگرال خطی \vec{E} بین دو نقطه A و B حتی در مورد یک میدان غیر یکنواخت به انتخاب مسیر بستگی ندارد. این موضوع به طور کلی برای میدان‌هایی که نسبت به زمان متغیر نصدادق نیست.

حال ببینیم که جمع قطعات برداری محصور در پرانترهای بالا چیست؟ بردارها طبق قانون متوازی‌الاضلاع با هم جمع می‌شوند و نتیجه بردار \vec{L}_{AB} است که از نقطه اولیه B به نقطه نهائی A کشیده شده است. از اینرو

$$W = -QE \cdot \vec{L}_{AB} \quad (1)$$

با در نظر داشتن تعبیر انتگرال خطی بصورت جمع قطعات می‌توان نتیجه بالا را بلافاصله از رابطه انتگرال به دست آورد

$$W = -Q \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{L} \quad (۲)$$

و با توجه به یکنواخت بودن میدان،

$$W = -QE \cdot \int_B^A dL$$

که در آن انتگرال باقیمانده مساوی \vec{L}_{BA} است و در نتیجه

$$W = -QE \cdot \vec{L}_{BA}$$

در این مسأله خاص که شدت میدان الکتریکی یکنواخت است، می‌بینیم که مقدار کار لازم برای حرکت دادن بار فقط به متغیرهای Q و \vec{E} و \vec{L}_{BA} بستگی دارد و \vec{L}_{BA} برداری است که از نقطه اولیه B به نقطه نهائی مسیریجاد شده، یعنی A کشیده شده است و انتگرال فوق به مسیر خاصی که انتخاب کرده‌ایم و بار در امتداد آن حرکت داده می‌شود بستگی ندارد. در واقع، ما می‌توانیم از B به A در امتداد یک خط مستقیم حرکت کنیم یا از جاده قدیم شمیران^۱، در هر صورت نتیجه یکی خواهد بود. در بخش ۵.۴ مشاهده خواهیم کرد که این مطلب برای هر میدان غیر یکنواخت (ساکن) \vec{E} نیز صادق است.

به منظور مجسم کردن چگونگی تشکیل انتگرال خطی (۲) فرض کنید میدان غیر یکنواخت زیر را داشته باشیم:

$$\vec{E} = y\vec{a}_x + x\vec{a}_y + 2\vec{a}_z$$

و خواهیم کار انجام شده را برای حرکت بار zC از نقطه $B(1, 0, 1)$ به نقطه $A(1, 0, 8)$ روی کمان کوچکتر دایره حساب کنیم.

$$x^2 + y^2 = 1 \quad z = 1$$

در مختصات قائم مسیر دیرانسیلی $d\vec{L}$ مساوی است با $dx\vec{a}_x + dy\vec{a}_y + dz\vec{a}_z$ و در نتیجه انتگرال انرژی

$$\begin{aligned} W &= -Q \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{L} \\ &= - \int_B^A (y\vec{a}_x + x\vec{a}_y + 2\vec{a}_z) \cdot (dx\vec{a}_x + dy\vec{a}_y + dz\vec{a}_z) \\ &= - \int_1^{0.8} y dx - 2 \int_0^{\pi/6} x dy - 4 \int_1^8 dz \end{aligned}$$

که در آن حدود انتگرالها متوافق با مقادیر اولیه و نهائی هر یک از متغیرها انتخاب شده

۱. نویسنده Old Chisholm Trail را مثال آورده است.

است. با استفاده از معادله مسیره‌ای شکل (و با در نظر گرفتن علامت مناسب برای رادیکال در هر مربع) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} W &= -2 \int_0^{0.8} \sqrt{1-x^2} dx - 2 \int_0^{0.6} \sqrt{1-y^2} dy - 0 \\ &= -[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x]_0^{0.8} - [y\sqrt{1-y^2} + \arcsin y]_0^{0.6} \\ &= -(0.48 + 0.927 - 0 - 1.571) - (0.48 + 0.644 - 0 - 0) \\ &= -0.996 \text{ J} \end{aligned}$$

حال اگر مسیر مستقیمی از B به A انتخاب کنیم، می‌بایست معادله خط مستقیم را تعیین کنیم. هرچفت از سه معادله صفحاتی که این خط را در برمی‌گیرند برای تعیین معادله آن خط کافی است.

$$y - y_B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} (x - x_B)$$

$$z - z_B = \frac{z_A - z_B}{y_A - y_B} (y - y_B)$$

$$x - x_B = \frac{x_A - x_B}{z_A - z_B} (z - z_B)$$

از رابطه اول بالا داریم

$$y = -3(x - 1)$$

و از رابطه دوم به دست می‌آوریم

$$z = 1$$

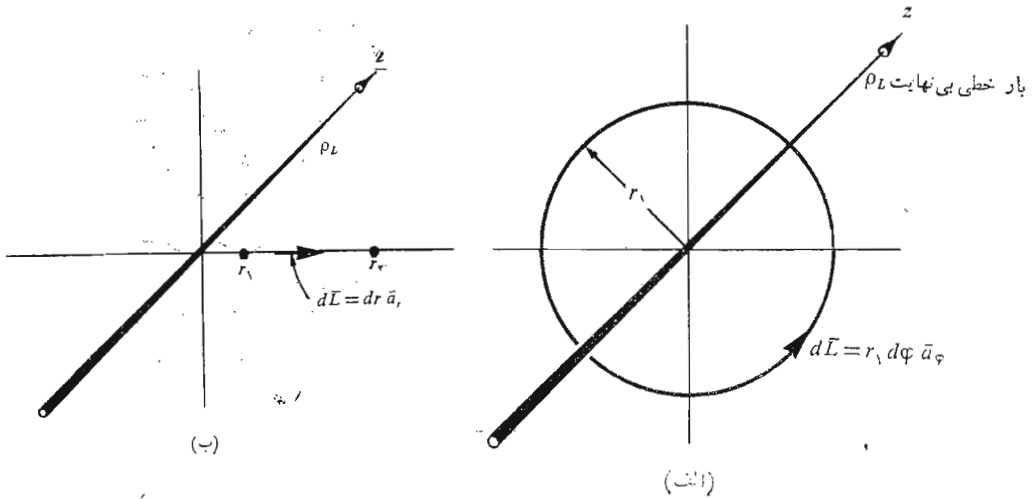
بدین ترتیب:

$$\begin{aligned} W &= -2 \int_1^{0.8} y dx - 2 \int_0^{0.6} x dy - 4 \int_1^0 dz \\ &= 6 \int_1^{0.8} (x - 1) dx - 2 \int_0^{0.6} \left(1 - \frac{y}{3}\right) dy - 4 \\ &= -0.996 \text{ J} \end{aligned}$$

این همان جوابی است که با استفاده از مسیره‌ای بین همان دو نقطه بدست آوردیم و مجدداً این اصل (اثبات نشده) عدم بستگی کار انجام شده از مسیره‌انتخابی را در میدان الکتروسیته ساکن نشان می‌دهد.

باید متذکر شد که معادلات خط مستقیم نشان می‌دهند که $dy = -3dx$ و

و با قراردادن آنها در انتگرالهای فوق و تغییر مناسب حدود انتگرالها $dx = -\frac{1}{3}dy$



شکل ۲.۴ الف) یک مسیر دایره‌ای و ب) یک مسیر شعاعی که بار Q در امتداد آنها در میدان یک بار خطی نامحدود حرکت می‌کند. در حالت اول، هیچگونه کاری صورت نمی‌گیرد.

می‌توان آنها را محاسبه کرد. این روش اغلب برای مواردی که انتگرال تابع فقط یک متغیر است ساده‌تر است. توجه کنید که در روابط $d\vec{L}$ در سه دستگاه مختصات، از طولهای دیفرانسیلی بدست آمده در فصل اول استفاده می‌شود:

$d\vec{L} = dx\vec{a}_x + dy\vec{a}_y + dz\vec{a}_z$ (قائم)	(۳)
$d\vec{L} = dr\vec{a}_r + rd\phi\vec{a}_\phi + dz\vec{a}_z$ (استوانه‌ای)	(۴)
$d\vec{L} = dr\vec{a}_r + rd\theta\vec{a}_\theta + r \sin \theta d\phi\vec{a}_\phi$ (کروی)	(۵)

روابط داخلی بین متغیرهای مختلف در هر رابطه از معادلات خاص مسیر بدست می‌آیند. به عنوان مثال نهائی برای حل انتگرال خطی چند مسیری را که حوالی یک بار خطی نامحدود انتخاب می‌شود مورد تحقیق قرار می‌دهیم. میدان مزبور را قبلاً چند مرتبه بدست آورده و مشاهده کرده‌ایم که این میدان فقط در راستای شعاعی وجود دارد.

$$\vec{E} = E_r \vec{a}_r = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{a}_r$$

ابتدا کار انجام شده را هنگام حرکت بار مثبت Q در مسیر دایره‌ای به شعاع r_1 و مرکز منطبق بر بار خطی، همان طور که در شکل (۲.۴ الف) نشان داده شده است بدست می‌آوریم. بی‌هیچگونه محاسبه‌ای واضح است که مقدار این کار باید مساوی صفر باشد، زیرا مسیر همواره بر شدت میدان عمود است، به عبارت دیگر نیروی مؤثر بر بار همواره با زاویه قائمه بر جهت حرکت اعمال می‌شود. مع هذا برای تمرین، انتگرال را می‌نویسیم و جواب آنرا بدست می‌آوریم.

عنصر دیفرانسیلی را $d\vec{L}$ در مختصات استوانه‌ای انتخاب می‌کنیم و مسیر دایره‌ای انتخاب شده ایجاب می‌کند که dz و dr صفر باشند. لذا $d\vec{L} = r_1 d\varphi \vec{a}_\varphi$ و کار انجام شده مساوی خواهد بود با:

$$\begin{aligned} W &= -Q \int_{\text{مبدأ}}^{\text{مقصد}} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r_1} \vec{a}_r \cdot r_1 d\varphi \vec{a}_\varphi \\ &= -Q \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} d\varphi \vec{a}_r \cdot \vec{a}_\varphi = 0 \end{aligned}$$

اکنون بار را در امتداد مسیر شعاعی از r_1 به r_2 حرکت می‌دهیم (شکل ۲.۴ ب) در اینجا $d\vec{L} = dr \vec{a}_r$ و

$$W = -Q \int_{\text{مبدأ}}^{\text{مقصد}} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{a}_r \cdot dr \vec{a}_r = -Q \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r}$$

یا:

$$W = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

چون r_2 از r_1 بزرگتر است، $\ln(r_2/r_1)$ مثبت و در نتیجه کار انجام شده منفی خواهد بود و این نشان می‌دهد که منبع خارجی محرک بار انرژی اخذ می‌کند.

از اشتباهات معمول در محاسبه انتگرال‌های خطی تمایل به استفاده بیش از حد از علامت منفی هنگام حرکت بار در جهت کاهش مقدار یکی از مختصات است. حدود بالا و پائین انتگرال‌ها کاملاً ضامن اجتناب از این اشتباه است و هیچ‌گونه کوشش منحرف سازنده‌ای نمی‌بایست برای تغییر علامت $d\vec{L}$ به عمل آید. فرض کنید بار Q را از r_2 به r_1 حرکت می‌دهیم (شکل ۲.۴ ب). ولی $d\vec{L}$ همچنان مساوی $dr \vec{a}_r$ است و جهت عکس حرکت بالا با رعایت $r = r_2$ به عنوان نقطه مبدأ و $r = r_1$ به عنوان مقصد رعایت شده است،

$$W = -Q \int_{r_2}^{r_1} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} = \frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

این همان جواب بدست آمده در بالا با علامت منفی است و البته صحیح است.

تمرین ۲.۴

کار انجام شده برای حرکت دادن بار C در o را از نقطه $(0, 0, 0)$ به نقطه $(2, 0, 0)$ از داخل میدان

$$\vec{E} = 6x^2\vec{a}_x + 6y\vec{a}_y + \vec{a}_z \frac{V}{m}$$

در امتداد مسیرهای زیر به دست آورید: (الف) قطعه خط مستقیم، (ب) هذلولی

$$z = 0, (x+1)(y+1) = 3$$

جوابها:] ۱۲۲, ۱۲۲

۳.۴ تعریف اختلاف پتانسیل و پتانسیل

اکنون می‌توانیم مفهوم تازه‌ای از رابطه کار انجام شده توسط یک عامل خارجی هنگام حرکت بار Q از یک نقطه به نقطه دیگر در میدان الکتریکی \vec{E} را تعریف کنیم.

$$W = -Q \int_{\text{مبدأ}}^{\text{مقصد}} \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

به همان طریقی که شدت میدان الکتریکی را به عنوان نیروی مؤثر بر یک واحد بار آزمایشی تعریف کردیم، اکنون اختلاف پتانسیل را به عنوان کار انجام شده (توسط منبعی خارجی) برای حرکت دادن یک واحد بار مثبت از یک نقطه به نقطه دیگر در میدان الکتریکی تعریف می‌کنیم؛

$$\text{مخ:} \quad \text{اختلاف پتانسیل} = - \int_{\text{مبدأ}}^{\text{مقصد}} \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

به موجب قرارداد جهت حرکت را به این ترتیب مشخص می‌کنیم که V_{AB} مشخص اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B و مساوی کار انجام شده برای حرکت بار واحد از نقطه B (حرف دوم) به نقطه A (حرف اول) است. بسدین شکل در تعیین V_{AB} ، B نقطه مبدأ و A نقطه مقصد است. دلیل این تعریف به ظاهر عجیب بزودی، هنگامی روشن می‌شود که بینیم نقطه اولیه B معمولاً در بسی نهایت انتخاب می‌شود

ونقطه A محل ثابت بار را نشان می‌دهد و به این ترتیب نقطه A ذاتاً اهمیت بیشتری دارد.

اختلاف پتانسیل بر حسب ژول بر کولن اندازه گرفته می‌شود که اصطلاح ولت برای آن معمول‌تر است و به اختصار V نوشته می‌شود. از اینرو اختلاف پتانسیل بین دونقطه A و B مساوی است با

$$V_{AB} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{L} \quad V \quad (1)$$

و V_{AB} در صورتی مثبت است که کار برای حرکت بار مثبت از B به A انجام شده باشد.

از مثال بارخطی بخش گذشته مشاهده کردیم که کار انجام شده ضمن حرکت بار از r_1 به r_2 مساوی است با

$$W = \frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

و اختلاف پتانسیل بین نقاطی که در r_1 و r_2 قرار دارند عبارتست از

$$V_{12} = \frac{W}{Q} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (2)$$

این رابطه را می‌توانیم برای پیدا کردن اختلاف پتانسیل بین نقاط A و B به فواصل شعاعی r_A و r_B از یک بار نقطه‌ای بیازمائیم. با انتخاب مختصات کروی به مرکز Q داریم:

$$\vec{E} = E_r \vec{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{a}_r$$

و

$$d\vec{L} = dr \vec{a}_r$$

بنابراین

$$V_{AB} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{L} = - \int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (3)$$

چنانچه $r_B > r_A$ ، اختلاف پتانسیل V_{AB} مثبت است و این نشان می‌دهد که عامل خارجی برای انتقال بار از r_B به r_A انرژی مصرف می‌کند و این موضوع با این تصویر فیزیکی که دوبار همنام یکدیگر را دفع می‌کنند در هماهنگی است. اغلب مناسبتر است که به جای صحبت از اختلاف پتانسیل بین دونقطه از

پتانسیل يك نقطه، یا پتانسیل مطلق آن نقطه سخن گوئیم، ولی در این صورت منظور فقط این است که توافق کرده ایم که اختلاف پتانسیل بین آن نقطه و يك نقطه مشخص مبدأ را که پتانسیل آن صفر فرض می شود اندازه بگیریم. توافق کلی راجع به مبدأ صفر می بایست قبلاً به عمل آید و گر نه هر توصیفی در باره پتانسیل بی معنی خواهد بود، اگر کسی يك دست خود را روی صفحات انحراف اشعه يك لامپ اشعه کاتدی، که «پتانسیل ۵۰ ولت دارند»، و دست دیگر خود را بر اتصال کاتد بگذارد، احتمالاً با تکان شدیدی که خواهد خورد پی خواهد برد به این که کاتد در اینجا مبدأ صفر نیست بلکه تمام پتانسیل ها در آن مدار معمولاً نسبت به حفاظ فلزی دور لامپ اندازه گرفته می شوند و کاتد ممکن است نسبت به حفاظ فلزی تا چند هزار ولت منفی باشد. شاید معمولترین صفر مبدأ در آزمایشها یا اندازه گیریهای تجربی یا فیزیکی پتانسیل «زمین» باشد، و منظور از آن پتانسیل ناحیه سطحی خود کره زمین است. این سطح را معمولاً به صورت نظری با صفحه ای نامحدود به پتانسیل صفر نمایش می دهیم، گرچه در بعضی مسائل که دارای مقیاس بزرگند، مثلاً مسائلی که انتشار امواج از روی اقیانوس اطلس در آنها مطرح است، به يك سطح کروی به پتانسیل صفر احتیاج داریم. نقطه مرجع بسیار متداول دیگر بی نهایت است. این مبدأ معمولاً در مسائل نظری برای نمایاندن تقریبی وضعی فیزیکی که در آن زمین از منطقه مورد نظر ما به نسبت دور است مورد پیدا می کند، مانند بررسی میدان ساکن در نزدیکی نوك بال هواپیمائی که در اثر عبور از میان يك ابر کومولوس باردار شده است، یا بررسی میدان داخل يك اتم. در محاسبات میدان پتانسیل ثقل دوی زمین مرجع صفر معمولاً سطح دریا است، حال آنکه در مأموریت های بین سیاره ای، انتخاب بی نهایت برای مبدأ صفر مناسبتر است.

گاهی در مسائلی که تقارن استوانه ای وجود دارد و انتخاب نقطه بی نهایت مناسب نیست از يك سطح استوانه ای با شعاع معینی به عنوان مبدأ استفاده می شود. در يك کابل هم مرکز هادی بیرونی به عنوان مرجع پتانسیل صفر در نظر گرفته می شود، و البته طبعاً مسائل خاص بسیار مانند مسائلی وجود دارد که باید برای آنها از سطح يك هدلولوی دو صفحه ای یا يك شبه کره پخت به عنوان مبدأ صفر پتانسیل استفاده کرد، ولی در حال حاضر ما کاری با این مسائل نداریم.

اگر پتانسیل نقطه A مساوی V_A و پتانسیل نقطه B مساوی V_B باشد، در این

صورت،

$$V_{AB} = V_A - V_B$$

به شرطی که مبدأ صفر پتانسیل هر دو نقطه یکی باشد.

تمرین (۳.۴)

نقاط $A(2, 0, 0)$ ، $B(\frac{1}{4}, 0, 0)$ و $C(1, 0, 0)$ داده شده‌اند. فرض کنید

$$V_B = 30 \text{ V} \text{ و } V_A = 15 \text{ V}$$

باشد V_C را درحالات زیر به دست آورید: (الف) میدان Q در $(0, 0, 0)$ و (ب) میدان باری خطی به توزیع یکنواخت و چگالی ρ_L روی محور z و (پ) یک میدان یکنواخت

جوابها 25 V و 22.5 V و 20 V

۴.۴ میدان پتانسیل یک بار نقطه‌ای

در بخش قبل رابطه‌ای [معادله (۳)] برای اختلاف پتانسیل بین دو نقطه واقع در $r = r_B$ و $r = r_A$ در میدان یک بار نقطه‌ای Q واقع در مبدأ مختصات به دست آوردیم،

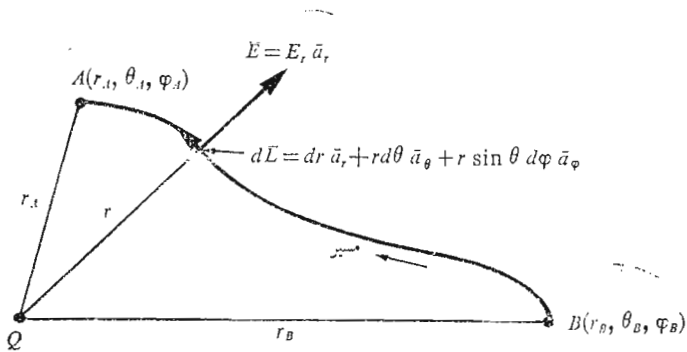
$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = V_A - V_B \quad (1)$$

در آنجا فرض کرده بودیم که این دو نقطه روی یک خط شعاعی قرار گرفته است یا اینکه مقادیر مختصات θ و φ آنها مساوی است و بدین ترتیب مسیر ساده‌ای در امتداد این خط شعاعی برای حرکت بار مثبت در دست داشتیم. اکنون می‌خواهیم بررسی کنیم که اگر مقادیر مختصات θ و φ برای نقطه مبدأ و مقصد متفاوت باشند جواب ما تغییر می‌کند یا نه و آیا می‌توان مسیر پیچیده‌تری بین دو نقطه انتخاب کرد بی‌آنکه نتیجه عوض شود؟ جواب هر دو سؤال را می‌توان با انتخاب نقاط دلخواه A و B (شکل ۳.۴) به فواصل شعاعی r_A و r_B و هر مقدار دلخواه دیگری برای مختصات دیگر یکبار داد.

طول دیفرانسیلی مسیر dL دارای مؤلفه‌هایی به ازاء r و θ و φ است حال آن که میدان الکتریکی فقط دارای مؤلفه شعاعی است. بنا بر این نتیجه حاصل ضرب داخلی چنین خواهد بود،

$$V_{AB} = - \int_{r_B}^{r_A} E_r dr = - \int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

بدین ترتیب همان جواب را به دست می‌آوریم و مشاهده می‌کنیم که اختلاف پتانسیل بین دو نقطه در میدان یک بار نقطه‌ای فقط به فاصله هر نقطه تا بار بستگی دارد و مستقل از مسیر خاصی است که برای انتقال بار واحد از یک نقطه به



شکل ۳.۴ مسیری دلخواه بین دو نقطه دلخواه A و B در میدان بار نقطه‌ای Q واقع در مبدأ. اختلاف پتانسیل V_{AB} از مسیر انتخاب شده مستقل است.

نقطه دیگر انتخاب بشود.

چگونه می‌توانیم مرجع صفر مناسبی برای پتانسیل تعریف کنیم؟ ساده‌ترین راه این است که $V = 0$ را در بی‌نهایت فرض کنیم. اگر نقطه $r = r_B$ به سمت بی‌نهایت میل کند، پتانسیل r_A مساوی خواهد بود با

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

و چون دلیلی برای مشخص کردن این نقطه با اندیس A وجود ندارد،

$$\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}} \quad (۲)$$

این رابطه پتانسیل هر نقطه‌ای به فاصله r متر از بار نقطه‌ای Q واقع در مبدأ را تعیین می‌کند زیرا پتانسیل نقاط بی‌نهایت دور به عنوان مبدأ صفر گرفته می‌شود. باز برای تعبیر فیزیکی می‌توانیم بگوئیم که $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ ژول کار می‌بایست انجام شود تا بار 1 از نقطه بی‌نهایت به نقطه‌ای به فاصله r متر از بار نقطه‌ای انتقال داده شود.

یک روش مناسب برای بیان پتانسیل بی‌انتخاب مبدأ صفر خاص این است

که به جای r_A حرف r بنویسیم و $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B}$ را ثابت بگیریم. بدین ترتیب،

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_1 \quad (3)$$

و C_1 را می‌توان طوری انتخاب کرد که به ازاء هر مقدار دلخواه r ، $V = 0$. همچنین می‌توانیم مبدأ صفر را به طور غیر مستقیم با انتخاب C_1 چنانکه به ازاء $r = r_0$ داشته باشیم $V = V_0$ مشخص کنیم.

باید متوجه بود که اختلاف پتانسیل بین دو نقطه تابعی از C_1 نیست. معادله‌های (۲) و (۳) میدان پتانسیل یک بار نقطه‌ای را مشخص می‌کنند. پتانسیل میدانی شمارواره‌ای (اسکالر) است و شامل هیچ بردار واحدی نیست. اکنون یک سطح هم پتانسیل را به عنوان سطحی که تمام نقاط آن دارای پتانسیلهای یکسان باشند تعریف می‌کنیم. برای حرکت دادن یک بار واحد روی یک سطح هم پتانسیل، هیچ گونه کاری انجام نمی‌شود؛ زیرا، طبق تعریف، بین هیچ دو نقطه‌ای از این سطح اختلاف پتانسیلی وجود ندارد. سطوح هم پتانسیل در میدان پتانسیل یک بار نقطه‌ای کره‌هائی به مرکز بار نقطه‌ای اند.

بررسی شکل میدان پتانسیل یک بار نقطه‌ای نشان می‌دهد که این میدان با عکس فاصله از بار متناسب است در حالی که شدت میدان الکتریکی با عکس مجذور فاصله متناسب است. عین همین نتیجه برای میدان نیروی ثقل یک جرم نقطه‌ای (رابطة عکس مجذور فاصله) و میدان پتانسیل ثقل (متناسب با عکس فاصله) صادق است. نیروی ثقل زمین مؤثر بر شیئی به فاصله یک میلیون کیلومتری زمین چهار برابر نیروی مؤثر روی همان شیئی در فاصله ۲ میلیون کیلومتری زمین است. انرژی جنبشی داده شده به شیئی که از انتهای فضای لایتناهی با سرعت صفر فرو می‌افتد، باز هم در فاصله یک میلیون کیلومتری زمین دو برابر همان انرژی در فاصله دو میلیون کیلومتری خواهد بود.

تمرین (۴.۴)

بار نقطه‌ای $10^{-7}C$ در مبدأ قرار گرفته است. پتانسیل را در $r = 6$ در حالاتی بدست آورید که (الف) مبدأ صفر در بی‌نهایت و (ب) در $r = 10$ و (پ) در صورتی که پتانسیل در $r = 9$ برابر $50V$ باشد.

جوابها: $150V$ ، 60 ، 100

۵.۴ میدان پتانسیل یک مجموعه بار - خاصیت بقاء

پتانسیل یک نقطه به موجب تعریف مقدار کاری است که می‌بایست انجام بدهیم تا یک

بار واحد مثبت را از مبدأ صفر به آن نقطه انتقال دهیم و پی بردیم به اینکه این کار، در نتیجه پتانسیل، به مسیر حرکت بستگی ندارد و اگر چنین نمی بود پتانسیل مفهوم بسیار مفیدی نبود.

حال می خواهیم این ادعای خود را ثابت کنیم. این کار را با میدان پتانسیل یک تک بار نقطه‌ای آغاز می کنیم که عدم بستگی میدان آن را به مسیر در بخش گذشته نشان دادیم. در آنجا مشاهده کردیم که میدان بطور خطی با بار متناسب است و همچنین اصل ترکیب در مورد آن صادق است و از اینرو می توان نتیجه گرفت که مقدار پتانسیل هر مجموعه بار در هر نقطه مستقل از مسیری است که برای انتقال بار آزمایشی به آن نقطه اختیار می شود.

بدین ترتیب میدان پتانسیل یک تک بار نقطه‌ای، که ما آنرا Q_1 می نامیم، فقط به فاصله Q_1 از نقطه‌ای که پتانسیل آن مورد نظر است بستگی دارد. این فاصله را با R_1 مشخص می کنیم و حرف بزرگ R برای خاطر نشان کردن این موضوع است که در این بررسی به هیچ دستگاه مختصات خاصی احتیاج نیست، بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

پتانسیل ناشی از دو بار Q_1 و Q_2 فقط تابعی از R_1 و R_2 که به ترتیب فواصل Q_1 و Q_2 از نقطه مورد نظراند، خواهد بود،

$$V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

اگر به اضافه کردن بار ادامه دهیم، خواهیم دید که پتانسیل حاصل از n بار نقطه‌ای مساوی خواهد بود با:

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 R_n} \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0 R_m} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

حال اگر هر یک از بارها را به عنوان عنصر کوچکی از یک بار حجمی پیوسته $\rho \Delta v$ در نظر بگیریم، در این صورت:

$$V = \frac{\rho_1 \Delta v_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{\rho_2 \Delta v_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \dots + \frac{\rho_n \Delta v_n}{4\pi\epsilon_0 R_n}$$

و چنانچه تعداد عناصر به بی نهایت میل کند، رابطه انتگرالی زیر را به دست می آوریم،

$$V = \int_{\text{حجم}} \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (2)$$

بدین ترتیب ما از مرحله پتانسیل يك تك بار نقطه ای پیشرفت بسیاری کرده ایم و شاید مفید باشد اگر رابطه (۲) و مفهوم هر جمله آن را یادآوری کنیم. پتانسیل V با توجه به مبدأ صفر پتانسیل در نقطه بینهایت تعیین شده است و مقیاس دقیق کاری است که انجام داده شده است تا بار واحدی از نقطه بینهایت به نقطه دیگر، مثلا نقطه A ، که پتانسیل آن مورد نظر است انتقال یابد. چگالی بار حجمی ρ و عنصر دیفرانسیل حجم dv هر دو با هم دیفرانسیل بار ρdv را که در نقطه دلخواهی از فضا، معمولا غیر از نقطه A واقع است، مشخص می کنند. انتگرال يك انتگرال چندگانه (حجمی) است.

وقتی توزیع بار شکل يك بار خطی یا يك بار حجمی را به خود بگیرد، انتگرال درطول خط یا بر روی سطح خواهد بود،

$$V = \int \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (3)$$

$$V = \int_s \frac{\rho_s dS}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (4)$$

روابط انتگرالی پتانسیل فوق بر حسب توزیع بار را می توان با روابط مشابهی برای شدت میدان الکتریکی، مانند رابطه (۴) بخش ۴.۲، مقایسه کرد:

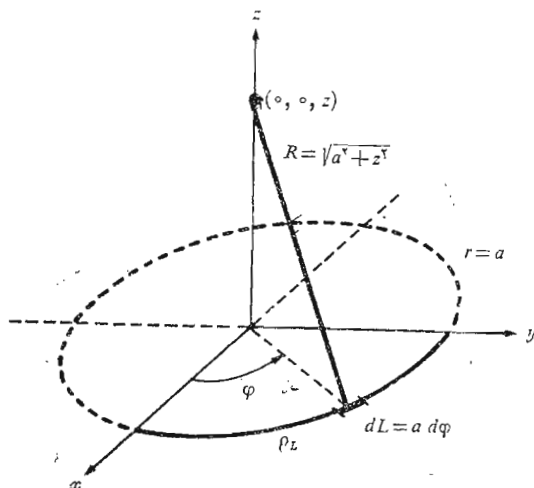
$$\vec{E} = \int_{\text{حجم}} \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{a}_R$$

مجدداً، پتانسیل با عکس فاصله و شدت میدان الکتریکی با عکس مجذور فاصله متناسب است با و درعین حال شدت میدان، میدانی برداری است.

برای نمایش مورد استعمال یکی از این انتگرالهای پتانسیل، پتانسیل V حاصل از يك بار خطی یکنواخت حلقه ای شکل به شعاع $r = a$ و چگالی ρ_L را روی محور z در صفحه $z = 0$ به دست می آوریم شکل ۴.۴ با استفاده از رابطه (۳)

خواهیم داشت $dL = a d\phi$ و بدین ترتیب:

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L a d\phi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\rho_L a}{2\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}$$



شکل ۴.۴ میدان پتانسیل یک حلقه بار با چگالی یکنواخت را می‌توان به آسانی از رابطه $V = \int \rho_L dL / 4\pi\epsilon_0 R$ به دست آورد.

به طور خلاصه:

۱. پتانسیل حاصل از یک تک بار نقطه‌ای عبارت است از کار انجام شده برای انتقال یک تک بار از نقطه بی‌نهایت به نقطه‌ای که پتانسیل آن مورد نظر است و این کار به مسیر انتخاب شده بین دو نقطه بستگی ندارد.
۲. میدان پتانسیل ناشی از تعدادی بار نقطه‌ای برابر است با مجموع پتانسیلهای مربوط به هر بار.
۳. بنابراین پتانسیل ناشی از چند بار نقطه‌ای یا هر توزیع پیوسته بار را می‌توان با انتقال یک بار واحد از نقطه بی‌نهایت به نقطه مورد نظر در امتداد هر مسیر دلخواه به دست آورد.

به عبارت دیگر، رابطه پتانسیل (مبدأ صفر در بی‌نهایت) مساوی است با

$$V_A = - \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

یا اختلاف پتانسیل بین دو نقطه،

$$V_{AB} = V_A - V_B = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

صرف نظر از منبع میدان \vec{E} به مسیر انتخاب شده برای انتگرال خطی بستگی ندارد.

این نتیجه را معمولاً به طور دقیق تر به این طریق بیان می کنند که کار انجام شده در حرکت یک بار واحد در امتداد هر مسیر بسته صفر است یا،

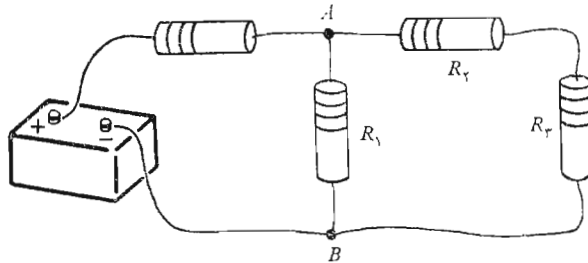
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0$$

(۵)

علامت دایره کوچک روی علامت انتگرال نشان بسته بودن مسیر است. در قانون گاوس نیز، که انتگرال سطح بسته بکار می رفت، از این علامت استفاده شد. رابطه (۵) برای میدانهای ساکن صادق است، ولی به طوری که بعدها خواهیم دید، فارادی نشان داده است که این رابطه برای میدانهای مغناطیسی متغیر نسبت به زمان ناقص است. یکی از بزرگترین خدمات ماکسول به نظریه الکترومغناطیس نشان دادن این موضوع بود که یک میدان الکتریکی متغیر نسبت به زمان میدانی مغناطیسی ایجاد می کند و از اینرو باید انتظار داشته باشیم که بعدها عدم صحت رابطه (۵) را وقتی \vec{E} یا \vec{H} با زمان تغییر کند مشاهده کنیم.

اکنون توجه خود را به حالت ساکن که \vec{E} نسبت به زمان متغیر نیست محدود می کنیم و مدار جریان مستقیم شکل (۵.۴) را در نظر می گیریم. در شکل دو نقطه A و B مشخص شده اند و طبق رابطه (۵) برای انتقال یک بار واحد از نقطه A از طریق R_1 و R_2 به نقطه B و سپس از طریق R_3 مجدداً به نقطه A هیچ گونه کاری صورت نمی گیرد، یا به عبارت دیگر مجموع اختلاف پتانسیلها در طول هر مسیر بسته صفر است.

به این ترتیب، رابطه (۵) شکل کلی تر قانون کیرشهف برای ولتاژ است و کلیت آن در این است که می توانیم آن را در مورد هر ناحیه ای که میدان الکتریکی وجود دارد بکار بریم بی آنکه به مدارهای معمولی متشکل از مقاومت و باتری و سیم محدود باشیم. معادله (۵) را باید قبل از اینکه بتوانیم آن را در مورد میدانهای متغیر نسبت به زمان بکار بریم اصلاح کنیم. این موضوع را در فصل ۱۰ و فصل ۱۳ مورد توجه قرار خواهیم داد و سپس قادر خواهیم بود که شکل کلی قانون ولتاژ کیرشهف را برای مدارهایی که جریانها و ولتاژهای آنها نسبت به زمان متغیر است بکار بریم. هر میدانی که رابطه ای نظیر رابطه (۵) برای آن صادق باشد، یعنی انتگرال خطی آن روی یک مسیر بسته صفر باشد، میدان ابقائی (کنسرواتیو) نامیده می شود. نام مزبور از این واقعیت ناشی می شود که در این میدان حول یک مسیر بسته هیچ گونه کاری انجام نمی شود (یا انرژی باقی می ماند). میدان ثقل نیز یک میدان ابقائی است



شکل ۵.۴ یک مسأله ساده مدار جریان مستقیم که با استفاده از $\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0$ به صورت قانون ولتاژ کیرشهف حل می‌شود.

زیرا هرانرژی که صرف حرکت (صعودی) یک شیئی در جهت مخالف میدان، هنگام حرکت برگشت (نزولی) شیئی به نقطه اولیه عیناً پس داده می‌شود. اگر یک میدان جاذبه غیر ابقائی وجود می‌داشت تمام مسائل انرژی ما تا ابد حل می‌شد. میزان تغییر درجه حرارت بر حسب فاصله، یا گرادیان درجه حرارت، (که بر حسب درجه کلوین بر متر ($^{\circ}\text{K}/\text{m}$) اندازه گرفته می‌شود)، حتی در حالتی که نسبت به زمان متغیر باشد نیز یک میدان ابقائی است. اگر چنین نبود، قادر نمی‌بودیم به هر نقطه یک درجه حرارت واحد نسبت دهیم.

تمرین ۵.۴

با استفاده از معادله (۳) یا (۴) پتانسیل $V(0, 0, 4)$ حاصل از باری با توزیع‌های یکنواخت زیر به دست آورید:

(الف) $\rho_L = 10^{-7} \text{C}/\text{m}, z = 0, r = 3, 135^{\circ} \leq \varphi \leq 225^{\circ}$

(ب) $\rho_s = 10^{-7} \text{C}/\text{m}^2, z = 0, 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq 90^{\circ}$

(پ) $\rho_L = 10^{-7} \text{C}/\text{m}, z = 0, x = -3, -2 \leq y \leq 2$

جوابها: $702 \text{ V}, 17414 \text{ V}, 848 \text{ V}$

۶.۴ گرادیان پتانسیل

تا اینجا با دو روش تعیین پتانسیل آشنا شده‌ایم. یکی روش تعیین پتانسیل به طور مستقیم از طریق شدت میدان الکتریکی به وسیله انتگرال خطی و دیگری روش انتگرال حجمی بر روی توزیع اصلی بارها. اما هیچ یک از دو روش نامبرده برای تعیین

میدانها در اغلب مسائل عملی چندان مفید نیستند، زیرا، به طوری که در آینده خواهیم دید، اغلب نه شدت میدان الکتریکی معلوم است و نه توزیع بار. داده‌های اولیه در مسائل عملی معمولاً به صورت توصیف دوسطح هم پتانسیل است. مثلاً گفته می‌شود که دو هادی موازی به مقطع مدور به پتانسیلهای ۱۰۰ ولت و ۱۰۰ - ولت مفروض است و مثلاً می‌خواهیم ظرفیت بین آنها یا توزیع بار و جریان را روی آنها برای محاسبه تلفات به دست آوریم.

این مقادیر را می‌توان به آسانی از میدان پتانسیل به دست آورد و نخستین هدف ما تعیین روش ساده‌ای برای محاسبه شدت میدان الکتریکی از پتانسیل است. قبلاً رابطه انتگرال خطی بین این کمیتها را به دست آورده‌ایم:

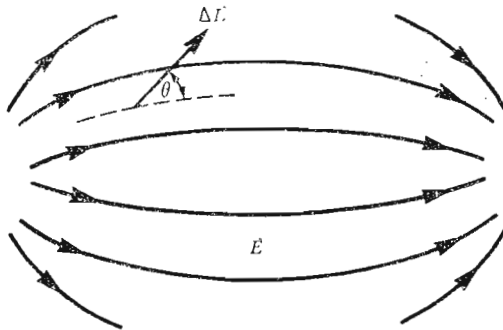
$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{L} \quad (1)$$

ولی کاربرد این رابطه در جهت عکس، یعنی پیدا کردن V با معلوم بودن \vec{E} ، بسیار آسانتر است.

با این حال رابطه فوق را می‌توان به عنصر بسیار کوچک مسیر $\Delta\vec{L}$ ، که \vec{E} اساساً در طول آن ثابت است، بکار برد و اختلاف پتانسیل ΔV را به دست آورد،

$$\Delta V = - \vec{E} \cdot \Delta\vec{L} \quad (2)$$

اول ببینیم، آیا می‌توان اطلاعات جدیدی در باره رابطه بین \vec{E} و V از معادله فوق به دست آورد؟ منطقه دلخواهی از فضا را، همانطور که در شکل (۶.۴) نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم که در آن \vec{E} و V هر دو از هر نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کنند. رابطه (۲) نشان می‌دهد که می‌بایست یک عنصر نموی برداری به طول



شکل ۶.۴ یک عنصر نموی برداری به طول $\Delta\vec{L}$ با زاویه θ نسبت به میدان \vec{E} که توسط خطوط شار مشخص شده است. منابع میدان نشان داده نشده‌اند.

$\Delta \bar{L} = \Delta L \bar{a}_L$ انتخاب و آن را در مؤلفه \bar{E} در جهت \bar{a}_L ضرب کنیم (و این يك تعبير حاصلضرب داخلی است) تا اختلاف پتانسیل كوچك موجود بين نقاط مبدأ و مقصد $\Delta \bar{L}$ را به دست آوريم.

اگر زاویه بين \bar{L} و \bar{E} را θ بناميم، خواهيم داشت،

$$\Delta V \doteq -E \Delta L \cos \theta$$

اکنون می‌خواهيم به سمت حد ميل کنیم و مشتق dV/dL را در نظر بگیريم. برای انجام این کار، لازم است نشان دهيم که می‌توان V را به عنوان تابع $V(x, y, z)$ تعبير کرد. این کارها تا اینجا صرفاً نتیجه انتگرال خطی (۱) است. اگر نقطه آغاز معینی یا مبدأ صفری را در نظر بگیريم و فرض کنیم که نقطه پایان (x, y, z) باشد، می‌دانيم که نتیجه انتگرال‌گیری تابعی يك مقداری از نقطه انتهائی (x, y, z) است. چون \bar{E} يك میدان ابقائسی است. بدین ترتیب V يك تابع تك مقداری $V(z, y, x)$ است. بدین ترتیب می‌توانيم به سوی حد ميل کنیم و بنویسیم:

$$\frac{dV}{dL} = -E \cos \theta$$

اکنون می‌خواهيم ببينيم که $\Delta \bar{L}$ در چه جهتی باید واقع شود تا مقدار ΔV بیشینه (ماکزيم) گردد؟ به یاد داشته باشيم که \bar{E} در نقطه‌ای که ما روی آن کار می‌کنيم مقداری معين دارد و به جهت $\Delta \bar{L}$ بستگی ندارد. اندازه $\Delta \bar{L}$ نیز ثابت است و متغیر ما \bar{a}_L ، بردار واحدی در جهت $\Delta \bar{L}$ است. بدین ترتیب روشن است که ΔV هنگامی دارای بیشینه مقدار مثبت است که $\cos \theta = -1$ شود یا اینکه $\Delta \bar{L}$ در خلاف جهت \bar{E} باشد. برای این حالت،

$$\left. \frac{dV}{dL} \right|_{\max} = E$$

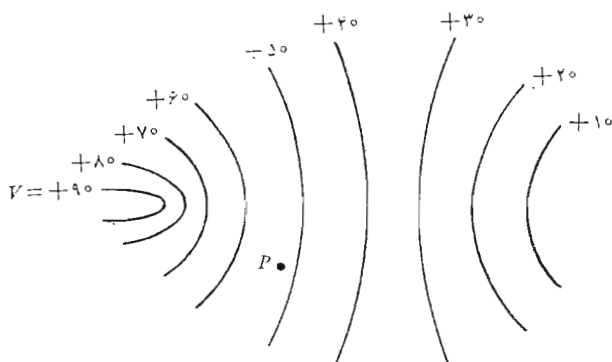
این تمرین كوچك دو خاصیت رابطه بين \bar{E} و V را در هر نقطه مشخص

می‌کند.

۱. اندازه شدت میدان الکتریکی توسط بیشینه مقدار میزان تغییرات پتانسیل برحسب فاصله تعیین می‌شود.

۲. این بیشینه مقدار هنگامی به دست می‌آید که جهت عنصر برداری نمو طول در خلاف جهت \bar{E} باشد یا عبارت دیگر، جهت شدت میدان \bar{E} همیشه در خلاف جهتی است که پتانسیل سریعتر زیاد می‌شود.

اکنون می‌خواهيم این روابط را برحسب پتانسیل نمایش دهيم. منظور از شکل ۷.۴ نشان دادن اطلاعاتی است که در باره يك میدان پتانسیل به ما داده شده است این عمل با نمایش سطوح هم پتانسیل (که در طرح دوبعدی ما به صورت



شکل ۷.۴ نمایش میدان پتانسیل توسط سطوح هم پتانسیل آن. میدان E در هر نقطه عمود بر سطح هم پتانسیلی است که از آن نقطه می‌گذرد و به سمت سطوح منفی‌تر متوجه است.

خطوط نشان داده شده است) انجام می‌شود. می‌خواهیم اطلاعاتی در خصوص شدت میدان الکتریکی در نقطه P به دست آوریم. کار را از نقطه P شروع می‌کنیم و عنصرهای نموی برداری به طول ΔL را در جهات مختلف در نظر می‌گیریم و در پی پیدا کردن جهتی هستیم که پتانسیل سریعتر از همه تغییر می‌کند (اضافه می‌شود). از روی شکل مشاهده می‌شود که این جهت به طرف چپ کمی متمایل به بالا است. بنا بر این طبق خاصیت دومی که در بالا ذکر شد شدت میدان الکتریکی در جهت معکوس، یعنی به طرف راست کمی متمایل به پایین است و اندازه آن از تقسیم افزایش کوچک پتانسیل بر عنصر کوچک طولی در این جهت به دست می‌آید.

محتمل بنظر می‌رسد که، جهت سریعترین تغییرات پتانسیل بر سطوح هم پتانسیل عمود خواهد بود (در جهت افزایش پتانسیل) و این درست است، برای اینکه اگر ΔL در جهت یک سطح هم پتانسیل باشد، طبق تعریف سطح هم پتانسیل $\Delta V = 0$ ولی در این صورت،

$$\Delta V = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{L} = 0$$

و چون \vec{E} و $\Delta \vec{L}$ هیچ یک صفر نیستند، \vec{E} باید عمود بر $\Delta \vec{L}$ یا عمود بر سطوح هم پتانسیل باشد.

از آنجائی که معمولا در مسائل اول میدان پتانسیل به دست می‌آید، بهتر است جهت $\Delta \vec{L}$ را که در جهت بیشینه تغییرات افزایشی پتانسیل است از طریق ریاضی بر حسب میدان پتانسیل و نه شدت میدان الکتریکی، بیان کنیم. برای این کار بردار

واحد \bar{a}_N را در جهت عمود بر سطح هم پتانسیل و به سمت مقادیر صعودی پتانسیل تعریف می‌کنیم. بدین ترتیب شدت میدان الکتریکی برحسب پتانسیل به این صورت به دست می‌آید:

$$\bar{E} = - \left. \frac{dV}{dL} \right|_{\max} \bar{a}_N \quad (۳)$$

که نشان می‌دهد، که اندازه \bar{E} توسط بیشینه تغییرات فضائی V تعیین می‌شود و جهت \bar{E} عمود بر سطح هم پتانسیل (در جهت افزایش پتانسیل) است.

نظر به اینکه $\left. \frac{dV}{dL} \right|_{\max}$ در حالتی است که ΔL در جهت \bar{a}_N باشد، می‌توانیم این امر را از این راه به خاطر بسپاریم که بنویسیم:

$$\left. \frac{dV}{dL} \right|_{\max} = \frac{dV}{dN}$$

و

$$\bar{E} = - \frac{dV}{dN} \bar{a}_N \quad (۴)$$

روابط (۳) یا (۴) به منزله تعبیری فیزیکی برای عمل تعیین شدت میدان الکتریکی از پتانسیل اند. هر دو رابطه يك عمل کلی را نشان می‌دهند و ما قصد نداریم که مستقیماً از آنها برای به دست آوردن اطلاعات کمی استفاده کنیم. اما باید دانست که این عمل رسیدن از V به \bar{E} خاص این دو کمیت نیست، بلکه به صورت رابطه بین يك کمیت شمارواره‌ای (اسکالر) و يك میدان برداری در مکانیک مایعات و ترمودینامیک و مغناطیس و تقریباً در هر میدانی که آنالیز برداری در آن مورد استفاده قرار گرفته است ظاهر می‌شود.

عملی که برای تعیین $\bar{E} -$ روی V صورت می‌گیرد به گرادیان موسوم است و گرادیان میدان شمارواره‌ای (اسکالر) T بنا به تعریف مساوی است با

$$T \text{ گرادیان} = \text{grad } T = \frac{dT}{dN} \bar{a}_N \quad (۵)$$

که در آن \bar{a}_N بردار واحد در جهت عمود بر سطوح هم پتانسیل و در جهت افزایش مقادیر T است.

با استفاده از این عبارت جدید می‌توانیم رابطه بین V و \bar{E} را بدین صورت بنویسیم:

$$\boxed{\bar{E} = -\text{grad } V} \quad (۶)$$

نظر به اینکه نشان دادیم که V یک تابع یگانه از x و y و z است می‌توانیم دیفرانسیل کلی آن را بگیریم

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

از طرف دیگر داریم:

$$dV = -\bar{E} \cdot d\bar{L} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

از آنجائی که هر دو رابطه به ازاء کلیه مقادیر dx و dy و dz صحیح‌اند، خواهیم داشت:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

با ترکیب برداری این روابط خواهیم داشت:

$$\boxed{\bar{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \bar{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \bar{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \bar{a}_z\right)} \quad (۷)$$

با مقایسه روابط (۶) و (۷) رابطه‌ای برای به دست آوردن گرادیان در دستگاه مختصات قائم به دست می‌آوریم،

$$\boxed{\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \bar{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \bar{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \bar{a}_z} \quad (۸)$$

گرادیان یک شمارواره (اسکالر) برداری است و تجربه نشان داده است که بردارهای واحدی که اغلب به اشتباه به رابطه دیورژانس اضافه می‌شود ظاهراً همان بردارهایی است که به خطا از رابطه گرادیان حذف می‌گردد. همین که تعبیر فیزیکی گرادیان، که توسط رابطه (۵) بیان شد، بصورت بیشینه میزان تغییر یک شمارواره (اسکالر) و جهت این بیشینه درک شد، ماهیت برداری گرادیان خود به خود واضح می‌شود.

اپراتور برداری

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \bar{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \bar{a}_z$$

را می‌توان به تعبیری صوری بشکل اپراتور يك شمارواره (اسکالر) T بکار برد،

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \bar{a}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \bar{a}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \bar{a}_z$$

و در نتیجه،

$$\nabla T = \text{grad } T$$

این عبارت به ما اجازه می‌دهد که رابطه بسیار فشرده‌ای بین V و \bar{E} بنویسیم،

$$\bar{E} = -\nabla V$$

(۹)

گرادیان را می‌توان بسا استفاده از تعریف (۵) بر حسب مشتق‌های نسبی در دیگر دستگاه‌های مختصات بیان کرد. این روابط در ضمیمه الف محاسبه شده‌اند و ما آنها را برای راحتی حل مسائلی که تقارن استوانه‌ای یا کروی دارند در زیر ارائه می‌دهیم:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \bar{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \bar{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \bar{a}_z \quad (\text{مختصات قائم})$$

(۱۰)

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \bar{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \bar{a}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \bar{a}_z \quad (\text{مختصات استوانه‌ای})$$

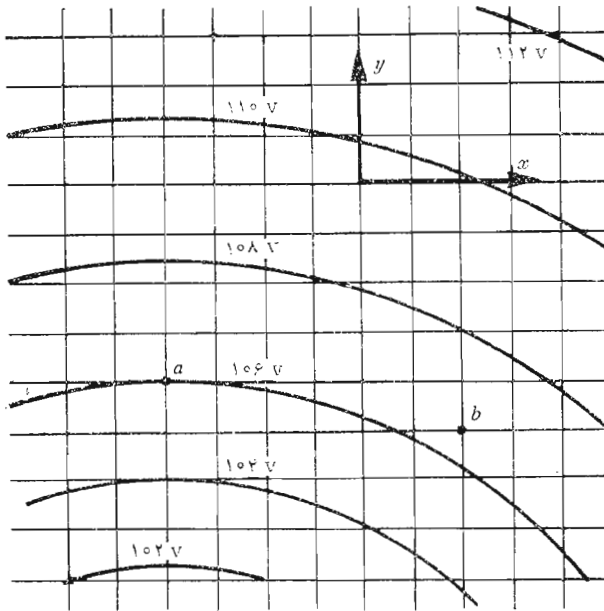
(۱۱)

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \bar{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \bar{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \bar{a}_\varphi \quad (\text{مختصات کروی})$$

(۱۲)

باید توجه کرد که مخرج هر جمله در روابط فوق به شکل یکی از مؤلفه‌های $d\bar{L}$ در آن دستگاه مختصات است با این تفاوت که دیفرانسیل‌های نسبی جایگزین دیفرانسیل‌های معمولی شده‌اند، مثلاً $r \sin \theta d\varphi$ به $r \sin \theta \delta\varphi$ تبدیل می‌شود.

به عنوان يك مثال ساده برای استفاده از گرادیان در محاسبه شدت میدان الکتریکی از پتانسیل، میدان پتانسیل يك بار نقطه‌ای را در مختصات کروی [بخش ۴.۴ معادله (۲)] در نظر می‌گیریم،



شکل ۸.۴ مربوط به تمرین ۶.۴

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

معادله (۱۲) گرادیان را در مختصات کروی تعیین می‌کند و مشاهده می‌کنیم که از آنجایی که V فقط تابع r است، تنها مؤلفه \vec{E} مؤلفه شعاعی آن خواهد بود و با استفاده از مشتق نسبی رابطه (۱۲) خواهیم داشت،

$$\vec{E} = -\nabla V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{a}_r$$

تمرین ۶.۴

شکل (۸.۴) قسمتی از یک میدان پتانسیل دو بعدی ($E_z = 0$) را نشان می‌دهد. خطوط شبکه در میدان واقعی به اندازه 1 mm از هم فاصله دارند. مؤلفه‌های \vec{E} را در دستگاه مختصات قائم در نقاط زیر به دست آورید: (الف) a و (ب) b .

جوابها:
$$-700\bar{a}_y, -450\bar{a}_z, -900\bar{a}_y \frac{V}{m}$$

تمرین ۷.۴

پتانسیل $V = (x-2)^2(y+2)^2(z-1)^3$ داده شده است. مقادیر زیر را به دست آورید: (الف) \bar{E} در مبدأ و (ب) ρ در مبدأ و (پ) dV/dN و (ت) \bar{a}_N

جوابها:

$$0/302(\bar{a}_x - \bar{a}_y + 3\bar{a}_z) \text{ و } 53r1 \text{ و } 112\epsilon_0 \text{ و } 16(-\bar{a}_z + \bar{a}_y - 3\bar{a}_z)$$

۷.۴ دو قطبی

میدانهای دو قطبی که در این بخش مورد بررسی قرار خواهند گرفت از این جهت دارای اهمیت بسیارند که پایه و اساس چگونگی مواد عایق در میدانهای الکتریکی اند، که در قسمتی از فصل آینده بررسی خواهد شد. بعلاوه این بررسی اهمیت توصیف پتانسیل را، که در این فصل ارائه شد، نمایان می سازد.

یک دو قطبی الکتریکی یا به اختصار دپل به مجموعه دو بار نقطه ای مساوی و مختلف العلامت اطلاق می شود که فاصله آنها از هم نسبت به فاصله شان از نقطه P ، که تعیین میدانهای الکتریکی و پتانسیل آن مورد نظر ماست، کم باشد، شکل (۹.۴ الف) دو قطبی را نشان می دهد.

نقطه P توسط مختصات r و θ و $\varphi = 90^\circ$ ، با توجه به تقارن سمتی، مشخص می شود. بارهای نقطه ای مثبت و منفی به فاصله d متر از هم و به

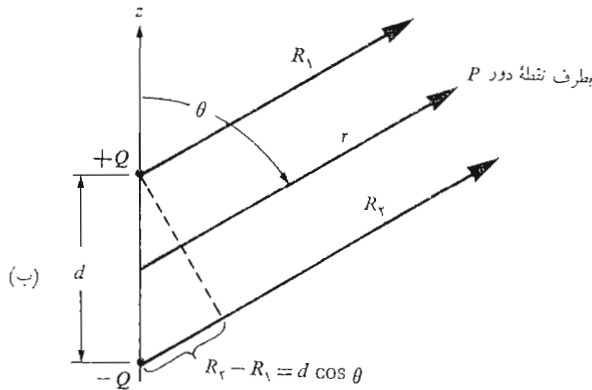
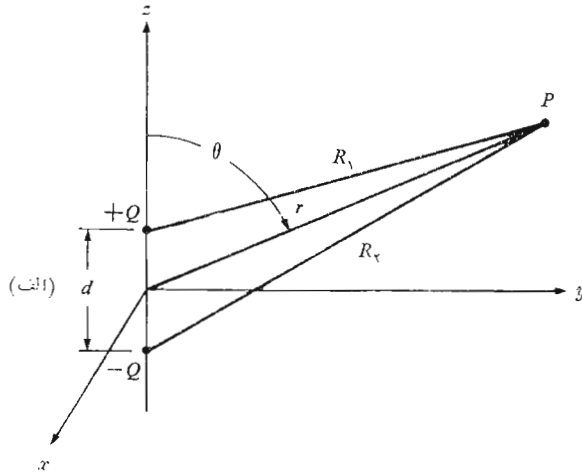
ترتیب در نقاط $(0, 0, \frac{1}{4}d)$ و $(0, 0, -\frac{1}{4}d)$ قرار دارند.

اینها مشخصات هندسی مسأله بودند. بعد چه باید کرد؟ آیا می بایست شدت میدان الکتریکی کل را با جمع کردن میدانهای معلوم هر یک از دو بار نقطه ای به دست آوریم؟ یا آسانتر خواهد بود که ابتدا میدان پتانسیل کل را محاسبه کنیم. در هر دو حالت، وقتی یکی را بدست آوریم، می توانیم دیگری را از آن پیدا کنیم و مسأله را حل شده بدانیم.

اگر تصمیم بگیریم که ابتدا \bar{E} را بدست آوریم، در این صورت می بایست مراقب دو مؤلفه در مختصات کروی باشیم (به علت تقارن خواهیم داشت $E_\varphi = 0$) و بدین ترتیب تنها راه به دست آوردن V از \bar{E} استفاده از انتگرال خطی است. در این مرحله آخر می بایست یک مبدأ صفر مناسب برای پتانسیل در نظر بگیریم. چون با

انتگرال خطی فقط اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ مبدأ و مقصد مسیر انتگرال به دست می‌آید.

از طرف دیگر، تعیین V در ابتدا؛ که یک کمیت واحد و غیر برداری است و رابطهٔ آن برای حالت یک بار نقطه‌ای ساده‌تر است، و سپس محاسبهٔ \vec{E} با استفاده از رابطهٔ گرادیان، بسیار ساده‌تر به نظر می‌رسد.



شکل ۹.۴ (الف) مسألهٔ یک دوقطبی الکتریکی به صورت هندسی. گشتاور دیپل $\vec{p} = Q\vec{d}$ در جهت \vec{a}_z قرار دارد. (ب) برای یک نقطهٔ دور P ، اساساً موازی است و خواهیم داشت $R_2 = R_1 = d \cos \theta$

ما این روش ساده‌تر را انتخاب می‌کنیم و فواصل Q و $-Q$ را از P به ترتیب R_1 و R_2 می‌نامیم و برای پتانسیل کل خواهیم داشت:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

برای يك نقطهٔ دور، $R_1 \doteq R_2$ و حاصلرب $R_1 R_2$ مخرج را می‌توان با r^2 عوض کرد. البته این تقریب را نمی‌توان در مورد صورت بکار برد، چه در این صورت جواب بی‌اهمیتی به دست خواهیم آورد دال بر اینکه با دور شدن از دوقطبی پتانسیل صفر به سمت صفر نزدیک می‌شود. از طرف دیگر اگر اندکی به دوقطبی نزدیکتر شویم با توجه به شکل (۹.۴ ب) متوجه می‌شویم که می‌توانیم مقداری تقریبی برای $R_2 - R_1$ به دست آوریم به شرط اینکه R_1 و R_2 را موازی فرض کنیم،

$$R_2 - R_1 \doteq d \cos \theta$$

جواب نهائی بدین ترتیب مساوی خواهد بود با

$$V = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (۱)$$

با استفاده از رابطهٔ گرادیان در مختصات کروی

$$\vec{E} = -\nabla V = - \left(\frac{\partial V}{\partial r} \vec{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{a}_\varphi \right)$$

خواهیم داشت:

$$\vec{E} = - \left(- \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{a}_r - \frac{Qd \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{a}_\theta \right) \quad (۲)$$

یا

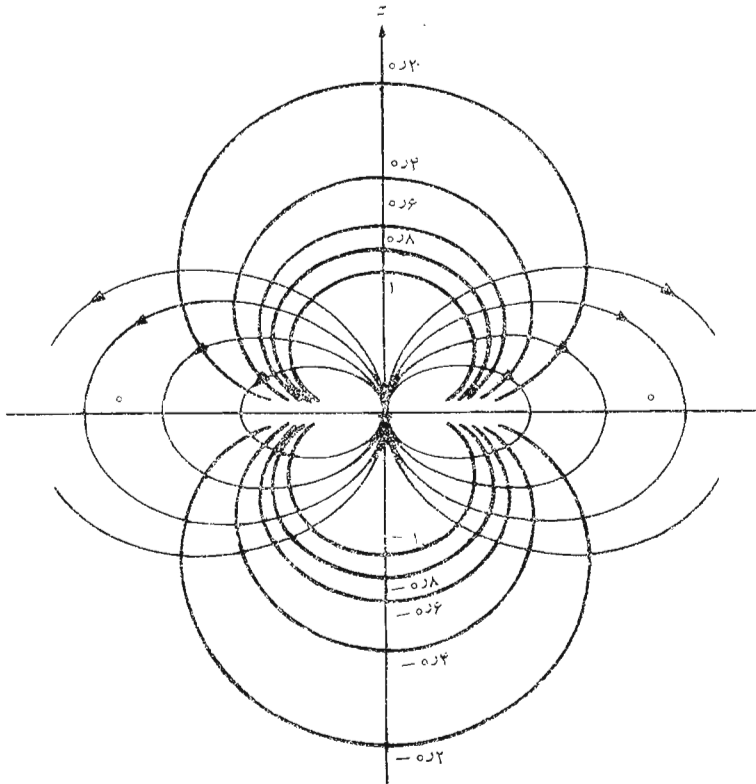
$$\vec{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\cos \theta \vec{a}_r + \sin \theta \vec{a}_\theta)$$

اینها روابط خواسته شدهٔ میدانهای دوقطبی اند که با عملیات بسیار کمی به دست آوردیم. هر دانشجو با صرف چند ساعت می‌تواند مسأله را در جهت عکس حل کند. نویسنده این عملیات را طولانی و مشروح‌تر از آن تصور می‌کند که حتی اگر اثری هم داشته باشد، در اینجا ذکر کند.

برای به دست آوردن يك منحنی از میدان پتانسیل، يك دوقطبی را طوری

انتخاب می‌کنیم که $Qd/(4\pi\epsilon_0) = 1$ و آنگاه $\cos \theta = Vr^2$. خطوط رنگی در شکل ۱۰.۴ سطوح هم‌پتانسیل $\pm 1, \pm 0.8, \pm 0.6, \pm 0.4, \pm 0.2, 0$ را نشان می‌دهد. محور دوقطبی عمودی است و بار مثبت بالای آن قرار دارد. خطوط شار برای میدان الکتریکی با کاربرد روشهای بخش ۷.۲ در مختصات کروی به دست می‌آیند

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{r d\theta}{dr} = \frac{\sin \theta}{2 \cos \theta}$$



شکل ۱۰.۴ میدان الکتریکی ساکن یک دوقطبی نقطه‌ای با گشتاور آن در جهت \vec{a} . شش سطح هم‌پتانسیل با مقادیر نسبی V نشان داده شده‌اند.

یا

$$\frac{dr}{r} = \gamma \cot \theta d\theta$$

که از آن خواهیم داشت

$$r = C_1 \sin^{\gamma} \theta$$

خطوط سیلان سیاه که در شکل (۱۰.۴) نشان داده شده‌اند، مربوط به

$$C_1 = 1, 1.5, 2, 2.5 \text{ اند.}$$

رابطه میدان پتانسیل دوقطبی (دپیل)، معادله (۱) را می‌توان با استفاده از گشتاور دوقطبی (دپیل) بصورت ساده‌تری نوشت. برای این کار طول برداری در جهت $-Q$ به $+Q$ را با \vec{a} نمایش می‌دهیم و گشتاور دوقطبی (دپیل) را $Q\vec{a}$ تعریف و با علامت \vec{P} مشخص می‌کنیم. به این ترتیب:

$$\vec{P} = Q\vec{a} \quad (3)$$

و از آنجائی که داریم $\vec{a} \cdot \vec{a}_r = \cos \theta$ ،

$$V = \frac{\vec{P} \cdot \vec{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^{\gamma}} \quad (4)$$

این نتیجه را می‌توان به صورت کلی‌تر زیر نوشت،

$$V = \frac{\vec{P} \cdot \vec{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^{\gamma}} \quad (5)$$

که در آن $\vec{R} = R\vec{a}_R$ برداری است که از مرکز دوقطبی (دپیل) به نقطه P در میدان متوجه است. معادله (۵) به هیچ دستگاه مختصاتی بستگی ندارد.

گشتاور دوقطبی (دپیل) را مجدداً هنگام بررسی مواد دی‌الکتریک بکار خواهیم برد. از آنجائی که \vec{P} مساوی حاصلضرب مقدار بار در فاصله است مقدار آن و نیز پتانسیل هنگام افزایش Q و کاهش تغییر نمی‌کنند، به شرط اینکه حاصلضرب این دو ثابت بماند. حالت حد دوقطبی (دپیل) نقطه‌ای هنگامی حاصل می‌شود که \vec{a} به سمت صفر و Q به سمت بی‌نهایت میل کنند به طوری که حاصلضرب آنها \vec{P} مقدار معینی باشد.

با عطف توجه به میدانهای حاصل، نکته جالب اینست که میدان پتانسیل به نسبت عکس مجذور فاصله کاهش می‌یابد در حالی که شدت میدان الکتریکی به نسبت عکس توان سوم فاصله دوقطبی (دپیل) تنزل می‌کند! این میدانها نسبت به میدان مربوط به بار نقطه‌ای سریعتر تنزل می‌کنند و این نتیجه‌ای است که می‌بایست انتظار

داشته باشیم، چه دو بار مخالف از فواصل دورتر به ظاهر بیشتر به هم نزدیک می‌شوند و به صورت یک تک بار نقطه‌ای با بار صفر کولن تجلی می‌کنند.
 آرایش متقارن تعداد زیادتری بارهای نقطه‌ای میدان‌هایی به وجود می‌آورد که به نسبت عکس توانهای بزرگتری از r تنزل می‌کند. این گونه آرایشهای بار به بسیار قطبی موسوم‌اند و به صورت سربه‌های نامحدود در تعیین تقریبی بعضی از آرایشهای نامتقارن بار بکار می‌روند.

تمرین ۸.۴

یک دو قطبی (دپل) که برای آن $Qd = 400\pi\epsilon_0$ داده شده است، به ازاء چه مقادیری از r در r محوری z ، پتانسیل V مساوی است با (الف) ۱۰۰ و (ب) ۱۰ و (پ) ۱؟

جوابها: ۱ و ۳۱۶ و ۱۰

تمرین ۹.۴

نسبت E_θ به E_r را برای دو قطبی (دپل) در حالات زیر به دست آورید:
 (الف) $\theta = 0^\circ$ و (ب) $\theta = 30^\circ$ و (پ) $\theta = 60^\circ$ و (ت) $\theta = 90^\circ$
 جوابها: ۰ و ۰٫۲۸۹ و ۰٫۸۶۶ و ∞

۸.۴ چگالی انرژی در میدان الکتروستاتیکی ساکن

تا بحال مفهوم پتانسیل را به صورت کار انجام یافته، یا انرژی مصرف شده، در حرکت بار نقطه‌ای در میدان الکتریکی توصیف کردیم و در اینجا می‌خواهیم با تعقیب بیشتر جریان انرژی این بحث را کامل کنیم.

انتقال یک بار مثبت از نقطه بی‌نهایت دور به میدان بار نقطه‌ای دیگری مستلزم انجام دادن کار است و این کار توسط یک عامل خارجی، که محرک بار است صورت می‌گیرد. فرض می‌کنیم که این عامل خارجی بار را به نقطه‌ای در نزدیکی بار ثابت منتقل می‌کند و آن را در آنجا نگه می‌دارد. چون انرژی معلوم نمی‌شود، انرژی مصرف شده برای انتقال بار به این نقطه مشخص انرژی پتانسیل است، چه اگر عامل خارجی بار آزمایشی را رها سازد این بار با شتاب از بار ثابت دور می‌شود، و خود انرژی جنبشی کسب می‌کند و قادر به انجام کار خواهد بود.

بنابراین، برای اینکه انرژی پتانسیل موجود در یک مجموعه بار را پیدا کنیم، می‌بایست مقدار کاری را که توسط عاملی خارجی در قراردادن این بار در محل خود انجام شده است به دست آوریم.

کارمان را می‌توانیم از اینجا شروع کنیم که یک فضای خالی بی بار را در نظر مجسم کنیم. انتقال بار Q_1 از نقطه بی‌نهایت به هر نقطه دلخواه این فضا مستلزم انجام هیچ کاری نیست، چون در این فضا میدانی وجود ندارد. انتقال بار Q_2 در نقطه‌ای از میدان بار Q_1 احتیاج به انجام دادن مقداری کار دارد که مساوی حاصلضرب بار Q_2 در پتانسیل Q_1 در آن نقطه است. اگر این پتانسیل را با $V_{2,1}$ نمایش دهیم که اندیس اول محل بار و اندیس دوم عامل را توصیف می‌کند، و به این شکل $V_{2,1}$ نمایش پتانسیل محل بار Q_2 حاصل از بار Q_1 خواهد بود، در این صورت،

$$Q_2 V_{2,1} = \text{کار انجام شده در قراردادن } Q_2$$

به همین طریق، مقدار کار لازم برای قراردادن هر بار اضافی در محل خود در میدان بارهای موجود مساوی خواهد بود با:

$$Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} = \text{کار لازم برای قراردادن } Q_3 \text{ در محل خود}$$

و به همین ترتیب الی آخر. کار کل از جمع تمام این اجزاء به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} W_E &= \text{انرژی پتانسیل میدان} = \text{کار کل لازم برای قراردادن بارها} \\ &= Q_2 V_{2,1} + Q_2 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} + Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3} + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

با توجه به شکل جمله‌های معادله بالا می‌توانیم بنویسیم:

$$Q_3 V_{3,1} = Q_3 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} = Q_1 \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{13}}$$

مشاهده می‌شود که می‌توان به جای آن $Q_1 V_{1,3}$ را قرار داد. اگر به جای تمام جمله‌های انرژی کل معادل آنها را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} W_E &= Q_1 V_{1,2} + Q_1 V_{1,3} + Q_2 V_{2,3} + Q_1 V_{1,4} + Q_2 V_{2,4} \\ &\quad + Q_3 V_{3,4} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

با جمع روابط (۱) و (۲) می‌توانیم رابطه ساده‌تری به دست آوریم:

$$\begin{aligned} 2W_E &= Q_1(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots) \\ &\quad + Q_2(V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \dots) \\ &\quad + Q_3(V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \dots) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

۱. اما در ابتدا عاملی در بینهایت می‌بایست مقدار نامحدودی کار انجام داده باشد تا بار نقطه‌ای را در آن محل به وجود آورد. چه مقدار کار لازم است تا یک بار واحد را از روی هم قرار دادن دو نیم بار به وجود آورد؟

که در آن هر يك از مجموعه‌های پتانسیل داخل هر پراتز ترکیب پتانسیلهای حاصل از تمام بارها به استثنای پتانسیل ناشی از باری است که این پتانسیلها در محل آن محاسبه می‌شوند. به عبارت دیگر،

$$V_{۱,۲} + V_{۱,۳} + V_{۱,۴} + \dots = V_۱$$

یعنی پتانسیل در محل بار $Q_۱$ ناشی از بارهای $Q_۲, Q_۳, \dots$ بنابراین،

$$W_E = \frac{1}{2} (Q_۱ V_۱ + Q_۲ V_۲ + Q_۳ V_۳ + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N Q_m V_m \quad (۳)$$

برای به دست آوردن رابطه‌ای برای انرژی ذخیره شده در فضایی حاوی باری که به طور پیوسته توزیع شده باشد، به جای هر بار مقدار ρdv را قرار می‌دهیم و در نتیجه رابطه جمع به انتگرال تبدیل می‌شود.

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{حجم}} \rho V dv \quad (۴)$$

به کمک معادلات (۳) و (۴) می‌توانیم انرژی پتانسیل کل موجود در مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای و هر توزیع بار حجمی را پیدا کنیم. برای بارهای خطی یا سطحی نیز می‌توان به آسانی روابط مشابهی به دست آورد. معمولاً ترجیح می‌دهیم که از رابطه (۴) به عنوان يك رابطه کلی برای کلیه انواع مختلف باری که ممکن است مطرح باشد استفاده شود. قبل از اقدام به هر گونه تعبیر این نتیجه، ابتدا مطالب مشکلتوری از آنالیز برداری را طی چند سطر بررسی می‌کنیم و رابطه‌ای معادل (۴) ولی بر حسب \bar{E} و \bar{D} به دست می‌آوریم.

این کار را با کمی طولانی‌تر کردن آن آغاز می‌کنیم. با استفاده از معادله اول ماکسول و قرار دادن معادل $\nabla \cdot \bar{D}$ به جای ρ و کاربرد يك اتحاد برداری که برای هر تابع شمارواره‌ای (اسکالر) و هر تابع برداری \bar{D} صادق است، خواهیم داشت:

$$\nabla \cdot (V \bar{D}) \equiv V (\nabla \cdot \bar{D}) + \bar{D} \cdot (\nabla V) \quad (۵)$$

که اثبات آن به آسانی از طریق بسط در دستگاه مختصات قائم میسر است و به ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} W_E &= \frac{1}{2} \int_{\text{حجم}} \rho V dv = \frac{1}{2} \int_{\text{حجم}} (\nabla \cdot \bar{D}) V dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{\text{حجم}} [\nabla \cdot (V \bar{D}) - \bar{D} \cdot (\nabla V)] dv \end{aligned}$$

با کاربرد قضیه دیورژانس فصل قبل، انتگرال حجمی اول معادله آخر به انتگرال سطح بسته، که تمام حجم مورد مطالعه را احاطه می کند، تبدیل می شود. این حجم که ابتدا در رابطه (۴) ظاهر می شود، می بایست شامل تمام بارها باشد به طوری که در خارج آن حجم هیچ باری وجود نداشته باشد. به این ترتیب اگر بخواهیم می توانیم این حجم را دارای گسترشی نامحدود به حساب آوریم،

$$W_E = \frac{1}{4\pi} \oint_S (V \bar{D}) \cdot d\bar{S} - \frac{1}{4\pi} \int_{\text{حجم}} \bar{D} \cdot (\nabla V) dv$$

انتگرال سطحی مساوی صفر است، چون می دانیم روی این سطح بسته که عالم لایتناهی را احاطه می کند V دست کم به سرعت $1/r$ به صفر نزدیک می شود (مجموعه بارها از آن نقطه به صورت یک بار نقطه ای به نظر می رسد) و \bar{D} نیز دست کم به سرعت $1/r^2$ به صفر نزدیک می شود در حالی که عنصر دیفرانسیل سطح رفته رفته به قسمتی از سطح یک کره که به میزان r^2 افزایش می یابد تبدیل می گردد. در نتیجه رابطه زیر انتگرال دست کم به سرعت $1/r$ به صفر نزدیک می شود و در حد رابطه زیر انتگرال و خود انتگرال هر دو صفر خواهند شد. حال اگر در انتگرال حجمی باقیمانده $\bar{E} = -\nabla V$ قرار دهیم، جواب مورد نظر را به دست خواهیم آورد.

$$W_E = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{حجم}} \bar{D} \cdot \bar{E} dv = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{حجم}} \epsilon_0 E^2 dv \quad (۶)$$

از رابطه (۶) برای محاسبه انرژی ذخیره شده در میدان الکتروستاتیکی بخشی از یک کابل هم مرکز یا خازن استوانه ای به طول L متر استفاده می کنیم. از فصل قبل داریم

$$\bar{E} = \frac{a\rho_s}{\epsilon_0 r} \bar{a}_r$$

و

$$W_E = \frac{1}{4\pi} \int_0^L \int_a^b \int_0^{2\pi} \epsilon_0 \frac{a^2 \rho_s^2}{\epsilon_0^2 r^2} r d\varphi dr dz = \frac{\pi L a^2 \rho_s^2}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

هر گاه تمام بار موجود روی هادی داخلی را $Q = 2\pi a L \rho_s$ بنامیم، همچنین اختلاف پتانسیل بین دو هادی را

$$V_{ab} = - \int_b^a \frac{a\rho_s}{\epsilon_0 r} dr = \frac{a\rho_s}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

بدانیم، این رابطه شکل آشنا تری به خود می‌گیرد، چنانکه خواهیم داشت:

$$W_E = \frac{1}{\epsilon_0} QV_{ab}$$

که رابطه‌ای آشنا برای انرژی ذخیره شده در يك خازن است. به سؤال درباره اینکه این انرژی در کجای میدان الکتریکی ذخیره شده است هنوز جواب داده نشده است و هیچ‌گاه نمی‌توان برای انرژی پتانسیل محل فیزیکی دقیقی ارائه داد. مدادی را بلند می‌کنید، و مداد انرژی پتانسیل کسب می‌کند آیا این انرژی در ملکولهای مداد ذخیره شده است یا در میدان ثقل میان مداد و زمین یا در محل مرموز دیگری؟ آیا انرژی ذخیره شده در يك خازن در خود بارها است یا در میدان، یا جای دیگر؟ هیچ‌کس نمی‌تواند گواهی بر صحت نظریه شخصی خود بیاورد و از این رو تصمیم‌گیری راجع به این موضوع به فیلسوفها واگذار می‌شود. از طریق نظریه الکترومغناطیس می‌توان به سادگی انرژی يك میدان الکتریکی یا باری توزیع شده را در خود میدان ذخیره شده فرض کرد، برای اینکه اگر رابطه (۶) را که رابطه‌ای بسیار دقیق و صحیح است در نظر بگیریم،

$$W_E = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{حجم}} \bar{D} \cdot \bar{E} dv$$

و آن را به صورت دیفرانسیل بنویسیم:

$$dW_E = \frac{1}{\epsilon_0} \bar{D} \cdot \bar{E} dv$$

یا

$$\frac{dW_E}{dv} = \frac{1}{\epsilon_0} \bar{D} \cdot \bar{E}$$

کمیت $\frac{1}{\epsilon_0} \bar{D} \cdot \bar{E}$ را به دست می‌آوریم که دارای واحد چگالی انرژی یعنی ژول بر متر مکعب است. می‌دانیم که اگر از این چگالی انرژی برای تمام حجم شامل میدان انتگرال بگیریم، نتیجه طبعاً انرژی کل موجود خواهد بود. ولی دلیلی نداریم به طور قطع بگوئیم که انرژی ذخیره شده در هر عنصر دیفرانسیلی حجم dv مساوی $\frac{1}{\epsilon_0} \bar{D} \cdot \bar{E} dv$ است. اما چنین فرضی برای تجسم مطلب مناسب است و آنرا تا وقتی که خلاف آن ثابت نشده است مورد استفاده قرار می‌دهیم.

تمرین ۱۰.۴

انرژی ذخیره شده در ناحیه $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$ و $0 \leq z \leq 1$ را برای میدانهای پتانسیل زیر به دست آورید: (الف) $V = x + y$ و (ب) $V = x^2 + y$

جوابها: ϵ_0 ، $\frac{7}{6}\epsilon_0$

مراجعی که توصیه می‌شوند

1- Attwood, S.S.: «Electric and Magnetic Fields,» 3d ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1949.

شامل تعداد زیادی نقشه‌های خوب رسم شده توزیع‌های مختلف بار، از جمله میدان دوقطبی. در این کتاب از آنالیز برداری استفاده نشده است.

۲- Skilling, H.H. (به مراجع توصیه شده فصل ۳ مراجعه شود) در صفحات ۱۹ تا ۲۱ گرادیان توصیف شده است.

۳- Thomas, G.B. (به مراجع توصیه شده فصل ۱ مراجعه شود) در صفحات ۵۰۸-۵۱۲ مشتقهای جهتی و گرادیان ارائه شده است.

مسائل

۱- توضیح دهید که چگونه ممکن است در میدان نیروی

$$\vec{F} = (y^2 - y)\vec{a}_x + x\vec{a}_y$$

از مبدأ به نقطه $(1, 1, 0)$ حرکت کنیم بی‌آنکه در نقطه‌ای از مسیر نه انرژی از دست بدهیم و نه اخذ انرژی کنیم.

۲- (الف) برای میدان نیروی ثقل فصل ۲ مسئله ۱ فرض کنید جرم کسره زمین $10^{24} \times 598 \text{ kg}$ و شعاع آن 6371 km باشد و نیروی اعمال شده بر جرمی ۱ کیلوگرمی را در سطح کسره زمین به دست آورید. (ب) چه مقدار انرژی برای انجام بلند کردن جرم ۱ کیلوگرمی به اندازه 1 m ($\Delta L = 1 \text{ m}$) صرف می‌شود؟
۳- برای حرکت دادن یک بار 10^{-6} C در میدان

$$\vec{E} = 10\vec{a}_r + 7\vec{a}_\theta + 4a_\phi$$

به اندازه فاصله‌ای نموی از نقطه $(0^\circ, 20^\circ, 20)$ به نقاط زیر چه مقدار کار انجام می‌شود؟ (الف) $(0^\circ, 20^\circ, 20)$ و (ب) $(40^\circ, 20^\circ, 20)$ و (پ) $(40^\circ, 20^\circ, 20)$

۴- در میدان مسئله ۱ چه انرژی‌ای در امتداد مسیر مستقیم $(0, 0, 0)$ به $(1, 0, 0)$

به $(0, 1, 0)$ صرف می‌شود؟

۵- الف) کار انجام یافته برای حرکت دادن بار C از $(0, 0, 0)$ به $(1, 1, 0)$ در امتداد مسیر $y = x^2$ و $z = 0$ در میدان

$$\vec{E} = -2xy \vec{a}_x / (1+x^2)^2 - \vec{a}_y / (1+x^2)$$

را تعیین کنید. (ب) همین کار را برای مسیر $y = x$ و $z = 0$ تکرار کنید.

۶- کار انجام شده برای حرکت دادن بار C در امتداد محور x از $(0, 0, 0)$ به $(1, 0, 0)$ در $(x, 0, 0)$ متناسب است با مربع فاصله طی شده. $E_x(x)$ روی محور x را با فرض اینکه $E_x(2) = 10$ است به دست آورید.

۷- انرژی صرف شده برای انتقال بار C از نقطه $(4, 2, 0)$ به $(1, 1, 0)$ در صفحه $z = 0$ در داخل میدان $\vec{E} = 2y \vec{a}_x + 2x \vec{a}_y$ را در امتداد مسیرهای زیر با هم مقایسه کنید: الف) خط مستقیم $3y = x + 2$ و $3y = x$ (ب) سهمی $y^2 = x$ و (پ) هذلولی

$$x(7-3y) = 4$$

۸- میدان $\vec{E} = (100/r) \vec{a}_\phi + 40 \vec{a}_z$ در مختصات استوانه‌ای مفروض است. کار انجام یافته برای حرکت دادن بار Q از نقطه Q از نقطه $(r=2, \phi=0, z=0)$ را به نقطه $(1, 90^\circ, 2)$ در امتداد مسیرهای زیر به دست آورید:

الف) $r=2, \phi \leq \phi < 2\pi, z=2\phi/\pi$ و (ب) $r=2, z=0, \phi = \pi/2$ تا $\phi = 0$ متعاقب $r=2, \phi = \pi/2, z=0$ تا $\phi = 0$

۹- کار لازم برای حرکت دادن بار C را از بینهایت تا مبدأ در میدان V/m به دست آورید. $E_r = 50 r / (r^2 + 1)^2$

۱۰- سه بار خطی به ترتیب زیر در فضای آزاد در صفحه $z=0$ قرار گرفته‌اند: 40 nC/m در $y=0$ و -20 nC/m در $y=4$ و $y=4$. اختلاف پتانسیل بین نقاط زیر چه اندازه است؟ الف) $(3, 0, 0)$ و $(16/3, 0, 0)$ و (ب) $(0, 2, 0)$ و $(0, 6, 0)$ ؟

۱۱- فرض کنید: $V = Ax^2yz + B$ و A, B را برای این حالات به دست آورید: الف) $V=0$ در مبدأ و $V=100$ در $(2, -1, 5)$ (ب) $V=0$ در $(2, -1, 5)$ و $V=100$ در مبدأ و (پ) $V=0$ در مبدأ و $|\vec{E}| = 20$ در $(2, -1, 5)$.

۱۲- بارهای نقطه‌ای 20 nC در نقطه $(9, 0, 0)$ و -40 nC در نقطه $(0, 16, 0)$ در فضای آزاد قرار گرفته‌اند. پتانسیل نقطه $(0, 0, 12)$ را برای حالات زیر به دست آورید: الف) $V(\infty) = 0$ و (ب) $V(0, 0, 0) = 0$ و (پ) $V(0, 0, 0) = 10$.

۱۳- میدان یک حلقه بار روی محور آن می‌دانیم (به بخش ۵.۴ مراجعه شود). V را در نقطه $(0, 0, k)$ برای بار لایه‌ای استوانه‌ای شکلی به چگالی $\rho_s = \rho_s, r=a$ و $0 \leq z \leq h$ در فضای آزاد به دست آورید.

۱۴- انتگرال دوگانه‌ای که $V(a, b, c)$ حاصل از بار سطحی به چگالی $\rho_s = 10/(x^2 + y^2 + z^2)$ و $-1 \leq x \leq 1$ و $-1 \leq y \leq 1$ و $z = 0$ در $\rho = 0$ در بقیه نقاط را در فضای آزاد تعیین می‌کند بنویسید.

۱۵- (الف) پتانسیل حاصل از دو آرایش بار زیر را در نقطه $(5, 0, 0)$ در هوا به دست آورید: الف: بار 8 nC که به صورت یک حلقه یک‌نواخت در $z = 0$ و $r = 1$ قرار گرفته است. (ب) ۴ بار نقطه‌ای هر یک 2 nC که در نقاط $(\pm 1, 0, 0)$ و $(0, \pm 1, 0)$ قرار گرفته‌اند.

۱۶- قرصی با مشخصات، $0 \leq r \leq a$ ، $0 \leq z \leq 2\pi$ ، $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ حامل باری سطحی به چگالی $\rho_s = \rho_0 \frac{r^2}{a^2}$ است. $V(0, 0, z)$ را در فضای آزاد به دست آورید.

۱۷- مقادیر پتانسیل در سه نقطه داده شده‌اند و عبارتند از

$$V(3, 19, -6) = 661 \text{ و } V(3, 20, -6) = 682$$

$$\text{و } V(3, 21, -6) = 683$$

(الف) E_y را در نقطه $(3, 20, -6)$ تخمین بزنید. (ب) V تابع x و z نیست ρ را در نقطه $(3, 20, -6)$ تخمین بزنید.

۱۸- V و \vec{D} و \vec{E} را در نقطه $(2, -2, 2)$ برای هر یک از میدانهای پتانسیل زیر تعیین کنید: (الف) $V = 3xy + z + 4$ و (ب) $V = 5 \sin \varphi e^{-r+z}$

$$\text{و (ب) } V = \frac{4}{r} \sin \theta \sin \varphi$$

۱۹- جهت فصل مشترك يك سطح هم پتانسیل و صفحه $z = 1$ در نقطه $(1, -6, 2)$ با جهت بردار $\vec{A} = 6\vec{a}_x + 2\vec{a}_y$ یکی است. اگر بیشینه میزان تغییرات V در فضا به شرط $E_x > 0$ و $E_z = 0$ و $E_y = 500 \text{ V/m}$ باشد، \vec{E} را به دست آورید.

۲۰- شرط $E_z = 0$ گروهی از سطوح هم پتانسیل را به وسیله $y^2 = xy + C$ معین می‌کند. اگر در نقطه $(2, 5, 0)$ و $E_x = 20$ و \vec{E} را به دست آورید.

۲۱- در میدان پتانسیل $V = 5r^2$ چه مقدار بار در داخل یک کره واحد به مرکز مبدأ قرار دارد.

۲۲- میدان پتانسیل بین دو سطح کره‌ای باردار به شعاعهای $r = 5$ و $r = 8$ سانتیمتر $V = 6000/r \text{ V/m}$ است. (الف) \vec{E} را به دست آورید. (ب) \vec{D} را در $r = 5$ سانتیمتر تعیین کنید. (پ) چه مقدار بار روی سطح داخلی قرار دارد؟ (ت) چگالی بار سطحی در $r = 8$ سانتیمتر چه اندازه است؟

۲۳- اگر در قسمت (الف) تمرین ۸۰۴ روابط R_1 و R_2 روی محور z دقیق باشند، دو مقدار r را به ازای $d = 0.2$ به دست آورید.

۲۴- (الف) اگر برای یک دو قطبی $Qd = 400\pi\epsilon_0$ ، معادلات سطوح هم پتانسیل و خطوط شاری که از نقطه $r = 2$ و $\theta = 60^\circ$ در صفحه $\varphi = 0$ می گذرنند به دست آورید. (ب) نشان دهید که این منحنی ها در آن نقطه برهم عمودند. [به خاطر آورید که دو منحنی در مختصات قطبی هنگامی قائم اند که متادیر $r/(dr/d\theta)$ معکوس های منفی باشند.]

۲۵- یک دو قطبی الکتروستاتیکی دارای گشتاوری برابر $\bar{p} = 5\bar{a}_z \text{ nC}\cdot\text{m}$ است (الف) اندازه و جهت \bar{E} را در $r = 2 \text{ cm}$ و $\theta = 45^\circ$ به دست آورید. (ب) در صفحه $\varphi = 0$ خطی را که جهت E در امتداد آن توسط $(\bar{a}_x + \bar{a}_y)/\sqrt{2}$ تعیین می شود مشخص کنید.

۲۶- روی محور z بارهایی به ترتیب زیر قرار گرفته اند: $Q/2$ - در $(0, 0, d)$ و Q در $(0, 0, 0)$ و $-Q/2$ در $(0, 0, -d)$ و V را در نقطه دور $P(r, \theta, \varphi)$ به دست آورید.

۲۷- (الف) بارهای نقطه ای 4 nC ، 3 ، 2 روی محور x به ترتیب در نقاط $x = 1, 2, 3, 4$ قرار گرفته اند. چه مقدار انرژی در این میدان ذخیره شده است؟ (ب) همین مسأله را در صورتی که بارهای 2 ، 3 ، 4 منفی باشند، حل کند.

۲۸- از رابطه انرژی ذخیره شده در خازن هم مرکزی به طول L که در آخرین بخش این فصل به دست آمد، از نتیجه تئوری مدار $W_E = 1/2 CV^2$ برای تعیین ظرفیت بر حسب ابعاد استفاده کنید. نتیجه به دست آمده را با مراجعه به بخش آینده ۹۰۵ آزمایش کنید.

۲۹- در قلب نگاری برقی (الکتروکاردیوگرافی) ولتاژ بین دو اتصال که به بدن بیمار وصل شده است (یعنی هادیها و اتصالیها)، اغلب بر حسب تصویر بردار اتصال \bar{L} بر بردار قلب \bar{H} تعبیر می شود. تصویر حاصل ولتاژ اتصالیها است. با مراجعه به شکل ۷ کتاب:

R. McFee and G.M. Baule, «Research in Electrocardiography and Magnetocardiography», *Proc. IEEE*, Vol. 60, no. 3, March 1972, PP. 290-317.

سه ولتاژ اتصالی حاصل از بردارهای اتصال I و II و III را برای

$$\bar{I} = \bar{a}_z \text{ (mV/m)} \text{ و } \bar{H} = 20(\bar{a}_x - \bar{a}_y) \text{ cm}$$

بدست آورید.

انرژی و پتانسیل ۱۴۵

۳۰. مسأله شماره ۳.۱ صفحه ۱۶ کتاب

R. D. Stuart, "Electromagnetic Field Theory." Addison
Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass.,
1965

را حل کنید.



هادیها و عایقها و ظرفیت

در این فصل قصد داریم موارد استعمال قوانین و روشهای فصول قبل را در مورد بعضی مواد که يك مهندس با آنها سروکار دارد بررسی کنیم. بعد از تعریف جریان و چگالی جریان و به دست آوردن معادله بنیادی پیوستگی، هادیها را مورد مطالعه قرار می دهیم و قانون اهم را از نظر خرد بینی و کلان بینی بیان می کنیم. با این نتایج می توانیم مقادیر مقاومت را برای چند شکل هندسی ساده مقاومت حساب کنیم. سپس شرایطی را که در مرزهای هادیها می بایست رعایت شوند مشخص خواهیم کرد.

بعد از مطالعه مختصر يك نیم - هادی معمولی، پیلاریزگی مواد عایق را مورد تحقیق قرار می دهیم و ضریب پذیرش نسبی یا ضریب دی الکتریک را که از پارامترهای مهم مهندسی است توصیف خواهیم کرد. با شناختن مواد هادی و عایق می توانیم با کنار هم گذاشتن آنها خازن به وجود آوریم. برای تعیین ظرفیت چند نوع خازنی که خواهیم ساخت، می بایست از اکثر نتایج بدست آمده در فصول قبل استفاده کنیم.

اصول اساسی الکترومغناطیس که مقاومتها و خازنها به آنها مربوط می شوند موضوع بحث واقعی این فصل است و مطالعه الفباگر را به فصل ۹ موکول می کنیم.

۱۰۵ جریان و چگالی جریان

حرکت بارهای الکتریکی جریان به وجود می آورد. واحد جریان آمپر (A) است که بر حسب تعریف مساوی يك کولن بار است که در يك ثانیه از يك نقطه مرجع

(یا از يك صفحه مرجع) عبور کند. به این ترتیب جریان بر حسب حرکت بارهای مثبت تعریف شده است گرچه، به طوری که بزودی خواهیم دید، هدایت در فلزات به وسیله حرکت الکترونها تأمین می شود.

در نظریه میدانها، معمولاً بیشتر وقایع مربوط به يك نقطه مورد نظر است تا وقایع مربوط به يك ناحیه بزرگ و مشاهده خواهیم کرد که مفهوم چگالی جریان، که بر حسب آمپر بر متر مربع (A/m^2) اندازه گرفته می شود، مقیاس مفیدتری است. چگالی جریان برداری است و به وسیله \vec{J} مشخص می شود.

نمو جریانی که از يك نمو سطح ΔS عمود بر چگالی جریان می گذرد مساوی است با

$$\Delta I = J_n \Delta S$$

در حالتی که چگالی جریان بر سطح عمود نباشد،

$$\Delta I = \vec{J} \cdot \Delta \vec{S}$$

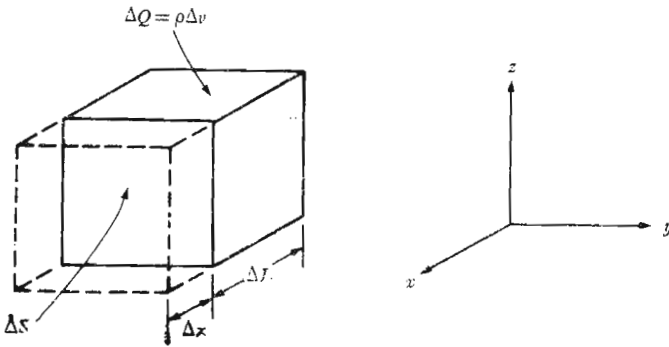
جریان کل با انتگرال به دست می آید:

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (1)$$

چگالی جریان را می توان به سرعت چگالی بار حجمی در يك نقطه مربوط کرد. عنصر بار $\Delta Q = \rho dv = \rho \Delta S \Delta L$ را در شکل (۱.۵) در نظر می گیریم. برای سهولت توضیح فرض می کنیم که عنصر بار طوری قرار گرفته است که لبه های آن موازی محورهای مختصات و سرعت آن فقط دارای مؤلفه x باشد. در فاصله زمانی Δt سطح جلوی (به مساحت ΔS) به اندازه فاصله Δx به محل خط چین نقل مکان کرده است. باری که از سطح مرجع ΔS ، یعنی وضع اولیه سطح جلوی، گذشته است مساوی است با $\rho \Delta v (\Delta x / \Delta L) = \rho \Delta S \Delta x$ و بنابراین جریان حاصل مساوی است با:

$$\Delta I = \rho \Delta S \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

۱. جریان بردار نیست، برای اینکه به آسانی می توان مسأله ای را در نظر مجسم کرد که در آن جریان کل I در يك هادی که شکلی نامنظم (مانند يك کره) دارد، در هر نقطه از سطح مقطع جهتی خاص خود دارد. جریان يك سیم فوق العاده نازک یا جریان رشته چرغی را می توان به عنوان يك بردار تعریف کرد ولی معمولاً ترجیح می دهیم که جهت را به جای جریان به مسیر جریان یا سیم بدهیم.



شکل ۱۰۵ یک نمو بار $\Delta Q = \rho \Delta S \Delta L$ که با حرکت به فاصله Δx در زمان Δt مؤلفه چگالی جریان را در حد $J_x = \rho U_x$ ایجاد می کند.

و چنانچه حد رابطه فوق را نسبت به زمان در نظر بگیریم،

$$\Delta I = \rho \Delta S U_x$$

که در آن U_x مشخص مؤلفه x سرعت U است. چگالی جریان عبارت خواهد بود از:

$$J_x = \rho U_x$$

و به طور کلی

$$\boxed{\vec{J} = \rho \vec{U}} \quad (۲)$$

این نتیجه آخری به وضوح نشان می دهد که حرکت بارها جریان الکتریکی را به وجود می آورد. این نوع جریان را جریان انتقالی و $\rho \vec{U}$ را چگالی جریان انتقالی می نامند، همچنین می توان دید که چگالی جریان انتقالی به طور خطی با چگالی بار و نیز سرعت بستگی دارد. میزان جریان جرم اتومبیلها از هر متر مربع در ثانیه در تونل هلند را می توان یا بالا بردن سرعت افزایش داد یا اینکه چگالی اتومبیلها را در هر متر مکعب اضافه کرد، به شرط اینکه این امر برای راننده نیز میسر باشد.

تمرین ۱۰۵

جریان کلی را که از سطح استوانه ای به طول یک سانتیمتر و شعاع $r = ۲ \text{ mm}$ می گذرد وقتی روابط زیر در حدود این شعاع صادق باشند به دست آورید:

$$J_r = [\cos(\varphi/2)]/r \text{ A/m}, \quad -\pi < \varphi < \pi \text{ (الف)}$$

$$U_r = 3 \times 10^{10} r^2 \text{ m/s} \text{ و } \rho = 10^{-7}/r \text{ C/m}^3 \text{ (ب)}$$

جوابها: 40 mA و 754 mA

۲.۵ پیوستگی جریان

گرچه اکنون میدانهای ساکن را مورد مطالعه قرار داده ایم ولی وارد کردن مفهوم جریان به طور منطقی بحثی راجع به بقاء بار و معادله پیوستگی را به دنبال می کشد. اصل بقاء بار فقط مبین این است که بار را نمی توان خلق کرد و نمی توان از میان برد، گرچه مقادیر مساوی بار مثبت و منفی را می توان به طور همزمان از طریق تجزیه خاکی، یا از راه ترکیب مجدد نابود کرد.

معادله پیوستگی نیز هنگامی از این اصل نتیجه می شود که هر فضای محصور در سطح بسته ای را در نظر بگیریم. جریانی که از سطح بسته می گذرد مساوی است با

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

و این جریان بار مثبت به سمت خارج باید با کاهش بار مثبت (یا شاید افزایش بار منفی) داخل سطح بسته جبران شود. اگر بار داخل سطح را Q_i بنامیم، میزان کاهش بار dQ_i/dt - خواهد بود و اصل بقاء بار مستلزم آن است که

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ_i}{dt} \quad (1)$$

بهتر است در اینجا سؤالی را که اغلب پرسیده می شود جواب داد و آن این است که: آیا در این رابطه اشتباهی در علامت نیست؟ من فکر می کردم که $I = dQ/dt$ مثبت یا منفی بودن علامت بستگی به این دارد که چه جریان و باری منظور ما است. در نظریه مدار معمولاً میزان جریان وارد شده به یک سرخازنی را با میزان افزایش بار روی آن صفحه بر حسب زمان وابسته می دانیم. جریان در رابطه (۱) جریانی جاری به خارج است. تعریف جریان بر حسب حرکت بار مستلزم شمارش عناصر بار جباری از، مثلاً راست به چپ از یک نقطه مرجع است. نمو بار ΔQ مشخص افزایش مقدار بار در طرف راست نقطه مرجع است و بدین ترتیب جریان الکتریسیته به داخل ناحیه دست راست مساوی dQ/dt + است.

معادله (۱) شکل انتگرالی معادله پیوستگی است و شکل دیفرانسیلی یسا نقطه ای آن با تغییر انتگرال سطحی به انتگرال حجمی به وسیله قضیه دیورژانس به دست می آید،

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{حجم}} (\nabla \cdot \vec{J}) dv$$

و با مشخص کردن بار محصور Q_i به وسیله انتگرال حجمی چگالی بار خواهیم داشت:

$$\int_{\text{حجم}} (\nabla \cdot \vec{J}) dv = - \frac{d}{dt} \int_{\text{حجم}} \rho dv$$

اگر سطح را ثابت فرض کنیم مشتق بالا به يك مشتق نسبی تبدیل می شود و می توان آن را به داخل انتگرال برد

$$\int_{\text{حجم}} (\nabla \cdot \vec{J}) dv = \int_{\text{حجم}} - \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

از آنجائی که این رابطه برای هر حجم دلخواه، هر قدر هم کوچک باشد، صادق است، برای يك نمو حجم نیز صحت دارد،

$$(\nabla \cdot \vec{J}) \Delta v = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta v$$

که از آن شکل نقطه ای معادله پیوستگی به دست می آید،

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

(۲)

این معادله، با توجه به تعبیر فیزیکی دیورژانس، نشان می دهد که شدت جریان یا مقدار بار در هر ثانیه، که از هر واحد حجم يك حجم کوچک خارج می شود، مساوی است با میزان کاهش بار در واحد حجم در هر نقطه نسبت به زمان. در بخش ۷.۵ اولین دفعه از این اصل برای بررسی مختصر سیلان بار از داخل به سطح خارجی هادیها و عایقها استفاده خواهیم کرد.

تمرین ۲.۵

چگالی بار حجمی در يك ناحیه بخصوص به میزان $2 \times 10^8 \text{ C/m}^3 \cdot \text{s}$ تنزل می کند. (الف) چه جریانی از يك نمو سطح کروی به شعاع 10^{-5} m در آن ناحیه می گذرد؟ (ب) مقدار متوسط مؤلفه ای از چگالی جریسان که از این سطح به سمت خارج می گذرد چه اندازه است؟

جوابها: $\frac{2}{3} \text{ kA/m}^2, 0.0838 \mu\text{A}$

۳.۵ هادیهای فلزی

امروزه فیزیکدانها حرکت الکترونیهای دور هسته مثبت اتم را بر حسب انرژی کل الکترونی واقع در فاصله بینهایت هسته، نسبت به یک سطح مرجع صفر توصیف می کنند. انرژی کل مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل است و چون برای دور کردن الکترون از هسته باید انرژی مصرف کرد، انرژی الکترونیهای دور هسته منفی به حساب می آید. با وجود محدودیتهائی که در این تصویر وجود دارد، مناسب آن است که این مقادیر انرژی به هاددهای حول هسته نسبت داده شود، به طوری که انرژیهای منفی تر مربوط به مدارهای نزدیک تر به هسته خواهد بود. طبق نظریه کوانتم، در هر اتم فقط سطوح یا حالات معینی از انرژی ممکن است وجود داشته باشد و از اینرو یک الکترون برای نقل مکان از یک سطح به سطح دیگر باید مقدار معینی انرژی دریافت کند یا از دست بدهد. یک اتم معمولی در درجه حرارت صفر مطلق دارای الکترونی در هر یک از پوسته های کم انرژی است که با شروع از هسته به خارج ادامه پیدا می کنند تا تمام الکترونها به پایان برسند.

در جامدات بلوری، مانند فلزات یا الماس، اتمها به فواصل نزدیک به هم قرار گرفته اند و تعداد الکترونها بسیار بیشتر و تعداد سطوح انرژی مجاز نیز بسبب نیروهای متقابل بین اتمهای مجاور بسیار زیادتر است. می بینیم که در این حالت مقادیر انرژیهای که الکترونها ممکن است داشته باشند در داخل حدود وسیع که آنها را نوارهای انرژی می نامیم مجتمعند، به طوری که هر نوار شامل تعداد زیادی سطوح معین و نزدیک به هم انرژی است، در درجه حرارت صفر مطلق، کلیه سطوح انرژی اجسام جامد معمولی نیز توسط الکترونها اشغال شده اند که به ترتیب از پسااین ترین سطح شروع می شود و به سطوح بالاتر ادامه پیدا می کند تا تمام الکترونها جدا شده شوند. الکترونیهای که دارای بالاترین سطح انرژی اند، یعنی الکترونیهای ظرفیت، در نوار ظرفیت قرار دارند. اگر در نوار وال ظرفیت سطوح انرژی بالاتر مجازی وجود داشته باشد، یا اگر نوار ظرفیت به تدریج در نوار هدایت محو شود، در این صورت ممکن است توسط میدانی خارجی انرژی اضافی به الکترونیهای ظرفیت داده شود و باعث جریان الکترون گردد. در اینصورت ماده هادی فلزی نامیده می شود. نوار ظرفیت پر شده و نوار هدایت پر نشده برای هادی در صفر درجه کلون در شکل (۲.۵ الف) نشان داده شده است.

اما در صورتی که الکترونی با ماکزیمم انرژی بالاترین سطح نوار ظرفیت را اشغال کند و بین نوار ظرفیت و نوار هدایت فاصله ای موجود باشد، الکترون نمی تواند به مقادیر کم انرژی از خارج بپذیرد و جسم یک عایق است. این نوع ساختمان نوار در شکل (۲.۵ ب) نشان داده شده است. مشاهده می شود که وقتی مقدار

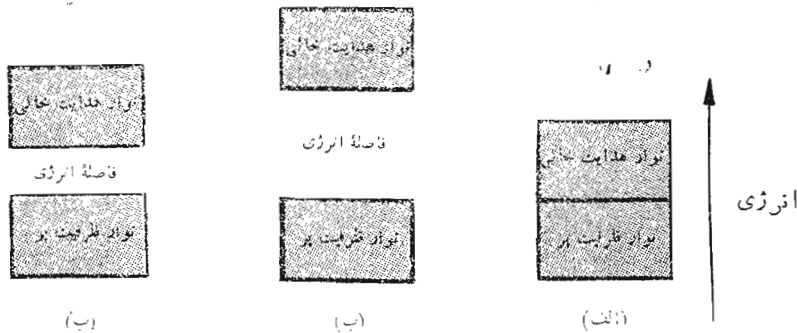
زیادی انرژی به الکترون انتقال یابد، الکترون ممکن است به اندازه کافی تحریک شود که بتواند با جهش از روی فاصله دو نوار، به نوار انرژی بالاتر برود که هدایت به آسانی صورت می گیرد. در این حالت عایق به اصطلاح شکسته می شود.

حالت واسطه هنگامی است که «ناحیه ممنوع» کوچکی دو نوار انرژی را، همانطور که شکل (۲۰۵ پ) نشان می دهد از هم جدا کند. در این حال، مقدار کمی انرژی به صورت حرارت یا نور یا میدان الکتریکی ممکن است انرژی الکترونها را در سر حد فوقانی نوار پر افزایش دهد و باعث هدایت شود. این مواد عایقهای هستند که بسیاری از خواص هادیها را از خود نشان می دهند و نیم هادی نامیده می شوند.

در وهله اول هادیها را بررسی می کنیم. در این مواد الکترونها ظرفیت، الکترونها هدایت یا آزاد نیز نامیده می شوند و در اثر یک میدان الکتریکی به حرکت در می آیند. میدان \vec{E} بر الکترونی که دارای بار $e = -Q$ است نیروی اعمال می کند:

$$\vec{F} = -e\vec{E}$$

اگر این الکترون در فضای آزاد می بود شتاب پیدا می کرد و سرعت (و انرژی) آن پیوسته افزایش می یافت. در ماده بلوری حرکت الکترون در اثر تصادم دائمی با ساختمان شبکه بلوری که در اثر حرارت تحریک شده است کند می شود و بزودی به



شکل ۲۰۵ ساختمان نوار انرژی در سه نوع مختلف ماده در $300^\circ K$. (الف) در هادیها بین نوارهای ظرفیت و هدایت هیچ فاصله انرژی وجود ندارد. (ب) مواد عایق دارای یک فاصله بزرگ انرژی بین این دو نوارند. (پ) نیم هادیها فقط دارای یک فاصله انرژی کوچک بین دو نوارند.

يك سرعت متوسط ثابت می‌رسد. این سرعت U_d را سرعت دافنی می‌نامند و از طریق تحرك الكترون و به طور خطی به شدت میدان الکتریکی در ماده مورد نظر بستگی دارد. ما تحرك را با علامت μ (mu) نمایش می‌دهیم، و

$$\bar{U}_d = -\mu_e \bar{E} \quad (1)$$

که در آن μ_e تحرك يك الكترون و به موجب تعریف مثبت است. معادله (۱) نشان می‌دهد که تحرك بر حسب متر مربع بر ولت-ثانیه اندازه گرفته می‌شود و مقدار آن به طور نمونه برای آلومینیم ۰۰۰۰۱۴ و برای مس ۰۰۰۰۳۲ و برای نقره ۰۰۰۰۵۲ است.

در این هادیهای خوب سرعت رانش چند سانتیمتر در ثانیه کافی است که افزایش درجه حرارت قابل ملاحظه‌ای را به وجود آورد به طوری که اگر حرارت ایجاد شده به سرعت به وسیله هدایت یا تشعشع دفع نشود باعث ذوب شدن سیم می‌گردد.

اگر رابطه (۱) را در معادله (۲) بخش ۱.۰۵ فرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\bar{J} = -\rho_e \mu_e \bar{E} \quad (2)$$

که در آن ρ_e چگالی الکترونیهای آزاد است. چگالی کل الکترونها ρ صفر است زیرا در ماده خنثی تعداد مساوی بارهای مثبت و منفی وجود دارد.

اما رابطه بین \bar{J} و \bar{E} نیز در يك هادی فلزی بر حسب هدایت مخصوص σ (Sigma) نیز بیان می‌شود.

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} \quad (3)$$

که در آن σ بر حسب مهو بر متر (\mathcal{O}/m) اندازه گرفته می‌شود. يك مهو، \mathcal{O} مساوی يك آمپر بر يك ولت است که (با اهم) به احترام گئورگ زیمون اهم^۱، فیزیکدان آلمانی که اولین بار رابطه بین ولتاژ و جریان را، توضیح داد و رابطه (۳) متضمن آن است، از نام او گرفته شده است.

رابطه فوق را شکل نقطه‌ای قانون اهم می‌نامیم و بسزوی شکل کلی‌تر آن را بررسی خواهیم کرد.

اما ابتدا، از لحاظ اطلاع خوب است به هدایت مخصوص چند هادی فلزی بطور نمونه (بر حسب مهو بر متر) توجه کنیم که عبارتند از: ۳۷۲×۱۰^۷ برای

آلومینیوم، $10^7 \times 5880$ برای مس و $10^7 \times 617$ برای نقره. این ضریب برای هادیهای دیگر در ضمیمه پ درج شده است. با مشاهده ارقام بالا طبیعی است که فرض کنیم که با مقادیر ثابتی مواجهیم، و این موضوع اساساً صحت دارد. هادیهای فلزی به خوبی از قانون اهم تبعیت می کنند و این رابطه ای خطی است و هدایت مخصوص برای حدود وسیعی از تغییرات چگالی جریان و شدت میدان ثابت است. قانون اهم و هادیهای فلزی را (ایزوتوپ) تک دند نیز می گویند. یعنی موادی که خواص آنها در همه جهات یکسان است. ماده ای که تک روند نباشد ماده غیر تک دند نامیده می شود و ما چند صفحه بعد از این ماده نام خواهیم برد.

از طرف دیگر، هدایت مخصوص تابعی از درجه حرارت است، بطوری که مقاومت مخصوص، که معکوس هدایت مخصوص است، در حدود درجه حرارت اطاق تقریباً بطور خطی با درجه حرارت تغییر می کند و برای آلومینیوم و مس و نقره به ازای هر $1^\circ K$ افزایش درجه حرارت به اندازه ۴ درصد بالا می رود. برای چند تائی از فلزات در حرارت چند درجه کلوین مقاومت مخصوص يك دفعه به صفر می رسد این کیفیت را فوق هدایت می نامند. مس و نقره دارای خاصیت فوق هدایت نیستند ولی آلومینیوم در درجات حرارت زیر $4.2^\circ K$ دارای چنین خاصیتی است. حال با ترکیب روابط (۲) و (۳)، هدایت مخصوص را بر حسب چگالی بار و تحرك الکترونها به دست می آوریم:

$$\sigma = -\rho_e \mu_e \quad (۴)$$

از رابطه (۱) تعریف تحرك، نتیجه می شود که ازدیاد درجه حرارت متضمن ارتعاشات بیشتر شبکه بلور و مخالفت بیشتر از حرکت الکترونها در اثر يك شدت میدان الکتريکی معین و سرعت رانش کمتر و تحرك کمتر، طبق رابطه (۴) هدایت مخصوص کمتر و چنانکه گفته شده مقاومت مخصوص بزرگتری است.

با کاربرد قانون اهم به شکل نقطه ای آن در مورد يك ناحیه بزرگ (قابل رؤیت با چشم غیر مسلح) رابطه ای به دست می آید که به آن آشنائی بیشتری داریم. ابتدا فرض می کنیم \vec{J} و \vec{E} در فضای استوانه ای که در شکل (۳.۵) نشان داده شده است یکواخت باشند. در نتیجه:

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = JS \quad (۵)$$

۱. مشخصات حرارتی مواد هادی به مقدار زیاد در

Standard Handbook for Electrical Engineers

که به عنوان مرجع پیشنهاد شده در پایان این فصل ذکر گردیده مندرج است.

و

$$V_{ab} = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{L} = - \vec{E} \cdot \int_b^a d\vec{L} = - \vec{E} \cdot \vec{L}_{ba} \quad (۶)$$

$$= \vec{E} \cdot \vec{L}_{ab}$$

یا:

$$V = EL$$

به این ترتیب:

$$J = \frac{1}{S} = \sigma \frac{V}{L}$$

یا:

$$V = \frac{L}{\sigma S} I$$

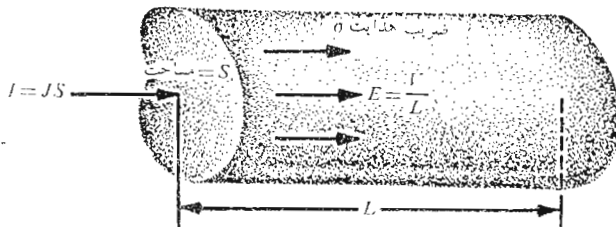
اما نسبت اختلاف پتانسیل بین دو انتهای استوانه به جریانی که از سر مثبت تر آن وارد می شود طبق تحلیل مقدماتی مدار مقاومت استوانه است، از اینرو:

$$\boxed{V = IR} \quad (۷)$$

که در آن:

$$\boxed{R = \frac{L}{\sigma S}} \quad (۸)$$

البته معادله (۷) همان قانون اهم است و با معادله (۸) می توانیم مقدار مقاومت R اجسام هادی را که شدت میدان داخل آنها یکنواخت است برحسب اهم (بطوراختصار Ω) محاسبه کنیم. اگر میدانها یکنواخت نباشد، بازهم مقاومت بصورت نسبت V به I



شکل ۳۰۵ چگالی جریان یکنواخت J و شدت میدان الکتریکی E در یک فضای استوانه ای L و مساحت مقطع S . در اینجا $V = IR$ است که در آن $R = L/\sigma S$.

تعریف می‌شود که در آن V اختلاف پتانسیل بین دو سطح هم پتانسیل مشخص در جسم و I شدت جریان کلی است که از سطح مثبت‌تر به داخل جسم داده می‌شود. از روابط کلی انتگرال (۵) و (۶) و نیز از قانون اهم (۳) می‌توانیم این رابطه کلی را در مورد میدان غیریکنواخت برای مقاومت بنویسیم.

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{L}}{\int_s \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}} \quad (9)$$

انتگرال خطی بین دو سطح هم پتانسیل در هادی گرفته می‌شود و انتگرال سطحی بر روی سطحی از این دو سطح هم پتانسیل حساب می‌شود که مثبت‌تر باشد. ما فعلاً نمی‌توانیم اینگونه مسائل غیریکنواخت را حل کنیم اما بعد از مطالعه فصلهای ۶ و ۷ قادر به حل تعدادی از آنها خواهیم بود.

به عنوان یک مثال برای تعیین مقاومت یک استوانه، یک سیم مسی نمره ۱۶ را که قطر آن ۰۵۵۰۸ mm یا $10^{-3} \times 1.219$ است در نظر می‌گیریم. بنابراین مساحت سطح مقطع این سیم $1.309 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ است و مقاومت ۱ میل (۱۶۰۹ متر) آن مساوی است با:

$$R = \frac{1.609}{(5.80 \times 10^7)(1.309 \times 10^{-6})} = 21.2 \Omega$$

این سیم می‌تواند جریانی نزدیک به ۱۵A، یعنی جریانی به چگالی $7.64 \times 10^6 \text{ A/m}^2$ یا 7.64 A/mm^2 را به آسانی از خود عبور دهد. با عبور این جریان اختلاف پتانسیل بین دو انتهای سیم ۲۱۲ ولت و شدت میدان الکتریکی 1.32 V/m و سرعت رانش 0.00422 m/s یا کمی بیش از ۱۲۸ کیلومتر در هر سال و چگالی بار الکترونیهای آزاد $1.81 \times 10^{10} \text{ C/m}^3$ - یا مساوی یک الکترون در مکعبی به ضلع ۲ انگستریم است.

تمرین (۳.۵)

اندازه شدت میدان الکتریکی را در داخل یک نمونه مسی برای حالات زیر بدست آورید: (الف) چگالی جریان 10^6 A/m^2 است، (ب) سرعت رانش الکترون آزاد 1 mm/s است. (پ) نمونه به شکل مکعبی به ضلع 1 mm است و حامل جریان کل 2 A است. (ت) نمونه به شکل مکعبی به ضلع 1 mm است و بین دو سطح مقابل آن اختلاف پتانسیل $20 \mu\text{V}$ برقرار است.

جوابها: ۱۷۲۲، ۳۴۲۵، ۳۴۲۵، ۲۰ mV/m

تمرین (۴.۵)

مقاومت يك نمونه آلومینیمی را در شکلهای زیر به دست آورید: (الف) بصورت سیم #۸ (به قطر ۱/۲۸ره اینچ) و طول ۲۰۰ فوت (ب) به صورت يك نوار به طول ۲m با مقطع مستطیلی به ابعاد ۴ × ۱.۵ cm
 جوابها: $89.6 \mu \Omega$, 1974Ω

۴.۵ خواص هادیها

يك بار دیگر می بایست موقتاً از شرایط ایستائی (سکون) فرض شده منحرف شویم و بگذاریم زمان به اندازه چند میکروثانیه بگذرد تا ببینیم وقتی توزیع بار داخل يك ماده هادی بطور ناگهانی نامتعادل شود چه رخ می دهد. به منظور سهولت استدلال فرض کنیم تعدادی الکترون دفعتاً در داخل يك هادی ظاهر شوند. میدانهای الکتریکی که این الکترونها ایجاد می کنند به وسیله هیچ بار مثبتی خنثی نمی شوند و از اینرو الکترونها با شتاب شروع به دور شدن از یکدیگر می کنند. این کار ادامه پیدا می کند تا تمام الکترونها به سطح هادی برسند یا اینکه تعدادی الکترون مساوی تعداد الکترونها تزیق شده به سطح هادی راه یابند.

در اینجا حرکت الکترونها به خارج متوقف می شود چه ماده ای که هادی را محصور می کند عایق است و دارای باند هادی مناسبی نیست. هیچ باری در داخل هادی باقی نمی ماند، چون در این صورت میدان الکتریکی حاصل الکترونها را به سطح می فرستاد.

بنابراین در مرحله نهائی چگالی بار در داخل هادی صفر است در حالی که چگالی سطحی بار در سطح خارجی آن متمرکز می شود. این یکی از دو مشخصه هادیهای خوب است.

مشخصه دیگر هادی خوب، که خاص شرایط ایستائی (سکون) یعنی حالتی است که هیچ گونه جریانی وجود ندارد، مستقیماً از قانون اهم نتیجه می شود: شدت میدان الکتریکی در داخل يك هادی صفر است. از نظر فیزیکی می توانیم دریابیم که اگر در داخل هادی يك میدان الکتریکی وجود داشت، الکترونها هدایت به حرکت در می آمدند و ایجاد جریان می کردند که منجر به شرایط نایستا (غیر ساکن) می شد. پس بطور خلاصه، در الکتروسیسته ساکن، هیچ بار یا شدت میدانی نمی تواند در داخل يك ماده هادی وجود داشته باشد، گر چه بارها می توانند به عنوان چگالی بار سطحی روی سطح ظاهر شوند. تحقیق بعدی ما مربوط به میدانهای خارجی يك هادی است.

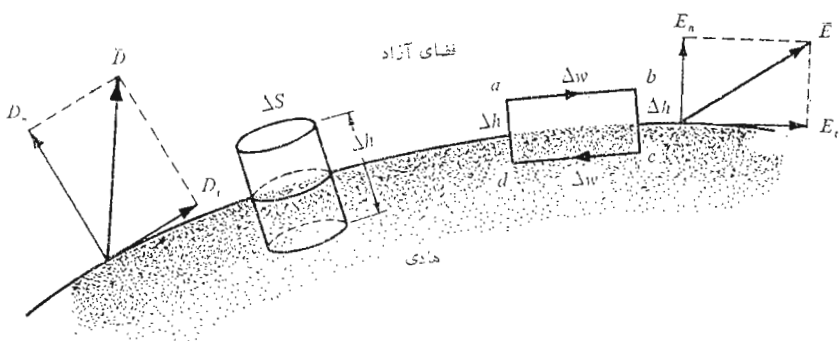
می خواهیم این میدانهای خارجی را به باز روی سطح هادی نسبت دهیم.

این مسأله ساده‌ای است و ما ابتدا راه حل خود را با استفاده حتی‌المتدور اندک از ریاضیات توضیح می‌دهیم.

اگر شدت میدان الکتریکی خسارجی به دو مؤلفه تقسیم شود، یک مؤلفه مماس بر سطح هادی و مؤلفه دیگر عمود بر آن، مشاهده می‌شود که مؤلفه مماس بر سطح صفر است، چه در غیر اینصورت بر اثر اعمال نیروئی مماس بر سطح عناصر بار سطحی به حرکت در می‌آیند و شرایط نا ایستا (غیر ساکن) می‌شد. از آنجائی که فرض بر این بود که شرایط ایستا باشد، شدت میدان الکتریکی و چگالی شار الکتریکی مماس بر سطح باید صفر باشند.

در مورد مؤلفه عمودی قانون گاوس به ما جواب می‌دهد. شار الکتریکی که از قسمت بسیار کوچکی از سطح خارج می‌شود می‌بایست مساوی باری باشد که روی این قسمت قرار گرفته است. شار الکتریکی نمی‌تواند در امتداد مماس بر بار از آن خارج شود زیرا این مؤلفه صفر است و نیز نمی‌تواند به داخل هادی نفوذ کند زیرا میدان کل در داخل هادی صفر است. از اینرو باید بطور عمودی از سطح خارج شود. بطور کمی می‌توانیم بگوئیم که چگالی شار الکتریکی بر حسب کولن بر متر مربع که بطور عمودی از سطح خارج می‌شود مساوی چگالی بار سطحی بر حسب کولن بر متر مربع است، یا $D_n = \rho_s$.

اگر از نتایجی که قبلاً بدست آوردیم به منظور تحلیلی دقیق‌تر استفاده کنیم (و ضمناً روشی کلی که بعداً باید از آن استفاده کنیم ارائه دهیم)، باید سطح مشترکی بین هادی و فضای آزاد بکشیم (شکل ۴.۵) که مؤلفه‌های عمودی و مماس \vec{D} و \vec{E} را در طرفی که به فضای آزاد مربوط می‌شود نشان دهد. هر دو میدان در داخل هادی



شکل ۴.۵ استفاده از یک مسیر بسته و سطح گاوسی برای تعیین شرایط حدی در سطح مشترک بین هادی و فضای آزاد، $E_t = 0$ و $D_n = \rho_s$

صفرند. میدان مماس را می توان با استفاده از معادله (۵) بخش ۵.۴ حول مسیر بسته کوچک $abcd$ بدست آورد،

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0$$

انتگرال بالا را می بایست به چهار انتگرال تقسیم کنیم:

$$\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = 0$$

با توجه به اینکه در داخل هادی $\vec{E} = 0$ اگر طول از a به b یا c به d را Δw و از b به c یا d به a را Δh بگیریم، خواهیم داشت:

$$E_t \Delta w - E_n \Big|_b \frac{1}{\gamma} \Delta h + E_n \Big|_a \frac{1}{\gamma} \Delta h = 0$$

وقتی Δh را به سمت صفر میل دهیم، در حالی که Δw کوچک ولی محدود است، مشاهده می کنیم که هیچ تفاوت نمی کند که میدانهای عمودی در نقاط a و b مساوی باشند یا نه، زیرا نزدیک شدن Δh به صفر باعث می شود که این مقادیر بطور قابل اغماض کوچک گردند. بنابراین:

$$E_t \Delta w = 0$$

و از اینرو

$$E_t = 0$$

وضع میدان عمودی را می توانیم با بررسی D_n خیلی آسانتر از بررسی E_n با انتخاب يك استوانه کوچک به عنوان سطح گاوسی به دست آوریم. ارتفاع استوانه را Δh و مساحت وجوه فوقانی و تحتانی آن را ΔS می گیریم. مجدداً Δh را به سمت صفر میل می دهیم و از قانون گاوس استفاده می کنیم.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

و بر روی سه سطح جانبی انتگرال می گیریم،

$$\int_{\text{سطح فوقانی}} + \int_{\text{سطح تحتانی}} + \int_{\text{سطح جانبی}} = Q$$

و مشاهده می کنیم که دو جمله آخری صفرند

$$D_n \Delta S = Q = \rho_s \Delta S$$

یا

$$D_n = \rho_s$$

اینها همان شرایط مطلوب مرزی برای سطح مشترک بین هادی و فضای آزاد در الکتروستاتیک ساکنند:

$$D_t = E_t = 0 \quad (1)$$

$$D_n = \epsilon_0 E_n = \rho_s \quad (2)$$

شار الکتریکی هادی را در امتداد عمود بر سطح ترك می‌کند و مقدار چگالی شار الکتریکی بطور عددی مساوی چگالی بار سطحی است.

يك نتیجه فوری و مهم که از صفر بودن مؤلفه مماسی شدت میدان الکتریکی حاصل می‌شود این واقعیت است که سطح هادی يك سطح هم پتانسیل است. محاسبه اختلاف پتانسیل بین هر دو نقطه دلخواه روی سطح هادی به کمک انتگرال خطی به نتیجه صفر می‌رسد، چه مسیر انتگرال را می‌توان روی خود سطح انتخاب کرد، که

$$\vec{E} \cdot d\vec{L} = 0$$

بطور خلاصه اصولی که بر هادیها در میدانهای الکتروستاتیک ساکن ناظرند،

عبارتند از:

- ۱- شدت میدان الکتریکی ساکن در داخل هادی صفر است.
- ۲- شدت میدان الکتریکی ساکن در روی سطح هادی همه جا بر سطح عمود است.
- ۳- سطح هادی يك سطح هم پتانسیل است.

تمرین (۵.۵)

چگالی بار روی سطح يك هادی در فضای آزاد را در حالات زیر بدست آورید:
 الف) $\vec{E} = 400(\vec{a}_x - \vec{a}_y + 3\vec{a}_z) \text{ V/m}$ در سطح دو هادی، (ب) چگالی انرژی در مجاورت سطح هادی 10^{-7} J/m^2

جوابها: $\pm 1175 \text{ nC/m}^2$ و $\pm 1731 \text{ nC/m}^2$

۵.۵ نیم هادیها

اکنون توجه خود را به مواد نیم هادی طبیعی مانند ژرمانیم یا سیلیسیم خالص معطوف می‌کنیم. در این مواد دو نوع حامل جریان الکتروستاتیک وجود دارد، الکترونها و حفرهها. الکترونها از بخشهای بالائی نوار ظرفیت‌اند، که در اثر دریافت انرژی کافی

(معمولاً انرژی حرارتی) از منطقه نسبتاً کوچک باند ممنوع عبور کرده‌اند و به نوار هدایت رسیده‌اند شکاف انرژی باند ممنوع در نیم هادیهای معمولی در حدود یک الکترون ولت است. جای خالی این الکترونها همان جاهای خالی مانده انرژی در نوار ظرفیتند که همچنین می‌توانند در بلور اتم به اتم حرکت کنند. جای خالی را حفره نام نهاده‌اند و بسیاری از خواص نیم هادیها را می‌توان با نسبت دادن بار مثبتی معادل e و تحرك μ_h و جرمی قابل مقایسه با الکترون ولی کمتر از آن توضیح داد. هر دو حامل در میدان الکتریکی حرکت می‌کنند و حرکت آنها در جهات مخالف یکدیگر است، از اینرو هر يك در ایجاد مؤلفه‌ای از جریان کل مؤثرند که در جهت مؤلفه ایجاد شده توسط حامل دیگر است. بدین ترتیب، هدایت تابعی از تراکمها و تحركهای الکترونها و حفره‌ها است،

$$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h \quad (1)$$

برای ژرمانیم خالص یا طبیعی تحرك الکترونها و حفره‌ها به ترتیب ۳۶ و ۱۷۰۰ است، در حالی که برای نیم هادی سیلیسیم تحركها به ترتیب ۲ و ۱۰۰۰ است. این مقادیر برحسب متر مربع بر ولت - ثانیه اندازه گرفته می‌شوند و در حدود ۱۰ تا ۱۰۰ برابر ارقام مشابه برای آلومینیم و مس و نقره و دیگر هادیهای فلزی‌اند. تحركهای داده شده برای درجه حرارت 300°K صادق‌اند.

درجه تراکم الکترونها و حفره‌ها به شدت به درجه حرارت بستگی دارد. در 300°K اندازه چگالی حجمی الکترونها و حفره‌ها در نیم هادی ژرمانیم طبیعی هر دو $4 \times 10^{16} \text{C/m}^3$ و در نیم هادی طبیعی سیلیسیم $5 \times 10^{16} \text{C/m}^3$ است این مقادیر به هدایت مخصوص $21 \text{ } \Omega/\text{m}$ در ژرمانیم و $6 \times 10^6 \text{ } \Omega/\text{m}$ در سیلیسیم منجر می‌شوند. وقتی درجه حرارت افزایش می‌یابد، تحرك تنزل می‌کند ولی چگالیهای بار به سرعت بالا می‌روند و در نتیجه، هدایت مخصوص ژرمانیم وقتی درجه حرارت از 300°K به 360°K افزایش یابد ده برابر می‌شود و هنگامی که درجه حرارت از 300°K به 255°K درجه کلونین تنزل کند، به یک دهم مقدار خود کاهش می‌یابد. باید توجه کرد که هدایت مخصوص نیم هادیهای طبیعی با درجه حرارت افزایش می‌یابد، در حالی که هدایت مخصوص هادیهای فلزی با درجه حرارت تنزل می‌کند و این یکی از اختلافهای مشخص هادیهای فلزی و نیم هادیهای طبیعی است.

شکل نقطه‌ای قانون اهم در مورد نیم هادیهای ذاتی نیز صادق است، یعنی اینکه هدایت مخصوص به میزان قابل توجهی نسبت به چگالی جریان و جهت آن ثابت است.

دامنه تغییر مقدار هدایت مخصوص از بهترین عایقها تا نیم هادیها و بهترین هادیها فوقالعاده وسیع است. هدایت مخصوص σ در درجه حرارت معمولی، برحسب مهر بر متر، از 10^{-12} برای شیشه کوارتزی تا 10^{-2} برای عایقهای ضعیف پلاستیکی و تقریباً یک برای نیم هادیها تا نزدیک به 10^{-8} برای هادیهای فلزی تغییر می کند. این مقادیر دامنه تغییر قابل ملاحظه ۲۵ توان ده را در بر می گیرد.

۶.۵ ماهیت مواد عایق

گرچه درباره مواد عایق صحبت کرده ایم، ولی هنوز هیچ گونه رابطه کمی برای آنها به دست نیاورده ایم. اما بزودی مشاهده خواهیم کرد که می توان یک عایق واقع در میدان الکتریکی را مجموعه ای از دو قطبی های الکتریکی ذره بینی، یا بارهای مثبت و منفی به هم پیوسته غیر منطبق بر هم دانست و آنها را مانند دیگر منابع میدان الکتریسته ساکن بررسی کرد. بدین سبب اگر نمی خواستیم این کار را بکنیم، احتیاجی به ارائه ضریب دی الکتریک به عنوان یک پارامتر جدید یا ضرایب پذیرشی غیر از ضریب پذیرش فضای آزاد نداشتیم. در هر صورت راه دیگر این می بود که هر بار در داخل بخشی از ماده عایق در نظر بگیریم و این جریمه بزرگی است که برای استفاده از تمام معادلات گذشته بی تغییر شکل آنها پردازیم، و از اینرو ناچاریم که قسمتی از وقت خود را صرف بحث نظری به طریقی کیفی درباره عایقها بکنیم و قطبی شدگی (پلاریزاسیون) \vec{P} و ضریب پذیرش نسبی ϵ_R را به بحث وارد کنیم و تعدادی روابط کمی شامل این کمیتها را بدست آوریم.

یکی از ویژگیهایی که در تمام عایقها اعم از جامد و مایع و گاز یا این که در طبیعت به صورت بلور باشند یا نباشند، در آن مشترکند، توانائی آنها به ذخیره انرژی الکتریکی است. این عمل ذخیره با جابجا شدن نسبی محل بارهای مثبت و منفی داخلی علیه نیروهای عادی ملکولی و اتمی صورت می گیرد.

این جابجائی علیه نیروی بازدارنده مشابه بالا بردن وزنه ای یا کشیدن فربا است و نوعی انرژی پتانسیل است. منبع انرژی میدان خارجی است زیرا حرکت جابجائی بارها احتمالاً منجر به عبور جریانی ناپایدار از باتری می شود که میدان را به وجود آورده است.

نحوه کلی جابجائی بار در عایقهای مختلف متفاوت است. بعضی ملکولها، که ملکولهای قطبی نامیده می شوند، دارای یک جابجائی دائمی بین مرکز «ثقل» بارهای مثبت و منفی هستند و هر جفت بار به منزله یک دو قطبی است. در حالت عادی جهت دو قطبیه در داخل ماده بی نظم و ترتیب است و عمل میدان خارجی این است که این ملکولها را تا اندازه ای در یک جهت منظم می کند و اگر میدان به اندازه

کافی قوی باشد می تواند يك جایجائی اضافی بین بارهای مثبت و منفی ایجاد کند. يك ملكول غیر قطبی تا وقتی که میدان خارجی بر آن اعمال نشده است فاقد این آرایش دوقطبی صفت (دیپل) است. با اعمال میدان، بارهای مثبت و منفی در جهات مخالف نیروی جاذبهٔ متقابل خود جابجا می شوند و يك دوقطبی (دیپل)، که هم جهت میدان است، به وجود می آورند.

