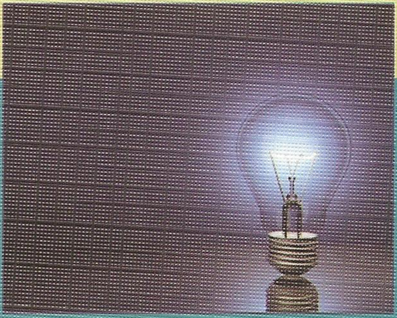
الکتریسیته و مغناطیس (۱)

برای داوطلبان المپیاد فیزیک



نویسندگان: فرینا ساعتی
بردیا نجاری . شهروز زربافیان

الکتریسیته و مغناطیس (۱)

برای داوطلبان المپیاد فیزیک

مؤلفان:
فرینا ساعتی - بردیا نجاری - شهروز زربافیان

انتشارات خوشخوان

سرشناسه	: ساعتی، فرینا، ۱۳۶۸
عنوان و نام پدیدآور	: الکتریسیته و مغناطیس (۱) برای داوطلبان المپیاد فیزیک مؤلفان فرینا ساعتی، بردیا نجاری، شهروز زربافیان.
مشخصات نشر	: تهران: خوشخوان، ۱۳۹۰.
مشخصات ظاهری	: ۲۱۶ص: مصور، جدول، نمودار: ۲۲ × ۲۹ س‌م.
شابک	: 978-600-5695-17-5
وضعیت فهرست نویسی	: فیپا
موضوع	: المپیادها (فیزیک)
موضوع	: فیزیک ـ ـ راهنمای آموزشی (متوسطه)
موضوع	: فیزیک ـ ـ مسائل، تمرین‌ها و غیره (متوسطه)
شناسه افزوده	: نجاری، بردیا، ۱۳۶۹
شناسه افزوده	: زربافیان، شهروز، ۱۳۶۹
رده‌بندی کنگره	: ۱۳۹۰ الف۱۸س/۲۴/LB۳۰۶۰
رده‌بندی دیویی	: ۳۷۳/۲۳۸
شماره کتابخانه ملی	: ۲۴۳۷۳۴۴

انتشارات خوشخوان

الکتریسیته و مغناطیس (۱)

مؤلفان: فرینا ساعتی ـ بردیا نجاری ـ شهروز زربافیان

مدیر گروه: سیدعلی مدنی تنکابنی

حروفچینی و صفحه‌آرایی: گروه فنی هیمه (۰۹۳۲۹۰۶۷۴۲۳_۶۶۴۶۴۰۹۴)

طراحی تصاویر: فاطمه مرادی

طراح جلد: علی عباسی

چاپ اول: پاییز ۱۳۹۰

تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

قیمت: ۵۴۰۰ تومان

شابک: ۹۷۸_۶۰۰_۵۶۹۵_۱۷_۵ ISBN: 978-600-5695-17-5

آدرس: تهران ـ خیابان جمهوری ـ بین خیابان دانشگاه و ابوریحان ـ کوچه فرزاد ـ پلاک ۱۱ **تلفن:** ۶۶۴۹۴۰۲۰

www.khoshkhan.ir

پیشگفتار ناشر

مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای علمی نقش عمده‌ای را در بارور کردن و شکفتن استعدادهای دانش‌آموزان ایفا می‌کنند و باید به جرأت ادعا کرد که این مسابقات توانسته‌اند اعتماد به نفس لازم در جوانان عزیز کشورمان برای رقابت علمی با جوانان سایر نقاط جهان را تا حد زیادی افزایش دهند.
کتاب‌های موجود در دوره‌های تحصیلی به هیچ عنوان نمی‌توانند دانش‌آموزان را برای آماده شدن در این رقابت‌ها اغنا کنند. لذا لازم است در کنار کتاب‌های درسی، خلأ موجود مخصوصاً برای دانش‌آموزان مستعد و ممتاز شناسایی و پر شود. در همین راستا انتشارات خوشخوان با استعانت از حضرت حق‌تعالی و به کمك تنی چند از اساتید و دبیران ممتاز ایران و نیز فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌های مختلف که اغلب آنان در زمانی نه چندان دور، مدال‌آور المپیادهای علمی در سطح ایران و جهان بوده‌اند، کتاب‌هایی را تألیف و به دانش‌آموزان ارائه می‌نماید. در همین راستا برای داوطلبان المپیاد فیزیك مجموعه کتبی نگارش و به چاپ رسیده است (و یا خواهد رسید) که کتاب حاضر نمونه‌ای از آن می‌باشد. مدیریت و بازنگری این مجموعه کتب را جناب آقای مدنی به عهده دارند که تقدیر و تشکر به عمل می‌آید. همچنین مؤلفان گرامی تلاش بی‌وقفه‌ای داشتند تا این اثر با قلمی شیوا و عاری از هرگونه عیب به چاپ رسد که تلاش آن دوستان نیز به ما دلگرمی می‌داد، خدا اجرشان دهد. در انتها نیز جا دارد از پرسنل زحمت‌کش در امر چاپ مخصوصاً گروه حروفچینی که متقبل زحمت فراوانی شدند قدردانی به عمل آید.
امیدوارم ضعف‌ها و عیوب ما را از طریق نامه و یا ایمیل به اطلاع برسانید تا تلاش کنیم تا در چاپ‌های بعد در صدد رفع آن نواقص باشیم.

رسول حاجی‌زاده
مدیر انتشارات خوشخوان

والسلام علی من اتبع الهدی

مقدمه مؤلف

دانش‌آموزان عزیز (و بعضاً تمام اقشار دیگری که ممکن است به هر نحوی گذارشان به این متن بیفتد)
سلام؛

رسم است و نه تنها رسم است بلکه منطقی هم هست که در ابتدای چنین نوشته‌ای (در مقام مقدمه مؤلف) هدف یا اهداف نویسنده یا نویسندگان کتاب از نگارش متن، به خواننده عرضه شود و بعد از آن مؤلف سراغ مباحث دیگر می‌رود.

به‌صورت ابتدایی، آنچه واضح است، هدف گروه مؤلف کتابی که پیش رو دارید، پس از کسب اندکی از حطام دنیا آماده‌سازی دانش‌آموزان مقطع دبیرستان برای ورود به دوره المپیاد فیزیك از سطح مقدماتی (اطلاعات پایه دبیرستان) تا سطح پیشرفته (معروف به دوره تابستانی یا کشوری) است. در اینجا با توجه به پیوند جدایی‌ناپذیر مفاهیم فیزیکی از بیان و مفاهیم ریاضی، معرفی مختصری از مفاهیم ریاضی هم لاجرم لازم بوده است.

سعی بر این بوده تا در هنگام نگارش متن با استمداد و نگاه‌های پیاپی به متون معتبر مرتبط با زمینه متن، هم اعتبار علمی متن مورد ارزیابی قرار بگیرد و هم نحوه بیان مطالب و روند آموزشی آن از ساختاری منطقی برخوردار شوند.

مجلدی که در دست دارید شامل مباحث الکتریسیته ساکن است. برای این‌که دورنمای کلی از مباحث داشته باشید، به نیت اگر نمی‌دانید بدانید که الکتریسیته ساکن به مباحث پیرامون آثاری که بارهای الکتریکی ساکن یا متحرك با سرعت‌های پایین بر فضای اطراف یا بردارهای دیگر می‌گذارند می‌پردازد. این مباحث در کنار مگنتواستاتیك (یا مغناطیس ساکن که ترجمه بسیار ناهنجاریست) قسمت اول از دو قسمت اصلی و پایه مبحث الکترودینامیك است که در حالت عمومی به بررسی تأثیر پدیده الکترومغناطیس (به عنوان یك هویت یگانه و نه متشکل از دو جزء الکتریسیته و مغناطیس) بر فضای اطراف (و در سطوح بالا بر زمان و یا فضا زمان و ...) می‌پردازد. همچنین پیشنهاد می‌کنیم قبل از شروع مباحث درسی این کتاب و کتاب مشابه، سعی کنید اطلاعات کلی در زمینه تاریخ مباحثی که قرار است مطالعه کنید به‌دست آورید. این کار به شما کمکی برای پذیرفته شدن در آزمون‌ها نمی‌کند ولی حداقل مطالعه مباحث علمی را لذت‌بخش‌تر می‌کند!

در مورد ساختار کتاب هم به اختصار می‌توان چنین گفت:

کتاب همان‌طور که در فهرست خواهید دید شامل سه فصل، میدان الکتریکی، قانون گاوس و پتانسیل الکتریکی است.

در هر فصل ابتدا درسنامه ارائه شده است، در لابه‌لای درس، قسمت‌های کوتاه آموزشی ریاضی آورده شده است، این مباحث برای درك مطالب کتاب کفایت می‌کنند (ان‌شاءالله) اما در هر زمینه‌ای که احساس کردید اطلاعات ارائه شده کافی یا مناسب نیست می‌توانید به کتب حساب دیفرانسیل و انتگرال مراجعه کنید. همچنین کتاب‌های آموزش ریاضی سال‌های سوم و چهارم دبیرستان هم می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرند.

سعی شده مثال به تعداد کافی در متن گنجانده شود. مثل تمام متون علمی دارای مثال، پیشنهاد ما این است که ابتدا سعی کنید مثال‌های درسی را خودتان حل کنید و بعد به سراغ حل بروید.

برای پیوستگی مطالب سعی شده است تا تمام مطالب مرتبط با یك موضوع، یکجا آورده شوند. در حالی که لزوماً تمام مباحث مطروحه در کتاب در تمام مراحل آزمون‌های المپیاد استفاده نمی‌شوند. بنابراین قبل از خواندن کل فصل در نظر داشته باشید که مباحثی را که در آزمون به کار شما می‌آید شناسایی کنید، با توجه به متغیر بودن حدود مباحث در سال‌های مختلف، تعیین حد و حدود به‌صورت یکجا و در کتاب معقول نیست. پس از پایان درسنامه تعدادی مثال حل شده آورده شده است. مثل قبل، افضل آن است که اول خودتان سعی کنید مثال‌ها را حل کنید. پس از مثال‌های حل شده، مجموعه تمرین‌ها با جواب آخر هستند و پس از آنها سؤالات دوره‌های المپیاد به‌ترتیب آزمون اول، آزمون دوم و سؤالات دوره تابستانی آورده شده‌اند. در هر کدام از این زیربخش‌ها هم سؤالات به ترتیب سال مرتب شده‌اند ـ از قدیم به جدید.

تا اینجا حرف از چیزهایی بود که گروه مؤلف می‌دانست؛ گر چه قسمت عمده آن به مباحثی می‌پرداخت که بیشتر در حیطه کاری ناشر محترم است (می‌دانید که این کتاب جزوی از یك مجموعه کتاب آموزشی است)؛ اما چیزی که تا حدی بر ما و احتمالاً (و صرفاً احتمالاً) تا حد بیشتری بر شما پوشیده است و در هاله‌ای از ابهام، هدف نهایی نگارش چنین مجموعه‌ای است به هر حال، چه باور کنید و چه نکنید (که البته امیدواریم باور بکنید) چشم‌انداز مالی حوزه نشر و خصوصاً نگارش کتاب‌هایی با مخاطبان خاص، مثل کتاب‌های المپیاد کشش چندانی ندارد، حداقل برای گروه مؤلف این کتاب که اینطور بوده است.

در وضعیتی که برآورد ما (صرفاً به عنوان سه دانشجوی کارشناسی که نه اقتصاد می‌دانند و نه تجربه کار در بازار کار را دارند ...) این است که ...

بگذارید طور دیگری مطلب را بگوییم، نگاهی به تبلیغات اعم از رادیویی، تلویزیونی، اینترنتی و مکانیکی (تراکت، بیلبورد، ...) که در زمینه آموزشی هستند بکنید. کتاب‌هایی که به مخاطب کمك می‌کنند که در آزمون‌های ورودی مهدکودك، دبستان، راهنمایی، ...تا فوق‌دکترا پذیرفته شوند. خوب که از تنوع این کتاب‌های «متفاوت» سیر شدید، سعی کنید دنبال تبلیغاتی بگردید که در آنها سخنی به میان آمده باشد از نشری، مؤسسه‌ای، حلقه مطالعاتی، کتابخانه تخصصی یا هر چیز دیگر (حتی رستورانی...) که هدفگذاری‌اش کمك به شما باشد برای بهبود کیفیت آموزشی در مقطعی که هستید، خواه در حال مهارت‌آموزی باشید و خواه در حوزه علوم نظری ...

این است که ما خیلی هدفمان را درست و درمان نمی‌دانیم؛ نمی‌دانیم که با نگارش این کتاب ما هم وارد چرخه بازتولید کاذب دانش‌آموزان و دانشجویانی که پرورش می‌یابند تا صرفاً در سال‌های بعد دانش‌آموزان و دانشجویان دیگری را درس بدهند. وارد شده‌ایم، یا به دانش‌آموزان کمك می‌کنیم تا وارد دانشگاه بشوند تا در آینده کالاهای ساخته شده در اقصی نقاط عالم را جابه‌جا کنید یا ...

اولین قدم ناخودآگاه ما برای حذر از حضور در این سناریوی ناخوشایند فرار با تمام قوا از حیطه کار کتاب‌ها و آموزش‌های کنکور، کلاس‌های تست و ...است.

چیزی که ما را دلگرم می‌کرد که تا حدی از این ماجرا دوریم، این بود که ناشر محترم (که می‌شوند آقای حاجی‌زاده) در چند مرحله تذکر دادند که فکر کنید جامعه هدف کتاب کسانی هستند که در نقاط غیرمرکزی کشور با امکانات نه چندان انبوهِ آموزش المپیاد برای ورود به دوره‌ها تلاش می‌کنند.

نمی‌دانم چقدر کل این مطالب منسجم از آب درآمد.

اگر هم آن را دوباره بخوانیم قصد ندارم تغییری در آن بدهم ـ می‌توانید آن را به مثابه یك اثر از سبك جریان سیال ذهن بخوانید.

به هر حال امیدواریم تمام خوانندگان کتاب و کسانی که آن را نمی‌خوانند ـ چه به دانشگاه می‌روند، چه نمی‌روند ـ چه بعد از آن فرار مغزها را بر قرار ترجیح می‌دهند (که امیدواریم چنین نباشد) و چه و چه، در آینده مفید فایده باشد؛ اگر چنین چیزی اصلاً امکان‌پذیر باشد.

لازم به ذکر نیست که کتاب، بدون شك پر از اشتباهات ریز و درشت و از انواع و اقسام آن است، لطفاً ما را در تصحیح آنها یاری کنید.

فرینا ساعتی
بردیا نجاری فریزهندی
شهروز زربافیان
مرداد ۱۳۹۰

برای ارسال نظرات به مؤلفان هم می‌توانید از آدرس زیر استفاده کنید:
ferina.saati@gmail.com

فهرست مطالب

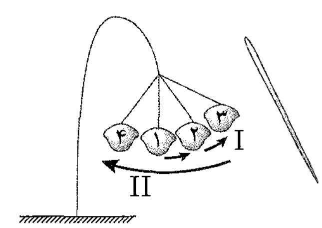
۱

بار الکتریکی، قانون کولن، میدان الکتریکی

بار الکتریکی

حتماً تا به حال برایتان پیش آمده است که پس از راه رفتن با جوراب پشمی بر روی فرش، دست‌تان را به یک جسم فلزی بزنید و جرقه‌ای بین دست‌تان و فلز احساس کنید. یا این‌که در تولد دوست‌تان، برای این‌که بادکنک را به دیوار بچسبانید، آن را به موی سرتان بمالید و چسبیدن آن را به دیوار مشاهده کنید! آیا شده که به علت این پدیده‌ها فکر کنید؟

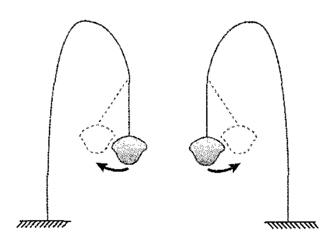
پدیده‌هایی از قبیل این‌ها، به شاخه‌ای از علم فیزیک مربوط هستند که آن را الکتریسیته می‌نامیم. ما در این بخش قصد پرداختن به این شاخه را داریم.



شکل ۱-۱ I) حرکت گلوله‌ی کاغذی قبل از تماس با میله‌ی شیشه‌ای.
II) حرکت گلوله‌ی کاغذی بعد از تماس با آن.

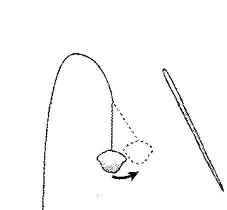
در ابتدا بیایید با آزمایشی شروع کنیم: جسمی سبک مثل یک گلوله کاغذی را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۱ـ۱ از یک نخ ابریشمی آویزان شده است (وضعیت ۱) حال یک میله‌ی شیشه‌ای را به پارچه‌ای ابریشمی بمالید و به آرامی به گلوله نزدیک کنید. خواهید دید که گلوله به میله نزدیک می‌شود (وضعیت ۲) و پس از تماس با آن (وضعیت ۳)، از آن جدا شده و دور می‌شود (وضعیت ۴).

حال همین کار را با گلوله‌های دیگری انجام دهید. با نزدیک کردن این دو گلوله به یکدیگر، مشاهده می‌کنید که از هم دور می‌شوند؛ در صورتی که اگر این گلوله‌ها را قبل از تماس با میله‌ی شیشه‌ای به هم نزدیک می‌کردیم به حالت قائم می‌ماندند و انحرافی نداشتند. بنابراین به نظر می‌رسد که نیروی دیگری به جز نیروی گرانش و نیروی کشش نخ باعث شده است که این دو گلوله همدیگر را دفع کنند. ما این نیروی جدید را "نیروی الکتریکی" می‌نامیم (شکل ۱ـ۲).



شکل ۱-۲ دو گلوله‌ی کاغذی مشابه، یکدیگر را دفع می‌کنند.

حال بیایید آزمایش دیگری انجام دهیم. آزمایش قبل را تکرار می‌کنیم و بعد از مالش گلوله‌ی کاغذی به پارچه‌ی ابریشمی، میله را به گلوله تماس می‌دهیم. میله‌ی دیگری را هم که مثلاً از جنس پلاستیک انتخاب می‌کنیم به پارچه پشمی، مالش می‌دهیم و آن را به گلوله‌های کاغذی نزدیک می‌کنیم. طوری که با آن تماس پیدا نکند. می‌بینیم که میله مطابق شکل ۱ـ۳ گلوله را جذب می‌کند.



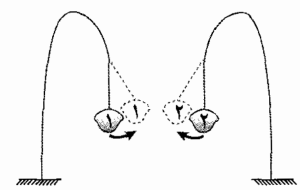
شکل ۱-۳ میله پلاستیکی گلوله‌ی کاغذی آزمایش قبل را جذب می‌کند.

به نظر می‌رسد که نیروی الکتریکی که از آن نام بردیم، این جا نیز وجود دارد. معلوم شده است که نیروی الکتریکی از وجود چیزی به نام «بار الکتریکی» ناشی می‌شود. حال می‌خواهیم بدانیم که این بار الکتریکی چیست و از کجا می‌آید؟ برای درک منشأ بار الکتریکی باید بدانیم که در ماده

چه می‌گذرد؟ همان طورکه می‌دانیم اجسام از ذرات بسیار ریزی به نام «اتم» تشکیل شده‌اند که خود شامل دو قسمت هسته و الکترون است. الکترون‌ها به دور هسته در حال گردش‌اند و می‌توان آن‌ها را از اتم جدا کرد. بنابر مشاهدات انجام شده، الکترون‌ها دارای بار الکتریکی هستند.

با توجه به این‌که نیروی الکتریکی ناشی از وجود بار الکتریکی است، به نظر می‌رسد کم یا زیاد شدن تعداد الکترون‌های موجود در اجسام باید نیروی الکتریکی را به وجود بیاورد. یعنی باید اجسام باردار ـ یا اجسامی که کمبود بار یا زیادی بار دارند ـ باید به یکدیگر نیروی الکتریکی وارد کنند. با توجه به دو آزمایش اخیری که گفتیم، این جمله منطقی به نظر می‌رسد. در این دو آزمایش دیدیم که دو جسم باردار همدیگر را دفع یا جذب می‌کنند (به نظر شما چرا این طور است؟). برای درک این مطلب، بیایید آزمایش دیگری ترتیب دهیم.

یک گلوله کاغذی را با میله پلاستیکی که قبلاً به یک پارچه پشمی مالش داده شده است، تماس می‌دهیم. این گلوله را در مجاورت گلوله‌ی کاغذی آزمایش قبل قرار می‌دهیم، این دو گلوله همدیگر را جذب خواهند کرد (مطابق شکل ۱ـ۴).



شکل ۱-۴ گلوله‌ی ۱ با میله‌ی پلاستیکی مالیده به پارچه‌ی ابریشمی وگلوله‌ی ۲ با میله‌ی شیشه‌ای مالیده به پارچه‌ی پشمی تماس داده شده است.

حال اگر این دوگلوله را با هم تماس دهیم و بار دیگر آنها را در مجاورت هم قرار دهیم، می‌بینیم که در تعادل باقی می‌ماند (البته اگر در مالش دادن و تماس دادن با دقت عمل کرده باشیم، احتمال دارد که همچنان مقداری همدیگر را جذب کنند، نکته اینجاست که گلوله‌ها بعد از تماس با هم، دیگر هم را شدیداً جذب نکنند).

از بین رفتن ـ یا کم شدن ـ نیروی بین دو گلوله حاکی از آن است که عامل به وجود آورنده نیروی الکتریکی ـ که همان طور که گفتیم بار الکتریکی است ـ بین این دوگلوله از بین رفته است؛ یا به گونه‌ای خنثی شده است. همواره رسم بر این است که به کمیت‌هایی که در نتیجه جمع شدن با هم کم می‌شوند، علامت‌های مختلفی نسبت می‌دهند، مثلاً در اینجا دو گلوله‌ی باردار ـ کمیت بار الکتریکی ـ با تماس با هم، بر هم اثر کردند و بار هر کدام کمتر شد! بنابراین بنا به قرار داد، به بارهای الکتریکی نیز علامت‌های مختلفی نسبت می‌دهند، یعنی مثبت و منفی.

اگر در آزمایش‌های قبل دقت کنید، می‌بینید که گاهی از شیشه و پشم و گاهی از پلاستیک و ابریشم برای ایجاد بار الکتریکی استفاده شد. قرارداد بار مثبت و منفی به گونه‌ای است که بار ظاهر شده بر روی شیشه را مثبت و بر روی پلاستیک را منفی می‌نامیم.

بر اساس آزمایش‌هایی که انجام شده، مشخص شده است که در واقع این تفاوت بار، ناشی از تفاوت در تعداد الکترون‌هاست در واقع، در میله‌ی پلاستیکی، افزایش تعداد الکترون و در میله‌ی شیشه‌ای کاهش آن به وجود آمده است. بنابراین، طبق قراردادی که گفته شد ـ که بار پلاستیک، منفی و بار شیشه مثبت است ـ افزایش تعداد الکترون موجب ایجاد بار منفی می‌شود و در نتیجه بار الکترون منفی است. این‌که شیشه، با کمبود الکترون، بار مثبت به‌دست آورد نیز حاکی از وجود ذره‌ی باردار دیگری با بار مثبت در درون اتم است. معلوم شده است که این ذره، با ذره‌ی دیگری که باری ندارد، در داخل هسته‌ی اتم قرار دارد؛ ذره‌ی مثبت پروتون و دیگری نوترون نام دارد.

بررسی‌ها نشان می‌دهد که هر اتمی تعداد مشخصی الکترون دارد و در حالت تعادل، اتم باری ندارد ـ و خنثی است! پس حالت تعادل ایجاب می‌کند که مجموع بارهای منفی الکترون‌ها با مجموع بار مثبت پروتون‌های موجود در هسته، به لحاظ بزرگی، دقیقاً برابر باشد. البته تنها الکترون‌ها

و پروتون‌ها نیستند که به هم نیروی الکتریکی وارد می‌کنند. بلکه این دو، عمده‌ترین و ملموس‌ترین عامل ایجاد این نیرو نیز محسوب می‌شوند. در حقیقت، ذرات زیادی از این قبیل وجود دارند.

معلوم شده است که بار ذرات و همچنین بار ایجاد شده در اجسام، کمیتی "گسسته" است؛ یعنی هر باری مضرب صحیحی از یک بار الکتریکی معین است که "بار بنیادی" نامیده می‌شود. این بار بنیادی، که برابر با بار الکترون و پروتون است و مشخصاً کوچک‌ترین بار موجود در طبیعت است، بزرگی $۱/۶۰۲۱۸۹۲ \times ۱۰^{-۱۹}$ کولن[۱] را داراست و با نماد e نمایش داده می‌شود. بنابراین هر بار الکتریکی فیزیک را ـ اگر با نماد q نشان دهیم ـ می‌توانیم به عنوان مضربی از e، به صورت ne نمایش دهیم (که در آن n یک عدد صحیح محسوب می‌شود که مثبت یا منفی یا صفر است). (رابطه ۱)

$$q = ne \qquad (۱)$$

برای الکترون، n در رابطه ۱ برابر با ۱−، و برای پروتون ۱+ است. برخی از خواص سه ذره[۲] موجود در اتم، در جدول ۱ـ۱ آمده است.

جدول ۱ـ۱ برخی از خواص سه ذره‌ی زیراتمی

ذره	بار الکتریکی (کولن)	جرم (بر حسب جرم الکترون)
الکترون (e^-)	$-۱/۶۰۲۱۸۹۲ \times ۱۰^{-۱۹}$	۱
پروتون (p)	$+۱/۶۰۲۱۸۹۲ \times ۱۰^{-۱۹}$	۱۸۳۶/۱۵
نوترون (n)	۰	۱۸۳۸/۶۸

هرگاه یک خاصیت فیزیکی، مانند بار الکتریکی، به جای داشتن مقادیر پیوسته، به صورت «بسته»های گسسته باشد، آن خاصیت را یک خاصیت «کوانتیده» می‌گویند. بنابراین، بار الکتریکی کمیتی کوانتومی با کوانتوم e است[۳].

بار الکتریکی یک کمیت پایسته است: در هر آزمایشی که بار الکتریکی در آن دخیل است، باری به وجود نمی‌آید و از بین هم نمی‌رود و بار کل همواره مقداری ثابت است[۴]. گفته می‌شود که بار کل موجود در عالم، چه مثبت و چه منفی، مقداری ثابت است، و تاکنون هیچ نقضی بر این گفته آورده نشده است این اصل پایستگی، مشابه اصل پایستگی جرم و انرژی "اصل پایستگی بار الکتریکی" نامیده شده است. برای مشاهده‌ی پایستگی بار، نابودی ذره ـ پادذره می‌تواند مثال خوبی باشد. وقتی یک الکترون (e^-) با بار $-e$، با پادذره‌اش پوزیترون (e^+) با بار $+e$ به هم نزدیک شوند، امکان دارد نابود شوند و انرژی خود را به شکل تابشی بیرون دهند. این تابش می‌تواند از طریق پرتو گاما (γ) باشد. این واکنش را مطابق رابطه‌ی زیر نمایش می‌دهند:

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$$

۱) کولن واحد بار الکتریکی است که در بخش بعد به آن خواهیم پرداخت. همین بس که شما در این بخش با این عدد آشنا شوید و تصوری از کوچکی آن به‌دست آورید.

۲) جرم الکترون در حالت ساکن آن در حدود $۹/۱۰۹۵۳۴ \times ۱۰^{-۳۱}$ کیلوگرم گزارش شده است.

۳) این‌که چرا e کوانتوم بار الکتریکی است و بار دیگری غیر از مضرب آن وجود ندارد، رازی است که در فیزیک کلاسیک توضیحی برایش وجود ندارد.

۴) طوری که حتی در آزمایش‌های نابودی ذرات ـ پادذرات و یا واپاشی اجسام نیز بار کل تغییر نمی‌کند!

در این آزمایش بار خالص قبل از بر هم کنش $(0 = (+1) + (-1))$ برابر صفر بوده و بعد از آن نیز ـ از آنجا که پرتو تابش حامل بار نیست ـ صفر می‌ماند؛ در نتیجه دیده می‌شود که در این بر هم کنش، بار الکتریکی پایسته می‌ماند.

رساناها و نارساناها

ذرات درون هسته‌ی اتم را به دلیل وجود نیروهای هسته‌ای قوی، نمی‌توان به سادگی از هسته جدا کرد. بنابراین، عامل اصلی به وجود آورنده‌ی بار الکتریکی، الکترون‌ها هستند. الکترون‌ها می‌توانند درون یک جسم حرکت کنند یا از جسمی به جسم دیگر منتقل شوند، مانند حرکت الکترون‌ها در سیم‌های برق.

بیایید بار دیگر آزمایش گلوله‌ی کاغذی بخش قبل را در نظر بگیریم. در این آزمایش‌ها برای باردارکردن گلوله‌ی کاغذی از میله‌های شیشه‌ای و پلاستیکی استفاده کردیم. این بار میله‌ای فلزی را در دست می‌گیریم و آن را با پارچه‌ی ابریشمی مالش می‌دهیم و سپس به گلوله‌ی کاغذی تماس می‌دهیم. خواهیم دید که در گلوله‌های کاغذی هیچ تغییری ایجاد نمی‌شود؛ باری به آن منتقل نمی‌شود. علت این امر آن است که الکترون‌ها می‌توانند به راحتی در فلز، بدن انسان و از آن به سوی زمین حرکت کنند، در نتیجه بار ایجاد شده در میله‌ی فلزی از بدن ما عبور کرده و به زمین انتقال می‌یابد و دیگر باری روی میله باقی نمی‌ماند تا بتواند روی گلوله‌ی کاغذی جمع شود و آن را باردارکند. چنین اجسامی را ـ میله‌ی فلزی، زمین و بدن انسان ـ که بتوانند به راحتی بار الکتریکی را از خود عبور دهند، "رسانای الکتریسیته" می‌نامند و اجسامی را مانند شیشه و پلاستیک که این خاصیت را ندارند، "رسانا" و یا "دی‌الکتریک" ـ و یا عایق ـ می‌نامند. بدین ترتیب، وقتی مقداری بار الکتریکی روی سر یک رسانا قرار می‌دهیم، بی‌درنگ در سرتاسر آن پخش می‌شود، تا رسانا به تعادل[1] برسد، و وقتی مقداری بار روی یک سر نارسانایی قرار می‌دهیم، در همان مکان باقی می‌ماند.

توجه داشته باشید که هیچ‌گاه به طور دقیق نمی‌توان تعیین کرد که جسمی رسانا یا نارسانا است. بررسی‌ها نشان می‌دهند که هر جسمی می‌تواند بار الکتریکی را، هر چند به میزان بسیار اندکی، از خود عبور دهد. بنابراین اجسام مختلف در گستره‌ای بین رسانایی کامل و نارسانایی کامل قرار می‌گیرند. بدین ترتیب حتی ممکن است که یک ماده در شرایطی رسانا و در شرایط دیگر نارسانا در نظر گرفته شود، بنابراین رسانایی امری کاملاً نسبی است و ما برای شرایطی مشخص، رسانایی و نارسانایی اجسام خاصی را قرارداد می‌کنیم.

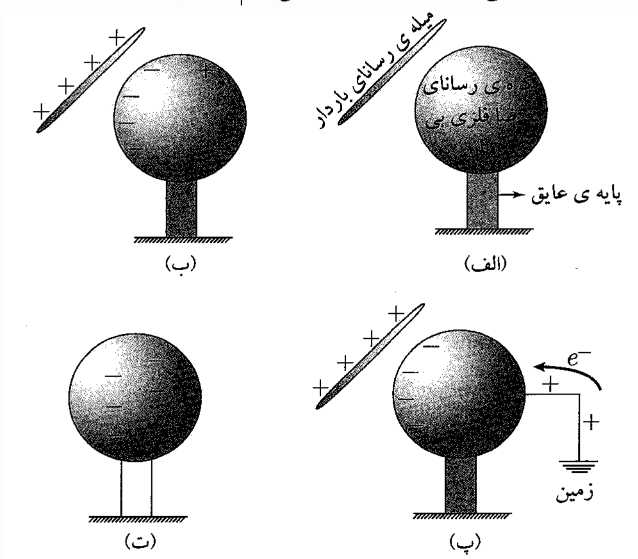
همه‌ی فلزات رساناهای خوبی هستند. حرکت بار در آنها ناشی از حرکت الکترون‌هایشان است. در فلزات به دلیل پیوند خاص اتمی‌شان، برخی از الکترون‌های هر یک از اتم‌ها "آزاد" هستند؛ یعنی پیوندی با هیچ اتم خاصی ندارند. به عبارت بهتر، الکترون‌های آزاد، به بخش‌های بیرونی اتم‌ها تعلق دارند و به دلیل اتصال سست‌شان، به سادگی جدا می‌شوند. این الکترون‌ها، همچون ذرات گاز در یک ظرف دربسته، در حجم فلز سرگردان هستند و به محض ایجاد کمبود یا ازدیاد الکترون در یک سر رسانا، سریعاً اضافه یا کمبود بار را در تمام بخش‌های رسانای فلزی پخش می‌کنند.

۱) فعلاً با واژه‌ی تعادل کنار بیایید، تا بعدها که به مفهوم آن می‌پردازیم!

چنانچه توجه کرده باشید، در تمامی آزمایش‌هایی که تاکنون با آنها سروکار داشته‌ایم، روشی خاص برای باردارکردن اجسام پیشنهاد شده بود: مالش دادن. فرایند دیگری که برای باردارکردن اجسام وجود دارد "القا کردن" است.

القا کردن

برای باردار کردن یک کره‌ی رسانا به روش القا کردن، مطابق شکل ۱ـ۵ عمل می‌کنیم، ابتدا یک میله‌ی شیشه‌ای باردار را که احتمالاً بار خود را از طریق مالش به‌دست آورده است به کره‌ی نارسانایی که روی پایه‌ی نارسانایی قرار دارد، نزدیک می‌کنیم (شکل ۱ـ۵ الف).

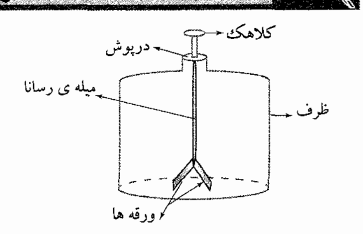


شکل ۱-۵ مراحل باردارکردن یک کره‌ی رسانا از طریق روش القا.

گفتیم که بار شیشه مثبت است، این بار مثبت الکترون‌های آزاد سمت نزدیک جسم را جذب می‌کند و در سمت دور آن کمبود الکترون باقی می‌گذارد (شکل ۱ـ۵ ب). ازدیاد الکترون در سمت نزدیک میله بار منفی و کمبود آن در سمت دور از میله بار مثبت ایجاد خواهد کرد. اگر در این لحظه، سمت دورتر از میله‌ی رسانا را موقتاً به زمین وصل کنیم، بار مثبت آن سمت با الکترون‌هایی که از زمین به جسم منتقل می‌شوند و کمبود الکترون آن سمت را جبران می‌کنند، خنثی می‌شود؛ به عبارت بهتر بار مثبت به زمین نشت می‌کند (مطابق شکل ۱ـ۵ پ). این کار فلز را با مقداری بار خالص منفی باقی می‌گذارد. اگر کره‌ی رسانا را بعد از قطع شدن از زمین از میله‌ی شیشه‌ای دور کنیم، بار منفی باقی‌مانده بر روی آن در سرتاسر آن توضیح خواهد شد (شکل ۱ـ۵ ت).

دو وسیله‌ی الکتریکی: الکتروسکوپ ـ وان‌دوگراف

الکتروسکوپ



شکل ۱-۶ الکتروسکوپ و اجزای آن.

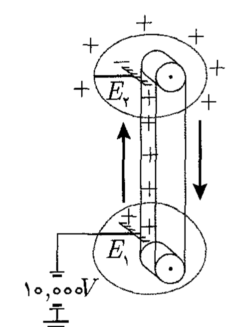
یکی از وسایل آزمایشگاهی ساده و پرکاربردی که برای مطالعه‌ی باردار بودن یا نبودن اجسام و همچنین تشخیص نوع بارشان ـ مثبت و منفی بودن بار ـ استفاده می‌شود، الکتروسکوپ است. الکتروسکوپ از یک ظرف شیشه‌ای، دو ورقه‌ی نازک رسانا ـ از جنس مس، آلومینیوم و غیره، یک میله‌ی رسانا ـ که ورقه‌ها به آن لولا شده‌اند، و یک درپوش برای ظرف تشکیل شده است (شکل ۱ـ۶).

فرض کنید یک میله‌ی پلاستیکی را که با پارچه‌ی پشمی مالش داده شده است (و دارای بار منفی است)، به قسمت کلاهک الکتروسکوپ نزدیک کنیم، به دلیل نیروی دافعه‌ی بین الکترون‌ها، برخی الکترون‌های آزاد قسمت بالایی میله‌ی رسانا به راه افتاده و به سمت پایین ـ ورقه‌ها، حرکت می‌کنند تا از بار منفی میله‌ی پلاستیکی تا حد ممکن فاصله بگیرند؛ بدین ترتیب ورقه‌ها دارای بار همنام منفی می‌شوند. این بار، موجب نیروی دافعه‌ی بین دو ورقه می‌شود که سبب باز شدن ورقه‌ها (افزایش زاویه‌ی بین آنها) می‌شود. این کار، باردار بودن یا نبودن جسم نزدیک کلاهک را مشخص می‌کند. در این آزمایش وقتی میله را از کلاهک دور کنیم، طبیعتاً از آنجا که الکتروسکوپ بی‌بار است، ورقه‌ها به حالت اولیه‌ی تعادلی خود باز می‌گردند. اما در صورتی که میله را به الکتروسکوپ تماس دهیم، در محل تماس میله با کلاهک مقداری از بار میله به الکتروسکوپ منتقل می‌شود و ورقه‌ها منحرف می‌شوند. در این حالت اگر میله را از الکتروسکوپ دور کنیم، از آنجا که بقیه‌ی بار روی میله، که روی میله در جای خود باقی‌مانده بود، به نوبه‌ی خود موجب انحراف ورقه‌ها از هم می‌شد، با دور شدن میله انحراف ورقه‌ها کمتر می‌شود ولی ورقه‌ها به حالت اولیه‌ی خود باز نمی‌گردند. با این کار، الکتروسکوپ باردار شد. حال اگر بار دیگر این کار را با همان میله‌ی پلاستیکی باردار انجام دهیم. مشاهده می‌کنیم که انحراف ورقه‌ها بیشتر می‌شود. این نشان می‌دهد که انحراف ورقه‌های الکتروسکوپ و در نتیجه نیروی الکتریکی بین دو ورقه، با افزایش بار الکتروسکوپ بیشتر می‌شود. در نتیجه رابطه‌ی مستقیم بین نیروی الکتریکی و بار الکتریکی، به طور تجربی قابل مشاهده است.

سؤال: راهی پیدا کنید تا به وسیله‌ی آن با استفاده از یک الکتروسکوپ خنثی، یک میله‌ی پلاستیکی با بار منفی و یک میله‌ی رسانا با دسته‌ی عایق، بدون تماس میله‌ی پلاستیکی به هیچ یک از دو جسم دیگر، میله‌ی رسانا را باردار کنیم. در این حالت، آیا می‌توانید بار میله را تعیین کنید که مثبت است یا منفی؟ بار دو جسم دیگر را چطور؟

مولد وان‌دوگراف

وان‌دوگراف دستگاهی است که می‌تواند مقدار زیادی الکتریسیته ساکن تولید کند. این مولد نقاله پهنی درون خود دارد که میان یک ستون حرکت می‌کند تا بار الکتریکی ایجاد کند. بارهای تولید شده توسط این نقاله، درون گنبدی در بالای این مولد تجمع می‌کنند و به دنبال راهی برای فرار هستند. این تجمع بارهای منفی گاهی به واسطه‌ی یک صاعقه‌ی کوچک الکتریکی از طریق هوا به یک جسم رسانای متصل به زمین و یا مستقیماً به خود زمین منتقل می‌شوند (شکل ۱ـ۷).



شکل ۱-۷ مولد وان‌دوگراف

چند مثال

مثال ۱

اگر به سرعت در راهروی مفروش راه بروید، در حالی که جوراب به پا دارید و سپس با شخصی دست بدهید و یا دستگیره فلزی دری را بگیرید تا آن را باز کنید، غالباً جرقه‌ای ملموس بین دستتان و دیگری احساس خواهید کرد؛ علت این امر چیست؟

حل. علت این امر را می‌توان در آزمایش گلوله‌ی کاغذی کاغذی جست‌وجو کرد. در این آزمایش، گفتیم که بر اثر مالش میله‌ی شیشه‌ای یا پلاستیکی با پارچه‌های ابریشمی یا پشمی، می‌توان آن را باردار

کرد. زمانی که با سرعت بر روی فرض راه می‌روید، الیاف پلاستیکی موجود در جوراب شما به الیاف نخی فرش (ابریشمی یا پشمی) مالیده و باردار می‌شود. بنابراین زمانی که شما دستگیره‌ی در را لمس می‌کنید، به علت رسانا بودن انسان، این بار الکتریکی تمایل دارد که در شما جریان یابد و به دستگیره در نیز منتقل شود. در این انتقال بار، جرقه‌ای بین دست شما و دستگیره در زده می‌شود. شما ممکن است نظیر این جرقه را هنگام اتصال سیم‌های ماشین برای روشن کردن آن ـ یا همان استارت زدن ـ دیده باشید.

مثال ۲

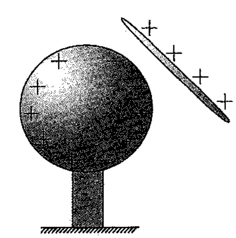
شخصی که روی چهار پایه‌ی عایق‌بندی شده‌ای ایستاده است، رسانای بارداری را که روی پایه‌ی عایقی قرار دارد لمس می‌کند. آیا رسانا کاملاً تخلیه می‌شود؟

حل. چون رسانا بر روی پایه‌ای نارسانا قرار دارد، باری به زمین انتقال نمی‌یابد. هنگامی که شخص، رسانا را لمس می‌کند، چون انسان نیز رساناست، می‌توان مجموعه‌ی انسان و رسانای باردار را به عنوان یک رسانای بزرگ‌تر در نظر گرفت که در نتیجه بار روی تمام آن پخش می‌شود (و چون توسط دو نارسانا از زمین جدا شده‌اند، باری به زمین انتقال نمی‌یابد). بنابراین رسانا تخلیه نمی‌شود و مقداری از بار اولیه بر رویش باقی می‌ماند.

مثال ۳

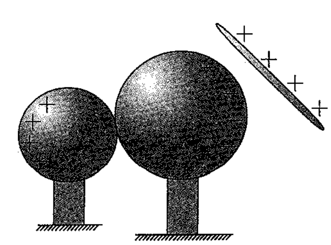
دو کره‌ی فلزی که بر روی پایه‌های نارسانای قابل حملی سوارند، در دست‌اند. راهی پیدا کنید که در آن کره‌ها دارای بار مساوی و با علامت مخالف بشوند. برای این کار می‌توانید از یک میله‌ی شیشه‌ای که با ابریشم مالش داده شده است، استفاده کنید ولی نباید آن را با کره‌ها تماس دهید. آیا اندازه‌ی این کره‌ها یکسان باید باشد تا روش شما مؤثر واقع شود؟

حل. در اینجا، سه جسم داریم. دو کره‌ی فلزی بدون بار و یک میله‌ی شیشه‌ای با بار مثبت و می‌دانیم که نمی‌توانیم میله‌ها را به کره‌ها تماس دهیم. از آنجایی که برای انتقال بارهای کوچک، باید اجسام با هم تماس پیدا کنند، پس باید کاری کنیم که از طریق تماس کره‌ها باری بین آنها انتقال یابد. با این کار چون کره‌ها با هیچ جسم دیگری امکان مبادله‌ی بار ندارند، پس دارای بارهای مساوی و مخالف هم می‌شوند. در بخش باردارکردن به روش القا دیدیم که اگر مقداری بار الکتریکی را به یک جسم فلزی ـ در اینجا یک کره‌ی فلزی ـ نزدیک کنیم، جسم رسانا به طور موضعی باردار می‌شود، یعنی یک سمت آن دارای بار مثبت، و سمت دیگر آن دارای بار منفی می‌شود[1] (شکل ۱ـ۸).



شکل ۱ـ۸ باردارشدن موضعی یک جسم رسانا.

نکته‌ی این سؤال در همین ویژگی‌ای است که رساناها حین القا از خود نشان می‌دهند، اگر دو کره را به هم بچسبانیم و سپس میله‌ی شیشه‌ای را که دارای بار الکتریکی مثبت است مطابق شکل ۱ـ۹ از یک سمت به آنها نزدیک کنیم، بر اثر القا شدن، کره‌ی سمت راست دارای بار منفی و کره‌ی سمت چپ دارای بار مثبت می‌شود. حال اگر در این وضعیت ـ در حالی که میله همچنان نزدیک کره است، کره‌ی سمت چپ را جدا و از بقیه دور کنیم، و سپس میله را دور کنیم، دو کره خواهیم که یکی دارای بار مثبت و دیگری دارای همان مقدار بار با علامت منفی می‌شود. با توجه به نحوه‌ی آزمایش مشخص است که اندازه‌ی کره‌ها هیچ اهمیتی ندارد و تنها رسانا بودن آنها، شرطی است کافی.



شکل ۱ـ۹ باردارکردن هم‌زمان دوکره با استفاده از یک میله‌ی باردار.

۱) این پدیده به اثر القاییدگی معروف است.

مثال ۴ در سؤال قبل، راهی پیدا کنید که در آن کره‌ها دارای بارهای مساوی با علامت یکسان بشوند. آیا در این حالت نیز نیازی به یکسان بودن اندازه‌ی کره‌ها نیست؟

حل. با استفاده از روش گفته شده در پاسخ سؤال پیشین دو کره‌ی رسانا را باردار می‌کنیم. حال با تماس دست به یکی از کره‌ها، آن را خنثی می‌کنیم (البته اگر از روی چهارپایه‌ی عایق پایین آمده باشیم!). اگر کره‌ی خنثی و کره‌ی باردار را با هم تماس دهیم، دو کره با هم مبادله‌ی بار می‌کنند. اگر اندازه‌ی دو کره متفاوت باشد، نمی‌توان گفت که بار به صورت مساوی بین آنها تقسیم می‌شود، ولی اگر یکسان باشند، چون تفاوتی با هم ندارند، بارشان نیز نمی‌تواند متفاوت باشد، بنابراین می‌توان گفت که بار کره‌ی باردار به صورت یکنواخت در کل دو کره پخش می‌شود و در نتیجه کره‌ها دارای بارهای مساوی و هم‌علامت می‌شوند. در اینجا می‌بینیم که یکسان بودن اندازه‌ی کره‌ها الزامی است.

قانون کولن

تا به این نقطه از بحث، ما با بار الکتریکی و نیروی بین بارهای الکتریکی سروکار داشتیم. اما صرفاً تعریفی کیفی از نیروی الکتریکی نمی‌تواند پاسخ‌گوی نیاز ما در فیزیک باشد و بایستی در پی روابط کمی باشیم. با توجه به آنچه تا اینجا گفته شده می‌دانیم که نیروی الکتریکی که بین دو جسم باردار وجود دارد با میزان بار آن جسم رابطه‌ی مستقیم دارد، یعنی با بیشتر شدن بار یک جسم، نیرویی که به آن وارد می‌شود هم بیشتر می‌شود. همچنین دیده می‌شود که این رابطه برای فاصله‌ی بین دو جسم باردار، معکوس است. یعنی با افزایش فاصله‌ی دو جسم باردار، نیرویی که آن دو به یکدیگر وارد می‌کنند، کاهش می‌یابد. (آزمایشی مانند آزمایش‌های بخش پیشین برای بررسی این موضوع طرح کنید)، سپس نیروی الکتریکی با مقدار بار آنها نسبت مستقیم و با فاصله‌ی بین‌شان نسبت عکس دارد. شارل کولن[۱]، فیزیک‌دان فرانسوی با آزمایشاتی که انجام داد[۲]، مشاهده کرد که اگر فاصله‌ی بین دو بار نقطه‌ای نامشخص ولی ثابت با نام‌های $q_۱$ و $q_۲$ دو برابر شود، نیروی الکتریکی بین آنها یک‌چهارم برابر می‌شود. او از این نتیجه چنین استدلال کرد که نیروی الکتریکی بین دو بار نقطه‌ای (F)، با عکس مجذور فاصله‌ی بین آنها (r) متناسب است. ($F \propto \frac{۱}{r^۲}$)

کولن برای پیدا کردن رابطه‌ی نیرو با مقدار بارها هم آزمایش مشابهی انجام داد. ابتدا بار روی گلوله‌ی اول $q_۱$ را نصف کرد و مقدار نیروی وارده بر گلوله‌های دیگر را اندازه گرفت، و بار دیگر بار گلوله‌های دیگر (مثلاً $q_۲$) را نصف کرد و اثر آن را بررسی کرد و مشاهده کرد که نیرو باز هم نصف شد. او از این مشاهدات نتیجه گرفت که مقدار نیرو (F) با مقدار بارهای $q_۱$ و $q_۲$ رابطه‌ی خطی دارد ($F \propto q_۱q_۲$). با استفاده از نتایج این آزمایشات او قانون مربوط به نیروی اندرکنش دو بار نقطه‌ای خود را چنین بیان داشت:

$$F \propto \frac{q_۱q_۲}{r^۲} \Rightarrow F = k\frac{q_۱q_۲}{r^۲}$$

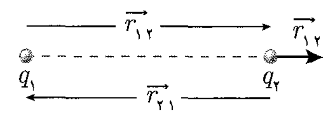
در این رابطه که به قانون کولن معروف است، k ثابتی است که در سیستم‌های مختلف اندازه‌گیری

---
۱) ۱۸۰۶_۱۷۳۶

۲) در سال ۱۷۸۵

متفاوت است. این نیرو در راستای خط واصل دو بار است و جهت آن برای دو بار هم‌نام (یعنی دو بار مثبت یا دو بار منفی) به سمت خارج خط واصل دو بار (نماد نیروی دافعه) و برای دو بار غیرهم‌نام (یعنی بار مثبت ـ بار منفی) به سمت داخل (نماد نیروی جاذبه) است.

برای استفاده از رابطه‌ی کولن و تعیین مقدار ثابت k، نیاز داریم که واحدی برای مقدار بار الکتریکی تعیین کنیم. یکای بار در دستگاه یکاهای بین‌المللی (SI) کولن (C) است. کولن یکای فرعی است و از یکاهای اصلی SI محسوب نمی‌شود. حال با این یکا و با در نظرگرفتن یکای فاصله به متر، مقدار k در SI به‌دست می‌آید. k برابر است با نیرویی که دو بار یک کولنی که به فاصله‌ی یک متر از هم قرار دارند، به هم وارد می‌کنند. مقدار k حدوداً برابر با 9×10^9 و واحد آن با توجه به قانون کولن $\mathrm{N.m^2/C}$ است. به بیان دیگر k برابر با $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ است که در آن ϵ_0 ضریب تراوایی الکتریکی خلأ است. در این کتاب، ضریب فوق به هر دو شکل نمایش داده شده است.



شکل ۱-۱۰ r_{12} فاصله‌ی بار ۱ از ۲ و r_{21} فاصله‌ی بار ۲ از ۱ است که $r_{12} = r_{21}$ است و در حالت برداری $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$ (و $\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}$).

شکل برداری قانون کولن به این صورت نوشته می‌شود:

$$\vec{F}_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

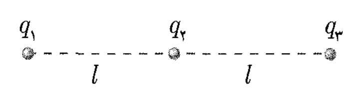
$$\vec{F}_{21} = \frac{kq_1q_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21}$$

$\hat{r}_{12}$ بردار یکه‌ی بردار واصل از بار ۱ به بار ۲ می‌باشد، $\hat{r}_{21}$ هم برعکس.

چند مثال برای قانون کولن

مثال ۵

دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 را به فاصله‌ی l از هم نگه داشته‌ایم. طوری که مکان آنها ثابت باقی بماند. بار سوم q_3 را مطابق شکل ۱ـ۱۱ روی خط واصل q_1 و q_2 قرار می‌دهیم. مقدار بار q_2 را بر حسب q_1 به‌دست آورید، به صورتی که بار q_3 در حال تعادل باشد.



شکل ۱-۱۱

حل. به بار q_3 دو نیرو توسط q_1 و q_2 اعمال می‌شود. با استفاده از قانون کولن داریم:

$$\vec{F}_{13} = \frac{kq_1q_3}{r_{13}^2}\hat{r}_{13} = \frac{kq_1q_3}{4l^2}\hat{r}_{13}$$

$$\vec{F}_{23} = \frac{kq_2q_3}{r_{23}^2}\hat{r}_{23} = \frac{kq_2q_3}{l^2}\hat{r}_{23}$$

بار q_3 در تعادل است. بنابراین برایند نیروهای وارد بر آن بایستی صفر باشد. داریم:

$$\sum \vec{F}_{q_3} = 0 \ \rightarrow \ \frac{kq_1q_3}{4l^2}\hat{r}_{13} + \frac{kq_2q_3}{l^2}\hat{r}_{23} = 0$$

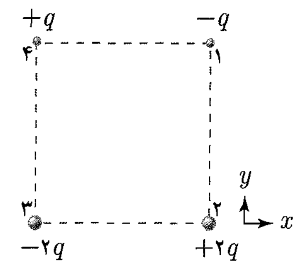
از طرفی $\hat{r}_{23} = \hat{r}_{13}$. بنابراین:

$$\frac{kq_3}{l^2}\hat{r}_{13}\left(\frac{q_1}{4} + q_2\right) = 0 \ \xrightarrow{q_3 \neq 0} \ \frac{q_1}{4} + q_2 = 0$$

$$\rightarrow \ q_2 = -\frac{q_1}{4}$$

مثال ۶

چهار بار نقطه‌ای مطابق شکل در چهار رأس یک مربع ثابت نگه داشته شده‌اند. $q = ۱ \times ۱۰^{-۸}\mathrm{C}$ و $a = ۱۰\mathrm{cm}$ است. بردار نیروی الکتریکی وارد بر بار سمت راست بالا را حساب کنید.



شکل ۱-۱۲

حل. از قانون کولن استفاده می‌کنیم:

$$\vec{F}_{۱۲} = \frac{kq_۱q_۲}{r^۲_{۱۲}}\hat{r}_{۱۲}$$

بارها را مطابق شکل ۱ـ۱۲ شماره‌گذاری می‌کنیم. نیروی الکتریکی برایند وارد بر بار ۱ (سمت راست بالا) برابر با مجموع سه نیرویی است که سه بار واقع در سه رأس بر آن وارد می‌کنند، داریم:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_۱ &= \vec{F}_{۲۱} + \vec{F}_{۳۱} + \vec{F}_{۴۱} \\ &= \frac{k(-q)(+۲q)}{a^۲}\hat{r}_{۲۱} + \frac{k(-q)(-۲q)}{(\sqrt{۲}a)^۲}\hat{r}_{۳۱} + \frac{k(-q)(q)}{a^۲}\hat{r}_{۴۱}\end{aligned}$$

طبق دستگاه مختصات مشخص شده، که در صورت مسئله داده شده است، بردارهایی که بدین ترتیب هستند

$$\hat{r}_{۲۱} = \hat{j}\ ,\ \hat{r}_{۴۱} = \hat{i}$$

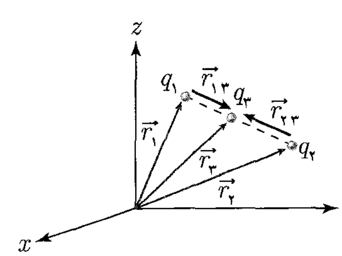
$$\hat{r}_{۳۱} = |\hat{r}_{۳۱}|\cos ۴۵^\circ \hat{i} + |\hat{r}_{۳۱}|\sin ۴۵^\circ \hat{j} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\hat{i} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\hat{j}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum \vec{F}_۱ &= \frac{kq^۲}{a^۲}\left[-۲\hat{j} + \frac{۲}{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\hat{i} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\hat{j}\right) - \hat{i}\right] \\ &= \frac{kq^۲}{a^۲}[(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۱)\hat{i} + (\frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۲)\hat{j}] \\ &= \frac{۹ \times ۱۰^۹ \times (۱ \times ۱۰^{-۸})^۲}{(۰/۱)^۲}[(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۱)\hat{i} + (\frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۲)\hat{j}]\end{aligned}$$

$$\sum \vec{F}_۱ = (-۲/۶۴\hat{i} - ۱۱/۶۴\hat{j}) \times ۱۰^{-۵}\mathrm{N}$$

مثال ۷

دو بار مثبت $q_۱$ و $q_۲$ در نقاط $\vec{r}_۱$ و $\vec{r}_۲$ قرار داده شده است. بار $q_۳$ و بردار $\vec{r}_۳$ را طوری تعیین کنید که اگر $q_۳$ را در محل $\vec{r}_۳$ قرار دهیم، نیروی وارد بر هر سه بار صفر شود.



شکل ۱-۱۳

حل. نیروی کل وارد بر هر یک از بارها را با استفاده از قانون کولن حساب می‌کنیم و برابر صفر قرار می‌دهیم تا هر کدام در حال تعادل باشند. از آنجا که نیروی الکتریکی بین دو بار نقطه‌ای در راستای خط واصل‌شان به آنها وارد می‌شود، صفر شدن نیروی برایند وارد بر هر یک از بارها تنها در صورتی ممکن می‌شود که دو نیرویی که از سوی دو بار دیگر بر آن وارد می‌شود، در یک راستا باشند، این امر تنها هنگامی محقق می‌شود که هر سه بار روی یک خط قرار داشته باشند. همان طور که از شکل ۱ـ۱۳ مشخص است، از آنجا که هر دو بار $q_۱$ و $q_۲$ مثبت هستند، و نیروی وارده از آنها بر بار $q_۳$ از یک جنس است. برای صفر شدن نیروی وارد بر بار ۳، این بار باید میان دو بار دیگر واقع شود.

برای برآیند نیروی وارد بر q_3 داریم:

$$\sum \vec{F}_3 = \frac{kq_1q_3}{r_{13}^2}\hat{r}_{13} + \frac{kq_1q_2}{r_{23}^2}\hat{r}_{23} = 0 \qquad (1)$$

و همچنین برای بردارهای $\vec{r}_{13}$ و $\vec{r}_{23}$، اندازه‌های آنها و بردارهای یکه‌شان داریم:

$$\vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 \;\Rightarrow\; r_{13} = |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| \;\;,\;\; \hat{r}_{13} = \frac{\vec{r}_{13}}{|\vec{r}_{13}|} = \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|}$$

در مورد r_{23} و بردار یکه‌ی آن $\hat{r}_{23}$ هم اوضاع از همین قرار است. با توجه به این اطلاعات عبارت (۱) به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) + \frac{q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) = 0 \qquad (2)$$

از طرفی، همان طور که در شکل مشخص است، بردارهای یکه‌ی $\hat{r}_{23}$ و $\hat{r}_{13}$ روی یک خط و در خلاف جهت هم قرار گرفته‌اند. بنابراین داریم:

$$\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} = -\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \qquad (3)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳)، رابطه(۲) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^2} - \frac{q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2} = 0$$

از آنجا که q_1 و q_2 کمیت‌هایی با مقدار مثبت هستند، می‌توان از این عبارت به ترتیب زیر جذر گرفت:

$$q_1, q_2 > 0 \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{q_1}}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} = \frac{\sqrt{q_2}}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \qquad (4)$$

از آنجا که خواسته‌ی ما بردار مکان بار q_3 یعنی $\vec{r}_3$ است، با استفاده از رابطه‌ی (۳)، رابطه‌ی (۴) را به ترتیب زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{q_1}}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} \times \frac{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|}{\vec{r}_3 - \vec{r}_1} = \frac{\sqrt{q_2}}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \times -\frac{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}{\vec{r}_3 - \vec{r}_2} \\ &\Rightarrow \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{\sqrt{q_1}} = -\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\sqrt{q_2}} \\ &\Rightarrow \vec{r}_3 = \frac{\sqrt{q_1}\vec{r}_2 + \sqrt{q_2}\vec{r}_1}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} \qquad (5) \end{aligned}$$

و بدین ترتیب بردار $\vec{r}_3$ بر حسب دو بردار و دو بار دیگر تعیین می‌شود.

برای به‌دست آوردن بار q_3، بایستی معادله‌ی تعادل را برای بار دیگری، مثلاً بار q_1 بنویسیم:

$$\sum \vec{F} = \frac{kq_1q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{kq_1q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{q_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+\frac{q_3}{|\vec{r}_3-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_3-\vec{r}_1)=0 \qquad (6)$$

$$\vec{r}_3-\vec{r}_1=\frac{\sqrt{q_1}\vec{r}_2+\sqrt{q_2}\vec{r}_1-\left(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}\right)\vec{r}_1}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}$$

$$=\frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1) \qquad (7)$$

$$\Rightarrow |\vec{r}_3-\vec{r}_1|=\frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}|\vec{r}_2-\vec{r}_1| \qquad (8)$$

با جایگذاری دو عبارت (۷) و (۸) در رابطه‌ی (۶)، پس از ساده‌سازی عبارت حاصله، داریم:

$$q_2+\frac{q_3}{\left(\frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}\right)^3}\cdot\frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}=0$$

$$\Rightarrow q_3=\frac{-q_1q_2}{\left(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}\right)^2}$$

و بدین ترتیب بار q_3 بر حسب دو بار q_1 و q_2 به‌دست می‌آید.

میدان الکتریکی

احتمالاً تاکنون توجه کرده‌اید که در طبیعت هیچ فعل و انفعالی بدون برقرار بودن یک پل ارتباطی میان دو طرف، انجام نمی‌شود. در قسمت‌های قبل دیدیم که دو جسم باردار، به یکدیگر نیروی الکتریکی وارد می‌کنند؛ ولی در عمل، پل ارتباطی‌ای میان دو جسم مشاهده نکردیم. پس نیروی الکتریکی چگونه و از چه طریقی می‌تواند از یک جسم باردار به دیگری منتقل شود؟

هنگامی که یک بار الکتریکی (یا جسمی باردار) را در فضا قرار می‌دهیم، این بار موجب ایجاد خاصیتی در آن نقطه و نقاط پیرامون آن می‌شود. به گونه‌ای که اگر بار الکتریکی دیگری را در این منطقه قرار دهیم، نیروی مشخصی را تجربه می‌کند. چنین خاصیتی، که توسط یک بار الکتریکی در فضای پیرامون آن ایجاد می‌شود، با مفهومی به نام «میدان الکتریکی» توجیه می‌شود، هر بار الکتریکی در فضای اطراف خود میدان الکتریکی ایجاد می‌کند و به هر بار الکتریکی دیگری که در این فضا قرار گیرد، نیروی متناسب با مقدار میدان الکتریکی در آن نقطه وارد خواهد شد. بنابراین، میدان الکتریکی رابطی میان بارهای الکتریکی است، که به موجب آن بارها بر هم نیرو وارد می‌کنند.

بار $\leftrightarrow$ میدان الکتریکی $\leftrightarrow$ بار

بنابراین، در فضایی که بارهای الکتریکی وجود داشته باشند، میدان الکتریکی حضور دارد. این میدان در هر نقطه، اندازه و جهتی دارد. در حقیقت، میدان الکتریکی، میدانی از بردارهاست که با $\vec{E}$ نشان داده می‌شود. میدان $\vec{E}$، در هر نقطه برابر با نیروی الکتریکی $\vec{F}$ وارد بر واحد بار الکتریکی تعریف می‌شود. یعنی:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$$

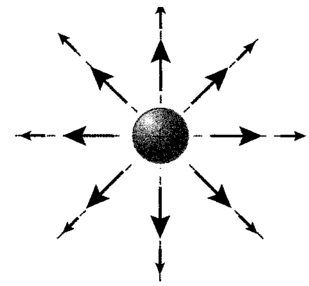
یعنی هنگامی که آرایش ثابتی از بارهای الکتریکی در فضا وجود دارد که میدانی را در فضا به وجود آورده‌اند، برای محاسبه‌ی میدان در یک نقطه، بار آزمون $q_\circ$ را به نقطه‌ی مورد نظر می‌بریم و نیروی وارده بر آن $(\vec{F})$ را مشاهده می‌کنیم. میدان در این نقطه $(\vec{E})$ برابر نیروی وارد بر واحد بار در آن نقطه است. چنانچه این کار برای تمام نقاط فضا انجام شود، میدان الکتریکی فضا به‌دست آمده است.

فرض کنید بار نقطه‌ای q در مبدأ مختصات (نقطه‌ی $(\circ,\circ,\circ)$) قرارگرفته است. برای محاسبه‌ی $\vec{E}$ در هر نقطه، بایستی از بار آزمون استفاده کنیم. بار آزمون $q_\circ$ را در نقطه‌ی دلخواهی در مختصات کروی (r,θ,φ) قرار می‌دهیم. نیروی وارد بر آن، با توجه به قانون کولن برابر است با:

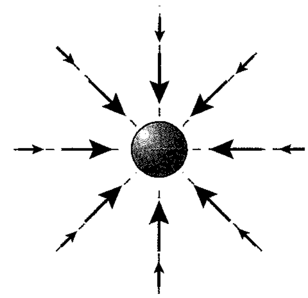
$$\vec{F} = k\frac{qq_\circ}{r^{۲}}\cdot\hat{r}$$

بنابراین میدان الکتریکی در این نقطه با این رابطه به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= k\frac{qq_\circ}{r^{۲}}\cdot\hat{r}\times\frac{۱}{q_\circ}\\ &= k\frac{q}{r^{۲}}\cdot\hat{r}\end{aligned}$$



(الف)



(ب)

شکل ۱-۱۴

این رابطه مستقل از زوایای θ و φ[1] است و تنها راستای شعاعی (r) دارد. اگر بار چشمه (یا q) مثبت باشد $(q>\circ)$، $\vec{E}$ در جهت $\hat{r}$ خواهد بود؛ یعنی میدان الکتریکی یک بار مثبت در هر نقطه دلخواه از فضای اطراف آن، در راستای خط واصل میان بار q و نقطه‌ی مورد نظر، و در جهت دور شدن از آن است. (شکل (الف) ۱ـ۱۴) اگر بار چشمه منفی باشد $(q<\circ)$، میدان در همان راستا و در خلاف جهت $\hat{r}$ خواهد بود. (شکل (ب) ۱ـ۱۴)

به طور کلی، میدانی که یک بار نقطه‌ای در فضا ایجاد می‌کند، به شکل بردارهایی در راستای شعاع کره‌ای فرض می‌شود که بار چشمه در مرکز آن قرارگرفته است.

برهم‌نهی میدان‌های الکتریکی

اگر تعداد بار نقطه‌ای در فضا حضور داشته باشند، نیروی الکتریکی که بر بار آزمون $q_\circ$ وارد می‌شود، برابر با مجموع نیروهایی است که هر کدام از بارهای نقطه‌ای، به طور مستقل، بر بار $q_\circ$ وارد می‌کنند. اگر برایند نیروهای وارد بر $q_\circ$ با $\sum\vec{F}_{q_\circ}$ و نیروی وارده از هر بار q_i بر بار $q_\circ$ با $\vec{F}_i$ (که i شماره‌ی بار چشمه است) نشان داده شود، داریم:

$$\sum\vec{F}_{q_\circ} = \sum_{i=۱}^{n}\vec{F}_i$$

و در مورد میدان الکتریکی در محل بار آزمون $q_\circ$ (که هر نقطه‌ی دلخواهی می‌تواند باشد) داریم:

$$\vec{E} = \frac{\sum\vec{F}_{q_\circ}}{q_\circ} = \frac{\sum\vec{F}_i}{q_\circ} = \frac{\vec{F}_۱}{q_\circ}+\frac{\vec{F}_۲}{q_\circ}+\cdots+\frac{\vec{F}_n}{q_\circ}$$

۱) توجه کنید، نقطه را با مختصات (r,θ,φ)، یعنی در مختصات کروی اعلام کردیم تا همین نکته را یادآور شویم که میدان در راستای شعاعی است.

و از آنجایی که هرکدام از جملات عبارت سمت راست، برابر با میدان الکتریکی حاصل از هر بار چشمه در مکان بار $q_۰$ است، داریم:

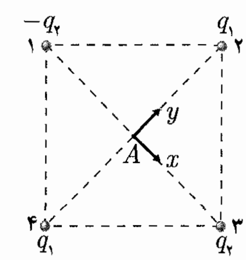
$$\vec{E} = \vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ + \cdots + \vec{E}_n = \sum_{i=۱}^{n} \vec{E}_i$$

و این همان خاصیت برهم‌نهی میدان‌های الکتریکی است. میدان الکتریکی ناشی از یک آرایش بار مشخص در نقطه‌ای از فضا با مجموع برداری میدان مستقل حاصل تک‌تک از بارها در آن نقطه برابر است.

مثال ۸ در شکل ۱ـ۱۵، بردار میدان الکتریکی را در نقطه‌ی A (مرکز مربع) به‌دست آورید.

حل. با توجه به اصل برهم‌نهی میدان‌ها، داریم:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ + \vec{E}_۳ + \vec{E}_۴$$



شکل ۱-۱۵

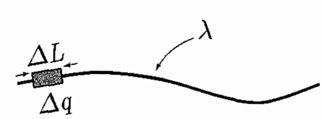
برای محاسبه‌ی بردار تک‌تک میدان‌ها، و سپس جمع برداری آنها، بایستی دستگاه مختصات و مبدأ آن را مشخص کنیم. دستگاه مختصات مناسب، در شکل نشان داده شده است که در نقطه‌ی مرکز و در راستای قطرهای مربع انتخاب شده است. میدان ناشی از هرکدام از بارها عبارت است از:

$$\vec{E}_۱ = \frac{-kq_۲}{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}a\right)^۲}\hat{i}\ ,\ \hat{E}_۲ = \frac{kq_۱}{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}a\right)^۲}(-\hat{j})$$

$$\vec{E}_۳ = \frac{kq_۲}{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}a\right)^۲}(\hat{-i})\ ,\ \hat{E}_۴ = \frac{kq_۱}{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}a\right)^۲}(\hat{j})$$

$$\Rightarrow \vec{E}_A = E_۱ + E_۲ + E_۳ + E_۴ = \frac{-۴kq_۲}{a^۲}\hat{i}$$

بدین ترتیب، با استفاده از اصل برهم‌نهی، میدان ناشی از هر آرایش بار نقطه‌ای قابل محاسبه است. اما در واقعیت، معمولاً بارهایی که با آنها سروکار داریم، نقطه‌ای نیستند، بلکه به شکل اجسام باردار هستند که بار آنها به گونه پیوسته است، مانند سیم یا نخ باردار یا ورق و یا کره‌ی باردار. در این حالت‌ها، برای میدان الکتریکی و محاسبات مربوط به آن، مفهومی به نام «چگالی بار الکتریکی» تعریف می‌شود. چگالی بار الکتریکی در حالت کلی، بار الکتریکی در واحد طول، سطح یا حجم است و این‌که کدام‌یک از اینها انتخاب شود، به شرایط بارگذاری و شکل تأثیر آرایش آن در نقاط مورد نیاز برای محاسبات بستگی دارد. تعاریف مربوط به هرکدام از انواع چگالی در زیر آمده است:



شکل ۱-۱۶

- چگالی بار خطی، که با λ نشان داده می‌شود، برابر است با مقدار بار موجود در واحد طول. این تعریف، با توجه به شکل زیر با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

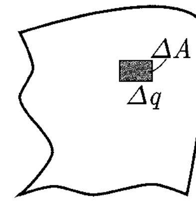
$$\lambda = \lim_{\Delta L \to ۰} \frac{\Delta q}{\Delta L}$$

در صورتی که بار بر روی نخ یا سیم توزیع شده باشد، می‌توان چگالی بار را خطی در نظر گرفت.

• چگالی بار سطحی، σ، برابر است با مقدار بار موجود در واحد سطح. با توجه به شکل ۱ـ۱۷:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to \circ} \frac{\Delta q}{\Delta A}$$

بار سطحی باری است که روی سطحی مانند یک ورق، یک پوسته‌ی کروی و هر سطح دیگری مانند آنها توزیع شده باشد.

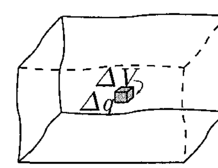


شکل ۱-۱۷

• چگالی بار حجمی، ρ، برابر است با مقدار بار موجود در واحد حجم. با توجه به شکل ۱ـ۱۸:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to \circ} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

بار حجمی باری است که در حجمی از جسم پخش شده باشد، مانند بار پخش شده در داخل کره نارسانا.

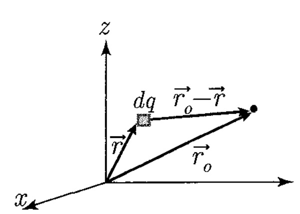


شکل ۱-۱۸

محاسبه‌ی میدان در توزیع بارهای غیرنقطه‌ای چگونه است؟ این کار با تقسیم جسم باردار به قسمت‌های بسیار کوچکی انجام می‌شود و هر قسمت معادل با یک بار نقطه‌ای با مقدار Δq در نظر گرفته می‌شود؛ در نتیجه این تقسیم‌بندی، میدان الکتریکی در نقطه‌ی دلخواهی از فضا، از برآیند میدان‌های حاصل از هر کدام از بارهای نقطه‌ای فرضی Δq به‌دست می‌آید. در این حالت، جسم به مجموعه‌ای از تعداد زیادی بار نقطه‌ای تبدیل می‌شود. Δq، و به عبارت بهتر، dq، جزء بار الکتریکی جسم، در توزیع بار خطی از رابطه‌ی $dq = \lambda \cdot dl$، در توزیع بار سطحی از رابطه‌ی $dq = \sigma dA$ و در توزیع بار حجمی از رابطه‌ی $dq = \rho dV$ به‌دست می‌آید. محاسبه‌ی میدان ناشی از هر جزء بار، با توجه به رابطه میدان الکتریکی در زیر آمده است، میدان ناشی از جزء بار، dq که در مکان $\vec{r}$ از فضا واقع است، در نقطه‌ی A، واقع در $\vec{r}_\circ$، برابر است با:

$$d\vec{E} = \frac{kdq}{|\vec{r}_\circ - \vec{r}|^{3}}(\vec{r}_\circ - \vec{r}) = \frac{kdq}{|\vec{r}_\circ - \vec{r}|^{2}} \cdot \frac{\vec{r}_\circ - \vec{r}}{|\vec{r}_\circ - \vec{r}|}$$

که در آن $|\vec{r}_\circ - \vec{r}|^{2}$ معادل r^{2}، و $\dfrac{\vec{r}_\circ - \vec{r}}{|\vec{r}_\circ - \vec{r}|}$ معادل عبارت $\hat{r}$ در رابطه‌ی میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای واقع در مبدأ مختصات است.



شکل ۱-۱۹

حال برای به‌دست آوردن میدان $(\vec{E})$ ناشی از کل توزیع بار جسم در نقطه‌ی $\vec{r}_\circ$ کافیست اجزای کوچک میدان الکتریکی، یا $d\vec{E}$ها را با یکدیگر جمع کنیم. با توجه به پیوسته بودن تقریبی توزیع بار، این مجموع $(\sum)$ به جمع انتگرالی تبدیل می‌شود:

$$\vec{E} = \int \frac{kdq}{|\vec{r}_\circ - \vec{r}|^{3}}(\vec{r}_\circ - \vec{r})$$

و این انتگرال بر روی تمام جسم انجام می‌شود.

برای هر کدام از انواع توزیع بار، شکل رابطه‌ی انتگرالی با توجه به تفاوت در شکل dq در زیر آمده است:

$$\text{توزیع بار خطی} \quad \vec{E} = \int \frac{k\lambda dL}{|\vec{r}_\circ - \vec{r}|^{3}}(\vec{r}_\circ - \vec{r})$$

$$\text{توزیع بار سطحی} \quad \vec{E} = \iint \frac{k\sigma dA}{|\vec{r}_\circ - \vec{r}|^{3}}(\vec{r}_\circ - \vec{r})$$

$$\text{توزیع بار حجمی} \quad \vec{E} = \iiint \frac{k\rho dV}{|\vec{r}_\circ - \vec{r}|^{3}}(\vec{r}_\circ - \vec{r})$$

انتگرال چندگانه

اگر تابع f روی مستطیل $Q = [a,b] \times [c,d]$ پیوسته باشد، آنگاه f روی Q انتگرال‌پذیر است. به علاوه، مقدار انتگرال را می‌توان با انتگرال‌گیری مکرر به‌دست آورد. این انتگرال روی Q را به شکل زیر نشان می‌دهند:

$$\iint\limits_{Q} f = \int_c^d \Big[\int_a^b f(a,b)dx\Big]dy = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)dy\Big]dx$$

مثال ۹ می‌دانیم که اگر L خطی در صفحه‌ی یک ورق باشد و $d(x,y)$ فاصله‌ی نقطه‌ی (x,y) تا خط L باشد گشتاور لختی ورق حول L با رابطه‌ی زیر معلوم می‌شود:

$$I_L = \iint\limits_{S} d^{۲}(x,y)dxdy$$

که در آن (x,y) نقطه‌ای از صفحه‌ی S محسوب می‌شود. به عنوان مثال گشتاور لختی حول محور x که با I_x نشان داده می‌شود برابر است با:

$$I_x = \iint\limits_{S} y^{۲}dxdy$$

و نیز گشتاور لختی قطبی حول مبدأ که با $I_{\circ}$ نمایش داده می‌شود برابر است با:

$$I_{\circ} = I_x + I_y = \iint\limits_{S} (x^{۲} + y^{۲})dxdy$$

یک ورق نازک با چگالی ثابت c به دو دایره متحدالمرکز به شعاع‌های a و b، $\circ < b < a$ به مرکز مبدأ محدود است. می‌خواهیم گشتاور لختی قطبی آن را محاسبه کنید.

حل. $I_{\circ}$ برای این ورق برابر است با:

$$I_{\circ} = c\iint\limits_{S} (x^{۲} + y^{۲})dxdy$$

که در آن ناحیه‌ای است که در چنین بازه‌ای قرار دارد:

$$b^{۲} \le x^{۲} + y^{۲} \le a^{۲}$$

$$I_{\circ} = c\iint\limits_{S(a)} (x^{۲} + y^{۲})dxdy - c\iint\limits_{S(b)} (x^{۲} + y^{۲})dxdy$$

که $S(a)$ و $S(b)$ قرص‌هایی دایره‌ای شکل به شعاع‌های a و b هستند. نخست برای محاسبه‌ی انتگرال روی $S(a)$ می‌توانیم از انتگرال پی‌درپی استفاده کنیم:

$$\iint\limits_{S(a)} (x^{۲} + y^{۲})dxdy = ۴\int_{\circ}^{a} \Big[\int_{\circ}^{\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}} (x^{۲} + y^{۲})dy\Big]dx = \frac{\pi a^{۴}}{۲}$$

همچنین انتگرال روی $S(b)$ نیز به شکل همین رابطه محاسبه می‌شود. بنابراین برای گشتاور لختی قطبی داریم:

$$I_{\circ} = \frac{\pi c}{۲}(a^{۴} - b^{۴}) = \pi c(a^{۲} - b^{۲})\frac{(a^{۲} + b^{۲})}{۲} = m\frac{a^{۲} + b^{۲}}{۲}$$

که m جرم ورق است که با رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$m = \pi c(a^۲ - b^۲)$$

مفهوم انتگرال چندگانه را می‌توان از فضای دوبعدی (انتگرال دوگانه) به فضای n بعدی برای هر $n \geq ۳$ تعمیم داد. f که «انتگرالده» نامیده می‌شود، یک میدان اسکالر است که روی مجموعه‌ای مانند S از فضای nبعدی معین و کراندار است. f روی S را انتگرال nگانه می‌نامند و آن را به شکل زیر مشخص می‌کنند

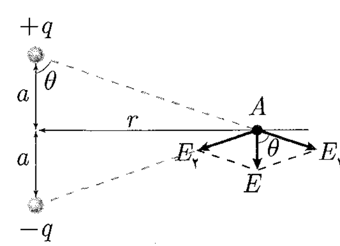
$$\int \cdots \int_S f(x_۱, \cdots, x_n) dx_۱ \cdots dx_n$$

این انتگرال را یا به صورت n انتگرال پی‌درپی و یا به صورت انتگرال برداری $\int_S f(\vec{x})d\vec{x}$ با یک علامت انتگرال نشان می‌دهند که در آن $\vec{x} = (x_۱, \cdots, x_n)$. انتگرال سه‌گانه وقتی است که $n = ۳$ باشد. در این حالت به جای $(x_۱, x_۲, x_۳)$ می‌نویسیم (x, y, z) و آن را به شکل زیر نمایش می‌دهیم

$$\iiint_S f(x,y,z)dxdydz \quad \text{یا} \quad \iiint_S f$$

دوقطبی الکتریکی

به مجموعه‌ی دو بار الکتریکی با بارهای مختلف، دوقطبی الکتریکی می‌گویند. دو بار $+q$ و $-q$ را در نظر بگیرید. که در فاصله‌ی $۲a$ از هم قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی در نقطه‌ی A که از فاصله‌ی r از وسط دو بار و روی عمودمنصف آنها قرار گرفته است را مطابق شکل با برآیندگیری از دو میدان $\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۲$ به‌دست می‌آوریم.



شکل ۱-۲۰

$$\vec{E} = \vec{E}_۱ + \vec{E}_۲$$

$$E_۱ = E_۲ = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰} \cdot \frac{q}{a^۲ + r^۲}$$

$$E = ۲E_۱ \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^۲ + r^۲}}$$

$$\Rightarrow E = ۲\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰} \cdot \frac{q}{a^۲ + r^۲} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^۲ + r^۲}} = \frac{۲a.q}{۴\pi\epsilon_۰ (a^۲ + r^۲)^{۳/۲}}$$

بنابراین میدان دوقطبی در نقطه‌ی A که در فاصله‌ی معقولی از دوقطبی قرار دارد به‌دست آمد. در صورتی که A در فاصله‌ی بسیار دورتری از دوقطبی قرار داشته باشد $(a \ll r)$. با صرف‌نظر از ترم‌های $\frac{a}{r}$ مرتبه‌ی دو، میدان تقریبی نقطه‌ی A را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$E \cong \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰} \cdot \frac{۲aq}{r^۳}$$

عبارت $2aq$ به اندازه‌ی لنگر دوقطبی الکتریکی معروف است و آن را با P نشان می‌دهند. با این تعریف، عبارت میدان الکتریکی ناشی از دوقطبی در فواصل دور از آن، به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{P}{r^3}$$

توجه کنید که میدان الکتریکی در فواصل دور از دوقطبی با عکس توان سوم فاصله متناسب است. مسئله‌ی دوقطبی بسیاری مواقع در بررسی خواص عایق‌ها و دی‌الکتریک‌ها مطرح می‌شود. لنگر دوقطبی $\vec{P}$ در جهت خط واصل بار منفی به مثبتِ آن $(\vec{d})$ است و با رابطه‌ی زیر معلوم می‌شود:

$$\vec{P} = q \cdot \vec{d}$$

مطابق شکل، چنانچه این دوقطبی در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ قرار بگیرد، بر هر یک از دو بار نیرویی وارد می‌شود که خلاف جهت هم هستند. دو نیروی وارده هم‌اندازه و در جهت مخالف هم و از دو نقطه اثر متفاوت وارد می‌شوند. بنابراین گشتاور خالصی ایجاد می‌کنند که تمایل بر چرخاندن دوقطبی دارد تا آن را با میدان هم‌جهت سازد. نیروی مؤثر در تولید گشتاور دوقطبی نیروی عمود بر راستای دوقطبی است که بر هر یک از بارها به صورت مجزا از طرف میدان وارد می‌شود. اگر زاویه‌ی راستای دوقطبی با راستای میدان θ باشد، گشتاور T که حول محور گذرنده از مرکز دوقطبی (O) وارد می‌شود به صورت زیر است:

$$T = 2 \times \frac{d}{2} \times F_n = d.F.\sin\theta = d.(qE).\sin\theta = PE.\sin\theta \;\Rightarrow\; T = PE\sin\theta$$

عبارت به‌دست آمده برای گشتاور دوقطبی به بیان بهتر همان ضرب خارجی بردارهای لنگر دوقطبی و میدان الکتریکی یکنواختی است که دوقطبی در آن قرارگرفته است.

$$\vec{T} = \vec{P} \times \vec{E}$$

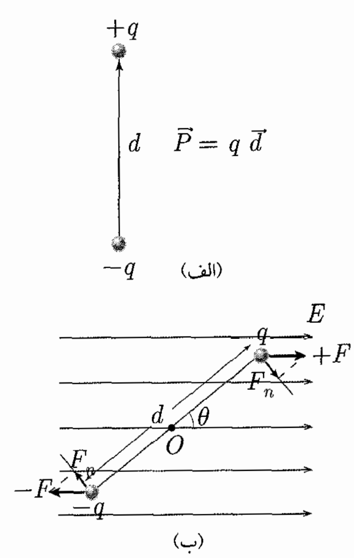
این بردار گشتاور، همان گشتاوری است که تمایل به چرخش دوقطبی و هم‌راستا ساختن آن با میدان یکنواخت E دارد.

فرض کنید امتداد لنگر دوقطبی با میدان E زاویه‌ی θ_0 می‌سازد و می‌خواهیم آن را به زاویه‌ی θ برسانیم. کار لازم برای چنین تغییری در سیستم ذخیره می‌شود. این کار از برآیندگیری گشتاور دوقطبی در جزء تغییر زاویه به‌دست می‌آید. برای محاسبه‌ی کار، داریم:

$$W = \int dW = \int_{\theta_0}^{\theta} T d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} PE\sin\theta . d\theta$$
$$= PE[-\cos\theta]_{\theta_0}^{\theta} = PE(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

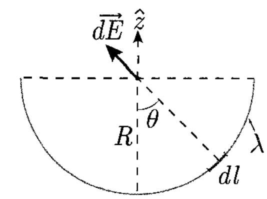
اگر مبنای زاویه را 90° در نظر بگیریم، یعنی فرض کنیم زاویه‌ی اولیه‌ی لنگر دوقطبی با میدان $\frac{\pi}{2}$ است، کار لازم برای ایجاد وضعیت θ در این حالت به شکل عبارت زیر است:

$$W = -PE\cos\theta = -\vec{P}.\vec{E}$$

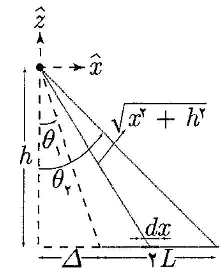


شکل ۱-۲۱ (الف) دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی یکنواخت. (ب) بردار لنگر دوقطبی.

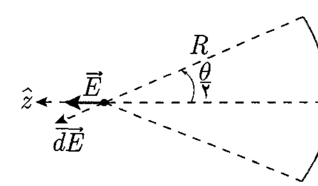
مسائل نمونه فصل ۱



شکل ۱-۲۲



شکل ۱-۲۳ شکل سؤال ۳.



شکل ۱-۲۴

۱. فرض کنید بار با چگالی خطی λ بر روی نیم‌دایره‌ای به شعاع R توزیع شده است. می‌خواهیم $\vec{E}$ را در مرکز نیم‌دایره بیابیم (شکل ۱ـ۲۲).

۲. میله‌ای به طول $2l$ و چگالی بار ثابت λ داریم. می‌خواهیم میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار بر روی این میله را در نقطه‌ای به فاصله‌ی h، که بر روی عمودمنصف میله واقع است، به‌دست آوریم.

۳. در شکل (۱ـ۲۳)، مثال قبل را تعمیم داده‌ایم. تقارن موجود در آن دیگر وجود ندارد و می‌بایست میان برایند را هم در جهت افقی و هم در جهت عمودی محاسبه کنیم.

۴. فرض کنید سیمی به شکل قطاعی از دایره به شعاع R و زاویه‌ی θ، حامل چگالی بار خطی λ داشته باشیم. میدان را در مرکز این قطاع می‌خواهیم. (شکل ۱ـ۲۴)

۵. نیم‌کره‌ای به شعاع R دارای چگالی بار یکنواخت سطحی σ است. می‌خواهیم میدان الکتریکی $\vec{E}$ را در مرکز نیم‌کره بیابیم.

۶. میدان حاصل از نیم‌کره‌ی مثال قبل در نقطه‌ای به فاصله‌ی R بالای مرکز نیم‌کره چقدر است؟

۷. فرض کنید نقطه‌ای درون کره‌ای به شعاع R و چگالی بار سطحی یکنواخت σ قرار دارد. فاصله‌ی نقطه از مرکز کره h است. می‌خواهیم میدان را در این نقطه بیابیم.

۸. بار با چگالی بار سطحی ثابت σ بر روی دیسک دایره‌ای شکل به شعاع R قرار دارد. میدان در نقطه‌ی A به فاصله‌ی h در بالای مرکز دیسک را بیابید.

۹. بار با چگالی ثابت σ بر روی صفحه‌ی دوبعدی که از هر دو بُعدش تا بی‌نهایت ادامه یافته، پخش شده است. می‌خواهیم میدان را در نقطه‌ای بالای صفحه و به فاصله‌ی h از آن محاسبه کنیم.

۱۰. کره‌ای به شعاع R دارای چگالی بار حجمی یکنواخت ρ است. می‌خواهیم میدان را در نقطه‌ای به فاصله‌ی h از مرکز کره حساب کنیم.

پاسخ مسائل نمونه فصل ۱

۱. جزئی کوچک از نیم‌دایره را در نظر بگیرید که با زاویه‌ی θ در شکل مشخص شده است. قرینه‌ی این جزء، در زاویه‌ی $-\theta$ وجود دارد که میدان حاصل از آن، با توجه یکنواخت بودن توزیع بار خطی، برابر با $d\vec{E}$ و دارای مؤلفه‌ای افقی در جهت مخالف و مؤلفه‌ای عمودی برابر با مؤلفه‌ی عمودی $d\vec{E}$ خواهد داشت.

بنابراین تقارن، هر $d\vec{E}$ در نهایت تنها مؤلفه‌ی عمودی خود را باقی خواهد گذاشت، و محاسبه‌ی مؤلفه‌ی افقی میدان صفر را نتیجه می‌دهد. در نتیجه، میدان را در راستای z محاسبه می‌کنیم. با توجه به رابطه‌ی گفته شده داریم:

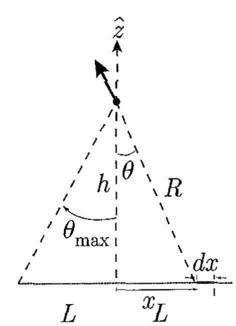
$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int |dE_z|\hat{z} = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{kdq}{|\vec{r}_\circ - \vec{r}|^2}(\cos\theta)\cdot\hat{z}$$

$|\vec{r}_\circ - \vec{r}|$ در این مثال، R است. نقطه‌ی $\vec{r}_\circ$ که میدان در آن محاسبه می‌شود، در این مثال مبدأ مختصات است و در نتیجه $\vec{r}_\circ = \circ$. داریم:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= k\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda dL}{R^2}\cos\theta\cdot\hat{z} = k\lambda\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{Rd\theta}{R^2}\cos\theta\cdot\hat{z}\\ &= \frac{k\lambda}{R}\big(\sin\theta\big)_{-\pi/2}^{\pi/2}\hat{z} = \frac{2k\lambda}{R}\hat{z}\\ \Rightarrow\ \vec{E} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_\circ R}\hat{z}\end{aligned}$$

و بدین ترتیب، میدان در مرکز نیم‌دایره محاسبه شد.

۲. با توجه به شکل (۱ـ۲۵) و برقراری تقارن (همان طور که در مثال قبل گفته شد)، داریم:



شکل ۱-۲۵

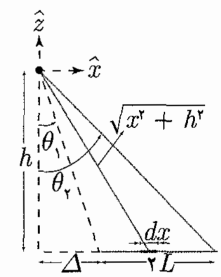
$$\begin{aligned}\vec{E} &= \int d\vec{E} = \int |dE_z|\hat{z} = \int_{-L}^{L}\frac{k.dq}{R^2}\cos\theta\hat{z}\\ &= k\int_{-L}^{L}\frac{\lambda.dx}{R^2}\cos\theta\hat{z} = k\int_{-L}^{L}\frac{\lambda dx}{x^2+h^2}\cos\theta\hat{z}\\ &= k\lambda\int_{-L}^{L}\frac{dx}{x^2+h^2}\cos\theta\hat{z}\ ,\ \begin{cases} x = h\tan\theta\\ dx = h\cdot\sec^2\theta d\theta\end{cases}\\ \Rightarrow\ \vec{E} &= k\lambda\int_{-\theta_{\max}}^{\theta_{\max}}\frac{h\sec^2\theta d\theta}{h^2\tan^2\theta + h^2}\cos\theta\hat{z}\ ,\ 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta\\ &= \frac{k\lambda}{h}\int_{-\theta_{\max}}^{\theta_{\max}}\cos\theta d\theta\hat{z}\\ &= \frac{k\lambda}{h}\big(\sin\theta\big)_{-\theta_{\max}}^{\theta_{\max}} = \frac{k\lambda}{h}\cdot\frac{2l}{\sqrt{l^2+h^2}}\hat{z}\\ \Rightarrow\ \vec{E} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_\circ}\frac{L}{h\sqrt{L^2+h^2}}\cdot\hat{z}\end{aligned}$$

۳. رابطه‌ای که برای محاسبه میدان عمودی استفاده می‌شود، همان رابطه‌ی مثال قبل است، با این تفاوت که محدوده‌ی θ در مورد آن متفاوت است. در این جا زاویه از $\theta_۱$ تا $\theta_۲$ تغییر می‌کند، داریم:

$$E_z = \frac{k\lambda}{h}\big(\sin\theta\big)_{\theta_۱}^{\theta_۲} = \frac{k\lambda}{h}(\sin\theta_۲ - \sin\theta_۱)$$

و در مورد میدان افقی، داریم:

$$E_x = \int dE_x = \int_{x_۱}^{x_۲} \frac{k\lambda dx \sin\theta}{x^۲ + h^۲} = \frac{k\lambda}{h}\int_{\theta_۱}^{\theta_۲} \sin\theta d\theta$$
$$= \frac{k\lambda}{h}\big(-\cos\theta\big)_{\theta_۱}^{\theta_۲} = \frac{k\lambda}{h}(\cos\theta_۱ - \cos\theta_۲)$$
$$\Rightarrow \ \vec{E} = \frac{k\lambda}{h}\big[(\cos\theta_۱ - \cos\theta_۲)\hat{x} + (\sin\theta_۲ - \sin\theta_۱)\hat{z}\big]$$



شکل ۱-۲۶

دو حالت خاص این مثال، حالات پرکاربردی هستند که بهتر است میدان‌های مربوط به آنها محاسبه شود:

الف) خط باری که از دو طرف تا بی‌نهایت ادامه داشته باشد. این حالت، وقتی حاصل می‌شود که در این مثال، $\theta_۱$ به $\frac{\pi}{۲}$ و $\theta_۲$ به $-\frac{\pi}{۲}$ میل کند. در نتیجه میدان افقی و عمودی چنین مقداری خواهد داشت:

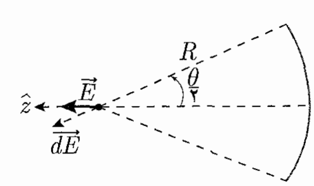
$$E_{\text{عمودی}} = \frac{۲k\lambda}{h} = \frac{\lambda}{۲\pi\epsilon_۰ h}$$
$$E_{\text{افقی}} = ۰$$

ب) خط باری که از $\theta_۱ = ۰$ تا $\theta_۲ = \frac{\pi}{۲}$ کشیده شده باشد. بدین معنی که از مبدأ مشخص شده آغاز شود و از سمت راست نامتناهی باشد. میدان در نقطه‌ای مشابه این مثال که در فاصله h بالای لبه چپ میله قرار گرفته است، بدین ترتیب خواهد بود:

$$E_{\text{عمودی}} = \frac{k\lambda}{h}$$
$$E_{\text{افقی}} = \frac{k\lambda}{h}$$

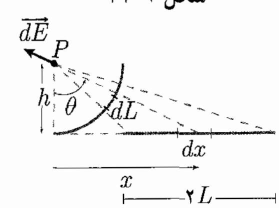
و بدین ترتیب، میدان در این حالت، مستقل از مقدار h، با افق زاویه‌ی ۴۵° می‌سازد.

