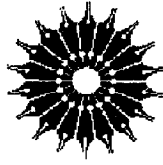




الکتریسیتہ ۹ مغناطیس

مونیر نایفہ ، مورتون بروسل

ترجمہً دکتر ابراہیم زمردیان ، دکتر علیرضا اشرف



الکتریسیته و مغناطیس

مونیر نایفه، مورتون بروسل

ترجمه

دکتر ابراهیم زمردیان، دکتر علیرضا اشرف

*Electricity and Magnetism*

Munir H. Nayfeh, Morton K. Brussel

John Wiley & Sons, 1985

الکتریسیته و مغناطیس

تألیف مونیر ایچ. نایفه، مورتون کی. بروسل

ترجمه دکتر ابراهیم زمردیان، دکتر علیرضا اشرف

ویراسته سوسن انوری

طراح جلد: آرزو امینی

نسخه پرداز: ابوالفضل بیرامی

نمونه خوان: لیلا محسنی

حروفچین: مینا مهربابی فرد

ناظر چاپ: جواد خسروی

مرکز نشر دانشگاهی

چاپ اول ۱۳۸۶

تعداد ۱۵۰۰

لیتوگرافی: عابد

چاپ: سحاب

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

سرشناسه: نایفه، متیر حسن، ۱۹۴۵-م. Nayfeh, Munir H. Munir Hasan

عنوان و پدیدآور: الکتریسیته و مغناطیس/مونیر نایفه، مورتون بروسل؛ ترجمه ابراهیم زمردیان، علیرضا اشرف.

مشخصات نشر: تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۶.

مشخصات ظاهری: هشت، ۲۳۶ ص.

فروست: مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۲۶۸. فیزیک؛ ۱۲۹

شابک: 964-01-1268-2

وضعیت فهرست نویسی: فیا

یادداشت: عنوان اصلی: Electricity and magnetism

یادداشت: این کتاب در سالهای مختلف، توسط مترجمین و ناشرین متفاوت نیز منتشر شده است.

یادداشت: نمایه.

موضوع: برق.

موضوع: مغناطیس.

موضوع: میدانهای الکترومغناطیس.

شناسه افزودن: براسل، مورتن

شناسه افزودن: Brussel, Morton K.

شناسه افزودن: زمردیان، ابراهیم، ۱۳۳۲- مترجم

شناسه افزودن: اشرف، علیرضا، ۱۳۲۵- مترجم

شناسه افزودن: مرکز نشر دانشگاهی

رده بندی کنگره: ۱۳۸۶ الف۷/۲ن/۵۲۲ QC

رده بندی دیویی: ۵۳۷

شماره کتابخانه ملی: ۵۰۳۳۷-۸۵

فهرست

صفحه	عنوان	صفحه	عنوان
		۱	پیشگفتار
۲۱	۲ الکتروستاتیک	۳	۱ آنالیز برداری
۲۱	۱-۲ بار الکتریکی	۳	۱-۱ خواص بردارها و دستگاه مختصات
۲۲	۲-۲ قانون کولن	۳	۱-۱-۱ بردارهای پایه و دستگاه مختصات
۲۳	۳-۲ میدان الکتریکی	۶	۲-۱-۱ ضرب نرده‌ای (ضرب نقطه‌ای)
۲۴	۴-۲ چگالی بار	۶	۳-۱-۱ ضرب برداری (ضرب خارجی)
۲۷	۵-۲ قانون گاوس	۶	۲-۱ جزءهای جابه‌جایی، سطح، و حجم؛ زاویه فضایی
۲۷	۱-۵-۲ شکل انتگرالی قانون گاوس	۶	۱-۲-۱ جزء جابه‌جایی
۳۰	۲-۵-۲ شکل دیفرانسیلی قانون گاوس	۷	۲-۲-۱ جزء مساحت سطح
۳۲	۶-۲ رساناها و عایقها	۸	۳-۲-۱ زاویه فضایی
۳۴	۷-۲ پتانسیل الکتریکی	۹	۴-۲-۱ جزء حجم
۴۰	۸-۲ بسط چندقطبها	۹	۳-۱ گرادیان
۴۸	۹-۲ خلاصه	۱۱	۴-۱ دیورژانس یک بردار و قضیه گاوس
۴۹	مسائل	۱۳	۵-۱ تاو و قضیه استوکس
۵۲	۳ مسائل مرزی الکتروستاتیک	۱۵	۶-۱ نقش برداری ∇
۵۲	۱-۳ معادلات پواسون و لاپلاس	۱۵	۱-۶-۱ عملهای دل (∇) تنها
	۲-۳ منحصر به فرد بودن جوابهای مسائل	۱۶	۲-۶-۱ عملهای دل (∇) دوتایی
۵۳	الکتروستاتیکی	۱۷	۷-۱ روابط انتگرالی بردار
۵۵	۳-۳ شرایط مرزی	۱۹	۸-۱ خلاصه
۵۶	۴-۳ مسائل دخیل در معادله لاپلاس	۱۹	مسائل
۵۶	۱-۴-۳ معادله لاپلاس در یک بعد		

صفحه	عنوان	صفحه	عنوان
۱۲۶	۳-۵ خلاصه		۲-۴-۳ معادله لاپلاس در دو بعد -
۱۲۶	مسائل	۵۹	مختصات کروی
۱۲۸	۶ انرژی الکتروستاتیکی		۳-۴-۳ معادله لاپلاس در دو بعد -
	۱-۶ انرژی الکتروستاتیکی مجموعه‌ای از بارهای	۶۴	مختصات استوانه‌ای
۱۲۸	نقطه‌ای		۴-۴-۳ معادله لاپلاس در سه بعد -
۱۲۹	۲-۶ انرژی الکتروستاتیکی یک توزیع بار پیوسته	۶۷	مختصات دکارتی
	۳-۶ انرژی الکتروستاتیکی رساناها؛ ضرایب	۶۹	۵-۳ روش تصاویر
۱۳۰	پتانسیل و خازن	۶۹	۱-۵-۳ بار نقطه‌ای و صفحه
۱۳۳	۴-۶ خازنها	۷۲	۲-۵-۳ بار نقطه‌ای و کره
۱۳۳	۱-۴-۶ ظرفیت یک رسانای منزوی	۷۷	۳-۵-۳ استوانه‌های موازی
۱۳۴	۲-۴-۶ خازن متشکل از دو رسانا	۷۹	۴-۵-۳ بار نقطه‌ای و دو سطح رسانا
۱۳۶	۳-۴-۶ ترکیب خازنها	۸۰	۶-۳ معادله پواسون
۱۳۷	۴-۴-۶ ذخیره انرژی در خازنها	۸۳	۷-۳ حفاظ الکتروستاتیکی
	۵-۶ انرژی الکتروستاتیکی: یک عبارت دیگر	۸۴	۸-۳ خلاصه
۱۳۹	برحسب توزیع میدان	۸۶	مسائل
۱۴۱	۶-۶ خودانرژیها و انرژیهای برهم‌کنش	۸۹	۴ نظریه الکتروستاتیکی دی‌الکتریکها
	۷-۶ نیروها و گشتاورها با استفاده از انرژی	۸۹	۱-۴ قطبش و چگالی گشتاور دوقطبی
۱۴۲	الکتروستاتیکی	۹۰	۲-۴ میدانهای ناشی از محیط دی‌الکتریک
۱۴۵	۸-۶ خلاصه	۹۶	۳-۴ قانون گاوس برای دی‌الکتریکها
۱۴۵	مسائل	۹۷	۴-۴ معادلات الکتروستاتیک در داخل دی‌الکتریک
۱۴۸	۷ جریانهای پایا	۹۸	۵-۴ روابط اساسی الکتريکی
۱۴۸	۱-۷ تعریف جریان الکتريکی		۶-۴ حل مسائل الکتروستاتیک با شرایط مرزی در
۱۵۰	۲-۷ معادله پیوستگی: پایستگی موضعی بار	۱۰۱	حضور دی‌الکتریک
۱۵۱	۳-۷ قانون اهم	۱۰۱	۱-۶-۴ منحصر به فرد بودن
۱۵۲	۴-۷ جریانهای پایا		۲-۶-۴ شرایط مرزی برای محیط دی‌الکتریک
۱۵۲	۱-۴-۷ معادله‌های حاکم بر J	۱۰۸	۷-۴ روش تصویری برای فصل مشترک دی‌الکتریک
۱۵۳	۲-۴-۷ شرایط مرزی	۱۱۰	۸-۴ نیروهای مؤثر وارد بر توزیع بار
۱۵۷	۳-۴-۷ مسائل با شرط مرزی	۱۱۲	۹-۴ خلاصه
۱۶۱	۵-۷ ضرایب مقاومت	۱۱۳	مسائل
۱۶۲	۶-۷ روش تصویری برای جریانها	۱۱۷	۵ نظریه میکروسکوپی دی‌الکتریکها
۱۶۳	۷-۷ خاستگاه میکروسکوپی رسانش	۱۱۷	۱-۵ میدان مولکولی
۱۶۴	۸-۷ گرمای ژول و باتریها	۱۱۹	۲-۵ برهم‌کنش اتمها و مولکولها با میدان الکتريکی
۱۶۷	۹-۷ قوانین کیرشهوف و شبکه‌های مقاوم	۱۱۹	۱-۲-۵ دوقطبی القاشده
۱۶۸	۱۰-۷ خلاصه	۱۲۱	۲-۲-۵ دوقطبیهای دائمی
۱۶۹	مسائل	۱۲۴	۳-۲-۵ فروالکتریسیته

صفحه	عنوان	صفحه	عنوان
۲۳۳	۳-۱۰ پارامغناطیس - گشتاورهای دوقطبی دائمی	۱۷۲	۸ مغناطیس جریانهای پایا
۲۳۵	۴-۱۰ فرومغناطیس	۱۷۲	۱-۸ نیروی لورنتس
۲۳۵	۱-۴-۱۰ برهم‌کنش (تعویض) اسپین-اسپین		۲-۸ نیروهای وارد بر توزیع جریان - حرکت در
۲۳۶	۲-۴-۱۰ میدان مولکولی	۱۷۳	میدانهای متقاطع
۲۳۸	۳-۴-۱۰ مغناطش خودبه‌خود	۱۷۵	۳-۸ منابع B
	۴-۴-۱۰ پذیرفتاری مغناطیسی مواد	۱۷۷	۴-۸ معادلات انتگرالی مغناطوستاتیک و قانون آمپر
۲۳۹	فرومغناطیسی در ...	۱۸۲	۵-۸ پتانسیل برداری
۲۴۰	۵-۴-۱۰ حوزه‌های فرومغناطیسی	۱۸۵	۶-۸ قانون بیو-ساوار
۲۴۱	۶-۴-۱۰ یاد فرومغناطیس و فرومغناطیس (فریت)	۱۸۸	۷-۸ پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی
۲۴۲	۵-۱۰ خلاصه	۱۹۲	۸-۸ تأثیرات مغناطیسی یک حلقه جریان کوچک
۲۴۳	مسائل	۱۹۲	۱-۸-۸ پتانسیل نرده‌ای
۲۴۴	۱۱ القا	۱۹۲	۲-۸-۸ گشتاورهای مغناطیسی
۲۴۵	۱-۱۱ قانون فاراده	۱۹۴	۳-۸-۸ پتانسیل برداری یک حلقه کوچک جریان
۲۴۸	۲-۱۱ EMF حرکتی		۴-۸-۸ توزیع جریان جایگزیده در یک میدان مغناطیسی خارجی
۲۵۲	۳-۱۱ کاربرد قانون فاراده در مدارها: ضرایب القا	۱۹۶	
۲۵۳	۱-۳-۱۱ القای متقابل	۱۹۷	۹-۸ خلاصه
۲۵۶	۲-۳-۱۱ خودالقایی - القاهای سری و موازی		
۲۵۸	۴-۱۱ خلاصه	۲۰۲	۹ نظریه رسمی مغناطیس و مواد
۲۵۹	مسائل	۲۰۲	۱-۹ مغناطش
۲۶۱	۱۲ انرژی مغناطیسی		۲-۹ پتانسیلهای نرده‌ای و برداری یک ماده مغناطیسه
۲۶۱	۱-۱۲ حلقه جریان واقع در ماده مغناطیسی خطی	۲۰۵	مغناطیسه
۲۶۲	۲-۱۲ N حلقه در یک محیط مغناطیسی خطی	۲۰۸	۳-۹ معادله‌های مغناطوستاتیک ماکروسکوپی
	۳-۱۲ انرژی ذخیره شده در یک میدان مغناطیسی	۲۰۹	۴-۹ روابط ساختاری مغناطیسی
۲۶۳	در حضور مواد خطی	۲۱۱	۵-۹ مسائل با شرایط مرزی
۲۶۵	۴-۱۲ انرژی مغناطیسی در مواد غیرخطی	۲۱۱	۱-۵-۹ معادله‌های پتانسیل
	۵-۱۲ نیروها و گشتاورها با استفاده از انرژی	۲۱۳	۲-۵-۹ شرایط مرزی روی میدانها و پتانسیلها
۲۶۷	مغناطوستاتیکی	۲۲۱	۶-۹ روش تصویری برای فصل مشترک مغناطیسی
۲۷۰	۶-۱۲ خلاصه	۲۲۳	۷-۹ مدارهای مغناطیسی
۲۷۱	مسائل	۲۲۷	۸-۹ خلاصه
		۲۲۸	مسائل
۲۷۴	۱۳ مدارهای با جریانهای ناپایا	۲۳۱	۱۰ نظریه میکروسکوپی مغناطیس
۲۷۴	۱-۱۳ تعریف مدارهای شبه ایستا		۱-۱۰ برهم‌کنش آنها و مولکولها با میدانهای مغناطیسی
۲۷۵	۲-۱۳ قانون مداری کیرشهوف	۲۳۱	۲-۱۰ منشأ دیامغناطیس - گشتاورهای دوقطبی القا شده
۲۷۶	۳-۱۳ جوابها در حوزه زمانی		
۲۷۷	۱-۳-۱۳ حلقه RL سری	۲۳۲	

صفحه	عنوان	صفحه	عنوان
۳۴۳	۴-۱۵ تابش آنتنها	۲۷۸	۱۳-۲-۳ حلقه RC سری
	۱۵-۴ آنتنهای دیفرانسیلی - میدانهای	۲۷۹	۱۳-۳-۳ حلقه RLC
۳۴۳	دوقطبی الکتریکی	۲۸۳	۱۳-۴ مدارهای جفت شده
۳۴۶	۲-۴-۱۵ تابش یک آنتن نیم موج	۲۸۴	۱۳-۵ مدارهای AC - حوزه بسامدی
	۱۵-۵ بسط چندقطبی پتانسیلهای تأخیری - تابش		۱۳-۵-۱ فازورها - قوانین کیرشهوف برای
۳۴۹	از بارهای متحرک کند - دوقطبی الکتریکی	۲۸۴	فازورها
	۱۵-۶ پتانسیل لینارد-ویچرت-بارهای نقطه‌ای	۲۸۶	۱۳-۵-۲ قانون میش
۳۵۲	متحرک تند	۲۸۷	۱۳-۵-۳ روش نودال
۳۵۷	۷-۱۵ خلاصه	۲۸۹	۱۳-۶ توان در مدارهای AC-جور کردن امپدانس
۳۵۹	مسائل	۲۹۱	۱۳-۷ تشدید در مدارهای AC
	۱۶ مسائل الکترومغناطیس با شرایط مرزی	۲۹۱	۱۳-۷-۱ تشدید در حالت سری
۳۶۱	۱-۱۶ شرایط مرزی روی میدانش	۲۹۳	۱۳-۷-۲ تشدید موازی
۳۶۱	۱-۱۶-۱ حالتهاى خاص: مؤلفه قائم	۲۹۸	۱۳-۸ خلاصه
۳۶۳	۱-۱۶-۲ حالتهاى خاص: مؤلفه مماسی	۲۹۹	مسائل
۳۶۳	۲-۱۶ انتشار موج در عبور از فصل مشترک مواد		۱۴ معادلات ماکسول
	نارسانا (دی الکتریک)	۳۰۴	۱۴-۱ جریان جابه‌جایی - معادلات ماکسول
۳۶۴	۱-۲-۱۶ تابش عمودی		۱۴-۲ معادلات ماکسول در محیطهای ساده -
۳۶۵	۲-۲-۱۶ تابش مایل - همسازی فاز	۳۰۷	معادله موج
	۳-۲-۱۶ قطبش به وسیله بازتاب و	۳۰۸	۱۴-۳ امواج تخت در محیطهای غیرنارسانا
۳۶۹	شکست - زاویه بروستر	۳۰۸	۱۴-۳-۱ پدیده‌های موجی
	۳-۱۶ انتشار فصل مشترک تخت رسانا-	۳۰۹	۱۴-۳-۲ بستگی درونی بین E ، B و \hat{k}
۳۷۳	دی الکتریک - ضرایب فرنل مختلط		۱۴-۴ جوابهای سینوسی (تکفام) برای معادلات
۳۷۳	۱-۳-۱۶ تابش عمودی	۳۱۰	ماکسول
۳۷۴	۲-۳-۱۶ تابش مایل	۳۱۳	۱۴-۵ قطبش امواج تخت
۳۷۹	۴-۱۶ موجبرها و تشدیدکننده‌های کاواکی		۱۴-۶ پایستاری انرژی الکترومغناطیسی - قضیه
	۱-۴-۱۶ انتشار بین دو صفحه رسانا (آینه‌های	۳۱۵	پوئینتینگ
۳۷۹	فلزی)	۳۱۹	۱۴-۷ امواج تکفام تخت در محیط رسانا
۳۸۲	۲-۴-۱۶ موجبرها	۳۲۳	۱۴-۸ خلاصه
۳۸۳	۳-۴-۱۶ تشدیدکننده‌های کاواکی	۳۲۴	مسائل
۳۸۷	۵-۱۶ خلاصه		۱۵ تابش
۳۸۹	مسائل	۳۲۷	۱۵-۱ معادله موج پتانسیلها با منبعها - تبدیلهای
	۱۷ نظریه نسبیت خاص - الکترودینامیک	۳۲۷	پیمانه‌ای
۳۹۱	۱-۱۷ تبدیل گالیه و معادله موج	۳۳۱	۱۵-۲ پتانسیلهای تأخیری
۳۹۲	۲-۱۷ تبدیل لورنتس		۱۵-۳ امواج کروی و معادلات موج میدان - بسط
۳۹۷	۳-۱۷ اصول نسبیت خاص	۳۳۴	چندقطبی برای توزیعهای متحرک آهسته

صفحه	عنوان	صفحه	عنوان
۴۱۳	پیوست الف. دستگاه یگاها	۴-۱۷	هندسه فضا زمان (فضای چهار بعدی) -
۴۱۸	پیوست ب. دیورژانس، تاو، گرادیان، و لاپلاسی	۳۹۸	چار-بردار و چار-تانسور
۴۱۹	پیوست ج. برخی از ثابتهای بنیادی فیزیک	۳۹۸	۱-۴-۱۷ فضای سه بعدی - فضای اقلیدسی
۴۲۰	پیوست د. بعضی از یگاها SI استخراج شده با اسامی خاص	۳۹۹	۲-۴-۱۷ فضای چهار بعدی - فضای مینکوفسکی
۴۲۱	جواب مسائل فرد	۴۰۰	۳-۴-۱۷ خواص برداری فضای چهار بعدی
۴۲۹	نمایه	۴۰۳	۵-۱۷ الکترو دینامیک نسبیتی - هموردایی الکترو دینامیک
		۴۱۰	۶-۱۷ خلاصه
		۴۱۱	مسائل

پیشگفتار

این کتاب بر پایهٔ یادداشتهای درسی کلاسهای الکتریسته و مغناطیس و میدانهای الکترومغناطیسی که در طول سالها آماده و تدریس شده‌اند بنا شده است. این کتاب درسی برای یک دورهٔ دو ترمی برای دانشجویان فیزیک تدوین شده است اما با حذف گزینشی بعضی از مطالب آن می‌توان آن را به خوبی در یک ترم تدریس کرد. به درسهایی که فراتر از فیزیک عمومی سال اول است نیازی نیست، به طوری که از این کتاب می‌توان برای طیف گسترده‌ای از دانشجویان علوم و مهندسی استفاده کرد.

با توجه به گفته‌های دانشجویان و مربیان که از این یادداشتهای درسی استفاده می‌کنند، در پاسخ به نگرانی دانشجویان که معمولاً در ارتباط با درس الکترومغناطیس ابراز می‌دارند که ”من واقعاً نظریه را می‌فهمم اما نمی‌توانم مسائل را حل کنم“، تصمیم گرفتیم حدود ۳۰۰ مثال با پیچیدگیهای مختلف ارائه دهیم، که ضمن حل آنها روشهای مختلف در ارتباط با مباحث کتاب شرح داده شده است. این مثالها به دانشجو می‌آموزد که چگونه فرمولبندی را روی حالت‌های پیچیده‌تر و مسائل عملی به کار برد. از این رو دانشجو برای حل مسائل اعتماد به نفس بیشتری پیدا می‌کند.

یک جنبهٔ مهم این کتاب که آن را از کتابهای موجود در همین سطح متمایز می‌کند فصل مربوط به جبر برداری است. اگر چه باید دانشجویان تا اندازه‌ای هندسهٔ تحلیلی و آنالیز برداری را بدانند اما بسیاری از آنها با ریاضی و دستگاههای مختصات، هندسه تحلیلی، و روابط برداری، آنالیز و حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنا نیستند. این فصل را طوری نوشته‌ایم که مرجعی برای این اطلاعات به حساب می‌آید.

فصل مربوط به نظریهٔ میکروسکوپی مغناطیس، توجه هاینبرگ از فرومغناطیس را، که بر پایهٔ برهم‌کنشهای اسپین-اسپین است با استفاده از مشابه‌های کلاسیک ساده و قابل فهم ارائه می‌دهد. در کتابهای موجود فقط توجه پدیده‌شناسی ویس بیان می‌شود. از این رو، با این فصل، این کتاب تنها کتابی در این سطح می‌شود که پدیده‌ها را روزآمد بیان می‌کند. در این روش دانشجو نیازی به دانستن مکانیک کوانتومی ندارد زیرا از تمثیل کلاسیک اسپین استفاده شده است.

کاربردهایی را که در آنها دوقطبیهای مکانیک کوانتومی گسسته در میدانهای الکتریکی یا مغناطیسی خارجی دخیل اند ارائه می‌دهیم. این نتایج را با حالت‌هایی که شامل دوقطبیهای کلاسیکی هستند، مقایسه می‌کنیم. در این مثالها نیز نیازی به دانستن مکانیک کوانتومی نیست. در فصلهای ۴، ۷، و ۹، استفاده از روش تصویری برای حل مسائل دی‌الکتریک، جریان و مغناطیس را بیان می‌کنیم. این عناوین در کتابهای موجود در این سطح بیان نشده‌اند. همچنین، مدارهای مغناطیسی در مقایسه با مدارهای الکتریکی ارائه می‌شوند و از آنها برای طراحی دستگاههای الکترومغناطیسی یا دستگاههای مغناطیسی دائم استفاده می‌شود. از روشهای بسیار مفید ضرایب پتانسیل و ظرفیت به صورت گسترده‌تر از آنچه در حل مسائل الکتروستاتیکی معمول است استفاده می‌کنیم. به علاوه، روش متناظر ضرایب مقاومت را معرفی و از آن برای حل مسائل جریان استفاده می‌کنیم. این روشهای خاص را می‌توان بدون از دست دادن پیوستگی حذف کرد (از این رو این عناوین را برای تشخیص سریع با ستاره مشخص کرده‌ایم). مفهوم پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی (قطب مغناطیسی) کاملاً شبیه

به مفهوم پتانسیل الکتروستاتیکی (بار الکتریکی) معرفی می‌شود. با ذکر چند مثال آنها را با مفهوم پتانسیل برداری مقایسه کرده‌ایم. به شرایط مرزی روی میدانهای الکترومغناطیسی، پتانسیل زردهای الکتریکی و مغناطیسی، و پتانسیل مغناطیسی برداری توجه خاصی می‌کنیم. غالباً برای نشان دادن شرایط مرزی مختلف و ارتباط بین آنها، کاربردهای مناسب با روشهای گوناگون ارائه شده‌اند. تمام مطالب مربوط به تابش در یک فصل یعنی فصل ۱۵ آمده است. با این کار می‌توانیم روشهای تحلیلی گوناگون را مقایسه کنیم و به هم ربط دهیم که به بررسی هماهنگ موضوع می‌انجامد. تمرینهای پایان هر فصل برای آموزش بیشتر دانشجویان انتخاب شده‌اند. مسائل به دو گروه تقسیم می‌شوند. گروه اول گسترش مثالها در هر فصل هستند. به این ترتیب دانشجو از قبل یک پیش‌زمینه برای حل این مسائل و شانسی برای حل کامل آنها دارد. گروه دوم مسائل پیچیده‌تر هستند و به منظور درک عمیقتر دانشجو از مطالب

طراحی شده‌اند.

این کتاب را می‌توان در یک ترم برای دانشجویان سال دوم با انتخاب یک زیرمجموعه از فصلهایی که بر روی معادلات ماکسول و مفهوم آنها تأکید دارد نیز استفاده کرد. به این منظور از این کتاب با حذف فصلهای ۱، ۵، ۷، ۱۰، ۱۱، ۱۳ (به استثنای معادله پیوستگی و قانون فاراده در فصلهای ۷ و ۱۱)، بدون از دست رفتن پیوستگی مطالب با موفقیت استفاده می‌شود. علاوه بر آن روشهای خاص زیر نیز برای این منظور حذف می‌شوند: مدارهای مغناطیسی، کاربرد روش تصویری بردی الکتریکها، جریان و مسائل مغناطیسی، روشهای ضرایب مقاومت و پتانسیل. بخشهای ۱۷-۱ و ۱۷-۴ نیز حذف می‌شوند. این بخشها را در فهرست مطالب با ستاره علامت‌گذاری کرده‌ایم به طوری که به راحتی می‌توان آنها را تشخیص داد.

مونیر نایفه

مورتون براسل

آنالیز برداری

۱-۱ خواص بردارها و دستگاه مختصات

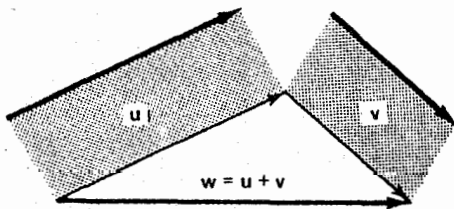
اعداد معمولی را زردهای می‌نامند که ممکن است حقیقی یا مختلط باشند. در مقابل زردهای کمیتهای دیگری به نام بردارها داریم. روش ترکیب این کمیتهای غیر از زردهای است. در فیزیک برای نمایش کمیتهایی که دارای اندازه و جهت هستند از بردار استفاده می‌کنیم. نمونه‌ای از این کمیتهای جابه‌جایی است. به بیان ریاضی بردارهای کمیتهایی هستند که رفتار و ترکیب آنها بر طبق دستورهای زیر است:

۱. جمع دو بردار u و v بردار دیگری است: $u + v = w$. جمع یک عمل جابه‌جایی دوتایی است یعنی $u + v = v + u$.
۲. قانون شرکت‌پذیری برای جمع برقرار است یعنی برای بردارهای u, v, w داریم:

$$(u + v) + w = u + (v + w) = u + v + w$$

۳. می‌توان هر بردار را برای به‌دست‌آوردن بردار دیگری در یک عدد ضرب کرد.

به روش هندسی، بردارها را به شکل یک پاره‌خط جهت‌دار (یعنی پیکان) نشان خواهیم داد. اندازه بردار متناسب با طول پاره‌خط و جهت بردار همان جهت پیکان — یعنی جهتی که به آن اشاره دارد، است. قواعدی که جمع هندسی بردارها از آن تبعیت می‌کنند بدین قرارند (شکل ۱-۱ را ببینید): روی نمودار بردار جابه‌جایی u به مقیاس معینی را رسم کرده‌ایم؛ آن‌گاه بردار v را از انتهای u رسم می‌کنیم. حالا



شکل ۱-۱ تعریف هندسی جمع دو بردار u و v .

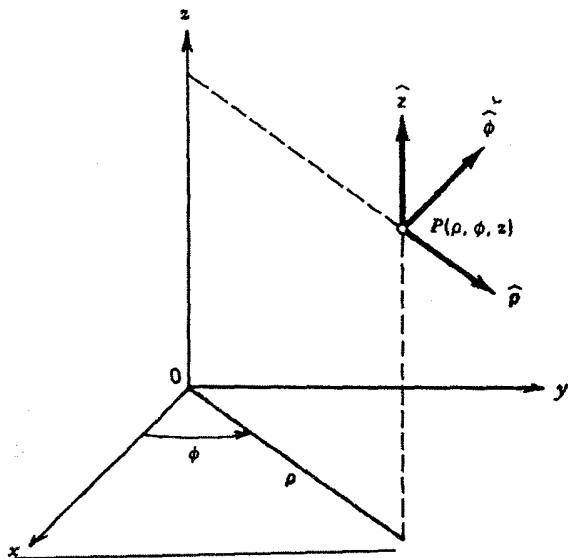
خطی از ابتدای u به انتهای v می‌کشیم که نشان‌دهنده جمع برداری w است. این جابه‌جایی از نظر اندازه و جهت معادل جابه‌جاییهای پشت سرهم u و v است. این روش قابل تعمیم به جمع هر تعداد جابه‌جاییهای پشت سرهم است.

۱-۱-۱ بردارهای پایه و دستگاه مختصات

انتخاب یک دستگاه مختصات در فضا، اساساً هم‌ارز یک مجموعه بردار پایه است. اگر یک دستگاه عمود برهم انتخاب کنیم (شکل ۱-۲) بردارهای پایه در امتداد سه راستای ثابت دوه‌دو عمود برهم x, y, z و z انتخاب می‌شوند. هرگاه بردار را با یک پیکان نمایش دهیم، تصاویر عمودی آن روی سه محور را مؤلفه‌های متعامد (ذکارتی) بردار در این جهتها می‌نامیم. برحسب این مؤلفه‌ها اندازه بردار A به صورت زیر نوشته می‌شود

$$A \equiv |A| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}$$

بردار یکه \hat{A} برداری است که اگر در اندازه آن $|A|$ ضرب شود



شکل ۳-۱ تعریف دستگاه و مختصات استوانه‌ای، به همراه بردارهای یکه مربوطه.

استوانه‌ای را تعریف می‌کنیم و اغلب آنها را به‌کار می‌بریم. برای هر یک از این دستگاهها، یک مجموعه بردارهای پایه متعامد به‌نحی که وابسته به محل استقرار آنها در فضاست پیدا خواهیم کرد.

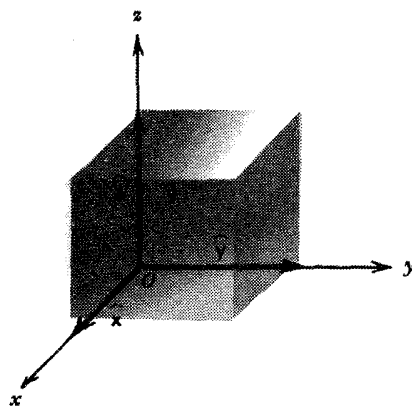
یادآور می‌شویم که بردار یکه دکارتی \hat{x} را می‌توان به‌عنوان بردار یکه‌ای که بر هر صفحه $x = \text{const.}$ عمود است تعریف کرد. همچنین بردارهای یکه \hat{y} و \hat{z} را به‌ترتیب به صفحه‌های $y = \text{const.}$ و $z = \text{const.}$ مربوط می‌کنیم. اکنون سطوح دیگری یافت می‌شوند که متغیر هندسی دیگری برای آنها ثابت است. اگر بتوان سه سطح، که با سه متغیر هندسی تعریف می‌شوند، پیدا کرد که در یک نقطه برهم عمود باشند، آن‌گاه می‌توان در آن نقطه سه بردار عمود برهم متقابل چنان تعریف کرد که بر آن سطوح عمود باشند. در توصیف دستگاههای استوانه‌ای و کروی دو مثال مفید را بیان می‌کنیم. (البته مثالهای زیادی وجود دارند.) در دستگاه مختصات استوانه‌ای (شکل ۳-۱) مجموعه‌ای از بردارهای پایه در هر نقطه را با در نظر گرفتن سه سطح، که دو تای آنها مسطح و دیگری استوانه‌ای است، تعریف می‌کنیم. سطوح با روابط زیر مشخص می‌شوند

$$\text{الف. } z = \text{const.}$$

$$\text{ب. } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const.}$$

$$\text{ج. } \phi = \tan^{-1}(y/x) = \text{const.}$$

در معادله (الف) مختصه z یک دسته از صفحات موازی را مشخص می‌کند. این مختصه نسبت به صفحه مرجع $z = 0$ تعریف می‌شود. آن‌گاه بردار یکه \hat{z} بردار ثابتی در جهت (مثبت) محور z (که ممکن است



شکل ۲-۱ تعریف دستگاه مختصات متعامد به همراه نمایش بردارهای یکه.

بردار \mathbf{A} نتیجه می‌شود، یعنی $\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\hat{\mathbf{A}}$. (بردار یکه ایزاری است برای نشان دادن جهت.) بردارهای یکه در طول محورهای مختصات متعامد x, y, z را به ترتیب با $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ مشخص می‌کنیم. این بردارها یک مجموعه مناسب و اساسی از بردارهای پایه هستند. به کمک بردارهای یکه دکارتی، هر بردار \mathbf{A} را با

$$\mathbf{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} \quad (۱-۱)$$

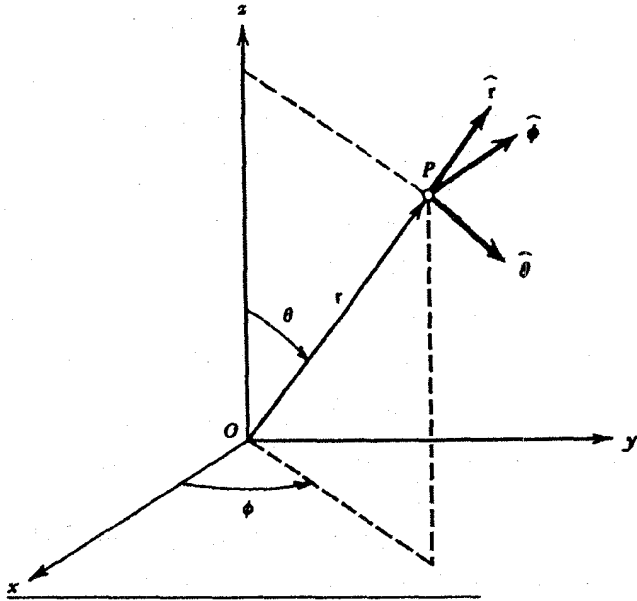
نمایش می‌دهیم که A_x, A_y, A_z به ترتیب مؤلفه‌های بردار \mathbf{A} در جهت‌های $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ هستند.

توجه خود را به مواردی که بردارهای پایه یک مجموعه متعامد هستند محدود می‌کنیم. افزون بر این اندازه هر بردار پایه واحد در نظر گرفته می‌شود (متعامد به‌نحی). معمولترین بردارهای پایه مورد استفاده در فضای سه‌بعدی بردارهای پایه یکه $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ هستند. این بردارها را ثابت فرض می‌کنیم. نه اندازه و نه جهت آنها در فضا به محل قرار گرفتن آنها نسبت به یک نقطه مرجع در فضا وابسته نیست. ثابت بودن این مجموعه بردارهای پایه متعامد به‌نحی است که موجب تأکید ما بر کلمه دکارتی می‌شود.

نمایش بردارها به کمک بردارهای یکه در محاسبات برداری خیلی مفید است. مثلاً برای جمع \mathbf{A} با \mathbf{B} به‌سادگی مؤلفه‌های دکارتی آنها را جمع می‌کنیم:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} + (A_z + B_z)\hat{z}$$

اغلب مناسب است مجموعه‌های دیگری از بردارهای پایه که راستای آنها به محل استقرارشان وابسته است (بردارهای پایه خمیده خط) را به‌کار گیریم. مثلاً دستگاه مختصات کروی و دستگاه مختصات



شکل ۴-۱ تعریف دستگاه مختصات کروی، به همراه بردارهای یکه مربوط. معرفی می‌کنیم:

- الف) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{const.}$ که کره‌ای با شعاع r به مرکز مبدأ را توصیف می‌کند.
 ب) $\theta = \cos^{-1}(z/r) = \text{const.}$ که مخروطی قائم با زاویه رأس θ را نشان می‌دهد.
 ج) $\phi = \tan^{-1}(y/x) = \text{const.}$ که یک صفحه دربرگیرنده محور مخروط (ب) را توصیف می‌کند.

بردارهای یکه عمود بر این سطوح را به ترتیب با $\hat{\phi}$ ، $\hat{\theta}$ و \hat{r} مشخص می‌کنیم که یک مجموعه متعامد بهنجار را در نقطه‌ای (نه در مبدأ و نه روی محور z) که محل تقاطع سه سطح عمود برهم فوق است، تشکیل می‌دهند. این بردارهای یکه با روابط زیر به بردارهای یکه متعامد مربوطاند

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \hat{x} \sin \theta \cos \phi + \hat{y} \sin \theta \sin \phi + \hat{z} \cos \theta \\ \hat{\theta} &= \hat{x} \cos \theta \cos \phi + \hat{y} \cos \theta \sin \phi - \hat{z} \sin \theta \\ \hat{\phi} &= -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi\end{aligned}\quad (۳-۱)$$

اگر A عضوی از یک میدان برداری، $A(r)$ ، باشد آن‌گاه در هر نقطه که با بردار r مشخص می‌شود می‌توان $A(r)$ را برحسب بردارهای پایه مربوط به آن نقطه به شکل $A(r) = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$ نشان داد که A_r تصویر A روی \hat{r} و ... است. بردار جابه‌جایی نقطه (r, θ, ϕ) با $r = r \hat{r}$ بیان می‌شود.

به دلخواه انتخاب شود) عمود بر صفحات $z = \text{const.}$ است. محور z یک خط جهت‌دار در راستای z ($-\infty < z < \infty$) انتخاب می‌شود. در معادله (ب) مختصه ρ نسبت به محور z با دسته‌ای از سطوح دایره‌ای استوانه‌ای که صفحات $z = \text{const.}$ را به‌طور عمودی قطع می‌کنند تعریف می‌شود. فاصله ρ هر سطح معین تا محور z ، عبارت است از شعاع سطح استوانه‌ای. بردار یکه $\hat{\rho}$ عمود بر سطح استوانه‌ای و در جهت دور شدن از محور z است. راستای آن به نقطه واقع بر دایره (محل تقاطع صفحه $z = \text{const.}$ با استوانه $\rho = \text{const.}$) مورد نظر بستگی دارد. به این ترتیب، در شکل ۴-۱، $\hat{\rho}$ تابعی از متغیر ϕ است که در معادله (ج) (برای $\rho > 0$) تعریف کردیم.

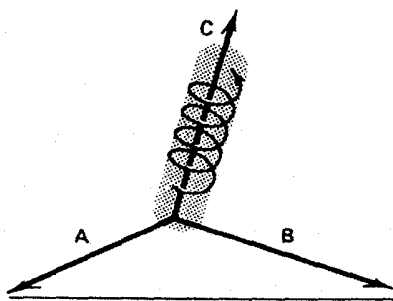
در معادله (ج) تنها سطوحی که صفحات تعریف‌شده قبلی را در تمام نقاط به‌طور قائم قطع می‌کنند شامل محور z اند. یکی از این صفحات، صفحه $\phi = 0$ است که اختیاری انتخاب می‌شود. بردارهای یکه $\hat{\phi}$ بر سطوح $\phi = \text{const.}$ عمود بوده و به زاویه ϕ صفحه نسبت به صفحه مرجع $\phi = 0$ بستگی دارند.

محل تقاطع سطوحی که با روابط (الف)، (ب)، و (ج) توصیف شد، درست مانند محل تقاطع صفحات در مختصات متعامد نقاطی در فضا هستند. با وجود این بردارهای یکه در دستگاه استوانه‌ای تنها با مشخص شدن یک نقطه (نه روی محور z) معین می‌شوند. (مبدأ با قراردادن $z = 0$ و $\rho = 0$ مشخص می‌شود). پس از مشخص کردن نقطه‌ای با (ρ, ϕ, z) یا (x, y, z) ، هر بردار در آن نقطه را می‌توان به کمک بردارهای یکه $(\hat{z}, \hat{\rho}, \hat{\phi})$ بیان کرد.

به‌سادگی می‌توان ارتباط بین بردارهای یکه در دستگاه استوانه‌ای با بردارهای یکه در دستگاه متعامد را با روابط زیر نشان داد

$$\hat{\rho} = \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi \quad \hat{\phi} = -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi \quad \hat{z} = \hat{z} \quad (۲-۱)$$

یادآوری می‌کنیم که $\hat{\rho}$ و $\hat{\phi}$ به مختصه ϕ بستگی دارند. بنابراین هر بردار A را در نقطه‌ای که بردارهای یکه $\hat{\rho}$ ، $\hat{\phi}$ ، \hat{z} هستند به صورت $A \equiv A_z \hat{z} + A_\rho \hat{\rho} + A_\phi \hat{\phi}$ می‌نویسیم. زیرا $\{\hat{z}, \hat{\rho}, \hat{\phi}\}$ یک مجموعه متعامد بهنجار است. اگر $A(r)$ یک میدان نقطه‌ای برداری باشد، بردارهای سه‌گانه پایه که برای بیان A استفاده می‌شود بردارهایی خواهند بود که در محل r تعریف می‌شوند. توجه کنید که جابه‌جایی r که نقطه (z, ρ, ϕ) را مشخص می‌کند با رابطه $r = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$ بیان می‌شود. دستگاه مختصات کروی (شکل ۴-۱) را به تفصیل دستگاه استوانه‌ای بررسی نمی‌کنیم بلکه فقط سطوح ثابت انتخاب‌شده را به صورت زیر



شکل ۵-۱. تعریف قرارداد پیچ راستگرد، که مفهوم ضرب خارجی بردارهای A و B را دارد.

هر گاه سه بردار متعامد بهنجار $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ داشته باشیم می‌گوییم یک دستگاه راستگرد داریم اگر $\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \hat{e}_k$ که i و j و k به ترتیب $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ هستند. برانته‌ها جایگشت چرخشی اعداد ۱ و ۲ و ۳ هستند. توجه کنید که برای یک دستگاه راستگرد که با سه بردار $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ داده شده‌اند می‌توان نوشت $1 = \hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3)$. دستگاه مختصات متعامدی را که به‌کار بردیم یک دستگاه راستگرد است. اگر x را با ۱، y را با ۲ و z را با ۳ مشخص کنیم. یک دستگاه چپگرد تصویر آینه‌ای یک دستگاه راستگرد است.

دو اتحاد مفید زیر را باید به‌خاطر بسپاریم
۱. ضرب زرده‌ای سه‌گانه

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \quad (7-1)$$

(که حاصلضرب حجم متوازی‌السطوحی به ابعاد A و B و C است.)
۲. ضرب برداری سه‌گانه

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (8-1)$$

دومی را اغلب دستور یک‌کب می‌نامیم. توجه کنید که در معادله (7-1) می‌توان نقطه (۰) و ضرب در (x) را، به‌طوری که A و B و C به ترتیب چرخشی بمانند، با یکدیگر جابه‌جا کرد.

۲-۱. جزءهای جابه‌جایی، سطح، و حجم؛ زاویه فضایی
۱-۲-۱. جزء جابه‌جایی

دو نقطه (x, y, z) و $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ را در فضا در نظر می‌گیریم. نقطه دوم به اندازه $\Delta \mathbf{r}$ نسبت به نقطه اول جابه‌جا شده است. یعنی

$$\Delta \mathbf{r} \equiv \hat{x} \Delta x + \hat{y} \Delta y + \hat{z} \Delta z \quad (9-1)$$

۲-۱-۱. ضرب زرده‌ای (ضرب نقطه‌ای)

یکی از مفاهیم مهم در جبر بردارها ضرب زرده‌ای دو بردار است که آن را با $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ نمایش می‌دهیم و به نامهای ضرب نقطه‌ای یا ضرب داخلی نیز می‌خوانیم. ضرب نقطه‌ای به شکل $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \alpha$ تعریف می‌شود که $|\mathbf{A}|$ و $|\mathbf{B}|$ اندازه‌های دو بردار و α زاویه بین آنهاست. به‌سادگی می‌توان خواص زیر را برای ضرب زرده‌ای به‌دست آورد: دو بردار که حاصلضرب زرده‌ای آنها صفر است برهم عمودند؛ یعنی اگر $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ بر B عمود است. بردارهای $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ و \hat{r} در دستگاه دکارتی، یک مجموعه متعامد بهنجار از بردارهای پایه تشکیل می‌دهند زیرا دو به دو برهم عمودند و اندازه هر یک واحد است.

۳-۱-۱. ضرب برداری (ضرب خارجی)

دیدیم که می‌توان به هر زوج بردار یک مقدار زرده‌ای نسبت داد. عملی را که به آن منجر می‌شود ضرب داخلی نامیدیم. اکنون می‌خواهیم به هر جفت بردار A و B یک کمیت برداری نسبت دهیم و بنابراین چیزی را تعریف کنیم که آن را ضرب برداری (یا ضرب خارجی) می‌نامیم. این ضرب به شکل $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ مشخص می‌شود. راستای بردار حاصلضرب را عمود بر صفحه دربرگیرنده دو بردار می‌گیریم. اندازه آن برابر با سطح متوازی‌الاضلاعی است که اضلاعش دو بردار باشند. بنابراین اگر \hat{n} بردار یکه عمود بر صفحه دربرگیرنده دو بردار A و B باشد آن‌گاه حاصلضرب برداری را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \equiv |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \alpha \hat{n} \quad (4-1)$$

تعریف بالا هنوز مبهم است زیرا عمود بر صفحه A و B ممکن است جهتش به طرف "بالا" یا "پایین" باشد. برای مشخص کردن جهت \hat{n} قرار دارد پیچ راستگرد را به‌کار می‌بریم. اگر A به طرف B در جهت زاویه $\alpha \leq 180^\circ$ بچرخد آن‌گاه این چرخش همان چرخش پیچ راستگرد است که جهت \hat{n} را، که در جهت پیشرفت پیچ در اثر چرخش است، تعیین می‌کند. (شکل ۵-۱).

برحسب بردارهای یکه متعامد حاصلضرب برداری به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{x}[A_y B_z - A_z B_y] + \hat{y}[A_z B_x - A_x B_z] + \hat{z}[A_x B_y - A_y B_x] \quad (5-1)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \quad \text{یک دترمینان} \quad (6-1)$$

جزءهای جابه‌جایی، سطح، و حجم؛ زاویه فضایی γ

برای $\Delta\rho$ به حد کافی کوچک، $(\hat{\phi}_1 \approx \hat{\phi}_2 \equiv \hat{\phi})$ ، می‌توان دید که
 $\Delta\rho = |\hat{\rho}_1| \Delta\phi \hat{\phi}$ در نتیجه معادله (۱۲-۱) می‌شود

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta\rho\hat{\rho}_1 + \rho_1\Delta\hat{\phi}_1 + \Delta z\hat{z} \quad (14-1)$$

وقتی نقطه (۲) به نقطه (۱) میل کند جابه‌جایی جزئی را می‌توان نوشت

$$d\mathbf{r} = dl_\rho\hat{\rho} + dl_\phi\hat{\phi} + dz\hat{z} \quad (15-1)$$

که

$$dl_\rho = d\rho \quad dl_\phi = \rho d\phi \quad dl_z = dz \quad (16-1)$$

جزء جابه‌جاییها به ترتیب در راستاهای ρ ، ϕ ، و z هستند. به این ترتیب

$$d\mathbf{r} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z} \quad (17-1)$$

که $\{\rho, \phi, z\}$ در نقطه‌ای تعریف می‌شوند که جابه‌جایی $d\mathbf{r}$ در آن انجام شده است. از دید هندسی این یک نتیجه طبیعی است زیرا به حد کافی نزدیک به هر نقطه (z, ϕ, ρ) فضا می‌توان یک دستگاه "شبه دکارتی" را طوری تعریف کرد که برحسب آن هر جزء طول مستقیماً بیان شود.

به جای به دست آوردن جزء جابه‌جایی در یک نقطه برحسب بردارهای یک‌گانه $\hat{\rho}$ ، $\hat{\phi}$ ، \hat{z} در آن نقطه، به سادگی می‌توان در هر نقطه بردارهای یک‌گانه $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$ را برای ساختن یک دستگاه دکارتی محلی (نزدیک آن نقطه) به کار برد. از شکل ۷-۱ می‌بینیم که اجزای طول در امتداد سه راستای نزدیک این نقطه با

$$dl_r = dr \quad dl_\theta = r d\theta \quad dl_\phi = r \sin\theta d\phi \quad (18-1)$$

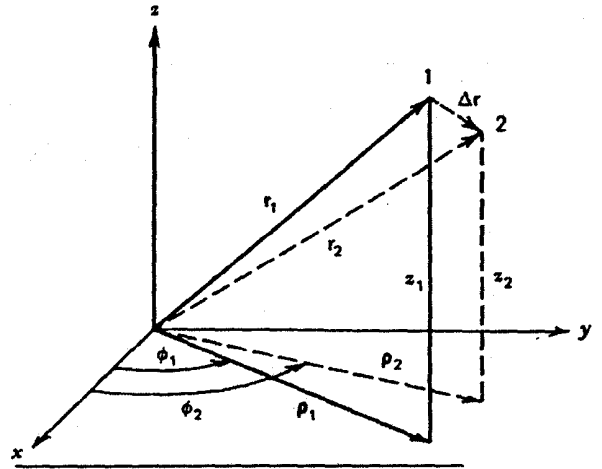
داده می‌شوند و داریم

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin\theta d\phi\hat{\phi} \\ &= dl_r\hat{r} + dl_\theta\hat{\theta} + dl_\phi\hat{\phi} \end{aligned} \quad (19-1)$$

۲-۲-۱ جزء مساحت سطح

با مشخص شدن عبارات جزء جابه‌جایی در دستگاههای مختصات مختلف، اکنون اجزای سطح را تعیین می‌کنیم. سه جزء سطح برای هر دستگاه مختصات وجود دارد؛ اینها به شکل $dl_r dl_\theta$ ، $dl_r dl_\phi$ ، $dl_\theta dl_\phi$ هستند. برای مختصات دکارتی داریم

$$dx dy \quad dy dz \quad dz dx \quad (20-1)$$



شکل ۶-۱ مختصات دو نقطه مجاور در دستگاه استوانه‌ای که برای تعریف جابه‌جایی جزئی در این دستگاه به کار رفته‌اند.

که آن را در دستگاه دکارتی بیان کرده‌ایم. نتیجتاً جزء جابه‌جایی را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$d\mathbf{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z} \quad (10-1)$$

اکنون می‌خواهیم $\Delta\mathbf{r}$ (یا $d\mathbf{r}$) را در دستگاه مختصات استوانه‌ای و کروی به کمک بردارهای یک‌گانه مربوط بیان کنیم. دوباره فرض می‌کنیم $\Delta\mathbf{r}$ را می‌توانیم به طور دلخواه کوچک کنیم و در حد آن را $d\mathbf{r}$ بنامیم. در شکل ۶-۱ دو نقطه به فاصله $\Delta\mathbf{r}$ از هم در نظر گرفته شده است. در دستگاه مختصات استوانه‌ای بردارهای پایه در نقاط ۱ و ۲ مختلف هستند. به این ترتیب

$$\Delta\mathbf{r} = \rho_2\hat{\rho}_2 + z_2\hat{z}_2 - (\rho_1\hat{\rho}_1 + z_1\hat{z}_1) \quad (11-1)$$

که

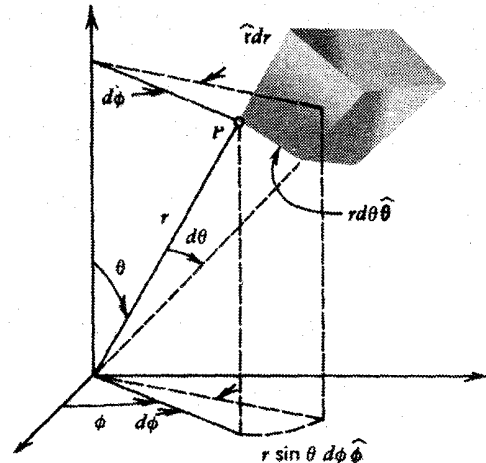
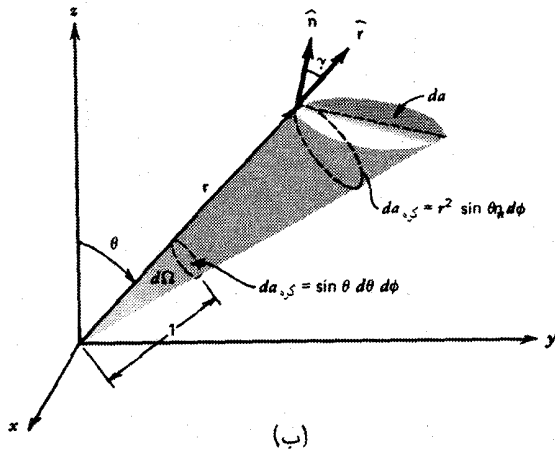
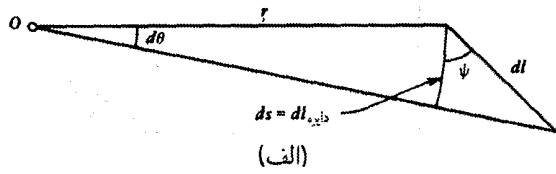
$$\begin{aligned} \rho_2 &\equiv \rho_1 + \Delta\rho & \hat{\rho}_2 &\equiv \hat{\rho}_1 + \Delta\hat{\rho} & z_2 &\equiv z_1 + \Delta z \\ \hat{z}_2 &= \hat{z}_1 \equiv \hat{z} \end{aligned} \quad (12-1)$$

با قراردادن معادله (۱۲-۱) در معادله (۱۱-۱) و حذف حاصلضربهای دیفرانسیلها به دست می‌آوریم

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta\rho\hat{\rho}_1 + \rho_1\Delta\hat{\rho} + \Delta z\hat{z} \quad (13-1)$$

اگر نقاط (۱) و (۲) به حد کافی به هم نزدیک باشند آن‌گاه با تقریب خوبی داریم

$$\Delta\hat{\rho} = \frac{d\hat{\rho}}{d\phi} \Delta\phi$$



شکل ۷-۱. جابه‌جایی جزئی در مختصات کروی.

شکل ۸-۱. تعریف زوایای مسطحه و فضایی. (الف) زاویه مسطحه $d\theta$. (ب) زاویه فضایی $d\Omega$.

و \hat{r} است. چون $da \cdot \hat{r}$ همان جزء سطح کره‌ای به شعاع r است با قراردادن $da = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ نیز با رابطه زیر داده می‌شود

$$d\Omega = \frac{da_s}{r^2} = \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\phi}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi \quad (24-1)$$

که جزء سطح یک کره واحد است.

از دید فیزیکی زاویه فضایی "زاویه رأس" مخروطی است که سطح جانبی آن جزء سطح مورد نظر را قطع می‌کند. به این ترتیب درست مثل جزء زاویه معمولی که $r d\theta = dl \cos \psi = dl_{\text{دایره}}$ است، برای جزء سطح بینهایت کوچک کره (که با تقریب یک سطح مسطح چهارگوش است) داریم $da_s = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ یا $da_s \equiv r^2 d\Omega$. یکای زاویه فضایی را استرادیان می‌نامیم که قابل قیاس با یکای زاویه مسطحه، رادیان است. هر زاویه فضایی محدود را می‌توان به شکل $\Omega = \int d\Omega = \int \sin \theta d\theta d\phi$ بیان کرد که θ و ϕ مختصات کروی جزء سطح کروی قطع شده است. اگر سطحی مبدأ را به‌طور کامل در برگیرد آن‌گاه $\Omega = 4\pi$ است، در حالی که برای سطح بسته‌ای که مبدأ درونش نباشد $\Omega = 0$ می‌شود. این موضوع (شکل ۹-۱ را ببینید) به این واقعیت مربوط می‌شود که آن‌گونه که از مبدأ دیده می‌شود برای هر زاویه فضایی مثبت موجود، یک زاویه فضایی منفی نیز وجود دارد که از مبدأ دیده می‌شود.

که به ترتیب بر سطوح ثابت $z = \text{const.}$ ، $y = \text{const.}$ و $x = \text{const.}$ منطبق‌اند. همچنین برای مختصات استوانه‌ای اجزای مساحت سطح روی سطوحی که مختصات را تعریف می‌کنند عبارت‌اند از

$$dz dp \quad \rho dp d\phi \quad \rho d\phi dz \quad (21-1)$$

و برای مختصات کروی داریم

$$r dr d\theta \quad r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad r \sin \theta d\phi dr \quad (22-1)$$

به هر جزء سطح می‌توان یک راستا نسبت داد. این راستا، راستای عمود بر سطح است. اگر dl_i جزء سطح باشد جهت عمود با ضرب خارجی $\hat{e}_i \times \hat{e}_j$ داده می‌شود و ممکن است آن را به شکل یک بردار $(\hat{e}_i dl_j) \times (\hat{e}_j dl_i) \equiv \hat{e}_k dl_i dl_j$ مشخص کرد. اغلب جزء سطح را با روش ساده‌تری به شکل $da \equiv \hat{n} da$ مشخص می‌کنیم که \hat{n} همواره در راستای عمود بر سطح است ولی جهت آن باید تعیین شود.

۳-۲-۱ زاویه فضایی

وقتی جزء کمان ds یک دایره واقع در یک صفحه را نسبت به مرکزش در نظرگیریم مفهوم زاویه مسطح $d\theta = ds/r$ را به‌کار می‌بریم که در آن شعاع دایره است [شکل ۸-۱(الف)]. از طرف دیگر وقتی یک جزء سطح نسبت به یک مبدأ در نظر گرفته شود اغلب مناسب است که مفهوم زاویه فضایی [شکل ۸-۱(ب)] را به‌کار ببریم. جزء دیفرانسیلی $d\Omega$ زاویه فضایی نسبت به مبدأ به روش زیر تعریف می‌شود

$$d\Omega \equiv \frac{da \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{da \hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{da \cos \gamma}{r^2} \quad (23-1)$$

در این مورد جزء سطح da در نقطه‌ای قرار دارد که نسبت به مبدأ به اندازه بردار $\hat{r} \equiv \hat{r}$ جابه‌جا شده است. بنابراین γ زاویه بین \hat{n}

اکنون یک "عملگر برداری" دیفرانسیلی خطی که آن را دل می‌نامیم و با علامت ∇ نشان می‌دهیم به روش زیر تعریف می‌کنیم

$$\nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (28-1)$$

چون $d\mathbf{r} = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz$ ، آن‌گاه از تعریف ضرب نقطه‌ای

$$df = (\nabla f) \cdot d\mathbf{r} \quad (29-1)$$

که ∇f یک تابع نقطه‌ای برداری است و آن را گرادیان f می‌نامیم داریم

$$\text{grad } f \equiv \nabla f = \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (30-1)$$

بعضی از کاربردها نقش عملگر گرادیان روی میدانهای برداری را دربر دارند. اگر بخواهیم تغییر میدان برداری \mathbf{A} را در محل \mathbf{r} بیان کنیم با نوشتن \mathbf{A} و \mathbf{r} به صورت مؤلفه‌های دکارتی، تغییر دیفرانسیلی را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= dx \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + dy \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + dz \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \\ &= \left[dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right] \mathbf{A} \end{aligned}$$

با استفاده از معادله (30-1) می‌توان نشان داد که ضرب زده‌ای $d\mathbf{r}$ و ∇ می‌شود

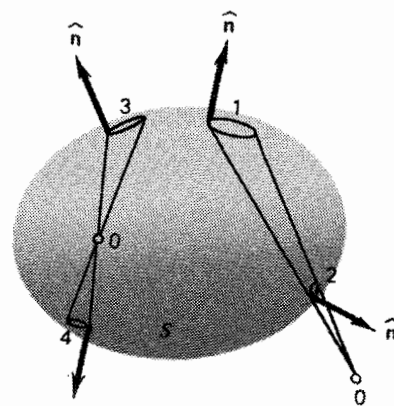
$$d\mathbf{r} \cdot \nabla = \left[dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right] \quad (31-1)$$

به این ترتیب

$$d\mathbf{A} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (32-1)$$

در یک جمله، از تأثیر عملگر زده‌ای $(d\mathbf{r} \cdot \nabla)$ روی یک تابع (نقطه‌ای) برداری $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ، دیفرانسیل فضایی \mathbf{A} ، یعنی $d\mathbf{A}$ ، در نقطه مورد نظر نتیجه می‌شود.

گرادیان در معادله (28-1) تعبیر جالبی دارد (شکل ۱-۱۰ را ببینید). فرض می‌کنیم تابع زده‌ای $f(\mathbf{r})$ در دست باشد. اگر $f(\mathbf{r})$ را برابر با مقدار ثابتی قرار دهیم، سطح $f(\mathbf{r}) = c$ به وجود می‌آید. این زمانی است که اگر دیفرانسیل $f(\mathbf{r})$ را در حالی که $d\mathbf{r}$ دو نقطه از سطح $f(\mathbf{r}) = c$ را به هم وصل می‌کند پیدا کنیم، آن‌گاه (اگر جابه‌جایی سطح را $d\mathbf{r}_s$ بنامیم) $f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}_s) = f(\mathbf{r}) = c$



شکل ۱-۹ نشان می‌دهد که چرا زاویه فضایی مقابل به سطح بسته‌ای که مبدأ را دربرگرفته 4π و آنچه مبدأ را دربرنگرفته صفر است.

۴-۲-۱ جزء حجم

با به یاد آوردن اینکه $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ حجم یک متوازی‌السطوح است، جزء حجم برای دستگاهی از بردارهای پایه $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ به سادگی به کمک ضرب سه‌گانه

$$dv = dl_1 \hat{e}_1 \cdot (dl_2 \hat{e}_2 \times dl_3 \hat{e}_3)$$

یا

$$dv \equiv |\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3)| dl_1 dl_2 dl_3$$

داده می‌شود که dl_i ها اندازه جزء جابه‌جایی در راستای بردارهای پایه، \hat{e}_i هستند. به این ترتیب در دستگاه دکارتی

$$dv = |\hat{x} \cdot (\hat{y} \times \hat{z})| dx dy dz = dx dy dz \quad (25-1)$$

و در دستگاه استوانه‌ای

$$dv = |\hat{z} \cdot (\hat{\rho} \times \hat{\theta})| dz d\rho \rho d\phi = \rho dz d\rho d\phi \quad (26-1)$$

و نیز در دستگاه کروی داریم

$$dv = |\hat{r} \cdot (\hat{\theta} \times \hat{\phi})| dr r d\theta r \sin \theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (27-1)$$

۳-۱ گرادیان

اگر بخواهیم تغییر یک تابع زده‌ای از مکان، $f(\mathbf{r})$ ، را در مکان مشخص \mathbf{r} بیان کنیم آن‌گاه با نوشتن f و \mathbf{r} در مؤلفه‌های دکارتی، تغییر دیفرانسیلی را به طریقه زیر به دست می‌آوریم

$$df = dx \frac{\partial f}{\partial x} + dy \frac{\partial f}{\partial y} + dz \frac{\partial f}{\partial z}$$

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ قرار دارد. آهنگ تغییر f در این جهتها درست برابر است با $df/dr = 2r$. بالاخره توجه کنید که چون ∇f بر سطح $f = c$ عمود است می‌توان از آن برای ایجاد بردارهای یکه دستگاه مختصات استفاده کرد. به این ترتیب

$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \hat{\mathbf{f}} \quad (۳۴-۱)$$

یک بردار یکه عمود بر سطح $f(x, y, z) = \text{const.}$ است. اکنون برای هر تابع (نقطه‌ای) نزده‌ای f در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارتی برای ∇f به دست می‌آوریم. برای این کار به معادله تعریف‌کننده گرادیان، $df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$ توجه کنید. با نوشتن $d\mathbf{r} = \hat{\rho} d\rho + \hat{\phi} \rho d\phi + \hat{z} dz$ و

$$\nabla f = \hat{\rho}(\nabla f)_\rho + \hat{\phi}(\nabla f)_\phi + \hat{z}(\nabla f)_z$$

که همواره در هر نقطه $\{\rho, \phi, z\}$ قابل انجام است به دست می‌آوریم

$$df = (\nabla f)_\rho d\rho + (\nabla f)_\phi \rho d\phi + (\nabla f)_z dz$$

از طرفی df را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت

$$df = \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

از برابری دو عبارت داریم

$$(\nabla f)_\rho = \frac{\partial f}{\partial \rho} \quad (\nabla f)_\phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad (\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

یا

$$\nabla f = \hat{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z}$$

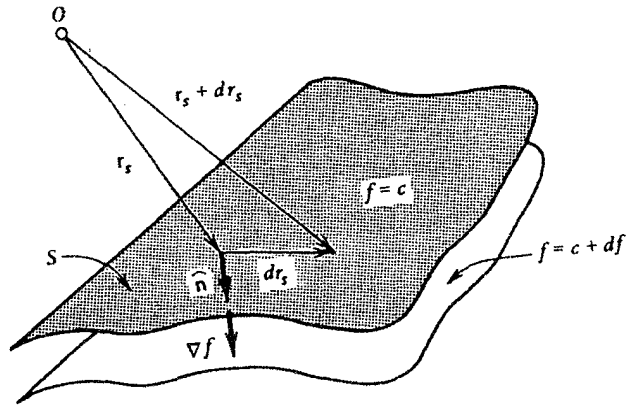
بنابراین عملگر دل (∇) در مختصات استوانه‌ای می‌شود

$$\nabla = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (۳۵-۱)$$

همین طور می‌توان عباراتی برای ∇f و ∇ در مختصات قطبی کروی به دست آورد

$$\nabla f = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (۳۶-۱)$$



شکل ۱۰-۱ استفاده از سطح $f(\mathbf{r}) = c = \text{const.}$ برای نمایش عمود بودن گرادیان تابع $f(\mathbf{r})$ بر این سطح.

و بنابراین $df = 0$. که با توجه به آن $df = (\nabla f) \cdot d\mathbf{r}_s = 0$ این به معنی آن است که ∇f بر $d\mathbf{r}_s$ عمود است. چون $d\mathbf{r}_s$ را در صفحه مماس بر سطح در نقطه \mathbf{r} در نظر گرفتیم می‌بینیم که ∇f بر سطح عمود است. اکنون تغییر $f(\mathbf{r})$ را وقتی که به نقطه مجاور $r + dr$ که در سطح قرار ندارد جابه‌جا می‌شویم می‌توان از رابطه $df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} \quad (۲۹-۱)$ حساب کرد بنابراین اگر $|d\mathbf{r}| \equiv ds$ $df/ds = (\nabla f) \cdot d\mathbf{r}/ds = \nabla f \cdot \hat{\mathbf{t}}$ که $\hat{\mathbf{t}}$ بردار یکه در جهت $d\mathbf{r}$ است. df/ds را مشتق جهتی f می‌نامیم. مقدار بیشینه df/ds وقتی به دست می‌آید که $\hat{\mathbf{t}}$ در جهت ∇f قرار گیرد. در این حال $|\nabla f \cdot \hat{\mathbf{t}}| = |\nabla f| = (df/ds)_{\text{max}}$ یعنی بیشینه آهنگ افزایش تابع $f(\mathbf{r})$ برای جابه‌جایی $d\mathbf{r}$ برابر با ∇f است و ∇f در راستای افزایش بیشینه قرار دارد. این خواص ∇f در فرمول زیر خلاصه شده‌اند

$$\nabla f = \hat{\mathbf{n}} \frac{df}{dn} \quad (۳۳-۱)$$

که $\hat{\mathbf{n}} dn$ جابه‌جایی $d\mathbf{r}$ در راستای عمود بر سطح $f = \text{const.}$ (در جهت افزایش بیشینه f) است. به این دلیل است که آن را گرادیان f می‌نامیم. به عنوان مثال مجموعه صفحات $f \equiv x = c = \text{const.}$ را که هر صفحه، برای یک مقدار c ، بر محور x عمود است بررسی می‌کنیم. به روشنی $\nabla f = \hat{\mathbf{x}}$ نشان می‌دهد که (الف) عمود بر صفحه‌ها در راستای x قرار دارد و (ب) میزان افزایش f در این راستا یک است. به عنوان مثال دیگر، $r^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = f$ را در نظر می‌گیریم. آن‌گاه پیدا می‌کنیم $\nabla f = 2r\hat{\mathbf{r}}$ که $\mathbf{r} \equiv x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ است. عمود بر سطح $f = c$ در راستای شعاع کره به طرف سطوح

داده‌ایم) را حساب می‌کنیم

$$dF_{\lambda} + dF_{\tau} = -\{r^{\lambda} A_r \sin \theta d\theta d\phi\}_{\lambda} + \{r^{\lambda} A_r \sin \theta d\theta d\phi\}_{\tau}$$

$$\equiv d\{r^{\lambda} \sin \theta d\theta d\phi A_r\}_{\lambda, \tau}$$

$$dF_{\tau} + dF_{\epsilon} = -\{r \sin \theta d\phi dr A_{\theta}\}_{\tau} + \{r \sin \theta d\phi dr A_{\theta}\}_{\epsilon}$$

$$\equiv d\{r \sin \theta, d\phi dr A_{\theta}\}_{\tau, \epsilon}$$

$$dF_{\delta} + dF_{\epsilon} = -\{r d\theta dr A_{\phi}\}_{\delta} + \{r d\theta dr A_{\phi}\}_{\epsilon}$$

$$\equiv d\{r d\theta dr A_{\phi}\}_{\delta, \epsilon}$$

مقادیر داخل آکولادها را در مرکز وجوه محاسبه می‌کنیم. بنابراین تنها توابع r برای سطوح ۱ و ۲ مختلف هستند

$$d\{r^{\lambda} \sin \theta d\theta d\phi A_r\}_{\lambda, \tau} = d\{r^{\lambda} A_r\}_{\lambda, \tau} \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \{r^{\lambda} A_r\} dr \sin \theta d\theta d\phi$$

همین طور

$$d\{r \sin \theta d\phi dr A_{\theta}\}_{\tau, \epsilon} = d\{\sin \theta A_{\theta}\}_{\tau, \epsilon} r dr d\phi$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta} \{\sin \theta A_{\theta}\} r d\theta dr d\phi$$

$$d\{r dr d\theta A_{\phi}\}_{\delta, \epsilon} = \frac{\partial}{\partial \phi} \{A_{\phi}\} r dr d\theta d\phi$$

بنابراین

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \left[\frac{\sum_{j=1}^3 dF_j}{r^{\lambda} \sin \theta dr d\theta d\phi} \right]$$

یعنی

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^{\lambda}} \frac{\partial}{\partial r} (r^{\lambda} A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_{\theta}) + \frac{\partial A_{\phi}}{\partial \phi} \right]$$

(۳۹-۱)

اکنون برای به دست آوردن دیورژانس در دستگاههای مختصات مختلف ضرب نردهای مستقیم $\nabla \cdot \mathbf{A}$ را به کار می‌بریم. عملگر ∇ در مختصات کروی با معادله (۳۶-۱) داده می‌شود. به این ترتیب

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left[\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \cdot [\hat{r} A_r + \hat{\theta} A_{\theta} + \hat{\phi} A_{\phi}]$$

از بسط ضرب نردهای، ۹ جمله زیر به دست می‌آید

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \hat{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} [\hat{r} A_r + \hat{\theta} A_{\theta} + \hat{\phi} A_{\phi}] + \frac{\hat{\theta}}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} [\hat{r} A_r + \hat{\theta} A_{\theta} + \hat{\phi} A_{\phi}]$$

$$+ \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} [\hat{r} A_r + \hat{\theta} A_{\theta} + \hat{\phi} A_{\phi}]$$

۴-۱ دیورژانس یک بردار و قضیه گاوس

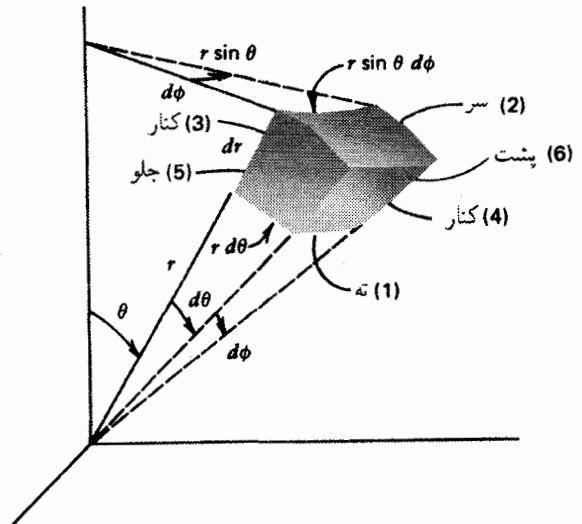
دیورژانس هر میدان برداری $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ را که به شکلهای مختلف $\text{div } \mathbf{A}$ یا $\nabla \cdot \mathbf{A}$ نمایش داده می‌شود با عبارت زیر تعریف می‌کنیم

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left[\frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}}{\Delta V} \right] \quad (۳۷-۱)$$

که ΔV یک حجم جزئی و S سطح آن است. به علاوه $\nabla \cdot \mathbf{A}$ را می‌توان به طور هم‌ارز با حاصلضرب ∇ با بردار \mathbf{A} تعریف کرد. ابتدا تعریف انتگرالی را برای به دست آوردن دیورژانس یک بردار به طور صریح به کار می‌بریم. سطح S را که جزء آن با da مشخص می‌شود در نظر می‌گیریم، آن‌گاه انتگرال

$$F = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \quad (۳۸-۱)$$

را "شار بردار \mathbf{A} از سطح S " می‌نامیم. به روشنی همانند بحث زاویه فضایی، برای S یک جهت (نسبت به دستگاه مختصات به کاررفته) در نظر می‌گیریم. سطح S در حالت کلی ممکن است بسته یا باز باشد. جزء شار عبوری از da با $dF = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$ داده می‌شود که در مرکز da اندازه‌گیری می‌شود. اکنون جزء حجم بینهایت کوچک \mathbf{A} که در شکل ۱۱-۱ نمایش داده‌ایم را در نظر می‌گیریم. وجوه dv با شش سطح $r = c + dr$, $r = c$, $\theta = c' + d\theta$, $\theta = c'$, $\phi = c'' + d\phi$, $\phi = c''$ در مختصات کروی داده می‌شود و حجم آن $dF_{\epsilon}, \dots, dF_{\tau}, dF_{\lambda}$ است. شارهای عبوری $r^{\lambda} \sin \theta d\theta d\phi dr$ از این سطوح شش‌گانه ۱ تا ۶ جزء حجم گفته شده (که در شکل نشان



شکل ۱۱-۱ تعیین دیورژانس یک بردار در مختصات کروی.

روش ضرب مستقیم را به کار می‌بریم و به این موضوع توجه می‌کنیم که \hat{z} یک برداریکه ثابت است و $\hat{\rho}$ و $\hat{\phi}$ فقط به مختصه ϕ [معادله (۲-۱)] وابسته‌اند. تنها مشتقهای غیرصفر بردارهای یکه، $\partial\hat{\rho}/\partial\phi = \hat{\phi}$ و بنابراین $\partial\hat{\phi}/\partial\phi = -\hat{\rho}$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial\rho} A_\rho + \frac{1}{\rho} A_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\phi} A_\phi + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

یا

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\phi} A_\phi + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (۴۰-۱)$$

سرانجام عملگر ∇ در مختصات دکارتی، همان طور که در معادله (۲۸-۱) نشان داده شد، به دست می‌آید

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

با بسط مستقیم $\nabla \cdot \mathbf{A}$ به دست می‌آوریم

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (۴۱-۱)$$

قضیه دیورژانس (قضیه گاوس). بالاخره رابطه‌ای که در الکتروستاتیک بسیار مفید است یعنی قضیه دیورژانس را، که عمل دیورژانس را در بر دارد، اثبات می‌کنیم. از تعریف $\nabla \cdot \mathbf{A}$ برای Δv کوچک داریم

$$(\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta v \cong \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

حجم V با سطح S که به N جزء حجم ∇v_i با سطح s_i تقسیم شده است را، همان طور که در شکل ۱۲-۱ نشان داده‌ایم، در نظر می‌گیریم. آن‌گاه

$$\sum_{i=1}^N (\nabla \cdot \mathbf{A})_i \Delta v_i = \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

اگر از طرف چپ وقتی $N \rightarrow \infty$ و $\Delta v_i \rightarrow 0$ حد بگیریم، یک انتگرال حجمی در طرف چپ و یک انتگرال سطحی در طرف راست خواهیم داشت

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \quad (۴۲-۱)$$

این واقعیت که

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

اکنون با انجام مشتقات، با توجه به اینکه، مثلاً

$$\frac{\partial}{\partial r} (\hat{r} A_r) = \frac{\partial \hat{r}}{\partial r} A_r + \hat{r} \frac{\partial A_r}{\partial r}$$

و به همین ترتیب برای دیگر جمله‌ها، ۱۸ جمله متمایز به وجود خواهد آمد. اما اگر توجه کنیم که $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = \hat{r} \cdot \hat{\phi} = \hat{\theta} \cdot \hat{\phi} = 0$ و غیره، تنها ۱۲ جمله غیرصفر باقی می‌ماند

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} = & \hat{r} \cdot \frac{\partial \hat{r}}{\partial r} A_r + \frac{\partial A_r}{\partial r} + \hat{r} \cdot \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} A_\theta + \hat{r} \cdot \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} A_\phi \\ & + \frac{\hat{\theta}}{r} \cdot \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} A_r + \frac{\hat{\theta}}{r} \cdot \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} A_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\hat{\theta}}{r} \cdot \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} A_\phi \\ & + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} A_r + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} A_\theta \\ & + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} A_\phi + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \end{aligned}$$

مقدار مشتقهای جزئی بردارهای یکه در این عبارت در جدول ۱-۱ آمده است. جدول زیر با استفاده از عبارتهای \hat{r} ، $\hat{\theta}$ ، و $\hat{\phi}$ ، که قبلاً در معادله (۳-۱) آمده بود به سادگی تنظیم شده است. مثلاً چون $\hat{\theta} = \hat{x} \cos \theta \cos \phi + \hat{y} \cos \theta \sin \phi - \hat{z} \sin \theta$ و بردارهای یکه دکارتی ثابت‌اند

$$\partial \hat{\theta} / \partial \theta = \hat{x}(-\sin \theta) \cos \phi + \hat{y}(-\sin \theta) \sin \phi - \hat{z} \cos \theta = -\hat{r}$$

با جایگذاری، همان نتیجه‌ای را به دست خواهیم آورد که در (۳۹-۱) به دست آمد.

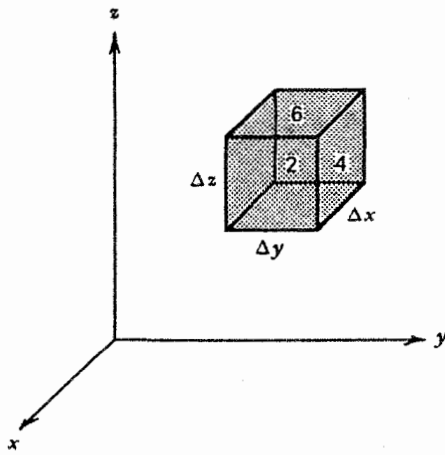
عملگر ∇ را در مختصات استوانه‌ای [معادله (۳۵-۱)] را ببینید به شکل

$$\nabla = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

نشان دادیم. در ادامه برای به دست آوردن $\nabla \cdot \mathbf{A}$ در مختصات استوانه‌ای

جدول ۱-۱

$\hat{\phi}$	$\hat{\theta}$	\hat{r}	
.	.	.	$\frac{\partial}{\partial r}$
.	$-\hat{r}$	$\hat{\theta}$	$\frac{\partial}{\partial \theta}$
$-\hat{r} \sin \theta + \hat{\theta} \cos \theta$	$\hat{\phi} \cos \theta$	$\hat{\phi} \sin \theta$	$\frac{\partial}{\partial \phi}$



شکل ۱۳-۱ تعیین شکل صریح تاو یک بردار در دستگاه مختصات دکارتی با استفاده از یک دیفرانسیل جعبه مکعب مستطیل.

سه سطح مقابل ۱ و ۲ در انتگرال $\int da \times A$ عبارت است از

$$\int_1 da \times A = \{-\hat{x} dy dz \times A\}_1 = -dy dz \{\hat{z} A_y - \hat{y} A_z\}_1$$

$$\int_2 da \times A = \{\hat{x} dy dz \times A\}_2 = dy dz \{\hat{z} A_y - \hat{y} A_z\}_2$$

جمع این دو انتگرال دیفرانسیل (جزئی) عبارت نشان داده شده در آکولاد است که روی سطوح ۱ و ۲ گرفته شده است

$$\begin{aligned} \int_{1+2} da \times A &= dy dz [\partial \{\hat{z} A_y - \hat{y} A_z\}_{1,2}] \\ &= dy dz \frac{\partial}{\partial x} \{\hat{z} A_y - \hat{y} A_z\} dx \\ &= dv \left[\hat{z} \frac{\partial A_y}{\partial x} - \hat{y} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

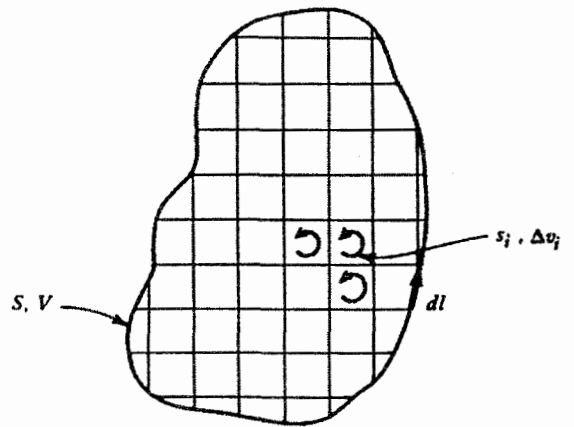
همچنین برای سطوح روبه روی ۳ و ۴ و نیز ۵ و ۶ به سادگی می توان نوشت

$$\int_{3+4} da \times A = dv \left[\hat{x} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \hat{z} \frac{\partial A_x}{\partial y} \right]$$

$$\int_{5+6} da \times A = dv \left[\hat{y} \frac{\partial A_x}{\partial z} - \hat{z} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right]$$

از جمع تمام جمله ها به دست می آید

$$\begin{aligned} \nabla \times A &= \hat{x} \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] + \hat{y} \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \\ &+ \hat{z} \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (44-1)$$



شکل ۱۲-۱ اثبات قضیه دیورژانس (قانون گاوس) با تقسیم حجم V محدود به سطح S به تعداد زیادی حجم بینهایت کوچک Δv_i به سطح s_i و کاربرد تعریف دیورژانس بر حسب حجمهای بینهایت کوچک.

یک انتگرال روی سطح خارجی "حجم کل" می شود را از شکل ۱۲-۱ می توان دید. یادآوری می کنیم که شار خالص عبوری از هر سطح داخلی صفر است زیرا چنین سطحی بین دو جزء حجم مجاور مشترک است و عمود بر سطح برای دو جزء حجم مجاور روی سطح مشترک در دو جهت مخالف است. چیزی که باقی می ماند شار مربوط به سطوحی است که بین دو جزء حجم مشترک نباشد و آن سطوح واقع بر سطح حجم کل V است.

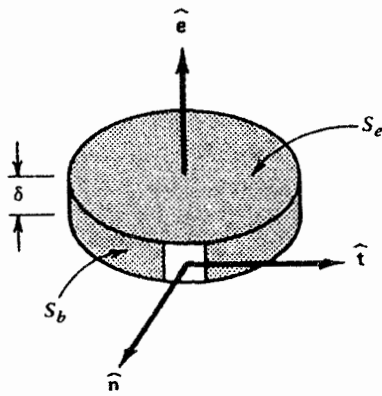
معادله (۴۲-۱) که آن را قضیه دیورژانس (یا قضیه "گاوس") می نامیم موقعی بسیار مفید است که بخواهیم مقادیر میدان برداری روی سطح یک ناحیه را به مقادیر آن در داخل ناحیه مربوط کنیم. اغلب تبدیل یک انتگرال سطحی به انتگرال حجمی (یا بالعکس) مورد نیاز خواهد بود که در فصل ۳ و ۴ آن را نشان خواهیم داد.

۵-۱ تاو و قضیه استوکس

اکنون به معرفی عمل مفید دیگری که شامل عملگر ∇ است می پردازیم. برای یک میدان برداری $A(r)$ ، تاو را که به شکل $\nabla \times A$ نشان می دهیم با عبارت زیر تعریف می کنیم

$$\nabla \times A = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta v} \oint da \times A \right] \quad (43-1)$$

که Δv یک حجم کوچک با سطح S است. این تعریف را اکنون برای تعیین $\nabla \times A$ در نمایش دکارتی می توان به کار برد. جزء حجم $dv = dx dy dz$ را که در شکل ۱۳-۱ نشان داده ایم در نظر می گیریم.



شکل ۱۴-۱ تعیین مؤلفه تاو یک بردار در راستای بردار واحد \hat{e} با استفاده از تعریف تاو یک جعبه جزئی با ارتفاع ناچیز و با محوری در راستای \hat{e} .

با همین روش عبارت زیر برای $\nabla \times \mathbf{A}$ در مختصات کروی به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\theta) \right] \\ & + \hat{\theta} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \\ & + \hat{\phi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (۴۷-۱)$$

مجدداً از دترمینان زیر می‌توان استفاده کرد

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}$$

قضیه استوکس. در پایان رابطه بسیار مفیدی در مغناطوستاتیک را اثبات می‌کنیم "قضیه استوکس" که دربرگیرنده تاو یک بردار است برای انجام این کار مؤلفه $\nabla \times \mathbf{A}$ در راستای \hat{e} را در نظر می‌گیریم. برای محاسبه این رابطه، جزء حجم کوچکی به سطح S و به شکل استوانه را (شکل ۱۴-۱) که سطوح بالا و پایین آن هر یک S_e عمود بر \hat{e} بوده و سطح جانبی آن S_b ، به عرض δ و موازی \hat{e} است در نظر می‌گیریم. با به‌کار بردن معادله (۴۳-۱) برای این جزء حجم داریم

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{S_e \delta} \oint_S d\mathbf{a} \times \mathbf{A}$$

اکنون مؤلفه $\nabla \times \mathbf{A}$ در راستای \hat{e} را حساب می‌کنیم. از ضرب

همین روش را می‌توان برای تعیین $\nabla \times \mathbf{A}$ در دستگاه مختصات کروی و استوانه‌ای به‌کار برد. همچنین می‌توان ضرب خارجی عملگر ∇ با تابع نقطه‌ای برداری \mathbf{A} را به همان شیوه ضرب خارجی دو بردار به‌کار برد. می‌توان به‌سادگی نشان داد که نتیجه این عمل دقیقاً همان معادله (۴۴-۱) است.

$\nabla \times \mathbf{A}$ را می‌توانیم در مختصات دکارتی به شکل دترمینان

زیر بنویسیم

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (۴۵-۱)$$

این دترمینان به شرطی معنی دارد که نسبت به ردیف اول بسط داده شود. چون $\nabla \times \mathbf{A}$ شبیه ضرب برداری دو بردار ∇ و \mathbf{A} است انتظار داریم که مقدار آن مستقل از دستگاه مختصاتی که در آن نمایش داده شده است باشد. مثلاً خواهیم دید که $\nabla \times \mathbf{A}$ دارای یک معنی فیزیکی است و این معنی مستقل از دستگاه مختصات نمایش‌دهنده \mathbf{A} است. به این ترتیب فرض می‌کنیم که $\nabla \times \mathbf{A}$ یک بردار است، درست مثل آنکه فرض کردیم ∇f یک بردار و $\nabla \cdot \mathbf{A}$ یک نرده‌ای است.

با نوشتن عملگر ∇ و بردار \mathbf{A} در هر دستگاه مختصات دیگر می‌توان به‌طور صریح نمایش $\nabla \times \mathbf{A}$ را در آن دستگاه به دست آورد. فقط باید توجه کرد که مشتقاتی جزئی بردارهای یکه در مختصات منحنی‌الخط لزوماً صفر نیستند (برخلاف بردارهای یکه در دستگاه مختصات دکارتی که مشتقاتی آنها همواره صفر است). با این روش عبارت زیر را در مختصات استوانه‌ای به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \hat{\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \hat{\phi} \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \\ & + \hat{z} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \end{aligned} \quad (۴۶-۱)$$

معادله (۴۶-۱) مشخص می‌کند که دترمینان ساده‌ای که بتواند تاو یک بردار را در مختصات استوانه‌ای نشان دهد وجود ندارد. با وجود این هنوز می‌توان آن را به شکل دترمینان زیر نوشت

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

نقطه‌ای \hat{e} در $\nabla \times \mathbf{A}$ به دست می‌آوریم

$$\hat{e} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{S_e \delta} \oint_S \hat{e} \cdot d\mathbf{a} \times \mathbf{A} \quad (48-1)$$

چون $\hat{e} \times S_e = 0$ تنها نوار جانبی در معادله (48-1) شرکت خواهد داشت. بنابراین

$$\hat{e} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{S_e \delta} \int_{S_b} \hat{e} \times d\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}$$

اگر δ به حد کافی کوچک باشد می‌توان نوشت $d\mathbf{a} = \delta dl \hat{n}$ که dl جزء طول در امتداد نوار جانبی و \hat{n} بردار یکه عمود بر نوار جانبی است. توجه کنید که، $\hat{n} \times \hat{e} = \hat{t}$ ، که \hat{t} بردار یکه مماس بر نوار جانبی است، آن‌گاه ضرب سه‌گانه $\hat{e} \times d\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}$ را می‌توان به شکل $(\mathbf{A} \cdot \hat{t}) \delta dl$ نوشت. چون $\hat{t} dl$ برابر $d\mathbf{r}$ است آن‌گاه به دست می‌آوریم

$$\hat{e} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{S_e} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

وقتی $\delta \rightarrow 0$ ، S_e سطح محدود به مسیر انتگرال‌گیری و شامل بردار \hat{t} است. جهت چرخش به \hat{e} وابسته است و به‌گونه‌ای است که اگر چرخش در جهت پیچ راستگرد باشد \hat{e} در جهت پیشرفت آن است. به‌طور رسمی می‌نویسیم

$$\hat{e} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \lim_{S_e \rightarrow 0} \left[\frac{1}{S_e} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \right] \quad (49-1)$$

که S_e سطحی است که عمود بر آن موازی \hat{e} و پیرامون آن به طول C مسیر انتگرال‌گیری است. یادآوری می‌کنیم که انتگرال $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ را چرخش \mathbf{A} حول C می‌نامیم. با به‌کار بردن معادله (49-1) به سادگی مؤلفه‌های $\nabla \times \mathbf{A}$ در مختصات منحنی‌الخط متعامد به دست می‌آید. اکنون معادله (49-1) را برای اثبات قضیه استوکس، که شار تاو \mathbf{A} از یک سطح را به چرخش \mathbf{A} حول لبه سطح ارتباط می‌دهد، به‌کار می‌بریم. سطح باز S محدود به منحنی بسته C را در نظر می‌گیریم. C را "همبند ساده" در نظر می‌گیریم، یعنی منحنی به‌طور پیوسته می‌تواند به یک نقطه نزول کند بی‌آنکه فضا را ترک نماید. سطح S دو رویه دارد که یکی از آنها را مثبت می‌گیریم. اکنون این سطح را به جزءهای برداری سطح $(\hat{e}_j \Delta a_j)$ تقسیم می‌کنیم که لزوماً، به شرطی که Δa_j ها به حد کافی کوچک باشند، لزوماً مسطح‌اند. برای هر یک از این جزءهای سطح معادله (49-1) را در مورد مؤلفه‌های تاو \mathbf{A} در جهت \hat{e}_j به روش زیر به‌کار می‌بریم

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{e}_j = \frac{1}{\Delta a_j} \oint_{C_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (50-1)$$

یا

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \Delta a_j = \oint_{C_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

اکنون جمع عبارتهای معادله (50-1) را برای تمام اجزای مربوط به سطح S به دست می‌آوریم. به این ترتیب

$$\sum_j (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \Delta a_j = \sum_j \oint_{C_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

در حد $\Delta a_j \rightarrow 0$ ، که در نتیجه تعداد اجزا به بینهایت میل می‌کند طرف چپ با انتگرال روی سطح باز S مساوی است. طرف راست نیز تبدیل به انتگرال خطی روی منحنی C می‌شود زیرا $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ روی تمام اجزای خطوط داخلی S حذف می‌شوند و تنها انتگرال روی حاشیه S (یعنی روی C) باقی می‌ماند. بنابراین

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (51-1)$$

که آن را قضیه "استوکس" می‌نامیم. رویه مثبت S و جهت پیموده‌شدن C با قرارداد دست راست به هم مربوط‌اند.

با استفاده از قضیه استوکس بلافاصله می‌توانیم به ملاکی برای پایستار بودن یا نبودن یک میدان برسیم. اگر $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ برای تمام مسیرهای ممکن، در ناحیه‌ای از فضا، صفر باشد آن‌گاه نتیجه می‌شود که $\nabla \times \mathbf{A}$ نیز در همه جای ناحیه صفر است. عکس این مطلب نیز صحیح است. چنین برداری را بردار پایستار می‌نامیم. بنابراین ملاکی را که تعیین می‌کند آیا یک میدان برداری در ناحیه‌ای از فضا پایستار است یا نه به روش زیر خلاصه می‌کنیم. اگر در ناحیه "همبند ساده" یکی از روابط زیر برقرار باشد

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \text{برای } C \text{ دلخواه}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (52-1)$$

برای تابع نرده‌ای f (مثال ۲-۱ را ببینید) $\mathbf{A} = \nabla f$

آن‌گاه \mathbf{A} میدانی پایستار است. برقراری یکی از این ملاکها در سرتاسر ناحیه "همبند ساده" از فضا مستلزم این است که دوتای دیگر نیز برقرار باشند.

۱-۶ نقش برداری ∇

۱-۶-۱ عملهای دل (∇) تنها

تاکنون مفهوم عملهای گرادینان، دیورژانس و تاو را بحث کردیم. در آنجا عملگر دل، ∇ ، وقتی معنی‌دار بود که فقط روی کمیتی که در طرف

روابط زیر داده می‌شود

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (۶۳-۱)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (۶۴-۱)$$

به همین روش تاوگرادیان یک تابع نرده‌ای، $\nabla \times \nabla f$ ، را می‌توان حساب کرد. در مختصات دکارتی می‌نویسیم

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

با بسط دترمینان داریم

$$\nabla \times \nabla f = \hat{x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)$$

برای توابع خوشرفتار و پیوسته $\partial^2 f / \partial y \partial z = \partial^2 f / \partial z \partial y$ و غیره، تاوگرادیان یک تابع نرده‌ای صفر است [معادله (۵۲-۱)] را که بردارهای پایستار را تعریف می‌کند ببینید؛ یعنی

$$\nabla \times \nabla f = 0 \quad (۶۵-۱)$$

با یک میدان برداری \mathbf{f} می‌توان عبارتهای مختلف دل دوتایی را نوشت. با وجود این می‌توان نشان داد که $(\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{f}$ و $(\nabla \times \nabla) \times \mathbf{f}$ صفرند. همچنین می‌توانیم با محاسبه مستقیم در مختصات دکارتی نشان دهیم که، $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f})$ ، دیورژانس تاو یک بردار صفر است یعنی

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0 \quad (۶۶-۱)$$

معادله (۶۶-۱) در مغناطوستاتیک مهم است زیرا دیورژانس میدان مغناطیسی \mathbf{B} صفر است ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$). آن‌گاه می‌توانیم میدان مغناطیسی \mathbf{B} را برحسب پتانسیل برداری \mathbf{A} نمایش دهیم

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

راست آن قرار گرفته است، عمل کند، در غیر این صورت در خیلی از موارد مثل یک بردار معمولی عمل می‌کند. اینجا می‌خواهیم بعضی از این عملها را خلاصه کنیم. اگر f و g توابع نرده‌ای و \mathbf{A} و \mathbf{B} توابع برداری مکان در فضا باشند آن‌گاه

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g \quad (۵۳-۱)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (۵۴-۱)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \quad (۵۵-۱)$$

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g) \quad (۵۶-۱)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + f(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (۵۷-۱)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = \nabla f \times \mathbf{A} + f(\nabla \times \mathbf{A}) \quad (۵۸-۱)$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (۵۹-۱)$$

$$+ (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \quad (۶۰-۱)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (۶۱-۱)$$

این روابط با بیان ∇ در مختصات دکارتی و مقایسه دو طرف معادله‌های فوق تماماً قابل اثبات است.

۱-۶-۲ عملهای دل دوتایی

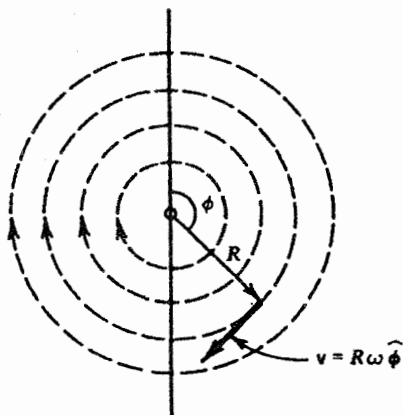
عملگر دل را می‌توان برای چندین بار پیاپی روی یک تابع اثر داد. با در نظر گرفتن تابع نقطه‌ای نرده‌ای f ، مثلاً عبارتهای $\nabla \cdot \nabla f$ و $\nabla \times \nabla f$ را داریم. در مختصات دکارتی

$$\nabla \cdot \nabla f = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

چون $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0$ و $\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$ داریم

$$\nabla \cdot \nabla f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f = \nabla^2 f \quad (۶۲-۱)$$

این عملگر را لاپلاسی می‌نامیم. لاپلاسی در سایر مختصات به همین روش به دست می‌آید. لاپلاسی در مختصات استوانه‌ای و کروی با



شکل ۱۵-۱ میدان سرعت در یک آبگذر.

روابط (۷۰-۱) و (۷۱-۱) نیز با اعمال قضیه دیورژانس به ترتیب روی بردارهای $\mathbf{F} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ و $\mathbf{F} = \Phi \mathbf{C}$ ، که \mathbf{C} یک بردار ثابت است، قابل اثبات است.

قضیه استوکس. روابط انتگرالی زیر تعمیم قضیه استوکس است

$$\oint_C \mathbf{dr} \times \mathbf{B} = \int_S (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla) \times \mathbf{B} da \quad (۷۳-۱)$$

$$\oint_C \Phi \mathbf{dr} = \int_S (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \Phi) da = \int da \times \nabla \Phi \quad (۷۴-۱)$$

این دو معادله را می‌توان با اعمال قضیه استوکس به ترتیب روی بردارهای $\mathbf{F} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ و $\mathbf{F} = \Phi \mathbf{C}$ ، که \mathbf{C} یک بردار ثابت است، اثبات کرد.

مثال ۱-۱ میدان سرعت در یک آبگذر

میدان برداری $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \rho \hat{\phi}$ را که در شکل ۱۵-۱ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم، که در آن ρ فاصله از محور z ، ω یک ثابت و $\hat{\phi}$ مرتبط با مختصه زاویه‌ای ϕ حول محور است. آیا \mathbf{v} پایستار است؟ با بررسی چرخش میدان $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ روی مسیر دایره‌ای به شعاع R حول محور z پایستار نبودن آن به وضوح آشکار می‌شود:

$$\oint_{\text{دایره}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \omega R \hat{\phi} \cdot R \hat{\phi} d\phi = 2\pi \omega R^2$$

چرخش غیرصفر است و بنابراین \mathbf{v} پایستار نیست. این مثال میدان سرعت آب در حال تخلیه از یک چاهک را نشان می‌دهد، چرخش آب برای چنین دستگاهی در حالت کلی صفر نیست. ■

مثال ۲-۱ ماهیت پایستار بردارهای شعاعی — توابع پتانسیل میدان برداری شعاعی در مختصات کروی که با رابطه $\mathbf{A} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ مشخص می‌شود و $f(r)$ یک تابع نزده‌ای که فقط وابسته به r است

در آخر تاو تاو یک بردار $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f})$ را بحث می‌کنیم. این عملها دل دوتایی کاربرد گسترده‌ای در انتشار امواج الکترومغناطیسی، موضوعی که در فصول آینده این کتاب بحث می‌شود، دارد. با در نظر گرفتن ∇ به عنوان یک بردار می‌توان $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f})$ را مثل یک ضرب سه‌گانه برداری معمولی، $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ ، بسط داد. نتیجه می‌شود

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla \cdot (\nabla \mathbf{f}) \quad (۶۷-۱)$$

که $\nabla \mathbf{f}$ یک تانسور مرتبه دوم یا دیادیک است (مثال ۳-۱ را ببینید). در مختصات دکارتی داریم $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{f}) = (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{f} = \nabla^2 \mathbf{f}$ که ∇^2 عملگر لاپلاسی است.

۷-۱ روابط انتگرالی بردار

حال در مورد چند تعمیم از قضیه‌های دیورژانس و استوکس بحث می‌کنیم. اگرچه در ادامه بحث الکتریسیته و مغناطیس در سطح این کتاب نیازی به این تعمیمها نداریم ولی به جهت تکمیل بحث و مراجعه به آن در آینده آنها را می‌آوریم.

قضیه دیورژانس. روابط انتگرالی زیر در معادله‌های (۶۸-۱) تا (۷۲-۱) تعمیم قضیه دیورژانس هستند

$$\int_V [\Phi \nabla^2 \psi + (\nabla \Phi) \cdot (\nabla \psi)] dV = \int_S (\Phi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{a} \quad (۶۸-۱)$$

این را اتحاد اول یا قضیه گرین می‌نامیم.

$$\int_V (\Phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \Phi) dV = \int_S (\Phi \nabla \psi - \psi \nabla \Phi) \cdot d\mathbf{a} \quad (۶۹-۱)$$

این را اتحاد دوم یا قضیه متقارن گرین می‌نامیم

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A} dV = \oint_S (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}) da = \oint_S da \times \mathbf{A} \quad (۷۰-۱)$$

$$\int_V \nabla \Phi dV = \int_S \Phi \hat{\mathbf{n}} da \quad (۷۱-۱)$$

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} dV = \oint_S \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da \quad (۷۲-۱)$$

روابط (۶۸-۱) و (۶۹-۱) را به سادگی می‌توان با اعمال قضیه دیورژانس به ترتیب روی بردارهای $\mathbf{F} = \Phi \nabla \psi$ و $\mathbf{F} = \Phi \nabla \psi - \psi \nabla \Phi$ ثابت کرد، که Φ و ψ توابع نزده‌ای هستند.

کمیت‌های $\hat{x}\hat{x}$ ، $\hat{x}\hat{y}$ ، ... را دیادیکهای یکه می‌نامیم. دقت کنید که $\hat{x}\hat{y}$ برای مثال همان $\hat{y}\hat{x}$ نیست. به این ترتیب ما نه دیادیک یکه متفاوت در گرادیان داریم. هر کمیت را که بتوانیم آن را به شکل زیر بسط دهیم

$$\Phi = a_{11}\hat{x}\hat{x} + a_{12}\hat{x}\hat{y} + a_{13}\hat{x}\hat{z} + a_{21}\hat{y}\hat{x} + a_{22}\hat{y}\hat{y} + a_{23}\hat{y}\hat{z} + a_{31}\hat{z}\hat{x} + a_{32}\hat{z}\hat{y} + a_{33}\hat{z}\hat{z} \quad (77-1)$$

یک دیادیک می‌نامیم و نه ضریب a_{ij} مؤلفه‌های آن دیادیک هستند. بررسی ضرب نرده‌ای یک بردار در یک دیادیک Φ به شکل بالا مفید است. با در نظر گرفتن ضرب $\mathbf{A} \cdot \Phi$ می‌نویسیم

$$\mathbf{A} \cdot \Phi = A_x \hat{x} \cdot \Phi + A_y \hat{y} \cdot \Phi + A_z \hat{z} \cdot \Phi$$

برای مثال ضرب $\hat{x} \cdot \Phi$ را در نظر می‌گیریم. این ضرب نه جمله دارد که چند جمله آن $\hat{x} \cdot a_{11}\hat{x}\hat{x}$ ، $\hat{x} \cdot a_{12}\hat{x}\hat{y}$ ، $\hat{x} \cdot a_{13}\hat{x}\hat{z}$ و $\hat{x} \cdot a_{31}\hat{z}\hat{x}$ هستند. این ضریب‌های خاص با قواعد زیر ارزیابی می‌شود

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot a_{11}\hat{x}\hat{x} &= a_{11}(\hat{x} \cdot \hat{x})\hat{x} = a_{11}\hat{x} \\ \hat{x} \cdot a_{12}\hat{x}\hat{y} &= a_{12}(\hat{x} \cdot \hat{x})\hat{y} = a_{12}\hat{y} \\ \hat{x} \cdot a_{21}\hat{y}\hat{x} &= a_{21}(\hat{x} \cdot \hat{y})\hat{x} = 0 \\ \hat{x} \cdot a_{31}\hat{z}\hat{x} &= a_{31}(\hat{x} \cdot \hat{z})\hat{x} = 0 \end{aligned} \quad (78-1)$$

دستورهای مشابه‌ای برای بقیه ضربها و نیز ضربهای $\hat{y} \cdot \Phi$ و $\hat{z} \cdot \Phi$ وجود دارند. به‌عنوان مثال ویژه مسئله ۱-۲۰ را ببینید. ■

مثال ۱-۴ تابع دلتای دیراک

در این مثال تابع بسیار مفیدی را برای بحث بارهای نقطه‌ای معرفی می‌کنیم. ابتدا آن را صرفاً از دید ریاضی تعریف می‌کنیم و ارتباط آن با بحثهای الکترومغناطیس را به بعد موکول می‌کنیم. تابع دلتای دیراک که آن را با علامت $\delta(\mathbf{r})$ نشان می‌دهیم به‌صورت زیر معرفی می‌شود

$$\delta(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \neq 0 \quad (79-1)$$

$$\int \delta(\mathbf{r}') dv' = 1 \quad (80-1)$$

که انتگرال روی تمام فضا گرفته می‌شود. این تعریف نشان می‌دهد که تابع دلتا یک تابع ریاضی بسیار تکین است. یعنی تابع در تمام نقاط،

را در نظر می‌گیریم. حال نشان می‌دهیم که این بردار پایستار است. ملاک پایستار بودن یک بردار را معادله (۵۲-۱) به‌دست می‌دهد. با قرار دادن $A_r = f(r)$ و $A_\theta = A_\phi = 0$ در $\nabla \times \mathbf{A}$ در مختصات کروی [معادله (۴۷-۱)] بلافاصله نتیجه می‌گیریم $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. به این ترتیب مشخص می‌شود که \mathbf{A} پایستار است.

میدانهای برداری شعاعی در الکتروستاتیک اهمیت دارند زیرا میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای، شعاعی و بنابراین پایستار است. به خاطر اهمیت این ویژگی ماهیت پایستار این بردارها را از دید آخرین ملاک معادله (۵۲-۱) بررسی می‌کنیم. اگر \mathbf{A} پایستار باشد باید بتوان آن را به شکل گرادیان یک تابع نرده‌ای Φ نوشت یعنی $\mathbf{A} = \nabla \Phi$. تابع Φ تابع پتانسیل متناظر با \mathbf{A} نام دارد. برای اثبات این موضوع، تابع

$$\Phi = \int_r^r \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^r f(r) dr$$

را در نظر می‌گیریم. اگر انتگرال وجود داشته و تابع پیوسته‌ای از r باشد، آن‌گاه از عبارت گرادیان در مختصات کروی می‌بینیم که

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = f(r) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = 0$$

نتیجه این است که یک تابع Φ وجود دارد به‌طوری که

$$\nabla \Phi = f(r)\hat{r} \quad (75-1)$$

■ \mathbf{A} به راستی یک تابع پتانسیل دارد.

مثال ۱-۳ گرادیان یک بردار - دیادیکها

در این مثال در مورد گرادیان یک بردار بحث می‌کنیم که در بررسی نیروهای وارد بر دوقطبه‌های الکتریکی واقع در میدانهای الکتریکی خارجی مفید است. بردار $\mathbf{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$ را در نظر می‌گیریم آن‌گاه $\nabla \mathbf{E}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\nabla \mathbf{E} = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) (E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z})$$

از بسط این رابطه نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{E} &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} \hat{x}\hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \hat{x}\hat{y} + \frac{\partial E_z}{\partial x} \hat{x}\hat{z} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} \hat{y}\hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \hat{y}\hat{y} + \frac{\partial E_z}{\partial y} \hat{y}\hat{z} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{z}\hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial z} \hat{z}\hat{y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \hat{z}\hat{z} \right) \end{aligned} \quad (76-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{x} \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] + \hat{y} \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] + \hat{z} \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \quad [۴۴-۱]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} \hat{x} \hat{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{x} \hat{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{x} \hat{z} \right] + \dots \quad [۷۶-۱]$$

که نقاط در معادله آخری نمایش سه جمله مشابه برای هر مشتق‌گیری نسبت به y و z زاند. عملگر گرادیان را می‌توان چندین بار به شکل پی‌درپی روی یک تابع و نیز ممکن است آن را روی حاصلضرب توابع اثر داد. نتیجه این تأثیرات را می‌توان از عملهای دیفرانسیلی اساسی بالا به‌دست آورد. یک عمل مهم تأثیر عملگر لاپلاسی روی یک تابع زده‌ای یا برداری $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$ یا $\nabla^2 \mathbf{A}$ است. تمام عملهای بالا را در دیگر مختصات (استوانه‌ای یا کروی) می‌توانیم به‌دست آوریم.

بعضی اتحادهای انتگرالی عملهای دل (گرادیان) را می‌توان با انتگرال‌گیری رابطه دیفرانسیلی روی حجم دلخواه V که با سطح بسته S محدود شده است یا روی یک سطح باز که با منحنی بسته C محدود شده است به‌دست آورد. اینها قضیه دیورژانس یا قضیه استوکس را شامل می‌شوند.^۳

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \quad [۴۲-۱]$$

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad [۵۱-۱]$$

بردار \mathbf{A} را پایستار می‌نامیم اگر

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \text{یا} \quad \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{A} \text{ پایستار}) \quad [۵۲-۱]$$

اگر چنین باشد \mathbf{A} را نیز می‌توان به شکل گرادیان یک زده‌ای نوشت

$$\mathbf{A} = -\nabla \Phi \quad (\mathbf{A} \text{ پایستار})$$

مسائل

۱-۱ بردار یکه عمود بر صفحه شامل بردارهای $\mathbf{A} = 2\hat{x} - 6\hat{y} - 3\hat{z}$ و $\mathbf{B} = 4\hat{x} + 3\hat{y} - \hat{z}$ را به‌دست آورید.

۲-۱ معادله صفحه‌ای را که از نقاط $P_1(2, -1, 1)$, $P_2(3, 2, -1)$ و $P_3(-1, 3, 2)$ می‌گذرد به‌دست آورید.

بجز در یک نقطه تنها، صفر است با این همه انتگرال آن غیرصفر است (تابع میخی شکل).^۱ روشن است که این تابع پیوسته نیست بنابراین نباید از آن به صورت یک تابع پیوسته مشتق گرفت. با این حال اگر از آن درست استفاده شود یک ابزار ریاضی بسیار مفید است. ویژگی دیگر تابع دلتای دیراک، ارتباط آن با عملگر لاپلاسی یا دیورژانس است؛ یعنی

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = -\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (۸۱-۱)$$

با مشتق‌گیری مستقیم به‌سادگی نتیجه می‌گیریم که

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \cdot \mathbf{r} + \frac{(\nabla \cdot \mathbf{r})}{r^3}$$

چون $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = -3\mathbf{r}/r^4$ ، $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ برای $r \neq 0$ صفر است. و برای $r \rightarrow 0$ نامعین می‌شود. ماهیت دیورژانس در $r = 0$ را می‌توان با استفاده از قضیه دیورژانس بررسی کرد. با اعمال قضیه روی حجم کوچکی به شعاع R نتیجه می‌گیریم

$$\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \, dv = \oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{n}}{r^3} \, da = \frac{1}{R^2} \oint da = 4\pi$$

چون این نتیجه بدون توجه به میزان کوچک بودن R صحیح است پس می‌توان به جای $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3)$ ، $4\pi\delta(\mathbf{r})$ را قرار داد. ■

۸-۱ خلاصه

وقتی که جزء سطح da واقع در نقطه \mathbf{r} را از مبدأ ببینیم بهتر است که از مفهوم زاویه فضایی $d\Omega$ استفاده کنیم

$$d\Omega = \frac{d\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \sin\theta \, d\theta \, d\phi \quad [۲۳-۱], [۲۴-۱]$$

اگر سطح بسته S مبدأ را دربرداشته باشد آن‌گاه $\Omega = \oint_S d\Omega = 4\pi$ در حالی که سطح بسته شامل مبدأ نباشد $\Omega = 0$ است.

عملگر گرادیان، ∇ ، یک دیفرانسیل خطی "عملگر برداری" است که می‌تواند روی یک میدان زده‌ای f یا میدان برداری \mathbf{A} اثر کند و گرادیان یک زده‌ای، دیورژانس یک بردار، تاو یک بردار و گرادیان یک بردار را به‌دست دهد

$$\nabla f = \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z} \quad [۳۰-۱]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad [۴۱-۱]$$

۳-۱ بردارهای مکان P_1 و P_2 عبارت‌اند از $2\hat{z} + \hat{y} + 3\hat{x} = \mathbf{A}$ و $\hat{z} - 2\hat{y} - 4\hat{x} = \mathbf{B}$. معادله صفحه‌ای را پیدا کنید که از P_2 بگذرد و بر خط واصل بین دو نقطه عمود باشد.

۴-۱ (الف) نشان دهید $\nabla r^n = nr^{n-2}\mathbf{r}$. (ب) $\nabla \ln|\mathbf{r}|$ و $\nabla(1/r)$ را به دست آورید.

۵-۱ سطحی به معادله $0 = 7 - 4x - 3xy - 2xz^2$ را در نظر بگیرید. بردار یکه عمود بر سطح را در نقطه $(2, -1, 1)$ پیدا کنید.

۶-۱ تابع $\Phi = x^2yz^2$ را در نظر بگیرید. مشتق جهتی Φ که از نقطه $P(1, 1, -1)$ رسم شود در چه راستا بیشینه است؟ اندازه این بیشینه چقدر است؟

۷-۱ نشان دهید برای $r \neq 0$ ، $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$ است.

۸-۱ اگر بردارهای \mathbf{A} و \mathbf{B} پایستار باشند نشان دهید $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ یک سیمولوله‌ای یعنی دارای دیورژانس صفر است.

۹-۱ (الف) ثابتهای a ، b و c را در صورتی که بردار

$$\mathbf{A} = (x + 2y + az)\hat{x} + (bx - 3y - z)\hat{y} + (4x + cy + 2z)\hat{z}$$

غیرچرخشی باشد. به دست آورید (ب) تابع Φ را برای حالتی که $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ است پیدا کنید.

۱۰-۱ ثابت a را با فرض سیمولوله‌ای (دارای دیورژانس صفر) بودن بردار $\mathbf{A} = (x + 3y)\hat{x} + (y - 2z)\hat{y} + (x - az)\hat{z}$ به دست آورید.

۱۱-۱ نشان دهید بردار $\mathbf{E} = \mathbf{r}/r^2$ پایستار است. Φ را طوری تعیین کنید که $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ و $\Phi(a) = 0$ ، که در آن $a > 0$ باشد.

۱۲-۱ نشان دهید بردار

$$\mathbf{A} = (6xy + z^2)\hat{x} + (3x^2 - z)\hat{y} + (3xz^2 - y)\hat{z}$$

پایستار است. تابع پتانسیل Φ را طوری تعیین کنید که $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ باشد.

۱۳-۱ برای حالتی که S یک سطح بسته است، $\nabla \cdot \mathbf{r}$ و $\oint_S \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$ را به دست آورید.

۱۴-۱ بردار $\mathbf{A} = 4x\hat{x} - 2y^2\hat{y} + z^2\hat{z}$ و ناحیه محدود شده با $x^2 + y^2 = 4$ ، $z = 0$ ، و $z = 3$ را در نظر بگیرید. (الف) $\nabla \cdot \mathbf{A}$

را به دست آورید. (ب) بردار یکه عمود بر سطح S_1 ($z = 0$) و S_2 ($z = 3$) و سطح منحنی S_3 ($x^2 + y^2 = 4$) را به دست آورید. (ج) قضیه دیورژانس را برای \mathbf{A} که در این ناحیه محدود شده است تحقیق کنید.

۱۵-۱ بردار $\mathbf{A} = z\hat{x} + x\hat{y} - 3y^2z\hat{z}$ و سطح استوانه‌ای S ($x^2 + y^2 = 16$) را در نظر می‌گیریم (الف) بردار یکه عمود بر سطح

استوانه، $\hat{\mathbf{n}}$ ، را به صورت تابعی از x و y به دست آورید. (ب) انتگرال سطحی $\int_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$ را روی اولین بخش $1/8$ سطح استوانه بین $z = 0$ و $z = 5$ به دست آورید.

۱۶-۱ بردار $\mathbf{A} = (2x - y)\hat{x} - yz^2\hat{y} - y^2z\hat{z}$ و سطح S نیمکره بالایی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را در نظر بگیرید. قضیه استوکس

را $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$ که در آن C مرز S است را اثبات کنید.

۱۷-۱ ثابت کنید برای هر سطح بسته (الف) $\oint_S \hat{\mathbf{n}} da = 0$ و (ب) $\oint \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} da = 0$ است.

۱۸-۱ ثابت کنید (الف) $\int_S \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B} da = \int \nabla \times \mathbf{B} dv$ و (ب) $\int \nabla\Phi dv = \int \Phi \hat{\mathbf{n}} da$

۱۹-۱ دیادیک $\Phi = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}$ (مثال ۳-۱ را ببینید) را در نظر بگیرید. عبارتهای $\mathbf{r} \cdot (\Phi \cdot \mathbf{r})$ و $(\mathbf{r} \cdot \Phi) \cdot \mathbf{r}$ را تعیین کنید. آیا

ابهامی در نوشتن $\mathbf{r} \cdot \Phi \cdot \mathbf{r}$ وجود دارد؟

۲۰-۱ $\nabla^2 \ln r$ ، $\nabla^2 r^n$ و $\nabla^2(1/r)$ ($r \neq 0$) را به دست آورید.

۲۱-۱ گرادیان \mathbf{r} را به دست آورید.

الکتروستاتیک

۱-۲ بار الکتریکی

عامل اصلی الکتریسیته بار الکتریکی است که جوهره پدیده‌های الکتریکی است. تعریف بار الکتریکی به دلیل داشتن مفهوم کاملاً مقدماتی مشکل است مگر اینکه به تأثیرات وجودیش استناد کنیم. این تأثیرات به صورت نیروی بین بارها متجلی می‌شود. در عمل کاری را تجربه می‌کنیم و به دنبال آن به جستجوی مفهوم مقدماتی‌تری برای توجیه آن تجربه می‌گردیم. با وجود این ممکن است بار را ویژگی معینی از ذرات بنیادی دانست که در خارج آن ذره (مثل الکترون، مزون و غیره) وجود ندارد. با این حال از بار به صورت یک واقعیت که وجود مستقل دارد یاد می‌کنیم.

تا حدی که تاکنون دانسته‌اند بار ویژگیهای زیر را دارد:

۱. دو نوع بار وجود دارد که به طور دلخواه آنها را مثبت و منفی می‌نامیم. اندازه بار با یک عدد مثبت حقیقی و نوع آن را با علامت (+) و (-) مشخص می‌کنیم. تمام بارها معادل‌اند، با وجود این ممکن است بارها را به طور جبری (درست مثل اعداد حقیقی مثبت یا منفی) به یکدیگر افزود تا بارهای دیگری به دست آیند. تجربه نشان می‌دهد که دو بار همانم یکدیگر را به صورت فیزیکی دفع می‌کنند اما دو بار ناهمنام یکدیگر را جذب می‌کنند.

۲. در طبیعت بار مثبت کل مساوی بار منفی کل است. خنثی بودن (الکتریکی) اشیا معمولی‌ترین رخداد است. علاوه بر این ممکن نیست که بار مثبت (یا منفی) ایجاد (یا نیست) شود بدون اینکه بار منفی (یا

مثبت) به وجود آید (یا نیست شود). این مطلب را اصل پایداری بار می‌نامیم.

۳. همچنین می‌خواهیم مفهوم "تقارن بار" را از دید فیزیکی بدانیم. اگر دو جهان را در نظر بگیریم که در آنها تنها بارها از نظر علامت با هم مختلف باشند، این دو جهان از یکدیگر قابل تشخیص نیستند. این مفهوم تقارن بار است. نمایش تقریبی این اثر را در حوزه فیزیک ذرات بنیادی می‌بینیم. مشخص شده است که برای هر ذره بنیادی با بار مثبت، یک ذره بنیادی مشابه با بار مساوی اما منفی وجود دارد، مثلاً الکترون و پوزیترون، پروتون و پادپروتون، مزون π^+ و مزون π^- و غیره.

۴. بار کوانتیده است. به این معنی که یک مقدار کمینه (غیر صفر) بار وجود دارد. اندازه این کمینه، مثلاً به بار الکترون یا پوزیترون وابسته است. بنابراین تمام بارها مضرب صحیحی از این بار بنیادی‌اند. از نظر ریاضی اگر اندازه بار الکترون را واحد بگیریم اندازه هر بار دیگر یک عدد صحیح است. همچنان که تاکنون می‌دانیم تمام ذرات بنیادی طبیعت یا بار مساوی الکترون دارند یا بارشان صفر است. اگرچه اخیراً احتمال می‌دهند که یک ذره بنیادی با بار کمتر از بار الکترون وجود دارد (این ذرات را کوارک می‌نامیم و بار آنها برابر است با $1/3$ یا $2/3$ واحد بار الکتریکی). با این حال حتی در صورت وجود کوارک هنوز بار کوانتیده است.

۵. هر چیز باردار جرم نیز دارد. این مطلب را با این گفته که الکتریسیته شکلی از انرژی، یا کمیتی همواره وابسته به انرژی است می‌توان بیان کرد. اشیا با جرم (در حال سکون) صفر باری ندارند.

۱. اغلب مطرح می‌شود که این قانون برای "بارهای نقطه‌ای"، یعنی بارهایی که اندازه متناهی ندارند، صحیح است. آنچه عملاً در اینجا مقصود ماست این است که می‌توان از ابعاد خطی دو جسم ۱ و ۲ در مقایسه با فاصله بین دو جسم، r_{12} ، چشمپوشی کرد. بعداً خواهیم دید که اگر توزیع بارهای روی دو جسم تقارن کروی داشته باشند، حتی وقتی توان از قطر کره‌ها (با فرض آنکه در یکدیگر فرو نروند) چشم پوشید، فرمول صحیح است. با این همه، این یک حالت خاص است. نظریه بارهای نقطه‌ای وقتی که $\theta \rightarrow 0$ از نظر ریاضی با مشکل مواجه می‌شود. ما این نقطه‌نظر را که برای دو ذره (ذره یعنی جسم با ابعاد ناچیز) هیچ‌گاه $\theta = 0$ نیست قبول می‌کنیم. توجه کنید که برای دو جسم با اندازه‌های غیرقابل چشمپوشی (ابعاد خطی ذرات بنیادی زیراتمی از مرتبه 10^{-12} cm و یا کوچکتر است) فاصله r_{12} به هر صورت مبهم است.

۲. رابطه قانون کولن در حضور و یا عدم حضور بارهایی غیر از q_1 و q_2 برقرار است. این قانون به درستی نیروی بین بارهای q_1 و q_2 را به دست می‌دهد. به این ترتیب نیروی الکتریکی را "نیروی دو جسمی" می‌نامیم. این ویژگی‌ها گاهی تحت عنوان اصل برهم‌نهی (برهم‌نهی) مطرح می‌شود.

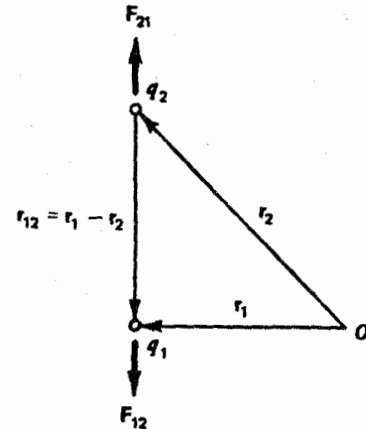
اکنون اصل برهم‌نهی را برای تعیین نیروی وارد بر یک بار ناشی از بارهای (بیش از یک) دیگر به کار می‌بریم. N بار نقطه‌ای q_1, q_2, \dots با اندازه‌های نرده‌ای q_1, q_2, \dots, q_N که به ترتیب در فواصل r_1, r_2, \dots, r_N از یک مبدأ ثابت قرار دارند در نظر می‌گیریم. نیروی وارد بر بار q که در فاصله r از مبدأ قرار دارد ناشی از کلیه بارهای دیگر از جمع برداری نیروها به دست می‌آید

$$\mathbf{F}_q = q \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (2-2)$$

قانون کولن به این ترتیب بیان می‌کند که بین بارهای q_1 و q_2 نیرو (الف) متناسب با q_1 ، (ب) متناسب با q_2 ، (ج) متناسب با $1/r_{12}^2$ و (د) در راستای خط مستقیم واصل بین بارهای q_1 و q_2 قرار دارد. اگر $q_1 q_2$ عدد منفی باشد \mathbf{F}_{12} در جهت $-\hat{\mathbf{r}}_{12}$ و \mathbf{F}_{21} در جهت $+\hat{\mathbf{r}}_{12}$ است یعنی نیروی جاذبه و در غیر این صورت دافعه داریم.

۳. ما دستگاه یکاهای MKS (متر-کیلوگرم-ثانیه) را به کار می‌بریم. در این صورت نیرو برحسب نیوتون $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ، یعنی ۱. برای بحث این نکته تاریخی به کتاب زیر مراجعه کنید.

R. S. Elliott, *Electromagnetics* (New York: McGraw-Hill, 1966).



شکل ۱-۲ نیروی الکتریکی بین دو بار همانم که از قانون کولن به دست می‌آید.

درست مانند وقتی که از انرژی گرانشی صحبت می‌کنیم، درباره انرژی الکتریکی بحث خواهیم کرد.

سبکترین ذره باردار شناخته شده، الکترون با جرم (در حال سکون) $9.1091 \times 10^{-31} \text{ kg}$ است. جرم (در حال سکون) نوکلئونها (پروتون و نوترون) تقریباً 1840 بار بزرگتر است.

این مشخصه‌های بار تنها مشخصه‌های آن نیستند. مثلاً به مباحثی مانند اندازه هندسی یا شکل بار بنیادی نمی‌پردازیم. با این حال، مشخصه‌هایی را که نام بردیم آنهاست هستند که در فهم ما از الکتریسیته نقش بسزایی دارند.

۲-۲ قانون کولن

قانون کولن به نام چارلز آگوستین کولن (۱۷۳۶-۱۸۰۶) نام‌گذاری شده است. اگرچه هانری کاوندیش (۱۷۳۱-۱۸۱۰) قبل از او (حدود سالهای ۱۷۷۳-۱۷۸۵) آن را کشف کرد. این قانون به وضوح چگونگی تأثیر دو بار ساکن روی یکدیگر را بیان می‌کند (شکل ۱-۲). این قانون را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (1-2)$$

که q_1 و q_2 بارهای اجسام (ذرات) ۱ و ۲ را نشان می‌دهند که ممکن است مثبت یا منفی باشند، r_{12} فاصله ذره ۱ تا ذره ۲، \mathbf{F}_{21} نیروی وارد بر ذره ۲ ناشی از ذره ۱، k ثابت (مثبت) متناسب و $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ بردار یکه در جهت q_2 به q_1 است.

برای استفاده صحیح از این قانون باید بر فرضهای معینی به روشنی تأکید کرد:

است. تجربه نشان داده است که برای فواصل معمولی، یعنی فواصل ماکروسکوپی، توان ۲ی وابستگی عکس مجذور با دقت بهتر از یک قسمت در ۱۰^{۱۵} صحیح است. همچنین معلوم شده است که اثرهای فیزیکی پیشگویی شده به وسیله قانون نیرو برای فواصل زیر میکروسکوپی تا مرتبه حداقل ۱۰^{-۱۲} سانتیمتر صحیح است. به علت نبودن مدرکی برخلاف آن فرض می‌کنیم که قانون کولن به طور عام صحیح است.

۳-۲ میدان الکتریکی

خواهیم دید که نیروی خالص F_q در معادله (۲-۲) به طور خطی به اندازه بار q وابسته است. این موضوع این مفهوم را در ذهن ایجاد می‌کند که "بارهای موجود شرایطی را در فضا ایجاد می‌کنند که به هر بار دیگری که در آن قرارگیرد نیرو وارد می‌شود". این حالت را می‌توان با این عبارت که بار الکتریکی یک میدان الکتریکی در فضا ایجاد می‌کند (یا به آن مربوط می‌شود) بیان کرد. اگر یک بار اختیاری ("آزمایشی") در این میدان الکتریکی (که آن را با E مشخص می‌کنیم) قرارگیرد به آن نیروی، F_q وارد می‌شود که با رابطه زیر داده می‌شود

$$F_q(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (۳-۲)$$

بلافاصله از معادله (۲-۲) می‌بینیم که میدان الکتریکی ایجادشده به وسیله N بار نقطه‌ای ثابت q_1, q_2, \dots, q_N از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (۴-۲)$$

با وجود اینکه، میدان الکتریکی را به کمک نیروی وارد بر q تعریف می‌کنیم اما میدان الکتریکی یک کمیت مستقل از q است زیرا F به سادگی با q متناسب است. وقتی N بار نقطه‌ای ساکن داشته باشیم از معادله (۴-۲) می‌توان میدان الکتریکی در نقطه‌ای از فضا به فاصله \mathbf{r} از مبدأ O را حساب کرد. به این ترتیب می‌بینیم که با دانستن مکان مجموعه بارها در فضا می‌توان میدان E را در هر نقطه از فضا پیدا کرد. یادآوری می‌کنیم که بارها ساکن فرض می‌شوند. برای تأکید بر این موضوع، میدان الکتریکی را میدان "الکتروستاتیک" می‌نامیم.

مثال ۱-۲ خطوط نیرو

اگر منحنی $\mathbf{r}(s)$ در فضا به گونه‌ای باشد که بردار مماس بر آن $\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r})$ در هر نقطه موازی میدان الکتریکی در آن نقطه باشد منحنی را خط نیرو

۱. گاهی به آن دستگاه عملی می‌گویند.

2. E. Williams, J. Faller and H. Hill, *Physical Review Letters*, vol. 26, no. 12, p. 721, 1971.

برحسب یکاهای جرم $(M) \times$ طول $(L) \times$ (T^{-2}) (زمان) است. انرژی را برحسب ژول (یکای ML^2T^{-2}) اندازه می‌گیریم. در دستگاه بین‌المللی (SI) یا دستگاه یکاهای MKSA^۱، بار برحسب کولن (اختصاری C) یا آمپر-ثانیه $(A \cdot s)$ اندازه‌گیری می‌شود. بار Q یا بار بر واحد زمان (جریان) با همان اهمیت جرم، طول و زمان در نظر گرفته می‌شود. چون یکاهای M, L, T, Q به طور مستقل مشخص می‌شوند، k که در فرمول وجود دارد با اندازه‌گیری تجربی برابر است با

$$k \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \equiv 10^{-7} c^2 \simeq 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$$

که c سرعت نور در خلأ و بنا به تعریف برابر با $2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$ یا تقریباً $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ است. اندازه ϵ_0 که آن را گذردهی خلأ می‌نامیم برابر است با $8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2$ ؛ یعنی با ابعاد $Q^2 T^2 M^{-1} L^{-2}$. ضریب 4π برای سادگی بیشتر (در مقایسه با عدم وجود آن) درج شده است و دستگاه را در این حال گویا می‌نامند.

در دستگاه یکاهای CGS (سانتیمتر-گرم-ثانیه) $k \equiv 1$ است. و واحد بار به کمک معادله (۱-۲) مشخص می‌شود که ابعاد $(\text{دین})^{1/2}$ - سانتیمتر، یعنی $M^{1/2} L T^{-1}$ دارد. و آن را "استات کولن" می‌نامیم و مساوی $10^{-9} \times (1/2.998)$ کولن است. برای بحث بیشتر در مورد دستگاه یکاها پیوست ۱ را ببینید.

۴. قانون کولن نیروی کل صحیح وارد از بار q_2 بر q_1 را به شرطی که دو بار ثابت باشند به دست می‌دهد. اگر q_2 نسبت به دستگاه مرجع متحرک باشد آن‌گاه نیروی کل F_{12} وارد بر بار ثابت q_1 که با قانون کولن داده می‌شود باید اصلاح شود. با این حال اگر سرعت حرکت در مقایسه با سرعت نور ($3 \times 10^8 \text{ m/s}$) کوچک باشد تصحیحات نیز کوچک خواهند بود. همین مطلب را برای نیروی F_{21} می‌توان گفت. زمانی تصور می‌شد که نیروی الکتریکی به طور لحظه‌ای در فاصله r_{21} عمل می‌کند - به این معنی که هیچ بازه زمانی برای تأثیر نیروی کولنی بین دو ذره وجود ندارد.

اکنون می‌دانیم که مفهوم "کنش از دور" معتبر نیست و اینکه انتشار اثرهای یک بار روی بار دیگر در فاصله مکانی بین دو بار به زمان وابسته است. با این همه اگر بارها ساکن باشند نیازی به بررسی این اثرها نیست. این اثرها را در فصلهای ۱۵ و ۱۷ بحث خواهیم کرد. ۵. واقعیت جالب این است که قانون کولن همان شکل قانون جاذبه نیوتون را دارد. ویژگی عکس مجذور فاصله این قانون در بازه خیلی بزرگ، یعنی از فواصل زیر میکروسکوپی تا فواصل ماکروسکوپی محقق

قبول نیست، یعنی این روش برای به حساب آوردن بارها به طور انفرادی مناسب (یا عملی) نیست. در این حالت یک تابع خوشرفتار وابسته به مکان در فضا را طوری فرض می‌کنیم که بار موجود در هر حجم V از رابطه زیر به دست آید

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) dv$$

که $\rho(\mathbf{r})$ تابعی از جابه‌جایی \mathbf{r} از یک مبدأ معین موسوم به چگالی بار حجمی است. اگر بار الکتریکی در نقاط مختلف فضا واقعاً طوری توزیع شده باشد که به طور پیوسته در فضا تغییر کند آن‌گاه $\rho(\mathbf{r})$ به شکل یک حد ریاضی زیر

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} \equiv \frac{dq}{dv} \quad (۸-۲)$$

بیان می‌شود که Δq بار کل درون حجم Δv است. اگر اندازه‌های الکتریکی به ابعاد خطی کوچکتر از d غیرحساس باشد آن‌گاه فرض می‌کنیم که بار Δq موجود در حجم $d^3 \approx \Delta v$ ، چگالی بار ماکروسکوپی، ρ ، در عنصر حجم مورد نظر را، $\rho(\mathbf{r}) = \Delta q / \Delta v = \sum q_i / \Delta v$ تعریف می‌کند. در این مورد $\sum q_i$ جمع تمام بارهای موجود در حجم Δv است. علاوه بر این فرض می‌کنیم که چگالی بار ρ برای هر محاسبه ریاضی مورد نظر تابعی خوشرفتار باشد، و بار Δq موجود در حجم Δv در این محاسبه‌ها بار نقطه‌ای با اندازه Δq است. چگالی $\rho(\mathbf{r})$ مطرح شده در بالا را در زمان خاص t فرض می‌کنیم و ممکن است نسبت به زمان تغییر کند. بنابراین در حالت کلی می‌توان نوشت $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$. با فرضهای بالا اگر توزیع باری با چگالی $\rho(\mathbf{r})$ معلوم باشد میدان الکتروستاتیک در هر نقطه \mathbf{r} ناشی از جزء حجم dv' با بار dq واقع در محل \mathbf{r}' ، و بنابراین در فاصله $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ از نقطه مشاهده را با استفاده از معادله (۴-۲) می‌توان به دست آورد

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (۹-۲)$$

با قراردادن $dq(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}') dv'$ داریم

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (۱۰-۲)$$

میدان الکتریکی کل ناشی از توزیع بار، با انتگرال‌گیری از معادله (۱۰-۲) روی تمام جزءهای حجم که برای آن $\rho \neq 0$ است، و یا روی تمام فضا که مناسبتر است، به دست می‌آید. به این ترتیب

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (۱۱-۲)$$

(یا خط میدان الکتریکی) می‌نامیم. اگر جابه‌جاییهای \mathbf{r}_1 و \mathbf{r} مکانهای دو نقطه‌ای روی منحنی باشند $\Delta \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$ ، در این صورت شرط لازم برای آنکه منحنی یک خط نیرو را نشان دهد آن است که ضمن آنکه \mathbf{r}_1 به \mathbf{r} نزدیک می‌شود،

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \equiv \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) = \alpha \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (۵-۲)$$

که α یک ثابت زده‌ای و s فاصله در طول منحنی از یک نقطه دلخواه روی منحنی است. اگر \mathbf{r} در مختصات دکارتی بیان شود یعنی $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ ، آن‌گاه با قراردادن آن در معادله (۵-۲) به دست می‌آوریم که شرط لازم این است که روی منحنی داشته باشیم

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dx}{ds} = E_x \quad \frac{1}{\alpha} \frac{dy}{ds} = E_y \quad \frac{1}{\alpha} \frac{dz}{ds} = E_z$$

و یا

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (۶-۲)$$

اکنون چگونگی استفاده از این نتیجه را در پیدا کردن خطوط نیروی یک بار نقطه‌ای نشان می‌دهیم. از قانون کولن میدان یک "بار نقطه‌ای" در صفحه xy عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

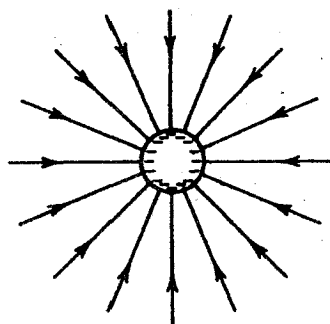
که $\hat{\mathbf{r}} = [x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}]/r$ و $r^2 = x^2 + y^2$ است. با قراردادن E_x و E_y در معادله (۶-۲) رابطه زیر برای خطوط نیرو در صفحه xy به دست می‌آید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{y}{x} \quad (۷-۲)$$

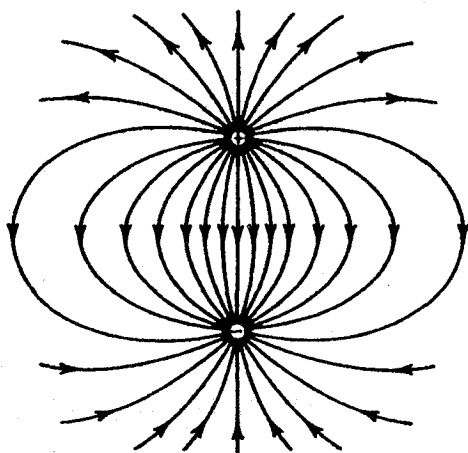
جواب معادله $dy/dx = y/x$ برابر است با $y = kx$ که k یک ثابت است. این درست معادله خطوط راستی است که از مبدأ می‌گذرند [شکل ۲-۲(الف)]. خطوط نیروی دو بار نقطه‌ای همانم و دو بار نقطه‌ای ناهمنام اما با اندازه‌های یکسان را در شکل‌های ۲-۲(ب) و ۲-۲(ج) نشان داده‌ایم. ■

۴-۲ چگالی بار

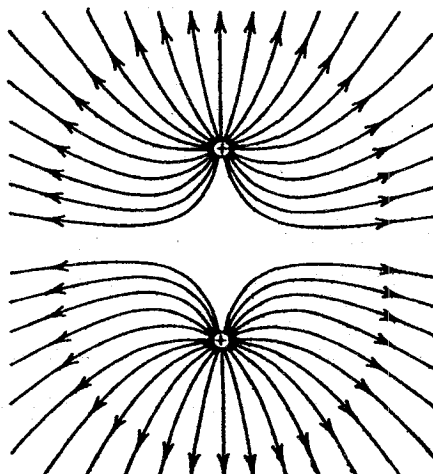
تا اینجا بار الکتریکی واقع بر ذرات را بررسی کردیم و فقط بارهای نقطه‌ای، یعنی اجسامی را در نظر گرفتیم که از ابعاد آن در مقایسه با فواصل بین آنها می‌توان چشمپوشی کرد. گاهی این روش قابل



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۲-۲ خطوط نیروی چند آرایش بار. (الف) یک بار نقطه‌ای منفی. (ب) دو بار نقطه‌ای مخالف. (ج) دو بار نقطه‌ای هم علامت.

که به سادگی جمع تمام جزءهای شبه بار نقطه‌ای $dq = \sigma da'$ را شریک در بار سطحی S نشان می‌دهد. به همین ترتیب برای بار واقع روی منحنی C داریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \quad (14-2)$$

اگر توزیع بار شامل چگالیهای مجزای ρ ، σ و λ باشد میدان الکتریکی جمع برداری میدانهای ناشی از توزیع بارهای مختلف خواهد بود. روابط (۱۱-۲)، (۱۳-۲) و (۱۴-۲) را می‌توان به شکل نمایشی زیر نوشت

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \quad (15-2)$$

که dq نمایش $\rho dv'$ ، $\sigma ds'$ ، $\lambda dl'$ یا ترکیب مناسبی از اینهاست، و علامت انتگرال جمع روی تمام جزءهای بار توزیع بار را نشان می‌دهد. چون از ترکیب $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ در این کتاب زیاد استفاده خواهیم کرد برای

گاهی بهتر است که توزیع بار را سطحی و یا خطی فرض کنیم به طوری که اگر اندازه سطح S باشد بار کل روی آن با $Q_S = \int_S \sigma(\mathbf{r})da'$ و اگر بار خطی روی منحنی C قرار داشته باشد بار کل آن $Q_l = \int_C \lambda(\mathbf{r})d\mathbf{l}'$ می‌شود که

$$\sigma = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta a} = \frac{dq}{da}, \quad \lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (12-2)$$

به ترتیب چگالیهای سطحی و خطی بارند. به این ترتیب در حد ماکروسکوپی که da جزء سطح و dl جزء طول، برای انجام محاسبه‌های صحیح دلخواه، به حد کافی کوچک اند جزءهای بار dq زیر را

$$dq \equiv \sigma da \quad \text{یا} \quad dq \equiv \lambda dl$$

برای نمایش جزءهای بار نقطه‌ای در محاسبه میدانهای الکتریکی به کار می‌بریم. اگر توزیع بار فقط یک توزیع سطحی روی S باشد آن‌گاه

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \quad (13-2)$$

فقط مؤلفه‌های z و ρ وجود دارند یعنی

$$dE_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda z' dz'}{[z'^2 + \rho^2]^{3/2}}$$

$$dE_\rho = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \rho dz'}{[z'^2 + \rho^2]^{3/2}} \quad (17-2)$$

با انتگرال‌گیری روی تمام جزءها از $z' = -l_1$ تا $z' = +l_2$ به دست می‌آوریم

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \int_{-l_1}^{+l_2} \frac{z' dz'}{[z'^2 + \rho^2]^{3/2}}$$

$$E_\rho = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \rho \int_{-l_1}^{+l_2} \frac{dz'}{[z'^2 + \rho^2]^{3/2}}$$

این عبارتها به سادگی انتگرال‌گیری می‌شوند و نتیجه می‌دهند^۱

$$\mathbf{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 \rho} \left[\frac{(\rho \hat{z} - l_2 \hat{\rho})}{\sqrt{l_2^2 + \rho^2}} - \frac{\rho \hat{z} + l_1 \hat{\rho}}{\sqrt{l_1^2 + \rho^2}} \right] \quad (18-2)$$

اگر میله از هر دو طرف خیلی بلند باشد، به شکل ایده‌آل می‌توان نوشت $l_1/\rho \rightarrow \infty$ و $l_2/\rho \rightarrow \infty$ آن‌گاه E_ρ و $E_z \rightarrow 0$ می‌شود یعنی $|\mathbf{E}|$

$$\mathbf{E} \rightarrow \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 \rho} \hat{\rho} \quad (19-2)$$

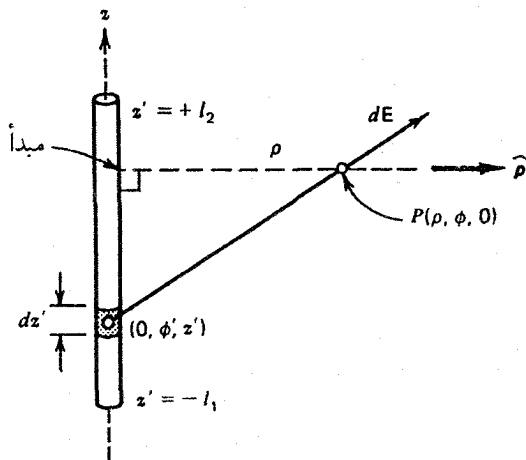
توجه کنید که به علت فرض باریک بودن میله، انتگرال را در جهت x یا y در نظر گرفته‌ایم. ρ را به حد کافی دور از میله می‌گیریم تا بتوان از ضخامت میله صرف‌نظر کرد.^۲

مثال ۳-۲ میدان \mathbf{E} یک حلقهٔ باردار

اکنون میدان الکتریکی یک حلقهٔ نازک باردار با چگالی باریکناخت σ را در نقطه‌ای روی محور آن به دست می‌آوریم. شکل ۲-۴ این حالت را نشان می‌دهد. میدان الکتریکی، با توجه به تقارن شکل، فقط در راستای z مؤلفه دارد. بنابراین برای جزء دیفرانسیلی $dq = \sigma \Delta \rho \rho d\phi$ که فاصله ρ از مبدأ یعنی، $(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = z\hat{z} - \rho\hat{\rho}$ قرار دارد میدان الکتریکی dE_z از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$dE_z = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \hat{z} = \frac{dq z}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

۱. توجه کنید که l_1 و l_2 بسته به انتخاب نقطهٔ مبدأ می‌توانند مثبت یا منفی باشند.
۲. اما بعداً خواهیم دید که عبارت E برای میلهٔ بینهایت بلند حتی موقعی که ρ خیلی بزرگتر از ضخامت میله هم نیست معتبر است. کافی است که میله گرد، با شعاع $(a/\pi)^{1/2}$ و $\rho \geq (a/\pi)^{1/2}$ باشد. (مثال ۷-۲ را ببینید.)



شکل ۳-۲ میدان الکتریکی یک بار خطی محدود.

ساده‌نویسی به جای آن از

$$\xi = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \quad (16-2)$$

استفاده می‌کنیم.

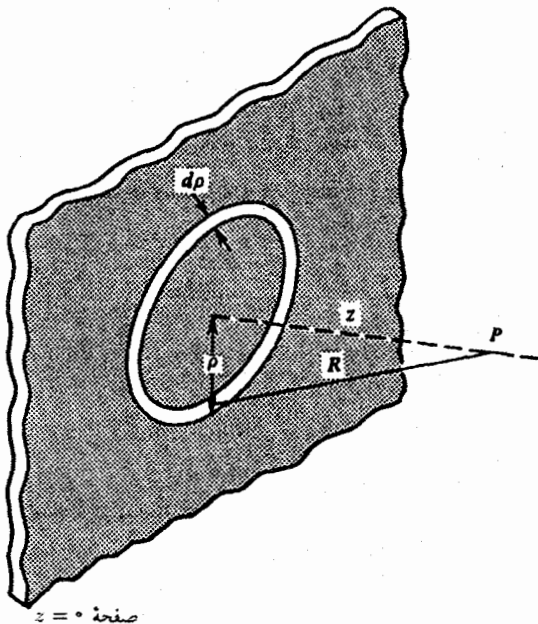
چون به دست آوردن جواب انتگرال در معادلهٔ (۱۵-۲) بجز برای انواع ساده توزیع بار بسیار مشکل است، عموماً از این روش برای محاسبهٔ \mathbf{E} استفاده نمی‌کنیم. با این حال می‌توان به کمک رایانه‌های دیجیتال مقدار عددی این نوع انتگرالها را برای توزیع بارهای نسبتاً دلخواه حساب کرد.

اکنون برای چند توزیع بار متقارن که شامل توزیع بارهای سطحی و خطی است میدان الکتریکی را حساب می‌کنیم. در اینجا برای توزیع بار حجمی مثالی نمی‌آوریم. بلکه این کار را بعد از بیان روش خیلی ساده‌تر، یعنی قانون گاوس در بخش بعد، انجام می‌دهیم.

مثال ۲-۲ توزیع بار خطی

می‌خواهیم میدان الکتروستاتیکی یک توزیع بار را روی میلهٔ باریک و مستقیمی که چگالی بار خطی ثابت، λ ، در واحد طول دارد، در فاصلهٔ ρ از آن حساب کنیم. این حالت فیزیکی را در شکل ۳-۲ نمایش داده‌ایم. چون میله باریک است می‌توان فرض کرد ρ خیلی بزرگتر از ضخامت میله است. سطح مقطع میله، a ، را ثابت فرض می‌کنیم. برای پیدا کردن میدان $\mathbf{E}(\rho, \phi, 0)$ ناشی از جزء طول dz' (در مختصات استوانه‌ای) از قانون کولن به روش زیر استفاده می‌کنیم

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda dz' \frac{(\rho \hat{\rho} - \hat{z} z')}{[z'^2 + \rho^2]^{3/2}}$$



شکل ۵-۲ میدان الکتریکی یک توزیع بار سطحی با ابعاد ∞ با انتگرال‌گیری از میدان یک حلقه باردار.

صفحه بار با ابعاد ∞ به دست می‌آید

$$E = \frac{\gamma \pi \sigma z}{\gamma \pi \epsilon_0} \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{\rho d\rho}{[z^2 + \rho^2]^{3/2}} = \frac{\sigma z}{\gamma \epsilon_0} \int_z^{\infty} \frac{dR}{R^2}$$

و یا

$$E = \frac{\sigma}{\gamma \epsilon_0} \quad (21-2)$$

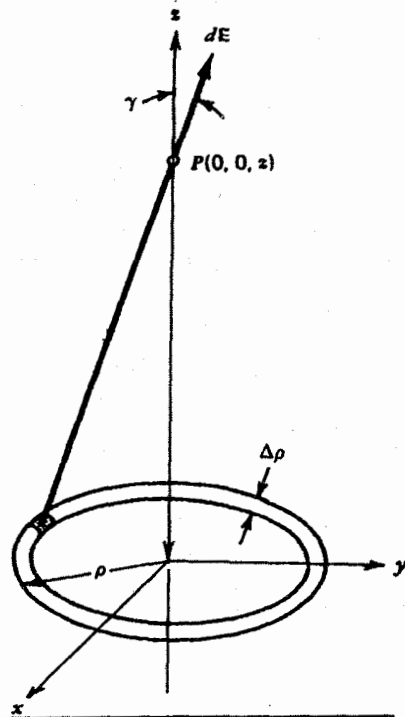
۵-۲ قانون گاوس

اکنون در مورد قانون گاوس که، در فهم میدانهای برداری به‌ویژه میدانهای الکتریکی، اهمیت بسیاری دارد بحث می‌کنیم. در موارد خاصی این قانون از قانون کولن، که با محدودیتهای مختلفی توأم بوده، قدرتمندتر است. در زیر نشان می‌دهیم که قانون گاوس روش بسیار توانمندی در حل مسائل الکتروستاتیک با توزیع بار متقارن است.

۱-۵-۲ شکل انتگرالی قانون گاوس

در یک میدان الکتروستاتیک به‌وجود آمده از یک توزیع بار با چگالی حجمی ρ (شکل ۶-۲) میدان dE مربوط به جزء حجم dV = ρ(r')dv' از رابطه زیر به دست می‌آید

$$dE(\mathbf{r}) = \frac{1}{\gamma \pi \epsilon_0} \frac{dq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (22-2)$$



شکل ۴-۲ میدان الکتریکی روی یک حلقه باردار.

برای تمام جزءهای dq، ρ و z ثابت‌اند. بنابراین با جمع بستن روی تمام بارها، ∫ dq ≡ ΔQ = ۲πρ(Δρ)σ، و می‌نویسیم

$$E = E_z = \frac{\Delta Q z}{\gamma \pi \epsilon_0 (z^2 + \rho^2)^{3/2}} \quad (20-2)$$

توجه به این نکته مفید است که اگر نقطه P به حد کافی از حلقه دور باشد آن‌گاه، (z² + ρ²)³/² ≅ z³، و میدان به همان تقریب مورد انتظار بار نقطه‌ای تبدیل می‌شود.

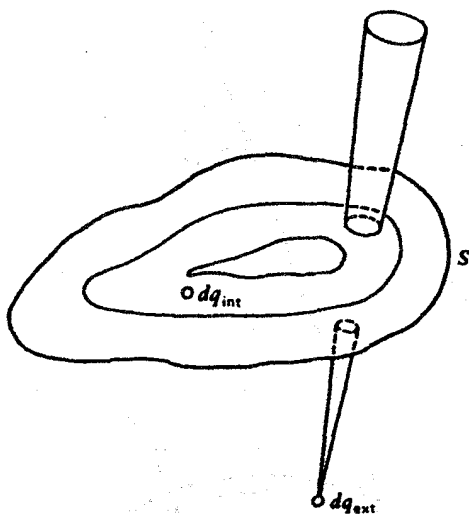
مثال ۴-۲ میدان E یک صفحه باردار

با به‌کار بردن نتیجه مثال ۳-۲ می‌توان میدان الکتروستاتیکی یک صفحه باردار یکنواخت به چگالی سطحی بار σ را در نقطه‌ای به حد کافی نزدیک صفحه (به این معنی که بتوان با تقریب خوبی اندازه صفحه را بینهایت فرض کرد) پیدا کرد (شکل ۵-۲).

چون میدان یک حلقه بار به ضخامت dρ با رابطه (۲۰-۲)، مثال قبل، به دست می‌آید

$$dE = \frac{1}{\gamma \pi \epsilon_0} \frac{\gamma \pi \rho d\rho \sigma z}{R^2 R}$$

و صفحه بار را می‌توان مجموعه حلقه‌های هم‌مرکز در نظر گرفت، بنابراین با انتگرال‌گیری از ρ = ۰ تا ρ = ∞ عبارت بالا، میدان یک



شکل ۷-۲ قانون گاوس تأکید بر این دارد که شار خالص عبوری از سطح بسته به بارهای خارج آن وابسته نیست. مفهومی که ناشی از خاصیت زاویه فضایی است.

سطح بسته S عبور می‌کند فقط به کل بار درون سطح وابسته است. این بیان قانون گاوس است که اکنون می‌توان آن را به شکل زیر بیان کرد

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dq = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (27-2)$$

اکنون بر چند نکته روی قانون گاوس تأکید می‌کنیم:

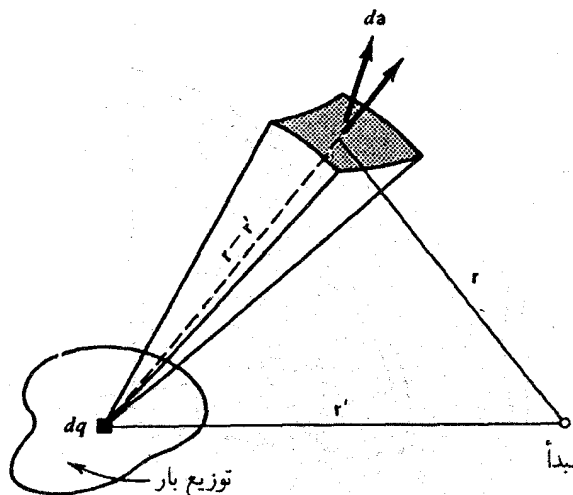
۱. \mathbf{E} نوشته شده در رابطه (۲۷-۲) میدان الکتریکی کل در هر نقطه روی سطح S است، حتی اگر فقط بخشی از \mathbf{E} که ناشی از بارهای داخل سطح است در شار خالص عبوری از سطح S دخالت داشته باشد.

۲. این نتیجه را (از قانون کولن) برای میدان الکتروستاتیک \mathbf{E} به دست آوردیم. اما این قانون دامنه کاربرد وسیعتری دارد و برای هر میدان الکتریکی، حتی میدانهای وابسته به زمان، صحیح است. به این دلیل است که قانون گاوس را اساسیتر از قانون کولن می‌دانیم.

۳. وابستگی قانون کولن به عکس مجذور فاصله است که قانون گاوس را به دست می‌دهد. هر نوع دیگر وابستگی به فاصله، به قانون گاوس منجر نمی‌شود. در حقیقت با استفاده از این موضوع صحت وابستگی به وارون مجذور فاصله محقق می‌شود. در مراحل بعد کاربردهای زیادی از قانون گاوس را خواهیم دید. در ادامه چند مثال را که شامل تقارنهای کروی، استوانه‌ای و صفحه‌ای است می‌آوریم.

مثال ۵-۲ قانون گاوس — تقارن کروی

اکنون نشان می‌دهیم که برای توزیع بار متقارن کروی قانون گاوس



شکل ۶-۲ به دست آوردن قانون انتگرالی گاوس با استفاده از میدان کولنی جزءهای بار.

بنابراین dF شار عبوری از جزء da از سطح S که در نقطه r قرار دارد، [معادله (۳۸-۱) را ببینید]، عبارت است از

$$dF = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \int_S \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \quad (23-2)$$

جمله داخل کروشه با جزء زاویه فضایی $d\Omega$ ، که جزء سطح da را از محل بار dq دربر دارد، برابر است، بنابراین نتیجه می‌شود

$$dF = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \int_S d\Omega \quad (24-2)$$

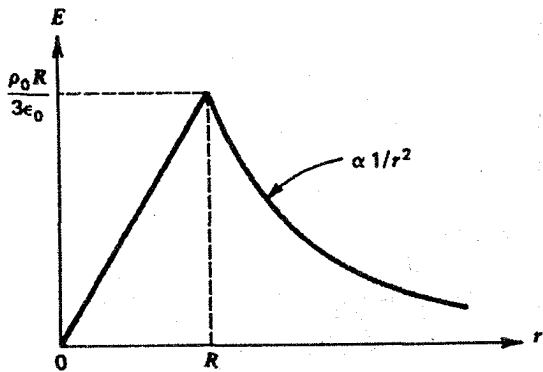
اگر جزء بار dq به طور کامل به وسیله سطح S احاطه شده باشد، آن‌گاه انتگرال روی زاویه فضایی برابر با 4π می‌شود. پس

$$dF = \frac{dq}{\epsilon_0} \quad (25-2)$$

این نتیجه برای تمام جزءهای بار dq که در درون سطح بسته S واقع‌اند صحیح است. بنابراین شار مربوط به تمام این اجزای داخلی چنین می‌شود

$$F = \int_V \frac{dq}{\epsilon_0} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (26-2)$$

اکنون بارهایی را نیز در خارج سطح بسته S (آن‌طور که در شکل ۷-۲ نشان داده‌ایم) در نظر می‌گیریم. چون زاویه فضایی یک سطح بسته از نقطه‌ای خارج آن سطح صفر است میدان ناشی از این بارها در شار خالص عبوری از سطح S دخالتی ندارند (البته شار عبوری از هر جزء da از سطح S صفر نیست). بنابراین شار کل میدان \mathbf{E} که از



شکل ۹-۲ نمایش ترسیمی میدان یک کره باردار یکنواخت که پیوسته بودن میدان در $r = R$ را نشان می‌دهد.

به این ترتیب با روشی ساده به این نتیجه رسیدیم که بار خارج کره به شعاع R در ایجاد میدان $E(r)$ در داخل کره نقشی ندارد. این نتیجه را می‌توان به‌طور مستقیم از قانون کولن، با این استدلال که برای هر جزء بار dq در یک پوسته خارج r ، جزء دیگر dq' در خارج r وجود دارد که میدان جزء اول را حذف می‌کند، نیز به‌دست آورد. به‌عنوان کاربردی از این نتیجه، کره باردار یکنواختی با چگالی ثابت ρ برای $r < R$ را در نظر می‌گیریم با استفاده از روابط (۲۸-۲) و (۲۹-۲) می‌نویسیم

$$E(r > R) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad Q_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$$

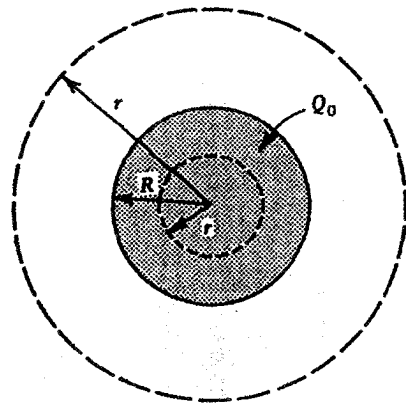
$$E(r < R) = \frac{Q_{<}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \quad Q_{<} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 \quad (30-2)$$

در شکل ۹-۲ میدان را نسبت به r ، که نشان می‌دهد میدان در $r = R$ پیوسته است، رسم کرده‌ایم.

مثال ۶-۲ صفحه مسطح باردار یکنواخت با ابعاد بینهایت - قانون گاوس

می‌خواهیم میدان یک صفحه نامحدود باردار یکنواخت با چگالی سطحی σ را پیدا کنیم. دستگاه مختصات را مطابق شکل ۱۰-۲ در نظر می‌گیریم. فوراً متوجه می‌شویم که میدان فقط مؤلفه z ، یعنی $E = E(z)\hat{z}$ را دارد. چرا؟ علاوه بر این دوباره با توجه به تقارن داریم $E(z) = -E(-z)$

اکنون سطح گاوس را مطابق شکل ۱۰-۲ در نظر می‌گیریم. چون $E = \pm E\hat{z}$ هیچ شار الکتریکی از سطح جانبی عبور نمی‌کند. بنابراین شار الکتریکی فقط از سطوح دو قاعده عبور می‌کند. اگر سطح



شکل ۸-۲ محاسبه میدان الکتریکی یک کره باردار یکنواخت با استفاده از قانون گاوس که دو سطح گاوس در آن نشان داده شده است.

اغلب بلافاصله میدان الکتریکی را به‌دست می‌دهد. اگر $\rho = \rho(r)$ برای $r \leq R$ و $\rho = 0$ برای $r > R$ (شکل ۸-۲) و کل بار Q_0 باشد، آن‌گاه میدان الکتریکی چنین توزیع باری نمی‌تواند به مختصات (θ, ϕ) وابسته باشد. علاوه بر این میدان الکتریکی مؤلفه θ و ϕ ندارد. بنابراین $E(r) = E(r)\hat{r}$. اکنون میدان را برای نواحی $r \geq R$ و $r \leq R$ حساب می‌کنیم.

در ناحیه $r \geq R$ ، یک سطح کروی به شعاع $r \geq R$ و به مرکز مبدأ مختصات را در نظر می‌گیریم و قانون گاوس را برای این سطح بسته به‌کار می‌بریم. چون $E = E(r)\hat{r}$ و $E \cdot \hat{n} = E \cdot \hat{r} = E$ روی سطح کره ثابت است، آن‌گاه $\oint E(r) \cdot da = 4\pi r^2 E$ با برابر قراردادن آن با Q_0/ϵ_0 ، که Q_0 بار کل داخلی سطح گاوس است، برای $r > R$ به‌دست می‌آوریم

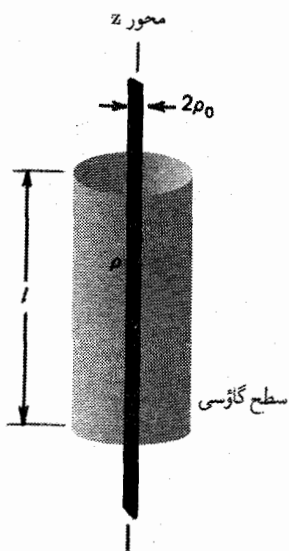
$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{r^2} \hat{r} \quad \text{برای } r > R \quad (28-2)$$

این شکل قانون کولن برای یک بار نقطه‌ای واقع در $r = 0$ است. می‌بینیم که برای یک ناظر خارجی ($r \geq R$) اثرهای الکتریکی یک کره و یک بار نقطه‌ای با بار Q_0 یکی است.

برای محاسبه E در ناحیه $r < R$ سطح گاوس را کره‌ای به شعاع $r \leq R$ در نظر می‌گیریم. شبیه حالت $r \geq R$ ، برای $r < R$ به‌دست می‌آوریم

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{<}}{r^2} \hat{r} \quad \text{برای } r < R \quad (29-2)$$

که $Q_{<} = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$ بار موجود در درون کره‌ای به شعاع $r \leq R$ است.



شکل ۱۱-۲ تعیین میدان E یک خط بار بلند با استفاده از قانون گاوس.

سطح گاوس را استوانه‌ای به شعاع ρ می‌گیریم. شاری از درون صفحه‌های $z = \text{const.}$ عبور نمی‌کند، زیرا $E_z = 0$ است. میدان روی سطح استوانه‌ای ثابت است، بنابراین قانون گاوس به دست می‌دهد

$$2\pi\rho lE = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{l\lambda}{\epsilon_0}$$

یا

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho} \quad \rho > \rho_0 \quad (31-2)$$

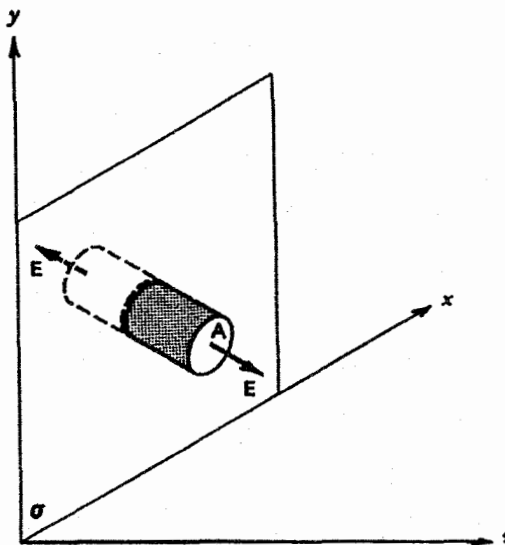
اگر شعاع سطح گاوس از ρ_0 کوچکتر باشد داریم $Q_{\text{int}} = (\rho^2\lambda/\rho_0^2)l$ و به این ترتیب

$$E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho_0^2} \rho \hat{\rho} \quad \rho < \rho_0 \quad (32-2)$$

۲-۵-۲ شکل دیفرانسیلی قانون گاوس

دیدیم که همواره می‌توان بار درون سطح بسته را با دانستن میدان E روی سطح، و در نتیجه شار عبوری از آن به دست آورد. اکنون می‌خواهیم رابطه بین بار اطراف یک نقطه در فضا و میدان الکتریکی نزدیک آن بار را بررسی کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم در تمام نقاط فضا بار با چگالی بار معین و محدود ρ مشخص است. می‌خواهیم در یک نقطه از فضا به فاصله r از نقطه مرجع، رابطه بین $E(r)$ و $\rho(r)$ را به دست آوریم. با یادآوری اینکه

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \frac{\rho dv}{\epsilon_0}$$



شکل ۱۰-۲ تعیین میدان یک صفحه باردار یکنواخت با استفاده از قانون گاوس.

قاعده‌ها را A فرض کنیم برای $z > 0$ ، $\mathbf{A} = A\hat{n}$ و برای $z < 0$ ، $\mathbf{A} = -A\hat{n}$ بنابراین

$$EA + EA = 2EA = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

که نشان می‌دهد

$$E = \hat{z} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad z > 0, \quad E = -\hat{z} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad z < 0$$

این درست همان نتیجه‌ای است که در مثال ۲-۴، معادله (۲۱-۲)، به دست آوردیم. توجه به این موضوع آموزنده است که میدان E به z وابسته نیست. بنابراین در دو طرف صفحه $z = 0$ ثابت است. با این همه جهت میدانها در دو طرف صفحه مخالف‌اند، یعنی یک انفصال برابر با σ/ϵ_0 در صفحه $z = 0$ وجود دارد. این میدان نه تنها مربوط به بارهای درون سطح گاوس بلکه مربوط به تمام بارهاست. گرچه فقط بارهای داخل سطح در شار مربوط به سطح گاوس نقش دارند. ■

مثال ۷-۲ قانون گاوس — خط بار

در این مثال یک چگالی بار ثابت λ در واحد طول برای $\rho < \rho_0$ و صفر برای $\rho > \rho_0$ فرض می‌کنیم که ρ مختصه استوانه‌ای است که نسبت به محور z استوانه مطابق شکل ۱۱-۲ اندازه‌گیری می‌شود. یادآوری می‌کنیم که میدان به دلیل تقارن، به z یا ϕ وابسته نیست و شکل $E = \hat{\rho}E(\rho)$ را دارد.

این شکل حدی هر میدان الکتریکی در فاصله (به حد کافی) کم از یک بار نقطه‌ای مجزاست (چون میدانهای مربوط به سایر بارها وقتی که در محل q اندازه‌گیری شوند محدود می‌ماند). رفتار مشابهی در نزدیکی بارهای خطی مشاهده می‌شود.

در بحث بالا به روشنی می‌توان چگالی بار مربوط به بار نقطه‌ای را با استفاده از تابع دلتای دیراک نمایش داد (مثال ۱-۴ را ببینید). به این ترتیب برای یک بار نقطه‌ای q در $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{و} \quad \rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

اکنون به بررسی مثالی که با یک انفصال در \mathbf{E} همراه است می‌پردازیم و از قانون گاوس برای تعبیر آن استفاده می‌کنیم.

مثال ۲-۸ تعیین توزیع بار مربوط به یک میدان الکتریکی معین - شکل دیفرانسیلی و انتگرالی قانون گاوس اکنون یک میدان الکتریکی به شکل $\mathbf{E} = z\hat{\mathbf{z}}\epsilon_0$ برای $0 \leq z \leq l$ و $\mathbf{E} = z\hat{\mathbf{z}}k$ برای $z < 0$ و $z > l$ که در آن k عدد ثابتی است، مطابق شکل ۲-۱۲ (الف)، در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم باری را پیدا کنیم که بتواند این میدان را به وجود آورد.

از قانون گاوس داریم $(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \rho = \epsilon_0$. چون \mathbf{E} فقط به z وابسته است بنابراین برای $z < 0$ و $z > l$ ، $\rho = 0$ ولی برای $0 < z < l$ داریم

$$\rho = \epsilon_0 \frac{dE_z}{dz} = \epsilon_0 E. \quad 0 < z < l$$

بنابراین یک قرص نامتناهی با چگالی بار یکنواخت داریم. با این همه متذکر می‌شویم که dE_z/dz در $z = 0$ و $z = l$ وجود ندارد، زیرا E در آنجا ناپیوسته است. بنابراین قانون انتگرالی گاوس را برای به‌دست آوردن بار در این دو سطح به‌کار می‌بریم. برای این کار قرصی با ضخامت 2δ مطابق شکل ۲-۱۲ (ب) در نظر می‌گیریم، $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ فقط در دو سطح این قرص که موازی صفحه $z = 0$ است سهم دارد، بنابراین

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = AE_0 \delta - Ak = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

بار درون قرص، Q_{int} ، همان بار روی سطح $z = 0$ است زیرا δ خیلی کوچک است. با توجه به تقارن نسبت به سطح، می‌توان بار روی سطح را با چگالی بار ثابت σ مشخص کرد. بنابراین بار درون سطح وقتی $0 \rightarrow \delta$ برابر است با $Q_{\text{int}} = \sigma A$. در نتیجه $\sigma(z = 0) = -\epsilon_0 k$ با به‌کار بردن قانون گاوس برای سطح واقع

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dv$$

به‌دست می‌آوریم

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dv = \int_V \rho \frac{dv}{\epsilon_0}$$

چون این رابطه برای تمام حجمهای دلخواه درست است مقادیر زیر انتگرال بایستی مساوی باشند یعنی برای تمام حجمهای V

$$\int_V \left[\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right] dv = 0$$

اگر و فقط اگر

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2-23)$$

این شکل دیفرانسیلی قانون گاوس است.

حال تأکید می‌کنیم که شکل دیفرانسیلی قانون گاوس فقط به شرطی که ρ یک تابع پیوسته و محدود در فضا باشد قابل استفاده است. وقتی که ρ تعریف نشده باشد یا محدود نباشد - مثلاً وقتی بار روی سطوح، منحنیها و یا نقطه‌ها قرار داشته باشد - $\nabla \cdot \mathbf{E}$ بینهایت می‌شود. این از دید فیزیکی بدان معنی است که یک شار الکتریکی محدود، از یک جزء حجم بینهایت کوچک واگرا می‌شود. به این ترتیب اگر توزیع بارهایی را که شامل بارهای نقطه‌ای است بررسی کنیم وقتی که به مکان یک بار نقطه‌ای می‌رسیم داریم

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \rightarrow \infty$$

با این همه توجه کنید که شار ایجادشده از یک بار محدود می‌ماند؛ یعنی

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

که q اندازه بار نقطه‌ای است. چون فرض کردیم که یک بار نقطه‌ای میدان متقارن کروی ایجاد می‌کند [بارهای نقطه‌ای هیچ‌گونه ساختار فضایی (زاویه‌ای) ندارند] میدان کل وقتی که بار نزدیک می‌شود درست همان است که از قانون کولن به‌دست می‌آید. یعنی (\mathbf{r}' روی q):

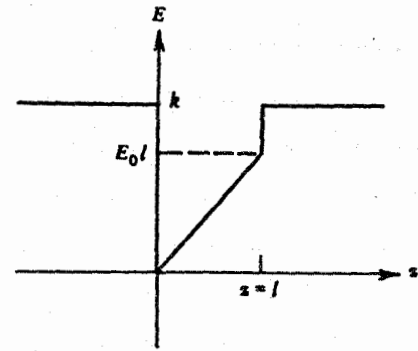
$$\mathbf{E}(\mathbf{r})_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \rightarrow \infty$$

می‌کنیم که منظور ما از رسانا، محیطی شامل جزءهای بار است که تحت اثر میدان الکتریکی می‌توانند در محیط حرکت کنند (این بارها به یک مکان خاص جسم رسانا وابسته نیستند و بنابراین به آنها بار آزاد گفته می‌شود). همچنین اگر محیط رسانایی، که از محیطهای دیگر از نظر الکتریکی جداست، تحت تأثیر میدان الکتریکی قرار گیرد آن‌گاه در زمان بسیار کوتاه بارهای آزاد موجود طوری آرایش پیدا می‌کنند که اثر میدان اعمال شده در داخل محیط را از بین ببرند. در این صورت در داخل رسانای منزوی شده از محیطهای دیگر میدان الکتریکی پایا نمی‌تواند وجود داشته باشد.

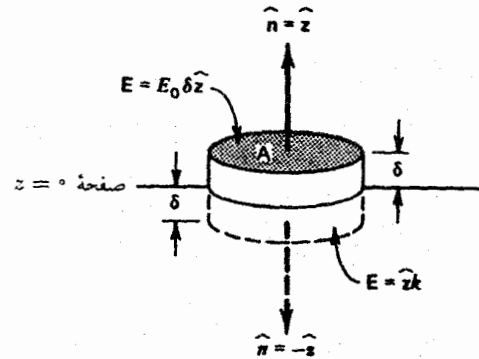
مشکل است که تمام مطالب را همزمان تعریف کنیم. مثلاً منظور از "عایق" محیطی است که نقطه مقابل رسانا بوده و در آنها بارها به صورت آزاد نمی‌توانند جا به جا شوند. بیشتر جامدات غیرفلزی از این دسته‌اند. تقریباً طبق تعریف خلأ (یعنی فضای تهی از بار) مثل یک عایق است. بیشتر گازها به عنوان مثال، هوا در شرایط معمولی (بجز رعد و برق) مثل یک عایق عمل می‌کنند. موادی که جابه‌جایی بار در آن خیلی آسانتر از عایقها صورت می‌گیرد در دسته رساناها قرار دارند. مواد مختلفی وجود دارند که وقتی دمای آنها به صفر مطلق میل می‌کند در مقابل حرکت بار هیچ مقاومتی از خود نشان نمی‌دهند، چنین موادی را ابررسانا می‌نامیم.

به این ترتیب و بنا به تعریف اگر برای یک رسانای منزوی پس از اعمال میدان الکتریکی پایا، زمان به حد کافی طولانی (مثلاً 10^{-1} ثانیه) سپری شود، میدان الکتریکی از دید میکروسکوپی در داخل آن صفر خواهد بود (میدان "پایا" میدانی است که نسبت به زمان تغییر نکند، گرچه برای این تعریف ممکن است میدان تغییر کند اما نه خیلی سریع). یک میدان ماکروسکوپی میانگین میدان در ابعاد ماکروسکوپی (نسبت به زمان و مکان) است. برای مقصود ما اگر محیطی که دارای چگالی "معمولی" (یعنی چگالی بزرگتر از حدود 10^{-1} کیلوگرم بر مترمکعب) است در نظر گیریم، می‌توان ابعاد فضایی ماکروسکوپی را از مرتبه 10^{-5} متر و بازه زمانی ماکروسکوپی را از مرتبه پیکوثانیه (10^{-12} ثانیه) فرض کرد. به این ترتیب "ماکروسکوپی" به معنی پاد "میکروسکوپی" یعنی ابعاد اتمی خواهد بود. تحت شرایط الکتروستاتیک ماکروسکوپی، میدانهای الکتریکی اتمی "میانگین‌گیری" می‌شوند و رفتار یکنواخت‌تری نسبت به فضا و مکان به دست می‌دهند. در این صورت نتایج زیر را خواهیم داشت:

۱. در داخل هر رسانای منزوی، چگالی بار ماکروسکوپی صفر است یعنی در هر جای رسانا $\rho = (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$



(الف)



(ب)

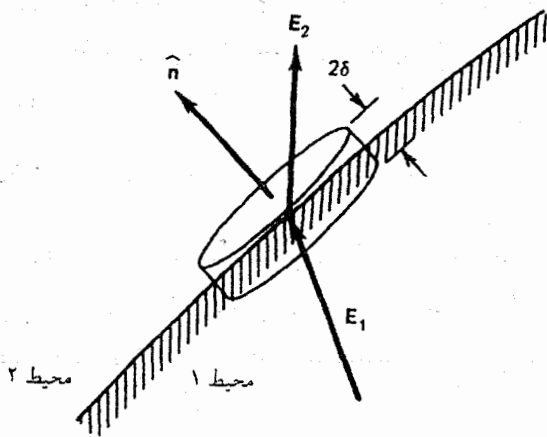
شکل ۱۲-۲ تعیین چگالی بار با دانستن شکل میدان \mathbf{E} آن. (الف) میدان الکتریکی \mathbf{E} . (ب) سطح گاوس فرضی در صفحه $z = 0$ که برای تعیین چگالی بار در $z = 0$ از آن استفاده می‌شود.

در $z = l$ ، به همین روش، چگالی سطحی بار را به دست می‌آوریم $\sigma(z = l) = \epsilon_0 (k - E_0 l)$

حالتی از این مسئله که ارزش تأکید دارد این است که هرگاه در E انفصال به وجود آید چگالی حجمی بار باید واگرا شود، که منجر به یک چگالی بار سطحی (یا خطی یا نقطه‌ای) می‌شود. برای تعیین اندازه این چگالی سطحی بار، شکل انتگرالی قانون گاوس را در ناحیه انفصال به کار می‌بریم. ■

۶-۲ رساناها و عایقها

اغلب افراد می‌دانند که بعضی مواد به خوبی "رسانای الکتریسیته" هستند و بقیه نه. مقصود از رسانش الکتریکی در دسته اول مواد این است که جزءهای بار (مثلاً الکترونها) آزادانه می‌توانند از یک نقطه به نقطه دیگر آن حرکت کنند. در واقع بیشتر مواد در شرایط معینی (درجه حرارت بالا، فشار بالا و غیره) اجازه حرکت بار را می‌دهند. مقصود ما اینجا دسته‌بندی این مواد و ویژگیهای آن نیست اما فقط تأکید



شکل ۲-۱۴ کاربرد قانون گاوس، روی یک جعبه استوانه‌ای شکل در فصل مشترکی که احتمالاً دارای بار سطحی است، برای تعیین رابطه بین میدان E درست در دو طرف فصل مشترک (شرایط مرزی).

چون میدان در خود سطح به عمود بر سطح نزدیک می‌شود. از طرفی چون میدان در داخل رسانا صفر است شار کل خروجی از قرص، از جزء سطح Δa واقع در خارج رسانا خواهد بود. اگر Δa به حد کافی کوچک باشد شار E عبوری از آن $E \cdot \Delta a$ است که E مقدار میدان در مرکز Δa است. در نتیجه به دست می‌آوریم

$$\oint E \cdot da = E \cdot \Delta a = E \cdot \hat{n} \Delta a = \frac{Q_s}{\epsilon_0} = \sigma \frac{\Delta a}{\epsilon_0}$$

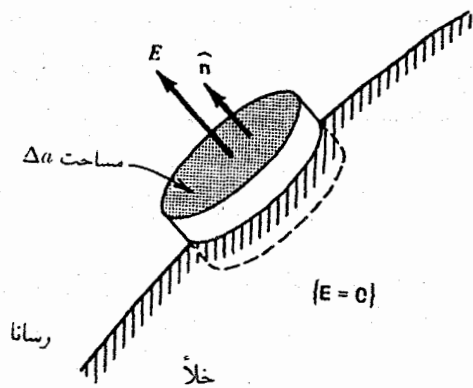
به این ترتیب در سطح رسانا داریم

$$E \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{یا} \quad \sigma = \epsilon_0 E \cdot \hat{n} \quad (۳۴-۲)$$

روابط (۳۴-۲) حالت ویژه‌ای از یک رابطه کلی‌تر است که در فصل مشترک سطح باردار برقرار است. حال ناحیه کوچک نزدیک فصل مشترک مربوط به محیط‌های ۱ و ۲ را که به ترتیب میدانهای E_1 و E_2 دارند در نظر می‌گیریم (شکل ۲-۱۴ را ببینید). سطح گاوس را طوری در نظر می‌گیریم که سطوح بالا و پایین آن به اندازه Δa و سطح جانبی آن نسبت به دو سطح قاعده ناچیز باشد (که با میل دادن ارتفاع آن، δ ، به سمت صفر به دست می‌آید). آن‌گاه با توجه به قانون گاوس داریم

$$\oint E \cdot da = E_1 \cdot (-\hat{n}) \Delta a + E_2 \cdot (\hat{n}) \Delta a$$

۱. یعنی، در هر نقطه در جهت عمود در امتداد عمود بر سطح؛ به بیان دیگر در جهت مماس بر سطح.



شکل ۲-۱۳ کاربرد قانون گاوس روی یک جعبه استوانه‌ای شکل در یک فصل مشترک با رسانایی بسیار خوب برای تعیین خواص میدان E درست در خارج رسانا.

۲. با توجه به بیان ۱ بار خالص فقط در سطح رسانا می‌تواند وجود داشته باشد. چگالی بار سطحی در آنجا وجود دارد. در واقع، بار در ناحیه نزدیک سطح رسانا وجود دارد و میدان الکتریکی همواره کمی به درون رسانا نفوذ می‌کند. اما گفتگو درباره این موضوع یک گفتگوی میکروسکوپی است و به حد کافی نزدیک "سطح"، بار، آزادی کامل برای حرکت ندارد (مثلاً این بارها به سادگی نمی‌توانند رسانا را ترک کنند). دید ماکروسکوپی تقریب بسیار خوبی بر این فرض است که بار در روی سطح وجود دارد.

۳. میدان الکتروستاتیکی خارجی در سطح رسانا بر آن عمود است. اگر میدان عمود نباشد باید به بارهای روی سطح نیرو وارد شود و آنها را جابه‌جا کند که در نتیجه حالت غیرالکتروستاتیک، برخلاف پیش شرط ما، به وجود خواهد آمد. علاوه بر این اگر رسانا محدود و منزوی باشد توزیع بار روی آن به گونه‌ای خواهد بود که هر مؤلفه مماسی میدان الکتریکی صفر شود و بنابراین حالت الکتروستاتیک ایجاد شود.

۴. اندازه میدان الکتروستاتیک در سطح رسانا، σ/ϵ_0 است که σ چگالی بار سطحی است. این را به روش زیر ثابت می‌کنیم. اگر در خارج رسانا میدان E وجود داشته و در داخل میدان صفر باشد، $\nabla \cdot E$ روی سطح به بینهایت می‌گراید به این معنی که چگالی بار ∞ در آنجا وجود دارد. به بیان دیگر یک چگالی بار سطحی در آنجا وجود دارد. برای پیدا کردن این چگالی قانون گاوس را برای قرصی با حجم کوچک که شامل مساحت Δa از سطح است (شکل ۲-۱۳) به کار می‌بریم. هنگامی که ضخامت قرص به صفر کاهش یابد می‌توان از شار الکتریکی عبوری عمود بر سطح جانبی قرص چشم پوشید،

بارهای جدا از هم q است نوشتن رابطه $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ برای هر میدان الکتروستاتیک صحیح خواهد بود. به این ترتیب پتانسیل مربوط به میدان یک توزیع بار کلی [معادله (۱۵-۲)] برابر است با

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (۴۰-۲)$$

اکنون با نوشتن $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ و انتگرالگیری از آن می‌توان Φ را برحسب \mathbf{E} به دست آورد. با انتخاب $d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\mathbf{r}$ داریم

$$\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (۴۱-۲)$$

با بررسی روابط (۴۰-۲) و (۴۱-۲) می‌بینیم که $\Phi(\mathbf{r})$ فقط تا یک مقدار ثابت اختیاری داده می‌شود. این موضوع به این واقعیت مربوط است که تنها اختلاف پتانسیلها اهمیت فیزیکی دارند. اگر توزیع بار به وجود آورنده میدان الکتریکی در ناحیه محدودی^۱ از فضا جایگزیده باشد می‌توان پتانسیل نقاط واقع "در بینهایت"^۲ را صفر فرض کرد $\Phi(\infty) \equiv 0$ به این ترتیب

$$\Phi(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (۴۲-۲)$$

با توجه به رابطه $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ بلافاصله نتیجه می‌گیریم که سطوح با پتانسیل ثابت که از رابطه $\Phi(\mathbf{r}) = \text{const.}$ به دست می‌آیند در هر نقطه بر \mathbf{E} در آن نقطه عمودند. [معادله (۳۳-۱)]. این سطوح را که در شکل ۱۵-۲ نمایش داده شده‌اند سطوح هم‌پتانسیل می‌نامیم. همین‌طور به ناحیه‌ای که در یک پتانسیل ثابت قرار دارد حجم هم‌پتانسیل می‌گوییم. یک رسانای منزوی، در شرایط الکتروستاتیک، یک حجم هم‌پتانسیل است. سطح آن هم یک سطح هم‌پتانسیل است. این مطلب با مفهوم پتانسیل در ارتباط با کار سازگار است زیرا چون در داخل رسانا $\mathbf{E} = 0$ است با جابه‌جایی بار در داخل رسانا کاری در مقابل \mathbf{E} صورت نمی‌گیرد.

اگر تنها سطوح هم‌پتانسیلی (برای نمایش شکلی از پتانسیل) که تفاوت هر دو سطح متوالی آنها مقدار ثابت $\Delta\Phi$ باشد را رسم کنیم آنگاه در جایی که سطوح به یکدیگر نزدیک‌ترند \mathbf{E} بزرگتر و هر جا که از هم دورترند \mathbf{E} کوچکتر است. این شکل دیگری از بیان این موضوع است که وقتی $|\nabla\Phi|$ بزرگ است $|\mathbf{E}|$ هم بزرگ است. (یادآوری ۱. اگر dq با رابطه $\rho(\mathbf{r}')dv'$ داده شود، آنگاه $\rho(\mathbf{r}')$ سریعتر از $(r')^{-2}$ وقتی $r' \rightarrow \infty$ به صفر نزدیک می‌شود.
۲. "در بینهایت"، یعنی ناحیه‌ای که میدان \mathbf{E} (و بنابراین هر نیروی الکتروستاتیک) بسیار ناچیز است.

بار مربوط به چگالی بار حجمی محدود داخل سطح گاوس وقتی که $\delta \rightarrow 0$ صفر می‌شود و فقط بار سطحی $\sigma\Delta a$ باقی می‌ماند. بنابراین

$$\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (۳۵-۲)$$

به این ترتیب اختلاف مؤلفه‌های عمودی \mathbf{E} در دو طرف فصل مشترک برابر با $1/\epsilon_0$ چگالی بار سطحی است. نتیجه معادله (۳۴-۲) حالت خاص این نتیجه کلی است، وقتی یک محیط (محیط ۱) رسانا باشد که در آن حالت $\mathbf{E}_1 \equiv 0$.

۷-۲ پتانسیل الکتریکی

در مثال ۲-۱ نشان دادیم که تاویک بردار شعاعی $\mathbf{A} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ صفر است و بنابراین قابل بیان برحسب گرادیان یک تابع نرده‌ای است و از این روی یک بردار پایستار است. حال نشان خواهیم داد که هر میدان الکتریکی الکتروستاتیک را می‌توان به صورت گرادیان یک تابع نرده‌ای نوشت. علامت منفی برای راحتی انتخاب شده است. چون

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \quad (۳۶-۲)$$

این بردار باید پایستار باشد، یعنی [معادله (۵۲-۱)] را ببینید

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (۳۷-۲)$$

برای اثبات ابتدا نشان می‌دهیم که میدان الکتروستاتیک یک بار نقطه‌ای، q ، را می‌توان به صورت بالا نوشت. مستقیماً می‌توان نشان داد که

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (۳۸-۲)$$

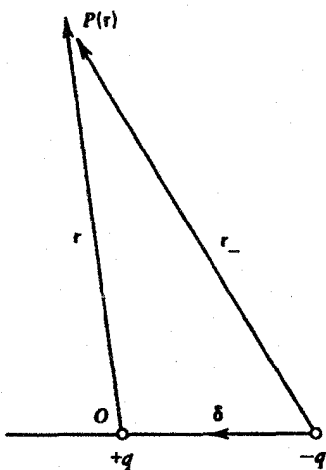
که عملگر ∇ روی متغیر \mathbf{r} عمل می‌کند. به این ترتیب میدان بار نقطه‌ای می‌شود

$$\mathbf{E} = -\nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

بنابراین \mathbf{E} را می‌توان به شکل گرادیان یک تابع نرده‌ای Φ نوشت که

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (۳۹-۲)$$

تابع Φ را پتانسیل الکتریکی بار q می‌نامیم. چون رابطه بین \mathbf{E} و Φ خطی است و \mathbf{E} همواره قابل تجزیه به میدانهای الکتروستاتیک



شکل ۱۶-۲ پتانسیل و میدان الکتریکی یک دوقطبی الکتریکی.

که با جایگذاری نتیجه می‌گیریم

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r \cdot \delta}{r^2} \right) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[3 \left(\frac{r \cdot \delta}{r} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{r} \right)^2 \right]$$

یادآوری می‌کنیم که فرض کردیم $r/\delta \gg 1$ و اینکه میدان دوقطبی وقتی $r \rightarrow 0$ میدانی خواهد بود که با میل کردن δ به صفر و q به بینهایت به گونه‌ای که $q\delta$ یک مقدار ثابت باقی بماند به دست می‌آید. آن‌گاه می‌توانیم همواره فرض کنیم که وقتی $r \rightarrow 0$ δ سریعتر از آن به صفر می‌گراید به طوری که رابطه $\delta/r \ll r$ برقرار باشد. به این ترتیب

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{r \cdot \delta}{r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (44-2)$$

که عبارت $\mathbf{p} = q\delta$ است از گشتاور دوقطبی.

جالب است توجه کنیم که می‌توان پتانسیل یک دوقطبی را برحسب

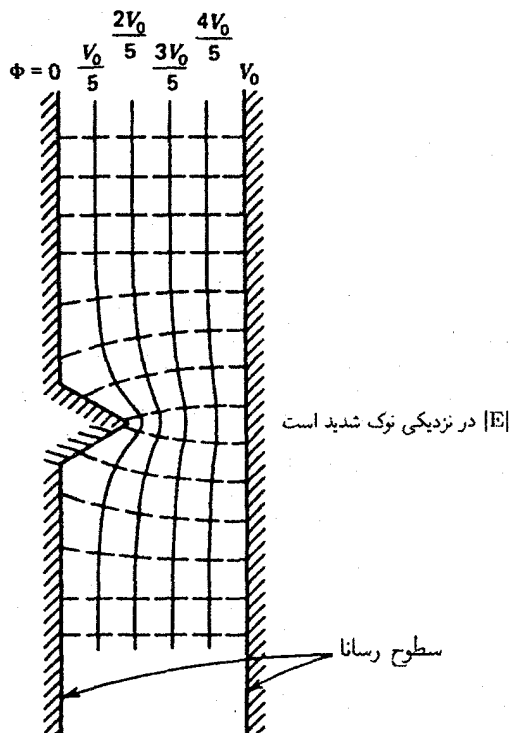
دیفرانسیل پتانسیل یک تک قطبی نوشت

$$\Phi(r) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{\mathbf{p} \cdot \nabla(1/r)}{4\pi\epsilon_0}$$

یا

$$\Phi = \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0} (\delta \cdot \nabla) \left(\frac{1}{r} \right) = (-\delta \cdot \nabla) \left(\frac{+q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \quad (45-2)$$

توجه کنید که برای تابع نرده‌ای f [معادله (۲۹-۱)] $df = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)f$ به نظر می‌رسد که پتانسیل یک دوقطبی، دیفرانسیل پتانسیل تک قطبی q یعنی دیفرانسیل $q/4\pi\epsilon_0 r$ نسبت به جابه جایی $-\delta$ است. به این ترتیب پتانسیل دوقطبی برابر است با اختلاف بین پتانسیل‌های دو تک قطبی (که در مقایسه با هر یک از دو پتانسیل تک قطبی کوچک است).



شکل ۱۵-۲ نمایش خطوط نیرو و سطوح هم پتانسیل در ناحیه بین دو الکترون با رسانایی خوب که نشان می‌دهد در هر نقطه بر هم عمودند.

می‌کنیم که $|\nabla\Phi| = \Delta\Phi/\Delta S$ که ΔS فاصله بین سطوح $\Phi = c$ و $\Phi = c + \Delta\Phi$ است. چون $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ بر سطح $\Phi = \text{const.}$ عمود است خطوط میدان در هر نقطه، بر سطح هم پتانسیلی که از آن نقطه می‌گذرند عمود است.

مثال ۹-۲ دو "بار نقطه‌ای" ناهمنام — دوقطبی الکتریکی برای به دست آوردن پتانسیل دو بار نقطه‌ای کافی است پتانسیل‌های مربوط به هر بار در \mathbf{r} را با هم جمع کنیم. با به کار بردن علامت شکل (۱۶-۲) داریم

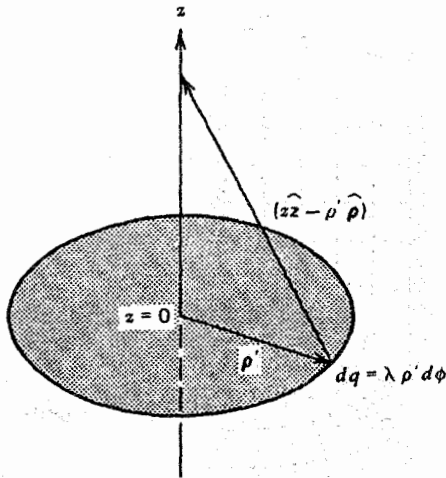
$$\Phi(r) = \Phi_q + \Phi_{-q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_-} \right) \quad (42-2)$$

با انتخاب $\mathbf{r}_- = \mathbf{r} + \delta$ خواهیم داشت

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{|r + \delta|} \right)$$

اکنون فرض می‌کنیم که $\delta \ll r$ و $|r + \delta|^{-1}$ را برحسب توانهای δ/r بسط می‌دهیم. با نگه داشتن جمله‌های با توان کمتر داریم

$$|r + \delta|^{-1} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \delta}{r^2} \right) + \frac{1}{2r} \left[3 \left(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \delta}{r} \right) - \left(\frac{\delta}{r} \right)^2 \right]$$



شکل ۱۷-۲ پتانسیل الکتریکی روی محور حلقه باردار.

که $Q = 2\pi\rho'\lambda$ بار روی حلقه است. با اطلاعات Φ روی محور z نمی‌توان مشتق Φ در راستای عمود بر این محور را حساب کرد یعنی نمی‌توان E_ρ و E_ϕ (مؤلفه‌های استوانه‌ای) را به دست آورد بلکه فقط می‌توانیم $E_z = -\partial\Phi/\partial z$ را حساب کنیم. با این حال وقتی حلقه به طور یکنواخت باردار است، E_ρ و E_ϕ به دلیل تقارن روی محور صفرند. بنابراین $\partial\Phi/\partial\rho$ و $\partial\Phi/\partial\phi$ هر دو روی محور صفرند. در این صورت به سادگی (مطابق با مثال ۳-۲) نشان داده می‌شود که با انتخاب $\mathbf{E} = -\hat{z}\partial\Phi/\partial z$ می‌توان معادله (۲۰-۲) را به دست آورد. ■

مثال ۱۱-۲ پتانسیل روی محور یک قرص نازک با استفاده از مثال قبل می‌توان به سادگی پتانسیل روی محور یک قرص باردار یکنواخت به چگالی سطحی σ و شعاع a را به دست آورد. برای این کار پتانسیل تمام حلقه‌هایی که قرص را می‌سازند با یکدیگر جمع (انتگرال‌گیری) می‌کنیم. شعاع یک حلقه معین را با ρ' و بار روی آن را با $dQ = 2\pi\sigma\rho' d\rho'$ (شکل ۱۸-۲) را ببینید) مشخص می‌کنیم. آنگاه از معادله (۴۸-۲) پتانسیل را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$d\Phi = \frac{2\pi\sigma\rho' d\rho'}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + \rho'^2)^{3/2}}$$

با جمع روی تمام حلقه‌ها از $\rho' = 0$ تا $\rho' = a$ که شعاع قرص است، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r} - \hat{z}z) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{|z|}^{\sqrt{a^2+z^2}} \frac{u du}{u}\end{aligned}$$

اکنون میدان الکتریکی \mathbf{E} را پیدا می‌کنیم. با انتخاب مختصات کروی و در نظر گرفتن $\mathbf{p} = p\hat{z}$ داریم $\Phi = (p \cos \theta) / (4\pi\epsilon_0 r^2)$ به این ترتیب

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\hat{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \hat{\phi} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}$$

توجه کنید که

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = 0$$

در نتیجه میدان الکتریکی دوقطبی می‌شود

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}) \quad (۴۶-۲)$$

که می‌توان آن را به شکل زیر نیز نوشت (آن را نشان دهید)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\hat{r} \cdot \mathbf{p})\hat{r} - \mathbf{p}] \quad (۴۷-۲)$$

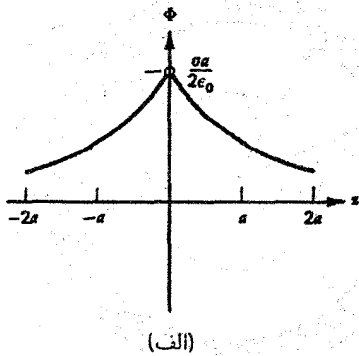
سرانجام می‌توان نشان داد که در تمام نقاط $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ بجز در $r = 0$ که \mathbf{E} واگرا می‌شود. در این مورد چگالی بار برای دوقطبی بجز در نقطه $r = 0$ صفر است. برای پیدا کردن بار در آنجا ($\rho \rightarrow \infty$) می‌توانیم از قانون گاوس استفاده کنیم. به این ترتیب می‌توان تصور کرد که "میدان دوقطبی" از یک نقطه در فضا با یک توزیع بار بسیار تکین سرچشمه می‌گیرد به طوری که نمی‌توان به خوبی آن را به کمک قانون گاوس بررسی کرد. از دید میکروسکوپی میدانهای دوقطبی الکتریکی در نقطه $r \rightarrow 0$ وجود ندارند لکن غالباً با دید ماکروسکوپی ظاهر می‌شوند. ■

مثال ۱۰-۲ پتانسیل روی محور یک حلقه باردار

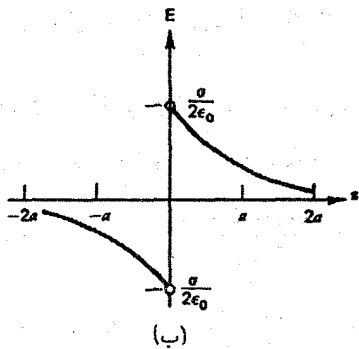
در این مثال حالتی داریم که پیدا کردن پتانسیل یا میدان الکتریکی در نقاط دلخواهی در فضا کار مشکلی است. با وجود این پیدا کردن پتانسیل روی محور یک حلقه باردار یکنواخت با چگالی بار خطی، λ ، و شعاع ρ' ساده است (شکل ۱۷-۲ را ببینید).

پتانسیل را در بینهایت صفر فرض می‌کنیم زیرا توزیع بار منتهی است و معادله (۴۰-۲) را برای پیدا کردن پتانسیل نقاط روی محور z به کار می‌بریم. با توجه به اینکه فاصله کلیه جزءهای بار dq از هر نقطه روی محور z مساوی است بلافاصله می‌نویسیم

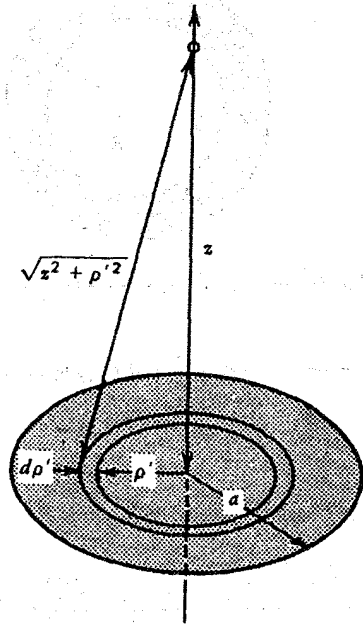
$$\Phi(\mathbf{r} = \hat{z}z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (z\hat{z} - \rho'\hat{\rho})} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + \rho'^2)^{1/2}} \quad (۴۸-۲)$$



(الف)



(ب)



شکل ۱۸-۲ یک قرص نازک باردار یکنواخت.

با انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم

$$\Phi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{a^2 + z^2} - |z| \right] \quad (49-2)$$

مانند مثال قبل میدان الکتریکی نیز روی محور، $E_z = -\partial\Phi/\partial z$ به سادگی به دست می‌آید

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right] \quad \text{برای } z > 0$$

و

$$E_z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right] \quad \text{برای } z < 0$$

شکل‌های ۱۹-۲ (الف) و ۱۹-۲ (ب) نمودار تغییرات پتانسیل و میدان الکتریکی را به شکل تابعی از z نشان می‌دهند. پتانسیل، (همچنان‌که انتظار داریم) پیوسته است در حالی که میدان الکتریکی پیوسته نیست. در حقیقت به سادگی می‌توان نشان داد که روی محور z

$$\lim_{z \rightarrow 0} [E(z) - E(-z)] = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

که با شرایط مرزی، معادله (۳۵-۲) سازگار است.

مثال ۱۲-۲ تعیین Φ از $\Phi = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$

مثال‌های ۱۲-۲ (الف) و ۱۲-۲ (ب) نشان می‌دهند که چگونه می‌توان پتانسیل الکتریکی را ابتدا با تعیین میدان الکتریکی متناظر و سپس

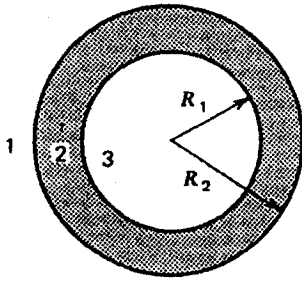
شکل ۱۹-۲ نمایش (الف) پتانسیل و (ب) میدان الکتریکی روی محور یک قرص نازک باردار یکنواخت.

با استفاده از معادله (۴۲-۲) محاسبه کرد. این روش تنها در مورد مسائلی به کار می‌رود که از تقارن بالایی برخوردارند و میدان الکتریکی را می‌توان به سادگی با استفاده از قانون گاوس به دست آورد. چون در این روش، انتگرال‌گیری روی میدان الکتریکی انجام می‌شود نتیجه را با اختلاف یک ثابت دلخواه می‌توان به دست آورد. این موضوع همان طور که در بالا گفتیم به این حقیقت وابسته است که تنها اختلاف پتانسیل است که اهمیت فیزیکی دارد. از اختیاری بودن مقدار ثابت برای مشخص کردن پتانسیل در نقطه مرجع استفاده می‌کنیم.

(الف) خازن کروی

دو پوسته کروی هم‌مرکز و رسانا را به شعاعهای خارجی R_1 و R_2 (شکل ۲۰-۲ را ببینید) در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم بارهای Q_1 و Q_2 به ترتیب روی این دو پوسته قرار دارند. اکنون می‌خواهیم تابع پتانسیل این توزیع بار را در تمام نقاط پیدا کنیم.

میدانهای E_1, E_2 ، و پتانسیلهای Φ_1, Φ_2 و Φ_3 را به ترتیب در نواحی $R_1 < r < R_2$ و $R_2 < r < R_1$ ، $r > R_2$ تعریف می‌کنیم. میدان الکتریکی در نواحی مختلف به دلیل وجود تقارن



شکل ۲۱-۲ پتانسیل یک لایه کروی باردار با استفاده از قانون گاوس.