هر دو نوع دوقطبی (دیپل) را می توان با گشتاور آن، به طریقی که در معادلهٔ

(۳) بخش ۷.۴ انجام شد، توصیف کرد،

$$\bar{P} = Q \bar{a} \quad (۱)$$

که در آن Q بار مثبت دوقطبی و \bar{a} برداری است که از بار منفی به بار مثبت متوجه است.

اگر در هر واحد حجم n دوقطبی (دیپل) وجود داشته باشد و ما با حجم Δv

کار کنیم، در این صورت گشتاور کل دوقطبی با جمع برداری زیر به دست می آید:

$$\bar{P}_{کل} = \sum_{i=1}^{n \Delta v} \bar{P}_i$$

که در آن هر يك از \bar{P}_i ها می تواند مقادیر متفاوت داشته باشند. اکنون قطبی شدگی (پلاریزاسیون) \bar{P} را به عنوان گشتاور دیپل در هر واحد حجم تعریف می کنیم،

$$\bar{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n \Delta v} \bar{P}_i \quad (۲)$$

که واحد آن کولن بر متر مربع است. ما می توانیم \bar{P} را بصورت يك میدان برداری پیوسته در نظر بگیریم هر چند روشن است که \bar{P} اساساً در نقاط داخل اتم یا ملكول نامعین است. بجای آن می توانیم مقدار \bar{P} در هر نقطه را مقدار متوسط آن در حجم نمونهٔ Δv بدانیم، که آن قدر بزرگ است که تعداد زیادی ملكول (به تعداد $n \Delta v$) را در بر می گیرد، و در عین حال به اندازه ای کوچک است که بتوان آنرا يك عنصر نموی حجم تلقی کرد.

اولین هدف ما این است که نشان دهیم که این بارهای مقید حجمی همانند

بارهای آزاد حجمی تولید میدان خارجی می کنند و برای آنها رابطه ای مشابه با

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho$$

فرض کنید عایقی حاوی ملكولهای غیر قطبی در دست داشته باشیم هیچ ملكولی

گشتاور دوقطبی ندارد و در تمام ماده $\bar{P} = 0$. عنصر نموی سطح \bar{S} را در محلی

در داخل ماده، همانگونه که شکل (۵.۵) نشان می دهد، در نظر می گیریم و حرکت

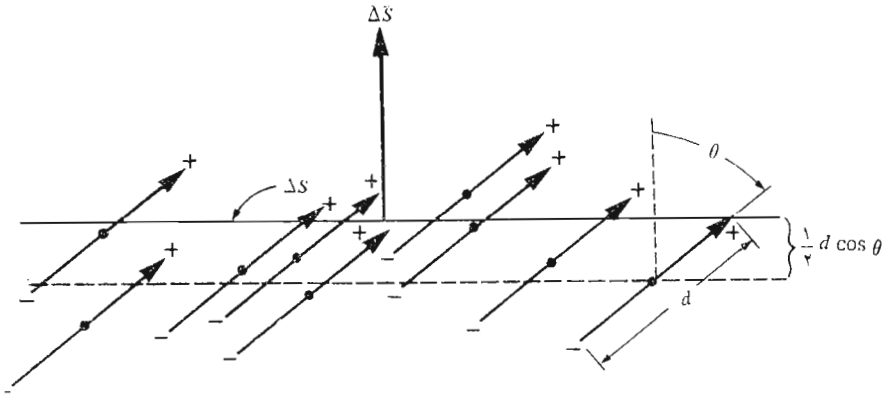
بار مقید روی ΔS را هنگام اعمال يك میدان الکتریکی بررسی می کنیم. میدان الکتریکی در هر ملکول يك گشتاور $\vec{p} = Q\vec{d}$ به وجود می آورد بطوری که \vec{p} و \vec{d} با ΔS زاویه θ می سازند. هر ملکولی که مرکز آن قبلاً در عنصر حجم $\frac{1}{4} d \cos \theta \Delta S$ زیر سطح قرار داشت بدین ترتیب در حرکت بار مثبت $+Q$ از سطح ΔS به سمت بالا اثر می گذارد. به طریقی مشابه، هر ملکول در حجم $\frac{1}{4} d \cos \theta \Delta S$ بالای سطح باعث يك عبور $-Q$ از يك سوی ΔS به سوی دیگر به سمت پائین می شود. از آنجائی که جمعاً n ملکول در هر متر مکعب وجود دارد، بار کل خالصی که از روی عنصر سطح به سمت بالا می رود مساوی $nQd \cos \theta \Delta S$ است، یا :

$$\Delta Q_b = nQ\vec{d} \cdot \Delta \vec{S} \quad (۳)$$

که در آن اندیس b در Q_b یادآور این مطلب است که سروکار ما با بار مقید است نه آزاد. برحسب قطبی شدگی (پلاریزاسیون) خواهیم داشت:

$$\Delta Q_b = \vec{P} \cdot \Delta \vec{S}$$

اگر $\Delta \vec{S}$ را به عنوان عنصری از يك سطح بسته تلقی کنیم، این بردار به سمت بیرون متوجه است و برآیند افزایش بارهای مقید در داخل سطح بسته از انتگرال زیر بدست می آید:



شکل ۵.۵ يك عنصر نموی سطح ΔS در داخل عایقی شامل ملکولهای غیر قطبی با گشتاور دو قطبی \vec{p} . اعمال يك میدان الکتریکی باعث ایجاد گشتاورهای دو قطبی \vec{p} و قطبی شدگی \vec{P} می گردد. و يك برآیند انتقال بارهای مقید از يك سو به سوی ΔS به وجود می آید.

$$Q_b = - \oint_s \bar{P} \cdot d\bar{S} \quad (۴)$$

می‌توانیم این بار را بدصورت توزیع شده با چگالی ρ_b در نظر بگیریم.
بدین ترتیب:

$$Q_b = \int_{\text{حجم}} \rho_b dv$$

و بنا بر این

$$\int_{\text{حجم}} \rho_b dv = - \oint_s \bar{P} \cdot d\bar{S}$$

با کاربرد قضیه دیورژانس در مورد طرف راست این معادله خواهیم داشت،

$$\int_{\text{حجم}} \rho_b dv = - \int_{\text{حجم}} (\nabla \cdot \bar{P}) dv$$

و نتیجه می‌شود که

$$\boxed{\nabla \cdot \bar{P} = -\rho_b} \quad (۵)$$

همین نتیجه را می‌توانیم با استدلالی مشابه برای عایق‌های قطبی بدست آوریم.
از آنجائی که ρ_b یک چگالی بار حجمی است، مقایسه این رابطه با شکل نقطه‌ای قانون گاوس نشان می‌دهد که باید بین قطبی شدگی (پلاریزاسیون) \bar{P} و چگالی شار الکتریکی \bar{D} یک رابطه نزدیک وجود داشته باشد و این موضوع واقعیت دارد و آن را در بندهای زیر بررسی خواهیم کرد.
شکل نقطه‌ای قانون گاوس یا معادله اول ماکسول را بر حسب شدت میدان الکتریکی و چگالی کل بار حجمی ρ_T می‌نویسیم:

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \bar{E} = \rho_T \quad (۶)$$

هیچ تردیدی نیست که این معادله کاملاً، حتی هنگامی که موادی موجود باشند، صحت دارد. چگالی بار حجمی ρ فقط نماینده تمامی بار است و این بارها را می‌توان واقع در فضای آزاد در نظر گرفت. علت اینکه ما \bar{D} ، چگالی شار الکتریکی، را در این رابطه بکار نمی‌بریم، این است که می‌خواهیم تعریف اولیه خود را در مورد \bar{D} (که $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}$ بود) تغییر دهیم تا مواد عایق را نیز به حساب آوریم.
اکنون می‌دانیم که چگالی بار حجمی از دو قسمت بارهای آزاد ρ و بارهای مقید ρ_b ترکیب شده است، که قسمت اول مربوط به الکترونهای هدایت و قسمت بعدی از قطبی شدگی (پلاریزاسیون) ماده عایق نتیجه می‌شود:

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \bar{E} = \rho + \rho_b$$

با استفاده از رابطه (۵) خواهیم داشت:

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \bar{E} = \rho - \nabla \cdot \bar{P} \quad (7)$$

و با تغییر ترتیب این رابطه می‌توان نوشت،

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) = \rho$$

اکنون می‌بینیم چگونه می‌توان \bar{D} را بصورتی کلی‌تر از آنچه قبلاً داشتیم بنویسیم،

$$\boxed{\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}} \quad (8)$$

بدین ترتیب، وقتی با ماده‌ای قطبی‌شدنی سروکار داشته باشیم، یک جمله دیگر به \bar{D} اضافه می‌شود. با گذاشتن رابطه (۸) در (۷) شکل دیگری از معادله اول ماکسول را بدست می‌آوریم،

$$\boxed{\nabla \cdot \bar{D} = \rho} \quad (9)$$

که \bar{D} را به چگالی بار حجمی آزاد مربوط می‌کند. این رابطه را می‌توان با رابطه (۶) مقایسه کرد.

$$\boxed{\nabla \cdot \epsilon_0 \bar{E} = \rho_T} \quad (6)$$

که در آن چگالی کل بار حجمی آزاد به حساب آمده است. هر دو رابطه صحیح‌اند و تفاوت آنها در آن است که تأثیر ماده عایق در هر یک به یک طریق به حساب آمده است. در رابطه (۹)، \bar{D} شامل \bar{P} و در رابطه (۶) چگالی کل بارها، شامل بارهای مقید است.

برای اینکه بتوانیم از این مفاهیم جدید استفاده واقعی به عمل آوریم، لازم است که رابطه بین شدت میدان الکتریکی \bar{E} قطبی‌شدگی (پلاریزاسیون) \bar{P} را که نتیجه آن است، بدانیم. این رابطه طبعاً تابعی از نوع ماده خواهد بود و ما اساساً بحث خود را به مواد تک‌روند (ایزوتروپ)، که \bar{E} و \bar{P} برای آنها رابطه‌ای خطی دارند، محدود خواهیم کرد. در مواد تک‌روند (ایزوتروپ) بردارهای \bar{E} و \bar{P} ، جهت میدان هرچه باشد، همواره موازیند. اگرچه اغلب عایقهای مستعمل در مهندسی به‌ازای شدت میدان‌های متوسط تا قوی خطی و نیز تک‌روند (ایزوتروپ)‌اند. تک بلورها ممکن است غیر تک‌روند باشند. ماهیت تناوبی مواد بلوری باعث می‌شود که گشتاورهای دوقطبی آسانتر از همه در امتداد محورهای بلور قرار بگیرند و نه الزاماً در جهت میدان اعمال شده.

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \quad \text{و} \quad \nabla \cdot \bar{D} = \rho$$

در مواد فزواالکترونیک رابطه بین \bar{P} و \bar{E} نه تنها خطی نیست، بلکه آثار هیستریزیس نیز از خود نشان می دهد به این معنی که قطبی شدگی (پلاریزاسیون) ایجاد شده توسط يك شدت میدان معین به حالات قبلی آن نمونه بستگی دارد. نمونه های مهم این نوع مواد عایق تیتانات باریم و نمک روشل است. رابطه خطی بین \bar{P} و \bar{E} از این قرار است:

$$\bar{P} = \chi_e \epsilon_0 \bar{E}$$

که در آن χ_e (chi) ضریب حساسیت الکترونیکی ماده است. از نظر پارامترهایی که در موارد استعمال مهندسی بکار می روند ضریب ثابت تناسب به این سادگی نیست،

$$\bar{P} = (\epsilon_R - 1) \epsilon_0 \bar{E} \quad (10)$$

ولی با استفاده از رابطه (۸) می توانیم بنویسیم،

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + (\epsilon_R - 1) \epsilon_0 \bar{E}$$

یا

$$\bar{D} = \epsilon_0 \epsilon_R \bar{E} = \epsilon \bar{E} \quad (11)$$

که در آن

$$\epsilon = \epsilon_R \epsilon_0 \quad (12)$$

ϵ ضریب پذیرش، ϵ_R ضریب پذیرش نسبی یا ضریب دی الکترونیک ماده است. در ضمیمه پ ضریب دی الکترونیک چند ماده نمونه داده شده است.

مواد عایق غیر تک روند را نمی توان برحسب پارامترهای ساده ضریب پذیرش یا حساسیت توصیف کرد. در عوض پی می بریم باین که هر يك از مؤلفه های \bar{D} ممکن است تابعی از هر مؤلفه \bar{E} باشند و رابطه ساده (۱۱) در این حالت جایگزین سه معادله زیر می شود:

$$D_x = \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z$$

$$D_y = \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z$$

$$D_z = \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z$$

مجموعه ۹ ضریب ϵ_{ij} را تسور می نامند. \bar{D} و \bar{E} (و نیز \bar{P}) دیگر موازی نیستند و گرچه رابطه $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$ برای مواد غیر تک روند صادق باقی می ماند، همچنان می توانیم از رابطه $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ فقط با تعبیر ϵ به عنوان يك تسور استفاده کنیم. در هر صورت، ما در اینجا توجه خود را به مواد تک روند (ایزوتروپ) خطی معطوف می کنیم و حالت کلی را به کتابهای پیشرفته تر واگذار می کنیم.

بنابراین بطور خلاصه، اکنون رابطه‌ای بین \vec{D} و \vec{E} داریم که به ماده مورد نظر بستگی دارد،

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon \vec{E}} \quad (۱۱)$$

که در آن

$$\boxed{\epsilon = \epsilon_R \epsilon_0} \quad (۱۲)$$

و این چگالی شار الکتریکی به وسیله شکل نقطه‌ای یا انتگرالی قانون گاوس به بارهای آزاد مربوط است،

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho} \quad (۹)$$

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q} \quad (۱۳)$$

استفاده از ضریب پذیرش نسبی، که در رابطه (۱۱) فوق نشان داده شد، باعث می‌شود که دیگر احتیاجی به در نظر گرفتن قطبی شدگی (پلاریزاسیون)، گسناورهای دو قطبی و بارهای مقید نباشد، با این حال وقتی مواد غیر تک روند یا غیر خطی مورد بررسی قرار می‌گیرند، استعمال ضریب پذیرش، بشکل ساده شمارواره‌ای (اسکالر) که راجع به آن بحث شد، دیگر میسر نیست.

به عنوان مثالی برای این مفاهیم جدید قرصی از عایق تفلن را در ناحیه $0 \leq x \leq a$ ، و در فضای آزاد $x < 0$ و $x > a$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم در خارج ماده تفلن میدان یکنواخت $E_0 \vec{a}_x = \vec{E}_{\text{خارج}}$ برقرار است. ضریب دی الکتریک تفلن ۲٫۱ و بنابراین حساسیت الکتریکی آن ۱٫۱ است.

به آسانی مشاهده می‌کنیم که در خارج از قرص تفلن $\vec{D}_{\text{خارج}} = \epsilon_0 E_0 \vec{a}_x$ و چون در آنجا ماده عایق دیگری نداریم، $\vec{P}_{\text{خارج}} = 0$. در داخل تفلن با استفاده از هر یک از چهار با پنج معادله فوق می‌توانیم چند میدان داخل ماده را به هم ارتباط دهیم. به این ترتیب:

$$\vec{D}_{\text{in}} = 2.1 \epsilon_0 \vec{E}_{\text{in}} \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$\vec{P}_{\text{in}} = 1.1 \epsilon_0 \vec{E}_{\text{in}} \quad (0 \leq x \leq a)$$

به مجرد اینکه مقداری برای هر یک از این سه میدان داخل عایق در دست داشته باشیم، می‌توانیم دو میدان دیگر را محاسبه کنیم. اشکال ما در عبور از مرز، یعنی از میدانهای

معلوم خارج عایق به میدانهای نامعلوم داخل آن است. برای این کار می بایست یک شرط مرزی را در دست داشته باشیم و این موضوع بحث جساب توجه بخش بعدی است و این مثال را نیز ضمن آن بحث کامل خواهیم کرد.

در باقیمانده این کتاب به توصیف مواد قابل قطبی شدن بر حسب \bar{D} و ϵ_0 و نه بر حسب \bar{P} و χ_e خواهیم پرداخت و بحث خود را به مواد تک روند محدود می کنیم.

تمرین ۶.۵

چگالی شار الکتریکی ماده ای را در شرائط زیر بدست آورید: (الف) گشتاور دو قطبی آن در واحد حجم، در یک شدت میدان الکتریکی 30 kV/m $1 \mu\text{C/m}^2$ است. (ب) در آن $P = 0.1 \mu\text{C/m}^2$ و $\chi_e = 1.6$ (پ) دارای 10^{20} m^3 ملکول 10^{20} است، که هر یک وقتی $E = 10^5 \text{ V/m}$ باشد دارای گشتاور دو قطبی $10^{-17} \text{ C}\cdot\text{m}$ 2×10^{-17} اند. (ت) در آن $E = 20 \text{ kV/m}$ و ضریب پذیرش نسبی آن ۴۱ است.

جوابها: 1.266 و 0.1625 و 1.085 و $0.726 \mu\text{C/m}^2$

۷.۵ شرایط مرزی برای عایقهای کامل

چگونه بررسی مسأله ای را که در آن دو عایق متفاوت با یک عایق و یک هادی وجود دارد آغاز کنیم؟ این مثالی دیگر از وضع مرزی است، مانند کشفی که در مورد سطح هادی کردیم و متوجه شدیم که مؤلفه مماسی میدانها روی سطح هادی صفر و مؤلفه عمودی چگالی شار الکتریکی مساوی چگالی بار سطحی هادی است. اکنون اولین قدم را در حل مسأله دو عایقی یا مسأله عایق - هادی با تعیین وضع میدانها در سطح مرزی عایق بر می داریم.

ابتدا سطح مرزی بین دو عایق را که دارای ضرایب پذیرش ϵ_1 و ϵ_2 اند و نواحی ۱ و ۲ را اشغال می کنند، همان گونه که در شکل ۶.۵ نشان داده شده است، در نظر می گیریم. ابتدا مؤلفه مماسی را با استفاده از

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{L} = 0$$

حول مسیر بسته کوچک نشان داده شده در شکل در نظر می گیریم و نتیجه می شود که،

$$E_{\tan 1} \Delta w - E_{\tan 2} \Delta w = 0$$

بنابراین بطور خلاصه، اکنون رابطه‌ای بین \vec{D} و \vec{E} داریم که به ماده مورد نظر بستگی دارد،

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon \vec{E}} \quad (۱۱)$$

که در آن

$$\boxed{\epsilon = \epsilon_R \epsilon_0} \quad (۱۲)$$

و این چگالی شار الکتریکی به وسیله شکل نقطه‌ای یا انتگرالی قانون گاوس به بارهای آزاد مربوط است،

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho} \quad (۹)$$

$$\boxed{\oint_{\mathcal{S}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q} \quad (۱۳)$$

استفاده از ضریب پذیرش نسبی، که در رابطه (۱۱) فوق نشان داده شد، باعث می‌شود که دیگر احتیاجی به در نظر گرفتن قطبی شدگی (پلاریزاسیون)، گسنتاورهای دو قطبی و بارهای مقید نباشد، با این حال وقتی مواد غیر تک روند یا غیر خطی مورد بررسی قرار می‌گیرند، استعمال ضریب پذیرش، بشکل ساده شماره‌اره‌ای (اسکالر) که راجع به آن بحث شد، دیگر میسر نیست.

به عنوان مثالی برای این مفاهیم جدید قرصی از عایق تفلن را در ناحیه $0 \leq x \leq a$ ، و در فضای آزاد $x < 0$ و $x > a$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم در خارج ماده تفلن میدان یکنواخت $E_0 \vec{a}_x$ V/m خارج \vec{E} قرار است. ضریب دی الکتریک تفلن ۲٫۱ و بنابراین حساسیت الکتریکی آن ۱٫۱ است.

به آسانی مشاهده می‌کنیم که در خارج از قرص تفلن $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = \vec{D}$ خارج و چون در آنجا ماده عایق دیگری نداریم، $\vec{P} = 0$ خارج. در داخل تفلن با استفاده از هر یک از چهار یا پنج معادله فوق می‌توانیم چند میدان داخل ماده را به هم ارتباط دهیم. به این ترتیب:

$$D_{in} = 2.1 \epsilon_0 E_{in} \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$P_{in} = 1.1 \epsilon_0 E_{in} \quad (0 \leq x \leq a)$$

به مجرد اینکه مقداری برای هر یک از این سه میدان داخل عایق در دست داشته باشیم، می‌توانیم دو میدان دیگر را محاسبه کنیم. اشکال ما در عبور از مرز، یعنی از میدانهای

معلوم خارج عایق به میدانهای نامعلوم داخل آن است. برای این کار می‌بایست يك شرط مرزی را در دست داشته باشیم و این موضوع بحث جساب توجه بخش بعدی است و این مثال را نیز ضمن آن بحث کامل خواهیم کرد.
در باقیمانده این کتاب به توصیف مواد قابل قطبی شدن بر حسب \bar{D} و ϵ_0 و نه بر حسب \bar{P} و χ_e خواهیم پرداخت و بحث خود را به مواد تك روند محدود می‌کنیم.

تمرین ۶.۵

چگالی شار الکتریکی ماده‌ای را در شرائط زیر بدست آورید: (الف) گشتاور دو قطبی آن در واحد حجم، در يك شدت میدان الکتریکی 30 kV/m $1 \mu\text{C/m}^2$ است. (ب) در آن $P = 0.1 \mu\text{C/m}^2$ و $\chi_e = 1.6$ (پ) دارای 10^{20} m^3 ملکول 10^{20} است، که هر يك وقتی $E = 10^5 \text{ V/m}$ باشد دارای گشتاور دو قطبی $10^{-29} \text{ C}\cdot\text{m}$ اند. (ت) در آن $E = 20 \text{ kV/m}$ و ضریب پذیرش نسبی آن ۴۱ است.

جوابها: 1.266 و 0.1625 و 1.085 و 0.726 $\mu\text{C/m}^2$

۷.۵ شرایط مرزی برای عایقهای کامل

چگونه بررسی مسأله‌ای را که در آن دو عایق متفاوت یا يك عایق و يك هادی وجود دارد آغاز کنیم؟ این مثالی دیگر از وضع مرزی است، مانند کشفی که در مورد سطح هادی کردیم و متوجه شدیم که مؤلفه مماسی میدانها روی سطح هادی صفر و مؤلفه عمودی چگالی شار الکتریکی مساوی چگالی بار سطحی هادی است. اکنون اولین قدم را در حل مسأله دو عایقی یا مسأله عایق - هادی با تعیین وضع میدانها در سطح مرزی عایق بر می‌داریم.

ابتدا سطح مرزی بین دو عایق را که دارای ضرایب پذیرش ϵ_1 و ϵ_2 اند و نواحی ۱ و ۲ را اشغال می‌کنند، همان گونه که در شکل ۶.۵ نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم. ابتدا مؤلفه مماسی را با استفاده از

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{L} = 0$$

حول مسیر بسته کوچک نشان داده شده در شکل در نظر می‌گیریم و نتیجه می‌شود که،

$$E_{\tan 1} \Delta w - E_{\tan 2} \Delta w = 0$$

اثر کوچک مؤلفه عمودی \vec{E} در انتگرال خطی در امتداد طولهای Δh وقتی که Δh به سمت صفر میل می کند و مسیر بسته روی سطح قرار می گیرد قابل اغماض می شود. بنا بر این

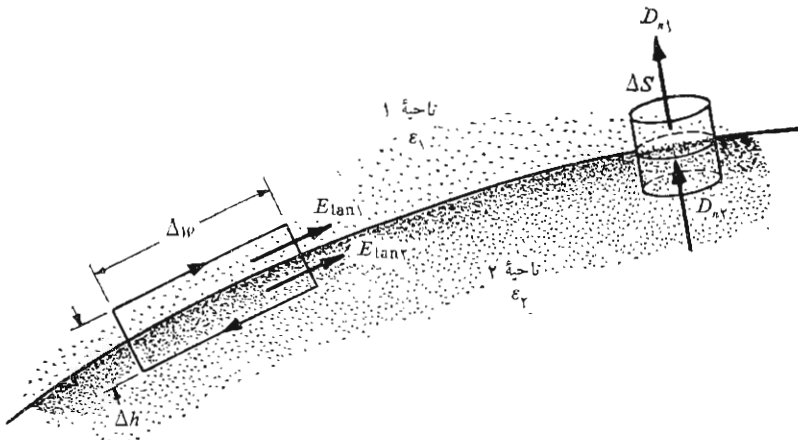
$$\boxed{E_{\tan\alpha} = E_{\tan\gamma}} \quad (1)$$

از رابطه فوق می توانیم نتیجه بگیریم که قانون ولتاژ کیرشهف در این حالت هنوز صادق است! البته قبلاً نشان دادیم که اختلاف پتانسیل بین دو نقطه به فاصله Δw روی سطح مرزی با اختلاف پتانسیل بالا و پائین مجاور همان سطح مساوی است. اگر مؤلفه مماسی شدت میدان الکتریکی در سطح مرزی پیوسته باشد، مؤلفه مماسی \vec{D} غیر پیوسته است، زیرا

$$\frac{D_{\tan\alpha}}{\epsilon_1} = E_{\tan\alpha} = E_{\tan\gamma} = \frac{D_{\tan\gamma}}{\epsilon_2}$$

یا

$$\frac{D_{\tan\alpha}}{D_{\tan\gamma}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (2)$$



شکل ۶۰۵ سطح مرزی بین عایقهای کامل که دارای ضرایب پذیرش ϵ_1 و ϵ_2 اند. پیوستگی D_n توسط سطح گاوسی و پیوستگی E_{\tan} به وسیله انتگرال خطی روی مسیر بسته نشان داده شده است.

شرائط مرزی مؤلفه‌های عمودی را می‌توان با استفاده از قانون گاوس در مورد استوانه كوچك نشان داده شده در سمت راست شكل ۶.۵ بدست آورد: در حد طول استوانه به سمت صفر میل می‌کند و شارگذرنده از سطحهای فوقانی و تحتانی مساوی است با

$$D_{n1} \Delta S - D_{n2} \Delta S = \Delta Q = \rho_s \Delta S$$

که از آن خواهیم داشت

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s$$

این چگالی بار سطحی چیست؟ این چگالی نمی‌تواند چگالی بار سطحی مقید باشد چون قطبی شدگی (پلاریزاسیون) عایق را بسا استفاده از ضریب عایقی مخالف با واحد، در نظر گرفته‌ایم یعنی بجای در نظر گرفتن بارهای مقید در فضای آزاد از ضریب پذیرش بزرگتری استفاده می‌کنیم. همینطور، بسیار بعید است که بار آزادی روی سطح مرزی وجود داشته باشد، زیرا در عایقهای کامل مورد مطالعه، هیچ گونه بار آزادی وجود ندارد. از اینرو ρ_s باید مربوط به بارهای آزادی باشد که بعد آنجا قرارداده شده‌اند و بدین ترتیب توازن بار کل داخل و روی سطح عایق را بهم زده‌اند. بنابراین مگر در این حالت خاص، می‌بایست ρ_s را روی سطح مرزی صفر فرض کنیم و

$$D_{n1} = D_{n2} \quad (۳)$$

یا اینکه مؤلفه عمودی را پیوسته بدانیم. پس

$$\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2} \quad (۴)$$

به عبارت دیگر مؤلفه عمودی E ناپیوسته است.

این شرائط را می‌توان برای نمایش تغییر بردارهای \vec{D} و \vec{E} روی سطح با هم ترکیب کرد. در شکل ۷.۵ فرض می‌کنیم \vec{D}_1 (و \vec{E}_1) با سطح مرزی بین دو عایق زاویه α_1 بسازند. از آنجائی که مؤلفه‌های عمودی \vec{D} پیوسته‌اند،

$$D_1 \sin \alpha_1 = D_2 \sin \alpha_2 \quad (۵)$$

نسبت مؤلفه‌های مماسی طبق رابطه (۲) بصورت زیر داده شده است:

$$\frac{D_1 \cos \alpha_1}{D_2 \cos \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

یا

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} D_1 \cos \alpha_1 = D_2 \cos \alpha_2 \quad (۶)$$

و با تقسیم این دو تساوی برهم، داریم

$$\tan \alpha_2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tan \alpha_1 \quad (7)$$

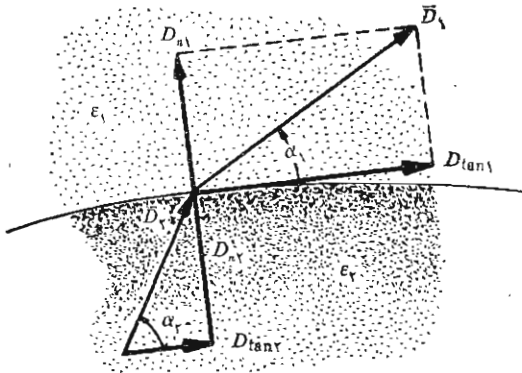
در شکل ۷.۵ فرض کرده ایم که $\epsilon_1 > \epsilon_2$ و از اینرو $\alpha_2 > \alpha_1$. جهت \vec{E} در هر طرف سطح مرزی با جهت \vec{D} یکی است زیرا $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$. اندازه \vec{D} در ناحیه ۲ را می توان از روابط (۵) و (۶) بدست آورد،

$$D_2 = D_1 \sqrt{\sin^2 \alpha_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \cos^2 \alpha_1} \quad (8)$$

بنابراین اندازه \vec{E}_2 برابر است با:

$$E_2 = E_1 \sqrt{\cos^2 \alpha_1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2 \sin^2 \alpha_1} \quad (9)$$

از بررسی معادلات فوق نتیجه می شود که D در ناحیه ای که ضریب پذیرش آن بیشتر است، بزرگتر است (مگر اینکه $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$ ، که در این صورت اندازه آن ثابت است) و E در ناحیه ای که ضریب پذیرش آن کمتر است بزرگتر است (مگر اینکه $\alpha_1 = \alpha_2 = 0^\circ$ که در این صورت اندازه آن ثابت است).



شکل ۷.۵ شکست \vec{D} در سطح مرزی عایق. برای حالت نشان داده شده $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ،

\vec{E}_2 و \vec{E}_1 در امتداد \vec{D}_2 و \vec{D}_1 قرار دارند، و $D_1 > D_2$ و $E_1 > E_2$.

با دانستن این شرائط مرزی، روابط (۱) تا (۴)، یا روابط اندازه و جهت بدست آمده از آنها، یعنی روابط (۷) تا (۹)، می‌توانیم به شرطی که میدان يك طرف سطح مرزی را بدانیم فوراً میدان طرف دیگر را، بدست آوریم.

اکنون می‌خواهیم به این مسأله پایان دهیم. به خاطر آورید که يك قرص نفلن داشتیم که همانطور که شکل ۸.۵ نشان می‌دهد، از $x=0$ تا $x=a$ ادامه داشت و هر دو طرف آن فضای آزاد بود و میدان الکتریکی خارجی $E_{\text{خارج}} = \bar{E}$

همچنین می‌دانیم که: $\epsilon_0 E_0 \bar{a}_x = \bar{D}_{\text{خارج}}$ و $\bar{P}_{\text{خارج}} = 0$.
در داخل، با توجه به پیوستگی D_n در مرز در می‌یابیم که

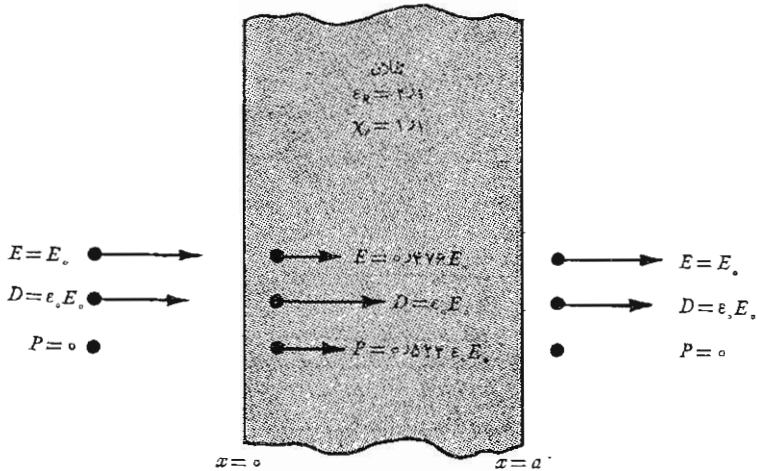
$$\bar{D}_{\text{داخل}} = \bar{D}_{\text{خارج}} = \epsilon_0 E_0 \bar{a}_x$$

بدین ترتیب خواهیم داشت

$$\bar{E}_{\text{داخل}} = \bar{D}_{\text{داخل}} / \epsilon = \epsilon_0 E_0 \bar{a}_x / (\epsilon_R \epsilon_0) = 0.476 \epsilon_0 E_0 \bar{a}_x$$

برای بدست آوردن میدان قطبی شدگی (پولاریزاسیون) در داخل عایق از $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$ استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\text{داخل}} = \bar{D}_{\text{داخل}} - \epsilon_0 \bar{E}_{\text{داخل}} &= \epsilon_0 E_0 \bar{a}_x - 0.476 \epsilon_0 E_0 \bar{a}_x \\ &= 0.524 \epsilon_0 E_0 \bar{a}_x \end{aligned}$$



شکل ۸.۵ دانستن میدان الکتریکی خارجی روی عایق به ما امکان می‌دهد که ابتداء میدانهای خارجی باقیمانده را بدست آوریم و بعد با استفاده از پیوستگی \bar{D} عمودی میدان داخلی را پیدا کنیم.

$$\bar{D}_{\text{داخل}} = \epsilon_0 E_0 \bar{a}_x \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$\bar{E}_{\text{داخل}} = 0.476 E_0 \bar{a}_x \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$\bar{P}_{\text{داخل}} = 0.524 \epsilon_0 E_0 \bar{a}_x \quad (0 \leq x \leq a)$$

در مسائل عملی اغلب میدان در هیچ یک از دو طرف سطح مرزی مستقیماً معلوم نیست و می‌بایست به کمک شرایط مرزی از اطلاعات داده شده دیگر برای تعیین میدانهای دو طرف سطح مرزی استفاده کنیم. در بخش ۹.۵ یک مثال ساده از این نوع را بررسی خواهیم کرد.

شرایط مرزی برای سطح مشترک بین یک هادی و یک عایق خیلی ساده‌تر از شرایط فوق است. اولاً می‌دانیم که \bar{D} و \bar{E} هر دو در داخل هادی صفرند. ثانیاً مؤلفه‌های مماسی میدانی \bar{E} و \bar{D} می‌بایست صفر باشند تا رابطه

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{L} = 0$$

برقرار باشد و

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E}$$

سرانجام با استفاده از قانون گاوس،

$$\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q$$

بار دیگر مشاهده می‌شود که \bar{D} و \bar{E} هر دو بر سطح هادی عمودند و نیز $\bar{D}_n = \rho_s$ و $E_n = \rho_s / \epsilon$. بنابراین می‌بینیم که شرایط مرزی که در گذشته برای مرز مشترک هادی و فضا بدست آورده‌ایم برای سطح مرزی هادی و عایق نیز به شرطی صادقند که بجای ϵ مقدار ϵ را قرار دهیم. بنابراین

$$\boxed{D_t = E_t = 0} \quad (10)$$

$$\boxed{D_n = \epsilon E_n = \rho_s} \quad (11)$$

جالب است کمی از وقت خود را صرف کنیم و بینیم چگونه باری که به داخل ماده هادی وارد می‌شود بصورت بار سطحی به سطح هادی انتقال می‌یابد. البته روشن است که این یک اتفاق معمولی نیست، ولی بصورتی اضافی درباره خواص هادی به ما می‌دهد.

با استفاده از قانون گاوس،

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

و معادله پیوستگی،

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

که در آن \vec{J} و ρ هر دو فقط مربوط به بارهای آزادند. داریم،

$$\nabla \cdot \sigma \vec{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

یا

$$\nabla \cdot \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{D} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

اگر فرض کنیم که جسم مورد نظر متجانس باشد، بطوری که σ و ϵ تابع محل نباشند،

$$\nabla \cdot \vec{D} = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

اکنون با استفاده از معادله اول ماکسول خواهیم داشت:

$$\rho = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

با حل این معادله از طریق تغییر دادن ترتیب و گرفتن انتگرال خواهیم

داشت:

$$\rho = \rho_0 e^{-(\sigma/\epsilon)t}$$

که در آن چگالی در $t = 0$ است. این رابطه تنزل نمائی چگالی بار را در کلیه نقاط با ثابت زمانی ϵ/σ نشان می‌دهد. این ثابت زمانی را، که اغلب زمان استراحت نامیده می‌شود می‌توان برای یک هادی نسبتاً ضعیف، مانند آب مقطر، از روی ارقام داده شده در ضمیمه ب بدست آورد که نتیجه می‌شود

$$\frac{\epsilon}{\sigma} = \frac{80 \times 8.854 \times 10^{-12}}{2 \times 10^{-4}} = 3.754 \mu s$$

یعنی هر باری که در داخل قسمتی از آب مقطر قرار گیرد، در فاصله زمانی $3.754 \mu s$ به ۳۷ درصد مقدار اولیه خود تنزل می‌کند. این تنزل سریع یکی از مشخصات

هادیهای خوب است و نشان می‌دهد که، به جز برای زمان‌گذاری فوق‌العاده کوتاه، می‌توان بی‌هیچ اشکالی چگالی بار را در داخل یک هادی خوب صفر فرض کرد. در میان مواد فیزیکی که ما با آنها سروکار داریم، هیچ جسم عایقی نیست که فاقد معدودی بار آزاد باشد و همه دارای هدایت مخصوصی متفاوت با صفرند و بار وارد شده در داخل هر یک از آنها احتمالاً به سطح آن می‌رسد. با اطلاعاتی که ما اکنون از مواد هادی و مواد عایق و شرایط لازم مرزی داریم، می‌توانیم ظرفیت را تعریف و راجع به آن بحث کنیم.

تمرین ۷.۵

ناحیه $x > 0$ شامل ماده‌ای عایقی است که $\epsilon_{R1} = 3$ و ناساحیه $x < 0$ شامل عایقی است که $\epsilon_{R2} = 5$. اگر $\vec{E}_p = 20\vec{a}_x + 30\vec{a}_y - 40\vec{a}_z$ V/m باشد مطلوب است: (الف) \vec{D}_p و (ب) \vec{P}_1 و \vec{D}_1

جوابها: $\epsilon_0(100\vec{a}_x + 150\vec{a}_y - 200\vec{a}_z)$ و $\epsilon_0(100\vec{a}_x + 90\vec{a}_y - 120\vec{a}_z)$ و $C/m^2(200\vec{a}_x/3 + 60\vec{a}_y - 80\vec{a}_z)$ و $\epsilon_0(100\vec{a}_x + 150\vec{a}_y - 200\vec{a}_z)$

تمرین ۸.۵

با استفاده از ارقام ضمیمه پ مقادیر زیر را بدست آورید: (الف) زمان استراحت یک عایق خوب مانند چینی و (ب) زاویه α_p به شرط آنکه $\alpha_p = 45^\circ$ و ماده‌ای چینی و ماده‌ی ۲ هوا باشد.

جوابها: 8.53×10^{-8} و 8.54° ثانیه

۸.۵ ظرفیت

اکنون دو هادی را که در یک عایق متجانس محصور شده‌اند در نظر می‌گیریم، شکل ۹.۵. فرض می‌کنیم که هادی M_p حامل بار مثبت Q و M_q حامل همان مقدار بار منفی باشد. در دستگاه هیچ بار دیگری وجود ندارد و بار کل آن صفر است.

بدین ترتیب می‌دانیم که بارها بصورت چگالی بار سطحی به سطح هادی منتقل می‌شوند و میدان الکتریکی بر سطح هادی عمود است. علاوه بر این، سطح هر هادی یک سطح هم‌پتانسیل است و چون M_p حامل بار مثبت است، جهت شار الکتریکی از M_p به M_q است و پتانسیل M_p مثبت‌تر است. به عبارت دیگر، برای انتقال یک بار مثبت از M_q به M_p باید کار انجام داده شود.

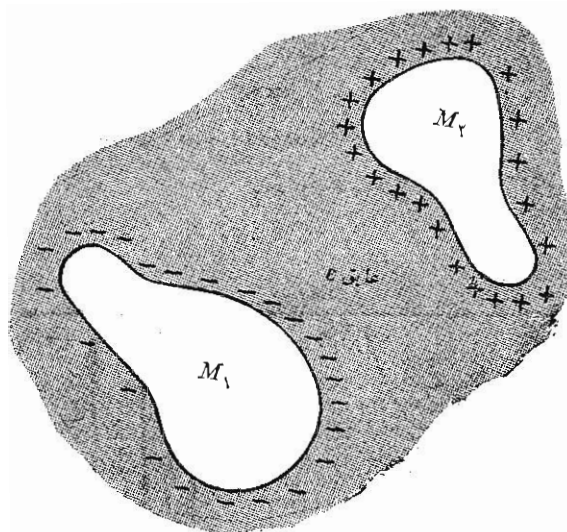
اختلاف پتانسیل بین M_1 و M_2 را V_0 می‌نامیم. ظرفیت این دستگاه مرکب از دو هادی طبق تعریف مساوی است با نسبت اندازه‌های بار کل روی هر یک از دو هادی به اختلاف پتانسیل بین آن دو،

$$C = \frac{Q}{V_0} \quad (1)$$

به عبارت کلی، Q را با یک انتگرال سطحی روی هادی مثبت تعیین می‌کنیم و V_0 را از طریق حرکت دادن یک بار مثبت از صفحه منفی به مثبت بدست می‌آوریم:

$$C = \frac{\oint \epsilon \bar{E} \cdot d\bar{S}}{-\int_-^+ \bar{E} \cdot d\bar{L}}$$

مقدار ظرفیت به پتانسیل و بار کل بستگی ندارد زیرا نسبت آن دو ثابت است. قانون گاوس نشان می‌دهد که اگر چگالی بار N برابر شود، چگالی شار



شکل ۹.۵ دو هادی M_1 و M_2 حاوی بارهای مخالف و محصور در یک عایق یکنواخت‌اند. نسبت اندازه بار روی هر یک از دو عایق به اندازه اختلاف پتانسیل بین آن دو را ظرفیت دستگاه C می‌نامند.

الکتریکی یا شدت میدان الکتریکی نیز همراه اختلاف پتانسیل N برابر می‌شوند. ظرفیت فقط تابع ابعاد فیزیکی دستگاه هادیها و ضریب پذیرش عایق متجانس است. واحد ظرفیت فاراد (F) است و یک فاراد طبق تعریف خارج قسمت یک کولن بریک ولت است. مقادیر معمولی ظرفیت کسره‌های کوچکی از یک فارادند و در نتیجه واحدهای عملی‌تر ظرفیت میکروفاراد (μF) و پیکوفاراد (pF) است. می‌توانیم تعریف ظرفیت را به ظرفیت دستگاهی متشکل از دو هادی موازی مسطح یکسان و نامحدود، که فاصله آنها از هم d باشد (شکل ۱۰.۵) بکار ببریم، اگر صفحه تحتانی را در $z = 0$ فرض کنیم، صفحه فوقانی در $z = d$ قرار می‌گیرد و یک بار سطحی یکنواخت به چگالی ρ_s روی هر یک از هادیها تولید میدان یکنواخت زیر را خواهد کرد. [معادله (۳)، بخش ۶.۲]

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon} \vec{a}_z$$

که در آن ϵ ضریب پذیرش عایق متجانس است، و

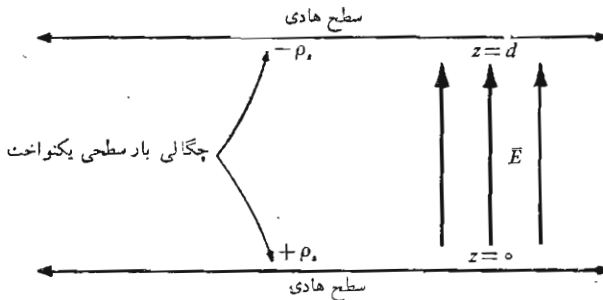
$$\vec{D} = \rho_s \vec{a}_z$$

بار واقع روی صفحه تحتانی باید مثبت باشد، زیرا \vec{D} به سمت بالا متوجه است و مقدار مؤلفه عمودی آن،

$$D_n = D_z = \rho_s$$

مساوی چگالی بار سطحی است. روی صفحه فوقانی

$$D_n = -D_z$$



شکل ۱۰.۵ مسأله خازن موازی صفحه. ظرفیت خازن برای متر مربع سطح ϵ/d است.

و بار سطحی روی آن همان بار روی صفحه تختانی است با علامت منفی. اختلاف پتانسیل بین صفحات تختانی و فوقانی مساوی است با

$$V_0 = - \int_{\text{صفحه فوقانی}}^{\text{صفحه تختانی}} \vec{E} \cdot d\vec{L} = - \int_d^0 \frac{\rho_s}{\epsilon} dz = \frac{\rho_s}{\epsilon} d$$

از آنجائی که بار کل روی هریک از دو صفحه بینهایت است، ظرفیت نیز نامتناهی است. جوابی عملی تر با در نظر گرفتن خازنی حاصل می شود که صفحات مسطح آن هریک دارای مساحت محدود S اند و به فاصله d از هم قرار دارند که نسبت به ابعاد صفحات بسیار کوچکتر است. در این صورت میدان الکتریکی و توزیع بار تقریباً در تمام نقاط، به استثنای نقاط مجاور لبها، یکنواخت است. و اثر این نقاط، در ظرفیت کلی جزء کوچکی است بطوری که می توانیم رابطه پیشین ظرفیت را بنویسیم،

$$Q = \rho_s S$$

$$V_0 = \frac{\rho_s}{\epsilon} d$$

اگر بخواهیم دقت بیشتری به خرج دهیم،

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon S}{d}} \quad (۲)$$

می توانیم رابطه (۲) را ظرفیت قسمتی از دستگاه خازن مسطح بینهایت بزرگی در نظر گیریم به مساحت S . روشهای محاسبه اثر باری را که در نزدیک لبها به وضع ناشناخته و غیر یکنواختی توزیع شده است، می گذاریم برای وقتی که بتوانیم مسائل پیچیده تر پتانسیل را حل کنیم.

به عنوان مثال، خازنی را بسا عایق میکا، یعنی $\epsilon_r = 6$ و با صفحاتی به مساحت هریک ۱۰ اینچ مربع که به فاصله ۰.۱ متر از هم قرار گرفته اند در نظر می گیریم. ظرفیت این خازن ۱۳۵۰ pF است. مساحت بیشتر صفحات در خازنهایی که ابعاد فیزیکی کوچک دارند از این طریق حاصل می شود که ۵۰ یا ۱۰۰ لا از صفحات هادی کوچک را ساندویچ وار روی هم قرار می دهند یا ورقه های نازک بسا لایه های عایق قابل انعطاف میان آنها لوله می کنند.

اگر در مجموعه ای بیش از دو هادی وجود داشته باشد، می بایست ظرفیت جزئی بین هر جفت هادی را معین کنیم. این عمل در آثار ما کسول^۱ بطور جالب توجهی مورد بحث قرار گرفته است.

۱. به فهرست مراجع در پایان فصل مراجعه شود.

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}}{V} \times (10^9 \text{ pF}) \times 10^{-12}$$

بالاخره، انرژی کل ذخیره شده در خازن مساوی است با

$$\begin{aligned}
 W_E &= \frac{1}{2} \int_{\text{حجم}} \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \int_0^S \int_0^d \frac{\epsilon \rho_s^2}{\epsilon^2} dz dS \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\rho_s^2}{\epsilon} Sd = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S \rho_s^2 d^2}{\epsilon^2} = \frac{1}{2} CV_0^2 = \frac{1}{2} QV_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}
 \end{aligned}
 \tag{۳}$$

که همه روابطی هستند که می‌شناسیم. رابطه (۳) همچنین نشان می‌دهد که انرژی ذخیره شده در یک خازن با اختلاف پتانسیل ثابت در دوسر آن، وقتی ضریب دی‌الکتریک عایق بین صفحات آن بالا رود افزایش می‌یابد.

تمرین (۹.۵)

ضریب دی‌الکتریک ماده مورد استفاده در یک خازن موازی صفحه را در شرایط زیر بدست آورید: (الف) این ماده نصف انرژی خازنی با همان ابعاد را که عایق هوا باشد در خود ذخیره می‌کند، به شرط اینکه هر دو خازن حامل مقادیر مساوی بار مثبت باشند. (ب) $d = 0.05 \text{ mm}$, $S = 8 \text{ cm}^2$, $C = 1000 \text{ pF}$

جوابها: ۲ و ۷۰۶

۹.۵ چند مثال محاسبه ظرفیت

به عنوان اولین مثال کوتاه یک کابل یا خازن هم محور به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b و طول L را انتخاب می‌کنیم. ظرفیت این خازن را می‌توان به آسانی از اختلاف پتانسیل داده شده در معادله (۲) بخش ۳.۴ بدست آورد،



$$C = \frac{2\pi \epsilon L}{\ln(b/a)}$$

سپس یک خازن کروی، متشکل از دو پوسته هادی کروی به شعاعهای a و b را که $b < a$ ، انتخاب می‌کنیم و رابطه‌ای را که قبلاً با استفاده از قانون گاوس برای میدان الکتریکی بدست آوردیم بکار می‌بریم،

$$E_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2}$$

که در آن ϵ ضریب پذیرش عایق بین دو کره است. رابطه اختلاف پتانسیل را به وسیله انتگرال خطی از آن بدست آوریم،



دائرة هم مرکز

$$V_{ab} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

که در آن Q نماینده بار کل روی کره داخلی است و ظرفیت مساوی است با:

دائرة هم مرکز، شعاع a ، b

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{4\pi\epsilon}{1/a - 1/b}$$

(۱)

اگر کره خارجی را بینهایت بزرگ کنیم، ظرفیت یک هادی کروی تنها را بدست می آوریم،

اگر $a \rightarrow \infty$

$$C = 4\pi\epsilon a$$

(۲)

برای قطر یک سانتی متر، یا کره ای تقریباً به اندازه یک مهره، در فضای آزاد،

$$C = 0.0556 \text{ pF}$$

چنانچه سطح این کره را با لایه عایق دیگری که $\epsilon = \epsilon_1$ است و از فاصله $r = a$ تا $r = r_1$ ادامه دارد پوشانیم،

$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} \quad (a < r < r_1)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r_1 < r)$$

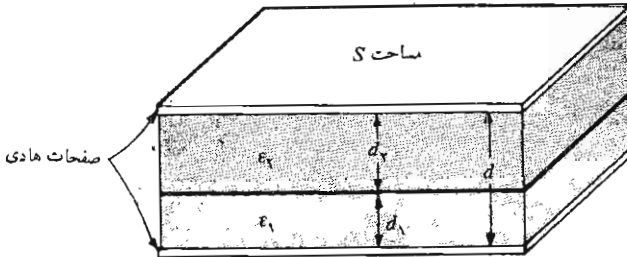
و اختلاف پتانسیل مساوی است با

$$\begin{aligned} V_a = V_\infty &= - \int_{r_1}^a \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_1 r^2} - \int_{\infty}^{r_1} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi} \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1} \right) \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{r_1} \frac{1}{\epsilon_0} \right] \end{aligned}$$

و بنابراین

$$C = \frac{4\pi}{(1/a - 1/r_1)/\epsilon_1 + (1/r_1)/\epsilon_0}$$

برای آنکه مسأله عایقهای چندگانه را با دقت بیشتری مطالعه کنیم، خازنی



شکل ۱۱.۵ یک خازن موازی صفحه شامل دو عایق که سطح مرزی آنها صفحه‌ای موازی صفحات هادی است $C = 1 / [(d_1 / \epsilon_1 S) + (d_p / \epsilon_p S)]$.

را در نظر می‌گیریم که مساحت صفحات موازی آن S و فاصله آنها از هم d باشد، با این فرض معمول که d نسبت به ابعاد خطی صفحه کوچک است، ظرفیت این خازن با استفاده از عایقی به ضریب پذیرش ϵ_1 عبارت خواهد بود از $\epsilon_1 S / d$. حال فرض کنیم که بجای قسمتی از عایق مزبور عایق دیگری با ضریب نفوذ ϵ_p قرار دهیم، بطوری که صفحه فصل مشترک دو عایق موازی صفحات خازن باشد (شکل ۱۱.۵). بعضی ممکن است بلافاصله حدس بزنند که این ترکیب عملاً به منزله اتصال سری دو خازن است، با این نتیجه که ظرفیت کل آن

$$C = \frac{1}{(1/C_1) + (1/C_p)}$$

که در آن $C_p = \epsilon_p S / d_p$ و $C_1 = \epsilon_1 S / d_1$ و نتیجه درست همین است ولسی می‌توانیم این نتیجه را بجای حدس و استنباط به طریق اساسی بدست آوریم. با توجه به تعریف ظرفیت، $C = Q / V$ که مقدار آن به خارج قسمت بار Q و اختلاف پتانسیل V بستگی دارد، می‌توانیم مقداری برای یکی از این دو در نظر بگیریم و دیگری را بر حسب آن بدست آوریم. ظرفیت تابعی از این دو نیست بلکه فقط به عایق و ابعاد هندسی آن خازن بستگی دارد. فرض کنیم، اختلاف پتانسیل V_0 بین صفحات خازن برقرار باشد. شدت میدان الکتریکی در دو ناحیه، E_p و E_1 ، هر دو یکنواخت اند و $V_0 = E_1 d_1 + E_p d_p$. در سطح مرزی بین عایقها E عمود بر سطح است و $D_{n1} = D_{n2}$ یا $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_p E_p$ با استفاده از رابطه V_0 داریم.

$$E_1 = \frac{V_0}{d_1 + (\epsilon_1 / \epsilon_p) d_p}$$

و بنا بر این اندازه چگالی بار سطحی مساوی است با:

$$\rho_{s1} = D_1 = \epsilon_1 E_1 = \frac{V_0}{d_1/\epsilon_1 + d_2/\epsilon_2}$$

از آنجائی که $D_1 = D_2$ ، اندازه بار سطحی روی دو صفحه مساوی اند مقدار ظرفیت

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\rho_s S}{V_0} = \frac{1}{d_1/\epsilon_1 S + d_2/\epsilon_2 S} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2}$$

به عنوان يك راه حل دیگر (و کمی ساده تر) ممکن بود بار Q را روی يك صفحه فرض کنیم که به چگالی بار سطحی Q/S و مقداری برای D منجر می شود که آنهم مساوی Q/S است، این موضوع تا زمانی که $D_{n1} = D_{n2} = D$ و عمودی است صحت دارد، زیرا در این حالت $E_1 = D/\epsilon_1 = Q/\epsilon_1 S$ و $E_2 = D/\epsilon_2 = Q/\epsilon_2 S$ و اختلاف پتانسیل دو طرف هر ناحیه $V_1 = E_1 d_1 = Q d_1/\epsilon_1 S$ و $V_2 = E_2 d_2 = Q d_2/\epsilon_2 S$ مقدار ظرفیت مساوی است با:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 + V_2} = \frac{1}{d_1/\epsilon_1 S + d_2/\epsilon_2 S}$$

سؤال بعدی این است که اگر در فصل مشترك دو عایق صفحه هادی سومی قرار داده شود روش حل یا جواب مسأله چگونه تغییر می کند؟ در این صورت می بایست انتظار داشته باشیم که روی هر طرف این صفحه باری سطحی، به اندازه مساوی، وجود داشته باشد. به عبارت دیگر، خطوط شار مستقیماً از يك صفحه بیرونی به صفحه بیرونی دیگر امتداد ندارد، بلکه هر يك به يك طرف صفحه هادی میانی ختم می شود و سپس از طرف دیگر ادامه پیدا می کند. طبعاً ظرفیت نیز، تا هنگامی که ضخامت هادی اضافه شده قابل اغماض باشد، تغییر نمی کند، اضافه کردن يك صفحه هادی ضخیم، در صورتی که فاصله بین صفحات بیرونی تغییر نکند، باعث افزایش ظرفیت می شود و این مثالی برای قضیه کلی تری است که اشغال هر مقدار از عایق توسط جسم هادی باعث بالا رفتن ظرفیت می شود.

در مثال بالا اگر مرز میان دو عایق را عمود بر دو صفحه هادی قرار دهیم، و هادیها سطوح S_1 و S_2 را اشغال کنند، در این صورت اختلاف پتانسیل فرضی V_0 باعث ایجاد شدت میدانهای $E_1 = E_2 = V_0/d$ می شود. این میدانها هر دو بر سطح مرزی مماسند و می بایست با هم مساوی باشند. با دانستن E می توانیم به ترتیب D_1 و D_2 و ρ_{s1} و ρ_{s2} و Q را محاسبه کنیم و سپس مقدار C را، همانطور که انتظار می رفت، بصورت زیر بدست آوریم.

$$C = \frac{\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2}{d} = C_1 + C_2$$

در حال حاضر نمی‌توانیم ظرفیت خازنهایی را محاسبه کنیم که در آنها مرز میان دو عایق همه‌جا موازی یا عمود بر میدانها نیست برای اینکه گرچه، شرایط مرزی را در سطوح هادیها و مرز میان عایقها می‌دانیم ولی از چگونگی میدانی که می‌بایست شرایط مرزی را در مورد آن بکار ببریم بی‌اطلاعیم. این مسأله را می‌بایست، تا وقتی دانش ما در مورد نظریه میدان افزایش یابد و خواستار و قادر باشیم که از فنون ریاضیات عالی‌تر استفاده کنیم، کنار گذاریم.

تمرین ۱۰.۵

ظرفیتهای زیر را بدست آورید: (الف) کابل هم محور پر از هوا به طول ۱ ft با $b/a = 4$ ، (ب) ماهواره‌ای کروی به قطر ۵ متر

جوابها: ۱۲۲۳ و ۲۷۸ pF

تمرین ۱۱.۵

فرض کنید در شکل ۱۱.۵ $\epsilon_{R1} = 2$ و $\epsilon_{R2} = 5$ و $d_1 = d_2 = 0.5$ mm و $S = 10$ cm² و پتانسیل بین دو صفحه هادی ۱۰۰ V باشد. (الف) ρ_s روی صفحه مثبت چه اندازه است؟ (ب) چه ولتاژی دو سر عایق ۱ موجود است؟ (پ) نسبت W_{E1} به W_{E2} چه اندازه است؟

جوابها: 2.5 و $714V$ و $253 \mu C/m^2$

۱۰.۵ ظرفیت يك خط دوسیمه

ما این فصل را با حل مسأله يك خط دوسیمه پایان می‌دهیم. شکل نهائی مسأله عبارت است از دو استوانه هادی موازی، هر يك به مقطع دایره‌ای و ما اطلاعات کاملی در مورد شدت میدان الکتریکی و میدان پتانسیل و چگالی توزیع بار سطحی و ظرفیت بدست خواهیم آورد. این طرز قرار گرفتن هادیها یکی از انواع مهم خط انتقال است، مانند کابل هم محور که قبل از این چند مرتبه راجع به آن بحث کردیم.

کار را با بررسی میدان پتانسیل دو بار خطی لایتنهای آغاز می‌کنیم. با توجه به آرایش شکل ۱۲.۵ که بار خطی مثبتی است در صفحه xz در $x = a$ و يك بار خطی منفی در $x = -a$ بررسی خود را با پتانسیل يك تك بار خطی با در نظر

گرفتن مرجع صفر در r_0 آغاز می کنیم،

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_0}{r}$$

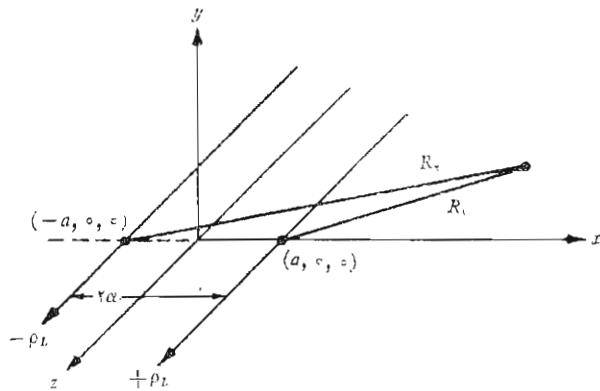
و رابطه میدان پتانسیل مرکب را بر حسب فاصله شعاعی از خطوط مثبت و منفی، یعنی به ترتیب R_1 و R_2 می نویسیم

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \left(\ln \frac{R_{1_0}}{R_1} - \ln \frac{R_{2_0}}{R_2} \right) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_{1_0} R_2}{R_{2_0} R_1}$$

در رابطه فوق $R_{1_0} = R_{2_0}$ قرار می دهیم، یعنی مبدأ صفر را به فاصله مساوی از دو خط فرض می کنیم که همان صفحه $x=0$ است. اگر R_1 و R_2 را بر حسب x و y بنویسیم خواهیم داشت:

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \quad (1)$$

برای تعیین سطوح هم پتانسیل و درک کافی مسأله ای که می خواهیم حل کنیم مقداری عملیات جبری لازم است. یک سطح هم پتانسیل $V = V_1$ انتخاب می کنیم و فرض می کنیم



شکل ۱۲.۵ دوبار خطی نامحدود با بارهای مخالف. خط مثبت در $x=a$ و $y=0$ و خط منفی در $x=-a$ ، $y=0$ واقع است. یک نقطه دلخواه در صفحه xy در فاصله شعاعی R_1 از بار مثبت و R_2 از بار منفی واقع است. سطوح هم پتانسیل بصورت استوانه های مستدیرند.

$$K_1 = e^{2\pi\epsilon V_1/\rho L}$$

و سپس

$$K_1 = \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

بعد از ضرب کردن و جمع جملات توانهای یکسان خواهیم داشت،

$$x^2 - 2ax \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} + y^2 + a^2 = 0$$

و با تکمیل جملات بصورت عوامل مربع خواهیم داشت،

$$\left(x - a \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1}\right)^2$$

که نشان می‌دهد سطح هم پتانسیل $V = V_1$ بستگی به z ندارد (با بصورت استوانه است) و صفحه xy را در دایره‌ای به شعاع b قطع می‌کند،

$$b = \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1}$$

و مرکز آن در $x = h$ ، $y = 0$ قرار دارد بطوری که،

$$h = a \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1}$$

اکنون می‌توانیم یک مسئله فیزیکی را با محاسبه ظرفیت بین یک استوانه هادی به شعاع b و یک صفحه به فاصله h از استوانه مطرح سازیم. هادیها را می‌توانیم به عنوان صفحات هم پتانسیل در نظر بگیریم، بدین ترتیب که دایره‌ای به شعاع b و به مرکز $x = h$ ، $y = 0$ بصورتی که در معادلات بالا داده شده است انتخاب می‌کنیم و آن را بر حسب a ، محل بار خطی معادل، و K_1 پارامتر ساده کننده‌ای که تابعی از پتانسیل V_1 است، محاسبه می‌کنیم:

$$a = \sqrt{h^2 - b^2}$$

$$\sqrt{K_1} = e^{2\pi\epsilon V_1/\rho L} = \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}$$

از آنجا که صفحه دارای پتانسیل صفر و استوانه مستدیر دارای پتانسیل V_1 است اختلاف پتانسیل V_1 خواهد بود،

$$V_1 = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}$$

اندازه بار روی استوانه یا روی صفحه یا روی صفحه بار خطی معادل قانون گاوس مساوی ρ_L است و ظرفیت طول L بدین ترتیب:

$$C = \frac{\rho_L L}{V_1} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln [(h + \sqrt{h^2 - b^2})/b]} = \frac{2\pi\epsilon L}{\cosh^{-1}(h/b)} \quad (2)$$

شکل ۱۳.۵ استوانه‌ای به شعاع ۵ متر و به پتانسیل ۱۰۰ ولت را به فاصله ۱۳ متر از یک صفحه به پتانسیل صفر واقع در فضای آزاد نشان می‌دهد. مقادیر عددی بار کل در واحد طول استوانه و ظرفیت بین استوانه و صفحه و محل صفحه هم پتانسیل ۵۰ ولتی، و محل بار خطی معادل که می‌توانست صفحه هم پتانسیل مشابهی ایجاد کند محاسبه شده‌اند.

شدت میدان الکتریکی را می‌توان با محاسبه گرادیان میدان پتانسیل (۱) بدست آورد و آن وقت D مساوی است با ϵE . با محاسبه D در سطح استوانه‌ای می‌توان چگالی توزیع بار سطحی را بدست آورد. برای مثال بالا مشاهده می‌کنیم که،

$$\rho_s, \max = 2.25 \rho_s, \min$$

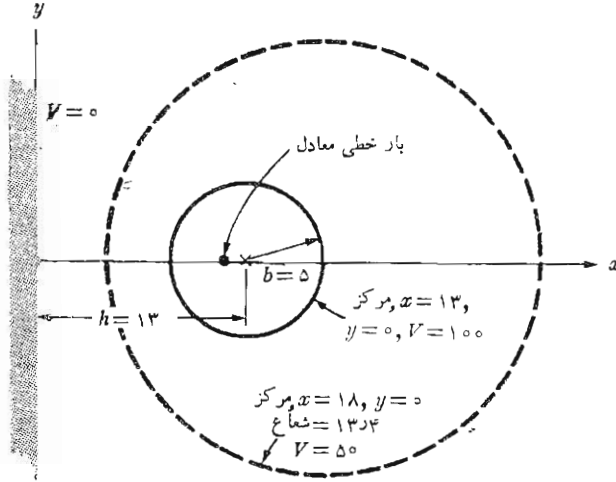
برای یک هادی به شعاع کوچک در محلی دور از صفحه خواهیم داشت

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(2h/b)} \quad (3)$$

ظرفیت بین دو هادی مستدیر که به فاصله $2h$ از هم قرار گرفته‌اند مساوی نصف مقدار داده شده در روابط (۳) یا (۴) است. این نتایج آخری جالب توجه است زیرا با آن می‌توانیم ظرفیت قسمتی از یک خط انتقال دوسیمه را حساب کنیم و آن یکی از انواع خطوط انتقال است که در آینده در فصل ۱۲ مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

تمرین (۱۳.۵)

ظرفیت بین یک هادی استوانه‌ای مستدیر به شعاع ۳ سانتیمتر واقع در هوا و هادیهای زیر بدست آورید: (الف) استوانه مشابهی که مرکز آن از مرکز استوانه مورد نظر ۱۰ سانتیمتر فاصله داشته باشد. (ب) صفحه‌ای به فاصله ۷ سانتیمتر از محور استوانه.



$h=13, b=5, \therefore K_1=25; \therefore \rho_L=3745 \times 10^{-6} \text{C/m}, \therefore a=12$
 اگر $V_1=50$ و $K_1=5$ و $b=13.4$ و $h=18$ و ρ_L پلاتینیر بماتند،
 $C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \Delta} = 3475 \rho F/m$

شکل ۱۳.۵ يك مثال عددی برای ظرفیت و چگالی بار خطی و محل يك بار خطی معادل و مشخصات سطح هم پتانسیل میانی مربوط به يك هادی استوانه‌ای به شعاع ۵ متر به پتانسیل ۱۰۰ ولت موازی و به فاصله ۱۳ متر از يك صفحه هادی به پتانسیل صفر.

جوابها: ۳۷۳ و ۲۵۳ pF/m

مراجعی که توصیه می‌شود

1- Adler, R.B., A.C. Smith, R.L. Longini: «Introduction to Semiconductor Physics,» John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.

در این کتاب نیم هادها در سطح لیسانس مورد بررسی قرار می‌گیرد.

2- Dekker, A.J.: «Electrical Engineering Materials,» Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1959

این کتاب کوچک بسیار مفید شامل عایقها و هادها و نیم هادها و مواد مغناطیسی است.

3- Fano, R.M., L.J. Chu, and R.B. Adler: «Electromagnetic Fields, Energy, and Forces» John Wiley and Sons, Inc., New York, 1960

قطبی شدگی (پلاریزاسیون) عایقها در قسمت اول فصل ۵ این کتاب مورد بحث قرار می‌گیرد در تهیه این کتاب که در سطح مقدماتی نوشته شده است فرض بر این بوده است که خواننده بایک دوره کامل فیزیک الکتریسیته و مغناطیس آشنائی دارد و از اینرو سطح آن کمی بالاست.

مقدمه‌ای که از صفحه ۱ آغاز می‌شود در خور مطالعه است.

4- Fink, D. G., and J. M. Carroll: «Standard Handbook for Electrical Engineers» 10 th ed. McGraw - Hill Book Company, New York, N.Y., 1968.

5- Matsch, L. W. : «Capacitors, Magnetic Circuits, and Transformers,» Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1964.

در فصل ۲ این کتاب بسیاری از جنبه‌های فعلی ظرفیت مورد بحث قرار گرفته است.

6- Maxwell, J.C. : «A Treatise on Electricity and Magnetism,» 3d ed., Oxford University Press, New York, 1904, or an inexpensive paperback edition, Dover Publications, Inc., New York, 1954.

7- Popovic, B.D. : «Introductory Engineering Electromagnetics,» Addison Wesley Publishing Company Reading, Mass., 1971.

سطح کتاب پوپوویچ به همین کتاب بسیار شبیه است، گرچه شامل مواد بیشتری است. مواد عایق در فصل ۲ در میدانهای الکتریکی معرفی می‌شوند.

مسائل

۱- الکترونها کاتدی را با سرعت اولیه صفر در زمان $t = 0$ در صفحه $z = 0$ ترك می‌کنند. فرض کنید که شتاب حرکت آنها ثابت و مساوی $10^{12} \text{ m/s}^2 \times 32$ باشد. (الف) $U(t)$ و (ب) $z(t)$ را بدست آورید (پ) سرعت را بصورت تابعی از محل z بنویسید. (ت) اگر در هر ثانیه 10 الکترون کاتد را ترك کنند و مقطع اشعه ثابت و به مساحت 10^{-8} m^2 باشد، چگالی جریان و چگالی بار حجمی را بر حسب z تعیین کنید.

۲- جریان کلی را که در جهت \vec{a}_z از صفحه $z = 0$ بین $x = \pm 0.01$ و $y = \pm 0.01$ m می‌گذرد برای شرایط زیر بدست آورید:

$$\vec{J} = 2 \times 10^8 (z^2 \vec{a}_y + y^2 \vec{a}_z) \text{ A/m}^2 \text{ (الف)}$$

$$\vec{J} = 2 \times 10^8 (x^2 + y^2) \vec{a}_z \text{ A/m}^2 \text{ (ب)}$$

۳- چگالی جریان در ناحیه‌ای حول مبدأ مساوی است $\vec{J} = (\psi \vec{a}_r, \sin \theta) / r^2 \text{ A/m}^2$ (الف) سطح جریان کلی را که از سطحهای زیر خارج می‌شود بدست آورید: (الف) سطح کره $r = 0.02 \text{ m}$ ، و (ب) قسمتی از کره به مختصات $r = 0.03 \text{ m}$ ، $0 \leq \theta \leq 30^\circ$

۴- چگالی جریان در دستگاه مختصات استوانه‌ای نزدیک محور z مساوی است با $\vec{J} = \vec{a}_r / \psi \pi r \text{ A/m}^2$ (الف) $\nabla \cdot \vec{J}$ را بدست آورید. (ب) dQ/dt را در داخل سطح کره $r = 1 \text{ mm}$ ، $z = \pm 2 \text{ cm}$ تعیین کنید.

۵- يك دستگاه مختصات قائم در داخل ستاره‌ای برپا شده است و اندازه‌گیریهائی توسط يك دسته فضا‌نورد شجاع در سطوح مکعبی به مرکز مبدأ و به اضلاع 200 کیلومتر موازی با محورهای مختصات به عمل می‌آورند و پی می‌برند به این که آهنک جریان جرم به خارج از شش سطح مکعب عبارتست از 2310 و 2118 - - 196 و 201 - 4117 و 3211 - کیلوگرم در هر کیلو متر مربع در هر ثانیه. (الف) دیورژانس آهنک جریان جرم را در مبدأ تخمین بزنید. (ب) آهنک تغییر چگالی را در مبدأ تخمین بزنید.

۶- مقاومت يك هادی برننجی به شکلهای زیر بدست آورید: (الف) سیم $4-0$ (قطر 0.46 mm اینچ)، به طول 1 متر. (ب) لوله استوانه‌ای به طول 10 متر و قطر داخلی 2 mm و قطر خارجی 3 mm، (پ) لوله به مقطع مربع به طول 10 متر به ضلع داخلی 2 mm و ضلع خارجی 3 mm

۷- يك استوانه توخالی از ماده‌ای که برای آن $\sigma = 10^3 \text{ g/m}$ است ساخته شده است. شعاع داخلی این استوانه 7 میلی‌متر و شعاع خارجی آن 5 mm و طول آن 2 cm است. اگر سطوح داخلی و خارجی استوانه آب نقره داده شده باشند (فرض کنید $\sigma_{Ag} = \infty$) میدان پتانسیل مساوی است با $V = -218 \ln(200r)$. (الف) پتانسیل سطوح داخلی و خارجی استوانه را بدست آورید. (ب) \vec{E} را بدست آورید. (پ) \vec{J} را بدست آورید. (ت) برآیند جریان را تعیین کنید. (ث) R را محاسبه کنید.

۸- يك کره توخالی از ماده‌ای که برای آن $\sigma = 10^3 \text{ g/m}$ است ساخته شده است. شعاع داخلی 2 mm و شعاع خارجی 5 mm است. اگر سطوح داخلی و خارجی کره آب نقره داده شده باشند (به فرض $\sigma_{Ag} = \infty$) و میدان پتانسیل

کره را بدست آورید، (ب) \vec{E} را تعیین کنید، (پ) \vec{J} را تعیین کنید، (ت) برآیند جریان را بدست آورید، (ث) R را محاسبه کنید.

۹- يك میله گرافیت ($\sigma = 7 \times 10^4 \text{ } \Omega/\text{m}$) به قطر ۴ره اینچ و طول ۸ اینچ در دست است و دارای جریان کلی با توزیع یکنواخت ۸۰ آمپر است. (الف) \vec{J} را تعیین کنید، (ب) \vec{E} را بدست آورید. (پ) اختلاف پتانسیل را محاسبه کنید. (ت) R را تعیین کنید، (ث) چه مقدار توان به گرافیت تحویل داده می‌شود؟

۱۰- E را در يك هادی در شرایط زیر بدست آورید: (الف) $\text{تحرك } 0.5 \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ و سرعت رانش $1/15 \text{ mm/s}$ است (ب) $\sigma = 6.2 \times 10^7 \text{ } \Omega/\text{m}$ و $U_d = 10^{-4} \text{ m/s}$ و تعداد الکترونهای هدایت 5.8×10^{28} در هر متر مکعب است. (پ) مقاومت مخصوص $5 \times 10^{-6} \text{ } \Omega \cdot \text{cm}$ و طول نمونه 0.5 cm سطح آن 2 cm^2 و جریان 3 A است.

۱۱- کره‌ای در مختصات استوانه‌ای چنین تعریف می‌شود: $0.1 \text{ cm} \leq r \leq 10 \text{ cm}$ ، $95^\circ \leq \varphi \leq 185^\circ$ و $2 \leq z \leq 2 - \varphi$ سانتیمتر. مقاومت کل اندازه گرفته شده بین دو سطح ثابت φ چه اندازه است، در صورتی که تمام سطوح هم پتانسیل توسط ثابت φ مشخص شوند. فرض کنید $\sigma = 2 \text{ } \Omega/\text{m}$

۱۲- می‌دانیم که سطح کره $r = 7$ يك هادی است. E_x و E_y را در صورتی بدست آورید که در نقطه $(2, -3, -6)$

$$\vec{E} = 10 \vec{a}_x + E_y \vec{a}_y + E_z \vec{a}_z$$

۱۳- می‌دانیم که در نقطه‌ای روی سطح يك هادی که در آن $\rho_s > 0$ عمود بر سطح هادی به سمت خارج را مشخص کنید. $\vec{D} = 4 \vec{a}_x - 5 \vec{a}_y + 2 \vec{a}_z \text{ } \mu\text{C}/\text{m}^2$ (الف) ρ_s چه اندازه است؟ (ب) \vec{a}_N

۱۴- میدان پتانسیل $V = 6\varphi + 20/rV$ در مختصات کروی داده شده است و می‌دانیم که نقطه $(\varphi = 30^\circ, \theta = 60^\circ, r = 1)$ روی يك سطح هادی در فضای آزاد قرار دارد. (الف) معادله سطح هادی را تعیین کنید. (ب) ρ_s را در تمام نقاط روی سطح هادی بدست آورید.

۱۵- (الف) هدایت مخصوص سیلیسیم را در 300°K بدست آورید و کسری از آن را که از تحرك الکترون ناشی می‌شود تعیین کنید. (ب) این کسر برای ژرمانیم در 300°K چه اندازه است؟

۱۶- يك نمونه استوانه‌ای سیلیسیم دارای شعاع 5 mm و طول 12 cm است اگر در 300°K ولتاژی 30 ولتی بین هر انتهای آن بگذاریم، مقادیر زیر را

تعیین کنید. (الف) σ و (ب) E و (پ) J و (ت) I و (ث) R و (ج) U_d برای الکترونها.

۱۷- ضریب پذیرش نسبی تیدروژن اتمی در حرارت و فشار استاندارد ۱۰۰۰۰۴۶۴ است. اگر $10^{25} \times 542 \text{ atm}$ در هر متر مکعب وجود داشته باشد و میدان $E = 10^2 \text{ V/m}$ برقرار باشد، مقادیر زیر را بدست آورید: (الف) P و (ب) p و (پ) فاصله بین بار مثبت و منفی.

۱۸- یک ملکول قطبی دارای گشتاور $10^{34} \text{ C}\cdot\text{m}$ است و تعداد 10^{28} ملکول در هر متر مکعب آن وجود دارد. در اثر یک میدان الکتریکی $E = 5000 \text{ V/m}$ ۲ درصد گشتاور بطور مؤثر هم جهت می‌شوند. درحالی که گشتاورهای باقیمانده دارای جهتهای مختلفی هستند. P و χ_e و ϵ_R را تعیین کنید.

۱۹- استوانه $r < 3$ عایقی است که برای آن $\epsilon_{R1} = 2$. ناحیه $3 < r$ فضای آزاد است. اگر در $r = 3^-$ و $\varphi = 0$ و $z = 0$ ، $\epsilon_0 \bar{E}_1 = 20\bar{a}_z - 10\bar{a}_y - 40\bar{a}_x$ ، \bar{E}_1 باشد. \bar{E}_2 را در $r = 3^+$ و $\varphi = 0$ و $z = 0$ بدست آورید.

۲۰- اگر ناحیه ۱ ($x < 0$) و ۲ ($0 < x < 1$) و ۳ ($x > 1$) به ترتیب دارای ضریبهای دی الکتریک ۱ و ۲ و ۳ باشند، \bar{D}_3 و \bar{E}_3 و \bar{P}_3 را وقتی که $\bar{E}_1 = \delta\bar{a}_x + \delta\bar{a}_y + \delta\bar{a}_z$ باشد بدست آورید.

۲۱- عایقهائی که به طریق زیر توزیع شده اند مفروضند: ϵ_0 برای $x < 0$ و $\epsilon_R = 3$ برای $0 < x < 2$ و $\epsilon_R = k$ برای $2 < x < 4$ و ϵ_0 برای $x > 4$. برای $x < 0$ فرض کنید $\bar{E} = \delta\bar{a}_x - 4\bar{a}_y - 3\bar{a}_z$ باشد و \bar{E} را برای بقیه جاها بدست آورید اگر: (الف) $k = 1$ و (ب) $k = 2$ و (پ) زاویه ای را که \bar{E} با \bar{a}_x در $x = 0^+$ می‌سازد برای دو قسمت (الف) و (ب) بالا بدست آورید.

۲۲- شرایط مرزی را برای مؤلفه‌های عمودی و مماس \bar{P} در سطح مشترک عایقهائی کاملی که با ϵ_{R1} و ϵ_{R2} مشخص می‌شوند بدست آورید.

۲۳- بار نقطه‌ای $1 \mu\text{C}$ در مبدأ مختصات قطبی قرار گرفته است. اختلاف پتانسیل بین سطوح $r = 1$ و $r = 2$ را برای شرایط زیر بدست آورید: (الف) در همه جا $\epsilon = \epsilon_0$ و (ب) در همه جا $\epsilon = 2\epsilon_0$ ، (پ) $\epsilon = 2\epsilon_0$ برای $0 < r < 1.5$ و $\epsilon = 4\epsilon_0$ برای $r > 1.5$ و (ت) $\epsilon = (r+1)\epsilon_0$

۲۴- میدان پتانسیل $V = 20r \cos \varphi$ برای $r < 2$ و

$$V = 50r \cos \varphi - (120/r) \cos \varphi$$

برای $r > 2$ داده شده است. (الف) \bar{E} را در هر دو ناحیه بدست آورید. (ب) نشان دهید که شرایط مرزی عمودی و مماس \bar{E} برای تمام مقادیر φ در سطح

۲- $r = 2$ صادق است اگر $\epsilon = \epsilon_0$ برای $r > 2$ و $\epsilon = k\epsilon_0$ برای $r < 2$ باشد. k را پیدا کنید.

۲۵- برای مواد مذکور در ضمیمه پ طولانی ترین زمان تنزل قابل ارائه کدام است؟ اگر بتوان این نتایج را در مورد هادیهای فلزی در درجه حرارت اطاق بکار برد و فرض شود $\epsilon_R = 1$ ، کوتاه ترین زمان کدام است؟

۲۶- روی هر یک از صفحات خازنی با عایق هوا با مساحتی به فاصله $d = 1 \text{ mm}$ از هم و مساحت $S = 36\pi \text{ cm}^2$ بارهای $\pm 50 \text{ nC}$ قرار دارد. بی آنکه در مقدار بار تغییری حاصل شود، تا چه اندازه می توان فاصله صفحات را از هم تغییر داد تا مقادیر زیر دو برابر شود: (الف) ولتاژ و (ب) ذخیره انرژی و (پ) ظرفیت و (ت) شدت میدان الکتریکی و (ث) چگالی بار سطحی.

۲۷- ظرفیت خازن هم محوری با مشخصات $a = 0.3$ و $b = 2$ و $L = 10$ سانتیمتر را وقتی عایق آن شرایط زیر را داشته باشد بدست آورید: (الف) $\epsilon_R = 3$ در همه جا و (ب) $\epsilon_R = 3$ برای $0 < \varphi < \pi$ و $\epsilon_R = 1$ برای $\pi < \varphi < 2\pi$ و (پ) $\epsilon_R = 3$ برای $0 < z < 5 \text{ cm}$ و $\epsilon_R = 1$ برای $5 < z < 10 \text{ cm}$ و (ت) $\epsilon_R = 3$ برای $1.15 < r < 2.3$ و $\epsilon_R = 1$ برای $2 \text{ cm} < r < 1.15$

۲۸- دو کره هادی هم مرکز به شعاعهای ۲ و ۴ سانتیمتر به وسیله خلاء از هم جدا شده اند. (الف) C را بدست آورید؛ (ب) ضخامت لایه نشو پرتی که باید کره داخلی را احاطه کند تا ظرفیت دو برابر شود چه اندازه است؟ (پ) ضخامت لایه نشو پرتی که باید روی سطح داخلی کره خارجی قرار داده شود تا ظرفیت دو برابر شود چه اندازه است؟

۲۹- خازن موازی صفحه ای با عایق هوا که مساحت صفحات آن هر یک $4 \times 4 \text{ cm}^2$ و فاصله آنها از هم 3 mm است در دست است. از 2 cm^3 پارافین ($\epsilon_R = 2.25$) چگونه باید استفاده کرد تا بیشینه ظرفیت بدست آید و C_{max} چه اندازه است؟

۳۰- خازن موازی صفحه ای با عایق هوا با مساحت صفحه S و فاصله صفحات d ظرفیت C_0 را داراست. اگر ضخامت ناحیه هوا نصف شود و فضای باقیمانده با عایقهای زیر پر شود ظرفیت چه اندازه می شود. (الف) میکا و (ب) آب مقطر و (پ) مس.

۳۱- دو صفحه مربع مسی، هر یک به مساحت 5 m^2 در وسط قطعات مدور تفلن به طول 2 mm و شعاع 3 mm به اندازه 2 mm از هم جدا شده اند. اگر 4×6 عدد از این قطعات تفلن بکار رود. ظرفیت هوائی این خازن چند درصد اضافه می شود.

۳۲- يك کره فازی عایق شده به قطر 5 cm بطور یکنواخت با عایقی به ضریب دی الکتریک $\epsilon_R = 10$ و ضخامت b پوشیده شده است. می‌دانیم که با اضافه کردن 10 سانتیمتر دیگر به ضخامت لایه ظرفیت دو برابر می‌شود. b را بدست آورید.

۳۳- دوسیم، هر یک به شعاع 2 mm بطور موازی به فاصله d از یکدیگر در عایقی که ضریب دی الکتریک آن $\epsilon_R = 3$ است قرار دارند. اگر ظرفیت 10 pF/ft باشد، d را بدست آورید.

۳۴- ظرفیت بین دو استوانهٔ مدور موازی به شعاعهای b_1 و b_2 که مراکز آنها به فاصله d از هم قرار دارند بطوری که $d > b_1 + b_2$ مساوی $C = 2\pi\epsilon L / (\cosh^{-1} p_1 + \cosh^{-1} p_2)$ است که در آن:

$p_2 = d/2b_2 + b_2/2d - b_2^2/2db_2$ و $p_1 = d/2b_1 + b_1/2d - b_1^2/2db_1$ نشان دهید که این رابطه همان رابطه‌ای است که اگر ترکیب سری ظرفیتهای هر خط را با صفحه‌ای که در فاصله d $b_2^2/2d - b_2^2/2db_2$ و $h_1 = d/2 + b_1^2/2d - b_1^2/2db_1$ از مراکز هر یک از آنها قرار دارد حساب می‌کردیم بدست می‌آمد.

۳۵- فاصلهٔ انرژی مواد زیر را بر حسب الکترون ولت با هم مقایسه کنید: الماس و سیلیسیم و ژرمانیم و قلع و سرب (به صفحه ۱۵۹ مرجع Dekker مراجعه شود).
۳۶- با مراجعه به بخش ۱۷ کتاب

Standard Handbook for Electrical Engineers

(به مراجع توصیه شده توجه شود). قطر و مقاومت هر 1000 ft و بیشینهٔ ظرفیت مجاز محل جریان توسط National Electric Code را برای يك سیم مسی با روکش لاستیکی 10 RH در هوا بدست آورید.

۶

روشهای ترسیم تجربی خطوط میدان

در چند فصل گذشته مشاهده کردیم که پتانسیل دروازه‌ای است به سوی هر گونه اطلاعاتی که درباره میدان الکتریسته ساکن يك نقطه بخواهیم. راهی است مستقیم و طی کردن آن در هر جهت دلخواه آسان است. شدت میدان الکتریکی را می‌توان با عمل گرادبان، که يك مشتق‌گیری است، از پتانسیل بدست آورد و شدت میدان الکتریکی را می‌توان با ضرب کردن آن در ضریب پذیرش برای تعیین چگالی شار الکتریکی بکار برد. با دیورژانس چگالی شار، که آن هم يك مشتق‌گیری است، چگالی بار حجمی بدست می‌آید و چگالی بار سطحی هر هادی واقع در میدان را می‌توان به سرعت با تعیین چگالی شار در آن سطح محاسبه کرد. شرایط مرزی نشان می‌دهند که چگالی شار می‌بایست بر این سطح عمود باشد.

اگر اطلاعاتی بیش از مقدار میدان یا چگالی بار در يك نقطه مورد نظر باشد، به يك انتگرال‌گیری هم احتیاج است. تعیین بار کل روی يك هادی یا انرژی ذخیره شده کل در يك میدان الکتریسته ساکن، یا مقدار ظرفیت یا مقاومت همه مثالهایی از این گونه مسائل اند که هر يك به انتگرال‌گیری نیازمندند. معمولاً هر قدر هم که اطلاعات ما در نظریه میدان عمیق باشد نمی‌توان از این انتگرال‌گیریها اجتناب کرد و به راستی خواهیم دید که هر اندازه اطلاعات ما بیشتر شود تمایل ما نیز به انتگرال‌گیری افزایش می‌یابد. پتانسیل ممکن است برای ما نقش بسیار مهمی ایفا کند و آن این است که به سرعت و آسانی کمیتی را که باید انتگرال بگیریم در اختیار ما بگذارد.

بنابراین، هدف ما در مرحله اول تعیین پتانسیل است و این کار در مورد مسائل عملی بصورت تعیین آرایش بار میسر نیست، زیرا هرگز به دقت نمی‌دانیم که بارها چگونه توزیع شده‌اند. بجای آن، اغلب چند جسم هادی یا مرزهای هادی با اختلاف پتانسیل بین آنها را می‌دانیم. مگر در صورتی که سطوح مرزی را مربوط به مسأله ساده‌ای که قبلاً داشته‌ایم بدانیم کار دیگری نمی‌توانیم بکنیم و می‌بایست تا بررسی معادله لاپلاس در فصل آینده صبر کنیم.

هرچند که بدین ترتیب حل ریاضی این گونه مسائل عملی مهم را به بعد موکول می‌کنیم، می‌توانیم با چند روش تجربی تعیین میدان پتانسیل آشنا شویم. در این روشها ممکن است به وسایل مخصوصی مانند ظرف الکترولیت و دستگاه جریان سیالات، و کاغذ مقاومتی و پل اندازه‌گیری مربوط به آن یا ورقهای لاستیکی احتیاج باشد. یا ممکن است به مداد و کاغذ و ذخیره پروبیمانی مداد پاک‌کن نیاز باشد. با این روشها هیچ‌گاه نمی‌توان مقدار دقیق پتانسیل را تعیین کرد ولی دقت آنها برای مقاصد مهندسی کافی خواهد بود. با روش دیگری، کسه روش تکرار نامیده می‌شود، می‌توانیم دقت تعیین پتانسیل را هر اندازه بخواهیم بالا ببریم، ولی هر اندازه دقت مورد نظر بالاتر باشد تعداد محاسبات لازم با سرعت بسیار نیز افزایش می‌یابد.

در روشهای تجربی، که ذیلاً توصیف می‌شوند، می‌بایست با دقت بسیار به این موضوع توجه داشته باشیم که آنها بیشتر بر اساس تشابه با میدان الکتریسته ساکن استوارند تا به اندازه‌گیریهای مستقیم در این میدان.

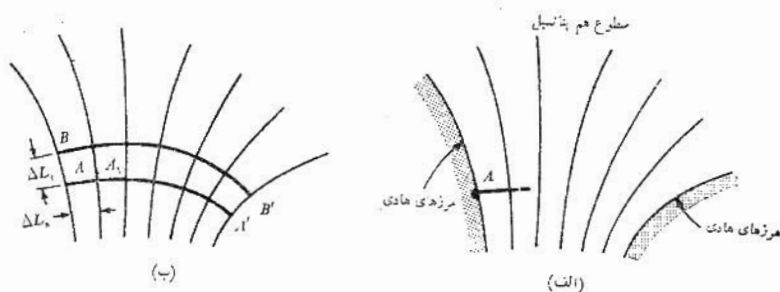
در خاتمه، قبل از ارائه روشهای تجربی تعیین میدانهای پتانسیل، می‌بایست بر این واقعیت تأکید کنیم که در بسیاری از مسائل عملی شکل هندسی میدان طوری پیچیده است که با هیچ روش دیگری، جز با روشهای تجربی، تعیین میدان پتانسیل ممکن و میسر نخواهد بود.

۱۰۶ مر بھای منحنی الخط

اولین روش ما روشی تریسمی است و فقط به مداد و کاغذ احتیاج دارد، علاوه بر صرفه اقتصادی، با این روش می‌توان به شرط بکار بردن مهارت و شکیبایی به دقت خوبی دست یافت. حتی يك مبتدی می‌تواند با پیروی از چند قاعده و اشاره‌ای که در این کار لازم است به دقت کافی، (۵ تا ۱۰ درصد در تعیین ظرفیت) برسد.

روشهایی که توصیف می‌شوند فقط در مورد میدانهایی صادقند که در آنها هیچ‌گونه تغییری در امتداد عمود بر صفحه تصویر وجود نداشته باشد و این روش بر پایه چند واقعیت که قبلاً ارائه شدند استوارند:

- ۱- سطح خارجی هادی يك صفحه هم پتانسیل است.



شکل ۱.۶ الف) طرح سطوح هم پتانسیل بین دو هادی. نمو پتانسیل بین هر دو سطح هم پتانسیل مجاور با هم مساویند. ب) دو خط شار یکی از A تا A' و دیگری از B تا B' کشیده شده‌اند.

۲- شدت میدان الکتریکی و چگالی شار الکتریکی هر دو بر سطوح هم پتانسیل عمودند.

۳- در نتیجه \vec{D} و \vec{E} بر سطوح مرزی عمودند و مؤلفه مماس ندارند.

۴- خطوط و شار الکتریکی یا خطوط سیلان از یک بار شروع و به بار دیگر ختم می‌شوند و از اینرو در یک عایق متجانس و خالی از بار ابتدا و انتهای آنها سطوح هادی خواهد بود.

دلالتهای ضمنی این بیانات را با ترسیم خطوط سیلان در طرحی که سطوح هم پتانسیل را نشان می‌دهد بررسی می‌کنیم، در شکل (الف ۱.۶) دو سطح مرزی هادی نشان داده شده‌اند و هم پتانسیلها با اختلاف پتانسیلهای ثابت بین آنها کشیده شده‌اند. باید به خاطر داشت که این خطوط همان مقاطع سطوح هم پتانسیل‌اند، که به صورت استوانه (اگر چه نه مستدیر) اند، زیرا هیچ‌گونه تغییری در راستای عمود بر سطح کاغذ مجاز نیست. ما بطور دلخواه یک خط نیرو یا خط شار را در نقطه A روی سطح هادی مثبت تر شروع می‌کنیم. این خط بطور عمودی از سطح خارج می‌شود و می‌بایست سطوح هم پتانسیل دیگری را که بین هادی و سطح نشان داده شده وجود دارند ولی رسم نشده‌اند با زاویه 90° قطع کند. این خط با رعایت تنها این قاعده که بر تمام سطوح هم پتانسیل عمود باشد تا هادی بعدی ادامه پیدا می‌کند. با چرخاندن

کاغذ از يك سو به سوی دیگر ضمن ادامه دادن خط می توانیم خطوط را بهتر بر هم عمود رسم کنیم. شکل ۱.۶ ب خطوط کامل شده را نشان می دهد.

به ترتیب مشابهی می توانیم از نقطه B شروع کنیم و خط نیروی دیگری را تا B' رسم کنیم. قبل از ادامه این بحث، می خواهیم مفهوم این دوخط سیلان را تعبیر کنیم. خطوط نیرو، طبق تعریف، در همه جا برشدهت میدان الکتریکی یا بر چگالی شار الکتریکی مماسند و از آنجائی که این خطوط بر چگالی شار الکتریکی مماسند، چگالی شار الکتریکی نیز برخطوط نیرو مماس است و هیچ يك از خطوط شار الکتریکی هیچ يك از خطوط نیرو را قطع نمی کنند. به عبارت دیگر، اگر بار $5 \mu C$ روی سطح بین A و B به عمق يك متر درون کاغذ وجود داشته باشد در اینصورت $5 \mu C$ شار الکتریکی از این ناحیه شروع می شود و همه به سطح بین A' و B' ختم می شوند. يك چنین جفت خطی را گاهی لوله شار نیز می گویند چه اینطور به نظر می رسد که این خطوط شار را بطور فیزیکی از يك نقطه به نقطه دیگر، بی از دست دادن آنها، حمل می کنند.

اکنون می خواهیم خط نیروی سومی رسم کنیم. برای ساده شدن تعبیر بصری و ریاضی که می خواهیم از طرح حاصل کنیم بهتر است این خط سوم را از نقطه ای مانند C شروع کنیم و آن را طوری انتخاب می کنیم که مقدار شاری که توسط لوله BC حمل می شود مساوی همان مقدار شار محتوی AB باشد. حال محل نقطه C را چگونه انتخاب می کنیم؟

شدت میدان الکتریکی در نقطه وسط خط واصل A و B را می توان بتساوی تقریب با در نظر گرفتن مقدار شاری، مثلاً $\Delta\Psi$ ، در لوله AB تعیین کرد. بدین ترتیب چگالی شار الکتریکی $\Delta\Psi/\Delta L_1$ خواهد بود که در آن عمق لوله ۱ متر و ΔL_1 طول خط واصل A و B است. بنابراین اندازه E مساوی است با

$$E = \frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta\Psi}{\Delta L_1}$$

در هر صورت می توانیم اندازه شدت میدان الکتریکی را با تقسیم اختلاف پتانسیل بین نقاط A و A_1 نیز، که در دو سطح هم پتانسیل مجاور قرار دارند، برفاصله A تا A_1 بدست آوریم. اگر این فاصله را ΔL_n بنامیم و نمو پتانسیل بین دو سطح هم پتانسیل مجاور را ΔV فرض کنیم، در این صورت،

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta L_n}$$

این مقدار بیشتر از همه برای نقطه وسط فاصله A تا A_1 دقیق است درحالی

که مقدار قبلی برای نقطه وسط فاصله A تا B دقیق تر از همه بود. در هر صورت، اگر سطوح هم پتانسیل نزدیک یکدیگر باشند (ΔV کوچک) و دو خط نیرو نیز نزدیک هم باشند ($\Delta \Psi$ کوچک) دو مقداری که برای شدت میدان الکتریکی بدست آوریم می بایست تقریباً مساوی شوند،

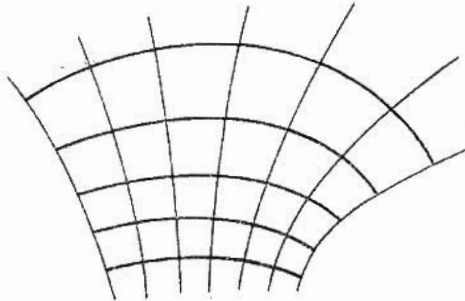
$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta \Psi}{\Delta L_t} = \frac{\Delta V}{\Delta L_n} \quad (1)$$

دوسراسر عمل طرح فرض کردیم که ماده بین هادیها متجانس است (ضریب دی الکتریک ϵ ثابت) و اختلاف پتانسیل ΔV بین سطوح هم پتانسیل مجاور و نیز مقدار شار در هر لوله ثابت باشد ($\Delta \Psi$ ثابت). برای رعایت تمام این شرایط، طبق رابطه (۱) باید

$$\boxed{\frac{\Delta L_t}{\Delta L_n} = \text{ثابت} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta \Psi}{\Delta V}} \quad (2)$$

می توانیم در هر نقطه از طرح خودمان استدلال مشابهی بکنیم و بدین ترتیب به این نتیجه می رسیم که می بایست میان فاصله بین خطوط نیرو، که روی یک سطح هم پتانسیل اندازه گرفته می شود، و فاصله بین سطوح هم پتانسیل، که روی یک خط نیرو اندازه گرفته می شود نسبت ثابتی حفظ شود. این نسبت است که می بایست در هر نقطه ثابت نگاه داشته شود در حالی که اندازه هر طول اهمیتی ندارد. بدین ترتیب در نواحی شدت میدانهای بزرگتر، چون ΔV ثابت است، هر طول می بایست کوتاه تر شود. ساده ترین نسبتی که می توانیم مورد استفاده قرار دهیم واحد است و خط نیرویی که در شکل (۱.۶ ب) از B به B' کشیده شد، از نقطه ای آغاز شد که در آن $\Delta L_t = \Delta L_n$. از آنجائی که نسبت این فواصل واحد نگاه داشته می شود، خطوط نیرو و سطوح هم پتانسیل ناحیه شامل میدان را به مربعهای منحنی الخطی تقسیم می کنند. و این واژه بر شکل هندسی مسطحی دلالت می کند، که اندکی با شکل یک مربع واقعی فرق دارد زیرا اضلاع آن اندکی منحنی الخط و مختلف الطول است ولی هر اندازه ابعاد آن کوچکتر شود به مربع واقعی نزدیکتر می گردد. از اینرو عناصر سطحی نسوی که در سه دستگاه مختصات پیش می آیند و در یک سطح واقعند مربعهای منحنی الخط نامیده می شوند.

اکنون می توانیم به سرعت بقیه خطوط نیرو را با حفظ مربع بودن هر چهار گوش تا حد ممکن رسم کنیم. شکل ۲.۶ طرح کامل را نشان می دهد. تنها تفاوت بین این مثال و ترسیم نقشه میدان با استفاده از روش مربعهای



شکل ۴.۶ باقیمانده خطوط نیرو به شکل ۱.۶ ب اضافه شده است بدین طریق که هر خط نیروی جدید را عمود بر هادی شروع می‌کنیم و از طریق حفظ مربعهای منحنی الخط در تمام نقشه ادامه می‌دهیم.

منحنی الخط این است که سطوح پتانسیل واسطه معلوم نیستند. خطوط نیرو و سطوح هم پتانسیل هر دو می‌بایست در نقشه اصلی، که فقط حد هادی را نشان می‌دهند، رسم شوند. بطوری که بعداً با قضیه یگانگی برای معادله لاپلاس ثابت خواهیم کرد، تنها یک حل ممکن وجود دارد و قواعدی که ما در بالا ارائه دادیم کافی است. با رسم یک خط نیرو و کشیدن یک خط هم پتانسیل و اضافه کردن خط نیروی دیگر یک مربع منحنی الخط ساخته شود، و به این ترتیب می‌توان نقشه را به تدریج در تمام منطقه مورد نظر گسترش داد. نظر به اینکه هیچ یک از ما نمی‌توانیم این کار را به نحو کامل انجام دهیم بزودی خواهیم دید که دیگر ساختن مربع و حفظ زاویه ۹۰ درجه در گوشه‌ها میسر نیست. یک اشتباه در نقشه تکرار و بسر هم جمع می‌شود و اشکالات فعلی ما نشانه‌ای خواهد بود از ماهیت اصلاحاتی که می‌بایست در قسمتی از کارهای قبلی به عمل آوریم و معمولاً بهتر است که کار خود را با یک نقشه جدید از سر بگیریم و از نقشه قبلی به عنوان راهنما استفاده کنیم.

ترسیم یک نقشه میدان قابل استفاده خود هنری است و علم فقط قواعد این کار را در اختیار ما می‌گذارد. اصولاً مهارت در هر کار هنری نیازمند تمرین است. برای مبتدیان کابل یا خازن هم محور مسأله خوبی است، زیرا تمام هم پتانسیلها دایره‌اند و نقشه هادی ممکن است نقشه دو هادی مدور موازی باشد که خطوط هم پتانسیل آنها باز دایره‌اند ولی مرکز آنها یکی نیست. هر یک از این مثالها به صورت

مسأله‌ای در پایان این فصل داده شده‌اند و دقت نقشه‌ها با محاسبه ظرفیت بطوری که در زیر ارائه خواهد شد کنترل می‌شود.

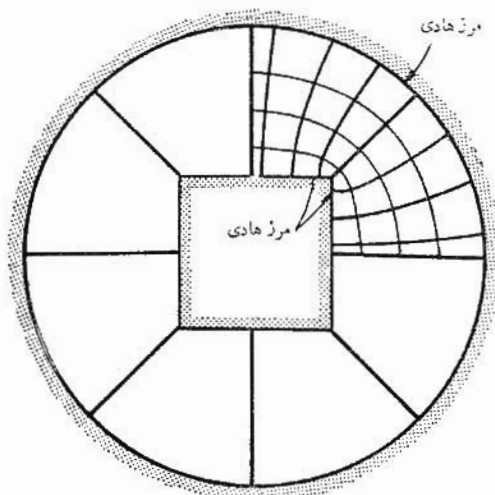
شکل ۳.۶ يك نقشه کامل را برای کابلی که هادی درونی آن مربع و هادی خارجی آن مدور است نشان می‌دهد. ظرفیت از رابطه $C = Q/V_0$ با قراردادن رابطه $N_Q \Delta Q = N_Q \Delta \Psi$ به جای Q که در آن N_Q تعداد لوله‌های شار واصل دو هادی است و نیز رعایت رابطه $V_0 = N_V \Delta V$ که در آن N_V تعداد نموهای پتانسیلها بین هادیها است محاسبه می‌شود. بدین ترتیب،

$$C = \frac{N_Q \Delta Q}{N_V \Delta V}$$

و با استفاده از رابطه (۲)،

$$C = \frac{N_Q}{N_V} \varepsilon \frac{\Delta L_t}{\Delta L_n} = \varepsilon \frac{N_Q}{N_V} \quad (3)$$

زیرا $\Delta L_t / \Delta L_n = 1$. برای تعیین ظرفیت از روی نقشه شار فقط کافی است که مربعها را در دو جهت بین هادیها و دور هریک از آنها بشماریم. از شکل ۳.۶ داریم،



شکل ۳.۶ مثالی از نقشه يك میدان با مربعهای منحنی الخط، هر ضلع مربع دوسوم شعاع دایره است. $N_Q = 8 \times 325 = 26$ و $N_V = 4$ و از این رو

$$C = \varepsilon_0 \frac{N_Q}{N_V} = 57.6 \text{ pF/m}$$

$$C = \epsilon_0 \frac{8 \times 3.25}{4} = 57.6 \text{ pF/m}$$

رامو و وینری و وان دوزرا بحث بسیار جالبی با مثالهایی برای ترسیم نقشه میدان با مربعهای منحنی الخط ارائه داده‌اند. آنها پیشنهادت زیر را عرضه می‌کنند:

۱- قبل از شروع رسم دقیق نقشه میدان، با صرف یک دقیقه یا در این حدود برای هر یک تعدادی نقشه‌های اولیه رسم کنید. استفاده از کاغذ شفاف روی سرز اصلی بر سرعت ترسیم این نقشه‌های اولیه می‌افزاید.

۲- اختلاف پتانسیل معلوم بین الکترونها را به تعداد مساوی، مثلاً در ابتدا ۴ یا ۸ تقسیم کنید.

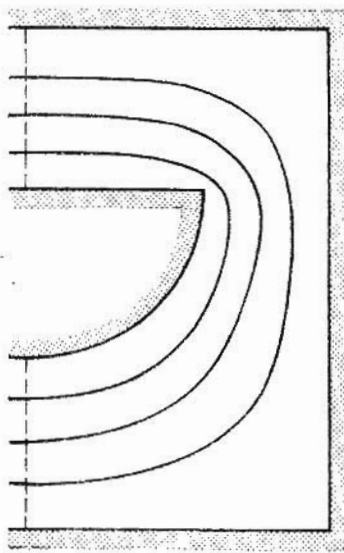
۳- رسم خطوط هم پتانسیل را از ناحیه‌ای آغاز کنید که میدان آن از همه جا شناخته‌تر است، مثلاً در ناحیه‌ای که میدان آن به یکنواخت بودن نزدیک می‌شود. رسم خطوط هم پتانسیل را بر حسب حدس خود در تمام مدت ترسیم ادامه دهید. توجه کنید که این خطوط تمایل دارند زوایای حاده مرز هادی را در بر بگیرند و در مجاورت زوایای منفرجه حد هادی از هم دور شوند.

۴- مجموعه عمود برهم خطوط میدان را رسم کنید. هنگام آغاز این کار، مربعهای منحنی الخط به وجود می‌آیند ولی با ادامه آن باید عمودی بودن خطوط را بیش از همه رعایت کرد و لو اینکه باعث شود بجای مربع، مستطیلهائی بدست آیند که نسبت طول و عرض آنها به یکدیگر یک نیست.

۵- به نواحی‌ای که نسبت اضلاع مستطیلهای با یک تفاوت بسیار دارد توجه کنید و سعی کنید اشتباهی را که در تخمین اولیه خطوط هم پتانسیل رخ داده است حدس بزنید این اشتباهها را اصلاح کنید و این کار را تکرار کنید تا زمانی که مربعهای منحنی الخط مناسبی در تمام نقشه پدید آید.

۶- در نواحی‌ای که شدت میدان کم است، شکلهای بزرگی به وجود می‌آیند که اغلب ۵ یا ۶ ضلعی‌اند. برای قضاوت بر صحت رسم در این ناحیه باید این شکلهای را به اجزاء کوچکتر تقسیم کرد. برای تقسیم به اجزاء باید از ابتدا شروع کرد و هر دفعه یکی از لوله‌های شار را به دو نیم تقسیم کرد و نیز تقسیمات پتانسیل در این ناحیه را به همان ضریب تقسیم کرد.

۱. با اجازه S. Ramo, J. R. Whinnery, and T. Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1965, pp. 160-161,



شکل ۱۰۶ دو هادی استوانه‌ای برای تمرین ۱۰۶

تمرین ۱۰۶

شکل (۴.۶) نیمی از دو هادی استوانه‌ای (غیر مستدیر) را نشان می‌دهد که یکی در داخل دیگری قرار دارد و عایق آن نیز هوا است پتانسیل هادی داخلی ۱۰۰ ولت و پتانسیل هادی خارجی صفر ولت است. خطوط هم پتانسیل ۲۵ ولت و ۵۰ ولت و ۷۵ ولت رسم شده‌اند. شکل با نصف ابعاد واقعی آن کشیده شده است. (الف) مربعهای منحنی‌الخط را تکمیل کنید و مقدار ظرفیت هر متر طول را بدست آورید. (ب) شدت میدان الکتریکی را در مرکز بالای هادی داخلی تخمین بزنید. (پ) چگالی بار سطحی را در مرکز کنار هادی خارجی تخمین بزنید.

جوابها: ۲۳ nC/m^2 ، ۲۸۰۰ V/m ، ۶۵ pF/m

۳.۶ مدل‌های فیزیکی

تشابه بین میدان الکتریکی و میدان ثقل قبل از این چند مرتبه ذکر شده است و می‌توان برای ساختن مدل‌های فیزیکی، که برای حل مسائل الکترواستاتیکی ساکن که دارای شکل هندسی پیچیده‌ای هستند مفیدند، از آنها استفاده کرد. اساس تشابه بطور ساده از این

قرار است: در میدان الکتریسیته ساکن اختلاف پتانسیل بین دو نقطه عبارتست از اختلاف انرژی پتانسیل بارهای مثبت واحد در این نقاط، در میدان یکنواخت ثقل اختلاف انرژی پتانسیل دو جرم نقطه‌ای در دو نقطه متناسب است با اختلاف ارتفاع آنها. به عبارت دیگر،

$$\Delta W_E = Q \Delta V \quad (\text{الکتریسیته ساکن})$$

$$\Delta W_G = Mg \Delta h \quad (\text{ثقل})$$

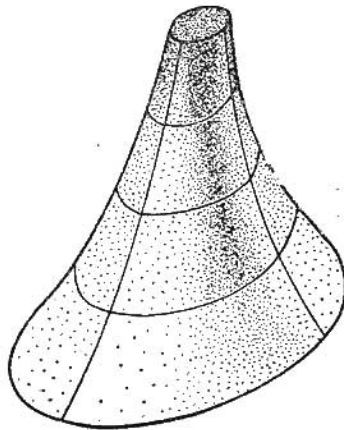
که در آن M جرم نقطه‌ای و g شتاب ناشی از ثقل است که عملاً در سطح کره زمین ثابت است. بنا بر این برای اختلاف انرژی مساوی، خواهیم داشت:

$$\Delta V = \frac{Mg}{Q} \Delta h = k \Delta h$$

که در آن k ضریب تناسب است. این رابطه تشابه مستقیم بین اختلاف پتانسیل و اختلاف ارتفاع را نشان می‌دهد.

با این تشابه می‌توانیم با ساختن سطحی، مثلاً از چوب، یک مدل فیزیکی برای میدانهای پتانسیل معلوم بوجود آوریم، که h ارتفاع آن نسبت به هر نقطه (x, y) واقع در ارتفاع صفر و صفحه پتانسیل صفر متناسب با مقدار پتانسیل در آن نقطه است. باید توجه کرد که میدانهای را که در آنها پتانسیل بطور سه بعدی تغییر می‌کند،

$$V = V(x, y, z)$$



شکل ۵.۶ مدل میدان پتانسیل یک بار خطی نامحدود. اختلاف پتانسیل با اختلاف ارتفاع متناسب است. خطوط تراز نماینده نواحی پتانسیل مساوی است.

نمی‌توان مورد بررسی قرار داد زیرا هیچ روشی که بتوان با آن ارتفاع يك نقطه «سه بعدی» را نشان داد نداریم. در شکل ۵.۶ میدان يك بار خطی نامحدود

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_B}{r}$$

به کمک چنین مدلی نشان داده شده است که تصویر دقیقی از تغییر پتانسیل را برحسب شعاعهای بین r_A و r_B نمایش می‌دهد. برای سهولت امر پتانسیل و ارتفاع r_B صفر فرض شده‌اند.

برای هر میدان پتانسیل دوبعدی می‌توان چنین مدلی را ساخت و به کمک آن می‌توانیم میدان را بهتر در نظر مجسم کنیم. این مدل علاوه بر اینکه این تصویر سه بعدی را به ما می‌دهد، می‌تواند اطلاعات لازم را در مورد مسیرهای ذرات باردار در میدان به ما بدهد. طبق تعریف گرادیان، واضح است که گرادیان ارتفاع h در هر نقطه برداری است که اندازه آن مساوی بیشینه شیب سطح در آن نقطه، و جهت آن به سمت بالا یا به طرف افزایش ارتفاع باشد. نقطه مورد نظر توسط مقدار مختصات x و y آن در صفحه xy مشخص می‌گردد و شیب از روی سطح مدل اندازه گرفته می‌شود. از آنجائی که پتانسیل با ارتفاع متناسب است، گرادیان پتانسیل نیز با گرادیان ارتفاع در آن نقطه متناسب است یا شدت میدان الکتریکی با گرادیان ارتفاع در هر نقطه با علامت منفی متناسب است.

بر يك ذره باردار مثبت در این میدان نیروی زیر اعمال می‌شود،

$$\vec{F}_E = QE$$

در صورتی که جرم کوچک نقطه‌ای M ، مانند يك ساچمه فولادی که بر سطح مدل فیزیکی قرار داده شود، نیروی شتاب دهنده‌ای ناشی از ثقل به این اندازه اعمال می‌کند:

$$\vec{F}_G = Mg \sin \theta \vec{a}_F$$

که در آن \vec{a}_F شتاب ناشی از ثقل و θ زاویه میل نسبت به سطح افقی است. سینوس این زاویه را می‌توان، با توجه به اینکه برای زوایای کوچک (کمتر از ۱۸ درجه برای کمتر از ۵ درصد اشتباه) $\sin \theta \doteq \text{tg } \theta$ و همان اندازه گرادیان ارتفاع است، بصورت دیگر بیان کرد. از اینرو برای شیبهای کم،

$$F_G = Mg |\nabla h|$$

$$\vec{F}_G = -Mg \nabla h$$

و با توجه به تشابه پتانسیل و ارتفاع،

$$\frac{\bar{F}_E}{\bar{F}_G} = \frac{-Q \nabla V}{-Mg \nabla h} = \frac{-Q(Mg/Q) \nabla h}{-Mg \nabla h} = 1$$

یا

$$\bar{F}_E = \bar{F}_G$$

تا جایی که مدل دارای شیب ملایم است، نیروهای، جاذبه و الکتریکی مشابهند و این به ما اجازه می‌دهد که مسیر حرکت ذرات باردار را با رها کردن ساجمه‌های بی اصطکاک در نقاط مختلف سطح مدل بدست آوریم. ساختن مدلها نیز، با استفاده از ورقهای لاستیکی، چه از نظر عملی و چه از نظر تئوری، بسیار ساده می‌شود. برای این کار ورق لاستیکی زیر تنش ملایمی قرار می‌گیرد بطوری که با تقریب زیاد به، غشاء قابل ارتجاع مکانیک عملی نزدیک می‌شود. می‌توان نشان داد که تغییرات قائم h غشاء در معادله مشتق جزئی مرتبه دوم زیر، وقتی شیب سطح کم باشد، صادق است.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

در فصل آینده خواهیم دید که هر میدان پتانسیل در ناحیه‌ای خالی از بار نیز از این معادله یعنی معادله دو بعدی لاپلاس، تبعیت می‌کند،

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

ما همچنین قضیه یگانگی را اثبات خواهیم کرد که ما را مطمئن می‌سازد که وقتی یک حل پتانسیلی در ناحیه خاصی از معادله فوق تبعیت کند و نیز پتانسیل صحیح را در مرزهای این ناحیه ارائه دهد، در این صورت این حل تنها حل ممکن است. بنا بر این فقط می‌بایست ارتفاع ورق را با نیرو مطابق مقدار پتانسیل ذکر شده در مرزهای سطح در آوریم و ارتفاع کلیه نقاط دیگر متناسب با پتانسیل خواهد بود.

به عنوان مثال، یک میدان بار خطی نامحدود را می‌توان با شناسایی تقارن دایره‌ای و محکم کردن ورق لاستیکی ارتفاع صفر حول یک دایره با استفاده از حلقه گیره‌ای بزرگی به شعاع r_B نمایش داد. از آنجایی که پتانسیل در $r = r_0$ ثابت است، آن

۱. مثلاً به Spangenberg, pp. 75-76 مندرج در فهرست مراجع پایان فصل مراجعه شود.

قسمت از ورق لاستیکی را با فشار دادن يك استوانه به شعاع r_1 به آن به ارتفاع بالاتری می بریم. اما این تشابه برای شیبهایی که سطح بزرگ دارند از میان می رود و فقط تغییر کمی در r_1 میسر است. در این حال سطح مزبور مشخص میدان پتانسیل است و برای تعیین مسیر ذرات می توان از گلوله های فلزی در این میدان استفاده کرد، که در این حال، بطوری که کاملاً واضح است، وقتی از بالا دیده شود، بصورت خطوط شعاعی خواهد بود.

۲.۶ تمرین

ارتفاع سطح يك مدل ورق لاستیکی به وسیله $h = 10 + x^2 - xy - y^2$ برای $1 \leq x \leq 5$ و $0 \leq y \leq 3$ داده شده است. ارتفاع h بر حسب اینج اندازه گرفته می شود و مختصات روی سطح مستوی x و y بر حسب فوت. (الف) اگر \bar{a} به سمت شرق متوجه باشد در نقطه (۱ و ۲) جهت سربالائی کدام است. (ب) امتداد عمود بر سطح در نقطه (۱ و ۲) با امتداد قائم چه زاویه ای می سازد؟ (پ) پائین ترین ارتفاع ورق کدام است؟

جوابها: جنوب و 37.5° و 1.25 in -

۳.۶ تشابه های جریان

روشهای تجربی چندی بر اساس تشابه بین چگالی جریان در محیطهای هادی و چگالی شار الکتریکی در محیطهای عایق استوارند. این تشابه را می توان به آسانی نشان داد، زیرا در محیط هادی، فقط برای جریان مستقیم، قانون اهم و رابطه گرادبان عبارتند از:

$$\bar{J} = \sigma \bar{E}_\sigma$$

$$\bar{E}_\sigma = -\nabla V_\sigma$$

در حالی که در عایق متجانس

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E}_\epsilon$$

$$\bar{E}_\epsilon = -\nabla V_\epsilon$$

اندیسها برای تمیز دادن مسائل مشابه انتخاب شده اند. مسلم است که پتانسیلهای V_σ و V_ϵ و شدتهای میدان الکتریکی \bar{E}_σ و \bar{E}_ϵ و هدایت مخصوص و ضریب پندیرش σ و ϵ ، و چگالیهای جریان و شار الکتریکی \bar{J} و \bar{D} دو به دو مشابهند. با مراجعه به يك نقشه مر بعهای منحنی الخط می بایست لوله های شار را به عنوان لوله های جریان

تعبیر کنیم که در این حالت هر لوله حامل جزئی نموی از جریان است که نمی تواند لوله را ترك کند.

در خاتمه باید سطوح مرزی را بررسی کنیم. مشابه يك سطح مرزی هادی، که شار الکتريکی بصورت عمود بر آن منتهی می شود، و سطحی هم پتانسیل است کدام است؟ تشابه خود این جواب را ارائه می دهد و مشاهده می کنیم که چگالی جریان نیز می بایست بر این سطح به طور عمود خاتمه یابد و نیز يك سطح هم پتانسیل باشد. این سطح يك هادی کامل است، گر چه در عمل فقط لازم است که يك هادی باشد که هدایت مخصوص آن چند برابر محیط هادی باشد.

بنا بر این، اگر ما بخواهیم میدان داخلی يك خازن هم محور را بدست آوریم، که همچنان که در پیش نیز چند مرتبه دیدیم قسمتی از میدان يك بسار خطی نامحدود است، باید دو استوانه مسی متحدالمحور بگیریم و فضای بین آن دو را به منظور سهولت امر با يك محلول الکترولیت پر کنیم. وقتی اختلاف پتانسیل بین دو استوانه اعمال کنیم، می توانیم پتانسیل را به کمک يك میله باریک در هر نقطه بین آنها بدست آوریم یا تمام نقاطی را که دارای يك پتانسیلند پیدا کنیم. این اساس يك مخزن الکترولیتی است. بزرگترین فایده این روش این واقعیت است که به مسائل دو بعدی محدود نمی شود. پیشنهادهای عملی برای ساخت و استفاده از مخزن در کتابهای زیادی داده شده اند^۱.

تعیین ظرفیت از طریق اندازه گیریهای مخزن الکترولیتی بخصوص راه آسانی است. جریان کلی که هادی مثبت تر را ترك می کند مساوی است با

$$I = \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = \sigma \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

که در آن انتگرال سطح بسته بر روی تمام سطح هادی گرفته می شود. اختلاف پتانسیل توسط انتگرال خطی منفی از صفحه کمتر مثبت به صفحه مثبت تر تعیین می شود.

$$V_o = - \int \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

و بنا بر این مقاومت کل مساوی است با

$$R = \frac{V_o}{I} = \frac{- \int \vec{E} \cdot d\vec{L}}{\sigma \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

۱. کتاب Weber بسیار خوب است. به فهرست مراجع در پایان فصل مراجعه شود.

و ظرفیت همان نسبت بار کل به اختلاف پتانسیل است.

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}}{-\int \vec{E} \cdot d\vec{L}}$$

و بنابراین

$$\boxed{RC = \frac{\epsilon}{\sigma}} \quad (1)$$

با در دست داشتن هدایت مخصوص الکترولیت و ضریب پذیرش عایق می توان ظرفیت را با يك اندازه گیری ساده مقاومت تعیین کرد.

برای مسائل دو بعدی راه حل ساده تری وجود دارد. کاغذهای هادی وجود دارد که می توان سطوح مرزی هادیها را با رنگ نقره ای روی آنها رسم کرد. برای مورد خازن هم محور می توان دو دایره به شعاعهای r_A و r_B ، رسم کرد و با ادامه رنگ اندکی به خارج روی r_B و کمی به داخل روی r_A امکان اتصال سیمهای يك منبع پتانسیل خارجی را به آنها فراهم کرد. باز با استفاده از گمانه ای می توان مقادیر پتانسیل بین دو دایره را پیدا کرد.

شکل (۶.۶) مرزهای رنگ نقره ای را که می توان روی کاغذ هادی برای تعیین ظرفیت يك خط انتقال با سیم مربعی داخل سیم دایره ای شبیه شکل (۳.۶) کشید، نشان می دهد. مولد و آشکار ساز اغلب با بسامد ۱۰۰۰ هرتس کار می کنند تا اینکه بتوان از آشکار سازها یا پلهائی استفاده کرد که با حساسیت بیشتری قابل تنظیمند.

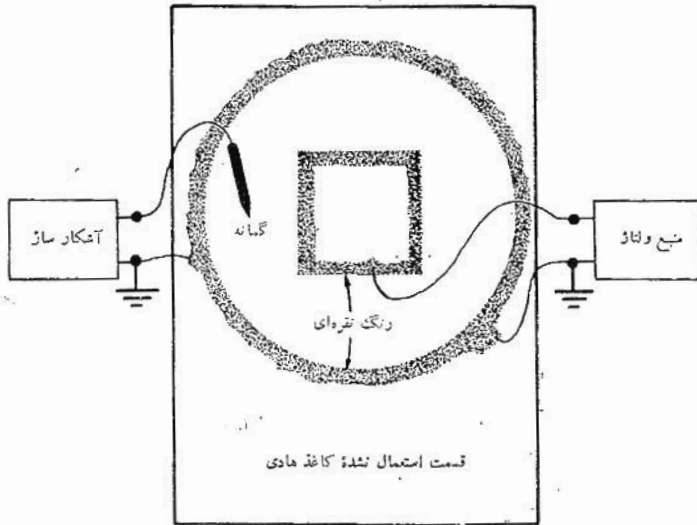
تمرین ۳.۶

کاغذ هادی مورد استفاده در شکل (۶.۶) بین دو گوشه متقابل يك مربع ۶ اینچی مقاومت ۳۰۰۰ اهم را ارائه می دهد. (الف) چه مقاومتی بین گوشه های مقابل يك مربع ۳ اینچی اندازه گرفته می شود؟ (ب) اگر شکل هندسی نشان داده شده در تصویر روی کاغذ کشیده شود بین مربع و دایره مقاومت ۸۰۰ اهم اندازه گرفته می شود. ظرفیت این کابل در صورتی که عایق آن هوا باشد در هر متر چه اندازه خواهد بود؟

جوابها: 3000Ω و 332 pF/m

۴.۶ نقشه های جریان سیال

بین الکتروسیته ساکن و مکانیک مایعات نیز تشابهی وجود دارد که برای



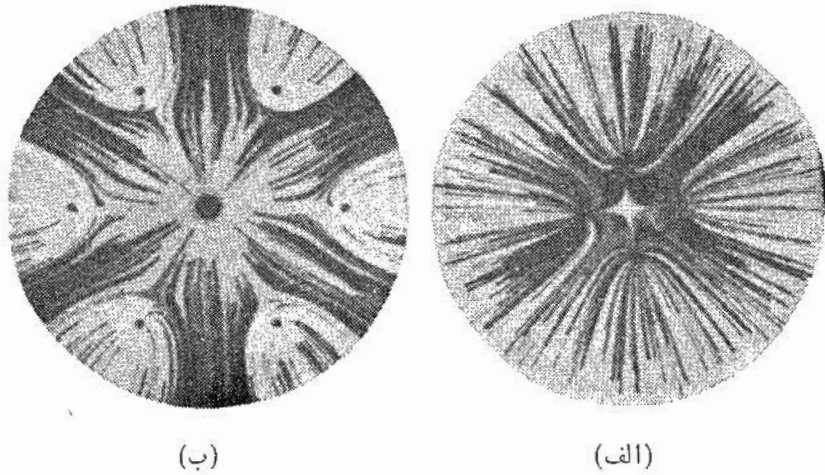
شکل ۶.۶ يك مسأله دو هادی دوبعدی مشابه با مسأله شکل ۳.۶ که روی کاغذ هادی کشیده شده است. برای ترسیم سطح هم‌پتانسیل می‌توان از گمانه استفاده کرد.

بدست آوردن عکسهائی از خطوط نیرو یا خطوط شار فوق‌العاده مفید است. اثبات این تشابه در اینجا ارائه نمی‌شود، اما فرض بر این است که سیال غیر قابل تراکم است و بصورت قشر بسیار نازکی جریان دارد. این شرط با جریان آب بین دو صفحه موازی، که به فاصله کم از یکدیگر قرار دارند و یکی از آن دوشیشه باشد، حاصل می‌شود. مرزهای هادی نمایش دهنده منبعها و حفره‌ها یا نواحی مبدأ و مقصد جریان آب است. خطوط جریان را می‌توان با گذاشتن بلورهای کوچک پرمنگنات پتاسیم روی صفحه تختانی، قبل از شروع جریان، قابل رؤیت ساخت. با حل شدن بلورها در آب خطوط نیرو مرئی می‌شوند.

این عمل را مورد ۲ در چند مقاله، که شامل عکسهای عالی نیز هستند، به تفصیل تشریح کرده است. شکل (۷.۶) چند عکس را که با این روش گرفته شده‌اند نشان می‌دهد.

۱. به Weber صفحات ۷۸-۷۶ مراجعه شود.

۲. Moore به فهرست مراجع در پایان فصل مراجعه شود.

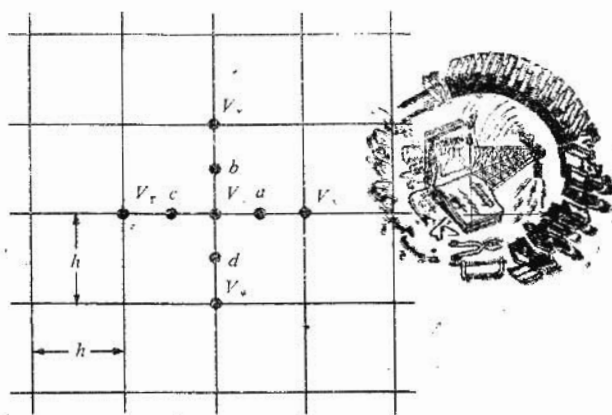


شکل ۷.۶ نقشه‌های جریان سیال که توسط مور عکسبرداری شده است. (الف) میدان چهار بار خطی مساوی (ب) میدان یک تریود با شبکه‌ای، متشکل از ۶ میله. خطوط نیرویی که از آن‌د سرچشمه می‌گیرند و به میله‌های شبکه ختم می‌شوند، همگی در ناحیه‌ای قرار دارند که دارای زمینه سفیدند و آن‌ها که به کاتد ختم می‌شوند از ناحیه بزرگی می‌گذرند که زمینه تیره دارد (با اجازه از ا. د. مور)

۵.۶ روش تکرار

در مسائل پتانسیل، که پتانسیل روی مرزهای یک ناحیه معین کاملاً مشخص شده است، بخصوص در مسائلی که پتانسیل در یک جهت تغییر نمی‌کند، یعنی با توزیع دوبعدی پتانسیل، یک روش تکراری با استفاده از کاغذ و مداد وجود دارد که با آن می‌توان به هر دقت مورد نظر رسید. هنگامی که مقدار پتانسیل با دقت زیاد مورد احتیاج باشد، می‌توان از حسابگرهای عددی استفاده کرد، در غیر اینصورت، بجز در مسائل خیلی ساده طول زمان لازم برای محاسبه کار را دشوار می‌سازد. روش تکرار که ذیلاً توصیف می‌شود، برای محاسبه با هر حسابگر عددی بسیار مناسب است.

مسأله‌ای دوبعدی را که در آن پتانسیل با مختصات x تغییر نمی‌کند در نظر می‌گیریم و داخل سطح مقطع را که تعیین پتانسیل آن خواسته شده است به مربعهائی به ضلع h تقسیم می‌کنیم. شکل (۸.۶) قسمتی از این ناحیه را نشان می‌دهد. مقادیر نامعلوم پتانسیل در پنج نقطه مجاور عبارتند از V_0, V_1, V_2, V_3, V_4 . اگر ناحیه



شکل ۸.۶ قسمتی از ناحیه‌ای شامل پتانسیل دو بعدی که به مربعی به ضلع h تقسیم شده است. پتانسیل V_0 تقریباً مساوی مقدار متوسط پتانسیل در چهار نقطه مجاور است.

مزبور خالی از بار و محتوی یک عایق متجانس باشد، در این صورت $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ و $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ که در نتیجه در مختصات دو بعدی خواهیم داشت،

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

ولی با استفاده از عمل گرادیان خواهیم داشت $E_x = -\partial V / \partial x$ و $E_y = -\partial V / \partial y$ و در نتیجه،

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

مقادیر تقریبی این مشتقات جزئی را می‌توان برحسب پتانسیلهای فرض شده بدست آورد، برای اینکه

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_a \doteq \frac{V_1 - V_0}{h}$$

۱. این معادله دو بعدی لاپلاس است. شکل سه بعدی معادله را در فصل بعد بدست خواهیم آورد.

و

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c = \frac{V_o - V_r}{h}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_o = \frac{\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_a - \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c}{h} = \frac{V_1 - V_o - V_o + V_r}{h^2}$$

و به طریق مشابه

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right|_o = \frac{V_r - V_o - V_o + V_\varphi}{h^2}$$

با ترکیب روابط فوق خواهیم داشت:

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_o + \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right|_o = \frac{V_1 + V_r + V_r + V_\varphi - 4V_o}{h^2} = 0$$

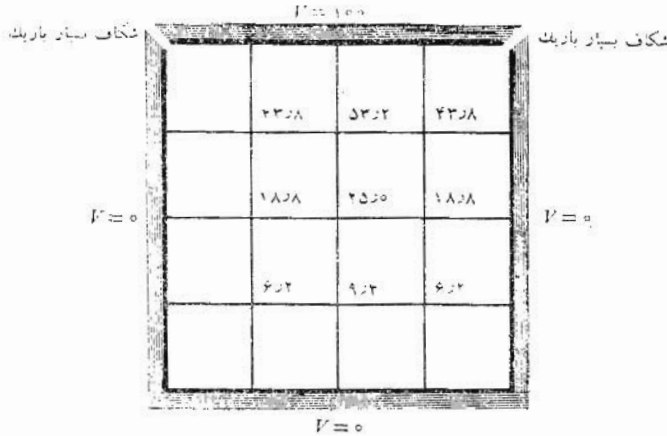
یا

$$\boxed{V_o = \frac{1}{4}(V_1 + V_r + V_r + V_\varphi)} \quad (1)$$

وقتی h به سمت صفر میل کند رابطه بالا کاملاً دقیق می‌شود و می‌توان آن را بی‌تلاطم تقریب نگاشت.

اینکه بگوئیم پتانسیل مقدار متوسط پتانسیلهای چهار نقطه مجاور است بطور حسی درست است. در روش تکرار کاری نمی‌کنیم جز این که از رابطه (۱) برای تعیین پتانسیل در هر يك از گوشه‌های هر مربع فرعی که از تقسیم مربع اولیه بدست می‌آید به نوبت استفاده کنیم و این عمل آنقدر بر روی تمام ناحیه تکرار می‌شود تا دیگر مقادیر بدست آمده تغییر نکند. جزئیات این روش را می‌توان بهتر از همه ضمن مثالی نشان داد.

برای سادگی مطلب، ناحیه‌ای مربع شکل را که دارای اضلاع هادی است در نظر می‌گیریم (شکل ۹.۶). پتانسیل ضلع فوقانی ۱۰۰ ولت و پتانسیل اضلاع دیگر صفر است. این مسأله دو بعدی و شکل حاصل، سطح مقطع آرایشی فیزیکی است. این ناحیه ابتدا به ۱۶ مربع تقسیم می‌شود و قبل از استفاده از روش تکرار برای پتانسیل در هر گوشه مربع مقداری را تخمین می‌زنیم. هر قدر که این تخمینها به واقعیت



شکل ۹.۶ سطح مقطع مخزنی مربعی که ضلع فوقانی آن دارای پتانسیل ۱۰۰ ولت و اضلاع دیگر دارای پتانسیل صفر ولت است. سطح مقطع به ۱۶ مربع تقسیم و پتانسیل هر گوشه تخمین زده شده است. مقادیر دقیق‌تر با استفاده از روش تکرار بدست می‌آیند.