۴. مانند مثال ۱، رابطه‌ای مشابه برای میدان داریم. چرا که تقارن، با در نظر گرفتن مبدأ زاویه منطبق بر خط تقارن این قطاع، مانند مثال ۱ برقرار خواهد بود و تنها تفاوت در محدوده‌ی θ خواهد بود که در این مورد از $-\frac{\theta}{۲}$ تا $\frac{\theta}{۲}$ متغیر است. بنابراین، بنا بر رابطه‌ی به‌دست آمده در مثال ۱ داریم:



شکل ۱-۲۷

$$\vec{E} = \frac{k\lambda}{R}\big(\sin\theta\big)_{-\theta/۲}^{\theta/۲}\hat{z} = \frac{\lambda}{۲\pi\epsilon_۰ R}\sin\frac{\theta}{۲}\hat{z}$$



شکل ۱-۲۸

نکته‌ای با بررسی چهار مثال حل شده به‌دست می‌آید. به شکل ۱ـ۲۸ دقت کنید. قطاعی از دایره به شعاع h را (همان طورکه در شکل نشان داده شده است) در نظر بگیرید. همان‌گونه

که دیدیم، میدان ناشی از جزء dx میله در نقطه‌ی P با چنین رابطه‌ای به‌دست می‌آید:

$$|dE| = \frac{k\lambda dx}{x^2+h^2} = \frac{k\lambda dx}{x^2+h^2}$$

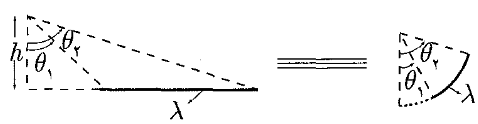
با تغییر متغیر $x = h\tan\theta$ داریم:

$$dx = h(1+\tan^2\theta)d\theta \;\Rightarrow\; |dE| = \frac{k\lambda}{h}d\theta$$

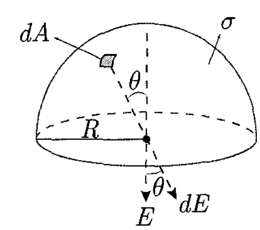
حال فرض کنید همین مقدار بار بر روی جزء dL از قطاع دایره‌ای به مرکز O که در شکل نشان داده شده است، قرار می‌گرفت. برای میدان حاصل از این جزء در نقطه‌ی O داریم:

$$|dE| = \frac{k\lambda dL}{h^2} = \frac{k\lambda h d\theta}{h^2} \;\Rightarrow\; |dE| = \frac{k\lambda}{h}d\theta$$

که همان نتیجه قبل است. بنابراین از نقطه‌ی O، میله‌ی باردار به صورت نیم‌دایره‌ای به شعاع h دیده می‌شود که در ناحیه‌ای که بین θ_1 و θ_2، که خود محدوده‌ای است که میله در آن قرار دارد، قرارگرفته است. این هم‌ارزی در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۱-۲۹



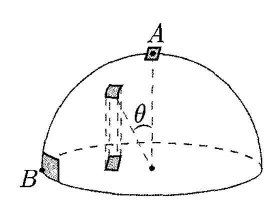
شکل ۱-۳۰

۵. بنابر تقارن، با توجه به مثال‌های قبل (به خصوص مثال نیم‌دایره) معلوم می‌شود که میدان فقط مؤلفه‌ی عمودی دارد. داریم:

$$E = \int dE_{\text{عمودی}} = \int \frac{k\sigma dA}{R^2}\cos\theta$$

عبارت $dA\cos\theta$ که در انتگرال بالا حاصل شد، برابر با مساحت تصویر جزء dA از نیم‌کره بر روی دایره‌ی عظیمه‌ی آن است. همان طور که در شکل نشان داده شده است، از آنجا که جزء سطح روی کره تقریباً به شکل مستطیلی است که دو ضلع آن مستقیماً بر روی سطح صفحه تصویر می‌شوند و دو ضلع دیگرش در $\cos\theta$ ضرب شده و تصویر می‌شوند و بدین ترتیب، قطعه‌ای که دقیقاً بالای نیم‌کره (نقطه‌ی A در شکل) قرارگرفته باشد، مساحت تصویری برابر با مساحت خودش دارد و برای قطعه‌ای که در زاویه‌ی 90° واقع است (یعنی مثلاً در نقطه‌ی B در شکل) مساحت تصویر شده‌اش تقریباً صفر است. بنابراین:

$$E = \int \frac{k\sigma}{R^2}(dA\cos\theta) = \frac{k\sigma}{R^2}\int dA_{\text{سایه}} = \frac{k\sigma}{R^2}A_{\text{قاعده}} = \frac{k\sigma}{R^2}\cdot\pi R^2 = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

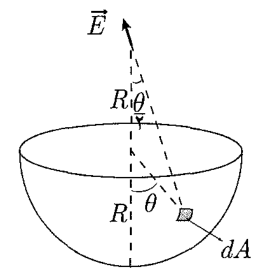


شکل ۱-۳۱

البته، از طریق انتگرال‌گیری در مختصات کروی هم می‌توان به همین عبارت برای میدان نیم‌کره در نقطه‌ی مورد نظر دست پیدا کرد:

$$E = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\frac{k\sigma R^2\sin\theta d\theta d\varphi}{R^2}\cos\theta = 2\pi k\sigma\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta$$
$$= \frac{2k\pi\sigma}{2} = \frac{\theta}{4\epsilon_0}$$

۶. بنابر تقارن و از آن چه در مثال‌های قبل دیدیم، در اینجا نیز میدان برآیند تنها در راستای عمودی است. داریم:



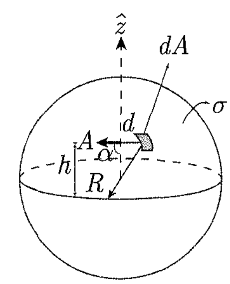
شکل ۱-۳۲

$$
\begin{aligned}
E &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\frac{k\sigma(\cos\frac{\theta}{2})}{(2R\cos\frac{\theta}{2})^2}R^2\sin\theta d\theta d\varphi\\
&= \frac{k\sigma\times 2\pi}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta d\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}\\
&= \frac{\pi k\sigma}{2}\int_0^{\pi/2}2\sin\frac{\theta}{2}d\theta\\
&= 2\pi k\sigma\left(-\cos\frac{\theta}{2}\right)_0^{\pi/2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

۷. باز هم تقارن داریم و در نتیجه‌ی آن میدان تنها در راستای z مؤلفه دارد.

$$
E = E_z = k\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{\sigma R^2\sin\theta d\theta d\varphi}{d^2}\cos\alpha
$$

که در آن $R^2\sin\theta d\theta d\varphi$ جزء مساحت در مختصات کروی است که در بخش مربوط به مختصات کروی به‌دست آمده است. فاصله‌ی جزء مساحت از نقطه‌ی A یا d، به شکل زیر به‌دست می‌آید (شکل ۱ـ۳۴).

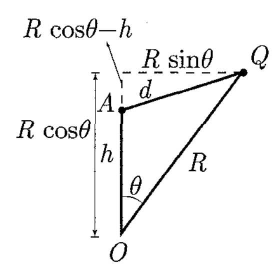


شکل ۱-۳۳

$$
d = \sqrt{(R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta - h)^2}
$$

همچنین برای زاویه‌ای که راستای میدان حاصل از جزء مساحت در نقطه‌ی A با راستای عمودی می‌سازد، داریم:

$$
\begin{aligned}
dE_z &= dE\cos\alpha = dE\frac{R\cos\theta - h}{d}\\
&= dE\frac{R\cos\theta - h}{\sqrt{(R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta - h)^2}}
\end{aligned}
$$



شکل ۱-۳۴

بنابراین میدان برایند به شکل زیر خواهد شد:

$$
\begin{aligned}
E_z &= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sigma R^2\sin\theta d\theta d\varphi}{\left[(R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta - h)^2\right]^{3/2}}(R\cos\theta - h)\\
&= 2\pi k\sigma\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{R^2\sin\theta d\theta(R\cos\theta - h)}{(R^2 + h^2 - 2Rh\cos\theta)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

در این مرحله از انتگرال‌گیری، بایستی متغیر را تغییر دهیم. متغیر a و u را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$
u = 2hR\cos\theta \;\Rightarrow\; du = -2Rh\sin\theta.d\theta
$$

$$
a = R^2 + h^2
$$

$$\Rightarrow\ E = 2\pi k\sigma R^2\left[\int \frac{-udu\cdot R}{4h^2R^2(a-u)^{3/2}} + \frac{1}{2R}\int\frac{du}{(a-u)^{3/2}}\right]$$

$$= 2\pi k\sigma R^2\left[\frac{R}{4h^2R^2}\left(\int\frac{(a-u)du}{(a-u)^{3/2}} - \int\frac{adu}{(a-u)^{3/2}}\right) + \frac{1}{2R}\int\frac{du}{(a-u)^{3/2}}\right]$$

$$= 2\pi k\sigma R^2\left[\frac{1}{4Rh^2}(-2\sqrt{a-u}) + \frac{a}{4Rh^2}\cdot\frac{-2}{\sqrt{a-u}} + \frac{1}{2R}\cdot\frac{2}{\sqrt{a-u}}\right]_{u=-2hR}^{u=2hR}$$

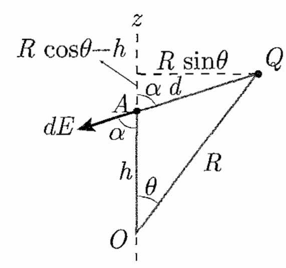
$$= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}\left[\frac{-2}{4Rh^2}(R-h-(R+h)) - \left(\frac{2a}{4Rh^2}-\frac{1}{R}\right)\times\left(\frac{1}{R-h}-\frac{1}{R+h}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\ E = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{hR} - \left(\frac{h^2+R^2}{2Rh^2}-\frac{1}{R}\right)\left(\frac{2h}{R^2-h^2}\right)\right]$$

$$= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{hR} + \frac{h^2+R^2}{R^2-h^2}\cdot\frac{1}{hR} + \frac{2h}{R(R^2-h^2)}\right]$$

$$\Rightarrow\ E = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{hR} - \frac{\frac{R^2+h^2}{h}-2h}{R(R^2-h^2)}\right]$$

$$= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{hR} - \frac{1}{hR}\cdot\frac{R^2-h^2}{R^2-h^2}\right] = 0$$

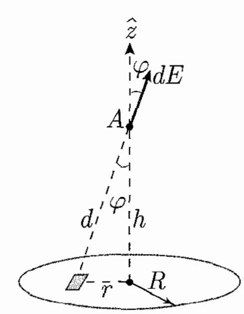


شکل ۱ـ۳۵

بنابراین، معلوم شد که میدان الکتریکی در داخل کره‌ی باردار با بار یکنواخت سطحی صفر است.

۸. جزئی از مساحت را مطابق شکل ۱ـ۳۶ در نظر بگیرید. بنابر تقارن میدان الکتریکی در جهت $\hat{z}$ خواهد بود. بنابراین، تنها مؤلفه‌ی $\hat{z}$ از میدان این جزء سطح مورد نیاز است. داریم:

$$dE_z = \frac{k\sigma rdrd\theta}{d^2}\cos\varphi\ ,\quad d^2 = r^2 + h^2$$



شکل ۱ـ۳۶

که در آن $rdrd\theta$ رابطه‌ی جزء سطح در مختصات کروی (و استوانه‌ای و قطبی) است که در بخش مربوط به آن به‌دست آمد. در مورد زاویه‌ی φ نیز داریم:

$$\cos\varphi = \frac{h}{d} = \frac{h}{(r^2+h^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow\ dE_z = \frac{k\sigma rdrd\theta\cdot h}{(h^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow\ E_z = k\sigma h\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\frac{rdrd\theta}{(h^2+r^2)^{3/2}}$$

$$= 2\pi k\sigma h\int_0^R\frac{rdr}{(h^2+r^2)^{3/2}}\ ,\quad \begin{cases} u = h^2 + r^2 \\ \Rightarrow\ du = 2rdr\end{cases}$$

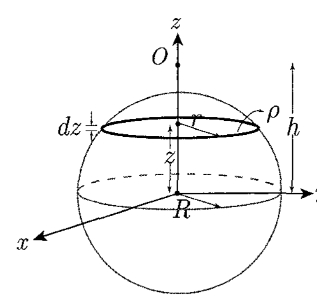
$$\Rightarrow \ E_z = ۲\pi k\sigma h \int_{u=h^۲}^{u=R^۲+h^۲} \frac{۱/۲ du}{u^{۳/۲}}$$
$$= k\pi\sigma h \frac{u^{-۱/۲}}{(-۱/۲)}\Big]_{u=h^۲}^{u=h^۲+R^۲}$$
$$= ۲k\pi\sigma h \left[\frac{۱}{h} - \frac{۱}{\sqrt{h^۲+R^۲}}\right]$$
$$\Rightarrow \ \vec{E} = \frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}\left[۱ - \frac{h}{\sqrt{h^۲+R^۲}}\right]\hat{z}$$

۹. برای یافتن میدان در چنین نقطه‌ای، از عبارت نهایی میدان ناشی از صفحه که در مثال قبل به‌دست آوردیم، استفاده می‌کنیم و شعاع آن یعنی R را به بی‌نهایت میل می‌دهیم. داریم:

$$\vec{E} = \lim_{R\to\infty} \frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}\left(۱ - \frac{h}{\sqrt{h^۲+R^۲}}\right)\hat{z} = \frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}\hat{z}$$

۱۰. در حل این مثال، می‌توانیم از نتیجه‌ای که برای میدان ناشی از دیسک با چگالی بار سطحی یکنواخت σ به‌دست آوردیم استفاده کنیم. مطابق شکل دیسکی را در ارتفاع z در نظر بگیرید. بار دیسک، اگر ضخامت آن را dz در نظر بگیریم، برابر ρdV آن است که آن نیز با $\rho A dz$ برابر است، که A مساحت دیسک است.[۱] بنابراین چگالی بار سطحی دیسک، که عبارت از بار کل آن تقسیم بر مساحت آن است، برابر با ρdz خواهد بود.

حال میدانی که این دیسک در نقطه‌ی O ایجاد می‌کند، می‌یابیم. بنا به تقارن، میدان این دیسک و در نتیجه میدان کل کره در جهت $\hat{z}$ خواهد بود. با توجه به میدان به‌دست آمده در مثال ۸ و با توجه به این‌که h در آن مثال، در اینجا معادل با $h-z$ است، داریم:

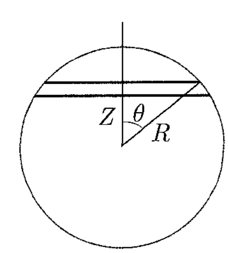


شکل ۱-۳۷

$$dE_z = \frac{\rho dz}{۲\epsilon_۰}\left(۱ - \frac{h-z}{\sqrt{(h-z)^۲+r^۲}}\right)$$

که در آن r شعاع دیسک است. حال با در نظرگرفتن زاویه‌ی θ، با توجه به شکل داریم:

$$z = R\cos\theta \ \Rightarrow \ dE_z = \left(\frac{\rho dz}{۲\epsilon_۰}\right)\left(۱ - \frac{h - R\cos\theta}{\sqrt{(h-R\cos\theta)^۲ + (R\sin\theta)^۲}}\right)$$
$$= \frac{\rho dz}{۲\epsilon_۰}\left(۱ - \frac{h - R\cos\theta}{\sqrt{h^۲+R^۲-۲hR\cos\theta}}\right)$$
$$dz = -R\sin\theta d\theta \ \Rightarrow \ E_z = \int dE_z$$
$$= \int \frac{\rho}{۲\epsilon_۰}(-R\sin\theta d\theta)\left(۱ - \frac{h - R\cos\theta}{\sqrt{h^۲+R^۲-۲hR\cos\theta}}\right)$$
$$= \frac{-\rho R}{۲\epsilon_۰}\int_{\theta=۰}^{\theta=\pi} \sin\theta d\theta - \frac{\rho R}{۲\epsilon_۰}\int_{\theta=۰}^{\theta=\pi} \frac{(\sin\theta)(h-R\cos\theta)}{\sqrt{h^۲+R^۲-۲hR\cos\theta}} d\theta$$



شکل ۱-۳۸

۱) توجه کنید که مساحت دیسک به طور فرضی در سطح بالایی و پایینی آن برابر در نظر گرفته شده است و در حقیقت ضخامت dz از کره را به طور تقریبی معادل با یک دیسک در نظر گرفته‌ایم.

$$= \left(\frac{-\rho R}{2\epsilon_0}\right)(2) - \frac{\rho R h}{2\epsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{a - 2hR\cos\theta}}$$
$$+ \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\cos\theta d\theta}{\sqrt{a - 2hR\cos\theta}}$$

که در آن $a = h^2 + R^2$ است. حال u را تعریف می‌کنیم:

$$u = 2hR\cos\theta$$
$$\Rightarrow du = -2hR\sin\theta d\theta$$
$$\Rightarrow E_z = -\frac{\rho R}{\epsilon_0} + \frac{\rho}{4\epsilon_0}\int\frac{du}{\sqrt{a-u}} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\cdot\frac{1}{4h^2R^2}\int\frac{u du}{\sqrt{a-u}}$$
$$= \frac{-\rho R}{\epsilon_0} + \frac{2\rho}{4\epsilon_0}(-\sqrt{a-u}) + \frac{\rho}{8\epsilon_0 h^2}$$
$$\left[-\int\frac{(a-u)}{\sqrt{a-u}}du + \int\frac{a}{\sqrt{a-u}}du\right]$$

تمرین فصل ۱

۱. شدت میدان الکتریکی E را در مرکز یک نیم‌کره که بار به طور یکنواخت با چگالی σ روی سطح آن توزیع شده است به‌دست آورید.

حل. $E = \frac{\sigma}{۴\epsilon_۰}$

۲. میدان الکتریکی در مرکز یک نیم‌کره با توزیع بار یکنواخت و چگالی بار سطحی σ را $E_۰$ فرض کنید. قسمتی از این نیم‌کره توسط دو صفحه‌ی گذرنده از یک قطر که با هم زاویه α می‌سازند، از بقیه آن مجزا شده است. میدانی که بارهای واقع بر سطح این قسمت مجزا شده در مرکز ایجاد می‌کنند را بیابید.

حل. $E = E_۰ \sin\frac{\alpha}{۲}$

۳. کمینه‌ی شدت میدان الکتریکی یکنواخت که می‌تواند یک کره‌ی رسانای نازک بدون بار را به دو قسمت بشکند برابر $E_۰$ است. کمینه شدت میدان الکتریکی را طوری تعیین کنید که بتواند یک کره با مشخصات فوق ولی شعاع دو برابر را به دو قسمت بشکند. فرض کنید ضخامت جداره با حالت اول برابر است.

حل. $\frac{E_۰}{\sqrt{۲}}$

۴. نیروی مقابل بین دو نیم‌کره به شعاع R را که در خط استوایشان با هم تماس دارند پیدا کنید، در صورتی که یک نیم‌کره دارای بار یکنواخت و چگالی سطحی بار $\sigma_۱$ و دیگری دارای بار یکنواخت و چگالی بار سطحی $\sigma_۲$ باشد.

حل. $\frac{\pi R^۲}{۲\epsilon_۰}\sigma_۱\sigma_۲$

۵. یک میله‌ی نازک عایق بین دو بار غیرهم‌نام $+q_۱$ و $-q_۲$ قرار می‌گیرد. نیروی وارد بر بارها چگونه تغییر می‌کند؟

حل. زیاد می‌شود.

۶.

الف) اندازه‌ی شتاب یک الکترون در میدان الکتریکی یکنواخت $۱/۴ \times ۱۰^۶ \mathrm{N/C}$ چقدر است؟

ب) چقدر طول می‌کشد تا تندی الکترون که از حال سکون شروع به حرکت کرده است به یک‌دهم تندی نور برسد؟

ج) در این مدت چه مسافتی را طی کرده است؟

حل. الف) $۲/۴۶ \times ۱۰^{۱۷} \mathrm{m/s^۲}$ ب) $۱/۲۲ \times ۱۰^{-۱۰} \mathrm{s}$ ج) $۱/۸۳ \times ۱۰^{-۳} \mathrm{m}$

۷. یک بار با چگالی خطی یکنواخت $۹ \times ۱۰^{-۹} \mathrm{C/m}$ بر روی یک ریسمان که در امتداد محور x از $x = ۰$ تا $x = ۳\mathrm{m}$ کشیده شده است قرار دارد. اندازه‌ی میدان الکتریکی در $x = ۴\mathrm{m}$ محور را تعیین کنید.

حل. $۶۰/۷۵ \mathrm{N/C}$

۸. یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی $\vec{P} = (۳/۰\hat{i} + ۴/۰\hat{j})(۱/۲ \times ۱۰^{-۳}\text{C.m})$
در میدان الکتریکی $\vec{E} = (۴۰۰\text{N/C})\vec{i}$ قرار دارد.

الف) انرژی پتانسیل دوقطبی الکتریکی چقدر است؟

ب) گشتاور نیروی وارد بر آن چقدر است؟

حل. الف) $U = -۱/۴۹ \times ۱۰^{-۲۶}\text{J}$ ب) $\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E} = -۱/۹ \times ۱۰^{-۲۶}\text{N.m}$

۹. در چه فاصله‌ای روی محور یک قرص پلاستیکی با بار یکنواخت و شعاع $۰/۶\text{m}$ اندازه‌ی میدان الکتریکی برابر نصف اندازه‌ی میدان در مرکز سطح قرص می‌باشد.

حل. $\pm ۰/۳۴۶\text{m}$

۱۰. یک الکترون از حال سکون روی محور مرکزی یک قرص با بار یکنواخت و شعاع R رها می‌شود. چگالی بار سطحی روی قرص $+۴/۰۰\mu\text{C/m}^۲$ است. اگر ذره از فاصله‌ی **الف)** R و **ب)** $\frac{R}{۱۰۰}$ از مرکز قرص رها شده باشد، اندازه‌ی شتاب اولیه‌ی آن چقدر است؟

حل. الف) $۱/۱۵ \times ۱۰^{۱۶}\text{m/s}^۲$ ب) $۳/۹۳ \times ۱۰^{۱۶}\text{m/s}^۲$

سؤال‌های المپیاد فصل ۱

۱. مسئله‌ی ۳۳، دومین المپیاد فیزیک ایران

سه گلوله‌ی باردار پلاستیکی با بارهای q، $2q$ و $3q$ در رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی قرارگرفته و توسط میله‌های سبک و عایقی به طول L به هم متصل شده‌اند. دستگاهی را که به این ترتیب ساخته‌ایم، روی میز افقی بدون اصطکاکی قرار می‌دهیم. نیروی وارد بر دستگاه چقدر است؟

الف) $k\frac{22q^2}{L^2}$ ب) $k\frac{6q^2}{L^2}$ ج) $k\frac{11\sqrt{3}q^2}{L^2}$ د) صفر

۲. مسئله‌ی ۳۵، دومین المپیاد فیزیک ایران

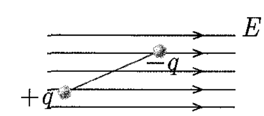
یک دوقطبی الکتریکی (دستگاهی متشکل از دو بار $+q$ و $-q$ در دو سر یک میله عایق) مطابق شکل زیر در میدان الکتریکی یکنواختی رها می‌شود، کدام‌یک از جملات زیر در مورد حرکت آن بلافاصله پس از رها شدن صحیح است؟

الف) دوقطبی در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران و به سمت چپ حرکت می‌کند.

ب) دوقطبی در جهت عقربه‌های ساعت دوران و به سمت راست حرکت می‌کند.

ج) دوقطبی فقط در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌کند.

د) دوقطبی فقط در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌کند.



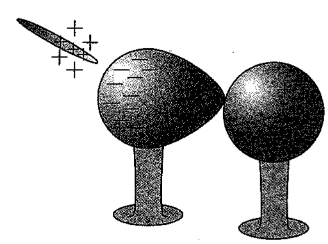
شکل ۱-۳۹

۳. مسئله‌ی ۳۶، دومین المپیاد ایران

یک میله‌ی شیشه‌ای باردار را مطابق شکل زیر به دو هادی که روی پایه‌های عایق قرار گرفته است و در تماس با هم هستند، نزدیک می‌کنیم و پس از جدا کردن آنها از هم، میله‌ی شیشه‌ای را دور می‌کنیم. اندازه‌ی بار القا شده:

الف) در کره بیشتر است. ب) در هادی نوک‌تیز بیشتر است.

ج) در هر دو یکسان است. د) صفر است.


شکل ۱-۴۰

۴. مسئله‌ی ۳۹، دومین المپیاد فیزیک ایران

دوگلوله‌ی رسانای مشابه دارای بارهای الکتریکی مثبت q_1 و q_2 به فاصله‌ی r از یکدیگر قرار دارند. آنها را با هم تماس می‌دهیم و دوباره به فاصله‌ی r از یکدیگر قرار می‌دهیم نیرویی که دو گلوله در این حالت بر هم وارد می‌کنند:

الف) کمتر از حالت اولیه است. ب) بیشتر از حالت اولیه است.

ج) مانند حالت اولیه است. د) صفر است.

۵. مسئله‌ی ۱۲، هشتمین المپیاد فیزیک ایران

یک حلقه که بار الکتریکی Q به طور یکنواخت روی آن قرار دارد را در نظر بگیرید. بار الکتریکی نقطه‌ای q را در مرکز حلقه می‌گذاریم. می‌خواهیم بار الکتریکی q در راستای محور حلقه دارای تعادل پایدار و در راستای شعاع حلقه دارای تعادل ناپایدار باشد. در این صورت

می‌توان علامت بار Q و q را به ترتیب زیر انتخاب کرد:

الف) Q منفی و q منفی ب) Q منفی و q مثبت

ج) Q مثبت و q مثبت د) Q مثبت و q منفی

ه) با هیچ نوع انتخابی از Q و q نمی‌توان شرایط مورد نظر را ایجاد کرد.

۶. مسئله‌ی ۲، مرحله‌ی اول نهمین المپیاد فیزیک ایران

دو گلوله‌ی کوچک نارسانا دارای بارهای $+۱۰^{-۶}$ کولن و $-۱۰^{-۶}$ کولن در دو انتهای فنری با ثابت $۱۰۰\mathrm{N/m}$ قرار داد شده است. در این شرایط طول فنر $۱۰\mathrm{cm}$ است. طول عادی فنر چند سانتی‌متر است؟ (فنر نارساناست و k در قانون کولن $۹ \times ۱۰^۹\mathrm{Nm^۲/C^۲}$ است.)

الف) ۱۰/۹ ب) ۱۱/۸ ج) ۹/۱ د) ۸/۲ ه) ۱۱/۲

۷. مسئله‌ی ۱۶ مرحله‌ی اول نهمین المپیاد فیزیک ایران

گلوله‌ی کوچکی دارای بار الکتریکی q است و با یک نخ از نقطه‌ای آویخته شده است. می‌خواهیم در این حالت میدان الکتریکی حاصل از بار q را در نقطه‌ای روی یک صفحه‌ی افقی که از بار q می‌گذرد، اندازه بگیریم. برای این کار بار $q_۰$ را در نقطه مورد نظر قرار می‌دهیم و با اندازه‌گیری نیروی الکتریکی وارد بر آن، میدان الکتریکی را به‌دست می‌آوریم. کدام گزینه درست است؟

الف) اگر بارهای q و $q_۰$ مثبت باشند، میدان به‌دست آمده از میدان مورد نظر کوچک‌تر است.

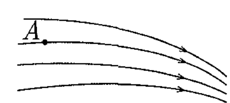
ب) اگر بار q مثبت و بار $q_۰$ منفی باشد، میدان به‌دست آمده از میدان مورد نظر بزرگ‌تر است.

ج) اگر بارهای q و $q_۰$ منفی باشند، میدان به‌دست آمده از میدان مورد نظر بزرگ‌تر است.

د) اگر بار q منفی و بار $q_۰$ مثبت باشد، میدان به‌دست آمده از میدان مورد نظر کوچک‌تر است.

۸. مسئله‌ی ۱۷، مرحله‌ی اول نهمین المپیاد فیزیک ایران

نمودار شکل زیر خطوط میدان الکتریکی را در فضای معینی نشان می‌دهد. بار نقطه‌ای $q_۰$ را در نقطه‌ی A قرار می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟



شکل ۱-۴۱

الف) بار $q_۰$ در هر شرایطی همواره روی خط میدان حرکت خواهد کرد.

ب) اگر بار $q_۰$ سرعت اولیه‌ای مماس بر خطوط میدان داشته باشد، به طور مدام روی خط میدان حرکت خواهد کرد.

ج) اگر سرعت اولیه بار $q_۰$ صفر باشد، به طور مدام روی خط میدان حرکت خواهد کرد.

د) در هیچ شرایطی بار $q_۰$ روی خط میدان ادامه حرکت نخواهد داد.

۹. مسئله‌ی ۱۸ مرحله‌ی اول نهمین المپیاد فیزیک ایران

نمودار شکل زیر، خطوط میدان الکتریکی را در فضای معینی نشان می‌دهد. بار الکتریکی q را یک مرتبه در نقطه‌ی A و مرتبه دیگر در نقطه‌ی B قرار می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟

شکل ۱-۴۲

الف) اندازه‌ی نیرویی که در نقطه‌ی A بر بار وارد می‌شود، از اندازه‌ی آن در نقطه‌ی B کوچک‌تر است.

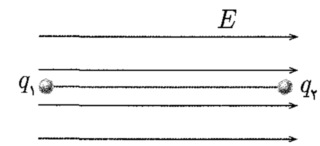
ب) اندازه نیرویی که در نقطه‌ی A بر بار وارد می‌شود، از اندازه‌ی آن در نقطه‌ی B بزرگ‌تر است.

ج) در نقطه‌ی A نیرویی بر بار الکتریکی وارد نمی‌شود، زیرا میدان در نقطه‌ی A صفر است، ولی بر بار در نقطه‌ی B نیرو وارد می‌شود.

د) اطلاعات مسأله برای مقایسه‌ی نیروی وارد بر بار q در نقطه‌ی A و B کافی نیست.

۱۰. مسئله‌ی ۱۹، مرحله‌ی اول نهمین المپیاد فیزیک ایران

دو بار q_1 و q_2 که اندازه‌های آنها با یکدیگر برابر است، با میله‌ی نارسانای بسیار سبکی به هم وصل شده‌اند و مطابق شکل ۱ـ۴۳ مجموعه در میدان الکتریکی یکنواختی قرار دارد. کدام گزینه درست است؟



شکل ۱-۴۳

الف) اگر q_2 مثبت و q_1 منفی باشد، مجموعه دارای تعادل پایدار است.

ب) اگر q_1 و q_2 مثبت باشند، مجموعه دارای تعادل ناپایدار است.

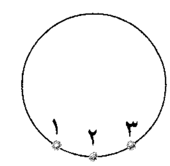
ج) اگر q_2 منفی و q_1 مثبت باشد، مجموعه دارای تعادل ناپایدار است.

د) اگر q_1 و q_2 منفی باشند، مجموعه دارای تعادل پایدار است.

ه) اگر q_1 و q_2 منفی باشند، مجموعه تعادل ندارد.

۱۱. مسئله‌ی ۲ مرحله‌ی اول دهمین المپیاد فیزیک ایران

از سه مهره‌ی تسبیح مشابه، مطابق شکل ۱ـ۴۴، حلقه‌ای گذرانده‌ایم. صفحه‌ی حلقه افقی است و مهره‌ها با حلقه و سطحی که روی آن قرار گرفته‌اند اصطکاک ندارند. روی مهره‌ها بارهای q_1، q_2 و q_3 می‌گذاریم. مشاهده می‌شود که مهره‌ها به صورتی که در شکل ۱ـ۴۵ نشان داده شده است قرار می‌گیرند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟ مهره‌ها از جنس عایق درست شده‌اند.



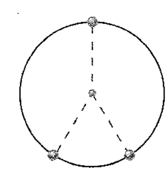
شکل ۱-۴۴

الف) $\left.\begin{array}{ll} |q_2| = |q_3| , & q_2q_3 > 0 \\ |q_1| = |q_2| , & q_1q_3 > 0 \end{array}\right\}$

ب) $\left.\begin{array}{ll} |q_1| = |q_2| , & q_2q_3 > 0 \\ |q_1| > |q_3| , & q_1q_3 > 0 \end{array}\right\}$

ج) $\left.\begin{array}{ll} |q_2| = |q_3| , & q_2q_3 > 0 \\ |q_1| > |q_2| , & q_1q_3 > 0 \end{array}\right\}$

د) $\left.\begin{array}{ll} |q_2| > |q_3| , & q_1q_3 > 0 \\ |q_1| > |q_2| , & q_1q_2 < 0 \end{array}\right\}$


شکل ۱-۴۵

۱۲. مسئله‌ی ۳، مرحله‌ی اول دهمین المپیاد فیزیک ایران

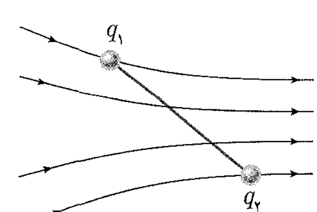
در ناحیه‌ای از فضا، میدان الکتریکی مطابق شکل ۱ـ۴۶ وجود دارد. دو بار الکتریکی q_1 (منفی) و q_2 (مثبت) روی دو سر میله‌ی نارسانای بسیار سبکی در این میدان قرار دارد. برایند نیروهای وارد بر میله را F، و گشتاور نیروهای وارد بر آن نسبت به وسط میله را τ می‌نامیم. اگر $|q_2| < |q_1|$ باشد، کدام گزینه درست است؟

الف) $F \neq 0$ و $\tau \neq 0$

ب) ممکن است F صفر یا مخالف صفر باشد و $\tau \neq 0$.

ج) $F \neq 0$ و ممکن است τ صفر یا مخالف صفر باشد.

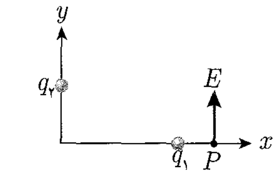
د) ممکن است F و τ هرکدام صفر یا مخالف صفر باشند.



شکل ۱-۴۶

۱۳. مسئله‌ی ۶ مرحله‌ی اول دهمین المپیاد فیزیک ایران

دو بار نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$ مطابق شکل ۱ـ۴۷ بر روی محورهای مختصات واقع‌اند. اگر بردار میدان الکتریکی حاصل از این دو بار در نقطه‌ی P در جهت محور y باشد، کدام گزینه در مورد اندازه و علامت $q_۱$ و $q_۲$ درست است؟



شکل ۱-۴۷

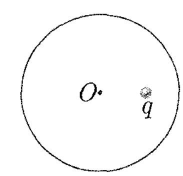
الف) $q_۱ < ۰$، $q_۲ > ۰$، $|q_۱| > |q_۲|$ ب) $q_۱ < ۰$، $q_۲ < ۰$، $|q_۱| < |q_۲|$

ج) $q_۱ < ۰$، $q_۲ > ۰$، $|q_۱| < |q_۲|$ د) $q_۱ > ۰$، $q_۲ < ۰$، $|q_۱| > |q_۲|$

ه) $q_۱ > ۰$، $q_۲ > ۰$، $|q_۱| > |q_۲|$ و) $q_۱ > ۰$، $q_۲ < ۰$، $|q_۱| < |q_۲|$

۱۴. مسئله‌ی ۳ مرحله اول یازدهمین المپیاد فیزیک ایران

مطابق شکل ۱ـ۴۸ بار نقطه‌ای q درون یک پوسته‌ی کروی رسانا بدون بار قرار دارد. از طرف کره بر بار q:



شکل ۱-۴۸

الف) نیرویی وارد نمی‌شود.

ب) نیرویی در راستای شعاع و به سمت مرکز وارد می‌شود.

ج) نیرویی در راستای شعاع و به سمت خارج وارد می‌شود.

د) نیرویی در راستای عمود بر شعاع وارد می‌شود.

۱۵. مسئله‌ی ۱۰، مرحله‌ی اول یازدهمین المپیاد فیزیک ایران

یک پوسته‌ی فلزی که روی پایه‌ی نارسانا قرار دارد، بار الکتریکی Q دارد. نیرویی که بر قسمت کوچکی از این پوسته وارد می‌شود را F می‌نامیم. نیروی F:

الف) به طرف بیرون پوسته و متناسب با F است.

ب) به طرف داخل پوسته و متناسب با $Q^۲$ است.

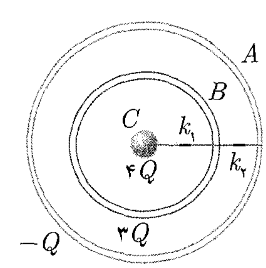
ج) به طرف بیرون پوسته و متناسب با $Q^۲$ است.

د) به طرف داخل پوسته و متناسب با Q است.

ه) به طرف بیرون است اگر $Q > ۰$ و به طرف داخل است اگر $Q < ۰$، و در هر صورت متناسب با Q است.

۱۶. مسئله‌ی ۲۸ مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد فیزیک ایران

پوسته‌های کروی فلزی A و B و کره‌ی فلزی C را مطابق شکل ۱ـ۴۹ در نظر بگیرید. بار الکتریکی کره‌ها به ترتیب $Q_A = -Q$، $Q_B = ۳Q$ و $Q_C = ۴Q$ است. با بستن کلیدهای $k_۱$ و $k_۲$ کره‌ها به هم متصل می‌شوند. پس از تعادل، کدام گزینه درست است؟



شکل ۱-۴۹

الف) $Q_A = +۴Q$، $Q_B = ۰$ و $Q_C = +۲Q$

ب) $Q_A = +۶Q$، $Q_B = ۰$ و $Q_C = ۰$

ج) $Q_A = +۲Q$ و $Q_C = Q_B = ۰$

د) $Q_A = +۳Q$، $Q_B = +۲Q$ و $Q_C = +Q$

۱۷. مسئله‌ی ۱۵ مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد فیزیک کشور

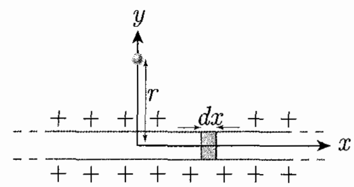
چگالی بار الکتریکی روی یک نیم‌دایره یکنواخت است. اندازه‌ی میدان الکتریکی در مرکز این نیم‌دایره (یعنی مرکز دایره‌ای که این نیم‌دایره کمانی از آن است) E است. اندازه‌ی

میدان الکتریکی در مرکز یک ربع دایره با همان شعاع و همان چگالی بار چقدر است؟

الف) E ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}E$

ج) $\frac{۱}{۲}E$ د) اطلاعات مسئله ناقص است.

۱۸. مسئله‌ی ۲ مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد فیزیک کشور



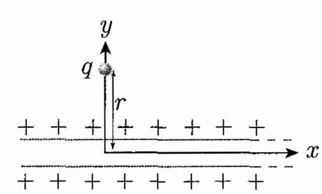
شکل ۱-۵۰

مطابق شکل (۱ـ۵۰)، روی یک میله‌ی نارسانای نازک و بسیار بلند، بار الکتریکی مثبت به طور یکنواخت وجود دارد. چگالی طول بار، یعنی بار موجود روی واحد طول میله λ است. بار نقطه‌ای مثبت q را روی محور y و به فاصله‌ی r از میله در نظر بگیرید. طول میله چنان بلند است و r در مقایسه با طول میله چنان کم است که می‌توان طول میله را بی‌نهایت فرض کرد. می‌توان نشان داد که در این شرایط اندازه‌ی میدان ناشی از بارهای روی میله، در محل بار نقطه‌ای q، از رابطه‌ی $E = \frac{\lambda}{۲\pi\epsilon_{\circ} r}$ به‌دست می‌آید.

الف) جهت میدان E را به‌دست آورید. (**راهنمایی**: بار توزیع شده روی میله را می‌توان متشکل از تعداد زیادی بار نقطه‌ای پهلوی هم در نظر گرفت که هر کدام‌یک میدان الکتریکی ایجاد می‌کنند.)

ب) نیروی الکتریکی وارد بر بار q را به‌دست آورید. این نیرو را F_E می‌نامیم.

اکنون فرض کنید بار q و نیز میله‌ی باردار، در جهت محور x با سرعت ثابت u حرکت کند. از نظر ناظر ساکن نسبت به محور x، حرکت میله مانند عبور جریان الکتریکی از میله است. این جریان را I می‌نامیم.



شکل ۱-۵۱

ج) جریان الکتریکی I را به‌دست آورید.

د) میدان مغناطیسی حاصل از جریان I را در نقطه‌ای به فاصله‌ی r از میله به‌دست آورید.

ه) نیروی مغناطیسی وارد بر بار q را به‌دست آورید. این نیرو را F_B می‌نامیم.

و) برای ناظر ساکن نسبت به محور x، دو نیروی الکتریکی F_E و مغناطیسی F_B بر بار نقطه‌ای q وارد می‌شود. فرض کنید نیروی F_E مانند قسمت (ب) باشد. برایند دو نیروی F_E و F_B را به‌دست آورید. این نیرو را F می‌نامیم.

ز) نسبت $\frac{F}{F_E}$ را حساب کنید.

۱۹. مسئله‌ی ۲۹ مرحله‌ی اول هجدهمین المپیاد فیزیک کشور

قرص یکنواخت باردار شده را در نظر بگیرید که در صفحه‌ی xy است. مرکز قرص مبدأ مختصات، و بار قرص مثبت است. نقطه‌ای با مختصات (x, y, z) را در نظر بگیرید، که $z > \circ$، $x > \circ$ و $y = \circ$ است. کدام گزینه درباره‌ی E_x (مؤلفه‌ی x میدان الکتریکی حاصل از این قرص در این نقطه) درست است؟

الف) حتماً E_x منفی است.

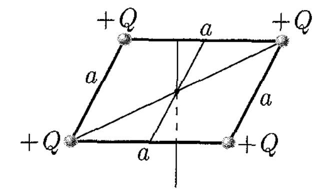
ب) حتماً E_x صفر است.

ج) حتماً E_x مثبت است.

د) x هایی هست که E_x مثبت است، و xهایی هم هست که E_x منفی است.

۲۰. مسئله‌ی ۲، آزمون دوم تابستان ۱۳۷۶

تعادل بارها



شکل ۱-۵۲

الف) چهار بار $+Q$ در چهارگوشه‌ی یک مربع قرار دارند. تعادل بار $+q$ را که در مرکز مربع قرار دارد، در راستای زیر بررسی کنید (در کدام‌یک از راستاها تعادل پایدار و کدام ناپایدار است).

الف-۱) راستای قطر

الف-۲) راستای عمود بر ضلع‌ها

الف-۳) راستای عمود بر صفحه‌ی مربع

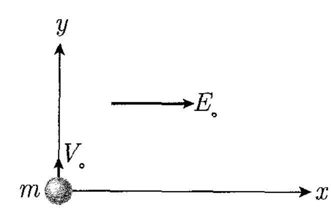
ب) هشت بار $+Q$ در هشت گوشه‌ی یک مکعب قرار دارند. تعادل بار $+q$ را که در مرکز مکعب قرار دارد، در راستاهای زیر بررسی کنید.

ب-۱) راستای قطر

ب-۲) راستای عمود بر وجه‌ها

۲۱. مسئله‌ی ۱ آزمون نهایی تابستان ۱۳۷۶

ذره‌ای به جرم m و بار q روی یک سطح افقی با ضریب اصطکاک μ قرار دارد. میدان الکتریکی ثابت $E_\circ$ در جهت مثبت محور x را در نظر بگیرید. به طوری‌که $E_\circ = \dfrac{\mu mg}{q}$ باشد. ذره با سرعت اولیه‌ی $v_\circ$ در جهت مثبت محور y که در صفحه‌ی افقی است، پرتاب می‌شود.



شکل ۱-۵۳

الف) مسیر ذره را به طور کیفی روی صفحه‌ی xy رسم کنید و دلایل توجیهی برای رسم آن منحنی را توضیح دهید.

ب) مؤلفه‌های x و y شتاب و مؤلفه‌ی مماسی شتاب را بر حسب اطلاعات داده شده‌ی فوق و زاویه‌ی θ (زاویه‌ای که سرعت لحظه‌ای ذره با جهت مثبت محور x می‌سازد) بنویسید.

پ) اندازه‌ی سرعت ذره، v، را بر حسب θ به‌دست آورید. مقدار آن در زمان‌های بزرگ چقدر است؟

ت) حداکثر مقدار مؤلفه‌ی y بردار مکان ذره، L، را به‌دست آورید. برای محاسبه، اتحاد زیر می‌تواند مورد استفاده قرارگیرد.

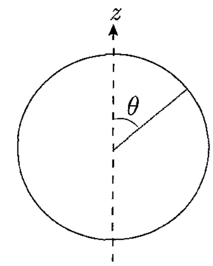
$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \tan(\frac{\alpha}{2})$$

۲۲. مسئله‌ی ۳، آزمون اول تابستان ۱۳۷۷

بر روی سه گوشه از چهارگوشه‌ی یک هرم چهاروجهی منتظم سه بار $+q$ قرار می‌دهیم. میدان الکتریکی را در مرکز هرم محاسبه کنید. یال چهاروجهی منتظم l است.

۲۳. مسئله‌ی ۴ آزمون اول تابستان ۱۳۷۷

بر روی یک کره، چگالی باری متناسب با $\cos\theta$ وجود دارد. دوقطبی الکتریکی معادل این توزیع بار را در فواصل دور حساب کنید.



شکل ۱-۵۴

۲۴. مسئله‌ی ۲ آزمون اول تابستان ۱۳۷۸

در این مسئله می‌خواهیم خطای حاصل از پیوسته در نظرگرفتن بار الکتریکی را به‌دست آوریم. برای سادگی، یک توزیع بار خطی و نیم‌دایره‌ای را در نظر می‌گیریم. ابتدا توزیع بار روی آن را پیوسته و سپس گسسته در نظر می‌گیریم. در هر مرتبه میدان الکتریکی را به‌دست آورده و خطای نسبی آن را اندازه می‌گیریم.

الف) یک نیم‌دایره را که توزیع بار خطی λ روی آن به صورت یکنواخت قرار گرفته است، در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در مرکز نیم‌دایره حساب کنید (شعاع نیم‌دایره را R در نظر بگیرید).

ب) حل توزیع بار را گسسته بگیرید و برای سادگی توزیع بار گسسته را الکترون‌هایی با بار e فرض کنید که در فاصله‌ی a از هم روی نیم‌دایره قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی در این حالت در مرکز نیم‌دایره چقدر است؟

ج) خطای نسبی را برای مقادیر واقعی به‌دست آورید (تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{a}{R}$).

مقادیر a و R را خودتان باید یک حدس مناسب بزنید.

راهنمایی: می‌دانیم

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin Nx = \frac{2\sin\left(\frac{N+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{N}{2}x\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x}$$

۲۵. مسئله‌ی ۲ آزمون اول تابستان ۱۳۷۹

قرصی سوراخ‌دار، مطابق شکل با شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2، چگالی سطحی بار مثبت σ دارد.

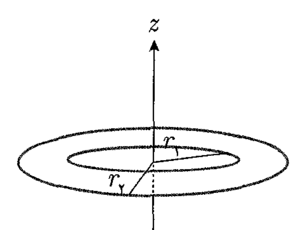
الف) میدان الکتریکی را روی محور تقارن قرص حساب کنید.

ب) این میدان را در حدهای زیر به‌دست آورید.

۱ : $r_1 \to 0$ ، r_2 محدود

۲ : r_1 محدود ، $r_2 \to \infty$

۳ : $r_1 \to 0$ ، $r_2 \to \infty$

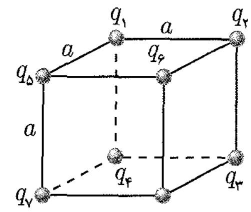


شکل ۱-۵۵

ج) فرض کنید جسمی به جرم m و بار منفی q مقید است که روی محور تقارن قرص (محور zها) حرکت کند. همچنین فرض کنید این جسم بسیار نزدیک به صفحه‌ی قرص قرار دارد. میدان را تا اولین مرتبه‌ی غیرصفر فاصله از صفحه‌ی قرص بسط دهید. نیروی وارد بر جسم را حساب کنید و بسامد نوسان‌های آن را به‌دست آورید. (شکل ۱-۵۵)

۲۶. مسئله‌ی ۱ آزمون اول تابستان ۱۳۸۰

مکعبی به ضلع a در نظر بگیرید. فرض کنید در هر رأس آن به جز یک رأس، یک بار $+q$ قرارگرفته است. (شکل ۱ـ۵۶)

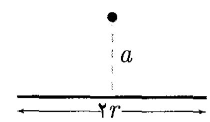


شکل ۱-۵۶

الف) بردار شدت میدان الکتریکی را در رأس خالی به‌دست آورید. (راستا و اندازه‌ی آن را)

ب) برای $a = 0{,}7\text{mm}$ و $q = 1{,}6 \times 10^{-19}\text{C}$، اندازه‌ی این میدان الکتریکی را در دستگاه SI به‌دست آورید.

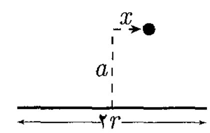
۲۷. مسئله‌ی ۶ آزمون اول تابستان ۱۳۸۲



شکل ۱-۵۷

الف) میدان الکتریکی را در فاصله‌ی a از میله‌ی بی‌نهایت طویلی با چگالی بار الکتریکی یکنواخت λ بیابید. این میدان را E_0 می‌نامیم.

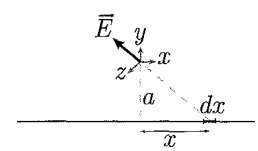
ب) میدان الکتریکی را در فاصله‌ی عمودی a از مرکز میله‌ای به طول $2r$ را E می‌نامیم. اگر $\epsilon = \frac{a}{r}$ کوچک باشد، $\frac{E}{E_0}$ را بسط تیلور داده و جملات آن را تا مرتبه‌ی ϵ^2 نگه دارید.



شکل ۱-۵۸

ج) اگر نقطه‌ی مورد نظر در فاصله‌ی عمودی a از میله، اما به فاصله‌ی x از مرکز میله قرار داشته باشد، مؤلفه‌ی عمود بر میله‌ی میدان را برای $\frac{x}{r}$ های کوچک محاسبه کنید.

د) x چقدرکوچک باشد تا با دقت ۰٫۰۱ مؤلفه‌ی عمودی بر میله‌ی میدان الکتریکی یکنواخت باشد؟



شکل ۱-۵۹

۲۸. مسئله‌ی ۳ آزمون اول تابستان ۱۳۸۳

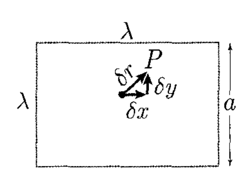
چهار خط بار با چگالی طولی λ و طول a مطابق شکل روی چهار یال یک مربع قرار گرفته‌اند.

الف) میدان الکتریکی را در نقطه‌ی $\vec{\delta r} = \delta x\hat{x} + \delta y\hat{y}$ به مختصات P (در صفحه مربع) پیدا کنید. فرض کنید $|\vec{\delta r}| << a$.

ب) چهار بار نقطه‌ای q را روی چهار رأس این مربع قرار می‌دهیم. رابطه‌ای بین q و λ پیدا کنید که میدان در نقطه‌ی P تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{|\vec{\delta r}|}{a}$ صفر باشد.

۲۹. مسئله‌ی ۳، آزمون اول تابستان ۱۳۸۶

می‌خواهیم میدان الکتریکی حاصل از یک حلقه‌ی باردار را دور از حلقه تا مرتبه‌ی ۲ نسبت به شعاع حلقه حساب کنیم.



شکل ۱-۶۰

الف) بار نقطه‌ای Q در نقطه‌ی $\vec{a}$ را در نظر بگیرید. میدان الکتریکی این بار در نقطه‌ی $\vec{r}$ (نقطه‌ی مشاهده) را تا مرتبه‌ی ۲ نسبت به a بنویسید. (این میدان را با E نمایش می‌دهیم.)

یک حلقه‌ی باردار با چگالی یکنواخت و بار کل Q را در نظر بگیرید که در صفحه‌ی $z = 0$ است. مرکز آن مرکز مختصات است و شعاع آن a است. (x, y, z) مختصات

دکارتی‌اند. به خاطر تقارن سمتی این توزیع بار، میدان الکتریکی در نقطه‌ی $\vec{r}$ تا مرتبه‌ی ۲ نسبت به a به این شکل است.

$$E = \frac{kQ}{r^2}\left\{\hat{r} + \frac{a}{r}\left[\hat{z}f_1(\theta) + \hat{\rho}f_2(\theta)\right] + \left(\frac{a}{r}\right)^2\left[\hat{z}f_3(\theta) + \hat{\rho}f_4(\theta)\right]\right\}$$

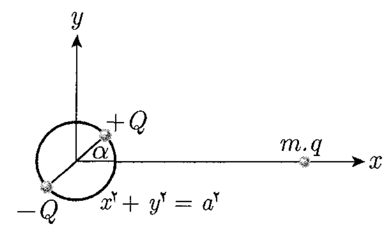
که θ زاویه‌ی r با $\hat{z}$ است و
$$\hat{\rho} = \frac{\hat{x}x + \hat{y}y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ب) f_1 را حساب کنید. ج) f_2 را حساب کنید.

د) f_3 را حساب کنید. ه) f_4 را حساب کنید.

۳۰. مسئله‌ی ۸، آمون نهایی تابستان ۱۳۸۵

ذره‌ای به جرم m و بار q مقید است که روی محور x حرکت کند (میدان گرانشی در کار نیست). دو بار $+Q$ و $-Q$ در دو انتهای یک قطر از دایره‌ی $x^2 + y^2 = a^2$ هستند. این قطر دایره با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. (شکل ۱ـ۶۱)



شکل ۱-۶۱

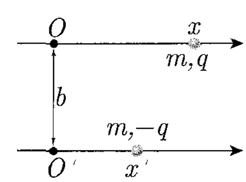
الف) مؤلفه‌ی x میدان الکتریکی ناشی از بارهای $\pm Q$ را در نقطه‌ی $(x, 0, 0)$ بنویسید.

ب) فرض کنید $x >> a$ باشد. E_x را تا نخستین تقریب ناصفر بسط دهید.

ج) معادله‌ی دیفرانسیل حرکت ذره را (که فقط روی محور x حرکت می‌کند) بنویسید. فرض کنید در $t = 0$ بار مثبت در نقطه‌ی $(0, a, 0)$ و بار منفی در نقطه‌ی $(0, -a, 0)$ باشد.

۳۱. مسئله‌ی ۴ آزمون نهایی تابستان ۱۳۸۶

دو جسم با جرم‌های برابر m و بارهای q و $-q$ مقیداند که روی دو میله‌ی موازی حرکت کنند. فاصله‌ی دو میله b است. مکان ذره‌ها را با x و x' مشخص می‌کنیم. مبدأهای o و o' در شکل مشخص شده است. پاره‌خط oo' بر هر دو محور عمود است. به جسمی که روی محور ox حرکت می‌کند نیروی f وارد می‌شود. (شکل ۱ـ۶۲)



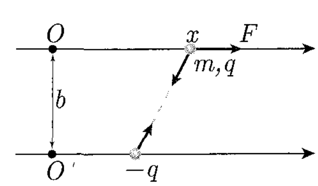
شکل ۱-۶۲

الف) معادله‌های دیفرانسیل حرکت، یعنی معادله‌های قانون دوم نیوتن را برای متغیرهای $X := \frac{1}{2}(x + x')$ و $u := x - x'$ بنویسید.

ب) برای $f = 0$ یک جواب معادله‌ها این است که X ثابت و u صفر باشد. بسامد نوسان‌های کوچک u را ω می‌نامیم. ω را بیابید.

ج) اکنون فرض کنید f ثابت باشد، و ضمناً $f << mb\omega^2$ باشد. معادله‌ی u را برای q بسیار بزرگ (یعنی ω بسیار بزرگ) تا نخستین مرتبه در u بنویسید.

د) نیروی f در $t = 0$ روشن می‌شود و از آن پس ثابت می‌ماند. با شرط $u(0) = 0$ و $\dot{u}(0) = 0$، $u(t)$ را به‌دست آورید.



شکل ۱-۶۳

۳۲. مسئله‌ی ۴ مرحله‌ی دوم بیست‌ویکمین المپیاد فیزیک کشور

این مسئله یک مدل بسیار ساده شده برای رسانندگی الکتریکی است. یک الکترون به جرم m و بار q در یک شبکه‌ی بلور حرکت می‌کند. حرکت این الکترون را در فقط یک راستا

(x) در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم الکترون به مدت T، سرعت $v_\circ$ حرکت می‌کند، بعد برخورد می‌کند و سرعتش ($-v_\circ$) می‌شود، به مدت T به حرکت با این سرعت ادامه می‌دهد، باز برخورد می‌کند و سرعتش $v_\circ$ می‌شود، و این فرایند ادامه می‌یابد. از زمان برخورد در برابر T چشم بپوشید. این در حالتی است که میدان الکتریکی خارجی وجود ندارد. فرض کنید اگر یک میدان الکتریکی خارجی در راستای x اعمال شود (که تصویر آن در این راستا E است). زمان حرکت بین دو برخورد تغییری نمی‌کند، و نتیجه‌ی هر برخورد این است که اگر سرعت پیش از برخورد ($\pm v_\circ + u$) باشد، سرعت پس از برخورد ($\mp v_\circ + \alpha u$) می‌شود، که α یک مقدار ثابت است. بین هر دو برخورد، نیروی وارد بر الکترون فقط ناشی از میدان الکتریکی بیرونی است.

فرض کنید سرعت الکترون درست پس از یک برخورد ($v_\circ + \Delta v$) است. این برخورد را برخورد صفر می‌نامیم.

الف) سرعت الکترون درست پیش از برخورد بعدی (برخورد یک) را حساب کنید.

ب) سرعت الکترون درست پس از برخورد یک را حساب کنید.

ج) سرعت الکترون درست پیش از برخورد دو را حساب کنید.

د) سرعت الکترون درست پس از برخورد دو را حساب کنید.

هـ) Δv چقدر باشد تا سرعت الکترون درست پس از برخورد دو با سرعت الکترون پس از برخورد صفر برابر شود؟

و) با فرض این‌که چنین باشد، سرعت متوسط ذره از برخورد صفر تا برخورد دو را حساب کنید. (منظور از سرعت متوسط، جابه‌جایی تقسیم بر زمان است.)

۳۳. بیست‌ودومین المپیاد فیزیک کشور ۱۳۸۷

بار و جرم الکترون، ضریب k در قانون کولن و ضریب G در قانون گرانش، در واحدهای SI به صورت زیر است:

$$e = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C} \quad , \quad m = ۹/۱ \times ۱۰^{-۳۱}\mathrm{kg}$$
$$k = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ} = ۹/۰ \times ۱۰^{۹}\mathrm{N.m^۲/C^۲} \quad , \quad G = ۶/۷ \times ۱۰^{-۱۱}\mathrm{N.m^۲/kg^۲}$$

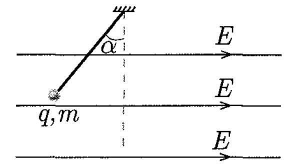
نسبت نیروی الکتریکی به نیروی گرانشی دو الکترون به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

الف) $۱۰^{۴۵}$ ب) $۱۰^{۴۲}$ ج) $۱۰^{۳۹}$ د) $۱۰^{۳۶}$

۳۴. مرحله‌ی اول بیست‌وسومین المپیاد فیزیک کشور ۱۳۸۸

شکل زیر آونگی با بار الکتریکی یکنواخت مثبت q و وزن mg را نشان می‌دهد که در یک میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ قرار دارد. آونگ را مقداری از امتداد قائم (امتداد خط‌چین) خارج می‌کنیم و در حالت نشان داده شده در شکل ساکن نگه می‌داریم، طوری که نخ

آونگ کشیده شده است. آونگ را رها می‌کنیم. گلوله‌ی آونگ روی خط راست حرکت می‌کند و نخ آونگ شُل می‌شود. کدام گزینه در مورد زاویه‌ی α که در شکل نشان داده شده صحیح است؟



شکل ۱-۶۴

الف) $\alpha > \text{Arctan}(\frac{qE}{mg})$

ب) $\alpha > \text{Arctan}(\frac{mg}{qE})$

ج) $\alpha < \text{Arctan}(\frac{qE}{mg})$

د) $\alpha < \text{Arctan}(\frac{mg}{qE})$

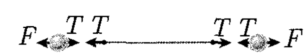
پاسخ سؤال‌های المپیاد فصل ۱

۱. حل. □□□■

ابتدا دو گلوله با بارهای q_1 و q_2 را در نظر بگیرید که توسط میله‌ای سبک و عایق به هم وصل شده‌اند (شکل ۱ـ۶۵). این دو بار بر هم نیروی الکتریکی وارد می‌کنند. بنابراین، برای این‌که آنها بتوانند در موضع خود، یعنی در دو سر میله باقی بمانند، میله باید نیرویی به اندازه نیروی الکتریکی ولی مخالف با آن به هر کدام از گلوله‌ها وارد کند (شکل ۱ـ۶۶). در نتیجه برآیند نیروهای وارد بر هر کدام از گلوله‌ها صفر است.


شکل ۱-۶۵

کشش دو سر میله نیز با هم برابر است و میله نیز تعادل دارد. این نتیجه با دانسته‌های قبلی، مبنی بر این‌که نیروی مؤثر بر یک مجموعه، برآیند نیروهای خارجی وارد بر آن است، همخوانی دارد زیرا کشش میله و نیروی الکتریکی برای کل مجموعه نیروهای داخلی محسوب می‌شوند.

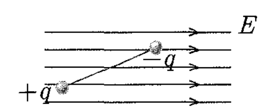


شکل ۱-۶۶

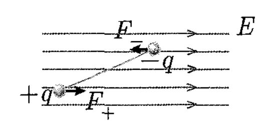
در این مسئله هر دو بار الکتریکی نیروهایی هم‌اندازه، هم‌راستا و در سوی مخالف به هم وارد می‌کنند که با کشش میله‌ها خنثی می‌شود. (توجه کنید که تمامی این نیروها برای سیستم ۳ بار و میله، نیروهای داخلی محسوب می‌شوند.) بنابراین برآیند کل نیروهای وارد بر دستگاه صفر است.

۲. حل. □□□■

همان طورکه می‌دانید، جهت خطوط میدان الکتریکی از منبع بار مثبت به سمت منبع بار منفی است. بنابراین اگر یک بار را در میدان الکتریکی رها کنیم، در صورتی که مثبت باشد، در جهت خطوط میدان و اگر منفی باشد، در خلاف جهت میدان به حرکت درمی‌آید. در این مسئله چون میدان الکتریکی یکنواخت است. اندازه‌ی E در همه‌ی نقاط یکسان است. در نتیجه مطابق شکل ۱ـ۶۸ اندازه‌ی نیروی وارد بر بار مثبت و منفی با هم برابر در راستایشان یکی است ولی در خلاف جهت هم اثر می‌کنند. پس این دو نیرو همدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین کل نیروی وارد بر مجموعه‌ی دوقطبی صفر است؛ ولی با توجه به شکل ۱ـ۶۸ دو نیروی F_- و F_+ بر مجموعه گشتاوری وارد می‌کنند که آن را در جهت پادساعتگرد می‌چرخاند.



شکل ۱-۶۷

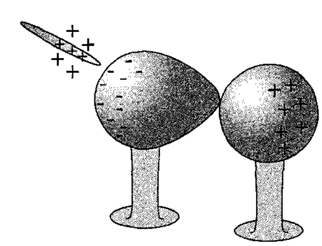


شکل ۱-۶۸

۳. حل. □□■□

قبل از نزدیک کردن میله‌ی شیشه‌ای به دو جسم رسانا، مجموع بارهای الکتریکی آنها صفر است. با نزدیک کردن میله‌ی شیشه‌ای با بار مثبت، مقداری از بارهای دو جسم به حرکت درمی‌آیند (القای بار) و مطابق شکل ۱ـ۶۹، بار $+q$ بر روی رسانای دورتر (یعنی کره) و بار $-q$ بر روی رسانای نزیک‌تر (رسانای گلابی شکل) جمع می‌شود، ولی مجموع بار سیستم باز صفر است.

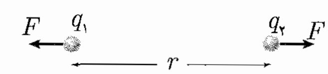
حال وقتی دو رسانا را از هم جدا می‌کنیم، مجموع بار روی هر کدام از رساناها (در صورتی که با رسانای دیگری تماس پیدا نکند) تغییر نمی‌کند. در نتیجه اندازه‌ی بار القا شده در هر دو جسم رسانا یکسان است.


شکل ۱-۶۹

۴. حل. □□■□

دو گلوله‌ی رسانای مشابه با بارهای الکتریکی $q_۱$ و $q_۲$ $(q_۱ > q_۲)$ را در نظر بگیرید که در فاصله‌ی r از یکدیگر قرار دارند (شکل ۱ـ۴۲). بنابراین طبق قانون کولن، نیرویی که دو گلوله بر هم وارد می‌کنند، عبارتست از:

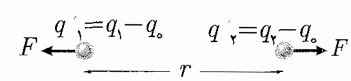
$$F = k\frac{q_۱ q_۲}{r^۲} \quad , \quad k = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}$$



شکل ۱-۷۰

زمانی که این دو گلوله را با هم تماس می‌دهیم، بارها جابه‌جا می‌شوند و چون کاملاً مشابه یکدیگرند، این جابه‌جایی به گونه‌ای صورت می‌گیرد که بار موجود در هر دو گلوله یکسان شود، که با توجه به فرض $q_۱ > q_۲$، به این معنی است که مقداری از بار $q_۱$ موجود در گلوله‌ی اول به گلوله‌ی دوم انتقال می‌یابد. این بار انتقال یافته را $q_۰$ در نظر می‌گیریم (که مقداری مثبت دارد). پس

$$q_۱ - q_۰ = q_۲ + q_۰ \ \Rightarrow\ q_۱ - q_۲ = ۲q_۰$$



شکل ۱-۷۱

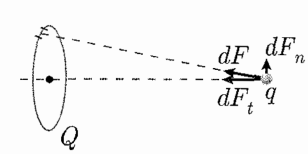
حال اگر دو گلوله را از هم جدا کرده و دوباره به فاصله‌ی r از یکدیگر قرار دهیم (شکل ۱ـ۷۲)، نیرویی که دو گلوله به هم وارد وارد می‌کنند عبارتست از:

$$F' = k\frac{(q_۱ - q_۰)(q_۲ + q_۰)}{r^۲}$$
$$\Rightarrow F' = k\frac{q_۱ q_۲ + q_۰(q_۱ - q_۲) - q_۰^۲}{r^۲}$$
$$\Rightarrow F' = k\frac{q_۱ q_۲ + q_۰^۲}{r^۲}$$

مشخص است که $F' > F$ است. در نتیجه نیرویی که دو گلوله در این حالت به هم وارد می‌کنند، بیشتر از حالت اولیه است.

۵. حل. گزینه‌های (ب) و (د) صحیح هستند.

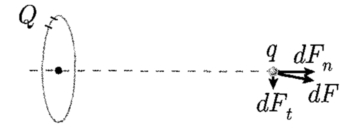
در شکل ۱ـ۷۲ یک حلقه باردار با بار Q نشان داده شده است که به طور یکنواخت روی آن توزیع شده است. اگر یک بار نقطه‌ای q را در مرکز حلقه قرار دهیم، نیروی وارد بر آن صفر خواهد بود، زیرا فاصله‌ی بار q از تمام نقاط حلقه یکسان است و در نتیجه با توجه به توزیع یکنواخت بار (و تقارن آن نسبت به مرکز حلقه)، نیرویی مساوی از هر سو بر آن وارد می‌شود.



شکل ۱-۷۲

حال اگر بار q را روی محور حلقه از مرکز آن دور کنیم، دیگر برایند نیروهای وارد بر آن صفر نخواهد بود. ابتدا حالتی که بارهای Q و q مختلف‌العلامه باشند را بررسی می‌کنیم در این حالت نیروی بین هر قسمت از حلقه با بار dQ و بار q جاذبه است (شکل ۱ـ۷۲). مجموع این مؤلفه‌ها به طرف مرکز حلقه خواهد بود، پس اگر بار q را بر روی محور حلقه از مرکز آن دور کنیم، نیرویی به طرف مرکز حلقه بر آن وارد می‌شود و آن را به مرکز حلقه باز می‌گرداند. در نتیجه اگر Q و q مختلف‌العلامه باشند، تعادل q در راستای محور حلقه پایدار خواهد بود. اگر Q و q هم‌علامت باشند، تنها جهت dF معکوس می‌شود (شکل ۱ـ۷۳). بنابراین مؤلفه‌های عمود بر محور میدان الکتریکی باز هم همدیگر را خنثی می‌کنند و مؤلفه‌های در راستای محور

میدان در جهتی است که بار q را از مرکز حلقه دور می‌کند. پس اگر بار q را بر روی محور حلقه از مرکز آن دور کنیم، نیرویی در خلاف جهت مرکز به آن وارد می‌شود و آن را از مرکز حلقه دور می‌کند. در نتیجه اگر Q و q هم‌علامت باشند، تعادل q در راستای محور حلقه ناپایدار خواهد بود. بنابراین گزینه‌های (الف) و (ج) تعادل مورد نظر ایجاد نمی‌کند و در نتیجه صحیح نیستند.

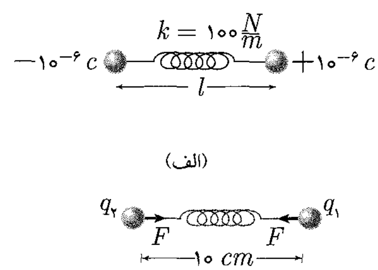


شکل ۱-۷۳

اکنون تعادل بار q را در راستای شعاع حلقه بررسی می‌کنیم. ثابت کردیم که گزینه‌های (الف) و (ج) نادرست هستند، پس کافی است حالتی که بارهای q و Q مختلف‌العلامه باشند را بررسی کنیم. اگر بار q را در راستای شعاع حلقه از مرکز آن دور کنیم، دیگر نیروی وارد بر آن صفر نخواهد بود، زیرا بار q به قسمتی از حلقه نزدیک و از قسمتی دیگر دور می‌شود. در این حالت قسمت کوچک‌تر، نیروی جاذبه‌ی بزرگ‌تری بر بار q وارد می‌کند و آن را به طرف خود می‌کشد. این نیروی جاذبه باعث می‌شود که بار q بیشتر از مرکز حلقه دور شود. پس اگر بار q را از مرکز حلقه دور کنیم، از آن دور خواهد شد در نتیجه، تعادل q در راستای شعاع ناپایدار است. بنابراین، گزینه‌های (ب) و (د) صحیح هستند. واضح است که بر این اساس گزینه (ه) نادرست است.

۶. حل. ■□□□

مطابق شکل ۱ـ۷۴، دو گلوله به دلیل این‌که بار الکتریکی مخالف هم دارند، یکدیگر را جذب می‌کنند و فنر را فشرده می‌کنند. وقتی فنری فشرده شود و طول آن کمتر از حالت عادی آن شود، به دو گلوله‌ی متصل به دو سر آن نیروی عکس‌العملی وارد می‌کند و در نتیجه بر هر گلوله دو نیروی مساوی و در جهت مخالف وارد می‌شود. چرا که بایستی در تعادل باشد. برای به‌دست آوردن نیروی الکتریکی F میان دو گلوله‌ی باردار، از قانون کولن استفاده می‌کنیم، طبق رابطه‌ی قانون کولن داریم:



(الف)

(ب)

شکل ۱-۷۴

$$|F| = k\frac{|q_۱ q_۲|}{l^۲}$$
$$= ۹ \times ۱۰^۹ \times \frac{۱۰^{-۶} \times ۱۰^{-۶}}{(\frac{۱۰}{۱۰۰})^۲} = ۰/۹\mathrm{N}$$

همچنین می‌دانیم که نیروی فنر با تغییر طول آن نسبت مستقیم دارد و ضریب این نسبت همان ثابت فنر است. پس داریم:

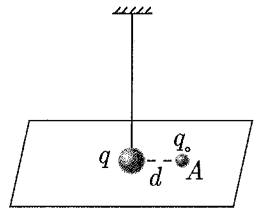
$$\Delta l = l - ۱۰$$
$$F = k\Delta l \ \Rightarrow\ \Delta l = \frac{F}{k} = \frac{۰/۹}{۱۰۰} = ۹ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{m} = ۰/۹\mathrm{cm}$$

پس l، که همان طول اولیه‌ی فنر است، به همین مقدار Δl بیشتر از طول فشرده شده‌ی فنر بوده است.

$$l = ۱۰ + ۰/۹ = ۱۰/۹\mathrm{cm}$$

که گزینه‌ی الف این نتیجه را می‌دهد.

۷. **حل.** مطابق شکل ۱ـ۷۵ هنگامی که بار نقطه‌ی $q_\circ$ را در نقطه‌ی مورد نظر A قرار دهیم، بار $q_\circ$ بر بار q نیرویی وارد می‌کند و باعث می‌شود بار q از جای خود منحرف شود و فاصله‌ی بار q تا نقطه‌ی A از آنچه قبل از قرار دادن بار q بوده، تغییر کند. اگر دو بار q و $q_\circ$ علامت‌های مشابه داشته باشند (یعنی هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشند)، همدیگر را دفع می‌کنند و در نتیجه ~~بار q از~~ نقطه‌ی A دور می‌شود. با تغییر فاصله‌ی q از نقطه‌ی A (یعنی d) میدان حاصل از آن در این نقطه تغییر می‌کند. با افزایش فاصله‌ی d، مقدار میدان کاهش می‌یابد. برعکس آن، برای حالتی که دو بار غیرهم‌نام هم‌علامت باشند، اتفاق می‌افتد، یعنی اگر یکی مثبت و دیگری منفی باشد (فرقی نمی‌کند کدام مثبت وکدام منفی باشد)، نیروی جاذبه‌ی بین دو بار، بار q را به نقطه‌ی A نزدیک می‌کند. کم شدن فاصله، و در نتیجه کاهش d، موجب افزایش میدان در نقطه‌ی A می‌شود.



شکل ۱-۷۵

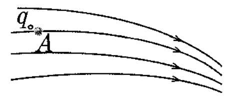
مطابق این توضیحات، گزینه‌های الف و ب، هر دو درست به نظر می‌رسند و هر دو جواب این مسئله هستند.

۸. **حل.** □□□■

مطابق شکل ۱ـ۷۶ وقتی بار $q_\circ$ در نقطه‌ی A از خطوط میدان الکتریکی قرار بگیرد، نیرویی الکتریکی بر آن وارد می‌شود. این نیرو برابر با حاصل‌ضرب بار $q_\circ$ در میدان آن نقطه، و راستای آن همان راستای خط میدان گذرنده از نقطه‌ی A خواهد شد.

شتابی که چنین ذره‌ای با بار $q_\circ$ و جرم m واقع در نقطه‌ی A با میدان $\vec{E}$ پیدا می‌کند، عبارتست از:

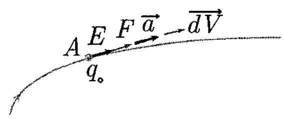
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q_\circ \vec{E}}{m}$$



شکل ۱-۷۶

می‌دانیم که شتاب، برابر با آهنگ تغییر سرعت بر زمان است. یعنی:

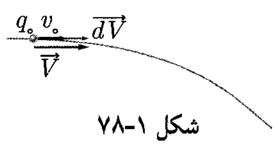
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$



شکل ۱-۷۷

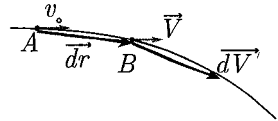
در نتیجه، بردار تغییر سرعت ذره‌ی باردار در نقطه‌ی A (یا $d\vec{v}$) نیز بر خط میدان در آن نقطه مماس خواهد بود (شکل ۱ـ۷۷). فرض کنید بار $q_\circ$ در یک لحظه‌ی خاص سرعت $v_\circ$ی را داراست که بر خط میدان آن نقطه مماس است. اگر بردار تغییر سرعت ذره در طول مدت زمان dt را $d\vec{v}$ بنامیم، طبق آنچه گفته شد، این $d\vec{v}$ هم بر خطوط میدان مماس است بنابراین سرعت ذره بعد از زمان dt همچنان بر خط میدان در نقطه‌ی A مماس خواهد بود (شکل ۱ـ۷۸).

$$\vec{v} = \vec{v}_\circ + d\vec{v}$$



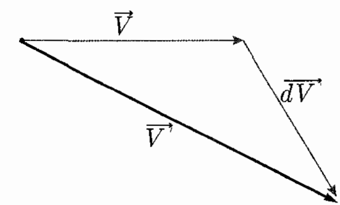
شکل ۱-۷۸

در این مدت زمان dt، ذره‌ی $q_\circ$ به اندازه‌ی $d\vec{r}$ جابه‌جا می‌شود و به نقطه‌ی جدید B می‌رسد (شکل ۱ـ۷۹) در نقطه‌ی جدید B، سرعت ذره ($\vec{v}$) دیگر بر خط میدان در نقطه‌ی B مماس نخواهد بود، چون همان راستای خط میدان نقطه‌ی A را دارد و این خط میدان ممکن است در B راستای دیگری داشته باشد. پس تغییر سرعت نقطه‌ی B در این نقطه (و یا $d\vec{v}$)، همان طور که گفته شد و در شکل نیز دیده می‌شود، مماس بر خط میدان در نقطه‌ی



شکل ۱-۷۹

جدید است و سرعت جدید v' را به آن می‌دهد که دیگر در راستای خط میدان نقطه‌ی B نیست (مطابق شکل ۱ـ۸۰ از جمع برداری $\vec{v}$ و $d\vec{v'}$، سرعت جدید $\vec{v'}$ به‌دست می‌آید). از آنجا که سرعت ذره در نقطه‌ی B برابر $\vec{v}$ است و جابه‌جایی با سرعت هم‌جهت است، در مدت dt بعد از حرکت ذره از نقطه‌ی B، ذره از خط میدان خارج می‌شود و خط میدان جدیدی از آن عبور خواهد کرد. پس گزینه‌ی (ب) که سرعت اولیه‌ی ذره‌ی باردار رامماس بر خطوط میدان در نظر گرفته است، نقض می‌شود. اگر همچنین نباشد و بار سرعت اولیه‌ای مماس بر خطوط میدان نداشته باشد، مانند آن است که بار از نقطه‌ی B شروع به حرکت کند، که همان طور که دیدیم در همان لحظه‌ی نخست، جابه‌جایی کوچک اولیه‌اش، آن را از خط میدان دور می‌کند. بنابراین، با هر نوعی از شرایط اولیه، بار بالاخره از خطوط میدان دور خواهد شد و گزینه‌ی (د) که هیچ شرایطی را برای ادامه‌ی حرکت ذره‌ی باردار روی خطوط میدان موجود نمی‌بیند، درست به نظر می‌رسد. در حالت کلی که خطوط میدان انحنا دارند، اگر بار A بخواهد در راستای خطوط میدان حرکت کند، نیازمند نیرویی عمود بر مسیر حرکت‌اش است که بتواند شتاب مرکزگرا (v^2/ρ) را تأمین کند. اما همان طور که می‌دانیم نیروی میدان در راستای میدان یعنی مماس بر مسیر حرکت ذره است. پس ذره به دلیل عدم وجود نیروی مرکزگرا از مسیر منحرف می‌شود پس صرف‌نظر از شرایط اولیه‌ی حرکت ذره نمی‌تواند روی خط میدان حرکت کند (مگر در حالتی که خطوط میدان مستقیم باشند). پس گزینه‌ی (د) صحیح می‌باشد.



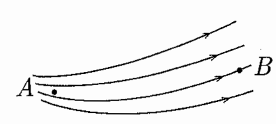
شکل ۱ـ۸۰

۹. حل. □□■□

همان طور که در بخش خطوط میدان گفته شد، در فضایی که میدان الکتریکی وجود دارد، خطوط میدان بر اساس قراردادهایی رسم می‌شوند، این قراردادها عبارتند از:

۱. در هر نقطه راستای میدان الکتریکی بر خط میدان در آن نقطه مماس است و میدان الکتریکی در جهت خط میدان قرار دارد.

۲. اگر سطحی به مساحت واحد بر سر راه خطوط میدان و عمود بر آنها قرار دهیم، هر چه میدان در نقطه‌ای قوی‌تر باشد، تعداد خطوطی که رسم می‌شوند تا از آن مساحت واحد بگذرند بیشتر است. این قرارداد، در شکل ۱ـ۸۱ میدان الکتریکی را برای نقطه‌ی A بیشتر از نقطه‌ی B اعلام می‌کند، چرا که خطوط میدان، خطوط حقیقی میدان نیستند که وجود یا عدم وجود میدان را در نقطه‌ای اعلام کنند. بلکه تنها خطوطی قراردادی هستند، بدین معنی که برای نقطه‌ای مانند نقطه‌ی A در شکل که بر روی هیچ خط میدانی واقع نشده است، تصور این‌که میدان الکتریکی صفر است تصور غلطی خواهد بود چرا که اگر قرار باشد از هر نقطه‌ای از فضا که میدان الکتریکی در آن وجود دارد، خطی رسم کنیم، باید تمام شکل را سیاه کنیم! چون در همه‌ی نقاط شکل میدان الکتریکی وجود دارد. باید توجه کنیم که خطوط میدان الکتریکی فقط «معیار»ی برای نمایش راستا و جهت و شدت و ضعف میدان در هر محدوده از فضا هستند و در نتیجه میدان یک نقطه‌ی مجزا مستقیماً با توجه به خطوط «گذرا از آن نقطه» قابل استنتاج نیست. بدین ترتیب، برای یافتن جهت اطلاعات میدان در نقطه‌ی A، از دو خط میدان مجاور آن استفاده می‌کنیم.

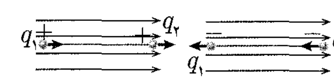


شکل ۱ـ۸۱

بنابراین توضیحات، میدان الکتریکی در نقطه‌ی A که در ناحیه‌ی فشرده‌تر خطوط میدان واقع است، بیشتر از نقطه‌ی B است و در نتیجه نیرویی که به بار واقع در نقطه‌ی A وارد می‌شود نیز بیشتر است.

۱۰. **حل.** گزینه‌های (الف)، (ج) و (هـ) صحیح هستند.

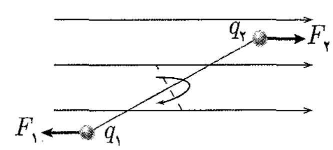
می‌دانیم که نیروی وارد بر بار مثبت در جهت میدان الکتریکی است و نیروی وارد بر بار منفی در خلاف جهت آن. فرض کنید بارهای q_1 و q_2 هم‌علامت باشند، یعنی هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشند. در این صورت، مطابق شکل ۱ـ۸۲، از آنجا که نیروی وارده بر هر دو بار در یک جهت است، برآیند نیروهای وارد بر مجموعه‌ی دو بار، صفر نخواهد شد و بدین ترتیب مجموعه در حال تعادل نخواهد بود، چه تعادل پایدار و چه ناپایدار. در حالت کلی تعادلی وجود نخواهد داشت. بنابراین توضیحات، گزینه‌های (ب) و (د) نادرست هستند و گزینه‌ی (هـ) درست است.



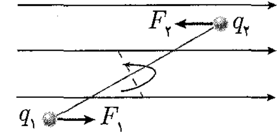
شکل ۱-۸۲

در شکل سؤال، از آنجا که فاصله‌ی همه‌ی خطوط میدان به یک اندازه است و خطوط میدان موازی و هم‌جهت هستند، میدان الکتریکی یکنواخت است و از آنجا که اندازه‌ی q_1 و q_2 با هم برابر است، اندازه‌ی نیروی وارد بر هر کدام نیز با دیگری برابر است. برای آن‌که مجموعه در حال تعادل باشد، بایستی برایند نیروهای وارد بر مجموعه‌ی دو بار صفر شود و صفر شدن برایند نیروها تنها هنگامی امکان‌پذیر می‌شود که دو نیرو در خلاف جهت هم وارد شوند، در نتیجه، بارهای q_1 و q_2 بایستی علامت مخالف هم داشته باشند.

برای بررسی پایداری ـ ناپایداری مجموعه، آن را حول محوری که از وسط آن می‌گذرد و بر میله عمود است، مطابق شکل ۱ـ۸۳ می‌چرخانیم. اگر مجموعه بعد از چرخانده شدن، تمایل داشته باشد که به حالت قبلی خود بازگردد، دارای تعادل پایدار است، و اگر تمایل نداشته باشد و برنگردد، دارای تعادل ناپایدار است. فرض کنید در شکل ۱ـ۸۳ q_1 منفی و q_2 مثبت باشد. همان طور که در شکل معلوم است، این دو نیرو می‌خواهند میله را در جهت عقربه‌های ساعت بگردانند. از آنجا که مجموعه را خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت چرخانده بودیم، ولی تمایل آن به چرخش در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است، بنابراین مجموعه تمایل به بازگشت به حالت قبلی خود دارد و در نتیجه در حالت تعادل پایدار است. پس گزینه‌ی (الف) صحیح است. ولی اگر مطابق شکل ۱ـ۸۴ علامت بارهای q_1 و q_2 را عکس حالت قبلی فرض کنیم، می‌بینیم که حالتی برعکس اتفاق می‌افتد. با وجود که همچنان مجموعه خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت چرخانده شده است، ولی تمایل مجموعه نیز به چرخش در همان جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است و در نتیجه نمی‌خواهد به حالت قبل خود بازگردد. از آنجا که دو نیروی F_1 و F_2 مطابق شکل در خلاف جهت هم وارد می‌شوند، سیستم در حال تعادل است، ولی از آنجا که با تغییر کوچکی در سیستم، تمایل به بازگشت به حالت تعادل در آن دیده نمی‌شود، بنابراین این تعادل، تعادل ناپایدار است. پس گزینه‌ی (ج) نیز صحیح است.



شکل ۱-۸۳ دو نیروی F_1 و F_2 می‌خواهند مجموعه را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بگردانند.

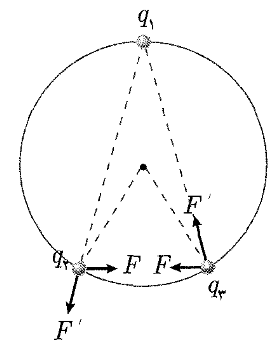


شکل ۱-۸۴ دو نیروی F_1 و F_2 می‌خواهند مجموعه را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت بگردانند.

۱۱. **حل.** □ □ ■ □

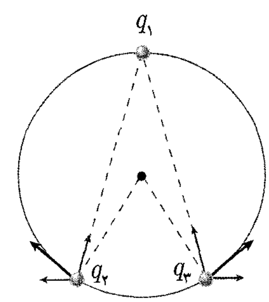
برای بررسی وضعیت مهره‌ها در حالت تعادل، حالت‌های مختلف نیروهای وارد بر مهره‌ها

را بررسی می‌کنیم. حالت تعادل وقتی برقرار می‌شود که برایند نیروهای وارد بر هر مهره، در راستای مماس بر دایره مؤلفه‌ای نداشته باشد، چرا که مؤلفه‌ی مماس بر دایره‌ی نیروی وارد بر هر مهره، با نیرویی مانند اصطکاک روبه‌رو نیست و موجب حرکت مهره‌ها بر روی حلقه خواهد شد. بیایید ابتدا فرض کنیم که دو بار $q_۲$ و $q_۳$ علامت مخالف هم داشته باشند (شکل ۱ـ۸۵). F، نیرویی که این دو بار به هم وارد می‌کنند، از نوع جاذبه خواهد بود. حال برای این‌که بدانیم $q_۱$ چه نیرویی به این دو بار وارد می‌کند، فرض کنید بار $q_۱$ با $q_۲$ همنام و در نتیجه با $q_۳$ ناهمنام است. در نتیجه $q_۲$ را دفع، و $q_۳$ را جذب خواهد کرد. حال اگر فرضی خلاف این فرض در نظر بگیریم، یعنی بار $q_۱$ را همنام با $q_۳$ و ناهمنام با $q_۲$ فرض کنیم. به نتیجه‌ای مشابه خواهیم رسید، یعنی $q_۱$، $q_۳$ را دفع و $q_۲$ را جذب خواهد کرد. در هر دو حالت، بررسی تعادل نیروهای وارد بر دو بار، وضعیت مشابهی داراست و تفاوتی برای ما ندارد؛ پس فرض اول را می‌گیریم و نیروی وارده از $q_۱$ به $q_۲$ و $q_۳$ را F' می‌نامیم (شکل ۱ـ۸۵) (توجه کنید که بنا به تقارن برای برقراری تعادل بار $q_۱$، مقدار دو بار $q_۲$ و $q_۳$ باید برابر باشد). اگر بخواهیم وضعیت تعادل دو بار $q_۲$ و $q_۳$ را بررسی کنیم، می‌بینیم که در حالتی که F و F' اندازه‌هایی مناسب داشته باشند، بار $q_۲$ «می‌تواند» مؤلفه‌ی مماس بر دایره نداشته باشد، ولی بار $q_۳$ (F و F' هر اندازه‌ای هم که داشته باشند) مؤلفه‌ی مماسی خواهد داشت. در نتیجه علامت مخالف بارهای $q_۲$ و $q_۳$، آنها را در وضعیت تعادلی مخالفی قرار می‌دهد. پس فرض اول، منجر به تعادل نمی‌شود. اگر مانند شکل ۱ـ۸۶ علامت $q_۲$ و $q_۳$ یکسان و مخالف با علامت بار $q_۱$ باشد. چنانچه از شکل مشخص است، هیچ یک از بارها در حالت تعادل نخواهند بود، چرا که برایند نیرو برای هیچ کدام از آن دو در راستای مماس بر دایره صفر نخواهد بود. در نتیجه، این فرض نیز منجر به تعادل نمی‌شود. حالت باقی‌مانده، حالتی است که در آن هر سه بار $q_۱$، $q_۲$ و $q_۳$ هم‌علامت باشند. مطابق شکل ۱ـ۸۷ دیده می‌شود که برای این‌که بار $q_۳$ در حالت تعادل باشد، چنین رابطه‌ای لازم است:



شکل ۱-۸۵

$$F\cos\beta = F'\cos\alpha$$

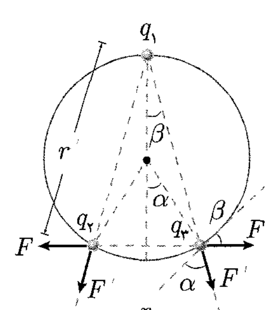


شکل ۱-۸۶

با توجه به شکل ۱ـ۸۷ پیداست که زاویه‌ی β کمتر از α است، پس F و F' چنین رابطه‌ای با هم دارند:

$$\beta < \alpha \;\Rightarrow\; \cos\beta > \cos\alpha \;\Rightarrow\; F < F'$$

اگر نامساوی $F < F'$ برقرار باشد، فرض ما برای علامت بارها برقرار خواهد بود. از آنجا که F نیرویی است که بار $q_۲$ به $q_۳$ وارد می‌کند و F' نیروی وارده از $q_۱$ بر $q_۳$ است، با توجه به این‌که مقدار بارهای $q_۲$ و $q_۳$ برابر است و فاصله‌ی بین دو بار $q_۲$ و $q_۳$ کمتر از فاصله‌ی بین $q_۱$ و $q_۳$ است. طبق قانون کولن داریم:



شکل ۱-۸۷

$$\begin{aligned} F &= k\frac{q_۲ q_۳}{r^۲} \\ F' &= k\frac{q_۱ q_۳}{r'^۲} \end{aligned} \quad (I) \qquad F' > F \;\; (II) \qquad r' > r \;\; (III)$$

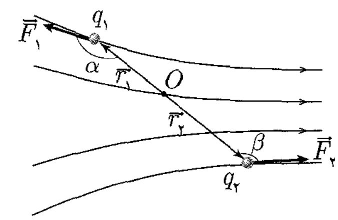
$$(I), (II), (III) \Rightarrow q_1 > q_2 \qquad (1)$$

$$(1), q_2 = q_3 \Rightarrow q_1 > q_3 \qquad (2)$$

بنابراین نتایج گزینه‌ی (ج) که بر هم‌علامت بودن سه بار، برابری دو بار q_2 و q_3، و بیشتر بودن مقدار q_1 از q_2 اشاره می‌کند، گزینه‌ی صحیح خواهد بود.

۱۲. حل. □■□□

در شکل ۱ـ۸۸، نیروهای وارده از طرف میدان الکتریکی موجود در محیط بر هر یک از دو بار نشان داده شده است. از آنجا که بار q_1 منفی است، نیروی وارده بر آن، F_1، در خلاف جهت میدان موجود در نقطه‌ی بار خواهد بود؛ برای بار مثبت q_2 نیز برعکس. همان طورکه در بخش مربوط به خطوط میدان گفته شد، چگالی خطوط میدان الکتریکی معیاری از اندازه آن است، در نتیجه در محل بار q_1، میدان بزرگ‌تری از محل بار q_2 وجود دارد. از آنجایی که طبق اطلاعات داده شده در مسئله، اندازه‌ی بار q_1 از اندازه‌ی بار q_2 بزرگ‌تر است ($|q_1| > |q_2|$)، نیروی وارده بر دو بار از طرف میدان حتی می‌تواند با هم برابر باشد. همان طورکه در شکل ۱ـ۸۸ دیده می‌شود، از آنجا که برایند دو نیرویی که در یک راستا قرار ندارند، هرگز صفر نیست، F ممکن نیست صفر باشد. پس گزینه‌های (ب) و (د) نادرست‌اند. در مورد گشتاور نیروهای وارده نسبت به وسط میله، یعنی همان τ، اگر گشتاور ناشی از هرکدام از نیروها را به طور مجزا بررسی کنیم، مطابق رابطه‌ی گشتاور ($\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$) داریم:



شکل ۱ـ۸۸

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$$

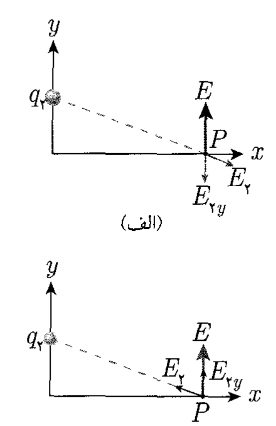
$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

اگر جهت $\vec{\tau}_1$ و $\vec{\tau}_2$ را با توجه به قانون دست راست به‌دست آوریم، هر دو را برون‌سو و به سمت خارج صفحه می‌یابیم. بنابراین برایند گشتاور نیروهای وارده نسبت به وسط میله، یا همان τ نیز هرگز صفر نخواهد شد. ($\tau \neq 0$)

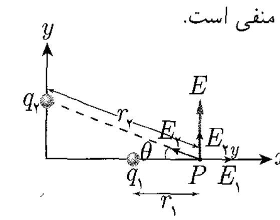
بنابراین گزینه‌ی (ب) صحیح خواهد بود.

۱۳. حل. گزینه‌ی «و» صحیح است.

همان طورکه در شکل مسئله دیده می‌شود، بار q_1 روی محور x قرار دارد، در نتیجه میدان حاصل از آن در نقطه‌ی P فقط در جهت x مؤلفه خواهد داشت. بنابراین برای بررسی میدان نقطه‌ی P، یعنی E، که فقط در جهت y مؤلفه دارد، به بررسی میدان حاصل از q_2 می‌پردازیم. مطابق شکل ۱ـ۸۹ مشخص است که بار q_2 باید مقداری منفی داشته باشد تا مؤلفه‌ای در جهت مثبت محور y بدهد ($q_2 < 0$). پیداست که E در راستای x مؤلفه‌ای ندارد. برای این‌که مؤلفه‌ی x میدان در نقطه‌ی P صفر شود، باید میدان حاصل از بار q_1، یعنی E_1، مؤلفه‌ی x میدان ناشی از q_2، یعنی E_2 را خنثی کند. همان طورکه در شکل ۱ـ۹۰ دیده می‌شود، برقراری رابطه فقط با مثبت بودن مقدار q_1 محقق می‌شود ($q_1 > 0$).