گاوس میدانهای الکتریکی E_1, E_2, E_3 و به ترتیب در نواحی ۱، ۲ و ۳ با روابط زیر داده می‌شوند

$$E_1 = \frac{Q_{enc}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} [R_2^3 - R_1^3] \frac{\hat{r}}{r^2} \quad r > R_2$$

$$E_2 = \frac{\frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left[1 - \frac{R_1^3}{r^3}\right] r \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

و میدان $E_3 = 0$ برای $r < R_1$

پتانسیلها را نیز با استفاده از رابطه $\Phi(r) = -\int_{\infty}^r E \cdot dr$ به دست می‌آوریم

$$\Phi_1 = -\int_{\infty}^r \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} (R_2^3 - R_1^3) \frac{r \cdot dr}{r^2} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} (R_2^3 - R_1^3) \frac{1}{r}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \Phi_1(R_2) - \int_{R_2}^r \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left[1 - \frac{R_1^3}{r^3}\right] r \cdot dr \\ &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left[\frac{3}{2} R_2^2 - \frac{R_1^3}{r} - \frac{r^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (50-2)$$

$$\Phi_3 = \Phi_2(R_1) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left[\frac{3}{2} R_2^2 - R_1^2 \right]$$

از عبارتهای قبلی برای پیدا کردن پتانسیل کره باردار بخواخت فقط با قراردادن $R_1 = 0$ می‌توان استفاده کرد. در این حالت ($R_2 \equiv R$)

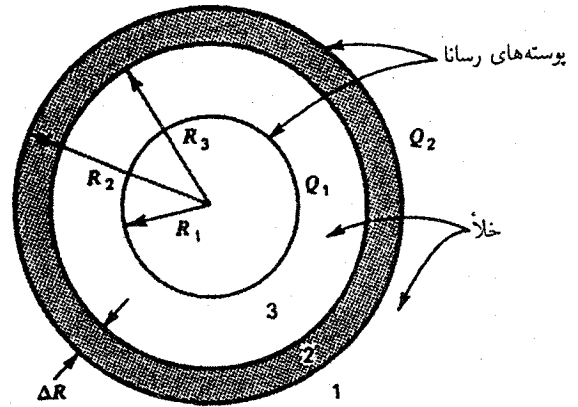
$$\Phi_1(r \geq R) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{tot}}{r} \quad (51-2)$$

$$\Phi_2(r \leq R) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left[\frac{3}{2} R^2 - \frac{r^2}{2} \right] \quad (52-2)$$

میدان الکتریکی مربوط به کره عبارت است از

$$E_1 = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R^3 \frac{\hat{r}}{r^2} \quad \text{به‌ازای } r > R$$

$$\blacksquare E_2 = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \quad \text{به‌ازای } r < R \quad (53-2)$$



شکل ۲۰-۲ پتانسیل یک خازن کروی با استفاده از قانون گاوس.

کروی، شعاعی است. با به‌کار بردن قانون گاوس میدان را برای هر سطح کروی در نواحی مختلف به‌سادگی محاسبه می‌کنیم. بنابراین

$$E_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad r > R_3$$

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad R_1 < r < R_2$$

در داخل بوسته رسانا میدان الکتریکی صفر است، بنابراین $E_3 = 0$. اکنون به‌سادگی می‌توان پتانسیل را تعیین کرد. با قراردادن E_1 در

معادله (۴۲-۲) به دست می‌آوریم

$$\Phi_1 = -\int_{\infty}^r \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

در ناحیه ۲ میدان الکتریکی صفر است و در نتیجه پتانسیل در این ناحیه ثابت می‌ماند

$$\Phi_2 = \text{const.} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

سرانجام پتانسیل در ناحیه ۳ با قراردادن E_2 در معادله (۴۲-۲) به شکل زیر تعیین می‌شود

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3} - \int_{R_3}^r \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3} \\ &+ \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_3} \right) \end{aligned}$$

(ب) لایه کروی باردار

در این مثال پتانسیل یک لایه کروی باردار بخواخت با چگالی بار ρ_0 (شکل ۲۱-۲ را ببینید) را به دست می‌آوریم. با به‌کار بردن قانون

با انتگرال‌گیری روی θ' به دست می‌آوریم

$$d\Phi_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(r') r' dr' \quad (57-2)$$

متذکر می‌شویم که این نتیجه را با کاربرد مثال ۲-۱۲ (ب) نیز می‌توان به دست آورد. در این صورت پتانسیل مربوط به کل بار در ناحیه $r' > r$ با انتگرال‌گیری روی r' محاسبه می‌شود

$$\Phi_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_r^\infty r' \rho(r') dr' \quad (58-2)$$

با افزودن Φ_1 به Φ_2 خواهیم داشت

$$\Phi(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \frac{1}{\epsilon_0} \int_r^\infty \rho(r') r' dr' \quad (59-2)$$

میدان الکتریکی $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ اکنون به سادگی قابل محاسبه است. نتیجه می‌شود

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (60-2)$$

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه نتیجه بالا به روشی آسانتر با استفاده از قانون گاوس به دست می‌آید. یک سطح کروی با شعاع r و به مرکز مبدأ در نظر می‌گیریم. چون توزیع بار متقارن کروی است، آن‌گاه میدان الکتریکی در r شعاعی است و مستقل از زاویه‌هاست، و بنابراین با به‌کار بردن قانون گاوس به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

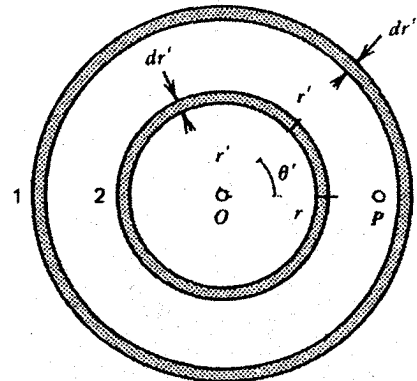
که همان نتیجه به دست آمده در معادله (۶۰-۲) است. اکنون می‌توان پتانسیل $\Phi(r)$ را با استفاده از $\Phi(r) = -\int_\infty^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ به دست آورد

$$\Phi(r) = -\int_\infty^r \left[\frac{1}{\epsilon_0 r'^2} \int_0^{r'} \rho(r'') r''^2 dr'' \right] dr$$

این انتگرال که به شکل $\int u dv$ است با استفاده از روش جزء به جزء، که u برابر با $\int_0^r \rho(r'') r''^2 dr''$ و $dv = -dr/\epsilon_0 r^2$ ، محاسبه می‌شود

$$\Phi = uv \Big|_\infty^r - \int_\infty^r v du$$

که دقیقاً همان نتیجه انتگرال‌گیری مستقیم معادله (۵۹-۲) را به دست می‌دهد.



شکل ۲-۲۲ توزیع بار کروی متقارن متشکل از دو حلقهٔ باردار. یکی نقطه مشاهده را در بر می‌گیرد و دیگری این نقطه را در بر نمی‌گیرد.

مثال ۲-۱۳ پتانسیل ناشی از توزیع بار متقارن کروی $\rho(r)$ در این مثال یک حالت کلی را که در آن چگالی بار یکنواخت نیست بررسی می‌کنیم. با این حال توزیع بار را که در آن چگالی بار فقط تابع r است، متقارن کروی در نظر می‌گیریم.

برای محاسبه پتانسیل در نقطه مشاهده P که در فاصله r قرار گرفته است بار را به لایه‌های کروی تقسیم می‌کنیم. دو لایه مطابق شکل ۲-۲۲ را که هر یک ضخامت dr' دارد در نظر می‌گیریم به طوری که لایه ۱ نقطه مشاهده را در بر می‌گیرد اما لایه ۲ آن را در بر نمی‌گیرد. پتانسیل یک لایه باردار نازک در مثال ۲-۱۲ (ب) بررسی شد. پتانسیل $d\Phi_2$ مربوط به لایه ۲ مانند حالتی است که بار در نقطه مبدأ (مرکز کره) متمرکز باشد [معادله (۲-۵۰) را ببینید]

$$d\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(r') 4\pi r'^2}{r} dr' \quad (54-2)$$

بنابراین پتانسیل کل بارها در فواصل کوچکتر از r با انتگرال‌گیری عبارت فوق از صفر تا r به دست می‌آید

$$\Phi_2 = \int_0^r d\Phi_2 = \frac{1}{\epsilon_0 r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (55-2)$$

برای به دست آوردن پتانسیل مربوط به لایه ۱، یک جزء سطح در نظر می‌گیریم، که با بردار مشاهده، \mathbf{r} ، زاویه θ' می‌سازد. آن‌گاه اثر لایه را با انتگرال‌گیری روی سطح آن می‌توان حساب کرد

$$d\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r') r'^2 d\Omega'}{(r'^2 - 2rr' \cos \theta' + r^2)^{3/2}} dr' \quad (56-2)$$

که $d\Omega' = d\phi' \sin \theta' d\theta'$ با انتگرال‌گیری روی ϕ' ، مقدار 2π و نیز

اکنون این نتیجه را می‌توان برای تعیین پتانسیل مربوط به هر توزیع بار معین به‌کار برد. مثلاً توزیع بار نمایی $\rho(r) = \rho_0 e^{-\alpha r}$ که در آن ρ_0 و α ثابت هستند را در نظر می‌گیریم. با قراردادن ρ در معادله (۵۹-۲) به‌دست می‌آوریم

$$\Phi(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 r} \int_0^r r' e^{-\alpha r'} dr' = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int_r^\infty r' e^{-\alpha r'} dr'$$

که با انتگرال‌گیری به‌سادگی نتیجه می‌شود

$$\Phi(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 \alpha^2 r} (1 - e^{-\alpha r}) - \frac{\rho_0 e^{-\alpha r}}{\epsilon_0 \alpha^2}$$

و پتانسیل برحسب بار کل $Q = \int \rho dv = \frac{4\pi \rho_0}{\alpha^2}$ خواهد شد

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} (1 - e^{-\alpha r}) - \frac{Q \alpha}{4\pi \epsilon_0} e^{-\alpha r}$$

این نتیجه مشخص می‌کند که پتانسیل $\Phi(r)$ رفتار نمایی دارد. در فواصل دور جایی که $\alpha r \gg 1$ است پتانسیل به شکل $\Phi(r) = Q/(4\pi \epsilon_0 r)$ در می‌آید که مشابه پتانسیل بار Q است موقعی که در مبدأ متمرکز باشد. نزدیک مبدأ $\alpha r \ll 1$ و پتانسیل به شکل $\Phi(r) = Q\alpha/(4\pi \epsilon_0)$ و مستقل از r خواهد بود. ■

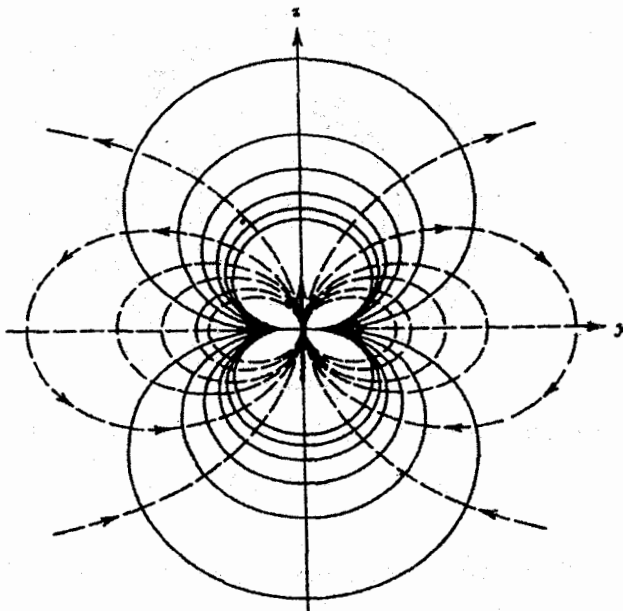
مثال ۱۴-۲ سطوح هم‌پتانسیل میدان یک دوقطبی

حال سطوح با پتانسیل ثابت یک دوقطبی را تعریف می‌کنیم. یک دوقطبی که شامل دو بار نقطه‌ای هم‌اندازه و ناهمنام به فاصله l از یکدیگر در راستای z هستند در نظر می‌گیریم. در مثال ۹-۲ دوقطبی الکتریکی بررسی شد و از معادله (۴۴-۲)، $\Phi(r) = p \cdot r / (4\pi \epsilon_0 r^3)$ به‌دست آمد که در صفحه xy ، $\Phi(r, \theta) = p \cos \theta / (4\pi \epsilon_0 r^2)$ به $\Phi(r, \theta) = p \cos \theta / (4\pi \epsilon_0 r^2)$ یا $\Phi(r, \theta) = p \cos \theta / (4\pi \epsilon_0 r^2)$ خلاصه می‌شود. اکنون رابطه بین r و θ را برای مقادیر مختلف Φ ، و بنابراین اندازه‌های مختلف α مطابق شکل ۲۳-۲ می‌توان رسم کرد. ■

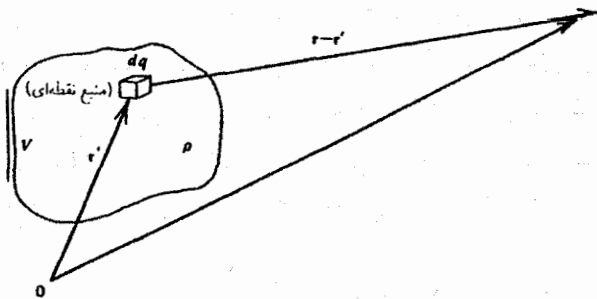
۸-۲ بسط چندقطبیه

اکنون می‌خواهیم پتانسیلها و میدانهای الکتروستاتیک یک توزیع بار دلخواه را که در ناحیه نسبتاً کوچکی از فضا قرار دارد مشخص کنیم. ممکن است چنین فکر کنیم که این توزیع بار، توزیع بار یک مولکول است، که ابعاد آن از مرتبه 10^{-10} متر است.

شکل ۲۴-۲ که توزیع بار واقع در حجم V با چگالی بار ρ را نشان می‌دهد در نظر می‌گیریم. مبدأ O را روی توزیع بار و یا نزدیک آن انتخاب می‌کنیم. بردار r' مکان یک جزء بار نسبت به O است. بردار



شکل ۲۳-۲ سطوح هم‌پتانسیل و خطوط نیروی یک دوقطبی الکتریکی. (سطوح هم‌پتانسیل با خطوط پررنگ و خطوط نیرو با خط چین نمایش داده شده‌اند.)



شکل ۲۴-۲ توزیع بار جایگزیده.

r نقطه‌ای از فضا در خارج توزیع بار است که می‌خواهیم پتانسیل $\Phi(r)$ را در آن نقطه حساب کنیم

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{dq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

در واقع برای هر r' فرض می‌کنیم که $r'/r \ll 1$ است. در این صورت عبارت زیر انتگرال را می‌توان بسط داد

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r \left[1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

غیرصفر خواهد بود. اگر R' از مرتبه ابعاد اتمی و r یک فاصله ماکروسکوپی باشد آن‌گاه $10^{-4} \leq R'/r$ است.

در حالت خاص، توزیع بار ممکن است نقطه مشاهده را دربرگیرد. در این حال اگر $r \ll R'$ باشد که R' کوچکترین بعد توزیع بار است، آن‌گاه پتانسیل در ناحیه $r < R'$ را با بسط به یک سری از توانهای r/r' (به جای r'/r در بسط قبلی) می‌توان نوشت که نتیجه به شکل زیر است

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int \frac{dq}{r'} + \mathbf{r} \cdot \int \frac{\mathbf{r}' dq}{r'^2} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r'^5} - \frac{r'^2}{r'^3} \right) dq \right] \quad (62-2)$$

ما حالت اخیر را [که با معادله (62-2) داده شد] بجز در مثال 17-2 و مسئله 2-2 بحث نخواهیم کرد. با این همه مسئله قبلی (نقطه مشاهده خارج از توزیع بار) را مفصلتر بحث می‌کنیم. اکنون جمله‌های $\Phi^{(0)}$ ، $\Phi^{(1)}$ و $\Phi^{(2)}$ ، در معادله (61-2) را جداگانه بررسی می‌کنیم.

جمله تک قطبی $\Phi^{(0)}$. پتانسیل $\Phi^{(0)}$ را، که پتانسیل تک قطبی نام دارد، می‌توان به شکل زیر نشان داد

$$\Phi^{(0)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int dq = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Q در این رابطه بار خالص کلی توزیع بار است. وجود این جمله به روشنی بیانگر این است که در نقاط به حد کافی دور از توزیع بار، پایتترین مرتبه تقریب، توزیع بار مثل یک بار نقطه‌ای است.

جمله دوقطبی $\Phi^{(1)}$ - دوقطبی در میدانهای خارجی. جمله $\Phi^{(1)}$ که آن را جمله دوقطبی می‌نامیم می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Phi^{(1)} = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \int \mathbf{r}' dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

که \mathbf{p} برداری است که آن را گشتاور دوقطبی توزیع بار می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' dq = \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dv' \quad (63-2)$$

که ρ چگالی بار است. اهمیت جمله دوقطبی زمانی است که $Q = 0$ باشد و در این صورت جمله غالب بسط خواهد بود. به علت اهمیت دوقطبیها در بحث خواص الکتریکی ماده، چند ویژگی میدان دوقطبی و گشتاور دوقطبی \mathbf{p} را اینجا می‌آوریم:

با به کار بردن بسط دو جمله‌ای داریم

$$(1+x)^{-1/2} = \left[1 - \frac{1}{2}x - \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{x^2}{2!} + \dots \right]$$

که فقط برای $|x| < 1$ قابل قبول است. با فرض

$$x = \left(-\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)$$

داریم

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cong \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right) \left(\frac{1}{2!} \right) \left(-\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^2 + \dots \right]$$

با مرتب کردن توانهای r'/r از پایین به بالا به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cong \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} + \frac{1}{2} \left[3 \left(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} \right)^2 - \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right] + \dots \right\}$$

بنابراین پتانسیل می‌شود

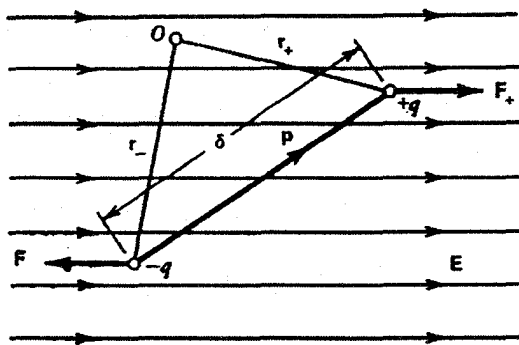
$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \left\{ 1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r} + \frac{1}{2} \left[3 \left(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} \right)^2 - \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right] + \dots \right\}$$

اکنون پتانسیل را به شکل روشنتر جمع سه انتگرال مربوط به پتانسیلهای $\Phi^{(0)}$ ، $\Phi^{(1)}$ و $\Phi^{(2)}$ می‌نویسیم

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \dots$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int dq + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \int \mathbf{r}' dq + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int \left[\frac{3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^2}{2} - \frac{r'^2}{2} \right] dq + \dots \quad (61-2)$$

می‌بینیم که جمله‌های متوالی این بسط با یک ضریب از مرتبه R'/r که R' بعد خطی مشخصه توزیع بار است، با یکدیگر اختلاف دارند. بنابراین جمله غالب این توزیع وقتی $r \gg R'$ باشد، اولین جمله



شکل ۲۵-۲ نمایش یک دوقطبی الکتریکی در برهم‌کنش با میدان الکتریکی خارجی که دوقطبی به صورت دو بار متمایز نشان داده شده است.

با قراردادن $E = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$ نتیجه می‌شود

$$U^{(1)} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (۶۴-۲)$$

بیان اینکه δ به حد کافی کوچک است مستلزم ثابت بودن E "در روی دوقطبی" است. آن‌گاه $U^{(1)}$ را با تعبیر ساده کار لازم برای جابه‌جا کردن بار مثبت q به اندازه δ در میدان E می‌توان تعریف کرد. با این حال این کمیت شامل انرژی لازم برای تشکیل دوقطبی در نبود میدان الکتریکی نیست.

۴. نیروی F وارد بر دوقطبی واقع در میدان خارجی، E ، عبارت است از $F = F_- + F_+$ که F_- و F_+ نیروهای وارد بر بارهای $-q$ و q ، مطابق شکل ۲۵-۲، هستند. با نوشتن $F_{\pm} = \pm qE(\mathbf{r}_{\pm})$ داریم

$$\mathbf{F} = -q\mathbf{E}(\mathbf{r}_-) + q\mathbf{E}(\mathbf{r}_+) = -q\mathbf{E}(\mathbf{r}_-) + q\mathbf{E}(\mathbf{r}_- + \delta)$$

با نگره داشتن دو جمله اول از بسط تیلور داریم

$$\mathbf{F} \approx -q\mathbf{E}(\mathbf{r}_-) + q\mathbf{E}(\mathbf{r}_-) + q(\delta \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r}_-)$$

یا

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} \quad (۶۵-۲)$$

با توجه به معادله (۶۵-۲) نیروی وارد بر دوقطبی صفر است، مشروط بر اینکه میدانی که دوقطبی در آن قرار دارد یکنواخت باشد.

۵. گشتاور τ وارد بر دوقطبی وقتی در یک میدان الکتریکی یکنواخت E قرار می‌گیرد عبارت است از:

$$\tau = \mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_- + \mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+$$

۱. در حالت کلی گشتاور دوقطبی p به انتخاب مبدأ بستگی دارد. در واقع اگر کل بار خالص توزیع، Q ، صفر نباشد، همواره می‌توان این گشتاور را نسبت به یک مبدأ مساوی صفر انتخاب کرد. با این همه اگر $Q = 0$ باشد، آن‌گاه p اندازه‌ای مستقل از مبدأ دارد.

۲. نمونه ایده‌آل یک دوقطبی، دو بار هم‌اندازه و ناهمنام است که به فاصله δ از هم قرار دارند. می‌بینیم که گشتاور دوقطبی می‌تواند به شکل زیر بیان شود

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' dq = \mathbf{r}_-(-q) + \mathbf{r}_+(+q) = q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-)$$

که \mathbf{r}_+ و \mathbf{r}_- به ترتیب بردارهای مکان بارهای $+q$ و $-q$ نسبت به مبدأ هستند. اغلب فرض می‌شود این‌گونه دوقطبیها منجر به تولید میدانهای دوقطبی می‌شوند. با این همه باید تأکید شود که پتانسیل دوقطبی $\Phi^{(1)}$ پتانسیل این دوقطبی است به شرطی که $\delta/r \rightarrow 0$. پتانسیل دو بار نقطه‌ای وقتی $\delta/r \approx 1$ است برابر با $\Phi^{(1)}$ نیست. یادآوری می‌کنیم که ما هر توزیع بار را به بخشهای مثبت و منفی بار تقسیم می‌کنیم به طوری که $dq = dq_+ + dq_-$ یعنی

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int \mathbf{r}' dq = \int \mathbf{r}' dq_+ + \int \mathbf{r}' dq_- \\ &= \langle \mathbf{r}'_+ \rangle Q_+ + \langle \mathbf{r}'_- \rangle Q_- \end{aligned}$$

که $\langle \mathbf{r}'_+ \rangle$ و $\langle \mathbf{r}'_- \rangle$ میانگین جابه‌جاییهای بار مثبت کل Q_+ و بار منفی کل Q_- نسبت به مبدأ است. اگر بار خالص توزیع بار صفر باشد آن‌گاه $Q_- = -Q_+$ است و

$$\mathbf{p} = Q_+[\langle \mathbf{r}'_+ \rangle - \langle \mathbf{r}'_- \rangle] \equiv Q_+ \delta$$

۳. انرژی لازم برای استقرار یک دوقطبی در یک میدان الکتروستاتیکی خارجی با تابع پتانسیل Φ برابر است با

$$U^{(1)} = -q\Phi(\mathbf{r}_-) + q\Phi(\mathbf{r}_+)$$

که $\mathbf{r}_+ = \mathbf{r}_- + \delta$ است. اگر δ به حد کافی کوچک باشد می‌توان $\Phi(\mathbf{r}_- + \delta)$ را با دو جمله اول بسط تیلور یعنی

$$\Phi(\mathbf{r}_- + \delta) = \Phi(\mathbf{r}_-) + (\delta \cdot \nabla)\Phi(\mathbf{r}_-)$$

تقریب زد، بنابراین

$$U^{(1)} = -q\Phi(\mathbf{r}_-) + q\Phi(\mathbf{r}_-) + q(\delta \cdot \nabla)\Phi(\mathbf{r}_-)$$

(۲) N بار نقطه‌ای. گشتاور دوقطبی N بار نقطه‌ای q_1, q_2, \dots, q_N با رابطه زیر داده می‌شود

$$\mathbf{p} = \sum_{j=1}^N \mathbf{r}'_j q_j$$

که \mathbf{r}'_j مکان بار q_j نسبت به مبدأ است. فقط در صورتی که

$$\sum_{j=1}^N q_j = 0$$

باشد، \mathbf{p} مستقل از انتخاب مبدأ خواهد بود.

(۳) یک حلقه دایره‌ای باردار. گشتاور دوقطبی یک حلقه دایره‌ای با توزیع بار یکنواخت نسبت به مبدأ واقع در مرکز حلقه با رابطه زیر داده می‌شود

$$p = \int \mathbf{r}' dq = \int_{\phi=0}^{2\pi} R \hat{\rho} \lambda R d\phi = \lambda R^2 \int_0^{2\pi} \hat{\rho} d\phi = 0$$

که R شعاع حلقه و λ چگالی خطی بار است.

(۴) میله باردار. میله نشان داده شده چگالی بار

$$\rho = \alpha \left(z - \frac{l}{2} \right) \quad 0 \leq z \leq l$$

دارد و گشتاور دوقطبی آن با رابطه زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int \mathbf{r}' dq = \hat{\mathbf{z}} \int_{z=0}^l z (\rho A dz) \\ &= \hat{\mathbf{z}} \alpha A \int_{z=0}^l z \left(z - \frac{l}{2} \right) dz = \frac{1}{12} \hat{\mathbf{z}} l^3 \alpha A \quad (70-2) \end{aligned}$$

توجه کنید به سادگی می‌توان نشان داد که بار کل میله، $\int dq$ ، صفر است و بنابراین \mathbf{p} مستقل از انتخاب مبدأ است.

(۵) کره باردار با توزیع بار زاویه‌ای. گشتاور دوقطبی یک کره با چگالی بار سطحی $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ را در نظر می‌گیریم. یک نقطه در سطح کره را با بردار $\mathbf{r}' = R \hat{\mathbf{r}}$ که در مختصات استوانه‌ای برابر با $z' \hat{\mathbf{z}} + \rho' \hat{\rho}$ است و $R^2 = z'^2 + \rho'^2$ ، نشان می‌دهیم. روی حلقه‌ای تحت زاویه θ' باری به اندازه $dq = 2\pi R^2 \sigma \sin \theta' d\theta'$ وجود دارد. بنابراین $\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' dq = \int (z' \hat{\mathbf{z}} + \rho' \hat{\rho}) dq$ و انتگرال $\int \rho' \hat{\rho} dq$ صفر می‌شود. بدین ترتیب

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int z' \hat{\mathbf{z}} dq = \hat{\mathbf{z}} \cdot 2\pi R^2 \sigma_0 \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta' \\ &= \hat{\mathbf{z}} \frac{2\pi R^2 \sigma_0}{3} = \hat{\mathbf{z}} \sigma_0 V \quad (71-2) \end{aligned}$$

که \mathbf{F}_+ و \mathbf{F}_- مطابق شکل ۲۵-۲ نیروهایی هستند که از میدان بر بارهای $-q$ و $+q$ وارد می‌شوند. با قراردادن $\mathbf{F}_{\pm} = \pm q \mathbf{E}$ نتیجه می‌شود

$$\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) \times q \mathbf{E} = \boldsymbol{\delta} \times q \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (66-2)$$

گشتاور در جهتی بر دوقطبی وارد می‌شود که آن را در راستای میدان قرار دهد. اگر میدان \mathbf{E} یکنواخت نباشد می‌توان به‌طور مستقیم نشان داد

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (67-2)$$

که \mathbf{F} نیروی وارد بر دوقطبی و \mathbf{r} جابه‌جایی نسبت به مبدأ است که گشتاور نسبت به آن حساب می‌شود.

۶. چون یک دوقطبی را می‌توان دو "تک‌قطبی" با بار مساوی و ناهم‌نام تصور کرد که به اندازه δ از هم فاصله دارند در این صورت با مراجعه به شکل ۲۵-۲ به دست می‌آوریم

$$\Phi^{(1)} = \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) - \Phi^{(0)}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta})$$

با استفاده از بسط تیلور داریم

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)} &= \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) - \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) - (\boldsymbol{\delta} \cdot \nabla) \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) \\ &= -\boldsymbol{\delta} \cdot \nabla \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) \quad (68-2) \end{aligned}$$

این عبارت را قبلاً در مثال ۹-۲ دیدیم. مشکل نیست که به همین روش پتانسیل چندقطبی مرتبه n را از پتانسیل چندقطبی مرتبه $(n-1)$ به دست آوریم

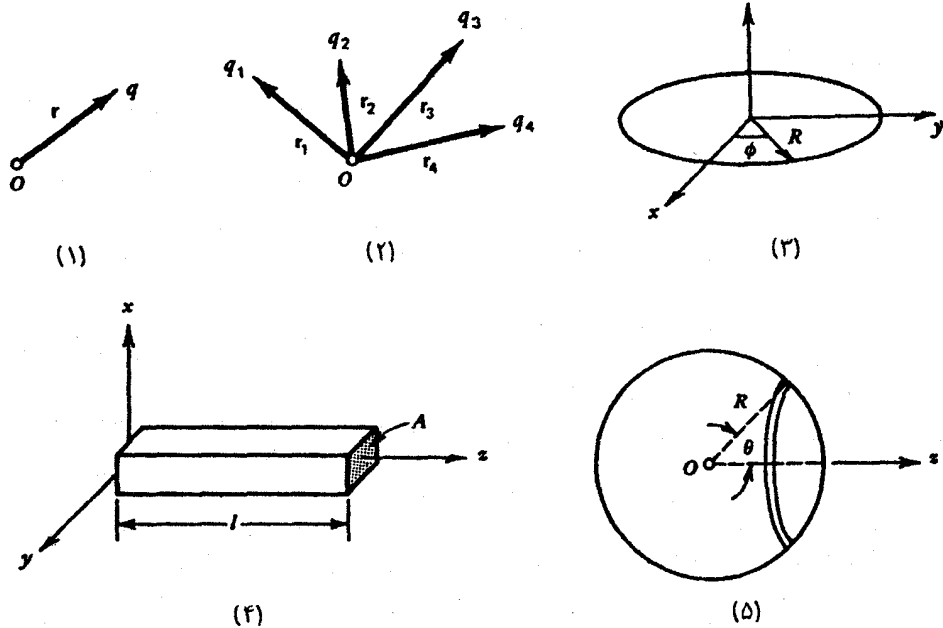
$$\Phi^{(n)} = \Phi^{(n-1)}(\mathbf{r}) - \Phi^{(n-1)}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}^{(n)}) = -\boldsymbol{\delta}^{(n)} \cdot \nabla \Phi^{(n-1)} \quad (69-2)$$

که $\boldsymbol{\delta}^{(n)}$ فاصله دو چندقطبی از مرتبه $(n-1)$ از یکدیگر است (مثال ۱۶-۲ را ببینید).

مثال ۱۵-۲ چند گشتاور دوقطبی

در این مثال گشتاور دوقطبی چند توزیع بار شکل ۲۶-۲ را تعیین می‌کنیم:

(۱) یک بار نقطه‌ای. گشتاور دوقطبی یک بار نقطه‌ای q که در فاصله \mathbf{r}' از مبدأ قرار دارد عبارت است از $\mathbf{p} = q \mathbf{r}'$. اگر مبدأ روی بار انتخاب شود گشتاور دوقطبی صفر است.



شکل ۲-۲۶ چند توزیع بار: (۱) نقطه باردار، (۲) مجموعه نقاط باردار، (۳) حلقه باردار، (۴) یک میله باردار چهارگوش، (۵) کره با توزیع بار زاویه‌ای.

ماتریس است که ماتریس چارقطبی نام دارد. عناصر این ماتریس را با Q_{xx}, Q_{xy}, Q_{xz} و ... مشخص می‌کنیم. دانستن کامل این عناصر $\Phi^{(2)}$ را مشخص می‌کند، درست به همان روش که مؤلفه‌های گشتاور دوقطبی (p_x, p_y, p_z) ، $\Phi^{(1)}$ را مشخص می‌کند. اکنون معادله (۷۲-۲) را می‌توان به صورت

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1}^3 \frac{Q_{ij}}{r^3} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \quad (72-2)$$

نوشت که

$$Q_{ij} = \int x'_i x'_j dq \quad (74-2)$$

و قرار داده‌ایم $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ و δ_{ij} دلتای کرونکر است که اگر $i = j$ باشد برابر با یک و اگر $i \neq j$ باشد صفر است. گاهی اوقات جمله‌های بالا به شکل دیگری مرتب می‌شوند. به جای جمله‌های قطری

$$(3x^2 - r^2) \int x'^2 dq + (3y^2 - r^2) \int y'^2 dq + (3z^2 - r^2) \int z'^2 dq$$

که V حجم کره است. این گشتاور دوقطبی مستقل از انتخاب مبدأ است زیرا بار کل روی کره صفر است.

جمله چارقطبی؛ $\Phi^{(2)}$. سهم $\Phi^{(2)}$ در پتانسیل را جمله چارقطبی می‌نامند

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \int [3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2] dq \quad (72-2)$$

این جمله را طوری نوشته‌ایم که انتگرالده نسبت به r' و r کاملاً متقارن باشد. با بسط انتگرالده در مختصات دکارتی و توجه به اینکه انتگرال‌گیری روی توزیع بار به مختصات پیرامدار (x', y', z') وابسته است نه به مختصات نقطه مشاهده، (x, y, z) ، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \int [3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - (r r')^2] dq &= (3x^2 - r^2) \int x'^2 dq \\ &+ 3xy \int x' y' dq + 3xz \int x' z' dq \\ &+ 3xy \int x' y' dq + (3y^2 - r^2) \int y'^2 dq \\ &+ 3yz \int y' z' dq + 3zx \int z' x' dq \\ &+ 3zy \int z' y' dq + (3z^2 - r^2) \int z'^2 dq \end{aligned}$$

عناصر "غیر قطری" آرایه جملات مساوی‌اند. آرایه انتگرالها یک

در این رابطه θ' زاویه بین محور z و عنصر بار dq را نشان می‌دهد. اگر $Q'_{zz} > 0$ باشد. یک بیضوی سیگارشکل و اگر $Q'_{zz} < 0$ باشد یک بیضوی نعلبکی شکل بار خواهیم داشت. از این جهت گشتاور چارقطبی ملاکی برای میزان تغییر شکل بیضوی از تقارن کروی است.

مثال ۲-۱۶ توزیعهای چارقطبی بارهای نقطه‌ای

در این مثال ماتریس چارقطبی توزیع بارهایی مطابق شکل ۲-۲۷(الف) و ۲-۲۷(ب) را تعیین می‌کنیم. در مواردی که تنها بار نقطه‌ای وجود دارد پتانسیل چارقطبی $\Phi^{(2)}$ به جمع زیر خلاصه می‌شود

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \sum_i [3(\mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{r})^2 - r'^2_i r^2] q_i$$

و ماتریس چارقطبی کاهش‌یافته عناصری به شکل زیر دارد

$$Q'_{ij} = \sum_{m=1}^N \left(x'_{im} x'_{jm} - \frac{1}{3} \delta_{ij} r'^2_m \right) q_m \quad (2-79)$$

که جمع روی تعداد بارهاست و q_m اندازه بار m ام و x_{im} نامین مختصه بار m ام است:

۱. مجموعه بارهای نشان داده شده در شکل ۲-۲۷(الف) گشتاورهای تک‌قطبی و دوقطبی برابر صفر دارند. با استفاده از معادله (۲-۷۹) ماتریس کاهش‌یافته چارقطبی را به‌سادگی محاسبه می‌کنیم

$$Q'_{xy} = Q'_{xz} = Q'_{yz} = 0$$

$$Q'_{yy} = Q'_{xx} = q \left(-\frac{1}{3} a^2 \right) + 0 + q \left(-\frac{1}{3} a^2 \right) = -\frac{2}{3} q a^2$$

$$Q'_{zz} = 2q \left[a^2 - \frac{1}{3} a^2 \right] = \frac{4}{3} q a^2$$

توجه کنید که $Q'_{xx} + Q'_{yy} + Q'_{zz} = 0$. بنابراین پتانسیل $\Phi^{(2)}$ برای $r > a$ می‌شود

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[3x^2 \left(-\frac{2}{3} q a^2 \right) + 3y^2 \left(-\frac{2}{3} q a^2 \right) + 3z^2 \left(\frac{4}{3} q a^2 \right) \right]$$

$$= \frac{q a^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3z^2 - r^2] = \frac{q a^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3 \cos^2 \theta - 1]$$

این ردیف بارها را که یک "چارقطبی خطی" می‌نامیم حول محور z تقارن چرخشی دارد و "گشتاور چارقطبی" آن $Q'_{zz} = 4q a^2 / 3$ است.

می‌توان عبارت معادل را به صورت زیر نوشت (این موضوع را نشان دهید)

$$3x^2 \int \left(x'^2 - \frac{1}{3} r'^2 \right) dq + 3y^2 \int \left(y'^2 - \frac{r'^2}{3} \right) dq + 3z^2 \int \left(z'^2 - \frac{r'^2}{3} \right) dq$$

وقتی که ماتریس چارقطبی را برحسب این انتگرالها (که با Q'_{xx} , Q'_{yy} , Q'_{zz} نشان داده می‌شود) نشان دهیم گفته می‌شود که ماتریس "کاهش‌یافته" است، کلمه‌ای که به خاطر $Q'_{xx} + Q'_{yy} + Q'_{zz} = 0$ انتخاب شده است حال آنکه $Q'_{xx} + Q'_{yy} + Q'_{zz} = \int r'^2 dq$ به این ترتیب پتانسیل در (۲-۷۲) را همچنین می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_{i,j=1}^3 3x_i x_j Q'_{ij} \quad (2-75)$$

که ۱، ۲ و ۳ نشان‌دهنده x ، y و z است و

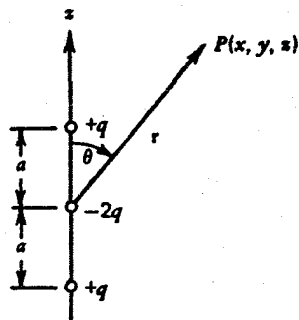
$$Q'_{ij} = \int \left(x'_i x'_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r'^2 \right) dq \quad (2-76)$$

با این همه هنوز می‌توان توصیف ماتریس را با انتخاب صحیح محورهای مختصات، بیشتر ساده کرد. یعنی اگر مختصات به‌طور مناسب انتخاب شوند، جمله‌های غیر قطری Q'_{xy} ، Q'_{xz} و Q'_{yz} می‌توانند صفر شوند. این وضعیت را می‌توان همواره با انتخاب محورهای مختصات به شکل عمود بر صفحات تقارن به‌وجود آورد. یک حالت خاص مهم حالتی است که تقارن چرخشی حول یک محور، که آن را z می‌نامیم، وجود داشته باشد. تقارن چرخشی به این معنی است که یک جهت خاص حول محور z نمی‌توان پیدا کرد که از جهات دیگر قابل تشخیص باشد. در این وضعیت $Q'_{xy} = Q'_{xz} = Q'_{yz} = 0$. همچنین $Q'_{xx} = Q'_{yy}$. زیرا تقارن چرخشی باعث غیرقابل تشخیص شدن محورهای x و y از یکدیگر می‌شود. برحسب ماتریس چارقطبی کاهش‌یافته ملاحظه می‌شود $Q'_{xx} + Q'_{yy} = -Q'_{zz}$ یعنی

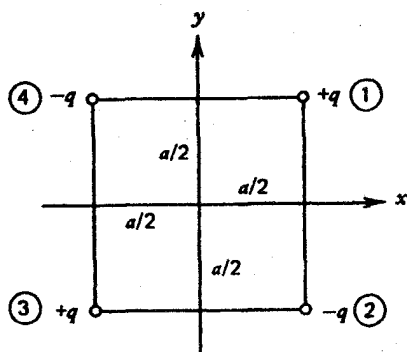
$$Q'_{xx} = Q'_{yy} = -\frac{1}{2} Q'_{zz} \quad (2-77)$$

به این ترتیب تمام عناصر غیر صفر ماتریس چارقطبی قابل بیان برحسب Q'_{zz} هستند، که گاهی آن را "گشتاور چارقطبی" توزیع می‌نامند:

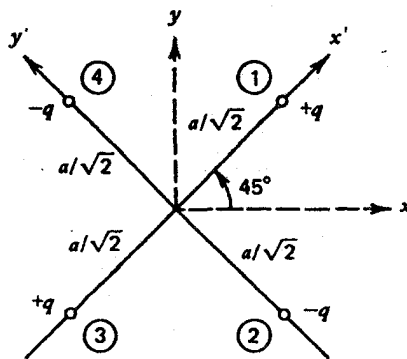
$$Q'_{zz} = \int \left(z'^2 - \frac{r'^2}{3} \right) dq = \frac{1}{3} \int r'^2 (3 \cos^2 \theta' - 1) dq \quad (2-78)$$



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۲۷-۲ توزیع بار چارقطبی. (الف) چارقطبی خطی، (ب) چارقطبی دوبعدی، (ج) همان، (ب) اما با محورهای چرخیده.

$$Q'_{xy} = Q'_{xz} = Q'_{yz} = 0$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} [3x'^2 \cdot qa^2 - 3y'^2 \cdot qa^2] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3qa^2}{r^3} [x'^2 - y'^2] \end{aligned}$$

عبارتهای پتانسیل شکلهای مختلفی دارند. با وجود این اگر تبدیلهای بین دستگاه مختصات مختلف انجام شوند، یا

$$x' \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \quad \text{و} \quad y' \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$$

آن‌گاه عبارت دوم $\Phi^{(2)}$ مثل عبارت اول خواهد شد.

۳. اشاره به این نکته جالب توجه است که توزیعهای چارقطبی خالصی که در شکل نشان داده شده‌اند، صرفاً یک زوج دوقطبی هستند که یکی از آنها که علامت بار آن عکس شده است، نسبت به دوقطبی دیگر جابه‌جا شده است. اگر $\delta^{(1)}$ جابه‌جایی یک دوقطبی نسبت به دیگری باشد [شکل ۲۸-۲ (الف) را ببینید] آن‌گاه از معادله (۲-۶۹)

۲. توزیع بار چارقطبی نقطه‌ای دیگری در شکل ۲۷-۲ (ب) نشان داده شده است. در این حالت نیز گشتاورهای تک‌قطبی و دوقطبی صفرند. عناصر ماتریسی چارقطبی کاهش یافته عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} Q'_{xx} &= \sum q_i \left(x_i^2 - \frac{1}{3}r_i^2 \right) = 0 \\ Q'_{yy} &= Q'_{zz} = 0 \\ Q_{xy} &= \sum q_i x_i y_i = qa^2 \\ Q_{xz} &= Q_{yz} = 0 \end{aligned}$$

یعنی فقط $Q_{xy} = Q_{yz}$ غیر صفرند. به این ترتیب پتانسیل $\Phi^{(2)}$ عبارت است از

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} [6xy Q_{xy}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3xy}{r^3} qa^2$$

اگر این ردیف بارها نسبت به مجموعه محورهای جدید، یعنی x' و y' مطابق شکل ۲۷-۲ (ج)، در نظر گرفته شوند، خواهیم داشت $Q'_{zz} = 0$ ، $Q'_{yy} = -qa^2$ ، $Q'_{xx} = 2q[(1/\sqrt{2})a^2] = qa^2$

بار سطحی با چگالی $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ است در نظر می‌گیریم. θ زاویه نسبت به محور z است. از معادله (۶۱-۲) پتانسیل خارج کره $r > R$ عبارت است از

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) + \Phi^{(1)}(\mathbf{r}) + \Phi^{(2)}(\mathbf{r}) + \dots$$

که

$$\Phi^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{s'} \sigma_0 \cos \theta' da'$$

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_{s'} \mathbf{r}' \sigma_0 \cos \theta' da'$$

$$\Phi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \int_{s'} \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} \right] \sigma_0 \cos \theta' da'$$

که θ' زاویه بین \mathbf{r}' و محور z و s' سطح لایه است. چون بار کل روی کره صفر است $\Phi^{(0)}(\mathbf{r}) = 0$.

برای محاسبه پتانسیل $\Phi^{(1)}$ می‌توان ابتدا \mathbf{r}' را برحسب θ' و ϕ' به صورت

$$\mathbf{r}' = (R \sin \theta' \cos \phi') \hat{x} + (R \sin \theta' \sin \phi') \hat{y} + (R \cos \theta') \hat{z}$$

نوشت.

به این ترتیب انتگرال در $\Phi^{(1)}$ می‌شود

$$\begin{aligned} \sigma_0 \int \mathbf{r}' \cos \theta' da' &= R^2 \sigma_0 \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \\ &[(\sin^2 \theta' \cos \theta' \cos \phi') \hat{x} \\ &+ (\sin^2 \theta' \cos \theta' \sin \phi') \hat{y} \\ &+ \cos^2 \theta' \sin \theta' \hat{z}] d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

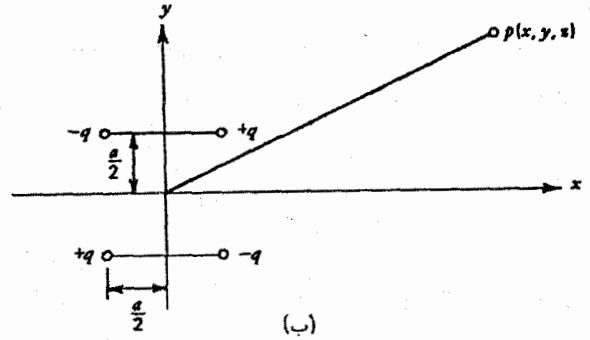
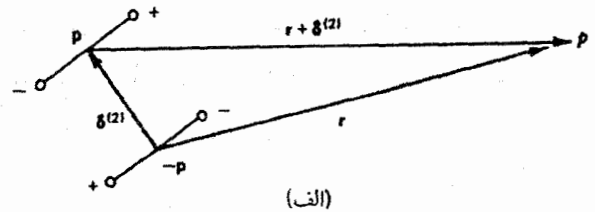
دو جمله اول انتگرال صفر می‌شود زیرا

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = 0$$

و جمله آخر می‌شود $\mathbf{p} = (4\pi/3) \sigma_0 R^2 \hat{z}$ بنابراین

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

پتانسیل $\Phi^{(1)}(\mathbf{r})$ اولین جمله غیرصفر بسط است؛ این یک پتانسیل دوقطبی با گشتاور دوقطبی \mathbf{p} در راستای محور z است که اندازه آن مساوی حاصلضرب σ_0 در حجم احاطه شده به وسیله پوسته است. این پتانسیل با محاسبات مستقیم گشتاور دوقطبی پوسته [معادله (۷۱-۲)] را ببینید سازگار است.



شکل ۲۸-۲ تعیین میدانهای چارقطبی به صورت یک دیفرانسیل یک میدان دوقطبی. (الف) توزیع چارقطبی کلی. (ب) چارقطبی دوبعدی با چهار بار.

$$\Phi^{(2)} = \Phi^{(1)}(\mathbf{r}) - \Phi^{(1)}(\mathbf{r} + \delta^{(2)}) = (-\delta^{(2)} \cdot \nabla) \Phi^{(1)}(\mathbf{r}) \quad (۸۰-۲)$$

این نتیجه مشابه به دست آوردن میدان دوقطبی از میدان یک تک قطبی ساده است [معادله (۶۸-۲)] را ببینید. برای چارقطبی شکل ۲۸-۲ (ب) داریم

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) &\equiv \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \delta^{(1)} &= \delta^{(1)} \hat{x} = a \hat{x} & \delta^{(2)} &= \delta^{(2)} \hat{y} = a \hat{y} \end{aligned}$$

با قراردادن این عبارتها در معادله (۸۰-۲) به دست می‌آوریم

$$\Phi^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial y} \Phi^{(1)}(\mathbf{r}) = -a \frac{\partial}{\partial y} \left[-a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \right]$$

یا

$$\Phi^{(2)} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\} = \frac{a^2 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2xy}{r^5}$$

■ که درست همان چیزی است که قبلاً به دست آوردیم.

مثال ۱۷-۲ پتانسیل توسط بسط چندقطبی

در این مثال پتانسیل یک توزیع بار زاویه‌ای را با استفاده از بسط چندقطبی حساب می‌کنیم. یک لایه کروی به شعاع R را که دارای

استفاده کرد. این کار در حقیقت معادل است با تقریب زنی خود توزیع بار با ترکیب یک بار نقطه‌ای، یک دوقطبی نقطه‌ای، یک چارقطبی نقطه‌ای و غیره، (مطابق شکل ۲-۲۹). به این ترتیب استفاده از چنین تقریبی فراتر از تنها میدان الکتریکی یا پتانسیل توزیع بار است.

۹-۲ خلاصه

الکتروستاتیک موضوعی است که به بارهای ساکن مربوط می‌شود. قانون کولن، نیروی الکتروستاتیکی بین یک بار نقطه‌ای q_0 واقع در مبدأ و بار نقطه‌ای q واقع در \mathbf{r} را بیان می‌کند یعنی

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

که $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ در دستگاه یکای MKS است. نوشتن $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ میدان الکتروستاتیک \mathbf{E} وابسته به بار q_0 را تعریف می‌کند

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

قانون کولن و میدان الکتریکی را می‌توان به تعداد زیادی بار نقطه‌ای یا توزیع بارهای پیوسته، که ممکن است در داخل حجمها یا روی سطوح و یا در امتداد یک خط قرار گرفته باشند، تعمیم داد. جزء بار dq در هر یک از موارد با روابط

$$dq = \rho dv, \sigma da, \quad \text{یا} \quad \lambda dl$$

داده می‌شود که ρ ، σ و λ به ترتیب چگالی بارهای حجمی، سطحی و خطی‌اند. برای یک بار نقطه‌ای q_i واقع در محل \mathbf{r}_i

$$\rho(\mathbf{r}) = q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

که δ تابع دلتای دیراک است. چون نیروها به شکل برداری با هم جمع می‌شوند داریم

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad [15-2]$$

این میدان الکتروستاتیکی را اصطلاحاً پایستار می‌نامیم. به بیان دیگر

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad [37-2]$$

از طرف دیگر واگرایی آن به شکل خطی به چگالی بار وابسته است

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad [33-2]$$

با استفاده از فرایندی مشابه می‌توان نشان داد که $\Phi^{(2)}(\mathbf{r})$ به علاوه تمام چندقطبیهای مرتبه بالاتر صفرند، که نشان می‌دهد میدان این توزیع بار یک میدان دوقطبی است، یعنی

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad r > R \quad (81-2)$$

در داخل کره، یعنی برای $r < R$ ، معادله (۶۲-۲) را به کار می‌بریم. به این ترتیب

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) + \Phi^{(1)}(\mathbf{r}) + \Phi^{(2)}(\mathbf{r}) + \dots$$

که

$$\Phi^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{s'} \frac{\sigma_0 \cos \theta'}{r'} da'$$

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{r} \cdot \int_{s'} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \sigma_0 \cos \theta' da'$$

$$\Phi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_{s'} \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r'^5} - \frac{r'^2}{r'^3} \right] \sigma_0 \cos \theta' da'$$

با قراردادن R به جای بزرگی \mathbf{r}' و انتقال آن به خارج انتگرال نتیجه می‌گیریم

$$\Phi^{(0)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int \sigma_0 \cos \theta' da' = 0$$

زیرا انتگرال درست مساوی بار کل کره است. با انجام همین روش در عبارت $\Phi^{(1)}$ داریم

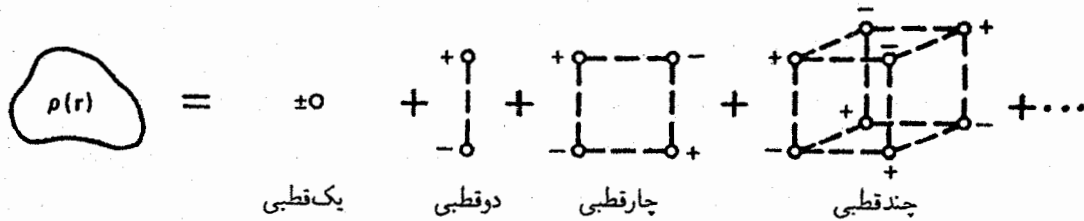
$$\Phi^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{R^2} \cdot \int \mathbf{r}' \sigma_0 \cos \theta' da' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^2} \cdot \mathbf{r}$$

که \mathbf{p} گشتاور دوقطبی تعریف شده قبلی است. دوباره، مثل نواحی خارجی کره، $\Phi^{(2)}$ و جمله‌های مرتبه بالاتر صفرند. بنابراین

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^2} \cdot \mathbf{r} = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} z \quad r < R \quad (82-2)$$

روشن است که پتانسیل در داخل پوسته فقط به z بستگی دارد و از اندازه پوسته، برخلاف پتانسیل در خارج پوسته، مستقل است. میدان الکتریکی متناظر $\hat{\mathbf{z}}(\sigma_0/3\epsilon_0)$ است که یکنواخت و در جهت منفی محور z قرار دارد. ■

بحث قبل مشخص می‌کند که برای محاسبه تقریبی میدان یا پتانسیل یک توزیع بار دلخواه می‌توان از چندقطبیهای الکتریکی



شکل ۲۹-۲ نمایش طرحوار یک توزیع بار برحسب چندقطبیهای مختلف.

$$Q = \int \rho(r') dr' \quad \mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(r') dr'$$

$$Q'_{ij} = \int (x'_i x'_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r'^2) dq$$

[۶۳-۲]-[۷۶-۲]

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \frac{1}{2r^3} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j Q'_{ij} \right)$$

که ۱، ۲، و ۳ به ترتیب، x ، y ، و z را مشخص می‌کنند. استفاده از چنین تقریبی در واقع فراتر از فقط میدان الکتریکی و پتانسیل توزیع بار است.

وقتی یک بار نقطه‌ای در یک پتانسیل الکتروستاتیک Φ که میدان الکتریکی نظیر آن \mathbf{E} است، قرار گیرد به بار نیروی $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ وارد می‌شود و انرژی پتانسیل بار، U ، برابر است با

$$U = q\Phi$$

اگر یک دوقطبی \mathbf{p} در چنین میدانی قرار گیرد، انرژی و نیرو عبارت‌اند از

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} \quad U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad [۶۴-۲], [۶۵-۲]$$

در این حال به دوقطبی گشتاوری به صورت زیر وارد می‌شود

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad [۶۷-۲]$$

مسائل

۱-۲ چهار بار نقطه‌ای $q = 2 \times 10^{-5} \text{C}$ هر یک در یک رأس مربعی به ضلع ۴ متر قرار دارند. نیروی وارد بر بار $q_0 = 10^{-2} \text{C}$ را که درست در سه متر بالای مرکز مربع قرار گرفته پیدا کنید.

۲-۲ یک میله نیم‌دایره شکل باردار یکنواخت با بار کلی q مفروض است، میدان الکتریکی در مرکز آن را به دست آورید.

اغلب این عبارت را شکل دیفرانسیلی قانون گاوس می‌نامیم و یکی از چهار معادله اساسی الکترومغناطیس، که امروزه آنها را معادلات ماکسول می‌نامند، است. این معادله حتی در مورد میدانهای وابسته به زمان نیز صحیح است. با وجود این معادله تاو فقط برای میدان الکتروستاتیک صحیح است، و موقعی که منبعهای وابسته به زمان بررسی می‌شوند بایستی اصلاح شود.

شکل انتگرالی قانون گاوس را می‌توان با انتگرال‌گیری از دو طرف شکل دیفرانسیلی آن روی حجم دلخواه V مقید به سطح S و نیز با اعمال قضیه واگرایی بر طرف چپ معادله به دست آورد. یعنی

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{1}{\epsilon_0} \int \sigma dv = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad [۲۷-۲]$$

که Q کل بار محصور در سطح S است. در حالت تقارن که اندازه میدان روی تمام اجزای سطح مساوی است و نسبت به سطح جهت ثابتی دارد، قانون گاوس محاسبه میدان الکتریکی روی سطح را ساده می‌کند. با توجه به استنباط قوی قانون گاوس و اینکه میدان الکتریکی در داخل رسانا صفر است بار روی رسانا باید در سطح خارجی آن قرار گیرد و میدان بلافاصله در خارج سطح $\mathbf{E} = (\sigma/\epsilon_0) \hat{\mathbf{n}}$ باشد. همچنین این قانون نشان می‌دهد که میدانها بلافاصله پایین و بلافاصله بالای یک توزیع بار سطحی، \mathbf{E}_1 و \mathbf{E}_2 ناپیوسته‌اند و ناپیوستگی برابر است با

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad [۳۵-۲]$$

توزیع بار را در فواصل دور از آن (در مقایسه با بزرگترین بعد توزیع بار)، می‌توان به صورت تقریبی ترکیبی از یک بار نقطه‌ای، Q ، یک دوقطبی الکتریکی نقطه‌ای، \mathbf{p} ، یک چارقطبی نقطه‌ای Q_{ij} و غیره دانست که

دایره‌ای به شعاع 2 m و بار سطحی $\rho C/m^2 = (\sin^2 \phi)$ (ج).
 یک قرص باردار به شعاع 2 m و $\sigma = \sin \phi C/m^2$ (د) دو بار
 نقطه‌ای $q_1 = 20 \times 10^{-7} C$ و $q_2 = -20 \times 10^{-7} C$.

۱۴-۲ چگالی شار الکتریکی در فاصله 5 متر از بار نقطه‌ای
 $q = 3 \times 10^{-8} C$ را به دست آورید.

۱۵-۲ چگالیهای باری که میدانهای زیر را به وجود می‌آورند پیدا کنید.

$$\mathbf{E} = 10 \sin \theta \hat{\mathbf{r}} + 2 \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{r} \left(\rho - \frac{a^2}{r} \right) \hat{\boldsymbol{\rho}} \quad (\text{ب}) \quad \text{به‌ازای } a \leq \rho \leq b$$

$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\rho} (b^2 - a^2) \hat{\boldsymbol{\rho}}$ به‌ازای $\rho > b$ ، α ، a و b همه ثابت
 هستند.

۱۶-۲ یک حلقه نازک به قطرهای داخلی ρ_0 و خارجی $\rho_0 + W$ ،
 چگالی بار سطحی σ دارد. پتانسیل در مرکز حلقه را به دست آورید.
 آیا پتانسیل به ρ_0 وابسته است؟

۱۷-۲ باری در طول یک خط راست به طول $2l$ به‌طور یکنواخت
 توزیع شده است (الف) پتانسیل را در فاصله r_1 درست بالای وسط
 خط پیدا کنید. (ب) پتانسیل به‌ازای $r_1 \gg l$ چقدر است. (ج) اختلاف
 پتانسیل بین دو نقطه درست بالای نقطه وسط و به فواصل r_1 و r_2
 را که $r_1 > r_2 \gg l$ به دست آورید. این مقدار را با پتانسیل یک بار
 خطی نامتناهی مقایسه کنید.

۱۸-۲ (الف) میدان \mathbf{E} نظیر پتانسیل $\Phi = a \cos \theta / r^2 + b/r$ را
 تعیین کنید (ب) توزیع بار به‌وجودآورنده این پتانسیل چیست؟ (ج)
 توزیع بار به‌وجودآورنده پتانسیل $\Phi(\mathbf{r}) = -qe^{-\alpha r}/r$ را، که q و α
 ثابت‌اند، به دست آورید.

۱۹-۲ این مسئله برای نمایش قدرت برهم‌نهی که در محاسبه میدانهای
 الکتریکی و پتانسیلها استفاده می‌شود مطرح شده است. یک حفره
 کروی به شعاع a در یک کره به شعاع R ایجاد شده است چگالی
 بار کره یکنواخت و ρ_0 است. فاصله بین مراکز کره اصلی و حفره
 $d\hat{\mathbf{z}}$ است. (الف) میدان الکتریکی در فاصله $r < R$ از مرکز کره را
 با فرض نبودن حفره تعیین کنید. (ب) با فرض پر بودن حفره از بار
 به چگالی یکنواخت ρ'_0 و خالی بودن بقیه کره میدان الکتریکی در
 فاصله $r' < a$ از مرکز حفره را به دست آورید. (ج) میدان الکتریکی
 واقعی را در داخل حفره تعیین و خطوط نیروی آن را رسم کنید. (د)
 پتانسیل واقعی در نقطه‌ای در داخل حفره را نسبت به پتانسیل در
 مبدأ حفره به دست آورید.

۳-۲ یک خط باردار در راستای محور z با چگالی خطی $\lambda = \lambda_0$
 برای $|z| > 5$ و $\lambda = 0$ برای $|z| < 5$ در دست است. میدان \mathbf{E} را
 روی محور x به فاصله 2 متر از مبدأ پیدا کنید.

۴-۲ یک بار خطی در راستای z با چگالی خطی $\lambda = \lambda_0$ برای
 $|z| < d$ و $\lambda = 0$ برای $|z| > d$ را در نظر بگیرید. میدان \mathbf{E} در
 صفحه xy و به فاصله R از محور z را به دست آورید.

۵-۲ با انتگرالگیری مستقیم، میدان \mathbf{E} روی محور یک قرص باردار
 یکنواخت به شعاع a و چگالی سطحی σ را به دست آورید.

۶-۲ قرص دایره‌ای به شعاع a در صفحه $z = 0$ که مرکز آن بر مبدأ
 واقع است را در نظر بگیرید. چگالی سطحی بار را $\sigma = \sigma_0 / \rho$
 فرض کنید. میدان الکتریکی را روی محور z و به فاصله $z = h$
 از مبدأ به دست آورید. در مورد ماهیت میدان وقتی $h \gg a$ است
 بحث کنید.

۷-۲ یک ورقه باردار در صفحه $z = 0$ دارای ابعاد $2 \leq x \leq 0$ و
 $0 \leq y \leq 2$ و چگالی بار سطحی $\sigma = 2x(x^2 + y^2 + 4)^{3/2} C/m^2$
 است، میدان الکتریکی را روی محور z به فاصله 2 متر از ورقه
 به دست آورید.

۸-۲ یک قرص دایره‌ای به شعاع a دارای چگالی بار غیر یکنواخت
 $\sigma = \sigma_0 \sin^2 \phi$ است. میدان \mathbf{E} را روی محور آن و به فاصله $z = h$
 از قرص به دست آورید.

۹-۲ دو ورقه باردار یکنواخت با ابعاد بینهایت را موازی با صفحه yz
 و با چگالیهای بار σ و σ' در نظر بگیرید که به ترتیب در مکانهای
 $x = 1$ و $x = -1$ قرار دارند. میدان \mathbf{E} را در تمام نواحی برای
 $\sigma = \sigma'$ و نیز $-\sigma = \sigma'$ به دست آورید.

۱۰-۲ یک ورقه با چگالی بار یکنواخت $\sigma = -10^{-7} C/m^2$ در
 مکان $y = 2\text{ m}$ قرار دارد. یک خط باردار یکنواخت با چگالی
 خطی $\lambda = 4\mu C/m$ و به موازات محور x در نقاط $y = -1\text{ m}$
 و $z = 2\text{ m}$ قرار دارد. در چه مکانی میدان \mathbf{E} صفر است.

۱۱-۲ میدان \mathbf{E} به‌وجود آمده از یک استوانه بسیار بلند باردار با چگالی
 حجمی $\rho = 5\pi e^{-2r} C/m^3$ ، که r فاصله از محور استوانه است،
 را به کمک قانون گاوس به دست آورید.

۱۲-۲ قانون گاوس را برای محاسبه میدان \mathbf{E} یک کره باردار به چگالی
 $\rho = \alpha/r^2$ که در آن α ثابت است به‌کار ببرید.

۱۳-۲ شار خالص عبوری از سطح بسته S را توسط توزیع بارهای
 داخل آن به دست آورید. (الف) سه بار نقطه‌ای $q_1 = 3 \times 10^{-8} C$ ،
 $q_2 = 1.5 \times 10^{-7} C$ و $q_3 = -7 \times 10^{-8} C$. (ب) یک قرص

۲۴-۲ یک دوقطبی الکتریکی $p = p_0 \hat{x}$ در مبدأ واقع در پتانسیل خارجی $\Phi = (\alpha_1/2)x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$ را در نظر بگیرید. (الف) انرژی لازم برای قراردادن دوقطبی در این پتانسیل چقدر است. (ب) نیروی وارد بر دوقطبی را به دست آورید. (ج) گشتاور وارد بر دوقطبی (مثال ۳-۱ را ببینید) را حساب کنید، α_1 و α_2 و α_3 ثابت هستند. ۲۵-۲ نیرو و گشتاور وارد بر یک دوقطبی الکتریکی که گشتاور دوقطبی آن p ناشی از یک بار نقطه‌ای است را تعیین کنید.

۲۶-۲ یک دوقطبی با گشتاور p_1 در مبدأ و یک دوقطبی با گشتاور p_2 در نقطه r واقع‌اند. نیروی بین دو دوقطبی را به دست آورید. در چه وضعیتی از دوقطبیها نیرو بیشتر است؟

۲۷-۲ دو بار q و $-q$ روی محور x و به ترتیب در فواصل d و $-d$ از مبدأ قرار دارند. یک دوقطبی با گشتاور p روی محور z و به فاصله l از مبدأ قرار دارد (الف) نیروی وارد بر دوقطبی را پیدا کنید. (ب) نشان دهید این نیرو با تعویض دو بار با یک دوقطبی با گشتاور دوقطبی $2qd(1 - d^2/l^2)^{-5/2}$ واقع در مبدأ و در راستای x به دست می‌آید. ۲۸-۲ پتانسیل یک کره نازک به شعاع R و چگالی بار سطحی یکنواخت σ را در نزدیکی کره با به کار بردن بسط چندقطبیه، معادله (۶۲-۲)، به دست آورید.

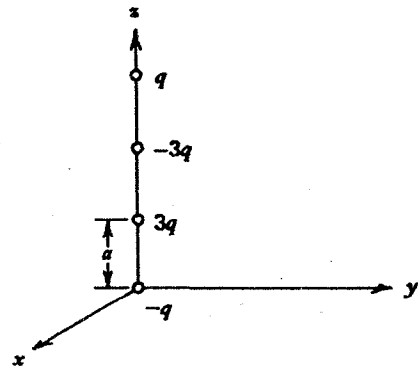
۲۹-۲ سه جمله اول گشتاورهای چندقطبی توزیع بارهای زیر را به دست آورید. (الف) یک خط باردار واقع در $z = z_0$ تا $z = -z_0$ با بار کل q . (ب) یک حلقه باردار یکنواخت (مثال ۱۵-۲) با یک بار اضافی $q = -2\pi R\lambda$ واقع در مرکز آن.

۳۰-۲ با استفاده از معادله (۶۹-۲) و میدان دوقطبی، پتانسیل چارقطبی شکل ۲۷-۲ (الف) را به دست آورید.

۳۰-۲ پتانسیل دوبار مساوی و غیرهمنام را که در $y = \pm l/2$ قرار دارند برای $r \ll l$ (نقطه مشاهده است) در مختصات کروی حساب کنید. ۳۱-۲ نشان دهید پتانسیل نقاط دور از یک δ قطبی خطی مطابق شکل ۳۰-۲ برابر است با

$$\frac{6qa^2 P_2(\cos \theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

که $P_2 = (\delta \cos^2 \theta - 3 \cos \theta)/2$.



شکل ۳۰-۲ δ قطبی خطی.

۳۲-۲ دو حلقه باردار یکنواخت نازک هم صفحه و هم محور به شعاعهای a و b ($a > b$) و بارهای q و $-q$ را در نظر بگیرید. پتانسیل در فواصل دور از حلقه را به دست آورید. این پتانسیل را با پتانسیل یک چارقطبی خطی [شکل ۲۷-۲ (الف)] مقایسه کنید. ۳۳-۲ یک نیمکره با چگالی بار سطحی یکنواخت σ مفروض است. گشتاور دوقطبی این توزیع بار را نسبت به مرکز نیمکره به دست آورید.

مسائل مرزی الکتروستاتیک

۱-۳ معادلات پواسون و لاپلاس

غالباً با حالت‌هایی روبه‌رو می‌شویم که توزیع‌های بار را از قبل نمی‌دانیم، و در نتیجه نمی‌توانیم مستقیماً \mathbf{E} یا Φ را تعیین کنیم. مثال مهمی از این نوع وقتی است که یک مجموعه رسانا داریم که پتانسیل‌های نسبی آنها معلوم است، اما چگالی‌های بار بر روی سطوح رسانا مشخص نیست. در این حالت، همان‌طور که بعداً خواهیم دید، یک جواب وجود دارد که چگالی‌های بار و میدان‌های الکتریکی خوش‌رفتاری را تولید می‌کند. با توجه به فرمول‌های صریح \mathbf{E} و Φ باید توزیع‌های بار بر روی سطوح رسانا را بدانیم. اما از سوی دیگر بدون اطلاع از میدان‌های الکتریکی در سطوح رسانا (که در آنجا $\sigma = \epsilon_0 \mathbf{E}$) نمی‌توان کمیت‌های مزبور را به‌دست آورد. با این حال، می‌توان این مسئله را حل کرد. آنچه ما را به حل مشکل رهنمون می‌کند این است که اساساً به‌طور همزمان از دو معیار برای حل دو مسئله استفاده کنیم مثلاً در دو معادلهٔ جبری خطی که هر یک دو مجهول داشته باشد ممکن است که هیچ‌یک را نتوان به تنهایی برای هر دو مجهول حل کرد، اما ترکیب آن دو قابل حل است. در مورد الکتروستاتیک دو رابطه‌ای را که می‌توان به‌طور همزمان حل کرد عبارت‌اند از

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1-3)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad (2-3)$$

با ترکیب این دو معادله می‌توان آنها را به‌صورت یک معادله درآورد، یعنی

$$\nabla \cdot (-\nabla\Phi) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

که معمولاً به‌صورت

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3-3)$$

نوشته می‌شود. معادلهٔ اخیر که معادلهٔ پواسون نام دارد، معادلات الکتروستاتیک را خلاصه می‌کند، و مشتقات جزئی تابع پتانسیل در یک نقطه را به چگالی بار در آن نقطه ارتباط می‌دهد. نماد ∇^2 ("مجذور دل")، موسوم به عملگر لاپلاسی، یک عملگر نرده‌ای خطی است [معادلات (۱-۶۲) تا (۱-۶۴) را ببینید]. برحسب مختصات دکارتی داریم

$$\nabla^2\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \quad [1-62]$$

$\nabla^2\Phi$ را در سایر مختصات، مانند مختصات کروی یا استوانه‌ای، نیز می‌توان با استفاده از عبارتهای گرادینان و دیورژانس در آن مختصات بیان کرد. این عبارتها به‌ترتیب در معادلات (۱-۶۳) و (۱-۶۴) داده شده‌اند. اگر در یک ناحیه از فضا $\rho = 0$ باشد، در این صورت معادلهٔ پواسون در آن ناحیه عبارت است از

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (4-3)$$

این معادله به معادلهٔ لاپلاس معروف است. مطالعهٔ ویژگیها و جوابهای این معادلات با مشتقات جزئی، جایگاه مهمی در ریاضی فیزیک

منحصر به فرد برای میدان الکتروستاتیکی در این فضا وجود خواهد داشت. فرض می‌کنیم که در واقع یک جواب ریاضی برای معادله (۳-۴) وجود دارد. این نکته، بدیهی نیست، اگرچه از نظر فیزیکی می‌دانیم که اگر یک مجموعه رسانا داشته باشیم که روی هر یک، یک بار یا پتانسیل دلخواه باشد، در آن صورت یک جواب میدان الکتروستاتیکی در فضا وجود خواهد داشت.

فرض می‌کنیم، (۱) ناحیه مورد نظر، V ، فضای عاری از باری است که در آن $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla^2 \Phi = 0$. (۲) مرزهای V کاملاً توسط سطوح گوناگون (مانند سطوح رساناها)، که کلاً آنها را S می‌نامیم، مشخص می‌شوند. یکی از مرزها می‌تواند سطح یک کره در "بینهایت" باشد، که در آنجا بنا به تعریف، پتانسیلها به صورت $1/r$ و میدان به صورت $1/r^2$ تغییر می‌کنند. سه شرط برای منحصر به فرد بودن در نظر می‌گیریم:

۱. مرزهای پتانسیل. تمام سطوح مرزی را سطوحی در نظر می‌گیریم که پتانسیل Φ به صورت منحصر به فرد بر روی آنها مشخص است. در آن صورت پتانسیل در ناحیه بین سطوح نیز به طور منحصر به فرد مشخص می‌شود.

اثبات:

(۱) فرض کنید که برای معادله $\nabla^2 \Phi = 0$ دو جواب Φ_1 و Φ_2 وجود دارد، که شرایط مرزی یکسانی دارند. نشان خواهیم داد که این دو جواب یکی هستند.

(۲) تابع $\Phi_2 - \Phi_1 = \Phi_0$ را در نظر بگیرید. این تابع یک جواب معادله لاپلاس در این ناحیه است زیرا

$$\nabla^2 \Phi_0 = \nabla^2 (\Phi_2 - \Phi_1) = \nabla^2 \Phi_2 - \nabla^2 \Phi_1 = 0$$

علاوه بر این، پتانسیل Φ_0 بر روی تمام سطوح مرزی صفر است، زیرا بنا به فرض Φ_1 و Φ_2 در آن نواحی دارای مقادیر یکسانی هستند.

(۳) تابع برداری $[\Phi_0 \cdot \mathbf{E}_0]$ را در نظر بگیرید که در آن $\mathbf{E}_0 \equiv -\nabla \Phi_0$. در آن صورت بنابر قضیه دیورژانس

$$\int_V \nabla \cdot (\Phi_0 \cdot \mathbf{E}_0) dv = \oint_S (\mathbf{E}_0 \cdot \Phi_0) \cdot da$$

انتگرال سطحی در این معادله صفر می‌شود زیرا بر روی S ، $\Phi_0 \equiv 0$. اگر بخشی از سطح مرزی V در "بینهایت" باشد، $\oint_S (\mathbf{E}_0 \cdot \Phi_0) \cdot da \rightarrow 0$ زیرا یا انتگرال به صورت $\sim 1/R \cdot (\pi R^2) \sim 1/R$ تغییر می‌کند، یعنی، بار در فاصله‌ای بسیار دور از کل بار (بنابراین بار باید جایگزیده باشد)، یک "تک‌بار" نقطه‌ای به نظر می‌رسد.

دارد. در مورد رساناها ρ معمولاً در ناحیه بین رساناها صفر است، بنابراین در این نواحی، که شرایط مرزی صحیح را در سطوح رسانا خواهند داشت، به دنبال یک جواب برای معادله لاپلاس، $\nabla^2 \Phi = 0$ می‌گردیم. بعد از اینکه Φ به دست آمد، می‌توان $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ و پس از آن چگالیهای بار سطحی بر روی رسانا را به دست آورد.

این فرض که چگالی بار ρ در فضایی که به وسیله رساناها اشغال نشده است صفر است، کاربردی فراتر از تصور ما دارد. این فرض در صورتی درست است که فضا (مسلماً) فضای آزاد باشد یا به وسیله یک دی‌الکتریک ساده (که بعداً در مورد آن بحث می‌کنیم) اشغال شده باشد، و عاملی وجود نداشته باشد که پیوسته بار را به آن ناحیه تزیق کند. در مورد فضای آزاد، اگر احتمالاً از قبل باری در آنجا وجود داشته باشد، بر اثر میدانهای الکتریکی (ایستا) به خارج رانده خواهد شد، و نهایتاً وضعیتی خواهیم داشت که در آنجا بار فقط بر روی سطوح رسانای مرزی قرار خواهد گرفت. این واقعیت که در فضای آزاد و فقط تحت تأثیر میدانهای الکتروستاتیکی بار الکتریکی نمی‌تواند در تعادل پایدار باشد به قضیه ارنشا معروف است. در اثبات این قضیه کافی است توجه کنیم که اگر چنین نقطه‌ای در فضا وجود می‌داشت و یک بار الکتریکی در آن نقطه در تعادل پایدار می‌بود، با احاطه کردن آن نقطه می‌توانستیم یک سطح گاوس کوچک S پیدا کنیم که شار گذرنده از آن متناهی باشد. این برداشت از آنجا سرچشمه می‌گیرد که در همه جای سطح کره فرضی، \mathbf{E} باید رو به یا پشت به نقطه باشد تا در اطراف آن نیروهای بازگرداننده وجود داشته باشند. این امر مستلزم آن است که یک بار خالص در داخل کره وجود داشته باشد که فرض فضای آزاد را نقض کند. از این رو تعادل پایدار امکان‌پذیر نیست.

توجه به این موضوع جالب است که بحثهای پیرامون تعادل الکتروستاتیکی در فضای آزاد، شبیه اثبات لزوم صفر بودن چگالی بار ماکروسکوپی در درون یک رساناست. از نظر ماکروسکوپی تفاوت عمده بین فضای آزاد و داخل یک محیط رسانا این است که رسانا یک ذخیره بزرگ دسترس‌پذیر از بارهای بنیادی دارد که صرف خنثی کردن میدانهای الکتروستاتیکی موجود می‌شود. این پدیده با "باز آرایش" بار بر روی سطح آن رخ می‌دهد. چنین میدانی معمولاً در فضای آزاد، امکان وجود ندارد.

۲-۳ منحصر به فرد بودن جوابهای مسائل الکتروستاتیکی
 اکنون به مسائل دربرگیرنده رساناها در فضای آزاد توجه می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر شرایط مرزی معینی مشخص شوند، یک جواب

و بنابراین صفر می‌شود یا فرض می‌کنیم وقتی $R \rightarrow \infty$ ، Φ_1 و Φ_2 یکسان می‌شوند. به این ترتیب

$$\int_V \nabla \cdot (\Phi_0 \mathbf{E}_0) dv = 0$$

با استفاده از خاصیت $\nabla \cdot (\Phi_0 \mathbf{E}_0) = \nabla \Phi_0 \cdot \mathbf{E}_0 + \Phi_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_0$ در انتگرالده انتگرال حجمی، و توجه به اینکه در همه جای داخل V ، $\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = 0$ و اینکه $\mathbf{E}_0 = -\nabla \Phi_0$ داریم

$$-\int_V (\nabla \Phi_0)^2 dv = 0$$

(۴) برای آنکه این انتگرال حجمی در تمام نقاط داخل V صفر شود، انتگرالده خود باید مساوی با صفر باشد. از این رو

$$\mathbf{E}_0 = -\nabla \Phi_0 \equiv 0$$

یعنی $\Phi_0 = \text{const.}$ چون Φ_0 روی مرزهای V صفر و پیوسته است، نتیجه می‌گیریم که $\Phi_0 = 0$ یا $\Phi_0 \equiv \Phi_1$.

استدلال فیزیکی برای اعتبار این ویژگی منحصر به فرد بودن، آن است که اگر Φ_0 بر روی تمام مرزها صفر باشد، در آن صورت یا باید همه جای ناحیه حایل صفر باشد، یا اینکه در محلی در این ناحیه یک فرینه داشته باشد. اگر دارای یک فرینه باشد، در آن صورت شار خالص عبورکننده از یک سطح گاوسی احاطه‌کننده محل این فرینه که پایتتر یا بالاتر از یک "هم‌پتانسیل" واقع است، باید غیرصفر باشد. [اختلاف پتانسیل $d\Phi_0 = -\mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{r} \neq 0$] این نکته بر وجود بار در داخل سطح گاوسی دلالت دارد و فرض فضای عاری از بار را نقض می‌کند. بنابراین Φ_0 باید همه‌جا صفر باشد. دقت کنید که این اثبات در هیچ‌جا به این فرض وابسته نیست که سطح S رسانا باشد.

۴. مرزهای باردار. فرض کنید که سطوح مرزی یک ناحیه V همه رسانا باشند و هر رسانا دارای بار (کل سطح) کاملاً مشخص خود باشد. اگر V یک ناحیه باز باشد، فرض کنید پتانسیل در بینهایت به پتانسیل یک بار نقطه‌ای، مساوی با بار کل خالص سیستم، نزدیک می‌شود. در این صورت میدان الکتریکی در V به‌طور منحصر به فرد مشخص و پتانسیل تا حد یک مقدار ثابت اضافی تعیین می‌شود، و اگر پتانسیل در یک نقطه مشخص شود این مقدار ثابت به دست می‌آید (گاهی اوقات این نقطه را "زمین" یا "مشترک" می‌نامند و پتانسیل صفر را به آن نسبت می‌دهند).

اثبات:

(۱) بار دیگر فرض کنید که در ناحیه V ، دو جواب Φ_1 و Φ_2

با شرایط مرزی همسان (از جمله شرط در بینهایت، اگر لازم باشد) وجود دارند. در آن صورت $\Phi_0 \equiv \Phi_2 - \Phi_1$ نیز جواب مسئله‌ای است که در آن تمام رساناها دارای بار خالص صفر هستند. بدیهی است که اگر $\Phi_1 \neq \Phi_2$ باشد، چگالی‌های بار بر روی رساناها، حتی اگر بارهای کل مساوی باشند، تغییر خواهند کرد.

(۲) اکنون، دوباره مانند شرط ۱ در بالا، به دست می‌آوریم

$$\int_V \mathbf{E}_0^2 dv = \oint_S \Phi_0 \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{a}$$

\oint_S بار دیگر تمام سطوح مرزی، از جمله احتمالاً یک سطح "در بینهایت" را شامل می‌شود. اگر سطوح مرزی را رسانا در نظر بگیریم، به این نکته توجه داریم که Φ_0 در آنجا ثابت است، و بنابراین برای هر سطح رسانای S_i داریم

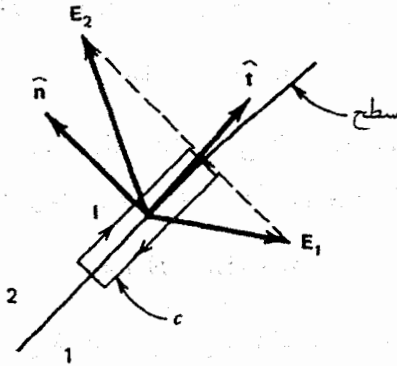
$$\int_{S_i} (\Phi_0 \mathbf{E}_0) \cdot d\mathbf{a} = \Phi_0 \int_{S_i} \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{a}$$

چون بار خالص بر روی هر رسانا صفر است، در آن صورت انتگرال سطحی صفر می‌شود. اگر سطح واقع در بینهایت را در نظر بگیریم، در آن صورت انتگرال سطحی در بینهایت نیز صفر می‌شود. زیرا Φ_1 و Φ_2 در آنجا به‌طور یکسان رفتار می‌کنند. به این ترتیب، مانند قبل، $\int_V \mathbf{E}_0^2 dv = 0$ که به معنی $\mathbf{E}_0 = 0$ و $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$ است.

۳. مرزهای مخلوط. امکان شرایط منحصر به فرد دیگری وجود دارد. مثلاً برای هر رسانا می‌توان یا پتانسیل یا بار کل (نه هر دو را با هم) را مشخص کرد. بار دیگر، ثابت می‌کنیم که میدانهای حاصل منحصر به فرد هستند. این موضوع را مانند روش بالا می‌توان ثابت کرد. اگر مؤلفه عمودی $\mathbf{E}_0 = -\nabla \Phi$ همه‌جا بر روی کرانه‌های V داده شود، منحصر به فرد بودن نیز نتیجه خواهد شد.

اگرچه منحصر به فرد بودن را برای حالت $\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \mathbf{E}_0 = 0$ (معادله لاپلاس) ثابت کردیم، استدلالهای مشابهی منحصر به فرد بودن جوابها را حتی به هنگام حضور یک چگالی بار بین مرزها نشان می‌دهد. به این ترتیب کاملاً آزادانه می‌توانیم تصور کنیم که همواره یک جواب منحصر به فرد وجود دارد، اگرچه باید دقت کرد که شرایط ضدنقیض یا ناقص بر مسئله اعمال نشود. منظور از "جواب" به‌سادگی، آن است که میدان یا پتانسیل الکتروستاتیکی را در ناحیه فضای مورد نظر به دست آورده‌ایم.

از ویژگی منحصر به فرد بودن مسائل الکتروستاتیکی در به‌دست‌آوردن جوابها بسیار استفاده می‌شود، زیرا در آن صورت با



شکل ۱-۳ استفاده از قضیه استوکس برای سطح مستطیلی شکل در فصل مشترک دو ناحیه برای تعیین شرایط بر روی مؤلفه E مماس بر فصل مشترک.

که در آن E_1 و E_2 ، وقتی به یک نقطه بر روی سطح نزدیک می‌شویم، مقادیر E به ترتیب در نواحی ۱ و ۲ هستند. این نتیجه مستقیماً از قانون انتگرالی گاوس به دست می‌آید. این قانون نشان می‌دهد که تنها اگر یک چگالی بار سطحی در سطح وجود داشته باشد، یک ناپوستگی در مؤلفه‌های عمودی E در سطح وجود خواهد داشت.

با استفاده از $\nabla \times E = 0$ می‌توان یک رابطه بین مؤلفه‌های مماسی E در عبور از یک مرز تعیین کرد. با انتگرال‌گیری از این معادله بر روی یک سطح باز S و با استفاده از قضیه استوکس،

$$\int_S \nabla \times E \cdot da = \oint_C E \cdot dr = 0$$

که در آن C یک مدار بسته دربرگیرنده S است. با توجه به معادله $\oint_C E \cdot dr = 0$ همواره مؤلفه مماسی E در راستای هر فصل مشترکی که دو ناحیه از فضا را از هم جدا می‌کند، پیوسته است. اثبات این امر شامل محاسبه مقدار این انتگرال (گردش E) حول مدار بسته مستطیلی شکل (شکل ۱-۳) دربرگیرنده سطح می‌شود. ضلع بزرگ مدار به طول l به حد کافی کوچک انتخاب شده است به طوری که $\int_C E \cdot dr = E \cdot l$ ، که در آن E مساوی با مقدار آن در مرکز l است. اضلاع کوچک مدار را می‌توان به اندازه کافی کوچک در نظر گرفت به طوری که تا وقتی E در راستای فصل مشترک متناهی است، از سهم این دو ضلع در انتگرال خطی می‌توان چشم پوشید. در آن صورت

$$\oint_C E \cdot dr \approx E_1 \cdot (-l) + E_2 \cdot l = 0 = E_1 \cdot (-\hat{t})l + E_2 \cdot (\hat{t})l$$

توجه بیشتری می‌توان از قدرت حدس و شهود استفاده کرد. اگر یک میدان با هر استدلالی به دست آید، و اگر میدان در معادلات الکتروستاتیکی و شرایط مرزی فیزیکی صدق کند، در این صورت آن میدان جواب واقعی مسئله الکتروستاتیکی است و نیازی به استدلال بیشتر نیست. (روش تصاویر در بخش ۵-۳ را ببینید.)

۳-۳ شرایط مرزی

غالباً می‌خواهیم یک مسئله الکتروستاتیکی را در یک حجم محدود از فضا، V ، حل کنیم. مثلاً در استفاده از معادلات الکتروستاتیکی دیفرانسیلی، می‌خواهیم نواحی‌ای که در آنجا بارهای نقطه‌ای، بارهای سطحی، یا خطی حضور دارند حذف شوند، به طوری که E همه‌جا در V یک تابع پیوسته باشد. خواهیم دید که امکان یافتن یک جواب در V وجود دارد به شرط آنکه از ویژگیهای مشخصی که باید در مرزهای V برای جواب به دست آیند، اطلاع داشته باشیم. به این ترتیب، مشخص کردن شرایط مرزی برای این موضوع اهمیت بسیار زیادی دارد. کافی است این شرایط مرزی را در سطوحی که دو ناحیه از فضا را از هم جدا می‌کنند، ارائه دهیم. فرض می‌کنیم بارهای نقطه‌ای و چگالیهای بار خطی و سطحی حضور دارند. ابتدا رفتار میدان الکتریکی را در نزدیکی یک بار نقطه‌ای منزوی در نظر بگیرید. وقتی بار نقطه‌ای نزدیک می‌شود، دامنه میدان الکتریکی به صورت اختیاری رشد می‌کند. بنابراین این مطلب همواره صحیح است که میدان الکتریکی روی سطح یک کره به مرکز بار نقطه‌ای وقتی شعاع کره به صفر نزول می‌کند، شبیه به بار نقطه‌ای تنهاست

$$E \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}}{r^3} \quad r \rightarrow 0 \quad \text{وقتی} \quad (5-3)$$

این شرط مرزی برای بارهای نقطه‌ای است.

به همین ترتیب اگر یک چگالی بار خطی منزوی به بزرگی λ وجود داشته باشد، میدان در یک فاصله شعاعی ρ از خط در معادله (۱۹-۲) صدق می‌کند؛ یعنی

$$E \rightarrow \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda\rho}{\rho} \quad \rho \rightarrow 0 \quad \text{وقتی} \quad [19-2]$$

اکنون هر سطحی را در نظر بگیرید که دو ناحیه ۱ و ۲ را از هم جدا می‌کند. سطح ممکن است چگالی بار سطحی σ داشته باشد. شرط مرزی بر روی مؤلفه عمودی E در آن سطح قبلاً به دست آمده است [معادله (۲۵-۲)]. این شرط بیان می‌کند

$$(E_2 - E_1) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad [25-2]$$

که در آن \hat{t} بردار یکه موازی با سطح است. در نتیجه

$$(\mathbf{E}_1 \cdot \hat{t}) = (\mathbf{E}_2 \cdot \hat{t}) \quad (۶-۳)$$

این معادله نشان می‌دهد که مؤلفه مماسی \mathbf{E} پیوسته است. به علاوه، معادله مزبور را می‌توان برحسب ضرب خارجی نیز نوشت

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

که در آن \hat{n} بردار یکه عمود بر فصل مشترک است. نهایتاً معادلات (۶-۳) و (۳۵-۲) را می‌توان به صورت یک رابطه برداری ترکیب کرد

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (۷-۳)$$

شرط مرزی روی تابع پتانسیل Φ صرفاً این است که Φ تحت هر شرط مرزی که میدان الکتریکی متناهی باقی می‌ماند پیوسته است. این یک نتیجه فوری از تعریف $\Delta\Phi$ به صورت کار لازم برای جابه‌جایی واحد بار نقطه‌ای بین دو نقطه است. اگر \mathbf{E} متناهی باشد آن‌گاه وقتی جابه‌جایی $\Delta\mathbf{r}$ به سمت صفر میل می‌کند، $\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{r} \rightarrow 0$ و در نتیجه $\Delta\Phi \rightarrow 0$

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad (۸-۳)$$

شرط مرزی در معادلات (۳۵-۲) و (۶-۳) — یا ترکیب آنها در معادله (۷-۳) — و معادله (۸-۳) شرایط مرزی لازم برای حل مسائل با مقدار مرزی الکتروستاتیکی در خلأ هستند. با این همه، باید توجه کنیم که سه شرط از یکدیگر مستقل نیستند. در واقع پیوستگی پتانسیل با پیوستگی مؤلفه‌های مماسی میدان الکتریکی هم‌ارز است. بار دیگر تأکید می‌کنیم برای آنکه پتانسیل پیوسته باشد، \mathbf{E} باید متناهی باشد. وقتی \mathbf{E} متناهی نیست، مانند عبور از یک لایه دوقطبی (که در فصل ۴ مورد بحث قرار خواهد گرفت)، پتانسیل پیوسته نخواهد بود (مثال ۱-۴ را ببینید).

۴-۳ مسائل دخیل در معادله لاپلاس

در این بخش و بخشهای بعدی مسائل الکتروستاتیکی را در نظر می‌گیریم که در آنها بار به سطوح رسانا محدود می‌شود یا در نقاط گسسته جایگزیده می‌شود (یا هر دو). در فضای بین رساناها و دور از بارهای نقطه‌ای، پتانسیل الکتروستاتیکی، در معادله لاپلاس $\nabla^2\Phi = 0$ صدق می‌کند. در این بخش، حل این معادله برای پیکربندیهای فیزیکی مختلف را مطالعه می‌کنیم.

۱-۴-۳ معادله لاپلاس در یک بعد

ابتدا چند نمونه ساده از جوابهای این معادله را مطالعه می‌کنیم. این جوابها در مسائل با تقارن هندسی بسیار بالا که در آنها پتانسیل Φ فقط تابعی از یک متغیر است، پدید می‌آید. در این موارد معادله لاپلاس به یک معادله دیفرانسیل معمولی با جوابهای بسیار ساده تبدیل می‌شود. یک شکل هندسی دکارتی را که در آن Φ فقط تابعی از z است در نظر بگیرید. در این صورت

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = 0 \quad (۹-۳)$$

با یک جواب

$$\Phi(z) = az + b \quad (۱۰-۳)$$

a و b ثابتهایی هستند که از شرایط مرزی به دست می‌آیند. در مورد شکل هندسی کروی که در آن پتانسیل فقط تابعی از r است، معادله زیر برآورده می‌شود

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0 \quad (۱۱-۳)$$

با ضرب این معادله در $r^2 \neq 0$ و با انتگرال‌گیری خواهیم داشت

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{a}{r^2}$$

که در آن a یک ثابت است. انتگرال‌گیری مجدد می‌دهد

$$\Phi = \frac{a}{r} + b \quad (۱۲-۳)$$

که در آن b یک ثابت دیگر است. ثابتهای a و b باید از شرایط مرزی به دست آیند.

وقتی پتانسیل تابعی از ρ و از ϕ و z مختصات استوانه‌ای مستقل باشد، در این صورت

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{d\Phi}{d\rho} \right] = 0 \quad (۱۳-۳)$$

با ضرب آن در $\rho \neq 0$ و انتگرال‌گیری خواهیم داشت

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \frac{a}{\rho}$$

که در آن a یک ثابت است. با انتگرال‌گیری مجدد به دست می‌آوریم

$$\Phi = a \ln \rho + b \quad \text{یا} \quad \Phi = a \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \quad (۱۴-۳)$$

شرایط مرزی صحیح فیزیکی بر روی مرز رسانا صدق کند. بنابراین شرط

$$\Phi(\rho = \rho_0) = 0$$

که قبلاً برآورده شده است، مورد نیاز است. به علاوه با ذکر این نکته که در سطح یک رسانا $E = \sigma/\epsilon_0$ ، در این صورت با توجه به

$$-\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

داریم

$$a = -\frac{\rho_0 \sigma}{\epsilon_0} \quad \text{یا} \quad -\frac{a}{\rho_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

از این رو جواب نهایی عبارت است از

$$\Phi = -\frac{\rho_0 \sigma}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \quad \rho > \rho_0$$

که در آن λ بار بر واحد طول میله است.

مثال ۲-۳ خازن کروی

دو پوسته کروی به شعاعهای R_1 و R_2 ($R_2 > R_1$) را در نظر بگیرید. پوسته‌های داخلی و خارجی به ترتیب در پتانسیلهای V_1 و V_2 نگه داشته شده‌اند. به دلیل شکل کروی از مختصات قطبی کروی، با در نظر گرفتن مبدأ در مرکز پوسته‌ها، استفاده می‌کنیم. به علاوه، چون پوسته‌ها هم‌مرکز هستند، پتانسیل بین آنها از زوایای θ و ϕ مستقل‌اند. از این رو پتانسیل با معادله (۱۲-۳) یعنی $\Phi = a/r + b$ داده می‌شود. شرط مرزی در $r = R_1$ می‌دهد $V_1 = a/R_1 + b$ و در $r = R_2$ می‌دهد $V_2 = a/R_2 + b$. اکنون می‌توان به‌طور همزمان این دو معادله را برای a و b و از این رو برای پتانسیل و میدان حل کرد

$$\Phi = -\left(\frac{V_2 - V_1}{R_2 - R_1}\right) \frac{R_2 R_1}{r} + \frac{R_2 V_2 - R_1 V_1}{R_2 - R_1}$$

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{V_2 - V_1}{R_2 - R_1}\right) \frac{R_2 R_1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

با استفاده از این عبارت، می‌توان بار q_1 را بر روی پوسته داخلی به صورت زیر حساب کرد

$$q_1 = \epsilon_0 \int \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}} \Big|_{R_1} da = -4\pi\epsilon_0 \left(\frac{V_2 - V_1}{R_2 - R_1}\right) R_1 R_2$$

و به این ترتیب \mathbf{E} برحسب کل بار به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

که در آن b یا ρ_0 یک ثابت دیگر است، که به همراه ثابت a از شرایط مرزی به دست می‌آید.

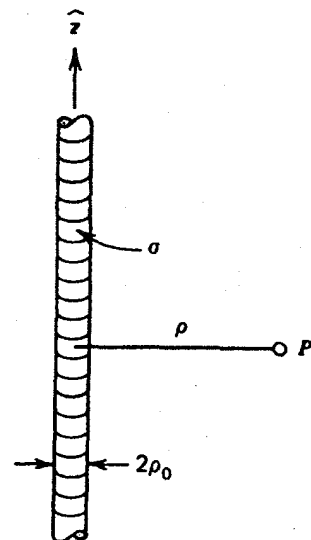
در مثالهای ۳-۳ و ۴-۳ مسائل دیگر که شامل متغیرهای مستقل دیگری مانند θ در مختصات کروی و ϕ در مختصات استوانه‌ای است مورد بحث قرار خواهند گرفت.

مثال ۱-۳ میله رسانای بلند که به صورت یکنواخت باردار شده است

در این مثال (شکل ۲-۳ را ببینید) رسانای بلند را تقریباً به صورت رسانایی که در دو جهت تا بینهایت گسترده است، در نظر می‌گیریم. رسانا بر روی سطح خود، یک چگالی بار سطحی σ دارد. می‌خواهیم پتانسیل را به فاصله ρ از محور میله پیدا کنیم. بدیهی است که این پتانسیل فقط باید به مختصه ρ بستگی داشته باشد. (میدان الکتروستاتیکی این توزیع بار فقط به ρ بستگی دارد و با استدلالهای تقارن جهت آن به سمت ρ است.)

بار تا بینهایت گسترش دارد و بنابراین انتظار می‌رود که Φ در ∞ صفر نباشد، یعنی $\Phi(\infty) \neq 0$. در نتیجه صفر پتانسیل را روی محور میله انتخاب می‌کنیم (محور تقارن). چون رسانا یک حجم هم‌پتانسیل است، تمام حجم میله پتانسیل صفر دارد.

در ناحیه خارج از رسانا، باید داشته باشیم $\nabla^2 \Phi = 0$. چون Φ و E فقط به مختصه استوانه‌ای ρ بستگی دارند، در این صورت Φ معادله (۱۳-۳) را، که جواب آن با $\Phi = a \ln(\rho/\rho_0)$ داده می‌شود، برآورده می‌سازد. به منظور تعیین ثابتها، جواب طوری نوشته می‌شود که



شکل ۲-۳ میله بلند که به صورت یکنواخت باردار شده است.

برای محاسبه میدان الکتریکی، شیب Φ را به دست می آوریم که می دهد

$$\mathbf{E} = -\frac{V}{\beta\rho}\hat{\phi}$$

که در آن $\hat{\phi}$ یک بردار یکه در جهت ϕ است.

مثال ۳-۴ خازن مخروطی هم محور

خازن شکل ۳-۴ متشکل از دو مخروط هم محور است که رأس آنها در مبدأ جای دارد و محور آنها در راستای z است. زاویه های رأس، θ_1 و θ_2 هستند ($\theta_2 > \theta_1$). مخروطها از یکدیگر عایق بندی شده اند و مخروط داخلی و خارجی به ترتیب در پتانسیلهای V و 0 نگه داشته شده اند. برای تعیین پتانسیل و میدان الکتریکی بین مخروطها با معادله لاپلاس در مختصات قطبی کروی شروع می کنیم. اگر مخروط را به حد کافی بزرگ در نظر بگیریم به طوری که از تأثیرات انتهایی بتوانیم چشمپوشی کنیم، حالتی به دست می آید که در آن پتانسیل مستقل از r و ϕ است

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta} \right) = 0 \quad (17-3)$$

با ضرب آن در $r^2 \sin \theta$ خواهیم داشت

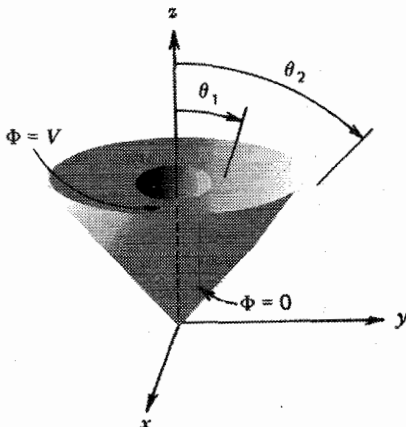
$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta} \right) = 0$$

که با انتگرال گیری به دست می آید

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{a}{\sin \theta}$$

که a یک ثابت است. با انتگرال گیری مجدد خواهیم داشت

$$\Phi = a \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) + b \quad (18-3)$$



شکل ۳-۴ خازن مخروطی هم محور.

بار روی پوسته خارجی را می توان با استفاده از این میدان و میدان در ناحیه $r > R_2$ (که با حل مسئله مقدار مرزی ناحیه خارجی به دست می آید)، تعیین کرد. (این کار را انجام دهید).

مثال ۳-۳ خازن گوه ای شکل

خازن نشان داده شده در شکل ۳-۳ را در نظر بگیرید. این خازن از دو ورقه بزرگ تشکیل شده است که شکل یک گوه با زاویه β را دارد. ورقه ها از یکدیگر عایق بندی شده اند و در پتانسیلهای 0 و V نگه داشته می شوند. این خازن را می توان به بهترین وجه با مختصات استوانه ای توصیف کرد. چون ورقه ها بزرگ هستند، پتانسیل مستقل از z و ρ است. در این حالت لاپلاسی ∇^2 به $d^2/d\phi^2$ ($1/\rho^2$) تبدیل می شود و پتانسیل Φ بین ورقه ها معادله زیر را برآورده می سازد

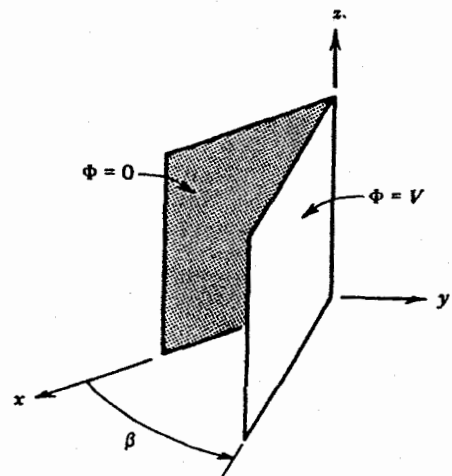
$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0 \quad (15-3)$$

عمومی ترین جواب برای Φ عبارت است از

$$\Phi = a\phi + b \quad (16-3)$$

که a و b ثابتهایی هستند که باید از شرایط مرزی به دست آیند. در $\phi = 0$ ، داریم $\Phi = 0$ و از این رو $b = 0$. در صفحه دوم ($\phi = \beta$)، داریم $\Phi = V$ ؛ و از این رو $a = V/\beta$. با جایگزینی برای a و b در معادله (۱۶-۳) خواهیم داشت

$$\Phi = \frac{V}{\beta}\phi$$



شکل ۳-۳ خازن گوه ای شکل.

جدول ۱-۳

$P_n(\cos \theta)$	n
۱	۰
$\cos \theta$	۱
$\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$	۲
$\frac{1}{4}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$	۳

r و θ بتوانند با هم مساوی باشند آن است که دو طرف مساوی با یک مقدار ثابت K ، که ثابت جداسازی نامیده می‌شود، باشند. به این ترتیب

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + KP = 0 \quad (22-3)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dY}{dr} \right) = KY \quad (23-3)$$

معادله (۲۲-۳)، معادله لژاندر نام دارد، این معادله به‌ازای تمام مقادیر θ از جمله 0° و π دارای جوابهای خوشرفتار است تنها به این شرط که $K = n(n+1)$ باشد که n یک عدد صحیح مثبت است. جوابهای مربوط به این معادله با شاخص n مشخص می‌شوند و به‌صورت $P_n(\theta)$ نوشته می‌شوند، و آنها را چندجمله‌ایهای لژاندر یا هماهنگهای منطقه‌ای می‌نامند. جدول ۱-۳ وابستگی صریح چند تا از این چندجمله‌ایها به θ را نشان می‌دهد. یک ویژگی مهم این چندجمله‌ایها آن است که بر یکدیگر عمودند، یعنی

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2\delta_{nm}}{2n+1} \quad (24-3)$$

که در آن $x = \cos \theta$. تابع دلتای کرونکر δ_{nm} به‌ازای $n \neq m$ مساوی با صفر و به‌ازای $n = m$ مساوی با واحد است.

چون K تعیین شده است، اکنون معادله $Y(r)$ را می‌توان به‌ازای مقادیر مختلف n حل کرد

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dY}{dr} \right) = n(n+1)Y \quad (25-3)$$

این معادله دو جواب مستقل خطی به‌ازای هر n مجاز دارد؛ این جوابها با n مشخص می‌شوند و با معادله زیر داده می‌شوند (می‌توانید آنها را با جایگذاری امتحان کنید)

$$Y_n = r^n \quad \text{و} \quad Y_n = r^{-(n+1)} \quad (26-3)$$

در این صورت کل معادله $\Phi_n(r, \theta) = P_n(\theta)Y_n(r)$ دارای دو جواب مستقل خطی به‌صورت زیر است

$$r^{-(n+1)}P_n(\theta) \quad \text{و} \quad \Phi_n(r, \theta) = r^n P_n(\theta) \quad (27-3)$$

که b ثابتی دیگر است. اکنون می‌توان ثابتها را حساب کرد. در $\Phi = V, \theta = \theta_1$ و در $\Phi = 0, \theta = \theta_2$ ؛ به این ترتیب

$$a \ln \left(\tan \frac{\theta_1}{2} \right) + b = V \quad \text{و} \quad a \ln \left(\tan \frac{\theta_2}{2} \right) + b = 0$$

با حل همزمان معادلات بالا برای a و b به‌دست می‌آوریم

$$b = -a \ln \left(\tan \frac{\theta_2}{2} \right) \quad \text{و} \quad a = \frac{V}{\ln \left[\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)} \right]}$$

با قراردادن a و b در معادله (۱۸-۳) به‌دست می‌آید

$$\Phi = V \frac{\ln \left[\frac{\tan(\theta/2)}{\tan(\theta_2/2)} \right]}{\ln \left[\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)} \right]}$$

۲-۴-۳ معادله لاپلاس در دو بعد - مختصات کروی

اکنون چند مسئله را که نسبت به مسائل بخش ۳-۴-۱ از تقارن کمتری برخوردارند در نظر می‌گیریم. این مسائل شامل پتانسیلهایی هستند که توابعی از دو متغیرند. در مختصات کروی یک شکل هندسی با تقارن سمتی را انتخاب می‌کنیم، و به این ترتیب وابستگی پتانسیل را به r و θ انتخاب می‌کنیم. در این حالت معادله لاپلاس به معادله

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (19-3)$$

تبدیل می‌شود. وابستگی Φ به r و θ را می‌توان با روش جداسازی متغیرها تعیین کرد. در این روش فرض می‌شود که $\Phi(r, \theta)$ حاصلضرب دو تابع، یکی وابسته به r و دومی وابسته به θ باشد، و در نتیجه این جداسازی معادله دیفرانسیل بالا را به دو معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کند. با قراردادن $\Phi(r, \theta) = Y(r)P(\theta)$ در معادله (۱۹-۳) به‌دست می‌آید

$$\frac{P(\theta)}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dY}{dr} \right) + \frac{Y}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = 0 \quad (20-3)$$

با تقسیم این معادله بر $Y(r)P(\theta)$ و ضرب آن در r^2 به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{Y} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dY}{dr} \right) = - \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \quad (21-3)$$

چون سمت چپ این معادله فقط به r ، و سمت راست فقط به θ بستگی دارد، در این صورت تنها راهی که دو طرف به‌ازای تمام مقادیر

در این صورت عمومی‌ترین جواب را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از تمام جوابهای ممکن یعنی $n = 0, 1, \dots, \infty$ نوشت. یعنی

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\theta) \quad (28-3)$$

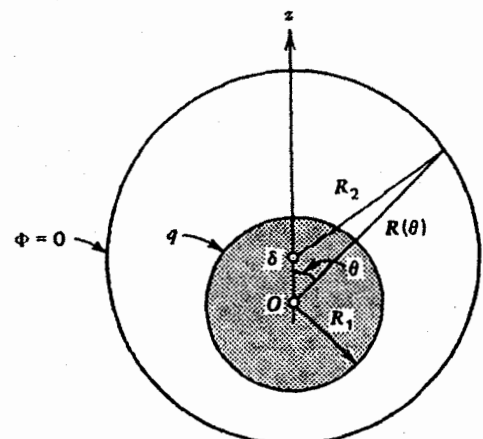
A_n و B_n ثابتهایی هستند که باید به کمک شرایط مرزی محاسبه شوند.

این بسط را می‌توان به صورت یک بسط چندقطبی با ماهیتی مشابه معادلات (۶۱-۲) و (۶۲-۲) تفسیر کرد. جمله‌هایی که دارای جواب $Y_n = r^{-(n+1)}$ هستند مطابق با جمله‌هایی هستند که $r'/r \ll 1$ در صورتی که جمله‌های $Y_n = r^n$ مطابق با حالت $r/r' \ll 1$ هستند. جزئیات بیشتر این ماهیت را می‌توان از چند مثال ذکر شده در متن مشاهده کرد.

در زیر چهار مثال را که در آنها پتانسیل تابعی از r و θ است در نظر می‌گیریم. این مثالها ناشی از حالت‌های فیزیکی کاملاً متفاوتی هستند و بنابراین برای بیان این روش مفیدند.

* مثال ۵-۳ خازن کروی و غیر هم‌مرکز

بار دیگر خازن کروی بررسی شده در مثال ۲-۳ را در نظر می‌گیریم. در این حالت بار پوسته داخلی را q انتخاب می‌کنیم و پوسته خارجی را در پتانسیل صفر نگه می‌داریم (شرایط مرزی مخلوط). همان‌طور که در مثال ۲-۳ بحث شد، وقتی پوسته‌ها هم‌مرکز باشند، پتانسیل فقط تابعی از r است. همان‌گونه که در شکل ۵-۳ نشان داده شده است یک وابستگی به θ را می‌توان با جابه‌جا کردن مرکزهای دو پوسته به اندازه δ معرفی کرد. برای سادگی محاسبات، فقط حالتی را که جابه‌جایی



شکل ۵-۳ خازن کروی غیر هم‌مرکز.

بسیار کوچک است یعنی $R_1 \ll \delta$ در نظر می‌گیریم. یک دستگاه مختصات قطبی کروی که مبدأ آن در مرکز کره داخلی قرار دارد، انتخاب می‌کنیم. با استفاده از قانون کسینوسها می‌توان به سادگی نشان داد که در این دستگاه مختصات سطح کره خارجی تقریباً با $R(\theta) \approx R_2 + \delta \cos \theta$ توصیف می‌شود.

چون فقط یک انحراف جزئی، از مرتبه δ ، در شکل هندسی کروی وجود دارد، وابستگی پتانسیل به θ از مرتبه δ خواهد بود. چون پتانسیل مانند مورد کره‌های هم‌مرکز، دارای تقارن سمتی است، در این صورت داریم

$$\Phi(r, \theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + \delta \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos \theta \quad (29-3)$$

اکنون از شرایط مرزی برای به دست آوردن ثابتهای A_0, A_1, B_0 و B_1 استفاده می‌کنیم:

۱. پتانسیل پوسته داخلی ثابت، $[\Phi(R_1, \theta) = \text{const.}]$ اما در این مرحله مجهول است. بنابراین

$$A_0 + \frac{B_0}{R_1} + \delta \left(A_1 R_1 + \frac{B_1}{R_1^2} \right) \cos \theta = \text{const.}$$

با مساوی قراردادن ضرایب $\cos \theta$ با صفر به دست می‌آوریم

$$\frac{B_1}{A_1} = -R_1^2 \quad (30-3)$$

۲. پتانسیل پوسته خارجی صفر است $[\Phi(R_2, \theta) = 0]$. بنابراین

$$A_0 + \frac{B_0}{(R_2 + \delta \cos \theta)} + \delta A_1 \left[R_2 + \delta \cos \theta - \frac{R_1^2}{(R_2 + \delta \cos \theta)^2} \right] \cos \theta = 0$$

با چشمپوشی از جملات مرتبه δ^2 و بالاتر داریم

$$A_0 + \frac{B_0}{R_2} \left(1 - \frac{\delta \cos \theta}{R_2} \right) + \delta A_1 \left(R_2 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \cos \theta = 0$$

با مساوی قراردادن ضرایب $\cos \theta$ ، به دست می‌آوریم

$$\frac{A_0}{B_0} = -\frac{1}{R_2} \quad \text{و} \quad \frac{B_0}{A_1} = (R_2^2 - R_1^2) \quad (31-3)$$

۳. آخرین شرط مرزی بیان می‌کند که بار کل بر روی سطح داخلی q است، یعنی

$$\int_{S_1} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (32-3)$$

به هم مربوط می‌شوند، E_1 و E_2 بردارهای میدان الکتریکی درست خارج و داخل سطح پوسته هستند، و \hat{n} بردار یکه عمود بر سطح است که جهت آن به سوی ناحیه ۲ است. با محاسبه میدانها از معادلات (۳۶-۳) و با جایگذاری آنها در معادله (۳۷-۳) به دست می‌آوریم

$$nA_n R^{n-1} P_n(\cos \theta) + (n+1)B'_n R^{-(n+2)} P_n(\cos \theta) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \cos \theta \quad (38-3)$$

چون $P_n(\cos \theta)$ های مختلف توابع مستقل خطی هستند، ضرایب آنها را در دو طرف مساوی هم قرار می‌دهیم که $B'_0 = 0$ و

$$A_1 + \frac{2B'_1}{R^2} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \quad (39-3)$$

$$A_n = -\frac{(n+1)}{n} B'_n R^{-(n+1)} \quad n \geq 2 \quad (40-3)$$

را به دست می‌دهد.

۴. پتانسیل در پوسته پیوسته است ($\Phi_1 = \Phi_2$). این خاصیت

$$A_0 = 0$$

$$A_1 - \frac{B'_1}{R^2} = 0 \quad (41-3)$$

$$A_n = B'_n R^{-(n+1)} \quad n \geq 2 \quad (42-3)$$

را به دست می‌دهد.

حل همزمان معادلات (۳۹-۳) تا (۴۲-۳) ضرایب غیرصفر $A_1 = \sigma_0 / 3\epsilon_0$ و $B'_1 = \sigma_0 R^2 / 3\epsilon_0$ را نتیجه می‌دهد، و به این ترتیب داریم

$$\Phi_1(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} r \cos \theta \quad r < R \quad (43-3)$$

$$\Phi_2(r, \theta) = \frac{\sigma_0 R^2}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos \theta \quad r > R \quad (44-3)$$

روشن است که پتانسیل در داخل پوسته از یک میدان یکنواخت در راستای منفی z ، $\mathbf{E} = (-\sigma_0 / 3\epsilon_0) \hat{z}$ ناشی می‌شود. با این همه، پتانسیل در خارج کره، از یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی $(4\pi/3)R^2\sigma_0$ ناشی می‌شود، که این پتانسیل درست برابر است با حاصلضرب پوسته در بیشینه چگالی بار σ_0 . بالاخره باید توجه کنیم که این نتایج، دقیقاً همان نتایجی هستند که به هنگام حل مسئله با استفاده از روش بسط چندقطبی، به دست آوردیم. (مثال ۱۷-۲ را ببینید)

میدان الکتریکی در سطح پوسته داخلی عمودی است و برحسب B_0 به صورت

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R_1} \hat{n} = \frac{B_0}{R_1} \hat{n} - \delta \left(A_1 - \frac{2B_1}{R_1^2} \right) \cos \theta \hat{n} \quad (33-3)$$

داده می‌شود، که با قراردادن در معادله (۳۲-۳) به دست می‌دهد

$$B_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \quad (34-3)$$

اکنون به طور همزمان معادلات (۳۰-۳)، (۳۱-۳) و (۳۴-۳) را برای به دست آوردن ثابتهای A_0 ، B_0 ، A_1 و B_1 حل نموده و سپس آنها را در معادله (۲۹-۳) جایگزین می‌کنیم. نتیجه عبارت است از

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 (R_1^2 - R_1)} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \cos \theta \quad (35-3)$$

مثال ۳-۶ وابستگی زاویه‌ای توزیع بار

مثالی می‌آوریم که در آن وابستگی زاویه‌ای در پتانسیل، ناشی از وابستگی زاویه‌ای توزیع بار بر روی یک مرز سطحی باشد. یک پوسته به شعاع R که دارای یک توزیع بار سطحی $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ است، در نظر بگیرید که σ_0 یک ثابت است. پتانسیل داخل و خارج پوسته در معادله لاپلاس صدق می‌کند، و از این رو پتانسیلها در دو ناحیه توسط معادله (۲۸-۳) به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n P_n(\cos \theta) + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad r < R \quad (36-3)$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [A'_n r^n P_n(\cos \theta) + B'_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad r > R$$

اکنون ضرایب بسطها را می‌توان با استفاده از چهار شرط مرزی زیر تعیین کرد:

- وقتی $r \rightarrow 0$ ، پتانسیل Φ_1 باید متناهی باشد، که لازمه‌اش آن است که $B_n = 0$ به ازای $n \geq 0$ صفر باشد.
- وقتی $r \rightarrow \infty$ ، پتانسیل Φ_2 باید صفر باشد، به این ترتیب $A'_n = 0$ به ازای $n \geq 0$ صفر می‌شود.
- میدانهای الکتریکی در سطح پوسته با معادله زیر

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \cos \theta \quad (37-3)$$

استفاده از شرط مرزی، معادله (۴۵-۳) به ازای $r \rightarrow \infty$ به دست می‌دهد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta + C \quad (۴۷-۳)$$

با برابر گرفتن ضرایب $P_n(\cos \theta)$ در این معادله به دست می‌آوریم

$$A_n = 0 \quad \text{و} \quad A_0 = C, \quad A_1 = -E_0, \quad n \geq 2 \quad (۴۸-۳)$$

با قراردادن این مقادیر در معادله (۴۶-۳) و استفاده از شرط مرزی

$$\Phi(r, \theta) = \Phi_0 = \text{const.} \quad \text{در} \quad r = R \quad \text{به دست می‌آوریم}$$

$$\Phi(r, \theta) = \Phi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) + C - E_0 R \cos \theta \quad (۴۹-۳)$$

مساوی قراردادن ضرایب $P_n(\cos \theta)$ در دو طرف این معادله به دست می‌دهد

$$B_n = 0 \quad \text{و} \quad B_1 = E_0 R^2, \quad C + \frac{B_0}{R} = \Phi_0, \quad n \geq 2$$

به این ترتیب

$$\Phi(r, \theta) = \Phi_0 + B_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 R^2}{r^2} \cos \theta \quad (۵۰-۳)$$

شرط مرزی سوم، گزاره‌ای است در باره کل بار روی کره، که اکنون از آن برای محاسبه مقدار B_0 استفاده می‌کنیم. ابتدا با استفاده از مشتق عمودی $E = -\partial\Phi/\partial r$: میدان الکتریکی را بر روی سطح، در $r = R$ ، محاسبه می‌کنیم سپس چگالی بار سطحی $\sigma = \epsilon_0 E$ محاسبه می‌شود

$$\sigma = \frac{B_0 \epsilon_0}{R^2} + 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (۵۱-۳)$$

به این ترتیب

$$Q = \int \sigma da = \frac{\epsilon_0}{R^2} B_0 \int da + 3\epsilon_0 E_0 \int \cos \theta da$$

انتگرال دوم صفر می‌شود و انتگرال $\int da$ را $4\pi R^2$ نتیجه می‌دهد، که منجر به $B_0 = Q/4\pi\epsilon_0$ می‌شود. از این رو

$$\Phi(r, \theta) = \Phi_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 R^2}{r^2} \cos \theta \quad (۵۲-۳)$$

مثال ۷-۳. کره‌ای رسانا در یک میدان الکتریکی

کره‌ای رسانا حامل بار Q واقع در یک میدان الکتریکی در راستای $E = E_0 \hat{z}$ ، z ، که ابتدا یکنواخت است را در نظر می‌گیریم. میدان در غیاب کره یا در نقاط بسیار دور از آن، مانند شکل ۶-۳ (الف)، به صورت $E = E_0 \hat{z}$ است. پتانسیل الکتروستاتیکی وابسته به میدان الکتریکی در فواصل دور عبارت است از

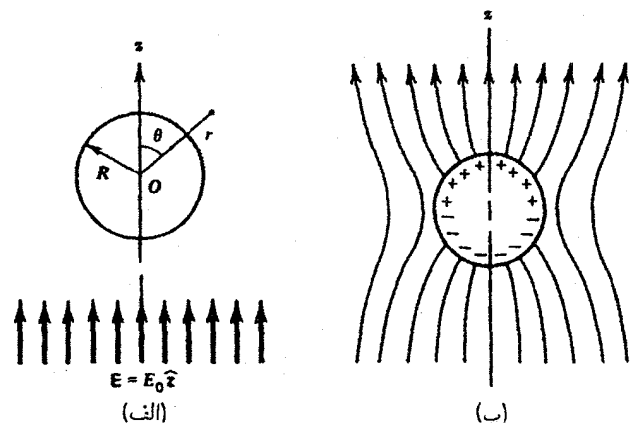
$$\Phi = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -E_0 z + C = -E_0 r \cos \theta + C \quad (۴۵-۳)$$

که C یک ثابت است. این شرط، شامل یک شرط مرزی وابسته به زاویه، بر روی پتانسیل مسئله ترکیبی (کره + میدان الکتریکی) است؛ این شرط وابستگی θ را به پتانسیل در یک r دلخواه بیان می‌کند. با این همه، هنوز تقارن پیرامون محور z وجود دارد، و از این رو پتانسیل فقط تابعی از r و θ خواهد بود. شرط مرزی دیگر در این مسئله این واقعیت است که پتانسیل در سطح و در درون کره ثابت است، زیرا میدان الکتریکی در درون یک رسانا صفر است.

پتانسیل در خارج از کره، در معادله لاپلاس صدق می‌کند و به این ترتیب با معادله زیر

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad (۴۶-۳)$$

داده می‌شود.



شکل ۶-۳ کره رسانا در یک میدان الکتریکی که ابتدا یکنواخت بوده است. (الف) نمودار طرحوار کره و خطوط نیرو در غیاب کره. (ب) خطوط نیرو در حضور کره.

که در آن V_0 یک ثابت است، داده می‌شود.

این شرط مرزی پتانسیل وابسته به زاویه، در پتانسیل بین کره‌ها یک وابستگی زاویه‌ای معرفی می‌کند، که شکل صریح آن را می‌توان با حل معادله لاپلاس در این ناحیه پیدا کرد. به این ترتیب، Φ بین کره‌ها با بسط زیر داده می‌شود [معادله (۲۸-۳) را ببینید].

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$$

توجه کنید ناحیه مورد نظر، برخی از حالت‌های قبلی مانند $r = 0$ یا $r = \infty$ را شامل نمی‌شود. شرط مرزی $\Phi(R_1, \theta) = 0$ به دست می‌دهد

$$A_n + B_n R_1^{-(n+1)} = 0 \quad \text{به‌ازای تمام } n \quad (54-3)$$

و شرط مرزی $\Phi(R_2, \theta) = V_0 \cos \theta$ می‌دهد

$$A_1 + \frac{B_1}{R_2} = \frac{V_0}{R_2}, \quad A_n + B_n R_2^{-(n+1)} = 0 \quad n \neq 1 \quad \text{به‌ازای } n \quad (55-3)$$

اکنون معادلات (۵۴-۳) و (۵۵-۳) به‌طور همزمان حل می‌شوند. در نتیجه به دست می‌آوریم

$$A_n = B_n = 0 \quad n \neq 1 \quad \text{به‌ازای } n$$

و

$$A_1 = \frac{V_0 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad B_1 = -\frac{V_0 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (56-3)$$

از این رو

$$\Phi(r, \theta) = \frac{V_0 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \cos \theta \quad (57-3)$$

میدان الکتریکی در سطح کره داخلی را می‌توان از رابطه $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ حساب کرد

$$\mathbf{E}(R_1, \theta) = \frac{3V_0 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \hat{\mathbf{r}} \cos \theta \quad (58-3)$$

که نشان می‌دهد این جواب، کاملاً عادی است، و خود این امر نشان‌دهنده آن است که کره داخلی یک رساناست، همان‌طور که باید باشد. تعیین پتانسیل و میدان الکتریکی در خارج از کره بزرگتر را به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

نتیجه نشان می‌دهد که پتانسیل شامل چهار جمله است. جمله‌های اول و سوم به میدان خارجی $E_0 \hat{\mathbf{z}}$ وابسته‌اند. جمله‌های دوم و چهارم پیامدی از قرار گرفتن کره در میدان خارجی است. جمله دوم فقط هنگامی حضور دارد که کره دارای بار خالص باشد، حال آنکه جمله چهارم یک میدان دوقطبی است که با یک گشتاور دوقطبی مساوی با $4\pi R_2^2 \epsilon_0 E_0 \hat{\mathbf{z}}$ تولید می‌شود و نشان‌دهنده آن است که کره بر اثر میدان خارجی قطبیده شده است. شکل ۶-۳ (ب) خطوط نیروی میدان الکتریکی در حضور کره عاری از بار خالص را نشان می‌دهد. اکنون نظریه ساده‌ای برای رسیدن به نتایج بالا ارائه می‌دهیم. حالتی را که کره دارای یک بار خالص نیست، در نظر بگیرید. میدان خالص درون کره باید صفر باشد. از این رو میدان خارجی E_0 باید بر اثر میدانی که توسط بارهای القا شده بر سطح رسانا تولید می‌شود صفر شود. چون مثال قبل نشان داد که با قراردادن یک چگالی بار $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ بر روی سطح یک کره می‌توان یک میدان یکنواخت در داخل کره تولید کرد، ساده است تا میدان را با انتخاب σ_0 به صفر تغییر داد به طوری که

$$E_0 \hat{\mathbf{z}} - \frac{\sigma_0 \hat{\mathbf{z}}}{3\epsilon_0} = 0$$

یعنی

$$\sigma_0 = 3\epsilon_0 E_0$$

در نتیجه $\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$. اکنون این چگالی در خارج کره یک پتانسیل دوقطبی تولید می‌کند که با پتانسیل وابسته به میدان E_0 ترکیب می‌شود. همچنین از مثال قبل فهمیدیم که تابع پتانسیل در داخل کره یک ثابت است. در خارج کره

$$\begin{aligned} \Phi(r > R) &= -E_0 \hat{\mathbf{z}} \cdot \frac{R^2}{r^2} E_0 \cos \theta \\ &= -E_0 r \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \end{aligned}$$

آشکار است که Φ در $r = R$ صفر است؛ یعنی، پتانسیل کره صفر است. ■

مثال ۸-۳ مرز پتانسیل وابسته به زاویه

دو کره هم‌مرکز با شعاع‌های R_1 و R_2 داریم ($R_2 > R_1$). پتانسیل همه‌جا روی سطح کره کوچکتر، صفر است. پتانسیل روی سطح کره بزرگتر با فرمول

$$V(R_2, \theta) = V_0 \cos \theta \quad (59-3)$$

۳-۴-۳ معادله لاپلاس در دو بعد - مختصات استوانه‌ای

اکنون به مسائل مقدار مرزی توجه می‌کنیم که در آنها آرایش هندسی ماهیت استوانه‌ای دارد، و پتانسیل تابعی بیش از یک مختصه است. در این حالت پتانسیلهایی را که فقط تابعی از ρ و ϕ هستند، در نظر خواهیم گرفت. این نوع پتانسیلها در مواردی که یک تقارن در امتداد محور z ها وجود دارد، بروز می‌کند. پتانسیل در نواحی خارج از بارهای نقطه‌ای در معادله

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (59-3)$$

صدق می‌کند.

در این مورد روش جداسازی متغیرها را که قبلاً برای حل پتانسیل در مختصات کروی استفاده شد، به کار می‌گیریم. Φ را به صورت حاصلضرب دو تابع $\Phi = R(\rho)Y(\phi)$ می‌نویسیم، و آن را در معادله (۵۹-۳) قرار می‌دهیم

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{d\phi^2} \quad (60-3)$$

هر دو طرف معادله را مساوی با K^2 که ثابت جداسازی است انتخاب می‌کنیم. معادله برای Y

$$\frac{d^2 Y}{d\phi^2} + K^2 Y = 0 \quad (61-3)$$

دارای جوابهای $\cos K\phi$ و $\sin K\phi$ است. برای آنکه این جوابها توابع تک‌مقداری از ϕ باشند، دامنه K باید محدود باشد یا به عبارت دیگر، برای آنکه جواب از نظر فیزیکی معنی داشته باشد، جواب باید بعد از یک چرخش 2π با جواب قبلی یکسان باشد، یا

$$\sin K(\phi + 2\pi) = \sin K\phi \quad \text{و} \quad \cos K(\phi + 2\pi) = \cos K\phi \quad (62-3)$$

که این امر مستلزم آن است که $K = n$ باشد که n یک عدد صحیح مثبت است. حذف ارقام منفی منجر به حذف جوابهای ممکن نخواهد شد، زیرا $\cos(-n\phi)$ با $\cos(n\phi)$ همسان است و $\sin(-n\phi) = -\sin(n\phi)$. ویژگی مهم این جوابها تعامد آنهاست؛ یعنی

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\phi) \cos(n\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \sin(m\phi) \sin(n\phi) d\phi = \pi \delta_{mn}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\phi) \cos(n\phi) d\phi = 0 \quad (63-3)$$

که در آن δ_{mn} دلتای کرونکر است که در معادله (۲۴-۳) معرفی شد. اکنون می‌توان وابستگی شعاعی پتانسیل را به دست آورد. با قراردادن سمت چپ معادله (۶۰-۳) مساوی با $n^2 = K^2$ ، به دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{n^2 R}{\rho} = 0 \quad (64-3)$$

به ازای $n = 0$ پتانسیل در همان معادله‌ای که هیچ گونه وابستگی زاویه‌ای نداشت صدق می‌کند [معادله (۱۳-۳)] را ببینید؛ یعنی

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = 0$$

که دارای جوابهای $R(\rho) = \ln \rho$ و $R(\rho) = \text{const.}$ است. به ازای $n \neq 0$ معادله دارای دو جواب ρ^n و ρ^{-n} است. بنابراین عمومی‌ترین جواب عبارت است از

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)) \rho^n + \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n \cos(n\phi) + B'_n \sin(n\phi)) \rho^{-n} + A_0 + A'_0 \ln \rho \quad (65-3)$$

A_n, A'_n, B_n, B'_n به ازای $n \geq 0$ ثابتهایی هستند که باید از شرایط مرزی به دست آیند. باید توجه کرد که این نتیجه نسبت به بسط در مختصات کروی از جملات متنوع بیشتری برخوردار است. به علاوه، حل معادله زاویه‌ای در مختصات کروی چندجمله‌ایهای لزاندر را در بر می‌گیرد، در صورتی که این بسط هماهنگهای $\sin \phi$ و $\cos \phi$ را در خود جای می‌دهد. همچنین وابستگی شعاعی این بسط، شامل جمله $\ln \rho$ است. در زیر چند مورد استفاده از بسط استوانه‌ای را به منظور توضیح بیشتر ماهیت این جملات در نظر می‌گیریم.

* مثال ۳-۹ خازن استوانه‌ای غیر هم‌محور

یک خازن استوانه‌ای را در نظر بگیرید. همان طور که در شکل ۳-۷ نشان داده شده است، استوانه‌ها طوری جابه‌جا شده‌اند که فاصله محور آنها δ است. پوسته داخلی به شعاع ρ_1 را در پتانسیل V_1 و پوسته خارجی به شعاع ρ_2 را در پتانسیل V_2 نگه می‌داریم. علاوه بر این، برای ساده‌شدن مسئله قرار می‌دهیم $\rho_1 \ll \delta$.

یک دستگاه مختصات استوانه‌ای را با محور z در امتداد محور پوسته داخلی در نظر بگیرید. از قانون کسینوسها می‌توان نشان داد که سطح استوانه خارجی تقریباً با $R(\phi) = \rho_2 + \delta \cos \phi$ بیان می‌شود. قبل از آنکه حالت غیرهم‌محوری را مورد بررسی قرار دهیم، در نظر

۱. در $\rho = \rho_1$ که به دست می آید $\Phi(\rho_1, \phi) = V_1$

$$V_1 = A_0 + A'_0 \ln \rho_1 + \delta \rho_1 (A_1 \cos \phi + B_1 \sin \phi) + \frac{\delta}{\rho_1} (A'_1 \cos \phi + B'_1 \sin \phi)$$

چون توابع سینوسی و کسینوسی به طور خطی مستقل هستند، در این صورت در دو طرف معادله، ضرایب کسینوس و همچنین ضرایب سینوس را مساوی قرار می دهیم که به دست می دهد:

$$V_1 = A_0 + A'_0 \ln \rho_1 \quad B_1 = -\frac{B'_1}{\rho_1^2} \quad A_1 = -\frac{A'_1}{\rho_1^2} \quad (۶۹-۳)$$

۲. در $\rho = R(\phi) = \rho_2 + \delta \cos \phi$ که $\Phi(R, \phi) = V_2$

به دست می آوریم

$$A_0 + A'_0 \ln \rho_2 + \frac{A'_0 \delta \cos \phi}{\rho_2} + \delta \rho_2 (A_1 \cos \phi + B_1 \sin \phi) + \frac{\delta}{\rho_2} (A'_1 \cos \phi + B'_1 \sin \phi) = V_2$$

که در آن $1/(\rho_2 + \delta \cos \phi)$ به صورت $1/(\rho_2 - \delta \cos \phi/\rho_2)$ بسط داده شده است، و از جملات مرتبه δ^2 و بالاتر چشمپوشی شده است. با مساوی قرار دادن ضرایب $\cos \phi$ و $\sin \phi$ به دست می آوریم

$$V_2 = A_0 + A'_0 \ln \rho_2 \quad B_1 = -\frac{B'_1}{\rho_2^2} \quad A_1 = -\frac{1}{\rho_2^2} (A'_1 + A_0) \quad (۷۰-۳)$$

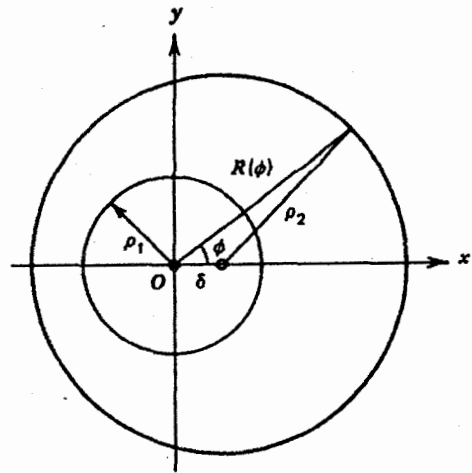
حل معادلات (۶۹-۳) و (۷۰-۳) نشان می دهد که روابط بین A_0 و A'_0 با روابطی که در حالت هم محور به دست آمدند، یکسان هستند، و از این رو این کمیتها با مقادیری که در بالا محاسبه شدند، یکی هستند. روابط بین B_1 و B'_1 که از هر دو شرط مرزی به دست می آیند، فقط هنگامی صدق می کنند که $B_1 = B'_1 = 0$ باشد. از طرف دیگر یک جواب غیر صفر برای A_1 و A'_1 وجود دارد

$$A_1 = -\frac{A_0}{\rho_2^2 - \rho_1^2} \quad A'_1 = \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2 - \rho_1^2} A_0$$

از این رو پتانسیل عبارت است از

$$\Phi(\rho, \phi) = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{\ln(\rho_2/\rho_1)} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right) - \frac{\delta}{\rho_2^2 - \rho_1^2}$$

$$\left[V_1 - \frac{V_2 - V_1}{\ln(\rho_2/\rho_1)} \right] \left[\rho - \frac{\rho_1^2}{\rho} \right] \cos \phi \quad (۷۱-۳)$$



شکل ۷-۳. خازن استوانه ای غیر هم محور.

گرفتن حالت هم محوری یعنی $\delta = 0$ آموزنده است. در این حالت پتانسیل فقط به ρ وابسته است و به این ترتیب جواب معادله (۱۳-۳) قابل استفاده است:

$$\Phi(\rho) = A_0 + A'_0 \ln \rho \quad (۶۶-۳)$$

با $\Phi(\rho_1) = V_1 = A_0 + A'_0 \ln \rho_1$ و $\Phi(\rho_2) = V_2 = A_0 + A'_0 \ln \rho_2$ ثابتهای A_0 و A'_0 و از این رو Φ مقادیر زیر را خواهند داشت:

$$A_0 = V_1 - \frac{V_2 - V_1}{\ln(\rho_2/\rho_1)} \ln \rho_1$$

$$A'_0 = \frac{V_2 - V_1}{\ln(\rho_2/\rho_1)} \quad (۶۷-۳)$$

$$\Phi(\rho) = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{\ln(\rho_2/\rho_1)} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)$$

به سادگی می توان نشان داد که جمله متناسب با $\ln \rho$ از چگالی بار ناشی می شود. اگر $\mathbf{E} = -\nabla \Phi = -\hat{\rho}(\partial \Phi / \partial \rho)$ را در $\rho = \rho_1$ محاسبه کنیم و سپس از قانون گاوس استفاده کنیم، به دست می آوریم

$$\sigma_1 = \frac{1}{\rho_1} \epsilon_0 \frac{(V_1 - V_2)}{\ln(\rho_2/\rho_1)}$$

این جواب وقتی δ صفر نیست قابل اصلاح است. یک تصحیح مرتبه اول از مرتبه δ را می توان با استفاده از (۶۵-۳) نوشت؛ یعنی

$$\Phi(\rho, \phi) = A_0 + A'_0 \ln \rho + \delta \rho (A_1 \cos \phi + B_1 \sin \phi) + \frac{\delta}{\rho} (A'_1 \cos \phi + B'_1 \sin \phi) \quad (۶۸-۳)$$

اکنون از شرایط مرزی استفاده می کنیم:

کل بار Q بر روی استوانه عبارت است از

$$Q = \int \sigma da = \int_0^{2\pi} L \sigma \rho_0 d\phi$$

که در آن L طول استوانه است. با انتگرال‌گیری به دست می‌آید

$$Q = \left[\frac{1}{\rho} L \sigma_1 \rho_0 \cos 2\phi + L \sigma_2 \rho_0 \sin \phi \right]_0^{2\pi} = 0$$

از این رو ثابت A'_0 مساوی با صفر است. چون پتانسیلها با اختلاف یک ثابت، دلخواه هستند، می‌توان با قرار دادن $A_0 = 0$ ، ϕ را در $\rho = 0$ صفر کرد ($\Phi = 0$).

اکنون بقیه ثابتها را می‌توان از شرایط مرزی در سطح استوانه محاسبه کرد:

۱. در $\rho = \rho_0$ ، پتانسیل پیوسته است:

$$\Phi_1(\rho_0, \phi) = \Phi_2(\rho_0, \phi)$$

یا

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi) \rho^n = \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n \cos n\phi + B'_n \sin n\phi) \rho_0^{-n} \quad (74-3)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $\cos n\phi$ و ضرایب $\sin n\phi$ در دو طرف به دست می‌آوریم

$$B_n = \rho_0^{-2n} B'_n \quad \text{و} \quad A_n = \rho_0^{-2n} A'_n \quad n \geq 1 \quad (77-3)$$

۲. در $\rho = \rho_0$ ، مؤلفه‌های عمودی میدانها در رابطه

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\rho} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad [5-3]$$

که در آن $-\partial\Phi_i/\partial\rho = (\mathbf{E}_i) \cdot \hat{\rho}$ است صدق می‌کند. با قرار دادن Φ_i از معادلات (74-3) و (77-3) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi) n \rho_0^{n-1} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n \cos n\phi + B'_n \sin n\phi) n \rho_0^{-(n+1)} \\ & = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \sin 2\phi + \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \cos \phi \end{aligned}$$

این موضوع که پتانسیل فقط به هماهنگ $\cos \phi$ ، که با هماهنگ دخیل در شکل هندسی $R = \rho_2 + \delta \cos \phi$ یکسان است، بستگی دارد، نشان‌دهنده آن است که تمام هماهنگهای دیگر را می‌توانستیم قبلاً در جواب حذف کنیم. در زیر حالت خاص نتایج بالا را در نظر بگیرید. وقتی دو استوانه را در یک پتانسیل نگاه داریم (یعنی $V_1 = V_2 = V$)، در این صورت معادله (71-3) می‌شود

$$\Phi(\rho, \phi) = V - \frac{\delta V}{\rho_2^2 - \rho_1^2} \left(\rho - \frac{\rho_1^2}{\rho} \right) \cos \phi \quad (72-3)$$

در حالت هم‌محور $\delta = 0$ ؛ از این رو از معادله (72-3) داریم $\Phi(\rho, \phi) = V$ همان‌گونه که انتظار داریم، معادله (68-3) نشان می‌دهد که بار متناظر با این پتانسیل، بر روی استوانه داخلی، صفر است. در حالت غیرهم‌محوری این استوانه دارای چگالی

$$\sigma_1 = \frac{-2\delta V \epsilon_0}{(\rho_2^2 - \rho_1^2)} \cos \phi \quad (73-3)$$

است.

مثال ۳-۱۰ یک توزیع بار زاویه‌ای

این مثالی از یک توزیع بار زاویه‌ای است که در سطح استوانه‌ای قرار دارد. یک استوانه بلند به شعاع ρ_0 با چگالی بار سطحی $\sigma = \sigma_1 \sin 2\phi + \sigma_2 \cos \phi$ را در نظر بگیرید، ϕ زاویه‌ای است که از محور x اندازه‌گیری می‌شود و σ_1 و σ_2 ثابت هستند.

در نواحی داخل و خارج استوانه، پتانسیل الکتروستاتیکی در معادله لاپلاس صدق می‌کند. به علاوه، بسط در ناحیه داخلی نباید شامل جملات ρ^{-n} و $\ln \rho$ باشد، زیرا پتانسیل در مرکز استوانه باید متناهی باشد. از طرف دیگر، بسط در ناحیه خارجی نباید شامل جملات ρ^n باشد. از این رو پتانسیلها در داخل و خارج استوانه به ترتیب با بسطهای زیر به دست می‌آیند

$$\Phi_1(\rho, \phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi) \rho^n \quad \rho < \rho_0 \quad (74-3)$$

$$\Phi_2(\rho, \phi) = A'_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n \cos n\phi + B'_n \sin n\phi) \rho^{-n} \quad \rho > \rho_0 \quad (75-3)$$

همان طور که در مثال ۳-۹ بحث شد، جمله $A'_0 \ln \rho$ هنگامی به میان می‌آید که بار بر روی استوانه غیرصفر باشد. در این مثال خاص،

دو طرف معادله را با یک ثابت جداسازی α^z مساوی قرار می‌دهیم، که به دست می‌آید

$$\frac{d^z F_1(x)}{dx^z} + \alpha^z F_1(x) = 0 \quad (۸۳-۳)$$

که به ازای $\alpha^z > 0$ دارای جوابهای $\cos \alpha x$ و $\sin \alpha x$ است، و

$$\frac{1}{F_1(y)} \frac{d^z F_1(y)}{dy^z} = \alpha^z - \frac{1}{F_1(z)} \frac{d^z F_1(z)}{dz^z} \quad (۸۴-۳)$$

بار دیگر وابستگی به x و y را می‌توان با مساوی قرار دادن هر دو طرف معادله (۸۴-۳) با یک ثابت دوم، $-\beta^z$ ، جدا کرد. این امر به دست می‌دهد

$$\frac{d^z F_1}{dy^z} + \beta^z F_1 = 0 \quad (۸۵-۳)$$

$$\frac{d^z F_1}{dz^z} - (\alpha^z + \beta^z) F_1 = 0 \quad (۸۶-۳)$$

معادله F_1 شبیه به معادله F_1 است، و از این رو به ازای $\beta^z > 0$ دارای جوابهای $\cos \beta y$ و $\sin \beta y$ است. از طرف دیگر، معادله F_1 دارای جوابهای $\sinh \gamma z$ و $\cosh \gamma z$ است که در آنها $\gamma = (\alpha^z + \beta^z)^{1/z}$. ماهیت ثابتهای جداسازی در این لحظه معلوم نیست. با این همه، اگر α و β را به ترتیب متناسب با اعداد صحیح m و n در نظر بگیریم، شرایط مرزی فیزیکی را می‌توان برقرار ساخت. از این رو α و β را متناسب با اعداد صحیح در نظر می‌گیریم، و به این ترتیب عمومی‌ترین جواب شامل هشت بسط نامتناهی با ترکیبات زیر است: $\sinh \gamma z \sin \alpha x \sin \beta y$ ، $\sinh \gamma z \sin \alpha x \cos \beta y$ ، $\sinh \gamma z \cos \alpha x \sin \beta y$ ، $\sinh \gamma z \cos \alpha x \cos \beta y$ و چهار امکان دیگر، همان جملات بالا هستند که $\cosh \gamma z$ جایگزین $\sinh \gamma z$ شود.

یک حالت خاص وقتی است که ثابتهای جداسازی صفر هستند. در این حالت معادلات (۸۳-۳)، (۸۵-۳) و (۸۶-۳) به دست می‌دهند، $F_1 = a_1 x + b_1$ ، $F_2 = a_2 y + b_2$ ، $F_3 = a_3 z + b_3$ ، که در آنها a_i و b_i ثابت هستند، و به این ترتیب عمومی‌ترین جواب عبارت است از

$$\Phi = A_1 xy z + A_2 xy + A_3 xz + A_4 yz + A_5 x + A_6 y + A_7 z + A_8 \quad (۸۷-۳)$$

که در آن A_1 تا A_8 ثابت هستند.

دو مثال زیر مسئله مقدار مرزی در مختصات دکارتی هستند.

مساوی قراردادن ضرایب $\cos n\phi$ و $\sin n\phi$ در دو طرف این معادله به دست می‌دهد

$$A_1 + \frac{A'_1}{\rho_0^z} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \quad n \geq 2 \quad \text{به ازای } 2 \quad \text{و} \quad A_n = -\rho_0^{-zn} A'_n$$

$$B_2 + \frac{B'_2}{\rho_0^z} = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0 \rho_0} \quad n \neq 2 \quad \text{به ازای } 2 \quad \text{و} \quad B_n = -\rho_0^{-zn} B'_n \quad (۷۸-۳)$$

حل روابط بین ضرایب در معادلات (۷۷-۳) و (۷۸-۳) ضرایب غیرصفر زیر را می‌دهد

$$B'_2 = \frac{\sigma_1 \rho_0^z}{4\epsilon_0} \quad A'_1 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \rho_0^z$$

$$B_2 = \frac{\sigma_1}{4\epsilon_0 \rho_0} \quad A_1 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}$$

از این رو پتانسیلها از معادلات زیر به دست می‌آیند

$$\Phi_1(\rho, \phi) = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \rho \cos \phi + \frac{\sigma_1}{4\epsilon_0 \rho_0} \rho^2 \sin 2\phi \quad (۷۹-۳)$$

$$\Phi_2(\rho, \phi) = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \frac{\rho_0^z}{\rho} \cos \phi + \frac{\sigma_1 \rho_0^z}{4\epsilon_0} \frac{\sin 2\phi}{\rho^2} \quad (۸۰-۳)$$

این واقعیت که پتانسیلهای تعیین شده، فقط به هماهنگهای $\cos \phi$ و $\sin 2\phi$ است، که با هماهنگهای دخیل در توزیع بار مفروض یکسان هستند وابسته‌اند، نشان می‌دهد که کلیه هماهنگهای دیگر را می‌توانستیم زودتر از این جواب — یعنی معادلات (۷۴-۳) و (۷۵-۳) — حذف کنیم. البته این امر محاسبات را ساده خواهد کرد. ■

۴-۴-۳ معادله لاپلاس در سه بعد — مختصات دکارتی
معادله لاپلاس در مختصات دکارتی،

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (۸۱-۳)$$

را با روش جداسازی متغیرها نیز می‌توان حل کرد. Φ را به صورت حاصلضرب $F_1(x)F_2(y)F_3(z)$ انتخاب می‌کنیم. با قراردادن این حاصلضرب در معادله به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{F_1(x)} \frac{d^2 F_1(x)}{dx^2} + \frac{1}{F_2(y)} \frac{d^2 F_2(y)}{dy^2} = -\frac{1}{F_3(z)} \frac{d^2 F_3(z)}{dz^2} \quad (۸۲-۳)$$

مثال ۱۱-۳ جعبهٔ رسانا

همان طور که در شکل ۸-۳ نشان داده شده است، یک جعبه به ابعاد a ، b و c در نظر بگیرید. رویهٔ بالایی در $z = c$ در ولتاژ $V_1(x, y)$ و رویه‌های دیگر، که از رویهٔ بالایی جدا شده‌اند، در پتانسیل صفر نگه داشته می‌شوند. چون پتانسیل رویه‌هایی که از مبدأ می‌گذرند صفر است، این شرط فقط در یکی از هشت جمله در بسط — یعنی $\sinh \gamma z \sin \alpha x \sin \beta y$ — صدق می‌کند.

اکنون ثابتهای جداسازی α و β را می‌توان با اعمال شرایط در $x = a$ و $y = b$ محدود کرد. برای آنکه پتانسیل در این صفحات صفر باشد، لازم است $\sin \alpha a = \sin \beta b = 0$ ، که به دست می‌دهد $\alpha = n\pi/a$ و $\beta = m\pi/b$ که n و m اعداد صحیح مثبت هستند. از این رو برای پتانسیل داخل جعبه می‌نویسیم

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sinh \gamma_{mn} z \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (۸۸-۳)$$

که $\gamma_{mn} = \pi(n^2/a^2 + m^2/b^2)^{1/2}$ و A_{mn} ثابتهای هستند که باید به کمک بقیهٔ شرایط مرزی محاسبه شوند. آخرین شرط مرزی در رویهٔ بالایی جعبه است: $\Phi(x, y, c) = V_1(x, y)$ یک تابع مفروض است؛ به این ترتیب

$$V_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sinh \gamma_{mn} c \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (۸۹-۳)$$

که یک سری فوریهٔ دوگانه است. چون توابع سینوسی مستقل خطی هستند [معادلهٔ (۶۳-۳) را ببینید]، در این صورت با ضرب کردن دو

طرف رابطهٔ بالا در $\sin(n\pi x/a) \sin(m\pi y/b)$ و با انتگرال‌گیری روی x و y به ترتیب از صفر تا a و از صفر تا b ، به دست می‌آوریم

$$A_{mn} = \frac{4}{ab \sinh \gamma_{mn} c} \int_0^a dx \int_0^b dy V_1(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (۹۰-۳)$$

در حالتی که $V_1(x, y) = V_0 = \text{const.}$ باشد داریم $A_{mn} = 16V_0 / (mn\pi^2 \sinh \gamma_{mn} c)$ که در آن n و m اعداد صحیح فرد هستند، و از این رو

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n=1,3,\dots} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{16V_0}{mn\pi^2} \frac{\sinh \gamma_{mn} z}{\sinh \gamma_{mn} c} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (۹۱-۳)$$

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که دو رویه در یک پتانسیل غیرصفر معین نگه داشته می‌شوند. فرض کنید علاوه بر آنکه $\Phi(x, y, c) = V_1(x, y)$ داشته باشیم $\Phi(x, b, z) = V_2(x, z)$ بقیهٔ رویه‌ها را در پتانسیل صفر نگاه می‌داریم. پتانسیل را با برهم‌نهی پتانسیل برای حالتی که تمام رویه‌ها بجز رویهٔ $y = b$ به زمین متصل هستند، و جوابی که در بالا به دست آوردیم، یعنی معادلهٔ (۹۱-۳)، می‌توان تعیین کرد. جواب برای رویهٔ غیر متصل به زمین $y = b$ را می‌توان با روشی که منجر به معادلهٔ (۹۱-۳) شد و تعویض نقشهای z و y تعیین کرد. نهایتاً توجه کنید روش برهم‌نهی را می‌توان تعمیم داد تا شرایط مرزی عمومی‌تری را شامل شود. ■

مثال ۱۲-۳ سه صفحهٔ متقاطع

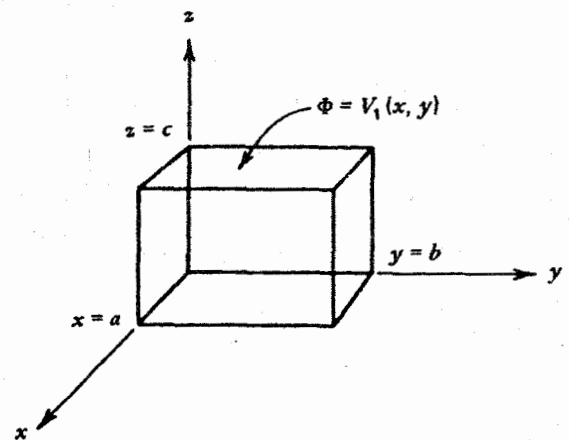
سه صفحهٔ رسانا در نظر بگیرید که یکدیگر را با زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند (شکل ۹۲-۳). صفحات در پتانسیل V_0 نگه داشته می‌شوند. چون این حجم بسته نیست پتانسیل با بسط در حالتی که ثابتهای جداسازی صفر هستند، توصیف می‌شود. استفاده از معادلهٔ (۸۷-۳) و شرایط مرزی در $x = 0$ ، $y = 0$ و $z = 0$ به دست می‌دهد

$$V_0 = A_x yz + A_y y + A_z z + A_0 \quad (۹۲-۳)$$

$$V_0 = A_x xz + A_0 x + A_y z + A_0 \quad (۹۳-۳)$$

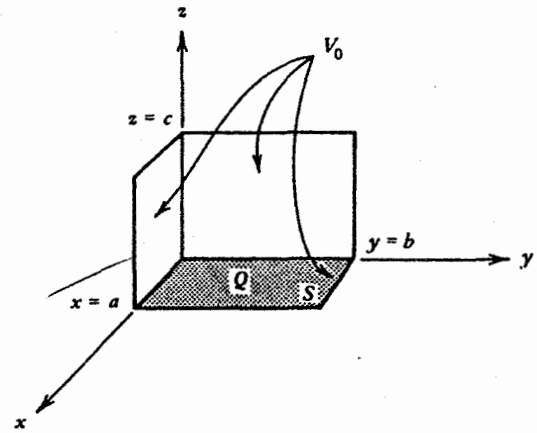
$$V_0 = A_x xy + A_0 x + A_y y + A_0 \quad (۹۴-۳)$$

این روابط نشان می‌دهند $A_x = A_y = A_z = A_0 = 0$



شکل ۸-۳ یک جعبه با یک رویه در یک پتانسیل معین و بقیهٔ وجوه در پتانسیل صفر نگه داشته شده‌اند.

است که جواب، (۱) شرایط هم‌پتانسیل را فقط در سطوح رسانا که ناحیه را در بر می‌گیرد و (۲) معادله لاپلاس یا پواسون را در همه‌جای ناحیه، برآورده سازد. به محض آنکه یک جواب به دست می‌آید، در این صورت می‌دانیم که این جواب درست است. اگر بارها در فضا در خارج از سطوح رسانا قرار گیرند، لازمه آنکه در معادله پواسون صدق کنند، هم‌ارز این گزاره است که بخشی از جواب باید از بارهای موجود در فضا ناشی شود. باقیمانده جواب شرط مرزی صحیح در سطوح رسانا را "تحمیل" خواهد کرد. در واقع این باقیمانده، یا بخش دیگر جواب، از توزیع بار بر روی سطوح رسانا ناشی خواهد شد. با این حال، اغلب توزیع بار ساده‌تر، "غیر واقعی" در خارج از ناحیه‌ای که در آنجا در جستجوی جواب هستیم، شرایط مرزی صحیح را بر روی سطوح مورد نظر تأمین خواهد کرد.



شکل ۹-۳ نصف یک جعبه با سطوحی که در پتانسیل صفر نگه داشته شده‌اند.

و $A_1 = V_0$. به این ترتیب

$$\Phi(x, y, z) = A_1 xyz + V_0 \quad (۹۵-۳)$$

شناخت کل بار بر روی یکی از صفحات امکان محاسبه مقدار A_1 را می‌دهد. فرض کنید کل بار روی صفحه xy مساوی با Q و سطح آن S باشد. بنابراین

$$Q = \int_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = -A_1 \int xy dx dy = -\frac{1}{4} A_1 S^2 \quad (۹۶-۳)$$

یا $A_1 = -4Q/S^2$ ، و از این رو

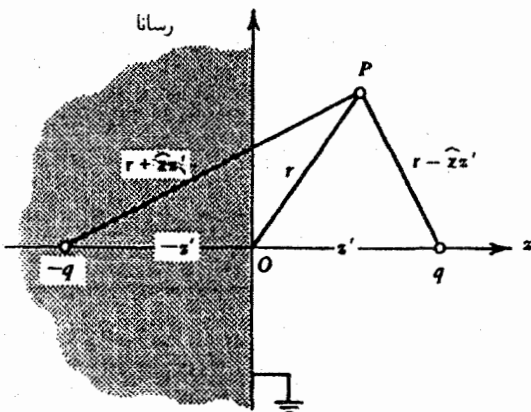
$$\Phi(x, y, z) = -\frac{4Q}{S^2} xyz \quad (۹۷-۳)$$

۵-۳ روش تصاویر

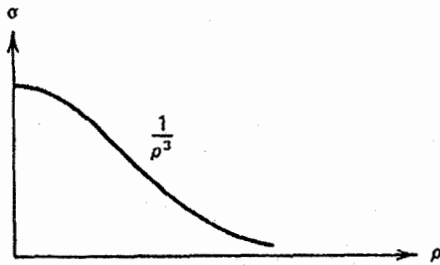
اکنون شرط بالا که بر این فرض استوار بود که کل بارها بر روی سطوح رسانا قرار دارد را کنار می‌گذاریم، و مسائل الکتروستاتیکی را در نظر می‌گیریم که چگالی بار در فضایی که توسط رساناها اشغال نشده است، صفر نباشد. با این حال فقط بارهای نقطه‌ای و بارهای خطی را به تفصیل در نظر خواهیم گرفت. در آن صورت به آسانی می‌توان آنها را به توزیعهای بار پیوسته تعمیم داد. دقت کنید که این مسائل با روشهای مسئله مقدار مرزی که در بالا ذکر شد به بهترین شکل حل نمی‌شوند. برای حل این مسائل روش بسیار قوی تصاویر را معرفی می‌کنیم؛ در واقع این روش یک نمایش مؤثر از قدرت استفاده از قضایای یکتایی، یعنی یکتایی جوابهای مسائل الکتروستاتیکی است، که در بخش ۲-۳ بحث شد. برای پیدا کردن یک جواب الکتروستاتیکی این مسائل لازم

۱۵-۳ بار نقطه‌ای و صفحه

این نقاط را با در نظر گرفتن یک بار نقطه‌ای q ، به فاصله z' از یک ورقه رسانای تخت بزرگ که از نظر گستردگی می‌توان آن را به‌طور مؤثر نامتناهی در نظر گرفت (شکل ۱۰-۳) را ببینید) توضیح خواهیم داد. پتانسیل ورقه به دلیل اتصال آن به زمین، صفر است. می‌خواهیم پتانسیل و میدان الکتریکی را در فضایی که q را در بردارد، پیدا کنیم. این ناحیه در شکل فضای $z \geq 0$ است. مبدأ را درست زیر بار q ، روی سطح رسانا در نظر می‌گیریم.



شکل ۱۰-۳ یک بار نقطه‌ای q در نزدیکی یک ورقه رسانای بزرگ متصل به زمین. همچنین در شکل یک بار تصویری $-q$ نشان داده شده است که وقتی میدان آن به میدان بار واقعی افزوده می‌شود، میدان صحیح را می‌دهد. ۱. برای مسئله مورد نظر این فرض لازم نیست، بلکه یک انتخاب مناسب است. اگر پتانسیل را دلخواه در نظر می‌گیریم، معنی‌اش به سادگی این بود که پتانسیل بار نقطه‌ای در بینهایت نیز باید غیر صفر باشد.



شکل ۱۱-۳ چگالی بار سطحی القاشده بر روی یک صفحه رسانای متصل به زمین که از حضور یک بار نقطه‌ای مجاور ناشی شده است.

بزرگ می‌شود، به صورت $1/\rho^3$ نزول می‌کند (شکل ۱۱-۳). هر چند که تصور می‌کنیم جواب از q و "بار تصویری" $-q$ ناشی می‌شود، اما این بار القاشده است که به همراه بار اولیه q ، جواب واقعی را به وجود می‌آورد. باید توجه کرد که ممکن است جواب منحصر به فرد در یک ناحیه مفروض از فضا توسط توزیعیهای بار غیر منحصر به فرد که در خارج از این ناحیه قرار گرفته‌اند، داده شود. فقط وقتی که توزیع بار به مرزهای فیزیکی این ناحیه محدود می‌شود، توزیع بار منحصر به فرد است.

به سادگی می‌توان ثابت کرد که کل بار سطحی القاشده Q با $-q$ برابر است و لازمه این امر آن است که تمام خطوط نیرو به رسانا ختم شوند. انتگرال‌گیری چگالی بار بر روی مساحت صفحه رسانا به دست می‌دهد

$$Q = \int 2\pi\sigma\rho d\rho = -qz' \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{\rho d\rho}{[\rho^2 + (z')^2]^{3/2}} = -q$$

بر بار q نیرویی وارد می‌شود که آن را به سطح رسانا جذب می‌کند. در شکل ۱۲-۳ مسیر یک ذره باردار در نزدیکی یک صفحه تخت رسانا نشان داده شده است. نیرو دارای یک بزرگی است که میدان الکتریکی بار سطحی القاشده آن را تعیین می‌کند. چون این میدان با میدان بار مجازی یکسان است، نیرو به سادگی مانند نیروی بین دو بار نقطه‌ای به دست می‌آید

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{z}} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2z')^2} \quad (102-3)$$

این نیروی تصویری سهم بزرگی در جلوگیری از ترک الکترونیهای سطوح رساناها دارد، و به "تابع کار" مواد رسانا وابسته است.

با شناخت جواب مسئله "نقطه و صفحه" بقیه مسائلی را که شامل ورقه‌های رسانا هستند می‌توان حل کرد. با انجام اصل برهم‌نهی، جواب هر توزیع بار ثابت (در نزدیکی یک رسانای تخت "نامتناهی") را

مختصات استوانه‌ای برای این مسئله مناسب است، زیرا به روشنی نشان می‌دهد که پیرامون محور z تقارن دارد. در این مسئله باید توجه کنیم که تشخیص یک پتانسیل صفر برای صفحه $z = 0$ به سادگی با افزودن یک پتانسیل ناشی از بار تصویری $-q$ ، که در فاصله z' زیر صفحه $z = 0$ واقع است به پتانسیل ناشی از بار q به دست می‌آید. در نتیجه، پتانسیل و میدان الکتریکی برای $z \geq 0$ ، به سادگی، پتانسیل ناشی از دو بار نقطه‌ای q و $-q$ به فاصله z' از یکدیگر است. این جواب را می‌آزماییم. آن را می‌توان به صورت

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - z'\hat{\mathbf{z}}|} + \frac{-q}{|\mathbf{r} + z'\hat{\mathbf{z}}|} \right) \quad z \geq 0 \quad (98-3)$$

نوشت. در مختصات استوانه‌ای، $\mathbf{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{\mathbf{z}}$ و

$$|\mathbf{r} \pm z'\hat{\mathbf{z}}|^2 = \rho^2 + (z \pm z')^2$$

میدان الکتریکی را می‌توان از عبارت $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$ یا مستقیماً از فرمول کولن برای دو بار نقطه‌ای به دست آورد

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q(\mathbf{r} - z'\hat{\mathbf{z}})}{|\mathbf{r} - z'\hat{\mathbf{z}}|^3} - \frac{q(\mathbf{r} + z'\hat{\mathbf{z}})}{|\mathbf{r} + z'\hat{\mathbf{z}}|^3} \right] \quad z \geq 0 \quad (99-3)$$

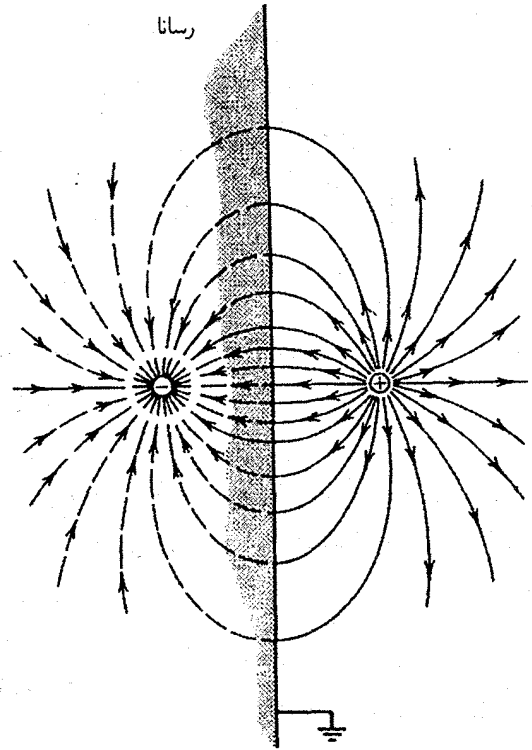
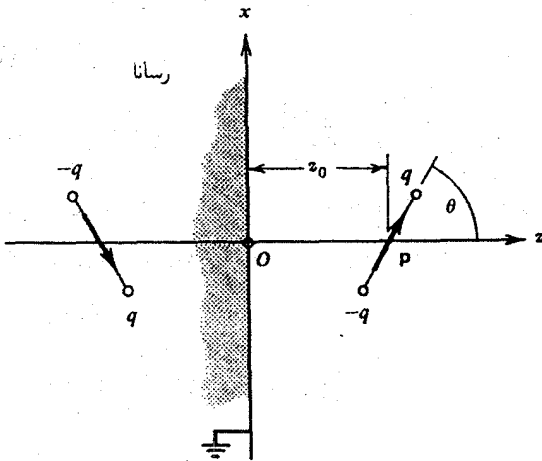
به این ترتیب به ازای، $z = 0$ و $\mathbf{r} = \rho\hat{\rho}$ ، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\rho\hat{\rho} - z'\hat{\mathbf{z}}}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} - \frac{\rho\hat{\rho} + z'\hat{\mathbf{z}}}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-2z'\hat{\mathbf{z}}}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (100-3)$$

از این نتیجه می‌توان چگالی بار سطحی واقعی را بر روی صفحه $z = 0$ رسانا به دست آورد. این چگالی با فرمول

$$\sigma = \epsilon_0 (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{z}})_{z=0} = \frac{-q}{2\pi} \frac{z'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \quad (101-3)$$

داده می‌شود. همان طور که انتظار می‌رود، بار القاشده منفی است. بیشینه مقدار آن در $\rho = 0$ است، و ضمن آنکه ρ در مقایسه با z'



شکل ۳-۱۳ تعیین میدانهای ایجادشده، با استفاده از روش تصاویر، به وسیله یک دوقطبی که در نزدیکی یک صفحه رسانای بزرگ واقع است.

است. برای آنکه پتانسیل در $z = 0$ برآورده شود، نیاز به معرفی دو بار تصویری است. اولین بار تصویری به بزرگی $-q$ ، تصویر q دوقطبی است و در زیر صفحه با فاصله مساوی قرار گرفته است، از طرف دیگر دومین بار تصویری q ، تصویر بار $-q$ دوقطبی است و در زیر صفحه با فاصله مساوی قرار گرفته است.

شکل ۳-۱۲ خطوط نیرو بین یک بار نقطه‌ای و یک ورقه رسانای متصل به زمین مجاور بار.

بدیهی است که دستگاه بارهای تصویری متشکل از یک دوقطبی است که درست زیر صفحه به فاصله z_0 از صفحه واقع است. گشتاور دوقطبی p' ، برحسب گشتاور دوقطبی واقعی، دارای مؤلفه‌های $p'_z = p \cos \theta$ و $p'_x = -p \sin \theta$ است. بنابراین در حالت کلی، مؤلفه دوقطبی که بر صفحه عمود است، دارای یک دوقطبی تصویری با بزرگی و جهت یکسان است که به فاصله مساوی در زیر صفحه قرار دارد. از طرف دیگر، مؤلفه دوقطبی که با صفحه موازی است، دارای یک دوقطبی تصویری با بزرگی یکسان اما در جهت مخالف است، و محل آن نیز به فاصله مساوی درست زیر صفحه است.

می‌توان به سادگی با برهم‌نهی جوابها برای عناصر بار متمایز به دست آورد، هر عنصر بار واقعی دارای تصویری (آینه‌ای) در صفحه است. در این صورت جواب را می‌توان رسماً به صورت زیر نوشت:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{\xi} dv + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} \frac{\rho_1 dv_1}{\xi_1} \quad (103-3)$$

شاخص I نشان‌دهنده توزیع تصویر آینه‌ای است (مثال ۳-۱۳ را ببینید).

مثال ۳-۱۳ یک دوقطبی و یک صفحه رسانا

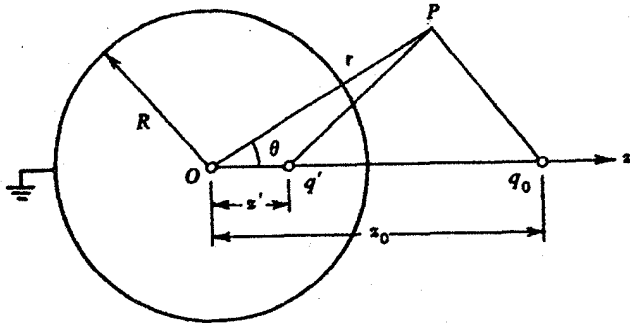
اکنون می‌توانیم پتانسیل را در ناحیه $z > 0$ محاسبه کنیم:

همان‌طور که در شکل ۳-۱۳ می‌بینیم، روش برهم‌نهی را می‌توان با در نظر گرفتن یک دوقطبی الکتریکی در نزدیکی یک صفحه رسانای متصل به زمین توضیح داد. دوقطبی، با گشتاور دوقطبی p ، در فاصله z_0 از صفحه و تحت زاویه θ نسبت به عمود بر صفحه است.

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot (\mathbf{r} - \hat{z}z_0)}{|\mathbf{r} - \hat{z}z_0|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p' \cdot (\mathbf{r} + \hat{z}z_0)}{|\mathbf{r} + \hat{z}z_0|^3} \quad (104-3)$$

نیروی وارد از دوقطبی بر صفحه با نیروی وارد از دوقطبی بر تصویر آن یکسان است. در فصل ۲ نشان دادیم که بریک گشتاور دوقطبی p در یک میدان خارجی \mathbf{E} نیروی $\mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{E}$ وارد می‌شود [معادله (۲-۶۵)]. در این مسئله \mathbf{E} را می‌توان میدان الکتریکی ایجادشده به وسیله دوقطبی در محل تصویر آن انتخاب کرد. می‌خواهیم نیرو را در حالتی که دوقطبی

از یک دستگاه مختصات که مبدأ آن درست زیر دوقطبی بر روی سطح صفحه است، و محور z از دوقطبی می‌گذرد، استفاده می‌کنیم. برای پیدا کردن دستگاه تصاویر مورد نیاز برای تولید یک پتانسیل صفر بر روی صفحه $z = 0$ ، دوقطبی را با دو بار q و $-q$ ، به فاصله l از یکدیگر نمایش می‌دهیم به طوری که $l, p = ql$ در جهت p



شکل ۱۴-۳ روش تصاویر که بر یک بار نقطه‌ای در نزدیکی یک کره رسانای متصل به زمین اعمال می‌شود.

که در آن $R = \hat{r}R$. باید سعی کنیم با فرض معلوم بودن R و q_0 و z ، این معادله را برای z' و q' حل کنیم. اگر رابطه بالا را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{q_0/R}{\left|\hat{r} - \frac{z_0}{R}\hat{z}\right|} = \frac{-q'/z'}{\left|\hat{r} \frac{R}{z'} - \hat{z}\right|} \quad (108-3)$$

بلافاصله یک جواب به دست می‌آید. [این فاکتورگیری تنها حالتی است که معنی دار است؛ اگر از R از دو طرف فاکتور می‌گیریم می‌فهمیم (مطالب بعد را بخوانید) که هیچ گونه جوابی ممکن نیست]. برای آنکه به تساوی برسیم به ترتیب صورتها و مخرجهای معادله (۱۰۸-۳) را مساوی قرار می‌دهیم، تا به دست آوریم

$$\hat{r} - \frac{z_0}{R}\hat{z} = \frac{R}{z'}\hat{r} - \hat{z} \quad \text{و} \quad \frac{q_0}{R} = \frac{-q'}{z'} \quad (109-3)$$

این دو معادله همزمان را می‌توان به سادگی حل کرد. مثلاً مربع مخرجها می‌دهد

$$1 - 2\frac{z_0}{R}(\hat{r} \cdot \hat{z}) + \left(\frac{z_0}{R}\right)^2 = 1 - 2\frac{R}{z'}(\hat{r} \cdot \hat{z}) + \left(\frac{R}{z'}\right)^2$$

و از این رو اگر قرار دهیم $z_0/R = R/z'$ ؛ یعنی $z_0 z' = R^2$ و از این رو اگر قرار دهیم $z_0/R = R/z'$ ؛ یعنی $z_0 z' = R^2$ ؛ تساوی برقرار می‌شود. بنابراین دو رابطه در معادله (۱۰۹-۳) به دست می‌دهد

$$z' = \frac{R^2}{z_0} \quad q' = -\frac{R}{z_0} q_0 \quad (110-3)$$

این مقادیر قابل تشخیص‌اند و نشان می‌دهند که به درستی (فقط) یک بار تصویری که اکنون مکان و بزرگی آن را تعیین می‌کنیم برای حل

بر صفحه عمود است، یعنی $\theta = 0$ ، محاسبه کنیم. بنابر معادله (۴۷-۲) عبارت است از:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathcal{V}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right] \quad (47-2)$$

که در آن $\mathbf{r}' = z_0 \hat{z}$ در $\mathbf{r} = -z_0 \hat{z}$ مکان دوقطبی تصویری، مؤلفه‌های میدان در جهتهای x و y صفر می‌شوند، و مؤلفه z با رابطه زیر داده می‌شود

$$E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathcal{V}(z-z_0)^2}{[x^2+y^2+(z-z_0)^2]^{5/2}} - \frac{1}{[x^2+y^2+(z-z_0)^2]^{3/2}} \right] \quad (105-3)$$

با مشتق‌گیری E_z نسبت به z و محاسبه نتیجه در $(0, 0, -z_0)$ به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{-3p}{32\pi\epsilon_0 z_0^2}$$

بنابراین نیروی بین دوقطبیها برابر است با

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}' \cdot \nabla \mathbf{E} = p' \frac{\partial E_z}{\partial z} \hat{z} = -\frac{3p^2}{32\pi\epsilon_0 z_0^2} \hat{z} \quad (106-3)$$

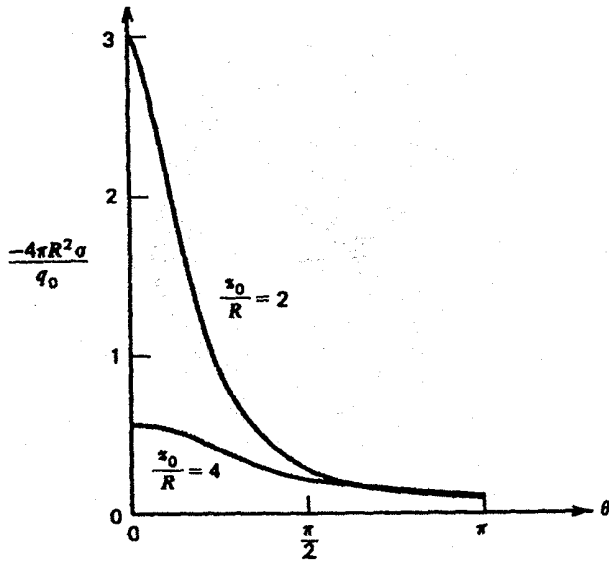
۲-۵-۳ بار نقطه‌ای و کره

مسئله پیدا کردن جواب مسئله یک بار نقطه‌ای q_0 ، خارج از یک کره رسانای متصل به زمین ($\Phi \equiv 0$) به شعاع R ، را در نظر می‌گیریم. سؤال این است که آیا می‌توان یک مجموعه مناسب از بارهای نقطه‌ای تصویری واقع در داخل کره پیدا کرد، که وقتی پتانسیل q_0 (واقع در z) را به این مجموعه بیفزاییم منجر به پتانسیل صفر برای کره بشود. جواب مثبت است اما فقط می‌توان آن را از قبل تخمین زد.

با توجه به تقارن مسئله، توزیع بار مجازی باید پیرامون خطی که q_0 را به مرکز کره در O متصل می‌کند، متقارن باشد. سعی بر آن است که یک بار تصویری تنها، به بزرگی q' و واقع در $z = z'$ پیدا کنیم، که شرط پتانسیل صفر را برآورده کند. اگر منظور "حذف پتانسیل" باشد، علامت بار تصویری باید مخالف علامت بار q_0 باشد.

شکل هندسی آن در شکل ۱۴-۳ ترسیم شده است. نیاز داریم

$$\Phi(\mathbf{r} = R) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_0}{|\mathbf{R} - \mathbf{z}_0|} + \frac{q'}{|\mathbf{R} - \mathbf{z}'|} \right] = 0$$



شکل ۱۵-۳ چگالی بار سطحی القاشده بر روی کره متصل به زمین که از حضور یک بار نقطه‌ای مجاور ناشی می‌شود.

وقتی $1 \ll (R/z_0)$ ، نیرو مانند نیروی ناشی از دوقطبی با گشتاور دوقطبی $q_0 R$ عبارت است از

$$F \rightarrow \frac{q_0^2 R}{4\pi\epsilon_0 z_0^2}$$

وقتی z_0 به R نزدیک می‌شود، یعنی وقتی $(1 + \delta) \rightarrow (z_0/R)$ که در آن $\delta \ll 1$ ، مانند مورد بار نقطه‌ای و صفحه، داریم

$$F \rightarrow \frac{q_0^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2\delta}\right)^2$$

شکل ۱۶-۳ (الف) خطوط نیروی بین بار و کره را نشان می‌دهد. نهایتاً، در این مسئله فرض کردیم کره در پتانسیل صفر و از این رو دارای بار q' باشد. اگر به مسئله‌ای علاقه‌مند باشیم که در آن به کره پتانسیل $\Phi = V$ داده شود، در این صورت از روش برهم‌نهی می‌توان استفاده کرد. بدیهی است که در این حالت بار روی کره با q' — مثلاً به اندازه q'' — تفاوت خواهد داشت. به عبارت دیگر برای رسیدن سطح کره به پتانسیل V ، یک بار q'' لازم است. برحسب بارهای تصویری فوراً می‌توان نتیجه گرفت که q'' باید در مبدأ قرار گیرد و با معادله

$$V = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (115-3)$$

داده شود. q'' برحسب بار سطحی، به صورت یکنواخت بر روی کره توزیع می‌شود. در این صورت کل چگالی بار باید با

$$\sigma = \sigma(\Phi = 0) + (V\epsilon_0)/R$$

مسئله لازم است. اکنون می‌توان جملات Φ و $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ را به‌ازای هر نقطه $r \geq R$ نوشت. پتانسیل

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_0}{|r - z_0|} + \frac{q'}{|r - z'|} \right] \quad (111-3)$$

به‌سادگی پتانسیل دو بار نقطه‌ای q_0 و q' است. میدان الکتریکی از معادله (۱۱۱-۳) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_0(r - z_0)}{|r - z_0|^3} + \frac{q'(r - z')}{|r - z'|^3} \right] \quad (112-3)$$

میدان، وقتی r از خارج کره به سطح نزدیک می‌شود، برحسب زاویه θ

$$\mathbf{E}(r \rightarrow R) \rightarrow -\frac{q_0 R}{4\pi\epsilon_0 z_0^2} \frac{z_0'/R - 1}{[z_0'/R - 2(z_0/R)\cos\theta + 1]^{3/2}}$$

داده می‌شود. همان‌طور که انتظار داریم این میدان بر سطح کره عمود است. در نتیجه، چگالی بار سطحی σ در سطح برابر است با

$$\sigma(R) = \epsilon_0 [\mathbf{E}(r = R) \cdot \hat{\mathbf{R}}]$$

یا

$$\sigma(R) = \frac{-q_0}{4\pi R^2} \cdot \left(\frac{R}{z_0}\right)^2 \frac{1}{[z_0'/R - 2(z_0/R)\cos\theta + 1]^{3/2}} \quad (113-3)$$

شکل ۱۵-۳ چگالی بار القاشده را به‌صورت تابعی از θ به‌ازای دو مقدار z_0/R نشان می‌دهد. همان‌طور که انتظار می‌رود چگالی بار در $\theta = 0^\circ$ بیشینه و در $\theta = 180^\circ$ کمینه است.

کل بار بر روی سطح (خارجی) رسانا درست برابر است با q' . این را می‌توان با انتگرال‌گیری مستقیم از جمله بالا برای σ بر روی سطح کره اثبات کرد. این یک نتیجه لازم از این واقعیت است که کل شار ناشی از بار مجازی بر روی سطحی که کاملاً کره را در بر می‌گیرد، باید با کل شار حاصل از بار سطحی یکسان باشد.

نیروی وارد بر بار نقطه‌ای بر اثر بار القاشده بر روی کره عبارت است از

$$\mathbf{F} = \frac{q_0 q' \hat{\mathbf{z}}}{4\pi\epsilon_0 (z_0 - z')^2} = \frac{q_0^2 (R/z_0) \hat{\mathbf{z}}}{4\pi\epsilon_0 z_0^2 (1 - R^2/z_0^2)^2} \quad (114-3)$$

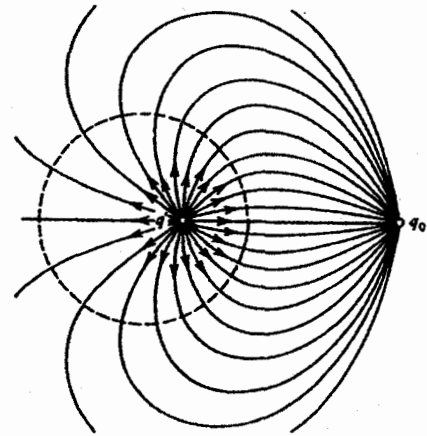
داده می‌شود. شکل ۳-۱۶ (ب) نیروی بین بار q و کره باردار را به صورت تابعی از فاصله بین کره‌ها، به‌ازای تعدادی از مقادیر Q/q_0 می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد که حتی وقتی $Q > q_0$ ، دو بار در فواصل کوتاه یکدیگر را جذب خواهند کرد.

اگر یک کره رسانای بی‌بار را در نزدیکی یک بار نقطه‌ای q قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم که پتانسیل کره باید غیرصفر باشد، و مجدداً برای محاسبه پتانسیل در خارج کره به دو بار تصویری نیاز است. پتانسیل کره برابر خواهد بود با $(q/R)(1/4\pi\epsilon_0)$. (چرا؟)

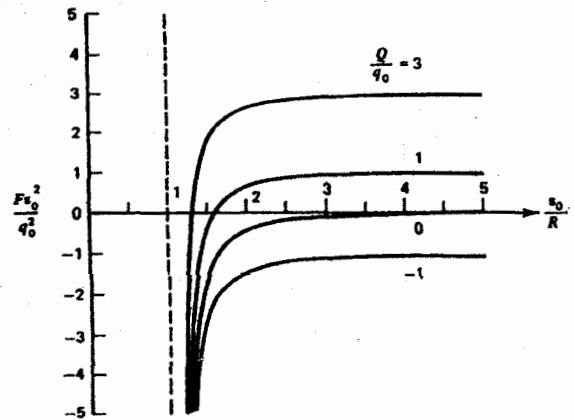
اگر یک بار نقطه‌ای را به فاصله z' از مرکز کره قرار می‌دادیم — مثلاً در داخل کره — مسئله‌ای تقریباً مشابه با مسئله‌ای که در بالا بحث شد می‌داشتیم (مسئله «خارجی»). در واقع تمام فرمولهای داده شده در آنجا معتبر هستند، اگر درک کنیم که در این حالت تصویر بار، q_0 بوده و در z_0 واقع است، حال آنکه بار داخلی q' در z' قرار دارد (هر دو مشخص هستند). در این صورت R فاصله از مبدأ تا سطح داخلی کره است. تنها تفاوت ممکن در دو مسئله وقتی پدید می‌آید که کره در پتانسیل $V \neq 0$ قرار گیرد. این موضوع به‌سادگی با داشتن بار $q' = 4\pi\epsilon_0 RV$ که به‌صورت یکنواخت بر روی یک سطح کروی به شعاع بزرگتر از R توزیع شده باشد، قابل اجراست. در مسئله واقعی این بار باید بر روی سطح خارجی پوسته کروی رسانا قرار گیرد. میدان E در داخل کره نباید تحت تأثیر چنین توزیع باری قرار گیرد.

یک ایده اساسی برای نظریه روش تصویری آن است که می‌توان هر سطح هم‌پتانسیل بسته، که از یک توزیع بار (نقطه‌ای یا توزیع شده) تعیین می‌شود، را با یک پوسته رسانا که در خور شکل هندسی سطح هم‌پتانسیل و دارای پتانسیل درستی است «تعویض» کرد. در مثال بالا در مورد نقطه و کره، مسئله را می‌توان ابتدا تنها به‌عنوان مسئله بارهای نقطه‌ای حل کرد. پس از استقرار این سطح هم‌پتانسیل کروی، سطح هم‌پتانسیل را می‌توان با یک پوسته رسانا در پتانسیل مناسب تعویض کرد. اکنون بارهای مجازی بر روی پوسته به‌صورت یک چگالی بار ظاهر خواهند شد. با این حال باید برای یک پوسته رسانا به ضخامت متناهی، یک سطح هم‌پتانسیل فقط با یک رویه پوسته جور کرد، و میدانها فقط روی این رویه سطح با میدانهای اولیه یکسان خواهند بود.

مثال ۳-۱۴ یک دوقطبی در نزدیکی یک کره رسانا وقتی یک دوقطبی الکتریکی را نزدیک یک کره متصل به زمین بیاوریم، پتانسیل و میدان تغییر خواهند کرد. از روش تصاویر می‌توان برای تعیین این تغییرات استفاده کرد. همان طور که در شکل ۳-۱۷



(الف)



(ب)

شکل ۳-۱۶ (الف) خطوط نیرو بین یک بار نقطه‌ای و یک کره رسانای متصل به زمین. (ب) نیروی بین بار نقطه‌ای و یک کره باردار به‌صورت تابعی از فاصله بین آنها.

داده شود، و به این ترتیب کل بار بر روی کره برابر است با

$$Q = q' + q'' \quad (۱۱۶-۳)$$

به‌طور خلاصه در این حالت، به‌منظور آنکه پتانسیل کره $V \neq 0$ باشد، دو بار تصویری مورد نیاز است. یکی از این بارها در مرکز کره واقع است. پتانسیل در خارج کره با معادله زیر

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_0}{|r - z_0|} + \frac{q'}{|r - z'|} + \frac{q''}{r} \right] \quad (۱۱۷-۳)$$

را در نظر بگیرید. بنابر معادله (۱۱۰-۳) بارهای مجازی q'_1 و q'_2 عبارتند از

$$q'_1 = -\frac{R}{z_0 + l/2} q \cos \alpha \quad q'_2 = \frac{R}{z_0 - l/2} q \cos \alpha$$

و به ترتیب در

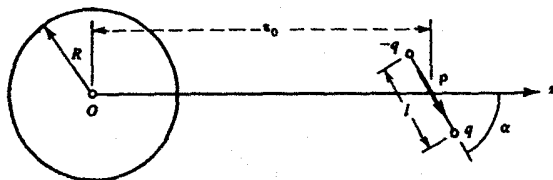
$$b_1 = \frac{R^2}{z_0 + l/2} \quad b_2 = \frac{R^2}{z_0 - l/2}$$

قرار دارند. l را در حد دوقطبی می‌توان کوچک انتخاب کرد، بنابراین دامنه و مکانها را می‌توان برحسب l/z_0 بسط داد. جملات مرتبه اول عبارتند از

$$q'_1 \approx \frac{-qR}{z_0} \left(1 - \frac{l}{2z_0}\right) \cos \alpha \quad q'_2 \approx \frac{qR}{z_0} \left(1 + \frac{l}{2z_0}\right) \cos \alpha$$

$$b_1 \approx \frac{R^2}{z_0} \left(1 - \frac{l}{2z_0}\right) \quad b_2 \approx \frac{R^2}{z_0} \left(1 + \frac{l}{2z_0}\right)$$

چون q'_1 با q'_2 تفاوت دارد، در این صورت تصویر مؤلفه موازی دوقطبی شامل (۱) یک دوقطبی تصویری با گشتاور دوقطبی p' است

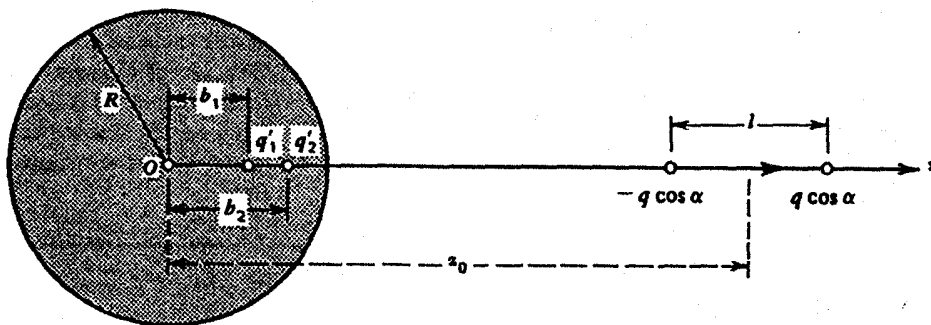


شکل ۱۷-۳ یک دوقطبی در نزدیکی یک کره رسانای متصل به زمین.

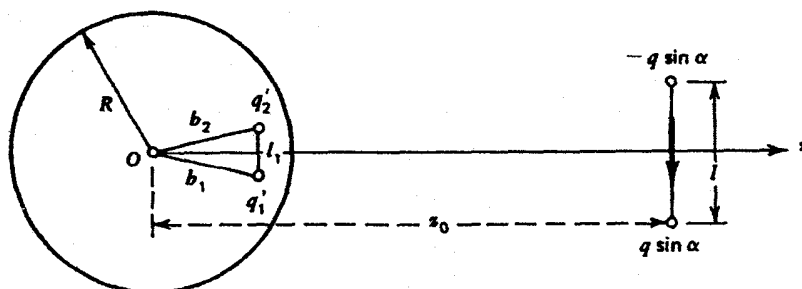
نشان داده شده است، دوقطبی را با دو بار نقطه‌ای به فاصله بسیار اندک از یکدیگر نمایش می‌دهیم. و از قواعدی که در بالا ذکر شد برای رفتار یک بار نقطه‌ای در نزدیکی یک کره استفاده می‌کنیم. پس از آن قواعد مربوط به رفتار یک دوقطبی را که از یک توزیع بار دلخواه ناشی می‌شود به دست می‌آوریم.

گشتاور دوقطبی p با هر زاویه‌ای (α) نسبت به محور z ، به فاصله z_0 از مرکز کره‌ای به شعاع R انتخاب می‌شود، و آن را با بارهای q و $-q$ به فاصله l از یکدیگر نشان می‌دهند، به طوری که $p = ql$.

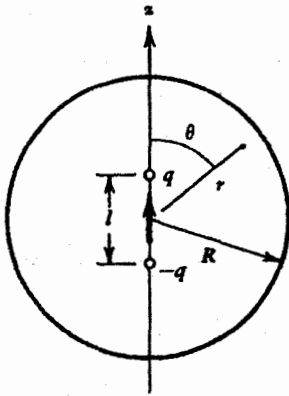
گشتاور دوقطبی را به دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم. همان طور که به ترتیب در شکل‌های ۱۸-۳ و ۱۹-۳ نشان داده شده است، یک مؤلفه از مرکز کره می‌گذرد و مؤلفه دوم عمود بر این مؤلفه است. ابتدا شکل ۱۸-۳



شکل ۱۸-۳ روش تصاویر که بر روی یک دوقطبی واقع در نزدیکی یک کره رسانای متصل به زمین، در راستای یک قطر کره اعمال شده است.



شکل ۱۹-۳ روش تصاویر که بر روی یک دوقطبی در جهت عمود بر قطر یک کره رسانای متصل به زمین اعمال شده است.



شکل ۲۰-۳ یک دوقطبی واقع در مرکز یک کره متصل به زمین.

توجه کنید که d بزرگ است، حال آنکه b کوچک است، زیرا l کوچک است؛ بنابراین جمله اول را برحسب توانهای $1/d$ و جمله دوم را برحسب توانهای $1/r$ بسط می‌دهیم. با ننگ داشتن جملات از مرتبه $(1/d)^2$ و $(1/r)^2$ معادله (۱۲۱-۳) به معادله زیر

$$\Phi_1(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^2} \cos\theta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qlr}{R^2} \quad (122-3)$$

تبدیل می‌شود. به همین ترتیب پتانسیل ناشی از بار $-q$ که در $-l/2$ واقع است، از نتیجه بالا با تغییر q به $-q$ و l به $-l$ محاسبه می‌شود. نتیجه عبارت است از

$$\Phi_2(r, \theta) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^2} \cos\theta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qlr}{R^2} \quad (123-3)$$

با جمع معادلات (۱۲۲-۳) و (۱۲۳-۳) به دست می‌آوریم

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pr}{R^2} \cos\theta \quad (124-3)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که علاوه بر پتانسیلی که از خود دوقطبی، یعنی جمله اول ایجاد می‌شود، یک پتانسیل دیگر نیز که از یک میدان الکتریکی ثابت ناشی می‌شود، وجود دارد: $(1/4\pi\epsilon_0)p/R^2$. این میدان اضافی از یک توزیع بار القاشده بر روی سطح کره متصل به زمین ناشی می‌شود. گرفتن شیب عمودی $\Phi(r, \theta)$ و استفاده از $\sigma = -\epsilon_0 \partial\Phi/\partial r$ در $r = R$ به دست می‌دهد

$$\sigma = \frac{2p}{4\pi R^2} \cos\theta \quad (125-3)$$

که در فاصله $b = (1/2)(b_1 + b_2)$ از مرکز کره قرار دارد

$$\mathbf{p}' = \left(\frac{R}{z_0} \right)^2 \hat{\mathbf{z}} p \cos\alpha \quad b = \frac{R^2}{z_0} \quad (118-3)$$

و (۲) یک بار واقع در فاصله R^2/z_0 از مرکز و به بزرگی q_1 است که با معادله زیر

$$q_1 = q'_1 + q'_2 = \frac{Rp \cos\alpha}{z_0^2} \quad (119-3)$$

داده می‌شود.

شکل ۱۹-۳ دو بار را که مؤلفه عمودی دوقطبی را شامل می‌شوند، نشان می‌دهد. این بارها نسبت به مرکز کره متقارن هستند؛ از این رو بارهای تصویری آنها نیز نسبت به مرکز کره متقارن خواهند بود. این فقط منجر به یک دوقطبی تصویری می‌شود. برای محاسبه مقدار دوقطبی تصویری و مکان آن مجدداً از قواعد مربوط به یک بار در نزدیکی یک کره استفاده می‌کنیم. بارهای تصویری تا مرتبه صفر در l/z_0 برای $q'_1 = (-Rq/z_0) \sin\alpha$ و $q'_2 = (Rq/z_0) \sin\alpha$ هر دو بار تا مرتبه صفر در l/z_0 در فاصله $b_1 = b_2 = b = R^2/z_0$ از مرکز کره واقع شده‌اند. بین بارهای تصویری عبارت است از $b_1/l = b/z_0 = R^2/z_0^2$. در این صورت گشتاور دوقطبی \mathbf{p}' برابر است با

$$\mathbf{p}' = \left(\frac{R}{z_0} \right)^2 p \sin\alpha \quad (120-3)$$

و به فاصله $b = R^2/z_0$ از مرکز کره واقع شده است.

مثال ۱۵-۳ یک دوقطبی در مرکز کره‌ای رسانا

از روش تصاویر می‌توان برای حل مسئله تأثیر یک دوقطبی الکتریکی در مرکز یک کره متصل به زمین استفاده کرد (شکل ۲۰-۳). دوقطبی را با دو بار نقطه‌ای به فاصله اندک l نشان می‌دهیم. چون یک بار در بالا و دیگری در پایین مرکز کره واقع است، در این صورت بار تصویری آنها در دو سوی مخالف کره واقع می‌شوند، و در نتیجه چنین دستگاه تصویری یک دوقطبی تصویری را شامل نمی‌شود.

اثر بار q را که به فاصله $l/2$ از مرکز قرار دارد در نظر می‌گیریم. بار تصویری آن $-(R/b)q$ است و در $d = 2R^2/l$ واقع است. پتانسیل ناشی از این دو بار در ناحیه داخلی برابر است با

$$\Phi_1(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-Rq/b}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta)^{1/2}} + \frac{q}{(r^2 + b^2 - 2rb \cos\theta)^{1/2}} \right] \quad (121-3)$$

مقادیر m بین صفر و یک، مقادیر منفی پتانسیل را ارائه می‌دهند. اگر $m > 1$ باشد، پتانسیل مثبت خواهد بود، به سادگی دیده می‌شود که شکل سطوح هم‌پتانسیل، استوانه‌های دوار هستند که مرکز این استوانه‌ها بر روی محور x واقع است. معادله این استوانه‌ها عبارت است از

$$(x-x_0)^2 + y^2 = R^2 \quad \text{یا} \quad x^2 - 2xx_0 + y^2 = R^2 - x_0^2 \quad (128-3)$$

x_0 مرکز دایره و R شعاع دایره است. برای نشان دادن آنکه معادله (۱۲۷-۳) یک استوانه دوار را تعریف می‌کند، آن را مجذور می‌کنیم و همان طور که در شکل ۲۱-۳ دیده می‌شود، از روابط زیر استفاده می‌کنیم

$$\rho_+^2 = (x-a)^2 + y^2 \quad \text{و} \quad \rho_-^2 = (x+a)^2 + y^2$$

از این رو معادله (۱۲۷-۳) به دست می‌دهد

$$(x+a)^2 + y^2 = m^2[(x-a)^2 + y^2]$$

با مرتب کردن جملات داریم

$$x^2 - 2x \left[\left(\frac{m^2+1}{m^2-1} \right) a \right] + y^2 = -a^2$$

که درست معادله یک دایره است که مرکز و شعاع آن با معادله (۱۲۸-۳) در بالا داده می‌شود، یعنی

$$x_0 = \left(\frac{m^2+1}{m^2-1} \right) a \quad (129-3)$$

$$R^2 = x_0^2 - a^2 = \left(\frac{2ma}{m^2-1} \right)^2 \quad (130-3)$$

پتانسیل استوانه که با m مشخص می‌شود از معادله زیر به دست می‌آید

$$\Phi_m = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln m \quad (131-3)$$

شکل ۲۲-۳ نمودار استوانه‌ها را برای مقادیر مختلف m نشان می‌دهد. با این نتایج اکنون می‌توان مسائل وارون را در نظر گرفت. برای مثال می‌خواهیم پتانسیل ناشی از یک بار خطی λ و یک استوانه دوار رسانا به شعاع R را، که مرکز آن به فاصله δ از بار است، پیدا کنیم. از شکل ۲۳-۳ که خط را در داخل استوانه نشان می‌دهد، استفاده کنید. برای پیدا کردن پتانسیل در جستجوی محل بار (تصویری) $-\lambda$ که یک

۳-۵-۳ استوانه‌های موازی

می‌خواهیم پتانسیل ناشی از دو استوانه موازی (هر دو موازی با محور z) را با انجام محاسبات در جهت عکس، یعنی با تشخیص اینکه هم‌پتانسیلهای ناشی از دو بار خطی با اندازه λ (بار بر طول واحد) و $-\lambda$ سطوح استوانه‌ای قائم هستند، پیدا کنیم.

در این صورت همان طور که در شکل ۲۱-۳ نشان داده شده است، دو بار خطی به فاصله $2a$ از یکدیگر در نظر می‌گیریم. مبدأ را روی محور z به فاصله مساوی از بارهای خطی انتخاب می‌کنیم. پتانسیل یک بار خطی تنها را که در مثال ۱-۳ به دست آوردیم به صورت زیر

$$\Phi(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)$$

است که در آن ρ فاصله از خط و ρ_0 محلی است که پتانسیل صفر را به آن نسبت می‌دهیم. در این مسئله هر دو خط باید دارای پتانسیل صفر باشند که در آن صورت باید در صفحه $x = 0$ قرار گیرند. در این صورت پتانسیل ناشی از برهم‌نهی دو بار خطی برابر است با

$$\Phi = \Phi_+ + \Phi_- = \frac{-\lambda \ln \rho_+}{2\pi\epsilon_0} + \frac{\lambda \ln \rho_-}{2\pi\epsilon_0}$$

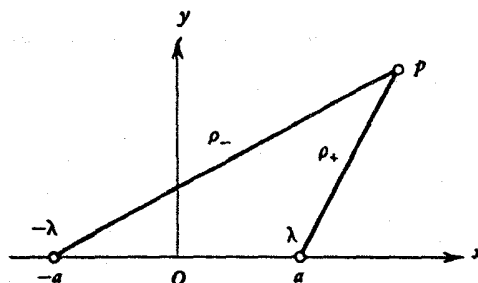
به این ترتیب

$$\Phi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\rho_-}{\rho_+} \right) \quad (126-3)$$

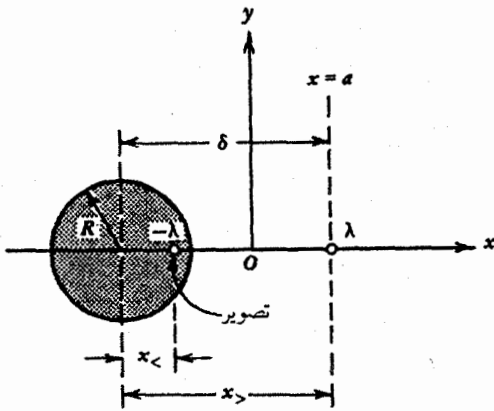
وقتی $\rho_- = \rho_+$ ، یعنی روی صفحه $x = 0$ ، این پتانسیل صفر می‌شود.

سطوح هم‌پتانسیل برای این مسئله وقتی ایجاد می‌شوند که لگاریتم معادله (۱۲۶-۳) ثابت باشد، یعنی وقتی که

$$\frac{\rho_-}{\rho_+} = m \quad (127-3)$$



شکل ۲۱-۳ از دو بار خطی بلند نامتناهی با بار مخالف در امتداد محور z ، برای بیان روش تصاویر مسائل استوانه‌ای استفاده می‌شود.



شکل ۲۴-۳ یک بار خطی واقع در خارج از استوانه موازی با محور.

در این صورت مقدار m با معادله (۱۲۹-۳) یا (۱۳۰-۳) به صورت یک ثابت به دست می‌آید. با جایگزین کردن a و x_0 در معادله (۱۲۹-۳) به دست می‌آوریم

$$\frac{m^2 + 1}{m^2 - 1} = \frac{x_0}{a} = \frac{(R/\delta)^2 + 1}{(R/\delta)^2 - 1}$$

و بنابراین

$$m = \frac{R}{\delta}$$

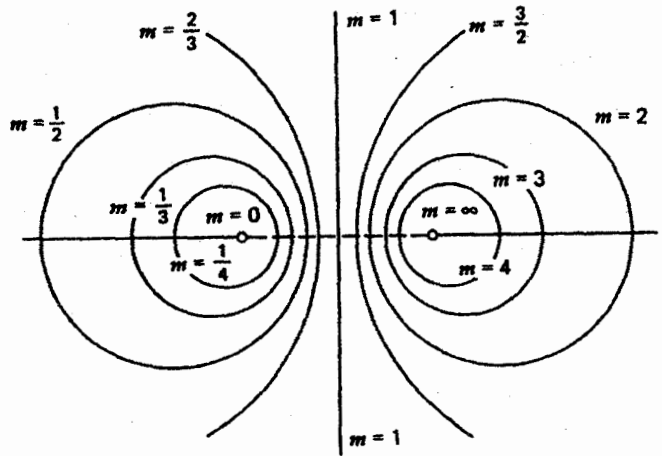
اکنون مسئله حل می‌شود. پتانسیل (در داخل استوانه) بر حسب بارهای خطی، که مکان آنها تعیین شده‌اند، بیان می‌شود. مثلاً، اگر $R/\delta = 2$ ، در این صورت $m = 2$ و $x_0 = 5\delta/2$ ، $a = 3\delta/2$ است. پتانسیل استوانه با $\Phi = (\lambda/2\pi\epsilon_0) \ln 2$ داده می‌شود، اما اکنون آزادیم یک پتانسیل ثابت به ناحیه داخلی اضافه کنیم تا آن را در هر مقدار مطلوب قرار دهد. پتانسیل در خارج استوانه از مسئله داخلی مستقل است.

اگر می‌خواستیم مسئله را در جایی که $|R/\delta| < 1$ است حل کنیم (یک بار خطی خارج از استوانه، مانند شکل ۲۴-۳)، باید مانند قبل از معادلات مشابهی استفاده می‌کردیم. با این همه، در این حالت $\delta < 0$ و $m = -R/\delta$ یک عدد مثبت است. همه چیز مانند قبل دنبال می‌شود و پتانسیل استوانه منفی خواهد بود.