نزدیک‌تر باشد زودتر به نتیجه خواهیم رسید، هر چند که نتیجه نهائی به این مقادیر تخمینی اولیه بستگی ندارد. معمولاً هرگاه در این روش تکرار از حسابگر استفاده شود، پتانسیل‌های اولیه را برای ساده کردن برنامه صفر اختیار می‌کنیم. با استفاده از یک نقشه مربعی منحنی‌الاضلاع تقریبی می‌توان مقادیری به نسبت دقیق بدست آورد یا می‌توان از رابطه (۱) در مورد مربعهای بزرگ استفاده کرد. در مرکز شکل پتانسیل تقریبی مساوی خواهد بود با

$$\frac{1}{4}(100 + 0 + 0 + 0) = 2500$$

پتانسیل‌های مراکز چهار مربع را که اضلاع هر یک دو برابر مربعهای کوچکند می‌توان با تعیین میانگین پتانسیلها در چهارگوشه آنها تخمین زد یا اینکه از رابطه (۱) در طول مجموعه محوره‌های قطری استفاده کرد. از این معدل قطری فقط در تهیه تخمین‌های اولیه استفاده می‌شود. برای دو مربع دوگانه فوقانی پتانسیل ۵۰ ولت را برای محل شکاف (معدل ۰ و ۱۰۰ ولت) و سپس پتانسیل

$$V = \frac{1}{4}(50 + 100 + 25 + 0) = 4378$$

(با تقریباً ۱/۱۰ ولت) انتخاب می‌کنیم و برای مربعهای تحتانی خواهیم داشت،

$$V = \frac{1}{4}(0 + 25 + 0 + 0) = 6.25$$

پتانسیل چهار نقطه را می‌توان با استفاده مستقیم از رابطه (۱) بدست آورد. مجموعه کامل مقادیر تخمین زده شده در شکل (۹.۶) نمایش داده شده‌اند.

اکنون با اعداد سطر اول مجموعه‌ای از پتانسیلهای تصحیح شده بدست می‌آید، که از گوشهٔ چپ فوقانی (با مقدار ۴۳۸، نه در مرزی که پتانسیل آن معلوم و ثابت است) آغاز می‌شود و روی ردیف به سمت راست ادامه می‌یابد و آنگاه به سطر پائین‌تر می‌آیم و عمل را مجدداً از چپ به راست ادامه می‌دهیم. بدین ترتیب عدد ۴۳۸ به عدد ۴۳ = $\frac{1}{4}(100 + 532 + 188 + 0)$ تبدیل می‌شود. بسا استفاده از (۱) همیشه از تازه‌ترین یا صحیح‌ترین پتانسیلها استفاده می‌شود و بدین ترتیب هر دو نقطه‌ای که با ۴۳۸ مشخص شده‌اند به علت تقارن آشکار به ۴۳۵ تبدیل می‌شوند و همچنین ۵۳۲ به عدد ۵۲۸ = $\frac{1}{4}(100 + 430 + 250 + 430)$ تبدیل می‌گردد.

به علت وجود تقارن، ادامهٔ عملیات روی خط بالائی نتیجهٔ زیادی بدست نمی‌دهد. بدین ترتیب هر نقطه روی این خط يك دفعه تصحیح شده است. با پائین آمدن به خط بعدی مقدار ۱۸۸ تبدیل می‌شود به

$$\frac{1}{4}(430 + 250 + 62 + 0) = 186$$

و سطر به همین طریق ادامه می‌یابد. مقادیر انتهائی این سطر به‌صورت شماره‌های فوقانی هر ستون شکل (۱۰.۶) نشان داده شده‌اند. و اکنون باید آنقدر سطرهای اضافی بدست آورد تا مقدار هر گوشهٔ دیگر تغییری نکند. مقادیر سطرهای بعدی معمولاً بصورت ستونی زیر یکدیگر، همانطور که در شکل (۱۰.۶) را نشان داده شده است، نوشته می‌شوند و مقدار نهائی در پایان هر ستون درج می‌شود. در این مثال فقط چهار سطر کافی است.

نکتهٔ جالب توجه این است که اگر هر يك از سه مقدار اولیه برابر صفر فرض شوند، ده سطر لازم خواهد بود. هزینهٔ تعیین مقادیر این سطرهای اضافی به کمک حسابدگر شاید بسیار کمتر از هزینهٔ برنامه ریزی لازم برای تخمینهای اولیه نزدیک به حقیقت باشد.

۱. برای گرد کردن اعشاری که بطور دقیق به ۵ ختم می‌شود رقم قبل از پنج را زوج می‌کنیم یعنی ۴۲۷۵ به ۴۳۸ و ۴۲۵ به ۴۲ تبدیل می‌شود. با اینکار می‌توان معمولاً در عملیات به دقت بیشتری دست یافت تا اینکه عدد مزبور را با اضافه کردن ۱ به رقم قبلی بعد از همین صاف کنیم.

$V = 100$

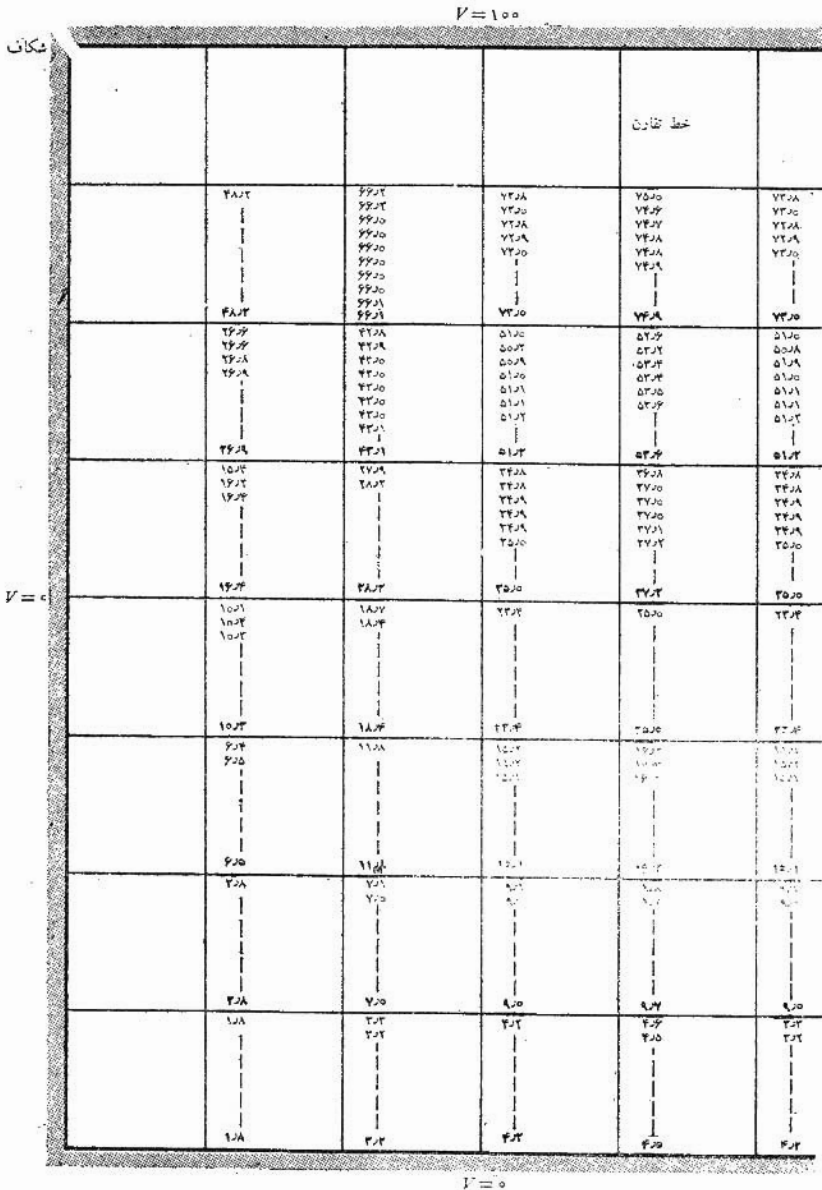
	۴۳۰۰ ۴۲۰۶ ۴۲۰۸ ۴۲۰۸	۵۲۰۸ ۵۲۰۵ ۵۲۰۶ ۵۲۰۶	۴۳۰۰ ۴۲۰۶ ۴۲۰۸ ۴۲۰۸
$V = 0$	۱۸۰۶ ۱۸۰۶ ۱۸۰۷ ۱۸۰۷	۲۴۰۸ ۲۴۰۸ ۲۵۰۰ ۲۵۰۰	۱۸۰۶ ۱۸۰۶ ۱۸۰۷ ۱۸۰۷
	۷۰۰ ۷۰۱ ۷۰۱ ۷۰۱	۹۰۷ ۹۰۸ ۹۰۸ ۹۰۸	۷۰۰ ۷۰۱ ۷۰۱ ۷۰۱

$V = 0$

شکل ۱۰.۶ نتایج هر يك از چهار سطر لازم در مسأله شکل (۹.۶) به ترتیب در ستونهای اعداد نشان داده شده‌اند. مقادیر نهائی، که در آخرین سطر دیگر تغییر نکرده‌اند، در زیر هر ستون نوشته شده‌اند.

از آنجائی که اختلاف پتانسیل از يك مربع به مربع دیگر بسیار بزرگ است، نباید انتظار داشته باشیم که جوابهای ما تا يك دهم ولت، بطوری که نشان داده شده است یا شاید تا يك ولت دقیق باشند، دقت بیشتر از طریق تقسیم هر مربع به چهار مربع کوچکتر بدست می‌آید و نه با تعیین پتانسیل با ارقام معنی‌دار بیشتری در هر گوشه.

این تقسیم فرعی در شکل (۱۱.۶)، که فقط یکی از دو نیمه متقارن را با يك ستون اضافی نشان می‌دهد، انجام شده است و پتانسیل گوشه‌هائی که تازه به وجود آمده‌اند هر جا امکان پذیر بود مستقیماً و هر جا لازم بود بطور قطری با اعمال رابطه



شکل ۱۱.۶ مسأله شکل‌های (۹.۶) و (۱۰.۶) به هر بهای کوچکتر تقسیم شده‌اند. مقادیر بدست آمده در ۹ سطر بی در بی به ترتیب به صورت ستون‌هایی نوشته شده‌اند.

(تخمین زده شده‌اند. مقادیر تخمین زده شده در رأس هر ستون و مقادیر بدست آمده از طریق سطرهای پی در پی به ترتیب زیر آن نوشته شده‌اند. اینجا به نسه مجموعه مقادیر احتیاج است و باید توجه کرد که در سطر آخر دیگر هیچ يك از مقادیر تغییر نمی‌کند (و این شرایط لازم برای سطر آخر است) و در هر يك از سه سطر قبلی فقط يك مقدار تغییر می‌کند. در چهار سطر پائینی بعد از سطر دوم هیچ يك از مقادیر تغییر نمی‌کند، و این باعث صرفه‌جوئی زیادی در وقت می‌شود. زیرا اگر هیچ يك از ۴ پتانسیل در رابطه (۱) تغییر نکنند، جواب نیز البته تغییر نمی‌کند.

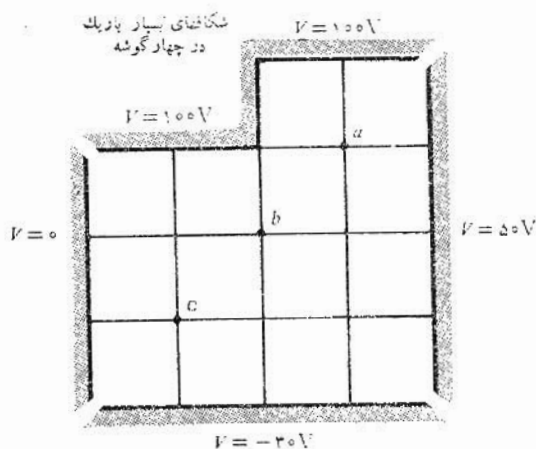
در این مسأله می‌توانیم مقادیر نهائی خودمان را با پتانسیلهای صحیح که با محاسبه سربهای بینهایت بدست آمده‌اند، و در پایان فصل آینده بررسی می‌شوند، مقایسه کنیم. در نقطه‌ای که تخمین اولیه برای آن ۵۳۲ بود جواب نهائی برای شبکه ساده ۵۲۶ بدست آمد و جواب نهائی برای شبکه ظریفتر ۵۳۶ و بالاخره جواب نهائی برای شبکه 16×16 (که بطوری که در مسأله ۱۵ در پایان فصل توصیه شده با حسابگر عددی حساب شده است) مساوی است با ۵۳۹۵ ولت با دو رقم اعشار و جواب دقیق پتانسیل که از بسط سری فوریه بدست می‌آید ۵۴۰۵ ولت با دو رقم اعشار است. دو نقطه دیگر نیز همانطور که در جدول (۱.۶) مشاهده می‌شود بصورت جدولی مقایسه شده‌اند.

جدول ۱.۶

۵۳۲	۲۵۰۰	۹۲۴	تخمین اولیه
۵۳۶	۲۵۰۰	۹۲۸	شبکه 4×4
۵۳۶	۲۵۰۰	۹۲۷	شبکه 8×8
۵۳۹۳	۲۵۰۰	۹۲۵۶	شبکه 16×16
۵۴۰۵	۲۵۰۰۰	۹۲۵۴	دقیق

نقشه‌های جریان که توسط حسابگر کشیده شده است و برنامه‌های حسابگر برای حل به روش تکرار در فصل ۲۴ کتاب بوست^۱ و فصل ۲ ضمیمه کتاب سیلوستر^۲ نوشته شده‌اند. روش پیشرفته‌تر از روش تکراری روش آسودگی نامیده می‌شود. این

۱. Boast به مراجع توصیه شده در پایان فصل ۲ توجه شود.
 ۲. Silvester به مراجع توصیه شده در پایان این فصل توجه شود.



شکل ۱۲.۶ به مسأله ۴.۶ مراجعه شود.

روش معمولاً بکار کمتر ولی دقت بیشتری در عملیات ریاضی احتیاج دارد.

تمرین ۴.۶

شکل (۱۲.۶) شبکه‌ای با خانه‌های مربع را در یک مخزن پتانسیل بی‌قاعده نشان می‌دهد. با استفاده از روش تکرار پتانسیل را با تقریب یک ولت بدست آورید و مقادیر نهائی را در نقاط زیر تعیین کنید. (الف) نقطه a ، (ب) نقطه b ، (پ) نقطه c .

جوابها: 75 ، 50 ، $5V$

مراجعی که توصیه می‌شوند.

1- HaYt, W.H.Jr.; «Engineering Electromagnetics» Mc - Graw-Hill Book Company, New York, 1958, (first edition), pp. 150-152.

2. Moore, A.D.: Fields from Fluid Flow Mappers, *J. Appl. Phys.*, vol. 20, pp. 790-804, August, 1949; Soap

۱. در کتاب سکاربورو Scarborough جزئیات این روش توصیف شده است و اساس عمل با یک مثال در کتاب هایات Hayt درج شده است. به فهرست مراجع در پایان فصل مراجعه شود.

Film and Sandbed Mapper Techniques, *J. Appl. Mech* (bound with *Trans. ASME*), vol 17, pp. 291-298, September, 1950; Four Electromagnetic Propositions, with Fluid Mapper Verifications, *Elec. Eng.*, vol. 69, pp. 607-610, July, 1950; The Further Development of Fluid Mappers, *Trans. AIEE* vol, 69, Part II, pp. 1615-1624, 1950; Mapping Techniques Applied to Fluid Mapper Patterns, *Trans. AIEE*, vol. 71, 1952.

3- Ramo, S., J.R. Whinnery, and T. Van Duzer: «Fields and Waves in Communication Electronics,» John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.

این کتاب در اصل چاپ سوم کتاب معروف و قدیمتر همین مؤلفان مربوط به سالهای ۱۹۴۴ و ۱۹۵۳ است. با وجود این که این کتاب در درجه اول برای دانشجویان مبتدی لیسانس تنظیم شده است، مع هذا مطالعه آن برای هر کسی که با اصول اولیه الکترومغناطیس آشنا باشد مفید است. نقشه‌های منحنی الخط در صفحات ۱۶۳-۱۵۹ آن مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

4- Salvadori, M.G., and M.L. Baron: «Numerical Methods in Engineering,» 2d. ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1961.

در فصل اول این کتاب روشهای تکرار و آسودگی مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

5- Scarborough, J.B.: «Numerical Mathematical Analysis,» 3d ed., The Johns Hopkins Press, Baltimore, 1955. در این کتاب روشهای تکرار و آسودگی تشریح می‌شوند و چند مثال کامل ارائه می‌گردند. اشتباهات ذاتی نیز بررسی می‌شوند.

6- Silvester, P.: «Modern Electromagnetic Fields,» Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.

7- Soroka, W.W.: «Analog Methods in Computation and Simulation,» McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.

8- Spangenberg, K.R.: «Vacuum Tubes,» McGraw-Hill Book Company New York, 1948.

روشهای ترسیم تجربی خطوط میدان در صفحات ۸۲-۷۵ مورد بحث قرار گرفته‌اند.

9- Weber, E.: «Electromagnetic Fields,» vol. I, John Wiley & Sons Inc., New York, 1950.

در فصل ۵ این کتاب روشهای ترسیم تجربی خطوط میدان مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

مسائل

۱- يك نقشهٔ مربعهای منحنی الاضلاع بسرای يك خازن هم محور به شعاع داخلی ۳ سانتیمتر و به شعاع خارجی ۸ سانتیمتر بسازید. این ابعاد برای رسم مناسبند. برای آزمون دقت، ظرفیت هر متر خازن را هم از روی نقشه و هم از روی فرمول دقیق حساب کنید. عایق خازن هواست.

۲- يك نقشهٔ مربعهای منحنی الاضلاع برای میدان پتانسیل حول دو استوانه مستدیر موازی هر يك به شعاع ۲ سانتیمتر و به فاصلهٔ مرکز تا مرکز ۱۵ سانتیمتر از هم در هوا بسازید. وقتی تقارن رعایت شود این ابعاد برای ترسیم واقعی مناسبند. به عنوان يك آزمون دقت، ظرفیت هر متر خازن را هم از روی نقشه و هم از روی فرمول دقیق حساب کنید.

۳- يك نقشهٔ مربعهای منحنی الاضلاع برای میدان پتانسیل بین دو استوانهٔ موازی مستدیر، یکی به شعاع ۳ سانتیمتر در داخل دیگری که شعاع آن ۱۰ سانتیمتر است و به فاصلهٔ محور از محور ۴ سانتیمتر از یکدیگر قرار دارند بکشید. این ابعاد برای ترسیم نقشه مناسبند. برای آزمون دقت، ظرفیت هر متر خازن را از روی نقشه و نیز از رابطهٔ دقیق $C = 2\pi\epsilon / \cosh^{-1}[(a^2 + b^2 - D^2)/2ab] F/m$ که در آن a و b شعاعهای هادیها و D فاصلهٔ محورهاست، بدست آورید.

۴- يك مخزن مستطیل شکل، مشابیه مخزنی که در شکل (۹.۶) نشان داده شده است، به پهنای ۵ سانتیمتر و ارتفاع ۳ سانتیمتر در دست است. پتانسیل بالای آن ۱۰۰ ولت و پتانسیل سطوح جانبی و کف آن صفر است. نقشهٔ مربعهای منحنی الخط این میدان پتانسیل را با توجه به وضع غیرعادی میدان در کنجهای فوقانی رسم کنید. (به عنوان مثال مقدار پتانسیل در مرکز شکاف بسیار کوچک چه اندازه است؟). بعد از تکمیل نقشه پتانسیل نقطه‌ای را که به فاصلهٔ ۱ سانتیمتر از بالا و ۲ سانتیمتر از طرف چپ قرار دارد بدست آورید و آن را با مقدار دقیق ۵۷٫۱ ولت مقایسه کنید.

۵- الکتروودی به شکل استوانهٔ بیضوی به معادلهٔ $(x/5)^2 + (y/3)^2 = 1$ ، به پتانسیل صفر ولت و الکتروود دیگری به شکل نواری پهن با مختصات $|x| < 4$ و $y = 0$ به پتانسیل ۱۰۰ ولت در دست است. نقشهٔ مربعهای منحنی الاضلاع ناحیهٔ داخلی استوانهٔ بیضوی را ترسیم کنید و بخصوص پتانسیل نقاط (۱, ۱) و (۴, ۱) را

تخمین بزنید.

۶- مدلی فلزی از یک نوع خط انتقال جدید ۲۰ برابر اندازه واقعی آن ساخته شده است و در یک مخزن الکتریکی قرار دارد. فقط بخش کوتاهی از خط انتقال مدل سازی می‌شود زیرا می‌توان از ورقهای پلاستیک غیرهادی برای محدود کردن مایع در طول معینی از خط انتقال، که در اینجا ۱۰ سانتیمتر است، استفاده کرد. بین دو هادی ولتاژ ۱۲ ولتی گذاشته می‌شود. (الف) در نقطه معینی در داخل مخزن مشاهده می‌شود که سطوح هم پتانسیل یک ولتی به اندازه ۱ cm از هم فاصله دارند. اگر ولتاژ بین هادهای خط ۱۰۰ V باشد مقدار E روی خط انتقال واقعی چه اندازه خواهد بود. (ب) اگر برای الکترولیت $\rho = 0.002 \text{ } \Omega/\text{m}$ و برآیند جریان 5 mA باشد، ظرفیت یک متر خط انتقال واقعی در هوا چه اندازه است؟

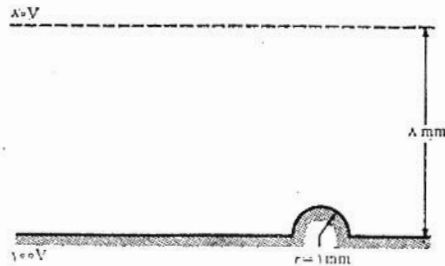
۷- فضای بین دو کره فلزی باشعاعهای ۴ و ۱۰ سانتیمتر با مایعی که هدایت مخصوص آن $\rho = 10^{-2} \text{ } \Omega/\text{m}$ است پر شده است. اگر بین کره‌ها ولتاژ یکطرفه ۱۲ ولت برقرار باشد، شدت جریان چه اندازه است؟

۸- برای تخمین زدن ظرفیت یک خط انتقال جدید با دو هادی از کاغذ هادی به مقاومت $5000 \text{ } \Omega/\text{m}$ در هر مربع سطح استفاده می‌شود. هادیها با رنگ تیره‌ای به اندازه ۹ برابر اندازه واقعی روی کاغذ رسم شده‌اند. مقاومت اندازه گرفته شده بین دو الکترود تیره‌ای ۸۰۰ اهم است. در صورتی که برای عایق مورد استفاده $\epsilon_R = 2$ باشد ظرفیت هر متر خط انتقال واقعی چه مقدار است.

۹- سطح داخلی مخزن مکعب مستطیل شکل مسأله ۴ را به شبکه‌ای با چشمه‌های ۱ سانتیمتری تقسیم کنید و از روش تکرار برای تعیین پتانسیل در ۸ نقطه آن استفاده کنید. نقشه مربعهای منحنی الاضلاع را می‌توان برای تخمین اولیه بکار برد.

۱۰- یک خط انتقال نواری دارای دونوار موازی به پهنای دو سانتیمتر در هوا است که طرف پهن آنها به فاصله یک سانتیمتر از هم قرار دارد. (الف) اگر این فرض (ضعیف) را بکنیم که سطح مقطع این خط یک خازن با صفحات موازی را تشکیل می‌دهد که ابعاد صفحه آن خیلی از فاصله آنها بزرگتر است، ظرفیت هر متر طول را محاسبه کنید. (ب) اگر پتانسیل نوارها $+100$ و -100 ولت انتخاب شده باشد یک نقشه مربعهای منحنی الاضلاع بکشید. توجه کنید که سطح هم پتانسیل صفر ولت یک صفحه است و همچنین یک خط شار از مرکز هر طرف هر نوار می‌گذرد و همواره مستقیم است. از اینرو کافی است که فقط نقشه یک چهارم ناحیه کشیده شود. (پ) اندازه ظرفیت را در هر متر طول از روی نقشه بدست آورید.

۱۱- برای تخمین اثر یک بی‌قاعدگی روی سطح یک خط انتقال نواری، برآمدگی

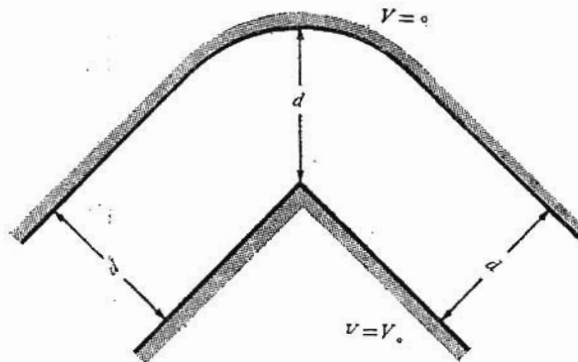


شکل ۱۳.۶ مربوط به مسأله ۱۱

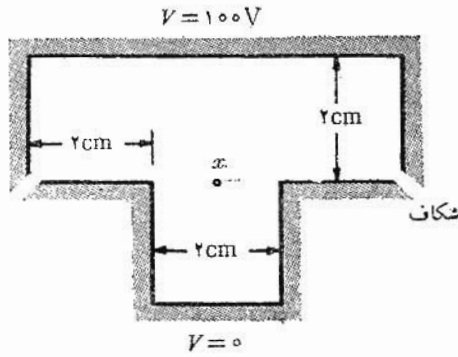
نیمدایره‌ای شکل (۱۳.۶) به سطح آن اضافه می‌شود. اگر فرض شود که میدان در محل هم پتانسیل ۸۰ ولت، که در شکل با خط چین نشان داده شده است، بی تغییر باقی بماند، E_{max} را در محل برآمدگی و همچنین در قسمت هموار سطح بدست آورید.

۱۲- هر نقطه روی هر کدام از سطوح نشان داده شده در شکل (۱۴.۶) حداقل به اندازه d واحد از سطح دیگر فاصله دارد و در عین حال بیش از d واحد از حداقل یک نقطه سطح دیگر فاصله ندارد. تعیین کنید که آیا سطح هم پتانسیل $V = V_0/2$ به اندازه $d/2$ واحد از یک یا هر دو صفحه فاصله دارد.

۱۳- از روش تکرار برای تعیین پتانسیل نقطه x در شکل (۱۵.۶) استفاده کنید. محاسبه را تا تقریب یک ولت ادامه دهید. (الف) از یک شبکه بسا چشمه‌های ۱



شکل ۱۴.۶ مربوط به مسأله شماره ۱۲

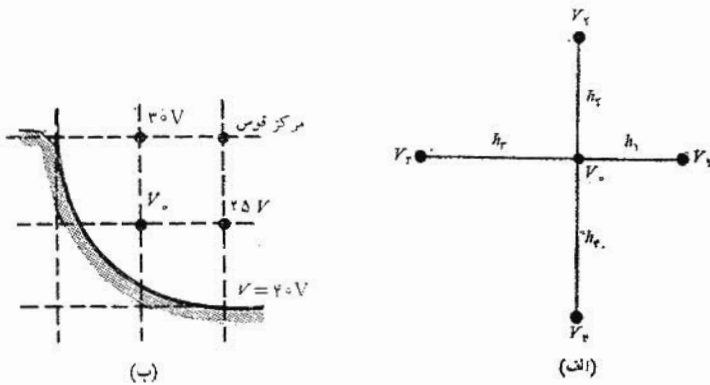


شکل ۱۵.۶ مربوط به مسأله شماره ۱۳

سانتیمتری استفاده کنید. (ب) از يك شبکه با خانه‌های $1/2$ سانتیمتری استفاده کنید.

۱۴- پتانسیل سطح فوقانی مخزن مربع شکل (۹.۶) بطور خطی از صفر ولت در گوشه‌ها تا 200 ولت در مرکز آن افزایش می‌یابد. با استفاده از روش تکرار پتانسیل 9 نقطه شبکه داخلی را بدست آورید.

۱۵- نقاط شبکه نزدیک گوشه‌های هادیهای بی‌قاعده شکل اغلب به مسأله شبکه غیر یکنواخت منجر می‌شوند. (الف) با مراجعه به شکل (۱۶.۶ الف) نشان دهید که



شکل ۱۶.۶ مربوط به مسأله شماره ۱۵

$$V_0 = \frac{V_1}{(1+h_1/h_r)(1+h_1h_r/h_rh_r)} + \frac{V_2}{(1+h_2/h_r)(1+h_2h_r/h_rh_r)} + \frac{V_3}{(1+h_r/h_1)(1+h_rh_1/h_rh_r)} + \frac{V_4}{(1+h_r/h_2)(1+h_rh_2/h_rh_r)}$$

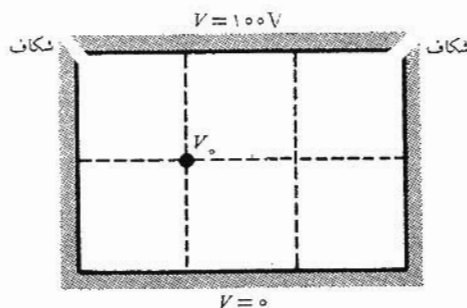
(ب) V_0 را در شکل (۱۶.۶) بدست آورید.

۱۶- با استفاده از روش تکرار برنامه محاسبه توزیع پتانسیل مخزن مستطیل شکل مسأله ۱۴ را برای حسابگر عددی تهیه کنید. محاسبه را تا تقریب ۰.۱ وات ادامه دهید و از شبکه‌های ۱۶ و ۶۴ و ۲۵۶ خانه‌ای استفاده کنید.

۱۷- در کتاب سکاربورو^۱ (به فهرست مراجع پایان این فصل توجه شود) معادله (۹) در صفحه ۳۲۴ پس از دوبار استفاده از روش تکرار (بار دوم خانه‌هایی نصف خانه‌های بار اول) تقریب نزدیکی برای مقدار واقعی پتانسیل در يك نقطه از شبکه بدست می‌دهد. از این روش در نقطه مشخص شده در مخزن مکعب مستطیلی شکل (۱۷.۶) استفاده کنید نتیجه بدست آمده را با نتیجه ۳۴.۳۴ ولت مقایسه کنید. محاسبه را تا تقریب ۰.۱ V ادامه دهید.

۱۸- در مقاله

Electrical Analogues, *Brit. J. Appl. Phys.*, vol. 4, 1953, pp. 193-200



شکل ۱۷.۶ مربوط به مسأله ۱۷

لیبمن^۱ سه روش آنالوگ مناسب برای مسائل الکتروستاتیکی را مورد بحث قرار می‌دهد و فواید و معایب آنها را بررسی می‌کند. علاوه بر روش کاغذ هادی و مخزن الکترولیت روش دیگری را مطرح می‌کند این روش از نظر دقت و سهولت کاربرد با دو روش دیگر چه تفاوتی دارد؟



معادلات پواسن^۱ و لاپلاس

از بررسی فصل قبل معلوم می‌شود که تعدادی از تشابهاتی که برای بدست آوردن نقطه‌های تجربی میدان مورد استفاده قرار گرفت شامل اثبات این نکته بود که کمیتهای مشابه در معادله لاپلاس صادقند. این موضوع برای خمیدگیهای کوچک پوسته قابل ارتجاع و جریان سیال به صورت یک لایه نازک صحت دارد و ما می‌توانستیم تشابه جریان را با نشان دادن این که چگالی جریانی که در ماده هادی نیز از معادله لاپلاس تبعیت می‌کند ثابت کنیم. اینطور به نظر می‌رسد که این معادله در زمینه‌های متعدد علم معادله‌ای بنیادی است و شاید بی‌آنکه خود بدانیم فصل گذشته را صرف بدست آوردن جواب این معادله از راه تجربی و ترسیمی و عددی کرده‌ایم. اکنون آماده‌ایم که این معادله را از راه فرمولی بدست آوریم و چند روش حل آن را از طریق تحلیلی نیز بررسی کنیم.

ممکن است اینطور بنظر برسد که جای درست طرح این موضوع قبل از فصل گذشته بود و وقتی معادله‌ای را با این همه روشهای مختلف حل می‌کنیم بهتر است که ابتدا خود معادله را بررسی کنیم. عیب این راه که بیشتر منطقی است در این است که حل معادله لاپلاس یک تمرین ریاضی است و مگر در صورتی که ما مسأله فیزیکی را بخوبی در ذهن داشته باشیم ممکن است مفهوم فیزیکی کاری را که انجام می‌دهیم به آسانی و بطور کامل از نظر دور داریم. یک نقشه منحنی الخط تقریبی می‌تواند اطلاعات زیادی در مورد میدان به ما بدهد و بعد می‌توان از آن برای کشف

1. Poisson

اشتباهات بزرگ در جوابهای ریاضی یا مشخص کردن نواحی خاص در میدانی که اعمال خاص لازم دارد استفاده کرد. حال با این توضیح سرانجام معادلات لاپلاس و پواسن را بدست می آوریم.

۱.۷ معادلات پواسن و لاپلاس

بدست آوردن معادله پواسن بسیار ساده است، زیرا برای يك ناحیه متجانس که در آن ρ ثابت است از شکل نقطه‌ای قانون گاوس،

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (1)$$

و تعریف

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad (2)$$

و رابطه گرادیان

$$\bar{E} = -\nabla V \quad (3)$$

و پس از جاگذاری داریم،

$$\nabla \cdot \bar{D} = \nabla \cdot (\epsilon \bar{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho$$

یا

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4)$$

معادله پواسن

معادله (۴) همان معادله پواسن است ولی عمل « ∇ دوگانه» را باید حداقل در مختصات قائم، تعبیر کرد و بسط داد تا معادله قابل استفاده شود. در مختصات قائم داریم،

$$\nabla \cdot \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \bar{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \bar{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \bar{a}_z$$

و بنابراین

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (5)$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

معمولاً حاصلضرب $\nabla \cdot \nabla$ به ∇^2 خلاصه می‌شود (و مربع دل خوانده می‌شود) و این یادآور خوبی برای مشتق‌های جزئی مرتبهٔ دومی است که در رابطه (۵) وجود دارد. بدین ترتیب در مختصات قائم داریم،

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (۶)$$

اگر $\rho = 0$ ، یعنی اگر چگالی حجمی بار صفر باشد ولی بارهای نقطه‌ای و بار خطی، و بار سطحی به عنوان منابع میدان در مرزهای ناحیه وجود داشته باشند، بنا براین،

$$\nabla^2 V = 0 \quad (۷)$$

منه رلنه لاپلاس

که همان معادلهٔ لاپلاس است. عمل ∇^2 را لاپلاسیان V می‌نامند. در مختصات قائم معادلهٔ لاپلاس به صورت زیر است:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (۸)$$

و شکل $\nabla^2 V$ در مختصات کروی و استوانه‌ای را می‌توان با استفاده از روابط دیورژانس و گرادینان که قبلاً در این مختصات بدست آمده‌اند پیدا کرد. برای مراجعه می‌دانیم که لاپلاسیان در مختصات استوانه‌ای مساوی است با:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (۹)$$

(مختصات استوانه‌ای)

و در مختصات کروی، عبارتست از

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \quad (۱۰)$$

(مختصات کروی)

این معادلات را می‌توان با گرفتن مشتقات جزئی مربوطه بسط داد وای معمولاً بهتر است که شکل بالای آنها را بکار برد. از این گذشته بسیار آسانتر است که بعدها آنها را بسط داد تا اینکه اجزای مجزای آنها را مجدداً به هم وصل کرد.

معادله لاپلاس دارای شمولی کلی است زیرا چون هر جا که چگالی حجمی بار صفر باشد صادق است نشان می‌دهد که هر شکل آرایش قابل تصور الکترودها یا هادیها میدانی به وجود می‌آورد که برای آن $\nabla^2 V = 0$. این میدانها همه باهم متفاوتند و مقادیر پتانسیل و آهنگ تغییر فضائی آنها گوناگون است، با وجود این برای همه آنها $\nabla^2 V = 0$. از آنجائی که هر میدانی (به شرطی که $\rho = 0$) از قانون لاپلاس تبعیت می‌کند، پس چگونه می‌توان انتظار داشت که کار را معکوس کنیم و از قانون لاپلاس برای پیدا کردن میدان خاصی که مورد نظر ماست استفاده کنیم؟ واضح است که اطلاعات بیشتری برای پیدا کردن میدان لازم است و چنانچه ذیلاً خواهیم دید، باید معادله لاپلاس را به ازای شرایط مرزی خاصی حل کرد.

هر مسأله فیزیکی باید حداقل دارای یک مرز هادی باشد و معمولاً دارای دو مرز یا بیشتر است. به پتانسیلهای این مررها ارزشهایی مانند V_1 و V_2 ... یا شاید مقادیر عددی داده شده است. این سطوح هم پتانسیل معین شرایط حد را برای نوع مسأله‌ای که می‌بایست در این فصل حل شود به وجود می‌آورند. در انواع دیگر مسائل شرایط مرزی به شکل مقادیر خاص E روی یک سطح محصور یا ترکیبی از مقادیر معلوم V و E هستند.

قبل از اینکه از معادله لاپلاس یا معادله پواسن در چند مثال استفاده کنیم، ابتدا می‌بایست نشان دهیم که اگر جواب ما در معادله لاپلاس و نیز شرایط حد صدق کند، تنها جواب ممکن مسأله است. بسیار ناراحت کننده خواهد بود که مسأله‌ای را از طریق حل معادله لاپلاس با دو روش مختلف حل کنیم و به دو جواب مختلف برسیم. نشان خواهیم داد که هر دو جواب باید یکی باشند.

تمرین ۱.۷

تعیین کنید که آیا میدانهای پانسیل زیر در معادله لاپلاس صدق می‌کنند یا نه: (الف) $V = Cxyz$ ؛ (ب) $V = Cr\phi z$ (استوانه‌ای)؛ (پ) $V = Cr\theta\phi$ (کروی).
جوابها: بله، نه، نه.

۲.۷ قضیه یگانگی جواب

فرض می‌کنیم برای معادله لاپلاس دو جواب V_1 و V_2 داشته باشیم که هر دو توابعی عمومی از مختصات مورد استفاده‌اند. بنا براین

$$\nabla^2 V_1 = 0$$

و

$$\nabla^2 V_2 = 0$$

که از آن

$$\nabla^2 (V_1 - V_2) = 0$$

هر يك از دو جواب می بایست در شرایط حد نیز صادق باشند، و اگر پتانسیل داده شده در مرز را V_b بنامیم، مقدار V_1 در این مرز یعنی V_{1b} و مقدار V_2 در این مرز یعنی V_{2b} ، می بایست هر دو همان V_b باشند،

$$V_{1b} = V_{2b} = V_b$$

یا

$$V_{1b} - V_{2b} = 0$$

در معادله (۵) بخش ۸.۴ از اتحاد برداری زیر استفاده کردیم

$$\nabla \cdot (V \bar{D}) \equiv V (\nabla \cdot \bar{D}) + \bar{D} \cdot (\nabla V)$$

که برای هر شمارواره ای (اسکالر) مانند V و هر برداری مانند \bar{D} صادق است. برای استفاده فعلی ما $V_1 - V_2$ را به عنوان شمارواره (اسکالر) و $\nabla(V_1 - V_2)$ را به عنوان بردار انتخاب می کنیم و خواهیم داشت،

$$\nabla \cdot [(V_1 - V_2) \nabla (V_1 - V_2)]$$

$$\equiv (V_1 - V_2) [\nabla \cdot \nabla (V_1 - V_2)] + \nabla (V_1 - V_2) \cdot \nabla (V_1 - V_2)$$

که بر روی حجم محصور در سطوح مرزی مشخص شده از آن انتگرال می گیریم،

$$\int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2) \nabla (V_1 - V_2)] dv \quad (1)$$

$$\equiv \int_{\text{حجم}} (V_1 - V_2) [\nabla \cdot \nabla (V_1 - V_2)] dv + \int_{\text{حجم}} [\nabla (V_1 - V_2)]^2 dv$$

به کمک قضیه دیورژانس می توانیم انتگرال حجمی سمت چپ را به انتگرال سطح بسته، بر روی سطحی که این حجم را محصور کرده است، تبدیل کنیم. این سطح عبارتست از مرزهایی که در پیش وصف شد و در آنها $V_{1b} = V_{2b}$ و بنابراین

$$\int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_\lambda - V_\nu) \nabla (V_\lambda - V_\nu)] dv$$

$$= \oint_s [(V_{\lambda b} - V_{\nu b}) \nabla (V_{\lambda b} - V_{\nu b})] \cdot d\vec{S} = 0$$

یکی از عوامل انتگرال اول سمت راست رابطه (۱) مساوی $\nabla \cdot \nabla (V_\lambda - V_\nu)$ یا $\nabla^2 (V_\lambda - V_\nu)$ است که مطابق فرض مساوی صفر است و بنابراین انتگرال آن نیز برابر صفر است. بدین ترتیب باقیمانده انتگرال نیز باید صفر شود:

$$\int_{\text{حجم}} [\nabla (V_\lambda - V_\nu)]^2 dv = 0$$

معمولاً مقدار يك انتگرال به دو علت صفر می‌شود: یکی اینکه عبارت زیر علامت انتگرال همه جا صفر باشد و دیگر اینکه این عبارت در بعضی نواحی مثبت و در پاره‌ای دیگر منفی باشد بطوری که اثر آنها بطور جبری يك دیگر را خنثی کنند. در حالت فوق باید علت اول صادق باشد زیرا $[\nabla (V_\lambda - V_\nu)]^2$ ممکن نیست منفی شود، از اینرو

$$[\nabla (V_\lambda - V_\nu)]^2 = 0$$

و

$$\nabla (V_\lambda - V_\nu) = 0$$

بالاخره، چون گرادیان $V_\lambda - V_\nu$ همه جا صفر است بنابراین $V_\lambda - V_\nu$ نمی‌تواند با هیچ مختصاتی تغییر کند، یعنی

$$V_\lambda - V_\nu = \text{ثابت}$$

حال اگر بتوانیم نشان دهیم که این ثابت صفر است، منحصر به فرد بودن جواب معادله لاپلاس را ثابت کرده‌ایم. برای اینکار نقطه‌ای را روی مرز مشخص شده مسئله در نظر می‌گیریم. اینجا $0 = V_{\lambda b} - V_{\nu b} = V_\lambda - V_\nu$ ، مشاهده می‌شود که ضریب ثابت مزبور صفر است. از اینرو دو جواب بدست آمده یکی‌اند.

$$V_\lambda = V_\nu$$

قضیه یگانگی جواب برای معادله پواسن نیز صادق است زیرا اگر $\nabla^2 V_\lambda = -\rho/\epsilon$ و $\nabla^2 V_\nu = -\rho/\epsilon$ مانند حالت قبل $\nabla^2 (V_\lambda - V_\nu) = 0$ ، طبق شرایط مرزی داریم $0 = V_{\lambda b} - V_{\nu b}$ و اثبات مسئله از اینجا به بعد مشابه حالت فوق است.

بدین ترتیب قضیه یگانگی جواب اثبات می‌شود. قضیه یگانگی جواب از نظر پاسخ به این سؤال که «اگر هر دو جواب معادله لاپلاس و پواسن در شرائط مرزی واحدی صادق باشند چگونه می‌توان آنها را با هم مقایسه کرد؟» خاطر ما را آسوده می‌سازد. زیرا هر دو جواب معادلتند. همینکه توانستیم روشی برای حل معادله لاپلاس یا معادله پواسن بیابیم که در شرائط حد داده شده صدق کند، مسأله ما برای همیشه حل شده است و با هیچ روش دیگری نمی‌توان جواب متفاوتی بدست آورد.

تمرین ۲.۷

دو تابع $V_1 = \ln r$ و $V_2 = \cos^{-1}[r/2 + 1/(2r)]$ داده شده است. نشان دهید که هر یک از آن دو در مختصات استوانه‌ای و شرائط مرزی $V=0$ در $r=1$ و $r=2$ در $V=0$ در معادله لاپلاس صدق می‌کنند. آیا هر دو حل معادلتند؟

جوابها: اثبات می‌شود، بلی

۳.۷ چند مثال از حل معادله لاپلاس

برای حل معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم که معادله لاپلاس نامیده می‌شود چند روش ارائه شده‌اند اولین روش و ساده‌تر از همه انتگرال گیری مستقیم از معادله است و ما در این بخش از این فن برای حل چند مثال در دستگاههای مختصات مختلف استفاده خواهیم کرد. در بخش ۵.۷ برای حل یک مسأله مشکلتر از روش دیگری استفاده خواهیم کرد. روشهای دیگری نیز، که استفاده از آنها مستلزم دانش بیشتری از ریاضیات است، در فهرست مراجع در پایان این فصل توصیف شده‌اند.

روش انتگرال گیری مستقیم تنها در مسائل «یک بعدی» یا در مسائلی که در آنها پتانسیل فقط تابع یکی از سه متغیر است قابل استفاده است. از آنجا که ما فقط از سه دستگاه مختصات استفاده می‌کنیم، ممکن است چنین به نظر برسد که باید ۹ مسأله را حل کنیم. ولی کمی تأمل نشان می‌دهد که میدانی که فقط با r تغییر می‌کند اساساً به امید اینکه فقط با y تغییر می‌کند تفاوتی ندارد و چرخاندن مسأله فیزیکی به اندازه یک چهارم دور تفاوتی بوجود نمی‌آورد. بدین ترتیب، عملاً باید ۵ مسأله را حل کرد، یکی در مختصات قائم، دو مسأله در مختصات استوانه‌ای و دو مسأله در مختصات کروی. ما این پنج مسأله را حل خواهیم کرد.

مثال ۱

فرض می‌کنیم که V فقط تابع r باشد و بعدها، هنگامی که به شرائط مرزی احتیاج

پیدا کردیم، راجع به این که کدام مسأله فیزیکی را حل می‌کنیم صحبت خواهیم کرد. در اینصورت معادله لاپلاس به

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

تبدیل می‌شود و چون y و z در مسأله وجود ندارند، اگر به جای مشتقات جزئی مشتق معمولی قرار دهیم،

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

با دو مرتبه انتگرال گرفتن خواهیم داشت،

$$\frac{dV}{dx} = A$$

و

$$V = Ax + B \quad (1)$$

که در آن A و B ثابتهای انتگرالند. همانطور که برای یک معادله دیفراسیل مرتبه دوم انتظار می‌رود، معادله (۱) دارای دو ثابت است. این ثابتها را می‌توان فقط با شرایط حد بدست آورد.

حال ببینیم چه شرایط حدی باید بکار بریم این شرایط را ما می‌توانیم انتخاب کنیم چون هنوز هیچ مسأله فیزیکی، به استثنای فرض اولیه که پتانسیل فقط با x تغییر می‌کند، مشخص نشده است. اکنون می‌بایست سعی کنیم و این میدان را در نظر مجسم نماییم. بیشتر ما احتمالاً جواب مسأله را یافته‌ایم اما می‌توان آن را به روشهای دقیق بدست آورد.

از آنجائی که میدان فقط با x تغییر می‌کند و تابعی از y و z نیست، وقتی x ثابت باشد، V نیز ثابت است و به عبارت دیگر سطوح هم پتانسیل با ثابت نگاهداشتن x بدست می‌آیند و این سطوح صفحاتی عمود بر محور x اند. بدین ترتیب میدان مشابه میدان خازنی موازی صفحه است و با مشخص کردن پتانسیل دو صفحه می‌توان ثابتهای انتگرال را حساب کرد.

بطور کلی فرض می‌کنیم در $x = x_1$ ، $V = V_1$ ، در $x = x_2$ ، $V = V_2$ باشد. با گذاشتن این مقادیر در رابطه (۱) خواهیم داشت،

$$V_1 = Ax_1 + B \quad V_2 = Ax_2 + B$$

$$A = \frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2} \qquad B = \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2}$$

$$V = \frac{V_1(x - x_2) - V_2(x - x_1)}{x_1 - x_2} \quad (۲)$$

با انتخاب شرایط مرزی ساده تر می توان جواب ساده تری بدست آورد. اگر فرض کنیم $V = 0$ در $x = 0$ و $V = V_0$ در $x = d$ باشد، در این صورت

$$A = \frac{V_0}{d} \qquad B = 0$$

$$V = \frac{V_0 x}{d} \quad (۳)$$

حال فرض کنید در این مسأله می خواستیم ظرفیت يك خازن موازی صفحه را تعیین کنیم. ما معادله لاپلاس را حل کرده ایم و رابطه (۱) را با ثابتهای A و B بدست آورده ایم. آیا بایست آنها را نیز محاسبه کنیم یا نه؟ فرض می کنیم که کاری با خود پتانسیل نداریم بلکه می خواهیم ظرفیت را بدست آوریم و می توانیم کار خود را با A و B ادامه دهیم یا با کمی پیش بینی عملیات جبری را ساده کنیم. ظرفیت مساوی است با خارج قسمت بار به اختلاف پتانسیل، بدین ترتیب ما می توانیم اختلاف پتانسیل V_0 را که معادل یکی از شرایط مرزی است انتخاب کنیم و سپس هر شرط مرزی دومی را که به نظر می رسد بیش از همه به شکل معادله کمک کند برگزینیم و این اساس دومین مجموعه شرایط مرزی است که به رابطه (۳) منجر شد. اختلاف پتانسیل را در مقدار V_0 تثبیت کردیم بدین ترتیب که پتانسیل يك صفحه را صفر و از آن صفحه دیگر را V_0 فرض کردیم و محل این صفحات را با قراردادن $V = 0$ در $x = 0$ به حداکثر سادگی تعیین کردیم.

با استفاده از رابطه (۳) هنوز برای تعیین ظرفیت باید بار کل روی هر يك از صفحات را بدست آوریم. لازم به یادآوری است که وقتی ابتدا این مسأله را در فصل ۵ حل کردیم، لایه بار را نقطه شروع خود انتخاب کردیم و تعیین بار کار چندان مشکلی نبود، چون تمام میدانها برحسب آن بیان شده بود. بدین ترتیب تنها کار لازم تعیین اختلاف پتانسیل بود. در اینجا مسأله معکوس (وساده تر) شده است. کارهای لازم بعد از انتخاب شرایط مرزی به ترتیب زیراند:

۱. با داشتن V ، از $\vec{E} = -\nabla V$ برای تعیین \vec{E} استفاده می‌کنیم.
۲. با استفاده از $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ، \vec{D} را بدست می‌آوریم.
۳. \vec{D} را در سطح هریک از صفحات خازن تعیین می‌کنیم، $\vec{D} = \vec{D}_s = D_n \vec{a}_n$
۴. تحقیق می‌کنیم که $\rho_s = D_n$
۵. Q را با انتگرال سطحی روی صفحه خازن بدست می‌آوریم،

$$Q = \int_s \rho_s dS$$

بدین ترتیب:

$$V = V_0 \frac{x}{d}$$

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{d} \vec{a}_x$$

$$\vec{D} = -\epsilon \frac{V_0}{d} \vec{a}_x$$

$$\vec{D}_s = \vec{D} \Big|_{x=0} = -\epsilon \frac{V_0}{d} \vec{a}_x$$

$$\vec{a}_n = \vec{a}_x$$

$$\vec{D}_n = -\epsilon \frac{V_0}{d} = \rho_s$$

$$Q = \int_s \frac{-\epsilon V_0}{d} dS = -\epsilon \frac{V_0 S}{d}$$

و بدین ترتیب اندازه ظرفیت مساوی است با

$$C = \frac{|Q|}{V_0} = \frac{\epsilon S}{d}$$

در مثالهای زیر چند مرتبه از روش فوق استفاده می‌کنند.

مثال ۲

از آنجا که مسأله میدانهای که در آنها فقط y یا z در مختصات قائم تغییر می‌کنند

فرقی با مسأله بالا ندارند، برای مثال بعدی از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. میدانهای متغیر با z در این مختصات نیز تازگی ندارد. از این رو میدانی را که فقط تابع r است در نظر می‌گیریم. در اینحالت معادله لاپلاس به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

یا

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right)$$

با توجه به r در مخرج، $r = 0$ را از حل خود حذف می‌کنیم و پس از ضرب کردن در r انتگرال می‌گیریم،

$$r \frac{dV}{dr} = A$$

با مرتب کردن و انتگرال گرفتن مجدد خواهیم داشت،

$$V = A \ln r + B \quad (۴)$$

سطوح هم پتانسیل که با قراردادن ثابت r بدست می‌آیند استوانه‌اند و مسأله عبارتست از مسأله يك خازن هم محور با خط انتقال هم محور چنانچه اختلاف پتانسیل را V_0 انتخاب کنیم، یعنی داشته باشیم $V = V_0$ در $r = a$ ، $V = 0$ در $r = b$ ، $b > a$ خواهیم داشت،

$$V = V_0 \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}$$

و از آنجا

$$\bar{E} = \frac{V_0}{r} \frac{1}{\ln(b/a)} \bar{a}_r$$

$$D_{n(r=a)} = \frac{\epsilon V_0}{a \ln(b/a)}$$

$$Q = \frac{\epsilon V_0 \cdot 2\pi a L}{a \ln(b/a)}$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon L}{\ln(b/a)}$$

که با نتیجه بدست آمده در فصل ۵ مطابقت دارد.

مثال ۳

اکنون فرض کنیم که V فقط تابعی از φ در مختصات استوانه‌ای باشد برای تنوع ابتدا مسأله فیزیکی را بررسی می‌کنیم. مشاهده می‌شود که صفحات هم پتانسیل با (ثابت φ) داده شده‌اند که صفحاتی شعاعی‌اند. شرایط مرزی ممکن است عبارت باشند از $V=0$ در $\varphi=0$ و $V=V_0$ در $\varphi=\alpha$ و به مسأله فیزیکی که تفصیل آن در شکل ۱۰۷ نشان داده شده است منجر می‌گردد.

در این حالت معادله لاپلاس عبارت است از:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

ما $r=0$ را حذف می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 V}{d\varphi^2} = 0$$

که از آنجا خواهیم داشت:

$$V = A\varphi + B$$

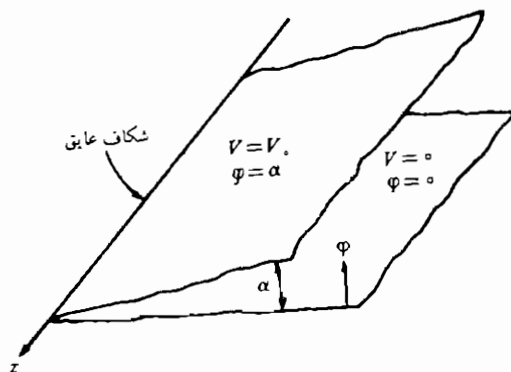
A و B با استفاده از شرایط مرزی، معین می‌شوند.

$$V = V_0 \frac{\varphi}{\alpha} \quad (\Delta)$$

با محاسبه گرادیان رابطه (Δ) شدت میدان الکتریکی را بدست می‌آوریم،

$$\vec{E} = -\frac{V_0 \vec{a}_\varphi}{\alpha r}$$

و جالب توجه این است که E تابعی از r است و نه از φ این موضوع تناقضی با فرض اولیه ما که انحصار به میدان پتانسیل بود ندارد ولی در هر صورت باید توجه داشت که میدان برداری \vec{E} تابعی از φ است.



شکل ۱۰۷ دو صفحه شعاعی نامحدود با زاویه داخلی α . یک شکاف عایق بسیار خرد در $r = 0$ وجود دارد. میدان پتانسیل با استفاده از معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای بدست می‌آید.

در پایان فصل مسأله‌ای که شامل ظرفیت این دو صفحه شعاعی است درج شده است.

مثال ۴

اکنون به مختصات کروی می‌پردازیم و بی‌درنگ مسائلی را که در آنها میدان پتانسیل فقط تابعی از φ است، چون در بالا عمل شد کنار می‌گذاریم و اول حالت $V = V(r)$ را بررسی می‌کنیم.

جزئیات را برای مسأله بعدی می‌گذاریم اما میدان پتانسیل نهائی بدین صورت است:

$$V = V_0 \frac{1/r - 1/b}{1/a - 1/b} \quad (۶)$$

که در آن شرایط مرزی عبارتند از $V = 0$ در $r = b$ ، $V = V_0$ در $r = a$ ، $b > a$ و عبارتست از مسأله دو کره هم مرکز. ظرفیت قبلاً (با روش دیگری) تعیین شده است و مساوی است با

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{1/a - 1/b}$$

مثال ۵

در مختصات کروی تغییرات پتانسیل را فقط به $V = V(\theta)$ محدود می‌کنیم و خواهیم داشت،

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0$$

با حذف کردن $r = 0$ و $\theta = 0$ یا π خواهیم داشت،

$$\sin \theta \frac{dV}{d\theta} = A$$

انتگرال دوم مساوی خواهد بود با

$$V = \int \frac{A d\theta}{\sin \theta} + B$$

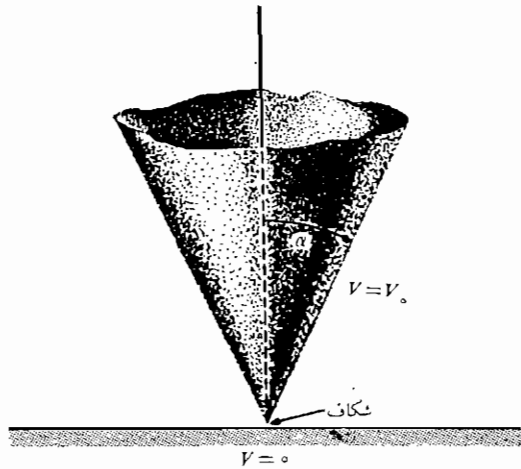
که به وضوح موارد بالا نیست. با استفاده از جداول انتگرال (یا یک حافظه خوب) خواهیم داشت:

$$V = A \ln \left(\tan \frac{1}{2} \theta \right) + B$$

سطوح هم پتانسیل سطوح مخروطی هستند. شکل ۲.۷ حالتی را که $V = 0$ در $\theta = \pi/2$ ، و $V = V_0$ در $\theta = \alpha$ ، است مشخص می‌کند. بدین ترتیب خواهیم داشت،

$$V = V_0 \frac{\ln \left(\tan \frac{1}{2} \theta \right)}{\ln \left(\tan \frac{1}{2} \alpha \right)} \quad (7)$$

برای محاسبه ظرفیت بین یک هادی مخروطی که رأس آن توسط یک شکاف عایق بسیار نازک از صفحه‌ای هادی وعمود بر محور آن جدا شده است با صفحه هادی، ابتدا شدت میدان را حساب می‌کنیم



شکل ۲.۷ برای مخروط $\theta = \alpha$ در V_0 و صفحه $\theta = \pi/2$ در $V = 0$ میدان پتانسیل بواسطه رابطه $V = V_0 [\ln(\tan^{1/\gamma} \theta)] / [\ln(\tan^{1/\gamma} \alpha)]$ داده شده است.

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{a}_\theta = -\frac{V_0}{r \sin \theta \ln(\tan^{1/\gamma} \alpha)} \vec{a}_\theta$$

چگالی بار سطحی روی مخروط مساوی است با

$$\rho_s = \frac{-\epsilon V_0}{r \sin \alpha \ln(\tan^{1/\gamma} \alpha)}$$

و در نتیجه بارکل برابر خواهد بود با

$$Q = \frac{-\epsilon V_0}{\sin \alpha \ln(\tan^{1/\gamma} \alpha)} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r \sin \alpha \, d\varphi \, dr}{r}$$

این رابطه به یک مقدار بینهایت بار و ظرفیت منجر می شود و از اینرو لازم است که مخروطی با ابعاد محدود در نظر بگیریم. جوابی که بدین ترتیب بدست خواهیم آورد تقریبی خواهد بود، زیرا صفحه هم پتانسیل از روی تئوری $\theta = \alpha$ است که سطحی مخروطی از $r = 0$ تا $r = \infty$ است، در حالی که سطح هم پتانسیل مخروطی مساله

ما فقط از $r = 0$ تا مثلاً $r = r_1$ ادامه دارد. ظرفیت تقریبی در این حالت مساوی است با

$$C \doteq \frac{2\pi\epsilon r_1}{\ln(\cot \frac{1}{2}\alpha)}$$

اگر بخواهیم جواب دقیق تری بدست آوریم، باید ظرفیت پایه مخروط، که يك صفحه دایره‌ای به شعاع r_1 است، نسبت به صفحه پتانسیل صفر را بدست آوریم و به جواب بالا اضافه کنیم. در اینجا از میدانهای حاشیه‌ای و غیر یکنواخت این منطقه صرف نظر شده است و منشاء اشتباهاتی اضافی می‌گردد.

تمرین ۳.۷

اندازه E را در نقطه $(1, 1, 1)$ در هوا برای میدانهای زیر بدست آورید: (الف) میدان دو استوانه متحدا محور هادی، $V = 100V$ در $r = 0.5m$ و $V = 0$ در $r = 2m$. (ب) دو صفحه هادی شعاعی، $V = 100V$ در $\varphi = \pi/2$ و $V = 0$ در $\varphi = 0$. (پ) دو کره متحدا مرکز هادی $V = 100V$ در $r = 0.5m$ و $V = 0$ در $r = 2m$. (ت) دو مخروط هادی متحدا محور، $V = 100V$ در $\theta = 30^\circ$ و $V = 0$ در $\theta = 60^\circ$.

جوابها: 5100 و 4500 و 2202 و 9201 ولت بر متر

۴.۷ مثالی از حل معادله پواسن

برای انتخاب يك مسأله ساده که بتوان کاربرد معادله پواسن را به کمک آن نشان داد بایست فرض کنیم که چگالی بار حجمی مشخص شده است. در واقع در عمل اغلب این همان کمیتهی است که می‌خواهیم اطلاعاتی در باره آن بدست آوریم. در نوع مسأله‌ای که در آینده ممکن است با آن مواجه شویم، فقط مقادیر مرزی پتانسیل و شدت میدان الکتریکی و چگالی جریان معلوم‌اند. با در دست داشتن این مقادیر بایست معادله پواسن و معادله پیوستگی جریان و رابطه‌ای که نیروی وارد بر ذرات باردار را بیان می‌کند، مانند معادله نیروی لورنتس^۱ یا معادله پخش بار را بکار ببریم و همه این مجموعه معادلات را بطور همزمان حل کنیم. چنین کار دشواری از حدود این کتاب خارج است و از اینرو فرض می‌کنیم که اطلاعات بیشتری در مسأله داده شده است.

1. Lorentz

به عنوان مثال، يك پیوند pn را بین دو نیمه يك میله نیم هادی که در امتداد محور x قرار دارد در نظر می گیریم. فرض می کنیم که از طریق تزریق، ناحیه $0 < x$ از نوع p و ناحیه $0 > x$ از نوع n شده باشد و میزان تزریق هر دو ناحیه پیوند مساوی باشد. به منظور مرور کیفی بعضی از واقعیتها در باره پیوند نیم هادی یادآوری می کنیم که در ابتدا افزونی حفرهها در سمت چپ و افزونی الکترونها در سمت راست برقرار است. هر کدام از این افزونیها در پیوند پخش می شوند تا اینکه يك میدان الکتریکی در جهتی بوجود آید که جریان پخش به صفر تنزل کند. بنا بر این، برای جلوگیری از حرکت حفره های بیشتری به سمت راست، بایست میدان الکتریکی در حوالی محل پیوند به سمت چپ متوجه باشد، یعنی E_x در اینجا منفی است. لازمه وجود چنین میدانی يك بار مثبت خالص در سمت راست و يك بار منفی خالص در سمت چپ محل پیوند است. باید توجه کرد که لایه مثبت سمت راست شامل دو قسمت است، حفره هایی که از محل پیوند عبور کرده اند و یونهای دهنده مثبت که الکترونها از آنها خارج شده اند. و به عکس لایه منفی شامل الکترونها و یونهای منفی پذیرنده است. به این ترتیب چگالی حجمی بار در نزدیکی محل پیوند صفر نیست. چنین توزیع باری را می توان با روابط مختلف بسیاری بطور تقریب بیان کرد. یکی از انواع ساده تر این روابط عبارتست از،

$$\rho = 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a} \quad (1)$$

که بیشینه مقدار آن $\rho_{\max} = \rho_0$ در $x = 0$ است. مقدار ρ_0 را می توان با N_a و N_d یعنی تراکمهای پذیرنده و دهنده مربوط کرد برای این منظور باید توجه داشت به این که تمام ایونهای دهنده و پذیرنده از يك الکترون یا حفره جدا شده اند. (دو لایه خنثی) و بدین ترتیب،

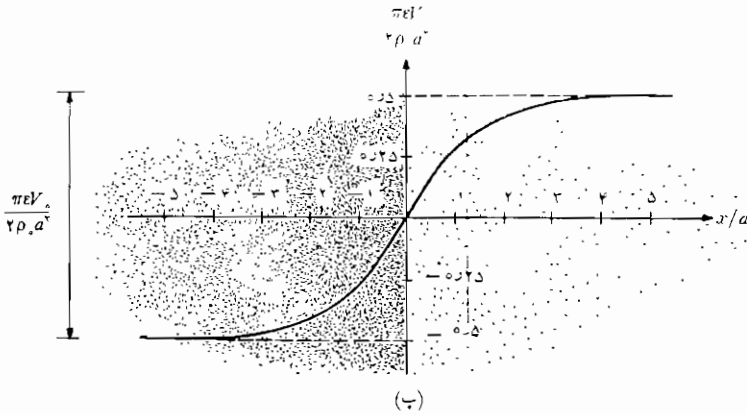
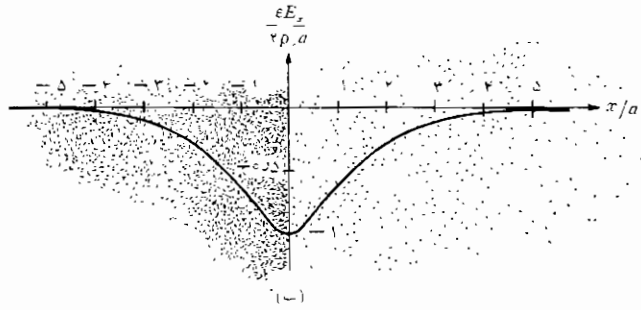
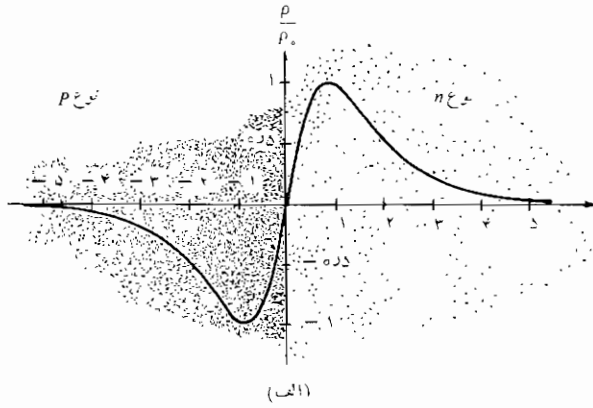
$$\rho_0 = eN_a = eN_d$$

اکنون معادله پواسن را حل می کنیم،

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

با توجه به توزیع بار فرض شده در بالا

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$



شکل ۳.۷ (الف) چگالی بار. (ب) شدت میدان الکتریکی و (پ) منحنی تغییرات پتانسیل یک پیوند pm بر حسب فاصله از مرکز پیوند. ماده نوع p در سمت چپ و نوع n در سمت راست قرار دارد.

این يك مسأله يك بعدی است و تغییراتی بر حسب y و z در آن وجود ندارد. ما بکبار انتگرال گیری،

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} = C_1$$

شدت میدان الکتریکی را بدست می آوریم،

$$E_x = -\frac{\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} - C_1$$

به منظور پیدا کردن ثابت انتگرال C_1 توجه می کنیم که در فاصله دود از پیوند هیچ گونه چگالی بار خالص و میدانی نمی تواند وجود داشته باشد. بنابراین، با $x \rightarrow \pm\infty$ ، E_x بایست به سمت صفر میل کند. بدین ترتیب $C_1 = 0$ است و

$$E_x = -\frac{\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \quad (2)$$

با انتگرال گیری مجدد،

$$V = \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon} \tan^{-1} e^{x/a} + C_2$$

مبدأ پتانسیل صفر را بطور دلخواه در مرکز پیوند، $x = 0$ انتخاب می کنیم

$$0 = \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon} \frac{\pi}{4} + C_2$$

در نتیجه

$$V = \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon} \left(\tan^{-1} e^{x/a} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (3)$$

شکل ۳.۷ بترتیب توزیع بار و شدت میدان الکتریکی و پتانسیل را مطابق روابط (۱) و (۲) و (۳) نشان می دهد.

بعد از فاصله a یا Δa از محل پیوند پتانسیل ثابت باقی می ماند و اختلاف پتانسیل کل V_0 دوسر پیوند از رابطه (۳) بدین ترتیب بدست می آید،

$$V_0 = \frac{2\pi\rho_0 a^2}{\epsilon} \quad (4)$$

از این رابطه چنین استنباط می شود که می توانیم بار کل موجود در يك طرف پیوند را

بد دست آوریم و آنگاه با استفاده از رابطه (۴) ظرفیت پیوند را محاسبه کنیم. بار کل مثبت مساوی است با،

$$Q = S \int_0^{\infty} \rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a} dx = \rho_0 a S$$

که در آن S مساحت سطح مقطع پیوند است. با استفاده از رابطه (۴) می‌توانیم پارامتر فاصله a را حذف کنیم و بار کل مساوی می‌شود با

$$Q = S \sqrt{\frac{\rho_0 \epsilon V_0}{\pi}} \quad (5)$$

از آنجائی که بار کل تابعی از اختلاف پتانسیل است، باید در تعریف ظرفیت دقت کنیم. از نظریه مدار بخاطر داریم که

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV_0}{dt}$$

و به این ترتیب

$$C = \frac{dQ}{dV_0}$$

بنابراین، با مشتق گرفتن از رابطه (۵) ظرفیت را بدست می‌آوریم،

$$C = \sqrt{\frac{\rho_0 \epsilon}{\pi V_0}} S = \frac{\epsilon S}{\pi a} \quad (6)$$

شکل اول رابطه (۶) نشان می‌دهد که ظرفیت بطور معکوس متناسب با عکس ریشه دوم ولتاژ تغییر می‌کند. هر اندازه ولتاژ بالاتر باشد به همان اندازه فاصله بین دو لایه باردار افزایش می‌یابد و به همان نسبت مقدار ظرفیت کمتر می‌شود. شکل دوم از این نظر جالب است که نشان می‌دهد که ما می‌توانیم پیوند را خازنی موازی صفحه در نظر بگیریم، که فاصله صفحات آن πa است. این نتیجه با توجه به ابعاد ناحیه‌ای که بار در آن متمرکز شده است منطقی است.

معادله یواسن در هر مسأله‌ای که چگالی بار حجمی در آن مطرح باشد بکار می‌رود. علاوه بر مدل‌های دیود نیم هادی و ترانزیستور استفاده از آن برای ساختن نظریه‌های رضایتبخش درباره لوله‌های خلاء و تبدیل انرژی مغناطیسی به ایدرودینامیکی و پیش رانی ایونی ضروری است.

تمرین ۴.۷

فرض کنید که تراکم دهنده و پذیرنده در یک دیود پیوند سیلیسیمی $10^{21} \text{ atoms/m}^3$ و اختلاف پتانسیل دوسر آن ۶ ولت و ضریب پسذیرش نسبی آن ۱۲ و ظرفیت خازنی آن 1 pF باشد. (الف) با فرض این که پیوند مدور باشد شعاع آن را بدست آورید. (ب) شدت میدان الکتریکی پیوند را پیدا کنید.

جوابها: 240 MV/m و 122 mm

تمرین ۵.۷

اگر $V = 0.5 \text{ V}$ در $x = 1 \text{ mm}$ و $V = -0.5 \text{ V}$ در $x = -1 \text{ mm}$ باشد $V(x)$ را در فضای آزاد در شرایط زیر بدست آورید:

(الف) $\rho = 10^{-10} \text{ C/m}^3$ و (ب) $\rho = 10^{-10} \sin 10^3 \pi x \text{ C/m}^3$

جوابها: $(10^{-10} x^2 - 10^3 \epsilon_0 x - 10^{-16}) / 2\epsilon_0$ و $500x + [(\sin 10^3 \pi x) / (10^{16} \pi^2 \epsilon_0)] - V$

۵.۷ راه حل حاصلضربی معادله لاپلاس

در این بخش ما با آن گروه میدانهای پتانسیلی مواجهیم که به بیش از یک مؤلفه از سه مؤلفه مختصات بستگی دارند. گرچه مثالهای ما در دستگاه مختصات قائم ارائه می شود، روش کلی در مورد دستگاه مختصات دیگر نیز قابل اجراست. ولی ما از این کنار اجتناب می کنیم زیرا میدانهای پتانسیل در این دستگاهها بصورت توابع ریاضی عالی تر مانند توابع بسل و هارمونیکهای کروی و استوانه ای داده می شوند و ما در حال حاضر علاقه ای به شناختن توابع ریاضی جدید نداریم و منظورمان بیشتر آشنائی با فنون و روشهای حل مسائل میدان الکتریسیته ساکن است.

گروه مسائل کلی را در نظر می گیریم به این ترتیب که تصریح می کنیم که پتانسیل فقط تابع x و y باشد بطوری که:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

اکنون فرض می کنیم که پتانسیل را بتوان بصورت حاصلضرب دو تابع کسه یکی فقط تابع x و دیگری فقط تابع y باشد بیان کرد. در وهله اول ممکن است به نظر برسد که این فرض مانع وجود تعداد بیش از اندازه زیادی جوابها مانند $V = x + y$ یا هر مجموعی از یک تابع x و یک تابع y خواهد بود. اما می بایست توجه داشته باشیم

که معادله لاپلاس معادله‌ای خطی است و مجموع هر دو جوابی خود يك جواب آن خواهد بود و ما می‌توانیم $V = x + y$ را مجموع دو جواب مانند $V_1 = x$ و $V_2 = y$ بدانیم که هر کدام از این پتانسیلها يك جواب حاصلضربی است. اگر تابع x را با X و تابع y را با Y نشان دهیم خواهیم داشت،

$$V = XY \quad (۲)$$

که اگر آن را در رابطه (۱) قرار دهیم خواهیم داشت

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

نظر به اینکه X تابع y و Y تابع x نیست، می‌توان از مشتق معمولی استفاده کرد،

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \quad (۳)$$

معادله (۳) را می‌توان از طریق جدا کردن متغیرها بوسیله تقسیم کردن طرفین آن بر XY حل کرد،

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

یا

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

اکنون به یکی از استدلالهای ماهرانه ریاضی احتیاج داریم: از آنجائی که $\frac{d^2 X}{dx^2}$ به $(1/X)$ بستگی ندارد و $\frac{d^2 Y}{dy^2}$ به y بستگی ندارد و نظر به اینکه دو مقدار مساویند بنابراین $\frac{d^2 X}{dx^2}$ نیز نمی‌تواند تابعی از x باشد و به همین دلیل $\frac{d^2 Y}{dy^2}$ نیز تابعی از y نخواهد بود. به عبارت دیگر، ثابت می‌شود که هر يك از این دو جمله باید ثابت باشند، برای سهولت این مقدار ثابت را α^2 فرض می‌کنیم،

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2 \quad (۴)$$

$$- \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \alpha^2 \quad (۵)$$

ثابت α^2 ثابت تفکیک نامیده می‌شود زیرا با استفاده از آن می‌توان یک معادله را بدو معادله ساده‌تر تفکیک کرد.

معادله (۴) را می‌توان به اینصورت نوشت و سپس می‌بایست آنرا حل کرد،

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2 X \quad (۶)$$

این معادله را می‌توان به چند روش حل کرد. روش اول تجربه یا شناسائی است که به تمرین بستگی دارد. ما در این زمینه تازه کاریم و به زحمت می‌توانیم معادله لاپلاس را تشخیص دهیم. روش دوم انتگرال‌گیری مستقیم است، البته اگر قابل اجرا باشد. با استفاده از آن می‌توانیم بنویسیم،

$$d\left(\frac{dX}{dx}\right) = \alpha^2 X dx$$

$$\frac{dX}{dx} = \alpha^2 \int X dx$$

که به نتیجه نمی‌رسد و بایست روش دیگری برگزینیم چون X تابع مجهولی از x است و روش انتگرال‌گیری قابل استفاده نیست. روش سوم را می‌توان روش حدس زدن یا حس ششم یا تحقیق نامید. برای اینکار باید معادله را بدقت بررسی و احیاناً عملیات را به کلمات بیان کرد. برای بعضی از ما این روش در مورد معادله مفید است، مثلاً اگر از خود پرسیم: «آن چه تابعی است که مشتق دوم آن مساوی خود تابع ضرب در مقداری ثابت باشد؟» البته جواب این سؤال یک تابع نمائی است و از این جا می‌توانیم جواب خود را بدست آوریم. اما آن گروه از ما که قدرت استنباطشان چندان نیرومند نیست، بجای این روش، از روشی دیگر که اطمینان بخش‌تر ولی طولانی‌تر است استفاده می‌کنند و آن روش سری ینهایت از توانهای x است. فرض می‌کنیم که X را بتوان بصورت زیر نمایش داد:

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

و آن را در رابطه (۶) قرار می‌دهیم، نتیجه خواهد بود:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

اگر قرار باشد این دو سری بینهایت بازاء تمام مقادیر x مساوی باشند بایست جزء به جزء با هم مساوی باشند و ضرایب توانهای مساوی دو طرف با هم برابر باشند. بدین ترتیب:

$$2 \times 1 \times a_2 = \alpha^2 a_0$$

$$3 \times 2 \times a_3 = \alpha^3 a_1$$

و بطور کلی

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = \alpha^2 a_n$$

ضرایب زوج را می‌توان برحسب a_0 بیان کرد،

$$a_2 = \frac{\alpha^2}{1 \times 2} a_0$$

$$a_4 = \frac{\alpha^4}{3 \times 4} a_2 = \frac{\alpha^4}{4!} a_0$$

$$a_6 = \frac{\alpha^6}{6!} a_0$$

و بطور کلی برای مقادیر زوج n خواهیم داشت،

$$a_n = \frac{\alpha^n}{n!} a_0 \quad (n \text{ زوج})$$

برای مقادیر فرد n خواهیم داشت،

$$a_3 = \frac{\alpha^3}{2 \times 3} a_1 = \frac{\alpha^3}{3!} \frac{a_1}{\alpha}$$

$$a_5 = \frac{\alpha^5}{5!} \frac{a_1}{\alpha}$$

و بطور کلی برای n فرد

$$a_n = \frac{\alpha^n}{n!} \frac{a_1}{\alpha} \quad (n \text{ فرد})$$

وقتی مقادیر بالا را در رابطه اصلی سری X قرار دهیم، خواهیم داشت،

$$X = a_0 \sum_{\substack{n \\ \text{زوج}}} \frac{\alpha^n}{n!} x^n + \frac{a_1}{\alpha} \sum_{\substack{n \\ \text{فرد}}} \frac{\alpha^n}{n!} x^n$$

یا

$$X = a_0 \sum_{\substack{n \\ \text{زوج}}} \frac{(\alpha x)^n}{n!} + \frac{a_1}{\alpha} \sum_{\substack{n \\ \text{فرد}}} \frac{(\alpha x)^n}{n!}$$

هر چند که مجموع این دو سری بینهایت حل معادله دیفرانسیل (۶) را تشکیل می‌دهد، اگر سری اول را کسینوس هذلولی و سری دوم را بصورت يك سینوس هذلولی باز شناسیم شکل جواب فوق‌العاده بهتر می‌شود.

$$\cosh \alpha x = \sum_{\substack{n \\ \text{زوج}}} \frac{(\alpha x)^n}{n!} = 1 + \frac{(\alpha x)^2}{2!} + \frac{(\alpha x)^4}{4!} + \dots$$

و سری دوم به صورت سینوس هذلولی

$$\sinh \alpha x = \sum_{\substack{n \\ \text{فرد}}} \frac{(\alpha x)^n}{n!} = \alpha x + \frac{(\alpha x)^3}{3!} + \frac{(\alpha x)^5}{5!} + \dots$$

بنابراین می‌توانیم جواب را به این صورت بنویسیم:

$$X = a_0 \cosh \alpha x + \frac{a_1}{\alpha} \sinh \alpha x$$

یا

$$X = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x$$

که در آن ضرایب A و B را که اندکی ساده‌تر اند بجای a_0/α و a_0 قرار داده‌ایم و این دو ثابتی هستند که باید بکمک شرایط حد محاسبه شوند. ثابت تفکیک تا آنجا که جواب معادله ۶ مطرح است يك ثابت دلخواه نیست زیرا در آن معادله ظاهر می‌شود.

شکل دیگری از حل معادله اینست که توابع هذلولی را بر حسب توابع نمائی بنویسیم و جملات مشابه را با هم جمع کنیم و ضرایب اختیاری جدیدی A' و B' را انتخاب کنیم،

$$X = A' e^{\alpha x} + B' e^{-\alpha x}$$

روش حل معادله (۵) نیز مشابه روش فوق است و بدو تابع سری نمائی سینوس و کسینوس منتج می‌شود.

$$Y = C \cos \alpha y + D \sin \alpha y$$

از آنجا مقدار پتانسیل بدین صورت بدست می آید:

$$V = XY = (A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x)(C \cos \alpha y + D \sin \alpha y) \quad (۷)$$

قبل از اینکه يك مسأله فیزیکی را توصیف و ضرایب ثابت معادله (۷) را طوری انتخاب کنیم که با شرایط حد معین شده سازگار باشد، ماهیت فیزیکی میدان پتانسیل مفروض را با انتخاب ساده این ثابتها بررسی کنیم. اگر $A = 0$ و $C = 0$ و $BD = V_0$ قرار دهیم،

$$V = V_0 \sinh \alpha x \sin \alpha y \quad (۸)$$

ضریب $\sinh \alpha x$ برای $x = 0$ مساوی صفر است و با افزایش x تدریجاً بالا می رود و به يك تابع نمائی نزدیک می شود، چون،

$$\sinh \alpha x = \frac{1}{2} (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})$$

جمله $\sin \alpha y$ باعث می شود که پتانسیل در $y = 0$ و $y = \pi/\alpha$ و $y = 2\pi/\alpha$ و غیره صفر شود. بدین ترتیب ما می توانیم صفحاتی هادی با پتانسیل صفر را در $x = 0$ ، $y = 0$ و $y = \pi/\alpha$ قرار دهیم. بالاخره می توانیم معادله سطح هم پتانسیل V_0 را با قراردادن $V = V_0$ در معادله (۸) بدست آوریم،

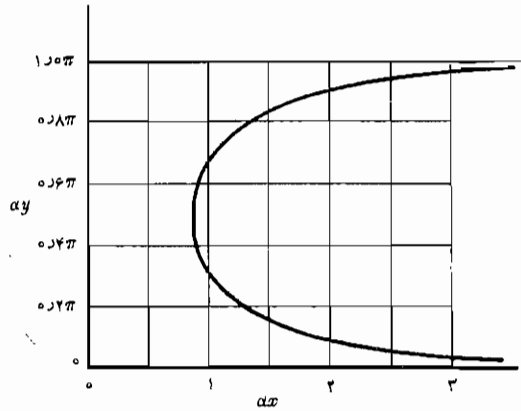
$$\sinh \alpha x \sin \alpha y = 1$$

یا

$$\alpha y = \sin^{-1} \frac{1}{\sinh \alpha x}$$

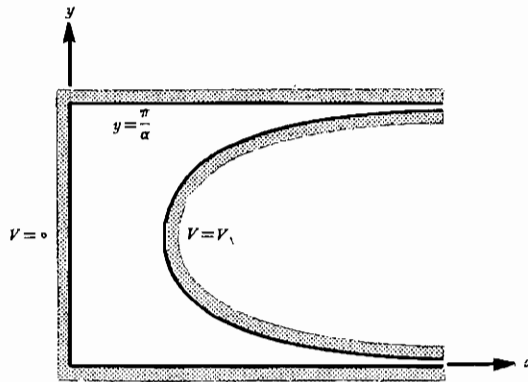
معادله فوق معادله آشنائی نیست ولی به کمک خط کش محاسبه یا جدولهایی می توانیم مقادیر عددی کافی برای رسم αy بر حسب αx بدست آوریم. شکل ۴.۷ يك چنین منحنی را نشان می دهد. بطوری که مشاهده می شود این تابع هنگامی که αy به فاصله صفر و π محدود است، نسبت به خط $\alpha y = \pi/2$ متقارن و دارای دو مقدار است. نتایج حاصل از شکل ۴.۷ مستقیماً در سطوح هادی هم پتانسیل $V = V_0$ و $V = 0$ شکل ۵.۷ منتقل شده است. از آنجائی که پتانسیل تابعی از z نیست، فقط سطح مقطع سطوح نشان داده اند.

بسیار بعید است که از ما خواسته شود که میدان پتانسیل این الکترودها را که



شکل ۴.۷ منحنی تابع دومقداری $\alpha y = \sin^{-1}(1/\sinh \alpha x)$ ، $0 < \alpha y < \pi$

دارای شکل عجیبند پیدا کنیم ولی باید به خاطر داشته باشیم که می توان با ترکیب میدان‌هایی که شکل آنها توسط روابط (۷) و (۸) داده شده‌اند، شرایط حد مسائل عملی‌تر را اقتناع کنیم. و اینک این فصل را با مثالی از این دست پایان می‌دهیم.



شکل ۵.۷ سطح مقطع سطوح هم پتانسیل $V=V_1$ و $V=0$ برای میدان پتانسیل $V = V_1 \sinh \alpha x \sin \alpha y$.

شکل ۶.۷ مسأله‌ای را که باید حل شود نشان می‌دهد. شرایط حد عبارتند از: $V = 0$ در $x = 0$ و $y = 0$ و $y = b$ و $V = V_0$ در $x = d$ برای تمام مقادیر y بین 0 و b . به روشنی مشاهده می‌شود که میدان پتانسیل داده شده توسط رابطه (۸) و نشان داده شده در شکل ۶.۷ دو شرط از چهار شرط حد را اقیاع می‌کند. شرط سوم، معنی $V = 0$ در $y = b$ را می‌توان با انتخاب α اقیاع کرد، زیرا با قراردادن این مقادیر در رابطه (۸) خواهیم داشت،

$$0 = V_0 \sinh \alpha x \sin \alpha b$$

که به ازاء

$$ab = m\pi \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

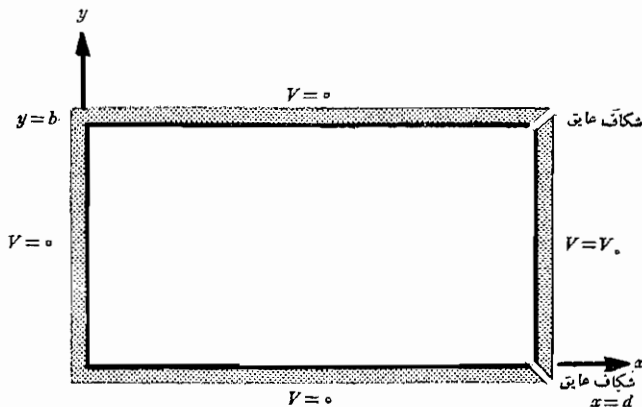
یا

$$\alpha = \frac{m\pi}{b}$$

بدین ترتیب تابع پتانسیل

$$V = V_0 \sinh \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

بی توجه به انتخاب m یا مقدار V_0 پتانسیل صحیح را در $x = 0$ و $y = 0$ و $y = b$



شکل ۶.۷ مسأله پتانسیل که میدان آن از جمع بینهایت میدان بشکل $V = V_0 \sinh \alpha x \sin \alpha y$ بوجود می‌آید. در فصل ۶ میدان مشابهی با روش تکرار مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت.

به ما می دهد. به هیچ طریق نمی توان m یا V_m را طوری انتخاب کرد که برای هر مقدار y بین 0 و b در $x=d$ ، $V=V_0$ ، بنا بر این، می بایست تعداد بینهایت زیادی از این میدانها را که هر کدام دارای مقدار متفاوتی از m و مقدار V_m مربوط به آنست با هم جمع کنیم

$$V = \sum_{m=0}^{\infty} V_m \sinh \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (9)$$

اندیس V_m مشخص این است که این ضریب دامنه برای مقادیر متفاوت m مختلف خواهد بود. با استفاده از آخرین شرط حد خواهیم داشت،

$$V_0 = \sum_{m=0}^{\infty} V_m \sinh \frac{m\pi d}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (0 < y < b, m=1, 2, \dots)$$

از آنجائی که $V_m \sinh (m\pi d/b)$ فقط تابع m است می توان رابطه بالا را با جایگزین کردن c_m بجای آن ساده کرد:

$$V_0 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (0 < y < b, m=1, 2, \dots)$$

این يك سری فوریه سینوسی است و در صورتی که بتوانیم V_0 را بصورت يك تابع متناوب از y تعریف کنیم ضرایب c_m را خواهیم توانست بسا روش معمولی سری فوریه بدست آوریم. از آنجائی که مسأله فیزیکی ما توسط صفحات هادی در $y=0$ و $y=b$ محدود شده است و میدان پتانسیل خارج از این ناحیه مورد علاقه ما نیست، می توانیم پتانسیل در $x=d$ را برای y خارج از حدود 0 تا b به هر نحو دلخواه تعریف کنیم. احتمالاً ساده ترین رابطه تناوبی را می توان با انتخاب فاصله $0 < y < b$ به عنوان نیم دوره تناوب و انتخاب $V = -V_0$ در نیم دوره تناوب دیگر بدست آورد، بطوری که،

$$V = V_0 \quad (0 < y < b)$$

$$V = -V_0 \quad (b < y < 2b)$$

۱. سریهای فوریه تقریباً در هر کتاب مهندسی برق در مورد نظریه مدار مورد بحث قرار می گیرد. نویسنده مطالعه کتاب *Kemmerly* و *Hayt* را که در فهرست مراجع در پایان فصل آمده است به خصوص توصیه می کند.

بنابراین، ضرایب c_m به قرار زیر خواهد بود،

$$c_m = \frac{1}{b} \left[\int_0^b V_0 \sin \frac{m\pi y}{b} dy + \int_b^{2b} (-V_0) \sin \frac{m\pi y}{b} dy \right]$$

که منتج می‌شود به

$$c_m = \frac{4V_0}{m\pi} \quad (m \text{ فرد})$$

$$= 0 \quad (m \text{ زوج})$$

از طرف دیگر داریم $c_m = V_{1m} \sinh(m\pi d/b)$ و بنابراین،

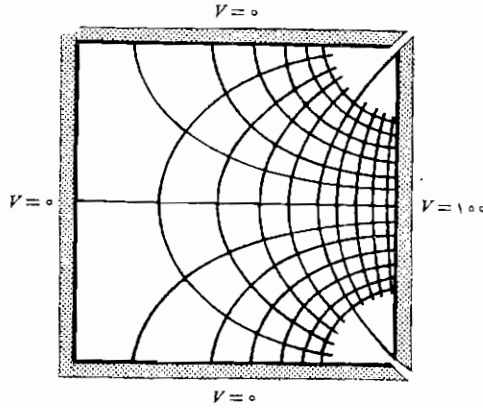
$$V_{1m} = \frac{4V_0}{m\pi \sinh(m\pi d/b)} \quad (m \text{ فقط فرد})$$

که می‌توان آن را در رابطه (۹) قرار داد و تابع پتانسیل مورد نظر را بدست آورد،

$$V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{\substack{\infty \\ \text{فرد}}} \frac{1}{m} \frac{\sinh(m\pi x/b)}{\sinh(m\pi d/b)} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (10)$$

نقشه این میدان را می‌توان با تعیین مقدار رابطه (۱۰) در تعدادی از نقاط و رسم هم پتانسیلها از طریق درون یابی بین این نقاط بدست آورد. اگر $b = d = 100$ و $V_0 = 100$ مسئله با مسأله‌ای که به عنوان مثال در بحث روش تکرار بررسی شد مشابه می‌شود. برای آزمایش یکی از نقاط شبکه در آن مسأله فرض می‌کنیم $x = d/4 = b/4$ و $y = b/2 = d/2$ و خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} V &= \frac{400}{\pi} \sum_{\substack{\infty \\ \text{فرد}}} \frac{1}{m} \frac{\sinh m\pi/4}{\sinh m\pi} \sin m\pi/2 \\ &= \frac{400}{\pi} \left(\frac{\sinh \pi/4}{\sinh \pi} - \frac{1}{3} \frac{\sinh 3\pi/4}{\sinh 3\pi} + \frac{1}{5} \frac{\sinh 5\pi/4}{\sinh 5\pi} - \dots \right) \\ &= \frac{400}{\pi} \left(\frac{0.86887}{11.8549} - \frac{0.2228}{3 \times 6.19578} + \dots \right) \\ &= \frac{400}{\pi} (0.07222 - 0.000028 + \dots) \\ &= 9.541V \end{aligned}$$



شکل ۷.۷ نقشه میدان مربوط به پتانسیل

$$V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{\substack{m, \text{ فرد}}}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\sinh(m\pi x/b)}{\sinh(m\pi d/b)} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

$V_0 = 100V$ و $b = d$ با

در شکل ۷.۷ خطوط هم پتانسیل به فواصل ۱۰ ولت و خطوط شار عمود بر آن رسم شده‌اند تا نقشه‌ای منحنی الخط بدست آید.

مطالعی که در این بحث جواب حاصلضربی مورد بررسی قرار گرفت از بسیاری موارد قبلی دشوارترند و از این گذشته از طریق آنها با سه فکر جدید آشنا شدیم. اولین روش جدید این فرض بود که می‌توان پتانسیل را بصورت حاصلضرب یک تابع x و یک تابع y بیان کرد و در نتیجه معادله لاپلاس را بدو معادله دیفرانسیلی معمولی ساده‌تر تجزیه کرد. روش جدید دوم این بود که جواب یکی از معادله‌های دیفرانسیل معمولی را یک سری نامحدود در نظر بگیریم. و سرانجام مثالی را بررسی کردیم که در آن جواب معادله را بصورت یک سری نامحدود از جوابهای ساده‌تر فرض کردیم و هر کدام از این جوابها دارای دامنه مختلف و تغییرات متفاوت در امتداد یکی از مختصات بود. تمام این روشها را می‌توان در تمام دستگاههای مختصات و نیز در مسائلی که پتانسیل با هر سه مختصات تغییر می‌کند بکار برد.

در اینجا ما فقط موضوع را مطرح کرده‌ایم. اطلاعات بیشتر را می‌توان از مراجعی که فهرست آنها در پایان فصل درج شده است و در عده‌ای از آنها چند صد صفحه به حل معادله لاپلاس اختصاص داده شده است بدست آورد.

تمرین ۶.۷

اگر جواب يك معادلهٔ دیفرانسیل بصورت سریهای نامحدود، به روابط تکراری زیر منجر شود، مجموع سریها را وقتی $a_0 = 0.5$ و $x = 0.1$ باشد، به دست آورید

$$a_{n+1} = -[(n+1)/(n+2)]a_n \text{ (الف)}$$

$$a_{n+2} = [(n+5)/(n+1)]a_n \text{ (ب)}$$

جوابها: 0.477 و 0.526

ابعاد مخزن مستطیلی شکل ۶.۷ عبارتند از: $b = d = 0.1 \text{ m}$ و $V_0 = 100 \text{ V}$ ، V را در نقاط زیر به دست آورید: (الف) $x = y = 0.1$ (ب) $x = y = 0.2$

جوابها: 1.094 و 4.37 ولت

مراجعی که توصیه می‌شوند

- 1- Dekker, A. J. (به مراجع توصیه شدهٔ فصل ۵ مراجعه شود):
 - 2- Hayt, W. H., Jr., and J. E. Kemmerly: «Engineering Circuit Analysis,» McGraw-Hill Book Company, New York, 1971.
 - 3- Pugh, E.M., and E.W. Pugh: «Principles of Electricity and Magnetism,» 2d ed. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1970.
- این کتاب الکتروسیسته و مغناطیس را ازدید فیزیکی بررسی می‌کند ولی برای دانشجویان مهندسی برق خواندن آن آسان خواهد بود. در فصل ۴ حل معادلهٔ لاپلاس باروشهائی چند مورد بررسی قرار می‌گیرد.
- 4- Ramo, S., J.R. Whinnery, and T. Van Duzer (به مراجع توصیه شدهٔ فصل ۶ مراجعه شود). در فصل ۳ این روشهای حل معادلهٔ لاپلاس بطور کامل و در سطح بالا مورد بررسی قرار گرفته‌اند.
 - 5- Smythe, W.R.: «Static and Dynamic Electricity,» 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1950.
- در فصل ۴ این کتاب نظریهٔ پتانسیل در سطح بالا مورد بررسی قرار گرفته است.
- 6- Weber, E. (به مراجع توصیه شدهٔ فصل ۶ مراجعه شود). در این کتاب تعداد بیشماری حل میدانهای پتانسیل با مراجع اصلی ارائه شده است.

مسائل

- ۱- ضریب پذیرش در يك فضای غیر متجانس خالی از بار باید بجه نحوی تغییر کند تا معادله لاپلاس همواره صادق باشد؟
- ۲- $\nabla^2(xV)$ را در مختصات قائم بسط دهید.
- ۳- از تشابه جریان که در بخش ۳.۶ مورد بحث قرار گرفت و معادله پیوستگی استفاده کنید و شرایط اعتبار معادله لاپلاس برای V_0 در يك ماده هادی متجانس را تعیین کنید.
- ۴- $\nabla^2 r$ را در: (الف) مختصات استوانه‌ای و (ب) در مختصات کروی بدست آورید.
- ۵- (الف) میدان پتانسیل $V = 10(r^k + r^{-p}) \cos \lambda \varphi$ در مختصات استوانه‌ای داده شده است. مقادیر k و p را طوری تعیین کنید که V از معادله لاپلاس تبعیت کند. (ب) مقادیر مثبتی برای k و p انتخاب کنید و V و $|\vec{E}|$ را در $r = 1$ ، $\varphi = \pi/6$ به دست آورید.
- ۶- (الف) نشان دهید که میدان پتانسیل $V = (20/r^2) \sin \theta \cos \varphi$ در مختصات کروی از معادله لاپلاس تبعیت می‌کند. (ب) سطح هم پتانسیل صفر ولت را توصیف کنید. (پ) سطح هم پتانسیل $V = 10$ را در يك هشتم اول فضا توصیف کنید.
- ۷- چه مقدار بار باید در داخل يك کره واحد به مرکز مبدأ مختصات قرار بگیرد تا میدان پتانسیل $V = -6r^5/\epsilon_0$ را برای $r \leq 1$ ایجاد کند؟
- ۸- اگر بدانیم که V_1 و V_2 دو تابعند که جوابهای معادله لاپلاس را در مختصات کروی برای $a < r < b$ تشکیل می‌دهند و توزیع پتانسیل آنها روی سطوح $r = a$ و $r = b$ به طریقی است که از پیش معین شده است، تعیین کنید که آیا: (الف) $V_1 + V_2$ و $V_1 - V_2$ از معادله لاپلاس برای $a < r < b$ تبعیت می‌کنند یا نه و (ب) $V_1 + V_2$ و $V_1 - V_2$ توزیع مقرر پتانسیل را روی سطوح $r = a$ و $r = b$ دارند یا نه و (پ) $V_1 + V_2$ و $V_1 - V_2$ با V_1 و V_2 معادلتند یا نه.
- ۹- (الف) نشان دهید که $V_1 = C/r$ از معادله لاپلاس در مختصات کروی تبعیت می‌کند. (ب) نشان دهید که روی سطح $r = a$ ، $V_1 = C/a$ (پ) نشان دهید که $V_2 = C/r + 5/r - 5/a$ از معادله لاپلاس تبعیت می‌کند. (ت) نشان دهید که روی سطح $r = a$ ، $V_2 = C/a$ (ث) از آنجائی که V_1 معادل V_2 نیست، چرا قضیه منحصر به فرد بودن صدق نمی‌کند؟
- ۱۰- اگر بدانیم که $V = 100V$ و $V = f(x)$ در $x = 0$ و $E_x = 100V/m$ در $x = 0$ ، معادله لاپلاس را در يك عایق متجانس $\epsilon = 6\epsilon_0$ حل کنید.

۱۱- $V(x, y, z)$ و $\vec{E}(x, y, z)$ را در یک خازن متوازی صفحه که سطح هم پتانسیل $V=100$ آن از مبدأ می‌گذرد و سطح صفر ولت آن روی صفحه $x+2y-5z=8$ قرار دارد بدست آورید.

۱۲- جواب معادله لاپلاس را در مختصات استوانه‌ای در فضای آزاد بدست آورید در صورتی که بدانیم که $V=V(r)$ و اختلاف پتانسیل بین نقاط $r=2\text{m}$ و

$$r=4\text{m} \text{ برابر } 20\text{ V} \text{ است در حالی که در } r=3\text{m}, V=1000\text{V}$$

۱۳- فضای بین دو هادی متحدالمحور با شعاعهای ۱ سانتیمتر و ۵ سانتیمتر با عایق غیرمتجانس $\epsilon = \epsilon_0(1+100r)$ پر شده است. اگر هادی داخلی ۱۰۰ ولت از هادی خارجی مثبت تر باشد، (الف) $E(r)$ را در $r=3\text{cm}$ بدست آورید و (ب) $V(r)$ را تعیین کنید.

۱۴- دو صفحه هادی شعاعی، مشابه آنچه در شکل ۱.۷ نشان داده شده است، در $\varphi = 0^\circ$ و $\varphi = 90^\circ$ قرار دارند، اگر در $\varphi = 30^\circ$ و در $r=5\text{cm}$ ، $V=0$ باشد \vec{E} و V را بدست آورید.

۱۵- (الف) با صرف نظر کردن از اثر لبه‌ها ظرفیت بین دو صفحه هادی را که در هوا قرار دارند و در مختصات استوانه‌ای به وسیله $\varphi = 20^\circ$ و $\varphi = 25^\circ$ و $0 < z < 1$ ، $0.0001 < r < 0.02\text{m}$ مشخص می‌شوند تعیین کنید. (ب) $|E_\varphi|$ را در $r=0.1$ و $\varphi = 22.5^\circ$ به دست آورید. (پ) ظرفیت را وقتی که یکی از صفحات به اندازه 5° متمایل شود به طوری که دو صفحه موازی باشند و شدت میدان الکتریکی بین صفحات یکنواخت و مساوی مقدار قسمت (ب) باشد تعیین کنید.

۱۶- دو صفحه هادی واقع در هوا در مختصات استوانه‌ای با $\varphi = 0$ و $\varphi = \pi/2$ و $10^{-3} < r < 1\text{m}$ و $0 < z < 1\text{m}$ مشخص شده‌اند. ظرفیت بین آن دو را به دست آورید.

۱۷- (الف) معادله لاپلاس را برای میدان پتانسیل در ناحیه متجانس بین دو کره هادی متحدالمرکز به شعاعهای a و b که $b > a$ است حل کنید بشرط اینکه $V=0$ در $r=b$ و $V=V_0$ در $r=a$ (ب) ظرفیت بین آن دو را به دست آورید.

۱۸- دو کره هادی متحدالمرکز، $r=0.02$ و $r=0.04$ متر به وسیله عایق متجانس $\epsilon_R=3$ از هم جدا شده‌اند. کره داخلی حامل بار کل 10^{-8}C است و پتانسیل آن 200V است. پتانسیل کره خارجی و شدت میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به فاصله مساوی از دو سطح کره به دست آورید.

۱۹- معادله لاپلاس را در مختصات کره بطور جداگانه در دو ناحیه متفاوت $1 < r < 3$

که در آن $\varepsilon_R = 2$ و $3 < r < 4$ که در آن $\varepsilon_k = 1$ حل کنید. از ناحیه داخلی از شرائط مرزی $V = 100$ در $r = 1$ استفاده کنید و در ناحیه خارجی پتانسیل را $V = 0$ در $r = 4$ بگیرد و سپس جوابها را طوری تعیین کنید که مقادیر پتانسیل در $r = 3$ معادل شود و نیز شرائط متناسب مرزی برای عایق افناع شوند، V را در نقاط زیر بدست آورید: (الف) $r = 2$ و (ب) $r = 3$ و (پ) $r = 3.5$.

۲۰- در مختصات کروی $V = f(\theta)$. V را در صورتی به دست آورید که $V = 10$ در $\theta = 90^\circ$ و $E_\theta = 500$ در $\theta = 30^\circ$ و $r = 0.4$.

۲۱- دو سطح هادی مخروطی، که $V = 10V$ در $\theta = 20^\circ$ و $V = 3V$ در $\theta = 40^\circ$ به وسیله یک ماده هادی متجانس با $\sigma = 0.02 \text{ C/m}^2$ از هم جدا شده اند. (الف) میدان پتانسیل را به دست آورید. (ب) جریان کل را که از یک رأس به رأس دیگر عبور می کند در ناحیه $0 < \varphi < 90^\circ$ و $0.1 \text{ m} < r < 0.2 \text{ m}$ و (پ) $1.01 \text{ m} < r < 1.02 \text{ m}$ به دست آورید.

۲۲- اگر $C/m^3 (2 + \sin \pi x) \rho = 10^{-9}$ و $V = 0$ در $x = 0$ و $x = 1$ باشد معادله پواسن را در مختصات قائم برای $0 < x < 1 \text{ m}$ به دست آورید به فرض اینکه $\varepsilon = \varepsilon_0$ مقدار V در $x = 1/2$ چه اندازه است؟

۲۳- ناحیه بین دو استوانه هادی متحدالمرکز با شعاعهای ۲ سانتیمتر و ۵ سانتیمتر شامل باری حجمی است که طبق معادله $C/m^3 (1 + 10r) \rho = 10^{-8}$ توزیع شده است. $\varepsilon = \varepsilon_0$. اگر E_r و V هر دو روی استوانه داخلی صفر باشند V را روی استوانه خارجی به دست آورید.

۲۴- فرض کنید V تابعی از z نیست و از حل حاصلضربی معادله لاپلاس $V = XY$ به دست می آید. تعیین کنید کدام یک از توابع زیر در عین حال حلهای معادله لاپلاس نیز هستند: (الف) $V = X$ و (ب) $V = X + Y$ و (پ) $V = XY + x$ و (ت) $V = 1/\sqrt{XY}$ و (ث) $V = (XY)^2$.

۲۵- پتانسیل مرکز مخزن مربع شکل مسأله ۱۴ فصل ۶ را تعیین و آنرا با مقداری که از راه حل تکراری $(37V)$ به دست می آید مقایسه کنید.

۲۶- $V = 100 \sin x \cosh y$ به ازا $0 \leq x \leq \pi$ داده شده است. (الف) نشان دهید که V در معادله لاپلاس صدق می کند. (ب) سطح هم پتانسیل $V = 0$ را تعیین کنید. (پ) سطح هم پتانسیل ۲۰۰ ولت را رسم کنید. (ت) سطح هم پتانسیل $V = 50$ را رسم کنید.

۲۷- برای مخزن مستطیل شکل تصویر ۶.۷ بجای پتانسیل ثابت در $x = d$ یک پتانسیل سینوسی در نظر بگیرید، $V(x=d) = V_0 \sin(\pi y/b)$ ، پتانسیلها و ابعاد دیگر

ثابت باقی می‌مانند. (الف) V را به دست آورید (ب) پتانسیل را در مرکز مخزن برای $b = d$ و $V_0 = 200V$ محاسبه کنید.

۲۸- در مقاله

G. M. RoYer, A Monte Carlo Procedure for Potential Theory Problems, *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-19, Oct. 1971, pp. 813-818

معادله (۱۰) و را برای میدان پتانسیل $V = xy - 6 + 2y - 3x$ با انتخاب دایره‌ای به شعاع $r_0 = 2$ به مرکز مبدأ محاسبه کنید و نشان دهید که نتیجه درست است.

۲۹- با مراجعه به بحث مربوط به استفاده از تصاویر در فصل ۴ کتاب Pugh and Pugh (به مراجع توصیه شده در این فصل مراجعه شود)، نیروی وارد بر یک الکترون و شتاب آن را به فاصله $10^{-10}m$ از یک صفحه هادی کامل در فضا محاسبه کنید.



میدان مغناطیسی پایدار

تا به حال می‌بایست با مفهوم میدان آشنا شده باشیم. از زمانی که اول بار قانون تجربی مربوط به نیروی بین دو بار نقطه‌ای را پذیرفتیم و شدت میدان الکتریکی را نیروی وارد بر واحد بار آزمایشی در حوالی باری دیگر تعریف کردیم با میدانهای متعددی آشنا شده‌ایم. این میدانها پایه فیزیکی واقعی ندارند چون اندازه‌گیریهای فیزیکی همیشه می‌بایست بر حسب نیروهای وارد بر بارها در دستگاههای آشکارگر انجام گیرد این بارها که منبع میدانند باعث اعمال نیروهای قابل اندازه‌گیری بر بارهای دیگری می‌شوند که بارهای آشکارگر دانسته می‌شوند. اینکه ما میدانی را به بارهای منبع نسبت دهیم و تأثیر این میدان را روی بارهای آشکارگر تعیین کنیم صرفاً نوعی تقسیم مسأله اصلی به دو قسمت مجزا به منظور سهولت تعبیر است.

ما مطالعه میدان مغناطیسی را با تعریف خود میدان شروع خواهیم کرد و نشان خواهیم داد چگونه این میدان از توزیع جریان الکتریکی به وجود می‌آید. تأثیر این میدان بر جریانهای دیگر، یعنی قسمت دوم مسأله فیزیکی، در فصل بعد مورد بحث قرار خواهد گرفت. همانند مبحث میدانهای الکتریکی در اینجا نیز بحث اولیه خود را به شرایط فضای آزاد محدود، و بحث در باره تأثیر محیط مادی را مسکول به فصل بعد خواهیم کرد.

رابطه میدان مغناطیسی پایدار بامنبع آن پیچیده‌تر از رابطه میدان الکتریکی با منبع آن است. خواهیم دید که لازم است چندین قانون را بطور موقت بر اساس ایمان محض قبول کنیم و اثبات آنها را به بخش آخر (و نسبتاً مشکل) این فصل

می‌گذاریم. در صورتی که خواننده با میدانهای مغناطیسی آشنائی کافی ندارد می‌تواند از این بخش صرف نظر کند. این قسمت بدین منظور در اینجا گنجانده شده است که قبول قوانین را ساده‌تر کند و به دیر باوران و دانشجویان پیشرفته نشان دهد که این قوانین به اثبات می‌رسند.

۱۰۸ قانون بیو - ساوار^۱

مشأ میدان مغناطیسی پایدار ممکن است يك آهنربای د ثمی یا يك میدان الکتريکی که با زمان بطور خطئی تغییر می‌کند یا جریان مستقیم باشد. ما بطور کلی آهنربای دائم را نادیده می‌گیریم و میدان الکتريکی متغیر با زمان را به بحث بعدی موکول می‌کنیم. روابط فعلی ما در باره میدان مغناطیسی ناشی از يك عنصر ديفرانسیلی جریان مستقیم خواهد بود.

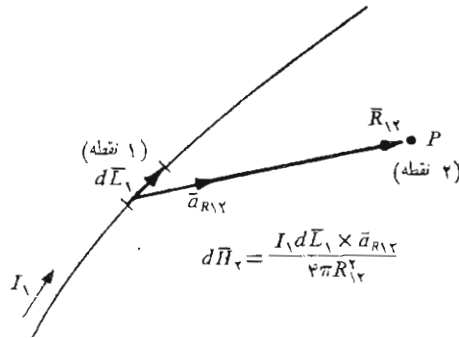
ممکن است این عنصر ديفرانسیلی جریان را جزئی بینهایت کوچک از يك هادی رشته‌ای حامل جریان تلقی کنیم و این هادی رشته‌ای به نوبه خود يك هادی استوانه‌ای با مقطع دایره‌ای است که شعاع آن به سمت صفر میل کرده است. فرض می‌کنیم که جریان I در طول dL ، که برداری ديفرانسیلی است جاری باشد (قانون تجربی بیو - ساوار^۲ می‌گوید در هر نقطه دلخواه P اندازه شدت میدان مغناطیسی ناشی از يك عنصر ديفرانسیلی متناسب است با حاصلضرب شدت جریان و اندازه طول عنصر ديفرانسیلی و سینوس زاویه بین رشته و خط رابط آن به نقطه P . اندازه شدت میدان مغناطیسی متناسب است با عکس مجذور فاصله بین عنصر ديفرانسیلی و نقطه P . جهت شدت میدان مغناطیسی عمود بر صفحه حاوی رشته ديفرانسیلی و خط رابط بین رشته و نقطه P است؛ از دو جهت ممکن عمود جهتی را می‌بایست انتخاب کرد که معرف جهت پیشرفت پیچ راست گردی است که از dL طی زاویه کوچکتر به طرف خط رابط بین رشته و P گرداننده شود^۳ در صورتی که آحاد منطقی شده mks بکار برده شود ضریب تناسب مساوی $1/4\pi$ خواهد بود.

قانون بیو - ساوار را که با حدود ۱۲۰ کلمه در بالا توصیف شد می‌توان بطور اختصار با استفاده از روش برداری بصورت زیر نوشت،

$$d\vec{H} = \frac{Id\vec{L} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2} \quad (1)$$

1- Biot Savart

۱. بیو و ساوار همکاران آمپر بودند و هر سه زمانی استاد Collég de France بودند. قانون بیو - ساوار در سال ۱۸۲۰ پیشنهاد شد.



شکل ۱۰۸ قانون بیو- ساوار شدت میدان مغناطیسی $d\vec{H}_\psi$ ناشی از عنصر دیرانسیلی جریان $I_1 d\vec{L}_1$ را بیان می‌کند. جهت $d\vec{H}_\psi$ به طرف داخل صفحه کاغذ است.

واضح است که واحد شدت میدان مغناطیس \vec{H} آمپر بر متر یا به اختصار (A/m) است. شکل ۱۰۸ نمایش هندسی آن است. با استفاده از اندیسه‌ها می‌توان تعیین کرد که هر یک از کمیات رابطه (۱) مربوط به چه نقطه‌ای‌اند. اگر محل عنصر جریان را نقطه ۱ و محل نقطه P را، که در آنجا می‌خواهیم میدان را تعیین کنیم، نقطه ۲ بنامیم،

$$\boxed{d\vec{H}_\psi = \frac{I_1 d\vec{L}_1 \times \vec{a}_{R12}}{4\pi R_{12}^2}} \quad (2)$$

قانون بیو- ساوار گاهی قانون آمپر برای عنصر جریان نیز نامیده می‌شود، ولی ما اسم قبلی را حفظ خواهیم کرد تا احتمالاً با قانون مداری آمپر، که در آینده به آن بر خواهیم خورد، اشتباه نشود. از بعضی جهات، قانون بیو- ساوار قانون کولن را که برای یک عنصر دیرانسیلی بار نوشته شده باشد به خاطر می‌آورد.

$$d\vec{E}_\psi = \frac{dQ_1 \vec{a}_{R12}}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2}$$

هر دو قانون بستگی با مجذور فاصله را نشان می‌دهند و هر دو به رابطه‌ای

خطی بین منبع و میدان دلالت می کنند. اختلاف اصلی در جهت میدان ظاهر می شود. قانون بیو-ساووار را بصورتی که با روابط (۱) و (۲) توصیف شده است نمی توان از طریق آزمایش تحقیق کرد، چون تفکیک یک عنصر دیفرانسیلی جریان غیر ممکن است. ما توجه خود را فقط به جریانهای مستقیم که چگالی بار آنها تابع زمان نیست محدود کرده ایم بنابراین معادله پیوستگی بخش ۲۰۵ یعنی معادله (۲)

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

نشان می دهد که

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

یا چنانچه قضیه دیورژانس را بکار بریم

$$\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

مقدار کل جریانی که از یک سطح بسته عبور می کند مساوی صفر است و این شرط فقط در صورتی برقرار خواهد بود که جریان در امتداد مسیر بسته ای باشد. همین جریان جاری در مداری بسته، و نه یک عنصر دیفرانسیلی است که باید منبع جریان آزمایشی ما باشد.

در نتیجه قانون بیو-ساووار فقط به صورت انتگرالی قابل تحقیق تجربی

است.

مکانیزم بیو-ساووار

$$\vec{H} = \oint \frac{Id\vec{L} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2}$$

(۳)

البته روابط (۱) و (۲) به رابطه انتگرالی (۳) منجر می شوند ولی از روابط دیفرانسیلی دیگری هم می توان همین روابط انتگرالی را بدست آورد. هر جمله ای را که انتگرال آن حول مسیر بسته مساوی صفر باشد می توان به رابطه (۱) اضافه کرد. یعنی هر میدان ابقائی را می توان به رابطه (۱) افزود. گرادیان هر میدان شمارواره ای (اسکالر) همیشه به میدانی ابقائی منجر می شود و بنابراین می توانیم جمله ∇G را به (۱) اضافه کنیم، که در آن G یک تابع شمارواره ای (اسکالر) کلی است. بی آنکه مختصر تغییری در (۳) حاصل شود.

این کیفیت لازم برای روابط (۱) و (۲) را متذکر می شویم تا نشان دهیم

که چنانچه بعد سؤاالهای بی معنی، و غیر قابل تحقیق یا آزمایشی، در باره نیروی وارد

از طرف يك عنصر دیفرانسیلی جریان بر عنصری دیگر بکنیم، باید منتظر جوابهای بی معنایی باشیم.

قانون بیو-ساوار را همچنین ممکن است بر حسب منابع توزیع شده مثلاً چگالی جریان \vec{J} و چگالی جریان سطحی \vec{K} ، که بزودی آن را تعریف خواهیم کرد بیان کرد. جریان سطحی در لایه‌ای بینهایت نازک برقرار است و بنابراین چگالی جریان، که بر حسب آمپر بر متر مربع اندازه گیری می‌شود، بینهایت است. از طرف دیگر چگالی جریان سطحی بر حسب آمپر بر متر عرض اندازه گیری و با علامت \vec{K} نشان داده می‌شود. اگر چگالی جریان سطحی یکنواخت باشد مقدار کل جریان در هر عرض b عبارت است از:

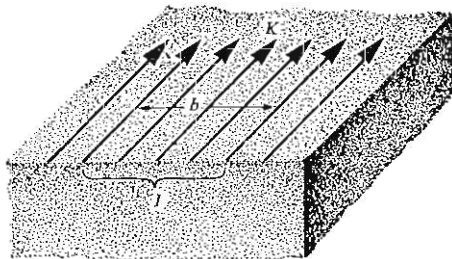
$$I = Kb$$

اینجا فرض کرده‌ایم که عرض b در جهت عمود بر جریان اندازه گیری شده است. وضعیت هندسی در شکل ۲.۸ نشان داده شده است. برای چگالی جریان سطحی غیر یکنواخت می‌بایست از انتگرال گیری استفاده کرد:

$$I = \int K dn \quad (۴)$$

اینجا dn عنصر دیفرانسیلی مسیری است که جریان در عرض آن جاری است. بنابراین عنصر دیفرانسیلی جریان $I dL$ را، که dL در جهت جریان است، می‌توان بر حسب چگالی جریان سطحی \vec{K} یا چگالی جریان \vec{J} بیان کرد،

$$I dL = \vec{K} dS = \vec{J} dv \quad (۵)$$



شکل ۲.۸ مقدار کل جریان I در عرض قائم b که در آن جریان سطحی یکنواخت K برقرار است برابر Kb است.

و قانون بیو-ساوار را به صورت زیر نوشت:

$$\vec{H} = \int_s \frac{\vec{K} \times \vec{a}_R dS}{\psi \pi R^2} \quad (۶)$$

و

$$\vec{H} = \int_{حجم} \frac{\vec{J} \times \vec{a}_R dv}{\psi \pi R^2} \quad (۷)$$

کاربرد قانون بیو-ساوار را می‌توان با در نظر گرفتن یک رشته (فیلامان) مستقیم بینهایت دراز روشن کرد. ابتدا رابطه (۲) را بکار می‌بریم و سپس انتگرال می‌گیریم. البته این کار معادل این است که از ابتدا رابطه انتگرالی (۳) بکار برده شود.

با مراجعه به شکل ۳.۸ تقارن این میدان واضح می‌گردد. میدان نمی‌تواند بر حسب z یا φ تغییر کند. بنا بر این نقطه (۲) که می‌خواهیم شدت میدان را در آن تعیین کنیم، ممکن است روی صفحه $z = 0$ انتخاب شود و بردار واحد $\vec{a}_{R_{12}}$ به کمک رابطه

$$\vec{R}_{12} = r\vec{a}_r - z\vec{a}_z$$

از

$$\vec{a}_{R_{12}} = \frac{r\vec{a}_r - z\vec{a}_z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

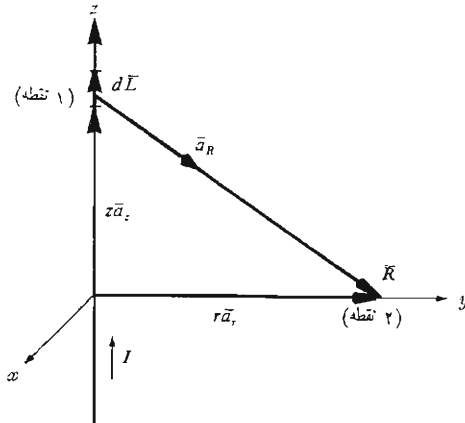
به دست می‌آید. جهت $d\vec{L}$ در امتداد جریان I است یعنی

$$d\vec{L} = dz \vec{a}_z$$

و رابطه (۲) بصورت

$$d\vec{H}_\varphi = \frac{I dz \vec{a}_z \times (r\vec{a}_r - z\vec{a}_z)}{\psi \pi (r^2 + z^2)^{3/2}}$$

۱. می‌توان فرض کرد که مسیر بسته جریان شامل رشته موازی دیگری برای برگشت جریان باشد که به فاصله بینهایت دور از رشته اول قرار دارد. امکان نظری دیگری عبارتست از فرض کردن هادی خارجی یک کابل هم محور با شعاع بینهایت. عملاً مسأله غیر ممکن است ولی باید دانست که جواب ما در نزدیکی یک سیم مستقیم طولانی که دارای مسیر برگشتی در فاصله دور باشد به اندازه کافی دقیق خواهد بود.



شکل ۳۰۸ یک رشته بی نهایت دراز حاوی جریان مستقیم I . میدان در نقطه (۲) عبارت است از $\vec{H} = (I/2\pi r)\vec{a}_\varphi$

نوشته می‌شود و برای انتگرال مربوط به آن خواهیم داشت:

$$\vec{H}_\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I dz \vec{a}_z \times (r\vec{a}_r - z\vec{a}_z)}{4\pi(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r dz \vec{a}_\varphi}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

اینجا برداریکه \vec{a}_φ زیر علامت انتگرال با اوست بررسی شود چون این بردار برخلاف بردارهای واحد دستگاه مختصات قائم همیشه ثابت نیست. یک بردار هنگامی ثابت است که اندازه و جهت آن هر دو ثابت باشند. بردار واحد مسلماً دارای اندازه‌ای ثابت است ولی جهت آن ممکن است تغییر کند. در اینجا \vec{a}_φ نه با r یا z بلکه با φ متغیر است. خوشبختانه انتگرال گیری بر حسب z است و در این حالت \vec{a}_φ ثابت است و می‌توان آنرا از علامت انتگرال خارج کرد.

$$\begin{aligned} \bar{H}_\varphi &= \frac{I r \bar{a}_\varphi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{I r \bar{a}_\varphi}{4\pi} \left. \frac{z}{r^2 \sqrt{r^2 + z^2}} \right|_{-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

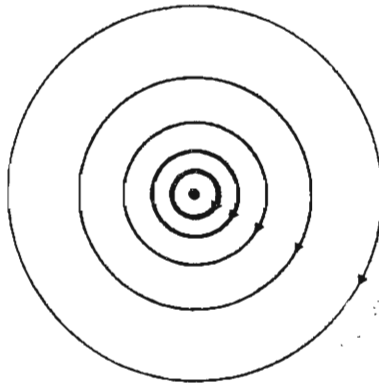
و

ساختار میدان مغناطیسی

$$\boxed{H_\varphi = \frac{I}{4\pi r} \bar{a}_\varphi}$$

(۸)

اندازه میدان تابع φ یا z نیست و به نسبت عکس فاصله از رشته تغییر می‌کند. شدت میدان مغناطیس در جهت محیط دایره است بنا بر این خطوط سیلان دو اثری حول رشته اند که در مقطع عرضی بصورت شکل ۴۰۸ دیده می‌شوند. فاصله بین خطوط سیلان به طور مستقیم با شعاع یا بطور معکوس با اندازه \bar{H} متناسب است. به طسور صریح تر، خطوط سیلان با در نظر داشتن مربعهای منحنی الاضلاع کشیده شده اند. هنوز عنوانی برای دسته خطوطی که عمود بر خطوط شار مدور باشند نداریم ولی فاصله بین خطوط شار طوری تنظیم شده است که با



شکل ۴۰۸ خطوط سیلان شدت میدان مغناطیسی حول رشته‌ای بینهایت دراز که حامل جریان مستقیم I باشد. جهت I به طرف داخل صفحه کاغذ است.

۱. اگر نمی‌توانید صبر کنید به بخش ۶.۸ مراجعه کنید.

افزودن این دسته دوم خطوط مجموعه‌ای از مربعهای منحنی الاضلاع بوجود آید. مقایسه شکل ۴.۸ با نقشه میدان الکتریکی حول يك بار خطی بینهایت طولی نشان می‌دهد که خطوط سیلان میدان مغناطیسی دقیقاً متناظر با سطوح هم پتانسیل میدان الکتریکی و دسته خطوط بی نام متعامد (که در شکل کشیده نشده‌اند) میدان مغناطیسی متناظر با خطوط سیلان میدان الکتریکی‌اند. این شباهت اتفاقی نیست ولی قبل از بررسی عمیقتر درباره تشابه بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی باید بر مفاهیم متعدد دیگری تسلط یابیم.

استعمال قانون بیو - ساوار به منظور پیدا کردن میدان \vec{H} از بسیاری جهات شبیه کاربرد قانون کولن به منظور تعیین \vec{E} است. هر يك از این دو روش مستلزم تعیین يك انتگرال ده (اینترنت) اندکی پیچیده شامل کمیات برداری و بعد يك عمل انتگرال گیری است. در مبحث مربوط به قانون کولن تعدادی مثال از جمله میدانهای بار نقطه‌ای و بار خطی و بار لایه‌ای را حل کردیم. قانون بیو - ساوار را می‌توان برای حل مسائل مشابهی در میدانهای مغناطیسی به کار برد و اکنون بعضی از این مسائل بجای اینکه به عنوان مثال در اینجا بررسی شوند در آخر فصل به عنوان مسأله داده شده‌اند.

يك نتیجه مفید میدان يك عنصر جریان با طول محدود است که در شکل ۵.۸ نشان داده شده است. می‌بینیم که ساده‌ترین روش بیان \vec{H} بر حسب زوایای α_1 و α_2 است که در شکل نشان داده شده است (به مسأله ۱ آخر فصل مراجعه شود). نتیجه به صورت زیر است،

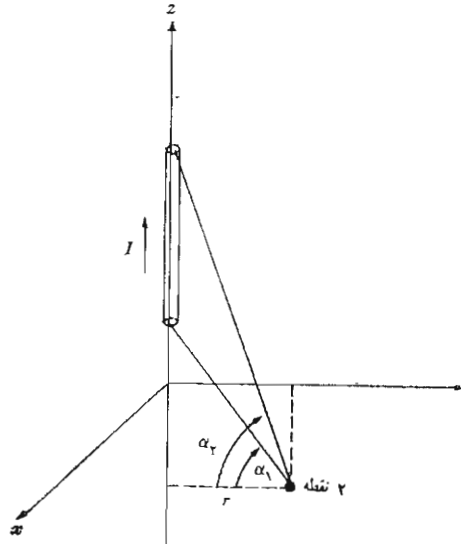
$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \vec{a}_\phi \quad (9)$$

اگر يك یا هر دو انتهای عنصر زیر نقطه ۲ باشد، α_1 یا α_2 هر دو منفی خواهند بود.

از رابطه (۹) می‌توان برای محاسبه شدت میدان مغناطیسی حاصل از رشته‌های حامل جریان که به صورت پاره خطهای راست دنبال یکدیگر قرار دارند استفاده کرد.

تمرین ۱.۸

نمو میدان مغناطیسی ناشی از عنصر جریان $I \Delta \vec{L} = 4\pi \times 10^{-4} \vec{a}_\phi$ را که در نقاط زیر قرار دارد در دستگاه مختصات قائم بدست آورید. (الف) $(0, 0, 2)$ و (ب) $(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ و (پ) $(1, 2, 3)$.



شکل ۵.۸ شدت میدان مغناطیسی ناشی از رشتهٔ محدود جریاندار روی محورها برابر است با $(I/4\pi r)(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)\bar{a}_\phi$

جوابها: $25\bar{a}_z$ و $25\bar{a}_z$ و $59.28\bar{a}_z$ و $-71.7\bar{a}_y - 35.9\bar{a}_x$ $\mu\text{A}/\text{m}$

۲.۸ تمرین

جریانی برابر 2π آمپر در جهت \bar{a}_z در رشته‌ای که در امتداد محور z ها قرار دارد جاری است. \bar{H} را در نقطهٔ $(2, 3, 4)$ به دست آورید. در صورتی که رشته در فواصل زیر قرار داشته باشد. (الف) $-\infty < z < \infty$ و (ب) $z > 2$ و (پ) $-1.75 < z < 7$

جوابها: $0.2\bar{a}_\phi$ و $0.1\bar{a}_\phi$ و $0.1307\bar{a}_\phi$ A/m

۲.۸ قانون مداری آمپر

بعد از اینکه تعدادی مسائل ساده الکتروستاتیکی ساکن را به کمک قانون کولن حل کردیم

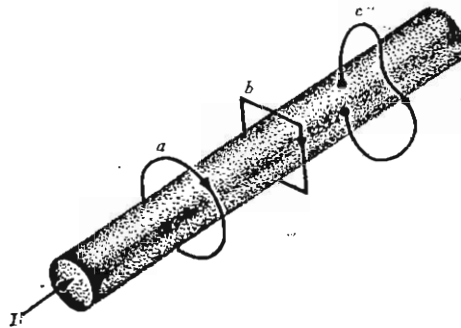
متوجه شدیم که همین مسائل را، در صورتی که تا حد زیادی تقارن وجود داشته باشد، می توان با سهولت بسیار بیشتری با استفاده از قانون گاوس حل کرد. در زمینه میدانهای مغناطیسی نیز روش مشابهی وجود دارد. در اینجا، قانونی که به حل ساده تر مسائل کمک می کند به قانون همداری آمپر یا گاهی به قانون کار آمپر معروف است. این قانون را می توان از قانون بیو-ساوار نتیجه گرفت و اینکار در بخش ۷.۸ انجام شده است. عجالتاً می توانیم توافق کنیم که قانون همداری آمپر را موقتاً به عنوان قانونی دیگر که قابل اثبات بوسیله آزمایش است بپذیریم. کاربرد این قانون نیز مستلزم بررسی دقیق تقارن مسأله به منظور تعیین اجزاء و متغیرهای موجود خواهد بود.

قانون همداری آمپری می گوید که انتگرال خطی میدان \vec{H} حول هر مسیر بسته ای درست مساوی است با جریان محصور در این مسیر.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I \quad (1)$$

جهت مثبت جریان بنا به تعریف، همان جهت پیشرفت پیچ راست گردی است که در جهت پیمودن مسیر بسته گردانده شود.

با مراجعه به شکل ۶.۸، که سیمی استوانه ای حامل جریان مستقیم I را نشان می دهد انتگرال خطی \vec{H} حول مسیرهای بسته a و b منتج به جواب I خواهد شد و انتگرال حول مسیر بسته c که از درون هادی عبور می کند جوابی کمتر از I و دقیقاً



شکل ۶.۸ یک هادی حامل جریان I است. انتگرال خطی \vec{H} حول مسیرهای بسته a و b مساوی I و انتگرال حول مسیر c کمتر از I است چون تمامی جریان بوسیله مسیر محصور نشده است.

مساوی جزئی از جریان که بوسیله مسیر c محصور شده خواهد داشت. البته جملات انتگرال ده (اینترگرندهای) در مسیرهای a و b متفاوت اند، گر چه جوابهای آنها یکی است. انتگرال خطی می گوید که در هر نقطه مؤلفه \vec{H} در جهت مسیر را می بایست در طول دیفرانسیلی مسیر ضرب کنیم و به نقطه بعدی در طول مسیر به طول دیفرانسیلی دیگری حرکت کنیم و این کار را ادامه دهیم تا مسیر بسته کاملاً پیموده شود. چون \vec{H} به طور کلی از نقطه ای به نقطه دیگر تغییر می کند و چون مسیرهای a و b یکسان نیستند مقادیر اضافه شده به انتگرال در اثر مثلاً هر میلیمتر مسیر کاملاً متفاوت اند و فقط جوابهای نهائی یکسانند.

همچنین می بایست ببینیم که معنای «جریان محصور در مسیر» چیست. فرض کنید دو سر سیمی را بعد از اینکه آن را یک بار از داخل یک نوار لاستیکی عبور دادیم به صورت مداری به هم لحیم کنیم. این نوار را برای نمایش مسیر بسته به کار می بریم. با پیچاندن و گره زدن این نوار لاستیکی می توان مسیرهای پیچیده و عجیب و غریبی بوجود آورد ولی اگر نوار یا هادی قطع نشده باشد جریان محصور در مسیر همان جریان داخل هادی است. حال فرض کنید نوار لاستیکی را با حلقه ای از جنس فولاد فتری که بر روی آن صفحه ای لاستیکی کشیده شده باشد عوض کنیم. اینجا حلقه فولادی به منزله مسیر بسته است و اگر بخواهیم جریان بوسیله آن محصور شود هادی حامل جریان باید صفحه لاستیکی را سوراخ کند. دوباره می توانیم حلقه را به پیچانیم یا صفحه لاستیکی را با فشار دست یا تا کردن تغییر شکل دهیم ولی یک سیم حامل جریان همچنان یک بار از صفحه عبور می کند و این تنها معیار صحیح برای جریان محصور است. اگر هادی را یکبار از جلو به پشت و بار دیگر از پشت به جلو از صفحه عبور دهیم مقدار کل جریان محصور مجموع جبری آنها یعنی مساوی صفر است.

به بیانی کلی تر، هر مسیر بسته ای را می توان پیرامون تعداد بینهایت سطوح به حساب آورد (این سطوح بسته نیستند). هر هادی حامل جریانی که به وسیله این مسیر محصور باشد می بایست یکبار از کلیه این سطوح بگذرد. البته بعضی از این سطوح را می توان طوری انتخاب کرد که هادی دوبار در یک جهت و یکبار در جهت متقابل از آن عبور کند ولی مجموع جبری جریان عبور کرده از صفحه همچنان همانست که بود.

خواهیم دید که مسیر بسته معمولاً به صورتی بسیار ساده است و می توان آن را روی یک صفحه رسم کرد بنا بر این ساده ترین سطح عبارت از قسمتی از این صفحه است که به وسیله مسیر محصور شده است و کافی است مقدار کل جریانی را که از این صفحه می گذرد به دست آوریم.

کاربرد قانون گاوس مستلزم تعیین مقدار کل بار محصور به وسیله یک سطح

بسته و کاربرد قانون مداری آمپر مستلزم تعیین مقدار کل جریان محصور به وسیله یک مسیر بسته است.

حال دوباره شدت میدان مغناطیسی ناشی از یک رشته بینهایت دراز حامل جریان I را پیدا می‌کنیم. رشته روی محور z ها قرار دارد مطابق شکل ۳۰.۸ و جریان در جهت \vec{a}_z است. اول باید مسأله تقارن را بررسی کرد. اینکار نشان می‌دهد که تغییراتی در جهت z یا φ موجود نیست. بعد باید مؤلفه‌های موجود میدان \vec{H} را با استفاده از قانون بیو-ساوار تعیین کرد. بی‌اینکه صریحاً از حاصلضرب خسارجی استفاده کنیم می‌توانیم بگوئیم که جهت $d\vec{H}$ عمود بر صفحه حاوی $d\vec{L}$ و \vec{R} و بنا بر این در جهت \vec{a}_φ است. بنابراین تنها مؤلفه موجود \vec{H} همان H_φ است و آن هم فقط تابع r است.