شکل ۱ـ۸۹ الف) q_2 مثبت است. ب) q_2 منفی است.



شکل ۱ـ۹۰

از آنجا که فاصله‌ی بار q_2 از نقطه‌ی P (یا r_2) بیشتر از فاصله‌ی بار q_1 از نقطه‌ی P (یعنی r_1) است، و اندازه‌ی E_{2x}، که مؤلفه‌ای از E_2 است (و کمتر از آن است) بایستی با

اندازه‌ی $E_۱$ برابر شود، طبق قانون کولن داریم:

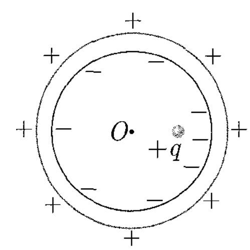
$$\begin{cases} E_{۲x} = E_۲ \cos\theta = k\dfrac{q_۲}{r_۲^۲}\cos\theta < k\dfrac{q_۲}{r_۲^۲} \\ E_۱ = k\dfrac{q_۱}{r_۱^۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_۲ > r_۱ \\ |E_۱| = |E_{۲x}| \end{cases} \Rightarrow \frac{|q_۲|}{r_۲^۲}\cos\theta = \frac{|q_۱|}{r_۱^۲} \Rightarrow |q_۲| > |q_۱|$$

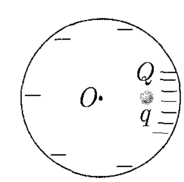
شرایط $q_۱ > ۰$، $q_۲ < ۰$ و $|q_۱| < |q_۲|$ با گزینه‌ی (و) هم‌خوانی دارد.

۱۴. حل. □■□ □□

از آنجا که علامت بار q جزء داده‌های مسئله نیست، بیایید آن را مثبت فرض کنیم. بار مثبت q بر سطح داخلی کره بار منفی القاء می‌کند و بارهای مثبت را به سطح خارجی کره‌ی رسانا می‌راند. مطابق شکل ۱ـ۹۱ چگالی بار در قسمت‌هایی از سطح درونی کره که به q نزدیک‌تر است، بیشتر و در نقاط دورتر کمتر است. اما همان طور که گفته شد، توزیع بار بر سطح بیرونی کره‌ی رسانا یکنواخت خواهد بود، چرا که رسانا هرگز خبری از توزیع بار در درون خود نمی‌دهد. در واقع می‌توان نشان داد که صفر بودن میدان در داخل پوسته‌ی کروی رسانا، موجب می‌شود که توزیع بار در درون آن اثری بر توزیع بار بیرونی‌اش نداشته باشد. یعنی می‌توان گفت توزیع یکنواخت بارهای مثبت بر سطح رسانا موجب می‌شود که کره مثل یک حفاظ بارهای درون خود را از تأثیر بارهای بیرونی حفظ کند. در نتیجه نیرویی که بر بار q وارد می‌شود، برایند نیروهای ناشی از بارهای القایی درون خود را از تأثیر بارهای بیرونی حفظ کند. در نتیجه نیرویی که بر بار q وارد می‌شود، برایند نیروهای ناشی از بارهای القایی سطح درونی پوسته خواهد بود، چرا که برایند نیروهای ناشی از بارهای مثبت سطح خارجی پوسته بر بار q ، به علت توزیع یکنواخت بر سطح صفر است. مطابق شکل ۱ـ۹۲، از آنجا که توزیع بارهای القا شده نسبت به خط واصل q به مرکز (O) متقارن است. نیروی برایند وارده بر بار q در راستای همین خط خواهد بود. از آنجا که بار q به قسمت چگال‌تر بارهای منفی نزدیک‌تر است، نیروی جاذبه‌ی این بخش بر نیروی جاذبه‌ی بخش کم چگال‌تر غلبه می‌کند و در نتیجه نیروی برایند در جهت راست تصویر (و در واقع به سمت خارج از کره) خواهد بود.



شکل ۱-۹۱

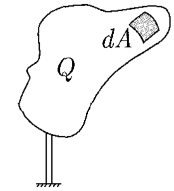


شکل ۱-۹۲

بنا بر این توضیحات، گزینه‌ی (ج) که نیرو را در راستای شعاع (OQ) و به سمت خارج از کره اعلام کرده است، پاسخ مسئله خواهد بود.

۱۵. حل. □■□□ □

مطابق شکل ۱ـ۹۳، یک پوسته‌ی فلزی اختیاری با بار Q در نظر می‌گیریم. قسمت کوچکی از این پوسته به مساحت dA که بار dQ روی آن است را در نظر می‌گیریم. بسته به مثبت یا منفی بودن بار Q، بردار میدان الکتریکی در نقاط روی این سطح به سمت خارج یا داخل پوسته خواهد بود. این میدان، به علت این‌که پوسته‌ی اختیار شده نامتقارن است، در هر نقطه مقداری متفاوت دارد و در واقع با چگالی سطحی بار در آن نقطه متناسب است.



شکل ۱-۹۳

از آنجا که چگالی سطحی بار با Q نسبت مستقیم دارد، می‌توان گفت که میدان الکتریکی در هر نقطه با کل بار Q متناسب است، همچنین نیرویی که بر dA وارد می‌شود، از رابطه‌ی $F = EdQ$ به‌دست می‌آید که نشان می‌دهد نیروی وارده با dQ متناسب است. از طرفی اگر σ چگالی بار در هر نقطه از پوسته را بدهد، داریم:

$$dQ = \sigma dA$$

همان طور که گفته شد، σ، چگالی بار، با کل بار Q متناسب است. بنابراین

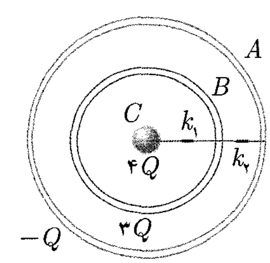
$$dQ \propto Q$$

و از آنجا که میدان هم متناسب با بار کل Q است، نیروی وارد بر dA از طرف پوسته‌ی فلزی، متناسب با $Q^{۲}$ خواهد بود:

$$\begin{cases} F \propto EQ \\ E \propto Q \end{cases} \Rightarrow F \propto Q^{۲}$$

در مورد جهت این نیرو، اگر بار Q را مثبت فرض کنیم، E به سمت خارج پوسته و dQ مثبت خواهد بود و با توجه به همان رابطه، باز هم نیرو در خلاف جهت میدان و به سمت بیرون پوسته خواهد بود. بنابراین گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۱۶. حل. □■□□

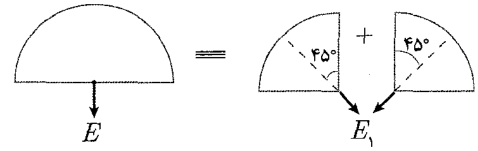


شکل ۱-۹۴

با بستن کلیدهای $k_۱$ و $k_۲$ (شکل ۱ـ۹۴)، کره‌ی فلزی C و دو پوسته‌ی کروی A و B به هم متصل می‌شوند و یک جسم رسانا را تشکیل می‌دهند که سطح خارجی آن پوسته‌ی کروی فلزی A است. می‌دانیم که هرگاه به یک جسم رسانا، مانند فلز، بار الکتریکی بدهیم، زمانی که بارها توزیع می‌شود و تعادل برقرار می‌شود، بار تنها بر پوسته‌ی خارجی جسم رسانا جمع می‌شود (در صورتی که هیچ بار و میدان خارجی وجود نداشته باشد). بنابراین بار کره‌ی فلزی C و پوسته‌ی فلزی B صفر می‌شود و مجموع بارها روی کره‌ی فلزی A جمع می‌شود. بنابراین

$$Q_B = ۰ \ , \ Q_C = ۰ \ , \ Q_A = -Q + ۳Q + ۴Q \Rightarrow Q_A = ۶Q$$

۱۷. حل. □■□□



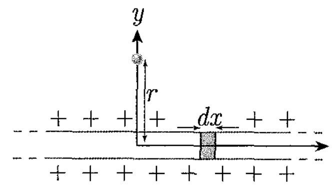
شکل ۱-۹۵

می‌دانیم که میدان ناشی از نیم‌دایره‌ای E است. فرض کنید که میدان ناشی از ربع دایره‌ای با همان شعاع و چگالی بار نیز در مرکز $E_۱$ باشد. میدان ناشی از نیم‌دایره در مرکز برابر است با مجموع میدان‌های ناشی از دو ربع دایره‌ی تشکیل دهنده‌اش. با توجه به این‌که چگالی بار یکنواخت است، پس میدان دو ربع دایره با هم برابرند و مقداری برابر با $E_۱$ دارند، همچنین در راستای میدان به دلیل یکنواختی بار، ربع دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، بنابراین مطابق شکل ۱ـ۹۵ زاویه‌ی مشخص شده ۴۵° است.

$$E = ۲E_۱ \cos ۴۵^\circ \Rightarrow E_۱ = \frac{E}{۲\cos ۴۵^\circ} = \frac{E}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}E$$

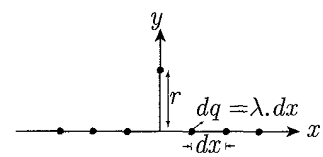
توجه کنید که در صورتی که چگالی بار یکنواخت نباشد، این رابطه برقرار نخواهد بود.

۱۸. **حل.** الف) از راهنمایی قسمت (الف) استفاده می‌کنیم. اگر روی میله جزء دیفرانسیلی‌هایی در راستای محور x با طول dx انتخاب کنیم، بار روی این جزء، $dq = \lambda dx$ است (شکل ۱ـ۹۶). این جزء دیفرانسیلی را می‌توانیم معادل با یک بار نقطه‌ای q که به فاصله‌ی x از مبدأ قرار دارد، بگیریم.



شکل ۱-۹۶

اگر این کار را برای کل میله انجام دهیم، به طوری که طول دیفرانسیلی dx را همه جا یکسان بگیریم، میله‌ی بالا تبدیل به آرایش باری مطابق شکل ۱ـ۹۷ می‌شود.



شکل ۱-۹۷

برای محاسبه‌ی میدان E حاصل از میله نارسانا، کافی است میدان حاصل از آرایش بار شکل ۱ـ۹۷ را به‌دست آوریم. برای این کار، بنا به تقارن شکل، میدان حاصل از بارهای واقع در جهت مثبت محور x را محاسبه می‌کنیم. مطابق شکل ۱ـ۹۸ داریم:

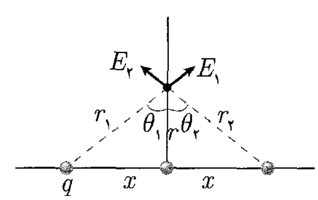
$$\theta_1 = \theta_2$$

$$r_1 = r_2$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} E_1 = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{dq}{r_1^2} \\ E_2 = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{dq}{r_2^2} \end{array} \Rightarrow E_1 = E_2$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ &= E_1 \sin\theta_1 \hat{i} + E_1 \cos\theta_1 \hat{j} - E_1 \sin\theta_2 \hat{i} + E_2 \cos\theta_2 \hat{j} \\ &= E_1(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\hat{i} + E_1(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\hat{j} \\ &= 2E_1 \cos\theta_1 \hat{j} \end{aligned}$$

بنابراین، میدان حاصل از این دو بار، در راستای محور y و به سمت بالا است. می‌دانیم که میدان ناشی از میله برابر است با مجموع میدان ناشی از هر یک از بارهای نقطه‌ای؛ این مجموع خود، با مجموع میدان‌های ناشی از زوج بارهای متقارن (مانند $\vec{E}$) برابر است. مشخص است که این برایند در جهت $\hat{j}$ خواهد بود.

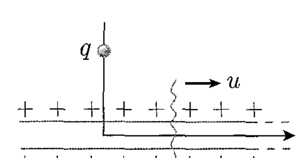


شکل ۱-۹۸

ب) نیروی الکتریکی وارد بر بار q ناشی از بارهای روی میله است که برابر است با حاصل‌ضرب میدان ناشی از این بارها در محل بار q، در مقدار بار q.

$$F_E = q_0 E = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

ج) برای این‌که جریان را مشخص کنیم، ابتدا باید یک مقطع عمود بر جریان (در اینجا سرعت میله) بزنیم و ببینیم که در بازه‌ی زمانی dt چقدر بار از آن مقطع عبور می‌کند.



شکل ۱-۹۹

$$dq = (u \cdot dt)(\lambda) = \lambda u dt$$

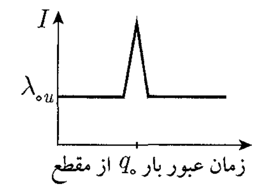
$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\lambda u dt}{dt} = \lambda u$$

(dq): بار عبوری از مقطع در بازه‌ی dt

$(u \cdot dt)$: طولی از میله که در این مدت از مقطع عبور می‌کند.

(λ): مقدار باری که در واحد طول میله قرار دارد.

اما در اینجا ما اثر بار q را در نظر نگرفته‌ایم. اثر آن به این گونه است که در مدت زمان بسیار کوچک dt، بار q از مقطع عبور می‌کند (که اگر بار q را واقعاً نقطه‌ای در نظر بگیریم، dt صفر خواهد شد). این باعث یک برش جدید در مقدار جریان می‌شود. نمودار تقریبی جریان چنین خواهد بود. (شکل ۱ـ۱۰۰)



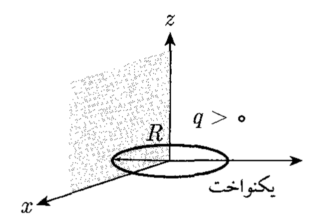
شکل ۱-۱۰۰

د)، ه)، و) و ز) چون هنوز مبحث مغناطیس مطرح نشده، حل این قسمت‌ها آورده نمی‌شود.

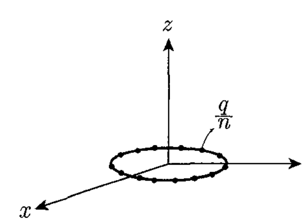
۱۹. حل. □■□□

نقطه‌ای که می‌خواهیم در آن جهت مؤلفه‌ی x میدان حلقه (E_x) را به‌دست آوریم. دارای مختصات $(x > \circ \ , \ z > \circ)$ است. یعنی این نقطه، یک نقطه‌ی دلخواه از صفحه‌ی مشخص شده (z^+ox^+) است.

حلقه را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. برای آن‌که قسمت‌ها کوچک و کوچک‌تر شوند، n را تا هر حد دلخواهی می‌توانیم زیاد کنیم. می‌دانیم که میدان ناشی از حلقه در یک نقطه برابر است با مجموع میدان‌های ناشی از هرکدام از این قسمت‌ها در آن نقطه. از طرفی، با توجه به آن‌که می‌توانیم هر قسمت را هر قدر که بخواهیم کوچک کنیم. پس می‌توانیم n را آنقدر زیاد کنیم که بتوانیم هر قسمت را معادل با یک بار نقطه‌ای به مقدار $\frac{q}{n}$ در نظر بگیریم. پس حالا، n بار نقطه‌ای داریم که روی یک حلقه به شعاع R به صورت یکنواخت پخش شده‌اند. (شکل ۱ـ۱۰۲)



شکل ۱-۱۰۱

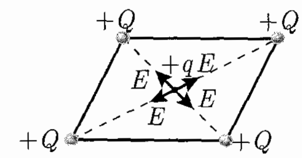


شکل ۱-۱۰۲

حال اگر در صفحه‌ی مورد نظر نقاطی را انتخاب کنیم که دارای x بسیار بزرگ‌تر از شعاع حلقه $(x \gg R)$ باشند، از آنجا که برای همه‌ی بارهای نقطه‌ای $x \gg R$ است، پس جهت E_x همواره مثبت خواهد بود. اما به ازای $\circ < x < R$، نمی‌توان به این سادگی اظهارنظر کرد، چرا که یک سری از بارها xهایی بزرگ‌تر از x نقطه‌ی مورد نظر و تعدادی از آنها هم xهایی کوچک‌تر از x آن نقطه دارند. پس این طریق بررسی، ما را به جواب مورد نظر نمی‌رساند. مشکل اینجاست که ما در این روش هیچ تأثیری از مقدار z را وارد مسئله نکرده‌ایم. اگر z را آنقدر زیاد کنیم که بتوان از R در مقابل z صرف‌نظر کرد $(z \gg R)$، در آن صورت، با توجه به یکنواختی و تقارن پخش بار حلقه، می‌توانیم آن را یک بار نقطه‌ای در مختصات $(\circ, \circ, \circ)$ در نظر بگیریم. در واقع رفتار حلقه در تولید میدان در نقاطی با z بی‌نهایت $(z \gg R)$، معادل رفتار یک بار نقطه‌ای هم بار با حلقه است که در مرکز حلقه قرارگرفته باشد اما می‌دانیم که اگر یک بار نقطه‌ای $q > \circ$ که در مبدأ قرار داشته باشد، جهت میدان E_x در نقاط $x > \circ$ همواره در جهت مثبت محور xهاست.

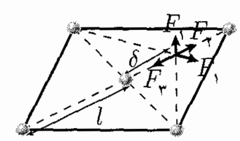
با توجه به این بیان‌ها، گزینه‌های (الف) و (ب) قطعاً رد می‌شوند. همچنین گزینه‌ی (د)، به ازای $z \gg R$ اشتباه می‌باشد، زیرا که به تمام zها اشاره می‌کند. بنابراین تنها گزینه‌ای که باقی می‌ماند، گزینه‌ی (ج) است که مورد نقضی ندارد (توجه شود که ما اثبات نکردیم بلکه صرفاً سایر گزینه‌ها را رد کردیم).

۲۰. حل. الف-۱) در مورد بار $+q$ که در مرکز مربع قرار دارد، و چهار بار $+Q$ در چهارگوشه‌ی مربع قرار دارند، مشخصاً نیروی برآیند نیروهایی که بر آن وارد می‌شود، صفر است؛ به عبارتی در حالت تعادل قرار دارد(شکل ۱-۱۰۳).



شکل ۱-۱۰۳

برای بررسی پایداری یا ناپایداری تعادل، بار $+q$ را به مقدار کم از نقطه‌ی تعادل‌اش، در راستاهای گفته شده منحرف می‌سازیم. همان طور که می‌دانید، اگر بار تمایل به برگشتن به حالت قبل خود داشته باشد، تعادل آن پایدار است و اگر چنین تمایلی نداشته باشد. تعادل آن ناپایدار خواهد بود. در حالتی که این جابه‌جایی کوچک در راستای قطر مربع باشد، نیروهای وارد بر بار کوچک $+q$ را در نظر می‌گیریم. مطابق شکل ۱-۱۰۴، اگر بار $+q$ به اندازه‌ی δ در امتداد قطر (۱) جابه‌جا شود، نیروهای وارد بر آن در جهت‌های نشان داده شده در شکل خواهد بود طبق تقارن دیده شده در شکل برایند نیروهای وارد بر بار $+q$ در راستای قطر (۱) قرار می‌گیرد. این برایند بر حسب زاویه‌ی جابه‌جا شده، برابر خواهد بود با:



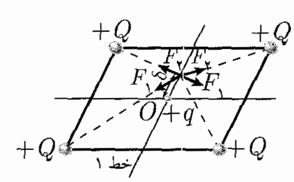
شکل ۱-۱۰۴

$$F_1 = k\frac{qQ}{(l^2+\delta^2)}\sin\alpha$$

$$F_2 = k\frac{qQ}{(l+\delta)^2} \quad , \quad \sin\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{L^2+\delta^2}}$$

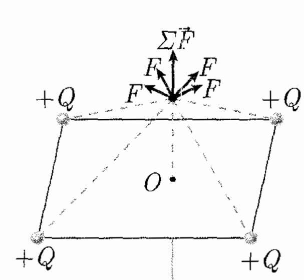
$$F_3 = k\frac{qQ}{(l-\delta)^2}$$

$$\begin{aligned} F &= 2F_1 + F_2 + F_3 \\ &= kqQ\left[\frac{2\delta}{(l^2+\delta^2)^{3/2}} + \frac{1}{(l+\delta)^2} + \frac{1}{(l-\delta)^2}\right] \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2\delta}{l^3}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\delta^2}{l^2} + \cdots\right) + \frac{1}{l^2}\left(1 - \frac{2\delta}{l} + \cdots\right)\right. \\ &\left. - \frac{1}{l^2}\left(1 + \frac{1\delta}{l} + \cdots\right)\right] \\ &\cong \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{2\delta}{l^3}\right) \end{aligned}$$



شکل ۱-۱۰۵

علامت منفی در رابطه‌ی اخیر نشانگر این است که این نیرو تمایل دارد که به حالت قبلی خود برگردد. بنابراین تعادل در امتداد این قطر پایدار است. حال راستای عمود بر ضلع‌ها را بررسی می‌کنیم. مطابق شکل ۱-۱۰۵ بار $+q$ را به اندازه‌ی δ در امتداد خط (۱) جابه‌جا می‌کنیم. نیروهای وارده بر بار $+q$ در شکل نشان داده شده‌اند. باز هم طبق تقارن، برایند نیروهای در امتداد خط (۱) خواهد بود. در این مورد، به دلیل تقارن موجود، بدون محاسبه‌ی نیروها، می‌توان گفت که چون فاصله‌ی دو بار $+Q$ که به بار $+q$ نزدیک‌تر هستند، از فاصله‌ی دو بار دورتر بیشتر است. برایند نیروها، به علت تقارن، مشخصاً در راستای خط (۱) و در جهت نشان داده شده در شکل خواهد بود. از جهت نیرو پیداست که می‌خواهد بار را به محل قبلی خود بازگرداند، یعنی در این حالت نیز تعادل پایدار است.

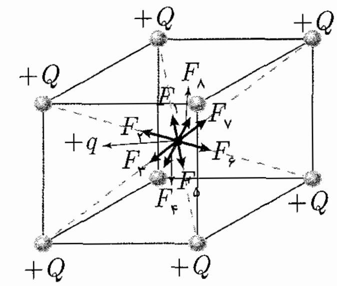


شکل ۱-۱۰۶

در نهایت در راستای عمود بر صفحه‌ی مربع، همان طور که از شکل ۱-۱۰۶ پیداست، اگر بار $+q$ را به اندازه‌ی δ از صفحه‌ی مربع خارج کنیم، نیروی ناشی از هر چهار بار $+Q$ در

همان امتداد حرکت بار $+q$ خواهد بود. در نتیجه نیروی برایندی در جهت حرکت داده شده به بار $+q$ وارد می‌شود و باعث دورتر شدن بار از محل جابه‌جا شده‌اش می‌شود. بنابراین تعادل در این راستا ناپایدار است.

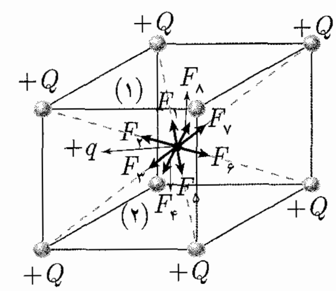
ب) در مورد هشت بار $+Q$ که در هشت گوشه‌ی یک مکعب قرار دارند، مطابق شکل ۱ـ۱۰۷ به علت وجود تقارن، برایند نیروهای وارده از طرف هشت بار بر بار $+q$ واقع در مرکز مکعب صفر است. برای بررسی تعادل پایدار یا ناپایدار بار $+q$، آن را به اندازه‌ی δ جابه‌جا می‌کنیم، ابتدا در راستای قطر. اگر بار را به سمت نشان داده شده در شکل ۱ـ۱۰۷ جابه‌جا کنیم، داریم:



شکل ۱-۱۰۷

$$F_1 > F_2$$
$$F_3 > F_4$$
$$F_5, F_6 > F_7, F_8$$

همان طور که از شکل ۱ـ۱۰۸ مشخص است. نیروهای F_1، F_3، F_5 و F_6 به ترتیب از نیروهای F_2، F_4، F_7 و F_8 بزرگ‌ترند و حاصل هرکدام از این جفت نیرو، نیرویی بازگرداننده است که می‌خواهد $+q$ را به حالت قبلی خود بازگرداند، در نتیجه تعادل در راستای قطر مکعب پایدار است.

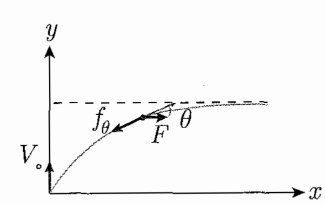


شکل ۱-۱۰۸

در مورد تعادل در راستای عمود بر وجه‌ها، شکل ۱ـ۱۰۸ را در نظر بگیرید. طبق این شکل، اگر بار $+q$ را به اندازه‌ی δ، در راستای محوری عمود بر وجه (۱) و (۲) جابه‌جا کنیم. چهار نیروی برابر (به علت تقارن موجود) که از بارهای نزدیک‌تر که فاصله‌ی کمتری دارند، ناشی می‌شوند، از چهار نیروی دورتر مقدار بیشتری خواهند داشت ($F_1 > F_2$). در نتیجه، حاصل برایند این نیروها نیروی بازگرداننده‌ای خواهد بود که می‌خواهد بار $+q$ را به حالت قبلی خود بازگرداند. پس در این راستا نیز بار $+q$ واقع در مرکز مکعب در حالت تعادل پایدار می‌باشد.

۲۱. حل. الف) مطابق شکل ۱ـ۱۰۹، نیروی الکتریکی F از طرف میدان الکتریکی E_0 و نیروی اصطکاک f به ذره وارد می‌شوند.

$$F = qE_0 = q\frac{\mu mg}{q} = \mu mg$$
$$f = \mu mg$$



شکل ۱-۱۰۹

همان طور که در شکل نشان داده شده است، نیروی الکتریکی F همواره در جهت مثبت محور x و نیروی اصطکاک همواره در خلاف جهت حرکت به ذره وارد می‌شود. از آنجا که نیروی اصطکاک مؤلفه‌ی عمودی در خلاف جهت محور y دارد، این مؤلفه در نهایت سرعت عمودی ذره را به صفر می‌رساند، و با توجه به برابر بودن مقدار F و f، ذره در نهایت به سرعت حدی ثابت در جهت محور x خواهد رسید. پس مسیر ذره به طور کیفی، مسیری مشابه شکل ۱ـ۱۰۹ خواهد بود.

ب) برای مؤلفه‌های x و y شتاب داریم:

$$a_x = F - f\cos\theta = \frac{\mu mg - \mu mg\cos\theta}{m}$$
$$= \mu g - \mu g\cos\theta = \mu g(۱ - \cos\theta) = ۲\mu g\sin^۲\frac{\theta}{۲}$$
$$a_y = \frac{F_y}{m} = -f\sin\theta = -\frac{\mu mg}{m}\sin\theta = -\mu g\sin\theta$$

و در مورد مؤلفه‌ی مماسی شتاب داریم:

$$a_t = \frac{F_t}{m} = \frac{۱}{m}(F\cos\theta - f) = \frac{۱}{m}(\mu mg\cos\theta - \mu mg)$$
$$= \mu g(\cos\theta - ۱) = -۲\mu g\sin^۲\frac{\theta}{۲}$$

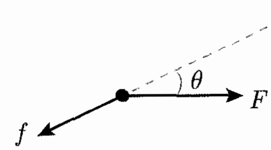
پ) برای به‌دست آوردن اندازه‌ی سرعت ذره، با توجه به این‌که در قسمت قبل، مقدار شتاب مماسی با مقدار شتاب در راستای x برابر بود و فقط علامت آن مخالف آن بود، می‌توانیم رابطه‌ای میان سرعت مماسی که همان سرعت کل است و سرعت در راستای x را به‌دست آوریم:

$$a_x = -a_t$$
$$v_x = -v + c$$

یعنی سرعت در راستای x که تصویری از سرعت کل است، در یک ثابت با $-v$ تفاوت دارد. در لحظه‌ی اول که $\theta = ۹۰^\circ$ است، داریم $v = v_\circ$. می‌توانیم از این داده به عنوان شرایط اولیه استفاده کنیم و ثابت انتگرال‌گیری (c) را به‌دست آوریم. داریم:

$$v_x = v\cos\theta \;\Rightarrow\; v\cos\theta = -v + c$$
$$\theta = ۹۰^\circ \;:\; v = v_\circ \;\Rightarrow\; \circ = v_\circ + c \;\Rightarrow\; v_\circ = c$$
$$\Rightarrow\; v\cos\theta = -v + v_\circ$$
$$v(۱ + \cos\theta) = v_\circ \;\Rightarrow\; v = \frac{v_\circ}{۱ + \cos\theta}$$

این رابطه، همان طور که مورد (پ) خواسته است، اندازه‌ی سرعت ذره را بر حسب θ محاسبه می‌کند. قسمت بعدی این مورد اندازه‌ی سرعت را در زمان‌های بزرگ می‌خواهد. همان طور که گفتیم، سرعت ذره در نهایت به سرعت حدی ثابت در جهت محور x خواهد رسید. بنابراین داریم:



شکل ۱-۱۱۰

$$t \to \infty \;:\; \theta \to \circ \;\Rightarrow\; v \to v_\circ/(۱ + \cos\theta) = \frac{v_\circ}{۲}$$

بنابراین سرعت ذره در زمان‌های بزرگ، با حضور نیروی اصطکاک و نیروی ناشی از میدان الکتریکی، نصف سرعت اولیه‌ی آن خواهد بود.

ت) برای پیدا کردن حداکثر مؤلفه‌ی y بردار مکان ذره، که طبق گفته‌ی سؤال L نامیده شده است، می‌توانیم از مؤلفه‌ی y بردار سرعت انتگرال بگیریم. برای یافتن این مؤلفه داریم:

$$a_y = -\mu g \sin\theta = -\frac{qE_\circ}{m}\sin\theta$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \rightarrow dv_y = a_y dt$$
$$\Rightarrow d(v\sin\theta) = -\frac{qE_\circ}{m}\sin\theta dt$$

طبق مورد پ، مقدار سرعت را بر حسب $v_\circ$، θ داریم:

$$v = \frac{v_\circ}{۱+\cos\theta}$$
$$\Rightarrow d\left(\frac{v_\circ}{۱+\cos\theta}\sin\theta\right) = -\frac{qE_\circ}{m}\sin\theta dt$$

با توجه به اتحاد زیر داریم:

$$\frac{\sin\theta}{۱+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{۲}$$
$$\Rightarrow v_\circ d\big(\tan\frac{\theta}{۲}\big) = -\frac{qE_\circ}{m}\sin\theta dt \qquad (۱)$$
$$\Rightarrow L = \int v_y dt = \int v\sin\theta dt$$
$$= \int_{\theta=\pi/۲}^{\theta=\circ} \frac{v_\circ}{۱+\cos\theta}\sin\theta dt$$

همان طورکه مشاهده می‌شود، اگر بتوانیم dt را بر حسب عبارتی مربوط به θ بنویسیم، می‌توانیم انتگرالی زاویه‌ای بگیریم. طبق رابطه‌ی (۱) می‌توانیم کل عبارت $\sin\theta dt$ را با معادل آن جایگزین کنیم. داریم:

$$(۱) \Rightarrow \sin\theta dt = -\frac{m}{qE_\circ}v_\circ d\left(\tan\frac{\theta}{۲}\right)$$
$$\Rightarrow L = \int_{\theta=\pi/۲}^{\theta=\circ} \frac{v_\circ}{۱+\cos\theta}\left[-\frac{m}{qE_\circ}v_\circ d\big(\tan\frac{\theta}{۲}\big)\right]$$
$$= -\frac{mv_\circ^۲}{qE_\circ}\int_{\pi/۲}^{\circ}\frac{d\big(\tan\frac{\theta}{۲}\big)}{۱+\cos\theta}$$
$$۱+\tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos\theta} = \frac{۲}{۱+\cos ۲\theta}$$
$$\Rightarrow L = -\frac{mv_\circ^۲}{qE_\circ}\int_{\pi/۲}^{\circ}\frac{۱}{۲}\left[۱+\tan^۲\frac{\theta}{۲}\right]d\big(\tan\frac{\theta}{۲}\big)$$

حال تابعی را بر حسب $\tan\frac{\theta}{۲}$ داریم که انتگرال‌گیری نیز بر حسب آن انجام می‌شود. پس به راحتی می‌توانیم تغییر متغیر بدهیم:

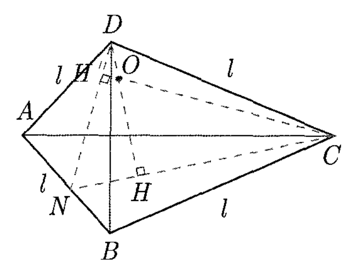
$$u = \tan\frac{\theta}{۲} \quad \begin{array}{l} \theta = \circ \Rightarrow u = \circ \\ \theta = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow u = ۱ \end{array}$$

$$\Rightarrow\ L = -\frac{mv_\circ^{\text{۲}}}{\text{۲}qE_\circ}\int_{\text{۱}}^{\circ}(\text{۱}+u^{\text{۲}})du$$
$$= \frac{mv_\circ^{\text{۲}}}{\text{۲}qE_\circ}\int_{\circ}^{\text{۱}}(u^{\text{۲}}+\text{۱})du$$
$$= \frac{mv_\circ^{\text{۲}}}{\text{۲}qE_\circ}\left[\frac{u^{\text{۳}}}{\text{۳}}+u\right]_\circ^{\text{۱}} = \frac{mv_\circ^{\text{۲}}}{\text{۲}qE_\circ}\left[\frac{\text{۱}}{\text{۳}}+\text{۱}\right]$$
$$\Rightarrow\ L = \frac{\text{۲}mv_\circ^{\text{۲}}}{\text{۳}qE_\circ}$$

بدین ترتیب، رابطه‌ای برای مقدار نهایی L به‌دست آمد.

۲۲. حل. همان طور که در شکل ۱ـ۱۱۱ نشان داده شده است، نقطه‌ی O مرکز هرم است و از تقاطع ارتفاع‌های هرم، DH و CH' به‌دست آمده است. از آنجا که هرم یک چهاروجهی منتظم است، بنا به تقارن، فاصله‌ی مرکز آن تا همه‌ی رئوس با هم برابر است. این فاصله $\frac{\text{۳}}{\text{۴}}$ ارتفاع است ($DO = \frac{\text{۳}}{\text{۴}}DH$).

از شکل ۱ـ۱۱۱ پیداست که در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $C\overset{\triangle}{H}D$، با وتر DC، داریم:



شکل ۱-۱۱۱

$$DC^{\text{۲}} = DH^{\text{۲}} + CH^{\text{۲}}$$
$$l^{\text{۲}} = CH^{\text{۲}} + DH^{\text{۲}}$$
$$CH = \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\times\sqrt{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}l$$
$$\Rightarrow\ DO = \frac{\text{۳}}{\text{۴}}\sqrt{l^{\text{۲}}-CH^{\text{۲}}}$$
$$= \frac{\text{۳}}{\text{۴}}\sqrt{l^{\text{۲}}-(\frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}}l)^{\text{۲}}} = \frac{\sqrt{\text{۶}}}{\text{۴}}l$$

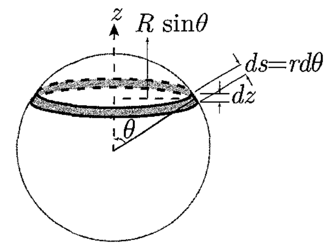
ابتدا فرض کنیم چهار بار q روی هر چهار رأس هرم قرار داشته باشند. در این حالت، بنا به تقارن، باید میدان در مرکز هرم صفر باشد. در نتیجه اگر یکی از بارها را برداریم، میدان ناشی از سه بار دیگر قبل از برداشتن آن بار، در خلاف جهت میدان ناشی از آن بوده است. در نتیجه کافی است تنها میدان ناشی از یک بار روی یک رأس چهاروجهی را محاسبه کنیم:

$$E = \frac{\text{۱}}{\text{۴}\pi\epsilon_\circ}\frac{q}{OD^{\text{۲}}} = \frac{\text{۱}}{\text{۴}\pi\epsilon_\circ}\frac{q}{(\sqrt{\text{۶}}/\text{۴}l)^{\text{۲}}} = \frac{\text{۲}q}{\text{۳}\pi\epsilon_\circ l^{\text{۲}}}$$

برای پیدا کردن جهت میدان ناشی از سه بار واقع در سه رأس A، B و C، معلوم است که این میدان در خلاف جهت میدان ناشی از بار چهارم واقع در رأس D خواهد بود. جهت میدان ناشی از این بار، در شکل ۱ـ۱۱۱ به سمت پایین است. در نتیجه، میدان برایند ناشی از سه بار به سمت بالا خواهد بود.

۲۳. حل. وقتی چگالی بار متناسب با θ است یعنی اگر چگالی بار σ باشد، σ تابعی است از $\cos\theta$ به شکل زیر:

$$\sigma = \sigma_\circ\cos\theta$$



شکل ۱-۱۱۲

بنابراین اگر مطابق شکل ۱ـ۱۱۲ حلقه‌ای در زاویه‌ی θ به ضخامت dz در نظر بگیریم، بار dq موجود بر سطح این حلقه برابر است با:

$$\begin{aligned} dq &= \sigma dA = (\sigma_\circ \cos\theta)(\text{۲}\pi R \sin\theta ds) \\ &= \text{۲}\pi\sigma_\circ R^\text{۲} \sin\theta\cos\theta d\theta \end{aligned}$$

با توجه به این‌که $\cos\theta$ در بازه‌ی $(\pi\,,\circ)$ قرارگرفته است و مقدار آن در بازه‌ی $(\circ\,,\frac{\pi}{\text{۲}})$ مثبت و در $(\frac{\pi}{\text{۲}}\,,\pi)$ منفی است، بنابراین برای هر θای، در زاویه‌ی $\pi - \theta$ متناظر با آن، کسینوس مقداری برابر ولی با علامت منفی خواهد داشت. بنابراین دو جزء سطح در دو مکان $R\cos\theta$ و $-R\cos\theta$ یک دوقطبی با بار dq و فاصله‌ی $\text{۲}R\cos\theta$ می‌سازند. اندازه‌ی معادل این دوقطبی برابر است با:

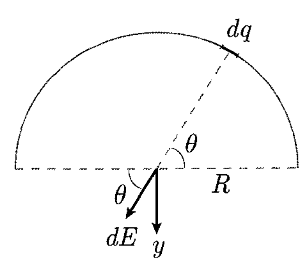
$$\begin{aligned} dP &= (\text{۲}\pi\sigma_\circ R^\text{۲} \sin\theta\cos\theta d\theta)(\text{۲}R\cos\theta) \\ &= \text{۴}\pi R^\text{۳}\sigma_\circ \sin\theta\cos^\text{۲}\theta d\theta \end{aligned}$$

بنابراین، اندازه‌ی دوقطبی الکتریکی معادل کل که آن را P می‌نامیم، به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} P &= \int_{\theta=\circ}^{\theta=\pi/\text{۲}} \text{۴}\pi R^\text{۳}\sigma_\circ \sin\theta\cos^\text{۲}\theta d\theta \\ &= \text{۴}\pi R^\text{۳}\sigma_\circ \int_\circ^{\pi/\text{۲}} \sin\theta\cos^\text{۲}\theta d\theta = \frac{\text{۴}}{\text{۳}}\pi R^\text{۳}\sigma_\circ \end{aligned}$$

با توجه به θای که در شکل نشان داده شده است، بارهای مثبت در zهای مثبت و بارهای منفی در zهای منفی قرار دارند و بنابراین جهت دوقطبی در جهت مثبت z است. بنابراین:

$$\vec{P} = \frac{\text{۴}}{\text{۳}}\pi R^\text{۳}\sigma_\circ \hat{k}$$



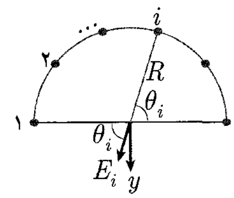
شکل ۱-۱۱۳

۲۴. حل. الف) نیم‌دایره‌ی مورد نظر در شکل ۱ـ۱۱۳ نشان داده شده است. این نیم‌دایره با بار پیوسته‌ی یکنواخت λ بر روی آن، میدان الکتریکی E را در مرکز خود ایجاد می‌کند. با در نظر گرفتن جزء بار و انتگرال‌گیری از جزء میدان‌ها، میدان مورد نظر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} dE &= \frac{\text{۱}}{\text{۴}\pi\epsilon_\circ}\frac{dq}{R^\text{۲}} \\ dE_y &= dE\sin\theta = \frac{\text{۱}}{\text{۴}\pi\epsilon_\circ}\frac{\lambda R d\theta}{R^\text{۲}}\sin\theta \\ \Rightarrow\ E_y &= \int_{\theta=\circ}^{\theta=\pi} dE_y = \int_\circ^\pi \frac{\text{۱}}{\text{۴}\pi\epsilon_\circ}\frac{\lambda R d\theta}{R^\text{۲}}\sin\theta \\ &= \frac{\lambda}{\text{۴}\pi\epsilon_\circ R}\int_\circ^\pi \sin\theta d\theta = \frac{\lambda}{\text{۴}\pi\epsilon_\circ R}(-\cos\pi + \cos\circ) = \frac{\lambda}{\text{۲}\pi\epsilon_\circ R} \end{aligned}$$

ب) توزیع بارگسسته را در چینشی از بارها مانند شکل ۱ـ۱۱۴ در نظر می‌گیریم. توزیع بارگسسته همان طورکه گفته شده است، به صورت الکترون‌هایی با بار e در فاصله‌ی a از هم بر روی نیم‌دایره است. میدان حاصل از الکترون iام در این توزیع برابر است با:

$$E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e}{R^2} \quad , \quad E_{y_i} = E_i \sin\theta_i$$



شکل ۱-۱۱۴

اگر الکترون‌ها را از شماره‌ی صفر تا N نام‌گذاری کنیم، با جمع مؤلفه‌ی عمودی میدان الکتریکی ناشی از این $(N+1)$ الکترون، از آنجا که تقارن در این نیم‌دایره به دلیل وجود بار متناظر برای هر بار برقرار است، داریم:

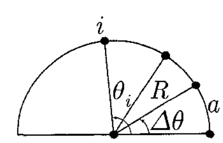
$$E'_y = \sum_{i=0}^{N} E_i \sin\theta_i$$

از آنجایی که فاصله‌ی دو بار از هم بر روی نیم‌دایره a است، بنابراین زاویه‌ی بین دو بار متوالی، که با $\Delta\theta$ نمایش داده می‌شود، در صورتی که $\Delta\theta$ به قدرکافی کوچک باشد تا بتوان a را یکی از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه با دو بار در دو رأس آن و وتر R در نظرگرفت، می‌توان $\Delta\theta$ را برابر با $\sin\Delta\theta$ فرض کرد. در اینجا، از آنجا که بایستی پاسخ نهایی بر حسب θ نباشد، مطمئناً حالت حدی کوچک $\frac{a}{R}$ مورد نظر بوده است و با این فرض به محاسبه‌ی میدان ادامه خواهیم داد. مطابق شکل ۱ـ۱۱۵ برای اندازه‌ی $\Delta\theta$ داریم:

$$\begin{aligned} &\Delta\theta \cong \sin\Delta\theta \\ &\sin\Delta\theta \cong \frac{a}{R} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta \cong \frac{a}{R}$$

$$\theta_i = i\Delta\theta = i\frac{a}{R}$$

با جایگذاری این مقدار θ_i در معادله‌ی مربوط به میدان داریم:



شکل ۱-۱۱۵

$$\begin{aligned} E'_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{R^2}\sum_{i=0}^{N}\sin(i\frac{a}{R}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{R^2}\left(0 + \sin\frac{a}{R} + \sin\frac{2a}{R} + \cdots + \sin\frac{Na}{R}\right) \end{aligned}$$

از طرفی، می‌دانیم که $N+1$ بار موجود بر روی نیم‌دایره، زاویه‌ی π آن را به N قسمت برابر تقسیم کرده‌اند. بنابراین N به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$N\Delta\theta = \pi$$

$$\Rightarrow N\frac{a}{R} = \pi \;\Rightarrow\; N = \frac{R\pi}{a}$$

با جایگذاری مقدار N و با استفاده از راهنمایی داده شده داریم:

$$E'_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e}{R^2} \cdot \frac{2\sin\left(\frac{N+1}{2}\cdot\frac{a}{R}\right)\sin\left(\frac{N}{2}\cdot\frac{a}{R}\right)\cos(\frac{a}{2R})}{\sin(\frac{a}{R})}$$

$$= \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ} \cdot \frac{e}{R^۲} \cdot \frac{۲\sin\left(\frac{\pi}{۲} + \frac{a}{۲R}\right)\sin(\frac{\pi}{۲})\cos(\frac{a}{۲R})}{\sin(\frac{a}{R})}$$

$$\Rightarrow\ E'_y = \frac{e}{۴\pi\epsilon_\circ R^۲} \cdot \cot(\frac{a}{۲R})$$

ج) برای به‌دست آوردن خطای نسبی برای مقادیر واقعی تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{a}{R}$، رابطه‌ی خطای نسبی را برای دو حالت الف و ب می‌نویسیم. اگر خطای نسبی η باشد، رابطه زیر آن را تعریف می‌کند:

$$\eta = \frac{E'_y - E_y}{E'_y} = ۱ - \frac{E_y}{E'_y} = ۱ - \frac{\frac{\lambda}{۲\pi\epsilon_\circ R}}{\frac{e}{۴\pi\epsilon_\circ R^۲} \cdot \cot\frac{a}{۲R}}$$

حال، برای این‌که رابطه‌ای میان مقدار بار الکتریکی در دو حالت برقرار کرده باشیم، مقدار کل بار را در هر دو حالت برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} \lambda(\pi R) = (N+۱)e \\ N = \frac{\pi R}{a} \end{cases} \Rightarrow\ \lambda = \frac{e}{a}\left(۱ + \frac{a}{\pi R}\right)$$

$$\Rightarrow\ \eta = ۱ - \frac{\frac{e}{a}\left(۱ + \frac{a}{\pi R}\right)}{\frac{e}{۲R}\cdot\cot(\frac{a}{۲R})}$$

$$= ۱ - \frac{۲R}{a}\left(۱ + \frac{a}{\pi R}\right)\tan(\frac{a}{۲R})$$

$$\cong ۱ - \frac{۲R}{a}\left(۱ + \frac{a}{\pi R}\right)(\frac{a}{۲R}) = -\frac{a}{\pi R}$$

$$\Rightarrow\ \text{خطای نسبی} \equiv |\eta| = \frac{a}{\pi R}$$

برای درک مرتبه این خطا، بیایید مقادیر نزدیک به واقعیت را در آن قرار دهیم اگر شعاع نیم‌دایره حدوداً $۱۰\,\mathrm{cm}$ در نظر گرفته شود و a به عنوان تخمینی از فاصله‌ی میان ذرات، در مرتبه‌ی آنگستروم و برابر با $۱\mathrm{A}^\circ$ فرض شود، خطا برابر است با:

$$|\eta| = \frac{a}{\pi R} = \frac{۱۰^{-۱۰}\mathrm{m}}{۱۰^{-۱}\mathrm{m} \times ۳/۱۴} \cong ۱۰^{-۱۰}\mathrm{m}$$

معلوم می‌شود که خطا نیز از مرتبه‌ی کوچک آنگستروم به‌دست می‌آید.

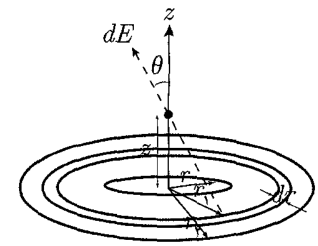
۲۵. حل. الف) برای محاسبه‌ی میدان الکتریکی بر روی محور تقارن قرص، شیاری از قرص را در شعاع r و به ضخامت dr در نظر می‌گیریم که بار dq دارد. این بار برابر است با:

$$dq = \sigma dA = \sigma(۲\pi r dr) = ۲\pi\sigma r dr$$

بنابراین میدان الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله‌ی z از مرکز قرص و در بالای آن عبارتست از:

$$E_z = \int_{r_۱}^{r_۲} \frac{kdq}{r'^۲}\cos\theta = \int_{r_۱}^{r_۲} \frac{۲\pi k\sigma r dr}{(r^۲+z^۲)^{۳/۲}} \cdot z$$

$$= \frac{\sigma z}{۲\epsilon_\circ}\left[\frac{۱}{\sqrt{z^۲ + r_۱^۲}} - \frac{۱}{\sqrt{z^۲ + r_۲^۲}}\right]$$



شکل ۱-۱۱۶

ب)

$$۱ : r_۱ \to ۰ \quad , \quad r_۲ \text{ محدود}$$

$$\Rightarrow E_{z_۱} = \lim_{r_۱ \to ۰} \frac{\sigma z}{۲\epsilon_۰}\left[\frac{۱}{\sqrt{z^۲ + r_۱^۲}} - \frac{۱}{\sqrt{z^۲ + r_۲^۲}}\right]$$

$$= \frac{\sigma z}{۲\epsilon_۰}\left[\frac{۱}{|z|} - \frac{۱}{\sqrt{z^۲ + r_۲^۲}}\right]$$

$$۲ : r_۲ \to \infty \quad , \quad r_۱ \text{ محدود}$$

$$\Rightarrow E_{z_۲} = \lim_{r_۲ \to \infty} \frac{\sigma z}{۲\epsilon_۰}\left[\frac{۱}{\sqrt{z^۲ + r_۱^۲}} - \frac{۱}{\sqrt{z^۲ + r_۲^۲}}\right]$$

$$= \frac{\sigma z}{۲\epsilon_۰\sqrt{z^۲ + r_۱^۲}}$$

$$۳ : r_۱ \to ۰ \quad , \quad r_۲ \to \infty$$

$$\Rightarrow E_{z_۳} = \lim_{\substack{r_۱ \to ۰ \\ r_۲ \to \infty}} \frac{\sigma z}{۲\epsilon_۰}\left[\frac{۱}{\sqrt{z^۲ + r_۱^۲}} - \frac{۱}{\sqrt{z^۲ + r_۱^۲}}\right]$$

$$= \frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}\frac{z}{|z|}$$

ج) وقتی جسمی به جرم m و بار منفی q که در فاصله‌ای بسیار نزدیک از صفحه‌ی قرص روی محور تقارن قرص حرکت می‌کند، تحت نیروی وارده از سوی میدان E_z در آن نقطه قرار می‌گیرد با بسط عبارت مربوط به میدان تا اولین مرتبه‌ی غیرصفر داریم:

$$E_z = \frac{\sigma z}{۲\epsilon_۰}\left[\frac{۱}{\sqrt{z^۲ + r_۱^۲}} - \frac{۱}{\sqrt{z^۲ + r_۲^۲}}\right]$$

$$= \frac{\sigma z}{۲\epsilon_۰}\left[\frac{۱}{r_۱}\left(۱ + \frac{z^۲}{r_۱^۲}\right)^{-۱/۲} - \frac{۱}{r_۲}\left(۱ + \frac{z^۲}{r_۲^۲}\right)^{-۱/۲}\right]$$

$$= \frac{\sigma z}{۲\epsilon_۰}\left[\frac{۱}{r_۱}\left(۱ - \frac{۱}{۲}\cdot\frac{z^۲}{r_۱^۲} + \cdots\right) - \frac{۱}{r_۲}\left(۱ - \frac{۱}{۲}\cdot\frac{z^۲}{r_۲^۲} + \cdots\right)\right]$$

با حفظ مرتبه‌ی اول غیرصفر داریم:

$$E_z = \frac{\sigma z}{۲\epsilon_۰}\left(\frac{۱}{r_۱} - \frac{۱}{r_۲}\right)$$

بنابراین، نیروی F وارد بر بار q عبارتست از:

$$F = qE_z = \frac{q\sigma}{۲\epsilon_۰}\left(\frac{۱}{r_۱} - \frac{۱}{r_۲}\right)z$$

$$= m\frac{d^۲ z}{dt^۲} = m\ddot{z} \Rightarrow \ddot{z} - \frac{q\sigma}{۲\epsilon_۰ m}\left(\frac{۱}{r_۱} - \frac{۱}{r_۲}\right)z = ۰$$

می‌دانیم که محاسبه‌ی ω، بسامد نوسان‌های یک جسم نوسانگر، با استفاده از معادله‌ی حرکت آن، به شکل زیر است:

$$\ddot{z}+\omega^{۲}z=۰$$

بنابراین، در مورد معادله‌ی حرکت به‌دست آمده، ω به راحتی محاسبه می‌شود.

$$\omega=\sqrt{-\frac{q\sigma}{۲\epsilon_۰ m}\left(\frac{۱}{r_۱}-\frac{۱}{r_۲}\right)}$$

۲۶. حل. الف) همان طورکه می‌دانید، میدان الکتریکی کمیتی برداری است و از اصل برهم‌نهی تبعیت می‌کند. بنابراین می‌توان میدان الکتریکی حاصل از هر یک از بارها را جداگانه محاسبه کرد و سپس جمع برداری کرد.

میدان ناشی از بار $q_۱$ در رأس خالی

$$\begin{aligned}\vec{E}_۱&=\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q_۱}{r_۱^۲}\hat{r}_۱\\&=\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q}{\left[(a^۲+a^۲+a^۲)^{۱/۲}\right]^۲}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\hat{x}+\frac{\sqrt{۳}}{۳}\hat{y}-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\hat{z}\right)\\&=\frac{q}{۴\pi\epsilon_۰}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۹a^۲}\hat{x}+\frac{\sqrt{۳}}{۹a^۲}\hat{y}-\frac{\sqrt{۳}}{۹a^۲}\hat{z}\right)\end{aligned}$$

$\hat{r}_۱$ از جمع سه مؤلفه‌ی $\hat{x}$، $\hat{y}$ و $\hat{z}$ به‌دست می‌آید و ضرایب $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ برای یکه کردن طول این بردار استفاده شده‌اند.

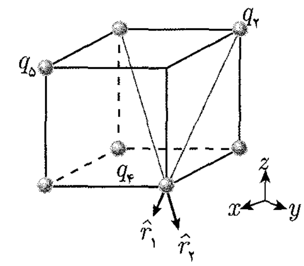
میدان ناشی از بار $q_۲$ در رأس خالی

$$\begin{aligned}\vec{E}_۲&=\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q_۲}{r_۲^۲}\hat{r}_۲\\&=\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q}{\left[(a^۲+a^۲)^{۱/۲}\right]^۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\hat{x}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\hat{z}\right)\\&=\frac{q}{۴\pi\epsilon_۰}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۴a^۲}\hat{x}-\frac{\sqrt{۲}}{۴a^۲}\hat{z}\right)\end{aligned}$$

$\hat{r}_۲$ نیز از جمع دو مؤلفه‌ی $\hat{x}$ و $\hat{z}$ به‌دست می‌آید و ضرایب $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برای یکه کردن طول آن استفاده شده‌اند (در شکل ۱ـ۱۱۷، $\hat{r}_۱$ و $\hat{r}_۲$ را مشاهده می‌نمایید).

همان گونه از شکل برمی‌آید، بارهای $q_۲$، $q_۴$ و $q_۵$، میدان‌های مشابهی در رأس خالی ایجاد می‌کنند، نیروهایی با مقدار برابر و جهت‌های متفاوت $\hat{r}_۲$، $\hat{r}_۴$ و $\hat{r}_۵$. بنابراین، با استفاده از این تشابه شکل نیروها، داریم:

$$\begin{aligned}\vec{E}_۴&=\frac{q}{۴\pi\epsilon_۰}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۴a^۲}\hat{x}+\frac{\sqrt{۲}}{۴a^۲}\hat{y}\right)\\\vec{E}_۵&=\frac{q}{۴\pi\epsilon_۰}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۴a^۲}\hat{y}-\frac{\sqrt{۲}}{۴a^۲}\hat{z}\right)\end{aligned}$$



شکل ۱-۱۱۷

برای بار $q_۶$ و پس از آن برای $q_۳$، $q_۶$ و $q_۷$ که وضعیتی مشابه با $q_۶$ دارند، داریم:

$$\vec{E}_۶=\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q_۶}{r_۶^۲}\hat{r}_۶=\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q}{a^۲}(-\hat{z})=\frac{q}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{(-\hat{z})}{a^۲}$$

$$\vec{E}_۷=\frac{q}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{(\hat{y})}{a^۲}$$

$$\vec{E}_۳=\frac{q}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{(\hat{x})}{a^۲}$$

حال این ۷ بردار را در نقطه‌ی خالی با هم جمع می‌کنیم.

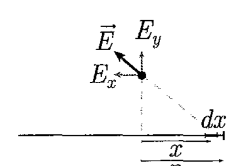
$$\begin{aligned}\vec{E}_T&=\vec{E}_۱+\vec{E}_۲+\vec{E}_۳+\vec{E}_۴+\vec{E}_۵+\vec{E}_۶+\vec{E}_۷\\&=\frac{q}{۴\pi\epsilon_۰}\Big[\left(\frac{\sqrt{۳}}{۹a^۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۴a^۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۴a^۲}+\frac{۱}{a^۲}\right)\hat{x}\\&\qquad+\left(\frac{\sqrt{۳}}{۹a^۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۴a^۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۴a^۲}+\frac{۱}{a^۲}\right)\hat{y}\\&\qquad+\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۹a^۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۴a^۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۴a^۲}-\frac{۱}{a^۲}\right)\hat{z}\Big]\\&=\frac{q}{۴\pi\epsilon_۰}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۹a^۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲a^۲}+\frac{۱}{a^۲}\right)(\hat{x}+\hat{y}-\hat{z})\end{aligned}$$

ب)

$$a=۰/۷\text{mm}$$

$$q=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\text{C}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ \vec{E}_T&=\frac{q}{۴\pi\epsilon_۰}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۹a^۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲a^۲}+\frac{۱}{a^۲}\right)(\hat{x}+\hat{y}-\hat{z})\\&=۱/۶\times۱۰^{-۱۲}\times۹\times۱۰^۹\\&\left(\frac{\sqrt{۳}}{۹\times۰/۷^۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲\times۰/۷^۲}+\frac{۱}{۰/۷^۲}\right)(\hat{x}+\hat{y}-\hat{z})\\&=۵۵/۸۲\times۱۰^{-۳}(\hat{x}+\hat{y}-\hat{z})\ \text{N/m}\\|\vec{E}_T|&=۹۶/۶۸\times۱۰^{-۳}\ \text{N/m}\end{aligned}$$



شکل ۱-۱۱۸

۲۷. حل. الف) برای حل این قسمت دو راه‌حل وجود دارد. در فصول آینده با حل این مسئله با استفاده از روش قانون گاؤس آشنا می‌شوید ولی اکنون با توجه به معلومات داده شده، از روش دیفرانسیل‌گیری برای حل این مسئله استفاده می‌کنیم. برای این کار، عنصر دیفرانسیلی کوچکی به طول dx را فرض می‌کنیم و با آن مانند یک بار نقطه‌ای با مقدار λdx رفتار می‌کنیم. مؤلفه‌های میدان در جهت x یکدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین میدان فقط در جهت y خواهد بود. داریم: (شکل ۱ـ۱۱۸)

$$\begin{aligned}E_y&=\int_۰^\infty\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{\lambda dx}{(a^۲+x^۲)}\frac{a}{\sqrt{a^۲+x^۲}}\\&=\frac{a\lambda}{۴\pi\epsilon_۰}\int_۰^\infty\frac{dx}{(a^۲+x^۲)^{۳/۲}}=\frac{\lambda}{۴\pi\epsilon_۰ a}\end{aligned}$$

از آنجاکه انتگرال در بازه‌ی ۰ تا بی‌نهایت انجام می‌پذیرد، میدان به‌دست آمده، مقدار مشابهی برای xهای منفی در این نقطه خواهد داشت و در نهایت، مقدار میدان، دو برابر E_y است.

$$E_\circ = E_y = \frac{۲\lambda}{۴\pi\epsilon_\circ a} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{۲\pi\epsilon_\circ a}\hat{y} = E_\circ \hat{y}$$

ب) باز هم از روش انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم. میدان در این حالت هم به خاطر وجود تقارن، تنها در جهت عمودی خواهد بود. داریم، (شکل ۱ـ۱۱۹)

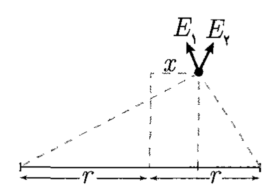
$$E_y = \int_\circ^r \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\frac{\lambda dx}{(x^۲+a^۲)}\frac{a}{(x^۲+a^۲)^{۱/۲}} = \int_\circ^r \frac{\lambda a}{۴\pi\epsilon_\circ}\frac{dx}{(x^۲+a^۲)^{۳/۲}}$$
$$= \frac{\lambda r}{۴\pi\epsilon_\circ a\sqrt{a^۲+r^۲}}$$

و همچون مورد قبل، این وضعیت برای $(-r,\circ)$ نیز برقرار است.

$$E_y = \frac{۲\lambda r}{۴\pi\epsilon_\circ a\sqrt{a^۲+r^۲}} \Rightarrow \vec{E} = \frac{۲\lambda r}{۴\pi\epsilon_\circ a\sqrt{a^۲+r^۲}}\hat{y}$$

$$\frac{E}{E_\circ} = \frac{\frac{۲\lambda r}{۴\pi\epsilon_\circ a\sqrt{a^۲+r^۲}}}{\frac{۲\lambda}{۴\pi\epsilon_\circ a}} = \frac{۱}{\sqrt{\frac{a^۲}{r^۲}+۱}} = \frac{۱}{\sqrt{\epsilon^۲+۱}} \cong ۱ - \frac{۱}{۲}\epsilon^۲$$

ج) سمت راست میله E_y منفی $(E_{y_۱})$ و سمت چپ میله E_y $(E_{y_۲})$ مثبت تولید می‌کند.



شکل ۱-۱۱۹

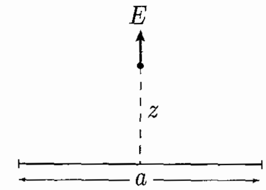
$$\text{سمت راست میله } E_{y_۱} = \frac{\lambda(r+x)}{۴\pi\epsilon_\circ a\sqrt{a^۲+r^۲+۲rx}}$$
$$= \frac{\lambda(r+x)}{۴\pi\epsilon_\circ ar\sqrt{\epsilon^۲+۱+۲\frac{x}{r}}}$$

با صرف نظر از جملات $\frac{x^۲}{r^۲}$ داریم:

$$E_{y_۱} \cong \frac{\lambda(r+x)}{۴\pi\epsilon_\circ ar}\left(۱-\frac{\epsilon^۲}{۲}-\frac{x}{r}\right)$$
$$E_{y_۲} = \frac{\lambda(r-x)}{۴\pi\epsilon_\circ a\sqrt{a^۲+r^۲-۲rx}} = \frac{\lambda(r-x)}{۴\pi\epsilon_\circ ar\sqrt{\epsilon^۲+۱-۲\frac{x}{r}}}$$

با صرف‌نظر از جملات $\frac{x^۲}{r^۲}$ داریم:

$$E_{y_۲} \cong \frac{\lambda(r-x)}{۴\pi\epsilon_\circ ar}\left(۱+\frac{\epsilon^۲}{۲}+\frac{x}{r}\right)$$
$$E_y = E_{y_۱}+E_{y_۲}$$
$$\cong \frac{۲\times\lambda r}{۴\pi\epsilon_\circ ar} - \frac{\lambda x\epsilon^۲}{۴\pi\epsilon_\circ ar}$$
$$= \frac{۲\lambda}{۴\pi\epsilon_\circ a} - \frac{\lambda\epsilon^۲}{۴\pi\epsilon_\circ a}\cdot\frac{x}{r}$$

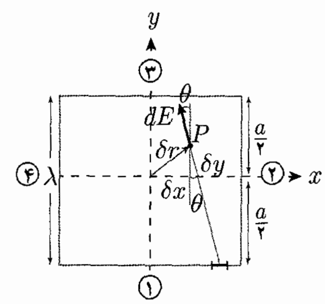


شکل ۱-۱۲۰

۲۸. حل. الف) در مسئله‌ی ۲۷، دیدیم که میدان الکتریکی برای یک میله‌ی باردار به طول a و به فاصله‌ی z از مرکز آن برابر است با:

$$E = \frac{\lambda \frac{a}{۲}}{۴\pi\epsilon_۰ z\sqrt{a^۲ + z^۲}}$$

اکنون با در نظرگرفتن یک جزء بار بر روی هر یک از ضلع‌های مربع، میدان ناشی از آن ضلع را به‌دست می‌آوریم. داریم:



شکل ۱-۱۲۱

$$(۱)\ :\ r^۲ = (x - \delta x)^۲ + (\frac{a}{۲} + \delta y)^۲$$

$$dq = \lambda dx$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{a}{۲} + \delta y}{\delta r}\ ,\ \sin\theta = \frac{x - \delta x}{r}$$

$$E_x = \frac{-۱}{۴\pi\epsilon_۰}\int \frac{dq}{r^۲}\sin\theta$$

$$E_y = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\int \frac{dq}{r^۲}\cos\theta \quad ,\quad -\frac{a}{۲} < x < \frac{a}{۲}$$

$$(۲)\ :\ r^۲ = (y - \delta y)^۲ + (\frac{a}{۲} - \delta x)^۲$$

$$dq = \lambda dy$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{a}{۲} - \delta x}{r}\ ,\ \sin\theta = \frac{y - \delta y}{r}$$

$$E_x = -\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\int \frac{dq}{r^۲}\cos\theta$$

$$E_y = -\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\int \frac{dq}{r^۲}\sin\theta \quad ,\quad -\frac{a}{۲} < y < \frac{a}{۲}$$

$$(۳)\ :\ r^۲ = (x - \delta x)^۲ + (\frac{a}{۲} - \delta y)^۲$$

$$dq = \lambda dx$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{a}{۲} - \delta y}{r}\ ,\ \sin\theta = \frac{x - \delta x}{r}$$

$$E_x = -\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\int \frac{dq}{r^۲}\sin\theta$$

$$E_y = -\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\int \frac{dq}{r^۲}\cos\theta$$

$$(۴)\ :\ r^۲ = (\frac{a}{۲} + \delta x)^۲ + (y - \delta y)^۲$$

$$dq = \lambda dy$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{a}{۲} + \delta x}{r}\ ,\ \sin\theta = \frac{y - \delta y}{r}$$

$$E_x = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\int \frac{dq}{r^۲}\cos\theta$$

$$E_y = -\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\int \frac{dq}{r^۲}\sin\theta$$

با استفاده از معادلات انتگرالی زیر و با فرض $|\delta\vec{r}| \ll a$، برایند میدان را در دو راستای x و y، جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$$\int \frac{dx}{(x^۲+z^۲)^{۳/۲}} = \frac{x}{z^۲\sqrt{x^۲+z^۲}}$$

$$\int \frac{xdx}{(x^۲+z^۲)^{۳/۲}} = -\frac{۱}{\sqrt{x^۲+z^۲}}$$

$$(۱)\ E_x = \lambda k \int_{-a/۲}^{a/۲} \frac{-(x-\delta x)dx}{\left[(x-\delta x)^۲ + (\frac{a}{۲}+\delta y)^۲\right]^{۳/۲}}$$

$$= -\lambda k \frac{۱}{\sqrt{(x-\delta x)^۲ + (\frac{a}{۲}+\delta y)^۲}}\Bigg|_{-a/۲}^{a/۲}$$

$$= -\frac{\lambda k}{a}\left(\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{\delta y-\delta x}{a}}} - \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{\delta y+\delta x}{a}}}\right)$$

$$E_y = \lambda k \int_{-a/۲}^{a/۲} \frac{(\frac{a}{۲}+\delta y)dx}{\left[(x-\delta x)^۲ + (\frac{a}{۲}+\delta y)^۲\right]^{۳/۲}}$$

$$= \lambda k(\frac{a}{۲}+\delta y)\frac{(x-\delta x)}{(\frac{a}{۲}+\delta y)^۲\sqrt{(x-\delta x)^۲ + (\frac{a}{۲}+\delta y)^۲}}\Bigg|_{-a/۲}^{a/۲}$$

$$= \frac{\lambda k}{(\frac{a}{۲}+\delta y)}\left(\frac{\frac{a}{۲}-\delta x}{\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{\delta y-\delta x}{a}}} - \frac{\frac{a}{۲}+\delta x}{\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{\delta y+\delta x}{a}}}\right)$$

$$(۲)\ E_x = \lambda k \int_{-a/۲}^{a/۲} \frac{-(\frac{a}{۲}-\delta x)dy}{\left[(y-\delta y)^۲ + (\frac{a}{۲}-\delta x)^۲\right]^{۳/۲}}$$

$$= \frac{-\lambda k}{(\frac{a}{۲}-\delta x)}\left(\frac{\frac{a}{۲}-\delta y}{\sqrt{\frac{۱}{۲}-\frac{\delta y+\delta x}{a}}} - \frac{\frac{a}{۲}+\delta y}{\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{\delta y-\delta x}{a}}}\right)$$

$$E_y = \lambda k \int_{-a/۲}^{a/۲} \frac{-(y-\delta y)dy}{\left[(y-\delta y)^۲ + (\frac{a}{۲}-\delta x)^۲\right]^{۳/۲}}$$

$$= \frac{-\lambda k}{a}\left(\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲}-\frac{\delta y+\delta x}{a}}} - \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{\delta y-\delta x}{a}}}\right)$$

$$(۳)\ E_x = \lambda k \int_{-a/۲}^{a/۲} \frac{-(x-\delta x)dx}{\left[(x-\delta x)^۲ + (\frac{a}{۲}-\delta y)^۲\right]^{۳/۲}}$$

$$= \frac{-\lambda k}{a}\left(\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲}-\frac{\delta x+\delta y}{a}}} - \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{\delta x-\delta y}{a}}}\right)$$

$$E_y = \lambda k \int_{-a/۲}^{a/۲} \frac{-(\frac{a}{۲}-\delta y)dx}{\left[(x-\delta x)^۲ + (\frac{a}{۲}-\delta y)^۲\right]^{۳/۲}}$$

$$= \frac{-\lambda k}{(\frac{a}{۲} - \delta y)} \left(\frac{\frac{a}{۲} - \delta x}{\sqrt{\frac{۱}{۲} - \frac{\delta x + \delta y}{a}}} - \frac{\frac{a}{۲} + \delta x}{\sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{\delta x - \delta y}{a}}} \right)$$

$$(۴)\ E_x = \lambda k \int_{-a/۲}^{a/۲} \frac{(\frac{a}{۲} + \delta x)dy}{\left[(\frac{a}{۲} + \delta x)^۲ + (y - \delta y)^۲\right]^{۳/۲}}$$

$$= \frac{\lambda k}{(\frac{a}{۲} + \delta x)} \left(\frac{\frac{a}{۲} - \delta y}{\sqrt{\frac{۱}{۲} - \frac{\delta y - \delta x}{a}}} - \frac{\mathrm{a}۲ + \delta y}{\sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{\delta y + \delta x}{a}}} \right)$$

$$E_y = \lambda k \int_{-a/۲}^{a/۲} \frac{-(y - \delta y)dy}{\left[(\frac{a}{۲} + \delta x)^۲ + (y - \delta y)^۲\right]^{۳/۲}}$$

$$= -\frac{\lambda k}{a} \left(\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲} - \frac{\delta y + \delta x}{a}}} - \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{\delta y - \delta x}{a}}} \right)$$

$$\Rightarrow E_x = E_{x_۱} + E_{x_۲} + E_{x_۳} + E_{x_۴}$$

$$E_x = -\frac{\lambda k}{a} \left(\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{\delta y - \delta x}{a}}} - \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{\delta y + \delta x}{a}}} \right.$$
$$\left. + \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲} - \frac{\delta x + \delta y}{a}}} - \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{\delta x - \delta y}{a}}} \right)$$
$$- \frac{\lambda k}{a(\frac{a}{۲} - \delta x)} \left(\frac{\frac{a}{۲} - \delta y}{\sqrt{\frac{۱}{۲} - \frac{\delta y + \delta x}{a}}} - \frac{\frac{a}{۲} + \delta y}{\sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{\delta y - \delta x}{a}}} \right)$$
$$+ \frac{\lambda k}{a(\frac{a}{۲} + \delta x)} \left(\frac{\frac{a}{۲} - \delta y}{\sqrt{\frac{۱}{۲} - \frac{\delta y - \delta x}{a}}} - \frac{\frac{a}{۲} + \delta y}{\sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{\delta y + \delta x}{a}}} \right)$$

با بسط مرتبه‌ی اول داریم:

$$E_x = \frac{-\sqrt{۲}\lambda k}{a^۲} \cdot \delta x$$

$$E_y = E_{y_۱} + E_{y_۲} + E_{y_۳} + E_{y_۴}$$

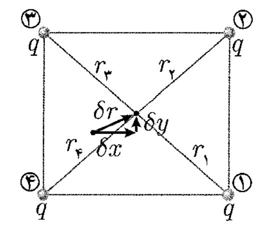
$$E_y = \frac{-\lambda k}{a} \left(\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲} - \frac{\delta y + \delta x}{a}}} - \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{\delta y - \delta x}{a}}} \right.$$
$$\left. + \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲} - \frac{\delta y + \delta x}{a}}} - \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{\delta y - \delta x}{a}}} \right)$$
$$- \frac{\lambda k}{a(\frac{a}{۲} - \delta y)} \left(\frac{\frac{a}{۲} - \delta x}{\sqrt{\frac{۱}{۲} - \frac{\delta x + \delta y}{a}}} - \frac{\frac{a}{۲} + \delta x}{\sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{\delta x - \delta y}{a}}} \right)$$

$$+\frac{\lambda k}{a(\frac{a}{۲}+\delta y)}\left(\frac{\frac{a}{۲}-\delta x}{\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{\delta y-\delta x}{a}}}-\frac{\frac{a}{۲}+\delta x}{\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{\delta y+\delta x}{a}}}\right)$$

با بسط مرتبه‌ی اول داریم:

$$E_y=-\frac{\sqrt{۲}\lambda k}{a^۲}\cdot\delta y$$

ب)



شکل ۱-۱۲۲

$$(۱)\ :\ r_۱^۲=(\frac{a}{۲}-\delta x)^۲+(\frac{a}{۲}+\delta y)^۲$$

$$\cos\theta=\frac{\frac{a}{۲}+\delta y}{r_۱}\quad,\quad\sin\theta=\frac{\frac{a}{۲}-\delta x}{r_۱}$$

$$E_x=-k\frac{q(\frac{a}{۲}-\delta x)}{r_۱^۳}\quad,\quad E_y=+k\frac{q(\frac{a}{۲}+\delta y)}{r_۱^۳}$$

$$(۲)\ :\ r_۲^۲=(\frac{a}{۲}-\delta y)^۲+(\frac{a}{۲}-\delta x)^۲$$

$$\cos\theta=\frac{\frac{a}{۲}-\delta x}{r_۲}\quad,\quad\sin\theta=\frac{\frac{a}{۲}-\delta y}{r_۲}$$

$$E_x=-k\frac{q(\frac{a}{۲}-\delta x)}{r_۲^۳}\quad,\quad E_y=-k\frac{q(\frac{a}{۲}-\delta y)}{r_۲^۳}$$

$$(۳)\ :\ r_۳^۲=(\frac{a}{۲}+\delta x)^۲+(\frac{a}{۲}-\delta y)^۲$$

$$\cos\theta=\frac{\frac{a}{۲}-\delta y}{r_۳}\quad,\quad\sin\theta=\frac{\frac{a}{۲}+\delta x}{r_۳}$$

$$E_x=k\frac{q(\frac{a}{۲}+\delta x)}{r_۳^۳}\quad,\quad E_y=-k\frac{q(\frac{a}{۲}-\delta y)}{r_۳^۳}$$

$$(۴)\ :\ r_۴^۲=(\frac{a}{۲}+\delta x)^۲+(\frac{a}{۲}+\delta y)^۲$$

$$\cos\theta=\frac{\frac{a}{۲}+\delta x}{r_۴}\quad,\quad\sin\theta=\frac{\frac{a}{۲}+\delta y}{r_۴}$$

$$E_x=k\frac{q(\frac{a}{۲}+\delta x)}{r_۴^۳}\quad,\quad E_y=k\frac{q(\frac{a}{۲}+\delta y)}{r_۴^۳}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E'_x&=E'_{x_۱}+E'_{x_۲}+E'_{x_۳}+E'_{x_۴}\\
&=kq\Big\{\frac{-(\frac{a}{۲}-\delta x)}{\left[(\frac{a}{۲}-\delta x)^۲+(\frac{a}{۲}+\delta y)^۲\right]^{۳/۲}}+\frac{-(\frac{a}{۲}-\delta x)}{\left[(\frac{a}{۲}-\delta y)^۲+(\frac{a}{۲}-\delta x)^۲\right]^{۳/۲}}\\
&\quad+\frac{(\frac{a}{۲}+\delta x)}{\left[(\frac{a}{۲}+\delta x)^۲+(\frac{a}{۲}-\delta y)^۲\right]^{۳/۲}}+\frac{(\frac{a}{۲}+\delta x)}{\left[(\frac{a}{۲}+\delta x)^۲+(\frac{a}{۲}+\delta y)^۲\right]^{۳/۲}}\Big\}\\
&=-k(\frac{a}{۲}-\delta x)\left(\frac{۱}{a^۳\sqrt{(\frac{۱}{۲}+\frac{\delta y-\delta x}{a})^۳}}+\frac{۱}{a^۳\sqrt{(\frac{۱}{۲}-\frac{\delta y+\delta x}{a})^۳}}\right)\\
&\quad+kq(\frac{a}{۲}+\delta x)\left(\frac{۱}{a^۳\sqrt{(\frac{۱}{۲}+\frac{\delta x-\delta y}{a})^۳}}+\frac{۱}{a^۳\sqrt{(\frac{۱}{۲}+\frac{\delta x+\delta y}{a})^۳}}\right)\\
&=\frac{۵\sqrt{۲}kq}{a^۳}\cdot\delta x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E'_y &= E'_{y_۱}+E'_{y_۲}+E'_{y_۳}+E'_{y_۴}\\
&= kq\Big\{\frac{(\frac{a}{۲}+\delta y)}{\left[(\frac{a}{۲}-\delta x)^۲+(\frac{a}{۲}+\delta y)^۲\right]^{۳/۲}}+\frac{-(\frac{a}{۲}-\delta y)}{\left[(\frac{a}{۲}-\delta y)^۲+(\frac{a}{۲}-\delta x)^۲\right]^{۳/۲}}\\
&\quad+\frac{-(\frac{a}{۲}-\delta y)}{\left[(\frac{a}{۲}+\delta x)^۲+(\frac{a}{۲}-\delta y)^۲\right]^{۳/۲}}+\frac{(\frac{a}{۲}+\delta y)}{\left[(\frac{a}{۲}+\delta x)^۲+(\frac{a}{۲}+\delta y)^۲\right]^{۳/۲}}\Big\}\\
&= kq(\frac{a}{۲}+\delta y)\left(\frac{۱}{a^۳\sqrt{(\frac{۱}{۲}+\frac{\delta y-\delta x}{a})^۳}}+\frac{۱}{a^۳\sqrt{(\frac{۱}{۲}+\frac{\delta y+\delta x}{a})^۳}}\right)\\
&\quad-kq(\frac{a}{۲}-\delta y)\left(\frac{۱}{a^۳\sqrt{(\frac{۱}{۲}-\frac{\delta y+\delta x}{a})^۳}}+\frac{۱}{a^۳\sqrt{(\frac{۱}{۲}+\frac{\delta x-\delta y}{a})^۳}}\right)\\
&= \frac{۵\sqrt{۲}kq}{a^۳}\cdot\delta y
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
E''_x &= E_x+E'_x\\
&= -\frac{\sqrt{۲}\lambda k}{a^۲}\delta x+\frac{۵\sqrt{۲}kq}{a^۳}\delta x=۰ \quad (I)\\
E''_y &= E_y+E'_y\\
&= \frac{-\sqrt{۲}\lambda k}{a^۲}\delta y+\frac{۵\sqrt{۲}ka}{a^۳}\delta y=۰ \quad (II)
\end{aligned}\right\}\xrightarrow{(I),(II)}\frac{۵q}{a^۳}\delta x=\frac{\lambda}{a^۲}\delta x
$$

$$\Rightarrow\ \frac{۵q}{a}=\lambda$$

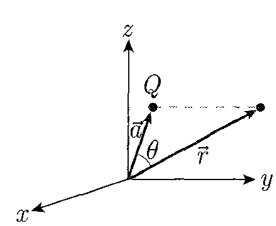
$$\Rightarrow\ \lambda=\frac{۵}{a}q$$

بنابراین چنین رابطه‌ای بایستی میان q و λ برقرار باشد تا میدان در نقطه‌ی P تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{\delta x}{a}$ و $\frac{\delta y}{a}$ و هر عبارتی از تفاضل و علاوه‌ی آنها که همین مرتبه‌ی کوچکی را داشته باشد، صفر شود.

۲۹. حل. الف) ابتدا قانون کولن را می‌نویسیم. می‌دانیم که میدان ناشی از بار نقطه‌ای Q در نقطه‌ای به مکان $\vec{r}$ عبارت است از:

$$\vec{E}=\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\cdot\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{a}|^۲}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{a}|}$$

برای این‌که بتوانیم $\vec{E}$ را تا مرتبه‌ی دوم نسبت به a بنویسیم باید $|\vec{r}-\vec{a}|^۲$ را به شکل جبری درآوریم:



شکل ۱-۱۲۳

$$
\begin{aligned}
|\vec{r}-\vec{a}|^۲ &= r^۲+a^۲-۲ar\cos\theta\\
&= r^۲\left(۱+(\frac{a}{r})^۲-۲\frac{a}{r}\cos\theta\right)\quad,\quad \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{a\cdot r}\\
\Rightarrow\ \vec{E} &= \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\cdot\frac{Q}{r^۲\left(۱+(\frac{a}{r})^۲-۲(\frac{a}{r})\cos\theta\right)}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{a}|} \qquad (۱)
\end{aligned}
$$

قسمت دوم: برای محاسبه‌ی میدان ناشی از حلقه در مکان $\vec{r}$، حلقه را به المان‌هایی به طول dl تقسیم می‌کنیم. هر کدام از این المان‌ها را می‌توانیم یک بار نقطه‌ای با بار $dq = \frac{Q}{۲\pi a}dl$ در نظر بگیریم. میدان ناشی از حلقه برابر خواهد بود با جمع برداری میدان‌های ناشی از این بارها در نقطه‌ی مورد نظر. در اینجا $\vec{a}$ بردار مکان المان مورد نظر و $\vec{r}$ بردار مکان نقطه‌ی مورد نظر است. همچنین $\frac{\pi}{۲} - \theta$ زاویه‌ی بین $\vec{r}$ و صفحه‌ی xoy است.

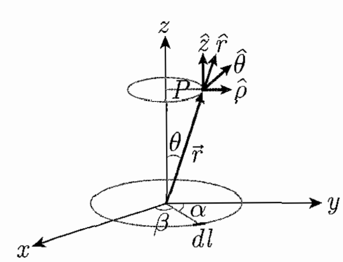
از معادله‌ی (۱) بخش (الف) استفاده می‌کنیم و مقدار $|\vec{r} - \vec{a}|$ را نیز جایگذاری می‌کنیم.

$$\overrightarrow{dE} = \frac{dq}{۴\pi\epsilon_{\circ} r^{۲}} \cdot \frac{۱}{\left(۱ + (\frac{a}{r})^{۲} - ۲(\frac{a}{r})\cos\varphi\right)} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{a}}{(r^{۲} + a^{۲} - ۲ar\cos\varphi)^{۱/۲}}$$
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{۴\pi\epsilon_{\circ} r^{۳}} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{a}}{\left(۱ + (\frac{a}{r})^{۲} - ۲(\frac{a}{r})\cos\theta\right)^{۳/۲}}$$

می‌خواهیم میدان را تا مرتبه‌ی دوم نسبت به a بنویسیم، یعنی $\frac{a}{r}$ را عبارت کوچکی فرض می‌کنیم و تا مرتبه‌ی دوم نسبت به $\frac{a}{r}$ جملات را حفظ می‌کنیم. داریم:

$$\left(۱ + (\frac{a}{r})^{۲} - ۲(\frac{a}{r})\cos\theta\right)^{۳/۲} = (۱ + t)^{n}$$
$$(۱ + t) \cong ۱ + nt + \frac{n(n-۱)}{۲}t^{۲}$$
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{۴\pi\epsilon_{\circ} r^{۳}}\left(۱ - \frac{۳}{۲}\left((\frac{a}{r})^{۲} - ۲(\frac{a}{r})\cos\theta\right) + \frac{۱۵}{۸}\left(-۲(\frac{a}{r})\cos\theta + (\frac{a}{r})^{۲}\right)^{۲}\right)(\vec{r} - \vec{a})$$

ب) مطابق شکل ۱ـ۱۲۴ حلقه‌ای باردار را در صفحه‌ی $z = \circ$ در نظر می‌گیریم که چگالی یکنواخت λ و بار کل Q دارد. مرکز آن مرکز مختصات و شعاع آن a است. می‌خواهیم میدان را در نقطه‌ی $\vec{r}$ و تا مرتبه‌ی دوم نسبت به $\frac{a}{r}$ به شکلی که نشان داده شده است بنویسیم.



شکل ۱-۱۲۴

$$dq = \lambda \cdot dl = \lambda a d\beta$$
$$\cos\varphi = \cos(\frac{\pi}{۲} - \theta)\cdot\cos(\frac{\pi}{۲} - \beta)$$
$$= \sin\theta \cdot \sin\beta \qquad (I)$$
$$\vec{r} = r\sin\theta\vec{j} + r\cos\theta\vec{k}$$
$$\vec{a} = a\cos\beta\vec{i} + a\sin\beta\vec{j}$$
$$\overrightarrow{dE} = \frac{dq}{۴\pi\epsilon_{\circ} r^{۳}}\left(۱ + ۳(\frac{a}{r})\sin\theta\cdot\sin\beta + \frac{۳}{۲}(\frac{a}{r})^{۲}(۵\sin^{۲}\theta\sin^{۲}\beta - ۱)\right)$$
$$(r\sin\theta\vec{j} + r\cos\theta\vec{k} - a\cos\beta\vec{i} - a\sin\beta\vec{j})$$
$$\overrightarrow{dE} = A(-a\cos\beta)\vec{i} + A(r\sin\theta - a\sin\beta)\vec{j} + Ar\cos\theta\vec{k}$$
$$A = \frac{\lambda a d\beta}{۴\pi\epsilon_{\circ} r^{۳}}\left(۱ + ۳(\frac{a}{r})\sin\theta\sin\beta + \frac{۳}{۲}(\frac{a}{r})^{۲}(۵\sin^{۲}\theta\sin^{۲}\beta - ۱)\right)$$

$$\hat{\theta} = -\hat{i}\ ,\ \hat{\rho} = \hat{j}\ ,\ \hat{k} = \hat{z}$$
$$\hat{r} = \sin\theta\hat{j} + \cos\theta\hat{k} = \sin\theta\hat{\rho} + \cos\theta\hat{z}$$

طبق تقارن موجود در حلقه، میدان آن در نقطه‌ی P در راستای $\hat{\theta}$ صفر می‌شود.

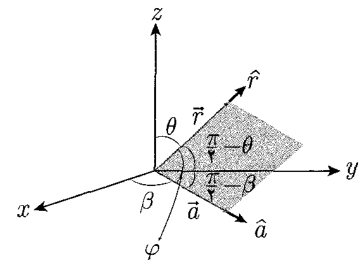
$$\vec{E} = ۲\int_۰^\pi A(r\sin\theta - a\sin\beta)\vec{j} + Ar\cos\theta\hat{k}$$
$$= ۲\int_۰^\pi \frac{\lambda a d\beta}{۴\pi\epsilon_۰ r^۳}\Big(۱ + ۳(\frac{a}{r})\sin\theta\cdot\sin\beta$$
$$+\frac{۳}{۲}(\frac{a}{r})^۲(۵\sin^۲\theta\sin^۲\beta - ۱)\Big)\left((r\sin\theta - a\sin\beta)\vec{j} + (r\cos\theta)\hat{k}\right)$$
$$\vec{E} = ۲\int_۰^\pi \frac{\lambda a}{۴\pi\epsilon_۰ r^۳}\Big(\Big[(r\sin\theta) + (۳a\sin^۲\theta)\sin\beta$$
$$+ (\frac{۱۵a^۲}{۲r}\sin^۳\theta)\sin^۲\beta - (\frac{۳a^۲\sin\theta}{۲r})$$
$$+ (-a)\sin\beta + (-\frac{۳a^۲}{r}\sin\theta)\sin^۲\beta$$
$$+ (\frac{۱۵a^۳}{۲r^۲}\sin^۲\theta)\sin^۳\beta - (\frac{۳a^۳}{۲r^۲}\sin\beta)\Big]\hat{\rho}$$
$$+ \Big[(r\cos\theta) + (\frac{۳}{۲}\sin ۲\theta)\sin\beta$$
$$+ (\frac{۱۵a^۲}{۲r}\sin^۲\theta\cos\theta)\sin^۲\beta - (\frac{۳a^۲}{۲r}\cos\theta)\Big]\hat{z}\Big)d\beta$$

می‌دانیم که

$$\int_۰^\pi d\beta = \pi\ ,\ \int_۰^\pi \sin\beta d\beta = ۲$$
$$\int_۰^\pi \sin^۲\beta d\beta = \frac{\pi}{۲}\ ,\ \int_۰^\pi \sin^۲\beta d\beta = \frac{۴}{۳}$$
$$\vec{E} = \frac{۲\lambda a}{۴\pi\epsilon_۰ r^۳}\Big[\pi(r\sin\theta) + ۲(۳a\sin^۲\theta)$$
$$+ (\frac{۱۵a^۲}{۲r}\sin^۳\theta)\frac{\pi}{۲} - (\frac{۳a^۲\sin\theta}{۲r})\pi + ۲(-a)$$
$$+ \frac{\pi}{۲}(-\frac{۳a^۲}{r}\sin\theta) + \frac{۴}{۳}(\frac{۱۵a^۳}{۲r^۲}\sin^۲\theta) - ۲(\frac{۳a^۳}{۲r^۲})\Big]\hat{\rho}$$
$$+ \frac{۲\lambda a}{۴\pi\epsilon_۰ r^۳}\Big[\pi(r\cos\theta) + ۲(\frac{۳}{۲}\sin ۲\theta)$$
$$+\frac{\pi}{۲}(\frac{۱۵a^۲}{۲r}\sin^۲\theta\cos\theta) - (\frac{۳a^۲}{۲r}\cos\theta)\pi\Big]\hat{z}$$
$$Q = ۲\lambda\pi a$$
$$\vec{E} = \frac{Q}{۴\pi\epsilon_۰ r^۳}\Big[r\sin\theta + \frac{۶a}{\pi}\sin^۲\theta + \frac{۱۵a^۲}{۴r}\sin^۳\theta - \frac{۳a^۲}{۲r}\sin\theta$$
$$- \frac{۲a}{\pi} - \frac{۳a^۲}{۲r}\sin\theta + ۱۰\frac{a^۳}{\pi r^۲}\sin^۲\theta - \frac{۳a^۳}{\pi r^۲}\Big]\hat{\rho}$$
$$+ \frac{Q}{۴\pi\epsilon_۰ r^۳}\Big[r\cos\theta + \frac{۳}{\pi}\sin ۲\theta + \frac{۱۵a^۲}{۴r}\sin^۲\theta\cos\theta - \frac{۳a^۲}{۲r}\cos\theta\Big]\hat{z}$$
$$\vec{E} = \frac{Q}{۴\pi\epsilon_۰ r^۳}(r\sin\theta\hat{\rho} + r\cos\theta\hat{z})$$

$$+\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\Big\{\frac{a}{r}\Big[\big(\frac{6}{\pi}\sin^2\theta-\frac{2}{\pi}\big)\hat{\rho}+\big(\frac{3}{\pi a}\sin 2\theta\big)\hat{z}\Big]$$
$$+\big(\frac{a}{r}\big)^2\Big[\big(\frac{15}{4}\sin^3\theta-3\sin\theta+\frac{10a}{\pi r}\sin^2\theta-\frac{3a}{\pi r}\big)\hat{\rho}$$
$$+\big(\frac{15}{4}\sin^2\theta\cos\theta-\frac{3}{2}\cos\theta\big)\hat{z}\Big]\Big\}$$

$$\Rightarrow f_1(\theta)=\frac{3}{\pi a}\sin 2\theta$$
$$f_2(\theta)=\frac{6}{\pi}\sin^2\theta-\frac{2}{\pi}$$
$$f_3(\theta)=\frac{15}{4}\sin^2\theta\cos\theta-\frac{3}{2}\cos\theta$$
$$f_4(\theta)=\frac{15}{4}\sin^3\theta-3\sin\theta+\frac{10a}{\pi r}\sin^2\theta-\frac{3a}{\pi r}$$



شکل ۱-۱۲۵

و بدین ترتیب موارد خواسته شده به‌دست می‌آید.

توجه داشته باشید که رابطه‌ای که تحت عنوان رابطه‌ی (I) در ابتدای حل قسمت (ب) استفاده شد، از طریق زیر به‌دست می‌آید:

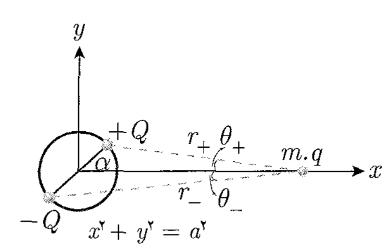
$$\cos\varphi=\hat{r}\cdot\hat{a}$$
$$\hat{r}=\sin\theta\vec{j}+\cos\theta\vec{k}$$
$$\hat{a}=\cos\beta\vec{i}+\sin\beta\vec{j}$$
$$\hat{r}\cdot\hat{a}=\sin\beta\cdot\sin\theta$$

۳۰. حل. الف) ابتدا مؤلفه‌ی افقی میدان ناشی از دو بار $+Q$ و $-Q$ در محل بار q (نقطه‌ی $(x,0,0)$) که به ترتیب در مکان‌های r_+ و r_- و زوایای θ_+ و θ_- قرارگرفته‌اند را به‌دست می‌آوریم:

$$E_x(x,0,0)=kQ\left(\frac{\cos\theta_+}{r_+^2}-\frac{\cos\theta_-}{r_-^2}\right)$$

از طرفی، در دو مثلثی که r_+ و r_- با شعاع دایره و محور افق (که با هم زاویه‌ی α می‌سازند) ایجاد کرده‌اند، با استفاده از قانون کسینوس‌ها داریم:

$$r_+^2=a^2+x^2-2ax\cos\alpha$$
$$r_-^2=a^2+x^2+2ax\cos\alpha$$



شکل ۱-۱۲۶

از طرفی رابطه‌ی کسینوس برای دو زاویه‌ی θ_+ و θ_- به ترتیب زیر است:

$$\cos\theta_+=\frac{x-a\cos\alpha}{r_+}$$
$$\cos\theta_-=\frac{x+a\cos\alpha}{r_-}$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطه‌ی میدان افقی در نقطه‌ی $(x,0,0)$ داریم:

$$E_x(x,0,0)=kQ\left[\frac{x-a\cos\alpha}{(a^2+x^2-2ax\cos\alpha)^{3/2}}-\frac{x+a\cos\alpha}{(a^2+x^2+2ax\cos\alpha)^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{kQ}{x^۲}\left[\frac{۱-\frac{a}{x}\cos\alpha}{\left(۱+(\frac{a}{x})^۲-۲(\frac{a}{x})\cos\alpha\right)^{۳/۲}}-\frac{۱+(\frac{a}{x})\cos\alpha}{\left(۱+(\frac{a}{x})^۲+۲(\frac{a}{x})\cos\alpha\right)^{۳/۲}}\right]$$

این عبارت، مؤلفه‌ی x میدان الکتریکی ناشی از بارهای $\pm Q$ را در نقطه‌ی $(x,\circ,\circ)$ می‌دهد.