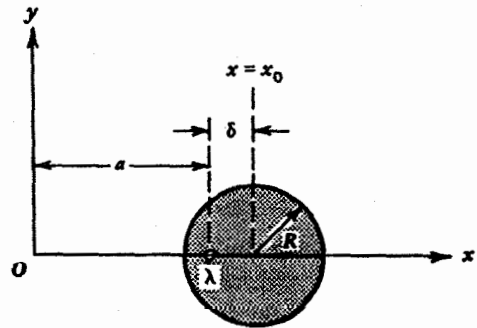
اگر مرکز استوانه را به عنوان مبدأ انتخاب می‌کردیم، در آن صورت با تعریف $x_> = x_0 + a$ و $x_< = x_0 - a$ داشتیم

$$x_> x_< = x_0^2 - a^2 = R^2$$

که شبیه مسئله تصویری برای کره و بار نقطه‌ای است. مسئله داخلی



شکل ۲۲-۳ سطوح پتانسیل ثابت که از دو بار خطی موازی در جهت‌های مخالف به وجود آمده است.



شکل ۲۳-۳ یک بار خطی واقع در داخل یک استوانه رسانا، و موازی با محور استوانه.

هم پتانسیل را بر روی استوانه ارائه می‌دهد، هستیم. به این ترتیب با معلوم بودن R و δ ، به دنبال یافتن a و x_0 هستیم. در واقع، چون

$$x_0 - a = \delta \quad (132-3)$$

تنها دو مجهول وجود دارد که باید آنها را تعیین کرد. با جایگزین کردن معادله (۱۳۲-۳) در معادله (۱۳۰-۳) به دست می‌آوریم

$$R^2 = x_0^2 - a^2 = \delta(x_0 + a)$$

که نتیجه می‌دهد

$$x_0 + a = \frac{R^2}{\delta} \quad (133-3)$$

اکنون با حل معادلات (۱۳۲-۳) و (۱۳۳-۳) و a و x_0 به دست می‌آیند

$$x_0 = \frac{\delta}{2} \left(\frac{R^2}{\delta^2} + 1 \right) \quad \text{و} \quad a = \frac{\delta}{2} \left(\frac{R^2}{\delta^2} - 1 \right)$$

اگر اختلاف پتانسیل بین استوانه‌ها را به صورت $\Phi_1 - \Phi_2 = V$ مشخص کنیم، در این صورت اندازه (تصویر) بار خطی، بر طبق آن تنظیم می‌شود:

$$\Phi_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln m_1 \quad \Phi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln m_2$$

یا

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{m_1}{m_2}$$

بار خطی باید دارای بزرگی

$$\lambda = V \left[\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{m_1}{m_2} \right) \right]^{-1}$$

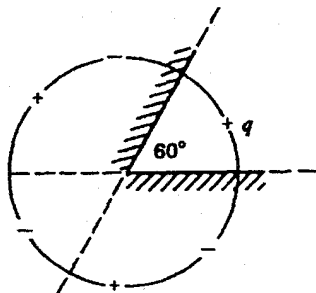
باشد. دو نوع مسئله قابل بحث در شکل ۲۵-۳ رسم شده است. در این صورت پتانسیلها در نواحی مورد نظر با معادله

$$\Phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\rho_-}{\rho_+} \right)$$

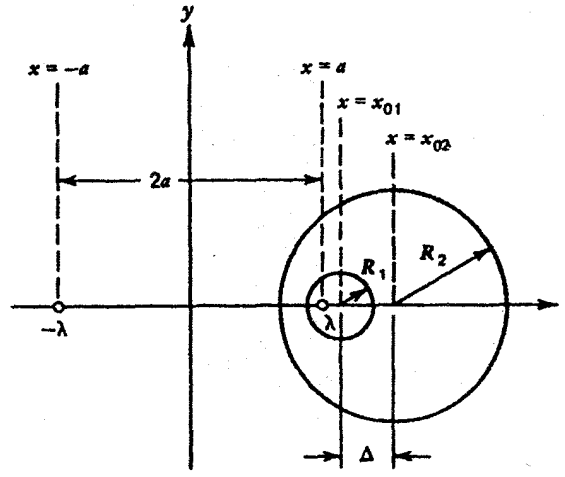
داده می‌شوند.

۴-۵-۳ بار نقطه‌ای و دو سطح رسانا

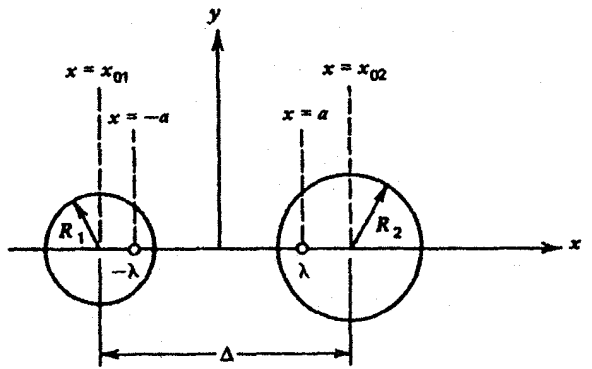
همچنین مسائل را می‌توان با استفاده از تصاویر بارهای نقطه‌ای در نزدیکی دو سطح رسانا، مثلاً دو صفحه رسانای متقاطع، حل کرد. در حالت کلی برای تولید شرایط مرزی هم‌پتانسیل صحیح، به بیش از یک بار تصویری نیاز داریم. در واقع اگر زاویه تقاطع بین صفحات $180^\circ/n$ باشد، $n = 1, 2, 3, \dots$ در این صورت تعداد بارهای تصویری مورد نیاز $2n - 1$ خواهد بود. یک مثال در شکل ۲۶-۳ نشان داده شده است. اگر زاویه با $180^\circ/n$ متفاوت باشد، ممکن است تعداد نامتناهی از تصاویر مورد نیاز باشد، یا ممکن است اصلاً



شکل ۲۶-۳ یک بار نقطه‌ای بین دو ورقه رسانای متصل به زمین که با یکدیگر یک زاویه می‌سازند.



(الف)



(ب)

شکل ۲۵-۳ مسئله دو استوانه. (الف) مسئله داخلی. (ب) مسئله خارجی.

مشخص می‌کند که $m = R/x_<$ مسئله خارجی مشخص می‌کند که $m = R/x_>$

نهایتاً، در شکل ۲۵-۳ مسئله دو استوانه به شعاعهای R_1 و R_2 را که محور آن دو استوانه به اندازه Δ از یکدیگر فاصله دارند در نظر می‌گیریم. هر استوانه یک سطح هم‌پتانسیل است. بنابراین اکنون از معادله (۳-۱۳) داریم

$$R_1^2 = x_{01}^2 - a^2 \quad \text{و} \quad R_2^2 = x_{02}^2 - a^2$$

یا

$$\Delta = x_{02} - x_{01} = (R_2^2 + a^2)^{1/2} - (R_1^2 + a^2)^{1/2}$$

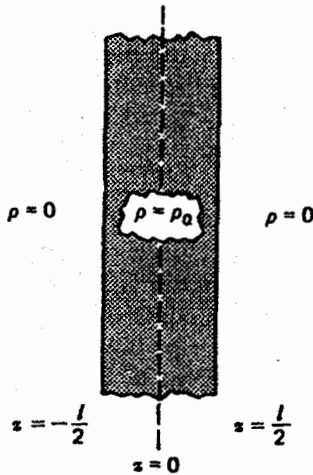
از این معادله درمی‌یابیم که a باید با معادله

$$a = \left[\left(\frac{R_2^2 + R_1^2 - \Delta^2}{2\Delta} \right)^2 - R_1^2 \right]^{1/2}$$

داده شود. از این رو m_1 ، m_2 و x_{01} و x_{02} را می‌توان تعیین کرد.

توان با این روش مسئله را حل کرد. در آن صورت ممکن است روشهای دیگر حل ارجح باشد.

مثال دیگری از این نوع یک صفحه بزرگ، با یک برآمدگی به شکل نیمکره یا استوانه، به شعاع کوچک است (مسئله ۳-۱۲ را ببینید).



شکل ۳-۲۷ یک نوار باردار یکنواخت نامتناهی.

۳-۶ معادله پواسون

اکنون به حالتی که در آن بار بر روی رساناها جایگزیده نیست یا به شکل بارهای نقطه‌ای توزیع شده است باز می‌گردیم. در این حالت پتانسیل در معادله پواسون صدق می‌کند

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3-3)$$

به‌ازای یک توزیع بار کلی مفروض به‌علاوه شرایط مرزی معین، پتانسیل را می‌توان ابتدا با حل بخش همگن معادله (۳-۳)، یعنی معادله لاپلاس $\nabla^2 \Phi = 0$ پیدا کرد. این جواب را باید به جواب خاص معادله پواسون (قانون کولن) افزود

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \text{جواب معادله لاپلاس} \quad (3-134)$$

که در آن انتگرال‌گیری بر روی توزیع بار مفروض انجام می‌شود. پس از آن جواب کلی را می‌توان با برآورده کردن شرایط مرزی با انتخاب ثابتهای مناسب در حل معادله لاپلاس به‌دست آورد.

در فصل ۲ تعدادی از موارد استفاده معادله (۲-۴۰) را ارائه دادیم. این کاربردها توزیعهای بار متفاوتی را در برداشتند. با این همه، در این بخش یک رده خاص از توزیعها، که در آن چگالی بار و پتانسیل فقط به یک متغیر بستگی دارد را بررسی می‌کنیم. به‌علاوه فرض می‌کنیم که توزیع بار مقید باشد، یعنی آنکه یا بار یک ناحیه محدود از فضا را اشغال می‌کند یا در فواصل دور به اندازه کافی سریع نزول می‌کند. مثالهایی از این نوع، توزیعهای واپاشی نمایی یا توزیعهایی که سریعتر از $1/r^2$ نزول می‌کنند را شامل می‌شود. این محدودیتها همان طور که در چند مثال زیر نشان خواهیم داد، باعث می‌شود که با یک روش سراسرتر به جواب برسیم.

مثال ۳-۱۶ یک نوار توزیع بار یکنواخت نامتناهی

در این مورد تابع پتانسیل Φ که به توزیع باری مانند شکل ۳-۲۷ وابسته است و با

$$-\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2} \quad \rho = \rho_0$$

$$|z| > \frac{l}{2} \quad \rho = 0$$

داده می‌شود را حل می‌کنیم. به علت تقارن توزیع، تابع پتانسیل فقط به فاصله از صفحه $z = 0$ بستگی دارد. به دلیل گستردگی نامتناهی توزیع، نمی‌توان $\Phi(\infty) = 0$ قرار داد، اما مناسب است پتانسیل را در $z = 0$ ، مساوی با صفر قرار دهیم.

سه ناحیه وجود دارند که باید برای آنها معادله پواسون (یا لاپلاس) را حل کنیم. در هر یک از این نواحی $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(z)$. از این رو "لاپلاسی Φ "، $\nabla^2 \Phi$ به‌سادگی می‌شود $d^2 \Phi / dz^2$. جدول زیر معادلات و جوابهای مطابق با آنها را برای نواحی مختلف فضا ارائه می‌دهد

ناحیه	معادله	جواب
$z \geq \frac{l}{2}$	$\frac{d^2 \Phi_z}{dz^2} = 0$	$\Phi_z = C_1 z + C_2$
$ z \leq \frac{l}{2}$	$\frac{d^2 \Phi_0}{dz^2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}$	$\Phi_0 = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{z^2}{2} + K_1 z + K_2$
$z \leq -\frac{l}{2}$	$\frac{d^2 \Phi_1}{dz^2} = 0$	$\Phi_1 = C'_1 z + C'_2$

پنج ثابت $C_1, C_2, C'_1, C'_2, K_1$ هنوز نامعین هستند $[K_2 = 0]$ زیرا $\Phi(z=0) = 0$ اگر تشخیص دهیم که روابط مشخصی باید بین جوابهای متفاوت در مرزها، مثلاً در $z = \pm l/2$ وجود داشته باشند، این ثابتها را می‌توان تعیین کرد:

و معادله (۳-۱۳۶) دارای جواب

$$\Phi(r) = \frac{A_2}{r} + B_2 \quad r \geq R \quad (۱۳۸-۳)$$

است. پتانسیل باید در شرایط مرزی زیر صدق کند: (۱) $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$; (۲) $\Phi(r \rightarrow 0) = 0$ متناهی است، زیرا هیچ گونه باری در مرکز کره وجود ندارد. (۳) دو پتانسیل باید در $r = R$ یکی شوند؛ (۴) کل بار این توزیع برابر است با $(4\pi/3)R^3\rho$. شرط اول می دهد $B_2 = 0$. با توجه به شرط دوم داریم $A_1 = 0$. اکنون با اعمال شرط (۳) یک رابطه بین B_1 و A_2 به دست می آوریم

$$-\frac{\rho R^2}{\epsilon_0} + B_1 = \frac{A_2}{R} \quad (۱۳۹-۳)$$

نهایتاً از شرط آخر می توان برای محاسبه A_2 استفاده کرد. انتخاب یک سطح گاوسی، یعنی یک پوسته به شعاع $r > R$ با مرکزی در مرکز توزیع بار، می دهد

$$\oint \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{4\pi R^2}{3\epsilon_0} \rho \quad (۱۴۰-۳)$$

میدان الکتریکی در خارج از کره را می توان با گرفتن شیب معادله (۳-۱۳۸) پیدا کرد، که به دست می دهد $\mathbf{E} = A_2 \hat{\mathbf{r}}/r^2$ و به این ترتیب $\oint \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 4\pi A_2$ تعویض سمت چپ معادله (۳-۱۴۰) با $4\pi A_2$ می دهد $A_2 = (R^2/3\epsilon_0)\rho$. با قرار دادن مقدار A_2 در معادله (۳-۱۳۹) به دست می آید $B_1 = \rho R^2/2\epsilon_0$ از این رو پتانسیل عبارت است از

$$\Phi(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2} \right) \quad r < R \quad (۱۴۱-۳)$$

یا

$$\Phi(r) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad r > R \quad (۱۴۲-۳)$$

معادله (۳-۱۴۱) نشان می دهد که پتانسیل درون کره یک تابع درجه ۲ از r است و پتانسیل در مبدأ از پتانسیل در لبه کره بزرگتر است. باید توجه کرد که میدان الکتریکی در $r = R$ پیوسته است. به ازای $r \leq R$ $\mathbf{E} = (\rho/3\epsilon_0) \hat{\mathbf{r}}$ و به ازای $r \geq R$ $\mathbf{E} = \rho R^2/(3\epsilon_0 r^2) \hat{\mathbf{r}}$ ، که در $r = R$ می دهد $\mathbf{E} = (\rho R/3\epsilon_0) \hat{\mathbf{r}}$. این پیوستگی پیامدی مستقیم از عدم حضور بار سطحی در $r = R$ است. ■

۱. اولین شرط مرزی پیوستگی پتانسیل در عبور از ناحیه مرزی

است. در $z = -l/2$ ، $\Phi_1 = \Phi_0$ ، که به دست می دهد

$$-\frac{l}{\epsilon_0} C_1' + C_1' = -\frac{l^2 \rho_0}{8\epsilon_0} - \frac{l}{\epsilon_0} K_1$$

و در $z = l/2$ ، $\Phi_0 = \Phi_2$ ، که به دست می دهد

$$\frac{l}{\epsilon_0} C_1 + C_2 = -\frac{l^2 \rho_0}{8\epsilon_0} + \frac{l}{\epsilon_0} K_1$$

۲. با خاطر نشان کردن این نکته که هیچ گونه چگالی بار سطحی (در این مسئله) وجود ندارد، مؤلفه های عمودی \mathbf{E} ، $-\partial\Phi/\partial z$ ، همه جا پیوسته هستند؛ از این رو در مرز $z = -l/2$ و $z = l/2$ در می یابیم که

$$C_1' = \frac{l \rho_0}{2\epsilon_0} + K_1 \quad \text{و} \quad C_1 = -\frac{l \rho_0}{2\epsilon_0} + K_1$$

۳. با توجه به تقارن شکل میدان الکتریکی باید در $z = 0$ ، صفر باشد [یعنی $\mathbf{E}(z) = -\mathbf{E}(-z)$ ؛ بنابراین $K_1 = 0$]. با حل همزمان معادلات بالا جملات زیر را برای پتانسیل به دست می آوریم

$$\Phi_0 = -\frac{\rho_0 z^2}{2\epsilon_0} \quad \Phi_1 = \frac{\rho_0 l}{2\epsilon_0} z + \frac{\rho_0 l^2}{8\epsilon_0}$$

$$\Phi_2 = -\frac{\rho_0 l}{2\epsilon_0} z + \frac{\rho_0 l^2}{8\epsilon_0}$$

مثال ۳-۱۷ کره باردار یکنواخت

اکنون حالتی را که بار به صورت تقارن کروی توزیع شده است، بررسی می کنیم. فرض کنید یک بار q بر روی یک کره به شعاع R با چگالی بار حجمی ثابت ρ توزیع شده باشد. به این ترتیب به ازای $r > R$ چگالی بار صفر است. در ناحیه $r \leq R$ پتانسیل در معادله پواسون صدق می کند

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (۱۳۵-۳)$$

و در ناحیه $r > R$ ، پتانسیل در معادله لاپلاس صدق می کند

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0 \quad (۱۳۶-۳)$$

به سادگی می توان نشان داد که معادله (۳-۱۳۵) دارای جواب

$$\Phi(r) = \frac{-\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{A_1}{r} + B_1 \quad r \leq R \quad (۱۳۷-۳)$$

مثال ۱۸-۳ توزیع بار نمایی

یک توزیع بار متقارن کروی (با کل بار q) که دارای وابستگی شعاعی $\rho(r) = \rho_0 e^{-\alpha r}$ است را در نظر بگیرید. در این مورد متذکر می‌شویم که این چگالی توزیع بار الکترونی را در حالت پایه هیدروژن توصیف می‌کند. پتانسیل برای یک r دلخواه در معادله پواسون صدق می‌کند

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = \frac{-\rho(r)}{\epsilon_0} \quad [135-3]$$

یا

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{1}{r^2} \int \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} r^2 dr$$

انتگرال را به آسانی می‌توان محاسبه کرد

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 \alpha^2} e^{-\alpha r} \left(\frac{2}{r^2} + \frac{2\alpha}{r} + \alpha^2 \right) + \frac{C}{r^2} \quad (143-3)$$

که در آن C یک ثابت است. اکنون پتانسیل را می‌توان با انتگرال‌گیری مجدد پیدا کرد. نتیجه عبارت است از

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\alpha r} - \frac{\alpha q}{4\pi\epsilon_0} e^{-\alpha r} - \frac{C}{r} + D \quad (144-3)$$

که در آن D یک ثابت دیگر است و $\alpha^2 q / 4\pi$ جایگزین ρ_0 شده است.

اکنون شرایط مرزی را برای محاسبه C و D اعمال می‌کنیم. چون چگالی بار وقتی $r \rightarrow \infty$ باید به سمت صفر میل کند، پتانسیل را وقتی $r \rightarrow \infty$ مساوی با صفر قرار می‌دهیم. بنابراین $D = 0$. برای محاسبه C از قانون گاوس بر روی یک پوسته بسته به شعاع r و به مرکز مبدأ استفاده می‌کنیم. منفی سمت راست معادله (۱۴۳-۳) میدان الکتریکی $\mathbf{E} = -d\Phi/dr \hat{\mathbf{r}}$ را می‌دهد. بنابراین

$$\oint \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int \rho dv = 4\pi\rho_0 \int_0^r e^{-\alpha r} r^2 dr$$

که به دست می‌دهد $C = q/4\pi\epsilon_0$. به این ترتیب پتانسیل برابر است با

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} (1 - e^{-\alpha r}) - \frac{q\alpha}{4\pi\epsilon_0} e^{-\alpha r} \quad (145-3)$$

و میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} [1 - (\alpha r + 1)e^{-\alpha r}] - \frac{q\alpha^2}{4\pi\epsilon_0} e^{-\alpha r} \hat{\mathbf{r}} \quad (146-3)$$

مثال ۱۹-۳ توزیع متقارن کروی غیریکنواخت جایگزیده

اکنون یک توزیع بار متقارن کروی غیریکنواخت جایگزیده را در نظر می‌گیریم. یک پوسته هم‌مرکز بار به شعاعهای R_1 و R_2 در نظر بگیرید ($R_2 > R_1$). چگالی بار با $\rho = \beta/r^2$ داده می‌شود، β یک ثابت و r فاصله از مرکز پوسته است.

این مثال سه ناحیه از فضا را شامل می‌شود که در آنها پتانسیل وابستگی تابعی متمایز دارد. پتانسیل به‌ازای $R < R_1$ در معادله لاپلاس، به‌ازای $R_1 < r < R_2$ در معادله پواسون، و به‌ازای $r > R_2$ در معادله لاپلاس صدق می‌کند. جوابها را می‌توان به‌سادگی برای Φ_1 و Φ_2 به‌دست آورد

$$\Phi_1(r) = \frac{A_1}{r} + B_1 \quad r < R_1 \quad (147-3)$$

$$\Phi_2(r) = \frac{A_2}{r} + B_2 \quad r > R_2 \quad (148-3)$$

پتانسیل در داخل پوسته در معادله شعاعی زیر صدق می‌کند

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi_2}{dr} \right) = -\frac{\beta}{\epsilon_0 r^2} \quad R_1 < r < R_2 \quad (149-3)$$

به‌سادگی می‌توان از این معادله دو بار انتگرال گرفت

$$\Phi_2(r) = \frac{-\beta}{\epsilon_0} \ln r - \frac{A_2}{r} + B_2 \quad R_1 < r < R_2 \quad (150-3)$$

اکنون شش ثابت A_i و B_i را می‌توان از چهار شرط مرزی زیر به‌دست آورد:

۱. چون توزیع بار مرزی است، در این صورت پتانسیل وقتی $r \rightarrow \infty$ صفر می‌شود، این امر مستلزم آن است که $B_2 = 0$.
۲. به دلیل آنکه پتانسیل وقتی $r \rightarrow 0$ باید متناهی باشد، لازم است که $A_1 = 0$.

۳. پیوستگی در $r = R_1$ و $r = R_2$ روابط زیر را می‌دهد

$$B_1 = -\frac{\beta}{\epsilon_0} \ln R_1 - \frac{A_2}{R_1} + B_2 \quad (151-3)$$

و

$$\frac{A_2}{R_2} = -\frac{\beta}{\epsilon_0} \ln R_2 - \frac{A_2}{R_2} + B_2 \quad (152-3)$$

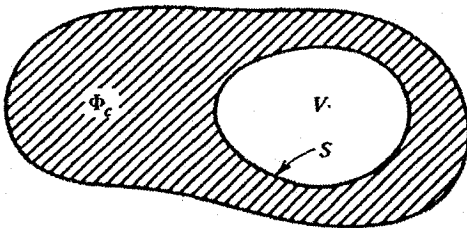
۴. آخرین شرط مرزی آن است که توزیع بار و کل بار مشخص باشد. این موضوع را می‌توان با استفاده از قانون گاوس به‌کار برد. ابتدا

۷-۳ حفاظ الکتروستاتیکی

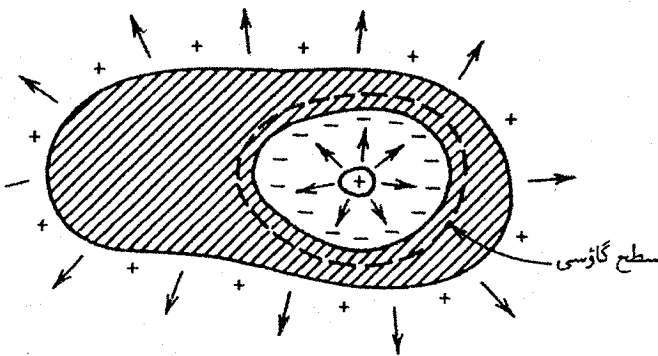
اکنون در مورد مفهوم حفاظ الکتروستاتیکی که اهمیت زیادی دارد بحث می‌کنیم. با این مفهوم آفرینش یک ناحیه از فضا که در آن میدان الکتریکی تا حد صفر کوچک است، ممکن می‌شود. این نواحی "میدان آزاد" غالباً در آزمایشها یا بهره‌برداری قابل اطمینان از وسایل الکترونیکی، مورد نیاز هستند.

مثلاً همان طور که در شکل ۲۸-۳ (الف) نشان داده شده است، یک کاواک V تهی از بار را در داخل یک رسانا در نظر می‌گیریم. کاواک دارای مرزهای خوش‌تعریفی است و از این رو اگر پتانسیل رسانا، Φ_e مشخص شود، پتانسیل را می‌توان به‌طور کامل در داخل کاواک توصیف کرد. در این صورت پتانسیل داخل کاواک، به‌سادگی برابر است با Φ_e . شرط پیوستگی Φ در مرز و معادله لاپلاس $\nabla^2 \Phi = 0$ در داخل کاواک برآورده می‌شود. به این ترتیب در آنجا $E = 0$ و هیچ گونه باری بر روی S وجود ندارد. آنچه خارج از رسانا رخ می‌دهد به داخل رسانا ربطی ندارد.

این پدیده حفاظ الکتروستاتیکی را نمایش می‌دهد. مثلاً، اگر شیشی باردار را در داخل کاواک قرار دهیم نیروهای الکتروستاتیکی که بر آن شیء وارد می‌شود به هیچ‌وجه به شرایط خارج از رسانا بستگی ندارد.



(الف)



(ب)

شکل ۲۸-۳ توصیف حفاظ الکتروستاتیکی. (الف) یک رسانا با یک کاواک.

(ب) یک بار مثبت در داخل کاواک.

این قانون را بر روی سطح کروی به شعاع $r > R_2$ که مرکز کره در مبدأ واقع است اعمال می‌کنیم:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{\beta}{r^2} dv = \frac{4\pi\beta}{\epsilon_0} (R_2 - R_1)$$

با قراردادن $\mathbf{E} = -\nabla\Phi_r = (A_r/r^2)\hat{\mathbf{r}}$ به دست می‌آوریم $A_r = \beta(R_2 - R_1)\epsilon_0$. به همین ترتیب قانون گاوس را بر یک سطح کروی به شعاع r ، که در آن $R_1 < r < R_2$ است اعمال می‌کنیم. میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi_r = \left(\frac{\beta}{\epsilon_0 r} + \frac{A_r}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}}$$

و بار داخل سطح برابر است با $4\pi\beta(r - R_1)$. به این ترتیب قانون گاوس به دست می‌دهد $A_r = \beta R_1/\epsilon_0$ با قراردادن A_r و A_r در معادلات (۱۵۱-۳) و (۱۵۲-۳) به دست می‌آوریم $B_r = \beta/\epsilon_0 (1 + \ln R_2)$ و $B_i = \beta \ln(R_2/R_1)/\epsilon_0$ با قرار دادن مقادیر تعیین‌شده A_i و B_i در معادلات (۱۴۷-۳)، (۱۴۸-۳) و (۱۵۰-۳) عبارتهای زیر برای پتانسیل به دست می‌آید

$$\Phi_1(r) = \frac{\beta}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\Phi_r(r) = \frac{\beta}{\epsilon_0} \left(1 - \ln \frac{r}{R_2} - \frac{R_1}{r} \right)$$

$$\Phi_2(r) = \frac{\beta}{\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{r}$$

■

مثال ۲۰-۳ توزیع بار ناشی از یک پتانسیل مفروض چون معادله بواسون پتانسیل را به چگالی بار ربط می‌دهد، در این صورت می‌توان از آن برای تعیین چگالی باریک پتانسیل مفروض استفاده کرد. پتانسیل $\Phi(r) = (q/4\pi\epsilon_0 r) e^{-\alpha r}$ را در نظر بگیریم. بار ناشی از این پتانسیل عبارت است از $\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 \Phi(r)$:

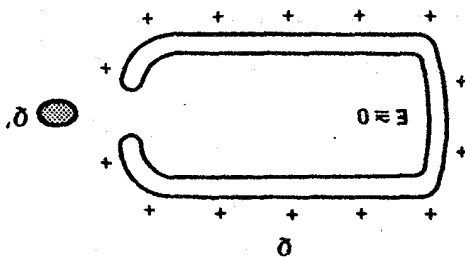
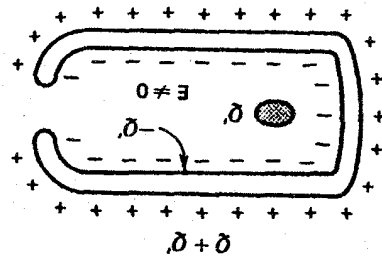
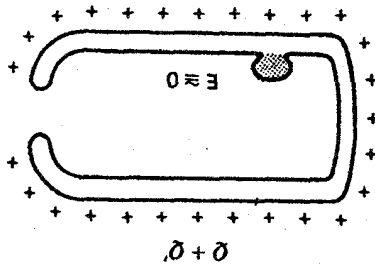
$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left[\frac{q}{r} + \frac{q(e^{-\alpha r} - 1)}{r} \right]$$

که $q/4\pi\epsilon_0 r$ یعنی پتانسیل یک بار نقطه‌ای در مبدأ را به آن اضافه و از آن کم کرده‌ایم. با محاسبه آن به دست می‌آوریم

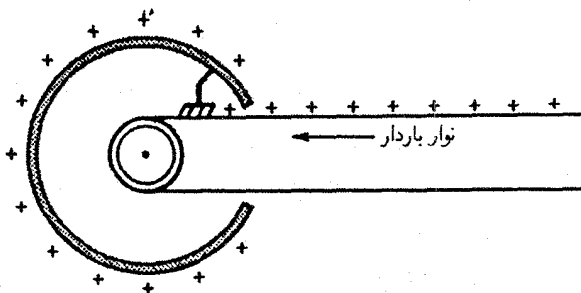
$$\rho = q\delta(\mathbf{r}) - \frac{q}{4\pi} \alpha^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

$\delta(\mathbf{r})$ تابع دلتای دیراک است. این پتانسیل مطابق با بار نقطه‌ای q در مبدأ و یک توزیع حجمی متقارن کروی است. کل بار توزیع حجمی برابر است با $\int \rho dv = -q$ ، که نشان می‌دهد کل بار صفر است.

■



شکل ۲۹-۳ انتقال بار با استفاده از مفهوم حفاظ.



شکل ۳۰-۳ پایانه وان دوگراف. شانه‌ها، بار روی نوار را به سطح خارجی پایانه منتقل می‌کنند.

می‌دهد (شکل ۳۰-۳ را ببینید). مسئله ۲۶-۳ مثالی در زمینه حفاظ است.

۸-۳ خلاصه

دو رابطه را که در حالت الکتروستاتیکی می‌توان به‌طور همزمان حل ۱. حتی این تأثیر را اگر (سطح خارجی) رسانا به زمین متصل شود - مثلاً رسانا در پتانسیلی با مرجع ثابت نگه داشته شود - می‌توان حذف کرد.

در واقع همان‌طور که در شکل ۲۸-۳ (ب) نشان داده شده است، اگر از قانون گاوس برای یک سطح بسته در داخل رسانا استفاده کنیم، می‌دانیم که چون در داخل رسانا همه جا $E = 0$ ، در این صورت $\oint_S E \cdot da = 0$ و در نتیجه $Q_{int} = 0$. از این رو نتیجه می‌گیریم که بر روی سطح داخلی رسانا یک بار مخالف القا می‌شود که باعث صفر شدن میدان شیء باردار می‌شود. کل بار برابر با بار شیء است. اگر رسانا از نظر الکتریکی خنثی باشد، یک بار مساوی باید بر روی سطح خارجی رسانا ظاهر شود. روشی که با آن روش، این بار توزیع می‌شود، تنها به شرایط خارجی بستگی دارد، نه به توزیع بار داخلی (بنابر شرایط یکتایی).

بنابراین اصولاً ناحیه خارجی رسانا نیز از ناحیه داخلی "حفاظ" شده است. "فقط در صورتی که کل بار سطح رسانای خارجی کاواک تغییر کند میدان خارجی را تحت تأثیر قرار می‌دهد." مکان بار کاواک به "دنیای خارج" ربطی ندارد. از نظر فیزیکی، این گفته غیرمعقول نیست، زیرا بار القا شده بر روی سطح داخلی رسانا، به میدان کاواک "اجازه" نفوذ به خارج از رسانا را نمی‌دهد. از این رو بار سطحی بر روی سطح خارجی از حضور کاواک داخلی "بی‌اطلاع" است. (اگر اصلاً خط نیرویی بین دو جسم نباشد، آن دو جسم با یکدیگر برهم‌کنش نخواهند داشت.) در واقع اگر شیء داخل کاواک رسانای دیگری می‌بود، در آن صورت با تماس این رسانا با سطح داخلی، کل بار روی شیء بایستی به رسانای اولی منتقل می‌شد و این بار در روی سطح خارجی رسانا ظاهر می‌شد (چرا؟).

از این خاصیت می‌توان برای حذف بار خالصی که بر روی یک رسانا وجود دارد، یا برای انتقال بار به رسانا استفاده کرد. مثلاً همان‌طور که در شکل ۲۹-۳ نشان داده شده است اگر رسانایی با یک کاواک داخل آن بسازیم و این کاواک با یک شکاف به بیرون مرتبط باشد، میدان $|E|$ داخلی را با کوچک ساختن کاواک در مقایسه با ابعاد مناسب دیگر مسئله، می‌توان به‌طور دلخواه کوچک انتخاب کرد. اکنون اگر یک رسانای باردار دیگری را از راه شیار به کاواک که E در آنجا ابتدا صفر بود، وارد کنیم، و این رسانای باردار با سطح داخلی کاواک تماس پیدا کند، بار از رسانای باردار به سطح خارجی رسانای اولیه شارش می‌یابد. شرایط مربوط به خارج از رسانای بزرگ هر چه باشد، این پدیده رخ خواهد داد. ابزاری مانند این را گاهی اوقات جام فاراده می‌نامند. وقتی می‌خواهیم پایانه با ولتاژ بالای یک شتاب‌دهنده الکتروستاتیکی وان دوگراف، یعنی ابزاری که از آن در فیزیک هسته‌ای برای تولید یونهای پر انرژی استفاده می‌شود را "پر بار" کنیم، پدیده‌ای شبیه به این رخ

نیز اعمال می‌شود. در این روش آرایشی از بارهای تصویری در خارج از حجم V معرفی می‌شوند به طوری که پتانسیل این بارهای تصویری به همراه پتانسیل بارهای واقعی داخل V شرط مرزی که برای پتانسیل بر روی مرز فضای V مورد نظر تعیین می‌شود را برقرار می‌سازد. اگر این برآورده شود، در آن صورت با استفاده از قضیهٔ یکتایی مطمئن می‌شویم که آرایش انتخاب شده به درستی پتانسیل صحیح و از این رو میدان صحیح را به دست می‌دهد.

در حالت کلی جواب معادلهٔ پواسون را می‌توان با افزودن جواب معادلهٔ لاپلاس به جواب خصوصی (قانون کولن) تعیین کرد، یعنی

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \text{حل معادلهٔ لاپلاس} \quad [۱۳۴-۳]$$

که در آن انتگرال‌گیری در قانون کولن را بر روی توزیع بار مفروض انجام می‌دهیم. در این صورت کل جواب با برقرار ساختن شرایط مرزی با انتخاب ثابتایی در حل معادلهٔ لاپلاس به دست می‌آید.

وقتی معادلهٔ لاپلاس یا معادلهٔ پواسون را در بیش از یک ناحیه حل می‌کنیم، خصوصیات دیفرانسیلی میدان الکتروستاتیکی مستلزم روابط مشخصی بین میدانها و همچنین بین پتانسیلها در مرزهای مشترک ناحیه‌هاست. معادلهٔ $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ به هنگام عبور از مرز ایجاب می‌کند

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad \text{یا} \quad \mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t} \quad [۸-۳], [۶-۳]$$

t به معنی مؤلفهٔ \mathbf{E} مماس بر مرز است. از سوی دیگر، با توجه به معادلهٔ $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ داریم

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad [۳۵-۲]$$

n به معنی مؤلفهٔ \mathbf{E} عمود بر مرز است و σ چگالی بار سطحی در مرز است. میدان الکتریکی در نزدیکی بار منزوی q ، وقتی $\mathbf{r} \rightarrow 0$ به

$$\mathbf{E} \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}}{r^3} \quad [۵-۳]$$

میل می‌کند که در آن \mathbf{r} فاصله از بار نقطه‌ای است. به همین ترتیب میدان در نزدیکی یک بار خطی بلند منزوی λ بر طول واحد وقتی $\rho \rightarrow 0$

$$\mathbf{E} \rightarrow \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda\rho}{\rho^2} \quad [۱۹-۲]$$

میل می‌کند که در آن ρ فاصله از خط است.

کرد عبارت‌اند از $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ و $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. این دو رابطه را می‌توان به یک معادله تبدیل کرد یعنی $-\nabla \cdot (-\nabla\Phi) = \rho/\epsilon_0$ که به طور مرسوم به صورت

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad [۳-۳]$$

نوشته می‌شود و معادلهٔ پواسون نام دارد. اگر در ناحیه‌ای از فضا $\rho = 0$ باشد، معادلهٔ پواسون در آن ناحیه به معادله‌ای تبدیل می‌شود که به معادلهٔ لاپلاس معروف است

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad [۴-۳]$$

برای میدان الکتروستاتیکی در فضای آزاد یک جواب منحصر به فرد وجود دارد، یعنی معادلهٔ لاپلاس مادامی که در شرایط مرزی معین زیر صدق می‌کند دارای یک جواب منحصر به فرد است: (۱) پتانسیل روی هر سطح مرزی مشخص باشد؛ (۲) بار خالص بر روی هر سطح مرزی مشخص باشد؛ (۳) مخلوطی از (۱) و (۲)، اما به ازای یک مرز معین ممکن است یا پتانسیل یا کل بار را (نه هر دو را با هم) مشخص کرد.

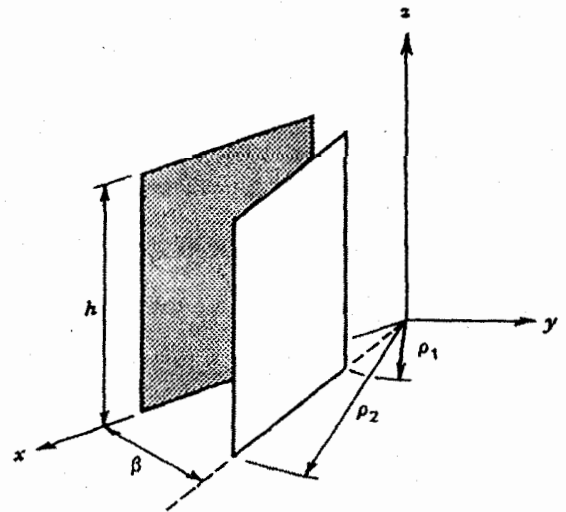
برای حل معادلهٔ لاپلاس، از روش جداسازی متغیرها در دستگاه مختصات سه‌بعدی می‌توان استفاده کرد، که این روش جوابهای مشکل از حاصلضرب توابع، که هر تابع فقط به یک مختصه وابسته است را می‌دهد. در حالتی که چند درجهٔ تقارن وجود دارد که بتوان استدلال کرد پتانسیل تابعی از یک مختصه است—مثلاً θ در مختصات کروی، ρ در استوانه‌ای و z در دکارتی—معادلهٔ لاپلاس به یک معادلهٔ دیفرانسیل یک‌بعدی با جوابهای سرراست تبدیل می‌شود. در حالت تقارن کمتر—مثلاً پتانسیل تابعی از θ و ρ در مختصات کروی، ρ و ϕ در مختصات استوانه‌ای باشد—جواب عموماً، به ترتیب یک ترکیب خطی از یک مجموعه نامتناهی از هماهنگهای منطقه‌ای و هماهنگهای استوانه‌ای است. منحصر به فرد بودن قضیه بر این امر دلالت می‌کند که آیا برای یک آرایش مفروض، به اندازهٔ کافی از این هماهنگها استفاده شده است یا خیر.

روش تصاویر یک روش قوی برای حل مسائل الکتروستاتیکی در یک حجم V است که در آنجا چگالی بار در فضایی که بر روی سطوح مرزی نیست، صفر نیست. این روش برای مسائل مربوط به بارهای نقطه‌ای (که می‌توان آن را به چگالیهای بار کلی تعمیم داد) در نزدیکی ورقه‌ای رسانا یا کره‌ای رسانای بزرگ قابل استفاده است. این روش بر روی بارهای خطی بلند که با استوانه‌های رسانای بلند موازی است،

مسائل

۱-۳ یک ورقه رسانای نامتناهی به زمین متصل است. مخروطی با زاویه رأس θ_1 و ارتفاع زیاد را عمود بر ورقه قرار می‌دهیم به طوری که رأس مخروط روی ورقه باشد. مخروط از ورقه عایق‌بندی شده است و در پتانسیل V نگه داشته می‌شود (الف) پتانسیل و میدان الکتریکی را در ناحیه بین ورقه و مخروط پیدا کنید. (ب) چگالی بار را روی ورقه تعیین کنید.

۲-۳ همان طور که در شکل ۳۱-۳ نشان داده شده است، دو ورقه فلزی بزرگ که یک خازن گوه‌ای را تشکیل می‌دهند در نظر بگیرید. ورقه واقع در $\phi = 0$ را در پتانسیل صفر و ورقه واقع در $\phi = \beta$ را در پتانسیل V ولت نگاه می‌داریم. با چشمپوشی از تأثیرات جنبی (الف) معادله دیفرانسیلی را که پتانسیل داخل خازن در آن صدق می‌کند را بنویسید و پتانسیل را تعیین کنید. (ب) چگالی بار و کل بار واقع بر روی ورقه را تعیین کنید.



شکل ۳۱-۳

۳-۳ خازن مخروطی را که در مثال ۴-۲ بحث کردیم در نظر بگیرید. میدان الکتریکی داخل خازن و توزیع بار بر روی مخروطها را تعیین کنید. ۴-۳ یک سطح کروی به شعاع R که در پتانسیل $\Phi(R, \theta) = V_0 \cos \theta$ نگه داشته شده است را در نظر بگیرید، V_0 یک ثابت است و θ را نسبت به محور z که از مرکز کره می‌گذرد اندازه می‌گیریم. (الف) جملاتی را برای پتانسیل الکتریکی در نواحی $r < R$ و $r > R$ بنویسید. (ب) شرایط مرزی را بنویسید و پتانسیل را در دو ناحیه پیدا کنید. آیا سطح کروی می‌تواند یک سطح رسانا باشد؟

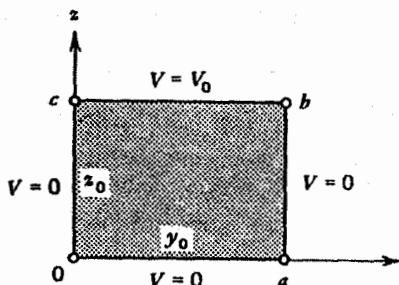
(ج) چگالی بار را در $r = R$ تعیین کنید. (ه) گشتاور دوقطبی کره چقدر است؟

۵-۳ خازن کروی غیر هم‌مرکز که در مثال ۵-۳ آن را مورد بحث قرار دادیم در نظر بگیرید. میدان بین کره‌ها و توزیع بار بر روی کره‌ها را تعیین کنید. کل باری که بر روی کره خارجی می‌نشیند چقدر است؟ ۶-۳ یک پوسته کروی نازک عایق‌بندی شده به شعاع R را در پتانسیل $V = V_0 \cos 2\theta$ نگاه می‌داریم، V_0 یک ثابت و θ زاویه نسبت به قطر کره است. (الف) پتانسیل را همه‌جا، و (ب) توزیع بار روی پوسته را تعیین کنید.

۷-۳ یک پوسته کروی نازک عایق‌بندی شده به شعاع R دارای یک توزیع بار سطحی به صورت $\sigma = \sigma_0 (\cos \theta - 1)$ است. پتانسیلی که همه‌جا توسط کره تولید می‌شود را تعیین کنید.

۸-۳ یک استوانه عایق‌بندی شده بلند به شعاع ρ_0 دارای توزیع بار است. (الف) پتانسیل در داخل و خارج استوانه، (ب) میدان الکتریکی در داخل و در خارج استوانه را تعیین کنید.

۹-۳ یک فرورفتگی مربع مستطیل تخت که در شکل ۳۲-۳ نشان داده شده است، دارای ابعاد y_0 و z_0 است. اضلاع oa ، oc و ab با هم و با زمین اتصال دارند. ضلع bc را به صورت مجزا در پتانسیل V_0 نگاه می‌داریم. پتانسیل را در فرورفتگی در صفحه yz محاسبه کنید (مثال ۱۱-۳ را ببینید).

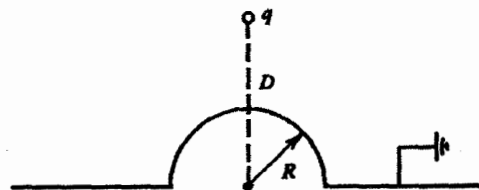


شکل ۳۲-۳

۱۰-۳ دو صفحه رسانای متصل به زمین یکدیگر را در زاویه 45° قطع می‌کنند، و یک بار نقطه‌ای بین آنها قرار دارد. مکان بارهای تصویری که میدان الکتریکی بین صفحات را می‌دهد پیدا کنید.

۱۱-۳ یک بار q را به فاصله $l/2$ از مرکز کره‌ای رسانا به شعاع R که به زمین متصل است، قرار می‌دهیم، به طوری که $l \ll R$. توزیع بار بر روی کره و نیروی وارد بر بار را تعیین کنید.

۱۲-۳ همان طور که در شکل ۳-۳۳ نشان داده شده است، یک ورقه رسانا دارای برآمدگی‌ای به شکل نیمکره به شعاع R است، و مرکز نیمکره بر روی ورقه واقع است. ورقه به زمین متصل است و یک بار نقطه‌ای q را به فاصله $D > R$ در مجاور آن قرار می‌دهیم. بار روی خطی که بر صفحه عمود است و از مرکز آن می‌گذرد قرار دارد. (الف) بار تصویری مورد نیاز را که بتوان جایگزین ورقه کرد، تعیین کنید. (ب) پتانسیل را در یک طرف بار تعیین کنید. (ج) بار القا شده بر روی برآمدگی را تعیین کنید. نیروی بین بار و ورقه را به دست آورید.



شکل ۳-۳۳

۲۰-۳ فرض کنید بار الکتریکی یک هسته اتمی، ze به صورت یکنواخت بر روی حجمی از کره به شعاع R_0 توزیع شده باشد، z عدد اتمی و e بزرگی بار یک الکترون است. پتانسیل الکتریکی را به فاصله $r \leq R_0$ از مرکز کره تعیین کنید.

۲۱-۳ چگالی بار در ناحیه $-z_0 < z < z_0$ فقط به z بستگی دارد، یعنی

$$\rho = \rho_0 \cos \frac{\pi z}{z_0}$$

ρ_0 و z_0 ثابت هستند. پتانسیل را در کل فضا تعیین کنید.

۲۲-۳ یک توزیع بار حجمی تناوبی

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 \sin a_1 x \sin a_2 y \sin a_3 z$$

را در نظر بگیرید که ρ_0, a_1, a_2, a_3 ثابت هستند. پتانسیل الکتریکی را به صورت تابعی از x, y, z تعیین کنید.

۲۳-۳ توزیع بار سطحی تناوبی

$$\sigma = \sigma_0 \cos a_1 x \cos a_2 y$$

را در نظر بگیرید، که σ_0, a_1, a_2 ثابت هستند. پتانسیل را (الف) در صفحه xy و (ب) در هر نقطه از فضا تعیین کنید.

۲۴-۳ پتانسیل الکتروستاتیکی ناشی از یک چگالی بار حجمی با رابطه زیر

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^{-\alpha r^2}$$

که در آن α یک ثابت است، داده می‌شود. چگالی بار حجمی را تعیین کنید.

۲۵-۳ توزیع باری که پتانسیل زیر را تولید می‌کند، تعیین کنید

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right) \exp \left[\frac{-2r}{a} \right]$$

α یک ثابت است.

۲۶-۳ فرض کنید یک میدان الکتریکی یکنواخت بر روی ناحیه‌ای از فضا داریم و همان طور که در شکل ۳-۳۴ نشان داده شده است، به داخل این فضا یک ورقه نازک اما بسیار بزرگ وارد می‌کنیم. (الف)

۱۳-۳ یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور p را در نزدیکی کره‌ای رسانا به شعاع R_0 قرار می‌دهیم. این دوقطبی بر خطی که مرکز دوقطبی را به مرکز کره وصل می‌کند عمود است. نیروی بین دوقطبی و کره را (الف) وقتی کره به زمین متصل است، و (ب) وقتی کره منزوی شود و بار q را حمل کند، تعیین کنید.

۱۴-۳ گشتاور وارد بر دوقطبی مسئله ۱۳-۳ را محاسبه کنید.

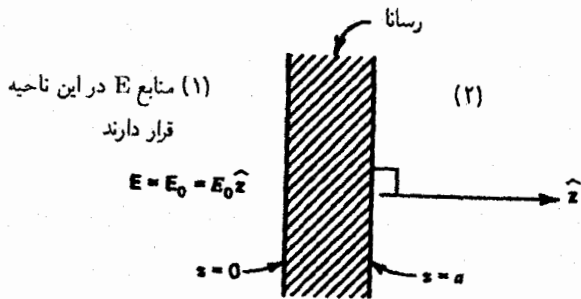
۱۵-۳ یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور p در نزدیکی کره‌ای رسانا به شعاع R که به زمین متصل است، در راستای خط بین مرکز کره و دوقطبی قرار دارد. نیرو و گشتاور بین کره و دوقطبی را تعیین کنید.

۱۶-۳ استوانه رسانای بلندی به شعاع R موازی با یک ورقه رسانای بزرگ متصل به زمین و به فاصله d از آن قرار دارد. استوانه بار λ بر طول واحد را حمل می‌کند. توزیع بار صفحه را تعیین کنید.

۱۷-۳ دو استوانه رسانای موازی، هر یک به شعاع R را در نظر بگیرید. محورهای دو استوانه به فاصله Δ از یکدیگر قرار دارند. استوانه‌ها بار $\pm\lambda$ بر واحد طول را حمل می‌کنند. (الف) توزیع بار بر روی سطوح استوانه‌ها و (ب) نیروی وارد بر واحد طول بین آنها را تعیین کنید.

۱۸-۳ استوانه بسیار بلندی به شعاع ρ_0 را که با یک چگالی حجمی بار α به طور یکنواخت باردار شده است در نظر بگیرید. چگالی بار به‌ازای $\rho > \rho_0$ صفر است. پتانسیل را در داخل و خارج استوانه تعیین کنید.

۱۹-۳ یک پوسته هم‌مرکز بار به شعاعهای R_1 و R_2 ($R_2 > R_1$)



شکل ۳-۲۴

پتانسیل را در نواحی $z > a$ و $z < 0$ تعیین کنید. پتانسیل رسانا را صفر در نظر بگیرید (رسانا به زمین متصل نیست). (ب) چگالی بار را در $z = a$ و $z = 0$ تعیین کنید. (ج) خطوط نیروی میدان الکتریکی را رسم کنید. اکنون ورقه را به زمین وصل می‌کنیم. (د) چگالیهای بار را در $z = a$ و $z = 0$ ، و میدان الکتریکی را در ناحیه $z > a$ تعیین کنید. (ه) خطوط نیروی میدان الکتریکی را رسم کنید. آیا هرگونه تأثیر حفاظتی وجود دارد؟ (و) نیروی وارد بر واحد سطح ورقه را قبل و بعد از اتصال ورقه به زمین تعیین کنید.

نظریه الکتروستاتیکی دی الکتریکها

مولکولها از نظر الکتریکی خنثی هستند تأثیر غالب الکتریکی برای مجموعه‌ای از مولکولهای خنثی تأثیر دوقطبی است.

اولین هدف ما توضیح ماده، به روش ماکروسکوپی است به طوری که مستقیماً به میدانهای ماکروسکوپی مربوط شود. مقصود از میدانهای ماکروسکوپی میانگین میدان روی فضا (ماکروسکوپی) و زمان است. به همین علت، بحث خود را روی گشتاورهای دوقطبی عناصر حجم کوچک ماکروسکوپی، که در حالت کلی از مرتبه 10^{10} مولکول یا بیشتر است متمرکز می‌کنیم. این تعداد باعث تغییر هموار وضعیت الکتریکی در درون این جزء حجم می‌شود. این بدان معنی است که در ماده چگالیهای گشتاور دوقطبی به صورت $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ وجود دارند که توابع همواری از مکان هستند. بدین ترتیب جمع برداری گشتاور دوقطبی، $d\mathbf{p}$ در حجم dv می‌شود

$$d\mathbf{p}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{P}(\mathbf{r})dv \quad (1-4)$$

که \mathbf{P} ، چگالی گشتاور دوقطبی، را معمولاً قطبش محیط در dv می‌نامند. این رابطه، میدانی (برداری) است که برای مشخص کردن ویژگیهای دوقطبی محیط به کار می‌رود. محیطهایی که به طور کامل بر حسب قطبیدگی توصیف می‌شوند دی الکتریک نام دارند. روشن است که برای یک دی الکتریک به حجم V ، گشتاور دوقطبی آن از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{P} dv \quad (2-4)$$

در این فصل مسائل الکتروستاتیک را در محیطهای دی الکتریک بررسی می‌کنیم. تا کنون بحثها مربوط به توزیع بار "در خلأ" روی رساناها یا توزیع بارهای مشخص حجمی، سطحی یا خطی بودند. هنگامی که توزیع بار را در حضور ماده بررسی می‌کنیم با این واقعیت سروکار داریم که این توزیعها در ساختار اتمی و مولکولی بارهایی را القا می‌کنند (قطبش) که در غیر این صورت خنثی هستند. این بارهای القایی به نوبه خود میدانهایی را به وجود می‌آورند که این خود ممکن است روی توزیع بارهای خارجی تأثیر بگذارد. هدف این فصل، بیان روشهایی برای رفتار این تأثیرات بر مسائل الکتروستاتیکی است.

۱-۴ قطبش و چگالی گشتاور دوقطبی

در این فصل به تفصیل به مسائل مربوط به خواص دی الکتریک مواد مختلف از دید میکروسکوپی نمی‌پردازیم. با این همه فرض می‌کنیم که ماده خواص میکروسکوپی معینی دارد، که باید به حساب آیند. می‌خواهیم وضعیت الکتروستاتیکی را بر حسب این خواص توصیف کنیم. با وجود این توجه به پدیده‌های میکروسکوپی مفید است. با این فرض بررسی خود را شروع می‌کنیم که میدانهای میکروسکوپی که به وسیله مجموعه‌های اتمی ماده، که از این پس آنها را مولکول می‌نامیم، ایجاد می‌شود، به طور کامل به کمک گشتاورهای تک قطبی و دوقطبی قابل تشخیص‌اند و اثرات چندقطبیهی مرتبه بالاتر قابل چشمپوشی‌اند. چون فقط با ابعادی خیلی بزرگتر از ابعاد مولکول سروکار داریم و

۲-۴ میدانهای ناشی از یک محیط دی الکتریک

اکنون محیطی با قطبش محدود در همه جا و پیوسته، بجز (احتمالاً) در سطوح مرزی، در نظر می‌گیریم. مطابق شکل ۱-۴ هر جزء حجم dv' واقع در محل \mathbf{r}' این محیط، در نقطه $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ یک پتانسیل دوقطبی دارد. با استفاده از معادله (۲-۴) به دست می‌آوریم

$$d\Phi_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{p}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\xi}}{\xi^3} \quad (3-4)$$

با استفاده از معادله (۱-۴) این پتانسیل را می‌توان برحسب قطبش نوشت

$$d\Phi_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\xi} dv'}{\xi^3}$$

اکنون جمله $\boldsymbol{\xi}/\xi^3$ را می‌توان به شکل $-\nabla(1/\xi)$ نوشت، بدین ترتیب

$$d\Phi_P(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\xi} \right) dv' \quad (4-4)$$

که عملگر ∇ شامل مشتقها نسبت به x, y, z است. بنابراین سهم کل پتانسیل مربوط به محیط، که حجم آن را V فرض کرده‌ایم، چنین می‌شود

$$\Phi_P(\mathbf{r}) = -\int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\xi} \right) dv' \quad (5-4)$$

با توجه به اینکه

$$\nabla[\xi^{-1}] = -\nabla'[\xi^{-1}] \quad (6-4)$$

که ∇' مشتقها نسبت به مختصات نقطه $\mathbf{r}'(x', y', z')$ است. بدین ترتیب می‌توان رابطه (۵-۴) را برحسب ∇' نوشت

$$\Phi_P(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\xi} \right) dv' \quad (7-4)$$

اکنون حجم V' (مطابق شکل ۱-۴) را که در حجم V واقع است طوری تعریف می‌کنیم که در همه نقاط آن قطبش پیوسته بوده و مساوی مقدار آن در V باشد؛ بنابراین $V \approx V' + \delta V$ ، که V سطح مرز محیط را (که \mathbf{P} در آنجا ناپیوسته است) دربر دارد. حجم V' را نیز طوری تعریف می‌کنیم که $\delta V \rightarrow 0$ ، بدین ترتیب V' در S' که درست در داخل سطح S (که حجم V را در برمی‌گیرد) قرار دارد، محصور می‌شود. چون در سراسر V, P محدود و $\boldsymbol{\xi}$ در همه جای V پیوسته است، می‌نویسیم

$$\Phi_P(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\xi} \right) dv' = \int_{V'} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\xi} \right) dv' + \int_{S'} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\xi} \right) da' \quad (8-4)$$

با استفاده از اتحاد (۵۷-۱) به دست می‌آوریم

$$\nabla' \cdot \left[\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\xi} \right] = \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\xi} + \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\xi} \right)$$

که با جایگذاری در معادله (۸-۴) نتیجه می‌گیریم

$$\Phi_P(\mathbf{r}) = \int_{V'} \nabla' \cdot \left[\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 \xi} \right] dv' + \int_{S'} -\frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 \xi} dv' \quad (9-4)$$

با استفاده از قضیه دیورژانس Φ_P تبدیل می‌شود به

$$\Phi_P(\mathbf{r}) = \oint_{S'} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{a}'}{4\pi\epsilon_0 \xi} + \int_{V'} -\frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 \xi} dv' \quad (10-4)$$

با میل کردن V' به V, S' به S تبدیل می‌شود و انتگرال دوم فقط مقادیر داخلی پیوسته \mathbf{P} را که مشتقهای آن محدودند، دربر دارد. بدین ترتیب

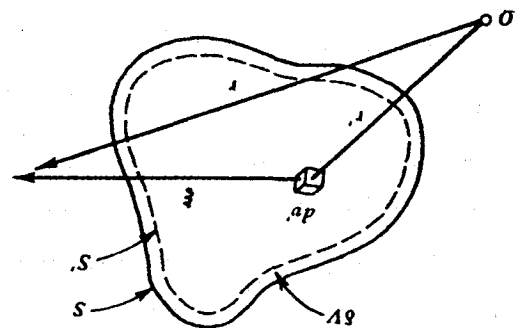
$$\Phi_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}} da'}{\xi} + \int_V -\frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\xi} dv' \right] \quad (11-4)$$

$\hat{\mathbf{n}}$ بردار عمود بر سطح S به طرف خارج آن است.

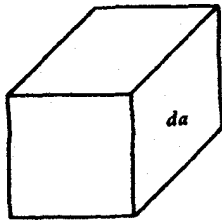
اکنون می‌دانیم که میدانهای الکتروستاتیک ناشی از بارهای الکتریکی اند و در هر مسئله فیزیکی توزیع بار یکتایی وجود دارد که میدان الکتریکی مشخصی را ایجاد می‌کند. اگر چگالی بار وابسته به این توزیع بار در حجم V مشخص باشد پتانسیل را می‌توان از رابطه

$$\Phi_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\xi}$$

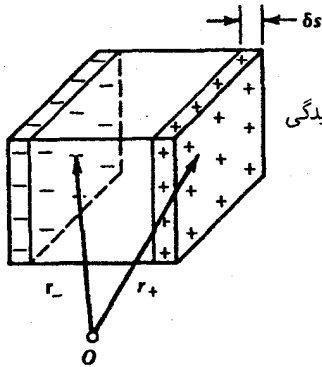
۱. فرض می‌کنیم که $\{E, \Phi\}$ در تمام فضا تعریف شده باشد.



شکل ۱-۴ یک قطعه قطبیده ماده. داخل S' قطبش پیوسته است و ممکن است روی S ناپیوسته باشد.



قبل از قطبیدگی



بعد از قطبیدگی

شکل ۲-۴ فرایندی که به موجب آن \mathbf{P} به ρ_P و σ_P منجر می شود. (الف) یک جسم دی الکتریک قبل از قطبش. (ب) همان جسم بعد از قطبش.

قطبش تنها موقعی روی میدانهای ماکروسکوپی اثر قابل ملاحظه دارد که چگالی ماده بزرگ باشد، یعنی ماده مایع یا جامد باشد. تأثیر گازها با ضریبی متناسب با چگالی ماده کوچکتر است. تنها اگر (گروه ماکروسکوپی) ساختار ماده بتواند گشتاور دو قطبی کسب کند، سودمند است که ماده را به کمک یک قطبش مشخص کنیم. برای مثال در بسیاری از فلزها آنها گشتاور دو قطبی کسب نمی کنند (حد اقل دسته بزرگی از آنها گشتاور دو قطبی خالص نمی توانند کسب کنند). بنابراین خواص دی الکتریک را به بیشتر فلزها نسبت نمی دهیم. با وجود این بیشتر عایقها خواص (دی الکتریک) دو قطبی ماکروسکوپی دارند.

نحوه فرایندی که به موجب آن \mathbf{P} منجر به ρ_P و σ_P می شود سودمند است. (شکل ۲-۴ را ببینید). ایجاد \mathbf{P} به معنی ایجاد عناصر دو قطبی ماکروسکوپی است که این به نوبه خود به معنی جدایی بار یا فاصله گیری بارهای مثبت از بارهای منفی است. چنین محیط دی الکتریک را از نظر الکتریکی می توان ترکیب دو چگالی بار ماکروسکوپی ρ_+ و ρ_- فرض کرد (مثال ۲-۴ را برای یک حالت خاص ببینید). ρ_+ متوسط چگالی بار ذرات باردار مثبت محیط (هسته آنها) و ρ_- متوسط چگالی ذرات باردار منفی محیط (الکترونها) است. اگر محیط قطبیده نباشد در همه جای آن $\rho_+ = -\rho_-$ است. در این صورت هر جزء حجم کوچک ماکروسکوپی محیط، dv ، از نظر الکتریکی خنثی است. از طرف دیگر در محیط قطبیده بار ρ_+ نسبت به بار ρ_- به اندازه

$$\Phi_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_P dv'}{\xi} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_P da'}{\xi} \quad (12-4)$$

حساب کرد.

بدین ترتیب به این نتیجه می رسیم که قطبش \mathbf{P} وابسته به ماده با حجم V ، منجر به توزیع بارهای حجمی و سطحی با چگالیهای زیر می شود

$$\rho_P = -\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') \quad \text{و} \quad \sigma_P = \mathbf{P}(\mathbf{r}'_S) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (13-4)$$

که $\hat{\mathbf{n}} \cdot da' \equiv \hat{\mathbf{n}} da'$ بردار واحد عمود بر سطح و به طرف خارج آن در محل سطح da' ، \mathbf{r}'_S و \mathbf{r}' به ترتیب نقاط درون حجم V و روی سطح S را که در آنجا \mathbf{P} محاسبه می شود نشان می دهند.

میدان الکتریکی ناشی از ماده قطبیده را نیز می توان برحسب چگالیهای بار معادله (۱۳-۴) نوشت

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_P \xi}{\xi^2} dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_P \xi}{\xi^2} da' \quad (14-4)$$

در نتیجه تأکید می کنیم که پتانسیل و میدان الکتروستاتیکی ماکروسکوپی یک ناحیه ماده با قطبش معلوم \mathbf{P} را همواره می توان به کمک چگالیهای بار ρ_P و σ_P که در معادله (۱۳-۴) داده شده اند به دست آورد. این چگالیها را به منظور متمایز بودن از چگالی بارهای "آزاد" که با قطبش ارتباطی ندارند، چگالیهای بارهای قطبیده یا بارهای مقید می نامیم. بارهای آزاد هم به نوبه خود در ایجاد میدان الکتریکی سهیم اند. با استفاده از برهم نهی به دست می آید می شود $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_P(\mathbf{r}) + \mathbf{E}'(\mathbf{r})$ و $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_P(\mathbf{r}) + \Phi'(\mathbf{r})$ و یا $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi_P(\mathbf{r}) - \nabla\Phi'(\mathbf{r})$ که همان گونه که در بالا نشان دادیم، از بارهای دیگر ناشی می شوند. تأکید می کنیم که $\{\Phi, \mathbf{E}\}$ ، میدانهای ایستای ماکروسکوپی هستند و یک میانگین زمانی و مکانی را روی جزءهای حجم ماکروسکوپی نشان می دهند. این چگالیهای بار را برای تعیین گشتاور دو قطبی یا هر گشتاور دیگر ماده قطبیده می توان به کار برد. برای مثال با استفاده از معادله (۲-۶۳)،

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' dq \quad (\text{و نیز تعریف ۲-۴}) \quad \text{به دست می آوریم}$$

$$\mathbf{p} = \oint \sigma_P \mathbf{r}' da' + \int \rho_P \mathbf{r}' dv'$$

یا به طور صریح

$$\mathbf{p} = \oint_S \mathbf{r}' (\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da' - \int_V \mathbf{r}' (\nabla \cdot \mathbf{P}) dv' \quad (15-4)$$

دارد، که \hat{n} بردار یکه برون سوی عمود بر سطح است. در واقع بار سطحی، در مدل استفاده شده، در لایه‌ای به ضخامت $(\delta s \cdot \hat{n})$ ، که قابل چشمپوشی است، جایگزین شده است.

در نتیجه با شناسایی قطبش \mathbf{P} می‌توان وجود چگالیهای بار ماکروسکوپی ناشی از آن را دریافت. این چگالیهای بار به نوبه خود میدانهای ماکروسکوپی مربوطه را ایجاد می‌کنند. صحت این عبارت از بررسی روابط الکتروستاتیک به شکل دیفرانسیلی میکروسکوپی آن یعنی روابط (۲-۳۳) و (۲-۳۷): $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ و $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ محرز می‌شود. با گرفتن میانگین زمانی و مکانی این معادله‌ها روی حجم dv به دست می‌آوریم

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0} \quad \langle \nabla \times \mathbf{E} \rangle = 0 \quad (18-4)$$

اکنون می‌توان نوشت $\langle \nabla \cdot \mathbf{E} \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{E} \rangle$ و $\langle \nabla \times \mathbf{E} \rangle = \nabla \times \langle \mathbf{E} \rangle$ (مسئله ۴-۲۱ را ببینید)، به این معنی که روابط حاکم بر میدانهای الکتروستاتیکی ماکروسکوپی با معادله‌های زیر داده می‌شوند

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{E} \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \langle \mathbf{E} \rangle = 0 \quad (19-4)$$

این روابط به همان شکل روابط میکروسکوپی اصلی هستند. بدین ترتیب چگالیهای بار به دست آمده از قطبش در محاسبه میدانهای الکتروستاتیکی متوسط در داخل و خارج جسم معتبر است، اگرچه بندرت اتفاق می‌افتد که به میدان $\langle \mathbf{E} \rangle$ در داخل جسم نیازمند باشیم. در کاربردهای معمولی وسیله اندازه‌گیری به طور معمول در خارج محیط یا حداکثر در یک حفره کوچک درون آن محیط است. استثنایی در این مورد وجود دارد که عبور ذرات باردار از داخل ماده است. انحراف خالص این ذرات وابسته به $\langle \mathbf{E} \rangle$ است که قبلاً به دست آوردیم.

مثال ۴-۱ بارهای قطبیده - الکتروت استوانه‌ای شکل - لایه دو قطبی

یک استوانه دوار جامد قائم که در طول محورش به شکل ثابت $\mathbf{P} = P\hat{z}$ قطبیده شده است را به عنوان اولین مثال مطابق شکل ۳-۴ در نظر می‌گیریم. در واقع موادی وجود دارند که قادرند این گونه قطبش را در غیاب اعمال میدان الکتریکی در خود نگاه دارند. این مواد را الکتروت پدیدة وابسته به قطبش "باقیمانده" را فروالکتریسیته می‌نامیم. (فصل ۵ را ببینید). در این مواد میدانهای الکتریکی ماکروسکوپی داخلی، قطبش را حفظ می‌کنند؛ یعنی این میدانها دو قطبیه را هم جهت نگه می‌دارند. روشن است که این گونه مواد به شدت "غیرخطی" هستند ولی "ساده" نیستند.

کوچک δs ، از مرتبه m^{-12} ، جابه‌جا می‌شود و بنابراین نسبت به ابعاد عناصر حجمی ماکروسکوپی $(\approx 10^{-2} \text{ cm})^3$ dv بینهایت کوچک است. بدین ترتیب از هر جزء سطح فرضی، da ، باری مساوی با $\rho_+ \delta s \cdot da$ جابه‌جا می‌شود. اما همان گونه که در زیر نشان می‌دهیم، $\rho_+ \delta s$ درست همان قطبش $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ محیط است. بنابراین $\mathbf{P} \cdot da$ باری است که از جزء سطح da در حین فرایند قطبش عبور می‌کند. حال ببینیم که چرا در این مدل ماکروسکوپی، قطبش \mathbf{P} با $\rho_+ \delta s$ مساوی است. جزء حجم مکعبی، dv ، محیط را مطابق شکل ۲-۴ در نظر می‌گیریم. قبل از قطبیده شدن محیط، بارهای موجود در حجم ایجاد گشتاور دو قطبی نمی‌کنند. پس از قطبیده شدن، بار ρ_+ در حجم dv به اندازه متوسط δs نسبت به بار ρ_- جابه‌جا شده است. با چرخاندن dv به طوری که δs در راستای یک لبه قرار گیرد، می‌توان به کمک شکل فهمید که اکنون توزیع بار موجود در dv به قسمی است که نواحی با بارهای مثبت و منفی در دو سطح انتهایی dv از نظر الکتریکی خنثی نیستند. بنابراین گشتاور دو قطبی ایجاد شده در dv اثر تفکیک بارهای اولیه برابر با $[\rho_+ da \delta s \mathbf{r}_+ + \rho_- da \delta s \mathbf{r}_-]$ است، که da اندازه سطح یک وجه dv و \mathbf{r}_+ و \mathbf{r}_- بردارهای جابه‌جایی نسبت به مرکز dv اند. در نتیجه

$$d\mathbf{p} = \rho_+ \delta s da [\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-] = \rho_+ dv [\delta s]$$

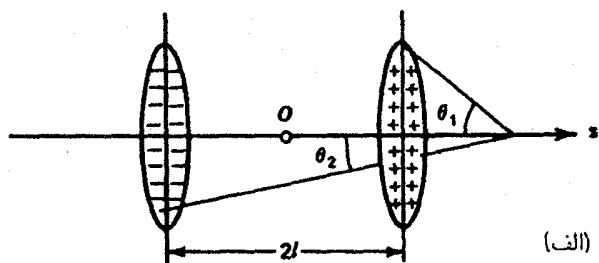
چون بنا به تعریف، $d\mathbf{p} = \mathbf{P} dv$ است نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{P} = \rho_+ \delta s \quad (16-4)$$

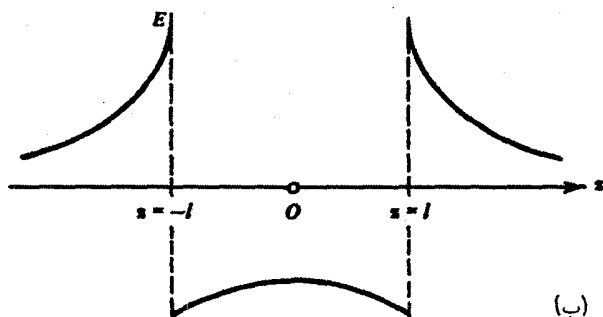
در این صورت برای هر جزء حجم dv از سطح S ، باری که به دلیل قطبیده شدن به خارج از dv می‌رود برابر با $\oint_S \mathbf{P} \cdot da$ است. چون ماده در ابتدا از نظر الکتریکی خنثی است بار باقیمانده در dv ، $\oint \mathbf{P} \cdot da -$ است. بنابراین چگالی بار در حجم dv برابر است با

$$\rho_P = -\frac{1}{dv} \oint_S \mathbf{P} \cdot da \quad (17-4)$$

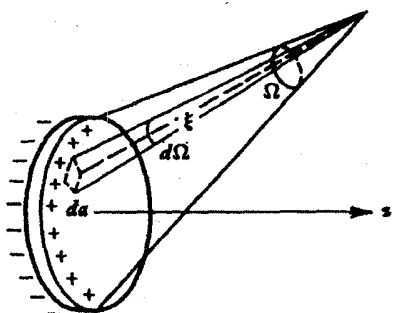
این درست همان عبارت تعریف شده برای دیورژانس \mathbf{P} است [معادله (۱-۳۷) را ببینید]. بنابراین چگالی بار قطبیده $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ همان طور که در معادله (۴-۱۳) بیان شد، وجود دارد. اگر $\rho_P \neq 0$ باشد باید بار خالصی به اندازه $\rho_P dv$ از سطح $S(dv)$ در حین قطبش عبور کرده باشد، آن گاه در سطوح واقعی یک دی الکتریک به علت عدم جبران بار عبور کرده یک چگالی سطحی σ_P برابر با $\sigma_P = (\mathbf{P} \cdot \hat{n})$ ، به گونه‌ای که در معادله (۴-۱۳) بیان شد، وجود



(الف)



(ب)



(ج)

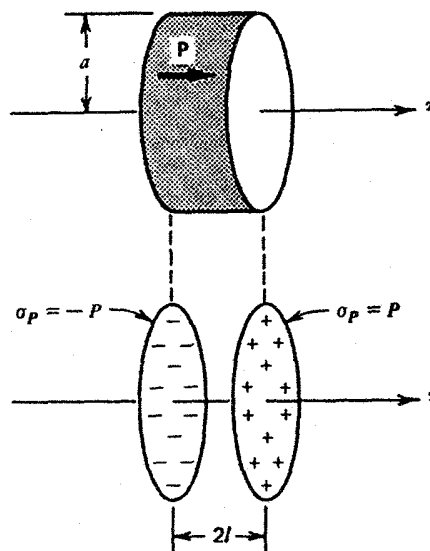
شکل ۴-۴ میدانها و پتانسیلهای یک استوانه قطبیده یکنواخت شکل ۳-۴. (الف) نمودار طرحوار بارهای قطبیده. (ب) میدان E روی محور به صورت تابعی از فاصله در طول z . (ج) حد یک استوانه کوتاه.

یا

$$E_z = \frac{P}{\epsilon_0} \left[\frac{z+l}{\sqrt{(z+l)^2 + a^2}} - \frac{z-l}{\sqrt{(z-l)^2 + a^2}} \right] \quad (۲۰-۴)$$

معادله (۲۰-۴) را می توان برحسب زوایای θ_1 و θ_2 مطابق شکل ۴-۴(الف) به صورت زیر نیز نشان داد

$$E_z = \frac{P}{\epsilon_0} [\cos \theta_2 - \cos \theta_1] \quad (۲۱-۴)$$



شکل ۳-۴ یک استوانه قطبیده یکنواخت در طول محور که به کمک بارهای سطحی قطبیده در دو انتها نشان داده شده است.

به کمک چگالیهای بار ناشی از قطبیدگی، $\sigma_P = P \cdot \hat{z}$ در دو سطح انتهایی میله و $\sigma_P = 0$ روی سطح جانبی میله و چگالی حجمی $\rho_P = -\nabla \cdot P = 0$ می توان میدان الکتریکی ماکروسکوپی به وجود آمده توسط الکترت را به دست آورد. در نتیجه می توان میله را از نظر الکتریکی مشابه دو قرص دایره ای باردار، با چگالیهای بار $\pm P$ که به فاصله $2l$ از هم واقع اند، فرض کرد. در مثال ۱۱-۲ میدان الکتریکی روی محور یک قرص باردار با چگالی بار سطحی ثابت را به دست آوردیم. معادله (۲-۴۹) با چگالی بار σ_P نتیجه می دهد

$$E = |E_z| = \frac{\sigma_P}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right)$$

که E با فرض مثبت بودن σ_P در جهت دور شدن از قرص و $|z|$ فاصله از قرص است. اگر دو قرص با چگالیهای $+P$ و $-P$ که به فاصله $2l$ از هم قرار دارند داشته باشیم، میدان خارج از دو قرص روی محور، به شرطی که مبدأ در وسط دو قرص باشد، عبارت است از

$$E_z = \frac{\hat{z}P}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z-l}{\sqrt{(z-l)^2 + a^2}} \right] - \frac{\hat{z}P}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z+l}{\sqrt{(z+l)^2 + a^2}} \right]$$

همین طور میدان بین دو قرص و روی محور را می توان به شکل

$$\mathbf{E}_< = -\frac{\hat{z}P}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{l-z}{\sqrt{(l-z)^2 + a^2}} \right] - \frac{\hat{z}P}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{l+z}{\sqrt{(l+z)^2 + a^2}} \right] \quad (22-4)$$

و یا

$$\mathbf{E}_< = -\frac{P}{2\epsilon_0} (2 + \cos\theta_1 - \cos\theta_2) \quad (23-4)$$

نشان داد. شکل ۴-۴ (ب) میدان E را به صورت تابعی از z روی محور استوانه نشان می دهد.

وقتی نقطه مشاهده به وجه طرف راست قرص می رسد (به این معنی که $z = l$ یا $\cos\theta_1 = 0$) از معادله (۲۱-۴) نتیجه می شود

$$\mathbf{E}_>(z \rightarrow l) = \frac{P}{2\epsilon_0} \cos\theta_2 \quad (24-4)$$

و از معادله (۲۳-۴) به دست می آوریم

$$\mathbf{E}_<(z \rightarrow l) = \frac{-P}{2\epsilon_0} [2 - \cos\theta_2] \quad (25-4)$$

با کم کردن معادله (۲۵-۴) از معادله (۲۴-۴) به دست می آوریم

$$\mathbf{E}_> - \mathbf{E}_< = \frac{P}{2\epsilon_0} (\cos\theta_2 + 2 - \cos\theta_2) = \frac{P}{\epsilon_0} \quad (26-4)$$

که بیانگر این است که مؤلفه عمودی E ناپیوسته است. این انفصال مربوط به وجود σ_P روی قرص است.

سرانجام توجه کنیم که اگر $\theta_2 \rightarrow \theta_1 \rightarrow \pi/2$ (که متناظر با قرص به قطر ∞ است) آن گاه معادله (۲۱-۴) به شکل زیر در می آید

$$\mathbf{E}_> = \frac{P}{2\epsilon_0} \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad (27-4)$$

و معادله (۲۳-۴) نیز به شکل زیر خلاصه می شود

$$\mathbf{E}_< = -\frac{P}{\epsilon_0} \quad (28-4)$$

این میدانها مشابه میدانهای خازن مسطح موازی با اندازه سطح نامحدود است، که در فصل ۶ مفصلاً بررسی خواهد شد. یادآوری این نکته جالب توجه است که وقتی $l \rightarrow 0$ ($l = \delta$) قرص را می توان یک لایه دوقطبی با سطح S ، مطابق شکل ۴-۴ (ج) فرض کرد به طوری که

گشتاور دوقطبی جزء سطح da قرص، $dp = P\delta da \hat{z} \equiv P_S da \hat{z}$ است. P_S را گشتاور دوقطبی سطحی برای واحد سطح می نامیم. پتانسیل مربوط به این لایه دوقطبی به کمک معادله (۲-۴۴) محاسبه می شود. یعنی

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dp \cdot \xi}{\xi^2} = \int_S \frac{P_S da \cdot \xi}{4\pi\epsilon_0 \xi^2} \equiv \int_S \frac{P_S d\Omega}{4\pi\epsilon_0} \quad (29-4)$$

$d\Omega$ جزء زاویه فضایی است که از نقطه مشاهده سطح da را در برگیرد. اگر بردار قطبش جزء سطح da به گونه ای باشد که $\mathbf{P}_S \cdot \xi \geq 0$ $d\Omega$ را مثبت و در غیر این صورت آن را منفی می گیریم. اگر P_S روی مساحت سطح، ثابت باشد معادله (۲۹-۴) به سادگی انتگرال گیری می شود؛ بنابراین

$$\Phi = \frac{P_S \Omega}{4\pi\epsilon_0} \quad (30-4)$$

که Ω زاویه فضایی کل است که از نقطه مشاهده قرص را در برگیرد. محاسبه پتانسیل درست در بالا، Φ_+ ، و در پایین، Φ_- ، لایه دوقطبی نیز جالب است. با استفاده از معادله (۳۰-۴) به دست می آوریم

$$\Phi_+(z \rightarrow 0^+) = \frac{P_S \cdot 2\pi}{4\pi\epsilon_0} = \frac{P_S}{2\epsilon_0} \quad \text{و} \quad \Phi_-(z \rightarrow 0^-) = -\frac{P_S}{2\epsilon_0}$$

این نتایج مشخص می کند که $\Phi_+ - \Phi_- = P_S/\epsilon_0$. بنابراین پتانسیل در عبور از لایه دوقطبی ناپیوسته است و در نتیجه میدان الکتریکی به شدت تکیه است [یعنی در روی لایه ∞ می شود. بحث بعد از معادله (۸-۳) را بخوانید].

مثال ۲-۴ کره قطبیده — دو کره باردار ناهم نام برهم افتاده کره دی الکتریک قطبیده ای به شعاع R را در نظر می گیریم و فرض می کنیم قطبش در کل حجم آن، $\mathbf{P} = P\hat{z}$ ، ثابت باشد. اکنون می خواهیم میدانهای الکتریکی به وجود آمده از این قطبش را به دست آوریم. این میدان کلاً معادل میدان حاصل از توزیع بارهای قطبیده با قطبش

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0 \quad \text{و} \quad \sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{r} = P(\hat{z} \cdot \hat{r}) = P \cos\theta \quad (31-4)$$

است. می توان پتانسیل یا میدان مربوط به این گونه توزیع بار را به طور مستقیم از رابطه کولن حساب کرد، اگرچه انتگرالهای مربوطه بدیهی

پس $dq = \rho dv = \rho da dr = \rho da(\delta \cos \theta)$ داده می‌شود. اکنون مشاهده می‌کنیم که با قراردادن $dq/da \equiv \sigma = \rho \delta \cos \theta$ در مسئله ابتدایی [معادله (۱۶-۴)] را ببینید، توزیعهای بار مشابه و در نتیجه میدانهای الکتریکی مشابه برای این دو مسئله به دست می‌آید. با این همه محاسبه میدان و پتانسیل الکتریکی برای مسئله دو کره باردار یکنواخت برهم افتاده ساده است. بدین ترتیب با حل این مسئله، مسئله قطبیدگی را نیز حل کرده‌ایم.

توجه کنید که می‌توان یک دی الکتریک غیرقطبیده را مشابه دو کره باردار یکنواخت برهم افتاده که چگالی بارهای آنها ρ_+ و $\rho_- = -\rho_+$ است فرض کرد. در فرایند قطبش، یک جابه‌جایی بسیار کوچک، δ ، بار مثبت نسبت به بار منفی برای ایجاد چگالی بار سطحی $\rho_+ \delta \cos \theta$ رخ می‌دهد. بدین ترتیب مسئله کره قطبیده یکنواخت از تمام جنبه‌ها شبیه مسئله دو کره باردار یکنواخت جابه‌جا شده است. به سادگی تشخیص می‌دهیم که $P = \rho \delta$.

خارج از دو کره (در $r > R$) هر کره باردار یکنواخت مثل یک بار نقطه‌ای [معادله (۵۱-۲)] به اندازه زیر به نظر می‌رسد

$$Q_{\pm} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\pm} = \pm \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

این بارهای نقطه‌ای به اندازه δ ، که $\delta/R \ll 1$ ، از هم جدا شده‌اند. میدان، یک میدان دوقطبی با گشتاور دوقطبی $Q_+ \delta$ است (مثال ۹-۲ را ببینید)

$$\Phi(r > R) = \frac{Q\delta \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \delta \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{VP \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

یا

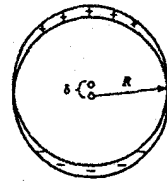
$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (۳۲-۴)$$

که $\mathbf{p} \equiv PV$ گشتاور دوقطبی کره و V حجم کره است. در داخل کره ($r \leq R$) نتیجه مثال ۱۲-۲ (ب) را به کار می‌گیریم. با استفاده از معادله (۵۲-۲) می‌نویسیم

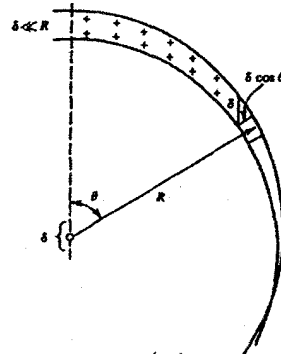
$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_+ \quad \mathbf{E}_- = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_-$$

میدان کل جمع برداری این دو میدان است

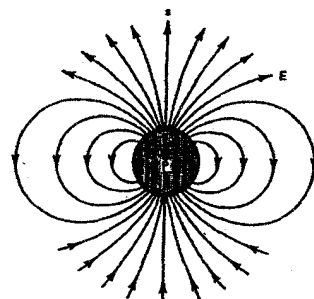
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = \frac{-\rho \delta}{3\epsilon_0}$$



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۵-۴ میدانها و پتانسیلهای یک کره قطبیده. (الف) نمایش دو نیمکره باردار ناهم نام غیر هم مرکز برهم افتاده. (ب) بزرگ شده بخشی از کره. (ج) خطوط نیروی میدان E .

نیستند. با این همه مشاهده می‌کنیم که راه میانبر وجود دارد [بحث قبل و بعد معادله (۱۵-۴)] را بخوانید. برای بررسی این راه، مسئله زیر را بررسی می‌کنیم.

دو کره باردار یکنواخت به شعاع R را که به فاصله کوچک $\delta \ll R$ نسبت به هم قرار دارند، مطابق شکل ۵-۴ (الف)، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم چگالیهای بار آنها به ترتیب $\rho_+ = \rho$ و $\rho_- = -\rho$ باشند. در ناحیه‌ای که دو کره روی هم قرار گرفته‌اند چگالی بار خالص صفر است. تنها روی قسمت غیرمنطبق دو کره بار غیرمتوازن وجود دارد. با نگاه به شکل ۵-۴ (ب) می‌بینیم که بار در لایه روی سطح با رابطه

با جایگذاری $P = \rho \delta$ به دست می آوریم

$$E = -\frac{P}{3\epsilon_0} \quad (۳۳-۴)$$

نکته قابل توجه آن است که میدان الکتریکی در داخل کره ثابت و در خارج به شکل میدان یک دوقطبی ساده است. شکل ۴-۵ (ج) خطوط نیروی کره یکنواخت قطبیده را نشان می دهد.

اکنون اگر مواد به کاررفته در این مثال تعویض شوند مسئله به یک حفره در یک محیط دی الکتریک بینهایت که همسانگرد و با قطبش یکنواخت P است تبدیل می شود. میدان الکتریکی در حفره همان میدان کره قطبیده است که فقط جهت آن عکس شده است (مسئله ۴-۱۶ را ببینید)

$$E = \frac{P}{3\epsilon_0} \quad (۳۴-۴)$$

روش دیگر حل همین مسئله را در مسئله ۴-۱۸ ببینید (روش شرایط مرزی در بخش ۴-۶).

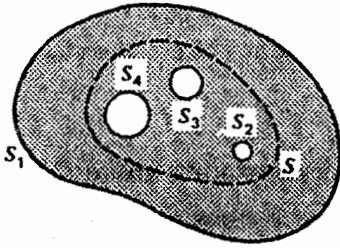
۴-۳ قانون گاوس برای دی الکتریکها

باید به صراحت اشاره کنیم که میدانهای ماکروسکوپی با میدانهای مشابه میکروسکوپی، حتی اگر در معادله دیفرانسیل یکسانی صدق کنند، تفاوت دارند. مطمئناً این میدانها در داخل دی الکتریک خیلی متفاوت اند. میدان میکروسکوپی به خاطر نزدیکی به بارهای اتمی از یک نقطه به نقطه دیگر به شدت تغییر می کند در حالی که تغییر میدان ماکروسکوپی آهسته است. ما این میدانها را متمایز نخواهیم کرد زیرا کاری بسیار پرزحمت است. باید توجه داشت که در محیطهایی که چگالیهای بار تحت تأثیر میدان ماکروسکوپی P هستند، میدانهای ماکروسکوپی $\{E, P, \Phi\}$ به وجود می آیند بدین ترتیب همچون گذشته به نوشتن معادله های $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$ و $\nabla \times E = 0$ حتی برای محیطهای مادی ادامه می دهیم. با وجود این، بخشی از ρ در اینجا مربوط به بار قطبیده، $\rho_P = -\nabla \cdot P$ است. با نمایش بقیه چگالی بار با ρ_f (برای "آزاد") داریم $\rho = \rho_f + \rho_P$ بنابراین

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 E + P) = \rho_f \quad \text{یا} \quad \nabla \cdot E = \frac{\rho_f}{\epsilon_0} - \frac{\nabla \cdot P}{\epsilon_0}$$

با تعریف یک میدان برداری جدید

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (۳۵-۴)$$



شکل ۴-۶ یک ماده دی الکتریک که توسط چند سطح S_1, S_2, S_3 و S_4 محدود شده است.

داریم

$$\nabla \cdot D = \rho_f \quad (۳۶-۴)$$

میدان برداری جدید D را جابه جایی الکتریکی می نامیم که دیورژانس آن به جای چگالی بار کل به چگالی بار آزاد وابسته است. نیازی نیست که تاو آن صفر باشد، بنابراین در حالت کلی یک میدان غیر پایستار است. معادله (۳۶-۴) شکل دیفرانسیلی قانون گاوس در حضور ماده است.

اکنون شکل انتگرالی قانون گاوس را در حضور ماده به دست می آوریم. در شکل ۴-۶ یک ماده دی الکتریک را که به وسیله چند سطح S_1, S_2, S_3 و S_4 محدود شده است نشان داده ایم. همچنین سطح گاوس S که حجم V را در برمی گیرد مشخص شده است. طبق قانون گاوس $\oint E \cdot da = Q/\epsilon_0$ ، که Q بار کل در حجم V است که سطح S آن را در بر گرفته است. با وجود دی الکتریکها یک بار قطبشی نیز، که بایستی به حساب آید، وجود دارد. بنابراین می نویسیم $Q = Q_f + Q_P$ ، که Q_P بار قطبیده داخل سطح S و Q_f بقیه بار داخل سطح است. بار Q_P ممکن است ناشی از چگالی بارهای سطحی و حجمی توزیع شده در داخل سطح S باشد. پس

$$Q_P = \int_{S'} \sigma_P da + \int_{V'} -\nabla \cdot P dv \quad (۳۷-۴)$$

که S' شامل تمام سطوح داخل S است که در آنها P ناپیوسته است و V' یک زیر حجم به استثنای نقاطی است که در آنها $\nabla \cdot P$ بینهایت باشد. اکنون دو عبارت زیر را در مورد بار قطبشی Q_P فرض می کنیم. عبارت اول اینکه "بار کل قطبشی در تمام ماده دی الکتریک صفر است". این با انتخاب S' به طوری که سطح خارجی S_1 را در بر گیرد به سادگی قابل فهم است. با استفاده از قضیه دیورژانس برای جمله دوم طرف راست معادله (۳۷-۴) و تبدیل آن به انتگرال سطحی، جمله

\mathbf{D} است) در ناحیه‌ای که بار آزاد (ماکروسکوپی) آن صفر است روشن می‌کند. تأکید می‌کنیم که \mathbf{D} را نباید مانند \mathbf{E} یک میدان بنیادی در نظر گرفت، بلکه صرفاً یک ساختار ریاضی است که برای به دست آوردن حل ماکروسکوپی \mathbf{E} از معادله اصلی راهی را مشخص می‌کند. تصویر فیزیکی آن پیچیده است و ارتباط مستقیمی با نیروی وارد بر بارها ندارد.

۴-۴ معادلات الکتروستاتیک در داخل دی‌الکتریک
می‌توان اکنون روابط الکتروستاتیک ماکروسکوپی را به شکلهای زیر خلاصه کرد

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \text{و} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{یا} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{و} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (42-4)$$

که

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{و} \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi \quad (43-4)$$

در فضای تهی $\rho_f \equiv \rho$ ، $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ و روابط یکسان‌اند. در دی‌الکتریکها $\rho = \rho_f + \rho_P = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}$ و روابط، مجدداً، کاملاً یکسانند. در هر دو مورد میدان \mathbf{E} پایستار است و امکان استفاده از تابع پتانسیل Φ وجود دارد.

اگر ρ همه جا معلوم باشد می‌توان (حداقل در اصل) برای این معادله‌ها جوابی به دست آورد. زیرا در این صورت تاو و دیورژانس \mathbf{E} همه جا مشخص است. و این برای به دست آوردن جواب \mathbf{E} (یا Φ) کافی است. اما در حضور دی‌الکتریک، ρ به شرط معلوم بودن ρ_f و \mathbf{P} معلوم است. به محض معین بودن \mathbf{P} و ρ_f به دست آوردن \mathbf{E} با روشی که قبلاً بحث شد متفاوت نخواهد بود. می‌توان σ_P و ρ_P را به کمک \mathbf{P} حساب و سپس \mathbf{E} (یا Φ) را با انتگرال‌گیری تعیین کرد.

اغلب فرض می‌شود که ρ_f تحت کنترل است و معلوم در نظر گرفته می‌شود؛ با این همه \mathbf{P} به صراحت داده نمی‌شود. در این صورت مسئله شکل دیگری به خود می‌گیرد. اگرچه می‌دانیم $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ و $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ، با وجود این بدون داشتن رابطه بین \mathbf{E} و \mathbf{D} نمی‌توان \mathbf{E} یا \mathbf{D} را (حتی اگر ρ_f را در همه جا بدانیم) به دست آورد. به بیان دیگر لازمه تعیین \mathbf{E} و \mathbf{D} دانستن تاو و دیورژانس \mathbf{E} یا \mathbf{D} در همه جا است.^۱

۱. اگر ρ_f فقط در ناحیه محدود V معلوم باشد، آن‌گاه برای پیدا کردن \mathbf{E} و \mathbf{D} در این ناحیه لازم است شرایط مرزی برای این ناحیه را نیز بدانیم (مطالب بعد را ببینید).

اول همان طرف کاملاً حذف می‌شود. این نتیجه استنتاج مستقیم این حقیقت است که دی‌الکتریک واقعی، بنابه تعریف، خنثی است. از طرف دیگر، عبارت دوم، بیان می‌کند که بار کل قطبشی محصور در یک سطح که شامل S نباشد صفر نیست بلکه مقدار آن به صورت زیر است

$$Q_P = - \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a} \quad (38-4)$$

دلیلش این است که دی‌الکتریک واقعی، بنابه تعریف، خنثی است و تنها باری که در فرایند قطبش از S عبور می‌کند به بار خالص موجود در V اضافه خواهد شد. اما این به سادگی همان انتگرال Q_P است که در معادله (۳۸-۴) تعریف شد. با قراردادن Q_P در قانون گاوس، معادله (۲۷-۲)، برای هر سطح بسته S داریم

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_f}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a}$$

یا

$$\oint \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_f}{\epsilon_0}$$

با ضرب در ϵ_0 ، معادل قانون گاوس برای دی‌الکتریکها عبارت است از

$$\oint (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{a} = Q_f \quad (39-4)$$

این قانونی است که بر میدانهای ماکروسکوپی (\mathbf{P}, \mathbf{E}) حاکم است. تابع برداری $\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ همان جابه‌جایی الکتریکی است که در معادله (۳۵-۴) با آن مواجه شدیم. اینجا به یک نتیجه کلی رسیده‌ایم که برای هر سطح بسته دلخواه S

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_f \quad (40-4)$$

که Q_f بار آزاد کل موجود در S است. اگر Q_f را بتوان در همه جا با چگالی حجمی بار ρ_f (در داخل S) مشخص کرد آن‌گاه

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{D}) dv = Q_f \equiv \int \rho_f dv \quad (41-4)$$

که مانند قبل بر رابطه $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ دلالت دارد. به روشنی پیداست که عبارت انتگرالی معادله (۴۱-۴)، از معادله دیفرانسیلی کلی‌تر است. زیرا در اینجا Q_f محدود نیست که با ρ_f مشخص شود. این موضوع ادعای پیوسته بودن شار \mathbf{D} را (که قابل نمایش به شکل خطوط نیروی

۵-۴ روابط اساسی الکتریکی

روابط بین P (یا D) و E را روابط اساسی می نامیم. مثلاً برای یک دسته از مواد دی الکتریک این رابطه به شکل زیر بیان می شود

$$P = \epsilon_0 \chi E \quad (۴۴-۴)$$

یا

$$D = \epsilon_0 (1 + \chi) E \quad (۴۵-۴)$$

که می توان آن را به شکل دیگری نیز نمایش داد

$$D \equiv \epsilon_0 K E \equiv \epsilon E \quad (۴۶-۴)$$

χ را که یک پارامتر بدون بعد است پذیرفتاری الکتریکی؛ و $K = 1 + \chi$ را گذردهی نسبی یا ثابت دی الکتریک می نامیم، و نسبت به ناحیه قطبش صفر، مثل فضای تهی، که ثابت دی الکتریک آن یک است سنجیده می شود. $\epsilon = \epsilon_0 K$ گذردهی ماده است.

باید تأکید کنیم که روابط اساسی، قوانین فیزیکی را بیان نمی کنند بلکه صرفاً نمایش قابل قبولی از رفتار مواد را به دست می دهند. اگر χ (یا K) به مکان قطعه ای از ماده وابسته نباشد ماده را همگن می نامیم. اگر χ به مقدار E وابسته نباشد ماده را خطی و اگر به جهت E در ماده وابسته نباشد ماده را همسانگرد می نامیم. بیشتر مایعات و گازها مواد همگن، همسانگرد و خطی، حداقل در میدانهای ضعیف الکتریکی، هستند. ما آنها را با کلمه دی الکتریک "ساده" مشخص می کنیم. بیشتر جامدات غیر بلورین، از این دید، مواد ساده اند. با این همه، خیلی از مواد بلورین در این شرایط صدق نمی کنند. مثلاً روابط بین E و P برای آنها را می توان با مجموعه روابط زیر بهتر نشان داد

$$\frac{P_x}{\epsilon_0} = \chi_{xx} E_x + \chi_{xy} E_y + \chi_{xz} E_z \quad (۴۷-۴)$$

و روابط مشابه برای مؤلفه های y و z مربوط به P برقرار است. مجموعه نه ضریب، روابط بین E و P را تعیین می کنند. این ضرایب را ضرایب پذیرفتاری می نامیم و ممکن است برای بلورهای غیر خطی تابع E باشند. مجموعه ضرایب بالا را تانسور پذیرفتاری می نامیم. این مواد ممکن است خطی و همگن باشند اما به وضوح همسانگرد نیستند زیرا حتی وقتی $E = \hat{x} E_x$ ، ممکن است مؤلفه های قطبش مختلف در راستای y و z داشته باشند. فقط در صورتی که روابط $\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi$ و $\chi_{xy} = \chi_{xz} = \chi_{yz} = \chi_{zx} = \chi_{yx} = \chi_{zy} = 0$ برقرار

جدول ۱-۴ ثابتهای دی الکتریک^۱

ماده دی الکتریک	K
مواد چینی	۵-۱۰
شیشه	۵-۱۰
نایلون	۳٫۶
پلی اتیلن	۲٫۲۵
نقلون	۲٫۱
لوسیت	۳٫۰
نئوپرن	۶٫۷
آب	۷۸٫۵
اتانول	۲۴٫۳
متانول	۳۲٫۶
بنزن	۲٫۲۸
میکا	۷٫۰
پارافین	۲٫۲
روغن معدنی	۲٫۱۵
هوا	۱٫۰۰۰۵۹
CO _۲	۱٫۰۰۰۹۸۵
H _۲	۱٫۰۰۰۰۶۵
O _۲	۱٫۰۰۰۵۳۱

۱. جمع آوری شده از کتاب زیر *AIP Handbook*, 3rd ed., 1972 (New York: McGraw-Hill, 1972).

مقادیر برای STP داده شده اند.

باشد پذیرفتاری ساده خواهیم داشت. این خاصیت غیر خطی بلورها را اخیراً در بعضی کارهای عملی مهم به کار گرفته اند. مثلاً این خاصیت تعداد طول موجهای قابل دسترس لیزری (مولد هماهنگ) را افزایش می دهد.

حتی در مواد ساده، پذیرفتاری الکتریکی به پارامترهایی از قبیل درجه حرارت و فشار وابسته است. اندازه های χ در دما و فشار استاندارد (STP) برای چند رسانا را در جدول ۱-۴ آورده ایم.

با کارهای تحقیقی روی ماده می توانیم بفهمیم چرا یک ماده ثابت دی الکتریک خاصی دارد و نیز چگونه تحت تأثیر شرایط محیطی مثل دما و فشار قرار می گیرد. در اینجا تنها بیان می کنیم که معمولاً دو نوع دی الکتریک، قطبی و غیر قطبی وجود دارند. مولکولهای دی الکتریکهای قطبی گشتاور دوقطبی دائمی (ذاتی) دارند که در اثر

مثال ۳-۴ کره رسانای احاطه شده با پوسته دی الکتریک - قانون گاوس

در این مثال مطابق شکل ۷-۴ یک کره رسانا به شعاع R_1 را که بار Q ($Q_f \equiv Q$) دارد و در تماس با یک پوسته کروی دی الکتریک هم مرکز با آن، با ثابت دی الکتریک K و با شعاع خارجی R_2 است در نظر می گیریم. می خواهیم میدان و چگالی بار ایجاد شده در هر نقطه را پیدا کنیم.

به دلیل وجود تقارن کروی انتظار داریم که میدان الکتریکی در فاصله r از مرکز کره شعاعی بوده و مستقل از θ و ϕ باشد. بدین ترتیب به سادگی می توان قانون گاوس را برای تعیین میدان به کار برد.

با استفاده از قانون گاوس روی یک سطح کروی به شعاع r و هم مرکز با کره باردار، به گونه ای که $R_1 \leq r \leq R_2$ و با انتخاب $D = D\hat{r}$ به دست می آوریم $Q_f = \oint D \cdot da$ که نتیجه می شود

$$D = \frac{Q_f}{4\pi r^2} \hat{r} \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (48-4)$$

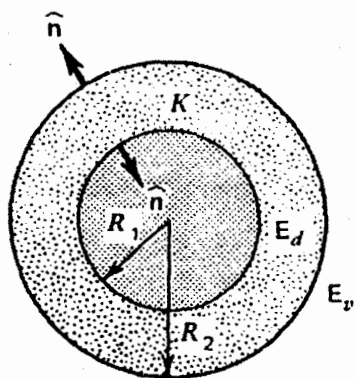
که $\epsilon = \epsilon_0 K$ گذردهی محیط است. به همین ترتیب، میدان در ناحیه تهی را با استفاده از قانون گاوس به دست می آوریم. یعنی

$$D = \frac{Q_f}{4\pi r^2} \hat{r} \quad r > R_2 \quad (49-4)$$

البته میدان در داخل کره صفر است. بنابراین

$$D = 0 \quad E = 0 \quad r < R_1 \quad (50-4)$$

همچنین می توان چگالی بار سطحی قطبیده را در $r = R_1$ به دست آورد. با کاربرد معادله (۴۴-۴)، (۴۸-۴) و (۵۰-۴) قطبش P در



شکل ۷-۴ کره ای رسانا داخل یک پوسته دی الکتریک.

میدانهای الکتریکی خارجی می خواهند در راستای میدان جهت گیری کنند. اگر میدانها صفر باشند مولکولها به طور کاتوره ای طوری قرار می گیرند که قطبش صفر را نتیجه می دهند. این گونه دی الکتریکها در حالت کلی پذیرفتاری بزرگتر قابل ملاحظه ای نسبت به نوع غیر قطبی، که گشتاور دوقطبی آنها القایی است، دارند. القا به معنی تغییر شکل یا جابه جایی ابر الکترونی مولکولی نسبت به هسته است. ماده ای مثل آب قطبی است در حالی که مواد اتمی (غیرمولکولی) مثل گازهای تک اتمی، تمایل به غیرقطبی بودن دارند (فصل ۵ را ببینید).

همان طور که در جدول ۱-۴ نشان داده ایم، گازهای معمولی در STP اساساً ثابتهای دی الکتریک واحد را برای بیشتر کاربردها دارند، زیرا چگالی اتمی آنها خیلی پایین است.

مثالهایی وجود دارند که وجود قطبش را احتمالاً مربوط به نیروهایی غیر از آنهایی که توسط میدانهای الکتریکی اعمال می شود می دانند. بدین ترتیب نیروهای لختی یا گرانشی ممکن است باعث جدایی بار در اتمها یا مولکولها شود و باعث یک قطبش مؤثر شود. تنشهای مکانیکی نیز ممکن است قطبش به وجود آورند. مثلاً این حالت در کوارتز رخ می دهد و اثر وابسته به آن را اثر پیزوالکتریک می نامند. این اثر کاربردهای فراوانی دارد. به طور مثال در ساخت میدلهای الکتریکی-مکانیکی که در آنها، یک اثر مکانیکی به سیگنال الکتریکی و بالعکس تبدیل می شود.

سرانجام باید ذکر کنیم هنگامی که میدان الکتریکی محیط افزایش می یابد در نهایت خطی بودن P و E از بین خواهد رفت. اگر E به یک مقدار بحرانی برسد دی الکتریک ممکن است "فرو ریزد" که این اشاره بر شکستن پیوندهای بین الکترونها و مولکولها یا اتمهای مربوطه دارد. در این وضعیت دی الکتریک دیگر مثل یک عایق عمل نمی کند زیرا الکترونها تحت تأثیر میدانهای قوی به نقاط دور از مکانهای معمولی شان انتقال پیدا می کنند. اندازه بحرانی میدانهای الکتریکی را که این اثر را ایجاد می کنند قدرت دی الکتریک ماده می نامند. این مقدار برای هوا در STP حدود 3×10^6 ولت بر متر است.

در ادامه اصولاً مواردی را که رابطه ای ساده بین P و E داشته باشند بررسی خواهیم کرد. یادآوری می کنیم که رابطه $P = \epsilon_0 \chi E$ ، میدان کل ماکروسکوپی در هر نقطه را به P مربوط می کند. بنابراین اگر یک قطعه دی الکتریک را در میدان الکتریکی خارجی E_0 قرار دهیم قطبش القایی در دی الکتریک به جای $P = \epsilon_0 \chi E_0$ ، $P = \epsilon_0 \chi E$ خواهد بود که در آن E شامل دو میدان E_0 و میدان ناشی از قطبش خود دی الکتریک است.

$r = R_1$ را به دست می آوریم

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}_d = (K - 1) \frac{Q_f}{4\pi K R_1^2} \hat{\mathbf{r}} \quad r = R_1 \quad (51-4)$$

بنابراین رابطه $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{P} \cdot (-\hat{\mathbf{r}})$ به دست می دهد

$$\sigma_p = -(K - 1) \frac{Q_f}{4\pi K R_1^2} = \frac{-(K - 1)\sigma_f}{K} \quad (52-4)$$

که $\sigma_f = Q_f / 4\pi R_1^2$ همین چگالی بار منفی در R_1 است که میدان الکتریکی در دی الکتریک را نسبت به حالت نبود آن تضعیف می کند.

بار قطبیده در $r = R_2$ نیز به روش مشابه تعیین می شود

$$\mathbf{P} = (K - 1) \frac{Q_f}{4\pi K R_2^2} \hat{\mathbf{r}} \quad r = R_2 \quad \text{در}$$

و بنابراین

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{P} \cdot (\hat{\mathbf{r}}) = (K - 1) \frac{Q_f}{4\pi K R_2^2} \quad (53-4)$$

به کمک روابط (52-4) و (53-4) می توان نشان داد که بار قطبیده کل در R_1 از نظر اندازه مساوی و از نظر علامت مخالف بار قطبیده کل در R_2 است. البته باید همین طور باشد زیرا دی الکتریک از ابتدا بدون بار خالص فرض شده است و بار حجمی قطبیده هم وجود ندارد؛ بنابراین $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -(K - 1)\epsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}_d) = 0$ این نتیجه نیز باید صحیح باشد زیرا بار آزاد بنابه فرض در دی الکتریک وجود ندارد و چگالی بار کل در دی الکتریکهای ساده با چگالی بار آزاد متناسب است.

سرانجام پتانسیل رسانا، Φ_c ، را با استفاده از معادله (42-2) تعیین

می کنیم. برای $\Phi(\infty) \equiv 0$ داریم

$$\Phi_c \equiv - \int_{\infty}^{R_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\infty}^{R_2} \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{r} - \int_{R_2}^{R_1} \mathbf{E}_d \cdot d\mathbf{r}$$

با قراردادن میدانها به دست می آوریم

$$\Phi_c = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \left[\frac{Q_f}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] \quad (54-4)$$

اگر به جای Q_f ، ولتاژ، Φ_c ، که از ابتدا مشخص می شد رابطه بین Q_f و Φ_c می توانست در معادله E_d و E_v به کار رود [معادله (55-4)]

مثال زیر را ببینید.

مثال 4-4 خازن با صفحات موازی - قانون گاوس

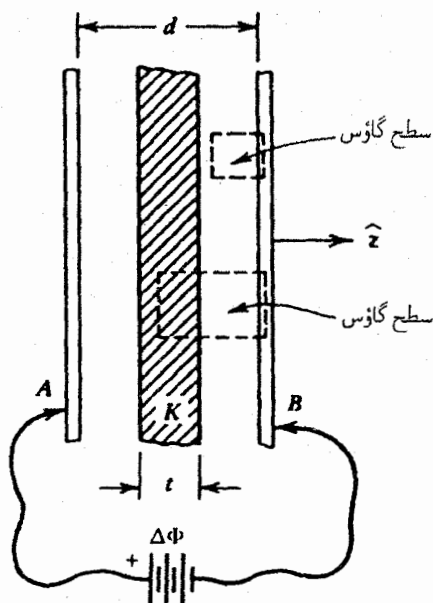
دو صفحه رسانای موازی که ابعاد هر یک نسبت به فاصله آنها، d ، خیلی بزرگ است، مطابق شکل 4-8 در نظر می گیریم. سطح هر صفحه را A فرض می کنیم. یک لایه دی الکتریک با ضخامت t بین دو صفحه قرار دارد. گذردهی دی الکتریک، $\epsilon = K\epsilon_0$ و اختلاف پتانسیل بین صفحات $\Delta\Phi$ است.

چون ابعاد صفحه در مقایسه با فاصله بین آن دو خیلی بزرگتر است، انتظار داریم که میدان الکتریکی بر دو صفحه عمود بوده و اندازه آن در دی الکتریک و در فضای تهی به ترتیب برابر با مقادیر ثابت $E_d \hat{\mathbf{z}}$ و $E_v \hat{\mathbf{z}}$ باشد.

برای پیدا کردن مقادیر E_v و E_d معادله (41-2) را به کار می بریم

$$\Delta\Phi = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E_d t + E_v (d - t) \quad (55-4)$$

و از قانون گاوس، $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_f$ ، استفاده می کنیم. با کاربرد قانون گاوس روی سطح گاوس، که مقطع بالای آن داخل رسانا و مقطع پایین آن در فضای تهی (بین دی الکتریک و رسانا) است نتیجه می شود $D_v = \sigma_f$. همین طور اگر مقطع پایین سطح گاوس داخل دی الکتریک باشد داریم $D_d = \sigma_f$ ، زیرا بار مربوط به قطبش دی الکتریک بنابه تعریف بار "غیر آزاد" است. در این صورت از برابری D_d و D_v داریم $E_v = K E_d$ که با قراردادن آن در معادله



شکل 4-8 خازن با صفحه های موازی با یک لایه دی الکتریک در بین آنها.

۴-۶-۱ منحصر به فرد بودن

همان طور که معادله پواسون (یا لابلاس) برای فضای تهی در شرایط مرزی مشخص جواب منحصر به فرد دارد، کاربرد آن روی مواد دی الکتریک نیز به جواب منحصر به فرد منجر می شود. اگر ناحیه محدودی از فضا را بررسی کنیم به شرطی جواب منحصر به فرد (برای $\nabla\Phi$) وجود خواهد داشت که پتانسیل الکتروستاتیکی روی تمام سطوح، که ناحیه مورد نظر را دربر دارد، مشخص باشد. این شرایط با شرایطی که برای فضای تهی مطرح کردیم تفاوتی ندارد (بخش ۴-۶-۲ را ببینید). بدین ترتیب، همانند گذشته، اگر بخشی از سطح مرزی رسانا باشد، به جای پتانسیل کافی است که بار کل (آزاد) روی رسانا معین باشد. در هر یک از این موارد، برای پیدا کردن جواب، باید برخی از خصوصیات دی الکتریک محیط در ناحیه مورد نظر را بشناسیم.

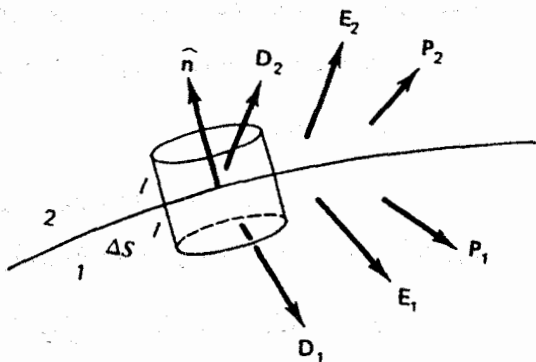
۴-۶-۲ شرایط مرزی برای محیط دی الکتریک

چون برای به دست آوردن جواب مشخص، شرایط مرزی ضروری است اکنون این شرایط را برای محیطهای دی الکتریک به کمک شکل ۴-۹ بیان می کنیم.

از قانون گاوس دیدیم که

$$\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad [۳۵-۲]$$

که $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه از محیط ۱ به محیط ۲ و عمود بر سطح جدایی و σ چگالی بار سطحی خالص کلی روی سطح است. ممکن است چگالی بار سطحی قطبیده را از چگالی بار آزاد، که در σ شرکت دارند با رابطه $\sigma = \sigma_p + \sigma_f$ متمایز کرد. بار سطحی ناشی از قطبش محیط ۱ (به تنهایی) با $\mathbf{P}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}$ داده می شود که P_1 در محیط ۱ در نقطه اختیاری نزدیک به سطح اندازه گیری می شود. به طور مشابه، بار



شکل ۴-۹ کاربرد قانون گاوس روی استوانه ای در مرز مشترک دو محیط دی الکتریک برای تعیین شرایط مرزی روی بردار جابه جایی \mathbf{D} .

(۵۵-۴) نتیجه می شود $\Delta\Phi = E_d[t + K(d-t)]$ یا

$$E_v = \frac{K\Delta\Phi}{t + K(d-t)} \quad \text{و} \quad E_d = \frac{\Delta\Phi}{t + K(d-t)} \quad (۵۶-۴)$$

که یک جواب مسئله است. به سادگی دیده می شود که وقتی $K \rightarrow 1$ ، نتیجه می شود $E_d = E_v \rightarrow \Delta\Phi/d$ و نیز وقتی $t \rightarrow d$ ، $E_d \rightarrow \Delta\Phi/d$. کمیت های دیگر مورد نظر - چگالی بار روی صفحات رسانا، σ_f ، و چگالی بار روی سطح دی الکتریک، $-\sigma_p$ - به شکل زیرند

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\left(\frac{K-1}{K}\right)\sigma_f \quad \text{و} \quad \sigma_f = \epsilon_0 E_v = \frac{K\epsilon_0 \Delta\Phi}{t + K(d-t)} \quad (۵۷-۴)$$

توجه کنید که برحسب چگالیهای بار

$$E_d = \frac{\sigma_f - \sigma_p}{\epsilon_0} \quad \text{و} \quad E_v = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0}$$

۴-۶ حل مسائل الکتروستاتیک با شرایط مرزی در حضور

دی الکتریک

از رابطه $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ برای محیطی با ثابت دی الکتریک K مشخص می شود که $\nabla \cdot (\epsilon_0 K \mathbf{E}) = \rho_f$. آن گاه اگر K ساده (ثابت) باشد داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon_0 K} \quad (۵۸-۴)$$

با جایگذاری $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ نتیجه می گیریم

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \quad (۵۹-۴)$$

این معادله پواسون است که برای نقاط محیط دی الکتریک ساده به کار می رود. شکل آن شبیه شکل کلی تر $\nabla^2 \Phi = -\rho/\epsilon_0$ است. بدین ترتیب چنین محیط دی الکتریکی، بسیار شبیه فضای تهی عمل می کند. به روشنی تأثیرات چگالی بار قطبیده، با تعویض ϵ فضای تهی با $\epsilon_0 K$ (در فضای تهی $K=1$) به حساب می آید. اگر در محیط $\rho_f = 0$ باشد، درست مانند فضای تهی از هر بار، معادله لابلاس $\nabla^2 \Phi = 0$ برقرار می شود. در این صورت روشن است که، در محیط ساده، رابطه $\rho_f = 0$ بر $\rho = 0$ دلالت دارد، زیرا $\nabla^2 \Phi = -\epsilon_0 \rho$. بدین ترتیب ρ_p نیز آنجا صفر است.

۲. اگر دو محیط دی الکتریک با ثابتهای K_1 و K_2 و گذردهیهای ϵ_1 و ϵ_2 مشخص شوند داریم $\epsilon_1 \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} - \epsilon_2 \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_f$ یا اگر آنها را برحسب پتانسیلهای متناظر Φ_1 و Φ_2 بیان کنیم

$$-\epsilon_2 \nabla \Phi_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} + \epsilon_1 \nabla \Phi_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_f \quad (۶۳-۴)$$

۳. اگر محیط ۱ رسانا باشد آن گاه \mathbf{E}_1 ، \mathbf{D}_1 و \mathbf{P}_1 مساوی صفر هستند و شرط مرزی مربوطه می شود

$$\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_f \quad (۶۴-۴)$$

که \mathbf{D} را به جای \mathbf{D}_2 قرار داده ایم و فرض کرده ایم که قطبش در داخل رسانا صفر است (صفحه ۹۱ را نگاه کنید).

معادلاتی که مؤلفه های مماسی میدان الکتروستاتیک را به هم ارتباط می دهند از معادله $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ یا $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ، که هنوز در دی الکتریکها معتبرند، به دست می آیند. این معادله بیان می کند که مؤلفه مماسی \mathbf{E} در عبور از مرز پیوسته است یعنی:

$$\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (۶۵-۴)$$

مانند فضای تهی، طبیعت پایستار میدان \mathbf{E} موجب پیوسته بودن پتانسیل، یعنی $\Phi_1 = \Phi_2$ می شود که Φ_1 و Φ_2 پتانسیل در نواحی ۱ و ۲ است. بنابراین شرایط مرزی برای تابع پتانسیل که اغلب به کار می روند به صورت زیر خلاصه می شوند

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$\epsilon_1 (\nabla \Phi_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} - \epsilon_2 (\nabla \Phi_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_f \quad (۶۶-۴)$$

اکنون می توان چگونگی به دست آوردن میدانهای الکتروستاتیک، برای مسائلی که شامل دی الکتریک است و قطبش آن به صراحت داده نشده است، را خلاصه کرد. به سادگی از آنچه که می دانیم استفاده می کنیم. از قانون گاوس برای دی الکتریکهایی که متقارن اند استفاده می کنیم. این حقیقت را که تابع پتانسیل Φ وجود دارد و سرانجام روابط بین \mathbf{D} (و \mathbf{P}) و \mathbf{E} را هر وقت که ممکن باشد به کار می بریم.

مثال ۵-۴ بار نقطه ای روی یک فصل مشترک مسطح — معادله لاپلاس در یک بعد

در این مثال یک بار نقطه ای q را بررسی می کنیم که روی فصل مشترک مسطح دو محیط دی الکتریک همگن نامتهای ۱ و ۲ با گذردهیهای به ترتیب ϵ_1 و ϵ_2 مطابق شکل ۱۰-۴ قرار دارد. در نقاط دور از بار

سطحی قطبیده در محیط ۲ (به تنهایی) برابر با $(-\hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{P}_2$ است. بنابراین بار سطحی قطبیده کل با رابطه زیر داده می شود

$$\sigma_p = \mathbf{P}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{P}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (۶۰-۴)$$

بنابراین

$$\sigma \equiv (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} + \sigma_f$$

که با قراردادن در معادله (۳۵-۲) به دست می آوریم

$$\epsilon_0 (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_f - (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

یا

$$(\epsilon_0 \mathbf{E}_2 + \mathbf{P}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} - (\epsilon_0 \mathbf{E}_1 + \mathbf{P}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_f$$

که اگر قرار دهیم $\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ به دست می آید

$$\mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_f \quad (۶۱-۴)$$

این معادله مربوط به سطح جدایی بین دو محیط دی الکتریک است و مؤلفه قائم \mathbf{D} در دو طرف مرز را به هم ربط می دهد.

شرایط مرزی که با معادله (۶۱-۴) داده می شود را می توان به طور مستقیم به کمک قانون گاوس برای دی الکتریک [معادله (۴۰-۴)] نیز به دست آورد. سطح گاوس نمایش داده شده در شکل ۹-۴ را در نظر می گیریم به طوری که سطح مسطح ΔS کوچک و ارتفاع آن l خیلی کوچکتر از قطر سطح قاعده است. با به کار بردن معادله (۴۰-۴) به دست می آوریم

$$\mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S - \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S = \sigma_f \Delta S$$

که به خاطر بسیار کوچک بودن l فقط بار سطحی سهم دارد. به همین دلیل سطح جانبی سهمی ندارد. بدین ترتیب

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_f$$

که همان معادله (۶۱-۴) است.

اکنون تعدادی از موارد ویژه معادله (۶۱-۴) را بررسی می کنیم:

۱. وقتی σ_f صفر باشد، مؤلفه قائم \mathbf{D} در عبور از مرز پیوسته

است یعنی

$$\mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \sigma_f = 0 \quad \text{اگر} \quad (۶۲-۴)$$

در نبود ماده، یعنی وقتی که بار در فضای تهی باشد، میدان الکتریکی عبارت است از $E = (1/4\pi\epsilon_0)(qr/r^2)$. بدین ترتیب میدان الکتریکی در حضور ماده‌ی الکتریک تضعیف می‌شود. این تضعیف شدن به خاطر این است که بار القایی ایجاد شده در محیط همانند پرده‌ای بار q را جدا می‌کند. چگالی حجمی بار القایی $\rho_p = -\nabla \cdot P$ برای $r \neq 0$ صفر است. اما چگالی بار سطحی القایی، $\sigma_p = P \cdot \hat{n}$ به سطح بار صفر نیست.

بار القایی کل، $q_p = \int \sigma_p da$ ، برابر است با

$$q_p = -\lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{a^2} + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{a^2} \right] 2\pi a^2$$

$$= -q \left[1 - \frac{2\epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right]$$

که a ، شعاع بار q است. نسبت دادن شعاع a به بار نقطه‌ای به عنوان یک عمل میانی کمکی برای محاسبه اندازه بار القایی است زیرا نتیجه نهایی با حد $a \rightarrow 0$ به دست آمده است.

بار کل برابر با جمع بارهای آزاد و قطبیده است یعنی

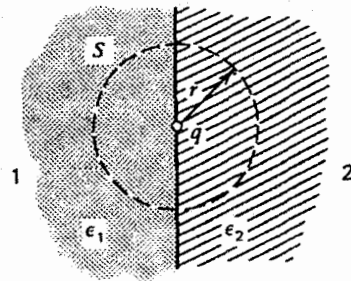
$$Q = q_p + q = \frac{2\epsilon_0 q}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

این نتیجه اثر پرده‌ای بار قطبیده را وقتی به دست می‌دهد که بار کل که از داخل ماده دی‌الکتریک ملاحظه می‌شود، کوچکتر از q به نظر برسد.

در حالت خاص که بار نقطه‌ای q در یک محیط دی‌الکتریک قرار داشته باشد پتانسیل، میدان الکتریکی، بردار جابه‌جایی، قطبش و بار ایجاد شده با قراردادن $\epsilon = \epsilon_2 = \epsilon_1$ در مثال فوق به دست می‌آید که ϵ گذردهی محیط است. ■

مثال ۴-۶ کره رسانای باردار بین دو دی‌الکتریک - مسئله یک‌بعدی

اکنون فرض می‌کنیم بار نقطه‌ای مثال قبل روی کره رسانایی به شعاع R و به مرکز روی صفحه فصل مشترک، توزیع شده باشد. همانند مورد بار نقطه‌ای پتانسیل هر دو ناحیه از رابطه $\Phi(r) = Cq/r$ به دست می‌آید که $C = 1/2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ است. اکنون چگالی بار روی کره را تعیین می‌کنیم. چون میدان الکتریکی در داخل رسانا صفر است، چگالی بار روی سطح را از معادله (۴-۶۴) به دست می‌آوریم. یعنی $\sigma_{rf} = D_{rn}$ و $\sigma_{lf} = D_{ln}$ مؤلفه



شکل ۴-۱۰ بار نقطه‌ای در فصل مشترک دو ماده دی‌الکتریک.

نقطه‌ای می‌توان از معادله (۴-۵۹) نتیجه گرفت که پتانسیل در معادله لاپلاس صدق می‌کند. بدین ترتیب پتانسیلها در نواحی ۱ و ۲ که به ترتیب آنها را با Φ_1 و Φ_2 نشان می‌دهیم به شکل زیر نوشته می‌شوند

$$\Phi_1 = \frac{C_1 q}{r} + B_1 \quad \Phi_2 = \frac{C_2 q}{r} + B_2$$

که C_1, C_2, B_1, B_2 ثابت‌اند. چون پتانسیل از یک بار نقطه‌ای جایگزیده ناشی می‌شود، در این صورت بایستی در $r \rightarrow \infty$ ، صفر شود. به این ترتیب نتیجه می‌شود $B_1 = B_2 = 0$.

از این حقیقت که پتانسیل روی مرز پیوسته است نتیجه می‌شود $C_1 = C_2 = C$ و $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$. با استفاده از قانون گاوس C را می‌توان حساب کرد. جابه‌جایی الکتریکی $D = -\epsilon \nabla \Phi$ در نواحی ۱ و ۲ به ترتیب مقادیر $(\epsilon_1 Cq/r^2)\hat{r}$ و $(\epsilon_2 Cq/r^2)\hat{r}$ را دارد. کره‌ای به سطح S و به مرکز بار نقطه‌ای در نظر می‌گیریم. با به کار بردن قانون گاوس روی سطح S [معادله (۴-۴۰)] نتیجه می‌شود $C = 1/2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ و بدین ترتیب

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{r} \quad (۴-۶۷)$$

اکنون میدان الکتریکی و بردارهای جابه‌جایی به سادگی تعیین می‌شوند.

$$E(r) = \frac{1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad \text{برای تمام } r \quad (۴-۶۸)$$

$$D_i(r) = \frac{\epsilon_i}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad i = 1, 2 \quad (۴-۶۹)$$

که D_i بردار تغییر مکان در ناحیه i ام است.

اکنون می‌توان قطبش $P = D - \epsilon_0 E$ را به دست آورد

$$P_i(r) = \frac{(\epsilon_i - \epsilon_0)}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (۴-۷۰)$$

را در نظر می‌گیریم که در میدان الکتریکی یکنواخت عمود بر محور آن قرار دارد. دستگاه مختصات استوانه‌ای را به‌گونه‌ای در نظر می‌گیریم که مبدأ آن روی محور استوانه و میدان در راستای محور x باشد.

چون بار آزاد روی استوانه وجود ندارد، پتانسیل در صفحه xy در معادله لاپلاس صدق می‌کند. پتانسیل Φ_1 و Φ_2 به ترتیب در داخل و خارج استوانه به ρ و ϕ وابسته‌اند اما انتظار داریم به z وابسته نباشند، زیرا استوانه طویل فرض شده است. بنابراین پتانسیلها با هماهنگیهای استوانه‌ای که از معادله (۳-۶۵) به دست می‌آید داده می‌شوند. اکنون نکاتی را، بر اساس فیزیک مسئله، در مورد اینکه چرا تنها یک زیر مجموعه از جمله‌ها در جواب وجود دارند بحث می‌کنیم:

۱. پتانسیل $\Phi_1(\rho, \phi)$ نباید وقتی $\rho \rightarrow 0$ بینهایت شود. این امر ایجاد می‌کند که جملات وابسته شعاعی به شکل $1/\rho^n$ یا $\ln \rho$ نباید در جواب وجود داشته باشند.

۲. در نقاط به حد کافی دور از استوانه پتانسیل باید به‌گونه‌ای باشد که میدان الکتریکی یکنواخت در راستای x را نتیجه دهد. بنابراین $\Phi_2(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + V_0$ ، که V_0 یک ثابت است. بدین ترتیب $\Phi_2(\rho, \phi)$ نبایستی جمله‌های وابسته به شعاع به شکل ρ^n را، که $n > 1$ است، داشته باشد. همچنین به دلیل این شرط مرزی، Φ_1 و Φ_2 نبایستی شامل جمله‌های $\cos n\phi$ ، که $n > 2$ و $\sin n\phi$ که $n \geq 1$ باشند. این نتیجه به‌طور مستقیم به این واقعیت وابسته است که $\sin n\phi$ و $\cos n\phi$ توابع مستقل خطی‌اند.

۳. چون استوانه بار آزاد ندارد، Φ_2 نباید شامل جمله $\ln \rho$ باشد، چون چنین جمله‌ای متناسب با بار کل روی استوانه است.

با به‌کار بردن این قیود نتیجه می‌گیریم که پتانسیلها باید عبارتهای زیر را داشته باشند

$$\Phi_1(\rho, \phi) = A_0 + A_1 \rho \cos \phi \quad \rho < \rho_0 \quad (4-74)$$

$$\Phi_2(\rho, \phi) = B_0 + \frac{B_1}{\rho} \cos \phi + C_1 \rho \cos \phi \quad \rho > \rho_0 \quad (4-75)$$

ثابتهای A_0, A_1, B_0, B_1, C_1 اکنون از شرایط دیگری به دست می‌آیند. با بزرگ شدن ρ : $\Phi_2(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + V_0$ ، بنابراین

$$B_0 + C_1 \rho \cos \phi = -E_0 \rho \cos \phi + V_0$$

که نتیجه می‌دهد $B_0 = V_0$ و $C_1 = -E_0$. از پیوستگی پتانسیل

عمودی D_{in} به‌سادگی روی سطح کره محاسبه می‌شود

$$D_{in} = -\epsilon_i \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad \text{در } r = R \text{ محاسبه می‌شود}$$

در نتیجه:

$$\sigma_{1f} = \frac{q\epsilon_1}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \quad \text{و} \quad \sigma_{2f} = \frac{q\epsilon_2}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \quad (4-71)$$

با انتگرال‌گیری از چگالیهای بار در معادله (۴-۷۱)، همچنانکه انتظار داریم، می‌توان به‌سادگی نشان داد که بار آزاد کل روی سطح کره برابر با q است

$$Q_f = 2\pi R^2(\sigma_{1f} + \sigma_{2f}) = q$$

اکنون چگالیهای بار قطبیده روی سطح کره را حساب می‌کنیم. ابتدا قطبشهای P_1 و P_2 را به ترتیب در محیطهای ۱ و ۲ به دست می‌آوریم: $\mathbf{P}_i = \mathbf{D}_i - \epsilon_0 \mathbf{E}$ ، بدین ترتیب

$$\mathbf{P}_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (4-72)$$

$$\mathbf{P}_2 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (4-73)$$

چگالی حجمی بار قطبیده، $\rho_i = -\nabla \cdot \mathbf{P}_i$ در هر دو محیط صفر است. اما چگالیهای سطحی بار صفر نبوده و برابرند با

$$\sigma_{1p} = \mathbf{P}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{r=R} = -\frac{q(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

$$\sigma_{2p} = \mathbf{P}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{r=R} = -\frac{q(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

بار قطبیده کل روی کره $q_p = 2\pi R^2(\sigma_{1p} + \sigma_{2p})$ برابر است با

$$q_p = -q \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right)$$

یادآوری می‌کنیم که q_p از شعاع کره مستقل است. در حقیقت این مساوی بار القایی روی سطح کره بار نقطه‌ای (مثال قبل را ببینید) است. نتیجه اینکه همان اثر پرده‌ای که در مورد بار نقطه‌ای با آن مواجه شدیم اینجا نیز وجود دارد، یعنی بار کل روی کره با همان ضریب کم می‌شود. ■

مثال ۷-۴ استوانه دی الکتریک طویل در میدان الکتریکی خارجی — مسئله دوبعدی

در این مثال یک مسئله با شرایط مرزی که در آن پتانسیل تابع دو متغیر است را بررسی می‌کنیم. یک استوانه دی الکتریک طویل با گذردهی ϵ

در $\rho = \rho_0$ به دست می آید

$$A_0 + A_1 \rho_0 \cos \phi = V_0 + \frac{B_1}{\rho_0} \cos \phi - E_0 \rho_0 \cos \phi$$

که در نتیجه $A_0 = V_0$ و $A_1 = (B_1/\rho_0^2) - E_0$. از شرط پیوسته بودن مؤلفه قائم D معادله دیگری بین B_1 و A_1 به دست می آید:

$$-\epsilon_1 \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0}$$

نتیجه می گیریم $-KA_1 = (B_1/\rho_0^2) + E_0$ که $K = \epsilon/\epsilon_0$ است. حال از روابط بین B_1 و A_1 به دست می آید $A_1 = -2E_0/(K+1)$ و $B_1 = \rho_0^2 E_0 (K-1)/(K+1)$ با قراردادن ثابتها در روابط (۷۴-۴) و (۷۵-۴) نتیجه می شود

$$\Phi_1(\rho, \phi) = V_0 - \frac{2E_0}{K+1} \rho \cos \phi \quad (۷۶-۴)$$

$$\Phi_2(\rho, \phi) = V_0 + \frac{\rho_0^2 E_0}{\rho} \frac{K-1}{K+1} \cos \phi - E_0 \rho \cos \phi \quad (۷۷-۴)$$

حالت حدی جالبی را برای این پتانسیل بحث می کنیم. اگر ماده ای که استوانه از آن ساخته شده ثابت دی الکتریک خیلی بزرگی داشته باشد یعنی $1 \ll K$ آن گاه Φ_1 و Φ_2 به روابط زیر خلاصه می شوند

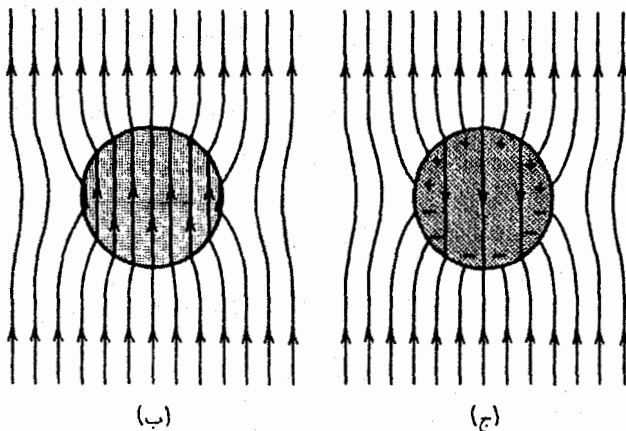
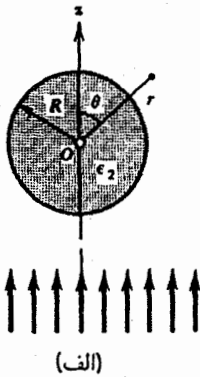
$$\Phi_1(\rho, \phi) = V_0 \quad (۷۸-۴)$$

$$\Phi_2(\rho, \phi) = V_0 + \frac{\rho_0^2 E_0}{\rho} \cos \phi - E_0 \rho \cos \phi \quad (۷۹-۴)$$

که دقیقاً همان پتانسیلهایی هستند که در مورد استوانه رسانای واقع در میدان الکتریکی (مسئله ۱۴-۴ را ببینید) به دست آمد. این تشابه به ما می آموزد که استوانه دی الکتریک در این حالت حدی معادل استوانه رساناست.

مثال ۸-۴ کره دی الکتریک در میدان الکتریکی — مسئله دوبعدی

این مثال، که در شکل ۱۱-۴ (الف) رسم شده است، در مورد کره دی الکتریک واقع در میدان الکتریکی یکنواخت است. مختصات قطبی ρ را به گونه ای به کار می بریم که مبدأ آن در مرکز کره و میدان الکتریکی در راستای محور z باشد. پس $\mathbf{E} = E_0 \hat{z}$. گذردهای کره و محیط خارجی را به ترتیب ϵ_2 و ϵ_1 فرض می کنیم.



شکل ۱۱-۴ کره دی الکتریک در میدان الکتریکی یکنواخت خارجی. (الف) خطوط نیرو در نبود کره، (ب) خطوط جابه جایی الکتریکی، (ج) خطوط میدان الکتریکی.

پتانسیلهای Φ_1 و Φ_2 داخل و خارج کره، در معادله لاپلاس صدق می کنند. به علاوه این پتانسیلها به r و θ وابسته اند. و بنابراین به شکل یک سری هماهنگهای منطقه ای نوشته می شوند [که در معادله (۲۸-۳) به دست آمد].

مباحث زیر را برای حذف خیلی از جمله های بسط مطرح می کنیم:

۱. پتانسیل در داخل کره $\Phi_1(r, \theta)$ ، نباید شامل جمله های $1/r^n$ که $n \geq 1$ باشد زیرا پتانسیل نباید در مبدأ، بینهایت شود.
۲. جمله متناسب با $1/r$ از بسط Φ_2 ، به دلیل اینکه کره بار خالص ندارد، باید حذف شود.

۳. این واقعیت که شکسته شدن تقارن کروی به علت وجود میدان الکتریکی، که در فواصل $r \rightarrow \infty$ پتانسیلی به شکل $-E_0 r \cos \theta + V_0$ دارد، ایجاب می کند که تنها پایتترین جمله هماهنگ منطقه ای در پتانسیل سهم داشته باشد.

۴. پتانسیل در خارج کره نباید جمله های r^n ، که $n \geq 2$ است،

را شامل شود بنابراین می نویسیم

$$\Phi_1(r, \theta) = A_0 + A_1 r \cos \theta \quad (۸۰-۴)$$

$$\Phi_2(r, \theta) = B_0 + B_1 r \cos \theta + \frac{B_2}{r^2} \cos \theta \quad (۸۱-۴)$$

که A_0, A_1, B_0, B_1, B_2 ثابت اند و بایستی به کمک شرایط مرزی تعیین شوند.

شرایط مرزی مورد استفاده عبارتند از:

$$۱. \text{ اگر } r \rightarrow \infty$$

$$\Phi_2 = B_0 + B_1 r \cos \theta = -E_0 r \cos \theta + V_0$$

بدین ترتیب $B_0 = V_0$ و $B_1 = -E_0$.

۲. در سطح کره ($r = R$) دازیم $\Phi_1 = \Phi_2$. پس

$$A_0 + A_1 R \cos \theta = V_0 - E_0 R \cos \theta + \frac{B_2}{R^2} \cos \theta$$

با برابر قراردادن ضرایب توانهای $\cos \theta$ به دست می آید $A_0 = V_0$ و

$$A_1 = \frac{B_2}{R^2} - E_0 \quad (۸۲-۴)$$

۳. مؤلفه قائم D روی سطح کره پیوسته است. زیرا چگالی بار سطحی آزاد وجود ندارد. بنابراین در $r = R$ داریم

$$-\varepsilon_2 (\partial \Phi_2 / \partial r) = -\varepsilon_1 (\partial \Phi_1 / \partial r)$$

$$-\varepsilon_1 A_1 = \varepsilon_2 E_0 + \frac{2\varepsilon_2}{R^2} B_2 \quad (۸۳-۴)$$

روابط (۸۲-۴) و (۸۳-۴) نتیجه می دهند

$$B_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} R^2 E_0 \quad \text{و} \quad A_1 = -\frac{2\varepsilon_2 E_0}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$$

با قراردادن مقادیر A_0, A_1, B_0, B_1, B_2 در روابط (۸۰-۴) و (۸۱-۴) نتیجه می شود

$$\Phi_1(r, \theta) = V_0 - \frac{2\varepsilon_2 E_0}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} r \cos \theta \quad r < R \quad (۸۴-۴)$$

$$\Phi_2(r, \theta) = V_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 R^2 \frac{\cos \theta}{r^2} \quad r > R \quad (۸۵-۴)$$

میدان الکتریکی داخل کره $E_1 = -\nabla \Phi$ یکنواخت است و با

رابطه زیر داده می شود

$$E_1 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \hat{z} = E_0 \hat{z} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \hat{z} \quad (۸۶-۴)$$

وقتی گذردهی دی الکتریکی کره نسبت به محیط اطراف بزرگتر باشد، $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ، آن گاه $E_1 < E_0$. کوچک شدن E_0 داخل کره به علت وجود بار القایی روی سطح کره است. این بار القایی، که نشان خواهیم داد به $\cos \theta$ وابسته است، یک میدان واقطبیذگی یکنواخت در خلاف جهت میدان خارجی ایجاد می کند (مثالهای ۲-۱۷، ۳-۶ و ۳-۷ برای محاسبه میدانهای ناشی از یک توزیع بار $\cos \theta$ را ببینید). نام "میدان واقطبیذگی" به خاطر تمایل آن به مخالفت با قطبیدگی و تغییر جهت دادن دوقطبیهاست. از طرف دیگر در حالتی که $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ، E_1 از E_0 بزرگتر است، میدان داخل کاواک قویتر می شود.

میدان الکتریکی خارج کره برابر است با

$$E_2 = E_0 \hat{z} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \frac{E_0 R^2}{r^3} [2\hat{r} \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta] \quad (۸۷-۴)$$

که $\hat{\theta}$ برداریکه در جهت θ است. این میدان شامل میدان یکنواخت خارجی $E_0 \hat{z}$ و میدان حاصل از دوقطبیهای الکتریکی با گشتاور دوقطبی زیر است

$$p = 4\pi\varepsilon_2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} R^2 E_0 \hat{z} \quad (۸۸-۴)$$

شکل ۱۱-۴ (ب) اثر کره روی خطوط نیرویی را نشان می دهد که ابتدا به شکل میدان الکتریکی یکنواخت بوده است. شکل ۱۱-۴ (ج)، خطوط میدان الکتریکی را نمایش می دهد. کره یک قطبش یکنواخت P در راستای z (در طول میدان خارجی) دارد. این قطبش مساوی $p/V = p(4\pi R^2/3)^{-1}$ است یا

$$P = 3\varepsilon_2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \hat{z} \quad (۸۹-۴)$$

اکنون چگالی بار قطبیده در کره را می توان حساب کرد. چگالی حجمی $\rho = -\nabla \cdot P = 0$ است، زیرا P یکنواخت است. چگالی بار سطحی قطبیده برابر

$$\sigma_p = P \cdot \hat{n} = [3\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)] E_0 \cos \theta$$

است. میدان دوقطبی القایی در خارج کره در واقع به خاطر این چگالی بار سطحی است. مجدداً مثالهای ۲-۱۷، ۳-۶ و ۳-۷ را ببینید که نشان می دهند یک توزیع بار $\cos \theta$ ، یک میدان دوقطبی ایجاد می کند.

حالت ویژه ای از نتیجه بالا را بررسی می کنیم. فرض می کنیم که گذردهی کره ε_1 خیلی بزرگ باشد $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$. در این حالت میدان

این میدانها سازگار باشند در شرایط مرزی $r = R$ صدق خواهند کرد — یعنی مؤلفه‌های مماسی میدان الکتریکی پیوسته‌اند و مؤلفه‌های قائم بردار جابه‌جایی نیز پیوسته‌اند. با استفاده از میدانهای فرض شده بالا خواهیم دید که شرط مماسی خودبه‌خود برآورده می‌شود. از شرط قائم β را به دست می‌آوریم. نتیجه عبارت است از

$$\beta = 3\epsilon_r \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}$$

با تعیین β مسئله کاملاً حل شده است و به سادگی می‌توان نشان داد که این جواب با نتیجه روش اول یکسان است. ■

مثال ۹-۴ یک دوقطبی در مرکز کره دی‌الکتریک

این مثال یک مسئله با شرایط مرزی است که در آن پتانسیل هم تابعی از زاویه و هم تابعی از فاصله است. وابستگی زاویه‌ای از قراردادن یک دوقطبی با گشتاور p در مرکز یک کره دی‌الکتریک به شعاع R و گذردهی ϵ_1 ایجاد می‌شود. گذردهی ماده خارج از کره ϵ_2 است.

دستگاه را به کمک مختصات قطبی کروی که مبدأ آن در مرکز کره و محور z در راستای دوقطبی است توصیف می‌کنیم. در نقاط دور از دوقطبی پتانسیل در معادله لاپلاس صدق می‌کند. بنابراین می‌توان آن را برحسب بسط هماهنگهای منطقه‌ای نمایش داد. چون پتانسیل نزدیک مبدأ همان پتانسیل مربوط به دوقطبی: $(1/4\pi\epsilon_1)(p \cos \theta / r^2)$ است و در غیاب دوقطبی، تقارن کروی وجود دارد، آن‌گاه انتظار داریم که در جواب فقط جمله‌های با پایینترین مرتبه وجود داشته باشند. بدین ترتیب پتانسیلها در داخل و خارج کره که به ترتیب با Φ_1 و Φ_2 نشان می‌دهیم با بسطهای زیر داده می‌شوند

$$\Phi_1(r, \theta) = A_1 r \cos \theta + \frac{A_2 \cos \theta}{r^2} \quad r < R \quad (9-4)$$

$$\Phi_2(r, \theta) = B_1 r \cos \theta + \frac{B_2 \cos \theta}{r^2} \quad r > R \quad (9-4)$$

A_1, A_2, B_1 و B_2 باید به کمک شرایط مرزی تعیین شوند:

۱. وقتی $r \rightarrow 0$ ، $\Phi_1(r, \theta)$ به $(p/4\pi\epsilon_1)(\cos \theta)/r^2$ میل می‌کند. بدین ترتیب

$$\frac{A_2 \cos \theta}{r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_1 r^2}$$

که نتیجه می‌شود $A_2 = p/4\pi\epsilon_1$

۲. با $r \rightarrow \infty$ ، $\Phi_2(r, \theta)$ به صفر میل می‌کند. بنابراین $B_1 = 0$.

الکتریکی داخل کره [معادله (۴-۸۶)] صفر می‌شود. در خارج کره [معادله (۴-۸۷)] داریم

$$\mathbf{E}_2(\epsilon_1 \rightarrow \infty) = E_0 \hat{z} + \frac{E_0 R^3}{r^3} [2\hat{r} \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta]$$

این میدانها با میدانهایی که توسط یک کره رسانای واقع در میدان الکتریکی یکنواخت ایجاد می‌شوند، کاملاً مشابه‌اند [معادله (۳-۵۲) را ببینید]. این نتیجه ما را به این استنتاج راهنمایی می‌کند که رسانا محیطی با قابلیت قطبیدگی بینهایت (ثابت دی‌الکتریک بزرگ) است. این خود به معنی این است که جابه‌جایی بار نامحدود است.

اکنون روش دیگری برای حل مسئله ارائه می‌دهیم. برای واقعیت تأکید می‌کنیم که کره دی‌الکتریک واقع در میدان الکتریکی در راستای میدان خارجی قطبیده می‌شود. بنابراین میدان \mathbf{E} جمع E_0 و میدان ناشی از کره قطبیده است. اینجا فرض می‌کنیم که منبعهای E_0 در اثر وجود کره دی‌الکتریک تغییر نمی‌کنند. میدان دومی، میدان واقطبیدگی است که آن را با \mathbf{E}' نمایش می‌دهیم، پس $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$. اکنون فرض می‌کنیم که کره دی‌الکتریک در اثر میدان E_0 طوری قطبیده می‌شود که $\mathbf{P} = \beta' \mathbf{E}_0$ ، متناسب با E_0 و ثابت است. اگر این فرض صحیح باشد در این صورت، یک جواب خودسازگار را، که قابل پیشگویی برحسب ثابتهای دی‌الکتریک است، به دست می‌آوریم. اگر این فرض صحیح نباشد قادر به پیدا کردن جواب خودسازگار نیستیم.

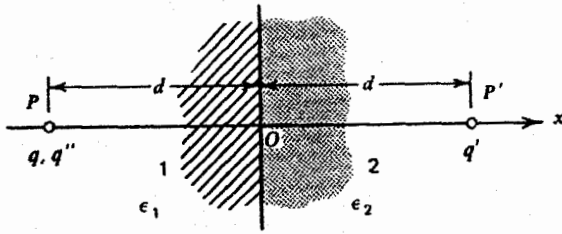
اگر $\mathbf{P} = \beta' \mathbf{E}_0$ باشد انتظار داریم که در سطح کره چگالی بار قطبیده‌ای برابر با $\sigma = \beta E_0 \cos \theta = \sigma_0 \cos \theta$ پیدا کنیم، که β ثابت دیگری است که باید مربوط به قطبیدگی در هر دو محیط دی‌الکتریک باشد. اما مقدار دقیق آن باید تعیین شود. در هر مورد \mathbf{E}' به کمک بار سطحی σ_p تعیین خواهد شد. اکنون میدان در درون کره (بار دیگر مثالهای ۲-۱۷، ۳-۶ و ۳-۷ را ببینید) با معادله زیر داده می‌شود

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{z} - \frac{\beta E_0}{3\epsilon_r} \hat{z} = E_0 \hat{z} \left(1 - \frac{\beta}{3\epsilon_r} \right)$$

همچنین در خارج کره، میدان از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{z} + \frac{\beta E_0 R^3}{3\epsilon_r r^3} [2\hat{r} \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta]$$

دیدیم که توزیع بار سطحی، یک میدان دوقطبی با گشتاور دوقطبی $p \equiv (4/3)\pi R^3 \sigma_0 \equiv (4/3)\pi R^3 \beta E_0$ ایجاد می‌کند. اگر



شکل ۱۲-۴ کاربرد روش تصویری برای بار نقطه‌ای واقع در نزدیک مرز دو ماده دی الکتریک.

حل مورد دی الکتریک از روش تصویری استفاده می‌کنیم. با این همه به علت تفاوت فاحش شرایط مرزی که باید در مرز صدق کنند این دستگاه معادل با بار q و تصویر آن نیست.

ابتدا باید به روش منطقی تعداد بارهای تصویری و محل استقرار هریک را تعیین کنیم. آن‌گاه این انتخابها با این شرط که میدانها بایستی در شرایط مرزی صدق کنند آزموده می‌شوند. شکل ۱۲-۴ یک بار نقطه‌ای در نقطه P را که به فاصله d از مرز دو دی الکتریک همگن نیمه‌متاهی با گذردهیهای ϵ_1 و ϵ_2 قرار گرفته نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم پتانسیل در ناحیه ۱ به وسیله بار q و بار تصویری q' واقع در ناحیه ۲ به فاصله d روی محور x نمایش داده شود. با وجود این پتانسیل در ناحیه ۲ فقط از بار تصویری q'' واقع در نقطه P (محل قرار گرفتن بار اصلی q) ناشی می‌شود، بدین ترتیب

$$\Phi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right) \quad \text{به‌ازای } x < 0 \quad (۹۶-۴)$$

$$\Phi_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''}{r} \quad \text{به‌ازای } x > 0$$

که $r' = [(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$ و $r = [(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$ و q' و q'' اندازه بارهای تصویری است که هنوز معلوم نیستند. اکنون با فرض اینکه جواب فوق باید در شرایط مرزی صدق کند می‌توان بارهای مجهول را تعیین کرد:

۱. پتانسیل باید در $x = 0$ پیوسته باشد یعنی

$$\Phi_1(x = 0, y, z) = \Phi_2(x = 0, y, z)$$

بنابراین

$$\frac{1}{\epsilon_1} (q + q') = \frac{q''}{\epsilon_2} \quad (۹۷-۴)$$

۳. پتانسیل در مرز پیوسته است: $\Phi_1(R, \theta) = \Phi_2(R, \theta)$. این رابطه‌ای بین A_1 و B_1 به دست می‌دهد

$$A_1 R + \frac{p}{4\pi\epsilon_1} \frac{1}{R^2} = \frac{B_2}{R^2} \quad (۹۲-۴)$$

۴. مؤلفه قائم بردار جابه‌جایی در مرز پیوسته است یعنی $\epsilon_1 \partial \Phi_1 / \partial r = \epsilon_2 \partial \Phi_2 / \partial r$. این شرط رابطه دیگری بین A_1 و B_2 به دست می‌دهد

$$\epsilon_1 \left(A_1 - \frac{p}{4\pi\epsilon_1 R^2} \right) = -2\epsilon_2 \frac{B_2}{R^2} \quad (۹۳-۴)$$

با حل همزمان روابط (۹۲-۴) و (۹۳-۴) برای A_1 و B_1 به دست می‌آوریم

$$A_1 = \frac{2p}{4\pi\epsilon_1 R^2} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \quad B_2 = \frac{2p}{4\pi\epsilon_1} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}$$

بدین ترتیب

$$\Phi_1(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_1} \left[\frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{R^2(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)} r \cos \theta \right] \quad r \leq R \quad (۹۴-۴)$$

$$\Phi_2(r, \theta) = \frac{2p}{4\pi(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad r \geq R \quad (۹۵-۴)$$

یادآوری می‌کنیم که اگر $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2$ همچنان که انتظار می‌رود پتانسیلها به پتانسیل یک دوقطبی در یک ماده دی الکتریک نامتاهی، تبدیل می‌شوند. ■

* ۷-۴ روش تصویری برای فصل مشترک دی الکتریک

در مثال ۵-۴ یک بار نقطه‌ای واقع بر فصل مشترک مسطح بین دو دی الکتریک نیمه‌متاهی را بررسی کردیم. به دلیل تقارن آن وضعیت، از قانون گاوس و جواب معادله لاپلاس یک متغیره استفاده کردیم. بدین ترتیب میدانها به‌طور سراسر تعیین می‌شوند.

اکنون موردی را که نقطه باردار در روی فصل مشترک قرار ندارد بلکه در فاصله معینی از آن قرار دارد در نظر می‌گیریم. با این جابه‌جایی بار، تقارن دیگر وجود ندارد و بنابراین روش ساده قبلی دیگر خیلی مفید نیست. میدانها در این حالت به فواصل و زوایا وابسته‌اند.

در فصل ۳ میدان بار نقطه‌ای q واقع در نزدیک یک صفحه رسانای خوب را با روش تصویری به‌طور مناسب تعیین کردیم و به دست آوردیم که دستگاه معادل است با بار اولیه به‌اضافه یک بار تصویری $-q$ که درست زیر بار q و در فاصله d در طرف دیگر صفحه قرار گیرد. برای

خطوط نیروی دو بار همنام و در ناحیه ۲ خطوط نیرو مشابه خطوط نیروی یک بار است که از مکان بار q شروع می‌شوند.

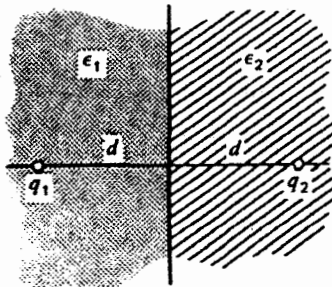
وجود بار q در محیط ۱ قطبشهای P_1 و P_2 را به ترتیب در محیطهای ۱ و ۲ ایجاد می‌کند که $P_i = -(\epsilon_i - \epsilon_0) \nabla \Phi_i$ و $i = 1, 2$ است. چگالی بار قطبیده دو مؤلفه دارد: یکی چگالی بار حجمی $P_i \cdot \hat{n} - \nabla \cdot P_i$ و دیگری چگالی بار سطحی $P_i \cdot \hat{n}$. چون P_i با E_i متناسب است و E_i در رابطه $\nabla \cdot E_i = \text{صدق می‌کند، پس چگالی بار حجمی، بجز در محل خود بار، صفر است. با استفاده از بردار یکه \hat{x} که عمود بر فصل مشترک است و از ماده ۱ به ماده ۲ است، چگالی بار سطحی می‌شود $\sigma_p = -(P_2 - P_1) \cdot \hat{x}$ می‌توان به سادگی نشان داد که$

$$\sigma_p = -q \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{2\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{d}{(y^2 + z^2 + d^2)^{3/2}} \quad (10-4)$$

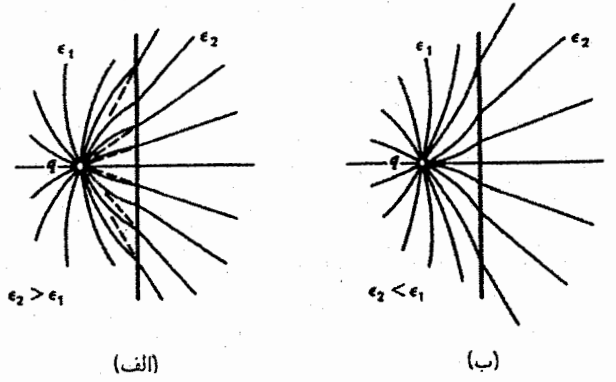
* مثال ۱۰-۴ نیروی بین دو بار واقع در مواد دی الکتریک

در این مثال از روش تصویری برای تعیین نیروی بین بارهای واقع در محیطهای دی الکتریک استفاده می‌کنیم. شکل ۱۴-۴ دو محیط دی الکتریک همگن نیمه‌متناهی ۱ و ۲ را به ترتیب با گذردهیهای ϵ_1 و ϵ_2 نشان می‌دهد. دو بار q_1 و q_2 به ترتیب در محیطهای ۱ و ۲ و به فاصله d از فصل مشترک طوری قرار دارند که خط واصل بین دو بار عمود بر فصل مشترک است.

بار q_2 تحت تأثیر دو نوع نیروست. یکی مربوط به حضور بار q_1 و دیگری مربوط به مجاورت آن با فصل مشترک است. ابتدا نیروی اول را حساب می‌کنیم. نیرو برابر با $q_2 E_1$ است که E_1 میدان الکتریکی q_1 در مکان q_2 است. از مثال قبل به دست آوردیم که میدان ناشی از بار q_1 در ناحیه ۲ میدانی است که به وسیله باری به اندازه $q = 2\epsilon_2 q_1 / (\epsilon_1 + \epsilon_2)$ واقع در مکان q_1 ایجاد می‌شود [معادله



شکل ۱۴-۴ نیروی بین دو بار نقطه‌ای که در دو طرف فصل مشترک ماده دی الکتریک قرار دارند.



شکل ۱۳-۴ خطوط میدان یک بار نقطه‌ای واقع در ماده ϵ_1 و در نزدیک فصل مشترک با ماده ϵ_2 . (الف) $\epsilon_2 > \epsilon_1$ ، (ب) $\epsilon_2 < \epsilon_1$.

۲. مؤلفه عمودی بردار جابه‌جایی روی مرز پیوسته است زیرا بار آزاد روی آن وجود ندارد. یعنی

$$D_{1n}(x=0, y, z) = D_{2n}(x=0, y, z)$$

یا $\epsilon_1 \partial \Phi_1 / \partial x = \epsilon_2 \partial \Phi_2 / \partial x$ در $x=0$. بنابراین

$$q'' = q - q' \quad (98-4)$$

با حل همزمان معادله‌های (۹۷-۴) و (۹۸-۴) به دست می‌آوریم

$$q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \quad \text{و} \quad q' = -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \quad (99-4)$$

بدین ترتیب پتانسیلها از روابط زیر به دست می‌آیند

$$\Phi_2 = \frac{2q}{4\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{1}{r} \quad \text{و} \quad \Phi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \left[\frac{1}{r} - \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) \frac{1}{r'} \right] \quad (100-4)$$

چون Φ_1 و Φ_2 در معادله لاپلاس و نیز در شرایط مرزی صدق می‌کنند آن‌گاه جواب منحصر به فرد است. بنابراین دو بار تصویری فوق برای تعیین میدان به صورت منحصر به فرد کافی است.

اکنون به توصیف کیفی خطوط نیروی ایجاد شده توسط بار q می‌پردازیم. شکل ۱۳-۴ (الف) حالتی را که $\epsilon_2 > \epsilon_1$ نشان می‌دهد. در این حالت علامت q' مخالف علامت q است. بنابراین در ناحیه ۱ خطوط نیرو مشابه خطوط نیروی بین دو بار همنام (خطوط دوقطبی) است. در ناحیه ۲ خطوط نیرو با یک بار هم علامت با q و نشأت گرفته از مکان بار q توصیف می‌شوند.

شکل ۱۳-۴ (ب) حالتی را که $\epsilon_2 < \epsilon_1$ نشان می‌دهد. در این حالت q' با q هم علامت است. بنابراین خطوط نیرو در ناحیه ۱ مشابه

(۹۹-۴) را ببینید. بنابراین نیروی بین q_1 و q_2 به سادگی با استفاده از قانون کولن به دست می آید

$$F_{r1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) d^2} \hat{n} \quad (102-4)$$

که \hat{n} بردار یکه در راستای خط واصل بین بارهاست.

نیروی دیگری را که توسط بار القا شده روی فصل مشترک به q_2 وارد می شود نیز می توان به کمک بارهای تصویری حساب کرد. میدان مربوط به بار q_2 در ناحیه ۲ به وسیله بار q_2 و بار تصویری $q_2(\epsilon_1 - \epsilon_2)/(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ واقع در محل بار q_1 ایجاد می شود. بنابراین نیروی وارد بر q_2 می شود

$$F_{r2} = \frac{1}{16\pi\epsilon_2} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{q_2^2}{d^2} \hat{n} \quad (103-4)$$

با جمع روابط (۱۰۲-۴) و (۱۰۳-۴) نیروی کل وارد بر q_2 $F_r = F_{r1} + F_{r2}$ به دست می آید

$$F_r = \left[\frac{1}{16\pi\epsilon_2} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{q_2^2}{d^2} + \frac{1}{4\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q_1 q_2}{d^2} \right] \hat{n} \quad (104-4)$$

همچنین می توان نشان داد که نیروی وارد بر q_1 برابر است با

$$F_1 = - \left[\frac{1}{16\pi\epsilon_1} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{q_1^2}{d^2} + \frac{1}{4\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q_1 q_2}{d^2} \right] \hat{n} \quad (105-4)$$

به نظر می رسد که اندازه نیروهای وارد بر دو بار q_1 و q_2 مساوی نیستند. این به سادگی با این واقعیت قابل بیان است که نیروها نه تنها از برهم کنش q_1 با q_2 بلکه از بار القا شده در فصل مشترک نیز ناشی می شوند.

تاکنون روش تصویری در حل مسائل مربوط به بارهای نقطه ای واقع در نزدیک فصل مشترکهای دی الکتریک تخت موفق بوده است. مسئله بعدی وجود بارهای نقطه ای در نزدیک فصل مشترکهای دی الکتریک کروی است. این وضعیت موقعی پدید می آید که بار نقطه ای نزدیک یک کره دی الکتریک، یا نزدیک کاواک کروی ایجاد شده در محیط دی الکتریک نامتناهی قرار گیرد. در اینجا هم می توان وجود مجموعه ای متناهی از بارهای تصویری، که بتوانند در شرایط مرزی صدق کنند، و در نتیجه یک جواب منحصر به فردی برای برهم کنش به دست دهند بررسی کرد. متأسفانه برخلاف مورد کره رسانا، تعداد محدودی بار که بتوانند در شرایط مرزی در مورد دی الکتریک صدق کنند وجود ندارد و بنابراین از این نظر این روش مفید نیست.

۸-۴ نیروهای مؤثر بر توزیع بار

نیروی وارد بر جزء بار dq که در میدان الکتریکی خارجی $E^{(e)}$ قرار دارد طبق تعریف برابر با $dF = E^{(e)} dq$ است. جزء بار، خود نیز میدان الکتریکی دارد. اما چون بار نمی تواند بر خودش نیرو وارد کند می توان نیروی وارد بر بار را در حالت کلی به شکل $dF = E dq$ نوشت که E میدان الکتریکی کل در محل جزء بار است. نیروی کل F وارد بر توزیع باری را که با چگالی ρ مشخص می شود می توان از رابطه زیر به دست آورد

$$F = \int_V E dq = \int_V \rho E dv \quad (106-4)$$

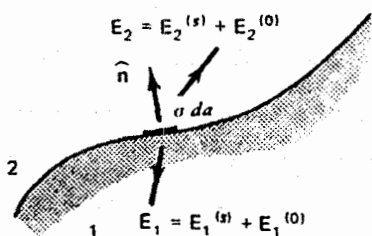
که V حجم ناحیه ای است که برای آن ρ غیر صفر است. همین طور نیروی وارد بر یک بار سطحی با چگالی σ از رابطه

$$F = \int_S \sigma E da \quad (107-4)$$

به دست می آید. با وجود این، رابطه (۱۰۷-۴) این مشکل را دارد که E روی سطح به خوبی تعریف شده نیست. وقتی چگالی بار روی سطح σ باشد E ناپیوسته خواهد بود. در این وضعیت E مبهم است. ولی غیر منطقی نیست که میدان را میانگین میدان در دو طرف سطح بدانیم. برای بررسی این مسئله، سطحی با چگالی بار سطحی σ مطابق شکل ۱۵-۴ در نظر می گیریم که فضا را به دو ناحیه ۱ و ۲ جدا می کند. میدانهای الکتریکی در دو ناحیه درست در دو طرف سطح را E_1 و E_2 می نامیم. میدان کل در هر نقطه را می توان جمع میدانهای $E^{(s)}$ ناشی از بار سطحی جزء سطح da و $E^{(o)}$ ، میدان مربوط به کل بارهای دیگر (خارج از جزء مورد نظر) دانست

$$E = E^{(s)} + E^{(o)} \quad (108-4)$$

بنابراین می نویسیم $E_i = E_i^{(s)} + E_i^{(o)}$ که $i = 1, 2$. اکنون دو نقطه را که درست در دو طرف سطح واقع اند در نظر می گیریم. برای



شکل ۱۵-۴ نیروی وارد بر یک توزیع بار سطحی بر حسب میدان کل توزیع بار

یک نمونه معمولی از چگالی بار سطحی، چگالی سطحی یک رسانای باردار است (بخش ۲-۶ را ببینید). در این حالت $\mathbf{E}_1 \equiv 0$ و $\mathbf{E}_2 \equiv \mathbf{E} = \hat{n}\mathbf{E}$ که این میدان درست خارج رساناست، بنابراین نیروی وارد بر جزء سطح da رسانا برابر است با

$$d\mathbf{F} = \sigma \frac{\mathbf{E}}{2} da = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} da \hat{n} \quad (116-4)$$

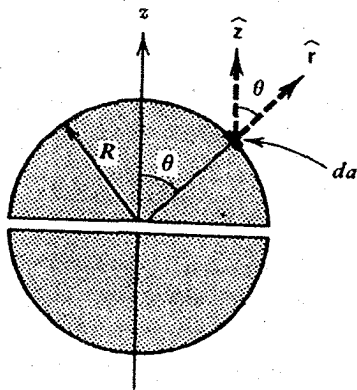
بنابراین فشار $P = dF/da$ وارد بر سطح رسانا که همواره به طرف خارج سطح است می‌شود

$$P = \frac{dF}{da} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad (117-4)$$

مثال ۱۱-۴ نیروی بین دو نیمه یک کره باردار

یک پوسته کروی رسانا به شعاع R تا پتانسیل V باردار شده است. این پوسته را به دو نیمکره متمایز در کنار هم تقسیم می‌کنیم (شکل ۴-۱۶). در اینجا از همان روش به‌کار گرفته شده در این بخش، برای پیدا کردن نیرویی که دو نیمکره بر یکدیگر وارد می‌کنند، استفاده می‌کنیم. چگالی سطحی بار روی سطح پوسته برابر با $Q/4\pi R^2$ است که Q بار کل روی پوسته است که از رابطه $Q = 4\pi\epsilon_0 RV$ به دست می‌آید. بدین ترتیب $\sigma = \epsilon_0 V/R$. نیروی وارد بر جزء سطح da که مکان آن با زاویه‌های θ و ϕ مشخص می‌شود از رابطه (۴-۱۱۶) به دست می‌آید یعنی $d\mathbf{F} = (\sigma^2/2\epsilon_0) da \hat{n}$ که $\hat{n} = \hat{r}$ بردار واحد عمود بر جزء سطح da است. توجه کنید که مؤلفه dF عمود بر محور z به دلیل تقارن نسبت به محور z در نیروی کل سهمی ندارد. بدین ترتیب، مؤلفه مؤثر برابر است با

$$dF_z = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \cos\theta da$$



شکل ۴-۱۶ کره باردار یکنواخت دو نیم‌شده.

محاسبه میدانهای این نقاط، جزء سطح da را مشابه یک صفحه باردار یکنواخت با چگالی بار σ فرض می‌کنیم. با استفاده از معادله (۲۱-۲) مثال ۲، که در مورد صفحه باردار یکنواخت بود، به دست می‌آوریم که

$$\mathbf{E}_1^{(s)} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(-\hat{n}) \quad \text{و} \quad \mathbf{E}_2^{(s)} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(+\hat{n}) \quad (109-4)$$

اما، میدان $\mathbf{E}^{(o)}$ در عبور از da باید پیوسته باشد، و بنابراین میدان کل در این نقاط به شکل زیر است

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n} + \mathbf{E}^{(o)} \quad \text{و} \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n} + \mathbf{E}^{(o)} \quad (110-4)$$

اکنون اطلاعات بیشتری را در مورد ماهیت معادله (۴-۱۱۰) مطرح می‌کنیم. با کم کردن رابطه اول از دوم نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n} \quad (111-4)$$

مؤلفه‌های مماسی و قائم معادله (۴-۱۱۱) به ترتیب عبارت‌اند از

$$E_{2t} = E_{1t} \quad \text{و} \quad E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (112-4)$$

قبلاً با رابطه دوم معادله (۴-۱۱۲) مواجه شدیم، [معادله (۲-۳۵) را ببینید] که با استفاده از قانون گاوس به دست آمد. رابطه اول معادله (۴-۱۱۲) پیوستگی مؤلفه مماسی میدان الکتریکی را بیان می‌کند [معادله (۳-۶) را ببینید].

اکنون نیروی وارد بر جزء da را حساب می‌کنیم. توجه کنید که چون نیروی الکتروستاتیک خالص که بر da وارد می‌شود تنها مربوط به $\mathbf{E}^{(o)}$ است، آنگاه

$$d\mathbf{F} = \mathbf{E}^{(o)}\sigma da \quad (113-4)$$

با جمع \mathbf{E}_1 و \mathbf{E}_2 در رابطه (۴-۱۱۰) به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E}^{(o)} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \quad (114-4)$$

که اگر در رابطه (۴-۱۱۳) قرار دهیم نیروی وارد بر واحد سطح به دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{F}}{da} = \frac{\sigma(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)}{2} \quad (115-4)$$

این نتیجه، حدس اولیه ما را که میدان وارد بر بار سطحی باید میانگین میدانهای دو طرف سطح باشد تأیید می‌کند.

نیروی کل با انتگرال گیری روی سطح به دست می آید. با استفاده از $da = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ داریم

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{z}} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^r R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi$$

که با انتگرال گیری روی ϕ ، 2π و با انتگرال گیری روی θ ، $1/2$ به دست می آید، بنابراین

$$\mathbf{F} = \frac{\pi^2 \sigma^r R^2}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} = \pi \epsilon_0 V^2 \hat{\mathbf{z}}$$

مثال ۱۲-۴ نیروی وارد بر یک کره رسانای واقع در میدان الکتربیکی

پوسته ای کروی به شعاع R و بار کل q ، در یک میدان الکتربیکی خارجی $E_0 \hat{\mathbf{z}}$ قرار دارد. فضای اطراف کره با یک ماده دی الکتربیک با گذردهی ϵ پر شده است. برای به دست آوردن نیروی وارد بر کره، باید توزیع بار و میدان الکتربیکی در سطح پوسته را پیدا کنیم. این خود منوط به تعیین پتانسیل الکتربیکی در خارج کره است.

پتانسیل در خارج کره در معادله لاپلاس صدق می کند و بنابراین برحسب هماهنگیهای منطقه ای قابل بسط است. با انتخاب جمله های وابسته به زاویه تا $P_1(\theta) = \cos \theta$ ، می نویسیم

$$\Phi(r, \theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + A_1 r \cos \theta + \frac{B_1}{r^2} \cos \theta \quad (118-4)$$

که A_0 ، A_1 ، B_0 و B_1 ثابت اند. جمله B_0/r پتانسیل کولنی مربوط به بار روی کره است؛ بنابراین $B_0 = q/4\pi\epsilon$ برای محاسبه ثابتهای دیگر به مثال ۳-۷، که در آن کره رسانا واقع در خلأ و در میدان الکتربیکی خارجی بررسی شده است، مراجعه کنید. بدین ترتیب پتانسیل می شود

$$\Phi(r, \theta) = V_0 + \frac{q}{4\pi\epsilon r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 R^2}{r^2} \cos \theta \quad (119-4)$$

که $V_0 = A_0$ و میدان الکتربیکی $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ برابر خواهد بود با

$$\mathbf{E}(r, \theta) = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon r^2} + E_0 \cos \theta + \frac{2R^2 E_0}{r^3} \cos \theta \right) \hat{\mathbf{r}} - E_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (120-4)$$

چگالی بار سطحی، $\sigma = \epsilon E(R, \theta)$ ، می شود

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} + 3\epsilon E_0 \cos \theta$$

نیروی وارد بر واحد سطح $d\mathbf{F}$ روی سطح کره با استفاده از معادله (۱۱۶-۴) $d\mathbf{F} = (1/2\epsilon)\sigma^r da \hat{\mathbf{r}}$ ، به دلیل وجود تقارن نسبت به محور z تنها، مؤلفه dF_z در راستای z در نیروی کل شرکت دارد. بدین ترتیب $dF_z = (1/2\epsilon)\sigma^r da \cos \theta$ با انتگرال گیری از روی سطح کره $\mathbf{F} = E_0 q \hat{\mathbf{z}}$ ، به دست می آید. این نتیجه مشخص می کند که نیرو مستقل از r و برابر با حاصل ضرب q و میدان الکتربیکی E_0 است. در واقع این رابطه تعریف میدان الکتربیکی را برحسب نیروی بار واحد، که بر یک بار آزمون وارد می شود، دوباره تأیید می کند.

۹-۴ خلاصه

یک ماده دی الکتربیک را، وقتی که جمع ماکروسکوپی گشتاور جریانه های اتمی آن صفر نباشد قطبیده می نامیم. قطبش \mathbf{P} محیط درست به صورت چگالی حجمی این دو قطبیهها تعریف می شود:

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dv} \quad [1-4]$$

خواص الکتربیکی یک قطعه ماکروسکوپی با قطبش \mathbf{P} با تعویض تمام دو قطبیه های اتمی با چگالیهای مؤثر حجمی و سطحی ρ_p و σ_p (بارهای قطبشی یا بارهای مقید) قابل محاسبه است

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{و} \quad \rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad [13-4]$$

پتانسیل الکتروستاتیک Φ_p و بنابراین میدان الکتربیکی از روابط زیر به دست می آیند

$$\Phi_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' \quad [12-4]$$

و

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi_p$$

در حضور بارهای خارجی (بارهای آزاد) قانون دیفرانسیلی گاوس به صورت زیر به دست می آید

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f + \rho_p}{\epsilon_0} = (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P})/\epsilon_0$$

مناسب است که برداری به نام بردار جابه جایی \mathbf{D} به شکل زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad [35-4]$$

و

$$D_{rn} - D_{ln} = \sigma_f \quad [۶۱-۴]$$

که n و t به ترتیب شاخص مماس بودن و عمود بودن بر فصل مشترک اند. از روش تصویری برای حل مسائل با شرایط مرزی در حضور مواد دی الکتریک و برای اشکال هندسی معین استفاده می شود. با این همه مفید بودن این روش محدود است.

نیروی الکتروستاتیک وارد بر جزء بار یک توزیع بار سطحی بزرگ، dq ، در اثر میدان مربوط به بقیه توزیع بار در محل جزء بار dq ، $\mathbf{E}^{(0)}$ ، از رابطه زیر به دست می آید

$$d\mathbf{F} = dq \mathbf{E}^{(0)} = \sigma da \mathbf{E}^{(0)} \quad [۱۱۳-۴]$$

که σ و da چگالی و سطح جزء بار است. با این همه در بسیاری از موارد ساده تر است که میدان الکتریکی کل را که شامل میدان الکتریکی جزء بار مورد نظر نیز هست، پیدا کنیم. در این حالت نیرو به دست می آید

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma (\mathbf{E}_l + \mathbf{E}_r) da \quad [۱۱۵-۴]$$

که \mathbf{E}_l و \mathbf{E}_r میدانهای کل دو طرف آن جزء سطح هستند. اگر جزء، یک سطح از رسانا باشد، که $\mathbf{E}_r = 0$ و $\mathbf{E}_l = \mathbf{E}$ ، آن گاه

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma da \mathbf{E} \quad [۱۱۶-۴]$$

در سطح یک رسانا به کمک قانون گاوس داریم $\mathbf{E} = (\sigma/\epsilon_0) \hat{n}$ ، آن گاه

$$\frac{d\mathbf{F}}{da} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} E^2 \hat{n} \quad \text{یا} \quad \frac{d\mathbf{F}}{da} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma^2 \hat{n} \quad [۱۱۷-۴]$$

مسائل

۴-۱. سطح صاف یک نیمکره دی الکتریک بر صفحه xy منطبق و نیمکره در راستای \hat{z} قطبیده است: $\mathbf{P} = P\hat{z}$ که P ثابت است. (الف) چگالی بار حجمی مقید، چگالی بار سطحی مقید روی سطح صاف و سطح جانبی نیمکره را به دست آورید. (ب) با انتگرال گیری بار خالص مقید را به دست آورید. (ج) توضیح دهید چرا به دلایل فیزیکی انتظار جواب قسمت (ب) را دارید. (د) گشتاور دوقطبی بار مقید نسبت به مرکز کره را به دست آورید. (ه) همچنین گشتاور دوقطبی را با استفاده از تعریف قطبیدگی \mathbf{P} حساب کنید. آیا دو جواب سازگارند؟

بنابراین قانون گاوس در حضور ماده را به شکل زیر به دست می آوریم

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad [۳۶-۴]$$

بلافاصله می توان شکل انتگرالی قانون گاوس را از شکل دیفرانسیلی آن نتیجه گرفت

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{n} da = \int_V \rho_f dv = Q_f \quad [۴۰-۴]$$

چگونگی تحت تأثیر قرار گرفتن یک ماده وقتی در یک میدان خارجی \mathbf{E} قرار می گیرد به ساختار میکروسکوپی آن بستگی دارد. در اینجا مواد را بر اساس چگونگی تحت تأثیر قرار گرفتن ماکروسکوپی شان دسته بندی می کنیم

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi(\mathbf{E}) \mathbf{E} \quad [۴۴-۴]$$

که χ را پذیرفتاری الکتریکی می نامیم. اگر χ از \mathbf{E} (از نظر اندازه و جهت) مستقل باشد، یعنی مستقل از فضا باشد، ماده را خطی (ساده) می نامیم. برای مواد خطی $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ و بنابراین

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 K \mathbf{E} \quad [۴۶-۴]$$

که ϵ گذردهی ماده و K گذردهی نسبی یا ثابت دی الکتریک است. روابط اساسی الکتروستاتیک با حضور مواد دی الکتریک عبارت اند از

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{و} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

این معادله دیورژانس در یک ماده خطی با گذردهی ϵ به شکل $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f/\epsilon$ نوشته می شود. از طرف دیگر نتیجه معادله تاو، $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ است؛ بنابراین

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \quad \text{یا} \quad \nabla \cdot [-\nabla\Phi] = \frac{\rho_f}{\epsilon} \quad [۵۹-۴]$$

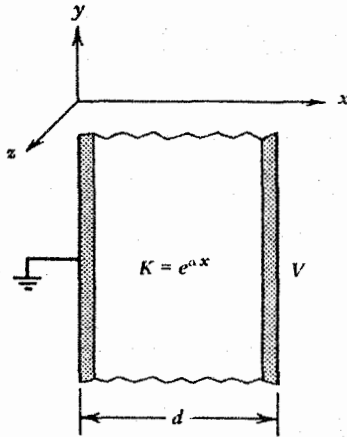
در جایی که $\rho_f = 0$ باشد داریم

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{اگر} \quad \rho_f = 0$$

وقتی فضای مورد بحث دارای بخشهایی با ویژگیهای دی الکتریک متفاوت باشد، آن گاه میدانها به کمک شرایط مرزی به دست می آیند. معادله Φ در هر بخش را به طور مستقل حل می کنیم. این جوابها را با استفاده از دستورهای زیر روی فصل مشترک هماهنگ می کنیم

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad \text{یا} \quad \mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t} \quad [۶۵-۴], [۶۶-۴]$$

۸-۴ فضای بین دو صفحه یک خازن مسطح با یک ماده دی الکتریک با ثابت دی الکتریک $K = e^{\alpha x}$ که α ثابت است، پر شده است، (شکل ۱۷-۴). میدان الکتریکی $E(x)$ را در فضای بین صفحه‌ها موقعی که اختلاف پتانسیل بین آنها V است به دست آورید.



شکل ۱۷-۴

۲-۴ یک نیم استوانه به شعاع R و طول L ، در راستای عمود بر سطح مستطیلی اش قطبش یکنواخت P دارد. گشتاور دوقطبی و چگالی بار قطبیده آن را به دست آورید.

۳-۴ یک استوانه دوار با مقطع $x^2 + y^2 = R^2$ از ماده قطبیده با قطبیدگی $P = (ax^2 + b + cy + a)xx + pxy$ پر شده است. چگالی حجمی و سطحی بار قطبیده را پیدا کنید.

۴-۴ فضای بین دو استوانه هم محور با شعاعهای $\rho = \rho_1$ و ρ_2 ، توزیع بار حجمی یکنواخت با چگالی α دارد. این توزیع بار توسط یک لایه استوانه‌ای از یک ماده دی الکتریک با شعاع خارجی ρ_2 و ثابت دی الکتریک K احاطه شده است. (الف) میدان الکتریکی و بردار جابه‌جایی الکتریکی را در نواحی مختلف فضا پیدا کنید. (ب) قطبش الکتریکی و بارهای قطبیده را در تمام نواحی به دست آورید. (ج) اختلاف پتانسیل الکتریکی را بین $\rho = \rho_2$ و $\rho = 0$ محاسبه کنید. (د) چه توزیع باری روی محور استوانه به جای بار اولیه دی الکتریک قرار دهیم تا در ناحیه $\rho_2 < \rho < \rho_1$ همان میدان الکتریکی را به وجود آورد؟

۹-۴ یک خازن استوانه‌ای را شامل دو استوانه هم محور به شعاعهای a و b ($b > a$) و طول L که نسبت به شعاع آنها بزرگ است در نظر بگیرید. بار روی استوانه‌های داخل و خارج به ترتیب $+q$ و $-q$ است. (الف) میدان E در فضای بین استوانه‌ها را با فرض تهی بودن به دست آورید. (ب) نشان دهید که با قراردادن یک ماده دی الکتریک با گذردهی ϵ که تابعی از مکان است، میدان E بین استوانه‌ها می‌تواند از نظر اندازه ثابت باشد.

۱۰-۴ بردار جابه‌جایی در ناحیه $x < 0$ به شکل

$$D_1 = 1.5\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z} \text{ C/m}^2$$

است. اگر ϵ_0 و $2.5\epsilon_0$ به ترتیب گذردهی در نواحی $x < 0$ و $x > 0$ باشد و بار آزاد در $x = 0$ وجود نداشته باشد (الف) میدان الکتریکی E_2 در ناحیه $x > 0$ و (ب) زاویه‌های θ_1 و θ_2 که به ترتیب D_1 و D_2 با صفحه $x = 0$ می‌سازند را به دست آورید.

۱۱-۴ قانون شکست را برای خطوط E در فصل مشترک دو دی الکتریک ایده‌آل با ثابتهای دی الکتریک K_1 و K_2 با استفاده از شرایط مرزی روی E و D به دست آورید. به بیان دیگر رابطه بین جهت‌های E_1 و E_2 را برحسب K_1 و K_2 به دست آورید.

۱۲-۴ دو لایه دی الکتریک نامتناهی ۱ و ۲ به ضخامتهای واحد و ثابتهای دی الکتریک K_1 و K_2 در یک وجه مشترک و دو وجه دیگر آنها در تماس با دو صفحه نازک رسانایند. دو صفحه در پتانسیلهای

۵-۴ دو کره رسانای هم مرکز به شعاعهای داخلی و خارجی a و b و بارهای به ترتیب q و $-q$ در دست است. نیمی از فضای بین کره‌ها به شکل یک پوسته نیمکره توسط یک ماده دی الکتریک با گذردهی ϵ پر شده است. (الف) میدان بین دو کره را پیدا کنید. (ب) توزیع بار روی کره داخلی را تعیین کنید. (ج) چگالی بار سطحی القایی را روی سطح نیمکره داخلی دی الکتریک به دست آورید.

۶-۴ یک خازن مسطح با صفحات موازی به سطح A و فاصله d ، یک لایه دی الکتریک با گذردهی ϵ و ضخامت $t < d$ و به فاصله h از یکی از صفحات را در بردارد. لایه دی الکتریک قبل از وارد شدن بین صفحات با چگالی بار حجمی ρ بردار شده است به طوری که چگالی بار سطحی در سطح داخلی صفحه‌ای از خازن که در فاصله h از دی الکتریک قرار دارد σ_1 است. (الف) D بین صفحه‌ها، (ب) چگالی بارهای سطحی و حجمی القایی و (ج) چگالی بار سطحی در سطح داخلی صفحه دیگر را پیدا کنید.

۷-۴ یک خازن با صفحات کروی هم مرکز را با شعاعهای داخلی و خارجی به ترتیب a و b در نظر می‌گیریم. ناحیه بین کره‌ها با یک دی الکتریک غیر یکنواخت با گذردهی $\epsilon = \epsilon_0 / (c - ar)$ که c و α ثابت‌اند، پر شده است. کره داخلی بار حجمی q دارد و کره خارجی به زمین متصل است. (الف) بردار جابه‌جایی D بین کره‌ها را پیدا کنید. (ب) چگالی بار حجمی قطبیده بین دو کره را به دست آورید.

۱۷-۴ یک بار نقطه‌ای q را به مکانی به فاصله d از یک صفحه رسانای نامتناهی که به پتانسیل صفر وصل شده است می‌آوریم. (الف) نیروی بین صفحه و بار را با استفاده از قانون کولن برای نیروی بین بار و تصویرش حساب کنید. (ب) نیروی کلی را که به صفحه وارد می‌شود با انتگرال‌گیری از $\sigma^2/2\epsilon_0$ روی صفحه به دست آورید. نتیجه را با قسمت (الف) مقایسه کنید.

۱۸-۴ با استفاده از تکنیک شرایط مرزی مسئله بخش ۴-۶ پتانسیل و میدانهای کره دی‌الکتریک به شعاع R و قطبش دائمی یکنواخت P را (مثال ۲-۴) را ببینید] به دست آورید.

۱۹-۴ برای استوانه‌ای از موم به طول l و به شعاع $a \ll l$ که در راستای عمود بر محور استوانه است به شکل یکنواخت قطبیده شده است، $P = P_0 \hat{x}$ ، پتانسیل و میدان را در تمامی نقاط پیدا کنید. ۲۰-۴* دی‌الکتریک نیمه‌متناهی با گذردهیهای ϵ_1 و ϵ_2 قرار دارد. دوقطبی در محیط ϵ_1 قرار گرفته است و با راستای عمود بر فصل مشترک زاویه θ می‌سازد. با استفاده از روش تصویری بار، دوقطبی تصویری را که برای حل مسئله پتانسیل و میدان دی‌الکتریک مورد نیاز است به دست آورید.

۲۱-۴ فرض کنید $\mathbf{E} = \hat{x}x^n \text{ V/m}$ و $\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$. (الف) رابطه زیر را محاسبه کنید

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{\Delta v} \int \mathbf{E} dv$$

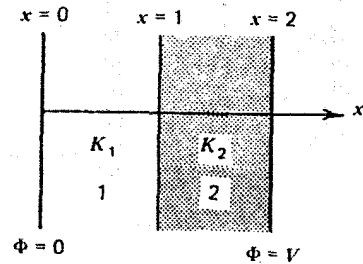
(ب) $\partial/\partial x \langle \mathbf{E} \rangle$ را حساب کنید. (ج) $\langle \partial \mathbf{E} / \partial x \rangle$ را به همان روش (الف) حساب کنید و نشان دهید که نتیجه برابر است با $\partial/\partial x \langle \mathbf{E} \rangle$. چون این نتیجه قابل تعمیم به توابع کلی‌تر است، بنابراین اثبات می‌شود که اعمال میانگین‌گیری و مشتق‌گیری واقعاً تعویض پذیرند.

۲۲-۴ در یک محیط ساکن با ماده‌ای به گذردهی ϵ یک بار مثبت واحد (یک کولن) را برای پیدا کردن میدان الکتریکی در نقاط مختلف قرار می‌دهیم. فرض کنید که نیروی وارد بر بار آزمون (برحسب نیوتون) با رابطه زیر داده می‌شود

$$\mathbf{F} = x^2 \hat{x}$$

چگالی بار در محیط چیست؟ دو روش زیر را به کار برید. (الف) یک جزء حجمی مکعبی کوچک $\Delta x \Delta y \Delta z$ در نقطه (x, y, z) در نظر بگیرید. شار خالص خروجی از سطح جزء حجم را محاسبه کنید و بار کل درون مکعب را پیدا کنید و سپس چگالی بار در نقطه (x, y, z) را به دست آورید. (ب) از رابطه $\text{div } \mathbf{D} = \rho_f$ استفاده کنید.

صفر و V (شکل ۱۸-۴ را ببینید) قرار دارند. (الف) پتانسیل را در نواحی ۱ و ۲ به صورت تابعی از x تعیین کنید. (ب) چگالی سطحی بارهای آزاد و مقید را در $x = 0$ پیدا کنید. (ج) چگالی سطحی بارهای مقید را در $x = 1$ به دست آورید.



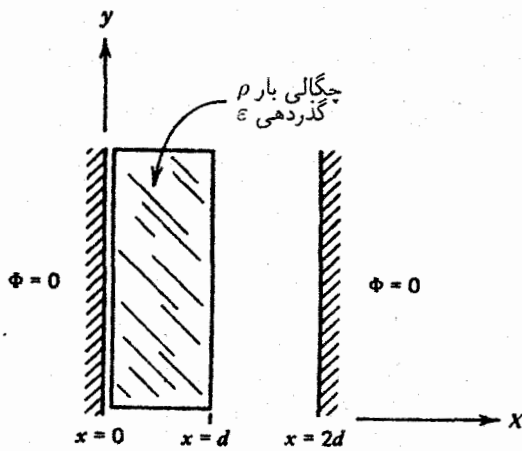
شکل ۱۸-۴

۱۳-۴ یک کره دی‌الکتریک به شعاع a و گذردهی ϵ_1 با یک لایه دی‌الکتریک با گذردهی ϵ_2 و به شعاعهای a و b احاطه شده است. پتانسیلهای درون کره و لایه کره به ترتیب $\Phi_1 = Ar\theta$ و $\Phi_2 = Aa^2\theta/r$ است. چگالی بار قطبیده در هر دو ماده و چگالی بارهای واقعی (آزاد) در سطح کره را به دست آورید.

۱۴-۴ یک لایه دی‌الکتریک استوانه‌ای با گذردهی ϵ و شعاعهای داخلی و خارجی a و b استوانه رسانای طولی به شعاع a را احاطه کرده است. مجموعه در میدان خارجی \mathbf{E}_0 قرار گرفته است به طوری که \mathbf{E}_0 بر محور استوانه عمود است. (الف) پتانسیل در نواحی $r < a$ ، $a < r < b$ و $r > b$ را پیدا کنید. (ب) بار بر واحد سطح در فاصله $r = a$ را به صورت تابعی از زاویه که نسبت به جهت \mathbf{E}_0 اندازه‌گیری می‌شود به دست آورید.

۱۵-۴ یک استوانه دی‌الکتریک با گذردهی ϵ_1 را در یک مایع دی‌الکتریک یکنواخت با گذردهی ϵ_2 و مجموعه در میدان خارجی یکنواخت قرار داده‌ایم. سنگتیری استوانه را پیدا کنید. برای یک قرص نازک با گذردهی ϵ_1 مسئله چگونه است؟

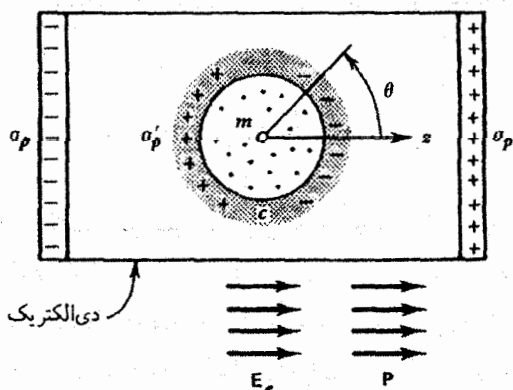
۱۶-۴ یک دی‌الکتریک نامتناهی همگن با قطبیدگی یکنواخت \mathbf{P} را در نظر می‌گیریم. اگر یک کاواک کره‌ای در داخل آن ایجاد کنیم میدان الکتریکی \mathbf{E} را با فرض اینکه ایجاد کاواک (الف) قطبش دی‌الکتریک را تغییر ندهد (آن‌گونه که در الکترتها اتفاق می‌افتد - فصل ۵ را ببینید) و (ب) قطبش دی‌الکتریک را به دلیل تغییر در میدان الکتریکی تغییر دهد، $\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E}$ (آن‌گونه که در دی‌الکتریکهای عادی رخ می‌دهد) حساب کنید.



شکل ۱۹-۴

۲۳-۴ یک تیغه دی‌الکتریک با گذردهی ϵ و چگالی بار یکنواخت ρ ، مطابق شکل ۱۹-۴ نصف فضای یک خازن مسطح را پر می‌کند. (الف) پتانسیل را در هر نقطه بین صفحه‌های خازن پیدا کنید و آن را برای $\epsilon = 2\epsilon_0$ رسم کنید. (ب) نیروی وارد بر واحد سطح سطوح رسانا را در نقاط $x=0$ و $x=2d$ حساب کنید. (برای قسمت الف ممکن است فرض کنیم که فاصله بسیار کوچکی بین صفحه خازن و دی‌الکتریک وجود دارد).

نظریه میکروسکوپی دی الکتریکها



شکل ۱-۵ یک نمودار طرحوار از یک مدل برای محاسبه تأثیرات الکتریکی در مکان یک مولکول منفرد از یک ماده دی الکتریک که توسط یک میدان الکتریکی خارجی قطبیده می شود. در این مدل، مولکول مورد نظر را همراه با N مولکول یکسان دیگر در درون کاواک و بقیه ماده را به صورت پیوسته در نظر می گیریم.

فرایند مورد نظر که در آن یک ماده دی الکتریک در یک میدان الکتریکی خارجی یکنواخت E_e قرار دارد، در شکل ۱-۵ نشان داده شده است. محل مولکول مورد نظر با شاخص m ، محل مولکولهای منفرد در همسایگی این مولکول با نقطه، و مولکولهای خارج از کاواک c با خط نشان داده شده اند. میدانهای را که توسط توده ماده تولید می شوند می توان با استفاده از بارهای قطبش که در ماده القا می شود،

در فصل قبل ویژگیهای دی الکتریکی مواد را در حد ماکروسکوپی بررسی کردیم یعنی از میدانهای استفاده کردیم که بر روی ابعاد ماکروسکوپی از مرتبه 10^{-2} سانتیمتر میانگین گیری می شوند، و این ابعاد در حالت کلی شامل 10^{10} مولکول یا بیشتر است. در این فصل ابعاد فضایی از مرتبه 10^{-7} cm را که عموماً شامل حدود 10^3 - 10^4 مولکول هستند آزمایش می کنیم. هدف از این آزمایش مطالعه میدانها در نزدیکی مولکولهای منفرد، یا مطالعه از نقطه نظر میکروسکوپی است. چون در این کار میانگین گیری دخیل است، انتظار داریم میدان ماکروسکوپی با میدان در نزدیکی مولکولهای منفرد متفاوت باشد. یکی از اهداف این فصل یافتن چگونگی ارتباط میدانها در این دو حد است. همچنین در این فصل با استفاده از یک مدل ساده اتم، واکنش آنها و مولکولهای منفرد به میدانهای خارجی را امتحان می کنیم.

۱-۵ میدان مولکولی

میدان الکتریکی مولکولی یا موضعی در محل مولکولهای منفرد در یک ماده دی الکتریک، از میدانهای ناشی می شود که توسط منابع خارج از دی الکتریک و از میدانهای که توسط تمام مولکولها بجز میدان خود آن مولکول منفرد، تولید می شوند. چون غیرممکن است که بتوان میدانهای ناشی از کل مولکولها را به صورت مجزا مورد بحث قرار داد، یک رهیافت معقول را که در آن فقط مولکولهای مجاور مولکول مورد نظر از دید میکروسکوپی بررسی می شوند، دنبال خواهیم کرد.

انتظار داریم گشتاور دوقطبی \mathbf{p} که به دست می آید با \mathbf{E}_m متناسب باشد. می نویسیم

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_m \quad (3-5)$$

که در آن α را قطبش پذیری مولکولی می نامیم. اگر در نظر بگیریم که این دوقطبیهای مولکولی در واقع، دی الکتریک را می سازند و N تا از این مولکولها در حجم واحد وجود دارند، برای قطبش خواهیم داشت

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N\alpha\mathbf{E}_m = N\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \right) \quad (4-5)$$

اگر دی الکتریک ساده باشد، فرمول زیر نیز صحیح خواهد بود

$$\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E} \quad [44-4]$$

با جایگزین کردن این فرمول در معادله (4-5) به دست می آوریم

$$\frac{N\alpha}{3\epsilon_0} = \frac{\chi}{\chi + 3} = \frac{K - 1}{K + 2} \quad (5-5)$$

یا

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N} \frac{K - 1}{K + 2}$$

همین رابطه را می توان برای K یا χ بر حسب α حل کرد

$$\chi = K - 1 = \frac{N\alpha/\epsilon_0}{1 - \left(\frac{N\alpha}{3\epsilon_0} \right)} \quad (6-5)$$

این معادله، که به معادله کلاوسوس-موساتی مشهور است پذیرفتاری ماکروسکوپی χ یا ثابت دی الکتریک را به قطبش پذیری میکروسکوپی α و چگالی مولکولی N ربط می دهد. اعتبار (تقریبی) این معادله برای گازها و مایعات صحیح است. مدلی که با آن جامدات را می سازیم بیش از حد ساده است.

مثال ۱-۵ قطبش پذیری مولکولی O_2 و N_2

از معادله (5-5) می توان برای محاسبه قطبش پذیری مولکولی از پذیرفتاری ماکروسکوپی استفاده کرد. هوا را که عموماً مخلوطی از N_2 و O_2 است در نظر بگیرید. از جدول ۱-۴ ثابت دی الکتریک هوا برابر است با 1.00059 . در فشار و دمای متعارف (STP)، تعداد مولکولها بر متر مکعب در هوا برابر است با $2.7 \times 10^{25}/m^3$. از این رو

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N} \frac{K - 1}{K + 2} = 1.94 \times 10^{-40} \text{ C} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{V}^{-1}$$

محاسبه کرد. چگالی حجمی بار قطبش برای میدانهای خارجی یکنواخت برابر است با $-\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$. با این همه، توزیعهای بار سطحی بر روی سطح کاواک و بر روی وجوه ماده دی الکتریک که بر میدان خارجی عمود است، وجود دارند. در این مکانها میدان الکتریکی ناشی از بارهای سطحی که بر روی سطوح خارجیتر حضور دارند، برابر است با $-\mathbf{P}/\epsilon_0$. به این ترتیب میدان مولکولی را به عنوان حاصل جمع میدانهای زیر می نویسیم

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_i \quad (1-5)$$

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_c - (\mathbf{P}/\epsilon_0)$ عبارت است از میدان ماکروسکوپی در مواد، \mathbf{E}_c میدان الکتریکی ناشی از بارهای روی سطح کاواک، و \mathbf{E}_i ناشی از تمام مولکولهای درون کاواک است.

یک مولکول خنثی در حضور یک میدان الکتریکی قطبیده می شود و به این ترتیب مانند یک دوقطبی عمل می کند. فعلاً تنها همین واقعیت را به کار می بریم، اما بعداً در این بخش از یک مدل ساده برای استخراج این نتیجه استفاده خواهیم کرد. به این ترتیب، بنابر معادله (2-۴) داریم

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{3\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{p}{r_k^3} (2\hat{\mathbf{r}}_k \cos \theta' + \hat{\theta} \sin \theta')$$

که در آن \mathbf{p} گشتاور دوقطبی مولکولی القا شده، r_k فاصله مولکول k ام از محل m ، زاویه θ' بین \mathbf{p} (که در راستای میدان خارجی است) و $\hat{\mathbf{r}}_k$ و n تعداد مولکولهای درون کاواک است. حاصل جمع بالا در چندین حالت صفر می شود؛ این حالتها شبکه های بلوری مکعبی و مایعات یا گازهایی را شامل می شوند که مکان مولکولها در کاواک کاتوره ای است. به طور کلی حاصل جمع بالا در مواد ناهمسانگرد صفر نمی شود؛ با این همه، این حاصل جمع در بسیاری از مواد همسانگرد صفر می شود. در این بحث تنها موادی را در نظر می گیریم که حاصل جمع بالا صفر می شود.

با استفاده از مثال ۲-۴، به سادگی می توان نشان داد که میدان در داخل یک حفره کروی در یک دی الکتریک با قطبش \mathbf{P} ، برابر است با $\mathbf{P}/3\epsilon_0$. از این رو \mathbf{E}_m به دست می آید

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (2-5)$$

اگر یک مولکول دی الکتریک را در چنین حفره ای کروی در نظر بگیریم، قطبش آن توسط \mathbf{E}_m تعیین می شود. به علاوه، اگر ماده خطی باشد،

جدول ۱-۵ گشتاورهای دوقطبی الکتریکی دائمی^۱

مولکول	p	مولکول	p
HCl	۳٫۴۳	CO	۴٫۰
HBr	۲٫۶۳	CH _۳ Cl	۶٫۳
H _۲ O	۶٫۰۳	NO	۰٫۳۳
H _۲ S	۳٫۰۶	NO _۲	۱٫۳۳

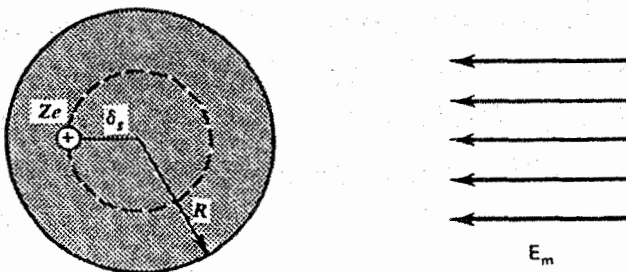
۱. برحسب یکاهای ۱۰^{-۳۰} کولن.متر.

۱-۲-۵ دوقطبی القاشده

موضوع را با در نظر گرفتن مولکولهای غیرقطبی در یک میدان الکتریکی شروع می‌کنیم. با این همه، با استفاده از یک مدل ساده اتمی عباراتی را برای گشتاور دوقطبی القاشده به دست خواهیم آورد. استفاده از این مدل برای مولکولها جامع نیست. اما، از آن می‌توان در مورد مولکولهای دو اتمی مقارن استفاده کرد. در این صورت کل قطبش پذیری مولکول را می‌توان به سادگی با افزودن قطبش پذیری اتمهای تشکیل دهنده آن مولکول تعیین کرد.

در این مدل فرض بر این است که بار الکتریکی $-Ze$ به صورت یکنواخت بر روی کره‌ای به شعاع R و به مرکز بار هسته‌ای مثبت Ze که در آن Z عدد اتمی و e مقدار بار یک الکترون است ($1.6 \times 10^{-19} C$) توزیع می‌شود. بار مثبت، تحت تأثیر یک میدان خارجی E_m ، نسبت به مرکز ابر الکترونی حرکت می‌کند تا وقتی که نیروی جاذبه کولنی بین ابر و هسته با نیروی ZeE_m به توازن برسد. به ازای یک فاصله δs بین مرکز ابر و هسته (شکل ۳-۵)، شرط توازن عبارت است از

$$ZeE_m = \frac{qZe}{4\pi\epsilon_0(\delta s)^2} \quad (۷-۵)$$



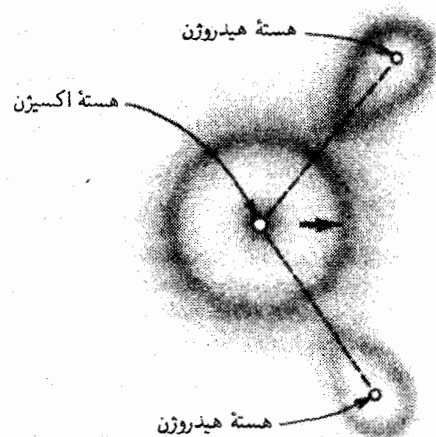
شکل ۳-۵ یک مدل ساده شده که بار الکتریکی یک اتم را به صورت یک کره باردار یکنواخت با بار هسته‌ای در مرکز کره نشان می‌دهد. حضور یک میدان الکتریکی خارجی، مراکز توزیع بار را جابه‌جا می‌کند، که این امر منجر به یک دوقطبی القاشده می‌شود.

دقت کنید که در این محاسبه بین O_2 و N_2 تفاوتی در نظر نگرفته‌ایم، و بنابراین مقدار α را یک میانگین وزنی از قطبش‌پذیریهای آنها می‌شناسیم.