بنابراین مسیری را انتخاب می‌کنیم که میدان H به هر قسمت آن عمود یا مماس و در امتداد آن ثابت باشد. شرط اول (تعامد یا تماس) اجازه می‌دهد که حاصلضرب داخلی قانون مداری آمپر را با حاصلضرب دو کمیت شمارواره‌ای (اسکالر) عوض کنیم، البته مگر در قسمتی از مسیر که \vec{H} بر آن عمود است و بنا بر این حاصلضرب داخلی مساوی صفر است. شرط دوم (ثبات) خسارج کردن شدت میدان مغناطیسی را از زیر علامت انتگرال ممکن می‌سازد عمل انتگرال‌گیری معمولاً ساده است و مستلزم تعیین طول آن قسمت از مسیر است که \vec{H} با آن موازی است.

در مثال ما این مسیر می‌بایست دایره‌ای با شعاع r باشد و قانون مداری آمپر به صورت زیر خواهد بود:

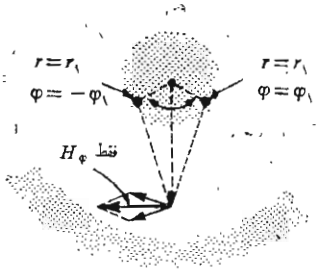
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int_0^{2\pi} H_\varphi r d\varphi = H_\varphi r \int_0^{2\pi} d\varphi = H_\varphi 2\pi r = I$$

یا کمافی‌السابق

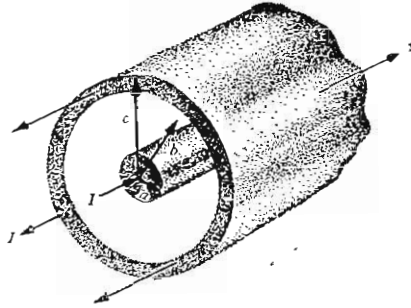
رشته پایدار دراز روی محور z

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r}$$

به عنوان مثال دوم درباره کاربرد قانون مداری آمپر خط انتقال هم محوری را در نظر بگیرید که هادی داخلی آن حامل جریان کل I با توزیع یکنواخت و هادی خارجی آن حامل جریان $I - I$ است. این خط انتقال در شکل (۷.۸ الف) نشان داده شده است. تقارن نشان می‌دهد که H تابع φ یا z نیست. برای اینکه مؤلفه‌های موجود را تعیین کنیم می‌توانیم از نتایج مثال قبل با فرض اینکه هادیها از تعداد زیادی رشته تشکیل شده باشند استفاده کنیم. هیچ رشته‌ای باعث ایجاد مؤلفه z میدان \vec{H} نیست. به علاوه مؤلفه H_r در $\varphi = 0$ ناشی از رشته‌ای واقع در $r = r_1$ و $\varphi = \varphi_1$ به وسیله



(ب)



(ت)

شکل ۷.۸ مقطع عرضی یک کابل هم محور حامل جریان یکنواخت توزیع شده I بوسیله هادی داخلی و $-I$ بوسیله هادی خارجی. ساده ترین روش تعیین میدان مغناطیسی در هر نقطه استفاده از قانون مدار آمبر حول یک مسیر دایره ای است. (ب) رشته ای جریان در $r = r_1$ و $\varphi = \pm \varphi_1$ تولید مؤلفه های H_φ می کنند که اثر یک دیگر را خنثی می کنند. میدان کل برابر است با $\vec{H} = H_\varphi \vec{a}_\varphi$

مؤلفه H_r مربوط به رشته ای که بطور متقارن در $r = r_1$ و $\varphi = -\varphi_1$ قرار دارد حذف می شود. این تقارن در شکل (ب) نشان داده شده است. دوباره فقط یک مؤلفه H_φ وجود دارد که آنهم فقط بر حسب r متغیر است.

هرگاه یک مسیر دایره ای با شعاع r ($b > r > a$)، که در آن a ، شعاع هادی داخلی و b شعاع هادی خارجی است) در نظر بگیریم، فوراً نتیجه می شود:

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r} \quad (r > a)$$

اگر r را کوچکتر از شعاع هادی داخلی انتخاب کنیم مقدار جریان محصور مساوی است با:

$$I_{\text{محصور}} = I \frac{r^2}{a^2} \quad (r < a)$$

$$H_{\varphi} = \frac{Ir}{2\pi a^2} \quad (r < a)$$

اگر شعاع r بزرگتر از شعاع خارجی هادی خارجی باشد جریانی محصور نمی‌شود و

$$H_{\varphi} = 0 \quad (r > c)$$

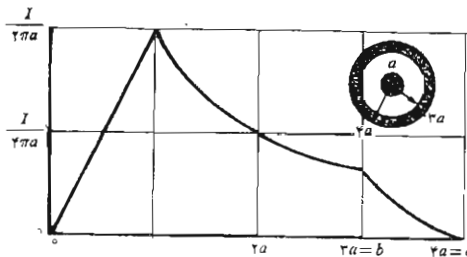
بالاخره اگر مسیر در داخل هادی خارجی باشد خواهیم داشت

$$2\pi r H_{\varphi} = I - I \left(\frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right)$$

$$H_{\varphi} = \frac{I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \quad (b < r < c)$$

تغییرات شدت میدان مغناطیسی بر حسب شعاع در شکل ۸.۸ برای کابل هم محوری که در آن $b = 3a$ و $c = 4a$ نشان داده شده است. باید توجه داشت که شدت میدان مغناطیسی H در تمامی سطح مرزی هادیها پیوسته است. به عبارت دیگر افزایش جزئی در شعاع مسیر بسته باعث محصور شدن مقدار بسیار متفاوتی از جریان نخواهد شد و مقدار H_{φ} پرشهای ناگهانی نخواهد داشت.

میدان خارجی صفر است. می‌بینیم که این حال از جریانه‌های مساوی مثبت و



شکل ۸.۸ شدت میدان مغناطیسی بر حسب شعاع يك خط انتقال هم محور بینهایت دراز به ابعاد نشان داده شده.

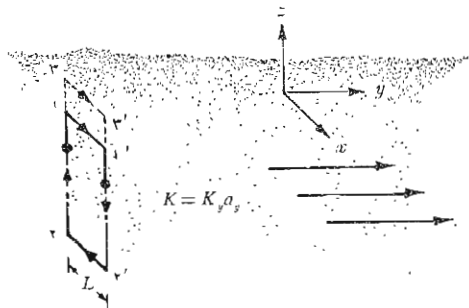
منفی محصور در مسیر نتیجه می‌شود که هر یک میدان بی خارجی به اندازه $I/2\pi r$ تولید می‌کند که یک دیگر را کاملاً حذف می‌کنند. این امر مثالی دیگر از «کابل بسا حفاظ» است. چنین کابل هم محوری ولو اینکه جریان زیادی حمل کند اثر قابل توجهی بر روی مدار مجاور خود نخواهد داشت.

به عنوان مثال نهائی لایه‌ای از جریان را در نظر می‌گیریم که در صفحه $z = 0$ قرار داشته و در امتداد محور مثبت y ها جاری باشد. می‌توان تصور کرد که جریان برگشتی به طور مساوی بین دو صفحه دور دست در طرفین صفحه مورد نظر تقسیم شده است. لایه جریان با چگالی یکنواخت جریان سطحی $\vec{K} = K_y \vec{a}_y$ در شکل ۹.۸ نشان داده شده است. \vec{H} نمی‌تواند بر حسب x و y تغییر کند. اگر صفحه به تعدادی رشته تقسیم شود واضح است که هیچ رشته‌ای نمی‌تواند مؤلفه H_z تولید کند. به علاوه قانون بیو-ساوار نشان می‌دهد که اجزاء H_y مربوط به یک جفت رشته که به‌طور متقارن قرار گرفته‌اند حذف می‌شوند. بنابراین H_z نیز مساوی صفر است و تنها یک مؤلفه H_x وجود دارد. در نتیجه مسیر ۱-۲-۲'-۱' را که از پاره خطهای مستقیم تشکیل شده است انتخاب می‌کنیم و داریم:

$$H_{x1}L + H_{x2}(-L) = K_y L$$

یا

$$H_{x1} - H_{x2} = K_y$$



شکل ۹.۸ لایه‌ای یکنواخت از جریان سطحی $\vec{K} = K_y \vec{a}_y$ در صفحه $z = 0$. \vec{H} را می‌توان با اعمال قانون مسداری آمپر حول مسیرهای ۱-۲-۲'-۱' و ۳-۲'-۲-۳' به دست آورد.

حال اگر مسیر ۳-۲-۱-۳ انتخاب شود جریان محصور همان است و

$$H_{x3} - H_{x2} = K_y$$

و بنابراین

$$H_{x3} = H_{x1}$$

نتیجه می‌شود که مقدار H_x برای تمام مقادیر مثبت z یکسان است. همینطور H_x برای تمام مقادیر منفی z یکی است. بنابراین، به علت تقارن، شدت میدان مغناطیسی در یک طرف لایه جریان نسبت به میدان طرف دیگر مختلف‌العلامه است. در بالای صفحه

$$H_x = -\frac{1}{2}K_y \quad (z > 0)$$

حال آنکه در پائین آن

$$H_x = -\frac{1}{2}K_y \quad (z < 0)$$

اگر \bar{a}_n بردار واحد عمود بر لایه جریان (و متوجه به سمت خارج) باشد نتیجه را می‌توان به صورتی نوشت که برای تمام مقادیر z صادق باشد.

میدان مغناطیسی در ناحیه $0 < z < h$

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \bar{K} \times \bar{a}_n \quad (2)$$

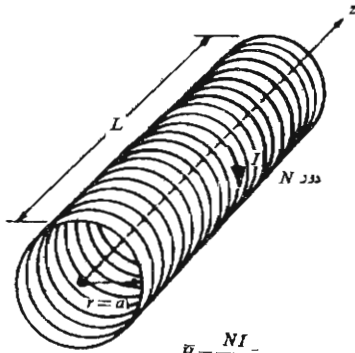
چنانچه لایه جریان دومی که در جهت عکس جاری باشد، $\bar{K} = -K_y \bar{a}_y$ در $z = h$ قرار داده شود رابطه (۲) نشان می‌دهد که میدان در ناحیه بین دو لایه جریان مساوی است با

$$\bar{H} = \bar{K} \times \bar{a}_n \quad (0 < z < h) \quad (3)$$

و در نقاط دیگر مساوی صفر است

$$\bar{H} = 0 \quad (z < 0, z > h) \quad (4)$$

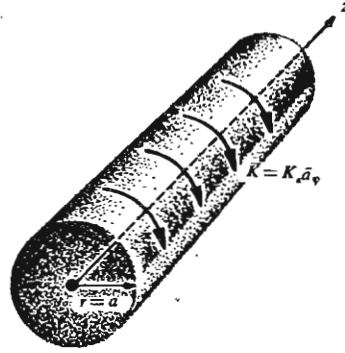
مشکل‌ترین قسمت کاربرد قانون مداری آمپر تعیین مؤلفه‌های موجود میدان است. مطمئن‌ترین روش عبارت از کاربرد منطقی قانون بیو-ساوار و دانستن میدانهای مغناطیسی ساده است. درمسأله ۱۲ آخر این فصل در باره مراحل مختلف کاربرد قانون مداری آمپر برای یک سیم بیچی استوانه‌ای به طول بینهایت و شعاع a و چگالی یکنواخت جریان $K_a \bar{a}_\phi$ ، مطابق شکل (۱۰.۸ الف) به اختصار توضیح داده شده است. نتیجه برای مراجعه بعدی در اینجا ذکر می‌شود.



$$\vec{H} = \frac{NI}{L} \vec{a}_z$$

(دور از دو سر در داخل سیم پیچ)

(ب)



$$\vec{H} = K_a \vec{a}_z, r < a$$

$$\vec{H} = 0, r > a$$

(الف)

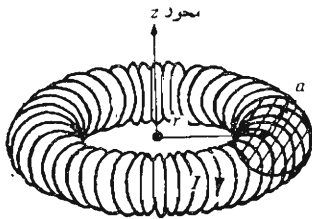
شکل ۱۰.۸ (الف) سیم پیچ استوانه‌ای آرمانی با طول بینهایت و لایه جریان حلقوی
 (ب) سیم پیچ استوانه‌ای N دور به طول معین L . $\vec{K} = K_a \vec{a}_\phi$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{H} = K_a \vec{a}_z \quad (r < a) \\ \vec{H} = 0 \quad (r > a) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(الف)} \\ \text{(ب)} \end{array}$$

اگر سیم پیچی به طول معین L و متشکل از N دور نزدیک به هم پیچیده رشته‌ای، حامل جریان I باشد، شدت میدان برای نقاطی که به اندازه کافی در داخل سیم پیچ قرار دارند عبارتست از

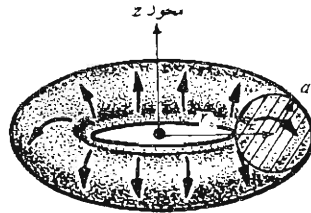
$$\vec{H} = \frac{NI}{L} \vec{a}_z \quad (\text{به حد کافی در داخل سیم پیچ}) \quad (۶)$$

این تقریب در صورتی قابل استفاده است که برای فواصل نزدیکتر از دو برابر شعاع به دو انتهای باز سیم پیچ به کار برده نشود و همچنین در صورتی که بیش از دو برابر فاصله بین سیمها به سطح سیم پیچ نزدیکتر نباشیم.
 برای سیم پیچهای چنبره‌ای که در شکل ۱۱.۸ نشان داده شده است، می توان نشان داد که شدت میدان مغناطیسی برای حالت آرمانی، یعنی شکل (الف) (۱۱.۸) عبارتست از:



دور N
در داخل چنبره $\vec{H} = \frac{NI}{2\pi r} \vec{a}_\phi$

(ب)



$\vec{K} = K_a \vec{a}_z$ در $r = r_0 - a, z = 0$
در داخل چنبره $H = K_a \frac{r_0 - a}{r} \vec{a}_\phi$
خارج $H = 0$

(الف)

شکل ۱۱۰۸ (الف) سیم پیچ چنبره‌ای آرمانی حامل جریان سطحی \vec{K} در جهت نشان داده شده. (ب) سیم پیچ چنبره‌ای N دوری حامل جریان رشته‌ای I .

$$\left. \begin{aligned} \vec{H} &= K_a \frac{r_0 - a}{r} \vec{a}_\phi \quad (\text{در داخل چنبره}) & (7 \text{ الف}) \\ \vec{H} &= 0 \quad (\text{در خارج}) & (7 \text{ ب}) \end{aligned} \right\}$$

در صورتی که نقاطی را در نظر بگیریم که از سطح چنبره به اندازه چند برابر فاصله بین سیمها دورتر باشند برای سیم پیچ چنبره‌ای N دوری شکل (۱۱۰۸ ب) تقریبهایی خوب زیر صادق‌اند.

$$\left. \begin{aligned} \vec{H} &= \frac{NI}{2\pi r} \vec{a}_\phi \quad (\text{در داخل چنبره}) & (8 \text{ الف}) \\ \vec{H} &= 0 \quad (\text{در خارج}) & (8 \text{ ب}) \end{aligned} \right\}$$

فرمولهای دقیق برای سیم پیچهای استوانه‌ای و چنبره‌ای و سیم پیچهای

نوع دیگر را می توان در کتاب

«Standard Handbook for Electrical Engineers»

پیدا کرد (به مراجع توصیه شده فصل ۵ مراجعه شود).

تمرین (۳.۸)

\vec{H} را در نقطه $(0, 0, 0)$ در میدانهای زیر بدست آورید: (الف) يك جفت لایه جریان به شدتهای $\vec{a}_z A/m$ در صفحه $z=1$ و $-\vec{a}_z A/m$ در صفحه $z=-1$. (ب) يك رشته جریان روی محور y ها به شدت $I = 2\pi A$ در جهت \vec{a}_y . (پ) خط انتقال هم محوری که محور آن منطبق بر محور z - ها باشد با مشخصات $a=0.2$ ، $b=0.3$ ، $c=0.4$ ، که جریانی به شدت $I = 5\pi A$ در جهت \vec{a}_z از آن بگذرد. (ت) سیم پیچ استوانه‌ای طولی که جریانی به شدت $I = 0.4 A$ در جهت \vec{a}_ϕ از آن بگذرد و به مشخصات $N=2000$ و $a=0.2$ و $L=4m$ که محورش منطبق بر محور z ها و مرکز منطبق بر مبدأ مختصات باشد. (ث) سیم پیچ چنبره‌ای که مرکز منطبق بر مبدأ مختصات و محورش منطبق بر محور z - ها باشد و مشخصات آن، $r_0=0.2$ ، $a=0.15m$ ، $N=2000$ ، $I=0.2\pi A$ در جهت \vec{a}_z در شعاع خارجی.

جوابها: $5\vec{a}_y A/m$ و $-\vec{a}_x$ و $6.25\vec{a}_y$ و $200\vec{a}_z$ و $-2000\vec{a}_y$

۳.۸ کرل

مطالعه قانون گاوس را با اعمال این قانون به يك عنصر حجمی دیفرانسیلی خاتمه دادیم و به این ترتیب به مفهوم دیورژانس رسیدیم. حال قانون مداری آمپر را در مورد يك مسیر بسته دیفرانسیلی به کار می بریم و با سومین و آخرین، مشتق ویژه آنالیز برداری یعنی کرل آشنا خواهیم شد. هدف فوری ما بدست آوردن شکل نقطه‌ای قانون مداری آمپر است.

اینجا نیز دستگاه مختصات قائم را به کار می بریم و يك مسیر بسته جزئی به اضلاع Δx و Δy انتخاب می کنیم (شکل ۱۲.۸). فرض می کنیم شدت جریانی، که هنوز آن را مشخص نکرده‌ایم، در مرکز این مستطیل کوچک میدانی ایجاد کرده باشد که شدت آن.

$$\vec{H}_0 = H_{x_0}\vec{a}_x + H_{y_0}\vec{a}_y + H_{z_0}\vec{a}_z$$

انتگرال خطی مسیر بسته \vec{H} حول این مسیر تقریباً مساوی مجموع چهار مقدار $\vec{H} \cdot \Delta \vec{L}$ روی هر ضلع است. اگر جهت حرکت ۱-۲-۳-۴-۱ باشد جزء اول مساویست با

$$(\vec{H} \cdot \Delta \vec{L})_{1-2} = H_{y,1-2} \Delta y$$

مقدار H_y روی این قسمت از مسیر را می‌توان برحسب مقدار مرجع H_{y_0} در مرکز مستطیل و میزان تغییر H_y را برحسب x و فاصله $\Delta x/2$ بین مرکز و نقطه وسط ضلع ۱-۲ بدست آورد:

$$H_{y, 1-2} \doteq H_{y_0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \Delta x \right)$$

بنا بر این

$$(\vec{H} \cdot \Delta \vec{L})_{1-2} \doteq \left(H_{y_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y$$

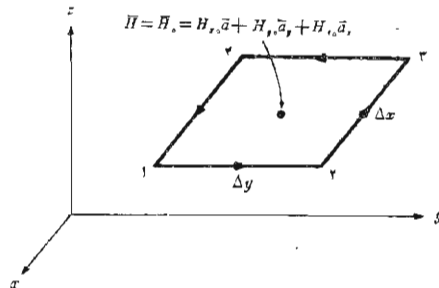
در امتداد ضلع بعدی مسیر داریم

$$(\vec{H} \cdot \Delta \vec{L})_{2-3} \doteq H_{x, 2-3} (-\Delta x) \doteq - \left(H_{x_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x$$

و چنانچه این کار را برای دو ضلع دیگر ادامه دهیم و نتایج را جمع کنیم

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

طبق قانون مدارای آمپر این جواب باید مساوی جریان محصور در مسیر بسته یا جریانی که از سطح محاط در مسیر عبور می‌کند باشد. با فرض یک چگالی جریان کلی \vec{J} ، جریان محصور $\Delta I \doteq J_z \Delta x \Delta y$ خواهد بود و



شکل ۱۴.۸ یک مسیر بسته جزئی در مختصات قائم برای کاربرد قانون مدارای آمپر در تعیین میزان تغییر فضائی \vec{H} انتخاب شده است.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \doteq J_z \Delta x \Delta y$$

یا

$$\frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}}{\Delta x \Delta y} \doteq \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \doteq J_z$$

اگر مسیر بسته به صفر میل داده شود، رابطه فوق دقیق‌تر خواهد شد و در حد تساوی زیر برقرار خواهد بود:

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z \quad (1)$$

با شروع کار از قانون مداری آمپر و نشان دادن تساوی انتگرال مسیر بسته \vec{H} با جریان محصور به رابطه‌ای رسیده‌ایم که شامل انتگرال مسیر بسته \vec{H} در واحد سطح محصور و جریان در واحد سطح محصور، یا چگالی جریان، است. نظیر همین روش را در مورد قانون گاوس به کار بردیم به طوری که شکل انتگرالی این قانون شامل رابطه‌ای بود بین شارگذرنده از سطحی بسته و بار محصور، به شکل نقطه‌ای آن، یعنی رابطه‌ای بین شارگذرنده از سطح بسته در واحد حجم محصور و بار محصور در واحد حجم، یا چگالی بار حجمی. در هر دو حالت برای رسیدن به تساوی محاسبه حد لازم است.

حال اگر مسیرهای بسته‌ای را انتخاب کنیم که سطح آنها به هر یک از دو محور مختصات باقیمانده عمود باشد با روش مشابهی می‌توان مؤلفه‌های y و z چگالی جریان را بدست آورد.

$$\lim_{\Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_z \quad (2)$$

و

$$\lim_{\Delta z, \Delta x \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}}{\Delta z \Delta x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \quad (3)$$

از مقایسه (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که هر یک از مؤلفه‌های چگالی جریان را می‌توان از حد نسبت انتگرال مسیر بسته \vec{H} حول مسیر کوچکی که در صفحه عمود بر مؤلفه قرار دارد به سطح محصور در صورتی که سطح محصور به صفر میل کند به دست آورد. نظیر این حد را در رشته‌های دیگر علوم نیز می‌بینیم و آنرا مدت‌ها قبل، کرل نامیده‌اند. کرل هر بردار برداری است که هر مؤلفه آن از حد نسبت انتگرال

مسیر بسته بردار، حول مسیر کوچکی واقع در صفحه عمود بر مؤلفه مطلوب به سطح محصور در صورتی که سطح محصور به سمت صفر میل کند به دست می آید. باید توجه داشت که تعریف فوق مربوط به دستگاه مختصات بخصوصی نیست. بیان ریاضی این تعریف به صورت زیر است:

$$(\text{curl } \vec{H})_n = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}}{\Delta S_n} \quad (4)$$

که در آن ΔS_n سطح محصور بین انتگرال مسیر بسته و n معرف مؤلفه ای دلخواه در یک دستگاه مختصات دلخواه است. این اندیس همچنین نشان می دهد که مؤلفه کسری همان مؤلفه ایست که بر سطح محصور در مسیر بسته عمود است. تعریف (۴) در دستگاه مختصات قائم نشان می دهد که مؤلفه های x و y و z کسری \vec{H} از روابط (۱) و (۲) و (۳) بدست می آیند و بنابراین

$$\text{curl } \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z \quad (5)$$

این نتیجه را می توان به صورت یک دترمینان

$$\text{curl } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (6)$$

یا برحسب اپراتور برداری

$$\text{curl } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} \quad (7)$$

نوشت.

معادله (۵) نتیجه کاربرد تعریف (۴) برای دستگاه مختصات قائم است. ما

مؤلفه z این رابطه را با استفاده از قانون مداری آمپر حول مسیری جزئی به اضلاع Δx و Δy به دست آوردیم و مؤلفه‌های دیگر را هم به همان سهولت می‌توانستیم بیا انتخاب مسیرهای مناسب به دست آوریم. معادله (۶) روش خوب و روشنی برای بیان رابطه دوتاسیونلی در مختصات قائم است. شکل آن متقارن و به خاطر سپردن آن آسان است. معادله (۷) از آن هم موجزتر است و با استفاده از تعاریف حاصلضرب خارجی و اپراتور برداری، می‌توان رابطه (۵) را از آن نتیجه گرفت.

روابط کرل \vec{H} در دستگانه‌های مختصات استوانه‌ای و کروی در ضمیمه کتاب با استفاده از تعریف (۴) به دست آمده‌اند و داریم:

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z \quad (5)$$

(قائم)

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) \vec{a}_r + \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \vec{a}_\varphi + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rH_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right] \vec{a}_z \quad (8)$$

(استوانه‌ای)

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (H_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rH_\varphi)}{\partial r} \right] \vec{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \vec{a}_\varphi \quad (9)$$

(کروی)

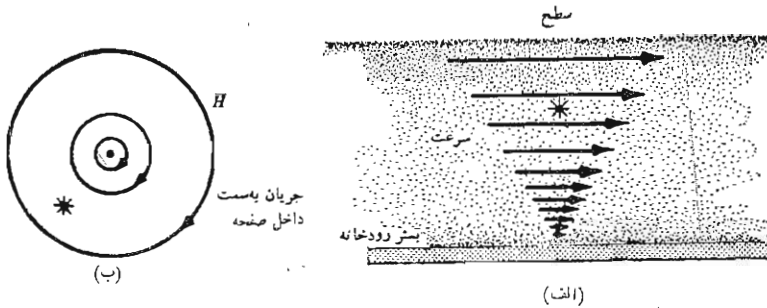
گر چه کرل را به صورت مقدار انتگرال خطی در واحد سطح توصیف کرده ایم این وصف تصویر فیزیکی رضایت بخشی از ماهیت عمل آن برای همه ایجاد نمی کند برای اینکه خود انتگرال خطی احتیاج به تعبیر فیزیکی دارد. اولین بار در مبحث میدان الکتریکی ساکن با انتگرال مسیر بسته سرخوردیم و دیدیم که $\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0$ و از آنجائی که این انتگرال مساوی صفر بود از توصیف تصویر فیزیکی آن خود داری کردیم. اخیراً درباره انتگرال $\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I$ یعنی \vec{H} بحث کردیم. هر يك از این انتگرالها به «دوران» نیز معروف اند و بدیهی است که این اصطلاح از علم مکانیک سیالات گرفته شده است.

دوران \vec{H} ، یا $\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}$ ، از حاصلضرب مؤلفه‌های از میدان که در هر نقطه از طول مسیر موازی مسیر است در طولهای دیفرانسیلی و جمع نتایج هنگامی که اندازه طولهای دیفرانسیل به صفر و تعداد آنها به سمت بینهایت میل می کنند به دست می آید. خود مسیر لازم نیست بینهایت کوچک باشد. قانون مداری آمپر حاکی از آن است که اگر \vec{H} دارای دورانی حول مسیر معینی باشد جریان الکتریکی از داخل این مسیر عبور می کند. در میدانهای الکتریکی ساکن می بینیم که دوران \vec{E} حول هر مسیر بسته ای مساوی صفر است و این به سبب آنست که مقدار کار انجام شده برای حرکت دادن بار الکتریکی حول هر مسیر بسته ای مساوی صفر است.

حال می توانیم کرل را به صورت دوران میدان در واحد سطح توصیف کنیم. مسیر بسته بینهایت کوچک است و کرل در يك نقطه مشخص می شود کرل \vec{E} می بایست صفر باشد چون دوران آن صفر است. اما کرل \vec{H} ، مخالف صفر است چون دوران \vec{H} در واحد سطح طبق قانون مداری آمپر مساوی چگالی جریان است. [رجوع شود به روابط (۱) و (۲) و (۳)].

سکی لینگ^۱ کاربرد يك چرخ کسوچک پرده دار را به عنوان «کرل سنج» پیشنهاد کرده است. در این صورت می بایست چنین فرض کرد که کمیت برداری مورد نظر می تواند به هر يك از تیغه های این چرخ نیروئی وادد کند و مقدار این نیرو متناسب با مؤلفه عمود بر پردها است. برای تعیین کرل میدان، این چرخ را طوری در داخل میدان فرو می بریم که محور آن هم جهت با مؤلفه مورد نظر کرل باشد و آنگاه به تأثیر میدان روی چرخ توجه می کنیم. اگر چرخ بی حرکت باشد یعنی کرل صفر است. سرعت زاویه ای بیشتر معرف کرل بیشتر است و تغییر جهت چرخش حاکی از تغییر علامت کرل. اگر منظور نه تنها تشخیص وجود يك مؤلفه بخصوص بلکه تعیین جهت بردار کرل باشد باید این چرخ را در داخل میدان قرار دهیم و جهتی را جستجو

۱. Skilling به مراجع آخر فصل مراجعه شود.



شکل ۱۳.۸ (الف) کرل سنج يك مؤلفه از کرل سرعت آب را به طرف داخل صفحه کاغذ نشان می‌دهد (ب) کرل شدت میدان مغناطیسی حول يك رشته با طول بینهایت نشان داده شده است.

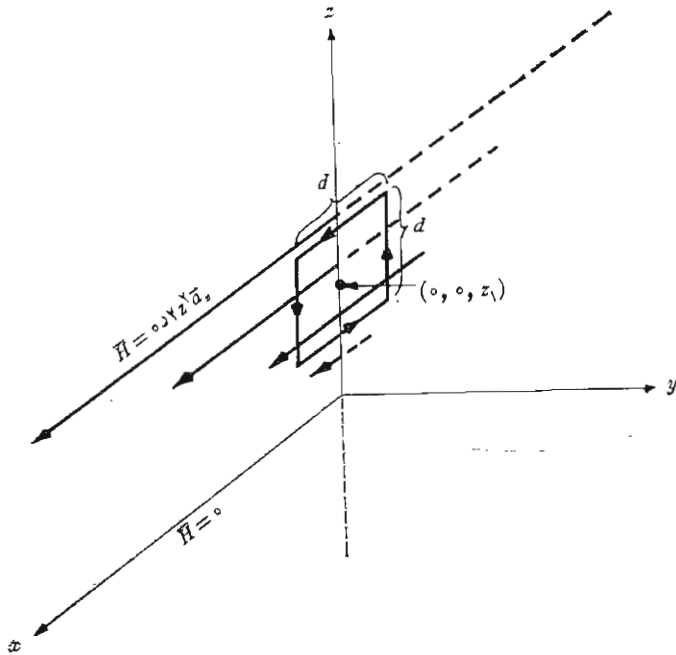
کنیم که بیشترین گشتاور - نیرو بر آن وارد می‌شود. در این صورت جهت کرل بنا به قانون انگشتان دست راست، هم جهت با محور چرخ است. به عنوان مثال جریان آب يك رودخانه پهن را در نظر بگیرید. شکل (۱۳.۸ الف) مقطع طولی وسط يك رودخانه پهن را نشان می‌دهد. سرعت آب در کف رودخانه صفر است و در جهت سطح آب به طور خطی افزایش می‌یابد. اگر چرخ پره‌داری در محل نشان داده شده قرار داده شود به طوری که محور آن عمود بر صفحه کاغذ باشد، این چرخ در جهت عقربه‌های ساعت دوران خواهد کرد و این امر نمایانگر وجود يك مؤلفه کرل در جهت عمود و رو به درون بر صفحه کاغذ است. اگر سرعت آب در امتداد رودخانه تغییری نکند و در امتداد عرض رودخانه نیز ثابت باشد (یا حتی اگر در جهت دو لب رودخانه به طور یکسان کاهش یابد) آنوقت این مؤلفه تنها مؤلفه موجود در وسط رودخانه است و جهت کرل سرعت آب به طرف داخل صفحه کاغذ است.

شکل (۱۳.۸ ب) خطوط سیلان شدت میدان مغناطیسی حول يك هادی رشته‌ای با طول بینهایت را نشان می‌دهد. کرل سنجی که در این میدان، که خطوط شار آن منحینند قرار داده شده، نشان می‌دهد که بر تعداد بیشتری از پره‌ها نیروئی در جهت عقربه‌های ساعت وارد می‌شود ولی این نیرو به طور کلی کمتر از نیروئی است که در خلاف جهت عقربه‌های ساعت بر تعداد کمتری پره که نزدیکتر به هادیند وارد می‌شود.

به نظر می‌رسد که ممکن است اگر انحناى خطوط سيلان و نیز تغییرات شدت میدان درست باشد منتهی گشتاور - نیروی مؤثر روی چرخ مساوی صفر باشد. در حقیقت چرخ پره‌دار در این حالت نمی‌چرخد زیرا از آنجا که $\vec{H} = (I/2\pi r)\vec{a}_\phi$ اگر مقدار آن را در رابطه (۸) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\text{curl} \vec{H} = -\frac{\partial H_\phi}{\partial z} \vec{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r} \vec{a}_z = 0$$

به عنوان مثالی از محاسبهٔ کول \vec{H} از تعریف آن و از محاسبهٔ يك انتگرال خطی دیگر، فرض کنید مطابق شکل ۱۴.۸ $\vec{H} = 0.2z^2 \vec{a}_z$ برای $z > 0$ و $\vec{H} = 0$ در نقاط دیگر. برای مسیر مربعی شکلی به ضلع d ، که مرکزش منطبق بر $(0, 0, z_1)$ در صفحه $y = 0$ باشد بطوری که $z_1 > 1/\sqrt{d}$ انتگرال خطی \vec{H} را در امتداد چهار



شکل ۱۴.۸ از مسیر بستهٔ مربعی شکلی به ضلع d که مرکز آن روی محور z ها در نقطهٔ $z = z_1$ قرار دارد برای محاسبهٔ $\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}$ و بدست آوردن کول \vec{H} استفاده شده است.

پاره خط محاسبه می‌کنیم:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = 0.2(z_1 + \frac{1}{2}d)^2 d + 0 - 0.2(z_1 - \frac{1}{2}d)^2 d + 0$$

$$= 0.4z_1 d^2$$

در حد، وقتی سطح به صفر میل می‌کند داریم:

$$(\nabla \times \vec{H})_y = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}}{d^2} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{0.4z_1 d^2}{d^2} = 0.4z_1$$

مؤلفه‌های دیگر صفراند، بنابراین $0.4z_1 \vec{a}_y$ برای $\nabla \times \vec{H}$ مؤلفه‌های دیگر صفراند، بنا بر این $0.4z_1 \vec{a}_y$ برای محاسبهٔ کرل، بی‌آنکه سعی کنیم که تعریف یسا محاسبهٔ يك انتگرال خطی را روشن کنیم، می‌توانیم مشتقات جزئی مربوطه را مطابق با رابطه (۶) در نظر بگیریم.

$$\nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0.2z^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} (0.2z^2) \vec{a}_y = 0.4z \vec{a}_y$$

که به ازاء $z = z_1$ با جواب فوق برابر است. حال برای تکمیل بررسی اصلی کاربرد قانون مدار آمپر در مورد مسیر دیفرانسیلی، روابط (۱) و (۲) و (۳) و (۴) و (۵) و (۶) را ترکیب می‌کنیم.

$$\text{curl } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y \quad (10)$$

$$+ \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z = \vec{J}$$

و شکل نقطه‌ای قانون مدار آمپر را می‌نویسیم

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}} \quad (11)$$

این رابطه دومین معادله از چهار معادلهٔ ماکسول برای میدانهای غیر متغیر

با زمان است. در اینجا می‌توان سومین معادله از این معادلات را نیز نوشت. معادلهٔ اخیر شکل نقطه‌ای $\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0$ یا

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

است. معادلهٔ چهارم در بخش ۵.۸ آمده است.

تمرین ۴.۸

اگر $\vec{F} = 3y\vec{a}_x - 4x^3\vec{a}_z$ (الف) انتگرال \vec{F} را در امتداد پاره خطهای راست $(1, 1, 1)$ به $(1, 1, -1)$ ، $(-3, 1, -1)$ به $(-3, 1, 1)$ و $(1, 1, 1)$ به $(1, 1, 1)$ و (ب) نسبت انتگرال خطی فوق به سطح محصور و (پ) مؤلفهٔ y کرل \vec{F} در $(0, 1, 1, -1)$ را حساب کنید. (به مسألهٔ ۱۷ آخر فصل نیز توجه کنید).
جوابها: ۲۲۴ و ۲۸ و ۱۲.

تمرین ۵.۸

$|\nabla \times \vec{H}|$ را در $(x=0, y=1, z=0)$ پیدا کنید در صورتی که \vec{H} مساوی باشد با: (الف) $xy\vec{a}_y - xz\vec{a}_z$ ، (ب) $r^2 z \vec{a}_\phi$ ، (پ) $r^2 \sin \theta \vec{a}_\phi$.
جوابها: ۳، ۱، ۱.

۴.۸ قضیهٔ استوکس

گر چه بخش قبل در وهلهٔ اول به بحث دربارهٔ کرل اختصاص یافته بود کمک این مطالب به تفهیم بیشتر میدانهای مغناطیسی را نیز نباید از نظر دور داشت. از قانون مداری آمپر یکی از روابط ماکسول یعنی $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ را به دست آوردیم. این رابطه را باید شکل نقطه‌ای قانون مداری آمپر «برحسب واحد سطح» به حساب آورد. در این بخش قسمت عمدهٔ مطالب به یک قضیهٔ ریاضی به نام قضیهٔ استوکس اختصاص خواهد داشت ولی در ضمن نشان خواهیم داد که قانون مداری آمپر را می‌توان از رابطهٔ $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ به دست آورد. به عبارت دیگر قادر خواهیم بود شکل انتگرالی را از شکل نقطه‌ای یا شکل نقطه‌ای را از انتگرالی به دست آوریم.
سطح S شکل ۱۵.۸ را، که به سطوح جزئی ΔS تقسیم شده در نظر بگیرید. اگر تعریف کرل را در مورد یکی از این سطوح جزئی بکار ببریم خواهیم داشت:

$$\frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}_{\Delta S}}{\Delta S} \doteq (\nabla \times \vec{H})_n$$

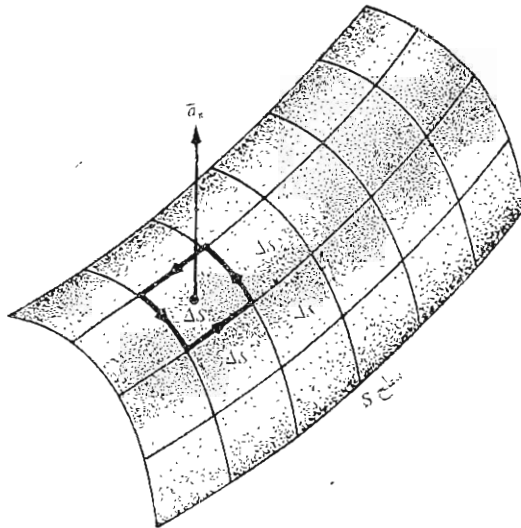
که در آن اندیس n معرف عمود قانون دست راست بر این سطح است و اندیس جمله $d\vec{L}_{\Delta S}$ نمایانگر اینست که $d\vec{L}$ پیرامون سطح ΔS است. این نتیجه را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}_{\Delta S}}{\Delta S} \doteq (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{a}_n$$

یا

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}_{\Delta S} \doteq (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{a}_n \Delta S = (\nabla \times \vec{H}) \cdot \Delta \vec{S}$$

در اینجا \vec{a}_n بردار واحد در جهت عمود قانون دست راست بر سطح $\Delta \vec{S}$ است. حال کرل کلیه ΔS های تشکیل دهنده سطح S را می نویسیم و نتایج را جمع می کنیم. ضمن محاسبه انتگرالهای مسیر بسته هر ΔS مقادیر مشابهی با یکدیگر



شکل ۱۵۰۸ مجموع انتگرالهای مسیر بسته حول تمام ΔS ها مساوی انتگرال مسیر بسته حول پیرامون S است. چون انتگرالها روی کلیه مسیرهای داخلی حذف می شوند.

حذف خواهند شد چون هر ضلع مشترک داخلی در هر جهت یکبار پیموده خواهد شد. تنها اضلاعی که شامل چنین حذفی نخواهد شد ضلع خارجی یعنی مسیری است که S را محاط می کند. بنا بر این خواهیم داشت:

قضیه استوکس

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} \equiv \int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} \quad (1)$$

به طوری که $d\vec{L}$ فقط در امتداد پیرامون S در نظر گرفته می شود. رابطه (۱) که یک اتحاد و برای هر میدان برداری صادق است به قضیه استوکس موسوم است.

حال قانون مداری آمپر را می توان به سهولت از $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ به دست آورد. برای اینکار کافی است طرفین را در $d\vec{S}$ ضرب داخلی کنیم و از آنها روی یک سطح (باز) S انتگرال بگیریم و با استفاده از قضیه استوکس به نتیجه زیر برسیم:

$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{L}$$

انتگرال چگالی جریان روی سطح S مساوی مقدار کل جریانی است که از آن عبور می کند. بنا بر این

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I$$

این نتیجه گیری به وضوح نشان می دهد که جریان I «محصور در مسیر بسته» همان جریانی است که از هر کدام از تعداد بینهایت سطح بازی که مسیر بسته پیرامون آنها است، عبور می کند.

قضیه استوکس رابطه ای است بین یک انتگرال سطحی و یک انتگرال خطی مسیر بسته. بخاطر داریم که قضیه دیورژانس یک انتگرال حجمی را به یک انتگرال سطح بسته مربوط می کرد. مهمترین کاربرد این هر دو قضیه در اثبات روابط برداری کلی است. به عنوان مثال فرض کنید بخواهیم بیان دیگری برای $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A}$ که در آن \vec{A} معرف یک میدان برداری دلخواه است، پیدا کنیم. نتیجه باید یک کمیت شمارواره ای (اسکالر) باشد (چرا؟) که اگر آن را T بنامیم

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = T$$

از ضرب کردن طرفین در dv و انتگرال گیری در تمامی حجم دلخواه v خواهیم داشت:

$$\int_{\text{حجم}} (\nabla \cdot \nabla \times \bar{A}) dv = \int_{\text{حجم}} T dv$$

حال اگر قضیه دیورژانس را برای طرف چپ رابطه به کار ببریم خواهیم داشت:

$$\oint_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{S} = \int_{\text{حجم}} T dv$$

طرف چپ این رابطه انتگرال کرل \bar{A} روی سطح بسته ای است که حجم v را می پوشاند. قضیه استوکس انتگرال کرل \bar{A} را روی سطح بازی که محصور بین مسیر بسته ایست به دست می دهد. اگر این مسیر بسته را دهانه يك کیسه و بنا بر این سطح باز را سطح خود کیسه مجسم کنیم می بینیم که اگر با کشیدن نخ در کیسه سطح را بتدریج به سطح بسته نزدیک کنیم مسیر بسته به تدریج کوچکتر می شود و سرانجام ناپدید و سطح باز به سطح بسته تبدیل شود. بنا بر این چنانچه قضیه استوکس در مورد يك مسیر بسته به کار برده شود نتیجه صفر است و

$$\int_{\text{حجم}} T dv = 0$$

چون این رابطه برای هر حجمی صادق است برای حجم دیفرانسیلی dv نیز باید صادق باشد

$$T dv = 0$$

و بنا بر این

$$T = 0$$

یا

$$\boxed{\nabla \cdot \nabla \times \bar{A} \equiv 0}$$



رابطه (۲) یکی از اتحادهای مفید آنالیز برداری است. می توانیم بسی درنگ این رابطه را در مورد میدان مغناطیسی غیرمتغیر با زمان که رابطه

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$$

در مورد آن صادق است بکار ببریم و نشان دهیم که

$$\boxed{\nabla \cdot \bar{J} = 0}$$

و این همان نتیجه ایست که در همین فصل با استفاده از معادله پیوستگی به دست آوردیم.

۱. این رابطه و اتحادهای برداری مفید دیگری در ضمیمه ۳-۱ فهرست وار آورده شده اند.

قبل از اینکه چند کمیت دیگر مربوط به میدانهای مغناطیسی را در بخش بعد معرفی کنیم آنچه را که تا به حال به دست آورده ایم یکبار دیگر مرور می کنیم. ابتدا قانون بیو-سوار را به عنوان يك نتیجه آزمایشی قبول کردیم.

$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{L} \times \vec{a}_R}{4\pi R^3}$$

قانون مداری آمپر را نیز موقتاً پذیرفتیم تا در آینده آن را ثابت کنیم.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I$$

با استفاده از تعریف کرل از قانون مداری آمپر به شکل نقطه‌ای آن رسیدیم

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

و حال می بینیم که با استفاده از قانون استوکس می توان شکل انتگرالی قانون مداری آمپر را از شکل نقطه‌ای آن به دست آورد.

نمرین ۶۰۸

میدان $\vec{A} = 2r^2(z+1) \sin^2 \varphi \vec{a}_\varphi$ در مختصات استوانه‌ای مفروض است. دوطرف قضیه استوکس را برای مسیر $r=2$ و $z=1$ و $0 \leq \varphi < 2\pi$ و سطح محصور در آن به دست آورید.

جواب: ۳۲π

۵۰۸ شار مغناطیسی و چگالی شار مغناطیسی

در فضای آزاد \vec{B} ، چگالی شار مغناطیسی را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (1) \quad (\text{فقط برای فضای آزاد})$$

در این رابطه \vec{B} بر حسب وبر بر متر مربع (Wb/m^2) یا بر حسب واحد جدیدتری است که در دستگاه بین المللی آحاد اختیار شده است، و آن يك تسلا (T) است. واحدی قدیمی تر که غالباً برای چگالی شار مغناطیسی به کار برده می شود گاوس است به طوری که $1 \text{ Wb}/\text{m}^2$ برابر ۱۰،۰۰۰ گاوس است. ثابت μ_0 بی بعد نیست و مقدار آن طبق تعریف و بر حسب هنری بر متر (H/m) مساویست با

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \quad (2)$$

این ثابت به قابلیت نفوذ فضای آزاد موسوم است.

باید توجه داشت که چون \vec{H} برحسب آمپر بر متر اندازه گیری می شود، و بر از نقطه نظر واحد مساوی حاصلضرب هنری در آمپر است. اگر هنری را يك واحد جدید در نظر بگیریم و بر علامت اختصاری مناسبی برای حاصلضرب هنری در آمپر است. در ضمن آشنائی با میدانهای متغیر با زمان خواهیم دید که و بر مساوی حاصلضرب ولت در ثانیه نیز هست.

شار میدان مغناطیسی \vec{B} ، همانظوری که از نام آن پیداست، از دسته میدانهای چگالی شار آنالیز برداری است. یکی از موارد شباهت ممکن میدانهای الکتریکی و مغناطیسی^۱ از مقایسه قوانین کولن و بیو-سوار نتیجه می شود و به این طریق تشابهی بین \vec{H} و \vec{E} برقرار است به این ترتیب روابط $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ و $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ به شباهت میان کمیات \vec{D} و \vec{B} منجر می شود. اگر \vec{B} برحسب و بر بر متر مربع در نظر بگیریم واحد شار مغناطیسی باید و بر باشد. اگر شار مغناطیسی را با Φ نشان دهیم و آن را شاری که از يك سطح مشخص شده عبور می کند تعریف کنیم

$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{Wb}$$

(3)

حال تشابه فوق الذکر چگالی شار الکتریکی Ψ برحسب کولن و همچنین قانون گاوس را به خاطر می آورد که حاکی از آن است که مقدار کل شاری که از هر سطح بسته عبور می کند مساوی است با بار محصور در آن سطح

$$\Psi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

بار Q متشاه خطوط شار الکتریکی است و این خطوط از بارهای مثبت سرچشمه می گیرند و به بارهای منفی ختم می شوند. برای خطوط شار مغناطیسی هرگز چنین منابعی کشف نشده است. در مثال رشته مستقیم بینهایت طویل حامل جریان مستقیم I میدان \vec{H} دوائر متحدالمرکزی را حول رشته تشکیل می داد. چون $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ میدان \vec{B} نیز همین شکل را دارد. خطوط شار مغناطیسی به صورت بسته اند و به «بارهای مغناطیسی» ختم نمی شوند. بدین جهت قانون گاوس برای میدان مغناطیسی به صورت زیر است،

۱. تشبیه دیگری در بخش ۲.۱۰ آمده است.

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (۴)$$

و با استفاده از قضیه دیورژانس می توان نشان داد،

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (۵)$$

البته روابط (۴) و (۵) را ثابت نکرده ایم بلکه صرفاً صحت آنها را با در نظر گرفتن یک میدان مربوط به رشته بینهایت طویل پیشنهاد کرده ایم. می توان نشان داد که روابط (۴) و (۵) از قانون بیو-ساوار و تعریف \vec{B} یعنی $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ نتیجه می شوند. اما این اثبات را نیز به بخش ۷.۸ موکول می کنیم. معادله (۵) آخرین معادله از چهار معادله ما کسول برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن (ایستا) است. مجموعه این معادلات برای میدانهای الکتریکی ساکن و میدانهای مغناطیسی پایدار عبارتست از:

معادلات ...

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \times \vec{E} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (۶)$$

روابطی که \vec{D} و \vec{E} و همچنین \vec{B} و \vec{H} در فضای آزاد را به یکدیگر مربوط می سازند می توان به این معادلات اضافه کرد،

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (۷)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (۸)$$

همچنین دیدیم که پتانسیل میدان الکتریکی نیز تعریف مفید دیگری بود

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (۹)$$

در بخش بعد دربارهٔ پتانسیلی برای میدان مغناطیسی پایدار نیز بحث خواهیم کرد. به علاوه ما مبحث میدانهای الکتریکی را به مواد هادی و عایق نیز تعمیم داده و مفهوم قطبی شدگی \bar{P} را معرفی کرده ایم. همین کار را در فصل آینده در مورد میدانهای مغناطیسی خواهیم کرد.

در مراجعه به روابط (۶) متوجه می شویم که این چهار معادلهٔ دیورژانس و کرول یک میدان الکتریکی و مغناطیسی را مشخص می کنند. چهار معادلهٔ انتگرالی نظیر آنها در مورد میدانهای الکتریکی ساکن و میدانهای مغناطیسی پایدار به قرار زیر است:

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q = \int_{\text{حجم}} \rho \, dv$$

$$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{L} = 0$$

$$\oint_S \bar{H} \cdot d\bar{L} = I = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S}$$

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0$$

(۱۰)

اگر از ابتدا یکی از دو دسته معادلات (۶) و (۱۰) را قبول می کردیم. مطالعهٔ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بسیار ساده تر می شد. با اطلاعات کافی دربارهٔ آنالیز برداری، به اندازه ای که باید تا بحال به دست آورده باشیم، هر دو دسته از معادلات فوق را می توان با استفاده از قضایای دیورژانس و استوکس به سهولت به دستهٔ دیگر تبدیل کرد. قوانین مختلف تجربی را نیز می توان به آسانی از این روابط به دست آورد.

به عنوان مثالی از کاربرد شار و چگالی شار میدانهای مغناطیسی، شار بین هادیهای یک خط هم محور شکل (۷.۸ الف) را پیدا می کنیم. شدت میدان مغناطیسی مساوی بود با

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi r} \quad (a < r < b)$$

و بنابراین

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \bar{a}_\phi$$

شار مغناطیسی بین دو هادی در طول L عبارتست از شاری که از هر صفحه شعاعی از $r = a$ به $r = b$ و از، مثلاً $z = 0$ به $z = L$ عبور می کند.

$$\Phi = \int_{\bar{S}} \bar{B} \cdot d\bar{S} = \int_0^L \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \bar{a}_\varphi \cdot dr dz \bar{a}_\varphi$$

یا

$$\Phi = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (11)$$

این رابطه را در آینده برای محاسبه ضریب خود القائی يك خط انتقال هم محور به کار خواهیم برد.

تمرین ۷.۸

ابعاد يك خط انتقال هم محور عبارتند از $a = 1$ و $b = 4$ و $c = 5 \text{ mm}$ و هادیهای داخلی و خارجی حامل جریانهای مختلف الجهد $2A$ اند که بطور یکنواخت توزیع شده اند. شار مغناطیسی کل را بر حسب واحد طول بین $r = 0$ و (الف) $r = a$ و (ب) $r = b$ و (پ) $r = c$ پیدا کنید.

جوابها: $20, 75.4, 80.2$ بر حسب nWb

۶.۸ پتانسیل‌های مغناطیسی شمارواره‌ای (اسکالر) و برداری

حل مسائل میدانهای الکتریکی ساکن را می توان با استفاده از پتانسیل شمارواره‌ای (اسکالر) V به میزان بسیار ساده تر کرد. گر چه این پتانسیل برای ما دارای معنای فیزیکی بسیار واقعی است، از نقطه نظر ریاضی چیزی بیش از واسطه‌ای کمکی نیست، بدین معنی که حل مسائل را به مراحل کوچکتری تقسیم می کند. چنانچه نحوه توزیع بار معلوم باشد می توان اول پتانسیل و بعد شدت میدان الکتریکی را از آن به دست آورد.

این سؤال پیش می آید که آیا چنین واسطه کمکی برای میدانهای مغناطیسی نیز وجود دارد یا نه. آیا می توان يك تابع پتانسیل تعریف کرد که از توزیع جریانها به دست آید و با استفاده از آن بتوان میدانهای مغناطیسی را به سادگی محاسبه کرد؟ آیا می توان يك پتانسیل مغناطیسی شمارواره‌ای (اسکالر) شبیه پتانسیل شمارواره‌ای (اسکالر) الکتریسیته ساکن تعریف کرد؟ در صفحات آینده خواهیم دید که دو سؤال فوق را می توان به ترتیب با «آری» و «گاهی» پاسخ داد. ابتدا می خواهیم به سؤال

دوم پاسخ دهیم. فرض کنید يك پتانسیل شمارواره‌ای (اسکالر) مغناطیسی، با علامت V_m وجود داشته باشد که گرادیان منفی آن مساوی شدت میدان مغناطیسی باشد،

$$\vec{H} = -\nabla V_m$$

انتخاب گرادیان منفی باعث تشابه نزدیکی به پتانسیل الکتروسیته‌ماکن و مساوی که قبلاً حل شده‌اند خواهد بود.

این تعریف نباید با نتایج قبلی ما برای میدانهای مغناطیسی مغایر باشد و بنابراین

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} = \nabla \times (-\nabla V_m)$$

ولی کرل گرادیان هس تابع شمارواره‌ای (اسکالر) مساوی صفر است. و این اتحادی برداری است که اثبات آن در فرصت مناسبی ارائه خواهد شد. بنابراین می‌بینیم که اگر \vec{H} را به‌عنوان گرادیان يك پتانسیل مغناطیسی شمارواره‌ای (اسکالر) تعریف کنیم، چگالی جریان در تمام ناحیه‌ای که پتانسیل مغناطیسی شمارواره‌ای آن به این طریق تعریف شده است می‌بایست مساوی صفر باشد. در این صورت

$$\boxed{\vec{H} = -\nabla V_m \quad (\vec{J} = 0)} \quad (1)$$

چون وضعیت هندسی بسیاری از مسائل مغناطیسی طوری است که هادیهای حامل جریان جزء نسبتاً کوچکی از ناحیه مورد نظر را اشغال می‌کنند واضح است که پتانسیل مغناطیسی شمارواره‌ای (اسکالر) ممکن است در حل مسائل مفید باشد. پتانسیل مغناطیسی شمارواره‌ای (اسکالر) را در مورد آهنربای دائم نیز می‌توان بکار برد. واضح است که واحد V_m آمپر است.

معادله لاپلاس در مورد این پتانسیل شمارواره‌ای (اسکالر) نیز صادق است. در فضای آزاد

$$\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \nabla \cdot \vec{H} = 0$$

و بنابراین

$$\mu_0 \nabla \cdot (-\nabla V_m) = 0$$

یا

$$\boxed{\nabla^2 V_m = 0 \quad (\vec{J} = 0)} \quad (2)$$

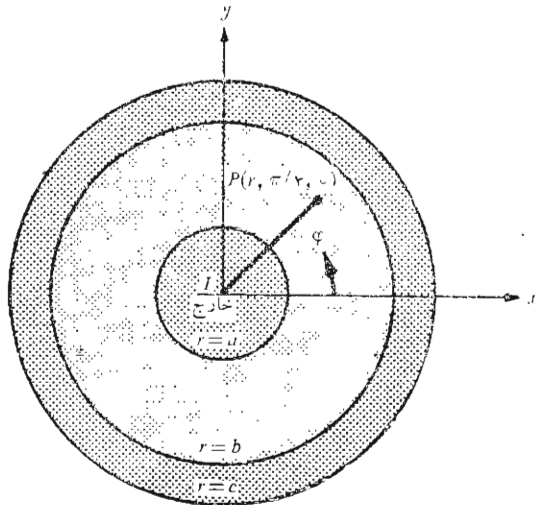
در آینده خواهیم دید که در داخل مواد مغناطیسی متجانس نیز معادله لاپلاس

در مورد V_m صادق است ولی برای هر ناحیه‌ای که چگالی جریان در آن وجود داشته باشد این معادله صدق نمی‌کند.

گر چه درباره پتانسیل مغناطیسی شماره‌واره‌ای (اسکالر) در فصل بعد، در مبحث مربوط به مواد مغناطیسی و مدارهای مغناطیسی، بحث بیشتری خواهد شد ولی بجا است که یک تفاوت بین V و V_m را در اینجا بررسی کنیم. پتانسیل الکتریکی V تابعی تک ارزشی است و به محض اینکه یک مرجع پتانسیل صفر انتخاب شود هر یک از نقاط فضا دارای فقط یک مقدار پتانسیل خواهند بود. این مطلب در مورد V_m صادق نیست. مقطع کابل هم محور شکل ۱۶.۸ را در نظر بگیرید. در ناحیه $a < r < b$ داریم $\vec{J} = 0$ و می‌توان یک پتانسیل مغناطیسی شماره‌واره‌ای (اسکالر) بسه این ناحیه نسبت داد. مقدار \vec{H} عبارتست از:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{a}_\varphi$$

که I مساوی جریان کلی است که در جهت \vec{a}_z در داخل هادی داخلی برقرار است. با استفاده از رابطه (۱)،



شکل ۱۶.۸ پتانسیل مغناطیسی شماره‌واره‌ای (اسکالر) V_m بر حسب φ در ناحیه $a < r < b$ تابعی چند ارزشی است. پتانسیل الکتریکی ساکن همیشه تک ارزشی است.

$$\frac{I}{2\pi r} = -\nabla V_m|_{\varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_m}{\partial \varphi}$$

یا

$$\frac{\partial V_m}{\partial \varphi} = -\frac{I}{2\pi}$$

بنابراین

$$V_m = -\frac{I}{2\pi} \varphi$$

در رابطه فوق ثابت انتگرال گیری را مساوی صفر قرار داده ایم. حال بینیم چه پتانسیلی را باید به نقطه P ، یعنی $\varphi = \pi/4$ ، نسبت داد؟ اگر در $\varphi = 0$ مقدار V_m را صفر فرض کرده در خلاف جهت عقربه‌های ساعت پیش برویم پتانسیل مغناطیسی به طور خطی منفی می‌شود و وقتی یکدور کامل زده باشیم پتانسیل مساوی $-I$ خواهد بود ولی این همان نقطه‌ای است که لحظه‌ای قبل گفتیم پتانسیل آن صفر است. بنابراین در P یعنی در

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, 9\frac{\pi}{4}, 17\frac{\pi}{4}, \dots$$

یا در

$$\varphi = -7\frac{\pi}{4}, -15\frac{\pi}{4}, -23\frac{\pi}{4}, \dots$$

پتانسیلهای

$$V_{mP} = \frac{I}{2\pi} \left(2n - \frac{1}{4} \right) \pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

یا

$$V_{mP} = I \left(n - \frac{1}{4} \right) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

را خواهیم داشت.

علت این چند ارزش بودن را می‌توان با یک مقایسه با حالت میدان الکتریکی ساکن توجیه کرد. در آنجا داشتیم

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{L} = 0$$

و بنابراین انتگرال خطی

$$V_{ab} = \int_a^b \bar{E} \cdot d\bar{L}$$

مستقل از مسیر است. از طرفی دیگر در میدان مغناطیسی ساکن

$$\nabla \times \bar{H} = 0 \quad (\text{هرجا که } \bar{J} = 0 \text{ باشد})$$

ولی

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{L} = I$$

حتی اگر \bar{J} در امتداد مسیر انتگرال گیری صفر باشد. هر بار که یکدور کامل دیگر حول جریان می‌زنیم نتیجه انتگرال به اندازه I افزایش می‌یابد. اگر جریانی در مسیر محصور نباشد آن وقت می‌توان یک تابع تک ارزشی پتانسیل تعریف کرد. ولی در حالت کلی

$$V_{m,ab} = \int_a^b \bar{H} \cdot d\bar{L} \quad (\text{مسیر مشخص}) \quad (3)$$

بطوری که می‌بایست یک مسیر یا نوعی مسیر بخصوص انتخاب شود. می‌بایست بخاطر داشته باشیم که پتانسیل الکتریکی ساکن V میدانی ابقائی است. حال آنکه پتانسیل مغناطیسی شمارواره‌ای (اسکالر) V_m یک میدان ابقائی نیست. در مثال کابل هم محور فرض کنید مانعی را در $\varphi = \pi$ برقرار سازیم و فرض می‌کنیم که مسیری که از این صفحه عبور کند انتخاب نکنیم در این صورت نمی‌توانیم جریان I را دور بزیم و یک تابع تک ارزشی پتانسیل ممکن است. در نتیجه،

$$V_m = -\frac{I}{2\pi} \varphi \quad (-\pi < \varphi < \pi)$$

و در نقطه

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$V_{mP} = -\frac{I}{\lambda}$$

بدیهی است که پتانسیل مغناطیسی شمارواره‌ای (اسکالر) کمیتی است که سطوح هم پتانسیل آن با خطوط سیلان میدان \vec{H} شکل ۴.۸ تشکیل مربعهای منحنی الضلع خواهند داد. این يك جنبهٔ دیگر از تشابه بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی است که دربارهٔ آن در فصل بعد صحبت بیشتری خواهیم کرد.

حال موقتاً مبحث پتانسیل مغناطیسی شمارواره‌ای (اسکالر) را کنار می‌گذاریم و پتانسیل مغناطیسی برداری را بررسی می‌کنیم. و آن میدانی است که در بررسی تشعشع آنتنها و روزه‌ها و تشعشع ترشحي از خطوط انتقال و موج بر واجاق مایکرو ویو به نهایت درجه مفید است. پتانسیل مغناطیسی برداری را می‌توان در مناطقی که چگالی جریان صفر یا غیر صفر است بکار برد. و نیز می‌توان بعدها آن را برای میدانهای متغیر با زمان تعمیم داد. انتخاب پتانسیل مغناطیس برداری با توجه به رابطهٔ زیر توجه می‌شود

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

حال يك اتحاد برداری، که آن را در بخش ۴.۸ ثابت کردیم، نشان می‌دهد که دیورژانس کرل هر میدان برداری دلخواه مساوی صفر است. بنا براین با انتخاب

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (۴)$$

که در آن \vec{A} معرف پتانسیل مغناطیس برداری است شرط صفر بودن دیورژانس چگالی شار مغناطیسی بخودی خود تأمین می‌گردد. میدان \vec{H} عبارتست از:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} \quad (۵)$$

و

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \vec{A}$$

کرل کرل يك میدان برداری صفر نیست و رابطهٔ نسبتاً پیچیده‌ای دارد. که

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad .۱$$

در مختصات قائم می‌توان نشان داد که

$$\nabla^2 \vec{A} \equiv \nabla^2 \vec{A}_x \vec{a}_x + \nabla^2 \vec{A}_y \vec{a}_y + \nabla^2 \vec{A}_z \vec{a}_z$$

در حال حاضر لازم نیست رابطه کلی آن را بدانیم. در حالت‌های خاصی که رابطه \bar{A} معلوم باشد می‌توان به سهولت عمل کرل را دو بار انجام داد و چگالی جریان را تعیین کرد. معادله (۳) تعریف مفیدی برای پتانسیل مغناطیسی برداری \bar{A} است و چون محاسبه کرل مستلزم مشتق‌گیری نسبت به طول است واحد \bar{A} بر بر متر خواهد بود. تا اینجا دیده‌ایم که تعریف \bar{A} با هیچ یک از نتایج قبلی تناقضی ندارد. حال باید نشان دهیم که این تعریف بخصوص می‌تواند در محاسبه ساده‌تر میدانهای مغناطیسی مؤثر باشد. مسلماً \bar{A} را نمی‌توان با کمیتی که به سادگی قابل اندازه‌گیری باشد یکی دانست یا بوسیله آزمایشی تاریخی شناسائی کرد.

در بخش بعد نشان خواهیم داد که با در دست داشتن قانون بیو - ساوار و تعریف \bar{B} و تعریف \bar{A} می‌توان \bar{A} را از عناصر دیفرانسیلی جریان بسه وسیله رابطه زیر تعیین کرد.

$$\bar{A} = \oint \frac{\mu_0 I d\bar{L}}{4\pi R} \quad (6)$$

معنای جملات رابطه (۶) همانست که در قانون بیو - ساوار توضیح داده شد. جریان مستقیم I در امتداد یک هادی رشته‌ای برقرار است که فاصله هر عنصر دیفرانسیلی $d\bar{L}$ آن از نقطه‌ای که می‌خواهیم \bar{A} را در آن حساب کنیم مساوی R متر است. از آنجائی که در تعریف \bar{A} فقط کرل آن را مشخص کرده‌ایم، می‌توان گرایان هر میدان شمارواره‌ای (اسکالر) دلخواه را به رابطه (۵) اضافه کرد بی آنکه \bar{B} یا \bar{H} تغییر کند، چون کرل گرایان همیشه صفر است. در میدانهای مغناطیسی ثابت معمول است که این جمله اضافی را مساوی صفر قرار می‌دهند.

اینکه \bar{A} در حقیقت یک پتانسیل مغناطیسی برداری است از مقایسه رابطه (۶) با رابطه نظیر آن برای پتانسیل الکتریسته ساکن آشکارتر می‌گردد.

$$V = \int \frac{\rho_I dL}{4\pi\epsilon_0 R}$$

هر یک از دو رابطه انتگرالی در امتداد یک منبع خطی است که در یکی بار خطی و در دیگری جریان خطی است. هر یک از انتگرال‌دهها (این‌تگرالدها) یا فاصله منبع تا نقطه مورد نظر نسبت معکوس دارد و هر یک از آنها به مشخصه‌ای از محیط، در اینجا فضای آزاد، یعنی قابلیت پذیرش و قابلیت نفوذ بستگی دارد. رابطه (۶) را می‌توان به صورت دیفرانسیلی نوشت:

$$d\bar{A} = \frac{\mu_0 I d\bar{L}}{4\pi R} \quad (7)$$

بتصرخی که دوباره قبول کنیم که مفهوم فیزیکی خاصی به میدانهای حاصل از (۷) نسبت ندهیم مگر آنکه تمامی مسیر بسته‌ای را که جریان در آن برقرار است در نظر داشته باشیم. بنا بر نظر داشتن این موضوع می‌خواهیم میدان پتانسیل مغناطیسی برداری را در اطراف یک رشتهٔ دیفرانسیلی بررسی کنیم. اگر رشته را در مبدأ قرار دهیم و امتداد آن را در جهت مثبت z ها فرض کنیم، $d\vec{L} = dz\vec{a}_z$ و می‌توان با استفاده از مختصات استوانه‌ای $d\vec{A}$ را در نقطهٔ (r, φ, z) به دست آورد.

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I dz \vec{a}_z}{4\pi\sqrt{r^2 + z^2}}$$

یا

$$dA_z = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi\sqrt{r^2 + z^2}} \quad dA_\varphi = 0 \quad dA_r = 0 \quad (8)$$

در ابتدا متوجه می‌شویم که $d\vec{A}$ هم جهت با $d\vec{L}$ است. هر جزء کوچک هادی حامل جریان در ایجاد پتانسیل مغناطیس برداری کل سهمی دارد که هم جهت با جریان هادی است. قدر مطلق پتانسیل مغناطیسی برداری با فاصله‌اش از عنصر جریان نسبت معکوس دارد به طوری که در نزدیکی رشته از همه جا شدیدتر است و در فواصل دور به تدریج صفر می‌شود. سکی لینگت^۱ میدان پتانسیل مغناطیسی برداری را «شبه توزیع جریان ولی در کناره‌ها محو یا شبه عکس محوی از جریان» توصیف می‌کند.

برای تعیین شدت میدان مغناطیسی می‌بایست کرل رابطهٔ (۸) را در مختصات استوانه‌ای محاسبه کنیم. در نتیجه

$$d\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times d\vec{A} = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\partial dA_z}{\partial r} \right) \vec{a}_\varphi$$

یا

$$d\vec{H} = \frac{I dz}{4\pi} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \vec{a}_\varphi$$

که می‌توان تساوی آن را با نتیجه‌ای که از قانون بیوساوار به دست می‌آید به سهولت نشان داد.

در مورد منابع جریان توزیع شده نیز می‌توان روابطی برای پتانسیل

۱. Skilling. به مراجع آخر فصل مراجعه شود.

مغناطیسی برداری \vec{A} به دست آورد. برای جریان سطحی \vec{K} عنصر جریان دیفرانسیلی به صورت

$$I d\vec{L} = \vec{K} dS$$

و برای جریان داخلی یک حجم با چگالی \vec{J} به صورت

$$I d\vec{L} = \vec{J} dv$$

خواهد بود. در هر یک از دو رابطه فوق جریان را به صورت بردار نمایش داده‌ایم. برای عنصر جریان رشته‌ای معمول است، که $I d\vec{L}$ بجای $\vec{K} dS$ به کار بریم. ولی این کار الزامی نیست. چون اندازه جریان رشته‌ای ثابت است شکلی را انتخاب کرده‌ایم که بتوان یکی از دو کمیت فوق را از انتگرال خارج کرد. بنابراین روابط دیگر \vec{A} به صورت زیر است.

$$\vec{A} = \int \frac{\mu_0 \vec{K} dS}{4\pi R} \quad (9)$$

و

$$\vec{A} = \int_{\text{حجم}} \frac{\mu_0 \vec{J} dv}{4\pi R} \quad (10)$$

روابط (۶) و (۹) و (۱۰) پتانسیل مغناطیسی برداری را به صورت انتگرالی روی تمامی منابع آن بیان می‌کند. مقایسه شکل این انتگرالها با روابط مشابهی که پتانسیل الکتریسته ساکن از آنها به دست می‌آید نشان می‌دهد که مرجع صفر پتانسیل \vec{A} در بینهایت است چون هیچ عنصر جریان محدودی نمی‌تواند در $R \rightarrow \infty$ میدانی ایجاد کند. باید به خاطر داشته باشیم که برای پتانسیل V بسیار به ندرت روابط مشابهی را به کار بردیم. اغلب مسائل نظری ما شامل توزیع بارهائی بود که تا بینهایت ادامه داشت و بنابراین پتانسیلی مساوی بینهایت در تمام نقاط حاصل می‌شد. درحقیقت قبل از اینکه شکل دیفرانسیلی معادله پتانسیل یعنی $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon$ یا به عبارت بهتر $\nabla^2 V = 0$ را به دست آوریم کمتر میدان پتانسیلی را محاسبه کردیم. با شکل دیفرانسیلی می‌توانستیم آزادانه مرجع پتانسیل را انتخاب کنیم. در بخش بعد روابط مشابهی را برای \vec{A} به دست خواهیم آورد و مثالی از محاسبه پتانسیل مغناطیسی برداری را ذکر خواهیم کرد.

تمرین ۸.۸

جریانهای سطحی استوانه‌ای زیر مفروض‌اند: \vec{a}_z ۱۰۰ در $r = 0.1$ ، $-\vec{a}_z$ ۲۵ در

۳۰۷ $r = 0.05 \text{ m}$ و \vec{a}_z در $r = 0.05 \text{ m}$. فرض کنید در $\varphi = 0$ ، $V_m = 0$ و \vec{a} حاکی در $\varphi = \pi$ قرار داده شده است. با استفاده از رابطه (۲) V_m را در نقاط زیر به دست آورید: (الف) $r = 0.02$ ، $\varphi = \pi/2$ و (ب) $r = 0.04$ ، $\varphi = -\pi/2$

جوابها: $5\pi A$ و 125π

۹.۸ تمرین

پتانسیل برداری مغناطیسی را در داخل یک هادی استوانه‌ای توپس به شعاع a و حامل جریان کل I در جهت \vec{a}_z را می‌توان به سهولت به دست آورد. با استفاده از مقدار معلوم \vec{H} یا \vec{B} برای $r < a$ می‌توان معادله (۴) را حل کرد و \vec{A} را به دست آورد. با انتخاب $\vec{A} = (\mu_0 I \ln 5) / 2\pi$ در $r = a$ (برای اینکه با مثالی در بخش بعد مطابقت داشته باشد) \vec{A} را در نقاط زیر به دست آورید. (الف) $r = 0$ و (ب) $r = 0.05a$ و (پ) $r = a$

جوابها: $0.0322I$ ، $0.0397I$ ، $0.0422I$ $\mu\text{Wb/m}$

۷.۸ به دست آوردن قوانین میدانهای مغناطیسی ساکن

حال به وعده خود در باره اثبات روابط بین کمیات میدانهای مغناطیسی وفا می‌کنیم. کلیه این روابط را می‌توان از تعاریف \vec{H} و \vec{B} و \vec{A} به طریق زیر به دست آورد.

$$\vec{H} = \oint \frac{I d\vec{L} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2} \quad (1)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (2)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (3)$$

ابتدا فرض می‌کنیم که \vec{A} را بتوان با

$$\vec{A} = \int_{\text{حجم}} \frac{\mu_0 \vec{J} dv}{4\pi R} \quad (4)$$

نشان داد و بعد صحت رابطه (۴) را به دلیل اینکه رابطه (۱) از آن نتیجه می‌شود به اثبات می‌رسانیم. ابتدا باید اندیشهائی به رابطه اضافه کنیم که محل عنصر جریان (x_1, y_1, z_1) و همچنین نقطه‌ای که \vec{A} در آن داده شده است، (x_2, y_2, z_2) مشخص شود. به این ترتیب عنصر حجمی دیفرانسیلی dv_1 در مختصات قائم مساوی

z_1, y_1, x_1 متغیرهای انتگرال گیری عبارتند از: z_1, y_1, x_1 بنابراین با استفاده از این اندیسهها،

$$\bar{A}_\gamma = \int_{\text{حجم}} \frac{\mu_0 \bar{J}_1 dv_1}{4\pi R_{1\gamma}} \quad (5)$$

و با استفاده از (۲) و (۳) داریم

$$\bar{H}_\gamma = \frac{\bar{B}}{\mu_0} = \frac{\nabla \times \bar{A}}{\mu_0} \quad (6)$$

برای اینکه نشان دهیم که (۱) از (۵) نتیجه می شود باید (۵) را در (۶) قرار داد. این کار مستلزم محاسبه کول \bar{A}_γ یعنی کمیتی است که برحسب $x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma$ بیان شده و بنابراین مستلزم محاسبه مشتقهای پاره ای نسبت به این متغیرها است. بنابراین اندیسی زیر اپراتور دل قرار می دهیم که معرف متغیرهای مشتق گیری آن باشد.

$$\bar{H}_\gamma = \frac{\nabla_\gamma \times \bar{A}_\gamma}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla_\gamma \times \int_{\text{حجم}} \frac{\mu_0 \bar{J}_1 dv_1}{4\pi R_{1\gamma}}$$

ترتیب گرفتن مشتق پاره ای و انتگرال مهم نیست و چون $\mu_0/4\pi$ ثابت است

می توان نوشت

$$\bar{H}_\gamma = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{حجم}} \nabla_\gamma \times \frac{\bar{J}_1 dv_1}{R_{1\gamma}}$$

مشتق گیری کول در انتگرالده به منزله مشتق گیری برحسب متغیرهای $x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma$ است. عنصر حجم دیفرانسیلی dv_1 کمیتی شمارواره ای (اسکالر) و فقط تابع x_1, y_1, z_1 است. در نتیجه می توان آن را مانند هر ثابت دیگر به صورت ضریب از کول خارج کرد.

$$\bar{H}_\gamma = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{حجم}} \left(\nabla_\gamma \times \frac{\bar{J}_1}{R_{1\gamma}} \right) dv_1 \quad (7)$$

کول حاصلضرب یک شمارواره (اسکالر) و یک بردار از اتحاد زیر، کسه صحت آن را می توان با بسط در مختصات قائم تحقیق کرد، به دست می آید

$$\nabla \times (S\bar{V}) \equiv (\nabla S) \times \bar{V} + S(\nabla \times \bar{V}) \quad (8)$$

با استفاده از این اتحاد انتگرالده (۷) را بسط می دهیم.

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{حجم}} \left[\left(\nabla_2 \frac{1}{R_{12}} \right) \times \vec{J}_1 + \frac{1}{R_{12}} (\nabla_2 \times \vec{J}_1) \right] dV_1 \quad (۹)$$

جمله دوم انتگرالده صفر است چون $\nabla_2 \times \vec{J}_1$ معرف مشتقهای پاره‌ای تابعی از x_1 و y_1 و z_1 نسبت به متغیرهای x_2 و y_2 و z_2 است. دسته اول متغیرها تابع دسته دوم نیست و تمام مشتقهای پاره‌ای مساوی صفر اند.

برای تعیین جمله اول انتگرالده، R_{12} را برحسب مقادیر مختصات بسط

می‌دهیم

$$R_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

و گرادیان عکس آن را محاسبه می‌کنیم. مسأله ۳۴ نشان می‌دهد که نتیجه مساویست با

$$\nabla_2 \frac{1}{R_{12}} = -\frac{\vec{R}_{12}}{R_{12}^2} = -\frac{\vec{a}_{R_{12}}}{R_{12}^2}$$

که با قرار دادن آن در رابطه (۹) داریم

$$\vec{H}_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\text{حجم}} \frac{\vec{a}_{R_{12}} \times \vec{J}_1}{R_{12}^2} dV_1$$

یا

$$\vec{H}_2 = \int_{\text{حجم}} \frac{\vec{J}_1 \times \vec{a}_{R_{12}}}{4\pi R_{12}^2} dV_1$$

که معادل رابطه (۱) برحسب چگالی جریان است. اگر $I_1 d\vec{L}_1$ را به جای $\vec{J}_1 dV_1$ بگذاریم، می‌توانیم انتگرال حجمی را به صورت

$$\vec{H}_2 = \oint \frac{I_1 d\vec{L}_1 \times \vec{a}_{R_{12}}}{4\pi R_{12}^2}$$

بنویسیم.

بنابراین معادله (۴) صحیح است و با سه تعریف (۱) و (۲) و (۳) توافق

دارد.

حال قانون مداری آمپر را به صورت نقطه‌ای به اثبات می‌رسانیم،

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (۱۰)$$

از ترکیب (۲) و (۳) داریم

$$\nabla \times \vec{H} = \nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \vec{A} \quad (11)$$

حال می‌بایست $\nabla \times \nabla \times \vec{A}$ را در مختصات قائم بسط دهیم. چنانچه مشتقاتی پاره‌ای مربوطه را محاسبه و جملات مشابه را جمع کنیم نتیجه را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (12)$$

بطوری که

$$\nabla^2 \vec{A} \equiv \nabla^2 A_x \vec{a}_x + \nabla^2 A_y \vec{a}_y + \nabla^2 A_z \vec{a}_z \quad (13)$$

رابطه (۱۳) تعریف لاپلاسین یک بردار در مختصات قائم است. با جایگزین کردن (۱۲) در (۱۱) داریم

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} [\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}] \quad (14)$$

و حال روابطی برای دیورژانس و لاپلاسین \vec{A} لازم است. دیورژانس \vec{A} را می‌توان با به کار بردن عمل دیورژانس در مورد (۵) به دست آورد

$$\nabla_r \cdot \vec{A}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{حجم}} \nabla_r \cdot \frac{\vec{J}_1}{R_{1r}} dv_1 \quad (15)$$

و با استفاده از اتحاد برداری (۵) بخش ۸.۴

$$\nabla \cdot (S\vec{V}) \equiv \vec{V} \cdot (\nabla S) + S(\nabla \cdot \vec{V})$$

$$\nabla_r \cdot \vec{A}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{حجم}} \left[\vec{J}_1 \cdot \left(\nabla_r \frac{1}{R_{1r}} \right) + \frac{1}{R_{1r}} (\nabla_r \cdot \vec{J}_1) \right] dv_1 \quad (16)$$

قسمت دوم انتگرالده صفر است چون \vec{J}_1 تابع x_1 و y_1 و z_1 نیست. ما قبلاً نتیجه $\nabla_r (1/R_{1r}) = -\vec{R}_{1r}/R_{1r}^3$ را به کار برده‌ایم و به همان سادگی می‌توانیم نشان دهیم که

$$\nabla_r \frac{1}{R_{1r}} = \frac{\vec{R}_{1r}}{R_{1r}^3}$$

یعنی اینکه

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{12}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{12}}$$

بنابراین رابطه (۱۶) را می‌توان بصورت

$$\nabla_2 \cdot \vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{حجم}} \left[-\vec{J}_1 \cdot \left(\nabla_1 \frac{1}{R_{12}} \right) \right] dv_1$$

نوشت و اتحاد برداری را دوباره بکار برد

$$\nabla_2 \cdot \vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{حجم}} \left[\frac{1}{R_{12}} (\nabla_1 \cdot \vec{J}_1) - \nabla_1 \cdot \left(\frac{\vec{J}_1}{R_{12}} \right) \right] dv_1 \quad (17)$$

چون در اینجا فقط با میدانهای مغناطیسی پایدار سروکار داریم، رابطه پیوستگی نشان می‌دهد که جمله اول (۱۷) صفر است. کاربرد قضیه دیورژانس در مورد جمله دوم نتیجه می‌دهد.

$$\nabla_2 \cdot \vec{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{\vec{J}_1}{R_{12}} \cdot d\vec{S}_1$$

به طوری که S_1 سطحی است که حجم انتگرال گیری را می‌پوشاند. این حجم می‌بایست شامل تمامی جریان باشد، چون در رابطه انتگرالی اولیه \vec{A} انتگرال گیری چنان بود که اثر تمام جریان را شامل می‌شد. از آنجائی که در خارج این حجم جریانی وجود ندارد (در غیر این صورت باید حجم را بزرگتر کرد به طوری که شامل آن شود)، می‌توانیم در حجمی کمی بزرگتر یا روی سطح محاط کننده اندکی بزرگتر انتگرال بگیریم بی آنکه \vec{A} تغییری کند. روی این سطح بزرگتر چگالی جریان \vec{J} باید صفر باشد و بنابراین انتگرال سطح بسته صفر است، چون انتگرالده صفر است. بنابراین دیورژانس \vec{A} صفر است.

برای تعیین لاپلاسین بردار \vec{A} مؤلفه x رابطه (۴) را با رابطه مشابه آن برای پتانسیل الکتریسیته ساکن مقایسه می‌کنیم،

$$A_x = \int_{\text{حجم}} \frac{\mu_0 J_x dv}{4\pi R} \quad V = \int_{\text{حجم}} \frac{\rho dv}{4\pi \epsilon_0 R}$$

می‌بینیم که یکی از روابط را می‌توان با گذاشتن J_x به جای ρ و μ_0 بجای $1/\epsilon_0$ و A_x به جای V به سادگی از دیگری به دست آورد. از طرفی دیگر تا بحال مقداری

اطلاعات اضافی در باره پتانسیل الکتروسیته ساکن به دست آورده‌ایم که حالا لازم نیست آنها را برای مؤلفه x بردار پتانسیل مغناطیسی تکرار کنیم. این اطلاعات به صورت معادله پواسن است.

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

که بعد از تغییر متغیر به صورت

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

در خواهد آمد. با روشی مشابه داریم

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$

و

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

یا

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$$

(۱۸)

حال چنانچه به رابطه (۱۴) برگردیم می‌توانیم مقادیر دیورژانس و لاپلاسیان را در آن قرار دهیم و نتیجه مطلوب را به دست آوریم،

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

(۱۵)

قبلاً کاربرد قضیه استوکس را برای به دست آوردن صورت انتگرالی قانون مداری آمپر از رابطه (۱۵) نشان داده‌ایم و تکرار این کار در اینجا ضرورتی ندارد.

بنابراین موفق شده‌ایم نشان دهیم که تمام نتایجی که برای میدانهای مغناطیسی بیشتر بی اثبات به دست آورده‌ایم از تعاریف اصلی \vec{H} و \vec{B} و \vec{A} نتیجه می‌شوند. اثبات آنها ساده نیست ولی اگر قدم به قدم پیش برویم می‌بایست قابل فهم باشد. امید است هیچوقت احتیاجی نباشد که این روش اثبات به حافظه سپرده شود.

حال به رابطه (۱۸) برگردیم و از این معادله پیچیده دیفرانسیل نسبی مرتبه دوم برداری برای محاسبه پتانسیل مغناطیسی برداری در یک مثال ساده استفاده کنیم. برای این کار میدان بین هادیهای یک کابل هم محور را، که طبق معمول دارای شعاعهای a و b و جریان I در جهت \vec{a}_z است، انتخاب می‌کنیم. در فاصله بین دو هادی داریم $\vec{J} = 0$ و بنابراین

$$\nabla^2 \vec{A} = 0$$

یا اینکه

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{12}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{12}}$$

بنابراین رابطه (۱۶) را می‌توان بصورت

$$\nabla_2 \cdot \bar{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{حجم}} \left[-\bar{J}_1 \cdot \left(\nabla_1 \frac{1}{R_{12}} \right) \right] dv_1$$

نوشته و اتحاد برداری را دوباره بکار برد

$$\nabla_2 \cdot \bar{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{حجم}} \left[\frac{1}{R_{12}} (\nabla_1 \cdot \bar{J}_1) - \nabla_1 \cdot \left(\frac{\bar{J}_1}{R_{12}} \right) \right] dv_1 \quad (17)$$

چون در اینجا فقط با میدانهای مغناطیسی پایدار سروکار داریم، رابطه پیوستگی نشان می‌دهد که جمله اول (۱۷) صفر است. کاربرد قضیه دیورژانس در مورد جمله دوم نتیجه می‌دهد.

$$\nabla_2 \cdot \bar{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{\bar{J}_1}{R_{12}} \cdot d\bar{S}_1$$

به طوری که S_1 سطحی است که حجم انتگرال‌گیری را می‌پوشاند. این حجم می‌بایست شامل تمامی جریان باشد، چون در رابطه انتگرالی اولیه \bar{A} انتگرال‌گیری چنان بود که اثر تمام جریان را شامل می‌شد. از آنجائی که در خارج این حجم جریانی وجود ندارد (در غیر این صورت باید حجم را بزرگتر کرد به طوری که شامل آن شود)، می‌توانیم در حجمی کمی بزرگتر یا روی سطح محاط‌کننده اندکی بزرگتر انتگرال بگیریم بی آنکه \bar{A} تغییری کند. روی این سطح بزرگتر چگالی جریان \bar{J} باید صفر باشد و بنابراین انتگرال سطح بسته صفر است، چون انتگرالده صفر است. بنابراین دیورژانس \bar{A} صفر است.

برای تعیین لاپلاسیان بردار \bar{A} مؤلفه x رابطه (۴) را با رابطه مشابه آن برای پتانسیل الکتریسیته ساکن مقایسه می‌کنیم،

$$A_x = \int_{\text{حجم}} \frac{\mu_0 J_x dv}{4\pi R} \quad V = \int_{\text{حجم}} \frac{\rho dv}{4\pi \epsilon_0 R}$$

می‌بینیم که یکی از روابط را می‌توان با گذاشتن J_x به جای ρ و μ_0 بجای $1/\epsilon_0$ و A_x به جای V به سادگی از دیگری به دست آورد. از طرفی دیگر تا بحال مقداری

اطلاعات اضافی در باره پتانسیل الکتروستاتیک ساکن به دست آورده ایم که حالا لازم نیست آنها را برای مؤلفه θ بردار پتانسیل مغناطیسی تکرار کنیم. این اطلاعات به صورت معادله پواسن است.

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

که بعد از تغییر متغیر به صورت

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

درخواهد آمد. با روشی مشابه داریم

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$

و

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

یا

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$$

(۱۸)

حال چنانچه به رابطه (۱۴) برگردیم می توانیم مقادیر دیورژانس و لاپلاسین را در آن قرار دهیم و نتیجه مطلوب را به دست آوریم،

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

(۱۵)

قبلاً کاربرد قضیه استوکس را برای به دست آوردن صورت انتگرالی قانون مداری آمپر از رابطه (۱۵) نشان داده ایم و تکرار این کار در اینجا ضرورتی ندارد.

بنابراین موفق شده ایم نشان دهیم که تمام نتایجی که برای میدانهای مغناطیسی بیشتر بی اثبات به دست آورده ایم از تعاریف اصلی \vec{H} و \vec{B} و \vec{A} نتیجه می شوند. اثبات آنها ساده نیست ولی اگر قدم به قدم پیش برویم می بایست قابل فهم باشد. امید است هیچوقت احتیاجی نباشد که این روش اثبات به حافظه سپرده شود.

حال به رابطه (۱۸) برگردیم و از این معادله پیچیده دیفرانسیل نسبی مرتبه دوم برداری برای محاسبه پتانسیل مغناطیسی برداری در یک مثال ساده استفاده کنیم. برای این کار میدان بین هادیهای یک کابل هم محور را، که طبق معمول دارای شعاعهای a و b و جریان I در جهت \vec{a}_z است، انتخاب می کنیم. در فاصله بین دو هادی داریم $\vec{r} = 0$ و بنابراین

$$\nabla^2 \vec{A} = 0$$

قبلاً گفته شد (و مسأله ۳۶ بررسی این نتیجه را میسر می‌سازد) که لاپلاسیان برداری را می‌توان به صورت مجموعی برداری از لاپلاسیان‌های شمارواره‌ای (اسکالر) سه مؤلفه در مختصات قائم بسط داد،

$$\nabla^2 \bar{A} = \nabla^2 A_x \bar{a}_x + \nabla^2 A_y \bar{a}_y + \nabla^2 A_z \bar{a}_z$$

ولی در مختصات دیگر چنین نتیجه ساده‌ای ممکن نیست. یعنی، مثلاً در مختصات استوانه‌ای

$$\nabla^2 \bar{A} \neq \nabla^2 A_r \bar{a}_r + \nabla^2 A_\phi \bar{a}_\phi + \nabla^2 A_z \bar{a}_z$$

با این حال به سادگی می‌توان نشان داد که در مختصات استوانه‌ای مؤلفه z لاپلاسیان برداری مساوی لاپلاسیان شمارواره‌ای (اسکالر) مؤلفه z بردار \bar{A} است. یعنی

$$\nabla^2 \bar{A} \Big|_z = \nabla^2 A_z \quad (19)$$

و چون در این مسأله جریان کلاً در جهت محور z ها است \bar{A} فقط دارای مؤلفه z خواهد بود. بنابراین

$$\nabla^2 A_z = 0$$

یا

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = 0$$

و در نتیجه تفکر در مورد تقارن در باره رابطه (۴) می‌بینیم که A_z باید فقط تابع r باشد و بنابراین

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_z}{dr} \right) = 0$$

این معادله را قبلاً حل کرده‌ایم و نتیجه از این قرار است:

$$A_z = C_1 \ln r + C_2$$

اگر مرجع صفر پتانسیل را در $r = b$ انتخاب کنیم خواهیم داشت

$$A_z = C_1 \ln \frac{r}{b}$$

برای اینکه C_1 به منابع میدان این مسأله مربوط شود می‌توانیم کرل \bar{A} را به دست آوریم

$$\nabla \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{a}_\varphi = -\frac{C_1}{r} \vec{a}_\varphi = \vec{B}$$

و از آن \vec{H} را تعیین کنیم

$$\vec{H} = -\frac{C_1}{\mu_0 r} \vec{a}_\varphi$$

و انتگرال خطی را حساب کنیم

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I = \int_0^{2\pi} -\frac{C_1}{\mu_0 r} \vec{a}_\varphi \cdot r d\varphi \vec{a}_\varphi = -\frac{2\pi C_1}{\mu_0}$$

بنابراین

$$C_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

یا

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{r}$$

(۲۰)

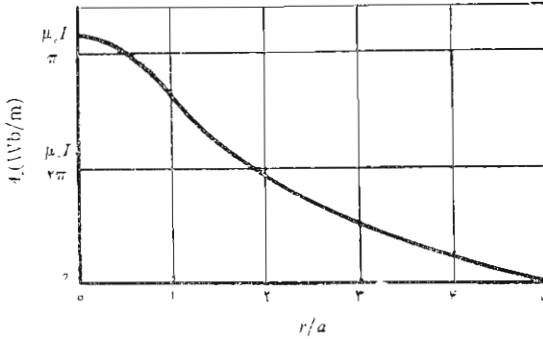
و کمافی السابق

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r}$$

منحنی تغییرات A_z برحسب r برای $b = 5a$ در شکل ۱۷.۸ نشان داده شده است. کاهش $|\vec{A}|$ برحسب فاصله از منبع جریان هترومکز یعنی هادی داخلی بخوبی هویدا است. نتایج تمرین ۹.۸ با تغییر مناسب مرجع صفر - نیز به منحنی شکل ۱۷.۸ اضافه شده است. ادامه دادن منحنی در داخل هادی خارجی به صورت مسأله ۳۵ به عهده خواننده واگذار شده است.

تمرین ۱۰.۸

واضح است که معادله (۲۰) را می توان در مورد فضای خارج هر هادی که دارای سطح مقطع دایره ای و حامل جریان I در جهت \vec{a}_z در فضای آزاد باشد به کار برد. مرجع صفر به طور دلخواه در $r = b$ انتخاب شده است. حال چهار هادی موازی با محور z ها را در نظر بگیرید که شعاع هر يك ۱ cm است. دو هادی در



شکل ۱۷.۸ پتانسیل مغناطیسی برداری در داخل هادی داخلی و همچنین ناحیه بین دو هادی یک کابل هم محور نشان داده شده است. در این کابل $b = \Delta a$ و جریان I در جهت \bar{a}_z است. مرجع $A_z = 0$ بطور دلخواه در $r = b$ انتخاب شده است.

هر یک حامل جریانی بشدت 10 mA در جهت \bar{a}_z و دو هادی دیگر در $(\pm 3, -3)\text{ cm}$ هر یک حامل جریانی بشدت 10 mA - در مبدأ مختصات $\bar{A} = 0$ قرار دهید و \bar{A} را در نقاط زیر بدست آورید: (الف) $(3, 0, 0)\text{ cm}$ و (ب) $(0, 3, 0)\text{ cm}$ و (پ) بینهایت.

جوابها: $\rho, \bar{a}_z, 0.3322\text{ nWb/m}$

مراجع

1- Boast, W.B. (به مراجع فصل ۲ مراجعه شود). پتانسیل مغناطیسی برداری در صفحه ۲۲۵ تعریف شده و دربارهٔ مورد استعمال آن در تصویر میدانهای مغناطیسی در صفحه ۴۴۴ بحث شده است.

2- Jordan, E. C., and K. G. Balmain «Electromagnetic Waves and Radiating Systems» 2nd ed. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968

پتانسیل مغناطیسی برداری در صفحات ۹۶-۹۵ مورد بحث قرار گرفته است.

3- Skilling, H.H.: (به مراجع فصل ۳ مراجعه شود) «چرخ پرده‌دار» در صفحات ۲۵-۲۳ معرفی شده است.

مسائل

- ۱- برای عنصر جریانی بطول محدود که در شکل ۵.۸ نشان داده شده است، از قانون بیو - ساوار استفاده کنید و رابطه (۹) بخش ۱.۸ را به دست آورید.
- ۲- جریانی رشته‌ای به شدت $I = 6A$ در جهت مثبت محور z ها به طرف داخل و سپس در جهت مثبت محور y ها به طرف خارج جریان دارد. \vec{H} را در: (الف) نقطه $(0, 1, 1)$ و (ب) در نقطه $(0, 0, 1)$ پیدا کنید.
- ۳- جریانی رشته‌ای به شدت $I = 7A$ در مسیر مربعی شکلی که مرکز آن روی مبدأ مختصات است و در صفحه $z = 0$ قرار دارد و طول ضلع آن $2m$ و اضلاع آن موازی محورهای x و y اند برقرار است. \vec{H} را در $(1, 1, 2)$ پیدا کنید، به شرطی که I در جهت کلی \vec{a}_φ جریان داشته باشد.
- ۴- رشته‌هایی در $x = 1$ و $x = 0$ و در $x = -1$ ، $y = 0$ به ترتیب در جهات \vec{a}_z و $-\vec{a}_z$ - حامل جریان $10A$ اند. (الف) \vec{H} را در $(0, 0, 0)$ پیدا کنید. (ب) \vec{H} را در $(0, 0, 0)$ پیدا کنید به شرطی که رشته‌ها فقط تا $|z| < 5$ ادامه داشته باشند. (پ) \vec{H} را در $(0, 0, 0)$ پیدا کنید به شرطی که این رشته‌ها در $z = \pm 5$ به وسیله رشته‌های دیگری به یکدیگر متصل باشند.
- ۵- دو حلقه رشته‌ای در $r = 0.02m$ و $r = 0.01m$ قرار دارند. \vec{H} را در مبدأ مختصات پیدا کنید در صورتی که حلقه واقع در $r = 0.01$ z حامل جریان $2A$ در جهت \vec{a}_φ و حلقه واقع در $r = 0.01$ z حامل همین جریان در جهت: (الف) \vec{a}_φ و (ب) $-\vec{a}_\varphi$ باشد.
- ۶- صفحه $z = 0$ حاوی جریان سطحی یکنواخت $\vec{K} = K_0 \vec{a}_z$ است. از قانون بیو - ساوار استفاده کنید و \vec{H} را در (a, b, c) ، $c > 0$ پیدا کنید.
- ۷- انتگرالی را بنویسید که \vec{H} حاصل در اثر جریانی به چگالی $\vec{J} = 100 \cos \pi x \cos \pi y \vec{a}_z A/m^2$ ، $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$ در $\vec{J} = 0$ و $z = 0$ در نقاط دیگر معلوم کند. انتگرال گیری لازم نیست.
- ۸- (الف) از قانون بیو - ساوار استفاده کنید و $\vec{H}(0, 0, k)$ ناشی از جریان صفحه‌ای $\vec{K} = 5r \vec{a}_\varphi A/m$ در $0 < r < 2$ ، $z = 0$ و $\vec{K} = 0$ در نقاط دیگر را تعیین کنید. (ب) از خط $\varphi = 0$ در صفحه $z = 0$ چه مقدار جریان می‌گذرد؟ (پ) چه مقدار جریان رشته‌ای در حلقه $r = 2$ و $z = 0$ ، همین میدان را برای $k = 1.5$ ایجاد خواهد کرد؟
- ۹- در مختصات استوانه‌ای می‌توان یک مارپیچ را با معادله $r = 5$ ، $\varphi = 2\pi z$ تعریف کرد. فرض کنید یک جریان رشته‌ای به شدت $1A$ در این مارپیچ برقرار

باشد. مقدار $\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}$ را برای هر يك از مسیرهای مشخص شده زیر به دست آورید. (الف) پاره خطهای راست $(0, 0, 0)$ به $(0, 5, 0)$ به $(0, 0, 10)$ و $(2, 0, 10)$ به $(0, 0, 0)$ ، (ب) دایره $z=0$ ، $r=10$. (پ) مستطیل $x=0$ ، $2 < y < 8$ ، $-1 < z < 2$.

۱۰- رشته حلقوی $r=a$ و $z=1$ حامل جریان I در جهت \vec{a}_ϕ است. (الف) \vec{H} را در $(0, 0, z)$ به دست آورید (ب) يك سیم پیچ استوانه‌ای کوتاه به شعاع a که محور آن بر محور z - ها منطبق است از $L/\sqrt{4}$ به $z = L/\sqrt{4}$ امتداد دارد. با فرض اینکه جریسان حلقوی I در N دور با توزیع یکنواخت برقرار باشد از نتایج قسمت (الف) فوق استفاده کنید و \vec{H} را در مبدأ مختصات پیدا کنید. (پ) برای چه نسبت L به a خطای ناشی از رابطه (۶) بخش ۲۰.۸ کمتر از ۲ درصد است؟

۱۱- (الف) يك سیم پیچ استوانه‌ای به شعاع ۲cm با ۲۰ دور در سانتیمتر سیم پیچی شده و حامل جریان ۱۰ mA است. $|\vec{H}|$ را در مرکز سیم پیچ پیدا کنید در صورتی که طول آن ۱۰cm باشد. (ب) $|\vec{H}|$ را پیدا کنید در صورتی که طول آن بینهایت باشد. (پ) $|\vec{H}|$ را پیدا کنید در صورتی که سیم پیچ حامل جریان سطحی بشدت 20 A/m و طول آن بینهایت باشد. اگر کلیه سیم پیچ‌های قسمت (الف) طوری فشرده شود که حلقه‌ای به شعاع ۲cm بوجود آید، $|\vec{H}|$ در مرکز حلقه چقدر خواهد شد؟

۱۲- يك پوسته تو خالی استوانه‌ای به شعاع a هم محور z - ها قرار دارد و حامل جریان سطحی یکنواختی به چگالی $K_a \vec{a}_\phi$ است. (الف) نشان دهید که H تابع ϕ یا z نیست. (ب) نشان دهید که H_ϕ و H_r در تمام نقاط صفرند. (پ) نشان دهید که در $r > a$ ، $H_z = 0$ ، (ت) نشان دهید که در $r < a$ ، $H_z = K_a$ (ث) پوسته دیگری در $r=b$ حامل جریسان $K_b \vec{a}_\phi$ است. \vec{H} را در تمام نقاط پیدا کنید.

۱۳- چنبره‌ای با مقطع مربع محدود است به سطوح $r=3$ و $r=4$ و $z = -1/\sqrt{4}$ تا $z = 1/\sqrt{4}$ سانتیمتر. این چنبره با يك لایه ۷۰۰ دوری سیم پیچی و با جریانی بشدت 205 A (در جهت \vec{a}_z در $r=3 \text{ cm}$) تحریک شده است. (الف) \vec{H} را در مرکز سطح مقطع مربع بدست آورید. (ب) در صورتی که مقطع مربع نصف شود و شعاع متوسط ثابت بماند چه تغییری در جواب قبلی حاصل می‌شود؟ (پ) برای اینکه نتیجه قسمت (الف) به دست آید چگالی جریسان سطحی لازم روی سطح استوانه‌ای داخلی چقدر است.

۱۴- با در نظر گرفتن تقارن مسأله در چند مرحله، شبیه مراحلی که در مسأله ۱۲ ذکر

شده است از قانون مداری آمپر استفاده کرده معادلات (۷ الف) و (۷ ب) و (۸ الف) و (۸ ب) بخش ۲۰.۸ را برای چنبره به دست آورید.

۱۵- جریان کل ΔA (در جهت $-\bar{a}_z$) به صورت جریان سطحی یکنواختی از روی استوانه پهنایت دراز $m \sqrt{1/4}$ به سمت يك صفحه هادی پهنایت در $z=0$ پائین می آید. جریانی برابر $3A$ از رشته ای روی محور منفی z ها به طرف بالا به سمت همان صفحه هادی برقرار است. با استفاده از قانون مداری آمپر \bar{H} را در تمام نقاط پیدا کنید.

۱۶- جریانی که چگالی آن به صورت زیر در فضا توزیع شده است مفروض است:

$$\bar{J} = -80\bar{a}_z A/m^2 \text{ در } -1m < y < -2 \text{ و } \bar{J} = 80\bar{a}_z \text{ در } 1 < y < 2$$
 و $\bar{J} = 0$ در نقاط دیگر. \bar{H} را در تمام نقاط پیدا کنید.

۱۷- در تمرین ۴.۸ نسبت انتگرال مسیر بسته \bar{F} به سطح محصور مساوی ۲۸ است در حالی که این مؤلفه کرل \bar{F} برابر ۱۲ است. فرض کنید ابعاد مسیر نصف شده ولی مرکز آن همچنان در $(0, 1, -1)$ باشد و نشان دهید که نسبت جدید تقریب بهتری است برای $(\nabla \times \bar{F})$.

۱۸- فرض کنید $\bar{G} = x^2 y^2 z^2 \bar{a}_z$. عبارات زیر را پیدا کنید (الف) $\nabla \times \bar{G}$ (ب)
 $\nabla \times \nabla \times \bar{G}$ (پ) $\nabla \times \nabla \times \bar{C}$ (ت) $\nabla \times \nabla G_x$

۱۹- اگر در مختصات استوانه ای $\bar{J} = kr^2 \bar{a}_z$ (الف) \bar{H} را از طریق قانون مداری آمپر به دست آورید. (ب) نشان دهید که $\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$.

۲۰- در ناحیه ای از فضا چگالی جریان برابر است با $3\bar{a}_z + 10\bar{a}_y - 10\bar{a}_x$ و می دانیم که $H_y = H_z = 0$. اگر در $(5, 6, 7)$ $\bar{H} = 100\bar{a}_z$ ، مقدار تقریبی \bar{H} در نقاط زیر چقدر است؟ (الف) $(5, 6, 7)$. (ب) $(5, 6, 7)$.

۲۱- اگر $\bar{F} = F_x \bar{a}_x$ ، در صورتی که در تمام نقاط: (الف) $\nabla \cdot \bar{F} = 0$ (ب) $\nabla \times \bar{F} = 0$ (پ) $\nabla \cdot \bar{F} = 0$ و $\nabla \times \bar{F} = 0$ ، در باره \bar{F} چه می توان گفت؟

۲۲- هر دو طرف قضیه استوکس را روی کلاهک کره $r=2$ و $0 < \theta < \pi/4$ و $0 < \phi < 2\pi$ و پیرامون آن برای میدان $\bar{F} = 5r \sin \theta \cos^2 \phi \bar{a}_\phi$ محاسبه کنید.

۲۳- انتگرال خطی $\oint (x^2 y dx + 2xy dy)$ را می خواهیم در خلاف جهت عقربه های ساعت (وقتی که از جهت محور z مشاهده شود) حول پیرامون مستطیل $y = \pm 5$ ، $x = \pm 3$ محاسبه کنیم. نتیجه را با استفاده از قضیه استوکس، بی محاسبه انتگرال خطی به دست آورید، مگر آنکه خواسته باشید صحت نتیجه را تحقیق کنید.

۲۴- بی اینکه زحمت زیادی بکشید، نتیجه انتگرال گیری $\nabla \times \bar{H}$ را روی آن قسمت

از سطح سهموی $z = r^2$ که در زیر $z = 4$ قرار دارد به دست آورید. فرض کنید در مختصات استوانه‌ای $\vec{H} = 6\vec{a}_r/r + 10(z - 4)\vec{a}_\phi + 2r \sin \phi \vec{a}_z$ باشد.

۲۵- رشته‌هایی که در فضای آزاد در $y = 2 \text{ cm}$ و $y = -2 \text{ cm}$ روی صفحه $x = 0$ قرار دارند بترتیب حامل جریانهای $5\vec{a}_z$ و $-5\vec{a}_z$ اند. مطلوبست: (الف) \vec{B} در مبدأ مختصات (ب) مقدار کل شار مغناطیسی در واحد طول در ناحیه بین دو رشته (پ) مقدار کل شار مغناطیسی در واحد طول در ناحیه $-1 < y < 1 \text{ cm}$ (ت) مقدار کل شار مغناطیسی در واحد طول در ناحیه $y > 2 \text{ cm}$ (ث) مقدار کل شار مغناطیسی در واحد طول در ناحیه $y > 3 \text{ cm}$.

۲۶- هادی‌هایی که مقاطع آنها دایره‌هایی به شعاع 2 mm است و محورهایشان روی $y = 2 \text{ cm}$ و $y = -2 \text{ cm}$ در صفحه $x = 0$ قرار دارند به ترتیب حامل جریانهای $5\vec{a}_z$ و $-5\vec{a}_z$ اند که بطور یکنواخت توزیع شده‌اند. مطلوبست: (الف) \vec{B} در مبدأ مختصات. (ب) مقدار کل شار مغناطیسی در واحد طول که از بین دو هادی ($-1.78 < y < 1.78 \text{ cm}$) عبور می‌کند. (پ) مقدار کل شار مغناطیسی در واحد طول بین محورهای دو هادی ($-2 < y < 2 \text{ cm}$).

۲۷- جریانهای سطحی $400\vec{a}_z \text{ A/m}$ در $z = 0.2 \text{ m}$ و $200\vec{a}_z \text{ A/m}$ در $z = 0$ و $600\vec{a}_z \text{ A/m}$ در $z = -0.1$ در فضای آزاد مفروضند مطلوبست مقدار کل شار مغناطیسی در واحد طول که از دو ناحیه بین این صفحات عبور می‌کند.

۲۸- برای دو رشته جریان مسأله ۲۵ فرض کنید در مبدأ $V_m = 0$ ، تغییرات V_m را بر حسب x تعیین و رسم کنید.

۲۹- حلقه جریانی بشدت 10 A در جهت \vec{a}_ϕ در صفحه $z = 0$ قرار داشته و شعاع آن $r = 5 \text{ cm}$. اگر پتانسیل مغناطیسی شمارواره‌ای (اسکالر) در مبدأ مختصات مساوی صفر باشد در چه نقطه‌ای روی محور z - ها مقدار آن برابر نصف مقادارش در بینهایت است؟

۳۰- پتانسیل مغناطیسی برداری ناشی از سه جریان سطحی استوانه‌ای تمرین ۸.۸ را به دست آورید. فرض کنید در $r = 1 \text{ m}$ ، $\phi = \pi/2$ ، $z = 1 \text{ m}$ ، داشته باشیم $\vec{A} = 0$ را طوری تعیین کنید که روی هر یک از صفحات پیوسته باشد.

۳۱- (الف) از تعریف پتانسیل مغناطیسی برداری استفاده کنید و رابطه بین انتگرال مسیر بسته آن و شار مغناطیسی را به دست آورید. (ب) صحت نتیجه خود را با در نظر گرفتن میدانهای یک رشته جریان $I = 2 \text{ A}$ ، روی محور z - ها در فضای آزاد و با استفاده از مسیر مستطیلی حاصل از تقاطع صفحه $\phi = \pi/4$ با

استوانه‌های $r = 2\text{cm}$ و $r = 5\text{cm}$ و صفحات $z = 0$ و $z = 1\text{m}$ تحقیق کنید.
 ۳۲- برای میدان پتانسیل مغناطیسی برداری $\vec{A} = e^{-z} \vec{a}_y$ (مختصات استوانه‌ای) در هوا مقادیر زیر را پیدا کنید: (الف) \vec{B} (ب) \vec{H} (پ) \vec{J} (ت) مقدار کل جریان I را که از صفحه $z = 0$ در جهت \vec{a}_z می‌گذرد. (ث) مقدار کل شار مغناطیسی که به دور محور z - ها در ناحیه بین $z = 0$ و $z = 1$ حلقه می‌زند.

۳۳- چگالی جریان در ناحیه $0.3 < z < 0.2$ برابر است با $100\vec{a}_y$ و در $0.2 < z < -0.3$ - برابر است با $100\vec{a}_y$ - (الف) V_m را در هر جا که $\vec{J} = 0$ است پیدا کنید با فرض اینکه در مبدأ $V_m = 0$ (ب) \vec{A} را در تمام نقاط به دست آورید با فرض اینکه در مبدأ $\vec{A} = 0$ باشد. پتانسیل مغناطیسی برداری در مرزهای بین چند ناحیه پیوسته است.

$$34- \nabla_2(1/R_{12}) = -\nabla_1(1/R_{12}) = \vec{R}_{21}/R_{12}^3$$

۳۵- پتانسیل مغناطیسی برداری را در داخل هادی خارجی خط هم محوری که پتانسیل مغناطیسی برداری آن در شکل ۱۷.۸ نشان داده شده است به دست آورید. در صورتی که شعاع خارجی هادی خارجی V_0 باشد. مبدأ پتانسیل مناسبی انتخاب کنید و نتیجه را روی شکل رسم کنید.

۳۶- با بسط رابطه (۱۲) بخش ۷.۸ در مختصات قائم نشان دهید که رابطه (۱۳) صحیح است.

۳۷- بعد از خواندن بحث مربوط به میدان محوری در خارج یک سیم پیچ استوانه‌ای در کتاب Boast (به مراجع توصیه شده فصل ۲ مراجعه شود) در بخش ۲.۱۸ آن کتاب، B را روی محور سیم پیچ استوانه‌ای با مشخصات $a = 3\text{cm}$ ، $L = 20\text{cm}$ ، $I = 0.1\text{A}$ ، $N = 2000$ ، و نقطه خارجی به فاصله 10cm از انتهای سیم پیچ محاسبه کنید.

۳۸- فینزی^۱ و فریدلندر^۲ طی مقاله‌ای که در

Proc. IEEE, vol. 59, No. 6, June 1971, pp. 996-998

تحت عنوان

Magnetics in The Undergraduate Electrical Engineering

منتشر کرده‌اند، تذکر داده‌اند که دو روش اصلی برای تدریس مغناطیس وجود

دارد. این دو روش را شرح دهید.

نیروهای مغناطیسی، مواد مغناطیسی و ضرب خود القاء

برای کمیات \vec{H} و \vec{B} و Φ' و V_m و \vec{A} میدان مغناطیسی که در فصل قبل معرفی شدند هنوز معنای فیزیکی خاصی وضع نکرده‌ایم. هر يك از این کمیات صرفاً بر حسب توزیع منابع جریان در فضا تعریف شده‌اند. اگر توزیع جریان معلوم باشد حس می‌کنیم که \vec{H} و \vec{B} و \vec{A} را در تمام نقاط فضا معینند گر چه ممکن است انتگرالهای مربوط به آنها را به علت پیچیدگی ریاضی نتوانیم محاسبه کنیم.

حال آماده‌ایم که به نیمهٔ دوم مسألهٔ میدان مغناطیسی، یعنی مسألهٔ تعیین نیروها و گشتاور - نیروهای وارد بر بارهای دیگر در اثر میدان مغناطیسی بپردازیم. میدان الکتریکی باعث اعمال نیرو بر بار می‌شود خواه باری ثابت باشد یا متحرك. خواهیم دید که میدان مغناطیسی پاینده فقط روی بارهای متحرك می‌تواند نیرو وارد کند این يك نتیجهٔ منطقی است. بارهای متحرك می‌توانند میدان مغناطیسی به وجود آورند پس میدان مغناطیسی نیز می‌تواند نیروهایی بر آنها وارد کند. بارهای ثابت نمی‌توانند میدان مغناطیسی به وجود آورند پس تحت تأثیر نیروئی هم از طرف آن قرار نمی‌گیرند.

در این فصل در وهلهٔ اول نیروها و گشتاور - نیروهای وارد بر هادیهای حامل جریان که ممکن است به صورت رشته‌ای یا دارای سطح مقطع محدود باچگالی جریان معلوم باشند، بررسی می‌شود. از مسائل مربوط به حرکت ذرات درخلاء به‌طور

کلی اجتناب شده است.

بعد از درک اثرات بنیادی ناشی از میدان مغناطیسی، می‌توانیم انواع مختلف مواد مغناطیسی، و تحلیل مدارهای مغناطیسی ساده و نیروهای وارد بر مواد مغناطیسی و بالاخره، مفهوم مهم مداری ضریب خود القائی را بررسی کنیم.

۱.۹ نیروی مؤثر بر بار متحرك

تعریف شدت میدان در میدان الکتریکی نشان می‌دهد که نیروی مؤثر بر يك ذره باردار عبارت است از

$$\boxed{\vec{F} = Q\vec{E}} \quad (۱)$$

نیرو با شدت میدان الکتریکی هم جهت است (برای بار مثبت) و با \vec{E} و همچنین با Q نسبت مستقیم دارد. اگر بار در حال حرکت باشد نیرو در هر نقطه از مسیر حرکت آن از رابطه (۱) به دست آید.

تجربه نشان داده است که يك ذره باردار متحرك در يك میدان مغناطیسی با چگالی شار \vec{B} متحمل نیروئی است که با بار Q و سرعت ذره \vec{U} و چگالی شار \vec{B} و سینوس زاویه بین بردارهای \vec{U} و \vec{B} متناسب است. جهت این نیرو به هر دو بردار \vec{U} و \vec{B} عمود و با بردار یکه‌ای در جهت $\vec{U} \times \vec{B}$ مشخص می‌شود. بنا براین نیرو را می‌توان به صورت

$$\boxed{\vec{F} = Q\vec{U} \times \vec{B}} \quad (۲)$$

بیان کرد.

حال يك تفاوت اصلی بین اثر میدانهای الکتریکی و مغناطیسی روی ذرات باردار آشکار می‌گردد چون هر نیروئی که پیوسته عمود بر جهت حرکت ذره برآن وارد شود، به هیچ وجه نمی‌تواند اندازه سرعت ذره را تغییر دهد، به عبارت دیگر بردار شتاب همیشه عمود بر بردار سرعت است، انرژی جنبشی ذره حفظ می‌شود و میدان مغناطیسی پاینده قادر به انتقال انرژی به ذره متحرك نیست. از طرف دیگر، میدان الکتریکی، نیروئی بر ذره وارد می‌کند که مستقل از جهت حرکت ذره است و بنا براین باعث تبادل انرژی بین میدان و ذره می‌گردد.

دو مسأله اول آخر این فصل اثرات مختلف میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را روی انرژی جنبشی يك ذره باردار متحرك در فضای آزاد نشان می‌دهند. نیروی مؤثر بر يك بار متحرك در اثر ترکیبی از میدانهای الکتریکی و

مغناطیسی را می‌توان به سهولت با استفاده از اصل جمع به دست آورد.

سیدم نیروی لورنتز

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B}) \quad (۳)$$

این رابطه به معادله نیروی لودنتس^۱ معروف است و حل آن برای تعیین مدارهای الکترون در ماگنترون و مسیرهای پروتونها در سیکلوترون، یا به طور کلی حرکت ذرات باردار در میدانهای مرکب الکتریکی و مغناطیسی لازم است.

تمرین ۱۰۹

مطلوب است اندازه نیروی مؤثر بر يك بار نقطه‌ای Q دره که با سرعت $4\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + 3\vec{a}_z$ m/s در میدان: (الف) $\vec{E} = 20(\vec{a}_x + \vec{a}_z)$ V/m و (ب) $\vec{B} = 3\vec{a}_x - 5\vec{a}_y - 6\vec{a}_z$ Wb/m² هر دو حرکت می‌کنند.

جوابها: ۵۶۶، ۸۹۸، ۱۱۵۵ بر حسب نیوتن

۲۰۹ نیروی مؤثر بر يك عنصر دیفرانسیلی جریان

نیروی مؤثر بر يك ذره باردار متحرك در يك میدان مغناطیسی پاینده را می‌توان به صورت نیروی دیفرانسیلی مؤثر بر عنصر دیفرانسیلی بار نوشت،

$$d\vec{F} = dQ \vec{U} \times \vec{B} \quad (۱)$$

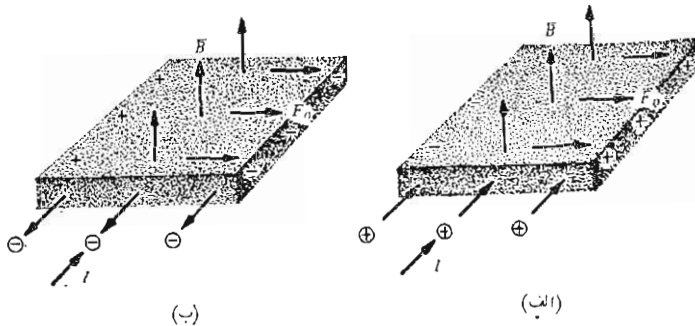
از نقطه نظر فیزیکی، عنصر دیفرانسیلی بار عبارتست از تعداد زیادی بارهای منفک کوچک که حجمی را اشغال کرده‌اند که ابعاد آن در عین کوچکی از فاصله متوسط بین بارها بزرگتر است، بنابراین نیروی دیفرانسیلی رابطه (۱) صرفاً مجموع نیروهای وارد بر تك تك این بارها است. این نیرو، یا منتجه نیروها، نیروئی نیست که بر يك جسم تنها وارد شود. به همین طریق، می‌توان نیروی دیفرانسیلی ثقل وارد بر حجم کوچکی از مقداری شن در حال ریزش را در نظر گرفت. حجم کوچک محتوی تعداد زیادی دانه‌های شن است و نیروی دیفرانسیلی مجموع نیروهای وارد بر تك تك دانه‌های شن موجود در این حجم است.

حال اگر بارهای ما الکترونهائی باشند که در داخل يك هادی در حرکتند، می‌توان نشان داد که نیرو به هادی منتقل می‌شود و مجموع تعداد بسی اندازه بزرگ نیروهای بی‌اندازه کوچک اهمیتی عملی دارد. الکترونها در داخل هادی در میان

ایونهای مثبت ساکنی در حرکتند که به صورت آرایش بلوری شکل قرار گرفته‌اند و موجب خواص جامدی هادیند. يك میدان مغناطیسی كه نیروهای بر الکترونها وارد می‌كند باعث تغییر محل جزئی آنها می‌شود و تغییر مکانی جزئی بین مراکز «ثقل» بارهای مثبت و منفی ایجاد می‌كند. از طرفی دیگر نیروهای كسولن بین الکترونها و ایونهای مثبت در برابر چنین تغییر محلی مقاومت می‌كنند. بنابراین هر كوشش میدان برای حرکت دادن الکترونها باعث ایجاد نیروی جاذبه‌ای بین الکترونها و ایونهای مثبت شبکه باور می‌گردد. به این ترتیب نیروی مغناطیسی به شبکه باور یا بخود هادی منتقل می‌شود. در هادیهای خوب نیروهای كولن آنقدر از نیروهای مغناطیسی بزرگترند كه تغییر مكان حقیقی تقریباً غیر قابل اندازه گیری است. ولی این فاصله گرفتن بارها از يكدیگر به صورت يك اختلاف پتانسیل جزئی در هادی در جهتی عمود بر میدان مغناطیسی و سرعت بارها، نمایان می‌گردد. این ولتاژ به ولتاژ هال و خود اثر به اثر هال موسوم است.

شکل ۱۰۹ جهت ولتاژ هال را برای بارهای مثبت و همچنین بارهای منفی در حال حرکت نشان می‌دهد. توجه كنید كه جریانهای مساوی مربوط به حفره‌ها و الکترونها را می‌توان با ولتاژهای هال آنها از يك دیگر تمیز داد. این یسکی از روشهایی است كه به توسط آن می‌توان نوع n یا p يك نیم هادی را تعیین كرد.

با وسائلی كه از اثر هال استفاده می‌كنند می‌توان چگالی شار مغناطیسی را اندازه گرفت و درموردی كه بتوان جریان داخلی دستگاه را متناسب با میدان مغناطیسی



شکل ۱۰۹ جریانهای مساوی به طرف داخل جسم در اثر حرکت بارهای مثبت به سمت داخل در (الف) و حرکت بارهای منفی به خارج در (ب) به وجود می‌آیند. همانظوری كه نشان داده شده است این دو حسالت را می‌توان از ولتاژهای هال مختلف جهت تشخیص داد.

این دو طرف آن کرد، می توان آن را به عنوان وات متر الکترونیکی و وسائل مجذور کننده و غیره به کار برد.

حال برگردیم به رابطه (۱). مشاهده می کنیم که می توان گفت که اگر يك عنصر بار متحرك در داخل يك دسته اشعه الكترونی را در نظر بگیریم، نیرو صرفاً مجموع نیروهائی است که بر الكترونهاى موجود در این عنصر كوچك حجمی وارد می شود. ولی اگر يك عنصر بار متحرك در داخل يك هادی را در نظر بگیریم، نیروی كل به خود هادی جامد وارد می شود. اکنون توجه خود را به نیروهای مؤثر بر هادیهای حامل جریان محدود می کنیم.

در فصل ۵ چگالی جریان انتقالی را بر حسب سرعت چگالی بار حجمی تعریف کردیم،

چگالی بار حجمی

$$\vec{J} = \rho \vec{U}$$

عنصر دیفرانسیلی بار در رابطه (۱) را می توان بر حسب چگالی حجمی بار نیز بیان کرد.

$$d\vec{F} = d\int (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$dQ = \rho dv.$$

$$\downarrow$$

$$d\vec{F} = \rho dv \vec{U} \times \vec{B}$$

بنابراین

یا

$$d\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} dv$$

(۲)

در فصل قبل دیدیم که $\vec{J} dv$ را می توان به عنوان يك عنصر دیفرانسیلی جریان تعبیر کرد. یعنی،

$$\vec{J} dv = \vec{K} dS = I d\vec{L}$$

و به این ترتیب معادله نیروی لورنتس را می توان در مورد چگالی جریان سطحی،

$$d\vec{F} = \vec{K} \times \vec{B} dS$$

(۳)

یا يك جریان رشته ای دیفرانسیلی،

$$d\vec{F} = I d\vec{L} \times \vec{B}$$

(۴)

به کار برد.

اگر از روابط (۲) یا (۳) یا (۴) به ترتیب روی يك حجم یا سطحی که ممکن است باز یا بسته باشد (چرا؟) یا يك مسیر بسته انتگرال گیری شود به بیان ریاضی آنها به صورت انتگرال دست می یابیم.

$$\vec{F} = \int_{\text{حجم}} \vec{J} \times \vec{B} dv \quad (5)$$

$$\vec{F} = \int_s \vec{K} \times \vec{B} dS \quad (6)$$

و

$$\vec{F} = \oint I d\vec{L} \times \vec{B} = -I \oint \vec{B} \times d\vec{L} \quad (7)$$

با به کار بردن (۴) یا (۷) در مورد يك هادی مستقیم در معرض میدان مغناطیسی بکنواخت می توان نتیجه ساده ای گرفت،

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B} \quad (8)$$

اندازه نیرو از رابطه ای که با آن آشنائی داریم به دست می آید

$$F = BIL \sin \theta \quad (9)$$

به طوری که θ زاویه بین بردارهایی است که معرف جهت جریان و چگالی شار مغناطیسی اند. معادله (۸) یا (۹) را فقط برای قسمتی از مدار بسته می توان به کار برد و در مسائل عملی بقیه مدار نیز باید در نظر گرفته شود.

تمرین ۲.۹

از يك هادی رشته ای به طول ۳۲cm مربعی ساخته شده است که در صفحه $z = 0$ قرار دارد و مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات و اضلاع آن موازی محورها است. اگر این مدار حامل جریانی برابر $30A$ در خلاف جهت عقربه های ساعت باشد (در صورتی که از محور $z +$ به آن نگاه کنیم) و میدان $\vec{B} = 2\vec{a}_z \text{ Wb/m}^2$ نیز موجود باشد، بردار نیرو را روی: (الف) طول کوتاه ۱ سانتیمتری حلقه روی محور مثبت z ها (ب) ضلعی که محور $x +$ را قطع می کند و (پ) روی تمامی مدار به دست آورید.

جوابها: $0.06 \bar{a}_z$ ، $0.088 \bar{a}_z$ ، 0 بر حسب نیوتن

تمرین ۳.۹

رشته‌ای روی محور z — هسا حامل جریانی به شدت $A \bar{a}_z$ در فضای آزاد است. (الف) \bar{B} را در امتداد خط $y = 1$ و $z = 0$ پیدا کنید. (ب) نیروی مؤثر بر طول دیفرانسیلی رشته جریان دیگری $I \Delta x \bar{a}_z$ را که در نقطه $(0, 1, 0)$ روی خط فوق قرار دارد به دست آورید: (پ) قسمت (ب) را برای نقطه $(0, 1, 0)$ تکرار کنید. (ت) اگر $I = 4 \bar{a}_z A$ نیروی مؤثر بر آن قسمت از رشته دوم کسه در آن $0 < x < 100$ است به دست آورید.

جوابها: $18/42 \bar{a}_z$ ، $1/4 I L x \bar{a}_z$ ، 0 ، $(-\bar{a}_z + x \bar{a}_y)/(1 + x^2) \mu \text{Wb/m}^2$ هر سه بر حسب میکرونیوتن

۳.۹ نیروی بین عناصر دیفرانسیلی جریان

مفهوم میدان مغناطیسی بدین منظور معرفی شد که مسأله مربوط به اثر متقابل يك توزیع جریان بر دیگری به دو قسمت تجزیه شود. ممکن است که نیروی مؤثر بر يك عنصر جریان را مستقیماً بر حسب عنصر جریان دیگری بنویسیم بی آنکه میدان مغناطیسی را حساب کرده باشیم. چون ما ادعا کردیم که به میان آوردن میدان مغناطیسی کار را ساده تر می کند اکنون بر ماست که نشان دهیم که حذف این قدم واسطه به رابطه پیچیده تری می انجامد.

دیدیم که میدان مغناطیسی در نقطه ۲ در اثر عنصر جریانی در نقطه ۱ از رابطه زیر به دست می آید.

$$d\bar{H}_2 = \frac{I_1 d\bar{L}_1 \times \bar{a}_{R12}}{4\pi R_{12}^2}$$

حال نیروی دیفرانسیلی مؤثر بر يك عنصر دیفرانسیلی جریان عبارت است از

$$d\bar{F} = I d\bar{L} \times \bar{B}$$

این رابطه را در مورد مسأله مان به ترتیب به کار می بریم بدین طریق که $d\bar{B}_2$ چگالی شار دیفرانسیلی در نقطه ۲، در اثر عنصر جریان در نقطه ۱، را به جای \bar{B} و $I_1 d\bar{L}_1$ را به جای $I d\bar{L}$ می گذاریم و مقدار دیفرانسیلی نیروی دیفرانسیلی مؤثر بر عنصر ۲ را به صورت $d(d\bar{F}_2)$ نشان می دهیم.

جواب: $\vec{a}_z = 0.06r$ ، $\vec{a}_z = 0.428r$ ، 0 بر حسب نیوتن

۳.۹ تمرین

رشته‌ای روی محور z - ها حامل جریانی به شدت $A \vec{a}_z$ در فضای آزاد است. (الف) \vec{B} را در امتداد خط $y=1$ و $z=0$ پیدا کنید. (ب) نیروی مؤثر بر طول دیفرانسیلی رشته جریان دیگری $I \Delta x \vec{a}_z$ را که در نقطه $(0, 1, 0)$ روی خط فوق قرار دارد به دست آورید: (پ) قسمت (ب) را برای نقطه $(1, 1, 0)$ تکرار کنید. (ت) اگر $I = 4 \vec{a}_z A$ نیروی مؤثر بر آن قسمت از رشته دوم که در آن $0 < x < 100$ است به دست آورید.

جوابها: $18/42 \vec{a}_z$ ، $1/\sqrt{2} I L x \vec{a}_z$ ، 0 ، $(-\vec{a}_z + x \vec{a}_y)/(1+x^2) \mu \text{Wb/m}^2$ هر سه بر حسب میکرونیوتن

۳.۹ نیروی بین عناصر دیفرانسیلی جریان

مفهوم میدان مغناطیسی بدین منظور معرفی شد که مسأله مر بوط به اثر متقابل يك توزیع جریان بر دیگری به دو قسمت تجزیه شود. ممکن است که نیروی مؤثر بر يك عنصر جریان را مستقیماً بر حسب عنصر جریان دیگری بنویسیم بی آنکه میدان مغناطیسی را حساب کرده باشیم. چون ما ادعا کردیم که به میان آوردن میدان مغناطیسی کار را ساده تر می کند اکنون بر ماست که نشان دهیم که حذف این قدم واسطه به رابطه پیچیده تری می انجامد.

دیدیم که میدان مغناطیسی در نقطه ۲ در اثر عنصر جریانی در نقطه ۱ از رابطه زیر به دست می آید.

$$d\vec{H}_2 = \frac{I_1 d\vec{L}_1 \times \vec{a}_{R_{12}}}{4\pi R_{12}^2}$$

حال نیروی دیفرانسیلی مؤثر بر يك عنصر دیفرانسیلی جریان عبارت است از

$$d\vec{F} = I d\vec{L} \times \vec{B}$$

این رابطه را در مورد مسأله مان به ترتیب به کار می بریم بدین طریق که $d\vec{B}_2$ چگالی شار دیفرانسیلی در نقطه ۲، در اثر عنصر جریان در نقطه ۱، را به جای \vec{B} و $I_1 d\vec{L}_1$ را به جای $I d\vec{L}$ می گذاریم و مقدار دیفرانسیلی نیروی دیفرانسیلی مؤثر بر عنصر ۲ را به صورت $d(d\vec{F}_2)$ نشان می دهیم.

$$d(d\vec{F}_\nu) = I_\nu d\vec{L}_\nu \times d\vec{B}_\nu$$

چون $d\vec{H}_\nu = \mu_0 d\vec{H}_\nu$ ، نیروی بین عناصر دیفرانسیلی جریان را به دست می آوریم

$$d(d\vec{F}_\nu) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi R_{12}^2} d\vec{L}_2 \times (d\vec{L}_1 \times \vec{a}_{R_{12}}) \quad (1)$$

مقدار کل نیروی بین دو مدار رشته ای با دو بار انتگرال گیری به دست

می آید:

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[d\vec{L}_2 \times \oint \frac{d\vec{L}_1 \times \vec{a}_{R_{12}}}{R_{12}^2} \right] \quad (2) \\ &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\oint \frac{\vec{a}_{R_{12}} \times d\vec{L}_1}{R_{12}^2} \right] \times d\vec{L}_2 \end{aligned}$$

معادله (۲) پیچیده است ولی چون در فصل قبل با میدان مغناطیسی آشنائی پیدا کردیم باید بتوانیم انتگرال داخلی را به عنوان انتگرال لازم برای محاسبه میدان مغناطیسی نقطه ۲ ناشی از عنصر جریانی در نقطه ۱ بشناسیم.
گر چه فقط به دادن نتیجه اکتفا خواهیم کرد ولی به سادگی می توان از رابطه ۲ استفاده کرد و نیروی دافعه بین دو هادی رشته ای مستقیم بینهایت طول، به فاصله d و حامل جریانهای مساوی و مختلف الجهد IA را محاسبه کرد. انتگرال گیری ها ساده است و اکثر اشتباهات در تعیین روابطی مناسب برای $d\vec{L}_1$ و $\vec{a}_{R_{12}}$ رخ می دهد. ولی چون شدت میدان مغناطیسی در هر یک از سیمها در اثر دیگری معلوم و مساوی $I/2\pi d$ است فوراً واضح است که جواب، نیروئی مساوی $\mu_0 I^2 / 2\pi d N$ بر هر متر از طول سیم است.

نمربین ۴.۹

دو رشته در فضای آزاد روی محورهای y و z قرار دارد و به ترتیب حامل جریانهای $5A$ در جهات \vec{a}_y و \vec{a}_z اند مطلوبست نیروی دیفرانسیلی مؤثر بر یک عنصر دیفرانسیلی 1 mm در: (الف) نقطه $(0, 0, 1)$ در اثر عنصر 1 mm واقع در $(0, 1, 0)$ و (ب) $(0, 1, 0)$ در اثر عنصر 1 mm واقع در $(0, 0, 1)$

جوابها: $0/884\vec{a}_y$ و $0/884\vec{a}_z$ pN

۴.۹ نیرو و گشتاور نیروی مؤثر روی مدار بسته

تا بحال روابطی کلی برای نیروهای مؤثر بر مجموعه‌های جریان به دست آورده‌ایم. يك حالت خاص را می‌توان بسهولة از سر راه برداشت زیرا اگر رابطه نیروی وارد بر يك مدار بسته یعنی رابطه (۹) بخش ۲.۹ را در نظر بگیریم.

$$\vec{F} = -I \oint \vec{B} \times d\vec{L}$$

و چگالی شار مغناطیسی را یکنواخت فرض کنیم در این صورت می‌توانیم \vec{B} را از علامت انتگرال خارج کنیم

$$\vec{F} = -I\vec{B} \times \oint d\vec{L}$$

ولی، در بررسی انتگرالهای مسیر بسته پتانسیل میدان الکتریکی ساکن متوجه شدیم که $\oint d\vec{L} = 0$ و بنابراین نیروی وارد بر يك مدار بسته رشته‌ای در يك میدان مغناطیسی یکنواخت مساوی صفر است.