ب) با فرض $a << x$، $۱ >> \frac{a}{x}$ خواهد بود. برای ساده کردن عبارت E_x، عبارات را بسط داده و تنها تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{a}{x}$ نگه می‌داریم:

$$E_x(x,\circ,\circ) \simeq \frac{kQ}{x^۲}\left[\frac{۱-(\frac{a}{x})\cos\alpha}{\left(۱-۲(\frac{a}{x})\cos\alpha\right)^{۳/۲}}-\frac{۱+(\frac{a}{x})\cos\alpha}{\left(۱+۲(\frac{a}{x})\cos\alpha\right)^{۳/۲}}\right]$$

از تقریب استفاده می‌کنیم. دیدیم که اگر $۱ >> \epsilon$ باشد، داریم:

$$(۱+\epsilon)^n \simeq ۱+n\epsilon$$
$$\Rightarrow E_x(x,\circ,\circ) \simeq \frac{kQ}{x^۲}\Big[\big(۱-(\frac{a}{x})\cos\alpha\big)\big(۱+۳(\frac{a}{x})\cos\alpha\big)$$
$$-\big(۱+\frac{a}{x}\cos\alpha\big)\big(۱-۳(\frac{a}{x})\cos\alpha\big)\Big]$$

جملات را در عبارت به‌دست آمده نیز بعد از ضرب کردن و بسط دادن، تنها تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{a}{x}$ حفظ می‌کنیم. داریم:

$$E_x(x,\circ,\circ) = \frac{kQ}{x^۲}\left[۴(\frac{a}{x})\cos\alpha\right] = \frac{۴kQ}{x^۲}(\frac{a}{x})\cos\alpha$$

از آنجا که تقریب و بسط انجام شده، جواب نهایی را صفر نکرد، بنابراین جمله‌ی به‌دست آمده تقریب قابل قبولی برای عبارت میدان است. به عبارت دیگر صفر نشدن پاسخ نهایی برای میدان، نشانی است که درستی تقریب انجام شده.

ج) برای نوشتن معادله‌ی دیفرانسیل حرکت ذره بر روی محور x، معادله‌ی نیرو را در راستای محور x می‌نویسیم:

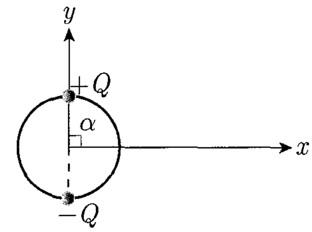
$$\sum F_x = ma_x$$

از آنجایی که تنها نیرویی که در راستای محور x بر بار نقطه‌ای اعمال می‌شود، نیروی ناشی از مؤلفه‌ی x میدان الکتریکی حاصل از دو بار نقطه‌ای است، با استفاده از عبارتی که در قسمت قبل برای میدان به‌دست آمده، معادله‌ی حرکت ذره را می‌نویسیم:

$$E_x \cdot q = ma_x = m\frac{d^۲x}{dt^۲}$$
$$\frac{۴kQq}{x^۲}(\frac{a}{x})\cos\alpha = m\frac{d^۲x}{dt^۲}$$

این عبارت معادله‌ی دیفرانسیل حرکت ذره بر روی محور x است. ولی برای به‌دست آوردن α مجهول، از شرایطی که دو ذره در لحظه‌ی نخست در آن واقع هستند، استفاده

می‌کنیم. می‌دانیم که در لحظه‌ی $t = 0$، مکان بار $+Q$ نقطه‌ی $(0, a, 0)$ و بار $-Q$ نقطه‌ی $(0, -a, 0)$ است. بنابراین مطابق شکل ۱ـ۱۲۷ مقدار α در لحظه‌ی اول $\frac{\pi}{2}$ است. برای این‌که α را به صورت تابعی از x بنوسیم، می‌دانیم که قطر دایره با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد و α را تغییر می‌دهد. داریم:



شکل ۱-۱۲۷

$$\begin{cases} t = 0 \ \rightarrow \ \alpha = \dfrac{\pi}{2} \\ \alpha = \omega t + \alpha_1 \end{cases} \quad \rightarrow \ \alpha = \omega t + \frac{\pi}{2}$$

بنابراین معادله‌ی دیفرانسیل حرکت ذره بر روی محور x در حالتی که $x >> a$ باشد، به شکل زیر کامل می‌شود:

$$\frac{4kQq}{x^2}\left(\frac{a}{x}\right)\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$\frac{-4kQq}{x^2}\left(\frac{a}{x}\right)\sin(\omega t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

۳۱. حل. الف) فرض کنیم که f در راستای ox است و در نتیجه fای که در معادلات آمده است، مؤلفه‌ی f اصلی در راستای ox است. معادله‌ی نیرو را در راستای میله‌ها می‌نویسیم:

$$\text{بار } q \ : \ \sum F = ma_+$$
$$f - \frac{kq^2}{[(x-x')^2 + b^2]} \cdot \frac{x - x'}{[(x-x')^2 + b^2]^{1/2}} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$\text{بار } -q \ : \ \sum F = ma_-$$
$$\frac{kq^2}{[(x-x')^2 + b^2]} \cdot \frac{x - x'}{[(x-x')^2 + b^2]^{1/2}} = m\frac{d^2x'}{dt^2}$$
$$\begin{cases} x - x' = u \\ x' \equiv X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (2X + u)/2 \\ x' = (2X - u)/2 \end{cases}$$
$$f - \frac{kq^2u}{(u^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}(2X + u) = m(\ddot{X} + \frac{\ddot{u}}{2})$$
$$\frac{kq^2u}{(u^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}(2X - u) = m(\ddot{X} - \frac{\ddot{u}}{2})$$

ب)

$$f = 0 \ \rightarrow \ -\frac{kq^2u}{(u^2 + b^2)^{3/2}} = m(\ddot{X} + \frac{\ddot{u}}{2})$$
$$\frac{kq^2u}{(u^2 + b^2)^{3/2}} = m(\ddot{X} - \frac{\ddot{u}}{2})$$

۳۲. حل. همان طورکه از صورت مسئله برمی‌آید، نیروی وارد بر الکترون بین هر دو برخورد، فقط ناشی از میدان الکتریکی بیرونی است. با توجه به این‌که فاصله‌ی بین هر دو برخورد، در ابعاد بسیار کوچکی در حدود میکرون می‌باشد، پس عملاً میدان الکتریکی بیرونی در این ناحیه

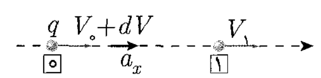
تغییر محسوسی نمی‌کند و می‌توانیم اندازه‌ی میدان را مطابق صورت سؤال ثابت و برابر E بگیریم.

الف) می‌دانیم مه زمان بین هر دو برخورد متوالی T می‌باشد و نیرویی که در این مدت بر الکترون وارد می‌شود، qE می‌باشد.

$$\sum F_x = ma_x \;\Rightarrow\; a_x = \frac{qE}{m}$$

این شتاب نیز در زمان بین دو برخورد متوالی (T) ثابت است. مطابق شکل ۱ـ۱۲۸، مبدأ بررسی الکترون، موقعیت آن پس از یک برخورد (که برخورد صفر نامیده شده است)، در نظر گرفته شده است که با سرعت $v_\circ + \Delta v$ حرکت می‌کند. سرعت این ذره درست پیش از برخورد بعدی (که با موقعیت ۱ نشان داده شده است)، با فرضی که در مورد ثابت بودن شتاب گرفته‌ایم، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} v_x &= a_x T + v_{\circ x} \\ v_۱ &= a_x T + v_\circ + \Delta v \\ &= \frac{qET}{m} + v_\circ + \Delta v \end{aligned}$$



شکل ۱-۱۲۸

ب) همان طورکه گفته شده است، در حضور میدان الکتریکی خارجی E در راستای x، زمان حرکت بین دو برخورد ثابت است و سرعت پیش از برخورد $\pm v_\circ + u$ به سرعت پس از برخورد $\mp v_\circ + \alpha u$ تبدیل می‌شود. با توجه به نتیجه‌ی قسمت قبل، سرعت ذره قبل از برخورد یک برابر با $\frac{qET}{m} + v_\circ + \Delta v$ به‌دست آمد. داریم:

$$\begin{aligned} v_۱ &= \frac{qET}{m} + v_\circ + \Delta v = v_\circ + u_۱ \\ \Rightarrow u_۱ &= \frac{qET}{m} + \Delta v \end{aligned}$$

اگر $v'_۱$ سرعت ذره پس از برخورد یک باشد، با استفاده از u به‌دست آمده داریم:

$$v'_۱ = -v_\circ + \alpha u_۱ = -v_\circ + \alpha\left(\frac{qET}{m} + \Delta v\right)$$

ج) برای برخورد یک تا برخورد دو، مانند قسمت اول عمل می‌کنیم و با توجه به شتاب، سرعت را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} v_x &= a_x t + v_{\circ x} \\ \Rightarrow\; v_۲ &= \frac{qE}{m}T + v'_۱ \\ &= -v_\circ + \alpha\Delta v + (\alpha + ۱)\left(\frac{qET}{m}\right) \end{aligned}$$

د) مطابق قسمت (ب)، در اینجا نیز سرعت $\pm v_\circ + u$ قبل از برخورد، بعد از برخورد به مقدار $\mp v_\circ + \alpha u$ می‌رسد. بنابراین سرعت پس از برخورد دوم بدین شکل خواهد بود:

$$v_۲ = -v_\circ + \alpha\Delta v + (\alpha + ۱)\left(\frac{qET}{m}\right)$$

$$= -v_{\circ} + u_{۲}$$
$$\Rightarrow \ u_{۲} = a\Delta v + (\alpha + ۱)(\frac{qET}{m})$$
$$v'_{۲} = v_{\circ} + \alpha u_{۲}$$
$$= v_{\circ} + \alpha^{۲}\Delta v + \alpha(\alpha + ۱)(\frac{qET}{m})$$

ه) سرعت الکترون بعد از برخورد دو، $v'_{۲}$ و بعد از برخورد صفر $v_{\circ} + \Delta v$ می‌باشد. داریم:

$$v'_{۲} = v_{\circ} + \Delta v$$
$$v_{\circ} + \alpha^{۲}\Delta v + \alpha(\alpha + ۱)(\frac{qET}{m}) = v_{\circ} + \Delta v$$
$$\Rightarrow \alpha(\alpha + ۱)(\frac{qET}{m}) = (۱ - \alpha^{۲})\Delta v$$
$$= (۱ + \alpha)(۱ - \alpha)\Delta v$$

حال دو حالت $\alpha = -۱$ و $\alpha \neq -۱$ را بررسی می‌کنیم.

$$\alpha \neq -۱ \ : \alpha(\frac{qET}{m}) = (۱ - \alpha)\Delta v$$
$$\Rightarrow \Delta v = \frac{\alpha}{۱ - \alpha}(\frac{qET}{m})$$
$$\alpha = -۱ \ : \alpha(\alpha + ۱)(\frac{qET}{m}) = (۱ + \alpha)(۱ - \alpha)\Delta v = \circ$$

این حالت به ازای هر Δvای برقرار است و در نتیجه Δv هر عدد دلخواهی می‌تواند باشد. در اینجا اگر کمی دقت کنیم متوجه می‌شویم که اگر $\alpha = -۱$ باشد، سرعت بعد از برخورد منفی سرعت قبل از برخورد می‌شود، که در واقع همان فرض مربوط به حالتی است که میدان خارجی وجود نداشته باشد.

و) برای محاسبه‌ی سرعت متوسط ذره می‌دانیم که باید جابه‌جایی ذره در حرکت از برخورد صفر به برخورد یک و از برخورد یک به برخورد دو را حساب کنیم و با هم جمع جبری کنیم.

در حرکت از برخورد صفر به برخورد یک، الکترون با سرعت $v_{\circ} + \Delta v$ از نقطه‌ی صفر شروع به حرکت می‌کند و دارای شتاب $\frac{qF}{m}$ است. مدت حرکت نیز T است. با استفاده از معادله‌ی مربوط به جابه‌جایی در حرکت شتابدار با شتاب ثابت داریم:

$$\Delta x_{۲} = \frac{۱}{۲}Axt^{۲} + v_{\circ}t$$
$$\Delta x_{۱} = \frac{۱}{۲}(\frac{qE}{m})T^{۲} + (v_{\circ} + \Delta v)T$$

در حرکت دوم یعنی از یک دو به، الکترون سرعت اولیه‌ای برابر با $v'_{۱}$ دارد و همان شتاب $\frac{qE}{m}$ را دارا می‌باشد. مدت این حرکت نیز T است.

$$\Delta x_{۱} = \frac{۱}{۲}(\frac{qE}{m})T^{۲} + v'_{۱}T$$

$$= \frac{۱}{۲}(\frac{qE}{m})T^{۲} + \left[-v_{\circ} + \alpha\left(\Delta v + \frac{qET}{m}\right)\right]T$$

$$\Rightarrow \Delta x_{\text{نهایی}} = \Delta x_{۱} + \Delta x_{۲}$$
$$= (۱+\alpha)(\frac{qE}{m})T^{۲} + (\alpha+۱)(\Delta v)T$$
$$= (۱+\alpha)\left(\frac{qET}{m} + \Delta v\right)T$$

همچنین مدت زمان حرکت از صفر تا دو نیز برابر $۲T$ می‌باشد. برای سرعت متوسط ذره از صفر تا دو داریم:

$$\overline{_{\circ}v_{۲}} = \frac{\Delta x_{\text{نهایی}}}{۲T} = \frac{۱}{۲}(۱+\alpha)\left(\frac{qET}{m} + \Delta v\right)$$

حال، دو حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول : $\alpha = -۱ \rightarrow \overline{_{\circ}v_{۲}} = \circ$ حالت بدون میدان خارجی

حالت دوم : $\alpha \neq -۱ \xrightarrow{\text{قسمت ه}} \overline{_{\circ}v_{۲}} = \frac{۱}{۲}(۱+\alpha)\left(\frac{qET}{m} + \frac{\alpha}{۱-\alpha}\cdot\frac{qET}{m}\right)$

$$\Rightarrow \overline{_{\circ}v_{۲}} = \left(\frac{۱+\alpha}{۱-\alpha}\right)\left(\frac{qET}{۲m}\right)$$

۳۳.حل. □■□□

نیروی الکتریکی از رابطه‌ی مقابل تبعیت می‌کند:

$$F_e = \frac{kqQ}{r^{۲}}$$

و نیروی گرانشی نیز از رابطه‌ی مشابهی به‌دست می‌آید که به نام قانون گرانش عمومی نیوتن شناخته می‌شود:

$$F_G = \frac{Gm_{۱}m_{۲}}{r^{۲}}$$

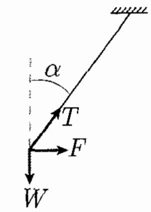
نسبت نیروی الکتریکی به نیروی گرانشی را برای دو الکترون به جرم m و بار e و فاصله‌ی r از یکدیگر به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{F_e}{F_G} = \frac{\frac{ke^{۲}}{r^{۲}}}{\frac{Gm^{۲}}{r^{۲}}} = \frac{ke^{۲}}{Gm^{۲}} = \frac{۹/\circ \times ۱\circ^{۹} \times ۱/۶^{۲} \times ۱\circ^{-۳۸}}{۶/۷ \times ۱\circ^{-۱۱} \times ۹/۱^{۲} \times ۱\circ^{-۶۲}}$$

دقت کنید که در این مرحله تقریب مورد نظر است و نیازی به محاسبه‌ی عبارت بالا در ماشین‌حساب نیست چراکه چنین سؤالاتی در تأمین زمان کافی پاسخ به دیگر سؤالات زمان‌بر نقش به سزایی ایفا می‌کنند و بهتر است آنها را کاملاً به صورت تخمینی پاسخ دهید. تخمین را به این صورت انجام می‌دهیم: اعداد نزدیک به ۱۰ برابر آن در نظرگرفته می‌شوند و اعداد نزدیک به ۱ برابر ۱. توان‌های ۱۰ در صدر توجه واقع می‌شوند. به این صورت:

$$\frac{F_e}{F_G} = \frac{۱\circ \times ۱\circ^{۹} \times ۵ \times ۱\circ^{-۳۸}}{۱\circ \times ۱\circ^{-۱۱} \times ۱\circ^{۲} \times ۱\circ^{-۶۲}} = \frac{۱\circ^{-۲۸}}{۲ \times ۱\circ^{-۷۱}} = \circ/۵ \times ۱\circ^{۴۳} \simeq ۱\circ^{۴۲}$$

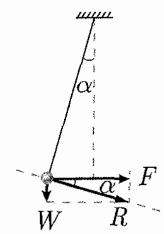
مشاهده می‌شود که این مقدار درگزینه‌ی (ب) قرار داده شده است. حتی اگر شما دست بالا تخمین زده باشید، و تمامی مقادیر صورت (۹ و ۱٫۶^{۲}) را با مقدار بیشتر و مقادیر مخرج (۹٫۱^{۲} و ۶٫۷) را با مقادیر کمتر از خودشان تخمین زده باشید، در بدترین حالت به ضریبی از ۱۰^{۴۴} می‌رسید. در این حالت شما باید همچنان گزینه‌ی (ب) را علامت بزنید. چرا که با تخمین دست بالایی که در نظر گرفته‌اید، مقدار هنوز به گزینه‌ی (الف) که در درجه‌ی بعدی انتخاب قرار گرفته است، نرسیده است. بنابراین گزینه‌ی (ب) صحیح است.



شکل ۱-۱۲۹

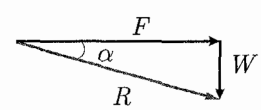
۳۴. حل. □■□□

در شکل، نیروهای وارد بر آونگ نشان داده شده است. در زاویه‌ی α نخ آونگ کشیده شده است و آونگ ساکن است با رها شدن آونگ گلوله روی خط راست حرکت می‌کند. حرکت روی خط راست به معنی این است که یا نیروهای وارد بر آونگ در مسیر حرکتش صفر شده‌اند (و صفر مانده‌اند) که ممکن نیست، چرا که با تغییر زاویه، جهت نیروی نخ (T) تغییر می‌کند و صفر ماندن برایند نیروها امر ممکنی نیست. معنی حرکت روی خط راست می‌تواند این باشد که نیروی نخ صفر شده است و آونگ در مسیر برایند نیروهای F و W حرکت می‌کند. برای برقراری این حالت آونگ باید بتواند در مسیر خط راست حرکت کند. این مسیر که همان راستای عمود بر نخ است باید هم‌راستا با برایند نیروهای وزن و الکتریکی وارد بر آونگ باشد. بنابراین زاویه‌ی α وقتی به نسبت مشخص این دو نیرو می‌رسد، آونگ شُل می‌شود. بنابراین زاویه‌ی α باید از قبل بیشتر از این مقدار می‌بود.



شکل ۱-۱۳۰

$$\tan\alpha = \frac{mg}{qE} \ \Rightarrow \ \alpha > \tan^{-1}\left(\frac{mg}{qE}\right)$$



شکل ۱-۱۳۱

بنابراین گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۲

قانون گاؤس

مقدمه

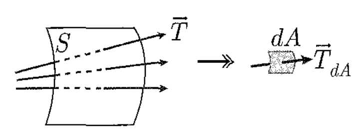
در فصل قبل با مفهوم بار الکتریکی و میدان آشنا شدیم و توانستیم میدان الکتریکی ناشی از توزیع بارهای نسبتاً ساده را به‌دست آوردیم که این کار با قانون کولن ممکن بود. همان‌طور که احتمالاً دقت کردید، حتی یک توزیع بار ساده در فضا می‌تواند ما را دچار دردسرهای ریاضی آزاردهنده‌ای برای محاسبه انتگرال‌های لازم بکند.

در این فصل ما به مبحثی می‌پردازیم که می‌تواند رهیافتی بسیار ساده‌تر را برای حالاتی از توزیع بار که از تقارن قابل قبولی برخوردارند، در اختیار ما بگذارد یعنی قانون گاؤس.

اگرچه به کمک این قانون نمی‌توان میدان ناشی از توزیع بارهای بدون تقارن را به سادگی استخراج کرد، ولی کاربردهای روزمره‌ی ما معمولاً از اجزای الکتریکی تشکیل شده‌اند که می‌توان هرکدام را با فرضیاتی ساده کرد و به یک توزیع متقارن تبدیل کرد. اینجاست که سادگی باور نکردنی چهارچوب ریاضی قانون گاؤس برای ما ارزشمند می‌شود.

همچنین درست است که به نظر می‌رسد که قانون گاؤس حالت خاصی از قانون کولن باشد ولی واقعیت کاملاً برعکس است، قانون گاؤس بنیادی‌تر از قانون کولن است. حتی جالب است بدانید که قانون کولن برای بارهای استاتیک قابل کاربرد بود ولی قانون گاؤس در حالت کلی برقرار است و در واقع یکی از معادلات ماکسول خواهد بود که در آینده به آن خواهیم پرداخت.

مفهوم شار؛ مطالعه‌ی موردی میدان جریان یک سیال



شکل ۲-۱

از دانسته‌های قبلی ریاضی، می‌دانید که اگر یک میدان برداری در فضا مانند $\vec{T} = \vec{T}(x,y,z)$ و یک سطح در فضا مانند S در اختیار داشته باشیم، آنگاه شار میدان برداری $\vec{T}$ روی سطح S به صورت زیر است:

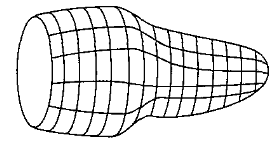
$$f_{T,S} = \int_S \vec{T} \cdot \overrightarrow{dA}$$

که در آن dA المان سطح، روی سطح S است و بردار $\overrightarrow{dA}$، برداری است با اندازه‌ی dA و در جهت عمود بر رویه S در هر نقطه (به یاد دارید که برای سطوح غیربسته جهت این بردار دلخواه

است ولی برای سطوح بسته جهت مثبت بردار dA به سمت بیرون رویه‌ی S است).

بیایید برای مثال شار یک سیال از یک سطح را در نظر بگیریم.

برای این مثال به دلیلی که بعداً خواهید فهمید، فرض می‌کنیم که این سطح، یک سطح بسته است. فرض کنید که سطح بسته که در واقع یک تور ماهی‌گیری به مانند شکل ۲ـ۲ است در آب رودخانه‌ای قرار دارد. طبعاً تور ماهی‌گیری سوراخ‌سوراخ است و آب علاوه بر دهانه‌ی آن می‌تواند از بدنه‌ی تور هم عبور کند. همچنین فرض کنید که چگالی آب ثابت است و برابر ρ_ω و فرض کنید تور ماهی‌گیری حجم ثابتی دارد. به این صورت مقدار آب محبوس درون حجم تور ماهی‌گیری برابر است با:



شکل ۲-۲

$$m_{\text{net}} = \rho_\omega \times V_{\text{net}} = \text{cte}$$

همین مقدار آب درون این تور ماهی‌گیری ثابت است. همچنین می‌دانیم که همواره به این تور مقداری آب وارد و مقدای آب خارج می‌شود و می‌دانیم که جرم آب درون تور در هر لحظه t برابر است با:

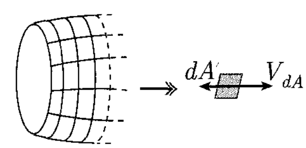
$$m_{\text{net}}(t) = m_\circ + m_i(t) - m_e(t)$$

$m_\circ$: جرم اولیه در لحظه‌ی $t = \circ$

m_i: جرم ورودی تا لحظه‌ی t

m_e: جرم خروجی تا لحظه‌ی t

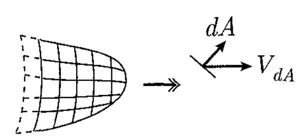
از آنجا که $m_{\text{net}} = \text{cte}$، با مشتق‌گیری نسبت به زمان خواهیم داشت:



شکل ۲-۳

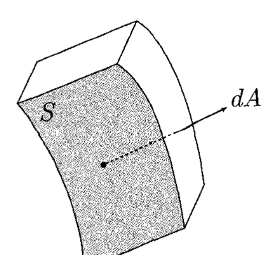
$$\frac{dm_{\text{net}}}{dt} = \circ \;\rightarrow\; \frac{dm_\circ}{dt} + \frac{d(m_i(t) - m_e(t))}{dt} = \circ$$
$$\rightarrow\; \frac{dm_i(t)}{dt} - \frac{dm_e(t)}{dt} = \circ \;\rightarrow\; \frac{dm_i(t)}{dt} = \frac{dm_e(t)}{dt}$$

یعنی آهنگ ورودی و خروجی جرم به تور ماهی‌گیری برابر است. در ملاحظات بالا جرم را مثبت در نظر گرفتیم و پشت عبارت جرم خروجی یک منفی قرار دادیم، اما با استفاده از خواص بردار می‌توانیم رابطه را ساده‌تر کنیم. می‌دانیم اگر زاویه بین دو بردار از $\frac{\pi}{۲}$ بیشتر باشد، حاصل‌ضرب اسکالر آنها یک مقدار منفی است. به شکل‌های ۲ـ۳ و ۲ـ۴ دقت کنید که ورود و خروج جرم را نمایش می‌دهند. از این موضوع در ادامه استفاده خواهیم کرد. همچنین دقت کنید که ورود و خروج جرم از روی سطح تور ماهی‌گیری انجام می‌شود.



شکل ۲-۴

تساوی $\frac{dm_e(t)}{dt} = \frac{dm_i(t)}{dt}$ بیان می‌کند که اگر در هر لحظه‌ی دلخواه t به اندازه‌ی زمان بسیار کوتاه dt صبر کنیم و تغییرات را در این بازه کوتاه زمانی بررسی کنیم، مقدار ورودی و خروجی جرم در این بازه dt برابر است. حالا تساوی بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:



شکل ۲-۵

$$\frac{dm_e(t)}{dt} - \frac{dm_i(t)}{dt} = \circ$$

می‌خواهیم این تساوی را بر حسب کمیت‌های میدان جریان (میدان برداری سرعت سیال در همه‌ی فضا) بازنویسی کنیم. شکل ۲ـ۵ را در نظر بگیرید، این شکل یک المان سطح از رویه‌ی S

(تور ماهی‌گیری) است. حجم اندک بالای این قسمت در واقع مقدار آبی است که در مدت dt از این سطح (dA) عبور کرده است، برای سادگی فرض کنید این مقدار آب از داخل تور ماهی‌گیری به خارج آن رفته است. برای این المان سطح $\frac{dm_e(t)}{dt}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$dm_e(t) = \rho_\omega dV$$

$$dV = dA \times h = dA \times v \times dt \times \cos\theta$$

dV: المان حجم

h: ارتفاع لایه آب عبور کرده در بازه‌ی dt

v: سرعت سیال در محل dA و در لحظه‌ی t

θ: زاویه‌ی بین بردار $\overrightarrow{dA}$ و بردار $\vec{v}$، دقت کنید که اگر این زاویه به $\frac{\pi}{۲}$ برسد، dV صفر است یعنی آب از سطح dA عبور نمی‌کند و فقط از روی آن می‌لغزد.

$$\rightarrow dV = dt \cdot (\vec{v} \cdot \overrightarrow{dA})$$

$$\rightarrow dm_e(t) = \rho_\omega dt(\vec{v} \cdot \overrightarrow{dA'})$$

$$\rightarrow \frac{dm_e(t)}{dt}\Big|_{dA} = \rho_\omega(\vec{v} \cdot \overrightarrow{dA})$$

که در آن $\frac{dm_e(t)}{dt}\big|_{dA}$ به معنی نرخ جرم خروجی متناظر با المان سطح dA است.

دقیقاً عین همین فرض را می‌توانیم برای یک المان سطح دیگر dA' در نظر بگیریم و این بار فرض کنیم جریان آب در محل این المان از بیرون به داخل تور جریان دارد. ولی باید دقت کنیم که ما مقدار m_i را مثبت در نظر گرفتیم، در حالی که حاصل‌ضرب داخلی $\vec{v}\overrightarrow{dA'}$ بنا به شکل‌های ۲ـ۳ و ۲ـ۴ برای این المان منفی است، پس با قرار دادن یک منفی رابطه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{dm_i(t)}{dt}\Big|_{dA'} = -\rho_\omega(\vec{v} \cdot \overrightarrow{dA})$$

به این صورت ما عبارت $\frac{dm}{dt}$ را برای یک المان که در آن آب به تور داخل یا از آن خارج می‌شود محاسبه کردیم. برای محاسبه‌ی $\frac{dm}{dt}$ کل باید سطح تور را به دو ناحیه‌ی S_i و S_e تقسیم کنیم. S_i ناحیه‌ای از سطح تور است که آب از آن به داخل می‌آید. S_e هم ناحیه‌ای که آب از آن خارج می‌شود. کل سطح تور هم $S = S_i + S_e$ است.

$$\frac{dm_e(t)}{dt} = \int_{S_e} \frac{dm_e(t)}{dt}\Big|_{dA} = \int_{S_e} \rho_\omega(\vec{v} \cdot \overrightarrow{dA})$$

$$\frac{dm_i(t)}{dt} = \int_{S_i} \frac{dm_i(t)}{dt}\Big|_{dA'} = \int_{S_i} -\rho_\omega(\vec{v} \cdot \overrightarrow{dA})$$

حالا تساوی اولیه‌مان $\left(\frac{dm_e}{dt} - \frac{dm_i}{dt} = ۰\right)$ را بازنویسی می‌کنیم:

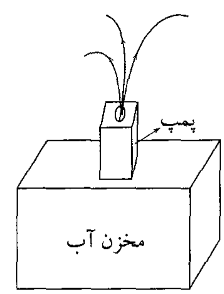
$$\int_{S_e} \rho_\omega(\vec{v}\overrightarrow{dA}) - \int_{S_i} -\rho_\omega(\vec{v} \cdot \overrightarrow{dA'}) = ۰$$

می‌دانیم که متغیر انتگرال اسمی است و dA' و dA صرفاً برای درک بهتر نام‌گذاری جدا شده‌اند وگرنه با هم هیچ تفاوتی ندارند و هر دو المان سطح هستند به جای هر دوی آنها dA می‌گذاریم:

$$\rho_\omega\Big(\int_{S_e}\vec{v}\overrightarrow{dA}+\int_{S_i}(\vec{v}\cdot\overrightarrow{dA})\Big)=\circ$$
$$\rightarrow\int_{S_e+S_i}\vec{v}\cdot\overrightarrow{dA}=\circ\ \rightarrow\int_{S}\vec{v}\cdot\overrightarrow{dA}=\circ$$

یعنی شار میدان سرعت از درون سطح S (سطح بسته‌ی تور ماهی‌گیری) برابر با صفر است. نتیجه‌ی بدیهی به نظر می‌رسد! نه؟ در واقع به نوعی، صفر بودن شار میدان سرعت از این سطح بسته، بیان دیگری برای قانون بقای جرم است. حالا سعی کنید به دنبال حالتی بگردید که شار میدان سرعت روی این تور ماهی‌گیری صفر نباشد. (از تبدیل جرم به انرژی داخل تور ماهی‌گیری توسط واپاشی هسته‌ای صرف‌نظر کنید؛ چرا که بعید است در تور ماهی‌گیری چنین چیزی اتفاق بیافتد.) حتماً قبل از این‌که ادامه‌ی درس را بخوانید خودتان به این موضوع فکر کنید.

فرض کنید یک مخزن آب داریم که روی آن یک پمپ، یک فواره یا آب‌فشان نصب شده است، چیزی شبیه به شکل ۲ـ۶.



شکل ۲ـ۶

حالا یک سطح فرضی به هر شکلی که دوست دارید در این مجموعه در نظر بگیرید. بیایید $\int_S\vec{v}.\overrightarrow{dA}$ را برای این سطح فرضی بررسی کنیم. آب تنها از این سطح خارج می‌شود و از هیچ جا آبی به آن وارد نمی‌شود، بنابراین برای هر dA، $\vec{v}\cdot\overrightarrow{dA}$ یا صفر است یا مثبت و بنابراین $\int_S\vec{v}\cdot\overrightarrow{dA}>\circ$ و در نتیجه غیرصفر خواهد بود.

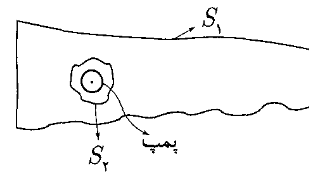
همچنین می‌توانید یک توپ را تصور کنید که سوراخ شده و در حالی که آب به آن وارد می‌شود زیر آب نگه داشته شده است. در این صورت هم با استدلال مشابهی $\int_S\vec{v}\cdot\overrightarrow{dA}\neq\circ$.

نتیجه‌گیری کلی ما تا اینجا این است که شار میدان سرعت سیال از یک سطح بسته در صورت وجود یک چشمه (Source) یا یک چاه (Sink) (به ترتیب مثل فواره و توپ سوراخ شده) مخالف صفر است و در صورت نبودن این عوامل، صفر است.

لطفاً به دو نکته دقت کنید، اول این‌که اگر به جای مخزن و فواره، یک شیر آب متصل به خط انتقال آب شهری را در نظر بگیریم شار میدان سرعت چقدر است و دیگر این‌که اگر چشمه یا چاهک بیرون مرز فرض ما باشند، مثلاً جایی بالادست رودخانه، شار میدان سرعت گذرنده از سطح چگونه خواهد بود. (در پاسخ به سؤال اول دقت کنید ممکن است سطح فرضی را کوچک بگیریم و یا آنقدر بزرگ که کره‌ی زمین هم درون آن بگنجد و در این دو صورت جواب‌ها ممکن است مختلف باشند.)

اما بیایید یک بررسی دقیق‌تر در مورد سطوحی بکنیم که درون آنها چاه یا چشمه وجود دارد و ببینیم شار میدان سرعت آنها دقیقاً چه مقداری دارد!

برای این کار دوباره تور ماهی‌گیری خودمان را در نظر می‌گیریم که این بار درون آب، یک پمپ متصل به یک مخزن قرار دارد، این پمپ مقدار λkg/s آب را از درون مخزن به فضای داخل تور می‌افشاند، کل مجموعه تور ماهی‌گیری مخزن و پمپ آب هم داخل یک رودخانه هستند.



شکل ۲-۷

هدف ما محاسبه‌ی $\int_{S_1} \vec{v}\cdot\overrightarrow{dA}$ است، از آنجایی که تمام معادلاتی که ما در قسمت‌های قبل این فصل استفاده کردیم خطی بودند، مجازیم که از اصل برهم‌نهی[1] استفاده کنیم، به این صورت ϕ_{S_1}، شار میدان سرعت عبوری از سطح S_1 را می‌توان به صورت زیر نوشت:

رودخانه را با پسوند River و چشمه را با پسوند Source نمایش می‌دهیم:

$$\phi_{S_1} = \phi_{S_{1\text{River}}} + \phi_{S_{1\text{Source}}}$$

$\phi_{S_1\text{River}}$: شار عبوری از سطح S_1 ناشی از جریان عادی آب در رودخانه

$\phi_{S_{1\text{Source}}}$: شار عبوری از سطح S_1 ناشی از چشمه

از قسمت قبل می‌دانیم که $\phi_{S_{1\text{River}}}$ برابر با صفر است و $\phi_{S_1} = \phi_{S_{1\text{Source}}}$. یعنی برای محاسبه شارگذرنده از سطح S_1 می‌توان فرض کرد که مجموعه تور و پمپ و ... از درون رودخانه بیرون آورده شده‌اند.

برای محاسبه‌ی $\phi_{S_{1\text{River}}}$، حجم محصور به دو سطح S_1 و S_2 را در نظر بگیرید (V_E). با استدلالی مشابه قسمت قبل برای این حجم می‌توان گفت:

$$\frac{dm_i(t)}{dt} = \frac{dm_e(t)}{dt}$$

چون با پاشش آب توسط چشمه، جرم از سطح S_2 وارد حجم V_E می‌شود و از سطح S_1 خارج، می‌نویسیم:

$$-\int_{S_2} \rho_\omega \vec{v}\cdot\overrightarrow{dA} = \int_{S_1} \vec{v}\cdot\overrightarrow{dA}$$

حال اگر سطح S_2 را کوچک و کوچک‌تر کنیم تا بچسبد به مرزهای چشمه، به راحتی و به صورت شهودی می‌توانیم بگوییم که مقدار سمت چپ تساوی بالا برابر با λ است، پس:

$$\lambda = \int_{S_1} \rho_\omega \vec{v}\cdot\overrightarrow{dA} \;\rightarrow\; \int_{S_1} \vec{v}\cdot\overrightarrow{dA} = \frac{\lambda}{\rho_\omega}$$
$$\rightarrow \int_{S_1} \vec{v}\cdot\overrightarrow{dA} \propto \lambda$$

همچنین، همان‌طور که می‌بینید، این مقدار مستقل از ابعاد و مشخصات هندسی سطح S_1 است، استدلالی کاملاً مشابه را می‌توان برای یک چاه داشت در این صورت با در نظرگرفتن حالت نبود چشمه یا چاه به عنوان $\lambda_{\text{Source/Sink}} = 0$، می‌توان در حالت کلی نوشت:

$$\phi_S = \oint_S \vec{v}\cdot\overrightarrow{dA} \propto \lambda$$

که در رابطه‌ی بالا λ می‌تواند مثبت، منفی یا برابر صفر باشد.

1) Superposition

انتگرال روی مسیر و انتگرال روی سطح

احتمالاً انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ و انتگرال نامعین مربوط به آن را از بخش‌های مربوط به کتاب مکانیک و نیز از دانسته‌های ریاضیات دبیرستان خود می‌شناسید. این انتگرال برای توابع حقیقی که روی بازهای متناهی تعریف شده و کراندارند و نیز برای توابع بی‌کران و بازه‌های نامتناهی محاسبه شده است. در صورتی که به جای بازه‌ی $[a,b]$ خمی از فضا (ی یک‌بعدی، دوبعدی یا حتی با ابعاد بالاتر) در بحث انتگرال‌گیری مطرح شود، انتگرال را «انتگرال روی مسیر» یا «انتگرال خمیده‌ی خطی» می‌نامند. در این نوع انتگرال‌گیری، انتگرالده (یا همان f) یک تابع برداری است که روی این خم تعریف شده و کراندار است. مسیر مورد نظر را C بنامید و به صورت برداری آن را با $\vec{S}$ نشان دهید. در این صورت انتگرال میدان برداری $\vec{f}$ روی نمودار مسیر $\vec{S}$ به یکی از دو صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\int \vec{f}.d\vec{S} = \int_C \vec{f}.\overrightarrow{dS}$$

این انتگرال را، انتگرال خمیده‌ی خطی $\vec{f}$ در طول C می‌نامند. C همان نمودار $\vec{S}$ است. وقتی با نماد $\oint$ مواجه می‌شوید، باید بدانید که مسیر C یک مسیر بسته است. بدین معنی که بردارهای نقاط ابتدایی و انتهایی آن بر هم منطبقند. بنابراین دو نماد دیگر که در انتگرال روی مسیر با آنها مواجه می‌شوید به شکل زیرند:

$$\oint \vec{f}\cdot\overrightarrow{dS} = \oint_C \vec{f}\cdot\overrightarrow{dS}$$

به همین ترتیب، اگر از میدان برداری $\vec{f}$ بر روی یک سطح خمیده در فضا انتگرال بگیریم، مفهوم انتگرال روی سطح را تعریف کرده‌ایم. در این تعریف $\overrightarrow{dA}$ یعنی المان سطحی ظاهر می‌شود که جهت آن در جهت «بیرون» صفحه تعریف می‌شود و اندازه‌ی آن برابر با اندازه‌ی آن جزء سطح است. در این انتگرال‌گیری هم مانند انتگرال روی مسیر با چهار نماد مختلف مواجه می‌شویم:

$$\iint \vec{f}\cdot\overrightarrow{dA}\ ,\ \int_S \vec{f}\cdot\overrightarrow{dA}\ ,\ \oint \vec{f}\cdot d\vec{A}\ ,\ \oint_S \vec{f}\cdot\overrightarrow{dA}$$

شاید در اینجا برای شما سؤال پیش بیاید که سطح بسته به چه سطحی گفته می‌شود. بنا به تعریف، سطح بسته سطحی است که فضا را به دو بخش بیرونیِ سطح و درون سطح تقسیم کند یا هیچ خمی وجود نداشته باشد که به عنوان خم ابتدایی یا انتهایی سطح محسوب شود. در این بخش با دو نماد انتگرال سطحی و انتگرال روی سطح بسته بسیار سروکار خواهید داشت.

شار میدان الکتریکی

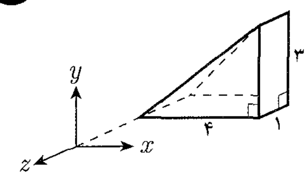
در قسمت قبل مفهوم شار توضیح داده شد و با یک مثال ملموس، یعنی آب، شار یک میدان برداری را از یک سطح بسته بررسی کردیم. مفهوم شار برای تمام میدان‌های برداری قابل توسعه است، یکی از مهم‌ترین موارد استفاده‌ی شار، شار میدان الکتریکی از سطوح است، خصوصاً

سطوح بسته. با توجه به تعریف شار در ریاضیات، برای میدان $\vec{E}$ در فضا و یک سطح مفروض S (باز یا بسته) شار به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\phi_{\text{Electrical}_S} = \int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA}$$

مثال ۱

در قسمتی از فضا میدان الکتریکی به صورت $\vec{E} = e^x \cdot \hat{i}$ است (مبدأ سنجش x در شکل نشان داده شده است). شارگذرنده از هر یک از سطوح زیر را حساب کنید.



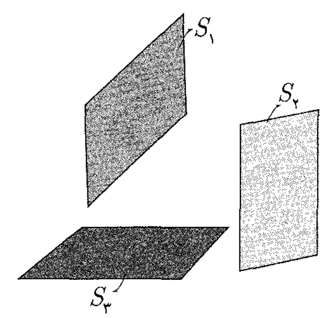
شکل ۲-۸ سطح بسته‌ی الف

حل. الف) سطح نشان داده شده از سه سطح مجزای $S_{۱}$، $S_{۲}$ و $S_{۳}$ تشکیل شده است که در شکل (۲ـ۸) نشان داده شده است.

انتگرال شار مربوط به کل حجم، معادل فرایند انتگرال شارگذرنده از هر یک از سطوح مربوطه به صورت مجزا می‌باشد، بدین ترتیب:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = \oint_{S_{۱}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} + \oint_{S_{۲}} \vec{E}\overrightarrow{dA} + \oint_{S_{۳}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA}$$

هر یک از انتگرال‌های فوق را جداگانه بررسی می‌کنیم.



شکل ۲-۹

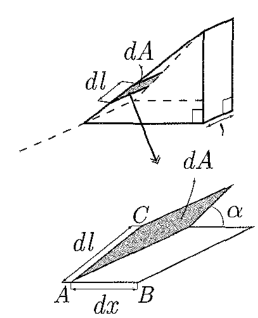
الفـ۱) سطح $S_{۱}$. از آنجایی که مقدار تابع میدان (e^x) در قسمت‌های مختلف سطح $S_{۱}$ متفاوت است، باید راهی بیابیم تا dA را به dx مرتبط کنیم تا این انتگرال قابل ملاحظه باشد.

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = |\vec{E}||\overrightarrow{dA}| \cos\theta \ \ , \ \ |\vec{E}| = e^x$$

سطح $S_{۱}$ در شکل ۲ـ۱۰ نشان داده شده است. dA مستطیل کوچکی روی آن است که طول ۱ و ارتفاع dx دارد.

$$|dA| = dl \times ۱$$

$$dl = \frac{dx}{\cos\alpha} \ \Rightarrow \ |dA| = \frac{۱ \times dx}{\cos\alpha}$$



شکل ۲-۱۰

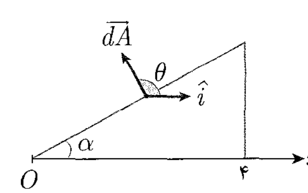
برای محاسبه‌ی عبارت $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ باید زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{i}$ و $\overrightarrow{dA}$ را بیابیم. با توجه به شکل ۱۱ـ۲ داریم:

$$\theta = \frac{\pi}{۲} + \alpha$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = e^x \times \frac{dx}{\cos\alpha} \times \cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \frac{e^x}{\cos\alpha}(-\sin\alpha)dx$$

$$\Rightarrow \int_{S_{۱}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = -\int_{۰}^{۴} e^x \cdot \tan\alpha dx = -\tan\alpha \int_{۰}^{۴} e^x dx$$

$$= -\tan\alpha \cdot e^x\Big]_{۰}^{۴} = \tan\alpha(۱ - e^{۴})$$



شکل ۲-۱۱

الفـ۲) سطح $S_{۲}$. این سطح پارامتر x ثابتی دارد که مقدار آن ۴ است.

$$\int_{S_{۲}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = \int_{S_{۲}} e^x \vec{i} \cdot \overrightarrow{dA} = e^x \int_{S_{۲}} \vec{i} \cdot \overrightarrow{dA}$$

در مرحله‌ی آخر انتگرال بالا، از آنجا که x روی این سطح ثابت است، عبارت e^x از انتگرال بیرون می‌آید.

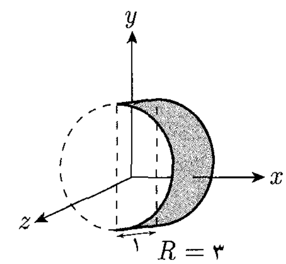
$$S_۲ \;:\; x = ۴\,,\ \overrightarrow{dA} = dA \cdot \vec{i} \;\Rightarrow\; \int_{S_۲} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dA} = e^x \int_{S_۲} dA$$
$$= e^۴ S_۲ = e^۴ \times (۳ \times ۱) = ۳e^۴$$

الف‌ـ۳) روی سطح ۳، برای تمامی xهای دلخواه داریم: $\overrightarrow{dA} \perp \vec{E}$ و در نتیجه:

$$\vec{E}\cdot\overrightarrow{dA} = ۰ \;\Rightarrow\; \int_{S_۲} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dA} = ۰$$

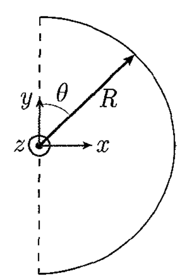
با برآیندگیری از سه انتگرال شار به‌دست آمده داریم:

$$\phi = \oint \vec{E}\cdot\overrightarrow{dA} = \tan\alpha(۱ - e^۴) + ۳e^۴$$
$$\tan\alpha = \frac{۳}{۴} \;\Rightarrow\; \phi = \frac{۳}{۴} + \frac{۹}{۴}e^۴ = \frac{۳}{۴}(۱ + ۳e^۴)$$



شکل ۲-۱۲ سطح بسته‌ی ب

ب) در این قسمت جهت المان سطح $\overrightarrow{dA}$ برای هر جزء سطح متفاوت است. بنابراین در این سطح محاسبه‌ی شار از طریق جداسازی المان‌ها ممکن نیست و انتگرال باید یک جا محاسبه شود. با توجه به اینکه شکل بخشی از سطح یک استوانه است، راحت‌تر است که دستگاه استوانه‌ای را برای حل انتخاب کنیم. شکل از زاویه‌ای مانند شکل ۲ـ۱۳ دیده می‌شود که به اندازه‌ی ۱ واحد به داخل صفحه‌ی کاغذ فرو می‌رود. با انتخاب مختصه θ به صورت نشان داده شده در شکل، مسئله به مختصات (R, θ) منتقل می‌شود. داریم:



شکل ۲-۱۳

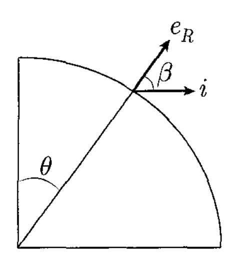
$$x = R\sin\theta \;\Rightarrow\; \vec{E}(\theta) = e^{R\sin\theta}\vec{i}$$
$$\Rightarrow \phi = \int_S e^{R\sin\theta}\vec{i}\cdot\overrightarrow{dA}$$

راستای[1] بردار $\overrightarrow{dA}$، همان راستای $\hat{e}_R$ در هر θ است:

$$\overrightarrow{dA} = dA \cdot \hat{e}_R$$
$$dA = R d\theta \times ۱$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{dA} = R d\theta \hat{e}_R$$
$$\Rightarrow \phi = \int_۰^\pi e^{R\sin\theta}\vec{i}\cdot R d\theta \cdot \hat{e}_R$$

و با توجه به شکل ۲ـ۱۴

$$\vec{i}\cdot\hat{e}_R = |\hat{i}||\hat{e}_R|\cos\beta = \cos\beta$$
$$\Rightarrow \phi = \int_۰^\pi e^{R\sin\theta} R\sin\theta \cdot d\theta$$



شکل ۲-۱۴

محاسبه‌ی انتگرال نهایی را رها می‌کنیم و پاسخ را به همین صورت از شما می‌پذیریم. چرا که محاسبه‌ی آن فراتر از سطح انتظارات ماست.

۱) راستا، و نه جهت؛ چرا که dA سطح کلی باز است و جهت بردار سطح روی آن دلخواه است.

قانون گاوس

در قسمت‌های قبل با مفهوم شار آشنا شدیم و شار میدان الکتریکی را شناختیم. همچنین در یک مطالعه موردی شار میدان سرعت یک سیال را از یک سطح بسته در حالات مختلف بررسی کردیم. با توجه به این مفاهیم، اکنون قانون گاوس[1] را معرفی می‌کنیم.

گفتیم که قانون گاوس در واقع بیان الکتریکی رابطه‌ای است که برای میدان سرعت سیال نوشتیم، یعنی

$$\oint_S \vec{v} \cdot \overrightarrow{dA} \propto \lambda$$

در این رابطه $\vec{v}$ بردار سرعت در هر نقطه فضا، S یک سطح فرضی و λ نشان دهنده بزرگی یا کوچکی در واقع قدرت چشمه یا چاهک[2]هایی است که این سطح فرضی در برگرفته است.

هر یک از کمیات در الکتریسیته معادلی به این صورت دارند:

$$\vec{v} \rightarrow \vec{E}$$
$$S \rightarrow S$$
$$\lambda \rightarrow q$$

همان‌طور که وجود یک چشمه (λ) باعث به راه افتادن جریانی می‌شود که در نقطه‌های مختلف دارای سرعت‌های (v) مختلف هستند، وجود یک بار (q) باعث به وجود آمدن میدانی می‌شود که در هر نقطه دارای مقدار (E) باشد. بدین ترتیب بیان پیشنهادی ما برای الکتریسیته به صورت زیر است.

$$\oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} \propto q$$

به خاطر داریم که در قسمت مطالعه میدان سرعت سیال تناسب را با ضریب تناسب $\frac{1}{\rho_\omega}$ می‌توانستیم به تساوی تبدیل کنیم. قانون گاوس، ضریب تناسب معادله متناظر با تناسب بالا را معرفی می‌کند. به این صورت قانون گاوس به صورت زیر بیان می‌شود.

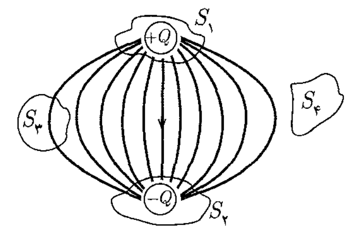
$$\oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = \frac{1}{\epsilon_\circ} \times q \rightarrow \epsilon_\circ \int \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = q$$

در مورد بیان قانون گاوس، توجه داشته باشید که q اولاً باید توسط سطح فرضی S در برگرفته شده باشد و ثانیاً مساوی با جمع جبری تمام بارهای داخل سطح S باشد، یعنی اگر تعداد N بار درون سطح S وجود داشته باشند، با فرض علامت‌دار بودن q_i ها:

$$q = \sum_{i=1}^{N} q_i \quad \text{یا} \quad q = \oint_V \rho dV$$

به عنوان یک مثال ساده به شکل ۲ـ۱۵ نگاه کنید.

1) Gauss Rule 2) Sink / Source



شکل ۲-۱۵

چهار سطح بسته S_1 تا S_4 را ببینید و با توجه به قانون گاوس انتظار خود را درباره علامت شار خالص (شار ناشی از همه بارها روی همه سطح) گذرنده از هر یک بیان کنید. این پیش‌بینی را با نتایج شهودی مبنی بر نمایش گرافیکی خطوط میدان مقایسه کنید. برای سطح ۱، میدان در همه‌ی جای سطح در حال خارج شدن از آن است و بنابراین برای هر المان سطح حاصل $\vec{E} \cdot \vec{dA}$ مثبت است و بنابراین شار خالص گذرنده از سطح هم مثبت است و قانون گاوس پیش‌بینی می‌کند که این سطح یک بار خالص مثبت را در بر بگیرد.

برای سطح S_2 قضیه دقیقاً برعکس است. برای سطوح S_3 و S_4 قانون گاوس پیش‌بینی می‌کند که شار خالص گذرنده از این سطوح صفر است، به بیان فارادی، یعنی زبان تصویری که ما هنوز هم از آن استفاده می‌کنیم، تعداد خطوطی که به این سطح وارد می‌شوند برابر با تعداد خطوطی است که از آن خارج می‌شوند.

کاربردهای قانون گاوس

قانون گاوس را بیان کردیم و با یک مثال سعی کردیم درک درستی از آن به‌دست بیاوریم. اما این قانون در حل چه مسائلی به کار می‌آید و چه نتایج عملی‌ای دارد؟

همان‌طور که گفته شد، قانون گاوس رابطه‌ای میان شار خالص گذرنده از یک سطح S و بار q که این سطح در بر می‌گیرد برقرار می‌کند. به عنوان یک تقسیم‌بندی منطقی می‌توانیم نتایج این قانون را به دو بخش تقسیم کنیم.

الف) بررسی میزان بار موجود در یک سطح بسته با داشتن شارگذرنده از آن

ب) بررسی شار و میدان در محل یک سطح با در دست داشتن توزیع بار داخل آن

این دو قسمت را جداگانه بررسی می‌کنیم و مثال‌هایی را که کاربرد بیشتری دارند در قسمت «ب» بیان می‌کنیم.

الف) بررسی بار داخل یک سطح با در دست داشتن شار گذرنده از آن.

ایده کلی این قسمت کاملاً مشخص است، اگر ما به هر صورتی شار عبوری از یک سطح را داشته باشیم، می‌توانیم بگوییم به صورت خالص چه مقداری بار درون آن قرار دارد. برای مثال برگردیم و به مثال ۱ نگاه کنیم. با محاسبه متوجه شدیم که شار خالص گذرنده از این سطح برابر با $\frac{3}{4}(1+3e^4)$ بود، با توجه به قانون گاوس داریم:

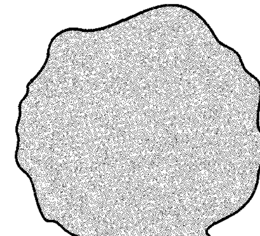
$$\epsilon \cdot \phi = q \;\rightarrow\; q = \frac{3}{4}\epsilon_0(1+3e^4)$$

یعنی با شرایط داده شده در مسئله، مقدار بار داخل سطح این مقدار است، اگرچه در مورد چگونگی توزیع این بار در داخل سطح چیزی گفته نشده است.

اما جدای از چنین کاربردی یک حالت بسیار مهم در این قسمت وجود دارد که به صورت جداگانه باید به آن پرداخت و آن حالتی است که در آن با یک رسانای باردار منزوی سروکار داریم، در این صورت یک قضیه‌ی بسیار مهم اثبات می‌شود. به شکل زیر توجه کنید. این شکل نشان‌دهنده‌ی یک قطعه رسانا با شکل دلخواه است که به رسانای دیگر یا منبع جریان یا چیز

دیگری وصل نیست.[1]

فرض کنید با یک فرایند دلخواه، مقداری بار را در لحظه‌ی $t = t_\circ$ به این قطعه رسانا منتقل کرده‌ایم و آنقدر صبر کرده‌ایم تا مطمئن شویم که حالا به حالت مانایی رسیده است (به عبارت بهتر که به ثبات رسیده است، بدین معنی که اگر از این به بعد هزار سال دیگر هم صبر کنیم، اتفاق دیگری در آن نمی‌افتد)، حالا بیایید فرض کنیم که در یک نقطه دلخواه درون این جسم رسانا، یک میدان الکتریکی با مقدار دلخواه $\vec{E}_{\text{internal}} \neq \circ$ وجود داشته باشد. از تعریف میدان می‌دانیم که این میدان بر الکترون‌های آزاد این قسمت از رسانا نیروی $\vec{f} = -e\vec{E}_i$ وارد می‌کند و باعث شتاب گرفتن آنها و در نهایت ایجاد جریان می‌شود. همان‌طور که در بخش‌های بعدی خواهیم دید، وجود جریان باعث ایجاد تلفات جریان به خاطر وجود مقاومت و تلفات به صورت تابش الکترومغناطیسی خواهد بود.



شکل ۲-۱۶

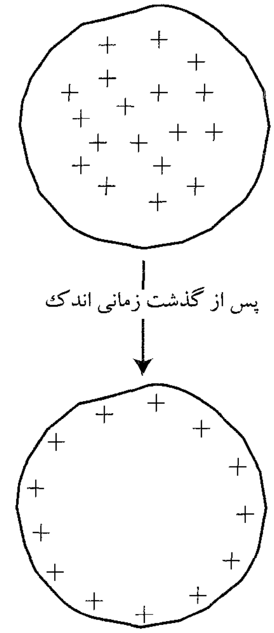
به این صورت ما یک وضعیت پایدار خواهیم داشت، که در آن جسم انرژی تلف می‌کند و به محیط بیرون می‌دهد و این یعنی یک منبع لایزال انرژی. بدیهی است که این نتیجه با اصل پایستگی انرژی تناقض دارد. اگر استدلال‌هایی که انجام دادیم را مرحله‌به‌مرحله به عقب برگردیم، متوجه می‌شویم که اشتباه به وجود آمده در نتیجه‌ی حاصل فرض نادرست ما در ابتدای کار است، یعنی ممکن نیست که پس از رسیدن به حالت مانا در نقطه‌ای داخل یک رسانا میدان الکتریکی وجود داشته باشد یعنی: **میدان الکتریکی** در نقاط داخل یک رسانا صفر است (در حالت مانا).

این خود به تنهایی نتیجه جالب توجهی است، اما ترکیب آن با قانون گاوس هم برای ما جذاب و مفید است. همان رسانای شکل (۲ـ۱۶) را در نظر بگیرید، می‌خواهیم قانون گاوس را در مورد یک سطح فرضی بسته درون آن به کار ببریم، طبق این قانون

$$\epsilon_\circ \oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = q$$

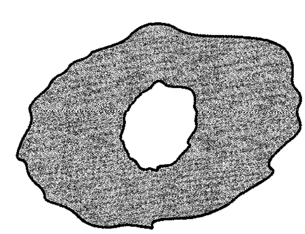
گفتیم که میدان داخل یک رسانا همه جا صفر است، پس $\vec{E} = \circ$ و به این صورت قانون گاوس به ما می‌گوید $q = \circ$، یعنی بار خالص که این سطح در برمی‌گیرد، برابر با صفر است، به عبارت بهتر:

بار در درون یک رسانا صفر است و اگر رسانایی بار خالص داشته باشد، این بار اضافه ناگزیر است که روی سطح قرار بگیرد.



شکل ۲-۱۷

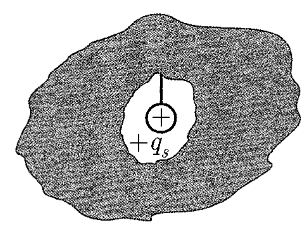
این نتیجه البته با درک شهودی ما هم سازگاری دارد، شکل ۲ـ۱۷ را در نظر بگیرید. این شکل وضعیت یک کره‌ی رسانا را در لحظه‌ی $t = t_\circ$ (لحظه‌ای که در آن مقداری بار به جایی در وسط کره منتقل شده) نشان می‌دهد، این بارهای همنام تمایل دارند که تا جای ممکن از هم فاصله بگیرند و بنابراین در مدت زمان کوتاهی (که همان زمان لازم برای رسیدن به حالت مانا است) به سطح رسانا می‌روند. اما حالت جالب دیگری که جدای از حالت قبلی نیست این است، فرض کنید همان کره رسانای حالت قبل را داریم با این تفاوت که داخل آن را کمی تخلیه کرده‌ایم و یک حفره درون آن ایجاد کرده‌ایم. (شکل ۲ـ۱۸) حالا دو آزمایش با آن انجام می‌دهیم، در آزمایش اول



شکل ۲-۱۸

۱) به چنین رسانایی «رسانای منزوی» گفته می‌شود. مثلاً سیمی که در درونش بارها در جریان‌اند، رسانای منزوی محسوب نمی‌شود.

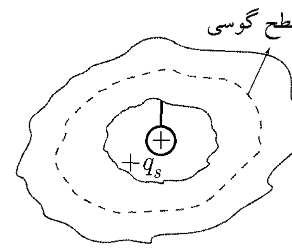
مقداری بار را به آن انتقال می‌دهیم، همان‌طور که انتظار دارید، نتیجه دقیقاً مطابق قسمت قبل است، با همان استدلال بار روی سطح خارجی رسانا جمع می‌شود. در آزمایش دوم اما مقداری بار را در فضای خالی حفره قرار می‌دهیم، مثلاً یک کره نارسانای باردار با بار $+q_s$ با یک نخ نارسانا از بالای حفره آویزان می‌کنیم، مثل شکل ۲ـ۱۹.



شکل ۲-۱۹

بیایید دوباره استدلال‌مان را مرور کنیم. هنوز هم میدان در داخل رسانا باید صفر باشد (بنابر اصل پایستگی انرژی)، اگر دوباره یک سطح گاوسی مثل دفعه‌های قبل در نظر بگیریم (مثال شکل ۲ـ۱۵)، قانون گاوس به ما می‌گوید که بار خالص داخل این سطح باید صفر باشد. تنها حالت ممکن این است که بار $-q_s$ روی سطح داخلی این قطعه رسانا قرار بگیرد تا بار داخل سطح گاوسی صفر شود، همچنین طبق قانون پایستگی بار الکتریکی، بار $+q_s$ باید یک جایی برود و تنها جای ممکن هم سطح خارجی است.

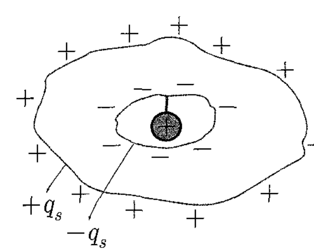
بنابراین توزیع بار ناشی از حضور بار q_s در داخل حفره‌ی درون رسانا چیزی شبیه به شکل ۲ـ۲۱ خواهد بود. سعی کنید خطوط میدان الکتریکی را در همه جای فضا رسم کنید (دقت کنید که قرار بود میدان داخل رسانا صفر باشد).



شکل ۲-۲۰

ب) بررسی شار و میدان در محل یک سطح با در دست داشتن توزیع بار درون آن

همان‌طور که در مقدمه گفته شد، ما به کمک قانون کولن که در فصل‌های قبل فرا گرفتیم، باید بتوانیم میدان ناشی از هر توزیع باری را به‌دست آوریم اما این کار ممکن است با دردسرهای ریاضی برای انتگرال‌گیری مواجه شود. همچنین گفتیم که قانون گاوس در برخی موارد به ما کمک می‌کند که میدان را به راحتی به‌دست بیاوریم، در مواردی که دارای تقارن بالایی هستند. روش کار در این قسمت این است که ما با توجه به تقارن توزیع بار، سطحی را به عنوان سطح گاوسی (سطحی که می‌خواهیم قانون گاوس را برای آن به کار ببریم) انتخاب می‌کنیم که بتوانیم میدان الکتریکی $\vec{E}$ را از انتگرال $\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{dA}$ خارج کنیم. به این صورت قانون گاوس به صورت $\epsilon_\circ \times k \times E \times \int_S dA = q$ در می‌آید (ضریب k صرفاً برای احتیاط است، با انتخاب سطوحی که $\vec{E}$ بر آن عمود است، معمولاً $k = ۱$ می‌شود[1]).



شکل ۲-۲۱

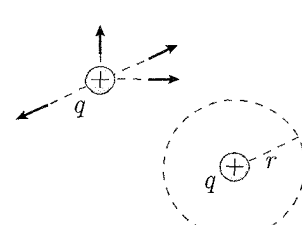
$$\epsilon_\circ \times E \times A = q \;\rightarrow\; E = \frac{q}{A\epsilon_\circ}$$

در ادامه مثال‌هایی از این موضوع را بررسی می‌کنیم.

ب‌ـ۱) حالت خاص، قانون کولن

می‌خواهیم به کمک قانون گاوس میدان ناشی از یک بار نقطه‌ای q را در همه نقاط فضا به‌دست آوردیم، با توجه به تقارن کروی شکل، نتیجه می‌گیریم که میدان الکتریکی در راستای $\hat{e}_R$ و جهت آن هم به سمت بیرون (واگرا شدن) است. یک کره به شعاع r را به عنوان سطح گاوسی و به مرکز بار نقطه‌ای انتخاب می‌کنیم.

دوباره با توجه به تقارن، اندازه‌ی میدان الکتریکی $\vec{E}$ روی این کره ثابت است، بنابراین قانون



شکل ۲-۲۲

۱) در مسائل مورد بحث، در این کتاب و هر آنچه شما سروکار خواهید داشت k برابر با ۱ در نظر گرفته می‌شود.

گاوس به صورت زیر در می‌آید:

$$\epsilon_\circ \oint_S (E\hat{e}_R)\cdot(dA\hat{e}_R) = q \;\rightarrow\; \epsilon_\circ \oint_S E\cdot dA = q$$
$$\epsilon_\circ E\int dA = q \;\rightarrow\; \epsilon_\circ E\cdot ۴\pi r^۲ = q \rightarrow E = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\cdot\frac{q}{r^۲}$$

و این همان قانون کولن است.

ب-۲) توزیع بار با تقارن مرکزی

این بار می‌خواهیم فرض قسمت قبل را کمی عمومی‌تر کنیم. به جای یک بار نقطه‌ای می‌خواهیم فرض کنیم در ناحیه‌ای از فضا مقدار بار موجود در واحد حجم فضا فقط به فاصله از یک نقطه ثابت بستگی دارد. اگر دستگاه کروی را برای بیان این امر استفاده کنیم $\rho = f(r)$ که در آن r فاصله از آن نقطه ثابت است. این تابع f می‌تواند مقادیر بسیار متفاوتی داشته باشد.

با استدلالی مشابه قسمت قبل $E = \frac{q}{۴\pi\epsilon_\circ}\cdot\frac{q}{r^۲}$ که در آن q مقدار بار داخل کره به شعاع r است یعنی

$$q = \int_{V_{(\text{کره به شعاع } r)}} \rho dV$$

که در آن ρ چگالی حجمی بار است.

از آنجایی که ρ فقط تابعی از r است، dV را به صورت مناسب بر حسب r می‌نویسیم:

$$dV = ۴\pi r^۲ dr$$

به این صورت

$$q = \int_\circ^r f(r)\cdot ۴\pi r^۲ dr = ۴\pi\int_\circ^r r^۲\cdot f(r)\cdot dr$$

یعنی میدان در فاصله r را می‌توان با جایگزین کردن کل بار داخل یک کره به شعاع r در مرکز کره و با قانون کولن به‌دست آورد.

مثال ۲ میدان الکتریکی را برای توزیع بارهای داده شده، در همه‌ی نقاط فضا به‌دست آورید.

الف) $\rho(r) = \frac{۱}{r^۳}\ ,\ \circ \le r < \infty$

ب) یک پوسته‌ی کروی از بار

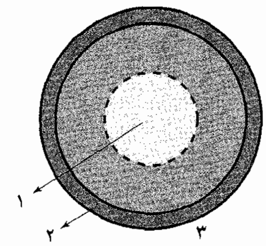
$$\rho(r) = \begin{cases} \circ & \circ \le r < ۴\ ,\ ۶ < r < \infty \\ \dfrac{\ln r}{r^۲} & ۴ \le r \le ۶ \end{cases}$$

حل. الف) تابع $\rho(r)$ یک تابع پیوسته است، بنابراین همان‌طور که خواهید دید در نظرگرفتن یک سطح گاوسی کافیست. فرض کنید یک کره‌ی خیالی به شعاع r داریم، طبق گفته‌های قسمت قبل داریم:

$$E(r) = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\cdot\frac{q(r)}{r^۲}\ ,\ q(r) = \int \rho(r) ۴\pi r^۲\cdot dr$$
$$\rightarrow q(r) = \int \frac{۱}{r^۳} ۴\pi r^۲\cdot dr = ۴\pi\int\frac{۱}{r}dr = ۴\pi \ln r$$
$$\rightarrow E(r) = \frac{۱}{\epsilon_\circ}\cdot\frac{\ln r}{r^۲}$$

ب) توزیع بار داده شده $\rho(r)$ همان‌طورکه در شکل ۲ـ۲۳ دیده می‌شود، فضا را به سه ناحیه افراز می‌کند. میدان را در این سه ناحیه و هر بار با در نظرگرفتن یک سطح گاوسی محاسبه می‌کنیم.

ب‌ـ۱) داخل پوسته کروی $(r < ۴)$



شکل ۲-۲۳

سطح گاوسی را مطابق خط‌چین در شکل در نظر می‌گیریم، میدان روی همه‌ی این کره برابر و در راستای $E\hat{r}$ است، طبق قانون گاوس:

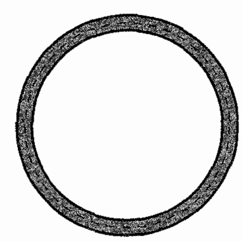
$$\epsilon_{\circ} \oint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dA} = q \;\rightarrow\; \epsilon_{\circ} \oint_S E\cdot dA\cdot\cos\theta = q$$

$$\cos\theta = \cos(\circ) = ۱ \;\rightarrow\; \epsilon_{\circ} E \oint_S dA = q = \circ$$

$$\rightarrow \epsilon_{\circ} E\cdot A = \circ \;\rightarrow\; E = \circ$$

(بار داخل سطح گاوسی صفر است، هیچ باری توسط این سطح در برگرفته نشده. یعنی میدان در داخل پوسته کروی صفر است.)

ب‌ـ۲) درون گوشته‌ی پوسته $(۴ \le r \le ۶)$:


شکل ۲-۲۴

این بار یک کره‌ی دیگر با شعاعی بین ۴ و ۶ را به عنوان سطح گاوسی انتخاب می‌کنیم.

$$\epsilon_{\circ} \oint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dA} = q \;\;,\;\; q = \int_{\circ}^{r} ۴\pi r^{۲}\cdot\rho(r)\cdot dr$$

$$q = \int_{\circ}^{۴} \circ\cdot dr + \int_{۴}^{r} ۴\pi r^{۲}\cdot\frac{\ln r}{r^{۲}}\cdot dr = \int_{۴}^{r} ۴\pi \ln r dr = ۴\pi\int_{۴}^{r} \ln r dr$$

$$\int \ln r dr = r\ln r - \int r\times\frac{۱}{r}\cdot dr = r\ln r - r = r(\ln r - ۱)$$

$$q = ۴\pi(r\ln r - r)\Big]_{۴}^{r} = ۴\pi(r\ln r - r - \underbrace{(۴\ln ۴ - ۴)}_{\alpha})$$

$$= ۴\pi(r\ln r - r - \alpha)$$

$$\rightarrow \epsilon_{\circ} E\cdot ۴\pi r^{۲} = ۴\pi(r\ln r - r - \alpha) \;\rightarrow\; E = \frac{۱}{\epsilon_{\circ}}\cdot\frac{(r\ln r - r - \alpha)}{r^{۲}}$$

ب‌ـ۳) این بار سطح گاوسی را آنقدر بزرگ در نظر می‌گیریم که کل توزیع بار داخل آن قرار بگیرد.

$$\epsilon_{\circ} \oint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dA} = q \;\;,\;\; q = \int_{\circ}^{r} ۴\pi r^{۲}\rho(r)\cdot dr$$

$$\rightarrow\; q = \int_{\circ}^{۴} \circ\cdot dr + \int_{۴}^{۶} \rho(r)\cdot ۴\pi r^{۲}\cdot dr + \int_{۶}^{r} \rho\cdot dr = \int_{۴}^{۶} ۴\pi\ln r\cdot dr$$

$$= ۴\pi(۶\ln ۶ - ۶ - ۴\ln ۴ + ۴) = ۴\pi(\ln ۶^{۶} - \ln ۴^{۴} - ۲)$$

$$= ۴\pi\left(\ln\frac{۶^{۶}}{۴^{۴}} - ۲\right) \rightarrow E = \frac{۱}{\epsilon_{\circ}}\cdot\frac{\left(\ln\frac{۶^{۶}}{۴^{۴}} - ۲\right)}{r^{۲}}$$

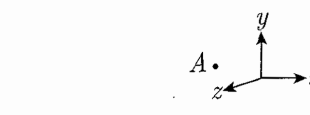
همان‌طورکه می‌بینید برای $r > ۶$ این توزیع بار مثل یک بار متمرکز در مرکز کره عمل می‌کند!

ب‌ـ۳) خط نامتناهی بار

فرض کنید خطی از بار داریم که در یک راستا از $-\infty$ تا $+\infty$ کشیده شده است و در همه نقاط دارای چگالی خطی ثابت $\lambda = \frac{dq}{ds} = \text{cte}$ باشد (ds المان یک‌بعدی مسیر در راستایی است که توزیع بار در آن قرار دارد)، می‌خواهیم ببینیم که میدان در اطراف چنین توزیع باری چگونه است؟
ابتدا خط بار را مطابق شکل ۲ـ۲۵ فرض کنید.

شکل ۲-۲۵

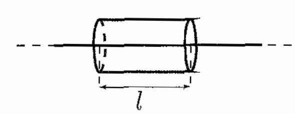
حالا یک صفحه‌ی فرضی از این خط بار عبور دهید (می‌دانیم که بی‌شمار صفحه وجود دارند که از این خط می‌گذرند) و روی این صفحه یک نقطه دلخواه در نظر بگیرید، برای سهولت در رسم شکل ما این صفحه را همان کاغذ در نظر گرفته‌ایم، نقطه‌ی A نقطه‌ای است که می‌خواهیم میدان را در آن به‌دست بیاوریم.



شکل ۲-۲۶

بیایید فرض کنیم میدان در نقطه‌ی A، مؤلفه‌ای در راستای $+\hat{i}$ دارد، این بدان معناست که مقدار بار طرف چپ نقطه‌ی A بیشتر از مقدار بار طرف راست این نقطه است (با فرض وجود بار مثبت روی خط بار)، به نظر شما مقدار بارکدام طرف نقطه A بیشتر است؟ بیایید این سؤال را طور دیگری مطرح کنیم. اگر فرض ما درست باشد (مقدار بار سمت چپ نقطه‌ی A بیشتر از سمت راستش باشد)، چقدر باید نقطه‌ی A را به طرف چپ جابه‌جا کنیم تا این دو مقدار بار مساوی شوند؟

همان‌طور که احتمالاً متوجه شده‌اید، اشکال کار در اینجاست که این خط از دو طرف نامحدود است و عملاً برای نقطه‌ی A طرف چپ و راست کاملاً مشابه‌اند، برای این‌که درک درستی از این وضعیت داشته باشید، فرض کنید که شما به عنوان یک ناظر در نقطه‌ی A مسئول شده‌اید که مقدار بار دو طرف خودتان را مقایسه کنید و برای این کار روشی که به کار می‌گیرید این است که ابتدا سرتان را به یک طرف (مثلاً چپ) می‌چرخانید و مقداری بار λds را در یک فاصله (مثلاً فاصله‌ی x) پیدا می‌کنید، سپس سرتان را به طرف دیگر می‌گردانید و سعی می‌کنید همان مقدار بار را در همان فاصله $(x, \lambda ds)$ پیدا کنید. قبول دارید که موفق می‌شوید؟ این کار را تا بی‌نهایت بار ادامه می‌دهید و همین نتیجه را می‌گیرید، بنابراین از نظر ناظری که در نقطه‌ی A است بار دو طرف یکسان است و بنابراین مؤلفه در راستای $\hat{i}$ ندارد. همچنین به دلیل وجود تقارن استوانه‌ای میدانی در نقطه‌ی A مؤلفه‌ای در راستای $\hat{k}$ هم ندارد و فقط می‌ماند مؤلفه در راستای $\hat{j}$. (یادمان هست که نقطه‌ی A یک نقطه‌ی دلخواه است و هیچ خاصیت ویژه‌ای ندارد.)

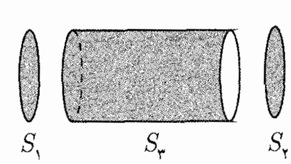


شکل ۲-۲۷

با توجه به چیزهایی که گفتیم می‌خواهیم به سراغ قانون گاوس برویم و میدان را حساب کنیم. با توجه به تقارن استوانه‌ای، شکل دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) را برای بیان مختصات به کار می‌بریم.

یک استوانه به شعاع r را با طول دلخواه l در نظر بگیرید، طبق قانون گاوس برای این سطح:

$$\epsilon_\circ \oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = q$$



شکل ۲-۲۸

سطح بسته‌ی S، یعنی استوانه‌ی ما، از سه سطح تشکیل شده که میدان روی هر یک ویژگی خاصی دارد، دو صفحه‌ی دایره شکل عمود بر خط بار $(S_۲, S_۱)$ و یک پوسته استوانه‌ای $(S_۳)$ برای دو سطح $S_۱$ و $S_۲$. در هر المان سطح چنانچه گفته شد، $\vec{E}$ در راستای $E\hat{r}$ است، در حالی

که $\overrightarrow{dA}$ در راستای $\hat{e}_z$ است و بنابراین $\vec{E}.\overrightarrow{dA} = 0$. پس:

$$\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = \epsilon_0 \int_{S_3} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = q$$

روی سطح E_3، $\overrightarrow{dA} = dA\hat{e}_r$، $\vec{E}$ هم که همه جا در راستای $\hat{E}_R$ است:

$$\epsilon_0 \int_{S_3} EdA = q$$

$$\rightarrow \epsilon_0 E \times A = q \rightarrow \epsilon_0 E \times 2\pi r \times l = q$$

همچنین $q = \lambda \times l$.

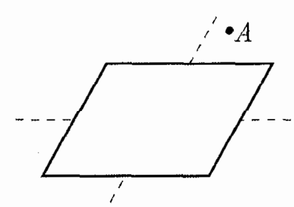
$$\epsilon_0 E \times 2\pi r = \lambda \rightarrow E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

و به صورت برداری:

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r} \cdot \hat{e}_r$$

ب-۴) ورقه‌ی نامتناهی از بار (نارسانا)، با چگالی بار سطحی

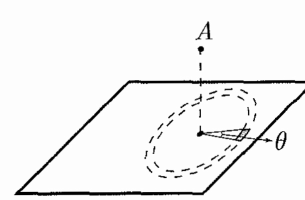
برای میدان اطراف یک صفحه‌ی نامتناهی از بار، داستان کاملاً شبیه به میدان خط نامتناهی از بار است، با این تفاوت که همه چیز دوبعدی شده است. فرض کنید صفحه‌ی نامتناهی در قسمتی از فضا به شکل زیر است. نقطه‌چین‌ها نشان دهنده‌ی آن است که این صفحه از همه طرف ادامه دارد. دوباره فرض کنید می‌خواهیم وضعیت میدان را در نقطه‌ای مثال نقطه‌ی A، بررسی کنیم.



شکل ۲-۲۹

با استدلالی مشابه قسمت قبل اگر بتوانیم نشان دهیم که ناظر خیالی که در نقطه‌ی A ایستاده و وضعیت بارهای اطرافش را بررسی می‌کند، وضعیت همه‌ی جهات را یکسان ارزیابی می‌کند، می‌توانیم نتیجه بگیریم که میدانی در نقطه‌ی A فقط مؤلفه‌ای در راستای عمود بر صفحه‌ی بار دارد.

دوباره فرض کنید که شما به عنوان ناظر در نقطه‌ی A ایستاده‌اید، برای این‌که تقارن بار اطرافتان را بررسی کنید به هر طرفی که دوست دارید نگاه می‌کنید و در یک فاصله‌ی دلخواه مقداری بار را پیدا می‌کنید. به شکل ۲-۳۰ نگاه کنید.



شکل ۲-۳۰

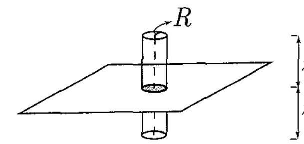
از نقطه‌ی A به صفحه عمود می‌کنیم، پای عمود مرکز یک دستگاه مختصات استوانه‌ای است. حالا عبارت قبل را اینگونه تکرار می‌کنیم، اگر برای یک فاصله‌ی دلخواه r، مقدار بار موجود در همه‌ی θها یکسان باشد. میدان در نقطه‌ی A باید در راستای $\hat{e}_z$ باشد.

همان‌طور که می‌بینید مقدار بار موجود در فاصله‌ی r برای همه‌ی θها برابر است با مقدار

$$\sigma \times dA = \sigma \times r \times dr \times d\theta$$

این نقاط روی یک دیسک به شعاع r و عرض dr قرار دارند و بی‌نهایت بودن صفحه، وجود چنین دیسکی را به هر شعاعی تضمین می‌کند.

حالا به سراغ قانون گاوس می‌رویم و به کمک آن میدان را در نقطه‌ی A به‌دست می‌آوریم. یک استوانه را به شعاع R و به ارتفاع $2z$ به صورت شکل در نظر می‌گیریم.



شکل ۲-۳۱

قانون گاوس را برای این سطح می‌نویسیم.

$$\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = q$$

سطح S را مثل قسمت پیش به سه قسمت S_1، S_2 و S_3 تقسیم می‌کنیم. برای سطح S_3، dA در راستای $\hat{e}_r$ و برای دو سطح S_1 و S_2، dA در راستای $\hat{e}_z$ است. میدان هم همواره در راستای $\hat{e}_z$ است.

$$\epsilon_0 \left(\int_{S_1} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} + \int_{S_3} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} \right) = q$$

$$\xrightarrow{\text{بنا به تقارن در بالا و پایین صفحه}} \epsilon_0 \times 2 \oint_{S_1} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = q$$

$$\rightarrow \epsilon_0 \times 2 \times E \times \pi \times r^2 = q$$

$$q = \sigma \times A = \sigma \times \pi \times R^2$$ (مقدار بار موجود بر روی دایره هاشور زده شده)

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

که به صورت برداری به شکل روبه‌رو خواهد بود: $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \hat{e}_z$

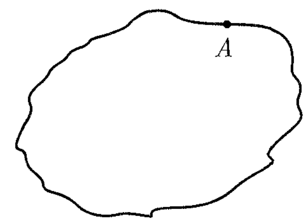
نتیجه جالب توجهی است، این طور نیست؟ این یعنی میدان در همه جا اطراف این صفحه برابر و در راستای $\hat{e}_z$ است و حتی به فاصله از صفحه بستگی ندارد! این نتیجه برای ما کمی غیرقابل باور است، به نظر شما چرا؟

مشکل اینجاست که خط نامتناهی بار و صفحه نامتناهی بار عملاً وجود خارجی ندارند، بلکه مدل‌های ریاضی هستند برای واقعیت‌های عالم فیزیک، ما چه وقتی می‌توانیم از تقریب صفحه بی‌نهایت بار استفاده کنیم؟ فرض کنید این صفحه کاغذ که الان دارید می‌خوانید همان صفحه بار باشد. این صفحه به نظر شما بی‌نهایت نیست، اما فرض کنید آرام‌آرام به آن نزدیک می‌شوید، هر چه نزدیک می‌شوید صفحه از نظر شما بزرگ‌تر می‌شود. در فاصله‌ی بسیار کم از صفحه شما صفحه را بی‌نهایت می‌بینید مثلاً از دید یک مورچه که روی این صفحه راه برود. فرض کنید مساحت این صفحه کاغذ A_p و ارتفاعی که از آن کمتر تقریب صفحه بی‌نهایت تقریب قابل قبولی است Z_0 باشد. اگر ابعاد این صفحه کاغذ مثلاً ۱۰ برابر شدند، شما هم حالا می‌توانید فاصله‌ی Z_0 را بیشتر کنید. مثل این است که به علتی نامعلوم همه‌ی عالم از لحاظ اندازه چند برابر شوند.

ب) میدان الکتریکی خارجی یک رسانا

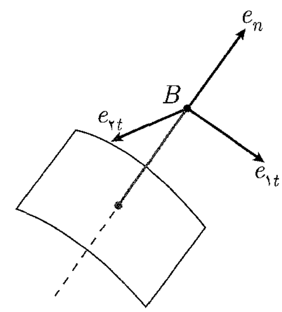
در قسمت (الف) همین بحث، به این نتیجه رسیدیم که بار الکتریکی اضافه‌ای که به یک رسانا داده شده، روی سطح خارجی آن جمع می‌شود، اما مشخص نکردیم که این بار به چه صورتی روی سطح جمع می‌شود، الان هم قصدمان این نیست. در فصل بعد خواهیم گفت که بار به گونه‌ای جمع می‌شود که سطح رسانا یک سطح هم‌پتانسیلی را تشکیل بدهد.

در این قسمت می‌خواهیم با فرض این‌که چگالی سطحی بار (σ) را در همه‌ی نقاط می‌دانیم، میدان را در نزدیکی سطح رسانا به‌دست آوریم. شکل ۲ـ۳۲ یک رسانا را نشان می‌دهد که ما بار q را به آن داده‌ایم و توزیع این بار بر روی سطح، باعث به وجود آمدن چگالی سطحی بار $\sigma = \frac{dq}{dA} \neq \text{cte}$ روی سطح شده است.



شکل ۲-۳۲

فرض کنید در نقطه‌ای مانند نقطه‌ی A می‌خواهیم میدان را در نزدیکی و خارج رسانا به‌دست آوریم. شکل بزرگ شده‌ی نقطه‌ی A در شکل (۲ـ۳۳) نشان داده شده است. نقطه‌ی B نقطه‌ای از فضا است که می‌خواهیم میدان را در آن به‌دست آوریم. $\hat{e}_n$ راستای عمود بر سطح در نقطه‌ی A است و $\hat{e}_{1t}$ و $\hat{e}_{2t}$ راستاهای موازی سطح هستند. با استدلالی مشابه قسمت (الف) می‌خواهیم بگوییم که میدان در نقطه‌ی B باید فقط مؤلفه‌ی عمود بر سطح (در راستای $\hat{e}_n$) داشته باشد. اگر میدانی در سطح رسانا مؤلفه‌ی موازی سطح داشته باشد، این میدان به الکترون‌های آزاد سطح رسانا نیرو وارد می‌کند و باعث به وجود آمدن جریان‌های سطحی می‌شود که غیرقابل قبول است، بنابراین چنین مؤلفه‌ای ندارد و عمود بر سطح است.



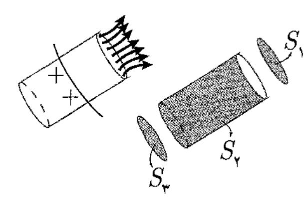
شکل ۲-۳۳

حالا به سراغ قانون گاوس می‌رویم، سطح گاوسی که این بار در نظر می‌گیریم، یک المان دیفرانسیلی حجم به شکل استوانه‌ای است. مطابق شکل (۲ـ۳۴)

طبق قانون گاوس:
$$\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = q$$
$$\epsilon_0 \left(\int_{S_1} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} + \int_{S_3} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} \right) = q$$

روی سطح S_2، dA در راستایی عمود بر راستای میدان (راستای عمود بر سطح) است.

روی سطح S_3 میدان صفر است چون سطح S_3 درون رسانا قرار دارد.



شکل ۲-۳۴

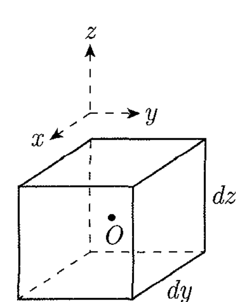
$$\epsilon_0 \int_{S_1} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = q \ \rightarrow \ \epsilon_0 E \cdot \pi \times (R_A)^2 = q$$
$$q = \sigma_A \times A_A = \sigma_A \times \pi \times (R_A)^2$$
$$\rightarrow \epsilon_0 E \times \pi \times (R_A)^2 = \sigma_A \times \pi \times (R_A)^2 \ \rightarrow \ E = \frac{\sigma_A}{\epsilon_0}$$

شکل دیفرانسیلی قانون گاوس

در فصل بعد، نیاز پیدا خواهیم کرد که یک رابطه بین وضعیت توزیع بار در فضا و میدان در آن نقطه از فضا بیابیم. در این فصل و توسط قانون گاوس ما وضعیت میدان روی یک سطح بسته را به مقدار بار خالص داخل آن مرتبط کردیم. در این قسمت همین کار را برای یک جزء حجم دلخواه از فضا انجام خواهیم داد.

یک مکعب به شکل ۲ـ۳۵ در نظر بگیرید که ابعاد آن dx، dy و dz هستند و هر یک از اضلاع موازی یکی از محورهای x، y و z است.

نقطه‌ی o در این شکل مرکز مکعب است و فاصله‌ی آن از وجوه مختلف $\frac{dx}{2}$، $\frac{dy}{2}$ و $\frac{dz}{2}$ است.



شکل ۲-۳۵

این سطح یک سطح بسته است و می‌توان آن را به عنوان سطح گاوسی در نظر گرفت و این قانون را در مورد آن به کار گرفت، فرض کنید میدان الکتریکی در نقطه‌ی o به صورت $E(\vec{o})$ باشد، در این صورت میدان روی سطوح این مکعب توسط بسط تیلور به‌دست می‌آید:

$$\vec{E}(o+\frac{dx}{۲})=\vec{E}(o)+\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{۲} \quad , \quad \vec{E}(o+\frac{dy}{۲})=\vec{E}(o)+\frac{\partial\vec{E}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{۲}$$
$$\vec{E}(o+\frac{dx}{۲})=\vec{E}(o)+\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}\cdot\frac{(-dx)}{۲} \quad , \quad \vec{E}(o-\frac{dy}{۲})=\vec{E}(o)+\frac{\partial\vec{E}}{\partial y}\cdot\frac{(-dy)}{۲}$$
$$\vec{E}(o+\frac{dz}{۲})=\vec{E}(o)+\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}\cdot\frac{dz}{۲} \quad , \quad \vec{E}(o-\frac{dy}{۲})=\vec{E}(o)+\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}\cdot\frac{۹-dz)}{۲}$$

حال با دانستن میدان روی این سطوح، شار میدان الکتریکی را محاسبه می‌کنیم. دقت کنید که برای مثال، روی سطوحِ واقع در $\pm\frac{dx}{۲}$، بردار عمود برسطح به صورت $\pm i$ است و برای دو صفحه متفاوت است، به این صورت شار کل از صفحه به صورت زیر است:

$$\phi=\left(\vec{E}(o)+\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}.\frac{\partial x}{۲}\right).(dydz\hat{i})$$
$$+\left(\vec{E}(o)+\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}.(-\frac{dx}{۲})\right).(-dydz\hat{i})+\cdots$$

که پس از ساده کردن، حاصل آن به صورت زیر است:

$$\phi=\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}.dx.dy.dz\right).\hat{i}+\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial y}.dy.dx.dz\right).\hat{j}$$
$$+\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}.dz.dx.dy\right).\hat{k}$$

با اعمال قانون گاوس: می‌دانیم

$$\phi=\frac{q}{\epsilon_\circ}=\frac{\rho.dV}{\epsilon_\circ}=\rho.\frac{dx.dy.dz}{\epsilon_\circ}$$

با حذف $dx.dy.dz$ از دو طرف داریم:

$$\phi=\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}.\hat{i}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial y}.\hat{j}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}.\hat{k}=\frac{\rho}{\epsilon_\circ}$$

اما میدان $\vec{E}$ به صورت $\vec{E}=E_x\hat{i}+E_y\hat{j}+E_z\hat{k}$ است، برای مثال

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}=\frac{\partial E_x}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial E_y}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial E_z}{\partial z}.\hat{k}$$

و حاصل $\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}.\hat{i}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial E_y}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\hat{k}\right).\hat{i}=\frac{\partial E_x}{\partial x}$$

بنابراین با نوشتن عبارت‌های معادل برای دو جمله‌ی دیگر، عبارت شار چنین به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).(E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k})\end{aligned}$$

با توجه به تعریف عملگر$\vec{\nabla}$ (گرادیان) و $\vec{\nabla}\cdot$ (دیورژانس) این عبارت را می توان به صورت مقابل نوشت:

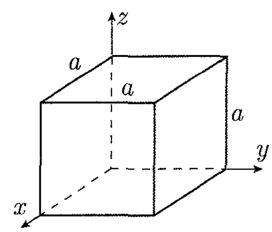
$$\vec{\nabla}.\vec{E}(x,y,z) = \frac{\rho}{\epsilon_\circ}$$

به این شکل، با توجه به اینکه ما نقطه‌ی خاصی را برای نقطه‌ی o در نظر نگرفتیم، می‌توان عبارت‌های بالا را برای هر نقطه‌ای به کاربرد، یعنی

$$\vec{\nabla}.\vec{E}(x,y,z) = \frac{\rho(x,y,z)}{\epsilon_\circ}$$

به این عبارت شکل دیفرانسیلی قانون گاوس گفته می‌شود. همان‌طور که می‌خواستیم، این عبارت وضعیت بار در هر نقطه از فضا را به وضعیت میدان در آن نقطه از فضا مربوط می‌کند.
همان‌طور که گفته شد، این عبارت فعلاً برای ما کاربرد مستقیمی ندارد، بلکه از آن در قسمتی از فصل برای توضیح معادله پواسون و روش تصاویر استفاده خواهد شد.

مسائل نمونه فصل ۲



شکل ۲-۳۶

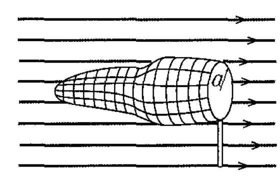
۱. مکعبی مطابق شکل (۲ـ۳۶) در یک میدان الکتریکی با معادله:

الف) $۴x\hat{i}+e^{y}\hat{j}=\vec{E}$

ب) $۴y\hat{i}+e^{x}\hat{j}=\vec{E}$

قرار دارد. شارگذرنده از این مکعب را محاسبه کنید و با استفاده از قانون گاوس مقدار بار داخل این مکعب را محاسبه کنید.

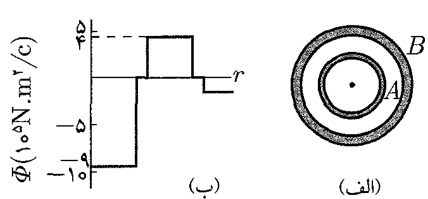
۲. مطابق شکل، یک تور ماهی‌گیری در میدان الکتریکی یکنواخت $E=۳{,}۰\,\mathrm{mN/C}$ قرار دارد. قاب که دایره‌ای به شعاع $a=۱۱\mathrm{cm}$ است در جهت عمود بر میدان قرار دارد. هیچ بار الکتریکی درون تور وجود ندارد. شار الکتریکی که از تور می‌گذرد را به‌دست آورید.



شکل ۲-۳۷ سؤال ۲

۳. ذره‌ای با بار $+q$ درگوشه‌ی یک سطح گاوسی مکعب شکلی قرار دارد. شارگذرنده از **الف)** هر وجه مکعب که مجاور آن گوشه قرار دارد و **ب)** سایر وجه‌های مکعب را به صورت مضربی از $\frac{q}{\epsilon_{۰}}$ به‌دست آورید.

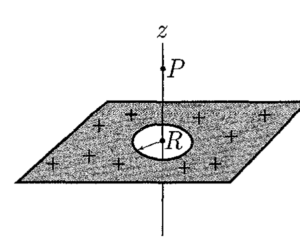
۴. یک ذره‌ی باردار در مرکز دو پوسته‌ی کروی رسانای هم‌مرکز قرار گرفته است. شکل (الف) سطح مقطع پوسته‌ها را نشان می‌دهد. نمودار شکل (ب) شار خالص Φ را که از یک سطح گاوسی کروی به مرکز ذره می‌گذرد. به صورت تابعی از شعاع r کره نشان می‌دهد. **الف)** بار ذره‌ی مرکزی و بار خالص روی **ب)** پوسته‌ی A و **ج)** پوسته‌ی B را تعیین کنید.