۲-۵ برهم‌کنش آنها و مولکولها با میدان الکتریکی

اکنون به برهم‌کنش آنها با مولکولهای منفرد با میدانهای دی‌الکتریکی باز می‌گردیم. همان‌گونه که در صفحه ۹۸ بحث شد، مولکولها را به دو گروه تقسیم کردیم: مولکولهای قطبی و غیرقطبی. در یک مولکول قطبی، مرکز بار الکتریکی نسبت به مرکز بار هسته‌ای دائماً جابه‌جا می‌شود، و بدین ترتیب، اگرچه مولکول از نظر کلی خنثی است، اما یک گشتاور دوقطبی الکتریکی دائمی از خود نشان می‌دهد. مثالی از مولکولهای قطبی، مولکول آب است (شکل ۲-۵). از طرف دیگر، وقتی مرکز بارهای مثبت و منفی نسبت به یکدیگر جابه‌جا نمی‌شوند، در این صورت، مولکول یک دوقطبی دائمی را نشان نمی‌دهد (مولکولهای غیرقطبی). مثالهایی از مولکولهای غیرقطبی O_2 ، N_2 و H_2 هستند. جدول ۱-۵ گشتاور دوقطبی چند مولکول قطبی را نشان می‌دهد.

وقتی مولکولها را در یک میدان الکتریکی قرار دهیم، میدان باعث فاصله گرفتن مراکز بارهای الکترونی و هسته‌ای در مولکولهای غیرقطبی و باعث فاصله گرفتن بیشتر این مراکز در مولکولهای قطبی می‌شود. این نتایج را اصطلاحاً قطبش القاشده یا گشتاور دوقطبی القاشده می‌نامند. در مورد مولکولهای قطبی، میدان الکتریکی گشتاورهایی را بر روی دوقطبیهای دائمی نیز اعمال می‌کند که این امر تا حدی باعث صف‌بندی مولکولها می‌شود.



شکل ۲-۵ نمودار طرحوار بار اتمی و هسته‌ای یک مولکول آب، بی‌تقارنی در توزیعی که به مولکول گشتاور دوقطبی الکتریکی دائمی می‌دهد را نشان می‌دهد.

q بار داخل کره به شعاع δs است. با قراردادن $q = (\frac{4\pi}{3})(\delta s)^3 \rho = Ze(\delta s)^3/R^3$ در معادله (۷-۵)، درمی یابیم که گشتاور دوقطبی القاشده $p_m = Ze\delta s$ برابر است با

$$p_m = Ze\delta s = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_m = \alpha E_m \quad (۸-۵)$$

که در آن α قطبش پذیری تغییر شکل نام دارد و به صورت زیر است

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 R^3 \quad (۹-۵)$$

با این مدل می توان برای یک مولکول دو اتمی، یک دوقطبی القاشده مساوی با $2\alpha E_m$ برآورد کرد.

در بخش ۱-۵، یعنی میدان مولکولی، فرض کردیم که قطبش مولکولی با E_m متناسب است، و به این ترتیب نتیجه بالا این فرض را تأیید می کند. به علاوه، معادله (۶-۵) دلالت بر این موضوع دارد که وقتی α مستقل از زمان است، K ثابت دی الکتریک، یک کمیت ثابت است. جالب توجه است که حتی در یک میدان بسیار قوی $E_m = 10^{10}$ V/m، از معادله (۸-۵) درمی یابیم که $\delta s \approx 10^{-12}$ m، که نسبت به بعد ماکروسکوپی و یا اندازه اتمی (10^{-10} m) بسیار کوچکتر است.

مثال ۲-۵ قطبش پذیری هیدروژن

یک مدل واقع بینانه تر از بار الکترونی — مثلاً در اتم هیدروژن — یک توزیع بار نمایی متقارن کروی به شکل $\rho = -(e/\pi a_0^3) e^{-2r/a_0}$ است که در آن a_0 یک ثابت است (شعاع بور مساوی 10^{-10} m است) و e بزرگی بار یک الکترون است. در مقایسه با مدل بالا که بار بر روی یک کره به طور یکنواخت توزیع می شود، این توزیع در تمام فضا گسترش می یابد.

برای محاسبه قطبش اتم هیدروژن در میدان E_m ، فرایند مشابهی را که برای مدل ساده در بالا مورد استفاده قرار دادیم، دنبال می کنیم. برای محاسبه میدانی که توسط توزیع بار به فاصله δs از مرکز توزیع تولید می شود، از قانون گاوس برای یک سطح کروی گاوسی به مرکز مبدأ و شعاع δs استفاده می کنیم. انتظار داریم که میدان شعاعی باشد. از این رو

$$4\pi(\delta s)^2 E = \int \rho dv = \frac{-e}{\pi a_0^3 \epsilon_0} 4\pi \int_0^{\delta s} r^2 e^{-2r/a_0} dr$$

به این ترتیب

$$E = \frac{-e}{\pi a_0^3 \epsilon_0 (\delta s)^2} G \quad (۱۰-۵)$$

که در آن

$$G = \int_0^{\delta s} r^2 e^{-2r/a_0} dr \quad (۱۱-۵)$$

به ازای $\delta s \ll a_0$ ، G را می توان به صورت یک سری تیلور بسط داد، نگه داشتن جملات با پایستری مرتبه δs به دست می دهد $G \approx \delta s^3/3$ و از این رو

$$E = \frac{-e}{3\pi\epsilon_0 a_0^3} \delta s \quad (۱۲-۵)$$

با توجه به شرط توازن داریم $E = -E_m$. بنابراین

$$p_m = e\delta s = 3\pi a_0^3 \epsilon_0 E_m = \alpha' E_m \quad (۱۳-۵)$$

اگر کل بار را بر روی یک کره به شعاع a_0 توزیع کنیم، در این صورت معادله (۸-۵) به دست می دهد $p_m = 4\pi\epsilon_0 a_0^3 E_m$. از این رو ثابت قطبش پذیری برابر است با $\alpha' = (3/4)\alpha$. این مثال نشان می دهد که این مدل بسیار تقریبی است و تنها مرتبه ای از بزرگی را نشان می دهد. در واقع محاسبات دقیق مکانیک کوانتومی برای قطبش پذیری هیدروژن $18\epsilon_0 a_0^3$ را به دست می دهد. ■

مثال ۳-۵ تأثیر برهم کنش اتمی بر روی قطبش پذیری مولکولی در به کار بردن مدل اتمی برای یک مولکول دو اتمی، در بالا متوجه شدیم که قطبش مولکولهای القاشده دو برابر قطبش اتمی القاشده است. این مثال نشان می دهد که وقتی برهم کنش واقعی بین دوقطبیهای اتمی القاشده را به حساب آوریم، قطبش پذیری مولکولی درست دو برابر قطبش پذیری اتمی خواهد بود.

مطابق شکل ۴-۵ یک مولکول متشکل از دو اتم متقارن کروی یکسان به فاصله R از یکدیگر که قطبش پذیری هر اتم α است را در نظر بگیرید. مولکول را در یک میدان الکتریکی E_m به موازات محور آن قرار می دهیم. قطبش هر اتم عبارت است از

$$p = \alpha(E_m + E') \quad (۱۴-۵)$$

که در آن E' یک میدان الکتریکی اضافه بر E_m است که در محل هر اتم توسط گشتاور دوقطبی القاشده اتم دیگر تولید می شود. میدان الکتریکی E' که توسط هر اتم در محل اتم دیگر تولید می شود به نوبه خود باید توسط قطبش اتم که با معادله (۱۴-۵) داده شده است، تولید شود. استفاده از معادله (۴-۲) برای میدانی که توسط یک

میدان تغییری در قطبش مولکولی القا می‌کند، و گشتاوری بر دوقطبی دائمی مولکول وارد می‌کند که این امر تا حدودی منجر به صف‌بندی در امتداد میدان می‌شود (شکل ۵-۵). چون اثر اول را قبلاً بررسی کردیم، اکنون به بررسی اثر دوم می‌پردازیم.

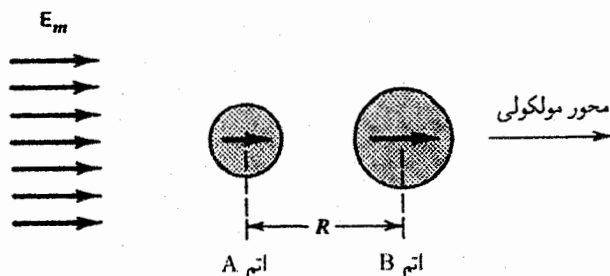
انرژی گرمایی مولکولها در یک قطعه ماکروسکوپی یک دی‌الکتریک قطبی تمایل دارد سمتگیرهای دوقطبی مولکولی را به صورت کاتوره‌ای در آورد. در واقع در غیاب یک میدان خارجی، حاصل جمع برداری گشتاورهای دوقطبی تمام مولکولها صفر می‌شود.

درجه سمتگیری دوقطبیهای مولکولی را از نظر کمی می‌توان با استفاده از روشهای آماری به دست آورد. یک مجموعه از N_0 مولکول قطبی بر واحد حجم در دمای T را در نظر بگیرید. از نظر کلاسیکی، هر گشتاور دوقطبی می‌تواند یک زاویه دلخواه θ را نسبت به یک جهت مفروض مثلاً محور z بسازد. (شکل ۵-۶). در غیاب یک میدان الکتریکی خارجی، احتمال آنکه دوقطبی بین زوایای θ و $\theta + d\theta$ باشد با $2\pi \sin \theta d\theta$ ، زاویه فضایی $d\Omega$ روبه‌رو به این گستره زاویه، متناسب است. این احتمال منجر به یک میانگین صفر دوقطبیها می‌شود. وقتی یک میدان الکتریکی E_m را در راستای محور z در نظر بگیریم، این احتمال با توزیع بولتزن $e^{-U/kT}$ متناسب خواهد بود، که $U \equiv -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_m = -pE_m \cos \theta$ عبارت است از انرژی الکتریکی دوقطبی وقتی نسبت به میدان الکتریکی زاویه θ می‌سازد [معادله (۲-۶۴)]، k ثابت بولتزن و T دمای مطلق است. ضریب بولتزن با یک روش خوش‌تعریف، از نظر کمی، وابستگی احتمال را به میدان الکتریکی و به دما معرفی می‌کند.

قبل از محاسبه درجه صف‌بندی، مایلیم چند حالت حدی ضریب بولتزن را در نظر بگیریم. وقتی $U/kT \ll 1$ ، که در حالت‌های دمای بالا یا/و میدانهای الکتریکی ضعیف پدید می‌آید، $e^{-U/kT} \approx 1 - U/kT$ و از این رو احتمال فقط با زاویه فضایی متناسب است. با نوشتن $e^{-U/kT} \approx 1 - U/kT$ به یک تصحیح مرتبه اول در حد دمای بالا می‌رسیم. از طرف دیگر، وقتی $|U/kT| \geq 1$ ، این ضریب اهمیت بیشتری پیدا می‌کند، و جهت‌هایی که U/kT منفی و از نظر قدر مطلق بزرگ است از ضریب وزنی بزرگتری برخوردار می‌شوند، که به این ترتیب این امر منجر به یک درجه بالاتر از صف‌بندی می‌شود. در نظر گرفتن هر دو احتمال، یعنی زاویه فضایی و ضریب بولتزن،

برای میانگین گشتاور دوقطبی، به دست می‌دهد

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \frac{\int \mathbf{p} e^{-U/kT} d\Omega}{\int e^{-U/kT} d\Omega} \quad (19-5)$$



شکل ۵-۴ محاسبه قطبش‌پذیری یک مولکول دو اتمی واقع در یک میدان خارجی در امتداد محور مولکول، با در نظر گرفتن برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی بین اتمهای منفرد.

دوقطبی تولید می‌شود و قرارداد $\theta = 0$ به دست می‌دهد

$$\mathbf{E}' = \frac{\gamma \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\gamma \alpha}{4\pi\epsilon_0 R^2} (\mathbf{E}_m + \mathbf{E}') \quad (15-5)$$

که نتیجه می‌شود

$$\mathbf{E}' = \frac{\gamma \alpha \mathbf{E}_m}{4\pi\epsilon_0 R^2 [1 - (\gamma \alpha / 4\pi\epsilon_0 R^2)]} \quad (16-5)$$

با قرارداد این نتیجه در معادله (۱۴-۵) به دست می‌دهد

$$\mathbf{p} = \frac{\alpha \mathbf{E}_m}{1 - (\gamma \alpha / 4\pi\epsilon_0 R^2)} \quad (17-5)$$

کل قطبش مولکولی دو برابر نتیجه بالاست، و بنابراین

$$\alpha' = \frac{\gamma \alpha}{1 - (\gamma \alpha / 4\pi\epsilon_0 R^2)} \quad (18-5)$$

این نتیجه در حد $\alpha' = \gamma \alpha$ به $\alpha / 4\pi\epsilon_0 R^2 \ll 1$ تبدیل می‌شود که با چشمپوشی از برهم‌کنش بین اتمها به سادگی برابر است با حاصل جمع قطبش‌پذیری منفرد اتمها.

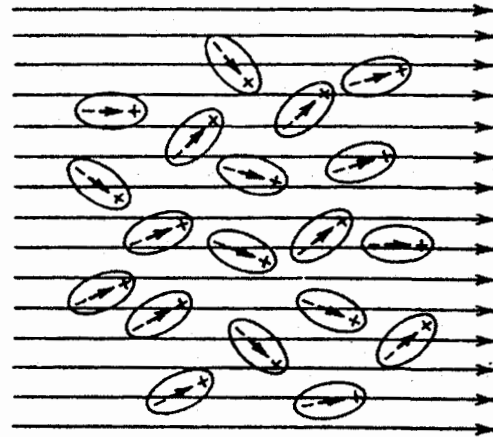
وقتی میدان الکتریکی خارجی بر محور مولکولی عمود است، دوقطبی اتمی القاشده بر محور مولکولی عمود خواهد بود، و بنابراین میدان الکتریکی اضافی در محل هر اتم که توسط اتمهای دیگر تولید می‌شود، با مورد بالا فرق خواهد داشت، و از این رو قطبش‌پذیری مولکولی نیز متفاوت خواهد بود. تعیین این قطبش‌پذیری را به عنوان یک تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم (مسئله ۵-۶ را ببینید). ■

۲-۲-۵ دوقطبیهای دائمی

وقتی یک مولکول قطبی با یک دوقطبی الکتریکی دائمی را در یک میدان الکتریکی قرار می‌دهیم، این میدان دو اثر تولید می‌کند: این



(الف)



(ب)

شکل ۵-۵ نمودار طرحوار یک ماده پارامغناطیس. (الف) یک توزیع کاتوره‌ای از دوقطبیهای دائمی در غیاب میدانهای خارجی. (ب) در حضور یک میدان خارجی تا حدودی سمتگیری ایجاد می‌شود.

که در آن

$$\eta = \frac{pE_m}{kT} \quad (22-5)$$

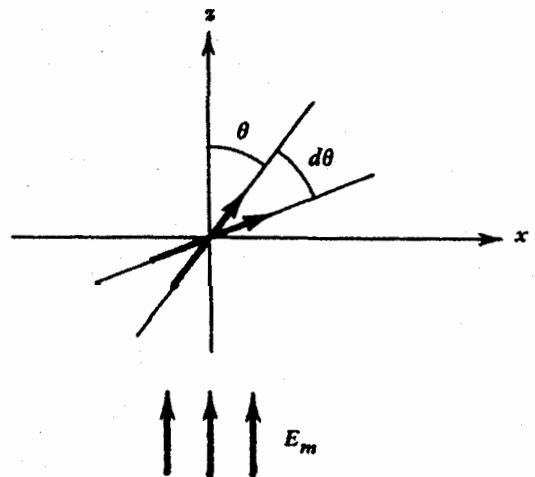
معادله (۲۱-۵) به فرمول لاتژون مشهور است. فرمول لاتژون در میدانهای بزرگ، یعنی $\eta = (pE_m/kT) \gg 1$ ، پیش‌بینی می‌کند $\langle p \rangle = p \hat{z}$ که بدان معنی است که صف‌بندی کامل (اشباع) رخ می‌دهد. با این همه، در اکثر موارد مواد دی الکتریک، بزرگی p چنان است که در دمای معمولی، حتی اگر E_m را به بزرگی استقامت دی الکتریک ماده انتخاب کنیم، $\eta \ll 1$ در این حد فرمول لاتژون می‌دهد

$$\langle p \rangle = \frac{1}{3} \frac{p^2 E_m}{kT} \hat{z} \quad (23-5)$$

که یک رابطه خطی بین میانگین گشتاور دوقطبی و میدان را نشان می‌دهد. وقتی η کوچک نیست، در این صورت $\langle p \rangle$ یک تابع غیرخطی از میدان است. رابطه بین $\langle p \rangle$ و η که با معادله (۲۱-۵) داده می‌شود، در شکل ۷-۵ رسم شده است؛ این نمودار سه ناحیه‌ای را که در بالا بحث شد، نشان می‌دهد.

در یک مجموعه از N مولکول بر حجم واحد، کل قطبش برابر است با $P = N \langle p \rangle$ ، و از این رو گشتاور دوقطبی مؤثر بر مولکول، $\langle p \rangle$ است. با استفاده از رابطه $\langle p \rangle = \alpha E_m$ آنچه را که قطبش‌پذیری سنتی می‌نامیم به دست می‌آید، یعنی

$$\alpha = \frac{p^2}{3kT} \quad (24-5)$$



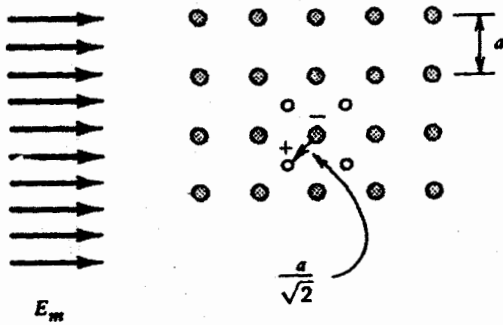
شکل ۶-۵ محاسبه خصوصیات پارامغناطیسی مواد در میدانهای الکتریکی خارجی.

که در آن مخرج معادله (۱۹-۵) را برای بهنجار کردن میانگین وارد کرده‌ایم. با قرار دادن $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ و نوشتن $\hat{p} = p \cos \theta \hat{z} + p \sin \theta \hat{x}$ که \hat{z} و \hat{x} به ترتیب بردارهای یکه در جهت محور z و x هستند، به دست می‌آوریم

$$\langle p \rangle = \frac{\int_{-1}^1 (p \cos \theta \hat{z} + p \sin \theta \hat{x}) e^{(pE_m \cos \theta)/kT} d \cos \theta}{\int_{-1}^1 e^{(pE_m \cos \theta)/kT} d \cos \theta} \quad (20-5)$$

مؤلفه x این میانگین صفر است، حال آنکه در جهت z به دست می‌آید

$$\langle p \rangle = p \left(\coth \eta - \frac{1}{\eta} \right) \hat{z} \quad (21-5)$$



شکل ۸-۵ یک آرایش از وضعیتی که در آن سمتگیرهای دوقطبی در یک میدان خارجی E گسسته هستند؛ یک مدل ساده دوبعدی از یک جامد به فاصله شبکه‌ای، متشکل از یونهای ناخالص منفی، که در یک میدان الکتریکی قرار داده شده است.

را تشکیل می‌دهند که گشتاور دوقطبی آنها برابر است با $ea/\sqrt{2}$ ، که در آن e بزرگی بار الکترون است.

چون احتمال این چهار محل یکسان است، میانگین گشتاور دوقطبی صفر می‌شود. با این همه، میانگین گشتاور دوقطبی در حضور یک میدان الکتریکی E_m در جهت z به دلیل تأثیر صف‌بندی که قبلاً بحث شد، صفر نخواهد شد. برای محاسبه قطبش الکتریکی از ضریب بولتزمن $e^{-U_i/kT}$ استفاده می‌کنیم، که $U_i = (-ea/\sqrt{2})E_m \cos \theta_i$ ، زاویه بین دوقطبی و محور z است، و i از ۱ تا ۴، یعنی محل‌های ممکن یون مثبت، تغییر می‌کند. بنابراین

$$\langle p \rangle = \frac{\sum_i p_i e^{-U_i/kT}}{\sum_i e^{-U_i/kT}} \quad (27-5)$$

با جایگذاری U_i برحسب E_m و θ_i و با توجه به آنکه فقط مؤلفه z از p_i در محاسبات وارد می‌شود، به دست می‌آوریم

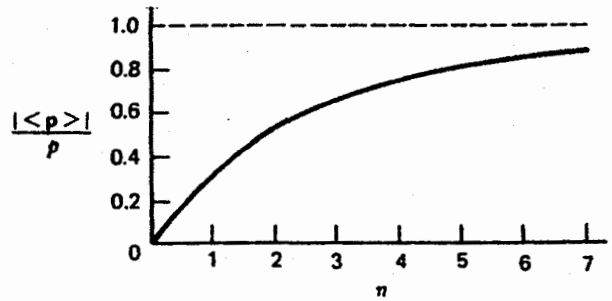
$$\langle p \rangle = \frac{\sum_i \frac{ea}{\sqrt{2}} \hat{z} \cos \theta_i e^{g \cos \theta_i}}{\sum_i e^{g \cos \theta_i}} \quad (28-5)$$

که در آن

$$g = \frac{ea}{\sqrt{2}} \frac{E_m}{kT}$$

و \hat{z} یک بردار یکه در جهت z است؛ یا

$$\langle p \rangle = \frac{ea}{\sqrt{2}} \hat{z} \frac{e^{g'} - e^{-g'}}{e^{g'} + e^{-g'}} \quad (29-5)$$



شکل ۷-۵ رفتار میانگین گشتاور دوقطبی یک ماده پارامغناطیس بر مولکول که در یک میدان الکتریکی خارجی E_m قرار گرفته است، به صورت تابعی از $\eta = pE_m/kT$. این میانگین را که به ازای η های بزرگ (اشباع) به سمت ۱ میل می‌کند، می‌توان از تابع لانژون به دست آورد.

ثابت دی‌الکتریک ماده را می‌توان با استفاده از معادله (۶-۵) به صورت زیر به دست آورد

$$K - 1 = \frac{Np^2}{3\epsilon_0 kT} \left(1 - \frac{Np^2}{9\epsilon_0 kT} \right)^{-1} \quad (25-5)$$

وقتی علاوه بر تأثیر صف‌بندی، قطبش‌پذیری α' را که قبلاً در مورد آن بحث کردیم در نظر بگیریم، کل قطبش‌پذیری می‌شود

$$\alpha = \alpha' + \frac{p^2}{3kT} \quad (26-5)$$

که به معادله لانژون-دبی مشهور است، این معادله نشان می‌دهد که α در دمای بالا به صورت $1/T$ تغییر می‌کند.

مثال ۴-۵ سمتگیرهای دوقطبی گسسته^۱

این مثال از یک جایگاه فیزیکی واقعی برخوردار است که در آن، جهت یک دوقطبی الکتریکی دائمی در حضور یک میدان الکتریکی خارجی، به تعداد اندکی از جهتها محدود است. یک جامد به فاصله شبکه‌ای a را که در دمای مطلق T نگه داشته شده است در نظر بگیرید. مطابق شکل ۸-۵ برخی از آنها در جسم جامد با یونهای ناخالص منفی جایگزین شده‌اند. چون در مجاورت هر یون منفی، یک یون مثبت وجود دارد، در این صورت کلاً جسم جامد خنثی است.

یون مثبت از اتم و از یون منفی کوچکتر است و بنابراین در بین جایگاه شبکه حرکت می‌کند. چهار مکان ممکن برای یون مثبت وجود دارد؛ همان‌گونه که در شکل نشان داده شده است، این مکانها به فواصل مساوی از یون منفی هستند. یونها در هر محل یک دوقطبی

که در آن $g' = \sqrt{2}g$ به این ترتیب میانگین گشتاور دوقطبی عبارت است از

$$\langle p \rangle = \frac{ea}{2} \hat{z} \tanh\left(\frac{eaE_m}{kT}\right) \quad (30-5)$$

۳-۲-۵ فروالکتریسیته

اکنون چند ماده را که حتی در غیاب میدانهای الکتریکی خارجی دارای گشتاورهای الکتریکی دائمی هستند در نظر می‌گیریم. این مواد را در شباهت با اثر معروف فرومغناطیسی که تعدادی از مواد مثل آهن از خود نشان می‌دهند، فروالکتریک می‌نامند. باریم تیتانات، $BaTiO_3$ ، یک مثال از یک ماده فروالکتریک است، این ماده در غیاب میدانهای الکتریکی خارجی در دمای پایینتر از $T_c = 118^\circ C$ قطبش دائمی (خودبه‌خودی) از خود نشان می‌دهد. با این همه، این ماده در دمای بالاتر از T_c یک ماده دی الکتریک معمولی با یک ثابت دی الکتریک بسیار بزرگ است.

برای وقوع این اثر ساختارهای مولکولی باید دارای یک قطبش‌پذیری مشخص باشند. برای تعیین شرط قطبش‌پذیری، معادله (۲-۵) را در نظر بگیرید. انتخاب $E = 0$ به دست می‌دهد

$$E_m = \frac{P}{3\epsilon_0} \quad (31-5)$$

این معادله نشان می‌دهد که قطبش دائمی P ، یک میدان مولکولی E_m را تولید می‌کند. برای آنکه این مطلب خود سازگار باشد، قطبش P باید توسط همین میدان مولکولی تولید شود. بنابراین

$$P = N\alpha E_m \hat{z} \quad (32-5)$$

اکنون می‌توان معادلات (۳۱-۵) و (۳۲-۵) را برای α حل کرد. حذف E_m به دست می‌دهد

$$P = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0} P \quad (33-5)$$

که دارای دو جواب است: $P = 0$ (یک جواب بدیهی) و

$$\frac{N\alpha}{3\epsilon_0} = 1 \quad (34-5)$$

که شرط قطبش (خودبه‌خود) دائمی است. در اکثر مواد $N\alpha/3\epsilon_0$ از یک کوچکتر است؛ این مواد دی الکتریکهای معمولی هستند. با این همه، شرط فوق در مورد برخی از بلورها مثلاً $BaTiO_3$ که به آن اشاره شد، صدق می‌کند.

اکنون وابستگی دمایی مواد فروالکتریک — یعنی دمای آستانه — را شرح می‌دهیم. معادله (۳۴-۵) شرط دمای بحرانی یا دمای کوری T_c را به دست می‌دهد. در دمای بالاتر از T_c و مادامی که T به T_c نزدیک می‌شود، یک تصحیح کوچک را باید بر این شرط اعمال کرد:

$$\frac{N\alpha}{3\epsilon_0} = 1 - (T - T_c)\delta \quad (35-5)$$

که $\delta \ll 1$ (از مرتبه 10^{-6} بر درجه سلسیوس) است. با قراردادن معادله (۳۵-۵) در معادله (۶-۵) به دست می‌آوریم

$$K - 1 = \frac{3 - 3\delta(T - T_c)}{\delta(T - T_c)} \approx \frac{3}{\delta(T - T_c)} \quad (36-5)$$

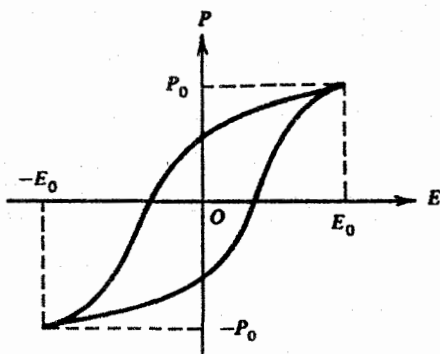
این قانون کوری-وایس است. این قانون نشان می‌دهد که K درست بالای دمای بحرانی بسیار بزرگ است. این نتیجه با مشاهده تجربی مواد فروالکتریک سازگار است. ثابتهای بزرگ دی الکتریک مثلاً ثابتهای دی الکتریک مواد فروالکتریک در نزدیکی T_c ، خصوصاً وقتی T_c به دمای اتاق نزدیک است، باید در ساخت خازنها و کاربردهای دیگر جالب توجه باشد. به همین دلیل، تحقیقات پیوسته‌ای برای تغییر رفتار این مواد به شیوه‌ای تحت کنترل (تغییر T_c) وجود دارد. مثلاً افزودن مقداری اندک از $BaLiF_3$ به $BaTiO_3$ ، T_c را تا نزدیکی دمای اتاق پایین می‌آورد.^۱

مقایسه معادلات (۲۵-۵) و (۳۶-۵) نشان می‌دهد که وابستگی دمایی یک مجموعه از یک گاز دوقطبی با وابستگی دمایی یک ماده فروالکتریک متفاوت است. در حالی که در مورد یک گاز دوقطبی، $K - 1$ به صورت $1/T$ تغییر می‌کند، در مواد فروالکتریک $K - 1$ به صورت $1/(T - T_c)$ تغییر می‌کند.

وقتی در مورد پایداری مواد فروالکتریک بحث می‌کنیم، باید اثر میدان واقطبی‌دگی را مد نظر داشته باشیم. یک میدان واقطبی‌دگی توسط بار قطبش سطحی مؤثری به وجود می‌آید که از ناپیوستگیهای قطبش در سطوح یک ماده دی الکتریک قطبیده ناشی می‌شود. (مثالهای ۴-۸ و ۴-۲ را ببینید). تأثیر این میدان آن است که ماده را واقطبیده می‌کند، زیرا این میدان با قطبشی که آن را تولید می‌کند مخالف است.

میدانهای واقطبی‌دگی در مواد فروالکتریک را می‌توان به صورت تجربی حذف کرد و از این رو آنها را برای استفاده‌های عملی مهیا

۱. مثلاً مرجع زیر را ببینید



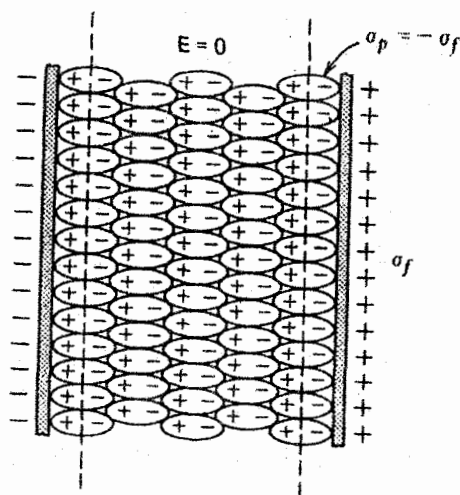
شکل ۵-۱ حلقه پسماند برای یک ماده فروالکتریک تحت نفوذ یک میدان خارجی E.

کنیم، در این صورت جهت قطبش ماده فروالکتریک معکوس خواهد شد و تمام بارهای آزاد و بارهای قطبش تغییر علامت خواهد داد. وارونی چگالیهای بار، توسط یک شارش بار آزاد از طریق منابع خارجی القا می‌شود. وجود این دو حالت ذخیره‌ای متمایز استفاده از ماده فروالکتریک موجود در فاصله بین دو صفحه موازی را به‌عنوان عنصر اصلی دستگاه حافظه ممکن می‌سازد.

اگر دوره‌های وارونی اختلاف پتانسیل بین صفحات را طی کنیم، (وارون کردن میدان الکتریکی $E_0 \rightarrow -E_0 \rightarrow E_0$)، حالت قطبش ماده فروالکتریک همان مقدار را در پایان هر مسیر یعنی $P_0 \rightarrow -P_0 \rightarrow P_0$ کسب خواهد کرد. با این همه، مقدار قطبش در مقادیر میانی E بستگی به آن دارد که فرایند در کدام نیمه از دوره است. شکل ۵-۱ این اثر را که اثر پسماند نام دارد، نشان می‌دهد. تأثیرات پسماند (بدین معنی که اثر قطبش از میدان الکتریکی خارجی عقب می‌ماند) در مواد فرومغناطیس نیز که مغناطش از میدان مغناطیسی خارجی عقب می‌ماند، رخ می‌دهد. فصلهای ۹ و ۱۰ را برای جزئیات فرومغناطیس ببینید.

نهایتاً قطبش دائمی را می‌توان تا حدودی در چند نوع موم تولید کرد. اگر موم در حضور یک میدان الکتریکی قوی ذوب شود، دوقطبیهای دائمی موم در راستای میدان سمتگیری می‌کنند. پس از آن وقتی موم منجمد شود، مادامی که میدان برقرار باشد، دوقطبیها همراستا باقی می‌مانند. این مواد قطبیده دائم، همتای مغناطیسهای دائمی هستند و به‌سادگی آنها را الکتروت می‌نامند.

به دلیل ماهیت دائمی سمتگیری، انتظار می‌رود که معرفی یک کاواک کوچک در چنین ماده‌ای حالت قطبش ماده را تغییر ندهد (مسئله ۴-۱۶ را ببینید).



شکل ۹-۵ قطعه‌ای از ماده فروالکتریک که به راحتی بین صفحات یک خازن با صفحات موازی قرار دارد.

ساخت. برای نشان دادن این مطلب، شکل ۹-۵ را در نظر بگیرید که یک تیغه از ماده فروالکتریک را که به‌سادگی در فضای بین دو صفحه رسانا قرار دارد، نشان می‌دهد. یک اختلاف پتانسیل بزرگ را به صفحات اعمال می‌کنیم. اگر چگالی بار سطحی آزاد بر روی صفحه سمت راست باشد، در این صورت چگالی بار قطبش بر روی همین صفحه مساوی با σ_p با علامت مخالف خواهد بود. به‌علاوه، اگر ماده فروالکتریک باشد، در این صورت $K - 1 \approx N\alpha / 3\epsilon_0$ یا $K - 1$ بسیار بزرگ می‌شود به طوری که $K - 1 \approx K$. در این حالت σ_p به $-\sigma_f$ نزدیک می‌شود [معادله (۴-۵۷)]. از این رو کل بار در سطح ماده یا سطح صفحه برابر است با $\sigma_p + \sigma_f \approx 0$ ، که نشان‌دهنده خنثی شدن کامل و از این رو حذف کامل میدان واقطبی‌دگی است.

اکنون اگر صفحات را از طریق اتصال کوتاه توسط یک سیم با مقاومت بسیار کم به یک پتانسیل برسانیم، احتمال رخ دادن موارد زیر وجود دارد: (۱) حالت فروالکتریسته (ترجیحاً پراثری) باقی می‌ماند، و (۲) چگالی بار آزاد σ_f در محل خود باقی می‌ماند و خنثی شدن ادامه می‌یابد. در این حالت میدان الکتریکی داخل ماده فروالکتریک صفر می‌شود، زیرا اختلاف پتانسیلی بین صفحات وجود ندارد و هیچ گونه میدان واقطبی‌دگی موجود نیست زیرا بارهای قطبش سطحی حضور ندارند.

اکنون اگر همین اختلاف پتانسیل را بین صفحات برقرار کنیم، در منبع خارجی هیچ گونه شارش باری نخواهد بود، و در حالت ماده هیچ گونه تغییری ایجاد نخواهد شد. از طرف دیگر اگر یک اختلاف پتانسیل با همین بزرگی اما با علامت مخالف را بین صفحات ایجاد

۳-۵ خلاصه

جواب سازگار دیگر در حالتی روی می دهد که $N\alpha/3\epsilon_0 \geq 1$ است، حتی اگر بخش خارجی میدان \mathbf{E} صفر باشد. یعنی $\mathbf{E}_m = \mathbf{P}/3\epsilon_0$ و $\mathbf{P} = \alpha N \mathbf{E}_m$ مستلزم آن است که $N\alpha/3\epsilon_0 = 1$ باشد. در این حالت اصطلاحاً می گویند که مولکولها بسیار قطبش پذیرند و ماده، مانند مواد فروالکتریک، می تواند در یک میدان خارجی صفر قطبش خود به خود داشته باشد. باریمتانات یک ماده است که فروالکتریسته را از خود نشان می دهد.

وقتی مولکولهای قطبی با گشتاور دوقطبی دائمی p را در یک میدان خارجی \mathbf{E}_m قرار دهیم، این مولکولها یک قطبش پذیری اضافی را که از میدان الکتریکی ناشی می شود نشان می دهند. این میدان دوقطبیهای دائمی را در راستای خود قرار می دهد. این صف بندی با برخورد با مولکولهای دیگر که تمایل به کاتوره ای شدن در این جهت دارند، مخالفت می کند.

این قطبش پذیری سمتی در دمای مطلق T با تابع لانژون داده می شود

$$\langle p_z \rangle = p \left[\coth \eta - \frac{1}{\eta} \right] \quad [21-5]$$

و $\eta = pE_m/kT$ مؤلفه میانگین \mathbf{P} در راستای میدان است. در دمای بالا یا p پایین قانون کوری را به دست می آوریم

$$\langle p_z \rangle \simeq \frac{p^2 E_m}{3kT} \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{p^2}{3kT} \quad [22-5], [24-5]$$

مسائل

۱-۵ یک ماده (استامید) با چگالی 1.0 g/cm^3 و وزن مولکولی ۵۹، دارای یک ثابت دی الکتریک $K = 4$ است. قطبش پذیری مولکولهای منفرد ماده را تعیین کنید.

۲-۵ یک نمونه دی الکتریک قطبی به حجم $V = 1.0 \text{ cm}^3$ که در دمای $T = 300 \text{ K}$ نگه داشته شده است دارای $N = 3.3 \times 10^{22} / \text{cm}^3$ مولکول است، و هر مولکول دارای یک گشتاور دوقطبی خارجی یکنواخت $E_0 = 1.0 \text{ V/cm}$ قرار می دهیم. (الف) میانگین زاویه E_0 و p را تعیین کنید. (ب) گشتاور دوقطبی القاشده و قطبش نمونه دی الکتریک را به دست آورید. (ج) دمایی که در آن، گشتاور دوقطبی دو برابر گشتاور دوقطبی (ب) می شود را تعیین کنید. (د) اگر ماده به حالت اشباع برسد گشتاور دوقطبی نمونه چقدر است؟

مولکولها به دو دسته تقسیم می شوند. مولکولهای قطبی دارای گشتاورهای دوقطبی دائمی اند که از جدایی دائمی بین مراکز بار الکترونی از مراکز بار هسته ای ناشی می شوند. مولکولهای غیرقطبی دارای گشتاور دوقطبی دائمی نیستند، زیرا این مراکز بار جابه جا نمی شوند. وقتی یک اتم را در یک میدان الکتریکی \mathbf{E}_m قرار دهیم، بار الکترونی تغییر وضعیت می دهد یعنی مرکز آن نسبت به بار هسته ای جابه جا می شود، به این ترتیب این جابه جایی باعث می شود که اتم یک گشتاور دوقطبی القاشده \mathbf{p} را که با رابطه

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_m \quad [3-5]$$

داده می شود از خود نشان دهد، که $\alpha = 4\pi\epsilon_0 R^2$ قطبش پذیری اتمی القاشده و $4\pi R^2/3$ حجم بار الکترونی است. کل قطبش پذیری مولکولی را به سادگی می توان با جمع قطبش پذیری اتمهای منفرد در مولکول محاسبه کرد.

اگر یک ماده دی الکتریک همسانگرد با قطبش پذیری مولکولی α را در یک میدان الکتریکی \mathbf{E} قرار دهیم، در این صورت هر مولکول یک دوقطبی القاشده را نشان می دهد. چگالی این دوقطبیها درست برابر است با قطبش ماکروسکوپی محیط. اگر این قطبش \mathbf{P} باشد، در این صورت میدان الکتریکی در محل هر مولکول برابر است با حاصل جمع \mathbf{E} و $\mathbf{P}/3\epsilon_0$ ؛ یعنی

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad [2-5]$$

در واقع \mathbf{E}_m میدانی است که گشتاور دوقطبی را در مولکول القا می کند. یعنی

$$\mathbf{P} = \alpha N \mathbf{E}_m \quad \text{و} \quad \mathbf{p}_m = \alpha \mathbf{E}_m$$

N چگالی عددی مولکولها در ماده است. یک جواب سازگار از این روابط یک پذیرفتاری ثابت را می دهد

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad [44-4]$$

که در آن

$$\chi = \frac{N\alpha/\epsilon_0}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}} \quad [6-5]$$

و (ب) قطبش پذیری مولکولی را به صورت تابعی از R به دست آورید.
 ۶-۵ قطبش پذیری مولکولی یک مولکول دو اتمی از اتمهای متقارن کروی یکسان که قطبش پذیری هر اتم α و فاصله آنها از یکدیگر R است را، در صورتی که میدان خارجی بر محور مولکولی عمود باشد، تعیین کنید (مثال ۳-۵ را ببینید).

۷-۵ یک اتم به شعاع R_0 ، و گشتاور دوقطبی دائمی p_0 را در یک میدان الکتریکی خارجی E_0 قرار می دهیم. قطبش پذیری را به صورت تابعی از $1/T$ رسم کنید. میانگین گشتاور دوقطبی در دماهای بسیار بالا چقدر است؟

۸-۵ عکس ثابت دی الکتریک یک ماده فروالکتریک در نزدیکی دمای کوری در $T = -140^\circ\text{C}$ برابر با 0.035 و در $T = -120^\circ\text{C}$ برابر با 0.105 اندازه گیری شده است. دمای کوری ماده را تعیین کنید. ثابت دی الکتریک را به صورت تابعی از $1/T - T_c$ رسم کنید.
 ۹-۵ ثابت دی الکتریک گاز دی سولفید کربن (CS_2) در 0°C برابر است با 0.029 . آیا این گاز می تواند یک ماده فروالکتریک باشد؟ چگالی مایع CS_2 در 20°C ، 380 بار بزرگتر از چگالی گاز در 0°C است. با فرض آنکه وقتی CS_2 متراکم می شود قطبش پذیری اتمی اصلی تغییر نکند، ثابت دی الکتریک مایع را محاسبه کنید. آیا این مایع می تواند ماده فروالکتریک باشد؟

۱۰-۵ نشان دهید اگر قطعه دی الکتریک در مثال ۴-۴ فروالکتریک باشد، در این صورت $\sigma_p \approx -\sigma_f$.

۳-۵ یک مولکول غیرقطبی به قطبش پذیری α را به فاصله R از یک مولکول با گشتاور دوقطبی دائمی p در نظر بگیرید. (الف) گشتاور دوقطبی القاشده مولکول غیرقطبی را به ازای یک سمتگیری نسبی مفروض تعیین کنید. (ب) انرژی برهم کنش برای این سمتگیری چقدر است؟ (ج) نشان دهید که میانگین انرژی برهم کنش بر روی تمام سمتگیریهایی ممکن برابر است با $U(R) = -\alpha p^2 / 8\pi^2 \epsilon_0^2 R^6$.
 ۴-۵ توده ای از گاز در دمای T شامل دو نوع مولکول با گشتاورهای دوقطبی p_1 و p_2 است. یک زوج از هر نمونه دوقطبی را به فاصله R از یکدیگر در نظر بگیرید. سمتگیری این دوقطبی به دلیل برهم کنش با بقیه مولکولها تغییر می کند به طوری که می توان از تعادل آماری استفاده کرد. (الف) به ازای یک سمتگیری نسبی معین، عبارتی را برای انرژی برهم کنش U بین دو دوقطبی ارائه دهید. (ب) عبارتی را برای احتمال آنکه این دوقطبیها دارای یک سمتگیری متقابل معین باشند، به دست آورید. (ج) با انتخاب $1 \ll U/kT$ ، نشان دهید که میانگین U عبارت است از

$$U(R) = \frac{p_1 p_2}{24 \pi^2 \epsilon_0^2 k T R^6}$$

۵-۵ یک مولکول از دو اتم متقارن کروی ساخته شده است. یک میدان الکتریکی خارجی E_0 را در امتداد خطی که اتمها را به هم وصل می کند بر مولکول اعمال می کنیم. اگر گشتاور دوقطبی مولکول، وقتی فاصله بین اتمها R_0 آنگستروم است، p_0 باشد، (الف) قطبش پذیری هر اتم منزوی

انرژی الکتروستاتیکی

در این فصل به مسئله محاسبه انرژی الکتروستاتیکی توزیعیهای بار مختلف می‌پردازیم. این توزیعیها مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای، توزیعیهای بار پیوسته و رساناهای باردار را دربر می‌گیرند. دو مفهوم بسیار مهم را معرفی می‌کنیم: ضریب پتانسیل و ضریب ظرفیت یا القا. همچنین نشان خواهیم داد که نیروی بین عناصر بار توزیع را می‌توان به‌صورتی مناسب از معلومات انرژی الکتروستاتیکی تعیین کرد.

۱-۶ انرژی الکتروستاتیکی مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای اکنون می‌خواهیم انرژی وابسته به توزیع بار الکتروستاتیکی را محاسبه کنیم. این به معنی کار لازم برای جمع‌آوری این توزیع بار با این شرایط است که بارها با یکدیگر برهم‌کنش نمی‌کنند، یعنی به فاصله دوری از هم قرار دارند. فرض می‌کنیم که در فرایند جمع کردن بارها هیچ گونه انرژی جنبشی به بارها منتقل نمی‌شود، بارها از مکانهای ساکن به مکانهای ساکن دیگر جمع‌آوری می‌شوند. به این ترتیب کار انجام‌شده را به‌صورت افزایش انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی دستگاه تفسیر می‌کنیم و یک انرژی الکتروستاتیکی U را در جمع‌آوری دستگاه به آن می‌دهیم.

ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که دارای تعدادی بار نقطه‌ای هستیم. ابتدا بار q_1 را در محل \mathbf{r}_1 قرار می‌دهیم. این امر نیازی به انجام کار ندارد زیرا q_1 تنها بار در فضاست که در نظر می‌گیریم. پس از آن بار q_2 را در محل \mathbf{r}_2 به فاصله $r_{12} \equiv |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ از q_1 قرار می‌دهیم. این

مستلزم انجام کار به اندازه $q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 r_{12}$ است، $[\Phi_1(2)q_2]$ است، $\Phi_1(2) = q_1 / 4\pi\epsilon_0 r_{12}$ عبارت است از پتانسیل ناشی از بار q_1 در محل بار q_2 . سپس بار q_3 را در محل \mathbf{r}_3 قرار می‌دهیم. اکنون در مقابل میدانهای بار q_1 و q_2 کار انجام می‌دهیم، و از این رو باید به اندازه

$$[\Phi_1(3) + \Phi_2(3)]q_3 = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$$

کار انجام دهیم. با ادامه این فرایند می‌فهمیم که وقتی بار z ام را می‌آوریم، $z-1$ بار در محل‌های خود از قبل مستقر هستند، بنابراین کار انجام‌شده در این مرحله برابر است با

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{r_{1j}} + \frac{q_2}{r_{2j}} + \dots + \frac{q_{j-1}}{r_{(j-1)j}} \right] q_j$$

از این رو در نمادگذاری جمع می‌توان سری را که برای U نشان داده شده است به‌صورت

$$U = \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{q_i}{r_{ij}} \right) q_j = \sum_{j=1}^N \sum_{i < j}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (1-6)$$

که در آن N تعداد کل بارهای نقطه‌ای است، نمایش داد. تعداد جمله در بسط وجود دارد. جمع بالا بر روی تمام زوجهای ممکن N بار است. با توجه به اینکه $r_{ji} = r_{ij}$ ، می‌توان

علامت انتگرال صرفاً نشان‌دهنده حاصل‌جمعی است که باید بر روی تمام عناصر بار انجام شود. مثلاً اگر $dq = \rho(r)dv$ می‌نویسیم

$$U = \frac{1}{4} \int_V \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})dv \quad (5-6)$$

که در آن V حجم ناحیه‌ای است که در آنجا $\rho \neq 0$ ، یا در واقع هر حجمی است که تمام بار جمع‌شده را در برمی‌گیرد. اگر توزیع باری پیوسته، که با چگالیهای بار حجمی، سطحی و خطی (ρ ، σ و λ) و نیز بارهای نقطه‌ای توصیف می‌شود، داشته باشیم، کل کار لازم برای جمع‌آوری این توزیع بار با

$$U = \frac{1}{4} \int_V \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})dv + \frac{1}{4} \int_S \sigma(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})da + \frac{1}{4} \int_C \lambda(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})dl + \frac{1}{4} \sum_j q_j \Phi(\mathbf{r}_j) \quad (6-6)$$

داده می‌شود. سؤال مربوط به انرژی لازم برای جمع‌آوری یک بار نقطه‌ای مجزا را بدون پاسخ می‌گذاریم. یا فرض می‌کنیم این بارها دست نخورده‌اند، و بنابراین به جمع‌آوری آنها نیازی نیست، یا فرض می‌کنیم که این بارها واقعاً نقطه‌ای نیستند.

مثال ۱-۶ کره باردار یکنواخت

یک کره باردار یکنواخت با بار Q را در نظر بگیرید. با مراجعه به مثال ۱۲-۲ (ب) می‌بینیم که پتانسیل درون یک کره باردار یکنواخت به شعاع R ، با رابطه زیر داده می‌شود

$$\Phi(r < R) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4} (3R^2 - r^2) \quad (52-2)$$

که در آن ρ_0 چگالی بار یکنواخت است. بنابراین با انتگرال‌گیری از معادله (۵-۶) روی حجم کره به دست می‌آوریم

$$U = \frac{1}{4} \int \Phi \rho dv = \rho_0 \frac{4\pi}{4} \int_{r=0}^R r^2 dr \left[\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) \right] = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (7-6)$$

که در آن $Q \equiv (4/3\pi)R^3\rho_0$ کل بار کره است.

با این فرض که کره را می‌توان با قرار دادن لایه‌های باردار بسیار نازک بر روی سطح خارجی کره بنا کرد، این انرژی را مستقیماً [شبهه به فرایندی که منجر به معادله (۱-۶) شد] نیز می‌توان محاسبه کرد. بار کره وقتی شعاع آن r است، برابر است با $q = (4/3)\pi r^3\rho_0$ ، و پتانسیل

بسط را برحسب $N(N-1)$ جمله به صورت

$$U = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \sum_{i \neq j=1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (2-6)$$

نیز نوشت، که در آن هر جمله از جمع دوگانه اولیه را، به سادگی به دو جمله تقسیم و جملات را دوباره مرتب کرده‌ایم. دقت کنید که جملات با $i = j$ را کنار گذاشته‌ایم، زیرا آنها تأثیر هر بار بر خودش را نشان می‌دهند.

انرژی الکتروستاتیکی U را می‌توان به صورت دیگری برحسب پتانسیل الکتروستاتیکی نوشت. پتانسیل در محل بار j ، $\Phi(j)$ که از تمام بارهای دیگر ناشی می‌شود، با رابطه زیر

$$\Phi(j) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j=1}^N \frac{q_i}{r_{ij}} = \sum_{i \neq j=1}^N \Phi_i(j)$$

داده می‌شود به طوری که

$$U = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N q_j \Phi(j) \quad (3-6)$$

درک سه نکته در این مورد اهمیت دارد:

۱. $\Phi(j)$ پتانسیل در محل q_j است که از بقیه بارها ناشی می‌شود.
۲. ضریب $1/2$ وارد صحنه می‌شود، زیرا از $\Phi(j)$ هایی که از بارهای دیگر دستگاه ناشی می‌شوند استفاده می‌کنیم، نه فقط از بارهایی که برحسب تصادف به هنگام آوردن یک بار اضافی از بینهایت، در دستگاه حضور دارند.
۳. وقتی با بارهای نقطه‌ای سروکار داریم، همواره فرض می‌کنیم که $r_{ij} \neq 0$ (کار انجام شده نمی‌تواند بینهایت باشد).

۲-۶ انرژی الکتروستاتیکی یک توزیع بار پیوسته

عبارت قبلی برای U را می‌توان به یک توزیع بار پیوسته تعمیم داد. صرفاً از شناساییهای

$$\sum \rightarrow \int, \quad \Phi(j) \rightarrow \Phi(r), \quad q_j \rightarrow dq(\mathbf{r})(\mathbf{r} \text{ واقع در } \mathbf{r})$$

استفاده می‌کنیم. در این صورت عبارت نمادین کلی برای U در معادله (۳-۶) به صورت زیر می‌شود

$$U = \frac{1}{4} \int \Phi(\mathbf{r})dq(\mathbf{r}) \quad (4-6)$$

N رسانا باشد، از معادله (۴-۶) یا معادله (۶-۶) برای انرژی دستگاه داریم

$$U = \frac{1}{4} \int_S \sigma \Phi da = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \Phi_j \oint_{S_j} \sigma da = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \Phi_j Q_j \quad (۸-۶)$$

که در آن σ چگالی بار سطحی است، و انتگرال سطحی را به مساحت‌های مجزا از سطوح رسانای مختلف تقسیم کرده‌ایم.

اکنون می‌خواهیم دو مفهوم بسیار مهم را معرفی کنیم. ضرایب پتانسیل و ضرایب خازن یا القا. این ضرایب، پتانسیل‌های یک دستگاه از رساناها را به بارهای مختلف آنها مربوط می‌کند. برای یک دستگاه از N رسانا، می‌نویسیم

$$\Phi_j = \sum_{k=1}^N P_{jk} Q_k \quad (۹-۶)$$

و

$$Q_j = \sum_{k=1}^N C_{jk} \Phi_k \quad (۱۰-۶)$$

P_{jk} ، ضرایب پتانسیل، C_{ii} ضرایب خازن، C_{jk} ($j \neq k$) ضرایب القا، و Φ_i و Q_i پتانسیل و بار رسانای i ام است. باید توجه کنیم که این ضرایب مستقل از پتانسیلها و بارهای رساناها هستند. به عبارت دیگر، پتانسیلها به صورت خطی به بارها مربوط‌اند، ضرایب هندسی P_{ij} و C_{ij} این ارتباط را بیان می‌کنند. حقیقت این گفته‌ها را می‌توان با استفاده از اصل برهم‌نهی (خطی بودن معادلات الکتروستاتیکی) و اصل یکتایی تحقیق کرد.

یک رسانای منزوی تنها را که دارای کل بار Q بر سطح آن است در نظر بگیرید. پتانسیل رسانا نسبت به یک نقطه یا یک ناحیه هم‌پتانسیل در فضا که معمولاً در بینهایت انتخاب می‌شود، با Φ داده می‌شود. اگر چگالی بار را همه‌جا بر روی سطح رسانا به اندازه ضریب α افزایش دهیم، آن‌گاه خطی بودن معادلات الکتروستاتیکی نشان می‌دهد که پتانسیل و میدان الکتروستاتیکی نیز با همان ضریب افزایش می‌یابد. اما در افزودن بار به اندازه ضریب α ، کل بار Q را به اندازه ضریب α افزایش داده‌ایم. چون یک میدان الکتروستاتیکی مفروض، بار روی رسانا(ها) را به صورت منحصر به فردی توصیف می‌کند و بالعکس، یک پتانسیل ($\alpha\Phi$) یک بار کل (αQ) را بر روی رسانا ضروری می‌داند. این ثابت می‌کند که پتانسیل را می‌توان همه‌جا برحسب بار Q ی رسانا به صورت

$$\Phi(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r})Q \quad (۱۱-۶)$$

در سطح کره مساوی با $q/4\pi\epsilon_0 r$ خواهد بود [معادله (۲-۵۱)] در مثال ۱۲-۲ (ب). برای افزودن یک پوسته کروی بار $dq = 4\pi r^2 dr \rho_0$ به سطح کره، مقداری کار مساوی با پتانسیل در پوسته ضربدر بار پوسته یا

$$dU = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \times (4\pi r^2 \rho_0 dr) = \frac{4\pi \rho_0^2 r^3}{3\epsilon_0} dr$$

را باید انجام داد. از این رو برای ساختن کره به شعاع R ، کار زیر

$$U = \int_{r=0}^R dU = \int_{r=0}^R \frac{\rho_0^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(4\pi)^2}{3} r^2 dr = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

که درست مقداری است که در معادله (۷-۶) محاسبه شد، مورد نیاز است. ■

مثال ۲-۶ شعاع کلاسیک یک الکترون

کاربردی از نتیجه مثال ۱-۶ به دست آوردن شعاع کلاسیک یک الکترون است. این سؤال را مطرح می‌کنیم که چه مقدار انرژی صرف ساختن یک الکترون می‌شود. اگر الکترون یک بار نقطه‌ای نیست اما یک کره باردار الکتربیکی یکنواخت است، برای جمع کردن این کره بار به صورت یک حجم کوچک الکترون، مقدار معینی انرژی لازم است. فرض می‌کنیم این انرژی توسط جرم صحیح الکترون که در واحد انرژی ($E = mc^2$)، تقریباً $0.5 \times 10^6 \text{ eV}$ (الکترون‌ولت) یا $1.7 \times 10^{-13} \text{ J}$ است، داده می‌شود. در این صورت اگر الکترون یک کره باردار یکنواخت به شعاع R باشد، $U = mc^2 = (3/5)e^2/4\pi\epsilon_0 R$ ، و می‌توانیم این معادله را برای R حل کنیم و به دست آوریم

$$R = (3/5)e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2 = 0.6 \times 10^{-15} \text{ m} \equiv 0.6 \text{ fm}$$

که fm معرف فتمومتر (یا فرمی) یعنی 10^{-15} متر است. این اندازه، 0.6 فرمی، از مرتبه ابعاد هسته‌ای است که معقول به نظر می‌رسد. کمیت R را شعاع کلاسیک الکترون می‌نامیم. متأسفانه، اکنون می‌دانیم که شعاع واقعی الکترون بسیار کوچکتر از این است، به طوری که فرضهای ما معتبر نیستند. ■

۳-۶ انرژی الکتروستاتیکی رساناها؛ ضرایب پتانسیل و خازن

اکنون که دارای یک جمله عمومی برای U ، یعنی کار لازم جهت جمع‌آوری یک توزیع بار هستیم، حالت خاصی را که در آن کل بار بر روی رساناها قرار می‌گیرند، در نظر می‌گیریم. اگر $\{Q_j, \Phi_j\}$ نشان‌دهنده $\{\text{کل بار، پتانسیل}\}$ رسانای i ام یک دستگاه متشکل از

اکنون می‌توان انرژی الکتریکی N رسانا را برحسب P_{ij} یا C_{ij} نوشت. قرار دادن معادله (۹-۶) یا (۱۰-۶) در معادله (۸-۶) عبارتهای زیر را برای U می‌دهد

$$U = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N P_{jk} Q_j Q_k \quad (۱۴-۶)$$

$$U = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N C_{jk} \Phi_j \Phi_k \quad (۱۵-۶)$$

اکنون چند ویژگی P_{ij} را در نظر می‌گیریم. می‌توان از انرژی که با معادله (۱۴-۶) داده شده است استفاده کرد و نشان داد که عناصر "غیر قطری" ضرایب پتانسیل، یکسان هستند

$$P_{ij} = P_{ji} \quad (۱۶-۶)$$

افزایش در انرژی الکتروستاتیکی یک دستگاه از N رسانای باردار را وقتی یک بار بینهایت کوچک dQ_i به رسانای i ام افزوده می‌شود در نظر بگیرد. به این ترتیب فقط اگر بار Q_i تغییر کند، تغییر در U با رابطه

$$dU = \frac{\partial U}{\partial Q_i} dQ_i$$

داده می‌شود. مشتق گرفتن از معادله (۱۴-۶) به دست می‌دهد

$$dU = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_j \sum_k P_{jk} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial Q_i} Q_k + \frac{\partial Q_k}{\partial Q_i} Q_j \right) dQ_i \quad (۱۷-۶)$$

چون

$$\frac{\partial Q_j}{\partial Q_i} = \frac{\partial Q_k}{\partial Q_i} = \begin{cases} = 0 & j \neq i \neq k \\ = 1 & i = j = k \end{cases}$$

در این صورت حاصل جمع بر روی j در عبارت اول و بر روی k در عبارت دوم dU در معادله (۱۷-۶)، تنها جملاتی را شامل می‌شود که به ترتیب در آنها $i = j = k$ باشد. بدین ترتیب به دست می‌آوریم

$$dU = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\sum_k P_{ik} Q_k dQ_i + \sum_j P_{ji} Q_j dQ_i \right) \quad (۱۸-۶)$$

با تعویض k با j در جمع اول، معادله (۱۸-۶) را می‌توان به صورت

$$dU = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{j=1}^N (P_{ij} + P_{ji}) Q_j dQ_i \quad (۱۹-۶)$$

نوشت.

نوشت که در آن $P(\mathbf{r})$ تنها می‌تواند به شکل رسانا نسبت به نقطه $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ بستگی داشته باشد، یعنی $P(\mathbf{r})$ یک ثابت هندسی است که از مقادیر Q یا Φ مستقل است. بخصوص، پتانسیل Φ در رسانا با $\Phi = PQ$ داده می‌شود که در آن P مقدار محاسبه شده در رساناست.

اکنون خطی بودن معادله (۹-۶) را در مورد دو رسانا ثابت می‌کنیم. بر روی سطح رساناها که پتانسیلها با شاخصهای Φ_1 و Φ_2 مشخص می‌شوند، از معادله (۹-۶) داریم

$$\Phi_1 = P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 \quad (۱۲-۶)$$

$$\Phi_2 = P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 \quad (۱۳-۶)$$

اثبات در سه مرحله انجام می‌شود:

۱. حالتی را در نظر بگیرید که در آن رسانای ۱ به تنهایی دارای یک بار مثلاً Q_1 است. در این صورت با استفاده از یکتایی [معادله (۱۱-۶)]،

$$\Phi'_1 = P_{11}Q_1 \quad \text{و} \quad \Phi'_2 = P_{21}Q_1$$

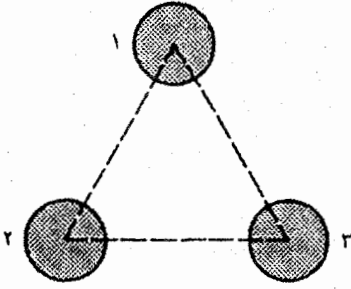
پتانسیلها در هر نقطه در فضا به وسیله بارهای خالص بر روی رساناها به طور کامل مشخص می‌شوند، و درست مانند مورد یک رسانای تنها، خطی بودن تأمین می‌شود. بخصوص این موضوع برای پتانسیلهای Φ'_1 و Φ'_2 خود رساناها صحیح است. P ها فقط به فرم و شکل هندسی رساناها بستگی دارند. اگر چگالی بار و از این رو Q به اندازه ضریب α افزایش یابد، پتانسیلها به طور مشابه افزایش خواهند یافت. ۲. به همین ترتیب، حالتی را در نظر بگیرید که در آن $Q_1 = 0$ ،

اما بار Q_2 به رسانای ۲ داده می‌شود. داریم

$$\Phi''_1 = P_{12}Q_2 \quad \text{و} \quad \Phi''_2 = P_{22}Q_2$$

۳. اکنون با در نظر گرفتن برهم‌نهی، می‌دانیم که حاصل جمع $\Phi = \Phi' + \Phi''$ از دو جواب بالا، جوابی را می‌دهد که Q_1 و Q_2 را به صورت همزمان مشخص می‌کند. جواب با معادلات (۱۲-۶) و (۱۳-۶) یکسان است.

این نتیجه را می‌توان به سادگی به حالتی که N رسانا حضور دارند، یعنی معادله (۹-۶)، تعمیم داد. انتظار می‌رود که معادله (۱۰-۶) نیز خطی باشد، زیرا با حل معادله (۹-۶) برای بار Q_j به صورت تابعی از پتانسیل رسانای مختلف می‌توان به این معادله رسید.



شکل ۱-۶ سه کره رسانای یکسان واقع در رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع.

را در نظر بگیرید که در ابتدا منزوی و بدون بار هستند و مراکز آنها روی سه رأس یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته است. اکنون رسانای ۱ تا پتانسیل V باردار می شود و به صورت منزوی قرار می گیرد، بار روی آن Q_1 است. پس از آن رسانای ۲ تا پتانسیل V باردار می شود و به صورت منزوی قرار می گیرد و مشخص می شود که بار روی آن Q_2 است. نهایتاً رسانای ۳ تا پتانسیل V باردار شده و به صورت منزوی در می آید.

اکنون می توان نشان داد که اطلاعات داده شده درباره رساناهای ۱ و ۲ کافی است تا اطلاعاتی را درباره وضعیت رسانای ۳، مثل کل بار روی آن و تعیین اندازه و فاصله بین کره ها، ارائه دهد.

تمام ضرایب پتانسیل P_{ij} ، $(i, j = 1, 2, 3)$ مجزا نیستند، چون کره ها یکسان هستند در این صورت $P_{11} = P_{22} = P_{33}$ ؛ و به دلیل تقارن مکان کره ها، $P_{12} = P_{13} = P_{23}$. به علاوه، با استفاده از ویژگی $P_{ij} = P_{ji}$ ، معادله (۱۶-۶)، فقط دو ضریب مجزا وجود دارد: P_{11} و P_{12} .

پتانسیل رساناها با معادله (۹-۶) به بار آنها مربوط می شود. در مرحله اول، بار روی رساناهای ۲ و ۳ صفر است، و بنابراین پتانسیل روی رسانای ۱ به سادگی با

$$V = P_{11}Q_1 \quad (22-6)$$

به بار مربوط می شود. در مرحله دوم، بار روی رساناهای ۱، ۲ و ۳ عبارتند از Q_1 ، Q_2 و صفر. پتانسیل بر روی رسانای ۲ مساوی با V منظور می شود. از این رو پتانسیل بر روی رسانای ۲ به صورت زیر به بار مربوط می شود

$$V = P_{11}Q_2 + P_{12}Q_1 \quad (23-6)$$

نهایتاً، پتانسیل مفروض V از رسانای ۳ با رابطه

$$V = P_{11}Q_3 + P_{12}(Q_1 + Q_2) \quad (24-6)$$

با این همه، بنا بر تعریف پتانسیل، عبارت دیگر برای dU به سادگی برابر است با $\Phi_i dQ_i$. بنابراین

$$dU = \Phi_i dQ_i = \sum_{j=1}^N P_{ij} Q_j dQ_i \quad (20-6)$$

با مقایسه معادلات (۱۹-۶) و (۲۰-۶)، مشاهده می کنیم که تساوی فقط وقتی برقرار است که

$$P_{ij} = P_{ji} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\epsilon} (P_{ij} + P_{ji}) = P_{ij}$$

ویژگی دیگر P_{ij} آن است که $P_{ii} > 0$. این ویژگی یک موضوع بدیهی را می رساند که یک بار مثبت یک پتانسیل مثبت تولید می کند. نهایتاً نشان می دهیم که به ازای هر j ، ضریب قطری P_{ii} بزرگتر یا مساوی با ضریب غیرقطری P_{ij} است، یعنی

$$P_{ii} \geq P_{ij} \quad (21-6)$$

یک دستگاه متشکل از دو رسانا را در نظر بگیرید. رسانای ۱ بار مثبت Q_1 را حمل می کند و رسانای ۲ خنثی است. دو پیکربندی متمایز دستگاه وجود دارد. در یک پیکربندی، رسانای ۱ رسانای ۲ را احاطه می کند؛ در پیکربندی دوم، رساناها خارج از یکدیگر قرار دارند. در پیکربندی اول، پتانسیل رسانای ۲، Φ_2 ، با پتانسیل رسانای ۱، Φ_1 ، برابر است. با استفاده از (۹-۶) می فهمیم که $\Phi_1 = P_{11}Q_1$ و $\Phi_2 = P_{12}Q_1$ و از این رو $P_{11} = P_{12}$. از طرف دیگر در پیکربندی دوم، $\Phi_1 > \Phi_2$. این را می توان تشخیص داد، زیرا تمام خطوط نیرویی که از رسانای دوم سرچشمه می گیرند، به عنوان پیامدی از این واقعیت که رسانای ۲ خنثی است، باید به رسانای ۲ ختم شوند. به این ترتیب، این پیکربندی به دست می دهد $P_{11} > P_{12}$. از این رو هر دو پیکربندی ایجاب می کنند که $P_{11} \geq P_{12}$. این نتیجه را به سادگی می توان به حالتی که N رسانا دخیل هستند، عمومیت داد، که بدین گونه معادله (۲۱-۶) اثبات می شود. چون ضرایب C_{ij} از طریق معادلات (۹-۶) و (۱۰-۶) به ضرایب P_{ij} مربوط می شوند، در این صورت خصوصیات این ضرایب از خصوصیات P_{ij} استنتاج می شوند. در واقع می توان نشان داد که

$$C_{ij} \leq 0 \quad \text{و} \quad C_{ii} > 0, \quad C_{ij} = C_{ji} \quad i \neq j$$

مثال ۳-۶ ضرایب پتانسیل - سه کره یکسان

این مثال چگونگی استفاده از ضرایب پتانسیل برای حل معادلات الکتروستاتیکی را نشان می دهد. مطابق شکل ۱-۶ سه رسانای یکسان

مشاهده می‌شود که $P_{12} = P_{22}$ و به این ترتیب برای توصیف این دستگاه تنها دو ضریب پتانسیل مجزا مورد نیاز است. یکسان بودن P_{12} و P_{22} نتیجه مستقیم این واقعیت است که یکی از کره‌ها توسط کره دیگر احاطه شده است. یک حالت خاص از این شکل هندسی هنگامی است که پوسته خارجی بسیار نازک باشد، به طوری که $R_2 \simeq R_1$ ؛ در این حالت

$$\blacksquare \quad P_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1}, P_{22} = P_{12} = P_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

۴-۶ خازنها

در این بخش پیکربندی خاصی از رساناها را در نظر می‌گیریم که در آن بار روی یک زوج از رساناها $\pm Q_i$ است و بنابراین کل بار زوج رسانا صفر است. این زوج رسانا که خازن نامیده می‌شود یک اثر حفاظی نشان می‌دهد. در این اثر حفاظی، تأثیر دیگر رساناها بر روی پتانسیل هر رسانای این خازن به یک اندازه است و از این رو تأثیری بر اختلاف پتانسیل این زوج رسانا نمی‌گذارند.

۱-۴-۶ ظرفیت یک رسانای منزوی

ابتدا یک رسانای منزوی منفرد را در نظر می‌گیریم. این چنین رسانا را می‌توان به صورت بخشی از یک خازن در نظر گرفت که رسانای دیگر آن یک شعاع دارد که تا بینهایت گسترده است. به عبارت دیگر، ظرفیت نسبت به "زمین" - یعنی نسبت به دنیای خارج وجود دارد. از معادله (۱۱-۶)، پتانسیل سطح یک رسانای منزوی برابر است با $\Phi = PQ$. جواب آن برای Q برحسب Φ به دست می‌آید

$$Q = P^{-1}\Phi \equiv C\Phi \quad (27-6)$$

ضریب هندسی C ظرفیت رسانا نامیده می‌شود. این کمیت به وضوح مقدار کل باری را به دست می‌دهد که یک رسانای منزوی در پتانسیل یک ولت حمل می‌کند. این کمیت "گنجایش" یک رسانا برای نگهداری بار را اندازه می‌گیرد.

برای کاربرد معادله (۲۷-۶) ظرفیت یک کره رسانای منزوی منفرد را تعیین می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم کره در خلأ واقع است، و سپس حالتی را در نظر می‌گیریم که کره توسط یک پوسته دی‌الکتریک احاطه شده باشد. در حالت اول به سادگی می‌بینیم که تابع پتانسیل Φ توسط

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad r \geq R$$

به بارها مربوط می‌شود، که در آن Q_2 بار بر روی رسانای ۳ است و حالا یک کمیت مجهول است.

اکنون معادلات (۲۲-۶) تا (۲۴-۶) را برای P_{11}, P_{12}, P_{22} و Q_2 حل می‌کنیم. از معادله (۲۲-۶) داریم $P_{11} = V/Q_1$ که با جایگذاری آن در معادله (۲۳-۶) به دست می‌آوریم

$$P_{12} = \frac{V}{Q_1} \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1} \right)$$

قراردادن P_{12} و P_{11} در معادله (۲۴-۶) به دست می‌دهد $Q_2 = Q_1^2/Q_1$. تعیین اندازه و فاصله بین کره‌ها را به عنوان یک تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

مثال ۴-۶ ضرایب پتانسیل کره‌های هم‌مرکز

این مثال چگونگی تعیین ضرایب پتانسیل یک دستگاه معین از رساناها را با شکل هندسی مشخص نشان می‌دهد. خازن کروی که در مثال ۲-۱۲ (الف) بحث شد و در شکل ۲-۲۰ نشان داده شد را در نظر بگیرید. پتانسیل بین کره‌ها از رابطه $\Phi = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ (که در آن میدان الکتریکی از قانون گاوس تعیین شد)، با نتیجه

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_1 + Q_2}{R_2} - \frac{Q_1}{R_2} \right) \quad R_1 < r < R_2$$

مشخص شد. پتانسیل کره داخلی، Φ_1 را به آسانی می‌توان با انتخاب $r = R_1$ از این عبارت به دست آورد؛ از این رو

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2} \right) Q_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2} \quad (25-6)$$

به همین ترتیب پتانسیل Φ_2 در کره خارجی را می‌توان با انتخاب $r = R_2$ تعیین کرد، یعنی

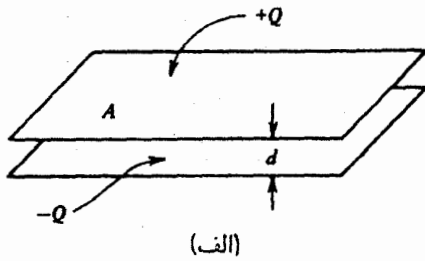
$$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2} \quad (26-6)$$

مقایسه معادلات (۲۵-۶) و (۲۶-۶) با معادله‌ای که ضرایب پتانسیل را تعریف می‌کند یعنی معادله (۹-۶)، به دست می‌دهد

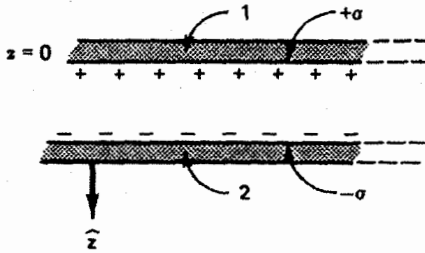
$$P_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$P_{12} = P_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2}$$

$$P_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2}$$



(الف)



(ب)

شکل ۲-۶ محاسبه ظرفیت یک خازن با صفحات موازی. (الف) شکل هندسی خازن. (ب) یک نمای جانبی که توزیع بار را نشان می‌دهد. نوشته می‌شود که در آن

$$C = (P_{11} - P_{12} - P_{21} + P_{22})^{-1} \quad \text{و} \quad \Phi_{12} = \Phi_1 - \Phi_2$$

یک ضریب هندسی ذاتی مثبت به نام ظرفیت دستگاه دو رساناست. وسیله‌ای با دو رسانای منزوی را که از آن می‌توان برای ذخیره بار استفاده کرد خازن می‌نامیم (سابق این وسیله را "چگالنده" می‌نامیدند). بهتر است این طور تصور کنیم که خازن با انتقال بار بین رساناهایی که در ابتدا خنثی هستند باردار می‌شود.

همان گونه که در شکل ۲-۶ (الف) نشان داده شده است، ظرفیت دو رسانای یکسان موازی به مساحت A را که به فاصله d از یکدیگر قرار گرفته‌اند، پیدا خواهیم کرد. صفحات را به اندازه کافی بزرگ تصور می‌کنیم به طوری که از تأثیرات لبه‌ای به طور معقولی بتوان چشم‌پوشی کرد، و بنابراین از نظر گسترش عرضی صفحات را بسیار بزرگ در نظر خواهیم گرفت (مثال ۴-۴).

فرض کنید به هر صفحه یک بار به بزرگی Q ، اما با علامت مخالف داده شود. با تقارن مسئله، توزیع بار بر روی هر صفحه یکسان است، و از این رو میدان الکتریکی، تنها در ناحیه بین صفحات وجود دارد (چرا؟). به علاوه این میدان الکتریکی تقریباً ثابت و بر صفحات عمود است، و توسط فرمول $E = \sigma / \epsilon_0$ که در آن $\sigma = Q/A$ چگالی بار سطحی است، به چگالی بار سطحی بر روی سطوح داخلی صفحات مربوط می‌شود. این نتیجه را می‌توان با استفاده از قانون

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad r \leq R$$

داده می‌شود. از معادله دوم و از تعریف ظرفیت که به وسیله معادله (۲۷-۶) داده می‌شود، می‌بینیم که

$$C = 2\pi\epsilon_0 R \quad (28-6)$$

وقتی که به وسیله یک پوسته دی‌الکتریک به شعاع R_2 و ثابت دی‌الکتریک K مطابق آنچه که قبلاً در شکل ۷-۴ دیدیم، احاطه شود، پتانسیل که نسبت به یک مرجع در بینهایت با معادله (۵۴-۴) داده می‌شود. در این صورت می‌توان ظرفیت را به سادگی تعیین کرد

$$C^{-1} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 R_2} \left(1 - \frac{1}{K}\right) + \frac{1}{2\pi\epsilon_0 R_1} \quad (29-6)$$

که R_1 شعاع کره و $K = \epsilon / \epsilon_0$ است.

واحد ظرفیت در دستگاه SI کولن بر ولت است، که آن را فاراد می‌نامند. چون $10^{-9} \times (1/9) \approx 1.1 \times 10^{-10}$ فاراد است. زمین خود اکثر رساناهای منزوی معمولی از مرتبه 10^{-1} فاراد است. به عنوان یک رسانای منزوی، دارای یک ظرفیت "فقط" در حدود 10^{-2} فاراد است. اکثر وسایل آزمایشگاهی دارای ظرفیتهایی از مرتبه 10^{-9} یا کمتر هستند. از این رو بیشتر ظرفیتهایی که با آنها مواجه هستیم، به صورت مناسبی برحسب پیکوفاراد یا (10^{-12}F) یا نانوفاراد یا (10^{-9}F) یا میکروفاراد (10^{-6}F) بیان می‌شوند.

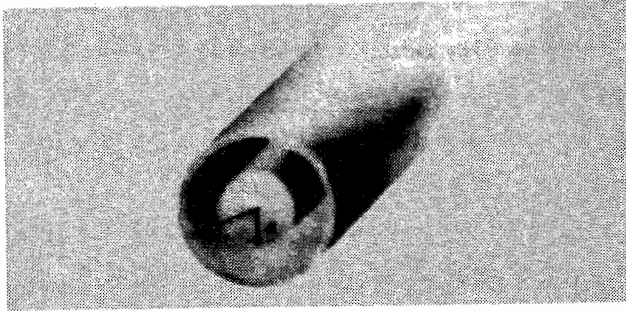
۲-۴-۶ خازن متشکل از دو رسانا

بعد از دستگاه متشکل از یک رسانای منزوی، ساده‌ترین خازن بعدی دستگاه منزوی شامل دو رساناست. فرض کنید $(Q_i$ و $\Phi_i)$ پتانسیل و بار روی رسانای i ام باشد، که در آن $i = 1, 2$. یک حالت ویژه از روابط قبلی حالتی است که در آن $Q_1 = -Q_2$ ، به طوری که کل بار دستگاه دو رسانا صفر است. برای این دستگاه

$$\Phi_1 - \Phi_2 = (P_{11} - P_{12} - P_{21} + P_{22})Q_1 \quad (30-6)$$

به این ترتیب اختلاف پتانسیل بین رساناها با بار روی (هر یک) از رساناها متناسب است. این رابطه به شکل مناسبتری به صورت

$$Q_1 = C\Phi_{12} \quad (31-6)$$



شکل ۳-۶ ظرفیت استوانه‌ای هم‌محور.

داخلی رسانای خارجی وجود دارد. میدان الکتریکی به‌ازای $\rho > b$ صفر است، زیرا فرض کردیم که کل بار بر روی خط صفر است. اکنون با دانستن E اختلاف پتانسیل $\Phi(a) - \Phi(b)$ را می‌توان پیدا کرد. داریم

$$\begin{aligned} \Phi(a) - \Phi(b) &= \int_{\rho=a}^{\rho=b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b E d\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (۳۵-۶)$$

در نتیجه، از تعریف خازن بر طول واحد مفروض در معادله (۳۴-۶) و از معادله (۳۵-۶) داریم

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} = \frac{10^{-9}}{18} \frac{1}{\ln(b/a)} \text{ F/m} \quad (۳۶-۶)$$

مثال ۶-۶ رساناهای کروی هم‌مرکز

یک خازن کروی هم‌مرکز با شعاعهای داخلی و خارجی R_1 و R_2 که بار روی آنها به ترتیب Q و $-Q$ است در نظر بگیرید. این پیکربندی قبلاً در مثال ۲-۱۲ (الف) بررسی شد، در آنجا نشان دادیم که پتانسیل در ناحیه $R_1 \leq r \leq R_2$ با

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

داده می‌شود. از این رو نتیجه می‌گیریم که

$$\Phi(R_1) - \Phi(R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

بنابراین

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (۳۷-۶)$$

گاوس (مثال ۴-۴) یا با استفاده از انتگرال‌گیری مستقیم [معادله‌های (۲۷-۴) و (۲۸-۴) در مثال ۴-۱] به‌دست آورد.

برای پیدا کردن اختلاف پتانسیل بین صفحات، انتگرال خطی $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ را محاسبه می‌کنیم. با استفاده از نمادگذاری شکل ۲-۶ (ب) و جایگذاری برای $E = \sigma/\epsilon_0$ ، به‌دست می‌آوریم

$$\Phi_{12} \equiv \Phi_1 - \Phi_2 = - \int_r^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_r^a \frac{\sigma}{\epsilon_0} dz = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d \quad (۳۲-۶)$$

با توجه به تعریف ما از خازن در معادله (۳۱-۶)، ظرفیت دو صفحه عبارت است از

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (۳۳-۶)$$

باید توجه کنیم که اگر خازن با یک ماده‌ی الکتریک با گذردهی ϵ پر می‌شد، ظرفیت آن با $\epsilon A/d$ مساوی می‌شد (این را نشان دهید). اغلب ظرفیت در واحد سطح و واحد طول رساناها، C_l و C_s مورد استفاده قرار می‌گیرند. این کمیتها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$C_l \equiv \frac{\lambda}{\Phi_{12}} \quad C_s \equiv \frac{\sigma}{\Phi_{12}} \quad (۳۴-۶)$$

λ عبارت است از چگالی بار بر واحد طول.

این عبارتها برای خازن، برای صفحات واقعی با اندازه معین دارای خطا هستند. ظرفیت برای این حالت اخیر افزایش می‌یابد زیرا چگالی بار در نزدیکی لبه‌های صفحات زیاد می‌شود. برای یک خازن مسطح با صفحات دایره‌ای شکل به شعاع R ، وقتی نسبت d/R مساوی با $1/20$ است، ظرفیت تقریباً به اندازه ۱۰ درصد افزایش می‌یابد.

مثال ۵-۶ ظرفیت یک خازن استوانه‌ای شکل

فرض کنید مطابق شکل ۳-۶ یک خط هم‌محور بلند داشته باشیم. شعاع رسانای داخلی a و شعاع رسانای خارجی b است. در این شکل هندسی اگر از نقاط پایانی خط دور باشیم، میدان از محور خط شعاعی خواهد بود. با استفاده از قانون گاوس درمی‌یابیم که میدان الکتریکی با^۱

$$\mathbf{E} = 0 \quad \rho > b \text{ و } \rho < a$$

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho} \hat{\rho} \quad a < \rho < b$$

داده می‌شود که در آن λ نشان‌دهنده بار بر واحد طول (برحسب متر) روی رسانای داخلی است. باری مساوی و مخالف بر روی سطح

۱. مؤلفه‌های مماس بر سطح یعنی E_θ و E_ϕ باید صفر باشند، زیرا این مؤلفه‌ها بر روی سطح صفرند و در غیر این صورت ثابت‌اند.

و از این رو با این مقدار m ، پتانسیل استوانه از معادله (۳-۱۳۱) به دست می‌آید

$$\Phi_c = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln m = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left\{ \frac{x_0}{R} + \left[\left(\frac{x_0}{R} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cosh^{-1} \frac{x_0}{R} \quad (۳۹-۶)$$

در این صورت ظرفیت دستگاه بر واحد طول با

$$C = \frac{\lambda}{\Phi_c} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\cosh^{-1}(x_0/R)} \quad (۴۰-۶)$$

داده می‌شود.

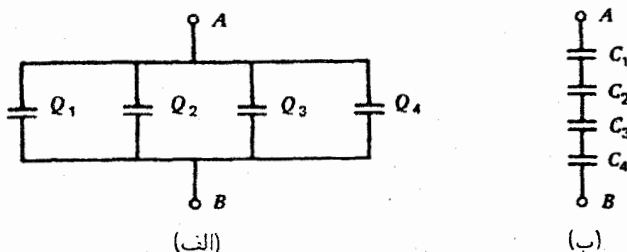
۳-۴-۶ ترکیب خازنها

علامتی که برای نشان دادن یک خازن به کار می‌رود، یعنی چیزی که اشاره به یک خازن با صفحات موازی دارد، | | است. اکنون وضعیتی را که چند خازن به یکدیگر متصل می‌شوند، در نظر بگیرید. دو پیکربندی ساده مورد بحث ما، در نظر گرفتن خازنها به صورت "سری" یا "موازی" است.

در حالت سری فرض بر این است که رساناها طوری مرتب شده‌اند که خطوط نیرویی که بر روی هر رسانا ختم می‌شوند، حداکثر از روی یک رسانای دیگر سرچشمه می‌گیرند. شکل ۵-۶ (الف) را در نظر بگیرید که چهار خازن C_1, C_2, C_3, C_4 به صورت سری به یکدیگر متصل شده‌اند. رساناهای "پایانی" به پایانه‌های A و B وصل شده‌اند و در اختلاف پتانسیل $\Phi_{AB} = \Phi_A - \Phi_B$ نگه داشته می‌شوند. پایستاری بار مستلزم آن است که هر خازن بار یکسان Q را کسب کند. به این ترتیب

$$\Phi_{AB} = \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 + \Delta\Phi_3 + \Delta\Phi_4$$

$$= Q/C_1 + Q/C_2 + Q/C_3 + Q/C_4$$



شکل ۵-۶ ترکیبی از خازنها. (الف) اتصال سری، (ب) اتصال موازی.

اندازه کره خارجی را بسیار بزرگ انتخاب می‌کنیم یعنی $R_2 \rightarrow \infty$. در این حالت ظرفیت مساوی $4\pi\epsilon_0 R_1$ می‌شود، که درست نتیجه (۲۸-۶) است، و نشان می‌دهد که این حد با یک رسانای منزوی منفرد هم‌ارز است.

مثال ۷-۶ ظرفیت یک صفحه و یک استوانه

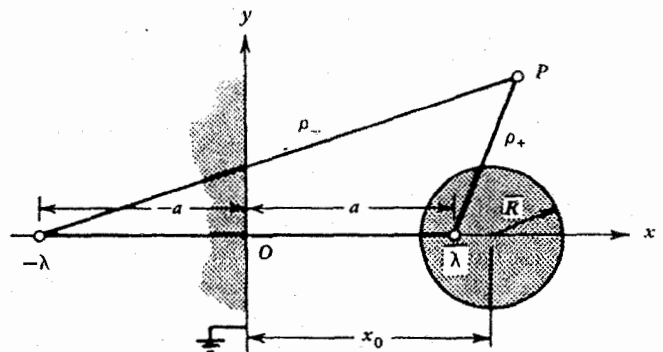
مطابق شکل ۴-۶ یک صفحه رسانای نامتناهی همراه با یک استوانه رسانای بلند که موازی با صفحه رسانا قرار گرفته است را در نظر بگیرید. شعاع استوانه R و مرکز آن به فاصله x_0 از صفحه قرار دارد. برای پیدا کردن ظرفیت دستگاه ابتدا فرض می‌کنیم که استوانه دارای بار λ بر طول واحد است و صفحه به زمین متصل است. این مسئله مقدار مرزی را با روش تصاویر که در بخش ۳-۵-۳ بحث شد، می‌توان حل کرد. در این روش پتانسیل بین رساناها توسط یک بار خطی با چگالی λ بر واحد طول واقع در داخل استوانه بر روی قطر عمود بر صفحه رسانا، و یک بار مجازی خطی با چگالی $-\lambda$ بر واحد طول واقع در پشت صفحه و به فاصله یکسان از بار خطی اول، به دست می‌آید.

فاصله بارهای خطی از صفحه را باید طوری انتخاب کرد که یک سطح هم‌پتانسیل درست بر سطح استوانه‌ای منطبق شود. با استفاده از (۳-۱۲۹) و (۳-۱۳۰) داریم

$$R = \frac{2ma}{m^2 - 1} \quad x_0 = \frac{m^2 + 1}{m^2 - 1} a$$

این دو رابطه را می‌توان برای m که در آن $m = (\rho_- / \rho_+)$ حل کرد

$$m = \frac{x_0}{R} + \left[\left(\frac{x_0}{R} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (۳۸-۶)$$



شکل ۴-۶ محاسبه ظرفیت یک استوانه رسانا در مجاورت یک صفحه موازی با رسانا با استفاده از روش تصاویر.

اگر یک رسانای منفرد در پتانسیل Φ (نسبت به بینهایت) داشته باشیم، مقدار کار Φdq لازم است تا بار dq (از بینهایت) به سطح رسانا منتقل شود. از این رو برای باردار کردن خازن از صفر به کل بار Q مقدار کاری برابر

$$W = \int_0^Q dW = \int_0^Q \Phi dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 \quad (۴۳-۶)$$

مورد نیاز است، C ظرفیت رسانا و V پتانسیل رساناست وقتی که دارای بار Q است.

به همین ترتیب، اگر بخواهیم خازنی متشکل از دو رسانا را باردار کنیم، با خازن بدون بار شروع می‌کنیم و با حذف بار از یک رسانا و گذاشتن آن بر روی رسانای دوم آن خازن را باردار می‌کنیم. کار لازم برای باردار کردن رساناها به اختلاف پتانسیل نهایی $V \equiv \Phi_{12}$ و بار Q مطابق با آن عبارت است از

$$W = \int_0^Q dW = \int_0^Q \Phi_{12} dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 \quad (۴۴-۶)$$

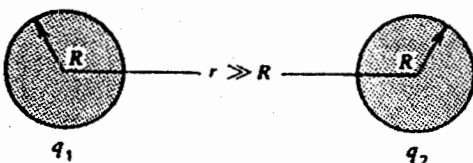
که در آن Q/Φ_{12} ظرفیت دستگاه است.

همان طور که انتظار می‌رود، نتیجه در این حالت از نظر شکل با حالت قبلی یک رسانای منفرد یکسان است، زیرا ضمن آنکه یکی از رساناها را به بینهایت منتقل می‌کنیم، حالت یک رسانای منفرد باقی می‌ماند.

مثال ۸-۶ انرژی الکتروستاتیکی دو کره باردار

مطابق شکل ۶-۶ دو کره رسانای یکسان ۱ و ۲ به شعاع R به ترتیب بار q_1 و q_2 را حمل می‌کنند و فاصله بین آنها $r \gg R$ است. انرژی الکتروستاتیکی دستگاه را می‌توان با استفاده از معادله (۱۴-۶) محاسبه کرد، یعنی

$$U = \frac{1}{2} \sum P_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2} P_{11} (q_1^2 + q_2^2) + P_{12} q_1 q_2 \quad (۴۵-۶)$$



شکل ۶-۶ دو کره رسانای باردار یکسان کوچک به فاصله زیاد از یکدیگر.

که در آن $\Delta\Phi_i$ اختلاف پتانسیل دو سر خازن نام است. اکنون این نتیجه را می‌توان برحسب یک خازن منفرد هم‌ارز با ظرفیت C نوشت. یعنی $\Phi_{AB} = Q/C$ که در آن $1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 + 1/C_4$. در حالت کلی N خازن، داریم

$$\frac{1}{C} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{C_j} \quad (۴۱-۶)$$

حالت خازنهای موازی در شکل ۵-۶ (ب) رسم شده است و نشان‌دهنده چهار خازن است که به طریقی مرتب شده‌اند که هر یک از خازنها دارای اختلاف پتانسیل یکسان Φ_{AB} و دارای بارهای Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 هستند. بار دیگر فرض می‌شود که رساناها را طوری مرتب کرده‌ایم که خطوط نیرویی که به هر رسانا ختم می‌شوند از یک رسانای منفرد دیگر سرچشمه گرفته شده است. به عبارت دیگر، میدان الکتریکی یک زوج از رساناها کاملاً بین این زوج رساناها را دربر می‌گیرد. کل بار چهار خازن عبارت است از

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

$$= C_1 \Delta\Phi_1 + C_2 \Delta\Phi_2 + C_3 \Delta\Phi_3 + C_4 \Delta\Phi_4$$

اما هر یک از اختلاف پتانسیلها برابر است با Φ_{AB} ؛ به این ترتیب $Q = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) \Phi_{AB}$. هم‌ارز C می‌نویسیم $Q/\Phi_{AB} = C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. برای اتصال موازی حالت کلی N خازن داریم

$$C = \sum_{j=1}^N C_j \quad (۴۲-۶)$$

نهایتاً توجه کنید که خازنها به صورت موازی یک ظرفیت بزرگتر از ظرفیت هر یک از خازنها را می‌دهد، در صورتی که خازنها به صورت سری دارای یک ظرفیت کمتر از ظرفیت هر یک از خازنها هستند.

۴-۴-۶ ذخیره انرژی در خازنها

یکی از استفاده‌های مقدماتی خازنها در کاربردهای الکتروستاتیکی به عنوان منبع انرژی الکتروستاتیکی است. برای آنکه یک خازن را باردار کنیم باید برای به حرکت در آوردن بار در مقابل نیروهای الکتروستاتیکی موجود کار انجام دهیم. چون نیروهای الکتروستاتیکی پایسته‌اند کاری که در فرایند تغییر انجام می‌شود متعاقباً به صورت انرژی الکتروستاتیکی خازن قابل دسترسی است. وقتی خازن تخلیه می‌شود، می‌توان به قیمت از دست دادن این انرژی کار انجام داد.

پتانسیلهای Φ_1 و Φ_2 رساناهای داخلی و خارجی، به ترتیب با معادلات (۱۲-۶) و (۱۳-۶) به بار روی رساناها مربوط می شوند، یعنی

$$\Phi_1 = P_{11}q_1 + P_{12}q_2$$

$$\Phi_2 = P_{22}q_2 + P_{21}q_1$$

q_1 (در حال حاضر مجهول است) بار روی کره داخلی است. با استفاده از نتایج مثال ۴-۶ به دست می آوریم

$$P_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1} \quad P_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2} \quad P_{12} = P_{21}$$

با جایگذاری این ضرایب در روابط بالا عبارتهای زیر را برای q_1 و Φ_2 به دست می آوریم

$$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 + q_2}{R_2} \right) \quad \text{و} \quad q_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 V - \frac{R_1 q_2}{R_2} \quad (47-6)$$

با استفاده از (۴۷-۶) و (۳-۶) انرژی الکتروستاتیکی دستگاه برابر است با

$$U_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 q_i \Phi_i = \frac{1}{2} \left[q_1 V + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 + q_2}{R_2} \right) \right] \quad (48-6)$$

اکنون فرض کنید کره داخلی تا شعاع R_2 منبسط شود. در نتیجه این انبساط، انرژی الکتریکی تغییر می کند و مقداری کار مکانیکی توسط نیروی جاذبه بین کرهها انجام می شود. ابتدا تغییر در انرژی الکتریکی را محاسبه می کنیم. بار q_2 کره داخلی را می توان با تعویض R_1 با R_2 در معادله (۴۷-۶) تعیین کرد؛ از این رو

$$q_2 = 4\pi\epsilon_0 R_2 V - \frac{R_2 q_1}{R_1} \quad (49-6)$$

تعویض q_1 با q_2 در معادله (۴۸-۶)، انرژی الکتریکی جدید دستگاه را می دهد

$$U_2 = \frac{1}{2} \left[q_2 V + \left(\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{q_2 + q_2}{R_2} \right) \right] \quad (50-6)$$

به این ترتیب تغییر در انرژی الکتریکی $\Delta U_e = U_2 - U_1$ برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta U_e &= \frac{1}{2} (q_2 - q_1) \left[V + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \right] \\ &= 2\pi\epsilon_0 \left[V^2 - \left(\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \right)^2 \right] (R_2 - R_1) \quad (51-6) \end{aligned}$$

که در آن P_{11} و P_{12} تنها ضرایب مجزای پتانسیل دستگاه هستند. اگر بار q_2 صفر باشد، در این صورت پتانسیل کره ۱ برابر است با

$$\Phi_1 = P_{11}q_1 = q_1 / 4\pi\epsilon_0 R$$

به این ترتیب $P_{11} = 1 / 4\pi\epsilon_0 R$. همچنین پتانسیل در فاصله r از کره برابر است با $\Phi_2 = P_{12}q_1 = q_1 / 4\pi\epsilon_0 r$. به این ترتیب $P_{12} = 1 / 4\pi\epsilon_0 r$. بنابراین

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} (q_1^2 + q_2^2) + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (46-6)$$

می خواهیم تغییر انرژی الکتروستاتیکی را، وقتی یک سیم نازک دو کره را از نظر الکتریکی به یکدیگر متصل می کند، محاسبه کنیم. هر کره پس از اتصال، بار $(1/2)(q_1 + q_2)$ را حمل می کند. تعویض q_1 و q_2 در معادله (۴۶-۶) با $(1/2)(q_1 + q_2)$ ، انرژی وضعیت جدید را به دست می دهد

$$U' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{q_1 + q_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{q_1 + q_2}{2} \right)^2$$

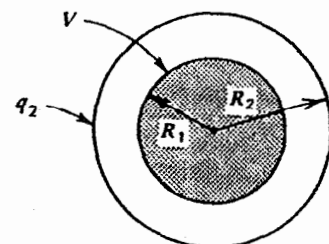
در این صورت تغییر در انرژی الکتروستاتیکی $\Delta U = U' - U$ برابر است با

$$\Delta U = \frac{1}{16\pi\epsilon_0} (q_1 - q_2)^2 \frac{R - r}{Rr} < 0$$

■ که یک کاهش در انرژی الکتروستاتیکی را نشان می دهد.

مثال ۹-۶ بسط یک خازن کروی

شعاع کره داخلی یک خازن کروی که در شکل ۷-۶ نشان داده شده است، R_1 و شعاع پوسته هم مرکز خارجی بسیار نازک، R_2 است. کره داخلی را به وسیله یک باتری در پتانسیل ثابت V نگه می داریم. کره خارجی عایق بندی شده است و بار آن q_2 است.



شکل ۷-۶ یک خازن کروی که الکتروود داخلی آن را می توان منبسط کرد.

انرژی الکتروستاتیکی: یک عبارت دیگر برحسب توزیع میدان ۱۳۹

کل فضا انتخاب کرد؛ هر جا $\rho = 0$ باشد، سهم انتگرال صفر خواهد بود. با جایگذاری از قانون گاوس ($\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$) داریم

$$U = \frac{\epsilon_0}{4} \int \Phi(\nabla \cdot \mathbf{E}) dv \quad (54-6)$$

شکل این معادله را با استفاده از اتحاد برداری

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{E}) = \nabla \Phi \cdot \mathbf{E} + \Phi(\nabla \cdot \mathbf{E})$$

می توان تغییر داد، از این رو

$$U = \frac{\epsilon_0}{4} \int_V \nabla \cdot (\Phi \mathbf{E}) dv - \frac{\epsilon_0}{4} \int_V \nabla \Phi \cdot \mathbf{E} dv \quad (55-6)$$

با اعمال قضیه دیورژانس بر انتگرال اول، و با استفاده از $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ در انتگرال دوم، به دست می آوریم

$$U = \frac{\epsilon_0}{4} \oint_S (\Phi \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} + \frac{\epsilon_0}{4} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv \quad (56-6)$$

که در آن S یک سطح بسته است که حجم V را در بر می گیرد. اکنون اگر توزیع بار در فضا جایگزیده باشد، و اگر سطح S را به صورت یک سطح کروی بسیار دور از توزیع بار در نظر بگیریم، در این صورت $|\mathbf{E}|$ با تقریب خوبی بر روی این سطح ثابت و با $|\hat{\mathbf{r}}/r^2|$ متناسب خواهد بود، و Φ با $1/r$ متناسب خواهد بود. در نتیجه

$$\oint_S (\Phi \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} \approx \oint \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi Q}{r}$$

و ضمن آنکه سطح کروی تا بینهایت گسترش می یابد، انتگرال سطحی به صورت دلخواهی کوچک می شود و در نتیجه می توان از آن چشمپوشی کرد. به این ترتیب معادله (56-6) می شود

$$U = \frac{\epsilon_0}{4} \int E^2 dv \quad (57-6)$$

که در آن اکنون حجم انتگرال گیری باید شامل تمام فضا باشد. اگر به هر حجم dv از فضا یک انرژی $u dv$ را نسبت دهیم، می توان گفت که کل انرژی در فضا درست برابر است با

$$U = \int u dv \quad (58-6)$$

بر این مبنا به عبارت چگالی انرژی

$$U = \frac{1}{4} \epsilon_0 E^2 \quad (59-6)$$

دست خواهیم یافت.

۱. توزیع بار در "بینهایت" مانند یک بار نقطه ای به بزرگی $\int_V \rho dv$ به نظر می رسد.

این نتیجه نشان می دهد که انرژی الکتریکی با بسط کره داخلی زیاد و با انقباض کره داخلی کم می شود.

اکنون کار مکانیکی را که توسط نیروهای جاذبه انجام می شود حساب می کنیم. از معادلات (47-6) و (49-6) بار q_r روی کره داخلی به صورت تابعی از r برابر است با $q_r = q_1 r/R_1$ ، و از این رو چگالی بار σ_r برابر است با $q_1/4\pi R_1 r = q_r/4\pi r^2$. از معادله (4-116)، نیروی برون سوی F_r وارد بر کره با معادله زیر

$$F_r = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_S \sigma^2 da$$

داده می شود، که در آن S سطح کره است. از این رو

$$F_r = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{4\pi \epsilon_0 R_1^2}$$

که مستقل از r است. کار مکانیکی که هنگام انبساط کره از شعاع R_1 به شعاع R_2 انجام می شود برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta U_m &= \int_{R_1}^{R_2} F_r dr = \frac{q_1^2}{8\pi \epsilon_0 R_1^2} (R_2 - R_1) \\ &= 2\pi \epsilon_0 \left(V - \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 R_2} \right)^2 (R_2 - R_1) \quad (52-6) \end{aligned}$$

به این ترتیب انرژی که توسط باتری ذخیره می شود، ΔU ، برابر است با حاصل جمع معادلات (51-6) و (52-6)؛ یعنی

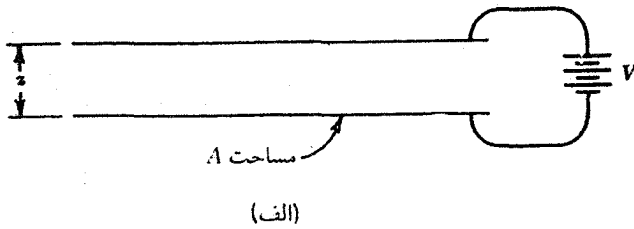
$$\Delta U = \Delta U_e + \Delta U_m = 4\pi \epsilon_0 (R_2 - R_1) V \left(V - \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 R_2} \right) \quad (53-6)$$

۵-۶ انرژی الکتروستاتیکی: یک عبارت دیگر برحسب توزیع میدان

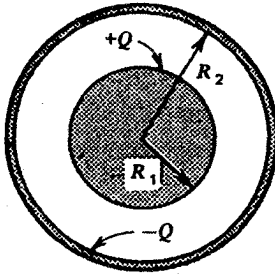
فرض کنید یک توزیع بار خاص داریم که همه جا در خلا با یک چگالی بار ρ مشخص می شود. در این صورت می دانیم که انرژی الکتروستاتیکی این توزیع را به صورت

$$U = \frac{1}{4} \int_V \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) dv \quad [5-6]$$

نشان دادیم که انتگرال گیری بر روی هر حجم متناهی V ، کل بار موجود در توزیع را شامل می شود. این توزیع را یک کره در نظر می گیریم به طوری که مرکز کره در داخل توزیع بار باشد. همچنین می توان V را



(الف)



(ب)

شکل ۸-۶ محاسبه ظرفیت با استفاده از ملاحظات انرژی. (الف) خازن مسطح، (ب) خازن کروی.

یک سیستم متشکل از دو رساناست. برای این طور خازنی از معادله (۴۴-۶) می‌دانیم که

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

در نتیجه

$$C = \frac{2U}{V^2} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{U} \quad (۶۲-۶)$$

از اطلاعات U می‌توان مستقیماً برای محاسبه C استفاده کرد. از این تعریف برای محاسبه ظرفیت خازن مسطح و یک خازن کروی استفاده می‌کنیم.

یک خازن مسطح مطابق شکل ۸-۶(الف) را در نظر بگیرید. مساحت سطح هر صفحه A و فاصله آنها از یکدیگر d است. دو صفحه را در اختلاف پتانسیل V نگه می‌داریم. میدان الکتریکی که توسط صفحات تولید می‌شود قبلاً تعیین شدند (مثال ۴-۴ را ببینید)، یعنی میدان الکتریکی در خارج از صفحات مساوی با صفر و در داخل مساوی با V/d است. از این رو معادله (۵۹-۶) برای چگالی انرژی در داخل خازن مقدار

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{V^2}{d^2}$$

و در خارج مقدار صفر را به دست می‌دهد. کل انرژی الکترومغناطیسی را می‌توان با انتگرال گرفتن از چگالی انرژی بر روی حجم خازن تعیین

اگر چگالی بار را در فضایی با گذردگی ϵ فرو بریم (ثابت دی‌الکتریک $K \neq 1$)، در این صورت می‌توان به سادگی نشان داد که معادلات (۵۷-۶) و (۵۹-۶) به صورت زیر می‌شوند

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dv = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 \, dv \quad (۶۰-۶)$$

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (۶۱-۶)$$

نتایجی که با معادله (۵۹-۶) یا (۶۱-۶) داده می‌شوند را می‌توان چگالی انرژی میدان (الکتروستاتیکی) نامید. در این تغییر می‌توان گفت که انرژی وابسته به یک توزیع بار، واقعاً در میدان الکتریکی این توزیع ذخیره می‌شود. این تغییر خصوصاً در وضعیت‌های غیرایستا (که در فصل‌های بعد بحث خواهد شد) که امکان تابش الکترومغناطیسی وجود دارد، مفید خواهد بود. در این صورت انرژی به درستی ممکن است از طریق فضا انتقال یابد و این انرژی به میدان‌های الکترومغناطیسی که در آنجا وجود دارند وابسته خواهد بود. این انرژی در وضعیت ایستا می‌تواند ابهاماتی به وجود آورد، و شاید بهترین تصور آن باشد که معادله (۵۷-۶) را صرفاً به عنوان راه دیگری برای محاسبه U تلقی کنیم.

با استفاده از معادله (۵۷-۶) انرژی وابسته به یک کره باردار یکنواخت را محاسبه می‌کنیم. برای استفاده از این فرمول نیاز است \mathbf{E} (ناشی از کره باردار) را همه جا در فضا بدانیم. با مراجعه به معادلات (۵۲-۲) و (۵۳-۲) در مثال ۱۲-۲(ب) داریم

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{داخل}} \left(\frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 dv + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{خارج}} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 dv$$

با انتخاب $dv = 4\pi r^2 dr$ به دست می‌آوریم

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{r=0}^R \frac{Q^2 r^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 R^4} \cdot 4\pi r^2 dr + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{r=R}^{\infty} \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr$$

که با انتگرال‌گیری می‌دهد

$$U = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

که نتیجه‌ای را که در مثال قبلی ۱-۶ به دست آمد ثابت می‌کند.

مثال ۱۰-۶ محاسبه ظرفیت با استفاده از رابطه انرژی
یک کاربرد مستقیم فرمول‌های انرژی استفاده از آن در محاسبه ظرفیت

داده می‌شود، که در آن $\Phi^{(e)}$ تابع پتانسیلی را نشان می‌دهد که مشخصه توزیع بار "خارجی" است، و فرض می‌شود از توزیع dq که در آن ضرب شده است کاملاً مستقل باشد. توجه کنید که ضریب $1/2$ را در این عبارت اخیر حذف کرده‌ایم.

اگر کل انرژی الکتروستاتیکی را برای دو توزیع بار به صورت

$$U = \frac{1}{4} \epsilon_0 \int E^2 dv = \frac{1}{4} \epsilon_0 \int [\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2]^2 dv \quad (63-6)$$

بنویسیم که در آن \mathbf{E}_1 و \mathbf{E}_2 نشان‌دهنده میدان الکتریکی آن دو توزیع بار به صورت جداگانه است، این نتایج را می‌توان به طور آشکار مشاهده کرد. با بسط انتگرالده معادله (63-6) به دست می‌آوریم

$$U = \frac{1}{4} \epsilon_0 \int \mathbf{E}_1^2 dv + \frac{1}{4} \epsilon_0 \int \mathbf{E}_2^2 dv + \epsilon_0 \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dv$$

اکنون واضح است که دو جمله اول سمت راست این معادله خودانرژی دو توزیع را نشان می‌دهد، حال آنکه جمله سوم به طور مشهود انرژی برهمکنش $U^{(int)}$ این توزیعهای بار است.

جمله آخر مستقیماً به صورت زیر اثبات می‌شود. با قراردادن $-\nabla\Phi_1$ به جای \mathbf{E}_1 در جمله سوم، به دست می‌آوریم

$$U^{(int)} = \epsilon_0 \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dv = -\epsilon_0 \int (\nabla\Phi_1 \cdot \mathbf{E}_2) dv$$

استفاده از معادله (57-1) به دست می‌دهد

$$U^{(int)} = -\epsilon_0 \int \nabla \cdot (\Phi_1 \mathbf{E}_2) dv + \epsilon_0 \int \Phi_1 (\nabla \cdot \mathbf{E}_2) dv$$

اگر هیچ‌یک از دو توزیع بار تا بینهایت گسترده نباشند، انتگرال اول صفر خواهد شد (چرا؟). به این ترتیب

$$U^{(int)} = \int \rho_2 \Phi_1 dv = \int \Phi_1 dq$$

می‌توان $\rho_2 dv$ را به dq و Φ_1 را به $\Phi^{(e)}$ وابسته کرد، و به این ترتیب جمله سوم معادله (63-6) واقعاً انرژی برهمکنش است. همچنین به سادگی می‌توان نشان داد

$$U^{(int)} = \epsilon_0 \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dv = \int \rho_1 \Phi_2 dv$$

به طوری که

$$U^{(int)} = \int \Phi_1 dq_2 = \int \Phi_2 dq_1 \quad (64-6)$$

کرد. چون u ثابت است، در این صورت

$$U = uAd = \frac{1}{4} \epsilon_0 A \frac{V^2}{d}$$

مساوی قراردادن کل انرژی با $1/2(CV^2)$ ، به دست می‌دهد

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

به عنوان مثالی دیگر خازن کروی که در شکل 6-8 (ب) نشان داده شده است را در نظر بگیرید. در این مورد اگر بار رسانای داخلی Q و بار رسانای خارجی $-Q$ باشد، میدان در خارج کره خارجی صفر خواهد بود. میدان بین کره‌ها ($R_1 < r < R_2$) را می‌توان با استفاده از قانون گاوس به صورت $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ تعیین کرد. بنابراین

$$u = \frac{1}{4} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{4} \epsilon_0 \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4}$$

و بنابراین انرژی کل برابر است با

$$U = \int u dv = \int \frac{1}{4} \epsilon_0 \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4} \cdot \frac{dv}{r^2}$$

با جایگزینی $dv = 4\pi r^2 dr$ و انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

با استفاده از شکل دوم معادله (62-6) به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

که دقیقاً جوابی است که در مثال 6-6 به دست آمد. ■

6-6 خودانرژیها و انرژیهای برهمکنش

خودانرژی $U^{(S)}$ یک توزیع بار به معنی کار مورد نیاز برای جمع‌آوری این توزیع بار است هنگامی که توزیع بار مورد نظر تحت تأثیر بارهای دیگر خارج از توزیع بار قرار نگیرد. به این ترتیب، برای یک توزیع بار که آن را با چگالی بار ρ مشخص می‌کنیم داریم، $U^{(S)} = 1/2 \int \rho\Phi dv$ که در آن Φ پتانسیلی است که توسط خود توزیع بار تولید می‌شود.

در مقابل، گاهی اوقات می‌خواهیم بدانیم چه اندازه کار برای قراردادن یک توزیع از بارها در میدان مجموعه‌ای از بارهای دیگر لازم است. از تعریف پتانسیل الکتریکی، کار لازم مستقیماً با رابطه

$$U^{(int)} = \int \Phi^{(e)} dq$$

یک عامل خارجی کار مکانیکی بر روی توزیع بار انجام شود، بنابه تعریف کار انجام شده باید انرژی توزیع بار را افزایش دهد؛ یعنی

$$dW = dU \quad (۶۶-۶)$$

اگر فرض کنیم این کار dW به صورت مکانیکی انجام شود به طوری که نیروهای اعمال شده خارجی همواره با نیروهای الکتروستاتیکی در خلال فرایند کار در تعادل باشند، در آن صورت dW را که به صورت $dW^{(mech)}$ مشخص می‌کنیم درست مساوی با منفی کار انجام شده به وسیله این نیروهای الکتروستاتیکی است. در این حالت، اگر دستگاه بارها هیچ گونه برهم‌کنشی با خارج نداشته باشند (مثلاً منزوی) و اگر بقیه بار سیستم ثابت باقی بماند، داریم

$$dW^{(mech)} = -dU \quad Q = \text{const.} \quad (۶۷-۶)$$

برای مثال فرض کنید که $dW^{(mech)} = F_\xi d\xi$ ، یعنی فرض کنید دستگاهی از رساناها داریم که یکی از بارهای تحت تأثیر نیروی الکتروستاتیکی \mathbf{F} به اندازه مقدار جزئی $d\xi$ حرکت کند. چون $\mathbf{F} \cdot d\xi = F_\xi d\xi$ ، در این صورت $F_\xi d\xi = -dU$ ، که در آن Q بر روی تمام رساناها ثابت است و dU تغییر در انرژی الکتروستاتیکی است، وقتی که رسانا به اندازه $d\xi$ حرکت می‌کند. بنابراین

$$F_\xi = -\left. \frac{dU}{d\xi} \right|_Q \quad (۶۸-۶)$$

که نیروی F_ξ وارد بر رسانا در جهت ξ را به دست می‌دهد. خط عمودی با شاخص Q مشخص شده است تا تأکیدی بر ثابت بودن Q بر روی تمام رساناها در این مشتق‌گیری باشد.

در برخی از کاربردهای دیگر، Q ثابت نخواهد بود و باید بدانیم در این حالت چه باید کرد. فرض کنید ضمن آنکه پیکربندی دستگاه تغییر می‌کند، پتانسیل رساناها ثابت نگه داشته شود. در حالت کلی این پتانسیلها را تنها وقتی می‌توان ثابت نگه داشت که بار روی رساناها تغییر کند. اما بارها در صورتی تغییر می‌کنند که یک عامل خارج از رساناها بار را تأمین کند. برای مثال باتریها این عمل را انجام می‌دهند. در این حالت، اگر یکی از رساناها مجاز باشد یک جابه‌جایی مجازی را انجام دهد و در این فرایند یک جزء کار مکانیکی $dW^{(mech)}$ توسط نیروهای الکتروستاتیکی انجام شود، برای ثابت نگه داشتن تمام رساناها در یک پتانسیل ثابت، کار اضافی باید انجام شود. بار در پتانسیل رساناهای گوناگون ذخیره می‌شود. اکنون حاصل جمع تمام این تأثیرات

به طور کلی انرژی برهم‌کنش بین دو دستگاه بار را می‌توان به شکل

$$U^{(int)} = \frac{1}{4} \left(\int \Phi_1 dq_2 + \int \Phi_2 dq_1 \right) \quad (۶۵-۶)$$

نیز انتخاب کرد. عبارت اخیر به طور خودکار در بسط معادله (۴-۶)، $U = \frac{1}{2} \int \Phi dq$ که در آن $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ و $dq = dq_1 + dq_2$ است، ظاهر می‌شود. به این ترتیب

$$U = \frac{1}{4} \int \Phi_1 dq_1 + \frac{1}{4} \int \Phi_2 dq_2 + \frac{1}{4} \left[\int \Phi_1 dq_2 + \int \Phi_2 dq_1 \right]$$

یا

$$U \equiv U^{(s_1)} + U^{(s_2)} + U^{(int)}$$

توجه کنید که خودانرژیها برای دو بار نقطه‌ای نامعین (یا نامتناهی) اند. انرژی برهم‌کنش درست برابر است با

$$q_2 \Phi_1 = q_2 \cdot \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = q_1 \Phi_2$$

نیروی وارد بر یک توزیع بار واقع در میدان خارجی ثابت $\mathbf{E}^{(e)}$ یعنی نیروی برهم‌کنش بار و میدان $\mathbf{E}^{(e)}$ غالباً جالب توجه است. به وضوح که یک جابه‌جایی اندک هر بخش از توزیع بار فقط به همان اندازه کل انرژی برهم‌کنش دستگاه را تغییر خواهد داد. (منظور از "دستگاه" یعنی منابع $\mathbf{E}^{(e)}$ به علاوه توزیع باری که تحت تأثیر $\mathbf{E}^{(e)}$ قرار می‌گیرد). بنابراین در محاسبه نیروها می‌توان از $U^{(int)}$ به جای کل U استفاده کرد (بخش بعدی را ببینید).

۷-۶ نیروها و گشتاورها با استفاده از انرژی الکتروستاتیکی
دیدیم که برای جمع‌آوری یک توزیع بار باید در برابر نیروهای الکتروستاتیکی (پایستار) کار انجام دهیم. چون نیروها پایستارند، توانسته‌ایم یک انرژی پتانسیل برای توزیع باری تعریف کنیم که این توزیع بار فقط به پیکربندی توزیع بار خاصی که می‌سازیم بستگی دارد. این انرژی پتانسیل، مثلاً به مسیر خاصی که جزءهای بار از بینهایت آورده می‌شوند بستگی ندارد.

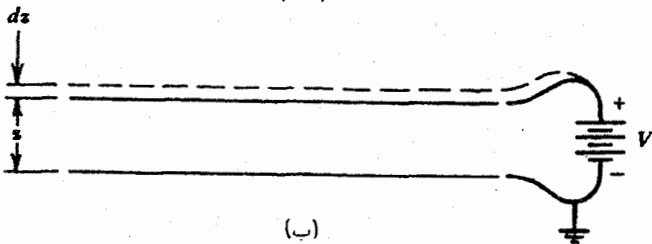
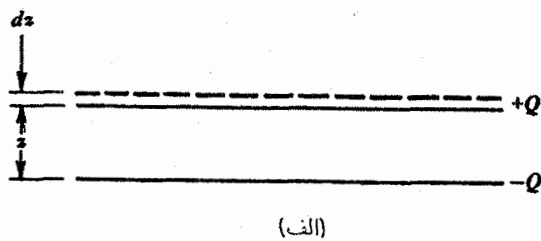
بدین ترتیب یک دستگاه منزوی از بارها دارای یک انرژی الکتروستاتیکی است که تنها اگر خود پیکربندی بار تغییر کند — مثلاً با تغییر مکان بارها یا با افزودن بار — تغییر می‌کند. ما فقط وضعیت استاتیکی را که در آن بارها ساکن هستند در نظر می‌گیریم، به طوری که گرم کردن یا سرد کردن توزیع بار وجود ندارد. از این رو، اگر توسط

اگر ξ یک جابه‌جایی (یا یک چرخش) باشد، در این صورت F_ξ نشان‌دهنده یک نیرو (یا گشتاور) در جهت ξ است.

مثال ۶-۱۱ نیروی وارد بر صفحات یک خازن مسطح - بار ثابت مثال ساده‌ای از بحث قبلی، خازن مسطح است. فرض کنید می‌خواهیم نیروی وارد بر صفحه بالایی خازن منزوی (Q) ثابت است) شکل ۶-۹ (الف) را پیدا کنیم. دیدیم که انرژی الکتروستاتیکی با $U = (1/2)Q^2/C$ داده می‌شود. تنها کمیت هندسی در این معادلات ظرفیت C است که در آن $C = \epsilon_0 A/z$. در استفاده از فرمول نیرو از این واقعیت استفاده می‌کنیم که Q ثابت است اما اختلاف پتانسیل ثابت نیست، این امر ایجاب می‌کند که $Q^2/2C$ یک عبارت مناسب باشد، یعنی

$$F_z = - \left. \frac{dU}{dz} \right|_Q = - \frac{1}{2} Q^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{C} \right) = - \frac{1}{2} Q^2 \frac{1}{\epsilon_0 A} \quad (73-6)$$

آموخته است تا این نتیجه را بدون استفاده مستقیم از فرمول F_z به دست آوریم. برای این منظور با ثابت نگه داشتن Q (دستگاه منزوی) یک جابه‌جایی (مجازی) کوچک dz از صفحه بالایی خازن را در نظر بگیرید. در این جابه‌جایی نیروهای الکتروستاتیکی وارد بر صفحه مقدار کار $F_z dz$ را انجام می‌دهند. از این رو انرژی الکتروستاتیکی باید کاهش یابد. این انرژی به اندازه $1/2 Q^2/C_f - 1/2 Q^2/C_i$ که در آن C_f و C_i ظرفیتهای نهایی و ابتدایی هستند، کم می‌شود. چون



شکل ۶-۹ محاسبه نیروی بین صفحات یک خازن مسطح با استفاده از ملاحظات انرژی. (الف) صفحات باردار و منزوی هستند. (ب) صفحات توسط یک منبع خارجی در پتانسیل ثابت نگه داشته شده‌اند.

است که باید با تغییر در انرژی الکتروستاتیکی برابر باشد. داریم (با ثابت نگه داشتن همه پتانسیلها)

$$-dW^{(mech)} + dW^{(B)} = +dU \quad (69-6)$$

در یک عبارت، کل کار انجام شده توسط عوامل خارجی

$$[-dW^{(mech)} + dW^{(B)}]$$

مساوی است با افزایش انرژی الکتروستاتیکی. اگر تغییر در بار رسانای m ، dQ_m باشد، در این صورت

$$dW^{(B)} = \sum_m \Phi_m dQ_m$$

اما $U = 1/2 \sum \Phi_m Q_m$ و از این رو در پتانسیل ثابت

$$dU = 1/2 \sum \Phi_m dQ_m$$

بنابراین، معادله توازن انرژی بالا را می‌توان این‌طور نوشت

$$-dW^{(mech)} = -dW^{(B)} + dU = - \sum \Phi_m dQ_m + \frac{1}{2} \sum \Phi_m dQ_m = - \frac{1}{2} \sum \Phi_m dQ_m$$

یا

$$dW^{(mech)} = dU|_\Phi \quad (70-6)$$

کار انجام شده توسط باتری برای نگه داشتن تمام رساناها در یک پتانسیل ثابت دو برابر تغییر در انرژی الکتروستاتیکی است. نتیجه معادله (۶-۷۰) منجر به عبارت زیر برای نیروی وارد بر یک رسانا در "جهت ξ "، وقتی تمام پتانسیلها ثابت نگه داشته می‌شوند، می‌شود

$$F_\xi = \left. \frac{dU}{d\xi} \right|_\Phi \quad (71-6)$$

سرانجام باید توجه کرد که در بحث ما از نیروهای وارد بر رساناها (از طریق بحث انرژی)، عبارت کار مکانیکی $-F_\xi d\xi$ الزاماً ضرب نیرو در جابه‌جایی را ایجاب نمی‌کند. این عبارت می‌تواند ضرب گشتاور در چرخش نیز باشد. در نتیجه، در فرمولهای به دست آمده

$$F_\xi = - \left. \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|_Q \quad (الف) \quad (72-6)$$

$$F_\xi = + \left. \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|_\Phi \quad (ب)$$

یا $-dW^{(mech)} = +dU$ در این صورت

$$-F_z dz = U(z+dz) - U(z) = \frac{1}{2} Q^2 \left(\frac{1}{C(z+dz)} - \frac{1}{C(z)} \right)$$

جایگذاری $C = \epsilon_0 A/z$ به دست می دهد

$$-F_z dz = \frac{1}{2} Q^2 \left(\frac{z+dz}{\epsilon_0 A} - \frac{z}{\epsilon_0 A} \right) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} dz$$

از این رو

$$F_z = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A}$$

که دقیقاً نتیجه معادله (۶-۲۳) است.

مثال ۱۲-۶ نیروی وارد بر صفحه خازن مسطح - ولتاژ ثابت
یک نمایش ساده از بحثهایی که در بالا بدانها اشاره شد بار دیگر در خازن مسطح جلوه می کند. در شکل ۹-۶ (ب)، چون پتانسیل ثابت نگه داشته می شود می توان نوشت $U = (1/2)CV^2$. بنابراین

$$F_z = \frac{dU}{dz} \Big|_V = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dz} = \frac{1}{2} V^2 \left(\frac{-\epsilon_0 A}{z^2} \right)$$

یا

$$F_z = -\frac{1}{2} \frac{V^2 C^2}{\epsilon_0 A} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A}$$

که نشان می دهد نیرو با حالت "با Q ثابت" یکسان است.

بار دیگر این مسئله را با توجه به اصول اولیه حل می کنیم:

۱. کار مکانیکی انجام شده (توسط عامل خارجی) در جابه جایی صفحه بالایی به اندازه dz برابر است با $-F_z dz$ ، علامت منفی از این حقیقت ناشی می شود که نیروی خالص در طی جابه جایی صفر است. F_z نیروی الکتروستاتیکی است.

۲. بار روی صفحات خازن ابتدا $Q_i = VC_i$ بود. بعد از جابه جایی، بار برابر شد با $Q_f = VC_f$ ، به طوری که مقدار بار در طی جابه جایی ذخیره شد. این بار به صفحه بالایی در پتانسیل V تزریق شد، بنابراین مقدار کار انجام شده بر روی دستگاه برابر است با $(Q_f - Q_i)V = V^2 dC$.

۳. حاصل جمع کار انجام شده در مراحل ۱ و ۲ بالا برابر است با

dU یعنی،

$$dU = \frac{1}{2} V^2 dC = -F_z dz + V^2 dC$$

$$F_z = +\frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dz}$$

که همان نتیجه قبلی است.

مثال ۱۳-۶ نیروی وارد بر یک بره دی الکتریک توسط یک خازن در این مثال با استفاده از روش انرژی نیروی وارد بر مواد دی الکتریک توسط رساناهای باردار را بررسی می کنیم. شکل ۶-۱۰ را که نشان دهنده یک خازن مسطح با ضخامت d و ابعاد a و l است در نظر بگیرید. بخشی از یک بره دی الکتریک با گذردهی ϵ ، ضخامت d و ابعاد a و l را مطابق شکل بین صفحات وارد می کنیم. صفحات در اختلاف پتانسیل $\Delta\Phi$ نگه داشته می شوند.

برای محاسبه نیروی وارد بر بره، ابتدا ظرفیت دستگاه را به صورت تابعی از x محاسبه می کنیم. به ازای یک مقدار x ، دستگاه را می توان به صورت دوخازن که به طور موازی به هم وصل شده اند، در نظر گرفت. با استفاده از معادله (۶-۳۳) می نویسیم

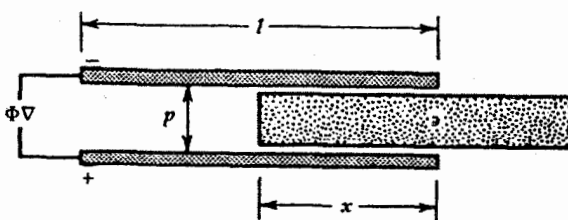
$$C_1 = \frac{\epsilon_0 a(l-x)}{d} \quad \text{و} \quad C_2 = \frac{\epsilon a x}{d}$$

که در آن C_1 ظرفیت بخشی از خازن است که با دی الکتریک پر شده است و C_2 ظرفیت بقیه خازن است. در این صورت کل ظرفیت برابر است با

$$C = C_1 + C_2 = \frac{a}{d} [(\epsilon - \epsilon_0)x + \epsilon_0 l]$$

بدین ترتیب با استفاده از معادله (۶-۴۴) انرژی الکتروستاتیکی دستگاه به صورت

$$U(x) = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{a}{d} [(\epsilon - \epsilon_0)x + \epsilon_0 l] (\Delta\Phi)^2$$



شکل ۶-۱۰ محاسبه نیروی وارد بر یک بره دی الکتریک که بخشی از آن به بین صفحات یک خازن وارد شده است.

$$C_{ij} \leq 0 \quad i \neq j \quad \text{به‌ازای} \quad [۲۱-۶]$$

برای یک خازن دورسانایی با بارهای $\pm Q$ بر روی رساناها داریم

$$U = \frac{1}{4} Q \Phi_{۱۲} \quad \text{و} \quad Q = C \Phi_{۱۲} \quad [۳۱-۶], [۴۴-۶]$$

که در آن C ظرفیت دستگاه و $\Phi_{۱۲}$ اختلاف پتانسیل بین رساناهاست. برای مثال ظرفیت یک خازن مسطح به مساحت A ، ضخامت d که با یک ماده با گذردهی ϵ پر شود برابر است با

$$C = \frac{\epsilon A}{d} \quad [۳۳-۶]$$

انرژی الکتروستاتیکی یک توزیع بار را می‌توان متناوباً برحسب میدان الکتریکی تولید شده توسط توزیع نوشت. این روش مناسب است زیرا معرفی یک چگالی انرژی را مجاز می‌داند؛ با این همه، این چگالی انرژی در تمام فضا وجود دارد زیرا میدان الکتریکی یک میدان درازبرد است. چگالی انرژی u برای یک محیط با گذردهی ϵ برحسب E برابر است با

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} \quad [۶۱-۶]$$

کل انرژی انتگرال u بر روی کل فضاست

$$U = \int u \, dv \quad [۵۸-۶]$$

نیروهای بین عناصر بار یک توزیع بار را می‌توان به صورت مناسبی از دانش انرژی الکتروستاتیکی تعیین کرد. دو حالت را می‌توان در نظر گرفت: دستگاه با بار ثابت بر روی هر رسانا منزوی است؛ و دستگاه منزوی نیست، اما به جای آن پتانسیل بر روی هر رسانا توسط منابع خارجی مثل باتریها ثابت نگه داشته می‌شود. نیروی F وارد بر یک عنصر در حالت منزوی، منفی شیب انرژی الکتروستاتیکی است، یا

$$F_\xi = - \frac{\partial U}{\partial \xi} \quad \text{بار ثابت} \quad [۶۸-۶]$$

در حالت پتانسیل ثابت داریم

$$F_\xi = + \frac{\partial U}{\partial \xi} \quad \text{پتانسیل ثابت} \quad [۷۱-۶]$$

مسائل

۱-۶ فرض کنید بار الکتریکی Q یک هسته اتمی به طور یکنواخت در داخل یک کره به شعاع R توزیع می‌شود. با استفاده از $\int \rho \Phi \, dv$ انرژی الکتروستاتیکی را تعیین کنید.

نوشته می‌شود. اکنون از وابستگی U به x برای تعیین نیروی وارد بر بره می‌توان استفاده کرد. با استفاده از (۷۲-۶) داریم

$$\mathbf{F} = \left. \frac{\partial U(x)}{\partial x} \right|_{\Delta \Phi} \quad \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \frac{a}{d} (\Delta \Phi)^2 (\epsilon - \epsilon_0) \hat{\mathbf{x}}$$

که نشان می‌دهد نیرو جاذبه است.

۸-۶ خلاصه

برای جمع‌آوری یک دستگاه از N بار نقطه‌ای تحت شرایطی که تمام بارها برهم‌کنش ندارند، در برابر نیروهای کولنی بین بارها باید توسط یک عامل خارجی کار انجام شود. این کار در دستگاه به صورت انرژی الکتروستاتیکی دستگاه U ذخیره خواهد شد

$$U = \sum_{j=1}^N \sum_{i < j}^N \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j \Phi(j) \quad [۱-۶], [۳-۶]$$

که در آن r_{ij} فاصله بین بارهای q_1 و q_j و $\Phi(j)$ پتانسیل ناشی از بارهای دیگر در مکان q_j است. انرژی پتانسیل برای یک توزیع بار پیوسته ρ که در یک ماده دی‌الکتریک فرو برده شود، عبارت است از

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) \, dv \quad [۵-۶]$$

وقتی بارها بر روی رساناهایی قرار می‌گیرند که سطوح این رساناها هم‌پتانسیل هستند، این انرژی برابر است با

$$U = \frac{1}{2} \sum_j^N Q_j \Phi_j \quad [۸-۶]$$

پتانسیل هر رسانا برحسب بارهای روی تمام رساناها توسط بسط خطی

$$\Phi_j = \sum_{k=1}^N P_{jk} Q_k \quad [۹-۶]$$

بیان می‌شود که در آن P_{jk} ها پارامترهای هندسی مستقل از بارها و پتانسیل هستند و ضرایب پتانسیل نامیده می‌شوند. رابطه عکس

$$Q_j = \sum_{k=1}^N C_{jk} \Phi_k \quad [۱۰-۶]$$

نیز یک رابطه خطی با C_{jk} دارند و ضرایب القا یا ظرفیت نامیده می‌شوند. این ضرایب دارای خصوصیات زیر هستند

$$P_{ij} = P_{ji} \quad P_{ii} \geq P_{ij} \quad C_{ij} = C_{ji} \quad C_{ii} > 0 \quad [۱۶-۶]$$

۸-۶ یک خازن مسطح دارای صفحاتی به مساحت A و به ضخامت d است. اختلاف پتانسیل V بین صفحات اعمال می‌شود و پس از آن صفحات منزوی می‌شوند. (الف) انرژی ذخیره‌شده در خازن چقدر است؟ (ب) یک ورقه فلزی غیر باردار به ضخامت a بین صفحات و موازی آنها قرار داده می‌شود. ظرفیت جدید را پیدا کنید. چقدر کار در خلال وارد کردن ورقه فلزی توسط نیروهای الکتریکی انجام می‌شود؟ (ج) اختلاف پتانسیل بین صفحات خازن بعد از وارد کردن ورقه چقدر است؟

۹-۶ کره‌های یک خازن کروی را به صورت غیر هم‌مرکز سوار می‌کنیم. انحراف از هم‌مرکز بودن بسیار اندک است. تصحیح در ظرفیت ناشی از این انحراف از هم‌مرکز بودن را تعیین کنید. (مثال ۳-۵ را ببینید).

۱۰-۶ یک کره فلزی به شعاع R در یک محیط دی‌الکتریک با گذردهی ϵ ، بار Q را حمل می‌کند. (الف) با استفاده از تعریف کار برحسب بار و پتانسیل، کاری را که برای باردار کردن کره باید انجام شود تعیین کنید. (ب) با استفاده از میدانهای E و D تولیدشده توسط کره، انرژی ذخیره‌شده در میدان الکتریکی را حساب کنید. این نتیجه چگونه با (الف) قابل مقایسه است؟ (ج) اگر کره بر اثر انبساط به شعاع R' برسد تغییر در انرژی الکتریکی چقدر خواهد بود؟ (د) تغییر انرژی در (ج) را تفسیر کنید.

۱۱-۶ با استفاده از مفهوم ضریب پتانسیل مسائل زیر را حل کنید. (الف) دو رسانای کروی که فاصله بین آنها d است در خلأ قرار دارند. شعاع یکی از کره‌ها R است و به زمین متصل است. شعاع کره دیگر بسیار کوچک است و بار q را (که به صورت یک بار نقطه‌ای می‌تواند در نظر گرفته شود) دارد. بار القاشده بر روی کره بزرگ چقدر است؟ (ب) کره در بخش (الف) خنثی و عایق‌بندی شده است. پتانسیل چقدر است؟ (ج) این نتایج را با نتایج روش تصاویر مقایسه کنید.

۱۲-۶ با استفاده از $U = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 E^2 dv$ مسئله ۱-۶ را تکرار و نتایج را مقایسه کنید.

۱۳-۶ نشان دهید که $\int E^2 dv = \frac{1}{2\epsilon_0}$ همان نتیجه قسمت (ب) مسئله ۲-۶ که در آن E میدان الکتریکی توزیع است را به دست می‌دهد.

۱۴-۶ دو خازن کروی یکسان با شعاعهای داخلی و خارجی r_1 و r_2 عایق‌بندی شده‌اند و طوری قرار گرفته‌اند که فاصله بین آنها بسیار زیاد است. بارهای q_1 و q_2 بر روی کره‌های داخلی قرار داده می‌شوند. هرگاه کره‌های خارجی توسط یک سیم نازک به هم متصل شوند تغییر در انرژی دستگاه را تعیین کنید.

۱۵-۶ یک خازن گوه‌ای بزرگ تعریف شده توسط صفحات $\phi = 0$ و $\phi = \pi/6$ را در نظر بگیرید که عایق‌بندی شده‌اند و به ترتیب در

۲-۶ یک توزیع بار حجمی در فضا طوری توزیع شده است که پتانسیل الکتروستاتیکی به فاصله r از مبدأ با رابطه $\Phi(r) = Ae^{-\alpha r}$ داده می‌شود که در آن A و α ثابت‌اند. (الف) چگالی توزیع بار وابسته به آن را پیدا کنید. (ب) انرژی الکتروستاتیکی $\frac{1}{2} \int \rho \Phi dv$ توزیع را حساب کنید.

۳-۶ سه کره یکسان به شعاع a در رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع l با $l \gg a$ قرار دارند. هر کره بار q را حمل می‌کند. اکنون یکی از کره‌ها را به زمین وصل می‌کنیم تا حالت تعادل برقرار شود. همین فرایند برای دو کره دیگر تکرار می‌شود. بار بر روی هر کره را در انتهای فرایند تعیین کنید.

۴-۶ دو کره یکسان رسانای عایق‌بندی شده S_1 و S_2 را در نظر بگیرید. ابتدا S_1 دارای بار q_1 و پتانسیل V است در صورتی که S_2 بی‌بار است. درمی‌یابیم که کره‌ها یکدیگر را با نیروی F جذب می‌کنند. سپس کره S_2 با قرار دادن بار q_2 بر روی آن به پتانسیل V صعود می‌کند. در این صورت درمی‌یابیم که دو کره یکدیگر را با نیروی F دفع می‌کنند. اکنون کره S_1 به زمین متصل می‌شود. (الف) بار القاشده بر روی آن را پیدا کنید، و (ب) نشان دهید که کره‌ها یکدیگر را با نیروی $\frac{2}{3}q_2(q_1^2 - q_2^2)F/q_1^3$ جذب می‌کنند.

۵-۶ چهار کره یکسان کوچک به شعاع a در رئوس یک مربع به ضلع l با $l \gg a$ قرار دارند. کره ۱ بار q را حمل می‌کند، پس از آن کره ۱ با استفاده از یک سیم نازک به نوبت به کره ۲، ۳ و ۴ وصل می‌شود تا آنکه در هر وضعیت دستگاه به تعادل می‌رسد. (الف) ضرایب P_{ij} که در آن $i = 1, 2, 3, 4$ را تعیین کنید. (ب) ضرایب P_{ij} ($i \neq j$) را به دست آورید. (ج) بار بر روی هر کره را در انتهای عمل به دست آورید.

۶-۶ شعاعهای a و b است با $b > a$. ظرفیت آن را پیدا کنید. (ب) اگر شعاعهای خازن به اندازه مقدار جزئی d که در آن $d \ll a$ ، متفاوت باشد نشان دهید که عبارت مربوط به ظرفیت یک خازن مسطح که دارای همان سطح است کاهش می‌یابد.

۷-۶ یک کره رسانا به شعاع a توسط یک پوسته کروی ضخیم منزوی به شعاع داخلی b و شعاع خارجی c احاطه شده است. پوسته خارجی ضخیم، منزوی و ابتدا بدون بار است. یک بار $+Q$ در کره داخلی قرار می‌گیرد. (الف) میدان الکتریکی را در تمام نواحی پیدا کنید. (ب) اختلاف پتانسیل بین $r = a$ و $r = \infty$ چقدر است؟ (ج) ظرفیت خازن چقدر است؟ (د) نشان دهید که ظرفیت محاسبه شده با ظرفیت دو خازن سری شده برابر است. ظرفیت هر خازن چقدر است؟

۲۱-۶ یک میله عایق‌بندی شده به طول l و قطبش‌پذیری ناچیز دارای دو کره رسانای کوچک به شعاع $l \ll a$ است که به دو انتهای میله متصل شده‌اند. میله در مرکز آن طوری وصل شده است که می‌تواند آزادانه حول آن مرکز بچرخد. این میله را در یک میدان الکتریکی یکنواخت خارجی E_0 قرار می‌دهیم. (الف) سمتگیرهای میله در حالت تعادل چگونه است. کدام‌یک از این سمتگیرها پایدار، بی‌تفاوت یا ناپایدارند؟ (ب) با شروع از یک وضعیت عمود بر میله کار لازم برای قرار گرفتن میله در راستای میدان را محاسبه کنید.

۲۲-۶ یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی p به فاصله d از یک صفحه رسانای نامتناهی قرار گرفته است. این دوقطبی نسبت به عمود بر صفحه به اندازه θ منحرف شده است. با مراجعه به نتایج مثال ۳-۱۳، کار لازم برای جابه‌جایی دوقطبی به فاصله بینهایت بالای صفحه رسانا را تعیین کنید.

۲۳-۶ (الف) کار لازم برای حرکت دادن بار q از بینهایت به فاصله r از مرکز یک کره رسانا (به شعاع b) که توسط یک سیم بدون مقاومت به زمین متصل شده است، چقدر است؟ (ب) آیا به‌عنوان پیامدی از این عمل جریانی در سیم شارش خواهد یافت؟ (ج) اگر کره از زمین منزوی شود و دارای بار $+Q$ باشد کار لازم برای آوردن بار به بالای کره و خارج از آن چقدر است؟ (د) نتایج (الف) و (ج) را با هم مقایسه کنید و اگر اختلافی وجود دارد آن را توضیح دهید.

۲۴-۶ چگالی انرژی ذخیره‌شده در استوانه قطبیده یکنواخت مسئله ۴-۱۹ را تعیین کنید.

پتانسیل‌های صفرو $-V_0$ ولت نگه داشته می‌شوند. با فرض آنکه ولتاژ در خازن توسط $\Phi = -(6\phi/\pi)V_0$ داده می‌شود (مثال ۳-۳)، (الف) چگالی انرژی بین صفحات را محاسبه کنید. (ب) انرژی ذخیره‌شده بین صفحات را به‌ازای $0.6 \text{ m} \leq \rho \leq 1 \text{ m}$ و $0 \leq z \leq 1 \text{ m}$ و $V_0 = -10 \text{ V}$ محاسبه کنید.

۱۶-۶ دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 به فاصله d از یکدیگر قرار دارند (الف) با استفاده از معادله (۲-۶) انرژی ذخیره‌شده در این دستگاه را محاسبه کنید. (ب) با استفاده از معادله (۵۷-۶) محاسبات را تکرار کنید. اختلاف در علامت بین نتایج (الف) و (ب) را توضیح دهید.

۱۷-۶ انرژی ذخیره‌شده در حجم محدود به $0 \leq x, y, z \leq 1 \text{ m}$ را که از پتانسیل $V = 3x^2 + 4y^2$ ناشی می‌شود حساب کنید.

۱۸-۶ پتانسیل ناشی از یک پوسته رسانای کروی به شعاع R با مرکز کره در مبدأ به‌ازای $r \leq R$ برابر است با $V = V_0$ و به‌ازای $r \geq R$ برابر است با $V = V_0 R/r$. (الف) با استفاده از معادله (۸-۶) انرژی الکتریکی ذخیره‌شده در این دستگاه را تعیین کنید. (ب) با استفاده از معادله (۵۷-۶) محاسبات را تکرار و نتایج را با هم مقایسه کنید.

۱۹-۶ دو صفحه فلزی بزرگ تشکیل یک خازن گوه‌ای مسئله ۳-۲ در شکل ۳-۳۱ را می‌دهند. (الف) پتانسیل داخل خازن را تعیین کنید. (ب) چگالی بار و کل بار واقع بر روی صفحات چقدر است؟ (ج) ظرفیت دستگاه چقدر است؟ (د) گشتاور بین صفحات را تعیین کنید. ۲۰-۶ کل نیرو بر واحد سطح وارد بر بره دی‌الکتریک مسئله ۴-۶ را تعیین کنید.



جریانهای پایا

تا کنون الکتریسیته را در شرایط کاملاً ایستا که در آن تمام چگالیهای بار مستقل از زمان بودند بررسی کردیم. فرض کردیم آنچه را که مطالعه می‌کنیم در مورد جهان واقعی در وضعیتی که در آن چگالیهای بار ماکروسکوپی در زمان ثابت‌اند نیز صادق است. نکته‌ای که تا کنون به آن نپرداخته‌ایم این است که توزیع بار ماکروسکوپی مستقل از زمان خود ناشی از توزیع بار میکروسکوپی وابسته به زمان است (الکترونها پیوسته در جنب‌وجوش‌اند). در نتیجه اگر وسیله اندازه‌گیری به اندازه کافی حساس نباشد طبیعت متوسط زمانی-مکانی را به‌گونه‌ای تشکیل می‌دهد که میانگین توزیع بار میکروسکوپی وابسته به زمان، از دیدگاه ماکروسکوپی به صورت ایستا ظاهر شود. وانگهی، میانگینهای زمانی-مکانی میدانهای الکترومغناطیسی میکروسکوپی (که توسط جزءهای بار میکروسکوپی تولید می‌شوند) مشابه میدانهای حاصل از توزیع بار ماکروسکوپی ایستا هستند. میدانهای ماکروسکوپی ایستا با رابطه‌های (۲-۳۳) و (۲-۳۷) به چگالیهای ماکروسکوپی مربوط می‌شوند؛ یعنی

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

اگر توزیع بار میکروسکوپی مورد بحث مستقل از زمان باشد^۱ این روابط کلاسیکی میدانهای میکروسکوپی را نیز توصیف می‌کنند. در این فصل وضعیتی را به اختصار مورد بحث قرار خواهیم داد که در آن، اگرچه بارها در حرکت‌اند، شرایط تا آنجا که به محاسبه میدان

۷-۱ تعریف جریان الکتریکی

محیط رسانا محیطی است که در آن بارها آزادی حرکت دارند. چنین محیطی شامل تعداد خیلی زیادی بار متحرک است. ممکن است نمونه‌های مختلفی از بارهای متحرک در یک محیط معین (الکترونها، حفره‌ها، یونهای مثبت و جز آنها) هم زمان وجود داشته باشند. محیطی را در نظر بگیرید که در آن یک نوع نمونه‌ها حامل بار q باشد. فرض می‌کنیم که سرعت متوسط تعدادی از این نمونه‌ها برابر $\langle \mathbf{v} \rangle$ باشد. از این رو، اگر تعداد این نمونه‌ها در واحد حجم n و N در یک حجم کوچک باشد، داریم

$$\langle \mathbf{v} \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j$$

که در آن \mathbf{v}_j سرعت عضو j ام از این نمونه است. از این رو، $\langle \mathbf{v} \rangle$ سرعت سوق نمونه است و از دید ماکروسکوپی فرض می‌شود که تابع ۱. بحث مفصل حالتی که در آن توزیع بار به صورت میکروسکوپی وابسته به زمان است، از دید روابط بالا مستلزم بررسی کوانتوم مکانیکی است. اگر از دید کوانتومی بارها در حالت پایا باشند آن‌گاه می‌توان توزیع بار را ایستا فرض کرد.

مطالعه خواهیم کرد). جریان همرفت جریانی است که در آن ماده "به طور دسته جمعی" حرکت و بار خالص را نیز با خود حمل می کند. این جریان به طور مستقیم به حرکت ناظر وابسته است، زیرا اگر ناظر با همان سرعت و در همان راستا با بار حرکت کند چگالی بار صفر به نظر می رسد. از این رو، یک تسمه متحرک نارسانا که بار مثبت روی آن "پاشیده" شده باشد جریان الکتریکی همرفت تولید خواهد کرد. یک جرم باردار متحرک از یونهای گاز (آن طور که در شتاب دهنده ذره به کار می رود) نیز جریان الکتریکی همرفت تولید خواهد کرد. بنابراین، جریان همرفت ناشی از حرکت بارهای وابسته به جسم متحرک است که نسبت به ناظر ساکن جابه جا می شود.

جریان رسانش معمولاً با حرکت حاملهای بار در یک محیط خنثی، مثل الکترون در داخل سیم یا یون در داخل محلول، مشخص می شود. در اینجا هیچ حرکت توده ای آشکاری وجود ندارد. مشخصه بارز جریان رسانش، استقلال آن از حرکت ناظر است زیرا حرکت نسبی بارهای مثبت و منفی عامل تولید این جریان است. از این رو اگر سرعت سوق الکترون v باشد، ناظری که با همین سرعت حرکت می کند سوق الکترون را به عنوان جریان به حساب نمی آورد، بلکه این ناظر سرعت سوق بارهای مثبت را در خلاف جهت می بیند و آن را جریان می داند. چون در این حالت چگالی بارهای مثبت و منفی مساوی است، جریان از سرعت (برای سرعتهای غیرنسبیتی) ناظر مستقل است.

جریان قطبش به حرکت بار قطبش وقتی محیط قطبیده می شود وابسته است. چون حرکت بارها مقید است، جریان قطبش پایا وجود ندارد. به راحتی می توان دید که چگالی جریان وابسته به جریان قطبش، از لحاظ ابعادی برحسب آمپر است

$$\mathbf{J}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (۸-۷)$$

که در آن \mathbf{P} قطبش برحسب کولن بر متر مربع و t برحسب ثانیه است. با مراجعه به معادله (۴-۱۶) می بینیم که وقتی توزیع بار با چگالی ρ_+ به اندازه δs نسبت به توزیع بار منفی با چگالی ρ_- جابه جا می شود بار قطبشی $\delta \mathbf{P}$ تولید می شود. بنابراین

$$\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} = \rho_+ \frac{\delta s}{\delta t} \equiv \rho_+ \langle v \rangle_P \equiv \mathbf{J}_P$$

سرانجام، جریان جابه جایی وجود دارد. این نوع جریان در واقع وابسته به حرکت بار نیست بلکه وجود آن برای سازگاری و انسجام نظریه لازم است. این موضوع را در فصل ۱۴ به تفصیل بحث خواهیم

همواری از مکان در محیط باشد. تعداد بارهای این نمونه که در زمان dt از سطح da می گذرند با رابطه زیر داده می شود

$$dI = \frac{dQ}{dt} = qn \langle v \rangle \cdot da \quad (۱-۷)$$

چون $\rho = nq$ مقدار بار مربوط به این نمونه در واحد حجم یا چگالی بار وابسته به آن است، داریم

$$dI \equiv \rho \langle v \rangle \cdot da \quad (۲-۷)$$

اکنون اگر نمونه های مختلفی ($i = ۱, ۲, \dots$) وجود داشته باشند، جریانی متناظر با هر نمونه از سطح da می گذرد. جریان کل برابر جمع جبری جریانهای مربوط به تمام نمونه هاست، یعنی

$$dI = \left[\sum_{\text{تمام نمونه ها}} \rho_i \langle v_i \rangle \right] \cdot da \quad (۳-۷)$$

جمله داخل کروشه در معادله (۳-۷) تعریف چگالی جریان \mathbf{J} است.

$$\mathbf{J} \equiv \sum_{\text{نمونه های } i} \rho_i \langle v_i \rangle \quad (۴-۷)$$

بنابراین

$$dI = \mathbf{J} \cdot da \quad (۵-۷)$$

بدیهی است که اگر فقط یک نمونه حامل بار در محیط رسانا موجود باشد، آن گاه

$$\mathbf{J} = \rho \langle v \rangle = nq \langle v \rangle \quad (۶-۷)$$

سودمندی مفهوم چگالی جریان همانند سودمندی چگالی بار است. چگالی جریان یک تابع (برداری) است و فرض می کنیم که به طور هموار (در مقیاس ماکروسکوپی) در محیط رسانا تغییر می کند. جریان در هر سطح برحسب \mathbf{J} با رابطه زیر داده می شود

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot da \quad (۷-۷)$$

یکاهای \mathbf{J} در سیستم SI، عبارت اند از کولن بر متر مربع بر ثانیه که هم ارز است با آمپر بر متر مربع، یعنی $\text{A} \cdot \text{m}^{-2} \equiv \text{C} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$. در بحث جریان الکتریکی غالباً انواع مختلف جریان، از جریان همرفت گرفته تا جریان رسانش، جریان قطبش، جریان جابه جایی و جز آنها مطالعه می شود. (در فصل بعد "جریان مغناطش" را نیز

به طرف خارج حجم V در نظر گرفته شود. این جریان dQ'/dt از سطح S است. در نتیجه اگر پایداری بار برقرار باشد بار داخل V به میزان $dQ'/dt \equiv -dQ/dt$ در حال افزایش است (یعنی اگر $dQ/dt > 0$ باشد در حال کاهش است)؛ در اینجا Q معرف بار خالص کل داخل V در هر زمان است و به صورت $\int_V \rho dv$ می‌توان آن را نشان داد، آن‌گاه داریم

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv = + \int -\frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

با استفاده از قضیه دیورژانس نتیجه می‌شود

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv$$

و بنابراین

$$\int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv = 0$$

چون این رابطه را برای هر حجم V می‌توان نوشت، بنابراین مقدار زیر انتگرال نیز باید صفر باشد، یعنی

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (9-7)$$

این رابطه معادله پیوستگی نام دارد و یکی از روابط اساسی الکترومغناطیس است که چگالی بار در هر نقطه از فضا را به چگالی جریان در آن نقطه مربوط می‌کند. بر اساس این رابطه بار نه نابود می‌شود و نه به وجود می‌آید.

در حضور مواد دی‌الکتریک، چگالی جریان \mathbf{J} مجموع چگالی جریان خارجی \mathbf{J}_f و چگالی جریان تولیدشده بر اثر حرکت بارهای مقید \mathbf{J}_p است. به همین ترتیب چگالی بار ρ جمع ρ_f و ρ_p است، یعنی

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_p \quad \rho = \rho_f + \rho_p \quad (10-7)$$

همچنان‌که در فصل ۴ گفتیم معمولاً منبعهای خارجی را منبعهای آزاد می‌نامیم بنابراین، شاخص f را برای \mathbf{J}_f و ρ_f به کار می‌بریم. معادله پیوستگی که با رابطه (۹-۷) داده می‌شود اکنون به صورت زیر در می‌آید

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_p + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = 0$$

۱. در واقع ثابت می‌شود که دمای متوسط الکترون در سیم رسانا خیلی بزرگتر از دمای اتاق است. برای مثال نظریه فرمی-دیراک دمای 80000 K را برای مس پیش‌بینی می‌کند که سرعت متوسطی در حدود 14 تا 15 برابر سرعت تخمین زده شده در بالاست. کتاب زیر را ببینید.

F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics* (New York: McGraw-Hill, 1965), McGraw-Hill.

کرد. چگالی جریان وابسته به جریان جابه‌جایی عبارت است از

$$\mathbf{J}_E \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

که اگر میدانهای ایستا مورد بحث باشند، آن‌گاه $\mathbf{J}_E = 0$ است زیرا $\partial \mathbf{E} / \partial t = 0$.

مثال ۱-۷ سرعت سوق در سیمها

حال با بزرگی نوعی $\langle v \rangle$ در یک سیم رسانا آشنا می‌شویم. به طور کلی خواهیم دید که جریان در سیمهای فلزی در مقایسه با سرعت واقعی الکترونها در فلز خیلی کوچک است. سیمی با مقطع مربع به سطح 10^{-6} متر مربع ($1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$) را که حامل جریان یک آمپر است در نظر می‌گیریم. اگر چگالی جریان در راستای سیم و یکنواخت فرض شود آن‌گاه $J \equiv |\mathbf{J}| = 1 \text{ A} / 10^{-6} \text{ m}^2 = 10^6 \text{ A/m}^2$. جریان در سیم عموماً توسط الکترونها که حامل بار $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ هستند برقرار می‌شود. برای هر اتم سیم فلزی تقریباً یک الکترون از این نوع وجود دارد و این الکترون طوری در سیم توزیع شده است که چگالی بار واقعی صفر باشد. در نتیجه، بر اساس معادله (۶-۷) تعداد $n \approx 10^{24}$ الکترون بر سانتیمتر مکعب و $n = 10^{28}$ الکترون بر متر مکعب وجود دارد و $\rho = ne \approx 10^{28} \times 1.6 \times 10^{-19} \approx 1.6 \times 10^9 \text{ C/m}^3$. بنابراین

$$|\langle v \rangle| = \frac{J}{\rho} \approx \frac{10^6}{1.6 \times 10^9} \approx 6 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

این یک سرعت نسبتاً کوچک در مقایسه با سرعت واقعی الکترون است که می‌توان آن را از فرمول زیر تخمین زد

$$\frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} m_e v^2$$

که در آن k ثابت بولتزمن، m_e جرم الکترون و T دمای مطلق برحسب کلوین است. در دمای اتاق $v \approx 10^5 \text{ m/s}$. بنابراین $|\langle v \rangle| \ll v$. جهت سرعت الکترونها در فضا اساساً به صورت کاتوره‌ای است و بنابراین متوسط آنها تقریباً صفر است. ■

۲-۷ معادله پیوستگی: پایداری موضعی بار

پایداری موضعی بار به معنی این است که اگر بار خالصی حجم V ، محدود به سطح بسته S ، را ترک کند آن‌گاه بار داخل حجم به همان اندازه کم می‌شود. اکنون می‌گوییم که انتگرال، $\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ بار خروجی حجم V از سطح در واحد زمان است به شرط آنکه $d\mathbf{a}$

اکنون می‌توان فهمید که اگر در هر جا از ماده، چگالی جریان با میدان الکتریکی متناسب باشد آن‌گاه می‌توان قانون اهم را به صورت بیان شده به دست آورد. در واقع خود رابطه

$$\mathbf{J} = \sigma_c \mathbf{E} \quad (۱۳-۷)$$

را اغلب (شکل دیفرانسیلی) قانون اهم می‌نامند که در آن σ_c رسانندگی الکتریکی ماده است. وارون آن، یعنی $\rho_c = 1/\sigma_c$ ، را مقاومت ویژه می‌گویند. اگر محیط رسانا "اهمی" باشد [یعنی اگر معادله (۱۳-۷) برقرار باشد] و در طول مسیر جریان، سطح مقطع ثابت A و نیز طول ثابت l کاملاً تعریف شده باشد (مثل سیم راست)، آن‌گاه چگالی جریان \mathbf{J} (و \mathbf{E}) در محیط ثابت‌اند (مثال ۷-۲ را ببینید)، و جریان برابر $I = JA = \sigma_c EA = \sigma_c (V/l)A$ است. بنابراین، $V = (l/\sigma_c A)I$ و مقاومت عبارت است از

$$R = \frac{l}{\sigma_c A} \quad (۱۴-۷)$$

رسانندگی الکتریکی یک ماده به ساختار اتمی و حالت ترمودینامیکی آن وابسته است. این رسانندگی تابعی از دمای ماده، چگالی، درجه خلوص و جز آن است. برای بعضی مواد بلورین رابطه بین چگالی جریان و میدان الکتریکی به شکل یک تناسب ساده که با یک عدد تنه‌ای (زده‌ای) σ_c نمایش دادنی باشد نیست، بلکه یک رابطه تانسوری است، زیرا وابسته به جهت میدان \mathbf{E} به‌کار رفته است. همچنین σ_c ممکن است، بخصوص در گازها، خودش به E وابسته باشد، به‌گونه‌ای که رابطه بین J و E تناسبی (خطی) نیست. این‌گونه وابستگی غیرخطی در بیشتر مواد در اندازه‌های به‌حد کافی بزرگ E آشکار می‌شود.

با وجود این، تحت شرایط معمولی بیشتر مایعات و تعداد زیادی از جامدات توسط رسانندگی الکتریکی (که در کتابهای مرجع یافت می‌شوند) قابل تشخیص هستند. اختلاف رسانندگی مواد مختلف ممکن است زیاد باشد. رسانندگی یک رسانای فلزی در حدود 10^5 تا $10^8 \Omega^{-1}/m$ است در حالی که رسانندگی یک عایق (یا رسانای خیلی ضعیف) در حدود 10^{22} بارکمتراست. در جدول ۷-۱ رسانندگی مواد معمولی آمده است. رسانندگی ابررساناها، اساساً، در دماهای حدود چند درجه کلوین بینهایت است. در فلزات در حالت کلی، معمولاً رسانندگی با افزایش دما کم می‌شود. در واقع، مقاومت ویژه حدود 4° درصد بر درجه سلسیوس در دماهای اتاق تغییر می‌کند. در نیمرساناها، مثل ژرمانیم و سیلیسیم و در بیشتر دی‌الکتریهای جامد،

اما از معادله (۸-۷) $\mathbf{J}_p = \partial \mathbf{P} / \partial t$ و از معادله (۱۳-۴) $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ را داریم، از این رو

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J}_p + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} &= \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

بنابراین رابطه پیوستگی که با معادله (۹-۷) داده می‌شود هم‌ارز است با

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \quad \text{و} \quad \nabla \cdot \mathbf{J}_p + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = 0 \quad (۱۱-۷)$$

اگر در همه جا $\partial \rho / \partial t = 0$ باشد تمام چگالیهای بار نسبت به زمان ثابت‌اند، و

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \text{برای جریان پایا} \quad (۱۲-۷)$$

این نتیجه شرط جریانهای پایا است. واضح است که اگر $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ باشد آن‌گاه $\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ برای تمام سطوح (بسته) ممکن صفر است. یعنی، جریان خالص ورودی به (یا خروجی از) هر سطح بسته صفر است. به این ترتیب بار در هیچ جا نمی‌تواند تجمع کند و بنابراین "خطوط چگالی جریان" پیوسته‌اند.

۷-۳ قانون اهم

در اغلب محیطهای رسانا (اما نه همه) بین اختلاف پتانسیل دو مرز یک محیط و جریان (ثابت) بین آنها، یک رابطه خطی ساده وجود دارد که معمولاً قانون اهم نامیده می‌شود:

$$V = RI$$

که در آن R یک ثابت با ابعاد ولت بر آمپر \equiv اهم است. در مواد "اهمی" (خطی) R به ترکیب ماده و شکل هندسی بین دو "الکتروُد" (مرزهای هم‌پتانسیل) بستگی دارد. کمیت V ، "افت ولتاژ" بین الکتروودها و I جریان در جهت افت ولتاژ است. در محیط الکتروستاتیک خالص، افت ولتاژ صرفاً همان افت پتانسیل است. به عبارت دیگر، گاهی تناسب بیان شده در بالا را به صورت زیر می‌نویسیم

$$I = \frac{1}{R} V = GV$$

که در آن G رسانایی است.

جدول ۱-۷ جدول رسانندگی در دمای تقریبی اتاق

ماده	رسانندگی ^۱	ماده	رسانندگی
نقره	6.2×10^7	آب، H_2O	2×10^{-4}
مس	5.8×10^7	سنگ مرمر	10^{-5}
آهن خالص	1.0×10^7	چوب	10^{-9}
فولاد	0.2×10^7	شیشه	10^{-11}
جیوه	10^6	روغن	10^{-14}
کربن	10^4	پلی اتیلن	10^{-15}
سیلیکان	10^{-2}	کوارتز گداخته	10^{-17}
الکل	3×10^{-4}	خلاً واقعی	؟

۱. رسانندگی برحسب $(\text{اهم-متر})^{-1}$ یا $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ بیان شده است.

که در آن بعد کسر ϵ_0/σ_c بعد زمان است و آن را زمان واهلش بار می نامیم. در چنین زمانی چگالی بار به $1/e$ مقدار اولیه خود کاهش می یابد. حتی برای رسانای نسبتاً ضعیفی مثل آهن، $(\epsilon_0/\sigma_c) \approx 10^{-18} \text{s}$ است. (برای آب، $\epsilon_0/\sigma_c \approx 10^{-8} \text{s}$ ، برای شیشه $2 \text{s} \approx \epsilon_0/\sigma_c$). بنابراین، برای رساناهای فلزی، بجز برای حالتی که بار به طور پیوسته به رسانا تزریق شود، چگالی بار، حتی وقتی سریعترین میدانهای الکتریکی متغیر (بسامدهای از مرتبه 10^{12} هرتز) در اطراف رسانا وجود داشته باشند، صفر است.

۴-۷ جریانهای پایا

۱-۴-۷ معادله های حاکم بر \mathbf{J}

بردار چگالی جریان \mathbf{J} از یک میدان برداری تشکیل یافته است که ممکن است از یک نقطه ماده به نقطه دیگر آن (به طور میکروسکوپی) تغییر کند. در یک ابررسانا، \mathbf{J} تنها در صورت $\mathbf{E} = 0$ می تواند متناهی باشد. در یک عایق کامل، \mathbf{J} بر اساس تعریف صفر که در آن است. در این بحث، برای یک ماده معین فرض می کنیم $\mathbf{J} = \sigma_c \mathbf{E}$. \mathbf{J} یک تابع برداری است. اگر دیورژانس و تاو این تابع در یک ناحیه مشخص باشد و اگر شرایط مرزی مناسبی در سطوح آن ناحیه معلوم باشند، این تابع به صورت کامل و منحصر به فردی تعیین می شود.

برای میدانهای الکتروستاتیک، چه جریان پایا در آن جاری باشد چه نباشد، روابط (۲-۳۳) و (۲-۳۷) یعنی $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ و $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ برقرار است. میدان الکتریکی هنوز پایستار است، قانون گاوس هنوز معتبر است و کوشش می کنیم، درست به همان روش قبلی، \mathbf{E} را پیدا کنیم. با معلوم شدن \mathbf{E} ، به کمک قانون اهم \mathbf{J} را به راحتی به دست می آوریم.

فقط مواد اهمی را در نظر خواهیم گرفت و معادله های جریانهای پایا را در داخل چنین موادی به دست می آوریم. در واقع، روابط برای \mathbf{E} را می توان به معادله برای \mathbf{J} تبدیل کرد. اگر در معادلات تاو و دیورژانس

$$\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma_c, \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \rightarrow \nabla \times \frac{\mathbf{J}}{\sigma_c} = 0 \quad (18-7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \nabla \cdot \frac{\mathbf{J}}{\sigma_c} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (19-7)$$

روابط انتگرالی متناظر با معادله های (۱۸-۷) و (۱۹-۷) به صورت زیر

در می آیند

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = 0 \rightarrow \oint \frac{\mathbf{J}}{\sigma_c} \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad (20-7)$$

عکس این گفته درست است؛ یعنی، رسانندگی با افزایش دما زیاد می شود. این اختلاف رفتار به روش انتقال بار در مواد وابسته و کاملاً به فیزیک حالت جامد مربوط است.

یک نکته جالب توجه، دانستن زمان لازم برای انتقال بار فرضی داخل یک رسانا به سطح آن و در نتیجه بی بار شدن درون رساناست. این زمان مشخصه را زمان واهلش [معادله (۷-۱۷) را ببینید] می نامیم. در زمانی قابل مقایسه با زمان واهلش ممکن است در داخل رسانا چگالی بار غیرصفر وجود داشته باشد. در زمانهای خیلی بزرگتر از زمان واهلش باری که در ابتدا وجود داشته است، خنثی خواهد شد. (فرض می کنیم میدانهای الکتریکی ناشی از بارهایی غیر از بار خودرسانا در طول زمان ثابت اند یا با مشخصه زمانی خیلی بزرگتر از زمان واهلش تغییر می کنند). از این رو، با فرض قراردادن رسانا در میدان الکتروستاتیک خارجی در زمان صفر، زمانی از مرتبه زمان واهلش قبل از حضور بار در سطح رسانا سپری خواهد شد، تا میدان خارجی در تمام نقاط درون رسانا از بین برود. در هر رسانا $\mathbf{J} = \sigma_c \mathbf{E}$. با فرض ثابت بودن σ_c در درون رسانا معادله پیوستگی به صورت زیر در می آید

$$\sigma_c \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (15-7)$$

بنابراین، چون $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ از معادله (۱۵-۷) رابطه ساده زیر به دست می آید

$$\frac{\sigma_c}{\epsilon_0} \rho = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (16-7)$$

این معادله دیفرانسیل مرتبه اول است که جوابی به صورت زیر دارد

$$\rho(t) = \rho(0) e^{-t/(\epsilon_0/\sigma_c)} \quad (17-7)$$

که در آن J_{it} مؤلفهٔ مماسی چگالی جریان در محیط نام است. این نتیجه را می‌توان از انتگرال خطی \mathbf{J} ، معادلهٔ (۷-۲۰) با استفاده از روش به‌کار رفته در فصل ۴ برای تعیین شرایط مرزی پذیرفتنی برای \mathbf{E} نیز به‌دست آورد. یعنی

$$\oint \frac{\mathbf{J}}{\sigma_c} \cdot d\mathbf{x} = 0 \rightarrow \frac{J_{1t}}{\sigma_{c1}} = \frac{J_{2t}}{\sigma_{c2}} \quad (24-7)'$$

اکنون شرط مرزی بیان شده در معادلهٔ (۷-۲۳) را در ارتباط نزدیکتر با خواص دی‌الکتریک مواد رسانا بررسی می‌کنیم. چون $\mathbf{J} = \sigma_c \mathbf{E}$ ، آن‌گاه معادلهٔ (۷-۲۳) ایجاب می‌کند که مؤلفه‌های قائم میدان الکتریکی در فصل مشترک با رابطهٔ زیر به هم مربوط شوند

$$\sigma_{c1} E_{1n} = \sigma_{c2} E_{2n} \quad (25-7)$$

اگر دو محیط گذردهیهای ϵ_1 و ϵ_2 داشته باشند، آن‌گاه قانون گاوس در دی‌الکتریکها ایجاب می‌کند که بردارهای جابه‌جایی در محیط با رابطهٔ $D_{1n} - D_{2n} = \sigma_f$ یا برحسب میدانهای الکتریکی متناظر، رابطهٔ زیر، به هم مربوط شوند

$$\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma_f \quad (26-7)$$

که در آن σ_f چگالی بار سطحی آزاد روی مرز است. روابط (۷-۲۵) و (۷-۲۶) در حالی که میدانها فیزیکی هستند باید با هم سازگار باشند. به بیان دیگر، در بزرگی σ_f که یک می‌توان در فصل مشترک قرار بگیرد یک محدودیت وجود دارد. با به‌دست آوردن σ_f می‌بینیم که این کمیت به گذردهیها، رسانندگیهای محیط و بزرگی جریان براساس رابطهٔ زیر وابسته است

$$\sigma_f = J_n \left(\frac{\epsilon_2}{\sigma_{c2}} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_{c1}} \right) \quad (27-7)$$

از معادلهٔ (۷-۲۷) آشکار است که در بحث مسائل با شرایط مرزی که شامل دی‌الکتریکها و خواص رسانشی است باید خیلی دقت کرد (مثال ۷-۴ را ببینید). این مسئله باید از لحاظ جریانها بحث شود، و شرایط مرزی صحیح همان شرایط مرزی مربوط به جریانهاست [روابط (۷-۲۳) و (۷-۲۴) را ببینید]. اکنون برخی موارد ویژهٔ معادلهٔ (۷-۲۷) را بررسی می‌کنیم. اگر $\epsilon_2/\epsilon_1 = \sigma_{c2}/\sigma_{c1}$ باشد بار آزاد در فصل مشترک وجود ندارد و برعکس. اگر این گفته صادق نباشد (که عموماً چنین است) یک چگالی بار آزاد باید در آنجا وجود داشته باشد. در حالی که رسانندگی یک محیط خیلی بهتر از رسانندگی محیط

و

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \oint_S \frac{\mathbf{J}}{\sigma_c} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (21-7)$$

که در آن Q بار خالص درون حجم V است که سطح (بستهٔ) آن S است. اگر σ_c ثابت باشد

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{J}}{\sigma_c} = \frac{1}{\sigma_c} (\nabla \cdot \mathbf{J}) = 0$$

که با توجه به آن در درون محیط $\rho = 0$ است. این نتیجه با بحث مربوط به زمانهای واهلش سازگار است. [اگر σ_c خود تابع مکان باشد، شرط پیوستگی $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ است، یعنی $\nabla \cdot (\mathbf{J}/\sigma_c) = \rho/\epsilon_0$. این نتیجه نشان می‌دهد که در حالت کلی چگالی بار در این‌گونه محیطها صفر نیست].

در این فصل فقط محیطی را بررسی می‌کنیم که رسانندگی آن ثابت است؛ یعنی، مواد همگن هستند. در این صورت روابط (۷-۱۸) تا (۷-۲۱)، در حالتی که σ_c ثابت باشد، برای \mathbf{J} در درون محیط به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \\ \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0 \end{array} \right\} \text{ و } \left. \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{J} = 0 \\ \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{r} = 0 \end{array} \right\} \quad (22-7)$$

انتگرال سطحی $\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0$ را می‌توان قانون گاوس برای جریان نامید.

۷-۴-۲ شرایط مرزی

اگر سطوح یا انتگرالهای خطی مرزهای محیطهای مختلف را قطع کنند، آن‌گاه روابط (۷-۲۰) و (۷-۲۱) کاملاً مناسب‌اند. زیرا در مورد جریانهای پایا $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ و در نتیجه $\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0$ است. با استفاده از روش به‌کار رفته در فصل ۴ برای تعیین شرایط مرزی پذیرفتنی در مورد بردار جابه‌جایی \mathbf{D} ، به‌دست می‌آوریم

$$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0 \rightarrow J_{1n} = J_{2n} \quad (23-7)$$

که در آن J_{in} مؤلفهٔ عمودی چگالی جریان در محیط نام است. شرط مرزی روی مؤلفه‌های مماسی \mathbf{J} به‌طور مستقیم از شرط مربوط به مؤلفه‌های مماسی میدان الکتریکی به‌دست می‌آید. یعنی شرط $\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}$ به همراه $\mathbf{J} = \sigma_c \mathbf{E}$ ایجاب می‌کند که

$$\frac{J_{1t}}{\sigma_{c1}} = \frac{J_{2t}}{\sigma_{c2}} \quad (24-7)$$

دیگر باشد ($\sigma_{c2} \ll \sigma_{c1}$) شرایط مرزی به صورت زیر در می آید

$$J_{2t} = \frac{\sigma_{c2}}{\sigma_{c1}} J_{1t} \quad \text{و} \quad J_{2n} = J_{1n}$$

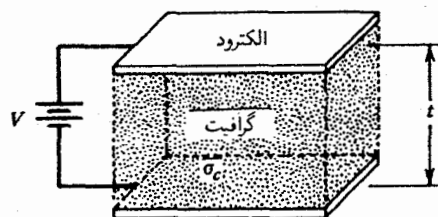
یعنی اگر J_{1t} در فصل مشترک محدود باشد آنگاه $J_{2t} \rightarrow 0$ و $J_2 = J_{2n}$. این نتیجه به طور ضمنی بیان می کند که میدان الکتریکی در خارج رسانای بهتر تقریباً بر سطح آن عمود است و نیز مؤلفه عمودی میدان در محیط ۲ خیلی بزرگتر از مقدار آن در محیط ۱ است. الکتروود معمولاً یک رسانا در نظر گرفته می شود که رسانندگی آن نسبت به محیطی که در آن قرار گرفته است بسیار بزرگتر است. بنابراین، میدان الکتریکی در داخل الکتروود خیلی کوچک و در خارج بر سطح آن عمود است.

مثال ۲-۷ مقاومت های کربنی

مقاومت شکل ۱-۲ را در نظر می گیریم. بین دو الکتروود آلومینیمی یک قطعه گرافیت به ضخامت t قرار دارد. محیط اطراف هواست. رسانندگی های آلومینیم، گرافیت و هوا به ترتیب $10^7 \times 3.5$ ، 10^4 ، $10^{-12} (\Omega \cdot m)^{-1}$ است. چون رسانندگی هوا خیلی کم است، اساساً حامل جریان نیست. بنابراین با فرض وجود اختلاف پتانسیل بین دو صفحه آلومینیمی، جریان فقط از گرافیت عبور خواهد کرد. اکنون به واقعیتهای زیر توجه می کنیم:

۱. صفحه های آلومینیمی (الکتروودها) اساساً نواحی هم پتانسیل هستند و رسانندگی آلومینیم در مقایسه با رسانندگی کربن آنقدر بزرگ است که E بر صفحات در سطوح عمود خواهد بود.
۲. در سطوح هوا-گرافیت، J موازی سطح است زیرا هوا در اصل یک نارساناست و J_n در آن صفر است. همچنین نتیجه می گیریم که E بر این سطوح درست در داخل محیط مماس است.

این شرایط حاکی از آن است که E در کل قطعه کربن ثابت و جهت آن از الکتروود با پتانسیل بزرگتر به سمت الکتروود با پتانسیل کوچکتر است. این بدان دلیل است که شرایط مرزی (۱) و (۲) در



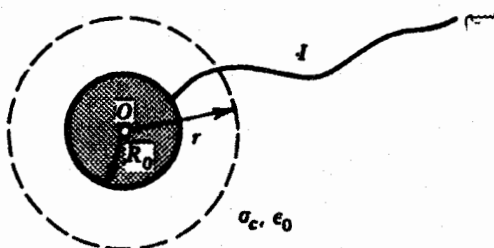
شکل ۱-۷ نمودار طرحوار مقاومت کربنی.

چنین میدانی برآورده می شوند و روابط $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0 = 0$ و $\nabla \times E = 0$ در همه جای قطعه صادق هستند. یکتا بودن جواب، ثابت بودن E را مشخص می کند.

گفتنی است که بدون قطعه کربن، میدان بین الکتروودها یکنواخت نیست و اگر سطح صفحه ها کوچک باشد اثرهای لبه چشمگیر است. برای اینکه میدان یکنواخت شود، وقتی قطعه کربن بین دو صفحه قرار می گیرد، بار در ابتدا به سطوح قطعه جاری می شود. چون بار به قطعه محدود می شود چگالی بار در سطح آن به گونه ای تشکیل می شود که میدان الکتریکی داخل را چنان تغییر دهد که در همه جای قطعه ثابت بماند. استدلالهای مشابه نشان می دهد که چگالی جریان در سیمهای معمولی یکنواخت و میدان الکتریکی ثابت است. با این همه در سطح این سیستمها مقداری بار وجود دارد. چون اختلاف پتانسیل بین یک انتها و انتهای دیگر سیم معمولاً کوچک است، متناظر با آن بار روی سیمها هم کوچک خواهد بود. ■

مثال ۳-۷ قانون گاوس در مورد جریان — کره در محیط رسانا فرض کنید جریان پایای I به کره ای که با یک محیط نامتناهی به رسانندگی σ_c و گذردهی ϵ_0 احاطه شده است وارد می شود. جریان I از طریق یک سیم نازک به کره وارد و پس از رسیدن به حالت پایا، از طریق محیط اطراف، مطابق شکل ۲-۷ از آن خارج می شود. رسانندگی کره نسبت به σ_c خیلی بزرگ است.

در اینجا کره اساساً یک ناحیه هم پتانسیل است. اگر عدم تقارن حاصل از وجود سیم I را نادیده بگیریم، می توان گفت که بار ایجاد شده



شکل ۲-۷ کاربرد قانون گاوس در مورد جریان شارش یافته در کره ای با رسانندگی بزرگ واقع در یک محیط رسانا.

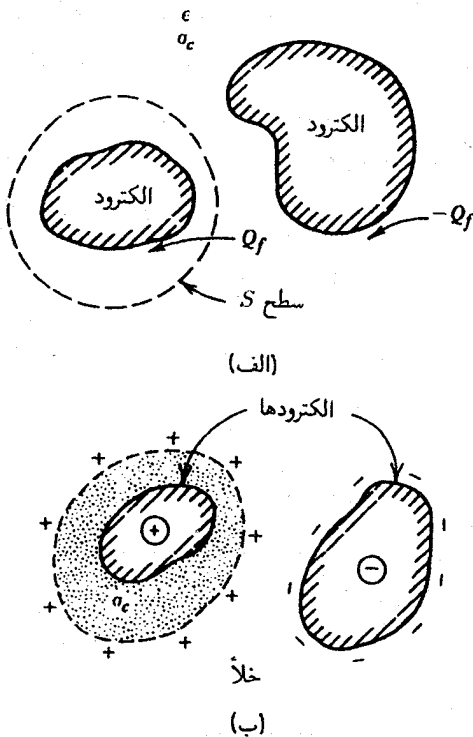
۱. این یک نتیجه تجربی است که فرض می شود جریان درون سیم تحت تأثیر میدانهای مغناطیسی درون سیم قرار نمی گیرد. اگر رسانندگی به میدان مغناطیسی وابسته باشد آنگاه چگالی جریان ثابت نیست.
۲. به اندازه کافی نازک فرض می شود به گونه ای که بار روی آن و حجم اشغال شده توسط آن قابل چشمپوشی است.

ظرفیت کره برابر است با $4\pi\epsilon_0 R_0 = (Q/V)$ که همان معادله (۲۸-۶) است. علاوه بر این، حاصلضرب مقاومت در ظرفیت دستگاه برابر است با

$$RC = \frac{1}{4\pi\sigma_c R_0} 4\pi\epsilon_0 R_0 = \frac{\epsilon_0}{\sigma_c} \quad (۳۳-۷)$$

در مثال قبل رابطه ویژه‌ای بین ظرفیت و مقاومت میان الکترودها، که با محیطی به رسانندگی σ_c و گذردهی ϵ_0 از هم جدا می‌شوند، یعنی معادله (۳۳-۷) به دست آمد. در واقع این رابطه یک نتیجه عام است. دو الکتروده که اختلاف پتانسیل بین آنها V و بارهای آنها Q_f است را مطابق شکل ۳-۷ (الف) در نظر می‌گیریم. گذردهی و رسانندگی محیط بین آنها، ϵ_0 و σ_c ، ثابت است و فرض می‌کنیم که این دو مشخص‌کننده محیط در تمام نقاط سطح S هستند. فرض می‌کنیم تنها بار آزاد داخل S همان چیزی است که بر روی الکترودها می‌نشیند. با استفاده از تعاریف مقاومت و ظرفیت دستگاه $R = V/I$ ، $C = Q_f/V$ ، که در آن I جریان کل بین الکترودهاست) داریم

$$RC = \frac{V}{I} \frac{Q_f}{V} = \frac{Q_f}{I} \quad (۳۴-۷)$$



شکل ۳-۷ دو الکتروده که با یک محیط رسانا از هم جدا می‌شوند. (الف) ماده یکنواخت، (ب) ماده نایکونواخت.

روی کره متقارن است و باعث می‌شود که میدان الکتریکی تقارن کروی داشته باشد و توزیع چگالی جریان نیز متقارن باشد. برای یک سطح کروی در $r > R_0$ ، داریم $\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_w \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \int_o \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0$ ، که در آن شاخصهای w و o به ترتیب مربوط به سیم و سطح کروی هستند. بنابراین

$$\int_o \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = - \int_w \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = I$$

به خاطر تقارن کروی، \mathbf{J} شعاعی و تنها به r وابسته است. بنابراین

$$\int_o \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi r^2 J = I \quad \text{یا} \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

میدان الکتریکی در محیط را می‌توانیم با استفاده از $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r})/\sigma_c$ حساب کنیم. بنابراین

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi\sigma_c r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (۲۸-۷)$$

اما میدان الکتریکی داخل کره، صفر است زیرا کره یک رسانای بسیار خوب است. پتانسیل کره، V ، برحسب جریان را می‌توان با استفاده از روابط (۲۸-۷) و (۴۲-۲) حساب کرد

$$V = - \int_{\infty}^{R_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{I}{4\pi\sigma_c R_0} \quad (۲۹-۷)$$

مقاومت دستگاه کره-محیط، $R = V/I$ ، برابر است با

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma_c R_0} \quad (۳۰-۷)$$

ظرفیت یک کره رسانا به شعاع R_0 واقع در خلأ را در بخش ۴-۶-۱ حساب کردیم. اگر ϵ_0 را گذردهی محیط رسانای دربرگیرنده کره در نظر بگیریم، آنگاه ظرفیت با معادله (۲۸-۶)، $C = 4\pi\epsilon_0 R_0$ ، داده می‌شود. اما آموخته‌ایم که دوباره ظرفیت دستگاه را برحسب مثال حاضر پیدا کنیم. چون در داخل کره $\mathbf{E} = 0$ ، آنگاه چگالی بار روی کره درست برابر $\sigma = \epsilon_0 E(r \rightarrow R_0)$ است. با استفاده از معادله (۲۸-۷) به دست می‌آوریم

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 I}{4\pi\sigma_c R_0^2} \quad (۳۱-۷)$$

بارکل روی کره برابر با $Q = 4\pi R_0^2 \sigma = \epsilon_0 I/\sigma_c$ است. پتانسیل کره را می‌توان برحسب بارکل نوشت

$$V \equiv - \int_{\infty}^{R_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{I}{4\pi\sigma_c R_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} \quad (۳۲-۷)$$

این رابطه صحیح نیست. [به معادله (۷-۲۶) و بحث زیر آن توجه کنید]. به جای آن باید بگوییم که $\sigma_f = D_2 - D_1 = \epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1$ همچنین چون σ_f در فصل مشترک وجود دارد، شرط مرزی عمودی صحیح روی J معادله (۷-۲۳) را می‌دهد. به بیان دیگر

$$J_1 = J_2 \quad \text{یا} \quad \sigma_{c1} E_1 = \sigma_{c2} E_2$$

این معادله و معادله V مقدارهای E_1 و E_2 را به صورت زیر به دست می‌دهند

$$E_1 = \frac{\sigma_{c2} V}{\sigma_{c2} t_1 + \sigma_{c1} t_2} \quad E_2 = \frac{\sigma_{c1} V}{\sigma_{c2} t_1 + \sigma_{c1} t_2}$$

می‌بینیم اگر $\sigma_{c1} \rightarrow \infty$ داریم $E_2 \rightarrow 0$ و $E_1 \rightarrow V/t_1$ ، یعنی مقداری که برای خازن مسطح با فاصله صفحه‌های t_1 به دست می‌آوریم. بار آزاد روی فصل مشترک از رابطه $\sigma_f = \epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1$ به دست می‌آید یعنی

$$\sigma_f = \frac{\epsilon_2 \sigma_{c1} - \epsilon_1 \sigma_{c2}}{\sigma_{c2} t_1 + \sigma_{c1} t_2} V$$

اختلاف چگالی بارهای آزاد روی دو صفحه درست برابر این مقدار است.

مقاومت بر متر مربع مقدار ثابتی است که با معادله (۷-۱۲)، یا رابطه زیر داده می‌شود

$$R \equiv \frac{V}{JA} = \frac{V}{\sigma_{c1} E_1 A} = \frac{V}{\sigma_{c2} E_2 A} = \frac{\sigma_{c2} t_1 + \sigma_{c1} t_2}{\sigma_{c1} \sigma_{c2} A}$$

برحسب مقاومتها می‌توان گفت که این پیکربندی هم‌ارز با دو مقاومت سری است.

مثال ۷-۵ یک کره شناور در یک محیط رسانای نایکناخت - قانون گاوس

در این مثال یک مدل مدار الکتریکی ساده متصل به زمین با الکتروند کرووی را بررسی می‌کنیم. دستگاه، مطابق شکل ۷-۵، از یک کره رسانای کامل به شعاع a که نصف آن در تماس با زمین است تشکیل شده است. رسانندگی لایه‌ای از زمین به شعاع b که در تماس مستقیم با کره است برابر σ_{c2} و رسانندگی باقیمانده زمین برابر σ_{c1} است. با فرض اینکه جهت جریانها از کره به طرف زمین است، در این صورت چگالی جریان را در ناحیه ۲ با معادله (۷-۷) به دست می‌آوریم، یعنی

$$\int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \hat{n} da = I$$

با استفاده از قانون گاوس [معادله (۴-۴۰)] و تعریف جریان برحسب J [معادله (۷-۷)] به دست می‌آوریم

$$RC = \frac{Q_f}{I} = \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a}}{\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}} \quad (۷-۲۵)$$

با قراردادن $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ و $\mathbf{J} = \sigma_c \mathbf{E}$ در این کسر نتیجه می‌شود

$$RC = \frac{\epsilon}{\sigma_c} \quad (۷-۳۶)$$

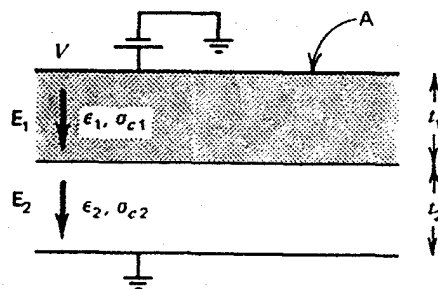
گاهی اتفاق می‌افتد که محیط بین الکترودها، مطابق شکل ۷-۳(ب) نایکناخت است. برای مثال، در این شکل، یک قطب در خلأ و قطب دیگر در محیطی با رسانندگی متناهی قرار دارد. در حالت کلی، بار در فصل مشترک دو محیط جمع می‌شود، بنابراین باری که ظرفیت را تعریف می‌کند، ممکن است Q_f نباشد. در این مورد، تحت شرایط جریان پایا بیشتر بارهای آزاد به فصل مشترک خلأ می‌روند و بنابراین توصیف ظرفیت میان دو الکتروند اولیه مفهوم چندانی ندارد (دو مثال زیر را ببینید).

مثال ۷-۴ صفحه‌های موازی با محیط نایکناخت شکل ۷-۴ را که صفحه‌های آن موازی است در نظر می‌گیریم. بین دو الکتروند دو محیط با ثابتهای به ترتیب ϵ_1 و ϵ_2 ، σ_{c1} و σ_{c2} قرار دارد. می‌خواهیم مقاومت این دستگاه را پیدا کنیم.

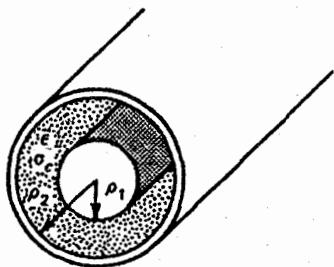
فرض کنید اختلاف پتانسیل بین دو صفحه برابر V است. انتظار می‌رود که میدانهای E_1 و E_2 و جریانهای J_1 و J_2 بر صفحه‌ها و بر فصل مشترک عمود بوده و در هر ماده ثابت باشند. آن‌گاه با استفاده از $V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ ، به دست می‌آوریم

$$V = E_1 t_1 + E_2 t_2$$

ممکن است این پندار پیش بیاید که می‌توان قرارداد $D_1 = D_2$. اما چون در حالت کلی بار آزاد σ_f در فصل مشترک بین دو محیط جمع می‌شود،



شکل ۷-۴ خازن با صفحه‌های موازی که با محیط نایکناخت پر شده است.



شکل ۶-۷ خط هم محور پر شده با ماده رسانا.

$E = (\lambda/2\pi\epsilon\rho)\hat{\rho}$ را به دست می آوریم. اختلاف پتانسیل بین ρ_1 و ρ_2 با استفاده از معادله (۴۲-۲) محاسبه می شود

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ظرفیت خط بر واحد طول، C_1 ، برابر با λ/V است. بنابراین رابطه $RC = \epsilon/\sigma_c$ نتیجه می دهد

$$R = \frac{\epsilon}{\sigma_c} \cdot \frac{1}{C} = \frac{1}{2\pi\sigma_c l} \cdot \frac{1}{\ln(\rho_2/\rho_1)}$$

که در آن l طول خط است. این مقاومت (نشت) خط است. ■

۳-۴-۷ مسائل با شرط مرزی

اکنون نشان می دهیم که مسائل با شرایط مرزی جریانهای پایا در محیطهای رسانا را می توان به روش مشابه مسائل الکتروستاتیک حل کرد. در شرایط پایا، آهنگ تغییر توزیع بار نسبت به زمان صفر است. بنابراین، معادله بیوستگی، که قانون پایستگی بار را بیان می کند، به صورت زیر در می آید

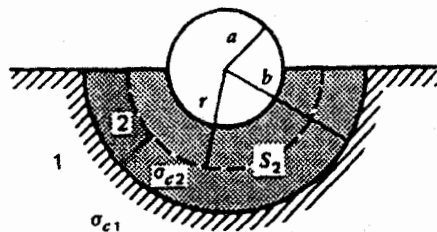
$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad [12-7]$$

برای محیطهای اهمی، چگالی جریان متناسب با میدان الکتریکی کل است، یعنی جمع میدان الکتریکی \mathbf{E} و میدان الکتریکی خارجی \mathbf{E}_c ، که ممکن است شامل اثرهای غیرالکتریکی [نیروهای محرکه الکتریکی (emf)]، به بخش ۸-۷ نگاه کنید] باشد، یعنی:

$$\mathbf{J} = \sigma_c(\mathbf{E} + \mathbf{E}_c) \quad (37-7)$$

چگالی جریان \mathbf{J} و میدان الکتریکی \mathbf{E} را می توان به کمک پتانسیل زده ای مطابق معادله (۳۶-۲)، $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ، توصیف کرد. با قراردادن روابط (۳۷-۷) و (۳۶-۲) در معادله (۱۲-۷) به دست می آوریم

$$\nabla \cdot (\sigma_c \nabla \Phi) = \nabla \cdot (\sigma_c \mathbf{E}_c) = \sigma_c \nabla^2 \Phi + (\nabla \sigma_c) \cdot \nabla \Phi \quad (38-7)$$



شکل ۵-۷ کاربرد قانون گاوس در مورد جریان عبوری از یک کره با رسانندگی بسیار خوب که بخشی از آن در یک محیط رسانای نایکخواخت قرار دارد.

که در آن S_2 یک نیمکره به شعاع r است. به دلیل تقارن کروی، چگالی جریان شعاعی است. بنابراین

$$\mathbf{J}_r = \frac{I}{2\pi r^2} \hat{r}$$

که در آن \hat{r} بردار یکه در جهت شعاع است. میدان الکتریکی متناظر در این ناحیه برابر $\mathbf{E}_r = \mathbf{J}_r/\sigma_{c2}$ یا

$$\mathbf{E}_r = \frac{I}{2\pi\sigma_{c2}r^2} \hat{r}$$

چگالی جریان و میدان الکتریکی در ناحیه ۱ با استفاده از قوانین گاوس و اهم و به روش مشابه به دست می آیند

$$\mathbf{E}_1 = \frac{I}{2\pi\sigma_{c1}r^2} \hat{r} \quad \text{و} \quad \mathbf{J}_1 = \frac{I}{2\pi r^2} \hat{r}$$

اکنون با استفاده از معادله (۴۲-۲) پتانسیل V کره را به دست می آوریم

$$V = -\int_{\infty}^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\infty}^b \frac{I}{2\pi\sigma_{c1}r^2} dr - \int_b^a \frac{I}{2\pi\sigma_{c2}r^2} dr$$

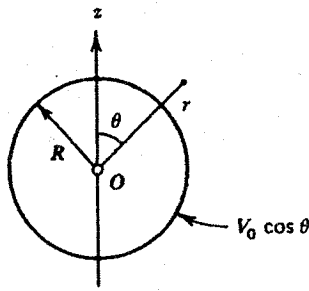
بدین ترتیب

$$V = \frac{I}{2\pi\sigma_{c1}} \left(\frac{1}{b}\right) + \frac{I}{2\pi\sigma_{c2}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

مقاومت R بین کره و زمین برابر V/I است. بنابراین

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma_{c1}b} + \frac{1}{2\pi\sigma_{c2}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \quad \blacksquare$$

مثال ۶-۷ محاسبه R با استفاده از $RC = \epsilon/\sigma_c$ - خط هم محور یک خط هم محور مطابق شکل ۶-۷، را با ماده ای به گذردهی ϵ و رسانندگی σ_c در نظر می گیریم. اختلاف پتانسیل بین قطبها (که با ρ_1 و ρ_2 مشخص شده است) V و بار در واحد طول الکتروند داخلی λ است. با استفاده از قانون گاوس میدان الکتریکی بین دو الکتروند،



شکل ۷-۷ یک کره نسبتاً رسانا که سطح آن در یک پتانسیل وابسته به زاویه قرار دارد.

آن θ زاویه نسبت به محوری، مثلاً z ، است که از مرکز کره عبور می‌کند. رسانندگی ماده‌ای که کره را در میان گرفته است صفر فرض می‌کنیم. وضعیت جریان پایا ایجاب می‌کند که $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. و بنابراین برای یک ماده همگن داریم $\sigma_c \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. در غیاب emf خارجی $\mathbf{E}_c = 0$ و $\mathbf{J}_c = 0$. بنابراین پتانسیل الکتروستاتیک در معادله لاپلاس، $\nabla^2 \Phi = 0$ ، صدق می‌کند.

چون پتانسیل در سطح کره به θ وابسته است، در این صورت پتانسیل داخل کره را با حل معادله لاپلاس در دو بعد r و θ می‌توان نمایش داد. از معادله (۲۸-۳) به دست می‌آوریم

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad [28-3]$$

اکنون ثابتهای A_n و B_n را با استفاده از شرایط مرزی می‌توان به دست آورد. در $r = 0$ پتانسیل باید محدود بماند، بنابراین B_n به ازای تمام n ها صفر است. شرط روی سطح کره به دست می‌دهد

$$V_0 \cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \theta) \quad (43-7)$$

از برابر قراردادن ضرایب $P_n(\cos \theta)$ در دو طرف نتیجه می‌شود $A_1 = V_0/R$ و $A_n = 0$ به ازای $n \neq 1$. بدین ترتیب پتانسیل، میدان الکتریکی و چگالی جریان به ترتیب عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= \frac{V_0}{R} r \cos \theta, & \mathbf{E}(r, \theta) &= -\frac{V_0}{R} \hat{z}, \\ \mathbf{J}(r, \theta) &= -\sigma_c \frac{V_0}{R} \hat{z} \end{aligned} \quad (44-7)$$

از این نتایج مشخص می‌شود که چگالی جریان در داخل کره یکنواخت و در جهت منفی محور z است و بزرگی آن با دامنه ولتاژ و با وارون شعاع کره متناسب است. چگالی جریان در خارج کره صفر است زیرا رسانندگی ماده اطراف کره صفر است. ■

برای یک محیط همگن و در غیاب منابع خارجی، معادله (۳۸-۷) به معادله لاپلاس تبدیل می‌شود

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{مواد خطی، بدون حضور emf خارجی}) \quad (39-7)$$

روشهای مطرح شده در فصل ۴ برای حل این معادله را می‌توان برای حل مسئله جریان به کار برد. حل مناسب معادله لاپلاس، همان طور که قبلاً نیز دیدیم، به کمک شرایط مرزی به دست می‌آید. شرایط مرزی مناسب که \mathbf{J} در آنها صدق می‌کند [معادله‌های (۲۳-۷) و (۲۴-۷) را ببینید] عبارت‌اند از

$$J_{1n} = J_{2n} \quad \frac{J_{1t}}{\sigma_{c1}} = \frac{J_{2t}}{\sigma_{c2}}$$

شرط مربوط به مؤلفه‌های مماسی \mathbf{J} ایجاب می‌کند که مؤلفه‌های مماسی \mathbf{E} در مرز پیوسته باشند. از این رو، پتانسیلهای نرده‌ای در مرز نیز پیوسته‌اند. بنابراین شرایط مرزی روی پتانسیل به صورت زیر است

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad (40-7)$$

$$\sigma_{c1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \sigma_{c2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}$$

با وجود منبعهای جریان، خارجی $\nabla \cdot \mathbf{E}_c$ در معادله (۳۸-۷) صفر نیست. بدین ترتیب شرایط مرزی عبارت است از

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$\sigma_{c2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} - \sigma_{c1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = (\mathbf{J}_{c1} - \mathbf{J}_{c2}) \cdot \hat{n} \quad (41-7)$$

که در آن $\mathbf{J}_c = \sigma_c \mathbf{E}_c$ جریان خارجی حاصل از نیروی محرکه الکتریکی (emf) خارجی است؛ و \hat{n} برادر یکه عمود بر فصل مشترک و در جهت دور شدن از محیط ۱ است.

بدین ترتیب از روابط (۴۰-۷) تا (۴۱-۷) آشکار است که بین این مسئله جریان و مسائل الکتروستاتیک مشابه که در فصل ۴ بررسی شد تطابق نزدیکی وجود دارد. بنابراین جواب مسئله جریان را می‌توان به کمک حل مسئله الکتروستاتیک متناظر با جابه‌جاییهای زیر به دست آورد

$$\begin{aligned} \epsilon \rightarrow \sigma_c, \quad \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{J} &= -\sigma_c \nabla \Phi \\ \frac{\sigma}{\epsilon} \rightarrow (\mathbf{J}_{c1} - \mathbf{J}_{c2}) \cdot \hat{n} \quad \text{و} \quad \frac{\rho}{\epsilon} \rightarrow -\nabla \cdot \mathbf{J}_c \end{aligned} \quad (42-7)$$

مثال ۷-۷ مرز کروی - کره‌ای با توزیع پتانسیل زاویه‌ای اکنون یک کره همگن و همسانگرد به شعاع R ، رسانندگی σ_c و سطح واقع در پتانسیل $V_0 \cos \theta$ را مطابق شکل ۷-۷ در نظر می‌گیریم که در

است. عمومی‌ترین جواب معادله لاپلاس در دستگاه استوانه‌ای و در دو بعد با معادله (۶۵-۳) داده می‌شود. با این همه، توجه کنید که در واقع تنها یک زیر مجموعه از عمومی‌ترین جواب نقش دارد. نزدیک به هر انتهای صفحه، جواب لزوماً، همان جواب صفحه بدون وجود روزنه است. این باید صحیح باشد زیرا شعاع روزنه از ابعاد صفحه خیلی کوچکتر است. بدین ترتیب اگر $d/2 \rightarrow \rho$

$$\Phi(\rho, \phi) \approx \frac{2V_0}{d} x = \frac{2V_0 \rho}{d} \cos \phi \quad (۴۸-۷)$$

این بدان معنی است که جمله‌های سینوسی در جواب وجود ندارند و فقط جمله‌های کسینوسی باید وجود داشته باشند. علاوه بر این جمله‌های شامل $\ln \rho$ نیز نباید وجود داشته باشند. بنابراین

$$\Phi(\rho, \phi) = A_0 + A_1 \rho \cos \phi + A'_1 \frac{\cos \phi}{\rho} \quad \rho > \eta \quad (۴۹-۷)$$

با استفاده از شرط مرزی، معادله (۴۸-۷)، نتیجه می‌شود. $A_0 = 0$ و $A_1 = 2V_0/d$. اکنون ثابت A'_1 از شرط مرزی $\rho = \eta$ به دست می‌آید. چون داخل روزنه رسانا نیست، J_n برای $\rho < \eta$ صفر است. بنابراین از معادله (۲۳-۷) به دست می‌آید $J_n = 0$ برای $\rho = \eta$. یعنی $-\sigma_c (\partial \Phi / \partial \rho) = 0$ که نتیجه می‌دهد $A'_1 = -A_1 \eta^2$ و بنابراین پتانسیل در صفحه برابر است با

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{2V_0 \rho}{d} \cos \phi - \frac{2V_0 \eta^2}{d} \frac{\cos \phi}{\rho} \quad (۵۰-۷)$$

جمله اول طرف راست این معادله، پتانسیل در نبود روزنه است. جمله دوم جمله وابسته به زاویه است که حاصل وجود روزنه است. توجه کنید که لبه‌های صفحه به‌طور دقیق سطوح هم‌پتانسیل نیستند زیرا η/d متناهی است. این نتیجه ناشی از ماهیت تقریبی شرط داده شده در معادله (۴۸-۷) است. ■

مثال ۹-۷ مقایسه با الکتروستاتیک — یک کره رسانای واقع در جریان یکنواخت

یک کره به شعاع R و رسانندگی σ_{c1} واقع در محیطی با جریان اولیه یکنواخت به چگالی $\mathbf{J} = J_0 \hat{z}$ را در نظر می‌گیریم. رسانندگی محیط اطراف کره، مطابق شکل ۹-۷ (الف)، σ_{c2} است.

این مسئله مشابه مسئله دی‌الکتیک در مثال ۸-۴ است که در آن کره دی‌الکتیک در میدان الکتریکی خارجی، مطابق شکل ۹-۷ (ب)، قرار دارد. پتانسیلها در داخل و در خارج کره، Φ_1 و Φ_2 ، در مورد

مثال ۸-۷ مرز استوانه‌ای — روزنه دایره‌ای در یک صفحه رسانا در مرکز یک صفحه با رسانندگی σ_c ، طول d ، عرض b و ضخامت t روزنه‌ای کوچک به شعاع $b, d \ll \eta$ وجود دارد. دو ضلع روبه‌رو در پتانسیلهای $+V_0$ و $-V_0$ مطابق شکل ۸-۷ قرار دارند.

چون صفحه همگن و منبع emf خارجی وجود ندارد پتانسیل صفحه در معادله لاپلاس صدق می‌کند. در نبود روزنه انتظار داریم که توزیع جریان \mathbf{J} یکنواخت و در راستای محور x باشد. پتانسیل، Φ ، نیز باید فقط به x وابسته باشد. معادله لاپلاس در مختصات قائم در یک بعد عبارت است از $d^2 \Phi / dx^2 = 0$. بنابراین نتیجه می‌شود $\Phi = Ax + B$. نابه‌ای A و B به کمک شرایط مرزی در $x = \pm d/2$ به دست می‌آید. در نتیجه $A = 2V_0/d$ و $B = 0$. بدین ترتیب

$$\Phi = \frac{2V_0}{d} x \quad (۴۵-۷)$$

جریان، $\mathbf{J} = -\sigma_c \nabla \Phi$ ، می‌شود

$$\mathbf{J} = -\frac{2V_0}{d} \sigma_c \hat{x} \quad (۴۶-۷)$$

جریان کل I در صفحه با انتگرال‌گیری از چگالی جریان \mathbf{J} روی سطح مقطع صفحه به شکل زیر به دست می‌آید

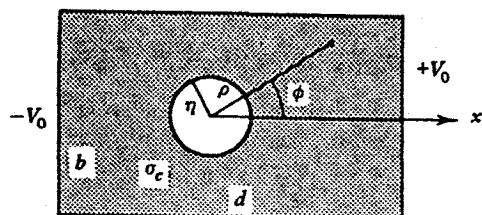
$$I = \int \mathbf{J} \cdot \hat{n} da = -\frac{2V_0 \sigma_c t b}{d}$$

بنابراین مقاومت، R ، صفحه می‌شود

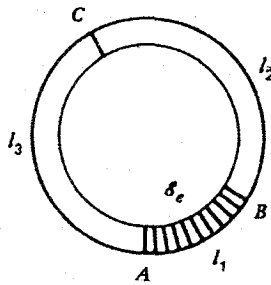
$$R = -\frac{2V_0}{I} = \frac{d}{\sigma_c t b} = \frac{d}{\sigma_c A} \quad (۴۷-۷)$$

که در آن $A = tb$ است.