اگر میدان یکنواخت نباشد نیروی کل الزاماً صفر نیست.

این نتیجه‌گیری برای میدانهای یکنواخت را لازم نیست به مدارهای رشته‌ای محدود کنیم. مدار ممکن است شامل جریانهای سطحی یا چگالی جریان حجمی نیز باشد. اگر جریان کل به رشته‌هایی تقسیم شود، نیروی وارد بر هر يك از آنها، همانطوری که در بالا نشان داده شد، صفر است و نیروی کل باز صفر خواهد بود. بنا براین نیروی کل مؤثر بر هر مدار بسته حقیقی حامل جریان مستقیم در میدان مغناطیسی یکنواخت صفر است.

گر چه نیرو صفر است ولی گشتاور - نیرو به طور کلی مساوی صفر نیست. گشتاور - نیرو یا گشتاور يك نیرو برداری است که اندازه آن مساوی حاصلضرب اندازه‌های بردار نیرو و در بردار بازوی اهرم و سینوس زاویه بین این دو بردار است. جهت بردار گشتاور - نیرو عمود بر هر دو بردار نیرو و بازوی اهرم است و در جهت پیشرفت يك پیچ راستگرد است وقتی طول بازو از طریق زاویه کوچکتر به طرف بردار نیرو گردانده شود. گشتاور را می‌توان به صورت حاصلضرب خارجی بیان کرد.

$$\vec{T} = \vec{R} \times \vec{F}$$

اگر فرض کنیم دو نیروی \vec{F}_1 و \vec{F}_2 با بازوهای اهرم \vec{R}_1 و \vec{R}_2 به جسمی که شکل ثابتی دارد وارد شوند و این جسم تغییر مکانی (بی چرخش) نداشته باشد،

1. Translation

آنگاه

$$\vec{T} = \vec{R}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{R}_2 \times \vec{F}_2$$

به طوری که

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

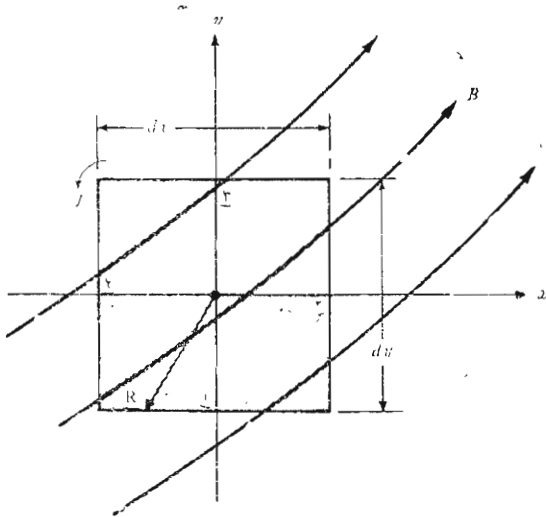
و بنابراین

$$\vec{T} = (\vec{R}_1 - \vec{R}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{R}_{21} \times \vec{F}_1$$

بردار $\vec{R}_{21} = (\vec{R}_1 - \vec{R}_2)$ نقطه اثر \vec{F}_2 را به \vec{F}_1 وصل می کند و از انتخاب مبدأ دوبردار \vec{R}_1 و \vec{R}_2 مستقل است. بنابراین آزادیم که هر مبدأ مشترکی را برای بازوهای اهرم \vec{R}_1 و \vec{R}_2 انتخاب کنیم به شرطی که نیروی کل مساوی صفر باشد. این روش را می توان به هر تعداد نیرو نیز تعمیم داد.

نیروئی به طرف بالا روی هندل افقی يك اتومبیل قدیمی را در نظر بگیرید. این نیرو نمی تواند تنها نیروی مؤثر بر هندل باشد، چون اگر چنین بود، تمامی هندل شتابی به طرف بالا پیدا می کرد. نیروی دیگری، که مقدار آن مساوی نیروی اعمال شده به انتهای هندل است، بوسیله سطح اتکاء محور دوران هندل بر آن وارد می شود. گشتاور-نیروی نیروئی برابر 40 N روی هندلی به طول 3 m ، مساوی $12\text{ N}\cdot\text{m}$ است. این رقم را می توان به دست آورد خواه مبدأ را روی محور دوران فرض کنیم (که به نتیجه $12\text{ N}\cdot\text{m}$ به اضافه $0\text{ N}\cdot\text{m}$ منجر می شود)، یا در نقطه وسط هندل (با نتیجه $6\text{ N}\cdot\text{m}$ به اضافه $6\text{ N}\cdot\text{m}$)، یا در نقطه ای که حتی روی هندل یا امتداد آن نباشد.

بنابراین می توان مناسبترین مبدأ را انتخاب کرد. اگر نیروها هم صفحه باشند معمولاً این مبدأ روی محور دوران و در صفحه حاوی بردارها انتخاب می شود. با این مقدمه در باره مفهوم گشتاور - نیرو، می خواهیم گشتاور - نیروی مؤثر بربك حلقه دیفرانسیلی جریان در میدان مغناطیسی \vec{B} را در نظر بگیریم. حلقه در صفحه xy قرار دارد (شکل ۲.۹) و طول اضلاع حلقه که موازی محورهای x و y اند dx و dy است. مقدار میدان مغناطیسی در مرکز حلقه \vec{B}_0 فرض شده است. چون ابعاد حلقه دیفرانسیلی است می توان مقدار \vec{B} را در تمام نقاط آن مساوی \vec{B}_0 فرض کرد (چرا این فرض در بحث مربوط به کرل و دیورژانس ممکن نبود؟). بنابراین نیروی کل مؤثر بر حلقه مساوی صفر است و آزادیم که مبدأ بازوهای اهرم را در مرکز حلقه انتخاب کنیم.



شکل ۲۰۹ یک حلقهٔ دیرانسیلی در معرض میدان مغناطیسی \vec{B} . گشتاور مؤثر بر حلقه عبارت است از $d\vec{T} = I(dx dy \vec{a}_z) \times \vec{B}_0 = I d\vec{S} \times \vec{B}$

بردار نیروی وارد بر ضلع ۱ عبارت است از

$$d\vec{F}_1 = I dx \vec{a}_x \times \vec{B}_0$$

یا

$$d\vec{F}_1 = I dx (\vec{B}_{0y} \vec{a}_z - \vec{B}_{0z} \vec{a}_y)$$

برای این ضلع حلقه بازوی اهرم از مبدأ تا نقطهٔ وسط ضلع ادامه دارد،

$$\vec{R}_1 = -\frac{1}{2} dy \vec{a}_y$$

و سهم این ضلع در گشتاور کل برابر است با

$$\begin{aligned} d\vec{T}_1 &= \vec{R}_1 \times d\vec{F}_1 \\ &= -\frac{1}{2} dy \vec{a}_y \times I dx (\vec{B}_{0y} \vec{a}_z - \vec{B}_{0z} \vec{a}_y) \\ &= -\frac{1}{2} dx dy I B_{0y} \vec{a}_z \end{aligned}$$

به همین ترتیب، سهم ضلع ۳ مساوی مقدار فوق خواهد بود

$$d\bar{T}_r = \bar{R}_r \times d\bar{F}_r = \frac{1}{\mu} dy \bar{a}_y \times (-I dx \bar{a}_x \times \bar{B}_o)$$

$$= -\frac{1}{\mu} dx dy I B_o \bar{a}_x = d\bar{T}_1$$

و

$$d\bar{T}_1 + d\bar{T}_r = -dx dy I B_o \bar{a}_x$$

از محاسبه گشتاور-نیروی مؤثر بر اضلاع ۲ و ۴ داریم

$$d\bar{T}_\gamma + d\bar{T}_\varphi = dx dy I B_o \bar{a}_y$$

و بنا بر این گشتاور-نیروی کل مساوی است با

$$d\bar{T} = I dx dy (B_o \bar{a}_y - B_o \bar{a}_x)$$

کمیت داخل پرانتز را می‌توان با یک حاصلضرب خارجی نمایش داد

$$d\bar{T} = I dx dy (\bar{a}_z \times \bar{B}_o)$$

یا

$$\boxed{d\bar{T} = I d\bar{S} \times \bar{B}} \quad (1)$$

که در آن $d\bar{S}$ بردار سطح حلقهٔ دیفرانسیلی جریان است و اندیس \bar{B}_o حذف شده است.

حال حاصلضرب جریان حلقه در سطح برداری حلقه را گشتاور دو قطبی

مغناطیسی دیفرانسیلی $d\bar{m}$ تعریف می‌کنیم. بدین ترتیب

$$\boxed{d\bar{m} = I d\bar{S}} \quad (2)$$

و بنا بر این می‌توان گشتاور-نیروی دیفرانسیلی مؤثر بر حلقهٔ جریان را بصورت زیر بیان کرد.

$$d\bar{T} = d\bar{m} \times \bar{B} \quad (3)$$

اگر نتایج حاصله در بخش ۷.۴ را برای یک دو قطبی الکتریکی به کار بریم

و گشتاور-نیروی مؤثر بر آن را در اثر میدان الکتروکی تعیین کنیم، به نتیجه مشابهی می‌رسیم،

$$d\vec{T} = d\vec{p} \times \vec{E}$$

روابط (۱) و (۳) نتایج کلی‌اند که برای هر شکل دلخواه حلقه جریان، و نه فقط حلقه‌های مستطیلی، صادق‌اند. گشتاور-نیروی مؤثر بر يك حلقه مثلثی یا دایره‌ای نیز برحسب سطح برداری یا گشتاور از روابط (۱) و (۳) به دست می‌آید. چون حلقه جریان را ديفرانسیلی فرض کردیم به طوری که بتوان \vec{B} را در تمامی آن ثابت فرض کرد بنابراین نتیجه می‌شود که گشتاور-نیروی وارد بر يك حلقه مسطح با اندازه دلخواه در میدان مغناطیسی یکنواخت از همین رابطه نتیجه می‌شود.

$$\boxed{\vec{T} = I\vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}} \quad (۴)$$



باید توجه داشت که جهت گشتاور-نیروی مؤثر بر يك حلقه جریان طوری است که باعث می‌شود میدان ناشی از حلقه با میدان اعمال کننده گشتاور-نیرو هم جهت گردد. این شاید ساده‌ترین روش برای تعیین جهت گشتاور-نیرو باشد.

تمرین ۵.۹

رشته جریانی به شدت $5A$ در جهت کلی \vec{a}_ϕ در امتداد مسیر مستطیلی $0.2m \times 0.3m$ قرار دارد. اگر میدان مغناطیسی یکنواخت \vec{B} باعث اعمال گشتاور-نیروئی برابر $5 N.m$ روی این مدار شود، \vec{B} را پیدا کنید در صورتی که داشته باشیم: (الف) $B_{oy} = 0$ و (ب) $B_{ox} = B_{oy}$ و (ب) $B_{oz} = -0.3 Wb/m^2$

جوابها: $\pm 0.417\vec{a}_z$ ، $\pm 0.295(\vec{a}_x + \vec{a}_y)$ ، $\pm 0.3\vec{a}_y - 0.289\vec{a}_z$ بر حسب Wb/m^2

۵.۹ ماهیت مواد مغناطیسی

اکنون در وضعی هستیم که می‌توانیم اطلاعات خود را در باره اثر میدان مغناطیسی بر يك حلقه جریان یا مدل ساده يك اتم روی هم بگذاریم و اختلاف واکنش مواد مختلف مغناطیسی را در میدانهای مغناطیسی تا اندازه‌ای درک کنیم. گر چه نتایج کمی دقیق را فقط با استفاده از نظریه کوانتم می‌توان پیش بینی کرد ولی مدل ساده اتم، به صورت هسته مثبتی که الکترونهایی در مدارهای مختلف دایره‌ای شکل آن را احاطه کرده‌اند، به نتایج کیفی منطقی و نظریه کیفی

رضایت بخشی می انجامد. يك الكتروني متحرك در مدار خود شبیه يك حلقه كوچك جريان است (به طوری كه جهت جريان در خلاف جهت الكتروني است) و همانند چنین حلقه ای گشتاور - نیروئی از میدان مغناطیسی خارجی بر آن وارد می شود كه سعی دارد میدان ناشی از الكتروني مداری را با میدان مغناطیسی خارجی هم جهت سازد. اگر گشتاور مغناطیسی دیگری موجود نمی بود نتیجه می گرفتیم كه تمام الكترونيهای چرخان طوری تغییر محل می دهند كه میدانهای مغناطیسی شان با میدان اعمال شده جمع شود و بنا بر این میدان مغناطیسی منتهی در هر نقطه داخلی جسم بزرگتر از حالتی می شد كه جسم وجود نداشته باشد.

ولی گشتاور دیگری به چرخش الكتروني نسبت داده می شود. گر چه متمایزیم به اینکه این پدیده را چنین مجسم كنیم كه الكتروني دور محور خود در حال چرخش است و بنا بر این يك گشتاور دو قطبی مغناطیسی بوجود می آورد، ولی نتایج کمی رضایت بخشی از چنین نظریه ای به دست نمی آید. در عوض لازم است ریاضیات مربوط به نظریه نسبی كوانتم را تحلیل كرد تا بتوان نشان داد كه الكتروني ممكن است يك گشتاور مغناطیسی چرخشی برابر $9 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ داشته باشد. علامات مثبت و منفی نشان می دهد كه هم ردیف شدن ممكن است بصورت هم جهت یا خلاف جهت میدان خارجی صورت گیرد. در اتمهایی كه در آنها تعداد زیادی الكتروني وجود دارد فقط چرخش الكترونيهایی كه در قشرهای كاملاً پر نشده قرار دارند در ایجاد گشتاور مغناطیسی اتم مؤثرند.

جزء سوم گشتاور يك اتم در اثر چرخش هسته ای به وجود می آید، ولی این عامل باعث تأثیری بسیار جزئی و قابل اغماض در خواص کلی مغناطیسی مواد است و من بعد آن را در نظر نخواهیم گرفت.

بنا بر این هر اتم دارای گشتاورهای جزئی متعددی است و ترکیب آنها خواص مغناطیسی ماده را معین می كند و رده بندی کلی مغناطیسی آن را ممكن می سازد. ما به اختصار شش نوع مختلف از مواد مغناطیسی را شرح خواهیم داد كه عبارتند از مواد دیاماگنتيك، پاراماگنتيك، فروماگنتيك، آنتی فروماگنتيك، فری ماگنتيك و سوپر پاراماگنتيك.

در ابتدا اتمهایی را در نظر می گیریم كه در آنها میدانهای كوچك مغناطیسی ناشی از حرکت چرخشی الكترونيها در مدارشان و میدانهای ناشی از چرخش الكتروني طوری تركيب می شوند كه میدان حاصل صفر است. توجه داشته باشید كه اینجا میدانهای ناشی از خود الكترونيها را در غیاب میدان مغناطیس خارجی در نظر می گیریم. این ماده را همچنین می توانیم به عنوان ماده ای كه گشتاور مغناطیسی دائم m_0 هر اتم آن صفر است توصیف كنیم. چنین ماده ای به دیاماگنتيك موسوم است.

بنابراین، به نظر می‌رسد که، یک میدان خارجی نمی‌تواند باعث ایجاد گشتاور - نیرویی بر آنها شود و میدانهای دو قطبی آنها را هم‌ردیف کند. و در نتیجه میدان مغناطیسی داخلی مساوی همان میدان اعمال شده است. این مطلب با دقتی در حدود یک در صد هزار صحیح است. با وجود این می‌توان نشان داد که^۱ اثر میدان اعمال شده خارجی روی الکترون چرخان در مداری که گشتاور آن، مثلاً هم جهت با این میدان است در همان جهت نیروی گریز از مرکز است. چون نیروی مخالف (نیروی جذب کولن) تغییری نکرده است. بنابراین اگر شعاع مدار الکترون ثابت فرض شود سرعت آن باید مقداری کمتر شود. سرعت کمتر به منزله گشتاور دو قطبی کوچکتری است. در ابتدا این گشتاور مداری با گشتاور چرخشی خنثی می‌شد و بنابراین حالا گشتاور چرخشی غالب است. چون این گشتاور در خلاف جهت میدان اعمال شده است نتیجه خالص نقصان جزئی میدان داخلی در مقایسه با میدان خارجی است.

بیسموت فلزی نسبت به مواد دیاماگنتیک دیگر از قبیل نئودرون و هلیوم و گازهای «بی اثر» دیگر و کلرور سدیم و مس و طلا و سیلیسیم و ژرمانیوم و گرافیت و گوگرد اثر دیاماگنتیک بیشتری نشان می‌دهد.^۲ همچنین باید دانست که اثر دیاماگنتیک در تمام مواد وجود دارد چون این اثر از برهم کنش الکترونهای مداری و میدان خارجی ناشی می‌شود ولی این اثر در موادی که ذیلاً بررسی خواهیم کرد تحت الشعاع اثرات دیگر قرار می‌گیرد.

حال درباره اتمی بحث کنیم که اثرات چرخش الکترونها و حرکت مداری یکدیگر را کاملاً حذف نمی‌کنند. یک اتم کلاً دارای گشتاور مغناطیس کوچکی است. ولی وضعیت دلخواه آنها در یک نمونه بزرگتر باعث ایجاد گشتاور متوسط صفر است. این ماده در غیاب میدان مغناطیس خارجی اثر مغناطیسی نشان نمی‌دهد ولی وقتی میدانی خارجی به آن اعمال شود گشتاور کوچکی به هر یک از گشتاورهای اتمی وارد می‌شود و این گشتاورها سعی می‌کنند در امتداد میدان خارجی قرار گیرند. این هم جهت شدن باعث ازدیاد میدان B داخلی در مقایسه با میدان خارجی می‌شود. از طرفی دیگر اثر دیاماگنتیک هنوز روی الکترونهای مداری عمل می‌کند و ممکن است ازدیاد بسال را خنثی کند. اگر اثر کلی نقصانی در B باشد این ماده را همچنان دیاماگنتیک می‌نامیم ولی اگر B زیاد شود، ماده به پاراماگنتیک موسوم است. پتاسیم و اکسیژن و تنگستن، و عناصر کمیاب خالص و بسیاری از نمکهای آنها نظیر کلرور اریوم و اکسید نئودیمیوم و اکسید ایتریوم، که یکی از موادی است که در میزرها

۱. اقلاً امیدواریم که بتوان نشان داد. به مسأله ۱۹ آخر فصل مراجعه کنید.
۲. یک قطب نمای حساس با عقربه‌ای از جنس بیسموت برای مسافرت به غرب (یا شرق) بسیار مناسب است. چون عقربه همیشه در جهت عمود بر میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد.

به کار می رود، نمونه‌هایی از مواد پاراماگنتیک اند.

چهار دسته باقیمانده، یعنی مواد فروماگنتیک و آنتی فروماگنتیک و فری - ماگنتیک و سوپر پاراماگنتیک همگی دارای گشتاورهای اتمی قوی هستند از این گذشته عکس العمل بین اتمهای مجاور باعث هم ردیف شدن گشتاورهای مغناطیسی به طور هم جهت یا خلاف جهت یکدیگر می شود.

در مواد فروماگنتیک هم اتم دارای گشتاور دو قطبی نسبتاً بزرگی است که بیش از همه در اثر گشتاور چرخش الکترونی خنثی نشده بوجود آمده است. نیروهای بین اتمی باعث می شود که این گشتاورها در ناحیه‌ای که شامل تعداد زیادی اتم است به طور موازی با یکدیگر قرار گیرند. این نواحی به حوزه موسوم اند و بر حسب اندازه و شکل و سابقه نمونه مغناطیسی ممکن است به اشکال و ابعاد مختلفی از یک میکرون (10^{-6} m) تا چند سانتیمتر باشند. مواد مغناطیسی بکر دارای حوزه‌هایی هستند که هر یک دارای یک گشتاور مغناطیسی قوی اند ولی جهت گشتاور حوزه‌ها از یک حوزه به دیگری متفاوت است. بنابراین اثر کلی حذف شدن گشتاورها است و جسم به طور کلی دارای هیچ گشتاور مغناطیسی خالص نیست. اما اندازه حوزه‌هایی که گشتاور آنها هم جهت با میدان اعمال شده است در اثر اعمال میدان مغناطیسی خارجی به قیمت کوچک شدن حوزه‌های همسایه، بزرگتر می شود و میدان داخلی نسبت به میدان خارجی بسیار زیاد می شود. معمولاً وقتی میدان خارجی برداشته شود، وضعیت کاملاً دلخواه حوزه‌های داخلی، مثل سابق، برقرار نمی شود و یک میدان دو قطبی باقیمانده یا پس مانده در داخل ساختمان کلان بینی (ماکروسکوپی) حفظ می شود. این خاصیت که گشتاور مغناطیسی جسم بعد از بسرطرف شدن میدان از گشتاور قبلی آن متفاوت است یعنی اینکه حالت مغناطیسی جسم به سابقه آن بستگی دارد، به هیستریزیس موسوم است که چند صفحه بعد در مطالعه مدارهای مغناطیسی در باره آن بحث خواهیم کرد. بلورهای منفرد اجسام فروماگنتیک همه سو یکسان (ایزوتروپ) نیستند و بنا بر این بحث خود را به مواد چند بلوری محدود می کنیم، ولی یادآوری یک نکته لازم است و آن اینکه یکی از خواص مسود مغناطیسی غیر همه سو یکسان تغییر بعد مغناطیسی است. به این معنی که بلورها در اثر اعمال میدان مغناطیسی تغییر بعد می دهند. تنها عناصری که در درجه حرارت اطاق فروماگنتیک اند عبارتند از آهن و نیکل و کبالت. بعضی از آلیاژهای این فلزات با یکدیگر نیز فروماگنتیک اند، مثلاً آلنیکو، آلیاژی از آلومینیوم و نیکل و کبالت با مقداری جزئی مس. در درجه حرارت‌های پائین تر بعضی از عناصر کمیاب خاک، مثلاً گادولینیوم^۱ و دیسپروزیوم^۲، فروماگنتیک اند. همچنین جالب توجه است که بعضی از آلیاژهای فلزات غیر فروماگنتیک خود فروماگنتیک اند، از قبیل آلیاژ

1. gadolinium

2. dysprosium

سیموت - منگنز و مس - منگنز - روی.

در مواد آنتی فروماگنتیک، نیروهای بین اتمهای مجاور باعث هم ردیف شدن گشتاورهای اتمی به صورت موازی ولی مختلف‌الجهت می‌شود. گشتاور مغناطیسی خالص صفر است و مواد آنتی فروماگنتیک فقط به میزان ناچیزی تحت تأثیر میدان مغناطیسی خارجی قرار می‌گیرند. این اثر، که بار اول در اکسید منگنز کشف شد، در حال حاضر اهمیت مهندسی ندارد.

در مواد فری ماگنتیک نیز هم ردیف شدن گشتاورهای اتمی به صورت موازی و مختلف‌الجهت دیده می‌شود، ولی گشتاورها مساوی نیستند. بنا بر این در مقابل میدان مغناطیس خارجی عکس‌العمل شدیدی نشان می‌دهند، گرچه شدت آن از مواد فروماگنتیک کمتر است. مهم‌ترین دسته مواد فری ماگنتیک فریتها هستند که دارای ضریب هدایت کم، یعنی ده به توان چند مرتبه کمتر از نیم هادیهایند. اینکه این مواد در مقایسه با مواد فروماگنتیک دارای مقاومت بیشتری هستند باعث می‌شود که هنگامی که میدانهای متناوبی به آنها اعمال شده باشد، مثلاً در هسته ترانسفورماتورهای که در فرکانسهای بالا کار می‌کنند، جریانهای القایی کمتری ایجاد شود. جریانهای کمتر (جریانهای فوکو) باعث تلفات اهمی کمتر در هسته ترانسفورماتور می‌شوند. مگنتیت یا اکسید آهن (Fe_3O_4) فریت نیکل - روی ($Ni_{1/2} Zn_{1/2} Fe_2O_4$) و یکی از فریتهای نیکل ($Ni Fe_2O_4$) مثالهایی از این دسته از موادند.

مواد سوپر پاراماگنتیک تشکیل شده‌اند از مجموعه‌ای از ذرات فروماگنتیک در داخل قالبی از ماده غیر فروماگنتیک. گرچه حوزه‌هایی در داخل ذرات این مواد وجود دارد ولی دیواره‌های حوزه‌ها نمی‌توانند از طریق ماده غیر مغناطیسی به ذرات مجاور نفوذ کنند. مثال مهمی از این دسته نوار مغناطیسی است که در دستگاههای ضبط صوت یا تصویر بکار می‌رود.

۶.۹ آهن ربا سازی و قابلیت نفوذ

برای اینکه بحث خود را در باره مواد مغناطیسی بر پایه کمی تری قرار دهیم یکی دو صفحه اختصاص به این خواهیم داد که نشان دهیم چگونه دو قطبهای مغناطیسی به عنوان منابع میدان مغناطیسی عمل می‌کنند. نتیجه‌ای که خواهیم گرفت شباهت زیادی به شکل نقطه‌ای قانون آمپر $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ دارد. اما در این رابطه جریان در اثر حرکت بارهای مقید (الکترونهاي مداري و چرخش الکترونی و چرخش هسته‌ای) خواهد بود و میدان، که همان ابعاد \vec{H} را دارد، به بردار آهن ربا سازی \vec{M} موسوم خواهد شد. جریان ناشی از حرکت بارهای مقید جریان مقید یا جریانی آمپری نامیده می‌شود. بحث خود را با تعریف بردار آهن ربا سازی \vec{M} بر حسب گشتاور دو قطبی

مغناطیسی شروع می‌کنیم. به خاطر داریم که جریان I ضمن گردش حول مسیری که سطح دیفرانسیلی برداری $d\vec{S}$ را محاط می‌کند باعث ایجاد گشتاور دو قطبی مغناطیسی می‌شود.

$$\vec{m} = I d\vec{S}$$

اگر تعداد n دو قطبی مغناطیسی در واحد حجم موجود باشد و ما حجمی برابر Δv را در نظر بگیریم گشتاور دو قطبی مغناطیسی کل از مجموع برداری آنها به دست می‌آید،

$$\vec{m}_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} \vec{m}_i$$

هریک از \vec{m}_i ها ممکن است با دیگران متفاوت باشد. حال بردار آهنربا سازی \vec{M} را گشتاور دو قطبی مغناطیسی در واحد حجم تعریف می‌کنیم،

$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \vec{m}_i \quad (1)$$

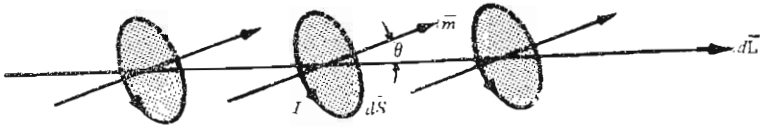
مشاهده می‌شود که واحد بردار آهنربا سازی می‌بایست با واحد \vec{H} یعنی آمپر بر متر یکی باشد.

حال اثر هم ردیف شدن دو قطبهای مغناطیسی را در نتیجه اعمال میدان خارجی در نظر بگیریم. این هم ردیفی را در امتداد مسیری بسته، که قسمتی از آن در شکل ۳.۹ نشان داده شده است، بررسی خواهیم کرد. این شکل چند گشتاور مغناطیسی \vec{m} را نشان می‌دهد که با عنصر مسیر $d\vec{L}$ زاویه‌ای برابر θ می‌سازند. هر یک از گشتاورها تشکیل شده است از جریان I که حول سطح $d\vec{S}$ در گردش است. بنا بر این حجم کوچک $dS \cos \theta dL$ ، یا $d\vec{S} \cdot d\vec{L}$ ، را در نظر داریم که در آن $n d\vec{S} \cdot d\vec{L}$ دو قطبی مغناطیسی وجود دارد. در نتیجه تغییر جهت گشتاورها، از حالت کاملاً دلخواه به حالت هم جهت نسبی با میدان، جریان مقیدی که از سطح محصور در مسیر عبور می‌کند (اگر در جهت \vec{a}_L حرکت کنیم به طرف چپ خود در شکل ۳.۹) به مقدار IA به ازای هر یک از $n d\vec{S} \cdot d\vec{L}$ دو قطبی افزایش می‌یابد. بنا بر این

$$dI_b = nI d\vec{S} \cdot d\vec{L} = \vec{M} \cdot d\vec{L} \quad (2)$$

و در داخل تمامی مسیر بسته

$$I_b = \oint \vec{M} \cdot d\vec{L} \quad (3)$$



شکل ۳۰۹ قسمت dL از یک مسیر بسته که در امتداد آن دوقطبی‌های مغناطیسی تقریباً هم جهت با یک میدان خارجی قرار گرفته‌اند. این هم جهت شدن باعث شده است که جریان مقیدی که از سطح محصور در مسیر بسته عبور می‌کند به مقدار $nI d\vec{S} \cdot d\vec{L}$ آمپر افزایش یابد.

رابطه (۳) صرفاً مبین این است که اگر حول مسیر بسته‌ای حرکت کنیم و اکثر اوقات با گشتاورهای دوقطبی هم جهت با خود مواجه شویم جریانی، که مثلاً از الکترونهای چرخان مداری تشکیل شده است، از سطح محصور در مسیر عبور می‌کند. حال نتیجه مطلوب به سهولت به دست می‌آید. رابطه (۳) را بر حسب چگالی جریان مقید بیان می‌کنیم،

$$\oint \vec{M} \cdot d\vec{L} = \int_s \vec{J}_b \cdot d\vec{S}$$

و قضیه استوکس را برای انتگرال مسیر بسته به کار می‌بریم

$$\int_s \nabla \times \vec{M} \cdot d\vec{S} = \int_s \vec{J}_b \cdot d\vec{S}$$

چون این رابطه برای هر سطح دلخواه $d\vec{S}$ صادق است نتیجه می‌شود

$$\boxed{\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_b} \quad (۴)$$

بنابراین جریانهای مقید در ایجاد میدان آهنربا سازی \vec{M} همان نقشی را دارند که حرکت بارهای آزاد در بوجود آوردن میدان \vec{H} در خلاء ایفاء می‌کنند. حال از این نتیجه برای به دست آوردن رابطه‌ای بین \vec{B} و \vec{H} و \vec{M} استفاده کنیم. رابطه زیر را در فضای آزاد قبلاً به دست آوردیم

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_T \quad (\text{فضای آزاد})$$

که در آن \vec{J} چگالی کل جریان می‌بایست معرف تمامی منابع چگالی جریان، آزاد یا مقید باشد.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_b \quad (\text{فضای آزاد})$$

و بر حسب \vec{B} می‌توان نوشت

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} + \vec{J}_b$$

و با استفاده از (۴)

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} + \nabla \times \vec{M}$$

حال برای اینکه از بیان صریح چگالی جریان مقید در روابط خودداری کنیم، \vec{M} را می‌توان به طرف چپ معادله برد و رابطه بین \vec{B} و \vec{H} را به صورت کلی‌تری نوشت

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}$$

یا

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}} \quad (5)$$

که در آن

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (6)$$

یا

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})} \quad (7)$$

به این ترتیب رابطه (۵) به عنوان معادلهٔ ما کسول برای میدانهای پاینده است. هنگامی که مواد مغناطیسی وجود داشته باشند این معادله از نظر شکل تفاوتی با آنچه در فصل گذشته آمد ندارد اما اکنون آن را با اطلاع بیشتری تفسیر می‌کنیم. فقط حرکت بارهای آزاد صریحاً در طرف راست معادله ظاهر شده است و اثر بارهای مقید در روابط (۶) یا (۷) مربوط به \vec{H} دیده می‌شود. این روابط را می‌توان در

محیط همه سو یکسان (ایزوتروپ) خطی که در آن بتوان ضریبی به نام ضریب حساسیت مغناطیسی χ_m تعریف کرد به صورت ساده تری نوشت:

$$\boxed{M = \chi_m \bar{H}} \quad (8)$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \mu_0 (\bar{H} + \chi_m \bar{H}) \\ &= \mu_0 \mu_R \bar{H} \end{aligned}$$

یا

$$\boxed{\bar{B} = \mu \bar{H}} \quad (9)$$

به طوری که ضریب قابلیت نفوذ

$$\boxed{\mu = \mu_0 \mu_R} \quad (10)$$

بر حسب قابلیت نفوذ نسبی

$$\boxed{\mu_R = 1 + \chi_m} \quad (11)$$

تعریف شده است که خود به ضریب حساسیت مغناطیسی بستگی دارد. به عنوان مثالی از مورد استعمال این کمیات مغناطیسی، ماده فریتی را در نظر بگیرید که برای آن $\mu_R = 50$ و فرض کنید که چگالی شار به اندازه کافی کم باشد به طوری که فرض خطی بودن صادق باشد. در این صورت داریم

$$\chi_m = \mu_R - 1 = 49$$

و اگر فرض کنیم $B = 0.05 \text{ Wb/m}^2$ آنگاه

$$B = \mu_R \mu_0 H$$

و

$$H = \frac{0.05}{50 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 796 \text{ A/m}$$

نیروهای مغناطیسی، مواد مغناطیسی و ضریب خود القاء ۳۴۳

مقدار بردار آهنربا سازی برابر $\chi_m H$ یا 39000 A/m است. روشهای دیگر بیان رابطه بین B و H عبارت است از، اولاً

$$B = \mu_0 (H + M)$$

یا

$$0.05 = 4\pi \times 10^{-7} (796 + 39000)$$

و ملاحظه می شود که شدت میدان مغناطیسی ناشی از جریانهای آمپری ۴۹ برابر شدت میدان بارهای آزاد است. ثانیاً

$$B = \mu_R \mu_0 H$$

یا

$$0.05 = 50 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 796$$

که در آن از ضریب قابلیت نفوذ نسبی ۵۰ طوری استفاده کرده ایم که اثر حرکت بارهای مقید کاملاً به حساب آورده شود. در فصلهای بعد تأکید ما بیشتر روی این تعبیر دوم خواهد بود.

همانطوری که در مورد عایقهای غیر همه سو یکسان (غیر ایزوتروپ) دیدیم، یک ماده غیر همه سو یکسان مغناطیسی را می توان با قابلیت نفوذ تئوری توصیف کرد:

$$B_x = \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z$$

$$B_y = \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z$$

$$B_z = \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z$$

بنابراین برای مواد غیر همه سو یکسان، μ در رابطه $\vec{B} = \mu \vec{H}$ یک تانسور است ولی رابطه $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ همچنان صادق است گرچه \vec{B} و \vec{H} و \vec{M} دیگر در حالت کلی موازی یکدیگر نیستند. معمول ترین ماده مغناطیسی غیر همسو یک تک بلور فروماگنتیک است، گرچه فیلمهای نازک مغناطیسی نیز دارای چنین خاصیتی هستند. اما مواد فروماگنتیک بیش از همه به صورت آرایشهای چند بلوری، که ساختن آنها به مراتب ساده تر است، به کار می روند.

تعاریف ما برای ضرایب حساسیت و قابلیت نفوذ به فرض خطی بودن هم بستگی دارند. متأسفانه این فرض فقط در مورد مواد پاراماگنتیک و دیاماگنتیک که کمتر جالب توجهند، صادق است. قابلیت نفوذ نسبی این مواد به ندرت بیش از یک

در هزار از واحد متفاوت است. چند مقدار نمونه ضریب حساسیت مواد دیاگرام گنتیک عبارتند از: نیدرژن 2×10^{-5} ، مس $10^{-5} \times 0.9$ ، ژرمانیوم $10^{-5} \times 0.88$ - سیلیسیم $10^{-5} \times 0.3$ - و گرافیت $10^{-5} \times 1.2$ - مثالهایی چند از ضریب حساسیت مواد پاراماگنتیک عبارتند از، اکسیژن $10^{-6} \times 2$ ، تنگستن $10^{-5} \times 6.8$ ، اکسید آهن $(Fe_3O_4) 10^{-3} \times 1.4$ و اکسید ایتریوم $(Y_2O_3) 10^{-6} \times 1.053$ اگر نسبت B به H را به سادگی قابلیت نفوذ نسبی مواد فروماگنتیک به حساب آوریم مقادیر معمول بین ۱۰ تا ۱۰۰۰۰۰ خواهد بود. مواد سوپر پاراماگنتیک دارای قابلیت نفوذ نسبی بین ۱ تا ۱۰ اند.

تمرین ۶.۹

اندازه چگالی شار مغناطیسی را در ماده‌ای که دارای شرایط زیر است به دست آورید: (الف) شدت میدان مغناطیسی برابر 8000 A/m و قابلیت نفوذ نسبی ۱۰۱ است. (ب) آهنربا سازی برابر 8000 A/m و ضریب پذیرش ۱۰۱ است. (پ) تراکم آتمهای آن $10^{28} \times 8.1$ اتم در متر مکعب است که هر یک دارای گشتاور دو قطبی مغناطیسی یکسان 10^{-22} A/m^2 اند و $H = 3000 \text{ A/m}$ است.

جوابها: $0.00479, 0.0513, 0.001106 \text{ Wb/m}^2$

تمرین ۷.۹

اگر در داخل ماده بخصوصی $\vec{a}_z \text{ Wb/m}^2$ $\vec{B} = 0.03 \pi x$ و $\mu_R = 3$ باشد: (الف) چگالی بار مقید و (ب) چگالی جریان بارهای آزاد را پیدا کنید.

جوابها: $25000 \vec{a}_y, -50000 \vec{a}_y \text{ A/m}^2$

۷.۹ شرایط مرزی مغناطیسی

در تعیین شرایط مرزی مناسبی برای \vec{B} و \vec{H} و \vec{M} در حد فاصل بین دو ماده مغناطیسی متفاوت نباید اشکالی داشته باشیم چون مسائل مشابهی را در مورد مواد هادی و عایق حل کرده‌ایم و برای این کار احتیاجی به پیدا کردن روش جدیدی نیست.

شکل ۴.۹ مرز میان دو ماده متجانس، همه سو یکسان (ایزوتروپ) و خطی را که دارای قابلیت نفوذهای μ_1 و μ_2 است نشان می‌دهد. شرایط مرزی برای مؤلفه‌های عمود را می‌توان با استفاده از یک سطح گاوسی استوانه‌ای کوچک که سرحد آن را قطع می‌کند به دست آورد. با استفاده از قانون گاوس برای میدان مغناطیسی از

$$M_{n_2} = \frac{\chi_{m_2} \mu_1}{\chi_{m_1} \mu_2} M_{n_1} \quad (3)$$

کاربرد قانون مداری آمپر

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I$$

در مورد مسیر بسته‌ای واقع در صفحه‌ای که عمود بر سطح مرزی قرار گرفته است نشان می‌دهد که

$$H_{i1} \Delta L - H_{i2} \Delta L = K \Delta L$$

که در آن K مؤلفهٔ جریان سطحی در جهت عمود به سطح محصور بین مسیر بسته است. بنابراین

$$\boxed{H_{i1} - H_{i2} = K} \quad (4)$$

با استفاده از حاصلضرب خارجی برای تعیین مؤلفه‌های مماسی جهات مربوطه را بهتر می‌توان مشخص کرد،

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{a}_{N12} = \vec{K}$$

که در آن \vec{a}_{N12} بردار واحد عمود در مرز دو ناحیه است و جهت آن از ناحیه ۱ به ناحیه ۲ است. برای مؤلفهٔ مماسی \vec{B} داریم:

$$\frac{B_{i1}}{\mu_1} - \frac{B_{i2}}{\mu_2} = K \quad (5)$$

بنابراین شرط مرزی برای مؤلفهٔ مماسی بردار آهنربائی عبارت است از:

$$M_{i2} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}} M_{i1} - \chi_{m2} K \quad (6)$$

البته اگر چگالی جریان سطحی صفر باشد سه رابطهٔ آخر در مورد مؤلفه‌های مماسی به مراتب ساده‌تر اند. این چگالی جریان از نوع آزاد است و اگر هیچ یک از دو ماده هادی نباشد مقدار آن صفر است.

تمرین ۸.۹

در ناحیه ۱، $z > 0$ داریم $\vec{B}_1 = 0.4\vec{a}_x - 0.2\vec{a}_y + 0.3\vec{a}_z$ Wb/m² و $\mu_{R1} = 2$. فرض کنید $z < 0$ ناحیه ۲ را که در آن $\mu_{R2} = 5$ تعیین کنید، فرض کنید که در $z = 0$ جریانی سطحی به چگالی $\vec{K} = (-0.1\vec{a}_x + 0.3\vec{a}_y)/\mu_0$ A/m برقرار است: (الف) \vec{H}_1 و (ب) \vec{B}_2 و (پ) \vec{M}_2 را پیدا کنید.

جوابها: $(0.2\vec{a}_x - 0.1\vec{a}_y + 0.15\vec{a}_z)/\mu_0$ A/m
 $-0.5\vec{a}_x - \vec{a}_y + 0.3\vec{a}_z$ Wb/m²
 $(-4\vec{a}_x - 0.8\vec{a}_y + 0.24\vec{a}_z)/\mu_0$ A/m

۸.۹ مدار مغناطیسی

در این بخش کمی به عقب برمی گردیم و در باره روشهای پایه‌ای مربوط به حل دسته‌ای از مسائل مغناطیسی به نام مدار مغناطیسی بحث می‌کنیم. همانطوری که به زودی خواهیم دید این نام گذاری به علت تشابه زیاد آن به تحلیل مدارهای مقاومتی جریان مستقیم است که فرض می‌شود همه ما در آنها مهارت کافی داریم. تنها تفاوت مهم در خاصیت غیرخطی بودن اجزاء فروماگنتیک مدار مغناطیسی است و روشهایی که باید به کار برده شود شبیه آنهاست است که برای مدارهای الکتریکی غیرخطی یعنی مدارهای شامل دیود یا ترمیستور یا رشته‌های ملتهب و سایر عناصر غیرخطی به کار می‌رود.

بهتر است کار را با مشخص کردن معادله‌های میدانی شروع کنیم که تحلیل مدارهای مقاومتی بر پایه آنها استوار است. در ضمن این کار معادلات مشابه آنها را برای مدار مغناطیسی متذکر خواهیم شد یا آنها را اثبات خواهیم کرد. کارمان را با پتانسیل الکتریسته ساکن و رابطه آن با شدت میدان الکتریکی شروع می‌کنیم.

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (الف.۱)$$

پتانسیل مغناطیسی شمارواره‌ای (اسکالر) را قبلاً تعریف کردیم و رابطه مشابه آن با شدت میدان مغناطیس عبارت است از

$$\vec{H} = -\nabla V_m \quad (ب.۱)$$

وقتی که با مدارهای مغناطیسی سروکار داریم شایسته است V_m را نیروی محرک مغناطیسی، یا mmf بنامیم و به این ترتیب به تشابه میان آن با نیروی محرک الکتریکی،

یا emf، تأکید کنیم. البته واحد mmf آمپر است ولی معمول است که با توجه به اینکه سیم پیچها اکثراً دارای تعداد دور زیادی هستند اصطلاح «آمپر-دور» را به کار بریم.

اختلاف پتانسیل الکتریکی بین نقاط A و B را می توان به صورت زیر

نوشت:

$$V_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{L} \quad (الف.۲)$$

و رابطه متناظر آن را بین mmf و شدت میدان مغناطیسی

$$\boxed{V_{mAB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{L}} \quad (ب.۲)$$

در فصل ۸ به دست آوردیم و دیدیم که مسیر انتخاب شده نباید از يك سطح مانع انتخاب شده عبور کند. قانون اهم نقطه‌ای برای مدار الکتریکی به صورت

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (الف.۳)$$

است و ملاحظه می شود که چگالی شار مغناطیسی مشابه با چگالی جریان الکتریکی است.

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (ب.۳)$$

مقدار کل جریان از انتگرال

$$I = \int_{\epsilon} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (الف.۴)$$

به دست می آید. برای تعیین مقدار کل شار مغناطیسی که از سطح مقطع يك مدار مغناطیسی عبور می کند باید انتگرال مشابهی را به کار بریم:

$$\boxed{\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S}} \quad (ب.۴)$$

سپس مقاومت را به صورت نسبت بین اختلاف پتانسیل و جریان تعریف

کردیم.

$$V = IR \quad (۵.الف)$$

و اکنون مقاومت مغناطیسی را نسبت بین نیروی محرکه مغناطیسی و چگالی شار تعریف می‌کنیم. یعنی

$$\boxed{V_m = \Phi \mathcal{R}} \quad (۵.ب)$$

که در آن مقاومت مغناطیسی بر حسب آمپر-دور بر ویر (A.t/Wb) اندازه‌گیری می‌شود. در مقاومتها که از مواد خطی همه سو یکسان متجانس با ضریب هدایت σ ساخته شده و سطح مقطع آنها S و طول آنها L باشد مقاومت کل مساوی است با:

$$R = \frac{L}{\sigma S} \quad (۶.الف)$$

اگر بختیار باشیم و چنین ماده مغناطیسی خطی همه سو یکسان متجانسی را با طول L و سطح مقطع یکنواخت S داشته باشیم مقاومت مغناطیسی کل آن برابر خواهد بود با

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{L}{\mu S}} \quad (۶.ب)$$

تنها ماده‌ای که دارای خواص فوق باشد و این رابطه را در مورد آن به کار خواهیم برد هوا است.

حال مشابه منبع ولتاژ را در یک مدار الکتریکی در نظر بگیریم. می‌دانیم که انتگرال مسیر بسته \vec{E} صفر است،

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0$$

به عبارت دیگر طبق قانون ولتاژ کیرشهف افزایش پتانسیل بین دو سر منبع دقیقاً مساوی افت ولتاژ در بار است. بیان این مطلب در پدیده مغناطیسی اندکی متفاوت است.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I_{کل}$$

زیرا انتگرال مسیر بسته صفر نیست. چون جریان کلی که حلقه‌وار مدار مغناطیسی را

در بر می‌گیرد، در نتیجه عبور جریان I از یک سیم پیچ N دوری به دست می‌آید نتیجه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = NI \quad (7)$$

در یک مدار الکتریکی منبع ولتاژ جزئی از مسیر بسته است. در مدار مغناطیسی سیم پیچ حامل جریان مدار مغناطیسی را احاطه می‌کند. در طی یک مدار مغناطیسی نمی‌توانیم دو نقطه مشخصی را تعیین کنیم که نیروی محرک مغناطیسی به آن اعمال شده باشد. این مدار بیشتر شبیه است به دو مدار جفت (کوپله) شده، که دارای ولتاژهای القائی باشند، (و در فصل ۱۰ خواهیم دید که انتگرال مسیر بسته \vec{E} در این مورد صفر نیست).

حال این مطلب را در مورد یک مدار مغناطیسی ساده بررسی می‌کنیم. فعلاً برای اجتناب از مشکلات مربوط به مواد مغناطیسی فرض می‌کنیم که سیم پیچی به صورت چنبره با ۵۰۰ دور سیم و هسته هوائی داشته باشیم که سطح مقطع آن 6 cm^2 و شعاع متوسط آن 1.5 cm و جریان سیم پیچ 4 A باشد. همانطوری که قبلاً دیده‌ایم میدان مغناطیسی محدود به فضای داخلی چنبره است و اگر مسیر بسته مدار مغناطیسی را در شعاع متوسط آن انتخاب کنیم جریان محصور 2000 آمپر - دور است.

$$V_{m, \text{منبع}} = 2000 \text{ A} \cdot t$$

گرچه میدان داخل چنبره کاملاً یکنواخت نیست می‌توان آنرا برای کلیه موارد عملی یکنواخت فرض کرد و مقاومت مغناطیسی کل مدار را محاسبه کرد.

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{L}{\mu S} = \frac{2\pi \times 0.15}{4\pi \times 10^{-7} \times 6 \times 10^{-4}} \\ &= 1.25 \times 10^9 \text{ A} \cdot t / \text{Wb} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\Phi = \frac{V_{m's}}{\mathcal{R}} = \frac{2000}{1.25 \times 10^9} = 1.6 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

این مقدار برای شار کل در مقایسه با مقداری که با در نظر گرفتن توزیع دقیق شار در سطح مقطع داخلی به دست می‌آید با کمتر از $1/4$ درصد خطا همراه است. بنا بر این

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1.96 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-4}} = 3.27 \times 10^{-3} \text{ Wb/m}^2$$

و بالاخره

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{3.27 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7}} = 2590 \text{ A.t/m}$$

برای امتحان می‌توان قانون مدارى آمپر را در این مسأله ساده متقارن به کار برد و

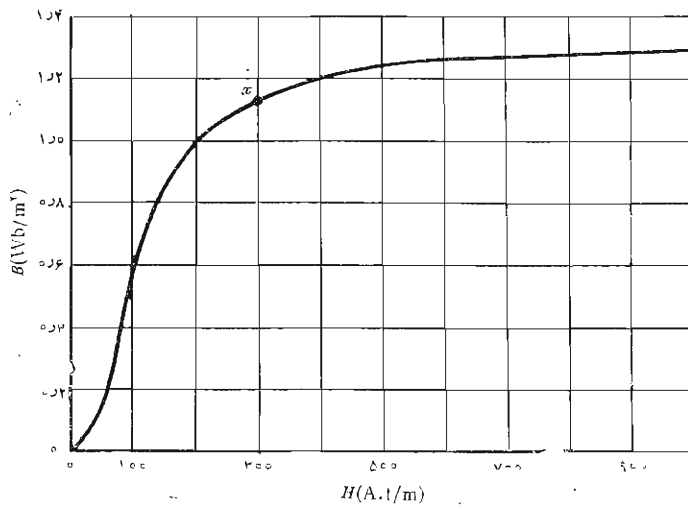
$$H_{\phi} 2\pi r = NI$$

و جواب

$$H_{\phi} = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{500 \times 4}{6.28 \times 0.15} = 2512 \text{ A/m}$$

را در شعاع متوسط به دست آورد.

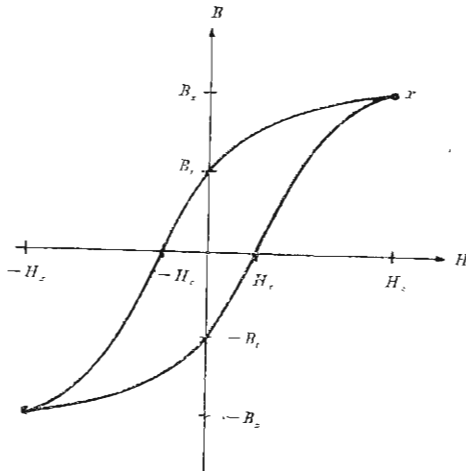
مدار مغناطیسی مثال فوق این فرصت را نمی‌دهد که نیروی محرک مغناطیسی مربوط به اجزاء مختلف يك مدار را محاسبه کنیم چون بیش از يك جزء مدارى



شکل ۵.۹ منحنی مغناطیسی شدن نمونه‌ای از ورق فولاد سیلیسیم دار.

وجود ندارد. مدار مشابه الکتریکی، البته، از یک منبع و یک مقاومت تشکیل شده است ولی می‌توان با محاسبه چگالی جریان و شدت میدان الکتریکی و جریان کل و مقاومت و ولتاژ منبع کاری کرد که به اندازه مثال فوق طولانی به نظر برسد.

در مدارهایی که شامل مواد فروماگنتیک اند مسائل جالب توجه تر و عملی تری پیش می‌آید. این بحث را از رابطه بین B و H در چنین مسوادی شروع می‌کنیم فرض کنید خواسته باشیم منحنی تغییرات B بر حسب H را برای یک نمونه از ماده فروماگنتیک که قبلاً کاملاً خنثی بوده است، یعنی B و H در آن هر دو صفر بوده اند، به دست آوریم. با شروع اعمال نیروی محرک mmf چگالی شار افزایش می‌یابد ولی، همانطوری که منحنی تجربی شکل ۵.۹ در حوالی مبدأ مختصات نشان می‌دهد. این افزایش خطی نیست. بعد از اینکه مقدار H به حدود 100 A.t/m می‌رسد چگالی شار کندتر افزایش می‌یابد و هنگامی که H حدود چند صد A.t/m است شروع به اشباع می‌کند. بعد از این حالت اشباع نسبی به شکل ۶.۹ توجه می‌کنیم که در آن آزمایش خود را در نقطه X با کم کردن تدریجی H ادامه می‌دهیم. ضمن اینکار اثر هیستریزیس شروع به تظاهر می‌کند منحنی از مسیر اولیه خود برنمی‌گردد. حتی وقتی H صفر شود، $B = B_r$ و آن چگالی شار باقیمانده است. اگر جهت H



شکل ۶.۹ منحنی حلقه هیستریزیس برای فولاد سیلیسیم‌دار نیروی کوارسیو H_c و چگالی شار باقیمانده B_r نشان داده شده‌اند.

معکوس شود و دوباره به صفر برگردانده شود و دوره کامل چند بار تکرار شود. منحنی هیسرزیس شکل ۶.۹ به دست می آید. نیروی محرک مغناطیسی لازم برای اینکه چگالی شار را به صفر برساند به «نیروی» کوا(سیو موسوم است. اگر مقدار بیشینه (ماکزیمم) H کمتر باشد منحنیهای کسوجکتی به دست می آید و مکان هندسی نوکهای این منحنیها تقریباً همان منحنی مغناطیسی شدن نمونه بکر شکل (۵.۹) است. حال از منحنی مغناطیسی شدن فولاد سیلیسیم دار برای حل يك مسأله مدار مغناطیسی، که اندکی از مثال قبلی متفاوت است، استفاده کنیم. فرض می کنیم هسته چنبره، غیر از يك فاصله هوائی ۲ میلیمتری، از جنس فولاد باشد به مدارهای مغناطیسی با فاصله هوائی بسیار بر می خوریم زیرا این فواصل عمداً در بعضی دستگاهها ایجاد می شوند، مثلاً در سیم پیچهای القاءگری که حامل جریانهای مستقیم زیادند، یا به علت اینکه وجود آنها غیر قابل اجتناب است، مثلاً در ماشینهای چرخان یا به علت اشکالات اجتناب ناپذیر در سوار کردن قطعات. در مثال فعلی، کمافی السابق، ۵۰۰ دور سیم روی چنبره پیچیده شده است ولی حالا می خواهیم ببینیم چه جریانی لازم است تا چگالی شاری برابر 1 Wb/m^2 در تمامی نقاط هسته بر قرار شود. این مدار مغناطیسی مشابه مداری الکتریکی است که شامل يك منبع ولتاژ و دو مقاومت (یکی از آنها غیر خطی) باشد. چون مقدار «جریان» معلوم است «ولتاژ» دو سر هر عنصر سری و بنابراین «emf» کل را می توان به سهولت به دست آورد. در فاصله هوائی،

$$\mathcal{R}_{\text{هوائی}} = \frac{L_{\text{هوائی}}}{\mu_0} = \frac{2 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 6 \times 10^{-4}} = 2765 \times 10^6 \text{ A.t/Wb}$$

با در دست داشتن چگالی شار کل،

$$\Phi = BS = 1(6 \times 10^{-4}) = 6 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

که باید برای فولاد و هوا مساوی باشد، می توان mmf لازم برای فاصله هوائی را پیدا کرد،

$$V_{m, \text{هوائی}} = (6 \times 10^{-4})(2765 \times 10^6) = 1590 \text{ A.t}$$

با مراجعه به شکل ۵.۹، يك شدت میدان مغناطیسی برابر 200 A.t/m برای تولید چگالی شار 1 Wb/m^2 در فولاد لازم است. بنابراین

$$H_{\text{فولاد}} = 200 \text{ A.t}$$

$$V_{m, \text{فولاد}} = H_{\text{فولاد}} L_{\text{فولاد}} = 200 \times 0.30\pi = 188 \text{ A.t}$$

بنا بر این mmf کل برابر $1778 \text{ A}\cdot\text{t}$ و جریان لازم در سیم پیچ 356 A است. باید متوجه بود که در رسیدن به این جواب از چند تقریب استفاده کرده ایم. قبلاً متذکر شدیم که مقطع کاملاً یکنواخت نیست و تقارن کامل استوانه‌ای نیز ندارد. بنا بر این مسیرهای خطوط شار مساوی نیستند. در مسائلی که این خطا اهمیت بیشتری دارد می‌توان با انتخاب مسیر «متوسطی» خطا را جبران کرد. شار حاشیه‌ای در فاصله هوائی نیز منبع خطای دیگری است و فرمولهائی وجود دارد که به وسیله آنها می‌توان طول و سطح مقطع مؤثری برای فاصله هوائی محاسبه کرد و در نتیجه جواب دقیق‌تری به دست آورد. و نیز مقداری شار ترشچی در فاصله بین پیچهای سیم وجود دارد و در مسائلی که سیم پیچ فقط حول قسمتی از هسته متمرکز است تعدادی خط شار از فضای داخلی چنبره عبور می‌کنند. مسائل شارهای حاشیه‌ای و ترشچی کمتر در مدارهای الکتریکی پیش می‌آیند چون ضریب هدایت هوا نسبت به مواد هادی یا مقاومتی معمولی خیلی کم است. در عوض منحنی مغناطیس شدن فولاد سیلیم‌دار نشان می‌دهد که نسبت H به B در فولاد آسای خمیدگی منحنی مغناطیس شدن در حدود 200 است. به عنوان مقایسه این نسبت برای هوا در حدود 800000 است. به این ترتیب، گرچه شار با نسبت قابل ملاحظه 4000 به 1 فولاد را برهوا ترجیح می‌دهد، این نسبت به هیچ وجه نزدیک به نسبت ضرائب هدایت، مثلاً، 10^{15} برای یک هادی خوب و عایقی متوسط نیست.

به عنوان مثال آخر، عکس این مسأله را در نظر بگیریم. فرض می‌کنیم که جریان سیم پیچی برابر 4 A برای مدار مغناطیسی قبلی داده شده باشد. مقدار چگالی شار چقدر است؟ ابتدا سعی می‌کنیم منحنی مغناطیس شدن را به وسیله خط راستی از مبدأ به نقطه $1 = B$ و $200 = H$ به صورت خطی در آوریم. در اینصورت داریم $B = H/200$ در فولاد و $B = \mu_0 H$ در هوا. مقادیر مقاومت‌های مغناطیسی، بعد از محاسبه، برابر $10^6 \times 314 \times 0.5$ برای مسیر فولادی و $10^6 \times 265 \times 2$ برای فاصله هوائی، یا کلاً $200 \text{ A}\cdot\text{t/Wb}$ خواهد بود. چون V_m مساوی $2000 \text{ A}\cdot\text{t}$ است، چگالی شار برابر $10^{-4} \times 676 \times 10^2 \text{ Wb/m}^2 = B = 1013 \text{ Wb/m}^2$ است. راه حل دقیق‌تری عبارت از این است که چند مقدار مختلف برای B فرض شود و mmf لازم محاسبه گردد. با رسم نتایج می‌توان مقدار صحیح B را از طریق درونیابی تعیین کرد. با این روش نتیجه می‌شود $B = 1010 \text{ Wb/m}^2$. دقت بسیار نتایجی که از روش خطی به دست می‌آید در اثر این است که مقاومت مغناطیسی فاصله هوائی در یک مدار مغناطیسی به مراتب بزرگتر از مقاومت مغناطیسی قسمت فولادی مدار است و بدینجهت تقریب نسبتاً بسدی از مشخصات آهن یا فولاد را می‌توان تحمل کرد.

تمرین ۹.۹

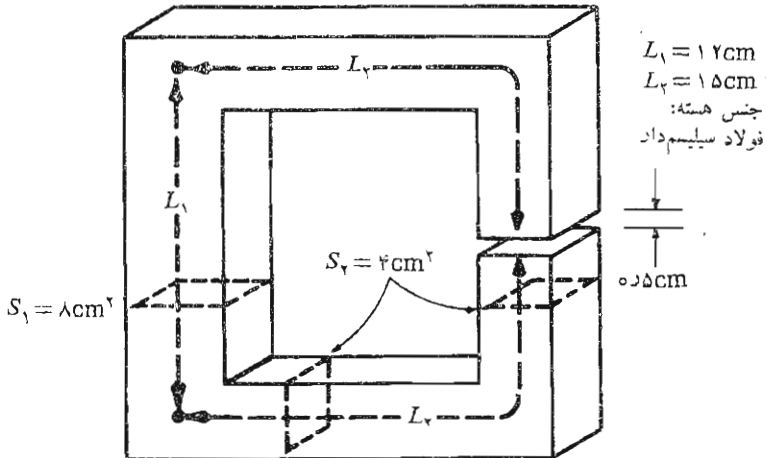
در مدار مغناطیسی شکل ۷.۹ فرض کنید در نقطه وسط شاخه فوقانی $B = 1.2 \text{ Wb/m}^2$ باشد. تعیین کنید: (الف) V_m هوا، (ب) V_m فولاد، و (پ) جریان لازم در يك سطح سیم پیچ ۲۰۰۰ دوری روی شاخه طرف چپ.

جوابها: 4.770 A.t ، 1.32 A.t ، 2.45 A

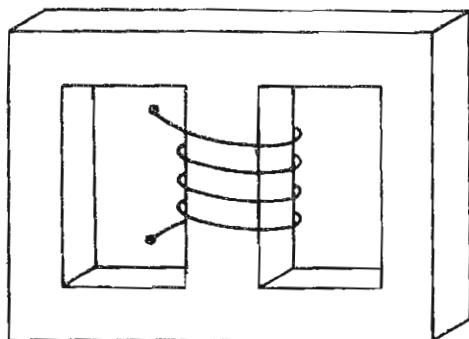
تمرین ۱۰.۹

برای مقادیر B کمتر از «زانوی» منحنی آهنربائی فولاد سیلیسیم دار می توان فرض کرد که رابطه B و H خطی است و $\mu = 5000 \text{ H/m}$ ، هسته ای به صورت شکل ۸.۹، مفروض است که شاخه های خارجی آن دارای سطح مقطع 1 cm^2 و طول 2 cm و شاخه وسط آن دارای سطح مقطع 4 cm^2 و طول 2.5 cm است. سیم پیچی با ۱۵۰۰ دور و جریان 8 mA روی شاخه وسط قرار دارد. (الف) B را در شاخه وسط پیدا کنید. (ب) اگر فاصله ای هوائی برابر 1 mm در شاخه وسط ایجاد شده و جریان سیم پیچ به 30 mA افزایش داده شود، B را در آنجا به دست آورید.

جوابها: 0.706 Wb/m^2 ، 0.466



شکل ۷.۹ به تمرین ۹.۹ مراجعه شود.



شکل ۸.۹ به تمرین ۱۵.۹ مراجعه شود.

۹.۹ انرژی پتانسیل و نیروهای مؤثر بر مواد مغناطیسی

در میدان الکتریکی ساکن ابتدا بار نقطه‌ای و قانون تجربی مربوط به نیروی بین دو بار نقطه‌ای را معرفی کردیم. بعد از تعریف شدت میدان الکتریکی و چگالی شار الکتریکی و پتانسیل الکتریکی توانستیم با تعیین مقدار کار لازم برای آوردن بارها از بینهایت به محل سکون نهائی آنها رابطه‌ای برای انرژی در میدان الکتریکی ساکن به دست آوریم. رابطه کلی انرژی عبارت است از

$$W_E = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{حجم}} \bar{D} \cdot \bar{E} \, dv \quad (1)$$

که در آن رابطه‌ای خطی بین \bar{D} و \bar{E} فرض شده است.

این کار را نمی‌توان به آسانی در مورد میدان مغناطیسی پاینده انجام داد. به نظر می‌رسد که می‌توان دو منبع ساده، مثلاً دو لایه جریان، را در نظر گرفت و نیروی وارد بر یکی در اثر دیگری را حساب کرد و لایه را به فاصله‌ای دیفرانسیلی در مقابل این نیرو به حرکت آورد و مقدار کار لازم را مساوی تغییر انرژی قرار داد. اگر این کارها را می‌کردیم نتیجه نادرست بود چون قانون فارادی (که در فصل بعد خواهد آمد) نشان می‌دهد که در لایه جریان ولتاژی القاء خواهد شد که جریان می‌بایست در خلاف جهت آن برقرار شود و هرمنبعی که جریان لایه را تأمین می‌کند نیمی از انرژی را که در اثر حرکت دادن مدار به آن داده‌ایم دریافت می‌کند.

به عبارت دیگر چگالی انرژی در میدان مغناطیسی را بعد از بحث در باره

میدانهای متغیر با زمان می توان با سهولت بیشتری تعیین کرد. روابط مناسب را در مبحث مربوط به قضیه پوینتینگ^۱ در فصل ۱۱ به دست خواهیم آورد.

حال روش دیگری نیز می توان به کار برد بدین ترتیب که می توان میدان مغناطیسی ساکنی ناشی از قطبهای مغناطیسی فرضی (یا «بارهای مغناطیسی») تعریف کرد. آنگاه با استفاده از پتانسیل مغناطیسی شمارواره ای (اسکالر) می توانیم با روشهایی شبیه آنچه برای محاسبه انرژی میدان الکتریکی ساکن به کار بردیم رابطه ای برای انرژی پیدا کنیم. این کمیات مغناطیسی ساکن جدید که مجبوریم وارد محاسبات خود کنیم به منزله بهای گزافی است که برای به دست آوردن يك نتیجه ساده می پردازیم بنا بر این فعلاً فقط نتیجه را در اینجا ارائه می دهیم و در آینده نشان خواهیم داد که همین رابطه در قضیه پوینتینگ ظاهر می شود. مقدار کل انرژی ذخیره شده در يك میدان مغناطیسی پاینده که \bar{B} به طور خطی به \bar{H} مربوط است عبارت است از:

$$W_H = \frac{1}{2} \int_{\text{حجم}} \bar{B} \cdot \bar{H} \, dv \quad (2)$$

چنانچه از $\bar{B} = \mu \bar{H}$ استفاده کنیم فرمولهای معادل زیر را خواهیم داشت:

$$W_H = \frac{1}{2} \int_{\text{حجم}} \mu H^2 \, dv \quad (3)$$

یا

$$W_H = \frac{1}{2} \int_{\text{حجم}} \frac{B^2}{\mu} \, dv \quad (4)$$

اینجا نیز مناسب است که فرض کنیم این انرژی با چگالی $\bar{B} \cdot \bar{H} / m^3$ در داخل حجم توزیع شده است گرچه هیچ دلیل ریاضی برای چنین تصویری نداریم.

گرچه این نتایج فقط برای محیطهای خطی صادق است می توان از آنها برای محاسبه نیروهای مؤثر بر مواد غیرخطی مغناطیسی نیز استفاده کرد به شرط آنکه توجه خود را به محیط خطی (معمولاً هوا) که آنها را احاطه می کند معطوف کنیم. به عنوان مثال فرض کنید سیم بیچ استوانه ای طویل با هسته ای از جنس فولاد سیلیم دار داشته باشیم که سیم پیچی n دوری حامل جریان IA آن را احاطه کرده است. بنا بر این

1. Poynting

شدت میدان مغناطیسی در داخل هسته مساوی $nI A \cdot t/m$ است و چگالی شار مغناطیسی را می‌توان از منحنی مغناطیس شدن فولاد سیلیسیم دار به دست آورد. این مقدار را B_{st} می‌نامیم. فرض کنید که هسته از دو استوانه نیمه بینهایت^۱ تشکیل شده باشد که انتهای آنها با یکدیگر تماس دارند. اکنون نیروئی مکانیکی اعمال می‌کنیم تا این دو بخش هسته را از هم جدا کنیم. با اعمال نیروی F در فاصله dL کاری برابر $F dL$ انجام می‌دهیم. در اینجا، همانطوری که بزودی خواهیم دید، قانون فارادی صادق نیست چون میدانهای داخل هسته تغییری نکرده‌اند و بنابراین می‌توانیم اصل کار مجازی را به کار ببریم و نشان دهیم که مقدار کاری که برای حرکت دادن هسته انجام داده‌ایم به صورت انرژی ذخیره شده در فاصله هوایی به وجود آمده ظاهر شده است. با استفاده از (۴) این ازدیاد انرژی برابر است با

$$dW_H = F dL = \frac{1}{2} \frac{B_{st}^2}{\mu_0} S dL$$

که در آن S سطح مقطع هسته است. بنابراین

$$F = \frac{B_{st}^2 S}{2\mu_0}$$

مثلاً اگر شدت میدان مغناطیسی برای اشباع هسته فولادی کافی باشد، تقریباً $B_{st} = 1.94 \text{ Wb/m}^2$ ، مقدار نیرو برابر

$$F = 7780 \times 10^5 \text{ S N}$$

یا در حدود $113 \text{ lb}_f/\text{in}^2$ خواهد بود.

تمرین ۱۱.۹

(الف) چه نیروئی بر جبهه‌های قطب مدار تمرین ۹.۹ وارد می‌شود؟ (ب) آیا این نیرو در جهت باز شدن یا بسته شدن فاصله هوایی است؟

جوابها: 229 N ، به قول ویلهلم ادوارد ویر- Schliessen^۲

۱. استوانه نیمه بینهایت عبارت است از استوانه‌ای با طول بینهایت که يك انتهای آن در فضای محدود قرار دارد.

۲. به آلمانی به معنی بستن است.

۱۵.۹ ضریب خود القایی و ضریب القایی متقابل

ضریب خود القایی آخرین ثابت از سه ثابت معمول در نظریه مدارها است که اکنون می‌بایست آن را به صورت کلی‌تری بیان کنیم. مقاومت را در فصل ۵ به صورت نسبت اختلاف پتانسیل بین دو سطح هم پتانسیل یک ماده هادی به جریان کلی که از یکی از سطوح هم پتانسیل عبور می‌کند تعریف کردیم. مقاومت فقط تابع ابعاد هندسی هادی و ضریب هدایت آن است. در همین فصل ظرفیت را نسبت بار کل روی هر یک از سطوح هم پتانسیل هادی به اختلاف پتانسیل بین آنها تعریف کردیم. ظرفیت فقط تابع وضع هندسی دو سطح هادی و ضریب پذیرش عمایق بین آنها، یا در اطراف آنها، است.

حال از نظیر (dual) تعریف ظرفیت برای تعریف ضریب خود القایی استفاده می‌کنیم.^۱ چون نظیر بار الکتریکی، پیوند شار مغناطیسی و نظیر اختلاف پتانسیل جریان است، بنا بر این ضریب خود القایی نسبت پیوند شار کل به جریسانی است که به وسیله آن محاط شده است.

$$L = \frac{N\Phi}{I} \quad (1)$$

جریان I در داخل سیم پیچ N دوری شار کل Φ و پیوند شار $N\Phi$ را تولید می‌کند، و اینجا موقتاً فرض کرده‌ایم که شار Φ با همه دورها پیوند دارد. این تعریف را فقط در مورد محیط مغناطیسی خطی، که در آن شار متناسب با جریان است، می‌توان به کار برد. اگر مواد فروماگنتیک وجود داشته باشند هیچ تعریف خاصی برای ضریب خود القایی وجود ندارد که در تمام موارد مفید باشد و ما بحث خود را به مواد خطی محدود می‌کنیم.

واحد ضریب خود القایی هنری (H) است که معادل یک وبر بر آمپر است. حال رابطه (۱) را به طور ساده برای محاسبه ضریب خود القایی در واحد طول یک کابل هم محور با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b به کار می‌بریم با استفاده از رابطه شار کل که به صورت رابطه (۱۱) بخش ۵.۸، به دست آمد استفاده می‌کنیم

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

۱. مبحث تناظر Duality در اکثر کتابهای تئوری مدار مورد بحث قرار گرفته است. مثلاً به کتاب Hayt and Kemmerly در مراجع آخر فصل مراجعه شود.

و ضریب خود القائی را برای طول l به سرعت به دست می آوریم.

$$L = \frac{\mu_0 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \text{ H}$$

یا بر حسب واحد طول

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \text{ H/m} \quad (۲)$$

در این حالت تعداد دور $N = ۱$ و تمام خطوط شار با تمامی جریان پیوند دارند. در مسأله يك سیم پیچی چنبره ای N دوری و جریان I ، به طوری که در شکل (۱۱.۸ ب) نشان داده شده است داریم

$$B_\phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

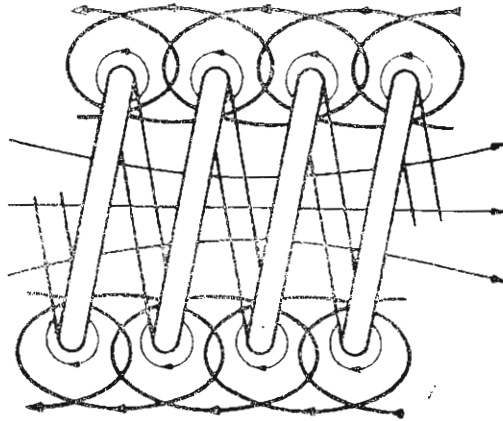
اگر ابعاد سطح مقطع در مقایسه با شعاع متوسط R چنبره کوچک باشند شار کل مساوی است با

$$\Phi = \frac{\mu_0 NIS}{2\pi r_0}$$

که در آن S مساحت سطح مقطع است. با ضرب کردن شار کل در N ، پیوند شار و از تقسیم آن بر I ضریب خود القائی به دست می آید،

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi r_0} \quad (۳)$$

دوباره فرض کرده ایم که تمامی شار کلیه حلقه های جریان را محاط کرده است، و این برای سیم پیچ چنبره ای که تعداد دورهای آن زیادند و به طور متراکم پیچیده شده اند فرض خوبی است. با این حال، فرض کنید که فاصله قابل ملاحظه ای بین حلقه های سیم پیچ چنبره وجود داشته باشد و قسمت کوتاهی از آن به صورت شکل ۹.۹ باشد. در این صورت پیوند شار دیگر مساوی حاصل ضرب شار در فاصله شعاع متوسط و تعداد دور سیمها نیست. برای به دست آوردن مقدار کل پیوند شار می بایست شار به صورت حلقه به حلقه در نظر گرفته شود،



شکل ۹.۹ قسمتی از سیم پیچی که پیوندهای شار جزئی را نشان می‌دهد، پیوند شار کل از مجموع شارهایی که هر دور سیم را احاطه می‌کند به دست می‌آید.

$$(N\Phi)_{\text{کل}} = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_i + \dots + \Phi_N$$

$$= \sum_{i=1}^N \Phi_i$$

که در آن Φ_i شار است که دور i -ام را محاط می‌کند. ولی معمولاً به جای این کار به تجربه اکتفا می‌کنیم و با استفاده از کمیتهای تجربی معروف به ضرائب سیم پیچی و ضرائب شیب فرمول اصلی را با واقعیت فیزیکی تطبیق می‌دهیم. از نظرگاه انرژی نیز می‌توان تعریف معادلی برای ضریب خود القایی به دست آورد.

$$L = \frac{2W_H}{I^2} \quad (۴)$$

که در آن I مقدار کل جریانی است که از مسیر بسته عبور می‌کند و W_H انرژی میدان مغناطیسی ناشی از این جریان است. بعد از اینکه از رابطه (۴) برای به دست آوردن روابط دیگر ضریب خود القایی استفاده کردیم نشان خواهیم داد که این رابطه با (۱)

معادل است. ابتدا انرژی پتانسیل W_H را بر حسب میدانهای مغناطیسی بیان می‌کنیم،

$$L = \frac{\int_{\text{حجم}} \bar{B} \cdot \bar{H} \, dv}{I^2} \quad (۵)$$

و با جایگزین کردن $\nabla \times \bar{A}$ به جای B

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{\text{حجم}} \bar{H} \cdot (\nabla \times \bar{A}) \, dv$$

اتحاد برداری

$$\nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{H}) \equiv \bar{H} \cdot (\nabla \times \bar{A}) - \bar{A} \cdot (\nabla \times \bar{H}) \quad (۶)$$

را می‌توان با بسط در مختصات قائم به اثبات رسانید. بنا براین ضریب خود القائی مساوی است با

$$L = \frac{1}{I^2} \left[\int_{\text{حجم}} \nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{H}) \, dv + \int_{\text{حجم}} \bar{A} \cdot (\nabla \times \bar{H}) \, dv \right] \quad (۷)$$

با استفاده از قضیه دیورژانس در مورد انتگرال اول و همچنین رعایت رابطه $\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$ داریم

$$L = \frac{1}{I^2} \left[\oint_S (\bar{A} \times \bar{H}) \cdot d\bar{S} + \int_{\text{حجم}} \bar{A} \cdot \bar{J} \, dv \right]$$

انتگرال سطحی فوق مساوی صفر است چون این سطح حجمی را محاط می‌کند که شامل تمامی انرژی مغناطیسی است و این مستلزم آن است که \bar{A} و \bar{H} روی چنین سطحی مساوی صفر باشند. بنا براین ضریب خود القائی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{\text{حجم}} \bar{A} \cdot \bar{J} \, dv \quad (۸)$$

رابطه (۸) ضریب خود القائی را بر حسب انتگرالی از \bar{A} و \bar{J} در تمام نقاط فضا بیان می‌کند. چون چگالی جریان فقط در داخل هادی وجود دارد انتگرالده در کلیه نقاط خارج آن صفر است و پتانسیل مغناطیسی برداری لازم نیست در این نقاط تعیین شود. این پتانسیل برداری فقط مربوط به جریان \bar{J} است و هر منبع جریان دیگری

را که در محل چگالی جریان اصلی مؤلفه میدان دارد فعلاً نادیده می‌گیریم. بعداً خواهیم دید که این اثر به تعریف ضریب القائی متقابل منجر می‌گردد. بنابراین مغناطیسی برداری \bar{A} در اثر \bar{J} از رابطه (۱۰) بخش ۶.۸ به دست می‌آید،

$$\bar{A} = \int_{\text{حجم}} \frac{\mu \bar{J}}{4\pi R} dv$$

و بنابراین ضریب خود القائی را می‌توان به وضع اساسی تری به صورت انتگرال دوگانه حجمی نسبتاً پیچیده‌ای نوشت،

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{\text{حجم}} \left(\int_{\text{حجم}} \frac{\mu \bar{J}}{4\pi R} dv \right) \cdot \bar{J} dv \quad (۹)$$

انتگرال اندکی ساده‌تری را می‌توان بدین ترتیب به دست آورد که توجه خود را به رشته‌های جریانی با مقطع کوچک محدود کنیم، در این صورت می‌توان $\bar{J} dv$ را بسا $I d\bar{L}$ تعویض کرد و انتگرال حجمی را به صورت انتگرال مسیر بسته‌ای در امتداد محور رشته نوشت،

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{I^2} \oint \left(\oint \frac{\mu I d\bar{L}}{4\pi R} \right) \cdot I d\bar{L} \quad (۱۰) \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\bar{L}}{R} \right) \cdot d\bar{L} \end{aligned}$$

روابط (۹) و (۱۰) فعلاً فقط از این نظر جالب توجه‌اند که نشان می‌دهند ضریب خود القائی تابع توزیع جریان در فضا یا آرایش هندسی هادی است. برای اینکه تعریف اولیه ضریب خود القائی را به دست آوریم جریانی فرض می‌کنیم که با توزیع یکنواخت در داخل یک هادی رشته‌ای برقرار باشد به طوری که $\bar{J} dv$ در رابطه (۸) را بتوان $I d\bar{L}$ نوشت.

$$L = \frac{1}{I} \oint \bar{A} \cdot d\bar{L} \quad (۱۱)$$

برای سطح مقطع کوچک می‌توان $d\bar{L}$ را در امتداد مسرکز رشته گرفت. حال قضیه استوکس را بکار برده نتیجه می‌گیریم

$$L = \frac{1}{I} \int_s (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{S}$$

یا

$$L = \frac{1}{I} \int_s \bar{B} \cdot d\bar{S}$$

یا

$$L = \frac{\Phi}{I} \quad (12)$$

اگر از رابطه (۱۲) قدم به قدم به عقب برگردیم باید متوجه شویم که شار Φ قسمتی از شار کل است که از يك يك سطوح بازی که مسیر جریان رشته‌ای پیرامون آنها است عبور می‌کند.

حال اگر فرض کنیم رشته دارای N دور یکسان حول شار کل باشد (این حالت آرمانی در بعضی از انواع سیم پیچها تقریباً وجود دارد)، انتگرال مسیر بسته می‌بایست شامل N دور حول این مسیر مشترک باشد و رابطه (۱۲) به صورت زیر در می‌آید،

$$L = \frac{N\Phi}{I} \quad (13)$$

حال شار Φ عبارت از شاری است که از سطوحی که مسیر هر يك از N دور سیم آن را احاطه کرده است عبور می‌کند. ضریب خود القایی يك سیم پیچ N دوری را می‌توان از رابطه (۱۲) نیز به دست آورد. به شرطی که متوجه باشیم که شار مربوط به آن همان است که از سطح پیچیده‌ای که محیط آن تمامی N دور سیم است عبور می‌کند.^۱

استفاده از هر يك از روابط ضریب خود القایی برای يك هادی رشته‌ای حقیقی (با شعاع صفر) صرفنظر از شکل هندسی رشته به جواب بینهایت برای ضریب خود القایی منجر خواهد شد. قانون مداری آمپر نشان می‌دهد که شدت میدان مغناطیسی در نزدیکی هادی با نسبت عکس فاصله از هادی تغییر می‌کند و با يك انتگرال‌گیری ساده می‌توان نشان داد که در داخل هر استوانهٔ محدودی حول رشته مقدار انرژی شار بینهایت است. این اشکال را به این ترتیب می‌توان برطرف کرد که شعاع هادی کوچک ولی محدودی را مشخص کنیم.

۱. تقریباً شبیه يك سطح شیب دار مارپیچی.

در داخل هر هادی نیز شار مغناطیسی وجود دارد، و این شار بر حسب محل مورد نظر در داخل هادی کسر متغیری از جریان را احاطه می‌کند. این پیوند شار باعث خود القائی داخلی می‌شود که باید آن را با ضریب خود القائی خارجی ترکیب کرد و ضریب خود القائی کل را به دست آورد. ضریب خود القائی داخلی سیمی با مقطع دایره‌ای که دارای توزیع جریان یکنواختی است مساوی $\mu/8\pi H/m$ است و این نتیجه یکی از مسائل آخر فصل است.

در فصل ۱۱ خواهیم دید که در بسامدهای (فرکانسهای) بالا توزیع جریان در سطح خارجی هادی تمرکز می‌یابد. شار داخلی نقصان می‌یابد و معمولاً کافی است که فقط ضریب خود القائی خارجی در نظر گرفته شود. اما در بسامدهای (فرکانسهای) پائین تر ضریب خود القائی داخلی ممکن است قسمت قابل ملاحظه‌ای از ضریب خود القائی کل باشد.

این بحث را با تعریف ضریب القاء متقابل بین مدار ۱ و ۲ بر حسب پیوند شار متقابل خاتمه می‌دهیم

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} \quad (14)$$

که در آن Φ_{12} مشخص شار ایجاد شده توسط جریان I_1 است که مسیر جریان رشته‌ای I_2 را محاط می‌کند و N_2 تعداد دور مدار ۲ است. بنابراین ضریب القاء متقابل به برهم کنش بین دو جریان بستگی دارد. اگر هر یک از جریانها به تنهایی وجود داشته باشد، انرژی ذخیره شده کل در میدان مغناطیسی را می‌توان بر حسب فقط یک ضریب القاء، یعنی ضریب خود القائی به دست آورد. در صورتی که هر دو جریان دارای مقدار غیر صفر باشند، انرژی کل تابع در ضریب خود القائی و ضریب القاء متقابل است. از نظر انرژی متقابل، می‌توان نشان داد که رابطه (۱۴) معادل است با

$$M_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \int_{\text{حجم}} (\vec{B}_1 \cdot \vec{H}_2) dv \quad (15)$$

یا

$$M_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \int_{\text{حجم}} (\mu \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2) dv \quad (16)$$

به طوری که \vec{B}_1 میدان ناشی از I_1 (با $I_2 = 0$) و \vec{H}_2 میدان حاصله از I_2 (با $I_1 = 0$)

است. تعویض اندیسها تغییری در طرف راست رابطه (۱۶) ایجاد نمی کند، بنا بر این

$$\boxed{M_{۱۲} = M_{۲۱}} \quad (۱۷)$$

ضریب القاء متقابل نیز بر حسب هنری اندازه گیری می شود، و برای اینکه با بردار آهنربائی که برای آن هم علامت M را بکار می بریم، اشتباه نشود می بایست به معنی متن توجه شود.

به عنوان مثالی ازمحاسبه ضریب القاء متقابل وضریب خود القائی فرض کنید دوسیم پیچ استوانه ای متحدالمرکز با شعاعهای $R_۱$ و $R_۲$ ($R_۲ > R_۱$) داشته باشیم که جریانهها و تعداد دورهای آنها به ترتیب $I_۱$ و $I_۲$ آمپر و $n_۱$ و $n_۲$ دور درمتر باشد. با استفاده از رابطه (۶) بخش ۲۰۸ داریم $n_۱ = N/L$ ، و در نتیجه

$$\begin{aligned} \bar{H}_۱ &= n_۱ I_۱ \bar{a}_z & (0 < r < R_۱) \\ &= 0 & (r > R_۱) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \bar{H}_۲ &= n_۲ I_۲ \bar{a}_z & (0 < r < R_۲) \\ &= 0 & (r > R_۲) \end{aligned}$$

بنابراین برای این میدان یکنواخت داریم

$$\Phi_{۱۲} = \mu_0 n_۱ I_۱ \pi R_۱^۲$$

و

$$M_{۱۲} = \mu_0 n_۱ n_۲ \pi R_۱^۲$$

با روشی مشابه نتیجه می شود

$$\Phi_{۲۱} = \mu_0 n_۲ I_۲ \pi R_۱^۲$$

$$M_{۲۱} = \mu_0 n_۱ n_۲ \pi R_۱^۲ = M_{۱۲}$$

اگر $n_۱ = ۵۰$ (سانتیمتر/دور) و $n_۲ = ۸۰$ (سانتیمتر/دور) و $R_۱ = ۲\text{cm}$ و $R_۲ = ۳\text{cm}$ باشد خواهیم داشت

$$M_{۱۲} = M_{۲۱} = ۶۳ \text{ mH/m}$$

$$L_2 = 227 \text{ mH/m} \text{ و } L_1 = 394 \text{ mH/m}$$

بنابراین ملاحظه می‌شود که روشهای متعددی برای محاسبه ضرایب خود القائی و ضرب القاء متقابل وجود دارد. متأسفانه، حتی در مسائلی که تاحد زیادی تقارن دارند به انتگرالهای پیچیده‌ای بر می‌خوریم و فقط تعداد کمی مسأله است که با آنها می‌توانیم مهارت خود را آزمایش کنیم.

ضرب خود القاء را، از نظر مداری، در فصل ۱۳ بررسی خواهیم کرد.

تمرین ۱۳.۹

ضرب خود القائی را در موارد زیر محاسبه کنید: (الف) کابل هم محوری به طول 1 km و $b/a = 6$ و عایق تفلان، (ب) سیم پیچ چنبره‌ای 1000 دوری که روی فایبر گلاسی با سطح مقطع دایره‌ای پیچیده شده است که $a = 1 \text{ cm}$ و $r_0 = 3 \text{ cm}$ است. (پ) سیم پیچ استوانه‌ای 1000 دوری، به طول 50 cm ، با سطح مقطع مربعی به ابعاد $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$.

جوابها: $226, 209, 0358 \text{ mH}$

تمرین ۱۳.۹

ضرب القاء متقابل بین سیم پیچ استوانه‌ای قسمت (پ) فوق و سیم پیچ استوانه‌ای دیگری که به طور هم محور با آن قرار گرفته، و تعداد دور آن 1500 و سطح مقطع مربعی شکل آن $4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ و طول آن برابر طول سیم پیچ اولی است پیدا کنید.

جواب: 339 mH

مراجعی که توصیه می‌شود

1. Azaroff, L.V., and J.J. Brophy; «Electronic Processes in Materials,» McGraw-Hill Book Company, New-York, 1963.

در فصل ۱۳ این کتاب در باره مواد مغناطیسی بحث شده است.

2. Fano, R.M., L.J. Chu, and R.B. Adler:

(به مراجع فصل ۵ مراجعه شود) مواد مغناطیسی در فصل ۵ این کتاب بررسی شده‌اند.

3. Hayt, W.H., Jr., and J.E. Kemmerly:

(به مراجع فصل ۷ مراجعه شود) دوالیته در صفحات ۱۳۲ تا ۱۳۶ این کتاب تعریف شده است.

4. Matsch, L.W.:

(به مراجع فصل ۵ مراجعه شود) فصل ۳ به مدارهای مغناطیسی و مواد فروماگنتیک اختصاص دارد.

مسائل

۱- يك بار نقطه‌ای ۱C در مبدأ در زمان $t = 0$ دارای سرعت اولیه $5\bar{a}_y$ m/s است. این بار در فضای آزاد در میدان الکتريکی یکنواخت $\bar{E} = 2\bar{a}_y$ V/m حرکت می‌کند. برای سهولت فرض می‌کنیم که جرم آن برابر ۱ kg باشد. از شکل برداری قانون نیوتن $\bar{F} = m\bar{a}$ استفاده کرده نشان دهید که: (الف) مختصات x و z محل بار از $x = 5t$ و $z = 0$ به دست می‌آیند. (ب) مختصات y عبارت است از $y = t^2$. (پ) انرژی جنبشی بار $12.5t^2 + 2t^4$ است.

۲- يك بار نقطه‌ای ۱C در مبدأ در زمان $t = 0$ دارای سرعت اولیه $5\bar{a}_y$ m/s است این بار در فضای آزاد در میدان مغناطیسی یکنواخت حرکت می‌کند. برای سهولت فرض کنید جرم آن برابر ۱ kg باشد. از شکل برداری قانون نیوتن $\bar{F} = m\bar{a} = m\frac{d\bar{U}}{dt}$ استفاده کرده نشان دهید که: (الف) $\frac{dU_x}{dt} = -2U_z$ و $\frac{dU_z}{dt} = 2U_x$ (ب) $\frac{dU_x}{U_x} = -\frac{U_z}{U_z}$ (پ) $U_x^2 + U_z^2 = 25$ برای کلیه مقادیر t . (ت) انرژی جنبشی برای تمام زمانها برابر $12.5t^2$ است.

۳- معادلات پارامتری مسیر حرکت ذره باردار مسئله ۲ را به دست آورید.

۴- الکترونی که در جهت \bar{a}_y روی محور منفی y ها با سرعت 5×10^7 m/s در حال حرکت است در ناحیه بین $y = 0$ و $y = 4$ cm به میدان مغناطیسی یکنواخت $B_0\bar{a}_z$ مواجه می‌شود. اگر (با دقت مناسب) فرض کنیم که الکترون در میدان مغناطیسی همچنان در جهت محور $y -$ ها به حرکت خود ادامه می‌دهد، B_0 باید چه مقدار باشد تا باعث شود که وقتی الکترون به $y = 4$ cm می‌رسد انحرافی برابر ۱۰cm در جهت \bar{a}_z در مسیر آن حاصل شود.

۵- يك نوار طولانی از جنس ژرمانیوم نوع n دارای مقطعی مستطیلی در صفحه $x = 0$ است به طوری که $0 \leq z \leq a$ ، $0 \leq y \leq b$. میدان مغناطیسی $B_0\bar{a}_z$ برقرار است و میدان الکتريکی E_x نیز به وسیله يك منبع ولتاژ خارجی در داخل این نوار برقرار شده است. اگر ضریب تحرك الکترون μ_e باشد: (الف) نشان دهید که ولتاژ هال ایجاد شده بین دو لبه $y = 0$ و $y = b$ برابر است با $b\mu_e B_0 E_x$.

(ب) مقدار ولتاژ هال را برای $a = 1 \text{ mm}$ و $b = 1 \text{ cm}$ و $B_0 = 0.1 \text{ Wb/m}^2$

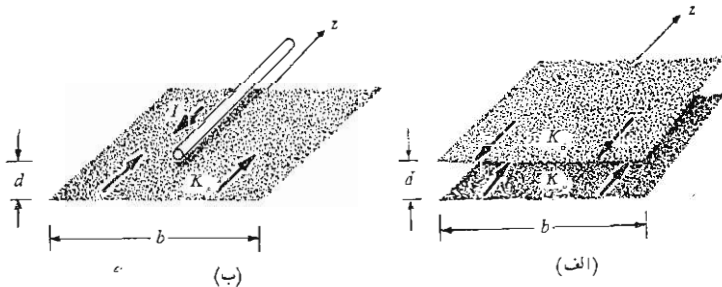
و $\mu_e = 0.39 \text{ m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$ و $E_x = 10^3 \text{ V/m}$ به دست آورید.

۶- عنصر جریان $I\Delta\vec{L} = -10^{-6} \vec{a}_y$ در مبدأ مختصات در معرض میدان یکنواخت $B = 0.02 \vec{a}_z \text{ Wb/m}^2$ قرار گرفته است. (الف) برای حرکت دادن این عنصر در امتداد محور x -ها به $(1, 0, 0)$ بی‌اینکه جهت آن تغییری کند چه مقدار کار لازم است. (ب) کار انجام شده برای دوران این عنصر به مقدار 180° در صفحه $z = 0$ چقدر است. (پ) حال چه مقدار کار لازم است تا دوباره آن را به مبدأ برگردانیم. (ت) اگر مدار کاملی به صورت مربع در صفحه $z = 0$ در نظر گرفته شود که مرکز آن در ابتدا روی مبدأ مختصات است نتایج فوق چه تغییری خواهند کرد؟

۷- خط انتقال صفحه‌ای که در شکل (۱۰.۹ الف) نشان داده شده است حامل جریانهای سطحی $\pm \vec{K}_0 \vec{a}_z$ در جهت نشان داده شده است. نیروی دافعه بین دو هادی را در واحد طول به دست آورید در صورتی که $b \gg d$ باشد.

۸- نوار سطح فوقانی شکل (۱۰.۹ الف) با رشته‌ای که حامل جریان I است تعویض شده است (شکل ۱۰.۹ ب) اگر فاصله همچنان d باشد و $b \gg d$ نیروی دافعه را در واحد طول به دست آورید.

۹- (الف) از رابطه (۲) بخش ۳.۹ استفاده کرده نشان دهید که نیروی جاذبه واحد طول بین دو هادی رشته‌ای در فضای آزاد با جریانهای $I_1 \vec{a}_z$ در $x = 0$ و $y = 1/\sqrt{4}d$ و $I_2 \vec{a}_z$ در $x = 0$ و $y = -1/\sqrt{4}d$ برابر است با $\mu_0 I_1 I_2 / (2\pi d)$. (ب) نشان دهید که چگونه می‌توان از روش ساده‌تری برای تحقیق صحت جواب خود استفاده کرد.



شکل ۱۰.۹ (الف) به مسئله ۷ مراجعه شود. (ب) به مسئله ۸ مراجعه شود

۱۰- رشته‌های جریان $I_1 \bar{a}_z$ و $I_2(\bar{a}_x + \bar{a}_y)/\sqrt{2}$ به ترتیب در $y=0$ و $z=0$ و در $z=1$ و $y=1$ در فضای آزاد قرار دارند. نیروی برداری کل وارد بر I_1 را به دست آورید.

۱۱- مدار بسته‌ای به شکل مربع که طول هر ضلع آن 6 cm است حامل جریان 10 A است و در صفحه $z=0$ به طور هم‌مرکز طوری قرار گرفته است که اضلاع آن موازی محورهای x و y اند. جریان در نقطه $(3, 0, 0)\text{ cm}$ در جهت \bar{a}_y است. بردار گشتاور-نیروی ایجاد شده حول محوری را که از مبدأ مختصات می‌گذرد برای میدانهای زیر به دست آورید: (الف) $\bar{B} = \bar{a}_x \text{ Wb/m}^2$ در تمام نقاط، (ب) $\bar{B} = \bar{a}_x \text{ Wb/m}^2$ برای $x \geq 3\text{ cm}$ و صفر در نقاط دیگر، (پ) $\bar{B} = \bar{a}_x \text{ Wb/m}^2$ برای $x \geq 0\text{ cm}$ ، $y \geq 3\text{ cm}$ و صفر در نقاط دیگر.

۱۲- بردار گشتاور-نیرو حول مبدأ مدار بسته مسأله ۱۱ را در اثر میدانهای زیر به دست آورید: (الف) $\bar{B} = 0.05y\bar{a}_x \text{ Wb/m}^2$ (بر حسب متر)، (ب) $\bar{B} = y^2\bar{a}_x$.

۱۳- سطح استوانه‌ای $r=8\text{ cm}$ ، $0 < z < 25\text{ cm}$ شامل 1000 رشتهٔ جریان موازی محور z — ها است که به فواصل مساوی حول استوانه قرار دارند و جریان هر یک 20 A \bar{a}_z است. میدان مغناطیسی شعاعی $\bar{B} = 0.4r\bar{a}_r \text{ Wb/m}^2$ را روی سطح استوانه فرض کرده گشتاور-نیروی کل وارد بر جریانهای رشته‌ای را به دست آورید. این استوانه چند دور در دقیقه (rpm) باید بچرخد تا توانی معادل 10 kW به وجود آورد.

۱۴- جریانی در امتداد محور z — ها، برابر $10\bar{a}_z \text{ A}$ ، در یک حلقهٔ جریان رشته‌ای مربع شکل $x=1$ و $1 \leq y \leq 2$ و $0 \leq z \leq 5$ ، که حامل جریان 5 A است (در جهت \bar{a}_y در محلی که مدار محور x — ها را قطع می‌کند) میدانی تولید می‌کند. (الف) نیروی برداری کل مؤثر بر مدار را پیدا کنید. (ب) با استفاده از محوری که از مرکز مدار می‌گذرد گشتاور-نیروی برداری کل مؤثر بر مدار را پیدا کنید.

۱۵- فرض کنید یک الکترون روی مداری دایره‌ای شکل به شعاع a حول هسته‌ای با بار مثبت در حرکت باشد. (الف) با انتخاب جریان و سطح مناسب نشان دهید که گشتاور دوقطبی مداری معادل $ea^2\omega/2$ است که در آن ω سرعت زاویه‌ای الکترون است. (ب) نشان دهید که گشتاور-نیروی ایجاد شده توسط یک میدان مغناطیسی موازی با صفحهٔ مدار الکترون برابر است با $ea^2\omega B/2$. (پ) از تساوی نیروی کولن و گریز از مرکز نشان دهید که ω برابر است با $(4\pi\epsilon_0 ma^3/e^2)^{-1/2}$. (ت) مقادیر سرعت زاویه‌ای و گشتاور-نیرو و گشتاور مغناطیسی مداری را برای

يك اتم ئیدرژن که برای آن a تقریباً برابر $m \times 10^{-11} \times 6$ است به دست آورید. فرض کنید $B = 1 \text{ Wb/m}^2$ باشد.

۱۶- فرض کنید اتم ئیدرژن توصیف شده در مسأله ۱۵ در معرض میدانی مغناطیسی باشد که هم جهت با میدان خود اتم است. نشان دهید که نیروهای ایجاد شده توسط B باعث خواهند شد که سرعت زاویدای به اندازه $eB/2m$ و گشتاور مداری به اندازه $e^2 a^2 B/4m$ کاسته شود. برای چگالی شار مغناطیسی نسبتاً بزرگ 1 Wb/m^2 مقادیر کاهشهای مذکور برحسب جزئی در میلیون برای اتم ئیدرژن چقدر است؟

۱۷- نشان دهید که نیروی برداری کل مؤثر بر هر مدار صفحه‌ای جریسان مستقیم در معرض میدان یکنواخت \vec{B} برابر صفر است. آیا گشتاور-نیرو نیز صفر است؟ آیا این نتایج در مورد مدارهای غیر واقع در یک صفحه نیز صادق‌اند؟

۱۸- چگالی جریان A/m^2 در ناحیه $5 < z < -5$ برقرار است. اگر ناحیه $|z| > 5 \text{ mm}$ فضای آزاد و نواحی دیگر شامل ماده‌ای با قابلیت نفوذ نسبی ۳ باشند \vec{B} و \vec{H} و \vec{M} را در تمام نقاط به دست آورید.

۱۹- دو جریان لایه‌ای بینهایت 50 A/m در $z = 0$ و 50 A/m در $z = -50$ در $z = -50$ مفروض‌اند. \vec{B} و \vec{H} و \vec{M} را در تمام نقاط به دست آورید در صورتی که ناحیه $|z| > 50 \text{ m}$ فضای آزاد، و ناحیه $50 < z < -50$ شامل ماده‌ای باشد که برای آن μ_R برابر است با (الف) ۹۹ و (ب) ۱۰۱ و (پ) ۱۰۰.

۲۰- يك خط انتقال هم محور به ابعاد $a = 1 \text{ mm}$ و $b = 4 \text{ mm}$ از 1 mm تا 2 mm حاوی لایه‌ای استوانه‌ای با $\mu_R = 5$ و از 2 mm تا 4 mm دارای لایه‌ای با $\mu_R = 2$ است. اگر جریان هادی داخلی 6 A باشد، B و H و M را در (الف) 1.5 mm و $r = 3 \text{ mm}$ (ب) به دست آورید.

۲۱- ماده داخلی خط انتقال هم محور مسأله ۲۰ با ماده غیرمتجانسی که برای آن $\mu_R = 1 + 4(4 - 1000r)/3$ است (برحسب متر) تعویض شده است. چه مقدار شار در واحد طول از این ماده عبور می‌کند.

۲۲- چنبره‌ای با مشخصات $r_0 = 4 \text{ cm}$ و $a = 1 \text{ cm}$ و $N = 600$ و $I = 0.5 \text{ A}$ مفروض است B و H را در داخل این چنبره و اختلاف بین V_m نقساطی روی پیرامون متوسط آن که 90° از یکدیگر فاصله دارند پیدا کنید در صورتی که هسته چنبره از جنس: (الف) چوب و (ب) فربشی نسبتاً خطی که برای آن $\mu_R = 200$ است باشد.

۲۳- جریانهایی سطحی 200 A/m و 200 A/m به ترتیب در $z = 0$ و $z = -5 \text{ m}$

برقراراند. ناحیه $|z| > 5$ فضای آزاد است. \bar{B} و \bar{H} را در ناحیه $|z| < 5$ پیدا کنید در صورتی که: (الف) $|z| < 5 \iff \mu = \mu_0$ ، (ب) $|z| < 5 \iff \mu = 1.2 \mu_0$ ، (پ) $|z| < 2 \iff \mu = \mu_0$ ، (ت) $y < 0 \iff \mu = \mu_0$ و $y > 0 \iff \mu = 1.2 \mu_0$.

۲۴- در نقطه‌ای در نزدیکی یک جسم مغناطیسی که در آن $\mu_R = 3$ است مقدار \bar{B} فضای آزاد برابر Wb/m^2 $0.3\bar{a}_\phi - 0.1\bar{a}_\theta - 0.2\bar{a}_r$ است. میدان \bar{B} را در نقطه‌ای داخل این جسم در نزدیکی سطح مشترک آن با فضا پیدا کنید در صورتی که این جسم به صورت: (الف) کره $a < r$ ، (ب) مخروط $\alpha < \theta$ و (پ) حجم $\alpha < \phi < 0$ باشد.

۲۵- در طرف هوای یک سرحد صفحه‌ای بین موادی که قابلیت نفوذ آنها ۲.۵ و ۱ است، $H_1 = 0.6\bar{H}$ که در آن \bar{a}_{n1} عمود به سرحد و در جهت هواممتد است. زاویه بین \bar{H}_1 و \bar{a}_{n1} را به دست آورید.

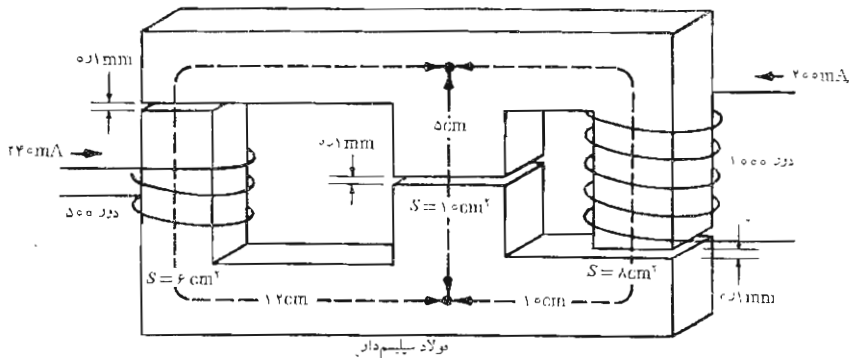
۲۶- در تمرین ۱۰.۹ ب تقریب مذکور در مسأله منتج به مقدار Wb/m^2 0.466 برای چگالی شار در شاخه میانی می‌گردد. با استفاده از این مقدار جریان واقعی لازم در سیم پیچ را به دست آورید در صورتی که ماده مغناطیسی دارای مشخصه‌ای به صورت منحنی شکل (۵.۹) باشد.

۲۷- منحنی مغناطیس شدن ماده بخصوصی را می‌توان با قطعه خط راستی از $(0, 0)$ به $(1 Wb/m^2, 1000 A.t/m)$ و قطعه خط دیگری از $(1, 1000)$ به $(1.2, 3000)$ نشان داد. یک سیم پیچ ۵۰۰ دوری چه شاری در مدار مغناطیسی متشکل از میله‌ای به طول ۱۰ سانتیمتر و سطح مقطع $1 cm^2$ و میله دیگری به طول ۲۰ سانتیمتر با سطح مقطع $S = 0.8 cm^2$ از چنین ماده‌ای به وجود خواهد آورد در صورتی که جریان سیم پیچ برابر (الف) $4A$ و (ب) $1.2A$ باشد.

۲۸- برای اینکه شاری برابر $80 \mu Wb$ در مدار مغناطیسی مسأله ۲۷ با جریان $1A$ به وجود آید چه فاصله هوایی باید به مدار فوق در ناحیه‌ای که سطح مقطع آن $1 cm^2$ است اضافه شود.

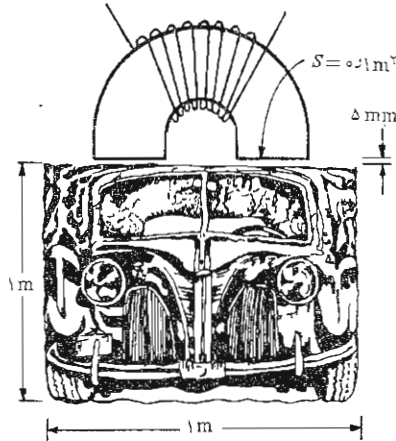
۲۹- چگالی شار را در هر یک از سه شاخه مدار مغناطیسی شکل (۱۱.۹) به دست آورید فرض کنید در داخل فولاد $H = 200B$ باشد.

۳۰- مداری مغناطیسی شامل ۴۰ سانتیمتر فولاد و $1 mm$ فاصله هوایی است. سطح مقطع برابر $10 cm^2$ است. (الف) چه آمپر-دوری لازم است تا چگالی شاری برابر $1 Wb/m^2$ در فاصله هوایی ایجاد شود؟ (ب) اگر فاصله هوایی دوبرابر



شکل ۱۱.۹ به مسأله ۲۹ مراجعه شود.

- شود تعداد آمپر دور چقدر به دو برابر شدن نزدیک می شود؟ (پ) فسمتهای (الف) و (ب) را برای $B = 1.3 \text{ Wb/m}^2$ تکرار کنید.
- ۳۱- يك آهنربای برقی اتومبیل کهنه‌ای را که مطابق شکل (۱۲.۹) به صورت مکعبی به ضلع 1 m فشرده شده است از جا بلند می کند. فرض کنید هر يك از قطبها دارای سطح تماسی برابر 1 m^2 و فاصله هوائی مؤثر 5 mm باشد. اگر وزن اتومبیل 15000 N باشد کمترین مقدار آمپر- دور لازم را برای سیم پیچ تعیین کنید در صورتی که از مقاومت مغناطیسی مدار (الف) و اتومبیل و (ب) فقط مدار بتوان صرف نظر کرد به شرطی که اتومبیل دارای طول مسیر مؤثر 1 m و سطح مقطع مؤثر 1 m^2 و قابلیت نفوذ نسبی مؤثر 250 باشد.
- ۳۲- انرژی ذخیره شده در چنبیره مسأله ۲۲ ب را به دست آورید.
- ۳۳- ضریب القاء سیم پیچی استوانه‌ای به طول 5 cm و شعاع 2 mm و 4000 دور سیم را به دست آورید در صورتی که هسته آن از مواد زیر باشد: (الف) هوا، (ب) ماده‌ای مغناطیسی به ضریب قابلیت نفوذ نسبی $\mu_R \approx 150$ ، (پ) يك هسته فروماگنتیک داخلی در $r \leq 1 \text{ mm}$ و $\mu_R \approx 150$ که به وسیله هوا محاط شده است.
- ۳۴- اگر جریانی برابر 4 A به سیم پیچی استوانه‌ای با هسته هوائی و 500 دور و قطر 2.5 cm و طول 20 cm اعمال شود چگالی شار اندازه گیری شده در مرکز استوانه برابر 115 Wb/m^2 خواهد بود. (الف) این مقدار چه



شکل ۱۳.۹ به مسأله ۳۱ مراجعه شو.

کسری از مقدار محاسبه شده از طریق نظری است؟ (ب) ضریب القاء اندازه گیری شده برابر $650 \mu\text{H}$ است. تعداد مؤثر پیوند شار در اثر جریان 4A چقدر است؟ (پ) این تعداد چه کسری از تعداد محاسبه شده از طریق نظری است؟

۳۵- دو خط انتقال دوسیمه در فضای آزاد در صفحه $y = 0$ به ترتیب زیر قرار دارند: $I_1 \vec{a}_y$ در $x = 2 - 1 \text{ cm}$ و $I_2 \vec{a}_y$ در $x = -2 - 1 \text{ cm}$. (الف) شار ناشی از I_1 که خط انتقال را در واحد طول محاط می کند به دست آورید. (ب) M_{12} را در واحد طول پیدا کنید.

۳۶- (الف) نشان دهید که ضریب القاء داخلی یک سیم استوانه ای غیر مغناطیسی به شعاع a که حامل جریان I با توزیع یکنواخت است برابر $\mu_0 / 8\pi \text{ H/m}$ است. (ب) ضریب القاء داخلی را به دست آورید در صورتی که هادی واقع در ناحیه $a < c < r$ برداشته شود.

۳۷- (الف) ضریب القاء متقابل بین یک رشته بلند مستقیم و یک مدار بسته به صورت مربعی به ضلع 10 cm که در همان صفحه رشته قرار گرفته و لبه نزدیکتر آن موازی و به فاصله 10 cm از رشته است به دست آورید. (ب) ضریب القاء متقابل را به دست آورید در صورتی که مدار بسته به اندازه 45° در صفحه خود

حول مرکزش چرخانده شود.

۳۸- دو هادی موازی با مقطع دایره به فاصله مرکز به مرکز d در هوا قرار دارند. این دو هادی حامل جریانهای مساوی و مختلف‌الجهت I به صورت جریان سطحی اند. اگر شعاعهای هادیها r_0 باشد تقریب خوبی برای ضریب القاء در واحد طول به دست آورید در صورتی که $d \gg r_0$.

۳۹- شعاع سطح مقطع یک سیم پیچ استوانه‌ای در هوا با ضریب القاء L برابر a است. یک حلقه منفرد به شعاع r_0 به طور هم مرکز با سیم پیچ فوق قرار دارد. مطلوب است ضریب القاء متقابل برحسب L اگر r_0 برابر باشد با: (الف) \sqrt{a} و (ب) a^- و (پ) a^+ و (ت) $2a$.

۴۰- در مقاله زیر:

Resistance Network Analog Simulation of the Magnetic Field Produced by a Solenoid

نوشته: T. Okoski در *IEEE Trans. Electron Devices*, ED-12, 1965, pp. 564-578

تعریف گشتاور مغناطیسی نویسنده چه تفاوتی با تعریفی دارد که ما به کار می‌بریم.
۴۱- به یکی از کتب مرجع مهندسی برق مراجعه کرده ضریب خود القاء یک دور سیم شماره ۸ را در هوا به دست آورید در صورتی که شعاع آن ۱۰ cm باشد.

میدانهای متغیر با زمان و معادلات ماکسول

روابط اساسی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن را در نه فصل قبل به دست آوردیم و حال آمادگی آن را داریم که درباره میدانهای متغیر با زمان بحث کنیم. این بحث کوتاه خواهد بود، چون حالا دیگر با آنالیز و محاسبات برداری آشنائی داریم. بعضی از روابط تغییری نکرده‌اند و اکثر آنها فقط تغییری جزئی خواهند داشت.

دو مفهوم جدید معرفی خواهد شد: یکی میدان الکتریکی ناشی از میدان مغناطیسی متغیر است و دیگری میدان مغناطیسی ناشی از میدان الکتریکی متغیر. مفهوم اول از تحقیقاتی عملی هدفدار مایکل فارادی و دومی از کارهای نظری جیمس کلارک ماکسول نتیجه شده‌اند. در حقیقت ماکسول از کارهای نظری فارادی و از تصویر ذهنی «خطوط نیرو» که فارادی در اثبات نظریه الکتریسیته و مغناطیس خود پیشنهاد کرده بود الهام گرفت. او ۴۰ سال جوانتر از فارادی بود، ولی آنها ظرف ۵ سالی که ماکسول چند سال بعد از بازنشستگی فارادی به عنوان یک پروفیسور جوان در لندن به سر می‌برد، با هم آشنا شده بودند. نظریه ماکسول بعد از احراز این سمت دانشگاهی و در زمانی که به تنهایی در خانه خود در اسکاتلند کار می‌کرد به ثمر رسید. این کار ۵ سال از عمر او را، بین سالهای ۳۵ و ۴۰ سالگی به خود مصروف داشت. چهار معادله اساسی نظریه الکترومغناطیس که در این فصل معرفی شده‌اند به نام او موسوم‌اند.

۱.۱۰ قانون فارادی

بعد از اینکه ارسند در سال ۱۸۲۰ نشان داد که جریان الکتریکی بر عقربه قطب نما اثر می کند فارادی اظهار عقیده کرد که اگر جریان برق قادر به ایجاد میدان مغناطیسی باشد پس میدان مغناطیسی نیز باید بتواند ایجاد جریان کند. در آن زمان هنوز کسی از مفهوم «میدان» خبر نداشت. و هدف فارادی این بود که نشان دهد که جریان می تواند در اثر «آهنر بایی» به وجود آید.

او به مدت ده سال به طور منقطع روی این مسأله کار کرد تا بالاخره در سال ۱۸۳۱ به موفقیت رسید. او دو سیم پیچ مجزا را روی هسته ای آهنی به صورت چنبره پیچید و در یک مدار یک گالوانومتر و در مدار دیگر یک باتری قرار داد. او در اثر بسته شدن مدار باطری، انحرافی آنی در گالوانومتر مشاهده کرد و در هنگام قطع باطری انحرافی مشابه در جهت عکس نمودار گردید. البته، این اولین آزمایشی بود که او با جریان متغیر انجام می داد و متعاقب آن نشان داد که یک میدان مغناطیسی در حال حرکت، یا یک سیم پیچ متحرک نیز قادر است باعث انحراف گالوانومتر شود. حال ما می گوئیم که از نظرگاه میدان، میدان مغناطیسی متغیر یک نیروی الکتروموتوری تولید می کند که می تواند در یک مدار بسته مناسب جریانی برقرار کند. نیروی الکتروموتوری صرفاً ولتاژی است که در اثر حرکت هادیها در میدان مغناطیسی یا از میدانهای مغناطیسی متغیر به وجود می آید و ذیلاً آن را تعریف خواهیم کرد. قانون فارادی معمولاً به صورت زیر بیان می شود.

$$\text{emf} = - \frac{d\Phi}{dt} \text{ V} \quad (1)$$

معادله (۱) متضمن مسیری بسته است که الزاماً یک مسیر بسته هادی نیست. مثلاً این مسیر بسته، ممکن است شامل خازنی باشد یا فقط یک مسیر بسته فرضی در فضا. شار مغناطیسی، شاری است که از هر یک از سطوحی که این مسیر بسته پیرامون آنها است می گذرد. و $d\Phi/dt$ میزان تغییر این شار نسبت به زمان.

مقدار غیر صفر $d\Phi/dt$ ممکن است در اثر هر یک از عوامل زیر باشد:

۱- شار متغیری که با یک مدار بسته ساکن پیوند دارد.

۲- حرکت نسبی بین شار پاینده و مسیر بسته.

۳- ترکیبی از این دو.

علامت منفی نشانه آن است که emf در چنان جهتی است که شار مربوط به جریان ناشی از آن چنانچه به شار اولیه اضافه شود مقدار emf را تقلیل خواهد

داد. بیان این اصل که ولتاژ القاء شده باعث ایجاد شار مخالفی می‌شود به قانون لنز موسوم است.

اگر مسیر بسته مربوط به N دور هادی رشته‌ای باشد می‌توان، با دقتی قایل قبول، آنها را منطبق برهم فرض کرد و نوشت

$$\text{emf} = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (۲)$$

در این صورت Φ را شاری تعبیر می‌کنیم که از هریک از N مسیر منطبق می‌گذرد. حال باید emf را آن طور که در روابط (۱) و (۲) بکار رفته است تعریف کنیم. واضح است که emf کمیتی شمارواره‌ای (اسکالر) است و چنانکه بررسی ابعادی (شاید نه‌چندان به وضوح) نشان می‌دهد، واحد آن ولت است. emf را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{emf} = \oint \bar{E} \cdot d\bar{L} \quad (۳)$$

و توجه داریم که مساوی اختلاف پتانسیل حول یک مسیر بسته مشخص است. اگر هر قسمتی از مسیر بسته تغییر کند، emf نیز در حالت کلی تغییر خواهد کرد. عدم توافق با نتایج قبلی را می‌توان در رابطه (۳) به طور وضوح مشاهده کرد، چون شدت میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار ساکن باید طوری باشد که منتج به اختلاف پتانسیل صفر حول هر مسیر بسته باشد.

با تبدیل Φ در رابطه (۱) به انتگرال سطحی \bar{B} ، داریم

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{L} = -\frac{d}{dt} \int_s \bar{B} \cdot d\bar{S} \quad (۴)$$

به طوری که انگشتان دست راست در جهت مسیر بسته باشند انگشت شست معرف جهت $d\bar{S}$ خواهد بود. بنابراین چگالی شار \bar{B} در جهت $d\bar{S}$ که بر حسب زمان در حال ازدیاد باشد باعث تولید مقدار متوسطی از \bar{E} می‌شود که در خلاف جهت مثبت مسیر بسته است.

حال بررسی خود را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم و ابتدا جزئی از emf کل

را که در اثر میدان متغیر در مسیر ایجاد می‌شود به دست می‌آوریم. مسیر متحرک در میدان ثابت را در آینده بررسی خواهیم کرد. ابتدا مسیر ثابتی را در نظر می‌گیریم. شار مغناطیسی تنها کمیت متغیر با زمان در طرف راست رابطه (۴) است و می‌توان مشتق را به صورت نسبی به داخل انتگرال برد.

$$\text{emf} = \oint \bar{E} \cdot d\bar{L} = - \int_s \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S} \quad (5)$$

قبل از اینکه این نتیجه ساده را در مورد یک مثال ساده به کار ببریم، شکل نقطه‌ای این رابطه انتگرالی را به دست می‌آوریم. اگر قضیه استوکس را برای طرف چپ این رابطه به کار ببریم، خواهیم داشت

$$\int_s (\nabla \times \bar{E}) \cdot d\bar{S} = - \int_s \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S}$$

که در آن انتگرالهای سطحی روی سطوح یکسان گرفته می‌شوند. این سطوح کاملاً کلی هستند و می‌توان آنها را به صورت دیفرانسیلی نیز فرض کرد

$$(\nabla \times \bar{E}) \cdot d\bar{S} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S}$$

و

$$\boxed{\nabla \times \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}} \quad (6)$$

این یکی از چهار معادله ماکسول است که به صورت نقطه‌ای، یا دیفرانسیلی، نوشته شده است و این شکلی است که معمولاً برای این معادلات به کار می‌رود. رابطه (۵) شکل انتگرالی این معادله است و معادل قانون فارادی در مورد مسیر ثابت است. اگر \bar{B} تابع زمان نباشد، مسلماً (۵) و (۶) به روابطی که برای میدانهای ساکن به دست آوردیم تبدیل خواهند شد.

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{L} = 0$$

و

$$\nabla \times \bar{E} = 0$$

به عنوان مثالی از تعبیر روابط (۵) و (۶)، میدان مغناطیسی ساده‌ای را فرض می‌کنیم که به صورت نمایی با زمان افزایش می‌یابد،

$$\vec{B} = B_0 e^{bt} \vec{a}_z \quad (۷)$$

که در آن (ثابت B_0). با انتخاب مسیر بسته‌ای با شعاع a در صفحه $z = 0$ که به علت تقارن E_φ در امتداد آن می‌بایست ثابت باشد، از رابطه (۵) نتیجه می‌شود

$$\text{emf} = \int \pi a E_\varphi = -b B_0 e^{bt} \pi a^2$$

مقدار emf حول مسیر بسته مساوی $b B_0 e^{bt} \pi a^2$ است. این مقدار متناسب است با a^2 چون چگالی شار مغناطیسی یکنواخت است و شاری که در هر لحظه از این صفحه می‌گذرد متناسب با سطح آن است. بدیهی است که emf برای هر مسیر دیگری در صفحه $z = 0$ که چنین سطحی را محاط کند مساوی مقدار فوق خواهد بود. اگر a را به r تبدیل کنیم، برای شدت میدان الکتریکی در هر نقطه خواهیم داشت:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4} b B_0 e^{bt} r \vec{a}_\varphi \quad (۸)$$

حال سعی کنیم همین جواب را از رابطه (۶) که در این مورد به صورت زیر است، به دست آوریم،

$$(\nabla \times \vec{E})_z = -b B_0 e^{bt} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_\varphi)}{\partial r}$$

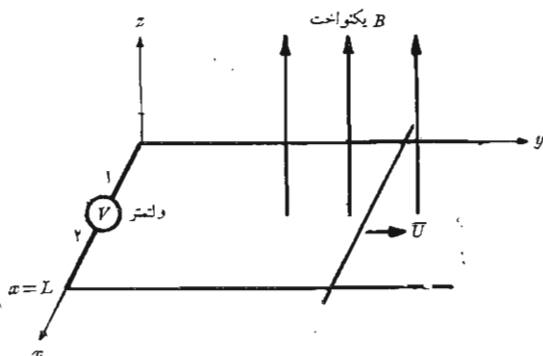
اگر طرفین را در r ضرب کرده از 0 تا r انتگرال بگیریم (که در ضمن این کار r ثابت است چون مشتق به صورت مشتق نسبی است) خواهیم داشت

$$-\frac{1}{4} b B_0 e^{bt} r^2 = r E_\varphi$$

یا، دوباره

$$\vec{E} = -\frac{1}{4} b B_0 e^{bt} r \vec{a}_\varphi$$

اگر B_0 را مثبت فرض کنیم، در یک هادی رشته‌ای با مقاومت R جریانی



شکل ۱۰۱۰ مثالی که کاربرد قانون فارادی را در مورد چگالی شار مغناطیسی ثابت و مسیر متحرک نشان می‌دهد. میله اتصال کوتاه با سرعت \bar{U} به طرف راست در حال حرکت است و مدار به وسیله دو ریل موازی و ولتمتر بزرگ مقاومت بینهایت کوچکی بسته می‌شود. مقداری که ولتمتر نشان می‌دهد عبارت است از $V_{۱۲} = -BLU$.

و دو ریل و سیمهای ولتمتر مقداری نخواهد داشت. چون در خلاف جهت عقربه‌های ساعت انتگرال می‌گیریم (به طوری که طرف مثبت سطح به طرف چپ ما است) مقدار $E\Delta L$ روی ولتمتر باید مساوی $-BLU$ باشد و این نشان می‌دهد که شدت میدان الکتریکی در این دستگاه از قطب ۲ به قطب ۱ امتداد دارد. بنا براین اگر بخواهیم عقربه ولتمتر درجات مثبت را نشان دهد می‌بایست قطب مثبت آن قطب ۲ باشد.

با توجه به اینکه طبق قانون لنز جریانی در خلاف جهت عقربه‌های ساعت باعث تقلیل شار محصور می‌شود می‌توان جهت جریان کوچک القاء شده را به دست آورد. دوباره ملاحظه می‌شود که قطب ۲ ولتمتر مثبت است.

حال این مثال را با استفاده از مفهوم emf حرکتی بررسی می‌کنیم. نیروی مؤثر بر بار Q که در میدان مغناطیسی \bar{B} با سرعت \bar{U} در حال حرکت باشد عبارت است از

$$\bar{F} = Q\bar{U} \times \bar{B}$$

یا

$$\frac{\bar{F}}{Q} = \bar{U} \times \bar{B} \quad (۱۰)$$

میله لغزان از بارهای مثبت و منفی تشکیل شده است و هر يك از آنها متحمل چنین نیروئی است.

نیروی مؤثر بر بار واحد، که با رابطه (۱۰) داده شده است، به شدت میدان الکتریکی حرکتی \vec{E}_m موسوم است،

$$\boxed{\vec{E}_m = \vec{U} \times \vec{B}} \quad (11)$$

اگر میله لغزان از ریلها جدا شود این شدت میدان الکتریکی باعث حرکت الکترونها به يك انتهای میله می شود تا زمانی که میدان ساکن ناشی از این بارها دقیقاً شدت میدان الکتریکی القائی در اثر حرکت میله را خشی کند. در این هنگام شدت میدان الکتریکی در امتداد طول میله مساوی صفر خواهد بود.

بنابراین emf حرکتی در اثر هادی در حال حرکت از رابطه زیر به دست

می آید

$$\text{emf} = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{L} = \oint (\vec{U} \times \vec{B}) \cdot d\vec{L} \quad (12)$$

به طوری که انتگرال آخر فقط در امتداد قسمتی از مسیر که در حال حرکت است، یا در امتداد قسمتی که \vec{U} دارای مقداری غیر صفر است، مقدار خواهد داشت. از محاسبه طرف راست رابطه (۱۲) خواهیم داشت

$$\oint (\vec{U} \times \vec{B}) \cdot d\vec{L} = \int_L^0 UB \, dx = -BLU$$

که همان جواب قبلی است. چون \vec{B} تابع زمان نیست، این جواب برابر مقدار کل emf است.

ینا برای این در مورد هادی متحرک در میدان مغناطیسی ثابت و ساکن می توان شدت میدان الکتریکی القائی

$$\vec{E}_m = \vec{U} \times \vec{B}$$

را به هر جزئی از هادی که در حال حرکت است نسبت داد و emf حاصل را با استفاده از

$$\text{emf} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{L} = \oint (\vec{U} \times \vec{B}) \cdot d\vec{L} \quad (13)$$

محاسبه کرد.

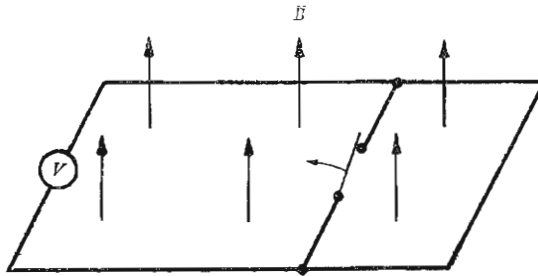
اگر چگالی شار مغناطیسی نیز نسبت به زمان متغیر باشد باید هر دو جزء (۵) و (۱۲) نیروی emf را به حساب آورد.

$$\text{emf} = \oint \bar{E} \cdot d\bar{L} = - \int_s \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S} + \oint (\bar{U} \times \bar{B}) \cdot d\bar{L} \quad (14)$$

این رابطه با رابطه ساده زیر معادل است،

$$\text{emf} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

و هر يك از آنها را می‌توان برای تعیین ولتاژهای الکتریکی القایی به کار برد. گر چه (۱) به ظاهر ساده به نظر می‌رسد ولی مسائلی را می‌توان طرح کرد که کار برد صحیح این رابطه برای آنها بسیار دشوار است. این مسائل معمولاً شامل اتصالها و کلیدهای لغزاند و همیشه مستلزم تعویض يك قسمت از مدار با قسمت جدیدی هستند. به عنوان مثال مدار ساده شکل (۲۰۱۵) را در نظر بگیرید که شامل چند سیم از جنس هادی کامل و يك ولت‌متر آزمانی و میدان ثابت یکنواخت \bar{B} و يك کلید است. وقتی کلید باز می‌شود، مسلماً مقدار بیشتری از شار توسط مدار ولت‌متر محصور می‌گردد



شکل ۲۰۱۵ تغییر ظاهری بیوند شار در اثر اینکه به وسیله باز شدن کلید قسمتی از مدار جانشین قسمت دیگری می‌شود، باعث ایجاد ولتاژ الکتریکی القایی نمی‌شود و انحرافی در ولت‌متر مشاهده نمی‌گردد.

ولت و ولتاژی که نشان می‌دهد همچنان صفر است. تغییر شار در اثر \vec{B} میدان متغیر با زمان [جمله اول (۱۴)] یا در اثر حرکت یک هادی در میدان مغناطیسی [قسمت دوم (۱۴)] به وجود نیامده است. در عوض، مدار جدیدی جانشین مدار قبلی شده است. بنابراین در محاسبه تغییر شار محصور باید دقت کافی به عمل آورد.

تفکیک emf ایجاد شده به دو قسمت، طبق رابطه (۱۴)، یکی در اثر میزان تغییر \vec{B} نسبت به زمان و قسمت دیگر در اثر حرکت مدار، تا اندازه‌ای دلخواه است چون این کار به سرعت نسبی بین ناظر و دستگاه بستگی دارد. میدانی که بر حسب زمان و همچنین مکان در حال تغییر است ممکن است برای ناظری که با میدان حرکت می‌کند ثابت به نظر رسد. این نحوه استدلال را باید با استفاده از نظریه نسبیت خاص در نظریه الکترومغناطیس دنبال کرد.^۱

تمرین ۱۰۱۰

در داخل دایره $r = 8 \text{ cm}$ ، $z = 0$ ، چگالی شار مغناطیسی با رابطه $\vec{B} = \cos(120\pi t) \frac{10^{-3}}{r} \vec{a}_z \text{ Wb/m}^2$ داده شده است، (الف) E_{ϕ} را روی دایره پیدا کنید (ب) این میدان در یک هادی رشته‌ای حلقوی منطبق بر دایره فوق که مقاومت کل آن 10Ω است چه جریانی تولید خواهد کرد؟ (پ) مقدار چگالی شار مغناطیسی تولید شده توسط این جریان در مرکز حلقه چقدر است؟

جوابها: $18995 \sin 120\pi t \text{ mA}$ ، $377 \sin 120\pi t \text{ mV/m}$ ، $10488 \times 10^{-7} \text{ Wb/m}^2$

تمرین ۲۰۱۰

میله لغزان شکل (۱۰۱۰) حرکتی سینوسی شکل دارد به طوری که $y = 0.1 \sin 5\pi t \text{ m}$ اگر $\vec{B} = \vec{a}_z \text{ Wb/m}^2$ و $L = 0.2 \text{ m}$ ، V_{12} را با استفاده از: (الف) $\text{emf} = -d\Phi/dt$ و (ب) $\text{emf} = \oint (\vec{U} \times \vec{B}) \cdot d\vec{L}$ پیدا کنید.

جوابها: $-0.314 \cos 5\pi t$ ، $-0.314 \cos 5\pi t \text{ V}$

۱. این مطلب در بعضی از مراجع آخر فصل بحث شده است. به کتاب Panofsky and Phillips صفحات ۱۵۱-۱۴۲ و Owen صفحات ۲۴۵-۲۳۱ و Harman در چند جای مختلف مراجعه شود.

۲۰۱۰ جریان جابجائی

از قانون تجربی فارادی برای به دست آوردن یکی از معادلات ماکسول استفاده شد،

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

که نشان می‌دهد میدان مغناطیسی متغیر با زمان تولید میدان الکتریکی می‌کند. چنانچه تعریف کرل را به خاطر آوریم ملاحظه می‌کنیم که این میدان الکتریکی دارای خاصیت ویژه دوران است، یعنی انتگرال مسیر بسته آن حول مسیر بسته صفر نیست. حال توجه خود را به میدان الکتریکی متغیر با زمان معطوف می‌داریم.

ابتدا باید شکل نقطه‌ای قانون مداری آمپر را در مورد میدانهای مغناطیسی ساکن در نظر بگیریم،

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (2)$$

و عدم کفایت آن را در مورد میدانهای متغیر با زمان نشان دهیم. اگر از طرفین دیورژانس بگیریم،

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{H} \equiv 0 = \nabla \cdot \vec{J}$$

چون دیورژانس کرل متحد صفر است، بنا براین $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ هم صفر خواهد بود. از طرفی دیگر رابطه پیوستگی

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3)$$

نشان می‌دهد که رابطه (۲) فقط به شرط $\partial \rho / \partial t = 0$ صادق است. این يك محدودیت غیر واقعی است و قبل از اینکه رابطه (۲) را برای میدانهای متغیر با زمان بپذیریم باید آن را اصلاح کنیم. فرض کنید جمله مجهول G را به (۲) اضافه کنیم،

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{G}$$

اگر دوباره دیورژانس طرفین را بگیریم، خواهیم داشت

$$0 = \nabla \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \vec{G}$$

یا

$$\nabla \cdot \vec{G} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

و اگر $\nabla \cdot \bar{D}$ را به جای ρ قرار دهیم

$$\nabla \cdot \bar{G} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

که از آن ساده‌ترین جواب \bar{G} به دست می‌آید

$$\bar{G} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

بنابراین شکل نقطه‌ای قانون مداری آمپر چنین خواهد شد

$$\boxed{\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}} \quad (۴)$$

رابطه (۴) را اثبات نکرده‌ایم. فقط آنرا به شکلی به دست آورده‌ایم که با رابطه پیوستگی تناقضی نداشته باشد. این رابطه با کلیه نتایج قبلی نیز توافق دارد و ما آن را، همانند هر قانون تجربی و روابطی که از آن نتیجه می‌شود، قبول می‌کنیم. اینجا نظریه جدیدی را پایه‌گذاری می‌کنیم و روابط خود را تا زمانی که خلاف آنها ثابت نشده است، معتبر می‌دانیم. این کار، یعنی اثبات خلاف آنها، تا به حال انجام نگرفته است.

حال، یکی دیگر از معادلات ماکسول را در دست داریم و به بررسی اهمیت آن می‌پردازیم. جمله اضافی $\partial \bar{D} / \partial t$ بر حسب واحد چگالی جریان یعنی، آمپر بر متر مربع است و چون به چگالی شار الکتریکی (یا چگالی جا به جایی) بستگی دارد، ماکسول آن را چگالی جریان جا به جایی نامید. ما گاهی آن را با \bar{J}_d نشان می‌دهیم.