شکل ۲-۳۸

شکل ۲-۳۹ سؤال ۵

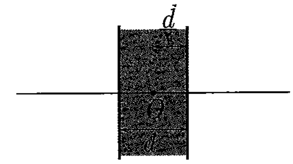
۵. یک استوانه‌ی صلب و بلند نارسانا به شعاع $۴{,}۰\mathrm{cm}$ دارای چگالی بار حجمی ρ است که به صورت تابعی از r (فاصله از محور استوانه) به صورت $\rho=Ar^{۲}$ می‌باشد. برای $A=۲{,}۵\mu\mathrm{C/m^{۵}}$ اندازه‌ی میدان الکتریکی در **الف)** $r=۳{,}۰\,\mathrm{cm}$ و **ب)** $r=۵{,}۰\,\mathrm{cm}$ چقدر است؟



شکل ۲-۴۰ سؤال ۶

۶. مطابق شکل سوراخ دایره‌ای شکل کوچکی به شعاع $R=۱{,}۸۰\,\mathrm{cm}$ تقریباً وسط یک صفحه‌ی نارسانای نامتناهی ایجاد شده است. چگالی بار سطحی روی صفحه $\sigma=۴{,}۵۰\,\mathrm{pC/m^{۲}}$ است. محور z که مبدأ آن در مرکز سوراخ قرار دارد عمود بر سطح رسم شده است. بر حسب بردارهای یکه میدان الکتریکی در نقطه‌ی P در $z=۲{,}۵۶\mathrm{cm}$ چیست؟ (**راهنمایی:** از معادله‌ی میدان ناشی از قرص باردار استفاده کنید.)

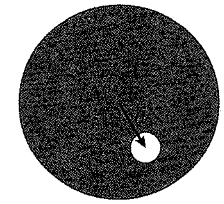
۷. شکل ۲ـ۴۱ سطح مقطع یک بُره‌ی خیلی بزرگ نارسانا را که ضخامت آن $d = ۹٫۴\,\mathrm{mm}$ و چگالی بار حجمی آن $\rho = ۵٫۸\,\mathrm{fC/m^۲}$ است را نشان می‌دهد. مبدأ محور xها در مرکز بُره قرار دارد. اندازه‌ی میدان الکتریکی بُره را در مختصه‌ی x **الف)** ۰ و **ب)** $۲٫۰۰\,\mathrm{mm}$ و **ج)** $۴٫۷۰\,\mathrm{mm}$ و **د)** $۲۶٫۰\,\mathrm{mm}$ به‌دست آورید.



شکل ۲-۴۱ سؤال ۷

۸. یک کره‌ی صلب نارسانا به شعاع $R = ۵٫۶۰\,\mathrm{cm}$ دارای بار متغیر یکنواخت با چگالی $\rho = (۱۴٫۱\,\mathrm{pC/m^۳})\dfrac{r}{R}$ است که در آن r فاصله‌ی شعاعی از مرکز کره می‌باشد. **الف)** بار کل کره چقدر است؟ اندازه‌ی E میدان الکتریکی در **ب)** $r = ۰$ و **ج)** $r = R/۲$ و **د)** $r = R$ چقدر است؟ **هـ)** منحنی E بر حسب r را رسم کنید.

۹. یک کره‌ی صلب نارسانا دارای چگالی حجمی بار ρ می‌باشد. فرض کنید $\vec{r}$ برداری از مرکز کره به یک نقطه‌ی دلخواه درون کره باشد. **الف)** نشان دهید که میدان الکتریکی در P به صورت $\vec{E} = \rho\vec{r}/\epsilon_۰$ است. (توجه کنید که این نتیجه از شعاع کره مستقل است.) **ب)** مطابق شکل ۲ـ۴۲ حفره‌ای درون کره ایجاد می‌کنیم. با استفاده از مفهوم برهم‌نهی نشان دهید که میدان در تمام نقاط درون حفره یکنواخت است و توسط رابطه‌ی $\vec{E} = \rho\vec{a}/۳\epsilon_۰$ داده می‌شود که در آن $\vec{a}$ بردار مکان از مرکز کره به مرکز حفره است. (توجه کنید که این نتیجه مستقل از شعاع کره و شعاع حفره می‌باشد.)



شکل ۲-۴۲ سؤال ۹

پاسخ مسائل نمونه فصل ۲

۱. برای محاسبه‌ی شار، ابتدا دقت می‌کنیم که میدان مؤلفه‌ای در راستای محور z ندارد. دو سطح بالایی و پایینی مکعب بردارهای سطحی در راستای z دارند و بنابراین شار میدان الکتریکی گذرنده از این دو سطح صفر است و بنابراین شار کل برابر با شار گذرنده از چهار وجه دیگر است:

الف)

$$x=0 \;\rightarrow\; E=e^{y}\hat{j}\;,\; \overrightarrow{dA}=|dA|\times(-\hat{i})$$

$$\rightarrow \phi_1=\int_{A_1}\vec{E}\cdot\overrightarrow{dA}=\int_{A_1}|E|.|dA|.\cos\frac{\pi}{2}=0$$

$$x=a \;\rightarrow\; E=4a\hat{i}+e^{y}\hat{j}\;,\; \overrightarrow{dA}=|dA|\hat{i}$$

$$\rightarrow \phi_2=\int_{A_2}\vec{E}.\overrightarrow{dA}=\int_{A_2}4a.dA=4a.a^2$$

$$y=0 \;\rightarrow\; \vec{E}=4x\hat{i}+\hat{j}\;,\; \overrightarrow{dA}=|dA|=-\hat{j}$$

$$\rightarrow \phi_3=\int_{A_3}\vec{E}.\overrightarrow{dA}=-\int_{A_3}dA=-a^2$$

$$y=a \;\rightarrow\; \vec{E}=4x\hat{i}+e^{a}\hat{j}\;,\; \overrightarrow{dA}=|dA|\hat{j}$$

$$\phi_4=\int_{A_4}\vec{E}.\overrightarrow{dA}=\int_{A_4}e^{a}.dA=e^{a}.a^2$$

$$\phi=\phi_1+\phi_2+\phi_3+\phi_4=a^2(4a-1+e^{a})$$

$$\text{طبق قانون گاوس}\;\rightarrow\; q=\phi\epsilon_0=\epsilon_0 a^2(4a-1+e^{a})$$

ب)

$$x=0 \;\rightarrow\; \vec{E}=4y\hat{i}+\hat{j}\;,\; \overrightarrow{dA}=|dA|\times(-\hat{i})$$

$$\rightarrow \phi_1=\int_{A_1}\vec{E}.\overrightarrow{dA}=\int_{A_1}-4y.dA\;,\; dA=ady$$

$$\rightarrow \phi_1=\int_0^a -4aydy=-4a\frac{y^2}{2}\Big|_0^a=-\frac{4a^3}{2}=-2a^3$$

$$x=a \;\rightarrow\; \vec{E}=4y\hat{i}+e^{a}\hat{j}\;,\; \overrightarrow{dA}=|dA|.\hat{i}$$

$$\rightarrow \phi_2=\int_{A_2}\vec{E}.\overrightarrow{dA}=\int_{A_2}4ydA=2a^3$$

$$y=0 \;\rightarrow\; \vec{E}=e^{x}\hat{j}\;,\; \overrightarrow{dA}=|dA|.-\hat{j}$$

$$\rightarrow \phi_3=\int_{A_3}\vec{E}.\overrightarrow{dA}=\int_0^a a(-e^{x}).dx=a(-e^{x})\Big]_0^a=a(1-e^{a})$$

$$y=a \;\rightarrow\; \vec{E}=4a\hat{i}+e^{x}\hat{j}\;,\; \overrightarrow{dA}=|dA|.\hat{j}$$

$$\rightarrow \phi_4=\int_{A_4}\vec{E}.\overrightarrow{dA}=\int_0^a ae^{x}=a(e^{a}-1)$$

$$\rightarrow \phi=\sum_{i=1}^{4}\phi_i=0 \;\rightarrow\; \text{طبق قانون گاوس}\;\rightarrow\; q=0$$

۲. از آنجا که درون تور هیچ بار الکتریکی وجود ندارد، دهانه‌ی دایره‌ای و بدنه‌ی آن را یک سطح بسته فرض می‌کنیم که شار کل عبوری از آن طبق قانون گاوس صفر است.

شار کل عبوری از دهانه را $\varphi_۱$ و شار عبوری از بدنه را $\varphi_۲$ می‌نامیم. شار کل تور ماهی‌گیری، که برابر صفر است، با مجموع شار کل عبوری از دهانه و بدنه‌ی آن باید برابر باشد.

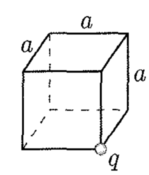
$$\varphi_۲ + \varphi_۱ = ۰ \ \Rightarrow\ \varphi_۲ = -\varphi_۱$$

با توجه به این‌که شار به مساحت سطح عمود بر میدان بستگی دارد، و در این تور ماهی‌گیری سطح دهانه‌ی تور بر میدان الکتریکی که اتفاقاً یکنواخت است عمود شده است، محاسبه‌ی عددی مقدار شار کاری ساده است. این کار را انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\varphi_۱ &= \vec{E}.\hat{n}A = E \times \pi r^۲ = (۳ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{N/C}) \times (۳/۱۴ \times ۰/۱۱^۲) \\ &= ۱/۱۴ \times ۱۰^{-۴}\mathrm{V.m}\end{aligned}$$

در نتیجه شار الکتریکی گذرنده از تور، که همان شار کل عبوری از بدنه‌ی آن است $(\varphi_۲)$ به‌دست می‌آید:

$$\varphi_۲ = -۱/۱۴ \times ۱۰^{-۴}\mathrm{V.m}$$

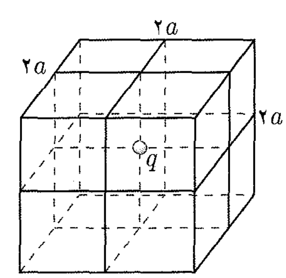


شکل ۲-۴۳

۳. مطابق شکل، مکعبی به ضلع a را در نظر می‌گیریم. بار ذره‌ای $+q$ در گوشه‌ی آن، که همان رأس آن است قرار گرفته است.

برای این‌که بتوانیم شکل مسئله را برای استفاده از قانون گاوس متناسب کنیم، شکل را متقارن می‌کنیم، به طوری که مکعب‌ها به هم بچسبند و بار q در مرکز مکعب بزرگ‌تر قرار گیرد. برای این کار چند مکعب لازم است؟ (فکر کنید) مطابق شکل زیر هشت مکعب از همان مکعب به ضلع a را به هم می‌چسبانیم تا مکعب بزرگ‌تری به ضلع $۲a$ به‌دست آید که بار q در مرکز آن قرار گرفته است. شاری که از این مکعب می‌گذرد، شار حاصل از این بار ذره‌ای تنها در مرکز آن است. بنابراین شار عبوری از وجوه بیرونی مکعب به ضلع $۲a$، طبق قانون گاوس برابر است:

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon_۰}$$



شکل ۲-۴۴

از آنجا که این شار به طور کروی در فضا پخش می‌شود، می‌توان کره‌ای را تصور کرد که در درون مکعب بزرگ محاط شده است. در هر مکعب کوچک یک هشتم کره قرار می‌گیرد. به عبارت بهتر، برای این‌که تصور کنید چگونه شار حاصل از بار نقطه‌ای واقع در مرکز مکعب بزرگ، به هشت قسمت تقسیم می‌شود و از مکعب‌های کوچک‌تر عبور می‌کند، می‌توانید از تصور کره‌ی محاط استفاده کنید. بنابراین به پاسخ سؤال مورد نظر خود رسیدیم. حال می‌دانیم که یک هشتم شار عبوری از مکعب بزرگ از مکعب کوچک می‌گذرد. شار مکعب اصلی را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\varphi_۱ = \frac{q}{۸\epsilon_۰}$$

در مورد شار عبوری از وجوه مختلف مکعب اصلی، می‌توان تصور کرد که شار عبوری از وجوهی که بار بر روی آنها قرارگرفته است صفر است؛ چراکه وقتی چشمه روی سطحی قرار داشته باشد و خطوط میدان گسیلی از آن خط مستقیم باشند، در هیچ حالتی شار عبوری از سطح غیرصفر نمی‌شود. بنابراین پاسخ مورد (الف) صفر است. سایر وجه‌های مکعب که بار بر روی آنها قرار ندارد، نیمی از کل وجه‌های مکعب را تشکیل می‌دهند. بنابراین می‌توان گفت که شار عبوری از مکعب اصلی به سه قسمت تقسیم می‌شوند و در سایر وجوه آن عبور می‌کنند. پس پاسخ قسمت (ب) به ترتیب زیر خواهد بود:

$$\varphi' = \frac{۱}{۳} \times \frac{q}{۸\epsilon_\circ} = \frac{q}{۲۴\epsilon_\circ}$$

۴. الف) سطح گاوسی را کره‌ای با شعاعی کوچک‌تر از شعاع کره‌ی A (r_A) در نظر می‌گیریم $[r < r_A]$. بار q درون آن است و دو پوسته بر روی شار عبوری تأثیر نمی‌گذارند.

$$\varphi_۱ = -۹ \times ۱۰^۵ = \frac{q}{\epsilon_\circ}$$
$$q = -(۹ \times ۱۰^۵) \times (۸{,}۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}) = -۷{,}۹۷ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{C}$$

ب) اگر این بار سطح گاوسی را کره‌ای به شعاعی کوچک‌تر از کره‌ی B ولی بزرگ‌تر از کره‌ی A در نظر بگیریم $[r_A < r < r_B]$، بار کره‌ی A نیز وارد قضیه می‌شود و شار عبوری به صورت زیر خواهد بود:

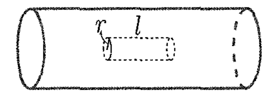
$$\varphi_۲ = ۴ \times ۱۰^۵ = \frac{q + q_A}{\epsilon_\circ}$$
$$۴ \times ۱۰^۵ = \frac{(-۷{,}۹۷ \times ۱۰^{-۶}) + q_A}{(۸{,}۸۵ \times ۱۰^{-۱۲})} \Rightarrow q_A = ۱{,}۱۵ \times ۱۰^{-۵}\mathrm{C}$$

ج) این بار سطح گاوسی دیگری در نظر می‌گیریم. طوری که هر دو کره و بار درون‌شان را در بر بگیرد. حال بار نقطه‌ای درون کره‌ی A بار سطحی روی کره‌ی A و کره‌ی B هر سه عامل ایجاد شار هستند. داریم:

$$\varphi_۳ = -۲ \times ۱۰^۵ = \frac{q + q_A + q_B}{\epsilon_\circ} - (۲ \times ۱۰^۵) \times (۸{,}۸۵ \times ۱۰^{-۱۲})$$
$$= -۷{,}۹۷ \times ۱۰^{-۶} + ۱۱{,}۵۱ \times ۱۰^{-۶} + q_B \Rightarrow q_B = -۵{,}۳ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{C}$$

۵. میدان حاصل از یک استوانه با چگالی بار حجمی یکنواخت تقارن استوانه‌ای دارد. تقارن استوانه‌ای بار به ما کمک می‌کند تا بتوانیم از قانون گاوس استفاده کنیم و با سطح گاوسی مناسب، میدان را در شعاع دلخواه به‌دست بیاوریم. این کار را دو بار انجام می‌دهیم. یک بار برای شعاع‌های کوچک‌تر از شعاع استوانه و بار دیگر برای شعاع‌های بزرگ‌تر. مطابق شکل داریم:

$$\oint_S \vec{E}.\hat{n}dA = \frac{q_s}{\epsilon_\circ}$$



شکل ۲-۴۵

از آنجا که میدان، تقارن استوانه‌ای دارد، می‌توان دریافت که به طور یکنواخت و عمود بر محور استوانه‌ی کوچک از آن خارج می‌شود و شاری از دو قاعده‌ی سطح گاوسی استوانه‌ای کوچک عبور نمی‌کند.

$$E \times 2\pi r l = \frac{q_s}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q_s}{2\pi\epsilon_0 r l}$$

$$q_s = \int_{V_s} \rho dV = \int_{r=0}^{r} Ar^2 \times 2\pi r l dr = \frac{1}{2}\pi A l r^4$$

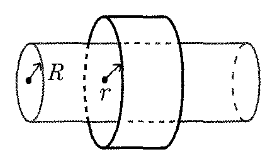
$$E = \frac{\pi A l r^4}{4\pi\epsilon_0 r l} = \frac{Ar^3}{4\epsilon_0} = \frac{(2.5 \times 10^{-6}) \times (0.03)^3}{4 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.05} = 1.91 \text{ N/C}$$

برای حالت (ب) که میدان در خارج از استوانه‌ی صلب باردار مطلوب است. سطح گاوسی جدیدی در نظر می‌گیریم:

$$E = \frac{q_s}{2\pi\epsilon_0 r l} \quad , \quad q_s = \int \rho dV = \frac{1}{2}\pi A l r^4\Big]_0^R = \frac{1}{2}\pi A l R^4$$

$$\Rightarrow E = \frac{\pi A l R^4}{4\pi\epsilon_0 r l} = \frac{AR^4}{4\epsilon_0 r}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(2.5 \times 10^{-6}) \times (0.04)^4}{4 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.05} = 3.62 \text{ N/C}$$



شکل ۲-۴۶

همان‌طور که مشاهده کردید، میدان برای حالتی که درون استوانه‌ی باردار قرار داشتیم با توان سوم فاصله از محور متناسب بود، ولی برای حالت بیرون از استوانه‌ی باردار با عکس فاصله متناسب است. کمی فکر کنید؛ منطقی است، نه؟

۶. میدان یک صفحه‌ی نامتناهی بدون سوراخ (کامل) باردار را با E نمایش می‌دهیم. برای تأثیر دادن میدان سوراخ دایره‌ای شکل کوچک به شعاع R درون آن، دو توزیع بار صفحه‌ی کامل نامتناهی و صفحه‌ی دایره‌ای باردار با چگالی بار منفیِ چگالی بار صفحه را بر هم اثر می‌دهیم. یعنی صفحه را به دو قسمت سوراخ‌دار و سوراخش تقسیم می‌کنیم و از آنجا که میدان صفحه‌ی نامتناهی و نیز میدان صفحه‌ی دایره‌ای شکل برای ما مشخص است، میدان مورد نظر که همان میدان صفحه‌ی سوراخ‌دار است به‌دست می‌آید.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$


شکل ۲-۴۷

میدان مورد نظر ما $\vec{E}_1$ است. $\vec{E}_2$ میدان ناشی از قرص باردار است که قبلاً به‌دست آوردیم. داریم:

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right]$$

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = E_1 + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right]$$

$$E_1 = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$= \frac{(4.5 \times 10^{-12}) \times (2.56 \times 10^{-2})}{2 \times (8.85 \times 10^{-12}) \times \sqrt{(2.56)^2 + (1.8)^2 \times 10^{-2}}}$$

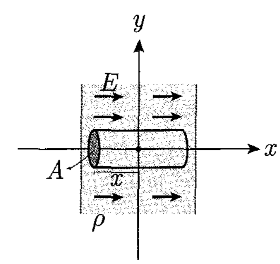
$$\Rightarrow \vec{E}_1 = 0.208\hat{k} \text{ N/C}$$

.۷

الف) در $x = \circ$ سطح دو طرف قطعه مانند دو صفحه‌ی نارسانای بزرگ و متقارن است که میدان یکسانی را در جهت عکس هم ایجاد می‌کنند. بنابراین میدان در این نقطه صفر است.

ب) در $x = ۲/\circ\,\mathrm{mm}$ سطح گاوسی را به صورت استوانه‌ای در نظر می‌گیریم که نسبت به محور y متقارن است. مطابق شکل ۲ـ۴۸ خطوط میدان که بنا به تقارن بُره موازی با محور x است، شاری را از سطح جانبی استوانه عبور نمی‌دهد و تنها دو سطح ابتدایی و انتهایی استوانه در عبور شار تأثیر دارند که میدان بر آنها عمود است.

$$\oint_S \vec{E}.\hat{n}dA = \frac{q_s}{\epsilon_\circ}$$
$$۲EA = \frac{\rho A \times ۲x}{\epsilon_\circ} \;\Rightarrow\; E = \frac{\rho x}{\epsilon_\circ}$$



شکل ۲ـ۴۸

همان‌طور که در شکل مشخص شده است سطح مقطع استوانه برابر A و نیم طول استوانه برابر x در نظر گرفته شده است.

$$E = \frac{(۵/۸ \times ۱\circ^{-۱۵})(۲ \times ۱\circ^{-۳})}{(۸/۸۵ \times ۱\circ^{-۱۲})} = ۱/۳۱ \times ۱\circ^{-۶}\ \mathrm{N/C}$$

ج) در $x = ۴/۷\mathrm{mm}$ سطح گاوسی استوانه‌ای مشابهی با طول بیشتر در نظر می‌گیریم. در این فاصله تمام حجم درون سطح گاوس دارای بار است. بنابراین مشابه حالت قبل داریم:

$$E = \frac{\rho x}{\epsilon_\circ}$$
$$= \frac{(۵/۸ \times ۱\circ^{-۱۵})(۴/۷ \times ۱\circ^{-۳})}{(۸/۸۵ \times ۱\circ^{-۱۲})} = ۳/۱ \times ۱\circ^{-۶}\ \mathrm{N/C}$$

د) در $x = ۲۶/\circ\,\mathrm{mm}$ میدان در بیرون از قطعه مورد نظر است. در بیرون از قطعه بُره‌ی نارسانا مانند صفحه‌ی بسیار بزرگی عمل می‌کند که همان میدان بخش قبل (ج) را در فضا ایجاد کرده است.

$$E = ۳/۱ \times ۱\circ^{-۶}\ \mathrm{N/C}$$

.۸

$$\rho = (۱۴/۱\mathrm{pC/m^۳})\frac{r}{R} = \rho_\circ \frac{r}{R}$$

که در آن $\rho_\circ = ۱۴/۱\mathrm{pC/m^۳}$ است.

برای پیدا کردن بار کل کره از معادله‌ی شعاعی چگالی حجمی بار در حجم کره انتگرال می‌گیریم:

$$q = \int \rho dV = \int_{r=\circ}^{R} \rho_\circ \frac{r}{R} \times ۴\pi r^۲ dr = \frac{\pi \rho_\circ}{R} \times R^۴ = \pi \rho_\circ R^۳$$
$$q = (۱۴/۱ \times ۱\circ^{-۱۲})(۳/۱۴)(۵/۶ \times ۱\circ^{-۲})^۳ = ۷/۷۸ \times ۱\circ^{-۱۵}\mathrm{C}$$

الف) اندازه‌ی میدان در شعاع‌های مختلف خواسته شده با استفاده از سطح گاوسی کروی به‌دست می‌آوریم. معادله‌ای را که در بسیاری از مسائل حل شده پیشین آمده است و باید تاکنون آشنای شما شده باشد، می‌نویسیم:

$$E = \frac{q_s}{۴\pi\epsilon_\circ r^۲}$$

که در آن q_s بار موجود در داخل کره‌ی گاوسی مفروض است و مقدار آن در شعاع r برابر است با:

$$q_s = \int_\circ^r \rho_\circ \frac{r}{R} ۴\pi r^۲ dr = \frac{\pi\rho_\circ}{R} r^۴$$

$$\Rightarrow E = \frac{\pi\rho_\circ r^۴}{R} \times \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ r^۲} = \frac{\rho_\circ r^۲}{۴\epsilon_\circ R}$$

ب)
$$r = \circ \ \Rightarrow \ E = \frac{\rho_\circ \times \circ^۲}{۴\epsilon_\circ R} = \circ$$

ج)

$$r = \frac{R}{۲} \text{ (دورن کره) } \Rightarrow \ E = \frac{(۱۴/۱ \times ۱\circ^{-۱۲})(R^۲/۴)}{۴\epsilon_\circ R} = \frac{۱۴/۱ \times ۱\circ^{-۱۲} R}{۱۶\pi\epsilon_\circ}$$

$$E = \frac{(۱۴/۱ \times ۱\circ^{-۱۲}) \times (\circ/\circ۵۶)}{۱۶ \times (۸/۸۵ \times ۱\circ^{-۱۲})} = ۵/۵۷۶ \times ۱\circ^{-۳} \text{ N/C}$$

د)

$$r = R \text{ (تمام بار درون سطح گاوسی قرار می‌گیرد)}$$

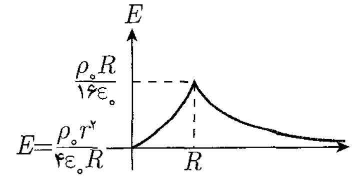
$$E = \frac{\rho_\circ R}{۴\epsilon_\circ} = \frac{(۱۴/۱ \times ۱\circ^{-۱۲}) \times (\circ/\circ۵۶)}{۴ \times (۸/۸۵ \times ۱\circ^{-۱۲})} = ۲/۲۳ \times ۱\circ^{-۲} \text{ N/C}$$

ه) برای رسم منحنی خواسته شده میدان را در سه نقطه از قبل مشخص کرده‌ایم. یعنی مختصات سه نقطه‌ی $r = \circ$، $r = \frac{R}{۲}$ و $r = R$ برای ما معلوم است:

$$E(r = \circ) = \circ$$

$$E(r = \frac{R}{۲}) = \frac{\rho_\circ R}{۱۶\epsilon_\circ}$$

$$E(r = R) = \frac{\rho_\circ R}{۴\epsilon_\circ}$$



شکل ۲-۴۹ پاسخ سؤال ۸

از آنجایی که رابطه‌ی میدان در داخل کره با توان دوم r متناسب است، بنابراین در بازه‌ی شعاعی مرکز تا سطح کره رابطه برای ما مشخص است. با خروج از کره، میدان الکتریکی کره تمام بار داخل آن را در بر می‌گیرد و با تقریب خوبی (و همچنین با استفاده از سطح گاوسی کروی) می‌توان گفت که میدان با عکس مجذور فاصله متناسب است. بنابراین نمودار میدان بر حسب فاصله r چنین شکلی خواهد داشت (شکل ۲ـ۴۹).

۹. از آنجا که چگالی حجمی بار کره‌ی نارسانا یکنواخت است، سطح گاوسی کروی فرضی واقع در درون کره ($r < R$) بار مشخص دارد:

$$q_s = \rho \times \frac{۴}{۳}\pi r^۳$$

میدان آن با استفاده از قانون گاوس، همان‌طور که تا اینجا دیده‌ایم، چنین رابطه‌ای دارد:

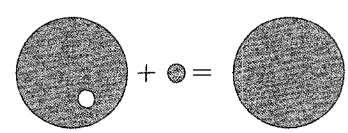
$$E = \frac{q_s}{۴\pi\epsilon_۰ r^۲} = \frac{\rho \times \frac{۴}{۳}\pi r^۳}{۴\pi\epsilon_۰ r^۲} = \frac{\rho r}{۳\epsilon_۰}$$

کره شکلی متقارن است. وقتی سطح گاوسی درون آن در نظر می‌گیریم و میدان داخل آن را با استفاده از این کار به‌دست می‌آوریم، در واقع از تقارن کره استفاده کرده‌ایم. این تقارن به کره اجازه نمی‌دهد که میدان ناشی از چگالی بار یکنواخت مؤلفه‌های غیرشعاعی داشته باشد چرا که مؤلفه‌ای از میدان که عمود بر شعاع است، با کمی چرخش کره جابه‌جا می‌شود؛ در حالی که چرخش کره موقعیت بارهای آن را تغییر نمی‌دهد. (می‌توانید تصور کنید؟ کره هر چقدر هم بچرخد انگار نچرخیده است و اگر شما پشت‌تان را بکنید و کره را به هر سمتی بچرخانید، و دوباره برگردید، به هیچ‌وجه نمی‌توانید تغییر صورت گرفته را تشخیص دهید.) پس قبول کنید که اگر میدان کره فقط مؤلفه‌ی شعاعی داشته باشد، و در واقع میدان الکتریکی آن به صورت بردارهایی باشد که به صورت یکنواخت از سطح کره‌ی گاوسی بیرون زده است، آن وقت است که کره باز می‌تواند با بردار میدان‌هایش بچرخد و تغییری در حالت کلی میدان‌هایش ایجاد نشود، بنابراین رابطه‌ای که با استفاده از قانون گاوس برای میدان درون کره به‌دست آوردیم، در راستای شعاعی است، پس می‌توانیم آن را به شکل برداری بنویسیم:

$$\vec{E} = \frac{\rho\vec{r}}{۳\epsilon_۰}$$

این نتیجه همان‌طور که گفته شد مستقل از شعاع کره (یعنی R) است. چرا که در هر سطح گاوسی به شعاع آن سطح کروی و چگالی بار کره‌ی نارسانا مربوط می‌شود.

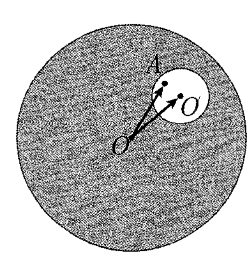
وقتی حفره‌ای درون کره ایجاد شود، معمولاً می‌توانیم دو نوع کره‌ی مختلف را در نظر بگیریم و برآیند اثرات میدان آنها را در یک نقطه‌ی مورد بررسی به‌دست آوریم؛ به طوری که مجموع این دو نوع کره، کره‌ی کاملی شود که میدان آن را از قبل می‌دانیم. به عبارت بهتر حالت شکل ۲ـ۵۰ را در نظر بگیریم:



شکل ۲-۵۰

یعنی کره‌ی حفره‌دار را با حفره‌اش جمع کنیم تا کره‌ی کاملی به‌دست آید؛ به عبارت دیگر در این سؤال، برای پیدا کردن میدان حاصل از کره‌ی حفره‌دار، میدان حاصل از حفره‌ی کروی را از میدان حاصل از کره‌ی کامل «کم» می‌کنیم، و یا منفیِ میدان آن را به میدان کره‌ی بزرگ اضافه می‌کنیم. به این کار «برهم‌نهی» می‌گوییم. بیایید این کار را انجام دهیم.

$$\vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ = \vec{E}$$



شکل ۲-۵۱

نقاط مورد بررسی ما، که میدان در آنها مطلوب است. نقاط درون حفره هستند: مثلاً در شکل ۲ـ۵۱، میدان در نقطه‌ی A مورد سؤال است. این نقطه در درون کره‌ی کوچکی است

که جای حفره قرار داشته است، یعنی میدان $E_۲$ از رابطه‌ای مشابه رابطه‌ی به‌دست آمده در بخش اول سؤال به‌دست می‌آید:

$$\vec{E}_۲ = \frac{\rho \overrightarrow{O'A}}{۳\epsilon_\circ}$$

میدان کره‌ی کامل هم در نقطه‌ی A درون آن، دقیقاً از همین رابطه‌ی بخش اول به‌دست می‌آید، بدین ترتیب:

$$\vec{E} = \frac{\rho \overrightarrow{OA}}{۳\epsilon_\circ}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_۱ = \vec{E} - \vec{E}_۲ = \frac{\rho \overrightarrow{OA}}{۳\epsilon_\circ} - \frac{\rho \overrightarrow{O'A}}{۳\epsilon_\circ}$$

$$= \frac{\rho}{۳\epsilon_\circ}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O'A}) = \frac{\rho}{۳\epsilon_\circ}(\overrightarrow{O'O})$$

همان‌طور که می‌بینید، و نتیجه‌ی روابط ما را به آن رساند، میدان در داخل حفره‌ی کره‌ی حفره‌دار که چگالی بار یکنواخت دارد. کاملاً مستقل از شعاع کره و شعاع حفره است و فقط به $\overrightarrow{OO'}$، که بردار مکان وصل شده از مرکز کره به مرکز حفره است مربوط می‌شود جالب است، نه؟

تمرین فصل ۲

۱. بار نقطه‌ای $۲ \times ۱۰^{-۸}\mathrm{C}$ در مرکز یک سطح ریاضی قرار دارد که به شکل مکعب و به ضلع $۸\mathrm{cm}$ است. میانگین مقدار E_n در یک وجه مکعب چقدر است؟

حل. $۵/۹ \times ۱۰^{۴}\mathrm{N/C}$

۲. میدان الکتریکی در یک منطقه، صورت زیر را به صورت تابعی از x، y و z دارد:

$$E_x = ۵/۰ x \ , \ E_y = ۰ \ , \ E_z = ۰$$

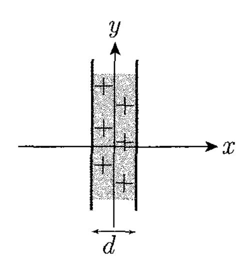
که در آن E به نیوتن بر کولن و x به متر است. این میدان نماینده‌ی بار الکتریکی در راستای x است که مقدار آن به نسبت مستقیم با x افزایش می‌یابد. نشان دهید که این‌گونه میدان الکتریکی فقط در صورتی وجود دارد که منطقه از یک چگالی بار سطحی پر باشد. مقدار چگالی بار لازم را به صورت تابعی از x، y و z پیدا کنید.

حل. $۴/۴ \times ۱۰^{۱۱}\mathrm{C/m^۳}$

۳. بیشینه‌ی مقدار بار الکتریکی در هر واحد طول که می‌توان روی یک موی مستقیم و دراز انسان به قطر $۸ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{cm}$ قرار دارد به طوری که هوای اطراف دچار تجزیه‌ی الکتریکی نشود، چقدر است؟ هوا در صورتی دچار تجزیه الکتریکی می‌شود که میدان الکتریکی از $۳ \times ۱۰^{۶}\mathrm{N/C}$ تجاوز کند.

حل. $۷ \times ۱۰^{-۹}\mathrm{C/m}$

۴. در حجم قرص مسطح بزرگی از پلاستیک (با فرض این‌که پلاستیک اثری بر میدان الکتریکی ندارد) به ضخامت d مطابق شکل، بار به طور یکنواخت توزیع شده است. چگالی بار ρ کولن بر مترمکعب است. صفحه‌ی وسط قرص صفحه‌ی $y - z$ است. میدان الکتریکی در فاصله‌ی x از وسط صفحه چقدر است؟ هر دو حالت $|x| < \frac{d}{۲}$ و $|x| > \frac{d}{۲}$ را در نظر بگیرید.

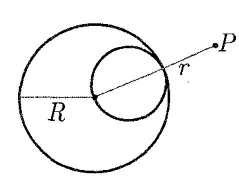


شکل ۲-۵۲

حل.

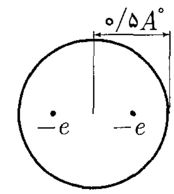
$$\begin{cases} \vec{E}(\rho x/\epsilon_۰)\hat{x} & x < d/۲ \\ \vec{E} = \pm(\rho d/۲\epsilon_۰)\hat{x} & \pm x > d/۲ \end{cases}$$

۵. بار مثبت Q به طور یکنواخت در حجم کره‌ی توپری به شعاع R توزیع شده است. فرض کنید حفره‌ای کروی به شعاع $R/۲$ در داخل آن ایجاد شده است که مرکز آن در فاصله‌ی $R/۲$ از مرکز کره‌ی توپر اولیه مطابق شکل قرار دارد. به ماده‌ی حفره و بار آن کاری نداریم. کره دارای حفره در نقطه‌ی P به فاصله‌ی r از مرکز اولیه چه میدان الکتریکی ایجاد می‌کند؟ فرض کنید $r > R$ است.



شکل ۲-۵۳

حل. $$E_r = \frac{Q}{۴\pi\epsilon_۰}\left[\frac{۱}{r^۲} - \frac{۱}{۸(r - R/۲)^۲}\right]$$



شکل ۲-۵۴

۶. مطابق مدل تامسون، اتم هلیوم شامل یک ابر کروی یکنواخت با بار مثبت است که در آن دو الکترون نشسته‌اند، فرض کنید که بار مثبت کره‌ای به شعاع $0/5\mathring{A}$ است که بار $2e$ به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است. دو الکترون مطابق شکل به طور متقارن نسبت به مرکز جای گرفته‌اند. الکترون‌ها در چه فاصله‌ای از یکدیگر در حالت تعادل قرار می‌گیرند؟

حل. $0/5\mathring{A}$

۷. ذره‌ی تاو، ذره‌ای با بار منفی مشابه الکترون است اما جرم بسیار بیشتری دارد ـ جرم آن $3/18 \times 10^{-27}\text{kg}$ است یعنی حدود ۳۴۹۰ برابر جرم الکترون. ماده‌ی هسته نسبت به تاو شفاف است؛ بنابراین تاو می‌تواند درون هسته تحت تأثیر جاذبه‌ی الکتریکی بار هسته گردش مداری داشته باشد. فرض کنید تاو در مدار دایره‌ای به شعاع $2/9 \times 10^{-15}\text{m}$ درون یک هسته‌ی اورانیوم است. هسته را کره‌ای به شعاع $7/4 \times 10^{-15}\text{m}$ و بار $92e$ که به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده، در نظر بگیرید. تندی، انرژی جنبشی، اندازه حرکت زاویه‌ای و بسامد حرکت مداری تاو را بیابید.

حل. $1/2 \times 10^{7}\text{m/s}$، $2/2 \times 10^{-13}\text{J}$، $1/1 \times 10^{-34}\text{J.s}$، $6/5 \times 10^{20}\text{Hz}$

۸. بار الکتریکی پروتون در یک نقطه متمرکز نیست بلکه در یک حجم توزیع شده است طبق بررسی‌های آزمایشی در شتاب‌دهنده‌ی خطی استانفورد، توزیع بار پروتون را می‌توان به طور تخمینی با چگالی باری توصیف کرد که تابع نمایی فاصله‌ی شعاعی است: $\varphi = \frac{e}{8\pi b^3} e^{-r/b}$، که در آن b یک ثابت و $b = 0/23 \times 10^{-15}\text{m}$ است. میدان الکتریکی را به صورت تابعی از فاصله‌ی شعاعی بیابید. مقدار میدان الکتریکی در $r = 1/0 \times 10^{-15}\text{m}$ چقدر است؟

انتگرال زیر به عنوان راه نمایی ارائه می‌شود:

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2e^{-x}(x+1)$$

حل. $1/2 \times 10^{21}\text{N/C}$

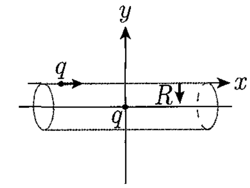
۹. هنگامی که بار نقطه‌ای q که با تندی زیاد حرکت می‌کند از بار نقطه‌ای ساکن q' عبور می‌کند، اثر عمده‌ی نیروهای الکتریکی آن است که به هر بار یک تحریک عرضی بدهند. شکل زیر نشان می‌دهد بار q با سرعت تقریباً ثابت v در امتداد محور x روی خطی تقریباً مستقیم حرکت می‌کند و بار q' در فاصله‌ی R زیر مبدأ قرار دارد. تحریک عرضی روی q چنین است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_y dt = \frac{q}{v} \int_{\infty}^{\infty} E_y dx$$

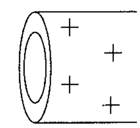
مقدار انتگرال سمت راست از طریق قانون گاوس قابل محاسبه است و می‌توان نشان داد که:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_y dt = \frac{q}{v} \cdot \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 R}$$

این رابطه اندازه‌ی حرکت عرضی را که یک ذره‌ی باردار با تندی زیاد در عبور از کنار یک ذره‌ی باردار ساکن به‌دست می‌آورد به‌دست می‌دهد.



شکل ۲-۵۵



شکل ۲-۵۶

الف) اندازه‌ی حرکت عرضی را که الکترون با تندی $۴/۰ \times ۱۰^{۷}\mathrm{m/s}$ در عبور از کنار یک الکترون ساکن در فاصله‌ی $۰/۶ \times ۱۰^{-۱۰}\mathrm{m}$ به‌دست می‌آورد حساب کنید.

ب) چه سرعت عرضی با این اندازه حرکت منطبق است؟

ج) سرعت پس زدن الکترون ساکن (اگر آزادی حرکت داشته باشد) چقدر است؟

حل. الف) $۱/۹ \times ۱۰^{-۲۵}\mathrm{kg.m/s}$، ب) $۲/۱ \times ۱۰^{۵}\mathrm{m/s}$، ج) $۲/۱ \times ۱۰^{۵}\mathrm{m/s}$

۱۰. یک کره‌ی مسی توپر به شعاع $۳\mathrm{cm}$ دارای بار $۱۰^{-۶}\mathrm{C}$ است. این کره به طور هم‌مرکز درون یک پوسته‌ی نازک کروی به شعاع $۱۵\mathrm{cm}$ قرار دارد که دارای بار $۳ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{C}$ است. فرمولی برای میدان الکتریکی در فضای بین پوسته و کره بیابید. فرمولی برای میدان الکتریکی بیرون پوسته پیدا کنید. این میدان‌های الکتریکی را به صورت تابعی از شعاع رسم کنید.

حل. $۱۰^{-۶}\mathrm{C}/(۴\pi\epsilon_{۰}r^{۲})$، $۴ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{C}/(۴\pi\epsilon_{۰}r^{۲})$

۱۱. در روزهایی که هوا خوب است، میدان الکتریکی زمین حدود $۱۰۰\mathrm{N/C}$ است. این میدان دارای راستای عمودی و پایین‌سو است. چگالی بار سطحی در زمین چقدر است؟ زمین در یک رسانای مسطح در نظر بگیرید.

حل. $۸/۸ \times ۱۰^{۱۰}\mathrm{C/m^{۲}}$

۱۲. سیستمی را در نظر بگیرید که شامل یک توپ باردار به شعاع R که بار آن دارای تقارن کروی است و فضای بیرون آن با چگالی حجمی $\rho = \frac{\alpha}{r}$ (α عددی ثابت است و r فاصله از مرکز توپ می‌باشد).

الف) مقدار بار توپ را طوری بیابید که اندازه میدان الکتریکی بیرون توپ، مستقل از r باشد.

ب) اندازه میدان الکتریکی چقدر است؟

حل. الف) $q = ۲\pi\alpha R^{۲}$، ب) $E = \frac{\alpha}{۲\epsilon_{۰}}$

۱۳. فضایی با چگالی حجمی بار $\rho = \rho_{۰}e^{-\alpha r^{۳}}$ پر شده که $\rho_{۰}$ و α اعدادی ثابت و r فاصله از مرکز این سیستم است. اندازه بردار میدان الکتریکی را به صورت تابعی از r بیابید. عبارت به‌دست آمده را برای مقادیر بسیار کوچک و بزرگ $\alpha r^{۳} << ۱$، $\alpha r^{۳} >> ۱$ بررسی نمایید.

حل. $E_r = \frac{\rho_{۰}}{۳\epsilon_{۰}\alpha r^{۲}}(۱ - e^{-\alpha r^{۳}})$، $E_r \simeq \frac{\rho_{۰}r}{۳\epsilon_{۰}}(\alpha r^{۳} << ۱)$،

$$E_r \simeq \frac{\rho_{۰}}{۳\epsilon_{۰}\alpha r^{۲}}(\alpha r^{۳} >> ۱)$$

۱۴. داخل توپی که با چگالی حجمی ρ به صورت یکنواخت باردار شده است، حفره‌ای کروی شکل قرار دارد، مرکز این کره به اندازه بردار $\vec{a}$ از مرکز توپ جابه‌جا شده است، بردار $\vec{E}$ در داخل حفره را محاسبه کنید.

حل. $\frac{\rho}{۳\epsilon_{۰}}a^{-۱}$

۱۵. داخل استوانه‌ای به طول بی‌نهایت، که به صورت یکنواخت با چگالی حجمی بار ρ باردار شده است، حفره‌ای استوانه‌ای شکل قرار دارد، فاصله بین محور استوانه و محور حفره برابر a است. بردار $\vec{E}$ را در داخل حفره بیابید.

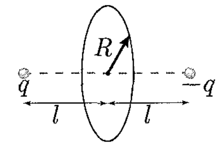
حل. $\frac{\rho}{۲\epsilon_{۰}}\vec{a}$

۱۶. یک ریسمان بسیار بلند با چگالی بار خطی یکنواخت λ را روی محور دایره‌ای به شعاع R قرار می‌دهیم به طوری که انتهای ریسمان منطبق بر مرکز دایره باشد. شار الکتریکی گذرنده از دایره را بیابید.

حل. $\pm\frac{\lambda R}{۲\epsilon_۰}$

۱۷. دو بار نقطه‌ای q، $-q$ مطابق شکل به فاصله $۲l$ از یکدیگر قرار دارند، مطلوب است محاسبه شار میدان الکتریکی گذرنده از دایره‌ای به شعاع R.

حل. $\frac{q}{\epsilon_۰}\left(۱-\frac{L}{\sqrt{L^۲+R^۲}}\right)$



شکل ۲-۵۷

۱۸. توپی به شعاع R به صورت یکنواخت با چگالی بار حجمی (بار بر واحد حجم) ρ باردار شده است. شار الکتریکی گذرنده از سطح مقطع توپ که در اثر تقاطع صفحه‌ای با فاصله‌ی $r_۰ < R$ از مرکز کره به وجود آمده است را بیابید.

حل. $\frac{\pi\rho r_۰}{۳\epsilon_۰}(R^۲-r_۰^۲)$

۱۹. یک میدان الکتریکی فقط تابعی است از x و y و از رابطه $\vec{E}=\frac{a(x\hat{i}+y\hat{j})}{x^۲+y^۲}$ تبعیت می‌کند، (a عددی ثابت است و i و j بردارهای یکه هستند). مطلوب است محاسبه شار میدان الکتریکی گذرنده از کره‌ای به شعاع R که مرکز آن منطبق بر مرکز مختصات باشد.

حل. $۴\pi aR$

۲۰. توپی به شعاع R دارای بار مثبتی است که چگالی بار حجمی آن برابر $\rho=\rho_۰\left(۱-\frac{r}{R}\right)$ می‌باشد. در این رابطه r فاصله از مرکز توپ و $\rho_۰$ عددی ثابت است. مطلوب است:

الف) اندازه شدت میدان الکتریکی به صورت تابعی از r هم در داخل توپ و هم در خارج آن.

ب) ماکزیمم شدت $E_{\max}$ و فاصله‌ی مربوط به آن r_m.

حل. الف) $(r<R)$ $\frac{\rho_۰}{۳\epsilon_۰}\left(r-\frac{۳r^۲}{۴R}\right)$

ب) $(r>R)$ $\frac{\rho_۰ R^۳}{۱۲r^۲\epsilon_۰}$, $r=\frac{۲R}{۳}$, $E=\frac{\rho_۰ R}{۹\epsilon_۰}$

۲۱. فرض کنید چگالی بار سطحی موجود بر روی کره‌ای به شعاع R بستگی به زاویه کروی θ به صورت $\sigma=\sigma_۰\cos\theta$ داشته باشد، که $\sigma_۰$ یک ثابت مثبت است. نشان دهید که این توزیع بار معادل است با دو توپ باردار به شعاع R که به صورت یکنواخت باردار شده‌اند و به فاصله‌ی کمی از یکدیگر قرار دارند. بارهای دو توپ از نظر اندازه با هم برابر و از نظر علامت مخالف هم هستند، با توجه به این معادل‌سازی بردار شدت میدان الکتریکی در داخل کره مفروض را بیابید.

حل. $\frac{\sigma_۰}{۳\epsilon_۰}\vec{k}$ ($\vec{k}$ بردار واصل مراکز)

سؤال‌های المپیاد فصل ۲

۱. مسئله‌ی ۱۰، مرحله‌ی اول یازدهمین المپیاد فیزیک ایران

یک پوسته‌ی فلزی که روی پایه‌ی نارسانا قرار دارد، بار الکتریکی Q دارد. نیرویی که بر قسمت کوچکی از این پوسته وارد می‌شود را F می‌نامیم. نیروی F:

الف) به طرف بیرون پوسته و متناسب با Q است.

ب) به طرف داخل پوسته و متناسب با $Q^۲$ است.

ج) به طرف بیرون پوسته و متناسب با $Q^۲$ است.

د) به طرف داخل پوسته و متناسب با Q است.

ه) به طرف بیرون است اگر $Q > ۰$ و به طرف داخل است اگر $Q < ۰$، و در هر صورت متناسب با Q است.

۲. مسئله‌ی ۳، مرحله‌ی اول یازدهمین المپیاد فیزیک ایران

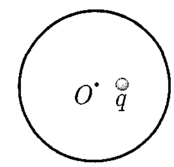
مطابق شکل، بار نقطه‌ای q درون یک پوسته‌ی کروی رسانای بدون بار قرار دارد. از طرف کره بر بار q:

الف) نیرویی وارد نمی‌شود.

ب) نیرویی در راستای شعاع و به سمت مرکز وارد می‌شود.

ج) نیرویی در راستای شعاع و به سمت خارج وارد می‌شود.

د) نیرویی در راستای عمود بر شعاع وارد می‌شود.



شکل ۲-۵۸ سؤال ۲

۳. مسئله‌ی ۲۸ مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد فیزیک ایران

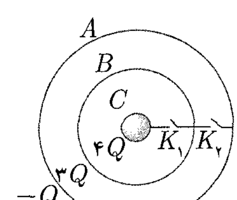
پوسته‌های کروی فلزی A و B و کره‌ی فلزی C را مطابق شکل (۲-۵۹) در نظر بگیرید. بار الکتریکی کره‌ها به ترتیب $Q_A = -Q$، $Q_B = ۳Q$ و $Q_C = ۴Q$ است. با بستن کلیدهای $k_۱$ و $k_۲$ کره‌ها به هم متصل می‌شوند. پس از تعادل، کدام گزینه درست است؟

الف) $Q_C = +۲Q\ ,\ Q_B = ۰\ ,\ Q_A = +۴Q$

ب) $Q_C = ۰\ ,\ Q_B = ۰\ ,\ Q_A = +۶Q$

ج) $Q_C = Q_B = Q_A = +۲Q$

د) $Q_C = +Q\ ,\ Q_B = +۲Q\ ,\ Q_A = +۳Q$

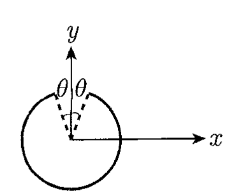


شکل ۲-۵۹ سؤال ۳

۴. مسئله‌ی ۸، مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد فیزیک کشور

روی میله‌ی نازکی به شکل بخشی از دایره، بار الکتریکی مثبت، به طور یکنواخت توزیع شده است. مرکز این دایره مبدأ مختصات و دایره در صفحه‌ی xy است. میدان الکتریکی در نقطه‌ی $(x = ۰, y = ۰, z > ۰)$ می‌شود $\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$. کدام گزینه درست است؟

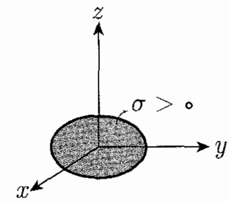
الف) $E_z < ۰$، $E_y < ۰$ ب) $E_z > ۰$، $E_y < ۰$ ج) $E_z < ۰$، $E_y > ۰$ د) $E_z > ۰$، $E_y > ۰$



شکل ۲-۶۰ سؤال ۴

۵. مسئله‌ی ۲۲، مرحله‌ی اول هجدهمین المپیاد فیزیک ایران

یک قرص یکنواخت باردار شده را در نظر بگیرید که در صفحه‌ی xy است. مرکز قرص مبدأ مختصات و بار قرص مثبت است. نقطه‌ای با مختصات (x, y, z) را در نظر بگیرید، که $z > ۰$، $x > ۰$ و $y = ۰$ است. کدام گزینه درباره‌ی E_x (مؤلفه‌ی x میدان الکتریکی حاصل از این قرص در این نقطه) درست است؟



شکل ۲-۶۱ سؤال ۵

الف) حتماً E_x منفی است.

ب) حتماً E_x صفر است.

ج) حتماً E_x مثبت است.

د) xهایی هست که E_x مثبت است و xهایی هم هست که E_x منفی است.

۶. مسئله‌ی ۱، آزمون دوم، تابستان ۱۳۷۶

دو صفحه‌ی بی‌نهایت مطابق شکل که به فاصله‌ی l از یکدیگر هستند، چگالی بار سطحی یکنواخت $+\sigma$ و $-\sigma$ را دارند. این دو صفحه دارای دو سوراخ دایره‌ای هم‌مرکز به شعاع R هستند.

الف) میدان الکتریکی بر روی محور عبورکننده از مرکز سوراخ‌ها را به‌دست آورید.

ب) میدان الکتریکی شعاعی را در نقاط دور از صفحه‌ها و نزدیک محور پیدا کنید.

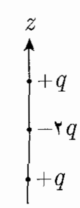
ج) شکل تقریبی میدان الکتریکی را رسم نمایید.

تذکر

مبدأ مختصات را وسط دو صفحه و روی محور انتخاب کنید.

۷. مسئله‌ی چهار، آزمون دوم، تابستان ۱۳۷۷

یک چهارقطبی الکتریکی، (شکل ۲ـ۶۲) از یک بار $-۲q$ و دو بار $+q$ روی محور z تشکیل شده است، فاصله‌ی بارها از یکدیگر l است.



شکل ۲-۶۲

الف) خطوط میدان الکتریکی را ترسیم کنید.

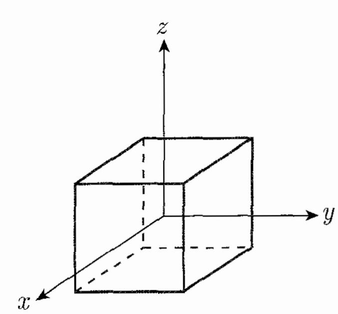
ب) خطوط میدان الکتریکی که از بار $+q$ در زاویه قطبی کروی $\delta\theta$ از قطب شمال و جنوب آن سرچشمه می‌گیرند، در چه زاویه قطبی کروی $(\delta\theta')$ و $(\delta\theta'')$ روی بار $-۲q$ فرود می‌آیند؟

ج) میدان الکتریکی ناشی از این چهارقطبی روی محور z کدام است؟

د) با استفاده از قانون گاوس میدان الکتریکی شعاعی را در امتداد بردار واحد e_ρ و در نقاط دور از بارها و نزدیک محور z به‌دست آورید. (e_ρ بردار واحد شعاعی در مختصات استوانه‌ای است.)

۸. مسئله‌ی ۲، آزمون اول تابستان ۱۳۸۰

مکعبی نارسانا را در نظر بگیرید که تمام وجوهش دارای چگالی بار سطحی σ است.



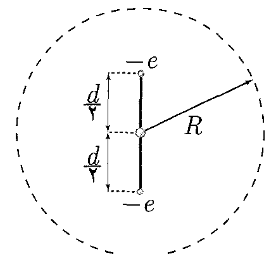
شکل ۲-۶۳ سؤال ۸

الف) با استفاده از تقارن نشان دهید، میدان در مرکز مکعب صفر است.

ب) حال فرض کنید کمی از مرکز مکعب دور می‌شویم (یعنی از $(\circ,\circ,\circ)$ به (x,y,z) می‌رویم). با بسط دادن هر یک از مؤلفه‌های میدان حول مرکز مکعب تا مرتبه‌ی اول نسبت به x, y, z و با استفاده از تقارن و قانون گاوس، نشان دهید تغییرات مرتبه‌ی اول میدان در راستای عمود بر وجه‌ها صفر است.

۹. مسئله‌ی ۱، آزمون دوم، تابستان ۱۳۸۰

در مدل اتمی تامسون، اتم هلیوم تشکیل شده از یک کره به شعاع R که به طور یکنواخت بار $+2e$ دارد، به علاوه دو الکترون که هر کدام‌شان $-e$ است. این دو الکترون در داخل کره مثبت قرار دارند. فاصله d بین دو الکترون چقدر باشد تا وضعیت متقارن شکل ۲ـ۶۴، وضعیت تعادل باشد؟ (در این وضعیت الکترون‌ها حرکت نمی‌کنند.)



شکل ۲-۶۴ سؤال ۹

۱۰. مسئله‌ی ۱، آزمون پنجم، تابستان ۱۳۸۰

در مدل اتمی تامسون، هسته، کره‌ای است به شعاع R که بار $+Z_e$ به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است و Z تا الکترون (هر یک با بار $-e$) در آن قرار دارند.

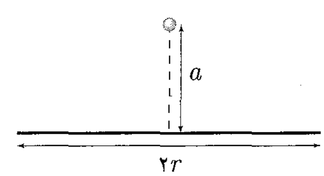
الف) برای $z = 3$ یک آرایش ساکن وجود دارد. سه الکترون در سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند و مرکز تقارن این مثلث همان مرکز هسته است. طول ضلع این مثلث را حساب کنید.

ب) برای $Z = 4$ نیز یک آرایش ساکن وجود دارد. چهار الکترون در چهار رأس یک هرم منتظم در داخل هسته می‌باشند و مرکز تقارن این هرم همان مرکز هسته می‌باشد. طول ضلع این هرم را حساب کنید.

۱۱. مسئله‌ی ۶، آزمون اول، تابستان ۱۳۸۲

در این مسئله میدان الکتریکی چگالی بار خطی روی میله را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

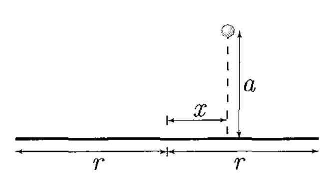
الف) میدان الکتریکی در فاصله‌ی عمودی a از میله‌ی بی‌نهایت طویلی با چگالی بار یکنواخت λ را بیابید. این میدان را $E_\circ$ می‌نامیم.



شکل ۲-۶۵ سؤال ۱۱ـالف

ب) میدان الکتریکی در فاصله‌ی عمودی a از مرکز میله‌ای به طول $2r$ را E می‌نامیم اگر $\epsilon = \frac{a}{r}$ کوچک باشد. $\frac{E}{E_\circ}$ را بسط تیلور داده و جملات آن را تا مرتبه‌ی ϵ^2 نگه دارید.

ج) اگر نقطه‌ی مورد نظر در فاصله‌ی عمودی a از میله اما به فاصله‌ی افقی x از مرکز میله قرار داشته باشد، مؤلفه‌ی عمود بر میله‌ی میدان را برای $\frac{x}{r}$های کوچک محاسبه کنید.



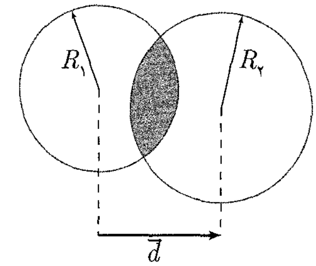
شکل ۲-۶۶ سؤال ۱۱ـج

د) x چقدر کوچک باشد تا با دقت ۰٫۰۱ مؤلفه‌ی عمود بر میله‌ی میدان الکتریکی یکنواخت باشد.

۱۲.

الف) دو کره‌ی نارسانا به شعاع‌های R_1 و R_2، به ترتیب با چگالی بار الکتریکی حجمی ثابت ρ_1 و ρ_2 را مطابق شکل (۲ـ۶۷) طوری کنار یکدیگر قرار می‌دهیم که در یک ناحیه هم‌پوشانی

کنند، یعنی $d < R_۱ + R_۲$ که $\vec{d}$ بردار واصل مراکز کره از کره‌ی ۱ به سمت کره‌ی ۲ می‌باشد. شرطی بین پارامترهای مسئله بیابید که به ازای آن اندازه‌ی میدان الکتریکی در ناحیه‌ی هم‌پوشانی (ناحیه‌ی هاشور خورده در شکل (۲ـ۶۷)) ثابت باشد. در این شرایط جهت و راستای میدان را در راستای مذکور تعیین کنید.



شکل ۲-۶۷

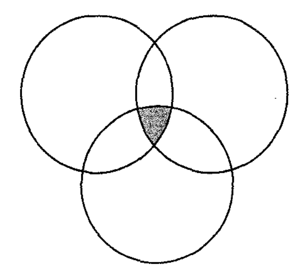
ب) حال سه کره نارسانا به شعاع‌های $R_۱$، $R_۲$ و $R_۳$، به ترتیب با چگالی بار الکتریکی حجمی ثابت $\rho_۱$، $\rho_۲$ و $\rho_۳$ را مطابق شکل (۲ـ۶۸) طوری کنار یکدیگر قرار می‌دهیم که در یک ناحیه هر سه هم‌پوشانی (ناحیه هاشور خورده در شکل (۲ـ۶۸)) کنند. شرطی را به‌دست آورید که به ازای آن، اندازه‌ی میدان الکتریکی در ناحیه‌ی مشترک بین هر سه کره ثابت باشد.

تعریف بردار $\vec{d}_{ij}$ را بردار واصل مرکز کره‌های i و j در جهت از مرکز i به مرکز j تعریف می‌کنیم.

ج) فرض کنید شرط قسمت (ب) برقرار است. در صورتی که میدان در ناحیه‌ی هم‌پوشانی بر راستای $\vec{d}_{۱۳}$ عمود باشد، نسبت بین چگالی‌ها را به‌دست آورید. به عبارت دیگر $\alpha_۱$، $\alpha_۲$ و $\alpha_۳$ را در رابطه‌ی

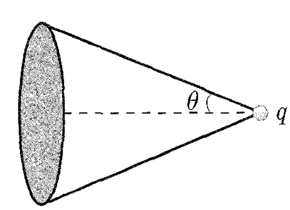
$$\frac{\rho_۱}{\alpha_۱} = \frac{\rho_۲}{\alpha_۲} = \frac{\rho_۳}{\alpha_۳}$$

بر حسب $\vec{d}_{ij}$ها بیابید.


شکل ۲-۶۸

د) حالتی را در نظر بگیرید که در آن N کره به شعاع‌های $R_۱$ تا R_N به ترتیب با چگالی بارهای حجمی ثابت $\rho_۱$ تا ρ_N چنان درکنار یکدیگر قرارگرفته‌اند که در یک ناحیه همگی هم‌پوشانی می‌کنند. با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب)، شرطی را بیابید که اندازه‌ی میدان در این ناحیه هم‌پوشانی ثابت باشد.

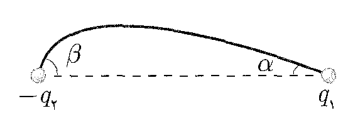
۱۳. می‌دانیم اگر بار نقطه‌ای q در مقابل صفحه‌ای دایره‌ای و روی محور تقارن آن قرار داشته باشد (مطابق شکل ۲ـ۶۹)، شار میدان الکتریکی گذرنده از صفحه‌ی دایره‌ای برابر است با: $\frac{q}{۲\epsilon_۰}(۱ - \cos\theta)$ که در آن θ زاویه‌ی گشودگی مخروط است به رأس q و قاعده‌ی صفحه‌ی دایره‌ای. حال فرض کنید دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$ در مقابل هم قرار گرفته‌اند. یک خط میدان الکتریکی را در نظر بگیرید که با زاویه‌ی α از $q_۱$ خارج می‌شود.



شکل ۲-۶۹

الف) این خط میدان با چه زاویه‌ای وارد بار $-q_۲$ می‌شود؟ (یعنی β را در شکل (۲ـ۷۰) بیابید.)

ب) معادله‌ی این خط میدان را به صورت $f(x,y) = ۰$ به‌دست آورید.



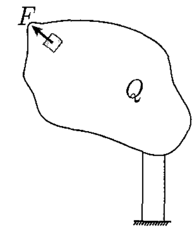
شکل ۲-۷۰

ج) حال فرض کنید تعداد دلخواهی (N) بار نقطه‌ای روی محور xها قرار دارند. مقدار بارها q_i و مکان آنها x_i است. هرکدام از q_iها می‌توانند مثبت یا منفی باشند. مطلوب است محاسبه‌ی معادله‌ی خطوط میدان به صورت $f(x,y) = \text{cte}$ بر حسب q_iها و x_iها.

د) پاسخ قسمت (الف) را با استفاده از رابطه‌ی قسمت (ج) به‌دست آورید.

پاسخ سؤال‌های المپیاد فصل ۲

۱. **حل.** □■□□



شکل ۲-۷۱

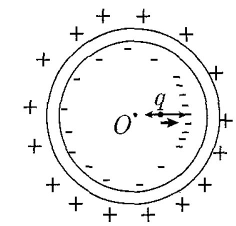
پوسته‌ی فلزی را مطابق شکل به صورت دلخواه در نظر می‌گیریم. مطابق آنچه گفته شد، می‌دانیم که میدان در داخل پوسته‌ی فلزی باردار صفر است و در محل پوسته، در هر قسمت بسته به علامت بار کره به طرف داخل یا بیرون پوسته است و عمود بر آن است. همچنین می‌دانیم که میدان بر روی پوسته با Q متناسب است. از آنجا که شکل پوسته دلخواه در نظر گرفته شده است، توزیع بار الکتریکی نیز بر روی آن یکنواخت نخواهد بود و میدان در نقاط مختلف آن متفاوت خواهد بود. میدان الکتریکی در حالت کلی با چگالی سطحی بار در هر نقطه متناسب است. اگر بار کل کره، Q، تغییر کند، چگالی بار هر نقطه نیز متناسب با آن تغییر می‌کند. بنابراین نتیجه‌گیری «میدان در هر نقطه از سطح پوسته با Q متناسب است» نتیجه‌ی معقولی به نظر می‌رسد. المان کوچکی از سطح پوسته را، همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم و مساحت آن را dA می‌نامیم. چگالی بار سطحی σ بر روی این سطح جزء بار dQ به وجود آورده است:

$$dQ = \sigma \cdot dA$$

σ همان‌طور که گفته شد با بار کل Q متناسب است، بنابراین جزء بار dQ نیز با بار کل Q متناسب خواهد بود. نیروی وارده بر این المان کوچک که F نامیده شده است، با میدان و بار این المان متناسب است. داریم: $F = EdQ$. بنابراین نیروی F با توان دوم Q متناسب بوده است. جهت آن نیز با مثبت یا منفی فرض کردن Q به‌دست می‌آید. المان با بار مثبت Q در میدان به سمت بیرون و المان بار منفی در میدان به سمت درون قرار می‌گیرد و در هر دو حالت نیروی وارد بر جزء بار به طرف بیرون پوسته خواهد بود. بنابراین گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۲. **حل.** □□■□

برای دریافت درک درستی از وضعیت بار نقطه‌ای q در این پوسته‌ی کروی بی‌بار، آزمون بار مثبت q را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که در این حالت، بار منفی بر سطح داخلی پوسته‌ی کروی القا می‌شود، به شیوه‌ای که بر حسب نزدیکی به بار q، چگالی بار القایی نیز مثبت است. به عبارت بهتر بارهای الکتریکی آزاد موجود بر پوسته حرکت می‌کنند و چیدمانی را به خود می‌گیرند که با ثابت نگه داشته شدن بار q در محل خود، پوسته‌ی کروی به تعادل برسد و بارها ساکن شوند. بارهای القایی منفی واقع بر سطح داخلی کره متناظرند با بارهای مثبت واقع بر سطح بیرونی آن. سطح بیرونی کره، بر خلاف درون آن توزیع بار یکنواختی خواهد داشت، به طوری که میدان ناشی از توزیع بار مثبت سطح بیرونی کره در درون آن صفر شود. تقارن مسئله ایجاب می‌کند که چگالی بارهای منفی القایی بر سطح درونی نسبت به قطری از کره که از بار q می‌گذرد، متقارن باشد. بنابراین، نیرویی که از طرف این بارها بر q وارد می‌شود،



شکل ۲-۷۲

در راستای همین محور خواهد بود. مطابق شکل ۲ـ۷۲، توزیع بارهای داخلی، جهت نیروی وارد بر بار q را مشخص می‌کند.

بارهای منفی نزدیک به q که بیشتر از بارهای منفی دور از آن هستند، نیروی جاذبه‌ی بیشتری وارد می‌کنند. بارهای مثبت بیرونی هم همان‌طور که گفته شد تأثیری بر داخل کره ندارند. بنابراین در مجموع نیروی برآیندی در راستای شعاع کره و به سمت خارج از o به q وارد می‌شود. بنابراین گزینه‌ی «ج» صحیح است. بد نیست یادآوری کنیم که همین نیرو متقابلاً از طرف بار q بر کره‌ی باردار هم وارد می‌شود.

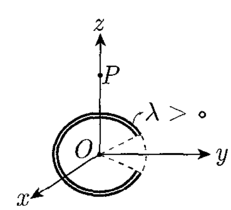
۳. حل. □■□□

همان‌طور که دیدیم، با اتصال دو جسم رسانا به یکدیگر، دو جسم مجموعاً یک رسانا را تشکیل می‌دهند. در مورد سه کره‌ی A، B و C با بستن دو کلید k_1 و k_2، سه کره به هم متصل می‌شوند و یک جسم رسانا را به وجود می‌آورند. می‌دانیم که در یک جسم رسانای باردار در حال تعادل، بارها تنها روی خارجی‌ترین بخش آن قرار می‌گیرند. پوسته‌ی A در این جسم پوسته‌ی خارجی جسم رسانا محسوب می‌شود و مجموع بارهای سه کره، که اکنون بار جسم کل محسوب می‌شود بر روی پوسته‌ی A قرار خواهد گرفت. بار دو کره‌ی B و C نیز صفر خواهد شد.

$$Q'_A = Q_A + Q_B + Q_C = -Q + 3Q + 4Q = 6Q$$
$$Q'_B = 0$$
$$Q'_C = 0$$

بنابراین گزینه‌ی «ب» صحیح است.

۴. حل. □□□■

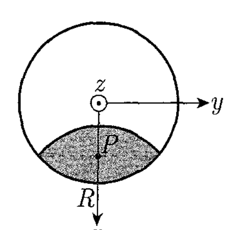


شکل ۲-۷۳ سؤال ۴

با توجه به شکل سه‌بعدی رسم شده (شکل ۲ـ۷۳) توزیع بار مثبت بر روی میله‌ی نازک نسبت به محور y متقارن است. بنابراین میدان در نقطه‌ی $(x = 0, y = 0, z > 0)$ که نقطه‌ای روی محور z است، مؤلفه‌ای در راستای محور x نخواهد داشت. بنابراین $E_x = 0$.

از آنجا که چگالی بار خطی میله مثبت است، میدان نقطه‌ی P مثبت خواهد بود. بدین معنی که هر بار مثبت واقع در نقطه‌ی P از سوی میله دفع می‌شود. از آنجا که تعداد بار مثبت بیشتری در سوی منفی محور y وجود دارد. میدان در راستای محور y بر نقطه‌ی مورد نظر مثبت خواهد بود: یعنی $E_y > 0$. میدان راستای z هم فقط می‌تواند مثبت (ناشی از دافعه) باشد. بنابراین $E_z > 0$. پس گزینه‌ی «د» صحیح است.

۵. حل. □□■□



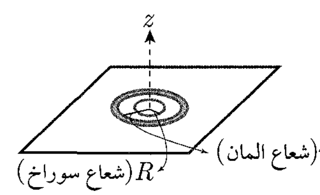
شکل ۲-۷۴

نقطه‌ی (x, y, z) با شرایط $y = 0$، $x > 0$ و $z > 0$ در صفحه‌ی مثبت xz واقع است. مطابق شکل ۲ـ۶۱ (در صورت سؤال) اگر شعاع قرص R باشد، در هر نقطه با $x \geq R$، میدان ناشی از بارهای مثبت قرص در راستای محور x مثبت است. برای سایر نقاط صفحه‌ی xz که $0 < x < R$ دارند، شکل ۲ـ۷۴ را در نظر می‌گیریم.

توجه کنید که نمایش هر نقطه‌ی مفروض بر صفحه‌ی xz در این شکل، تصویر شده‌ی نقطه بر سوی مثبت محور x خواهد بود. نقطه‌ی P را در نظر می‌گیریم. در این نقطه، میدان ناشی از دو بخش هاشورخورده‌ی نشان داده شده از لحاظ مقدار برابر و در جهت عکس است. بنابراین باید سایر بخش‌های هاشور نخورده را در نظر گرفت. با توجه به مثبت بودن بار قرص، E_x در نقطه‌ی P مقدار مثبتی خواهد بود. بنابراین E_x حتماً مثبت است و گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۶. **حل.** الف) میدان الکتریکی ناشی از هر یک از صفحه‌ها با سوراخ را می‌شود به دو صورت به‌دست آورد: اول این‌که با المان‌گیری مستقیم میدان را به‌دست آورد و دوم این‌که از اصل برهم‌نهی. دو صفحه‌ی بی‌نهایت با سوراخ وسط‌شان معادلند با دو صفحه‌ی بی‌نهایت به اضافه دو صفحه‌ی دایره‌ای شکل با بارهای مخالف هر صفحه و همان چگالی بار، در حل این سؤال از راهکار اول استفاده می‌کنیم و روش دوم را به عهده‌ی خواننده می‌گذاریم.

از فصل قبل می‌دانیم که میدان الکتریکی یک المان حلقوی بار به شکل زیر برابر است با:



شکل ۲-۷۵

$$dE = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{\sigma(۲\pi r z dr)}{(r^۲+z^۲)^{۳/۲}}$$

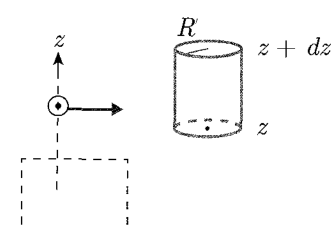
شکل برای هر مورد نشان می‌دهد که شعاع برای هر کدام از این دو صفحه بین R و ∞ تغییر می‌کند، پس E روی هر محور برابر است با:

$$E = \int dE = \frac{۱}{\epsilon_۰}\sigma z \int_R^\infty \frac{r dr}{(r^۲+z^۲)^{۳/۲}} = \frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}\cdot\frac{z}{\sqrt{R^۲+z^۲}}$$

در این رابطه z از سطح صفحه سنجیده شده بود، حالا میدان را برای دو صفحه‌ی موازی با محور در وسط دو صفحه محاسبه می‌کنیم

$$E = E + (+E_-) = \frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}\cdot\frac{z-L/۲}{\sqrt{R^۲+(z-L/۲)^۲}} - \frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}\cdot\frac{z+L/۲}{\sqrt{R^۲+(z+L/۲)^۲}}$$

ب) برای این قسمت فرض می‌کنیم که اندکی از محور دور شده‌ایم و در آنجا میدان وجود دارد (در راستای شعاعی) برای به‌دست آوردن میدان در راستای شعاعی، یک المان دیفرانسیلی حجم (یک سطح بسته دیفرانسیلی مانند شکل (۲_۷۶) در نظر می‌گیریم) و قانون گاوس را برای آن می‌نویسیم:



شکل ۲-۷۶

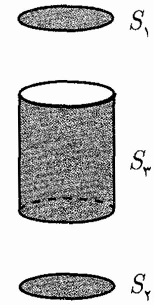
$$S_۱ \rightarrow E = \frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}\left(\frac{z-L/۲}{\sqrt{R^۲+(z-L/۲)^۲}} - \frac{z+L/۲}{\sqrt{R^۲+(z+L/۲)^۲}}\right)$$

$$S_۲ \rightarrow E(z+dz) = E(z) + \frac{\partial E(z)}{\partial(z)}dz$$

$S_۳ \rightarrow E(r)$ مجهول

$$\epsilon_۰ \oint_S \vec{E}.\overrightarrow{dA} = q = ۰ \rightarrow \oint \vec{E}.\overrightarrow{dA} = ۰$$

$$\rightarrow -E(z).\pi R^۲ + E(z+dz).\pi R^۲ - E(R), ۲\pi R dz = ۰$$



شکل ۲-۷۷

پس برای پیدا کردن $E(r)$ تنها لازم داریم که $E(z+dz)$ را حساب کنیم، بسط تا مرحله‌ی اول:

$$E(z+dz) = E(z) + \frac{\partial E(z)}{\partial z}\cdot dz$$
$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{z-L/2}{\sqrt{R^2+(z-L/2)^2}} - \frac{z+L/2}{\sqrt{R^2+(z+L/2)^2}}\right)$$

با ضرب صورت و مخرج جمله‌ی دوم در $\sqrt{R^2+(z+h/2)^2}$

$$\rightarrow E(z+dz) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{z-L/2}{\sqrt{R^2+(z-L/2)^2}} - \frac{z+L/2}{\sqrt{R^2+(z+L/2)}}\right)$$
$$+\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{R^2}{(R^2+(z-L/2)^2)^{3/2}} - \frac{R^2}{(R^2+(z+L/2)^2)^{3/2}}\right]$$

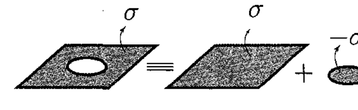
با توجه به این‌که گفته شده میدان در فاصله‌ای دور از صفحه رسم شده، می‌توان z را در برابر L و R به بی‌نهایت میل داد.

$$\lim_{z\to\infty}\left(-E(z).\pi R^2 + \left[E(z)+\frac{\partial E}{\partial z}.dz\right]\pi R^2 - E(R')\cdot 2\pi R'dz\right) = 0$$
$$\rightarrow \lim_{z\to\infty} \pi R^2\frac{\partial E}{\partial z}.dz - E(R)\cdot 2\pi R dz = 0$$
$$\rightarrow \lim_{z\to\infty}\frac{\partial E}{\partial z}.\pi R^2 = E(R)\cdot 2\pi R \rightarrow \lim_{z\to\infty}\frac{\partial E}{\partial z} = E(R).\frac{2}{R}$$
$$\rightarrow \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}\lim_{z\to\infty}\left[\frac{1}{(R^2+(z-L/2)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(R^2+(z+L/2)^2)^{3/2}}\right] = \frac{2E(R')}{R'}$$
$$= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}.\frac{1}{z^3}\left[\frac{1}{\left(\frac{R^2}{z^2}+(1-\frac{L}{2z})^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(\frac{R^2}{z^2}+(1+\frac{L}{2z})^2\right)^{3/2}}\right]$$

چون $\lim_{x\to 0}(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\cdots$

$$= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}.\frac{1}{z^3}\left[(1-\frac{L}{2z})^{-3} - (1+\frac{L}{2z})^{-3}\right]$$
$$\rightarrow \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}.\frac{1}{z^3}\left[1+\frac{3}{2}\frac{L}{z} - (1-\frac{3}{2}\frac{L}{z})\right]$$
$$= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}.\frac{1}{z^3}.\frac{3h}{z} = \frac{2E(R')}{R'}$$
$$\rightarrow \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}.\frac{1}{z^3}.\frac{3L}{z} = \frac{2E(R')}{R'}$$
$$\rightarrow E(R') = \frac{3}{4}\frac{\sigma R^2 R' L}{\epsilon_0}.\frac{1}{z^4}$$

ج) برای این قسمت از راه‌حل دوم استفاده می‌کنیم توزیع بار نشان داده شده را به صورت برهم‌نهی چهار المان، دو صفحه‌ی بی‌نهایت با چگالی $\pm\sigma$ و دو دیسک بار به شعاع R با چگالی سطحی با $\pm\sigma$.

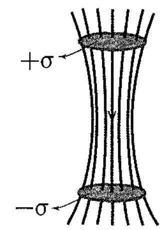


شکل ۲-۷۸

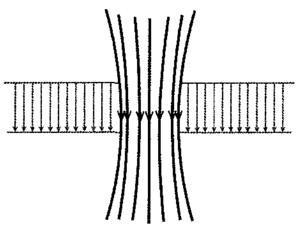
میدان ناشی از برهم‌نهی میدان دو صفحه بی‌نهایت در همه‌ی نقاط غیر از بین دو صفحه

$$E = \frac{+\sigma}{۲\epsilon_۰} + \frac{-\sigma}{۲\epsilon_۰} = ۰$$

و به این صورت میدان حاصل، حاصل برهم‌نهی میدان دو قرص بار است. این توزیع بار شبیه به یک دوقطبی است و بنابراین میدان روی محور این سوراخ مثل میدان یک دوقطبی است. (شکل ۲ـ۷۹)

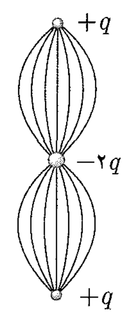


شکل ۲-۷۹

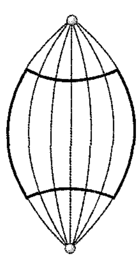

شکل ۲-۸۰

میدان کلی حاصل ترکیب این دو تحلیل است. (۲ـ۸۰)

۷. **حل.** الف) با توجه به دانسته‌هایمان از فصل میدان و دوقطبی‌ها، خطوط میدان به صورت شکل ۲ـ۸۱ است.

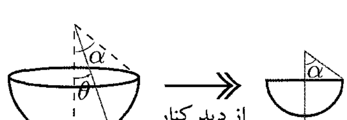


شکل ۲-۸۱

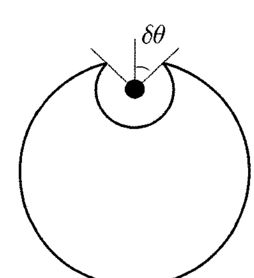

شکل ۲-۸۲

ب) برای این قسمت مطابق قسمت‌های گذشته، سطح گاوسی مناسبی پیدا می‌کنیم که فقط قسمت‌های مجهول مسئله ما را حل کند. به این صورت سطح گاوسی مطابق شکل ۲ـ۸۲ در نظر می‌گیریم.

حالا می‌خواهیم شار گذرنده از یک عرقچین با زاویه‌ی کروی α را به‌دست بیاوریم:



شکل ۲-۸۳

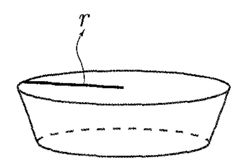


شکل ۲-۸۴

ابتدا المان سطح را به صورت شکل در نظر می‌گیریم:

$$dA = ۲\pi r.\frac{dz}{\sin\theta}$$

$$z = R(\text{۱} - \cos\theta)$$
$$r = R\sin\theta$$
$$\rightarrow\ dz = R\sin\theta.d\theta\ \rightarrow\ dA = \text{۲}\pi R^{\text{۲}}\sin\theta d\theta$$
$$\rightarrow\ \int_{\theta=\circ}^{\theta=\alpha} = \int_{\circ}^{\alpha}\text{۲}\pi R^{\text{۲}}\sin\theta.d\theta = -\text{۲}\pi R^{\text{۲}}\cos\theta\Big]_{\circ}^{\alpha}$$
$$= -\text{۲}\pi R^{\text{۲}}[\cos\alpha - \text{۱}] = \text{۲}\pi R^{\text{۲}}[\text{۱} - \cos\alpha]$$



شکل ۲-۸۵

در فاصله‌ی بسیار نزدیک به بار، $q+$، می‌توان حضور سایر بارها را نادیده گرفت.

$$R\rightarrow\circ\ \rightarrow\ \phi = E\times A = \frac{\text{۱}}{\text{۴}\pi\epsilon_\circ}.\frac{q}{R^{\text{۲}}}\cdot\text{۲}\pi R^{\text{۲}}[\text{۱}-\cos\alpha]\ ,\ R\rightarrow\circ$$
$$= \frac{q}{\text{۲}\epsilon_\circ}[\text{۱}-\cos\alpha]$$

حالا قانون گاوس را برای سطوح گاوسی که در این قسمت در نظر گرفتیم اعمال می‌کنیم.

$$(\text{۱})\ \phi_S = \circ\ \rightarrow\ \frac{q}{\text{۲}\epsilon_\circ}[\text{۱}-\cos\delta\theta] = \frac{\text{۲}q}{\text{۲}\epsilon_\circ}.[\text{۱}-\cos\delta\theta']$$
$$\rightarrow\ \text{۲}\sin^{\text{۲}}\frac{\delta\theta}{\text{۲}} = \text{۲}\times\text{۲}\sin^{\text{۲}}\frac{\delta\theta'}{\text{۲}}\ \rightarrow\ \frac{\delta\theta^{\text{۲}}}{\text{۴}} = \text{۲}\times\frac{\delta'\theta^{\text{۲}}}{\text{۴}}$$
$$\rightarrow\ \delta\theta^{\text{۲}} = \text{۲}\delta\theta'^{\text{۲}}\ \rightarrow\ \delta\theta' = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}}}\delta\theta$$
$$(\text{۲})\ \phi_S = \circ\ \rightarrow\ \frac{q}{\text{۲}\epsilon_\circ}[\text{۱}-\cos(\pi-\delta\theta)] = \frac{\text{۲}q}{\text{۲}\epsilon_\circ}[\text{۱}-\cos\delta\theta'']$$
$$\rightarrow\ \text{۱}+\cos\delta\theta = \text{۲}[\text{۱}-\cos\delta\theta'']$$
$$\rightarrow\ \text{۲}\cos^{\text{۲}}\frac{\delta\theta}{\text{۲}} = \text{۲}\left[\text{۲}\sin^{\text{۲}}\frac{\delta\theta''}{\text{۲}}\right]$$
$$\rightarrow\ \cos^{\text{۲}}\frac{\delta\theta}{\text{۲}} = \text{۲}\sin^{\text{۲}}\frac{\delta\theta''}{\text{۲}}\ \rightarrow\ \delta\theta\rightarrow\circ\ \rightarrow\ \cos\delta\theta\rightarrow\text{۱}$$
$$\rightarrow\ \sin^{\text{۲}}\frac{\delta\theta''}{\text{۲}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \rightarrow\ \frac{\delta\theta''}{\text{۲}} = \frac{\pi}{\text{۴}}\ \rightarrow\ \delta\theta'' = \frac{\pi}{\text{۲}}$$

ج) میدان در نقطه‌ای به فاصله‌ی z از مرکز دوقطبی روی محور آن به صورت زیر است:

$$E = \frac{\text{۱}}{\text{۴}\pi\epsilon_\circ}.\frac{q}{(z-l)^{\text{۲}}}.\hat{k} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}\pi\epsilon_\circ}.\frac{-\text{۲}q}{z^{\text{۲}}}.\hat{k} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}\pi\epsilon_\circ}.\frac{q}{(z+l)^{\text{۲}}}.\hat{k}$$
$$= \frac{q}{\text{۴}\pi\epsilon_\circ}\left(\frac{\text{۱}}{(z-l)^{\text{۲}}} + \frac{q}{(z+l)^{\text{۲}}} - \frac{\text{۲}}{z^{\text{۲}}}\right)$$

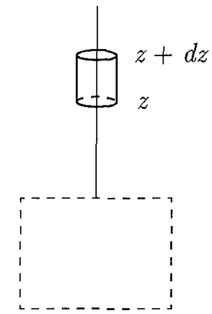
د) برای به‌دست آوردن میدان در فواصل دور $z \gg l$:

$$E = \frac{q}{\text{۴}\pi\epsilon_\circ}.\frac{q}{z^{\text{۲}}}\left(\frac{\text{۱}}{(\text{۱}-\frac{l}{z})^{\text{۲}}} + \frac{\text{۱}}{(\text{۱}+\frac{l}{z})^{\text{۲}}} - \text{۲}\right)$$
$$\rightarrow \frac{q}{\text{۴}\pi\epsilon_\circ}.\frac{\text{۱}}{z^{\text{۲}}}\left(\left(\text{۱}+\frac{\text{۲}l}{z}+\frac{\text{۳}l^{\text{۲}}}{z^{\text{۲}}}+\cdots\right) + \left(\text{۱}-\frac{\text{۲}l}{z}+\frac{\text{۳}l^{\text{۲}}}{z^{\text{۲}}}+\cdots\right) - \text{۲}\right)$$

$$= \frac{q}{۴\pi\epsilon_\circ}.\frac{q}{z^۲}\left(\frac{+۶l^۲}{z^۲}\right) = \frac{q}{۴\pi\epsilon_\circ}.\frac{۶l^۲}{z^۴}$$

$$E = \frac{۸q}{۴\pi\epsilon_\circ}.\frac{l^۲}{z^۴} = \frac{۲q}{\pi\epsilon_\circ}.\frac{l^۲}{z^۴}$$

برای به‌دست آوردن میدان در راستای l_p، در فواصل دور z و نزدیک به محور، سطح گاوسی مطابق شکل (۲ـ۸۶) در نظر بگیرید.



شکل ۲-۸۶

$$E(z+dz)\pi r^۲ - E(z).\pi r^۲ + E(r)\cdot ۲\pi r.dz = \circ$$

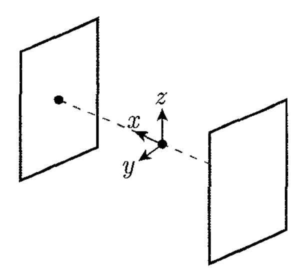
$$\rightarrow \left(E(z) + \frac{\partial E}{\partial z}.dz - E(z)\right)\pi r^۲ + E(r)\cdot ۲\pi r.dz = \circ$$

$$\Rightarrow -\frac{۶q}{\pi\epsilon_\circ}.\frac{l^۲}{z^۵}.\pi r^۲ dz + E(r)\cdot ۲\pi r dz = \circ$$

$$\frac{۶q}{\pi\epsilon_\circ}.\frac{l^۲}{z^۵}.\pi r^۲ = ۲\pi r.E(r)$$

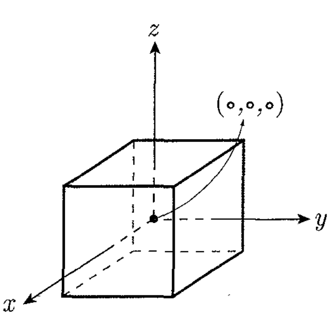
$$\rightarrow \frac{۳ql^۲}{\pi\epsilon_\circ z^۵}r = E(r) \;\rightarrow\; E(r) = \frac{۳l^۲}{\pi\epsilon_\circ}.\frac{qr}{z^۵}$$

۸. **حل.** الف) میدان در مرکز مکعب به عنوان یک بردار، دارای سه مؤلفه‌ی $E_{x_\circ}\hat{i}$، $E_{y_\circ}\hat{j}$ و $E_{z_\circ}\hat{k}$ است. در هر یک از این راستاها، می‌توان یک بار فرض کرده $E_{x_\circ}$، $E_{y_\circ}$ و $E_{z_\circ}$ و سپس شکل را به صورت خیالی به اندازه‌ی π رادیان چرخاند. واضح است که شکل به دلیل تقارن تغییری نمی‌کند اما در این صورت چون میدان هم با مکعب چرخیده $E'_{x_\circ}, E'_{y_\circ}, E'_{z_\circ} < \circ$ (مؤلفه‌های جدید میدان)، که این نتیجه مطلقاً غیرقابل قبول است پس تنها فرض ممکن این است که $E_{x_\circ} = E_{y_\circ} = E_{z_\circ} = \circ$.



شکل ۲-۸۷

ب) ابتدا فرض کنیم که روی محور x از یک وجه تا وجه مقابل جابه‌جا نشویم، در این صورت اگر دقت کنیم در هر نقطه‌ای روی محور x داشتن مؤلفه‌هایی در راستاهای y و z به دلیلی مشابه دلیل گفته شده در قسمت (الف) غیرمنطقی است و بنابراین میدان روی این خط در جهت x فقط تابعی از x است و بنابراین میدان را روی این خط می‌توان به صورت $\vec{E} = E_x(x)\hat{i}$ نوشت. به همین صورت میدان را روی دو خط محور دیگر، به صورت $\vec{E} = E_y(y)\hat{j}$ و $\vec{E} = E_z(z)\hat{k}$ می‌نویسیم. سپس بیایید با هم یک مکعب با ابعاد دیفرانسیلی dx، dy و dz حول مرکز مکعب تصور کنیم، وجه‌های این مکعب در محل‌های $\pm\frac{dx}{۲}$، $\pm\frac{dy}{۲}$ و $\pm\frac{dz}{۲}$ قرار دارند، می‌خواهیم شارگذرنده از این مکعب را محاسبه کنیم. برای مثال شارگذرنده از وجه واقع در محل $+\frac{dx}{۲}$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.



شکل ۲-۸۸

$$\phi_{+x} = \vec{E}(\frac{dx}{۲}).\vec{A}$$

که در آن

$$\vec{E}(\frac{dx}{۲}) = \left(E_{x_\circ} + \frac{\partial E_x}{\partial x}.\frac{dx}{۲}\right)\hat{i} \;\;,\;\; \vec{A} = dy.dz\hat{i}$$

$$\rightarrow \phi_{+x} = \frac{\partial E_x}{\partial x}.\frac{dx}{۲}.dy.dz$$

بنا به ملاحظات تقارن ϕ_{-x}، یعنی شار عبوری از وجه روبه‌روی وجه متناظر با ϕ_{+x}، برابر با ϕ_{+x} است.

$$\phi_x = \phi_{+x} + \phi_{-x} = \frac{\partial E_x}{\partial x}.dx.dy.dz$$

و به این صورت

$$\phi_y = \frac{\partial E_y}{\partial y}.dy.dx.dz$$
$$\phi_z = \frac{\partial E_z}{\partial z}.dz.dx.dy$$

پس شار کل گذرنده از سطح برابر است با:

$$\phi = dxdydz\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

طبق قانون گاوس:

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_\circ} = \circ \;\rightarrow\; dxdydz\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \circ$$

همچنین با توجه به ملاحظات تقارن

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = \xi$$
$$\rightarrow ۳\xi = \circ \;\rightarrow\; \xi = \circ \;\rightarrow\; \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = \circ$$

۹. **حل**. بار $+۲e$ به صورت یکنواخت در کره پخش شده است، می‌دانیم که میدان در محل حضور الکترون‌ها، بستگی به مقدار باری دارد که در کره‌ای به شعاع $d/۲$ قرار دارد، نام مقدار این بار را می‌گذاریم: $q_{\text{effective}}$.

$$q_{\text{effective}} = \frac{\rho V_e}{\rho V_{\text{total}}}.q = \frac{۴/۳\pi \times R_e^۳}{۴/۳\pi \times R^۳}.q$$
$$= (\frac{R_e}{R})^۳.q = (\frac{d/۲}{R})^۳.q = (\frac{d}{۲R})^۳ \cdot ۲e$$

میدان ناشی از بار توزیع شده درکره، دارای تقارن کروی است. قانون گاوس برای این بار، به صورت زیر است. E_S نشان دهنده میدان ناشی از بار درون کره است (E_{Sphere}).

$$e.\oint_S \vec{E}_S.\overrightarrow{dA} = q_e$$
$$\rightarrow \epsilon_\circ \times E_S \times ۴ \times \pi \times R_e ۲ = q_e$$
$$\rightarrow \epsilon_\circ \times E_S \times ۴ \times \pi \times (d/۲)^۲ = (\frac{d/۲}{R})^۳ \cdot ۲e$$
$$\rightarrow E_S = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}.\frac{d/۲}{R^۳} \cdot ۲e = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}.\frac{de}{R^۳}$$

میدان ناشی از دو الکترون، میدان دیگری است که باید محاسبه شود. این کار بسیار ساده است.

$$E_e = E_{\text{electrons}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{-l}{d^2}$$

برای حفظ تعادل، میدان باید صفر شود.

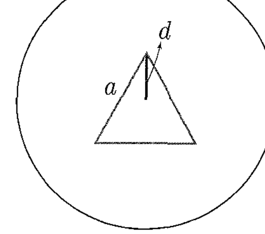
$$\rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{de}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{e}{d^2}$$
$$\rightarrow \frac{d}{R^3} = \frac{1}{d^2} \rightarrow d = R$$

تذکر

تنها چیزی که باید در این سؤال به آن دقت می‌کردید، این بوده که کل بار $+2e$ را به صورت یک بار متمرکز در مرکز در نظر نگیرید. البته این سؤال را می‌توانستیم، با گرفتن المان‌های کروی بار هم حل کنیم که جواب مشابهی به‌دست می‌آمد. دقت کنید که پوسته‌ی کروی که در فاصله $d/2 < r < R$ قرار دارد، عملاً در میدان در محل $r = d/2$ بی‌اثر است.

۱۰. **حل.** الف)

$$d\cos\frac{\pi}{6} = \frac{a}{2} \rightarrow d\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2} \rightarrow a = d\sqrt{3}$$



شکل ۲-۸۹

حال سؤال را مانند سؤال قبل تحلیل می‌کنیم، میدان ناشی از توزیع بار کروی در محل رئوس مثلث باید برابر با میدان ناشی از حضور سایر الکترون‌ها در محل هر الکترون باشد.