با وجود روزنه، پتانسیل به زاویه ϕ نیز، که نسبت به محور x اندازه‌گیری می‌شود، وابسته است. بنابراین پتانسیل به دو متغیر ρ و ϕ در مختصات استوانه‌ای بستگی دارد که در آن ρ فاصله از مرکز روزنه



شکل ۸-۷ جریان در یک صفحه نازک فلزی با روزنه کوچک دایره‌ای.



شکل ۷-۱۰ سه سیم رسانای بهم وصل شده که در یکی از آنها منبع emf خارجی به صورت یکنواخت توزیع شده است.

و به صورت یکنواخت در آن توزیع شده است. منبع را می توان برحسب میدان یکنواخت الکتریکی خارجی \mathcal{E}_e به صوت زیر نمایش داد

$$\mathcal{E}_e = E_e l_1 \quad (53-7)$$

چون E_e یکنواخت است طرف راست معادله (۷-۳۸) صفر می شود، و بنابراین پتانسیل همه جا در معادله لاپلاس صدق می کند. افزون بر این چون سطح مقطع سیمها کوچک است میدان الکتریکی در امتداد سیم قرار می گیرد. بنابراین پتانسیل فقط به فاصله در طول سیم وابسته است و در نتیجه میدانهای الکتریکی (یا چگالیهای جریان) اندازه های ثابتی در سیم خواهند داشت.

اکنون فرض می کنیم که J_i چگالی جریان در نامین سیم باشد. در این صورت شرایط مرزی داده شده در معادله (۷-۴۱) را به کار می بریم:

۱. در نقطه C، مؤلفه عمودی جریانها پیوسته است زیرا نیروهای emf خارجی وجود ندارند. بنابراین

$$J_2 = J_3 = J$$

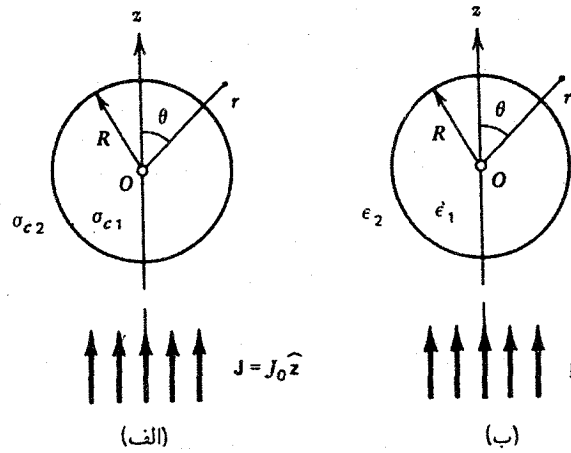
۲. در نقطه B چگالیهای جریان با روابط زیر به هم مربوط می شوند

$$J_2 - J_1 = J - J_1 = J_e \quad (54-7)$$

چون $J_e = \sigma_{c1} E_e$ ، با استفاده از $\mathcal{E}_e = E_e l_1$ به دست می آوریم $J_e = (\sigma_{c1} / l_1) \mathcal{E}_e$ که با قراردادن در معادله (۷-۵۴) نتیجه می گیریم

$$J - J_1 = \frac{\sigma_{c1} \mathcal{E}_e}{l_1} \quad (55-7)$$

۳. شرط مرزی آخر پیوسته بودن پتانسیل است. برای مثال اختلاف پتانسیل در حلقه بسته باید صفر باشد. بنابراین با استفاده از



شکل ۷-۹ شباهت بین مسائل جریان و پتانسیل. (الف) کره رسانا در جریان یکنواخت، (ب) کره نیم رسانا در میدان الکتریکی یکنواخت.

دی الکتریک از روابط زیر به دست می آیند

$$\Phi_1(r, \theta) = V_0 - \frac{\epsilon_2 E_0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} r \cos \theta \quad r < R \quad [84-4]$$

$$\Phi_2(r, \theta) = V_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0 R \frac{r^2 \cos \theta}{r^2} \quad r > R \quad [85-4]$$

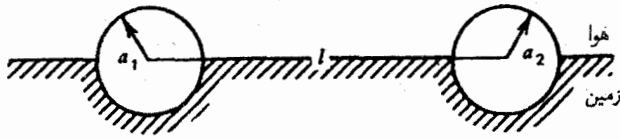
اکنون، پتانسیلها و در نتیجه توزیعهای جریان در مسئله جریان از این روابط با استفاده از تبدیلهای معادله (۷-۴۲) به دست می آیند. با قراردادن σ_{ci} به جای ϵ_i و J به جای D (یعنی J_0 به جای $\epsilon_2 E_0$) به دست می آوریم

$$\Phi_1(r, \theta) = V_0 - \frac{\epsilon_2 J_0}{\sigma_{c1} + \epsilon_2 \sigma_{c2}} r \cos \theta \quad (51-7)$$

$$\Phi_2(r, \theta) = V_0 - \frac{J_0}{\sigma_{c2}} r \cos \theta + \frac{(\sigma_{c1} / \sigma_{c2}) - 1}{\sigma_{c1} + \epsilon_2 \sigma_{c2}} J_0 R \frac{r^2 \cos \theta}{r^2} \quad (52-7)$$

تعیین میدانها و توزیع جریان را به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می کنیم

مثال ۷-۱۰ مسئله جریان مرزی با منابع غیرالکتریکی خارجی این مثال شامل emf خارجی و بنابراین یکی از کاربردهای شرایط مرزی معادله (۷-۴۱) است. سه سیم با رسانندگیهای σ_{c1} ، σ_{c2} و σ_{c3} و گذردهیهای ϵ_1 ، ϵ_2 و ϵ_3 و طولهای l_1 ، l_2 و l_3 را در نظر می گیریم که مطابق شکل ۷-۱۰ به طور سری و به صورت یک حلقه به هم وصل شده اند. سطح مقطع سیمها دایره ای و شعاع آنها R است به گونه ای که $R \ll l_i$. یک منبع خارجی (نیروی محرکه الکتریکی) به سیم l_1 وصل



شکل ۱۱-۷ محاسبه مقاومت بین دو کره کوچک رسانای خوب که به طور جزئی در زمین فرو رفته‌اند.

آنها $a_1, a_2 \gg l$ است. نیمی از هر کره در محیطی با رسانندگی σ_c فرو رفته و با آن به خوبی در تماس است. جریانهای خروجی از کره‌های ۱ و ۲ را به ترتیب I_1 و I_2 و ولتاژ آنها را Φ_1 و Φ_2 فرض می‌کنیم. این ولتاژها با ضرایب مقاومت، مطابق معادله (۵۷-۷) به جریانها مربوط می‌شوند؛ یعنی

$$\Phi_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2 \quad (58-7)$$

$$\Phi_2 = R_{21}I_1 + R_{22}I_2 \quad (59-7)$$

که در آن $R_{12} = R_{21}$ و R_{22}, R_{11} ثابتهایی هستند که با استفاده از شکل هندسی دستگاه تعیین می‌شوند. اگر $I_2 = 0$ ، آن‌گاه $\Phi_1 = R_{11}I_1$ و از مثال ۵-۷ داریم $\Phi_1 = I_1 / 2\pi\sigma_c a_1$. بنابراین $R_{11} = 1/2\pi\sigma_c a_1$. از طرف دیگر اگر $I_1 = 0$ و $I_2 \neq 0$ ، آن‌گاه از مثال ۵-۷ داریم $\Phi_2 = I_2 / 2\pi\sigma_c a_2$ و در نتیجه $R_{22} = 1/2\pi\sigma_c a_2$. برای محاسبه R_{12} دوباره به مثال ۵-۷ برمی‌گردیم. اگر $I_2 = 0$ پتانسیل در فاصله $a_1, a_2 \gg l$ از کره برابر می‌شود با $\Phi_1(l) = I_1 / 2\pi\sigma_c l$ که می‌دهد $R_{12} = 1/2\pi\sigma_c l$. با قراردادن اندازه ضرایب به دست آمده در روابط (۵۸-۷) و (۵۹-۷) به دست می‌آوریم

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi\sigma_c a_1} I_1 + \frac{1}{2\pi\sigma_c l} I_2 \quad (60-7)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2\pi\sigma_c a_2} I_2 + \frac{1}{2\pi\sigma_c l} I_1 \quad (61-7)$$

در حالتی که $I_1 = I = -I_2$ ، (یعنی جریان از کره ۱ خارج و به کره ۲ وارد می‌شود)، آن‌گاه از روابط (۶۰-۷) و (۶۱-۷) نتیجه می‌شود

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_c a_1} + \frac{1}{2\pi\sigma_c a_2} \right) I - \frac{1}{\pi\sigma_c l} I$$

در این صورت، مقاومت R دستگاه از رابطه $R = (\Phi_1 - \Phi_2) / I$ به دست می‌آید؛ یعنی

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma_c} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{2}{l} \right)$$

معادله (۴۲-۲) به دست می‌آوریم $E_1 l_1 + E_2 l_2 + E_3 l_3 = 0$ و اگر قرار دهیم $E_i = J_i / \sigma_{ci}$ نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{J_1 l_1}{\sigma_{c1}} + J \left(\frac{l_2}{\sigma_{c2}} + \frac{l_3}{\sigma_{c3}} \right) = 0 \quad (56-7)$$

اکنون معادله‌هایی که J و J_1 را به هم مربوط می‌کنند را می‌توان به طور همزمان حل کرد و نتیجه زیر را به دست آورد

$$J = \alpha l_1 \sigma_{c2} \sigma_{c3} \mathcal{E}_e \quad \text{و} \quad J_1 = -\alpha \sigma_{c1} (\sigma_{c2} l_2 + \sigma_{c3} l_3) \mathcal{E}_e$$

که در آن α عبارت است از

$$\alpha = \frac{\sigma_{c1}}{l_1 (\sigma_{c1} \sigma_{c2} l_2 + \sigma_{c1} \sigma_{c3} l_3 + \sigma_{c2} \sigma_{c3} l_1)}$$

محاسبه میدانهای الکتریکی در سیمها و چگالیهای بار موجود در مرزهای جدایی سیمها به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. یادآوری می‌کنیم که نتایج بالا را می‌توان با استفاده از قانون اهم نیز به دست آورد. این کار را انجام دهید. ■

۵-۷ ضرایب مقاومت

همان طور که در بخش ۴-۷، جریانهای پایا، بحث کردیم روش الکتروستاتیک را می‌توان برای حل مسائل جریان نیز به کار برد. تناظر بین این دو مورد را با پیدا کردن فرمولی متناظر با روش ضرایب پتانسیل، که در الکتروستاتیک آن را مطالعه کردیم، می‌توان بیشتر کرد. چون در یک رسانای کامل ($\sigma_c \rightarrow \infty$) در یک محیط رسانا با رسانندگی محدود، پتانسیل روی سطح رسانا ثابت است، این موضوع را می‌توان درک کرد. پتانسیل رساناها، در مورد الکتروستاتیک، به بار روی آنها وابسته بود. کمیت‌های متناظر در مسئله جریان عبارت‌اند از پتانسیل الکترودها و جریانهای خروجی از آنها. بنابراین می‌توان نوشت

$$\Phi_i = \sum_j R_{ij} I_j \quad (57-7)$$

که در آن Φ_i ولتاژ الکتروده نام و I_j جریان خروجی زامین الکتروده و R_{ij} ضریب مقاومت است. ضرایب R_{ij} مستقل از پتانسیلها و جریانها هستند و به طور کامل به کمک شکل هندسی الکترودها و رسانندگی مواد دربرگیرنده آنها تعیین می‌شوند. این ضرایب مشابه ضرایب پتانسیل هستند. در زیر مثالی از این روش را می‌آوریم.

مثال ۱۱-۷ محاسبه مقاومت با استفاده از ضرایب مقاومت یک مدار متصل به زمین شامل دو کره رسانای کامل را مطابق شکل ۱۱-۷، در نظر می‌گیریم. شعاع کره‌ها a_1 و a_2 و فاصله بین

۶-۷ روش تصویری برای جریانها

قبلاً دیدیم که روش تصویری یکی از روشهای بسیار مؤثر برای حل مسائل الکتروستاتیک است و بدون استفاده از آن، حل مسئله با روش بسط جمله‌ها به هماهنگیهای منطقه‌ای، استوانه‌ای، یا قائم بسیار مشکل است. برای مثال، مسائلی از قبیل استوانه‌رسانای نزدیک به یک صفحه‌رسانای بزرگ یا نزدیک یک استوانه‌رسانای دیگر، جزو این دسته از مسائل است.

در مسائل جریانهای پایا نیز همین مشکل بروز می‌کند. برای مثال، در مورد یک زوج الکتروستاتیک استوانه‌ای یا یک زوج متشکل از یک الکتروستاتیک استوانه‌ای و یک الکتروستاتیک صفحه‌ای، روشهای قبلی خیلی مفید نیستند. از طرف دیگر، استفاده از روش تصویری برای به‌دست آوردن جواب این‌گونه مسائل بسیار مناسب و مؤثر است. با توجه به مقایسه به عمل آمده در بخش ۴-۷، شباهت با مورد تصویر الکتروستاتیک بدیهی است. بنابراین، جزئیات این روش را می‌توان ضمن چند مثال به خوبی معرفی کرد.

مثال ۱۲-۷ محاسبه مقاومت یک الکتروستاتیک موازی با یک الکتروستاتیک مسطح، با استفاده از روش تصویری

یک الکتروستاتیک موازی با شعاع R موازی با یک صفحه بینهایت با رسانایی عالی قرار دارد، به‌گونه‌ای که محور آن به فاصله x_0 از صفحه است. نیم‌فضای شامل استوانه با ماده‌ای به رسانندگی σ_c پر شده است و پتانسیل استوانه نسبت به صفحه برابر Φ_c است.

چون منبع emf خارجی وجود ندارد و نیز رسانندگی محیط یکنواخت است. معادله (۳۸-۷) به معادله لاپلاس تبدیل می‌شود. آن‌گاه مسئله را با فرض اینکه محیط دی‌الکتریک با گذردهی ϵ_0 است می‌توان به‌عنوان یک مسئله الکتروستاتیک (مثال ۶-۷ را ببینید) حل کرد. با فرض اینکه بار استوانه در واحد طول برابر λ است معلوم می‌شود که پتانسیل آن نسبت به صفحه از معادله (۳۹-۶) و ظرفیت در واحد طول دستگاه از معادله (۴۰-۶) به‌دست می‌آید. یعنی

$$C_l = \frac{2\pi\epsilon_0}{\cosh^{-1}(x_0/R)} \quad [40-6]$$

با استفاده از معادله (۳۶-۷) که ظرفیت الکتروستاتیک را به مقاومت جریان متناظر ربط می‌دهد ($RC = \epsilon_0/\sigma_c$) به‌دست می‌آوریم

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma_c l} \cosh^{-1} \frac{x_0}{R} \quad (42-7)$$

اکنون می‌توان جریان بین الکترودها را از رابطه $I = \Phi_c/R$ حساب کرد.

مثال ۱۳-۷ محاسبه مقاومت دو الکتروستاتیک موازی با استفاده از روش تصویری

در این مثال توزیع جریان بین دو الکتروستاتیک موازی را بررسی می‌کنیم. یک صفحه بسیار بزرگ با ضخامت t و رسانندگی σ_c را در نظر می‌گیریم. دو قرص رسانای خوب با ضخامت t و شعاع R که فاصله بین مراکز آنها Δ است در صفحه جای گرفته‌اند (شکل ۷-۱۲).

اختلاف پتانسیل $\Delta\Phi$ بین دو الکتروستاتیک با استفاده از روش تصویری الکتروستاتیک به کمک معادله (۳۶-۷) برای به‌دست آوردن جریان و مقاومت بین استوانه‌ها استفاده می‌کنیم. ابتدا موردی را که در آن دو استوانه در فضایی که از ماده‌ی الکتروستاتیک گذردهی ϵ_0 پر شده است بررسی می‌کنیم. همچنین فرض می‌کنیم که بار در واحد طول استوانه‌ها برابر λ و $-\lambda$ است. مسئله الکتروستاتیک را می‌توان به کمک بحث مطرح شده در بخش ۳-۵-۳ حل کرد. چون $R_1 = R_2 = R$ است آن‌گاه $x_{01} = x_{02} = x_0$ و $\Delta = 2x_0$. مقادیر m_1 و m_2 را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \frac{x_0}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{x_0}{R}\right)^2 - 1}$$

اختلاف پتانسیل بین الکترودها $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ برابر است با

$$\Delta\Phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{m_1}{m_2}$$

با قراردادن به جای m_1 و m_2 نتیجه می‌گیریم

$$\Delta\Phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln m_1' = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln m_1$$

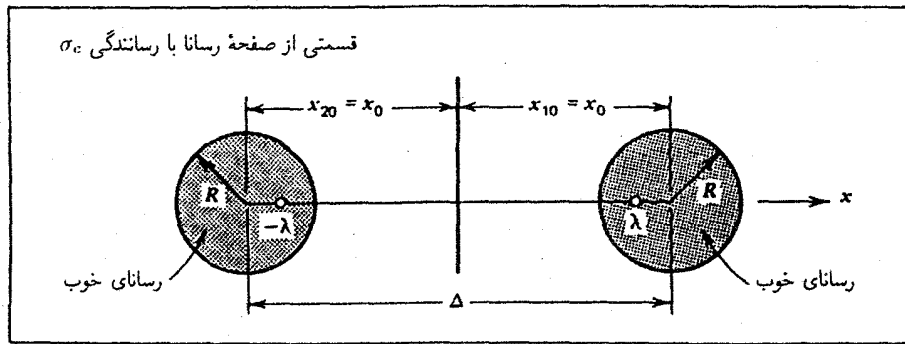
که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت

$$\Delta\Phi = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \cosh^{-1} \frac{x_0}{R}$$

بنابراین می‌توان مقاومت را از روابط (۳۴-۶) و (۳۶-۷) به‌دست آورد یعنی

$$R = \frac{1}{\pi\sigma_c l} \cosh^{-1} \frac{x_0}{R} \quad (43-7)$$

که دقیقاً دو برابر مورد استوانه و صفحه است.



شکل ۷-۱۲ محاسبه مقاومت بین دو الکتروستات که در یک صفحه بزرگ نسبتاً رسانا قرار گرفته‌اند، با استفاده از روش تصویری.

۷-۷ خاستگاه میکروسکوپی رسانش

در این بخش مفهوم رسانندگی را از دیدگاه میکروسکوپی توضیح می‌دهیم و مخصوصاً می‌خواهیم رفتار خطی قانون اهم، معادله (۱۳-۷)، را اثبات کنیم.

مجموعه‌ای از ذرات مشابه را که بار و جرم هر یک به ترتیب q و m است در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم این مجموعه با یک دستگاه ذرات دیگر برهم‌کنش می‌کند و بر اثر آن با میانگین زمان برخورد τ پراکنده می‌شود. زمان τ را غالباً زمان برخورد یا زمان واهلش می‌نامند. وقتی یک میدان الکتریکی (مثلاً در راستای محور z) بر دستگاه اعمال شود نیروهایی مطابق قانون کولن بر بارها وارد می‌شود. بنابراین معادله حرکت بار بین برخوردها عبارت است از

$$m \equiv \frac{dv_z}{dt} = qE \quad (64-7)$$

که در آن t درست از لحظه بعد از آخرین برخورد اندازه‌گیری می‌شود. حل این معادله حرکت وقتی میدان مستقل از زمان باشد می‌شود

$$v_z = \frac{qE}{m}t + v_z(0) \quad (65-7)$$

که نشان می‌دهد ذره در راستای میدان، سرعتی می‌گیرد که نسبت به زمان خطی است. سرعت $v_z(0)$ سرعت اولیه است. به دلیل برخورد ذره به طور پیوسته شتاب نمی‌گیرد، زیرا هر برخورد باعث وقفه در زمان شتاب گرفتن می‌شود. در نتیجه، این زمان به اندازه $\tau = t(t)$ کوتاه می‌شود. در واقع، بنابر نظریه احتمال، احتمال اینکه یک ذره، پس از گذشت زمان t بدون برخورد، در فاصله زمانی t و $t + dt$ برخورد کند با رابطه^۱ زیر داده می‌شود

$$P(t)dt = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} dt \quad (66-7)$$

بنابراین، سرعت متوسط عبارت است از

$$\langle v_z \rangle = \int_0^{\infty} v_z P(t) dt \quad (67-7)$$

با قراردادن معادله (۶۶-۷) در (۶۷-۷) و انتگرال‌گیری به دست می‌آید

$$\langle v_z \rangle = \frac{qE}{m} \tau + \langle v_z(0) \rangle \quad (68-7)$$

سرعت اولیه میانگین $\langle v_z(0) \rangle$ ، به ویژه وقتی بارها با ذراتی به جرم بزرگتر برخورد کنند و نیز به ویژه وقتی راستاهای $v_z(0)$ کاتوره‌ای است صفر می‌شود. بدین ترتیب

$$\langle v_z \rangle = \frac{qE}{m} \tau \quad (69-7)$$

با در نظر گرفتن نیروی وابسته به سرعت در معادله حرکت ذرات (نیروی میرا) تأثیر برخوردها در حرکت ذرات را می‌توان به روش دیگر به حساب آورد. یعنی

$$m \frac{dv_z}{dt} = qE - \frac{m}{\tau} v_z \quad (70-7)$$

که در آن $(m/\tau)v_z$ با اثر میدان الکتریکی مخالفت می‌کند. در سرعت‌های بالا این جمله تأثیر بیشتری دارد و باعث می‌شود که ذره به سرعت حد برسد. جواب حالت پایا — یعنی وقتی سرعت ذره دیگر به زمان وابسته نیست — به راحتی به کمک معادله (۷۰-۷) با قراردادن $(dv_z/dt) = 0$ تعیین می‌شود؛ در این صورت، $v_z = qE\tau/m$ که همان نتیجه معادله (۶۹-۷) است.

اگر چگالی بارها n باشد، آنگاه چگالی جریان از روابط (۶-۷) و (۶۹-۷) به صورت زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{J} = \frac{nq^2 \tau \mathbf{E}}{m} \quad (71-7)$$

I. F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics* (New York: McGraw-Hill, 1965).

می‌شود. در نتیجه توان ایجاد شده، P ، در حجم معین V عبارت است از

$$P = \frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv \quad (۷۴-۷)$$

بنابراین چگالی حجمی توان، dP/dv با رابطه زیر داده می‌شود

$$\frac{dP}{dv} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (۷۵-۷)$$

و بدین ترتیب، ضرب نرده‌ای $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ را می‌توان "چگالی توان" نامید. اگر محیط اهمی باشد، $\mathbf{J} = \sigma_c \mathbf{E}$ ، و نیز می‌توان نوشت

$$P = \frac{dW}{dt} = \int_V \rho_c J^v dv = \int_V \sigma_c E^v dv$$

که در آن $\rho_c = \sigma_c$. اکنون یک محیط رسانا را که دو وجه مقابل A و B آن نواحی هم‌پتانسیل‌اند در نظر می‌گیریم. اگر بار $dq = (dq/dt)dt$ در زمان dt از A به B انتقال یابد کار انجام شده توسط میدان الکتریکی \mathbf{E} با رابطه زیر داده می‌شود

$$dW = \frac{dW}{dt} dt = dq \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \equiv dqV = IV dt$$

که در آن $I = dq/dt$ است. بنابراین توان تولیدشده در محیط بر اثر عبور جریان I برابر می‌شود با

$$P = \frac{dw}{dt} = IV \quad (۷۶-۷)$$

در وضعیت ایستا، که در آن \mathbf{E} میدان پایستار است

$$V = \Phi(A) - \Phi(B)$$

چون محیط اهمی $V = RI$ است، داریم

$$P = IV = RI^2$$

که اتلاف توان برای این ناحیه از محیط است.

اکنون واضح است که چون انرژی، در یک مدار الکتریکی شامل عناصر مقاومتی، پیوسته تلف می‌شود، برای ثابت ماندن جریان، این انرژی باید دوباره به همین مقدار توسط یک منبع تأمین شود. اگر مدار ساده‌ای را که شامل یک حلقه است در نظر بگیریم، چون در میدانهای پایستار داریم $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ، می‌توان فهمید که میدان الکتروستاتیک به تنهایی نمی‌تواند منبع انرژی برای انتقال بار واحد در طول حلقه باشد. سازوکاری که امکان پایداری جریان را در یک محیط اتلافی (مقاومتی) فراهم می‌کند، emf یا نیروی محرکه الکتریکی نام دارد،

که نشان می‌دهد (همان طور که از قانون اهم نیز نتیجه می‌شود) رابطه بین \mathbf{J} و \mathbf{E} خطی است. ثابت تناسب همان رسانندگی است که با رابطه (۷۳-۷) داده می‌شود

$$\sigma_c = \frac{nq^2\tau}{m} \quad (۷۲-۷)$$

این نتیجه را می‌توان به موردی که در آن انواع مختلفی از بارها وجود دارند تعمیم داد

$$\sigma_c = \sum_{i=1}^p \frac{n_i q_i^2 \tau_i}{m_i} \quad (۷۳-۷)$$

که در آن جمع روی تعداد انواع مختلف بار، p ، انجام می‌شود.

۷-۸ گرمای ژول و باتریها

اینکه حاملهای بار در محیط اهمی شتاب نمی‌گیرند [یعنی سرعت سوق ثابت است — معادله (۷-۶۹) را ببینید] بدین معنی است که انرژی باید در محیط تلف شود. اتمهای موجود در محیط حاملهای بار را پراکنده و در نتیجه انرژی جنبشی آنها را به شکل گرما به محیط منتقل می‌کنند. متوسط انرژی جنبشی حاملهای بار در اولین تقریب در محیط ثابت است، بنابراین همه انرژی تزریق شده به محیط به صورت گرما ظاهر می‌شود. جزء حجمی dv از یک محیط رسانا را، که ضرورتاً اهمی نیست در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که در میدان الکتریکی خارجی \mathbf{E} قرار گرفته است. کار انجام شده توسط \mathbf{E} برای جابه‌جا کردن بار dq به اندازه dI برابر است با $dq\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. چون $dq = \rho dv$ (بنابه تعریف)، می‌توان کار را به صورت زیر نوشت

$$d^v W = (\rho dv)\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

اگر جابه‌جایی، $d\mathbf{l}$ ، بار در زمان dt انجام شود $d\mathbf{l} = \langle \mathbf{v} \rangle dt$ ، که در آن $\langle \mathbf{v} \rangle$ سرعت (سوق) میانگین بار است. داریم

$$d^v W = (\rho \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{E}) dv dt$$

با استفاده از رابطه $\mathbf{J} = \rho \langle \mathbf{v} \rangle$ نتیجه می‌شود

$$d^v W = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv dt$$

بنابراین توان، یا کار انجام شده به وسیله \mathbf{E} در واحد زمان برای برقراری جریان عبارت است از

$$\frac{d^v W}{dt} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv$$

که با جزء حجم dv متناسب است. این کار صرف گرم کردن

الکتروستاتیک می‌شود با qE^N نمایش می‌دهیم که در آن q مقدار بار است. بدین ترتیب میدان E^N به صورت نوعی میدان نیرو عمل می‌کند که فقط در ناحیه محدودی از فضا، مثل داخل باتری، برقرار است. اگر E^q میدان الکتریکی ناشی از فرایند جدایی بار باشد که در ماهیت ایستاست، آنگاه کار انجام شده برای به حرکت در آوردن واحد بار در طول یک مسیر بسته متصل به منبع emf برابر است با

$$\mathcal{E} = \oint_C (\mathbf{E}^q + \mathbf{E}^N) \cdot d\mathbf{l}$$

چون E^q ایستاست $\oint \mathbf{E}^q \cdot d\mathbf{l} = 0$ ، و بنابراین پایستار است و آنگاه

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E}^N \cdot d\mathbf{l}$$

در نتیجه اگر کار انجام شده باشد، E^N باید، در ناحیه شامل حلقه، غیر پایستار باشد. چون، معمولاً، تنها در (داخل) منبع emf $E^N \neq 0$ و این بدان معنی است که منبع جایگزیده است و می‌توانیم بنویسیم

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E}^N \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E}^N \cdot d\mathbf{l} \quad (77-7)$$

که در آن A و B نقاطی در پایانه‌های منبع (که اینجا تنها یک پایانه فرض شده است) و \mathcal{E} را، emf حلقه C می‌نامیم. تصور ماهیت واقعی E^N مشکل است اما برای هر حلقه یک مقدار خوش‌تعریف و برابر با کار خالصی است که برای انتقال بار واحد در طول حلقه باید انجام شود. ممکن است منبعهای چندگانه انرژی در حلقه وجود داشته باشند. اگر پایانه‌های A و B از یکدیگر عایق شده باشند یک حالت پایدار در منبع وجود خواهد داشت به‌گونه‌ای که جریانی از A به B برقرار نخواهد شد. یعنی

$$\int_A^B \mathbf{E}^N \cdot d\mathbf{l} + \int_A^B \mathbf{E}^q \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (78-7)$$

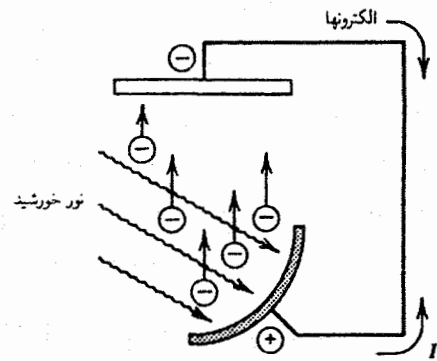
به بیان دیگر کار انجام شده توسط E^q و E^N برای انتقال بار از A به B صفر است. یعنی اثر نیروهای پایستار مخالف اثر نیروی غیر پایستار است و بنابراین جریان بند می‌آید. کاری در منبع انجام نمی‌شود و بنابراین می‌توان نوشت

$$\int_A^B \mathbf{E}^N \cdot d\mathbf{l} - [\Phi(B) - \Phi(A)] = 0$$

و بر این اساس معادله (78-7) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\mathcal{E} = \Phi(B) - \Phi(A) \quad (\text{نبود جریان}) \quad (79-7)$$

اکنون موردی را که B به A در خارج از منبع متصل است در نظر می‌گیریم، به طوری که جریان قادر است در یک حلقه بسته ایجاد



شکل ۱۳-۷ باتری خورشیدی.

زیرا این عامل، نیروی لازم برای به حرکت در آوردن بار را تأمین می‌کند و منبع انرژی برای پایداری جریان است.

یک مثال معمولی از یک منبع با emf پایا (جریان مستقیم $dc \equiv$) باتری معمولی اتومبیلها، باتری چراغهای چشمک‌زن، یا باتریهای استاندارد مورد استفاده در پتانسیل‌سنجهاست. سازوکار ایجاد انرژی برای تولید جریان الکتریکی در این‌گونه باتریها منشأ شیمیایی دارد. در واکنشهای شیمیایی (انتقالهای اتمی یا مولکولی) کار حاصل از انرژی شیمیایی آزادشده، برای جداسازی بارها به‌کار می‌رود. جداسازی بارها به‌نوبه خود اختلاف پتانسیل الکتریکی لازم برای به حرکت در آوردن بار بین دو نقطه را (مثل سیمها) تولید می‌کند.

نوع دیگری از باتریها باتری خورشیدی است که در شکل ۱۳-۷ نشان داده شده است در این باتری پرتوهای نور آفتاب روی سطح فلز حساسی می‌تابند و باعث گسیل الکترونها می‌شوند (از طریق اثر فوتوالکتریک). این الکترونها در سطح فلز مجاور جمع می‌شوند. بدین ترتیب جدایی بار عامل ایجاد جریان الکتریکی می‌شود. نورسنج دوربینها بر این اساس کار می‌کند.

نوع دیگر باتری، با کاربرد برتر، باتری هسته‌ای است (مثال ۱۴-۷ را ببینید). در این باتری یک منبع پرتوزا در یک انتها قرار دارد و در انتهای دیگر بارهای گسیل‌یافته جمع‌آوری می‌شوند. نحوه عمل، شبیه باتری خورشیدی است با این تفاوت که منبع انرژی در اینجا به جای الکترومغناطیسی (نور خورشید) هسته‌ای است.

مشخصه عمومی تمام منبعهای emf توانایی آنها در جدا کردن بارهاست. این جدایی باید در مقابل نیروهای الکتروستاتیک ناشی از جدایی بارها عمل کند. سرانجام، اگر انباشتگی بار ادامه یابد، نیروهای الکتروستاتیک به حد کافی بزرگ و مانع جدایی بیشتر بارها از یکدیگر می‌شوند. وقتی این وضعیت ایجاد شد جریان قطع می‌شود. نیروی محرکه یا emf را که سبب به حرکت در آمدن بار q بر علیه میدانهای

که در معادله (۸-۷) مشاهده کردیم. $\mathcal{E} = RI + rI = \Phi(B) - \Phi(A) + rI$ که مشابه رابطه‌ای است

توجه کنید که تعیین مقاومت داخلی در اصل کاری ساده است و با اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل $\Phi(B) - \Phi(A)$ یکبار با ایجاد جریان توسط منبع و بار دیگر بدون برقراری جریان، آن‌طور که در روابط (۷۹-۷) و (۸۰-۷) گفته شد، مقدار آن به دست می‌آید.

* مثال ۷-۱۴ باتری هسته‌ای - منبع جریان

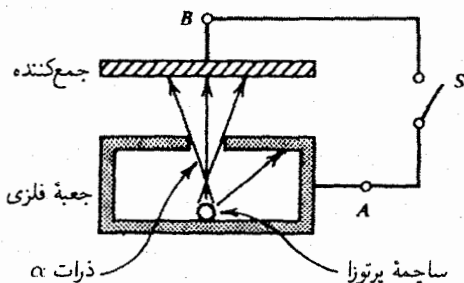
در شکل ۷-۱۵ که نمایش یک باتری هسته‌ای است فرض می‌کنیم منبع پرتوزا ذرات α (هسته هلیوم با بار مثبت $2e$) با انرژی 5.0 MeV را گسیل می‌کند. این ذرات به صورت پرتوهای موازی شده به B می‌رسند. اگر کلید S باز باشد و هیچ باری از جمع‌کننده خارج نشود، پتانسیل B نسبت به جعبه (زمین) به مقدار 2.5×10^6 ولت افزایش می‌یابد. در این وضعیت بار دیگری به جمع‌کننده افزوده نمی‌شود زیرا انرژی جنبشی اولیه α به طور دقیق مساوی کار انجام شده بر علیه میدان الکتروستاتیک در انتقال بار از جعبه به B است. در پتانسیل مثبت بالاتر، α ها دوباره به جعبه باز می‌گردند.

میدان غیر پایستار این باتری، E^N ، را باید به نیروی هسته‌ای نسبت دهیم که همه جا بجز درون هسته صفر است. (این میدان نیرویی بر α ها وارد می‌کند و آنها را به خارج هسته ماده پرتوزا می‌راند (با این روش، دو الکترون در ماده آزاد می‌شود). کار انجام شده توسط نیروهای هسته‌ای مساوی انرژی جنبشی انتقال یافته به ذرات α است. بدین ترتیب

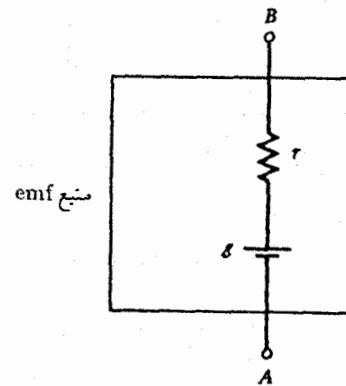
$$\frac{1}{2} m_{\alpha} v^2 = 2e \int E^N \cdot dr = 5 \times 10^6 \text{ eV}$$

حالتی را در نظر بگیرید که در آن کلید S باز و متعادل برقرار است. در این حالت، α ها با انرژی جنبشی صفر به جمع‌کننده B می‌رسند. از این رو

$$2e\{\Phi(B) - \Phi(A)\} = \frac{1}{2} m_{\alpha} v^2$$



شکل ۷-۱۵ باتری هسته‌ای.



شکل ۷-۱۴ نمایش استاندارد منبع emf.

شود. روشن است که اگر مقاومتی در درون منبع در مقابل جریان وجود داشته باشد آن‌گاه تنها در صورتی جریان می‌تواند برقرار شود که

$$\int_A^B (E^N + E^q) \cdot dl \equiv \int_A^B E \cdot dl > 0$$

یعنی، در طول مسیر C برای به حرکت در آوردن بار از A به B باید نیروی محرکه، $E \equiv E^N + E^q$ ، وجود داشته باشد تا بر مقاومت غلبه کند. اگر محیط درون منبع که بار در آن حرکت می‌کند اهمی باشد ($J = \sigma_c E$)

$$V_{AB} \equiv \int_A^B E \cdot dl = rI$$

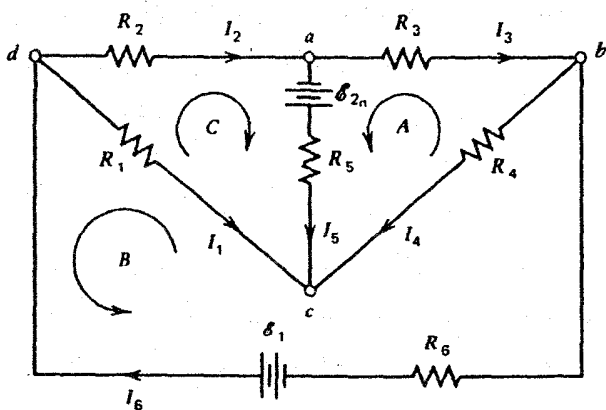
که در آن r را مقاومت داخلی می‌نامیم. بدین ترتیب وقتی جریان از منبع می‌گذرد داریم

$$\mathcal{E} - rI = \Phi(B) - \Phi(A) \quad (۸۰-۷)$$

از این رو نمایش این نوع منبعهای اهمی یک emf خالص، \mathcal{E} ، است که با "مقاومت داخلی" r به طور سری قرار دارد. (شکل ۷-۱۴ را ببینید). در منبعهای خوب emf، r در مقایسه با مقاومت مدار متصل به آن کوچک است. در نتیجه، کار انجام شده توسط منبع emf (E^N) را می‌توان، به طور عمده، انرژی انتقال یافته به بقیه مدار در نظر گرفت و این کار در داخل منبع emf به گرما تبدیل نمی‌شود. توان حاصل از منبع emf، وقتی مدار خارجی جریان I را از emf می‌گیرد برابر $\mathcal{E}I$ است. اگر مقاومت کل مدار خارجی R باشد، توان کل اتلافی در R و r درست برابر است با $(r + R)I^2$ یعنی $\mathcal{E}I = RI^2 + rI^2$

$$\mathcal{E} = (R + r)I \quad (۸۱-۷)$$

با نمایش منبع اهمی به این صورت می‌بینیم که این معادله می‌شود



شکل ۱۶-۷ کاربرد قوانین کیرشهوف در یک مدار چندگانه.

۲. بنابر قاعده دوم مجموع نیروهای محرکه الکتریکی و افت پتانسیل در تمام مقاومتها (از جمله مقاومت داخلی منبعها) روی یک مسیر بسته صفر است. یعنی

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i - r_i I_i - \sum_{k=1}^M (RI)_k = 0 \quad \text{یا} \quad \sum V = 0 \quad (۸۳-۷)$$

اکنون دستور استفاده از قوانین کیرشهوف برای یک مدار جریان را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم. (۱) برای جریان در هر شاخه یک جهت و اندازه در نظر می‌گیریم. (۲) برای جریان روی هر حلقه جهتی انتخاب می‌کنیم. (۳) قراردادی برای تعیین علامت افت پتانسیل در مقاومتها و نیز برای نیروی محرکه الکتریکی وضع می‌کنیم بدین ترتیب که اگر جریان از قطب منفی منبع وارد و از قطب مثبت خارج شود، emf را مثبت می‌گیریم. افت پتانسیل در مقاومت را اگر در جهت جریان حرکت کنیم مثبت می‌گیریم و برعکس.

با این روش تعداد روابطی که می‌توانیم بنویسیم بیش از تعداد مجهولهاست. این وضعیت به خاطر مستقل نبودن مسیرهای بسته انتخابی است. در حقیقت باید مطمئن شویم که هیچ‌یک از معادله‌های مستقل حذف نشوند.

معادله‌های به دست آمده جبری‌اند و بنابراین به سادگی حل می‌شوند. جریان منفی نشان می‌دهد که جریان در جهت خلاف آنچه فرض کرده‌ایم است.

در بررسی شبکه‌های جریان، با اتصالهای موازی و سری مقاومتها روبه‌رو می‌شویم. وقتی تعدادی مقاومت R_1, R_2, \dots, R_n به صورت سری به هم وصل باشند (یعنی جریان در همه آنها مساوی است) آن‌گاه مقاومت معادل آنها، R ، می‌شود

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (۸۴-۷)$$

از $\int_A^B \mathbf{E}^N \cdot d\mathbf{r} = \Phi(B) - \Phi(A)$ به دست می‌آوریم

$$\mathcal{E} = \Phi(B) - \Phi(A)$$

بدین ترتیب $\mathcal{E} = 2.5 \times 10^6 \text{ V}$. این مقدار اختلاف پتانسیل مدار باز در پایانه‌های منبع است.

اکنون فرض می‌کنیم S بسته است. جریان I_0 از مقاومت R به گونه‌ای عبور می‌کند که در حالت تعادل داشته باشیم

$$\Phi(B) - \Phi(A) = RI_0$$

اما اکنون I_0 باید درست مساوی با $2e$ برابر تعداد α هایی باشد که در هر ثانیه از A به B می‌روند. در این وضعیت $\Phi(B) - \Phi(A)$ دیگر برابر \mathcal{E} نیست. مثلاً اگر تعداد 10^6 ذره α در واحد زمان از A به B برود،

$$I_0 = 2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 10^6 = 3.2 \times 10^{-13} \text{ A}$$

و اگر $R = 10^7 \Omega$ باشد آن‌گاه

$$RI_0 = \Phi(B) - \Phi(A) = 3 \times 10^{-6} \text{ V}$$

در این وضعیت، می‌گوییم منبع emf یک مقاومت داخلی r دارد به گونه‌ای که $\mathcal{E} - rI_0 = RI_0$ و بنابراین $r \approx 10^{11} \Omega$.

این نوع emf را منبع جریان می‌نامیم، زیرا $I = I_0$ لزوماً مستقل از R و r در مقایسه با هر R که در عمل استفاده می‌شود لزوماً بینهایت است. ■

۹-۷ قوانین کیرشهوف و شبکه‌های مقاوم

در این بخش مسائلی را بررسی می‌کنیم که شامل منبعهای نیروی محرکه هستند و این منبعها به ترکیبهای مختلف مدارهای مصرف خارجی به شکل حلقه متصل‌اند. همین طور مواردی را که در آنها حلقه‌ها شامل تعدادی از این منبعها هستند، مطابق شکل ۱۶-۷، بررسی خواهیم کرد. مسائل شبکه‌ها به کمک دو قاعده که آنها را قوانین کیرشهوف می‌نامیم بررسی می‌شوند:

۱. بنابر قاعده اول جمع جبری جریانهای جاری شده به طرف هر نقطه اتصال برابر صفر است. این گفته پایسته بودن بار را بیان می‌کند و به این معنی است که اگر انباشتگی بار در یک اتصال معین وجود نداشته باشد آهنگ بار ورودی به نقطه اتصال باید با آهنگ بار خروجی از آن برابر باشد. بنابراین

$$\sum I = 0 \quad (۸۲-۷)$$

فضا را به چگالی جریان در آن نقطه مربوط می‌کند یعنی

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad [۹-۷]$$

برای کاربردهای "حالت پایا" که در آن ρ به زمان وابسته نیست، معادله پیوستگی برابر است با

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad [۱۲-۷]$$

چگالی جریان رسانش در محیطی که تحت تأثیر میدان الکتریکی، \mathbf{E} است از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{J} = \sigma_c \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}}{\rho_c} \quad [۱۳-۷]$$

که در آن رسانندگی محیط و $\rho_c = 1/\sigma_c$ مقاومت ویژه آن است. در محیط خطی (اهمی)، σ_c ثابت (مستقل از \mathbf{E}) است. این رابطه را اغلب شکل دیفرانسیلی قانون اهم می‌نامیم. شکل انتگرالی این قانون رابطه آشنای

$$V = IR$$

است. مقاومت یک سیم به طول l ، سطح مقطع A و رسانندگی σ_c برابر است با

$$R = \frac{l}{\sigma_c A} \quad [۱۴-۷]$$

توزیع جریانهای پایا در یک محیط رسانا به روشی مشابه مسائل الکتروستاتیک در محیطهای دی الکتریک توصیف می‌شود. معادله $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ در مواد خطی به معادله $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ تبدیل می‌شود با انتخاب $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \rightarrow \nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{بدون emf خارجی}) \quad [۳۹-۷]$$

وقتی در فضای مورد نظر بیش از یک ماده وجود داشته باشد معادله لاپلاس را باید برای هر ماده جداگانه حل کرد. سپس جوابها (پتانسیل، میدان، و جریانها) باید در فصل مشترکها با هم سازگار باشند. در غیاب منبعهای جریان خارجی، به وجود آمده از منبعهای emf، در فصل مشترکها می‌توان نوشت $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ و $\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{J} / \sigma_c = 0$. بنابراین شرایط مرزی عبارت‌اند از

$$J_{1n} = J_{2n} \quad \text{و} \quad \frac{J_{1t}}{\sigma_{c1}} = \frac{J_{2t}}{\sigma_{c2}} \quad [۲۳-۷], [۲۴-۷]$$

که t و n به ترتیب شاخصهای مؤلفه‌های عمود و مماس بر فصل مشترک

از طرف دیگر وقتی این مقاومتها به صورت موازی به هم وصل شوند (یعنی اختلاف پتانسیل همه آنها یکسان باشد) به سادگی نتیجه می‌گیریم که مقاومت معادل، R ، از رابطه زیر به دست آید

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (۸۵-۷)$$

اکنون مدار شکل ۷-۱۶ را بررسی می‌کنیم. جریانهای فرضی و جهت‌های آنها روی شکل نشان داده شده‌اند. قانون اول کیرشهوف، روابط بین جریانهای شاخه‌های مختلف را به صورت زیر به دست می‌دهد

$$I_2 = I_3 + I_5 \quad \text{در } a$$

$$I_3 = I_6 - I_4 \quad \text{در } b$$

$$I_4 = I_1 + I_5 \quad \text{در } c$$

$$I_6 = I_1 + I_2 \quad \text{در } d$$

مجموعه دیگری از روابط، به کمک قانون دوم کیرشهوف به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$-\mathcal{E}_2 - I_3 R_3 + I_4 R_4 + I_5 R_5 = 0 \quad \text{در حلقه } A$$

$$-\mathcal{E}_1 - I_1 R_1 - I_4 R_4 - I_6 R_6 = 0 \quad \text{در حلقه } B$$

$$\mathcal{E}_2 - I_5 R_5 + I_2 R_2 - I_1 R_1 = 0 \quad \text{در حلقه } C$$

روابط بالا جبری‌اند و بنابراین جریانهای مجهول به سادگی به دست می‌آیند که حل آنها را به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می‌کنیم.

۱۰-۷ خلاصه

در یک محیط رسانا چگالی جریان \mathbf{J} و جریان I عبوری از هر سطح به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{J} = \sum_i \rho_i \langle \mathbf{v}_i \rangle \quad [۷-۴]$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad [۷-۷]$$

که ρ_i چگالی بار نمونه i و $\langle \mathbf{v}_i \rangle$ سرعت سوق میانگین نمونه است. بار کل Q که از سطح S می‌گذرد به صورت زیر به I وابسته است

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

یکی از روابط اساسی در الکترومغناطیس معادله پیوستگی است که پایستگی بار را بیان می‌کند. این رابطه چگالی بار در هر نقطه از

مسائل

۷-۱ جریان ۱۰ آمپر از یک سیم با مقطع 2 mm^2 می‌گذرد. اگر چگالی حامل‌های بار در سیم $10^{21} / \text{cm}^3$ باشد سرعت سوق متوسط الکترونها را به دست آورید.

۷-۲ توزیع جریان در یک رسانای سه‌بعدی معین با رسانایی σ_c به‌گونه‌ای است که شدت میدان الکتریکی و بنابراین چگالی جریان در یک مدار هم‌پتانسیل ثابت‌اند. در این مورد می‌توان نشان داد که مقاومت رسانا با رابطه $R = \int dl / \sigma_c A$ داده می‌شود که dl عمود بر سطح پتانسیل S است. با استفاده از این نتیجه، مقاومت خازن کروی به شعاع‌های داخلی و خارجی a و b را پیدا کنید که با ماده‌ای با رسانندگی یکنواخت σ_c پر شده است.

۷-۳ نتیجه مسئله ۷-۲ را برای تعیین مقاومت خازن کروی با شعاع‌های داخلی و خارجی a و b که تا شعاع c از ماده‌ای با رسانندگی σ_{c1} و از شعاع c تا b با ماده‌ای با رسانندگی σ_{c2} پر شده است به‌کار برید. ۷-۴ نتیجه مسئله ۷-۲ را برای تعیین مقاومت یک خازن استوانه‌ای به شعاع‌های داخلی a و b و به طول l که با ماده‌ای با رسانندگی σ_c پر شده است به‌کار برید.

۷-۵ یک خازن مسطح موازی با ماده‌ای با رسانایی کم که ثابت دی‌الکتریک K و رسانندگی σ_c دارد پر شده است. خازن با بار اولیه Q_0 پر شده است. (الف) بار روی صفحه‌ها را به‌صورت تابعی از زمان به دست آورید. (ب) کل گرمای ژول تولیدشده را به دست آورید و نشان دهید که برابر با انرژی اولیه ذخیره‌شده در خازن است. (ج) اگر $K = 4.3$ و $\sigma_c = 10^{-12} (\Omega \text{m})^{-1}$ باشد ثابت زمانی برای تخلیه بار خازن را به دست آورید.

۷-۶ زوایای خطوط جریان با خط عمود بر مرز بین دو محیط رسانا با رسانندگی‌های σ_{c1} و σ_{c2} به ترتیب θ_1 و θ_2 است. قانون شکست خطوط شارش جریان را پیدا کنید.

۷-۷ یک قطعه از ماده رسانا به شکل مکعبی به ضلع a مطابق شکل ۷-۱۷ طوری ساخته شده است که رسانندگی آن یکنواخت نیست و در هر نقطه $\alpha(a+x)$ است. که α ثابت است. با فرض اینکه جریان تنها در راستای x از سطح S تا سطح مقابل آن S' جریان دارد. (الف) با انتخاب پتانسیل الکتروستاتیک Φ که تنها به x وابسته باشد، معادله (۷-۳۸) را به‌کار برید و نشان دهید

$$\alpha(a+x) \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \alpha \frac{d\Phi}{dx} = 0$$

(ب) این معادله را حل کنید و نشان دهید اختلاف پتانسیل بین S و S'

هستند. این دو شرط معادل شرایط زیر روی Φ هستند

$$\sigma_{c1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \sigma_{c2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \quad \text{و} \quad \Phi_1 = \Phi_2 \quad [40-7]$$

بدین ترتیب، واضح است که یک تطابق نزدیک بین مسائل جریان و مسائل الکتروستاتیک وجود دارد. بنابراین حل مسئله جریان را می‌توان توسط حل مسئله الکتروستاتیک با تعویض‌های زیر انجام داد

$$\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{J} \quad \text{و} \quad \epsilon \rightarrow \sigma_c \quad [42-7]$$

روشهای دیگر الکتروستاتیک نیز مثل روش تصویری و روش ضرایب مقاومت (در مقایسه با ضرایب پتانسیل و ظرفیت) در این مورد مفیدند. همچنین این تطابق ایجاب می‌کند که ظرفیت C و مقاومت R بین دو رسانای واقع در یک محیط بینهایت، و نیز ϵ و σ_c در رابطه ساده زیر صدق کنند

$$RC = \frac{\epsilon}{\sigma_c} \quad [36-7]$$

با بررسی جواب میکروسکوپی محیطی با رسانایی ضعیف، واقع در میدان الکتریکی خارجی، می‌توان شکل دیفرانسیلی قانون اهم و بنابراین شکل انتگرالی آن را به دست آورد. حرکت بارها، تحت تأثیر شتاب qE/m و انحراف خطی ناشی از برخورد با سایر ذره‌ها، $v/m\tau$ انجام می‌گیرد که q ، m و v به ترتیب بار، جرم و سرعت بارها و τ ثابت زمانی محیط اهمی است که برابر با میانگین زمانی بین دو برخورد است. این اندازه‌گیری نشان می‌دهد که چه تعداد از برخوردها تأخیری است. از این بحث نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{J} = \frac{nq^2\tau}{m} \mathbf{E} \quad \text{یا} \quad \sigma_c = \frac{nq^2\tau}{m} \quad [71-7], [72-7]$$

که n چگالی تعداد بارهاست. این موضوع نشان می‌دهد که در محیط‌های اهمی بارها با یک میدان خارجی شتاب نمی‌گیرند. به علت نبودن شتاب بارها در محیط‌های اهمی، انرژی باید در محیط تلف شود. تغییر توان در واحد حجم از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\frac{dP}{dv} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad [75-7]$$

مدارهای الکتریکی به کمک دو قانون کیرشهوف بررسی می‌شوند: جمع جریانها در هر نقطه اتصال صفر است، جمع افت پتانسیلها در هر حلقه صفر است

$$\sum I = 0 \quad \text{و} \quad \sum V = 0 \quad [82-7], [83-7]$$

این دو قانون، دو قانون اساسی جریانهای پایا یعنی $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ و $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ را به دست می‌دهند.

ϵ پر شده است. اگر فرض کنیم وقتی خازن با یک رسانای همگن با رسانندگی σ_c پر شود مقاومت جریان dc آن R است، در این صورت ظرفیت این خازن را به دست آورید.

۱۱-۷ فضای بین دو صفحه موازی رسانا که سطح هر یک $A = 0.05 \text{ m}^2$ و به فاصله 2 cm از هم هستند از ماده دی‌الکتریک (دارای نشت) با مشخصات $K = 8$ و $\sigma_c = 0.8 \times 10^{-2} (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ پر شده است. جریان کل rms (ریشه میانگین مربعا) را وقتی ولتاژ $V = 10 \sin \omega t$ به آن اعمال می‌شود ($\omega = 10^7 \text{ rad/s}$) حساب کنید.

۱۲-۷ رسانندگی σ_c مس در دمای اتاق $(\Omega \cdot \text{m})^{-1} = 5.9 \times 10^8$ و چگالی الکترونها متحرک $10^{21} / \text{cm}^3$ است. زمان واهلش τ الکترونها در مس را پیدا کنید.

۱۳-۷ مجموعه‌ای از الکترونها با ضرایب R_{ik} مشخص می‌شوند. مقدار گرمای، Q ، ایجاد شده در یک ثانیه را در فضای بین الکترونها برحسب جریانهای I_k که از الکترونها خارج می‌شوند به دست آورید. ۱۴-۷ شکل ۱۶-۷ یک پل وستون را برای اندازه‌گیری مقاومت با $\mathcal{E}_T = 0$ نشان می‌دهد. در حالتی که $R_5 = R_6 = 0$ است نشان دهید برای صفر شدن جریان I_5 (که آن را به کمک گالوانومتر می‌توان دید) باید شرط $R_1/R_2 = R_4/R_3$ برقرار باشد. با این شرط می‌توانیم یک مقاومت را به کمک سه مقاومت دیگر اندازه بگیریم.

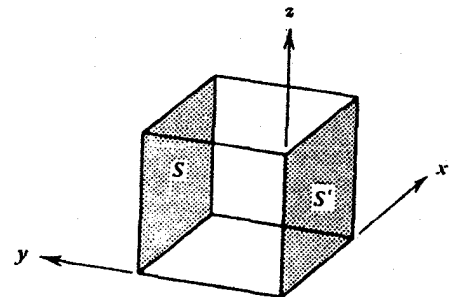
۱۵-۷ جریان I_T را وقتی پل وستون مسئله ۱۴-۷، در حال تعادل نباشد تعیین کنید. نشان دهید $S = cR_T(\partial I_T / \partial R_T)$ که c انحراف گالوانومتر بر واحد جریان و S حساسیت پل (با چشمپوشی از مقاومت گالوانومتر) است

$$S = \frac{c\mathcal{E}_1}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

۱۶-۷ نظریه برهم‌نهی را نمی‌توان برای توان به کار برد. برهم‌نهی، خاصیتی است که به خطی بودن کمیت بستگی دارد و توان به جای خطی بودن، تابع درجه دوم است. (الف) توان انتقال یافته از منبع \mathcal{E}_1 به مدار شکل ۱۹-۷ را وقتی $\mathcal{E}_2 = 0$ حساب کنید. (ب) توان انتقال یافته از منبع \mathcal{E}_2 را وقتی $\mathcal{E}_1 = 0$ باشد به دست آورید. (ج) توان انتقال یافته به مدار را در حالی که هر دو منبع فعال اند حساب کنید و نشان دهید جمع نتایج a و b با توان جذب شده در مدار یکی نیست.

۱۷-۷ دستگاهی از n سلول مشابه با ولتاژ مدار باز \mathcal{E}_0 و مقاومت داخلی R_I برای هر یک از آنها را در نظر می‌گیریم. این دستگاه را برای

برابر با $\Delta\Phi = A \log 2$ است، که در آن A یک ثابت است. (ج) با استفاده از جواب Φ جریان کل I بین دو سطح S و S' را به دست آورده و نشان دهید که مقاومت بین S و S' برابر با $(\ln 2)/\alpha a^2$ است.



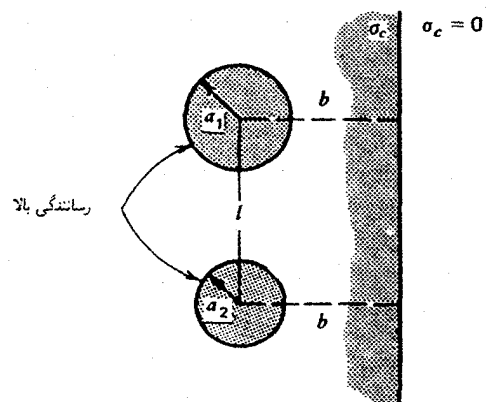
شکل ۱۷-۷

۱۸-۷ دو کره کوچک با رسانایی کامل و به شعاعهای a_1 و a_2 در یک محیط نامتناهی با رسانندگی σ_c قرار دارند. مراکز آنها به فاصله l از یکدیگر قرار دارند به طوری که $l \gg a_1, a_2$. با به کار بردن ضرایب مقاومت نشان دهید مقاومت بین آنها تقریباً برابر است با

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma_c} = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{2}{l} \right)$$

۹-۷ اگر محیط مسئله ۸-۷ به وسیله یک مرز مسطح نامتناهی مثل شکل ۱۸-۷ محدود شده باشد با استفاده از روش تصویری و معرفی جریانهای تصویری نشان دهید

$$R' = R + \frac{1}{4\pi\sigma_c} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

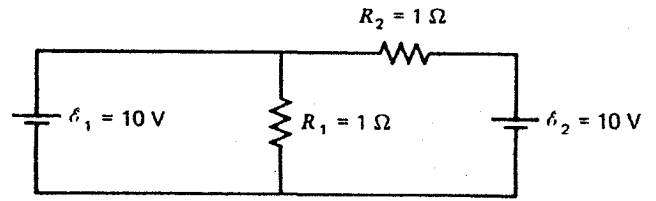


شکل ۱۸-۷

۱۰-۷ خازنی به شکل دلخواه با یک دی‌الکتریک یکنواخت با گذردهی

که برای حالتی که سلولها با هم موازی و به R وصل شده‌اند برابر
 $I = \mathcal{E}_0 / (R + R_I/n)$ است.

۱۸-۷ یک شبکه مربعی از یک سیم با مقطع یکنواخت شامل n^2 سلول مربعی مشابه ساخته شده است. مقاومت یک ضلع هر سلول r است. اگر جریانی از یک گوشه وارد و از گوشه مقابل خارج شود، مقاومت کل شبکه را برای $n = 2, 3, 4$ پیدا کنید (راهنمایی: از تقارن مدار می‌توان برای کم کردن تعداد جریانها در مدار استفاده کرد. برای مثال در حالت $n = 3$ تعداد جریان را می‌توان به سه تقلیل داد).



شکل ۱۹-۷

انتقال جریان به مقاومت R مورد استفاده قرار می‌دهیم. (الف) نشان دهید که جریان در مقاومت بار موقعی که سلولها با هم و با مقاومت R سری هستند $I = n\mathcal{E}_0 / (R + nR_I)$ است. (ب) نشان دهید



مغناطیس جریانهای پایا

۱-۸ نیروی لورنتس

میدان الکتریکی \mathbf{E} لزوماً با رابطه $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ تعریف می‌شود که در آن \mathbf{F}_e نیروی وارد بر میدان الکتریکی است. این میدان در هر دستگاه مرجعی با تعیین نیروی وارد بر بار نقطه‌ای ساکن q در آن دستگاه مرجع تعیین می‌شود.^۱ طبیعی است که در الکتریسیته ساکن بارها را ساکن در نظر گرفتیم. اگر این محدودیت را حذف کنیم، به طوری که q بتواند با سرعت غیر صفر \mathbf{v} (و در یک چارچوب مرجع مفروض) حرکت کند، از معادله $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ پیروی می‌کنیم اما تجربه نشان می‌دهد که نیروی دیگری وجود دارد که با معادله زیر

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (۱-۸)$$

داده می‌شود. این نیروی مغناطیسی است که عموماً به آن نیروی لورنتس می‌گوییم. گاهی اوقات کمیت \mathbf{B} در معادله (۱-۸) را القای مغناطیسی می‌نامیم و آن را میدان مغناطیسی یا به‌سادگی میدان \mathbf{B} می‌نامیم. حضور این میدان را از مشاهداتی استنباط می‌کنیم (در غیاب هر میدان الکتریکی) که منجر به برقراری نیرویی می‌شود که این نیرو (۱) با بزرگی q و \mathbf{v} متناسب است، (۲) بر \mathbf{v} و بر جهت دیگر $\pm \hat{\mathbf{B}}$ عمود است و (۳) با بزرگی \mathbf{F}_m به صورت سینوسی زاویه بین \mathbf{v} و \mathbf{B} تغییر می‌کند.

همان طور که در بالا گفتیم نیروی لورنتس بر صفحه‌ای که با \mathbf{v} و \mathbf{B} تعریف می‌شود، عمود است. در نتیجه، کار انجام شده بر روی q توسط

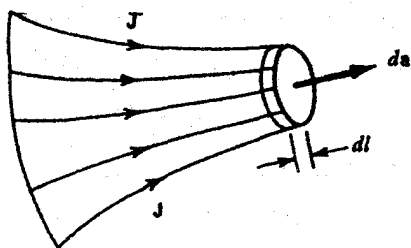
\mathbf{F}_m (در فاصله زمانی dt) ضمن حرکت q به اندازه $dW = Ndt$ صفر است: $dW = \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v} dt = 0$. یعنی نیروهای مغناطیسی به تنهایی نمی‌توانند بر روی ذرات باردار کار انجام دهند. با فرض آنکه میدانهای برداری \mathbf{E} و \mathbf{B} با هم وجود دارند، نیروی الکترومغناطیسی وارد بر یک بار نقطه‌ای q با رابطه زیر

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (۲-۸)$$

داده می‌شود این نیرویی است که از آن در تعیین حرکت ذرات باردار استفاده می‌کنیم. مطالعه رفتار ذرات باردار در میدانهای الکترومغناطیسی موضوع الکترودینامیک است. بسته به آنکه معادلات حرکت معادلات فیزیک کلاسیک یا فیزیک کوانتومی هستند آنها را الکترودینامیک کلاسیک یا الکترودینامیک کوانتومی (با علامت اختصاری QED) می‌نامند.

همان طور که در معادلات (۱-۸) و (۲-۸) این فصل تعریف شد، \mathbf{B} دارای یکای میدان الکتریکی تقسیم بر سرعت است. روابط ابعادی معادل زیر که در آنها C, N, A, V, m, s, kg, Wb و T به ترتیب مخفف نیوتون، کولن، ولت، آمپر، متر، ثانیه، کیلوگرم، وبر، و تسلا هستند، معتبرند.

۱. از نیروهای گرانشی (که از نیروهای الکترومغناطیسی بسیار ضعیفترند) و بقیه نیروهای بنیادی که می‌توانند در مجاورت هسته اتمی ظاهر شوند، چشمپوشی می‌کنیم. (نیروهای اخیر "کوتاه‌برد" هستند، که می‌توان از آنها اگر q به فاصله دوری از هسته باشد چشمپوشی کرد. این حالت معمول است.)



شکل ۱-۸ ناحیه لوله‌ای در فضا که خطوط جریان \mathbf{J} تشکیل‌دهنده سطح جانبی آن است.

حائز اهمیت‌اند. چگالی جریان \mathbf{J} اساسی‌تر است، زیرا حتی در سطح میکروسکوپی نیز مهم است. در هر حالت، عبارت نیروی لورنتس را برای جریانهای سطحی

$$\mathbf{F} = \int_S [\mathbf{K}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] da \quad \text{یا} \quad d\mathbf{F} = \mathbf{K} \times \mathbf{B} da \quad (۶-۸)$$

و برای جریانهای رشته‌ای

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{I} \times \mathbf{B} dl \quad \text{یا} \quad d\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} dl \quad (۷-۸)$$

به‌دست می‌آوریم. اگر dl معرف یک جزء رشته‌ای از طول در جهت \mathbf{I} باشد، نیرو را به صورت

$$\mathbf{F} = \int I dl \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (۸-۸)$$

نیز می‌توان نوشت. سرانجام یک توزیع جریان که برحسب کل سه نوع چگالی جریان مشخص می‌شود و در بالا بحث شد، حاصل جمع معادلات (۴-۸)، (۶-۸) و (۷-۸) است.

اکنون رابطه مهمی را برای جریانهای لوله‌ای یا جریانهای رشته‌ای نشان می‌دهیم. یک چگالی جریان \mathbf{J} ، محدود به یک ناحیه لوله‌ای در فضا را که سطح جانبی آن توسط خطوط جریان \mathbf{J} تشکیل می‌شوند در نظر بگیرید (شکل ۱-۸)، به‌طوری که کل جریان عبوری از مساحت سطح مقطع لوله S با رابطه $I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_S J da \equiv I$ داده می‌شود. رابطه‌ای را که می‌خواهیم برای این نوع جریان اثبات کنیم عبارت است از

$$\int_V \mathbf{J} dv * [] = \int_C I dl * [] \quad (۹-۸)$$

که در آن گروه‌ها نشان‌دهنده هر میدان برداری یا نرده‌ای تعریف شده در V و * نشان‌دهنده یک عمل دوتایی مانند عمل ضرب خارجی

۱. منظور این است که هر چقدر بار در جزء حجم dv باشد، این جزء حجم دارای میانگین سرعت $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ در \mathbf{r} است.

۲. یعنی، نیروی وارد بر بار V .

$$B = \frac{N/C}{m/s} = \frac{V \cdot s}{m^2}$$

یا

$$B = \frac{kg}{C \cdot s} = \frac{kg}{A \cdot s^2} = \frac{Wb}{m^2} = T$$

و بر و تسلا هر دو یکاهای به‌دست آمده هستند.

۲-۸ نیروهای وارد بر توزیع جریان - حرکت در میدانهای متقاطع

داشتیم $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (شاخص m حذف شده است)، که در آن q یک بار نقطه‌ای بود، یا باری با ابعاد فیزیکی به اندازه کافی کوچک به‌طوری که \mathbf{B} بر روی این ابعاد ثابت است. اکنون یک حجم V را در نظر بگیرید که در آن چگالی بار نرده‌ای متحرک $\rho(\mathbf{r})$ همه‌جا تعریف می‌شود. همچنین فرض کنید که یک میدان برداری $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ در V وجود دارد که سرعت $\rho(\mathbf{r})$ را به‌دست می‌دهد. در آن صورت نیروی لورنتس حاصل از معادله (۱-۸) که بر بار متحرک واقع در یک جزء حجم dv در \mathbf{r} وارد می‌شود به‌سادگی برابر است با

$$d\mathbf{F} = dq(\mathbf{r})[\mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] = \rho(\mathbf{r})dv[\mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]$$

بنابه تعریف، $\rho(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r})$ ، [معادله (۶-۷)]، بنابراین می‌توان نوشت

$$d = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [\mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]dv \quad (۳-۸)$$

بدین ترتیب نیروی لورنتس وارد بر حجم V با رابطه

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})dv \quad (۴-۸)$$

داده می‌شود.

به همین ترتیب اگر چگالی بار میدانهای نرده‌ای بر روی سطوح یا بر روی منحنیها در فضا وجود داشته باشد و به‌ترتیب با σ و λ داده شود، در این صورت نیروهای لورنتس می‌توانند بر روی این سطوح و منحنیها وجود داشته باشند. مجدداً، بنابه تعریف

$$\sigma\mathbf{v} \equiv \mathbf{K} \quad \text{و} \quad \lambda\mathbf{v} \equiv \mathbf{I} \quad (۵-۸)$$

که در آن \mathbf{K} چگالی جریان سطحی و \mathbf{I} چگالی جریان خطی یا رشته‌ای است. واضح است که این مفاهیم فقط از نقطه‌نظر ماکروسکوپی

مثال ۸-۱ ذره باردار در یک میدان مغناطیسی ثابت می‌خواهیم حرکت ذره‌ای به جرم m و بار q را در یک میدان مغناطیسی \mathbf{B} در نظر بگیریم. به علاوه، حالتی را در نظر می‌گیریم که میدان الکتریکی در آن ناحیه صفر باشد. چون $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ بر طبق قانون دوم نیوتون داریم

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (۱۰-۸)$$

اگر ضرب نرده‌ای دو طرف این معادله را با \mathbf{v} انجام دهیم، خواهیم داشت $m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/dt = q\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ چون

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} = 0$$

در آن صورت

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = 0$$

به این ترتیب انرژی جنبشی ذره نسبت به زمان ثابت است که این امر با این واقعیت که \mathbf{F} همواره بر حرکت عمود است سازگار است.

اگر \mathbf{B} یک میدان ثابت باشد نشان می‌دهیم که مسیر ذره ترکیبی از حرکت دایره‌ای یکنواخت و حرکت در یک خط مستقیم است (این را نشان دهید). وقتی که $\mathbf{B} = B\hat{z}$ ، این حرکت را می‌توان با معادلات زیر توصیف کرد (شکل ۸-۲)

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{v_{\perp}}{\omega} \sin \omega(t - t_0) & y - y_0 &= \frac{v_{\perp}}{\omega} \cos \omega(t - t_0) \\ z - z_0 &= v_{\parallel}(t - t_0) \end{aligned} \quad (۱۱-۸)$$

که در آن v_{\perp} و v_{\parallel} به ترتیب تصاویر سرعت عمود و در امتداد میدان است و $\omega = qB/m$ بسامد سیکلوترون نام دارد. بدین ترتیب تصویر مسیر بر روی یک صفحه عمود بر \mathbf{B} (صفحه xy) دایره‌ای به مرکز (x_0, y_0) با شعاع $R = v_{\perp}/\omega = mv_{\perp}/qB$ است.

غالباً وضعیتی داریم که در آن $v_{\parallel} = 0$ ، و ذره در یک حرکت دایره‌ای یکنواخت با سرعت زاویه‌ای ω حرکت می‌کند. در این حالت تکانه ذره با

$$p = mv = qBR \quad (۱۲-۸)$$

داده می‌شود. این رابطه معمولاً برای تعیین تکانه ذره در حضور میدانهای مغناطیسی (مثلاً در طیف‌سنجیهای مغناطیسی) به کار می‌رود. حاصلضرب BR را معمولاً "سختی مغناطیسی" می‌نامیم. جالب است که به یک خصوصیت کاربردی مهم میدان \mathbf{B} توجه کنیم و آن این است که از میدان \mathbf{B} می‌توان استفاده کرد تا یک توزیع ذرات باردار را شامل شود بدون آنکه توزیع انرژی آنها را تغییر دهد.

(\times) یا عمل ضرب نقطه‌ای (\cdot) است. برای مثال می‌توان نشان داد $\int \mathbf{J} d\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \int I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ می‌توان سمت چپ معادله (۹-۸) را به صورت $\int_C \int_S \{ \mathbf{J} da d\mathbf{l} * [\] \}$ نوشت که در آن جزء سطح S است و $d\mathbf{l}$ جزء طول در جهت \mathbf{J} و از این رو بر da عمود است. اگر $[\] dl$ بر روی سطح S به مقدار قابل ملاحظه‌ای تغییر نکند (یا اگر با $[\] dl$ میانگین $[\]$ را بر روی مساحت S نشان دهیم)، در این صورت با فاکتور گرفتن از انتگرال بالا می‌توان به دست آورد

$$\begin{aligned} \int_C \int_S \{ \mathbf{J} da d\mathbf{l} * [\] \} &= \int_C \left\{ \int_S \mathbf{J} da \right\} * [\] dl \\ &\equiv \int_C \mathbf{I} * [\] dl \equiv \int_C I d\mathbf{l} * [\] \end{aligned}$$

در آخرین مرحله فرض کرده‌ایم که $I d\mathbf{l} = \mathbf{I} dl$ ، یعنی فرض می‌شود که "جهت" جریان در "جهت" جزء طول dl است. شرایط بالا را که تحت آن این عملها معتبرند شرایط رشته‌ای یا تقریب رشته‌ای می‌نامیم.

مثالی از کاربرد این تبدیل، محاسبه نیروی وارد بر یک سیم حامل جریان واقع در یک میدان مغناطیسی خارجی \mathbf{B} است. اگر \mathbf{B} معرف مقدار میانگین میدان بر روی مساحت سطح مقطع سیم و \mathbf{J} چگالی جریان در سیم باشد، کرشه و ستاره در معادله (۹-۸) با $\mathbf{B} * \equiv \times$ داده می‌شوند، و از این رو معادله (۴-۸) برای نیروی وارد بر سیم مانند معادله (۸-۸) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\mathbf{F} = \int \{ \mathbf{J} d\mathbf{v} \times \mathbf{B} \} = \int I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

در شرایط جریان پایا، جریان I در طول سیم ثابت است و می‌توان آن را از زیر انتگرال خارج کرد:

$$\mathbf{F} = I \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

به علاوه، اگر \mathbf{B} در مسیر انتگرال‌گیری ثابت باشد $\mathbf{F} = I \{ \int d\mathbf{l} \} \times \mathbf{B}$ اگر $\int d\mathbf{l}$ روی یک مسیر بسته گرفته شود در این صورت $\int d\mathbf{l} = \oint d\mathbf{l} = 0$ نیروی خالص وارد بر یک حلقه بسته جریان رشته‌ای در یک میدان مغناطیسی ثابت صفر است.

اینکه بتوان نیروی وارد بر بار متحرک در یک سیم را با نیروی وارد بر خود سیم برابر گرفت شاید واضح نباشد. این برابری بدان دلیل است که در وضعیت تعادل نیروی وارد بر بار متحرک به اتمهای سیم منتقل می‌شود و بار نمی‌تواند سیم را ترک کند.

اکنون فرض کنید یک بار q در $t = 0$ در این میدانهای متقاطع ساکن است. حرکت بعدی چگونه است؟ این حرکت را می‌توان با استفاده از نتیجه بالا تعیین کرد حرکت را از نقطه نظر چارچوب مرجع O' که با سرعت $\mathbf{v} = (E/B)\hat{x}$ حرکت می‌کند مطالعه می‌کنیم. بدین ترتیب یک بار q' و یک ناظر را در نظر بگیرید که با سرعت $\mathbf{v} = (E/B)\hat{x}$ حرکت می‌کند.

نیروی مغناطیسی در چارچوب مرجع ذره متحرک، O' ، صفر است، زیرا بنا به تعریف سرعت ذره در آنجا صفر است. چون کل نیروی وارد بر ذره صفر است، در این صورت ناظر باید به این نتیجه برسد که نیروی الکتریکی qE و از این رو میدان الکتریکی نیز باید صفر باشد. فقط ممکن است یک میدان مغناطیسی یکنواخت وجود داشته باشد. در نتیجه اگر بار q' در چارچوب O' حرکت کند، یک میدان مغناطیسی در آن چارچوب بر حرکت بار حاکم است و از این رو مدار دایره‌ای است. اکنون به نظر می‌رسد که بار q ساکن در O نسبت به ناظری که با سرعت \mathbf{v} حرکت می‌کند با سرعت $-\mathbf{v}$ حرکت کرده و بنابراین دایری را طی می‌کند! حرکت با معادلاتی به شکل

$$x' = R \cos \omega t \quad y' = R \sin \omega t \quad x'^2 + y'^2 = R^2 \quad (14-A)$$

توصیف می‌شود.

در نتیجه حرکت در O برهم‌نهی‌ای از حرکت دایره‌ای و حرکت خطی است — مثلاً حرکت سیکلوئیدی (شکل ۳-۸ را ببینید). معادلات حرکت در دستگاه $O(x, y, z)$ از فرمولهای تبدیلی $x' = x - vt$ و $y' = y$ به دست می‌آیند. بدین ترتیب معادلات حرکت عبارت‌اند از

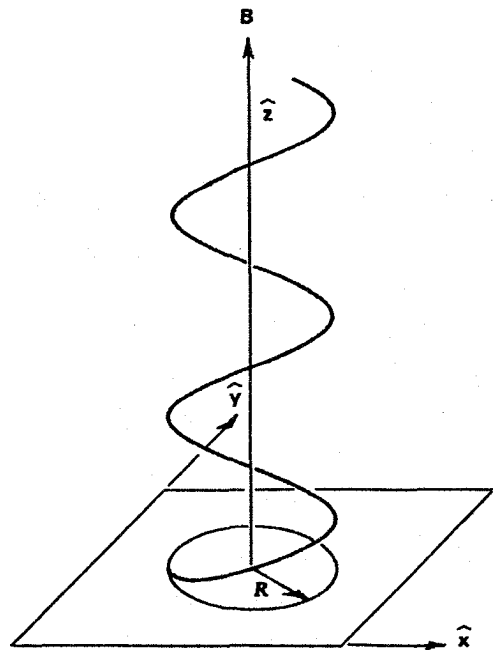
$$x - vt = R \cos \omega t \quad y = R \sin \omega t \quad (15-A)$$

که معادلات پارامتری یک سیکلوئیدند.

۳-۸ منابع B

تا کنون حضور یک میدان \mathbf{B} را بدون توضیحی درباره منابع یا خصوصیات آن فرض کردیم. اکنون در مورد آن توضیح می‌دهیم. برای این کار فرض می‌کنیم منابع میدان مغناطوستاتیکی، جریانهای الکتریکی پایا هستند. تأیید این فرض از مطالعات تجربی زیادی به دست می‌آید که روی خصوصیات نیروهای مغناطیسی انجام شده است و در اینجا از جزئیات آن چشمپوشی می‌کنیم. کافی است بگوییم

۱. در این مورد فرض می‌کنیم $v \ll c$ ، از این رو می‌توانیم از فرمولهای تبدیل گالیه استفاده کنیم (فصل ۱۷ را ببینید).



شکل ۲-۸ مسیر یک ذره در یک میدان ثابت \mathbf{B} که نشان‌دهنده ترکیبی از حرکت دایره‌ای یکنواخت و حرکت در یک خط مستقیم است (حرکت حلزونی).

بدین ترتیب، هر ذره که یک نقطه روی خط موازی میدان ثابت \mathbf{B} را ترک می‌کند، \mathbf{B} آن ذره را در زمان بعدی که توسط دوره تناوب مدار دایره‌ای تصویر ذره یعنی $T = 2\pi R/v = 2\pi m/qB$ داده می‌شود به آن خط باز می‌گرداند. این زمان از سرعت ذره (غیرنسبیتی) مستقل است. بدین ترتیب تمام ذراتی که دارای مؤلفه سرعت موازی \mathbf{B} ، یعنی $v_{||}$ یکسانی هستند در همان نقطه به خط باز می‌گردند. از این خصوصیت در وسائلی به نام عدسیهای مغناطیسی برای کانونی کردن پرتوهای ذرات باردار استفاده می‌شود.

مثال ۲-۸ یک ذره باردار در میدانهای متقاطع

فرض کنید در یک دستگاه مرجع که با O نشان داده می‌شود میدانهای ثابت ("مقاطع") که دوه‌دو بر هم عمود هستند، وجود دارند.

$$\mathbf{B} = B\hat{z} \quad \mathbf{E} = E\hat{y} \quad (13-A)$$

فرض کنید یک بار q در این ناحیه وجود دارد که با سرعت $\mathbf{v} = v\hat{x}$ در حرکت است. با استفاده از معادله (۲-۸) می‌توان نشان داد که اگر $v = E/B$ باشد ذره هیچ نیرویی را "احساس" نخواهد کرد یعنی

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q \left[E\hat{y} + \left(\frac{E}{B}\hat{x} \right) \times B\hat{z} \right] \equiv 0$$

مربوط می‌شوند، و ρ_M و \mathbf{g} چگالیهای منبع هستند که مستقل از زمان بوده و خود نشان‌دهنده میدانهای نرده‌ای و برداری اند. در مقایسه با الکتروستاتیک، که در آن $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k_{EP} \equiv \rho_E$ ، ρ_M با چگالی بار مغناطیسی می‌نامیم. اگر میدان (برداری) \mathbf{g} همه‌جا صفر و ρ_M غیرصفر باشد، در آن صورت میدان \mathbf{B} با میدان \mathbf{E} کاملاً متشابه است و دارای خصوصیات یکسان خواهد بود

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = k'_M \int \frac{dq_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (18-8)$$

در واقع، در گسترش مقدماتی مغناطیس برای محاسبه \mathbf{B} نسبت به فضای آزاد از این فرمولها استفاده می‌شود، و هنوز این فرمولها ابزار محاسباتی مفیدی را اثبات می‌کنند (بخش ۹-۲ را ببینید). با این همه امروزه اعتقاد ما بر این است که این چنین ماهیتهای فیزیکی به صورت بار مغناطیسی وجود ندارند،^۱ به طوری که به درستی همه‌جا $\rho_M = 0$ و عموماً \mathbf{g} با \mathbf{J} ، چگالی جریان الکتریکی برابر است. بدین ترتیب ما معتقدیم که معادلات واقعی میدان مغناطیسی ایستا عبارت‌اند از

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (19-8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (20-8)$$

که در آن $\mu_0 = 4\pi k_M \equiv 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ یک ثابت است و طوری انتخاب شده است که یکای جریان را یکای مناسب کند (آمپر).^۲ معادله (۲۰-۸) نشان می‌دهد که تاو \mathbf{B} به صورت خطی به چگالی جریان الکتریکی مربوط می‌شود.

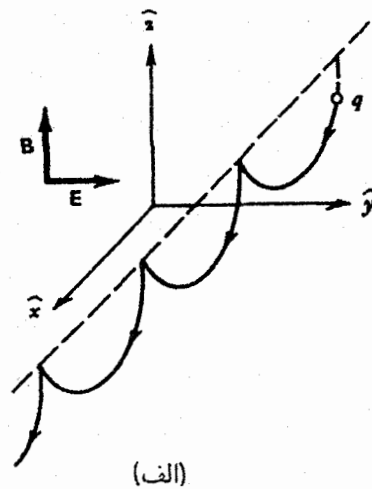
به این ترتیب از یک نظر معادله (۲۰-۸) مغناطیس را به الکتریسته ربط می‌دهد، زیرا \mathbf{J} نشان‌دهنده یک جریان از بار الکتریکی است که از معادله پیوستگی $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t$ پیروی می‌کند. به درستی که معادله (۲۰-۸) نشان می‌دهد که برای میدانهای الکتریکی مانند میدانهای مغناطیسی یک شرط ایستا وجود دارد، زیرا اگر از دو طرف معادله (۲۰-۸) دیورژانس بگیریم و از اتحاد برداری [معادله (۱-۶۶)] استفاده کنیم، به دست می‌آوریم

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \equiv 0 \equiv \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J}$$

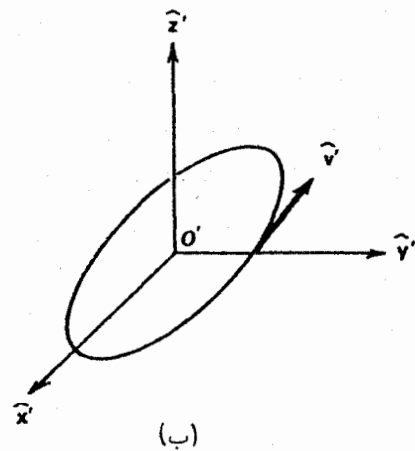
که با توجه به آن داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

۱. شواهد تجربی برای تک‌قطبها (بارهای مغناطیسی وجود ندارد اما برخی نظریه‌ها حضور آنها را مجاز می‌شمارند. هنوز آزمایشهایی برای جستجوی آنها انجام می‌شود.
۲. این مطلب را در مثال ۴-۸ می‌خوانیم.



(الف)



(ب)

شکل ۳-۸ مسیر یک بار در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متقاطع یکنواخت. (الف) حرکت سیکلوئیدی مشاهده‌شده در چارچوب آزمایشگاه (ب) حرکت دایره‌ای مشاهده‌شده در یک چارچوب مرجع که با سرعت $v = E/B$ در جهت $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ حرکت می‌کند.

که نیروهای مغناطیسی با جریانهای الکتریکی در کنار هم وجود دارند و اینکه نیروهای مغناطیسی وابسته به آهنرباهای دائمی که در آنجا وجود جریانها واضح نیست را می‌توان توسط نمایشی از آهنربا به‌عنوان یک توزیع جریان بیان کرد (فصل ۹ را ببینید).

فرض کنید که مغناطوستاتیک \mathbf{B} ، یک میدان برداری خوش‌تعریف در فضا باشد؛ این کمیت باید توسط تاو و دیورژانس مشخص شود. در حالت کلی می‌توان نوشت

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi k'_M \rho_M \quad (16-8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi k_M \mathbf{g} \quad (17-8)$$

که در آن k'_M و k_M ثابتهای تناسب هستند که به انتخاب یکاها

جهت انتخاب شده برای da که برداری عمود بر سطح S در نقطه S است ربط دارد. جریان I عبارت از جریان خالص گذرنده از S است. با این همه توجه کنید که به ازای یک منحنی بسته مفروض C ، تعداد بشمارای انتخاب S برای محاسبه I وجود دارد، تنها معیار بر روی S آن است که محیط آن C باشد. موقع استفاده از معادله (۲۲-۸) S طوری انتخاب می شود که محاسبات به ساده ترین شکل انجام شود.

مثال ۳-۸ معادلات انتگرالی مغناطوستاتیک - سیم مستقیم بلند یک سیم "بینهایت" بلند را در نظر بگیرید. یعنی به اندازه کافی بلند که بتوان از اثرهای لبه ای چشمپوشی کرد. فرض می کنیم یک جریان I با یک چگالی جریان ثابت شارش می یابد، بنابراین $J = I/\pi R^2$. دقت کنید که به دلیل ملاحظات تقارن، B می تواند فقط تابعی از ρ (نه ϕ یا z) باشد. اکنون از این ملاحظات تقارن و معادلات انتگرالی مغناطوستاتیک [معادلات (۲۱-۸) و (۲۲-۸)] استفاده می کنیم تا نشان دهیم $B = B_\phi \hat{\phi}$ ؛ یعنی B در جهت " ϕ " است. معادله (۲۱-۸) را برای فرض نشان داده شده در شکل ۴-۸ (الف) به کار می بریم.

$$\oint B \cdot da = 0 \rightarrow B_\rho 2\pi \rho l = 0$$

که به دست می دهد $B_\rho = 0$. سپس معادله (۲۲-۸) را برای مدار بسته $abcd$ شکل ۴-۸ (ب) به کار می بریم و از این واقعیت استفاده می کنیم که جریان عبوری از مدار $I = 0$ است؛ یعنی

$$\oint B \cdot dr = 0 = B \cdot ab + B \cdot cd = B_z(\rho_2) - B_z(\rho_1)$$

که می دهد $B_z = \text{const.}$ می بینیم اگر B_z وجود داشته باشد باید ثابت باشد. منطقی است که مقدار ثابت صفر باشد.

اکنون با به کار بردن قانون آمپر در منحنی C ، که دایره ای است که مرکز آن بر روی محور سیم قرار دارد و صفحه دایره بر سیم عمود است

۱. در واقع اگر بارهای مغناطیسی (به نام "قطبها") همواره به صورت زوجهای مثبت و منفی غیر قابل تفکیک (دوقطبیها) به فاصله بسیار کمی از یکدیگر باشند، و هر دوقطبی مانند الکتروستاتیک یک میدان دوقطبی B را تولید کند، رابطه $\nabla \cdot B = 0$ می تواند هنوز معتبر باشد (درست مثل مورد دی الکتریکها که در آنها اگر $\rho_f = 0$ و K همه جا ثابت باشد، $\nabla \cdot E = 0$ خواهد بود). با این همه، رفتار در داخل ماده و پیرامون آن نشان می دهد که چنین قطبهایی وجود ندارند، زیرا پیامدهای یک بار قطبش مغناطیسی در آنجا مشاهده نمی شود (در واقع این پیامدها نقض می شوند). از این رو فرض می کنیم که قطبهای مغناطیسی موهومی اند. با این همه، گاهی اوقات در محاسبه میدانهای مغناطیسی مفیدند.

۲. از این بحث که جریانها میدان را به وجود می آورند استفاده می کنیم. واضح است که هر میدان ثابتی را می توان بدون نقض هیچ گونه میدانی به میدان در حال محاسبه افزود. ثابت B_z باید به طریقی از جریان تعیین شود، اما در این مثال نمی توان آن را این گونه تعیین کرد. به این ترتیب B_z باید صفر باشد.

چگالی بار ρ همه جا مستقل از زمان است - شرط الکتروستاتیک. بعد از این فرض می کنیم که اگر توزیع جریان همه جا معلوم باشد، در این صورت یک جواب یکتا برای معادله مغناطوستاتیک وجود دارد، و اگر J همه جا صفر باشد. B نیز صفر است. می توان گفت که هر میدان ثابت B و مستقل از J اگرچه در معادلات (۱۹-۸) و (۲۰-۸) صدق می کند، ولی دارای معنی فیزیکی نیست.

تأکید می کنیم که اگرچه معادلات (۱۹-۸) و (۲۰-۸) معادلات میدان مغناطیسی جریانهای پایا هستند، و در حالت کلی اگر جریان با زمان تغییر کند قابل تغییر هستند، معادله $\nabla \cdot B = 0$ تغییر نخواهد کرد. تحت هر شرایطی هیچ گونه مدرکی برای بارهای مغناطیسی وجود ندارد.

۴-۸ معادلات انتگرالی مغناطوستاتیک و قانون آمپر

اینکه دیورژانس B همه جا صفر است به این معنی است که منبعهای شار مغناطیسی وجود ندارند. یعنی

$$\oint_S B \cdot da = 0 \quad (21-8)$$

این موضوع را می توان با انتگرال گرفتن از $\nabla \cdot B = 0$ روی حجم V و با استفاده از قضیه دیورژانس $\oint_S B \cdot da = \int_V \nabla \cdot B \, dv = 0$ نشان داد. این نتیجه نشان می دهد که شار B گذرنده از هر سطح بسته S ، صفر است، به طوری که خطوط جریان B ("خطوط مغناطیسی نیرو") همه جا پیوسته اند. هیچ گونه بار مغناطیسی که این خطوط جریان از آنها سرچشمه گرفته یا به آنها ختم شوند وجود ندارد. معادله (۲۱-۸) را می توان قانون گاوس مغناطیس نامید.

از معادله $\nabla \times B = \mu_0 J$ ، دومین رابطه انتگرالی بنیادی به نام قانون (مداری) آمپر را به دست می آوریم: انتگرال سطحی نرده ای این معادله را می توان از طریق هر سطح سمتگیری شده ممکن S انجام داد:

$$\int_S (\nabla \times B) \cdot da = \mu_0 \int_S J \cdot da$$

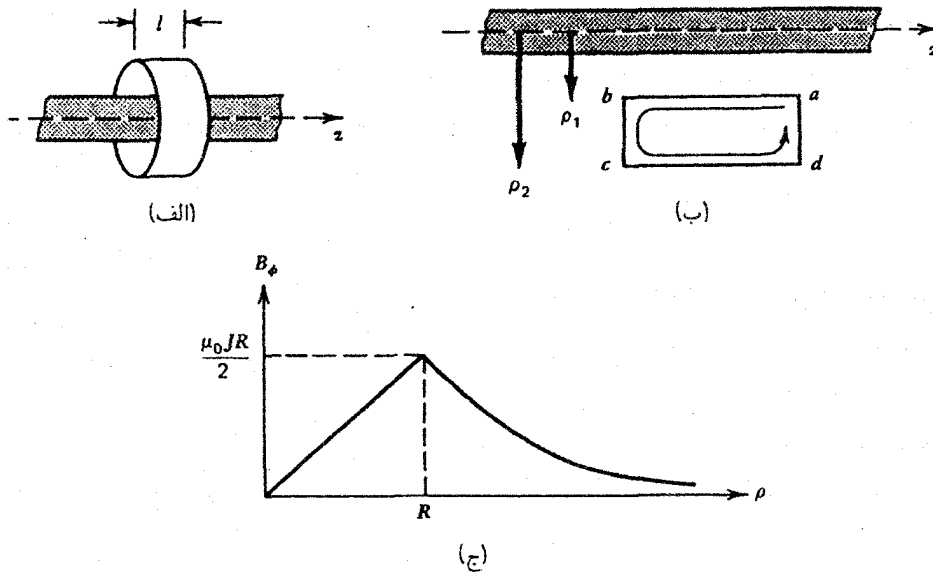
اما از قضیه استوکس داریم

$$\int_S (\nabla \times B) \cdot da = \oint_C B \cdot dr$$

به طوری که

$$\oint_C B \cdot dr = \mu_0 \int_S J \cdot da \equiv \mu_0 I \quad (22-8)$$

که قانون آمپر است. همان گونه که جهت چرخش یک پیچ راستگرد به حرکت آن در امتداد محور پیچ مربوط می شود، جهت چرخش C به



شکل ۴-۸ کاربرد معادلات انتگرالی مغناطوستاتیک برای یک جریان مستقیم بلند. (الف) قانون گاوس مغناطوستاتیک، (ب) قانون آمپر، (ج) میدان B به صورت تابعی از فاصله.

داریم
 برای آنکه ایده‌ای از بزرگی B برای جریانهای "آزمایشگاه" به دست آوریم، مقدار $I = 1 \text{ A}$ ، $\rho = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ را در معادله (۲۴-۸) قرار می‌دهیم. در این صورت B برابر است با $2 \times 10^{-2} \text{ T} = 20 \text{ G}$. بدین ترتیب یکای شدت به صورت مناسبتر $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$ داده می‌شود. در واقع گاوس یکای cgs (گاوسی) شدت میدان است. پیوست الف را ببینید.

این مثال این واقعیت را بیان می‌کند که خطوط جریان B برای جریانهای رشته‌ای می‌خواهند پیرامون رشته بر طبق قاعده بیچ راستگرد بچرخند. اگر انگشت شست در جهت جریان باشد، B در جهت خمش چهار انگشت دست راست قرار می‌گیرد. ■

مثال ۴-۸ نیروی بین سیمهای حامل جریان
 اگر دو سیم رشته‌ای موازی بلند I_2 و I_2' داشته باشیم، نیروی بین آنها با معادله (۷-۸) داده می‌شود که در آن B میدان ایجادشده توسط I_2 در مکان جزء $d\rho'$ از سیم حامل جریان I_2' است. با جهت‌های مختصه‌ای نشان داده شده در شکل ۵-۸ و با استفاده از میدان ایجادشده توسط یک سیم، معادله (۲۴-۸)، در می‌یابیم که

$$d\mathbf{F} = I_2' dl' \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B} = I_2' dl' \hat{\mathbf{z}} \times \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \hat{\phi} \right)$$

یا

$$d\mathbf{F} = \mu_0 \frac{I_2 I_2'}{2\pi d} dl' (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\phi}) \quad (27-8)$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} B_\phi \rho d\phi = 2\pi \rho B_\phi = \mu_0 I_S \quad (23-8)$$

به‌ازای $I_S = I$ ، $\rho \geq R$ و از معادله (۲۳-۸) به دست می‌آوریم

$$B = B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \quad \rho \geq R \quad (24-8)$$

اگر منحنی C یک مسیر دایره‌ای مشابه به شعاع $\rho < R$ باشد، در آن صورت $I_S = \pi \rho^2 J$ و از معادله (۲۳-۸) به دست می‌آوریم

$$B = B_\phi = \frac{\mu_0 J \rho}{2} \quad \rho \leq R \quad (25-8)$$

نمودار $B_\phi = B$ برحسب ρ یعنی فاصله از محور سیم را در شکل ۴-۸ (ج) می‌بینیم.

دقت کنید که همین بحثها را می‌توانیم برای هر توزیع جریان که تنها تابعی از مختصه استوانه‌ای ρ است و در جهت z جریان دارد $\mathbf{J} = J_z(\rho) \hat{\mathbf{z}}$ ، به‌کار ببریم. بار دیگر از قانون آمپر به دست می‌آوریم

$$2\pi \rho B_\phi = \mu_0 I(\rho) \equiv \int_0^\rho J_z(\rho') 2\pi \rho' d\rho'$$

به طوری که

$$B_\phi = \frac{\mu_0}{\rho} \int_0^\rho J_z(\rho') \rho' d\rho' \quad (26-8)$$

$dF/dl' = 2 \times 10^{-5} \text{ N/m}$ یک سیم مسی با سطح مقطع 1 mm^2 دارای وزن بر میلیمتر تقریباً $8 \times 10^{-5} \text{ N}$ است. ■

مثال ۵-۸ یک ورقه جریان - معادلات انتگرالی مغناطوستاتیک همان طور که در شکل ۷-۸ (الف) دیدیم یک ورقه بزرگ را در نظر بگیرید که بر روی آن یک چگالی جریان سطحی یکنواخت جریان دارد: $\mathbf{K} = K\hat{z} (\text{A/m})$. اکنون حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

۱. اگر \hat{x} بر صفحه عمود باشد، در این صورت میدان \mathbf{B} نمی‌تواند به مختصات (z, y) که بر x عمود است، بستگی داشته باشد: $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x)$. دلیلش آن است که در رابطه با نقطه میدان هر جابه‌جایی یک نقطه میدان که با ورقه موازی باشد توزیع جریان را دست‌نخورده بر جای می‌گذارد.

۲. با توجه به تقارن مسئله روابطی را بین مؤلفه‌های میدان داریم

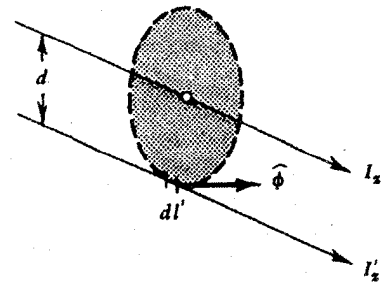
$$\begin{aligned} B_x(x) &= -B_x(-x) & B_y(x) &= -B_y(-x) \\ B_z(x) &= B_z(-x) \end{aligned} \quad (29-8)$$

به بیان دیگر، در حرکت از (x, y, z) به $(-x, y, z)$ ، جهت مؤلفه‌های x و y معکوس می‌شود و جهت مؤلفه z بدون تغییر باقی می‌ماند. اکنون می‌توان روابط انتگرالی که در معادلات (۲۱-۸) و (۲۲-۸) داده شده‌اند را برای پیدا کردن مؤلفه‌های \mathbf{B} به‌کار برد. ابتدا، از معادله (۲۱-۸) برای قرص گاوسی شکل ۷-۸ (ب) استفاده می‌کنیم. دقت کنید که توزیع شار از سطح جانبی قرص که بر صفحه عمود است، صفر است زیرا \mathbf{B} فقط تابعی از x است. بدین‌ترتیب

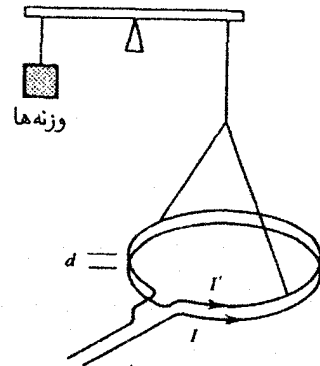
$$\circ = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = [\mathbf{B}(x) \cdot \hat{x} + \mathbf{B}(-x) \cdot (-\hat{x})]A$$

بنابراین، مؤلفه x ، B_x ، ثابت است: $B_x(-x) = B_x(x)$. با این همه با وجود شرط تقارن، معادله (۲۹-۸) داریم، $B_x(x) = -B_x(-x)$. این دو رابطه فقط اگر $B_x = 0$ باشد به‌طور هم‌زمان می‌توانند معتبر باشند. سپس، مانند شکل ۷-۸ (ج) مدار مربع‌مستطیل در صفحه xy را در نظر بگیرید. با استفاده از قانون آمپر و تشخیص آنکه جریان عبوری از مدار بسته صفر است، $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 0$ چون انتگرال‌های خطی اضلاع دیگر به‌صورت یکسان یکدیگر را حذف می‌کنند، از این رو داریم

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = [\mathbf{B}(x) \cdot \hat{z} + \mathbf{B}(-x) \cdot (-\hat{z})]l = 0$$



شکل ۵-۸ نیروی بین دو جریان رشته‌ای موازی.



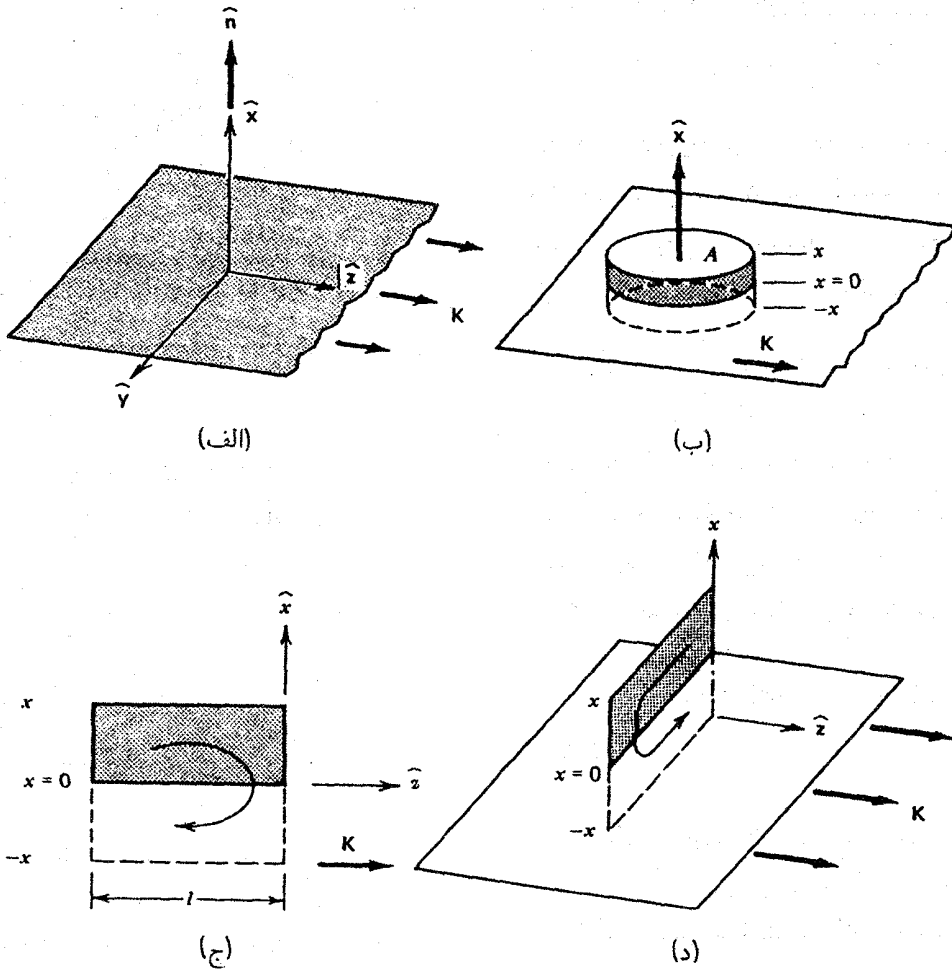
شکل ۶-۸ ترازوی جریان.

از این رو بسته به آنکه $I_z I'_z \geq 0$ باشد نیروی وارد بر جزء dl' به‌ترتیب به سمت داخل سیم حامل جریان I_z یا به سمت خارج از آن خواهد بود. بدین‌ترتیب سیمهایی که حامل جریانهای پاد موازی هستند یکدیگر را دفع می‌کنند. نیرو بر واحد متر سیمها را به‌سادگی می‌توان از معادله (۲۷-۸) تعیین کرد یعنی

$$\frac{dF}{dl'} = \mu_0 \frac{I_z I'_z}{2\pi d} \quad (28-8)$$

در یک دستگاه مانند "ترازوی جریان" که در شکل ۶-۸ نشان داده شده است، $I = I'$. یکای جریان را می‌توان به‌صورت دلخواه با انتخاب مقداری مناسب برای μ_0 و استفاده آن در معادله (۲۰-۸) انتخاب کرد. (سرشت بقیه کمیته‌ها کاملاً مکانیکی است). در دستگاه SI مقدار μ_0 برابر $4\pi \times 10^{-7}$ انتخاب می‌شود. در این صورت از یکای جریان حاصل، آمپر، می‌توان برای تعریف کولن، و از این رو ثابت ϵ_0 الکتروستاتیک استفاده کرد. اتفاقاً داریم $1/c^2 = \mu_0 \epsilon_0$ ، که در آن c سرعت نور است.

برای آنکه یک ایده از شدت نیروی مغناطیسی به‌دست آوریم، دقت کنید که اگر $I = I' = 1 \text{ A}$ و $d = 1 \text{ cm}$ ، در این صورت



شکل ۷-۸ کاربرد معادلات مغناطوستاتیک بر یک ورقه جریان برای تعیین B. (الف) ورقه جریان در جهت z است. (ب) قانون گاوس مغناطوستاتیک برای تعیین مؤلفه x. (ج) قانون آمپر برای تعیین مؤلفه z. (د) قانون آمپر برای تعیین مؤلفه y.

میدان بر روی هر ضلع ورقه جریان مقداری ثابت دارد و جهت آن در امتداد $\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}$ است که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه عمود از صفحه به نقطه‌ای است که B در آنجا محاسبه می‌شود. ■

مثال ۶-۸ برهم‌نهی جریانهای رشته‌ای - ورقه جریان راه دیگر پیدا کردن میدان مغناطیسی ناشی از ورقه جریان تخت بینهایت شکل ۷-۸ (الف) آن است که صفحه را برهم‌نهی از جریانهای رشته‌ای مستقیم هر یک با دامنه $d\mathbf{l} = \mathbf{K} dy$ در نظر بگیریم. در شکل ۸-۸ جریانهای رشته‌ای دوتا دوتا به‌طور متقارن حول نقطه میدان پخش شده‌اند. از شکل ۸-۸ می‌توان دید که میدان برآیند هر زوج با رابطه

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 K dy}{2\pi} \frac{\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2}{\xi}$$

که $B_z(x) = B_z(-x)$ و مؤلفه z میدان B ثابت است. این ثابت برحسب تصادف با دلایلی شبیه به دلایل ذکر شده در مثال ۳-۸، صفر است: $B_z = 0$.

نهایتاً استفاده از قانون آمپر برای یک مدار بسته مستطیل شکل در صفحه xy مطابق شکل ۷-۸ (د)، به دست می‌دهد

$$[\mathbf{B}(x) \cdot \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{B}(-x) \cdot (-\hat{\mathbf{y}})]l = \mu_0 I$$

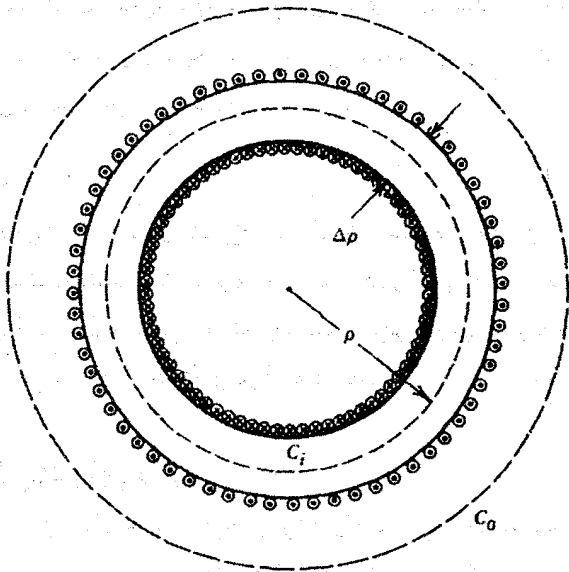
$$B_y(x) - B_y(-x) = \mu_0 K$$

استفاده از رابطه تقارن معادله (۲۹-۸) می‌دهد $2B_y(x) = \mu_0 K$ یا

$$B_y(x) = \frac{\mu_0 K}{2} \quad (۳۰-۸)$$

چون $B_x = B_z = 0$ ، نتیجه را می‌توان به شکل برداری زیر نوشت

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}) \quad (۳۱-۸)$$



شکل ۹-۸ چنبره‌ای با دو حلقه آمپری C_i و C_o .

اگر "ضخامت" چنبره، $\Delta\rho$ ، از میانگین شعاع آن R بسیار کوچکتر باشد، معادله (۳۳-۸) برای B_ϕ همه‌جا در داخل چنبره به صورت زیر نوشته می‌شود

$$B_\phi = \mu_0 \frac{NI}{\sqrt{\pi}\rho} = \mu_0 n_l I \quad (34-8)$$

که در آن n_l تعداد دور بر واحد طول (متر) چنبره است. در این تقریب B_ϕ در داخل چنبره ثابت است. بالاخره، با در نظر گرفتن تقارن دخیل در دورها می‌توان استدلال کرد که $B_\rho = 0$ و $B_z = 0$ ، از این رو $B = B_\phi$. (این در صورتی درست است که دورها لزوماً یک ورقه جریان را تشکیل دهند که همه‌جا بر $\hat{\phi}$ عمود باشد).

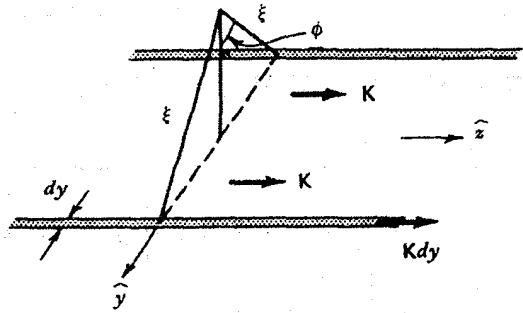
مثال ۸-۸ سیمولوله بلند

در حالی که شعاع R یک چنبره به سمت بینهایت میل می‌کند اما ابعاد سطح مقطع آن ثابت باقی می‌ماند، چنبره به یک سیمولوله بی‌انتهای شیبه می‌شود. از این رو از معادله (۳۴-۸) میدان در داخل این سیمولوله با

$$B = \mu_0 n_l I \quad (35-8)$$

داده می‌شود و میدان در خارج سیمولوله صفر است. اینها تقریبهای خوبی در نزدیکی مرکز یک سیمولوله بلند هستند که در آنجا می‌توان از تأثیرات لبه‌ای چشمپوشی کرد. توجه کنید که $n_l I$ جریان شارش‌یافته بر واحد طول روی "سطح" سیمولوله است، به طوری که

$$B = \mu_0 K \quad (36-8)$$



شکل ۸-۸ تعیین میدان یک ورقه جریان شکل ۷-۸(الف) با برهم‌نهی جریانهای رشته‌ای.

داده می‌شود که $\hat{\phi}_1$ و $\hat{\phi}_2$ بردارهای یکه در جهت ϕ نسبت به مبدا‌های هر یک از زوج جریانهای مورد نظر هستند. حاصل جمع بردارهای یکه $\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2$ را می‌توان به صورت $2\hat{y} \cos \phi$ نوشت. از این رو

$$dB = \frac{\mu_0 K}{2\pi} \frac{2 \cos \phi}{\xi} \hat{y} dy$$

با جمع بر روی تمام این زوجها و با توجه به آنکه

$$dy = \xi d\phi / \cos \phi$$

همان طور که در مثال قبل پیدا کردیم، به دست می‌آوریم

$$B(x) = \int dB(x) = \frac{\mu_0 K}{\pi} \hat{y} \int_0^{\pi/2} d\phi = \frac{\mu_0 K}{2} \hat{y} \quad (37-8)$$

مثال ۷-۸ چنبره — قانون آمپر

رشته‌های سیم‌پیچ که نزدیک به هم حول حلقه‌ای پیچیده شده‌اند را در نظر می‌گیریم شکل ۹-۸. این شکل را چنبره می‌نامند. محور z را عمود بر سطح مقطع دایره‌ای چنبره در نظر می‌گیریم (در امتداد محور).

اگر توزیع جریان حول محور z تقارن چرخشی داشته باشد، میدان B به ϕ بستگی نخواهد داشت. در نتیجه، انتگرالهای خطی روی مسیرهای دایره‌ای نشان داده شده، یکی در داخل، C_i ، و یکی در خارج چنبره، C_o ، شکل $\oint_C B \cdot d\tau = 2\pi\rho B_\phi$ دارد که در آن ρ فاصله از محور z است. اگر کل N دور بر روی چنبره باشد، و جریان‌گذرنده از سیم، I باشد، در آن صورت قانون آمپر برای منحنی C_i

$$B_\phi = \mu_0 \frac{NI}{2\pi\rho} \quad (38-8)$$

را به دست می‌دهد. برای منحنی C_o ، $B_\phi = 0$ ، زیرا جریان خالص عبوری از هر سطحی که پیرامون آن C_o است، صفر است.

با استفاده از عبارت برداری

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

که در مختصات دکارتی معتبر است،^۱ به دست می آوریم

$$\nabla^2 \mathbf{A} \equiv (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (39-8)$$

که بدان معناست که مؤلفه های دکارتی \mathbf{A} در معادلات زیر صدق می کنند

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \quad (40-8)$$

اینها معادلات زده ای هستند. هر یک از مؤلفه های این معادلات، دقیقاً شکل معادله پواسون $\nabla^2 \Phi = -\rho/\epsilon_0$ را دارند. در این صورت جواب $\mathbf{A} \equiv (A_x, A_y, A_z)$ عبارت است از

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_i(\mathbf{r}') dv'}{\xi} \quad (41-8)$$

که در آن $\xi = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ و $[A_i(\infty) = 0]$ ؛ و i معرف x, y و z است. به طور مختصرتر، می توان نوشت $[\mathbf{A}(\infty) \equiv 0]$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') dv'}{\xi} \quad (42-8)$$

دقت کنید سهم \mathbf{A} از چگالی جریان $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ در نقطه $P(\mathbf{r})$ در یک جزء حجمی dv' واقع در (\mathbf{r}') با $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ موازی است.

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') dv'}{\xi} \quad (43-8)$$

در حالتی با جریان رشته ای I داریم

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{l}'}{\xi}$$

که در آن $d\mathbf{l}'$ طول جزئی در امتداد سیم است. با جمع روی تمام جزءهای حجمی عنصر به دست می آوریم

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}'}{\xi} I(\mathbf{r}') \quad (44-8)$$

۱. این انتخاب را پیمانه کولن می گویند.

۲. به طور کلی تر $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A})$ که در آن $\nabla \mathbf{A}$ یک تانسور مرتبه ۲ یا دیادیک (مثال ۳-۱) است. در مختصات دکارتی $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) = (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A}$ عملگر لاپلاسی است (معادله ۱-۶۷).

را نیز می توان نوشت. میدان ثابت و مستقل از ابعاد سطح مقطع سیملوله است. بدین ترتیب سیملوله را طوری تغییر شکل می دهیم که به دو ورقه جریان شبیه شود، و در این صورت میدان آن، $\mu_0 K$ ، میدان دو ورقه جریان است.

نکته

در هیچ یک از مثالهای بالا برای پیدا کردن میدان \mathbf{B} فقط از قانون آمپر استفاده نشد. دو شرط برای تعیین تاو و دیورژانس \mathbf{B} وجود دارد. قانون آمپر فقط با تعیین تاو معادل است. بنابراین مجبوریم از شرایط پیوستگی شار $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$ نیز استفاده کنیم. ■

۵-۸ پتانسیل برداری

اکنون به ازای یک جریان مفروض روشهای صریحی برای محاسبه \mathbf{B} در نظر می گیریم. تا اینجا به معادلات (۱۹-۸) و (۲۰-۸) برمی گردیم — یعنی $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ و $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ — و از نتایج حساب برداری استفاده می کنیم که نشان می دهد اگر همه جا $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ یک میدان برداری \mathbf{A} وجود دارد به طوری که

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (37-8)$$

این نتیجه را با ساخت واقعی میدان برداری جدید \mathbf{A} ، که در آن صورت آن را پتانسیل برداری \mathbf{B} می نامیم، ثابت خواهیم کرد.

عکس این نتیجه — یعنی اگر $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ، در آن صورت $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ — پیامدی از اتحاد برداری $\nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{f} \equiv 0$ است، که در آن \mathbf{f} هر تابع برداری (خوش رفتار) است. باید توجه کنیم که بردار \mathbf{A} به طور یکتا با معادله (۳۷-۸) تعریف نمی شود. برای مثال، یک میدان $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi$ که در آن ψ هر میدان زده ای است نیز $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}'$ را برآورده می سازد، زیرا

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla \psi) = \nabla \times \mathbf{A}$$

در واقع \mathbf{A} فقط اگر دیورژانس آن همانند تاو آن مفروض باشد به طور یکتا مشخص می شود. بدین ترتیب برای تعریف \mathbf{A} به طور یکتا انتخاب می کنیم^۱

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (38-8)$$

در این صورت، از $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ به دست می آوریم

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}$$

در این صورت F صفر می‌شود (به‌ازای B متناهی)، و سهم F در انتگرال خطی نیز تا حد صفر کوچک می‌شود. بدین ترتیب

$$A_{1t} = A_{2t} \quad (۴۷-۸)$$

که بدون در نظر گرفتن حضور K پیوستگی مؤلفه مماسی پتانسیل برداری را ثابت می‌کند.

شرط مرزی روی مؤلفه عمودی پتانسیل برداری در عبور از نواحی جریانه با معادله $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ تعیین می‌شود. با این همه بهتر است به جای آن از شرط مرزی روی \mathbf{B} استفاده کرد. این شرط مرزی را می‌توان با اعمال قانون آمپر بر روی همان مربع مستطیل نشان داده شده در شکل ۸-۱۰، تعیین کرد. با استفاده از بحث‌های مشابه بر روی اندازه مربع مستطیل به‌سادگی می‌توان نشان داد

$$B_{2t} - B_{1t} = \mu_0 K \times \hat{n} \quad (۴۸-۸)$$

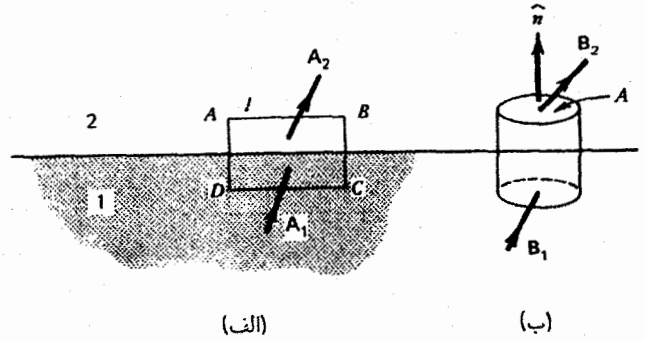
که در آن مؤلفه مماسی میدان در فصل مشترک، K چگالی جریان سطحی، و \hat{n} بردار یکه عمود بر سطح و در جهت خارج از ماده است. برای یک ورقه جریان که K در امتداد محور z و \hat{n} در امتداد محور x باشد معادله (۴۸-۸) به معادله زیر

$$B_{2y} - B_{1y} = \mu_0 K$$

که نتیجه به‌دست آمده از مثال ۵-۸ است، تبدیل می‌شود. اکنون نشان می‌دهیم که پیوستگی مؤلفه‌های مماسی پتانسیل برداری با پیوستگی مؤلفه عمودی \mathbf{B} هم‌ارز است. وقتی شار بر روی یک سطح بسته محاسبه می‌شود، معادله (۴۵-۸) همان نتیجه به‌دست آمده در معادله (۲۱-۸) یعنی $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$ را می‌دهد. (که این نتیجه مستقیم رابطه $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ است). با محاسبه انتگرال سطحی روی یک قرص مانند شکل ۸-۱۰ که در هر ناحیه بخشی از آن قرار دارد و ارتفاع آن تا حد صفر کوچک است، می‌توان نشان داد

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (۴۹-۸)$$

چون با تعریف شار، پیوستگی مؤلفه مماسی \mathbf{A} اثبات شد در آن صورت چنین شرطی با پیوستگی مؤلفه عمودی \mathbf{B} هم‌ارز است. در محاسبه کمیتهای دیگر، استفاده از پتانسیل برداری \mathbf{A} در اولویت است. این کمیت به‌عنوان یک ابزار تحلیلی ساده در محاسبه \mathbf{B} استفاده محدودی دارد. با این همه، مثال زیر حالتی را توصیف



شکل ۸-۱۰ (الف) کاربرد شکل انتگرالی $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ روی یک مربع مستطیل در فصل مشترک دو ناحیه برای تعیین شرایط مرزی بر روی پتانسیل برداری. (ب) استفاده از شکل انتگرالی $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ روی یک قرص در همان فصل مشترک برای پیدا کردن شرایط مرزی روی میدان \mathbf{B} .

که تقریب رشته‌ای را تعریف می‌کند. اکنون نشان دادیم که یک پتانسیل برداری وجود دارد. حال می‌توان مستقیماً ثابت کرد که عبارت داده شده در معادلات (۴۲-۸) و (۴۴-۸)، در $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ صدق می‌کند.

اکنون مفهوم شار مغناطیسی را دوباره معرفی می‌کنیم و یک رابطه بسیار مفید بین آن و پتانسیل برداری به‌دست می‌آوریم. شار مغناطیسی F که از سطح S می‌گذرد به‌صورت

$$F = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{n} da \quad (۴۵-۸)$$

تعریف می‌شود. این معادله وقتی S به‌صورت یک سطح بسته در نظر گرفته شود به معادله (۲۱-۸) تبدیل می‌شود؛ یعنی F صفر می‌شود. شار را می‌توان برحسب پتانسیل برداری \mathbf{A} با جایگزینی $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ و استفاده از قضیه استوکس

$$F = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{n} da = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (۴۶-۸)$$

که در آن C یک حلقه بسته مقید به سطح است، بازنویسی کرد. این تعریف شار که برحسب \mathbf{A} است برای پیدا کردن رفتار مؤلفه‌های مماسی \mathbf{A} وقتی فصل مشترک دو ناحیه از فضا را قطع می‌کند، به‌کار می‌رود. شکل ۸-۱۰ را در نظر بگیرید که دو ناحیه ۱ و ۲ با یک فصل مشترک معمولی را نشان می‌دهد که دارای یک جریان سطحی K است و پتانسیلهای برداری در دو ناحیه \mathbf{A}_1 و \mathbf{A}_2 هستند. از معادله (۴۶-۸) برای مسیر مربع مستطیل $ABCD$ ، که اضلاع $AB = CD = l$ آن کوچک در نظر گرفته می‌شوند، استفاده می‌کنیم. علاوه بر این، $BC = AD$ را به اندازه‌ای کوچک انتخاب می‌کنیم که مساحت مربع مستطیل تا نزدیک به صفر کوچک شود، که

می‌کنند که در آن از این کمیت برای محاسبه یک میدان مغناطیسی استفاده می‌شود.

$$A_z = \frac{-\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho + \text{const.} \quad (52-8)$$

مثال ۹-۸ پتانسیل برداری و میدان \mathbf{B} برای یک جریان رشته‌ای برای تعیین پتانسیل برداری درست بالای مرکز یک سیم رشته‌ای مستقیم بلند به طول $2L$ (در شکل ۱۱-۸ نشان داده شده است) مختصات استوانه‌ای با محور z در امتداد سیم را انتخاب می‌کنیم. برای سیم تقریب رشته‌ای را به کار می‌بریم و توجه می‌کنیم که از معادله (۴۴-۸) A باید در جهت z باشد. بدین ترتیب

از آن می‌توان نتیجه زیر را به دست آورد

$$A = A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{I dz}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^L \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}$$

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln(z + \sqrt{z^2 + \rho^2}) \right]_0^L$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left[\frac{L}{\rho} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{L^2}} \right) \right]$$

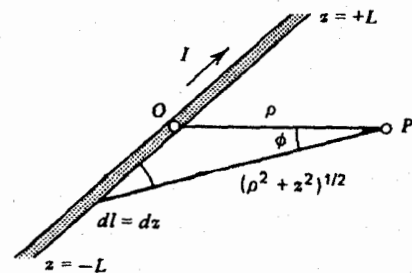
در حد $L \gg \rho$ ، این نتیجه به

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{2L}{\rho} \right) \quad \frac{L}{\rho} \gg 1 \quad (50-8)$$

تبدیل می‌شود. ضمن آنکه $L/\rho \rightarrow \infty$ ، مقدار $A \rightarrow \infty$. با این همه، اگر $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\hat{\phi} \partial A_z / \partial \rho$ را حساب کنیم نتیجه زیر را به دست می‌آوریم

$$\mathbf{B} = -\hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{L + \sqrt{L^2 + \rho^2}} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{L^2 + \rho^2}} - \frac{1}{\rho} \right) \quad (51-8)$$

و اگر $L/\rho \gg 1$ باشد، این معادله نتیجه متناهی به دست آمده برای میدان خارج از یک سیم مستقیم نامتناهی یعنی $\mathbf{B} = \hat{\phi} \mu_0 I / 2\pi \rho$ را به دست می‌دهد.



شکل ۱۱-۸ یک جریان رشته‌ای مستقیم متناهی. تعیین پتانسیل برداری که با آن \mathbf{B} را می‌توان حساب کرد.

بدین ترتیب فرمول (۴۲-۸) و (۴۴-۸) برای محاسبه \mathbf{A} را فقط برای توزیعهای جریانی که لزوماً در یک حجم متناهی V جایگزیده‌اند (یعنی $\mathbf{J}(\mathbf{r}') \rightarrow \infty$ ، باید سریعتر از $1/2$ نزول کند) می‌توان با اطمینان به کار برد. از نتایج این مثال می‌توان برای تعیین پتانسیل دو جریان موازی استفاده کرد (مثال ۷-۸).

مثال ۱۰-۸ پتانسیل برداری مغناطیسی ناشی از یک جریان غیررشته‌ای

یک رسانای استوانه‌ای بلند نامتناهی به شعاع ρ_0 که جریان ثابت I از آن عبور می‌کند را در نظر بگیرید. اگر محور z را در امتداد محور رسانا بگیریم، در این صورت مؤلفه‌های دکارتی پتانسیل برداری مغناطیسی در معادلات (۴۰-۸) صدق می‌کند و عبارت‌اند از

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J \quad \text{و} \quad \nabla^2 A_x = \nabla^2 A_y = 0 \quad (53-8)$$

که در آن $J = I/\pi\rho_0^2$ به ازای $\rho \leq \rho_0$ و $J = 0$ به ازای $\rho > \rho_0$. چون منبعهای جریان در جهتهای x و y وجود ندارند، A_x و A_y را صفر در نظر می‌گیریم. علاوه بر این، مؤلفه A_z را طوری انتخاب می‌کنیم که فقط به فاصله از محور رسانا بستگی داشته باشد. بدین ترتیب A_z در معادله

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dA_z}{d\rho} \right) = -\mu_0 J \quad (54-8)$$

کمیت‌های قابل اندازه‌گیری مانند نیروهای وارد بر توزیع بار از هر روش دلخواه نمی‌توان استفاده کرد.

مثال ۱۱-۸ تعیین پتانسیل برداری مغناطیسی با استفاده از $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$

در حالت‌هایی با تقارن زیاد که محاسبه میدان مغناطیسی ساده است، مانند مواردی که از قانون آمپر استفاده می‌شود پتانسیل برداری مغناطیسی را می‌توان از رابطه $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ حساب کرد. مثلاً پتانسیل برداری تولیدشده با ورقه جریانی که در مثال ۵-۸ بررسی شد را محاسبه می‌کنیم. با انتخاب \mathbf{B} از معادله (۳۲-۸) به دست می‌آوریم

$$\nabla \times \mathbf{A} = \pm \frac{1}{r} \mu_0 K \hat{\phi} \quad (59-8)$$

که در آن علامت + و - به ترتیب برای نواحی $x < 0$ و $x > 0$ به کار می‌روند. چون جریان در امتداد محور z است، \mathbf{A} نیز باید در امتداد محور z باشد. از این رو معادله (۵۹-۸) به معادله

$$\frac{dA_z}{dx} = \pm \frac{1}{r} \mu_0 K \quad (60-8)$$

تبدیل می‌شود که به آسانی قابل انتگرال‌گیری است

$$A_z = \pm \frac{1}{r} \mu_0 K (x - x_0) \quad (61-8)$$

که در آن x_0 یک ثابت است و محلی را تعیین می‌کند که در آنجا پتانسیل صفر می‌شود.

۶-۸ قانون بیوساوار

اکنون با استفاده از توزیع جریانی معلوم روشی مستقیم برای محاسبه \mathbf{B} به دست می‌آوریم. این کار را به سادگی با استفاده از رابطه $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ که در آن \mathbf{A} پتانسیل برداری توزیع جریانی است که به صورت معادله (۴۲-۸) نوشته می‌شود، انجام می‌دهیم

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') dv'}{\xi} \right]$$

فرض می‌کنیم که \mathbf{J} فقط در حجم V غیر صفر باشد. عملگر ∇ فقط روی تابع $\mathbf{r}(x, y, z)$ عمل می‌کند. حجم V که روی آن انتگرال‌گیری انجام می‌شود، مستقل از نقطه \mathbf{r} است که در آنجا \mathbf{B} باید محاسبه شود، و بنابراین می‌توان عمل تاورا به زیر انتگرال برد

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\xi} \right] dv'$$

صدق می‌کند که به سادگی با دو بار انتگرال‌گیری داریم

$$A_z = -\frac{1}{4\pi} \mu_0 I \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 + C_1 \ln \rho + C \quad \rho \leq \rho_0 \quad (55-8)$$

$$A_z = D_1 \ln \rho + D \quad \rho > \rho_0 \quad (56-8)$$

که در آن C, C_1, D, D_1 ثابت هستند.

اکنون برای محاسبه این ثابت‌ها از شرایط مرزی بر روی پتانسیل و میدان‌های وابسته به آن استفاده می‌کنیم. چون به دلیل توزیع یکنواخت جریان، پتانسیل در داخل رسانا باید محدود باشد (جریان رشته‌ای روی محور وجود ندارد)، در این صورت C_1 را باید صفر انتخاب کرد. به علاوه، پتانسیل در $\rho = \rho_0$ همان طور که $A_{1z} = A_{2z}$ ایجاب می‌کند باید نتیجه یکسانی را به دست دهد، که بدین ترتیب رابطه زیر بین D, D_1, C و C_1 به دست می‌آید

$$-\frac{1}{4\pi} \mu_0 I + C = D_1 \ln \rho_0 + D \quad (57-8)$$

اکنون ثابت D_1 را می‌توان حساب کرد. محاسبه $\nabla \times \mathbf{A}$ در ناحیه $\rho > \rho_0$ به دست می‌دهد

$$\mathbf{B} = -\frac{D_1}{\rho} \hat{\phi} \quad (58-8)$$

و با به کار بردن قانون آمپر بر روی یک دایره به شعاع $\rho > \rho_0$ که مرکز دایره روی محور جریان و صفحه آن بر محور جریان عمود است خواهیم داشت

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = - \int_0^{2\pi} \frac{D_1}{\rho} \rho d\phi = \mu_0 I$$

این معادله به دست می‌دهد $D_1 = -(\mu_0 I / 2\pi)$. با جایگذاری برای D_1 در معادله (۵۷-۸) داریم

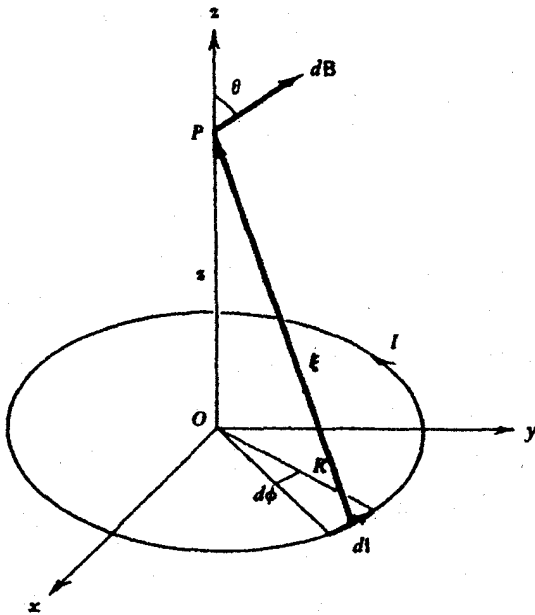
$$D = -\frac{1}{4\pi} \mu_0 I + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho_0 + C$$

بدین ترتیب پتانسیل‌ها و میدان‌ها عبارت‌اند از

$$A_z = -\frac{1}{4\pi} \mu_0 I \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 + C \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\rho}{\rho_0} \hat{\phi} \quad \rho < \rho_0$$

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 + 2 \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right) + C \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \hat{\phi} \quad \rho > \rho_0$$

پتانسیل مغناطیسی بالا با تقریب یک ثابت دلخواه C تعیین می‌شود؛ اما میدان به طور یکتا تعیین می‌شود، که نشان می‌دهد در محاسبه



شکل ۱۲-۸ یک حلقه جریان.

که $dl = R d\phi \hat{\phi}$ و $\xi = z\hat{z} - R\hat{\rho}$. توجه کنید که

$$(dl \times \xi) \cdot \hat{z} = R^2 d\phi$$

بنابراین

$$dB_z = \frac{\mu_0 I R^2 d\phi}{4\pi \xi^3}$$

چون ξ در حین انتگرال‌گیری در حلقه ثابت باقی می‌ماند به دست می‌آوریم

$$B = B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{4\xi^3} \quad (۶۷-۸)$$

بنابراین میدان در مرکز دایره برابر است با $\mu_0 I / 2R$. به دست آوردن B خارج از محور آسان نیست، با این همه میدان را می‌توان با استفاده از $\nabla \cdot B = 0$ در نزدیکی محور محاسبه کرد. دقت کنید که پتانسیل برداری حلقه، روی محور صفر است (مسئله ۱۷-۸ را ببینید). ■

مثال ۱۳-۸ میدان روی محور یک سیمولوله دایره‌ای

می‌خواهیم در شکل ۱۳-۸ میدان را روی محور سیمولوله حساب کنیم. فرض کنید سیمولوله شامل حلقه‌های رشته‌ای جریان بسیار نزدیک به هم است که از آثار لبه‌ای می‌توان چشم پوشید. بدین ترتیب توزیع جریان با یک ورقه استوانه‌ای جریان همسان است. اگر n_l حلقه بر واحد طول وجود داشته باشد و جریان در هر حلقه I باشد، جریان

با استفاده از اتحاد برداری معادله (۵۸-۱) داریم

$$\nabla \times \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\xi} \right] = \frac{1}{\xi} [\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')] + \nabla \left(\frac{1}{\xi} \right) \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')$$

چون \mathbf{J} مستقل از $\mathbf{r}(x, y, z)$ است، در این صورت

$$\nabla \times \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\xi} \right] = \nabla \left(\frac{1}{\xi} \right) \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')$$

از این رو

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\xi}{\xi^3} dv' \quad (۶۲-۸)$$

به هر جزء از dv' می‌توان یک سهم $d\mathbf{B}$ به میدان \mathbf{B}

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \xi}{\xi^3} dv' \quad (۶۳-۸)$$

نسبت داد که نشان می‌دهد $d\mathbf{B}$ بر صفحه ξ و \mathbf{J} عمود است.

اگر جریانهای رشته‌ای، مانند جریان در سیمهای نازک، داشته باشیم، مادامی که ξ/ξ^3 به طور قابل ملاحظه‌ای بر روی سطح مقطع رشته تغییر نکند می‌توان از تقریب رشته‌ای معادله (۹-۸) استفاده کرد

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dl \mathbf{I} \times \frac{\xi}{\xi^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I dl \times \frac{\xi}{\xi^3} \quad (۶۴-۸)$$

هر جزء جریان، $I dl$ ، به صورت سهم

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \times \xi}{\xi^3} \quad (۶۵-۸)$$

به کل میدان تفسیر می‌شود.

معادلات (۶۲-۸) تا (۶۵-۸) را به شکلهای مختلف فرمولهای "بیوساوار" می‌گویند. این فرمولها همان‌گونه که در مثالهای زیر شرح می‌دهیم خصوصاً در محاسبه \mathbf{B} با استفاده مستقیم از جریانها مفیدند. این معادلات نشان می‌دهند که میدان \mathbf{B} برای یک جریان، مانند میدان \mathbf{E} (الکتروستاتیک) برای جزء بار، به صورت $1/\xi^2$ نزول می‌کند. این موضوع با این واقعیت که پتانسیل برداری A مانند پتانسیل الکتریکی ϕ به صورت $1/\xi$ تغییر می‌کند مطابقت دارد.

مثال ۱۲-۸ قانون بیوساوار - میدان روی محور حلقه

جریانی مطابق شکل ۱۲-۸ از یک حلقه دایره‌ای به شعاع R می‌گذرد. می‌بینیم در حالی که جزءهای dl حول حلقه باهم جمع می‌شوند تنها مؤلفه \mathbf{B} ‌ای که باقی می‌ماند در امتداد محور z است؛ یعنی $\mathbf{B} = B\hat{z}$. با استفاده از تقریب رشته‌ای معادله (۶۵-۸) داریم

$$dB_z = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \times \xi}{\xi^3} \right] \cdot \hat{z} \quad (۶۶-۸)$$

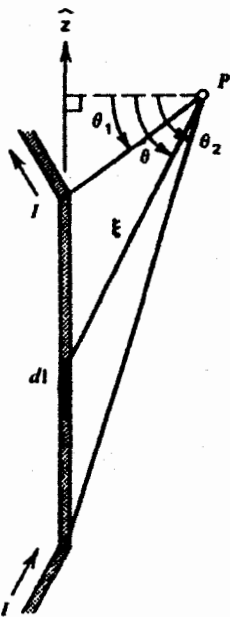
آنکه $\cos \theta_1 = 0.99$ باشد، قطر $2R$ سیمولوه باید تقریباً $1/7$ طول آن باشد.

برای اینکه ایده‌ای از اندازه‌های مورد بحث به دست آوریم، توجه کنید که اگر $I = 1A$ و $n_l = 10/m = 1000/m$ در آن صورت $K = n_l I = 1000 A/m$ و برای سیمولوه به طول نامتناهی $4\pi \times 10^{-2}$ تسلا (یا در دستگاه گاوس 4π گاوس) به دست می‌آید. اگر سیمولوه نیمه نامتناهی باشد (مثلاً اگر $\theta_1 \rightarrow 0$)، در این صورت $B \rightarrow \mu_0 K [1 - \cos \theta_2] / 2$ اگر $\theta_2 = \pi/2$ (در لبه سیمولوه)، $B \rightarrow \mu_0 K / 2$ میدان درست نصف میدان سیمولوه نامتناهی است.

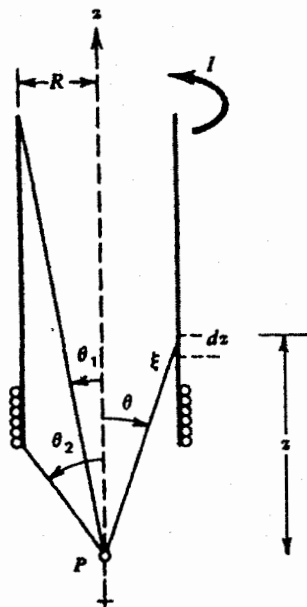
مثال ۸-۱۴ قانون بیوساوار — میدان یک قطعه سیم مستقیم بسیاری از مدارها را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از قطعه‌های سیم مستقیم در نظر گرفت. میدان B این قطعات به سادگی به صورت زیر حساب می‌شوند. شکل ۸-۱۴ را در نظر بگیرید. میدان حاصل از هر قطعه بنیادی dl در یک نقطه مفروض P ، در یک جهت است. این جهت "حول" محور z است (جهت $\hat{\phi} = \hat{z} \times \hat{\xi}$). از معادله (۶۵-۸) داریم

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \times \xi}{4\pi \xi^2}$$

که در آن $dl = dz' \hat{z}$ و $\xi = -z' \hat{z} + \rho \hat{\rho}$. توجه کنید که



شکل ۸-۱۴ میدان B یک قطعه سیم مستقیم، که با استفاده از قانون بیوساوار محاسبه می‌شود.



شکل ۸-۱۳ یک سیمولوه.

بر واحد طول ورقه جریان هم‌ارز عبارت است از $K = n_l I$. جهت K در شکل نشان داده شده است. در یک طول dz ، جریان $K dz$ است. از مثال ۸-۱۲ سهم B روی محور سیمولوه حلقه حامل این جریان برابر است با

$$dB = dB_z = \frac{\mu_0 K dz}{2} \frac{R^2}{\xi^3}$$

توجه کنید که $R/z = \tan \theta$ ، $dz = -R d\theta / \sin^2 \theta$ و $\xi = R / \sin \theta$

$$dB = -\frac{\mu_0 K}{2} \frac{R d\theta}{\sin^2 \theta} \frac{\sin^2 \theta}{R} = -\frac{\mu_0 K}{2} \sin \theta d\theta$$

از این رو

$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dB = \frac{\mu_0 K}{2} [\cos \theta_1 - \cos \theta_2] \quad (68-8)$$

برای یک نقطه P در مرکز سیمولوه داریم

$$\theta_2 = \pi - \theta_1 \quad \cos \theta_2 = -\cos \theta_1 \quad B_{\text{مرکز}} = \mu_0 K \cos \theta_1 \quad (69-8)$$

اگر $\theta \rightarrow 0$ یعنی اگر سیمولوه در مقایسه با شعاع آن بسیار بلند باشد در این صورت $B = \mu_0 K$ ، که قبلاً با استفاده از قانون آمپر به دست آمد (مثال ۸-۸). بدین ترتیب میدان در مرکز یک سیمولوه متناهی، از میدان در مرکز یک سیمولوه نامتناهی کمتر است. برای

میدان B ناشی از این حلقه جریان روی محور z با معادله (۶۷-۸)

داده شد

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{(dI)\rho^2}{\xi^3}$$

با جایگزینی در dI ، نوشتن ξ بر حسب ρ و z ، و با انتگرال گرفتن از $\rho = 0$ تا $\rho = R$ ، به دست می آوریم

$$B = B_z = C \int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

که در آن $C \equiv [\mu_0 \sigma \omega / 2]$. با جایگذاری $u^2 = \rho^2 + z^2$ به دست می آوریم

$$B = C \int_{|z|}^{\sqrt{z^2+R^2}} \left(1 - \frac{z^2}{u^2}\right) du = C \left[\frac{R^2 + 2z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2|z| \right] \quad (71-8)$$

اکنون با این نتیجه میدان ناشی از یک کره باردار چرخان را به دست می آوریم (مسئله ۱۶-۸ را ببینید).

۷-۸ پتانسیل زردهای مغناطیسی

دیدیم که چون برای جریانهای پایا $\nabla \times B = \mu_0 J$ ، یک میدان پایستار نیست. از این رو معرفی یک پتانسیل زردهای مغناطیسی با همان منطقی که یک پتانسیل الکتروستاتیکی را معرفی کردیم، معقول نیست. با این همه معمولاً نواحی مشخصی از فضا وجود دارند که در آن نواحی $\nabla \times B$ است. برای این نواحی می توانیم یک تابع پتانسیل زردهای، تنها تا جایی که فضا "همبند ساده" است، معرفی کنیم. مطابق شکل ۱۶-۸ یک ناحیه همبند ساده ناحیه ای است که هر منحنی بسته تشکیل شده در آن ناحیه را می توان بدون آنکه منحنی از آن ناحیه خارج شود به طور پیوسته منقبض کرد تا به یک نقطه تبدیل شود. ارتباط همبند ساده به مغناطیس آن است که منبعهای میدانهای مغناطیسی، حلقه های جریانی هستند، که ماهیت آنها طوری است که فضا را غیرهمبند ساده می سازند. با این همه اگر اندازه حلقه های جریان محدود باشند، ممکن است آنها را محصور در سطوحی تصور کرد که این سطوح بقیه فضا را به صورت همبند ساده بر جای می گذارند. سپس با فرض آنکه یک حجم همبند ساده V داشته باشیم که در آنجا $\nabla \times B = 0$ ، یک تابع پتانسیل زردهای مغناطیسی Φ_m در V تعریف می کنیم به طوری که

$$B = -\mu_0 \nabla \Phi_m \quad (72-8)$$

$dI \times \xi = \rho dz' \hat{\phi}$ ؛ بدین ترتیب

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\rho dz'}{\xi^2} \hat{\phi}$$

با توجه به آنکه $\xi = \rho / \cos \theta$ و $z' = -\rho \tan \theta$ داریم

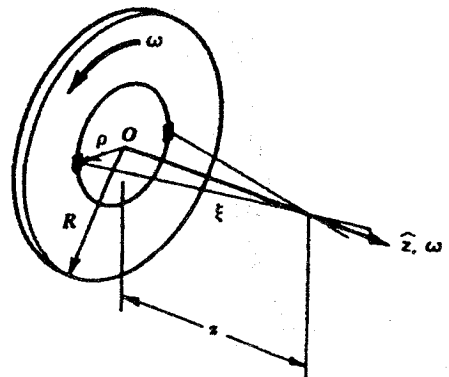
$$dB = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\rho^2 d\theta}{\cos^2 \theta} \frac{\cos^2 \theta}{\rho^2} \hat{\phi} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \cos \theta d\theta \hat{\phi}$$

بنابراین

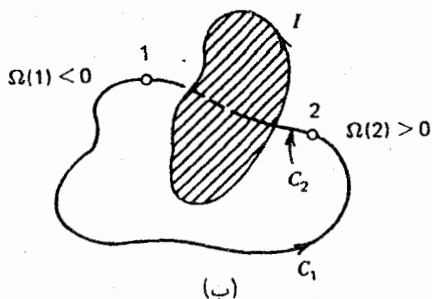
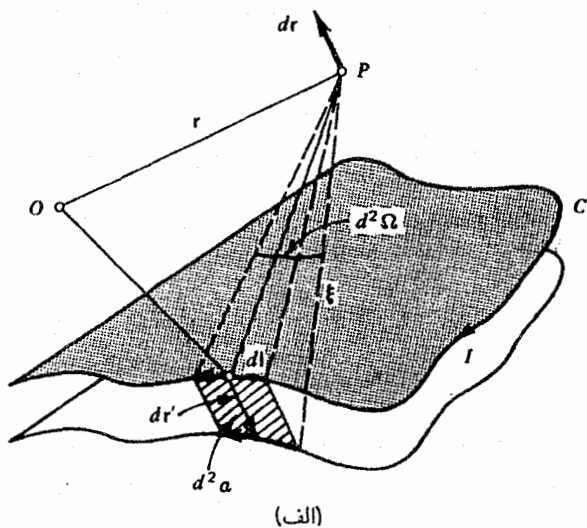
$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \hat{\phi} \quad (70-8)$$

دقت کنید که برای یک قطعه خطی به طول نامتناهی، $\theta_1 \rightarrow -\pi/2$ و $\theta_2 \rightarrow +\pi/2$ ، از این رو $B \rightarrow \mu_0 I / 2\pi \rho$ که این نتیجه قبلاً در مثال ۳-۸ با استفاده از قانون آمپر به دست آمد. یادآور می شویم که از معادله (۷۰-۸) می توان برای تعیین میدان مدار چند قطعه ای استفاده کرد (مسئله ۱۳-۸ را ببینید).

مثال ۱۵-۸ میدان B روی محور یک قرص باردار چرخان
یک قرص نازک به شعاع R و ضخامت $t < R$ که با چگالی بار σ به صورت یکنواخت باردار شده است، مطابق شکل ۱۵-۸ با سرعت زاویه ای ω حول محور تقارن z می چرخد.
چگالی جریان در قرص با $\rho v = \sigma \omega \rho \hat{\phi}$ که در آن ρ فاصله از محور قرص است داده می شود. بدین ترتیب یک بخش حلقه ای شکل از قرص به ضخامت شعاعی $d\rho$ حلقه جریانی با جریان $dI = \sigma \omega \rho (d\rho)$ شامل می شود.



شکل ۱۵-۸ قرص باردار چرخان.



شکل ۱۷-۸ (الف) پتانسیل زده‌ای مغناطیسی یک حلقهٔ جریان را می‌توان از زاویهٔ فضایی مقابل به حلقه نسبت به نقطهٔ مشاهده محاسبه کرد. (ب) استفاده از زاویهٔ فضایی برای توضیح پیوسته نبودن پتانسیل زده‌ای مغناطیسی در نواحی که همبند ساده نیستند.

اکنون اگر Φ_m یک تابع پتانسیل در V باشد، در این صورت

$$d\Phi_m \equiv \nabla\Phi_m \cdot dr = -\frac{B \cdot dr}{\mu_0} \quad (۷۴-۸)$$

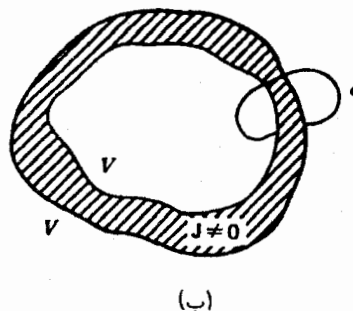
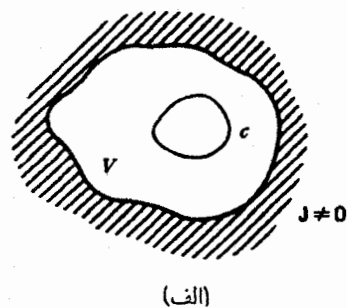
که در آن dr یک جابه‌جایی کوچک از نقطهٔ میدان P است که باعث یک تغییر $d\Phi_m$ در پتانسیل می‌شود. اما، میدان مغناطیسی برای یک حلقهٔ جریان رشته‌ای C ، از معادلهٔ (۶۴-۸) عبارت است از

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{dl \times \xi}{\xi^3} \quad (۶۴-۸)$$

از این رو

$$d\Phi_m = \frac{-I}{4\pi} \left[\oint_C \frac{dl \times \xi}{\xi^3} \right] \cdot dr = \frac{-I}{4\pi} \oint_C \left[\frac{dl \times \xi}{\xi^3} \cdot dr \right]$$

اکنون توجه کنید که یک تغییر $d\Phi_m$ تحت تأثیر یک جابه‌جایی P به اندازهٔ dr با تغییر در حالت Φ_m تحت تأثیر جابه‌جایی سخت حلقه به



شکل ۱۶-۸ نواحی همبند ساده (الف) چون هر حلقهٔ C در V بدون آنکه جریان را قطع کند تا صفر منقبض می‌شود. در این صورت V یک ناحیهٔ همبند ساده است. (ب) حجم V یک ناحیهٔ همبند ساده نیست.

با قراردادن این عبارت در $\nabla \cdot B = 0$ خواهیم داشت

$$\nabla^2 \Phi_m = 0 \quad (۷۳-۸)$$

این بار دیگر معادلهٔ لاپلاس است. اگر شرایط مرزی مشخص بر روی مرزهای V صدق کنند [مثلاً مؤلفه‌های عمودی B در سراسر یک سطح مرزی پیوسته باشد، و ناپوستگی مؤلفه‌های مماسی با چگالی جریان سطحی متناسب باشد، معادلات (۴۸-۸)، (۴۹-۸) را ببینید]، می‌توانیم جوابهای یکتایی برای V پیدا کنیم. بنابراین، روشهای استفاده شده برای پیدا کردن B در نواحی همبند ساده که در آنجا جریانی وجود ندارد، درست با روشهایی که در الکتروستاتیک استفاده می‌شوند، یکسان‌اند. اکنون می‌خواهیم با استفاده از قانون بیوساوار و معادلهٔ (۷۲-۸) عبارتی صریح برای Φ_m برحسب توزیع جریان در خارج از V پیدا کنیم. حلقهٔ سادهٔ جریان شکل ۱۷-۸ (الف) را در نظر بگیرید. فضای خارج از این حلقه همبند ساده نیست، اما این فضا را می‌توان با رسم یک سطح تصویری که حلقه را جاروب کند به صورت همبند ساده در آورد. این سطح نمی‌گذارد منحنی بستهٔ دلخواهی پیرامون و درون حلقهٔ جریان بکشیم. از این رو حلقه در محیط این سطح است. هر سطحی از این نوع کافی است.

مثال ۸-۱۶ پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی یک جریان رشته‌ای بلند در مثال ۸-۹ پتانسیل برداری مغناطیسی یک جریان رشته‌ای بلند محاسبه شد. در این مثال میدان مغناطیسی این جریان را از یک پتانسیل نرده‌ای نیز حساب می‌کنیم. پتانسیل نرده‌ای Φ_m در خارج از جریان در معادله لاپلاس صدق می‌کند. این پتانسیل به دلیل تقارن مسئله فقط بستگی به یک مختصه دارد.

برای حل پتانسیل الکتریکی و میدان الکتریکی یک سیم بلند بردار از حل معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای استفاده شد. پتانسیل طوری در نظر گرفته شد که فقط به یک متغیر تنها یعنی ρ بستگی داشت. این‌گونه وابستگی از یک میدان الکتریکی شعاعی ناشی می‌شود. طبیعت میدان مغناطیسی در حالت مغناطیسی کاملاً متفاوت است و در جهت $\hat{\phi}$ است. از این رو طبیعی است که پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی طوری در نظر گرفته شود که به جای ρ به ϕ بستگی داشته باشد. بدین ترتیب

$$\frac{d^2 \Phi_m}{d\phi^2} = 0 \quad (76-8)$$

که دارای جواب

$$\Phi_m = C\phi \quad (77-8)$$

است.

میدان مغناطیسی وابسته به آن از $\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \Phi_m$ به دست می‌آید

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{\rho} \frac{d\Phi}{d\phi} \hat{\phi} = -\mu_0 \frac{C}{\rho} \hat{\phi}$$

از قانون آمپر برای محاسبه ثابت C می‌توان استفاده کرد. یک حلقه دایره‌ای به شعاع ρ و عمود بر سیم که مرکز آن بر روی سیم واقع است را در نظر می‌گیریم. در این صورت $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$ که به دست می‌دهد $C = -I/2\pi$. بدین ترتیب

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi} \quad \text{و} \quad \Phi_m = -\frac{1}{2\pi} \phi \quad (78-8)$$

باید دقت کرد که این پتانسیل نرده‌ای یکی از هماهنگهای استوانه‌ای که در معادله (۳-۶۵) به دست آمد نیست. هماهنگهای استوانه‌ای در آنجا با لزوم آنکه جواب معادله لاپلاس $\nabla^2 \Phi = 0$ تک‌مقداری باشد؛ یعنی $\Phi(\phi = 0, \rho) = \Phi(\phi = 2\pi, \rho)$ تشکیل شد. حالت اخیر مستلزم این شرط نیست، زیرا پتانسیل مغناطیسی تک‌مقداری نیست. چون

۱. توجه کنید که $\Phi_m(\infty) = 0$. بدین ترتیب ثابت انتگرال‌گیری صفر انتخاب می‌شود.

اندازه $dr' = -dr$ یکسان است. بدین ترتیب با نوشتن $-dr = dr'$ در انتگرال بالا داریم

$$d\Phi_m = \frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times \boldsymbol{\xi}}{r^2} \cdot d\mathbf{r}' = \frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}}{\xi^2} \cdot \boldsymbol{\xi}$$

که $d\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}$ یک جزء سطح، $d^2 \mathbf{a}'$ است. در نتیجه، عبارت داخل انتگرال یک جزء زاویه فضایی $d^2 \Omega$ است؛ یعنی

$$d\Phi_m = \frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{d^2 \mathbf{a}' \cdot \boldsymbol{\xi}}{\xi^2} = \frac{I}{4\pi} \oint_C d^2 \Omega$$

در این صورت انتگرال خطی C تغییر در زاویه فضایی را نسبت به نقطه P وقتی کل حلقه جریان به اندازه $d\mathbf{r}'$ جابه‌جا می‌شود، به دست می‌دهد؛ یعنی

$$d\Phi_m = \frac{I}{4\pi} \oint_C d^2 \Omega = \frac{I}{4\pi} d\Omega$$

یا

$$\Phi_m \equiv \frac{I}{4\pi} \Omega$$

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \Phi_m = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega \quad (79-8)$$

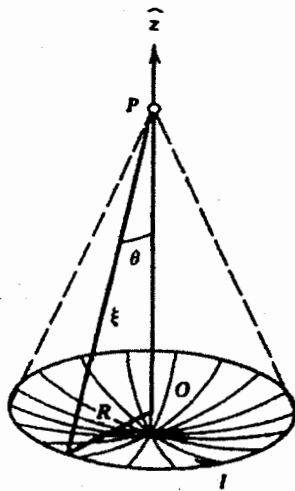
در اینجا دو نکته قابل ذکر است:

۱. شیب زاویه فضایی $\nabla \Omega$ ، با مشتق گرفتن نسبت به مختصات $\mathbf{r}(x, y, z)$ در نقطه P به دست می‌آید، زیرا Ω تابعی از این مختصات خواهد بود.

۲. وقتی $\int_S d\mathbf{a} \equiv \mathbf{A}$ به سمت نقطه P است، یا به عبارت دیگر، جریان I وقتی که از P دیده می‌شود در جهت پادساعتگرد می‌چرخد، Ω را مثبت در نظر می‌گیریم. در محاسبه

$$\mu_0 [\Phi_m(2) - \Phi_m(1)] = - \int_1^2 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$$

در امتداد یک مسیر C تأکید می‌کنیم که از مرزهای ناحیه همبند ساده نباید عبور کرد. بدین ترتیب، برای مسیرهای C_1 و C_2 در شکل ۸-۱۷ (ب) نتایج متفاوتی (با اختلاف $\mu_0 I$) برای انتگرال به دست می‌آوریم، زیرا C_1 یا C_2 در هر سطح فرضی برای نگه‌داشتن فضا به صورت همبند ساده نفوذ خواهند کرد. در حالت کلی به دلایل فیزیکی مشابه برای حل مسائل میدان مغناطیسی در نواحی که $\mathbf{J} \neq 0$ است نمی‌توان از معادله $\nabla^2 \Phi_m = 0$ استفاده کرد.



شکل ۱۸-۸ پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی یک حلقه جریانی برحسب ملاحظات زاویه فضایی.

داده شده است فرض می‌کنیم که حلقه، محیط یک سطح کروی به مرکز P است. در این صورت $\Omega = \frac{\text{مساحت کلاهک کروی}}{\xi^2}$ یا

$$\Omega = \frac{1}{\xi^2} \int_0^\theta \int_0^{2\pi} \xi^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

از این رو

$$\Phi_m(P) = \frac{I}{\gamma} (1 - \cos \theta) = \frac{I}{\gamma} \left(1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right) \quad (۸۱-۸)$$

حال می‌خواهیم $B_z = -\mu_0 (\partial \Phi_m / \partial z)$ را پیدا کنیم. باید توجه کرد که مشتقات دیگر Φ_m را نمی‌توان محاسبه کرد زیرا عبارت مربوط به Φ_m فقط روی محور z درست است. با این همه بقیه این مشتقات با استفاده از تقارن صفر می‌شوند. بدین ترتیب

$$B = B_z = -\frac{\mu_0 I}{\gamma} \frac{d}{dz} \left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \\ = \frac{\mu_0 I}{\gamma} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{\gamma} \frac{R^2}{\xi^3}$$

که همان نتیجه‌ای است که قبلاً در مثال ۱۲-۸ به دست آمد. در نقاطی که بر روی محور حلقه قرار گرفته‌اند پتانسیل و میدانی که در بالا به آنها اشاره شد را نمی‌توان به شکل ساده بسته به دست آورد. با این همه، می‌توان نشان داد که بسط مؤلفه‌های شعاعی و زاویه‌ای میدان مغناطیسی B_θ و B_r با استفاده از عبارت روی محور با کمک معادله لاپلاس به دست می‌آید. ناحیه $z < R$ را در نظر می‌گیریم و پتانسیل

همانگه‌های استوانه‌ای مطابق با حالت‌های ثابت جدایی غیر صفر بخش‌های شعاعی و زاویه‌ای معادله لاپلاس [معادله (۱۶-۳)] هستند، پتانسیل مغناطیسی مطابق با حالتی است که در آن ثابت جدایی صفر است. انتخاب $K = 0$ در معادلات (۶۱-۳) و (۶۴-۳) به دست می‌دهد.

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d^2 Y}{d\phi^2} = 0 \quad (۷۹-۸)$$

که به ترتیب دارای جوابهای $Y = C_1 \phi$ و $R = C_2$ و $R = C_2 \ln \rho$ هستند. از این رو پتانسیل $\Phi_m = RY$ را می‌توان به صورت حاصل جمع دو عبارت یعنی

$$\Phi_m = C\phi + D\phi \ln \rho \quad (۸۰-۸)$$

نوشت که در آن C_1, C_2, D ثابت هستند. عبارت دوم معادله (۸۰-۸) میدانهای مغناطیسی غیر فیزیکی را معرفی می‌کند، این میدانها به ϕ و ρ بستگی دارند و دارای مؤلفه‌های شعاعی اند. از این رو D را مساوی با صفر قرار می‌دهیم و در نتیجه پتانسیل مانند معادله (۷۷-۸) تابعی از یک مختصه تنها به دست می‌آید. ■

مثال ۱۷-۸ تعیین پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی با استفاده از

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \Phi_m$$

در مواردی که چند درجه تقارن وجود دارد و با آنها می‌توان به سادگی میدان مغناطیسی را تعیین کرد، از رابطه $\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \Phi_m$ برای تعیین پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی استفاده می‌کنیم. مثلاً یک جریان رشته‌ای بلند را در نظر می‌گیریم، و از معادله (۷۴-۸) می‌نویسیم $\mu_0 \Phi_m = -\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$ (۲۴-۸) که از قانون آمپر تعیین شد به دست می‌آوریم

$$\Phi_m = -\frac{I}{2\pi} \int \frac{\hat{\phi}}{\rho} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\hat{\phi}}{\rho} \cdot (d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}) \\ = -\frac{I}{2\pi} \int_0^\phi d\phi = -\frac{I}{2\pi} \phi$$

که دقیقاً با نتیجه معادله (۷۸-۸) یکسان است. ■

مثال ۱۸-۸ پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی روی محور یک حلقه دایره‌ای

$\Phi_m(P)$ را بر روی محور z یک حلقه جریانی دایره‌ای شکل رشته‌ای محاسبه می‌کنیم. برای تعیین Ω ، همان طور که در شکل ۱۸-۸ نشان

صفحه قرار گیرد، در این صورت از معادله (۷۵-۸) برای نشان دادن پتانسیل Φ_m در r که آن را $\Delta\Phi_m$ می‌نامیم به صورت زیر استفاده می‌شود

$$\Delta\Phi_m = \frac{I}{4\pi} \Delta\Omega = \frac{I}{4\pi} \frac{\Delta a' \cdot \xi}{\xi^3} \quad (۸۶-۸)$$

$\Delta a'$ بر صفحه حلقه عمود است. این عبارت پتانسیل دوقطبی الکتریکی [معادله (۲-۴۴)] را به یاد می‌آورد.

$$\Delta\Phi_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta p \cdot \xi}{\xi^3}$$

که در آن Δp گشتاور دوقطبی الکتریکی است. بدین ترتیب بجز ثابتهای عددی، پتانسیلها و از این رو میدان حلقه‌های کوچک جریان و دوقطبیها یکسان هستند. به این دلیل کمیت

$$I\Delta a' \equiv \Delta m \quad (۸۷-۸)$$

را گشتاور دوقطبی مغناطیسی می‌نامند. بدین ترتیب

$$\Delta\Phi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta m \cdot \xi}{\xi^3} \quad (۸۸-۸)$$

و

$$\Delta B = -\mu_0 \nabla(\Delta\Phi_m) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\xi^3} [3(\Delta m \cdot \hat{\xi})\hat{\xi} - \Delta m] \quad (۸۹-۸)$$

درست مانند حالت میدان دوقطبی الکتریکی (مثال ۲-۹)

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\xi^3} [3\Delta p \cdot \hat{\xi})\hat{\xi} - \Delta p]$$

اگر یک سطح da' داشته باشیم و قطبش بر واحد سطح P_s باشد، در این صورت گشتاور دوقطبی سطح، $d\mathbf{p}$ ، باید با $P_s da'$ برابر باشد. کمیت مشابه P_s در حالت مغناطیسی، جریان I است. از این رو جریان I "مغناطش بر واحد سطح" حلقه da' است و پدیده مغناطیسی حلقه‌های کوچک جریان در نقاط دور از حلقه (از این رو حلقه‌ها کوچک هستند) از پدیده مغناطیسی "دوقطبیهای مغناطیسی" غیرقابل تشخیص‌اند.

۸-۸-۲ گشتاورهای مغناطیسی

حتی اگر یک حلقه جریان رشته‌ای در یک صفحه قرار نگیرد، ممکن است گشتاور دوقطبی مغناطیسی آن را به صورت IS که در آن

داده شده در معادله (۸۱-۸) را برحسب توانهای z/R بسط می‌دهیم. نتیجه برابر است با

$$\Phi_m = \frac{I}{2} \left[1 - \frac{z}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{R}\right)^2 - \frac{3}{8} \left(\frac{z}{R}\right)^3 + \frac{5}{16} \left(\frac{z}{R}\right)^4 - \dots \right] \quad (۸۲-۸)$$

از طرف دیگر پتانسیل را می‌توان با حل ناحیه کروی معادله لاپلاس نشان داد زیرا پتانسیل به ϕ بستگی ندارد. از این رو، برای ناحیه $r < R$

$$\Phi_m = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (۸۳-۸)$$

مثلاً روی محور z به ازای تمام n ها، $\theta = 0$ ، $P_n = 1$: بدین ترتیب معادله (۸۳-۸) به معادله

$$\Phi_m = A_0 \left(1 + \frac{A_1}{A_0} z + \frac{A_2}{A_0} z^2 + \frac{A_3}{A_0} z^3 + \frac{A_4}{A_0} z^4 + \frac{A_5}{A_0} z^5 + \dots \right) \quad (۸۴-۸)$$

تبدیل می‌شود. با مقایسه معادله (۸۲-۸) و (۸۴-۸)، می‌توان این ثابتها و از این رو پتانسیل را پیدا کرد. نتیجه عبارت است از

$$\Phi_m = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{r(\cos \theta)}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 P_2(\cos \theta) - \frac{3}{8} \left(\frac{r}{R}\right)^3 P_3(\cos \theta) + \frac{5}{16} \left(\frac{r}{R}\right)^4 P_4(\cos \theta) + \dots \right\} \quad (۸۵-۸)$$

اکنون مؤلفه‌های میدان مغناطیسی وابسته به Φ_m را به سادگی با گرفتن شیب Φ_m به دست می‌آوریم

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2R} \left[P_1(\cos \theta) - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 P_2(\cos \theta) + \dots \right]$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2R} \left[-\sin \theta + \frac{3}{4} \left(\frac{r}{R}\right)^2 (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta + \dots \right]$$

۸-۸ تأثیرات مغناطیسی یک حلقه جریان کوچک

۱-۸-۸ پتانسیل نرده‌ای

حلقه کوچکی از جریان به مساحت $\Delta a'$ و جریان I واقع در r' را در نظر بگیرید. اگر حلقه جریان به اندازه کافی کوچک باشد و در یک

اکنون عبارتهای کلی برای گشتاور دوقطبی مغناطیسی رشته‌ای و توزیعهای جریان حجمی و بارهای گسسته متحرک به دست می‌آوریم. با انتخاب مبدأ در رأس سطح مخروطی جزء سطح را به صورت

$$da = \frac{1}{r'}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{l}'$$

تعریف می‌کنیم. بدین ترتیب، از معادله (۸۷-۸) داریم

$$\mathbf{m} = \oint I \frac{1}{r'}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{l}' = \frac{1}{r'} \oint \mathbf{r}' \times I d\mathbf{l}' \quad (92-8)$$

اگر یک توزیع جریان رشته‌ای را به یک توزیع چگالی جریان با اتحاد حاصل جمع \sum جمع‌بندی بر روی تمام لوله‌های جریان رشته‌ای کل توزیع جریان است، در آن صورت برای گشتاور دوقطبی مغناطیسی عبارت زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{m} = \frac{1}{r'} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' \quad (93-8)$$

$$d\mathbf{m} = \frac{1}{r'} \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' \quad (94-8)$$

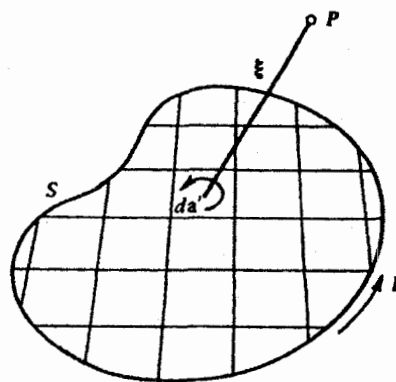
که در آن \mathbf{r}' جابه‌جایی جزء dv' از یک مبدأ دلخواه اختیاری است. جالب است که عبارت کامل مشتمل بر گشتاور دوقطبی مغناطیسی یک توزیع از عناصر بار $dq(\mathbf{r}')$ یا میانگین سرعت $\mathbf{v}(\mathbf{r}')$ با معادله زیر

$$\mathbf{m} = \frac{1}{r'} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{v}(\mathbf{r}') dq(\mathbf{r}') \quad (95-8)$$

داده می‌شود که در آن حاصل جمع بر روی تمام جزءهای بار توزیع است و فرض بر این است که $dq(\mathbf{r}')$ و $\mathbf{v}(\mathbf{r}')$ به ترتیب میدانهای نرده‌ای و برداری‌اند. مثلاً اگر اتمی را به صورت یک هسته ساکن مثبت که الکترونها حول آن در گردش‌اند تصور کنیم، در آن صورت اتم در حالت کلی یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی خواهد داشت. مثلاً اگر اتم هیدروژن را با یک بار الکتریکی $-e$ که روی یک دایره به شعاع a_0 حول یک پروتون به بار $+e$ گردش می‌کند، نشان دهیم، در آن صورت معادله (۹۵-۸) برای گشتاور دوقطبی مغناطیسی فقط جمله

$$\mathbf{m} = -\frac{1}{r'} e a_0 \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}$$

را به دست می‌دهد.



شکل ۱۹-۸ حلقه جریان میکروسکوپی که از حلقه‌های مغناطیسی جزئی (دوقطبیها) ساخته شده است.

تعریف کرد. شکل ۱۹-۸ را در نظر بگیرید. سطح S که در برگیرنده این حلقه است را متشکل از جزءهای سطحی مسطح کوچک da' در نظر می‌گیریم که پیرامون هر یک از این جزءها یک جریان رشته‌ای I جاری است، به طوری که جریان داخل حلقه واقعی صفر است (جریان حلقه‌های جزئی مجاور یکدیگر را حذف می‌کنند). در آن صورت از معادله (۸۶-۸)، پتانسیل برای هر حلقه جزئی عبارت است از $d\Phi_m = (4\pi)^{-1} I da' \cdot \xi / \xi^3$ و در نتیجه

$$\Phi_m = \frac{I}{4\pi} \int_S \frac{da' \cdot \xi}{\xi^3} \quad (90-8)$$

دقت کنید که این فرمول با معادله (۷۵-۸) یکسان است زیرا $\Omega \equiv \int_S da' \cdot \xi / \xi^3$. همچنین دقت کنید که $I da'$ گشتاور دوقطبی مغناطیسی مربوط به سطح da' ، یعنی $d\mathbf{m} = I da'$ است. بدین ترتیب میدان ناشی از یک حلقه جریان رشته‌ای در نواحی همبند ساده را به دوقطبیهای مغناطیسی مجازی واقع بر هر سطح حلقه نسبت می‌دهیم. چگالی سطحی این دوقطبیهای مجازی I است. این دوقطبی در امتداد da' قرار دارد. وقتی ξ از S بسیار بزرگتر باشد، در این صورت ξ / ξ^3 را می‌توان از انتگرال خارج کرد. یعنی

$$\Phi_m \approx 4\pi \left[I \int_S da' \right] \cdot \frac{\xi}{xi^3} \equiv 4\pi \frac{\mathbf{m} \cdot \xi}{\xi^3} \quad (91-8)$$

که در آن $\mathbf{m} \equiv IS$ گشتاور دوقطبی حلقه است.

گشتاور دوقطبی مغناطیسی یک حلقه جریان در بالا به صورت IS تعریف شد. اگر توزیع جریانی متشکل از تعداد زیادی حلقه‌های جریان رشته‌ای مجزا، هر یک با گشتاور دوقطبی مغناطیسی $I_j S_j$ در نظر بگیریم، گشتاور مغناطیسی مجموع درست برابر است با حاصل جمع برداری $\sum_j I_j S_j$.

مانند قبل نتیجه

$$\mathbf{m} = \frac{1}{4} \hat{\mathbf{z}} RK \int_S da' = \frac{1}{4} \hat{\mathbf{z}} RK (\pi RL) \\ = \pi R^2 KL \hat{\mathbf{z}} = nLIA \hat{\mathbf{z}}$$

دلیلی برای توصیف سیمولوله توسط گشتاور دوقطبی سیمولوله، آن است که میدان \mathbf{B} در فواصل دور از سیمولوله (در مقایسه با ابعاد آن) میدان یک دوقطبی (با گشتاور دوقطبی \mathbf{m}) است. ■

۳-۸-۸ پتانسیل برداری یک حلقه کوچک جریان در بحث قبل برای معرفی ایده گشتاور دوقطبی مغناطیسی از مفهوم پتانسیل نردهای مغناطیسی استفاده کردیم در این بخش نشان می‌دهیم که با استفاده از پتانسیل برداری مفهوم گشتاور دوقطبی مغناطیسی همان نقش را بازی می‌کند. تا اینجا، پتانسیل برداری یک حلقه جریان رشته‌ای کوچک را در نظر گرفتیم "کوچک" یعنی می‌خواهیم پتانسیل برداری را فقط در مسافتهای بزرگ در مقایسه با ابعاد حلقه محاسبه کنیم.

همان طور که علامتگذاری شکل ۸-۲۰ و معادله (۸-۴۴) نشان می‌دهد

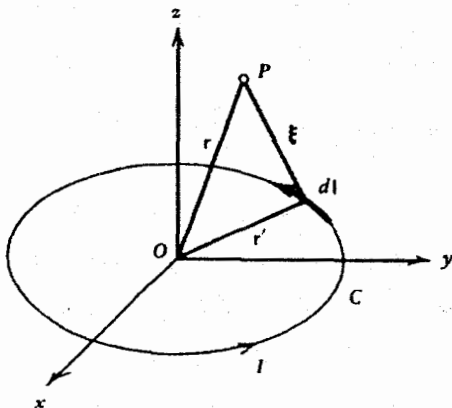
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{l}'}{\xi}$$

با استفاده از نتیجه قضیه استوکس [معادله (۱-۷۴)] انتگرال به صورت

$$\oint_C \Phi d\mathbf{l} = \int_S d\mathbf{a} \times \nabla \Phi$$

تبدیل می‌شود به طوری که (علامتگذاری شکل ۸-۱۹)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S d\mathbf{a}' \times \nabla' \left(\frac{1}{\xi} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S d\mathbf{a}' \times \frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi^3}$$



شکل ۸-۲۰ پتانسیل برداری یک حلقه کوچک جریان

مثال ۱۹-۸ گشتاور دوقطبی مغناطیسی یک قرص چرخنده باردار و یک سیمولوله

اگر یک سطح قرص چرخان دارای چگالی بار سطحی ثابت σ باشد، در این صورت وقتی قرص حول محورش با بسامد زاویه‌ای ω می‌چرخد، هر حلقه دایره‌ای قرص به فاصله ρ شامل جریانی برابر با $dI = \sigma v d\rho = \sigma \omega \rho d\rho$ و یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی $dm = dI(\pi \rho^2) = \pi \sigma \omega \rho^3 d\rho$ خواهد بود. بدین ترتیب کل گشتاور دوقطبی مغناطیسی عبارت است از

$$\mathbf{m} = \int dm = \omega \pi \sigma \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi \sigma \omega R^4}{4}$$

در این مسئله از خصوصیت برداری گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی استفاده کرده‌ایم، یعنی، گشتاور دوقطبی مغناطیسی یک جسم عبارت است از حاصل جمع گشتاورهای دوقطبی اجزای تشکیل‌دهنده آن جسم.

می‌خواهیم گشتاور دوقطبی مغناطیسی یک سیمولوله دایره‌ای مستقیم به طول L و شعاع R که دارای n دور بر متر و جریان I در هر دور است را حساب کنیم. با در نظر گرفتن دورها به صورت حلقه‌های رشته‌ای تخت، هر حلقه یک گشتاور دوقطبی $IS = IA \hat{\mathbf{z}}$ با $A = \pi R^2$ دارد. در این صورت گشتاور دوقطبی سیمولوله شامل nL حلقه برابر است با

$$\mathbf{m} = \sum_j I_j S_j = nLIA \hat{\mathbf{z}}$$

یک راه دیگر این است که سیمولوله را به صورت ورقه دایره‌ای جریان در نظر بگیریم که چگالی جریان سطحی \mathbf{K} مساوی $nI \hat{\boldsymbol{\phi}} = K \hat{\boldsymbol{\phi}}$ است، پس معادله (۸-۹۳) انتگرال روی سطح سیمولوله را به صورت زیر فرض می‌کند

$$\mathbf{m} = \frac{1}{4} \int [\mathbf{r}' \times \mathbf{K}(\mathbf{r}')] da'$$

که در آن متناوباً فرض کرده‌ایم جریان در یک ضخامت تقریباً صفر در سطح سیمولوله جریان دارد. با در نظر گرفتن مبدأ دستگاه مختصات (استوانه‌ای) روی محور z به طوری که $\mathbf{r}' = z' \hat{\mathbf{z}} + R \hat{\boldsymbol{\rho}}$ داریم

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{K}(\mathbf{r}') = (z' \hat{\mathbf{z}} + R \hat{\boldsymbol{\rho}}) \times K \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\boldsymbol{\rho}} z' K + \hat{\mathbf{z}} RK$$

در انتگرال‌گیری، جمله $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ با استفاده از اصل تقارن حذف می‌شود و

غیر صفر است در نظر بگیرید. پتانسیل برداری با معادله (۴۲-۸) به صورت زیر داده می شود

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') dv'}{\xi} \quad (42-8)$$

اگر $\xi = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ از بزرگترین بعد خطی V بزرگتر باشد، تابع $1/\xi$ را با استفاده از قضیه چندجمله‌ای، درست مانند آنچه که در بسط چندقطبی الکتروستاتیکی در فصل ۲ انجام شد بسط می دهیم

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' + \frac{1}{r^3} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J} dv' + \frac{1}{r^5} \int [3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2] \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' + \dots$$

چون $r'/r < 1$ جملات متوالی این بسط به صورت تصاعدی ضعیفتر می شوند، بنابراین اگر $r'/r \ll 1$ فقط اولین جمله غیر صفر در نظر گرفته می شود. در این مورد یک انحراف از حالت بسط چند قطبی الکتروستاتیکی بدیهی است، زیرا جمله تک قطبی، اگر جریانها پایا باشند همواره صفر است

$$\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0 \quad \text{اگر} \quad \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' = 0 \quad (99-8)$$

مثال ۲۰-۸ اثبات $\int \mathbf{J} dv = 0$

برای نشان دادن اثبات بالا از مختصات دکارتی $\{\hat{x}_i\}$ و قرارداد جمع استفاده می کنیم. با نوشتن $\mathbf{J} = \hat{x}_i (\hat{x}_i \cdot \mathbf{J})$ و با توجه به $\hat{x}_i = \nabla' x'_i$ داریم

$$\mathbf{J} = \hat{x}_i (\nabla' x'_i) \cdot \mathbf{J} = \hat{x}_i \{ \nabla' \cdot (x'_i \mathbf{J}) - x'_i \nabla' \cdot \mathbf{J} \} \\ = \hat{x}_i \nabla' \cdot (x'_i \mathbf{J})$$

از این رو

$$\int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' = \hat{x}_i \int_V \nabla' \cdot (x'_i \mathbf{J}) dv' = \hat{x}_i \int_S x'_i \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{a}'$$

که در آن V هر حجمی است که تمام جریانها را در بر می گیرد. از این رو S را می توان طوری انتخاب کرد تا در خارج از تمام جریان قرار گیرد؛ یعنی، $\mathbf{J}(\mathbf{r}'_S) = 0$. بنابراین، $\int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' = 0$.

توجه کنید که چون خطوط جریان \mathbf{J} پیوسته (بدون انتها) هستند، هر توزیع جریان پایا به صورت ترکیبی از مجموعه لوله های جریان رشته ای در نظر گرفته می شود. از این رو، برای هر انتگرال حجمی روی \mathbf{J} می توان جایگزینی

$$\int \mathbf{J} dv' * [] \rightarrow \sum_i \oint \mathbf{I}_i dl_i * [] \quad (100-8)$$

چون [از معادله (۸۷-۸)] $I da' \equiv d\mathbf{m}$ نتیجه زیر را داریم

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{m} \times \frac{\xi}{\xi^3} \quad (96-8)$$

که در آن انتگرال جمع بر روی تمام گشتاورهای دوقطبی $d\mathbf{m} = I da'$ را نشان می دهد. اکنون منظور از حلقه جریان "کوچک" این است که جمله ξ/ξ^3 برای تمام $d\mathbf{m}$ ها لزوماً ثابت باقی می ماند، بنابراین می توان آن را از انتگرال خارج کرد و

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int d\mathbf{m} \right] \times \frac{\xi}{\xi^3} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\mathbf{m} \times \frac{\xi}{\xi^3} \right) \quad (97-8)$$

را به دست آورد، که در آن \mathbf{m} گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه کوچک و ξ اکنون جابه جایی نقطه میدان P از حلقه است. فقط وقتی می توانیم این میدان را یک میدان دوقطبی بنامیم که $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ را محاسبه کنیم. برای محاسبه، از یک دستگاه مختصه کروی با مبدأ روی دوقطبی استفاده می کنیم، به طوری که $(\xi, \theta, \phi) \rightarrow (r, \theta, \phi)$ ؛ در این صورت دو شکل

$$\mathbf{B}(\xi, \theta, \phi) = \nabla \times \mathbf{A}(\xi, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{\xi^3} \{ 2 \cos \theta \hat{\xi} + \sin \theta \hat{\theta} \}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi \xi^3} [3(\mathbf{m} \cdot \hat{\xi}) \hat{\xi} - \mathbf{m}] \quad (98-8)$$

را به دست می آوریم که دقیقاً شکلهای میدان دوقطبی الکتریکی [معادلات (۴۶-۲) تا (۴۷-۳)] هستند، که آنها را از پتانسیل نرده ای مغناطیسی نیز به دست آوردیم [معادله (۸۹-۸)]. همان طور که در ارتباط با پتانسیل نرده ای Φ_m انجام دادیم (که اکنون می توان آن را با این عبارت اخیر تعریف کرد)، میدان \mathbf{B} را برای یک حلقه دلخواه با در نظر گرفتن آن به صورت یک شبکه از حلقه های بسیار کوچک که هر یک دارای گشتاور دوقطبی $d\mathbf{m} = I da'$ و جمع بندی بر روی تمام این دوقطبیهای تشکیل دهنده است پیدا می کنیم. معادله (۹۶-۸) در واقع درست این جمع بندی را نشان می دهد. برای به دست آوردن برآیند \mathbf{B} از هر توزیعی از دوقطبیها (مثلاً از هر توزیعی از حلقه ها) فقط باید $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ را از این معادله محاسبه کنیم.

معادله (۹۷-۸) برای هر توزیع جریان که ابعاد آنها در مقایسه با فاصله هر نقطه در داخل توزیع تا نقطه میدان کوچک باشد، معتبر است. و به حلقه های جریان محدود نمی شود. برای نشان دادن این موضوع یک توزیع جریان را که چگالی جریان آن \mathbf{J} در هر نقطه در داخل یک حجم متناهی V داده می شود و فقط در داخل V

ناحیه جریان به آرامی تغییر می‌کند و نشان می‌دهیم در این ناحیه $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ و $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. به دلیل تغییر آهسته \mathbf{B} ، بسط تیلور را برای نوشتن عبارت تقریبی \mathbf{B} به صورت زیر

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}') = \mathbf{B}(\mathbf{o}) + \mathbf{r}' \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{o}) + \dots \quad (102-8)$$

به کار می‌بریم که در آن ∇ به \mathbf{r}' بستگی دارد و فقط روی \mathbf{B} عمل می‌کند، و مبدأ دستگاه مختصات به طور مناسبی در داخل توزیع یا بسیار نزدیک به توزیع انتخاب می‌شود. در این صورت نیرویی که با معادله (۴-۸) داده می‌شود به صورت

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}(\mathbf{o}) \times \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' + \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times [\mathbf{r}' \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{o})] dv' + \dots \quad (103-8)$$

در می‌آید. انتگرال اول صفر می‌شود زیرا انتگرال حجمی \mathbf{J} برای جریانهای پایا صفر می‌شود [این واقعیت را در مثال ۲۰-۸ اثبات کردیم]. بدین ترتیب پایینترین مرتبه سهم وارد شده در \mathbf{F} ، گرادیان \mathbf{B} را می‌دهد. برای تبدیل نیرو به شکلی که گشتاور مغناطیسی توزیع، در برگیرد، عبارت نیرو را بیشتر تغییر می‌دهیم. برای انجام این کار از اتحاد برداری معادله (۵۹-۱)، و از این واقعیت که $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ و عملگر گرادیان فقط بر روی \mathbf{B} عمل می‌کند استفاده می‌کنیم

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times [\nabla(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}(\mathbf{o}))] dv' \quad (104-8)$$

همچنین می‌توان نوشت

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times [\nabla(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}(\mathbf{o}))] = -\nabla \times [\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{B}]$$

و از این رو

$$\mathbf{F} = -\nabla \times \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{B} dv' \quad (105-8)$$

سرانجام می‌توان نشان داد که

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{B} dv' = \mathbf{B} \times \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' = -\mathbf{B} \times \mathbf{m}$$

بدین ترتیب

$$\mathbf{F} = \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{m}) \quad (106-8)$$

را انجام داد. توزیع حجمی به صورت مجموعه‌ای (احتمالاً نامتناهی) از حلقه‌های رشته‌ای تصور می‌شود. بدین ترتیب انتگرال \mathbf{J} روی حجم V مجموعه‌ای از انتگرالهای خطی بسته هر یک به شکل

$$\oint I d\mathbf{l} = I \oint d\mathbf{l} = 0$$

می‌شود. در این صورت واضح است که انتگرال حجمی باید صفر شود. بدین ترتیب جمله دوم یا جمله دوقطبی در بسط بالا در درجه اول اهمیت قرار دارد. می‌توان نشان داد که این جمله همان شکل معادله (۹۷-۸) را دارد. در واقع، می‌توان نشان داد که (مسئله ۲۶-۸ را ببینید)

$$\int_V (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' = \mathbf{m} \times \mathbf{r} \quad (101-8)$$

که در آن \mathbf{m} قبلاً در معادله (۹۳-۸) تعریف شده است

$$\mathbf{m} = \frac{1}{c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' \quad (93-8)$$

اکنون واضح است که در فاصله‌ای به اندازه کافی دور از توزیع جریانی که گشتاور دوقطبی آن \mathbf{m} است، پتانسیل برداری با معادله (۹۷-۸) داده می‌شود. علاوه بر این، چون هر توزیع جریان را می‌توان به تعداد بیشماری از مؤلفه‌های کوچک نزدیک به صفر و هر یک با گشتاور دوقطبی $d\mathbf{m}$ با هم ترکیب کرد، در این صورت تا جایی که نقطه (مشاهده) $P(\mathbf{r})$ در یک فاصله محدود از تمام عناصر جریان است، برای پتانسیل می‌توان از معادلات (۹۴-۸) و (۹۶-۸) استفاده کرد. می‌بینیم که جملات متوالی این بسط با یک ضریب از مرتبه R'/r اختلاف دارند که در آن R' بعد خطی است که مشخصه بارز توزیع جریان است. از این رو، وقتی $r \gg R'$ ، جمله غالب توزیع، اولین جمله غیرصفر است. اگر جمله دوقطبی صفر شود، در این صورت سهم غالب در بسط معادله (۴۲-۸)، عبارت سوم که جملاتی از مرتبه R'^2/r^2 دارد خواهد بود. در این کتاب درباره این جملات بحث نمی‌شود. ■

۴-۸-۸ توزیع جریان جایگزیده در یک میدان مغناطیسی خارجی اگر یک توزیع جریان در یک میدان مغناطیسی خارجی \mathbf{B} قرار گیرد، این توزیع تحت تأثیر نیرویی که جمله عمومی آن توسط معادله (۴-۸) داده می‌شود، قرار می‌گیرد. چون توزیعهای جریان پایا که در نواحی کوچکی از فضا ("کوچک" نسبت به مقیاس طول مورد نظر تا ناظر) جایگزیده‌اند، کاربردهای زیادی دارند، عبارتی تقریبی برای نیروی عمومی که مناسب این حالت خاص توزیعهای جایگزیده است، به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم میدان مغناطیسی خارجی \mathbf{B} در

میدان مغناطیسی یک گشتاور بازگرداننده $\tau = -mB \sin \theta$ است. بدین ترتیب

$$dW^{(\text{mech})} = -mB \sin \theta d\theta$$

$$W^{(\text{mech})} = mB \cos \theta + \text{const.}$$

برای اینکه $W^{(\text{mech})}$ در $\theta = \pi/2$ مساوی با صفر باشد، باید ثابت صفر باشد، بدین ترتیب

$$W^{(\text{mech})} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (110-8)$$

این کار به صورت انرژی در دستگاه میدان دوقطبی ذخیره می شود

$$U = -W^{(\text{mech})} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (111-8)$$

این عبارت شبیه به حالت دوقطبی الکتریکی \mathbf{p} واقع در یک میدان الکتریکی است

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

باید دقت کنیم در حالی که $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ کل انرژی الکتروستاتیکی واقعی دوقطبی است، $-\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ فقط بخشی از کل انرژی مغناطیسی دوقطبی است. در فصلهای بعد در حالت مغناطیسی می خوانیم که جریان در توزیع تحت تأثیر میدان مغناطیسی قرار می گیرد، و از این روانرژی لازم برای ابقای جریان در توزیع را باید به حساب آوریم (قانون فاراده در فصلهای ۱۱ و ۱۲ را بخوانید). با وجود این باید توجه کنیم که از نتیجه $-\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ هنوز می توان برای پیدا کردن نیروهای وارد بر جریانهای پایای جایگزیده استفاده کرد.

۹-۸ خلاصه

در حضور یک میدان الکتریکی \mathbf{E} و یک میدان مغناطیسی \mathbf{B} ، نیروی الکترومغناطیسی وارد بر یک بار q که با سرعت \mathbf{v} حرکت می کند برابر است با

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad [2-8]$$

نیروی $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ را عموماً نیروی لورنتس می گویند. نیروی لورنتس وارد بر بار حجمی V برحسب چگالی جریان \mathbf{J} در حجم V به صورت

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dv \quad [4-8]$$

داده می شود. شرطی را که تحت آن شرط عمل

$$\mathbf{J} dv \rightarrow I dl \quad [9-8]$$

این عبارت نیرو را می توانیم به دو شکل مفید دیگر که از ویژگیهای $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ و $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ ناشی می شود بنویسیم

$$\mathbf{F} = \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{m}) = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad (107-8)$$

کل گشتاور وارد بر توزیع جریان جایگزیده با جمع روی گشتاورهای وارد بر جزءهای مختلف توزیع تعیین می شود

$$d\tau = \mathbf{r}' \times d\mathbf{F} = \mathbf{r}' \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dv'$$

بدین ترتیب

$$\tau = \int \mathbf{r}' \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dv' \quad (108-8)$$

با استفاده از رابطه ضرب سه گانه برداری، گشتاور را به صورت

$$\tau = \int (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}) dv' - \int (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{J}) \mathbf{B} dv'$$

می نویسیم. در زیر نشان می دهیم که انتگرال دوم در توزیع جریان جایگزیده صفر می شود؛ با نوشتن

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mathbf{r}'^2 \mathbf{J}) - \mathbf{r}'^2 \nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mathbf{r}'^2 \mathbf{J})$$

و تبدیل انتگرال حجمی به یک انتگرال سطحی به سادگی به این واقعیت می رسیم. انتگرال اول با انتگرالی که در معادله (۱۰۵-۸) دیدیم یکسان است، بدین ترتیب

$$\tau = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (109-8)$$

اکنون کار مکانیکی لازم برای قراردادن یک توزیع جریان جایگزیده با گشتاور دوقطبی مغناطیسی \mathbf{m} در یک میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} که با \mathbf{m} زاویه θ می سازد را محاسبه می کنیم. برای ساده شدن محاسبات فرض می کنیم که توزیع با گشتاور دوقطبی آن در جهت میدان به داخل میدان آورده می شود. بعد از آنکه توزیع در محل خود قرار گرفت، به مکان نهایی چرخانده می شود.

چون در یک میدان مغناطیسی کل نیروی وارد بر حلقه صفر است، کار مکانیکی فقط در مرحله چرخش انجام می شود. اصل کار مجازی بیان می کند که گشتاور مکانیکی آهنگ تغییر کار با زاویه است؛ یعنی $dW = \tau d\theta$. بنابراین معادله (۱۰۹-۸) گشتاور اعمال شده توسط

می‌شوند در نظر بگیریم، در آن صورت برای جورکردن جواب در فصل مشترکها، شرایط مرزی روی \mathbf{A} و \mathbf{B} مورد نیاز است. این شرایط از معادلات دیفرانسیل \mathbf{B} استخراج می‌شوند

$$B_{1n} = B_{2n} \quad \text{یا} \quad A_{1t} = A_{2t} \quad [۴۷-۸]$$

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)_t = \mu_0 \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}} \quad [۴۸-۸]$$

که در آن t و n یعنی مماس و عمود بر فصل مشترک و \mathbf{K} چگالی جریان سطحی است.

در نواحی که در آنجا $\mathbf{J} = 0$ ، تاو \mathbf{B} صفر می‌شود و از این رو می‌توان یک پتانسیل زده‌ای مغناطیسی مشابه با وضعیت الکتروستاتیکی معرفی کرد

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \Phi_m \quad [۷۲-۸]$$

جایگزین کردن این معادله در $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ نشان می‌دهد که Φ_m در معادله لاپلاس صدق می‌کند.

$$\nabla^2 \Phi_m = 0 \quad [۷۳-۸]$$

پتانسیل زده‌ای مغناطیسی برای یک حلقه جریان I در نقطه مشاهده P عبارت است از

$$\Phi_m = \frac{1}{4\pi} \Omega \quad [۷۵-۸]$$

که در آن Ω زاویه فضایی حلقه نسبت به یک مبدأ در نقطه مشاهده است. پتانسیل زده‌ای مغناطیسی یک حلقه جریان به مساحت a و جریان I در فواصل دور در مقایسه با بعد حلقه برابر است با

$$\Phi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\xi}}{\xi^3} \quad [۸۸-۸]$$

که در آن $\mathbf{m} = I\mathbf{a}$ و $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه است. این پتانسیل شبیه پتانسیل دوقطبی الکتریکی است، و از این رو آن را میدان دوقطبی مغناطیسی با گشتاور دوقطبی \mathbf{m} می‌گوییم. میدان \mathbf{B} ی حلقه یک میدان دوقطبی است

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi\xi^3} [3(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} - \mathbf{m}] \quad [۸۹-۸]$$

گشتاور دوقطبی مغناطیسی یک توزیع جریان عبارت است از

$$d\mathbf{m} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{J} dv \quad [۹۴-۸]$$

معتبر است، شرط یا تقریب رشته‌ای می‌نامند. بدین ترتیب نیروی لورنتس وارد بر یک جریان رشته‌ای عبارت است از

$$\mathbf{F} = \int I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

معادلات اساسی مغناطوستاتیکی که در آنها جریان پایاست $(\nabla \cdot \mathbf{J} = 0)$ عبارتند از

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \text{و} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad [۱۹-۸], [۲۰-۸]$$

که در آن $10^{-7} \text{ N/A}^2 = \mu_0 / 4\pi$. رابطه $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ تلوياً بیان می‌کند که تک‌قطبهای مغناطیسی وجود ندارند. رابطه تاو را شکل دیفرانسیلی قانون آمپر می‌نامند. شکل انتگرالی قانون آمپر با انتگرال‌گیری از شکل دیفرانسیلی روی سطح S از پیرامون C و سپس با استفاده از قضیه استوکس

$$\oint_C \mathbf{B} d\mathbf{r} = \mu_0 I \quad [۲۲-۸]$$

که در آن $I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ کل جریان عبوری از S است به دست می‌آید. عدم حضور تک‌قطبی $-\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ اشاره بر این دارد که \mathbf{B} را می‌توان به صورت تاو یک پتانسیل برداری نوشت، یعنی

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad [۳۷-۸]$$

با جایگزینی آن در $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ و با استفاده از $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (پیمانه کولن)، به دست می‌آوریم

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad [۳۹-۸]$$

که دارای جواب

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} dv}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad [۴۲-۸]$$

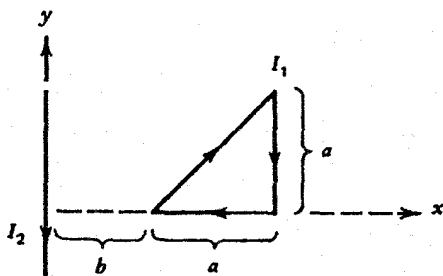
است. با حل صریح $\nabla \times \mathbf{A}$ قانون بیوساوار به دست می‌آید

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv \quad [۴۲-۸]$$

یا برای یک جریان رشته‌ای داریم

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad [۴۵-۸]$$

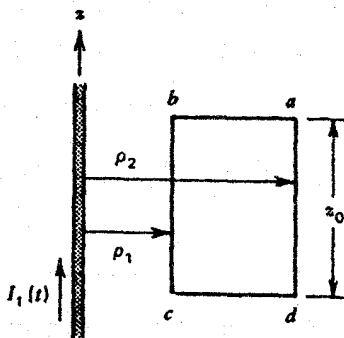
معادله دیفرانسیل \mathbf{A} را می‌توان در حالت‌های تقارن استوانه‌ای حل کرد. اگر بیش از یک مبدأ در فضا که توسط توزیعهای جریان تفکیک



شکل ۲۱-۸

۷-۸ نشان دهید که پتانسیل برداری ناشی از دو جریان خطی موازی در دو جهت مخالف برابر است با $A = \mu_0 I_2 \hat{z} \ln(\rho_2/\rho_1) / 2\pi$ که در آن ρ_1 و ρ_2 فاصله از نقطه مشاهده تا سیمها و \hat{z} بردار یکه موازی با سیمهاست. ۸-۸ نشان دهید که عبارتهای زیر همگی پتانسیلهای برداری ممکن میدان یکنواخت $B = B\hat{z}$ هستند: $A_1 = -By\hat{x}$ ، $A_2 = Bx\hat{y}$ ، $A_3 = -1/2r \times B$ ، برای کدامیک از اینها $\nabla \cdot A = 0$ نشان دهید که $A_1 - A_2$ شیب تابع $\nabla\psi$ است. A_1 ، A_2 و $A_3 - A_2$ را در صفحه xy رسم کنید.

۹-۸ دو مدار مفروض در شکل ۲۲-۸ نشان داده شده است: یک سیم مستقیم بلند و یک حلقه مربع مستطیل که در صفحه سیم واقع است. (الف) میدان مغناطیسی B تولیدشده از سیم بلند را به فاصله ρ از سیم محاسبه کنید. (ب) شار مغناطیسی گذرنده از حلقه مربع مستطیل را محاسبه کنید. (ج) اختلاف پتانسیل برداری بین ρ_1 و ρ_2 را تعیین کنید. (د) اگر جریان I_2 در مدار مربع مستطیل به صورت ساعتگرد جاری شود، نیروی وارد بر قطعه‌های ab و bc را پیدا کنید.



شکل ۲۲-۸

۱۰-۸ یک سیمولوله بسیار بلند با n دور بر واحد طول و یک جریان I در نظر بگیرید. همان طور که در شکل ۲۳-۸ می‌بینیم محور z در امتداد محور سیمولوله انتخاب می‌شود. (الف) میدان مغناطیسی داخل سیمولوله و شار عبوری از منحنی مربع مستطیل C را تعیین کنید.

پتانسیل برداری یک دوقطبی مغناطیسی برابر است با

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \times \xi}{\xi^3} \quad [97-8]$$

اگر یک دوقطبی مغناطیسی در یک میدان مغناطیسی خارجی قرار گیرد، در آن صورت نیرو، گشتاور و انرژی زیر را دارد

$$F = \nabla \times (B \times m) = (m \cdot \nabla)B = \nabla(m \cdot B) \quad [107-8]$$

$$\tau = m \times B \quad [109-8]$$

$$U = -m \cdot B \quad [111-8]$$

مسائل

۱-۸ معادله حرکت را برای ذره‌ای به جرم m و بار q در ناحیه‌ای که در آنجا E و B غیرصفرند بنویسید. میدان مغناطیسی لازم برای محدود کردن یک الکترون با سرعت $v = 10^5$ m/s به یک مدار به شعاع $m \cdot 10^{-10}$ چقدر است؟

۲-۸ از یک استوانه بلند به شعاع ρ_0 که محور آن در امتداد محور z است، جریانی با چگالی $J = e^{-\rho/\rho_0} \hat{z}$ می‌گذرد. میدان مغناطیسی را در کل استوانه به دست آورید.

۳-۸ یک جریان رشته‌ای $I = I_0 \hat{z}$ به فاصله h درست بالا و موازی با محور تقارن یک صفحه جریان به عرض W و به چگالی $K = K_0 \hat{z}$ است. نیروی وارد بر واحد طول جریان رشته‌ای را تعیین کنید. نیروی وقتی که W بسیار بزرگ می‌شود به دست آورید.

۴-۸ یک رسانای استوانه‌ای در امتداد محور z و به شعاع $\rho_0 = 10$ cm میدان مغناطیسی

$$B = \frac{10^{-6} \mu_0}{\rho} \left(\frac{4R^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi\rho}{2R} - \frac{2\rho R}{\pi} \cos \frac{\pi\rho}{2\pi} \right) \hat{\phi}(T) \quad \rho < \rho_0$$

را تولید می‌کند. (الف) چگالی جریان و کل جریان در رسانا را تعیین کنید. (برای فرض اخیر از قانون آمپر استفاده کنید). (ب) B را در خارج از رسانا تعیین کنید.

۵-۸ صریحاً نشان دهید که در نزدیکی یک سیم مستقیم بلند که حامل جریان I است، $\nabla \cdot B = 0$. از مختصات دکارتی یا استوانه‌ای استفاده کنید. $\nabla \times B$ در نزدیکی این سیم چقدر است؟

۶-۸ همان طور که در شکل ۲۱-۸ می‌بینیم، یک حلقه مثلثی سخت حامل جریان I_1 در صفحه یک سیم بلند که جریان I_2 را حمل می‌کند قرار دارد. نیروی F وارد بر وتر مثلث توسط I_2 را محاسبه کنید.

۱۳-۸ میدان B را در مرکز یک سیم مربعی شکل به ضلع a که جریان I از آن می‌گذرد محاسبه کنید.

۱۴-۸ یک سیم بسیار بلند 18° درجه حول استوانه‌ای چوبی به شعاع b خم می‌شود. اگر سیم حامل جریان I باشد، میدان B در مرکز استوانه در صفحه سیم چقدر است؟

۱۵-۸ تعداد بسیار زیادی از دورهای نزدیک به هم یک سیم ظریف در یک لایه تنها بر روی سطح یک کره چوبی پیچیده شده‌اند به طوری که این دورها کاملاً کره را می‌پوشانند. صفحات دورها بر محور کره عمود هستند.

اگر جریان در سیم I باشد، میدان مغناطیسی در مرکز کره را تعیین کنید. ۱۶-۸ میدان B را در مرکز یک کره به شعاع R با توزیع بار حجمی یکنواخت ρ که حول یکی از قطرها با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد تعیین کنید.

۱۷-۸ الف) میدان مغناطیسی را در نزدیکی محور حلقه حامل جریان مثال ۱۲-۸ با استفاده از $\nabla \cdot B = 0$ و میدان روی محور حلقه تعیین کنید. ب) نشان دهید که پتانسیل برداری روی محور حلقه صفر است.

۱۸-۸ یک منبع از میدان مغناطیسی نسبتاً یکنواخت که بسیار استفاده می‌شود، پیچه هلمهولتز است. پیچه شامل دو پیچه دایره‌ای به شعاع یکسان a با یک محور مشترک z است و این پیچه‌ها که جریان I را حمل می‌کنند به فاصله‌ای مساوی با شعاع پیچه‌ها از یکدیگر فاصله دارند. نشان دهید که در نقطه میانی روی محور مشترک dB/dz و d^2B/dz^2 صفرند. B را در نقطه میانی پیدا کنید.