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \bar{J}_d$$

$$\bar{J}_d = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

این سومین نوع چگالی جریان است که تا به حال دیده‌ایم و چگالی جریان هسدایتی نام دارد،

$$\bar{J} = \bar{E} \sigma$$

حرکت بار (معمولاً الکترونها) در فضائی که چگالی بار خالص آن صفر است، و چگالی جریان انتقالی،

$$\vec{J} = \rho \vec{U}$$

یعنی حرکت چگالی حجمی بارها، هر دو رابطه (۴) با \vec{J} نشان داده شده‌اند. البته چگالی جریان مقید در \vec{H} منظور شده است. در یک محیط غیرهادی که در آن چگالی حجمی باری وجود ندارد، $\vec{J} = 0$ و بنا بر این

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (5)$$

به تقارن بین (۵) و (۱) توجه کنید:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

دوباره تشابهی بین بردارهای شدت \vec{E} و \vec{H} و بردارهای چگالی شار \vec{D} و \vec{B} به چشم می‌خورد. ولی نباید اعتقاد بیش از حدی به این تشابه داشت چون اگر نیروهای مؤثر بر ذرات را بررسی کنیم این تشابه از بین می‌رود. نیروی مؤثر بر بار الکتریکی به \vec{E} و \vec{B} بستگی دارد و می‌توان دلائل خوبی ارائه داد و تشابه بین \vec{E} و \vec{B} و بین \vec{H} و \vec{D} را از آن نتیجه گرفت. از این بحث می‌گذریم و در اینجا فقط متذکر می‌شویم که شاید به علت تقارن فوق‌الذکر بود که ما کسول به مفهوم جریان جا به جایی پی بردیم.^۱

مقدار کل جریان جا به جایی که از یک سطح به خصوص می‌گذرد از انتگرال،

$$\int_s \vec{J}_d \cdot d\vec{S} = \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

۱. Adler و Chu ، Fano (به مراجع توصیه شده در فصل ۵ مراجعه شود) در صفحات ۱۶۰-۱۵۹ کتاب خود از تشابهی که \vec{B} را به \vec{D} و \vec{H} را به \vec{E} مربوط می‌سازند به شدت طرفداری می‌کنند. مثال مقایسه \vec{B} به \vec{E} و \vec{D} به \vec{H} در کتاب Haliday و Resnick (به مراجع توصیه شده برای این فصل مراجعه شود) در صفحات ۷۶۰-۷۵۶ و ۹۳۹-۹۳۴ ارائه شده است.

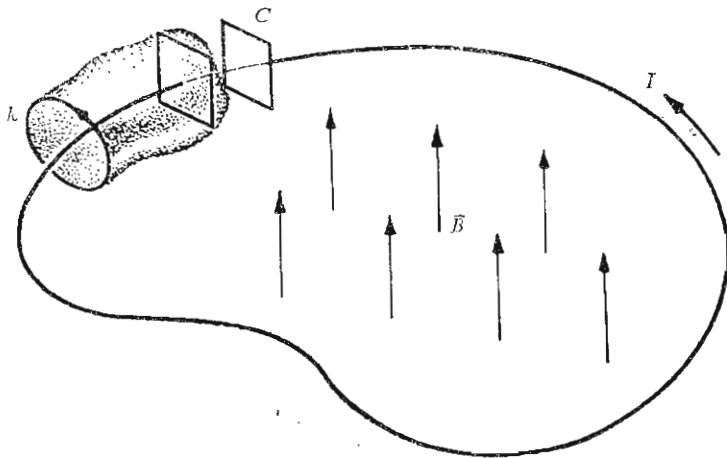
به دست می‌آید و می‌توان نوع متغیر با زمان قانون مداری آمپر را، با انتگرال‌گیری روی سطح S ،

$$\int_s (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

و استفاده از قضیه استوکس، به دست آورد،

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I + I_d = I + \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (۶)$$

ماهیت چگالی جریان جا به جایی چیست؟ مدار ساده شکل ۳۰۱۰ را، که شامل حلقه‌ای رشته‌ای و خازنی موازی جوشن است در نظر می‌گیریم. میدان مغناطیسی اعمال شده در داخل حلقه، که به صورت سینوسی تغییر می‌کند، باعث ایجاد emf حول مسیر بسته



شکل ۳۰۱۰ یک هادی رشته‌ای تشکیل حلقه‌ای را می‌دهد که دو صفحه یک خازن موازی جوشن را به یکدیگر متصل می‌سازد. میدان مغناطیسی متغیر با زمانی در داخل مسیر بسته یک emf مساوی $V_0 \cos \omega t$ تولید می‌کند. جریان هدایتی I با جریان جا به جایی بین صفحات خازن برابر است.

(رشته به اضافه قسمت خط چین بین صفحات خازن) می شود که می توان آن را به این صورت نوشت:

$$\text{emf} = V_0 \cos \omega t$$

با استفاده از نظریه مقدماتی مدارها، می توان جریان حلقه را به دست آورد.

$$\begin{aligned} I &= -\omega C V_0 \sin \omega t \\ &= -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

که در آن کمیات ϵ و S و d مربوط به خازند. حال اگر قانون مداری آمپر را حول مسیر بسته مدور کوچکتر k به کار ببریم و فعلاً از جریان جا به جایی صرف نظر کنیم خواهیم داشت.

$$\oint_k \vec{H} \cdot d\vec{L} = I_k$$

این مسیر و نیز مقدار \vec{H} در امتداد آن هر دو کمیاتی معین اند (گرچه تعیین آنها مشکل است)، و $\oint_k \vec{H} \cdot d\vec{L}$ کمیتی است معین. جریان I_k جریانی است که از هر سطحی که مسیر k پیرامون آن است عبور می کند. اگر سطح ساده ای را که جریان آن را قطع می کند انتخاب کنیم، مثلاً سطح مسطح دایره ای که به وسیله مسیر k مشخص شده، بدیهی است که این جریان همان جریان هدایتی است. حال فرض کنید مسیر بسته k را دهانه یک پاکت کاغذی تصور کنیم که ته آن از فاصله بین صفحات خازن عبور می کند. این پاکت به وسیله رشته سوراخ نشده است و جریان هدایتی صفر است. حال باید جریان جا به جایی را در نظر بگیریم. چون در داخل خازن داریم

$$D = \frac{\epsilon V_0}{d} \cos \omega t$$

بنابراین

$$I_d = -\omega \frac{dS}{d} V_0 \sin \omega t$$

این همان مقداری است که جریان هدایتی در حلقه رشته ای داشت. بنابراین استعمال قانون مداری آمپر از جمله جریان جا به جایی در مورد مسیر k مقدار محدودی برای انتگرال خطی \vec{H} به دست می دهد. این مقدار می بایست مساوی تمام

جریانی باشد که سطح انتخاب شده را قطع می‌کند. برای بعضی از این سطوح تقریباً تمامی جریان به صورت جریان هدایتی است، ولی برای سطوحی که از فاصله بین صفحات خازن می‌گذرند جریان هدایتی صفر است و جریان جا به جایی است که مساوی انتگرال مسیر بسته \bar{H} است.

از نقطه نظر فیزیکی، باید توجه داشت که خازن مقداری بار ذخیره می‌کند و شدت میدان الکتریکی بین صفحات آن به مراتب بزرگتر از میدانهای کوچک ترشحی در خارج است. بنابراین وقتی از جریان جا به جایی سطوحی که از فاصله بین صفحات خازن عبور نمی‌کنند صرف نظر می‌کنیم، خطا جزئی است. جریان جا به جایی به میدان الکتریکی متغیر با زمان مربوط است و بنابراین چنین جریانی در تمام هادیهای ناقص حامل جریان هدایتی نیز وجود دارد. قسمت دوم تمرین زیر نشان می‌دهد که چرا این جریان اضافی از راه آزمایش کشف نشده است.

تمرین ۳۰۱۰

جریان جا به جایی را در موارد زیر به دست آورید: (الف) در نزدیکی رادیوتان که شدت میدان ناشی از یک فرستنده محلی AM برابر

$$\vec{E} = 0.02 \sin [0.01927(3 \times 10^8 t - z)] \vec{a}_z \text{ V/m}$$

است. (ب) در داخل یک هادی خوب که در آن $\sigma = 10^7 \text{ S/m}$ و چگالی جریان هدایتی دارای مقدار بزرگی، مثلاً $10^7 \sin 120\pi t \text{ A/m}^2$ است. (پ) در داخل یک خازن موازی صفحه که برای آن $\epsilon_0 = 100 \epsilon_0$ و $S = 0.01 \text{ m}^2$ و $d = 0.05 \text{ mm}$ و ولتاژ آن $V = 2000 \sin 2000\pi t$ است.

جوابها: $10.22 \cos [0.01927(3 \times 10^8 t - z)] \vec{a}_z \text{ } \mu\text{A/m}^2$

$3.23 \cos 120\pi t \vec{a}_z \text{ nA/m}^2$

$0.1111 \cos 2000\pi t \text{ A/m}^2$

۳۰۱۰ معادلات ماکسول به شکل نقطه‌ای

تا به حال دو معادله از معادلات ماکسول را برای میدانهای متغیر با زمان به دست آورده‌ایم،

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

و

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2)$$

شکل دو معادله دیگر با شکل غیر متغیر با زمانشان یکسان است:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

اصولاً معادله (۳) حاکی از آن است که چگالی بار منشاء (یا مدخل) خطوط شار الکتریکی است. توجه داشته باشید که دیگر نمی‌توان گفت که تمامی شار الکتریکی از بارها شروع یا به آنها ختم می‌شود، چون شکل نقطه‌ای قانون فارادی، یعنی رابطه (۱)، نشان می‌دهد که \vec{E} و بنابراین \vec{D} ، در صورتی که میدان مغناطیسی متغیری وجود داشته باشد، ممکن است دارای دوران باشد. بنابراین خطوط شار الکتریکی ممکن است به صورت حلقه‌های بسته باشند. از طرفی دیگر عکس این مطلب هنوز صادق است، یعنی هر یک کولن بار باید منشاء یک کولن شار الکتریکی باشد که از آن خارج می‌شود.

معادله (۴) دوباره این حقیقت را تأیید می‌کند که «بار»، یا قطب مغناطیسی وجود خارجی ندارند. شار مغناطیسی همواره به صورت حلقه‌ای بسته است و هیچ وقت از یک نقطه منشعب نمی‌شود.

این چهار معادله پایه کلیه نظریه‌های الکترومغناطیسند. این روابط معادلات دیرانسیلی نیستند که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را به یکدیگر و به منابع آنها یعنی بار و چگالی جریان، مربوط می‌سازند. روابط کمکی بین \vec{E} و \vec{D}

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (5)$$

و بین \vec{H} و \vec{B} ،

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (6)$$

و تعریف چگالی جریان هدایتی،

$$\boxed{\bar{J} = \sigma \bar{E}} \quad (۷)$$

و تعریف چگالی جریان انتقالی بر حسب چگالی بار حجمی ρ ،

$$\boxed{\bar{J} = \rho \bar{U}} \quad (۸)$$

نیز برای تعریف و مربوط ساختن کمیتی که در معادلات ماکسول ظاهر می‌شوند لازم‌اند.

پتانسیل‌های \bar{A} و V را در روابط فوق در نظر نگرفتیم. چون آنها، گرچه مفیداند، فوق‌العاده لازم نیستند. درباره پتانسیلها در آخر فصل بحث خواهد شد. اگر با مواد «خوبی» سروکار نداشته باشیم، لازم است میدانهای قطبی شدگی و آهنربائی را نیز در نظر بگیریم،

$$\boxed{\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}} \quad (۹)$$

$$\boxed{\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M})} \quad (۱۰)$$

بالاخره، باید رابطه نیروی لورنتس را نیز، که به شکل نقطه‌ای و بر حسب نیرو بر واحد حجم نوشته شده است، به علت اهمیت بنیادی آن در نظر بگیریم،

$$\boxed{\bar{f} = \rho(\bar{E} + \bar{U} \times \bar{B})} \quad (۱۱)$$

فصول آینده به کاربرد معادلات ماکسول در چند مسأله ساده اختصاص دارند.

تمرین ۴.۱۰

اگر دو میدان $\bar{E} = ۱۲۰\pi \cos(۱۰^6 \pi t - \beta x) \bar{a}_y$, V/m و

$\bar{H} = A \cos(۱۰^6 \pi t - \beta x) \bar{a}_z$, A/m

در معادلات ماکسول مربوط به یک محیط خطی و همه سویکسان (ایزوتروپ) و متجانس با $\epsilon_R = \mu_R = ۴$ و $\sigma = ۰$ صادق باشند مقادیر β و A چقدر است؟

جوابها: 1 A/m ، 0.5419 rad/m

۳.۱۰ شکل انتگرالی معادلات ماگسول

معمولاً شناخت شکل انتگرالی معادلات ماگسول به عنوان بیانی از قوانین تجربی، که این معادلات از تعمیم آنها به دست آمده‌اند، به مراتب ساده‌تر است. در آزمایشها با کمیات فیزیکی کلان بینی (ماکروسکوپی) سروکار داریم و بنابراین نتایج برحسب روابط انتگرالی بیان می‌شوند. یک معادله دیفرانسیل همیشه معرف یک نظریه است. حال شکل انتگرالی معادلات ماگسول بخش قبل را یکجا ارائه می‌دهیم. با انتگرال‌گیری از رابطه (۱) بخش ۳.۱۰ روی سطح و استفاده از قضیه استوکس، قانون فارادی به دست می‌آید،

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (1)$$

و همین عملیات در مورد رابطه (۲) بخش ۳.۱۰، قانون مسداری آمپر را به دست می‌دهد.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I + \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (2)$$

قانون گاوس برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را می‌توان با انتگرال‌گیری از روابط (۳) و (۴) بخش ۳.۱۰ و استفاده از قضیه دیورژانس به دست آورد،

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{حجم}} \rho dv \quad (3)$$

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4)$$

با این چهار معادله انتگرالی می‌توانیم شرایط مرزی روی \vec{B} و \vec{D} و \vec{H} و \vec{E} را، که برای محاسبه مقادیر ثابت به دست آمده ضمن حل معادلات ماگسول به شکل معادلات

دیفرانسیل نسبی لازم اند، به دست آوریم. این شرایط مرزی نسبت به حالت میدانهای ساکن یا ثابت تغییری ندارند، و می توان روشهای قبلی را برای به دست آوردن آنها به کار برد. در سرحد دو محیط فیزیکی حقیقی، با استفاده از (۱) می توان مؤلفه های مماسی \bar{E} را به یکدیگر مربوط ساخت،

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (5)$$

و از رابطه (۲)،

$$H_{t1} = H_{t2} \quad (6)$$

انتگرالهای سطحی شرایط مرزی روی مؤلفه های عمودی را تعیین می کنند

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \quad (7)$$

و

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (8)$$

اغلب می خواهیم یک مسئله فیزیکی را، با فرض اینکه در داخل هادی کامل σ بینهایت ولی \vec{J} محدود باشد، به صورت آرمانی درآوریم. در این صورت با استفاده از قانون اهم برای هادی کامل،

$$\bar{E} = 0$$

و از شکل نقطه ای قانون فارادی نتیجه می شود که، برای میدانهای متغیر با زمان

$$\bar{H} = 0$$

حال شکل نقطه ای قانون مداری آمپر نشان می دهد که مقدار محدود \vec{J} عبارت است از

$$\vec{J} = 0$$

و جریان باید به صورت جریان سطحی در سطح هادی باشد. بنابراین اگر ناحیه ۲ هادی کامل باشد، روابط (۵) تا (۸) به ترتیب به صورت زیر خواهند بود،

$$E_{t1} = 0 \quad (9)$$

$$H_{t1} = K \quad (10)$$

$$D_{n1} = \rho_s \quad (11)$$

$$B_{n1} = 0 \quad (12)$$

توجه داشته باشید که چگالی بار سطحی را برای عایقها یا هادیهای کامل، یا هادیهای ناقص به عنوان يك امکان فیزیکی می پذیریم ولی جریان سطحی فقط مشروط به وجود هادی کامل است.

شرایط مرزی فوق الذکر جزء لاینفکی از معادلات ماکسولند. کلیه مسائل فیزیکی حقیقی شامل مرزهایی اند و مستلزم حل معادلات ماکسول در دو ناحیه یا بیشتر و انطباق جوابها در مرزهايند. در مورد هادی کامل، حل معادلات در داخل هادی ساده است (کلیه میدانهای متغیر با زمان صفراند)، ولی استفاده از شرایط مرزی (۹) تا (۱۲) ممکن است بسیار دشوار باشد.

در ضمن حل معادلات ماکسول در فضای نامحدود، بعضی از خواص اصلی انتشار امواج واضح خواهد شد. این مسأله را در فصل بعد بررسی خواهیم کرد. این ساده ترین کاربرد معادلات ماکسول است، چون در نظر گرفتن هیچ نوع شرط مرزی لازم نیست.

تمرین ۵.۱۰

نقطه (۴، -۶، ۱) روی فصل مشترك بين ناحیه ۱، $\epsilon_{R1} = 2$ ، $\mu_{R1} = 3$ ، $\sigma_1 = 0$ و ناحیه ۲، $\epsilon_{R2} = 4$ ، $\mu_{R2} = 1.5$ ، $\sigma = 0$ قرار دارد. اگر $\vec{H}_1 = (120 \vec{a}_x + 60 \vec{a}_y - 80 \vec{a}_z) \cos 10^6 \pi t \text{ A/m}^2$ باشد، \vec{B}_2 را پیدا کنید. بردار $\vec{R}_{12} = -4 \vec{a}_x + 3 \vec{a}_y + \vec{a}_z$ از ناحیه ۱ به ناحیه ۲ امتداد دارد.

جواب: $\mu_0 (268 \vec{a}_x + 242 \vec{a}_y - 1419 \vec{a}_z) \cos 10^6 \pi t \text{ Wb/m}^2$

تمرین ۶.۱۰

در $z < 0$ داریم $\epsilon_{R1} = 8$ ، $\mu_{R1} = 2$ و در حالی که $z > 0$ هادی کامل است. اگر در $z < 0$ داشته باشیم $\vec{E} = 200\pi \sin 10^8 \pi t \sin \beta z \vec{a}_x \text{ V/m}$ (الف) با استفاده از شکل دیفرانسیلی معادلات ماکسول β را پیدا کنید. (ب) در $z = 0$ جریان سطحی موجود چقدر است؟

جوابها: $4\pi/3 \text{ rad/m}$ ، $(10/3) \cos 10^8 \pi t \vec{a}_x \text{ A/m}$

۵.۱۰ پتانسیلهای معوق

پتانسیلهای متغیر با زمان، که معمولاً به دلتای که بزودی روشن خواهد شد به

پتانسیل‌های معوق موسوم‌اند، اکثراً در مسائل تشعشع به کار می‌روند. در این مسائل توزیع منابع به طور تقریبی معلوم است. باید به خاطر داشته باشیم که پتانسیل الکتریکی شماروای (اسکالر) V را می‌توان برحسب توزیع بار ساکن بیان کرد،

$$V = \int_{\text{حجم}} \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon R} \quad (\text{ساکن}) \quad (1)$$

و پتانسیل مغناطیسی برداری را می‌توان از توزیع جریانی که نسبت به زمان ثابت است به دست آورد.

$$\vec{A} = \int_{\text{حجم}} \frac{\mu \vec{J} dv}{4\pi R} \quad (\text{جریان مستقیم}) \quad (2)$$

معادلات دیفرانسیلی را که در آن صدق می‌کند،

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{ساکن}) \quad (3)$$

و همچنین معادله \vec{A} را

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (\text{جریان مستقیم}) \quad (4)$$

می‌توان به ترتیب شکل‌های نقطه‌ای روابط انتگرالی (۱) و (۲) به حساب آورد. وقتی V و \vec{A} معلوم باشند، میدانهای اساسی را می‌توان به سادگی از روابط زیر به دست آورد:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (\text{ساکن}) \quad (5)$$

و

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{جریان مستقیم}) \quad (6)$$

حال پتانسیلهای متغیر با زمان را طوری تعریف می‌کنیم که برای بارهای ساکن و جریانهای ثابت با روابط فوق توافق داشته باشند. رابطه (۶) بظاهر هنوز با معادلات ماکسول توافق دارد. طبق این معادلات $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ و دیورژانس (۶) یعنی دیورژانس کرل متحد صفر است. پس موقتاً رابطه (۶) را برای میدانهای متغیر قبول کرده توجه خود را به (۵) معطوف می‌داریم.

واضح است که (۵) ناقص است، چون با گرفتن کرول از طرفین، و علم به اینکه کرول گرادیان متحد صفر است، با $\nabla \times \bar{E} = 0$ مواجه می‌شویم. شکل نقطه‌ای قانون فارادی حاکی از آن است که، در حالت کلی، $\nabla \times \bar{E}$ مخالف صفر است. حال بیایم این وضع را، با اضافه کردن جمله مجهولی به (۵)، اصلاح کنیم،

$$\bar{E} = -\nabla V + \bar{N}$$

با گرفتن کرول،

$$\nabla \times \bar{E} = 0 + \nabla \times \bar{N}$$

و استفاده از شکل نقطه‌ای قانون فارادی

$$\nabla \times \bar{N} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

و استفاده از (۶)، نتیجه می‌شود

$$\nabla \times \bar{N} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \bar{A})$$

یا

$$\nabla \times \bar{N} = -\nabla \times \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

ساده‌ترین حل این معادله عبارت است از

$$\bar{N} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

و بنابراین

$$\bar{E} = -\nabla V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \quad (7)$$

ما هنوز می‌بایست روابط (۶) و (۷) را با قرار دادن آنها در دو معادله باقیمانده ما کسول امتحان کنیم:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho$$

با این کار، روابط پیچیده زیر را به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \bar{A} = \bar{J} + \varepsilon \left(-\nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} \right)$$

و

$$\varepsilon \left(-\nabla \cdot \nabla V - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \bar{A} \right) = \rho$$

یا

$$\nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} = \mu \bar{J} - \mu \varepsilon \left(\nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} \right) \quad (۸)$$

و

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (۹)$$

ظاهراً تناقضی در (۸) و (۹) وجود ندارد. در شرایط ساکن یا جریان مستقیم $\nabla \cdot \bar{A} = 0$ و (۸) و (۹) به ترتیب به (۳) و (۴) تبدیل می‌شوند. بنابراین فرض خواهیم کرد که پتانسیلهای متغیر با زمان را می‌توان طوری تعریف کرد که بتوان \bar{E} و \bar{B} را به وسیله روابط (۶) و (۷) از آنها به دست آورد. از طرفی دیگر، دو رابطه اخیر برای تعریف کامل \bar{A} و V کافی نیستند. فرض اولیه ما فقط این بود که $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$ ، و يك بردار را نمی‌توان فقط با توصیف کرل آن تعریف کرد. مثلاً، فرض کنید میدان برداری خیلی ساده‌ای داشته باشیم که در آن A_y و A_z صفراند. از بسط رابطه (۶) نتیجه می‌شود.

$$B_x = 0$$

$$B_y = \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$B_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

و ملاحظه می‌شود که اطلاعاتی از اینکه A_x چگونه بر حسب x تغییر می‌کند نداریم. این اطلاع را می‌توان به دست آورد به شرطی که مقدار دیورژانس \bar{A} را نیز بدانیم، مثلاً در مثال ما

$$\nabla \cdot \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

و بالاخره، باید توجه داشت که اطلاعات ما درباره \bar{A} فقط به صورت مشتقهای پاره‌ای است و می‌توان جمله‌ای که بر حسب مکان تغییری ندارد به آن اضافه کرد. این جمله ثابت در کلیه مسائلی که ناحیه حل مسأله در آنها تا بینهایت ادامه دارد، باید مساوی صفر باشد چون در بینهایت نباید میدانی وجود داشته باشد.

با تعمیم این مثال ساده می‌توان گفت که یک میدان برداری در صورتی کاملاً مشخص شده است که کرل و دیورژانس آن داده شده و مقدار آن در یک نقطه (منجمه بینهایت) معلوم باشد. بنابراین آزادیم که دیورژانس \bar{A} را به دلخواه مشخص کنیم، و این کار را با در نظر داشتن (۸) و (۹) و انتخاب ساده‌ترین رابطه انجام می‌دهیم. بدین ترتیب طبق تعریف

$$\nabla \cdot \bar{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (10)$$

و (۸)، (۹) به صورت زیر تبدیل می‌شوند.

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu\bar{J} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} \quad (11)$$

و

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (12)$$

این روابط با معادله موج، که در فصل بعد مورد بحث قرار خواهد گرفت، ارتباط دارند. آنها به طور قابل ملاحظه‌ای متقارنند و ما باید از تعاریف \bar{A} و V خود کاملاً راضی باشیم،

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (۶)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (۱۰)$$

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (۷)$$

معادله انتگرالی (۱) و (۲) برای میدانهای متغیر با زمان از تعاریف (۶) و (۷) و (۱۰) نتیجه می‌شود، اما فقط نتایج نهائی را ارائه خواهیم داد و ماهیت کلی آنها را متذکر خواهیم شد. در فصل بعد ضمن مطالعه امواج مسطح یکنواخت مفهوم انتشار را معرفی خواهیم کرد و خواهیم دید که اختلالات الکترومغناطیسی با سرعتی معادل

$$U = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

در هر محیط متجانسی که با μ و ϵ مشخص می‌شود حرکت می‌کنند. در مورد فضای آزاد ملاحظه می‌شود که این سرعت مساوی سرعت نور، تقریباً $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ است. بنا بر این منطقی است حدس بزنیم که پتانسیل هر نقطه ناشی از مقدار چگالی بار یک نقطه دور در همان لحظه نیست بلکه به مقدار آن در زمانی گذشته بستگی دارد چون این اثر با سرعت محدودی منتشر می‌شود. بنا بر این (۱) به صورت

$$V = \int_{\text{حجم}} \frac{[\rho]}{4\pi\epsilon R} dv \quad (۱۳)$$

در می‌آید که در آن $[\rho]$ معرف آن است که کلیه t هائی که در رابطه ρ ظاهر می‌شوند با زمانی معوق یعنی

$$t' = t - \frac{R}{U}$$

عوض شده‌اند بدین ترتیب، اگر چگالی بار در فضا با رابطه

$$\rho = e^{-t} \cos \omega t$$

داده شده باشد خواهیم داشت

$$[\rho] = e^{-r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{U} \right) \right]$$

که در آن R فاصله بین عنصر دیفرانسیلی بار مورد نظر و نقطه‌ای است که پتانسیل آن باید تعیین شود.

پتانسیل مغناطیسی برداری معوق از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\bar{A} = \int_{\text{حجم}} \frac{\mu[\bar{J}]}{4\pi R} dv \quad (14)$$

استفاده از زمان معوق باعث شده است که به پتانسیلهای متغیر با زمان عنوان پتانسیلهای معوق داده شود. در فصل آخر رابطه (۱۴) را برای مسأله ساده‌ی یک عنصر دیفرانسیلی جریان که جریان I آن تابعی سینوسی از زمان است به کار خواهیم برد. موارد استعمال ساده دیگر رابطه (۱۴) در مسائل آخر این فصل در نظر گرفته شده‌اند. موارد استعمال پتانسیلهای را بدین ترتیب می‌توان خلاصه کرد که با اطلاع از توزیع ρ و \bar{J} در تمامی فضا می‌توان، از دیدگاه نظری V و \bar{A} را از روابط (۱۳) و (۱۴) تعیین کرد. سپس میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را می‌توان با استفاده از (۶) و (۷) به دست آورد. اگر توزیع بارها و جریانها معلوم نباشد، یا نتوان تقریبی منطقی برای آنها به کار برد، در این صورت استفاده از این پتانسیلهای، در مقایسه با کاربرد مستقیم معادلات ماکسول راه حل ساده‌تری نیست.

مراجعی که توصیه می‌شوند:

1- Bewley, L.V.: «Flux Linkages and Electromagnetic Induction,» The Macmillan Co., New York, 1952.

این کتاب کوچک در باره بسیاری از مثالهای معمائی درباره ولتاژ القاء شده (۹) بحث می‌کند.

2- Faraday, M.: «Experimental Researches in Electricity,» B. Quaritch, London, 1839, 1855.

مطالعه جالبی است درباره تحقیقات علمی ابتدائی. منبعی جدیدتر و قابل دسترس‌تر عبارت است از:

«Great Books of the Western World,» vol. 45, Encyclopaedia Britannica, Inc., Chicago, 1952.

3- Halliday, D., and R. Resnick: «Physics,» Comb. ed.,

John Wiley and Sons, New York, 1966.

از این کتاب در بسیاری از دانشگاهها برای اولین درس فیزیک استفاده می‌شود. اکثر علامات و روابط آنها با آنچه در این کتاب بکار رفته است یکی است.

4- Harman, W.W.: «Fundamentals of Electronic Motion,»
Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1953.

پدیده‌های مربوط به نسبیت به طور واضح و جالبی بحث شده است.

5- Langmuir, R.V.: «Electromagnetic Fields and Waves,»
McGraw-Hill Book Co., New York, 1961

معادلات ماکسول در فصل ۶ به دست آمده‌اند.

6- Nussbaum, A.: «Electromagnetic Theory, For Engineers and Scientists,» Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1965.

به ژنراتور موشکی، در صفحات ۲۱۱ به بعد، توجه کنید.

7- Owen G.E.: «Electromagnetic Theory,» Allyn and Bacon Inc. Boston, 1963

قانون فارادی بر حسب چهارچوب مرجع در فصل ۸ بحث شده است.

8- Panofsky, W.K.H., and M. Phillips: «Classical Electricity and Magnetism,» Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1955.

نسبیت، در سطح نسبتاً پیشرفته‌ای، در فصل ۱۴ بحث شده است.

مسائل

۱- در مدار نشان داده شده در شکل (۴.۱۰) فرض کنید سیمهای انتهائی هر یک دارای

مقاومت کل $R = ۲۵ \Omega$ باشند و سیمهای افقی مقاومت نداشته باشند و فرض کنیم

$$B_z = ۰.۳ \cos ۸۰۰ \pi t \text{ Wb/m}^2 \cdot I \text{ و } V_{۱۲} \text{ را به دست آورید.}$$

۲- به شکل (۴.۱۰ الف) مراجعه کرده، فرض کنید

$$\vec{B} = \cos(6 \times 10^8 \pi t - 2 \pi x) \vec{a}_z \mu\text{Wb/m}^2$$

در صورتی که $R = ۱۰۵ \Omega$ ، I را پیدا کنید.

۳- میله لغزان شکل (۴.۱۰ ب) با سرعت ثابت $400 \vec{a}_z \text{ cm/s}$ در میدان یکنواخت

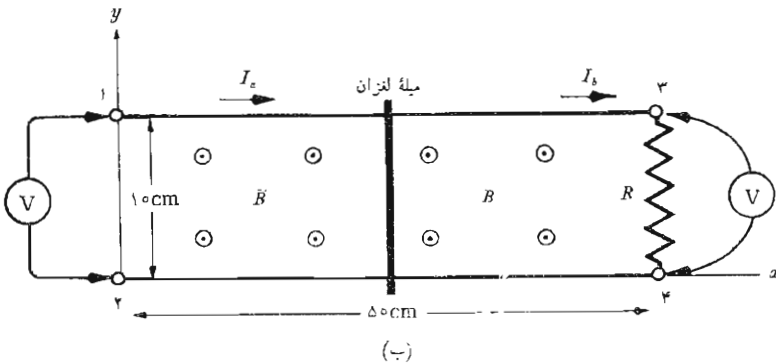
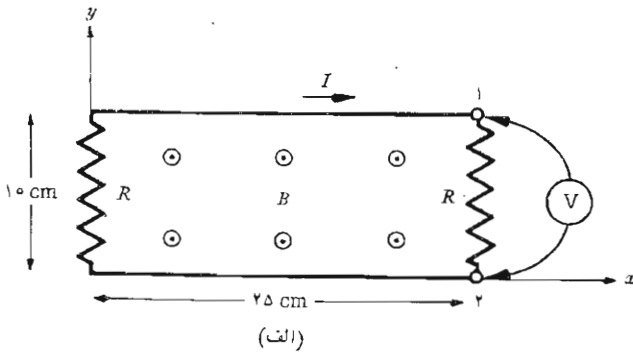
$\vec{B} = ۰.۰۵ \vec{a}_z \text{ Wb/m}^2$ در حال حرکت است. فرض کنید $R = ۵ \Omega$. (الف)

$V_{۳۴}$ و $V_{۱۲}$ را پیدا کند. (ب) I_a و I_b را پیدا کنید. (پ) برای حرکت میله چه

نیروئی لازم است؟ (ت) نشان دهید که کار لازم برای حرکت دادن میله از ابتدا به انتهای مدار مساوی انرژی داده شده به R است.

۴- در شکل (ب) داریم $\vec{B} = 2x(0.5 - x)\vec{a}_z \text{ Wb/m}^2$ و سرعت میله لغزان $\vec{a}_z \text{ m/s}$ است در صورتی که میله در $t = 0$ از انتهای طرف چپ مدار شروع به حرکت کند تغییرات ولتاژ V_{34} را بر حسب زمان رسم کنید.

۵- میله لغزان شکل (ب) بین $x = 0$ و $x = 50$ ، 30 بار در ثانیه به طور سینوسی در حال نوسان است. فرض کنید در $t = 0$ میله در انتهای طرف چپ باشد و I_b را بر حسب زمان به دست آورید در صورتی که $R = 0.2 \Omega$ و $B_z = 1.2 \text{ Wb/m}^2$.



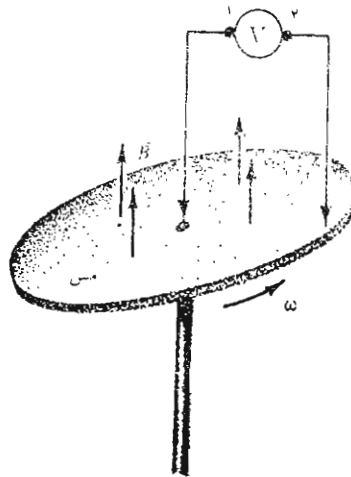
شکل ۴۰۱۰ (الف) به مسائل ۱ و ۲ مراجعه شود (ب) به مسائل ۳ و ۴ و ۵ و ۸ و ۹ مراجعه شود. کلیه ولتمترها آرمانی (ایده آل) هستند

۶- يك مدار بسته مربع شکل به ضلع 20 cm از سیمی با مقاومت کل $2\ \Omega$ ساخته شده است مدار در $t = 0$ در صفحه $y = 0$ و به طور متقارن حول محور y - ها قرار دارد و یکی از گوشه‌های آن در نقطه $(10, 0, 10)$ است. فرض کنید میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = 0.06\ \text{Wb/m}^2 \vec{a}_y$ جریانی I در جهت \vec{a}_z را در نقطه‌ای که مدار محور مثبت x ها را قطع می‌کند به دست آورید در صورتی که مدار حول محور z ها در جهت \vec{a}_ϕ با $\omega = 60\pi\ \text{rad/s}$ در حال دوران باشد.

۷- شعاع صفحه‌ی مدور مسی (5.10) برابر 15 cm است و با سرعت 2400 دور در دقیقه در میدان یکنواخت 2000 G ($2000\ \text{Wb/m}^2$) در حال دوران است. (الف) V_{12} را پیدا کنید. (ب) اگر اتصال خارجی به نقطه‌ی $r = 10\text{ cm}$ آورده شود V_{12} چقدر است. این وسیله به مولد صفحه‌ای فادادی یا مولد هوموپولار موسوم است.

۸- فرض کنید که شدت میدان مغناطیسی در شکل (4.10) برابر $B_z = 2 \cos 100t\ \text{Wb/m}^2$ و محل میلیه $x = 0.25(1 + \sin 40t)\text{ m}$ V_{12} را بر حسب تابعی از زمان پیدا کنید.

۹- $I_\phi(t)$ را برای مدار شکل (4.10) پیدا کنید در صورتی که محل میلیه لغزان با $x = 0.25(1 - \cos \omega t)\text{ m}$ مشخص شده باشد و همچنین داشته باشیم $R = 0.1\ \Omega$ و $\vec{B} = 0.4 \cos \omega t \vec{a}_z\ \text{Wb/m}^2$



شکل ۵.۱۰ به مسأله ۷ مراجعه شود.

۱۰- با استفاده از شکل نقطه‌ای قانون فارادی بیشترین اطلاعات ممکن را درباره

(الف) \vec{B} در صورتی که $\vec{E} = xy^2 e^{-t} \vec{a}_z$ و در $t = 0$ ، $\vec{B} = 0$ باشد، (ب)

\vec{E} در صورتی که $\vec{B} = xy^2 e^{-t} \vec{a}_z$ و $E_x = 0$ باشد به دست آورید.

۱۱- در نزدیکی محور دستگاه مختصات استوانه‌ای چگالی شار مغناطیسی با رابطه

$\vec{B} = (1/r) \cos 5000 t \vec{a}_z \text{ Wb/m}^2$ داده شده است. نیروی محرکه

تولید شده حول یک مسیر مدور به شعاع ۲ cm را پیدا کنید در صورتی که

شعاع آن به طور خطی با نرخ 500 m/s در حال ازدیاد باشد.

۱۲- در بخش اول این فصل با استفاده از قانون فارادی نشان داده شده است که

میدان $\vec{E} = -1/\rho \frac{d}{dt} b B_\phi \vec{a}_\phi$ از میدان مغناطیسی متغیر $\vec{B} = B_0 e^{bt} \vec{a}_\phi$ به

وجود می‌آید. (الف) نشان دهید که این میدانها در معادله کرل دیگر ما کسول

صداقت نمی‌کنند. (ب) اگر $B_0 = 1 \text{ Wb/m}^2$ و $b = 10^6 \text{ s}^{-1}$ ، شار مغناطیسی

نسبتاً بزرگی در $1 \mu\text{s}$ به وجود می‌آید. از رابطه $\nabla \times \vec{H}$ استفاده کرده نشان

دهید که نرخ تغییری که باید B_z نسبت به t داشته باشد (ولی ندارد) در فضای

آزاد در $t = 0$ فقط در حدود $5 \times 10^{-6} \text{ Wb/m}^2$ بر متر است.

۱۳- منبع ولتاژ $V_0 \sin \omega t$ بین دو استوانه هادی هم محور $r = a$ ، $r = b$ و

طول L متصل شده است. فضای بین دو استوانه از جنس ماده‌ای است که برای

آن $\epsilon = \epsilon_R \epsilon_0$ و $\mu_R = \mu_0$ و $\sigma = 0$. مقدار کل جریان J به جایی عایق را پیدا

کرده با جریان منبع مقایسه کنید.

۱۴- در نقطه‌ای بخصوصی در داخل ماده‌ای که برای آن $\mu = \mu_0$ ، $\epsilon_R = 5$ و

$\sigma = 1 \text{ } \Omega/\text{m}$ داریم $\vec{E} = 200 \cos \omega t \text{ V/m}$. تعیین کنید: (الف) \vec{J}_0 .

(ب) \vec{J}_d . (ج) فرکانسی که به ازای آن دامنه آنها با هم برابرند.

۱۵- چگالی شار مغناطیسی $\vec{B} = 10^{-6} \cos 10^6 t \cos 5z \vec{a}_y \text{ Wb/m}^2$ در داخل

ماده‌ای خطی و همه سو یکسان (ایزوتروپ) و متجانس که با ϵ و μ مشخص

می‌شود برقرار است. چگالی جریان J را به جایی را پیدا کنید.

۱۶- اگر در فضای آزاد $\vec{B} = 3e^{-x-4t} \vec{a}_z \text{ Wb/m}^2$ از معادلات ما کسول استفاده

کرده با علم به اینکه تغییرات کلیه میدانها به صورت e^{-at} است \vec{E} را به دست

آورید.

۱۷- اگر در فضای آزاد $\vec{E} = (100/r) \sin az \cos 10^9 t \vec{a}_r \text{ V/m}$ ، \vec{H} و

را تعیین کنید.

۱۸- می‌دانیم در فضای آزاد $\vec{E} = (A/r) \sin \theta \cos (\omega t - kr) \vec{a}_\theta$ است. نشان

دهید که $\vec{H} = \vec{E}_\theta \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} \vec{a}_\phi$.

۱۹- برای یک محیط غیر هادی که در آن $\epsilon_R = 8$ ، $\mu_R = 2$ ، فرض شده است که

شکل مختلف برای \vec{E} به دست آورید. (ب) اگر کسی که چنین فرضی کرده است در حال تحلیل یک مدار مغناطیسی باشد کدامیک از میدانهای الکتریکی فوق را به کار خواهد برد.

۲۰- اگر ناحیه $x < 0$ فضای آزاد و $x > 0$ شامل ماده‌ای باشد که برای آن $\epsilon_R = 1.25$ و $\mu_R = 2$ و $\sigma = 0$ ، \vec{E}_y و \vec{H}_y را در $x = 0^+$ پیدا کنید در صورتی که در $x = 0^-$ $\vec{E}_y = (2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y) \cos 5000t \text{ V/m}$ و $\vec{H}_y = (0.004\vec{a}_x + 0.006\vec{a}_z) \cos 5000t \text{ A/m}$ باشد.

۲۱- اگر در ناحیه $x < 0$ ماده‌ای موجود باشد که در آن $\epsilon_R = 1.25$ و $\mu_R = 2$ و $\sigma = 0$ و در $x > 0$ یک هادی کامل وجود داشته باشد، چگالی جریان سطحی برداری و چگالی بار سطحی را پیدا کنید در صورتی که در $x = 0^-$ و $y = 0$ و $z = 0$ $\vec{E} = 2\vec{a}_x \cos 5000t \text{ V/m}$ ، $\vec{H} = (0.005\vec{a}_y + 0.006\vec{a}_z) \cos 5000t \text{ A/m}$

۲۲- نشان دهید که در سرحد بین دو محیط خطی و همه سو یکسان (ایزوتروپ) و متجانس با مشخصات ϵ_1 و ϵ_2 و μ_1 و μ_2 و σ_1 و σ_2 در حالت کلی D_{n1} و D_{n2} و همچنین \vec{J}_{n1} و \vec{J}_{n2} برابر نیستند.

۲۳- یک رشته جریان روی محور z ها، $0 < z < 2$ ، حامل جریان $I = t^2/2 \text{ A}$ در جهت \vec{a}_z است. (الف) \vec{A} را در $(0, 0, 1)$ در فضای آزاد به دست آورید. (ب) مقادیر I و \vec{A} را در $t = 0$ تعیین کنید.

۲۴- رشته‌ای حلقوی واقع در $r = 1$ و $z = 0$ در فضای آزاد حامل جریان $I_0 \sin \phi \cos \omega t$ در جهت \vec{a}_ϕ است. \vec{A} را در $(0, 0, 1)$ پیدا کنید.

۲۵- اگر پتانسیل برداری مغناطیسی \vec{A} برابر $kz\vec{a}_y \cos \omega t \cos kz\vec{a}_y$ باشد \vec{H} و \vec{E} و V را پیدا کنید. کلیه مؤلفه‌هایی را که امکان دارد، مساوی صفر فرض کنید. k را بر حسب A_0 و ω و ثابتهای محیط بی تلفات ϵ و μ بیان کنید.

۲۶- جوزف هنری چه وسیله مهمی اختراع کرد تا بتواند به هنگام برای شام حاضر باشد؟ جواب به این سؤال را می‌توانید در مقاله زیر پیدا کنید:

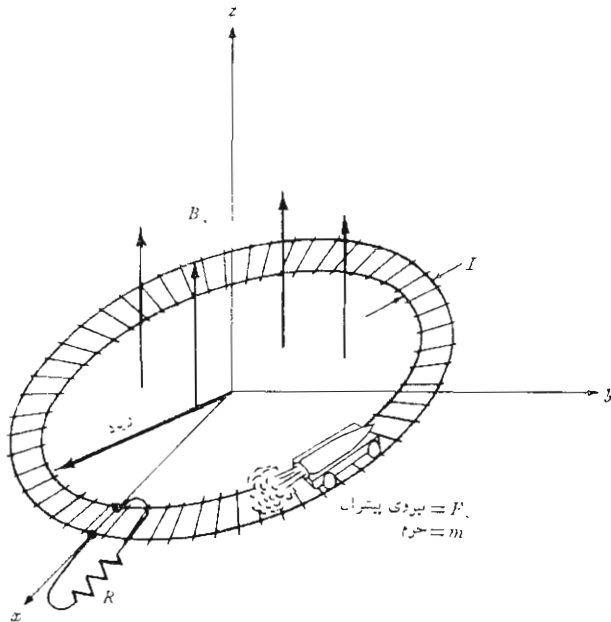
H.H Skilling, Historical Perspectives for Electrical Engineering Education, *Proc. IEEE*, vol-59, No. 6, June 1971, pp. 828-833.

۲۷- شکل (۶.۱۰) مثال جالبی را نشان می‌دهد که به وسیله آ. نوسباوم^۲ در صفحه

1. Joseph Henry

2. A. Nussbaum

۲۱۱ ارائه شده است (به مراجع توصیه شده در این فصل مراجعه کنید).
 ارا به ای متحرک با موشکی بین دو ریل در میدان مغناطیسی یکنواخت \vec{B} در حال حرکت است. فاصله بین دو ریل L و نیروی پیشران موشک ثابت و برابر F_0 است. شعاع مسیر بزرگ و مقاومت بار R بین دو ریل وصل شده است. جریان بار را به صورت تابعی از زمان به دست آورید. نوسبام مسئله را کاملأ حل کرده است.



شکل ۶۰۹۵ به مسأله ۲۷ مراجعه شود.

۱۱

موج مسطح یکنواخت

در این فصل معادلات ماکسول را برای معرفی نظریه بنیادی حرکت موج به کار خواهیم برد. موج مسطح یکنواخت، گرچه یکی از ساده‌ترین موارد استعمال معادلات ماکسول است، ولی اصول مربوط به انتشار انرژی را به خوبی نشان می‌دهد. ما سرعت انتشار و طول موج و مقاومت ظاهری موج و ضرایب فاز و تضعیف، و کاربرد قضیه پوینتینگ در محاسبه چگالی توان را معرفی خواهیم کرد و در خاتمه، انعکاس و انتقال موج مسطح یکنواخت را در مرز دو محیط مختلف در نظر خواهیم گرفت. با استفاده از نسبت موج ساکن و مقاومت ظاهری ورودی می‌توانیم بسیاری از مسائل عملی مربوط به انتقال هدایت شده انرژی و پیام را بررسی کنیم.

۱۰۱۱ حرکت موج در فضای آزاد

همانطوری که در بحث مربوط به شرایط مرزی در فصل قبل متذکر شدیم. حل معادلات ماکسول بی در نظر گرفتن شرایط مرزی معرف مسأله خاصی است. گرچه توجه خود را به حل مسأله درمختصات قائم محدود می‌کنیم، با وجود این از آنجا که چند حالت خاص مسأله را بررسی می‌کنیم، به نظر می‌رسد که مسائل مختلفی را حل می‌کنیم. ابتدا جواب مربوط به فضای آزاد و سپس برای عایقهای کامل و بعد عایقهای تلفات‌دار و بالاخره هادی خوب را به دست خواهیم آورد. این روش برای این است که از تقریبهای مناسب برای هر حالت خاص استفاده کنیم و بر خواص بخصوص انتشار موج در این مواد تأکید کنیم. اما این تفکیک لازم نیست و می‌توان (بی اشکال

زیادی) مسأله کلی را، یکبار برای همیشه، حل کرد. بحث ما در بسارۀ عایق تلفات دار از بررسی حالت کلی شروع می‌شود، ولی بعد این بررسی را، با محدود کردن بحث خود به عایق‌هایی که تلفات کمی دارند، ساده‌تر می‌کنیم.

برای اینکه حرکت موج را در فضای آزاد بررسی کنیم معادلات ماکسول را فقط بر حسب \vec{E} و \vec{H} می‌نویسیم

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (۱)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (۲)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (۳)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (۴)$$

حالا ببینیم که آیا می‌توان حرکت موج را از این معادلات، بی‌آنکه درحقیقت آنها را حل کنیم، نتیجه گرفت. معادله (۱) حاکی از آنست که اگر \vec{E} در نقطه‌ای برحسب زمان متغیر باشد، \vec{H} در این نقطه دارای گرایی خواهد بود و بنا بر این می‌توان آن را به صورت حلقه بسته کوچکی تصور کرد که میدان \vec{E} را محاط می‌کند. همچنین، اگر \vec{E} نسبت به زمان متغیر باشد، \vec{H} نیز در حالت کلی، با زمان تغییر خواهد کرد. اگرچه این تغییرات الزاماً نظیر تغییرات \vec{E} نیستند. سپس، از رابطه دوم نتیجه می‌شود که این میدان متغیر \vec{H} باعث تولید میدان الکتریکی است که حول خطوط \vec{H} تشکیل حلقه‌های بسته‌ای را می‌دهد. حال، دوباره همانند فرض اولیه خود میدان الکتریکی متغیر با زمانی داریم، ولی این میدان در نقطه‌ایست که به فاصله کمی از محل اختلال اولیه قرار دارد. ممکن است (به درستی) حدس بزنیم که سرعت دور شدن این اثر از نقطه اولیه، همان سرعت نور است، ولی این را باید با بررسی کمی تری از معادلات ماکسول تحقیق کنیم.

ابتدا چهار معادله ماکسول بالا را در مورد حالت خاص تغییرات سینوسی شکل (به طور دقیق تر کسینوسی) می‌نویسیم. این کار را با فیزورها و اعداد مختلط انجام می‌دهیم. فرض کنید یکی از مؤلفه‌ها، مثلاً E_z ، به صورت زیر داده شده باشد.

$$E_x = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi) \quad (5)$$

که در آن E_{xyz} تابعی حقیقی از x و y و z ، و شاید ω است ولی تابع زمان نیست و ψ زاویه فازی است که آنهم ممکن است تابع x و y و z و ω باشد با استفاده از اتحاد اولیاء،

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

می توان نوشت

$$E_x = \text{Re } E_{xyz} e^{j(\omega t + \psi)} = \text{Re } E_{xyz} e^{j\psi} e^{j\omega t} \quad (6)$$

که در آن Re علامت این است که قسمت حقیقی کمیتی که بعد از آن می آید باید در نظر گرفته شود. اگر Re را حذف کرده از $e^{j\omega t}$ نیز صرف نظر کنیم، کمیت میدانی E_x به صورت فیزور، یا کمیتی مختلط خواهد بود، که ما آن را با اندیس s مشخص می کنیم به این ترتیب

$$E_{xs} = E_{xyz} e^{j\psi} \quad (7)$$

اندیس s را می توان به عنوان نشانه کمیتی در حوزه بسامد (فرکانس) برحسب فرکانس مختلط s تعبیر کرد، گرچه ما فقط مواردی را در نظر خواهیم گرفت که s موهومی خالص است، $s = j\omega$.

با در دست داشتن یک فیزور، کمیت حقیقی مربوط به آن را همیشه می توان با ضرب کردن آن در $e^{j\omega t}$ و محاسبه قسمت حقیقی جمله حاصل به دست آورد. حال چون

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [E_{xyz} \cos(\omega t + \psi)] = -\omega E_{xyz} \sin(\omega t + \psi) \\ &= \text{Re } j\omega E_{xs} e^{j\omega t} \end{aligned}$$

بدیهی است که مشتق جزئی گرفتن از یک کمیت میدانی نسبت به زمان معادل این است که فیزور مربوط به آن در $j\omega$ ضرب شود. مثلاً، اگر داشته باشیم

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

معادله متناظر آن برحسب فیزور عبارت است از

$$j\omega E_{zs} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_{ys}}{\partial z}$$

که در آن H_{ys} و E_{zs} ممکن است هر دو کمیت‌های مختلط باشند. بیان یک بردار به صورت فیزور مشکل‌تر از بیان یک مؤلفه به صورت فیزور نیست. بدین ترتیب با در دست داشتن معادلهٔ ماکسول،

$$\nabla \times \bar{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

رابطهٔ متناظر آن برحسب فیزور-برداری عبارت است از

$$\boxed{\nabla \times \bar{H}_s = j\omega \epsilon_0 \bar{E}_s} \quad (۸)$$

رابطهٔ (۸) و سه معادلهٔ

$$\boxed{\nabla \times \bar{E}_s = -j\omega \mu_0 \bar{H}_s} \quad (۹)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \bar{E}_s = 0} \quad (۱۰)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \bar{H}_s = 0} \quad (۱۱)$$

چهار معادلهٔ ماکسول به صورت فیزور برای تغییرات سینوسی در فضای آزادند. باید توجه داشت که دیگر (۱۰) و (۱۱) روابط مستقلی نیستند، چون آنها را می‌توان بسا گرفتن دیورژانس، به ترتیب از (۸) و (۹) به دست آورد.

قدم بعدی ما عبارت از این است که معادلهٔ موج را به دست آوریم، از این قدم می‌توان صرف نظر کرد چون برای حل مسألهٔ سادهٔ مورد نظر فعلی، می‌توان چهار معادلهٔ فوق را با هم حل کرد. از طرفی دیگر، معادلهٔ موج معادلهٔ مهمی است و بسه عنوان نقطهٔ شروع در بسیاری از بررسی‌های دیگر به کار می‌رود. روش به دست آوردن معادلهٔ موج را می‌توان در یک سطر خلاصه کرد (بسا استفاده از چهار علامت تساوی روی کاغذی پهن‌تر).

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \bar{E}_s &= \nabla(\nabla \cdot \bar{E}_s) - \nabla^2 \bar{E}_s = -j\omega\mu_0 \nabla \times \bar{H}_s \\ &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \bar{E}_s = -\nabla^2 \bar{E}_s\end{aligned}$$

چون

$$\nabla \cdot \bar{E}_s = 0$$

بنا بر این

$$\boxed{\nabla^2 \bar{E}_s = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \bar{E}_s} \quad (12)$$

این رابطه مختصر فیزور-برداری به رابطه برداری هلم هولتز (Helmholtz) نیز موسوم است.^۱ بسط این رابطه، حتی در مختصات قائم، نسبتاً پیچیده است، چون سه معادله شمارواره‌ای (اسکالر) بر حسب فیزورها به دست می‌آید که هر یک شامل چهار جمله است. مؤلفه x رابطه (۱۲)، اگر اپراتور ∇ را هچنان به کار ببریم، عبارت است از:

$$\nabla^2 E_{xs} = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_{xs} \quad (13)$$

که با بسط اپراتور به یک معادله دیفرانسیلی جزئی درجه دوم منجر می‌شود.

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_{xs} \quad (14)$$

برای حل معادله (۱۴)، فرض می‌کنیم جواب ساده‌ای را بتوان پیدا کرد که در آن E_{xs} تابع x یا y نباشد. در این صورت مشتقات مرتبه صفر اند و معادله دیفرانسیلی معمولی زیر به دست می‌آید

$$\frac{d^2 E_{xs}}{dy^2} = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_{xs} \quad (15)$$

با بررسی این معادله می‌توان یک جواب آن را به صورت

$$E_{xs} = Ae^{-j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}z} \quad (16)$$

نوشت و جمله $e^{j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}z}$ را دوباره اضافه کرد و با گرفتن قسمت حقیقی آن را به شکل

۱. (Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) در برلین استاد فیزیولوژی، الکترودینامیک و نور بود و Hertz یکی از شاگردان او بود.

مثلاًتی ساده کرد،

$$E_x = A \cos [\omega(t - z\sqrt{\mu_0 \epsilon_0})] \quad (17)$$

که در آن، عامل دلخواه دامنه را می توان به صورت E_{x_0} یعنی مقدار E_x در $z = 0$ ، $t = 0$ نوشت،

$$E_x = E_{x_0} \cos [\omega(t - z\sqrt{\mu_0 \epsilon_0})] \quad (18)$$

مسأله ۱ آخر فصل نشان می دهد که

$$E'_x = E'_{x_0} \cos [\omega(t + z\sqrt{\mu_0 \epsilon_0})] \quad (19)$$

نیز از يك حل دیگر معادله برداری هلم هولتز به دست می آید. قبل از اینکه مؤلفه های دیگر میدان را پیدا کنیم باید ماهیت فیزیکی تنها مؤلفه میدان الکتریکی را که در رابطه (۱۸) به دست آوردیم، درک کنیم. می بینیم که این مؤلفه در جهت x ها است و می توانیم آن را به صورت مجتد به بالا در سطح زمین مسطح توصیف کنیم. رادیکال $\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ مساوی $1/(3 \times 10^8) \text{ m/s}$ است که عکس c سرعت نور در فضای آزاد است.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299792458 \times 10^8 \doteq 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

حال فرض می کنیم محور z ها در جهت شرق باشد و $z = 0$ را در شیکاگو انتخاب می کنیم. بدین ترتیب در شیکاگو، شدت میدان عبارت است از

$$E_x = E_{x_0} \cos \omega t$$

که تغییرات آن بر حسب زمان ساده و آشنا است. يك بار آزاد (مثلاً روی يك آنتن گیرنده عمودی) $\omega/2\pi$ بار در ثانیه به طرف بالا و پائین شتاب خواهد داشت. در شهر کلیولند به فاصله ۵۰۰ کیلومتر در شرق، خواهیم داشت

$$E_x = E_{x_0} \cos \left[\omega \left(t - \frac{5 \times 10^5}{3 \times 10^8} \right) \right] = E_{x_0} \cos [\omega(t - 0.000167)]$$

که نشان می‌دهد شدت میدان در کیولند مساوی مقدار آن در شیکاگو در ۰۵۰۱۶۷ دره ثانیه قبل است. بنابراین، به طور کلی، می‌بایست انتظار داشته باشیم که در هر نقطه z در شرق شیکاگو میدان به اندازه $\epsilon_0 \sqrt{\mu_0} z$ یا $S / (3 \times 10^8)$ نسبت به میدان مرجع تأخیر زمانی داشته باشد. حال دیدگاه خود را عرض کرده میدان را در تمام نقاط در زمان $t = 0$ بررسی می‌کنیم،

$$E_x = E_{x_0} \cos(-\omega z \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}) = E_{x_0} \cos \frac{\omega z}{c}$$

می‌بینیم که تغییرات برحسب فاصله متناوب است. دوره این موج سینوسی که در امتداد محور z ها اندازه‌گیری می‌شود به طول موج λ موسوم است،

$$\frac{\omega \lambda}{c} = 2\pi$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{f}$$

در هر نقطه تغییرات سینوسی نسبت به زمان به تناوب $T = 1/f$ و در هر لحظه، تغییرات سینوسی شکل نسبت به مکان به تناوب λ است. در هر نقطه و در هر لحظه E_x ممتد به بالا و قائم است. حال جواب را در حالتی در نظر بگیریم که زمان و همچنین مکان متغیر باشد. به یقین می‌توان گفت که اگر $t - z \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ تغییر نکند E_x نیز تغییری نخواهد داشت.

$$t - \frac{z}{c} = \text{ثابت}$$

و اگر دیفرانسیل بگیریم، خواهیم داشت

$$dt - \frac{1}{c} dz = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = c$$

بنابراین میدان با سرعت c در جهت z در حال حرکت است. مقدار لحظه‌ای میدان در $z = z_1$ ، $t = t_1$ هر قدر باشد در z_2 در زمان $(z_2 - z_1)/c$ ثانیه بعد نیز همان خواهد بود. در $t = t_2$ در فاصله $(t_2 - t_1)/c$ متری در شرق مقدارش جز این نخواهد بود. میدان الکتریکی در حال حرکت است و بنابراین منطقی است آن را موج سیاد بنامیم.

واضح است که رابطه (۱۹)، که آن هم جوابی است برای معادله موج، معرف موجی است که در جهت $-z$ ، یا به سوی غرب، در حال حرکت است، به منظور ساده کردن بحث، فقط امواج سیار مثبت را در نظر خواهیم گرفت. حال به معادلات ماکسول، روابط (۸) تا (۱۱)، برگردیم و شکل میدان را تعیین کنیم. با در دست داشتن \vec{E}_s ، ساده‌ترین راه تعیین \vec{H}_s استفاده از رابطه (۹)،

$$\nabla \times \vec{E}_s = -j\omega\mu_0 \vec{H}_s \quad (۹)$$

است که برای مؤلفه منفرد E_{xs} که فقط با z تغییر می‌کند به صورت بسیار ساده زیر است

$$\frac{\partial E_{xs}}{\partial z} = -j\omega\mu_0 H_{ys}$$

با استفاده از (۱۶) برای E_{xs} با $A = E_{x_0}$ ، خواهیم داشت

$$H_{ys} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} E_{x_0} (-j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}) e^{-j\omega z/c}$$

و

$$\boxed{H_y = E_{x_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos[\omega(t - z/c)]} \quad (۲۰)$$

ملاحظه می‌کنیم که مؤلفه عمودی \vec{E} ، که به طرف شرق حرکت می‌کند، یک میدان مغناطیس افقی (شمال به جنوب) نیز همراه دارد. به علاوه نسبت شدت میدان الکتریکی به مغناطیسی یعنی نسبت (۱۸) به (۲۰)،

$$\boxed{\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \quad (۲۱)$$

ثابت است. با استفاده از اصطلاحات نظریه مدار، می‌توان گفت که H_y و E_z «هم‌فاز»ند ولی این هم فازی برحسب زمان و همچنین مکان است. ما در مسائل مدار عادت داریم مقدار بیشینه (ماکزیمم) جریان مفروض $I_m \cos \omega t$ را در تمامی مدار، در $t = 0$ ، مساوی I_m فرض کنیم. ولی روابط (۱۸) و (۲۰) به‌وضوح نشان می‌دهند که مقدار بیشینه (ماکزیمم) هر یک از کمیات E_z و H_y وقتی به دست می‌آید که $\omega(t - z/c)$ مضرب صحیحی از 2π باشد. هیچ یک از میدانها در یک لحظه بخصوص در تمام نقاط بیشینه (ماکزیمم) مقدار خود را ندارند. بنابراین، این نکته قابل توجه است که نسبت این دو مؤلفه، که با زمان و مکان متغیرند، در تمام نقاط ثابت است.

ریشه دوم نسبت قابلیت نفوذ به قابلیت پذیرش موسوم است به مقاومت ظاهری ذاتی و آن را با η نمایش می‌دهند.

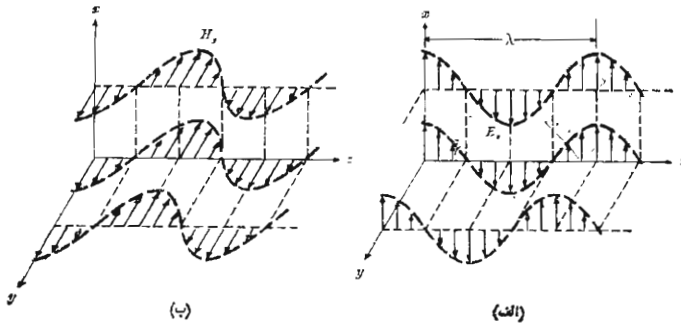
$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (22)$$

به طوری که واحد η اهم است. مقاومت ظاهری ذاتی فضای آزاد عبارتست از

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega = 120\pi \Omega$$

این موج به موج مسطح یکنواخت موسوم است چون مقدار آن در هر صفحه (ثابت z) یکنواخت است. این موج معرف انتشار انرژی در جهت مثبت z ها است. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی هر دو بر جهت انتشار عموداند، یا هر دو در صفحه‌ای قرار دارند که بر جهت انتشار قائم است. موج مسطح یکنواخت از نوع امواج الکترومغناطیسی عرضی، یا امواج TEM، به شمار می‌رود.

از شکلهای ۱.۱۱ الف و ۱.۱۱ ب می‌توان تصویری فیزیکی از تغییرات فضائی میدانها به دست آورد. شدت میدان الکتریکی شکل ۱.۱۱ الف در زمان $t = 0$ دیده می‌شود و مقدار لحظه‌ای آن در امتداد سه خط، محور z ها و خطوط دلخواهی موازی این محصور در صفحات $x = 0$ و $y = 0$ ، نشان داده شده است. چون میدان در صفحات عمود بر محور z ها یکنواخت است، تغییرات آن در امتداد هر سه خط مذکور یکسان است. یک دوره کامل تغییرات در فاصله یک طول موج λ انجام می‌گیرد. مقادیر H_y در همین زمان و مکانها در شکل ۱.۱۱ ب نشان داده شده است.



شکل ۱۰.۱۱ (الف) پیکانها معرف مقادیر لحظه‌ای $E_x \cos [\omega(t - z/c)]$ در $z = 0$ در امتداد محور z ها در امتداد خط دلخواهی در صفحه $x = 0$ به موازات محور z ها و در امتداد خط دلخواهی در صفحه $y = 0$ به موازات محور z هاند. (ب) مقادیر متناظر H_y نشان داده شده است. توجه کنید که E_x و H_y در هر نقطه و در هر لحظه هم‌فازند.

از نظر فیزیکی وجود موج مسطح یکنواخت غیر ممکن است، چون چنین موجی در دو جهت به طرف بینهایت ادامه دارد و معرف مقدار انرژی بینهایتی است. از طرفی دیگر، میدان دور یک آنتن فرستنده در ناحیه‌ای محدود تقریباً به صورت موج مسطح یکنواخت است. موجی که از شیکاگو به یک آنتن گیرنده در کلیولند می‌رسد در حوالی آنتن یک موج مسطح یکنواخت به حساب می‌آید همچنین علامت راداری که به یک هدف دور دست می‌تابد تقریباً یک موج مسطح یکنواخت است.

گرچه ما فقط موجی را در نظر گرفته‌ایم که بر حسب زمان و مکان تغییراتی سینوسی شکل دارد، ولی می‌توان ترکیب مناسبی از جوابهای معادله موج را در نظر گرفت و هر موج دلخواهی را به دست آورد. مجموعه تعداد بینهایتی از هارمونیکها که از یک سری فوریه به دست می‌آید ممکن است موج مربع یا مثلثی را که نسبت به زمان و مکان متناوب است ایجاد کند. امواج غیر متناوب را می‌توان با استفاده از روشهای انتگرال فوریه، از جواب اصلی به دست آورد. بالاخره می‌توان امواج منتشر شده در جهات دیگر را نیز، مثلاً موجی که به طرف جنوب شرقی منتشر می‌شود، به حالات خاص فوق اضافه کرد. مطالبی از این قبیل در کتابهای پیشرفته‌تر نظریه الکترومغناطیس بررسی شده‌اند.

تمرین ۱.۱۱

قدر مطلق \bar{E} را در $t = 0$ در مبدأ مختصات پیدا کنید در صورتی که \bar{E}_s برابر باشد

$$\begin{aligned} \text{با: (الف)} & \quad 50e^{-jz/20} \bar{a}_x \\ \text{(ب)} & \quad (40 + j30)e^{-jz/20} \bar{a}_x \\ \text{(پ)} & \quad (40 + j30)e^{-jz/20} \bar{a}_x + (10 - j20)e^{-jz/20} \bar{a}_y \\ \text{(ت)} & \quad 50e^{j(20^\circ - z/20)} \bar{a}_x + 40e^{j(70^\circ - z/20)} \bar{a}_y \end{aligned}$$

جوابها: ۵۰، ۴۰، ۴۱٫۲، ۴۷٫۷

تمرین ۲.۱۱

برای موج مسطح یکنواختی در هوا $\bar{H}_s = 2e^{-j\pi z/20} \bar{a}_y$ A/m تعیین کنید:

(الف) طول موج، (ب) بسامد (فرکانس)، (پ) مقدار \bar{E} در $t = 1/15 \mu\text{s}$ ، $z = 5\text{m}$

جوابها: ۴۰m، ۷٫۵ MHz، ۵۳۳ \bar{a}_x V/m

۲.۱۱ حرکت موج در عایق کامل

حال بررسی تحلیلی موج مسطح یکنواخت را توسعه می‌دهیم تا انتشار در عایق کامل (بی تلفات) با ضریب پذیرش ϵ و قابلیت نفوذ μ را شامل گردد. این محیط یکنواخت و همه سو یکسان (ایزوتروپ) است و معادله موج به صورت زیر است:

$$\nabla^2 \bar{E}_s = -\omega^2 \mu \epsilon \bar{E}_s \quad (1)$$

و برای E_{zs} داریم

$$\frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu \epsilon E_{zs} \quad (2)$$

به جای اینکه جواب (۲) را فوراً بنویسیم، جواب کلی تری فرض می‌کنیم و رابطه (۲) را برای تعیین پارامترهای مفروض به کار می‌بریم. با فرض زیر قبول می‌کنیم که تضعیف به صورت نمایی باشد.

$$E_x = E_{x0} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta z) \quad (3)$$

یا به صورت معادل آن با علامات نمایی مختلط

$$E_{xs} = E_{x0} e^{-\alpha x} e^{-j\beta z} \quad (4)$$

قسمت نمایی حقیقی اجازه می‌دهد مواردی را در نظر بگیریم که موج در

ضمن انتشار در جهت z + ضعیف می شود. α به ثابت تضعیف موسوم است. چون محیط ما بی تلفات است، باید بتوانیم نشان دهیم که α صفر است. حال اگر توجه داشته باشیم که واحد β می بایست رادیان شد (با فرض اینکه β حقیقی است)، منطقی است که β را ثابت فاز بنامیم. این ضریب معرف تغییر فاز بر حسب رادیان در متر است در حالت کلی، معمولاً α و β را به صورت یک ثابت انتشار مختلط γ (گاما) ترکیب می کنیم،

$$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta} \quad (5)$$

لذا رابطه (۴) را می توان به صورت

$$E_{zs} = E_{z_0} e^{-\gamma z} \quad (6)$$

نوشت.

حال اگر آن را در رابطه (۲) قرار دهیم:

$$\gamma^2 E_{z_0} e^{-\gamma z} = -\omega^2 \mu \epsilon E_{z_0} e^{-\gamma z}$$

باید داشته باشیم

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon$$

یا

$$\boxed{\gamma = \pm j\omega\sqrt{\mu\epsilon}}$$

بنابراین

$$\boxed{\alpha = 0}$$

و

$$\boxed{\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (7)$$

که در آن ریشه‌ای را انتخاب کرده‌ایم که معرف انتشار در جهت مثبت z ها باشد. بنابراین

$$E_z = E_{z_0} \cos[\omega(t - z\sqrt{\mu\epsilon})] \quad (8)$$

که آن را به عنوان موجی که با سرعت U در جهت z + حرکت می کند تعبیر می کنیم

$$U = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} \quad (9)$$

طول موج عبارتست از نسبت بین سرعت و بسامد (فرکانس)،

$$\lambda = \frac{U}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} \quad (10)$$

که در آن λ_0 طول موج مربوط به فضای آزاد است. توجه کنید که $\mu_R\epsilon_R > 1$ و بنابراین در کلیه مواد واقعی طول موج کوتاهتر و سرعت کمتر از فضای آزاد است. همچنین از (۷) و (۱۰) رابطه مهم زیر به دست می‌آید،

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (11)$$

میدان مغناطیسی مربوط به E_x عبارتست از

$$H_y = \frac{E_{x0}}{\eta} \cos(\omega t - \beta z) \quad (12)$$

که در آن مقاومت ظاهری (امپدانس) ذاتی مساویست با

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (13)$$

دو میدان E_x و H_y بر یکدیگر و بر جهت انتشار عمود، و در همه جا با یکدیگر هم‌فازند. توجه کنید که اگر \vec{E} در \vec{H} ضرب خارجی شود، بردار حاصل در جهت انتشار خواهد بود. علت این امر را در بحث مربوط به بردار پوینتینگ خواهیم دید.

حال این نتایج را در مورد یک موج ۳۵۰ MHz که در داخل آب شیرین منتشر می‌شود به کار ببریم. گرچه محیط بی تلفات نیست، در حال حاضر از تضعیف موج صرف نظر کرده فرض می‌کنیم $\alpha = 0$ باشد. بنابراین $\mu_R = 1$ و $\epsilon_R = 78$ (در ۳۰۰ MHz)، و

$$U = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{78}} = 0.340 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\lambda = \frac{U}{f} = \frac{0.340 \times 10^8}{3 \times 10^8} = 0.113 \text{ m}$$

در صورتی که طول موج در هوا مساوی ۱ m می بود اکنون محاسبه پارامترهای دیگر را ادامه می دهیم

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 55.4 \text{ rad/m} = 80.6^\circ/\text{in}$$

و

$$\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \frac{377}{\sqrt{78}} = 42.7 \Omega$$

و اگر مقدار بیشینه (ماکزیمم) شدت میدان الکتریکی را V/m ۰۱ فرض کنیم، در این صورت

$$E_x = 0.1 \cos(6\pi \times 10^8 t - 55.4z)$$

$$H_y = \frac{E_x}{\eta} = 2.34 \times 10^{-2} \cos(6\pi \times 10^8 t - 55.4z)$$

تمرین ۳.۱۱

یک موج مسطح یکواخت ($5 \times 10^9 \text{ Hz}$) 5 GHz در عایق پلی استیرن^۱ منتشر می شود. اگر دامنه شدت میدان الکتریکی برابر 10 mV/m باشد پیدا کنید: (الف) سرعت انتشار، (ب) طول موج (در پلی استیرن)، (پ) ضریب فاز، (ت) دامنه شدت میدان مغناطیسی

جوابها:

$$42.2 \mu\text{A/m}, 1666 \text{ rad/m}, 377 \text{ cm}, 1.886 \times 10^8 \text{ m/s}$$

1. Polystyrene

۳.۱۱ امواج مسطح در عایق با تلفات

کلیه مواد عایق مقداری خاصیت همدایت نیز دارند، و گسر چه در بسیاری از موارد می توان هدایت آنها را نادیده گرفت، معیارهای لازم برای این کار را می بایست تعیین کرد. ما همچنان بحث خود را به تغییرات زمانی سینوسی محدود می کنیم، در این صورت دو معادله اول ما کسول عبارتند از

$$\nabla \times \bar{H}_s = \bar{J}_s + j\omega\epsilon\bar{E}_s$$

یا

$$\nabla \times \bar{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon)\bar{E}_s \quad (۱)$$

و

$$\nabla \times \bar{E}_s = -j\omega\mu\bar{H}_s \quad (۲)$$

تنها اثر وجود σ این است که عامل $j\omega\epsilon$ به $\sigma + j\omega\epsilon$ تبدیل شده است. بنابراین می توان فوراً مقدار جدید ضریب انتشار را محاسبه کرد.

$$\gamma^2 = (\sigma + j\omega\epsilon)j\omega\mu$$

$$\gamma = \pm \sqrt{(\sigma + j\omega\epsilon)j\omega\mu}$$

با انگر تمام جملات را به مقادیر ثابت قبلی تقسیم کنیم،

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \quad (۳)$$

که در آن، به دلیلی که بزودی واضح خواهد شد، علامت مثبت جلو رادیکال را انتخاب کرده ایم. تفاوت این رابطه با حالت بی تلفات در وجود رادیکال دوم است، که به ازاء $\sigma = 0$ مساوی واحد است. در حالت کلی می توان مقادیر σ و μ و ϵ و ω را در رابطه (۳) قرار داد و اجزاء حقیقی و موهومی γ را محاسبه کرد،

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (۴)$$

و مؤلفه α شدت میدان الکتریکی را که در جهت z منتشر می شود به دست آورد،

$$E_{zs} = E_{z0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (۵)$$

استفاده از علامت مثبت رادیکال در رابطه (۳) باعث می‌شود که مقادیر مثبتی برای α و β به دست آید و در نتیجه انتشار در جهت $z +$ باشد. با استفاده از (۲)، به سهولت می‌توان نشان داد که H_{ys} عبارتست از

$$H_{ys} = \frac{E_{z0}}{\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (۶)$$

که اکنون، مقاومت ظاهری ذاتی، در آن، یک کمیت مختلط است،

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \frac{1}{1 - j(\sigma/\omega\epsilon)}} \quad (۷)$$

میدانهای الکتریکی و مغناطیسی دیگر هم فاز نیستند. قبل از اینکه به مثالی که روش محاسبات فوق را روشن می‌سازد بپردازیم، ماهیت عامل نمائی $e^{-\alpha z}$ را می‌بایست بررسی کنیم. برای موجی که در جهت $z +$ منتشر می‌شود این عامل باعث می‌شود که دامنه، با ازدیاد مقادیر z به صورت نمائی کاهش یابد. ثابت تضعیف بر حسب نپر بر متر (Np/m) اندازه‌گیری می‌شود به طوری که توان e بر حسب واحد بی بعد نپر باشد. بدین ترتیب، اگر $\alpha = 0.51$ Np/m باشد. مقدار بیشینه (ماکزیمم) موج در $z = 50$ m مساوی $0.07/e^{-0.5} = 0.07/e^{-0.5}$ برابر مقدار آن در $z = 0$ خواهد بود. در پیمودن مسافتی برابر $1/\alpha$ متر در جهت $z +$ دامنه موج به نسبت عامل معروف e^{-1} ، یا 0.368 کاهش می‌یابد.

حال چند مقدار عددی مربوط به آب مقطر را، که غایق نسبتاً بسدی است، می‌توان محاسبه کرد. در $\omega = 10^{11}$ rad/s، یا $f = 15.9$ GHz، مقادیر معمول پارامترها عبارتند از $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 80$ و $\sigma = 20$ S/m. بنابراین

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{20 \times 10^{12}}{10^{11} \times 80 \times 8.85} = 0.282$$

و

۱. واژه نپر Neper به منظور تجلیل از John Napier انتخاب شده است (توسط کسی که دیگته‌اش چندان خوب نبوده). Napier ریاضیدانی اسکاتلندی بود که برای اولین بار استفاده از لگاریتم را پیشنهاد کرد.

$$\begin{aligned} \gamma &= j \frac{10^{11} \sqrt{1 \times 50}}{3 \times 10^8} \sqrt{1 - j 0.452} \\ &= j 2360 \sqrt{1.098} \angle -24.3^\circ \\ &= 2480 \angle 77.8^\circ = 522 + j 2420 \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\alpha = 522 \text{ Np/m}$$

و دامنه E_y یا H_y در هر $1/522$ متر در آب به نسبت 0.368 کم می‌شود. بنابراین شاید لفظ «منتشر شدن» در این مورد مناسب نباشد. با چنین تضعیف بزرگی می‌توان درک کرد که چرا رادار در زیر آب مؤثر نیست و به جای آن از سونار استفاده می‌شود همچنین ملاحظه می‌شود که وجود آب یا باران در آتمسفر باعث بروز اشکالاتی در انتشار امواج فرکانس بالا خواهد شد. ضریب فاز برابر است با

$$\beta = 2410 \text{ rad/m}$$

که مقدار آن به علت ضریب هدایت غیر صفر تغییری جزئی کرده است، چون محاسبات عددی نشان می‌دهد که اگر σ صفر بود مقدار آن 2360 rad/m می‌بود. در این فرکانس طول موج در هوا برابر 12.8 cm است، و چون $\beta = 2\pi/\lambda$ طول موج در آب مساوی 260 mm خواهد بود. مقاومت ظاهری ذاتی برابر است با

$$\eta = \frac{377}{\sqrt{50}} \frac{1}{\sqrt{1 - j 0.452}} = 50.8 \angle 12.2^\circ = 49.6 + j 10.7 \Omega$$

و در تمام نقاط E_y نسبت به E_y 12.2° تقدم فاز دارد. حال به حالت عملی‌تر ماده‌ای عایق که دارای تلفات کمی است توجه کنیم. همانطوری که روابط (۳) و (۷) نشان می‌دهند معیاری که به وسیله آن می‌توان کم بودن تلفات را تشخیص داد مقدار $\sigma/\omega\epsilon$ در مقایسه با واحد است. جمله $\sigma/\omega\epsilon$ را تاثرات تلفات می‌نامند که علت آن از بررسی رابطه $\text{curl } \vec{H}$ مساکسول، که نقطه شروع تحلیل ما بود، واضح می‌گردد،

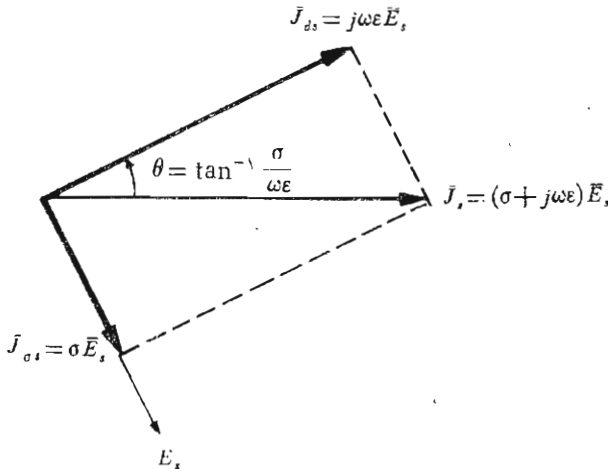
$$\nabla \times \bar{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon)\bar{E}_s = \bar{J}_{\sigma s} + \bar{J}_{ds}$$

نسبت چگالی جریان هدایتی به چگالی جریان جابجائی عبارتست از

$$\frac{\bar{J}_{\sigma s}}{\bar{J}_{ds}} = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon} \quad (۸)$$

یعنی، این دو بردار در فضا در يك جهت ممتدند ولی نسبت بهزماں ۹۰° اختلاف فاز دارند چگالی جریان جابجائی نسبت به چگالی جریان هدایتی ۹۰° تقدم فاز دارد، همانطوری که در يك مدار معمولی، جریان يك مقاومت نسبت بهجریان خازنی موازی با آن ۹۰° تقدم فاز دارد. این رابطه فازها در شکل ۲.۱۱ نشان داده شده است. بنابراین می توان دید که زاویه θ (که نباید آن را با زاویه قطبی مختصات کروی اشتباه کرد) همان زاویه تقدم فاز چگالی جریان جابجائی نسبت به چگالی جریان کل است. و

$$\boxed{\tan \theta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \quad (۹)$$



شکل ۲.۱۱ رابطه فاز زمانی بین \bar{J}_{ds} و $\bar{J}_{\sigma s}$ و \bar{J}_s و $\tan \theta \cdot \bar{E}_s$ مساویست با $\sigma/\omega\epsilon - \theta$ زاویه ضریب توان معروف، یعنی زاویه تقدم فاز \bar{J}_s نسبت به \bar{E}_s است.

این رابطه باعث نامگذاری «تانژانت تلفات» برای $\sigma/\omega\epsilon$ شده است. مسأله ۱۴ آخر فصل نشان می‌دهد که Q يك خازن (ضریب کیفیت آن، و نه بار الکتریکی) که دارای عایقی تلفات‌دار باشد مساوی عکس تانژانت تلفات آنست. اگر تانژانت تلفات کوچک باشد، می‌توان روابط تقریبی مفیدی برای ضرایب تضعیف و فاز و همچنین مقاومت ظاهری ذاتی بدست آورد، چون داریم

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \quad (۳)$$

رادیکال دوم را می‌توان با استفاده از قضیه دو جمله‌ای بسط داد،

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots$$

که در آن $|x| < 1$. در اینجا $x = -j\sigma/\omega\epsilon$ و $n = 1/2$ و بنا بر این

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left[1 - j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 + \dots \right]$$

یعنی

$$\alpha \doteq j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left(-j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \right) = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (۱۵)$$

و

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \right] \quad (۱۱ الف)$$

یا در بسیاری از موارد

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad (۱۱ ب)$$

با روشی مشابه، خواهیم داشت

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \right] \quad (۱۲ الف)$$

یا

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \right) \quad (۱۲ ب)$$

برای اینکه دقت این تقریبات را نشان دهیم، کمبات α و β و η را برای مثال آب مقطر، که قبلاً بحث کردیم، محاسبه می‌کنیم، گرچه در این مورد تانژانت تلفات دارای مقدار نسبتاً بزرگ ۴۵۲ره است. با $\epsilon_R = 50$ ، $\sigma = 20 \text{ } \Omega/\text{m}$ ، $\omega = 10^{11}$ ، $\mu_R = 1$ ، از رابطه (۱۰) داریم

$$\alpha = 533 \text{ NP/m}$$

در مقایسه با مقدار دقیق 522 NP/m با استفاده از (۱۱ الف)، ضریب فاز عبارت است از

$$\beta = 2420 \text{ rad/m}$$

که مساوی مقدار دقیق آنست. در حالی که (۱۱ ب) مقدار بی تلفات آن را به دست می‌دهد

$$\beta = 2360 \text{ rad/m}$$

بالاخره، مقاومت ظاهری ذاتی از رابطه (۱۲ الف) به دست می‌آید

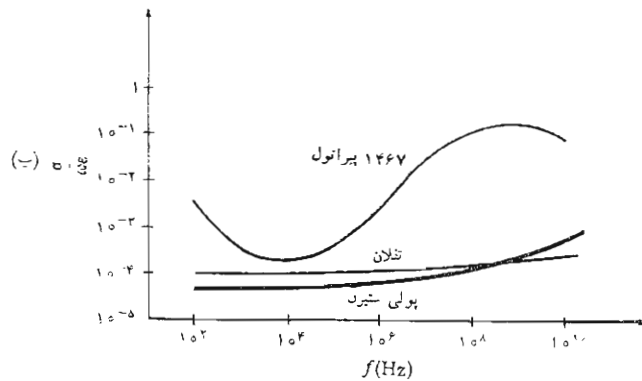
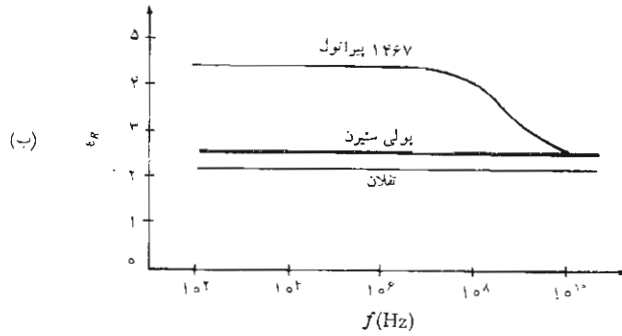
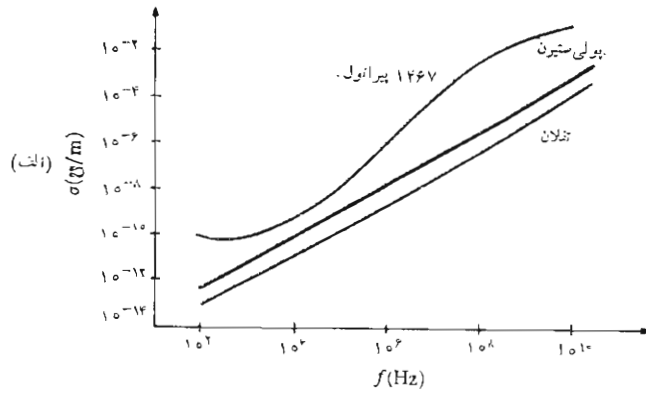
$$\eta = 503 \angle 137^\circ = 492 + j120 \text{ } \Omega$$

در مقایسه با مقدار دقیق $496 + j107 \text{ } \Omega$ و از رابطه (۱۲ ب) خطای بیشتری به دست می‌آید

$$\eta = 547 \angle 127^\circ = 533 + j120 \text{ } \Omega$$

در این مثال، گرچه تانژانت تلفات ۴۵۲ره است، ولی خطاهای حاصل در اثر کاربرد فرمولهای تقریبی بیش از حد زیاد نیستند، چون کمتر اتفاق می‌افتد که ضریب هدایت و ضریب دی الکتریک نسبی بدقت زیادی معلوم باشند. از طرفی دیگر، ما استعمال این روابط تقریبی را فقط در مواردی که $\sigma/\omega\epsilon < 0.1$ توصیه می‌کنیم. تقریبهای بیشتر را فقط براساس فضاوت مهندسی می‌توان به کار برد.

در اکثر عایقهای فیزیکی تغییرات تانژانت تلفات برحسب بسامد (فرکانس) کمتر از تغییرات ضریب هدایت است. یعنی، ضریب هدایت با بسامد (فرکانس)



شکل ۳۰۱۱ تغییرات σ و ϵ_R و $\sigma/\omega\epsilon$ برای پیرانول ۱۴۶۷ و پلی استیرن و تفلان به ترتیب در شکل‌های (الف) و (ب) و (پ) نشان داده شده‌اند توجه کنید که کلیه مقیاسها غیر از ϵ_R لگاریتمی‌اند.

افزایش می‌یابد، گرچه این ازدیاد خطی نیست. به علاوه ممکن است در ناحیهٔ مادون قرمز، و همچنین در ماوراء بنفش تغییرات نسبتاً سریعی در ضریب هدایت و ضریب پذیرش، و تانژانت تلفات مشاهده شود. در شکل (۳.۱۱) منحنی تغییرات σ ، ϵ_R و $\sigma/\omega\epsilon$ برای پیرانول ۱۴۶۷ و تفلان و پلی‌ستیرن روی مقیاس لگاریتمی بسامد (فرکانس)، نشان داده شده است.

تمرین ۳.۱۱

ضریب تضعیف را برای یک موج مسطح یکنواخت به بسامد $\omega = 10^7 \text{ rad/s}$ را که در ماده‌ای غیر مغناطیسی منتشر می‌شود به دست آورید در صورتی که: (الف) تانژانت تلفات 0.4 و ضریب فاز 1 rad/m را باشد. (ب) $\sigma/\epsilon = 10^7 \text{ s}^{-1}$ و $\epsilon_R = 4$ باشد.

جوابها: $0.0303, 0.002 \text{ Np/m}$

تمرین ۵.۱۱

سرعت انتشار را برای موج مسطح یکنواختی که در داخل ماده‌ای با $\mu = \mu_0$ ، $\epsilon_R = 16\epsilon_0$ و $\sigma = 10^{-4} \text{ J/m}$ منتشر می‌شود پیدا کنید در صورتی که ω مساوی باشد با: (الف) 10^5 rad/s ، (ب) 10^8 rad/s .

جوابها: $3.72 \times 10^7, 7.5 \times 10^7 \text{ m/s}$

۳.۱۱ بردار پوینتینگ و بررسی توان

برای اینکه بتوان توان موج مسطح یکنواخت را تعیین کرد می‌بایست قضیهٔ توان برای میدان الکترومغناطیسی را، که به قضیهٔ پوینتینگ موسوم است، اثبات کرد. این قضیه اولین بار توسط فیزیکدان انگلیسی به نام جان پوینتینگ^۲ پیشنهاد شده است. از معادلهٔ ماکسول شروع می‌کنیم،

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

۱. تغییرات کلیه این پارامترها بر حسب بسامد (فرکانس) برای مواد متعددی در کتاب Von Hippel داده شده است. به مراجع آخر فصل مراجعه کنید.

2. John H. Poynting

و طرفین را در \bar{E} ضرب داخلی می‌کنیم

$$\bar{E} \cdot \nabla \times \bar{H} = \bar{J} \cdot \bar{E} + \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

و با استفاده از اتحاد برداری،

$$\nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}) = -\bar{E} \cdot \nabla \times \bar{H} + \bar{H} \cdot \nabla \times \bar{E}$$

که می‌توان آن را با بسط در مختصات قائم به اثبات رساند، خواهیم داشت

$$\bar{H} \cdot \nabla \times \bar{E} - \nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}) = \bar{J} \cdot \bar{E} + \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

ولی

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

و بنابراین

$$-\bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}) = \bar{J} \cdot \bar{E} + \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

یا

$$-\nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}) = \bar{J} \cdot \bar{E} + \epsilon \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mu \bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$

از طرفی دیگر

$$\epsilon \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} \right)$$

و

$$\mu \bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu H^2}{2} \right)$$

بنابراین

$$-\nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}) = \bar{J} \cdot \bar{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right)$$

سرانجام، اگر روی حجم انتگرال بگیریم،

$$-\int_{\text{حجم}} \nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}) dv = \int_{\text{حجم}} \bar{J} \cdot \bar{E} dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{حجم}} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv$$

و از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، خواهیم داشت

(۱)

$$-\oint_S (\bar{E} \times \bar{H}) \cdot d\bar{S} = \int_{\text{حجم}} \bar{J} \cdot \bar{E} dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{حجم}} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv$$

انتگرال اول طرف راست مساوی مقدار کل توان اهمی (ولی لحظه‌ای) است که در این حجم مصرف شده است. انتگرال جمله دوم کل انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی و مغناطیسی است^۱. و مشتق جزئی نسبت به زمان معرف نرخ ازدیاد زمانی انرژی ذخیره شده در این حجم، یا توان لحظه‌ایست که انرژی ذخیره شده را افزایش می‌دهد، بنابراین مجموعه جملات طرف دوم معرف مقدار کل توانی است که به داخل حجم وارد می‌شود پس مقدار کل توانی که از آن خارج می‌شود مساوی است با:

$$\oint_S (\bar{E} \times \bar{H}) \cdot d\bar{S}$$

که در آن انتگرال‌گیری روی سطحی است که حجم مورد نظر را می‌پوشاند. حاصلضرب خارجی $\bar{E} \times \bar{H}$ به بردار پوینتینگ \mathcal{P} موسوم است،

$$\boxed{\mathcal{P} = \bar{E} \times \bar{H}} \quad (۲)$$

که به عنوان چگالی توان لحظه‌ای، برحسب وات بر متر مربع (W/m^2)، تعبیر می‌شود. این تعبیر بستگی به ملاحظات فلسفی دارد نظیر آنچه در مورد تعبیر $\sqrt{\epsilon} \bar{D} \cdot \bar{E}$ یا $\sqrt{\mu} \bar{B} \cdot \bar{H}$ به عنوان چگالی انرژی متذکر شدیم. ما به طور قطع، فقط می‌توانیم

۱. این همان رابطه انرژی میدان مغناطیسی است که از فصل ۹ در انتظار آن بودیم.

بگوئیم که انتگرال بردار پوینتینگ روی سطحی بسته مقدار کل توانی را که از آن خارج می‌شود به دست می‌دهد. ولی تعبیر چگالی توان، مخصوصاً در مورد میدانهای متغیر سینوسی، باعث گمراهی و اشتباه نخواهد بود. مسأله ۲۰ نشان می‌دهد که چگونه کاربرد بردار پوینتینگ در مورد میدانهای ثابت منجر به نتایج غیرمنتظری خواهد شد. جهت بردار پوینتینگ معرف جهت جریان توان لحظه‌ای در هر نقطه است، و بسیاری از ما، بردار Poynting را بردار Pointing (نشان دهنده جهت) تلقی می‌کنیم. این تشابه کلمات گرچه اتفاقی، ولی مفید است.

چون \mathcal{P} از حاصلضرب خارجی \vec{E} در \vec{H} به دست می‌آید، جهت جریان توان در هر نقطه بر هر دو بردار \vec{E} و \vec{H} عمود است. البته این مطلب با تجربه قبلی ما با موج مسطح یکنواخت توافق دارد، چون انتشار در جهت z + همواره با مؤلفه‌های E_x و H_y ارتباط داشت. به علاوه،

$$E_x \vec{a}_x \times H_y \vec{a}_y = \mathcal{P}_z \vec{a}_z$$

این میدانهای \vec{E} و \vec{H} در عایق کامل مطابق روابط زیرند.

$$E_x = E_{x_0} \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{E_{x_0}}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)$$

بنا بر این

$$\mathcal{P}_z = \frac{E_{x_0}^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z)$$

برای محاسبه چگالی متوسط توان نسبت به زمان روی یک دوره انتگرال گرفته، نتیجه را بر f تقسیم می‌کنیم، $T = 1/f$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{z,av} &= f \int_0^{1/f} \frac{E_{x_0}^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) dt \\ &= \frac{f}{2} \frac{E_{x_0}^2}{\eta} \int_0^{1/f} [1 + \cos(2\omega t - 2\beta z)] dt \\ &= \frac{f}{2} \frac{E_{x_0}^2}{\eta} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t - 2\beta z) \right]_0^{1/f} \end{aligned}$$

و

$$\boxed{\mathcal{P}_{z,av} = \frac{1}{2} \frac{E_{x_0}^2}{\eta}} \quad (3)$$

اگر به جای مقادیر حداکثر دامنه، مقادیر ریشه متوسط مربع را به کار می‌بریم، ضریب $1/2$ در رابطه فوق ظاهر نمی‌شود. بالاخره، توان متوسطی که از هر سطح دلخواه عمود بر محور z — ها عبور می‌کند مساویست با^۱

$$P_{z,av} = \frac{1}{2} \frac{E_{x_0}^2}{\eta} S$$

E_z و H_y در عایق‌های با تلفات دیگر از نظر زمانی همفاز نیستند و انتگرال‌گیری یکی دو قدم طولانی‌تر است. نتیجه عبارت است از

$$\mathcal{P}_{z,av} = \frac{1}{2} \frac{E_{x_0}^2}{\eta_m} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta \quad (4)$$

که در آن η به صورت قطبی بیان شده است

$$\eta = \eta_m \angle \theta_\eta$$

تمرین ۶.۱۱

مقدار متوسط توانی را که از سطح 50 cm^2 از صفحه $z=0$ عبور می‌کند پیدا کنید، در صورتی که موج مسطح یکنواختی داشته باشیم که دامنه آن 10 V/m و: (الف) محیط انتشار با $\epsilon_R = 2$ و $\mu_R = 8$ و $\sigma = 0$ مشخص شده باشد. (ب) $\eta = 100 + j50 \ \Omega$ باشد.

جوابها: $20, 332 \text{ W}$

۵.۱۱ انتشار در هادی خوب: اثر پوستی

آخرین مثال ما در مورد انتشار در محیط نامحدود، تحقیق خواص هادیهای خوب

۱. ما حرف P را برای توان و همچنین قطبی شدگی به کار می‌بریم. اگر در این کتاب هر دو آنها در یک رابطه ظاهر شوند، حتماً اشتباهی رخ داده است.

خواهد بود، وقتی موج مسطح یکنواختی در آنها برقرار باشد. به جای این که تصور کنیم منبع موج در داخل قطعه‌ای از مس قرار گرفته و موجی را بدرون آن می‌فرستند باید بیشتر به موجی توجه کنیم که بوسیله میدان الکترومغناطیسی موجود در عایقی همجوار با هادی، ایجاد شده است. خواهیم دید که انرژی باید در خارج هادی منتشر شود، چون تمام میدانهای متغیر با زمان در داخل هادی به سرعت ضعیف می‌شوند. هادی خوب دارای ضریب هدایت بالا و جریان هدایتی بزرگی است. بنابراین انرژی مربوط به موج در ضمن انتشار به علت وجود تلفات اهمی در تمامی مسیر آن، کاهش می‌یابد. در مبحث مربوط به تانژانت تلفات، دیدیم که نسبت بین چگالی جریان هدایتی و چگالی جریان جابجائی یک جسم مسای $\sigma/\omega\epsilon$ است. اگر یک هادی ناقص و بسامد (فرکانس) بالائی را به عنوان مثالی محافظه کارانه انتخاب کنیم، این نسبت برای نیکروم ($\sigma \doteq 10^6$) در بسامد (فرکانس) 100 MHz ، در حدود 2×10^8 خواهد بود. در این صورت داریم $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$ ، و باید بتوانیم روابط تقریبی را به طور رضایت بخشی برای محاسبه α و β و η این هادی خوب به کار بریم.

رابطه کلی ضریب انتشار عبارتست از

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

که بلافاصله می‌توان آن را ساده کرد

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

یا

$$\gamma = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

ولی

$$-j = 1 \angle -90^\circ$$

و

$$\sqrt{1 \angle -90^\circ} = 1 \angle -45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

بنابراین

$$\gamma = j \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} - j \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right) \sqrt{\omega \mu \sigma}$$

یا

$$\gamma = (j + 1) \sqrt{\pi f \mu \sigma} \quad (1)$$

در نتیجه

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} \quad (2)$$

ضرائب α و β صرف نظر از پارامترهای μ و σ هادی و نیز در صورتی که بسامد (فرکانس) میدان اعمال شده را در نظر بگیریم، با هم مساویند. اگر دوباره فقط يك مؤلفه E_x را در نظر بگیریم که در جهت z منتشر می‌شود، خواهیم داشت

$$E_x = E_{x_0} e^{-z\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu \sigma}) \quad (3)$$

این میدان داخلی هادی را می‌توانیم در سطح هادی به میدان خارجی مربوط سازیم. اگر ناحیه $z > 0$ معرف هادی خوب و ناحیه $z < 0$ عایق کامل باشد در سطح مرزی $z = 0$ رابطه (۳) به صورت:

$$E_x = E_{x_0} \cos \omega t \quad (z = 0)$$

خواهد بود که آن را منبع برقرارکننده میدانهای داخلی هادی تلقی می‌کنیم. چون جریان جا بجائی قابل اغماض است، داریم

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

و چگالی جریان هدایتی در هر نقطه داخلی هادی مستقیماً به \vec{E} بستگی دارد:

$$J_x = \sigma E_x = \sigma E_{x_0} e^{-z\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu \sigma}) \quad (4)$$

و لذا شکل J_x با E_x یکی است.

اطلاعات زیادی در روابط (۳) و (۴) نهفته است. ابتدا، اگر جمله نمائی منفی را در نظر بگیریم، ملاحظه می‌کنیم که چگالی جریان هدایتی و شدت میدان الکتریکی در اثر نفوذ به داخل هادی (و در اثر دور شدن از منبع) به طور نمائی تقلیل می‌یابند. در جمله نمائی (اکسپوناسیل) مساوی واحد است و در فاصله

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

به $e^{-1} = 0.368$ تقلیل می‌یابد. این فاصله را با δ نشان می‌دهیم و آن را عمق نفوذ یا عمق پوستی می‌نامیم،

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} \quad (5)$$

که پارامتر مهمی است برای توصیف خواص هادیها در معرض میدان الکترومغناطیسی. برای اینکه بتوانیم به حدود مقدار عمق پوستی پی ببریم مس را، بسا $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ } \Omega/\text{m}$ ، در چند بسامد (فرکانس) مختلف در نظر می‌گیریم. داریم

$$\delta_{\text{Cu}} = \frac{0.0661}{\sqrt{f}}$$

در بسامد (فرکانس) برق شهری 60 Hz ، $\delta_{\text{Cu}} = 8.753 \text{ mm}$ یا تقریباً $1/3 \text{ in}$ است. با توجه به اینکه چگالی توان دارای جمله $e^{-2\alpha z}$ است، ملاحظه می‌کنیم که برای هر فاصله 8.753 میلیمتری در مس چگالی توان با ضریب $0.135 = (0.368)^2$ کاهش می‌یابد. در یک بسامد (فرکانس) مایکروویوی 10000 MHz ، $\delta_{\text{Cu}} = 6.61 \times 10^{-4} \text{ mm}$ یا حدود یک هشتم طول موج نور مرئی است.

بنابراین می‌بینیم که هر چگالی جریان یا شدت میدانی که در سطح هادی خوب بر قرار شود در ضمن پیشرفت به داخل هادی به سرعت مستهلک می‌شود. انرژی الکترومغناطیسی در داخل هادی منتشر نمی‌شود بلکه در ناحیه‌ای که هادی را در بر گرفته حرکت می‌کند، به طوری که هادی فقط امواج را هدایت می‌کند. جریانهای برقرار شده در سطح هادی در جهتی عمود بر جهت چگالی جریان به طرف داخل هادی نفوذ می‌کنند و در اثر تلفات اهمی تضعیف می‌گردند. این افت توان قیمتی است که باید برای هدایت امواج به هادی پرداخت. انتشار هدایت شده را در فصل بعد با جزئیات بیشتری مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

فرض کنید تیغه‌ای مسی در یک کارخانه برق یا ایستگاه فرعی آن داشته باشیم که بخواهیم از آن جریانهای بزرگی را عبور دهیم. بنابراین ابعاد آن را $4 \text{ در } 4$ اینچ انتخاب می‌کنیم. با این ترتیب مقدار زیادی مس هدر رفته است چون میدانها در فاصله یک عمق پوستی حدود $1/3 \text{ in}$ ، به میزان زیادی تقلیل یافته‌اند. یک هادی

تو خالی که ضخامت دیواره‌های آن حدود $\frac{1}{4}$ in است طرح خیلی بهتری خواهد بود. گرچه در اینجا، نتایج مربوط به هادی مسطح بینهایت را در مورد یک هادی با ابعاد محدود بکار می‌بریم، ولی در چنین هادی محدودی نیز تضعیف میدان مشابه است.

عمق پوستی بی اندازه کوتاه در بسامدهای (فرکانسهای) مایکروویو نشان می‌دهد که فقط پوشش سطح هادی هدایت‌کننده موج مهم است. قطعه‌ای شیشه که روی آن پوششی نقره‌ای به ضخامت 1×10^{-5} in تبخیر شده باشد هادی بسیار خوبی در این بسامدها (فرکانسها) خواهد بود. حال، روابطی برای سرعت و طول موج در داخل هادی خوب به دست می‌آوریم. چون

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

است، از رابطه (۵) داریم،

$$\lambda = 2\pi\delta \quad (6)$$

و همچنین

$$U = f\lambda$$

بنا بر این

$$U = 2\pi f\delta = \omega\delta \quad (7)$$

برای مس در 60 Hz ، $\lambda = 5.36 \text{ cm}$ و $U = 3.32 \text{ m/s}$ یا تقریباً 0.72 mph اکثر ما می‌توانیم سریعتر از این بسادیم. البته، در فضای آزاد موج 60 Hz دارای طول موجی برابر 3110 میل است و با سرعت نور منتشر می‌شود. برای به دست آوردن H_y ، رابطه‌ای برای مقاومت ظاهری (امپدانس) ذاتی هادی خوب لازم است. از رابطه (۷) بخش 3.11 شروع می‌کنیم:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

چون $\sigma \gg \omega\epsilon$ است، داریم

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

که می‌توان آن را به صورت

$$\eta = \frac{\sqrt{2} \angle 45^\circ}{\sigma \delta} = \frac{1}{\sigma \delta} + j \frac{1}{\sigma \delta} \quad (۸)$$

نوشت. بنابراین اگر رابطه (۳) را بر حسب عمق پوستی بنویسیم،

$$E_x = E_{x_0} e^{-z/\delta} \cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right) \quad (۹)$$

آنگاه

$$H_y = \frac{\sigma \delta E_{x_0}}{\sqrt{2}} e^{-z/\delta} \cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (۱۰)$$

و می‌بینیم که در تمام نقاط مقدار بیشینه (ماکزیمم) شدت میدان مغناطیسی به اندازه یک هشتم دوره دیرتر از مقدار بیشینه (ماکزیمم) شدت میدان الکتریکی است. از روابط (۹) و (۱۰) می‌توان متوسط زمانی بردار پوینتینگ را با استفاده از رابطه (۴) بخش ۴.۱۱ به دست آورد،

$$\Phi_{z,av} = \frac{1}{2} \frac{\sigma \delta E_{x_0}^2}{\sqrt{2}} e^{-2z/\delta} \cos \frac{\pi}{4}$$

یا

$$\Phi_{z,av} = \frac{1}{4} \sigma \delta E_{x_0}^2 e^{-2z/\delta}$$

دوباره توجه می‌کنیم که در فاصله یک عمق پوستی چگالی توان به نسبت $e^{-2} = 0.135$ کاهش یافته است.

مقدار کل تلفات توان را در عرض $0 < y < b$ ، و طول $0 < x < L$ (در جهت جریان) می‌توان با محاسبه توانی که در چنین مساحتی از سطح خارجی هادی می‌گذرد به دست آورد،

$$\begin{aligned} P_{L,av} &= \int_0^b \int_0^L \left[\frac{1}{4} \sigma \delta E_{x_0}^2 e^{-2z/\delta} \right]_{z=0} dx dy \\ &= \frac{1}{4} \sigma \delta b L E_{x_0}^2 \end{aligned}$$

یا بر حسب چگالی جریان در سطح هادی، یعنی

$$J_{x_0} = \sigma E_{x_0}$$

داریم

$$P_{L,av} = \frac{1}{4} \frac{1}{\sigma} \delta b L J_{x_0}^2 \quad (11)$$

حال ببینیم اگر کل جریان در عرض b به طور یکنواخت، در یک عمق پوستی توزیع شده بود تلفات توان چه می بود. برای محاسبهٔ جریان کل از چگالی جریان تا عمق بینهایت هادی انتگرال می گیریم،

$$I = \int_0^\infty \int_0^b J_x dy dz$$

که در آن

$$J_x = J_{x_0} e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

یا، به صورت مختلط، به منظور ساده کردن انتگرال گیری،

$$\begin{aligned} J_{x_s} &= J_{x_0} e^{-z/\delta} e^{-jz/\delta} \\ &= J_{x_0} e^{-(1+j)z/\delta} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} I_s &= \int_0^\infty \int_0^b J_{x_0} e^{-(1+j)z/\delta} dy dz \\ &= J_{x_0} b e^{-(1+j)z/\delta} \left. \frac{-\delta}{1+j} \right]_0^\infty \\ &= \frac{J_{x_0} b \delta}{1+j} \end{aligned}$$

و

$$I = \frac{J_{x_0} b \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

اگر این جریان به طور یکنواخت در سطح مقطع b ، $0 < y < b$ ، $0 < z < \delta$ ،

توزیع شده باشد خواهیم داشت:

$$J' = \frac{J_{x_0}}{\sqrt{2}} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right)$$

تلفات اهمی توان در واحد حجم مساویست با $\vec{J} \cdot \vec{E}$ و بنابراین توان کل لحظه‌ای تلف شده در حجم مورد نظر عبارتست از:

$$P_L = \frac{1}{\delta} (J')^2 bL\delta = \frac{J_{x_0}^2}{4\sigma} bL\delta \cos^2 \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right)$$

حال متوسط زمانی تلفات توان را می‌توان به سهولت به دست آورد چون مقدار متوسط جملهٔ مجذور کسینوس مساوی $1/2$ است.

$$P_L = \frac{1}{4} \frac{1}{\sigma} J_{x_0}^2 bL\delta \quad (12)$$

مقایسهٔ (۱۱) و (۱۲) نشان می‌دهد که آنها برابرند. بنابراین توان متوسط تلف شده در یک هادی، که اثر پوستی در آن مشهود باشد، برابر توان متوسط تلف شده‌ایست که اگر جریان کل به طور یکنواخت در یک عمق پوستی توزیع شده بود، به دست می‌آید. برحسب مقاومت، می‌توانیم بگوئیم که مقاومت قطعه‌ای به عرض b و طول L یک تیغهٔ هادی با عمق بینهایت و اثر پوستی، برابر مقاومت تیغه‌ایست با مقطع مستطیلی به عرض b و طول L و ضخامت δ بی اثر پوستی، یعنی با توزیع یکنواخت جریان.

نتیجه‌گیری فوق را می‌توان برای یک هادی که مقطع آن استوانه‌ایست نیز، با خطای کمی، به کار برد، به شرطی که شعاع a خیلی بزرگتر از عمق پوستی باشد. بنابراین مقاومت را در بسامدهای (فرکانسهای) بالا، که اثر پوستی به خوبی مشهود است، می‌توان با در نظر گرفتن تیغه‌ای که عرض آن مساوی پیرامون $2\pi a$ و ضخامت آن δ باشد محاسبه کرد. بدین ترتیب

$$R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{L}{2\pi a\sigma\delta} \quad (13)$$

یک سیم مسی استوانه‌ای با شعاع ۱ mm و طول ۱ km، برای جریان مستقیم مقاومتی برابر

$$R_{dc} = \frac{10^3}{\pi \times 10^{-6} (\Delta r \times 10^7)} = 5048 \Omega$$

دارد. در ۱ MHz عمق پوستی مساوی ۱ mm است. بنابراین $a \ll \delta$ ، و مقاومت آن در ۱ MHz از رابطه (۱۳) به دست می‌آید

$$R = \frac{10^3}{2\pi \times 10^{-2} (\Delta r \times 10^7) (0.0661 \times 10^{-2})} = 4185 \Omega$$

تمرین ۷.۱۱

یک سیم استوانه‌ای را از جنس برنج در نظر بگیرید که حامل جریان کل ۲۰ A در بسامد (فرکانس) ۸ MHz است. (الف) عمق پوستی، (ب) مقاومت کل، (پ) کل توان متوسط تلف شده را پیدا کنید.

جوابها: 0.243Ω ، 0.1453 mm ، 487 W

۶.۱۱ انعکاس امواج مسطح یکنواخت

حال برای اینکه به مسائلی که جنبه عملی دارند بپردازیم می‌بایست توجه خود را به نواحی محدود معطوف کنیم. در این بخش پدیده انعکاس را، که در اثر تابش موج مسطح یکنواخت بر مرز دو ماده مختلف اتفاق می‌افتد، بررسی خواهیم کرد. ما روابطی برای موجی که از مرز منعکس می‌شود و همچنین برای موجی که از یک ناحیه به ناحیه دیگر منتقل می‌شود به دست خواهیم آورد. این نتایج را می‌توان مستقیماً برای مسائل انطباق در خطوط انتقال معمولی، و نیز برای موج برها یا انواع غیرعادی‌تر دیگر وسایل انتقال به کار برد.

دوباره فرض می‌کنیم که فقط یک مؤلفه منفرد شدت میدان الکتریکی داریم. ناحیه ۱ $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ را در $z < 0$ و ناحیه ۲ $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$ را در $z > 0$ انتخاب می‌کنیم ابتدا فرض می‌کنیم موجی در ناحیه ۱ برقرار شده باشد که در جهت $z +$ منتشر می‌شود،

$$E^+_{zs1} = E^+_{zs0} e^{-\gamma_1 z} \quad (1)$$

اندیس ۱ معرف ناحیه و علامت $+$ در بالای E نشان دهنده موجی است که در جهت مثبت منتشر می‌شود. میدان مغناطیسی مربوط به \vec{E}^+_{z1} عبارتست از

$$R_{dc} = \frac{10^3}{\pi \times 10^{-6} (578 \times 10^7)} = 5748 \Omega$$

دارد. در ۱ MHz عمق پوستی مساوی ۰۰۶۶۱ mm است. بنا بر این $\delta \ll a$ ، و مقاومت آن در ۱ MHz از رابطه (۱۳) به دست می آید

$$R = \frac{10^3}{2\pi \times 10^{-3} (578 \times 10^7) (0.0661 \times 10^{-3})} = 415 \Omega$$

تمرین ۷.۱۱

یک سیم استوانه‌ای را از جنس برنج در نظر بگیرید که حامل جریان کل ۲۰ A در بسامد (فرکانس) ۸ MHz است. (الف) عمق پوستی، (ب) مقاومت کل، (پ) کل توان متوسط تلف شده را پیدا کنید.

جوابها: ۰.۲۳۳ Ω، ۰.۲۳۳ W، ۰.۱۴۵۳ mm

۶.۱۱ انعکاس امواج مسطح یکنواخت

حال برای اینکه به مسائلی که جنبه عملی دارند پردازیم می بایست توجه خود را به نواحی محدود معطوف کنیم. در این بخش پدیده انعکاس را، که در اثر تابش موج مسطح یکنواخت بر مرز دوماده مختلف اتفاق می افتد، بررسی خواهیم کرد. ما روابطی برای موجی که از مرز منعکس می شود و همچنین برای موجی که از یک ناحیه به ناحیه دیگر منتقل می شود به دست خواهیم آورد. این نتایج را می توان مستقیماً برای مسائل انطباق در خطوط انتقال معمولی، و نیز برای موج برهه یا انواع غیرعادی تر دیگر وسایل انتقال به کار برد.

دوباره فرض می کنیم که فقط یک مؤلفه منفرد شدت میدان الکتریکی داریم.

ناحیه ۱ $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ را در $z < 0$ و ناحیه ۲ $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$ را در $z > 0$ انتخاب می کنیم ابتدا فرض می کنیم موجی در ناحیه ۱ برقرار شده باشد که در جهت $z +$ منتشر می شود،

$$E_{z1}^+ = E_{z10}^+ e^{-\gamma_1 z} \quad (1)$$

اندیس ۱ معرف ناحیه و علامت $+$ در بالای E نشان دهنده موجی است که در جهت مثبت منتشر می شود. میدان مغناطیسی مربوط به E_{z1}^+ عبارتست از

$$H_{y\delta 1}^+ = \frac{1}{\eta_1} E_{x1_0}^+ e^{-\gamma_1 z} \quad (2)$$

این موج مسطح یکنواخت که در ناحیه ۱ به طرف صفحه مرز $z = 0$ در حال حرکت است به موج تابیده موسوم است. چون جهت انتشار موج تابش عمود بر صفحه مرز است، این حالت را تابش عمودی می نامیم.

حال متوجه می شویم که مقداری انرژی از طریق صفحه مرز به داخل ناحیه ۲ نفوذ کرده در آن موجی ایجاد می کند که در جهت $z +$ منتشر می شود،

$$E_{x\delta 2}^+ = E_{x2_0}^+ e^{-\gamma_2 z} \quad (3)$$

$$H_{y\delta 2}^+ = \frac{1}{\eta_2} E_{x2_0}^+ e^{-\gamma_2 z} \quad (4)$$

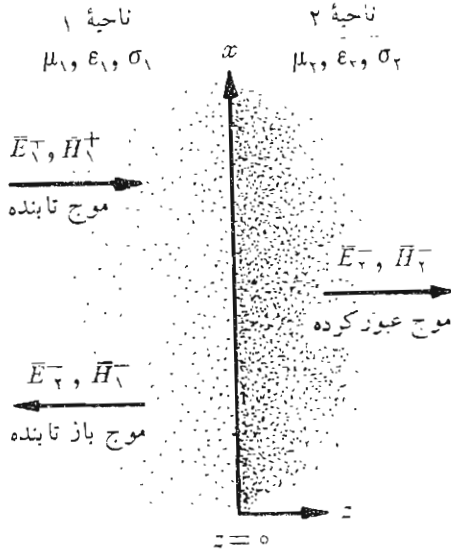
این موج که از صفحه مرز به داخل ناحیه ۲ نفوذ می کند به موج عبور کرده موسوم است. توجه کنید که ضریب انتشار γ_2 و مقاومت ظاهری ذاتی η_2 متفاوتی به کار رفته است.

حال باید سعی کنیم شرایط مرزی را در $z = 0$ با این میدانها تأمین کنیم. E_x میدانی است مماسی و بنابراین میدانهای \vec{E} نواحی ۱ و ۲ باید در $z = 0$ مساوی باشند. $z = 0$ را در (۱) و (۳) قرار می دهیم این مستلزم آنست که مرز پیوسته باشد (در محیطهای حقیقی جریانهای سطحی وجود ندارد). ولی وقتی $z = 0$ را در (۲) و (۴) قرار می دهیم می بینیم که می بایست $E_{x1_0}^+ / \eta_1 = E_{x2_0}^+ / \eta_2$. چون $E_{x1_0}^+ = E_{x2_0}^+$ پس $\eta_1 = \eta_2$. ولی این حالت بسیار خاصی است و در حالت کلی نمی توان چنین فرضی کرد، و بنابراین فقط با يك موج تابش و يك موج عبور کرده نمی توان شرایط مرزی را تأمین کرد. موج دیگری هم لازم است که از سرحد به طرف ناحیه ۱ منتشر شود. این موج، که در شکل ۴.۱۱ نشان داده شده است به موج بازتابیده موسوم است،

$$E_{x\delta 1}^- = E_{x1_0}^- e^{\gamma_1 z} \quad (5)$$

$$H_{y\delta 1}^- = -\frac{E_{x1_0}^-}{\eta_1} e^{\gamma_1 z} \quad (6)$$

که در آن $E_{x1_0}^-$ ممکن است کمیتی مختلط باشد. نظر به اینکه این موج در جهت



شکل ۴۰۱۱ موج E_1^+ که بر صفحه‌ای مرزی می‌تابد امواج بازتابیده E_1^- و عبور کرده E_2^- را ایجاد می‌کند.

$z -$ منتشر می‌شود $E_{zs1}^- = -\eta_1 H_{ys1}^-$ ، چون بردار پوینتینگ نشان می‌دهد که $\bar{E}_1^- \times \bar{H}_1^-$ باید در جهت $-\bar{a}_z$ باشد.

حال شرایط مرزی به آسانی تسامین می‌شود و در ضمن این کار می‌توان مقادیر امواج عبور کرده و بازتابیده را برحسب E_{zs1}^+ به دست آورد. شدت میدان الکتریکی کل در $z = 0$ پیوسته است،

$$E_{zs1} = E_{zs2} \quad (z = 0)$$

یا

$$E_{zs1}^+ + E_{zs1}^- = E_{zs2}^+ \quad (z = 0)$$

بنابراین

$$E_{zs1}^+ + E_{zs1}^- = E_{zs2}^+ \quad (V)$$

بعلاوه ،

$$H_{ys1} = \bar{H}_{ys2} \quad (z = 0)$$

یا

$$H_{ys1}^+ + H_{ys1}^- = H_{ys2}^+ \quad (z = 0)$$

بنابراین

$$\frac{E_{x10}^+}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^-}{\eta_1} = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2} \quad (۸)$$

اگر رابطه (۸) را برای E_{x20}^+ حل کرده جواب را در (۷) بگذاریم، خواهیم داشت

$$E_{x10}^+ + E_{x10}^- = \frac{\eta_2}{\eta_1} E_{x10}^+ - \frac{\eta_2}{\eta_1} E_{x10}^-$$

یا

$$E_{x10}^- = E_{x10}^+ \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

نسبت دامنه‌های موج بازتابیده و موج تابیده به ضریب بازتاب موسوم است و با Γ (گاما) نشان داده می‌شود،

$$\Gamma = \frac{E_{x10}^-}{E_{x10}^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (۹)$$

ضریب بازتاب ممکن است مختلط باشد که در این صورت موج بازتابیده تغییر فاز خواهد داشت.

دامنه شدت میدان الکتریکی عبور کرده از ترکیب روابط (۹) و (۷) به دست می‌آید.

$$\frac{E_{x20}^+}{E_{x10}^+} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad (۱۰)$$

که آن را ضریب عبور می‌نامیم، ولی کاربرد آن، آنقدر نیست که لازم باشد آن را با علامت خاصی نشان دهیم.

حال ببینیم چگونه می توان این نتایج را در مورد چند حالت خاص به کار برد. ابتدا ناحیه ۱ را عایق کامل و ناحیه ۲ را هادی کامل فرض می کنیم. در این صورت، چون $\sigma_2 = 0$ بینهایت است.

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} = 0$$

و از (۱۰)،

$$E_{x20}^+ = 0$$

هیچ میدانی که نسبت به زمان متغیر باشد نمی تواند در داخل هادی کامل وجود داشته باشد. تعبیر دیگری برای این مطلب اینست که بگوئیم عمق پوستی مساوی صفر است. چون $\eta_2 = 0$ رابطه (۹) نشان می دهد که

$$\Gamma = -1$$

و

$$E_{x10}^- = -E_{x10}^+$$

دامنه موج بازتابیده مساوی دامنه موج تابیده و علامتش مخالف آنست. تمامی انرژی تابیده به وسیله هادی کامل منعکس شده است و میدان \vec{E} کل در ناحیه ۱ عبارتست از:

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- \\ &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

که در آن، برای عایق کامل داریم $\beta_1 = 0 + j\beta_1$. این جملات را می توان ترکیب و ساده کرد،

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= (e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}) E_{x10}^+ \\ &= -j2 \sin \beta_1 z E_{x10}^+ \end{aligned}$$

که با ضرب کردن در $e^{j\omega t}$ و محاسبه قسمت حقیقی، می توان شکل مثلثاتی آن را به دست آورد.

$$\boxed{E_{x1} = 2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \sin \omega t} \quad (11)$$

موج حاصل در ناحیه ۱ موج سیاری نیست، گر چه آن را از ترکیب دو موج با دامنه‌های مساوی که در جهات مخالفی منتشر می‌شدند به دست آوردیم. این موج را با موج تابیده مقایسه کنیم،

$$E_{x_1}^+ = E_{x_{10}}^+ \cos(\omega t - \beta_1 z) \quad (12)$$

در اینجا جمله $\omega t - \beta_1 z$ یا $\omega(t - z/U_1)$ را می‌بینیم که معرف موجی است که با سرعت $U_1 = \omega/\beta_1$ در جهت z منتشر می‌شود. ولی در (۱۱) جملات مربوط به زمان و فاصله جملاتی مثلثاتی مختلفی هستند. در تمام صفحاتی که $\beta_1 z = n\pi$ ، E_{z_1} برای تمام زمانها مساوی صفر است. بعلاوه در زمانهایی که $\omega t = n\pi$ ، E_{z_1} در تمامی نقاط صفر است. میدانی به صورت (۱۱) به موج ساکن موسوم است. صفحاتی که در آن $E_{z_1} = 0$ است در محل‌های زیر قرار دارند

$$\beta_1 z = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

یعنی

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = n\pi$$

و

$$z = n \frac{\lambda_1}{2}$$

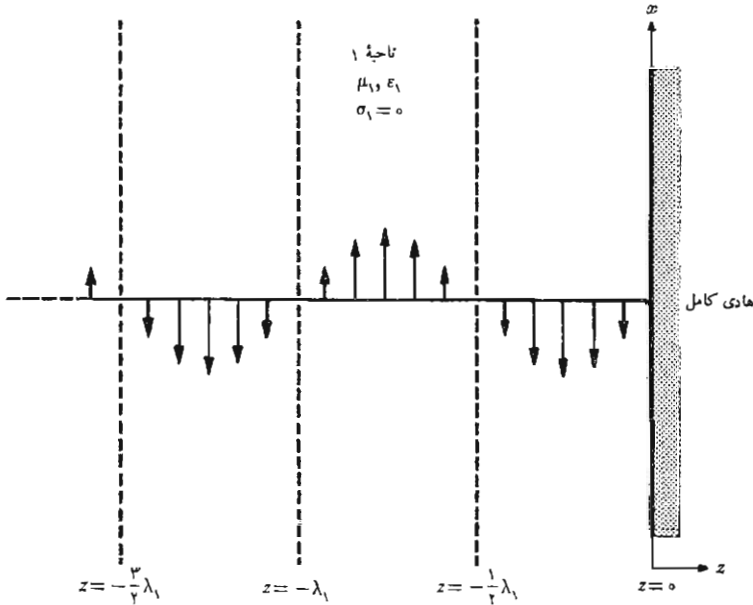
یعنی، مطابق شکل ۵.۱۱، در مرز $z = 0$ و به فاصله هر مضربی از نصف طول موج از آن در ناحیه $0 < z$ ، داریم $E_{x_1} = 0$.

چون $E_{x_1}^+ = H_{y_1}^+$ و $E_{x_1}^- = -H_{y_1}^-$ میدان مغناطیسی عبارتست از

$$H_{y_1} = \frac{E_{x_{10}}^+}{\eta_1} (e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z})$$

یا

$$H_{y_1} = 2 \frac{E_{x_{10}}^+}{\eta_1} \cos \beta_1 z \cos \omega t \quad (13)$$



شکل ۵.۱۱ مقادیر لحظه‌ای میدان کل E_{x1} در $t = 0$ نشان داده شده است. برای تمام مقادیر زمان، در فاصله مضاربی از نصف طول موج از سطح هادی، $E_{x1} = 0$ است.

این هم موجی است ساکن، ولی مقادیر بیشینه (ماکزیمم) آن در محل‌هایی است که در آنها $E_{x1} = 0$ است. و همچنین این موج در تمام نقاط با E_{x1} اختلاف فاز 90° دارد. بنابراین در هیچ جهتی، توان متوسطی منتقل نمی‌شود.

حال عایق‌های کاملی را در هر دو ناحیه ۱ و ۲ فرض می‌کنیم. η_1 و η_2 هر دو کمیات حقیقی مثبت‌اند و $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. با استفاده از رابطه (۹) می‌توانیم ضریب بازتاب را محاسبه کنیم و E_{x1}^- را بر حسب دامنه تابش E_{x1}^+ به دست آوریم. سپس با در دست داشتن E_{x1}^+ و E_{x1}^- ، H_{y1}^+ و H_{y1}^- را به دست می‌آوریم. در ناحیه ۲، E_{x2}^+ از رابطه (۱۰) به دست می‌آید، و این کمیت به نوبه خود H_{y2}^+ را تعیین می‌کند. با انتخاب

$$\eta_1 = 300 \ \Omega$$

$$\eta_2 = 100 \ \Omega$$

$$E^+_{x1_0} = 100 \ \text{V/m}$$

داریم

$$\Gamma = \frac{100 - 300}{100 + 300} = -0.5$$

$$E^-_{x1_0} = -50 \ \text{V/m}$$

شدت میدانهای مغناطیسی عبارتند از

$$H^+_{y1_0} = \frac{100}{300} = 0.333 \ \text{A/m}$$

$$H^-_{y1_0} = -\frac{-50}{300} = 0.167 \ \text{A/m}$$

چگالی توان متوسط تأییده عبارتست از

$$P^+_{1,av} = \frac{1}{2} E^+_{x1_0} H^+_{y1_0} = 16.67 \ \text{W/m}^2$$

در حالی که

$$P^-_{1,av} = -\frac{1}{2} E^-_{x1_0} H^-_{y1_0} = 4.17 \ \text{W/m}^2$$

در ناحیه ۲

$$E^+_{x2_0} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E^+_{x1_0} = 50 \ \text{V/m}$$

و

$$H^+_{y2_0} = \frac{50}{100} = 0.500 \ \text{A/m}$$

بنابراین

$$P^+_{2,av} = \frac{1}{2} E^+_{x2_0} H^+_{y2_0} = 12.5 \ \text{W/m}^2$$

توجه کنید که انرژی ابقاء شده است

$$P^+_{\perp,av} = P^-_{\perp,av} + P^+_{\parallel,av}$$

رابطه بین توانهای تابیده، و بازتابیده و عبور کرده را باید با رابطه‌ای که پیوستگی مؤلفه مماسی شدت میدان الکتریکی را در سطح مرزی بیان می‌کند مقایسه کرد،

$$E^+_{x1_0} + E^-_{x1_0} = E^+_{x2_0}$$

امواج تابیده و بازتابیده ناحیه ۱ را می‌توان ترکیب کرده میدان الکتریکی کل را در آنجا به دست آورد ولی این کار را به بخش بعد موکول می‌کنیم.

تمرین ۸.۱۱

موج مسطح یکنواختی از هوا بر صفحه‌ای شیشه‌ای ($\epsilon_R = 5$) در $z = 0$ می‌تابد. اگر موج تابیده $E^+_{x1} = 1000 \cos(10^8 \pi t - \beta z)$ V/m (الف) β ، (ب) H^+_{y1} ، (پ) Γ ، (ت) E^-_{x1} ، (ث) E^+_{x2} ، (ج) $P^+_{\parallel,av}$ را پیدا کنید.

جوابها: $2.965 \cos(10^8 \pi t - \pi z/3)$ A/m، $\pi/3$ rad/m
 -0.382 ، $-382 \cos(10^8 \pi t + \pi z/3)$ V/m
 0.1133 W/m²، $618 \cos(10^8 \pi t - 2.34z)$ V/m

۷.۱۱ نسبت موج ساکن

یکی از اندازه‌گیری‌هایی که به سهولت در وسایل انتقال انجام پذیر است عبارتست از اندازه‌گیری دامنه نسبی شدت میدان الکتریکی و مغناطیسی به وسیله یک گمانه زن (پروب^۱). یک حلقه کوچک کویلاژ، دامنه شدت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد در حالی که هادی داخلی یک کابل هم محور که اندکی بلندتر باشد، میدان الکتریکی را گمانه خواهد زد. هر دو وسیله روی بسامد (فرکانس) کار تنظیم می‌شوند تا حساسیت آنها بیشتر شود. جریان خروجی گمانه یکسو شده، مستقیماً به یک میکروآمپر متر متصل می‌گردد، یا می‌توان آنرا به یک ولت‌متر الکترونی یا تقویت‌کننده مخصوص وصل کرد. مقدار انحراف عقربه دستگاه متناسب است با دامنه میدان سینوسی متغیر با زمان در محلی که گمانه در آن قرار دارد.

وقتی موج مسطح یکنواختی در ناحیه‌ای در حال انتشار باشد، گمانه در تمام

۱. معنی لغوی پروب «آزمایش‌کننده» است و این اصطلاح در میدانها و خطوط انتقال برای آنتن کوچکی (به صورت میله یا حلقه) که از میدانها نمونه برداری می‌کند و آنها را اندازه می‌گیرد، به کار می‌رود. مترجم.

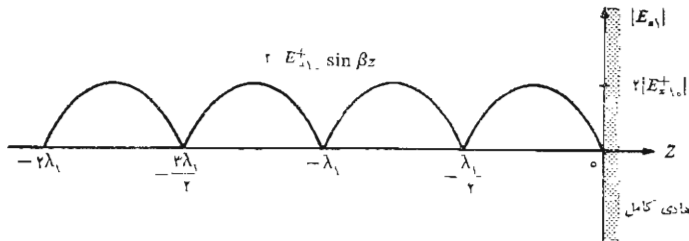
نقاط يك مقدار ثابت را نشان خواهد داد. البته، میدانهای لحظه‌ای، که توسط گمانه نمونه برداری می‌شوند، در نقاط $z = z_1$ و $z = z_2$ به اندازه $\beta(z_2 - z_1)$ rad اختلاف فاز خواهند داشت ولی گمانه زن نسبت به فاز میدان حساس نیست. ولتاژهایی که دارای دامنه‌های مساوی باشند علامت مشخص يك موج سیار است.

وقتی موج متحرکی از سطح هادی کامل منعکس می‌شود، میدان کل به صورت موج ایستاده است و خروجی گمانه زن ولتاژ وقتی در فواصلی که مضارب صحیحی از نصف طول موج از سطح منعکس کننده باشد قرار گیرد، صفر خواهد بود. در اثر تغییر محل گمانه زن (پروب)، خروجی آن به صورت $|\sin \beta z|$ تغییر می‌کند، که در آن z معرف فاصله از هادی است. این تغییر دامنه سینوسی شکل که در شکل ۶.۱۱ نشان داده شده است موج ساکن را مشخص می‌کند.

حالت پیچیده‌تر زمانی است که موج بازتابیده نه صفر باشد، نه صد در صد برابر موج تابیده و مقداری انرژی به ناحیه دوم منتقل شده و مقداری از آن منعکس گردد. بنا بر این ناحیه ۱ شامل میدانی است مرکب از موج سیار و موج ساکن. معمولاً چنین میدانی نیز به عنوان موج ساکن تلقی می‌شود، گرچه موج متحرکی نیز موجود است. خواهیم دید که دامنه این میدان در هیچ نقطه، به ازای تمام مقادیر زمان، صفر نیست و میزان تقسیم میدان به دو موج سیار و موج ساکن حقیقی یا نسبت ماکزیمم دامنه به می‌نیمم دامنه اندازه‌گیری شده به وسیله گمانه بیان می‌شود. با استفاده از میدانهایی که در بخش قبل بررسی شده، شدت میدان الکتریکی امواج تابیده و بازتابیده را ترکیب می‌کنیم.

$$E_{z_1} = E_{z_1}^+ + E_{z_1}^-$$

میدان E_{z_1} به صورت تابعی سینوسی از z است (معمولاً با زاویه فاز غیر صفر)، و به



شکل ۶.۱۱ موج ولتاژ ساکن ایجاد شده در يك محیط بی‌تلفات در اثر انعکاس از يك هادی کامل به صورت $|\sin \beta z|$ تغییر می‌کند.