از نتیجه قسمت قبل میدان توزیع بار مثبت برابر با میدان قسمتی از بار کره است که در کره‌ای به شعاع d قرار دارد، با فرض این‌که این مقدار از بار در مرکز کره متمرکز شده باشد.

$$q_e = \frac{\rho V_e}{\rho V}q = \frac{4/3 \times \pi \times d^3}{4/3 \times \pi \times R^3}.q = (\frac{d}{R})^3.z.e$$
$$E_S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{q_e}{d^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{dze}{R^3}$$

از آنجایی که شکل از تقارن کروی برخوردار است، این میدان به صورت برداری $E_S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{dze}{R^3}\hat{e}_R$ است، حالا نوبت به محاسبه‌ی میدان ناشی از هر دو الکترون در محل الکترون سوم است میدان ناشی از هر الکترون در محل دیگری به صورت زیر است:

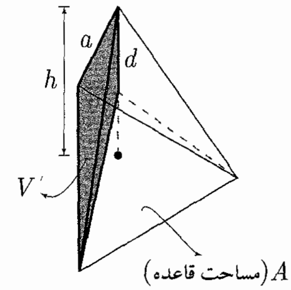
$$E_e = E_{\text{electrons}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{-e}{a^2}$$

به این صورت میدان برآیند، ناشی از دو الکترون به صورت

$$E_R = E_{\text{Resultent}} = 2E_e\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}E_e$$

در صفحه‌ای که این مثلث قرار دارد، میدان برآیند برداری است که به علت تقارن از مرکز مثلث خواهد گذشت، پس به صورت برداری $\vec{E}_R$ هم به صورت $\vec{E}_R = \sqrt{3}E_e\hat{e}_R$ است.

$$\vec{E} = \vec{E}_S + \vec{E}_R = 0$$



شکل ۲-۹۰

$$\rightarrow \sqrt{3}\cdot\frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{e}{a_0^2}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{dze}{R^3}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3d^2}=\frac{zd}{R^3}\ \rightarrow\ \sqrt{3}zd^3=R^3\ \rightarrow\ d=\frac{R}{\sqrt[3]{\sqrt{3}z}}$$

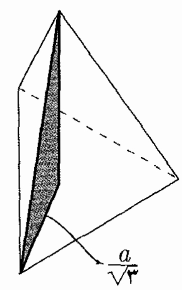
$$\rightarrow a=d\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}R}{\sqrt[3]{\sqrt{3}z}}=\frac{E\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{z}}$$

ب) باید d را در شکل تعیین کرد.

$$V=\frac{A\times h}{3}=4\times V'=4\times\frac{A\times(h-d)}{3}$$

$$\rightarrow h=4(h-d)\ \rightarrow\ h=4h-4d$$

$$\rightarrow 3h=4d\ \rightarrow\ d=\frac{3}{4}h$$



شکل ۲-۹۱

اما حالا باید خود h را بر حسب a (اندازه‌ی ضلع این هرم) پیدا کرد.

$$\rightarrow (\frac{a}{\sqrt{3}})^2+h^2=a^2\ \rightarrow\ \frac{a^2}{3}+h^2=a^2\ \rightarrow\ h^2=\frac{2}{3}a^2$$

$$\rightarrow h=\sqrt{\frac{2}{3}}a\ \rightarrow\ d=\frac{3}{4}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.a\ \rightarrow\ d=\frac{\sqrt{6}}{4}.a$$

از اینجا به بعد استدلال‌ها مثل قسمت (الف) است، نخست میدان ناشی از توزیع بار مثبت:

$$\vec{E}_S=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{dze}{R^3}\hat{e}_R$$

$$E_e=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{-e}{a^2}$$

$$\vec{E}_R=3\times E_e\times\cos\frac{\pi}{6}\hat{e}_R=-\frac{3\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{e}{a^2}$$

دوباره برای برقراری تعادل، میدان باید صفر باشد.

$$\vec{E}=\vec{E}_S+\vec{E}_R=0$$

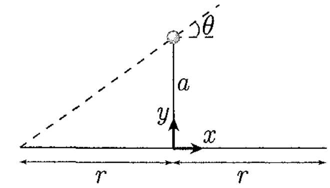
$$\rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{\sqrt{6}a.z.e}{4R^3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{e}{a^2}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{2}az}{24R^3}=\frac{3}{2}.\frac{1}{a^2}\ \rightarrow\ \sqrt{2}a^3z=6R^3$$

$$\rightarrow a^3=\frac{6}{\sqrt{2}z}R^3\ \rightarrow\ a=R\sqrt[3]{\frac{6}{\sqrt{2}z}}=R\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2}}{z}}$$

۱۱. **حل.** الف) به وسیله‌ی قانون گاوس میدان را در فاصله‌ی a از این خط بار به‌دست می‌آوریم:

$$E_0\times 2\pi r\times l=\frac{\lambda\times l}{\epsilon_0}\ ra\ E_0=\frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0}\Big|_{r=a}\ \rightarrow\ E_0=\frac{\lambda}{2\pi a\epsilon_0}$$



شکل ۲-۹۲

ب) برای به‌دست آوردن میدان در این قسمت باید با المان‌گیری و قانون کولن میدان را به‌دست بیاوریم:

$$dE = E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{dq}{d^2}.\sin\theta$$

$$\rightarrow\ E = \int dE = \int_{-r}^{r} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{\lambda dx}{a^2+x^2}.\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}.\frac{2r}{\sqrt{r^2+a^2}}$$

$$\rightarrow\ \frac{E}{E_0} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}.\frac{2r}{\sqrt{r^2+a^2}}\Big/\frac{\lambda}{2\pi a\epsilon_0} = \frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}$$

برای نوشتن بسط تیلور

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{\frac{\sqrt{r^2+a^2}}{r}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{r^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$$

$$\rightarrow\ (1+\epsilon^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2$$

ج) با توجه به قسمت (ب)، ما میدان ناشی از جمع میدان المان‌های خطی بار را به‌دست آوردیم. در این قسمت کافی است حدود جدید را جایگزین کنیم:

$$E = \int dE = \int_{-(r+x)}^{r-x} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{\lambda d\xi}{a^2+\xi^2}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}.\frac{\xi}{\sqrt{a^2+\xi^2}}\Big]_{-(r+x)}^{r-x}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}\left(\frac{r-x}{\sqrt{a^2+(r-x)^2}} - \frac{(-r+x)}{\sqrt{a^2+(r+x)^2}}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}\left(\frac{r-x}{\sqrt{a^2+(r-x)^2}} + \frac{r+x}{\sqrt{a^2+(r+x)^2}}\right)$$

با نوشتن بسط تیلور این عبارت و حذف جمله‌های لازم داریم:

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}\Big((1+\frac{x}{r})(1 - \frac{x}{r} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{r^2} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} + \frac{3}{2}\frac{x^2}{r^2}$$

$$+ \frac{3}{8}\frac{x^4}{r^4} + \frac{3}{8}\frac{a^4}{r^4} + \frac{3}{2}\frac{x^3}{r^3} + \frac{3}{2}\frac{x}{r}.\frac{a^2}{r^2} + \frac{3}{4}\frac{x^2}{r^2}$$

$$- \frac{5}{2}\frac{x^3}{r^3} - \frac{15}{4}\frac{x^4}{r^4} - \frac{15}{4}\frac{x^2}{r^2}.\frac{a^2}{r^2} + \frac{35}{8}\frac{x^4}{r^4})$$

$$+ (1-\frac{x}{r})(1 + \frac{x}{r} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{r^2} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} + \frac{3}{2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{3}{8}\frac{x^4}{r^4} + \frac{3}{8}\frac{a^4}{r^4} - \frac{3}{2}\frac{x^3}{r^3}$$

$$- \frac{3}{2}\frac{x}{r}.\frac{a^2}{r^2} + \frac{3}{4}\frac{x^2}{r^2}.\frac{a^2}{r^2} + \frac{5}{2}\frac{x^3}{r^3} - \frac{15}{4}\frac{x^4}{r^4} - \frac{15}{4}\frac{x^2}{r^2}.\frac{a^2}{r^2} + \frac{35}{8}\frac{x^4}{r^4})\Big)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}\Big(2 - \frac{x^2}{r^2} - \frac{a^2}{r^2} + \frac{3x^2}{r^2}\frac{3}{4}\frac{x^4}{r^4} + \frac{3}{4}\frac{a^4}{r^4} + \frac{3}{2}\frac{x^2}{r^2}.\frac{a^2}{r^2}$$

$$-\frac{15}{2}\frac{x^4}{r^4}-\frac{15}{2}\frac{x^2}{r^2}.\frac{a^2}{r^2}+\frac{35}{4}\frac{x^4}{r^4}-2\frac{x^2}{r^2}+3\frac{x^4}{r^4}+3\frac{x^2}{r^2}.\frac{a^2}{r^2}-5\frac{x^4}{r^4}\Big)$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_\circ a}\left(2-\frac{a^2}{r^2}+\frac{3}{4}\frac{a^4}{r^4}-3\frac{x^2}{r^2}\frac{a^2}{r^2}\right)$$

جمله‌ی $\frac{a^4}{r^4}$ جمله‌ی جدیدی نیست، چرا که با بسط عبارت بخش (ب) تا مرتبه‌ی چهارم نیز می‌توانستیم به آن برسیم. اختلاف حاصل از تغییر x در توزیع بار در جمله‌ی $\frac{a^2}{r^2}\times\frac{x^2}{r^2}$ ظاهر شده است.

د) طبق قسمت (ج)

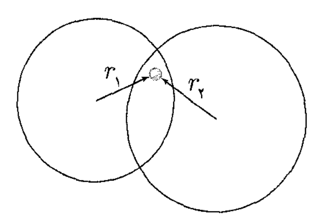
$$\frac{3}{2}\frac{x_{\max}^2 a^2}{r^4}=0/01 \rightarrow |x|<\sqrt{\frac{0/02}{3}}\frac{r^2}{a}$$

۱۲. **حل.** الف) فرض کنید می‌خواهیم میدان را در فاصله‌ی r داخل یک توزیع بار به شعاع R $(R>r)$ با چگالی بار یکنواخت ρ پیدا کنیم، طبق قانون گاوس

$$\epsilon_\circ.E(r)\cdot 4\pi\times r^2=\rho\times\frac{4}{3}\pi\times r^3\rightarrow E(r)=\frac{\rho}{3\epsilon_\circ}r$$

همچنین فرض کنید نقطه‌ای که می‌خواهیم میدان را در آن حساب کنیم نسبت به مراکز دو کره با بردارهای $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ بیان شود. (این بردارها در فضای سه‌بعدی قرار دارند.)

در قسمت (الف) می‌خواهیم اندازه‌ی میدان نقاط مشترک ثابت باشد، یعنی:



شکل ۲-۹۳

$$|\vec{E}|=|\vec{E}_1+\vec{E}_2|=\text{cte}\ ,\ \ \vec{E}=\frac{\rho_1}{3\epsilon_\circ}.\vec{r}_1+\frac{\rho_2}{3\epsilon_\circ}\vec{r}_2$$

$$\vec{E}=\frac{1}{3\epsilon_\circ}(\rho_1\vec{r}_1+\rho_2\vec{r}_2)=\frac{1}{3\epsilon_\circ}\left(\rho_1(\vec{r}_1-\vec{r}_2)+(\rho_2+\rho_1)\vec{r}_2\right)$$

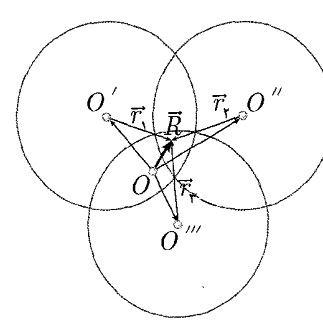
$$\rightarrow \vec{E}=\frac{1}{3\epsilon_\circ}\left(\rho_1.\vec{d}+(\rho_1+\rho_2)\vec{r}_2\right)$$

که در آن $\vec{d}$ بردار واصل مرکز دو کره و برداری ثابت است.

$$|\vec{E}|=\text{cte}\ \rightarrow\ |\rho_1\vec{d}+(\rho_1+\rho_2)\vec{r}_2|=\text{cte}$$

چون $\vec{d}$ برداری ثابت است، برای آن‌که برای $\vec{r}_2$های مختلف اندازه‌ی بردار برآیند ثابت باشد، باید ضریب r_2 صفر باشد.

$$\rho_1+\rho_2=0$$



شکل ۲-۹۴

ب) برای این قسمت شکل را در نظر بگیرید که در آن o یک نقطه‌ی ثابت دلخواه است و $\vec{R}$ بردار واصل o به نقطه‌ی مورد نظر

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3$$

$$=\frac{1}{3\epsilon_\circ}(\rho_1\vec{r}_1+\rho_2\vec{r}_2+\rho_3\vec{r}_3)$$

برای راحتی $2\vec{E}$ را تشکیل می‌دهیم

$$\begin{aligned}
2\vec{E} &= \frac{1}{3\epsilon_0}(2\rho_1\vec{r}_1 + 2\rho_2\vec{r}_2 + 2\rho_3\vec{r}_3)\\
&= \frac{1}{3\epsilon_0}(\rho_1\vec{r}_1 + \rho_2\vec{r}_2 + \rho_1\vec{r}_1 + \rho_3\vec{r}_3 + \rho_2\vec{r}_2 + \rho_3\vec{r}_3)\\
&= \frac{1}{3\epsilon_0}\big(\rho_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + (\rho_1 + \rho_2)\vec{r}_2 + \rho_3(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) + (\rho_1 + \rho_3)\vec{r}_1\\
&\quad + \rho_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) + (\rho_2 + \rho_3)\vec{r}_3\big)
\end{aligned}$$

طبق تعریف:

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{d}_{12}\ ,\ \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = \vec{d}_{31}\ ,\ \vec{r}_2 - \vec{r}_3 = \vec{d}_{23}$$

بردارهای ثابت هستند.

$$\begin{aligned}
2\vec{E} &= \frac{1}{3\epsilon_0}\big(\vec{k} + (\rho_1 + \rho_2)\vec{r}_2 + (\rho_1 + \rho_3)\vec{r}_1 + (\rho_2 + \rho_3)\vec{r}_3\big)\\
&= \frac{1}{3\epsilon_0}\big(\vec{k} + (\rho_1 + \rho_2)(\vec{R} - \overrightarrow{oo''}) + (\rho_1 + \rho_3)(\vec{R} - \overrightarrow{oo''})\\
&\quad + (\rho_2 + \rho_3)(\vec{R} - \overrightarrow{oo''})\big)
\end{aligned}$$

بردارهای $\overrightarrow{oo'}$، $\overrightarrow{oo''}$ و $\overrightarrow{oo'''}$ بردارهای ثابت هستند.

$$2\vec{E} = \frac{1}{3\epsilon_0}\big(\vec{k'} + \vec{R}(2)(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)\big)$$

برای این‌که اندازه‌ی این بردار در همه جای فضا ثابت باشد، باید ضرب بردار مکان دلخواه $\vec{R}$ صفر باشد. یعنی

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 0$$

ج) برای این قسمت، از حل قسمت (ب) کمک می‌گیریم. می‌دانیم:

$$\begin{aligned}
2\vec{E} &= \frac{1}{3\epsilon_0}((\rho_1\vec{d}_{12} + \rho_3\vec{d}_{31} + \rho_2\vec{d}_{23} - (\rho_1 + \rho_2)\overrightarrow{oo''}\\
&\quad - (\rho_1 + \rho_3)\overrightarrow{oo'} - (\rho_2 + \rho_3)\overrightarrow{oo'''} + 2(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)\vec{R})\\
&= \frac{1}{3\epsilon_0}\big(\rho_1(\vec{d}_{12} + \overrightarrow{o''o} + \overrightarrow{o'o}) + \rho_2(\vec{d}_{23} + \overrightarrow{o'''o} + \overrightarrow{o''o})\\
&\quad + \rho_3(\vec{d}_{31} + \overrightarrow{o'o} + \overrightarrow{o'''o}) + 2(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)\vec{R}\big)\\
&= \frac{2}{3\epsilon_0}\big(\rho_1\overrightarrow{o'o} + \rho_2\overrightarrow{o''o} + \rho_3\overrightarrow{o'''o} + (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)\vec{R}
\end{aligned}$$

حالا برای این‌که میدان همه جا یک اندازه باشد (فرض قسمت (ب) باید $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3$ صفر باشد)

$$2\vec{E} = \frac{2}{3\epsilon_0}(\rho_1\overrightarrow{o'o} + \rho_2\overrightarrow{o''o} + \rho_3\overrightarrow{o'''o})$$

برای این‌که این میدان بر راستای $\vec{d}_{۱۳}$ عمود باشد، باید ضرب داخلی $\vec{E}.\vec{d}_{۱۳}$ برابر صفر باشد.

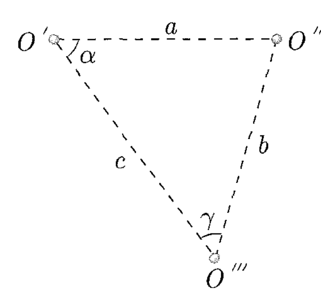
$$(\rho_۱.\overrightarrow{o'o}+\rho_۲\overrightarrow{o''o}+\rho_۳\overrightarrow{o'''o}).(\underbrace{\overrightarrow{oo'''}-\overrightarrow{oo'}}_{\vec{d}_{۱۳}})=۰$$

$$\begin{aligned}&\rho_۱\overrightarrow{o'o}.\overrightarrow{oo'''}+\rho_۲\overrightarrow{o''o}.\overrightarrow{oo'''}-\rho_۳(\overrightarrow{oo'''})^۲+\rho_۱(\overrightarrow{oo'})^۲\\&\quad+\rho.\overrightarrow{o''o}.\overrightarrow{o'o}+\rho_۳\overrightarrow{o'''o}.\overrightarrow{O'O}=۰\end{aligned}$$

با توجه به این‌که نقطه‌ی o نقطه‌ای دلخواه است، می‌توان آن را به دلخواه طوری انتخاب کرد که معادلات را آسان کند، به این صورت یک بار o را روی o' و بار دیگر روی o''' منطبق می‌کنیم:

$$\begin{cases}\rho_۲\overrightarrow{o''o'}.\overrightarrow{o'o'''}+\rho_۳\overrightarrow{o'''o'}.\overrightarrow{o'o'''}=۰\\ \rho_۱\overrightarrow{o'o'''}.\overrightarrow{o'o'''}+\rho_۲\overrightarrow{o''o'''}.\overrightarrow{o'o'''}=۰\end{cases}$$

حاصل این ضرب‌های داخلی با توجه به مشخصات هندسی، محل قرارگیری سه مرکز دایره به‌دست می‌آید و به این صورت $\alpha_۱$، $\alpha_۲$ و $\alpha_۳$ مشخص می‌شوند. شکل (۲ـ۹۵) را در نظر بگیرید.



شکل ۲-۹۵

$$\overrightarrow{o''o'}.\overrightarrow{o'o'''}=-ac\cos\alpha=\frac{b^۲-a^۲-c^۲}{۲}$$

$$\overrightarrow{o''o'''}.\overrightarrow{o'o'''}=bc\cos\gamma=\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲}$$

به این صورت دستگاه معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}&\rho_۲\left(\frac{b^۲-a^۲-c^۲}{۲}\right)+\rho_۳(-c^۲)=۰\\&\rho_۱c^۲+\rho\left(\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲}\right)=۰\\&\rightarrow\frac{\rho_۱}{۱}=\frac{\rho_۲}{\frac{۲c^۲}{a^۲-b^۲-c^۲}}=\frac{\rho_۳}{\frac{b^۲-a^۲-c^۲}{a^۲-b^۲-c^۲}}\\&\rightarrow\frac{\rho_۱}{a^۲-b^۲-c^۲}=\frac{\rho_۲}{۲c^۲}=\frac{\rho_۳}{b^۲-a^۲-c^۲}\end{aligned}$$

د) با توجه به قسمت (ب) برای N کره، با تشکیل $N\vec{E}$ و دوبه‌دو گرفتن کره‌ها (میدان‌ها) عبارت مطلوب برای وجود میدان با اندازه‌ی ثابت چنین خواهد بود

$$\sum_{i=۱}^{N}\rho i=۰$$

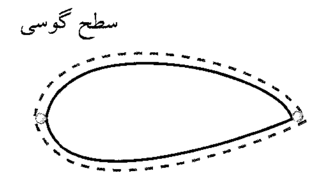
لازم به ذکر است که در قسمت (ج) و در بخش نهایی حل، اگر o را بر دو نقطه‌ی دیگر، مثلاً o' و o'' منطبق می‌کردیم، همین جواب به‌دست می‌آمد.

۱۳. حل. الف) ابتدا یک سطح گاوسی به شکل (۲ـ۹۶) در نظر می‌گیریم. طبق قانون گاوس، شار عبوری از این سطح باید برابر صفر باشد. پس:

$$-\frac{q}{2\epsilon_0}(1-\cos\alpha)+\frac{+q_2}{2\epsilon_0}(1-\cos\beta)=0$$

$$\rightarrow q_2(1-\cos\beta).q_1(1-\cos\alpha)\ \rightarrow\ 1-\cos\beta=\frac{q_1}{q_2}(1-\cos\alpha)$$

$$\rightarrow\ \cos\beta=1-\frac{q_1}{q_2}(1-\cos\alpha)$$



شکل ۲ـ۹۶

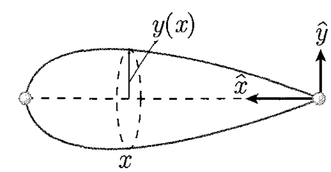
ب) برای به‌دست آوردن معادله‌ی خط $f(x,y)=0$، برای میدان یک سطح گاوسی در نظر می‌گیریم که یک طرف آن درکنار یکی از بارها و طرف دیگر آن در مکان x باشد، مطابق شکل (۲ـ۹۷) (l فاصله‌ی دو بار است).

$$\phi=-\frac{q_1}{2\epsilon_0}(1-\cos\alpha)+\frac{q_1}{2\epsilon_0}(1-\cos\theta)+\frac{q_2}{2\epsilon_0}(1-\cos\theta')=0$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2(x)}}\ ,\ \cos\theta'=\frac{(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2+y^2(x)}}$$

$$\rightarrow q\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-1+\cos\alpha\right)+q_2\left(1-\frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}\right)=0$$

$$\rightarrow q_1\left(\cos\alpha-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+q_2\left(\frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}\right)=0$$



شکل ۲ـ۹۷

ج) مثل قسمت (ب)، فرض کنیم که اولین بار، مقدار q_1 را دارد و خط میدانی را دنبال می‌کنیم که از بار q_1 با زاویه‌ی α جدا شده است.

$$-\frac{q_1}{2\epsilon_0}(1-\cos\alpha)+\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{2\epsilon_0}.\frac{(x-x_i)}{|x-x_i|}\times$$
$$\left(1-\frac{|x-x_i|}{\sqrt{(x-x_i)^2+y^2}}\right)=\frac{Q}{\epsilon_0}$$

که در آن λ توزیع بار روی محور x را نشان می‌دهد.

$$Q=\lim_{a\rightarrow 0^+}\int_a^x\lambda(x)dx$$

د) به ازای $N=2$ معادله قسمت (ج) به شکل زیر در می‌آید:

$$-\frac{q_1}{2\epsilon_0}(1-\cos\alpha)+\frac{q_1}{2\epsilon_0}\frac{(x)}{|x|}.\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
$$+\frac{-q_2}{2\epsilon_0}\left(\frac{(x-l)}{|x-l|}.\left(1-\frac{|x-l|}{\sqrt{(x-e)^2+y^2}}\right)\right)=0$$

$$\rightarrow -\frac{q_1}{2\epsilon_0}(1-\cos\alpha)+\frac{q_1}{2\epsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
$$+\frac{q_2}{2\epsilon_0}\left(1-\frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}\right)=0$$

که به شکل $g(x,y)=0$ است. حالا برای به‌دست آوردن زاویه‌ی β می‌گوییم

$$\tan\beta=\frac{dy}{dx}\Big|_{x=l}$$

$$\rightarrow g(x,y)=0 \rightarrow dg=0 \rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy=0$$
$$\rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}$$

برای این قسمت چون مقادیر ثابت در مشتق‌گیری تأثیری ندارند می‌نویسیم:

$$g(x,y)=q_1\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+q_2\frac{l-x}{\sqrt{(l-x^2)+y^2}}$$
$$\rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}=q_1\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x\times 2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\right)$$
$$+q_2\left(\frac{-\sqrt{(l-x)^2+y^2}-(l-x)\frac{-2(l-x)}{2\sqrt{(l-x)^2+y^2}}}{(l-x)^2+y^2}\right)$$
$$=q_1\left(\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)+q_2\left(\frac{-y^2}{\left((l-x)^2+y^2\right)^2}\right)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}=q_1\left(\frac{0-\frac{2yx}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2}\right)+q_2\left(\frac{0-\frac{2y(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}}{(l-x)^2+y^2}\right)$$
$$=\frac{\partial g}{\partial y}=-\left[q_1\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}+q_2\frac{y(l-x)}{\left((l-x)^2+y^2\right)^{3/2}}\right]$$
$$\rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{q_1\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}+q_2\frac{-y^2}{\left((l-x)^2+y^2\right)^2}}{q_1\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}+q_2\left(\frac{y(l-x)}{\left((l-x)^2+y^2\right)^{3/2}}\right)}$$

۳

پتانسیل الکتریکی

مقدمه

در دو فصل قبل ابتدا با مفهوم میدان الکتریکی آشنا شدیم و آموختیم که چگونه می‌توان با کمک قانون کولن به محاسبه‌ی میدان الکتریکی پرداخت. در فصل قبل، قانون گاوس را مطالعه کردیم و با استفاده از آن درباره‌ی شارگذرنده از سطوح بسته اظهارنظر کردیم و دیدم که چطور در مدل‌هایی با تقارن زیاد، می‌توان وضعیت میدانی را که با دردسر زیاد از قانون کولن به‌دست می‌آید، به سادگی به‌دست آورد.

حالا در این مرحله بیایید ذهنمان را به چند فصل قبل برگردانیم (منظور از فصل‌های قبل، فصل‌هایی از جلدهای قبل است) به قسمت دینامیک، دیدیم که می‌توان معادله‌ی حرکت اجسام را با استفاده از اصول دینامیک (قوانین نیوتن، سینماتیک) به‌دست آورد. در فصل‌های ابتدایی این روش را در مسائل متعددی به کار بستیم و پاسخ‌های صحیح را یافتیم. اما به خاطر دارید که کارها در قسمت مکانیک به همین جا ختم نشد، بعد از آن مفهومی به اسم کار را مطرح کردیم و به رفتار انرژی موجود در یک سیستم دینامیکی علاقه نشان دادیم، دیدیم که هر از چند گاهی مسائلی که از دیدگاه دینامیک برداری به سختی حل می‌شدند از منظر انرژی بسیار ساده قابل تحلیل بودند، منظری که در آن کمیت‌های برداری نظیر مکان، سرعت، شتاب و ... جای خود را به کمیت اسکالر (نرده‌ای) انرژی می‌دهد.

بعد از دینامیک به سراغ گرانش رفتیم. نیرویی که به علت خواص ویژه‌اش توانستیم در فضا، کمیتی به نام میدان گرانشی را به آن نسبت دهیم و سپس برای آن انرژی پتانسیل و پتانسیل گرانشی تعریف کنیم. شباهت‌های کم‌نظیر الکترواستاتیک و گرانش ما را وسوسه می‌کند که تحلیلی شبیه به گرانش را برای میدان الکتریکی مد نظر قرار دهیم.

مفهوم پتانسیل

در قسمت کار و انرژی با استفاده از قانون نیوتن، به معادله‌ی کار و انرژی می‌رسیدیم. برای یادآوری، این قسمت را مرور می‌کنیم. در یکی از پرتکرارترین فرم‌های موجود در طبیعت برای شکل نیروی

وارد شده $(\vec{f})$ بر یک ذره‌ی مادی در حال حرکت، فرض می‌کنیم نیروی وارد شده $\vec{f}$، تابعی از مکان ذره باشد[1] یعنی

$$\vec{f} = \vec{f}(\vec{r})$$

که $\vec{r}$ بردار مکان نقطه‌ای است که نیرو در آن محاسبه می‌شود، با فرض متمرکز بودن جرم m در نقطه‌ی $\vec{r}$، طبق قانون دوم نیوتن

$$\vec{f}(\vec{r}) = m\vec{a} = m.\frac{d^{۲}\vec{r}}{dt^{۲}} \qquad (I)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\vec{v}.\vec{a} = \vec{a}.\vec{v} \;\rightarrow\; \vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}.\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\rightarrow \vec{v}.d\vec{v} = \vec{a}.d\vec{r} = \frac{d^{۲}\vec{r}}{dt^{۲}}.d\vec{r} \qquad (II)$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی (I) در $d\vec{r}$ و جایگذاری رابطه‌ی (II) در آن،

$$\vec{f}.d\vec{r} = m.\vec{v}.d\vec{v}$$

همچنین طبق قاعده‌ی مشتق زنجیره‌ای از ریاضیات می‌دانیم،

$$d(\rho.q) = d\rho.q + dq.\rho$$

که در آن ρ و q دو تابع دلخواه هستند. در واقع این عمل دقیقاً مشتق‌گیری نیست بلکه دیفرانسیل‌گیری است و به صورت، "دیفرانسیل $\rho.q$ برابر است با ..." خوانده می‌شود.

با استفاده از این موضوع می‌توانیم بنویسیم:

$$d(v^{۲}) = d(\vec{v}.\vec{v}) = ۲(\vec{v}.d\vec{v})$$

به این صورت

$$\vec{f}.d\vec{r} = \frac{۱}{۲}m.d(v^{۲})$$

با انتگرال گرفتن از دو طرف این رابطه روی یک مسیر دلخواه C و از نقطه‌ی A تا B داریم:

$$\frac{۱}{۲}mv_B^{۲} - \frac{۱}{۲}mv_A^{۲} = \int_A^B \vec{f}.d\vec{r}$$

طبق تعریف، به سمت راست این معادله کار انجام شده توسط نیروی $\vec{f}$ در امتداد مسیر C و از نقطه‌ی A تا B گفته می‌شود، حالا به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۱

نیروهای

الف) $\vec{f} = yz\hat{i} + xy\hat{j} + xz\hat{k}$ و

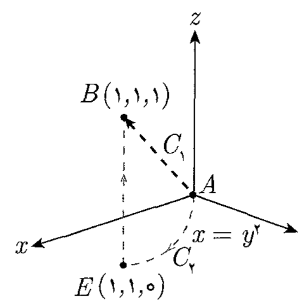
ب) $\vec{f} = yz\hat{i} + xz\hat{j} + xy\hat{k}$

[1] منظور این است که تابع سایر کمیت‌های فیزیکی مانند سرعت، زمان و ... نباشد. البته منظور، تابعیت مستقل است، چرا که به صورت نظری هر تابعی از سرعت، زمان و ... را می‌توان به صورت تابعی از مکان بیان کرد.

و دو نقطه‌ی $(\circ,\circ,\circ)$ و $(۱,۱,۱)$ مفروضند، کار نیروی $\vec{f}$ را در امتداد دو مسیر $C_۱$ و $C_۲$ نشان داده شده بر روی شکل و از نقطه‌ی $(\circ,\circ,\circ)$ تا نقطه‌ی $(۱,۱,۱)$ محاسبه کنید.

حل. الف-۱) در امتداد این مسیر می‌دانیم در هر نقطه $x=y=z$ و $dx=dy=dz$

$$\to \int_A^B \vec{f}.d\vec{r} = \int_A^B \vec{f}.(dx\hat{i}+dy\hat{j}+dz\hat{k})$$
$$= \int_\circ^۱ x^۲.dx + \int_\circ^۱ x^۲.dx + \int_\circ^۱ x^۲.dx = ۱$$



شکل ۳-۱

الف-۲) این مسیر به دقت تقسیم می‌شود، در قسمت اول، $dz=\circ$، $z=\text{cte}=\circ$ و $x=y^۲$ و در قسمت دوم $x=y=\text{cte}=۱$ به این صورت

$$C_۲:\ \int_A^B \vec{f}.d\vec{r} = \int_A^E f.d\vec{r} + \int_E^B \vec{f}.d\vec{r}$$
$$\int_A^E \vec{f}.d\vec{r} = \int_A^E xydy = \int_\circ^۱ y^۳dy = \frac{۱}{۴}$$
$$\int_E^B \vec{f}.d\vec{r} = \int_\circ^۱ zdz = \frac{۱}{۲}$$
$$\to \int_A^B \vec{f}.d\vec{r} = \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

ب-۱)
$$C_۱:\ \int_A^B \vec{f}.d\vec{r} = ۳\int_\circ^۱ x^۲.dx = ۱$$

ب-۲)
$$C_۲:\ \int_A^E \vec{f}.d\vec{r} = \circ\ ,\ \int_E^B \vec{f}.d\vec{r} = \int_\circ^۱ dz = ۱$$
$$\int_A^B \vec{f}.d\vec{r} = \circ + ۱ = ۱$$

همان‌طور که دیده می‌شود، کار انجام شده توسط نیروی الف، در دو مسیر $C_۱$ و $C_۲$ متفاوت است، حال آن‌که برای نیروی ب)، این دو مقدار برابر است، نیروی گرانش و نیروی اصطکاک مثال خوب دیگر از این موضوع است، حاصل انتگرل $\int_A^B \vec{f}.d\vec{r}$ در حالت کلی به غیر از نقاط A و B به مسیر انتگرال‌گیری هم بستگی دارد. اما در حالت‌های خاصی که در آنها به نیروی $\vec{f}$ نیروی پایستار گفته می‌شد وضعیت به گونه‌ی دیگری بود، حاصل انتگرال کار نیرو در هر مسیری فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی بستگی پیدا می‌کرد. این نوع نیروها، منشأ به وجود آمدن مفهوم پتانسیل هستند، در ادامه به توضیح بیشتر این مفهوم می‌پردازیم.

فرض کنید حاصل انتگرال $\int_A^B \vec{f}.d\vec{r}$ بخواهد برای تمام مسیرهای دلخواه C یکسان باشد (مستقل از مسیر باشد)، در این صورت باید تابعی مثل ϕ وجود داشته باشد که $d\phi=\vec{f}(r).d\vec{r}$ تا بتوان حاصل انتگرال را طبق قضیه‌ی اساسی انتگرال به صورت $\phi(B)-\phi(A)$ نوشت. با فرض وجود داشتن چنین تابعی

$$d\phi = \vec{f}(r).d\vec{r} = f_x(\vec{r}).dx + f_y(\vec{r}).dy + f_z(\vec{r}).dz$$

$$\int_A^B \vec{f}.d\vec{r} = \int_A^B d\phi = \phi_B - \phi_A$$

از طرفی طبق قاعده مشتقات زنجیره‌ای که آنها را در قسمت ریاضی مطالعه کرده‌ایم می‌دانیم:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}.dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}.dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}.dz + \frac{\partial \phi}{\partial t}.dt$$

با متحد قرار دادن دو ضابطه $d\phi$ خواهیم داشت:

$$f_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \ , \ f_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \ , \ f_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \ , \ \circ = \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (I)$$

عبارت آخر نشان می‌دهد که این تابع جدید ϕ نباید بستگی به زمان (یا به همین صورت عوامل مستقل از مکان دیگر) داشته باشد. اما اگر تابعی مثل ϕ بخواهد وجود داشته باشد باید پیوسته باشد و به این صورت، طبق قضایای ریاضی،

$$\frac{\partial^۲ \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^۲ \phi}{\partial y \partial x} \ , \ \frac{\partial^۲ \phi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^۲ \phi}{\partial z \partial x} \ , \ \frac{\partial^۲ \phi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^۲ \phi}{\partial z \partial y} \qquad (II)$$

با مطابقت روابط (I) و (II):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} \ , \ \frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial z} \ , \ \frac{\partial f_z}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial z} \\
&\frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x} = \circ \\
&\frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z} = \circ \\
&\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} = \circ
\end{aligned}$$

و به این صورت طبق تعریف $\vec{\nabla} \times \vec{f}$ داریم:

$$\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} = \circ \ \rightarrow \ \vec{\nabla} \times \vec{f} = \circ$$

به این صورت برای این‌که تابع ϕ وجود داشته باشد و حاصل انتگرال مستقل از مسیر C باشد باید $\vec{\nabla} \times \vec{f} = \circ$ باشد اثبات‌های دیگری هم به طرق مشابه برای تابع این موضوع وجود دارند.

گرادیان یک تابع

قضیه‌ی مشتق‌های جزئی، جزء یک تابع مانند f را که تابعی از سه متغیر x، y و z است، به صورت زیر بیان می‌کند

$$df = (\frac{\partial f}{\partial x})dx + (\frac{\partial f}{\partial y})dy + (\frac{\partial f}{\partial z})dz$$

که در آن برای مثال $\frac{\partial f}{\partial x}$ مشتق جزئی تابع f نسبت به متغیر x نامیده می‌شود و بدین مفهوم است که در صورتی که متغیرهای دیگر (در اینجا y و z) ثابت باشند، تغییرات تابع f با تغییر x چگونه خواهد بود. قضیه‌ی مشتقات جزئی، تغییرات f را وقتی متغیرها به مقدار بی‌نهایت کوچک dx، dy و dz تغییر می‌کنند، نشان می‌دهد. در مشتق یک تابع نسبت به یک متغیر، دانستیم که مشتق تابع f، تغییرات آن را در یک جابه‌جایی کوچک معلوم می‌کند اما با بالا رفتن تعداد متغیرها این تغییرات به جهت جابه‌جایی بستگی خواهد داشت، چرا که در سه جهت مختلف (x، y و z) تغییر مکان ممکن است. مثلاً ممکن است تغییرات f با حرکت به سمت x سریع باشد ولی با حرکت به سمت بالا (در جهت z) تغییرات چشم‌گیری وجود نداشته باشد. بنابراین جواب‌های مختلفی برای سرعت تغییرات تابع بیش از یک‌متغیره وجود دارد. با استفاده از قضیه‌ی مشتقات جزئی، تغییرات تابع به صورت جمعی از حاصل‌ضرب مشتق جزئی نسبت به یک متغیر در جزء آن متغیر تعریف می‌شود و با این کار تغییرات تابع در حالت کلی با استفاده از سه مشتق جزئی آن در راستای سه محور مختلف معلوم می‌شود. معادله‌ی گفته شده را می‌توان به شکل ضرب داخلی یک بردار در بردار جابه‌جایی بسیار کوچک، یعنی $d\vec{r}$ نشان داد. بردار اول در این ضرب داخلی را "بردار گرادیان تابع f" می‌نامند.

$$\begin{aligned} ds &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}\right) \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}) \\ &= \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

گرادیان f مشتق تعییم یافته‌ای برای تابع f با سه مؤلفه است که خود برداری با سه مؤلفه شده است. توجه کنید که علامت ∇ که عملگر «نابلا» نامیده می‌شود وقتی در یک اسکالر مانند f ضرب می‌شود شکل گرفته شده را پیدا می‌کند. این عملگر در نوع خود به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{\nabla} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

در عمل، عملگر نابلا در تابع f ضرب نمی‌شود، بلکه عملگری است برداری که با اصطلاح روی f عمل می‌کند و از آن مشتق می‌گیرد. البته باید توجه کرد که $\vec{\nabla}$ علی‌رغم بودن، خودش یک بردار است و می‌توان تمامی اعمال مربوط به بردارها را بر آن پیاده کرد. این عملگر با عمل کردن روی تابع اسکالر سه متغیره‌ی f در حقیقت نشان می‌دهد که با جابه‌جایی نقطه توسط بردار کوچک $d\vec{r}$، تابع f چقدر تغییر می‌کند. توجه کنید که دیفرانسیل f برابر با ضرب داخلی دو بردار گرادیان f و بردار جابه‌جایی تعریف شده است. این بدین معنی است که تغییرات f زمانی بیشترین مقدار

است که گرادیان f با بردار جابه‌جایی هم‌جهت باشد (چرا که در ضرب داخلی دو بردار، زمانی پاسخ ضرب بیشینه است که زاویه‌ی θی بین دو بردار صفر باشد که در نتیجه‌ی آن $\cos\theta$ برابر ۱ شود). بنابراین بیشترین تغییرات تابع هنگامی اتفاق می‌افتد که ما در جهت بردار گرادیان تابع حرکت کنیم. با این توضیح معلوم می‌شود که گرادیان خودبه‌خود در امتدادی است که بیشترین تغییرات f رخ می‌دهد. اندازه‌ی این بردار همان آهنگ افزایش تابع f در امتداد بیشینه‌ی تغییرات آن است. بنابراین در حرکت روی سطح منحنی‌الشکل یک کوه، در هر نقطه تندترین سرازیری جهت گرادیان را معلوم می‌کند و اندازه‌ی شیب حرکت در آن نقطه همان اندازه‌ی گرادیان خواهد بود. برای تعیین نقطه‌ای که در آن جزء جابه‌جایی تابع f باشد، مانند تابع یک‌متغیره، کافیست گرادیان آن را صفر قرار دهید. بنابراین گرادیان در مجموع معادل با شکل برداری مشتق است.

مثال ۲ گرادیان تابع $f(x,y,z) = x^۲y^۳z^۴$ را به‌دست آورید.

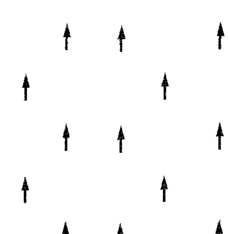
حل.

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} \\
&= ۲x \times y^۳z^۴\hat{x} + ۳y^۲ \times x^۲z^۴\hat{y} + ۴z^۳ \times x^۲y^۳\hat{z} \\
&= ۳z^۴\hat{x} + ۳x^۲y^۲z^۴\hat{y} + ۴x^۲y^۳z^۳\hat{z}
\end{aligned}
$$

دیورژانس یک بردار

دیورژانس یک بردار به صورت ضرب داخلی بردار عملگر نابلا ($\vec{\nabla}$) در یک بردار تعریف می‌شود:

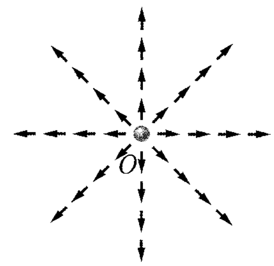
$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}.\vec{A} &= \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) \\
&= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}
\end{aligned}
$$



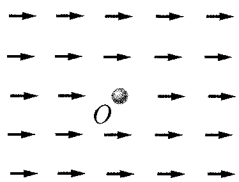
شکل ۳-۲

دیورژانس یک بردار نشان‌دهنده‌ی شکل و میزان پخش شدگی در نقطه‌ی اثر بردار است. البته برداری که بیش از یک متغیر دارد به صورت تابع برداری شناخته می‌شود که در سطح یا فضا پخش شده است. اگر هر بردار را به صورت یک پیکان در نظر بیگریم که خاصیتی مانند سرعت سیال یا هر چیز دیگری را حمل می‌کند، سمت و سویی که مجموعه‌ی بردارها به همراه یکدیگر شکل می‌دهند با استفاده از مفهوم دیورژانس قابل تعبیر است. یک تابع برداری با دیورژانس صفر به صورت شکل ۳ـ۲ دیده می‌شود که هیچ‌گونه پخش و جمع شدنی ندارد. در نقطه‌ی دیگر از تابع برداری، مجموعه‌ای از بردارها به‌صورت شکل ۳ـ۳ یا ۳ـ۴ دیده می‌شوند که نقطه‌ی میانی‌شان (نقطه‌ی o) را در نقش یک چشمه یا چاه نشان می‌دهند. در این نقطه دیورژانس تابع برداری مثبت است. بر عکس این موضوع وقتی است که بردارها به سمت داخل نقطه‌ی o جهت‌گیری کرده باشند که در این صورت دیورژانس نقطه‌ی o منفی خواهد بود. به عنوان مثال نقطه‌ی محل

فوران آب از زمین در یک چشمه دارای دیورژانس مثبت و نقطه‌ی نفوذ آب به داخل زمین (یا همان چاهک) دارای دیورژانس منفی هستند. همان‌طور که از رابطه هم معلوم است، محاسبه‌ی دیورژانس بردار $\vec{A}$ به شکل جمع مشتقات جزئی هر کدام از مؤلفه‌ها نسبت به متغیر متناظرشان صورت می‌گیرد.



شکل ۳-۳



شکل ۳-۴

مثال ۳ دیورژانس تابع برداری $\vec{A} = xy^2\hat{x} + 3y^3\hat{y} + 4xz^3\hat{z}$ را به‌دست آورید.

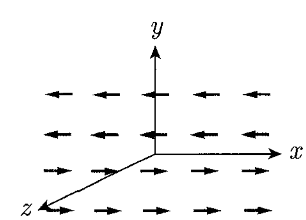
حل. با توجه به تعریف دیورژانس:

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = y^2 + at^2 + 12xz^2$$

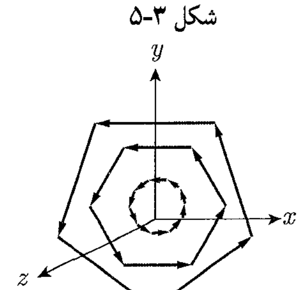
کرل یک بردار

کرل یک بردار به صورت ضرب خارجی بردار عملگر نابلا ($\vec{\nabla}$) در یک بردار تعریف می‌شود که برابر با دترمینان ماتریس زیر است:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x}$$
$$+ \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$



شکل ۳-۵



شکل ۳-۶

کرل یک تابع برداری در یک نقطه نشان دهنده‌ی میزان چرخش آن بردار حول آن نقطه است. به عنوان مثال هر سه تابع برداری نشان داده شده در شکل ۳ـ۲، ۳ـ۳ و ۳ـ۴ کرل صفر دارند. در یک گردابه که در سینک ظرف‌شویی به وجود می‌آید، کرل تابع سرعت آب در نقطه‌ی خروج آبِ سینک غیرصفر است. هر چه کرل آن بزرگ‌تر باشد، یعنی با شدت بیشتری در حال چرخش است. البته شکل ۳ـ۵ هم نمایانگر یک تابع برداری با کرل غیرصفر است. اگر تابع برداری به صورت دوبعدی در صفحه‌ی $x-y$ باشد، مثبت بودن کرل در جهت محور z با استفاده از قاعده‌ی دست راست به راحتی قابل تشخیص خواهد بود. مثلاً در شکل ۳ـ۶ کرل تابع غیرصفر و حتی مثبت و در جهت z است.

مثال ۴ کرل تابع برداری $\vec{A} = x\hat{y}$ را به‌دست آورید.

حل.
$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \circ & x & \circ \end{vmatrix} = \hat{z}$$

شباهت‌های نیروهای الکترواستاتیکی و گرانشی

همان‌طورکه در قسمت مقدمه گفته شد، شباهت‌های بسیاری بین سرشت نیروهای الکترواستاتیکی و گرانشی وجود دارد، دقت کنید:

$$f_{\text{gravitational}} = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad , \quad f_{\text{electrostatic}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ}.\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

یعنی اندازه‌ی نیروی وارد شده در هر دو مورد، برابر است با یک ضریب تناسب $(G, \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ})$ در حاصل‌ضرب یک ویژگی از ذراتی که به هم نیرو وارد می‌کنند (جرم / بار) تقسیم بر مجذور فاصله آنها.

همچنین دقت کنید که هر دو نیرو، جزء دسته نیروهایی هستند که برایشان میدان تعریف می‌شود، و اندازه و جهت میدان برایشان به صورت‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{E}_{\text{gravitational}} = \frac{\vec{f}_{\text{gravitational}}}{m_\circ} \quad , \quad \vec{E}_{\text{elactrostatic}} = \frac{\vec{f}_{\text{electrostatic}}}{q_\circ}$$

یعنی در هر مورد برای اندازه‌گیری میدان ناشی از وجود بار q یا جرم m بار دیگر $q_\circ$ و یا جرم دیگر $m_\circ$ را تحت اثر آنها می‌گذاشتیم و با اندازه‌گیری نیروی وارد شده و تقسیم آن بر بار یا جرم آزمون $(m_\circ, q_\circ)$ میدان را تعیین می‌کردیم.

انرژی پتانسیل

همان‌طور که از قسمت گرانش به یاد دارید، مستقل بودن حاصل انتگرال $\int_A^B \vec{f}.d\vec{r}$ از مسیر C، و بستگی تنهای آن به نقاط A و B ، برای توابع پتانسیل به ما این امکان را می‌دهد که با نسبت دادن یک مقدار انرژی دلخواه به یک نقطه‌ی دلخواه به عنوان سطح مبدأ به سایر نقاط فضا، مقادیر انرژی یکتایی را نسبت بدهیم، مقداری که به آن انرژی پتانسیل می‌گفتیم.

انرژی پتانسیل الکتریکی

انرژی پتانسیل، تنها در صورتی برای یک نیرو قابل تعریف است که آن نیرو از دسته نیروهای پتانسیل (پایستار) باشد، بنابراین اولین قدم در بررسی انرژی پتانسیل الکتریکی، آن است که از سرشت پایستار این نیرو اطمینان حاصل کنیم.

فرض کنید در نقطه از فضا، بار q قرار دارد، و بار $q_\circ$ در فضای اطراف آن به شکل دلخواه (ولی با سرعت‌های پایین) حرکت می‌کند. اگر بتوانیم ثابت کنیم $\vec{\nabla} \times \vec{f}$، $\vec{f}$ نیروی وارد بر بار $q_\circ$، صفر

است، به هدف خود نزدیک می‌شویم. با در نظر گرفتن یک دستگاه مختصات کروی، در مرکز q،

$$\vec{f} = \frac{qq_\circ}{۴\pi\epsilon_\circ}.\frac{۱}{r^۲}.\hat{e}_r$$

با استفاده از روابط قسمت آنالیز برداری، قسمت دستگاه کروی

$$\begin{aligned}&\frac{۱}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(f_\varphi\sin\theta) - \partial\frac{f_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{e}_r\\ &\quad+\frac{۱}{r}\left[\frac{۱}{\sin\theta}\frac{\partial f_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rf_\varphi)\right]\hat{e_\theta}\\ &\hat{e_\theta} + \frac{۱}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rf_\theta) - \frac{\partial f_r}{\partial\theta}\right]\hat{e_\varphi} = \circ\end{aligned}$$

به این صورت، نیروی وارده از هر بار منفرد به بارهای اطراف خود یک نیروی پایستار خواهد بود، با توجه به خطی بودن اپراتور $\vec{\nabla}\times$ مجموع چند تابع پایستار، خود یک تابع (نیرو)ی پایستار خواهد بود و با معرفی هر توزیع بار پیوسته یا گسسته به عنوان مجموع بارهای منفرد نقطه‌ای یا دیفرانسیلی، به نتیجه‌گیری مورد نظر خواهیم رسید.

به عنوان یک روش دیگر، با بیان ریاضی دقیق‌تر، می‌توان در حالت کلی ثابت کرد که $\vec{\nabla}\times\vec{f}$ صفر است، در این روش ابتدا تابعی پیدا می‌کنیم مانند ϕ که بتوان $\vec{f}$ را به عنوان $\nabla\phi$ معرفی کرد. برای مثال، اگر یک بار با اندازه‌ی q در محل $\vec{r}_\circ$ نسبت به مبدأ قرار داشته باشد، نیروی وارد بر بار $q_\circ$، واقع در مکان $\vec{r}$، به صورت

$$\vec{f}(\vec{r}) = \frac{qq_\circ}{۴\pi\epsilon_\circ}.\frac{(\vec{r}-\vec{r}_\circ)}{|\vec{r}-\vec{r}_\circ|^۳} = \frac{qq_\circ}{۴\pi\epsilon_\circ}.\vec{\nabla}\frac{۱}{|\vec{r}-\vec{r}_\circ|}$$

قابل نمایش است. حال با در دست داشتن این نمایش جدید نیروی $\vec{f}$ و با استفاده از قضایای ریاضی داریم:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{f} &= \vec{\nabla}\times\left(\frac{qq_\circ}{۴\pi\epsilon_\circ}\vec{\nabla}\frac{۱}{|\vec{r}-\vec{r}_\circ|}\right)\\ &= \frac{qq_\circ}{۴\pi\epsilon_\circ}.\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\frac{۱}{|\vec{r}-\vec{r}_\circ|}\right) = \circ\end{aligned}$$

چون می‌دانیم که $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\psi)$ که در آن ψ یک تابع اسکالر است برابر است با صفر.

حالا که می‌دانیم که نیروی الکتریکی از دسته نیروهای پایستار است و حاصل انتگرال $\int_C \vec{f}.d\vec{r}$ بستگی به مسیر ندارد، آماده‌ایم تا انرژی پتانسیل الکتریکی را تعریف کنیم و روابط آن را به‌دست آوریم.

طبق قضیه‌ی کار و انرژی که در ابتدای این فصل هم به آن مراجعه کردیم، می‌دانیم

$$\frac{۱}{۲}mv_B^۲ - \frac{۱}{۲}mv_A^۲ = \int_A^B \vec{R}.d\vec{r}$$

که در آن $\vec{R}$ برآیند برداری کل نیروهای وارد به یک ذره است.

فرض کنیم ذره‌ی ما، یک جرم باردار نقطه‌ای به جرم m و بار q باشد. در حالت کلی بر این بار در حضور میدان الکتریکی دو نیرو وارد می‌شود، نخست نیروی الکتریکی ناشی از میدان الکتریکی و دیگر، نیروی خارجی، که می‌توانیم آن را به هر وسیله‌ای مثلاً با دست یا یک میدان گرانشی به ذره وارد کنیم. برای درک شهودی فرض کنیم این نیرو را با دست به ذره وارد می‌کنیم. بنابراین نیروهای وارد به ذره را با $\vec{f}_{\text{elec}}$ و $\vec{f}_{\text{ext}}$ نمایش می‌دهیم، پس تا اینجا: $\vec{R} = \vec{f}_{\text{elec}} + \vec{f}_{\text{ext}}$. در ادامه فرض کنید این ذره درون میدان از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B و روی مسیر دلخواه C حرکت می‌کند، همچنین فرض کنیم که این ذره در مبدأ و مقصد سرعتی برابر $v_۰$ داشته، بنابراین:

$$\int_A^B \vec{R}.d\vec{r} = \frac{۱}{۲}m(v_۰^۲ - v_۰^۲) = ۰ = \int_A^B (\vec{f}_{\text{elec}} + \vec{f}_{\text{ext}}).d\vec{r} = ۰$$
$$\rightarrow \int_A^B \vec{f}_{\text{ext}}.d\vec{r} = -\int_A^B \vec{f}_{\text{elec}}.d\vec{r}$$

و نشان دادیم که مقدار عبارت سمت راست، مستقل از مسیر C است، و به اجبار، طرف چپ هم همین وضعیت را دارد. یعنی کاری که نیروی خارجی، مثلاً نیروی دست ما، باید بر یک ذره وارد کند تا آن را در حالی که تحت اثر یک میدان الکتریکی است جابه‌جا کند به طوری که سرعت در ابتدا و انتهای مسیر یکسان باشد، مستقل از مسیری است که ما برای این کار انتخاب می‌کنیم.

به این صورت می‌توانیم اختلاف انرژی پتانسیل بین دو نقطه را به این صورت بیان کنیم:

$$U_B - U_A = -\int_A^B \vec{f}_{\text{elec}}.d\vec{r}$$

برای راحتی در قالب‌بندی اختلاف این انرژی پتانسیل، یک نقطه‌ی مبدأ را به عنوان سطح مبنا، با انرژی پتانسیل صفر در نظر می‌گیریم. معمولاً این نقطه را نقطه‌ی بی‌نهایت دور از مجموعه بار تولید کننده‌ی میدان در نظر می‌گیریم و انرژی پتانسیل آنجا را صفر محاسبه می‌کنیم:

$$U_B - U_\infty = -\int_\infty^B \vec{f}_{\text{elec}}.d\vec{r} \ , \ \ U_\infty = ۰$$
$$\rightarrow U_B = -q_۰ \int_\infty^B \vec{E}_{\text{elec}}.d\vec{r}$$

به این صورت تعریف نهایی ما، برای انرژی پتانسیل به صورت زیر است:

انرژی پتانسیل یک بار در یک نقطه‌ی یک میدان الکتریکی برابر است با کاری که نیروی خارجی باید برای جابه‌جایی آن بار از فاصله‌ی بی‌نهایت دور تا آن نقطه و با سرعت‌های برابر در ابتدا و انتهای مسیر انجام دهد.

اما بیایید با چند مثال، روند تغییر انرژی پتانسیل را بررسی کنیم.

مثال ۵ فرض کنید دو بار $q_۱$ و $q_۲$ در فاصله‌ی d از یکدیگر مستقر شده‌اند. فرض کنید در این چیدمان بار $q_۱$ ثابت است و محل بار $q_۲$ تغییر می‌کند. برای تغییر فاصله‌ی d، انرژی پتانسیل بار $q_۲$ چگونه تغییر می‌کند.

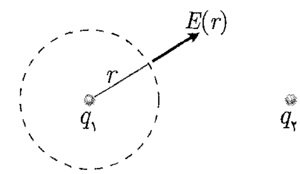
حل. هدف سؤال بررسی انرژی پتانسیل بار q_2 در میدان بار q_1 است، میدان بار q_1 در فاصله‌ی r از آن به صورت زیر است:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{q_1}{r^2}.\hat{e}_r$$

که در آن میدان در دستگاه استوانه‌ای بیان شده است.

طبق تعریف، انرژی پتانسیل بار q_2 در این میدان، در نقطه‌ای به فاصله‌ی r به صورت زیر است:

$$U(r) = -q_2\int_{\infty}^{r}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{q_1}{r^2}\hat{e}_r\right).d\vec{r}$$



شکل ۳-۷

برای محاسبه‌ی این انتگرال، $d\vec{r}$ را به صورت $+dr.\hat{e}_r$ بازنویسی می‌کنیم، دلیل این‌که با تأکید علامت مثبت را متذکر شدیم را در ادامه خواهیم آورد، اما قبل از آن به تلاشمان برای پاسخ سؤال ادامه می‌دهیم، تا اینجای کار:

$$U(r) = -\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}.\int_{\infty}^{r}.\frac{q}{r^2}.dr$$
$$= \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}.\frac{1}{r}\Big]_{\infty}^{r} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}.\frac{1}{r}$$

بنابراین اگر دو بار در فاصله‌ی d از یکدیگر قرار داشته باشند، انرژی پتانسیل برابر $\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}.\frac{1}{d}$ خواهد بود. اما در مورد روند تغییر انرژی پتانسیل با تغییر d، دقت می‌کنیم که تا اینجای کار ما یک تابع انرژی پتانسیل بر حسب فاصله به‌دست آوردیم، اگر از این تابع بر حسب r مشتق بگیریم:

$$U(r) = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}.\frac{1}{r}$$
$$\frac{dU(r)}{dr} = -\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}.\frac{1}{r^2}$$

بنابراین روند تغییر انرژی پتانسیل بر حسب فاصله‌ی d بسته به وضعیت بارهای q_1 و q_2 می‌تواند دو حالت داشته باشد.

الف) دو بار هم‌نام باشند:

در این صورت مشتق یک مقدار همواره منفی خواهد بود، به این معنا که با دور شدن بارها انرژی کاهش خواهد یافت، با توجه به اصل کمینگی انرژی پتانسیل[1] می‌توانیم پیش‌بینی کنیم که اگر دو بار هم‌نام را در کنار هم یا در نزدیکی هم رها کنیم (در این مسأله بار q_2 را رها کنیم) در حداکثر فاصله ممکن قرار خواهد گرفت. همچنین در این شرایط $U(r)$ همواره مقداری مثبت دارد، و در حداقل حالت و در بی‌نهایت انرژی پتانسیل مقداری برابر صفر دارد.

ب) دو بار ناهم‌نام باشند:

در این صورت مشتق یک مقدار همواره مثبت است، یعنی وضعیت بر عکس حالت قبل است و بنابراین بارها در دورترین فاصله بیشترین انرژی پتانسیل را دارند، همچنین مقدار $U(r)$ در

۱) طبق اصل، رویدادهای فیزیکی در طبیعت همواره در جهتی پیش می‌روند که سیستم‌های فیزیکی به حداقل سطح انرژی پتانسیل برسند. این اصل در شاخه‌های مختلفی از علم تجربی مانند فیزیک، شیمی، زیست و غیره مطرح است.

این شرایط همواره مقداری منفی است و در فاصله‌ی بی‌نهایت بیشترین مقدار خود، یعنی صفر را دارد. در این پیکربندی، اگر بارها را رها کنیم به هم نزدیک می‌شوند و حداقل فاصله ممکن را اختیار می‌کنند.

اما توضیح چند تذکر در قالب این مثال، سودمند خواهد بود:

قبل از هر چیز، برگردیم به این‌که چرا روی علامت مثبت در جمله‌ی $\overrightarrow{dr} = +dr\hat{e}_r$ تأکید کردیم. یکی از سؤالات رایج که دانش‌آموزان در مواجهه اول با این مطلب مطرح می‌کنند آن است که مگر نه این‌که در این انتگرال‌گیری، حرکت از سمت $r = \infty$ به سمت rهای کمتر است و مگر $\overrightarrow{dr}$ جزء بردار حرکت روی مسیر انتگرال‌گیری از مبدأ به مقصد نیست؟ پس $\overrightarrow{dr}$ در جهت $-\hat{e}_r$ است و نه در جهت $\hat{e}_r$، اما به محاسبه‌ی انتگرال زیر دقت کنید:

$$\int_r^\infty q_۲\vec{E}.\overrightarrow{dr} = \int_r^\infty \frac{q_۲.q_۱}{۴\pi\epsilon_۰}.\frac{۱}{r^۲}.\hat{e}_r.dr\hat{e}_r$$
$$= \frac{q_۱q_۲}{۴\pi\epsilon_۰}.\int_r^\infty .\frac{q}{r^۲}dr$$

حاصل این انتگرال کار نیروی الکتریکی در جابه‌جایی از فاصله‌ی r تا بی‌نهایت دور را نشان می‌دهد، به این صورت اگر بارها هم‌نام باشد، نیروی الکتریکی با جابه‌جایی هم‌جهت است و حاصل انتگرال یک مقدار مثبت، و اگر بارها ناهم‌نام باشند برعکس.

حالا فرض کنید این بار با حفظ تمام شرایط بالا فقط جهت جابه‌جایی بارها را برعکس می‌کنیم، ینی از بی‌نهایت دور تا فاصله‌ی r، و دوباره کار نیروی الکتریکی را حساب می‌کنیم. انتظار داریم که بر خلاف دفعه‌ی قبل، اگر بارها هم‌نام باشند، کار نیروی الکتریکی مقداری منفی باشد، چرا که نیرو و جابه‌جایی در خلاف جهت هم خواهند بود و نیروی الکتریکی نیروی مقاوم محسوب شده اما اگر استدلال به کار رفته در ابتدای این تذکر درست باشد، یعنی در این انتگرال جدید $\overrightarrow{dr}$ را به صورت $-dr\hat{e}_r$ بازنویسی کنیم:

$$\int_\infty^r q_۲.\vec{E}.\overrightarrow{dr} = \int_\infty^r \frac{q_۱q_۲}{۴\pi\epsilon_۰}.\frac{۱}{r^۲}.\hat{e}_r(-dr)\hat{e}_r$$
$$= -\frac{q_۱q_۲}{۴\pi\epsilon_۰}.\int_\infty^r .\frac{۱}{r^۲}.dr$$

و با تأثیر دادن علامت منفی در حدود انتگرال‌گیری:

$$-\frac{q_۱q_۲}{۴\pi\epsilon_۰}\int_\infty^r \frac{q}{r^۲}.dr = \frac{q_۱q_۲}{۴\pi\epsilon_۰}\int_r^\infty .\frac{۱}{r^۲}.dr$$

همان‌طور که می‌بینید حاصل دقیقاً مانند حاصل قسمت قبل شد، در صورتی که باید منفی (قرینه) آن می‌شد، پس اشکال کار کجاست؟

مشکل کار در آن است که حرکت برعکس شده نسبت به بار اول، دو بار حساب شده، بار اول در وارونه کردن حدود انتگرال‌گیری و بار دوم در قرینه کردن المان برداری جابه‌جایی $(\overrightarrow{dr})$ و در کل انگار هیچ تغییر ایجاد نشده است.

ـ دیگر این‌که، بر خلاف چیزی که به آن اشاره کردیم، این‌که کار محاسبه شده باید مستقل از مسیر باشد، ما کار را برای یک مسیر خاص (حرکت روی یک خط شعاعی) محاسبه کردیم، که دلیل این کار آسان‌سازی محاسبه بود. طبق اثبات‌های ارائه شده حاصل برای جابه‌جایی روی هر مسیر دیگری هم همین نتیجه را در پی داشت.

ـ دقت کنید که سطح مبنای پتانسیل به جای بی‌نهایت و با مقدار صفر می‌توانست هر نقطه‌ی دیگری و با هر مقداری باشد در این صورت تنها یک مقدار ثابت با انرژی پتانسیل جمع می‌شد، اما چیزی که واقعاً برای ما اهمیت دارد، تغییر انرژی پتانسیل است نه خود آن.

ـ مشابهت‌های بسیاری بین انرژی پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل گرانشی وجود دارد، به آنها خوب دقت کنید.

ـ دقت کنید که اگر فرض مطرح شده در صورت مثال را عوض کنیم، یعنی این بار، بار q_2 ثابت باشد و بار q_1 را جابه‌جا کنیم و آن را از بی‌نهایت به فاصله‌ی d بیاوریم، انرژی پتانسیل تفاوتی نخواهد کرد، یعنی انرژی پتانسیل یکی از کمیت‌ها و خصلت‌های کل سیستم بارهای موجود است. وجود حاصل‌ضرب q_1q_2 در عبارت انرژی پتانسیل، این گفته‌ی ما را تأیید می‌کند، در واقع فرض ثابت نگه داشتن یکی از بارها یک فرض زائد است و فقط برای تصور راحت‌تر پیکربندی مسأله به آن اضافه شده است.

مثال ۶ این بار فرض کنید ابتدا ۳ بار q_1، q_2 و q_3 و سپس n بار q_1، q_2، ...، q_n از فاصله‌ی بسیار دور به وضعیتی آورده شده‌اند که فاصله‌ی دو بار i و j، برابر d_{ij} (مقداری ثابت) باشد. انرژی پتانسیل سیستم را در این دو حالت محاسبه کنید.

حل. هدف این سؤال در واقع محاسبه‌ی انرژی پتانسیل سیستمی از بارها (مجموعه‌ای از بارها با پیکربندی دلخواه) است.[1]

الف) سه بار q_1، q_2 و q_3:

حالا که بیش از دو بار در پیکربندی حضور دارند، ترتیب جابه‌جا کردن آنها ممکن است مهم به نظر بیاید، گرچه این طور نیست، برای اطمینان یک بار بارها را به ترتیب، ۱، ۲ و ۳ و بار دیگر به ترتیب ۱، ۳، ۲ وارد می‌کنیم.

الف-۱) در ابتدا، یک فضای بسیار بزرگ خالی از هر باری را در اختیار داریم. به این صورت هیچ نیروی مقاومی در برابر حرکت دادن بار q_1، وجود ندارد و نیروی خارجی نباید هیچ کاری انجام دهد، تبعاً هیچ انرژی پتانسیلی ذخیره نمی‌شود، در مرحله‌ی بعد، باید بار q_2 را از بی‌نهایت دور به فاصله‌ی d_{12} از بار q_1 بیاوریم، این مسأله مشابه مثال ۱ است، در این صورت انرژی پتانسیل ذخیره شده در سیستم برابر $U_0 = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}.\frac{1}{d_{12}}$ خواهد بود، در مرحله‌ی بعد باید بار q_3 را وارد کنیم. همان‌طور که گفته شد، مسیر حرکت در نیروهای پایستار اهمیتی ندارد، بنابراین می‌توان فرض کرد، بار q_3 به هر دو بار q_1 و q_2 در یک مسیر شعاعی نزدیک می‌شود.[2]

---

۱) بنا به تعریف، انرژی پتانسیل یک سیستم از بارها برابر با مقدار انرژی است که عامل خارجی باید صرف کند تا اجزای مختلف آن آرایش بار را از فاصله‌ی بی‌نهایت دور به وضعیت جدید برساند به صورتی که وضعیت بارها از لحاظ سرعت در ابتدا و انتهای مسیر یکسان باشد.

۲) برای اینکه درک بهتری از این موضوع داشته باشید، بد نیست بدانید که در هندسه هیچ تفاوتی بین نقاط مختلف از آنچه آن را بی‌نهایت می‌خوانیم وجود ندارد؛ حتی نقاطی که در دو راستای مختلف از بی‌نهایت واقع‌اند.

با استفاده از تعریف انرژی پتانسیل الکتریکی که در قسمت‌های پیشین مطرح شد، انرژی پتانسیل اضافه شده به سیستم را به این صورت محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta U = -\int_{\infty}^{B} \vec{f}_{\text{elec}}.d\vec{r} = -q_3 \int_{\infty}^{B} \vec{E}_{\text{elec}}.\overrightarrow{dr}$$

اما در هر نقطه میدان الکتریکی $\vec{E}_{\text{elec}}$، حاصل برآیند بردار $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ است، که به ترتیب ناشی از حضور q_1 و q_2 هستند.

$$\Delta U = -q_3\Big(\int_{\infty}^{B} \vec{E}_1.\overrightarrow{dr} + \int_{\infty}^{B} \vec{E}_2.\overrightarrow{dr}\Big)$$

و نقطه‌ی B (نقطه‌ی مقصد) است به میدان‌های $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ به ترتیب متناظر با فاصله d_{13} و d_{23} است، بنابراین

$$\begin{aligned}\Delta U &= -q_3 \left(\int_{\infty}^{d_{13}} .\frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{q_1}{r^2}.dr + \int_{\infty}^{d_{23}} .\frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{q_2}{r^2}.dr\right)\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{q_1q_3}{d_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{q_2q_3}{d_{23}}\end{aligned}$$

اما انرژی پتانسیل نهایی سیستم برابر است با:

$$\begin{aligned}U = U_0 + \Delta U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{q_1q_2}{d_{12}}\\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{q_1q_3}{d_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{q_2q_3}{d_{23}}\end{aligned}$$

اگر به معنی کمیت ΔU و جمع کردن آن با انرژی اولیه‌ی سیستم اعتراض دارید قسمت زیر را بخوانید.

در قسمت اول بخش انرژی پتانسیل الکتریکی ما بی‌نهایت دور را به عنوان مبدأ پتانسیل در نظر گرفتیم و پتانسیل صفر را به آن نسبت دادیم، برای حالتی که سیستم فقط شامل دو بار بود، اما در این قسمت انرژی پتانسیل بی‌نهایت را برابر با U_0 در نظر گرفتیم که U_0 انرژی پتانسیل سیستم شامل دو بار بود. وقتی بار سوم در بی‌نهایت باشد، دلیل این کار آن است که درست است که قرار ما، صفر در نظر گرفتن پتانسیل در بی‌نهایت دور بود، اما در مسائل مقدار مرزی ریاضی، در هر مسأله فقط یک بار حق انتخاب مقدار اولیه وجود دارد. مبدأ ما حالت بی‌نهایت دور شامل دو بار بود، یعنی وقتی که بار یک در مبدأ (برای مثال) و بار دو در بی‌نهایت دور بود و ما مجاز نیستیم وقتی دو بار در فاصله‌ی $d_{1,2}$ از یکدیگر قرار داشتند و بار q_3 در بی‌نهایت دور، برای بار دوم سطح مبنای پتانسیل را انتخاب کنیم.

الف-۲) در این صورت با استدلالی مشابه قسمت (الف-۱)

$$U_0 = \frac{q_1q_3}{4\pi\epsilon_0}.\frac{1}{d_{13}}$$

همچنین برای راحتی می‌توان تصور کرد که بارها قبل از راه افتادن از بی‌نهایت به سمت نقطه‌ی موردنظر در صفحه، در بی‌نهایت طوری جابه‌جا می‌شوند که امتداد حرکت آنان به نقطه‌ی موردنظر، در راستای دلخواه ما باشد.

$$\Delta U = \frac{q_3 q_2}{4\pi\epsilon_0}.\frac{1}{d_{32}} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}.\frac{1}{d_{12}}$$
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{d_{12}} + \frac{q_1 q_3}{d_{13}} + \frac{q_2 q_3}{d_{23}}\right)$$

همان‌طور که دیده می‌شود، این مقدار برابر مقدار قسمت (الف‌ـ۱) است، یعنی ترتیب جابه‌جا کردن بارها برای ما هیچ اهمیتی ندارد.

ب) در این قسمت هدف ما محاسبه‌ی انرژی پتانسیل چیدمان باری است که از n بار نقطه‌ای تشکیل شده است. به به‌کارگیری روند قسمت (الف) برای تعداد بیشتری بار، انرژی پتانسیل سیستم به صورت زیر بیان می‌شود.

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_i q_j}{d_{ij}}\Big|_{i\neq j}$$

یعنی انرژی پتانسیل سیستم برابر است با مجموع انرژی‌های پتانسیل هر یک از حالت‌هایی که در آن دو بار از میان n بار از بی‌نهایت به مکان‌های مشخص شده‌ی خود بیایند.

پتانسیل الکتریکی

بیایید دوباره به دانسته‌هایمان از بخش گرانش رجوع کنیم. به یاد داریم در نزدیکی‌های سطح زمین (برای سادگی) انرژی پتانسیل گرانشی به صورت mgh بیان می‌شد، (دقت کنید که g در واقع ضریبی از M_e، جرم مولد میدان گرانشی بود). بدین معنا که هر جرمی که به اندازه‌ی h در راستای قائم جابه‌جا شود، انرژی آن به اندازه‌ی mgh تغییر خواهد کرد، اگر این مقدار را بر m تقسیم کنیم جمله‌ی حاصل یعنی gh، برای تمام ذرات با هر جرم دلخواه m برابر خواهد بود (به شرط جابه‌جایی یکسان h) و gh به صورت ضریبی از جرم مولد میدان (در اینجا M_e) ضرب در کمیتی از جابه‌جایی بیان می‌شود. با این دید، بیایید به سراغ انرژی پتانسیل الکتریکی برویم، طبق بحث‌های ابتدای فصل، انرژی پتانسیل با در نظر گرفتن سطح مبنای پتانسیل صفر برابر است با:

$$U = -q_0\int_{\infty}^{B}\vec{E}_{\text{elec}}.\overrightarrow{dr}$$

که در آن $\vec{E}_{\text{elec}}$، خو ضریبی است از بار به وجود آورنده میدان الکتریکی، این عبارت بیان می‌کند که اگر هر بار q_0، در میدان از بی‌نهایت تا فاصله‌ای دلخواه جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن به اندازه‌ی $q_0 \times (V)$ تغییر می‌کند، در این عبارت نماد V جایگزین عبارت $(-\int_{\infty}^{B}\vec{E}_{\text{elec}}.\overrightarrow{dr})$ شده است، به طریق مشابه قسمت گرانش، با تقسیم انرژی پتانسیل الکتریکی بر بار q_0، به کمیتی به نام پتانسیل الکتریکی می‌رسیم، کمیتی که آن را با یکای ولت (Volt) می‌سنجیم:

$$V = \frac{U}{q_0} = -\int_{\infty}^{B}\vec{E}_{\text{elec}}.\overrightarrow{dr}$$

از تعریف این کمیت جدید، می‌توان رابطه‌ی یکای جدید Volt را با یکاهای قبل به‌دست آورد.

دقت کنید که اگر مبدأ پتانسیل را طور دیگری انتخاب می‌کردیم، پتانسیل هم تغییر می‌کرد و دارای سطح مبنای دیگری می‌شد، با تعریف فعلی، پتانسیل در بی‌نهایت صفر است.

در ادامه پس از بررسی یک مثال مختصر از مفهوم پتانسیل و معرفی مفهوم اختلاف پتانسیل در ضمن آن تلاشمان را روی به‌دست آوردن پتانسیل برای توزیع‌های مختلف بار متمرکز می‌کنیم.

مثال ۷ یک ذره‌ی α $(q = +۲e)$ در یک شتاب‌دهنده هسته‌ای از یک پایانه با پتانسیل $V_a = +۶/۵ \times ۱۰^۶\text{V}$ به پایانه‌ی دیگر با پتانسیل $V_b = ۰\,\text{V}$ می‌رود. **الف)** انرژی پتانسیل سیستم چه تغییری می‌کند؟ **ب)** با فرض این‌که پایانه‌ها و بارهای آنها جابه‌جا نمی‌شوند، و نیز این‌که هیچ عامل خارجی روی این سیستم اثر نمی‌کند، تغییر در انرژی جنبشی ذره چقدر است؟

حل. الف) با توجه به تعریف انرژی پتانسیل، می‌توانیم اختلاف در انرژی پتانسیل را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} U(B) - U(A) &= -\int_{\infty}^{B} \vec{f}_{\text{elec}} \cdot d\vec{r} - \Big(-\int_{\infty}^{A} \vec{f}_{\text{elec}} \cdot d\vec{r} \Big) \\ &= -\int_{\infty}^{B} \vec{f}_{\text{elec}} \cdot d\vec{r} - \int_{A}^{\infty} \vec{f}_{\text{elec}} \cdot d\vec{r} \\ &= -\int_{A}^{B} \vec{f}_{\text{elec}} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی هم به همین صورت، پس:

$$V(B) - V(A) = -\int_{A}^{B} \vec{E}_{\text{elec}} \cdot \overrightarrow{dr}$$

باید دقت کنیم که همان‌طور که قبلاً هم گفتیم، چیزی که برای ما از لحاظ فیزیکی مهم است، اختلاف کمیات انرژی پتانسیل و پتانسیل است، نه خود آنها، بنابراین ممکن بود، پتانسیل‌های ذکر شده برای پایانه‌های A و B در صورت سؤال، هر کدام مثلاً $۱۰۰\,\text{V}$ بیشتر باشد، اما هیچ تغییری در فیزیک مسأله ایجاد نمی‌شد!

با توجه به عبارت‌های بالا، و با فرض $\vec{f}_{\text{elec}} = q_۰\vec{E}_{\text{elec}}$، می‌توان گفت $\Delta V = \dfrac{\Delta U}{q_۰}$ و با جایگذاری داده‌های مثال،

$$\begin{aligned} \Delta U = q_۰.\Delta V &= (+۲).(۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C}).(۰ - ۶/۵ \times ۱۰^۶\text{V}) \\ &= -۲/۱ \times ۱۰^{-۱۲}\text{J} \end{aligned}$$

ب) اگر هیچ نیروی خارجی به یک سیستم وارد نشده می‌دانیم که انرژی مکانیکی آن بدون تغییر باقی خواهد ماند:

$$E = \text{cte} = K + U \;\rightarrow\; \Delta K = -\Delta U \;\rightarrow\; \Delta K = ۲/۱ \times ۱۰^{۱۲}\text{J}$$

ممکن است اعتراض کنید که تعریف انرژی پتانسیل به گونه‌ای بود که محاسبه‌ی آن مستلزم حفظ وضعیت سرعت (انرژی جنبشی) در ابتدا و انتهای مسیر است، اما یک بار دیگر به روند

تعریف انرژی پتانسیل نگاه کنید. این شرط صرفاً یک نقش قراردادی بازی می‌کند. نقشی که به ما اجازه می‌دهد تعریفی واحد از انرژی پتانسیل ارائه دهیم. شالوده‌ی تعریف انرژی پتانسیل یعنی انتگرال کار میدان الکتریکی $\int_A^B \vec{f}_{\text{elec}}.\overrightarrow{dr}$ هیچ بستگی به وضعیت سرعت ندارد، این ما بودیم که با صفرکردن تغییرات انرژی جنبشی، کار نیروی خارجی را به عنوان انرژی پتانسیل تعریف کردیم. بنابراین تعمیم اختلاف انرژی پتانسیل به سایر وضعیت‌های سرعت ذره در میدان الکتریکی هم معتبر خواهد بود، مثل مثال بالا که سرعت در ابتدا و انتهای مسیر مقادیر متفاوتی دارد. ولی ما برای محاسبه‌ی کمیات موردنظر فرض کردیم که سرعت‌ها برابر باشد و به این صورت کار میدان به‌دست آمد و پس از آن با داشتن مقدار کار که کمیتی حقیقی است و بستگی به تعریف ما ندارد، سایر کمیات موردنظر مان را محاسبه کردیم.

محاسبه‌ی پتانسیل

پتانسیل به ما چه کمکی می‌کند؟ در مثال ۳، دیدید که بدون این‌که از وضعیت میدان الکتریکی محاسبه کردیم. شکل میدان الکتریکی، شکل شتاب‌دهنده، اندازه‌ی مسیری که ذره در شتاب‌دهنده و ... طی می‌کند، داشته باشیم. توانستیم افزایش انرژی جنبشی ذره را در اثر گذر از شتاب‌دهنده محاسبه کنیم. در واقع وقتی یک توزیع بار در اختیار داریم و می‌خواهیم تأثیر آن را روی سایر بارها پیش‌بینی کنیم، می‌توانیم از مفهوم پتانسیل کمک بگیریم، اگر به روند مقایسه بین نیروی الکتریکی و گرانشی برگردیم، پتانسیل کم‌وبیش نقشی شبیه به ارتفاع را برای ما بازی می‌کند، برای مثال، حرکت خودروها در یک جاده کوهستانی را در نظر بگیرید.

اگرچه ما نمی‌توانیم پیش‌بینی کنیم که خودرویی که از نقطه‌ی خاصی می‌گذرد چه سرعتی دارد و چه انرژی جنبشی دارد، می‌توانیم با انتخاب یک سطح مبنا در هر نقطه‌ی جاده تابلویی نصب کنیم و ارتفاع آن نقطه را نسبت به سطح مبنا ذکر کنیم. به این صورت اگر وضعیت خودرو را در یک نقطه بدانیم می‌توانیم سرعت و انرژی جنبشی خودرو را در سایر نقاط جاده محاسبه کنیم و ... (البته به شرطی که خودرو خلاص باشد و ترمز نکند و از اصطکاک هم صرف‌نظر کنیم.)

در مورد پتانسیل الکتریکی هم، وضع به همین صورت است، اگرچه ما نمی‌توانیم در هر نقطه‌ی میدان تابلویی نصب کنیم! که به ما انرژی جنبشی و سرعت ذره‌ی باردار را بدهد. ولی می‌توانیم به هر نقطه‌ی میدان پتانسیلی نسبت بدهیم، و اگر وضعیت را در یک نقطه داشته باشیم و عوامل خارجی دخالت نداشته باشند، وضعیت ذره را در پتانسیل‌های دیگر به‌دست آوریم!

ما پتانسیل الکتریکی را از روی میدان الکتریکی تعریف کردیم، بنابراین همواره می‌توانیم پس از محاسبه‌ی میدان، پتانسیل را به کمک آن محاسبه کنیم. اما در این صورت از خاصیت بسیار مهم پتانسیل که در مقدمه‌ی فصل به آن اشاره کردیم، یعنی اسکالر بودن پتانسیل استفاده نکرده‌ایم.

در ادامه فصل ابتدا پتانسیل ناشی از چند توزیع بار ساده و بنیادین را به کمک انتگرال‌گیری از میدان به‌دست خواهیم آورد و سپس به کمک نتایج این بخش به سراغ توزیع بارهای پیچیده‌تری خواهیم رفت.

الف) محاسبه‌ی پتانسیل از میدان و اصل برهم‌نهی

به خاطر دارید که برای محاسبه‌ی اختلاف پتانسیل بین دو نقطه در میدان چه مراحلی را طی می‌کردیم، فرض کنید می‌خواهیم اختلاف پتانسیل بین دو نقطه‌ی (a) و (b) را در شکل زیر محاسبه کنیم، روند کلی این بود که ابتدا، کار نیروی الکتریکی را در طی این مسیر حساب کنیم، که مستقل از خود مسیر خواهد بود، و سپس با ضرب یک منفی در آن و تقسیم آن بر $q_\circ$ (بار آزمون مورد استفاده برای محاسبه‌ی کار) اختلاف پتانسیل را به‌دست می‌آوردیم.

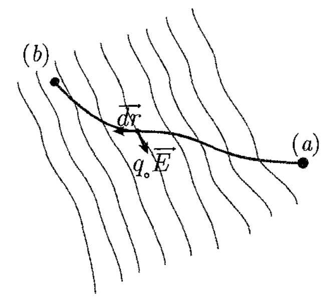
دنبال کردن این روش به صورت پارامتری منجر به رابطه زیر برای پتانسیل بر حسب میدان الکتریکی شد

$$V_B = -\int_\infty^B \vec{E}_{\text{elec}}.\overrightarrow{dr}$$

و به دنبال آن اختلاف پتانسیل به صورت

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}_{\text{elec}} \cdot \overrightarrow{dr}$$

به‌دست آمد. حالا با استفاده از این رابطه، پتانسیل ناشی از چند توزیع بار ساده اما مهم را به‌دست می‌آوریم.



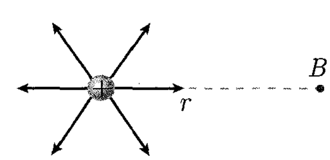
شکل ۳-۸

الف-۱) پتانسیل ناشی از یک بار نقطه‌ای

بار q و نقطه‌ی B، به فاصله‌ی r از بار q را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. همچنین برای سادگی در نظر بگیرید که حرکت از بی‌نهایت تا فاصله‌ی r، به صورت شعاعی انجام می‌شود، بدیهی است که حرکت به هر صورت دیگری هم باشد، پاسخ هیچ تغییری نخواهد کرد، در این صورت پتانسیل نقطه‌ی B برابر است با:

$$V_B = -\int_\infty^B \vec{E}.\overrightarrow{dr} = -\int_\infty^r \vec{E}.\overrightarrow{dr} = -\int_\infty^r \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}.\frac{q}{r^۲}.\hat{e}_r.dr\hat{e}_r$$
$$= -\int_\infty^r \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}.\frac{q}{r^۲}.dr = \frac{q}{۴\pi\epsilon_\circ}.\frac{۱}{r}\Big]_\infty^r = \frac{q}{۴\pi\epsilon_\circ}\left(\frac{۱}{r} - \frac{۱}{\infty}\right) = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}.\frac{q}{r}$$

با اطلاعاتی که کمی بعد در مورد توزیع بارهای پیوسته به‌دست خواهیم آورد، می‌توان نشان داد که این معادله برای هر توزیع بار با تقارن کروی و خارج از آن توزیع بار، درست است.



شکل ۳-۹

الف-۲) پتانسیل ناشی از مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای

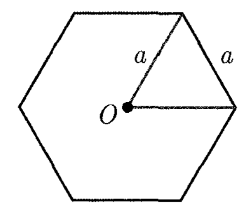
در قسمت انرژی پتانسیل به موضوع مجموعه‌ای از بارها پرداختیم و گفتیم که انرژی کل مجموعه برابر مجموع انرژی دوبه‌دوی بارها بدون توجه به حضور سایر بارهاست و در واقع، انرژی پتانسیل از اصل برهم‌نهی تبعیت می‌کند، اما در قسمت پتانسیل، ما علاقه‌ای به دانستن وضعیت بارهای مولد میدان نداریم و فقط تأثیر آنها بر فضای اطراف‌شان و بار فرضی $q_\circ$ برایمان مهم است، به این صورت با توجه به برقراری اصل برهم‌نهی در مورد میدان الکتریکی:

$$V_B = -\int_\infty^B \vec{E}.\overrightarrow{dr} = -\int_\infty^B (\vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ + \cdots + \vec{E}_n) \cdot \overrightarrow{dr}$$

$$= V_۱ + V_۲ + \cdots + V_N = \sum_{i=۱}^{N} V_i = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_{\circ}} . \sum_{i=۱}^{n} \frac{q_i}{r_i}$$

که در آن، r_i فاصله‌ی نقطه‌ی B (نقطه‌ای که می‌خواهیم پتانسیل را در آن محاسبه کنیم) از بار iام (q_i)است. نتیجه‌ی بسیار مهم این مطلب این است که برای محاسبه‌ی پتانسیل می‌توان از اصل بر هم‌نهی استفاده کرد.

مثال ۸ پتانسیل را در مرکز یک شش‌ضلعی منتظم به طول ضلع ۰٫۰۱ متر و با بارهای $q_۱ = ۰/۰۱\mathrm{C}$، $q_۲ = ۲q_۱$، ... و $q_۶ = ۶q_۱$ محاسبه کنید.

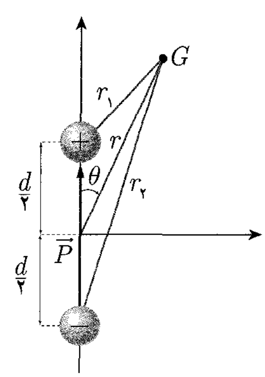


شکل ۳-۱۰

حل. طبق مطالب گفته شده در بالا، پتانسیل به صورت زیر است:

$$V_{\circ} = \sum_{۱}^{۶} V_i = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_{\circ}} . \sum_{i=۱}^{۶} \frac{q_i}{۰/۰۱}$$
$$= \frac{۱۰۰}{۴\pi\epsilon_{\circ}} \cdot ۲۱ \cdot q_۱ = \frac{۲۱ \times ۱۰۰}{۴\pi\epsilon_{\circ}} \times ۰/۰۱ = \frac{۲۱}{۴\pi\epsilon_{\circ}} \ (\mathrm{V})$$

الف-۳) پتانسیل ناشی از یک دوقطبی الکتریکی

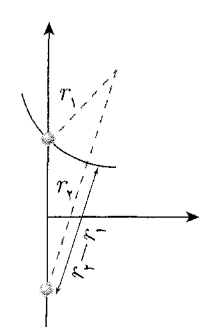


شکل ۳-۱۱

تعریف یک دوقطبی الکتریکی را از قسمت میدان به یاد دارید. دو بار مساوی و با علامت‌های مخالف ($\pm q$) که در فاصله‌ی d از هم قرار داشته باشند، یک دوقطبی الکتریکی را به وجود می‌آورند. به هر دوقطبی، یک بردار گشتاور دوقطبی با نماد $\vec{P}$ نسبت داده می‌شود که اندازه‌ی آن برابر qd و جهت آن در راستای محور واصل دو بار و در جهت بار منفی به بار مثبت است. شکل را ببینید.

می‌خواهیم پتانسیل ناشی از حضور این دوقطبی را در نقطه‌ی دلخواه G به‌دست آوریم. مختصات نقطه‌ی G در شکل نشان داده شده است، طبق اصل برهم‌نهی:

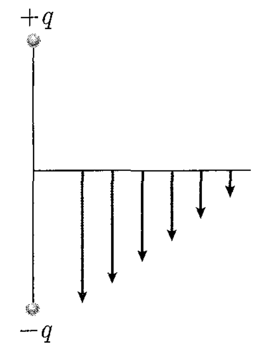
$$V = V_۱ + V_۲ = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_{\circ}} . \frac{q}{r_۱} - \frac{۱}{۴\pi\epsilon_{\circ}} . \frac{q}{r_۲}$$
$$= \frac{q}{۴\pi\epsilon_{\circ}} . \frac{r_۲ - r_۱}{r_۱ r_۲}$$



شکل ۳-۱۲

این جواب به نوبه‌ی خود کاملاً دقیق است، اما با توجه به ابعاد معمول دوقطبی‌ها، می‌توان دست به ساده‌سازی‌هایی زد، شبیه به آنچه در قسمت میدان انجام دادیم:

$$V = \frac{q}{۴\pi\epsilon_{\circ}} . \frac{r_۲ - r_۱}{r_۱ r_۲}$$
$$r_۲ - r_۱ \simeq d\cos\theta \ , \ r_۱ r_۲ \simeq r^۲$$
$$\rightarrow v \simeq \frac{q}{۴\pi\epsilon_{\circ}} . \frac{d\cos\theta}{r^۲} \simeq \frac{p\cos\theta}{۴\pi\epsilon_{\circ}} . \frac{۱}{r^۲}$$

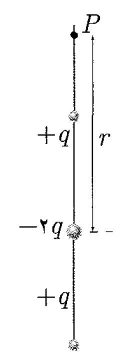


شکل ۳-۱۳

در هر دو صورت (قبل و بعد از تقریب) پتانسیل روی محور عمودمنصف دوقطبی صفر است، صفر بودن پتانسیل به معنای آن است که برای جابه‌جا کردن ذره از بی‌نهایت دور تا نقطه‌ای روی محور نیروی الکتریکی کاری روی ذره انجام نمی‌دهد. برای مشاهده بهتر این موضوع، فرض کنید که ذره از بی‌نهایت دور روی عمودمنصف حرکت کند، در قسمت میدان دیدیم که میدان روی عمودمنصف به شکل زیر بود، همان‌طور که دیده می‌شود میدان در همه‌ی نقاط بر محور عمود است. در صورت جابه‌جایی در راستای عمودمنصف، میدان و نیروی الکتریکی هیچ کاری روی بار الکتریکی انجام نمی‌دهد، چون بر راستای حرکت عمودند و طبق تعریف، در انتگرال کار حاصل‌ضرب برداری $\vec{f}\cdot\vec{dr}$ برابر صفر خواهد بود.

مثال ۹

یک چهارقطبی الکتریکی از دو، دوقطبی الکتریکی تشکیل شده است که به شکل زیر قرار گرفته‌اند. پتانسیل الکتریکی را به صورت تابعی از فاصله از مرکز دوقطبی و برای نقاطی که روی محور دوقطبی قرار دارند، بیابید.



شکل ۳-۱۴

حل. در این مورد هم با استفاده از اصل برهم‌نهی

$$V(r)=\sum_{i=۱}^{۴}V_i=\frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\left(\frac{q}{r-d}+\frac{q}{r+d}-\frac{۲q}{r}\right)$$
$$=\frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\frac{۲qd^۲}{r(r^۲-d^۲)}$$

اگر بخواهیم برای ساده‌سازی تأثیر ابعاد ناچیز دوقطبی‌های معمول را اعمال کنیم، در فاصله‌ی $r\gg d$ باید جمله d/r تولید کنیم با تقسیم صورت و نخرج بر $r^۲$

$$V=\frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}.\frac{۲qd^۲/r^۲}{r(۱-d^۲/r^۲)}$$

در شرایط $r\gg d$ می‌توان از جمله‌ی $\frac{d^۲}{r^۲}$ در برابر عدد ۱، چشم‌پوشی کرد و به این صورت

$$V=\frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\cdot\frac{۲qd^۲/r^۲}{r}=\frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\cdot\frac{۲qd^۲}{r^۳}$$

بیایید یک بار دیگر نتایج بررسی‌هایمان تا به اینجا را در مورد پتانسیل ناشی از توزیع بارهای مختلف بررسی کنیم:

بار منزوی ← پتانسیل $\frac{۱}{r}\alpha$، دوقطبی ← پتانسیل $\frac{۱}{r^۲}\alpha$، چهارقطبی ← پتانسیل $\frac{۱}{r^۳}\alpha$، ...
(علامت α به معنی "متناسب است با")

به نظر می‌رسد که چیدمان‌هایی از چندقطبی‌های مختلف به ما توان‌های مختلف جمله $\frac{۱}{r}$ را می‌دهند. به کمک این توان‌های توان بسط‌های چندقطبی از عبارت‌های دیگر تشکیل داد، این مطلب اساس یک روش قدرتمند در مباحث الکتریسیته و مغناطیس محاسباتی است که به عنوان بسط چندقطبی (multipole expansion) شناخته می‌شود. برای مطالعه‌ی بیشتر در این مورد

می‌توانید به کتاب‌های الکترومغناطیس مراجعه کنید. (عنوان یکی از این کتاب‌ها در پاورقی آورده شده‌اند.)[1]

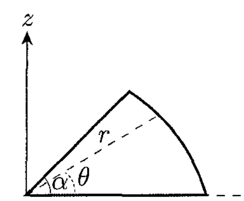
ب) محاسبه‌ی پتانسیل ناشی از توزیع بارهای پیوسته

در این قسمت تلاشمان را روی به‌دست آوردن پتانسیل ناشی از توزیع بارهای پیوسته متمرکز می‌کنیم. اگر چه در عالم واقع چیزی به اسم توزیع بار پیوسته وجود فیزیکی ندارد، اما در عالم ریاضیات می‌توانیم نه تنها توزیع بار را پیوسته در نظر بگیریم، بلکه آن را به صورت قطعه‌قطعه ببریم، ابعاد این قطعات را به صفر میل داده و به آنها به عنوان بار نقطه‌ای نگاه کنیم.

همان‌طور که در بخش قبل گفتیم پتانسیل الکتریکی از اصل بر هم‌نهی تبعیت می‌کند. با استفاده از این مطلب، روش کار در حالت کلی آن خواهد بود که با داشتن پتانسیل یک جزء و انتگرال‌گیری از آن روی کل توزیع بار، پتانسیل کل توزیع بار را به‌دست آوریم. از این قسمت به ذکر یک نمونه بسنده می‌کنیم و مثال‌های دیگر را در قسمت سؤالات با جواب بررسی می‌کنیم.

مثال ۱۰

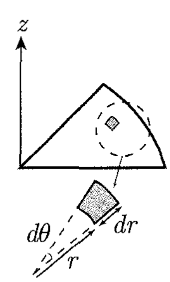
پتانسیل الکتریکی را در نقطه‌ای روی محور یک قطاع دایره‌ای نارسانا به شعاع R با چگالی بار سطحی σ و به زاویه‌ی رأس α درجه، در فاصله‌ی z از صفحه، به‌دست آورید.