۱۹-۸ پتانسیل زده‌ای مغناطیسی در فضای آزاد

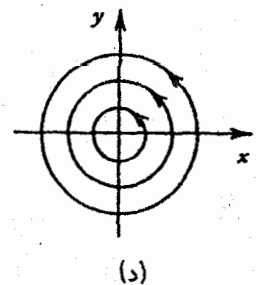
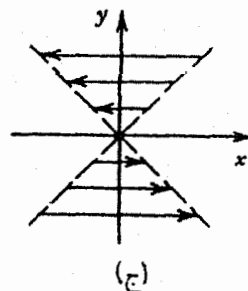
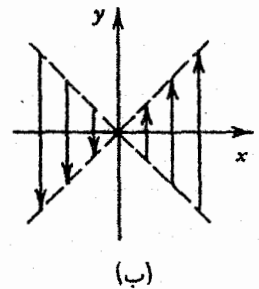
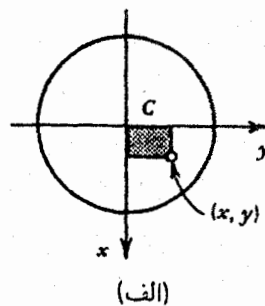
$$\Phi = B_0 (z + xz/b) \mu_0$$

که در آن B_0 و b ثابت هستند را در نظر بگیرید. الف) نشان دهید که این پتانسیل قابل قبولی است که از آن یک میدان مغناطیسی ایستا به وجود می‌آید و این میدان را پیدا کنید. ب) اگر یک اتم که هسته آن در مبدأ ثابت است یک الکترون در یک مدار دایره‌ای به شعاع a در صفحه xy داشته باشد، نیروی وارد بر اتم به وسیله میدان قسمت الف) را به دست آورید.

۲۰-۸ یک حلقه دایره‌ای کوچک جریان به شعاع a و جریان I در صفحه xy با مرکز حلقه در مبدأ قرار دارد. نشان دهید که پتانسیل برداری در فواصل دور برابر است با $A_r = A_\theta = 0$ و $A_\theta = (\pi \mu_0 a^2 I \sin \theta) / 4 \pi r^2$.

۲۱-۸ یک پیچه دایره‌ای نازک با N دور به شعاع r و جریان I در صفحه $z = 0$ واقع است. جریان در جهت $\hat{\phi}$ است و یک میدان

ب) فرض کنید پتانسیل برداری A در امتداد محور y و مستقل از y است. با استفاده از $\oint_C A \cdot dl = F$ ، A را در داخل سیمولوه برای حالتی که A روی محور سیمولوه صفر است تعیین کنید. ج) سؤال (ب) را با فرض اینکه پتانسیل برداری در امتداد محور x و مستقل از x است تکرار کنید. د) یک ترکیب خطی از پتانسیلها در قسمتهای (ب) و (ج) که میدان مغناطیسی مشابهی را به دست می‌دهد و در $\nabla \cdot A = 0$ صدق می‌کند بنویسید. ه) نشان دهید که نمودارهای شکل ۲۳-۸ (ب)، ۲۳-۸ (ج) و ۲۳-۸ (د) نشان‌دهنده پتانسیل قسمتهای (ب)، (ج) و (د) است.



شکل ۲۳-۸ پتانسیل برداری در داخل یک سیمولوه بسیار بلند. الف) نمای بالایی سیمولوه یک حلقه آمیری C را نشان می‌دهد. ب)، (ج) و (د) سه نمودار از پتانسیلهای ممکن هستند.

۱۱-۸ با استفاده از قانون آمپر $\nabla \times A = B$ پتانسیل برداری یک جریان رشته‌ای بسیار بلند را تعیین کنید.

۱۲-۸ الف) یک مدار جریان به شکل دایره‌ای به شعاع r مفروض است. اگر از مدار جریان I بگذرد، میدان مغناطیسی B را در مرکز دایره به دست آورید. ب) یک پیچه پهن طوری سیم‌پیچی می‌شود که شامل تعداد دور یکنواخت بسیار زیاد در امتداد شعاع است. شعاعهای داخلی و خارجی پیچه به ترتیب a و b هستند. این پیچه حامل جریان I و دارای N دور بر واحد طول است. میدان B را در مرکز پیچه به دست آورید.

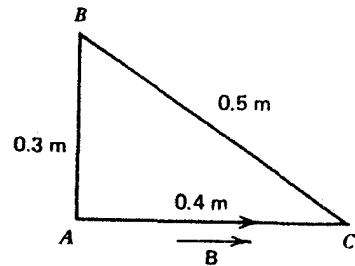
۲۳-۸ یک مدار دایره‌ای شکل از سیمی به شعاع $a = 1 \text{ cm}$ و به مرکز مبدأ به شکل خمیده در می‌آید به طوری که نیمی از آن در صفحه xy و نیم دیگر در صفحه xz قرار می‌گیرد. از سیم جریان $I = 2 \text{ A}$ می‌گذرد. (الف) گشتاور دوقطبی مغناطیسی این مدار چقدر است؟ (ب) میدان مغناطیسی B در نقطه $(x, y, z) = (3, 4, 0)$ از مبدأ چقدر است؟

۲۴-۸ یک الکترون در یک مدار دایره‌ای به شعاع $3.5 \times 10^{-11} \text{ m}$ در حضور یک میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 4 \times 10^{-2} \text{ T}$ حرکت می‌کند. اگر به الکترون گشتاوری به بزرگی $7.85 \times 10^{-2} \text{ Nm}$ وارد شود، گشتاور دوقطبی مغناطیسی و سرعت زاویه‌ای الکترون را تعیین کنید.

۲۵-۸ (الف) گشتاور دوقطبی مغناطیسی یک کره به شعاع R با توزیع بار حجمی یکنواخت ρ که حول یک قطر می‌چرخد را تعیین کنید. (ب) مسئله را برای حالت توزیع بار سطحی یکنواخت σ تکرار کنید. ۲۶-۸ معادله (۱۰-۸) را ثابت کنید.

مغناطیسی یکنواخت خارجی $B = (\hat{x} + \hat{y})B_0 / \sqrt{2}$ وجود دارد. (الف) گشتاور دوقطبی مغناطیسی پیچه، (ب) نیروی وارد بر پیچه، و (ج) گشتاور وارد بر پیچه را به دست آورید.

۲۲-۸ همان طور که در شکل ۲۴-۸ نشان داده شده است در یک مدار مثلثی شکل از سیم که جریان 6 A از آن عبور می‌کند، یک میدان مغناطیسی $B = 1.1 \text{ Wb/m}^2$ به صورت یکنواخت بر روی مثلث و به موازات ضلع AC وجود دارد. (الف) بزرگی و جهت نیروی وارد بر هر ضلع را پیدا کنید. (ب) گشتاور دوقطبی مدار و بزرگی و جهت گشتاور وارد بر آن را محاسبه کنید.



شکل ۲۴-۸

نظریه رسمی مغناطیس و مواد

تکانه زاویه‌ای مداری این الکترون $\mathbf{L} = m_e \mathbf{v} \times \mathbf{r}$ است. بدین ترتیب گشتاور مغناطیسی با رابطه $eL/2m_e$ داده می‌شود. از مکانیک کوانتومی می‌دانیم که $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ که l عدد صحیح مثبت است. بنابراین تصویر نیمه‌کلاسیکی، گشتاور مغناطیسی برای هر الکترون را با اندازه زیر پیش‌بینی می‌کند

$$m = \frac{e\hbar}{2m_e} \sqrt{l(l+1)} \quad (2-9)$$

یک اتم الکترونهاى زیادی ممکن است داشته باشد. اما در حالت کلی گشتاورهای مغناطیسی آنها همدیگر را حذف می‌کنند. در نهایت و تنها الکترونهاى "جفت‌نشده" در گشتاور اتمی شرکت دارند. در هر مورد اتمهایی وجود دارند که گشتاور مغناطیسی آنها، اگر غیر صفر باشد، از مرتبه $e\hbar/2m$ (که مگنتون بور نام دارد) یعنی برابر با $9 \times 10^{-24} \text{ J/T}$ (ژول بر تسلا) است. این موضوع نیز جالب است که اندازه جریانه‌های مؤثر از مرتبه

$$\frac{ev}{2\pi r} = \frac{e\hbar}{2\pi m_e r^2} = 0.19 \times 10^{-2} \text{ A}$$

یعنی از مرتبه 2 mA است.

در هر جزء کوچک ماکروسکوپی ماده تعداد زیادی اتم وجود دارد و گشتاور دوقطبی چنین جزئی جمع برداری گشتاورهای اتمهای شرکت‌کننده‌اند. چون تعداد زیادی دوقطبیهای اتمی در هر جزء ماکروسکوپی ماده وجود دارد، گشتاورهای دوقطبی اجزای ماکروسکوپی

در فصل ۸ نشان دادیم که حلقه‌های دارای جریان در فواصل دور، در مقایسه با ابعاد حلقه، میدانهای دوقطبی به‌وجود می‌آورند که به راحتی می‌توانیم آنها را برحسب گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی مشخص کنیم. اکنون به سادگی می‌توان این مفهوم را توضیح داد که حضور ماده چگونه میدانهای مغناطیسی را تولید می‌کند و یا آنها را تحت تأثیر قرار می‌دهد. زیرا می‌توان ماده را مجموعه‌ای از دوقطبیهای مولکولی یا اتمی تصور کرد که هر یک گشتاور دوقطبی خودش را دارد. در حقیقت مشخص شده است که آنها و مولکولها دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی هستند. بنابراین آنها را جریانه‌های الکترونی دوار کوچکی در نظر می‌گیریم که الکترونهاى اتمها در مدارهایی به دور هسته اتم قرار دارند. معمولاً اندازه این گشتاورهای مغناطیسی برابر است با $e\hbar/2m_e$ ، که مگنتون بور می‌نامیم و اندازه گشتاور دوقطبی اتمی یا مولکولی، در صورت وجود، از این مرتبه بزرگی است. در این رابطه 2π (ثابت پلانک) $= \hbar$ ، m_e جرم الکترون و e بار الکترون است.

۱-۹ مغناطیس

از دید کلاسیک، الکترون در حال چرخش به دور هسته با سرعت v و در فاصله r جریانی معادل $I = ev/2\pi r$ بسامد چرخش $I = e \times$ دارد. چون سطح مدار چرخش الکترون πr^2 است گشتاور مغناطیسی برابر است با

$$m = \frac{ev}{2\pi r} \times \pi r^2 = \frac{evr}{2} \quad (1-9)$$

در داخل ماده وجود ندارد زیرا جریانه‌ها با قطعه‌های مجاور هم حذف می‌شوند. اگر \mathbf{M} ثابت نباشد، جریانه‌ها کاملاً یکدیگر را حذف نمی‌کنند و جریان غیرصفر وجود خواهد داشت. شکل ۹-۱ (ج) را در نظر می‌گیریم که نمای جلویی قطعه‌های ۱ و ۲ را با جریانه‌های $I_{yz}(1)$ و $I_{yz}(2)$ و مغناطش متناظر $M_x(1)$ و $M_x(2)$ نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم $I_{yz}(2) = I_{yz}(1) + \Delta I_{yz}$. بدین ترتیب^۱

$$M_x(1)\Delta V = I_{yz}(1)\Delta y\Delta z$$

و

$$M_x(2)\Delta V = [I_{yz}(1) + \Delta I_{yz}]\Delta y\Delta z$$

بنابراین

$$[M_x(1) - M_x(2)]\Delta V = -\Delta I_{yz} \Delta y \Delta z$$

با در نظر گرفتن $M_x(2) = M_x(1) + (\partial M_x / \partial y)\Delta y$ به دست می‌آوریم

$$-\frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta y \Delta V = -\Delta I_{yz} \Delta y \Delta z$$

اما ΔI_{yz} جریان موجود بین قطعه‌های ۱ و ۲ است که برابر جریان در جهت $-z$ است یعنی: $-\Delta I_{yz} = I_z \equiv J_z \Delta x \Delta y$. نتیجه می‌گیریم

$$-\frac{\partial M_x}{\partial y} = J_z \quad \text{یا} \quad -\frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta V \equiv J_z \Delta x \Delta y \Delta z$$

اکنون باید توجه داشت که برای J_z ، جمله دیگری مربوط به تغییرات \mathbf{M} در جهت x وجود دارد. با روشی دقیقاً مشابه با روش بالا نتیجه می‌گیریم که مؤلفه J_z با $\partial M_y / \partial x + \partial M_x / \partial y$ داده می‌شود. بنابراین مؤلفه کلی چگالی جریان در جهت z برابر است با

$$J_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}$$

همین طور

$$J_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \quad \text{و} \quad J_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}$$

این سه مؤلفه را می‌توان در رابطه زیر خلاصه کرد

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (5-9)$$

۱. خواهیم دید که این فرض با نتایج نهایی همخوانی دارد.

همجوار به طور هموار تغییر می‌کنند، و فرض می‌کنیم که این گشتاورها با میدان برداری، \mathbf{M} ، که آن را مغناطش می‌نامیم مشخص می‌شوند. بنابراین در هر جزء حجم کوچک ماکروسکوپی، dv ، یک گشتاور دوقطبی به اندازه

$$dm = \mathbf{M} dv \quad (3-9)$$

وجود دارد. از این رابطه پیداست که \mathbf{M} گشتاور دوقطبی بر واحد حجم (چگالی گشتاور دوقطبیهای مغناطیسی، مشابه \mathbf{P} در حالت الکتریکی) است و بنابراین یک تابع هموار از مکان در ماده است.

قبلاً [در معادله (۸-۹۳)] دیدیم که برای حجم V

$$\mathbf{m} = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv'$$

است که برای آن چگالی جریان \mathbf{J} تعریف شد. در این حالت، معادله (۳-۹) مستلزم آن است که \mathbf{M} مقدار زیر انتگرال باشد

$$\mathbf{M} = \frac{1}{c} [\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')] \quad (4-9)$$

بدین ترتیب اگر توزیع جریان در داخل ماده معلوم باشد (توزیع جریان ماکروسکوپی) آن‌گاه \mathbf{M} را از این رابطه به دست می‌آوریم. بنابراین اگر واقعاً یک \mathbf{M} غیرصفر در ماده وجود داشته باشد متناظر با آن جریان ماکروسکوپی (که آن را جریان مغناطش می‌نامیم) در ماده وجود خواهد داشت. برای پی بردن به این جریانه‌ها، شکل ۹-۱ (الف)، که در آن قطعه‌های ماکروسکوپی ماده با حجم ΔV به یکدیگر چسبیده‌اند، را در نظر می‌گیریم. مغناطش در مرکز هر قطعه برابر است با $\mathbf{M} = M_x \hat{x} + M_y \hat{y} + M_z \hat{z}$. بدین ترتیب هر یک از آنها معادل یک دوقطبی مغناطیسی ماکروسکوپی

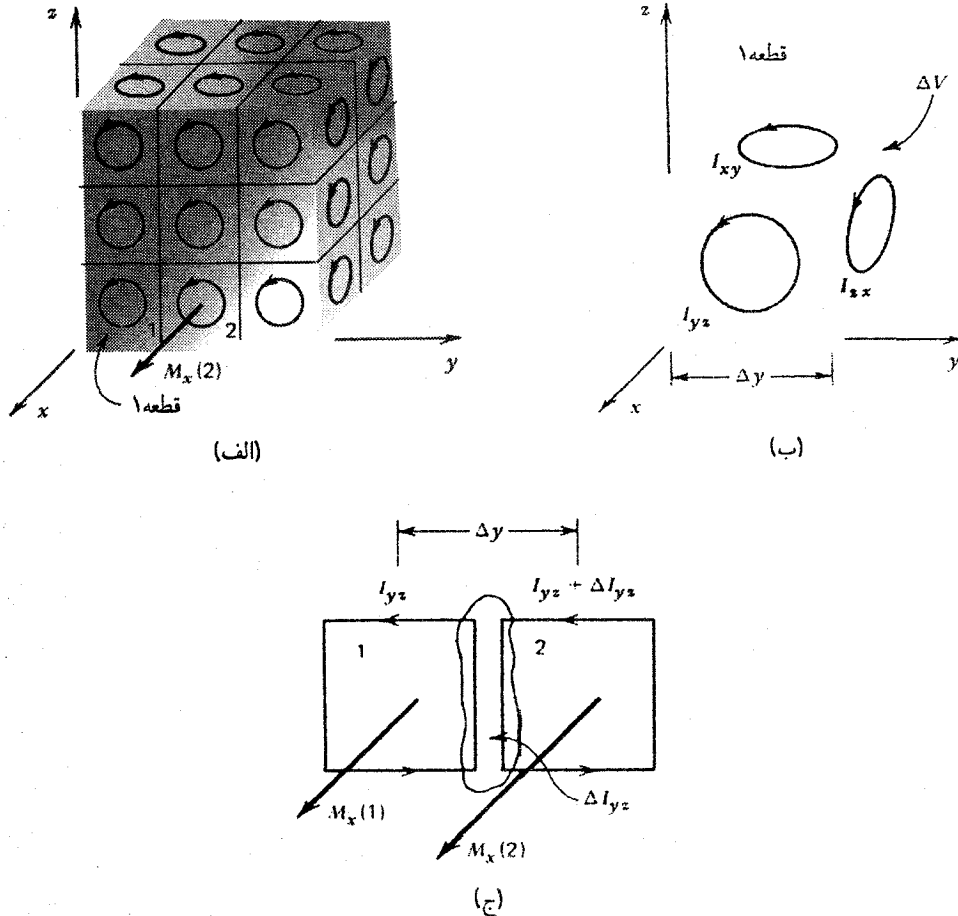
$$\mathbf{M}\Delta V = M_x \Delta V \hat{x} + M_y \Delta V \hat{y} + M_z \Delta V \hat{z}$$

است. آن‌گاه به هر قطعه، حلقه‌های جریان که در سه صفحه عمود بر هم جریان دارد [شکل ۹-۱ (ب) را ببینید]^۱ نسبت می‌دهیم. این جریانه‌ها را با شاخصهای I_{xy} ، I_{zx} ، I_{yz} علامت‌گذاری می‌کنیم. بدین ترتیب با استفاده از $dm = I da$ داریم

$$M_x \Delta V = I_{yz} \Delta y \Delta z \quad M_y \Delta V = I_{zx} \Delta z \Delta x$$

$$M_z \Delta V = I_{xy} \Delta x \Delta y$$

اگر قطعه‌ها گشتاور دوقطبی یکسانی (\mathbf{M} ثابت) داشته باشند، حلقه‌های جریان هم‌ارز آنها (I_{xy} ، I_{zx} ، I_{yz}) نیز یکسان خواهند بود و جریانی



شکل ۹-۱ به دست آوردن جریانهای مغناطیس به کمک مغناطیس M . (الف) یک حالت از قطعه‌های ماکروسکوپی ماده. (ب) شکل بزرگ شده قطعه ۱ با نمایش جریانهای سه بعدی جاری شده. (ج) نمای روبه روی دو قطعه ۱ و ۲.

می‌توان نوشت

$$K_M = M \times n \quad (9-6)$$

که n بر سطح قطعه عمود و در جهت خارج آن است. در نتیجه می‌بینیم که مغناطیس M در ماده کاملاً معادل یک توزیع جریان ماکروسکوپی در داخل و در سطح آن است. باید توجه کنیم که دیورژانس J_m صفر است، یعنی

$$\nabla \cdot J_m = \nabla \cdot (\nabla \times M) = 0$$

به این ترتیب، این جریان تأثیری در روابط پیوستگی، معادله‌های (۷-۹) و (۷-۱۱)، ندارد.

مثال ۹-۱ جریانهای مغناطیس — استوانه مغناطیده یکنواخت (آهنربای میله‌ای)

استوانه‌ای جامد با مغناطیس یکنواخت $M = M_0 \hat{z}$ در طول محورش را فرض می‌کنیم. آن‌گاه روی وجه منحنی استوانه $J_m = 0$ و

که آن را چگالی جریان مغناطیس می‌نامیم.

سرانجام توجه می‌کنیم که حتی اگر M ثابت و در نتیجه $J_m = 0$ باشد هنوز جریانهایی روی سطوح قطعات، که در آنجا حذف کامل جریان صورت نمی‌گیرد وجود خواهند داشت. بدین ترتیب، روی سطح بالایی قطعه بزرگ، جریانهایی ناشی از M_x و M_y وجود خواهند داشت. در حقیقت با در نظر گرفتن (سطح بالایی) یک قطعه تنها داریم

$$\frac{-I_{yz} \hat{y}}{\Delta x} = K_y \hat{y} \quad \text{و} \quad \frac{I_{zx} \hat{x}}{\Delta y} = K_x \hat{x}$$

بنابراین، در صفحه xy ، جریان سطحی کل می‌شود

$$K_{xy} = K_x \hat{x} + K_y \hat{y}$$

با به کار بردن عبارت $M_x \Delta V = I_{yz} \Delta y \Delta z + \dots$

$$K_{xy} = \hat{x} \left(\frac{I_{zx}}{\Delta y} \right) - \hat{y} \left(\frac{I_{yz}}{\Delta x} \right) = \hat{x} M_y - \hat{y} M_x \quad \text{یا} \quad K_{xy} = M \times \hat{z}$$

همین نتیجه را برای سطوح دیگر داریم. بنابراین در حالت کلی

با ناپوستگی \mathbf{M} در سطح روبه‌رو نشویم. با استفاده از اتحاد برداری معادله (۵۸-۱) می‌نویسیم

$$\nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{\xi} \right) = \nabla' \left(\frac{1}{\xi} \right) \times \mathbf{M} + \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{\xi}$$

بدین ترتیب

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_m &= \frac{\mu_0}{4\pi} \lim_{V' \rightarrow V} \int_{V'} \mathbf{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{\xi} \right) dv' \\ &= \lim_{V' \rightarrow V} \int_{V'} \left[-\nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{\xi} \right) + \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{\xi} \right] dv' \end{aligned}$$

با استفاده از معادله (۷۰-۱)، پتانسیل به صورت زیر می‌شود

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \lim_{V' \rightarrow V} \left[\int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{\xi} dv' + \int_{S'} \frac{\mathbf{M} \times d\mathbf{a}'}{\xi} \right]$$

و یا

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\int_V \frac{\mathbf{J}_m dv'}{\xi} + \int_S \frac{\mathbf{K}_m da'}{\xi} \right)$$

اکنون در مورد خواص مغناطیسی ماده از دید پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی بحث می‌کنیم. در فصل ۸ نشان دادیم که میدان مغناطیسی ناشی از توزیع جریان حقیقی را می‌توان به کمک پتانسیل نرده‌ای بر طبق رابطه $\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \Phi_m$ به دست آورد. اکنون نشان می‌دهیم که میدان حاصل از مواد مغناطیده را نیز می‌توان از پتانسیل نرده‌ای به دست آورد. با گرفتن تاو از معادله (۹-۹) نسبت به \mathbf{r} ، و توجه به اینکه این عمل تأثیری روی توابع وابسته به \mathbf{r}' ندارد، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{B}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \xi}{\xi^3} \right) dv' \quad (۱۰-۹)$$

این عبارت را می‌توان با بسط حاصلضرب سه‌گانه برداری انتگرالده، مطابق معادله (۶۱-۱) به ترتیب زیر نوشت

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{M} \times \xi}{\xi^3} \right) = \mathbf{M} \nabla \cdot \frac{\xi}{\xi^3} - (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{\xi}{\xi^3} \quad (۱۱-۹)$$

که مشتق‌گیری از $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ نسبت به \mathbf{r} صفر خواهد شد. معادله (۱۱-۹) را می‌توان با تغییر بیشتر به شکل مناسبتری نوشت. همان طور که در رابطه (۸۱-۱) نشان دادیم می‌نویسیم $\nabla \cdot (\xi/\xi^3) = 4\pi\delta(\xi)$. علاوه بر این، جمله دوم طرف راست رابطه (۱۱-۹) را با به‌کار بردن ضرب سه‌گانه به شکل زیر می‌نویسیم

$$(\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{\xi}{\xi^3} = \nabla \left[\mathbf{M} \cdot \frac{\xi}{\xi^3} \right] - \mathbf{M} \times \nabla \times \frac{\xi}{\xi^3}$$

$\mathbf{K}_m = M_0 \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{p}} = M_0 \hat{\phi}$ است. در دو انتها $\mathbf{K}_m = 0$ است. واضح است این، میدان یک سیمولوله با چگالی جریان سطحی M_0 را به دست می‌دهد. در فاصله‌های دور از محور، میدان مانند میدان یک دوقطبی است با گشتاور دوقطبی $\mathbf{m} = \mathbf{M}V$ که V حجم استوانه است. توجه کنید که اگر استوانه توخالی باشد، میدان در داخل استوانه کم می‌شود چون \mathbf{K}_m از سطح داخلی استوانه در جهت $-\hat{\phi}$ است. ■

۲-۹ پتانسیلهای نرده‌ای و برداری یک ماده مغناطیده

در بخش قبل نشان دادیم که مغناطش یک ماده کاملاً معادل توزیع جریان ماکروسکوپی در داخل و در سطح آن است. این جریانها به ترتیب با روابط (۵-۹) و (۶-۹) داده می‌شوند. در نتیجه تأثیرات مغناطیسی را مستقیماً به کمک جریانها حساب می‌کنیم - مثلاً با استفاده از روشی که در بخش ۸ مطرح شد. بدین ترتیب برای منظور کردن تأثیر ماده با مغناطش \mathbf{M} روی پتانسیل برداری از معادله (۴۲-۸) داریم

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_V \frac{\mathbf{J}_m dv'}{\xi} + \int_S \frac{\mathbf{K}_m da'}{\xi} \right] \quad (۷-۹)$$

و برای میدان \mathbf{B} از معادله (۶۲-۸) داریم

$$\mathbf{B}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_V \frac{\mathbf{J}_m \times \xi}{\xi^3} dv' + \int_S \frac{\mathbf{K}_m \times \xi}{\xi^3} da' \right] \quad (۸-۹)$$

که V حجم ناحیه‌ای است که $\mathbf{M} \neq 0$ است و S شامل تمام سطوحی است که \mathbf{K}_m تعریف شده است و $\xi = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

خواهیم دید که معادله (۷-۹) باید با معادله (۹۶-۸)، فصل قبل که در آن \mathbf{A}_m به شکل زیر داده می‌شود، سازگار باشد. (با استفاده از $d\mathbf{m} = \mathbf{M} dv'$)

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M} \times \xi}{\xi^3} dv' \quad (۹-۹)$$

که این سازگاری به روش زیر اثبات می‌شود. چون

$$\nabla' \left(\frac{1}{\xi} \right) = + \frac{\xi}{\xi^3}$$

آن‌گاه انتگرال معادله (۹-۹) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M} \times \xi}{\xi^3} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{\xi} \right) dv'$$

انتگرال را روی حجم V' ، که با حجم V احاطه شده است، می‌گیریم تا

جمله آخر شامل

$$\nabla \times \frac{\xi}{\xi^3} = \nabla \times \left(\nabla \frac{1}{\xi} \right) \equiv 0$$

است، بدین ترتیب

$$(\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{\xi}{\xi^3} = \nabla \left(\mathbf{M} \cdot \frac{\xi}{\xi^3} \right)$$

بنابراین معادله (۹-۱۰) به صورت زیر می شود

$$\mathbf{B}_m(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\xi}{\xi^3} \right] dv' + \mu_0 \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \delta(\xi) dv' \quad (9-12)$$

گرادیان در رابطه (۹-۱۲) به دلیل اینکه نسبت به \mathbf{r} گرفته می شود، به خارج انتگرال منتقل می شود. همچنین انتگرال $\mathbf{M}(\mathbf{r}') \delta(\xi)$ روی حجم برابر با $\mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r})$ است. بدین ترتیب

$$\mathbf{B}_m(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \Phi_m(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (9-13)$$

که

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\xi}{\xi^3} dv' \quad (9-14)$$

پتانسیل مغناطیسی زرده ای است که به وسیله ماده مغناطیده ایجاد شده است. چون $\mathbf{M}(\mathbf{r}') dv' = d\mathbf{m}(\mathbf{r}')$ دیفرانسیل گشتاور دوقطبی است، پس پتانسیل زرده ای همان جمع میدانهای دوقطبی [معادله (۸-۹۰)] است. جمله دوم معادله (۹-۱۳) μ_0 برابر مغناطش موضعی ماده مغناطیسی است. در خارج ماده مغناطیسی $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = 0$ است، بنابراین

$$\mathbf{B}_m(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \Phi_m(\mathbf{r}) \quad (\text{در خارج ماده}) \quad (9-15)$$

واضح است که این نتیجه شبیه رابطه بین میدان و پتانسیل الکتریکی، رابطه (۲-۶۳)، است. بنابراین ظرافت به کار گرفته شده در نوشتن پتانسیل الکتروستاتیکی برحسب چگالیهای بار حجمی و سطحی، ρ_p و σ_p ، را در مورد ماده مغناطیده نیز می توان به کار برد. نتیجه می شود

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_m}{\xi} dv' + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\sigma_m}{\xi} da' \quad (9-16)$$

و از معادله (۹-۱۳) داریم

$$\mathbf{B}_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\rho_m \xi}{\xi^3} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\sigma_m \xi}{\xi^3} da' + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (9-17)$$

که

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad \text{و} \quad \sigma_m = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (9-18)$$

کمیت $-\nabla \cdot \mathbf{M}$ دارای ویژگی چگالی بار مغناطیسی یا چگالی قطب مغناطیسی است. اگر \mathbf{M} در مرز ناپیوسته باشد به طوری که در یک طرف (طرف ۲) مرز $\mathbf{M} = 0$ و در طرف دیگر محدود بماند آن گاه یک چگالی قطب سطحی، که با $\sigma_m = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ داده می شود، وجود دارد که آن را چگالی سطحی یا شدت قطب مغناطیسی می نامیم. جالب است ببینیم که کل شدت قطب مربوط به هر قطعه ماده مغناطیده صفر است. بدین ترتیب اگر ماده حجم V داشته باشد، آن گاه شدت قطب کلی، q_m ، با انتگرال گیری از چگالیهای معادله (۹-۱۸) حساب می شود یعنی

$$q_m = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{M} dv + \int_S \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

چون از قضیه دیورژانس داریم $\int_V \nabla \cdot \mathbf{M} dv = \int_S \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$ ، آن گاه q_m صفر است.

گشتاور مغناطیسی ماده را می توان به کمک قطبها درست مثل الکتروستاتیک [معادله (۴-۱۵)] حساب کرد

$$\mathbf{m} = - \int_V \mathbf{r}' (\nabla \cdot \mathbf{M}) dv' + \int_S (\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{r}' da' \quad (9-19)$$

اکنون، نشان می دهیم که این عبارت معادل شکل ساده

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M} \cdot dv'$$

است که در معادله (۹-۳) تعریف شد. با به کار بردن معادله (۱-۷۲) داریم

$$\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}) = \int_V [\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}] dv$$

که نتیجه می دهد $\mathbf{m} = \int (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{r}' dv'$ توجه کنید که

$$(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{M}$$

پس $\mathbf{m} = \int \mathbf{M} \cdot dv'$ همان نتیجه ای که از تعریف \mathbf{M} انتظار داشتیم.

مثال ۹-۲ قطب مغناطش و چگالیهای جریان — کره مغناطیده یکنواخت

در این مثال فرض می کنیم مغناطش یک کره، $\mathbf{M} = M_0 \hat{\mathbf{z}}$ باشد. میدانهای ایجاد شده تقارن استوانه ای دارند، بنابراین اگر مختصات کروی را به کار ببریم، \mathbf{B} فقط تابعی از (r, θ) خواهد بود.

چگالیهای جریان مغناطش، جریانهای سطحی اند (شکل ۹-۲ را ببینید) یعنی

را به دست می‌آوریم. در این حالت، \mathbf{B} به وسیله چگالی قطب سطحی، $\sigma_m = M_0 \cos \theta$ ایجاد می‌شود. آن‌گاه مسئله از این به بعد چگالی بار الکتریکی سطحی مشابه، $\sigma_0 \cos \theta$ ، را خواهد داشت. در آن مسئله (مثالهای ۲-۱۷ و ۳-۶ را ببینید) نشان دادیم که پتانسیل خارجی (برای $r > R$) یک پتانسیل دوقطبی [معادله (۳-۴۴)] است. به این ترتیب با توجه به این موضوع می‌توان نوشت

$$\Phi_m = \frac{M_0 R^2}{3} \frac{1}{r^2} \cos \theta \quad r > R \quad (۲۵-۹)$$

پتانسیل داخلی را نیز در مقایسه با مورد الکتریکی [معادله (۳-۴۳)] می‌توان نوشت

$$\Phi_m = \frac{M_0}{3} r \cos \theta \quad r < R \quad (۲۶-۹)$$

با به کار بردن $\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \Phi_m$ برای خارج کره و

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \Phi_m + \mu_0 \mathbf{M}$$

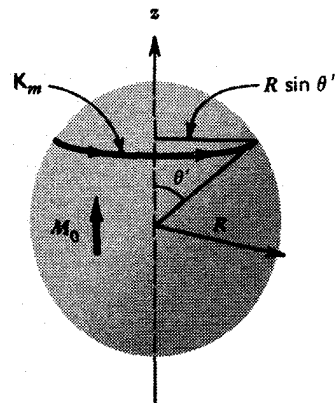
برای داخل آن همین نتیجه را که با روش جریان مغناطش برای میدان نتیجه شد به دست می‌آوریم.

مثال ۳-۹ استوانه مغناطیده یکنواخت

در این مثال دوباره یک استوانه جامد با مغناطش یکنواخت، $\mathbf{M} = M_0 \hat{\mathbf{z}}$ ، در طول محورش و بدون وجود جریانهای آزاد در نظر می‌گیریم. پیش از این دیدیم که جریان سطحی $\mathbf{K}_m = \hat{\boldsymbol{\phi}} M_0$ مربوط به مغناطش دور قسمتهای خمیده استوانه جاری می‌شود و حقیقتاً میدان \mathbf{B} ماکروسکوپی را در همه جا نتیجه می‌دهد (مثال ۹-۱ را ببینید). جریان جاری شده به شکل جریان سیمولوله‌ای است. بنابراین با کاربرد نتایج مثال ۸-۱۳ میدان مغناطیسی را می‌توان حساب کرد. با استفاده از علائم شکل ۸-۱۳ و جایگزینی K با M_0 در معادله (۸-۶۸) به دست می‌آوریم

$$B = B_z = \frac{\mu_0 M_0}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (۲۷-۹)$$

این مسئله را می‌توان با استفاده از پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی نیز حل کرد. قطبهای مغناطیسی تنها در دو انتهای استوانه (یعنی $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ همه جا و $\sigma_m = \pm M_0$) به وجود می‌آیند. پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی I. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2d ed. (New York: Wiley, 1957), p. 197.
۲. یک انتگرال ساده نشان می‌دهد که در طول محور z ، $B = \text{const.}$ بنابراین در حالت کلی داخل کره B ثابت است (چگونه؟).



شکل ۲-۹ کره مغناطیده یکنواخت.

$$\mathbf{J}_m = 0 \quad \mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{r}} = M_0 \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (۲۰-۹)$$

به جای محاسبه مستقیم \mathbf{B} از این توزیع جریانها، ابتدا پتانسیل برداری را حساب می‌کنیم. بنابراین روابط (۸-۴۲) و (۹-۲۰) به دست می‌دهند

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{M_0 \sin \theta' \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\xi} da'$$

واضح است که به کمک تقارن استوانه $\mathbf{A} = \hat{\boldsymbol{\phi}} A_\phi$ است و بدین ترتیب

$$A_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{M_0 \sin \theta'}{\xi} \hat{\boldsymbol{\phi}}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}(\mathbf{r}) R^2 d\Omega' \quad (۲۱-۹)$$

این انتگرال را حل می‌کنیم، اما نه با روشهای ابتدایی. نتیجه می‌شود^۱

$$A_\phi = \frac{\mu_0 M_0}{3} \frac{R^2}{r^2} \sin \theta \quad r > R \quad (۲۲-۹)$$

$$A_\phi = \frac{\mu_0 M_0}{3} r \sin \theta \quad r < R$$

با گرفتن تاو از پتانسیل برداری به دست می‌آید

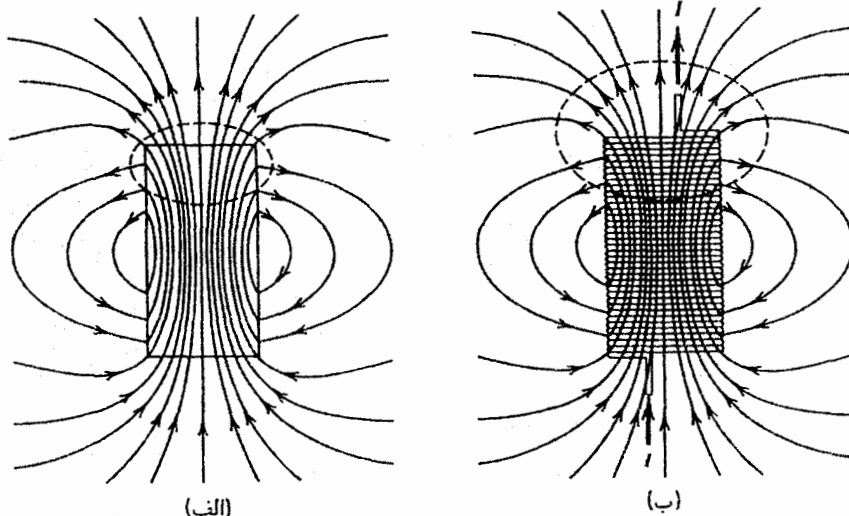
$$\mathbf{B} = \frac{2\mu_0 M_0}{3} (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{2\mu_0 M_0}{3} \hat{\mathbf{z}} \quad r < R \quad (۲۳-۹)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 M_0 R^2}{3} \frac{1}{r^2} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad r > R \quad (۲۴-۹)$$

که دومی میدان یک دوقطبی با گشتاور دوقطبی

$$M_0 V = M_0 (4/3\pi R^3)$$

است. میدان داخل کره ثابت و برابر $2/3 \mu_0 M_0$ است. در واقع با بحثهای^۲ نسبتاً ساده‌ای این مطلب اثبات می‌شود. اکنون با استفاده از مفهوم پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی همان نتایج



شکل ۳-۹ خطوط میدان (الف) استوانه مغناطیسه یکنواخت در طول محور آن و (ب) یک سیمولوه که شباهت بین آنها را نشان می دهد.

نشان می دهند، می نویسیم (یعنی میانگینهای فضایی و زمانی هر دو طرف معادله را می گیریم). افزون بر این چگالی جریان \mathbf{J} به دو قسمت تقسیم می شود - یکی جریانهای آزاد (به طور کلی رسانش) \mathbf{J}_f ، و دیگری جریانهای مغناطیسه \mathbf{J}_m :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m = \mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} \quad (28-9)$$

آن گاه داریم

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_f + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}$$

یا

$$\nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{J}_f$$

اکنون یک میدان برداری جدید به نام شدت مغناطیسی \mathbf{H} تعریف می کنیم به طوری که

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (29-9)$$

آن گاه برای معادله های مغناطیس ماکروسکوپی می توان نوشت

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \quad (30-9)$$

در این روابط به طور ضمنی فرض کردیم که \mathbf{B} ، \mathbf{H} ، \mathbf{M} و \mathbf{J}_f همه جا توابع برداری پیوسته اند به طوری که مشتقها معنی دارند. در جاهایی که ناپیوستگی وجود دارد اغلب بهتر است که معادله های انتگرالی مشابه را به کار گیریم

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \text{و} \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I_f \quad (31-9)$$

انتهای استوانه را می توان به همان روش دو قرص باردار الکتریکی با چگالیهای یکنواخت حساب کرد. در مثال ۲-۱۱ پتانسیل الکتریکی برای یک قرص باردار یکنواخت حساب شد. بنابراین با تعویض ϵ_0 با $1/\mu_0$ و σ_0 با M_0 در معادله (۲-۴۹) پتانسیل نرده ای مغناطیسی به دست می آید. آن گاه پتانسیل مغناطیسی کل را با ترکیب پتانسیلهای به وجود آمده از هر دو انتهای استوانه تعیین می کنیم. سرانجام میدانهای مغناطیسی در داخل و خارج استوانه به ترتیب با به کار بردن روابط (۹-۱۳) و (۹-۱۵) به دست می آیند. شکل ۳-۹ تشابه خطوط میدان یک استوانه مغناطیسه یکنواخت را با خطوط میدان یک سیمولوه نشان می دهد.

اینکه یک میدان \mathbf{B} مغناطیسی "قوی" ناشی از مغناطش، تنها از مرتبه 10^4 گاوس یا یک و بر بر متر مربع Wb/m^2 یا یک T است، نکته تجربی خوبی است. اگر استوانه مورد بحث خیلی طولیل باشد به طوری که $\theta_1 \rightarrow -\pi$ و $\theta_2 \rightarrow +\pi$ آن گاه در داخل استوانه $B = \mu_0 K_m$ می شود. بنابراین چگالی جریان سطحی معادل $(10^7/4\pi)A/m$ است. تنها یک منبع تغذیه قوی برای ابقای چنین جریان پایایی در سیمها لازم است و به طور کلی گرمای قابل ملاحظه ای تلف می شود. در حالی که جریانهای مغناطیسه وقتی \mathbf{M} ثابت باشد اتلافی ندارند جریانهای اتمی برای باقی ماندن نیازی به انرژی خارجی ندارند.

۳-۹ معادله های مغناطوستاتیک ماکروسکوپی
دیدیم که معادله های اساسی مغناطیس جریان پایا عبارتند از $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ و $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. اکنون این روابط را به شکل دیگری، با توجه به اینکه بردارهای \mathbf{B} و \mathbf{J} میدانهای ماکروسکوپی را

جدول ۹-۱ پذیرفتاری مغناطیسی بعضی مواد در دمای اتاق

ماده	χ
مواد پارامغناطیس	
آلمینیوم	2.1×10^{-5}
سدیم	0.84×10^{-5}
تیتانیم	18.0×10^{-5}
تنگستن	7.6×10^{-5}
گادولینیم کلرید ($GdCl_3$)	603.0×10^{-5}
اکسیژن (۱ atm)	193.5×10^{-8}
منیزیم	1.2×10^{-5}
مواد دیامغناطیس	
کربن دیوکسید (۱ atm)	-1.19×10^{-8}
هیدروژن (۱ atm)	-0.22×10^{-8}
نیتروژن (۱ atm)	-0.67×10^{-8}
بیسموت	-1.64×10^{-5}
مس	-0.98×10^{-5}
الماس	-2.2×10^{-5}
طلا	-3.5×10^{-5}
جیوه	-2.8×10^{-5}
نقره	-2.4×10^{-5}

که i برابر x, y و z است. در مورد مواد ناهمسانگرد در این کتاب بیشتر از این بحث نمی‌کنیم. مواد همسانگرد خطی خود به دو دسته تقسیم می‌شوند. مواد با $\chi < 0$ را دیامغناطیس و آنهایی که $\chi > 0$ دارند را پارامغناطیس می‌نامیم. مواد دیامغناطیس وقتی در میدان مغناطیسی خارجی قرار گیرند B در آنها ضعیف می‌شود در حالی که در مواد پارامغناطیس B تقویت می‌شود. پذیرفتاری مغناطیسی بعضی مواد پارامغناطیس و دیامغناطیس در جدول ۹-۱ داده شده است.

همچنین توجه می‌کنید که در بیشتر مراجع داده‌های فیزیکی به جای χ پذیرفتاری جرمی (مولی)، یعنی جرمی χ (برلی) را دسته‌بندی کرده‌اند که به شکل زیر تعریف می‌شوند

$$\chi_{\text{جرمی}} = \frac{\chi}{d} \quad \text{و} \quad \chi_{\text{برلی}} = \frac{\chi A}{d} \quad (35-9)$$

که d چگالی جرمی ماده و A وزن مولکولی آن است. اثر مواد مغناطیسی خطی وقتی در میدان مغناطیسی قرار گیرند جالب است. مواد پارامغناطیس در میدانهای مغناطیسی جذب و مواد دیامغناطیس دفع می‌شوند. در فصل ۴ خواندیم که برعکس،

که I_f جریان عبوری از داخل منحنی بسته C است، علامت مثبت برای I_f از قاعده "دست راست" در جهت پیموده شدن انتگرال خطی تعیین می‌شود.

سؤالهایی نظیر "چرا H معرفی می‌شود" و "معنی فیزیکی آن چیست" منطقی است. جواب این پرسشها در آینده روشن می‌شود. با این همه می‌توان دید که معادله دیفرانسیل مربوط به H فقط چگالی جریان معمولی، یعنی جریانهای خارجی، را شامل می‌شود. همچنین اگر در ناحیه‌ای $J_f = 0$ باشد، آنگاه $\nabla \times H = 0$ یک تابع پتانسیل زده‌ای را در آنجا معرفی می‌کند. در حقیقت وقتی روابط (۹-۱۳) و (۹-۲۹) مقایسه شوند به دست می‌آوریم که

$$H = -\nabla \Phi_m \quad (32-9)$$

این معادله، مشکل محاسبه میدانها را ساده می‌کند. بدین ترتیب، سرانجام، H را به این دلیل معرفی کردیم که در بعضی شرایط محاسبه مستقیم H نسبت به محاسبه مستقیم B ساده‌تر است.

در حالت کلی جایی که جریانهای آزاد، J_f در مواد مغناطیسی وجود دارند. میدان کل H را می‌توان به شکل جمع زیر نوشت

$$H = \frac{1}{4\pi} \int \frac{J_f \times \xi}{\xi^3} dv' - \nabla \Phi_m \quad (33-9)$$

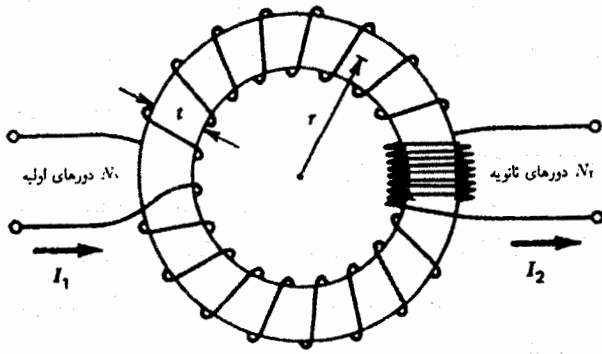
۹-۴ روابط ساختاری مغناطیسی

در بخش قبل شدت مغناطیسی H را به میدان مغناطیسی B و مغناطش M با رابطه $B = \mu_0 H + \mu_0 M$ ربط دادیم. این رابطه را می‌توان با ارتباط M به H و بنابراین B به H به طور مستقیم، به شکل مفید دیگری در آورد. درجه پاسخ مواد به میدان خارجی H بستگی به ساختار میکروسکوپی مواد دارد. در فصل بعد تفاوت ماهیت این پاسخها را می‌خوانیم. این پاسخها به دسته‌های مختلف تقسیم می‌شوند. اولین دسته شامل موادی‌اند که میزان مغناطش آنها با H متناسب است و آنها را مواد خطی می‌نامیم؛ یعنی

$$M = \chi H \quad (34-9)$$

که χ یک کمیت بدون بعد، غیروابسته به H است، و آن را پذیرفتاری مغناطیسی می‌نامیم. در مواد همسانگرد، χ به جهت میدان خارجی وابسته نیست؛ یعنی یک کمیت زده‌ای است. اگر ماده ناهمسانگرد باشد آنگاه راستای M لزوماً در راستای میدان نیست و به یک تانسور مرتبه ۲ تبدیل می‌شود

$$M_i = \sum \chi_{ij} H_j = \chi_{ix} H_x + \chi_{iy} H_y + \chi_{iz} H_z$$



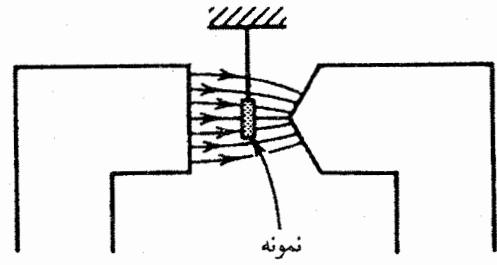
شکل ۵-۹ حلقه رولند برای اندازه‌گیری منحنیهای مغناطش مواد فرومغناطیس.

تراوایی مغناطیسی غیرخطی $\mu(H)$ مواد مختلف به صورت تابعی از H جدول بندی و یا رسم می‌شوند. اما در منابع علمی به جای استفاده مستقیم از آنها وابستگی B به H داده می‌شود. این وابستگی را می‌توانیم به طور تجربی به روش زیر تعیین کنیم. یک نمونه ماده، مثلاً آهن، را در میدان مغناطیسی خارجی $B_0 = \mu_0 H$ قرار می‌دهیم. آن‌گاه میدان مغناطیسی B داخل نمونه را اندازه می‌گیریم. اندازه B همان طور که در بالا گفتیم به دلیل حضور نمونه از B_0 تجاوز می‌کند. بدین ترتیب $B = B_0 + B_m$ که اختلاف $B_m = B - B_0$ میدان مغناطیسی ایجاد شده به وسیله نمونه است. رسم B_m به شکل تابعی از H_0 منحنی مغناطش ماده مورد بررسی را به دست می‌دهد.

شکل ۵-۹ حلقه رولند را که برای چنین اندازه‌گیری می‌تواند به کار رود، نشان می‌دهد. نمونه آهنی را به شکل یک حلقه، که شعاع، r ، آن خیلی بزرگتر از ضخامت، t ، است می‌سازیم. آن‌گاه یک پیچ با N_1 دور در واحد طول به دور آن می‌پیچیم. میدان خارجی B_0 با برقراری جریان I_1 در سیم پیچ، که در نبود هسته آهنی مساوی با $\mu_0 N_1 I_1$ است، ایجاد می‌شود. میدان مغناطیسی B به کمک یک سیم پیچ دوم، که آن هم در شکل نشان داده شده است، اندازه‌گیری می‌شود.

شکل ۶-۹ (الف) منحنی مغناطش آهن، را نشان می‌دهد که وابستگی بین H و B را با استفاده از حلقه رولند اندازه می‌گیرد. با شروع از حالت غیرمغناطیده (یعنی از نقطه صفر)، B با افزایش H در طول منحنی ۱ زیاد می‌شود. شیب منحنی ابتدایی خیلی زیاد است. اما در H های بزرگتر آهن اشباع می‌شود و در نتیجه دیگر مغناطش تغییر نمی‌کند (مغناطش اشباع M_s). در این ناحیه با H بالا، ماورای H_s ، افزایش B فقط مربوط به افزایش H است زیرا M دیگر افزایش نمی‌یابد.

عمل بعدی پس از رسیدن به نقطه اشباع، a ، کم کردن جریان و بنابراین H ، در چنبره تا رسیدن به صفر است. مشاهده می‌شود که



شکل ۴-۹ تعیین نوع مواد مغناطیسی (دیامغناطیسی یا پارامغناطیسی) با قراردادن نمونه در یک میدان مغناطیسی غیریکنواخت.

اثر الکتریکی متناظر همیشه باعث جذب دی‌الکتریکها به میدان الکتریکی می‌شود. این دو نوع ماده مغناطیسی به سادگی با استفاده از مغناطیس مطابق شکل ۴-۹ آزمایش می‌شوند. مغناطیس، میدان بسیار قویتری را نزدیک قطب نوک تیز ایجاد می‌کند تا نزدیک قطب صاف. قطعه‌ای کوچک از ماده را بین قطبهای آن آویزان کرده‌ایم. پس از روشن کردن مغناطیس متوجه می‌شویم که ماده نسبت به راستای قائم جابه‌جا می‌شود، مثلاً وقتی نمونه بیسموت به کار می‌رود به وسیله قطب نوک تیز دفع می‌شود که مشخص می‌کند نمونه یک ماده دیامغناطیسی است. از طرف دیگر وقتی از نمونه آلومینیومی استفاده شود نیرو جاذبه است، پس نمونه یک ماده پارامغناطیسی است.

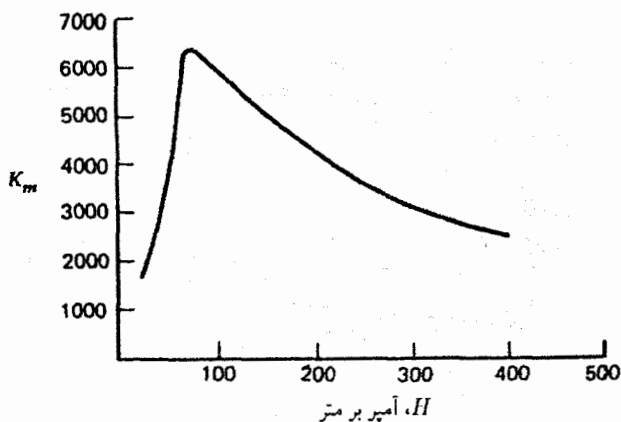
با جایگذاری معادله (۳۴-۹) در معادله (۲۹-۹) به دست می‌آوریم

$$B = \mu_0 (1 + \chi) H = \mu H \quad (۳۶-۹)$$

که μ را تراوایی مغناطیسی می‌نامیم. یادآور می‌شویم که μ مقداری ثابت است و بعد μ_0 دارد. تراوایی مغناطیسی وقتی با واحد μ_0 اندازه‌گیری شود کمیت زده‌ای K_m را به دست می‌دهد که آن را تراوایی نسبی می‌نامیم. یعنی

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi \quad (۳۷-۹)$$

موادی وجود دارند که پاسخ آنها به میدان مغناطیسی خارجی غیرخطی است؛ یعنی μ به H بستگی دارد. این مواد را فرومغناطیس می‌نامیم. در موارد معین K_m به مقدار $10^5 \times 10^5$ می‌رسد. که به طور تقریب اندازه آن ۵ مرتبه بزرگی از بزرگترین K_m مواد پارامغناطیسی بزرگتر است. این مواد یک رفتار برگشت‌ناپذیر به نام پسماند از خود نشان می‌دهند. این ویژگیها کاربردهای مهمی در فن‌آوری دارد که شامل ساخت آهنرباهای دائم و نیز مبدلها و موتورهاست.



شکل ۹-۷. تراوایی نسبی ماده فرومغناطیس.

بر نمی‌گردند نشانه مواد فرومغناطیس است. شکل حلقه به طبیعت نمونه و به اندازه بیشینه H بستگی دارد. وقتی ماده مطابق شکل ۹-۶ (الف)، در بیشینه مقدار H که در آنجا اشباع رخ می‌دهد، قرار گیرد، حتی اگر ماده در میدانهای بالاتری قرار گیرد در منحنی تغییری ایجاد نخواهد شد. شکل ۹-۶ (ب) وابستگی شکل حلقه را که به مقدار بیشینه H می‌رسند، برای مقادیر پایین میدان اشباع نشان می‌دهد.

تراوایی نسبی یک ماده فرومغناطیس به شکل تابعی از H را می‌توان از منحنی $H-B$ با به‌کار بردن رابطه زیر حساب کرد

$$K_m = \frac{1}{\mu_0} \frac{B}{H}$$

شکل ۹-۷، K_m را نسبت به H برای فولاد سیلیکون نشان می‌دهد. نهایت غیرخطی بودن منحنی پاسخ در $H \leq 100 \text{ A/m}$ و اثر اشباع در 300 A/m ظاهر می‌شود. شکل ۹-۸ منحنیهای پسماند را برای بعضی مواد مغناطیسی دائمی و بعضی مواد با تراوایی بزرگ به‌دست می‌دهد. جدول ۹-۲ ویژگیهای مواد فرومغناطیسی در دمای اتاق است.

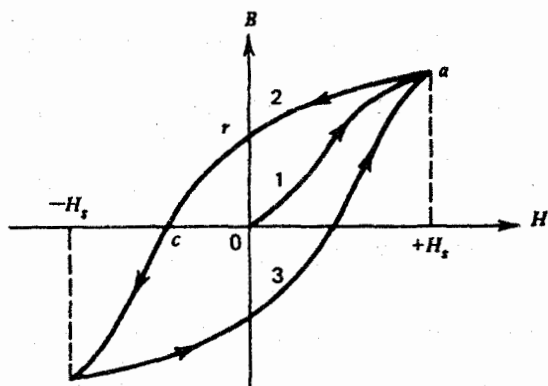
۹-۵ مسائل با شرایط مرزی

۹-۵-۱ معادله‌های پتانسیل

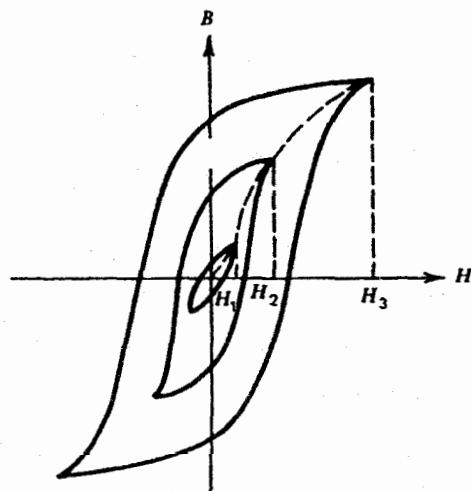
در بخش ۹-۲ و ۹-۳ قانون بیوساوار، قانون کولن و قانون آمپر را برای تعیین میدان مغناطیسی در محیط غیر فرومغناطیس — یعنی محیط خطی، به‌کار بردیم. در این بخش روشی برای مقدار مرزی ارائه می‌دهیم. روابط ماکروسکوپی مغناطیس عبارت‌اند از

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{و} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \quad (9-3)$$

روش مقدار مرزی به دو روش تقسیم می‌شود: مقدار مرزی برای پتانسیل نرده‌ای و مقدار مرزی برای پتانسیل برداری. ما هر دو روش را بحث



(الف)



(ب)

شکل ۹-۶ (الف) نمونه حلقه پسماند یک ماده مغناطیسی. (ب) تعدادی از حلقه‌های پسماند کوچکتر به همراه یک حلقه اصلی از یک ماده فرومغناطیس.

منحنی مغناطس در طول منحنی ۱ افت نمی‌کند بلکه در طول منحنی ۲ برمی‌گردد. منحنی ۲ نشان می‌دهد که حتی اگر H صفر شود، B صفر نمی‌شود. یعنی نمونه به‌طور دائم مغناطیده شده است. میدان B در ۳ را باقی‌ماندگی یا پسماند می‌نامیم. حال جریان در سیم‌پیچ را معکوس می‌کنیم و اندازه آن را افزایش می‌دهیم، رابطه $B-H$ تا وقتی محیط در جهت وارون اشباع می‌شود از منحنی ۲ پیروی می‌کند. اندازه H در نقطه c نیروی وادارنده مغناطیسی یا وادارندگی مغناطیسی ماده نام دارد. وقتی جریان دوباره کم می‌شود و به صفر می‌رسد رابطه $B-H$ ، مسیر منحنی ۳ را می‌پیماید. در این وضعیت نیز حتی اگر H صفر شود نمونه یک میدان B منفی پسماند دارد. وقتی جریان دوباره وارون و زیاد شود رابطه $B-H$ پیمودن مسیر ۳ را ادامه می‌دهد تا به نقطه اشباع می‌رسد و منحنی مغناطیده بسته می‌شود.

این ویژگی منحنیهای مغناطیده از این جهت که دوباره روی خود

بدین ترتیب روابط ماکروسکوپی بر حسب H ، می شود

$$\nabla \cdot H = -\nabla \cdot M \quad \text{و} \quad \nabla \times H = J_f \quad (38-9)$$

در قسمتهایی از فضا که $J_f = 0$ است معادله (38-9) می شود

$$\nabla \cdot H = -\nabla \cdot M \quad \text{و} \quad \nabla \times H = 0 \quad (39-9)$$

چون تاو H صفر است، H را می توان به شکل گرادیان یک پتانسیل زردهای، همان طور که قبلاً در معادله (32-9) تعریف کردیم، نوشت

$$H = -\nabla \Phi_m \quad (40-9)$$

با محاسبه دیورژانس این معادله و جایگذاری برای $\nabla \cdot H$ از معادله (39-9) به دست می آوریم

$$\nabla^2 \Phi_m = \nabla \cdot M = -\rho_m \quad (41-9)$$

که مانند معادله پواسون در الکتروستاتیک است. با این همه، برخلاف مورد الکتروستاتیکی همان طور که در بخش ۷-۸ توجه کردیم، پتانسیل زردهای مغناطیسی تنها برای نواحی "همبند ساده" معتبر است. اگر ناحیه "همبند ساده" نباشد پتانسیل تک مقدار نخواهد بود (مثال ۱۶-۸ را ببینید).

معادله پواسون در مغناطوستاتیک، معادله (40-9)، وقتی $\rho_m = -\nabla \cdot M$ صفر شود به معادله لاپلاس خلاصه می شود

$$\nabla^2 \Phi_m = 0 \quad (42-9)$$

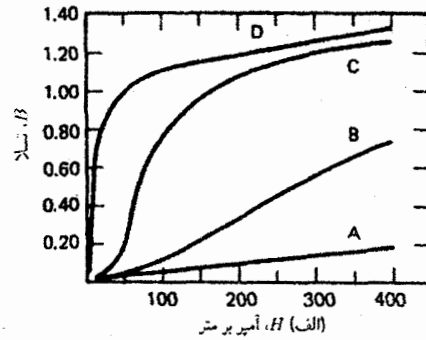
در چند مورد ρ_m صفر می شود. (۱) $M = 0$ باشد، یعنی وقتی جریانهای واقع در خلأ را بررسی می کنیم همان طور که در بخش ۷-۸ بحث شد. (۲) مواد مغناطیسی خطی با مغناطش یکنواخت، که برای آنها $M = a$ یک بردار ثابت است. و (۳) مادهای با مغناطش غیر یکنواخت، اما به گونه ای که $\nabla \cdot M$ صفر شود (مثال ۹-۶ را ببینید).

در روش پتانسیل برداری، A را با رابطه $B = \nabla \times A$ تعریف می کنیم، که خودبه خود نتیجه می شود $\nabla \cdot B = 0$. معادله تاو $\nabla \times H = J_f$ در تمام نواحی که ماده مغناطیسی همگن است به $\nabla \times B = \mu J_f$ منجر می شود. بدین ترتیب

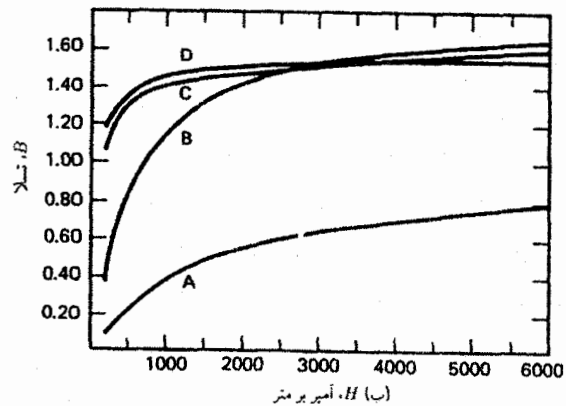
$$\nabla \times (\nabla \times A) = \mu J_f$$

با بسط ضرب برداری سه گانه به دست می آوریم

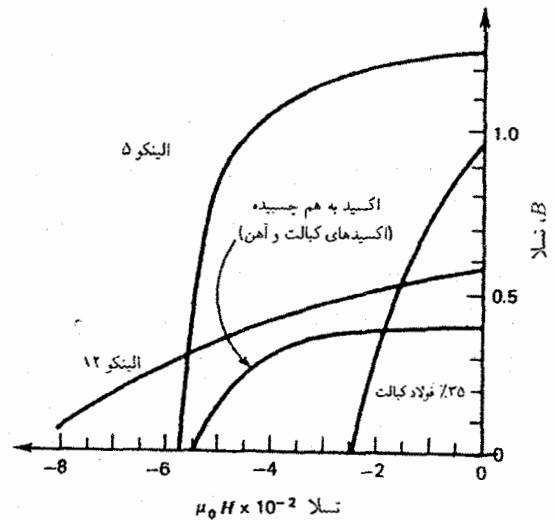
$$\nabla^2 A - \nabla(\nabla \cdot A) = -\mu J_f \quad (43-9)$$



الف: آهن ریخته شده
ب: فولاد ریخته شده
ج: فولاد سیلیکون
د: آلیاژ آهن-نیکل



الف: آهن ریخته شده
ب: فولاد ریخته شده
ج: فولاد سیلیکون
د: آلیاژ آهن-نیکل



(ج)

شکل ۸-۹. منحنیهای پسماند بعضی مواد فرومغناطیس. (الف) و (ب) مواد با تراوایی بزرگ (ج) مواد مغناطیسی دائمی.

می کنیم. در روش پتانسیل زردهای، $\nabla \cdot B = 0$ را به شکل زیر می نویسیم

$$\nabla \cdot B = \nabla \cdot \mu_0 (H + M) = 0 \quad \text{یا} \quad \nabla \cdot H = -\nabla \cdot M$$

جدول ۲-۹ داده‌های مواد فرومغناطیس

مواد با تراوایی بالا				
نیروی وادارنده مغناطیسی H_c (A/m)	چگالی شار اشباع B_{sat} (Wb/m ²)	تراوایی نسبی بیشینه	درصد ترکیب	ماده
۱۴۵	۲٫۱۰	۲۰۰۰	۹۸٫۵Fe	فولاد حلقه شده سرد
۸۰	۲٫۱۵	۵۰۰۰	۹۹٫۹Fe	آهن
۴	۰٫۶۵	۱۰۰۰۰۰	۱۸Fe, ۷۵Ni, ۲Cr, ۵Cu	فلز Mu
۴	۲٫۱۵	۱۸۰۰۰۰	۹۹٫۹۵Fe	آهن خالص شده
۴	۱٫۰۷	۱۰۰۰۰۰	۲۱٫۲Fe, ۷۸٫۵Ni, ۰٫۳Mn	۷۸ آلیاژ پیرم
۰٫۱۶	۰٫۸۰	۸۰۰۰۰۰	۱۵٫۷Fe, ۷۹Ni, ۵Mo, ۰٫۳Mn	آلیاژ سوپر م

مواد با مغناطیس دائمی				
نیروی وادارنده مغناطیسی H_c (A/m)	چگالی شار پسماند B_r (Wb/m ²)	درصد ترکیب	ماده	
۴۱۶۰۰	۰٫۶۹	۶۴٫۵Fe, ۱۰ Al, ۱۷Ni, ۲٫۵Co, ۶ Cu	آلنیکو ۲ (به هم جسیده)	
۴۴۰۰۰	۱٫۲۵	۵۲ Fe, ۸Al, ۱۴Ni, ۲۴Co, ۳Cu	آلنیکو ۵	
۴۰۰۰	۱٫۰	۹۸٫۱Fe, ۱ Mn, ۰٫۹C	فولاد کربن	
۲۰۸۰۰۰	۰٫۴۵	۷۷Pt, ۲۳ Co	کبالت-پلاتینیم	
۲۰۰۰۰	۱٫۰۵	۷۱Fe, ۱۷Mo, ۱۲Co	آلیاژ رم	
۵۶۰۰	۱٫۰۳	۹۴Fe, ۵W, ۰٫۳Mn, ۰٫۷C	فولاد تنگستین	

همچنین در نواحی که $J_f = 0$ است مؤلفه‌های قائم پتانسیل برداری در معادله لاپلاس صدق می‌کنند. شرایط مرزی روی پتانسیل برداری و میدانها نیز، برای تعیین منحصر به فرد جوابها، به کار می‌روند. در مواردی که منابع در روابط (۹-۴۰) و (۹-۴۳) صفر نیستند جواب هر یک از این روابط شامل دو مؤلفه: یک جواب خاص معادله پواسون و یک جواب معادله لاپلاس است. جواب کلی آن‌گاه باید در شرایط مرزی صدق کند. پس از بحث شرایط مرزی روی میدانها و پتانسیلها مثالهایی مطرح می‌شوند که این روشها در آنها مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۲-۵-۹ شرایط مرزی روی میدانها و پتانسیلها

اکنون در مورد شرایط مرزی بحث می‌کنیم که باید میدانها و پتانسیلها، در حضور مواد مغناطیسی، در آن صدق کنند. این شرایط از روابط ماکروسکوپی $\nabla \cdot B = 0$ و $\nabla \times H = J_f$ به دست می‌آیند. آنها

دوباره، همان طور که در بخش ۵-۸ انجام دادیم، $\nabla \cdot A = 0$ را، که پیمانه کولن نام دارد، انتخاب می‌کنیم. بدین ترتیب

$$\nabla^2 A = -\mu J_f \quad (۹-۴۳)$$

مؤلفه‌های مختلف A_x, A_y و A_z صریحاً در معادله پواسون صدق می‌کنند

$$\nabla^2 A_i = -\mu J_f \quad (۹-۴۴)$$

که i مساوی x, y یا z است.

معادله لاپلاس [معادله (۹-۴۱)] را با استفاده از روشهایی که قبلاً در مورد الکتریکی به کار رفت (فصول ۳ و ۴) می‌توان حل کرد. در کنار معادله لاپلاس، به یک مجموعه از شرایط مرزی که در پتانسیل نرده‌ای و میدانها صدق کنند نیاز داریم تا آنها به شکل منحصر به فردی تعیین شوند.

روی منحنی C تبدیل می‌شود. به این ترتیب

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Delta S} \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{a}$$

برای تعیین تغییر در H در عبور از فصل مشترک، عرض t مستطیل را بسیار کوچک می‌گیریم؛ بنابراین

$$(\mathbf{H}_r - \mathbf{H}_l) \cdot \mathbf{l} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Delta S} \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{a} = K_f l$$

که K_f چگالی جریان سطحی عمود بر صفحه مستطیل است. این نتیجه را می‌توان برحسب چگالی جریان سطحی کلی \mathbf{K}_f به شکل زیر نیز نوشت

$$(\mathbf{H}_r - \mathbf{H}_l)_t = K_f \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{یا} \quad \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_r - \mathbf{H}_l) = \mathbf{K}_f \quad (46-9)$$

که $\hat{\mathbf{n}}$ بردار واحد عمود بر فصل مشترک است. بدین ترتیب مؤلفه‌های مماسی H وقتی چگالی جریان سطحی در مرز وجود داشته باشد ناپیوسته است. اندازه ناپیوستگی برابر با چگالی جریان سطحی عمود بر مؤلفه میدان است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که مؤلفه‌ها، وقتی که \mathbf{K}_f صفر باشد، پیوسته‌اند. یعنی

$$\mathbf{H}_{l_t} = \mathbf{H}_{r_t} \quad (47-9)$$

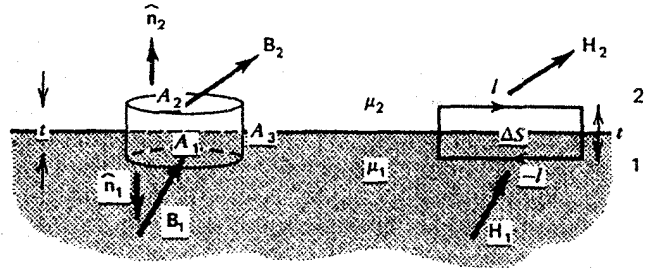
شرایط مرزی روی پتانسیلهای نرده‌ای و برداری را می‌توان از شرایط مرزی \mathbf{B} و \mathbf{H} نتیجه گرفت. چون $\mathbf{H}_m = -\nabla \Phi_m$ ، آن‌گاه

$$\Phi_m = - \int \mathbf{H}_m \cdot d\mathbf{r} \quad (48-9)$$

اختلاف پتانسیل بین دو نقطه خیلی نزدیک به هم را می‌توان به شکل $\Delta \Phi_m = -\mathbf{H}_m \cdot \mathbf{l}$ نوشت که l فاصله بین دو نقطه و \mathbf{H}_m متناهی و تقریباً در فاصله بین دو نقطه ثابت فرض شده است. چون در عبور از فصل مشترکی که جریانهای سطحی ندارد $\mathbf{H}_{l_t} = \mathbf{H}_{r_t}$ آن‌گاه معادله (48-9) به این معنی است که پتانسیل نرده‌ای در عبور از فصل مشترک پیوسته می‌شود یعنی

$$\Phi_{m_l} = \Phi_{m_r} \quad (49-9)$$

این پیوستگی پتانسیل مستقل از شرایط بالا روی میدانها نیست و در حقیقت معادل شرط روی مؤلفه‌های مماسی \mathbf{H} است.



شکل ۹-۹ به دست آوردن شرایط مرزی روی میدانهای \mathbf{B} و \mathbf{H} در مرز بین دو ماده مغناطیسی با کاربرد قانون گاوس روی جعبه و قانون آمپر روی مستطیل.

روابطی را به دست می‌دهند که تغییر ایجاد شده در میدانها در عبور از مرز بین دو محیط با ویژگیهای مغناطیسی متفاوت را بیان می‌کنند. اکنون از رابطه $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ روی حجم جعبه‌ای که قسمتی از آن در ماده ۱ مطابق شکل ۹-۹ قرار دارد انتگرال می‌گیریم. جعبه ضخامت t ، سطوح صاف A_1 و A_2 ، سطح جانبی A_3 ، حجم V و $\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3$ بردارهای واحد به ترتیب عمود بر سطوح A_1 و A_2 و A_3 را دارد. با به کار بردن قضیه دیورژانس، انتگرال $\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dv = 0$ را به انتگرال سطحی $\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0$ تغییر می‌دهیم، که S سطح جعبه و $\hat{\mathbf{n}}$ بردار واحد عمود بر سطح است. به این ترتیب

$$\mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 A_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 A_2 + \int_{A_3} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0$$

برای پیدا کردن تغییر در میدان در عبور از فصل مشترک، t را خیلی کوچک می‌گیریم. بنابراین A_3 صفر و انتگرال سطحی آخری صفر می‌شود، $-\hat{\mathbf{n}}_1$ با $\hat{\mathbf{n}}_2 = \hat{\mathbf{n}}$ برابر و $A_1 = A_2 = A$ است. پس

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{یا} \quad B_{1n} = B_{2n} \quad (45-9)$$

یعنی مؤلفه‌های عمود بر فصل مشترک میدان در عبور از آن پیوسته‌اند. با انتگرال‌گیری از $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f$ روی سطح ΔS محصور شده به وسیله مستطیل شکل C که در شکل ۹-۹ نشان داده‌ایم شرط مرزی روی مؤلفه مماسی شدت میدان \mathbf{H} به دست می‌آید. مستطیل که طول l و عرض t دارد به‌طور جزئی در محیط ۱ قرار گرفته است. پس داریم

$$\int_{\Delta S} \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\Delta S} \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{a}$$

با به کار بردن قضیه استوکس طرف چپ این معادله به انتگرال خطی

که سطح جانبی در نتیجه اثری ندارد زیرا B بر آن مماس است. به این ترتیب معادله (۵۲-۹) پیوستگی شار را نشان می‌دهد. یعنی

$$F(S_1) = F(S_2) \quad (53-9)$$

که $F(S_i)$ شار مغناطیسی عبوری از سطح S_i است.

در آخر اشاره می‌کنیم که شار شدت مغناطیسی H ، F_H پیوسته نیست. این موضوع را به سادگی می‌توان فهمید، زیرا از $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ نتیجه می‌گیریم $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ که \mathbf{M} مغناطش است و بنابراین با روش بالا که منجر به معادله (۵۳-۹) شد نتیجه می‌گیریم

$$F_H(S_2) - F_H(S_1) = - \int \nabla \cdot \mathbf{M} dv = \int \rho_m dv \quad (54-9)$$

مثال ۹-۴ جریان رشته‌ای در یک فصل مشترک مسطح - پتانسیلهای نرده‌ای و برداری

یک سیم مستقیم، رشته‌ای و نامتناهی که جریان I از آن می‌گذرد در راستای محور z روی صفحه فصل مشترک بین دو محیط با تراواییهای به ترتیب M_1 و M_2 قرار دارد. در نقاط دور از سیم پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی در معادله لاپلاس، $\nabla^2 \Phi = 0$ ، (شاخص m را حذف کرده‌ایم) صدق می‌کند. در مثال ۸-۱۶ نشان دادیم که پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی یک سیم جریان در خلا به شکل $\Phi = C\phi$ است و تک مقدار نیست. به این ترتیب پتانسیلهای Φ_1 و Φ_2 در نواحی ۱ و ۲ به شکل زیر نوشته می‌شوند

$$\Phi_1 = C_1 \phi \quad (55-9)$$

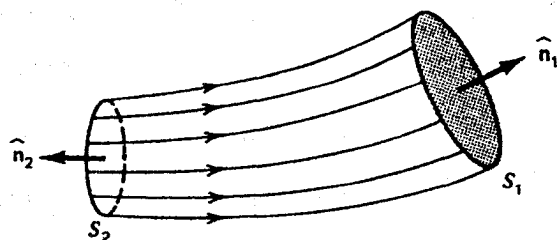
$$\Phi_2 = C_2 \phi \quad (56-9)$$

که C_1 و C_2 ثابتهایی هستند که باید به کمک شرایط مرزی تعیین شوند. یک شرط مرزی این است که جریان کل I است. این شرط مرزی را با به کار بردن قانون آمپر روی دایره‌ای به شعاع ρ و به مرکز سیم مورد استفاده قرار می‌دهیم. ابتدا شدتهای مغناطیسی \mathbf{H}_1 و \mathbf{H}_2 را با استفاده از رابطه $\mathbf{H} = -\nabla \Phi$ به ترتیب از Φ_1 و Φ_2 به دست می‌آوریم

$$\mathbf{H}_1 = -\frac{C_1}{\rho} \hat{\phi} \quad \mathbf{H}_2 = -\frac{C_2}{\rho} \hat{\phi} \quad (57-9)$$

آن‌گاه قانون آمپر به دست می‌دهد

$$C_1 + C_2 = -\frac{I}{\pi} \quad (58-9)$$



شکل ۹-۱۰ لوله‌ای از شار میدان B.

شرط مرزی روی پتانسیل برداری را می‌توان از شرط مرزی مربوط به \mathbf{B} به دست آورد. چون $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ است، آن‌گاه

$$\int_{\Delta S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_{\Delta S} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = F$$

سطح ΔS همان حلقه مستطیل شکل ۹-۹ است و F شار مغناطیسی عبوری از آن است. با به کار بردن قضیه استوکس معادله بالا را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = F \quad (50-9)$$

برای تعیین تغییر در \mathbf{A} درست در عبور از فصل مشترک، عرض مستطیل را خیلی کوچک می‌گیریم. در این وضعیت سطح مستطیل و در نتیجه شار عبوری از آن صفر می‌شود. بنابراین

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{l} = 0$$

به این ترتیب مؤلفه‌های مماسی پتانسیل برداری پیوسته‌اند

$$\mathbf{A}_{1t} = \mathbf{A}_{2t} \quad (51-9)$$

مانند حالت پتانسیل نرده‌ای، این شرط مربوط به مؤلفه مماسی پتانسیل برداری مستقل از شرایط بالا نیست. بلکه دقیقاً معادل پیوستگی مؤلفه قائم میدان \mathbf{B} است.

اکنون می‌خواهیم خاصیت مهمی از \mathbf{B} - یعنی شار آن در همه جا پیوسته است - را نشان دهیم. خطوط میدان مغناطیسی مجازی را در ناحیه‌ای از فضا در نظر می‌گیریم (راستای خطوط در هر نقطه همان راستای میدان مغناطیسی در آن نقطه است). سپس حجمی را که سطح جانبی آن، S ، با خطوط میدان محدود شده و سطوح انتهایی آن S_1 و S_2 مطابق شکل ۹-۱۰ است در نظر می‌گیریم. با انتگرال‌گیری از $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ روی این حجم و به کار بردن قضیه دیورژانس برای تبدیل انتگرال حجمی به انتگرال روی سطح در برگیرنده حجم به دست می‌آوریم

$$\oint \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0 = \int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 da - \int_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot (\hat{\mathbf{n}}_2) da \quad (52-9)$$

پتانسیلهای A_1 و A_2 را به ترتیب در نواحی ۱ و ۲ را به شکل زیر می‌نویسیم

$$A_1 = C_1 \hat{z} \ln \rho \quad (۶۶-۹)$$

$$A_2 = C_2 \hat{z} \ln \rho \quad (۶۷-۹)$$

که جمله ثابت در معادله (۶۵-۹) را صفر گرفته‌ایم.

با توجه به پیوستگی مؤلفه‌های مماسی پتانسیل در مرز، معادله

(۵۱-۹)، داریم $C_1 = C_2 = C$. اکنون ثابت C با به‌کار بردن قانون

آمپر، $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f$ ، به دست می‌آید، که انتگرال روی دایره‌ای عمود

بر سیم، به شعاع ρ و به مرکز روی سیم گرفته می‌شود. با قراردادن

$$H = (\nu/\mu) \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \pi C \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) = I$$

که نتیجه می‌شود

$$C = \frac{1}{\pi} \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

بنابراین

$$\mathbf{A} = \frac{I}{\pi} \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \ln \rho \hat{z} \quad (۶۸-۹)$$

اکنون به راحتی نشان می‌دهیم که این پتانسیل برداری، دقیقاً میدانهایی را به دست می‌دهد که با استفاده از پتانسیل نرده‌ای [معادله (۶۲-۹)] به دست آمد.

مثال ۵-۹ یک کره مغناطیسی در میدان مغناطیسی خارجی یکنواخت

کره‌ای به شعاع R را در نظر می‌گیریم که از ماده مغناطیسی یکنواخت با تراوایی μ_1 ساخته شده است و در محیطی با تراوایی μ_2 قرار دارد. کره در میدان مغناطیسی \mathbf{H}_0 که از ابتدا یکنواخت و در راستای محور z است مطابق شکل ۱۱-۹ قرار دارد.

چون جریانهای خارجی وجود ندارند و مواد خطی‌اند پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی در معادله لاپلاس صدق می‌کند. به علت وجود میدان خارجی تقارن کروی کلی مسئله از بین می‌رود. اما چون میدان یکنواخت و در راستای z است هنوز تقارن در جهت ϕ وجود دارد. به این ترتیب پتانسیل فقط به r و θ وابسته است. پتانسیلهای Φ_1 و Φ_2 داخل و خارج از کره را می‌توان به صورت ترکیب خطی هماهنگهای منطقه‌ای [معادله

اکنون از پیوستگی مؤلفه‌های قائم میدان مغناطیسی در فصل مشترک، رابطه دیگری بین C_1 و C_2 به دست می‌آوریم یعنی $B_{1n} = B_{2n}$

$$\mu_1 C_1 = \mu_2 C_2 \quad (۵۹-۹)$$

روابط (۵۸-۹) و (۵۹-۹) نتیجه می‌دهد

$$C_1 = -\frac{I \mu_2}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \quad C_2 = -\frac{I \mu_1}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \quad (۶۰-۹)$$

به این ترتیب

$$\Phi_1 = -\frac{I \mu_2}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \phi \quad \Phi_2 = -\frac{I \mu_0}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \phi \quad (۶۱-۹)$$

$$H_1 = \frac{I \mu_2}{\pi(\mu_1 + \mu_2) \rho} \hat{\phi} \quad H_2 = \frac{I \mu_1}{\pi(\mu_1 + \mu_2) \rho} \hat{\phi} \quad (۶۲-۹)$$

در غیاب مواد یعنی وقتی سیم در خلأ قرار دارد $(\mu_1 = \mu_2 = \mu_0)$ میدانها به صورت زیر خلاصه می‌شوند

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_0 = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

حال میدانها را برحسب \mathbf{H}_0 به شکل زیر می‌نویسیم

$$\mathbf{H}_1 = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{H}_0 \quad \text{و} \quad \mathbf{H}_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{H}_0 \quad (۶۳-۹)$$

این نتیجه در حقیقت برای هر مدار واقع در صفحه فصل مشترک، به شرطی که \mathbf{H}_0 میدان مدار در خلأ باشد، صحیح است.

حال می‌خواهیم همان مسئله را با استفاده از روش پتانسیل برداری بحث کنیم. چون جریان در راستای محور z است، می‌توان A_x و A_y را مساوی صفر گرفت، و به این ترتیب تنها مؤلفه غیرصفر است و در نقاط دور از جریان در معادله لاپلاس صدق می‌کند $\nabla^2 A_z = 0$. علاوه بر این به خاطر تقارن استوانه‌ای و خیلی بلند فرض شدن سیم، A_z به ϕ و z وابسته نیست. بنابراین معادله لاپلاس به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dA_z}{d\rho} \right) = 0 \quad (۶۴-۹)$$

که به سادگی با انتگرال‌گیری به دست می‌آید

$$\mathbf{A} = (C \ln \rho + C') \hat{z} \quad (۶۵-۹)$$

که C و C' ثابتهایی هستند که با شرایط مرزی تعیین می‌شوند. واضح است که A_z یک تک‌مقدار است زیرا $A_z(\phi) = A_z(\phi + 2\pi)$ ، که برخلاف پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی است که در بالا بحث شد.

معادله دوم از بیوستگی مؤلفه‌های قائم B تعیین می‌شود. چون

$$B_n = \mu H_n = -\mu \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

از روابط (۷۱-۹) و (۷۲-۹) به دست می‌آوریم

$$\mu_1 A_1 = -\mu_2 H_0 - \frac{\mu_2 C_2}{R^2} \quad (۷۴-۹)$$

با حل معادلات بالا که A_1 و C_2 را به طور همزمان به یکدیگر ربط می‌دهد، نتیجه می‌گیریم

$$A_1 = -\frac{\mu_2 H_0}{\mu_1 + \mu_2} \quad C_2 = \mu_2 H_0 R^2 \frac{(\mu_1/\mu_2 - 1)}{\mu_1 + \mu_2}$$

با جایگذاری A_1 و C_2 در معادله‌های (۷۱-۹) و (۷۲-۹) استفاده از $B = -\mu_0 \nabla \Phi$ به دست می‌آوریم

$$B_1 = \frac{\mu_2 H_0}{1 + \mu_2/\mu_1} \hat{z} \quad (۷۵-۹)$$

$$B_2 = \mu_2 H_0 \hat{z} + \mu_2 \frac{\mu_1/\mu_2 - 1}{\mu_1/\mu_2 + 1} H_0$$

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2 [2\hat{r} \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta] \quad (۷۶-۹)$$

این حالت شبیه یک کره دی‌الکتریک در میدان الکتریکی خارجی است. [روابط (۸۶-۴) و (۸۷-۴)] است.

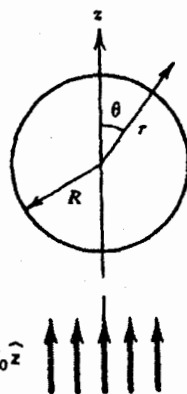
مثال ۹-۶ استوانه‌ای با مغناطش غیر یکنواخت

اکنون مسئله‌ای با شرایط مرزی را که مغناطش آن غیر یکنواخت است بررسی می‌کنیم. فرض کنید استوانه‌ای طویل به شعاع R داریم که مغناطش آن با

$$M = (p \rho \sin 2\phi + q \rho \cos \phi) \hat{\rho} + (\frac{1}{2} p \rho \cos 2\phi - q \rho \sin \phi) \hat{\phi}$$

داده می‌شود و p و q ثابت‌اند. به سادگی می‌توان نشان داد که $\nabla \cdot M = 0$ است، بدین ترتیب پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی Φ در معادله لاپلاس صدق می‌کند.

چون استوانه خیلی طویل است، Φ به z وابسته نیست. با این همه چون M به ϕ وابسته است، Φ نیز به ρ و ϕ وابسته است. معادله (۶۵-۳) جواب پتانسیل را به صورت تابعی از ρ و ϕ برحسب هماهنگی‌های استوانه‌ای به دست می‌دهد. با این حال جواب Φ_1 و Φ_2 به ترتیب برای داخل و نواحی خارجی استوانه فقط با چند جمله از



شکل ۹-۱۱ کره‌ای مغناطیسی در میدان مغناطیسی که ابتدا یکنواخت بوده است.

(۲۸-۳) را ببینید] نوشت. چون در فواصل دور از کره میدان مغناطیسی $H_0 \hat{z}$ است، پتانسیل متناظر با آن $\Phi_r = -\int H \cdot dr$ عبارت است از $-H_0 z = -H_0 r \cos \theta$. که نشان می‌دهد فقط تعدادی از هماهنگی‌های منطقه‌ای سهم‌اند. بنابراین تنها تا جمله $P_1(\cos \theta)$ را نگه می‌داریم و می‌نویسیم

$$\Phi_1 = A_1 r \cos \theta + \frac{A_2}{r^2} \cos \theta \quad r < R \quad (۶۹-۹)$$

$$\Phi_2 = C_1 r \cos \theta + \frac{C_2}{r^2} \cos \theta \quad r > R \quad (۷۰-۹)$$

توجه کنید که پتانسیلها تک‌مقدارند یعنی $\Phi_i(r, \theta) = \Phi_i(r, \theta + 2\pi)$. همچنین توجه کنید که جمله $1/r$ حذف شده است زیرا این جمله ایجاب می‌کند تک‌قطبیه‌های مغناطیسی وجود داشته باشند.

اکنون ثابت A_2 را به دلیل محدود بودن پتانسیل در داخل کره در مبدأ صفر می‌گیریم و چون در r های خیلی بزرگ $\Phi_2 = -H_0 r \cos \theta$ است پس C_1 برابر $-H_0$ است. به این ترتیب Φ_1 و Φ_2 به صورت زیر می‌شوند

$$\Phi_1 = A_1 r \cos \theta \quad r < R \quad (۷۱-۹)$$

$$\Phi_2 = -H_0 r \cos \theta + \frac{C_2}{r^2} \cos \theta \quad r > R \quad (۷۲-۹)$$

برای تعیین پتانسیلها به دو معادله دیگر که A_1 را به C_2 ربط دهد نیاز داریم. این روابط را از شرایط مرزی روی سطح کره، $r = R$ می‌توان نتیجه گرفت. بیوستگی مؤلفه‌های مماسی H روی سطح، معادل بیوستگی پتانسیلها روی سطح‌اند. بنابراین

$$A_1 R = -H_0 R + \frac{C_2}{R^2} \quad (۷۳-۹)$$

با حل همزمان روابط (۷۹-۹) و (۸۲-۹) ثابتهای غیرصفر زیر به دست می‌آیند

$$A_1 = \frac{q\rho_0}{\rho} \quad A'_1 = \frac{q\rho_0^2}{\rho} \quad C_2 = \frac{p}{\rho} \quad C'_2 = \frac{p}{\rho} \rho^2$$

بنابراین عبارتهای زیر برای پتانسیل به دست خواهند آمد

$$\Phi_1(\rho, \phi) = \frac{1}{\rho} q\rho_0 \rho \cos \phi + \frac{1}{\rho} p\rho^2 \sin 2\phi \quad (۸۳-۹)$$

$$\Phi_2(\rho, \phi) = \frac{1}{\rho} q\rho_0 \frac{\cos \phi}{\rho} + \frac{p}{\rho} \rho_0^2 \frac{\sin 2\phi}{\rho^2} \quad (۸۴-۹)$$

از این دو عبارت روشن است که فقط هماهنگهای $\cos \phi$ و $\sin 2\phi$ در پتانسیلها حضور دارند. در حقیقت این وابستگی به علت وابستگی زاویه‌ای M_n فقط به این دو هماهنگ است. بنابراین می‌توانستیم با تعداد بسیار کمتری جمله در روابط (۷۷-۹) و (۷۸-۹) شروع کنیم. یعنی می‌توانستیم فقط جمله‌هایی را که به $\cos \phi$ یا $\sin 2\phi$ وابسته‌اند نگه داریم.

همچنین به مشابه بودن این مسئله مغناطش با مسئله الکتروستاتیک (مثال ۳-۱۰ را ببینید) که در آن توزیع بار سطحی یک استوانه طویل به شکل زیر

$$\sigma = \sigma_1 \sin 2\phi + \sigma_2 \cos \phi \quad (۸۵-۹)$$

است توجه کنید. مشابهت موقعی روشنتر می‌شود که قرار دهیم

$$\rho\rho_0 = \sigma_1 \quad \text{و} \quad q\rho_0 = \sigma_2$$

مثال ۷-۹ میدانهای مربوط به کره مغناطیده یکنواخت در این مثال کره‌ای به شعاع R با مغناطش یکنواخت $M_0 \hat{z}$ را در راستای محور z در نظر می‌گیریم. این مسئله در مثال ۲-۹ که در آن هم از قطب مغناطش و هم از چگالیهای جریان استفاده کردیم بررسی شد. اینجا روش مقادیر مرزی را به کار می‌گیریم. چون \mathbf{M} ثابت است. پس $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ و بنابراین پتانسیل زده‌ای مغناطیسی در معادله لاپلاس صدق می‌کند. از این واقعیت که \mathbf{M} در راستای z است نتیجه می‌گیریم که پتانسیل به r و θ بستگی دارد. چون $\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} = M \cos \theta$ است وابستگی زاویه‌ای پتانسیل تنها شامل $\cos \theta$ است، بدین ترتیب می‌نویسیم

$$\Phi_1 = A_1 r \cos \theta + \frac{C_1 \cos \theta}{r^2} \quad r < R \quad (۸۶-۹)$$

بسط نامتناهی بیان می‌شود. برای تعیین این جمله‌ها شرایط مرزی را در نظر می‌گیریم.

۱. Φ_1 شامل جمله‌های وابسته به $\ln \rho$ و ρ^{-n} نیست زیرا باید در $\rho = 0$ محدود باشد.

۲. Φ_2 شامل جمله وابسته به ρ^n نیست زیرا در $\rho \rightarrow \infty$ باید محدود بماند.

۳. Φ_2 شامل جمله $\ln \rho$ نیست زیرا تک قطبی وجود ندارد.

۴. در سطح استوانه یعنی در $\rho = \rho_0$ داریم $\Phi_1 = \Phi_2$.

۵. مؤلفه‌های قائم \mathbf{B} در $\rho = \rho_0$ پیوسته‌اند.

بنابراین می‌نویسیم

$$\Phi_1(\rho, \phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\phi + C_n \sin n\phi) \rho^n \quad \rho < \rho_0 \quad (۷۷-۹)$$

$$\Phi_2(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n \cos n\phi + C'_n \sin n\phi) \rho^{-n} \quad \rho > \rho_0 \quad (۷۸-۹)$$

پیوستگی پتانسیلها در $\rho = \rho_0$ یعنی $\Phi_1(\rho_0, \phi) = \Phi_2(\rho_0, \phi)$ نتیجه می‌دهد $A_0 = 0$ و روابط زیر را بین ثابتها به دست می‌دهد

$$A_n = \frac{A'_n}{\rho_0^{2n}} \quad C_n = \frac{C'_n}{\rho_0^{2n}} \quad n = 1, 2, \dots \quad (۷۹-۹)$$

اکنون شرط ۵ را به کار می‌بریم چون $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}$ ، با توجه به پیوستگی مؤلفه قائم \mathbf{B} داریم

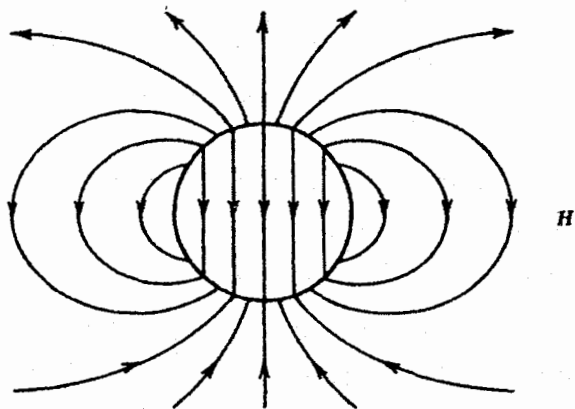
$$\mathbf{H}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{H}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (۸۰-۹)$$

مؤلفه قائم \mathbf{M} در سطح استوانه می‌شود

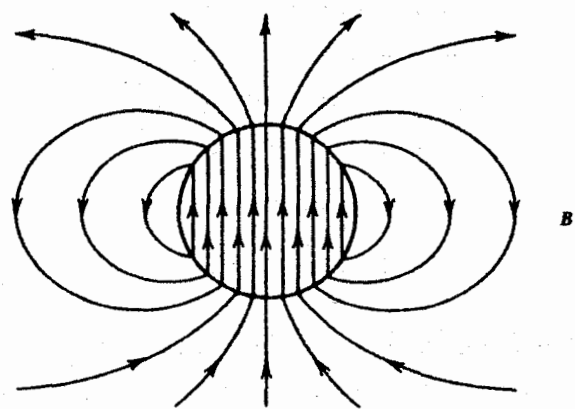
$$M_n = \mathbf{M} \cdot \hat{\rho} = p\rho_0 \sin 2\phi + q\rho_0 \cos \phi \quad (۸۱-۹)$$

مؤلفه قائم \mathbf{H} در سطح استوانه را می‌توان با استفاده از رابطه $H_n = -\partial\Phi/\partial\rho$ در $\rho = \rho_0$ حساب کرد. با جایگذاری مؤلفه‌های قائم \mathbf{H} و \mathbf{M} در معادله (۸۰-۹) و برابر قراردادن ضرایب $\sin n\phi$ و $\cos n\phi$ به دست می‌آید

$$\begin{aligned} -A_1 + q\rho_0 &= \frac{A'_1}{\rho_0^2} \quad \text{و} \quad -A_n = \frac{A'_n}{\rho_0^{2n}} \quad n \neq 1 \quad \text{برای} \\ -2C_2\rho_0 + p\rho_0 &= \frac{2C'_2}{\rho_0^2} \quad \text{و} \quad -C_n = \frac{C'_n}{\rho_0^{2n}} \quad n \neq 2 \quad \text{برای} \end{aligned} \quad (۸۲-۹)$$



H



B

شکل ۹-۱۲ خطوط H و B ایجاد شده به وسیله کره مغناطیده یکنواخت.

شکل ۹-۱۲ خطوط H و خطوط B را نمایش می‌دهد. خطوط B پیوسته‌اند (منحنیهای بسته) در حالی که خطوط H ناپیوسته‌اند؛ و از بارهای سطحی قطب مغناطیسی مؤثر واقع در سطح کره شروع می‌شوند. حال می‌خواهیم دربارهٔ میدانهای داخلی صحبت کنیم. این نکته مهم است که جهت‌گیری H_1 در راستای $-z$ است، یعنی در جهت خلاف مغناطش $M_0 \hat{z}$ است. بنابراین یک اثر وامغناطش دارد. علاوه بر این میدان داخلی متناسب با اندازهٔ مغناطش است و آن را به عنوان "میدان وامغناطنده" می‌شناسیم. اثر وامغناطش را می‌توان با γ موسوم به ضریب وامغناطش بیان کرد که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\Phi_1 = \gamma \frac{M_0}{4\pi} r \cos \theta \quad (96-9)$$

بنابراین در این حالت $\gamma = 4\pi/3$ است. این مقدار فقط به کره اختصاص دارد. سایر اشکال هندسی مقادیر دیگری دارند. برای مثال به‌کار بردن این روش برای استوانهٔ نامتناهی که محورش بر راستای مغناطش عمود است، $\gamma = 2\pi$ را به‌دست می‌دهد. همچنین برای یک ورقهٔ مسطح بزرگ که در راستای عمود بر سطح آن مغناطیده

$$\Phi_2 = A_1' r \cos \theta + \frac{C_1' \cos \theta}{r^2} \quad r > R \quad (87-9)$$

اکنون برای تعیین A_1 و A_1' و C_1 و C_1' شرایط مرزی را به‌کار می‌بریم. چون Φ_1 در $r = 0$ باید متناهی باشد، $C_1 = 0$. همچنین چون Φ_2 در فواصل زیاد از کره باید صفر باشد، پس $A_1' = 0$. بدین ترتیب بتانسیل باید پیوسته باشد یعنی $\Phi_1(R, \theta) = \Phi_2(R, \theta)$.

$$A_1 R = \frac{C_1'}{R^2} \quad (88-9)$$

شرط مرزی دیگر، پیوسته بودن مؤلفهٔ قائم B در سطح کره است.

$$-\mu_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \mu_0 M \cos \theta = -\mu_0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \quad r = R \quad \text{در} \quad (89-9)$$

با قراردادن Φ_1 و Φ_2 از روابط (۸۶-۹) و (۸۷-۹) در این معادله و برابری ضرایب $\cos \theta$ به‌دست می‌آوریم.

$$-A_1 + M_0 = 2 \frac{C_1'}{R^3} \quad (90-9)$$

حل همزمان (۸۸-۹) و (۹۰-۹) نتیجه می‌دهد

$$A_1 = \frac{1}{3} M_0 \quad \text{و} \quad C_1' = \frac{1}{3} M_0 R^3$$

بنابراین

$$\Phi_1(r, \theta) = \frac{1}{3} M_0 r \cos \theta \quad (91-9)$$

$$\Phi_2(r, \theta) = \frac{1}{3} M_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta \quad (92-9)$$

بتانسیل خارجی ناشی از این کره یک بتانسیل دوقطبی به شکل زیر

$$\Phi_2 = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} = \frac{m \cos \theta}{4\pi r^2} \quad (93-9)$$

است که $m = (4\pi/3) M_0 R^3 = M_0 V$ گشتاور دوقطبی مغناطیسی و V حجم کره است. از طرف دیگر بتانسیل داخلی $\Phi_1 = 1/3 M_0 z$ نسبت به z خطی است و بدین ترتیب با میدان مغناطیسی یکنواخت تطبیق می‌کند. میدانهای مغناطیسی متناظر عبارت‌اند از

$$\mathbf{H}_1 = -\frac{1}{3} M_0 \hat{z} \quad (94-9)$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{3} M_0 \left(\frac{R}{r} \right)^3 (\hat{r} \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta) \quad (95-9)$$

برای F جوابی به شکل r^n می‌گیریم. پس از جایگذاری رابطه زیر را برای n به دست می‌آوریم

$$n(n+1) - 2 = 0 \quad (102-9)$$

که نتیجه می‌شود $n = 1, -2$. بنابراین دو جواب برای A_ϕ می‌توان نوشت

$$A_\phi = \frac{\sin \theta}{r^2} \quad \text{و} \quad r \sin \theta \quad (103-9)$$

چون پتانسیل در مرکز کره باید محدود و در خارج کره نباید بینهایت شود جمله $r \sin \theta$ را برای ناحیه داخل و $\sin \theta / r^2$ را برای نواحی اطراف انتخاب می‌کنیم. بدین ترتیب

$$\mathbf{A}_1 = C_1 r \sin \theta \hat{\phi} \quad r < R \quad (104-9)$$

$$\mathbf{A}_2 = C_2 \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\phi} \quad r > R \quad (105-9)$$

در $r = R$ پتانسیل از هر دو ناحیه بر طبق معادله (9-105) مساوی می‌شود. بدین ترتیب

$$C_2 = C_1 R^3 \quad (106-9)$$

اکنون رابطه دیگری بین C_1 و C_2 را می‌توان از شرط مؤلفه‌های مماسی \mathbf{H} [معادله (9-106)] به دست آورد. با به کار بردن $\mathbf{H} = 1/\mu_0 \nabla \times \mathbf{A}$ به دست می‌آوریم

$$\mathbf{H}_1 = \frac{2C_1}{\mu_0} (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{C_2}{\mu_0 r^2} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

بدین ترتیب

$$\hat{r} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)|_{r=R} = \frac{q\omega}{4\pi R} \sin \theta \hat{\phi}$$

با جایگذاری \mathbf{H}_1 و \mathbf{H}_2 نتیجه می‌گیریم

$$\frac{1}{\mu_0} \left(2C_1 \sin \theta + \frac{C_2}{R^2} \sin \theta \right) \hat{\phi} = \frac{q\omega \sin \theta}{4\pi R} \hat{\phi}$$

یا

$$2C_1 + \frac{C_2}{R^2} = \mu_0 \frac{q\omega}{4\pi R} \quad (107-9)$$

باشد تقریباً 4π است. این اندازه بزرگ γ به این علت است که اغلب خطوط \mathbf{H} باید از یک قطب روی یک وجه برای رسیدن به قطب دیگر روی وجه دیگر از ورقه عبور کنند. ■

* مثال ۹-۸ مسئله مرزی پتانسیل برداری - توزیع جریان زاویه‌ای این مثال در مورد یک توزیع جریان وابسته به زاویه است. بنابراین پتانسیل برداری ناشی از آن به بیش از یک مختصه وابسته است. حالا یک کره به شعاع R را که بار روی سطحش به طور یکنواخت توزیع شده است در نظر می‌گیریم. کره با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محوری که از مرکزش می‌گذرد (مثال ۹-۲ را ببینید) می‌چرخد.

این مسئله را در مختصات قطبی کروی که در آن محور z در طول محور چرخش است بیان می‌کنیم. چگالی جریان سطحی ایجاد شده در نتیجه چرخش می‌شود $\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$ که $\sigma = q/4\pi R^2$ چگالی بار سطحی و $\mathbf{v} = \omega R \sin \theta \hat{\phi}$ سرعت جزء بار در زاویه θ و $\hat{\phi}$ بردار واحد در راستای ϕ است. بدین ترتیب

$$\mathbf{K} = \frac{q\omega}{4\pi R} \sin \theta \hat{\phi} \quad (97-9)$$

پتانسیل برداری خارج و داخل کره در معادله لاپلاس صدق می‌کند. به علت تقارن هندسی \mathbf{A} در راستای ϕ و مستقل از ϕ است اما به r و θ وابسته است. در نقاط دور از جریانها (یعنی دور از سطح کره) معادله (9-103) روابط زیر را برای مؤلفه ϕ بردار \mathbf{A} به دست می‌دهد.

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_\phi = \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} = 0 \quad (98-9)$$

یا

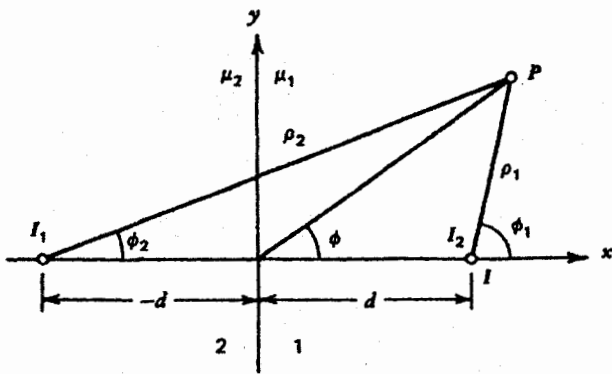
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} = 0 \quad (99-9)$$

چون چگالی جریان با $\sin \theta$ متناسب است منطقی است که وابستگی زاویه‌ای A_ϕ را به سادگی $\sin \theta$ بگیریم. بنابراین A_ϕ را به شکل حاصلضرب یک تابع شعاعی و $\sin \theta$ می‌نویسیم یعنی

$$A_\phi = F(r) \sin \theta \quad (100-9)$$

با جایگذاری این در معادله (9-99) برای $F(r)$ رابطه زیر به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dF}{dr} \right) - \frac{2F}{r^2} = 0 \quad (101-9)$$



شکل ۹-۱۳ کاربرد روش تصویری در مورد جریان مستقیم رشته‌ای موازی با فصل مشترک دو محیط مغناطیسی.

دارد به دست می‌آید. بنابراین پتانسیلهای برداری حاصل از سیم را به سادگی با استفاده از معادله (۸-۵۲) به شکل زیر می‌نویسیم

$$A_1 = -\frac{\mu_1 I}{2\pi} \hat{z} \ln \rho_1 - \frac{\mu_1 I_1}{2\pi} \hat{z} \ln \rho_2 \quad x > 0 \quad (9-109)$$

$$A_2 = -\frac{\mu_2 I_2}{2\pi} \hat{z} \ln \rho_1 \quad x < 0 \quad (9-110)$$

که \hat{z} بردار یکه در طول محور z است. اندازه‌های

$$\rho_1 = [(x-d)^2 + y^2]^{1/2} \quad \text{و} \quad \rho_2 = [(x+d)^2 + y^2]^{1/2} \quad (9-111)$$

روی شکل مشخص شده‌اند و I_1 و I_2 ثابتهایی هستند که به کمک شرایط مرزی باید تعیین شوند.

در فصل مشترک دو محیط مؤلفه مماسی A پیوسته است، یعنی $A_{2t} = A_{1t}$. چون در صفحه فصل مشترک $\rho_1 = \rho_2 = (d^2 + y^2)^{1/2}$ به دست می‌آوریم

$$\mu_1(I + I_1) = \mu_2 I_2 \quad (9-112)$$

شرط مرزی دیگر پیوسته بودن مؤلفه مماسی میدان H است. با به دست آوردن تاو A_1/μ_1 و A_2/μ_2 و برابر قراردادن مؤلفه‌های y آنها (مؤلفه z وجود ندارد) روی مرز به دست می‌آوریم

$$I - I_1 = I_2 \quad (9-113)$$

از حل همزمان معادله‌های (۹-۱۱۲) و (۹-۱۱۳) نتیجه می‌گیریم

$$I_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I \quad \text{و} \quad I_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I \quad (9-114)$$

با حل همزمان معادله‌های (۹-۱۰۶) و (۹-۱۰۷)، C_1 و C_2 به شکل زیر به دست می‌آید

$$C_2 = \frac{\mu_0 q \omega R^2}{12\pi} \quad \text{و} \quad C_1 = \frac{\mu_0 q \omega}{12\pi R}$$

بنابراین

$$A_2 = \frac{\mu_0 q \omega R^2}{12\pi r^2} \sin \theta \quad \text{و} \quad A_1 = \frac{\mu_0 q \omega}{12\pi R} r \sin \theta \quad (9-108)$$

باید توجه کرد که پتانسیل ایجاد شده به وسیله کره چرخنده مشابه پتانسیل ناشی از کره مغناطیده (مثال ۹-۲ را ببینید) است. در واقع اگر $M_0 = q\omega/4\pi R$ باشد نتایج یکسان‌اند. ■

۹-۶ روش تصویری برای فصل مشترک مغناطیسی

از روش تصویری که برای حل مسائل الکتروستاتیکی به کار رفت می‌توان برای حل برخی مسائل مغناطوستاتیکی نیز استفاده کرد. برای شرح این روش فصلهای ۳ و ۴ را بخوانید. این روش در حل بعضی مسائل مغناطوستاتیک که شامل جریانهای آزادند و شرایط مرزی غیرمقارن دارند بسیار مؤثر است. این گونه مسائل به سادگی به روشهای مطرح شده در این فصل، قابل حل نیستند. در زیر چند مثال از این روش را می‌آوریم.

مثال ۹-۹ یک جریان رشته‌ای موازی با فصل مشترک

در مثال ۹-۴ یک جریان رشته‌ای واقع در فصل مشترک دو ماده مغناطیسی را بررسی کردیم. به دلیل تقارن، میدانها تنها توابعی از فاصله از رشته بودند که با حل معادله شعاعی لاپلاس در یک بعد و استفاده از شرایط مرزی تعیین شدند. وقتی جریان در صفحه فصل مشترک قرار نداشته باشد تقارن دیگر وجود ندارد و مسئله را به این روش نمی‌توان حل کرد.

مطابق شکل ۹-۱۳، یک سیم بسیار بلند حامل جریان I را واقع در یک ماده مغناطیسی نیمه‌نامتناهی با تراوایی μ_1 در نظر می‌گیریم. سیم را در فاصله $x = d$ موازی فصل مشترک این ماده با ماده نیمه‌نامتناهی دیگری با تراوایی μ_2 فرض می‌کنیم. طبق روش تصویری میدان در ناحیه ۱ به کمک جریان I و جریان تصویری دیگر I_1 (که اکنون مجهول است) که به فاصله $x = -d$ درست زیر جریان I واقع است تعیین می‌شود. از طرف دیگر میدان در ناحیه ۲ به کمک جریان I_2 (که هنوز مجهول است) که در همان محل جریان I قرار

توجه کنید که پتانسیلهای زردهای، روابط (۹-۱۱۵) و (۹-۱۱۶) در فصل مشترک پیوسته نیستند. با جایگذاری $\phi_1 = \pi - \phi_2$ و I_1 و I_2 از روابط (۹-۱۱۴) در معادله (۹-۱۱۵) به دست می آید

$$\Phi_1(\phi, y) = -\frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \phi_1 - \frac{(\mu_2 - \mu_1) I}{2(\mu_1 + \mu_2)}$$

و

$$\Phi_2(\phi, y) = \frac{-\mu_1 I}{(\mu_1 + \mu_2)} \phi_1$$

این نتایج نشان می دهند که ناحیه مورد بررسی همان طور که در بالا بحث کردیم ناحیه همبند ساده نبوده و بنابراین پتانسیل زردهای در این ناحیه تک مقدار نیست.

مثال ۹-۱۰ یک آهنربا نزدیک یک فصل مشترک تخت مواد مغناطیسی

یک آهنربا با گشتار مغناطیسی m در فاصله z_0 را تحت زاویه θ از سطح یک ماده مغناطیسی نیمه نامتناهی که تراوایی نسبی آن $\mu \gg \mu_0$ است مطابق شکل ۹-۱۴ در نظر می گیریم.

برهم کنش بین آهنربا و ماده مغناطیسی را به کمک روش تصویری بررسی می کنیم. در واقع اگر آهنربا را با طول مؤثر l و شدت قطب q مشخص کنیم، آن گاه مسئله کاملاً مشابه مسئله دوقطبی الکتریکی واقع در نزدیکی یک صفحه رسانا (مثال ۳-۱۳) را ببینید) می شود. ماده مغناطیسی را می توان با یک آهنربای تصویری که در فاصله $-z_0$ و تحت زاویه $-\theta$ نسبت به فصل مشترک قرار دارد، مطابق شکل ۹-۱۴، تعویض کرد. نیرو و گشتاور وارد شده بر آهنربا را با به کار بردن روش مشابه مثال ۳-۱۳ می توان به دست آورد. محاسبه کامل مسئله

یادآوری می کنیم که I_2 در همان جهت I است، در حالی که I_1 تنها وقتی $\mu_2 > \mu_1$ باشد در آن جهت است.

استفاده از روش پتانسیل زردهای مغناطیسی برای این مسئله آموزنده است. پتانسیل زردهای در هر دو ناحیه می شود

$$\Phi_2 = -\frac{I_2}{2\pi} \phi_1 \quad \text{و} \quad \Phi_1 = -\frac{I}{2\pi} \phi_1 - \frac{I_1}{2\pi} \phi_2 \quad (۹-۱۱۵)$$

زوایای ϕ_1 و ϕ_2 را در شکل ۹-۱۳ نشان داده ایم و با رابطه های زیر به دست می آیند

$$\phi_2 = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x+d} \right) \quad \text{و} \quad \phi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x-d} \right) \quad (۹-۱۱۶)$$

اکنون برای به دست آوردن I_2 و I_1 از شرایط مرزی استفاده می کنیم یکی از شرایط، پیوسته بودن مؤلفه قائم B در فصل مشترک است. میدان مغناطیسی را می توان از رابطه $B = -\mu \nabla \Phi$ به کمک پتانسیل زردهای حساب کرد. بنابراین

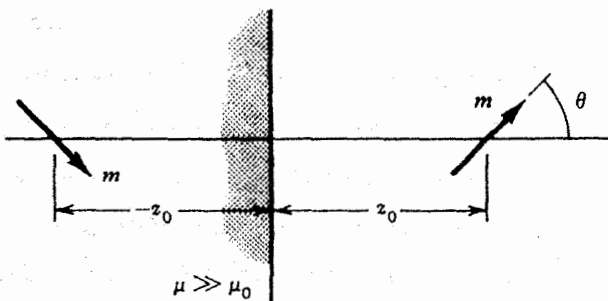
$$B_1 = \frac{\mu_1 I}{2\pi \rho_1} [-\sin \phi_1 \hat{x} + \cos \phi_1 \hat{y}] + \frac{\mu_1 I_1}{2\pi \rho_2} [-\sin \phi_2 \hat{x} + \cos \phi_2 \hat{y}] \quad (۹-۱۱۷)$$

$$B_2 = \frac{\mu_2 I_2}{2\pi \rho_1} [-\sin \phi_1 \hat{x} + \cos \phi_1 \hat{y}] \quad (۹-۱۱۸)$$

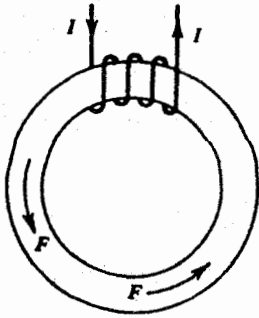
در فصل مشترک $x = 0$ ، برابر با ρ_1 و ρ_2 برابر با $\phi_1 + \phi_2$ برابر با π است. با مساوی قراردادن مؤلفه های عمودی B ، یعنی مؤلفه ها در راستای x ، به دست می آید $\mu_1(I + I_1) = \mu_2 I_2$ که این درست همان معادله (۹-۱۱۲) است که با به کار بردن روش پتانسیل برداری به دست آمد.

شرط دوم مستلزم پیوسته بودن مؤلفه های مماسی H است. با قراردادن $H = B/\mu$ و به دست آوردن مؤلفه های B به کمک روابط (۹-۱۱۷) و (۹-۱۱۸) نتیجه می گیریم $I - I_1 = I_2$ که دقیقاً همان چیزی است که در معادله (۹-۱۱۳) با استفاده از روش پتانسیل برداری به دست آوردیم.

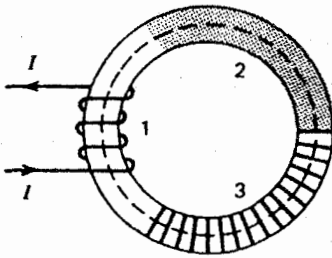
بنابراین هر دو روش درست جریانهای تصویری یکسان به دست می دهند. همچنین به سادگی می توان نشان داد که میدانهای به دست آمده از پتانسیلهای برداری معادله های (۹-۱۰۹) و (۹-۱۱۰) با آنهاست که به کمک پتانسیلهای زردهای، معادله های (۹-۱۱۷) و (۹-۱۱۸) به دست آمدند یکسان اند.



شکل ۹-۱۴ کاربرد روش تصویری روی یک دوقطبی مغناطیسی نزدیک فصل مشترک ماده فرومغناطیس.



شکل ۹-۱۶ یک حلقه آهنی با یک پیچه جریان که قسمت کوچکی از آن را شامل می‌شود یک مدار مغناطیسی به وجود می‌آورد.



شکل ۹-۱۷ یک هسته دایره‌ای مغناطیسی تشکیل شده از مواد مختلف.

آنهاست. بنابراین برای یک H معین میدان مغناطیسی در داخل این ماده بسیار بزرگتر از میدان متناظر آن در فضای آزاد است. شکل ۹-۱۶ ایده یک مدار مغناطیسی را نشان می‌دهد. یک پیچه با N دور روی بخش کوچکی از یک حلقه آهنی پیچیده شده است. گرچه پیچه تمام حلقه را نمی‌پوشاند معلوم شده است که شار تولیدشده توسط پیچه درست حلقه را دور می‌زند، و شار ناچیزی خارج از حلقه وجود دارد. از نقطه نظر مدار مغناطیسی، از شار خارجی چشمپوشی می‌شود، و بدین ترتیب فرض می‌شود میدانها کاملاً در هسته محصورند. بنابراین با توجه به معادله (۹-۵۳) شار مغناطیسی در سراسر مدار پیوسته است. علاوه بر این فرض می‌کنیم شار در سطح مقطع هسته به طور یکنواخت توزیع می‌شود.

اکنون یک مدار مغناطیسی را با جزئیات بیشتری بررسی می‌کنیم. یک پیچه با N دور که روی بخشی از یک هسته فرومغناطیس توزیع شده است را در نظر می‌گیریم. هسته از چندین ماده مثلاً سه ماده در شکل ۹-۱۷ تشکیل شده است. با به کار بردن قانون آمپر روی مسیر انتخاب شده در مرکز هسته به دست می‌آوریم

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 = NI \quad (9-123)$$

که H_i و l_i طول و شدت مغناطیسی در بخش i ام هستند. معادله

را به خواننده واگذار می‌کنیم. به طور مشخص می‌توان به دست آورد

$$F = \frac{\gamma \mu_0}{64\pi} \frac{m^2}{z_0^2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (9-119)$$

$$\tau = \frac{\mu_0}{64\pi} \frac{m^2 \sin 2\theta}{z_0^2} \quad (9-120)$$

* ۹-۷ مدارهای مغناطیسی

تا کنون، در این فصل و فصل قبل مسائل مختلفی را که در مورد توزیعهای جریان واقع در محیط نامتناهی بودند بررسی کردیم. معلوم شده بود که این میدانها در تمام فضا گسترده‌اند. در این بخش در مورد مسائلی بحث می‌کنیم که در آنها میدانها به مسیرهای خوش تعریف محدود می‌شوند. این وضعیت نسبت به حالت فضای آزاد به اندازه‌ای متفاوت است که یک موضوع به کلی متفاوت به نام مدارهای مغناطیسی را، که با مدارهای الکتریکی تشابه بسیار نزدیکی دارد، تداعی می‌کند.

مثلاً مطابق شکل ۹-۱۵ پیچه‌ای توخالی که در مثال ۸-۸ بررسی شد را در نظر می‌گیریم. با به کار بردن قانون آمپر روی مسیر C به دست می‌آوریم

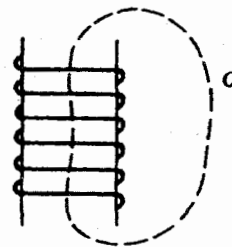
$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI \quad (9-121)$$

که N تعداد دور و I جریان در پیچه است. در خارج پیچه خطوط میدان به طور وسیع پراکنده شده‌اند و بنابراین میدان ضعیف است. بدین ترتیب شار به طور مؤثر به ناحیه داخلی محدود می‌شود و میدان با رابطه زیر داده می‌شود

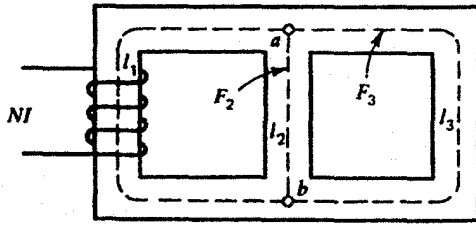
$$H \approx \frac{NI}{l} \quad (9-122)$$

که l طول سیمولوله است.

وقتی مواد فرومغناطیس در فضا باشند بیشترین شار مغناطیسی از داخل آنها عبور می‌کند. این موضوع به خاطر تراوایی نسبی خیلی بزرگ



شکل ۹-۱۵ سیمولوله‌ای با یک خط B نشان داده شده و به صورت حلقه C علامت‌گذاری شده است.



شکل ۹-۱۸ یک مدار مغناطیسی با چند حلقه.

اکنون در مورد مدارهای مغناطیسی در حالت موازی بحث می‌کنیم. شکل ۹-۱۸ را در نظر بگیرید. نیروی محرکه مغناطیسی $\mathcal{M} = NI$ شار مغناطیسی F_1 را در مدار برقرار می‌کند در پیوندگاه a شار مواجه با دو مسیر موازی ۲ و ۳ می‌شود. بخشی از آن، F_2 ، در مسیر ۲ و بقیه آن، F_3 ، در مسیر ۳ جریان دارد. مقاومت مغناطیسی معادل دو مسیر عبارت است از $\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 / (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)$ که \mathcal{R}_1 و \mathcal{R}_2 مقاومت مغناطیسی هر یک از مسیرهاست، و F_2/F_1 با $\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2$ مساوی است و در نتیجه شار از مقاومت مغناطیسی پایینتر عبور می‌کند.

چون مقاومت مغناطیسی با تراوایی نسبت عکس دارد، هسته‌های ساخته شده از مواد فرومغناطیس مقاومت مغناطیسی کمتری نسبت به هسته‌های غیر فرومغناطیس دارند زیرا تراوایی فرومغناطیسها حدود 10^3 تا 10^4 برابر μ_0 است. این موضوع این فرض را که بیشتر شار از هسته فرومغناطیس عبور می‌کند و از مقادیر نشتی در فضای آزاد می‌توان چشم پوشید تأیید می‌کند.

برای دسترسی به میدان مغناطیسی وجود گاف هوا در مدارهای مغناطیسی متداول است. اندازه گاف برای کمینه کردن مقاومت مغناطیسی باید تا حد ممکن کوچک انتخاب شود. مساحت گاف به‌طور کامل مشخص نیست زیرا خطوط میدان به خارج از گاف پراکنده می‌شوند، و بدین ترتیب مساحت سطح مؤثر گاف را از مساحت هسته آهنی بزرگتر می‌کنند. تصحیح مرتبه اول سطح گاف مستطیل شکل با رابطه زیر داده می‌شود

$$A = A_0 \left(1 + \frac{l_g}{d_1}\right) \left(1 + \frac{l_g}{d_2}\right) \quad (127-9)$$

که d_1 و d_2 ابعاد هندسی گاف، $A_0 = d_1 d_2$ ، l_g طول گاف و $10^{-1} \approx l_g/d_1$ و l_g/d_2 است.

مثال ۹-۱۱ یک هسته چدنی با گاف هوا

یک هسته مغناطیسی چدنی مطابق شکل ۹-۱۹ با $NI = 1000 \text{ A}$ را در نظر می‌گیریم. سطح هسته $A_c = 4 \text{ cm}^2$ ، طول $l_c = 44 \text{ cm}$

(۹-۱۲۳) تشابه زیادی با مدارهای الکتریکی دارد. با به‌کار بردن قانون کیرشهوف، معادله (۷-۸۳)، روی محیط یک حلقه ساده متشکل از سه مقاومت و یک منبع الکترومغناطیسی \mathcal{E} به دست می‌آید $\mathcal{E} = V_1 + V_2 + V_3$ که V_i افت پتانسیل در مقاومت نام است. با این مقایسه می‌توان NI در معادله (۹-۱۲۳) را نیروی محرکه مغناطیسی، \mathcal{M} ، و $H_i l_i$ را افت جریان مغناطیسی نامید. این تشابه را می‌توان با به‌کار بردن شار مغناطیسی بیشتر کرد. با استفاده از $H_i = B_i/\mu_i$ و $F_i = B_i A_i$ که A_i و μ_i به ترتیب سطح مقطع و تراوایی نامین بخش هسته هستند، معادله (۹-۱۲۳) تبدیل به معادله زیر می‌شود

$$\frac{F_1 l_1}{\mu_1 A_1} + \frac{F_2 l_2}{\mu_2 A_2} + \frac{F_3 l_3}{\mu_3 A_3} = NI \quad (124-9)$$

چون در مورد یک مدار مغناطیسی، که شار آن محصور به هسته است، بحث می‌کنیم، $F_1 = F_2 = F_3 = F$ و به این ترتیب

$$F(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3) = F\mathcal{R} = \mathcal{M} \quad (125-9)$$

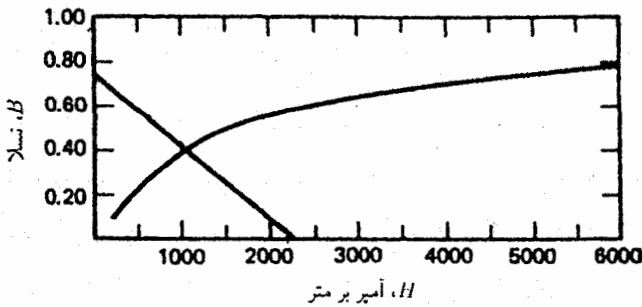
که

$$\mathcal{R}_i = \frac{l_i}{\mu_i A_i} \quad (126-9)$$

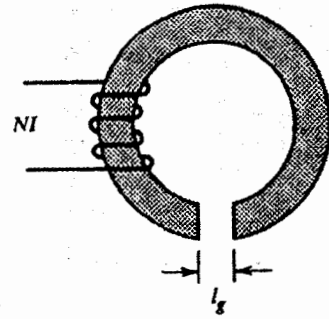
مقاومت مغناطیسی نامین قسمت مدار و \mathcal{R} مجموع مقاومت‌های مغناطیسی مدار است. اکنون مشابهت با مدارهای الکتریکی واضحتر است. رابطه در معادله (۹-۱۲۵) مانند رابطه در مدار جریان سری است که در آن جریان و نیروی محرکه الکتریکی با رابطه $\mathcal{E} = RI$ به هم وابسته هستند و R مقاومت کل مدار است. علاوه بر این عبارت مقاومت مغناطیسی هسته آهنی برحسب l ، μ و A با عبارت مقاومت یک سیم به طول l ، سطح مقطع A و رسانایی σ_c ، یعنی $R = l/\sigma_c A$ بسیار شبیه است.

اکنون لازم است در رابطه با مقایسه بین موارد الکتریکی و مغناطیسی احتیاط کنیم. تراوایی برای هر ماده قبل از محاسبه مقاومت مغناطیسی مدار و بنابراین میدانها در مدار باید معلوم باشد. با وجود این، B یا H در هر ماده باید قبل از محاسبه تراوایی مشخص باشد. روشن است که باید روشهای تکراری یا ترسیم برای حل همزمان مسائل، آن‌طور که بعداً در این بخش خواهیم گفت به‌کار روند. این برخلاف مورد الکتریکی است که در آن رسانندگیها و بنابراین مقاومت‌های عناصر مستقل از جریان (برای مواد خطی) هستند.

تاکنون تنها مقاومت‌های مغناطیسی در حالت سری را بررسی کردیم،



شکل ۹-۲۰ حل ترسیمی برای به دست آوردن نقطه عمل مدار مغناطیسی با یک گاف هوا.



شکل ۹-۱۹ یک مدار مغناطیسی با یک گاف هوا.

و طول گاف هوا $l_g = 0.2 \text{ cm}$ و سطح مؤثر آن $A_g = 4.8 \text{ cm}^2$ است. با به کار بردن قانون آمپر در مدار نتیجه می‌گیریم

$$H_c I_c + H_g I_g = NI \quad (۱۲۸-۹)$$

که H_c و H_g به ترتیب میدانهای مغناطیسی در هسته و در گاف اند. شار مغناطیسی F در مدار پیوسته است. به این ترتیب H_g را مساوی $F/\mu_0 A_g$ می‌گیریم. در نتیجه

$$H_c I_c + \frac{F l_g}{\mu_0 A_g} = NI \quad (۱۲۹-۹)$$

دوباره، به علت پایستار بودن شار در قسمتهای مختلف مدار، $F = B_c A_c$ بنابراین معادله (۱۲۹-۹) می‌شود

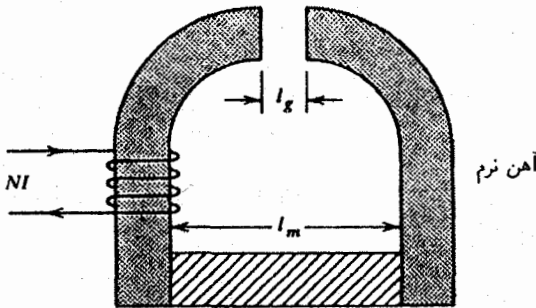
$$B_c = \frac{-\mu_0 l_c}{l_g} \frac{A_g}{A_c} H_c + \frac{\mu_0 A_g}{A_c l_g} NI \quad (۱۳۰-۹)$$

که یک رابطه خطی بین B_c و H_c در هسته چدنی است. شیب خط متناسب با نسبت سطح مقطع گاف به سطح مقطع هسته و همچنین متناسب با نسبت طول هسته چدنی به طول گاف است. عرض از مبدأ خط متناسب با نیروی محرکه مغناطیسی NI است. در بسیاری از موارد $1 \approx A_g/A_c$ است بنابراین شیب مؤثر متناسب با l_c/l_g و عرض از مبدأ متناسب با NI/l_g است.

برای به دست آوردن شار و میدانها در گاف و در هسته چدنی، رابطه بین B_c و H_c بالا و منحنی مغناطش $B-H$ هسته آهنی را همزمان حل می‌کنیم. معادله (۱۳۰-۹) را با استفاده از ابعاد و کمیات داده شده در مدار بالا به همراه منحنی مغناطش رسم می‌کنیم شکل ۹-۲۰ محل تقاطع این دو منحنی نقطه عمل آهنربا را به دست می‌دهد: 4 T برای میدان B در هسته، و از این رو میدان در گاف برابر است با $B_g = B_c A_c / A_g = 0.33 \text{ T}$.

مثال ۹-۱۲ یک مدار مغناطیسی با آهنربای دائمی

در مثال قبل نیروی محرکه مغناطیسی در مدار را یک سیم‌پیچ جریان



شکل ۹-۲۱ مدار مغناطیسی شامل یک سیم‌پیچ جریان و یک آهنربای دائمی.

تأمین می‌کرد. آهنرباهای دائمی نیز می‌توانند نیروی محرکه مغناطیسی را تأمین کنند. در مدار مغناطیسی شکل ۹-۲۱ که از یک آهنربای دائمی به طول l_m ، دو بازوی جانبی آهن نرم به طول کلی l_s و یک گاف هوا به طول l_g تشکیل شده است را در نظر می‌گیریم. سطح مقطعیهای آهنربا، بازوها، و گاف هوا به ترتیب A_m ، A_s و A_g هستند. علاوه بر این بازوها یک سیم‌پیچ با N دور و جریان I دارند. با به کار بردن قانون آمپر روی مدار داریم

$$H_m l_m + H_s l_s + H_g l_g = NI \quad (۱۳۱-۹)$$

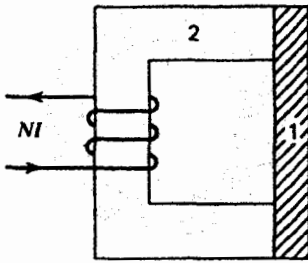
که H_m ، H_s و H_g به ترتیب میدانهای مغناطیسی در آهنربا، بازوها و گاف هواند. با استفاده از ثابت بودن شار در مدار می‌نویسیم

$$H_g = \frac{B_m A_m}{\mu_0 A_g} \quad (۱۳۲-۹)$$

و بنابراین معادله (۱۳۱-۹) می‌شود

$$H_m l_m + H_s l_s + \frac{B_m A_m}{\mu_0 A_g} l_g = NI \quad (۱۳۳-۹)$$

باید توجه کنید که ارتباط بین B_m و H_m که با رابطه بالا بیان شد



شکل ۹-۲۲ مدار مغناطیسی مشکل از دو ماده فرومغناطیس.

که H_1 و H_2 به ترتیب میدانهای مغناطیسی قسمتهای ۱ و ۲ هستند. از پیوستگی شار در مدار رابطه بین B_1 و B_2 ، یعنی $B_2 = B_1 A_1 / A_2$ ، نتیجه می شود. این دو معادله، که زوجهای (B_2, H_2) و (B_1, H_1) را به هم ربط می دهند، به طور ترسیمی به کمک منحنی مغناطیس ماده ۱ حل می شوند. آن گاه با رسم همزمان نقاط به دست آمده (B_2, H_2) و منحنی مغناطیس ماده ۲ و با به دست آوردن نقطه تقاطع منحنیهای اخیر نقطه عمل مدار به دست می آید. ■

مثال ۹-۱۴ حفاظ مغناطیسی

در حفاظ مغناطیسی این موضوع مطرح می شود که بیشترین مقدار شار مغناطیسی به دلیل تراوایی نسبی بسیار بزرگ (مقاومت مغناطیسی کوچک) مواد فرومغناطیس از میان آنها عبور می کند. چون آزمایشها اغلب در نواحی با میدانهای ضعیف انجام می گیرند یا وسایل الکترونیکی باید با اطمینان کار کنند، پس حفاظ مغناطیسی اهمیت عملی زیادی دارد.

برای درک این اثر یک پوسته استوانه ای خیلی بلند از ماده مغناطیسی را در نظر می گیریم که تراوایی نسبی آن K_m و شعاعهای داخلی و خارجی آن به ترتیب a و b است. و فرض می کنیم که این پوسته در میدان مغناطیسی خارجی H_0 طوری قرار دارد که محور آن بر میدان عمود است. تراوایی نسبی ماده در داخل حفره و در خارج پوسته ۱ است. پتانسیلهای نرده ای مغناطیسی را به ترتیب در ناحیه های خارج پوسته، در لایه پوسته و در حفره داخل پوسته به شکل زیر می نویسیم

$$\Phi_0 = -H_0 \rho \cos \phi + \frac{A \cos \phi}{\rho}$$

$$\Phi_s = B \rho \cos \phi + \frac{C \cos \phi}{\rho}$$

$$\Phi_i = E \rho \cos \phi$$

تمام پتانسیلهای نرده ای مغناطیسی و بنابراین تمام میدانها را می توان از پیوسته بودن Φ و B_n در همه مرزها به دست آورد. برای مثال داریم

به علت جمله $H_s l_s$ خطی نیست. دوباره اگر ثابت بودن شار را به کار ببریم به دست می آوریم

$$H_s = \frac{B_m A_m}{\mu_s A_s} \quad (۱۳۴-۹)$$

که به وضوح نشان می دهد معادله غیرخطی است، زیرا μ_s مربوط به آهن نرم تابعی غیرخطی از میدانها، $\mu_s(H_m)$ ، است. رابطه مشابهی نیز می توان بر حسب مقاومت کلی مغناطیسی مدار، R ، به شکل زیر نوشت

$$B_m = \frac{-l_m}{\mathcal{R} A_m} H_m + \frac{NI}{\mathcal{R} A_m} \quad (۱۳۵-۹)$$

که

$$\mathcal{R} = \frac{l_g}{\mu_0 A_g} + \frac{l_s}{\mu_s A_s} \quad (۱۳۶-۹)$$

برای به دست آوردن میدانها باید معادله (۹-۱۳۵) و منحنی پسماند را همزمان حل کرد. البته چون مدار شامل دو محیط غیرخطی، آهنربا و آهن نرم است در مدار پیچیدگی به وجود می آید. در مواردی که طول کاف خیلی کوچک نیست می توانیم بنویسیم

$$\frac{l_s}{\mu_s A_s} \ll \frac{l_g}{\mu_0 A_g}$$

در این مورد اثر بازوها را می توان نادیده گرفت. بنابراین معادله (۹-۱۳۳) یا (۹-۱۳۵) می شود

$$B_m = -\mu_0 \frac{l_m A_g}{l_g A_m} H_m + \frac{\mu_0 A_g}{A_m l_g} NI \quad (۱۳۷-۹)$$

اکنون میدانها به سادگی با حل این معادله خطی با منحنی پسماند آهنربا تعیین می شود، همان طور که در مثال قبل انجام شد. حالتی را که دو ماده غیرخطی با اهمیت یکسان در مدار مغناطیسی وجود دارند در مثال زیر بحث می کنیم. ■

مثال ۹-۱۳ دو قسمت هسته غیرخطی

اکنون موردی را که مدار شامل دو ماده غیرخطی است در نظر می گیریم. مدار در شکل ۹-۲۲ نشان داده شده است و شامل قسمتهای ۱ و ۲ است که به ترتیب طولهای l_1 و l_2 و سطح مقطعیهای A_1 و A_2 دارند. علاوه بر این یک سیم پیچ با N دور و جریان I روی مدار پیچیده شده است. با به کار بردن قانون آمپر به دست می آوریم

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = NI \quad \text{یا} \quad H_2 = \frac{NI}{l_2} - \frac{H_1 l_1}{l_2}$$

مؤثر، \mathbf{J}_m و \mathbf{K}_m (موسوم به جریانهای مغناطش) می توان حساب کرد. بنابراین

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad \text{و} \quad \mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \quad [5-9], [6-9]$$

که $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه عمود بر سطح ماده است. پتانسیل برداری چنین ماده ای می شود

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_m dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}_m da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad [7-9]$$

$$\text{و بنابراین} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_m$$

از طرف دیگر، خواص مغناطیسی ماده را می توان با جایگزینی دو قطبیهای اتمی با چگالیهای قطب مغناطیسی حجمی و سطحی مؤثر، ρ_m و σ_m ، حساب کرد. یعنی

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad \sigma_m = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad [18-9]$$

پتانسیل نردهای مغناطیسی، Φ_m ، و در نتیجه میدان مغناطیسی به شکل زیرند

$$\Phi_m = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_m dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\sigma_m da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad [16-9]$$

$$\mathbf{B}_m(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \Phi_m + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad [13-9]$$

بهرتر است میدان \mathbf{H} را به شکل زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \quad [29-9]$$

$$\mathbf{H} = -\nabla \Phi_m \quad [32-9]$$

در حضور جریانهای خارجی \mathbf{J}_f داریم

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_f \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' - \nabla \Phi_m \quad [33-9]$$

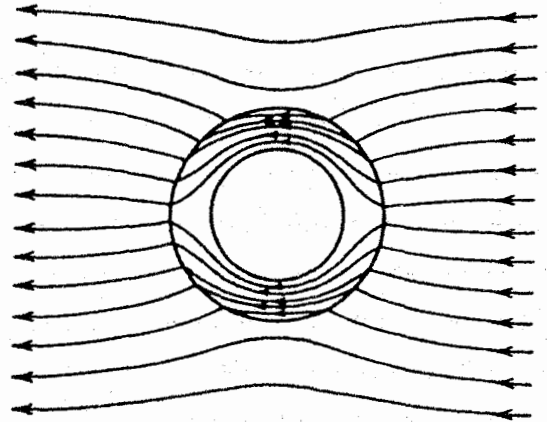
معادله های دیفرانسیل مغناطوستاتیک در مواد مغناطیسی، $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ و $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ هستند که $\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m$ جریان کل شامل جریان خارجی \mathbf{J}_f و جریان مغناطیده \mathbf{J}_m است. با به کار بردن \mathbf{H} ، این روابط به شکل زیر در می آید

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad [30-9]$$

قانون انتگرالی آمپر با وجود ماده مغناطیسی می شود

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f \quad [31-9]$$

که I_f جریان آزاد کل عبورکننده از C است.



شکل ۹-۲۳ نمایش خطوط \mathbf{B} یک پوسته استوانه ای فرومغناطیس واقع در یک میدان مغناطیسی خارجی عمود بر محور استوانه و از قبل یکنواخت.

$$\Phi_m = -2H_0 a^2 (K_m - 1) \left\{ \rho \cos \phi + \frac{b^2}{\rho} \left(\frac{K_m - 1}{K_m + 1} \right) \cos \phi \right\} \left\{ a^2 (K_m + 1)^2 - b^2 (K_m - 1)^2 \right\}^{-1}$$

همچنین میدان مغناطیسی در داخل استوانه عبارت است از

$$\mathbf{B} = \frac{4B_0 K_m a^2}{a^2 (K_m + 1)^2 - b^2 (K_m - 1)^2}$$

این نتیجه اثر حفاظ را مشخص می کند. در اینجا می بینیم که میدان داخلی برای $K_m \gg 1$ با $1/K_m$ متناسب است. بنابراین وجود حفاظ استوانه ای ساخته شده از ماده ای با تراوایی بزرگ، K_m بین 10^2 تا 10^4 ، باعث ضعیف شدن شدید میدان در داخل آن می شود، حتی اگر پوسته نسبتاً نازک باشد. شکل ۹-۲۳ طرحواره ای از خطوط \mathbf{B} را نشان می دهد که تمایل آنها را به عبور از درون محیط تراوا اگر امکان پذیر باشد به تصویر کشیده است. مسائل ۹-۹ و ۹-۱۰ را برای جزئیات بیشتر در مورد حفاظ ببینید. ■

۹-۸ خلاصه

مغناطش \mathbf{M} یک قطعه ماکروسکوپی ماده به صورت چگالی دو قطبیهای مغناطیسی اتمی آن تعریف می شود

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dv} \quad [3-9]$$

خصوصیات مغناطیسی یک قطعه ماکروسکوپی ماده با مغناطش \mathbf{M} را با تعویض تمام دو قطبیهای اتمی با جریانهای حجمی و سطحی

که شاخص t به معنی مماس بر مرز و \hat{n} برادر یکه عمود بر مرز است.

روش تصویری در حل برخی مسائل مغناطیسی که شامل جریانهای آزاد و شرایط مرزی است مفید است.

میدان مغناطیسی ناشی از توزیع جریانها در حضور مواد با تراوایی کوچک به فواصل دور گسترش می یابد. در حضور مواد فرومغناطیس با μ بالا، میدان عمدتاً در داخل این مواد به تله می افتد و بنابراین به مسیره های مشخصی محدود می شود. بدین ترتیب چیزی را، که کاملاً با مدارهای الکتریکی قابل مقایسه است، به وجود می آورد که آن را مدار مغناطیسی می نامیم. در این مقایسه کمیات (\mathcal{R}, F, NI) را متناظر با (R, I, emf) مربوط به مدارهای الکتریکی می گیریم. و \mathcal{R} را مقاومت مغناطیسی مدار می نامیم که با رابطه زیر داده می شود

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A} \quad [۱۲۶-۹]$$

که مشابه مقاومت یک مدار $R = l/\sigma A$ است. قانون جمع مقاومت های مغناطیسی مشابه جمع مقاومت های الکتریکی است.

مسائل

۹-۱ مغناطش یک کره به شعاع r برابر است با

$$\mathbf{M} = (a_1 y^2 + b_1) \hat{y} + a_2 x^2 \hat{x}$$

در این رابطه x و y نسبت به دستگاه مختصاتی که مبدأ آن بر مرکز کره منطبق است اندازه گیری می شود. (الف) چگالی های قطب و (ب) جریان مغناطش را به دست آورید.

۹-۲ نیم استوانه ای به شعاع R و طول L در راستای محور y مغناطیده است. مغناطش با \hat{y} $\mathbf{M} = M_0 \hat{y}$ داده می شود که M_0 مقداری ثابت است (شکل ۹-۲۴ را ببینید) (الف) چگالی حجمی قطب مغناطیسی را پیدا کنید و نیز چگالی سطحی قطب مغناطیسی را روی تمام سطوح به دست آورید. (ب) با استفاده از انتگرال گیری قطب های کل نیم استوانه را حساب کنید. (ج) دلیل فیزیکی جواب (ب) را ارائه دهید. (د) با انتگرال گیری گشتاور دوقطبی مغناطیسی را نسبت به مبدأ O به دست آورید. همچنین با استفاده از تعریف مغناطش \mathbf{M} گشتاور دوقطبی را حساب کنید. آیا دو جواب با هم توافق دارند؟

۹-۳ یک ماده مغناطیسی به شکل قرص به شعاع R و ضخامت $T \ll R$ با مغناطش $\mathbf{M} = M_0 \hat{x}$ واقع در صفحه قرص (صفحه

واکنش یک ماده به میدان خارجی \mathbf{H} به ساختمان میکروسکوپی آن ماده بستگی دارد. در این فصل مواد را از دید واکنش ماکروسکوپی آنها دسته بندی می کنیم

$$\mathbf{M} = \chi(\mathbf{H}) \mathbf{H} \quad [۳۴-۹]$$

که χ را پذیرفتاری مغناطیسی می نامیم. اگر χ از \mathbf{H} (از نظر جهت و اندازه) و نیز از فضا مستقل باشد ماده را خطی (ساده) می نامیم. علاوه بر این برحسب اینکه $\chi < 0$ یا $\chi > 0$ باشد ماده را دیامغناطیس یا پارامغناطیس می خوانیم. برای مواد مغناطیسی خطی $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ بنابراین

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 K_m \mathbf{H} \quad [۳۶-۹]$$

که μ را تراوایی و K_m را تراوایی نسبی ماده می نامیم. مواد فرومغناطیس مواد غیرخطی اند و μ برای آنها تابعی غیرخطی از H است، درجه مغناطیدگی آنها نسبت به مواد پارامغناطیس خیلی بالاتر است به طوری که در مواردی K_m آنها به 10^5 می رسد. همچنین این مواد عمل غیر برگشت پذیر پسماند را از خود نشان می دهند. وقتی یک فضای معین شامل نواحی با ویژگی های مغناطیسی متفاوت است، در این صورت میدانها با کمک شرایط مرزی تعیین می شوند. در یک ناحیه معین با تراوایی μ ، با ترکیب روابط $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ و $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f$ و بنابراین $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}_f$ (با انتخاب $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) به دست می آوریم

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_f \quad [۴۳-۹]$$

از طرف دیگر در نواحی دور از \mathbf{J}_f داریم $\mathbf{H} = -\nabla \Phi_m$ ، که با جایگذاری در $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ به دست می آید

$$\nabla^2 \Phi_m = \nabla \cdot \mathbf{M} = -\rho_m \quad [۴۰-۹]$$

معادله Φ_m (یا \mathbf{A}) را می توان برای نواحی مختلف به طور مستقل حل کرد. آن گاه جوابها روی مرز بر طبق قواعد زیر بایستی با هم سازگار باشند

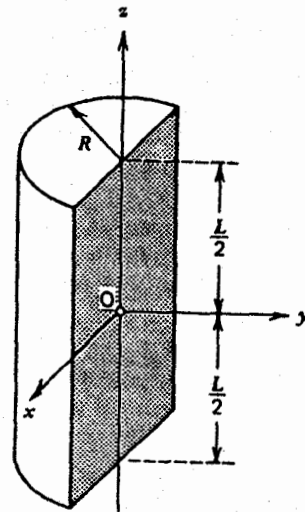
$$B_{1n} = B_{2n} \quad \text{یا} \quad A_{1t} = A_{2t} \quad [۴۵-۹], [۵۱-۹]$$

$$\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t} \quad \text{یا} \quad \Phi_{m1} = \Phi_{m2} \quad (K_f = 0 \text{ مرز}) \quad [۴۹-۹], [۴۷-۹]$$

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_t = \mathbf{K}_f \times \hat{n} \quad [۴۶-۹]$$

مغناطیسی μ_1 و μ_2 واقع است. اگر میدان ناشی از مدار در غیاب مواد مغناطیسی H_0 باشد، نشان دهید که میدانها در مواد مغناطیسی با معادله (۹-۶۳) داده می‌شوند.

۷-۹ یک لوله استوانه‌ای بینهایت بلند به شعاعهای داخلی و خارجی ρ_1 و ρ_2 با توزیع یکنواخت جریان محوری I مفروض است. (الف) با استفاده از قانون آمپر میدان مغناطیسی را در همه نقاط به دست آورید. (ب) با حل معادله (۹-۴۳) پتانسیل برداری را همه جا تعیین کنید و سپس میدان مغناطیسی را به دست آورید. (ج) نتایج (الف) و (ب) را مقایسه کنید.

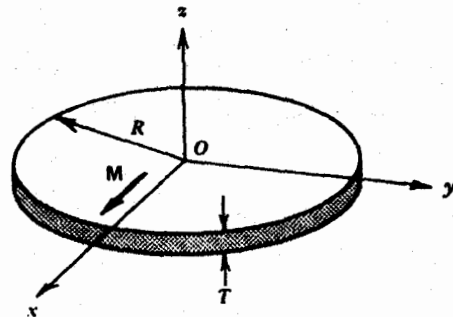


شکل ۲۴-۹

۸-۹ یک کره مغناطیده یکنواخت با مغناطش M در یک میدان مغناطیسی یکنواخت H قرار دارد. گشتاور وارد بر کره را به دست آورید. ۹-۹ یک پوسته کروی از ماده مغناطیسی با تراوایی μ_1 و شعاعهای داخلی و خارجی به ترتیب R_1 و R_2 در میدان مغناطیسی یکنواخت H_0 قرار دارد. تراوایی حفره داخل کره و محیط خارج کره μ_2 است. میدان مغناطیسی در حفره داخل کره را به دست آورید. در مورد $\mu_2 \gg \mu_1$ بحث کنید (مثال ۹-۱۴ را ببینید).

(xy) به صورت یکنواخت مغناطیده شده است (شکل ۹-۲۵). (الف) چگالیهای قطب مغناطیسی، (ب) چگالیهای جریان مغناطش و (ج) H و B را در مرکز قرص به دست آورید.

۱۰-۹ یک پوسته استوانه‌ای خیلی بلند که تراوایی ماده مغناطیسی آن μ و شعاع داخلی و خارجی آن به ترتیب a و b است در یک میدان مغناطیسی یکنواخت H_0 در راستای عمود بر محور استوانه قرار دارد. تراوایی مواد داخل حفره استوانه و خارج استوانه μ_0 است (الف) پتانسیلهای نرده‌ای و میدان را در هر ناحیه به دست آورید. (ب) معادله‌های خطوط میدان مغناطیسی B را در ماده استوانه به دست آورید.



شکل ۲۵-۹

۱۱-۹ میدان مغناطیسی ایجاد شده به وسیله یک استوانه مغناطیسی بینهایت بلند به شعاع ρ و تراوایی μ_1 را به دست آورید. استوانه در راستای عمود بر محورش با مغناطش M_0 به طور یکنواخت مغناطیده شده و در ماده مغناطیسی با تراوایی μ_2 غوطه‌ور است.

۴-۹ پتانسیل ایجاد شده به وسیله استوانه مغناطیده یکنواخت در راستای محورش (مثال ۹-۳) را با استفاده از روش چگالی قطب مغناطیسی تعیین کنید.

۱۲-۹ یک سیم مغناطیسی بینهایت بلند به شعاع ρ و تراوایی μ در میدان مغناطیسی خارجی یکنواخت H_0 عمود بر محور سیم قرار دارد. جریان در سیم I و تراوایی ماده اطراف سیم μ_2 است. میدان مغناطیسی را در داخل و خارج سیم پیدا کنید.

۵-۹ کره‌ای به شعاع R و مغناطش $M = M_1(r)r + M_0$ که $M_1(r)$ تابعی از $r = |\mathbf{r}|$ است و M_0 یک بردار ثابت، مفروض است. نشان دهید (الف) میدان خارجی ایجاد شده به وسیله این کره از M_1 مستقل است، و (ب) پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی داخل کره به صورت زیر است

$$\Phi_m(r) = 4\pi \int_r^R M_1(r) dr + \frac{4\pi}{3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{M}_0$$

۱۳-۹ در یک ماده فرومغناطیس بسیار بزرگ با مغناطش یکنواخت M حفره کوچکی ایجاد شده است. همچنین در ماده میدان مغناطیسی H در جهت M وجود دارد. (الف) B را (الف) در یک حفره کروی به شعاع r ، (ب) در یک حفره استوانه‌ای خیلی بلند به شعاع کوچک ρ که محورش موازی M است و (ج) در یک حفره استوانه‌ای بسیار بلند به شعاع ρ و محور عمود بر M به دست آورید.

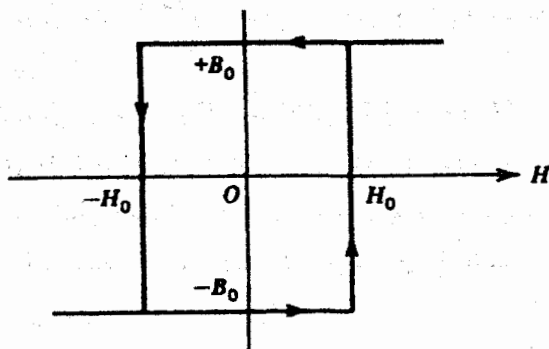
۶-۹ یک مدار در صفحه فصل مشترک بین دو محیط با تراوایی

۲۳-۹ مدار مغناطیسی شکل ۲۱-۹ را با $I = 0$ در نظر می‌گیریم. منحنی پسماند آهنربای دائمی (آلنیکو ۵) در شکل ۸-۹ داده شده است. بازوها از آهن نرم، که پسماند آن در مقایسه با آهنربای دائمی ناچیز است، ساخته شده‌اند. ابعاد مدار عبارت‌اند از طول گاف $l_g = 1 \text{ cm}$ ، سطح گاف $A_g = 2 \text{ cm}^2$ ، طول آهنربا $l_m = 10 \text{ cm}$ و سطح مقطع آهنربا $A_m = 2 \text{ cm}^2$. میدان در گاف و در آهنربا را تعیین کنید.

۲۴-۹ مدار مغناطیسی شکل ۲۲-۹ از مثال ۱۳-۹ را در نظر می‌گیریم. اگر ماده ۱ آن از چدن و ماده ۲ از آلیاژ نیکل-آهن ساخته شده و نیز ابعاد مدار $l_1 = 0.8 \text{ m}$ ، $l_2 = 0.1 \text{ m}$ ، $A_1 = 3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ و $A_2 = 2.25 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ باشد. شار و میدانها در دو ماده را وقتی $NI = 40 \text{ A}$ باشد تعیین کنید.

۲۵-۹ دو چنبره هم‌محور با هسته فرومغناطیس به شعاع متوسط R و ضخامت $t \ll R$ در فاصله $2d$ از هم قرار دارند. میدان مغناطیسی داخل هر یک B و در خارج آنها صفر است. (الف) پتانسیل برداری در محل محور ناشی از یکی از آنها را به دست آورید. (ب) پتانسیل برداری مغناطیسی را روی محور چنبره به دست آورید (راهنمایی: $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ را در مقایسه با $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ همراه نتیجه یک حلقه جریان به کار برید).

۲۶-۹ منحنیهای پسماند نوعی فریت خاص، حلقه‌ای تقریباً چهارگوش مطابق شکل ۲۷-۹ دارد، بنابراین می‌توانند به‌عنوان عناصر حافظه به کار روند. یک چنبره از این ماده به شعاعهای داخلی و خارجی a و b ، ضخامت c و یک پیچه حامل جریان I و N دور را در نظر می‌گیریم (الف) اگر $I = 1 \text{ A}$ باشد کمینه N را برای حالت اشباع آن به دست آورید (ب) وقتی جریان به صفر کاهش یابد مغناطس چقدر است؟



شکل ۲۷-۹

۱۴-۹ دو محیط مغناطیسی با تراواییهای μ_1 و μ_2 با یک فصل مشترک تخت از هم جدا شده‌اند. میدان B_1 در محیط ۱ درست زیر فصل مشترک زاویه θ_1 و میدان B_2 در محیط ۲ بلافاصله بالای فصل مشترک زاویه θ_2 را با راستای عمود بر مرز می‌سازد. نشان دهید $\mu_1 \tan \theta_2 = \mu_2 \tan \theta_1$.

۱۵-۹ گشتاور مغناطیسی یک توزیع جریان که در اثر چرخش کره باردار (مثال ۹-۸) ایجاد شده است را (الف) با استفاده از $\mathbf{m} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{J} dv$ ، (ب) با استفاده از $\mathbf{m} = \int \mathbf{M} dv$ (ج) با استفاده از پتانسیلهای ایجاد شده توسط این توزیع جریان به دست آورید.

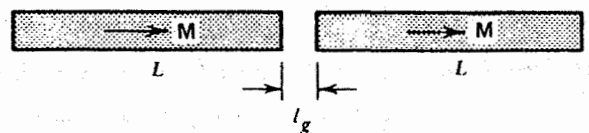
۱۶-۹ سیمی در فاصله d از وجه مسطح یک محیط نیمه‌نامتناهی با تراوایی μ و به موازات آن قرار دارد. نشان دهید اگر جریان I از سیم عبور کند، سیم جذب محیط خواهد شد. نیروی جاذبه را به دست آورید. ۱۷-۹ نشان دهید نیروی وارد بر واحد طول جریان مثال ۹-۹ برابر با $dF/dl = (\mu_0/4\pi d)I^2$ است اگر $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$.

۱۸-۹ یک سیم مستقیم حامل جریان I موازی با محور یک استوانه بلند به شعاع a در فاصله $b > a$ قرار دارد. تراوایی استوانه $\mu_1 \gg \mu_2$ است که μ_2 تراوایی محیط اطراف استوانه است. نیرو بر واحد طول سیم را به دست آورید.

۱۹-۹ مسئله ۱۸-۹ را برای حالتی که $a > b$ و $\mu_1 \gg \mu_2$ است (یک سیم داخل یک حفره استوانه‌ای) حل کنید.

۲۰-۹ روابط (۹-۱۱۹) و (۹-۱۲۰) را ثابت کنید.

۲۱-۹ دو آهنربای استوانه‌ای بسیار بلند مطابق شکل ۲۶-۹ کنار یکدیگر قرار دارند. طول هر آهنربا L ، شعاع هر یک ρ_0 است و مغناطس یکنواخت M را در طول محور دارند. دو آهنربا با یک گاف کوچک به طول ρ_0 و $l_g \ll L$ از هم جدا شده‌اند. میدانهای مغناطیسی H و B را در گاف به دست آورید.



شکل ۲۶-۹

۲۲-۹ مدار مغناطیسی شکل ۱۸-۹ از چدن ساخته شده است و ابعاد آن $l_1 = l_2 = 0.1 \text{ m}$ و $l_3 = 0.4 \text{ m}$ و $l_4 = 0.1 \text{ m}$ و سطح مقطع دایره‌ای آن $1.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ است. شار عبوری از مدار را با فرض $NI = 5.25 \times 10^2 \text{ A}$ به دست آورید.

نظریه میکروسکوپی مغناطیس

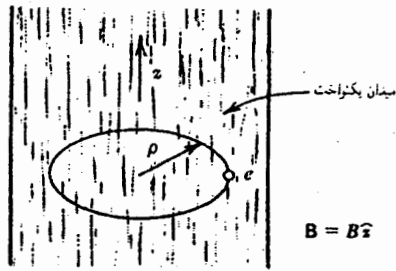
در فصل ۹ در مورد خصوصیات ماکروسکوپی مواد مغناطیسی بحث کردیم، اما در مورد ماهیت میکروسکوپی آنها بحث نکردیم. در این فصل سیمای میکروسکوپی مغناطیس را با تحلیلی از واکنش اتمهای مجزا یا مولکولها به میدانهای مغناطیسی خارجی بررسی می‌کنیم. هدف ما بحث کامل این موضوع نیست، اما همان طور که در فصل ۵ در مورد نظریه میکروسکوپی دی‌الکتريکها بحث کردیم، ایده‌های ساده‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم که ماهیت کیفی رده‌های مختلف مواد مغناطیسی را توصیف می‌کنند و یک مرتبه بزرگی از تراوایی آنها را ارائه می‌دهیم. برای توضیح قسمتی از این موضوع باید دو خصوصیت کوانتوم مکانیکی آنها را معرفی و استفاده کنیم، اما موضوع واقعی به صورت کلاسیکی بیان می‌شود.

۱-۱۰ برهم‌کنش اتمها و مولکولها با میدانهای مغناطیسی
اکنون برهم‌کنش اتمها یا مولکولهای مجزا را با میدانهای مغناطیسی در نظر می‌گیریم. برخلاف تأثیرات الکتريکی ماده که در آن بار اتمی خواه بار ساکن باشد یا متحرک با میدانهای الکتريکی برهم‌کنش می‌کنند، فقط بارهای متحرک بر میدانهای مغناطیسی تأثیر می‌گذارند. چون الکترونهای اتمی حول هسته می‌چرخند، یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی در فواصل دور تولید می‌کنند (گشتاورهای دوقطبی مداری یا چرخشی) (مثال ۸-۱۵ که حلقه باردار چرخنده را مورد بحث قرار می‌دهد ببینید) و از این رو همان طور که در بخش ۸-۸-۴ خواندید

از طریق این گشتاور با میدانهای خارجی برهم‌کنش دارند. این تصویر البته تقریبی است، زیرا بنا بر مکانیک کوانتومی مدارهای الکترونی واقعاً خوش‌تعریف نیستند. حل صحیح این مسئله را می‌توان در کتابهای مکانیک کوانتومی خواند؛ این حل شامل جواب معادله موج شرودینگر الکترون در حضور میدان مغناطیسی است. با این حال با استفاده از مدل ساده شده بالا و ایده‌های کلاسیک یک مرتبه بزرگی از تأثیرات را به دست می‌آوریم.

باید تذکر دهیم که در برخی از موارد فیزیکی به کار بردن مدل‌های فیزیکی به واقعیت نزدیک است. مثلاً در یک پلاسما یا در نواحی که تعداد الکترونهای آزاد زیاد است رفتار کلاسیک حاکم بر الکترونهاست. در واقع کار اولیه روی ماهیت مواد مغناطیسی بر پایه ایده‌های کلاسیک بود که با کمال تعجب منجر به حدسه‌های زیرکانه‌ای بر رفتار این مواد شد. همچنین بارها در ماده می‌توانند از طریق اسپین با میدانهای مغناطیسی برهم‌کنش کنند؛ اسپین یک اثر مکانیک کوانتومی ذاتی است که از نظر توزیع باری که حول خود می‌چرخد می‌توان کلاسیک در نظر گرفت. این تشابه کلاسیک یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی را پیش‌بینی می‌کند. (مثال ۸-۱۹ را ببینید). هم الکترونها و هم هسته‌ها دارای اسپین یا گشتاور دوقطبی مغناطیسی ذاتی هستند؛ از این رو با میدانهای مغناطیسی خارجی برهم‌کنش دارند.

کل گشتاور دوقطبی مغناطیسی یک الکترون حاصل جمع گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی چرخشی و ذاتی الکترون است.



شکل ۱-۱۰ یک الکترون مدار دایره‌ای در یک میدان مغناطیسی یکنواخت که بر محور عمود است.

داخلی غیر پر شده هستند، غایب است. این گروه آنها شامل عناصر گذار و عناصر قلیایی خاکی می‌شود.

۱-۱۰ منشأ دیامغناطیس — گشتاورهای دوقطبی القاشده منشأ دیامغناطیس را می‌توان با استفاده از مدل ساده زیر از حرکت الکترونی حول هسته توصیف کرد. فرض می‌کنیم الکترون با بار e در یک مدار دایره‌ای به شعاع ρ و بسامد ω حول هسته می‌چرخد (شکل ۱-۱۰). این مدار از یک حلقه جریان با جریانی مساوی با $-e\omega/2\pi$ و گشتاور دوقطبی مغناطیسی مساوی با حاصلضرب جریان در مساحت مدار و جهتی عمود بر صفحه حرکت تشکیل شده است

$$\mathbf{m} = -\frac{e\omega}{2} \rho^2 \hat{\mathbf{z}} \quad (1-10)$$

که در آن $\hat{\mathbf{z}}$ بردار یکه عمود بر صفحه حرکت است. گشتاور دوقطبی را می‌توان مستقیماً به تکانه زاویه‌ای حرکت $\mathbf{L} = m_e \omega \rho^2 \hat{\mathbf{z}}$ که در آن m_e جرم الکترون به صورت

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L} \quad (2-10)$$

است ربط داد.

اکنون یک میدان مغناطیسی \mathbf{B} که جهت آن بر صفحه مدار عمود است — یعنی در امتداد محور z — بر اتم اعمال می‌شود. این عمل بنابر قانون فاراده (در فصل ۱۱ آن را با جزئیات کامل می‌خوانیم) یک میدان الکتریکی در اتم القا می‌کند

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{dF}{dt} \quad (3-10)$$

که در آن \mathbf{E} میدان الکتریکی القاشده، C مدار الکترون و F شار مغناطیسی میدان خارجی است که از مدار عبور می‌کند. ثابت

بر پایه این گشتاور کل اتمهای گوناگون به دو گروه تقسیم می‌شوند: اتمهایی که دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی دائمی خالص هستند (مغناطیسی)، و اتمهایی که دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی دائمی نیستند (غیرمغناطیسی). در حالت اخیر گشتاورهای چرخشی و ذاتی یکدیگر را حذف می‌کنند.

همان طور که در بخش ۱-۲ خواهیم خواند، وقتی یک اتم غیرمغناطیسی در یک میدان مغناطیسی خارجی قرار گیرد، جریان القاشده‌ای در اتم تولید می‌شود. جهت این جریان اضافی بنابر قانون لنز (در فصل ۱۱ می‌خوانیم) طوری است که میدان مغناطیسی القاشده با میدان خارجی مخالفت می‌کند. این اتم را یک اتم دیامغناطیس می‌گویند. باید توجه کرد که این اثر در تمام اتمها خواه غیرمغناطیسی باشند یا مغناطیسی رخ می‌دهد. با این همه، در حالت اتمهای مغناطیسی اثرهای دیگری ممکن است وجود داشته باشد.

همان طور که در بخش ۱-۳ خواهیم دید گشتاور دوقطبی مغناطیسی دائمی یک اتم مغناطیسی تا حدودی باعث صافبندی در امتداد میدان خارجی می‌شود (مانند صافبندی دوقطبیهای الکتریکی در یک میدان الکتریکی). این تأثیر صافبندی منشأ پارامغناطیس است. علاوه بر این، در برخی از مواد به نام مواد فرومغناطیس بین گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی اتمهای مختلف نیروهای داخلی (به نام نیروهای تبادل) وجود دارند؛ این نیروها مکانیک کوانتومی محض اند که منجر به درجه بالایی از صافبندی می‌شوند.

اکنون این پرسش را مطرح می‌کنیم. چه اتمهایی در جدول تناوبی مغناطیسی هستند؟ اتمهایی که دارای "پوسته‌های غیر پر شده" هستند دارای دوقطبیهای مغناطیسی اند. تعداد الکترونها در این اتمها فرد است، و الکترون در پوسته غیر پر شده است که به اتم یک اسپین و از این رو یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی می‌دهد. الکترونها در "پوسته‌های پر شده" جفت شده هستند؛ هر دو الکترون دارای اسپین در دو جهت مخالف هستند به طوری که حاصل جمع گشتاور دوقطبی مغناطیسی آنها صفر می‌شود. در نتیجه، اتمها با پوسته‌های پر دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی نیستند.

ترکیباتی که از اتمهای مغناطیسی تشکیل می‌شوند الزاماً مغناطیسی نیستند. ترکیباتی که ساختار اتمی آنها دارای پوسته‌های خارجی غیر پر شده هستند الزاماً مغناطیسی نیستند زیرا الکترونهای پوسته خارجی که اسپین آنها متضاد است با هم جفت می‌شوند و بدین ترتیب این امر منجر به حذف کل گشتاور دوقطبی مغناطیسی می‌شود. با این همه این جفت‌شدگی در ترکیباتی که ساختار اتمی آنها دارای پوسته‌های

مغناطش M یک ماده با N مولکول بر واحد حجم از معادلات (۳-۹) و (۱۰-۱۰) به صورت $M = N \Delta m$ تعیین می‌شود. از این رو

$$M = -\frac{1}{4} \frac{e^2}{m_e} N B \sum_{i=1}^n r_i^2 \cos^2 \theta_i \quad (11-10)$$

و بدین ترتیب پذیرفتاری دیامغناطیسی ماکروسکوپی محیط $\chi = M/H$ عبارت است از

$$\chi = -\frac{1}{4} \frac{\mu_0 e^2}{m_e} N \sum_{i=1}^n r_i^2 \cos^2 \theta_i \quad (12-10)$$

این عبارت را به شکل دیگر برحسب میانگین شعاع می‌نویسیم. چون $r^2 \cos^2 \theta = \rho^2 = x^2 + y^2$ و $\langle \rho^2 \rangle = \langle r^2 \rangle (2/3)$ ؛ از این رو

$$\chi = -\frac{1}{6} \frac{\mu_0 e^2}{m_e} N \langle r^2 \rangle \quad (13-10)$$

۳-۱۰ پارامغناطیس - گشتاورهای دوقطبی دائمی

همان طور که قبلاً گفتیم، وقتی اتمهای مورد بررسی مغناطیسی هستند (یعنی وقتی دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی دائمی‌اند)، میدان تا حدودی باعث صف‌بندی گشتاور دوقطبی مغناطیسی در جهت میدان به علاوه القای همزمان یک دوقطبی مغناطیسی (اثر دیامغناطیس) می‌شود. چون در مورد اثر دیامغناطیس بحث کردیم، اکنون تأثیر صف‌بندی را بررسی می‌کنیم.

بنابر مکانیک کوانتومی حرکت الکترونها اتمی و سم‌گیری اسپین آنها تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی خارجی کوانتیده‌اند. به عبارت دیگر، کل گشتاور دوقطبی مغناطیسی اتم مجموعه‌ای مجزا از سم‌گیرها نسبت به میدان دارند. از طرف دیگر از نظر کلاسیک، این محدودیتها در جهت را می‌توان نادیده گرفت و فرض کرد که همه سم‌گیرها امکان پذیرند. گرچه این موضوع را از نقطه نظر کلاسیک بحث می‌کنیم اما بعداً مثالی می‌آوریم که در آن از گسستگی استفاده و هر دو نتیجه با هم مقایسه می‌شود. همچنین بحث وابستگی گشتاور دوقطبی مغناطیسی به اسپین را در بخش بعد می‌خوانیم.

نمونه ماکروسکوپی از یک ماده مغناطیسی تحت تأثیر اثرات گرمایی است. انرژی گرمایی مولکولها، که از برهم‌کنش بین آنها ناشی می‌شود، سم‌گیری دوقطبی مولکولی را کاتوره‌ای می‌کند. در واقع در غیاب یک میدان خارجی جمع برداری گشتاور دوقطبیهای تمام مولکولها صفر می‌شود. از طرف دیگر، میدان مغناطیسی گشتاورهایی را بر دوقطبیها وارد می‌کند که آنها را به صف می‌کند. از این رو درجه صف‌بندی یک نمونه خاص هم به شدت میدان و هم به دما بستگی دارد.

در نظر گرفتن مؤلفه مماسی میدان الکتریکی، E_t ، به‌ازای یک ρ مفروض در معادله (۳-۱۰) به‌دست می‌دهد

$$2\pi\rho E_t = -\frac{d}{dt}(\pi\rho^2 B) = -\pi\rho^2 \frac{dB}{dt}$$

یا

$$E_t = -\frac{1}{2} \rho \frac{dB}{dt} \quad (4-10)$$

میدان الکتریکی القاشده E_t گشتاوری مساوی با $-eE_t\rho$ بر الکترون وارد می‌کند که وقتی این گشتاور با آهنگ تغییر تکانه زاویه‌ای الکترون (قانون نیوتون برای چرخش) مساوی گرفته می‌شود، داریم

$$\tau = \frac{dL}{dt} \quad (5-10)$$

یا

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{1}{2} e\rho^2 \frac{dB}{dt} \quad (6-10)$$

که یک تغییر در میدان مغناطیسی ΔB یک تغییر δL در تکانه زاویه‌ای به‌صورت زیر به‌وجود می‌آورد

$$\delta L = -\frac{1}{2} e\rho^2 \Delta B \quad (7-10)$$

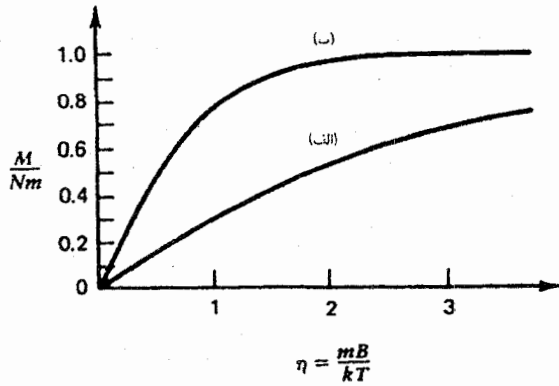
بدین ترتیب معادله (۷-۱۰) نشان می‌دهد که تشکیل یک میدان مغناطیسی باعث یک تغییر در تکانه زاویه‌ای الکترون، ΔL ، و از این رو یک تغییر در گشتاور دوقطبی مغناطیسی حاصل از معادله (۲-۱۰) می‌شود. یعنی

$$\Delta L = -\frac{1}{2} e\rho^2 B \quad (8-10)$$

$$\Delta m = -\frac{1}{4} \frac{e^2 \rho^2}{m_e} B \quad (9-10)$$

اکنون می‌توان مغناطش القاشده مجموعه‌ای از مولکولهای واقع در یک میدان مغناطیسی خارجی را محاسبه کرد. اگر هر مولکول مجزا n الکترون با مداری به شعاع r_i داشته باشد که این مدارها با میدان مغناطیسی زاویه θ_i می‌سازند، در این صورت تغییر در گشتاور دوقطبی مغناطیسی مولکول عبارت است از

$$\Delta m = -\frac{1}{4} \frac{e^2}{m_e} B \sum_{i=1}^n r_i^2 \cos^2 \theta_i \quad (10-10)$$



شکل ۱۰-۲ مغناطش یک مجموعه از ماده پارامغناطیسی واقع در یک میدان مغناطیسی B به صورت تابعی از $\eta = mB/kT$. (الف) محاسبه کلاسیکی با هیچ گونه محدودیتی بر جهت دوقطبی. (ب) محاسبه مکانیک کوانتومی با محدودیت در جهت.

متناسب است:

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{Nm^2\mu_0}{3kT} \quad (18-10)$$

این موضوع که χ با T^{-1} متناسب است به قانون کوری معروف است. در دماهای پایینتر، به طوری که $\eta \gg 1$ ، M به صورت زیر در می آید

$$M = Nm\hat{z} \quad (19-10)$$

که از میدان مغناطیسی مستقل است. در این حالت M مقدار بیشینه اش را دارد، یعنی به حالت اشباع می رسد. برای دماهای بینابین، وابستگی M به B غیرخطی است. وابستگی کامل را در شکل ۱۰-۲ (الف) می بینیم.

مثال ۱۰-۱ مغناطش یک دستگاه کوانتومی

می خواهیم پارامغناطیس را از نقطه نظر مکانیک کوانتومی در نظر بگیریم. برای اتمهایی با یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی ناشی از اسپین $1/2$ ، همان طور که در شکل ۱۰-۳ می بینیم فقط دو سمتگیری مجزای گشتاور دوقطبی m نسبت به میدان خارجی B وجود دارد: موازی یا پادموازی که مطابق با زوایای $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ است. انرژیهای مغناطیسی مطابق با این دو سمتگیری عبارتند از $-mB$ و $+mB$. احتمال پیدا کردن گشتاورهای دوقطبی در سمتگیریهای موازی و پادموازی به ترتیب عبارتند از Ce^{η} و $Ce^{-\eta}$ که در آن C یک ثابت بهنجار است؛ از این رو میانگین گشتاور دوقطبی مغناطیسی

رفتار کلاسیک پارامغناطیس شبیه رفتار صف بندی دوقطبیهای الکتریکی مولکولهای واقع در یک میدان الکتریکی خارجی (که در فصل ۵ بحث شد) است که با استفاده از روشهای آماری به صورت کمی به دست می آید. مجموعه ای از N مولکول مغناطیسی بر حجم واحد را در نظر بگیرید که هر یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی m دارند و در دمای T هستند. از نظر کلاسیک، هر گشتاور دوقطبی نسبت به یک جهت مفروض مثل محور z می تواند یک زاویه دلخواه θ بسازد. در غیاب یک میدان مغناطیسی خارجی احتمال آنکه دوقطبی بین زاویه θ و $\theta + d\theta$ باشد با $2\pi \sin \theta d\theta$ که زاویه فضایی $d\Omega$ روبه رو به این گستره از زاویه است، متناسب است. این احتمال منجر به یک میانگین صفر دوقطبیها می شود. وقتی میدان حضور دارد و در امتداد محور z انتخاب می شود، این احتمال با توزیع بولتزمن $e^{-U/kT}$ نیز متناسب می شود؛ U انرژی مغناطیسی دوقطبی است هنگامی که یک زاویه θ با میدان مغناطیسی می سازد، k ثابت بولتزمن و T دمای مطلق است. ضریب بولتزمن وابستگی احتمال به میدان و دما را با روشی کمی نشان می دهد.

در یک میدان مغناطیسی B ، انرژی مغناطیسی یک دوقطبی اتمی عبارت است از $U = -m \cdot B = -mB \cos \theta$ که در آن B در امتداد محور z و θ زاویه بین گشتاور دوقطبی و محور z است. از همان فرایندی که در بخش ۵-۲-۲ استفاده کردیم میانگین گشتاور دوقطبی مغناطیسی، $\langle m \rangle$ و از این رو مغناطش M را برحسب تابع لاتزون به دست می آوریم

$$\langle m \rangle = m \left[\coth \eta - \frac{1}{\eta} \right] \hat{z} \quad (14-10)$$

$$M = \langle m \rangle N \quad (15-10)$$

که در آن

$$\eta = \frac{mB}{kT} \quad (16-10)$$

در بیشتر موارد در مواد پارامغناطیسی، در دمای معمولی حتی به ازای B به بزرگی 10^4 گاوس (۱ تسلا)، $\eta \ll 1$ ؛ از این رو M را با پایبندترین مرتبه در η می توان تقریب زد

$$M = \frac{Nm^2B}{3kT} \quad (17-10)$$

واضح است که مغناطش در دماهای بالا با میدان مغناطیسی که یک پذیرفتاری مغناطیسی ثابت (مستقل از میدان) را به دست می دهد

مثال ۱۰-۲ پذیرفتاری یک گاز الکترون-آزاد

یک دستگاه متشکل از ذراتی با بار e و جرم m_e را در نظر بگیرید. هر ذره در یک مدار دایره‌ای حرکت می‌کند. دستگاه در یک میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد به طوری که در یک حالت تعادل آماری است. می‌خواهیم پذیرفتاری مغناطیسی گاز را محاسبه کنیم. از نظر کلاسیک کل پذیرفتاری مغناطیسی عبارت است از حاصل جمع پذیرفتاریهای پارامغناطیسی و دیامغناطیسی داده شده در معادلات (۱۰-۱۳) و (۱۰-۱۸):

$$\chi = \frac{Nm^2}{2kT} \mu_0 - \frac{Ne^2}{6m_e} \mu_0 r^2 \quad (10-24)$$

انرژی جنبشی الکترون E_k ، برحسب تکانه زاویه‌ای آن L عبارت است از $E_k = L^2/2m_e r^2$. به این ترتیب m^2 را به صورت زیر می‌نویسیم

$$m^2 = \frac{e^2}{2m_e^2} L^2 = \frac{e^2 E_k r^2}{2m_e} \quad (10-25)$$

میانگین انرژی جنبشی $\langle E_k \rangle$ را در حالت تعادل می‌توان از قضیه همیاری انرژی پیدا کرد. چون الکترونها در صفحات می‌چرخند، دارای دو درجه آزادی‌اند؛ از این رو میانگین انرژی جنبشی آنها برابر است با kT . در نتیجه میانگین گشتاور دوقطبی مغناطیسی عبارت است از

$$m^2 = \frac{e^2 kT}{2m_e} r^2 \quad (10-26)$$

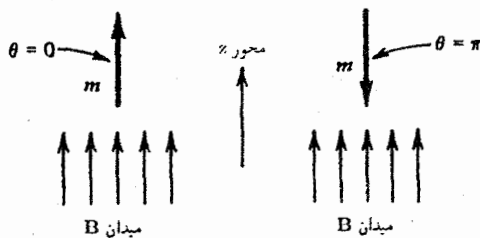
با گذاشتن این نتیجه در معادله (۱۰-۲۴) به دست می‌آوریم $\chi = 0$. این نتیجه نشان می‌دهد که پذیرفتاری مغناطیسی و از این رو گشتاور دوقطبی مغناطیسی یک جسم باردار که از آمار کلاسیک تبعیت می‌کند، صفر است. باید توجه کرد که اگر اثرهای کوانتومی را که برای الکترونها اتمی (الکترونها مقید) مهم هستند، در نظر بگیریم، یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی متناهی باید وجود داشته باشد. این اثرها شامل تکانه زاویه‌ای اسپین و کوانتش مدارهای الکترونی هستند. ■

۱۰-۴ فرومغناطیس

۱۰-۴-۱ برهم‌کنش (تبادلی) اسپین-اسپین

در شرح خصوصیت دیامغناطیسی ماده، لازم نبود که اتمها گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی دائم داشته باشند یا برهم‌کنشی میان آنها باشد. اما خصوصیت پارامغناطیسی ماده را می‌توان تنها با یک ویژگی مکانیک

I. R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, (Reading, Mass: Addison-Wesley, 1966), Vol. 2, page 35.9.



شکل ۱۰-۳ یک اتم مغناطیسی با اسپین $1/2$ در یک میدان خارجی B که نشان‌دهنده دو ترکیب مختلف، در جهت میدان و در خلاف جهت میدان است.

برابر است با

$$\langle m \rangle = m \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{e^\eta + e^{-\eta}} \hat{z} = m \hat{z} \tanh \eta \quad (10-20)$$

که در آن $\eta = mB/kT$ در معادله (۱۰-۱۶) تعریف شد، و \hat{z} بردار یکه در راستای میدان است. در این صورت مغناطش مجموعه به وسیله

$$M = Nm \hat{z} \tanh \eta \quad (10-21)$$

داده می‌شود. شکل ۱۰-۲ (ب) نمودار M/Nm را به صورت تابعی از η نشان می‌دهد. وقتی η بسیار بزرگ است، $\tanh \eta = 1$ ، از این رو M/Nm به واحد نزدیک می‌شود، که این موضوع نشان‌دهنده اشباعی است که در آن حالت تمام گشتاورهای دوقطبی در وضعیت اسپین بالا هستند.

در بیشتر موارد در دما و میدانهای معمولی، $\eta \ll 1$ ؛ از این رو $\tanh \eta = \eta$ و مغناطش برابر است با

$$M = \frac{Nm^2 B}{kT} \quad (10-22)$$

که درست همان طور که با استفاده از رفتار کلاسیک به دست آوردیم نشان‌دهنده وابستگی خطی به B و به T^{-1} است. با این همه در اندازه اثر، تناقضی می‌بینیم. به نظر می‌رسد که نتیجه برآورد مکانیک کوانتومی برای مغناطش به اندازه ضریب ۳ از برآورد کلاسیک بزرگتر است. در واقعیت این تناقض درست نیست زیرا تعریفهای گشتاور دوقطبی مغناطیسی در دو رفتار متفاوت است. در واقع این گشتاورها به صورت زیر

$$m_c^2 = 3m_d^2 \quad (10-23)$$

به هم ربط دارند، که در آن m_d و m_c به ترتیب گشتاورهای دوقطبی کلاسیک و مکانیک کوانتومی اتم هستند و بدین ترتیب تناقض از بین می‌رود. ■

اتمی برحسب اسپین آنها و از این رو برحسب گشتاور دوقطبی مغناطیسی دو الکترون به صورت زیر نوشته می شود^۲

$$U' = -2\alpha \mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_k = \frac{-2\alpha}{\beta^2} \mathbf{m}_j \cdot \mathbf{m}_k \quad (28-10)$$

که می توان آن را به شکل بسیار ساده تر

$$U' = -2\alpha S_{jz} S_{kz} = \frac{-2\alpha}{\beta^2} m_{jz} m_{kz} \quad (29-10)$$

تقریب زد. (S_j, S_{jz}) و (S_k, S_{kz}) به ترتیب اسپین و مؤلفه z اسپین اتم j ام و k ام هستند و با $\alpha > 0$ کمیتی که به فاصله بین اتمهای برهم کنش بستگی دارد، قدرت برهم کنش را اندازه می گیرند، بخصوص این کمیت با افزایش فاصله سریعاً نزول می کند.

باید توجه کنیم که انرژی برهم کنش مکانیک کوانتومی بین اسپین (گشتاور دوقطبیها) اتمهای j و k صریحاً یک میدان H'_k را در امتداد محور z تعریف می کند که این میدان مثلاً توسط اتم k در محل اتم j تولید می شود. مقایسه معادله (۲۹-۱۰) با (۲۹-۱۰) $U' = -\mu_o m_{jz} H'_k$ به دست می دهد

$$H'_k = \frac{2\alpha}{\mu_o \beta^2} m_{kz} \quad (30-10)$$

با معرفی گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی دائمی مکانیک کوانتومی [معادله (۲۷-۱۰)] و برهم کنشهای مکانیک کوانتومی [معادله (۲۹-۱۰)] و میدانها [معادله (۳۰-۱۰)] رفتار بقیه اثرها به صورت کلاسیک انجام می شود.

۱۰-۴-۲ میدان مولکولی

برای تحلیل اثر فرومغناطیسی باید میدانهای ناشی از منابع خارجی و تمام اتمهای مغناطیسی محیط در مجاورت یک اتم خاص محاسبه شود. این میدان را میدان مولکولی یا میدان موضعی می نامیم. ابتدا برهم کنشهای اسپین-اسپین و از این رو میدان موضعی کلاسیک را محاسبه می کنیم. اگرچه قبلاً گفتیم که این میدان، مغناطش دائمی مواد فرومغناطیس (که آن را گاهی اوقات مغناطش خودبه خود می نامیم) را در بر نمی گیرد، اما اطلاعاتی از ماهیت اثر به ما می دهد. روی هم رفته شکست نظریه کلاسیکی منجر به گسترش نظریه کوانتومی شد.

میدان موضعی کلاسیک یک ماده مغناطیده از مغناطش \mathbf{M} را با استفاده از فرایندی که در بخش ۱-۵ برای محاسبه میدان الکتریکی

1. W.Heisenberg, *Zeitschrift für Physik*, vol. 49, p. 619, 1928.

۲. بحث برهم کنش دو دوقطبی مغناطیسی کلاسیک در مثالهای ۱-۱۰ و ۳-۱۲ را ببینید.

کوانتومی بیان کرد: یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی دائمی که با اسپین ذاتی k تولید می شود با یک برهم کنش میان این اسپینها همراه است، یعنی برهم کنشی از طریق برخوردی که جهت گشتاورهای دوقطبی را به صورت کاتوره ای در می آورند. همان طور که قبلاً گفتیم، اسپین، یک تکانه زاویه ای ذاتی، مشابه تکانه زاویه ای مداری است، که در یک میدان مغناطیسی فقط می تواند دارای سمتگیری مجزا باشد (مثال ۱-۱۰). با اسپین اتم یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی همراه است که با

$$\mathbf{m} = g \frac{e\hbar}{2m_e} \mathbf{S} = g\beta^2 \mathbf{S} = \beta \mathbf{S} \quad (27-10)$$

به آن مربوط می شود، $\beta^2 = e\hbar/2m_e$ مگتون بور است، \hbar ثابت پلانک تقسیم بر 2π است، و g یک ثابت به نام ضریب g است، با مقداری برابر $(2 \approx 2.0018)$. معادله (۲۷-۱۰) مشابه معادله (۲-۱۰) است که گشتاور دوقطبی مغناطیسی را به تکانه زاویه ای مداری ربط می دهد.

خصوصیت دیگر مغناطیسی ماده اثر فرومغناطیسی است که موادی دارای آن هستند که در مورد ویژگیهای ماکروسکوپی، یعنی رابطه ساختاری مغناطیسی آنها در بخش ۹-۴ بحث کردیم. این اصول برای بیان این اثر که باید برهم کنشهای دیگری بین اتمهای مواد فرومغناطیسی وجود داشته باشد، کافی نیست. یک نوع برهم کنش که به راحتی به ذهن می رسد (اما با این همه، شامل این اثر نمی شود) برهم کنش دوقطبی-دوقطبی است، که از میدان مغناطیسی حاصل از یکی از دوقطبیهای اتمی در مکان دوقطبی دوم ناشی می شود. این اثر با جزئیات بیشتر در مثال ۱-۳ بررسی می شود. همچنین برای تأثیر آن در خصوصیت الکتریکی ماده مثال ۵-۳ را ببینید.

اثری که خصوصیت فرومغناطیسی را توضیح می دهد یک اثر مکانیک کوانتومی است که از اصل طرد پاولی به نام برهم کنش (تبادلی) اسپین-اسپین نتیجه می شود.^۱ بنابر اصل طرد پاولی الکترونها نمی توانند یک حالت کلی را اشغال کنند، مثلاً، اگر دو الکترون اتمهای مجاور یک حالت مداری را اشغال کنند، اسپین آنها باید پادموازی باشد. برعکس، اگر الکترونها دارای اسپین موازی باشند، در آن صورت این الکترونها باید در حالتی مداری متفاوت باشند. چون الکترونهایی که یک حالت کوانتومی را اشغال می کنند بیشتر از الکترونهایی که فقط مجازند در حالتی مداری متفاوتی باشند می توانند به یکدیگر نزدیک شوند، انرژی الکتروستاتیکی دو الکترون به ساختار اسپین آنها بستگی دارد.

انرژی برهم کنش تبادلی مکانیک کوانتومی U' یک زوج الکترون

آن را به عنوان یک پارامتر در نظریه انتخاب می‌کنیم (مسئله ۱۰-۸ را ببینید).

واکنش اتم زام به کل میدان $H_0 + H'$ را با استفاده از فرایند گفته شده در بخش ۱۰-۳، یعنی پارامغناطیس محاسبه می‌کنیم. اما به دلیل ماهیت کوانتومی این اثر، دقیقتر است تا از فرایند بحث شده در مثال ۱۰-۱ استفاده کنیم. این فرایند، محدودیتهای مکانیک کوانتومی را روی جهت گشتاور دوقطبی مغناطیسی نسبت به جهت میدان مغناطیسی اعمال می‌کند. با این حال در اینجا رفتار کلاسیک را پیش می‌گیریم. میانگین $\langle m_{jz} \rangle$ با تابع لاتزون [معادله (۱۰-۱۴)] داده می‌شود

$$\langle m_{jz} \rangle = m \left(\coth \eta - \frac{1}{\eta} \right) = mB(\eta) \quad (۱۰-۳۴)$$

که در آن

$$\eta = \frac{\mu_0 m H}{kT} = \frac{\mu_0 m (H_0 + H')}{kT} \quad (۱۰-۳۵)$$

در به دست آوردن این فرمول بر تأثیر اتمهای مجاور بر روی یک اتم مرکزی مفروض z تأکید کردیم. چون اتمها یکسان اند اگر محاسبات را با انتخاب هر اتم دیگری به عنوان اتم مرکزی تکرار کنیم نتیجه یکسان به دست می‌آید. از این رو نتیجه می‌گیریم که میانگین گشتاور دوقطبی مفروض در معادله (۱۰-۳۴) برای تمام اتمهای مجاور یکسان است، یا

$$\langle m_{kz} \rangle = mB(\eta) \quad (۱۰-۳۶)$$

که در آن $k = 1, 2, \dots, n$. اکنون میانگین میدان مولکولی در یک اتم مرکزی مفروض را می‌توان برحسب تابع لاتزون با جایگزینی معادله (۱۰-۳۶) در معادله (۱۰-۳۳) تعیین کرد؛ یعنی

$$H' = \frac{\gamma \alpha n}{\mu_0 \beta^2} \langle m_z \rangle = \frac{\gamma \alpha n m}{\mu_0 \beta^2} B(\eta) \quad (۱۰-۳۷)$$

۱. رفتار مکانیک کوانتومی به دست می‌دهد

$$\langle m_{jz} \rangle = \beta S B_S(\eta')$$

که در آن

$$B_S(\eta') = \frac{1}{S} \left[\left(S + \frac{1}{\gamma} \right) \coth \left(S + \frac{1}{\gamma} \right) \eta' - \frac{1}{\gamma} \coth \frac{1}{\gamma} \eta' \right]$$

تابع بریلون نامیده می‌شود، و

$$\eta = \frac{\mu_0 \beta H}{kT}$$

در واقع تابع بریلون به ازای S بزرگ لزوماً هم‌ارز با تابع لاتزون است. (به ازای اعداد کوانتومی بزرگ مکانیک کوانتومی به مکانیک کلاسیک نزدیک می‌شود.)

ناشی از گشتاور دوقطبیهای اتمهای مجاور، گفته شد، می‌توان تعیین کرد. در این روش فرض بر این است که این میدان در یک اتم خاص با میدانی که در یک حفره کروی کوچک در ماده وجود دارد برابر است، با این فرض که حضور حفره تأثیری در بقیه ماده ندارد. از این رو میدان H [معادلات (۴-۳۴) و (۵-۲)] با رابطه زیر داده می‌شود

$$H = H_0 + \frac{1}{3} M \quad (۱۰-۳۱)$$

که در آن H_0 میدان ماکروسکوپی در ماده است. دقت کنید که میدان مولکولی الکتریکی یک ماده دی‌الکتریکی قطبیده، [معادله (۵-۲)]، برای داشتن خصوصیت فروالکتریکی دی‌الکتریکها کافی بود. با این همه معادله (۱۰-۳۱) همان طور که بعداً خواهیم دید فرومغناطیس را نشان نمی‌دهد.

اکنون H را در یک ماده فرومغناطیسی واقع در یک میدان خارجی H_0 در امتداد z وقتی شامل برهم‌کنشهای اسپین-اسپین است محاسبه می‌کنیم. باید به این نکته توجه کرد که مسئله کلی عمومی مکانیک کوانتومی آنچنان پیچیده است که تاکنون به طور دقیق حل نشده است. با این همه، بعضی از روشهای تقریبی گسترش یافته است. در این مورد روش میدان مولکولی را که توسط ویس گسترش یافته است به اختصار توضیح می‌دهیم.

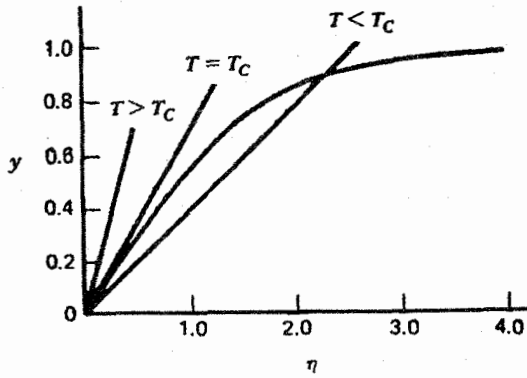
در تقریب میدان مولکولی ویس روی یک اتم مرکزی زام خاص توجه می‌کنیم. چون برهم‌کنش اسپین-اسپین سریعاً با فاصله نزول می‌کند فقط چند اتم مجاور این اتم به طور قابل ملاحظه‌ای با این اتم مرکزی برهم‌کنش می‌کنند. یک تقریب این است که تأثیر این اتمهای مجاور را با میانگین برهم‌کنش آنها جایگزین کنیم. به این ترتیب با استفاده از معادله (۸-۱۱۱)، می‌توان نوشت $U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ یا

$$E = -\mu_0 m_{jz} (H_0 + H') = -\mu_0 m_{jz} H \quad (۱۰-۳۲)$$

که در آن H' میدانی است که در امتداد محور z توسط n اتم مجاور تولید می‌شود؛ یعنی

$$H' = \gamma \alpha \left(\sum_{k=1}^n m_{kz} \right) \frac{1}{\mu_0 \beta^2} \quad (۱۰-۳۳)$$

و H میدان مولکولی در محل اتم زام است. در این مرحله تعداد اتمهایی که نقش دارند یعنی n معلوم نیست و انتظار داریم که این تعداد تابعی از شدت برهم‌کنش تبادلی (یعنی α) و از این رو تابعی از خصوصیات عمده ماده فرومغناطیسی باشد. به هر حال در این مرحله



شکل ۵-۱۰ جواب برای مغناطش خودبه‌خود با استفاده از تابع لاتزون به صورت تابعی از دما که نشان‌دهنده دمای کوری T_C است.

پاسخ به این سؤال، جواب گرافیکی معادلات (۳۸-۱۰) و (۳۹-۱۰) را بار دیگر امتحان می‌کنیم. معادله (۳۸-۱۰) به‌ازای $H_0 = 0$ عبارت است از $y = (kT\beta^2 / 2\alpha nm) \eta$ که معادله خط مستقیمی است که از مبدأ عبور می‌کند (شکل ۴-۱۰). چون تابع $B(\eta)$ نیز از مبدأ عبور می‌کند یک جواب در $\eta = 0$ وجود دارد. اما این یک جواب بدیهی است. جواب دوم در صورتی در $\eta \neq 0$ وجود دارد که شیب اولیه $B(\eta)$ در $\eta = 0$ از شیب خط بزرگتر باشد. برای بررسی این امکان روی حد $\eta \ll 1$ توجه می‌کنیم. به‌ازای $\eta \ll 1$ معادله (۳۴-۱۰) به‌دست می‌دهد

$$B(\eta) \approx \frac{1}{3} \eta \quad \eta \ll 1 \quad (41-10)$$

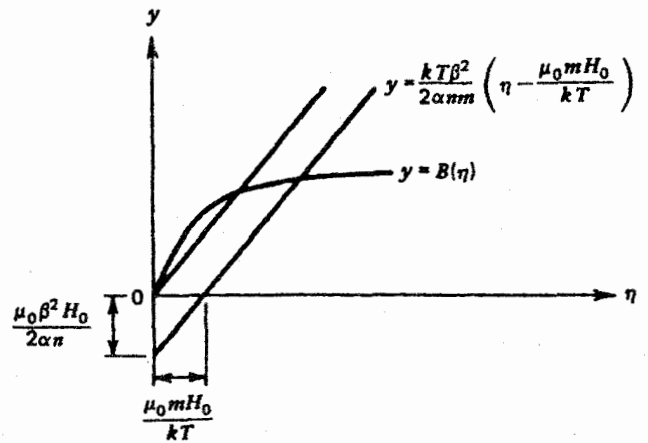
که یک تابع خطی با شیب $1/3$ است. از طرف دیگر شیب خط برابر است با $kT\beta^2 / 2\alpha nm^2$ ؛ از این رو شرط جواب غیر بدیهی این است که

$$\frac{1}{3} \geq \frac{kT\beta^2}{2\alpha nm^2} \quad (42-10)$$

این نتیجه شرطی بر روی دمای یک ماده مغناطیسی با خصوصیات اتمی مفروض در نظر می‌گیرد که باعث مغناطش خودبه‌خود می‌شود. در حالت حدی که شیبها مساوی هستند اصطلاحاً دمای کوری، T_C را تعریف می‌کنند، یعنی یک کمیت اندازه‌گیری شده به صورت تجربی که پایتتر از آن مغناطش غیرصفر است (شکل ۵-۱۰). در نظر گرفتن علامت تساوی در معادله (۴۲-۱۰) به‌دست می‌دهد:

$$T_C = \frac{2m^2}{3k\beta^2} \alpha n \quad (43-10)$$

ضمن آنکه T کم می‌شود، مغناطش خودبه‌خود که با تقاطع خط با تابع لاتزون تعیین می‌شود، زیاد می‌شود تا آنکه به مقدار بیشینه‌اش



شکل ۴-۱۰ جواب گرافیکی خودسازگار از اثر فرومغناطیسی با استفاده از تابع لاتزون. مغناطش در حضور یک میدان خارجی و در غیاب آن (مغناطش خودبه‌خود) تعیین می‌شود.

چون $H = H_0 + H'$ ، در این صورت این نتیجه H را به خصوصیات اتمی نمونه ربط می‌دهد. این رابطه غیرخطی است و از این رو نمی‌توان آن را به صورت تحلیلی حل کرد؛ اما با پارامتری کردن رابطه از طریق معرفی تابع y

$$y = B(\eta) \quad (38-10)$$

$$y = \frac{kT\beta^2}{2\alpha nm^2} \left(\eta - \frac{\mu_0 m H_0}{kT} \right) \quad (39-10)$$

می‌توان به یک جواب گرافیکی دست یافت. همان‌طور که در شکل ۴-۱۰ نشان داده شده است اکنون می‌توان معادله (۳۷-۱۰) را با رسم y به صورت تابعی از η برای هر دو معادله (۳۸-۱۰) و (۳۹-۱۰) حل کرد. محل تقاطع منحنیها مقدار η و از این رو مقدار H' را به‌دست می‌دهد.

۳-۴-۱۰ مغناطش خودبه‌خود

اکنون مغناطش محیط را با استفاده از معادله (۳۶-۱۰) محاسبه می‌کنیم. اگر N چگالی اتمهای مغناطیسی در محیط باشد، مغناطش M به صورت زیر است

$$M = N \langle m_{jz} \rangle = NmB(\eta) \quad (40-10)$$

حال می‌توان به این پرسش پاسخ داد که آیا یک مغناطش M می‌تواند حتی در غیاب میدان مغناطیسی خارجی H_0 وجود داشته باشد. اگر این مغناطش وجود داشته باشد، آن را مغناطش خودبه‌خود و موادی که این ویژگی را از خود نشان می‌دهند، مواد فرومغناطیسی می‌نامیم. برای

که در آن $M_S = Nm$ مغناطش اشباع است. به طور مثال مغناطش اشباع تجربی آهن برابر است با $2,15T$ و $\mu_0 M_S = 2,15T$ و دمای کوری تجربی آن $1043K$ است. به این ترتیب $\gamma = 995$ که از تخمین کلاسیکی $1/3$ بسیار بزرگتر است، و از این رو نیاز برهم کنش اسپین-اسپین را برای در بر گرفتن فرومغناطیس نشان می دهد.

۴-۴-۱۰ پذیرفتاری مغناطیسی مواد فرومغناطیسی در بالای دمای کوری - قانون کوری-ویس

مواد فرومغناطیسی در بالای دمای کوری مغناطش خودبه خودی را از خود نشان نمی دهند. اما چون دارای گشتاورهای دو قطبی مغناطیسی دائمی هستند، در حضور میدانهای خارجی خصوصیات پارامغناطیسی را نشان می دهند. با این حال، پذیرفتاری پارامغناطیسی که برای مواد غیر فرومغناطیسی قبلاً محاسبه شد [معادله (۱۰-۱۸)]، برحسب تصادف در مورد مواد فرومغناطیسی درست نیست. حال نشان می دهیم که خصوصیات فرومغناطیسی این مواد باعث انحراف از معادله (۱۰-۱۸) می شود.

معادلات (۱۰-۳۸) و (۱۰-۳۹) را در نظر بگیرید. η را در دمای بالای T_C می توان کوچک فرض کرد، از این رو $B(\eta)$ را با معادله (۱۰-۴۱) نشان می دهیم. بنابراین، این معادلات به دست می دهند

$$\frac{kT\beta^2}{\gamma\alpha n m^2} \left(\eta_0 - \frac{\mu_0 m H_0}{kT} \right) = \frac{1}{3} \eta_0 \quad (47-10)$$

یا برحسب دمای کوری

$$kT \left(\eta_0 - \frac{\mu_0 m H_0}{kT} \right) = kT_C \eta_0 \quad (48-10)$$

که به سادگی آن را برای η_0 حل می کنیم

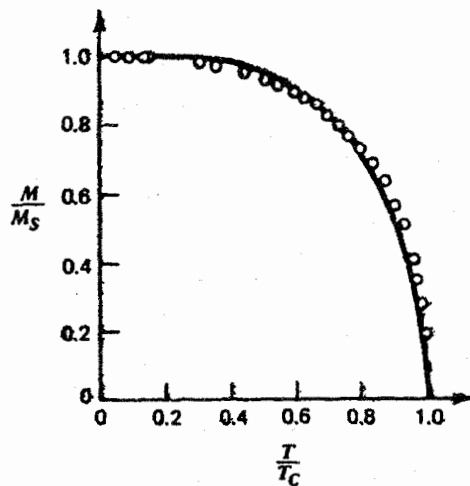
$$\eta_0 = \frac{\mu_0 m H_0}{k(T - T_C)} \quad (49-10)$$

اکنون با استفاده از معادله (۱۰-۴۰) مغناطش ماده را محاسبه می کنیم. اگر η_0 را کوچک در نظر بگیریم داریم

$$M = \frac{1}{3} Nm \eta_0 \quad (50-10)$$

که وقتی η_0 مثل معادله (۱۰-۴۹) برحسب H_0 نوشته می شود خواهیم داشت

$$M = \frac{\mu_0 N m^2 H_0}{3k(T - T_C)} \quad (51-10)$$



شکل ۱۰-۶ مغناطش خودبه خودی یک ماده فرومغناطیسی به صورت تابعی از دما همراه با اندازه گیریهای تجربی که به صورت دایره نشان داده شده است. T_C دمای کوری است.