نحوی که هنوز معلوم نیست، بر حسب z تغییر می کند. ما تمام مقادیر ممکن z را برای تعیین دامنه‌های بیشینه (ماکزیمم) و کمینه (مینیمم) و همچنین نسبت آنها، بررسی خواهیم کرد. این نسبت را نسبت هوج ساکن نامیده آن را با γ نشان خواهیم داد. حال به جزئیات این کار پردازیم. حالتی را در نظر می گیریم که محیط ۱ عایق کامل است، یعنی $\alpha_1 = 0$ ، ولی محیط ۲ ممکن است هر ماده دلخواهی باشد. داریم

$$E_{xs1}^+ = E_{xs1_0}^+ e^{-j\beta_1 z}$$

$$E_{xs1}^- = \Gamma E_{xs1_0}^+ e^{j\beta_1 z}$$

که در آن

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

η_1 حقیقی و مثبت است ولی η_2 ممکن است مختلط باشد. بنا براین Γ می تواند مختلط باشد و این امکان را با نوشتن آن به صورت

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\varphi}$$

نشان می دهیم. اگر ناحیه ۲ هادی کامل باشد، $\varphi = \pi$ و اگر η_2 حقیقی و از η_1 کمتر باشد، φ همچنان مساوی π است و اگر η_2 حقیقی و از η_1 بزرگتر باشد φ مساوی صفر است. میدان کل ناحیه ۱ عبارتست از

$$E_{xs1} = (e^{-j\beta_1 z} + |\Gamma| e^{j(\beta_1 z + \varphi)}) E_{xs1_0}^+ \quad (1)$$

می خواهیم مقادیر بیشینه (ماکزیمم) و کمینه (مینیمم) کمیت مختلط داخل پرانتز بزرگتر را به دست آوریم. هر گاه دو جمله داخل پرانتز هم فاز باشند، قطعاً بیشینه‌ای (ماکزیمی) خواهیم داشت، یعنی

$$E_{xs1, \max} = (1 + |\Gamma|) E_{xs1_0}^+ \quad (2)$$

و این در محلی است که

$$-\beta_1 z = \beta_1 z + \varphi + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

یعنی

$$-\beta_1 z_{\max} = \frac{\varphi}{\gamma} + n\pi \quad (3)$$

توجه داشته باشد که بیشینه (ماکزیمم) ولتژ، اگر $\varphi = 0$ در صفحه مرز است ($z = 0$).
بعلاوه، φ وقتی مساوی صفر است که Γ حقیقی و مثبت باشد و آنهم در صورتی است
که η_1 و η_2 حقیقی و $\eta_2 > \eta_1$ بنابراین هرگاه مقاومت ظاهری ذاتی ناحیه ۲
بزرگتر از ناحیه ۱ و هر دو آنها حقیقی باشند ولتاژ بیشینه‌ای (ماکزیممی) در سطح
مرز خواهیم داشت.

برای هادی کامل $\varphi = \pi$ و بیشینه‌ها (ماکزیممها)، همانطوری که قبلاً
دیدیم، در $-\beta_1 z = \pi/2, 3\pi/2, \dots$ و غیره قرار دارند. کمینه‌ها (مینیمها) به ازاء
اختلاف فاز 180° بین دو جمله داخل پرانتز بزرگتر به دست می‌آیند، یعنی

$$E_{z=0, \min} = (1 - |\Gamma|) E_{z=0, \max} \quad (4)$$

و این در محلهایی است که داشته باشیم

$$-\beta_1 z = \beta_1 z + \varphi + \pi + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

یا

$$-\beta_1 z_{\min} = \frac{\varphi}{\gamma} + n\pi + \frac{\pi}{\gamma} \quad (5)$$

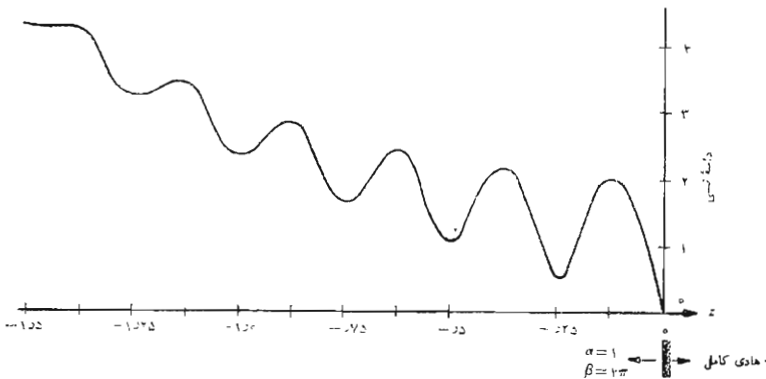
کمینه‌ها (مینیمها) به فاصله مضاربی از نصف طول موج قرار دارند و برای هادی
کامل اولین کمینه (مینیم) به‌ازاء $-\beta_1 z = 0$ یا در صفحه هادی است. هرگاه
 $\varphi = \pi$ باشد کمینه (مینیم) ولتاژی در $z = 0$ خواهیم داشت و این در صورتی
است که $\eta_2 > \eta_1$ و هر دو حقیقی باشند.
نسبت بین دامنه‌های بیشینه (ماکزیمم) و کمینه (مینیم) عبارتست از

$$s = \frac{E_{z=0, \max}}{E_{z=0, \min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (6)$$

چون $|\Gamma| \leq 1$ است s باید مثبت و بزرگتر از واحد باشد. اگر $\Gamma = 1$ ، دامنه
موج بازتابیده مساوی دامنه موج تابیده است و تمامی انرژی تابش منعکس می‌گردد

و δ بینهایت است. صفحاتی را به فواصل مضاربی از $\lambda_1/2$ می‌توان پیدا کرد که در آنها، به‌ازاء تمام مقادیر z ، E_{x1} صفر است، در وسط راه بین این صفحات، E_{x1} دارای دامنه‌ای ماکزیمم و مساوی دو برابر دامنه موج تابیده است. اگر $\eta_2 = \eta_1$ ، آنگاه $\Gamma = 0$ و انرژی منعکس نمی‌شود و $\delta = 1$ است یعنی دامنه‌های بیشینه (ماکزیمم) و کمینه (مینیم) مساوی‌اند. اگر نصف توان تابیده منعکس شود $|\Gamma|^2 = 0.707$ و $|\Gamma| = 0.843$.

حال فرض کنیم ناحیه ۱ از جنس ماده‌ای با تلفات باشد که برای آن α_1 صفر نیست. موج تابیده‌ای که از طرف چپ می‌آید، در ضمن انتشار در جهت $z +$ به صورت نمایی ضعیف می‌شود، موج بازتابیده نیز در ضمن انتشار در جهت $z -$ کاهش می‌یابد و بالاخره دامنه آن در مقایسه با دامنه موج تابیده ناچیز می‌گردد. بدین ترتیب در نزدیکی سطح بازتابنده بیشینه‌ها (ماکزیمم) و کمینه‌های (مینیمهای) قابل تشخیصی مشاهده می‌گردند که به تدریج، در فواصل دورتر، اختلاف بین آنها کمتر می‌شود. شکل ۷.۱۱ تغییرات E_{x1} را وقتی ناحیه ۲ هادی کامل و ضریب انتشار ناحیه ۱، $\gamma_1 = 1 + j4\pi$ باشد نشان می‌دهد. باید توجه داشت که دامنه هیچ یک از بیشینه‌ها (ماکزیممها) با دامنه بیشینه دیگر مساوی نیست و کمینه‌های (مینیمها) پایی نیز همینطور. نسبت موج ساکن تسایع فاصله است و برای حالات نشان داده شده نمی‌توان آن را صریحاً تعریف کرد، مگر در مواردی که محل اندازه‌گیری δ مشخص شده باشد، توصیف رفتار موج بر حسب ضریب بازتاب و ضریب تضعیف اطلاعات مفیدتری را به دست می‌دهد.



شکل ۷.۱۱ اثر موج بازتابیده در محیط با تلفات محو می‌گردد.

گرچه حالت نشان داده شده در شکل ۷.۱۱ این اثر را به انتها درجه نشان می‌دهد، باید توجه داشت که در عمل خط انتقال به راستی بی تلفات وجود ندارد و نسبت امواج ساکن همیشه تابع فاصله از بار است. وقتی γ معنی دارد که مقدار آن در ناحیه مورد نظر تغییرات قابل ملاحظه‌ای نداشته باشد.

دوباره، اگر توجه خود را به محیط بی تلفات محدود کنیم، می‌توانیم نسبت بین شدت میدانهای الکتریکی و مغناطیسی کل را به دست آوریم. برای موج سیار این نسبت مساوی $\eta_1 \pm$ است، که علامت آن به جهت حرکت موج بستگی دارد. از طرفی دیگر انعکاس از هادی کامل نشان می‌دهد که E_{xs} یا H_{ys} می‌توانند در نواحی خاصی مساوی صفر باشند و بنابراین نسبت آنها بین صفر و بینهایت متغیر خواهد بود. در $z = -L$ میدانهای کل عبارتند از

$$E_{xs} = (e^{j\beta_1 L} + \Gamma e^{-j\beta_1 L}) E_{x1}^+$$

$$H_{ys} = (e^{j\beta_1 L} - \Gamma e^{-j\beta_1 L}) \frac{E_{x1}^+}{\eta_1}$$

و نسبت بین آنها را مقاومت ظاهری ورودی ذاتی η_{in} می‌نامیم،

$$\eta_{in} = \left. \frac{E_{xs}}{H_{ys}} \right|_{z=-L} = \eta_{in} \frac{e^{j\beta_1 L} + \Gamma e^{-j\beta_1 L}}{e^{j\beta_1 L} - \Gamma e^{-j\beta_1 L}}$$

با قرار دادن $\Gamma = (\eta_r - \eta_1) / (\eta_r + \eta_1)$ در این رابطه و استفاده از اتحاد اوایلر، داریم

$$\eta_{in} = \frac{(\eta_r + \eta_1)(\cos \beta_1 L + j \sin \beta_1 L) + (\eta_r - \eta_1)(\cos \beta_1 L - j \sin \beta_1 L)}{\eta_1 (\eta_r + \eta_1)(\cos \beta_1 L + j \sin \beta_1 L) - (\eta_r - \eta_1)(\cos \beta_1 L - j \sin \beta_1 L)}$$

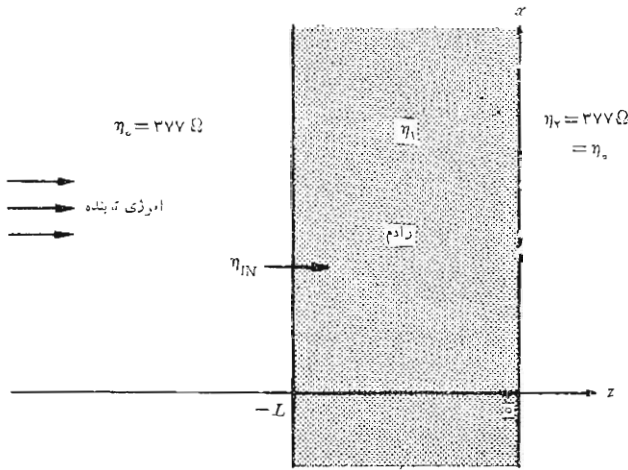
که بسهولت می‌توان آن را ساده کرده به صورت زیر نوشت

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_r + j\eta_1 \tan \beta_1 L}{\eta_1 + j\eta_r \tan \beta_1 L} \quad (7)$$

وقتی η_r یا η_1 مساوی باشند η_{in} نیز با آن مساویست و انعکاسی وجود ندارد و می‌گوییم دستگاه انتقال منطبق است. اگر $\eta_r = 0$ باشد (هادی کامل)

توجه کنید که مقاومت ظاهری ورودی در این حالت به ازاء $\eta_{in} = j\eta_1 \tan \beta_1 L$. همچنین، در جاهائی که $E_{xs} = 0$ یا $\beta_1 L = n\pi$ مساوی $H_{ys} = 0$ بینهایت است.

در فصل آینده رابطه (۷) را، به شکل مناسب، برای خطوط انتقال به کار خواهیم برد، ولی این فصل مربوط به امواج مسطح را با بررسی طرحی برای يك پنجره شفاف برای رادار، خاتمه می دهیم. این مسأله بدین جهت پیش می آید که اغلب لازم است آنتنهای را برای حفاظت از عوامل جوی به وسیله پوششها یا گنبدهای مخصوص (معروف به گنبد رادار) بپوشانیم. فرض می کنیم مطابق شکل ۸.۱۱ آنتن در محلی در طرف چپ خود در فضای آزاد قرار داشته باشد، $z < -L$. ناحیه ۱ بین $z = -L$ و $z = 0$ قرار دارد که در آن تیغه ای از جنس عایق کامل قرار می دهیم و سعی می کنیم ضخامت آن را حتی المقدور کمتر انتخاب کنیم تا فرض ما درباره تلفات صفر صادق باشد. در طرف راست یعنی ناحیه ۲، $z > 0$ ، ناحیه فضای آزاد است که علامت رادار به آنجا فرستاده می شود. برای اینکه از بازتاب توان به عقب و به طرف آنتن جلوگیری شود، یا برای اینکه آنتن را با فضای خارج انطباق دهیم، $\eta_{in} = 377$ انتخاب می شود. چون $\eta_0 = 377$ است،



شکل ۸.۱۱ برای اینکه موج تابیده به فضای آزاد در انتها الیه طرف راست منطبق گردد، باید با انتخاب مناسب η_1 و L ، η_{in} را برابر η_0 قرار دهیم.

1. Radome

$$\eta_{ni} = \eta_1 \frac{377 + j\eta_1 \tan \beta_1 L}{\eta_1 + j377 \tan \beta_1 L}$$

که بعد از ضرب کردن، نتیجه می‌شود

$$j377^2 \tan \beta_1 L = j\eta_1^2 \tan \beta_1 L$$

چون برای کلیه مواد غیر مغناطیسی $377 < \eta_1$ ، تساوی فوق را به سهولت می‌توان با انتخاب $\beta_1 L = n\pi$ تأمین کرد. نازکترین دیواره گنبد رادار به‌ازاء $\beta_1 L = \pi$ ، یا $L = \lambda_1 / 2$ به دست می‌آید، بنا براین اگر بسامد (فرکانس) کار 10000 MHz باشد می‌توان پلاستیکی سبک و کم تلفاتی را که برای آن $\epsilon_{R1} = 2.25$ است انتخاب کرده از ضخامت،

$$L = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{U_1}{2f_1} = \frac{3 \times 10^8}{2\sqrt{2.25} \times 10^{10}} = 10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm}$$

استفاده کنیم. اگر دیواره 5 cm باشد، می‌توان نشان داد که $\eta_{ni} = 167.5 \Omega$ و 14.8% درصد از توان تابش منعکس خواهد شد.

تمرین ۹.۱۱

موج مسطح یکنواختی بطور عمودی از ناحیه $z = 0$ ، $\mu_{R1} = 2$ ، $\epsilon_{R1} = 8$ ، $\sigma_1 = 0$ به محیط دو، $\mu_{R2} = 2$ ، $\epsilon_{R2} = 2$ ، $\sigma_2 = 0$ می‌تابد. سطح مرزی در $z = 0$ و ناحیه $z < 0$ قرار دارد. اگر بسامد (فرکانس) کار 2500 MHz باشد، (الف) Γ ، (ب) نسبت موج ساکن، (پ) مقاومت ظاهری ورودی را در $z = -2.25 \text{ cm}$ پیدا کنید.

جوابها: $\frac{1}{3}$ ، 2 ، 94.2Ω

مراجعی که توصیه می‌شوند:

1- Ginzton, E. L.: «Microwave Measurements,» McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1957.

این کتاب شروع خوبی از روشهای اندازه‌گیری مایکروویو را که در سالهای ۱۹۵۰ معمول بود ارائه می‌دهد. بسیاری از این روشها هنوز معمولند و همه آنها آموزنده‌اند.

2- International Telephone and Telegraph Co. Inc. «Reference Data for Radio Engineers,» 5th ed., Howard W. Sams & Co., Indianapolis, Ind, 1968.

این کتاب مرجع جدولهای بسیار خوبی از خواص دی‌الکتریکها و موادی عایق دارد.

- 3- Seshadri, S.R.: «Fundamentals of Transmission Lines and Electromagnetic Fields,» Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1971.
 در بارهٔ امواج مسطح در فصلهای ۵ و ۶ بحث شده است.
- 4- Stuart, R.D.: «Electromagnetic Field Theory,» Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1965.
 این کتاب کوناه برای دانشجویان سال سوم مهندسی برق مناسب است. امواج سیار موضوع فصل ۹ آن است.
- 5- Von Hippel, A.R.: «Dielectric Materials and Applications,» The Technology Press of The Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., and John Wiley and Sons, Inc, New York, 1954.

مسائل

- ۱- نشان دهید که $E_{zs} = e^{\pm j(kz + \theta)}$ که در آن $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ و θ زاویه‌ای دلخواه است، جواب معادلهٔ برداری هلم هولتز، رابطهٔ (۱۵) بخش ۱۰.۱۱، است.
- ۲- رابطه‌ای برای مؤلفهٔ y شدت میدان مغناطیسی یک موج مسطح یکنواخت که در فضای آزاد در جهت $x +$ منتشر می‌شود بنویسید در صورتی که طول موج آن $\lambda = 2\text{m}$ باشد و در $x = 1$ و $t = 0$ به مقدار بیشینهٔ (ماکزیمم) مثبت خود یعنی 200 V/m برسد.

۳- اگر شدت میدان الکتریکی یک موج مسطح یکنواخت
$$\vec{E}_s = 20e^{-j5z} \vec{a}_x - 25e^{-j5z} \vec{a}_y \text{ V/m}$$
 باشد، \vec{H}_s را تعیین کنید.

۴- مقدار عددی دامنهٔ یک موج مسطح یکنواخت در هوا را در نقطهٔ $(\frac{1}{3}, 0, 0)$ در $t = 5\text{ ns}$ تعیین کنید در صورتی که میدان \vec{E}_s برابر

$$(30 - j40)e^{-j\pi z} \vec{a}_x + (20 + j10)e^{-j\pi z} \vec{a}_y \text{ V/m}$$

۵- یک موج مسطح یکنواخت در فضای آزاد با رابطهٔ

$$\vec{E}_s = 100e^{-j\pi z/3} \vec{a}_x + j100e^{-j\pi z/3} \vec{a}_y \text{ V/m}$$

مشخص شده است. (الف) جهت حرکت موج چیست؟ (ب) جهت شدت میدان الکتریکی را در صفحهٔ $z = 0$ در $t = 0, 5, 10, 15\text{ ns}$ بوسیلهٔ بردارهای واحدی مشخص کنید.

۶- در صورتی که داشته باشیم $\vec{E} = E_0 \cos [\omega(t - \vec{a}_n \cdot \vec{r} \sqrt{\mu_0 \epsilon_0})]$ که در آن \vec{a}_n بردار واحدی است و $\vec{r} = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z$ نشان دهید که: (الف) معادله کلی صفحه‌ای که در آن زاویه فاز E ثابت است (یا \vec{E} «یکنواخت» است) به صورت (ثابت $= t - \vec{a}_n \cdot \vec{r} \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$) است. (ب) معادله صفحه فاز ثابت که از مبدأ مختصات می‌گذرد و روی آن در $t = 0$ ، $\vec{E} = \vec{E}_0$ عبارتست از $x + 2y - 2z = 0$ در صورتی که \vec{a}_n از مبدأ به نقطه $(2, -2, 1)$ ممتد باشد. (پ) $\vec{E}_0 \cdot \vec{a}_n = 0$.

۷- رابطه \vec{E} را برای یک موج سطح یکنواخت به بسامد 200 MHz در حال انتشار در جهت \vec{a}_x بنویسید در صورتی که \vec{E} موازی محور x -ها باشد و در $(0, 0, 1)$ در $t = 0$ به مقدار بیشینه (ماکزیمم) مثبت 150 mV/m برسد و محیط انتشار: (الف) هوا، (ب) پلی استیرن باشد.

۸- یک موج سطح یکنواخت با $\vec{H}_s = 2e^{j\omega t} \vec{a}_y \text{ A/m}$ مشخص شده است. اگر سرعت انتشار نور در این محیط برابر $2 \times 10^8 \text{ m/s}$ و قابلیت نفوذ نسبی 1.78 باشد مطلوبست: (الف) بسامد (فرکانس) f این موج، (ب) طول موج، (پ) ϵ_R محیط، (ت) \vec{E}_s .

۹- وقتی یک نوسان ساز الکترونیکی به آنتنی وصل شده و موج سطح یکنواختی تولید گردد، طول موج اندازه‌گیری شده در فضای آزاد 40 cm است. وقتی همین علامت در داخل ماده پلاستیک غیر مغناطیسی بخصوصی ایجاد شود طول موج برابر 25 cm است. (الف) بسامد (فرکانس) نوسان ساز و (ب) ضریب پذیرش نسبی پلاستیک را پیدا کنید.

۱۰- دو موج سطح یکنواخت \vec{E}_{s1} و \vec{E}_{s2} که بسامد (فرکانس) آنها مساویست به طور مستقل در داخل ماده بخصوصی منتشر می‌شوند. $E_x(t)$ ، $E_y(t)$ و $E_z(t)$ را در مبدأ پیدا کنید در صورتی که $\vec{E}_{s1} = 10e^{-j\pi z} \vec{a}_x$ و $\vec{E}_{s2} = 20e^{-j\pi z} \vec{a}_y$ (الف)؛ $\vec{E}_{s1} = 20e^{-j\pi y} \vec{a}_x$ (ب)؛ $\vec{E}_{s2} = 20e^{-j\pi z} \vec{a}_y$ (پ) $\vec{E}_{s2} = j20e^{-j\pi z} \vec{a}_y$

۱۱- مؤلفه x یک موج سطح یکنواخت که در جهت \vec{a}_z منتشر می‌شود در صفحه $z = 0$ با رابطه $E_x = 500 \cos(10^9 \pi t) \text{ V/m}$ داده شده است. محیط انتشار با $\sigma = 0.25 \text{ S/m}$ و $\epsilon_R = 9$ و $\mu_R = 400$ مشخص شده است: (الف) α و (ب) β و (پ) λ و (ت) U و (ث) η و (ج) H_y را در $(0, 0, 2) \text{ mm}$ در $t = 0$ پیدا کنید.

۱۲- قسمت (ج) مسأله ۱۱ را دوباره محاسبه کنید در صورتی که ضریب هدایت به (الف) $0.25 \times 10^{-3} \text{ S/m}$ و (ب) صفر، تقلیل یافته باشد.

۱۳- مادهٔ بخصوصی را در نظر بگیرید که برای آن تانژانت تلفات برابر 10^{-3} باشد. یک موج مسطح یکنواخت باید به فاصلهٔ چند طول موج در داخل این ماده منتشر شود تا دامنهٔ آن نصف شود.

۱۴- ضریب توان یک خازن مساوی کسینوس زاویهٔ مقاومت ظاهری (امپدانس) آن تعریف می‌شود و Q خازن برابر ωCR است که در آن R مقاومت موازی خازن است. یک خازن با جوشهای مسطح آرمانی را در نظر بگیرید که عایق آن با σ و ϵ مشخص شده است. ضریب توان و Q را بر حسب تانژانت تلفات به دست آورید.

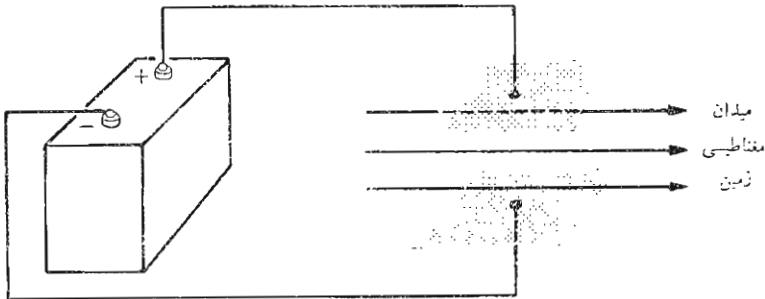
۱۵- مقادیر عددی α و β را برای تفلان در بسامد (فرکانس) $\omega = 10^8 \text{ rad/s}$ از منحنیهای داده شده در شکل ۳-۱۱ تعیین کنید.

۱۶- برای محیط با تلفاتی که در آن E_x و H_y هم فاز زمانی نیستند. نشان دهید که بردار پوینتینگ به صورت $\vec{P}_{z,av} = (E_{n_0}^2 / 2\eta_m) e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta$ از میدان $E_z = E_{z_0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$ نتیجه می‌شود که در آن $\eta = \eta_m \angle \theta$.

۱۷- برای موج مسطح یکنواخت $\vec{E}_s = 100 e^{-j\pi z/3} \vec{a}_x \text{ V/m}$ در هوا مقدار لحظه‌ای بردار پوینتینگ را در: (الف) $z = 0, 5, 10, 15 \text{ ns}$ و (ب) $t = 0, 15, 3, 4.5 \text{ cm}$ تعیین کنید.

۱۸- در شکل ۹-۱۱ یک میدان الکتریکی ساکن و یک میدان مغناطیسی ثابت در ناحیه‌ای از فضا نشان داده شده‌اند. جهت بردار پوینتینگ را در نقاط مختلف دستگاه تعیین کنید و نشان دهید چگونه قضیهٔ پوینتینگ در این مورد صادق است.

۱۹- موج مسطح یکنواخت $\vec{E}_1 = 2000 \cos(10^9 \pi t - 4\pi z) \vec{a}_x \text{ V/m}$ در یک



شکل ۹-۱۱ یک میدان الکتریکی ساکن و یک میدان مغناطیسی ثابت می‌توانند باعث ایجاد مقادیر غیر منتظر بردار پوینتینگ شوند. به مسألهٔ ۱۸ مراجعه شود.

محیط بی تلفات غیر مغناطیسی ایجاد شده است. (الف) $\mathcal{P}_{\lambda,av}$ را پیدا کنید. (ب) موج دیگری به صورت $\vec{E}_\gamma = 1000 \cos(10^9 \pi t - 4\pi z - \pi/3) \hat{a}_z$ V/m نیز وجود دارد. $\mathcal{P}_{کل,av}$ را پیدا کنید.

۲۰- فرض کنید ناحیه $|x| > \lambda/4$ فضای آزاد و $|x| < \lambda/4$ از ماده‌ای با ضریب هدایت σ باشد. در ناحیه دوم چگالی جریان ثابت و یکنواخت $\vec{J} = \vec{J}_0 \hat{a}_x$ را فرض کرده: (الف) \vec{E} و \vec{H} را در داخل این ماده پیدا کنید. (ب) \mathcal{P} را در این ماده پیدا کنید. (پ) نشان دهید که انتگرال \mathcal{P} روی سطح محدود به $x = \pm \lambda/4$ ، $y = \pm \lambda/4$ و $z = \pm \lambda/4$ تلفات کل توان dc را در این ناحیه به دست می‌دهد.

۲۱- ضریب تضعیف را برحسب دسی بل در یک فوت برای موج مسطح یکنواختی در آب دریا محاسبه کنید. فرض کنید $\epsilon_R = 78$ و $\sigma = 4 \text{ } \Omega/\text{m}$.

۲۲- اگر دو میدان \vec{E}_s و \vec{H}_s به صورت بردارهای فیزور نوشته شده باشند، نشان دهید که متوسط زمانی بردار پوینتینگ از $\mathcal{P}_{av} = \lambda/4 \text{Re}[\vec{E}_s \times \vec{H}_s^*]$ به دست می‌آید که در آن \vec{H}_s معرف مزدوج مختلط فیزور است.

۲۳- موج بره‌ای مستطیلی شکل مقطع، برای اینکه مقرون به صرفه باشند، معمولاً از برنج یا فولاد ساخته می‌شود و سپس به آنها آب نقره داده می‌شود تا کمترین تلفات به دست آید. اگر موج بر در بسامد ۱۰GHz به کار رود و برای مس $\sigma = 6.17 \times 10^7 \text{ } \Omega/\text{m}$ اگر بخواهیم لایه‌ای از آن به ضخامت ۳ عمق پوستی بسرای طول یک میل موج بر به کار بریم قیمت نقره چقدر خواهد شد. پیرامون داخلی موج بر ۱۰cm و قیمت نقره ۱۰c/g و چگالی آن ۱۰۵۸۵ g/cc است.

۲۴- یک هادی مسی دارای سطح مقطعی مستطیلی به ابعاد $2 \times 8 \text{ mm}$ است، مقاومت یک متر آن را در بسامد (فرکانس) صفر محاسبه کرده مقدار آن را در ۱ MHz تخمین بزنید. (با دقت خوب)

۲۵- فاصله‌ای برابر چند عمق پوستی (یا شاید چیه کسری از عمق پوستی) را موج باید بپیماید تا نصف توان آن صرف گرم کردن ماده هادی شود؟

۲۶- بسیاری از ما، بی آنکه بدقت فکر کنیم، «طول موج» را برابر 3×10^8 تقسیم بر بسامد (فرکانس) می‌پنداریم. این مطلب فقط در مورد موج مسطح یکنواخت در فضای آزاد صادق است. اگر این فرض منطقی را بکنیم که σ و μ و ϵ برای یک هادی خوب مستقل از بسامدند، رابطه بین طول موج و بسامد (فرکانس) را نشان دهید.

۲۷- یک موج مسطح یکنواخت به بسامد (فرکانس) ۳۰۰MHz در ناحیه ۱،

۱ اگر ناحیه ۱ $\bar{E}_{s1}^+ = 250 e^{-j\beta_1 z} \bar{a}_x$ ، بطور عمودی به ناحیه ۲ می آید. اگر ناحیه ۲ ($z > 0$) دارای $\epsilon_{R1} = 2.25$ و $\mu_{R1} = 1$ و $\sigma_1 = 0$ و ناحیه ۲ ($z < 0$) دارای $\epsilon_{R2} = 4$ و $\mu_{R2} = 4$ و $\sigma_2 = 0$ باشد: (الف) \bar{E}_{s1}^- و (ب) \bar{E}_{s2}^+ و (پ) \bar{H}_{s2}^+ و (ت) $\mathcal{P}_{z1,av}^+ / \mathcal{P}_{z2,av}^+$ را پیدا کنید.

۲۸- در مسأله ۲۷ فرض کنید $\epsilon_{R1} = 4$ و $\mu_{R1} = 4$ و $\sigma_1 = 0$ و $\epsilon_{R2} = 2.25$ و $\mu_{R2} = 1$ و $\sigma_2 = 0$ باشد. با توجه به اینکه قسمت (ت) تغییری نمی کند کلیه قسمت‌های مسأله فوق را تکرار کنید. این نتیجه ایست که برای کلیه مرزهای مسطح بین محیط‌های همه سو یکسان (ایزوتروپ) صادق است.

۲۹- موج مسطح یکنواختی، در ضمن انتقال با تابش عمودی از فضای آزاد به داخل ماده بخصوصی با ضریب بازتاب $0.125 -$ مواجه شده سرعت آن 50 درصد کاهش می یابد. اگر این ماده بی تلفات باشد، ϵ_R و μ_R آن را تعیین کنید.

۳۰- یک میدان \bar{E} در جهت z که در جهت \bar{a}_z منتشر می شود و یک مرز مسطح بین دو ماده بی تلفات با مقاومت ظاهری (امپدانسهای) ذاتی η_1 و η_2 مفروض اند. هر کدام از نسبت‌های زیر را بر حسب η_1 و η_2 و همچنین بر حسب Γ بیان کنید: (الف) H_{y1}^- / H_{y1}^+ ، (ب) $\mathcal{P}_{z1,av}^- / \mathcal{P}_{z1,av}^+$ ، (پ) $\mathcal{P}_{z2,av}^+ / \mathcal{P}_{z1,av}^+$ ، (ت) $\bar{E}_s^+ = 20 e^{-j0.1\pi z} \bar{a}_z \text{ V/m}$ ($z < 0$) یک موج مسطح یکنواخت به طور عمودی بر هادی کاملی در $z = 0$ می تابد. (الف) $\bar{E}(t)$ را در $z = -2\text{ m}$ پیدا کنید. (ب) $\bar{H}(t)$ را در $z = -2\text{ m}$ پیدا کنید. (پ) چگالی جریان سطحی روی هادی را پیدا کنید.

۳۲- جسم عایق بزرگی از اتصال چندین لایه از ماده بخصوصی ساخته شده است. اگر حد فاصل دو لایه مجاور به صورت صفحه‌ای باشد و ضریب دی‌الکتریک آنها 1 درصد تفاوت داشته باشد، چند درصد از توان تابیده عمودی یک موج مسطح یکنواخت منعکس می گردد؟ فرض کنید ضخامت این جسم بینهایت باشد.

۳۳- فرض کنید مقدار ϵ_R در $z < 0$ برابر 1 و در $0 < z < 2$ برابر 9 و در $z > 2$ برابر 4 باشد. کلیه نواحی بی تلفات و غیر مغناطیسی اند. η_{in} را برای بسامد (فرکانس) 6250 kHz ، در: (الف) $z = 2$ و (ب) $z = 0$ پیدا کنید. (پ) در ناحیه $z < 0$ نسبت موج ساکن چقدر است؟

۳۴- در $z < 0$ ، $\eta = 250\Omega$ و $\beta = 0.01\pi \text{ rad/m}$ است. نسبت موج ساکن را در این ناحیه برای موج مسطح یکنواختی با تابش عمودی به دست آورید در صورتی که: (الف) در $z > 0$ ، $\eta = 400\Omega$ و (ب) در $z = 0$ یک صفحه

هادی کامل قرار داشته باشد. (پ) η_{in} را با صفحه هادی کامل، در $z = -100/3$ m به دست آورید.

۳۵- هادیهای کامل ϵ_{R1} در $z < 0$ ، ϵ_{R2} در $0 < z < d$ و ϵ_{R3} در $z > d$ با $\epsilon_{R1} \neq \epsilon_{R3}$ مفروض اند. اگر موج مسطح یکنواختی با بسامد (فرکانس) f از ناحیه ۱ به طور عمودی بر مرز $z = 0$ بتابد: (الف) برای چه مقادیری از d و ϵ_{R2} انعکاسی وجود نخواهد داشت؟ (ب) اگر موج از ناحیه ۳ به مرزی که در $z = d$ قرار دارد بتابد چه مقادیری از d و ϵ_{R2} باعث خواهند شد بازتاب ایجاد نگردد؟

۳۶- برای موج مسطح یکنواختی که از محیط ۱ به محیط ۲ بطور عمودی می تابد و هر دو ناحیه بی تلفاتند نشان دهید که: (الف) Γ حقیقی است و $1 \leq \Gamma \leq -1$. (ب) نسبت موج ساکن در محیط ۱ برابر مقدار بزرگتر از واحد η_2/η_1 یا η_1/η_2 است.

۳۷- موج مسطح یکنواختی در هوا با بسامد (فرکانس) f به طور عمودی برقطعه‌ای از يك ماده بی تلفات می تابد. در اندازه گیری میدان الکتریکی در نزدیکی سطح منعکس کننده مشاهده می شود که دامنه بیشینه‌ها (ماکزیممها) ۵ برابر کمینه‌ها (می‌نیممها) است و فاصله بین بیشینه‌ها ۱۲ cm است. (الف) مقاومت ظاهری (امپدانس) ذاتی این ماده چقدر است؟ (ب) مشاهده می شود که نازکترین لایه از ماده‌ای که باعث می شود انعکاسی حاصل نشود برابر ۲ cm است. ϵ_R و μ_R این ماده را پیدا کنید.

۳۸- اگر يك موج مسطح یکنواخت ۲۰MHz در هوا با دامنه 30000 V/m بر ماده‌ای با $\epsilon_R = 2.25$ و $\mu_R = 6.25$ به طور عمودی بتابد دامنه بیشینه (ماکزیمم) میدان کل H را در هوا و همچنین کمترین فاصله از مرز را که در آن این میدان بیشینه (ماکزیمم) است به دست آورید.

۳۹- در مقاله زیر توسط R.A. Tell:

Broadcast Radiation: How Safe Is Safe? *IEEE Spectrum*, vol. 9, pp. 43-51, August 1972.

مطلوبست محاسبه مقدار دقیق چگالی توان در نقطه‌ای که منحنی شکل ۴ خط 100 V/m را قطع می کند.

۴۰- طرح و تکمیل موج برها به G.C. Southworth نسبت داده می شود. او در یکی از مقاله‌های خود تحت عنوان

Principles and Applications of Waveguide Transmi-

ssion, *Bell System Tech. Journal*, vol. 29, No, 3, pp. 295-342, July 1950

در باده کاربرد بردار پوینتینگ در مورد میدانهای غیر متغیر با زمان بحث می کند.
آیا او این بردار را به عنوان چگالی توان جاری تعبیر می کند؟

۱۲

خطوط انتقال

خطوط انتقال برای فرستادن انرژی الکتریکی یا علامتهای مخابراتی (سیگنالها) از يك نقطه به نقطه دیگر مورد استفاده قرار می گیرند. خط انتقال اساسی منبعی را به باری وصل می کند. این منبع و بار ممکن است يك فرستنده و آنتن یا قسمت ثبت متغیر^۱ و حافظه هسته ای يك حسابگر رقومی یا يك مرکز مولد برق-آبی (تیدروالکتريك) و يك ایستگاه فرعی به فاصله چند صد میل از آن یا يك آنتن تلویزیون و گیرنده یا يك کانال گراموفون استریو و یکی از ورودیهای تقویت کننده اولیه باشد. در این موارد متعدد چندین نوع مختلف از خطوط انتقال به کار می روند و ما خواص آنها را در بخش دوم این فصل مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

اما ابتدا باید نشان دهیم که تشابه مستقیمی بین خط انتقال یکنواخت و موج مسطح یکنواخت وجود دارد. خواهیم دید که کوششی که در فصل قبل برای موج مسطح یکنواخت به کار بردیم، به ما امکان می دهد که به سهولت و به سرعت روابط مشابهی را برای خط انتقال یکنواخت به دست آوریم. توزیع میدان برای موج مسطح یکنواخت و همچنین خط انتقال یکنواخت هر دو به امواج الکترومغناطیسی عرضی (TEM)^۲ معروفند چون \vec{E} و \vec{H} هر دو بر جهت انتشار عمودند یا هر دو در صفحه قائم اند. تشابه زیاد نتایج بدین علت است که در هر مورد با امواج TEM سروکار داریم. از طرفی دیگر، در خطوط انتقال ممکن و نیز معمول است که ولتاژ و جریانی تعریف شود و اینها کمیتند که معادلات را برحسب آنها می نویسیم و جوابها و ضرائب انتشار و انعکاس و مقاومت ظاهری ورودی را برحسب آنها پیدا می کنیم

1. Shift Register

۲. مخفف Transverse electromagnetic

همچنین در اینجا، به جای چگالی توان خود توان را در نظر خواهیم گرفت. روش مهم ترسیمی را نیز به وسایل تحلیلی و طراحی خود اضافه می‌کنیم و از آن برای حل مسائل انعکاس و انطباق سود می‌جوئیم از این روش برای موج مسطح یکنواخت نیز می‌توان استفاده کرد.

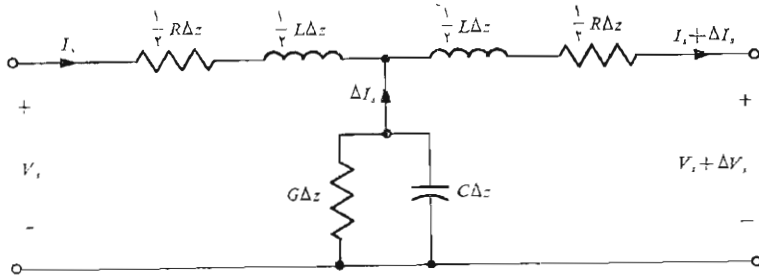
۱۰۱۲ معادلات خط انتقال

ابتدا معادلهٔ دیفرانسیلی را که ولتاژ و جریان یک خط انتقال یکنواخت باید در آن صادق باشند به دست خواهیم آورد. این کار را می‌توان با چند روش مختلف انجام داد. مثلاً یک روش بدیهی عبارتست از اینکه معادلات ماکسول را با شرایط مرزی خط انتقال بخصوص مورد نظر حل کنیم. سپس می‌توانیم ولتاژ و جریان را تعریف کرده جواب مطلوب را به دست آوریم همچنین می‌توان مسألهٔ موج TEM را یکبار برای همیشه حل کرد. در عوض برای یک طول دیفرانسیلی خط یک نمونهٔ مدار می‌سازیم و دو معادلهٔ مداری می‌نویسیم و نشان می‌دهیم که معادلات حاصل شبیه معادلات اساسی فصل قبند، که از آنها معادلهٔ موج به دست آمد، تلفیق نظریهٔ مدار را با این روش شروع می‌کنیم، و این کار را در فصل بعد ادامه می‌دهیم.

مدل مداری ما شامل خود القاء و ظرفیت و هدایت موازی، و مقاومت سری مربوط به طولی جزئی از خط خواهد بود. به منظور تجسم بهتر، خط انتقال هم محوری را در نظر می‌گیریم که دارای عایقی است با قابلیت نفوذ μ (معمولاً μ_0) و ضریب پذیرش ϵ و ضریب هدایت σ . هادیهای داخلی و خارجی دارای ضریب هدایت بزرگ σ_0 اند. اگر بسامد (فرکانس) کار و ابعاد معلوم باشند با استفاده از فرمولهائی که در فصول قبل به دست آوردیم، می‌توانیم مقادیر R و G و L و C را بر حسب واحد طول تعیین کنیم. در بخش بعد، این روابط را مرور و دربارهٔ چند نوع خط انتقال مختلف اطلاعات لازم را جمع‌آوری خواهیم کرد.

دوباره فرض می‌کنیم انتشار در جهت \bar{a}_z باشد. بنا براین قطعه‌ای به طول Δz را، مطابق شکل ۱۰۱۲، جداگانه در نظر می‌گیریم. این قطعه از خط شامل مقاومت $R\Delta z$ و خود القای $L\Delta z$ ، هدایت $G\Delta z$ و ظرفیت $C\Delta z$ است. چون این قطعه از خط از دو طرف یکسان به نظر می‌رسد، اجزاء سری را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم تا شبکه‌ای متقارن به وجود آید. به همین ترتیب می‌توانستیم نصف هدایت و نصف ظرفیت را در دو طرف آن قرار دهیم.

چون حالا دیگر با ویژگیهای اصلی انتشار امواج آشنائی داریم، بلافاصله حالت تغییرات زمانی سینوسی شکل را مورد توجه قرار می‌دهیم. برای کمیات مختلط همان علامات فصل قبل را به کار خواهیم کرد. ولتاژ V بین هادیها در حالت کلی تابع



شکل ۱۰۱۲ طولی جزئی از یک خط انتقال یکنواخت R و G و L و C تابع شکل هندسی خط انتقال و مواد به کار رفته در آنست.

z و t است، مثلاً

$$V = V_0 \cos(\omega t - \beta z + \psi)$$

که با استفاده از اتحاد اویلر می توان آن را به صورت مختلط نوشت:

$$V = \text{Re } V_0 e^{j(\omega t - \beta z + \psi)} = \text{Re } V_0 e^{j\psi} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}$$

و با صرف نظر کردن از Re و حذف $e^{j\omega t}$ می توان این ولتاژ را به فیزور، که آن را با اندیس s مشخص می کنیم، تبدیل کرد.

$$V_s = V_0 e^{j\psi} e^{-j\beta z}$$

حال می توان رابطه ولتاژ را در طول پیرامون مدار شکل ۱۰۱۲ به صورت

زیر نوشت

$$V_s = \left(\frac{1}{4} R \Delta z + j \frac{1}{4} \omega L \Delta z\right) I_s + \left(\frac{1}{4} R \Delta z + j \frac{1}{4} \omega L \Delta z\right) (I_s + \Delta I_s) + V_s + \Delta V_s$$

یا

$$\frac{\Delta V_s}{\Delta z} = -(R + j\omega L) I_s - \left(\frac{1}{4} R + j \frac{1}{4} \omega L\right) \Delta I_s$$

اگر Δz را به سمت صفر میل دهیم، ΔI_s نیز به سمت صفر میل می کند. از جمله دوم طرف راست می توان صرف نظر کرد. در حد،

$$\boxed{\frac{dV_s}{dz} = -(R + j\omega L)I_s} \quad (1)$$

با صرف نظر کردن از خطاهای مرتبه دوم، مقدار تقریبی ولتاژ شاخه وسط را V_s نامیده و رابطه دوم را به دست می آوریم،

$$\frac{\Delta I_s}{\Delta z} \doteq -(G + j\omega C)V_s$$

یا

$$\boxed{\frac{dI_s}{dz} = -(G + j\omega C)V_s} \quad (2)$$

برای صرفه جوئی در وقت، به جای اینکه این معادلات را حل کنیم آنها را با روابطی که از معادلات ماکسول در مورد موج مسطح یکنواخت به دست می آید مقایسه می کنیم. $\vec{E}_s = E_{xs} \vec{a}_x$ و $\vec{H}_s = H_{ys} \vec{a}_y$ را، که در آنها \vec{H}_{ys} و E_{xs} فقط تابع z هستند در رابطه،

$$\nabla \times \vec{E}_s = -j\omega\mu\vec{H}_s$$

قرار داده یک رابطه شمارواده ای، (اسکالر) به دست می آوریم

$$\frac{dE_{xs}}{dz} = -j\omega\mu H_{ys} \quad \left[\frac{dV_s}{dz} = -(R + j\omega L)I_s \quad (1) \text{ از} \right]$$

که رابطه (۱) نیز برای مقایسه نشان داده شده است. با روشی مشابه، چون

$$\nabla \times \vec{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E}_s$$

نتیجه می گیریم

$$\frac{dH_{ys}}{dz} = -(\sigma + j\omega\epsilon)E_{xs} \quad \left[\frac{dI_s}{dz} = -(G + j\omega C)V_s \quad (2) \text{ از} \right]$$

با مقایسه دقیق دو رابطه اخیر به تشابه مستقیمی بین جفتهای $(H_{ys}$ و $I_s)$ و $(E_{xs}$ و $V_s)$ و $(\sigma$ و $G)$ و $(\epsilon$ و $C)$ پی می بریم. در اثر تعویض متغیرهای یک

معادله با متغیرهای مربوط به آنها، معادلهٔ دیگر به دست می‌آید. تشابه در این جفت معادله بیشتر است، چون کمیات متناظر تقریباً برحسب يك واحد اندازه‌گیری می‌شوند.

اگر این تشابه را در مورد جفت معادلهٔ اول بررسی کنیم ملاحظه می‌کنیم که در اینجا نیز تشابه صادق است و يك جفت پارامتر مشابه اضافی L و μ نیز به دست می‌آید. ولی در اینجا به نکتهٔ غیر منتظری نیز برمی‌خوریم چون معادلهٔ خط انتقال پیچیده‌تر از معادلهٔ میدان است. پارامتری مشابه مقاومت واحد طول خط، یعنی R ، وجود ندارد گرچه، می‌توانیم بازارگرمی کنیم و بگوئیم که این مطلب نمایانگر آنست که نظریهٔ میدان از نظریهٔ مدار ساده‌تر است، ولی بهتر است منصف باشیم و دلیل این کمبود را متذکر شویم. مقاومت هادی را باید با حل جداگانهٔ معادلهٔ ماکسول در داخل هادی و انطباق دو جواب برای تأمین شرایط مرزی حد فاصل، تعیین کرد. میدانهای ساکن جریان را در فصل ۵ در نظر گرفتیم و اخیراً نیز حالت بسامد (فرکانس) بالا را تحت عنوان «اثر پوستی» بررسی کردیم. ولی به مسألهٔ انطباق دو جواب فقط اشارهٔ مختصری کرده‌ایم. بنا بر این جمله‌ای که در رابطهٔ میدان حذف شده معرف مسألهٔ میدانهای داخلی هادیها است و با حل این مسأله می‌توان مقدار R معادلهٔ مداری را به دست آورد. برای حفظ تشابه قبول می‌کنیم که $j\omega\mu$ را با $R + j\omega L$ تعویض کنیم^۱.

شرایط مرزی از نظر V_s و E_{xs} و همچنین از نظر I_s و H_{ys} یکسانند. بنابراین می‌توانیم جوابهای دو معادلهٔ مداری خود را، با علم به جوابهای دو معادلهٔ میدان که در فصل قبل به دست آمد، تعیین کنیم. از

$$E_{xs} = E_{x_0} e^{-\gamma z}$$

موج ولتاژ را به دست می‌آوریم

$$V_s = V_0 e^{-\gamma z} \quad (۳)$$

که در جهت z منتشر می‌شود و دامنهٔ آن در $z = 0$ مساوی V_0 است (و V_0 همچنین $V = V_0$ در $z = 0$ و $t = 0$ و $\psi = 0$). ثابت انتشار موج مسطح بکنواخت،

۱. وقتی که مواد فریت وارد مسائل میدان می‌شوند، اغلب از يك قابلیت نفوذ مختلط $\mu = \mu' + j\mu''$ استفاده می‌شود به طوری که بتوان تلفات غیر اهمی را نیز در این مواد به حساب آورد. تحت چنین شرایط خاصی $\omega\mu''$ مشابه است با R .

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

حال به صورت

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (۴)$$

خواهد بود. برای خط بی تلفات $R = G = 0$ و ملاحظه می شود که

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$

ولی

$$\beta = \frac{\omega}{U}$$

و بنابراین

$$U = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (۵)$$

از رابطه شدت میدان مغناطیسی

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-\gamma z}$$

می بینیم که موج جریان سیار در جهت مثبت

$$I_s = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma z} \quad (۶)$$

با موج ولتاژ سیار در جهت مثبت به وسیله مقاومت ظاهری (امپدانس) مشخص Z_0 مربوط می شود که مشابه مقاومت ظاهری (امپدانس) ذاتی η است. یعنی

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

و بنابراین

$$Z_o = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (۷)$$

وقتی موج مسطح یکنواخت در ناحیه ۱ به حد فاصل آن با ناحیه ۲ برخورد می کند، کسری از موج تابیده که منعکس می شود به ضریب انعکاس Γ موسوم است،

$$\Gamma = \frac{E^-_{x_o}}{E^+_{x_o}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

بنابراین کسری از موج ولتاژ تابیده که توسط خطی با مقاومت ظاهری (امپدانس) مشخص مختلف، مثلاً Z_{o_2} منعکس می شود عبارتست از

$$\Gamma = \frac{V^-_{o_2}}{V^+_{o_2}} = \frac{Z_{o_2} - Z_{o_1}}{Z_{o_2} + Z_{o_1}} \quad (۸)$$

اگر ضریب انعکاس معلوم باشد، نسبت موج ساکن را می توان به دست

آورد

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (۹)$$

بالاخره وقتی در $z > 0$ ، $\eta = \eta_2$ باشد، نسبت E_{zs} به H_{ys} در $z = -l$

عبارتست از

$$\eta_{in} = \eta_2 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_2 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_2 l}$$

و بنابراین مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی

$$Z_{in} = Z_{o_1} \frac{Z_{o_2} + jZ_{o_1} \tan \beta_2 l}{Z_{o_1} + jZ_{o_2} \tan \beta_2 l} \quad (۱۰)$$

عبارتست از نسبت V_s به I_s در $z = -l$ وقتی که در $z > 0$ ، $Z_o = Z_o$ باشد. اغلب، خط انتقال را در $z = 0$ به مقاومت ظاهری (امپدانس) بار Z_L ختم می‌کنیم، این مقاومت ظاهری (امپدانس) ممکن است معرف یک آنتن و مدار ورودی یک گیرنده تلویزیون، یا تقویت‌کننده‌ای در خط انتقال تلفنی باشد. مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی در $z = -l$ را می‌توان به صورت ساده‌تر زیر نوشت

$$Z_{in} = Z_o \frac{Z_L + jZ_o \tan \beta l}{Z_o + jZ_L \tan \beta l} \quad (11)$$

به محض اینکه بتوانیم مقادیر پارامترهای مربوطه R و L و G و R را تعیین کنیم، از روابط فوق برای آشنائی با خطوط انتقال استفاده خواهیم کرد.

تمرین ۱.۱۴

پارامترهای یک خط انتقال عبارتند از: $R = 1 \Omega/m$ و $L = 1/4 \mu H/m$ و $G = 1 mS/m$ و $C = 100 pF/m$ برای کار در بسامد $\omega = 2 \times 10^8 \text{ rad/s}$ تعیین کنید: (الف) α و (ب) β و (پ) U و (ت) λ و (ث) Z_o را از معادلات بخش ۳.۱۱ استفاده کنید.

جوابها:

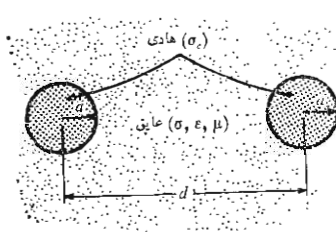
$$50 + j0.75 \Omega, 6.28 \text{ m}, 2 \times 10^8 \text{ m/s}, 1 \text{ rad/m}, 0.0035 \text{ Np/m}$$

۴.۱۴ پارامترهای خط انتقال

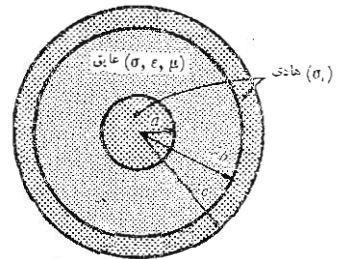
از این بخش برای جمع آوری نتایج قبلی و به دست آوردن نتایج جدید استفاده می‌کنیم تا اینکه مقادیر R و G و L و C را برای انواع ساده خطوط انتقال درست داشته باشیم. برای شروع کار، ببینیم تا بحال کدامیک از روابط لازم را، برای کابل هم محوری با شعاع داخلی a و خارجی b (شکل ۲.۱۲ الف)، در دست داریم. ظرفیت واحد طول که در فصل ۵ آن را به دست آوردیم، عبارتست از

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \quad (1)$$

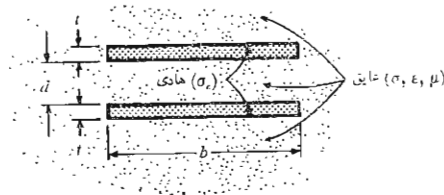
مقدار ضریب پذیرشی که به کار رفته است باید مناسب حدود بسامدهای (فرکانسهای)



(ب)



(الف)



(پ)

شکل ۲۰۱۴ وضعیت هندسی خطوط انتقال (الف) هم محور و (ب) دوسیمه و (پ) صفحه‌ای. عایقها یکنواخت فرض شده‌اند.

کار مورد نظر باشد. هدایت را می‌توان با استفاده از تشابه جریان، که در بخش ۳.۶ شرح داده شد، به دست آورد

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)} \quad (۲)$$

که در آن σ ضریب هدایت عایق بین دوهادی در بسامد (فرکانس) کار است. ضریب خود القایی محاسبه شده در فصل قبل، یعنی

$$L_{ext} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (۳)$$

ضریب خود القائی خارجی قابل است چون در محاسبه آن شار داخلی هادیها را در نظر نگرفتیم. ولی این تقریب خوبی از ضریب خود القائی کسل است چون در بسامدهای (فرکانسهای) کسار معمولی، عمق پوستی آنقدر کم است که شار داخلی هادیها قابل چشم پوشی است و بنابراین ضریب خود القائی داخلی قابل اغماض است. توجه کنید که $L_{ext} C = \mu \epsilon$.

از طرفی دیگر، برای اینکه حق مطلب را چنانکه باید ادا کنیم، چند بند را به تعیین روابطی برای ضریب خود القائی داخلی اختصاص می‌دهیم. در بسامدهای (فرکانسهای) خیلی پائین که توزیع جریان یکنواخت است، ضریب خود القائی داخلی، که در فصل ۹ داده شده است، عبارتست از

$$L_{a,int} = \frac{\mu}{4\pi} H/m \quad (۴)$$

این رابطه در بسامدهای (فرکانسهای) انتقال توان مفید است ولی برای خطوط انتقال بسامد (فرکانس) بالا صادق نیست. تعیین ضریب خود القائی داخلی پوسته خارجی مسئله پیچیده‌تری است و قسمت عمده این کار در مسئله ۶ خواسته شده است. از این مسئله نتیجه می‌شود که انرژی ذخیره شده در پوسته‌ای استوانه‌ای با شعاع داخلی b و شعاع خارجی c ، که توزیع جریان در آن یکنواخت باشد، عبارتست از

$$W_H = \frac{\mu I^2}{16\pi(c^2 - b^2)} \left(c^2 - 3b^2 + \frac{4b^4}{c^2 - b^2} \ln \frac{c}{b} \right)$$

بنابراین برای ضریب خود القائی داخلی در بسامدهای (فرکانسهای) خیلی پائین خواهیم داشت

$$L_{bc,int} = \frac{\mu}{4\pi(c^2 - b^2)} \left(c^2 - 3b^2 + \frac{4b^4}{c^2 - b^2} \ln \frac{c}{b} \right) \quad (۵)$$

در بسامدهای (فرکانسهای) پائین ضریب خود القائی کل از ترکیب (۳) و (۴) و (۵) به دست می‌آید

$$L_{low} = \frac{\mu}{4\pi} \left[\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(c^2 - b^2)} \left(c^2 - 3b^2 + \frac{4b^4}{c^2 - b^2} \ln \frac{c}{b} \right) \right] \quad (۶)$$

استفاده از رابطه (۶) را باید به هادیهای هم محوری که دارای توزیع جریان یکنواخت‌اند و اثر پوستی قابل ملاحظه‌ای در آنها وجود ندارد محدود کنیم.

با ازدیاد بسامد (فرکانس) ضریب خود القایی کمتر می‌شود. حال بسامد (فرکانس) میانه‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن ضریب خود القایی داخلی هنوز جزء قابل ملاحظه‌ای از ضریب خود القایی کل را تشکیل می‌دهد. فرض می‌کنیم که عمق پوستی δ خیلی کوچکتر از شعاع a هادی داخلی باشد و در این صورت جریان در قشر نازکی در سطح هادی متمرکز خواهد بود. جریان در جهت \vec{a}_z است و بنابراین مؤلفهٔ هم‌مماسی \vec{E}_s در سطح هادی نیز در جهت \vec{a}_z خواهد بود. چون $\vec{J}_s = \sigma_c \vec{E}_s$ ، که در آن σ_c ضریب هدایت هادی است. شدت میدان مغناطیسی بر سطح هادی مماس است و

$$H_{\varphi_s} = \frac{I_s}{2\pi a}$$

حال نسبت E_{zs} به H_{φ_s} سطح هادی را می‌توان به عنوان مقاومت ظاهری (امپدانس) ذاتی جسم هادی برای موج مسطح یکنواخت تعبیر کرد. گرچه در اینجا با جسمی استوانه‌ای سروکار داریم ولی عمق پوستی خیلی کوچکتر از شعاع است و می‌توان این قشر نازک را صفحه‌ای با عرض $2\pi a$ تصور کرد. در این صورت از بخش ۵.۱۱ داریم

$$\left. \frac{E_{zs}}{H_{\varphi_s}} \right|_{r=a} = \frac{1+j}{\sigma_c \delta}$$

یا

$$\left. \frac{E_{zs}}{I_s} \right|_{r=a} = \frac{1+j}{2\pi a \delta \sigma_c}$$

چون E_{zs} مساوی ولتاژ در واحد طول در جهت جریان هدایتی است، این نسبت باید مساوی مقاومت ظاهری (امپدانس) در واحد طول باشد، یعنی

$$Z = R + j\omega L_{int} = \frac{1}{2\pi a \delta \sigma_c} + j \frac{1}{2\pi a \delta \sigma_c}$$

این ضریب خود القایی باید داخلی باشد چون به ضریب هدایت σ_c جسم هادی بستگی دارد نه به پیچ و خمهای سیم در فضا. توجه داشته باشید که برای هادی کامل

این مقاومت ظاهری (امپدانس) صفر است. بدین ترتیب، ضریب خود القائی داخلی هادی مرکزی در بسامدهای (فرکانسهای) بالا عبارتست از:

$$L_{a, \text{int}} = \frac{1}{2\pi a \delta \sigma_c \omega} = \frac{\mu \delta}{2\pi a} \quad (\delta \ll a) \quad (7)$$

و برای هادی خارجی

$$L_{bc, \text{int}} = \frac{1}{2\pi a \delta \sigma_c \omega} = \frac{\mu \delta}{2\pi b} \quad (\delta \ll c - b) \quad (8)$$

بنابراین ضریب خود القائی کل در بسامدهای (فرکانسهای) بالا مساوی است با

$$L_{\text{high}} = \frac{\mu}{2\pi} \left[\ln \frac{b}{a} + \frac{\delta}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] \quad (\delta \ll a, \delta \ll c - b) \quad (9)$$

همچنین، از رابطه مقاومت ظاهری (امپدانس) فوق می‌توان مقدار مقاومت در واحد طول را، برای حالتی که عمق پوستی وجود داشته باشد، به دست آورد

$$R = \frac{1}{2\pi \delta \sigma_c} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (\delta \ll a, \delta \ll c - b) \quad (10)$$

و این يك مقاومت داخلی است. چون مقاومت خارجی را هدایت در واحد طول می‌نامیم. تلفات دیگری که باعث اضافه شدن جمله‌ای دیگر به مقاومت فوق می‌شود، عبارتست از تشعشع از خط انتقال بی حفاظ یا از انتهای آزاد کابل هم محور.

تسا بحال از ناحیه بسامد (فرکانس) بخصوصی صرف نظر کرده‌ایم و آن ناحیه‌ایست که در آن اثر پوستی تا اندازه‌ای مشهود است و لسی عمق پوستی بسا شعاع قابل مقایسه است توزیع جریان از توابع بسل^۱ تبعیت می‌کند و روابط مقاومت و ضریب خود القائی داخلی صورت پیچیده‌ای دارند. مقادیر مربوط در کتب مرجع به صورت جدول داده شده‌اند و برای هادیهای که ابعاد کوچک دارند در بسامدهای (فرکانسهای) بالا و همچنین برای هادیهای بزرگتر در بسامدهای (فرکانسهای) انتقال توان باید از این مقادیر استفاده شود.

1. Bessel

در مورد خط انتقال دو سیمه شکل ۲.۱۲ ب، که شعاع هادیهای آن a و هدایت ویژه آنها σ است و به فاصله مرکز به مرکز d در محیطی با قابلیت نفوذ μ و ضریب پذیرش ϵ و هدایت ویژه σ قرار دارند چنانکه دیدیم ظرفیت از رابطه زیر به دست می آید

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(d/2a)} \quad (11)$$

یا

$$C \doteq \frac{\pi\epsilon}{\ln(d/a)} \quad (a \ll d)$$

ضریب خود القایی خارجی عبارتست از

$$L_{\text{ext}} = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a} \quad (12)$$

یا

$$L_{\text{ext}} \doteq \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d}{a} \quad (a \ll d)$$

در حالی که ضریب خود القایی کل در بسامدهای (فرکانسهای) بالا برابر است با

$$L_{\text{high}} = \frac{\mu}{\pi} \left(\frac{\delta}{2a} + \cosh^{-1} \frac{d}{2a} \right) \quad (\delta \ll a) \quad (13)$$

و مقاومت در واحد طول آن مساوی است با

$$R = \frac{1}{\pi a \delta \sigma_c} \quad (\delta \ll a) \quad (14)$$

و دوباره هدایت (کنداکنانس) آن را می توان از ظرفیت به دست آورد،

$$G = \frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}(d/2a)} \quad (15)$$

اگر خط انتقالی موازی صفحه، یا خط انتقال صفحه‌ای شکل ۲.۱۲ ب را در نظر بگیریم که هدایت مخصوص صفحات هادی آن σ_e و فاصله بین هادیهای آن d و پارامترهای عایق بین آنها ϵ و μ و σ باشد، می‌توان پارامترهای مدار را برای عرض b به سهولت به دست آورد. در اینجا لازم است فرض شود که یا $b \gg d$ یا عرض b از سیستم هدایت پهن تری را در نظر داریم. در نتیجه

$$C = \frac{\epsilon b}{d} \quad (16)$$

$$L_{ext} = \mu \frac{d}{b} \quad (17)$$

$$L_{کل} = \mu \frac{d}{b} + \frac{2}{\sigma_e \delta b \omega} = \frac{\mu}{b} (d + \delta) \quad (\delta \ll t) \quad (18)$$

اینجا فرض کرده‌ایم که اثر پوستی کاملاً مشهود باشد به طوری که $\delta \ll t$ و ضخامت هر کدام از هادیها است. همچنین،

$$R = \frac{2}{\sigma_e \delta b} \quad (\delta \ll t) \quad (19)$$

$$G = \frac{\sigma b}{d} \quad (20)$$

تمرین ۲.۱۲

سرعت انتشار و همچنین مقاومت ظاهری (امپدانس) مشخص را برای هریک از خطوط انتقال بی تلفات بسامد (فرکانس) - بالای زیر محاسبه کنید: (الف) دستگاه انتقال

هم محور با مشخصات $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 2.25$ ، $b = 4 \text{ mm}$ ، $a = 0.5 \text{ mm}$ (ب)
 دستگاه انتقال دوسیمه به مشخصات $\epsilon_R = 2.25$ ، $d = 12 \text{ mm}$ ، $a = 0.5 \text{ mm}$
 (پ) دستگاه انتقال صفحه‌ای به مشخصات $\mu_R = 1$ ، $d = 0.1 \text{ mm}$ ، $b = 2 \text{ mm}$
 $\mu_R = 2.5$ ، $\epsilon_R = 6.25$

جوابها: 0.3777 ، 2.74×10^7 ، 254 ، 2×10^8 ، 83.72Ω ، $2 \times 10^8 \text{ m/s}$

۳.۱۲ تمرین

پارامترهای یک کابل هم محور عبارتند از $b = 4 \text{ mm}$ ، $a = 0.5 \text{ mm}$ ،
 $\sigma = 10^{-7} \text{ S/m}$ و $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 2.25$ ، $\sigma_c = 4 \times 10^7 \text{ S/m}$ ، $c = 4.75 \text{ mm}$
 اگر این کابل در بسامد (فرکانس) 1 MHz به کار برده شود (الف) L_{total} و
 (ب) R و (پ) G را پیدا کنید.

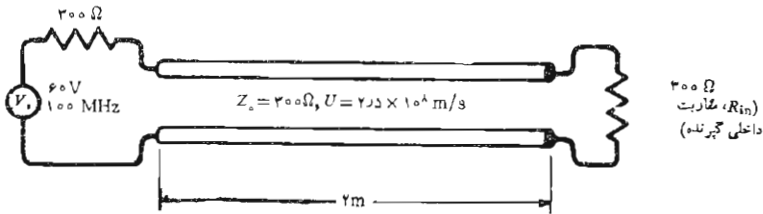
جوابها: $0.302 \mu\text{S/m}$ ، $0.1125 \Omega/\text{m}$ ، 434 nH/m

۳.۱۲ چند مثال مربوط به خطوط انتقال

در این بخش بسیاری از نتایجی را که در دو بخش قبل به دست آوردیم در مورد چند
 مسأله معمول خطوط انتقال به کار خواهیم برد. برای سهولت کار توجه خود را به
 خطوط بی تلفات محدود خواهیم کرد.

در ابتدا، یک خط دوسیمه 300Ω اهمی ($Z_0 = 300 \Omega$) را، نظیر سیم بین
 آنتن و گیرنده تلویزیون یا گیرنده FM، در نظر می‌گیریم. مدار در شکل ۳.۱۲
 نشان داده شده است. طول این خط 2 m است و ضریب دی‌الکتریک طوری
 است که سرعت انتشار در خط مساوی $2.25 \times 10^8 \text{ m/s}$ است. این خط را با
 گیرنده‌ای با مقاومت ورودی 300Ω ختم می‌کنیم و در ورودی آن منبعی فرض
 می‌کنیم که بیشینه دامنه آن 60 V و بسامد (فرکانس) آن 100 MHz باشد. این
 ولتاژ آنتن در حدود 10^5 برابر از ولتاژی که در عمل در آن به وجود می‌آید بیشتر
 است ولی این فرض باعث به دست آمدن مقادیری است که کار کردن با آنها ساده‌تر
 است. برای تصور بهتر مقادیر عملی، می‌توان جریانها و ولتاژها را به 10^5 و توانها
 را به 10^{10} تقسیم کرد.

چون مقاومت ظاهری (امپدانس) بار مساوی مقاومت ظاهری مشخص است،
 این خط منطبق است. ضریب انعکاس صفر است و نسبت موج ساکن مساوی واحد
 است. برای سرعت و بسامد معین طول موج در خط مساوی 2.25 m و ضریب فاز



شکل ۳۰۱۲ خط انتقالی که در هر دو طرف منطبق است انعکاسی ایجاد نمی کند و بنابراین بیشترین توان ممکن را به بار منتقل می کند.

طول موج نیز بیان کرد. $0.8\pi \text{ rad/m}$ و ضریب تضعیف صفر است. طول الکتریکی خط یعنی βl مساوی $2 \times 0.8\pi \text{ rad}$ یا $1.6\pi \text{ rad}$ است. این طول را می توان به صورت 288° یا 0.8π طول موج نیز بیان کرد.

مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی در ابتدای خط مساوی 300Ω است و چون مقاومت ظاهری (امپدانس) داخلی منبع ولتاژ نیز 300Ω است ولتاژ در ورودی خط نصف 60 V ، یا 30 V است. منبع با بار منطبق است و بیشترین توان موجود را به خط منتقل می کند. چون انعکاس و تضعیفی وجود ندارد ولتاژ بار نیز 30 V است ولی به اندازه $1.6\pi \text{ rad}$ تأخیر فاز دارد. بنابراین

$$V_{in} = 30 \cos 2\pi 10^8 t \quad \text{V}$$

در صورتی که

$$V_L = 30 \cos (2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad \text{V}$$

جریان ورودی عبارتست از

$$I_{in} = \frac{V_{in}}{300} = 0.1 \cos 2\pi 10^8 t \quad \text{A}$$

در صورتی که جریان بار مساویست با

$$I_L = 0.1 \cos (2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad \text{A}$$

توان متوسط منتقل شده از منبع به خط مساوی توان منتقل شده از خط به بار است،

$$P_{in} = P_L = \frac{1}{2} \times 30 \times 0.1 = 1.5 \text{ W}$$

حال گیرنده دومی را، که مقاومت ورودی آن هم 300Ω است، به انتهای خط، و به طور موازی با گیرنده اول وصل می‌کنیم. در این صورت مقاومت ظاهری بار 150Ω است و ضریب انعکاس عبارتست از

$$\Gamma = \frac{150 - 300}{150 + 300} = -\frac{1}{3}$$

و نسبت موج ساکن در خط برابر است با

$$s = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$$

مقاومت ظاهری ورودی دیگر 300Ω نیست، بلکه

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} = 300 \frac{150 + j300 \tan 288^\circ}{300 + j150 \tan 288^\circ} \\ &= 510 \angle -237.8^\circ = 466 - j206 \Omega \end{aligned}$$

که يك مقاومت ظاهری خازنی است. از نظر فیزیکی، این بدان معنی است که این قطعه خط انرژی بیشتری را در میدان الکتریکی خود، در مقایسه با میدان مغناطیسی، ذخیره می‌کند. بنا براین حرایاتی که از منبع می‌گذرد مساویست با

$$I_{s, in} = \frac{60}{466 - j206} = 0.0756 \angle 15^\circ \text{ A}$$

و توان منتقل شده از منبع به خط عبارتست از

$$P_{in} = \frac{1}{2} \times (0.0756)^2 \times 466 = 1.333 \text{ W}$$

چون تلفاتی در خط وجود ندارد، این 1.333 W باید کلاً به بار منتقل شود. توجه کنید که این مقدار کمتر از 1.5 W است که می‌توانستیم به بار منطبق تحویل دهیم. به علاوه این توان باید به طور مساوی بین دو گیرنده تقسیم شود و بنا براین هر گیرنده فقط 0.667 W دریافت می‌کند. چون مقاومت ظاهری (امپدانس) داخلی هر گیرنده 300Ω است، ولتاژ بین دوسر گیرنده را بسادگی

می‌توان به دست آورد.

$$۰.۶۶۷ = \frac{1}{2} \frac{|V_{s,L}|^2}{300}$$

$$|V_{s,L}| = 20 \text{ V}$$

حال آنکه در مورد يك بار، اين ولتاژ ۳۰ V بود.

قبل از اینکه این مثال را خاتمه دهیم بهتر است چند سؤال درباره ولتاژهای روی خط انتقال مطرح کنیم. بزرگترین و کمترین ولتاژها در کجا هستند و مقدار آنها چقدر است؟ آیا ولتاژ بار هنوز به اندازه 288° با ولتاژ ورودی اختلاف فاز دارد؟ احتمالاً اگر بتوانیم به این سؤالیهای مربوط به ولتاژ پاسخ گوئیم، برای جریان نیز می‌توانیم چنین کاری کنیم.

در فصل قبل به این سؤالیها در مورد موج مسطح یکنواخت جواب دادیم، در نتیجه به اعتبار تشابه می‌توانیم اطلاعات لازم را در مورد خطوط انتقال به دست آوریم. رابطه (۳) بخش ۷.۱۱ نقاط بیشینه ولتاژ را تعیین می‌کند.

$$-\beta z_{\max} = \frac{\varphi}{\gamma} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

پس با $\varphi = \pi$ و $\beta = ۰.۸\pi$ ملاحظه می‌شود که

$$z_{\max} = -۰.۶۲۵ \text{ و } -۱.۸۷۵ \text{ m} \quad (n = 0, -1)$$

نقاط کمینه (می‌نیم) به وسیله رابطه (۵) بخش ۷.۱۱ مشخص شده است،

$$-\beta z_{\min} = \frac{\varphi}{\gamma} + n\pi + \frac{\pi}{\gamma}$$

بنابراین

$$z_{\min} = ۰ \text{ و } -۱.۲۵ \text{ m} \quad (n = -1, 0)$$

و مشاهده می‌کنیم که ولتاژ بار (در $z = 0$) يك ولتاژ کمینه (می‌نیم) است. البته، این مطلب مؤید نتیجه‌گیری کلی فصل قبل است: در صورتی که $Z_L < Z_0$ باشد ولتاژ کمینه (می‌نیم) و در صورتی که $Z_L > Z_0$ باشد ولتاژ بیشینه‌ای (ماکزیممی) در محل بار خواهیم داشت، به شرطی که هر دو مقاومت ظاهری (امپدانس) مقاومت خالص

باشند. بیشینه (ماکزیممها) و کمینه‌ها (می‌نیممها) به فاصله ۲۵ m عره یا يك چهارم طول موج، از يكديگر قرار دارند.

بنابراین مقدار کمینه (می‌نیمم) ولتاژ روی این خط ۲۰ V است. مقدار بیشینه (ماکزیممها) ولتاژ باید ۴۰ V باشد چون نسبت موج ساکن ۲ است. ولتاژ در ورودی خط عبارتست از

$$V_{s, in} = I_{s, in} Z_{in} = (0.0756 \angle 15^\circ)(510 \angle -23.8^\circ)$$

یا

$$V_{s, in} = 38.6 \angle -8.8^\circ$$

ولتاژ ورودی تقریباً به اندازه ولتاژ بیشینه (ماکزیمم) در امتداد خط است و توجه می‌کنیم که طول خط تقریباً سه چهارم طول موج است. چنین طولی باعث می‌شود که در صورتی که $Z_L < Z_0$ ولتاژ بیشینه‌ای (ماکزیممی) در ورودی ایجاد شود.

آخرین سؤال مربوط بود به فاز نسبی ولتاژهای ورودی و بار. گرچه حداکثر دامنه هر يك از این ولتاژها را تعیین کرده‌ایم زاویه فاز ولتاژ بار را نمی‌دانیم. از رابطه (۱) بخش ۷.۱۱ ولتاژ در هر نقطه دلخواه خط عبارتست از

$$V_s = (e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z})V_0^+$$

با نوشتن این رابطه می‌توان ولتاژ يك نقطه از خط را برحسب ولتاژ هر نقطه دیگر تعیین کرد. چون مقدار ولتاژ را در ورودی خط می‌دانیم، می‌توانیم $z = -l$ را در رابطه قرار داده

$$V_{s, in} = (e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l})V_0^+$$

و V_0^+ را به دست آوریم، ولی کمیت مورد علاقه فعلی ما ولتاژ بار در $z = 0$ است،

$$V_{s, L} = (1 + \Gamma)V_0^+$$

بنابراین

$$\frac{V_{s, L}}{V_{s, in}} = \frac{1 + \Gamma}{e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}}$$

و $V_{s,L}$ را می‌توان از آن به دست آورد

$$V_{s,L} = (3896 \angle -88.8^\circ) \frac{1 - 1/3}{e^{j0.8\pi} - 1/3 e^{-j0.8\pi}}$$

یا

$$V_{s,L} = 20 \angle 72^\circ = 20 \angle -288^\circ$$

ملاحظه می‌شود که دامنه با جواب قبلی توافق دارد. وجود موج بازتابیده باعث می‌شود که $V_{s,L}$ و $V_{s,in}$ حدود $279^\circ -$ ، بجای $288^\circ -$ ، اختلاف فاز داشته باشند.

به عنوان مثالی نهائی، این خط را با مقاومت ظاهری (امپدانس) خازنی $Z_L = -j300 \Omega$ ختم می‌کنیم. بدیهی است که نمی‌توان توان متوسطی به بار تحویل داد. در نتیجه، ضریب بازتاب (انعکاس) عبارتست از

$$\Gamma = \frac{-j300 - 300}{-j300 + 300} = -j1 = 1 \angle -90^\circ$$

و دامنه موج بازتابیده مساوی دامنه موج تابیده است. بنابراین نباید تعجب کرد که نسبت موج ساکن مساویست با

$$s = \frac{1 + |-j1|}{1 - |-j1|} = \infty$$

و مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی مقاومت موهومی (رآکتانس) خالص است،

$$Z_{in} = 300 \frac{-j300 + j300 \tan 288^\circ}{300 + j(-j300) \tan 288^\circ} = j153$$

که نمی‌توان، توان متوسطی به آن تحویل داد.

گرچه می‌توانیم این کار را ادامه داده، اطلاعات و ارقام متعدد دیگری را درباره این مثال پیدا کنیم ولی اکثر این کارها را، برای مسائلی از این قبیل، می‌توان با سهولت بیشتری با روشهای ترسیمی انجام داد. در بخش بعد با چنین روشهایی آشنا خواهیم شد.

تمرین ۴.۱۲

طول يك خط انتقال 50Ω در هوا برابر 3 m است. منبع از $V \angle 0^\circ$ در 120 MHz و مقاومت سری 25Ω تشکیل شده است. اگر بار $50 + j50 \Omega$ باشد: (الف) $V_{s, in}$ و (ب) $V_{s, L}$ و (پ) P_L را پیدا کنید.

جوابها: $V \angle 113^\circ$ ، 941 ، $V \angle 113^\circ$ ، 941 ، 443 W .

۴.۱۲ روشهای ترسیمی

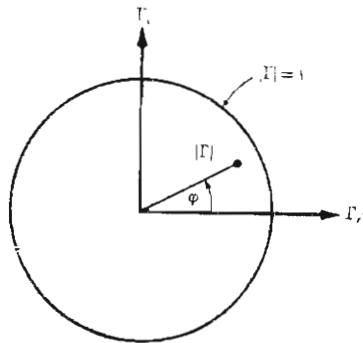
در مسائل خطوط انتقال، اغلب با اعداد مختلط سروکار داریم. مقدارکار و زمانی که صرف حل این مسائل می‌شود به مراتب بیش از عملیات مشابه با اعداد حقیقی است. یکی از وسائلی که می‌توان با آن مقدارکار لازم را کاهش داد، بی‌اینکه دقت جوابها به‌طور قابل ملاحظه‌ای کمتر شود، استفاده از نمودارهای خطوط انتقال است. نموداری که شاید بیش از همه به‌کار برده می‌شود نمودار اسمیت است^۱.

اساساً، این نمودار منحنی‌های مقاومت ثابت و مقاومت موهومی (رآکتانس) ثابت را نشان می‌دهد، که ممکن است معرف امپدانس ورودی یا امپدانس بار باشند اطلاعاتی دربارهٔ محل مورد نظر در خط نیز می‌توان به دست آورد و این اطلاعات معمولاً به صورت فاصله از یک بیشینه (ماکزیمم) یا کمینه (می‌نیمم) و لذا بزرگسب کسری از طول موج است. نسبت موج ساکن و دامنه و زاویه ضریب بازتاب را نیز می‌توان به سرعت پیدا کرد، گرچه این کمیات صریحاً در نمودار نشان داده نشده‌اند. البته، این نمودار در داخل دایره‌ای به شعاع واحد بنا شده است به طوری که در مختصات قطبی متغیر شعاعی $|\Gamma|$ و متغیر زاویه ϕ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است و رابطه $\Gamma = |\Gamma| e^{j\phi}$ بین آنها برقرار است. شکل ۴.۱۲ این دایره را نشان می‌دهد. چون $|\Gamma| \leq 1$ است کلیه اطلاعات ما باید در داخل یا روی این دایره باشد. با اینحال خود ضریب بازتاب در نمودار رسم نشده است. چون اینکار قرائت نمودار را بسیار مشکل خواهد کرد.

رابطهٔ اصلی که نمودار اسمیت براساس آن بنا شده است عبارتست از

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (1)$$

۱. به P.H. Smith, Transmission-Line Calculators در صفحات ۳۱-۲۹ جلد ۱۲ مجلهٔ Electronics مراجعه شود.



شکل ۴.۱۲ مختصات قطبی نمودار اسمیت عبارتند از دامنه و زاویه فاز ضریب بازتاب مختصات قائم اجزاء حقیقی و موهومی ضریب انعکاسند این نمودار در داخل دایره‌ای با شعاع واحد $|\Gamma| = 1$ قرار دارد.

مقاومت‌های ظاهری (امپدانس‌های) راکه روی نمودار پیدا می‌کنیم نسبت به مقاومت ظاهری (امپدانس) مشخص سنجیده شده‌اند. برای مقاومت ظاهری (امپدانس) نسبی (نرمالیزه) بار از حرف z استفاده می‌کنیم، هرچند ممکن است اینکار باعث اشتباه با متغیر z مختصات قائم شود،

$$z = r + jx = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R_L + jX_L}{Z_0} \quad (2)$$

و بنابراین

$$\Gamma = \frac{z - 1}{z + 1}$$

یا

$$z = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \quad (3)$$

در مختصات قطبی از $|\Gamma|$ و φ به عنوان اندازه و فاز Γ استفاده کردیم. حال اگر Γ_r

و Γ_i را اجزاء حقیقی و موهومی Γ انتخاب کنیم،

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i \quad (۴)$$

یعنی

$$r + jx = \frac{1 + \Gamma_r + j\Gamma_i}{1 - \Gamma_r - j\Gamma_i} \quad (۵)$$

اجزاء حقیقی و موهومی این معادله عبارتند از

$$r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \quad (۶)$$

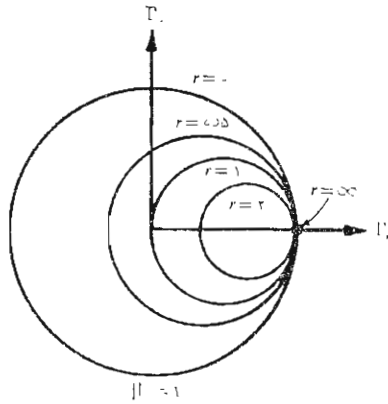
$$x = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \quad (۷)$$

و بعد از چند سطری عملیات جبری ابتدائی، روابط (۶) و (۷) را می توان به صورتی نوشت که شکل منحنیهای حاصل در محورهای مختصات Γ_r و Γ_i آشکار شود.

$$\left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \quad (۸)$$

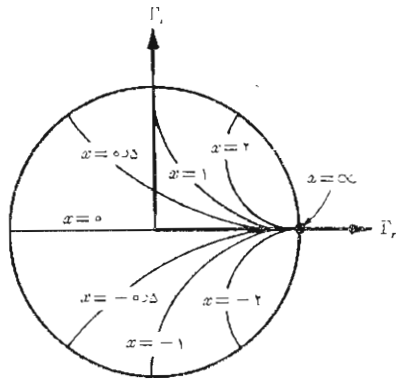
$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \quad (۹)$$

رابطه اول معرف يك دسته دایره است. که هر کدام از آنها مربوط به يك مقدار مشخص مقاومت r اند. مثلاً اگر $r = 0$ باشد ملاحظه می شود که شعاع دایره مربوط به مقاومت صفر مساوی واحد است و مرکز آن در $\Gamma_r = 0$ و $\Gamma_i = 0$ یعنی در مبدأ مختصات است. این نتیجه با مطالب قبلی توافق دارد چون بارمقاومت موهومی (راکتانس) خالص، ضریب بازتابی با قدر مطلق واحد ایجاد می کند. از طرفی دیگر اگر $r = \infty$ باشد در این صورت $Z_L = \infty$ است و باید $\Gamma = 1$ باشد. مرکز دایره ای که با رابطه (۸) مشخص می شود در $\Gamma_r = 1$ و $\Gamma_i = 0$ و شعاع آن صفر است، یعنی همان طوری که قبلاً دیدیم نقطه $\Gamma = 1$. به عنوان مثالی دیگر، مرکز دایره $r = 1$ در $\Gamma_r = 0$ و $\Gamma_i = 0$ و شعاع آن ۰٫۵ است. این دایره، و همچنین دوائر $r = ۰٫۵$



شکل ۵.۱۲ دوائر r ثابت در صفحه $\Gamma_r \Gamma_i$ نشان داده شده‌اند. شعاع هر دایره $1/(1+r)$ است.

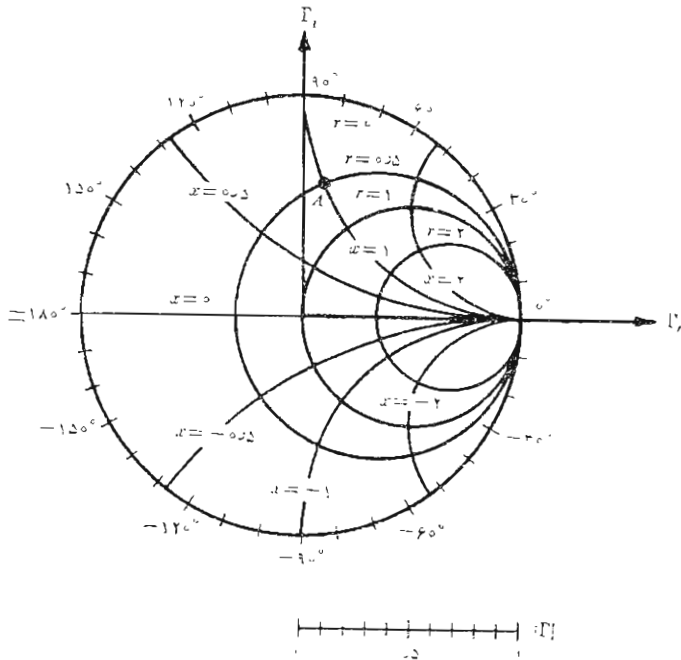
و $r=2$ در شکل ۵.۱۲ نشان داده شده است. مرکز کلیه دوائر روی محور Γ_r است و همگی آنها از نقطه $\Gamma_r = 1$ ، $\Gamma_i = 0$ می‌گذرند. رابطه (۹) نیز معرف یک دسته دایره است ولی هر کدام از آنها به جای r ،



شکل ۶.۱۲ قسمتهایی از دوائر x ثابت که در داخل $|\Gamma| = 1$ قرار دارند در محورهای مختصات $\Gamma_r \Gamma_i$ نشان داده شده‌اند. شعاع هر دایره مساوی $1/x$ است.

بر حسب x تعریف شده‌اند. اگر $x = \infty$ باشد در این صورت $Z_L = \infty$ است و Γ باید مساوی $z + 1$ باشد. دایره مشخص شده بازابطه (۹) به مرکز $\Gamma_r = 1$ و $\Gamma_i = 0$ و شعاع صفر، یعنی نقطه $\Gamma = 1$ است. اگر $x = +1$ باشد مرکز دایره $\Gamma_r = \Gamma_i = 1$ و شعاع آن واحد است. فقط یک ربع از این دایره در داخل منحنی مرزی $|\Gamma| = 1$ قرار دارد (شکل ۶.۱۲). برای $x = -1$ ربع دایره مشابهی در پائین محور Γ_r وجود دارد. در این شکل قسمتهائی از دوائر -2 و 2 و -5 و 5 و $x = 0$ نیز نشان داده شده است. «دایره» معرف $x = 0$ همان محور Γ_r است که آن هم در شکل ۶.۱۲ مشخص شده است.

همان طوری که شکل ۷.۱۲ نشان می‌دهد، هر دو دسته دایره در نمودار اسمیت ظاهر می‌شوند. حال بدیهی است که اگر Z_L را داشته باشیم، از تقسیم آن بر Z_0 مقدار z را به دست آورده، محل آن را در نمودار از تقاطع دو دایره مربوطه



شکل ۷.۱۲ نمودار اسمیت شامل دوائر r -ثابت و دوائر x -ثابت. مقیاس شعاعی کمکی برای تعیین $|\Gamma|$ و مقیاس زاویه در پیرامون برای تعیین φ میباشد.

تعیین می‌کنیم (و اگر لازم باشد بین دو دایره فواصل را به تناسب انتخاب می‌کنیم) و سپس Γ را از تقاطع این دو دایره به دست می‌آوریم. چون در نمودار دوائر متحدالمرکزی که مقادیر $|\Gamma|$ را نشان دهد وجود ندارد، لازم است که فاصله شعاعی از مبدأ به نقطه تقاطع با پرگار یا نظیر آن اندازه‌گیری شود یا باید از یک زینه‌بندی کمکی استفاده کرد. پاره خط مدرج شده در زیر نمودار شکل ۷.۱۲ بدین منظور است. زاویه Γ عبارتست از زاویه‌ای که از محور Γ_r در خلاف جهت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری می‌شود. دوباره، کشیدن خطوط شعاعی که معرف این زاویه‌ها باشند باعث پر شدن نمودار و کاهش وضوح آن می‌شود و به همین جهت زاویه‌ها حول پیرامون نمودار نشان داده شده‌اند. خط راست از مبدأ به محل تقاطع را می‌توان به پیرامون نمودار ادامه داد. به عنوان مثال، اگر برای خط 50° اهمی $Z_L = 25 + j50 \Omega$ باشد در این صورت $z = 0.5 + j1$ و نقطه A شکل ۷.۱۲ نقطه تقاطع دایره $r = 0.5$ و $x = 1$ را نشان می‌دهد. ضریب بازتاب تقریباً مساوی 2° با زاویه 83° است.

نمودار اسمیت با اضافه کردن یک مقیاس دیگر روی پیرامون آن، که به وسیله آن می‌توان فاصله در امتداد خط را محاسبه کرد، تکمیل می‌شود. این مقیاس برحسب واحد طول موج است ولی مقادیری که روی آن نوشته شده واضح نیست. رابطه (۳) بین ضریب بازتاب و مقاومت ظاهری (امپدانس) بار نرمالیزه،

$$z = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \quad (3)$$

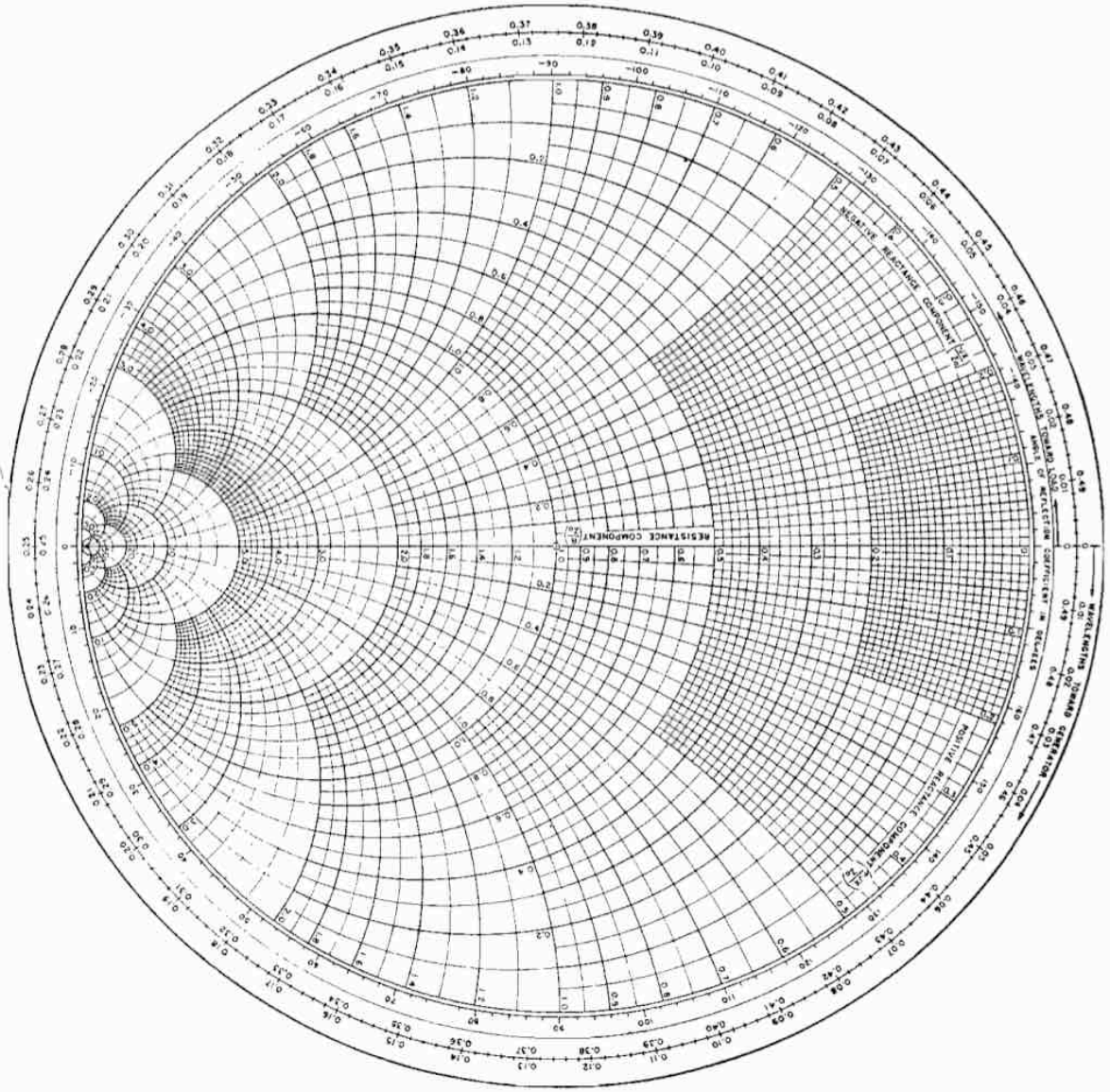
حالت خاص رابطه کلی تری است که مقاومت ظاهری (امپدانس) دودی نسبی (نرمالیزه)، ضریب بازتاب و طول خط را به یکدیگر مربوط می‌سازد،

$$\boxed{z_{in} = \frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta l}}{1 - \Gamma e^{-j2\beta l}}} \quad (10)$$

اثبات این رابطه به صورت تمرین داده شده است، گسره در بخش ۷.۱۱ این کار عملاً انجام شد. توجه کنید که به ازاء $l = 0$ ، یعنی وقتی در محل بار هستیم،

$$z_{in} = z$$

از رابطه (۱۰) برای پیدا کردن مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی در فاصله l از یک بار معلوم استفاده می‌کنیم. بعد از اینکه نقطه مربوط به مقاومت ظاهری (امپدانس) بار z را در نمودار اسمیت پیدا کردیم، می‌توانیم با اضافه کردن زاویه



βl — به Γ نقطه معرف z_{in} را پیدا کنیم. یعنی

$$\Gamma e^{-j2\beta l} = |\Gamma| e^{j(\varphi - 2\beta l)}$$

بنابراین. در ضمن اینکه از مقاومت ظاهری بار z به طرف مقاومت ظاهری ورودی z_{in} پیش می‌رویم، فاصله l را به طرف مولد روی خط انتقال طی می‌کنیم، ولسی در نمودار اسمیت زاویه $2\beta l$ را در جهت عقربه‌های ساعت طی می‌کنیم. بنابراین وقتی یک دور کامل نمودار را طی کرده‌ایم که βl به اندازه π رادیان، یا l به اندازه نصف طول موج تغییر کرده باشد. این مطلب، با نتیجه‌گیری قبلی ما درباره اینکه مقاومت ورودی (امپدانس) ورودی خط انتقال بی‌تلفاتی به طول نیم طول موج مساوی مقاومت ظاهری (امپدانس) بار است، توافق دارد.

بنابراین، نمودار اسمیت با اضافه کردن مقیاسی که برای هر دور کامل تغییر λ را نشان می‌دهد، تکمیل می‌شود برای سهولت کار، معمولاً دو زینه بندی اضافه می‌شود، که یکی ازدیاد فاصله را برای حرکت در جهت عقربه‌های ساعت و دیگری ازدیاد فاصله را در خلاف جهت آن نشان می‌دهد. این دو زینه بندی در شکل ۸.۱۲ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که مقیاسی که با «طول موج به طرف مولد (ژنراتور)» «wavelength toward generator» یا (wtg) مشخص شده است همانطوری که در بالا شرح داده شد معرف ازدیاد مقادیر l (یا βl) برای حرکت در جهت عقربه‌های ساعت است.

به کمک یک مثال، روش کاربرد نمودار اسمیت را به بهترین وجهی می‌توان نشان داد. دوباره مقاومت ظاهری (امپدانس) بار $Z_L = 25 + j50 \Omega$ را در نظر می‌گیریم که در انتهای یک خط 50Ω قرار دارد. در این صورت داریم $z = 0.5 + j1$ که در شکل ۷.۱۲ با A مشخص شده و $\angle \Gamma = 83^\circ$ $\Gamma = 0.62 e^{j1.45}$ اگر طول خط 60 cm و بسامد (فرکانس) کار طوری باشد که طول موج روی خط مساوی 2 m باشد، در این صورت $\beta l = 360^\circ \times 60 / 200 = 108^\circ$. بنابراین برای تعیین z_{in} باید به اندازه $216^\circ = 2 \times 108^\circ$ در جهت عقربه‌های ساعت روی دایره 0.62 $|\Gamma|$ حرکت کنیم. گرچه این کار را با نقاله و پرگار می‌توان کرد، استفاده از مقیاس wtg ساده‌تر است. امتداد خط راستی که از مبدأ به نقطه A کشیده می‌شود همان طوری که در شکل ۹.۱۲ نشان داده شده است زینه بندی wtg را در 135° قطع می‌کنند. چون 60 cm مساوی 300° طول موج است، z_{in} را روی دایره 0.62 $|\Gamma|$ در مقابل قرائت $wtg = 435^\circ = 300^\circ + 135^\circ$ پیدا می‌کنیم. جزئیات این کار در شکل

بیشینه‌ها (ماکزیممها) و کمینه‌های (می‌نیمهای) ولتاژ باید در نقاطی باشد که z_{in} مقاومت خالص است. مقاومت‌های ظاهری مقاومتی خالص روی خط $z = 0$ (محور Γ_r) نمودار اسمیت قرار دارند. ولتاژهای بیشینه و جریانهای کمینه به ازاء $1 > r$ و ولتاژهای کمینه و جریانهای بیشینه به ازاء $1 < r$ به وجود می‌آیند. بنابراین در مثال فوق ملاحظه می‌کنیم که بیشینه (ماکزیمم) موج ساکن ولتاژ در نقطه 0.25λ مقیاس wtg یا به فاصله $0.115\lambda = 0.135\lambda - 0.25\lambda$ طول موج از بار است این فاصله مساوی 200×0.115 یا 23 cm از بار است. همچنین باید توجه داشت که چون نسبت موج ساکن مربوط به بار مقاومتی R_L مساوی R_L/R_0 یا R_0/R_L است (هر کدام که بزرگتر از واحد باشد)، لذا مقدار s را می‌توان روی محور r در ناحیه $1 > r$ در محل تقاطع این محور و دایره $|\Gamma|$ مستقیماً قرائت کرد. در مثال ما این تقاطع با C نشان داده شده است و $r = 4.2$ و بنابراین $s = 4.2$ می‌باشد.

نمودارهای خطوط انتقال را برای هدایت‌های ظاهری (ادمیتانس) نسبی (نرمالیزه) نیز می‌توان به کاربرد، گرچه در چنین کاربردی چند تفاوت جزئی وجود دارد. در این حالت $y = Y_L/Y_0 = g + jb$ و از دوائر r به جای دوائر g و از دوائر b به جای دوائر b استفاده می‌کنیم. در این صورت دو اختلاف اصلی یکی اینست که $1 > g$ و $b = 0$ معرف کمینه موج ولتاژ است و دیگری اینکه به زاویه فاز 1 که روی پیرامون نمودار خوانده می‌شود باید 180° اضافه کرد. در بخش بعد، نمودار اسمیت را به این صورت به کار خواهیم برد.

نمودارهای مخصوص نیز برای محاسبات غیر نسبی (غیرنرمالیزه) وجود دارند، که از آنها می‌توان نمودارهای 50Ω و نمودارهای $75 - m\Omega$ را نام برد.

تمرین ۵.۱۲

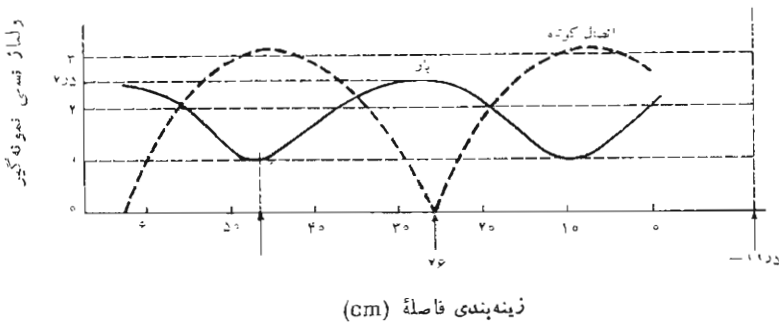
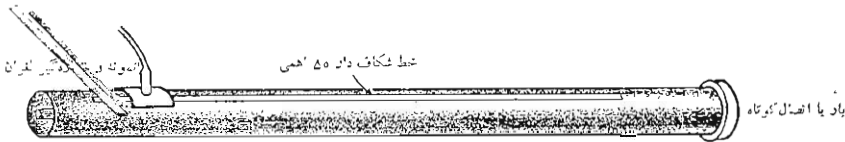
از یک خط انتقال بی تلفات 300Ω به طول 20 m در بسامد (فرکانس) 20 MHz استفاده می‌شود. سرعت روی خط $3/2c$ است. اگر این خط به بار $240 \Omega - j450$ ختم شده باشد از نمودار اسمیت شکل ۸.۱۲ استفاده کرده: (الف) Γ و (ب) s و (پ) فاصله بین بار و اولین کمینه (می‌نیم) ولتاژ را پیدا کنید.

جوابها: $40^\circ - / 36.0 \text{ m}, 2.1, 1.94$

۵.۱۲ چند مسأله عملی

در این بخش توجه خود را به دو نمونه از مسائل عملی خط انتقال معطوف می‌داریم. مثال اول درباره تعیین مقاومت ظاهری (امپدانس) بار به کمک معلومات تجربی و مثال

دوم دربارهٔ طرح يك شبکهٔ تطبیق با خط فرعی (استاب) است. فرض می‌کنیم اندازه‌گیر یهائی تجربی روی يسك خط هوایی ۵۰ اهمی انجام داده‌ایم که نشان می‌دهند نسبت موج ساکن مساوی ۲٫۵ است. این کار با حرکت دادن يك اندازه‌گیر لغزان در امتداد خط، برای اندازه‌گیری مقادیر بیشینه و کمینه (ماکزیمم و می‌نیمم)، انجام شده است و خط کشی مدرجی که در امتداد مسیر تعبیه شده است نشان می‌دهد که يك کمینه (می‌نیمم) در درجهٔ ۴۷ cm خط کش وجود دارد (به شکل ۱۰۰۱۲ مراجعه شود). نقطهٔ صفر خط کش اختیاری است و با محل بار رابطه‌ای ندارد. معمولاً محل کمینه (می‌نیمم) مشخص می‌شود نه بیشینه (ماکزیمم)، چون آن را دقیق‌تر از محل بیشینه می‌توان تعیین کرد. کمینه‌های تیزتر يك موج سینوسی یکطرفه شده را در نظر مجسم کنید. بسامد (فرکانس) کار ۴۰۰ MHz است. برای اینکه محل دقیق بار را تعیین کنیم، آن را برداشته اتصال کوتاهی به جای آن قرار می‌دهیم. در این حالت محل کمینه (می‌نیمم) در ۲۶ cm تعیین می‌شود.

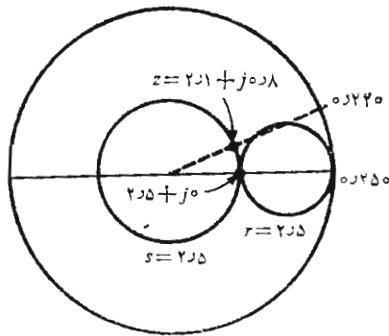


شکل ۱۰۰۱۲ تصویري از يك خط هم محور شكاف دار. زينه‌بندی فاصله روی خط شكاف قرار دارد. وقتی بار در محل خود قرار دارد، $s = 2.5$ و کمینه می‌نیمم در درجهٔ ۴۷ cm خط کش واقع است. برای اتصال کوتاه، کمینه (می‌نیمم) در درجهٔ ۲۶ cm خط کش قرار می‌گیرد. طول موج ۷۵ cm است.

1. Stub

می‌دانیم که فاصله اتصال کوتاه از کمینه (می‌نیم) باید مضرب صحیحی از نیم طول موج باشد. فرض کنید محل آن، به طور دلخواه، بفاصله نیم طول موج از کمینه (می‌نیم) یعنی در درجه $cm \ 1185 - = 3785 - 26$ خط کش باشد. چون اتصال کوتاه جانشین بار شده است، محل بار نیز در $cm \ 1185 -$ است. مقادیر اندازه‌گیری شده نشان می‌دهد که کمینه در فاصله $cm \ 5885 = (1185) - 47$ بار است. یا اگر نیم طول موج از آن کم کنیم، کمینه در فاصله 21 سانتیمتری از بار است. بیشینه ولتاژ به فاصله $cm \ 2225 = (3785) - 21$ از بار یا به فاصله $cm \ 5030 = 2225 + 2805$ طول موج از آن است. حال می‌توانیم با این اطلاعات به نمودار اسمیت مراجعه کنیم. در محل بیشینه (ماکزیمم) ولتاژ مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی مقاومت خالص و مساوی sR_0 است یا به صورت نسبی (نرمالیزه) $z_{in} = 225$. بنابراین در نمودار از نقطه $z_{in} = 225$ شروع کرده عدد 225 را روی مقیاس wtg می‌خوانیم و برای رسیدن به بار 5030 از آن کم می‌کنیم و ملاحظه می‌کنیم که تقاطع دایره $s = 225$ (یا $|\Gamma| = 0.429$) و خط شعاعی به 225 طول موج، نقطه $z = 221 + j0.8$ است. به شکل ۱۱۰۱۲ مراجعه شود. بنابراین $Z_L = 105 + j40 \ \Omega$ و این مقداری است که مربوط به محل بار در $cm \ 1185 -$ یا مضرب صحیحی از نصف طول موج از آنست. البته می‌توانیم «محل» بار را بدلیخواه به وسیله قرار دادن اتصال کوتاه در آن، انتخاب کنیم. چون محل بار دقیقاً تعریف نشده است، لازم است که نقطه‌ای (یا صفحه‌ای) که مقاومت ظاهری (امپدانس) بار در آن تعیین شده است مشخص شود.

به عنوان آخرین مثال، سعی کنیم این بار را، با استفاده از یک خط فرعی

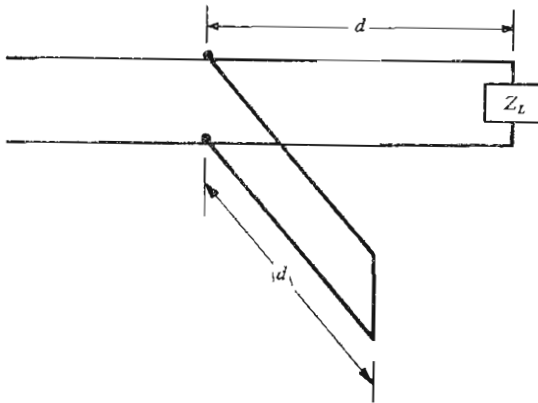


شکل ۱۱۰۱۲ اگر در خطی به طول 5030 طول موج $z_{in} = 225 + j0$ باشد $z = 221 + j0.8$ خواهد بود.

اتصال کوتاه شده به طول d_1 در فاصله d از بار، با خط 50 اهمی انطباق دهیم (به شکل ۱۲.۱۲ مراجعه شود). مقاومت ظاهری (امپدانس) مشخص خط فرعی مساوی مقاومت ظاهری (امپدانس) مشخص خط اصلی است. می‌خواهیم طولهای d و d_1 را تعیین کنیم.

مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی خط فرعی استاب مقاومت موهومی (رآکتانس) خالص است که وقتی با مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی خط به طول d که شامل بار است ترکیب شود، مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی حاصل باید مساوی $z_0 + j$ باشد. البته ترکیب موازی هدایت‌های ظاهری (ادمیتانس‌ها) به مراتب ساده‌تر از ترکیب مقاومت‌های ظاهری (امپدانس‌ها) است، پس بهتر است هدف خود را برحسب هدایت ظاهری بیان کنیم: هدایت ظاهری (ادمیتانس) ورودی خط به طول d که شامل بار است باید مساوی $1 + jb_{in}$ باشد به طوری که با اضافه شدن هدایت ظاهری (ادمیتانس) خط فرعی d_1 متری، یعنی jb_{st} ، هدایت ظاهری (ادمیتانس) کل مساوی $z_0 + j$ شود. بدین ترتیب هدایت ظاهری خط فرعی (استاب) باید مساوی $-jb_{in}$ باشد. بنابراین نمودار اسمیت را به عنوان یک نمودار هدایت ظاهری (ادمیتانس)، به جای مقاومت ظاهری (امپدانس)، بکار خواهیم برد.

مقاومت ظاهری بار $z_0 + j$ است و محل آن در فاصله 11.5 cm —



شکل ۱۲.۱۲ یک خط فرعی اتصال کوتاه شده به طول d_1 که به فاصله $d \text{ m}$ از بار Z_L قرار دارد و از آن برای عرضه کردن بار منطبق به قسمتی از خط که در طرف چپ خط فرعی قرار دارد، استفاده می‌شود.

اتصال کوتاه در $wfg = 0.25$ است، طول خط فرعی 1.29 ره طول موج بسا 9.67 cm است.

گر چه مقدمه خود را درباره خطوط انتقال در اینجا خاتمه می‌دهیم، مسائل مهم و جالب بسیاری وجود دارند که در اطراف آنها بحث نکرده‌ایم. شاید مهمترین آنها درباره اثرات تلفات غیر قابل اجتناب باشد. مسائل دیگر درباره این مطالبند: استفاده از خطوط انتقال به عنوان عناصر مداری، مدارهای تشدید و خطوط تأخیر جوابهای گذرای خطوط، مدارهای معادل خطوط انتقال، خطوط غیر یکنواخت، روشهای دیگر انطباق و تقریبهای خاصی که در خطوط کم بسامد (فرکانس کم) و ولتاژ بالا مفیداند. درباره بیشتر این مطالب در اکثر مراجع آخر فصل بحث شده است.

تمرین ۶.۱۲

یک خط هوایی 50 اهمی با یک خط شکاف‌دار مورد استفاده قرار گرفته است. وقتی بار اتصال کوتاه باشد کمینه‌های (می‌نیمهای) متوالی ولتاژ در 12 و 32 cm قرائت می‌شوند. (الف) بسامد (فرکانس) کار را تعیین کنید. (ب) Z_L را پیدا کنید در صورتی که در اثر اتصال آن به خط کمینه (می‌نیم) ولتاژ 18 در 16 cm و بیشینه (ماکزیمم) ولتاژ 30 قرائت شود. (پ) اگر به Z_L مقاومت 50Ω به طور سری اضافه شود، مقدار جدید کمینه می‌نیم و محل آن را پیدا کنید در صورتی که بیشینه (ماکزیمم) همچنان 30 باشد.

جوابها: 750 MHz ، 19.5Ω - 38.7 ، 15.8 در 20.9 cm

تمرین ۷.۱۲

می‌خواهیم بار نرمالیزه 50Ω در $z = 0.8$ را با استفاده از یک خط فرعی اتصال کوتاه شده انطباق دهیم. اگر طول موج روی خط 120 cm باشد: (الف) کمترین فاصله از بار را که می‌توان خط فرعی را در آنجا قرار داد چقدر است؟ (ب) کوتاهترین طول این خط فرعی چقدر است.

جوابها: 32 cm ، 18.2 cm .



مراجعی که توصیه می‌شوند:

- 1- Adler, R.B., L.J. Chu, and R.M. Fano: «Electromagnetic Energy Transmission and Radiation,» John Wiley

and Sons, Inc., New York, 1960.

خطوط انتقال در فصلهای ۳ و ۶ به طور کامل بحث شده است.

2- Brown, R. G., R. A. Sharpe, W. L. Hughes and R. E. Post: «Lines, Waves, and Antennas,» The Ronald Press Company, New York 1973.

خطوط انتقال در شش فصل اول همراه با مثالهای متعددی بررسی شده است.

3- Moore, R. K.: «Traveling-wave Engineering,» McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

این کتاب خطوط انتقال و امواج مسطح را توأمآ معرفی می کند. انواع دیگر امواج نیز به اختصار مورد بحث قرار داده شده اند.

4- Paris, D. T., and F. K. Hurd: «Basic Electromagnetic Theory,» McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.

امواج مسطح در فصلهای ۷ و ۸ و خطوط انتقال و موج برها در فصل ۹ مورد بحث قرار گرفته اند.

5- Sashadri, S. R.: (به مراجع توصیه شده فصل ۱۱ مراجعه شود)

6- Weeks, W. L.: «Electromagnetic Theory for Engineering Applications,» John Wiley and Sons, Inc., New York, 1964.

چند آزمایش روشنگر در باره خطوط انتقال در صفحات ۷۲ به بعد شرح داده شده اند.

مسائل

۱- مقاومت ظاهری (امپدانس) مشخص يك خط انتقال بی تلفات Ω ۵۰ و سرعت انتشار در آن $10^8 \times 2.4$ m/s است اگر بسامد (فرکانس) کار ۱ MHz باشد:

(الف) β و (ب) L و (پ) C و (ت) طول موج روی خط را پیدا کنید.

۲- (الف) ضریب β را برای خط انتقال بی تلفاتی با $L = 10^{-6}$ H/m، $\omega = 10^9$ rad/s و $C = 10^{-1}$ F/m اگر $R = 0$ باشد چه مقدار G تضعیفی برابر (0.001151 Np/m) (0.01 dB/m) تولید خواهد کرد.

۳- الف) روابط لازم بین R و L و G و C و ω را طوری تعیین کنید که مقاومت ظاهری (امپدانس) مشخص يك خط با تلفات، حقیقی باشد. (ب) α و β را برای چنین خطی با مقاومت ظاهری (امپدانس) مشخص 50Ω در 100 MHz پیدا کنید در صورتی که $R = 1 \Omega/\text{m}$ و $L = 0.2 \mu\text{H}/\text{m}$ باشد.

۴- از خط انتقالی که برای آن $\alpha = 0$ و $\beta = 0.1 \text{ rad}/\text{m}$ و $Z_0 = 100 \Omega$ است در بسامد (فرکانس) 10 MHz استفاده می‌شود. اگر $Z_L = 400 \Omega$ باشد: الف) Γ و (ب) S و (پ) مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی در نقطه‌ای به فاصله 7.5 m از بار را پیدا کنید.

۵- يك خط انتقال بی‌تلفات 300 اهمی در هوا در بسامد (فرکانس) 2 MHz کار می‌کند و در نقطه‌ای به فاصله 700 m از بار مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی آن $200 - j100 \Omega$ است. Z_L چقدر است؟

۶- ابعاد هادی خارجی يك کابل هم‌محور عبارتند از b و c و $c > b$. ضریب هدایت را σ_c و $\mu = \mu_0$ فرض کنید. انرژی مغناطیسی ذخیره شده در ناحیه $b < r < c$ را با فرض توزیع یکنواخت جریان کل I به دست آورید.

۷- کابل هم‌محوری با $a = 0.5 \text{ mm}$ و $b = 4 \text{ mm}$ و $c = 4.5 \text{ mm}$ و $\sigma_c = 4 \times 10^7 \text{ J}/\text{m}$ در بسامد (فرکانس) 1 MHz کار می‌کند. الف) $L_{a,int}$ (ب) $L_{b,c,int}$ چه کسوری از ضریب خود القائی کل اند.

۸- Z_0 و γ را برای يك خط انتقال صفحه‌ای مسی که با بسامد $\omega = 10^8 \text{ rad}/\text{s}$ کار می‌کند پیدا کنید در صورتی که عایق آن تفلان (به ضمیمه C مراجعه شود) و ابعاد آن $b = 8 \text{ mm}$ و $d = 0.5 \text{ mm}$ و $t = 0.15 \text{ mm}$ باشند.

۹- Z_0 و α و β را برای يك خط انتقال دوسیمه در هوا پیدا کنید در صورتی که $d = 10 \text{ cm}$ و $a = 0.5 \text{ cm}$ و $\sigma_c = 5 \times 10^7 \text{ J}/\text{m}$ و $\sigma = 0$ باشد. فرض کنید $f = 30 \text{ MHz}$ می‌باشد.

۱۰- با استفاده از ابعاد تعریف شده در شکل ۲.۱۲ محدودیتهای ابعادی لازم را برای يك خط انتقال بسامد (فرکانس) بالا در هوا تعیین کنید در صورتی که بخواهیم مقاومت ظاهری (امپدانس) مشخص آن برابر: الف) 50Ω برای يك کابل هم‌محور و (ب) 300Ω برای خط انتقال دوسیمه و (پ) 50Ω برای خط انتقال صفحه‌ای، باشد.

۱۱- يك خط 50 اهمی در هوا به طول 5 m با بسامد (فرکانس) 50 MHz به کار می‌رود. منبع شامل ترکیب موازی يك منبع آرمانی $V \angle 0^\circ$ و مقاومت 25Ω است و بار آن $50 + j50 \Omega$ است الف) $V_{s,in}$ و (ب) $V_{s,load}$ و (پ) P_L را پیدا کنید.

۱۲- مولدی با ولتاژ مدار باز 10 mV و مقاومت ظاهری (امپدانس) داخلی Z_0 به خط انتقال بی تلفاتی که مقاومت ظاهری (امپدانس) مشخص آن Z_L است وصل شده است. در انتهای طول L متر از خط بیار Z_0 ۴ره وصل شده است. اگر $Z_0 = 100\ \Omega$ باشد: (الف) برای طولهای مختلف خط مقادیر بیشینه (ماکزیمم) و کمینه (می نیمم) توانی را که می توان به بار منتقل کرد تعیین کنید. این طولها چقدراند؟ (ب) مقادیر بیشینه (ماکزیمم) و کمینه (می نیمم) ولتاژ بار چقدراند و این مقادیر برای چه طولهایی به دست می آیند.

۱۳- یک بار 200 اهمی به قطعه ای به طول $\lambda/2$ از یک خط انتقال بی تلفات 600 اهمی وصل شده است. خط 600 اهمی در انتهای یک خط 300 اهمی قرار دارد. چه مقاومت ظاهری (امپدانس) را باید به محل اتصال این دو خط وصل کرد تا نسبت موج ساکن روی خط 300 اهمی برابر واحد باشد.

۱۴- یک خط انتقال بی تلفات 50 اهمی به بار $Z_L = R + jX$ ختم شده است. اگر نسبت موج ساکن 2 باشد رابطه بین R و X چیست؟

۱۵- مقدار Z_0 یک خط انتقال بی تلفات چقدر باید باشد تا بار $50 + j100\ \Omega$ باعث ایجاد کمترین نسبت موج ساکن باشد؟ مقدار S چقدر است؟

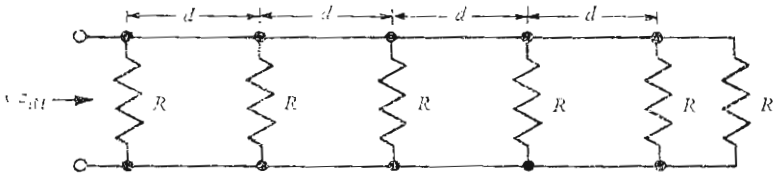
۱۶- چه طولی از یک خط انتقال هم محور 50 اهمی اتصال کوتاه شده معادل یک خازن 20 pF در بسامد (فرکانس) 50 MHz است؟ فرض کنید خط بی تلفات و سرعت انتشار در آن c باشد.

۱۷- در هنگام اتصال یک آنتن FM 300 اهمی به گیرنده به وسیله یک خط انتقال 300 اهمی، اشتباهاً قطعه ای به طول 9-ft از یک خط انتقال 150 اهمی نیز به خط فوق وصل شده است. فرض کنید هر دو خط بی تلفات و $U = 2c/3$ باشد و همچنین مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی گیرنده $300\ \Omega$ باشد. نسبت موج ساکن روی خط در بسامد (فرکانس) 100 MHz چقدر است؟

۱۸- با استفاده از نمودار اسمیت مقدار مقاومت ظاهری (امپدانس) بار یک خط بی تلفات 50 اهمی را به طوری تعیین کنید که وقتی نزدیکترین می نیمم به فاصله $\lambda/3$ از بار است نسبت موج ساکن در آن برابر 1.5 باشد.

۱۹- یک خط هوایی بی تلفات 100 اهمی به بار مجهولی ختم شده است و در نتیجه نسبت موج ساکن 1.8 و کمینه ای (می نیممی) به فاصله 20 cm از انتهای خط شکافدار ایجاد شده است. وقتی بار با مدار باز تعویض می شود محل کمینه (می نیمم) 2 سانتیمتر به بار نزدیکتر می شود. اگر $f = 600\text{ MHz}$ باشد، با استفاده از نمودار اسمیت Z_L را پیدا کنید.

۲۰- در نمودار اسمیت مکان کلیه نقاطی را تعیین کنید که: (الف) نسبت موج



شکل ۱۴.۱۲ به مسأله ۲۳ مراجعه شود.

ساکن در آنها برابر ۲ است. (ب) اندازه ضریب بازتاب مساوی ۵ره است. (پ) زاویه ضریب بازتاب برابر 90° است. (ت) یک چهارم موج تسابیده، بازتابیده می شود. (ث) قسمت حقیقی مقاومت ظاهری (امپدانس) بار مساوی $Z_0/2$ است. (ج) زاویه ضریب توان بار 45° پس فاز است (بار القائی).

۲۱- یک خط انتقال هم محور پر از هوا در بسامد (فرکانس) 400 MHz به کار می رود و نسبت موج ساکن در آن 1.2 است. بیشینه (ماکزیمم) ولتاژ در فاصله 15 m از بار است. (الف) ضریب بازتاب بار چقدر است؟ (ب) در صورتی که موج ولتاژ تابیده $V \cos(\omega t - \beta z)$ باشد، ولتاژ برای باری واقع در $z = 0$ چیست؟

۲۲- (الف) نشان دهید در نمودار اسمیت اگر از نقطه $z = r + jx$ شروع کرده بعد از گردش 180° به نقطه مقابل آن در امتداد قطر نمودار برسیم، این نقطه $1/(r + jx)$ خواهد بود. (ب) از نمودار اسمیت استفاده کرده هدایت ظاهری (ادمیتانس) معادل $2 - j3$ را به دست آورید.

۲۳- ساختمان حامل یک خط انتقال دو سیمه، مقاومتی برابر Z_0 اهم را طبق شکل ۱۴.۱۲ به طور موازی در فواصل d به خط اضافه می کند. اگر خط بی تلفات و $R = 10Z_0 = 10Z_0$ باشد، Z_{in} را در (الف) $\lambda/2$ و (ب) $\lambda/4$ پیدا کنید.

۲۴- مدار انطباقی با یک خط فرعی طرح کنید که به وسیله آن بتوان پنج گیرنده FM 300 اهمی را از طریق یک خط انتقال 300 اهمی به یک آنتن 300 اهمی وصل کرد. بسامد (فرکانس) 100 MHz است. با فرض اینکه سرعت انتشار در خط $2c/3$ باشد طولها را مشخص کنید.

۲۵- می خواهیم بار نسبی (نرمالیزه) $1 - j$ - 5 اهمی را به وسیله یک خط فرعی

اتصال کوتاه شده که به‌طور سری به يك خط انتقال دو سیمه وصل شده است انطباق دهیم. (الف) خط فرعی در فاصله چند طول موج از بار باید به‌خط وصل شود. (ب) طول خط فرعی باید چند طول موج باشد.

۲۶- به شکل ۱۲.۱۲ مراجعه کرده نشان دهید که روابط تحلیلی مربوط به انطباق بسا يك خط فرعی اتصال کوتاه شده عبارتند از:

$$\beta d = (1 - g) / (b + g \cot \beta d_1) \quad \text{و} \quad \beta d_1 = \pm \sqrt{[(1 - g)^2 + b^2] / g}$$

که در آنها $g + jb$ هدایت ظاهری (ادمیتانس) نسبی (نرمالیزه) بار است.

۲۷- خط انتقال بی‌تلفاتی با هدایت ظاهری (ادمیتانس) مشخص Y_0 و بار Y_L مفروض است. طول يك خط فرعی اتصال کوتاه شده متصل به بار را طوری تعیین کنید که نسبت موج ساکن بین منبع و خط فرعی حداقل باشد. مقدار s_{min} چقدر است؟

۲۸- با فرض اینکه $\Gamma = 0.5$ و $Y_0 = 100 \text{ } \Omega$ و $\Gamma = 0.5 - j0.5$ باشد، از نمودار اسمیت استفاده کرده محل اتصال يك خط فرعی اتصال کوتاه شده به طول $\lambda/8$ را طوری تعیین کنید که نسبت موج ساکن می‌نیمم باشد. فرض کنید کلیه خطوط بی‌تلفات باشند.

۲۹- نوعی دیگر از خط انتقال از يك نوار مستطیلی بین دو صفحه موازی بینهایت تشکیل شده است. فرض کنید فاصله بین دو صفحه 1 cm و ابعاد نوار $1 \text{ cm} \times 0.2 \text{ cm}$ باشد. این نوار در وسط دو صفحه قرار داشته بعد بزرگتر آن موازی صفحات است. (الف) ظرفیت در واحد طول بین نوار و دو صفحه زمین را تخمین بزنید و سپس L و Z_0 را از این مقدار تقریبی به دست آورید. (ب) به شکل ۶ مقاله زیر مراجعه کرده مقادیر تقریبی خود را با مقادیر دقیق مقایسه کنید:

S.B. Cohn, Characteristic Impedance of the Shielded-Strip Transmission Line, *IRE Trans. Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-2, No. 2, July, 1954.

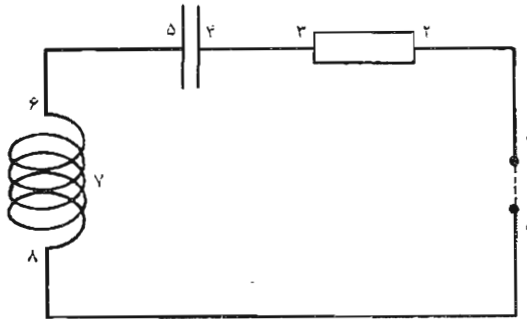
۳۰- گرچه غالباً بهتر است که از اجزاء انطباقی استفاده شود که از قطعاتی از خطوط انتقال تشکیل شده باشند، از اجزاء فشرده نیز می‌توان استفاده کرد در صورتی که چنین اجزائی برای بسامد (فرکانس) کار موجود باشند. در مسئله ۱۳.۹ در صفحه ۴۵۳ کتاب Paris and Hurd (به مراجع توصیه شده این فصل مراجعه شود) خواسته شده است که برای انطباق بار $100 + j100 \text{ } \Omega$ به يك خط بی‌تلفات $100 \text{ } \Omega$ يك مقاومت ظاهری موهومی (رآکنانس) خازنی موازی با بار و يك مقاومت ظاهری موهومی (رآکنانس) القایی موازی با خط در فاصله $\lambda/16$ از آن انتخاب شود. جوابها در قسمت آخر کتاب مذکور داده شده‌اند.

چند کاربرد دیگر معادلات ماکسول

مطالبی را که برسیل مقدمه بر نظریه الکترومغناطیسی در این کتاب ارائه کردیم با بررسی چند کاربرد مهم دیگر معادلات ماکسول - نظریه مدار و حفره تشدید، و تشعشع از آنتن - خاتمه می‌دهیم. بررسی این مطالب نه تنها به منظور نشان دادن موارد استعمال و فایده روابط اساسی فصلهای قبل است بلکه بدین وسیله می‌توانیم مطالب مهمی را درباره تقریبه‌های معمول در نظریه مدار و پدیده تشدید در بسامدهای (فرکانسهای) بالا و روش فرستادن انرژی داخلی خط انتقال به فضا، فراگیریم. اکنون دیگر مطالعه مراجع آخر فصل باید به سهولت مسیر باشد و کسانی که علاقه خاصی به هر يك از مطالب فوق دارند می‌توانند از مطالعات خود به خوبی بهره‌مند شوند.

۱۰۱۳ قوانین نظریه مدار

برای نشان دادن اینکه چگونه معادلات ماکسول و تعاریف پتانسیل و مفاهیم مقاومت و ظرفیت و خود القا با یکدیگر تلفیق شده روابط معمول تحلیل مدارها را به وجود می‌آورند شکل (۱۰۱۳) را در نظر بگیرید. بین نقاط o و ۱ يك میدان الکتریکی خارجی اعمال شده است؛ این دو قطب به یکدیگر خیلی نزدیکند، و می‌توان میدان الکتریکی را سینوسی شکل فرض کرد. شاید بتوان يك نوسان ساز ترانزیستوری ریز یا يك ماشین دوار با محرك مکانیکی به اندازه سر سوزن، یا حتی حشره خوش خدمتی را که دهان پر از بار خود را به تناوب بین نقاط o و ۱ حرکت می‌دهد



شکل ۱۰۱۳ یک مدار RLC . ترکیب مدار و عناصر آن طوری انتخاب شده اند که بتوان یک مقاومت و یک خازن و یک سیم پیچ و یک منبع ولتاژ را در آن تشخیص داد.

در نظر مجسم کرد. منبع میدان از هر نوع که باشد، میدانی الکتریکی بین این دو نقطه برقرار می کند که مستقل از جریانی است که ممکن است متعاقب آن بوجود آید. بین نقاط ۲ و ۳ ناحیه ای است از یک ماده با تلفات با سطح مقطع کوچک S_R و طول d_R و ضریب هدایت σ . در نقاط ۴ و ۵ دو صفحه خازن با سطح S_C وجود دارند که به وسیله ماده ای با ضریب پذیرش ϵ به فاصله d_C از یکدیگر فرار گرفته اند. این چند نقطه به وسیله رشته ای از جنس هادی کامل و سطح مقطع قابل اغماض به یکدیگر متصل اند. این رشته بین نقاط ۶ و ۸ به صورت مارپیچی با ضریب شیب کم و N دور پیچیده شده است.

شاید واضح باشد که اکنون می خواهیم معادله مداری را که برایمان آشناست از معادلات ماکسول به دست آوریم،

$$V_{10} = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t Idt \quad (1)$$

در ضمن این کار بد نیست به طرز به وجود آمدن هر یک از این جملات و همچنین به فرضهائی که باید بکنیم، توجه شود. نقطه شروع کار ما شکل انتگرالی قانون فارادی است.

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{L} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_s \bar{B} \cdot d\bar{S} \quad (2)$$

خواهیم دید که طرف راست این معادله فقط يك جمله از (۱) را، یعنی جمله‌ای که شامل ضریب خود القائی است، به دست می‌دهد. سه جمله دیگر (۱) از انتگرال مسير بسته به دست می‌آیند.

انتگرال سطحی طرف راست (۲) را در نظر می‌گیریم. چون وضع مدار با زمان تغییری نمی‌کند، مشتقات جزئی را می‌توان به صورت مشتقات معمولی نوشت. همچنین رشته بین نقاط ۶ و ۸، یعنی مارپیچ N دوری، میدانی مغناطیسی تولید می‌کند که مقدار آن در مارپیچ به مراتب بیشتر از نواحی دیگر در امتداد رشته است. اگر فرض کنیم شار مغناطیسی کل با تمام N دور سیم پیوند دارد، انتگرال سطحی به $-d\Phi/dt$ یا مطابق تعریف ضریب خود القائی فصل ۹، به $-L(dI/dt)$ تبدیل می‌شود، یعنی

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = -L \frac{dI}{dt}$$

که در آن I جریان رشته‌ای هر يك از دورهای مارپیچ است. انتگرال مسير بسته در امتداد رشته، مستقیماً بین صفحات خازن و بین نقاط ۵ و ۱ است، که به صورت خط چین نشان داده شده است. جزء مربوط به هادی کامل رشته‌ای صفر است، چون \vec{E} مماسی روی آن باید صفر باشد. گرچه ممکن است عجیب به نظر برسد ولی این مطلب در مورد مارپیچ نیز صادق است. بنا براین داریم

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = \int_0^1 + \int_2^3 + \int_4^5$$

انتگرال اول طرف راست مساوی ولتاژ بین نقاط ۱ و ۵ با علامت منفی است،

$$\int_0^1 \vec{E} \cdot d\vec{L} = -V_1.$$

این انتگرال فقط تابع منبع خارجی است و به وضع شکل (۱۰۱۳) بستگی ندارد. مسير انتگرال‌گیری مستقیماً بین دو قطب مجاور است، و چون معمولاً منبع خارجی را نه به صورت شدت میدان بلکه به صورت ولتاژ در نظر می‌گیریم، V_1 را ولتاژ اعمال شده می‌خوانیم.

انتگرال دوم در امتداد جسم با تلفات است، و از شکل نقطه‌ای قانون اهم و تعریف مقاومت استفاده می‌کنیم،

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{L} = \int_{\gamma} \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{L} = \int_{\gamma} \frac{JdL}{\sigma} = \frac{JdR}{\sigma} = \frac{IdR}{\sigma S_R} = IR$$

در اینجا فرض کرده‌ایم که جریان کل همان جریان I باشد. این فرض به دوشروط زیر صادق است. جریان جا به جایی بین دو قسمت از رشته نباید وجود داشته باشد (مثلاً از نقطه ۳ به ۸)، چون فرض کرده‌ایم که پیوستگی چگالی جریان هدایتی و جا به جایی فقط با جریان هدایتی برقرار شود. به عبارت دیگر، فرض می‌کنیم که ظرفیتهای حشوی (پارازیتی) قابل اغماض باشند. همچنین، ابعاد مسیر رشته‌ای باید نسبت به طول موج کوچک باشد. درباره این مطلب در بخش آخر این فصل توضیح بیشتری خواهیم داد، ولی از معلومات خود در باره حرکت امواج می‌توانیم نتیجه بگیریم که در طول نیم طول موج تغییر جهت کاملی در میدان ایجاد می‌شود. در اینجا می‌خواهیم تشعشع نداشته باشیم، ولی در بخش آخر فصل تشعشع موضوع اصلی مورد بحث است. انتگرال سوم بین صفحات خازن محاسبه می‌شود که در آنجا جریان هدایتی صفر است ولی جریان جا به جایی، مطابق فرض فوق، مساوی I است. در اینجا، انتگرال را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{L} = \int_{\gamma} \frac{D}{\epsilon} dL = \frac{Dd_c}{\epsilon} = \frac{Qd_c}{\epsilon S_c} = \frac{Q}{C}$$

یا

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{L} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t Idt$$

که در آن فرض کرده‌ایم در $t = -\infty$ بار خازن صفر است. از ترکیب این نتایج داریم

$$-V_{\infty} = IR + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t Idt = -L \frac{dI}{dt}$$

یا

$$\boxed{V_{\infty} = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t Idt}$$

که همان رابطه معروف مدار RLC است که می‌خواستیم به دست آوریم.

فرض‌هایی که این رابطه بر پایه آنها استوار است و به طور ضمنی در اکثر مسائل مداری به کار برده می‌شود، عبارتند از:

- ۱- یک هادی رشته‌ای مسیر بسته یا مدار را تعریف می‌کند.
- ۲- بزرگترین ابعاد مدار از طول موج کوچکترند.
- ۳- جریان جا به جایی محدود به خازنها است.
- ۴- شار مغناطیسی محدود به سیم پیچها است.
- ۵- هدایت غیر کامل محدود به مقاومتها است.