شکل ۳-۱۵

حل. از این صفحه، یک جزء بار در دستگاه قطبی مطابق شکل جدا می‌کنیم. برای یک المان در یک دستگاه داریم:

$$dq = \sigma.dA = \sigma.rdr.d\theta$$
$$\rightarrow\ dV = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}.\frac{dq}{l}\ ,\ \ l = \sqrt{r^۲ + z^۲}$$
$$\rightarrow\ dV = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}.\frac{dq}{\sqrt{r^۲+z^۲}}\ \rightarrow\ V = \int_A dv$$
$$\rightarrow\ V = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\int_۰^\alpha\int_۰^R \frac{\sigma r dr d\theta}{\sqrt{r^۲+z^۲}} = \frac{\sigma\alpha}{۴\pi\epsilon_۰}\int_۰^R \frac{rdr}{\sqrt{r^۲+z^۲}}$$
$$= \frac{\sigma\alpha}{۴\pi\epsilon_۰}\left((R^۲+z^۲)^{۱/۲} - z\right)$$



شکل ۳-۱۶

همان‌طور که می‌بینید، بدون نیاز به توجه به مشکلاتی که معمولاً در کار کردن با کمیت‌های برداری با آنها سروکار داشتیم، مثل جهت و راستا، و حتی بدون لحاظ کردن ملاحظات تقارن، پتانسیل به راحتی و صرفاً با انتگرال‌گیری مستقیم از جزء ایجادکننده پتانسیل به‌دست آمد.

البته، همانند قسمت محاسبه‌ی میدان و ... می‌توان از المان‌های مختلفی برای انتگرال‌گیری استفاده کرد. انتخاب المان مناسب با توجه به تقارن موجود در هر سؤال تأثیر زیادی در ساده‌سازی روند حل آن دارد.

سطوح هم‌پتانسیل

تا به حال درک شهودی ما از میدان مبتنی بر نمایش نمادین خطوط میدان (یا خطوط نیرو) بود، نمایشی که توسط فارادی معرفی شده به دلیل کاربردی بودنش هم‌چنان استفاده می‌شود. این

1) Classical Electrodynamics, Hans C. Ohanian; Jones and Bartlett Publications, Second Edition, 2006

نمایش وقتی برای ما اهمیت دارد که بخواهیم بردار نیروی وارد بر ذره در هر نقطه را بدانیم یا سایر کمیاتی که به نحوی برداری هستند را بررسی کنیم. همان طور که گفتیم، مفهوم پتانسیل ما را از فضای برداری به فضای اسکالر می‌برد و به این صورت درک جدیدی از فضای اطراف یک بار به ما می‌دهد، متناظر این درک جدید از میدان، یک راه نمایش جدید هم برای آن به‌دست می‌آید. راهی که در آن به جای خطوط نیرو، خطوط یا صفحات (رویه‌های) هم‌پتانسیل رسم می‌شوند.

یک بار نقطه‌ای منفرد را در فضا در نظر بگیرید، پتانسیل ناشی از این بار در فضا به صورت زیر است:

$$V(r) = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}.\frac{q}{r}$$

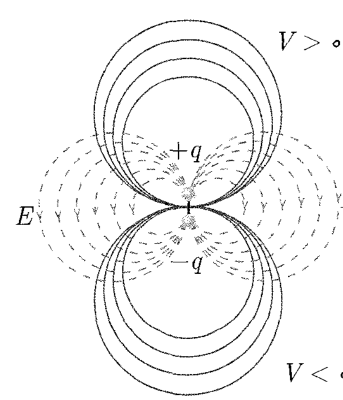
به این صورت تمام نقاطی که از بار q فاصله‌ی r یکسانی داشته باشند، دارای پتانسیل یکسان خواهند بود. با وصل کردن این نقاط به هم یک سطح به وجود می‌آید به عبارت دیگر، به ازای هر $r = r_\circ = \text{cte}$ (و تبعاً $V = V_\circ = \text{cte}$) یک رویه به وجود می‌آید، که به آن سطح هم‌پتانسیل نظیر $V = V_\circ$ گفته شده، اما این سطوح چه خاصیتی دارند؟

طبق تعریف پتانسیل و انرژی پتانسیل، برای هر مسیری که ابتدا و انتهای آن به ترتیب نقاط A و B باشند

$$\frac{U(B) - U(A)}{q_\circ} = V(B) - V(A)$$

به این صورت اگر مسیری را در نظر بگیریم که ابتدا و انتهای آن هر دو روی یک سطح از سطوح هم‌پتانسیل باشند، اختلاف انرژی پتانسیل ابتدا و انتهای آن مسیر صفر خواهد بود، در این صورت با توجه به تعریف انرژی پتانسیل در کل کاری برای طی مسیر انجام نمی‌شود، و اگر کل مسیر یک بار (نه فقط ابتدا و انتهای آن) داخل یکی از رویه‌های پتانسیل باشد، در هیچ یک از نقاط مسیر کاری انجام نخواهد شد، حرکت فرضی الکترون به دور هسته‌ی اتم مثال خوبی از چنین حالتی است. اگر فرض کنیم هسته‌ی اتم یک بار نقطه‌ای به اندازه‌ی q_n باشد و الکترون روی یک کره به شعاع R_e حرکت کند، (البته فرض حرکت الکترون روی یک پوسته‌ی کروی ساده فرض نادرستی است، این فرض در مدل‌های ابتدایی اتمی کاربرد داشت)، کل مسیر الکترون داخل سطح هم‌پتانسیل متناظر با $V_R = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}.\frac{q_n}{R_e}$ خواهد بود، به این صورت کاری روی الکترون انجام نمی‌شود و بر اساس قوانین کار و انرژی، سرعت آن ثابت می‌ماند، همین اتفاق در مورد سطوح هم‌پتانسیل گرانشی هم می‌افتد، هنگامی که یک جرم در میدان گرانشی جرم دیگر حرکت سیاره‌ای می‌کند (مثلاً یک ماهواره در میدان گرانشی زمین).

در شکل ۳ـ۱۷ چند نمایش میدان به وسیله‌ی سطوح پتانسیل را برای یک دوقطبی مشاهده می‌کنید.



شکل ۳-۱۷

توجه داشته باشید که، همان‌طور که امکان نمایش تمام خطوط میدان در فضای اطراف یک توزیع بار وجود نداشت، و ما این خطوط را طوری از بین تمام خطوط قابل رسم انتخاب می‌کردیم که میزان چگالی این خطوط در هر ناحیه‌ی فضا معیاری از شدت میدان در آن ناحیه باشد، در مورد رویه‌های هم‌پتانسیل هم وضع به همین منوال است. هر قدر در ناحیه‌ای از فضا شدت میدان بیشتر باشد، رویه‌های پتانسیل به هم نزدیک‌ترند، چرا که، در حالتی که میدان الکتریکی شدت بیشتری

داشته باشد به ازای یک حرکت محدود $\overrightarrow{dr}$ در فضا $\vec{E}.\overrightarrow{dr}$ مقدار بزرگ‌تری خواهد داشت، و به این‌صورت برای طی کردن فاصله‌ی دو صفحه با اختلاف پتانسیل $\Delta V_\circ$ جایی که میدان الکتریکی قوی‌تر است فاصله کمتری باید پیموده شود. همچنین اگر به شکل‌ها دقت کنید، خواهید دید که رویه‌های هم‌پتانسیل در تمام نقاط‌شان بر خطوط میدان عمودند، از لحاظ فیزیکی، اگر این طور نبود، خطوط میدان مؤلفه‌ای موازی با (در صفحه) رویه‌ی پتانسیل در نقطه‌ی برخورد خط میدان و رویه پتانسیل داشتند، این مؤلفه در صورت وجود می‌توانست به ذره‌ای که در حال حرکت (یا ساکن) در درون رویه است و از آن نقطه می‌گذرد، نیرو وارد کند و به این صورت روی آن کار انجام دهد. به این صورت برای حفظ وضعیت سرعت ذره، باید کار انجام می‌دادیم و این به معنای تغییر انرژی پتانسیل و تبعاً تغییر در پتانسیل می‌بود، که خلاف فرضی است که ما انجام دادیم ـ یعنی هم‌پتانسیل بودن نقاط رویه ـ . در قسمت بعد، برهان ریاضی استدلال بالا را هم بیان خواهیم کرد.

رابطه‌ی دیفرانسیلی میدان و پتانسیل الکتریکی ـ به‌دست آوردن میدان از روی پتانسیل

در قسمت قبل گفتیم که نمایش خطوط میدان و صفحات هم‌پتانسیل به عنوان دو صورت نمایش وضعیت میدان الکتریکی پذیرفته شده‌اند. در این بخش پا را از این فراتر می‌گذاریم و روی رابطه‌ی این دو مفهوم دقت بیشتری می‌کنیم. ادعای ما در این بخش این است که نه تنها نمایش خطوط میدان و صفحات پتانسیل دو صورت نمایش از یک واقعیت فیزیکی‌اند، بلکه بیان میدان و پتانسیل، دو صورت متحد و هم‌ارز از واقعیت فیزیکی الکترواستاتیک هستند.

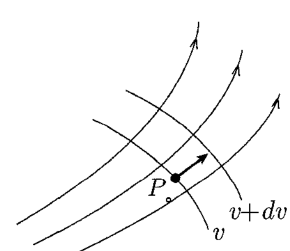
از ابتدای بحث تا به اینجای کار روی مفهوم پتانسیل و به‌دست آوردن آن از روی معادله‌ی میدان صحبت کردیم و حاصل کار، یک معادله به فرم انتگرالی بود، که پتانسیل را در هر نقطه، با توجه به یک نقطه‌ی مبنای دلخواه (که ما آن را بی‌نهایت دور در نظر گرفتیم) ارائه می‌کرد.

$$V(A) = \int_{\infty}^{A} \vec{E}_{\text{elec}}.\overrightarrow{dr}$$

اکنون می‌خواهیم، برعکس این کار را انجام دهیم، یعنی ببینیم با داشتن وضعیت پتانسیل در فضای اطراف یک توزیع بار (یا هر عامل مولد میدان) می‌توانیم به وضعیت خود میدان و معادله‌ی آن پی ببریم یا نه.

ابتدا با یک رویکرد فیزیکی و با کمک روابط انرژی به استخراج این رابطه می‌پردازیم و پس از آن از قضایای ریاضی برای صحه گذاشتن روی محاسبات فیزیکی‌مان بهره خواهیم گرفت.

فرض کنید یک بار نقطه‌ای $q_\circ$، در نقطه‌ای دلخواه مثل $P_\circ$ از یک میدان الکتریکی $\vec{E}$ قرار گرفته است مطابق شکل زیر. سپس این ذره با یک انتقال بسیار کوچک دیفرانسیلی، ds در یک جهت دلخواه به محل جدید P_1 می‌رود. پتانسیل در این نقطه مقداری خواهد داشت که با مقدار قبلی آن به اندازه‌ی dV تفاوت دارد، یعنی $V + dV$. اما اختلاف در پتانسیل با مقدار جابه‌جایی در جهت دلخواه و به اندازه‌ی ds از نقطه‌ی $P_\circ$ طبق تعریف، به صورت زیر به هم مربوط می‌شوند:



شکل ۳-۱۸

$$q_\circ(V + dV - V) = -(\vec{f}_{\text{elec}}.\overrightarrow{ds})$$

که در آن $\overrightarrow{ds}$ بردار جابه‌جایی در جهت دلخواه به اندازه‌ی ds است.

$$q_\circ dV = -q_\circ \vec{E}(p_\circ).\overrightarrow{ds}$$

$\vec{E}(P_\circ)$ نمایش میدان الکتریکی در نقطه‌ی $P_\circ$ است و به این صورت در تمام طول حرکت روی المان $\overrightarrow{ds}$ میدان را با میدان در نقطه‌ی $P_\circ$ برابر فرض کرده‌ایم، که به خاطر اندازه‌ی ناچیز این المان کار درستی است. فرض کنیم این بردار $\overrightarrow{ds}$ با جهت میدان در نقطه‌ی $P_\circ$، زاویه‌ی θ بسازد، به این صورت

$$q_\circ dV = -q_\circ |\vec{E}(p_\circ)|.ds.\cos\theta \;\rightarrow\; \frac{dV}{ds}.\frac{۱}{\cos\theta}$$
$$= |\vec{E}(p_\circ) \;\text{ یا }\; \frac{dV}{ds} = |\vec{E}(p_\circ)|.\delta s(\theta)$$

به این صورت، آهنگ تغییر پتانسیل با جابه‌جایی در میدان، به عنوان تابعی از θ و در واقع به عنوان تابعی از جهت انتخابی برای $\overrightarrow{ds}$ (که آن را دلخواه فرض کردیم) به‌دست می‌آید.

ما می‌دانیم که اگر $\overrightarrow{ds}$ را طوری انتخاب کنیم که منطبق بر خط میدان در نقطه‌ی $p_\circ$ باشد، $\cos\theta = ۱$ خواهد شد، و به این صورت $\delta dvds$، به ماکزیمم مقدار خودش خواهد رسید. این به این معنی است که تغییرات پتانسیل در راستای میدان از همه‌ی راستاهای دیگر بیشتر است. با انتخاب $\overrightarrow{ds}^*$ به عنوان المان دیفرانسیلی جابه‌جایی در جهت خطوط میدان رابطه‌ی بالا (که با انتخاب ds^* در آن $\cos\theta = ۱$) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{dv}{ds^*} = -E(p_\circ)$$

همچنین در قسمت‌های قبل با استفاده از قانون کار و انرژی به این نتیجه رسیدیم که جهت میدان الکتریکی E در هر نقطه عمود بر رویه‌ی پتانسیل گذرنده از آن نقطه است. به این صورت $\overrightarrow{ds}^*$ در راستای $\vec{E}$ و بنابراین در جهت عمود بر رویه‌ی پتانسیل خواهد بود.

این عبارت بیان می‌کند که اگر بخواهیم با داشتن پتانسیل به میدان الکتریکی برسیم باید $\frac{dV}{ds}$ را محاسبه کنیم در حالی که ds در هر نقطه هم‌راستای میدان الکتریکی در آن نقطه و بنابراین عمود بر رویه‌ی هم‌پتانسیل در آن نقطه است.

به عبارت $\frac{dV}{ds}$ که به جهت ds بستگی دارد، مشتق جهتی گفته می‌شود و از قسمت ریاضیات به یاد دارید که در صورتی که این جهت را طوری انتخاب کنیم که تغییرات بیشینه شود، نام این عبارت گرادیان کمیت خواهد بود. بنابراین با استفاده از نماد گرادیان

$$|\overrightarrow{\nabla V}| = -E(p_\circ) = -|\vec{E}(p_\circ)|$$

با کاربرد مفهوم گرادیان یک تابع اسکالر درباره‌ی پتانسیل می‌توانیم عبارت بالا را به صورت برداری هم بازنویسی کنیم، چرا که از لحاظ برداری هم بر هم منطبقند:

$$\vec{E}(p_\circ) = -\overrightarrow{\nabla V}$$

با توجه به این‌که $p_\circ$ یک نقطه‌ی دلخواه بود، می‌توان آن را به صورت نقطه‌ی دلخواه در حالت کلی در نظر گرفت و به این صورت

$$\vec{E}(\vec{r}_\circ) = -\overrightarrow{\nabla V}|_{\vec{r}=\vec{r}_\circ}$$

و این یعنی میدان در هر نقطه‌ی فضا، برابر منفی گرادیان تابع پتانسیل در آن نقطه از فضاست. بنابراین به نتیجه‌ی دلخواه دست یافتیم و حالا می‌توانیم میدان را هم بر حسب پتانسیل محاسبه کنیم. اما قرار بود، بیانی ریاضی برای این استدلال بیان کنیم. در زیر به این موضوع می‌پردازیم.

اگر میدان $\vec{E}$ دارای خاصیت‌هایی باشد که گفته شد ($\vec{\nabla} \times \vec{E} = \circ$)، همان‌طور که در ابتدای فصل گفتیم، می‌توانیم برای آن یک تابع پتانسیل به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\vec{V}(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}(r).\overrightarrow{dr} \qquad (I)$$

از طرف دیگر از قسمت ریاضیات، و با استفاده از قضیه‌ی اساسی گرادیان‌ها می‌توانیم بنویسیم:

$$V = \int dV$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = dV = \overrightarrow{\nabla V}.\overrightarrow{dr} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \overrightarrow{dr} \qquad (II)$$

که در آن $\overrightarrow{dr}$ در دستگاه مختصات دکارتی است،

$$\overrightarrow{dr} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

و به این صورت و با مقایسه‌ی روابط (I) و (II)

$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(r).\overrightarrow{dr} = \int_{\infty}^{r} \overrightarrow{\nabla V}.\overrightarrow{dr}$$

از آنجا که این رابطه برای تمام rهای دلخواه صحیح است، راهی نیست غیر از آن‌که انتگرالده‌ها (توابع داخلی انتگرال، گاهی انتگراند هم نامیده می‌شود) با هم برابر باشند و به این صورت

$$-\vec{E}(\vec{r}) = \overrightarrow{\nabla V} \;\rightarrow\; \vec{E}(r) = -\overrightarrow{\nabla V}$$

که همان نتیجه‌ی قبلی است، ولی بدون توجه به فیزیک مفهوم پتانسیل به‌دست آمد.

به این صورت اگر تابع پتانسیل را بر حسب مختصات فضایی داشته باشیم، می‌توانیم به وسیله‌ی آن میدان را در تمام نقاط به‌دست آوریم.

بدیهی است، بیان میدان و پتانسیل می‌توانند در دستگاه‌های مختلف انجام بپذیرند و راحت‌تر آن است که در هر دستگاه از روابط گفته شده برای مشتق‌گیری (گرادیان‌گیری) در همان دستگاه استفاده شود.

در زیر، مثالی از به‌دست آوردن میدان از روی پتانسیل، بیان می‌کنیم.

مثال ۱۱ میدان الکتروستاتیک $\vec{E}(x,y)$ مربوط به پتانسیل الکتریکی $\phi(x,y) = -axy$ را بیابید.

حل.

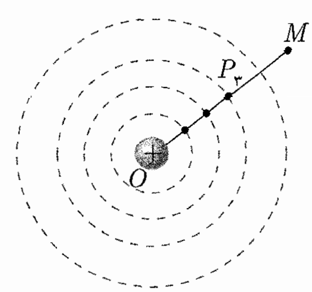
$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = +ay$$
$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = +ax$$
$$\Rightarrow \vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} = ay\vec{i} + ax\vec{j} = a(y\hat{i} + x\hat{j})$$

به صورت نوشتاری دیگر و با استفاده از تعریف عملگر $\vec{\nabla}$ می‌توان نوشت:

$$\vec{E}(x,y) = -\vec{\nabla}V(x,y) = -\left(\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\hat{j}\right)$$
$$= a(y\hat{i} + x\hat{j})$$

اما ممکن است برایتان این پرسش مطرح شود که چگونه ممکن است که با داشتن یک تابع اسکالر بتوانیم یک تابع برداری را در فضا به‌دست بیاوریم. شاید به‌دست آوردن جهت این میدان برداری در هر نقطه با عمود کردن بر رویه "اسکالر = ثابت" با شهود ما سازگار باشد، اما ممکن است به نظر برسد به‌دست آمدن اندازه‌ی آن خیلی با شهود ما سازگار نیست.

پاسخ آن است که عملگری که روی تابع اسکالر ما، یعنی پتانسیل عمل می‌کند، تا به ما میدان را در هر نقطه بدهد. علاوه بر جهتی که تغییر در آن رخ می‌دهد به آهنگ تغییر در آن قسمت هم حساس است، به عنوان مثال ساده، فضای اطراف یک بار نقطه‌ای با بار q را در نظر بگیرید.



شکل ۳-۱۹

پتانسیل در فاصله‌ی r از این بار به صورت $v(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{q}{r}$ است و همان‌طور که گفته شد، رویه‌های پتانسیل اطراف این بار به صورت شکل روبه‌رو هستند. همچنین پاره‌خط راست OM را در نظر بگیرید. که به مرکزیت بار q در یک امتداد دلخواه قرار دارد. نقطه‌ی p_i، نشان دهنده‌ی محل برخورد خط OM و iامین رویه هم‌پتانسیلی است که ما رسم کردیم. حالا فقط به شکل‌ها نگاه کنید و سعی کنید بگویید که میدان در نقاط p_i برای iهای مختلف چه وضعیتی دارد؟ مسلماً میدان در هر نقطه در راستای OM خواهد بود. اما از مشاهده‌ی هر کره‌ی هم‌پتانسیل یک داده‌ی دیگر غیر از راستای عمود بر سطح کره می‌توان استخراج کرد و آن آهنگ تغییر انحنای کره‌ها (رویه‌های هم‌پتانسیل است) هر چه میدان قوی‌تر، تغییر شعاع انحنا سریع‌تر است و برای یک حرکت در فضا تعداد کره‌های بیشتری را قطع خواهیم کرد، و این چیزی است که مشتق‌گیری (گرادیان) به آن حساسیت نشان می‌دهد.

از نظر ریاضی هم، این‌که این تابع اسکالر V که ما تعریف کردیم، چه خاصیتی دارد که با داشتن یک (و تنها) مؤلفه‌ی آن می‌توان سه مؤلفه‌ی میدان را به‌دست آورد، به این برمی‌گردد که اگر چه ما قائل به مستقل بودن مؤلفه‌های میدان هستیم و می‌گوییم وضعیت میدان در یک نقطه‌ی فضا می‌تواند به هر صورتی باشد، اما باید در نظر بگیریم که اگر مؤلفه‌های میدان در فضا را به عنوان تابعی از مکان در نظر بگیریم، و میدان را به صورت $\vec{E}(\vec{r}) = f_x(\vec{r})\hat{i} + f_y(\vec{r})\hat{j} + f_z(\vec{r})\hat{k}$

بیان کنیم، توابع f_x، f_y و f_z دیگر از هم کاملاً مستقل نیستند، بلکه به وسیله‌ی یک رابطه، که همان $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ به هم وابسته‌اند این امر توجیه می‌کند که چرا ما توانایی آن را داریم که سه مؤلفه‌ی میدان را از روی یک مؤلفه‌ی اسکالر به‌دست آوریم.

جمع‌بندی

بنابراین در این فصل، پس از بررسی مفهوم پتانسیل و تعریف آن به راهکارهای به‌دست آوردن آن و کاربردش در نمایش میدان پرداختیم و در آخر رویه‌های برعکس رویه‌ی قسمت‌های اول را پیش گرفتیم و با دانستن پتانسیل به محاسبه‌ی میدان پرداختیم. به این صورت علاوه بر کاربردهای کلی که این مطالب به خودی خود دارند، می‌توانیم به سراغ یک مبحث دیگر هم برویم.

مطالبی که عموماً تحت عنوان "مسائل شرایط مرزی در الکترواستاتیک" شناخته می‌شوند. در این مبحث، پس از بیان شکل دیفرانسیلی قانون گاوس به صورت عام و ترکیب آن با بیان میدان بر حسب پتانسیل به یک معادله‌ی دیفرانسیل برخواهیم خورد که پس از حل آن در شرایط مختلف و در شرایط مرزی مختلف که بسته به هندسه و ...مسأله تغییر می‌کنند، می‌توان توزیع پتانسیل و میدان را در همه‌ی نقاط فضا (و حتی داخل رساناهای مختلف با آرایش‌ها و اتصالات مختلف) به‌دست آورد، همچنین در بخشی از این سر فصل، معمولاً این راه به روش "تصاویر" یا "بارهای تصویری" برای حل مسائل پرداخته می‌شود.

برای مطالعه‌ی این دو قسمت، می‌توانید به کتاب الکتریسیته و مغناطیس ذکر شده در پاورقی مراجعه کنید.[1]

قضایای مقدار مرزی پتانسیل الکتریکی، روش بارهای تصویری

در این قسمت، توضیح بسیار مختصری در مورد مبحث مسائل مقدار مرزی الکترواستاتیک داده خواهد شد و به صورت خاص، به روش تصاویر یا بارهای تصویری به عنوان راه‌حلی که بعضاً در مسائل دوره‌ی تابستانی مورد استفاده قرار می‌گیرد، خواهیم پرداخت.

هدف کلی این مبحث، حل مسائلی است که در آنها، علاوه بر توزیع بار الکتریکی، یک یا چند عامل هندسی، بر فیزیک مسأله تأثیر می‌گذارند و به عبارت دیگر شرایط مرزی را به مسأله تحمیل می‌کنند. همان‌طور که در فصل قانون گاوس اشاره کردیم، فرمول دیفرانسیلی این قانون، به صورت زیر است:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

همچنین، همان‌طور که در این فصل به آن پرداختیم، میدان الکتریکی را می‌توان به صورت گرادیان یک تابع اسکالر نوشت. طبق تعریف ما از کمیت پتانسیل الکتریکی

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

و به این صورت، با ترکیب دو رابطه:

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

1) Electricity and Magnetism, Munir H. Nayfeh, Morton K. Brussel; John wiley and Sons, 1985.

اما اگر عملگرهای $\vec{\nabla}$ و $\vec{\nabla}\bullet$ را به صورگ گسترده بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$
$$\vec{\nabla}\bullet = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\bullet$$

و به این صورت معادله‌ی بالا به صورت زیر، قابل نوشتن خواهد بود.

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}V) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$
$$= \frac{\partial^{۲}V}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲}V}{\partial y^{۲}} + \frac{pa^{۲}V}{\partial z^{۲}} = -\frac{\rho}{\epsilon_{۰}}$$

سمت چپ عبارت بالا، در ادبیات ریاضی به صورت $\nabla^{۲}V$ (بخوانید "پلاسین V" یا "لاپلا دوی V") نوشته می‌شود به این ترتیب حاصل معادله‌ی بالا چنین خواهد بود:

$$\nabla^{۲}V = -\frac{\rho}{\epsilon_{۰}}$$

که اگر آن را به صورت کامل بنویسیم به شکل زیر است:

$$\nabla^{۲}V(x,y,z) = -\rho(x,y,z)/\epsilon_{۰}$$

این معادله به معادله‌ی پواسون معروف است.

در واقع هدف کلی مبحث مسائل مرزی، حل معادله‌ی پواسون با داشتن تابع $\rho(x,y,z)$ به عنوان تابع معلوم و شرایط مرزی مناسب است.

در حالت کلی راه‌حل‌های مختلفی برای حل این معادله پیشنهاد شده است. اما با توجه به پیچیدگی‌های ریاضی که اغلب این راه‌حل‌ها با آن همراهند، مطالعه‌ی آنها فراتر از سطح این کتاب و مباحث دوره‌ی تابستانه المپیاد فیزیک است.

در این میان روش تصاویر به خاطر اینکه تا حد زیادی بر شهود فیزیک استوار است، نیازی به عملیات پیچیده‌ی ریاضی ندارد و در حل مسائلی که از تقارن زیادی برخوردارند، مورد استفاده است.

در ادامه درس، ابتدا قضیه‌ی یگانگی جواب را مطرح کرده و سپس با حل مسئله‌ی مقدار مرزی برای هندسه‌های مهم، نتایج آن را استخراج می‌کنیم.

قضیه‌ی یگانگی جواب

این قضیه در حالت کلی بیان می‌کند که اگر به هر وسیله‌ای، تابع پتانسیل $V(x,y,z)$ را طوری به‌دست آوریم که برای یک توزیع بار مشخص (تابع $\rho(x,y,z)$ مشخص) دو شرط زیر را دارا باشد، این تابع پتانسیل، تنها تابعی است که خصوصیات موردنظر ما را داراست (در معادله صدق می‌کند). این دو شرط عبارتند از:

۱) در معادله‌ی پواسون صدق کند.

۲) در شرایط مرزی داده شده در مسأله صدق کند.

روند ما از اینجا به بعد این خواهد بود که با تکیه بر درک فیزیکی‌مان جواب‌های معادله پواسون را طوری حدس بزنیم که در شرایط مرزی هم صدق کنند. به این صورت طبق قضیه‌ی یگانگی جواب، جوابی که ما پیدا کرده‌ایم تنها جواب مسأله خواهد بود.

اگرچه لازم نیست که شما بدانید که شرایط مرزی در ریاضیات چگونه طبقه‌بندی می‌شوند، اما بد نیست بدانید که شرایط مرزی که در حل معادله‌ی پواسون که با آن سروکار داریم به یکی از دو صورت زیر و یا ترکیبی از این دو هستند.

۱) شرایط مرزی دیریشله (Dirichlet): در این نوع شرط مرزی، مقدار تابع پتانسیل یا $V(x,y,z)$ روی مرز یا قسمتی از مرز (در صورت مخلوط بودن شرط مرزی) داده می‌شود.

۲) شرط مرزی نویمن (Neumann): در این نوع شرط مرزی، شار میدان الکتریکی از سطح، روی سطح مرزی مشخص است.

بررسی‌های ما در روش بار تصویری بیشتر به شرط اول مربوط می‌شود.

روش بار تصویری

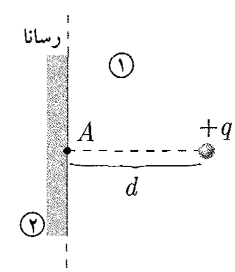
این روش را با یک مثال و بر مبنای مقدماتی که تا به حال گفتیم، بیان خواهیم کرد.

مثال ۱۲ فرض کنید که یک بار نقطه‌ای $+q$، به فاصله‌ی d از یک صفحه‌ی رسانای بی‌نهایت بزرگ قرار دارد، همچنین فرض کنید که این صفحه طوری به زمین متصل شده است که پتانسیل صفحه‌ی فلزی برابر با صفر (پتانسیل در نقطه‌ی بی‌نهایت فضا) است.

الف) میدان الکتریکی را به همراه پتانسیل الکتریکی در هر نقطه از فضا که خارج صفحه و در طرف بار $+q$ از صفحه (همان طرفی از صفحه که بار $+q$ قرار دارد) واقع شده است، بیابید.

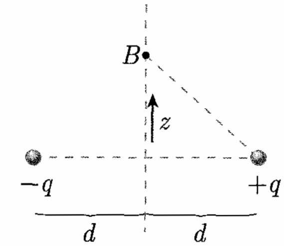
ب) آیا به بار الکتریکی $+q$ نیرویی وارد می‌شود؟ در صورت مثبت بودن جواب اندازه‌ی این نیرو را به‌دست آورید.

حل. طبق گفته‌های سؤال، شکل مسأله به صورت ۳ـ۲۰ است و هدف ما از حل این سؤال در قسمت (الف) پیدا کردن پتانسیل الکتریکی و به دنبال آن میدان الکتریکی در ناحیه‌ی (۱) است، طبق صورت سؤال سطحی که از وضعیت آن اطلاعاتی در دست داریم و به لحاظ فیزیکی، شرایطی را بر حل ما تحمیل می‌کند، سطح رسانا است. در واقع اگر این رسانای زمین شده در مسأله وجود نداشت ما پتانسیل، مثلاً نقطه‌ی A، را به صورت $V(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\frac{q}{d}$ محاسبه می‌کردیم، اما حالا که صفحه‌ی رسانای متصل به زمین در آنجا قرار دارد، به ناچار خواهیم داشت $V(A) = 0$. همان‌طور که گفتیم، تلاش ما در این روش این است که با یک حدس هوشمندانه، به دور از پیچیدگی‌های ریاضی، مسأله را به یک مسئله‌ی حل شده تبدیل کنیم و به کمک قضیه‌ی یگانگی جواب،اثبات کنیم که جواب پیشنهادی ما، همان جواب مسأله است.



شکل ۳-۲۰

حال بیایید به شکل سؤال برگردیم، همان‌طور که دیده می‌شود، چیزی که ما را دچار مشکل کرده است، صفحه‌ی رسانا با پتانسیل صفر است، اگر بتوانیم آن را از مسأله حذف کنیم، به پاسخ سؤال نزدیک شده‌ایم. اگر صفحه‌ی فلزی را که به زمین متصل است، از سؤال حذف کنیم، باید به گونه‌ای دیگر شرط $V = 0$ در محل صفحه را اعمال کنیم، حالا وقت به کار بستن شهود فیزیکی است.



شکل ۳-۲۱

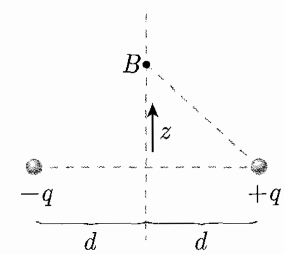
با دقت در شکل می‌توان دریافت که اگر یک بار $-q$ در فاصله‌ی d از سطح رسانا و در طرف صفحه قرار دهیم، برای هر نقطه‌ای روی صفحه‌ی رسانا داریم:

$$V(B) = V_+(B) + V_-(B) = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\left(\frac{+q}{\sqrt{z^۲+d^۲}} + \frac{-q}{\sqrt{z^۲+d^۲}}\right) = ۰$$

به این صورت اگر در عالم ریاضیات، صفحه‌ی رسانای متصل به زمین را حذف کنیم و به جای آن یک بار $-q$ در محل نشان داده شده قرار دهیم، ناظرهایی که در سمت راست صفحه فرضی رسانا هستند متوجه هیچ تغییری نمی‌شوند، چرا که اگر ناحیه‌ی (۱) را در نظر بگیریم (سمت راست صفحه فرضی رسانا) تابع توزیع بار $\rho(x, y, z)$ هیچ تغییری نکرده (هیچ تغییری در وضعیت تک بار موجود در سمت راست صفحه رخ نداده است). همچنین، در شرایط مرزی هم روی مرز فرضی که در محل صفحه‌ی رسانا قرار دارد هیچ تغییری رخ نداده و هم چنان پتانسیل روی همه‌ی نقاط آن صفر است. به این صورت قضیه‌ی یگانگی جواب به ما می‌گوید که اگر ما مسأله را برای این حالت معادل (بارهای $+q$ و $-q$ به فاصله‌ی $۲d$ و بدون صفحه‌ی رسانا) حل کنیم، پاسخ این مسأله در ناحیه‌ی (۱) تنها پاسخ مسأله است و بنابراین برابر با پاسخ موردنظر ما در حالتی است که صفحه‌ی رسانا با پتانسیل صفر در محل مرز قرار دارد.

با این توضیحات به سراغ حل مسأله می‌رویم.

الف) برای پیدا کردن پتانسیل در سمت راست صفحه‌ی رسانا (و نه سمت چپ آن) می‌توانیم از چیدمان معادل آن استفاده کنیم، طبق شکل زیر:



شکل ۳-۲۲

$$\begin{aligned} V(x,y) &= V_+(x,y) + V_-(x,y) \\ &= \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\left(\frac{q}{\sqrt{y^۲+(x-d)^۲}} + \frac{-q}{\sqrt{y^۲+(x+d)^۲}}\right) \end{aligned}$$

همان‌طور که می‌بینید، پتانسیل در هر نقطه ناشی از حضور یک دوقطبی است و می‌توان از روابط مربوط به دوقطبی در مواقع مناسب استفاده کرد.

همچنین میدان الکتریکی را می‌توان با استفاده از روابط دوقطبی یا با گرادیان‌گیری از تابع پتانسیل پیدا کرد.

ب) نیروی وارد بر بار $+q$ اگر اصولاً چنین نیرویی وجود داشته باشد، باید ناشی از میدان خارجی باشد. بنابراین از میدان الکتریکی به‌دست آمده در مرحله‌ی قبل نمی‌توان برای محاسبه‌ی نیرو استفاده کرد (میدان هیچ باری به خود بار نیروی خالص وارد نمی‌کند). بنابراین باید تنها تأثیرات ناشی از حضور صفحه را به حساب آورد و همان طور که گفتیم اثر صفحه‌ی رسانا با پتانسیل صفر روی بار $+q$، معادل با اثر بار $-q$ در فاصله‌ی $۲d$ از آن است، بنابراین برای محاسبه‌ی نیروی وارد بر بار $+q$ هم می‌توانیم از "بار تصویری" $-q$ استفاده کنیم

$$f = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}.\frac{q\times(-q)}{(۲d)^۲} = \frac{۱}{۱۶\pi\epsilon_۰}(-q)^۲ = -\frac{q^۲}{۱۶\pi\epsilon_۰}$$

و جهت آن هم $-\hat{i}$ است.

قبل از آن‌که به سراغ مثال بعد برویم، بد نیست توجه شما را به چند نکته جلب کنیم:

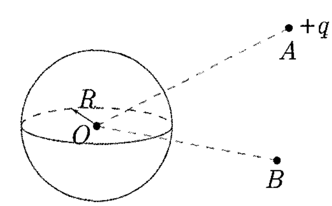
نخست آنکه حالا که با روش تصاویر توزیع پتانسیل در فضای بیرون صفحه‌ی رسانا به‌دست آمده، ما مجازیم از آن تمام استفاده‌هایی را که از پتانسیل به‌دست آمده از روش‌های مستقیم داشتیم، داشته باشیم. برای مثال حالا که میدان الکتریکی را در مجاورت صفحه‌ی رسانا داریم می‌توانیم با توجه به آنکه در نزدیکی سطح رسانا با چگالی سطح بار σ، میدان از رابطه‌ی $\frac{\sigma}{\epsilon_۰}$ به‌دست می‌آید، تابع توزیع چگالی بار σ را روی کل صفحه‌ی نارسانا پیدا کنیم.

نکته‌ی دوم اینکه حتماً توجه داشته باشید که حل ارائه شده به وسیله‌ی روش تصاویر تنها در ناحیه‌ای که شرایط قضیه‌ی یگانگی جواب را دارد قابل استفاده است، و در سایر نقاط این جواب بی‌معنی است.

نکته‌ی سوم اینکه، با توجه به خطی بودن تمام روابطی که در این قضیه استفاده شده‌اند، روش تصاویر قابلیت استفاده شدن در اصل برهم‌نهی را دارد. همچنین اگر سیستم بارهای q' تصویر سیستم بارهای q باشد، با حفظ شرایط مرزی، سیستم q' هم تصویر سیستم q است و در مواقع لزوم می‌توان از یک تکنیک استفاده کرد.

مثال ۱۳ فرض کنید، مرکز یک کره‌ی رسانا که به زمین متصل شده است، روی مبدأ مختصات قرار دارد. شعاع این کره R است. حال فرض کنید، یک بار نقطه‌ای با اندازه‌ی $+q$ به فاصله‌ی d از مبدأ مختصات به نحوی که $d > R$ قرار دارد (بار خارج از کره) پتانسیل الکتریکی را در تمام نقاط خارج از کره به‌دست آورید.

حل. ابتدا شکل زیر را برای سؤال در نظر بگیرید. در واقع هدف ما پیدا کردن پتانسیل الکتریکی ناشی از بار $+q$ واقع در نقطه‌ی A و کره‌ی رسانا به شعاع R، در نقطه‌ای دلخواه مانند نقطه‌ی B است.

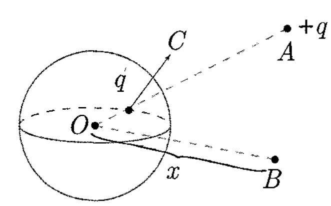


شکل ۳-۲۳

برای حل این مسأله به روش تصاویر همچنان باید یک حدس مناسب را مبنا قرار داده و بر اساس آن سعی بر حل مسأله کنیم. نخست، با توجه به تقارن مسئله، معقول به نظر می‌رسد که بار تصویر بار $+q$ جایی روی محور OA باشد و نه خارج از آن. با این حدس و فرض کردن بار q' به عنوان بار تصویری و فاصله‌ی d' به عنوان فاصله‌ی بار تصویر از مبدأ و با توجه به صورت سؤال خواهیم داشت:

$$V(B) = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\left(\frac{+q}{|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|} + \frac{q]}{|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|}\right)$$

برای راحتی در محاسبات راستای $\overrightarrow{OA}$ را با $\hat{e}_۱$ و راستای $\overrightarrow{OB}$ را با $\hat{e}_۲$ نشان می‌دهیم، در این صورت:



شکل ۳-۲۴

$$V(B) = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\left(\frac{+q}{|d\hat{e}_۱ - x\hat{e}_۲|} + \frac{q'}{|d'\hat{e}_۱ - x\hat{e}_۲|}\right)$$

حالا وقت آن است که شرایط مرزی را در مورد این کره لحاظ کنیم، شرط مرزی در بیان ما از مسأله به صورت زیر است:

$$x = R \rightarrow V(B) = ۰$$

با اعمال این شرط در رابطه‌ی قبل داریم:

$$\frac{q}{|d\hat{e}_1 - R\hat{e}_2|} + \frac{q'}{|d'\hat{e}_1 - R\hat{e}_2|} = \frac{q}{|d\hat{e}_1 - R\hat{e}_2|} + \frac{q'}{|R\hat{e}_2 - d'\hat{e}_1|} = 0$$

از آنجا که عبارت بالا باید برای جفت‌های $\hat{e}_1$ و $\hat{e}_2$ درست باشند (تا تمام سطح کره دارای پتانسیل صفر باشد)، عبارت بالا باید به صورت یک اتحاد ریاضی در بیاید، به این صورت:

(اتحاد ریاضی :≡)
$$\frac{q}{d|\hat{e}_1 - \frac{R}{d}\hat{e}_2|} + \frac{q'}{R|\hat{e}_2 - \frac{d'}{R}\hat{e}_1|} \equiv 0$$

که در آن

$$\frac{q}{d} = \frac{-q'}{R} \quad , \quad \frac{-R}{d} = \frac{-d'}{R}$$

به این صورت با این دو معادله، دو مجهول d' و q' هم پیدا می‌شوند

$$d' = \frac{R^2}{d} \quad , \quad q' = \frac{-Rq}{d}$$

حالا در هر نقطه دلخواه B، پتانسیل به صورت

$$V(B) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|d\hat{e}_1 - x\hat{e}_2|} - \frac{\frac{Rq}{d}}{|\frac{R^2}{d}\hat{e}_1 - x\hat{e}_2|}\right)$$

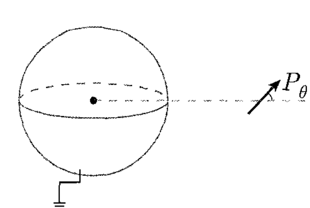
خواهد بود.

تذکرهایی که بعد از حل مثال قبل داده شده در مورد این مثل هم صادق هستند.

همان‌طور که گفته شد روش تصاویر در حالت‌های دیگر از جمله اینکه سطوح هم‌پتانسیل دارای پتانسیل غیر از صفر باشند یا به جای اطلاع از پتانسیل از وضعیت بار روی آنها اطلاع داشته باشیم، هم مورد استفاده است که منبع مطالعه مناسب آن در پاورقی ذکر شد، اما این‌گونه از مسائل اصلاً کاربرد و جذابیت چندانی در مسائل المپیاد ندارند. قضیه‌ی تصاویر هم چنین در مورد بعضی دیگر از هندسه‌ها کاربرد دارند. هندسه‌هایی از قبیل استوانه و ...اما این هندسه‌ها هم اهمیت چندانی در کار ما ندارند. بنابراین به عنوان آخرین مثال پرکاربرد از قضیه‌ی تصاویر به تصویر یک دوقطبی در یک کره‌ی متصل به زمین می‌پردازیم.

مثال ۱۴ یک دوقطبی الکتریکی با ممان دوقطبی $\vec{p}$، در محل $\vec{r}_p$ قرارگرفته است، یک کره‌ی رسانا هم با شعاع $R < r_p$ در مرکز مختصات قرار دارد. پتانسیل الکتریکی را در تمام نقاط فضا که بیرون از کره قرار دارند، بیابید.

حل. شکل کلی حل این سؤال به صورت زیر است.



شکل ۳-۲۵

همان‌طور که از قسمت دوقطبی به یاد دارید، در فواصل به اندازه‌ی کافی دور از دوقطبی، نه بار q تشکیل دهنده‌ی دوقطبی و نه اندازه‌ی (d) فاصله بین دو بار، مهم نیستند، بلکه کمیت، ممان دوقطبی است که دارای اهمیت فیزیکی است. با توجه به این‌که ممان دوقطبی $\vec{p}$، یک بردار است، از قواعد جمع برداری در هر نقطه از فضا تبعیت می‌کند. به این صورت می‌توان آن را به

دو مؤلفه‌ی عمود بر هم، یکی در راستای $\vec{r_p}$ و دیگری عمود بر $\vec{p}$، تجزیه کرده و به این صورت اثر دوقطبی در فضا، برابر حاصل جمع آثار این دو، دوقطبی به‌دست آمده خواهد بود.

$$\vec{p}=\vec{p}_\perp+\vec{p}_{||}=-p\sin\theta\hat{e}_\varphi+p\cos\theta\hat{e}_r$$

است که در آن $\hat{e}_\varphi$ و $\hat{e}_r$ در دستگاه کروی بیان شده‌اند.

با توجه به تقارن کروی مسئله، می‌توان مسأله را به حالت دوبعدی ساده کرد و به این صورت

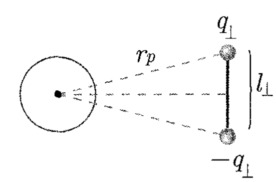
$$\vec{p}=p\sin\theta\hat{j}+p\cos\theta\hat{i}$$

که در آن $\hat{i}$ و $\hat{j}$. بردارهای یکه دستگاه مختصات دکارتی هستند.

حال، اثر هرکدام از این دوقطبی را به صورت جداگانه به وسیله‌ی روش بارهای تصویری مورد بررسی قرار می‌دهیم:

الف) اثر $p_\perp$:

در این حالت فرض می‌کنیم، تنها مؤلفه‌ی $p_\perp$ از دوقطبی p در فضا وجود دارد. همچنین فرض کنیم که این دوقطبی به شکلی ساخته شده که $q_\perp l_\perp=p_\perp=p\sin\theta$. شکل این حال از مسأله به صورت زیر است: شکل ۳ـ۲۶.

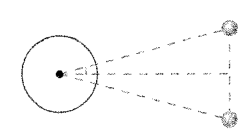


شکل ۳-۲۶

به این صورت می‌توان بار تصویری این حالت را، مجموع بار تصویری دو بار نقطه‌ای با اندازه‌های $\pm q_\perp$ دانست، با توجه به مثال قبل:

$$q'=-\frac{Rq}{d}\ \ ,\ \ d'=\frac{R^۲}{d}$$

به این صورت شکل بار تصویری به صورت زیر است:



شکل ۳-۲۷

در این قالب، داریم:

$$d=d_\perp=\sqrt{rp^۲+\frac{(l_\perp)^۲}{۴}}\ \ ,\ \ q=q_\perp$$
$$\rightarrow d'_\perp=\frac{R^۲}{(r_p)^۲+\frac{(l_\perp)^۲}{۴}}\ \ ,\ \ q'_\perp=-\frac{Rq_\perp}{\sqrt{(rp)^۲+\frac{(l_\perp)^۲}{۴}}}$$

و در این صورت، در درون کره‌ی فلزی هم، یک دوقطبی تشکیل خواهد شد که بردار دوقطبی آن به صورت زیر است:

$$p'_\perp=q'_\perp.l'_\perp$$
$$l'_\perp=۲\times\frac{۱}{۲}l'_\perp=۲\times\frac{l'_\perp}{d'_\perp}\times d'_\perp\times\frac{۱}{۲}$$
$$=۲\times\frac{l_\perp}{d_\perp}.d'_\perp\times\frac{۱}{۲}=\frac{l_\perp}{\sqrt{(rp)^۲+\frac{(l_\perp)^۲}{۴}}}\times d'_\perp=\frac{R^۲l_\perp}{(rp)^۲+(\frac{l_\perp)^۲}{۴}}$$
$$p'_\perp=q'_\perp.l'_\perp=-\frac{R^۳q_\perp l_\perp}{((rp)^۲+\frac{(l_\perp)^۲}{۴})^{۳/۲}}=-\frac{R^۳p_\perp}{((rp)^۲+\frac{l_\perp)^۲}{۴})^{۳/۲}}$$

و با لحاظ کردن $r_p \gg l_\perp$ می‌توان نوشت:

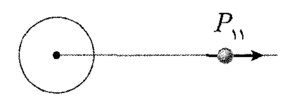
$$p'_\perp = -\frac{R^3}{(rp)^3} p_\perp$$

که علامت منفی ناشی از وارد شدن علامت بارها نسبت به دوقطبی اصلی است.
همچنین در مورد محل قرارگیری این دوقطبی می‌توان گفت:

$$\frac{r_{p'\perp}}{r_p} = \frac{d'_\perp}{d_\perp} = \frac{R^2/d_\perp}{d_\perp} = \frac{R^2}{d_\perp^2} \to r_{p'} = \frac{R^2}{d_\perp^2}.r_p$$
$$= \frac{R^2}{(r_p)^2 + \frac{(l_\perp)^2}{4}}.r_p \simeq \frac{R^2}{r_p}$$

که در آن از قوانین مشابه مثلث‌ها استفاده کرده‌ایم.

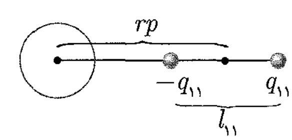
ب) حالا به سراغ حالت دیگر می‌رویم، حالتی که در آن دوقطبی موازی خط را بررسی می‌کنیم. شکل این حالت به صورت ۳ـ۲۸ است.



شکل ۳-۲۸

برای این حالت هم در نظر می‌گیریم: $p_\parallel = q_\parallel . l_\parallel$

و مسأله را به صورت زیر می‌نویسیم.



شکل ۳-۲۹

با استفاده از مسئله‌ی قبل که حل شده، بار دیگر از روابط آن استفاده می‌کنیم:

$$q' = -\frac{R}{d}q \;\; , \;\; d' = \frac{R^2}{d}$$

در این حالت برای بارهای نزدیک و دورتر به کره داریم: (در این حالت بار نزدیک به کره را با $q_{N\parallel}$، بار دورتر به کره را با $q_{F\parallel}$ نشان می‌دهیم)

$$q_{N\parallel} = -q_{F\parallel} = -q_\parallel \;\; , \;\; d_{N\parallel} = r_p - \frac{l_\parallel}{2}$$
$$d_{F\parallel} = r_p + \frac{l_\parallel}{2}$$

به این صورت

$$q'_{N\parallel} = \left(-\frac{R}{rp - \frac{l_\parallel}{2}}\right)(-q_\parallel) = \frac{Rq_\parallel}{rp - \frac{l_\parallel}{2}}$$
$$q'_{F\parallel} = \left(-\frac{R}{rp + \frac{l_\parallel}{2}}\right)(q_\parallel) = -\frac{Rq_\parallel}{rp + \frac{l_\parallel}{2}}$$
$$d'_{N\parallel} = \frac{R^2}{d_{N\parallel}} = \frac{R^2}{rp - \frac{l_\parallel}{2}}$$
$$d'_{F\parallel} = \frac{R^2}{d_{F\parallel}} = \frac{R^2}{d_{F\parallel}} = \frac{R^2}{rp + \frac{l_\parallel}{2}}$$

به این صورت با دو بار مخالف $q'_{N\parallel}$ و $q'_{F\parallel}$ در دو نقطه‌ی مختلف قرار داریم. در حالت کلی نمی‌توان این دو بار را به صورت دوقطبی نوشت، بلکه باید آن را به صورت یک دوقطبی و یک

بار خالص نوشت. برای این منظور دو بار $q'_{N\|}$ و $q'_{F\|}$ را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} q_{N\|} &= \frac{Rq_{\|}}{rp+\frac{l_{\|}}{۲}} + \left(\frac{Rq_{\|}}{rp-\frac{l_{\|}}{۲}} - \frac{Rq_{\|}}{rp+\frac{l_{\|}}{۲}}\right) \\ &= \frac{Rq_{\|}}{rp+\frac{l_{\|}}{۲}} + Rq_{\|}\left(\frac{l_{\|}}{rp^{۲}-\frac{l_{\|}^{۲}}{۴}}\right) \\ q_{F\|} &= \frac{Rq_{\|}}{rp+\frac{l_{\|}}{۲}} \end{aligned}$$

به این صورت می‌توان مجموعه‌ی این دو بار را به صورت یک دوقطبی با بار $\pm\frac{Rq_{\|}}{rp+\frac{l_{\|}}{۲}}$ و اندازه‌ی $|d'_{N\|}-d'_{F\|}| = l'_{\|}$ و یک بار خالص $q^* = \frac{Rq_{\|}l_{\|}}{rp^{۲}-\frac{l_{\|}^{۲}}{۴}}$ در محل $d'_{N\|}$ است.

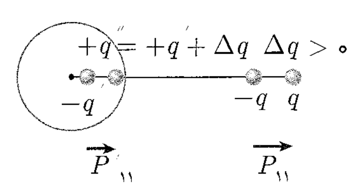
حالا این مقادیر را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} p'_{\|} &= \frac{Rq_{\|}}{rp+\frac{l_{\|}}{۲}}\cdot\left(\frac{R^{۲}}{rp-\frac{l_{\|}}{۲}} - \frac{R^{۲}}{rp+\frac{l_{\|}}{۲}}\right) \\ &= \frac{R^{۳}q_{\|}l_{\|}}{rp+\frac{l_{\|}}{۲}}\left(\frac{l_{\|}}{rp^{۲}-\frac{l_{\|}^{۲}}{۴}}\right) \end{aligned}$$

که با میل دادن $l_{\|}$ به سمت صفر به طوری که $l_{\|}q_{\|}$ به سمت یک مقدار معلوم $p_{\|}$ میل کند داریم:

$$p'_{\|} = \frac{R^{۳}p_{\|}}{rp^{۳}}$$

این عبارت بدون در نظر گرفتن جهت ممان دوقطبی است. با در نظر گرفتن جهت آن و با توجه به اینکه بار تصویری هر بار، قرینه‌ی آن است، جهت ممان دوقطبی موازی $(p'_{\|})$ با جهت $p_{\|}$ یکی است، طبق شکل:



شکل ۳-۳۰

و به این صورت نیازی به تغییر در علامت رابطه‌ی به‌دست آمده برای $p'_{\|}$ نیست. همچنین محل این دوقطبی، برابر با

$$\begin{aligned} r'p_{\|} &= d'_{F\|} + \frac{۱}{۲}(l'_{\|}) \\ d'_{F\|} + \frac{۱}{۲}(d'_{N\|}) - d'_{F\|} &= \frac{d'_{N\|}+d'_{F\|}}{۲} \\ &= \frac{۱}{۲}R\left(\frac{۱}{rp-\frac{l_{\|}}{۲}} + \frac{۱}{rp++\frac{l_{\|}}{۲}}\right) = \frac{۱}{۲}R\left(\frac{۲rp}{rp^{۲}-\frac{l_{\|}^{۲}}{۴}}\right) \end{aligned}$$

و با میل دادن $l_{\|}$ به سمت صفر خواهیم داشت:

$$r'p_{\|} = \frac{R^{۲}}{rp}$$

پس وضعیت دوقطبی حاصل معلوم شد، وضعیت بار خالص که آن را جدا کردیم هم به صورت زیر است، $l_{\|}$ را به صفر میل می‌دهیم تا از تقریب دوقطبی الکتریکی استفاده کنیم:

$$q^* = \frac{Rq_{\|}l_{\|}}{rp^۲ - \frac{l_{\|}^۲}{۴}} \quad , \quad l_{\|} \to \circ , q_{\|}l_{\|} \to p_{\|}$$
$$q'' = \frac{Rp_{\|}}{r^۲p}$$
$$d'_{N\|} = \frac{R^۲}{rp - \frac{l_{\|}}{۲}} \quad , \quad l_{\|} \to \circ \to d'_{N\|} = \frac{R^۲}{rp}$$

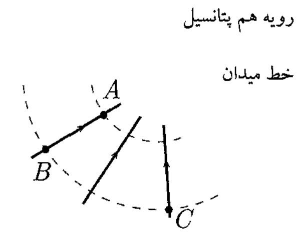
به این صورت بار تصویری نظیر قرارگرفتن یک دوقطبی با بردار $\vec{p}$ و در فاصله‌ی rp از کره به صورت زیر خواهد بود

$$r'p_{\|} = r'p_{\perp} = \frac{R^۲}{rp} = r'p$$
$$\to p' = p'_{\perp}\hat{j} + p'_{\|}\hat{j} = \frac{R^۳}{(rp)^۳}p_{\|}\hat{i} - \frac{R^۳}{(rp)^۳}p_{\perp}\hat{j}$$

و یک تک بار $\frac{Rp_{\|}}{(rp)^۲}$ که در فاصله‌ی $r'p$ برابر $\frac{R^۲}{rp}$ قرار دارد.
به این صورت با دانستن بارهای تصویری و به راحتی، پتانسیل و میدان در خارج از کره به‌دست می‌آیند.

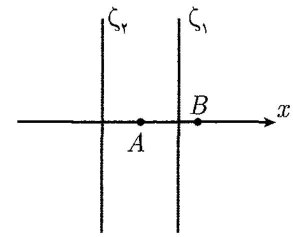
مسائل نمونه فصل ۳

۱. میدان الکتریکی E و خطوط هم‌پتانسیل آن، مطابق شکل مفروضند. می‌دانیم در صورت حرکت از A به B، میدان روی یک الکترون کاری برابر با $۳/۹ \times ۱۰^{-۱۹}\text{J}$ انجام خواهد داد. در این صورت اختلاف پتانسیل‌های $V_C - V_A$ و $V_C - V_B$ را به‌دست آورید.



شکل ۳-۳۱

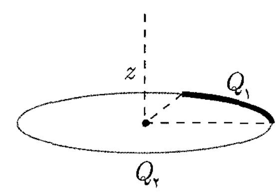
۲. دو صفحه‌ی نارسانای بی‌نهایت، هر کدام به صورت یکنواخت باردار شده‌اند. هر دو موازی صفحه‌ی yz و در مکان‌های $x = \pm ۵۰\text{cm}$، چگالی بارهای روی صفحات به ترتیب $-۵۰\text{nC/m}^۲$ و $+۲۵\text{nC/m}^۲$ هستند، اختلاف پتانسیل بین مبدأ و نقطه‌ای در $x = +۸۰\text{cm}$ را به‌دست آورید.



شکل ۳-۳۲

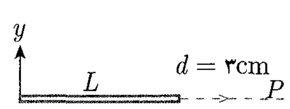
۳. مولکول آب قطبی و دارای گشتاور دوقطبی برابر با $۱/۴۷\text{D}$ می‌باشد، ۱D (یک دبای ـ با اسم او حداقل در درس شیمی برخورد داشته‌اید یا دارید). برابر با $۳/۳۴ \times ۱۰^{-۳۰}\text{C.m}$ است، پتانسیل ناشی از این دوقطبی را در فاصله‌ی ۵۲nm در امتداد محور دوقطبی $(\theta = ۰)$ به‌دست آورید.

۴. یک نوار نارسانای باریک به شکل یک حلقه‌ی دایره‌ای درآمده است. $R = ۸/۲\text{cm}$ و بار در دو قسمت $Q_۱ = ۴/۲\text{pC}$ و $Q_۲ = -۶Q_۱$ که به ترتیب روی یک و سه ربع از محیط دایره توزیع شده‌اند قرار گرفته است. پتانسیل را روی محور حلقه و در فاصله‌های $z = ۰$ (مرکز حلقه، روی دیسک) و $z = ۶/۷۱\text{cm}$ بیابید.



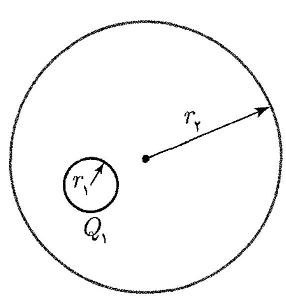
شکل ۳-۳۳

۵. یک میله‌ی نارسانای نازک به طول $L = ۱۲\text{cm}$ در شکل ۳ـ۳۴ آمده است، بار روی این میله با توزیع خطی $\lambda = Cx$ ، $C = ۲۸/۹\text{pC/m}^۲$ قرار گرفته است. با در نظر گرفتن پتانسیل صفر در بی‌نهایت پتانسیل الکتریکی را در نقطه‌ی p به فاصله‌ی ۳cm از یک انتهای میله و روی محور آن به‌دست آورید.



شکل ۳-۳۴

۶. یک کره‌ی فلزی به شعاع $r_۱$ که تا پتانسیل $\phi_۱$ باردار شده است، در یک پوسته‌ی کروی نازک رسانا به شعاع $r_۲$ محاط شده است (شکل زیر). بعد از این‌که برای مدت کوتاهی این کره با یک رسانا به یک پوسته‌ی کروی وصل شد، دارای پتانسیل $\phi_۲$ می‌شود. $\phi_۲$ را بیابید.

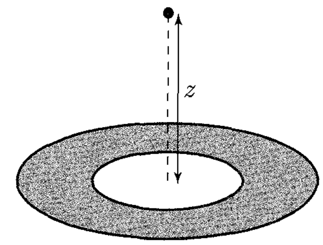


شکل ۳-۳۵

۷. دو کره‌ی فلزی کوچک A و B به جرم‌های $m_A = ۵\text{gr}$ و $m_B = ۱۰\text{gr}$ دارای بارهای مثبت یکسان $q = ۵\mu C$ هستند. کره‌ها با نخ‌های نارسانای بدون جرم به طول $d = ۱\text{m}$ به هم متصل شده‌اند. این فاصله بسیار بیشتر از قطر دو کره است. **الف)** انرژی پتانسیل

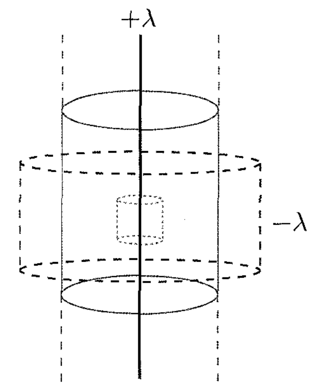
الکتریکی سیستم چقدر است؟ **ب)** فرض کنید در یک لحظه نخ‌ها به یک باره قطع شوند، در این لحظه‌ی به خصوص شتاب هر یک از دو کره را به‌دست آورید. ج) پس از گذشتن زمان طولانی، اندازه‌ی سرعت هر کره چقدر خواهد بود؟

۸. کره‌ی یک به شعاع R_1 دارای بار مثبت q است، کره‌ی دو به شعاع $2R_1$، در فاصله‌ی زیاد از کره‌ی یک قرار دارد و در ابتدا بدون بار است. سپس این دو کره توسط یک سیم بسیار نازک به هم وصل می‌شوند (این سیم بار بسیار کمی را روی خود نگه می‌دارد). **الف)** پتانسیل V_1 کره‌ی یک بزرگ‌تر، کوچک‌تر یا مساوی پتانسیل V_2 کره‌ی دو است؟ **ب)** بعد از اتصال چه قسمتی از بار روی کره‌ی یک و دو قرار می‌گیرند؟ ج) نسبت چگالی بار سطحی روی کره‌ها را به‌دست آورید.



شکل ۳-۳۶

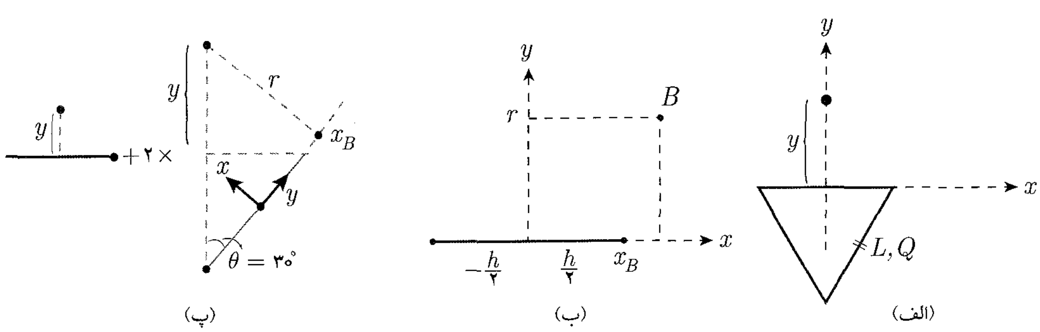
۹. در شکل یک صفحه‌ی دایره‌ای با یک سوراخ دایره‌ای در مرکز آن وجود دارد. شعاع قسمت داخلی $r = 0{,}2R$ و $R = 13\text{cm}$ شعاع دایره خارجی است. چگالی بار یکنواخت $\sigma = 6{,}2\text{pC/m}^2$ است. با در نظر گرفتن $v = 0$ در بی‌نهایت پتانسیل الکتریکی را در نقطه‌ی p، روی محور مرکزی حلقه و در فاصله‌ی $z = 2R$ از مرکز آن به‌دست آورید.



شکل ۳-۳۷

۱۰. یک استوانه‌ی بسیار بلند (میله) نارسانا به شعاع R_1 توسط یک پوسته‌ی استوانه‌ای به شعاع R_2 احاطه شده است. مقدار بار موجود روی واحد طول میله و پوسته به ترتیب $+\lambda$ (توزیع شده به صورت یکنواخت روی حجم میله) و $-\lambda$ است. اندازه‌ی اختلاف پتانسیل را بین مرکز میله و نقطه‌ای روی پوسته‌ی استوانه‌ای به‌دست آورید.

۱۱. با سه میله‌ی باریک به طول L، یک مثلث متساوی‌الاضلاع مطابق شکل ساخته‌ایم. پتانسیل را روی عمود منصف هر یک از اضلاع و به فاصله‌ی y از آن ضلع بیابید، با فرض این‌که روی هر یک از این میله‌ها بار Q به صورت یکنواخت پخش شده باشد.



شکل ۳-۳۸

۱۲. فرض کنید می‌دانیم پتانسیل در ناحیه‌ای از فضا به صورت $\phi(x, y, z) = ax^2 + by^3$ باشد که در آن a و b اعداد ثابتی هستند، توزیع بار را در همه‌ی نقاط فضا به‌دست آورید.

۱۳. یک دوقطبی از یک جفت بار مثبت و منفی به اندازه‌ی q و بدون جرم و یک میله به طول b و جرم m تشکیل شده است. این دوقطبی در یک میدان یکنواخت $\vec{E}$ به حالت تعادل قرار دارد. فرکانس نوسانات زاویه‌ای کوچک این دوقطبی را در میدان و حول مرکز جرمش به‌دست آورید.

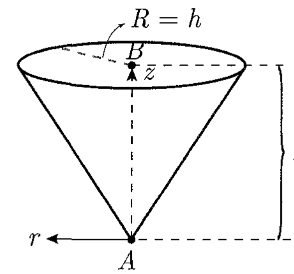
۱۴. دو معادله‌ی زیر را برای میدان الکتریکی در فضا در نظر بگیرید.

الف) $\vec{E} = k[xy\hat{x} + 2yz\hat{y} + 3xz\hat{z}]$

ب) $\vec{E} = k[y^2\hat{x} + (2xy + z^2)\hat{y} + 2yz\hat{z}]$

یکی از این دو معادله برای میدان الکتریکی نمی‌تواند صحیح باشد، کدام‌یک؟
برای معادله‌ای که ممکن است با انتخاب مبدأ دستگاه مختصات به عنوان مبدأ پتانسیل، پتانسیل الکتریکی را در فضا به‌دست آورید.

۱۵. یک سطح مخروطی (مثل یک قیف بستنی خالی) حامل چگالی بار سطحی یکنواخت σ است. ارتفاع مخروط h و شعاع دایره‌ی بالایی مخروط هم h است. اختلاف پتانسیل الکتریکی را بین رأس مخروط و نقطه‌ای در مرکز دایره‌ی بالایی به‌دست بیاورید. (اختلاف پتانسیل نقاط A و B در شکل)



شکل ۳-۳۹

پاسخ مسائل نمونه فصل ۳

۱. **حل.** همان‌طور که می‌دانیم، پتانسیل $V_B - V_A = V_C - V_A$ (چون B و C روی یک رویه‌ی هم‌پتانسیل قرار دارند.)

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{\int_A^B -q\vec{E}.\overrightarrow{ds}}{q} = \frac{-{}_AW_B}{q}\ ,\ q = -e$$

که در آن ${}_AW_B$، کار انجام شده روی بار، توسط میدان و از A تا B است.

$$V_B - V_A = \frac{-۳{,}۹۴ \times ۱۰^{-۱۹}}{-۱{,}۶ \times ۱۰^{-۱۹}} = ۲{,}۴۶\mathrm{V}$$

همچنین $V_B - V_C = ۰$ و این از مفهوم رویه‌ی هم‌پتانسیل نتیجه می‌شود.

۲. **حل.** از فصل قبل می‌دانیم که میدان در اطراف یک صفحه‌ی بی‌نهایتِ نارسانا با چگالی بار σ به صورت $\frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}$ است، در این صورت با توجه به تعریف‌مان از پتانسیل الکتریکی داریم:

$$V(x) = \int_۰^x \vec{E}.\overrightarrow{dx}^* = \int_\infty^x \frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}.dx^* = \frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}x^*\Big]_\infty^x = \frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}(x-\infty)$$

همان‌طور که می‌بینید، این عبارت مقداری مبهم (شامل ∞) است و ابهام آن هم رفع شدنی نیست. واضح است که مشکل در انتخاب سطح مبنا است. اما مشکل چیست؟

ایراد کار در آنجاست که اصولاً، فرض صفحه نامتناهی بار، با فرض کردن جایی به اسم بی‌نهایت دور برای سطح مبنای پتانسیل در تناقض است، چرا که منظور ما از مبدأ پتانسیل واقع در ∞ جایی بود که از کلیه‌ی بارهای ممکن فاصله‌ی ∞ داشته باشد، ولی اگر صفحه‌ی بار نامتناهی باشد، این فرض معتبر نیست.

اما نباید این پیشامد نگرانی‌ای به وجود آورد. چرا که همان‌گونه که پیش‌تر گفته شد آن چه اهمیت فیزیکی دارد پتانسیل نیست بلکه اختلاف پتانسیل است. همان‌طور که دیده می‌شود، در صورت سؤال هم اختلاف پتانسیل بین دو نقطه خواسته شده است. بنابراین، برای حل این مشکل می‌توانیم به چند شکل عمل کنیم. نخست آنکه می‌توانیم در انتخاب مبدأ پتانسیل رویه‌ی قبلی را کنار بگذاریم. برای مثال، نقطه‌ی $x = ۰$ را به عنوان مبدأ پتانسیل (پتانسیل صفر) در نظر بگیریم. به این صورت، محاسبات ما به صورت زیر تغییر خواهد کرد (برای رجوع بعدی پتانسیل این قرارداد را با $V_۰(x)$ نشان می‌دهیم.)

$$V_۰(x^*) = \int_۰^x \vec{E}(x).d\vec{x} = \int_۰^{x^*} E(x)dx = \int_۰^{x^*} \frac{\delta}{۲\epsilon_۰}dx = \frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}x^*$$

که در آن باید دقت کنیم که x^* بیانگر فاصله از مرکز صفحه‌ی حاوی چگالی بار است (با تغییر x^* به $-x^*$، به علت تقارن، پتانسیل نباید تغییر کند) در این صورت در هر مرحله با نوشتن روابط و استفاده از اصل برهم‌نهی جواب به‌دست می‌آید. اما راه‌حل کلی‌تر که به آن

قصد داریم پاسخ را به‌دست آوریم این است که به صورت پارامتری، سطح مبنا را در نقطه‌ی $x^* = c$ فرض کنیم. در این حالت پتانسیل را با $V_*(x^*)$ نشان می‌دهیم:

$$V_*(x^*) = \int_c^{x^*} \vec{E}(x).d\vec{x} = \int_c^{x^*} \frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}dx = \frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}(x^* - c)$$

است که همچنان در آن، منظور از x^* و c اندازه (و نه جهت) فاصله از مرکز صفحه‌ی بار است، به این صورت با داشتن دو صفحه و با استفاده از اصل برهم‌نهی داریم (پتانسیل‌های مربوط به صفحه‌ی یک را با $V_{*۱}$ و صفحه دو را با $V_{*۲}$ نشان داده‌ایم) (نقطه‌ی $x = ۸۰\text{cm}$ را با B و نقطه‌ی $x = ۰$ را با A نشان می‌دهیم):

$$\Delta V = V_*(B) - V_*(A) = \big(V_{*۱}(B) - V_{*۱}(A)\big) + \big(V_{*۲}(B) - V_{*۲}(A)\big)$$
$$\Delta V = \big(V_{*۱}(x_{*۱B}) - V_{*۱}(x_{*۱A})\big) + \big(V_{*۲}(x_{*۲B}) - V_{*۲}(x_{*۲A})\big)$$

که در آنها x_{*iA} و x_{*iB}، فاصله‌ی نقاط A و B تا صفحه‌ی بار شماره‌ی i می‌باشد.

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{۱}{۲\epsilon_۰}\big[\sigma_۱\big((x_{*۱B} - C_۱) - (x_{*۱A} - C_۱)\big)$$
$$+ \sigma_۲\big((x_{*۲B} - C_۲) - (x_{*۲A} - C_۲)\big)\big]$$

که در آن انتخاب مقدار $C_۲$ به سطح مبنای صفحه‌ی دو به این علت انجام گرفته است که انتخاب سطح مبنا، یک بار و برای صفحه‌ی یک انجام شده است و نقطه‌ای به فاصله‌ی $C_۱$ از صفحه‌ی اول، پتانسیل صفر دارد. بنابراین برای صفحه‌ی دوم نقطه‌ای به فاصله‌ی $C_۲ = C_۱ + d$ (که در آن d فاصله‌ی بین دو صفحه است) دارای پتانسیل صفر خواهد بود. در این صورت

$$\Delta V = \frac{۱}{۲\epsilon_۰}\big[(x_{*۱B} - x_{*۱A}) + (x_{*۲B} - x_{*۲A})\sigma_۲\big]$$

با توجه به اطلاعات مسئله:

$$x^*_{۱B} = ۰/۳ \;\; , \;\; x^*_{۲B} = ۱/۳\text{m}$$
$$x^*_{۱A} = ۰/۵\text{m} \;\; , \;\; x^*_{۲A} = ۰/۵$$
$$\Rightarrow \;\Delta V = \frac{۱}{۲\epsilon_۰}\left[(-۰/۲) \times (-۵۰) \times ۱۰^{۹} + ۰/۸ \times ۲۵ \times ۱۰^{-۹}\right]$$

همان‌طور که دیده شد، پاسخ مستقل از انتخاب C است.

توجه کنید که پاسخ این مسأله در یک سطر قابل دست‌یابی است ولی توضیحات داده شده تنها برای روشن ساختن نکته‌ی گفته شده بود که احتمال می‌دادیم در ذهن شما سؤال ایجاد کند. امیدواریم خسته نشده باشید!

۳. **حل.** می‌دانیم پتانسیل ناشی از دوقطبی به صورت $\frac{q}{۴\pi\epsilon_۰}.\frac{P}{r^۲}\cos\theta$ است. با جایگزینی در این رابطه داریم، $V = ۱/۶۳ \times ۱۰^{-۵}\text{V}$.

۴. **حل**. می‌دانیم برای یک المان بار $dV = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{dq}{r}$

$$r = \sqrt{R^۲ + z^۲} \ \rightarrow \ dV = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}.\frac{dq}{\sqrt{R^۲+z^۲}}$$
$$\rightarrow V = \int dV = \frac{Q_۱+Q_۲}{۴\pi\epsilon_۰}.\frac{۱}{\sqrt{R^۲+z^۲}}$$

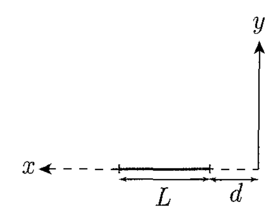
و با جایگذاری

$$V|_{z=۰} = -۲/۳\text{V} \ , \ V|_{z=۶/۷۱\text{cm}} = -۱/۷۸\text{V}$$

دقت داشته باشید که در این رابطه انتگرال‌گیری اثری از هندسه‌ی توزیع بار روی حلقه دیده نمی‌شود و بار می‌توانست به هر صورت دیگری هم توزیع شده باشد، در واقع کافی بود بدانیم

$$\int_۰^{۲\pi} \lambda(\theta) R d\theta = Q_۱ + Q_۲ = Q$$

۵. **حل**. محورهای مختصات را برای راحتی در محاسبات و به صورت زیر در نظر می‌گیریم. برای دستگاه جدید تابع λ جدید به صورت زیر خواهد بود.

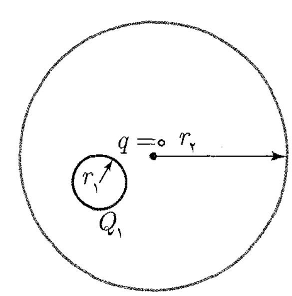


شکل ۳-۴۰ پاسخ سؤال ۵

$$\lambda(x) = C(L+d-x)$$
$$dV = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}.\frac{dq}{x}$$
$$V = \int_d^{L+d} dV = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}.\int_d^{L+d}\frac{\lambda(x)dx}{x}$$
$$V = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\int_d^{L+d}\frac{C(L+d-x)dx}{x}$$
$$= \frac{C}{۴\pi\epsilon_۰}\left((L+d)\ln x\Big]_d^{L+d} - x\Big]_d^{L+d}\right)$$
$$= \frac{C}{۴\pi\epsilon_۰}(۰/۲۴۱۴ - ۰/۱۲) = ۳۱/۵۷ \times ۱۰^{-۳} = ۳/۱۵۷ \times ۱۰^{-۲}\text{V}$$

۶. **حل**. کره‌ی $r_۱$ که تا پتانسیل $\phi_۱$ باردار شده است را ابتدا بررسی می‌کنیم. با این کره را $q_۱$ فرض کنید. از آنجایی که میدان خارج هر توزیع بار با تقارن کروی مشابه میدان خارج بار نقطه‌ای معادل متمرکز در مرکز آن است می‌توان نوشت:

$$\phi_۱ = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}.\frac{q_۱}{r_۱}$$
$$q_۱ = ۴\pi\epsilon_۰ . r_۱\phi_۱$$



شکل ۳-۴۱

پس از اتصال این کره به کره‌ی بزرگ‌تر، کل بار $q_۱$ به سطح خارجی رسانای جدید که متشکل از دو کره است می‌رود. یعنی کل بار روی کره‌ی ۲ می‌نشیند. پس از قطع ارتباط دو کره پتانسیل کره‌ی دو به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\phi_۲ = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}.\frac{q_۲}{r_۲} = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}.\frac{q_۱}{r_۲} = \frac{r_۱}{r_۲}\phi_۱$$

۷. **حل.** با توجه به زیاد بودن فاصله‌ی دو کره نسبت به اندازه‌ی کره‌ها (بارها) می‌توان این دو کره بار را بار نقطه‌ای در نظر گرفت.

الف) با توجه به اینکه $d \gg r_۱, r_۲$، می‌توان از فرض نقطه‌ای بودن بارها استفاده کرد و بنابراین با توجه به روابط ابتدای فصل:

$$U = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}.\frac{q_A q_B}{d} = ۰/۲۲۵\text{J}$$

ب)

$$F = F_A = F_B = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}.\frac{q_A \cdot q_B}{d^۲} = mA \rightarrow F = m_a A_a = m_b A_b$$

$$A_a = \frac{F}{m_a} = ۴۵\text{m/s}^۲\ ,\ A_b = ۲۲/۵\text{m/s}^۲$$

ج) اگر مجموعه‌ی دو بار و نخ‌ها را در نظر بگیریم نیروی خارجی بر این مجموعه وارد نمی‌شود. در حالت اول انرژی به صورت پتانسیل است.

$$F_{\text{net,external}} = ۰ \rightarrow \Delta E = ۰ \rightarrow U_۱ + P_۱ = E_۱ = U_۲ + P_۲ = E_۲$$

در حالت اولیه $U_۱$ را داریم و $P_۱$ که انرژی جنبشی حالت اولیه است، چون همه‌ی اجزا در حال سکون‌اند، برابر صفر است، $U_۲$ انرژی پتانسیل حالت ثانویه و $P_۲$ انرژی جنبشی این حالت است.

$$E_۱ = U_۱ = ۰/۲۲۵\text{J} = E_۲ = U_۲ + P_۲$$

$$U_۲ = \frac{q}{۴\pi\epsilon_۰}.\frac{q_A \cdot q_B}{r} \rightarrow \lim_{r\rightarrow\infty} U_۲ = ۰$$

$$\text{(نظیر زمان بسیار زیاد) در فاصله‌ی بسیار دور} \rightarrow E_۲ = P_۲ \rightarrow \frac{۱}{۲}(m_a v_a^۲ + m_b v_b^۲) = ۰/۲۲۵$$

برای به‌دست آوردن رابطه‌ی دیگر، دقت می‌کنیم که نیروی وارد بر دو جسم همواره برابر و جرم B دو برابر جرم A است.

$$A_a = ۲A_b \rightarrow v_a(t) = \int_۰^t A_a(t)dt = \int_۰^t ۲A_b(t)dt = ۲v_b(t)$$

پس سرعت جسم a در هر لحظه دو برابر سرعت جسم b است.

$$\frac{۱}{۲}(m_a(۲v_b)^۲ + m_b v_b^۲) = ۰/۲۲۵ \rightarrow \begin{array}{l} v_b = ۳/۸۷\text{m/s} \\ v_a = ۷/۷۴\text{m/s} \end{array}$$

۸. **حل.** الف) وقتی دو کره به وسیله‌ی رسانا به یکدیگر متصل شده‌اند و در مدت کوتاهی به تعادل رسیدند، کره‌ها هم‌پتانسیل‌اند و پتانسیل‌ها برابرند.

$$V_{eq} = \frac{kq_۱}{R_۱} = \frac{kq_۲}{R_۲} = \frac{k(q_۱ + q_۲)}{R_۱ + R_۲} = \frac{kq}{R_۱ + R_۲}$$

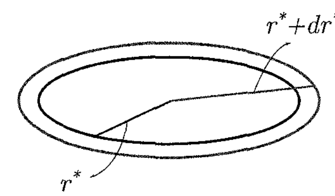
ب)

$$q_{۱} = \frac{R_{۱}}{R_{۱}+R_{۲}} q = \frac{۱}{۳} q$$
$$q_{۲} = \frac{R_{۲}}{R_{۱}+R_{۲}} q = \frac{۲}{۳} q$$

ج)

$$\frac{\sigma_{۱}}{\sigma_{۲}} = \frac{\frac{q_{۱}}{۴\pi R_{۱}^{۲}}}{\frac{q_{۲}}{۴\pi R_{۲}^{۲}}} = \frac{q_{۱}}{q_{۲}}(\frac{R_{۲}}{R_{۱}})^{۲} \rightarrow \frac{\sigma_{۱}}{\sigma_{۲}} = \frac{R_{۲}}{R_{۱}} = ۲$$

۹. **حل.** از آنجا که برای یک المان بار در نظر گرفتن، تنها کافی است فاصله‌ی نقاط این المان تا نقطه‌ای که می‌خواهیم پتانسیل را در آن محاسبه کنیم، یکسان باشد، یک حلقه‌ی بار به ضخامت dr^* به شعاع r^* را به عنوان المان بار در نظر می‌گیریم.

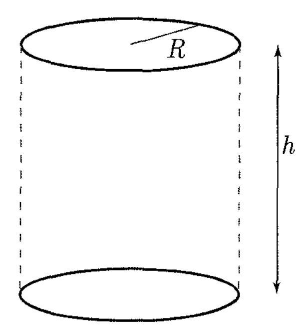


شکل ۳-۴۲

$$dV = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_{\circ}} . \frac{dq}{d} \ , \ d = \sqrt{z^{۲} + (r^*)^{۲}}$$
$$dV = \frac{\sigma}{۴\pi\epsilon_{\circ}} . \frac{۲\pi r^* dr^*}{\sqrt{r^{*۲} + z^{۲}}} \rightarrow V = \int dV = \int \frac{\sigma}{۴\pi\epsilon_{\circ}} . \frac{۲\pi r^* dr^*}{\sqrt{r^{*۲} + z^{۲}}}$$
$$= \frac{۲\sigma}{۴\epsilon_{\circ}} \int \frac{۲r^* dr^*}{۲\sqrt{r^{*۲} + z^{۲}}} = \frac{\sigma}{۲\epsilon_{\circ}} \sqrt{r^{*۲} + z^{۲}} \Big]_{r=\circ/۲R}^{R}$$

$$\text{با جایگذاری اعداد} \rightarrow V = ۱/\circ۵ \times ۱\circ^{-۲} (\mathrm{V})$$

۱۰. **حل.** توزیع بار به شکل ۳-۴۳ است، با اعمال قانون گاوس به راحتی می‌توان دریافت که میدان الکتریکی از بیرون پوسته‌ی استوانه‌ای تا بی‌نهایت دور صفر باقی می‌ماند. همچنین برای میدان در داخل میله و بین میله و پوسته هم از قانون گاوس استفاده می‌کنیم.



شکل ۳-۴۳

$$Q = h \times \lambda = \pi R_{۱}^{۲} \times h \times \rho$$
$$\rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\pi R_{۱}^{۲}} \qquad \text{(چگالی حجمی بار روی میله)}$$

حال برای پیدا کردن میدان داخل میله، یک سطح گاوسی استوانه‌ای با شعاع $r < R_{۱}$ و هم‌محور با استوانه در نظر می‌گیریم.

$$\rightarrow \int \vec{E}.\vec{ds} = \frac{\pi r^{۲} \rho h'}{\epsilon_{\circ}}$$
$$\rightarrow E(r) \cdot ۲\pi r h' = \frac{\pi r^{۲} \rho h'}{\epsilon_{\circ}}$$
$$\rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{۲\epsilon_{\circ}} \vec{e}_r = \frac{\lambda r}{۲\pi\epsilon_{\circ} R_{۱}^{۲}} \vec{e}_r$$

و برای محاسبه‌ی میدان بین میله و پوسته‌ی استوانه‌ای $\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{۲\pi R_{۱}\epsilon_{\circ}} \vec{e}_r$ کل بار میله می‌تواند در محور میله در نظر گرفته شود $r > R_{۱} \rightarrow$

$$|V_{۲} - V_{۱}| = \left| \int_{۱}^{۲} \vec{E}.\vec{dr} \right|$$

برای اختلاف پتانسیل بین این دو نقطه می‌نویسیم:

$$\int_{1}^{2} \vec{E}.\overrightarrow{dr} = \int_{0}^{R_1} \vec{E}(r)\overrightarrow{dr} + \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}(r).\overrightarrow{dr} \ , \ \overrightarrow{dr} = dr\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \int_{1}^{2} \vec{E}.\overrightarrow{dr} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R_1^2}\int_{0}^{R_1} rdr + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}dr$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1} \ , \ V_2 - V_1 = -\int_{1}^{2}\vec{E}\cdot\overrightarrow{dr}$$

$$\rightarrow V_2 - V_1 = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(1 + \ln(\frac{R_2}{R_1})^2\right)$$

۱۱. **حل**. شکل را مانند روبه‌رو در نظر می‌گیریم. ابتدا بیایید میدان را در فاصله‌ی r از یک میله‌ی محدود محاسبه کنیم. فرض کنید شکلی مانند زیر داریم.

$$V_B = \int_{-L/2}^{L/2} dV = \int_{-L/2}^{L/2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx}{\sqrt{r^2 + (x - x_B)^2}}$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left((x - x_B) + \sqrt{(x - x_B)^2 + r^2}\right)\Big]_{-L/2}^{L/2}$$

به این صورت می‌توان پتانسیل ناشی از توزیع بار روی مثلث را طبق اصل برهم‌نهی به صورت برهم‌نهی پتانسیل ناشی از سه خط بار به طول L ولی با r و x_Bهای متفاوت نوشت:

$$r = (y + Lcos30^\circ)\sin 30^\circ = \frac{y + \frac{L\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$x_B = (y + L\cos 30^\circ)\cos 30^\circ - \frac{L}{2}$$

$$\rightarrow V(y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\Big[\ln\left(x + \sqrt{x^2 + r^2}\right)\Big]_{-L/2}^{L/2} + 2\ln\left((\frac{y\sqrt{3}}{2} + (\frac{3L}{4} - \frac{L}{2}))\right)$$
$$+ \left(\sqrt{(x - \frac{y\sqrt{3}}{2} - \frac{L}{4})^2 + (\frac{y + \frac{L\sqrt{3}}{2}}{2})^2}\Big]_{-L/2}^{L/2}\right)\Big]$$

۱۲. **حل**. با استفاده از شکل دیفرانسیلی قانون گاوس می‌دانیم:

$$\vec{\nabla}.\vec{E}(x,y,z) = \frac{\rho(x,y,z)}{\epsilon_0}$$

همچنین می‌دانیم $\vec{E}(x,y,z) = -\vec{\nabla}\phi(x,y,z)$ و با ترکیب این دو به‌دست آوردیم

$$-\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\phi = \frac{\rho(x,y,z)}{\epsilon_0} \ \rightarrow \ \nabla^2\phi(x,y,z) = -\frac{\rho(x,y,z)}{\epsilon_0}$$

که به معادله‌ی پواسون معروف است، بنابراین توزیع بار به این صورت است:

$$\rho(x,y,z) = -\epsilon_0\nabla^2\phi(x,y,z) = -\epsilon_0(2a + 3by)$$

لازم به ذکر است که اینکه نام این معادله چیست و از کجا آمده، نباید فعلاً برای شما اهمیت زیادی داشته باشد. بدون دانستن نام معادله هم قطعاً مسأله قابل حل است. اما اهمیت این

معادله و حل آن بیشتر در مسائل مقدار مرزی پتانسیل مشخص می‌شود، جایی که با معلوم بودن تابع $\rho(x,y,z)$، تابع پتانسیل و در پی آن میدان در همه‌ی نقاط فضا مشخص می‌شود. همان‌طور که گفته شد، حل مسائل مقدار مرزی الکترواستاتیک در حوزه‌ی این کتاب نیست.

۱۳. **حل.** می‌دانیم انرژی پتانسیل یک دوقطبی در میدان الکتریکی به صورت $U=-\vec{p}.\vec{E}$ است. در حد θهای کوچک می‌توان از تقریب $\tan\theta\simeq\sin\theta\simeq\theta$ استفاده کرد:

$$U=-pE\cos\theta=-qbE\cos\theta\;\rightarrow\;\frac{dU}{d\theta}=qbE\sin\theta$$
$$\rightarrow\;\frac{dU}{d\theta}\simeq qbE\theta$$

بنابراین اگر نوسان این دو قطبی در میدان را با نوسان یک جسم متصل بر فنر پیچشی مدل کنیم، k فنر پیچشی معادل، $k_{eq}=qbE$ خواهد بود. برای تعیین فرکانس نوسان نیاز به ممان اینرسی (گشتاورماند) سیستم هم داریم که برابر با $\frac{ml^{۲}}{۱۲}$ است. (اگر این قسمت را به یاد ندارید باید به جلد مکانیک یا کتاب‌های مکانیک مقدماتی مراجعه کنید.)

$$I_{eq}=\frac{mb^{۲}}{۱۲}\;,\;w=\sqrt{\frac{k}{I}}=\sqrt{\frac{qbE}{\frac{mb^{۲}}{۱۲}}}=\sqrt{\frac{۱۲qE}{mb}}$$

۱۴. **حل.** همان‌طور که می‌دانیم، برای این‌که یک معادله‌ی برداری دلخواه بتواند معرف یک میدان باشد باید در شرط $\vec{\nabla}\times\vec{E}=۰$، حتی می‌دانیم که شرط $\vec{\nabla}\times\vec{E}=۰$، شرط لازم و کافی برای وجود پتانسیل است این شرط را در مورد این دو معادله بررسی می‌کنیم.[۱]

الف)

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=k\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy & ۲yz & ۳zx\end{vmatrix}$$
$$=k\left[\hat{x}(۰-۲y)+\hat{y}(۰-۳z)+\hat{z}(۰-x)\right]\neq ۰$$

بنابراین این معادله یک میدان الکتریکی را توصیف نمی‌کند.

ب)

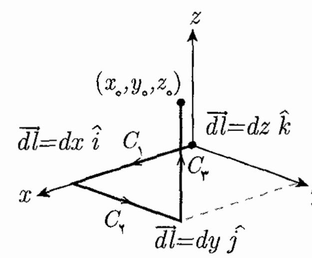
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_{۲}=k\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^{۲} & ۲xy+z^{۲} & ۲yz\end{vmatrix}$$
$$=k\left[\hat{x}(۲z-۲z)+\hat{y}(۰-۰)+\hat{z}(۲y-۲y)\right]=۰$$

۱) برای آنکه عبارت بالا دقیق باشد باید گفت که این جمله در مورد انواع خاص میدان صادق است که میدان‌های الکترواستاتیک نامتغیر با زمان، که اغلب در این رده مدنظر است، با آن سازگار است. ولی ما فعلاً هیچ نیازی به دقیق شدن در این معادلات نداریم.

و بنابراین این معاله بیانگر یک میدان الکترواستاتیکی است. برای محاسبه‌ی پتانسیل در فضا از تعریف استفاده می‌کنیم. یعنی پتانسیل را با انتگرال‌گیری روی منحنی C پیدا خواهیم کرد. همان‌طور که می‌دانیم مقدار انتگرال مستقل از منحنی C است ولی برای محاسبه‌ی انتگرال چاره‌ای نداریم جز این‌که یک مسیر دلخواه انتخاب کنیم.

$$V(x_0,y_0,z_0) = -\int_{\substack{0\\C}}^{x_0,y_0,z_0} \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

ما به عنوان مثال مسیر حرکت به صورت شکل ۳ـ۴۴ را انتخاب می‌کنیم. مجموع سه قطعه‌ی مجزا که روی هر یک فقط یکی از کمیات dx، dy و dz مخالف صفر باشند.



شکل ۳-۴۴

$$V(x_0,y_0,z_0) = -\int_{\substack{0\\C_1+C_2+C_3}}^{(x_0,y_0,z_0)} \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

$$= -k\Big[\int_{C_1} y^2dx + \int_{C_2}(2xy+z^2)dy + \int_{C_3} 2yzdz\Big]$$

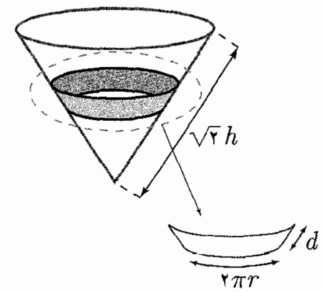
$\displaystyle\int_{C_1} y^2dx = 0 = \int_{C_2} z^2dy$ با توجه به مسیرهای انتخابی و انتگرال‌ها

$$= -k\Big[x_0y^2\Big]_0^{y_0} + y_0z^2\Big]_0^{z_0}\Big] = (x_0y_0^2 + y_0z_0^2)(-k)$$

بنابراین تابع پتانسیل به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\phi(x,y,z) = (-k)(xy^2+yz^2)$$

۱۵. حل. برای بررسی سؤال، از دستگاه استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. مبدأ دستگاه را روی رأس مخروط و محور z را منطبق بر محور مخروط در نظر می‌گیریم. محور کمکی ξ را هم برای راحتی در نظر می‌گیریم. حال از اصل برهم‌نهی پتانسیل استفاده کرده و پتانسیل در نقطه موردنظر را با جمع کردن پتانسیل‌های ناشی از المان بار به‌دست می‌آوریم.



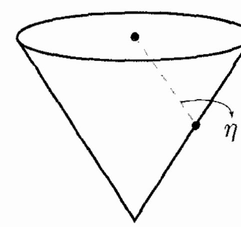
شکل ۳-۴۵

مساحت المان سطح در نظر گرفته شده، همان‌طور که از شکل مشخص است برابر $dA = 2\pi r d\xi$ است. که در آن r، شعاع المان در دستگاه استوانه‌ای است.

$$V(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\sqrt{2}h} \frac{\sigma(2\pi)r}{\xi}.d\xi$$

$$r = \frac{\xi}{\sqrt{2}} \rightarrow V(A) = \frac{\int_0^{\sqrt{2}h}\sqrt{2}\sigma\pi d\xi}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0}$$

برای به‌دست آوردن پتانسیل نقطه‌ی B، فرض کنیم فاصله‌ی نقطه‌ای روی سطح تا نقطه‌ی B را با η نمایش دهیم.