(حد اشباع)، $M_S = Nm$ ، که یک کمیت قابل اندازه گیری از نظر تجربی است، می رسد. شکل ۱۰-۶ مقایسه بین نظریه و تجربه را برای مغناطش خودبه خود M به صورت تابعی از T/T_C ، به ازای $S = 1/2$ ، نشان می دهد.

آموزنده است تا عبارت مکانیک کوانتومی میدان مولکولی $H = H_0 + H'$ را به شکل نتیجه کلاسیک مفروض در معادله (۱۰-۳۱) دوباره حساب کنیم. میدان H' را می توان به سادگی با استفاده از معادلات (۱۰-۳۷) و (۱۰-۴۰) برحسب مغناطش M محیط یعنی

$$H' = \frac{\gamma\alpha n}{\mu_0 \beta^2 N} M = \gamma M \quad (44-10)$$

نوشت. از این رو

$$H = H_0 + \gamma M$$

که در آن

$$\gamma = \frac{\gamma\alpha n}{\mu_0 \beta^2 N} \quad (45-10)$$

کمیت γ برحسب خصوصیات قابل اندازه گیری ماده (دمای کوری) به طور مناسبتری نوشته می شود. با استفاده از معادله (۱۰-۴۳) به دست می آوریم

$$\gamma = \frac{\gamma k T_C}{m^2 N \mu_0} = \frac{\gamma k T_C N \mu_0}{\mu_0^2 M_S^2} \quad (46-10)$$

جدول ۱-۱۰ دمای کوری عناصر فرومغناطیسی

عنصر	T_C بر حسب کلونین
Fe	۱۰۴۳
Co	۱۳۹۳
Ni	۶۳۱
Gd	۲۸۹
Dy	۱۰۵

اکنون یک مرتبه بزرگی را با انتخاب $m = 10^{-23} \text{ J/T}$, $m = 15$ و $r = 2\text{\AA}$ محاسبه می‌کنیم. به این ترتیب $J = 1.5 \times 10^{-23} \text{ J}$. نسبت U/kT در دمای 1 K از مرتبه واحد است؛ از این رو این نوع برهم‌کنش نمی‌تواند در ناحیه پایین 10^3 K که در آن ناحیه آهن فرومغناطیس است، اثرهای فرومغناطیسی به وجود آورد. ■

۱-۵. حوزه‌های فرومغناطیسی

مواد فرومغناطیسی در زیر دمای کوری همیشه خصوصیات فرومغناطیسی را از خود نشان نمی‌دهند. ویس^۱ در سال ۱۹۰۷ برای توضیح این پدیده نظریه‌ای ارائه کرد که توده ماده را می‌توان به حوزه‌هایی تقسیم کرد، همان طور که در شکل ۱-۷ برای یک بلور ساده و یک بلور مرکب می‌بینیم. هر حوزه طوری انتخاب می‌شود که از نظریه بالا پیروی می‌کند، یعنی در دماهای پایینتر از نقطه کوری، مغناطیده خودبه‌خود با یک جهت کاتوره‌ای برای مغناطش برابند آن حوزه باشد. با این همه درجه مغناطش هر حوزه با دمای ماده تنظیم می‌شود. کل مغناطش ماده، حاصل جمع تمام مغناطشهای حوزه‌های گوناگون است. کل مغناطش قطعه با حوزه‌هایی که به صورت کاتوره‌ای قطبیده‌اند، باید صفر باشد. از طرف دیگر وقتی حوزه‌ها در یک جهت قطبیده می‌شوند، یکدیگر را تقویت می‌کنند که به این ترتیب یک میدان مغناطیسی بزرگ را به وجود می‌آورند. این تقویت را با اعمال یک میدان مغناطیسی خارجی ضعیف می‌توان به وجود آورد.

به این ترتیب پذیرفتاری مغناطیسی $\chi = M/H$ عبارت است از

$$\chi = \frac{\mu_0 m^2 N}{3k(T - T_C)} = \frac{C}{T - T_C} \quad (52-10)$$

این قانون کوری-ویس است و C را ثابت کوری می‌نامیم. جدول ۱-۱۰ دمای کوری عناصر فرومغناطیسی را نشان می‌دهد.

۱۰-۳. برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی و فرومغناطیس

همان طور که قبلاً گفتیم، برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی بین اتمهای مغناطیسی برای بیان فرومغناطیس کافی نیست. یک اتم مرکزی با گشتاور دوقطبی مغناطیسی \mathbf{m} در یک نمونه فرومغناطیسی را در نظر بگیرید و به برهم‌کنش این اتم با نزدیکترین n اتم به آن توجه کنید. میدان مغناطیسی که توسط یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاور دوقطبی \mathbf{m} تولید می‌شود با معادله (۸-۹۸) داده می‌شود

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right]$$

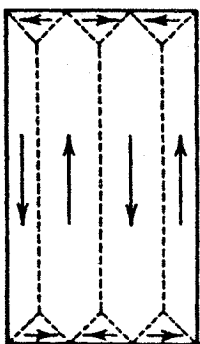
که در آن r فاصله دوقطبی تا نقطه مشاهده است. انرژی برهم‌کنش یک اتم با گشتاور دوقطبی مغناطیسی \mathbf{m}_i واقع در این میدان برابر است با $\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{B}$ - [معادله (۸-۱۱۱)]. از این روکل انرژی برهم‌کنش نزدیکترین n اتم به اتم مرکزی برابر است با

$$U = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_i}{r_i^3} - \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_i)(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_i)}{r_i^5} \right]$$

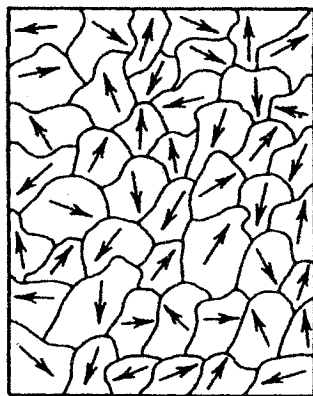
که در آن r_i فاصله اتم مرکزی تا i امین اتم است.

چون مرتبه‌ای از بزرگی این برهم‌کنش مورد نظر ماست، تقریبهای زیر را یعنی $r_i \approx r$ و $\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m} - 3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_i)(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_i) \approx m^2$ به‌ازای تمام i ها که در آن بردار \mathbf{r}_i در امتداد \mathbf{r} است، در نظر می‌گیریم. به این ترتیب

$$U = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{nm^2}{r^3}$$

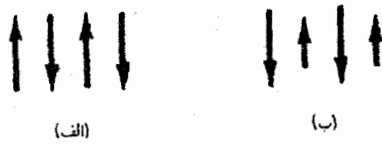


(الف)



(ب)

شکل ۱-۷ ساختار حوزه فرومغناطیسی. (الف) بلور ساده که دیواره‌های حوزه را به صورت نقطه‌چین نشان می‌دهد. (ب) بلور مرکب که دیواره‌های بلور را به صورت خط پر نشان می‌دهد، و حوزه‌ها در آن نشان داده نشده‌اند. یکانه‌ها نشان‌دهنده جهت مغناطش بلورهای مجزا هستند.



شکل ۸-۱۰ نمایش طرحوار اسپینهای اتمی در (الف) مواد پادفرومغناطیسی و (ب) مواد فرومغناطیسی.

صف بندی، زیر یک دمای مشخص که دمای کوری نیز می نامیم به دما نیز وابسته اند، اسپینها همان طور که در شکل ۸-۱۰ (الف) می بینیم به صورت متناوب صف بندی می کنند. جهت های اسپین در بالای این دما کاتوره ای هستند.

این شکل اسپینی متناوب در کروم را می توان با پراکندگی بعضی از ذرات یک بلور کروم که خود دارای اسپین هستند، مانند نوترونها، اثبات کرد. درجه پراکندگی بستگی به این دارد که آیا اسپین نوترون با پراکننده موازی است یا پادموازی. بنابراین وقتی حالت اسپینی از یک حالت کاتوره ای (بالای دمای کوری) به یک حالت متناوب (زیر دمای کوری) تغییر می کند، الگوی تداخلی نوترون پراکنده شده تغییر می کند.

نوع دیگری از مواد پادفرومغناطیسی دارای ترکیبی از صف بندی فرومغناطیسی و پادفرومغناطیسی اند و فری مغناطیس، یا به سادگی فریت نامیده می شوند. این در حالت $ZnOFe_2O_3$ امکان پذیر است، زیرا این مولکول دو اتم مغناطیسی (اتمهای فلز روی و آهن) دارد که در یک ساختار حلزونی چیده شده اند. اسپین اتمهای مختلف آهن با هم و اسپین اتمهای مختلف روی با هم صف می بندند. پایینترین انرژی کل دستگاه با هم وضعیتی است که در آن برآیند اسپین آهن با برآیند اسپین روی پادموازی است. اگر مثل شکل ۸-۱۰ (ب) اسپینهای متضاد دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی غیر مساوی باشند، ماده پادفرومغناطیس را یک ماده فری مغناطیس یا به سادگی یک فریت می نامیم. سنگ معدن مغناطیسی (Fe_2O_3) مثالی از یک فریت است که از زمانهای قدیم شناخته شده بود. مثالهای دیگری از فری مغناطیسها (فریتها) اکسیدهایی هستند که در آنها Zn در $ZnFe_2O_3$ با Mn, Ni, Co ، Cu, Mg, Cd یا آهن دو ظرفیتی جایگزین می شود.

خصوصیت مهم فریتها حساسیت بالای آنهاست (تا $10^4 \Omega \cdot m$) این حساسیت بالا، آنها را رساناهای ضعیف الکتریسیته - خصوصیتی که در کاربردهای بسامد بالا ارزشمند است - می سازد. وقتی از رساناهای بسیار خوب در این نوع از کاربردها استفاده می شود، جریانهای ادی در

روش تجربی بیترا^۱ شواهدی در حمایت از نظریه حوزه ارائه داد. در این روش، ماده معلق کلوئیدی از یک پودر مغناطیسی نرم فراهم می شود. ساختار حوزه یک بلور فرومغناطیسی با قراردادن یک قطره از این ماده معلق کلوئیدی بر روی سطح بلور مطالعه می شود. وقتی یک عکس میکروسکوپی از سطح را بررسی می کنیم، می بینیم که ذرات در برخی از مرزها (مرزهای حوزه) جمع می شوند. جمع شدن به این دلیل است که حوزه های مجاور در جهت های متفاوتی مغناطیده می شوند، که این امر به میدانهای موضعی قوی در فصل مشترک حوزه ها منجر می شود. با این روش، حرکت های واقعی دیواره ها و اندازه حوزه ها تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی خارجی دیده می شوند.

شکل گیری ساختار چند حوزه ای یک قطعه فرومغناطیس معمولاً از طریق انرژیها میسر است. سه نوع انرژی مغناطیسی وجود دارد که بررسی می شود. در فصل ۱۲ می خوانیم که بلور مغناطیده، انرژی مغناطیسی ذخیره شده وابسته به مغناطش آن را دارد؛ از این رو این انرژی به ساختار حوزه بستگی دارد. این موضوع درست است، زیرا اگر بلور بتواند خود را به حوزه هایی با مغناطش متضاد مرتب کند، کل مغناطش کاهش می یابد، که این امر منجر به انرژی مغناطیسی ذخیره شده می شود. نوع دیگری از انرژی مغناطیسی، انرژی مغناطیسی مورد نیاز برای بر پا کردن و نگاه داشتن مرزهای حوزه است. این انرژی لازم است زیرا نیروهای تبدیلی، سمتگیری موازی را بر سمتگیری پادموازی مغناطش "ترجیح" می دهند (بخش ۴-۱۰-۶ را ببینید). علاوه بر این ملاحظات بیشتر بلورها دو محور دارند، که در آنها برقراری مغناطش در امتداد یک محور (محور آسان) ساده تر از برقراری مغناطش در امتداد محور دیگر (محور سخت) است. اختلاف انرژی بین این دو حالت را انرژی ناهمسانگردی می نامیم. تعداد و شکل حوزه هایی که یک بلور فرومغناطیسی کامل می خواهد تشکیل دهد با در نظر گرفتن انرژی بالا طوری دیکته می شود که کل انرژی مغناطیسی بلور را کمینه کند.

۶-۴-۱۰ پادفرومغناطیس و فرومغناطیس (فریت)

معادله های (۲۸-۱۰) و (۲۹-۱۰) انرژی برهم کنش تبدیلی را بین دو اتم مغناطیسی به دست می دهند. برای مواد فرومغناطیسی $\alpha > 0$ ، یعنی انرژی مغناطیسی اسپینهای موازی کمتر از انرژی مغناطیسی اسپینهای پادموازی هستند. در مواد مشخصی مانند کروم و منگنز، α منفی است، یعنی انرژی مغناطیسی اسپینهای پادموازی کمتر از انرژی مغناطیسی اسپینهای موازی اند این مواد که پادفرومغناطیس نامیده می شوند، تمایل به صف بندی اسپین پادموازی دارند. این خصوصیت

1. F. H. Bitter, *Physical Review*, vol. 41, p. 507, 1932.

ایجاد اتلافهای حرارتی بزرگ بسیار مؤثر است (مثال ۱۱-۳ را ببینید). از این رو، استفاده از فریتها به جای رساناهای خوب در این کاربردها به کمینه کردن این اتلافها کمک می‌کند.

۵-۱۰ خلاصه

اتمها به دو گروه تقسیم می‌شوند: اتمهایی که گشتاور دوقطبی مغناطیسی دائمی خالص (مغناطیسی) ناشی از اسپین دارند، و اتمهایی که گشتاور دوقطبی مغناطیسی دائمی خالص ندارند (غیرمغناطیسی). وقتی یک اتم غیرمغناطیسی در یک میدان مغناطیسی خارجی و عمود بر مدار آن قرار می‌گیرد، میدان یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی القا می‌کند که با خود آن میدان مخالفت می‌کند (قانون لنز)

$$\Delta \mathbf{m} = -\frac{1}{4} \frac{e^2 \rho^2}{m_e} \mathbf{B} \quad [9-10]$$

که در آن ρ و m_e شعاع مدار و جرم الکترون هستند این اثر برای یک مجموعه از اتمها با چگالی تعداد N واقع در میدان مغناطیسی، منجر به پذیرفتاری زیر

$$\chi = -\frac{1}{6} \frac{\mu_0 e^2}{m_e} N \langle r^2 \rangle \quad [13-10]$$

می‌شود که در آن روی سمتگیری مدار میانگین می‌گیریم.

وقتی اتمهای مغناطیسی گشتاور دوقطبی مغناطیسی m در یک میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = B\hat{z}$ قرار گیرند، یک پذیرفتاری اضافی از خود نشان می‌دهند. این پذیرفتاری درست مانند حالت الکتریکی، از تمایل میدان برای به صف درآوردن دوقطبیهای دائمی در جهت آن میدان ناشی می‌شود. برخوردهای کاتوره‌ای با دیگر اتمها با این تمایل مخالفت می‌کند. درست مانند حالت الکتریکی، این پذیرفتاری جهتی در یک دمای مطلق T مفروض، با تابع لانژون به دست می‌آید

$$\langle \mathbf{m} \rangle = m \left(\coth \eta - \frac{1}{\eta} \right) \hat{z} \quad [14-10]$$

که در آن $\eta = mB/kT$ و $\langle \mathbf{m} \rangle$ میانگین مؤلفه \mathbf{m} در امتداد میدان است. در دمای بالا قانون کوری را به دست می‌آوریم

$$\chi = \frac{\mu_0 m^2 N}{3kT} \quad \text{و} \quad \langle m_z \rangle \approx \frac{m^2 B}{3kT} \quad [18-10]$$

که در آن N چگالی عددی مجموعه است. در دماهای بسیار پایین و/یا B بزرگ، میدان می‌تواند بر اثر کاتوره‌ای غلبه کند و منجر به صف‌بندی کامل (اشباع) شود. در آن صورت مغناطش مجموعه به

$$\mathbf{M} = Nm\hat{z} \quad [19-10]$$

نزدیک می‌شود.

اتمهای فرومغناطیسی اتمهای مغناطیسی هستند که علاوه بر برهم‌کنش کاتوره‌ای بالا می‌توانند یک برهم‌کنش اضافی در میان خود اتمها برای صف‌بندی داشته باشند. این برهم‌کنش اضافی یک اثر مکانیک کوانتومی است که منشأ آن برهم‌کنشی است که اصطلاحاً آن را برهم‌کنش اسپین-اسپین می‌نامیم. اثر این برهم‌کنش عملاً به یک میدان مغناطیسی اضافی در محل هر اتم که از n اتم همسان مجاور آن اتم به وجود می‌آید، منجر می‌شود. در واقع این میدان برابر است با

$$\mathbf{H}' = \frac{2\alpha n}{\mu_0 \beta^2} \langle m_z \rangle \hat{z}$$

که در آن $\langle m_z \rangle$ میانگین گشتاور دوقطبی اتمهای همسان در امتداد میدان خارجی، $\beta = e\hbar/m_e$ ، و α یک ثابت است که به نوع ماده بستگی دارد. به این ترتیب کل میدان در محل هر اتم یکسان با حاصل جمع این میدان و میدان خارجی H_0 برابر است

$$H = H_0 + H'$$

تحت تأثیر این میدان، گشتاور دوقطبی مغناطیسی یکی از اتمهای همسان، درست مانند حالت اتمهای پارامغناطیسی یک درجه صف‌بندی دارد. از این رو $\langle m_z \rangle$ با تابع لانژون داده می‌شود

$$\langle m_z \rangle = m \left[\coth \eta - \frac{1}{\eta} \right] \quad [14-10]$$

که در آن $\eta = \mu_0 mH/kT$ است. چون H خود از طریق H' به $\langle m_z \rangle$ وابسته است در این صورت سؤالی که باید پاسخ دهیم آن است که آیا یک جواب فیزیکی غیربدیهی از رابطه لانژون برای $\langle m_z \rangle$ وجود دارد یا خیر.

اگر این جواب وجود داشته باشد، در آن صورت می‌خواهیم بدانیم چگونه $\langle m_z \rangle$ در مقایسه با حالتی که برهم‌کنش اسپین-اسپین غایب است (در مقایسه با اثر پارامغناطیسی)، به T وابسته است، و نهایتاً آیا یک جواب حتی هنگامی که میدان مغناطیسی خارجی H_0 صفر می‌شود وجود دارد یا نه.

آزمایش گرافیکی مانند آزمایش عددی شرط بالا نشان می‌دهد که یک جواب غیربدیهی وجود دارد، حتی وقتی $H_0 = 0$ است، یعنی، ماده تحت نفوذ این برهم‌کنش اضافی می‌تواند صف‌بندی خودبه‌خود (مغناطش) داشته باشد. اما، مغناطش خودبه‌خود یک دمای آستانه به نام دمای کوری T_C دارد که بالاتر از این دما مغناطش خودبه‌خود مؤثر نیست

$$T_C = \frac{2m^2 \alpha n}{3k\beta^2} \quad [43-10]$$

به صورت ضعیف با یکدیگر برهم‌کنش می‌کنند. تا چه دمایی باید نمونه در حضور یک میدان $3 \times 10^4 \text{ G}$ سرد شود تا ۷۵ درصد پروتونها اسپینهای موازی با میدان خارجی داشته باشند.

۱۰-۴ پارافین حاوی تعداد زیادی پروتون است که هر یک دارای اسپین $1/2$ و یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی $J/T = 10^{-26} \times 1/4 \text{ m}$ (تقریباً به اندازه هزار برابر کوچکتر از گشتاور دوقطبی الکترونها اتمی) است. تا چه دمایی لازم است نمونه در حضور یک میدان 3 T سرد شود تا ۷۵ درصد پروتونها اسپینهای موازی با میدان خارجی داشته باشند.

۱۰-۵ یک میله آهنی دارای طول 10 cm ، سطح مقطع 1 cm^2 و چگالی 10^{23} اتم بر سانتیمتر مکعب است. گشتاور دوقطبی مغناطیسی هر اتم برابر است با $1.8 \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{cm}^2$. (الف) با فرض آنکه فرومغناطیس نقشی در آهن نداشته باشد، یعنی، اگر آهن پارامغناطیس باشد پذیرفتاری آهن را در 300 K تعیین کنید. (ب) اگر میله دارای پذیرفتاری به دست آمده از قسمت (الف) باشد، گشتاور دوقطبی میله وقتی در یک میدان 10^3 گاوسی قرار می‌گیرد چقدر است؟ (ج) اگر به‌عنوان پیامدی از برهم‌کنش فرومغناطیسی، تمام اتمهای میله در یک حوزه (اشباع) صف‌بندی کنند، مغناطش و گشتاور دوقطبی میله چقدر خواهد بود؟

۱۰-۶ وارون پذیرفتاری مغناطیسی فلز گادولینیوم در بالای دمای کوری این فلز یعنی در دمای 600 K مساوی با $5.82 \times 10^3 \text{ cm}^3/\text{g}$ و در 1000 K مساوی $1.35 \times 10^4 \text{ cm}^3/\text{g}$ است. دمای کوری را تعیین کنید. $1/\chi$ را به صورت تابعی از دما رسم کنید.

۱۰-۷ نیکل دارای چگالی $10^{28} \times 9.1$ اتم بر متر مکعب، یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی اتمی $2.4 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ و دمای کوری 631 K است. مغناطش اشباع و γ را برای نیکل تعیین کنید. $10-8$ حاصلضرب α (شدت برهم‌کنش تبدیلی) و n (تعداد اتمهای سهم در این برهم‌کنش) را از خصوصیات ماکروسکوپی نیکل تعیین کنید. (به این ترتیب اگر α داده شود، n را می‌توان برآورد کرد.)

در $T < T_C$ برهم‌کنش باعث یک صف‌بندی نسبتاً بزرگ (مغناطش M) می‌شود که پدیده فرومغناطیس را نشان می‌دهد. میدان مغناطیسی H' را می‌توان به سادگی برحسب این مغناطش M به صورت زیر نوشت

$$H' = \gamma M \quad [10-44]$$

که در آن γ مثلاً برای آهن تقریباً مساوی با 1000 پیشنهاد می‌شود. این مقدار از آنچه که رابطه کلاسیکی $H' = 1/3 M$ به دست می‌دهد بسیار بزرگتر است. در $T > T_C$ ، ماده مانند یک ماده پارامغناطیسی با رابطه زیر

$$\chi = \frac{\mu_0 m^2 N}{3k(T - T_C)} \quad [10-52]$$

رفتار می‌کند.

یک مجموعه ماکروسکوپی از یک ماده فرومغناطیسی به دلیل ساختار حوزه‌ای، امکان دارد که حتی زیر دمای کوری یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی دائمی را نشان ندهد.

مسائل

۱۰-۱۱ الکترون اتمی را در یک حرکت دایره‌ای به شعاع ρ و بسامد ω در نظر بگیرید. اتم در یک میدان مغناطیسی B عمود بر مدار الکترون واقع است. (الف) گشتاور دوقطبی مغناطیسی اتم را در غیاب میدان تعیین کنید. (ب) گشتاور دوقطبی مغناطیسی را در حضور میدان تعیین کنید. (ج) اگر پذیرفتاری مغناطیسی یک مجموعه با چگالی $10^{28} \times 2.8$ اتم بر متر مکعب، مساوی با $10^6 -$ باشد، شعاع اتمی را تعیین کنید.

۱۰-۱۲ اتمی دو الکترون دارد که در یک مدار دایره‌ای به شعاع ρ و بسامد ω در دو جهت مخالف حرکت می‌کنند. اتم در یک میدان مغناطیسی خارجی B عمود بر مدار الکترون واقع می‌شود. گشتاور دوقطبی مغناطیسی اتم را در غیاب و در حضور میدان تعیین کنید.

۱۰-۱۳ یک جسم جامد حاوی اتمهای پارامغناطیسی با اسپین $1/2$ و گشتاور دوقطبی مغناطیسی $J/T = 27 \times 10^{-24} \text{ m}$ است که

جنبه دیگر کاربرد نظریه نسبیت این است که چون یک علامت فیزیکی نمی‌تواند با سرعت نامحدود در فضا منتشر شود باید برای به حساب آوردن این موضوع معادلات الکترومغناطیس را تغییر دهیم. این بررسیها در مطالعه استاتیکی بی‌اهمیت‌اند. در حالی‌که در جهان واقعی دینامیکی از اهمیت عمده‌ای برخوردارند. این بررسیها را در فصل ۱۴ می‌خوانیم.

برای شروع اعتبار بیشتری برای قانون گاوس از آنچه که در مطالعه الکتروستاتیک فرض شد در نظر می‌گیریم. آزمایشهای زیادی صحت این قانون در هر نقطه را، حتی وقتی که توزیع بار و میدانهای الکتریکی نسبت به زمان متغیر باشند، تأیید می‌کنند. به این ترتیب فرض می‌کنیم که روابط

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q(t)}{\epsilon_0} \quad \text{و} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1-11)$$

در هر لحظه از زمان، حتی وقتی که، ρ و Q تابعی از متغیر زمان، t باشند صحیح‌اند. باید در نظر داشت که انتگرال سطحی باید همواره در یک لحظه از زمان معینی حساب شود.

به همین ترتیب روابط میدان برداری مغناطیسی \mathbf{B}

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{و} \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (2-11)$$

را حتی وقتی \mathbf{B} تابعی از زمان است نیز باید معتبر دانست. روابط (۱-۱۱) و (۲-۱۱) دو سنگ بنای نظریه الکترومغناطیس هستند و بنابراین دامنه اعتبار آنها بسیار کلی است.

تاکنون مطالعه خود را به پدیده استاتیکی محدود کردیم و میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را که نسبت به زمان تغییر نمی‌کنند بررسی کردیم. در این فصل شرایطی را که در آن توزیع بار و جریان و در نتیجه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی نسبت به زمان تغییر می‌کنند بحث می‌کنیم. با فرض مجاز بودن تغییرات زمانی، دیگر لازم نیست موضوعهای الکتروستاتیکی و مغناطیس را جدا کنیم، بلکه یک موضوع الکترومغناطیس خواهیم داشت که پدیده‌ها و کاربردهای آن نسبت به موضوعهای جدای الکتروستاتیک و مغناطوستاتیک بسیار متنوعتر است.

به محض امکان تغییر زمانی چگالیهای بار چندین مشکل پیش می‌آید. اکثر آنها مربوط به تعبیر منطقی پدیده‌های فیزیکی است که از چارچوبهای مرجع لخت مختلف حرکت مشاهده می‌شوند. یعنی چارچوبهایی که نسبت به هم شتاب ندارند. به این ترتیب، به‌عنوان مثالی ساده، اینکه آیا به یک بار نقطه‌ای واقع در میدان مغناطیسی خارجی نیرویی به نام لورنتس وارد می‌شود یا نه به این بستگی دارد که بار نسبت به چارچوب مرجع ما متحرک باشد یا نه. چون معتقدیم که با اعتبار قوانین فیزیکی تمام چارچوبهای مرجع لخت هم‌ارزند، نتیجه می‌گیریم که چیزی را که در یک چارچوب مرجع میدان الکتریکی می‌نامیم باید در چارچوب مرجع دیگر میدان مغناطیسی تعبیر شود. به این ترتیب کاربرد نظریه نسبیت خاص به‌طور طبیعی به نوعی ارتباط میان میدانهای الکتریکی و مغناطیسی منجر می‌شود که در روابط اساسی الکترومغناطیس برای میدانهای برداری دیده می‌شود.

۱-۱۱ قانون فاراده

که هم‌ارز (مکانی یا دیفرانسیلی) قانون (انتگرالی) فاراده است. و به این ترتیب یکی از روابط اساسی الکترومغناطیس است، و فرض می‌شود که آن را می‌توان در هر نقطه از فضا به‌کار برد.

اکنون می‌بینیم که میدان الکتریکی \mathbf{E} در حالت کلی میدان پایستار نیست. این مطلب را از معادله (۴-۱۱) نتیجه می‌گیریم. که در حالت کلی تأکید بر $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$ دارد. به این ترتیب منبعهای \mathbf{E} تنها شامل بارها ($\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$) نیستند بلکه شامل میدانهای $\partial \mathbf{B}/\partial t$ (که نهایتاً از جریانهای وابسته به زمان غیر ثابت به‌وجود می‌آیند) نیز هستند. در حالت کلی تاو و دیورژانس \mathbf{E} صفر نیستند. با این همه باید دقت کرد که \mathbf{E} در حالت خاصی که \mathbf{B} نسبت به زمان ثابت باشد پایستار است.

علامت منفی در معادله (۳-۱۱) و (۷-۱۱) نشان‌دهنده قانون لنز است و بر این موضوع تأکید می‌کند که ساخت ماشینهای خودکار غیرممکن است. به این ترتیب اگر یک منحنی C روی یک رسانا داشته باشیم، emf القایی، \mathcal{E} ، جریانهایی را در رسانا به‌وجود می‌آورد که با تغییر شار عبوری از داخل منحنی C مخالفت می‌کند. اگر علامت منفی وجود نداشت به این معنی بود که جریانهای القایی موجب ازدیاد تغییر شارند و این خود احتمالاً باعث می‌شود که دوباره تولید شوند. قانون لنز تأکید بر وجود یک فیدبک منفی دارد، که موجب پایداری است، در حالی که فیدبک مثبت میدانهای بینهایت شدید \mathbf{B} را نتیجه می‌دهد. به این ترتیب قانون لنز قانون وضعیت پایدار است، یعنی دستگاههایی که این قانون برای آنها وجود دارد همواره در مقابل تغییر مقاومت می‌کنند.

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه \mathbf{E} را می‌توان به دو میدان، پایستار و غیر پایستار تجزیه کرد. میدان غیر پایستار را سیمولوله‌ای (به معنی صفر بودن دیورژانس آن) می‌نامیم. چون دیورژانس \mathbf{B} صفر است آن را می‌توان به شکل $\nabla \times \mathbf{A}$ نوشت. با قراردادن این نتیجه در $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ به دست می‌آید

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$$

یعنی

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad (۸-۱۱)$$

اگر تاو یک میدان برداری در ناحیه‌ای صفر باشد می‌توان آن را به صورت گرادیان یک میدان نرده‌ای در آن ناحیه نوشت [معادله (۵۲-۱)] را

معادله‌های (۱-۱۱) و (۲-۱۱) همان شکلی را دارند که در استاتیک با آنها مواجه شدیم. از طرف دیگر رفتاری فراتر از آنچه در استاتیک وجود دارد صراحتاً در قانون فاراده دیده می‌شود. یک سطح باز S را که محدود به منحنی C است و در میدان مغناطیسی \mathbf{B} قرار دارد در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که S ، C و \mathbf{B} همه توابعی از زمان باشند. در این صورت شار $F(t)$ عبوری از S با انتگرال سطحی زیر داده می‌شود

$$F = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

قانون فاراده بیان می‌کند که نیروی محرکه الکتریکی \mathcal{E} حول منحنی C ایجاد می‌شود به طوری که \mathcal{E} با تغییر زمانی F متناسب است. یعنی

$$\mathcal{E} = -\frac{dF}{dt} \quad (۳-۱۱)$$

اگر میدان الکتریکی را در فضا با \mathbf{E} نمایش دهیم آن‌گاه بنا به تعریف، emf القایی یا نیروی محرکه الکتریکی حول C به دست می‌آید

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (۴-۱۱)$$

از روابط (۳-۱۱) و (۴-۱۱) به دست می‌آوریم

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \left(\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \right) \quad (۵-۱۱)$$

اکنون منحنی C را که در دستگاه مرجع ثابت و بنابراین سطح S آن نیز ثابت است و با حالت کلی بخش ۲-۱۱ تفاوت دارد، در نظر می‌گیریم. به این ترتیب اکنون نه C به t وابسته است و نه S . در نتیجه می‌توان d/dt را داخل انتگرال برد. بنابراین معادله (۵-۱۱) می‌شود

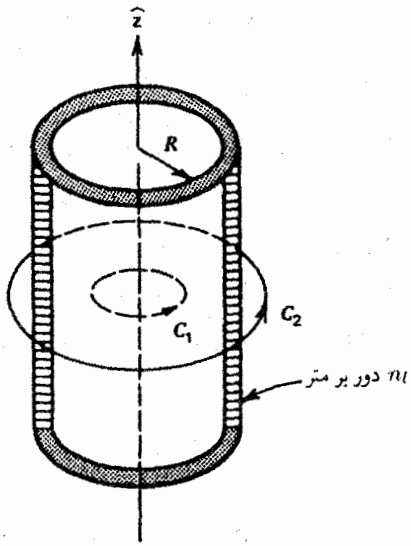
$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (۶-۱۱)$$

که در آن از مشتقات جزئی در داخل انتگرال استفاده کرده‌ایم زیرا \mathbf{B} تابع مکان و زمان است. طرف چپ معادله (۶-۱۱) را با استفاده از قضیه استوکس می‌توان به انتگرال سطحی تبدیل کرد یعنی

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

چون این رابطه برای هر سطح دلخواه S صحیح است می‌توان عبارتهای زیر انتگرال را به صورت زیر برابر نوشت

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۷-۱۱)$$



شکل ۱-۱۱ سیمولوهٔ تپنده که قانون فاراده را نشان می‌دهد.

چرخشی ϕ وابسته نیست، و میدان سیمولوله‌ای داخلی $B = \mu_0 n_1 I$ است داریم

$$\mathcal{E} = -\pi \rho^2 \frac{\partial B}{\partial t} = -\pi \rho^2 \mu_0 n_1 \frac{dI}{dt} \quad (۱۴-۱۱)$$

و

$$E_\phi = \frac{\mathcal{E}}{2\pi\rho} = -\frac{\mu_0 n_1 \rho}{2} \frac{dI}{dt} \quad \rho < R \quad (۱۵-۱۱)$$

برای $\rho > R$ ، emf القایی و میدان را به همین روش می‌توان حساب کرد.

مثال ۲-۱۱ سیم و حلقه مستطیل شکل

سیم بلند مستقیمی را در نظر می‌گیریم که جریان آن $I(t)\hat{z}$ است و در شکل ۲-۱۱ نشان داده شده است. emf القایی در حلقهٔ مستطیل شکل C ، با سطح S ، که در صفحهٔ شامل سیم قرار دارد را از $\mathcal{E} = -dF/dt$ حساب می‌کنیم. شار عبوری از C برابر است با

$$F = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_S \mathbf{B} \cdot (\hat{z} \times \hat{\rho}) da = \int_S B_\phi da$$

اما $da = z_0 d\rho$ و B_ϕ با معادلهٔ (۸-۲۴) یعنی

$$B_\phi = \frac{1}{2\pi\rho} \mu_0 I(t)$$

داده می‌شود. بنابراین

$$\begin{aligned} F &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left(I(t) \int_{\rho=\rho_1}^{\rho_2} \frac{1}{\rho} z_0 d\rho \right) \\ &= \frac{\mu_0 z_0}{2\pi} \left(\ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) I(t) \end{aligned} \quad (۱۶-۱۱)$$

ببینید؛ بنابراین معادلهٔ (۸-۱۱) می‌شود

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi \quad (۹-۱۱)$$

که Φ میدان زرده‌ای است. چون $\Delta\Phi$ یک میدان برداری پایستار است، و $-\partial\mathbf{A}/\partial t$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$\nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$$

بنابراین \mathbf{E} را تجزیه کرده‌ایم، یعنی

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\Phi \quad (۱۰-۱۱)$$

کمیت Φ یک تابع زرده‌ای است، اما احتمالاً ارتباط آن با تابع پتانسیل تعریف‌شده در الکتروستاتیک هنوز روشن نیست. بنابراین می‌نویسیم $\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^a$ که در آن

$$\mathbf{E}^a = -\nabla\Phi \quad \text{و} \quad \mathbf{E}^i = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (۱۱-۱۱)$$

میدان \mathbf{E}^i میدان القایی است که غیر پایستار (سیمولوله‌ای) است اما میدان \mathbf{E}^a ناشی از بارها، غیر سیمولوله‌ای و پایستار است. بدین ترتیب

$$\nabla \times \mathbf{E}^a = 0 \quad \text{و} \quad \nabla \times \mathbf{E}^i = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۱۲-۱۱)$$

اکنون رابطه‌های انتگرالی بین میدان القایی و پتانسیل برداری مربوط به میدان مغناطیسی را به دست می‌آوریم. با انتگرال‌گیری از معادلهٔ تاو \mathbf{E}^i روی سطح S ، قراردادن $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ، و به کار بردن قضیهٔ استوکس به دست می‌آوریم

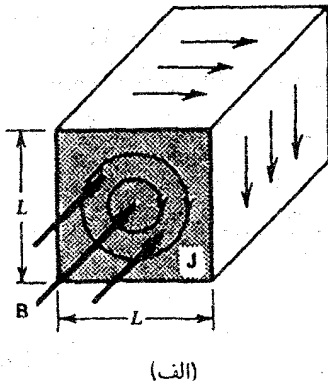
$$\oint_C \mathbf{E}^i \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (۱۳-۱۱)$$

مثال ۱-۱۱ سیمولوهٔ تپنده

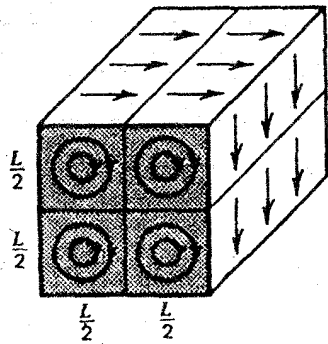
سیمولوله‌ای بلند به شعاع R و دور سیم فشرده در یک متر مانند شکل ۱-۱۱ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم جریان $I(t)$ در سیم جریان دارد. برای سیمولوله‌ای با طول خیلی بزرگتر از قطر، \mathbf{B} در خارج از آن ناچیز و در داخل تقریباً یکنواخت است. برای مسیر C_1 به شعاع $\rho < R$ ، معادلهٔ (۵-۱۱) به دست می‌دهد

$$\mathcal{E} = \oint_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} (B\pi\rho^2)$$

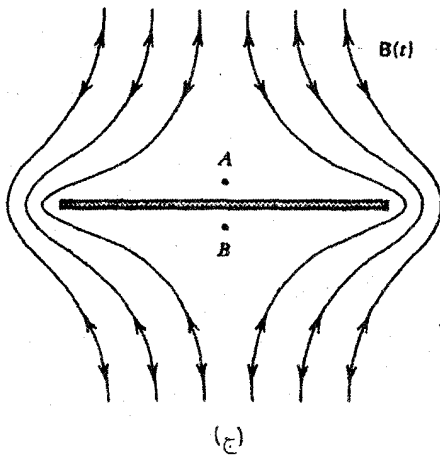
که $B\pi\rho^2$ "شار عبوری" از منحنی C_1 است، و \mathbf{E} مؤلفه مماسی میدان الکتریکی روی C_1 است. چون به علت تقارن، \mathbf{E} به زاویه



(الف)



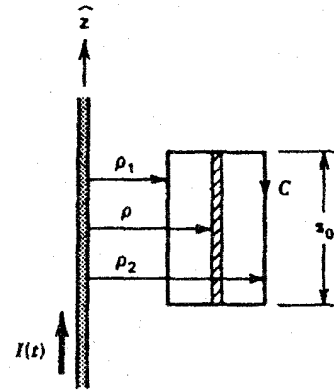
(ب)



(ج)

شکل ۳-۱۱ لایه لایه کردن یک رسانا برای کمینه کردن اثر جریانهای ادی. (الف) قطعه بدون لایه لایه شدن در میدان متغیر B . (ب) قطعه لایه شده به چهار بخش. (ج) کم شدن تغییر میدان B نزدیک یک ورقه رسانا به خاطر جریانهای ادی در ورقه.

B است زیرا جریانهای ادی طوری به وجود می آیند که با تغییر میدان القایی مخالفت می کنند. این اثر را در شکل ۳-۱۱ (ج) می بینیم. [اگر رسانندگی جسم بینهایت باشد (مثل ابررسانا) میدان B در داخل و نزدیک رسانا به صفر کاهش می یابد.] از این اثر ممکن است.



شکل ۲-۱۱ سیم حامل جریان در صفحه سیم مستطیل شکل.

آن گاه \mathcal{E} القایی به دست می آید

$$\mathcal{E} = \frac{-\mu_0 z_0}{2\pi} \left(\ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{dI}{dt}$$

اگر سیم منطبق بر C و $dI/dt > 0$ باشد، جریان در خلاف جهت عقربه های ساعت در C جاری می شود.

مثال ۳-۱۱ جریانهای ادی - گرم کردن القایی

می دانیم وقتی B نسبت به زمان تغییر کند در مواد رسانای نزدیک به ناحیه ای که $B \neq 0$ است جریانهایی به نام جریانهای ادی القا می شوند. در دستگاههای الکترومغناطیسی اغلب این جریانها نامطلوب اند زیرا باعث جذب انرژی و در نتیجه ایجاد گرمای اتلافی $\rho_e J^2$ (اتلاف ژول) و گرم شدن مواد رسانا می شوند. اغلب برای حذف جریانهای ادی رساناها را لایه لایه می سازند. اثر این لایه ها را در شکل ۳-۱۱ نشان داده ایم. در شکل ۳-۱۱ (الف) یک قطعه رسانا را که در میدان متغیر $B(t)$ قرار دارد می بینیم. جریان چرخشی در این قطعه متناسب با L^2 (مسئله ۳-۱۱ را ببینید) است. بنابراین اتلاف انرژی که متناسب با مجذور جریان است با L^2 متناسب خواهد بود. اکنون اگر قطعه شکل ۳-۱۱ (الف) را به چهار قسمت، شکل ۳-۱۱ (ب)، طوری تقسیم کنیم که جریان بتواند از یک قسمت به قسمت دیگر جاری شود، آن گاه جریان در هر قسمت با $(L/2)^2$ و انرژی تلف شده با $(L/2)^4$ متناسب است. بنابراین کل توان تلف شده در چهار بخش متناسب با $4(L/2)^4 = L^4/4$ است. که نسبت به وضعیت اول یک چهارم شده است. نتیجه کلی این است که اگر مقطع (در راستای عمود بر میدان B) ماده رسانا به N لایه تقسیم شود، آن گاه اتلاف توان مربوط به جریانهای ادی با ضریب $1/N$ کم می شود. اثر جریانهای ادی نزدیک مواد رسانا کم کردن اندازه تغییرات میدان

که $\langle B \rangle$ میدان میانگین در داخل دایره‌ای با شعاع R است. میدان القایی مربوط به آن $E^i = \mathcal{E} / 2\pi R$ نیرویی بر بار وارد می‌کند به طوری که

$$\frac{dp}{dt} = qE^i = q \frac{\mathcal{E}}{2\pi R} = \frac{q}{2\pi R} A \left[-\frac{d\langle B \rangle}{dt} \right]$$

با انتگرال‌گیری از این معادله نتیجه می‌گیریم

$$p = p_0 - \frac{qA\langle B \rangle}{2\pi R}$$

که p_0 تکانه اولیه ذره است (وقتی که $\langle B \rangle \approx 0$) که ممکن است آن را صفر در نظر بگیریم. آن‌گاه

$$p = \frac{qA\langle B \rangle}{2\pi R} \quad (11-18)$$

اکنون لازم است که دو عبارت تکانه خطی ذره: $p = BqR$ معادله (11-17)، و عبارت معادله (11-18) با هم برابر باشند. به این ترتیب

$$BqR = \frac{qA\langle B \rangle}{2\pi R}$$

یا اگر $A = \pi R^2$ نتیجه می‌شود

$$B = \frac{1}{4} \langle B \rangle$$

بنابراین اگر شعاع چرخش ذره در حین شتاب گرفتن ثابت بماند "میدان راهنمای"، B ، باید نصف میدان القایی متوسط، $\langle B \rangle$ ، باشد. نمونه کوچکی از بتاترون ممکن است شعاع $R = 0.5$ m و میدان بیشینه $B_{\max} = 0.5$ T داشته باشد. انرژی الکترونی که با چنین دستگاهی شتاب داده می‌شود در حدود $\frac{eR\langle B \rangle c}{2} \approx pc$ (نسبیتی) یا حدود 35 Mev است.^۲

۲-۱۱ EMF حرکتی

تا کنون تنها این نتیجه را بررسی کردیم که میدانهای مغناطیسی متغیر ممکن است در حلقه‌های ثابت و صلب موجود در فضای اطراف ما، میدانهای الکتریکی القایی به وجود آورند. اکنون در مورد حلقه‌هایی

۱. در دانشگاه ایلینویز که بتاترون ساخته شده است، دو بتاترون فعال وجود دارد که باریکه‌های الکترون آنها در تحقیقات فیزیک هسته‌ای استفاده می‌شود.

۲. آن را (ausserordentlichhochgeschwindigkeitselectronentwickelungsschwerarbeitsbeigollitron) می‌نامند

۳. Copyright, E. C. Hill (بازداشت‌های الکترومغناطیسی).

۴. انرژی نسبیتی یک ذره به جرم m_0 با $\sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}$ داده می‌شود که تقریباً با pc مساوی است اگر $pc \gg m_0 c^2$ باشد.

حفاظت ناحیه‌ای از فضا از میدانهای مغناطیسی متغیر استفاده کرد. اما این اثر در مقابل میدانهای مغناطیسی جنبه حفاظتی ندارد.

سرانجام از خاصیت گرمنازایی القایی جریان ادی می‌توان برای گرم کردن جسم بدون آنکه اختلال دیگری در آن ایجاد شود استفاده کرد. به این ترتیب غذا را می‌توان در یک میدان القایی یکنواخت، با قراردادن آن در ناحیه‌ای که میدان مغناطیسی B به شدت متغیر است، پخت.

مثال ۴-۱۱ بتاترون^۱

عمل بتاترون که یک شتابدهنده الکترون است^۲ نمونه خوبی از کاربرد قانون فاراده است.^۳ عمل یک بتاترون مطابق شکل ۴-۱۱، شتاب دادن به ذرات باردار به وسیله یک میدان القایی و نگهداری ذرات در فضا با استفاده از همان میدان مغناطیسی متغیر است.

ذرات در یک فضای حلقه‌ای تخلیه شده به نام "دونات" قرار دارند. اگر شعاع متوسط مسیر دایره‌ای ذره، R ، بار آن q و بسامد چرخش ذره ω باشد، با مساوی قرار دادن تغییر تکانه خطی با نیروی مرکزگرای وارد بر ذره داریم

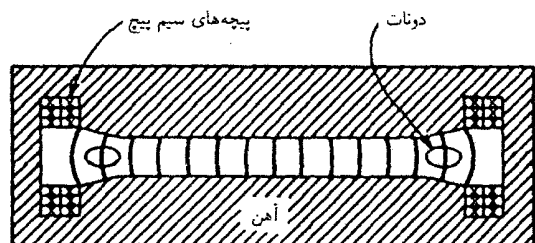
$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = p\omega$$

که p تکانه خطی بار است. از برابری نیروی مرکزگرا با نیروی لورنتس ($qR\omega B$) نتیجه می‌شود

$$p = BqR \quad (11-17)$$

که B میدان مغناطیسی است. به این ترتیب تکانه ذرات با بار q ، مستقیماً به میدان B وابسته است. اکنون اگر B در داخل دونات نسبت به زمان زیاد شود، نیروی محرکه الکتریکی القایی برابر است با

$$\mathcal{E} = -\frac{dF}{dt} = -\frac{d}{dt} \langle B \rangle A$$



شکل ۴-۱۱ نمایش مقطع یک بتاترون برای شتاب دادن و محصورکردن ذرات باردار به وسیله میدان مغناطیسی متغیر.

را ببینیم. با فرض اینکه فقط نیروهای ناشی از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی مؤثرند، جمله‌های زیر را برای emf یک حلقه واقع در رسانا داریم:

۱. در یک دستگاه ساکن O با میدانهای اندازه‌پذیر $\mathbf{E}(t)$ و $\mathbf{B}(t)$ و در هر نقطه از حلقه C که سرعت لحظه‌ای $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ دارد، emf در طول C از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\mathcal{E}'(t) = \oint_C [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{r} \quad (21-11)$$

که تمام کمیتها در نقاط روی حلقه و در لحظه t اندازه‌گیری می‌شوند. توجه کنید که در حالت کلی \mathbf{E} مؤلفه‌های E^q و E^i را دارد که از روابط (۱۱-۱۱) و (۱۲-۱۱) به دست می‌آیند.

۲. در چارچوب مرجع O' یک حلقه که به طور صلب با سرعت \mathbf{v} نسبت به دستگاه ساکن بالا در حرکت است، نیروی محرکه الکتریکی، \mathcal{E}' ، به طور مؤثر با رابطه زیر داده می‌شود

$$\mathcal{E}'(t) = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r} \quad (22-11)$$

که \mathbf{E}' به وسیله ناظر واقع در چارچوب متحرک O' اندازه‌گیری می‌شود. کمیتهای اندازه‌گیری شده با معادله (۱۱-۲۰) به اندازه‌های \mathbf{E} و \mathbf{B} نسبت به چارچوب ساکن O ارتباط دارند.

اکنون قانون فاراده را از نقطه نظر نیروی محرکه الکتریکی حرکتی مطرح می‌کنیم. حلقه‌هایی را در نظر می‌گیریم که اندازه، جهت، مکان یا شکل آن در میدان مغناطیسی تغییر می‌کند. برای سادگی فرض می‌کنیم که میدان مغناطیسی نسبت به زمان ثابت است. زیرا در صورت متغیر بودن چگونگی محاسبه میدانهای الکتریکی القایی را (بخش قبل را ببینید) می‌دانیم. در مثال ۱۱-۱۱ وضعیتی را که هر دو به طور همزمان متغیر باشند بررسی خواهیم کرد.

حلقه C را که یک رشته رساناست و شکل آن در زمانهای t و $(t + dt)$ به ترتیب با $C(t)$ و $C(t + dt)$ مشخص می‌شود مطابق شکل ۵-۱۱، در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم در میدان مغناطیسی ایستا $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ حرکت می‌کند. در نتیجه حرکت یک emf القایی مطابق معادله (۲۱-۱۱) به صورت زیر در حلقه به وجود می‌آید

$$\mathcal{E} = \oint_{C(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

که \mathbf{v} سرعت جزء $d\mathbf{l}$ از C است. چون

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B}$$

بحث می‌کنیم که ممکن است، اندازه، جهت، مکان و یا شکل آنها تغییر کنند. ابتدا نتیجه حرکت یک رسانا نسبت به دستگاه مرجع ثابتی را بررسی می‌کنیم. برای رسیدن ساده‌تر به جواب فرض می‌کنیم ناظر O' با رسانا حرکت می‌کند. مدار الکتریکی را که نسبت به چارچوب آزمایشگاهی O ثابت است و جریان پایداری از آن می‌گذرد در نظر می‌گیریم. یک رسانا با سرعت ثابت \mathbf{v} در میدان مغناطیسی مدار، \mathbf{B} ، حرکت می‌کند. از دیدگاه O' منبع در خلاف جهت حرکت دارد. بنابراین O' یک میدان مغناطیسی متغیر را احساس می‌کند و در نتیجه یک میدان القایی E^i را اندازه می‌گیرد. این میدان الکتریکی، نیروی qE^i را بر بار q وارد می‌کند و باعث حرکت آن در رسانا می‌شود. با این همه از دید ناظر ساکن میدان الکتریکی القایی وجود ندارد، زیرا میدان مغناطیسی از دید او تغییری ندارد. با این وجود به بارهای آزاد q در رسانای متحرک، به علت حرکت رسانا در میدان مغناطیسی، نیروی لورنتس، $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ، وارد می‌شود. اگر $v \ll c$ ، یعنی آنچه که در اینجا فرض کردیم، هم ناظر ساکن و هم ناظر متحرک همراه رسانا، پدیده‌های یکسانی از حرکت بار و شتاب آن را مشاهده می‌کنند. فقط چگونگی تشریح منشأ نیروها که باعث حرکت بار می‌شود از دید دو ناظر اختلاف دارد. به این ترتیب

$$\mathbf{E}^i = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (19-11)$$

اگر، علاوه بر نیروی مربوط به میدان مغناطیسی، میدانهای الکتریکی ناشی از وجود بارها در چارچوب مرجع ساکن \mathbf{E} نیز وجود داشته باشند آن‌گاه (به طور غیرنسبیتی)، میدان الکتریکی مشاهده شده توسط ناظر متحرک همراه با رسانا برابر است با $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{E}^i$. یعنی

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad v/c \ll 1 \quad (20-11)$$

استفاده از کلمه "غیرنسبیتی" به این معنی است که این اثرها تنها به کمک نظریه نسبیت خاص (که در فصل ۱۷ می‌خوانیم) به طور کامل فهمیده می‌شود. یادآوری می‌کنیم که روابط (۱۱-۹) و (۱۱-۲۰) اثبات نشده‌اند؛ با وجود این می‌توان با استفاده از آنها عباراتی برای emf یک حلقه (منحنی بسته) به دست آورد که هر قسمت آن ممکن است در فضا متحرک باشد.

emf برای هر حلقه در یک لحظه زمانی مشخص t تعریف می‌شود و آن کار لازم برای حرکت (فرضی) بار نقطه‌ای واحد در طول حلقه و در آن لحظه خاص است. به این ترتیب، emf، انرژی انتقال یافته به بار نقطه‌ای واحد، تحت شرایط حاکم در زمان t است که طول حلقه

یعنی

$$dF = F(t + dt) - F(t)$$

بنابراین dF همان اختلاف شار عبوری از حلقه C در زمانهای t و $t + dt$ است. این نتایج را طوری خلاصه می‌کنیم که dF/dt در معادله (۱۱-۲۳) نشاندهنده موارد زیر باشد:

۱. تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه ثابت (نسبت به دستگاه مرجع) در فضا، مربوط به تغییر زمانی B که با معادله (۱۱-۳) داده می‌شود.

۲. تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه رسانای معین که در یک میدان مغناطیسی B که نسبت به زمان ثابت است، حرکت می‌کند (نسبت به دستگاه مرجع ما).

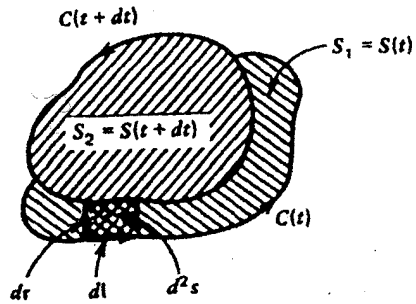
۳. شار "جاروب‌شده" به وسیله یک حلقه رسانا که ابعادش، در حضور میدان مغناطیسی B که نسبت به زمان ثابت است، تغییر می‌کند. ترکیب خطی موارد ۱ و ۲ یا ۱ و ۳.

خوب است که تأکید کنیم قانون بیان شده در معادله (۱۱-۲۳) برای محیطهای متحرک، وقتی که این محیطها شامل حلقه‌های رشته‌ای رسانای معین باشند، مفید است. از این قانون وقتی که حلقه‌ها به وضوح تعریف نشده‌اند نمی‌توان بدون ابهام استفاده کرد. (در مثال ۷-۱۱ این موضوع را می‌خوانیم). با وجود این ملاحظه می‌کنیم که دو نوع پدیده فیزیکی مختلف به وسیله یک قانون، $\mathcal{E} = -dF/dt$ توصیف می‌شود.

مثال ۵-۱۱ میله رسانای متحرک در یک میدان مغناطیسی ثابت یک میله رسانای متحرک با سرعت $v \ll c$ در جهت عمود بر محورش در یک میدان مغناطیسی ثابت در حرکت است. این وضعیت را در شکل ۶-۱۱ نشان داده‌ایم. از دید دستگاه ساکن، وقتی حرکت آغاز می‌شود، بارها، تحت تأثیر نیروی لورنتس و نیروهایی که بارها را به ماندن در میله مقید می‌سازند، حرکت می‌کنند تا حالت تعادل به وجود آید. در این زمان دیگر بارها نسبت به میله حرکتی ندارند. در حالت اخیر صحیح است که بگوییم کل نیروی وارد بر هر بار نقطه‌ای آزاد، که با معادله (۱۱-۲۰) داده می‌شود، باید صفر باشد. یعنی:

$$q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + q\mathbf{E} = 0$$

که \mathbf{E} میدان مربوط به توزیع بار تعادلی روی میله است. بنابراین در



شکل ۵-۱۱ یک رشته رسانا به شکل حلقه بسته متحرک در میدان مغناطیسی ایستا در لحظات t و $t + dt$.

آن‌گاه

$$\mathcal{E}(t) = \oint_{C(t)} (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B}$$

با انتخاب $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ که $d\mathbf{r}$ جابه‌جایی جزء $d\mathbf{l}$ در زمان t است به دست می‌آوریم

$$\mathcal{E} = \oint_{C(t)} \left(d\mathbf{l} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \cdot \mathbf{B}$$

اکنون $d\mathbf{l} \times d\mathbf{r}$ جزء سطح $d^2\mathbf{a}$ است که در زمان dt به وسیله $d\mathbf{l}$ جاروب می‌شود و $\mathbf{B} \cdot d^2\mathbf{a}$ شار عبوری از آن است. به این ترتیب

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{dt} \oint (d^2\mathbf{a}) \cdot \mathbf{B} \equiv \frac{1}{dt} (-dF)$$

که $(-dF)$ شار \mathbf{B} عبوری، $\oint d^2\mathbf{a}$ سطح کل جاروب شده توسط C در زمان dt است. توجه کنید که وقتی شار در جهت $d\mathbf{l} \times d\mathbf{r}$ است آن را مثبت فرض می‌کنیم. با این تعریف داریم

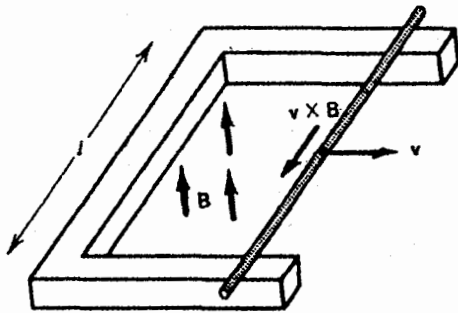
$$\mathcal{E} = -\frac{dF}{dt} \quad (11-23)$$

اکنون نشان می‌دهیم که dF واقعاً تغییر شار عبوری از حلقه C در فاصله زمانهای بین t و $t + dt$ است. سطح بسته شامل $S(t)$ ، $S(t + dt)$ ، و $\oint d^2\mathbf{a}$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که با اندازه‌گیری در هر لحظه، شار کل عبوری از این سطوح صفر است، $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$ [معادله (۹-۵۲) را ببینید]. اما

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S(t+dt)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} - \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} - dF$$

[علامت منفی در انتگرال روی $S(t)$ به خاطر نحوه انتخاب $C(t)$ لازم است.] به این ترتیب

$$0 = F(t + dt) - F(t) - dF$$



شکل ۷-۱۱ یک میله رسانای متحرک با سرعت ثابت روی یک ریل رسانا در میدان مغناطیسی ثابت.

این نتیجه را به صورت زیر تفسیر می‌کنیم. می‌دانیم که بارهای میله با سرعت آن، v ، حرکت می‌کنند. بنابراین، نیروی لورنتس $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ مطابق شکل در راستای میله وارد می‌شود. علاوه بر این نیروهای مربوط به بارهای ظاهر شده روی میله که باعث نگهداری بارها در داخل میله می‌شوند نیز وجود دارند. این نیروها، برای مثال، باید اثر نیرویی را که از طرف \mathbf{B} بر بارهای متحرک در طول میله وارد می‌شود خنثی کنند (نیروی اخیر در راستای عمود بر میله است). اگر در هر لحظه \mathcal{E} را در حلقه حساب کنیم به دست می‌آوریم

$$\mathcal{E} = \int_b^t (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} + \int_b^t \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_t^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{b+t}^t (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}$$

که b و t به ترتیب شاخص برای میله و ریل اند و \mathbf{u} سرعت سوق بار در رسانا، و موازی با سطوح جانبی رساناست. به این ترتیب $(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = 0$ و از آخرین انتگرال می‌توان صرفنظر کرد. انتگرالهای دوم و سوم با هم می‌شود، $\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r}$ ، که به دلیل پایستار بودن \mathbf{E}' صفر است. در نتیجه

$$\mathcal{E} = \int_b^t (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = vBl$$

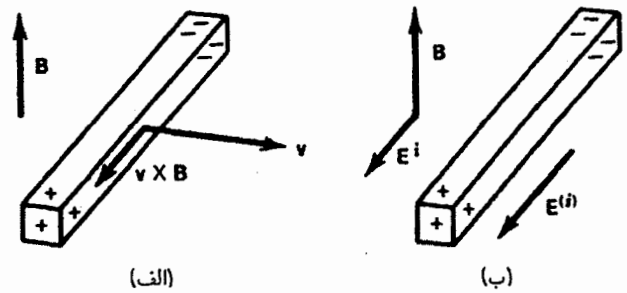
اگر مقاومت کل حلقه R باشد، در این صورت جریانی به اندازه $I = \mathcal{E}/R = vBl/R$ جاری می‌شود.

اکنون می‌خواهیم نتیجه را از دید ناظر همراه میله (متحرک) بررسی کنیم. این ناظر میدان الکتریکی در هر نقطه را

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

می‌بیند، و می‌داند که در داخل میله

$$\int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$



شکل ۶-۱۱ میله رسانایی که با سرعت $v \ll c$ عمود بر محورش در میدان مغناطیسی ثابت حرکت می‌کند: (الف) از دید دستگاه ساکن؛ (ب) از دید میله.

داخل میله

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

یعنی یک میدان الکتریکی یکنواخت در داخل میله وجود دارد. در خارج میله میدان الکتریکی ایجاد شده به وسیله بارها یکنواخت نیست. از دید ناظر همراه میله، یک میدان الکتریکی \mathbf{E}' با مقدار ثابت در همه جای فضا، مشاهده می‌شود.

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

(ناظر ممکن است نداند که سرعت او \mathbf{v} است اما این موضوع را به هر حال می‌فهمد). میله، که یک رساناست، میدان الکتریکی داخلی را تحمل نمی‌کند. بنابراین یک توزیع بار دوباره برای حذف میدان الکتریکی \mathbf{E}' به وجود می‌آید. پس در نهایت میدان الکتریکی کل در داخل میله صفر است: $\mathbf{E}' = \mathbf{E}' + \mathbf{E} = 0$ (داخل میله). بنابراین در داخل میله مانند بالا داریم $\mathbf{E} = -\mathbf{E}' = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

باید دقت کرد که دو ناظر ساکن و متحرک، از این پدیده فیزیکی، یعنی ظاهر شدن بارها در سطح میله رسانا، تعبیرهای متفاوتی دارند. این چیزی است که هر دو ناظر با آن موافق‌اند. اما روی اندازه‌های میدانهای الکتریکی موجود موافق نیستند (بجز برای \mathbf{E}^q که هر دو به صورت غیرنسبیتی موافق‌اند). از موضع غیرنسبیتی، هر دو ناظر میدان مغناطیسی مشابهی را به دست می‌آورند. ■

مثال ۶-۱۱ میله رسانای متحرک روی یک ریل ثابت در میدان \mathbf{B} اکنون با حرکت دادن میله روی یک ریل رسانای ثابت، بار دیگر در یک میدان مغناطیسی ثابت \mathbf{B} ، مضمون مثال ۵-۱۱ را آن‌گونه که در شکل ۷-۱۱ نشان داده شده است بسط می‌دهیم. اکنون در یک حالت تعادل، جریان پایایی را در طول حلقه متشکل از میله و ریل به دست می‌آوریم.

اکنون اگر بین پایانه‌های + و - یک سیم وصل کنیم، از آن جریان عبور خواهد کرد. emf وابسته به قرص فاراده از معادله (۱۱-۱۲) به دست می‌آید یعنی

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 0 + \frac{\omega BR^2}{2}$$

که حلقه C در امتداد شعاع از قرص عبور کرده و از خارج قرص باز می‌گردد. این نشان می‌دهد که نیروی محرکه القایی با اختلاف پتانسیل یکسان است. قرصی که با بسامد ۱۰۰۰ Hz می‌چرخد و شعاع آن ۲ m است و در میدان ۱۰۰۰ G قرار دارد، emf تقریبی ۱۲ V را به دست می‌دهد.

اگر به جای چرخش مکانیکی قرص، جریانی را از محور تا لبه قرص برقرار کنیم، قرص به چرخش در خواهد آمد. آن‌گاه مولد قرص فاراده به موتور قرص فاراده تبدیل می‌شود.

باید دقت کرد که در محاسبه emf مربوط به قرص فاراده رابطه $\mathcal{E} = -dF/dt$ را به کار نبریم زیرا در اینجا حلقه متحرک در میدان مغناطیسی نداریم. به این ترتیب سطح خوش تعریفی برای محاسبه dF/dt وجود ندارد.

۱۱-۳ کاربرد قانون فاراده در مدارها: ضوابط القای

مدارهای الکتریکی همواره شامل حلقه‌های بسته‌اند. بدین ترتیب اگر بخواهیم رفتار الکتریکی این مدارها را بررسی کنیم، باید آثار مربوط به قانون فاراده، یعنی در نظر گرفتن تمام emfهای القایی برای مدار بسته، را به حساب آوریم.

مثلاً فرض می‌کنیم حلقه‌ای در یک میدان مغناطیسی متغیر قرار دارد. خود این میدان به دلیل جریانهای موجود در حلقه‌های دیگر ایجاد شده است. و ساده‌ترین حالت این است که تنها دو حلقه، C_1 و C_2 ، را که جریانهای I_1 و I_2 از آنها می‌گذرد در نظر بگیریم. حال سطح S_1 وابسته به حلقه C_1 را در نظر می‌گیریم. اگر شار عبوری از آن به هر دلیل تغییر کند، آن‌گاه یک emf القایی در C_1 به وجود می‌آید. شار، F ، ممکن است به دلیل تغییر میدان مغناطیسی مؤثر روی S_1 ، و یا به علت تغییر حلقه C_1 و در نتیجه سطح S_1 تغییر کند. علاوه بر این شار را ممکن است به دو قسمت؛ شار F_{12} عبورکننده از C_1 مربوط به جریان I_2 از C_2 ، و شار F_{11} عبورکننده از C_1 ناشی از جریان I_1 تقسیم کرد

$$F_1 = F_{11} + F_{12} \quad (11-24)$$

با این همه، ناظر متحرک قسمت U شکل حلقه را متحرک با سرعت $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$ می‌بیند. به این ترتیب درست مانند ناظر ساکن، که به دلیل حرکت میله نیروی محرکه‌ای به اندازه vBl اندازه می‌گیرد، ناظر متحرک نیز emf مساوی با $|vBl|$ ناشی از حلقه متحرک را اندازه خواهد گرفت. جهت شارش جریان نیز مشابه آن چیزی خواهد بود که در بالا به دست آمد. می‌بینیم که باز هم، برای دو ناظر نتایج سازگارند.

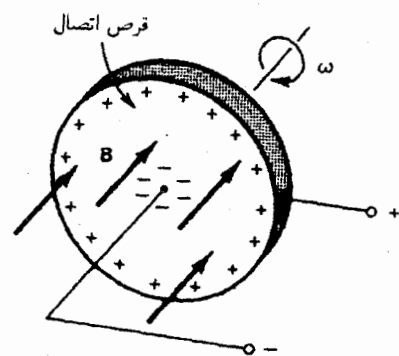
مثال ۱۱-۷ قرص فاراده - مولد القایی (موتورها)

قرص فاراده، که آن را در شکل ۱۱-۸ نشان داده‌ایم، اساس درک مولد (موتور) القایی است. در این مثال قرصی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω به دور محور مرکزی‌اش می‌چرخد. اگر قرص در میدان مغناطیسی (یکنواخت) \mathbf{B} ، در راستای عمود بر سطح قرص، قرار گیرد در این صورت نیروی لورنتس وارد شده بر حاملهای بار موجود در قرص سبب جدا شدن بارها می‌شود. پس از ایجاد تعادل، میدان الکتریکی ناشی از جدایی بارها در تمام نقاط قرص با میدانهای لورنتس متعادل می‌شود. بنابراین $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$ و چون $\mathbf{v} = \omega \times \rho$ است، در داخل قرص $\mathbf{E} = -\omega\rho\hat{\phi} \times \mathbf{B}$ ، و یا $\mathbf{E} = -\omega B\rho$ می‌شود. مطابق شکل ۱۱-۸ بارهای مثبت در لبه خارجی قرص جمع شده و بارهای منفی به طرف مرکز قرص می‌روند. بنابراین اختلاف پتانسیل ثابتی بین لبه قرص و محور آن وجود دارد

$$\Delta\Phi = \Phi(R) - \Phi(0) = - \int_0^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

اگر عبارت بالا را به جای \mathbf{E} قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$\Delta\Phi = - \int_0^R -\omega B\rho \cdot d\rho = \frac{\omega BR^2}{2}$$



شکل ۱۱-۸ نمایش طرحوار قرص فاراده، که اساس درک مولدها (یا موتورهای) القایی است.

قدم بعدی نوشتن پتانسیل برداری برحسب پارامترهای مدارها با استفاده از معادله (۴۴-۸) به روش زیر است

$$F_{12} = \int_{C_1} \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_2} \frac{I_2 dl_2}{|r_1 - r_2|} \right] \cdot dl_1$$

و یا

$$F_{12} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{|r_1 - r_2|} \equiv L_{12} I_2$$

بنابراین

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{|r_1 - r_2|} \quad |r_1 - r_2| \neq 0$$

به همین ترتیب

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_2} \int_{C_1} \frac{dl_2 \cdot dl_1}{|r_2 - r_1|}$$

چون $|r_1 - r_2| = |r_2 - r_1|$ و ترتیب انتگرالگیری تعویض پذیر است [انتگرالها خوشرفتارند (پیوسته و کراندار)]، پس $L_{12} = L_{21} = M$. القای M را القای متقابل حلقه‌ها می‌نامیم و آن را به کمک رابطه به‌دست آمده که فرمول نیومن نام دارد حساب می‌کنیم

$$L_{12} = L_{21} = M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{|r_1 - r_2|} \quad (۲۹-۱۱)$$

با به‌کار بردن قانون فاراده می‌توان نیروهای محرکه الکتریکی، \mathcal{E}_1 و \mathcal{E}_2 ، برای دو حلقه را برحسب ضرایب القا نوشت. یعنی

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{dF_{11}}{dt} - \frac{dF_{12}}{dt} = \mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{12} \quad (۳۰-۱۱)$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{dF_{21}}{dt} - \frac{dF_{22}}{dt} = \mathcal{E}_{21} + \mathcal{E}_{22} \quad (۳۱-۱۱)$$

که \mathcal{E}_{ij} را، emf القا شده در حلقه i مربوط به حلقه j تعریف می‌کنیم. برای نوشتن F_{ij} به‌طور صریح برحسب جریانها و القاهای حلقه‌ها که هر دو صلب و ثابت هستند معادله (۲۶-۱۱) را به‌کار می‌بریم

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \quad \mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} \quad (۳۲-۱۱)$$

که شاخصها را به‌صورت $L_{12} \equiv L_{21} = M$ ، $L_{22} \equiv L_2$ ، $L_{11} \equiv L_1$ مخفف کرده‌ایم. روشن است که یکای القا، آمپر/ثانیه \times ولت است که آن را هانزی (با علامت اختصاری H) می‌نامیم.

برای ابعاد هندسی ثابت روابط $\mathcal{E}_1 = -L_1 dI_1/dt$ و $\mathcal{E}_2 = -M dI_2/dt$ و غیره را برای تعریف ضرایب القا به‌کار

به همین روش شار کل عبورکننده از C_2 عبارت است از

$$F_2 = F_{21} + F_{22} \quad (۲۵-۱۱)$$

اکنون می‌دانیم که F_{11} و F_{21} با I_1 ، و F_{12} و F_{22} با I_2 متناسب‌اند زیرا میدانهای مغناطیسی تناسب مستقیم با جریانها دارند. این تناسب را به شکلهای زیر می‌نویسیم

$$F_{11} = L_{11} I_1 \quad F_{21} = L_{21} I_1 \quad F_{22} = L_{22} I_2 \quad F_{12} = L_{12} I_2 \quad (۲۶-۱۱)$$

L ها را "ضرایب القا" می‌نامیم. به‌ویژه L_{11} و L_{22} ضرایب خودالقایی L_{12} و L_{21} را ضرایب القای متقابل‌اند. توجه کنید که خودالقا به ویژگیهای هندسی مدارهای مجزا وابسته است در حالی‌که القای متقابل به خواص هندسی هر دو حلقه یا مدار بستگی دارد. در زیر در مورد ویژگیهای این ضرایب بحث می‌کنیم. در مورد ضریب القای متقابل قبل از ضریب خودالقایی بحث می‌کنیم.

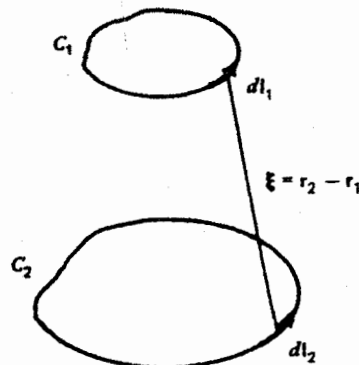
۱-۳-۱۱ القای متقابل

اکنون یک ویژگی مهم القای متقابل، $L_{12} = L_{21} \equiv M$ ، را ثابت می‌کنیم. با در نظر گرفتن شکل ۹-۱۱، شار F_{12} را برحسب میدان مغناطیسی ایجادشده به‌وسیله حلقه C_2 در محل حلقه C_1 ، یا B_{12} ، به‌ترتیب زیر می‌نویسیم

$$F_{12} = \int_{S_1} B_{12} \cdot da_1 \quad (۲۷-۱۱)$$

با به‌کار بردن معادله (۴۶-۸) می‌توان F_{12} را برحسب پتانسیل برداری مربوط، A_{12} ، نوشت

$$F_{12} = \int_{C_1} A_{12} \cdot dI_1 \quad (۲۸-۱۱)$$



شکل ۹-۱۱ نمایش طرح‌وار دو حلقه برای به‌دست‌آوردن القای متقابل (فرمول نیومن) بین هر دو حلقه.

می‌بریم. علامت منفی مشخص‌کنندهٔ مخالف بودن emf‌های القایی با تغییر جریانهاست.

محاسبهٔ ضریب القا، جز در چند آرایش هندسی ساده پیچیده است. محاسبهٔ ضرایب خودالقایی را بعداً به‌دست می‌آوریم. اکنون روش محاسبهٔ ضرایب القای متقابل را که به‌طور مستقیم از تعریفهای آن به‌دست می‌آیند، نشان می‌دهیم

$$M \equiv \frac{F_{12}}{I_2} = \frac{F_{21}}{I_1} \quad \text{یا} \quad M = \frac{-\mathcal{E}_{12}}{dI_2/dt} = \frac{-\mathcal{E}_{21}}{dI_1/dt} \quad (33-11)$$

در کتابهای فیزیک یا مهندسی برق، فهرست ضرایب القای متقابل برای بسیاری از شکلهای معمولی آمده است.

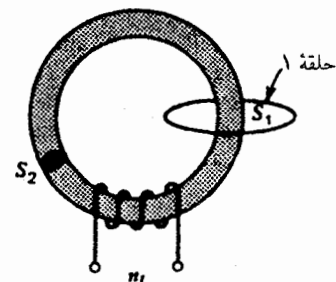
مثال ۸-۱۱ القای متقابل یک حلقه به دور یک چنبره یا سیمولوله یک چنبره با سطح مقطع S_2 و تعداد n_2 دور در واحد طول را مطابق شکل ۱۱-۱۰ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که در درون هسته یک میدان ثابت B_{12} وجود دارد. اگر حلقه‌ای به سطح مقطع S_1 چنبره را دور بزند آن‌گاه شار عبوری از حلقه که از چنبره ناشی می‌شود با شار عبوری از خود چنبره یکسان است. به این ترتیب با استفاده از معادله (۱۱-۲۷) و (۸-۳۵) به‌دست می‌آوریم

$$F_{12} \approx B_{12} S_2 = \mu_0 n_1 I_1 S_2$$

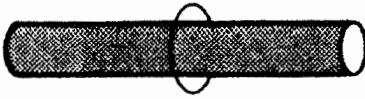
اکنون القای متقابل با استفاده از F_{12} و معادله (۱۱-۳۳) به‌صورت زیر حساب می‌شود

$$M \equiv \frac{F_{12}}{I_1} = \mu_0 n_1 S_2 \quad (34-11)$$

موضوع جالب توجه این است که M تا جایی که حلقه ۱ چنبره را در بر می‌گیرد به شکل هندسی حلقه ۱ وابسته نیست. بنابراین یک سیم مستقیم خیلی بلند روی محور چنبره همان ضریب القای متقابل



شکل ۱۱-۱۰ حلقه‌ای به دور یک چنبره با هستهٔ فرومغناطیسی.



شکل ۱۱-۱۱ یک حلقه به دور یک سیمولوله بلند.

را دارد. (در واقع این سیم در عمل یک مسیر "بازگشت" هم دارد و بنابراین یک حلقه ایجاد می‌کند.)

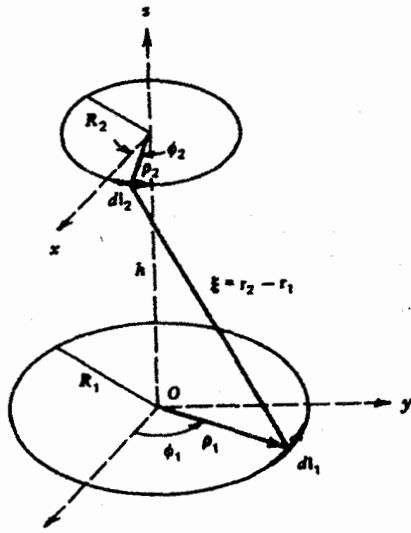
توجه کنید که چنبره یک تک‌حلقهٔ جریان نیست. با این حال همان تعریف قبل را به‌کار گرفتیم، زیرا مدار ۲ باعث به‌وجود آمدن شار می‌شود و آن را از مدار ۱ عبور می‌دهد. و این به آن علت است که گویی ابتدا القای متقابل بین حلقه ۱ و حلقه‌های منفرد چنبره را حساب نموده و سپس آنها را با هم جمع زدیم. (در این مورد از گام سیم‌پیچهای چنبره صرف‌نظر می‌کنیم). همچنین اگر به‌جای یک حلقه، N حلقه در مدار ۱ می‌داشتیم می‌توانستیم القای متقابل بین دو مدار را با جمع القاهای متقابل بین هر دو حلقه از دو مدار به‌دست آوریم. بنابراین اگر مدار ۱، N حلقه داشته باشد، که هر حلقه القای متقابل یکسانی با مواد چنبره داشته باشد برای القای متقابل بین مدارها به‌دست می‌آوریم

$$M_{کل} = N M_{حلقه} = \mu_0 n_1 N S_2 \quad (35-11)$$

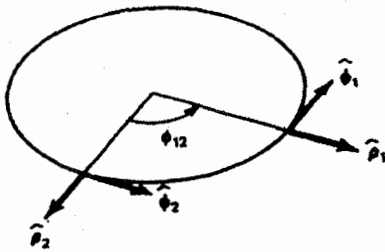
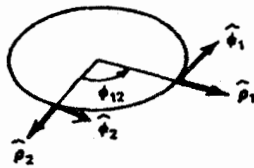
باید توجه کرد که اگرچه $M = L_{21} = L_{12}$ ، اما محاسبهٔ L_{21} کاملاً مشکل است. به این دلیل با دانستن اینکه هر دو ضریب مساوی هستند، ضریبی را که محاسبهٔ آن ساده‌تر است انتخاب می‌کنیم.

اگر یک سیمولوله (شکل ۱۱-۱۱ را ببینید)، که طول آن خیلی بزرگتر از قطرش است داشته باشیم، آن‌گاه نتایج به‌دست آمده برای چنبره برای حلقه‌های واقع در نزدیکی مرکز سیمولوله، قابل قبول‌اند. به این ترتیب برای یک حلقهٔ منفرد که به دور یک سیمولوله و نزدیک به مرکز آن قرار دارد، $M = \mu_0 n_1 S_2$ که S_2 سطح مقطع سیمولوله است. با این همه توجه کنید که اگر حلقه در یک انتهای سیمولوله، که میدان مغناطیسی در آنجا تقریباً $(1/2)\mu_0 n_1 I_1$ است (مثال ۸-۱۳ را ببینید) قرار گیرد، بنابراین القای متقابل نیز $1/2$ مقدار بالا خواهد بود. به این ترتیب اگر دو سیمولوله بلند، که یکی دیگری را احاطه کرده است و طول آنها تقریباً یکی است، را در نظر بگیریم القای متقابل آنها بین مقادیر $\mu_0 n_1 N S_2 / 2$ و $\mu_0 n_1 N S_2$ است، که N تعداد دورهای سیمولولهٔ خارجی است.

رتبه‌بندی به همین صورت اغلب برای جفت کردن مغناطیسی مدارها، یعنی از طریق القا، به‌کار می‌رود (بحث مبدلها را در فصل ۱۳



(الف)



(ب)

شکل ۱۲-۱۱ تعیین القای متقابل دو حلقه هم‌محور دایره‌ای با استفاده از رابطه نیومن. (الف) نمایش هندسی دو حلقه، (ب) بردارهای واحد.

این انتگرال را می‌توان برحسب انتگرالهای بیضوی به شکل زیر نوشت

$$K(k) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \quad (\text{نوع اول})$$

$$E(k) \equiv \int_0^{\pi/2} d\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} \quad (\text{نوع دوم}) \quad (38-11)$$

بینید). همچنین توجه کنید که اگر شار مغناطیسی را با افزودن مواد فرومغناطیسی افزایش دهیم، ضریب القا نیز افزایش می‌یابد. ■

مثال ۹-۱۱ القای متقابل دو حلقه دایره‌ای هم‌محور ممکن است تصور کنیم که دو حلقه سیم [شکل ۱۲-۱۱ (الف) و ۱۲-۱۱ (ب)] با شکل هندسی ساده که صفحه‌های آنها موازی و محورهایشان برهم منطبق‌اند از روش محاسبه القای متقابل پیروی می‌کنند. در صورتی‌که چنین نیست. با این حال چون از رابطه نیومن در این مثال استفاده می‌شود آن را به‌طور مشروح بررسی می‌کنیم.

شعاعهای دو حلقه ۱ و ۲ را به ترتیب R_1 و R_2 و فاصله مراکز آنها را h می‌گیریم. همچنین جریانهای مربوط به دو حلقه را I_1 و I_2 فرض می‌کنیم. از دستگاه مختصات استوانه‌ای، که مبدأ آن بر مرکز حلقه ۱ و محور آن در راستای محور حلقه ۲ باشد برای به‌کار بردن رابطه نیومن استفاده می‌کنیم. دو جزء دیفرانسیلی dl_1 و dl_2 را به ترتیب روی مدارهای ۱ و ۲ با مختصات $(R_1, \phi_1, 0)$ و (R_2, ϕ_2, h) در نظر می‌گیریم. این اجزاء را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$dl_1 = R_1 d\phi_1 \hat{\phi}_1 \quad dl_2 = R_2 d\phi_2 \hat{\phi}_2$$

$$dl_1 \cdot dl_2 = R_1 R_2 d\phi_1 d\phi_2 \hat{\phi}_1 \cdot \hat{\phi}_2$$

فاصله بین دو جزء $|r_2 - r_1|$ برحسب مختصات آنها به شکل زیر است

$$|r_2 - r_1| = |h\hat{z} + R_2 \hat{\rho}_2 - R_1 \hat{\rho}_1|$$

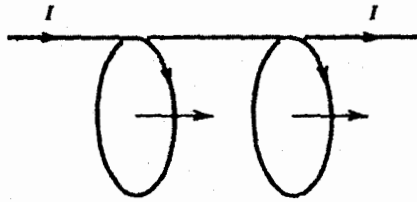
$$= [(h^2 + R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \hat{\rho}_1 \cdot \hat{\rho}_2)]^{1/2}$$

حال می‌نویسیم $\hat{\phi}_1 \cdot \hat{\phi}_2 = \cos \phi_{12} = \hat{\rho}_1 \cdot \hat{\rho}_2$ که $\phi_{12} = \phi_1 - \phi_2$ [شکل ۱۲-۱۱ (ب) را ببینید] است. بنابراین با قراردادن این جمله‌ها در رابطه نیومن [معادله (۱۱-۲۹)] به دست می‌آوریم

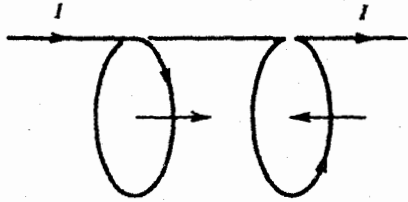
$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} R_1 R_2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_2 d\phi_1 \cos \phi_{12}}{\sqrt{h^2 + R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos \phi_{12}}} \quad (36-11)$$

که در آن متغیرهای انتگرال‌گیری (ϕ_1) و (ϕ_2) را به (ϕ_{12}) تغییر داده‌ایم. انتگرال‌گیری روی ϕ_2 درست برابر با 2π می‌شود. بنابراین

$$M = \frac{\mu_0 R_1 R_2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_{12} \cos \phi_{12}}{\sqrt{h^2 + R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos \phi_{12}}} \quad (37-11)$$

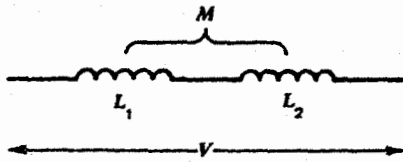


(الف)

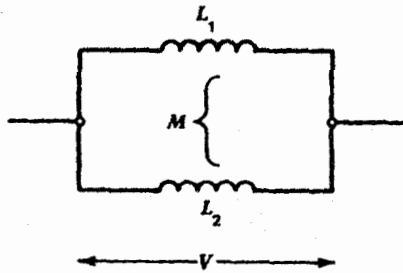


(ب)

شکل ۱۴-۱۱ دو حلقه جریان که به صورت سری به هم وصل اند (الف) شارها همدیگر را تقویت می کنند، (ب) شارها در خلاف جهت یکدیگرند.



(الف)



(ب)

شکل ۱۵-۱۱ نمودار طرحوار مدار دو القای متصل شده (الف) سری و (ب) موازی.

ابتدا خودالقایی حلقه های سری را بررسی می کنیم. نمودار طرحوار دو حلقه در شکل ۱۴-۱۱ و مدار قراردادی مربوط را در شکل ۱۵-۱۱ (الف) می بینیم. (از شار عبوری از حلقه ها، ناشی از قسمت های مستقیم مدار بین حلقه ها و غیره چشمپوشی می کنیم). بنابراین شار عبوری از آنها به کمک روابط (۲۴-۱۱) و (۲۵-۱۱) به دست می آید یعنی

$$F_1 = F_{11} + F_{12} \quad F_2 = F_{21} + F_{22}$$

شار عبوری از حلقه ۱ دو جمله دارد. یکی مربوط به جریان عبوری

که $k^2 = 4R_1R_2 / (h^2 + (R_1 + R_2)^2)$ است. برحسب این انتگرالها که توابعی از k هستند. القای متقابل عبارت است از

$$M = \mu_0 \sqrt{R_1R_2} \left[- \left(\frac{2}{k} E + \frac{2}{k} - k \right) \right] K(k) \quad (۳۹-۱۱)$$

۱۱-۳-۲ خودالقایی - القاها سری و موازی

برای محاسبه ضریب خودالقایی، $L_{11} = F_{11}/I$ ، که I جریان حلقه رشته ای است، با اشکالی مواجه می شویم. یعنی در حالتی که فرض می کنیم رشته جریان معینی دارد، F_{11} بینهایت می شود. علت این است که در نقاط خیلی نزدیک به سیم میدان مغناطیسی با عکس مجذور فاصله تغییر می کند و بنابراین با صفر شدن فاصله بینهایت می شود.

در واقع سیمهای با مساحت سطح یا سطح مقطع محدود، جریانها را در اطراف یک حلقه حمل می کنند، بنابراین این بینهایتها اهمیت فیزیکی ندارند. میدانهای مغناطیسی ایجاد شده در همه جا متناهی اند. تنها مشکل تصمیم گیری در اندازه سطحی است که شار عبوری از آن محاسبه می شود. اغلب کمیتی را که حساب می کنیم اصطلاحاً خودالقایی "خارجی" می نامیم. در این حالت سطح انتخابی خارج از سیم (مثلاً قسمت سایه خورده در شکل ۱۱-۱۳) است. این معمولاً خودالقایی را با یک ضریب کوچک، کمتر تخمین می زند (به شرطی که ابعاد عرضی سیمها در مقایسه با ابعاد سطح خارجی کوچک باشند). در واقع اگر فرض کنیم جریان در سطح سیم جاری است، القای خارجی می تواند همان القا باشد زیرا میدان B داخل سیم صفر است (اگر سیم باریک و بدون پیچ خوردگی باشد).

بنابراین ممکن است محاسبه دقیق خودالقایی مشکل باشد. اگر به جای تعریف برحسب شار از ملاحظات انرژی استفاده کنیم محاسبه آن بدون ابهام و ساده تر است (فصل ۱۲ را ببینید). با این حال، بررسی ساده ای که شامل اتصالهای سری و موازی القاگرهاست، این بحث را آسان می کند.



شکل ۱۳-۱۱ خودالقایی "خارجی" یک حلقه اغلب با در نظر گرفتن شار از سطح خارجی سیم سایه دار (حساب می شود تا از واگرایی احتمالی در خود سیم جلوگیری شود).

از حلقه ۱ و دیگری مربوط به جریان عبوری از حلقه ۲ است، که دومی به اندازه "شار متقابل" F_{21} در F_{12} سهم دارد. با به کار بردن رابطه (۱۱-۳۳) می‌توانیم جمله‌های مختلف شار را برحسب جریانها بنویسیم

$$F_{11} \equiv L_1 I \quad F_{12} = \pm MI = F_{21} \quad F_{22} = L_2 I$$

به این ترتیب

$$F_1 = (L_1 \pm M)I \quad F_2 = (L_2 \pm M)I$$

وقتی علامت مثبت را به کار می‌بریم که جریانهای عبوری از حلقه در "جهت مشابه" باشند یعنی "شار متقابل"، مانند شکل ۱۱-۱۴ (الف) "خودشار" را تقویت کند. در غیر این صورت، مانند شکل ۱۱-۱۴ (ب)، علامت منفی به کار می‌رود. اکنون نیروهای محرکه الکتریکی القایی در این دو حلقه، \mathcal{E}_1 و \mathcal{E}_2 ، را به کمک معادله (۱۱-۱۳) به دست می‌آوریم

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{dF_1}{dt} \quad \mathcal{E}_2 = -\frac{dF_2}{dt}$$

و نیروی محرکه الکتریکی کل را از رابطه زیر حساب می‌کنیم

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -\frac{d}{dt}(F_1 + F_2)$$

بدین ترتیب "شار کل" مربوط به دو حلقه را می‌توانیم $F_1 + F_2$ و خودالقایی برای کل مدار (شامل دو حلقه) را، L ، به شکل زیر تعریف کنیم

$$F = \sum_{i=1,2} F_i \equiv LI = (L_1 + L_2 \pm 2M)I \quad (40-11)$$

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M \quad (41-11)$$

در واقع همین روش را برای N حلقه می‌توانیم به کار ببریم به طوری که

$$F = \sum_{i=1}^N F_i \equiv LI \quad (42-11)$$

آن‌گاه برای یک شکل ثابت داریم

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (43-11)$$

که مانند همان است که برای حلقه ساده نوشتیم. باید به خاطر داشته باشیم که شار عبوری را فقط برای سطوحی حساب می‌کنیم که عمود بر آنها، یا رویه‌های مثبت آنها، با جهت جریانی که هم سو با بیج راستگرد عبور می‌کند تعریف می‌شوند.

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad \text{یا} \quad M = \sqrt{k_1 k_2 L_1 L_2} \quad -1 < k < 1 \quad (44-11)$$

این ثابت هندسی خالص را "ضریب جفت‌شدگی" حلقه‌ها می‌نامیم. چون k با تغییر شکل حلقه‌ها فرق می‌کند می‌توان از آن برای ساختن یک القای متغیر استفاده کرد (در حقیقت این یک روش متداول برای میزان کردن مدارهای تشدید در رادیوهای اولیه است).

اکنون اگر القاگرها مطابق شکل ۱۱-۱۵ (ب) موازی بسته شوند، القای مؤثر دستگاه باید متفاوت با آن در اتصال سری باشد [معادله (۱۱-۴۱)]. در این حالت می‌توان نشان داد (مسئله ۱۱-۱۸ را ببینید) که

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \pm 2M} \quad (45-11)$$

که در آن علامت M بسته به نوع اتصال القاگرها است.

مثال ۱۱-۱۰ خودالقایی یک سیملوله یا چنبره

یک سیملوله شامل تعداد زیادی حلقه‌های نزدیک به هم است که اگر بسیار بلند باشد از اثرات انتهایی آن می‌توان چشم پوشید و شار متوسط عبوری از هر حلقه آن با $F_j = \mu_0 n_l S I$ داده می‌شود، که S سطح مقطع حلقه، n_l تعداد در واحد طول و I جریان عبوری از آن است. جمع کل شار عبوری از حلقه‌ها چنین می‌شود

$$F = \sum_{j=1}^N F_j = \mu_0 n_l S N I$$

اکنون با به کار بردن معادله (۱۱-۴۲) خودالقایی سیملوله را حساب می‌کنیم. به این ترتیب

$$L = \mu_0 n_l N S$$

برای چنبره‌ای که در آن میدان مغناطیسی اساساً ثابت است دقیقاً همین نتیجه به دست می‌آید.

۴-۱۱ خلاصه

موضوعهای مستقل الکتروستاتیک و مغناطوستاتیک را از طریق تغییر زمانی میدان مغناطیسی با یکدیگر ادغام کردیم. قانون تجربی فاراده بیان می‌کند که میزان تغییر زمانی شار مغناطیسی عبوری از سطح S ، یک emf القایی ایجاد می‌کند و بنابراین میدان الکتریکی القا شده در محیط سطح C به وجود می‌آید. یعنی

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{dF}{dt} \quad [۵-۱۱]، [۳-۱۱]$$

علامت منفی بیانی از قانون لنز است. قانون انتگرالی بالا برای سطح صلب و ثابت S می‌تواند به شکل قانون دیفرانسیلی زیر تغییر یابد

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad [۷-۱۱]$$

که ناپایستار بودن میدان الکتریکی کل را در حضور میدان مغناطیسی متغیر نشان می‌دهد. این معادله دیفرانسیل به همراه دو رابطه دیورژانس، سه معادله ماکسول را تشکیل می‌دهند که همواره برقرارند. قرارداد $B = \nabla \times \mathbf{A}$ در قانون دیفرانسیلی امپر نتیجه می‌دهد

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{یا} \quad \nabla \times \left[\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = 0$$

که با توجه به آن داریم

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad [۱۰-۱۱]$$

جمله $\mathbf{E}^q = -\nabla\Phi$ یک میدان پایستار است در حالی که جمله $\mathbf{E}^i = -\partial\mathbf{A}/\partial t$ میدان غیر پایستار است.

شار مغناطیسی عبوری از یک سطح غیر صلب یا (و) غیر ساکن، حتی اگر میدان مغناطیسی تابع زمان نباشد، می‌تواند نسبت به زمان تغییر کند. در اینجا قانون فاراده را هنوز می‌توان به کار برد و emf القایی که آن را حرکتی می‌نامیم به صورت زیر است

$$\mathcal{E} = -\frac{dF}{dt} \quad [۲۳-۱۱]$$

برای بررسی رفتار الکتریکی مدارهای الکتریکی که همواره شامل حلقه‌های بسته‌اند، باید اثرهای مربوط به قانون فاراده و بنابراین تمام emfهای القایی را در نظر بگیریم. برای این منظور مناسب است که شار عبوری از هر حلقه را به طور مستقیم برحسب جریان عبوری از تمام آنها، بنویسیم

$$F_i = \sum_{j=1}^N L_{ij} I_j$$

چون $n_i \approx N/l$ می‌توان نتیجه گرفت که L متناسب با N^2 است. دلیلش به سادگی این است که شار متقابل بین حلقه‌های گوناگون وجود دارد و بنابراین شار میانگین یک حلقه ساده را باید در ضریب N ضرب کرد و چون N حلقه داریم نتیجه با N^2 متناسب است. اگر شار متقابل وجود نمی‌داشت، القا فقط با N متناسب می‌بود. ■

مثال ۱۱-۱۱ برهم‌نهی تغییرات زمانی و EMF حرکتی

در این مثال در مورد یک حلقه رسانا به سطح A که در یک میدان مغناطیسی متغیر نسبت به زمان، حرکت می‌کند بحث می‌کنیم. ناحیه‌ای را در نظر می‌گیریم که در آنجا میدان مغناطیسی به شکل $\mathbf{B} = B(t)\hat{\mathbf{z}}$ است. یک حلقه رسانای چهارگوش مسطح در صفحه $x-y$ فرض می‌کنیم به طوری که مرکز آن بر مبدأ مختصات واقع است. در زمان $t = 0$ حلقه را به دور محور x با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخانیم. اکنون emf القایی را به دو روش حساب می‌کنیم

$$\mathcal{E} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} + \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad \text{و} \quad \mathcal{E} = -\frac{dF}{dt}$$

در روش اول شار عبوری از حلقه در زمان t $F = B(t)A \cos \omega t$ است، به این ترتیب

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} [AB(t) \cos \omega t]$$

یا

$$\mathcal{E} = -A \cos \omega t \frac{dB}{dt} + BA\omega \sin \omega t$$

در روش دوم دو انتگرال را باید ارزیابی کنیم. اولی از تغییر زمانی میدان \mathbf{B} نتیجه می‌شود

$$\mathcal{E}_1 = \int -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = -A \cos \omega t \frac{dB}{dt}$$

جمله دوم مربوط به \mathcal{E} ، نیروی محرکه حرکتی است. سرعت یک نقطه روی حلقه $\mathbf{v} = r\omega\hat{\mathbf{n}} = y\omega\hat{\mathbf{n}}/\cos \omega t$ است. به این ترتیب داریم

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = y\omega B \hat{\mathbf{n}} \times \frac{\hat{\mathbf{z}}}{\cos \omega t} = -y\omega B \tan \omega t \hat{\mathbf{x}}$$

بنابراین

$$\mathcal{E}_2 = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\omega B \tan \omega t \oint y \hat{\mathbf{x}} \cdot d\mathbf{l}$$

چون $\nabla \times (y\hat{\mathbf{x}}) = -\hat{\mathbf{z}}$ ، آن‌گاه بنابر قضیه استوکس داریم

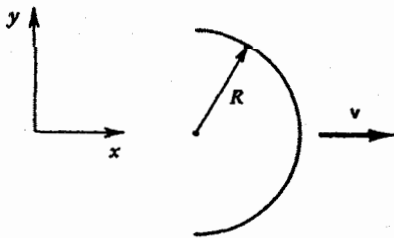
$$\oint y \hat{\mathbf{x}} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \nabla \times (y\hat{\mathbf{x}}) \cdot d\mathbf{a} = -\int \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = -A \cos \omega t$$

بنابراین $\mathcal{E}_2 = BA\omega \sin \omega t$ واضح است که \mathcal{E}_1 و \mathcal{E}_2 کاملاً مساوی دو جمله‌ای است که در روش اول به دست آمد. ■

۳-۱۱ یک قرص رسانا به شعاع a ، ضخامت δ و رسانایی σ_c در یک میدان متقارن استوانه‌ای $\mathbf{B} = B_0(t)\hat{z}$ برای $0 \leq \rho \leq R$ و $\mathbf{B} = 0$ برای $R < \rho$ قرار دارد به طوری که محور z در راستای محور z و مرکزش در مبدأ است. (الف) پتانسیل برداری \mathbf{A} مربوط به \mathbf{B} را در تمام نواحی تعیین کنید. (ب) میدان الکتریکی القایی را در همه جا پیدا کنید. (ج) چگالی جریان در داخل قرص را به دست آورید. (د) نشان دهید که توان کلی اتلافی در قرص عبارت است از

$$P = \frac{\pi \delta \sigma_c}{\lambda} R^2 \left(\frac{dB_0}{dt} \right)^2 \left(1 + 4 \ln \frac{a}{R} \right)$$

(اگر میدان کاملاً قرص را در برگیرد، جمله لگاریتمی صفر است و توان متناسب با مجذور سطح قرص و نیز مجذور dB_0/dt خواهد بود. این خاصیت کلی این‌گونه جریانها (ی ادی) است (مثال ۳-۱۱ را ببینید). ۴-۱۱ یک قطعه سیم نیم‌دایره، مطابق شکل ۱۱-۱۶، با سرعت ثابت $\mathbf{v} = v_0 \hat{x}$ در یک میدان مغناطیسی ثابت $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$ حرکت می‌کند. emf القایی بین دو انتهای سیم چقدر است.



شکل ۱۱-۱۶

۵-۱۱ یک سیم مستطیل شکل به عرض a و طول b موازی با راستای عرضش با سرعت یکنواخت v در حرکت است. سیم دیگر بسیار بلندی که جریان ثابت I از آن می‌گذرد در صفحه مستطیل و موازی با طول آن و به فاصله l از طول نزدیکتر آن واقع است. (الف) emf القایی در مستطیل را به دست آورید. (ب) القای متقابل مدارها را تعیین کنید.

۶-۱۱ دو رسانای نازک قائم به طول 50 سانتیمتر موازی با محور z و به فواصل $\rho_1 = 3$ cm و $\rho_2 = 5$ cm از آن قرار دارند. یک سیم مقاومتی دو انتهای بالایی و پایینی آن دورا به هم وصل کرده است و بنابراین یک حلقه مستطیلی با مقاومت $2 \text{ } \Omega$ اهم را به وجود می‌آورد. حلقه به دور محور z با سرعت $\omega = 2\pi \times 50 \text{ rad/min}$ (ب) (شکل هندسی ثابت) در یک میدان غیریکنواخت $\mathbf{B}_1 = 25 \text{ } \rho T$

ضرایب L_{ij} ضرایب هندسی مستقل از جریانها و شارها هستند و برای $L_{ii} = L_i$ ، $i = j$ وابسته به شکل هندسی هر حلقه منفرد است و ضریب خودالقایی نام دارد. ضرایب $L_{ij} = M_{ij}$ برای $i \neq j$ به شکل هندسی نسبی هر جفت حلقه بستگی دارد و ضریب القای متقابل نامیده می‌شود. قانون فاراده برحسب این ضرایب به صورت زیر است

$$\mathcal{E}_i = -\frac{dF_i}{dt} = -\sum_j L_{ij} \frac{dI_j}{dt}$$

القای متقابل دو حلقه C_1 و C_2 با رابطه نیومن داده می‌شود

$$L_{12} = M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad [29-11]$$

که در آن $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ فاصله بین اجزای $d\mathbf{l}_1$ و $d\mathbf{l}_2$ دو حلقه است. در واقع این رابطه یک ویژگی مهم ضرایب، یعنی $L_{21} = L_{12}$ ، را نشان می‌دهد.

وقتی دو حلقه با L_1 و L_2 و القای متقابل M ، با مقاومتهایی که می‌توان از آنها چشم پوشید به شکل سری یا موازی به هم وصل شوند، القای مؤثر آنها، L_{eff} ، عبارت است از

$$L_{\text{eff}} = L_1 + L_2 \pm 2M \quad (\text{سری}) \quad [41-11]$$

$$L_{\text{eff}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \pm 2M} \quad (\text{موازی}) \quad [45-11]$$

اگر از M بتوان چشم پوشید، آنگاه روابط نشان می‌دهند که L_2 و L_1 شبیه مقاومتها با هم ترکیب می‌شوند. در حالت کلی $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ است که $|k| \leq 1$ ضریب جفت‌شدگی مدارهاست.

مسائل

۱-۱۱ میدان مغناطیسی در ناحیه $0 \leq \rho \leq \rho_0$ به میزان $12T/s$ افزایش می‌یابد. اندازه میدان الکتریکی را در هر شعاع ρ تعیین کنید. E را به شکل تابعی از ρ رسم کنید.

۲-۱۱ یک سیمولوله بلند در هر سانتیمتر، 10° دور سیم به قطر 3 سانتیمتر دارد. سیم پیچ نازک دیگری که قطرش 2 سانتیمتر و دارای 20 دور است را طوری در داخل سیمولوله قرار می‌دهیم که محورهای آن دو با هم موازی باشند. جریان در سیمولوله $I = 3t + 2t^2$ است که I برحسب آمپر و t برحسب ثانیه است. emf القایی را در سیم پیچ تعیین کنید. جریان لحظه‌ای در سیم پیچ را به شرطی که مقاومت آن $15 \text{ } \Omega$ اهم باشد در زمان $t = 2$ s تعیین کنید. از شار ایجادشده به وسیله جریان القایی چشمپوشی کنید.

۱۱-۱۱ یک سیم پیچ چنبره‌ای با N دور، شعاع متوسط b و مقطع دایره‌ای به شعاع a مفروض است. نشان دهید القا بر واحد طول عبارت است از $L = \mu_0 N^2 (b - \sqrt{b^2 - a^2})$.

۱۲-۱۱ فضای بین دو لایه استوانه‌ای رسانای هم‌محور به شعاعهای داخلی و خارجی a و b با ماده‌ای به تراوایی μ پر شده است. خودالقای را بر واحد طول خط تعیین کنید.

۱۳-۱۱ یک سیم رسانا به شعاع a با یک لایه استوانه‌ای هم‌محور رسانای دایره‌ای احاطه شده است. شعاع استوانه b فرض می‌شود. سیم و لایه تراوایی مغناطیسی μ_0 دارند. فضای بین آنها با ماده‌ای به تراوایی μ پر شده است. خودالقای را بر واحد طول این خط تعیین کنید.

۱۴-۱۱ یک رسانای استوانه‌ای بلند به شعاع a را موازی با یک صفحه بسیار بزرگ متصل به زمین در نظر می‌گیریم. فاصله بین آنها d است. نشان دهید القای متقابل بر واحد طول عبارت است از $L/l = \mu_0 \cosh^{-1}(d/a)/2\pi$ و اگر $d \gg a$ باشد عبارت است از $\mu_0 \ln(2d/a)/2\pi$.

۱۵-۱۱ دو رسانای موازی مشابه به شعاع a و فاصله d را در نظر می‌گیریم. (الف) نشان دهید القا بر واحد طول وقتی $d = 25f$ و $a = 8 \text{ in}$ است حساب کنید.

۱۶-۱۱ یک حلقه دایره‌ای به شعاع a ، مقاومت R و القای L در یک میدان مغناطیسی $H = H_0 \sin \omega t$ به دور یک قطر که عمود بر H است می‌چرخد. (الف) جریان در حلقه را تعیین کنید. (ب) گشتاور تأخیری را به دست آورید. (ج) توان متوسط لازم برای ادامه چرخش را حساب کنید.

۱۷-۱۱ القای متقابل دو حلقه مثال ۱۱-۱۰ را وقتی (الف) از یکدیگر خیلی دورند ($h \gg R_1, R_2$) و (ب) تقریباً شعاعهای مساوی دارند و به فاصله کم ($h \ll R$ و $R_1 \approx R_2 \approx R$) هستند تعیین کنید.

۱۸-۱۱ دو القاگر L_1 و L_2 با القای متقابل M و مقاومت ناچیز به طور موازی به هم وصل‌اند. اگر جریان کل I باشد (الف) اختلاف پتانسیل و (ب) القای مؤثر دستگاه را پیدا کنید. شکل ۱۱-۴۵ را ببینید.

در ρ_1 و $\rho_2 = 8 \text{ mT}$ در B_2 می‌چرخد. (الف) جریان در حلقه را تعیین کنید. (ب) توان الکتریکی تولیدشده در حلقه را به دست آورید. (ج) میزان کار انجام‌شده روی حلقه را تعیین کنید و آن را با نتیجه (ب) مقایسه کنید.

۷-۱۱ میله متحرک روی یک ریل رسانای ثابت را، که در شکل ۱۱-۷ نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که راستای میدان B بر سطح ریل عمود و اندازه آن به زمان وابسته است، $B = 3 \text{ mT} \sin \omega t$ و $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ است. (الف) ولتاژ القایی را وقتی میله ثابت و سطح حلقه 25 cm^2 باشد تعیین کنید. (ب) برای حالتی که میله با سرعت یکنواخت $v = 1.5 \times 10^4 \text{ cm/s}$ حرکت می‌کند در لحظه‌ای که سطح برابر با 25 cm^2 است تکرار کنید. اندازه سطح را در زمان $t = 0$ صفر بگیرید و $l = 5 \text{ cm}$ انتخاب کنید.

۸-۱۱ دو سیم ثابت موازی به طول بینهایت در مکانهای $x = \pm a$ و موازی با محور y قرار گرفته‌اند. از سیمها به ترتیب جریانهای ثابت $\pm I$ می‌گذرند. سیم موازی و متحرک دیگری به طول بینهایت که مکان لحظه‌ای آن به ترتیب به فاصله r_1 و r_2 از سیمهای واقع در $x = a$ و $x = -a$ قرار گرفته وجود دارد. (الف) رابطه نیومن را برای القای متقابل بین مدار شامل دو سیم ثابت و مدار شامل واحد طول سیم متحرک به کار برده و نشان دهید $L = \mu_0 \log(r_2/r_1)/2\pi$ است. (ب) emf القایی بر واحد طول سیم متحرک را وقتی در مبدأ قرار دارد و سرعتش $v = v_0 \hat{x}$ است به دست آورید.

۹-۱۱ از یک حلقه سیم دایره‌ای به مرکز مبدأ و سطح A جریان ثابت I_1 می‌گذرد. این سیم با سرعت زاویه‌ای ثابت به دور محور z می‌چرخد. در $t = 0$ حلقه در صفحه yz است جریان القایی را در حلقه‌ای ثابت که در فاصله دور r روی محور y است پیدا کنید. حلقه دوم در صفحه yz واقع است و سطح آن A_2 و مقاومت آن R_2 است.

۱۰-۱۱ القا را در یک چنبره با تعداد N دور با مقطع مربعی شکل و به شعاعهای داخلی و خارجی به ترتیب ρ_1 و ρ_2 و ضخامت a تعیین کنید.

انرژی مغناطیسی

دارای مقاومت ناچیز است به طوری که می توان از اتلاف انرژی بر اثر گرما (RI^2) چشمپوشی کرد. آهنگ کار الکتریکی، dW/dt ، در مدار که از نیروی محرکه الکتریکی القاشده ناشی می شود برابر است با

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{E}I \quad (1-12)$$

که در آن \mathcal{E} و I نیروی محرکه الکتریکی (emf) آنی القاشده و جریان در مدار هستند. اما، از معادله (۳-۱۱) داریم $\mathcal{E} = -dF/dt$ که در آن F شار گذرنده از حلقه است؛ از این رو

$$dW = -I dF \quad (2-12)$$

آهنگ کار وابسته به این شار که به وسیله منابع خارجی (مثلاً باتریها) انجام می شود برابر است با $dW^{(b)}/dt = -\mathcal{E}I$ ؛ از این رو

$$dW^{(b)} = I dF \quad (3-12)$$

از طرف دیگر dW را می توان برحسب L و I که در آن L خودالقا است، نوشت. از معادله (۴۳-۱۱) داریم، $\mathcal{E} = -L(dI/dt)$ ؛ به این ترتیب معادله (۱-۱۲) به صورت

$$\frac{dW}{dt} = -LI \frac{dI}{dt}$$

یا به شکل دیفرانسیلی زیر

$$dW = -LI dI \quad (4-12)$$

در فصل ۶ انرژی الکتریکی ذخیره شده در توزیعهای بار و در مواد دی الکتریک قطبیده را محاسبه کردیم و نشان دادیم که همان انرژی به شکل دیگر برحسب انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی وابسته به این انرژی بیان می شود.

در این فصل حالت مغناطیسی را در نظر می گیریم: انرژی ذخیره شده در توزیعهای جریان و در مواد مغناطیده را محاسبه می کنیم. همچنین نشان می دهیم که این انرژی را می توان برحسب انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی وابسته به این انرژی بیان کرد. به علاوه نشان می دهیم که فرمولبندی انرژی برای محاسبه نیروها و گشتاورهای بین عناصر مختلف توزیعهای جریان بسیار مناسب است.

۱-۱۲ حلقه جریان واقع در ماده مغناطیسی خطی

یک حلقه بسته را در نظر می گیریم. در فاصله زمانی $t = t_0$ و $t = t_1$ در مدار برفرار می شود. در برقراری این جریانها (میدانها) منبع خارجی کار الکتریکی انجام می دهد که این کار به صورت انرژی مغناطیسی ذخیره می شود. اگر ماده ای که حلقه در آن قرار دارد یک ماده مغناطیسی خطی باشد و در حلقه هیچ گونه اتلاف گرما نباشد، این انرژی را به هنگام قطع جریان می توان دوباره به دست آورد.

انرژی ذخیره شده به کمک قانون نیروی محرکه الکتریکی فاراده محاسبه می شود [معادله (۳-۱۱) را ببینید]. فرض می کنیم که مدار

که در آن $m < k$. به این ترتیب، معادله (۱۲-۱۰) به صورت

$$dW = - \sum_{\substack{m,k \\ m < k}}^N M_{mk} d(I_m I_k) - \sum_m^N L_m I_m dI_m \quad (11-12)$$

در می‌آید که به سادگی از صفر تا I_m و I_k انتگرال‌گیری می‌شود

$$W = - \sum_{\substack{m,k \\ m < k}}^N M_{mk} I_m I_k - \frac{1}{2} \sum_m^N L_m I_m^2 \quad (12-12)$$

بنابراین کل انرژی مغناطیسی ذخیره‌شده در دستگاه $U = -W$ برابر است با

$$U = \sum_{\substack{m,k \\ m < k}}^N M_{mk} I_m I_k + \frac{1}{2} \sum_m^N L_m I_m^2 \quad (13-12)$$

برای بیان انرژی N مدار برحسب شار گذرنده از آنها، ابتدا معادله (۱۳-۱۲) را به صورت زیر

$$U = \frac{1}{2} \sum_{m \neq k}^N M_{mk} I_m I_k + \frac{1}{2} \sum_m^N L_m I_m^2$$

یا

$$U = \frac{1}{2} \sum_{m,k}^N M_{mk} I_m I_k \quad (14-12)$$

که در آن به ازای $m = k$ ، $M_{mk} = L_m$ بازنویسی می‌کنیم. القای M_{mk} برحسب شار ناشی از مدار k ام که از مدار m ام می‌گذرد تعریف می‌شود؛ یعنی $M_{mk} = dF_{mk}/dI_k$ ، که برای دستگاه‌های خطی $M_{mk} = F_{mk}/I_k$ را به دست می‌دهد. بنابراین کل شار گذرنده از مدار m ام برابر است با

$$F_m = \sum_{k=1}^N F_{mk} = \sum_{k=1}^N M_{mk} I_k \quad (15-12)$$

قراردادن این نتیجه در معادله (۱۴-۱۲) به دست می‌دهد

$$U = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N I_m F_m \quad (16-12)$$

برای یک مدار تنها، معادله (۱۶-۱۲) نتیجه قبلی معادله (۶-۱۲) را به دست می‌دهد.

در می‌آید. از این معادله می‌توان از صفر تا جریان نهایی I به سادگی انتگرال گرفت $W = -1/2 LI^2$. به این ترتیب انرژی مغناطیسی ذخیره‌شده در دستگاه، $U = -W$ برابر است با

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \quad (5-12)$$

بیان این انرژی برحسب کل شار گذرنده از مدار مفید است. برای یک مدار تنها $L = dF/dI$ ، که با F/I برابر است زیرا F با جریان خطی است؛ به این ترتیب معادله (۵-۱۲) به شکل زیر در می‌آید

$$U = \frac{1}{2} IF \quad (6-12)$$

۱۲-۲ N حلقه در یک محیط مغناطیسی خطی

در این بخش نتایج بالا برای یک حلقه تنها را به N حلقه جفت‌شده تعمیم می‌دهیم. بار دیگر، فرض می‌کنیم که مقاومت‌های حلقه‌های مفروض ناچیز باشند، و به این ترتیب از اتلاف‌های انرژی به گرما چشمپوشی می‌کنیم. جریان در مدارها از صفر به مقدار نهایی افزایش می‌یابد. در یک لحظه معین از زمان نیروی محرکه الکتریکی القاشده در مدار m ، \mathcal{E}_m با رابطه زیر

$$\mathcal{E}_m = - \sum_{k \neq m}^N M_{mk} \frac{dI_k}{dt} - L_m \frac{dI_m}{dt} \quad (7-12)$$

داده می‌شود که در آن M_{mk} القای متقابل بین مدارهای m ام و k ام و I_m و I_k به ترتیب جریان این مدارها هستند. از این رو آهنگ کار توسط emf القاشده در مدار m ام برابر است با

$$\frac{dW_m}{dt} = - \sum_{k \neq m}^N M_{mk} I_m \frac{dI_k}{dt} - L_m I_m \frac{dI_m}{dt} \quad (8-12)$$

یا

$$dW_m = - \sum_{k \neq m}^N M_{mk} I_m dI_k - L_m I_m dI_m \quad (9-12)$$

کل کار دیفرانسیلی انجام‌شده در تمام مدارها با جمع‌بندی معادله (۹-۱۲) روی m به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$dW = - \sum_{\substack{m,k=1 \\ m \neq k}}^N M_{mk} I_m dI_k - \sum_m^N L_m I_m dI_m \quad (10-12)$$

اکنون می‌نویسیم

$$M_{mk} I_m dI_k + M_{km} I_k dI_m = M_{mk} d(I_k I_m)$$

معادله (۱۲-۱۹) به صورت زیر در می آید

$$U = \frac{1}{4} \int_V \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dv - \frac{1}{4} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dv \quad (12-20)$$

انتگرال دوم این معادله با اعمال قضیه دیورانس به یک انتگرال سطحی تبدیل می شود. به علاوه، با استفاده از $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ، به صورت

$$U = \frac{1}{4} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv - \frac{1}{4} \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} \quad (12-21)$$

در می آید که در آن S سطحی است که حجم V را احاطه می کند. اکنون می خواهیم S و از این رو V را طوری انتخاب کنیم که انتگرال سطحی صفر شود. اگر توزیعهای جریان محدود باشند یعنی اگر تا بینهایت ادامه نداشته باشند امکان دارد V را خیلی بزرگ انتخاب کنیم و از این رو S بسیار بزرگ می شود به طوری که فاصله تمام نقاط روی آن از توزیعها بسیار زیاد می شود. در آن صورت وابستگی شعاعی بارز پتانسیل برداری و میدانهای مغناطیسی در سطح را به ترتیب با $1/r$ و $1/r^2$ که در آن r فاصله نقاط سطح تا نقاط در توزیعهای جریان است انتخاب می کنیم. وابستگیهای شعاعی دیگر، اگر وجود داشته باشند، به صورت r^{-m} کم می شوند، که در آن m در حالت H یک عدد صحیح بزرگتر یا مساوی با ۳ و در حالت پتانسیل، بزرگتر از ۲ است. در هر حالت $\mathbf{A} \times \mathbf{H}$ زیر انتگرال به صورت $1/r^3$ یا سریعتر نزول می کند و چون جزء سطح da با r^2 متناسب است، انتگرال سطحی وقتی r بینهایت می شود، صفر می شود. از این رو معادله (۱۲-۲۱) به صورت زیر در می آید

$$U = \frac{1}{4} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv \quad (\text{تمام فضا}) \quad (12-22)$$

که در آن اکنون V حجم تمام فضاست (حجم نامتناهی). برای محیط همگن خطی با تراوایی μ آن طور که در این بخش در نظر گرفته می شود، داریم $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ و برای چگالی انرژی که به مقادیر نهایی میدانها بستگی دارد

$$u = \frac{1}{4} \mu H^2 = \frac{1}{4} \frac{B^2}{\mu} \quad (12-23)$$

بیان چگالی انرژی برحسب \mathbf{H} و مغناطش \mathbf{M} آموزنده است. با قراردادن $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}$ در معادله (۱۲-۲۲)، به دست می آوریم

$$u = \frac{1}{4} \mu_0 H^2 + \frac{1}{4} \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{M} \quad (12-24)$$

۱۲-۳ انرژی ذخیره شده در یک میدان مغناطیسی در حضور مواد خطی

در بخشهای قبل انرژی مغناطیسی مدارهای جریان برحسب جریانها، خودالقاها و القاهای متقابل مدارها بیان شد. همچنین، این انرژی برحسب جریانها و کل شارهای مغناطیسی گذرنده از مدارها بیان شد. در این بخش هنوز راه دیگری از بیان انرژی، یعنی بیان آن برحسب میدان مغناطیسی وابسته به آن انرژی را بیان می کنیم.

برای این کار از مفهوم کلی تر "مدار جریان" استفاده می کنیم که لزوماً توسط سیمها تعریف نمی شود بلکه توسط یک خط جریان تعریف می شود (خط نیروی میدان الکتریکی متناظر با خط جریان). اکنون انرژی مغناطیسی داده شده با معادله (۱۲-۱۶) را به عبارتی برحسب میدان مغناطیسی وابسته به آن انرژی و برحسب تراوایی محیط تبدیل می کنیم. شار گذرنده از مدارها را می توان به وسیله معادله (۸-۴۵) برحسب میدان مغناطیسی موضعی بیان کرد؛ با این حال، برای تبدیل، بهتر است آن را برحسب پتانسیل برداری مغناطیسی \mathbf{A} که با معادله (۸-۴۶) داده می شود، بیان کرد. با قراردادن معادله (۸-۴۶) در معادله (۱۲-۱۶) به دست می آوریم

$$U = \frac{1}{4} \sum_m I_m \oint_{C_m} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_m = \frac{1}{4} \sum_m \oint_{C_m} I_m \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_m \quad (12-17)$$

که در آن C_m مرز "مدار" m ام و $d\mathbf{l}_m$ جابه جایی جزئی در امتداد C_m است. حاصلضرب $I_m d\mathbf{l}_m$ را می توان با $\mathbf{J} dv$ تعویض کرد و جمع روی انتگرالهای خطی مختلف را می توان به یک انتگرال بر روی حجم تغییر داد

$$\sum_m \oint_{C_m} = \int_V$$

یعنی

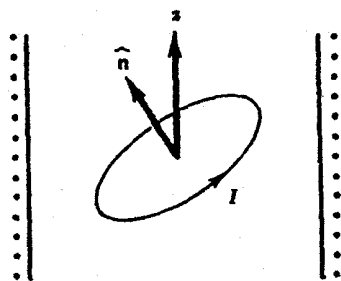
$$U = \frac{1}{4} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dv \quad (12-18)$$

اکنون چگالی جریان را برحسب شدت مغناطیسی $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$ می نویسیم، یعنی

$$U = \frac{1}{4} \int_V (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A} dv \quad (12-19)$$

با استفاده از اتحاد برداری مفروض (۱-۶۰)،

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} - (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A}$$



شکل ۱۲-۱ انرژی مغناطیسی یک حلقه حامل جریان در یک سیمولوه بلند.

در این مثال کل نتیجه را با استفاده از روشهایی که در این فصل توضیح دادیم، به دست می آوریم. مانند شکل ۱۲-۱ یک سیمولوه بلند با n_1 دور بر واحد طول و حامل جریان I را که محور سیمولوه در امتداد محور z است در نظر بگیرید. یک حلقه کوچک، حامل یک جریان ثابت I_1 ، و با مساحت سطح A داخل سیمولوه قرار می دهیم. میدان مغناطیسی تولید شده به وسیله سیمولوه یکنواخت و موازی محور سیمولوه است؛ این میدان برابر است با $\mathbf{B} = \mu_0 n_1 I \hat{z}$ (مثال ۸-۸ را ببینید). شار مغناطیسی گذرنده از حلقه برابر است با $F_1 = \mu_0 n_1 I A |\hat{z} \cdot \hat{n}|$ که در آن \hat{n} بردار واحد عمود بر حلقه است. القای متقابل دستگاه با گرفتن مشتق F نسبت به I تعیین می شود

$$M = \frac{dF}{dI} = \mu_0 n_1 A |\hat{z} \cdot \hat{n}|$$

با استفاده از معادله (۱۲-۱۴)، انرژی برهم کنش حلقه با سیمولوه برابر است با

$$U = MI_1 I = \mu_0 n_1 A I_1 I |\hat{z} \cdot \hat{n}|$$

که آن را می توان برحسب گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه، $\mathbf{m} = I_1 A \hat{n}$ و میدان مغناطیسی \mathbf{B} بازنویسی کرد

$$U = +\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{حلقه جریان}) \quad (26-12)$$

این نتیجه نشان می دهد که وقتی جریان برقرار می شود، کل انرژی مغناطیسی مساوی با منفی انرژی وابسته به گشتاور، $W^{(m)} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ است، که نشان می دهد باتریهایی که جریان را برقرار می کنند باید کار

$$W^{(b)} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

را انجام داده باشند. این موضوع به این صورت قابل درک است. وقتی یک حلقه که به یک منبع با یک جریان ثابت I وصل است در یک میدان مغناطیسی قرار می گیرد و شار مغناطیسی در آن به اندازه dF

جمله اول چگالی انرژی میدان مغناطیسی در خلا و از این رو جمله دوم چگالی انرژی ذخیره شده در خود ماده تعبیر می شود. این شکل نوشتن چگالی انرژی در مواد غیرخطی (که در بخش بعد آن را بحث می کنیم) بسیار مفید است.

مثال ۱۲-۱ انرژی مغناطیسی دو جریان رشته ای کل انرژی مغناطیسی دو جریان رشته ای بلند را می توان با استفاده از معادله (۱۲-۱۸) محاسبه کرد: $U = 1/2 \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dv$ که در آن \mathbf{A} کل پتانسیل برداری است و حجم شامل دو جریان است. از طرف دیگر انرژی برهم کنش $U^{(int)}$ با رابطه زیر داده می شود (با استفاده از تقریب رشته ای)

$$U^{(int)} = \int I_2 \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = \int I_1 \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l}_1$$

(بحث بخش ۶-۶ را ببینید). فرض کنید جریانها در امتداد محور z باشند. یکی واقع در مبدأ و دومی واقع در $\rho = \rho_0$. پتانسیل برداری در $\rho = \rho_0$ ناشی از جریان در $\rho = 0$ برابر است با

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_1 \hat{z}}{2\pi} \ln \rho_0$$

به این ترتیب

$$U = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \rho_0$$

که در آن l طولی از یک قسمت از رشته دوم است، آنگاه، انرژی برهم کنش بر واحد طول برابر است با

$$u = \frac{1}{2\pi} \mu_0 I_1 I_2 \ln \rho_0 + C \quad (25-12)$$

که در آن C ثابت است.

مثال ۱۲-۲ انرژی مغناطیسی یک دوقطبی مغناطیسی در میدان \mathbf{B} یکنواخت

حلقه جریان. در بخش ۸-۸ نیروها، گشتاورها و انرژی یک حلقه جریان را در یک میدان مغناطیسی خارجی بحث کردیم. خواندیم که نتیجه $U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ تنها قسمتی از انرژی مغناطیسی در یک میدان یکنواخت \mathbf{B} است که به گشتاوری که \mathbf{B} بر توزیع وارد می کند وابسته است. قسمت دیگر که آن را محاسبه نکردیم، به کار انجام شده توسط منبع خارجی وابسته است که وقتی در میدان معرفی می شود جریان را در حلقه برقرار می کند.

که فاصله نقطه مشاهده تا دوقطبی دوم است. اگر نقطه مشاهده را دوقطبی اول در نظر بگیریم، داریم

$$U = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{r^3} - 3 \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right] \quad (28-12)$$

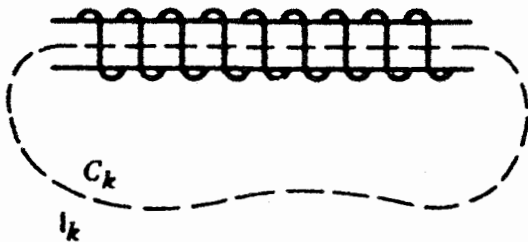
۴-۱۲ انرژی مغناطیسی در مواد غیرخطی

در دستگاههای خطی مانند حالتی که تاکنون در این فصل بررسی کردیم کار لازم برای برقراری یک میدان مغناطیسی فقط به مقدار نهایی میدان مغناطیسی بستگی داشت. با توجه به این موضوع باید این دستگاهها برگشت پذیر باشند، به این معنی که با قطع میدان انرژی مصرف شده در برقراری دستگاه مغناطیسی بتوان دوباره آن را به دست آورد. در این بخش مواد غیرخطی را بررسی می کنیم که این مطلب برای آنها درست نیست زیرا پسماند نقش مهمی را ایفا می کند. تغییرات برگشت پذیر، در پیکربندیهای حوزه ای که مسئول پسماند هستند، باعث افت انرژی به صورت گرما می شوند.

همان طور که در شکل ۲-۱۲ می بینیم مداری به شکل سیمولوله دارای N دور جریان و مقاومت ناچیز به طور کامل با یک ماده فرومغناطیسی پر شده است. خطوط شار به دلیل گاف بزرگ هوا به یک مسیر خوش تعریف تنها محدود نمی شوند. با این همه هر خط شار را می توان به صورت یک مدار مغناطیسی، که تمام آنها به صورت موازی به هم متصل شده اند در نظر گرفت. هر خط C_k با طول l_k و سطح A_k که ممکن است تابعی از l_k باشد مشخص می شود. کار انجام شده به وسیله یک منبع خارجی $\Delta W^{(b)}$ در فاصله زمانی Δt در لحظه t و جریان I با معادله (۳-۱۲) داده می شود؛ یعنی

$$\Delta W^{(b)} = - \sum_k \mathcal{E}_k I \Delta t \quad (29-12)$$

که در آن \mathcal{E}_k ، نیروی محرکه الکتریکی، emf، القایی وابسته به C_k است. اکنون \mathcal{E}_k را بر حسب شار I_k در امتداد منحنی C_k یا $-dF_k/dt$ می نویسیم



شکل ۲-۱۲ یک سیمولوله با یک مغز فرومغناطیسی که یکی از خطوط شار را نشان می دهد. هر خط شار را می توان به صورت یک مدار مغناطیسی که تمام آنها به صورت موازی به هم متصل شده اند در نظر گرفت.

افزایش می یابد، بنابر معادله (۲-۱۲) اگر باتری جریان I را برقرار کند، کاری برابر

$$W^{(b)} = I dF$$

انجام می دهد. از طرف دیگر انرژی مغناطیسی $U = 1/2 IF$ بنابر معادله (۶-۱۲) به دلیل افزایش شار به اندازه

$$dU = \frac{1}{2} I dF$$

تغییر می کند. بدین ترتیب

$$W^{(b)} = 2 dU$$

اما

$$-W^{(mech)} + W^{(b)} = dU$$

که به دست می دهد $W^{(b)} = 2 \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$

دوقطبی اتمی دائمی (یا آهنربای بسیار کوچک). اکنون گشتاور دوقطبی مغناطیسی مربوط به اسپین یک اتم مغناطیسی را در نظر می گیریم. چون در این حالت جریان واقعی وجود ندارد، در این صورت انرژی برهم کنش این دوقطبی با یک میدان مغناطیسی خارجی یکنواخت تنها به گشتاور وارد بر دوقطبی وابسته است. به این ترتیب انرژی مغناطیسی در این حالت برابر است با

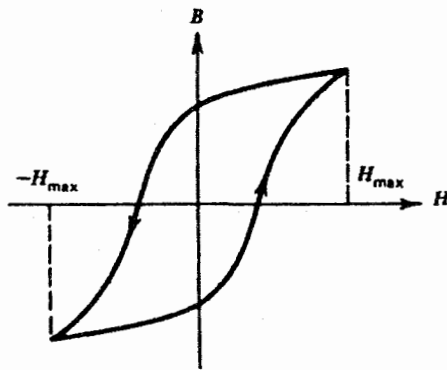
$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{دوقطبی دائمی اتمی}) \quad (27-12)$$

مثال ۳-۱۲ انرژی مغناطیسی دو دوقطبی مغناطیسی

در این مثال برهم کنش مغناطیسی دو دوقطبی مغناطیسی اتمی دائمی (یا دو آهنربای بسیار کوچک) را در نظر می گیریم. دوقطبیها را در مقایسه با فاصله بین آنها به اندازه کافی کوچک در نظر می گیریم به طوری که از تغییر میدان مغناطیسی تولید شده توسط یکی از آنها بر روی دیگری می توان چشم پوشید. به این ترتیب انرژی برهم کنش برابر است با $U = -\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{B}_2$ ، که در آن \mathbf{m}_1 گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوقطبی اول و \mathbf{B}_2 میدان مغناطیسی تولید شده توسط دوقطبی دوم در محل دوقطبی اول است.

میدان مغناطیسی ایجاد شده به وسیله دوقطبی دوم با گشتاور \mathbf{m}_2 با معادله (۹۸-۸) داده می شود، یعنی

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\mathbf{m}_2}{r^3} + 3 \frac{(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} \right]$$



شکل ۳-۱۲ منحنی پسماند یک ماده فرومغناطیسی.

M از صفر به $M(H_0)$ بر واحد حجم نمونه، با انتگرال‌گیری از معادله (۳۵-۱۲) یا معادله (۳۴-۱۲) به دست می‌آید

$$W^{(b)} = \int_0^{B_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \mu_0 H_0^2 + \mu_0 \int_0^{H_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \quad (36-12)$$

مثال ۴-۱۲ اتلاف پسماند

یک ماده فرومغناطیسی که منحنی پسماند آن در شکل ۳-۱۲ نشان داده شده است را در نظر بگیرید. ماده در ابتدا در یک میدان مغناطیسی $-H_{\max}$ قرار دارد. دامنه میدان تدریجاً به صفر نزول می‌کند، قطبش آن وارون می‌شود، و تدریجاً به H_{\max} صعود می‌کند. سپس عکس این فرایند انجام می‌شود به طوری که میدان به شرط اولیه‌اش باز می‌گردد. چون دستگاه به حالت مغناطیسی اولیه‌اش (یعنی به همان مقادیر \mathbf{H} و \mathbf{B}) برمی‌گردد، کل تغییر در انرژی مغناطیسی آن صفر است. با این همه، کار انجام شده بر واحد حجم ماده توسط منبع خارجی صفر نیست؛ این کار برابر است با

$$W^{(b)} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \quad (37-12)$$

که در آن C حلقه پسماند است. انتگرال را می‌توان به سادگی محاسبه کرد؛ این انتگرال برابر است با مساحت محصور به حلقه پسماند. اکنون روشن است که انرژی گرفته شده به هنگام مغناطش از انرژی داده شده به هنگام کاهش مغناطش بیشتر است. اتلاف انرژی را اتلاف پسماند می‌نامیم؛ این اتلاف به گرما تبدیل می‌شود. ■

مثال ۵-۱۲ سرد کردن مغناطیسی

چون در بخش ۳-۱۲ و در این بخش دیدیم که با تغییر میدان مغناطیسی اعمال شده بر یک نمونه مغناطیسی امکان انجام کاری بر روی نمونه

می‌نویسیم، از این رو معادله (۲۹-۱۲) به صورت زیر در می‌آید

$$\Delta W^{(b)} = \sum_k I \Delta F_k \quad (30-12)$$

شدت مغناطیسی \mathbf{H} در لحظه t با استفاده از قانون آمپر

$$\oint_{C_k} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_k = NI$$

به I مربوط می‌شود. بنابراین معادله (۳۰-۱۲) به صورت زیر در می‌آید

$$\Delta W^{(b)} = \frac{1}{N} \sum_k \oint_{C_k} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_k \Delta F_k \quad (31-12)$$

چون شار مغناطیسی در امتداد هر مدار پیوسته است [معادله (۵۳-۹)] را ببینید]، می‌نویسیم $\Delta F_k = N A_k \Delta B$ ، که در آن A_k سطح مقطع مدار در فاصله $d\mathbf{l}_k$ است. بنابراین

$$\Delta W^{(b)} = \sum_k \oint_{C_k} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_k A_k \Delta B \quad (32-12)$$

چون \mathbf{l}_k در امتداد خط شار است، کمیت $d\mathbf{l}_k \Delta B$ را می‌توان به صورت $d\mathbf{l}_k \Delta B$ نوشت. علاوه بر این، می‌توان

$$\sum_k \oint_{C_k} A_k d\mathbf{l}_k$$

را با $\int dv$ که در آن v حجمی است که تمام خطوط شار را شامل می‌شود، تعویض کرد. بنابراین

$$\Delta W^{(b)} = \int_v \mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{B} dv \quad (33-12)$$

در این صورت چگالی انرژی مغناطیسی در یک نم $d\mathbf{B}$ بر واحد حجم با رابطه

$$dW^{(b)} = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (34-12)$$

داده می‌شود. این عبارت انرژی لازم برای تغییر میدان مغناطیسی را از \mathbf{B} به $\mathbf{B} + d\mathbf{B}$ نشان می‌دهد. نوشتن $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}$ در این عبارت به دست می‌دهد

$$dW^{(b)} = \mu_0 H dH + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \quad (35-12)$$

که نشان می‌دهد $dW^{(b)}$ کار لازم برای برقراری میدان مغناطیسی از \mathbf{H} به $\mathbf{H} + d\mathbf{H}$ و برای مغناطیسی کردن ماده از \mathbf{M} به $\mathbf{M} + d\mathbf{M}$ است. کل انرژی لازم برای برقرار کردن میدان از صفر به H_0 و برقرار کردن

الکتریکی $dW^{(b)}$ به وسیله باتریها در برابر نیروهای محرکه الکتریکی القایی، برای برقراری جریان در مدارها انجام می شود. حاصل جمع این دو اثر برابر است با تغییر در انرژی مغناطیسی دستگاه

$$-dW^{(mech)} + dW^{(b)} = dU \quad (38-12)$$

اگر تغییر در شار عبوری از مدار i را dF_i بنامیم، در این صورت با استفاده از معادله (۳-۱۲) می نویسیم $dW^{(b)} = \sum_i I_i dF_i$. از طرف دیگر تغییر در انرژی مغناطیسی مطابق با آن با (۱۶-۱۲) داده می شود، یعنی،

$$dU = d\left(\frac{1}{\mu_0} \sum_i I_i F_i\right) = \frac{1}{\mu_0} \sum_i I_i dF_i \quad (39-12)$$

که نشان می دهد $dW^{(b)} = \mu_0 dU$. به این ترتیب معادله (۳۸-۱۲) به صورت

$$dW^{(mech)} = dU \quad (\text{جریانهای ثابت}) \quad (40-12)$$

در می آید.

اکنون کار مکانیکی $dW^{(mech)}$ را بر حسب نیروی مغناطیسی \mathbf{F} وارد بر مدار مورد سؤال به صورت زیر می نویسیم

$$dW^{(mech)} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (41-12)$$

به این ترتیب، معادلات (۴۰-۱۲) و (۴۱-۱۲) نتیجه می دهد

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (42-12)$$

که مستلزم حضور یک انرژی مغناطیسی است به طوری که

$$\mathbf{F} = \nabla U \quad (\text{جریانهای ثابت}) \quad (43-12)$$

مؤلفه های مختلف \mathbf{F} از این نتیجه به دست می آیند

$$F_\xi = \left. \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|_I \quad (44-12)$$

که در آن F_ξ نیروی وارد بر مدار در جهت ξ است، و خط عمودی با شاخص I برای تأکید در ثابت بودن I در تمام مدارها در این مشتق گیری آمده است.

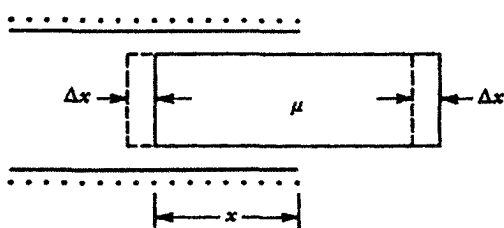
وضعیت فیزیکی دیگر وقتی است که مدارها از منابع خارجی (باتریها) جدا می شوند. در این حالت، یک حرکت سخت مجازی یکی از مدارها منجر به تغییری در جریانها در تمام آنها می شود. با

وجود دارد، می توان دمای نمونه را تغییر داد (آن را گرم یا سرد کرد). از این اصل برای تهیه وسیله ای جهت رسیدن به دماهای بسیار پایین استفاده می شود. سرد کردن مغناطیسی به سادگی به صورت زیر توصیف می شود. نمونه ابتدا در تماس گرمایی با هلیوم مایع تقریباً در 1 K قرار داده می شود. این تماس به وسیله رسانش گرمایی از طریق یک فشار پایین از گاز هلیوم انجام می شود. مایع هلیوم در این دما یک حمام گرمایی در دمای T_i به وجود می آورد. در مرحله دوم، میدان مغناطیسی ای به شدت H_i برقرار می شود. در نتیجه نمونه مغناطیده و کار انجام می شود. چون نمونه در تماس حرارتی با حمام گرمایی است، گرمای تولید شده را به حمام می دهد؛ از این رو نمونه در دمای T_i باقی می ماند. گاز هلیوم که در تماس حرارتی با حمام گرمایی است، حذف می شود که این امر منجر به عایق بندی حرارتی نمونه می شود. سرانجام، میدان مغناطیسی به صورت شبه ساکن به یک مقدار نهایی H_f کاهش می یابد، که منجر به یک کاهش در دمای نمونه تا $T_f < T_i$ می شود. این فرایند و امگناطش بی دررو می تواند نمونه را تا 1 K سرد کند. در واقع، تکرار این فرایند دماهایی به کوچکی 10^{-6} K را تولید می کند. ■

۱۲-۵ نیروها و گشتاورها با استفاده از انرژی مغناطوستاتیکی

در بخشهای قبل خواندیم که برای برقراری جریانهای مفروض در یک مجموعه از مدارهای سخت با جریان ثابت باید در برابر نیروهای محرکه الکتریکی کار انجام شود. این کار به وسیله منبع خارجی مورد استفاده مانند باتریها تأمین می شود. همچنین قبلاً فهمیدیم که مدارهای جریان میدانهای مغناطیسی تولید می کنند و از این رو بر یکدیگر نیروهایی وارد می کنند. اگر مدارهای سخت بتوانند در حین فرایند حرکت کنند، این نیروهای مغناطیسی بیشتر با هم درگیر می شوند. در نتیجه حرکت، کار مکانیکی باید با این نیروها انجام شود. در این بخش نشان می دهیم چگونه می توان از فرمول بندی انرژی مغناطیسی که در بخش قبل خواندیم برای تعیین این نیروها استفاده کرد.

دستگاهی از مدارهای سخت را در نظر بگیرید. فرض کنید یک مدار جابه جایی مجازی سخت $d\mathbf{r}$ را انجام می دهد، در حالی که منابع خارجی جریانها را در تمام مدارها ثابت نگه می دارند. به علاوه فقط وضعیتهای ساکن را که در آن مدارها پایا هستند (هیچ گونه انرژی جنبشی درگیر نیست) در نظر بگیرید به طوری که هیچ گونه گرم کردن یا سرد کردن مدارها وجود ندارد. در نتیجه جابه جایی مجازی، یک کار مکانیکی $dW^{(mech)}$ به وسیله نیروهای مغناطیسی و یک کار



شکل ۴-۱۲ نیروی وارد بر یک ماده مغناطیسی وقتی به داخل سیملوله وارد می‌شود، با استفاده از روشهای انرژی.

متصل است. یک میله از یک ماده مغناطیسی با تراوایی ثابت μ و سطح مقطع A همان طور که در شکل ۴-۱۲ می‌بینیم ضمن موازی نگه داشتن محور میله و سیملوله، به داخل سیملوله وارد می‌شود.

برای محاسبه نیرو، باید انرژی مغناطیسی دستگاه را به صورت تابعی از x محاسبه کنیم. این کار به اطلاعاتی از میدان مغناطیسی در همه جا از جمله در مجاورت انتهای سیملوله و بره نیاز دارد. بحث در مورد اثرهای انتهایی ساده نیست زیرا گرفتار میدانهای پیچیده‌ای هستند. با این همه، برای ساده کردن حل از یک تقریب استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم وقتی بره را کمی به اندازه Δx از مکان خود حرکت می‌دهیم، ساختار میدان به همان صورت باقی می‌ماند، تنها تفاوت آن است که یک Δx از بره به طور مؤثر از ناحیه خارج سیملوله کاملاً به داخل سیملوله انتقال می‌یابد. با این تقریب اختلاف انرژی این دو حالت را به سادگی به صورت تابعی از Δx تعیین می‌کنیم

$$\Delta U = U(x + \Delta x) - U(x) \approx \frac{1}{4}(\mu - \mu_0) \int_V H^2 dv \quad (50-12)$$

که در آن $V = A\Delta x$ تغییر در حجم ناشی از جابه‌جایی از $H = NI/l$ شدت مغناطیسی داخل سیملوله است. انتگرال‌گیری به سادگی انجام می‌گیرد زیرا H ثابت است؛ به این ترتیب معادله (۵۰-۱۲) به صورت

$$\Delta U \approx \frac{1}{4}(\mu - \mu_0) \left(\frac{NI}{l}\right)^2 A \Delta x \quad (51-12)$$

در می‌آید. در این صورت نیروی وارد بر بره برابر است با

$$F \approx \left. \frac{\Delta U}{\Delta x} \right|_I \approx \frac{1}{4}(\mu - \mu_0) \left(\frac{NI}{l}\right)^2 A \quad (52-12)$$

*مثال ۷-۱۲ نیروی بین یک آهنربا و یک بره مغناطیسی — مدارهای مغناطیسی

مداری را که در شکل ۵-۱۲ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. این مدار شامل یک بازوی U شکل از یک ماده مغناطیسی با تراوایی

این همه، بنابر قانون لنز، مقدار تغییر در جریان القایی که از emf القایی ناشی می‌شود، طوری است که شار مغناطیسی گذرنده از مدارها همان مقدار باقی می‌ماند. از این رو، در معادله (۳۸-۱۲) قرار می‌دهیم $dW^{(b)} = 0$ به این ترتیب

$$dU = -dW^{(\text{mech})} \quad (\text{شار ثابت } F) \quad (45-12)$$

جالب است که در این حالت تغییر در انرژی مغناطوستاتیک برابر است با منفی کار مکانیکی، در صورتی که در حالت جریانهای ثابت [معادله (۴۰-۱۲)] تغییر برابر است با کار مکانیکی. بار دیگر در این حالت $dW^{(\text{mech})}$ را می‌توان برحسب نیروی مغناطیسی F وارد بر مدار و جابه‌جایی جزئی dx نوشت؛ یعنی، $dW^{(\text{mech})} = F \cdot dx$ به این ترتیب

$$F = -\nabla U \quad (\text{شار ثابت}) \quad (46-12)$$

و مؤلفه‌های گوناگون F عبارت‌اند از

$$F_\xi = -\left. \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|_{F_{\text{شار}}} \quad (47-12)$$

که در آن F_ξ مؤلفه در جهت ξ است و با ثابت گرفتن شار در تمام مدارها مشتق‌گیری را انجام می‌دهیم.

سرانجام، از همان فرایند بالا برای پیدا کردن گشتاور مغناطیسی وارد بر مدارها استفاده می‌کنیم. اگر مدار بتواند به جای یک انتقال مجازی یک چرخش مجازی سخت انجام دهد، در این صورت

$$\tau_\theta = \left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_I \quad (48-12)$$

در حالت جریان ثابت، گشتاوری در جهت افزایش θ را به دست می‌دهد، و

$$\tau_\theta = -\left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_F \quad (49-12)$$

در حالت شارهای ثابت، گشتاوری در جهت افزایش θ به دست می‌دهد.

مثال ۶-۱۲ نیروی وارد بر یک بره مغناطیسی از یک سیملوله این مثال شبیه مسئله پیدا کردن نیروی وارد بر یک بره دی‌الکتریک است که کمی از آن در میدان یک خازن وارد شده است (مثال ۶-۱۳). یک سیملوله به سطح مقطع A ، N دور و طول l در نظر بگیرید. سیملوله به یک منبع خارجی که یک جریان ثابت را در آن برقرار می‌کند

که در آن V_m و V_g به ترتیب حجم ماده مغناطیسی و حجم گاف هستند. با قراردادن H_m و H_g از معادلات (۵۶-۱۲) و (۵۷-۱۲) به دست می آوریم

$$\Delta U = -\frac{\mu^{\gamma}}{\mu_0} H_0^{\gamma} A \Delta x \quad (59-12)$$

به این ترتیب نیروی وارد بر میله برابر است با

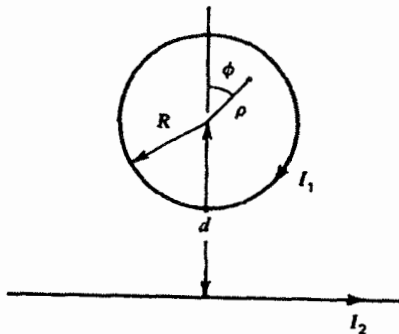
$$F = \left. \frac{\Delta U}{\Delta x} \right|_l = -\frac{\mu^{\gamma}}{\mu_0} H_0^{\gamma} A$$

مثال ۸-۱۲ نیروی بین یک سیم و یک مدار دایره ای با استفاده از روش انرژی

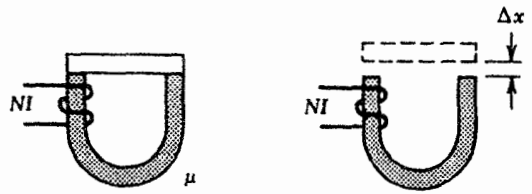
در این مثال از روش انرژی برای محاسبه نیروی بین دو مدار حامل جریان که در شکل ۶-۱۲ نشان داده شده است استفاده می کنیم. جریان I_1 در یک مدار دایره ای به شعاع R برقرار است. یک سیم به طول نامتناهی که حامل جریان I_2 است در صفحه حلقه و به فاصله $d > R$ از مرکز حلقه واقع است.

چون به نیروی بین دو سیم علاقه مندیم، تنها انرژی مغناطیسی برهم کنش $U = I_1 F_1$ را محاسبه می کنیم که در آن F_1 شار گذرنده از حلقه است که از میدان سیم ناشی می شود. شار $F_1 = \int \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} da$ که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه عمود بر حلقه و \mathbf{B}_2 میدان تولید شده به وسیله سیم است را می توان به صورت زیر حساب کرد: یک جزء سطح $\rho d\rho d\phi$ را در نظر بگیرید که به فاصله ρ از مرکز حلقه و از این رو به فاصله $d + \rho \cos \phi$ از سیم واقع است و نسبت به قطری از حلقه که بر سیم عمود است، زاویه ϕ را تشکیل می دهد. بنابراین

$$F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} I_2 \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\phi}{d + \rho \cos \phi} \quad (60-12)$$



شکل ۶-۱۲ نیروی بین یک سیم حامل جریان و یک حلقه حامل جریان واقع در یک صفحه.



شکل ۵-۱۲ نیروی وارد بر یک بره مغناطیسی به وسیله یک آهنربای U شکل با استفاده از روشهای انرژی.

ثابت بالای μ است که با N دور سیم که جریان ثابت I از آن می گذرد سیم پیچی شده است. سطح مقطع بازو مربع مستطیل با مساحت A است. یک میله از همان ماده و همان سطح مقطع را در مقابل قطبهای این بازو قرار می دهیم که به این ترتیب طول کل مدار مساوی با l می شود.

برای تعیین نیروی بین میله و بازوی U شکل یک جابه جایی مجازی میله از قطبها را انجام می دهیم. میدان مغناطیسی در قسمتهای مختلف مدار را با استفاده از قانون آمپر و اصل پیوستگی شار به دست می آوریم. قانون آمپر را بر مدار قبل از جابه جایی مجازی اعمال می کنیم

$$\oint \mathbf{H}_0 \cdot d\mathbf{l} = NI \quad (53-12)$$

بعد از جابه جایی میله به اندازه $l \ll \Delta x$ ، قانون آمپر به دست می دهد

$$H_m l + 2H_g \Delta x = NI \quad (54-12)$$

که در آن H_m و H_g به ترتیب میدانهای مغناطیسی در ماده و در گاف هستند. پیوستگی شار رابطه دیگری را بین H_m و H_g به دست می دهد، یعنی

$$\mu H_m = \mu_0 H_g \quad (55-12)$$

اکنون معادلات (۵۴-۱۲) و (۵۵-۱۲) را همزمان حل می کنیم، یعنی

$$H_m = \frac{NI}{l + 2\frac{\mu}{\mu_0} \Delta x} = H_0 \left(1 - 2\frac{\mu}{\mu_0} \frac{\Delta x}{l} \right) \quad (56-12)$$

$$H_g = \frac{\mu}{\mu_0} H_m \quad (57-12)$$

تغییر در انرژی مغناطیسی ΔU برابر است با

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int_{V_m} \mu H_m^{\gamma} dv + \frac{1}{2} \int_{V_g} \mu_0 H_g^{\gamma} dv - \frac{1}{2} \int_{V_m} \mu H_0^{\gamma} dv \quad (58-12)$$

با توجه به آنکه

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1 + \beta \cos \phi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad -1 < \beta < 1 \quad (61-12)$$

در این صورت

$$F_1 = \mu_0 I_1 \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{d^2 - \rho^2}} \quad (62-12)$$

انتگرال گیری روی ρ به دست می دهد

$$F_1 = \mu_0 I_1 (d^2 - \rho^2)^{1/2} \Big|_0^R = \mu_0 I_1 [(d^2 - R^2)^{1/2} - d] \quad (63-12)$$

بنابراین انرژی مغناطیسی برهم کنش برابر است با

$$U = \mu_0 I_1 I_2 [(d^2 - R^2)^{1/2} - d] \quad (64-12)$$

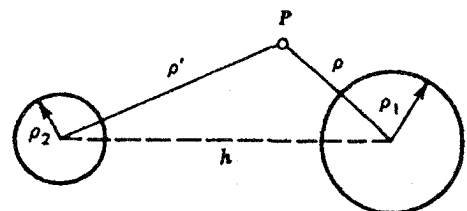
اکنون از U و با استفاده از معادله (۴۴-۱۲) نیروی بین سیم و حلقه را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$F = \frac{\partial U}{\partial d} \Big|_{I_1, I_2} = \mu_0 I_1 I_2 \left[\left(1 - \frac{R^2}{d^2}\right)^{-1/2} - 1 \right] \quad (65-12)$$

مثال ۹-۱۲ محاسبه خودالقای با استفاده از ملاحظات انرژی

در این مثال از روش انرژی برای محاسبه خودالقای دو سیم بلند نامتناهی که در شکل ۷-۱۲ نشان داده شده است، استفاده می شود. این سیمها به شعاعهای ρ_1 و ρ_2 ، به ترتیب جریانهای I و $-I$ دارند و فاصله مرکز آنها از یکدیگر h است. انرژی مغناطیسی U دستگاه با استفاده از معادله (۱۸-۱۲) محاسبه می شود: $U = 1/2 \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dv$. پتانسیل برداری یک سیم مستقیم به قطر متناهی در مثال ۸-۱۰ به دست آمد. پتانسیل برداری برای سیم ۱ برابر است با

$$\mathbf{A}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^2 \hat{\mathbf{z}} \quad \rho < \rho_1 \quad (66-12)$$



شکل ۷-۱۲ خودالقای دو سیم موازی بلند نامتناهی با استفاده از روشهای انرژی مغناطیسی.

$$\mathbf{A}_1 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 + 2 \ln \frac{\rho}{\rho_1} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad \rho > \rho_1 \quad (67-12)$$

پتانسیل برداری برای سیم ۲ برابر است با

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\frac{\rho'}{\rho_2} \right)^2 \hat{\mathbf{z}} \quad \rho < \rho_2 \quad (68-12)$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 + 2 \ln \frac{\rho'}{\rho_2} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad \rho > \rho_2$$

در آن صورت با قراردادن $J_1 = I/\pi\rho_1^2$ و $J_2 = -I/\pi\rho_2^2$ به صورت زیر می شود

$$U = \frac{I}{4\pi\rho_1^2} \int_{S_1} (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \cdot d\mathbf{a}_1 dz - \frac{I}{4\pi\rho_2^2} \int_{S_2} (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \cdot d\mathbf{a}_2 dz \quad (69-12)$$

که در آن S_1 و S_2 به ترتیب مساحت سطح مقطع سیمهای ۱ و ۲ هستند. چون پتانسیلها مستقل از z و در جهت z هستند، در آن صورت انرژی بر واحد طول $u = U/l$ برابر است با

$$u = \frac{U}{l} = \frac{I}{4\pi\rho_1^2} \int_{S_1} (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \cdot d\mathbf{a}_1 - \frac{1}{4\pi\rho_2^2} \int_{S_2} (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \cdot d\mathbf{a}_2 \quad (70-12)$$

با انتگرال گیری داریم

$$u = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} \left[1 + 2 \ln \left(\frac{h^2}{\rho_1 \rho_2} \right) \right] \quad (71-12)$$

با استفاده از تعریف خودالقای بر واحد طول، معادله (۷۱-۱۲)، به دست می آوریم

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[1 + 2 \ln \left(\frac{h^2}{\rho_1 \rho_2} \right) \right] \quad (72-12)$$

۶-۱۲ خلاصه

برای برقراری جریان I در یک حلقه با خودالقای L و مقاومت ناچیز، که در یک ماده مغناطیسی خطی قرار دارد، به یک منبع خارجی، مثل یک باتری نیاز داریم تا کار $dW^{(b)}$ را انجام دهد؛ در این صورت

$$dW^{(b)} = I dF \quad [3-12]$$

$$W^{(b)} = \int_0^{B_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} H^2 + \mu_0 \int_0^{H_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \quad [۳۶-۱۲]$$

جمله آخر یک اتلاف پسماند است.

مانند حالت الکتریکی، نیروهای وارد بر عناصر مختلف یک دستگاه مغناطیسی را از انرژی مغناطیسی آن دستگاه به دست می آوریم. برای دستگاههای منزوی، شار طبق قانون لنز ثابت باقی می ماند (اگر هیچ گونه اتلافی مربوط به گرمای ژول وجود نداشته باشد)، و از این رو

$$F_\xi = -\frac{\partial U}{\partial \xi} \quad (\text{شار ثابت}) \quad [۴۷-۱۲]$$

برای دستگاهی که جریانهای آن به وسیله منابع خارجی تنظیم شده ثابت نگه داشته می شوند، داریم

$$F_\xi = \frac{\partial U}{\partial \xi} \quad (\text{جریانهای ثابت}) \quad [۴۴-۱۲]$$

اگر ξ نشان دهنده یک چرخش باشد، F_ξ یک گشتاور را نشان می دهد.

مسائل

۱-۱۲ یک پیچه دارای خودالقای $L = 5 \text{ H}$ و مقاومت 20Ω است. یک $\text{emf} = 100 \text{ V}$ اعمال می شود. (الف) پس از آنکه جریان به مقدار بیشینه \mathcal{E}/R رسید، انرژی ذخیره شده در آن چقدر است؟ (ب) شار در پیچه چقدر است؟

۲-۱۲ یک رسانای هم محور به شعاع داخلی و شعاع خارجی b حامل جریانی برابر $\pm I$ است. (الف) میدان B بین رساناها و انرژی مغناطیسی بر واحد طول را تعیین کنید. (ب) القا بر واحد طول را تعیین کنید.

۳-۱۲ یک رسانای استوانه ای به شعاع a حامل جریان I است که به صورت یکنواخت بر روی سطح مقطع آن توزیع شده است. (الف) میدان B و انرژی مغناطیسی ذخیره شده بر واحد طول را در رسانا تعیین کنید. (ب) خودالقا (داخلی) بر واحد طول را تعیین کنید.

۴-۱۲ یک پیچه چنبره ای با N دور به شکل غیرمغناطیسی با سطح مقطع مربعی به ضلع a پیچیده شده است. شعاعهای داخلی و خارجی چنبره ρ_1 و ρ_2 ، و چنبره حامل جریان I است. (الف) با استفاده از قانون آمپر میدان مغناطیسی را در چنبره تعیین کنید. (ب) انرژی مغناطیسی ذخیره شده را تعیین کنید. (ج) خودالقای چنبره چقدر است؟

۵-۱۲ القایی از 10° دور سیم که حول یک حلقه آهنی بسته به طول 20 cm و سطح مقطع $1 \times 1 \text{ cm}$ پیچیده شده اند، تشکیل می شود.

که در آن dF تغییر شار در حلقه است. کار انجام شده توسط emf القایی مطابق با این جریان درست مساوی با منفی این کار است، یا

$$dW = -I dF \quad [۲-۱۲]$$

با قراردادن $dF = L dI$ داریم

$$W = -\frac{1}{2} LI^2 \quad \text{یا} \quad dW = -LI dI$$

بنابراین انرژی مغناطیسی ذخیره شده در دستگاه برابر است با

$$U = -W = W^{(b)} = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} IF \quad [۵-۱۲], [۶-۱۲]$$

این نتیجه را می توان به N حلقه با خودالقاها و القاهاى متقابل L_m و M_{mk} به صورت زیر تعمیم داد

$$U = \frac{1}{2} \sum_{m,k} M_{mk} I_m I_k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N I_m F_m \quad [۶-۱۲], [۱۴-۱۲]$$

که در آن به ازای $m = k$ ، $M_{mk} = L_m$ و F_m کل شار گذرنده از حلقه m است که از تمام جریانها ناشی می شود. از طرف دیگر انرژی حلقه ها را می توان برحسب میدان مغناطیسی یا پتانسیل برداری که به وسیله حلقه ها تولید می شود، نوشت

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv \quad [۲۲-۱۲]$$

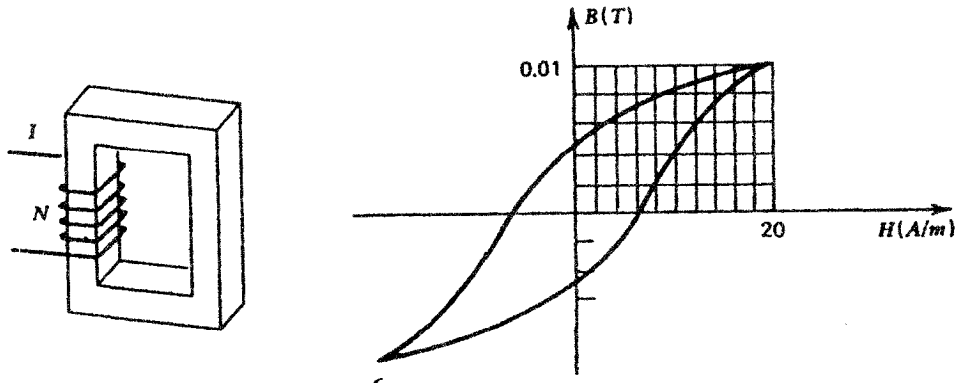
$$U = \frac{1}{2} \int I d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dv \quad [۱۸-۱۲]$$

که در آن انتگرال گیری روی $d\mathbf{l}$ جمع بر روی حلقه های مختلف را در بر می گیرد، و عبارتی که برحسب \mathbf{J} است یک توزیع جریان کلی تر را که الزاماً رشته ای نیست توصیف می کند. به این ترتیب چگالی انرژی مغناطیسی را می توان به صورت زیر تعریف کرد

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad [۲۳-۱۲]$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 H^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{M} \quad [۲۴-۱۲]$$

در حضور مواد مغناطیسی غیرخطی، کار لازم برای برقراری میدان مغناطیسی (H_0, B_0) توسط منبع خارجی برابر است با



شکل ۸-۱۲ یک القاگر از یک حلقه آهنی مربع مستطیل شکل بسته با یک پیچه که حول آن پیچیده شده است، همراه با حلقه پسماند.

را پیدا کنید. (ب) با فرض آنکه به جای جریان، شار ثابت باقی بماند و دستگاه منزوی باشد (با استفاده از پیچشهای ابرسانا) حل را تکرار کنید. ۸-۱۲ دو آهنربای هم سطح با گشتاورهای دو قطبی مغناطیسی $2m$ و $3m$ که در آن m برحسب $A \cdot m^2$ است آزادانه حول مرکز ثابت خود می چرخند. خطی که مرکز آنها را به هم متصل می کند دارای طول d است و بر یک میدان یکنواخت خارجی H عمود است. انرژی دستگاه را حساب کنید. نشان دهید وضعیت تعادل وضعیتی است که محور آنها در جهت H باشد.

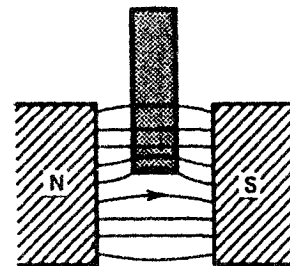
۹-۱۲ دو رسانای خطی مستقیم به طول نامتناهی و موازی با یکدیگر با جریانهای I_1 و I_2 را در نظر بگیرید که به فاصله R از یکدیگر قرار گرفته اند. (الف) پتانسیل برداری جریان I را تعیین کنید. (ب) انرژی برهم کنش بین دو جریان را تعیین کنید. (ج) با استفاده از انرژی برهم کنش نیروی بین سیمها را پیدا کنید.

۱۰-۱۲ یک سیملوله بلند با N دور به شعاع R ، و طول L که حامل جریان I است در نظر بگیرید. دورها نزدیک به هم و به فاصله یکنواخت از یکدیگر قرار دارند و دارای مقاومت ناچیز هستند. دو انتهای سیملوله به وسیله یک رسانا که دارای مقاومت و القای ناچیز است به هم متصل می شوند، و دستگاه منزوی می شود (شار ثابت باقی می ماند). (الف) میدان مغناطیسی، چگالی انرژی مغناطیسی و کل انرژی مغناطیسی را در داخل سیملوله پیدا کنید. (ب) اگر طول سیملوله را به L_1 تغییر دهیم در حالی که شعاع تغییر نکند جریان I چگونه تغییر می کند؟ (ج) کشش در سیملوله — یعنی نیروی لازم برای کشیدن سیملوله را تعیین کنید. از سختی سیم چشمپوشی کنید.

۱۱-۱۲ دو حلقه نازک به شعاعهای a و b طوری قرار می گیرند که صفحه آنها بر خطی که مرکز دو حلقه را به هم وصل می کند عمود

جریان متناوب 60 Hz از پیچه عبور می کند. آهن در هر دور یک حلقه پسماند را طی می کند. (الف) اتلاف توان ناشی از پسماند را پیدا کنید. (ب) با استفاده از عبارت $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ ، از اطلاعات داده شده در منحنی پسماند که در شکل ۸-۱۲ نشان داده شده است، حداکثر جریان در پیچه را به دست آورید. (ج) خودالقای القاگر تحت شرایط مسئله چقدر است؟ (د) اگر جریان گذرنده از پیچه دو برابر شود، تأثیر آن بر روی القا (از نظر کیفی) چگونه است؟

۶-۱۲ میدان مغناطیسی B بین قطبهای یک آهنربا یکنواخت است و در یک مقدار ثابت B حتی در غیاب یا در حضور مواد مغناطیسی (حالت شار ثابت) نگه داشته شده است. همان طور که در شکل ۹-۱۲ نشان داده شده است یک میله پارامغناطیسی نازک با پذیرفتاری χ کمی وارد به میدان می شود. نیروی وارد بر میله را تعیین کنید.

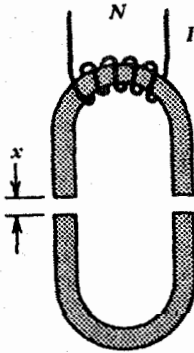


شکل ۹-۱۲ نیروی وارد بر یک میله پارامغناطیسی وقتی به ناحیه ای از یک میدان یکنواخت B که بین قطبهای یک آهنربا ثابت نگه داشته شده است، وارد می شود.

۷-۱۲ جریان I در یک سیملوله بسیار بلند با N دور، طول l و شعاع R ، به وسیله یک باتری ثابت نگه داشته می شود. (الف) انرژی مغناطیسی و از این رو نیروی وارد بر یک دور پیچش بر واحد طول محیط سیملوله

۱۲-۱۳ دو مدار سخت حامل جریانهای I_1 و I_2 هستند. نیروی بین این مدارها را می‌توان با استفاده از قانون بیوساوار محاسبه کرد. نشان دهید که این نیرو از انرژی مغناطیسی برهم‌کنش $U = I_1 I_2 M$ ، برابر تعریف $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1 = \nabla_2 U$ که در آن M القای متقابل حاصل از فرمول نویمن، و ∇_2 بر روی مختصات مدار دوم عمل می‌کند، به دست می‌آید.

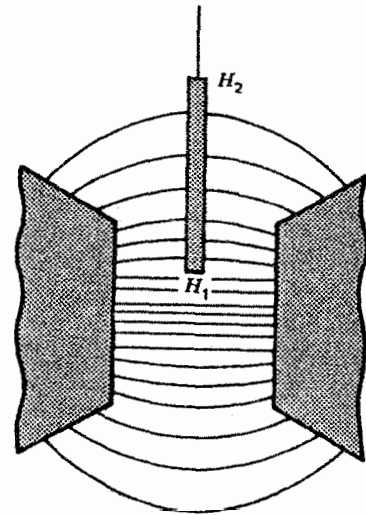
۱۲-۱۴ یک آهنربای الکتریکی مانند شکل ۱۱-۱۲ ساخته می‌شود. طول کل آهن در دو قسمت مساوی با L ، مساحت سطح مقطع A ، و تراوایی آهن μ است. جریان I که از N دور عبور می‌کند، آهنربا را فعال می‌سازد. دو نیمه آهنربا به فاصله x که در آن $x \ll L$ است از هم جدا می‌شوند. نیروی جاذبه بین دو نیمه آهنربا را پیدا کنید.



شکل ۱۱-۱۲

است. حلقه‌ها حامل جریانهای I_1 و I_2 هستند، و فاصله بین مرکز آنها $a, b \gg l$ است. نیروی بین حلقه‌ها را تعیین کنید.

۱۲-۱۴ یک میله از ماده پارامغناطیسی با تراوایی μ و سطح مقطع یکنواخت A مانند شکل ۱۰-۱۲ در یک میدان مغناطیسی غیریکنواخت بین قطبهای یک آهنربا قرار دارد. اگر میدان در ته میله H_1 و در سر میله H_2 باشد، نیروی عمودی وارد بر میله را تعیین کنید.



شکل ۱۰-۱۲ نیروی وارد بر یک میله پارامغناطیسی وقتی در یک میدان غیریکنواخت H وارد می‌شود.

مدارهای با جریانهای ناپایا

کرد. تعیین پاسخ مستقیم انواع دیگر منبع به صورت تحلیلی، مشکل است. با این حال چون عناصر مدارهایی که بررسی کردیم خطی بودند و بنابراین از اصل برهم‌نهی استفاده کردیم، پاسخ مربوط به یک منبع دلخواه را می‌توان با مجموع پاسخهای منبعهای پله‌ای، ضربه‌ای یا سینوسی نمایش داد. این کار به این دلیل امکان دارد که منبع دلخواه را می‌توان به صورت جمع منبعهای پله‌ای، ضربه‌ای و سینوسی تجزیه کرد. اگر منبع به توابع پله‌ای یا ضربه‌ای تجزیه شود مسئله در حوزه زمانی حل می‌شود. از طرف دیگر اگر نتیجه تجزیه منبع تابعهای سینوسی باشد مسئله در حوزه بسامد حل می‌شود. باید توجه کنیم که حوزه زمانی پاسخ زودگذر دارد (یعنی وابستگی زمانی سرانجام به صفر کاهش می‌یابد) در حالی که هر موج در حوزه بسامد پاسخ پایدار دارد.

۱۳-۱ تعریف مدارهای شبه ایستا

وقتی عناصر ذخیره‌کننده انرژی در مدار وجود دارند، جریانها و چگالیهای بار، و در نتیجه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، با زمان تغییر می‌کنند. در فصل ۱۱ روابط الکتروستاتیک و مغناطوستاتیک را که فقط توزیعهای ایستا را بیان می‌کردند، طوری اصلاح کردیم که شامل تغییرات میدان مغناطیسی، از طریق قانون فاراده باشند

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}\end{aligned}$$

مدارهای الکتریکی‌ای که فقط شامل مقاومت بودند را در فصل ۷ بررسی کردیم. مقاومتها عناصر غیرفعال هستند که انرژی را به صورت حرارت یا نوع دیگری از انرژی تلف می‌کنند. در این فصل مدارهای الکتریکی‌ای را که شامل عناصر ذخیره‌کننده انرژی مثل القاگرها و خازنها باشند بررسی می‌کنیم. مثلاً القاگر با عبور جریان از آن و خازن با اعمال پتانسیل به دو سر آن انرژی ذخیره می‌کند. روابط ولتاژ، جریان و بار این عناصر کاملاً متفاوت است: برای مقاومت جریان با ولتاژ متناسب است؛ برای القاگر ولتاژ متناسب با تغییرات جریان و برای خازن ولتاژ متناسب با بار الکتریکی یا انتگرال جریان است.

روشهایی که برای مدارهای صرفاً مقاومتی به کار می‌روند، یعنی قوانین کیرشهوف، برای مدارهای کلی‌تر، شامل خازنها و القاگرها نیز قابل استفاده‌اند. با این حال در حالت کلی معادله‌های کیرشهوف به جای معادله جبری، به شکل معادله انتگرالی یا دیفرانسیلی در می‌آیند. منبعهای محرکه الکتریکی که انرژی را به مدار منتقل می‌کنند اصولاً ممکن است شامل پدیده‌های وابسته به زمان باشند، اما معمولترین حالت توابع پله‌ای، ضربه‌ای و سینوسی‌اند. یک تابع پله‌ای یک منبع ثابت است که ناگهان اعمال می‌شود و فقط یک جهش را نشان می‌دهد. از طرف دیگر ضربه یک تپ بسیار بزرگ ولتاژ با زمان بسیار کوتاه است. یک منبع سینوسی یک منبع تناوبی مانند یک تابع سینوسی یا کسینوسی از زمان است.

برای این سه نمونه منبع می‌توان پاسخ مدار را به صورت تحلیلی پیدا

جدول ۱-۱۳ اندازه‌های تقریبی که در آنها اثرهای انتشار مهم‌اند

$L = c/f$		کاربرد
$f(\text{Hz})$	(m)	
۶۰	10^6	توان
10^4	3×10^4	تلفن
10^6	۳۰۰	میکروموج
10^9	۰٫۳	رادیو

$\nabla \cdot \mathbf{J} = \mu_0 \mathbf{J}$ حساب می‌شوند. اما فرض نمی‌کنیم که $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ است. فقط هر جا که بار "انباشته نمی‌شود" یا "پراکنده نمی‌شود" $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ را می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم که چگالیهای بار فقط در "خازنها" نسبت به زمان تغییر می‌کنند. [و آنجا با ثابتهای زمانی در معادله (۱-۱۳) صدق می‌کنند]. همان طور که قبلاً بیان شد این تقریب خوبی است اگر معادله (۱-۱۳) برآورده شود.

۱-۱۳ قانون مداری کیرشهوف

قوانین مداری کیرشهوف را برای مدارهای با جریان پایا در فصل ۷ بیان کردیم. حال این قوانین را در مدارهای شبه ایستا بررسی می‌کنیم. ابتدا مدار معینی را در نظر می‌گیریم و آن را تحلیل می‌کنیم و سپس قوانین را برای مدارهای کلی بیان می‌کنیم. حلقه جریان در شکل ۱-۱۳ (الف) را که شامل یک منبع نیروی محرکه الکتریکی، \mathcal{E} ، در کل مدار "خود انبارش" است و جریان I آن در طول حلقه پیوسته است در نظر می‌گیریم.

نیرو بر واحد بار، را که توانایی انجام کار در هر نقطه از مدار را دارد، به شکل کلی زیر می‌نویسیم

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}^s + \mathbf{E} \quad (3-13)$$

که \mathbf{E}^s نیرو بر واحد بار مربوط به منبع emf است که برای جابه‌جایی کامل بار در مدار می‌تواند کار انجام دهد. این منبع (با شاخص s) انرژی عامل ایجاد میدان $\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^q$ است. این منبع را می‌توان، باتری، مولدها یا میدانهای وابسته به مدارهای "دیگر" که به‌طور مشخص برای فعال کردن مدار به‌کار می‌روند، دانست. بر طبق تعریف $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}^s \cdot d\mathbf{l}$ که انتگرال خطی در طول مدار حساب می‌شود. (به همین دلیل از $d\mathbf{l}$ به جای dr استفاده می‌کنیم). معمولاً \mathbf{E}^s در فضا جایگزیده است، مانند یک باتری، بنابراین عامل مؤثر در انتگرال خطی بسته کل فقط

که میدان الکتریکی کل برابر $\mathbf{E} = \mathbf{E}^q + \mathbf{E}^i$ [معادله (۱-۱۱)] را ببینید است. این معادله‌ها را معادلات شبه ایستا می‌نامیم زیرا هنوز شامل تمام تغییرات زمانی نیستند. در فصل ۱۴ با در نظر گرفتن تغییرات زمانی میدان الکتریکی دوباره آنها را اصلاح می‌کنیم. خواهیم دید که تغییرات زمانی \mathbf{E} و \mathbf{B} امواجی را به وجود می‌آورند که باعث انتقال انرژی از رسانا به خارج می‌شوند. در نتیجه انتشار این امواج، تحلیل این مدارها بسیار پیچیده می‌شود. با این حال تحت شرایط فیزیکی معینی، تغییر زمانی میدان الکتریکی و در نتیجه انتشار را می‌توان ندیده گرفت. وقتی این شرایط به وجود آیند مدارها با استفاده از روابط شبه ایستا تحلیل می‌شوند. معادله‌های بالا را گاهی "شبه ایستا" می‌نامند، به این معنی که در صورتی اعتبار دارند که میدانها (و در نتیجه جریانها و چگالیهای بار) نسبت به زمان خیلی سریع تغییر نکنند. مقصود از "خیلی سریع"، بعداً دقیقتر بیان می‌شود. اینجا کافی است بگوییم که برای مدار ساخته شده از سیمها و مواد، با ابعاد فیزیکی که فواصل از مرتبه d هستند پارامترهای زمانی τ که افت و خیز میدانها را مشخص می‌کند باید در نامساوی زیر صدق کند

$$\tau \gg \frac{d}{c} \quad (1-13)$$

برای علائم سینوسی، τ همان زمان تناوب است. اگر L طول قسمتی از سیم باشد ممکن است اثرات انتشار را، بدون تحمیل خطای زائد در نظر نگیریم. به شرط آنکه

$$L \ll cT \equiv \frac{c}{f} \quad (2-13)$$

به این ترتیب جدول ۱-۱۳ نشان می‌دهد که برای بسامدهای مربوط به خطوط توان (۶۰ Hz) اثرهای خط انتقال تنها برای فواصل از مرتبه 10^6 متر (تا نزدیک به یک هزار مایل) مهم‌اند، در حالی که در 10^9 Hz باید این اثرها را در سیمهای مدارهای آزمایشگاه به حساب آوریم.

از مطالعه این روابط به‌وضوح پیداست که سازگاری درستی با معادله‌های مداری ندارند. به‌ویژه با توجه به اینکه $\nabla \times \mathbf{B}$ را با $\mu_0 \mathbf{J}$ برابر می‌گیریم $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ می‌شود که این بار به‌نوبه خود ایجاب می‌کند تمام جریانهای رشته‌ای پیوسته باشند. با این حال می‌دانیم که اگر سیم حامل جریان به خازن ختم شود این حالت صحیح نیست. در فصل ۱۴ این موضوع را بررسی می‌کنیم. حال به‌سادگی فرض می‌کنیم که جریانهای رشته‌ای، بجز در خازنها، که اگر جریان وارد شود بار انباشته می‌شود، در همه جا پیوسته است. در حقیقت فرض می‌کنیم که میدانهای مغناطیسی با تقریب عالی از روابط $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ و

بنابراین معادله (۵-۱۳) می‌شود

$$RI = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} \quad \text{یا} \quad \mathcal{E} = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (۷-۱۳)$$

این معادله اساسی یک حلقهٔ جریان اهمی، مجزا و منفرد شامل القا و مقاومت است.

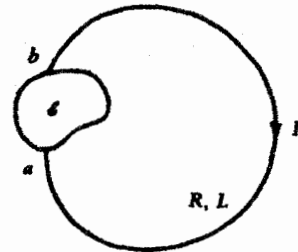
به‌طور قراردادی، القای L را با علامت \sim برای یک القاگر و مقاومت R یک مقاومت را با علامت --- نشان می‌دهیم و مدار را مثل شکل ۱۳-۱ (ب) رسم می‌کنیم. فرض را بر این می‌گذاریم که از القا و مقاومت سیمهای معمولی اتصال می‌توان صرف نظر کرد. یعنی تمام القای یک مدار مربوط به "القاگر" است (مثل یک پیچه یا سیملوله با تعداد دور زیاد به‌طوری که میدان B نسبتاً بزرگ باشد) و تمام مقاومت‌های مدار در داخل "مقاومت" (یا به فرض رسانای ضعیف) است. البته تمام اینها تقریبی‌اند. القا و مقاومت حلقهٔ بسته در واقع مربوط به تمام قسمتهای حلقه‌اند که شرکت دارند. به این ترتیب ممکن است "قانون حلقه" را که شامل مقاومت، القاگر و emf است با بیان سادهٔ زیر فرمولبندی کرد. "جمع اختلاف پتانسیلهای سری در طول حلقهٔ C صفر است." این اختلاف پتانسیلها با RI ، $L(dI/dt)$ و \mathcal{E} به ترتیب برای مقاومتها، القاگرها و منبعهای emf داده می‌شوند. در حالت کلی ممکن است مداری که تحلیل می‌کنیم شامل تعداد زیادی حلقهٔ جفت شده باشد. مقصود از "جفت‌شده" این است که اجزای مدار ممکن است دو یا چند حلقه داشته باشند (بخش ۱۳-۴ را ببینید). روش تحلیل این مدارها به این صورت است که قوانین مداری کیرشهوف را می‌نویسیم:

۱. در هر لحظه جمع افت پتانسیلها در طول هر حلقهٔ مدار صفر است.
۲. در هر گره مدار، تجمع بار وجود ندارد، بنابراین جمع جبری جریانهای ورودی به هر نقطه در هر لحظه صفر است.

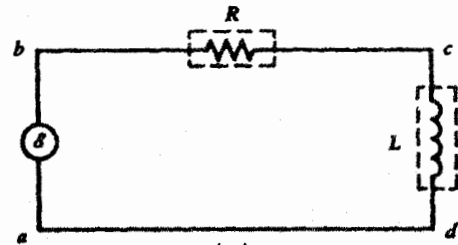
به تعداد جریانهای مستقل معادله‌های خطی مستقل می‌نویسیم و سپس با حل آنها، جریانها را به دست می‌آوریم. البته معادله‌ها، دیفرانسیل خطی‌اند که حل آنها ممکن است پیچیده باشند. اما اصولاً، به شرطی که شرایط اولیه کافی مشخص شوند، می‌توانیم جواب آنها را به صورت منحصر به فرد تعیین کنیم.

۱۳-۳ جوابها در حوزهٔ زمانی

اکنون در مورد مدارهای شامل منبع پله‌ای یا ضربه‌ای بحث می‌کنیم. این مدارها جوابهای زودگذر دارند که وابستگی زمانی آنها سرانجام به



(الف)



(ب)

شکل ۱۳-۱ (الف) یک حلقهٔ جریان شامل یک منبع با نیروی محرکه الکتریکی \mathcal{E} که در کل مدار خود انباره است. جریان I حول مدار پیوسته است. (ب) نمودار قراردادی مدار.

از جزء کوچکی از طول مسیر کل ناشی می‌شود

$$\oint \mathbf{E}^s \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} \quad (۴-۱۳)$$

اکنون با فرض اینکه در محیط مدار قانون اهم صحیح است. یعنی $\mathbf{J} = \sigma_c \mathbf{E}_T$ داریم

$$\oint \mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mathbf{J}}{\sigma_c} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}^s \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}^i \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}^q \cdot d\mathbf{l} \quad (۵-۱۳)$$

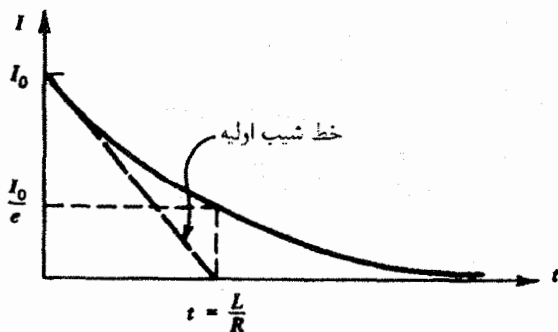
انتگرال خطی باید کاملاً در طول مدار (واقع در محیط) محاسبه شود. طرف چپ معادله (۵-۱۳) را می‌توان با استفاده از معادله (۷-۱۴) برحسب مقاومت مدار نوشت، یعنی

$$\oint \frac{\mathbf{J}}{\sigma_c} \cdot d\mathbf{l} = RI \quad (۶-۱۳)$$

که کل مقاومت سری حلقه (شامل مقاومتها و emfها) و I جریان ثابت پیوسته در طول حلقه است. دقت کنید I در صورت حضور خازن پیوسته و ثابت نیست. انتگرال خطی \mathbf{E}^s درست همان نیروی محرکه الکتریکی است که در معادله (۴-۱۳) تعریف شد. علاوه بر این

$$\oint \mathbf{E}^i \cdot d\mathbf{l} \quad \text{و} \quad \oint \mathbf{E}^q \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\oint \mathbf{E}^i \cdot d\mathbf{l} = -\frac{dF}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$



شکل ۲-۱۳ افت جریان در یک مدار RL که منبع ولتاژ ناگهان صفر می‌شود. ثابت زمانی مدار به شکل $t = L/R$ است.

۳۷ $\approx 1/e$ درصد اندازه اولیه اش کم می‌شود (در مدت سه برابر ثابت زمانی جریان به $0.5 I_0 \approx I_0 / 2$ می‌رسد). این رفتار یک آهنربای الکتریکی است و ولتاژ اعمال شده به آن ناگهان به صفر برسد.

حالت اثرهای منبع را در مدار RL بررسی می‌کنیم. اگر $\mathcal{E} = V_0$ یک ولتاژ ثابت در معادله (۹-۱۳) باشد، آن‌گاه به دست می‌آوریم

$$I(t) = I(0) e^{-(R/L)t} + \frac{V_0}{R} [1 - e^{-(R/L)t}] \quad (۱۱-۱۳)$$

مجموع دو جمله اول و سوم طرف راست جواب معادله همگن $L(dI/dt) + RI = 0$ با در نظر گرفتن شرط اولیه $I(0)$ است. این جواب شکل $I = Ae^{-(R/L)t}$ دارد که به‌وضوح یک خصوصیت زودگذر است و $A = I(0) - V_0/R$. جمله دوم در $I(t)$ جواب "ویژه" معادله دیفرانسیل واقعی است. اگر $I(0)$ صفر باشد، ابتدا جریانی برقرار نیست، آن‌گاه $I(t)$ دوباره به شکل نمایی با ثابت زمانی L/R به V_0/R می‌رسد. البته برای "زمانی طولانی" ($t \gg L/R$)، $I \approx V_0/R$ است [شکل ۳-۱۳ (الف) را ببینید].

مثال ۱-۱۳ اثرهای منبع در مدارهای RL ($\mathcal{E} = V_0$) اکنون می‌بینیم که اگر \mathcal{E} شکل مستطیلی [که در شکل ۳-۱۳ (ب) نشان داده‌ایم] داشته باشد، که مثلاً با باز و بسته کردن کلید در مدار می‌تواند به دست آید، آن‌گاه دو حالت به‌سادگی قابل تشخیص است: $L/R \ll T$ و $L/R \gg T$ که T زمان تناوب باز و بسته شدن کلید است. این دو حالت را در شکل ۳-۱۳ (ب) می‌بینیم. در حالت دوم ولتاژ دو سر مدار سرانجام نسبت به $V_0/2$ نوسان می‌کند و شیب آن تقریباً خطی است. در حالت اول اختلاف پتانسیل در دو سر القاگر تقریباً از شکل موج ورودی تبعیت می‌کند. به این ترتیب اگر بخواهیم

صفر می‌رسد. ابتدا حلقه‌های RL ، سپس حلقه‌های RC و سرانجام حلقه‌های RLC را بحث می‌کنیم.

۱۳-۳-۱ حلقه RL سری

اکنون می‌خواهیم برای جریان حلقه RL ، شکل ۱۳-۱ (ب) عبارتی به دست آوریم. با ضرب معادله (۷-۱۳) در ضریب (انتگرال‌گیری) $e^{(R/L)t}$ به دست می‌آوریم

$$\mathcal{E} e^{(R/L)t} = L \frac{dI}{dt} e^{(R/L)t} + RI e^{(R/L)t}$$

یعنی

$$\frac{\mathcal{E}}{L} e^{(R/L)t} = \frac{d}{dt} (I e^{(R/L)t}) \quad (۸-۱۳)$$

با انتگرال‌گیری نسبت به زمان بین t_0 و t به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{L} \int_{t_0}^t \mathcal{E} e^{(R/L)t'} dt' = \int_{t_0}^t d(I e^{(R/L)t'}) \equiv [I e^{(R/L)t'}]_{t_0}^t$$

با انتخاب $t_0 \equiv 0$ نتیجه می‌شود

$$I(t) e^{(R/L)t} - I(0) = \frac{1}{L} \int_0^t \mathcal{E} e^{(R/L)t'} dt'$$

یا

$$I(t) = I(0) e^{-(R/L)t} + \frac{e^{-(R/L)t}}{L} \int_0^t \mathcal{E}(t') e^{Rt'/L} dt' \quad (۹-۱۳)$$

می‌بینیم که جواب، $I(t)$ ، دو جمله دارد. یک جمله مستقل از \mathcal{E} ، که آن را جواب زودگذر می‌نامیم و دیگری وابسته به \mathcal{E} که جواب ویژه نام‌گذاری می‌کنیم، اگر $t \gg L/R$ باشد فقط جواب ویژه باقی می‌ماند. جواب زودگذر جواب معادله دیفرانسیل همگن ($\mathcal{E} \equiv 0$) در لحظه $t = 0$ با در نظر گرفتن شرایط اولیه حاکم بر مدار است. جواب ویژه جوابی است که در معادله دیفرانسیل غیرهمگن صدق می‌کند. اگر در معادله (۹-۱۳) $\mathcal{E} = 0$ باشد، آن‌گاه جریان فقط به شرطی در مدار وجود دارد که $I(0) = I_0 \neq 0$ باشد. در این صورت جواب به شکل

$$I(t) = I_0 e^{-(R/L)t} \quad (۱۰-۱۳)$$

است. یک جریان افت‌کننده نمایی در شکل ۲-۱۳ می‌بینیم که در زمان $t = L/R$ ، که آن را ثابت زمانی مدار می‌نامیم، به مقدار

ناچیز است و بنابراین تغییر چگالی بار را تنها در خازن فرض می‌کنیم. چون جمع افت‌های پتانسیل در طول حلقه مدار باید صفر باشد داریم

$$\mathcal{E} = RI + \frac{q}{C} \quad (۱۲-۱۳)$$

که q با رابطه $I = dq/dt$ به I وابسته است. به این معنی که با جاری شدن جریان، مطابق شکل، q باید افزایش یابد، بنابراین معادله (۱۲-۱۳) را می‌توانیم به شکل

$$\mathcal{E} = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \quad (۱۳-۱۳)$$

بنویسیم که از نظر شکل شبیه معادله (۷-۱۳) است. بنابراین با تبدیل صرف $R \rightarrow 1/C$, $L \rightarrow R$ و $I \rightarrow q$ می‌توان جواب را به دست آورد [معادله (۹-۱۳) را ببینید]

$$q(t) = q(0)e^{-t/RC} + \frac{e^{-t/RC}}{R} \int_0^t \mathcal{E} e^{-t'/RC} dt' \quad (۱۴-۱۳)$$

که $q(0)$ بار خازن در لحظه اول $t = t_0 \equiv 0$ است. دوباره به زمان مشخصه RC و اینکه $q(0)e^{-t/RC}$ جواب معادله همگن است توجه می‌کنیم، در حالی که جمله دیگر، جواب ویژه معادله دیفرانسیل را در بر دارد.

اگر $\mathcal{E} = 0$ ، یعنی بار روی خازن به صورت نمایی با ثابت زمانی RC افت می‌کند. جریان در مدار عبارت است از

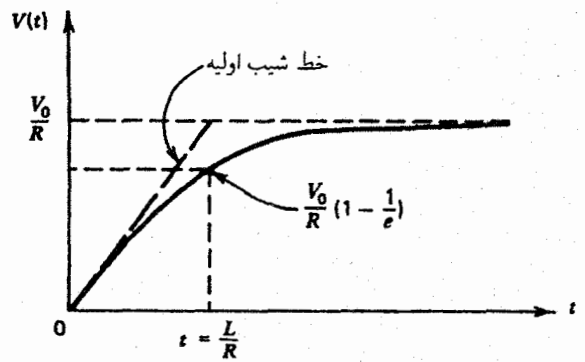
$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{q(0)}{RC} e^{-t/RC} = \frac{V_C(0)}{R} e^{-t/RC} \quad (۱۵-۱۳)$$

که $V_C(0) = q(0)/C$ افت پتانسیل در دو سر خازن در $t = 0$ است.

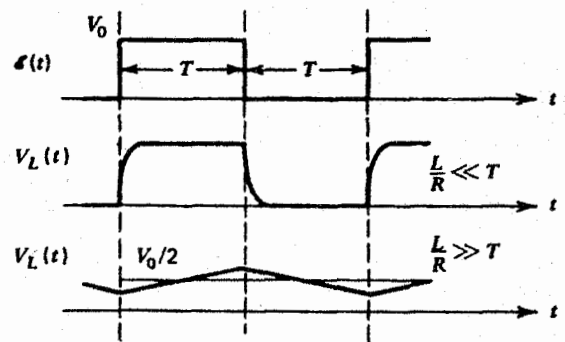
اگر $\mathcal{E} = V_0$ به دست می‌آوریم

$$q(t) = q(0)e^{-t/RC} + CV_0(1 - e^{-t/RC}) \quad (۱۶-۱۳)$$

مثال ۲-۱۳ مدارهای انتگرال‌گیر و مشتق‌گیر - رایانه‌های قیاسی از مدارهای شامل مقاومت و ظرفیت، اغلب در انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری سیگنالها استفاده می‌کنیم. مدار انتگرال‌گیر را در شکل ۵-۱۳(الف) می‌بینیم. فرض می‌کنیم سیگنال ورودی، \mathcal{E} ، افت‌وخیزهایی در زمانهای کوچکتر از T ، زمان مشخصه مربوط به \mathcal{E} ، داشته باشد. اگر \mathcal{E} سینوسی باشد T زمان تناوب آن است. در مدار انتگرال‌گیر، $\tau \equiv RC$ را باید



(الف)



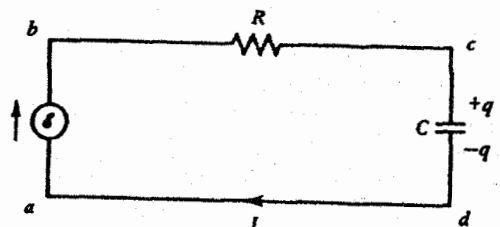
(ب)

شکل ۳-۱۳ (الف) ایجاد جریان در مدار RL موقعی که ولتاژ ناگهان وصل شود. (ب) شکل بالای emf را در مدار RL نشان می‌دهد وقتی که کلید به طور متناوب باز و بسته شود، شکل وسط و پایینی ولتاژ دو سر القاگر را وقتی که $L/R \ll T$ و $L/R \gg T$ ، نشان می‌دهد.

یک تپ سریع بزرگ‌شونده ایجاد کنیم باید القایی به حد کافی کوچک داشته باشیم.

۲-۳-۱۳ حلقه RC سری

تحلیل یک حلقه RC (شکل ۴-۱۳) را ببینید (شبه حلقه RL است. اکنون فرض می‌کنیم ظرفیت حلقه در خازن متمرکز شده است. القا



شکل ۴-۱۳ یک حلقه RC سری.

برای یک مدار مشتق‌گیر، شکل ۵-۱۳ (ب) اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت را به جای دو سر خازن در نظر می‌گیریم. علاوه بر این لازم است که $RC \ll T$ باشد. با مشتق‌گیری از معادله (۱۲-۱۳) نسبت به t به دست می‌آوریم

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \quad (۱۸-۱۳)$$

با ضرب کردن در RC و قرار دادن $V_R = RI$ به دست می‌آوریم

$$RC \frac{dV_R}{dt} + V_R = RC \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

چون

$$\frac{dV_R}{dt} \approx \frac{\Delta V_R}{\Delta t} \approx \frac{V_R}{T}$$

آن‌گاه

$$V_R \left(1 + \frac{RC}{T} \right) \approx RC \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

علاوه بر این با استفاده از $1 \ll RC/T$ به دست می‌آید

$$V_R(t) \approx RC \frac{d\mathcal{E}}{dt} \quad (۱۹-۱۳)$$

می‌بینیم که نتیجه برای مشتق‌گیری مناسب است.

نتایج معادله‌های (۱۷-۱۳) و (۱۹-۱۳) نشان می‌دهند که شبکه RC این نتیجه جالب را دارد که در صورت اعمال ولتاژ تناوبی به آن رفتار مدار شبیه یک رایانه قیاسی برای RC مناسب و شرایط حالت پایاست.

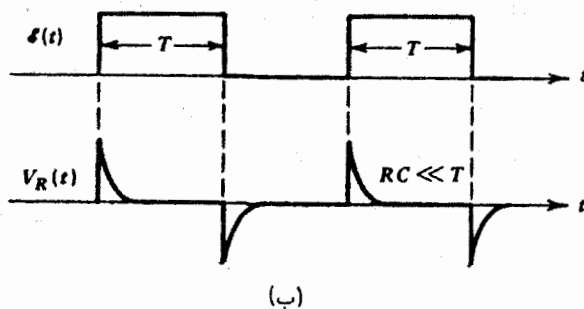
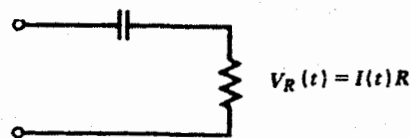
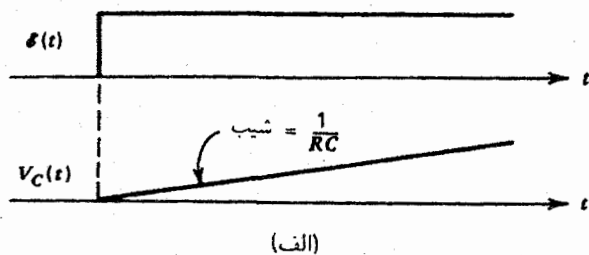
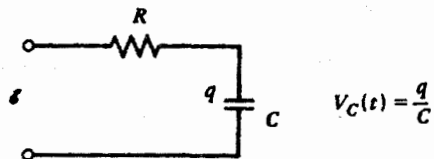
۱۳-۳-۳ حلقه RLC

حال مانند بخش ۱۳-۳-۲ فرض می‌کنیم حلقه شامل ظرفیت C است، اما همچنین شامل القای L ، که از آن نمی‌توان چشم پوشید، و مقاومت R است. مقاومت R را برای نمایش مقاومت سری کلی حلقه، که شامل سیمها و منبعهای emf است، در نظر می‌گیریم. القای L مربوط به کل مدار است اما در عمل آن را متمرکز در القاگرهای خاص می‌دانیم که از پیچ سیمی ساخته شده است. مقاومت R شامل مقاومت پیچ نیز هست. فرض می‌کنیم خازن C بدون اتلاف است، به این معنی که در مقابل جریان مقاومت بینهایت دارد. شکل ۱۳-۶ نمایشی از مدار است.

در هر لحظه زمانی جمع افت پتانسیلها در طول مدار صفر است.

بنابراین معادله زیر را برای مدار داریم

$$\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} \quad (۲۰-۱۳)$$



شکل ۵-۱۳ (الف) یک مدار انتگرال‌گیر با ولتاژ ورودی پله‌ای و ولتاژ انتگرال‌گیری شده در دو سر خازن. (ب) یک مدار مشتق‌گیر RC با ولتاژ ورودی مربعی نوسانی و ولتاژ مشتق‌گیری شده در دو سر مقاومت.

طوری انتخاب کنیم که $T \gg \tau$ باشد. در این صورت معادله (۱۴-۱۳) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$q(t) = \frac{e^{-t/RC}}{R} \int_0^t \mathcal{E}(t') e^{t'/RC} dt'$$

در فاصله زمانی $(0, t)$ اگر $t \leq T \ll RC$ باشد داریم $e^{t'/RC} \approx 1$. آن‌گاه پتانسیل دو سر خازن $V_C = q/C$ می‌شود

$$V_C(t) \equiv \frac{q}{C} = \frac{1}{RC} \int_0^t \mathcal{E}(t') dt' \quad (۱۷-۱۳)$$

اختلاف پتانسیل خروجی، برابر با انتگرال اختلاف پتانسیل ورودی تقسیم بر RC ، ثابت زمانی در این تقریب، است. این مطلب برای تپهای ساده با طول زمانی بسیار کوچکتر از RC صحیح است.

وابستگی q به زمان از نظر ریاضی فقط به شرطی یکتاست که بار روی خازن و نیز میزان زیاد شدن بار (جریان) روی آن در یک زمان معین، یعنی $t = 0$ ، مشخص باشد. این شرایط را شرایط اولیه می‌نامیم. بنابراین برای تعیین یکتای k_1 و k_2 باید $q(0) \equiv q_0$ و $I(0) \equiv I_0$ را بدانیم.

توجه کنید که حتی اگر m_1 و m_2 مختلط باشند $q(t)$ و $I(t)$ حقیقی‌اند. این نتیجه به خاطر مختلط بودن خود k_1 و k_2 است اما به طوری که به شرط حقیقی بودن شرایط اولیه $[q(0) \text{ و } I(0)]$ ، جوابها را حقیقی می‌سازند. همچنین یادآوری می‌کنیم که تا وقتی $R \neq 0$ (به طوری که $\alpha \neq 0$)، جوابها جمله‌ای دارند که به صورت نمایی به صفر نزول می‌کند. علاوه بر این، وقتی ω حقیقی (یعنی $1/LC < R^2/4L^2$) باشد جواب به شکل یک تابع نوسانی همراه با جمله نمایی نزولی است. در مثالهای زیر چند حالت خاص را بحث می‌کنیم.

مثال ۱۳-۳ تخلیه باریک خازن در حلقه RLC - ضریب کیفیت در این مثال یک خازن با بار اولیه $q_0 = q(0)$ را در نظر می‌گیریم، که مطابق شکل ۱۳-۷ (الف) به یک مقاومت و یک القاگر وصل است. جواب عمومی یک مدار RLC از روابط (۱۳-۲۵) و (۱۳-۲۶) به دست می‌آید. چون $\mathcal{E}(t) = 0$ است جواب خاص $q_p(t) = 0$ است. علاوه بر این چون جریان درست در لحظه بعد از بستن کلید و جریان در القاگرها به طور لحظه‌ای نمی‌تواند تغییر کند پس $I(0) = 0$ با قراردادن $q(0) = q_0$ و $I(0) = 0$ در روابط (۱۳-۲۵) و (۱۳-۲۶) به دست می‌آوریم

$$k_1 = k = \frac{m^* q_0}{m^* - m} \quad k_2 = k^* = \frac{m q_0}{m - m^*} \quad (27-13)$$

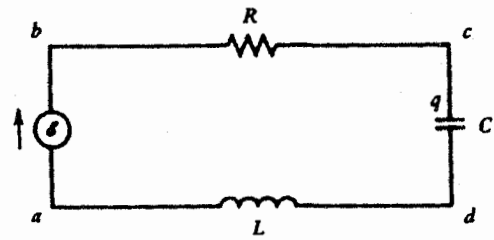
$$m_1 = m = -\alpha + i\omega \quad m_2 = m^*$$

که ستاره به معنی همیوگ مختلط است. سه حالت خاص وجود دارند که با حقیقی بودن، صفر بودن و موهومی محض بودن ω تطبیق می‌کند. این سه حالت با $(R/2L)^2 < , = , > 1/LC$ متناظرند:

(الف) حالت نوسانی (زیرمیرایی). این حالت وقتی ظاهر می‌شود که ω حقیقی باشد. بنابراین $\omega = \omega^*$ و

$$k = \frac{1}{2} \left(1 - i \frac{\alpha}{\omega} \right) q_0 \quad (28-13)$$

$$q(t) = \left[\frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega} \right] [q_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \phi)]$$



شکل ۱۳-۶ یک مدار RLC سری.

به کمک رابطه $I = dq/dt$ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} \quad (21-13)$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت است. این معادله حالت یک مدار تک-حلقه‌ای است که حاکم بر رفتار آن است. با تعیین $q(t)$ [یا $I(t) = dq/dt$] خواص الکتریکی مدار را کاملاً مشخص می‌کنیم. چون R, L, C ثابت‌اند معادله (۱۳-۲۱) را می‌توان به صورت عملگری زیر نوشت

$$\frac{\mathcal{E}}{L} = \left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} + \frac{1}{LC} \right] q = \left(\frac{d}{dt} - m_1 \right) \left(\frac{d}{dt} - m_2 \right) q \quad (22-13)$$

که m_1 و m_2 ثابتهایی‌اند که با روابط زیر داده می‌شوند

$$m_1 = -\alpha + i\omega \quad m_2 = -\alpha - i\omega \quad (23-13)$$

و

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2} \quad \alpha = \frac{R}{2L} \quad i = \sqrt{-1} \quad (24-13)$$

می‌دانیم (و می‌توانیم با جایگذاری مستقیم تحقیق کنیم) که جواب معادله (۱۳-۲۱) برحسب m_1 و m_2 همواره به شکل زیر است

$$q(t) = k_1 e^{m_1 t} + k_2 e^{m_2 t} + q_p(t) \quad m_1 \neq m_2 \quad (25-13)$$

$$q(t) = k_1 + k_2 t + q_p \quad m_1 = m_2$$

که k_1 و k_2 ثابتهایی مستقل از t و $q_p(t)$ هر جواب مربوط به همه قسمتهای معادله (۱۳-۲۱) است. این جمله جواب ویژه معادله است در حالی که دو جمله اول جواب معادله همگن‌اند که با قراردادن $\mathcal{E} = 0$ در معادله (۱۳-۲۱) به دست می‌آید. جریان $I = dq/dt$ در مدار می‌شود

$$I = m_1 k_1 e^{m_1 t} + m_2 k_2 e^{m_2 t} + \frac{dq_p}{dt} \quad (26-13)$$

$$q(t) \approx q(0)e^{-\alpha t} \cos \omega t \quad \text{و} \quad I(t) \approx -q_0 \omega e^{-\alpha t} \sin \omega t$$

این تساویها نشان می‌دهند که بین بار و جریان اختلاف فاز 90° درجه وجود دارد و جریان بار را هدایت می‌کند. در غیر این صورت، جریان بار را با اختلاف فاز $\pi/2 - \phi$ هدایت می‌کند همان طور که در شکل ۱۳-۷ (ب) می‌بینیم.