فرض اول تعریف ساده «مدار» است. دومی به معنای آن است که اگر بسامد (فرکانس) به اندازه کافی بالا باشد مدار دیگر از قوانین نظریه مدار تبعیت نمی‌کند. سه فرض آخر روابط مداری را به اجزاء آرمانی محدود می‌کنند. اگر خازنها دارای مقاومت باشند، یا سیم پیچها خازن داشته باشند، قوانین مداری را نمی‌توانیم به کار بریم مگر آنکه خازن با مقاومت یا سیم پیچ یا خازن حشوی (پارازیتی) را با شبکه‌هایی متشکل از اجزاء آرمانی تعویض کنیم. معلومات ما درباره میدانهای الکترومغناطیسی، انتخاب ترکیب مناسبی از اجزاء آرمانی را ممکن می‌سازد و تجربه هم در این کار مفید است.

«روشهای مداری» را می‌توان برای بسیاری از اجزائی که دارای شرایط فوق نیستند، مثلاً خطوط انتقال، به کار برد. موج برها و حفره‌های تشدید، و بسیاری از مسائل آنتن را نیز می‌توان از بعضی جهات مدار تلقی کرد. در این روش، توصیف جزئیات میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در درجه دوم اهمیت قرار دارد و این اجزاء برحسب ولتاژها و جریابهای معادل در ورودی و خروجی توصیف می‌شوند. حفره تشدیدی که در بخش بعد مورد بحث قرار گرفته است مثالی از این مطلب است.

تمرین ۱۰۱۳

طول 20 cm از یک خط انتقال نواری با ظرفیت 100 pF/m به وسیله اتصالیاتی به یک طرف آن به عنوان یک عنصر مداری به کار می‌رود. اگر این خط شامل عایقی باشد که برای آن $\epsilon_R = 2.25$ و $\mu_R = 1$ میباشد و از میدانهای غیریکنواخت در لبه‌ها بتوان صرف نظر کرد ظرفیت معادل آن در بسامدهای (فرکانسهای): (الف) 1 MHz و (ب) 125 MHz چقدر است؟

جوابها: 20 pF و 2505 pF

۲۰۱۳ حفره تشدید هم محور

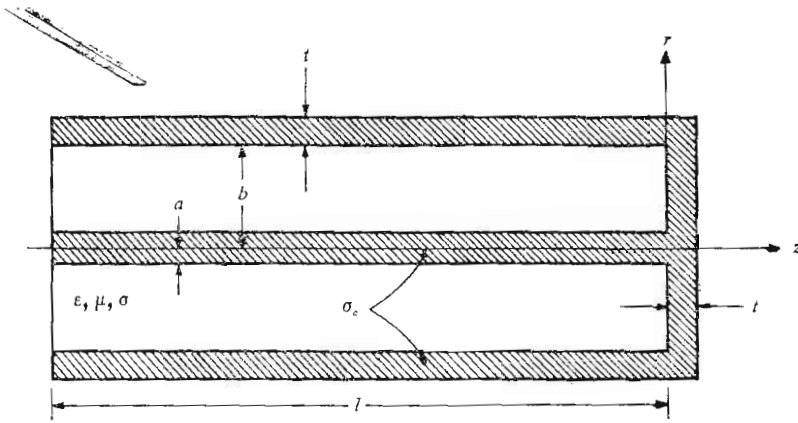
در بخش قبل دیدیم که اصول نظریه مدار بر پایه معادلات ماکسول بنا شده است و

همچنین دیدیم که باید مسیر بسته‌ای داشته باشیم (این مسیر الزاماً هادی نیست) که ابعاد آن در مقایسه با طول موج کوچک باشد. حال وسیله‌ای را در نظر می‌گیریم که گرچه بسیاری از این شرایط در آن موجود نیست، ولی با استفاده از بعضی از جنبه‌های نظریه مدار می‌توان نتایج را به صورت شناخته شده‌ای بیان کرد.

آزمایشگاه بسته‌ای را تصور کنیم که از درون آن یک کابل هم محور عبور می‌کند. بدین ترتیب در داخل آزمایشگاه مدار پخش شده‌ای وجود دارد، یعنی مداری که ابعادش قابل مقایسه با طول موج است و خواص مقاومتی و خازنی و خود القائی آن در این ناحیه پخش شده است. بنابراین روابط مداری در آزمایشگاه صادق نیستند. ولی در نقطه‌ای که کابل هم محور وارد آزمایشگاه می‌شود می‌توانیم ولتاژی بین هادیهای داخلی و خارجی و جریانهایی برای هر یک از آنها تعریف کنیم و این کار امکان پذیر است چون ابعاد شعاعی کابل هم محور جزء کوچکی از یک طول موج فرض شده است، گرچه طول آن چنین نیست. مسأله‌ای که مورد توجه ما است این است که این وسیله را در آزمایشگاه با مدار معادلی توصیف کنیم. اگر در این کار موفق باشیم، غیرممکن است بتوان تشخیص داد که آیا آزمایشگاه شامل مدار معادلی است که شرایط نظریه مدار در آن صادق است یا اینکه در آنجا مدار پخش شده‌ای وجود دارد که دارای چنین خواصی نیست. خواهیم دید که این فرض برای نوار بسامد (باند فرکانس) بخصوصی صحیح است.

وسیله‌ای که آن را به عنوان مثالی برای به دست آوردن مدار معادل به کار خواهیم برد عبارت است از حفره تشدید هم محور. چنین تشدیدکننده‌هایی نسبت به بسامد (فرکانس) حساس‌اند و بنابراین از آنها در بسامد سنجها (فرکانس متر) و تقویت‌کننده‌ها و نوسان‌سازها استفاده می‌شود. از این وسائل برای تعیین هدایت ویژه و ضریب پذیرش عایقه‌ها نیز، مثلاً برای کنترل بعضی عملیات تولیدی یا تشخیص ویژگیهای خاک می‌توان استفاده کرد.

حفره تشدید هم محور (شکل ۲۰۱۳) را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم a و b و t خیلی کوچکتر از یک طول موج باشند، t می‌تواند هر طول دلخواهی باشد ولی ما طول بخصوص یک چهارم طول موج را انتخاب می‌کنیم. چون رابتهای ثابت هادیها و عایق معلومند، می‌توانیم R و G و L و C را برای این خط محاسبه کنیم، و Z_0 و γ را از آنها به دست آوریم. سپس می‌توانیم چند دقیقه‌ای وقت خود را صرف به دست آوردن روابطی برای مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی یک خط دارای تلفات کنیم و بدین ترتیب مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی را برای خط مختوم به باری با مقاومت ظاهری (امپدانس) کم، یعنی صفحه اتصال کوتاه، به دست آوریم. با در دست داشتن مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی، می‌توانیم مدار معادلی



شکل ۲۰۱۳ حفره هم محوری که در آن $b \ll \lambda$. این وسیله را در حوالی بسامد (فرکانس) تشدید می توان با یک مدار تشدید موازی نشان داد.

را تعیین کنیم که، حداقل در داخل حدود بسامد (فرکانس) دلخواهی حول بسامد تشدید، دارای چنین مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی باشد. ولی روش کلی تری را انتخاب می کنیم که اصول مربوط به تعیین مدار معادل را، برای هر حفره مایکروویو دلخواهی در حوالی بسامد (فرکانس) تشدید، روشن می سازد. برای شروع کار میدانهای را که در داخل حفره بی تلفات موجود می بود محاسبه می کنیم سپس مقدار این میدانها را در مرزهای هادیها پیدا کرده تلفاتی که در اثر این میدانها به وجود می آید محاسبه می کنیم. گرچه می توانیم با استفاده از نتایج محاسبات تلفات، میدانهای حفره را دوباره محاسبه کرده دوباره از آنها برای بهبود محاسبات تلفات استفاده کنیم، این روش محاسبات مکرر برای حفره های کم تلفات لازم نیست و تقریب اول دارای دقت بسیار خوبی است. برای خط انتقال بی تلفاتی که در $z = 0$ به اتصال کوتاهی ختم شده باشد، و محور z - ها به طرف راست ممتد باشد، فیזור ولتاژ در هر نقطه از خط مساوی مجموع امواج تابیده و بازتابیده است،

$$V_s = V_0 e^{-j\beta z} - V_0 e^{j\beta z}$$

یا

$$V_s = -j 2 V_0 \sin \beta z \quad (1)$$

و جریان عبارت است از

$$I_s = \frac{V_o}{Z_o} e^{-j\beta z} + \frac{V_o}{Z_o} e^{j\beta z}$$

یا

$$I_s = \frac{2V_o}{Z_o} \cos \beta z \quad (۲)$$

که در آن

$$\beta = \omega \sqrt{LC} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (۳)$$

و

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a}$$

شدت میدان مغناطیسی رابطه مستقیمی با جریان دارد،

$$H_{\varphi_s} = \frac{I}{2\pi r}$$

و بنابراین

$$H_{\varphi_s} = \frac{V_o}{\pi r Z_o} \cos \beta z \quad (۵)$$

و به خاطر داریم که رابطه بین شدت میدان الکتریکی و ولتاژ بین هادیهای کابل هم محور به صورت زیر است،

$$E_{r_s} = \frac{V_s}{r \ln(b/a)} = \frac{-j2V_o}{r \ln(b/a)} \sin \beta z \quad (۶)$$

به طوری که ولتاژ هادی خارجی صفر است و ولتاژ هادی داخلی مساوی است با V_s .
 دو رابطه اخیر میدانهای داخلی يك حفره تشدید را به دست می دهند.
 تلفات توان در حفره به چند علت مختلف بستگی دارد: به علت عایق ناقصی
 که ممکن است فضای داخلی حفره را پر کرده باشد یا هادیهای که هادی داخلی و

خارجی و صفحه انتهائی آن را تشکیل می‌دهند. در ابتدا فرض می‌کنیم که تلفات توان در عایق به مراتب بیشتر از تلفات دیواره‌ها باشد. چنین حالتی هنگامی پیش می‌آید که مثلاً حفره از آرد یا آبجو و مواد غذائی دیگر، که می‌خواهیم تولید آنها را با اندازه‌گیریهای الکتریکی کنترل کنیم، پر شده باشد. تلفات عایق از انتگرال‌گیری چگالی توان اهمی در فضای داخلی حفره به دست می‌آید. محاسبات را از چگالی جریان هدایتی شروع می‌کنیم،

$$J_{rs} = \sigma E_{rs} = \frac{-j^2 \sigma V_0}{r \ln(b/a)} \sin \beta z$$

یا به صورت مثلثاتی،

$$J_r = \frac{2\sigma V_0}{r \ln(b/a)} \sin \beta z \sin \omega t \quad (7)$$

توان کل تلف شده در عایق عبارت است از

$$P_d = \int_{\text{حجم}} \frac{1}{\sigma} J_r^2 dv$$

$$= \int_{-l}^0 \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{2\sigma V_0^2}{r [\ln(b/a)]^2} \sin^2 \beta z \sin^2 \omega t dr d\phi dz$$

یا

$$P_d = \frac{4\pi\sigma V_0^2}{\ln(b/a)} \left(l - \frac{\sin 2\beta l}{2\beta} \right) \sin^2 \omega t \quad (8)$$

و مقدار متوسط زمانی تلفات توان مساوی است با:

$$R_{d,av} = \frac{2\pi\sigma V_0^2}{\ln(b/a)} \left(l - \frac{\sin 2\beta l}{2\beta} \right) \quad (9)$$

برای اینکه حفره تشدید داشته باشیم طول l را مساوی یک چهارم طول موج انتخاب می‌کنیم. اگر حفره حقیقتاً بسی تلفات می‌بود، جریان ورودی صفر و مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی بینهایت می‌شد. ولی خواهیم دید که توان تلف شده در عایق و دیواره‌ها باعث می‌شود که جریان ورودی کوچکی به وجود آید و

مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی که در بسامد (فرکانس) تشدید مساوی مقاومت بزرگی است به دست آید. اگر بسامد (فرکانس) تشدید را با f_0 مشخص کنیم، داریم

$$l = \frac{\lambda_0}{4} = \frac{1}{4f_0 \sqrt{\mu\epsilon}} \quad (10)$$

و

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\pi}{2l} \quad (11)$$

بدین ترتیب مقدار متوسط توان تلف شده در عایق در بسامد (فرکانس) تشدید عبارت است از

$$P_{d_0,av} = \frac{2\pi\sigma V_0^2 l}{\ln(b/a)} \quad (12)$$

حال می‌توانیم نتایج خود را به مدار معادلی به صورت مدار شکل (۳.۱۳) یعنی مدار تشدید موازی، تطبیق دهیم. در بسامد (فرکانس) تشدید مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی مقاومت خالص R_e است (طبق تعریف تشدید). از رابطه (۱) ولتاژ را در هر مکان و زمان دلخواه، در دست داریم

$$V = 2V_0 \sin \beta z \sin \omega t$$

بنابراین ولتاژ ورودی (در $z = -l$) عبارت است از

$$V_{in} = -2V_0 \sin \beta l \sin \omega t$$

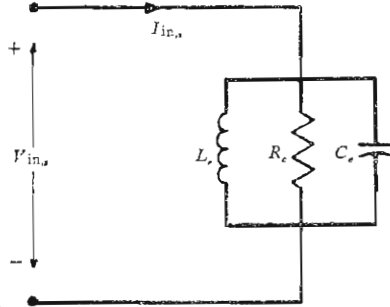
در بسامد (فرکانس) تشدید داریم $\beta l = \pi/2$ و

$$V_{0,in} = -2V_0 \sin \omega t$$

چون حداکثر دامنه مساوی $2V_0$ است با استفاده از توان متوسط تلف شده،

$$P_{d_0,av} = \frac{1}{2} \frac{(-2V_0)^2}{R_e} = \frac{2\pi\sigma V_0^2 l}{\ln(b/a)}$$

می‌توان مقاومت معادل را به دست آورد،



شکل ۳۰۱۳ انتخاب مناسب R_e و L_e و C_e باعث می‌شود که این مدار در نزدیکی $f_o = 1/\sqrt{2\pi} \sqrt{L_e C_e} = 1/\sqrt{4l} \sqrt{\mu\epsilon}$ باحفره تشدید شکل ۲۰۱۳ معادل باشد. در اینجا l طول حفره است.

$$R_e = \frac{\ln(b/a)}{\pi\sigma l} \quad (13)$$

برای اینکه مقادیر C_e و L_e شکل (۳۰۱۳) را پیدا کنیم می‌بایستی مقدار انرژی ذخیره شده در حفره را در بسامد (فرکانس) تشدید به دست آوریم. سپس می‌توانیم از تعریف کلی Q ،

$$Q = 2\pi \frac{\text{انرژی ذخیره شده}}{\text{تلفات انرژی در يك دوره}} \quad (14)$$

یا

$$Q = \omega \frac{\text{انرژی ذخیره شده}}{\text{توان متوسط تلف شده}} \quad (15)$$

استفاده کرده Q را پیدا کنیم. اگر Q را بدانیم معادلات معمولی مدارها مقادیر L_e و C_e را به دست می‌دهند. انرژی ذخیره شده در حفره مساوی مجموع انرژی‌های ذخیره شده در

میدانهای الکتریکی و مغناطیسی است. ولی می توان نشان داد که انرژی کل مساوی حداکثر انرژی ذخیره شده در یکی از میدانهای الکتریکی یا مغناطیسی است. یعنی، انرژی کل ثابت است و وقتی انرژی مغناطیسی صفر است انرژی میدان الکتریکی ماکزیمم است و بالعکس. اگر مقدار ماکزیمم میدان مغناطیسی (۵) را انتخاب کنیم،

$$H_{\phi, \max} = \frac{V_0}{\pi r Z_0} \cos \beta z$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} W_{H, \max} &= \int_{\text{حجم}} \frac{1}{2} \mu H_{\max}^2 dv \\ &= \frac{\mu V_0^2}{2\pi^2 Z_0^2} \int_{-l}^l \int_0^\pi \int_a^b \frac{1}{r} \cos^2 \beta z dr d\phi dz \\ &= \frac{\mu V_0^2 \ln(b/a)}{2\pi Z_0^2} \left(l + \frac{\sin 2\beta l}{2\beta} \right) \end{aligned}$$

در بسامد (فرکانس) تشدید

$$W_{HO, \max} = W_{\dots, \max} = \frac{\mu l V_0^2 \ln(b/a)}{2\pi Z_0^2} = \frac{2\pi \epsilon l V_0^2}{\ln(b/a)} \quad (16)$$

تعیین انرژی ماکزیمم ذخیره شده در میدان الکتریکی، با روشی مشابه به همین جواب منجر خواهد شد.

از ترکیب روابط خود برای متوسط توان تلف شده در عایق (۱۲)، تعریف Q (۱۵)، و انرژی کل (۱۶)، که همه آنها در بسامد (فرکانس) تشدید محاسبه شده اند، Q مربوط به عایق را در بسامد (فرکانس) تشدید به دست می آوریم،

$$Q_{d_0} = \omega_0 \frac{2\pi \epsilon l V_0^2 / \ln(b/a)}{2\pi \sigma l V_0^2 / \ln(b/a)}$$

یا

$$Q_{d_0} = \frac{\omega_0 \epsilon}{\sigma} \quad (17)$$

نکتهٔ جالب توجه این است که این مقدار مساوی عکس تانژانت تلفات خازنی هسم محور در بسامدهای (فرکانسهای) پائین است. خازن معادل C_e را می‌توان از رابطهٔ انرژی ذخیره شده در خازن،

$$W_{\omega, \max} = \frac{1}{2} C_e (2V_0)^2$$

یا از مدار تشدید موازی به دست آورد

$$Q_{d_0} = \omega_0 C_e R_e \quad (18)$$

و مقدار آن برابر است با

$$C_e = \frac{\pi \epsilon l}{\ln(b/a)} \quad (19)$$

با در دست داشتن ظرفیت، ضریب خود القائی را از رابطهٔ

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_e C_e} \quad (20)$$

یا از رابطهٔ Q

$$Q_{d_0} = \frac{R_e}{\omega_0 L_e}$$

به دست می‌آوریم. مقدار آن مساوی است با

$$L_e = \frac{4\mu l}{\pi^2} \ln \frac{b}{a} \quad (21)$$

برای حرفه‌ای با $b/a = 2.772$ ، یا $\ln(b/a) = 1$ ، $a = 1 \text{ cm}$ ، $f_0 = 100 \text{ MHz}$ ، $\sigma/\omega\epsilon = 0.0001$ ، $\epsilon_R = 4$ و $\mu_R = 1$ ، دادیم

$$l = 37.5 \text{ cm}$$

$$Q_{d_0} = 1000$$

$$R_e = 38200 \Omega$$

$$C_e = 417 \text{ pF}$$

$$L_e = 0.0609 \text{ } \mu\text{H}$$

بنابراین عرض نواری بسامد (پهنای باند فرکانسی) حفره $f_o/Q_{d_o} = 0.1 \text{ MHz}$ است. و همچنین اگر ثابت دی الکتریک ماده‌ای که حفره را پر کرده است به اندازه 0.25 درصد، از 4 به 3.99 ، تقلیل یابد بسامد (فرکانس) تشدید 0.125 درصد یعنی 125 kHz افزایش خواهد یافت. چنین تغییری را می‌توان به سهولت تشخیص داد، بنابراین بسا اندازه‌گیری بسامد (فرکانس) تشدید نمونه داخل حفره می‌توان، مثلاً، درجه رطوبت آرد را کنترل کرد.

حال تلفات دیواره‌های حفره را در نظر بگیریم. مقدار H_ϕ در استوانه خارجی $r = b$ عبارت است از

$$H_{\phi b} = \frac{V_o}{\pi b Z_o} \cos \beta z \cos \omega t$$

اگر هادی کامل می‌بود، جریان سطحی

$$K_z = -H_{\phi b} = \frac{-V_o}{\pi b Z_o} \cos \beta z \cos \omega t \quad (22)$$

به وجود می‌آید ولی با ضریب هدایت محدود، این جریان در واحد عرض در لایه نازکی در نزدیکی سطح خارجی توزیع خواهد شد. همانطوری که در فصل ۱۱ دیدیم، توان کل تلف شده را می‌توان با فرض چگالی جریان یکنواخت در ناحیه‌ای به ضخامت یک عمق پوستی، محاسبه کرد. بدین ترتیب این چگالی جریان یکنواخت عبارت است از

$$J_z = \frac{K_z}{\delta} = \frac{-V_o}{\pi b \delta Z_o} \cos \beta z \cos \omega t \quad (23)$$

بنابراین برای تلفات اهمی مربوط به استوانه خارجی (با ضریب هدایت σ_c) داریم

$$\begin{aligned} P_b &= \int_{\text{حجم}} \frac{1}{\sigma_c} J_z^2 dv \\ &= \int_{-l}^0 \frac{1}{\sigma_c} J_z^2 \delta \pi b dz \end{aligned}$$

$$= \frac{V_o^2}{\sigma_c \pi b \delta Z_o^2} \left(1 + \frac{\sin^2 \beta l}{\beta^2} \right) \cos^2 \omega t$$

و مقدار متوسط تلفات توان در بسامد (فرکانس) تشدید عبارت است از

$$P_{b_o,av} = \frac{V_o^2 l}{\beta \pi \sigma_c b \delta Z_o^2} \quad (24)$$

از محاسبات مشابهی برای هادی داخلی نتیجه می‌شود

$$P_{a_o,av} = \frac{V_o^2 l}{\beta \pi \sigma_c a \delta Z_o^2} \quad (25)$$

تنها سطح باقی‌مانده صفحه انتهایی در $z = 0$ است. شدت میدان مغناطیسی در $z = 0$ برابر است با

$$H_{\phi}|_{z=0} = \frac{V_o}{\pi r Z_o} \cos \omega t$$

که باعث جریان سطحی

$$K_r = \frac{V_o}{\pi r Z_o} \cos \omega t$$

و چگالی‌جریانی است که در عمق پوستی اول مستقل از z است،

$$J_r = \frac{K_r}{\delta} = \frac{V_o}{\pi r \delta Z_o} \cos \omega t$$

بنابراین تلفات توان در صفحه انتهایی عبارت است از

$$\begin{aligned} P_{end} &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sigma_c} \frac{V_o^2}{\pi^2 r^2 \delta^2 Z_o^2} \delta \cos^2 \omega t \, d\phi \, dr \\ &= \frac{2V_o^2}{\pi \sigma_c \delta Z_o^2} \ln \frac{b}{a} \cos^2 \omega t \end{aligned}$$

$$P_{\text{end},o,\text{av}} = \frac{V_o^2}{\pi \sigma_c \delta Z_o^2} \ln \frac{b}{a} \quad (26)$$

از ترکیب روابط (۲۴) و (۲۵) و (۲۶) مقدار کل توان تلف شده در دیوارها در بسامد (فرکانس) تشدید به دست می‌آید

$$P_{\text{av}} = \frac{V_o^2 l}{2 \pi \sigma_c \delta Z_o^2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{l} \ln \frac{b}{a} \right) \quad (27)$$

چون مقدار کل انرژی ذخیره شده را می‌دانیم، می‌توانیم Q حفره هم محور را در حالتی که تلفات فقط مربوط به دیوارها باشد محاسبه کنیم

$$Q_{\omega_o} = \frac{(2/\delta) \ln(b/a)}{(1/a) + (1/b) + (2/l) \ln(b/a)} \quad (28)$$

حال اجزاء مدار معادل به سادگی به دست می‌آیند. چون مقدار کل انرژی ذخیره شده تغییری نکرده است بنابراین C_e نیز تغییری ندارد. دوباره L_e را می‌توان از C_e و بسامد (فرکانس) تشدید ω_o به دست آورد و لذا آنهم تغییری نکرده است. بنابراین Q جدید فقط در مقاومت معادل R_e مؤثر است:

$$R_e = \frac{Q_{\omega_o}}{\omega_o C_e} = \frac{4 \eta [\ln(b/a)]^2}{\pi^2 \delta [(1/a) + (1/b) + (2/l) \ln(b/a)]} \quad (29)$$

که در آن

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

اگر همان حفره قبلی را به عنوان مثال به کار بریم و فرض کنیم آن را آب نقره داده باشیم ($\sigma_c = 6.18 \times 10^7 \text{ } \Omega/\text{m}$):

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma_c}} = 6/40 \times 10^{-6} \text{ m}$$

و بنابراین

$$Q_{\omega_o} = 2200$$

$$R_e = 83900 \Omega$$

وقتی هر دو نوع تلفات را داشته باشیم مقدار کل تلفات توان مساوی مجموع آنها است، و مشاهده می‌شود که مقاومت معادل ترکیب موازی مقاومت‌هایی است که با در نظر گرفتن هر کدام از دو نوع تلفات به تنهایی به دست آمده‌اند. ضریب Q حفره در بسامد (فرکانس) تشدید عبارت است از

$$Q_0 = \frac{1}{(1/Q_{d0}) + (1/Q_{\omega_0})} \quad (30)$$

و در مثال ما Q تشدید حفره آب نقره داده شده‌ای که با عایق تلفات داری پسر شده است، عبارت است از

$$Q_0 = \frac{1}{(1/10000) + (1/22000)} = 687$$

و مقاومت معادل به 26200Ω تقلیل یافته است.

با استفاده از مقادیر اجزاء مدار معادل، می‌توان مقاومت ظاهری (امپدانس) ورودی حفره هم محور را در بسامدهای (فرکانسهای) نزدیک به تشدید به دست آورد. این یک مسأله معمولی مدار است و ما چنین روابطی را به دست خواهیم آورد و از آنها استفاده نخواهیم کرد. از طرفی دیگر بهتر است از خود سؤال کنیم این مدار معادل تا چه فاصله‌ای از بسامد (فرکانس) تشدید صادق است. دو نکته را باید در مد نظر داشت. اولاً حفره هم محور دارای یک تشدید سری خواهد بود در صورتی که طول آن مساوی نصف طول موج یا بسامد (فرکانس) برابر 200 MHz باشد. مدار معادل دارای بسامد (فرکانس) تشدید دیگری نیست. ثانیاً پارامترهای حفره، از قبیل هدایت ویژه و ضریب پذیرش با بسامد (فرکانس) متغیراند، در صورتی که در مدار معادل چنین پدیده‌ای در نظر گرفته نشده است.

این خواص متفاوت باعث می‌شوند که تشابه بین مدار و حفره به رشته بسامدهائی (فرکانسی)، که شاید ۲۰ درصد فرکانس تشدیدند، محدود باشد. چون احتمالاً نوار بسامد باریکی حول بسامد (فرکانس) تشدید مورد نظر ما است. مثلاً نواری شامل کلیه نوارهای جانبی با دامنه‌های قابل ملاحظه در یک علامت مدوله شده. لذا مدار معادل ما بسیار مفید است.

تمرین ۳.۱۳

سرعت انتشار در طول 30 cm از يك خط انتقال هم محور برابر c است و نسبت $b/a = 4$ میباشد. کمترین بسامد (فرکانس) تشدید را پیدا کنید در صورتی که این خط: (الف) در دو طرف اتصال کوتاه شده باشد و (ب) در هر دو طرف مدار باز باشد. (پ) در يك طرف اتصال کوتاه و در طرف دیگر مدار باز باشد

جوابها: 200 و 400 و 400 MHz

تمرین ۳.۱۳

حفره تشدید ربع طول موج نشان داده شده در شکل ۳.۱۳ دارای پارامترهای زیر است: $\mu_R = 1$ و $\epsilon_R = 1.5625$ و (ثابت) $\sigma/\omega\epsilon = 0.00008$ و $b/a = e^2$ و $l = 30 \text{ cm}$ و $\sigma_c = 4.5 \times 10^7 \text{ } \Omega/\text{m}$ و $a = 0.5 \text{ cm}$. پهنای نواریا به دست آورید در صورتی که تنها تلفات موجود در: (الف) عایق. (ب) عایق و دیواره‌های استوانه‌ای و (پ) عایق و دیواره‌های استوانه‌ای و یکی از صفحات انتهایی باشد.

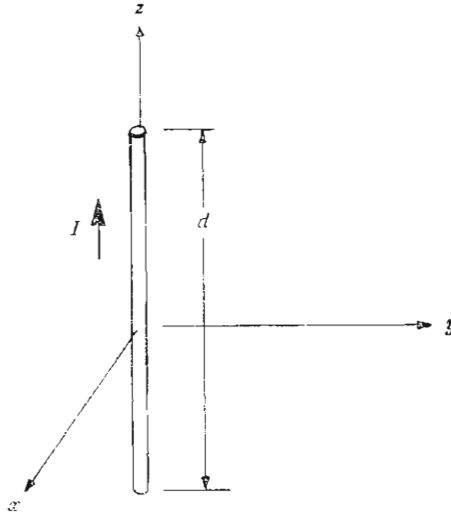
جوابها: 224 ، 220 ، 160 kHz

تشریح ۳.۱۳

در این مثال نهایی برای کاربرد معادلات ماکسول، میدان الکترومغناطیسی ناشی از توزیع جریان معلوم را به دست خواهیم آورد. بنابراین، برای اولین بار میدان مشخصی خواهیم داشت که از منبع مشخصی حاصل شده است. در مبحث مربوط به موج مسطح یکنواخت فقط حرکت موج در فضای آزاد بررسی شد و منبع این میدان مشخص نبود. توزیع جریان در داخل هادی نیز نظیر همین مسأله بود، گرچه در این حالت اقلاناً جریان را به شدت میدانی فرضی در سطح هادی ارتباط دادیم. این میدان را می توان به عنوان منبع تلقی کرد، گرچه این کار زیاد عملی نیست چون حدود آن بی نهایت است.

حال يك جریان رشته‌ای را به عنوان منبع در نظر می گیریم. فرض می کنیم طول رشته دیفرانسیلی باشد، ولی به سهولت می توان نتایج را برای حالتی که طول رشته در مقایسه با طول موج کوتاه است، خاصه هنگامی که کوچکتر از ربع طول موج باشد، تعمیم داد. در شکل ۳.۱۳ رشته دیفرانسیلی در مبدأ و در امتداد محور z — ها نشان داده شده است. جهت مثبت جریان به طرف بالا است.

در چنین طول کوتاه d فرض می کنیم جریان یکنواخت $I_0 \cos \omega t$ برقرار



شکل ۴۰۱۳ عنصر جریان دیفرانسیلی به طول d حامل جریان $I = I_0 \cos \omega t$ است.

باشد و فعلاً از ناپیوستگی ظاهری جریان در دو انتهای آن صرف نظر می‌کنیم. فعلاً سعی نخواهیم کرد که «منبع منبع» را پیدا کنیم. ولی آن را ثابت فرض می‌کنیم. توزیع جریان در اثر میدان‌هایی که خود ایجاد کرده است تغییر نمی‌کند. اولین قدم، کاربرد رابطه پتانسیل برداری مغناطیسی معوق است،

$$\vec{A} = \int \frac{\mu[I] d\vec{L}}{4\pi R}$$

که در این مورد به علت اینکه طول رشته بسیار کوتاه فرض شده است، احتیاجی به انتگرال‌گیری نیست،

$$\vec{A} = \frac{\mu[I] d}{4\pi R} \vec{a}_z$$

چون جریان فقط در جهت z ها است فقط مؤلفه z بردار \vec{A} وجود دارد. در هر نقطه P که به فاصله R_m از مبدأ قرار داشته باشد جریان به اندازه R/U تأخیر خواهد داشت

$$I = I_0 \cos \omega t$$

$$[I] = I_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{U} \right) \right]$$

$$[I] = I_0 e^{-j\omega R/U}$$

بنابراین

$$A_{zs} = \frac{\mu I_0 d}{4\pi R} e^{-j\omega R/U}$$

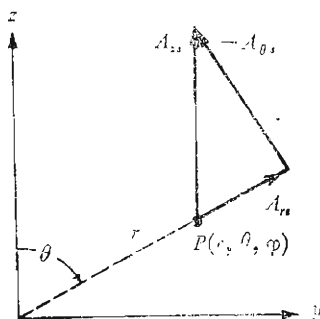
فعالاً از دستگاه مختصات مختلطی استفاده کرده R را با r کوچک مختصات کروی تعویض می‌کنیم و سپس مؤلفه‌های کروی مربوط به A_{zs} را تعیین می‌کنیم. با استفاده از شکل (۵.۱۳) نتیجه می‌شود که

$$A_{rs} = A_{zs} \cos \theta$$

$$A_{\theta s} = -A_{zs} \sin \theta$$

و بنابراین

$$A_{rs} = \frac{\mu I_0 d}{4\pi r} \cos \theta e^{-j\omega r/U}$$



شکل ۵.۱۳ تفکیک A_{zs} در $P(r, \theta, \varphi)$ به دو مؤلفه کروی A_{rs} و $A_{\theta s}$. این شکل به طور دلخواه در صفحه $\varphi = 90^\circ$ رسم شده است.

$$A_{\theta s} = -\frac{\mu I_0 d}{4\pi r} \sin \theta e^{-j\omega r/U}$$

از این دو مؤلفه پتانسیل مغناطیسی برداری در P ، می‌توان \bar{B}_s یا \bar{H}_s را از تعریف \bar{A}_s به دست آورد.

$$\bar{B}_s = \mu \bar{H}_s = \nabla \times \bar{A}_s$$

و برای اینکار کافی است مشتق‌های مربوط گرفته شود. بنا بر این

$$H_{\varphi s} = \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\theta s}) - \frac{1}{\mu r} \frac{\partial A_{rs}}{\partial \theta}$$

$$H_{rs} = H_{\theta s} = 0$$

و

$$H_{\varphi s} = \frac{I_0 d}{4\pi r} \sin \theta e^{-j\omega r/U} \left(j \frac{\omega}{U r} + \frac{1}{r^2} \right)$$

مؤلفه‌های میدان الکتریکی که باید به این میدان مغناطیسی وابسته باشند از شکل نقطه‌ای قانون مداری آمپر، در ناحیه‌ای که جریانهای هدایتی و انتقالی صفراند، به دست می‌آیند.

$$\nabla \times \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

یا به صورت مختلط

$$\nabla \times \bar{H}_s = j\omega \epsilon \bar{E}_s$$

و از بسط آن در مختصات کروی نتیجه می‌شود،

$$E_{rs} = \frac{1}{j\omega \epsilon} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (H_{\varphi s} \sin \theta)$$

$$E_{\theta s} = \frac{1}{j\omega \epsilon} \left(-\frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} (r H_{\varphi s})$$

$$E_{rs} = \frac{I_0 d}{4\pi} \cos \theta e^{-j\omega r/U} \left(\frac{1}{\epsilon U r^2} + \frac{1}{j\omega \epsilon r^3} \right)$$

$$E_{\theta s} = \frac{I_0 d}{4\pi} \sin \theta e^{-j\omega r/U} \left(\frac{j\omega}{\epsilon U^2 r} + \frac{1}{\epsilon U r^2} + \frac{1}{j\omega \epsilon r^3} \right)$$

برای اینکه بتوانیم تعبیر جملات داخل پرانتز را در روابط $H_{\varphi s}$ و E_{rs} و $E_{\theta s}$ ساده تر کنیم از جایگزینی $\omega = 2\pi f$ و $f\lambda = U$ و $U = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ استفاده می کنیم و در نتیجه

$$H_{\varphi s} = \frac{I_0 d}{4\pi} \sin \theta e^{-j\gamma \pi r/\lambda} \left(j \frac{2\pi}{\lambda r} + \frac{1}{r^2} \right) \quad (1)$$

$$E_{rs} = \frac{I_0 d}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cos \theta e^{-j\gamma \pi r/\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\lambda}{j 2\pi r^3} \right) \quad (2)$$

$$E_{\theta s} = \frac{I_0 d}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sin \theta e^{-j\gamma \pi r/\lambda} \left(j \frac{2\pi}{\lambda r} + \frac{1}{r^2} + \frac{\lambda}{j 2\pi r^3} \right) \quad (3)$$

از این روابط می توان درک کرد که چرا در بسیاری از مسائل آنتنهای به جای محاسبات نظری، از روشهای تجربی استفاده می شود. این روابط در سه مرحله کلی به دست آمدند: یک انتگرال گیری (که در این مورد برخلاف معمول خیلی ساده بود) و دو مشتق گیری. این مراحل کافی است باعث شود یک عنصر ساده جریان و رابطه ساده توزیع جریان آن ناگهان به صورت روابط پیچیده (۱) تا (۳) در آید. علی رغم این پیچیدگی، چند نکته جالب را می توان مشاهده کرد. ابتدا باید به عامل $e^{-j\gamma \pi r/\lambda}$ توجه کنیم که در تمام جملات ظاهر می شود.

این جمله معرف انتشار موجی با طول λ و سرعت $U = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ به طرف خارج از مبدأ در جهت مثبت r است. در اینجا کلمه «طول موج» را به معنایی کلی تر از تعریف قبلی به کار می بریم. قبلاً طول موج مربوط به موج مسطح یکنواخت را فاصله بین دو نقطه در جهت انتشار تعریف کردیم که در این نقاط موج دارای مقادیر لحظه ای

مساوی بود. در اینجا عوامل داخل پرانتزها باعث پیچیدگی بیشتری است چون این جملات تابع r هستند. حال در تعیین طول موج باید از این تغییرات صرف نظر کرد. این کار معادل این است که طول موج را در فاصله زیادی از مبدأ تعیین کنیم. برای نشان دادن این روش مؤلفه H_φ را تحت شرایط زیر بر حسب r رسم می کنیم:

$$I_0 d = 4\pi \quad \theta = 90^\circ \quad t = 0 \quad f = 300 \text{ MHz}$$

$$U = 3 \times 10^8 \text{ m/s (فضای آزاد)} \quad \lambda = 1 \text{ m}$$

بنابراین

$$H_{\varphi s} = \left(j \frac{2\pi}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-i 2\pi r}$$

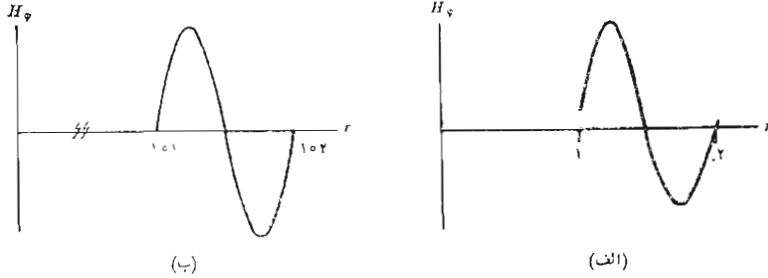
و در $t = 0$ قسمت حقیقی آن را می توان به دست آورد،

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{r} \right)^2 + \frac{1}{r^4}} \cos(\tan^{-1} 2\pi r - 2\pi r)$$

یا

$$H_\varphi = \frac{1}{r^2} (\cos 2\pi r + 2\pi r \sin 2\pi r)$$

در شکل (۶.۱۳) مقادیر به دست آمده از رابطه اخیر بر حسب r در ناحیه $1 \leq r \leq 4$ رسم شده است. این منحنی به طور محسوسی غیر سینوسی است. در $r = 1$ داریم $H_\varphi = 1$ در صورتی که در $r = 2$ ، یعنی به فاصله یک طول موج $H_\varphi = 0.25$ است. به علاوه، منحنی در نقاط $0.258 - 1 = r$ و $0.127 - 2 = r$ محور r را قطع می کند (با شیب مثبت). اگر شکل مشابهی در ناحیه $102 \leq r \leq 101$ رسم شود، که در شکل (۶.۱۳) ب) با مقیاس دامنه متفاوتی رسم شده است، منحنی حاصل تقریباً سینوسی شکل کامل است و مقادیر لحظه ای در $r = 102$ و $r = 101$ به ترتیب مساوی 0.0000998 و 0.0000996 مقادیر بیشینه (ماکزیم) قسمتهای مثبت و منفی منحنی کمتر از یک درصد اختلاف دارند و عملاً می توان گفت که در این ناحیه موج به صورت مسطح یکنواخت و تغییرات آن بر حسب فاصله (و البته زمان) سینوسی شکل است و طول موج مشخصی دارد. ظاهراً این موج حامل انرژی رو به خارج از آنتن است و بسزودی چگالی توان آن را محاسبه خواهیم کرد.



شکل ۶۰۱۳ دامنه لحظه‌ای H_ϕ برای حالت خاص یک عنصر جریان با $I_0 d = 4\pi$ و $\lambda = 1$ برای $\theta = 90^\circ$ و $r = 0$ در نواحی (الف) $1 \leq r \leq 2$ در نزدیکی آنتن و (ب) $101 \leq r \leq 102$ به فاصله زیادی از آنتن، رسم شده است. منحنی اول به‌طور محسوسی غیر سینوسی شکل است.

حال در دنباله بررسی روابط (۱) تا (۳) به جملاتی که با عامل $1/r^3$ و $1/r^2$ و $1/r$ تغییر می‌کنند توجه بیشتری می‌کنیم. در نقاط بسیار نزدیک به عنصر جریان جمله $1/r^3$ باید غالب باشد. در مثال عددی فوق مقادیر نسبی جملات $1/r^3$ و $1/r^2$ و $1/r$ در رابطه E_θ برای $r = 1 \text{ cm}$ ، به ترتیب برابر ۲۵۰ و ۱۶ و ۱ است. تغییری میدانی به صورت $1/r^3$ می‌بایست میدان الکترواستاتیکی ساکن یک دو قطبی را به خاطر آورد (فصل ۴). این جمله معرف انرژی ذخیره شده در میدان داکتیو (خازنی) است و به توان تشعشع یافته چیزی اضافه نمی‌کند. جمله $1/r^2$ رابطه H_ϕ نیز فقط در ناحیه نزدیک آنتن قابل ملاحظه است و معرف میدان القایی عنصر جریان مستقیم است که از قانون بیوساوار به دست می‌آید. در فاصله ۱۰ طول موج یا بیشتر از عنصر جریان نوسان‌کننده از کلیه جملات غیر از جمله عکس فاصله $(1/r)$ می‌توان صرف نظر کرد و میدانهای دور یا میدانهای تشعشع را به دست آورد.

$$E_{rs} = 0$$

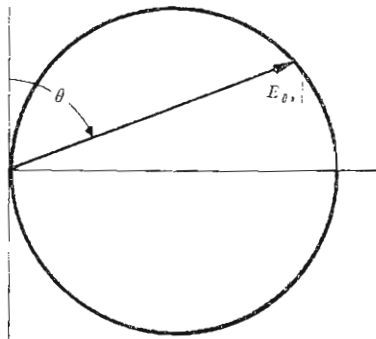
$$H_{\phi s} = j \frac{I_0 d}{2\lambda r} \sin \theta e^{-j2\pi r/\lambda}$$

$$E_{\theta_s} = j \frac{I_0 d}{2\lambda r} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sin \theta e^{-j\sqrt{\pi r/\lambda}}$$

یا

$$E_{\theta_s} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_{\phi_s}$$

ملاحظه می‌شود که رابطه بین E_{θ_s} و H_{ϕ_s} همان رابطه بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی موج مسطح یکنواخت است و این مطلب نتایج قبلی ما را، که در بحث مربوط به طول موج متذکر شدیم، تأیید می‌کند. تغییرات هر دو میدان تشعشع با زاویه قطبی θ یکسان است. این میدانها در صفحه استوائی عنصر جریان حداکثر و در امتداد رو به بالا یا رو به پایین عنصر جریان صفراند. این تغییرات با زاویه را می‌توان با رسم نمودار تمرکز عمودی نشان داد (با فرض اینکه عنصر جریان به صورت عمودی باشد). در این شکل دامنه نسبی E_{θ_s} بر حسب θ برای r ثابت رسم می‌شود. این نمودار، همانطوریکه در شکل (۷.۱۳) دیده می‌شود، معمولاً در مختصات قطبی کشیده می‌شود. برای آنتنهای



شکل ۷.۱۳ نمایش قطبی نمودار تمرکز عمودی یک عنصر جریان عمودی. دامنه یک E_{θ_s} بر حسب زاویه قطبی θ در فاصله ثابت r رسم شده است. مکان هندسی به صورت دایره است.

پیچیده‌تر نمودار تمرکز افقی را نیز می‌توان رسم کرد که معرف تغییرات شدت میدان با زاویه φ است. نمودار افقی عنصر جریان دایره‌ای است که مرکز آن در مبدأ مختصات قرار دارد چون این میدان تابع زاویه φ نیست.

برای اینکه رابطه‌ای کمی برای توان تشعشع یافته به دست آوریم باید از بردار پوینتینگ Φ ، که آن را در بخش ۴.۱۱ به دست آوردیم، استفاده کنیم

$$\Phi = \bar{E} \times \bar{H} \quad (۴)$$

روابط لحظه‌ای مربوط به مؤلفه‌های تشعشع شدت میدانهای الکتریکی و مغناطیسی عبارتند از

$$H_\varphi = -\frac{I_0 d}{\varphi \lambda r} \sin \theta \sin \left(\omega t - \frac{\varphi \pi r}{\lambda} \right)$$

$$E_\theta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_\varphi$$

و بنابراین

$$\Phi_r = E_\theta H_\varphi = \left(\frac{I_0 d}{\varphi \lambda r} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sin^2 \theta \sin^2 \left(\omega t - \frac{\varphi \pi r}{\lambda} \right)$$

توان کل (در فضا) لحظه‌ای (در زمان) که از سطحی کروی به شعاع r_0 می‌گذرد عبارت است از

$$P = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \Phi_r r_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$= \left(\frac{I_0 d}{\lambda} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{2\pi}{3} \sin^2 \left(\omega t - \frac{\varphi \pi r_0}{\lambda} \right)$$

و توان متوسط مساوی نصف دامنه حداکثر آن است

$$P_{av} = \left(\frac{I_0 d}{\lambda} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\pi}{3} = \varphi_0 \pi^2 \left(\frac{I_0 d}{\lambda} \right)^2$$

و این همان توانی است که اگر تشعشع وجود نداشت در مقاومتی برابر P_{rad} توسط جریان I_0 تلف می‌شد، یعنی

$$P_{av} = \frac{1}{2} I_0^2 R_{rad}$$

$$R_{rad} = \frac{2 P_{av}}{I_0^2} = 80 \pi^2 \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2$$

اگر فرض کنیم طول دیفرانسیل $\lambda = 0.01$ باشد، $R_{rad} = 0.08 \Omega$ خواهد بود. این مقاومت احتمالاً با مقاومت اهمی يك آنتن عملی قابل مقایسه است و بنابراین بازده آن به طور غیر قابل قبولی کم خواهد بود. انطباق مؤثر به منبع نیز بسیار مشکل است چون مقاومت موهومی ورودی از مقاومت ورودی R_{rad} به مراتب بزرگتر است. بنابراین می توان گفت که يك آنتن مؤثر باید طولش جزء قابل ملاحظه ای از طول موج باشد.

حال توزیع جریانی را فرض می کنیم که برای آنتهای کوتاه مناسب است. جریان آنتن را در دو انتها مساوی صفر قرار می دهیم و فرض می کنیم که جریان بطور خطی به طرف مرکز افزایش یافته، به مقدار I_0 برسد. چنین توزیع جریانی را روی آنتنی نازک که طول آن کمتر از يك چهارم طول موج است می توان ملاحظه کرد. اگر از اثرات تأخیری جریان صرف نظر شود، جریان متوسط برابر $I_0/2$ خواهد بود که در آن I_0 جریان ورودی در دو قطب وسط آنتن است. بدین ترتیب میدانهای الکتریکی و مغناطیسی نصف مقادیر بالا را خواهند داشت. توان يك چهارم و مقاومت ورودی نیز يك چهارم مقادیر قبلی است. اگر این نتایج را برای آنتنی به طول يك چهارم طول موج تعمیم دهیم مقدار $20\pi^2$ یا در حدود 400Ω را برای مقاومت ورودی به دست می آوریم. در مقایسه، مقدار دقیق این مقاومت 73Ω است و بنابراین برای جریان ورودی ثابت، این تقریب باعث به دست آوردن مقدار خیلی بزرگتری برای مقاومت یا توان تشعشع یافته شده است. اینجا از اثر حذف کننده تأخیر زمانی صرف نظر شده است و جریانی که در حقیقت تقریباً سینوسی شکل است به صورت تقریبی مثلثی در نظر گرفته شده است.

تمرین ۴.۱۳

برای آنتنی با $d = 2\lambda$ ، $I_0 d = 2\lambda$ ، $\lambda = 1\text{ m}$ در فضای آزاد، دامنه rH_ϕ را در $\theta = 90^\circ$ و مقادیر زیر r به دست آورید. (الف) ۱۰ و (ب) ۱ و (پ) ۰.۰۱ و (ت) ۰.۰۱

جوابها: 10001 A و 10126 و 10880 و 15995 .

تمرین ۵.۱۳

مقاومت تشعشع يك آنتن کوتاه به فاصله بين دو سر λ $d = 0.1$ را پیدا کنید در صورتی که توزیع جریان: (الف) یکنواخت. (ب) $I = I_0(1 - 2|z|/d)$ برای $|z| < d/2$ و (پ) پله‌ای، $I = I_0/2$ برای $d/4 < |z| < d/2$ و $I = I_0$ برای $|z| < d/4$ ، باشد.

جوابها: 790Ω و 1997 و 444

مراجعی که توصیه می‌شوند:

1. American Radio Relay League: «The A. R. R. L. Antenna Book», The American Radio Relay League, Inc., Newington, Conn., 1970.

این نشریه شامل اطلاعات توصیفی و عملی بی شماری در مورد آنتنها و خطوط انتقال است. قیمت آن نیز بسیار مناسب است.

2. Jordan, E.C.: (به مراجع فصل ۸ مراجعه شود)

در باره هر يك از مطالب این فصل به طور کاملتری بحث شده است.

3. Marcuvitz, N.: «Waveguide Handbook», M.I.T. Radiation Laboratory Series Vol, 10, McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.

این کتاب که در مورد خطوط انتقال و موج برها و حفره‌های تشدید مرجع استاندارد است شامل مطالب نظری و همچنین نتایج عددی است.

4. Ramo, S., J.R. Whinnery, and T. Van Duzer:

(به مراجع فصل ۶ مراجعه شود)

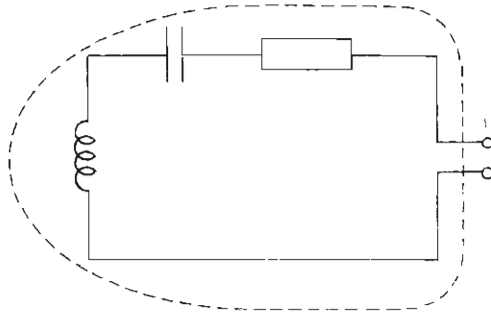
هر يك از مطالب مورد بحث این فصل با جزئیات بیشتری بررسی شده است.

5. Weeks, W.L.: «Antenna Engineering», McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.

این کتاب درسی عالی، شاید بیشتر از آنچه بخواهید بدانید، در باره آنتنها مطلب دارد.

مسائل

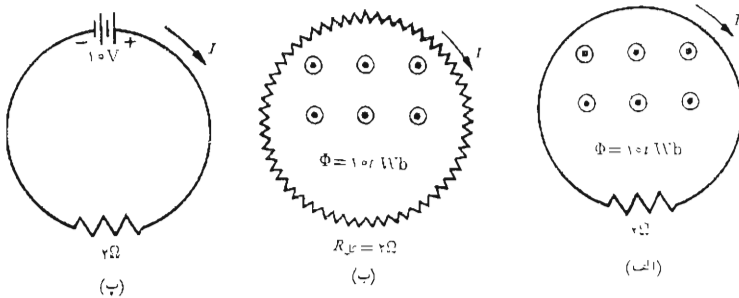
- ۱- طول يك كابل هم محور با شعاع داخلی 1 mm و شعاع خارجی 6 mm که عایق آن هوا است، برابر 6 cm است. این کابل در $z = 0$ اتصال کوتاه شده و در



شکل ۸.۱۳ به مسأله ۴ مراجعه شود.

و حلقه (ب) شامل مقاومت کل 2Ω است که به طور یکنواخت در امتداد آن پخش شده است. حلقه (پ) شامل یک مقاومت فشرده 2Ω و یک باتری $10V$ است. کلیه سیمهای اتصال از جنس هادی کامل اند. (الف) جریان I سه مدار را با یکدیگر مقایسه کنید، (ب) انتگرال مسیر بسته هر یک از سه حلقه را در خلاف جهت عقربه‌های ساعت محاسبه کرده نتیجه نهائی و همچنین اجزاء انتگرال مربوط به هر قسمت از مدار را مشخص کنید.

عـ طول یک هادی مستقیم با مقطع دایره‌ای به شعاع 1 mm برابر 10 m است. ضریب هدایت مساوی $5 \times 10^7 \text{ S/m}$ و $\epsilon_R = \mu_R = 1$ است اگر این هادی



شکل ۹.۱۳ به مسأله ۵ مراجعه شود.

حامل جریان $I = 10 \cos \omega t \text{ A}$ باشد مؤلفه‌های مماسی E_{\tan} و H_{\tan} و Φr رادر سطح‌هادی پیدا کنید در صورتی که: (الف) $f = 60 \text{ Hz}$ و (ب) $f = 1 \text{ MHz}$ باشد. ۷- طول يك خط هوائی دو سیمه با $Z_0 = 250 \Omega$ که یکطرف آن اتصال کوتاه شده است برابر 10 m است. (الف) ظرفیت خازنی که باید بین دو سیم در انتهای دیگر خط قرار داد تا در 3 MHz تشدید موازی حاصل گردد چقدر است؟ (ب) ضریب خود القائی سیم پیچی که باید بین دو سیم در انتهای دیگر خط قرار داد تا در 10 MHz تشدید موازی حاصل گردد چقدر است؟ (پ) اگر ورودی اتصال کوتاه شود کمترین بسامد (فرکانس) تشدید این خط چقدر است.

۸- حفره تشدیدي که پارامترهای آن بعد از معادله (۲۱) بخش ۲۰.۱۳ داده شده است با برداشتن نصف عایق آن تغییر داده شده است. بسامد (فرکانس) تشدید جدید را پیدا کنید در صورتی که 18.75 cm عایق از: (الف) انتهای اتصال کوتاه شده و (ب) انتهای مدار باز حفره برداشته شده باشد.

۹- با اتصال کوتاه کردن یکطرف خط انتقال 50 سانتیمتری با مقاومت ظاهری (امپدانس) مشخص 25Ω و سرعت $c/6$ آن را به قطعه‌ای در حال تشدید تبدیل می‌کنیم. انتهای دیگر خط باز است. (الف) کمترین بسامد (فرکانس) تشدید این قطعه خط چقدر است؟ (ب) اگر (اشتباهاً) این قطعه را به عنوان ترکیب موازی دو عنصر فشرده، یعنی ضریب خود القائی واحد طول ضرب در طول و ظرفیت واحد طول ضرب در طول، تلقی کنیم بسامد (فرکانس) تشدید چقدر خواهد بود.

۱۰- دو خط انتقال بی تلفات، که هریک از آنها در يك طرف اتصال کوتاه شده است، در بسامدهای (فرکانسهای) f_{01} و f_{02} در حال تشدید موازیند. (الف) اگر این دو خط را به طور موازی به یکدیگر ببندیم بسامد (فرکانس) تشدید جدید چقدر است؟ (ب) در حالت خاص $200 \text{ MHz} = 2f_{02} = f_{01}$ بسامد (فرکانس) تشدید جدید چقدر است؟

۱۱- در ناحیه $x > 0$ که فضای آزاد است میدان زیر برقرار شده است:

$$H_z = 1000 \cos 5\pi \sqrt{19} x \cos 25\pi y \cos 50\pi z \cos 18\pi \times 10^9 t \text{ A/m}$$

در $x = 0$ صفحه‌ای از جنس هادی کامل قرار دارد. (الف) چگالی جریان سطحی روی صفحه را پیدا کنید. (ب) اگر فرض کنیم صفحه از جنس مس باشد $(\sigma = 58 \times 10^7 \text{ S/m})$ ، توان متوسط تلف شده در مربع $0.04 \text{ m} < y < 0.05 \text{ m}$ ، $0 < z < 0.04 \text{ m}$ چقدر است.

۱۲- يك خط انتقال با صفحات موازی با $d = 0.2 \text{ mm}$ و $b = 4 \text{ mm}$

۱۲- کوتاه شده است تا یک قطعه تشدید $\lambda/4$ در 600 MHz به دست آید. (الف) طول این قطعه چقدر است؟ (ب) اگر ولتاژ در طرف بار خط ($z = -l$) برابر $10 \cos \omega t \text{ V}$ باشد، $E(z, t)$ و $H(z, t)$ را پیدا کنید. (پ) توان متوسط تلف شده در عایق را به دست آورید. (ت) مقدار ماکزیمم انرژی ذخیره شده در میدان را به دست آورید. (ث) مقادیر R و L و C را برای مدار معادل موازی این قطعه به دست آورید.

۱۳- موج مسطح یکنواخت $E_x = 1000 \cos(2\pi \times 10^8 t - \beta z) \text{ V/m}$ در هوا، به طور عمودی بر صفحه‌ای از جنس برنج ($\sigma = 1.5 \times 10^7 \text{ S/m}$) می‌تابد. توان متوسط تلف شده در یک متر مربع از این صفحه چقدر است؟
 ۱۴- در حفرة تشدید هم محور بخش ۲.۱۳ مشاهده شد که تلفات توان در دیواره‌های حفرة ($Q_{w_0} = 2200$) کمتر از تلفات در عایق ($Q_{d_0} = 1000$) است. در صورتی که شرایط دیگر تغییر نکند چه مقداری از ضریب هدایت دیواره باعث خواهد شد که تلفات دیواره‌ها و عایق مساوی باشند.

۱۵- برای میدان $\vec{E} = 1000 \sin 40\pi x \cos(10^8 \pi t - 160\pi z/3) \vec{a}_y \text{ V/m}$ در داخل ماده‌ای که برای آن $\epsilon_R = 4$ و $\sigma = 1/1800 \text{ S/m}$ می‌باشد، توان متوسط تلف شده بر حسب زمان را در ناحیه $0 \leq x \leq 0.25 \text{ m}$ ، $0 \leq y \leq 0.15 \text{ m}$ پیدا کنید.

۱۶- متوازی‌السطوح مستطیلی پر از هوا با دیواره‌هایی از جنس هادی کامل در $f_0 = 1.5 \times 10^8 \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2 + (p/d)^2}$ در حال تشدید است. در این رابطه a و b و d ابعاد حفرة و m و n و p اعداد صحیح اند که یکی از آنها ممکن است صفر باشد. پائین‌ترین پنج بسامد (فرکانس) تشدید را برای جعبه‌ای به ابعاد 10 در 20 در 25 cm پیدا کنید.

۱۷- روی محور z ها از $z = -\lambda/4$ تا $z = +\lambda/4$ جریه‌ای $I_s = I_0 e^{-j\beta z}$ یا $I = I_0 \cos(\omega t - \beta z)$ است، که در آن $\beta = 2\pi/\lambda$. (الف) انتگرال لازم برای محاسبه A_z را روی محور y - ها در $(0, \lambda/4, 0)$ بنویسید. (ب) مقدار تقریبی این انتگرال را با استفاده از روش دوزنقه‌ای با چهار قطعه به دست آورید.

۱۸- در بخش ۳.۱۳ مؤلفه A_{zs} پتانسیل مغناطیسی برداری مربوط به یک عنصر دیرانسیمی جریان در مبدأ مختصات را به صورت $\mu I_0 de^{-j\beta r} / (4\pi r)$ به دست آوردیم. فرض کنید عنصر جریان مشابه دیگری نیز در $(0, 0, 0)$ در مختصات قائم قرار داشته باشد. هر دو جریان در جهت \vec{a}_z اند. A_{zs} را در: (الف)

۱۹- برای تغییرات r بین حدود زیر، دامنه مؤلفه E_θ میدان يك عنصر ديفرانسیلی جريان با چه ضریبی تغییر می کند؟ (الف) λ ۱۰ به λ ۲۰ (ب) λ به λ ۲ ، (پ) λ ۱۰ به λ ۲۰ . فرض کنید θ و φ ثابت باشند.

۲۰- يك آنتن فرضی به خصوص در فضای آزاد در نقاط دور $(\varphi, 0 < \theta < \pi/2, r)$ میدان $E = (100/r) e^{-j\beta r}$ V/m و در $\pi/2 < \theta < \pi$ میدان $E = 0$ را تولید می کند. اگر جريان منبع $A \angle -90^\circ$ باشد: (الف) کل توان تشعشی آنتن چقدر است؟ (ب) مقاومت تشعشع چقدر است؟

۲۱- برای میدانهای عنصر ديفرانسیلی جريان نشان دهید که مؤلفه تشعشی E_θ ، یعنی E_θ ، از $\partial A_\theta / \partial t$ - به دست می آید.

۲۲- قضیه تقابل را می توان به صورت کلی تری برای میدانهای الکترومغناطیسی ، مخصوصاً برای آنتنها، بیان کرد. در اثبات ارائه شده در Weeks (به مراجع توصیه شده فصل ۱۲ مراجعه شود) چه عملی باعث خوشحالی ریاضی دان شد؟

۲۳- در مقاله زیر:

Superconducting Resonators and Devices, *Proc-IEEE*, vol. 61, no.1 January, 1973, pp. 58-70.

W.H. Hartig درباره آزمایشی صحبت می کند که طی آن تلفات يك آنتن کوچک، در نتیجه کاربرد آن به صورت آنتن فوق هدايت، تقلیل داده می شود. در اثر تقلیل درجه حرارت آنتن از $300^\circ K$ به $42^\circ K$ ضریب Q آنتن با چه نسبتی اضافه می شود.

ضمیمه ۱

آنالیز برداری

۱.۱ مختصات کلی منحنی الخط

یک دستگاه مختصات کلی را در نظر بگیرید که در آن محل یک نقطه با تقاطع سه سطح متعامد (با شکل و ریخت غیر مشخص) تعیین می‌شود،

$$u = \text{ثابت}$$

$$v = \text{ثابت}$$

$$w = \text{ثابت}$$

به طوری که u و v و w متغیرهای دستگاه مختصاتند. اگر هر یک از متغیرها به اندازهٔ دیفرانسیلی افزایش داده شود و سه سطح متعامد جدید برای هر یک از این تصاویر رسم گردد حجم دیفرانسیلی در متوازی‌السطوح مستطیلی محصور خواهد شد. چون u و v و w الزاماً معرف طول نیستند، مثلاً متغیرهای زاویه‌ای دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی، لذا هر یک از آنها را باید در یک تابع کلی u و v و w ضرب کرد تا بتوان طول اضلاع متوازی‌السطوح را به دست آورد. بدین ترتیب هر یک از h_u و h_v و h_w را تابع سه متغیر u و v و w تعریف کرده طول اضلاع جسم دیفرانسیلی را به صورت زیر می‌نویسیم

$$dL_u = h_u du$$

$$dL_v = h_v dv$$

$$dL_w = h_w dw$$

واضح است که در سه دستگاه مختصات مذکور در فصل ۱، متغیرها و ضریبهای مقیاس عبارتند از

$$\begin{array}{lll}
 u = x & v = y & w = z & \text{قائم:} \\
 h_u = 1 & h_v = 1 & h_w = 1 & \\
 u = r & v = \varphi & w = z & (1) \text{ استوانه‌ای:} \\
 h_u = 1 & h_v = r & h_w = 1 & \\
 u = r & v = \theta & w = \varphi & \text{کروی:} \\
 h_u = 1 & h_v = r & h_w = r \sin \theta &
 \end{array}$$

در این روابط u و v و w طوری انتخاب شده‌اند که در تمام موارد $\vec{a}_u \times \vec{a}_v = \vec{a}_w$ باشد. باید انتظار داشت که در دستگاههایی که با آنها آشنائی کمتری داریم، h_u و h_v و روابط پیچیده‌تری داشته باشند.

۴.۱ دیورژانس، گرادینان، و کرل در مختصات کلی منحنی الخط

اگر تعاریف کلی دیورژانس بخشهای ۴.۳ و ۵.۳ را در مورد مختصات کلی منحنی الاضلاع به کار بریم، شار بردار \vec{D} که از سطح متوازی السطوحی که بردار عمود آن \vec{a}_u است می‌گذرد عبارت خواهد بود از

$$\vec{D}_{u_0} \cdot dL_v dL_w + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial u} (D_u dL_v dL_w) du$$

یا

$$D_{u_0} \cdot h_v h_w dv dw + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial u} (D_u h_v h_w dv dw) du$$

و برای صفحهٔ مقابل

۱. در کتاب زیر متغیرها و ضریبهای مقیاس برای نه دستگاه مختصات متعامد داده شده است. هر یک از دستگاهها نیز به اختصار شرح داده شده است.

J. A. Stratton, «Electromagnetic Theory,» McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, N. Y. 1941, pp 50-59.

$$- D_u h_\gamma h_\gamma dv dw + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial u} (D_u h_\gamma h_\gamma dv dw) du$$

و بنابراین شار کلی که از دو صفحه می‌گذرد مساوی است با

$$\frac{\partial}{\partial u} (D_u h_\gamma h_\gamma dv dw) du$$

چون u و v و w متغیرهایی مستقل‌اند، رابطهٔ اخیر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{\partial}{\partial u} (h_\gamma h_\gamma D_u) du dv dw$$

و دو رابطهٔ مربوط دیگر را می‌توان با تعویض سادهٔ متغیرهای u و v و w به دست آورد. بنابراین مقدار کل شاری که از حجم دیفرانسیلی خارج می‌شود عبارت است از

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} (h_\gamma h_\gamma D_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_\gamma h_\gamma D_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_\gamma h_\gamma D_w) \right] du dv dw$$

و دیورژانس \bar{D} از تقسیم این رابطه بر حجم دیفرانسیلی به دست می‌آید

$$\nabla \cdot \bar{D} =$$

$$\frac{1}{h_\gamma h_\gamma h_\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_\gamma h_\gamma D_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_\gamma h_\gamma D_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_\gamma h_\gamma D_w) \right] \quad (1)$$

مؤلفه‌های گرادیان تابع شماره‌واره‌ای V را می‌توان (با استفاده از روشهای بخش ۶.۴) با بیان دیفرانسیل کامل،

$$dV = \frac{\partial V}{\partial u} du + \frac{\partial V}{\partial v} dv + \frac{\partial V}{\partial w} dw$$

بر حسب مؤلفه‌های دیفرانسیلی طول، $h_\gamma du$ و $h_\gamma dv$ و $h_\gamma dw$

$$\frac{1}{h_\gamma} \frac{\partial V}{\partial u} h_\gamma du + \frac{1}{h_\gamma} \frac{\partial V}{\partial v} h_\gamma dv + \frac{1}{h_\gamma} \frac{\partial V}{\partial w} h_\gamma dw$$

به دست آورد. سپس، چون

$$d\bar{L} = h_u du \bar{a}_u + h_v dv \bar{a}_v + h_w dw \bar{a}_w$$

و

$$dV = \nabla V \cdot d\bar{L}$$

ملاحظه می‌شود که:

$$\nabla V = \frac{1}{h_u} \frac{\partial V}{\partial u} \bar{a}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial V}{\partial v} \bar{a}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial V}{\partial w} \bar{a}_w \quad (2)$$

مؤلفه‌های کرل یک بردار \bar{H} با در نظر گرفتن مسیر دیفرانسیلی ابتدا در سطح ثابت $u = 3.8$ و پیدا کردن دوران \bar{H} حول این مسیر به دست می‌آیند. این روش را در بخش ۳.۸ برای مختصات قائم به کار بردیم. جزء مربوط به ضلع در جهت \bar{a}_v عبارت است از

$$H_{v_0} h_v dv - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial w} (H_v h_v dv) dw$$

و جزء مربوط به قسمتی از مسیر در جهت متقابل مساوی است با

$$-H_{v_0} h_v dv - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial w} (H_v h_v dv) dw$$

و مجموع این دو قسمت عبارت است از

$$-\frac{\partial}{\partial w} (H_v h_v dv) dw$$

یا

$$-\frac{\partial}{\partial w} (h_v H_v) dv dw$$

و مجموع اجزاء مربوط به دو قسمت دیگر مسیر مساوی است با

$$\frac{\partial}{\partial v} (h_v H_w) dv dw$$

بنابراین برای مؤلفه \bar{a}_u کرل \bar{H} داریم

$$(\nabla \times \bar{H})_u = \frac{1}{h_r h_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial v} (h_r H_w) - \frac{\partial}{\partial w} (h_\varphi H_v) \right]$$

و دو مؤلفه دیگر را می‌توان با تبدیل دورانی متغیرها به دست آورد. نتیجه را می‌توان به صورت دترمینان بیان کرد،

$$\nabla \times \bar{H} = \begin{vmatrix} \frac{\bar{a}_u}{h_r h_\varphi} & \frac{\bar{a}_v}{h_r h_\lambda} & \frac{\bar{a}_w}{h_\lambda h_\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_\lambda H_u & h_\varphi H_v & h_r H_w \end{vmatrix} \quad (3)$$

لاپلاسیان شمارواره‌ای (اسکالر) را می‌توان با استفاده از (۱) و (۲) به دست آورد:

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{h_\lambda h_\varphi h_r} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_r h_\varphi}{h_\lambda} \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_r h_\lambda}{h_\varphi} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_\lambda h_\varphi}{h_r} \frac{\partial V}{\partial w} \right) \right] \quad (4)$$

می‌توان از روابط (۱) تا (۴) استفاده کرده، دیورژانس و گرادیان و کرل و لاپلاسیان را در هر دستگاه مختصات متعامدی که h_λ و h_φ و h_r آن معلوم باشد، به دست آورد.

۳.۱ اتحادهای برداری

اتحادهای برداری زیر را می‌توان با بسط آنها در مختصات قائم (یسا مختصات کلی منحنی‌الخط) اثبات کرد. دو اتحاد اول شامل حاصلضرب سه‌گانه شمارواره (اسکالر) و بردار است. سه اتحاد بعدی دربارهٔ عملیات برداری روی مجموع بردارها و سه اتحاد متعاقب آنها مربوط به عملیاتی است که ضمن آنها اندازه بردار در تابعی شمارواره‌ای (اسکالر) ضرب می‌شود و سه رابطهٔ بعدی دربارهٔ عملیات روی حاصلضرب‌های شمارواره‌ای اسکالر یا برداری و بالاخره چهار رابطهٔ آخر مربوط به عملیات درجهٔ دوم‌اند.

- $$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \equiv (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} \equiv (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} \quad (۱)$$
- $$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \equiv (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \quad (۲)$$
- $$\nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) \equiv \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B} \quad (۳)$$
- $$\nabla(V + W) \equiv \nabla V + \nabla W \quad (۴)$$
- $$\nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) \equiv \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B} \quad (۵)$$
- $$\nabla \cdot (V\vec{A}) \equiv \vec{A} \cdot \nabla V + V \nabla \cdot \vec{A} \quad (۶)$$
- $$\nabla(VW) \equiv V \nabla W + W \nabla V \quad (۷)$$
- $$\nabla \times (V\vec{A}) \equiv \nabla V \times \vec{A} + V \nabla \times \vec{A} \quad (۸)$$
- $$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \equiv \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} \quad (۹)$$
- $$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) \equiv (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) \quad (۱۰)$$
- $$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) \equiv \vec{A} \nabla \cdot \vec{B} - \vec{B} \nabla \cdot \vec{A} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} \quad (۱۱)$$
- $$\nabla \cdot \nabla V \equiv \nabla^2 V \quad (۱۲)$$
- $$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} \equiv 0 \quad (۱۳)$$
- $$\nabla \times \nabla V \equiv 0 \quad (۱۴)$$
- $$\nabla \times \nabla \times \vec{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (۱۵)$$

۲ ضمیمه

آحاد

ما ابتدا دستگاه بین‌المللی (به طور اختصار SI، مخفف - *Système Internationale d'Unités*) را شرح خواهیم داد. از این دستگاه در این کتاب استفاده شده است و در حال حاضر در مهندسی برق و در اکثر مباحث فیزیک به صورت استاندارد به کار می‌رود. به علاوه، این دستگاه از طرف بسیاری از کشورها، از جمله ایالات متحده، رسماً به عنوان دستگاه آحاد بین‌المللی اختیار شده است.^۱ واحد بنیادی طول متر است که طبق تعریف مساوی است با ۱۰۶۵۰۰۷۶۳۷۳ برابر طول موج تشعشع در فضای آزاد مربوط به گذار بی‌اختلال کریپتون ۸۶ بین سطوح $۲p_1$ و $5d_5$ متناظر با خط نارنجی - قرمز. ثانیه واحد اصلی زمان است و ثانیه بین‌المللی طبق تعریف مساوی است با ۹۰۱۹۲۰۶۳۱۰۷۷۰ دوره تناوب نوسانات بسامد (فسر کانس) گذار (ترانزیت) بین سطوح $F=۴$ ، $F=۳$ و $m_F=۰$ ،

۱. دستگاه بین‌المللی آحاد در یازدهمین کنفرانس عمومی اوزان و اندازه‌ها در پاریس در ۱۹۶۰ به تصویب رسید و در ۱۹۶۴ توسط مرکز ملی استانداردها (ایالات متحده) رسماً برای کاربرد علمی پذیرفته شد. این دستگاه یک دستگاه متری است و جالب توجه این است که این تنها دستگاهی است که توسط کنگره آمریکا به تصویب رسیده است (در ۱۸۶۶). در ایالات متحده یک برنامه مطالعاتی درباره امکان اختیار کامل دستگاه متری پایان یافته است ولی هنوز چند سالی طول خواهد کشید تا سرعت سنج اتومبیلها به کیلومتر و وزن سیب زمینی بر حسب نیوتن و اندازه‌های اندام ملکه زیبایی آمریکا بر حسب سانتیمتر بیان شود.

$m_p = 0$ مربوط به حالت پایه‌ای $2_{s, 1/2}$ اتم سزیم 133 که در معرض اختلال میدانهای خارجی نباشد. جرم معیاری (استاندارد) یک کیلوگرم طبق تعریف مساوی است با جرم یک نمونه بین‌المللی که به صورت استوانه‌ای از جنس پلاتین - ایریدیوم است و در مرکز بین‌المللی اوزان و اندازه‌ها در شهر سور فرانسه نگهداری می‌شود. واحد دما (درجه حرارت) درجه کلوین است و طوری تعریف می‌شود که درجه حرارت نقطه سه‌گانه آب مساوی 273.16 درجه کلوین باشد. واحد پنجم کاندلا است که به نحوی تعریف می‌شود که شدت نورانی یک جسم متشعشع همه جهتی در درجه حرارت انجماد پلاتین برابر 0.0001 کاندلا بر متر مربع باشد.

آخرین واحد بنیادی آمپر است. قبل از اینکه آمپر را صریحاً تعریف کنیم، ابتدا می‌بایست به تعریف نیوتن بپردازیم این واحد با استفاده از قانون سوم نیوتن و آحاد دیگر به صورت نیروی لازم برای به وجود آوردن شتابی برابر یک متر بر مجذور ثانیه برای جرمی یک کیلوگرمی تعریف می‌شود. حال می‌توانیم آمپر را به عنوان جریان مستقیم موجود در دو هادی مستقیم موازی به طول بینهایت و سطح مقطع قابل اغماض و فاصله یک متر از یکدیگر درخلاء که نیروی دافعه‌ای مساوی 2×10^{-7} نیوتن بر هر متر از هادیا ایجاد می‌کند، تعریف کنیم. می‌دانیم که نیروی بین دو هادی موازی عبارت است از

$$F = \mu_0 \frac{1}{4\pi d}$$

و بنابراین

$$2 \times 10^{-7} = \mu_0 \frac{1}{4\pi}$$

یا

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad (\text{kg} \cdot \text{m} / \text{A} \cdot \text{s}^2 \text{ یا } \text{H} / \text{m})$$

بنابراین مشاهده می‌شود که تعاریف کولن و آمپر به نحوی است که یک مقدار عددی صحیح و دقیق برای قابلیت نفوذ فضای آزاد به دست آید. گرچه متر و ثانیه و کیلوگرم و درجه کلوین و کاندلا با مقایسه مستقیم با یک نمونه بین‌المللی یا اندازه‌گیری مستقیم تعریف شده‌اند، ملاحظه می‌کنیم که آمپر به‌طور غیر مستقیم تعریف شده است. به علاوه واضح است که قدم پنجم در سری تعاریف فوق این است که مقدار $4\pi \times 10^{-7}$ را به μ_0 نسبت دهیم. این تعریف غیر مستقیم آمپر را می‌توان به این ترتیب روشن کرد که سلسله تعاریفی را در نظر بگیریم و

ابتدا، کمافی‌السابق جرم استاندارد را تعریف کنیم و زمان را بعد بنیادی دوم انتخاب کنیم و سپس واحد بنیادی زمان را «لحظه» تعریف کنیم که مساوی است با زمان لازم برای انتشار نور به فاصله یک متر با سرعت انتشار در فضای آزاد، به این ترتیب سرعت انتشار نور مقدار ساده یک متر در لحظه را خواهد داشت، ولی مقدار «لحظه» استاندارد به یک اندازه گیری، نظیر اندازه گیری سرعت نور در دستگاه بین‌المللی، بستگی نخواهد داشت. در این صورت دانشمندان آزمایشهای مفصلی را ترتیب می‌دادند اما نه برای اینکه سرعت نور را تعیین کنند (که همانطوری که هر بچه مدرسه‌ای می‌داند مساوی یک متر در لحظه است)، بلکه برای اینکه تعداد نوسانات تغییر حالت سزیوم را در یک لحظه تعیین کنند^۱.

حال به دستگاه بین‌المللی برگردیم. در متن کتاب آحاد کمیات دیسگر الکتریکی و مغناطیسی هم‌زمان با تعریف این کمیات داده شده است و همه آنها را می‌توان برحسب آحاد بنیادی که تا به حال تعریف شده‌اند بیان کرد. مثلاً مبحث مربوط به امواج مسطح یکنواخت فصل ۱۱ نشان می‌دهد که سرعت انتشار موج الکترومغناطیسی در فضای آزاد برابر است با

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

و بنابراین

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7} c^2}$$

واضح است که مقدار عددی ϵ_0 به مقدار اندازه‌گیری شده سرعت نور در خلأ یعنی $10^8 \times (299999925 \pm 00000001)$ بستگی دارد.

در جدول مرجع ۱.۲ این آحاد نیز داده شده‌اند. ترتیب آحاد این جدول به ترتیب تعریف آنها در فصلهای قبل است. اما ناگفته نماند که دستگاههای دیگری از ابعاد بنیادی در الکتروسیسته و مغناطیس معمول بوده‌اند. در دستگاه آحاد الکترواستاتیک (esu)، قانون کولن در فضای آزاد به صورت زیر نوشته می‌شود

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \quad (\text{esu})$$

۱. که مقدار آن در آخرین مجلات علمی سرزمین «لحظه ستان» برابر (مقدار صحیح) (30666331 ± 00001) پی‌رود در لحظه داده شده است.

به قابلیت نفوذ فضای آزاد مقدار واحد نسبت داده می‌شود. گرم و سانتیمتر آحساد بنیادی جرم و فاصله‌اند و بنا براین سیستم esu یک سیستم cgs است. آحادی که دارای پیشوند استات (stat-) هستند به این سیستم تعلق دارند.

با روشی مشابه، دستگاه الکترومغناطیسی آحاد (emu) بر پایه قانون کولن برای قطبهای مغناطیسی استوار است و قابلیت نفوذ فضای آزاد برابر واحد است. این آحاد با پیشوند (ab-) مشخص می‌شوند. هرگاه کمیات الکتریکی بر حسب آحاد esu و کمیات مغناطیسی بر حسب آحاد emu بیان شوند و هر دو در یک معادله ظاهر شوند (مثلاً روابط کرل ما کسول)، در این صورت سرعت نور صریحاً ظاهر می‌شود. این مطلب از آنجا نتیجه می‌شود که در سیستم esu، $\epsilon_0 = 1$ و $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ و بنا براین $\mu_0 = 1/c^2$ و در سیستم emu، $\mu_0 = 1$ و بنا براین $\epsilon_0 = 1/c^2$ بدین ترتیب در این دستگاه مختلط که به دستگاه آحاد گاوسی موسوم است داریم،

$$\nabla \times \vec{H} = 4\pi \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{گاوسی})$$

در دستگاههای دیگر ضریب 4π صریحاً در قانون کولن وجود دارد ولی بعداً در معادلات ما کسول ظاهر نمی‌شود. بنا براین دستگاه گاوسی یک دستگاه غیر منطقی است (نوع منطقی شده آن به دستگاه هویساید - لورنتس موسوم است)، و دستگاه آحاد بین‌المللی که در سراسر متن این کتاب بکار رفته است دستگاهی منطقی است. در جدول ۲.۳ ضرائب تبدیل آحاد مهمتر دستگاه بین‌المللی (یا دستگاه منطقی mks) به دستگاه گاوسی و چند دستگاه دیگر داده شده است.

جدول ۱۰۲ اسامی و آحاد کمیات الکتریکی و مغناطیسی در سیستم بین المللی

علامت اختصاری	واحد	نام	علامت
N	نیوتن	نیرو	F
C	کولن	بار	Q
m	متر	فاصله	r, R
F/m	فاراد بر متر	قابلیت پذیرش	ϵ_0
V/m	ولت بر متر	شدت میدان الکتریکی	E
C/m ^۲	کولن بر متر مکعب	چگالی بار حجمی	ρ
m ^۳	متر مکعب	حجم	v
C/m	کولن بر متر	چگالی بار خطی	ρ_L
C/m ^۲	کولن بر متر مربع	چگالی بار سطحی	ρ_s
C	کولن	شار الکتریکی	Ψ
C/m ^۲	کولن بر متر مربع	چگالی شار الکتریکی	D
m ^۲	متر مربع	مساحت	S
J	ژول	کار، انرژی	W
V	ولت	پتانسیل	V
C.m	کولن - متر	گشتاور دو قطبی	P
A	آمپر	جریان	I
A/m ^۲	آمپر بر متر مربع	چگالی جریان	J
m ^۲ /V.s	متر مربع بر ولت - ثانیه	ضریب تحریک	$\mu_{e,li}$
\mathcal{U}/m	مهو بر متر	ضریب هدایت	σ
Ω	اهم	مقاومت	R
C/m ^۲	کولن بر متر مربع	قطبی شدگی	P
		ضریب حساسیت	$\chi_{e,m}$
F	فاراد	ظرفیت	C
A/m	آمپر بر متر	شدت میدان مغناطیسی	H
A/m	آمپر بر متر	چگالی جریان سطحی	K

علامت اختصاری	واحد	نام	علامت
$(Tb)Wb/m^2$	و بر بر متر مربع (یا تلسا)	چگالی شار مغناطیسی	B
H/m	هنری بر متر	قابلیت نفوذ	μ_0
Wb	و بر	شار مغناطیسی	Φ
A	آمپر	پتانسیل مغناطیسی شمارواره‌ای (اسکالر)	V_m
Wb/m	و بر بر متر	پتانسیل مغناطیسی برداری	A
$N \cdot m$	نیوتن - متر	گشتاور - نیرو	T
$A \cdot m^2$	آمپر - متر مربع	گشتاور مغناطیسی	m
A/m	آمپر بر متر	آهنربائی	M
$A \cdot t/Wb$	آمپر - دور بر و بر	مقاومت مغناطیسی (رلاکتانس)	\mathcal{R}
H	هنری	ضریب خود القایی	L
H	هنری	ضریب القاء متقابل	M
rad/s	رادیان بر ثانیه	بسامد (فرکانس) زاویه‌ای	ω
m/s	متر بر ثانیه	سرعت نور	c
m	متر	طول موج	λ
Ω	اهم	مقاومت ظاهری (امپدانس) ذاتی	η
m^{-1}	نپر بر متر (مختلط)	ضریب انتشار	γ
Np/m	نپر بر متر	ضریب تضعیف	α
rad/m	رادیان بر متر	ضریب فاز	β
Hz	هرتز	بسامد (فرکانس)	f
W/m^2	وات بر متر مربع	بردار پوینتینگ	\mathcal{P}
W	وات	توان	P
m	متر	عمق پوستی	δ
		ضریب بازتاب	Γ
		نسبت موج ساکن	s
\mathcal{H}	مهو	هدایت	G
Ω	اهم	مقاومت ظاهری (امپدانس)	Z
\mathcal{H}	مهو	هدایت ظاهری (ادمیتانس)	Y
		ضریب کیفیت	Q

جدول ۲.۲ تبدیل آحاد بین‌المللی به آحاد گاوسی و آحاد دیگر
(از $c = 299792458 \times 10^8$ استفاده کنید)

آحاد دیگر =	آحاد گاوسی =	یک واحد mKs	کمیت
۳۹.۳۷ In.	10^2 Cm	۱ m	d
۰.۰۲۲۴۸ Lb _f	10^5 Dyn	۱ N	F
۰.۰۷۳۷۶ Ft-lb _f	10^7 Erg	۱ J	W
۰.۰۱ AbC	10^9 StatC	۱ C	Q
10^{-9} AbC/cm ^۲	$10^{-5} c$ StatC/cm ^۲	۱ C/m ^۲	ρ
$4\pi \times 10^{-5}$ (emu)	$4\pi 10^{-9} c$ (esu)	۱ C/m ^۲	D
10^6 AbV/cm	$10^4/c$ StatV/cm	۱ V/m	E
10^8 AbV	$10^6/c$ Stat V	۱ V	V
10^9 Stat A	۰.۰۱ AbA	۱ A	I
۰.۰۴πc (esu)	$4\pi \times 10^{-3}$ Oersted	۱ A/m	H
۴۰πc (esu)	۰.۰۴π Gilbert	۱ A.t	V_m
$100/c$ (esu)	10^4 Gauss	۱ Wb/m ^۲	B
$10^6/c$ (esu)	10^8 Maxwell	۱ Wb	Φ
	10^6 Maxwell/cm	۱ Wb/m	A
$10^5/c^2$ Stat Ω	10^9 AbΩ	۱ Ω	R
$10^5/c^2$ Stat H	10^9 AbH	۱ H	L
10^{-9} AbF	$10^{-5} c^2$ Stat F	۱ F	C
$10^{-9} c^2$ Stat ϒ/cm	10^{-11} Abϒ/cm	۱ ϒ/m	σ
$10^3/4\pi c^2$ (esu)	$10^7/4\pi$ (emu)	۱ H/m	μ
$4\pi \times 10^{-11}$ (emu)	$4\pi \times 10^{-9} c^2$ (esu)	۱ F/m	ϵ

جدول ۳.۲ پیشوندهائی را که می توان با هر يك از آحاد بين المللی (SI) بكار برد، همراه با توان ده مربوط به هر يك از آنها نشان می دهد. آنتهایی که با علامت * مشخص شده اند بیشتر مورد استفاده قرار می گیرند.

جدول ۳.۲ پیشوندهای استاندارد که در سیستم SI بکار می روند

معنی	علامت اختصاری	پیشوند	معنی	علامت اختصاری	پیشوند
۱۰ ^۱	da-	دکا-	۱۰ ^{-۱۸}	a-	آتو-
۱۰ ^۲	h-	*هکتو-	۱۰ ^{-۱۵}	f-	فمتو-
۱۰ ^۳	k-	*کیلو-	۱۰ ^{-۱۲}	p-	*پیکو-
۱۰ ^۶	M-	*مگا-	۱۰ ^{-۹}	n-	*نانو-
۱۰ ^۹	G-	*گیگا-	۱۰ ^{-۶}	μ-	*میکرو-
۱۰ ^{۱۲}	T-	*ترا-	۱۰ ^{-۳}	m-	*میلی-
			۱۰ ^{-۲}	c-	*سانتی-
			۱۰ ^{-۱}	d-	دسی-

ضمیمه ۳

ضرائب مواد

جدول ۱۰۳ مقادیر ضریب قابلیت پذیرش نسبی ϵ_r را برای چند ماده عایق معمولی و همچنین مقادیر معمولی تا نوزانت تلفات آنها را نشان می‌دهد. باید توجه داشت که این ضرائب فقط مقادیر متوسطی برای این موادند و مربوط به درجه حرارت و رطوبت عادی و بسامدهای (فرکانسهای) خیلی پائین صوتی‌اند. اکثر این ضرائب از «Reference Data for Radio Engineers»

«The Standard Handbook for Electrical Engineers»^۲ و کتاب von Hippel^۳ اقتباس شده‌اند و برای اطلاعات بیشتر درباره این مواد و همچنین مواد دیگر می‌توان به کتب فوق مراجعه کرد.

جدول ۲۰۳ ضریب هدایت چندین هادی فلزی و چند ماده عایق و چند ماده معمولی دیگر را نشان می‌دهد. این مقادیر نیز از مراجع فوق‌الذکر اقتباس شده‌اند و مربوط به بسامد (فرکانس) صفر و درجه حرارت اطاقند. این مقادیر به ترتیب نزولی ضریب هدایت نوشته شده‌اند.

-
۱. به مراجع توصیه شده فصل ۱۱ مراجعه شود.
 ۲. به مراجع توصیه شده فصل ۵ مراجعه شود.
 ۳. به مراجع توصیه شده فصل ۱۱ مراجعه شود.

جدول ۱۰۳ ϵ_R و $\sigma/\omega\epsilon$

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	ماده
	۱۰۰۰۰۶	هوا
۰۰۱	۲۵	الکل اتیلیک
۰۰۰۰۰۶	۸۰۸	اکسید آلومینیوم
۰۰۰۰۲	۲۰۸	کهربا
۰۰۰۰۰۴	۴۰۸	پنبه نسوز
۰۰۰۱۳	۴۰۷۵	باکلیت
۰۰۰۱۳	۱۲۰۰	تیتانات باریم
	۱۰۰۰۱	گاز کربنیک
۰۰۰۰۰۸	۲۰۲	تتراکلور سدیم
۰۰۰۰۰۲	۴-۷	شیشه
	۴۰	گلیسرین
۰۰۱	۴۰۲	یخ
۰۰۰۰۰۶	۵۰۴	میکا
۰۰۰۲	۶۰۷	تئوپرن
۰۰۰۱	۴	نایلون
۰۰۰۰۸	۲-۴	کاغذ
۰۰۰۴	۳۰۴۵	پلکسی گلاس
۰۰۰۰۰۵	۲۰۲۶	پلی اتیلن
۰۰۰۰۰۳	۲۰۲۵	پلی پروپیلن
۰۰۰۰۰۴	۲۰۵۳	پلی استرن
۰۰۰۱۴	۶	چینی (تهیه شده باروش خشک)
۰۰۰۰۵۵	۵	شیشه بیرکس
۰۰۰۰۰۵	۴۰۴	پیرانول
۰۰۰۰۰۷۵	۳۰۸	کوارتز (مذاب)
۰۰۰۰۲	۲۰۵-۳	لاستیک

۰۰۰۰۰۲	۳۰۸	دی اکسید سیلیسیم (مذاب)
۰۰۰۰۰۱	۵۰۹	کلرور سدیم (نمک طعام)
۰۰۰۲	۳۰۳	برف
۰۰۰۷	۲۰۸	خاک (خشک)
۰۰۰۰۳	۵۰۸	استتاتیت
۰۰۰۰۰۱	۱۰۰۳	استایروفوم
۰۰۰۰۰۳	۲۰۰۳	نفلان
۰۰۰۰۱۵	۱۰۰	دی اکسید تیتانیوم
	۲۰۲	ترپانتین
۰۰۰۴	۸۰	آب (مقطر)
۴		آب (دریا)
۰	۱	آب (خشک شده)
۰۰۰۱	۱۰۵-۴	چوب (خشک)

جدول ۲.۳ ضریب هدایت σ چند هادی خوب و عایق و چند مادهٔ بینابین را که نمی‌توان آنها را هادی یا عایق خوب به شمار آورد نشان می‌دهد.

جدول ۲.۳ σ

$\sigma, \Omega/m$	ماده	$\sigma, \Omega/m$	ماده
7×10^4	گرافیت	617×10^7	نقره
1.2×10^3	سیلیسیوم	580×10^7	مس
۴	آب (دریا)	410×10^7	طلا
10^{-2}	فريت (معمولی)	382×10^7	آلومینیوم
10^{-2}	سنگ آهک	182×10^7	تنگستن
10^{-3}	آب (شیرین)	167×10^7	روی
10^{-4}	گچ	15×10^7	برنج
2×10^{-4}	آب (مقطر)	145×10^7	نیکل
10^{-5}	خاک، شنی	103×10^7	آهن
10^{-6}	گرانیت	1×10^7	بورنز
10^{-8}	مرمر	07×10^7	لحمیم
10^{-9}	باکلیت	03×10^7	نقرهٔ آلمانی
10^{-10}	چینی (روش خشک)	0227×10^7	منگنیم
2×10^{-12}	الماس	0226×10^7	کنستانتن
10^{-16}	پلی استیرن	022×10^7	ژرمانیوم
10^{-17}	کوارتز	011×10^7	فولاد ضد زنگ
		01×10^7	نیکروم

بعضی از مقادیر معمولی قابلیت نفوذ نسبی مواد مختلف دیامگنتیک، پارامگنتیک، فری‌مگنتیک و فرومگنتیک در جدول ۳.۳ داده شده‌اند. این مقادیر از کتب مرجع فوق‌الذکر استخراج شده‌اند و مقادیر مربوط به مواد فرومگنتیک فقط برای مقادیر خیلی کم چگالی شار صادقند. قابلیت نفوذ بیشینه این مواد ممکن است حدود ده مرتبه بیشتر باشد.

جدول ۳۰۳ μ_R

μ_R	ماده
۰۹۹۹۹۹۸۶	بسموت
۰۹۹۹۹۹۹۴۲	پاراڤين
۰۹۹۹۹۹۹۵	چوب
۰۹۹۹۹۹۹۸۱	نقره
۱۰۰۰۰۰۰۰۶۵	آلومينيوم
۱۰۰۰۰۰۰۰۷۹	بريليوم
۱۰۰۰۰۰۰۴	كلور نيكل
۱۰۰۰۰۱	سولفات منگنز
۵۰	نيكل
۶۰	چدن
۶۰	كبالت
۱۰۰	آهن پودر
۳۰۰	فولاد ماشين
۱۰۰۰	فريت (معمولى)
۲۵۰۰	پر مالوى ۳۵
۳۰۰۰	آهن ترانسفورماتور
۴۰۰۰	آهن سيليسيم دار
۴۰۰۰	آهن (خالص)
۲۰۰۰۰	ميومتال
۲۰۰۰۰	سنداست
۱۰۰۰۰۰	سوپر مالوى

ضمیمهٔ ۴

جوابهای مسائل شمارهٔ فرد

فصل ۱

۵۲ ، ۲۴ -۱

۳- (الف) $(3\bar{a}_x - 4\bar{a}_y - 7\bar{a}_z) / \sqrt{74}$ ، (ب) $(5\bar{a}_x - 8\bar{a}_y - \bar{a}_z) / \sqrt{90}$

۵- $\pm(3\bar{a}_x + 2\bar{a}_y - 5\bar{a}_z)$ ، $\pm(-\bar{a}_x + \bar{a}_y)$

۷- (الف) $\bar{a} = (2\bar{a}_x + 2\bar{a}_y - \bar{a}_z) / 3$ ، ۳۰ ، (ب) $30 / \sqrt{2}$

۹- (الف) 34.5° ، (ب) مثلث است

۱۱- $-3\sqrt{10}y - 0.5\sqrt{10}$ ، $(9y + 1.5)\bar{a}_x + (3y + 0.5)\bar{a}_z$

۱۳- $\sqrt{342}$

۱۵- (الف) $\pm(2\bar{a}_y - \bar{a}_z) / \sqrt{5}$ ، (ب) $\pm(5\bar{a}_x + 2\bar{a}_y + 4\bar{a}_z) / \sqrt{45}$

۱۷- (الف) ۱۲ ، (ب) ۱۲ ، (پ) ۷۰ ، (ت) ۲۶۶

۱۹- ۴ ، \bar{a}_φ ، \bar{a}_r ، $-\bar{a}_\varphi$ ، $-\bar{a}_r$ ، همه در جهت \bar{a}_y

۲۱- ۸

۲۳- $\sqrt{182}$

۲۵- (الف) $0.8\bar{a}_r - 0.6\bar{a}_z$ ، (ب) $0.4\bar{a}_x + 0.4\sqrt{3}\bar{a}_y - 0.6\bar{a}_z$

۲۷- ۴ ، 159°

۲۹- بترتیب $(\bar{a}_x, \bar{a}_y, \bar{a}_z)$ ، (x, y, z) ، $(\bar{a}_r, \bar{a}_\varphi, \bar{a}_z)$ ، (r, φ, z)

$(\bar{a}_r, \bar{a}_\theta, \bar{a}_\varphi)$ ، (r, θ, φ)

(۱) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ ، $(r, \theta, z, \bar{u}_r, \bar{u}_\theta, \bar{k})$

- (داده نشده ρ, φ, θ)
 (۲) $(\rho, \varphi, z, \bar{e}_\rho, \bar{e}_\varphi, \bar{e}_z)$ ، $(x, y, z, \bar{i}, j, \bar{k})$
 $(r, \theta, \varphi, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\varphi)$
 (۳) $(r, \theta, z, \bar{u}_r, \bar{u}_\theta, \bar{k})$ ، $(x, y, z, \bar{i}, j, \bar{k})$
 $(\rho, \varphi, \theta, \bar{u}_\rho, \bar{u}_\varphi, \bar{u}_\theta)$
 (به کتاب Thomas صفحه ۴۹۳ مراجعه شود)

فصل ۲

- ۱- (الف) $6.664 \times 10^{-23} \text{ N}$ ، (ب) ۵ یا ۶
 ۳- $2.5 \times 10^9 \bar{a}_x \text{ N}$
 ۵- 1475 V/m
 ۷- $32 \mu\text{C/m}$
 ۹- $-2 \times 10^{10} \text{ C/m}^2$
 ۱۱- 755 C
 ۱۳- (الف) $\rho_L h \bar{a}_r / (\sqrt{r^2 + h^2})$ ، (ب) $\rho_L h \bar{a}_z / [2\pi\epsilon_0(a^2 - h^2)]$
 ۱۵- (الف) $900 \bar{a}_z$ ، (ب) $900 \bar{a}_y \text{ V/m}$
 ۱۷- (الف) $\rho_s r_0 z \Delta r \bar{a}_z / [2\epsilon_0(r_0^2 + z^2)^{3/2}]$ ، (ب) $(\rho_s / 2\epsilon_0)[1 - (z/\sqrt{a^2 + z^2})] \bar{a}_z$
 (ب) $(\rho_s / \pi\epsilon_0) \bar{a}_z \tan^{-1}(a/z)$
 (ت) $[(\rho_s \Delta y) / (2\pi\epsilon_0)] [(-y_0 \bar{a}_y + z \bar{a}_z) / (y_0^2 + z^2)] (a/\sqrt{y_0^2 + z^2 + a^2})$
 ۱۹- $\rho_s = 200\epsilon_0$ روی $x = x_0 < 0$ ، $100\epsilon_0$ روی $y = y_0 > 0$ و $40\epsilon_0$ روی $z = z_0 < 0$ (جوابهای دیگری نیز امکان دارد)
 ۲۱- (الف) $10^{-9} \bar{a}_z / (2\pi) \text{ V/m}$ ، (ب) \bar{a}_z / π ، (ج) $10 \bar{a}_z$
 ۲۳- $y^2 + 2xy - x^2 = C$ ، $y = (\pm\sqrt{2} - 1)x$
 ۲۵- $\cos x = Ce^y$ ، $\cos x = e^y$
 ۲۷- هنری کاوندیش (Henry Cavendish)

فصل ۳

- ۱- (الف) جعبه و درب : -5 nC ، سکه يك سنتی ، ۵ ، سکه ده سنتی ، ۰
 (ب) $C + I = -7$ ، ۱ سنت ، ۵ ، ۱۰ سنت ، ۲
 ۳- (الف) 125 ، (ب) 220 mC

- ۵ (الف) $\lambda\pi\rho_0 a^2/9$ ، (ب) $2a\rho_0 a^2/9$ ۳۶ C
- ۹ (الف) $7r\delta\bar{a}_z$ ، (ب) $-7r\delta\bar{a}_z$ ، (پ) $\delta\bar{a}_z$ ، (ت) $5\bar{a}_z$ C/m²
- ۱۱ (الف) $2r/3$ ، (ب) $18/r^2$ ، (پ) $r/3$ ، (ت) $179/(3r^2) - r/3$
- ۱۳ $10(1 - e^{-3r})\bar{a}_r/r$ C/m²
- ۱۵ $10^{-2} + 5 \times 10^{-5}$ ، ۲۰۰ ، ۱
- ۱۷ -6997 nC
- ۱۹ ۷ ، ۳ ، ۱۰
- ۲۱ (الف) $\rho = (2/r)f(\theta, \varphi)$ ، (ب) $\rho = 0$
- (پ) $\rho = (2/r)f(r) + f'(r)$
- ۲۳ (الف) ۰ ، (ب) $\rho_L/(\pi a^2) = \rho_0$
- ۲۵ (الف) $\bar{D} = 0$ در $r < a$ ، $\bar{D} = \rho_s a \bar{a}_r / r$ در $r > a$
- (ب) $\bar{D} = 0$ در $r < a$ ، $\bar{D} = \rho_s a^2 \bar{a}_r / r^2$ در $r > a$
- ۲۷ (الف) 648π ، (ب) 216π
- ۲۹ $E = \sqrt{(\sigma - \rho b)}/\epsilon_0$ در $x < 0$ ، $(\rho x - \sqrt{\rho b - \sqrt{\rho\sigma}})/\epsilon_0$ در $0 < x < b$ ، $\sqrt{(\rho b - \sigma)}/\epsilon_0$ در $x > b$

فصل ۴

- ۱ (۰, ۰, ۰) به (۰, ۱, ۰) به (۱, ۱, ۰)
- ۳ (الف) -۱ ، (ب) -۰۲۴۴ ، (پ) 0.0955μ
- ۵ (الف) ۴۳۳ ، (ب) ۵۳۵
- ۷ (الف) و (ب) و (پ) : ۷۰ J
- ۹ 250 J
- ۱۱ (الف) -۵ ، ۰ ، (ب) ۵ ، ۱۰۰ ، (پ) ± 0.700 ، ۰
- ۱۳ $(\rho_s a / 2\epsilon_0) \ln[(k + \sqrt{a^2 + k^2}) / (k - h) + \sqrt{a^2 + (k - h)^2}]$
- ۱۵ (الف) و (ب) : 1412 V
- ۱۷ (الف) 171 V/m ، (ب) $2\epsilon_0$ C/m²
- ۱۹ $158.1\bar{a}_z - 474\bar{a}_y$ V/m
- ۲۱ -111 nC
- ۲۳ ۱۲۰۰۵ ، ۰۲۰۰۱

- ۲۵- (الف) 8.79 MV/m ، $0.447(2\bar{a}_r + \bar{a}_\theta)$ ، (ب) 105.7° یا $\theta = 29.3^\circ$
 ۲۷- (الف) 241 ، (ب) 109.4 J
 ۲۹- 200 ، 273 ، $7372 \mu\text{V}$

فصل ۵

- ۱- (الف) $3.2 \times 10^{17} \text{ z}$ ، (ب) $1.6 \times 10^{17} \text{ z}^2$ ، (ج) $1.08 \times 10^9 \text{ z}^{1/2}$
 (ت) $2 \times 10^{-5} \text{ z}^{-1/2}$ ، $1.602 \times 10^4 \text{ A/m}^2$
 ۳- (الف) 39.5 ، (ب) 113.9 A
 ۵- (الف) $546 \text{ kg/km}^3 \cdot \text{s}$ ، (ب) $-546 \text{ kg/km}^3 \cdot \text{s}$
 ۷- (الف) 2 و 0 ولت ، (ب) $218a_r/r \text{ V/m}$
 (پ) $2180\bar{a}_r/r \text{ A/m}^2$ ، (ت) 274 A ، (ج) $72.9 \text{ m}\Omega$
 ۹- (الف) 987 kA/m^2 ، (ب) 1410 V/m ، (پ) 2786 V
 (ت) 229 W ، 0.0358Ω
 ۱۱- 0.474Ω
 ۱۳- (الف) $671 \mu\text{C/m}^2$ ، (ب) $0.298\bar{a}_z - 0.745\bar{a}_y + 0.596\bar{a}_x$
 ۱۵- (الف) 0.0016 J/m ، 0.828 ، 0.679 (ب)
 ۱۷- 234 pC/m^2 ، (ب) $432 \times 10^{-38} \text{ C.m}$
 (پ) $0.270 \times 10^{-18} \text{ m}$
 ۱۹- $40\bar{a}_z - 10\bar{a}_y - 40\bar{a}_x$
 ۲۱- (الف) $5\bar{a}_z/3 - 4\bar{a}_y + 3\bar{a}_x$ برای $0 < x < 2$ و $5\bar{a}_z/3 - 4\bar{a}_y + 3\bar{a}_x$ برای $x > 2$ ،
 (ب) $5\bar{a}_z/3 - 4\bar{a}_y + 3\bar{a}_x$ برای $0 < x < 2$ ،
 $5\bar{a}_z/2 - 4\bar{a}_y + 3\bar{a}_x$ برای $2 < x < 4$ ، $5\bar{a}_z - 4\bar{a}_y + 3\bar{a}_x$ برای $x > 4$ ، (پ) 716° برای هر دو قسمت
 ۲۳- (الف) 4500 ، (ب) 2250 ، (پ) 1875 ، (ت) 1911 V
 ۲۵- کوارتز 389 روز ، نقره 10^{-19} s ، 1.44×10^{-19}
 ۲۷- (الف) 878 ، (ب) 586 ، (پ) 586 ، (ت) 586 pF
 ۲۹- 718 pF ، 3 mm در 6.67 cm
 ۳۱- 0.38 درصد
 ۳۳- 2.55 mm
 ۳۵- 572 ، 121 ، 0.75 ، 0.08 ، $e\text{V}$

فصل ۶

- ۱- ۵۶۷ pF/m
 ۳- ۵۵۳ pF/m
 ۵- ۲۶۴ V ، ۶۲۴
 ۷- $۲۰/۱ \text{ mA}$
 ۹- ۱۷ V ، ۲۴ ، ۲۴ ، ۱۷ ، ۴۳ ، ۵۶ ، ۵۶ ، ۴۳
 ۱۱- ۲۵۰۰ V/m ، ۳۶۰۰
 ۱۳- (الف) ۱۵ ، (ب) ۱۸ V
 ۱۵- ۳۴۷ V
 ۱۷- از ۳۳۳ و ۳۴۰ نتیجه می شود ۳۴۲

فصل ۷

- ۱- $\partial \epsilon / \partial x = \partial \epsilon / \partial y = \partial \epsilon / \partial z = 0$
 ۳- $\partial \rho / \partial t = 0$
 ۵- (الف) $k = \pm ۸$ ، $p = \pm ۸$ ، (ب) -۱۰ ، ۱۳۸۶
 ۷- $۱۲۰\pi \text{ C}$
 ۹- (الف) صدق میکند غیر از $r=0$ ، (ب) صدق میکند ، (پ) صدق میکند
 غیر از $r=0$ ، (ت) صدق می کند ، (ج) شرایط قضیه یگانگی
 در محیط بسته تأمین نشده است
 ۱۱- $۱۲۷۵\bar{a}_x + ۲۵\bar{a}_y - ۶۲۷۵\bar{a}_z \text{ V/m}$ ، $۱۰۰ - ۱۲۷۵(x + ۲y - ۵z) \text{ V}$
 ۱۳- (الف) ۱۶۳۱ V/m ، (ب) $۱۹۵۷۸ \ln [(r + ۰.۰۱)/r] + B$
 ۱۵- (الف) ۵۳۷ pF ، (ب) ۱۱۴۶ V/m ، (پ) ۲۰۲ pF
 ۱۷- بخش ۳-۷ مثال ۴
 ۱۹- (الف) ۴۰ ، (ب) ۲۰ ، (پ) ۸۷۷
 ۲۱- (الف) $۱۰ - \sqrt{[\ln(\tan^{-1} \theta / \tan ۱۰^\circ)] / [\ln(\tan ۲۰^\circ / \tan ۱۰^\circ)]}$
 (ب) و (پ) : ۳۰۳ mA
 ۲۳- ۰.۵۵۰۶ V
 ۲۵- ۳۲۴۷ V
 ۲۷- (الف) $V_0 [\sinh(\pi x/b)] [\sin(\pi y/b)] / [\sinh(\pi d/b)]$
 (ب) ۳۹۹ V
 ۲۹- $۶۳۳ \times ۱۰^{۲۱} \text{ m/s}^2$ ، ۵۷۷ nN

فصل ۸

۱- اثبات

$$0.13332\bar{a}_x + 0.13332\bar{a}_y + 0.1838a_z \text{ A/m} \quad ۳-$$

$$0 \text{ (الف)} \quad ۷.۱۶\bar{a}_z \text{ A/m} \text{ (ب)} \quad ۵-$$

$$\frac{25}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \quad ۷-$$

$$\frac{\cos \pi x \cos \pi y [(y-3)\bar{a}_x + (2-x)\bar{a}_y]}{[(x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2]^{3/2}} dx dy dz$$

$$30 \text{ A} \text{ (ب)} \quad 1 \text{ (ب)} \quad 0 \text{ (الف)} \quad ۹-$$

$$11 \text{ (الف)} \quad 20 \text{ یا دقیق تر } 18.57 \text{ (ب)} \quad 20 \text{ (ب)} \quad ۱۱-$$

$$50 \text{ A/m} \text{ (ت)} \quad ۱۲-$$

$$9280 \text{ A/m} \text{ (ب)} \quad 7960 \text{ A/m} \text{ (الف)} \quad ۱۳-$$

$$15- \text{ در } r < 1/4, z > 0 \quad \bar{H} = -\Delta \bar{a}_\phi (2\pi r) \quad r > 1/4, z > 0$$

$$\bar{H} = 3\bar{a}_\phi / (2\pi r) \quad z < 0 \quad \bar{H} = 0$$

$$16-17$$

$$19- \text{ (الف)} \quad kr^2 \bar{a}_\phi / 4 \quad \text{(ب) اثبات}$$

$$21- \text{ (الف)} \quad F_x = f(y, z) \quad \text{(ب)} \quad F_x = f(x) \quad \text{(ب)} \quad F_x = \text{ثابت} \quad ۲۱-$$

$$-180 \quad ۲۳-$$

$$25- \text{ (الف)} \quad -100\bar{a}_x \mu\text{Wb/m}^2 \quad \text{(ب)} \quad \infty \quad \text{(ب)} \quad -220 \mu\text{Wb} \quad ۲۵-$$

$$\infty \text{ (ت)} \quad 1609 \mu\text{Wb} \quad \text{(ج)} \quad ۲۶-$$

$$7594 \mu\text{Wb} \quad 10085 \quad ۲۷-$$

$$289 \text{ cm} \quad ۲۹-$$

$$31- \text{ (الف)} \quad \oint \bar{A} \cdot d\bar{L} = \Phi \quad \text{(ب)} \quad 0.367 \mu\text{Wb} = 0.367 \mu\text{Wb} \quad ۳۱-$$

$$33- \text{ (الف)} \quad 10xA \text{ در } 0.2 < z < 0.2 \quad -0.2 \text{ و } 0 \text{ در } |z| > 0.3 \quad ۳۳-$$

$$\text{(ب)} \quad 10\mu_0 z \bar{a}_y \text{ در } 0 \leq z \leq 0.2 \quad -\mu_0 (50z^2 - 30z + 2)\bar{a}_y \text{ در } z \geq 0.2$$

$$275\mu_0 \bar{a}_y \text{ در } 0.2 \leq z \leq 0.3$$

$$35- A_t = (10^{-7} I / 24\pi) [r^2/a^2 - 25 - 98 \ln(r/5a)] \text{ A} \quad ۳۵-$$

$$234 \mu\text{Wb/m}^2 \quad ۳۷-$$

فصل ۹

۱- اثبات

۳- $z = 2r\delta(1 - \cos 2t)$ ، $x = 2r\delta \sin 2t$

۵- الف) اثبات ، (ب) 0.39 V

۷- $\frac{1}{2}\mu_0 b K_0^2 \text{ N/m}$

۹- الف) اثبات ، (ب) از مقدار معلوم \bar{B} برای يك جریان استفاده كنيد.

۱۱- الف) $0.036\bar{a}_y$ ، (ب) $0.018\bar{a}_y$ ، (پ) $\text{N}\cdot\text{m}$

۱۳- $160 \text{ N}\cdot\text{m}$ ، 597 rpm

۱۵- الف) و (ب) و (پ): اثبات ، (ت) $374 \times 10^{16} \text{ rad/s}$ ،

$9785 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$ ، $9785 \times 10^{-24} \text{ N}\cdot\text{m}$

۱۷- اثبات ، بلی ، خیر

۱۹- در $0.5 > |z|$ ، $\bar{B} = \bar{H} = \bar{M} = 0$ ، الف) $-49.5\mu_0\bar{a}_x \text{ Wb/m}^2$ ،

$-50\bar{a}_x \text{ A/m}$ ، $-50.5\mu_0\bar{a}_x \text{ A/m}$ (ب) ، $0.5\bar{a}_x \text{ A/m}$ ،

$-49.5\bar{a}_x$ ، $-50\bar{a}_x$ ، $-5000\mu_0\bar{a}_x$ (پ)

$574 \mu\text{Wb}$ -۲۱

۲۳- الف) $-200\mu_0\bar{a}_x \text{ Wb/m}^2$ ، $-200\bar{a}_x \text{ A/m}$ ،

(ب) $-240\mu_0\bar{a}_x$ ، $-200\bar{a}_x$ ، (پ) $200\mu_0\bar{a}_x$ و $-200\bar{a}_x$ در

$|z| < 2$ و $-240\mu_0\bar{a}_x$ و $-200\bar{a}_x$ در $2 < |z| < 5$ ،

(ت) $-200\mu_0\bar{a}_x$ و $-200\bar{a}_x$ در $y < 0$ و $240\mu_0\bar{a}_x$ و $200\bar{a}_x$ در

در $y > 0$

۲۵- 73.3°

۲۷- الف) 57.1 ، (ب) $102.9 \mu\text{Wb}$

۲۹- 0.269 ، 102.8 ، 10.83 Wb/m^2

۳۱- الف) 4890 ، (ب) $6840 \text{ A}\cdot\text{t}$

۳۳- الف) 505 mH ، (ب) 0.758 H ، (پ) 0.1933 H

۳۵- الف) $575 \times 10^{-8} \text{ Wb}$ ، (ب) $0.575 \mu\text{H/m}$

۳۷- الف) 13786 ، (ب) 13788 nH

۳۹- الف) $L/4$ ، (ب) و (پ) و (ت) : L

۴۱- تقریباً $0.54 \mu\text{H}$

فصل ۱۰

۱- $-0.377 \sin 800\pi t \text{ A}$ ، $-942 \sin 800\pi t \text{ V}$

۳- الف) -0.2 ، -0.2 V ، (ب) 0 ، -0.04 A ، (پ) 0.0002 N ،

(ت) 0.001 J

- ۵- $-2.83 \sin 60\pi t \text{ A}$
 ۷- (الف) -0.565 ، (ب) $V -0.251$
 ۹- $0.1\omega(\sin 2\omega t - \sin \omega)A$
 ۱۱- 2952 V (درجهت \bar{a}_φ)
 ۱۳- $2\pi\epsilon L\omega V_0 \cos \omega t / \ln(b/a)$
 ۱۵- $(2 \times 10^5 \epsilon) \cos 10^8 t \sin \Delta z \bar{a}_z = (\Delta \times 10^{-6} / \mu) \cos 10^8 t \sin \Delta z \bar{a}_z \text{ A/m}^2$
 $\mu\epsilon = 25 \times 10^{-12}$
 ۱۷- 1.03 m^{-1} ، $-(0.265/r) \cos \bar{a}_z \sin 10^8 t \bar{a}_\varphi \text{ A/m}$
 ۱۹- (الف) $-212000000 x^2 e^{-1000t} \bar{a}_z$ ، $-0.00314 x^2 e^{-1000t} \bar{a}_z$
 (ب) اولی (در دیگری فرض شده است که \bar{H} در اثر جریان جا بجائی است).
 ۲۱- $-0.221 \cos 500t \text{ nC/m}^2$ ، $(0.006 \bar{a}_y - 0.005 \bar{a}_z) \cos 500t \text{ A/m}$
 ۲۳- (الف) $(\mu_0 / 8\pi)[(4/c^2) + (4t/c) + t^2 \ln 3] \bar{a}_z$
 (ب) $(2 \times 10^{-7} / c^2) \bar{a}_z \text{ Wb/m} \cdot \circ$
 ۲۵- $(k^2 A_0 / \omega \mu \epsilon) \sin \omega t \cos kz \bar{a}_y$ ، $(k A_0 / \mu) \cos \omega t \sin kz \bar{a}_z$
 $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ ، \circ
 ۲۷- $(F_0 / B_0 L)(1 - e^{-B_0 2LV_0 t / mR})$

فصل ۱۱

- ۱- اثبات
 ۳- $6674 e^{-j5z} \bar{a}_x + 5371 e^{-j5z} \bar{a}_y \text{ mA/m}$
 ۵- (الف) $+\bar{a}_z$ ، (ب) $+\bar{a}_z$ ، $-\bar{a}_y$ ، $-\bar{a}_z$ ، $-\bar{a}_x$ ، \bar{a}_y
 ۷- (الف) $0.15 \cos(4\pi \times 10^8 t - 4\pi z/3 + 4\pi/3) a_x \text{ V/m}$
 (ب) $0.15 \cos(4\pi \times 10^8 t - 666z + 666) a_x \text{ V/m}$
 ۹- (الف) 750 MHz ، (ب) 2756
 ۱۱- (الف) 286 Np/m ، (ب) 690 rad/m ، (پ) 910 mm
 (ت) $455 \times 10^6 \text{ m/s}$ ، (ث) $2225^\circ \Omega$ ، 2110
 (ج) 0.269 A/m
 ۱۳- ۲۲۱
 ۱۵- 0.48 rad/m ، $275 \times 10^{-5} \text{ Np/m}$
 ۱۷- (الف) 265 ، \circ ، 266 ، \circ ، W/m^2 (ب) 265 ، \circ
 265 ، \circ ، W/m^2
 ۱۹- (الف) $6370 \bar{a}_z \text{ W/m}^2$ ، (ب) $11140 \bar{a}_z \text{ W/m}^2$

- ٢١- ١٠٥ dB/ft
 ٢٣- ٣٢٥ دولار
 ٢٥- ٥٣٤٧
 ٢٧- (الف) $50e^{j3\pi z} \bar{a}_z$ ، (ب) $300e^{-j18\pi z} \bar{a}_z$ ، (ج) $0.07996e^{-j18\pi z} \bar{a}_y$
 (ت) ٥٩٦
 ٢٩- ٢٥٧ ، ١٥٥٦
 ٣١- (الف) $-2305 \sin 2\pi \times 10^6 t \bar{a}_z$ V/m ،
 (ب) $0.01288 \cos 2\pi \times 10^6 t \bar{a}_y$ A/m ،
 (ج) $0.01592 \cos 2\pi \times 10^6 t \bar{a}_x$ A/m
 ٣٣- (الف) 18805Ω ، (ب) $116 - j4803 \Omega$ ، (ج) ٣٣٥
 ٣٥- (الف) $\sqrt{\epsilon_{R1}\epsilon_{R2}}$ ، $705 \times 10^7 / f \sqrt{\epsilon_{R2}}$ m
 (ب) همان جواب قسمت (الف)
 ٣٧- (الف) $24\pi \Omega$ يا 600π ، (ب) ١٢٢ ، ٣٥ يا ١٢٢
 ٣٩- 2605 W/m^2

فصل ١٢

- ١- (الف) $\pi/120 \text{ rad/m}$ ، (ب) $0.208 \mu\text{H/m}$
 (ج) 833 pF/m ، (ت) 240 m
 ٣- (الف) $LG = RC$ ، (ب) 0.02 Np/m ، $0.8\pi \text{ rad/m}$
 ٥- $1120 + j470 \Omega$
 ٧- (الف) 0.0367 ، (ب) 0.00459
 ٩- 359Ω ، 10^{-4} Np/m ، $136 \times 10^{-4} \text{ rad/m}$
 ١١- (الف) $43,3 \angle -22^\circ \text{ V}$ ، (ب) $99 \angle 79^\circ \text{ V}$ ، (ج) 49 W
 ١٣- $356 - j62 \Omega$
 ١٥- 1108Ω ، 1618
 ١٧- 208
 ١٩- $58 - j1704 \Omega$
 ٢١- (الف) $0.091 \angle 72^\circ$ ، (ب) $309 \cos(4\pi \times 10^6 t + 408^\circ) \text{ V}$
 ٢٣- (الف) $2Z_0/3$ ، (ب) $0.923Z_0$
 ٢٥- (الف) 0.457λ ، (ب) 0.160λ
 ٢٧- $\cot \beta d_1 = B_L/Y_0$ ، G_L/Y_0 يا Y_0/G_L

۲۹- (الف) 75Ω ، (ب) 485Ω

فصل ۱۳

۱- (الف) $(2/3\pi r) \sin(2.5\pi \times 10^8 t) \cos(5\pi z/6) \bar{a}_\phi$ A/m
 (ب) $143.3 \cos(2.5\pi \times 10^8 t)$ V

۳- (الف) 10^{-9} F موازی با $885 k\Omega$ ، (ب) بلی ، (ب) 565 mW

۵- (الف) 5 ، 5 ، 5 A ، (ب) شکل a : 10 V ، 0 ، روی سیمها، 10 V -

روی R ، شکل b : 10 V - ، توزیع یکواخت، شکل c : 0 ، 10 V -
 روی R ، 10 V + ، روی منبع

۷- (الف) 292 pF ، (ب) $689 \mu H$ ، (پ) 15 MHz

۹- (الف) 125 MHz ، (ب) 796 MHz

۱۱- (الف) $18\pi \times 10^9 t \bar{a}_y$ A/m $\cos 50\pi z \cos 25\pi y \cos 1000$
 (ب) 495 W

۱۳- 722 mW

۱۵- 521 mW

۱۷- (الف) $\frac{\mu I_0}{4\pi} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \frac{\exp\{-j\beta[z + \sqrt{(\lambda/4)^2 + z^2}]\}}{\sqrt{(\lambda/4)^2 + z^2}} dz$

(ب) $0.1294 \mu_0 I_0 e^{-j94.1}$

۱۹- (الف) $1/505$ ، (ب) $1/1981$ ، (پ) $1/199998$

۲۱- اثبات

۲۳- ۱۰۰

واژه نامه

absolute value	قدر مطلق
accuracy	دقت
admittance	هدایت ظاهری
ambient temperature	درجه حرارت محیط
amplitude	دامنه
analytic geometry	هندسه تحلیلی
angle	زاویه
angular	زاویه‌ای
angular velocity	سرعت زاویه‌ای
application	کاربرد
approximation	تقریب
arithmetic	حساب
armature	قسمت چرخنده موتور
assimilate	جذب کردن
associative law	قانون شرکت پذیری
attenuation	تضعیف
attenuation constant	ثابت تضعیف
average	میانگین
axis	محور
axiom	اصل موضوع
azimuthal symmetry	تقارن سمتی

bandwidth	عرض نوار
basic algebra	جبر مقدماتی
basic physics	فیزیک مقدماتی
binominal theorem	قضیه دو جمله‌ای
boundary conditions	شرایط مرزی
bound change	بار مقید
breakdown voltage	ولتاژ شکست
calculation	محاسبه
calculus	حساب دیفرانسیل و انتگرال
capacitance	ظرفیت
capacitor	خازن
carrier	حامل
cartesian	دکارتی، قائم
catesian coordinate system	دستگاه مختصات قائم (دکارتی)
characteristic curve	منحنی مشخصه
characteristic impedance	مقاومت ظاهری مشخصه
charge conservation	بقای بار
charge density	چگالی بار
charge density, surface	چگالی بار سطحی
charge density, volume	چگالی بار حجمی
circuital law	قانون مداری
circuit theory	نظریه مدار
circular	مدور، دایره‌ای
circular cylinder	استوانه مستدیر (گردپایه)
circumference	محیط دایره، مسیر مدور
classify	طبقه‌بندی کردن
clockwise	موافق حرکت عقربه ساعت
coaxial cable	کابل هم محور (کواکسیال)
coil	سیم پیچی
collision	تصادم، برخورد
commutative law	قانون نقل پذیری

compass	قطب‌نما، پرگار
complex number	عدد مختلط
complex scalar	شمارواره مختلط
component	مؤلفه
component vector	بردار مؤلفه‌ای
computation	محاسبه
computer	حسابگر
computer, digital	حسابگر رقمی
computer, analogue	حسابگر تمثیلی (تشابهی)
concentration	تراکم
concentric	هم مرکز
concept	مفهوم
conductance	هدایت
conductivity	هدایت ویژه
conduction	هدایت
conduction band	نوار هدایت
conduction current	جریان هدایتی
conduction electron	الکترون هدایت
conductivity	هدایت مخصوص
cone	مخروط
conical	مخروطی
conservation of charge	بقای بار
conservative field	میدان ابقائی
constant	ثابت
continuity	پیوستگی
continuous	پیوسته
convection current	جریان انتقالی
conversion table	جدول تبدیل
coordinate system	دستگاه مختصات
coplanar vectors	بردارهای هم صفحه
corollary	فرع
cosine	کسینوس

cosmic radiation	تشعشع کیهانی
cosmic rays	اشعه کیهانی
counterclockwise (ccw)	مخالف حرکت عقربه ساعت
crystal	بلور
crystalline materials	مواد بلوری
criterion	ملاك اعتبار، معيار
cross product	حاصلضرب خارجي
cross section	مقطع عرضي
current	جریان
current density	چگالی جریان
current sheet	لایه جریان
curvilinear	منحنی الخط
cycle	دوره
cyclic permutation	تبدیل دورانی
cylindrical coordinates	مختصات استوانه‌ای
decay	تباہی
decay time	زمان تباہی
decimal	اعشاری، دهدهی
deflection	خمیدگی، انحراف
deflection plates	صفحات انحراف (در لامپ اشعه کاتودی)
delay line	خط تأخیر
deletion	حذف
density	چگالی، جرم مخصوص
depth of penetration	عمق نفوذ
derivative	مشتق
detector	آشکار ساز
diagonal	قطری، اوریب
diagram	نمودار
dielectric constant	ثابت دی الکتریک
diameter	قطر (دایره)
diffusion	پخش

diffusion equation	معادله پخش
digital	رقمی
dipole	دو قطبی
directed distance	فاصله جهت دار
discontinuous	غیر پیوسته
displacement current	جریان جا به جایی
displacement vector	بردار تغییر مکان
dissipated power	توان تلف شده
distant	دور
distribution	توزیع
distribution, charge	توزیع بار
distributive law	قانون توزیع پذیری
distortion	اعوجاج
dot product	حاصلضرب نقطه ای، (داخلی)
double integral	انتگرال دو گانه
drift velocity	سرعت رانش
drill problem	تمرین، مسأله تمرینی
dual	نظیر
duality	تیناظر
efficiency	بهره، (ضریب بهره)
electric conduction	هدایت الکتریکی
electric displacement	جا به جایی الکتریکی
electric flux	شار الکتریکی
electric flux density	چگالی شار الکتریکی
electric susceptibility	ضریب حساسیت الکتریکی
element	عنصر
energy band	نوار انرژی
energy gap	فاصله انرژی
energy level	سطح انرژی
equality	تساوی
equation	معادله

equipotential	هم پتانسیل
equipotential surface	سطح هم پتانسیل
equivalent circuit	مدار معادل
evaluate	تعیین مقدار، محاسبه مقدار
expansion	بسط
experiment	تجربه
experimental law	قانون تجربی
exponential	نمایی
exponential decay	تباهی نمایی
expression	بیان
expand	گسترش دادن، تعمیم دادن
extrapolation	برونبایی
factor	عامل
field	میدان
filament	رشته
filamentary conductor	هادی رشته‌ای
filamentary current	جریان رشته‌ای
flux lines	خطوط شار
flux tube	لوله شار
frequency	بسامد (فرکانس)
fringing field	میدان حشوی
function	تابع
fundamental	بنیادی
fundamental concepts	مفاهیم بنیادی
generating angle	زاویه مولد
graduated	زمینه‌بندی شده ، مدرج شده
graphical	ترسیمی
gravitation	ثقل
gravitational field	میدان ثقل
ground	زمین

hemisphere	نیم کره
heterogeneous	غیر متجانس، غیر یکدست
hole	حفره
homogeneous	متجانس، یکدست
horizontal	افقی
hybrid circuit	مدار مختلط
hyperbola	هذلولی
hypothesis	فرضیه
ideal dielectric	دی الکتریک آرمانی
identity	اتحاد
illustration	تصویر، مثال
imaginary	موهومی
impedance, intrinsic	مقاومت ظاهری ذاتی
incident wave	موج تابیده
increment	نمو
incremental	نموی
inductance	ضریب خود القایی
inductive	القایی
inductor	سیم پیچ، القاگر
initial	اولیه
initial conditions	شرایط اولیه
initial value	مقدار اولیه
initial velocity	سرعت اولیه
inner product	حاصلضرب داخلی
insulating material	ماده عایق
insulator	عایق
integral part	جزء لاینفک
integrand	انتگرال ده
intensity	شدت
interface	سطح مرزی، حدفاصل
interpolation	درونابی

interpretation	تعبیر
intrinsic semiconductor	نیم هادی طبیعی
inverse square law relationship	رابطه عکس مجذور فاصله
ion propulsion	رانش، پیشرانی ایونی
irrational	غیر گویا، گنگ
isotropic	همه سو یکسان (ایزوتروپ)
iteration	تکرار
junction	پیوند، اتصال
kinetic energy	انرژی جنبشی
leakage flux	شار ترشحی
linear	خطی
linear relationship	رابطه خطی
line integral	انتگرال خطی
line segment	پاره خط
longitudinal section	مقطع طولی
lossy dielectric	هادی تلفات دار
loop	حلقه
magnetic circuit	مدار مغناطیسی
magnetomotive force	نیروی محرک مغناطیسی
magnitude	اندازه
mass	جرم
matching	انطباق
matching network	شبکه انطباق
mechanism	ساز و کار
medium, media	محیط، محیطها
membrane	پوسته

microscopic	ذره بینی، ریز بینی
mobility	ضریب تحریک
moment	گشتاور
moment, dipole	گشتاور دو قطبی
motional	حرکتی
multipole	بسیار قطبی، چند قطبی
mutual inductance	ضریب القا متقابل
needle	عقربه
nomenclature	نظام نام گذاری
normal	عمود، عمودی
normal incidence	تابش عمودی
numerator	صورت (کسر)
numerical example	مثال عددی
oblated	پخت
omnidirectional	همه جهتی
operations	عملیات
origin	مبدأ، منشأ
parallel-plate capacitor	خازن موازی صفحه (موازی جوشن)
partial derivatives	مشتق نسبی
partial differential equation,	معادله دیفرانسیل نسبی
parallelogram	متوازی الاضلاع
parametric equations	معادلات پارامتری
path	مسیر
path, closed	مسیر بسته
perfect	کامل
Perfect conductor	هادی کامل
perfect dielectric	عایق کامل
periodic	متناوب
permeability	قابلیت نفوذ

permittivity	ضریب پذیرش
permittivity, relative	ضریب پذیرش نسبی
perpendicular	عمود
phase angle	زاویه فاز
phase constant	ثابت فاز
phenomenon (a)	پدیده(ها)
physical nature	ماهیت فیزیکی
pitch factor	ضریب شیب (سیم پیچی)
plane	صفحه
plane, radial	صفحه شعاعی
plane waves	امواج مسطح
point charge	بار نقطه‌ای
polar	قطبی
polarmolecule	ملکول قطبی
polarization	قطبی شدگی
position vector	بردار مکان
power factor	ضریب توان
practical units	واحدهای عملی
pressure	فشار
principle	اصل
probe	گمانه
projection	تصویر
proof	اثبات
propagation	انتشار
propagation constant	ثابت انتشار
property	خاصیت
quadripole	چهار قطبی
quality factor	ضریب کیفیت
quantum mechanics	مکانیک کوانتمی
quantity	چندی، کمیت

radial	شعاعی
radial plane	صفحه شعاعی
radiation	تشنع
radiator	جسم متشنع
radome	گنبد (رادار)
rate of flow	میزان جریان
ratio	نسبت
rational	گویا
rationalize	گویا کردن
real number	عدد حقیقی
reciprocal	معکوس
recombination	ترکیب مجدد
rectangular	راست گوشه‌ای، مستطیلی
rectilinear	مستقیم الخط
reflected wave	موج بازتابیده
reflecting surface	سطح بازتابنده
reflection coefficient	ضریب بازتاب
reluctance	مقاومت مغناطیسی
relation	رابطه
relatively	نسبت
relative value	مقدار نسبی
relaxation method	روش آسودگی
relaxation time	زمان استراحت
representation	نمایش
repulsion	دفع
resistivity	مقاومت مخصوص
resonant cavity	حفره تشدید
resonant circuit	مدار تشدید
right-handed screw	پیچ راست‌گرد
root	ریشه
root, square	ریشه دوم
rough	تقریبی

rule	قاعده
scalar	شمارواره (اسکالر)
scalar product	حاصلضرب شمارواره‌ای
scale	مقیاس
selective	گزینشگر
self consistant	خودسازگار
semiconductor	نیم هادی
separation constant	ثابت تفکیک
shield	غلاف، روکش، حفاظ
shielded cable	کابل حفاظ دار
side	ضلع، پهلو
sideband	نوار جانبی
simultaneously	بطور همزمان
sine	سینوس
single-crystal	تک بلور
single valued function	تابع تک مقداری (تک ارزشی)
sinusoidal	سینوسی شکل
skin depth	عمق پوستی
skin effect	اثر پوستی
sliding contact	اتصال لغزان
soldering iron	هویه
solenoid	سیم پیچی استوانه‌ای
solution	حل، جواب معادله، محلول
space	فضا
spherical coordinates	مختصات کروی
spheroid	شبه کره
square wave	موج چهار گوش، موج مربعی
standing wave	موج ساکن
standing wave ratio	نسبت موج ساکن
staict fields	میدانهای ایستا (ساکن)

streamline	خط سیلان (شار)
superposition principle	اصل جمع
superconductivity	فوق هدايت
surface	سطح
surface current	جریان سطحی
susceptibility	ضریب حساسیت
switch	کلید
symbol	علامت، نشانه
symmetry	تقارن
table	جدول
tabular	بجدولی
tangent	مماس
tangential component	مؤلفه مماسی
tangential field	میدان مماسی
technology	فن شناخت
term	جمله
terminal	سر
theory	نظریه
toroid	چنبره
torque	گشتاور - نیرو
transient	گذرا
transmission-line	خط انتقال
transmitted wave	موج عبور کرده
transverse	عرض
travelling wave	موج سیار
truncated	بی سر، ناقص
tuned circuit	مدار تطبیق
two (three) dimensional space	فضای دو (سه) بعدی
undefined	نامعین
uniform	یکنواخت

unit vector	بردار واحد
unity	واحد
unshielded	بی حفاظ
valence band	نوار ظرفیت
value	ارزش، مقدار
vector	بردار
vector analysis	آنالیز برداری
vector calculus	حساب انتگرال و دیفرانسیل برداری
vector geometry	هندسه برداری
vector multiplication	ضرب برداری
vector product	حاصلضرب برداری
vertical	قائم
volume charge	بار حجمی
volume resistivity	مقاومت مخصوص حجمی
waveguide	موج بر
wave impedance	مقاومت ظاهری موج
wavelength	طول موج
wave motion	حرکت موجی
winding factor	ضریب سیم پیچی
zero reference	مبدأ صفر