شکل ۳-۴۶

$$V(B) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\sqrt{2}h} \frac{\sigma(2\pi)r}{\eta}.d\xi$$

$$r = \frac{\xi}{\sqrt{2}}\,,\ \eta = \sqrt{h^2+\xi^2-\sqrt{2}h\xi}$$

پس از انتگرال‌گیری

$$V(B) = \frac{\sigma}{۲\sqrt{۲}\epsilon_۰}\int_۰^{\sqrt{۲}h}\frac{\xi}{\sqrt{h^۲ - \xi^۲ - \sqrt{۲}h\xi}}d\xi$$

$$\rightarrow \frac{\sigma}{۲\sqrt{۲}\epsilon_۰}\Big[\sqrt{h^۲ + \xi^۲ - \sqrt{۲}h\xi}$$

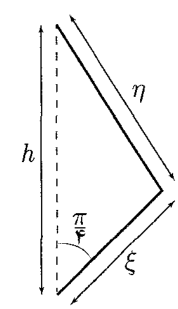
$$+ \frac{h}{\sqrt{۲}}\ln\Big(۲\sqrt{h^۲ + \xi^۲ - \sqrt{۲}h\xi} + ۲\xi - \sqrt{۲}h\Big)\Big]_۰^{\sqrt{۲}h}$$

$$\xrightarrow{\text{پس از ساده‌سازی و جایگذاری}} \frac{\sigma h}{۴\epsilon_۰}[\ln(۲h + \sqrt{۲}h) - \ln(۲h - \sqrt{۲}h)] = V(B)$$

$$= \frac{\sigma h}{۴\epsilon_۰}\ln\left(\frac{۲ + \sqrt{۲}}{۲ - \sqrt{۲}}\right)$$

$$\rightarrow V(A) - V(B) = \frac{\sigma h}{۲\epsilon_۰}\left[۱ - \frac{۱}{۲}\ln\left(\frac{۲ + \sqrt{۲}}{۲ - \sqrt{۲}}\right)\right]$$

$$= \frac{\sigma h}{۴\epsilon_۰}\left[۲ - \ln\frac{۲ + \sqrt{۲}}{۲ - \sqrt{۲}}\right]$$



شکل ۳-۴۷

تمرین فصل ۳

۱. اختلاف پتانسیل الکتریکی بین زمین و یک ابر برابر $۱/۲ \times ۱۰^{۹}\text{V}$ است. تغییر انرژی پتانسیل الکترونی که بین زمین و ابر حرکت می‌کند بر حسب الکترون ـ ولت چقدر است؟

حل. $۱/۲ \times ۱۰^{۹}\text{eV}$

۲. یک صفحه‌ی نارسانای بی‌نهایت دارای چگالی بار سطحی $\sigma = +۵/۸\text{pC/m}^۲$ است. **الف)** به طور متوسط چقدر کار توسط میدان الکتریکی ناشی از صفحه باید انجام شود تا ذره‌ی با بار $q = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C}$ از روی صفحه به نقطه‌ی p در فاصله‌ی $d = ۳/۵۶\text{cm}$ از صفحه منتقل شود؟ **ب)** اگر پتانسیل الکتریکی روی صفحه را برابر صفر در نظر بگیریم پتانسیل در p چقدر خواهد بود؟

حل. الف) $۱/۸۷ \times ۱۰^{-۲۱}\text{J}$ ب) $۱/۱۷ \times ۱۰^{-۲}\text{V}$

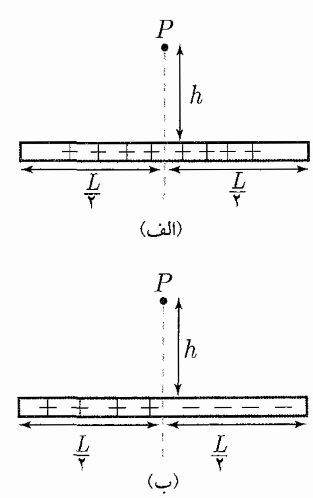
۳. یک کره‌ی نارسانا دارای شعاع $R = ۲/۳۱\text{cm}$ و بار $q = +۳/۵\text{fC}$ است که درون آن به طور یکنواخت توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی در مرکز کره را $V_۰ = ۰$ در نظر بگیرید. V در فاصله‌ی شعاعی **الف)** $r = ۱/۴۵\text{cm}$ و **ب)** $r = R$ چقدر است؟

حل. الف) $-۲/۶۹ \times ۱۰^{-۴}\text{V}$ ب) $-۶/۸۲ \times ۱۰^{-۴}\text{V}$

۴. پتانسیل در سطح یک قطره کروی آب که دارای بار ۳۰pC است ۵۰۰V است (پتانسیل در بی‌نهایت صفر است). **الف)** شعاع قطره چقدر است؟ **ب)** اگر دو تا از این قطره‌ها با بار و شعاع یکسان ترکیب شوند و قطره‌ی کروی بزرگ‌تری تشکیل دهند پتانسیل را در سطح قطره‌ی جدید به‌دست آورید.

حل. الف) $۵/۴ \times ۱۰^{-۴}\text{m}$ ب) $۷۹۴/۱\text{V}$

۵. شکل زیر (الف) یک میله‌ی نارسانا به طول $L = ۶/۰۰\text{cm}$ و چگالی خطی بار یکنواخت $\lambda = +۳/۶۸\text{pC/m}$ را نشان می‌دهد (پتانسیل در بی‌نهایت صفر است). پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی P به فاصله‌ی $d = ۸/۰۰\text{cm}$ از مرکز میله و روی عمودمنصف میله چقدر است؟ **ب)** شکل (ب) میله‌ی مشابهی را نشان می‌دهد که نصف آن چگالی بار منفی و نصف دیگرش چگالی بار مثبت دارد. هر دو نیمه‌ی دارای چگالی خطی بار $۳/۶۸\text{pC/m}$ هستند. مقدار V را در P به‌دست آورید.



شکل ۳-۴۸ شکل سؤال ۵

حل. الف) $۲/۴۳ \times ۱۰^{-۲}\text{V}$ ب) صفر

۶. اگر پتانسیل الکتریکی توسط رابطه‌ی $V = ۲/۰ xyz^۲$ داده شود که در آن V بر حسب ولت و x، y و z بر حسب متر هستند. اندازه‌ی میدان الکتریکی در نقطه‌ی انتهایی بردار $(۳/۰\hat{i} - ۲/۰\hat{j} + ۴\hat{k})$ چقدر است؟

حل. $۱۵۰/۱\text{N/m}$

۷. دو الکترون در فاصله‌ی $۲/۰\text{cm}$ از هم ثابت شده‌اند. الکترون دیگری از بی‌نهایت پرتاب شده و درست وسط این دو الکترون در یک لحظه متوقف می‌شود. تندی اولیه‌ی الکترون چقدر

بوده است؟

حل. $318{,}2\mathrm{m/s}$

۸. محورهای دو حلقه‌ی سیمی نازک هر یک به شعاع R بر هم منطبق‌اند. اگر فاصله‌ی بین صفحات این دو حلقه برابر a و بارهای آنها به ترتیب q و $-q$ باشند، مطلوبست اختلاف پتانسیل بین مراکز این دو حلقه.

حل. $\dfrac{q}{2\pi\epsilon_0 R}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1+(\frac{a}{R})^2}}\right)$

۹. یک ریسمان مستقیم با طول بی‌نهایت با چگالی خطی بار $\lambda = 0{,}4\mu\mathrm{C/m}$ باردار شده است. اختلاف پتانسیل بین نقاط ۱ و ۲ را بیابید به شرطی که نقطه‌ی ۲ به اندازه‌ی $n = 2$ برابر دورتر از نقطه‌ی ۱ نسبت به ریسمان قرار داشته باشد.

حل. $\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln 2$

۱۰. مطلوب است محاسبه‌ی میدان و پتانسیل الکتریکی در مرکز یک نیم‌کره به شعاع R که با چگالی سطحی بار σ به صورت یکنواخت باردار شده است.

حل. $E = \dfrac{\sigma}{4\epsilon_0}$ و $v = \dfrac{\sigma R}{2\epsilon_0}$

۱۱. دیسکی بسیار نازک به شعاع R دارای چگالی سطحی یکنواخت بار σ است و در خلأ قرار دارد. میدان و پتانسیل الکتریکی را روی محور دیسک و به فاصله‌ی L از مرکز آن بیابید. عبارت به‌دست آمده را برای حالت $L \to 0$ و $R << L$ بررسی نمایید.

حل.

$$\left.\begin{array}{ll} L\to 0 & V=\dfrac{\sigma R}{2\epsilon_0}\\ L\gg R & V=\dfrac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 L}\end{array}\right\}\ ,\ V=\frac{\sigma L}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{1+(\frac{R}{L})^2}-1\right)$$

و

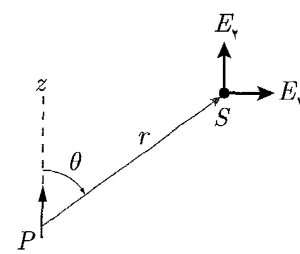
$$\left.\begin{array}{ll} L\to 0 & E=\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\\ L\gg R & E=\dfrac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 L^2}\end{array}\right\}\ ,\ E=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{R}{L})^2}}\right)$$

۱۲. مطلوب است بردار میدان الکتریکی که پتانسیل این میدان به صورت $\phi = \vec{a}.\vec{r}$ است. $\vec{a}$ برداری ثابت و $\vec{r}$ برداری است که از مبدأ به نقطه‌ای درون میدان وصل می‌شود.

حل. $-\vec{a}$

۱۳. یک دوقطبی نقطه‌ای با گشتاور الکتریکی $\vec{P}$ در مبدأ و در جهت مثبت محور z قرار داده شده است. مؤلفه‌های E_z و $E_\perp$ (در صفحه‌ی عمود بر محور z در نقطه‌ی S) از بردار میدان الکتریکی را بیابید. در چه نقطه‌ای $\vec{E}$ بر $\vec{P}$ عمود خواهد بود؟

حل. $E_z = \dfrac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1)$ و $E_\perp = \dfrac{3P\sin\theta\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$. پس در نقطه‌ی $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$، $\vec{E}\perp\vec{P}$.



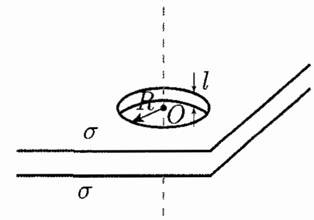
شکل ۳-۴۹ سؤال ۱۳

۱۴. یک دوقطبی نقطه‌ای با بردار گشتاور $\vec{p}$ در داخل میدان خارجی و یکنواخت $\vec{E}$ قرار داده شده است. به طوری که $\vec{p}\|\vec{E}_\circ$. در این شرایط یکی از سطوح هم‌پتانسیل که دوقطبی را در برمی‌گیرد، به صورت یک کره است. شعاع این کره را بیابید.

حل. $\left(\frac{p}{۴\pi\epsilon_\circ E_\circ}\right)^{۱/۳}$

۱۵. دو صفحه‌ی بی‌نهایت بزرگ به فاصله‌ی L از یکدیگر به ترتیب با چگالی سطحی σ و $-\sigma$ به صورت یکنواخت باردار شده‌اند (شکل زیر). دو سوراخ هم‌محور به شعاع R در آنها موجود است به طوری که $L << R$. اگر مبدأ o و محور x را مطابق شکل در نظر بگیریم، مطلوب است پتانسیل و مؤلفه‌ی E_x میدان الکتریکی روی محور سیستم به صورت تابعی از x. نمودار تقریبی $\phi(x)$ را رسم کنید.

حل. $-\frac{\sigma L R^۲}{۲\epsilon_\circ (R^۲+x^۲)^{۳/۲}}$



شکل ۳-۵۰

۱۶. پتانسیل الکتریکی $\phi(x,y)$ مربوط به میدان الکترواستاتیک $\vec{E}=ay\hat{i}+(ax+bz)\hat{j}+by\hat{k}$ را که a و b مقادیر ثابت و $\hat{i}$، $\hat{j}$ و $\hat{k}$ بردارهای یکه‌ی محورهای x، y و z باشند، بیابید.

حل. $-(axy+byz)+c$

۱۷. پتانسیل الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا تنها به مختصه‌ی x بستگی دارد و از رابطه‌ی $\phi=-ax^۳+b$ تبعیت می‌کند که a و b مقادیر ثابت هستند. مطلوب است تابع توزیع بار حجمی $\rho(x)$.

حل. $\rho(x)=۶a\epsilon_\circ x$

۱۸. پتانسیل الکتریکی در داخل یک توپ باردار فقط به فاصله‌ی r تا مرکز به صورت $\phi=ar^۲+b$ بستگی دارد که a و b مقادیر ثابت‌اند. توزیع بار حجمی $\rho(r)$ را در داخل توپ بیابید.

حل. $\rho(r)=-۶a\epsilon_\circ$

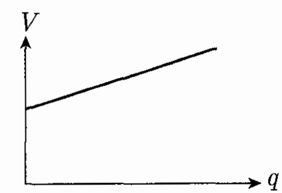
سؤال‌های المپیاد فصل ۳

۱. سؤال ۲۱، مرحله‌ی اول نهمین المپیاد فیزیک ایران

هنگامی که مقدار بار الکتریکی روی یک جسم فلزی را تغییر می‌دهیم، اختلاف پتانسیل آن نسبت به یک نقطه‌ی معین، تغییر می‌کند. اگر نمودار تغییرات اختلاف پتانسیل بر حسب بار الکتریکی مطابق شکل ۳ـ۵۱ باشد، مساحت زیر نمودار کدام کمیت است؟

الف) توان **ب)** انرژی **ج)** شدت جریان **د)** عکس مقاومت **ه)** ظرفیت

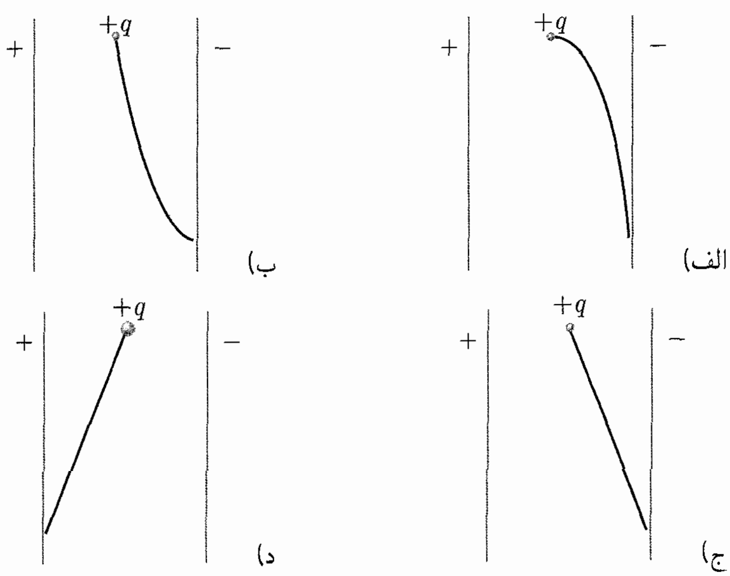
و) عکس ظرفیت



شکل ۳-۵۱ سؤال ۱

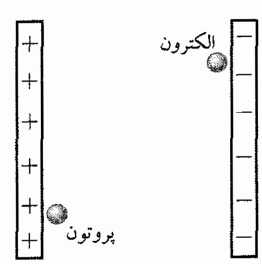
۲. سؤال ۴، مرحله‌ی اول دهمین المپیاد فیزیک ایران

دو صفحه‌ی رسانای موازی قائم را به اختلاف پتانسیل ثابتی وصل می‌کنیم. ذره‌ای به وزن w و بار $+q$ را مطابق شکل میان دو صفحه رها می‌کنیم. کدام‌یک از شکل‌های زیر مسیر حرکت ذره را در فضای میان دو صفحه نشان می‌دهد؟



۳. مسئله‌ی ۱۶، هفدهمین المپیاد فیزیک ایران

توسط بارهای نشان داده شده در شکل یک میدان الکتریکی یکنواخت درست کرده‌ایم. یک الکترون و یک پروتون در این میدان الکتریکی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کنند. کدام گزینه درباره‌ی انرژی‌های جنبشی این دو ذره وقتی که به صفحه‌ی روبه‌رو می‌رسند، درست است؟



شکل ۳-۵۲

الف) انرژی جنبشی پروتون بیشتر خواهد بود.

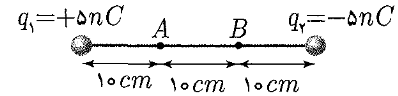
ب) انرژی جنبشی الکترون بیشتر خواهد بود.

ج) انرژی جنبشی هر دو مساوی است.

د) انرژی جنبشی این دو از نظر مقدار مساوی و از نظر علامت مخالف است.

۴. سؤال ۵، بخش مسائل پاسخ کوتاه مرحله‌ی اول هجدهمین المپیاد فیزیک ایران

پتانسیل الکتریکی در یک نقطه به فاصله‌ی r از بار نقطه‌ای q برابر است با $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$ در شکل زیر دو بار الکتریکی $q_1 = +5\mathrm{nC}$ و $q_2 = -5\mathrm{nC}$ در فاصله‌ی $30\,\mathrm{cm}$ از هم ثابت شده‌اند. یک ذره با جرم $90\,\mathrm{mg}$ و بار الکتریکی $+1\mathrm{nC}$ از حالت سکون روی خط راست از نقطه‌ی A به سمت نقطه‌ی B شروع به حرکت می‌کند. سرعت این ذره در نقطه‌ی B چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟

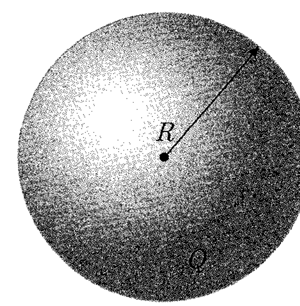


شکل ۳-۵۳ سؤال ۴

۵. مسئله‌ی ۳، مرحله‌ی اول نوزدهمین المپیاد فیزیک ایران

انرژی پتانسیل الکتریکی یک کره‌ی رسانا به شعاع R و بار Q، دور از بارهای دیگر، برابر با $\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$ است. اگر ۱۰۰۰ قطره‌ی جیوه کروی مشابه و با بار یکسان به هم بچسبند و یک قطره‌ی کروی بزرگ تشکیل دهند، نسبت انرژی الکتریکی قطره‌ی بزرگ، به مجموع انرژی الکتریکی قطره‌های اولیه چقدر خواهد بود؟ در محاسبه‌ی مجموع انرژی قطره‌های کوچک، فرض کنید این قطره‌ها از هم دورند.

الف) ۱ ب) ۱۰ ج) ۱۰۰ د) ۱۰۰۰



شکل ۳-۵۴ سؤال ۵

۶. مرحله‌ی دوم، بیستمین المپیاد فیزیک ایران

یک شتاب دهنده‌ی خطی از چند تونل پشت سر هم تشکیل شده است. پتانسیل الکتریکی درون هر تونل ثابت است اما بین هر دو تونل مجاور یک اختلاف پتانسیل هست، به این شکل که پتانسیل تونل‌های با شماره‌ی فرد $V(t)$ و پتانسیل تونل‌های با شماره‌ی زوج صفر است، که t زمان است. $V(t)$ چنان تنظیم می‌شود که ذرات باردار از هر تونلی که بیرون می‌روند، اختلاف پتانسیل آن تونل با تونل بعدی چنان باشد که سرعت ذرات در فاصله‌ی بین دو تونل زیاد شود. طول تونل n برابر l_n است، و از زمانی که ذرات باردار فاصله‌ی بین دو تونل مجاور را می‌پیمایند چشم می‌پوشیم. جرم هر ذره‌ی باردار m و بار هر ذره‌ی باردار q است. $V(t)$ یک تابع دوره‌ای با دوره‌ی $2T$ است، چنان که $V(t)$ بین $t = 0$ و $t = T$ برابر $(-V_0)$ و بین $t = T$ و $t = 2T$ برابر V_0 است. V_0 ثابت و (qV_0) مثبت است.

الف) فرض کنید که همه‌ی ذرات باردار در $t = \frac{T}{2}$ از تونل صفر بیرون می‌روند و سرعت آنها در این زمان v_0 است. فرض کنید طول تونل‌ها چنان است که برای هر n، ذرات در $t = nT + \frac{T}{2}$ از تونل n بیرون می‌روند، سرعت ذرات درون تونل n را بیابید.

ب) فرض کنید همه‌ی ذرات باردار در $t = \frac{T}{2}$ از تونل صفر بیرون می‌روند و سرعت آنها در این زمان v_0 است. l_nها را چنان بیابید که برای هر n ، ذرات در $t = nT + \frac{T}{2}$ از تونل n بیرون روند.

ج) در واقعیت سرعت اولیه‌ی همه‌ی ذرات یکسان نیست. ذره‌ای را در نظر بگیرید که انرژی جنبشی آن هنگام خروج از تونل صفر $\frac{m}{2}(v_0^2 + \epsilon)$ است، که ϵ نسبت به v_0^2 کوچک است. فرض کنید برای هر k با $k \leq n$، اختلاف زمان خروج این ذره از تونل k با زمان

خروج ذره‌ای که سرعت اولیه‌ی آن v_0 بوده کم‌تر از $\frac{T}{2}$ است. مدت حرکت این ذره در تونل k (با $k \le n$) را به‌دست آورید.

راهنمایی: اگر α کوچک باشد، $(1+\alpha)^\beta \simeq 1 + \beta\alpha$.

د) ذره‌ای را در نظر بگیرید که انرژی جنبشی آن هنگام خروج از تونل صفر $\frac{m}{2}(v_0^2 + \epsilon)$ است، که ϵ نسبت به v_0^2 کوچک است. شرطی برای ϵ بیابید که برای هر k با $k \le n$، اختلاف زمان خروج این ذره از تونل k با زمان خروج ذره‌ای که سرعت اولیه‌ی آن v_0 بوده کم‌تر از $\frac{T}{2}$ باشد. این شرط را بر حسب تابع f با تعریف زیر بنویسید.

$$f(n,s) = \frac{1}{1+s} + \frac{1}{2+s} + \cdots + \frac{1}{n+s}$$

۷. مسئله‌ی ۱۰، مرحله‌ی اول بیست‌ویکمین المپیاد فیزیک ایران

دو کره‌ی رسانا به شعاع‌های R_1 و R_2 را در نظر بگیرید که بار آنها به ترتیب Q_1 و Q_2 است. بارها هم‌علامت‌اند و مقدارشان با هم فرق می‌کند. این دو کره را به فاصله‌ی R از هم می‌گذاریم، که R خیلی بزرگ‌تر از R_1 و R_2 است. اندازه‌ی نیروی بین این دو F می‌شود. این دو کره را به هم تماس می‌دهیم و بعد دوباره آنها را به فاصله‌ی R از هم می‌گذاریم. اندازه‌ی نیرو F' می‌شود. کدام گزینه درست است؟

الف) حتماً $F' < F$

ب) حتماً $F' > F$

ج) حتماً $F' = F$

د) مواردی هست که $F' = F$ و مواردی هست که $F' \neq F$

۸. مسئله‌ی ۳۰، مرحله‌ی اول، بیست‌ویکمین المپیاد فیزیک ایران

ترازهای انرژی یک سیستم به شکل $n(n+1)E$ است، که E یک مقدار ثابت مثبت است و n باید صحیح و نامنفی باشد. گذارهایی بین این ترازها را در نظر بگیرید که در آنها انرژی آزاد شده کوچک‌تر از $11E$ است. تعداد این گذارها چند تا است؟ (دو گذار متمایز که انرژی آزاد شده در آنها یکسان است را دو گذار بگیرید نه یکی.)

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۷ ه) ۹ و) ۱۱

۹. سؤال ۱، بخش مسئله‌های کوتاه، مرحله‌ی اول بیست‌ویکمین المپیاد فیزیک ایران

در صفحه‌ی xy یک میدان الکتریکی یکنواخت هست. مختصه‌های نقطه‌های A، B و C و پتانسیل الکتریکی در هر کدام از این نقطه‌ها در زیر داده شده است.

$$A = \left| \begin{array}{l} x = 3\text{m} \\ y = 5\text{m} \end{array} \right. , \ V_A = 8\text{kV} \ , \quad B = \left| \begin{array}{l} x = 3\text{m} \\ y = 6\text{m} \end{array} \right. , \ V_B = 12\text{kV}$$

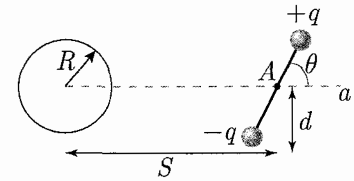
$$C = \left| \begin{array}{l} x = 1\text{m} \\ y = 1\text{m} \end{array} \right. , \ V_c = 4\text{kV}$$

پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی $\begin{vmatrix} x = -1\text{m} \\ y = 1\text{m} \end{vmatrix}$ چند کیلوولت است؟

۱۰. مسئله‌ی ۱، امتحان چهارم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۰)

یک دوقطبی الکتریکی با اندازه P، در فاصله‌ی s از مرکز یک کره‌ی فلزی به شعاع R قرارگرفته است. کره‌ی فلزی به زمین متصل است. نقطه‌ی A از دوقطبی به گونه‌ای در محل ثابت شده است که دوقطبی می‌تواند حول آن آزادانه و در صفحه‌ی شکل نوسان کند.

بسامد نوسانات کوچک دوقطبی حول محور خود را محاسبه کنید.



شکل ۳-۵۵

تذکر

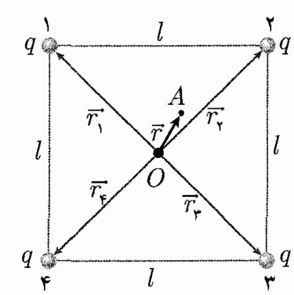
رابطه‌ی میان انرژی جنبشی دوقطبی و سرعت زاویه‌ای آن ($\dot{\theta}$) با ضریبی به نام لختی دورانی (I) داده می‌شود به گونه‌ای که داریم:

$$k = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

۱۱. مسئله‌ی ۷، امتحان اول المپیاد فیزیک (تابستان ۸۲)

چهار بار مشابه به اندازه‌ی q در چهار رأس یک مربع به طول هر ضلع l قرار دارند، مبدأ مختصات را مرکز این مربع در نظر بگیرید. می‌خواهیم پتانسیل حاصل از این بارها را در نقطه‌ای بسیار نزدیک به مبدأ به‌دست آوریم. این کمیت را بر حسب $\vec{r}$، بردار فاصله‌ی نقطه‌ی موردنظر از مبدأ تا مرتبه‌ی $\left(\frac{|\vec{r}|}{l}\right)^2$ به‌دست آورید. (فرض کنید $r << l$)

جواب را برای حالتی که $\vec{r}$ در صفحه‌ی مربع است با حالتی که $\vec{r}$ عمود بر سطح مربع است مقایسه کنید.



شکل ۳-۵۶ سؤال ۱۱

۱۲. مسئله‌ی ۶، امتحان سوم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۲)

بارهای q_1، q_2، $-q_1$ و $-q_2$ به ترتیب در نقطه‌های $\vec{o}$، $\vec{d}_1$، $\vec{r}$ و $(\vec{r} + \vec{d}_2)$ هستند.

الف) انرژی پتانسیل مجموعه را حساب کنید.

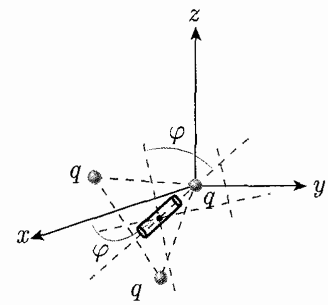
ب) انرژی پتانسیل این مجموعه منهای انرژی پتانسیل همین مجموعه در حالت $|r| \to \infty$ (بقیه‌ی کمیت‌ها ثابت) را حساب کنید.

ج) بگیرید $\vec{p}_1 = q_1 \vec{d}_1$، $\vec{p}_2 = q_2 \vec{d}_2$. $\vec{p}_1$ و $\vec{p}_2$ را ثابت بگیرید و $|d_1|$ و $|d_2|$ را به سمت صفر میل دهید. حد عبارت حاصل از (ب) را در این حالت حساب کنید.

۱۳. مسئله‌ی ۶، امتحان چهارم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۲)

سه ذره‌ی باردار با بارهای یکسان q را روی رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاعی ثابت نگه داشته‌ایم. طول هر ضلع مثلث a است.

الف) بار $-q$ را در محل تقاطع میانه‌ها، نقطه‌ی o، گذاشته‌ایم. لوله‌ای نیز در همین نقطه قرار می‌دهیم به طوری که بار $-q$ به راحتی بتواند در آن حرکت کند. این لوله با جهت مثبت محور z زاویه‌ی θ و تصویر آن روی صفحه‌ی xy با جهت مثبت محور x زاویه‌ی φ می‌سازد. به ازای چه مقادیری از θ و φ اگر بار $-q$ را کمی جابه‌جا نماییم، حول حالت تعادلش نوسان خواهد کرد؟ فرکانس نوسانات کوچک مربوط به این نوسان را محاسبه کنید.



شکل ۳-۵۷ سؤال ۱۳ــب

ب) آیا در جهت مثبت محور x به غیر از نقطه‌ی o نقطه‌ی تعادلی وجود دارد؟ توضیح دهید.

۱۴. مسئله‌ی ۴، امتحان دوم المپیاد فیزیک ایران (تابستان ۸۵)

در هر رأس مکعبی به ضلع a یک بار $+q$ هست. مرکز مکعب را مبدأ مختصه‌ها بگیرید.

الف) پتانسیل در مرکز مکعب را حساب کنید. پتانسیل ∞ را صفر بگیرید.

ب) نقطه‌ی (x, y, z) خیلی به مرکز مکعب نزدیک است. تابع پتانسیل را در این نقطه تا مرتبه‌ی ۲ (یعنی شامل جمله‌هایی از درجه‌ی دوم از x، y و z) به‌دست آورید.

ج) با استفاده از پتانسیل بالا، میدان الکتریکی را در نقطه‌ی (x, y, z) تا تقریب مرتبه‌ی ۱ به‌دست آورید.

۱۵. مسئله‌ی ۳، امتحان دوم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۴)

یک پوسته‌ی کروی به شعاع R و با بار یکنواخت سطحی را در نظر بگیرید. بار کل این پوسته Q است.

الف) نیروی وارد بر یک بخش کوچک این پوسته با مساحت ΔS را حساب کنید.

ب) کار نیروی الکتریکی در تغییر شعاع پوسته از $R_۱$ تا $R_۲$ را حساب کنید.

ج) انرژی پتانسیل الکتریکی این پوسته را حساب کنید. (**راهنمایی:** انرژی پتانسیل الکتریکی به ازای شعاع R، برابر است با کار نیروی الکتریکی از شعاع R تا شعاع ∞.)

این پوسته به خاطر کشش سطحی یک انرژی پتانسیل دیگر هم دارد که برابر است با $۲\tau S$، که S مساحت پوسته، و τ مقداری ثابت (کشش سطحی) است.

انرژی پتانسیل کل مجموع این انرژی پتانسیل و انرژی پتانسیل الکتریکی است. شعاع تعادل پوسته جایی است که انرژی پتانسیل کل کمینه می‌شود.

د) این شعاع را حساب کنید. انرژی پتانسیل کل در این حالت را هم حساب کنید. فرض کنید این پوسته به دو پوسته‌ی کروی یکسان تجزیه شود، چنان که بار هر پوسته نصف بار پوسته‌ی اولیه باشد.

ه) انرژی پتانسیل کل در حالت تعادل را حساب کنید. این انرژی را بر حسب انرژی پتانسیل کل در بخش (د) بنویسید.

۱۶. مسئله‌ی ۳، امتحان سوم المپیاد فیزیک ایران (تابستان ۸۵)

تعریف کشش سطحی به این شکل است: روی یک سطح یک پاره‌خط فرضی کوچک در نظر بگیرید. بخشی از سطح که در یک طرف این پاره‌خط است. به بخش دیگر نیرویی وارد می‌کند که بر سطح مماس و بر پاره‌خط عمود است و می‌خواهد آن بخش از سطح را به طرف پاره‌خط بکشد. مقدار این نیرو متناسب با طول پاره‌خط است. به ضریب تناسب کشش سطحی (τ) می‌گویند:

$$f = \tau l$$

که l طول پاره‌خط و f اندازه‌ی نیرو است.

یک سطح کروی باردار را در نظر بگیرید. جرم این سطح M و کشش سطحی آن مقدار ثابت τ است. برای همه‌ی نیروهای خواسته شده در مسأله کافی است مؤلفه‌ی شعاعی را به‌دست آورید.

الف) عرق‌چینی با نیم‌زاویه‌ی θ را در نظر بگیرید. (عرق‌چین ناحیه‌ای از سطح کره است که درون مخروطی است که رأس آن مرکز کره و نیم‌زاویه‌ی رأسش θ است.) شعاع کره را r بگیرید. به ازای θی کوچک، نیروی ناشی از کشش سطحی وارد بر این عرق‌چین (F_τ) را تا کم‌ترین مرتبه نسبت به θ به‌دست آورید.

ب) فرض کنید بار الکتریکی ثابت Q به طور یکنواخت روی این سطح پخش شده است. نیروی الکتریکی وارد بر همین عرق‌چین (F_e) را تا کم‌ترین مرتبه نسبت به θ به‌دست آورید.

ج) $r_\circ$ (شعاع تعادل این کره) را حساب کنید.

د) نیروی وارد بر عرق‌چین تقسیم بر جرم آن را تا کم‌ترین مرتبه نسبت به θ و تا مرتبه‌ی یک نسبت به $(r-r_\circ)$ حساب کنید و در این محاسبه Q را حذف کنید.

ه) فرض کنید مقداری بار الکتریکی به طور یکنواخت روی این سطح پخش شده است. چنان که پتانسیل الکتریکی این سطح (نسبت به بی‌نهایت) مقدار ثابت V است. نیروی الکتریکی وارد بر عرق‌چین (F'_e) را تا کم‌ترین مرتبه نسبت به θ به‌دست آورید.

و) $r'_\circ$ (شعاع تعادل در حالت پتانسیل ثابت) را حساب کنید.

ز) نیروی وارد بر عرق‌چین تقسیم بر جرم آن را تا کم‌ترین مرتبه نسبت به θ و تا مرتبه‌ی یک نسبت به $(r-r'_\circ)$ حساب کنید و در این محاسبه V را حذف کنید.

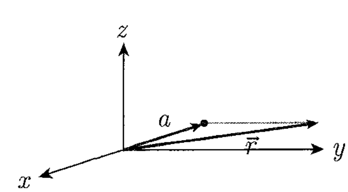
۱۷. مسئله‌ی ۴، امتحان دوم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۶)

می‌خواهیم پتانسیل الکتریکی حاصل از چهار بار نقطه‌ای روی رأس‌های یک مربع را دور از مربع تا مرتبه‌ی ۲ نسبت به طول ضلع مربع حساب کنیم.

الف) بار نقطه‌ای Q در نقطه‌ی a را در نظر بگیرید. پتانسیل الکتریکی این بار در نقطه‌ی r (نقطه‌ی مشاهده) را تا مرتبه‌ی ۲ نسبت به a بنویسید.

ب) شش نقطه روی محورهای x، y و z در نظر بگیرید که فاصله‌ی همه‌ی آنها از مبدأ r است. (x,y,z) مختصات دکارتی‌اند. مجموع پتانسیل این بار نقطه‌ای (تا مرتبه‌ی ۲ نسبت به a) در این نقطه‌ها را حساب کنید.

یک مربع را در نظر بگیرید که طول ضلع آن b است. مرکز این مربع مبدأ مختصات است و ضلع‌های آن موازی محورهای x و yاند.



شکل ۳-۵۸ سؤال ۱۷

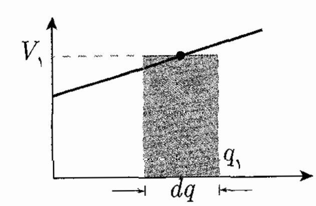
ج) پتانسیل الکتریکی حاصل از این مربع در نقطه‌ی $(r\hat{z})$ را تا مرتبه‌ی ۲ نسبت به b حساب کنید.

د) پتانسیل الکتریکی حاصل از این مربع در نقطه‌ی (x,y,z) را تا مرتبه‌ی ۲ نسبت به b حساب کنید.

پاسخ سؤالات المپیاد فصل ۳

۱. حل. □□■□

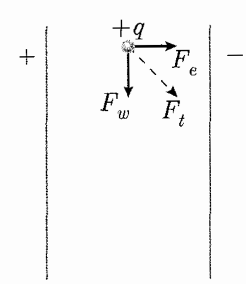
نمودار تغییرات اختلاف پتانسیل نسبت به یک نقطه‌ی معین بر حسب بار الکتریکی، نشان می‌دهد که هنگامی که بار q بر روی جسم فلزی قرار گرفته است، اختلاف پتانسیل آن از نقطه‌ای با پتانسیل مشخص مقدار V است. با تغییر بار الکتریکی جسم به اندازه‌ی Δq، مقدار اختلاف پتانسیل آن هم به اندازه‌ی ΔV تغییر می‌کند. این تغییر را می‌توان به این صورت تعبیر کرد: برای اضافه کردن بار Δq به جسم فلزی، می‌توان بار Δq را از نقطه‌ای که پتانسیل آن معلوم است به جسم منتقل کرد. اگر بار Δq را بسیار کوچک در نظر بگیریم و در نتیجه‌ی این فرض، فرض کنیم که پتانسیل جسم با افزایش dq به آن تغییر نمی‌کند، نتیجه می‌گیریم که برای انتقال بار dq از نقطه‌ی موردنظر به جسم به اندازه‌ی $V_1 dq$ انرژی برده است. یعنی عامل خارجی به این اندازه کار انجام داده است. این مقدار کار در جسم به افزایش انرژی الکتریکی می‌انجامد که همان مساحت هاشور خورده‌ی شکل زیر است. برای هر انتقال باری می‌توان از همین تعبیر استفاده کرد و هر بار به اندازه‌ی مساحت زیر نمودار به جسم فلزی انرژی الکتریکی افزوده می‌شود. بنابراین مساحت زیر نمودار با انرژی الکتریکی جسم برابر است. با توجه به واحدهای بار و اختلاف پتانسیل نیز می‌توان به نتیجه‌ی مشابه رسید. حاصل‌ضرب کمیت بار در اختلاف پتانسیل، طبق تعریف اختلاف پتانسیل (کار انجام شده برای انتقال بار بین دو نقطه) از جنس کار و در نتیجه معادل کمیت انرژی است.



شکل ۳-۵۹

۲. حل. □■□□

برای پیدا کردن درک درستی از مسیر حرکت ذره‌ی باردار وزن‌دار، نیروهای وارد بر آن را بررسی می‌کنیم. در شکل زیر دو نیروی وارد بر بار الکتریکی $+q$، یعنی نیروی الکتریکی و وزن نشان داده شده است. نیروی برآیند راستای مشخصی دارد و در غیاب سرعت اولیه‌ی ذره، مسیری جز راستای نیروی برآیند وجود ندارد. در این حالت بار از محل اولیه‌ی خود با سرعت صفر شتاب می‌گیرد و در مسیر برآیند نیروها حرکت می‌کند و سرعتش هر لحظه افزایش می‌یابد. بدیهی است که نیروی برآیند برای بار مثبت به سمت صفحه‌ی منفی است.



شکل ۳-۶۰

۳. حل. □■□□

مطابق شکل صورت مسئله، برای درست شدن میدان الکتریکی یکنواخت باید میزان بارهای منفی صفحه‌ی منفی با بارهای مثبت صفحه‌ی مثبت برابر باشد. در این صورت از آنجا که اندازه‌ی بار الکتریکی الکترون و پروتون برابر است، انرژی پتانسیل ناشی از حضور الکترون در مجاورت صفحه‌ی منفی با انرژی پتانسیل ناشی از حضور پروتون در مجاورت صفحه‌ی مثبت برابر خواهد بود. با انتقال هر یک از این دو ذره به صفحه‌ی روبه‌رویی‌شان، انرژی پتانسیل ذخیره شده در آنها به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود. اگر اختلاف پتانسیل میان دو صفحه ΔV باشد، انرژی پتانسیل الکتریکی اولیه ذخیره شده در الکترون و پروتون $\Delta V.e$ است که با انرژی جنبشی نهایی هرکدام از آنها برابر خواهد بود.

۴. حل. برای پیدا کردن سرعت ذره در نقطه‌ی موردنظر، باید تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی مربوط به آن را به‌دست آورد. چراکه انرژی پتانسیل با تبدیل به انرژی جنبشی به ذره سرعت می‌دهد. برای این کار باید پتانسیل الکتریکی را در نقاط ابتدا و انتهای حرکت ذره را به‌دست آورد. با توجه به رابطه‌ی مربوط به پتانسیل بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی r از آن، با برهم‌نهی پتانسیل دو بار نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$ داریم:

$$V_A = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q_۱}{r_۱} + \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q_۲}{r_۲}$$

که در آن $r_۱$ و $r_۲$ به ترتیب فاصله از بارهای $q_۱$ و $q_۲$ است، چراکه پتانسیل تنها به فاصله از محل قرارگیری بار و علامت بار بستگی دارد، و نیازی به مبداء مشترک نیست. با توجه به ابعاد داده شده داریم:

$$V_A = ۹ \times ۱۰^۹ \times \left(\frac{۵}{۰/۱} - \frac{۵}{۰/۲}\right) \times ۱۰^{-۹} = ۲۲۵\mathrm{V}$$

$$V_B = ۹ \times ۱۰^۹ \times \left(\frac{۵}{۰/۲} - \frac{۵}{۰/۱}\right) \times ۱۰^{-۹} = -۲۲۵\mathrm{V}$$

از آنجا که نقطه‌ی ابتدای حرکت ذره A و نقطه‌ی انتهایی آن B است، چیزی که مورد نیاز است اختلاف پتانسیل BA است، یعنی تفاوت پتانسیل از A تا B. داریم:

$$V_{BA} = V_B - V_A = -۴۵۰\mathrm{V}$$

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی نیز با توجه به تغییر پتانسیل به‌دست می‌آید:

$$U_{BA} = q_۰ V_{BA} = -۴۵۰ \times ۱ \times ۱۰^{-۹} = -۴/۵ \times ۱۰^{-۷}\mathrm{J}$$

افزایش انرژی جنبشی ذره برابر با میزان کاهش انرژی پتانسیل آن است:

$$|U_{Ba}| = \Delta k = \frac{۱}{۲}mv^۲ - \frac{۱}{۲}m \times ۰^۲$$

$$\Rightarrow v^۲ = \frac{۴/۵ \times ۱۰^{-۷}}{\frac{۹۰\times۱۰^{-۳}}{۲}} \cong ۰/۰۱ \Rightarrow v = ۰/۱\mathrm{m/s} = ۱۰\mathrm{cm/s}$$

۵. حل. □■□□

بار هر قطره‌ی جیوه کروی کوچک را q در نظر بگیرید. در این صورت قطره‌ی کروی بزرگ بار $۱۰۰۰q$ دارد. همچنین اگر حجم هر قطره‌ی کوچک V باشد، حجم قطره‌ی کروی بزرگ $۱۰۰۰\mathrm{V}$ خواهد بود. بنابراین می‌توانیم شعاع قطره‌ی کروی بزرگ (R) را بر حسب شعاع (r) قطرات ریز به‌دست آوریم.

$$۱۰۰۰ \times \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \Rightarrow R = ۱۰r$$

انرژی قطره‌ی کروی بزرگ $(U_۱)$ برابر است با:

$$U_۱ = \frac{۱}{۸\pi\epsilon_۰} \times \frac{Q^۲}{R}$$

همچنین مجموع انرژی قطرات کوچک $(U_۲)$:

$$U_۲ = ۱۰۰۰ \times \frac{۱}{۸\pi\epsilon_۰}\frac{q^۲}{r}$$

بدین ترتیب نسبت انرژی الکتریکی قطره‌ی بزرگ به مجموع انرژی الکتریکی قطرات اولیه برابر است با:

$$\frac{U_۱}{U_۲} = \frac{Q^۲/R}{۱۰۰۰q^۲/r} = \frac{Q^۲}{q^۲} \times \frac{r}{R} \times \frac{۱}{۱۰۰۰} = ۱۰۰۰^۲ \times \frac{۱}{۱۰} \times ۱۰۰۰^{-۱} = ۱۰۰$$

بنابراین گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۶. **حل.** الف) از آن‌جا که یک ذره در هنگام ورود به تونل اول، یک بار تغییر پتانسیل (از تونل صفر به تونل یک) و هنگام ورود به تونل دوم، دو بار تغییر پتانسیل می‌دهد (صفر به یک و یک به دو). پس در ورود به تونل nام، n با تغییر پتانسیل داده و با توجه به صورت سؤال که $V(t)$ طوری تنظیم می‌شود که تغییر پتانسیل در جهت افزایش سرعت ذره است، با توجه به اصل بقای انرژی داریم:

$$\frac{۱}{۲}mv_۰^۲ + n \times qV_۰ = \frac{۱}{۲}mv_n^۲$$
$$\to v_n = \left(v_۰^۲ + \frac{۲nq}{m}V_۰\right)^{۱/۲}$$

ب)

$$t_{n+۱} = (n+۱)T + \frac{T}{۲} \quad : \quad \text{زمانی که ذره از طول } n+۱ \text{ بیرون می‌رود}$$
$$t_n = nT + \frac{T}{۲} \quad : \quad \text{زمانی که ذره از طول } n \text{ بیرون می‌رود}$$
$$\Delta t = t_{n+۱} - t_n = T$$

یعنی هر ذره طول هر تونل را در مدت زمان T طی می‌کند و سرعت هر ذره در طول هر تونل ثابت است پس:

$$v_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta t_n} = \frac{l_n}{T} \to l_n = T \times v_n = T \times \left(v_۰^۲ + \frac{۲nq}{m}V_۰\right)^{۱/۲}$$

ج) با توجه به اصل بقای انرژی داریم:

$$\frac{۱}{۲}m(v_۰^۲ + \epsilon) + nqV_۰ = \frac{۱}{۲}mv_n'^۲$$
$$\to v_n' = \left(v_۰^۲ + \epsilon + \frac{۲nq}{m}v_۰\right)^{۱/۲}$$
$$v_n' = \frac{l_n}{\Delta t_n'}$$
$$\to \Delta t_n' = \frac{l_n}{v_n'} = T \times \left(\frac{v_۰^۲ + \frac{۲nq}{m}v_۰}{v_۰^۲ + \frac{۲nq}{m}V_۰ + \epsilon}\right)^{۱/۲}$$

$$= T \times \left(1 - \frac{\epsilon}{v_0^2 + \frac{2nq}{m}V_0 + \epsilon}\right)^{1/2}$$

$$\rightarrow \Delta t'_n = T\left(1 - \frac{\epsilon}{2(v_0^2 + \frac{2nq}{m}V_0 + \epsilon)}\right)$$

در اینجا اگر اختلاف زمان خروج این ذره از تونل k با زمان خروج ذره‌ای که سرعت اولیه‌ی آن v_0 بوده، کم تراز $T/2$ نباشد، آنگاه در هر مرحله تغییر پتانسیل، انرژی این ذره زیادتر نمی‌شود و باعث انحراف در حرکت ذره می‌شود.

د)

$$\text{اختلاف زمانی} = \Delta t_n - \Delta t'_n = \frac{\epsilon T}{2\left(v_0^2 + \frac{2nq}{m}V_0 + \epsilon\right)} = \Delta p_n$$

$$\Delta p_k \leq \frac{T}{2} \;\rightarrow\; \frac{\epsilon}{v_0^2 + \frac{2kq}{m}V_0 + \epsilon} < \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \epsilon < v_0^2 + \frac{2kq}{m}V_0 \;\rightarrow\; \epsilon < v_k^2$$

۷. حل. □□□■

با توجه به آنچه در متن گفته شد، با زیاد شدن فاصله‌ی مورد محاسبه ما از کره، می‌توانیم کره را به شکل باری متمرکز در مرکز در نظر بگیریم. در مورد نیروی بین دو کره‌ی رسانا، می‌توانیم از شعاع کوچک کره‌ها در مقابل R، فاصله‌ی آنها چشم‌پوشی کنیم و رابطه‌ی نیرو را به شکل زیر بنویسیم:

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{R^2}$$

با توجه به آنچه در بحث پتانسیل خواندیم، جریان بار از جسمی به جسم دیگر به اختلاف پتانسیل آنها بستگی دارد. با اتصال دو کره‌ی ۱ و ۲، بار از کره‌ی با پتانسیل بیشتر به سمت کره‌ی با پتانسیل کمتر جریان می‌یابد. مشخص است که اگر پتانسیل دو کره برابر باشد، انتقال باری صورت نمی‌گیرد و نیروی وارده بعد از تماس دو کره همان نیروی پیشین می‌شود. سایر موارد حالت کلی نابرابری دو نیرو را شامل می‌شود و در مورد کمتر یا بیشتر بودن نیروی بعدی (F') و نیروی قبلی (F) نظری نمی‌توان داد. بنابراین مواردی هست که $F' = F$ و مواردی هست که $F' \neq F$.

۸. حل. □□□■

انرژی آزاد شده در گذار بین ترازها، در واقع اختلاف انرژی هر کدام از آنهاست. برای پیدا کردن تعداد گذارهای واقع در بازه‌ی داده شده، دو انرژی دلخواه را که هر کدام به شکل $n(n+1)E$ هستند در نظر می‌گیریم و حالات ممکن را بررسی می‌کنیم:

$$0 < n(n+1)E - n'(n'+1)E < 11E$$

$$0 < n(n+1) - n'(n'+1) < 11$$

توجه کنید که اختلاف انرژی که همان انرژی آزاد شده است نمی‌تواند منفی باشد. حالات مختلف را برای برقراری این نامساوی بررسی می‌کنیم:

$n = ۰$ غرقابل قبول

$n = ۱ \Rightarrow n' = ۰ \quad n(n+۱) - n'(n'+۱) = ۲$

$$n = ۲ \Rightarrow \begin{cases} n' = ۰ & n(n+۱) - n'(n'+۱) = ۶ \\ n' = ۱ & n(n+۱) - n'(n'+۱) = ۴ \end{cases}$$

$$n = ۳ \Rightarrow \begin{cases} n' = ۱ & n(n+۱) - n'(n'+۱) = ۱۰ \\ n' = ۲ & n(n+۱) - n'(n'+۱) = ۶ \end{cases}$$

$n = ۴ \Rightarrow n' = ۳ \quad n(n+۱) - n'(n'+۱) = ۸$

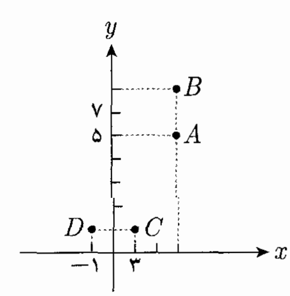
$n = ۵ \Rightarrow n' = ۴ \quad n(n+۱) - n'(n'+۱) = ۱۰$

$n = ۶$ غیرقابل قبول

$n > ۶$ غیرقابل قبول

همان‌طور که مشاهده می‌شود، تعداد حالات ممکن ۷ حالت است. بنابراین گزینه‌ی «د» صحیح است.

۹. **حل**. صفحه‌ی xy و نقاط A، B و C و نقطه‌ی خواسته شده در شکل زیر مشخص شده‌اند.



شکل ۳-۶۱

نقطه‌ی مورد سؤال که مختصات $\left| \begin{array}{l} x = -۱\text{m} \\ y = ۱\text{m} \end{array} \right.$ دارد را نقطه‌ی D می‌نامیم. از آنجا که میدان الکتریکی یکنواخت در صفحه‌ی xy واقع شده است، و می‌تواند در راستای x و y مؤلفه داشته باشد، اختلاف پتانسیل را بر حسب مؤلفه‌های میدان برای دوبه‌دوی نقاط (E_x, E_y) می‌نویسیم. داریم:

$$V_{AB} = V_B - V_A = E_y \cdot d$$

$$\rightarrow (۱۲ - ۸)\text{kV} = E_y \times (y_B - y_A) \Rightarrow E_y = \frac{۴\text{kV}}{۲\text{m}} = ۲ \times ۱۰^۳\text{N/C}$$

$$V_{CA} = V_A - V_C = E_x d_۱ + E_y d_۲$$

که $d_۱$ و $d_۲$ به ترتیب فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی A و C در راستای x و y به صورت جداگانه هستند. عبارت بالا با توجه به مفهوم پتانسیل که پیش‌تر گفته شد نوشته شده است. که اختلاف پتانسیل ΔV بین دو نقطه برابر با ضرب داخلی میدان الکتریکی در بردار جابه‌جایی میان آن دو است. یعنی:

$$\Delta V = \vec{E}.\vec{d} = E_x d_۱ + E_y d_۲$$

$$\Rightarrow ۴\text{kV} = E_x \times (۳ - ۱) + ۲ \times ۱۰^۳ \times (۵ - ۱)$$

$$\Rightarrow E_x = \frac{۴ \times ۱۰^۳ - ۸ \times ۱۰^۳}{۲} = -۲ \times ۱۰^۳\text{N/C}$$

با معلوم شدن میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j}$ می‌توان پتانسیل نقطه‌ی D را با توجه به یکی از نقاط A، B یا C پیدا کرد. برابری مؤلفه‌ی عمودی نقطه‌ی C و D، انتخاب آن را به عنوان مرجع مقایسه‌ی پتانسیل پیشنهاد می‌کند. داریم:

$$V_D - V_C = V_{CD} = E_x d' = -۲ \times ۱۰^{۳}(-۱ - ۱)$$
$$= +۴ \times ۱۰^{۳}\text{V} = ۴\text{kV} \Rightarrow V_D = ۸\text{kV}$$

۱۰. **حل.** طبق مثال آخر حل شده در قسمت بار تصویری، می‌دانیم بار تصویری نظیر یک دوقطبی الکتریکی با بردار دوقطبی $\vec{P}$ مقابل یک رسانا متصل به پتانسیل صفر به صورت زیر است. یک دوقطبی الکتریکی به صورت:

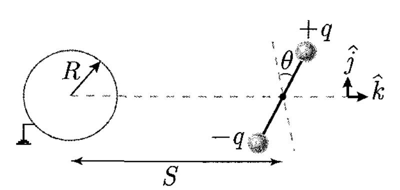
$$\vec{P} = \frac{R^{۳}}{(rP)^{۳}}(P_{۱۱}\hat{i} - P_{\perp}\hat{j})$$

که در آن

$$P_{۱۱} = P_{\sin\theta} \;\; , \;\; P_{\perp} = P_{\cos\theta}$$

واقع در محل $r'P = \dfrac{R^{۲}}{rP}$ و یک بار الکتریکی خالص به اندازه $q' = \dfrac{RP_{۱۱}}{(rP)^{۲}}$ که در همان محل قرار دارد.

هدف ما در سؤال آن است که فرکانس نوسانات کوچک را بیابیم. شکل زیر نمایش‌دهنده‌ی وضعیت کلی سؤال است.



شکل ۳-۶۲

برای به‌دست آوردن فرکانس نوسانات، راه‌های زیادی وجود دارد که ما با توجه به سادگی کارکردن با کمیت‌های اسکالر از روش انرژی در این سؤال استفاده خواهیم کرد.

فرض کنیم که مجموعه‌ی دوقطبی تصویری و بار تک تصویری (q', p') میدان الکتریکی $\vec{E}$ را در فضای بیرون کره در محل دوقطبی ایجاد کرده باشد، در این صورت از قسمت میدان الکتریکی به یاد دارید که انرژی پتانسیل دوقطبی $\vec{P}$ در این میدان در این میدان به صورت $U = -\vec{P}.\vec{E}$ است، بنابراین در اولین قدم باید میدان الکتریکی $\vec{E}$ را پیدا کنیم.

برای پیدا کردن میدان الکتریکی یک دوقطبی (اینجا دوقطبی $\vec{P'}$) می‌توان دو راه در پیش گرفت. راه اول تجزیه کردن دوقطبی به دو دوقطبی در راستاهای موازی و عمود بر بردار واصل از مرکز دوقطبی تا محل محاسبه‌ی میدان است که این کار را در فصل میدان انجام دادیم و میدان یک دوقطبی را روی عمودمنصف و روی محور دوقطبی به‌دست آوردیم.

روش دوم استفاده از پتانسیل الکتریکی است، با استفاده از پتانسیل الکتریکی، پتانسیل را در تمام نقاط فضا پیدا می‌کنیم و سپس با گرادیان‌گیری، میدان را در نقاط مختلف فضا به‌دست می‌آوریم.

پس از انجام محاسبات نسبتاً ساده‌ی ریاضی، به رابطه‌ی زیر برای میدان ناشی از یک دوقطبی با بردار دوقطبی $\vec{P}$ می‌رسیم:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\left(\frac{۳(\vec{P}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{P}}{r^{۳}}\right)$$

که در آن r بردار واصل از مرکز دوقطبی $\vec{P}$ به محلی است که میدان را در آن محاسبه می‌کنیم و $\hat{r}$ هم بردار یکه‌ی این بردار، در مورد سؤال مورد بررسی ما، دوقطبی تولید کننده‌ی میدان $\vec{P'}$ است، همچنین یک بار خالص هم در محل دوقطبی وجود دارد، میدان الکتریکی در محل دوقطبی $\vec{P}$، طبق رابطه‌ی بالا به صورت زیر خواهد بود.

$$\vec{E}(\theta)=\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\cdot\left[\frac{۱}{\left(rp-\frac{R^۲}{rP}\right)^۳}\left[۳(\hat{i}\cdot\vec{P'})-\vec{P'}\right]+\frac{q'}{\left(rp-\frac{R^۲}{rP}\right)^۲}\hat{i}\right]$$

که در آن کمیات در دستگاه مختصات دکارتی، برای راحتی نوشته شده‌اند، با جایگذاری کمیات صورت داریم:

$$\vec{E}(\theta)=\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}.\frac{۱}{\left(rP-\frac{R^۲}{rP}\right)^۳}\Big[\frac{R^۳}{(rP)^۳}\cdot\left[۳P_{۱۱}\hat{i}-(P_{۱۱}\hat{i}-P_{\perp}\hat{j})\right]$$
$$+\frac{RP_{۱۱}}{(rP)^۲}\cdot(rP-\frac{R^۲}{rP})\hat{i}\Big]$$

عبارت بالا را باز هم ساده‌تر می‌کنیم:

$$\vec{E}(\theta)=\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\cdot\frac{۱}{\left(rP-\frac{R^۲}{rP}\right)^۳}\cdot\frac{R^۳}{(rP)^۳}$$
$$\left[\hat{i}\Big(۲P\sin\theta+\frac{rP}{R^۲}(rP-\frac{R^۲}{rP})P\sin\theta\Big)+P\cos\theta\hat{j}\right]$$

توجه کنید که در عبارت‌های بالا منظور از $\vec{E}(\theta)$، میدان الکتریکی در محل دوقطبی $\vec{P}$ است، هنگامی که این دوقطبی طبق شکل صورت سؤال، زاویه‌ای برابر θ دارد، چرا که بار تصویری و در نتیجه میدان ایجاد شده تابع θ هستند. حالا که $\vec{E}(\theta)$ را محاسبه کرده‌ایم، آماده‌ایم تا به سراغ محاسبه انرژی برویم:

$$U=-\vec{P}\cdot\vec{E}(\theta)=-(P\sin\theta\hat{i}+P\cos\theta\hat{j})\cdot\left(\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\cdot\frac{۱}{\left(rP-\frac{R^۲}{rP}\right)^۳}\cdot\frac{R^۳}{(rP)^۳}\right)$$
$$\left[\Big(۲+\frac{rP}{R^۲}(rP-\frac{R^۲}{rP})\Big)P\sin\theta\hat{i}+P\cos\theta\hat{j}\right]$$

با انجام ضرب داخلی داریم:

$$U=-\frac{R^۳}{۴\pi\epsilon_۰(rP^۲-R^۲)^۳}\left[\Big(۲+(\frac{rP^۲}{R^۲}-۱)\Big)P^۲\sin^۲\theta+P۲\cos^۲\theta\right]$$

اگر شرط $\theta \ll ۱$ را اعمال کنیم، انرژی پتانسیل به صورت زیر خواهد بود.

$$\sin\theta\simeq\theta\ ,\ \cos\theta\simeq ۱$$
$$\rightarrow U=-\frac{R^۳P^۲}{۳\pi\epsilon_۰(rP^۲-R^۲)^۳}\left[\Big(۲+(\frac{rP^۲}{R^۲}-۱)\Big)\theta^۲+۱\right]$$

برای محاسبه‌ی فرکانس نوسانات دقت می‌کنیم که تنها قسمتی از انرژی پتانسیل که تابع θ باشد برای ما مهم است، این قسمت را U_θ می‌نامیم، داریم:

$$U_\theta = \frac{-R^۳P^۲}{۴\pi\epsilon_\circ(rP^۲-R^۲)^۳}\Big(۲+\big(\frac{rP^۲}{R^۲}-۱\big)\Big)\theta^۲$$

اگر از علامت این انرژی صرف‌نظر کنیم و آن را با انرژی پتانسیل یک فنر پیچشی مقایسه کنیم، خواهیم داشت

$$U_{\text{فنر پیچشی}} = \frac{۱}{۲}K\theta^۲$$

و فرکانس نوسان چنین فنری در صورتی که متصل به جرمی با ممان اینرسی (گشتاورماند) I باشد، برابر با

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

خواهد بود. با مقایسه رابطه‌های انرژی برای فنر دوقطبی داریم:

$$K_{\text{دوقطبی}} = \frac{R^۳P^۲}{۲\pi\epsilon_\circ(rP^۲-R^۲)^۳}\Big(۲+\big(\frac{rP^۲}{R^۲}-۱\big)\Big)$$

و اگر فرض کنیم که گشتاورماند این دوقطبی برابر با I است (این کمیت در صورت سؤال داده نشده ولی بدون در نظر گرفتن آن حل سؤال غیرممکن است):

$$\omega_{\text{دوقطبی}} = \sqrt{\frac{K_{\text{دوقطبی}}}{I}}$$

۱۱. **حل**. چهار بار واقع در رأس مربع و بردارهای مکان مربوطه و نیز نقطه‌ی A در محل $\vec{r}$، در شکل نمایش داده شده‌اند. برای پیدا کردن پتانسیل حاصل از بارها در نقطه‌ی A باید پتانسیل حاصل از هر بار را به طور جداگانه جمع جبری کنیم:

$$V = \sum_{i=۱}^{۴}\frac{kq}{|\vec{r}_i-\vec{r}|} = \sum_{i=۱}^{۴}kq\big((\vec{r}_i-\vec{r}).(\vec{r}_i-\vec{r})\big)^{-۱/۲}$$
$$= kq\sum_{i=۱}^{۴}(r_i^۲+r^۲-۲\vec{r}_i.\vec{r})^{-۱/۲} \quad , \quad l=\sqrt{۲}r_i$$
$$V = kq\frac{\sqrt{۲}}{l}\sum_{i=۱}^{۴}\left(۱-\frac{۴\vec{r}_i.\vec{r}}{l^۲}+\frac{۲r^۲}{l^۲}\right)^{-۱/۲}$$

جمله‌ی آخر را تا مرتبه‌ی دوم نسبت به $\frac{r}{l}$ بسط تیلور می‌دهیم:

$$V \simeq \frac{\sqrt{۲}kq}{l}\sum_{i=۱}^{۴}\left(۱+\frac{۲\vec{r}_i\cdot\vec{r}}{l^۲}-\frac{r^۲}{l^۲}-\frac{۳}{۸}\frac{(۴\vec{r}_i.\vec{r})^۲}{l^۴}\right)$$
$$= \frac{۲\sqrt{۲}kq}{l}\left(۲-\frac{r^۲}{l^۲}-۳\sum_{i=۱}^{۴}\big(\frac{\vec{r}_i.\vec{r}}{l^۲}\big)^۲\right)$$

بردار $\vec{r}$ را به صورت مؤلفه‌ای می‌نویسیم. تمامی بردارهای $\vec{r}_1$ تا $\vec{r}_4$ شامل مؤلفه‌های x و y هستند و در جمله‌ی آخر عبارت در بردار $\vec{r}$ ضرب داخلی می‌شوند. پس مؤلفه‌ی z بردار $\vec{r}$ در محاسبه‌ی عبارت تأثیری ندارد. ضرب داخلی دو بردار نسبت به دوران ثابت است. با استفاده از این نکته می‌توانیم برای ساده‌تر کردن ضرب داخلی بردارها، تمامی آنها را 45° بچرخانیم تا بردارهای به‌دست آمده هر کدام دو مؤلفه‌ی صفر داشته باشند و پاسخ مربوطه سریع‌تر به‌دست آید. برای این کار بردارها را 45° در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا بردارهای $\vec{r}'_i$ و $\vec{r}'$ به‌دست آیند. داریم:

$$\begin{cases}\vec{r}' = (x', y', z') \\ \vec{r}'_1 = (l/\sqrt{2}, 0, 0) \\ \vec{r}'_2 = (0, l/\sqrt{2}, 0) \\ \vec{r}'_3 = (-l/\sqrt{2}, 0, 0) \\ \vec{r}'_4 = (0, -l/\sqrt{2}, 0)\end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\vec{r}_i.\vec{r}}{l^2}\right)^2 = \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\vec{r}'_i\vec{r}'}{l^2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2l^2}(x'^2 + y'^2 + x'^2 + y'^2) = \frac{x'^2 + y'^2}{l^2}$$

ازآنجاکه با دوران محورهای مختصات حول محور z، اندازه‌ی $x'^2 + y'^2$ ثابت می‌ماند، داریم:

$$\frac{x'^2 + y'^2}{l^2} = \frac{x^2 + y^2}{l^2} = \frac{|\vec{r}' \times \hat{z}'|^2}{l^2}$$

بنابراین پاسخ برای پتانسیل حاصل از بارها در نقطه‌ی A تا مرتبه‌ی دوم نسبت به $\frac{|\vec{r}|}{l}$ به ترتیب زیر است:

$$V = \frac{2\sqrt{2}kq}{l}\left(2 - \frac{2r^2}{l^2} - \frac{3|\vec{r} \times \hat{z}|^2}{l^2}\right)$$

در راستای $\hat{z}$، که همان راستای عمود بر سطح مربع است، با توجه به رابطه، باا فزایش $\vec{z}$ پتانسیل کاهش می‌یابد (جمله‌ی $|\vec{r} \times \hat{z}|$). در صفحه‌ی مربع پیش‌روی روی بردار $\vec{r}$ کاهش پتانسیل روی می‌دهد. بنابراین برای بار آزمون مثبت تعادل ناپایدار است (چرا که پتانسیل با هر گونه افزایشی در $\vec{r}$ کاهش می‌یابد).

۱۲. **حل.** الف) انرژی پتانسیل مجموعه از مجموع انرژی‌های پتانسیل ناشی از اثر هر یک از جفت بارها بر هم به‌دست می‌آید. داریم:

$$U = -\frac{kq_1^2}{d_1} - \frac{kq_2^2}{d_2} + \frac{kq_1q_2}{r} + \frac{kq_1q_2}{|\vec{r} - \vec{d}_1 + \vec{d}_2|} - \frac{kq_1q_2}{|\vec{r} - \vec{d}_1|} - \frac{kq_1q_2}{|\vec{r} + \vec{d}_2|}$$

ب) حالت حدی انرژی پتانسیل (در $|\vec{r}| \to \infty$) جملات شامل $\frac{1}{r}$ را در مرتبه‌ی اول حذف می‌کند و تنها جملات اول و دوم باقی می‌مانند. در نتیجه انرژی پتانسیل در حالت حدی برابر می‌شود با:

$$U_\infty = -\frac{kq_1^2}{d_1} - \frac{kq_2^2}{d_2}$$

اختلاف این دو مقدار برابر است با:

$$\Delta U = U - U_\infty = \left(-\frac{kq_1^2}{d_1} - \frac{kq_2^2}{d_2} + \frac{kq_1q_2}{r} + \frac{kq_1q_2}{|\vec{r} - \vec{d}_1 + \vec{d}_2|} \right.$$
$$\left. - \frac{kq_1q_2}{|\vec{r} - \vec{d}_1|} - \frac{kq_1q_2}{|\vec{r} + \vec{d}_2|} \right) - \left(-\frac{kq_1^2}{d_1} - \frac{kq_2^2}{d_2} \right)$$
$$= kq_1q_2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{d}_1 + \vec{d}_2|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{d}_1|} - \frac{1}{|\vec{r} + \vec{d}_2|} \right)$$

ج) جملات را تا مرتبه‌ی $d_1 d_2$ حفظ می‌کنیم. جملات به‌دست آمده را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{d}_1 + \vec{d}_2|} = \left(r^2 + |\vec{d}_2 - \vec{d}_1|^2 + 2\vec{r}.(\vec{d}_2 - \vec{d}_1)\right)^{-1/2}$$
$$= (r^2)^{-1/2} \left(1 + \frac{|d_2 - d_1|^2}{r^2} + \frac{2\vec{r}.(\vec{d}_2 - \vec{d}_1)}{r^2} \right)^{-1/2}$$
$$\simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{|\vec{d}_2 - \vec{d}_1|^2}{2r^2} - \frac{\vec{r}.(\vec{d}_2 - \vec{d}_1)}{r^2} + \frac{3\left(\vec{r}.(\vec{d}_2 - \vec{d}_1)\right)^2}{2r^4} \right)$$

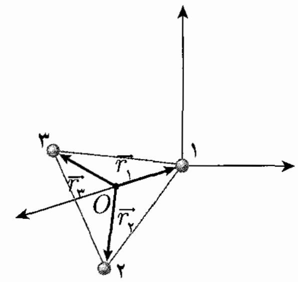
برای یافتن جملات دیگر معادله‌ی نهایی به‌دست آمده در مورد (ب)، به نوبت d_1 و d_2 را در عبارت اخیر صفر قرار می‌دهیم:

$$-\frac{1}{|\vec{r} - \vec{d}_1|} = -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{d_1^2}{2r^2} + \frac{\vec{r}.\vec{d}_1}{r^2} + \frac{3(\vec{r}.\vec{d}_1)^2}{2r^4} \right)$$
$$-\frac{1}{|\vec{r} - \vec{d}_2|} = -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{d_2^2}{2r^2} - \frac{\vec{r}.\vec{d}_2}{r^2} + \frac{3(\vec{r}.\vec{d}_2)^2}{2r^4} \right)$$

بنابراین اختلاف انرژی پتانسیل مجموعه در دو حالت هنگامی که $|\vec{d}_1|$ و $|\vec{d}_2|$ به سمت صفر میل می‌کنند. به ترتیب زیر به‌دست می‌آید.

$$\Delta U = \frac{kq_1q_2}{r}\Big(1 + \Big(\frac{1 - |\vec{d}_2 - \vec{d}_1|^2}{2r^2} - \frac{\vec{r}.(\vec{d}_2 - \vec{d}_1)}{r^2} + \frac{3\left(\vec{r}.(\vec{d}_2 - \vec{d}_1)\right)^2}{2r^4} \Big)$$
$$+ \left(+1 + \frac{d_1^2}{2r^2} - \frac{\vec{r}.\vec{d}_1}{r^2} - \frac{3(\vec{r}.\vec{d}_1)^2}{2r^4} \right)$$
$$+ \Big(-1 + \frac{d_2^2}{2r^2} + \frac{\vec{r}.\vec{d}_2}{r^2} - \frac{3(\vec{r}.\vec{d}_2)^2}{2r^4} \Big)\Big)$$
$$= \frac{kq_1q_2}{r} \left(\frac{\vec{d}_2.\vec{d}_1}{r^2} - 3\frac{(\vec{r}.\vec{d}_1)(\vec{r}.\vec{d}_2)}{r^4} \right)$$
$$= \frac{k}{r^3}\left(\vec{P}_2.\vec{P}_1 - 3(\hat{r}.\vec{P}_1)(\hat{r}.\vec{P}_2)\right)$$

۱۳. حل. الف) مکان بارهای ۱، ۲ و ۳ را نسبت به نقطه‌ی o با $\vec{r}_۱$، $\vec{r}_۲$ و $\vec{r}_۳$ نمایش می‌دهیم. بار $-q$ که در نقطه‌ی o قرار دارد، به اندازه‌ی $\delta\vec{r}$ جابه‌جا شده است. می‌خواهیم پتانسیل را در محل δr محاسبه کنیم:



شکل ۳-۶۳

$$V=\frac{q}{۴\pi\epsilon_\circ}\sum_{i=۱}^{۳}\frac{۱}{|\vec{r}_i-\delta\vec{r}|}=\frac{q}{۴\pi\epsilon_\circ}\sum_{i=۱}^{۳}\frac{۱}{\sqrt{r_i^۲+\delta r^۲-۲\vec{r}_i.\delta\vec{r}}}$$
$$=\frac{q}{۴\pi\epsilon_\circ}\sum\frac{۱}{r_i}\left(۱+(\frac{\delta r}{r_i})^۲-\frac{۲\vec{r}_i.\delta\vec{r}}{r_i^۲}\right)^{-۱/۲}$$

اندازه‌ی $r_۱$، $r_۲$ و $r_۳$ یکسان است و این مقدار برابر محل برخورد میانه‌ها تا هر رأس است.

$$|\vec{r}_۱|=|\vec{r}_۲|=|\vec{r}_۳|=r=\frac{a}{\sqrt{۳}}$$

پتانسیل را تا مرتبه‌ی دوم نسبت به $\frac{\delta r}{r}$ محاسبه می‌کنیم:

$$V=\frac{q}{۴\pi\epsilon_\circ r}\sum_{i=۱}^{۳}\left(۱-\frac{۱}{۲}(\frac{\delta r}{r_i})^۲+\frac{\vec{r}_i.\delta\vec{r}}{r_i}+\frac{۳}{۲}\frac{(\vec{r}_i.\delta\vec{r})^۲}{r_i^۴}\right)$$
$$=\frac{q}{۴\pi\epsilon_\circ r}\left(۳-\frac{۳}{۲}(\frac{\delta r}{r})^۲+\frac{\delta\vec{r}.\sum\vec{r}_i}{r}+\frac{۳}{۲r^۴}\sum_{i=۱}^{۳}(\vec{r}_i.\delta\vec{r})^۲\right)$$

بنا به تقارن $\sum\vec{r}_i$ صفر است. پس جمله‌ی سوم صفر است. جمله‌ی نهایی را محاسبه می‌کنیم:

$$\delta\vec{r}=(\cos\theta\hat{k}+\sin\theta\sin\varphi\hat{j}+\sin\theta\cos\varphi\hat{i})\delta r$$
$$\vec{r}_۱=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}a\hat{i}$$
$$\vec{r}_۲=\frac{\sqrt{۳}}{۶}a\hat{i}+\frac{a}{۲}\hat{j}$$
$$\vec{r}_۳=\frac{\sqrt{۳}}{۶}a\hat{i}-\frac{a}{۲}\hat{j}$$
$$\Rightarrow\sum_{i=۱}^{۳}(\vec{r}_i.\delta\vec{r})^۲=a^۲\frac{\sin^۲\theta}{۲}$$
$$\Rightarrow V=\frac{q\sqrt{۳}}{۴\pi\epsilon_\circ a}\left(۳-\frac{q}{۲}\frac{(\delta r)^۲}{a^۲}+\frac{۲۷(\delta r)^۲}{۴a^۲}\sin^۲\theta\right)$$
$$=\frac{q\sqrt{۳}}{۴\pi\epsilon_\circ a}\left(۳-\frac{q}{۲}(\frac{\delta r}{a})^۲(۱-\frac{۳}{۲}\sin^۲\theta)\right)$$

همان‌طور که می‌بینید، پتانسیل تنها به δ_r و θ بستگی دارد و مستقل از ϕ است. بنابراین برای پیدا کردن تابع نیرو در هر θی مفروض می‌توان از رابطه‌ی پتانسیل نسبت به r مشتق جزئی گرفت. لازم به ذکر است که با توجه به دلخواه بودن انتخاب دستگاه مختصات، می‌توان

طوری این کار را انجام داد که δr همان r باشد. حاصل این مشتق جزئی نیرو و در راستای r خواهد بود.

$$\vec{F} = -(-q)\vec{\nabla}V$$
$$\vec{F}_r = q \cdot \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\sqrt{۳}q^۲\delta r}{۴\pi\epsilon_\circ a^۳}\left(۱ - \frac{۳}{۲}\sin^۲\theta\right)$$

اگر به ازای $\delta r > \circ$ مقدار فوق منفی باشد، تعادل پایدار است. پس:

$$۱ - \frac{۳}{۲}\sin^۲\theta > \circ \Rightarrow \sin^۲\theta < \frac{۲}{۳} \Rightarrow \begin{cases} \circ \le \theta < \sin^{-۱}\sqrt{\frac{۲}{۳}} \\ \pi\theta > \pi - \sin^{-۱}\sqrt{\frac{۲}{۳}} \end{cases}$$

همان‌طور که در رابطه‌ی به‌دست آمده برای نیرو مشاهده می‌شود، می‌توان این رابطه را برای یک θی مفروض به صورت $F = K_\theta \delta r$ نوشت که در آن K_θ در حکم ثابت یک فنر فرضی معادل در زاویه‌ی θ است. به این صورت، از دانسته‌های قبلی از مبحث دینامیک، می‌توانیم فرکانس طبیعی این سیستم را در زاویه‌ی θ با رابطه‌ی $\omega = \sqrt{\frac{K_\theta}{m}}$ به‌دست آوریم، که در آن m جرم ذره‌ی باردار فرض شده است.

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{۳}q^۲(۱ - ۳/۲\sin^۲\theta)}{۴\pi\epsilon_\circ m a^۳}}$$

فرکانس نوسانات نیز تابع ω است و عبارت است از:

$$f = \frac{\omega}{۲\pi} \Rightarrow f = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{\sqrt{۳}q^۲(۱ - ۳/۲\sin^۲\theta)}{۴\pi\epsilon_\circ m a^۳}}$$

ب) فرض کنیم که در نقطه‌ای غیر از نقطه‌ی o روی محور x، تعادل برقرار باشد. به این صورت، برای هر θ و φ که نوسان در آنها انجام می‌شود، بار $-q$ باید در حین نوسان از این نقطه‌ی مفروض بگذرد. در صورتی که قرار بر نوسان در یک راستا باشد، باید نیرو در تمام لحظات نوسان هم‌راستای مسیر نوسان باشد. اما در صورت وجود نقطه‌ی تعادل دیگری روی محور x هنگام عبور از این نقطه‌ی مفروض یک نیرو در راستای محور x به بار وارد خواهد شد که مخالف فرض است.

۱۴. **حل.** الف) پتانسیل ناشی از بار نقطه‌ای، $\frac{kq}{r}$ می‌باشد و از آنجا که فاصله‌ی همه‌ی نقاط از مرکز مکعب برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ می‌باشد، پس پتانسیل ناشی از ۸ بار در مرکز مکعب برابر است با: (با توجه به اصل برهم‌نهی)

$$V = ۸ \times \frac{kq}{\sqrt{۳/۲}a} = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}\frac{kq}{a}$$

در این قسمت نقطه‌ای با مختصات دلخواه (x,y,z) را در نظر می‌گیریم و بعد پتانسیل را در آن محاسبه می‌کنیم و بعد شرط نزدیک بودن نقطه به مرکز مربع را اعمال می‌کنیم.

$$V=\sum_{i=۱}^{۸}\frac{kq}{r_i}$$

حال به طور مثال بار نقطه‌ای به مختصات $(a/۲,a/۲,a/۲)$ را در نظرگرفته و پتانسیل آن را در (x,y,z) حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
V=kq\quad r&=\left[(x-\frac{a}{۲})^۲+(y-\frac{a}{۲})^۲+(z-\frac{a}{۲})^۲\right]^{۱/۲}\\
&=\left[(x^۲+y^۲+z^۲)-a(x+y+z)+\frac{۳a^۲}{۴}\right]^{۱/۲}\\
&=\frac{\sqrt{۳}a}{۲}\left[۱+\frac{(x^۲+y^۲+z^۲)-a(x+y+z)}{\frac{۳a^۲}{۴}}\right]^{۱/۲}
\end{aligned}$$

$$V=\frac{kq}{r}=kq\times\frac{۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a}\left[۱+\frac{(x^۲+y^۲+z^۲)-a(x+y+z)}{\frac{۳a^۲}{۴}}\right]^{-۱/۲}$$

با توجه به هم‌ارزی $(۱+a)^n\sim ۱+na\ ,\ a\to ۰$

$$V=\frac{kq}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a}\left[۱-\frac{(x^۲+y^۲+z^۲)-a(x+y+z)}{\frac{۳a^۲}{۲}}\right]$$

برای بقیه‌ی بارها نیز، تفاوت در فرمول بالا، در ضرایب x، y و z ظاهر می‌شود به طوری که همه‌ی حالت‌های مثبت و منفی ضرایب x، y و z در آن ظاهر می‌شود (جمعاً ۸ حالت) و وقتی این پتانسیل‌ها را با هم جمع می‌کنیم، ضرایب x، y و z با هم ساده شده و عبارت نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$V_{\text{کل در }(x,y,z)}=\frac{kq}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a}\left[۱-\frac{x^۲+y^۲+z^۲}{\frac{۳a^۲}{۲}}\right]\times ۸$$

ج)

$$\begin{aligned}
\nabla\vec{V}=-\vec{E}\ &\to\ \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\\
&=-(E_x\vec{i}+E_y\vec{j}+E_z\hat{k})\\
\to\ \frac{\partial V}{\partial x}&=-E_x\ \to\ E_x=\frac{۶۴kqx}{۳\sqrt{۳}a^۳}\\
E_y&=\frac{۶۴kqy}{۳\sqrt{۳}a^۳}\ ,\ \ E_z=\frac{۶۴kqz}{۳\sqrt{۳}a^۳}
\end{aligned}$$

۱۵. **حل**. الف) با مراجعه به جواب مسئله‌ی ۳ امتحان المپیاد فیزیک ایران در تابستان ۸۵، این قسمت حل شده و حاصل برابر است با:

$$F=۲\pi k\rho q=۲\pi k\times\frac{Q}{۴\pi R^۲}\times Q\times\frac{\Delta S}{۴\pi R^۲}=\frac{kQ^۲}{۸\pi R^۴}\Delta S$$

ب) در اینجا در واقع ما هر المان را در نظر می‌گیریم و با توجه به نیروی وارد بر آن و جابه‌جایی آن در راستای شعاع از شعاع $R_۱$ تا $R_۲$، کار انجام شده روی هر المان را حساب می‌کنیم:

$$W = \int \vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

$$\rightarrow\ W = \frac{kQ^۲}{۸\pi}\int \frac{R^۲}{R^۴}\sin\phi d\theta d\phi dR$$

$$= \frac{kQ^۲}{۸\pi}\times ۲\pi\times ۲\times\left(\frac{۱}{R_۱}-\frac{۱}{R_۲}\right)$$

$$= \frac{kQ^۲}{۲}\left(\frac{۱}{R_۲}-\frac{۱}{R_۲}\right)$$

ج) طبق راهنمایی، اگر $R_۲\rightarrow\infty$، آنگاه پتانسیل پوسته برابر است با:

$$\frac{kQ^۲}{۲R_۱}$$

د) $$U_{\text{کل}} = U_e + U_\tau = \frac{kQ^۲}{۲R} + ۲\tau\times ۴\pi R^۲$$

برای پیدا کردن شعاعی که در آن $U_{\text{کل}}$ کمینه است، از آن بر حسب R مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$U' = -\frac{kQ^۲}{۲R^۲} + ۱۶\pi\tau R$$

$$\text{اگر}\ U' = ۰\ \rightarrow\ R_۰ = \sqrt[۳]{\frac{kQ^۲}{۳۲\pi\tau}}$$

$$R = R_۰\ \text{اگر}\ \rightarrow\ U = \left(\frac{kQ^۲}{۲}+\frac{kQ^۲}{۴}\right)/R_۰ = \frac{۳kQ^۲}{۴R_۰}$$

ه) اگر نیروی وارد بر جزء ΔS از طرف بقیه‌ی سطح در حالت نیم‌کره را بخواهیم

$$F = \sqrt{۲}\pi k\rho q$$

و حال برای محاسبه‌ی انرژی، در انتگرال قسمت (ب)، ϕ از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر می‌کند:

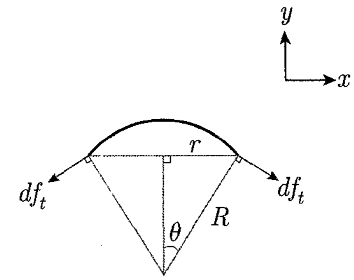
$$\frac{\sqrt{۲}}{۸}\frac{kQ^۲}{R} = U_۲$$

حال چون دو نیم‌کره داریم:

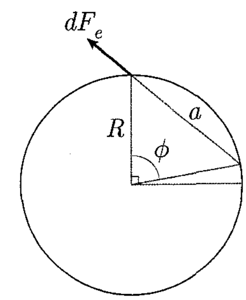
$$U = ۲\times U_۲ = \frac{\sqrt{۲}}{۴}\frac{kQ^۲}{R}$$

۱۶. حل. الف) کشش سطحی نیرویی است که تأثیر خود را در لبه‌ها نشان می‌دهد و یک خاصیت ماده به حساب می‌آید (یعنی برای مواد مختلف، متفاوت است). کشش سطحی یک عرق‌چین با نیم‌زاویه θ نیز در لبه‌های آن معلوم می‌شود:

$$f = \tau\times l\ \ ,\ \ l = ۲\pi r = ۲\pi R\sin\theta$$



شکل ۳-۶۴



شکل ۳-۶۵

برای سهولت در محاسبات و با توجه به تقارن استوانه‌ای موجود می‌توان در همه‌ی مراحل از طرح‌های دوبعدی برای حل مسأله استفاده کرد.

از آنجا که مؤلفه‌های در راستای x این نیروها با هم خنثی و مؤلفه‌های در راستای y با هم جمع می‌شوند، پس نیروی حاصل، یک نیرو در راستای y خواهد بود.

$$F_{\tau y} = ۲\pi R \sin\theta \times \tau \times \sin\theta \xrightarrow{\text{تا کم‌ترین درجه نسبت به } \theta} F_{\tau y} = ۲\pi R\tau\theta^{۲}$$

ب) در واقع ما می‌خواهیم نیروی الکتریکی وارد بر عرق‌چین از طرف بقیه‌ی سطح کره را به‌دست آوریم.

برای محاسبه‌ی این نیرو، المان‌هایی که در فاصله‌ی یکسان و دلخواه (a) از عرق‌چین قرار دارند را در نظر بگیرید. مؤلفه‌ی x این نیروها با هم خنثی می‌شوند و مؤلفه‌های y با هم جمع می‌شوند: (توجه کنید که در اینجا θ به اندازه‌ی کافی کوچک است)

$$a = ۲R\sin(\frac{\phi}{۲})$$

$$q_{\text{بار عرق‌چین}} = Q \times \frac{A \text{ عرق‌چین}}{A \text{ سطح کروی}} = Q \times \frac{\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\theta} dA}{۴\pi R^{۲}} = Q \times \frac{۱-\cos\theta}{۲}$$

$$F_{e_y} = \int dF_{e_y} = \int \frac{kdq' \times q \times \sin(\frac{\phi}{۲})}{a^{۲}}$$

$$= \int \frac{k \times \rho dA \times q}{a^{۲}} \times \sin(\frac{\phi}{۲})$$

$$k\rho q \iint \frac{R^{۲}\sin\phi d\phi d\alpha}{۴R^{۲}\sin(\phi/۲)} = \frac{k\rho q}{۲}\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\cos(\frac{\phi}{۲})d\phi d\alpha$$

$$۲\pi \times (+k\rho q) \times \sin(\frac{\phi}{۲})\Big|_{\phi=۰}^{\pi} = ۲k\rho q\pi \qquad \rho = \frac{Q}{۴\pi R^{۲}}$$

ج) شعاع تعادل کره جایی است که این دو نیرو (نیروی الکتریکی و نیروی کشش سطحی) با هم برابر شوند. در واقع شعاع تعادل، حالت پایدار سیستم است که با قرار دادن مقداری بار روی یک سطح کروی، سیستم به آن شعاع می‌رسد و پایدار می‌شود.

$$F_{\tau y} = F_{ey} \rightarrow ۲\pi R_۰\tau\theta^{۲} = k \times \frac{Q}{۴\pi R_۰^{۲}} \times Q \times \frac{۱-\cos\theta}{۲} \times ۲\pi$$

$$\rightarrow ۲\pi R_۰\tau^{\theta^{۲}} = \frac{kQ^{۲}}{۴\pi R_۰^{۲}} \times \frac{\theta/۲}{۲} \xrightarrow{\times ۲\pi} R_۰ = \sqrt[۳]{\frac{kQ^{۲}}{۱۶\pi\tau}}$$

د) نیروی وارد بر عرق‌چین، در واقع تفاوت نیروی کشش سطحی و نیروی الکتریکی است (چون این دو نیرو، در خلاف جهت هم بر عرق‌چین عمل می‌کنند)

$$f = \frac{F_{\text{خالص}}}{M} = \frac{F_\tau - F_e}{M} = \left(۲\pi R\tau\theta^{۲} - \frac{kQ^{۲}\theta^{۲}}{۸R^{۲}}\right)/M$$

تا کمترین مرتبه نسبت به θ:

$$= \frac{\theta^{۲}}{M}\left(۲\pi R\tau - \frac{kQ^{۲}}{۸R^{۲}}\right)$$

تا مرتبه یک نسبت به $(R-R_\circ)$:
$$f_{(R)}=f(R_\circ)+\frac{f'_{(R_\circ)}\times(R-R_\circ)}{۲!}$$
$$\rightarrow f_{(R)}=\circ+\frac{R-R_\circ}{۲}\times\left[\left(\frac{\theta^۲}{M}(۲\pi\tau+\frac{kQ^۲}{۴R^۳})\right)\Big|_{R=R_\circ}\right]$$
$$=\frac{(R-R_\circ)}{۲}\times\frac{\theta^۲}{M}\times(۲\pi\tau+۴\pi\tau)=\frac{۳\pi\tau\theta^۲}{M}(R-R_\circ)$$

ه) در این حالت ما به جای Q، V را داریم. پس باید Q را بر حسب V به‌دست آورده و در معادلات قبل جایگزین کنیم.

همان‌طور که در متن درس گفتیم میدان پتانسیل ناشی از هر توزیع بار با تقارن کروی و در بیرون از آن با توزیع بار نقطه‌ای واقع در مرکز یکسان است، پس:

$$V=\frac{Q}{۴\pi\epsilon_\circ R}\rightarrow Q=\frac{R}{k}V$$
$$\rightarrow F'_e=\frac{kQ^۲\theta^۲}{۸R^۲}=\frac{V^۲}{۸k}\cdot\theta^۲$$

و)
$$E_\circ=\sqrt[۳]{\frac{kQ^۲}{۱۶\pi\tau}}=\sqrt[۳]{\frac{R^۲V^۲}{۱۶k\pi\tau}}$$

ز)
$$f=\frac{F_{\text{خالص}}}{M}=\frac{\theta^۲}{M}\left(۲\pi R\tau-\frac{kQ^۲}{۸R^۲}\right)$$
$$=\frac{\theta^۲}{M}\left(۲\pi R\tau-\frac{V^۲}{۸k}\right)$$
$$f_{(R)}=f_{(R_\circ)}+\frac{f'_{(R_\circ)}\times(R-R_\circ)}{۲!}=\frac{۳\pi\tau\theta^۲}{M}(R-R_\circ)$$

۱۷. **حل.** الف) در اینجا اگر به توضیح صورت سؤال دقت کنید، متوجه می‌شوید که $|\vec{a}|<<|\vec{r}|$.

$$V=\frac{kq}{|\vec{r}-\vec{a}|}=\frac{kq}{\sqrt{(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{r}-\vec{a})}}=kq(r^۲-۲\vec{r}.\vec{a}+a^۲)^{-۱/۲}$$
$$=\frac{kq}{|\vec{r}|}\left(۱-\frac{۲\vec{r}.\vec{a}+a^۲}{|\vec{r}|^۲}\right)^{-۱/۲}$$

تا مرتبه‌ی دوم
$$\begin{matrix}(۱+x)^n\\ ۱\gg x\end{matrix}\sim ۱+nx+\frac{n(n-۱)}{۲}x^۲$$
$$\rightarrow V(a)\sim\frac{kq}{|\vec{r}|}\left(۱+\frac{۲\vec{r}.\vec{a}+a^۲}{۲|\vec{r}|^۲}-\frac{۳}{۸}(\frac{۲\vec{r}.\vec{a}+a^۲}{|\vec{r}|^۲})^۲\right)$$

و چون ما تا مرتبه دوم نسبت به a می‌خواهیم

$$V(a)\sim\frac{kq}{|\vec{r}|}\left(۱+\frac{۲\vec{r}.\vec{a}+a^۲}{۲|\vec{r}|^۲}\right)$$

ب) یعنی اگر $\vec{r}$ برابر با یکی از مقادیر $r\hat{x}$، $-r\hat{x}$، $r\hat{y}$، $-r\hat{y}$، $r\hat{z}$، $-r\hat{z}$ باشد:

$$\vec{r}=r\hat{x}\ :\ V(a)=\frac{kq}{|\vec{r}|}\left(۱+\frac{۲r\hat{x}.\vec{a}+a^{۲}}{۲r^{۲}}\right)$$
$$\vec{r}=r\hat{y}\ :\ V(a)=\frac{kq}{|\vec{r}|}\left(۱+\frac{۲r\hat{y}.\vec{a}+a^{۲}}{۲r^{۲}}\right)$$
$$\vec{r}=r\hat{z}\ :\ V(a)=\frac{kq}{|\vec{r}|}\left(۱+\frac{۲\hat{z}.\vec{a}+a^{۲}}{۲r^{۲}}\right)$$

و برای علامت‌های منفی بردارهای $\hat{r}$ نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم.

ج) در اینجا داریم $\vec{a}=\pm\frac{b\sqrt{۲}}{۲}i\pm\frac{b\sqrt{۲}}{۲}j$ (۴ بردار $\vec{a}$ برای ۴ نقطه)

اگر در اینجا $\vec{r}=r\hat{z}$ باشد، در همه‌ی حالات $\vec{r}$ بر $\vec{a}$ عمود و $\vec{r}.\vec{a}=۰$ می‌باشد که برای ۴ حالت $\vec{a}$ جواب معین است

$$r=r\hat{z}\ \ ,\ \ V(\vec{a})=\frac{kq}{r}\left(۱+\frac{b^{۲}}{۲r^{۲}}\right)$$

پس مجموع پتانسیل‌ها در نقطه $\vec{r}=r\hat{z}$:

$$V(\vec{a})=\frac{۴kq}{r}\left(۱+\frac{b^{۲}}{۲r^{۲}}\right)$$

د) $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ و $\vec{a}=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}b\hat{i}\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}b\hat{j}$.

حال برای یک حالت $a=\frac{b\sqrt{۲}}{۲}(i+j)$، $\vec{r}.\vec{a}$ برابر است با:

$$\frac{b\sqrt{۲}}{۲}(x+y)$$

و به طور کلی: (برای ۴ $\vec{a}$)

$$\vec{r}.\vec{a}=\frac{b\sqrt{۲}}{۲}(\pm x\pm y)$$

حال وقتی ما پتانسیل ناشی از ۴ بار را حساب و با هم جمع می‌کنیم، عوامل $\vec{r}.\vec{a}$ با هم ساده می‌شوند و داریم:

$$\begin{aligned}V_{\text{کل}}(a)&=\frac{۴kq}{|\vec{r}|}\left(۱+\frac{b^{۲}}{۲|\vec{r}|^{۲}}\right)\\&=\frac{۴kq}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{۱/۲}}\left(۱+\frac{b^{۲}}{۲(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})}\right)\end{aligned}$$

فهرست منابع و مراجع

- Fundamentals of Physics, Halliday, Resnick, Walker; 3rd Edition, Wiley 1948.

- Classical Electrodynamics, Hans C. Ohanian; Jones and Bartlet Publications, 2nd Edition, 2006.

- Introduction to Electrodynamics, David J. Griffiths.

- Problems in General Physics, I.E.Irodov; Arihant Publication, 3rd Edition,2010.

- Calssical Electrodynamics, J.D.Jackson.

- Electicity and Magnetism, Munir H. Nayfe, Morton. K.