اندازه‌گیری میزان افت دامنه نوسانها با پارامترهای δ و Q ، که به ترتیب افت لگاریتمی و ضریب کیفی نام دارند، مشخص می‌شود. افت لگاریتمی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\delta = \ln \left[\frac{I(t)}{I(t+T)} \right] \quad (31-13)$$

که $T = 2\pi/\omega$ دوره نوسان است. ضریب کیفی را نیز با رابطه زیر مشخص می‌کنیم

$$Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{\omega T}{2\delta} = \frac{\pi}{\delta} \quad (32-13)$$

یک δ کوچک به یک Q بزرگ مربوط می‌شود و به معنی این است که نوسانها به کندی میرا می‌شوند.

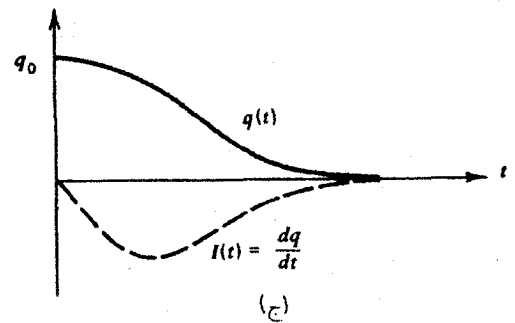
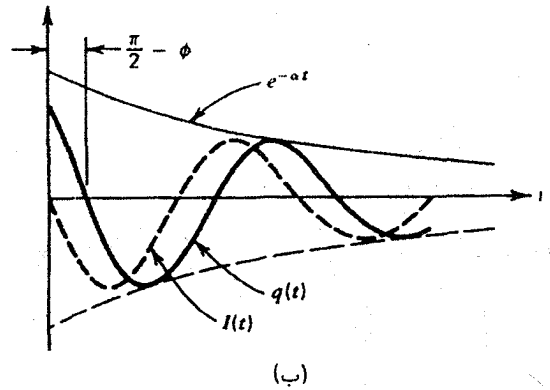
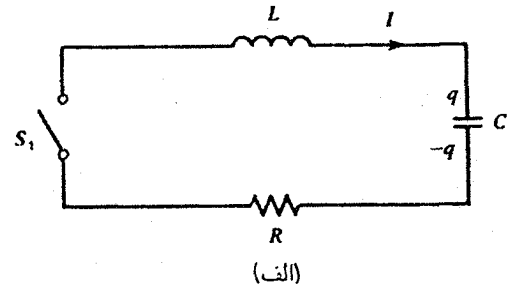
اکنون تعریف دیگری برای Q ، و بنابراین δ ، به کمک انرژی می‌کنیم. بر حسب انرژی بیشینه مغناطیسی، $U = (1/2)LI^2$ ، که I جریان بیشینه در هر چرخه است، داریم

$$\frac{U(t) - U(t+T)}{U(t)} = \frac{\Delta U}{U} = 1 - \frac{I^2(t)}{I^2(t+T)}$$

و یا با استفاده از معادله (۳۱-۱۳) $\Delta U/U = 1 - e^{-2\delta}$ برای δ کوچک $2\delta \approx 1 - e^{-2\delta}$ ؛ بنابراین

$$\frac{\Delta U}{U} \approx 2\delta = \frac{2\pi}{Q} \quad (33-13)$$

به این ترتیب $Q/2\pi$ حاصل تقسیم بیشینه انرژی ذخیره شده بر افت انرژی در هر نوسان است. از این تعریف اغلب برای معرفی Q استفاده می‌شود. یک مدار با Q بزرگ به معنی انجام نوسانهای زیاد بار یا جریان، قبل از میراشدن کامل نوسانها، در این مدار است. بیشینه انرژی ذخیره شده در مدار، با رابطه $I^2 \sim \exp[-2\omega t/Q]$ تغییر می‌کند. چون مقاومت یک مدار، که داشتن نوسان برای آن مطلوب است، اغلب به پیچهای (با القای L) واقع در مدار وابسته است، به همین دلیل Q را معمولاً به پیچه نسبت می‌دهند، زیرا یک حد بالا برای Q مداری را به دست می‌دهد که در آن قرار دارد. در مداری با Q تقریبی ۲ یا کمتر، نوسانی به وجود نمی‌آید. این وضعیت ما را به حالت (ب) می‌رساند.



شکل ۱۳-۷ تخلیه بار یک خازن در حلقه RLC. (الف) شکل مدار RLC. (ب) رفتار زمانی بار در خازن و جریان در مدار RLC در حالت نوسانی. (ج) رفتار زمانی در حالت میرای بحرانی.

که

$$\tan \phi = \frac{\text{Im}(k)}{\text{Re}(k)} = -\frac{\alpha}{\omega}$$

نمادهای $\text{Im}(\quad)$ و $\text{Re}(\quad)$ به ترتیب بخشهای موهومی و حقیقی مقادیر (مختلط) داخل پرانتز را مشخص می‌کنند. با بسط تابع کسینوسی دوباره می‌نویسیم

$$q(t) = q(0)e^{-\alpha t} \left[\cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right] \quad (29-13)$$

و جریان از رابطه $I(t) = dq/dt$ یا رابطه زیر به دست می‌آید

$$I(t) = -q_0 e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega} \right) \sin \omega t \quad (30-13)$$

اگر مقاومت کوچک باشد که در نتیجه $1 \ll (\alpha/\omega)$ ، آن‌گاه

ب) حالت میرایی بحرانی. هنگامی که $\omega \rightarrow 0$ ، یعنی

$$(R/\sqrt{L})^2 \rightarrow 1/LC$$

اگر توجه کنیم که در این حد، $\sin \omega t / \omega \rightarrow t$ و $\cos \omega t \rightarrow 1$ می توان عبارتهای درستی را برای $I(t)$ و $q(t)$ از حالت (الف) پیدا کرد. در این صورت

$$q(t) = q_0 e^{-\alpha t} [1 + \alpha t] \quad \text{و} \quad I(t) = -q_0 (\alpha^2 t) e^{-\alpha t} \quad (۳۴-۱۳)$$

این نتیجه را جواب میرای بحرانی می نامیم. در شکل ۱۳-۷ (ج) جریان و بار را به صورت تابعی از زمان نشان داده ایم. توجه کنید که این حالت با حالت $m_1 = m_2 = -\alpha$ یعنی شکل دوم معادله (۱۳-۲۵)، متناظر است.

(ج) حالت فوق میرا. این حالت در صورتی به وجود می آید که ω موهومی محض باشد. یعنی

$$m_1 = -\alpha + \beta, \quad m_2 = -\alpha - \beta$$

$$k_1 = \frac{\alpha + \beta}{2\beta} q_0, \quad k_2 = \frac{-(\alpha - \beta)}{2\beta} q_0, \quad \beta = i\omega$$

همه کمیتها حقیقی اند. اکنون معادله (۱۳-۲۵) به صورت زیر می شود

$$q(t) = \frac{q_0}{2\beta} [(\alpha + \beta) e^{-(\alpha - \beta)t} - (\alpha - \beta) e^{-(\alpha + \beta)t}] \quad (۳۵-۱۳)$$

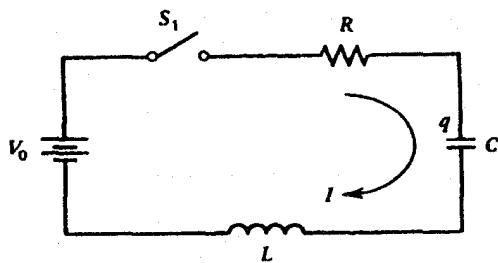
از مشتق گیری q نسبت به زمان، جریان به دست می آید

$$I(t) = \frac{-q_0}{2\beta} (\alpha^2 - \beta^2) (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) e^{-\alpha t} \quad (۳۶-۱۳)$$

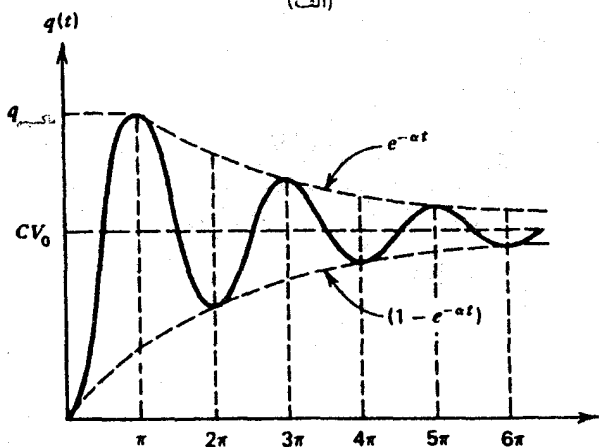
روابط (۱۳-۳۵) و (۱۳-۳۶) نشان می دهند که جریان و افت بار مجموع دو جمله نمایی هستند، یکی از آنها سریعتر و دیگری با سرعت کمتر از $e^{-\alpha t}$ افت می کند. نتیجه نهایی این است که افت با سرعتی کمتر از حالت میرایی بحرانی، که در آن افت در حد بیشینه است، اتفاق می افتد. بنابه تعریف $\beta \ll \alpha$ است و در نتیجه جریان همواره در $t \rightarrow \infty$ صفر می شود. ■

مثال ۱۳-۴ شارژ یک خازن در حلقه RLC

در این مثال فرض می کنیم یک باتری با پتانسیل خروجی ثابت V_0 به طور سری در یک مدار RLC، مطابق شکل ۱۳-۸ (الف)، قرار



(الف)



(ب)

شکل ۱۳-۸ شارژ یک خازن در مدار RLC. شکل مدار. (ب) رفتار زمانی بار خازن.

دارد. در زمان $t = 0$ ، وقتی کلید S_1 قطع است، جریان صفر است. در این وضعیت فرض می کنیم خازن بار ندارد. بنابراین شرایط اولیه $I(0) = 0$ و $q(0) = 0$ است. معادله دیفرانسیل [معادله (۱۳-۲۱)] را ببینید] برای این مدار و در زمان $t > 0$ می شود

$$V_0 = L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

که جوابش با معادله (۱۳-۲۵) داده می شود.

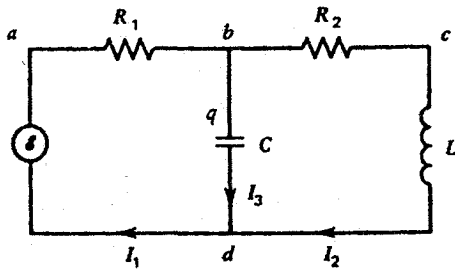
به سادگی دیده می شود که می توان جواب خصوصی این معادله را به شکل CV_0 انتخاب کرد

$$q_p(t) = CV_0 \quad (۳۷-۱۳)$$

شرط $q = 0$ و $I = 0$ در $t = 0$ را می توان به سادگی بر روابط (۱۳-۲۵) و (۱۳-۲۶) اعمال کرد. بنابراین

$$q(0) = k_1 + k_2 + CV_0 = 0$$

$$I(0) = [-\alpha + i\omega]k_1 - [\alpha + i\omega]k_2 = 0$$



شکل ۹-۱۳ دو مدار جفت شده خازنی.

داریم. این دو جریان را I_1 و I_2 انتخاب می‌کنیم. سپس از قانون کیرشهوف داریم $I_3 = I_1 - I_2$. همچنین بار روی خازن با رابطه $dq/dt = I_3 = I_1 - I_2$ وابسته است. در این مدار دو حلقه مستقل وجود دارد. از طرفی چون دو جریان مستقل باید معلوم شوند پس فقط دو معادله مستقل باید نوشت. برای حلقه شامل E, R_1 و C (که با $abda$ مشخص کرده‌ایم) با استفاده از قانون کیرشهوف داریم

$$E = R_1 I_1 + \frac{q}{C} \quad (41-13)$$

و برای حلقه دربرگیرنده L, R_2 و C می‌نویسیم

$$0 = R_2 I_2 + L \frac{dI_2}{dt} - \frac{q}{C} \quad (42-13)$$

در هر دو معادله جمع خطی (اختلاف پتانسیلها) را در جهت مورد انتظار جریانهای جاری شده نوشته‌ایم. به این ترتیب از معادله‌های (۴۱-۱۳) و (۴۲-۱۳) می‌بینیم که دو حلقه (با جریانهای I_1 و I_2) از طریق q/C با هم جفت شده‌اند.

دو حلقه یک مدار به وسیله القای متقابل، به صورت مغناطیسی جفت می‌شوند. این حالت را در شکل ۱۳-۱۰ (الف) نشان داده‌ایم، که M ضریب القای متقابل دو حلقه است که خود القاهای L_1 و L_2 دارند و به شکل ایده‌آل به صورت اجزای مدار نشان داده شده‌اند. مقاومت‌های R_1 و R_2 را نیز، به نشانه اینکه در عمل در عناصر جفت شده مقاومت وجود دارد نمایش داده‌ایم.

حال می‌خواهیم اختلاف پتانسیل‌های $\Phi(a) - \Phi(b)$ و $\Phi(c) - \Phi(d)$ را به دست آوریم (توجه کنید که اینها در همان جهت جریانه‌ها هستند). با به کار بردن معادله (۳۲-۱۱) می‌نویسیم

$$\Phi(a') - \Phi(b) = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \quad (43-13)$$

به همین ترتیب

$$\Phi(c) - \Phi(d') = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \quad (44-13)$$

از حل دو معادله به دست می‌آوریم

$$k_1 = -\frac{CV_0}{2} \left(1 - i \frac{\alpha}{\omega} \right) \quad \text{و} \quad k_2 = k_1^* = -\frac{CV_0}{2} \left(1 + i \frac{\alpha}{\omega} \right) \quad (38-13)$$

اکنون می‌توان نوشت $k_1 \equiv k = -|k|e^{-i\phi}$ که در آن $|k| = (CV_0/2)\sqrt{1 + (\alpha/\omega)^2}$ و $\tan \phi = -\alpha/\omega$ بنابراین

$$q(t) = -|k|e^{-\alpha t} [e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)}] + CV_0$$

یا

$$q(t) = CV_0 [1 - e^{-\alpha t} \sqrt{1 + (\alpha/\omega)^2} \cos(\omega t + \phi)] \quad (39-13)$$

در شکل ۱۳-۸ (ب) وابستگی زمانی $q(t)$ را می‌بینیم. همچنین با مشتق‌گیری و ساده کردن به دست می‌آوریم

$$I(t) = CV_0 e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega} \right) \sin \omega t \quad (40-13)$$

اولین بیشینه $q(t)$ زمانی است که $I(t) = 0$ ، یعنی $\omega t = \pi$ باشد. چون $\cos \phi = [1 + (\alpha/\omega)^2]^{-1/2}$ به دست می‌آوریم

$$q_{1 \max} = CV_0 [1 + e^{-\alpha\pi/\omega}]$$

اگر $\alpha/\omega \ll 1$ باشد $q_{1 \max} \approx 2CV_0$ می‌شود. اندازه اختلاف پتانسیل دو سر خازن به این ترتیب می‌تواند تا دو برابر emf به کار رفته باشد. بنابراین، خازن‌ها در این‌گونه مدارها، آهنگ شکست ولتاژی حداقل دو برابر ولتاژ اعمال شده V_0 دارند. ■

۴-۱۳ مدارهای جفت شده

تا کنون فقط مدارهای ساده را بررسی کردیم. در این بخش مدارهایی را بررسی می‌کنیم که دارای حلقه‌های زیاد جفت شده هستند. منظور از کلمه "جفت شده" این است که عناصر معینی از مدار بین دو یا چند حلقه مشترک‌اند.

مدارهایی را که یک خازن مشترک داشته باشد، جفت شده خازنی می‌نامیم. مدار نشان داده شده در شکل ۹-۱۳ یک مدار جفت شده خازنی است. سه جریان I_1 ، I_2 و I_3 را نشان داده‌ایم. از روی شکل واضح است که برای مشخص کردن این مدار دو جریان مستقل لازم

$$\Phi(c) - \Phi(d) = R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} - |M| \frac{dI_1}{dt} \quad (۴۶-۱۳)$$

اگر یکی از جریانها تغییر جهت دهد، یا جهت پیش یکی از سیمها تغییر کند، $|M|$ باید با علامت مخالف در رابطه ظاهر شود. توجه کنید که افت پتانسیل "در هر طرف" القای متقابل را در همان جهت جریانهای انتخابی، یعنی در جهتی که برای محاسبه انتگرالهای خطی انتخاب شده است، نشان می‌دهد. در این صورت جمله‌های خودالقا در انتگرالهای خطی با علامتهای مثبت ظاهر می‌شوند. اگر به جای $\Phi(c) - \Phi(d)$ ، می‌نوشتیم $\Phi(d) - \Phi(c)$ علامت جمله‌های طرف راست معادله نیز باید مخالف می‌بود.

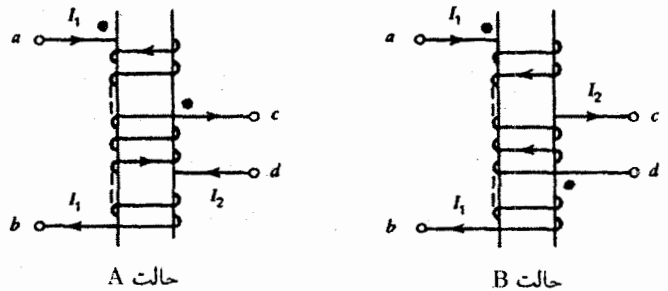
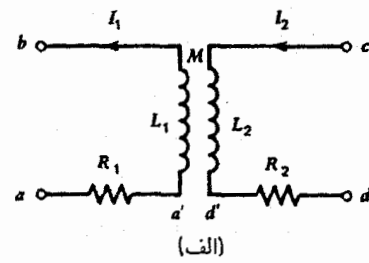
۱۳-۵ مدارهای AC - حوزه بسامدی

۱۳-۵-۱ فازورها - قوانین کیرشهوف برای فازورها

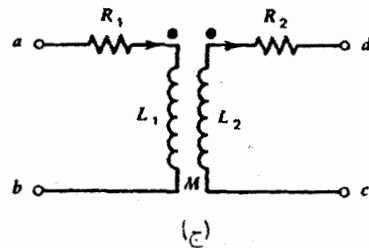
دیدیم که جواب جریانها (یا بارها)ی جاری در یک مدار ثابت از حل معادله دیفرانسیل خطی با ضریب ثابت به دست می‌آید. در مواردی ساده که emfهای به کار رفته ثابت‌اند، جواب بدون اشکال به دست می‌آید. یک نوع بسیار مهم برانگیختگی مدار که برای آن نیز به سادگی جواب داریم برانگیختگی سینوسی مدار است. به این ترتیب برای هر حلقه یک مدار \mathcal{E} را می‌توان به شکل $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$ ، $\mathcal{E}_0 \sin \omega t$ ، $\mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi)$ و یا $\mathcal{E}_0 \sin \omega t + \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ در نظر گرفت که همه سینوسی‌اند زیرا فقط با یک ثابت فاز با هم اختلاف دارند. \mathcal{E}_0 ها دامنه‌های ثابت‌اند. منظور از "AC" این است که عامل برانگیختگی مدار شکل سینوسی با بسامد زاویه‌ای ω (یا $f = \omega / 2\pi$) دارد.

چون در تکنولوژی الکتریکی به طور گسترده از این نوع ولتاژ در برانگیختگی مدارها استفاده می‌شود بررسی مدار ac جایگاه مهمی در مطالعه الکتریسیته و مغناطیس دارد. ساخت مولدی با emf سینوسی بسیار ساده است. به این دلیل تحلیل مدار ac مهم است. چون به روش تجزیه فوریه می‌توان هر سیگنال (برانگیختگی) تکرارشونده را به جمله‌های سینوسی تجزیه کرد، آن‌گاه با فرض اینکه رفتار مدار را برای هر جمله سینوسی بدانیم، می‌توانیم رفتار آن را برای مجموع جمله‌ها، و بنابراین برای سیگنال ورودی تکرارشونده دلخواه بفهمیم. خطی بودن معادله‌ها این کار را امکان‌پذیر می‌سازد. شکل ۱۳-۶، را در نظر می‌گیریم که یک حلقه RLC ساده را که با یک منبع تک بسامد $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ تغذیه می‌شود، نشان می‌دهد. معادله دیفرانسیل این مدار به شکل زیر است

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (۴۷-۱۳)$$



(ب)



(ج)

شکل ۱۳-۱۰ دو مدار جفت‌شده مغناطیسی به صورت القای متقابل. (الف) نمایش حلقه‌ها. (ب) نمایش دو روش مختلف جفت شدن حلقه‌ها با حالت‌های A و B که به ترتیب القای متقابل منفی و مثبت دارند. (ج) قرارداد علامت القای متقابل به کمک دو نقطه.

که $M \equiv M_{12} = M_{21}$ ضریب القای متقابل پیچیده‌است. القای M ، بسته به چگونگی جفت‌شدن پیچیده‌ها، را مثبت یا منفی می‌گیریم. این دو حالت را در شکل ۱۳-۱۰ (ب) نشان داده‌ایم. در حالت A با افزایش جریان I_1 افت پتانسیل خودالقا از a به b است. افت پتانسیل القای متقابل حلقه دیگر از d به c است. این همبستگی با نقاط پررنگ که روی پایانه‌ها گذاشته‌ایم مشخص می‌شود. با بررسی معلوم می‌شود که وقتی I_1 و I_2 در حال افزایش‌اند emfهای القایی در جهت مخالف ایجاد می‌شود (شارها با یکدیگر مخالف‌اند)، بنابراین M منفی است. در مورد B شارها با یکدیگر را تقویت می‌کنند، و بنابراین M مثبت است. آن‌گاه به طور خلاصه برای مدار شکل ۱۳-۱۰ (ج) می‌نویسیم

$$\Phi(a) - \Phi(b) = R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} - |M| \frac{dI_2}{dt} \quad (۴۵-۱۳)$$

بنابراین تابع y باید مختلط باشد و می‌توان آن را به شکل $y = y_r + iy_i$ نوشت. این امکان‌پذیر است زیرا بنا به تعریف اگر f حقیقی باشد، y هم حقیقی است. به این ترتیب می‌توان نوشت

$$\mathcal{L}(y_r + iy_i) = f_r + if_i$$

چون \mathcal{L} خطی است $\mathcal{L}(y_r + iy_i) = \mathcal{L}(y_r) + i\mathcal{L}(y_i)$ از مساوی قراردادن قسمت‌های حقیقی و موهومی دو طرف معادله اخیر نتیجه می‌گیریم

$$\mathcal{L}(y_r) = f_r \quad \text{و} \quad \mathcal{L}(y_i) = f_i \quad (۵۲-۱۳)$$

که نشان می‌دهد این روش دقیق است.

دامنه‌های مختلط \hat{I} و \hat{q} را می‌توان مقادیر مختلط I و q در $t = 0$ فرض کرد. آنها را اغلب فازور می‌نامیم. برای اینکه جوابهای صحیحی برای معادله دیفرانسیل مختلط به دست آوریم، روابط معینی باید بین این فازورها به دست آیند. این روابط به کمک معادله‌های دیفرانسیلی که I و q باید در آنها صدق کنند مشخص می‌شوند. ماهیت روابط بین فازورها با توجه به اینکه عملگر مشتق، d/dt معادل (برای برانگیختگی سینوسی مختلط) ضرب کردن در $i\omega$ است آشکار می‌شود. معادله، برای برانگیختگی ac مختلط برابر است با

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \frac{q}{C} = \hat{\mathcal{E}} e^{i\omega t} \quad (۵۳-۱۳)$$

با نوشتن $I = \hat{I} e^{i\omega t}$ و بنابراین $q = I/i\omega$ ، به دست می‌آوریم

$$i\omega L \hat{I} + \frac{\hat{I}}{i\omega C} + R\hat{I} = \hat{\mathcal{E}} \quad (۵۴-۱۳)$$

بدین ترتیب

$$I = \frac{\hat{\mathcal{E}} e^{i\omega t}}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad \text{و} \quad \hat{I} = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (۵۵-۱۳)$$

این نتیجه مشابه رابطه $I = \mathcal{E}/R$ dc است بجز اینکه مخرج $z = \hat{\mathcal{E}}/\hat{I}$ مختلط است و امپدانس مختلط نام دارد. امپدانس مختلط وابسته به این مدار RLC برابر است با

$$z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Z e^{i\phi} \quad (۵۶-۱۳)$$

این یک معادله حقیقی است و اساساً با چشمپوشی از جواب زودگذر اولیه که که با وصل کردن کلید ایجاد می‌شود و در بخش ۱۳-۳ به تفصیل بحث کردیم، می‌خواهیم آن را برای جریان I یا بار q حل کنیم. با این همه حل این معادله با در نظر گرفتن معادله دیفرانسیلی به همان شکل اول با این تفاوت که emf را به شکل مختلط در نظر می‌گیریم به سادگی به دست می‌آید. این تغییر را می‌توان به صورت مختلط $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ به طوری که $\text{Re}(\hat{\mathcal{E}} e^{i\omega t}) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ باشد در نظر گرفت. جواب حالت پایای معادله دیفرانسیل خطی نیز به شکل جریان مختلط و بار مختلط زیر خواهد بود

$$I(t) = \hat{I} e^{i\omega t} \quad q(t) = \hat{q} e^{i\omega t} \quad (۴۸-۱۳)$$

آن‌گاه جریان و بار صحیح حقیقی با در نظر گرفتن بخشهای حقیقی مقادیر مختلط، با روابط زیر

$$I(t) = \text{Re}[\hat{I}(t) e^{i\omega t}] \quad \text{و} \quad q(t) = \text{Re}[\hat{q}(t) e^{i\omega t}] \quad (۴۹-۱۳)$$

به دست می‌آید.

اگر emf تغذیه‌کننده مدار به جای $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ به شکل $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ باشد، در این صورت هنوز می‌توان آن را به شکل $\hat{\mathcal{E}} e^{i\omega t}$ نشان داد. اما در این حالت جریان و بار حقیقی در عناصر مختلف به کمک بخشهای موهومی کمیات مختلط مربوطه حساب می‌شوند. یعنی

$$I = \text{Im}(\hat{I} e^{i\omega t}) \quad \text{و} \quad q = \text{Im}(\hat{q} e^{i\omega t}) \quad (۵۰-۱۳)$$

اگر $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi_0)$ باشد emf را به شکل $\hat{\mathcal{E}} e^{i(\omega t + \phi_0)}$ نشان می‌دهیم و در نتیجه جریان و بار حقیقی از روابط زیر به دست می‌آیند

$$I = \text{Re}(\hat{I} e^{i(\omega t + \phi_0)}) \quad \text{و} \quad q = \text{Re}(\hat{q} e^{i(\omega t + \phi_0)}) \quad (۵۱-۱۳)$$

علت استفاده از صفحه مختلط این است که محاسبات جبری با توابع نمایی مختلط بسیار ساده‌تر از محاسبه با توابع مثلثاتی است. اکنون نشان می‌دهیم این روش دقیق است. تابع مختلط $f = f_r + if_i$ در نظر می‌گیریم که در آن f_r و f_i توابع حقیقی از متغیر نرده‌ای t هستند. اگر \mathcal{L} یک عملگر حقیقی باشد و

$$\mathcal{L}y = f = f_r + if_i$$

که

$$\tan \phi = \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

و

$$Z = |z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (57-13)$$

جریان حقیقی برحسب z برابر است با

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi) = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \cos(\omega t - \phi) \quad (58-13)$$

با به کار بردن این جریان می توان نوشت

$$q(t) = q_0 \cos\left(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega Z} \sin(\omega t - \phi) \quad (59-13)$$

مقاومت حامل جریان I افت پتانسیلی برابر RI دارد و بنابراین فازور "ولتاژ" $\hat{V} = RI\hat{I}$ به آن مربوط می شود. یک خازن که جریان I در آن برقرار است به طوری که $I = dq/dt$ ، افت پتانسیلی برابر q/C دارد و به این ترتیب فازور ولتاژ $\hat{V} = \hat{q}/C$ است که با به کار بردن $\hat{I} = i\omega\hat{q}$ ، برابر $\hat{V} = \hat{I}/i\omega C$ برای خازن می شود. یک القاگر مجزا با خود القای L که جریان I از آن می گذرد، افت پتانسیلی برابر $L(dI/dt)$ و بنابراین فازور ولتاژی برابر $\hat{V} = i\omega L\hat{I}$ به آن مربوط است. در ارتباط با هر القای متقابل دو مدار وجود دارد. افت پتانسیل در مدار k مربوط به جریان در مدار l با رابطه $V_{kl} = M(dI_l/dt)$ داده می شود و به طور مشابه داریم $V_{lk} = M(dI_k/dt)$. بنابراین فازورهای ولتاژ $\hat{V}_{kl} = i\omega M I_l$ و $\hat{V}_{lk} = i\omega M I_k$ هستند.

ابتدا امپدانس با روابط (۵۶-۱۳) و (۵۷-۱۳) برای یک حلقه ساده RLC معرفی شد. حال امپدانس بین هر دو نقطه در یک مدار خطی غیرفعال^۱ را که در آن جریانی عبور می کند، معرفی و بحث می کنیم. با فرض خطی بودن دستگاه فازورهای جریان و ولتاژ به صورت زیر رابطه خطی دارند

$$\hat{V} = z\hat{I} \quad (60-13)$$

کمیت z را امپدانس مختلط می نامیم و همانند کمیت های مختلط آن را به شکل زیر می نویسیم

$$z = R + iX \quad (61-13)$$

که R ، قسمت حقیقی z ، را مقاومت و X ، قسمت موهومی آن را، راکتانس می نامیم. اکنون نتایج این بحث را در جدول ۱۳-۲ خلاصه می کنیم.

ترکیب امپدانسها درست مانند ترکیب مقاومتهاست و از قوانین کیرشهوف برای مدار ac تبعیت می کنند. به این ترتیب که اگر امپدانسهای مختلط z_1 و z_2 را داشته باشیم ترکیب سری آنها z است به طوری که $z = z_1 + z_2$. در حالی که ترکیب موازی آنها به نتیجه $1/z = 1/z_1 + 1/z_2$ منجر می شود.

با این مفهوم امپدانس، که تنها در ارتباط با برانگیختگی سینوسی ac در بسامد خاص معنی دارد، قانون مش کیرشهوف به صورت زیر بیان می شود:

حاصل جمع emfهای (فازورها) به کاررفته در طول یک حلقه بسته C در یک مدار باید با جمع تمام افت پتانسیلهای به شکل $z\hat{I}$

۱. یعنی مداری که شامل منبع emf نیست.

برای مدار RLC ، ϕ هر مقدار ممکن بین $-\pi/2$ تا $+\pi/2$ را می تواند داشته باشد. اگر $0 < \phi < \pi/2$ باشد، آنگاه $0 < \omega L - 1/C\omega \leq 0$ و مدار "خازنی" است. اگر $0 \leq \phi \leq \pi/2$ ، آنگاه $0 < \omega L - 1/C\omega > 0$ و مدار "القایی" است. اگر $\phi = 0$ باشد مدار مقاومتی است. جمله های خازنی، القایی و مقاومتی به معنی این است که مدار به ترتیب رفتاری شبیه مدار RC ، RL یا R دارد. با فازورهای ولتاژ تعریف شده برای عناصر مختلف، معادله های دیفرانسیلی به معادله های جبری مختلط که فازورها را به هم ارتباط می دهد تبدیل می شود. به کمک فازورها می توان تمام کمیت های مورد نظر را به دست آورد. این روش را قوانین کیرشهوف برای فازورها می نامیم که مشابه قوانین مدارهای dc است. به این ترتیب:

۱. قانون مش (قانون ولتاژ): در طول هر حلقه بسته در مدار ac جمع فازورهای افت پتانسیل باید صفر باشد.
۲. قانون نودال (قانون جریان): جمع فازورهای جریان در هر نقطه از یک مدار ac باید صفر باشد. این مطلب بخصوص برای گره های یک مدار مناسب است (در یک خازن می توان I را جریان ورودی به پایانه و qd/dt را جریان خروجی از پایانه در نظر گرفت. به این ترتیب معادله $I = dq/dt$ رابطه بار خازن با جریان ورودی را به دست می دهد).

۱۳-۵-۲ قانون مش

اکنون برای ساده کردن کاربرد قانون مش، فازورهای افت پتانسیل را برای عناصر مختلف، که در هر حلقه وجود دارند، خلاصه می کنیم. یک

که k_1 و k_2 در حالت کلی اعداد مختلط وابسته به عناصر داخل "جعبه" با خروجیهای A و B هستند. با فرض اینکه وسایل داخل جعبه در حین اندازه‌گیری خود تغییر نمی‌کنند k_1 و k_2 را می‌توان با دو اندازه‌گیری زیر تعیین کرد:

۱. اندازه‌گیری افت پتانسیل در دو نقطهٔ A و B ، وقتی که خروجیها باز هستند. با قرار دادن $\hat{I} = 0$ در معادلهٔ (۶۳-۱۳) نتیجه می‌گیریم

$$k_1 = \hat{V} \equiv \hat{\mathcal{E}} \quad (64-13)$$

۲. پایانه‌ها را اتصال کوتاه می‌کنیم و جریان \hat{I} را اندازه می‌گیریم. با قرار دادن $\hat{V} = 0$ در معادلهٔ (۶۳-۱۳) به‌دست می‌آوریم

$$k_2 = -\frac{k_1}{\hat{I}} = -\frac{\hat{\mathcal{E}}}{\hat{I}} \equiv -z \quad (65-13)$$

به این ترتیب با قرار دادن روابط (۶۴-۱۳) و (۶۵-۱۳) در (۶۳-۱۳) به‌دست می‌آوریم

$$\hat{V} = \hat{\mathcal{E}} - z\hat{I} \quad (66-13)$$

این رابطه به‌سادگی "مولد emf امپدانس صفر" را به‌صورت سری با امپدانس z ، همان‌طور که در شکل ۱۱-۱۳ (ب) می‌بینیم نشان می‌دهد. کمیتهای $\hat{\mathcal{E}}$ و z را به‌ترتیب emf تون و امپدانس خروجی می‌نامیم.

برای تعیین z و $\hat{\mathcal{E}}$ از نمایش طرحوار یک مدار واقعی فقط نیاز به محاسبهٔ (۱) ولتاژ \hat{V} مدار-باز و (۲) امپدانس ورودی به پایانه‌های A و B جعبه داریم. در حالت دوم فرض می‌کنیم که تمام emf‌های خالص داخل جعبه را با سیمهایی با امپدانس صفر عوض کرده‌ایم.

توجه کنید که معادلهٔ (۶۶-۱۳) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\hat{I} = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{z} - \frac{\hat{V}}{z} \equiv \hat{\mathcal{I}} - y\hat{V} \quad (67-13)$$

که

$$y \equiv \frac{1}{z} \quad \text{و} \quad \hat{\mathcal{I}} \equiv \frac{\hat{\mathcal{E}}}{z} \quad (68-13)$$

این وضعیت را به‌طور طرحوار با مدار شکل ۱۲-۱۳ (الف)، که حالت "همزاد" نسبت به مدار تونن شکل ۱۲-۱۳ (ب) دارد، نشان می‌دهیم. $\hat{\mathcal{I}}$ ، emf‌ی را نشان می‌دهد که دامنهٔ جریان ثابت $\hat{\mathcal{I}}$ را به‌وجود می‌آورد و با $y = 1/z$ موازی است. این مدار را مدار معادل نورتن می‌نامیم.

جدول ۲-۱۳

عناصر	مختلط	امپدانس	راکتانس	فازور ولتاژ	امپدانس
R	R	R	0	$R\hat{I}$	
L	$i\omega L$	ωL	ωL	$i\omega L\hat{I}$	
C	$\frac{1}{i\omega C}$	$\frac{1}{\omega C}$	$-\frac{1}{\omega C}$	$\frac{\hat{I}}{i\omega C}$	
M	$i\omega M$	ωM	ωM	$i\omega M\hat{I}$	

در یک دور حلقه برابر باشد. به‌طور طرحوار داریم

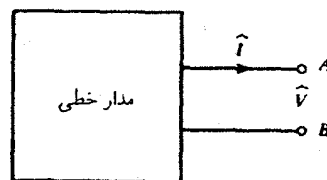
$$\sum \hat{\mathcal{E}} = \sum z\hat{I} \quad (62-13)$$

۱۳-۵-۳ روش نودال

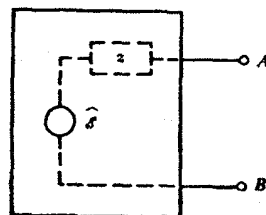
قبل از بحث در مورد روش نودال، منابع جریان و مفهوم ادیٹانس را بیان می‌کنیم. شکل ۱۱-۱۳ (الف) را در نظر می‌گیریم. مدار سمت چپ A و B را می‌توان با یک مولد ولتاژ ایده‌آل ساده و یک امپدانس به شکل سری نشان داد به‌طوری که تنها به اثر الکتریکی منتقل شده به طرف راست توجه داشته باشیم. این روش همواره برای مدارهای سینوسی خطی قابل قبول است.

معنی خطی بودن این است که دامنهٔ پتانسیل، \hat{V} ، به‌صورت زیر به جریان مربوط است

$$\hat{V} = k_1 + k_2\hat{I} \quad (63-13)$$

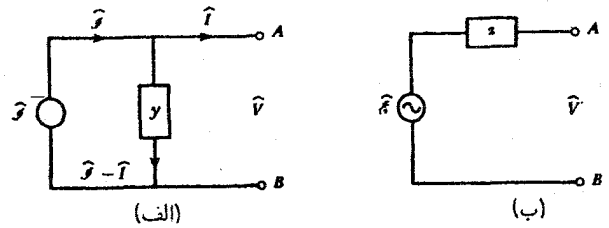
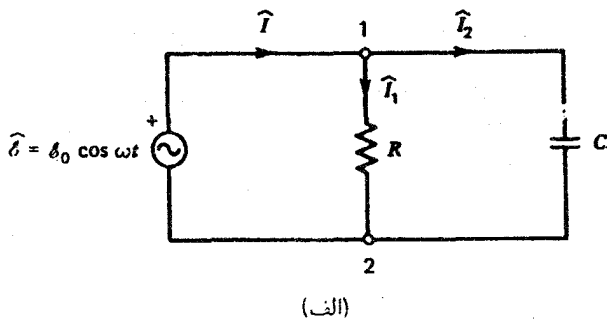


(الف)



(ب)

شکل ۱۱-۱۳ (الف) مدار خطی تک‌بسامد ω و دامنهٔ جریان خروجی \hat{I} و دامنه ولتاژ \hat{V} . (ب) نمایش مدار با استفاده از مولد ولتاژ ایده‌آل و امپدانس سری (emf تونن و امپدانس خروجی).



شکل ۱۳-۱۲ (الف) مدار معادل نورتن، که همزاد مدار تونن (ب) است.

حال به جای ولتاژ تأکید بر جریان است. اگر $\hat{v} = 0$ و \hat{I} خیلی بزرگ باشند به طوری که \hat{v} ثابت بماند آن گاه $y \rightarrow 0$ و جریان $\hat{I} = \hat{v}$ است. عکس امپدانس را ادمیتانس می نامیم. اگر z امپدانس مختلط بین دو نقطه از مدار باشد. ادمیتانس مختلط بین این دو نقطه را که با y نشان می دهیم برابر است با

$$y = \frac{1}{z} \quad (۶۹-۱۳)$$

در حالت کلی z مختلط است. پس y نیز مختلط خواهد بود. آن گاه می توان نوشت

$$y = G - iB \equiv \frac{1}{z} = \frac{1}{R + iX} \quad (۷۰-۱۳)$$

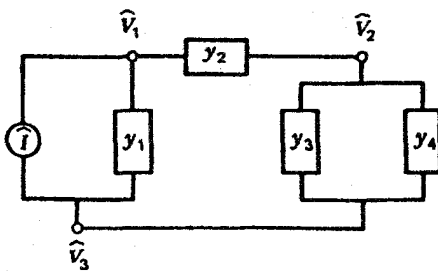
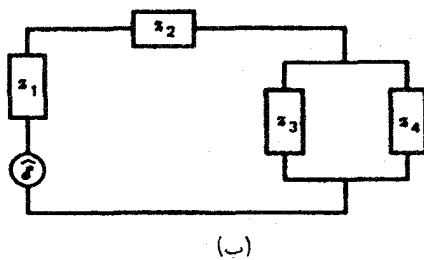
کمیت G را رسانش و B را پذیرفتاری می نامیم.

ادمیتانس مخصوصاً وقتی مفید است که از معادله های نودال (قانون نودال کیرشهوف) برای تحلیل مدار استفاده می کنیم. زیرا فازور جریان، \hat{I} ، با فازور ولتاژ، \hat{V} ، با رابطه $\hat{I} = y\hat{V}$ وابسته است. به این ترتیب برای عناصر موازی که ادمیتانسهای y_1 و y_2 دارند، رابطه نودال $\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 = (y_1 + y_2)\hat{V}$ برقرار است که در مقایسه با رابطه معادل آن برای z ها از نظر جبری ساده تر است. ادمیتانسها همانند خازنها با هم ترکیب می شوند. بنابراین برای دو عنصر سری با ادمیتانسهای y_1 و y_2 ، ادمیتانس معادل $y_s = y_1 y_2 / (y_1 + y_2)$ است در حالی که برای عناصر موازی $y_p = y_1 + y_2$ است.

اکنون با استفاده از اصطلاح ادمیتانس تعریف منبع جریان را تکرار می کنیم. در معادله (۶۷-۱۳) می بینیم که \hat{I} مساوی جریان مدار اتصال کوتاه بین A و B است، و y ادمیتانس A و B است وقتی که تمام منابع جریان با ادمیتانسهای بینهایت عوض شوند.

مثال ۵-۱۳ روش نودال

قانون نودال کیرشهوف را برای مدارهای شکل های ۱۳-۱۳ (الف) و ۱۳-۱۳ (ب) به کار می بریم. با در نظر گرفتن نقطه گرهی ۱ در



شکل ۱۳-۱۳ (الف) و (ب) مدارهایی برای نشان دادن روش تحلیل نودال. (ج) مدار معادل تونن (ب).

شکل ۱۳-۱۳ (الف)، رابطه جریان \hat{I} در مدار برابر است با

$$\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_r$$

با در نظر گرفتن ولتاژهای نقاط گرهی ۱ و ۲، به ترتیب \hat{V}_1 و \hat{V}_2 و به کار بردن $\hat{I} = y\hat{V}$ ، رابطه بین جریانها می شود

$$\hat{I} = y_1(\hat{V}_1 - \hat{V}_2) + y_2(\hat{V}_1 - \hat{V}_2)$$

که ادمیتانس مربوط به R برابر $y_1 = 1/R$ می شود و مربوط به C ، $y_2 = i\omega C$ است. چون $\hat{V}_2 = 0$ با انتخاب $\hat{V}_1 = \mathcal{E}_0$ می آوریم $\hat{I} = \mathcal{E}_0 (1/R + i\omega C)$ (۴۸-۱۳) و (۴۹-۱۳) برای محاسبه جریان حقیقی نتیجه می گیریم

$$I = Y \mathcal{E}_0 \cos(\omega t - \phi)$$

توان لحظه‌ای برقرار شده از منبع به بار از رابطه زیر به دست می‌آید

$$P(t) = \mathcal{E}(t)I(t) \quad (۷۱-۱۳)$$

این، میزان کاری است که به وسیله \mathcal{E} انجام شده است. به بیان دیگر میزان انرژی جذب شده توسط بار از رابطه زیر به دست می‌آید

$$P(t) = V(t)I(t) \quad (۷۲-۱۳)$$

به طور کلی این مقدار ممکن است مثبت یا منفی باشد. یعنی جهت جریان انرژی می‌تواند به طرف بار یا به طرف خارج از بار باشد. بخصوص، برای برانگیخته کردن مدار به شکل سینوسی ac ، می‌توان نوشت $V(t) = V_0 \cos \omega t$ و $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi)$. اگر بار را کاملاً به وسیله مقاومت R و راکتانس X (یعنی امپدانس $Z = R + iX$) مشخص کنیم آن‌گاه ϕ به سادگی با رابطه $\phi = \tan^{-1}(X/R)$ و I_0 مساوی V_0/Z که $Z = |z|$ است، داده می‌شود. در هر صورت

$$P(t) = V_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \phi) \quad (۷۳-۱۳)$$

واضح است که اگر $\phi = 0$ (یعنی I و V هم‌فاز باشند، آن‌گاه $P \geq 0$. از طرف دیگر اگر I و V در فاز مقابل باشند ($\phi = \pi$) داریم $P \leq 0$.

اغلب میانگین زمانی کمیتها از اندازه لحظه‌ای آنها اهمیت عملی بیشتری دارند. در زمان یک تناوب، T ، (که T از $t = 0$ تا $t = T$ تعریف می‌شود)، میانگین زمانی یک تابع برای منبع متناوب سینوسی به شکل زیر است

$$\langle f(t) \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (۷۴-۱۳)$$

برای توابع سینوسی اگر T زمان تناوب را نشان دهد، $T = 2\pi/\omega$ میانگین روی یک فاصله زمانی T مستقل از نقطه شروع این فاصله زمانی است. علاوه بر این، میانگین فاصله زمانی بزرگ در مقایسه با T ، تقریب بسیار خوبی با معادله (۷۴-۱۳) داده می‌شود. بنابراین میانگین زمانی توان برای عامل برانگیختگی سینوسی، ac ، می‌شود

$$\langle P \rangle = \langle V(t)I(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T V(t)I(t) dt \quad (۷۵-۱۳)$$

با قراردادن $V(t) = V_0 \cos \omega t$ و $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi)$ به دست می‌آوریم

$$\langle P \rangle = \frac{V_0 I_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \omega t \cos(\omega t - \phi) d(\omega t)$$

که

$$Y = \left(\frac{1}{R_r} + \omega^2 C^2 \right)^{1/2} \quad \text{و} \quad \tan \phi = -\omega CR$$

در شکل ۱۳-۱۳ (ب) مداری با بیش از یک نقطه گرهی نشان داده شده است. برای تحلیل این مدار روش نودال را، با تعویض منبع ولتاژ با منبع جریان، به کار می‌بریم. ادمیتانسهای مربوط به عناصر مختلف مدار را حساب می‌کنیم. ولتاژ مربوط به نقاط گرهی مختلف را، آن‌طور که در شکل ۱۳-۱۳ (ج) نشان داده‌ایم، علامت‌گذاری می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\hat{I} = y_1(\hat{V}_1 - \hat{V}_2) + y_2(\hat{V}_1 - \hat{V}_2)$$

$$0 = y_2(\hat{V}_2 - \hat{V}_1) + (y_3 + y_2)(\hat{V}_2 - \hat{V}_1)$$

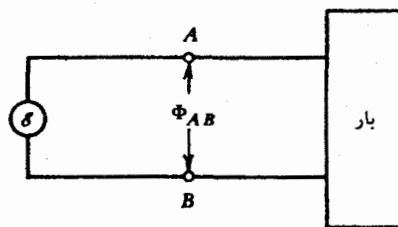
با انتخاب $\hat{V}_2 = 0$ (ولتاژ مرجع) به دست می‌آوریم

$$\hat{I} = y_1 \hat{V}_1 + y_2(\hat{V}_1 - \hat{V}_2)$$

$$0 = y_2(\hat{V}_2 - \hat{V}_1) + (y_3 + y_2)\hat{V}_2$$

این روابط جبری اند و بنابراین می‌توان آنها را به سادگی برای ولتاژهای مختلف حل کرد. ■

۱۳-۶. توان در مدارهای AC — جور کردن امپدانس در بررسی مدارهای عملی، دانستن کار الکتریکی که به وسیله emf انجام می‌شود یا انرژی که به وسیله عناصر یک مدار جذب (کار انجام شده روی) می‌شود بسیار مهم است. حالت کلی را با فرض وجود emf، اعمال شده بین پایانه‌های یک مدار، که آن را بار (مطابق شکل ۱۳-۱۴) می‌نامیم، نسبتاً بهتر می‌توان بیان کرد. فرض می‌کنیم که \mathcal{E} معلوم و جریان I در بار جاری است. ممکن است به سادگی \mathcal{E} را با افت پتانسیل در پایانه‌های متصل به بار مساوی گرفت، یعنی $\Phi_{AB} \equiv V(t)$.



شکل ۱۳-۱۴ نمودار طرحوار یک منبع نیروی محرکه AC که امپدانس داخلی و یک بار متصل به آن را نشان می‌دهد.

با بسط $\cos(\omega t - \phi)$ و توجه به اینکه

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\omega t) d(\omega t) = \pi \quad \text{و} \quad \int_0^{2\pi} \cos(\omega t) \sin(\omega t) d(\omega t) = 0$$

به دست می آوریم

$$\langle P \rangle = \frac{V_0 I_0}{2} \cos \phi \quad (76-13)$$

کمیت $\cos \phi$ را ضریب توان امپدانس یا بار می نامیم. به این ترتیب می بینیم که بسته به اندازه زاویه فاز بین $V(t)$ و $I(t)$ ، توان جذب شده به وسیله بار ممکن است مثبت یا منفی باشد. از معادله (76-13) به دست می آوریم که اگر مقاومت بار صفر باشد، یعنی اگر بار صرفاً القایی یا ظرفیتی (یا به طور کلی واکنشی) باشد، آنگاه ضریب توان صفر است. امپدانس مؤثر چنین باری با رابطه $z = iX$ و $\tan \phi \equiv \text{Im}(z)/\text{Re}(z) \rightarrow \pm\infty$ و $\phi \rightarrow \pm\pi/2$ است. باری که فقط شامل القاگر و خازن باشد و مقاومت نداشته باشد کاملاً واکنشی است. اگر بار مقاومت غیر صفر داشته باشد، که معمولاً چنین است (برای غیر ابررسانا) آنگاه $\cos \phi > 0$ و توان در این مقاومت تلف می شود.

باید توجه کنیم که در معادله های (71-13) تا (76-13)، برای محاسبه توان یا توان میانگین مقادیر حقیقی را به کار برده ایم. برای مثال، اگر V و I مختلط باشند و بنویسیم $P(t) = V(t)I(t)$ ، نمی توان با انتخاب بخش حقیقی $P(t)$ ، توان حقیقی را به دست آورد. زیرا اگر z_1 و z_2 مختلط باشند $\text{Re}(z_1 z_2) \neq \text{Re}(z_1) \text{Re}(z_2)$ است. اما می توان رابطه ای پیدا کرد که عموماً معتبر است، و محاسبه توان متناوب میانگین را به کمک دامنه های مختلط I و V به دست می دهد. حاصلضرب VI^* را که I^* همیوگ مختلط I است در نظر می گیریم

$$VI^* = (Iz)I^* = |I|^2 z = |I|^2 [R + iX]$$

چون $|I| \equiv I_0$ ، آنگاه $\text{Re}[VI^*/2] = \langle P \rangle = 1/2 I_0^2 R$. بنابراین داریم

$$\langle P \rangle = I_{\text{rms}}^2 R \quad \text{یا} \quad \langle P \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(VI^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(V^* I) \quad (77-13)$$

با $I_{\text{rms}} = I_0/\sqrt{2}$ و rms علامت اختصاری "ریشه میانگین مربعی" است. مفید است که بدانیم در حل جریانها در مسائل مدار ac، دامنه های مختلط \hat{V} ، \hat{I} و \hat{z} را طوری تعریف کردیم

که مقدار مطلق آنها مقادیر ریشه میانگین مربعی، rms، را نشان می دهد. این مقادیر را فازورهای rms می نامیم. لازم است توجه کنیم که رابطه $\hat{V} = z\hat{I}$ بر $|\hat{V}| = Z|\hat{I}|$ دلالت دارد. همچنین چون $V_{\text{rms}} = ZI_{\text{rms}}$ رابطه $|\hat{V}| = V_0 = Z|\hat{I}| = ZI_0$ می شود. چون هر یک از این روابط بر دیگری دلالت دارد امکان به کار بردن هر یک از آنها در حل مسئله وجود دارد. البته تمام دامنه های مختلط در یک مسئله باید تعبیر مشابهی داشته باشد.

همان طور که گفتیم هر منبع متناوب emf همواره امپدانس مربوط به خود دارد که می توان آن را به صورت طرحوار مانند شکل 13-14 نمایش داد. یکی از نکات مورد توجه بررسی شرایطی است که بیشترین توان به بار، با امپدانس $z_L = R_L + X_L$ (که امپدانس یک موتور، یک بلندگو، یک توسترو ... غیره ممکن است باشد)، منتقل شود. توان از طریق پایانه های A و B به بار وارد می شود و z امپدانس مولد و خطوط الکتریکی است که به پایانه وصل می شود. توان متوسط منتقل شده به بار z_L با رابطه زیر داده می شود

$$\langle P_L \rangle = R_L I_{\text{rms}}^2 = R_L \frac{\mathcal{E}_{\text{rms}}^2}{|z + z_L|^2}$$

با قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی z و z_L به دست می آوریم

$$\langle P_L \rangle = \frac{R_L \mathcal{E}_{\text{rms}}^2}{(R + R_L)^2 + (X + X_L)^2} \quad (78-13)$$

همه جمله ها در مخرج مثبت است. واضح است که اگر $-X_L = X$ باشد توان متوسط نسبت به تغییرات راکتانس مدار بیشینه خواهد بود. به این ترتیب اگر X_L القایی باشد باید X را خازنی گرفت. اگر $X + X_L = 0$ شود آنگاه

$$\langle P_L \rangle = \frac{R_L \mathcal{E}_{\text{rms}}^2}{(R + R_L)^2} \quad (79-13)$$

اگر در حالی که R_L ثابت است تنها R را تغییر دهیم، آنگاه $\langle P_L \rangle$ با قرار دادن $R = 0$ بیشینه می شود، زیرا مخرج کمینه می شود. با این حال اگر R ثابت باشد و R_L را تغییر دهیم، به شرطی $\langle P_L \rangle$ بیشینه می شود که $R = R_L$ شود. اگر R_L خیلی بزرگ باشد، جریان کافی برقرار نمی شود. اگر R_L خیلی کوچک باشد، توان در R تلف می شود. وقتی که $R = R_L$ ، توان تلف شده در امپدانسهای بار و منبع مساوی است. تحت شرایط بهینه می گوئیم که بار با منبع جور شده است. شرط جور شدن امپدانس این است که

$$X = -X_L \quad \text{و} \quad R = R_L \quad \text{یا} \quad z = z_L^* \quad (80-13)$$

۷-۱۳ تشدید در مدارهای AC

[معادله‌های (۳۲-۱۳) و (۸۳-۱۳) را ببینید] به دست می‌آوریم

$$\hat{V}_C = -iQ_0 \hat{V} \quad \text{و} \quad \hat{V}_L = iQ_0 \hat{V} \quad (۸۴-۱۳)$$

در حالت تشدید ولتاژ مختلط در دو سر L و C با یکدیگر ۱۸۰° درجه اختلاف فاز دارند، بنابراین باعث حذف یکدیگر می‌شوند. اما دامنه‌های حقیقی هر یک، Q_0 برابر دامنه ولتاژ به کاررفته است.

انرژی ذخیره شده در مدار. انرژی لحظه‌ای ذخیره شده در القاگر با رابطه (۵-۱۲) و در خازن با رابطه (۴۴-۶) مشخص می‌شود. بنابراین کل انرژی ذخیره شده برابر است با

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} + \frac{1}{2} LI^2(t) \quad (۸۵-۱۳)$$

جریان در مدار نیز به سادگی با محاسبه قسمت حقیقی حاصلضرب معادله (۸۱-۱۳) در $e^{i\omega t}$ به دست می‌آید: $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi)$. در این رابطه فاز \hat{V} را در لحظه $t = 0$ صفر فرض کرده ایم ($|\hat{V}| = V_0$). به همین ترتیب بار هم به شکل $q(t) = q_0 \sin(\omega t - \phi)$ حساب می‌شود که در این روابط $I_0 = V_0 / Z$ و $q_0 = I_0 / \omega = V_0 / Z\omega$ است. بنابراین

$$U(t) = \frac{1}{2C} q_0^2 \sin^2(\omega t - \phi) + \frac{1}{2} LI_0^2 \cos^2(\omega t - \phi) \quad (۸۶-۱۳)$$

در حالت تشدید داریم $Z = R$ ، $I = V_0 / R$ ، $q_0 = I_0 / \omega$. بنابراین دامنه‌های سینوس و کسینوس مساوی‌اند:

$$q_0^2 / 2C = I_0^2 / (2C\omega^2) = (1/2) LI_0^2$$

به این ترتیب انرژی کل ذخیره شده در حالت تشدید به دست می‌آید

$$U(t) = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} = \frac{1}{2} LI_0^2 = \frac{1}{2} \frac{LV_0^2}{R^2} \quad (۸۷-۱۳)$$

که مقداری ثابت است و به شکل ذخیره بین میدان مغناطیسی (در القاگر) و میدان الکتریکی (در خازن) نوسان می‌کند.

به دلیل وجود مقاومت در مدار، انرژی به میزان $\langle P \rangle = RI_{\text{rms}}^2$ تلف می‌شود. بنابراین انرژی از دست رفته در هر نوسان برابر است با

$$\Delta U = RI_{\text{rms}}^2 T \quad (۸۸-۱۳)$$

در حالت تشدید، نسبت بیشینه انرژی لحظه‌ای ذخیره شده به انرژی از دست رفته در هر نوسان از تقسیم U بر ΔU [معادله (۳۳-۱۳)] را

۱-۷-۱۳ تشدید در حالت سری

ترکیب سری یا موازی القاگر، خازن و مقاومتها اغلب در مدارهای ac وجود دارند، و دانستن رفتار آنها برای بررسی خواص مدارهای ac ضروری است. ابتدا در مورد ترکیب سری این عناصر و پدیده تشدید بحث می‌کنیم. همانند شکل ۱۳-۶ فرض می‌کنیم دامنه ولتاژ اعمال شده بر ترکیب سری \hat{V} است. اگر بسامد برانگیختگی ω باشد، دامنه جریان از معادله (۵۵-۱۳) به دست می‌آید. یعنی

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{R + iX} = \frac{\hat{V}}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (۸۱-۱۳)$$

این معادله را می‌توان به شکل مختلط قطبی نیز نوشت

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{|Z|} e^{-i\phi}$$

که

$$\tan \phi = \frac{LC\omega^2 - 1}{\omega CR} \quad \text{و} \quad Z = \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (۸۲-۱۳)$$

بحث در مورد هر مدار، بررسی تغییرات جریانهای (یا ولتاژها) قسمتهای مختلف مدار است موقعی که پارامترهای مدار تغییر کند. در این حالت، این پارامترها عناصر R ، L و C و بسامد ω برانگیختگی هستند. توجه کنید که وقتی راکتانس X صفر است، آنگاه

$$\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (۸۳-۱۳)$$

مدار در این بسامد را در حالت تشدید می‌گوییم و بسامد $\omega = \omega_0$ را بسامد تشدید می‌نامیم.

اکنون در مورد چند مدار تشدید بحث می‌کنیم:

فاز جریان. در حالت تشدید Z مساوی R و $\tan \phi = 0$ می‌شود. بنابراین I_{rms} نسبت به تغییرات X به مقدار بیشینه خود می‌رسد، و جریان و پتانسیل به طور لحظه‌ای همفاز می‌شوند.

ولتاژ در دو سر القاگر و خازن. با استفاده از جدول ۱۳-۲ می‌نویسیم $\hat{V}_C = \hat{I} / i\omega C$ و $\hat{V}_L = i\omega L \hat{I}$ و استفاده از رابطه ضریب کیفیت در حالت تشدید

$$Q_0 = \omega_0 L / R = (\omega_0 RC)^{-1}$$

بینید] به دست می آید

$$\frac{U}{\Delta U} = \frac{LI_{rms}^2}{RI_{rms}^2 T} = \frac{\omega_0 L}{R} \times \frac{1}{2\pi} = \frac{Q_0}{2\pi} \quad (\text{حالت تشدید}) \quad (۸۹-۱۳)$$

که Q_0 ضریب کیفیت در حالت تشدید است. به این ترتیب، همان طور که قبلاً گفتیم، یک مدار با Q_0 بزرگ مقدار کمی انرژی در هر نوسان در مقایسه با انرژی ذخیره شده از دست می دهد.

وابستگی بسامدی مدار. وابستگی بسامدی مدار با مطالعه وابستگی جریان به بسامد بررسی می شود. ابتدا جریان را برحسب Q_0 و $x = \omega/\omega_0$ می نویسیم یعنی

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z} = \hat{I}_m \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \quad (۹۰-۱۳)$$

که $\hat{V}/R = \hat{I}_m$ شکل تابع در اصل به پارامتر Q_0 وابسته است. اگر $Q_0 \ll 1$ باشد \hat{I} با x به کندی تغییر می کند. در حالی که اگر $Q_0 \gg 1$ باشد \hat{I} تنها زمانی که $x \approx 1$ ، یعنی نزدیک حالت تشدید، قابل توجه است.

اتلاف متوسط توان در مدار RI_{rms}^2 است. با به کار بردن $I_{rms} = (1/Z)V_{rms}$ به دست می آوریم

$$\langle P \rangle = \frac{RV_{rms}^2}{Z^2} = \frac{V_{rms}^2/R}{1 + \left[Q_0 \left(x - \frac{1}{x}\right)\right]^2} \quad (۹۱-۱۳)$$

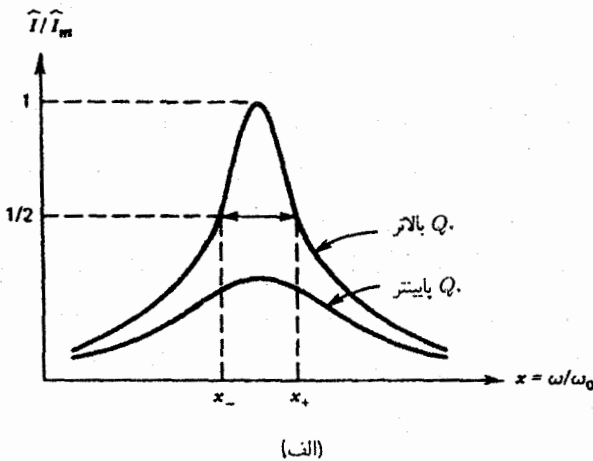
شکل ۱۵-۱۳ نسبت \hat{I}/\hat{I}_m را به شکل تابعی از x نشان می دهد. اندازه $\langle P \rangle$ ، به عنوان تابعی از بسامد، وقتی که $x = 1$ باشد بیشینه است. و در مقدار $(x - 1/x) = \pm 1/Q_0$ به نصف مقدار بیشینه کاهش می یابد. این مقدار متناظر با دو بسامد ω_+ و ω_- است که با مقادیر x_+ و x_- تطبیق می کند

$$x_{\pm} = \pm \frac{1}{2Q_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2}$$

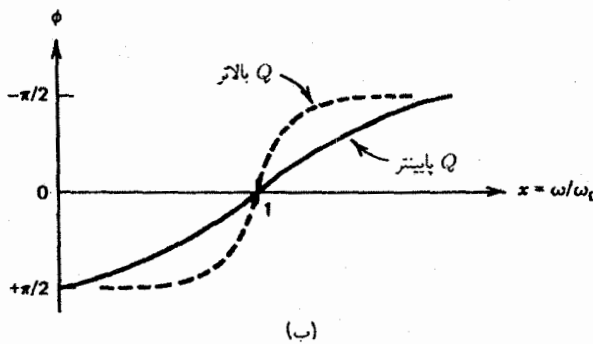
عرض نوار منحنی تشدید به صورت زیر تعریف می شود

$$\frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_0} = \frac{x_+ - x_-}{1} = \frac{1}{Q_0} \quad (۹۲-۱۳)$$

به این ترتیب می بینیم که Q_0 مساوی وارون عرض نوار نسبی است. یک مدار با Q_0 بزرگ، گزینشی است، یعنی حالت تشدید تیز، دارد.



(الف)



(ب)

شکل ۱۵-۱۳ رفتار بسامدی یک مدار سری RLC در حالت تشدید نزدیک بسامد تشدید. (الف) جریان که عرض نوار تشدید را نشان می دهد. (ب) زاویه فاز.

ضریب کیفیت دور از حالت تشدید - مدارهای القایی و ظرفیتی. انرژی مدار در هر لحظه از معادله (۸۶-۱۳) به دست می آید

$$U = \frac{1}{2} LI_0^2 \left[\frac{1}{x^2} \sin^2(\omega t - \phi) + \cos^2(\omega t - \phi) \right] \quad (۹۳-۱۳)$$

اندازه U ، بجز در حالت تشدید که $x = 1$ (همان طور که در بالا نشان دادیم)، افت و خیز دارد. و مقدار بیشینه انرژی، U_{max} ، با اندازه بیشینه انرژی الکتریکی یا مغناطیسی، برحسب اینکه $x < 1$ یا $x > 1$ باشد، داده می شود. اگر $x < 1$ ، یعنی بسامد کمتر از بسامد طبیعی باشد، جمله اول طرف راست معادله (۹۳-۱۳) بیشینه ای بزرگتر از جمله دوم دارد و مدار را در این وضعیت ظرفیتی می گوئیم. در این حالت $\Delta U = RI_{rms}^2 T$ چون $U_{max} = LI_{rms}^2/x^2 = q_0^2/2C$ است، آن گاه

$$\frac{U_{max}}{\Delta U} = \frac{\omega L}{2\pi R x^2}$$

وقتی یک مدار با Q بزرگ تشدید می‌شود که بسامد عامل برانگیختگی مدار با بسامد نوسانهای طبیعی مدار تقریباً برابر شود. آن‌گاه یک حالت "تقویت" در مدار به‌وجود می‌آید که نوسانهای بزرگی در آن ایجاد می‌شود. در چنین وضعیتی مدار انرژی‌ای هم‌فاز با بسامد نوسانهای آزاد مدار به‌دست می‌آورد. این شاید مشخصترین جنبه تشدید باشد. در حد $R \rightarrow 0$ اگر emf به کاررفته به‌طور پیوسته انرژی مدار را تأمین کند دامنه نوسانها به‌طور نامحدود بزرگ می‌شود. در یک مدار ابررسانای LC، نوسانها برای مدت بسیار طولانی، بدون اینکه مدار تغذیه شود، ادامه خواهند داشت.

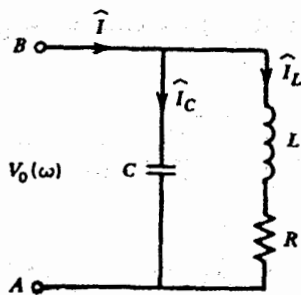
۱۳-۷-۲ تشدید موازی

به جای اتصال عناصر R و L و C به شکل سری، اغلب با ترکیبی مشابه شکل ۱۳-۱۷ رویه‌رو می‌شویم، که در آن ولتاژ $V_0 \cos \omega t$ به یک القاگر و خازن، که با یکدیگر موازی هستند، اعمال می‌شود. مقاومت R همان‌طور که نشان دادیم معمولاً به القاگر مربوط می‌شود. برای سادگی مقاومت مربوط به شاخه ظرفیت را حذف کردیم، زیرا اغلب در عمل از آن می‌توان چشم پوشید.

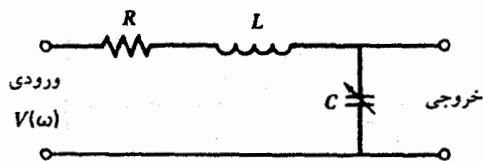
بعضی از جنبه‌های رفتار این مدار را می‌توان به‌طور کیفی فهمید. اگر R کوچک باشد، در عمل یک خازن و یک القاگر موازی داریم. جریان \hat{I}_L در القاگر 90° درجه عقبتر است در حالی که جریان \hat{I}_C در خازن 90° درجه نسبت به ولتاژ به کاررفته جلوتر است. اگر ادمیتانسهای $1/\omega L$ و $C\omega$ برای دو شاخه با هم اختلاف داشته باشند بیشتر جریان کل، $\hat{I} = \hat{I}_C + \hat{I}_L$ ، از ادمیتانس بزرگتر عبور می‌کند. چون از جدول ۱۳-۲ داریم، $I_C = iC\omega\hat{V}$ و $I_L = \hat{V}/i\omega L$ ، بنابراین

$$\hat{I} = i\hat{V} \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \quad (۹۶-۱۳)$$

اگر ادمیتانسها مساوی باشند، $\omega C = 1/\omega L$ ، آن‌گاه $\hat{I}_C \approx -\hat{I}_L$ و $\hat{I} = 0$ و در این حالت مدار را در حال تشدید موازی می‌نامیم.



شکل ۱۳-۱۷ یک مدار تشدیدی موازی.



شکل ۱۳-۱۶ یک مدار صافی.

با برابر قرار دادن $U_{\max}/\Delta U$ با $q/2\pi$ ، که Q ضریب کیفیت است، عبارتی برای Q به‌دست می‌آید

$$Q = \frac{1}{\omega RC} \quad (\text{ظرفیتی}) \quad (۹۴-۱۳)$$

اگر $x > 1$ (یعنی $\omega > \omega_0$) مدار را القاایی می‌نامیم و $U_{\max} = LI_{\text{rms}}^2$ به این ترتیب

$$\frac{U_{\max}}{\Delta U} = \frac{\omega L}{R} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

از برابر قرار دادن $Q/2\pi$ با $U_{\max}/\Delta U$ به‌دست می‌آوریم

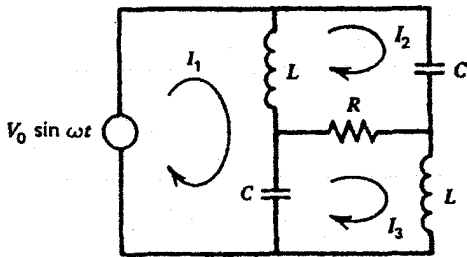
$$Q = \frac{\omega L}{R} \quad (\text{القای}) \quad (۹۵-۱۳)$$

بنابراین Q هر مدار را با $2\pi(U_{\max}/\Delta U)$ تعریف می‌کنیم. برای یک القاگر به شکل $\omega L/R$ تعریف می‌شود، که R مقاومت آن است، و Q برای یک خازن با $1/R\omega C$ تعریف می‌شود. یک القاگر را مدار القاایی و یک خازن را مدار خازنی می‌پنداریم (با وجود این باید توجه کنیم که در بسامدهای بسیار بالا القاگرها ممکن است به شکل خازنی و خازنها به‌صورت القاایی عمل کنند).

مدارهای تشدید به دلیل خاصیت بسامد‌گزینی آنها به‌عنوان نوعی صافی (شکل ۱۳-۱۶ را ببینید) مفیدند. در این نوع کاربرد اغلب با تنظیم خازن C مدار را تنظیم می‌کنیم. حالت تشدید در $C = 1/L\omega^2$ به‌وجود می‌آید که ω بسامد مورد نظر است. در شکل ۱۳-۱۶، اگر Q در بسامد ω بزرگ باشد، فقط سیگنالهایی که در برد $\Delta\omega \approx \omega/Q$ (در اطراف ω) قرار می‌گیرند [معادله (۹۲-۱۳)] را ببینید] با قدرت به (امپدانس-بالا) تقویت‌کننده می‌رسند.

جالب است که توجه کنیم برای مدارهای با " Q بزرگ" بسامد تشدید تقریباً همان بسامد نوسانهای طبیعی مدار [معادله (۱۳-۲۴) را ببینید] است. در حالت اخیر

$$\omega = \left(\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2} \right)^{1/2} = \omega_0 \left[1 - \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2 \right]^{1/2} \approx \omega_0$$



شکل ۱۳-۱۸ مدار تشدید چند حلقه.

می‌شوند و تشدید و پادتشدید را به ترتیب تعریف می‌کنند، با تقریب ۵۰ درصد حدود ۱ می‌شوند. بنابراین با این تقریب دو حالت برهم منطبق‌اند.

مثلاً ویژگی صافی کردن مدارهای سری و موازی، یعنی اگر $Q_0 \gg 1$ باشد بسامدهایی که به اندازه قابل توجهی، با بسامد تشدید متفاوت‌اند از مدار سری عبور نمی‌کنند، یا این بسامدها در مدار موازی "محصور" می‌شوند. بازه بسامدهای عبوری یا محصورشده در محدوده تقریبی Q_0/ω_0 است. اگر $Q_0 \gg 1$ باشد "نوار گذر" یا "نوار توقف" نسبتاً باریک ($1 \ll \Delta\omega/\omega_0$) است. مثالهای ۱۳-۶ و ۱۳-۷ را برای بعضی کاربردهای مدارهای تشدید ببینید.

سرانجام باید تأکید کنیم که در بحث مدارهای تشدید، فرض کردیم که دامنه ولتاژ، V_0 ، ثابت است. در نتیجه جریان به کمک ادمیتانس مدارها تعیین شده است. در عمل این ولتاژ ثابت تغذیه را نداریم، در این صورت جواب مدار ممکن است کاملاً متفاوت باشد.

اگر به جای ثابت بودن دامنه ولتاژ، دامنه جریان ثابت می‌بود، مدار سری ایداً منحنی تشدید برای دامنه ولتاژ القاگر یا خازن نشان نمی‌داد (مسئله ۱۳-۲۲ را ببینید). برعکس، در مدار موازی، در حالت تشدید ولتاژ بسیار بزرگی ایجاد می‌کرد و منحنی تشدید مانند منحنی جریان در مدار سری می‌بود. (مسئله ۱۳-۲۲ را ببینید). در هر حالت عبارتهای ادمیتانس و ادمیتانس صحیح‌اند و مشکلی در به‌کار بردن آنها در مسئله خاص نداریم. یادآوری می‌کنیم که تشدید موازی بر ادمیتانس بزرگ و تشدید سری بر ادمیتانس کوچک (بین دو سر ورودی) دلالت دارند.

مثال ۱۳-۶ مدارهای تشدید

مدار نشان داده شده در شکل ۱۳-۱۸ را در نظر می‌گیریم. القاگرها و خازنها را ایده‌آل و بدون اتلاف فرض می‌کنیم. منبع ولتاژ $\mathcal{E} = V_0 \sin \omega t$ است که $\omega = 1/\sqrt{LC}$ است. برای تحلیل پاسخ این مدار قوانین فازورهای کیرشهوف را برای سه حلقه، که در آنها

در این حالت ادمیتانس موجود در پایانه‌های AB بینهایت است. این موضوع برخلاف مدارهای RLC سری است، که ادمیتانس آنها در این شرایط به صفر می‌رسد.

برای محاسبه جریان در مدار، وقتی که از R نمی‌توان چشم پوشید، ابتدا ادمیتانس کل مدار، y ، را حساب می‌کنیم. ادمیتانسهای مقاومت و القاگر به ترتیب $1/R$ و $1/i\omega L$ است. ادمیتانس کل قسمتی از مدار، که به صورت سری وصل‌اند برابر است با $y_L = 1/(R + i\omega L)$. ادمیتانس خازن برابر است با $y_C = i\omega C$. با افزودن این ادمیتانسها به صورت موازی ادمیتانس کل مختلط به دست می‌آید

$$y = \frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right) \quad (97-13)$$

و جریان در مدار می‌شود

$$\hat{I} = \hat{V}y = \hat{V}Y e^{-i\phi} \quad Y = |y|$$

اکنون با بررسی تفصیلی y در مورد برخی از خواص مدار بحث می‌کنیم. تعریف تشدید در مدارهای RLC ، که اکنون بحث شد، مانند تعریف تشدید برای مدارهای سری واضح نیست. سه حالت را بررسی می‌کنیم:

تشدید فاز. هرگاه y حقیقی شود، و بنابراین $\phi = 0$ ، در نتیجه جریان و ولتاژ هم‌فاز می‌شوند، در این صورت تشدید را تشدید فاز می‌نامیم. این نوع تشدید موقعی از معادله (۹۷-۱۳) به دست می‌آید که $x = 0$ (حالت بدیهی) و وقتی

$$x^2 = 1 - \frac{1}{Q_0^2} \equiv x_0^2 \quad (98-13)$$

که $x = \omega/\omega_0$ است. و آن را تشدید فاز می‌نامیم.

پادتشدید. حالتی را که پادتشدید می‌نامیم وقتی به دست می‌آید که $|y|$ کمینه شود و به این ترتیب \hat{I} هم کمینه است (اگر V_0 ثابت باشد). در این حالت وقتی که تنها نسبت به x (یا بسامد) کمینه‌سازی کنیم. به دست می‌آوریم

$$x^2 = \sqrt{1 + \frac{2}{Q_0^2} - \frac{1}{Q_0^2}} \equiv x_0^2 \quad (99-13)$$

تشدید و پادتشدید هم‌زمان در $Q_0 > 1$ اگر Q_0 باشد در این صورت x_0 و x_0' با معادله‌های (۹۸-۱۳) و (۹۹-۱۳) داده

$$\circ = (I_m - I_{m-1})z_r + I_m z_1 + (I_m - I_{m+1})z_r \quad (100-13)$$

$$\circ = (I_n - I_{n-1})z_r + I_n \left(\frac{z_1}{\gamma} + z_n \right)$$

با جایگذاری می‌توان نشان داد که جریانها در حلقه‌های مختلف از رابطه زیر به دست می‌آیند

$$I_m = Ae^{m\gamma + i\omega t} + Be^{-m\gamma + i\omega t} \quad m = 1, 2, \dots \quad (101-13)$$

که

$$\cosh(\pm\gamma) = 1 + \frac{z_1}{2z_r} = 1 - \frac{z_1}{2z_r} \quad (102-13)$$

که Z بزرگ نمایش دهنده اندازه امپدانس مختلط است. در حالت کلی γ ، حتی در صورتی که $\cosh \gamma$ حقیقی باشد، می‌تواند مختلط باشد. یعنی در حالت کلی $\gamma = \alpha + i\beta$ ، α و β حقیقی‌اند. با استفاده از بسط

$$\cosh \gamma = \cosh(\alpha + i\beta) = \cosh \alpha \cos \beta + i \sinh \alpha \sin \beta = \text{مقدار حقیقی}$$

می‌توان نشان داد که معادله (102-13)، اگر γ موهومی محض باشد، می‌تواند برآورده شود. یعنی $\alpha = 0$

$$\gamma = i\beta \quad \alpha = 0 \quad (103-13)$$

یا γ مختلط باشد اما قسمت موهومی آن مضرب صحیحی از π باشد

$$\gamma = \alpha + in\pi \quad (n \text{ یک عدد صحیح}) \quad (104-13)$$

با قراردادن این مقادیر γ در عبارت (101-13) می‌بینیم که جریانهای به دست آمده با یکدیگر اختلاف فاحش دارند. در حالی که برای $\gamma = i\beta$ جواب نوسانی بدون میرایی است، برای $\gamma = \alpha + in\pi$ ، جواب میراست. بسته به اینکه نسبت Z_1/Z_2 چه مقدار باشد یکی از حالتها را می‌توان به کار برد. اگر $Z_1/Z_2 \leq 2$ باشد، جواب نوسانی قابل قبول است. از طرف دیگر اگر $Z_1/Z_2 \geq 2$ باشد از جواب میرا استفاده می‌کنیم. چون Z_1/Z_2 به بسامد منبع وابسته است، برای یک مدار معین در یک حوزه بسامد جواب نوسانی و در حوزه‌ای دیگر

جریانها مشخص شده‌اند به کار می‌بریم یعنی

$$\hat{V}_0 = i\omega L(\hat{I}_1 - \hat{I}_r) - \frac{i}{\omega C}(\hat{I}_1 - \hat{I}_r)$$

$$\circ = i\omega L(\hat{I}_r - \hat{I}_1) - \frac{i}{\omega C}\hat{I}_r + R(\hat{I}_r - \hat{I}_r)$$

$$\circ = -\frac{i}{\omega C}(\hat{I}_r - \hat{I}_1) + R(\hat{I}_r - \hat{I}_r) + i\omega L\hat{I}_r$$

از تقسیم دو معادله اول بر $i\omega L$ و بهره‌گیری از $\omega^2 LC = 1$ به دست می‌آید

$$\hat{I}_r - \hat{I}_r = -\frac{i\hat{V}_0}{\omega L} \quad \text{و} \quad \hat{I}_1 = -\frac{iR}{\omega L}(\hat{I}_r - \hat{I}_r) = -\frac{R\hat{V}_0}{\omega^2 L^2}$$

جریان مختلط در مقاومت از ضرب $e^{i\omega t}$ در $\hat{I}_r - \hat{I}_r$ به دست می‌آید. چون وابستگی ولتاژ تغذیه به زمان به شکل $\sin \omega t$ است، قسمت موهومی این جریان مختلط، جریان واقعی در مقاومت را به دست می‌دهد یعنی

$$I_r - I_r = \frac{V_0}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t$$

ملاحظه می‌شود که جریان در مقاومت مستقل از خود مقاومت است و نسبت به مولد اختلاف فاز 90° دارد.

محاسبه توان تأمین شده از منبع برای مدار جالب است. یک روش محاسبه استفاده از دامنه‌های مختلط جریان عبوری از آن و نیز ولتاژ دو سر آن به صورت زیر است

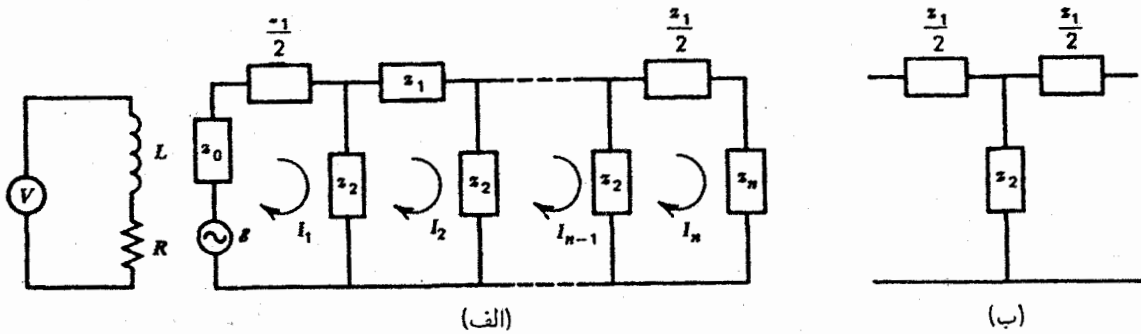
$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \hat{I}_1^* \hat{V} = \frac{1}{2} \frac{V_0^* R}{\omega^2 L^2}$$

مثال ۱۳-۷ صافیها - مدارهای تشدید

مطالعه اصولی صافیها در حالت کلی آنقدر پیچیده است که در یک مثال نمی‌گنجد، اما مجموعه خاصی از آنها وجود دارد که می‌توان آن را در این مثال بررسی کرد. در این مجموعه عناصر صرفاً واکنشی (خازنها و القاگرهای ایده‌آل) هستند. شکل ۱۳-۱۹ (الف) که شامل n تا عنصرهای سری یا موازی به شکل صافی T است در نظر می‌گیریم. در شکل ۱۳-۱۹ (ب) فقط یک مرحله از مجموعه را که صافی از آن ساخته می‌شود می‌بینیم. امپدانسهای مختلط z_1 و z_2 به ترتیب مربوط به یک خازن و یک القاگر، یا یک القاگر و یک خازن است. برای مجموعه معادله‌های حلقه‌ای کیرشهوف به دست می‌آوریم

$$\mathcal{E} = I_1 z_0 + \frac{I_1 z_1}{\gamma} - (I_2 - I_1) z_r$$

$$\circ = (I_2 - I_1) z_r + I_2 z_1 + (I_2 - I_3) z_r$$



شکل ۱۳-۱۹ نمودار طرحوار یک صافی چندمرحله‌ای. (الف) صافی، (ب) ساختار بلوک T صافی (یک مرحله).

جواب میرا به‌کار می‌رود اکنون حالت بالا را دوباره بررسی می‌کنیم. وقتی که γ موهومی محض است داریم

$$I_m = Ae^{i(m\beta + \omega t)} + Be^{-i(m\beta - \omega t)}$$

جمله دوم یک جریان سینوسی با دامنه B را نشان می‌دهد که بدون افت از منبع به پایانه‌ها جاری می‌شود و تغییر فاز β را برای هر مرحله صافی دارد. در حالی که جمله اول جریان از پایانه به منبع (جریان بازتابی) را نشان می‌دهد. اکنون اگر A و B حقیقی و مساوی باشند داریم

$$I_m = 2Ae^{i\omega t} \cos m\beta$$

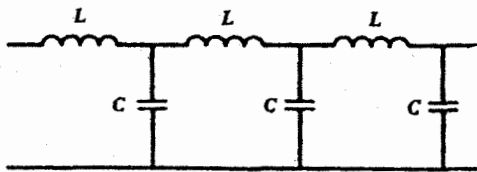
که معادله یک موج ایستاست. از طرف دیگر اگر $A = 0$ باشد صافی خاصیت یک خط تأخیری را دارد که بسامد آن به بسامد تأخیری، $m\beta$ ، وابسته است.

در جواب نوع دوم، داریم $\gamma = i n\pi + \alpha$ با $\alpha > 0$ و

$$I_m = Ae^{m\alpha} e^{i\omega t} + Be^{-m\alpha} e^{i\omega t}$$

این حالت به دو موج جریان سینوسی مربوط است، که جریان دوم با ضریب $e^{-\alpha}$ برای هر مرحله و به طرف راست ضعیف می‌شود و جمله اول با همان ضریب اما به طرف چپ و برای هر مرحله ضعیف می‌شود. حال اگر $A = 0$ باشد (یعنی موج بازتاب نداشته باشیم)، صافی خاصیت یک تضعیف‌کننده با تضعیف کلی $e^{-n\alpha}$ را دارد.

اکنون دو صافی مشخص را تحلیل می‌کنیم. ابتدا $z_1 = i\omega L$ و $z_2 = -i/\omega C$ را مطابق شکل ۱۳-۲۰ انتخاب می‌کنیم که در آن $\cosh \gamma = 1 - \omega^2 LC/2$ است. برای $\omega^2 \leq 4/LC$ تنها γ می‌تواند موهومی محض $\gamma = i\beta$ باشد، که $\cos \beta = 1 - \omega^2 LC/2$. این جواب را جواب "نوار گذر" می‌نامیم. زیرا بدون تضعیف انتشار

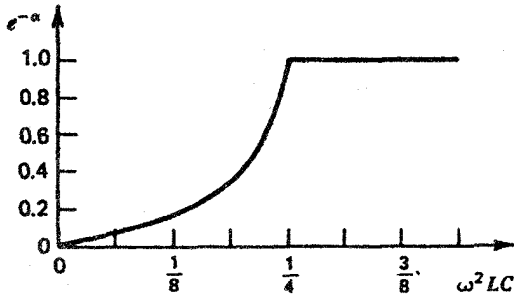


شکل ۱۳-۲۰ نمایش طرحوار یک مرحله از صافی پایین‌گذر.

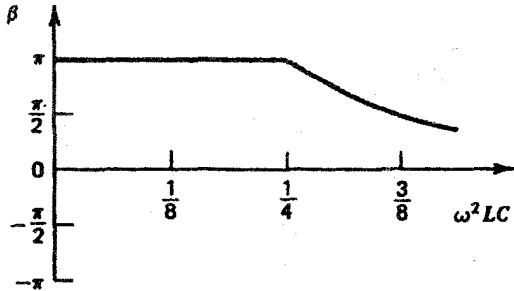
می‌یابد. برای $\omega^2 \geq 4/LC$ تنها γ تنها می‌تواند به شکل $\gamma = \alpha + in\pi$ با $\cos \alpha = \omega^2 LC/2 - 1$ جواب مربوط به آن را جواب "نوار توقف" می‌نامیم زیرا جریان تضعیف می‌شود. چون این صافی فقط بسامدهای کمتر از $\sqrt{4/LC}$ را عبور می‌دهد صافی را صافی پایین‌گذر می‌نامیم. شکل ۱۳-۲۱ (الف) تضعیف مربوط به یک مرحله از صافی را به صورت تابعی از بسامد نشان می‌دهد، در حالی که در شکل ۱۳-۲۱ (ب) تغییر فاز مربوط به یک مرحله صافی، به صورت تابعی از بسامد رسم شده است.

در مثال دوم که در شکل ۱۳-۲۲ نشان داده‌ایم $z_1 = -i/\omega C$ و $z_2 = i\omega L$ ، در نتیجه $\cosh \gamma = 1 - 1/2\omega^2 LC$ ، برای $\omega^2 > 1/4LC$ داریم $\alpha = 0$ و $\cos \beta = 1 - 1/2\omega^2 LC$ و جواب مربوط یک جواب نوار گذر بسامد بالاست. از طرف دیگر وقتی که $\omega^2 < 1/4LC$ باشد داریم $\beta = n\pi$ و $\cosh \alpha = 1 - 1/2\omega^2 LC$. در نتیجه یک جواب نوار توقف در بسامد پایین داریم. در شکل ۱۳-۲۳ (الف) تضعیف و در شکل ۱۳-۲۳ (ب) تغییر فاز برای هر مرحله از صافی را به صورت تابعی از بسامد نشان داده‌ایم.

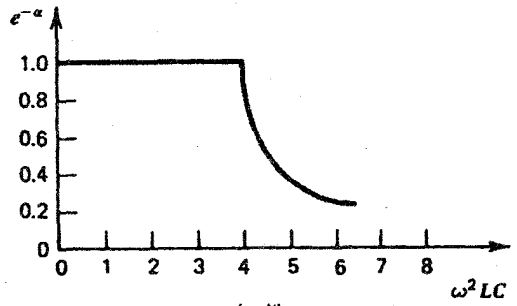
اگر فقط یک بازه بسامد جهت عبور در نظر باشد، واضح است که از ترکیب صافیهای پایین‌گذر و بالاگذر باید استفاده شود. این‌گونه صافی "نوار گذر" را در شکل ۱۳-۴۰، مربوط به مسئله ۱۳-۲۵، می‌بینیم. تحلیل این صافی را به خواننده واگذار می‌کنیم. ■



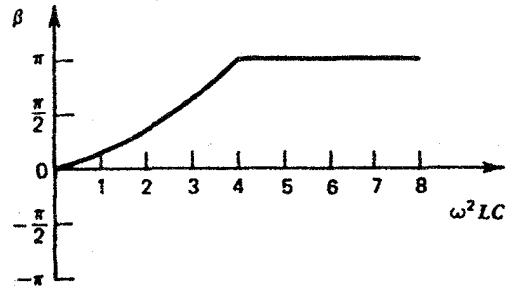
(الف)



(ب)



(الف)



(ب)

شکل ۱۳-۲۱ رفتار بسامدی هر مرحله از یک صافی پایین‌گذر. (الف) تضعیف. (ب) تغییر فاز.

شکل ۱۳-۲۳ رفتار بسامدی یک مرحله از صافی بالاگذر. (الف) تضعیف. (ب) تغییر فاز.

ثابت \hbar (یعنی $\hbar\omega$) به عنوان انرژی کوانتومی تعبیر می‌شود. بنابراین رابطه بالا را می‌توانیم به شکل

$$\Delta E \cdot \Delta \tau = \hbar \quad \text{یا} \quad \hbar \Delta \omega \cdot \Delta \tau = \hbar$$

بنویسیم. این شکلی از اصل مشهور عدم قطعیت هایزنبرگ است. مثلاً در فیزیک هسته‌ای، ΔE ممکن است نمایش عرض یک "تشدید" یا تراز "انرژی" و $\Delta \tau$ ، نمایش "طول عمر" باشد. در واقع رابطه مشهوری که در فیزیک هسته‌ای از آن استفاده می‌شود، رابطه برابری-ویگنر است

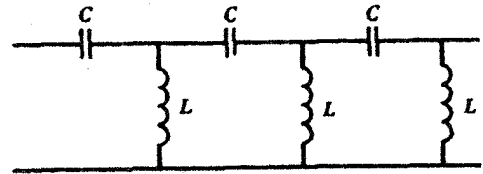
$$\psi(E) = \frac{\text{ثابت}}{1 + i \left[\frac{\gamma(E - E_0)}{\Gamma} \right]}$$

که رفتار "تابع موج" ψ مربوط به سطح انرژی ناپایدار را به صورت تابعی از انرژی می‌دهد. که در آن E_0 انرژی مرکز سطح، و Γ ثابتی است که با یکاهای انرژی اندازه‌گیری می‌شود. شبیه این عبارت در بحث تشدید عبارت است از

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}/R}{1 + iQ_0(x - 1/x)}$$

نزدیک تشدید داریم

$$x - \frac{1}{x} \rightarrow \gamma \delta \equiv \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$



شکل ۱۳-۲۲ نمودار طرحواره قسمتی از صافی بالاگذر.

مثال ۱۳-۸ تشدید در شاخه‌های دیگر فیزیک معادله‌های "تشدید" که مانند معادله (۱۳-۹۲) هستند در بسیاری از شاخه‌های فیزیک دیده می‌شوند. این معادله را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\Delta \omega = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{R}{L}$$

اکنون یادآوری می‌کنیم که L/R بعد زمان دارد و در واقع زمان $\Delta \tau$ است که در حین آن انرژی نوسان‌کننده در مدار RLC به $1/e$ مقدار اولیه‌اش می‌رسد. [معادله (۱۳-۱۰) را ببینید.] به این ترتیب

$$\Delta \omega \cdot \Delta \tau = 1$$

یعنی حاصلضرب "طول عمر" مدار در "عرض نوار" مساوی واحد است. در فیزیک کوانتومی می‌خوانیم که حاصلضرب بسامد ω در

در یک مدار ac ولتاژ منبع سینوسی به شکل

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi)$$

است. اگر \mathcal{E} ، I و q را به شکل مختلط نمایش دهیم

$$\hat{\mathcal{E}} e^{i\omega t + \phi} \quad \hat{I} e^{i\omega t} \quad \hat{q} e^{i\omega t}$$

که $\hat{\mathcal{E}}$ ، \hat{I} و \hat{q} فازورهای مستقل از زمان هستند، آن‌گاه روابط ولتاژ جریان و بار برای عناصر مختلف برابر می‌شود با

$$V_R = R\hat{I} \quad V_C = \frac{\hat{I}}{i\omega C} \quad V_L = i\omega L\hat{I} \quad V_M = i\omega M\hat{I} \quad [جدول ۱۳-۲]$$

کمیت‌های R ، $1/i\omega C$ ، $i\omega L$ و $i\omega M$ را به ترتیب امپدانسهای عناصر Z_C ، Z_L ، Z_M و Z_R می‌نامیم. امپدانسها کاملاً شبیه مقاومتها باهم جمع می‌شوند. امپدانس کل مدار، Z ، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{\mathcal{E}} = Z\hat{I} \quad [۱۳-۶۰]$$

معادله‌های دیفرانسیل مدارها، برحسب فازورها به معادله جبری تبدیل می‌شوند. وقتی مدار بیش از یک حلقه داشته باشد می‌توان آنها را به طور همزمان حل کرد. در واقع با به کار بردن قوانین مش و نودال کیرشهوف مستقیماً می‌توانیم معادله‌های جبری را برحسب فازورهایشان بنویسیم یعنی

$$\Sigma \hat{\mathcal{E}} = \Sigma Z\hat{I} \quad \Sigma \hat{I} = 0$$

وارون امپدانس را ادمیتانس می‌نامیم. در کنار آن منبع جریان که به جای منبع ولتاژ مطرح است در قلب اجرای روش نودال (مدار معادل نورتن) قرار دارد.

یکی از موضوعات مهم اصلی در بررسیهای مدار دانستن کار الکتریکی است که منبع emf انجام می‌دهد یا انرژی که توسط عناصر مدار (کار روی آنها انجام می‌گیرد) جذب می‌شود. توان لحظه‌ای که از منبع به بار برقرار است با رابطه زیر بیان می‌شود

$$P(t) = \mathcal{E}(t) I(t) \quad [۱۳-۷۱]$$

همچنین توان جذب شده توسط بار با رابطه زیر داده می‌شود

$$P(t) = V(t) I(t) \quad [۱۳-۷۲]$$

$$\hat{I} \approx \frac{\hat{V}/R}{1 + i \left[\frac{2(\omega - \omega_0)}{\Delta\omega} \right]} \quad |\omega - \omega_0| \ll \omega_0 \quad \text{برای}$$

هر دو عبارت شکل مشابهی دارند. بنابراین بسامدها را به عنوان انرژیها و \hat{I} را مانند تابع موج یک تراز موج تعبیر می‌کنیم. این رابطه چگونگی عمل "دستگاه" را تعیین می‌کند. ■

۱۳-۸ خلاصه

در این فصل مدارهای الکتریکی را که شامل عناصر ذخیره‌کننده انرژی مثل القاگر و خازن‌اند بررسی کردیم. روش تحلیل بر اساس معادله‌های الکترومغناطیس نیمه ایستاست. دو نوع برانگیختگی در مدار داشتیم. منابع با ولتاژ پله‌ای ثابت (dc) و منابع با ولتاژ سینوسی (ac). در روش اول پاسخ در حوزه زمانی و در روش دوم پاسخ در حوزه بسامدی محاسبه می‌شود.

برای حالت dc، جریان در مدار تابع کندی از زمان است و با استفاده از قانونهای کیرشهوف تعیین می‌شود. ولتاژ، جریان یا بار به طور لحظه‌ای با R ، L و C و القای متقابل M ، به صورت زیر رابطه دارند

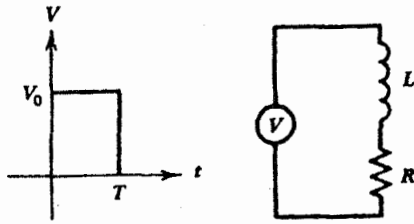
$$V_R = IR \quad V_C = \frac{q}{C} \quad V_L = L \frac{dI}{dt} \quad V_M = M \frac{dI}{dt}$$

برای یک مدار RLC که با منبع ولتاژ $\mathcal{E}(t)$ تغذیه می‌شود داریم

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}(t) \quad [۱۳-۲۱]$$

اگر $C \rightarrow \infty$ مدار به یک مدار RL تبدیل می‌شود، در حالی که اگر $L = 0$ شود مدار به یک مدار RC تغییر می‌یابد. برای یک مدار چندحلقه‌ای، مجموعه‌ای از معادله‌های دیفرانسیل وابسته به هم به دست می‌آوریم. حل این معادله‌ها یا معادله‌های مدارهای دیگر در حالت کلی مجموع جواب پایدار (جواب خاص) و جواب گذرا که بر جواب معادله در حالت $\mathcal{E}(t) = 0$ (جواب همگن) انطباق دارد، است. سپس شرایط اولیه را برای تعیین ثابتهای دلخواه معادله همگن به کار می‌بریم. در صورتی که $\omega^2 = 1/LC - R^2/4L^2$ باشد جواب نوسانی است و با ثابت زمانی $R/2L$ در طول زمان ضعیف می‌شود. اگر ω^2 مساوی یا کوچکتر از صفر باشد جواب غیرنوسانی است و به ترتیب مربوط به حالت میرایی بحرانی یا حالت فوق میراست. اندازه شدت میرایی حرکت نوسانی به Q مدار مربوط است که با رابطه زیر داده می‌شود

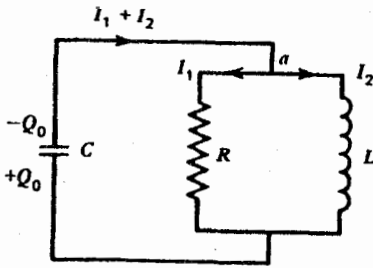
$$Q = \frac{\omega L}{R} \quad [۱۳-۳۲]$$



شکل ۲۴-۱۳ یک مدار RL که با یک تپ ولتاژ تغذیه می‌شود.

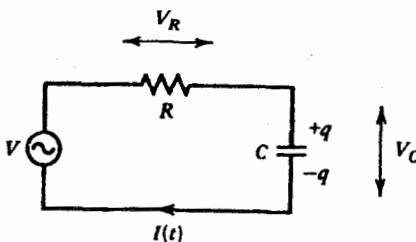
۲-۱۳ جواب یک مدار RL را که با منبع ولتاژ $V = V_0 e^{-Rt/L}$ تغذیه می‌شود برای دو حالت که جریان اولیه در مدار صفر و I_0 است به دست آورید. (وقتی شکل ولتاژ تغذیه همان شکل طبیعی رفتار مدار را داشته باشد، پدیده‌ای که ظاهر می‌شود تشدید می‌نامیم).

۳-۱۳ مدار شکل ۲۵-۱۳ از یک خازن C ، یک مقاومت R و یک القاگر $L = 2CR^2$ تشکیل شده است. در زمان $t = 0$ بار خازن Q_0 و جریانی از القا عبور نمی‌کند. (الف) از علامتگذارهای مشخص شده روی شکل استفاده کنید و معادله کیرشهوف را برای حلقه‌های LC و RL بنویسید. (ب) معادله نودال کیرشهوف را در نقطه گرهی a بنویسید. (ج) نشان دهید در لحظات بعد بار خازن برابر با $Q = Q_0 e^{-kt} (\cos kt - \sin kt)$ است که $k = 1/2RC$.



شکل ۲۵-۱۳

۴-۱۳ شبکه RC شکل ۲۶-۱۳ در صورتی که با یک منبع تناوبی [یعنی $f(T+t) = f(t)$ که T زمان تناوب است] تغذیه شود خاصیت جالبی دارد. زیرا رفتار این‌گونه مدار شبیه یک رایانه قیاسی



شکل ۲۶-۱۳

می‌دانیم که همه مقادیر در این عبارتها حقیقی‌اند. برای مدارهای ac می‌توان نوشت $V(t) = V_0 \cos \omega t$ و $I = I_0 \cos(\omega t - \phi)$. در این حالت متوسط زمانی اندازه P می‌شود

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} I_0 V_0 \cos \phi$$

که $\cos \phi$ را ضریب توان می‌نامیم. اگر مقاومت بارهای الکتریکی صفر باشد $\cos \phi = 0$ است در حالی که برای بارهای با مقاومت $\cos \phi > 0$ است. کمیت‌های $I_0/\sqrt{2}$ و $V_0/\sqrt{2}$ را ریشه میانگین مربعی یا مقدار مؤثر مقادیر بالا می‌نامیم. برحسب کمیت‌های مختلط داریم

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \text{Re}(I^* V) = \frac{1}{T} \text{Re}(V^* I) \quad [۷۷-۱۳]$$

ترکیب سری یا موازی القاگر، خازن و مقاومت را اغلب در مدارهای ac می‌بینیم. ترکیب سری آنها، به صورت تابعی از بسامد، نزدیک $\omega = \omega_0 = \sqrt{1/LC}$ از خود حالت تشدید نشان می‌دهد. که در آن امپدانس مدار کمینه و جریان بیشینه است. تیزی تشدید با ضریب کیفیت، Q ، که به صورت زیر تعریف شده است داده می‌شود

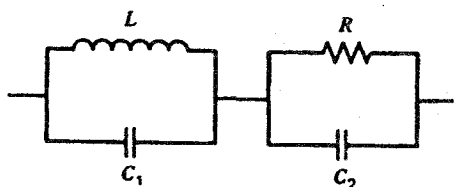
$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} \quad [۸۹-۱۳]$$

که $|\Delta \omega|$ عرض کامل در پاسخ نصف بیشینه (عرض نوار) است. یک مدار موازی نیز در $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ حالت تشدید دارد اما در این حالت z بیشینه و I_0 کمینه است. با وجود این، اغلب این مورد را "پادتشدید" می‌نامیم. اگر فاز ϕ در مدار موازی در بعضی بسامدها صفر شود، آن‌گاه مدار از خود وضعیتی نشان می‌دهد که آن را تشدید فاز می‌نامیم. در حالت‌هایی با ضریب کیفیت بزرگ هر دو حالت، تشدید فاز و پادتشدید همزمان به وجود می‌آیند.

مدارهای تشدید از نظر عملی اهمیت دارند زیرا صافیهای مختلف بر مبنای آنها ساخته می‌شوند.

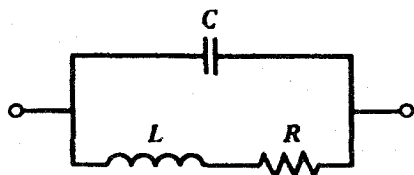
مسائل

۱-۱۳ مدار RL شکل ۲۴-۱۳ را در نظر بگیرید. یک تپ ولتاژ V را به مدار اعمال می‌کنیم: $V = 0$ به ازای $t < 0$ و $V = V_0$ به ازای $0 < t < T$ و $V = 0$ به ازای $t > T$. (الف) قانون ولتاژ کیرشهوف را برای نوشتن معادله جریان در مدار به کار ببرید. (ب) جریان را برای $0 < t < T$ تعیین کنید. (ج) ولتاژ دو سر القاگر برای $0 < t < T$ را به دست آورید. (د) ولتاژ دو سر القاگر را برای $t > T$ تعیین کنید.



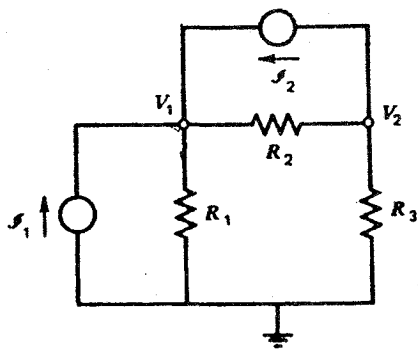
شکل ۲۸-۱۳

که گذردهی مختلط آن برابر است با $[\omega(\omega + i\gamma)] / [\omega_p^2 - \omega(\omega + i\gamma)]$ ، $\varepsilon/\varepsilon_0 = 1 - \omega_p^2 / [\omega(\omega + i\gamma)]$ که ω_p و γ ثابت و ω بسامد منبع ولتاژ خارجی $V = V_0 \cos \omega t$ است پر شده است. نشان دهید امپدانس مختلط چنین خازنی مساوی امپدانس شبکه در بخش (الف) است وقتی که پارامترهای L و C و R مناسب انتخاب شوند. آنها را پیدا کنید.



شکل ۲۹-۱۳

۱۱-۱۳ مدار شکل ۱۳-۳۰ را در نظر بگیرید. (الف) معادله گرهی کیرشهوف را با استفاده از علائم روی شکل بنویسید. (ب) اگر $\mathcal{I}_1 = 2A$ و $\mathcal{I}_2 = 1A$ و $R_1 = 1\Omega$ ، $R_2 = 2\Omega$ ، $R_3 = 3\Omega$ باشد، V_1 و V_2 را تعیین کنید. (ج) جریان در هر یک از سه مقاومت را به دست آورید.



شکل ۳۰-۱۳

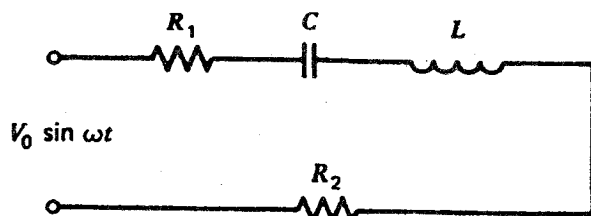
۱۲-۱۳ یک خازن واقعی را می‌توان تقریباً ترکیبی موازی از یک ظرفیت C با مقاومت نشت R که به صورت سری به یک القای ایده‌آل L وصل است دانست. (الف) امپدانس z این تقریب را پیدا کنید. (ب) با فرض بزرگ بودن R ، $|z|$ را به صورت تابعی از ω رسم کنید.

به‌ازای RC مناسب و شرایط حالت پایاست. با انتخاب $R = 2k\Omega$ و $C = 0.05\mu F$ (الف) V_C را برای یک زمان تناوب از منبع موج مربعی با بسامد 2×10^4 هرتز به دست آورید. (ب) V_R را برای یک زمان تناوب از منبع تغذیه موج مثلثی با بسامد 10^2 هرتز تعیین کنید. ۱۳-۵ یک خازن با بار اولیه q_0 در یک القاگر تخلیه می‌شود. اگر جریان در مدار $I = 86.6q_0 e^{-0t} \sin(86.6t)$ باشد. (الف) ضریب کیفیت القا را به دست آورید. (ب) اگر مقاومت القاگر 1Ω باشد، ضریب خود القا را تعیین کنید. (ج) کسرافت انرژی را در یک چرخه تعیین کنید.

۱۳-۶ یک پیچ به القای L و مقاومت R_1 به یک باتری با ولتاژ V_0 وصل است. یک مقاومت R_2 نیز موازی با پیچ وصل شده است. اگر $L = 10H$ ، $R_1 = 100\Omega$ و $V_0 = 20V$ باشد تعیین کنید برای جلوگیری از بالا رفتن ولتاژ در دو سر پیچ تا بیش از $100V$ ولت وقتی که باتری ناگهان باز شود چه R_2 ای لازم است. میزان اولیه کم شدن جریان در القا چیست.

۱۳-۷ القای L به شکل سری به یک مقاومت R وصل است و با ولتاژ $V = V_0 \sin \omega t$ تغذیه می‌شود. (الف) جریان و زاویه فاز بین جریان و ولتاژ، (ب) زاویه فاز بین جریان در مقاومت و القا و (ج) زاویه فاز بین ولتاژ دو سر مقاومت و دو سر القا چیست؟

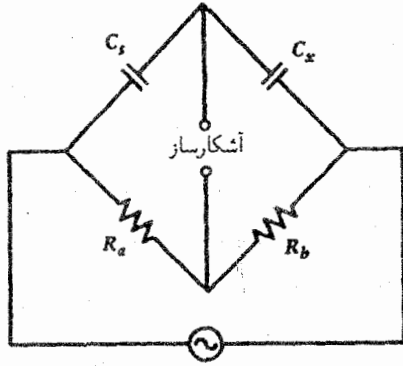
۱۳-۸ مدار RLC شکل ۱۳-۲۷ را در نظر بگیرید. ولتاژ $V = V_0 \sin \omega t$ به مدار وصل است. (الف) در چه بسامدهایی جریان بیشینه و کمینه است؟ (ب) اندازه بیشینه جریان چقدر است؟ (ج) در چه بسامدهایی جریان نصف مقدار بیشینه آن است.



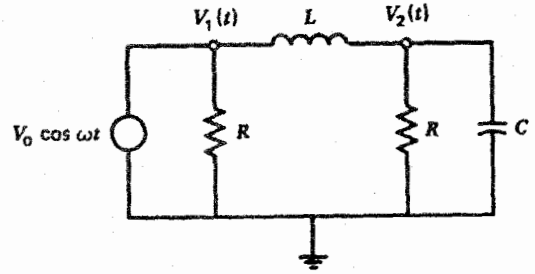
شکل ۲۷-۱۳

۱۳-۹ شکل ۱۳-۲۸ شبکه‌ای شامل مقاومت R ، القای L و خازنهای C_1 و C_2 را نشان می‌دهد. اگر $L < R^2 C_2$ باشد نشان دهید که شبکه شبیه یک مقاومت محض برای جریان با بسامد $\omega = (C_2 - L/R^2) / LC_1(C_1 + C_2)$ عمل می‌کند. ۱۳-۱۰ (الف) امپدانس z مختلط دو پایانه شکل ۱۳-۲۹ را پیدا کنید. (ب) یک خازن که ظرفیت آن بدون دی‌الکتریک C_0 است، با یک عایق

۱۳-۱۳ روش گرهی را برای حل ولتاژ $V_T(t)$ در شکل ۳۱-۱۳ به کار برید. با انتخاب $V_0 = 10\text{ V}$, $L = 1\text{ H}$, $C = 1\text{ F}$, $R = 1\Omega$ و $\omega = 1\text{ rad/s}$ فاز نسبی V_T را نسبت به منبع تعیین کنید.

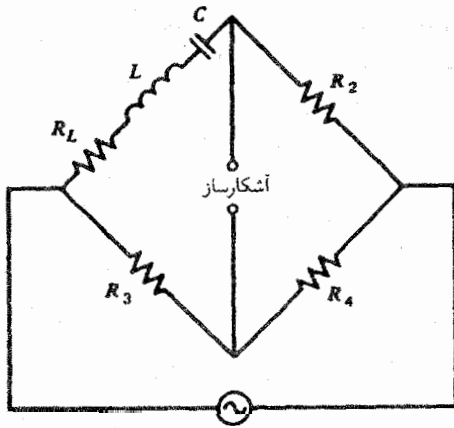


شکل ۳۳-۱۳ یک پل برای اندازه‌گیری ظرفیت خازن.



شکل ۳۱-۱۳

۱۴-۱۳ توان متوسط $\langle P \rangle$ ذخیره شده در واحد زمان در خازن مسئله ۱۳-۱۰ را تعیین کنید. همچنین گرمای متوسط تلف شده $\langle Q \rangle$ در واحد زمان را به دست آورید. هر دو مقدار $\langle P \rangle$ و $\langle Q \rangle$ را برحسب اختلاف پتانسیل بین صفحات بیان کنید.

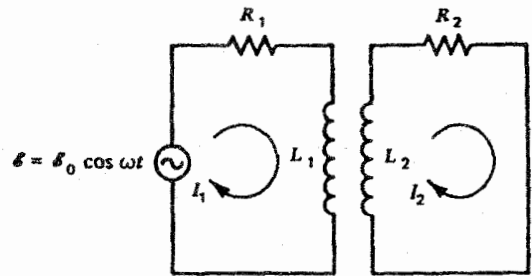


شکل ۲۴-۱۳ پل بسامد.

۱۵-۱۳ دو مدار جفت شده با القای متقابل M را در شکل ۳۲-۱۳ نشان داده‌ایم. نشان دهید نسبت توان اتلافی در R_1 و R_2 با رابطه $P_2/P_1 = \omega^2 M^2 R_2 / (R_1^2 + \omega^2 L_1^2) R_1$ داده می‌شود. یک شکل تقریبی برای نسبت P_2/P_1 به صورت تابعی از R_2 رسم کنید و مقدار R_2 که به ازای آن نسبت کمینه می‌شود را به دست آورید.

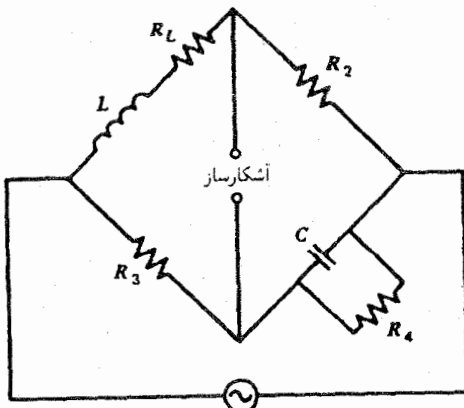
و $\omega L = 1/\omega C$ لازم است تا آشکارساز جریان صفر را نشان دهد. اگر L و C معلوم باشد، از این پل برای اندازه‌گیری بسامد می‌توان استفاده کرد.

۱۸-۱۳ پل ماکسول که در شکل ۳۵-۱۳ نشان داده شده است برای اندازه‌گیری یک القا با Q کوچک یا متوسط بدون دانستن دقیق



شکل ۳۲-۱۳

۱۶-۱۳ معمولاً برای اندازه‌گیری ظرفیت برحسب ظرفیت استاندارد C_s و دو مقاومت قابل تنظیم از یک پل مطابق شکل ۳۳-۱۳ استفاده می‌شود. فرض کنید که از مقاومتهای سری خازنها می‌توان چشم پوشید. نشان دهید زمانی آشکارساز جریان صفر را نشان می‌دهد (حالت تعادل) که $C_x = R_a C_s / R_b$ باشد.

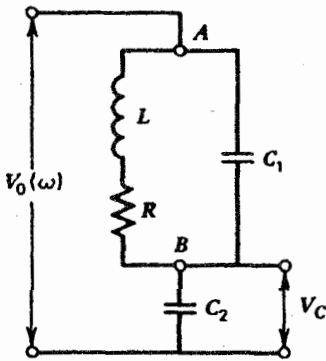


شکل ۳۵-۱۳ پل ماکسول برای اندازه‌گیری القا.

۱۷-۱۳ شکل ۳۴-۱۳ یک پل بسامد، که شرط تعادل آن به بسامد وابسته است، را نشان می‌دهد. نشان دهید شرایط $R_L R_2 = R_1 R_3$

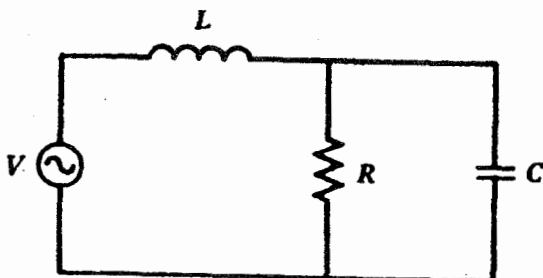
سری رسم کنید. (ج) \hat{V}_C را به صورت تابعی از ω برای مدار موازی رسم کنید. (د) کدام مدار پدیدهٔ تشدید را نشان می‌دهد.

۲۳-۱۳ فرض می‌کنیم که القاگر $L = 10^{-2}$ H و مقاومت $R = 1\Omega$ داریم و می‌خواهیم مدار شکل ۱۳-۳۸ را طوری بسازیم که $|\hat{V}_C/V_0|$ در $\omega = 10^4$ rad/s کمینه و در $\omega = 0.9 \times 10^4$ rad/s بیشینه باشد. (الف) اگر مدار موازی بین A و B در $\omega = 10^4$ rad/s تشدید شود C_1 چقدر است؟ (ب) ضریب کیفیت Q و امپدانس را در حالت تشدید در (الف) به دست آورید، آیا این حالت یک تشدید فاز است یا پادتشدید؟ (ج) امپدانس بین A و B را در $\omega = 0.9 \times 10^4$ rad/s تعیین کنید. آیا القایی است یا خازنی؟ (د) برای به دست آوردن حالت تشدید سری در $\omega = 0.9 \times 10^4$ rad/s، C_2 را به دست آورید. (ه) $|V_C/V_0|$ را در $\omega = 0.9 \times 10^4$ rad/s حساب کنید.



شکل ۳۸-۱۳ طرح یک مدار صافی.

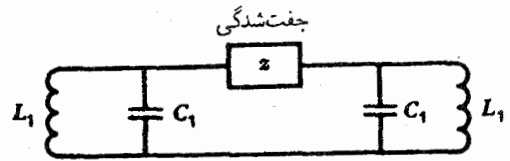
۲۴-۱۳ مدار نشان داده شده در شکل ۱۳-۳۹ را در نظر می‌گیریم. (الف) امپدانس معادل z مدار که در منبع اندازه‌گیری می‌شود تعیین کنید. (ب) زاویه فاز ϕ را پیدا کنید. (ج) بسامد تشدید ω مدار را پیدا کنید. (د) توان متوسط $\langle P \rangle$ منتقل شده توسط منبع را به دست آورید. (ه) توان مصرفی در مقاومت R را برای $\omega = \sqrt{1/LC}$ تعیین کنید.



شکل ۳۹-۱۳

بسامد مولد استفاده می‌شود. نشان دهید وقتی پل متعادل است که $L = R_1 R_2 C$ و $R_L = R_1 R_2 / R_4$ باشد. همچنین نشان دهید که Q القا برابر $\omega C R_2$ است.

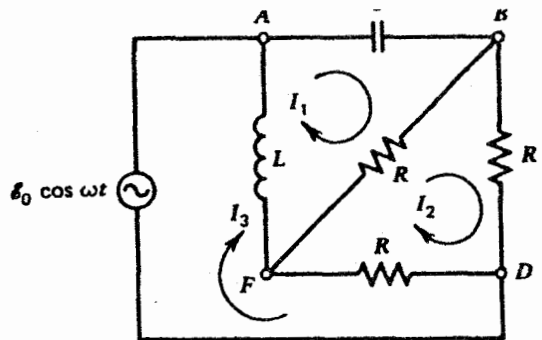
۱۹-۱۳ دو مدار شکل ۱۳-۳۶ را که با $Z = 1/\omega C$ خازنی جفت شده‌اند در نظر می‌گیریم. (الف) معادله‌های جبری را برای جریانها در حلقه‌ها بنویسید و بسامد طبیعی نوسانهای الکتریکی را حساب کنید. (ب) حالتی را که بین مدارها جفت‌شدگی وجود ندارد (یعنی وقتی $C = 0$) و جفت‌شدگی خیلی محکم ($C \gg C_1$) وجود دارد بحث کنید.



شکل ۳۶-۱۳

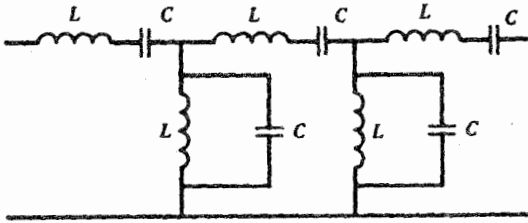
۲۰-۱۳ مسئله قبلی را در حالی که جفت‌شدگی بین دو مدار القا $Z = \omega L$ است حل کنید.

۲۱-۱۳ مدار نشان داده شده در شکل ۱۳-۳۷ که با $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ تغذیه می‌شود را در نظر می‌گیریم. بسامد منبع به کار رفته $\omega^2 = 1/LC$ است. (الف) نشان دهید دامنهٔ جریان در مقاومت قطری برابر با $2\mathcal{E}_0 / [\omega(3L + CR^2)]$ است. (ب) اختلاف فاز بین جریان و نیروی محرکه الکتریکی به کار رفته را پیدا کنید.



شکل ۳۷-۱۳

۲۲-۱۳ یک مدار سری RLC (شکل ۱۳-۶) و یک مدار موازی RLC (شکل ۱۳-۱۷) را در نظر می‌گیریم. هر یک با منبع جریان ثابت I و بسامد ω تغذیه می‌شود. (الف) امپدانس و ادمیتانس مدارها را حساب کنید. (ب) \hat{V}_L و \hat{V}_C را به صورت تابعی از ω برای مدار



شکل ۴۰-۱۳ نمودار طرحوار یک صافی نوارگذر.

۲۵-۱۳ صافی نوارگذر در شکل ۱۳-۴۰ را در نظر می‌گیریم. (الف)
 علامتگذاری شکل ۱۳-۱۹ را به‌کار برید و z_1 و z_2 مؤثر را به‌دست
 آورید. (ب) بازه بسامد نوارگذر بدون تضعیف را تعیین کنید (رابطه‌ای
 بین ω ، L و C به‌دست آورید).

معادلات ماکسول

در شش فصل اول در مورد الکتروستاتیک بحث کردیم و دریافتیم که میدان الکتریکی در محیط، در معادلات

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{و} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

صدق می‌کنند. مغناطوستاتیکها را در فصلهای ۸ تا ۱۰ بررسی کردیم که میدان مغناطیسی در محیط، در معادلات

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \quad \text{و} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

صدق می‌کنند. علاوه بر این معادلات که میدانها و منبعها (بارها و جریانها) را به هم مربوط می‌کنند، عبارت ریاضی پایستگی بار—مثلاً معادله پیوستگی (که در فصل ۷ بحث شد)—را نیز داریم که نشان می‌دهد در هر نقطه چگالی جریان و چگالی بار با رابطه زیر

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0$$

به هم مربوط می‌شوند.

اولین اثر که ناشی از تغییر زمانی میدانها بر روی این معادلات بود با استفاده از قانون تجربی فاراده در فصل ۱۱ معرفی شد. این موضوع،

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

معرفی کرد که جفت شدگی بین میدانها را تأمین می‌کند. به این ترتیب، معادلات اساسی الکترومغناطیس که تاکنون استفاده کردیم به شکل زیرند

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_f & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (۱-۱۴)$$

که این معادلات در هر نقطه از فضا در تمام زمانها صادق‌اند. این معادلات را در فصل ۱۳ اصطلاحاً معادلات شبه ایستا نامیدیم، و از آنها در بررسی جریانهای غیر پایا در مدارهای الکتریکی استفاده کردیم.

در این فصل نشان می‌دهیم که وابستگی بین میدانهای مغناطیسی هنوز کامل نیست. تصحیح بیشتر این معادلات در بخش بعد معادلات ماکسول را به دست می‌دهد که امروزه بر رفتار میدان الکترومغناطیسی کلاسیک حاکم است. در مورد پدیده موج الکترومغناطیسی که با این معادلات داده می‌شود نیز بحث می‌کنیم.

۱-۱۴ جریان جابه‌جایی — معادلات ماکسول

حال پرسشی که مطرح می‌شود آن است که: آیا روابط داده شده در معادله (۱-۱۴) درست هستند؟ آیا این روابط با هم مطابقت دارند؟ جواب این است که این روابط با هم مطابقت ندارند، و بنابراین نمی‌توانند نشان‌دهنده واقعیت فیزیکی باشند. اشکالی وجود دارد و آن این است که با توجه به آنکه $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$ صفر است، اما رابطه آخر (۱-۱۴)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}_f$$

تغییر میدانهای \mathbf{E} را به وجود می‌آورد، تغییر میدانهای الکتریکی در فضا باعث تغییر میدانهای مغناطیسی می‌شود: به این ترتیب \mathbf{E} و \mathbf{B} دقیقاً به هم مربوط می‌شوند و آنها را با هم میدان الکترومغناطیسی (EM) می‌نامیم.

همچنین باید توجه کرد که معادلات شبه ایستا به دلیل چشمپوشی از جمله $\partial \mathbf{D} / \partial t$ اشتباه هستند. اما در آهنگهای زمانی تغییر \mathbf{E} که در بسیاری از کاربردها با آنها مواجه‌ایم (مخصوصاً در کاربردهای مداری که در آنها میدانهای \mathbf{E} معمولاً بسیار کوچک‌اند یا در حجمهای جایگزیده کوچک قرار دارند)، این جمله در مقایسه با جمله \mathbf{J}_f کوچک است. یعنی در این حالتها منابع جریان واقعی بسیار مهمتر از منابع جریان جابه‌جایی هستند. در داخل رساناها (اهمی) با منابع متغیر زمانی سینوسی با بسامد ω می‌بینیم که

$$\mathbf{J} = \sigma_c \mathbf{E} \quad \text{و} \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = i\omega \mathbf{E}$$

به این ترتیب به ازای $(\Omega \cdot \text{m})^{-1} \approx 3 \times 10^6$ که برای بسامدهای تقریباً تا 10^{14} Hz از یک درصد کمتر است داریم

$$\left| \frac{\varepsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t)}{\mathbf{J}} \right| = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma_c} = \frac{2\pi \varepsilon_0 f}{\sigma_c} \approx 2 \times 10^{-17} f \quad (\text{Hz})$$

اکنون باید توجه کنیم که چهار معادله ماکسول مستقل نیستند. به این ترتیب از معادله (۴-۱۴) به دست می‌آوریم

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} \equiv 0 = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B})$$

که با توجه به آن داریم $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. به همین ترتیب از معادله (۵-۱۴) به دست می‌آوریم

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} \equiv 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}_f + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D})$$

با استفاده از معادله پیوستگی، قرار می‌دهیم $\nabla \cdot \mathbf{J}_f = -\partial \rho_f / \partial t$ به این ترتیب

$$-\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) = 0$$

یا $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ که معادله (۲-۱۴) است.

مثال ۱-۱۴ جریان جابه‌جایی - خازن با صفحات موازی
اگر سعی کنیم انتگرال خطی $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$ را برای یک حالت، مثلاً حالتی که در شکل ۱-۱۴ نشان داده شده است محاسبه کنیم، که
۱. فرض می‌کنیم که \mathbf{B} در مجاورت هر نقطه در زمان گذشته صفر است.

در حالت پایا همان طور که در فصل ۷ بحث کردیم $\nabla \cdot \mathbf{J}_f = 0$. با این حال، در حالتی که تغییرات زمانی اهمیت بسیار دارند، معادله پیوستگی نشان می‌دهد که در حالت کلی $\nabla \cdot \mathbf{J}_f = -\partial \rho_f / \partial t \neq 0$. معادله نشان داد که روشی برای حذف این تناقض اضافه کردن جمله دیگر \mathbf{J}_f به آخرین رابطه معادله (۱-۱۴) است. مثلاً، چون $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ ، $\partial \rho_f / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{J}_f = 0$ داریم

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot \mathbf{D}] + \nabla \cdot \mathbf{J}_f = 0$$

یعنی

$$\nabla \cdot \left[\mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] = 0$$

بنابراین، اگر به جای جمله \mathbf{J}_f در معادله (۱-۱۴) داشته باشیم $\mathbf{J}_f + \partial \mathbf{D} / \partial t$ ، عدم تطابق اولیه از بین می‌رود. با این کار، معادلات الکترومغناطیس به شکل نقطه‌ای در محیطها به معادلات ماکسول معروف‌اند و باید به خاطر سپرده شوند

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (۲-۱۴)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۳-۱۴)$$

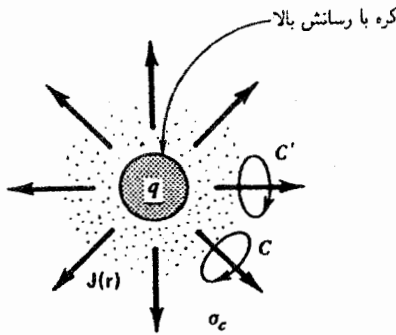
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۴-۱۴)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (۵-۱۴)$$

این معادلات با رابطه‌های

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (۶-۱۴)$$

که قبلاً در معادلات (۲۹-۹) و (۳۵-۴) معرفی شدند، تکمیل می‌شوند. معادلات ماکسول [معادلات (۲-۱۴) تا (۵-۱۴)] بر رفتار میدان الکترومغناطیسی کلاسیک آن‌طور که امروزه به آنها معتقدیم، حاکم هستند. جمله اضافه‌شده $\partial \mathbf{D} / \partial t$ ، را چگالی جریان جابه‌جایی می‌نامیم. این جمله اضافی نه تنها معادله‌ها را سازگار می‌کند بلکه در نظریه تابش امواج الکترومغناطیسی نقش اصلی را دارد؛ بدون این جمله در نظریه، تابشی رخ نمی‌دهد. به علاوه با توجه به حضور جریان جابه‌جایی همان طور که (از قانون فاراده) تغییر میدانهای \mathbf{B} ،



شکل ۲-۱۴ آزمایش قانون آمپر با استفاده از یک کره با رسانش بالا که ابتدا باردار بوده و در یک ماده رسانا قرار داده می‌شود.

بار $q(t)$ بر روی سطح آن است و همان طور که در شکل ۲-۱۴ می‌بینیم در یک ماده (همگن یکنواخت اهمی) با رسانندگی σ_c قرار دارد.

از تقارن مسئله می‌فهمیم که \mathbf{J} فقط تابعی از r (فاصله از مرکز کره) است. با اعمال قانون آمپر بر منحنی C از سطح S مانند شکل به دست می‌آوریم $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$ ، زیرا یک جریان خالص از C عبور می‌کند. این به نوبه خود مستلزم آن است که $\mathbf{H} \neq 0$. اما همچنین برای منحنی دوم C' ، $\oint_{C'} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$ ، و در واقع به دلیل تقارن \mathbf{H} در جایی که منحنیهای C و C' در تماس با یکدیگرند در جهت مخالف است. بنابراین \mathbf{H} چقدر است؟

جواب، البته، این است که $\mathbf{H} = 0$ در واقع با وارد کردن جریان جابه‌جایی از معادله (۵-۱۴) داریم

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I_C + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

اکنون از تقارن ذاتی مسئله استفاده می‌کنیم. چون $I_C = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ مادامی که کل جریان I که از سطح کره عبور می‌کند مساوی با $\oint_C \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ باشد، در این صورت $I_C = I \Omega / 4\pi$ که در آن Ω زاویه فضایی روبرو به C نسبت به مرکز کره است. همچنین می‌توان نوشت

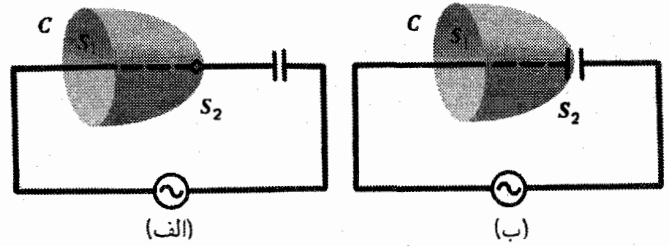
$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\Omega}{4\pi} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

به این ترتیب

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \left[I \frac{\Omega}{4\pi} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right) \right] \cdot \frac{\Omega}{4\pi}$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I \frac{\Omega}{4\pi} + \frac{dq}{dt} \frac{\Omega}{4\pi}$$

$$\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = 0 \rightarrow H_r = 0 \quad \text{[به دلیل تقارن ویکتایی داریم } (H_\theta, H_\phi) = 0 \text{]}$$



شکل ۱-۱۴ آزمایش قانون آمپر در حضور یک خازن با استفاده از پرند C که پیرامون دو سطح باز S_1 و S_2 طوری در نظر گرفته شده است که (الف) خازن را در بر می‌گیرد، (ب) خازن را در بر نمی‌گیرد.

در آن جریان I در یک خازن یا یک عنصر خازنی ختم می‌شود، ناسازگاری معادله $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f$ به‌وضوح دیده می‌شود. از قانون آمپر داریم $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I$ که در آن I کل جریان عبوری از سطح S است که محیط آن منحنی بسته C است. چون محل S را می‌توان طوری انتخاب کرد که سیم حامل جریان را قطع کند یا نکند، مقدار انتگرال خطی مبهم است. شکل ۱-۱۴ نشان‌دهنده حالت بالاست. از S_1 جریان I (در سیم) عبور می‌کند، اما از S_2 هیچ گونه جریانی عبور نمی‌کند.

اگر از شکل انتگرالی معادله (۵-۱۴) که شامل جریان جابه‌جایی است؛ یعنی

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{a} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

استفاده کنیم، وضعیت روشنتر می‌شود. به این ترتیب، اگر S را S_1 در نظر بگیریم، همه‌جا روی S_1 ، $\partial \mathbf{D} / \partial t \approx 0$ (فرض می‌کنیم میدانها در داخل خازن جایگزیده‌اند)، بنابراین داریم $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I$ اگر $S = S_2$ باشد، همه‌جا بر روی S_2 ، $\mathbf{J}_f = 0$ ، اما

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = \frac{d}{dt} \left[\epsilon_0 \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right]$$

دوباره با استفاده از این واقعیت که \mathbf{E} در خارج خازن صفر است (مثلاً، روی سطح S' که در شکل ۱-۱۴ (ب) نشان داده شده است)، به دست می‌آوریم

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = \frac{d}{dt} \left[\epsilon_0 \int_{S_1+S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right] = \frac{dq}{dt} = I$$

بنابراین یک نتیجه سازگار به دست می‌آید.

مثال ۲-۱۴ نشت بار از یک کره - جریان جابه‌جایی حالت دیگری که در آن قانون آمپر در به دست دادن نتایج غیرمبهم شکست می‌خورد، حالت یک کره (رسانا) است که در زمان t دارای

با استفاده از رابطه برداری $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\nabla^2) \mathbf{E}$ و قرار دادن صفر به جای $\nabla \cdot \mathbf{E}$ به دست می آوریم

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma_c \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (۱۴-۱۴)$$

به همین ترتیب با همین فرایند به دست می آوریم

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu \sigma_c \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (۱۵-۱۴)$$

یا در یک ترکیب داریم

$$\nabla^2 \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} - \mu \sigma_c \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0 \quad (۱۶-۱۴)$$

به این ترتیب معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم (در فضا و زمان) سه بعدی در \mathbf{E} تنها و \mathbf{B} تنها را به دست می آوریم. این معادله ها، معادلات موج برداری استاندارد هستند که در فرایندهای فیزیکی دیگر به دست می آیند. به این ترتیب، با توجه به معادلات ماکسول \mathbf{E} و \mathbf{B} به عنوان دامنه های موج رفتار می کنند. به علاوه، هر معادله یک جمله دارد که با مشتق زمانی میدان مربوطه و با رسانندگی محیط متناسب است، اینها جمله های میرایی هستند که باعث اتلاف در مواد با رسانندگی غیرصفر می شوند. تعیین تأثیرات ناشی از منابع خارجی — بارها و جریانهای (ρ_f, \mathbf{J}_f) — بخش نسبتاً بزرگی از نظریه EM را در برمی گیرد. بررسی این تأثیرات را از فصل ۱۵ به بعد می خوانیم. و در این فصل توجه می کنیم که این تأثیرات را از طریق معادلاتی که برای پتانسیلهای برداری و نردهای به دست می آیند، می توان به بهترین وجه به دست آورد. اگر محیط غیررسانا باشد ($\sigma_c = 0$)، در این صورت این معادلات به معادله زیر تبدیل می شود

$$\nabla^2 \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{محیطهای غیررسانا}) \quad (۱۷-۱۴)$$

که معادله موج همگن سه بعدی غیرمیرا نام دارد. با انجام محاسبه ای مانند همین محاسبه و استفاده از معادلات ماکسول میکروسکوپی [معادله (۶-۱۴)]، با $\mu = \mu_0$ و $\varepsilon = \varepsilon_0$ ، با قرار دادن μ_0 و ε_0 به جای μ و ε ، معادله (۱۷-۱۴) به دست می آید. علامتگذاری برداری که در معادلات موج استفاده می شود، بسیار فشرده است. مثلاً معادله (۱۷-۱۴) برای \mathbf{E} در مختصات دکارتی می شود

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} [\hat{x}E_x + \hat{y}E_y + \hat{z}E_z] \\ = \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\hat{x}E_x + \hat{y}E_y + \hat{z}E_z]$$

چون $I = -dq/dt$ ، در این صورت $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = 0$. به این ترتیب با وارد کردن جریان جابه جایی نتایج سازگار و معقولی را به دست می آوریم. ■

۲-۱۴ معادلات ماکسول در محیطهای ساده — معادله موج

اکنون معادلات ماکسول را در محیطهایی که روابط میکروسکوپی بین \mathbf{H} و \mathbf{B} و بین \mathbf{E} و \mathbf{D} هستند، یعنی $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ و $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ در نظر بگیرید. در این صورت μ و ε را ثابت یعنی مستقل از متغیرهای مکانی و زمانی فرض می کنیم. در واقع، برای میدانهای کاملاً دلخواه در محیطهای مادی این شرط به ندرت برآورده می شود. با این حال، در بسیاری از کاربردها این شرط با دقت کافی برآورده می شود به طوری که ارزش بررسی دقیق را دارد.

معادلات ماکسول [معادلات (۲-۱۴) تا (۵-۱۴)] تحت این شرایط را می توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\varepsilon} \quad (۷-۱۴)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۸-۱۴)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۹-۱۴)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}_f + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (۱۰-۱۴)$$

حالتی را در نظر می گیریم که در آن جریانها و چگالیهای بار خارجی وجود ندارد. جریانهای حاضر فقط به وسیله خود میدان الکتریکی با قانون اهم تولید می شوند؛ یعنی

$$\mathbf{J}_f = \sigma_c \mathbf{E}$$

با قرار دادن این شکل \mathbf{J}_f در معادله (۱۰-۱۴) به دست می آوریم

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \sigma_c \mathbf{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (۱۱-۱۴)$$

برای حل معادلات ماکسول برای \mathbf{E} ابتدا \mathbf{B} را حذف می کنیم. گرفتن تاو معادله (۹-۱۴) به دست می دهد

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (۱۲-۱۴)$$

با جایگزین کردن $\nabla \times \mathbf{B}$ از معادله (۱۱-۱۴) به دست می آوریم

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \sigma_c \mathbf{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (۱۳-۱۴)$$

که با سه معادله موج زده‌ای

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_i = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2}$$

که در آن i شاخص برای x, y, z است، هم‌ارز است. اما باید توجه کرد که این جداسازی متغیرها در دستگاه‌های مختصات دیگر به این سادگی انجام نمی‌شود.

۳-۱۴ امواج تخت در محیط‌های غیررسانا

۱-۳-۱۴ پدیده‌های موجی

در این بخش ساده‌ترین حالت یعنی معادله موج غیرمیرای همگن ($\sigma_c = 0$ و $\mathbf{J}_f = 0, \rho_f = 0$) مفروض در معادله (۱۷-۱۴) را در نظر می‌گیریم. ابتدا نشان می‌دهیم که این معادله دارای جواب هر تابع برداری که به متغیر $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt$ بستگی دارد، (جواب دالامبر مثال ۳-۱۴ را ببینید) است، یعنی

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt) \quad (18-14)$$

که در آن

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (19-14)$$

که نشان‌دهنده امواجی است که در جهت $\hat{\mathbf{k}}$ حرکت می‌کنند، و $\hat{\mathbf{k}}$ هر بردار یکه ثابتی است. متغیر $\xi \equiv \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt$ را در نظر بگیرید و \mathbf{A} را معرف \mathbf{E} یا \mathbf{B} انتخاب کنید. اکنون با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، مشتق‌گیری نسبت به x, y, z و t در معادله (۱۷-۱۴) را به مشتق‌گیری نسبت به ξ تغییر می‌دهیم:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{x}})$$

از این رو

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \xi^2} [(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2] \quad (20-14)$$

عبارت‌های مشابهی را برای y و z با تعویض x به y و z می‌توان نوشت. به این ترتیب داریم

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \xi^2} [(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 + (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{y}})^2 + (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{z}})^2]$$

یا

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \xi^2} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \xi^2} \quad (21-14)$$

به همین ترتیب داریم

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = -v \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi}$$

از این رو

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \xi^2} \quad (22-14)$$

قراردادن معادلات (۲۱-۱۴) و (۲۲-۱۴) در معادله (۱۷-۱۴) نشان می‌دهد که $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt)$ یک جواب این معادله است، و از این رو شکل بالا به درستی یک معادله موج است. سرعت موج را که با معادله (۱۹-۱۴) داده می‌شود به عبارت دیگر به صورت زیر می‌نویسیم

$$v = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{K K_m}} = \frac{c}{\sqrt{K K_m}} \quad (23-14)$$

که در آن $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$ است. به این ترتیب به محض داشتن c و دی‌الکتریک مؤثر نسبی K و گذردهی مؤثر نسبی K_m ، سرعت انتشار موج الکتریکی (مغناطیسی) در فضا به دست می‌آید.

اینکه ثابت c برحسب تصادف سرعت نور در خلا است و اینکه v سرعت نور در محیط‌های مادی با ثابت‌های K و K_m بودند یک کشف شگفت‌آور و ضروری بود که نشان داد نور و میدان‌های الکترومغناطیسی به‌طور ذاتی به هم مربوط‌اند. امروزه، می‌دانیم که در واقع مشخصه نور کاملاً الکترومغناطیسی است. توجه کنید که

$$n \equiv \frac{c}{v} = \sqrt{K K_m} \quad (24-14)$$

را ضریب شکست می‌نامیم. در بیشتر مواد $K_m \approx 1$ ، به این ترتیب $n = \sqrt{K}$. با این حال به یاد آورید اگرچه می‌توان رابطه $\mathbf{D} = \epsilon_0 K \mathbf{E}$ را برای مواد در میدان‌های ایستا به دست آورد، اما این امر رابطه مشابهی برای میدان‌های غیرایستا را تضمین نمی‌کند. و اگر چنین رابطه‌ای برای این میدانها برقرار باشد، هیچ‌گونه تضمینی وجود ندارد که K با ثابت به دست آمده برای حالت ایستا یکسان باشد.

میدانی به شکل $\mathbf{E}(z - vt)$ یا $\mathbf{E}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt)$ را یک موج تخت می‌نامیم زیرا در هر لحظه میدان همان مقدار را در تمام نقاط در صفحه عمود بر جهت انتشار—مثلاً در تمام صفحات عمود بر محور z در حالت اول و در تمام صفحات عمود بر $\hat{\mathbf{k}}$ در حالت دوم—دارد. توجه کنید جدا از این واقعیت که \mathbf{r} و t همواره باید در ترکیبات

بنابراین وقتی \mathbf{E} و \mathbf{B} امواج تخت باشند همواره بر حرکت موج عمودند. اکنون آنچه که $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ بر بستگی درونی دلالت می‌کند را تعیین می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که $\nabla \times \mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}} \times (\partial \mathbf{E} / \partial \xi)$. در مختصات دکارتی می‌نویسیم $\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times [\hat{\mathbf{x}} E_x + \hat{\mathbf{y}} E_y + \hat{\mathbf{z}} E_z]$. چون $\nabla \times f \mathbf{A} = \nabla f \times \mathbf{A} + f(\nabla \times \mathbf{A})$ در این صورت $\nabla \times \mathbf{E}$ می‌شود

$$\nabla \times \mathbf{E} = (\nabla E_x) \times (\hat{\mathbf{x}}) + (\nabla E_y) \times (\hat{\mathbf{y}}) + (\nabla E_z) \times (\hat{\mathbf{z}})$$

با استفاده از قاعده زنجیری شیب مؤلفه‌های میدان را می‌توان برحسب $\hat{\mathbf{k}}$ و ξ نوشت: $\nabla E_x = \hat{\mathbf{k}} (\partial E_x / \partial \xi)$. با جملات مشابهی برای ∇E_y و ∇E_z . بنابراین $\nabla \times \mathbf{E}$ به دست می‌آید

$$\nabla \times \mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial E_x}{\partial \xi} \right) \times \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial E_y}{\partial \xi} \right) \times \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \xi} \right) \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \times \mathbf{E}$$

یا همان طور که در بالا اشاره شد

$$\nabla \times \mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} \quad (28-14)$$

اکنون با استفاده از قاعده زنجیره‌ای $\partial \mathbf{B} / \partial t$ را برحسب ξ می‌نویسیم

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \xi} \quad (29-14)$$

با قراردادن این عبارتها در $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ در دست می‌آید

$$\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} = v \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \xi}$$

یا

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} - v \mathbf{B}) = 0 \quad (30-14)$$

که مستلزم آن است که برای جوابهای موج‌گونه \mathbf{E} بر \mathbf{B} عمود باشد

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = v \mathbf{B} \quad (31-14)$$

به این ترتیب چون $\hat{\mathbf{k}}$ و \mathbf{E} بر \mathbf{B} و بر یکدیگر عمودند، بردارهای $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}, \hat{\mathbf{k}}\}$ یک سه‌تایی راستگرد را تشکیل می‌دهند.

۱. اگر $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}} f(\xi)$ در آن صورت $(\partial \mathbf{E} / \partial \xi) = \hat{\mathbf{k}} (df / d\xi)$ و $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} (df / d\xi) \neq 0$ مگر آنکه $f(\xi) = \text{const.}$ اما برای امواج $f(\xi)$ ثابت نیست. بنابراین \mathbf{E} نمی‌تواند مؤلفه‌ای در امتداد $\hat{\mathbf{k}}$ داشته باشد.

نشان داده شده (جدای ضرایب ثابت) ظاهر شوند، شکل تابعی \mathbf{E} را مشخص نکردیم.

به طور کلی، برهم‌نهیهای این میدانها در معادله موج نیز صدق می‌کنند. مثلاً جواب ممکن است به شکل

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+(z - vt) + \mathbf{E}_-(z + vt)$$

باشد که نشان‌دهنده امواج تختی است که در هر دو جهت در امتداد محور z حرکت می‌کنند. اینکه آیا این امواج در یک حالت خاص وجود دارند، به منشأ امواج - یعنی به منبع میدانها و به شرایط مرزی که مسئله اعمال می‌کند، بستگی دارد. جواب عمومی معادله موج را می‌توان برهم‌نهی امواجی در نظر گرفت که در جهتهای x ، y و z به طرف جلو و عقب حرکت می‌کنند.

۱۴-۳-۲ بستگی درونی بین \mathbf{E} ، \mathbf{B} و $\hat{\mathbf{k}}$

تاکنون جوابهای معادلات موج در محیطهای ساده را (معادله ۱۴-۱۷) با شکل عمومی

$$\mathbf{B}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt) \quad \mathbf{E}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt)$$

به دست آوردیم، اما جهت‌های \mathbf{E} و \mathbf{B} نسبت به $\hat{\mathbf{k}}$ یا بستگیهای درونی آنها را تعیین نکردیم. برای به دست آوردن این اطلاعات این شکلهای موجی را در معادلات ماکسول همگن وارد می‌کنیم. برای استفاده از $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ، دیورژانس \mathbf{E} را برحسب $\hat{\mathbf{k}}$ و ξ می‌نویسیم. قاعده زنجیره‌ای در مختصات دکارتی به دست می‌دهد

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0$$

یا

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial \xi} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{x}}) + \frac{\partial E_y}{\partial \xi} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) + \frac{\partial E_z}{\partial \xi} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{z}})$$

به این ترتیب با توجه به

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}) = 0 \quad (25-14)$$

$\hat{\mathbf{k}}$ باید بر $\partial \mathbf{E} / \partial \xi$ عمود باشد، و در نتیجه $\hat{\mathbf{k}}$ بر \mathbf{E} نیز عمود باشد، یعنی

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (26-14)$$

همچنین با استفاده از همین فرایندها می‌توان نشان داد که $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ که مستلزم آن است که مانند بالا داشته باشیم

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (27-14)$$

با \hat{z} باشد، در این صورت \mathbf{E} و \mathbf{B} در صفحه xy واقع می‌شوند و می‌توان نوشت

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{x} E_{o_x} e^{i\phi_x} + \hat{y} E_{o_y} e^{i\phi_y} \quad (۳۹-۱۴)$$

که در آن E_{o_x} و E_{o_y} ثابتهای دامنه ثابت، و ϕ_x و ϕ_y ثابتهای فاز هستند. به این ترتیب معادله (۳۸-۱۴) برای این امواج جوابهای حقیقی زیر را به دست می‌دهد

$$\mathbf{E} = \hat{x} E_{o_x} \cos[\omega t - kz + \phi_x] + \hat{y} E_{o_y} \cos[\omega t - kz + \phi_y] \quad (۴۰-۱۴)$$

به همین ترتیب برای موج \mathbf{B} داریم

$$\mathbf{B} = \hat{x} B_{o_x} \cos[\omega t - kz + \phi'_x] + \hat{y} B_{o_y} \cos[\omega t - kz + \phi'_y] \quad (۴۱-۱۴)$$

که در آن B_{o_x} ، B_{o_y} ، ϕ'_x و ϕ'_y به ترتیب مشابه E_{o_x} ، E_{o_y} ، ϕ_x و ϕ_y که در بالا تعریف شدند، هستند.

اهمیت جوابهای معادلات ماکسول مثلاً معادلات (۴۰-۱۴) و (۴۱-۱۴) بر سادگی ریاضی این جوابها برتری دارد. این اهمیت به این علت است که هر قطار موجی را می‌توان به صورت یک برهم‌نهی خطی (برای مقادیر متفاوت ω و k) از امواج به شکل بالا در نظر گرفت.

وقتی با امواج تکفام سروکار داریم نگرانیهایی که قبلاً در ارتباط با روابط اساسی $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ و $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ذکر شد، تا حدودی از محدودیت کمتری برخوردار می‌شود. اکنون محیطها به صورت محیطهای غیر پاشنده یا پاشنده طبقه‌بندی می‌شوند. اگر محیط غیر پاشنده باشد، ϵ و μ و از این رو $\hat{\mathbf{E}}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ به ω وابسته نیستند. در محیطهای پاشنده ϵ و/یا μ و از این رو $\hat{\mathbf{E}}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ تابعی از ω خواهند بود. در این حالت، چون ϵ و μ به طور یکتا تعریف نمی‌شوند، معادلات (۱۴-۱۴) تا (۱۷-۱۴) اعتبار خود را از دست می‌دهند. با این حال، معادلات اساسی ماکسول [معادلات (۲-۱۴) تا (۵-۱۴)] معتبر باقی می‌مانند، و هنوز می‌توان جوابهای این معادلات را که شامل یک بسامد زاویه‌ای خاص ω هستند، به صورت سینوسی نسبت به زمان در نظر گرفت. در این صورت می‌توان مقادیر ϵ و μ را به ازای هر بسامد زاویه‌ای خاص ω (این مقادیر قابل اندازه‌گیری هستند) تعریف کرد. در این صورت، مثلاً به جای معادله (۱۷-۱۴) به دست می‌آوریم

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu(\omega) \epsilon(\omega) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (۴۲-۱۴)$$

سرانجام از $\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t$ با استفاده از عملیات بالا به دست می‌آوریم

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B} = -\frac{\mathbf{E}}{v} \quad (۳۲-۱۴)$$

که الزاماً همان معادله (۳۱-۱۴) است. همچنین معادلات (۳۱-۱۴) و (۳۲-۱۴) نشان می‌دهند که اندازه‌های \mathbf{E} و \mathbf{B} مستقل از یکدیگر نیستند. با در نظر گرفتن اندازه هر یک از دو معادله به دست می‌آوریم

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|} = v \quad (۳۳-۱۴)$$

در نتیجه می‌بینیم که \mathbf{E} و \mathbf{B} امواج عرضی هستند (باید باشند) که دارای وابستگی تابعی به ξ بوده و در هر لحظه از زمان متقابلاً بر یکدیگر عمودند. (در واقع، جمله $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ جهت انتشار موج را به دست می‌دهد که بادیسار مفیدی است). اما به یاد می‌آوریم که این نتایج عموماً فقط در محیطهایی معتبرند که K و K_m ثابتهای خوش‌تعریفی هستند. به طور خلاصه، معادلات دیفرانسیلی ماکسول [معادلات (۲-۱۴) تا (۵-۱۴)] مجموعه‌ای از معادلات جبری در حالتی می‌شوند که هیچ گونه منبعی وجود ندارد و میدانها امواج تخت هستند. این روابط [معادلات (۲۶-۱۴)، (۲۷-۱۴)، (۳۱-۱۴) و (۳۲-۱۴)] به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (۳۴-۱۴)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۳۵-۱۴)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = v \mathbf{B} \quad (۳۶-۱۴)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B} = -\frac{\mathbf{E}}{v} \quad (۳۷-۱۴)$$

۴-۱۴ جوابهای سینوسی (تکفام) برای معادلات ماکسول به عنوان دسته مهمی از جواب معادلات ماکسول که از اهمیت خاصی برخوردارند جوابهای (مختلطی) را به شکل زیر

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad \mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (۳۸-۱۴)$$

که در آنها $\hat{\mathbf{E}}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ دامنه‌های برداری مختلط مستقل از t و \mathbf{r} هستند در نظر می‌گیریم. کلاهکهای روی $\hat{\mathbf{E}}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ به معنی دامنه‌های برداری مختلط وابسته به بسامد زاویه‌ای سینوسی ω هستند. مثلاً اگر \mathbf{k} موازی

ظرافت خصوصیات ریاضی ساده امواج تخت تکفام را در عملگرهای دیفرانسیلی می‌بینیم. بنابراین، اگر $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}}e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ باشد، در این صورت $\partial \mathbf{E} / \partial x = i(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{x}})\mathbf{E}$ با جملات مشابهی برای مختصات y و z . به این ترتیب داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \quad (۴۳-۱۴)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (۴۴-۱۴)$$

به همین ترتیب، با مشتق‌گیری نسبت به زمان به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{E} \quad (۴۵-۱۴)$$

در حالت کلی، این خصوصیات را با عملیات هم‌ارز خلاصه می‌کنیم

$$\nabla * \{ \quad \} \rightarrow i\mathbf{k} * \{ \quad \} \quad \frac{\partial}{\partial t} \{ \quad \} \rightarrow -i\omega \{ \quad \} \quad (۴۶-۱۴)$$

علامت * به معنی عملهای ∇ بر روی یک کمیت برداری یا نرده‌ای $\{ \quad \}$ است. به این ترتیب، مشتق‌گیری امواج تخت تکفام از نوعی که با معادله (۳۸-۱۴) داده می‌شود، با ضرب کردن هم‌ارز می‌شود. با این هم‌ارزی معادلات ماکسول را برای امواج تخت تکفام بازنویسی می‌کنیم. به این ترتیب، برای مواد ساده ($\rho_f = 0$ و $\mathbf{J}_f = 0$)، معادلات (۳۴-۱۴) تا (۳۷-۱۴) به صورت

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{D}} = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0 \quad (۴۷-۱۴)$$

$$\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}} = \omega \hat{\mathbf{B}} \quad \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{B}} = -\frac{1}{v^2} \omega \hat{\mathbf{E}}$$

در می‌آیند.

اکنون به خوبی مشخص می‌شود که امواج رادیویی، میکروموجها، تابش جسم سیاه، امواج نوری، پرتوهای x ، و پرتوهای γ همگی تابش الکترومغناطیسی هستند. جدول ۲-۱۴، انواع مختلف تابش الکترومغناطیسی که با طول موج (و بسامد) مشخص می‌شوند را نشان می‌دهد. بسامد یا طول موج، آنها را از هم جدا می‌کند. دقت کنید که طول موج با

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (۴۸-۱۴)$$

داده می‌شود، زیرا جمله $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ در نمره‌های مسافتی s مقادیر یکسانی دارند که با $2\pi/k$ داده می‌شود. به این ترتیب در فضای آزاد داریم

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \equiv \frac{1}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}$$

که از آن، به‌سادگی ثابت می‌شود عبارتی به شکل (۳۸-۱۴) تا وقتی که $k = 2\pi/\lambda = \omega/\sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}$ جواب است.

برای محیطهای غیرپاشنده سرعت موج $v = \omega/k = c/\sqrt{K K_m}$ مستقل از ω و یکتاست. چون امواج حقیقی EM به صورت برهم‌نهایی امواج تکفام نمایش داده می‌شوند، امواج حقیقی داخل این محیطها بدون تغییر شکل در فضا یا زمان حرکت می‌کنند. از طرف دیگر سرعت موج در یک محیط پاشنده تابعی از ω است و یکتا نیست، بنابراین امواج حقیقی ضمن گسترش در محیط تغییر شکل می‌دهند (مؤلفه‌های آنها "پاشیده" می‌شوند).

به این ترتیب تا وقتی که ϵ و μ ثابتهای نرده‌ای (مستقل از مکان یا شدت میدان) هستند که در بسامد ω تعریف می‌شوند، نتایج قبل برای امواج تکفام معتبر است. مواد همگن یکنواخت خطی معمولاً این نیازها را برآورده می‌کنند و ساده‌تکفام‌گونه نام دارند. مواد غیربلوری (مثلاً مایعات و گازها) از این نوع هستند.

تأکید می‌کنیم که در این نوع مواد، مقادیر K (یا K_m) که باید در رابطه $v/c = 1/\sqrt{K K_m}$ استفاده شوند از بسامد برانگیزش ω تعیین می‌شوند، و در حالت کلی مقادیر به دست آمده تحت شرایط ایستا ($\omega = 0$) نیستند. (جدول ۱-۱۴) که در آن $K_m = 1$ ، این موضوع را نشان می‌دهد. آب و الکل اتیل تحت شرایط ایستا و در $10^{14} \times 27 \times 50 \times 2\pi \text{ rad/s} = \omega$ (نور زرد سدیم) مقادیر $n (= c/v)$ بسیار متفاوتی دارند. تمایل کلی $n = \sqrt{K}$ آن است که وقتی $\omega \rightarrow \infty$ ، $n \rightarrow 1$ اما رفتار یکنواخت نیست. دلیل این امر آن است که مقدار K نشان‌دهنده تمایل دوقطبیهای الکتریکی مولکولی به جهت‌گیری در امتداد میدان EM نوسانگر است. چون با افزایش بسامد نوسان میدان، دنبال کردن میدان برای دوقطبیها بسیار مشکلتر می‌شود، وقتی $\omega \rightarrow \infty$ میل می‌کند، قطبش به سمت صفر و K به سمت واحد میل می‌کند.

جدول ۱-۱۴ اثر پاشندگی

ماده	K (ایستا)	n (نور زرد سدیم)
هوا	۱٫۰۰۰۲۹۴	۱٫۰۰۰۲۹۳
بنزن	۱٫۴۸۹	۱٫۴۸۲
آب	۸٫۹۴	۱٫۳۳۳
الکل اتیل	۵٫۱	۱٫۳۶

جدول ۲-۱۴ لیست طول موجهای نوعی از نواحی مختلف طیف الکترومغناطیسی

نوع	λ (متر)	بسامد (هرتز)	توصیف
پرتوهای γ	$10^{-12} \times 10^{-12}$	2.418×10^{20}	فوتون گامای ۱ MeV
پرتوهای X	$10^{-11} \times 10^{-7}$	1.8×10^{19}	لوله ۷۵ kV برای تشخیص پزشکی
فرابنفش	$10^{-7} \times 10^{-7}$	2.465×10^{15}	خط اول سری لیمان (هیدروژن)
حد مرئی	$10^{-7} \times 10^{-7}$	7.9×10^{14}	کوتاهترین طول موج مرئی تقریبی
بنفش	$10^{-7} \times 10^{-7}$	6.879×10^{14}	خط بنفش جیوه
آبی مایل به سبز	$10^{-7} \times 10^{-7}$	6.167×10^{14}	جیوه، خط دوم در سری بالمر (هیدروژن)
سبز	$10^{-7} \times 10^{-7}$	5.490×10^{14}	خط سبز جیوه
زرد	$10^{-7} \times 10^{-7}$	5.102×10^{14}	خط زرد هلیم
زرد-نارنجی	$10^{-7} \times 10^{-7}$	5.087×10^{14}	دوگانه سدیم (۵۸۹۰ و ۵۸۹۶ آنگستروم)
سرخ	$10^{-7} \times 10^{-7}$	4.657×10^{14}	نور لیزر نئون-هلیم (گذار نئون)
سرخ	$10^{-7} \times 10^{-7}$	4.568×10^{14}	H α اولین خط از سری بالمر (هیدروژن)
حد مرئی	$10^{-7} \times 10^{-7}$	3.8×10^{14}	بلندترین طول موج مرئی تقریبی
فروسرخ	$10^{-6} \times 10^{-6}$	2.1×10^{14}	قله تابش جسم سیاه در ۲۰۰۰ K
فروسرخ	$10^{-5} \times 10^{-5}$	8.738×10^{13}	متغیرترین پیوند C-H در CH $_4$
میکروموج	$10^{-2} \times 10^{-2}$	1.153×10^{11}	پایینترین بسامد در طیف چرخشی CO
میکروموج	$10^{-2} \times 10^{-2}$	2.387×10^{10}	خط وارون آمونیاک
میکروموج	$10^{-2} \times 10^{-2}$	1.0×10^{10}	رادار
میکروموج	$10^{-1} \times 10^{-1}$	1.420×10^9	خط طیفی جدا در تابش کهکشانی کلی (گذار فوق‌ریز در حالت پایه هیدروژن)
رادیویی	3.34	8.97×10^7	پخش FM
رادیویی	5.3	5.7×10^7	تلویزیون
رادیویی	9.3	3.2×10^7	یکی از آزمایشهای اولیه هرتز
رادیویی	$10^2 \times 10^2$	7.1×10^5	پخش AM استاندارد

موج زده‌ای که به متغیرهای x و y بستگی دارد را در نظر می‌گیریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

انتخاب $\bar{x} = x + y$ و $\bar{y} = x - y$ معادله را به

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} = 0$$

تبدیل می‌کند که با توجه به آن در حالت کلی داریم

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{x}} = \Phi(\bar{x})$$

در صورتی که در مواد ساده (ضریب شکست $n \equiv$).

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} \equiv \frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi f n}{c}$$

چون تعداد $k/2\pi$ طول موج بر واحد مسافت وجود دارد، کمیت k را گاهی اوقات عدد موج، و k را بردار موج می‌نامند.

مثال ۳-۱۴ جواب دالامبر برای معادله موج

فرایندی را که در بالا برای به‌دست آوردن جواب معادله (۱۴-۱۸) به‌کار بردیم، جواب دالامبر نامیده می‌شود. این فرایند در واقع دو جواب دارد: $f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - vt)$ و $g(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + vt)$ ، که در آن \mathbf{f} و \mathbf{g} توابع اختیاری هستند. برای نشان دادن وجود دو جواب یک حالت خاص از معادله

که در آن $\hat{\epsilon}$ برداری یکه است که جهت میدان الکتریکی (یا، به عبارت دیگر قطبش میدان الکتریکی) را تعریف می‌کند و ϕ زاویه فاز است. دامنه \mathbf{E} با عدد حقیقی E_0 داده می‌شود که آن را از رابطه $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = E_0^2$ به دست می‌آوریم. میدان حقیقی با انتخاب بخش حقیقی معادله (۴۹-۱۴) یا

$$\mathbf{E} = \hat{\epsilon} E_0 \cos[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi]$$

محاسبه می‌شود. بردار \mathbf{B} وابسته به آن شکلی مانند معادله (۴۹-۱۴) دارد، یعنی

$$\mathbf{B} = \hat{\beta} B_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi')} \quad (50-14)$$

که در آن ϕ' مانند ϕ زاویه فاز است، و $\hat{\beta}$ برداری یکه است که جهت میدان مغناطیسی (قطبش میدان مغناطیسی) را تعریف می‌کند. از معادلات (۴۷-۱۴)، که خصوصیات امواج تخت را خلاصه می‌کنند، می‌فهمیم که برای هر موج تخت قطبیده خطی، بردارهای یکه $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\beta}$ در معادله زیر صدق می‌کنند

$$\hat{\epsilon} \times \hat{\beta} = \hat{\mathbf{k}} \quad (51-14)$$

و دامنه‌های \mathbf{E} و \mathbf{B} در معادله زیر صدق می‌کنند

$$|\mathbf{E}| = v|\mathbf{B}| \quad (52-14)$$

باید دقت کنیم که معمولاً قطبش امواج الکترومغناطیسی با قطبش بردار میدان الکتریکی $\hat{\epsilon}$ داده می‌شود.

انواع دیگر قطبش را می‌توان با برهم‌نهی امواج تخت قطبیده خطی به وجود آورد. مثلهایی از این قطبشهای بیضوی و دایره‌ای هستند. برای مشاهده این اثرها، بردارهای الکتریکی دو موج تخت قطبیده خطی \mathbf{E}_1 و \mathbf{E}_2 را که در جهت $\hat{\mathbf{k}} \equiv \hat{\mathbf{z}}$ حرکت می‌کنند در نظر بگیرید. فرض کنید \mathbf{E}_1 در جهت $\hat{\mathbf{x}}$ و \mathbf{E}_2 در جهت $\hat{\mathbf{y}}$ قطبیده باشد. حاصل جمع این بردارها نیز یک موج تخت $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ است. با استفاده از نمادگذاری معادله (۴۹-۱۴)، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= [\hat{\mathbf{x}}E_{0x} e^{-i\phi_x} + \hat{\mathbf{y}}E_{0y} e^{-i\phi_y}] e^{-i(\omega t - k z)} \\ &\equiv \hat{\mathbf{E}} e^{-i(\omega t - k z)} \end{aligned} \quad (53-14)$$

موج حقیقی مطابق با آن عبارت است از

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}E_{0x} \cos[\omega t - k z + \phi_x] + \hat{\mathbf{y}}E_{0y} \cos[\omega t - k z + \phi_y] \quad (54-14)$$

که در آن $\Phi(\bar{x})$ فقط تابعی از \bar{x} است، و با توجه به آن به نوبه خود داریم

$$u = \int_0^{\bar{x}} \Phi(\bar{x}) d\bar{x} + f_2(\bar{y})$$

یا

$$u = f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{y}) = f_1(x+y) + f_2(x-y)$$

که نشان دهنده دو جواب است که در جهت‌های مخالف حرکت می‌کنند.

مثال ۴-۱۴ بستگی درونی بین \mathbf{E} ، \mathbf{B} و \mathbf{k}

این مثال بستگی بین دامنه‌های میدان و بردار انتشار را نشان می‌دهد. یک موج الکترومغناطیسی در فضای آزاد را که میدان الکتریکی آن با معادله زیر

$$\mathbf{E} = \epsilon_0 \hat{\mathbf{x}} e^{-i(10^8 t + \beta z)} \text{ V/m}$$

داده می‌شود، در نظر بگیرید. اکنون از خصوصیات \mathbf{E} ، \mathbf{B} و \mathbf{k} برای تعیین تمام جزئیات موج استفاده می‌کنیم. جهت انتشار موج را می‌توان با نمای تابع‌نمایی امتحان کرد. با مقایسه $-10^8 t - \beta z$ با $-\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ ، نتیجه می‌گیریم که جهت انتشار، $\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{z}}$ است. این جهت با خاصیت $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = 0$ مطابقت دارد. همچنین، این مقایسه به دست می‌دهد $\omega/|\mathbf{k}| = c = 10^8/\beta$ که به این ترتیب داریم $\beta = |\mathbf{k}| = 1/3 \text{ m}^{-1}$

شکل میدان مغناطیسی این موج شبیه به میدان الکتریکی است

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-i(10^8 t + \beta z)}$$

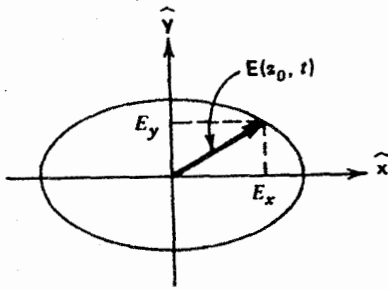
که \mathbf{B}_0 باید محاسبه شود. با استفاده از خاصیت $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} = 0$ و $\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = v\mathbf{B}$ ، می‌فهمیم که $-\hat{\mathbf{y}}$ باید در جهت میدان مغناطیسی باشد. دامنه \mathbf{B}_0 را می‌توان در رابطه کلی $|\mathbf{E}|/|\mathbf{B}| = v = c$ تعیین کرد که به دست می‌دهد $B_0 = \epsilon_0/c$. به این ترتیب

$$\mathbf{B} = (-\epsilon_0/c)\hat{\mathbf{y}} \exp[i(10^8 t + 1/3 z)] \text{ T}$$

۵-۱۴ قطبش امواج تخت

اگر میدان الکتریکی یک موج تخت در امتداد جهتی ثابت در فضا جهتگیری کند، آن موج را اصطلاحاً قطبیده خطی می‌گویند. شکل یک موج تخت قطبیده خطی عبارت است از

$$\mathbf{E} \equiv \hat{\epsilon} E_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi)} \quad (49-14)$$



شکل ۳-۱۴ رد نوک میدان الکتریکی در یک نقطه مفروض از فضا به صورت تابعی از زمان برای حالت قطبش بیضی.

اگر $\phi_x \neq \phi_y$ باشد این امواج برابند [معادله (۵۳-۱۴) و (۵۴-۱۴)] را اصطلاحاً قطبیده بیضی می‌نامند. باید توجه کنید که اگر $\phi_x = \phi_y \equiv \phi$ باشد، این امواج قطبیده خطی هستند، زیرا \mathbf{E} به صورت زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{E} = (\hat{x}E_{0x} + \hat{y}E_{0y}) \cos[\omega t - kz + \phi]$$

$$\equiv \hat{e}E_0 \cos[\omega t - kz + \phi]$$

که در آن \hat{e} برداری یکه ثابت در صفحه xy است، به این دلیل این موج را اصطلاحاً قطبیده می‌نامند که در هر نقطه از یک صفحه مفروض که در آن $z = \text{const.} \equiv z_0$ است، نوک بردار \mathbf{E} یک بیضی را با زمان جاروب می‌کند. مثالهای زیر را که در آنها جهت \mathbf{E} و دامنه آن ثابت نیستند در نظر بگیرید.

یا

$$\mathbf{E} = [\hat{x}E_{0x} \pm i\hat{y}E_{0y}] e^{-i(\omega t - kz + \phi)} \quad (۵۶-۱۴)$$

مثال ۵-۱۴ قطبش بیضی

موج تخت معادله (۵۴-۱۴) را در نظر بگیرید. حالت خاصی از قطبش بیضی وقتی است که $\phi_x = \phi$ و $\phi_y = \phi \pm \pi/2$ باشد. در این صورت در صفحه $z = z_0$ داریم

مثال ۶-۱۴ قطبش دایره‌ای

در مثال قبل، اگر قرار دهیم $E_{0x} = E_{0y} \equiv E_0$ در حالی که شرط فاز را نگه داریم - یعنی $\phi_x = \phi$ و $\phi_y = \phi \pm \pi/2$ - در این صورت با نمادگذاری مختلط به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E} = \hat{x}E_{0x} \cos[\omega t - kz_0 + \phi] + \hat{y}E_{0y} \sin[\omega t - kz_0 + \phi]$$

$$\equiv \hat{x}E_x + \hat{y}E_y$$

$$\mathbf{E} = [\hat{x} \pm i\hat{y}] E_0 e^{-i(\omega t - kz + \phi)} \quad (۵۷-۱۴)$$

و در نمادگذاری حقیقی به دست می‌آوریم

از این رو می‌بینیم که

$$\mathbf{E} = E_0 \{ \hat{x} \cos[\omega t - kz + \phi] \pm \hat{y} \sin[\omega t - kz + \phi] \}$$

$$(۵۸-۱۴)$$

از این رو معادله (۵۵-۱۴) می‌شود

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 = \cos^2 \Omega + \sin^2 \Omega = 1 \quad (۵۵-۱۴)$$

که معادله یک دایره به شعاع E_0 است. همچنین مستقیماً می‌توان نشان داد که با نمادگذاری حقیقی $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = E^2 = E_0^2$ است. دامنه \mathbf{E} ثابت باقی می‌ماند، هر چند که جهت آن می‌چرخد. این را قطبش دایره‌ای می‌نامیم، شکل ۴-۱۴ میدان الکتریکی را در صفحه $z = 0$ (یا $\phi = 0$) به ازای $\pi, 3\pi/4, \pi/2, \pi/4, 0, \pi$ نشان می‌دهد و نشان‌دهنده آن است که \mathbf{E} قطبیده دایره‌ای است.

که در آن $\Omega = \omega t - kz_0 + \phi$. این معادله برای مؤلفه‌های \mathbf{E} معادله یک بیضی به ترتیب با قطرهای بزرگ و کوچک E_{0x} و E_{0y} است (شکل ۳-۱۴ را ببینید). اینکه \mathbf{E} در جهت ساعتگرد (cw) یا پادساعتگرد (ccw) حرکت می‌کند را می‌توان با در نظر گرفتن مقادیر افزایشی پی‌درپی ωt فهمید. بنابراین، در $\phi_y = \phi \pm \pi/2$ ، \mathbf{E} برای علامت (+) در جهت ساعتگرد و برای علامت (-) در جهت پادساعتگرد حرکت می‌کند. اصطلاحاً حالت ccw را هلیسیته مثبت و حالت cw را هلیسیته منفی می‌گویند. هلیسیته مثبت یعنی \mathbf{E} در فضا به صورت یک پیچ راستگرد می‌چرخد. اگر جهت پیشرفت آن در جهت حرکت، \hat{k} باشد این قطبش بیضی خاص را با استفاده از معادله (۵۳-۱۴) با نمادگذاریهای مختلط نیز می‌توان نوشت

جالب است که درست همان طور که یک موج قطبیده دایره‌ای را می‌توان به صورت جمع برداری امواج قطبیده خطی در نظر گرفت، یک موج قطبیده خطی را می‌توان به صورت یک مجموعه از امواج قطبیده دایره‌ای با هلیسیته متضاد ملاحظه کرد. برای این منظور موج

$$\mathbf{E} = [\hat{x}E_{0x} e^{i\phi} + \hat{y}E_{0y} e^{i(\phi \pm \pi/2)}] e^{-i(\omega t - kz)}$$

۱. فرض کنید یک میدان EM در فضا و خصوصاً در حجم V که سطح آن S است وجود دارد.

۲. فرض کنید یک چگالی انرژی u در ارتباط با این میدان وجود دارد. در این صورت کل انرژی EM در V با معادله $U = \int_V u dv$ داده می‌شود.

۳. فرض کنید این انرژی طوری برقرار است که از سطح V یک شارش خروجی انرژی وجود دارد. به این ترتیب فرض کنید یک میدان برداری داریم که در تمام نقاط تعریف شده است و جهت شارش انرژی و دامنه آن را در هر نقطه ارائه می‌دهد. در این صورت شار F انرژی گذرنده از S عبارت است از

$$F \equiv \oint S \cdot da \quad (۶۳-۱۴)$$

که در آن S بردار شار انرژی گفته شده در بالاست.

۴. فرض کنید dW/dt آهنگ کار انجام شده توسط میدان EM در داخل V بر روی باری باشد که ممکن است در آنجا حضور داشته باشد. کار انجام شده توسط این بار ممکن است به صورت یک افزایش در انرژی جنبشی آن، یا افزایش در انرژی جنبشی ماده‌ای که بار در آن وارد شده است یا افزایش در "انرژی شیمیایی" این ماده یا غیر از این، آشکار شود. در هر حالت، این توان که میدان EM مصرف می‌کند به شکل [معادله (۷۴-۷)] را ببینید

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv \quad (۶۴-۱۴)$$

است که در آن \mathbf{J} چگالی جریان بارهای مربوطه است.

۵. در این صورت پایستاری اصل انرژی: [ماناست] به صورت زیر

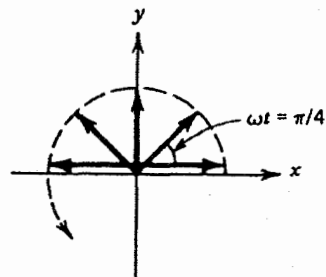
$$-\frac{dU}{dt} = \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} + \frac{dW}{dt}$$

یا

$$-\int \frac{\partial u}{\partial t} dv = \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} + \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv \quad (۶۵-۱۴)$$

بیان می‌شود.

به طور خلاصه، اگر انرژی میدان EM در V کم شود (به علامت منها توجه کنید)، حاصل جمع شار انرژی EM خروجی از V و کار انجام شده توسط \mathbf{E} بر روی بارهای داخل V باید متقابلاً زیاد شود. بخصوص، اگر $\mathbf{J} = 0$ باشد، کاهش در انرژی EM در V با یک شار انرژی EM خارج از V همراه است. توجه کنید که چون $\int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \int \nabla \cdot \mathbf{S} dv$



شکل ۱۴-۴ رد پای نوک میدانی الکتریکی در صفحه $z = 0$ به صورت تابعی از زمان برای یک موج قطبیده دایره‌ای که در امتداد محور z حرکت می‌کند.

تخت قطبیده خطی زیر که با نمادگذاری مختلط معادله (۱۴-۴۹) نوشته می‌شود را تا جایی که E'_x و E'_y همفاز هستند در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}}E = \hat{\mathbf{x}}E'_x + \hat{\mathbf{y}}E'_y = (\hat{\mathbf{x}}E_{0x} + \hat{\mathbf{y}}E_{0y})e^{-i(\omega t - kz + \phi)} \quad (۶۰-۱۴)$$

با استفاده از معادله (۱۴-۵۷) حاصل جمع امواج قطبیده دایره‌ای با هلیسیت متضاد به صورت

$$\mathbf{E} = \alpha[\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}] + \beta[\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}] \quad (۶۱-۱۴)$$

نوشته می‌شود. معادلات (۱۴-۶۰) و (۱۴-۶۱) یکسان هستند اگر α و β را به صورت زیر انتخاب کنیم

$$\beta = \frac{1}{2}[E'_x - iE'_y] \quad \alpha = \frac{1}{2}[E'_x + iE'_y] \quad (۶۲-۱۴)$$

■

۱۴-۶ پایستاری انرژی الکترومغناطیسی - قضیه پوئینتینگ

اکنون یک نتیجه مهم و مفید را به دست می‌آوریم که به ما کمک می‌کند تا مفاهیم انرژی را با میدان الکترومغناطیسی پیوند دهیم. این نتیجه راهی را برای تفسیر جریان انرژی با حرکت امواج تخت در فضا نشان می‌دهد. این نتیجه کلی‌تر از قبل هر نقطه از فضا را که در آنجا میدان EM وجود دارد، با یک چگالی انرژی پیوند می‌دهد.

برای به دست آوردن این نتیجه اصل پایستاری انرژی را بر میدان EM اعمال می‌کنیم. میدان اخیر به صورت زیر فرمولبندی می‌شود:

و از این رو $u_M \equiv (\nu/2\mu)B^2$ و اینکه

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (E^2)$$

و از این رو $u_E = (\nu/2)\epsilon E^2$ هویت $\partial u/\partial t$ در معادله (۶۶-۱۴) منطقی به نظر می‌رسد. از این رو $u = u_M + u_E$. همچنین u را می‌توان به صورت

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (۶۹-۱۴)$$

نوشت. اینها درست همان عبارتهایی هستند که قبلاً برای مجموعه بار ساکن و توزیعهای جریان با آنها مواجه بودیم [معادلات (۵۹-۶) و (۲۳-۱۲)] را ببینید. [در فضای آزاد، $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ و $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ و به این ترتیب $u_E = (\nu/2)\epsilon_0 E^2$ و $u_M = (\nu/2\mu_0)B^2$]. با این حال به طور کلی‌تر در مواد غیر ساده به سادگی هویت

$$(\partial u_E/\partial t) = \mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{D}/\partial t)$$

را فرض می‌کنیم به طوری که^۱

$$u_E = \int_{0,0}^{E,t} \frac{\partial u_E}{\partial t} dt = \int_{0,0}^{E,t} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dt = \int_0^E \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \quad (۷۰-۱۴)$$

و $(\partial u_M/\partial t) = \mathbf{H} \cdot (\partial \mathbf{B}/\partial t)$ ، به طوری که

$$u_M = \int_0^B \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt = \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (۷۱-۱۴)$$

در این حالت بردار \mathbf{D} به صورت تابعی از \mathbf{E} و زمان در نظر گرفته می‌شود. به همین ترتیب \mathbf{H} تابعی از \mathbf{B} و زمان است.

در این نقطه \mathbf{S} را به صورت شارش انرژی برای امواج EM تفسیر می‌کنیم. یک موج تخت تکفام قطبیده خطی که در راستای $\hat{\mathbf{k}}$ فضای آزاد یا در محیط دی‌الکتریک ساده ($\sigma_c = 0$) حرکت می‌کند را در نظر بگیرید. چون $\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = v\mathbf{B}$ ، در این صورت $E = vB$ به این ترتیب

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{k}} \frac{E^2}{v\mu} \quad (۷۲-۱۴)$$

یا، برحسب μ و ϵ محیط

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{k}} \frac{E^2}{\sqrt{\mu/\epsilon}} = \hat{\mathbf{k}} \frac{E^2}{\eta} \quad (۷۳-۱۴)$$

۱. فرض می‌کنیم $u_E = 0$ وقتی $\mathbf{E} = 0$ و $u_M = 0$ وقتی $\mathbf{B} = 0$ باشد.

و فرض می‌شود که معادله (۶۵-۱۴) برای حجمهای اختیاری V معتبر باشد، داریم

$$\int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \right) dv = 0$$

که شکل دیفرانسیلی اصل پایستگی انرژی را نشان می‌دهد

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{S} \quad (۶۶-۱۴)$$

این شکل دیفرانسیلی را قضیه پوینتینگ نیز می‌نامیم.

می‌خواهیم \mathbf{S} و $\partial u/\partial t$ را پیدا کنیم. در زیر فرض می‌کنیم که \mathbf{J} چگالی جریان آزاد \mathbf{J}_f است. اگر این طور باشد، در این صورت ضرب نرده‌ای آن با \mathbf{E} با معادله (۵-۱۴) به دست می‌دهد

$$\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} = \left[\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

با استفاده از اتحاد برداری

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} - (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}$$

داریم

$$\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

با قراردادن $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ به دست می‌آوریم

$$\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (۶۷-۱۴)$$

در مقایسه این نتیجه با معادله (۶۶-۱۴) می‌فهمیم که

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (۶۸-۱۴)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

برداز \mathbf{S} را که در معادله (۶۸-۱۴) مشخص می‌شود، بردار پوینتینگ می‌نامیم. این بردار چگالی شار انرژی میدان EM است. با این حال توجه کنید که این انتخاب \mathbf{S} یکتا نیست؛ مثلاً، تاو هر تابع برداری را بدون آنکه تغییری در رابطه اساسی مفروض در معادله (۶۶-۱۴) ایجاد شود، می‌توان به \mathbf{S} اضافه کرد. با این ملاحظات که در محیطهای ساده ($\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$)

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial t} (B^2)$$

موارد میدانها در نمادگذاری مختلط به طور ساده تری محاسبه می شوند، و به این ترتیب مفید است که مستقیماً با استفاده از نمادگذاری مختلط \mathbf{E} و \mathbf{B} ، $\langle \mathbf{S} \rangle$ را محاسبه کنیم. با استفاده از میدانهای حقیقی از تعریف \mathbf{S} شروع می کنیم

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \text{Re}\{\mathbf{E}\} \times \text{Re}\{\mathbf{H}\} \rangle$$

با استفاده از رابطه $\text{Re}\mathbf{A} = 1/2(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$ ، به دست می آوریم

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{4}[\langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle + \langle \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}^* \rangle + \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H} \rangle]$$

با نوشتن $\mathbf{E} = \mathbf{E}(r)e^{-i\omega t}$ و $\mathbf{H} = \mathbf{H}(r)e^{-i\omega t}$ و میانگین گرفتن بر روی یک دوره $T = 2\pi/\omega$ ، اولین دو جمله صفر می شود، و نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{4}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{1}{4} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \\ &= \frac{1}{4} \text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (78-14)$$

به همین ترتیب می توان نشان داد که

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4} \text{Re}[\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}^*] \quad (79-14)$$

مثال ۷-۱۴ میدانهای یک باریکه لیزری

باریکه های لیزری (لیزر هلیوم-نئون) 100 W/mm^2 که میدانهای EM آنها امواج پیوسته (CW) هستند به سادگی به دست می آیند. rms میدانهای EM ، این باریکه ها و میانگین چگالی انرژی در این باریکه را محاسبه می کنیم. از معادله (۷۷-۱۴) به دست می آوریم

$$\langle u \rangle = \langle S \rangle / c = 100 / (10^{-6} \times 3 \times 10^8) = 0.33 \text{ J/m}^3$$

از معادلات (۷۶-۱۴) و (۷۷-۱۴) به دست می آوریم

$$E_{rms}^2 = c\eta \langle u \rangle = \eta \langle S \rangle = 377 \times 10^8 \text{ V}^2/\text{m}^2$$

$$\text{یا } E_{rms} = 19.4 \times 10^4 \text{ V/m}$$

$$B_{rms} = E_{rms}/c = 6.5 \times 10^{-2} \text{ T} (= 65 \text{ G})$$

مثال ۸-۱۴ شارش جریان پایا در یک سیم

همان طور که در شکل ۵-۱۴ نشان داده شده است، قسمتی از یک سیم به شعاع a و رسانندگی σ_c را با اختلاف پتانسیل V در امتداد

واحد کمیت $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ اهم است و آن را امپدانس ذاتی ماده می نامیم. در فضای آزاد $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 377\Omega$ ، که امپدانس فضای آزاد است. اکنون چگالی انرژی $u = u_E + u_M$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$u = \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 = \epsilon E^2 = \frac{E^2}{\mu v^2} \quad (74-14)$$

به این ترتیب، انرژی EM به طور مساوی بین میدانهای الکترومغناطیسی تقسیم می شود، $u_E = u_M = 1/2u$ ، به علاوه، اگر v را به صورت بردار در جهت انتشار در نظر بگیریم. در این صورت مقایسه معادلات (۷۲-۱۴) و (۷۴-۱۴) به دست می دهد

$$u\mathbf{v} = \mathbf{S} \quad (75-14)$$

می بینیم که چگالی انرژی EM ضربدر سرعت امواج مساوی است با بردار پوئین تینگ. در این صورت گویی انرژی بر واحد حجم با یک سرعت \mathbf{v} حرکت می کند، بنابراین شارش انرژی از هر جزء سطح da برابر است با $\mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = u\mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}$ که شبیه به رابطه بین چگالی بار و چگالی جریان [معادله (۶-۷)] را ببینید] است که در آن با انتخاب $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{J}$ و $u \rightarrow \rho$

$$\rho\mathbf{v} = \mathbf{J}$$

اکنون کمیتی را معرفی می کنیم که در بحث تابش الکترومغناطیسی مفید است. این کمیت عبارت است از دامنه میانگین زمانی بردار پوئین تینگ، این کمیت شدت تابش $|\langle \mathbf{S} \rangle|$ ، یا به سادگی $\langle S \rangle$ نامیده می شود. توجه کنید که برای یک موج تخت $\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{e}} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$

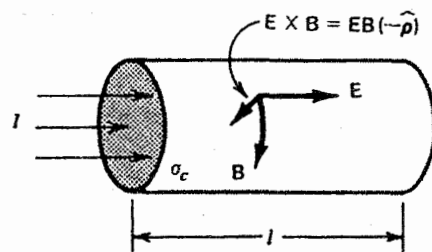
$$\langle \mathbf{S} \rangle = \hat{\mathbf{k}} \frac{E_0^2}{\eta} \langle \cos^2[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \rangle = \frac{\hat{\mathbf{k}} E_{rms}^2}{\eta} \quad (76-14)$$

که در آن η امپدانس محیط با گذردهی و تراوایی ϵ و μ است. در این صورت شدت برابر است با E_{rms}^2/η با $\langle S \rangle \equiv \sqrt{\langle \mathbf{S} \rangle \cdot \langle \mathbf{S} \rangle}$. شدت را می توان به چگالی انرژی EM نیز مربوط کرد. با استفاده از (۷۵-۱۴) به دست می آوریم

$$\langle S \rangle = \langle u \rangle v \quad (77-14)$$

توجه کنید که تمام جملات در قضیه پوئین تینگ: چگالی انرژی u ، بردار پوئین تینگ \mathbf{S} ، و $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ ، همان طور که در بالا تعریف شدند، از میدانهای الکترومغناطیسی حقیقی استفاده می کنند. با این حال در بسیاری از

تلف می‌شود. اما همچنین انرژی با بارها در امتداد سیم حمل می‌شود. آیا انرژی از سطوح جانبی یا از دو انتهای سیم وارد می‌شود؟ تعبیر صحیح شارش انرژی را نمی‌توان تحلیل کرد، اما در واقع این تعبیر برای مسائل استاتیکی مهم است. پایستاری انرژی باید در هر حالت برقرار باشد.



شکل ۵-۱۴ استفاده از قضیه پوینتینگ برای شارش جریان در یک سیم.

مثال ۹-۱۴ شارش جریان پایا در یک کابل هم‌محور به‌عنوان مثال دیگری از قضیه پوینتینگ، یک کابل هم‌محور با مقاومت ناچیز را در نظر می‌گیریم (شکل ۶-۱۴). اگر این کابل بین یک منبع با emf ثابت و یک بار قرار گیرد، یک جریان پایا I از کابل عبور می‌کند. اگر emf یک اختلاف پتانسیل ثابت V را به‌وجود آورد، این منبع در کابل توانی به اندازه VI ایجاد می‌کند.

با استفاده از بردار پوینتینگ می‌خواهیم آهنگ عبور انرژی از کابل را محاسبه کنیم. اگر فرض کنیم فضای بین رساناهای داخلی و خارجی (به ترتیب به شعاعهای a و b)، خلأ باشد، می‌دانیم که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی و از این رو بردار پوینتینگ (با چشمپوشی از اثرهای انتهایی) با روابط زیر داده می‌شود

طول l و جریان ثابت I در نظر می‌گیریم. حال در مورد شارش با توجه به قضیه پوینتینگ بحث می‌کنیم. جهت میدان الکتریکی در امتداد سیم و مقدار آن برابر با V/l است. میدان مغناطیسی در سطح بر سطح انحنا مماس است و مقدار آن از قانون آمپر برابر است با $B = \mu_0 I / 2\pi a$

چون میدانها پایا هستند، در این صورت $\partial u / \partial t$ صفر است، از این رو از روی پایستگی انرژی که با توجه به قضیه پوینتینگ [معادله (۶۵-۱۴)] بیان می‌شود داریم $-\oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv$ شارش انرژی (به داخل) سطح بسته قطعه از سطح گرد (rs) ناشی می‌شود

$$\mathbf{E} = \hat{\rho} \frac{V}{\ln(b/a)\rho} \quad \mathbf{B} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \quad a \leq \rho \leq b$$

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} = \hat{\rho} \times \hat{\phi} \frac{VI}{2\pi \ln(b/a)} \frac{1}{\rho^2} = \frac{IV\hat{z}}{2\pi\rho^2 \ln(b/a)}$$

$$-\oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \int_{rs} \frac{EB da}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0} 2\pi al$$

چون از قانون آمپر داریم $\mu_0 I = \mu_0 \pi a^2 \sigma_c E$ ، شارش انرژی می‌شود

توجه کنید که \mathbf{S} در امتداد محور کابل است؛ به این ترتیب انرژی EM در طول کابل شارش می‌یابد. چون همه‌جا بجز $a \leq \rho \leq b$ ، $\mathbf{E} = 0$ ، کل شارش توان EM را می‌توان با انتگرال‌گیری \mathbf{S} روی مساحت سطح مقطع کابل بین رساناهای داخلی و خارجی به‌دست آورد

$$-\oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \frac{EB}{\mu_0} 2\pi al = \sigma_c E^2 \pi a^2 l$$

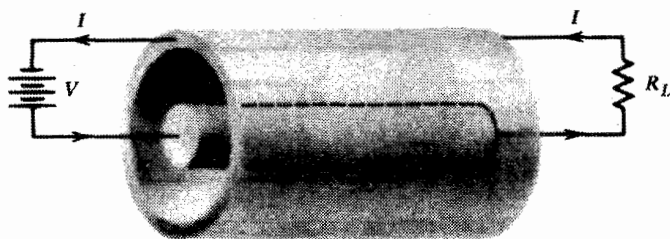
اکنون انتگرال حجمی $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv$ را بر روی قطعه محاسبه می‌کنیم. با استفاده از قانون اهم، $\mathbf{J} = \sigma_c \mathbf{E}$ ، به‌دست می‌آوریم

$$\int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \int_a^b \frac{VI}{2\pi \ln(b/a)} \frac{2\pi\rho d\rho}{\rho^2} = VI$$

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv = \int \sigma_c E^2 dv = \sigma_c E^2 \pi a^2 l$$

همان طور که انتظار داریم، انرژی که emf تأمین می‌کند، بدون اتلاف

که با قضیه پوینتینگ سازگار است. با استفاده از روابط $E = V/L$ و $RI^2 = VI$ ، تساوی اخیر برابر است با $I = \pi a^2 J = \pi a^2 \sigma_c E$ که در آن $R = l / \sigma_c \pi a^2$ مقاومت قطعه سیم است.



شکل ۶-۱۴ استفاده از قضیه پوینتینگ برای شارش جریان در یک کابل هم‌محور.

تفسیر این موضوع از دید \mathbf{S} آن است که همان طور که در شکل ۵-۱۴ می‌بینیم انرژی EM از خارج به داخل قطعه از طرف سطح جانبی شارش می‌یابد. چون منبع انرژی (emf) میدانهایی برای برقراری بار و جریان به‌وجود می‌آورد، از این رو انرژی EM از منبع انرژی به داخل فضا شارش می‌یابد. انرژی در داخل سیم به‌صورت گرما (RI^2)

الکترومغناطیسی القا می‌شوند؛ یعنی انتخاب می‌کنیم $\mathbf{J} = \sigma_c \mathbf{E}$.
 به‌علاوه، فرض می‌کنیم محیط ساده باشد، یعنی $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ و $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ که در آنها ϵ و μ ثابت هستند. میدانهای الکترومغناطیسی در این محیطها در معادله موج میرا [معادله (۱۴-۱۶)] صدق می‌کنند:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \sigma_c \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad [16-14]$$

چون امواج تکفام تخت مورد توجه ماست، انتخاب می‌کنیم $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ از این رو

$$\nabla^2 \mathbf{E} + (\mu \epsilon \omega^2 + i \mu \sigma_c \omega) \mathbf{E} = 0$$

یا برحسب $n_0 = \sqrt{K K_m}$ داریم

$$\nabla^2 \mathbf{E} + n_0^2 \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\sigma_c}{\epsilon \omega} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (80-14)$$

این معادله را می‌توان متناوباً برحسب ضریب شکست مختلط \hat{n} (علامت روی n نشان‌دهنده مختلط است) به‌صورت زیر نوشت

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \hat{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0 \quad (81-14)$$

که در آن با استفاده از کمیت‌های حقیقی n و k داریم

$$\hat{n} = n_0 \left(1 + i \frac{\sigma_c}{\epsilon \omega} \right)^{1/2} = n + ik \quad (82-14)$$

اکنون امواج تخت را که در راستای محور z حرکت می‌کنند در نظر می‌گیریم؛ به این ترتیب $|\mathbf{E}|$ را مستقل از مختصات x و y ، و ∇^2 را به‌صورت d^2/dz^2 در نظر می‌گیریم. از این رو معادله (۸۱-۱۴) به‌صورت زیر می‌شود

$$\frac{d^2}{dz^2} \mathbf{E} + \frac{\hat{n}^2 \omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0 \quad (83-14)$$

بدون خصوصیات رسانایی ماده این معادله جواب ساده

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{in \cdot (\omega/c)z} = \mathbf{E}_0 e^{ik \cdot z}$$

را دارد که در آن $k_0 = n_0 \omega/c = \omega/v$ عدد موج، یعنی یک عدد حقیقی است. عدد موج، به علت حضور ضریب مختلط $1 + i\sigma_c/\omega\epsilon$ مختلط است. در این حالت آن را به‌صورت

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_0 e^{i\hat{k}z} \quad (84-14)$$

1. R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, (Reading, Mass: Addison Wesley, 1966) p. 27-8.

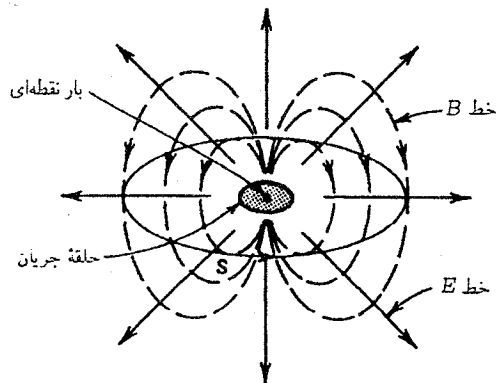
در کابل شارش می‌یابد. این انرژی نهایتاً در مقاومت بار R_L جذب می‌شود.

در عمل، رساناهای کابل، مقاومت متناهی دارند، به‌طوری که انرژی نیز به‌صورت گرما در آنها تلف می‌شود. که به این معنی است که شار انرژی در داخل رساناهای کابل وجود دارد. این به‌نوبه خود مستلزم آن است که یک مؤلفه \mathbf{E} موازی با محور کابل وجود داشته باشد به‌طوری که جهت \mathbf{S} به داخل رساناها باشد و انرژی می‌تواند به داخل رسانا شارش یابد تا انرژی تلف‌شده در آنجا را جبران کند. ■

تعبیر بردار پوئین‌تینگ به‌عنوان ارائه شارش چگالی انرژی اثرهای ویژه‌ای، خصوصاً در مسائل استاتیک دارد که نمی‌توان آنها را حل کرد. دو مثال قبل را ببینید. قضیه پوئین‌تینگ که برای این مسائل صحیح است تضمین نمی‌کند که \mathbf{S} واقعاً یک شارش انرژی باشد. در مثال یک دوقطبی مغناطیسی و یک بار نقطه‌ای بر روی آن در فضا (شکل ۱۴-۷ را ببینید)، که یک مسئله ایستا با میدانهای ثابت \mathbf{E} و \mathbf{B} است، \mathbf{S} حول محور تقارن دوقطبی شارش دارد.^۱ قبول این موضوع مشکل است و آن را به‌طور تجربی نمی‌توان ثابت کرد. روشن است که انتگرال شار انرژی در داخل هر کره‌ای که دوقطبی را در بر می‌گیرد صفر است. قضیه پوئین‌تینگ را برای مسائل ایستا شرح دادیم. با این حال استفاده اصلی آن در مسائل غیرایستا، خصوصاً در محاسبه تابش EM گذرنده از منبع انرژی است (فصل ۱۵ را ببینید).

۷-۱۴ امواج تکفام تخت در محیط رسانا

در این بخش معادلات ماکسول را در حضور محیطهای رسانا بررسی می‌کنیم. برای ساده کردن بحث فضا را بدون بار و بدون جریان در نظر می‌گیریم به‌طوری که جریانهای موجود در ماده تنها به‌وسیله خود موج



شکل ۷-۱۴ استفاده از قضیه پوئین‌تینگ در برهم‌نهی یک بار نقطه‌ای ایستا و یک دوقطبی مغناطیسی.

که در آن

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n_0}{\sqrt{2}} \left[\left(1 + \frac{\sigma_c^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} \pm 1 \right] \quad (91-14)$$

به این ترتیب میدان الکتریکی به صورت زیر در می آید

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-(\omega/c)kz} e^{-i\omega(t-nz/c)} \quad (92-14)$$

کمیت n ضریب شکست محیط است. جالب است که این کمیت به رسانندگی محیط و بسامد موج بستگی دارد. کمیت k به میرایی موج در حین عبور از محیط وابسته است. ثابت میرایی $\omega k/c$ نیز به σ_c و ω بستگی دارد. به فاصله δ که در آن فاصله، میدان به $1/e$ مقدار اولیه اش نزول می کند عمق پوست می گویند، که در آن $\omega k \delta/c = 1$ یا

$$\delta = \frac{c}{\omega k} \quad (93-14)$$

اکنون میدان مغناطیسی مطابق با میدان الکتریکی را از معادله ماکسول محاسبه می کنیم. اثر جالبی که در محیطهای رسانا ظاهر می شود، این است که میدانهای E و B همفاز نیستند. این موضوع را می توان از معادله تاو ماکسول [معادله (۴-۱۴)] فهمید. موج تختی را که در راستای محور x قطبیده است در نظر می گیریم: $E_0 \hat{x} e^{-i\omega t + iKz}$. انتخاب $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ و $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ به دست می دهد

$$i\hat{K}\hat{z} \times \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H} \quad (94-14)$$

یا

$$\mathbf{H} = \hat{y} \frac{\hat{K}}{\mu \omega} E_0 e^{-i\omega t + iKz} = H_0 \hat{y} e^{-i\omega t + iKz} \quad (95-14)$$

با قراردادن \hat{K} از معادله (۸۵-۱۴) به دست می آوریم

$$H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left(1 + \frac{i\sigma_c}{\epsilon \omega} \right)^{1/2} E_0 \quad (96-14)$$

این معادله نشان می دهد که میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی همفاز نیستند. به علاوه، نسبت E_0/H_0 ویژگی بارز محیط است، این نسبت، امپدانس مختلط ذاتی محیط، η ، است و وابسته به بسامد است

$$\hat{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{(1 + i\sigma_c/\epsilon \omega)^{1/2}} \quad (97-14)$$

که در آن \hat{K} را بردار عدد موج مختلط ثابت؛ یعنی مستقل از z و E_0 است انتخاب می کنیم. با جایگزین کردن $E(z)$ در معادله (۸۳-۱۴) به دست می آید

$$\hat{K}^2 = n_0^2 \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{i\sigma_c}{\epsilon \omega} \right) \quad (85-14)$$

با نوشتن \hat{K}^2 به صورت قطبی مختلط به دست می آوریم

$$\hat{K}^2 = n_0^2 \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{\sigma_c^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} e^{i\phi} \quad (86-14)$$

که در آن

$$\tan \phi = \frac{\sigma_c}{\epsilon \omega} \quad (87-14)$$

گرفتن جذر معادله (۸۶-۱۴) به دست می دهد

$$\hat{K} = \frac{n_0 \omega}{c} \left(1 + \frac{\sigma_c^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{1/4} e^{i\phi/2}$$

یا

$$\hat{K} = \frac{n_0 \omega}{c} \left(1 + \frac{\sigma_c^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{1/4} (\cos \phi/2 + i \sin \phi/2) \quad (88-14)$$

برای پیدا کردن $\cos(\phi/2)$ و $\sin(\phi/2)$ از $\tan \phi$ ، و از این روی پیدا کردن صریح آن برحسب $\sigma_c/\omega \epsilon$ ، از روابط زیر استفاده می کنیم

$$\cos \frac{\phi}{2} = \frac{(1 + \cos \phi)^{1/2}}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \sin \frac{\phi}{2} = \frac{(1 - \cos \phi)^{1/2}}{\sqrt{2}}$$

اکنون داریم

$$\cos \phi = (1 + \tan^2 \phi)^{-1/2}$$

به این ترتیب

$$\cos \frac{\phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(1 + \frac{\sigma_c^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{-1/2} \right]^{1/2}$$

$$\sin \frac{\phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \left(1 + \frac{\sigma_c^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{-1/2} \right]^{1/2} \quad (89-14)$$

با جایگزین کردن شکلهای صریح $\sin(\phi/2)$ و $\cos(\phi/2)$ در معادله (۸۸-۱۴) به دست می آید

$$\hat{K} = \frac{\omega}{c} n + i \frac{\omega}{c} k \quad (90-14)$$

با این همه برای میدانهای dc مطلق ($\omega = 0$)، رسانندگی باید دقیقاً صفر باشد. انتخاب این حد در معادله (۹۱-۱۴) به دست می‌دهد

$$n = \sqrt{KK_m} \quad k = \frac{1}{\gamma} \sqrt{KK_m} \frac{\sigma_c}{\epsilon\omega} \quad (102-14)$$

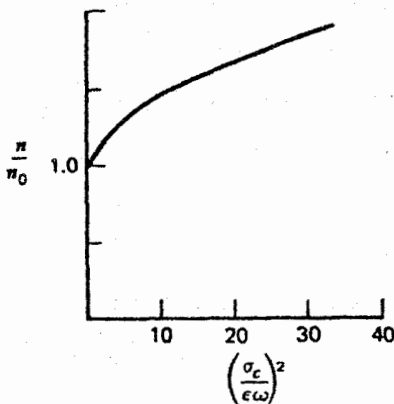
فاز بین میدان E و B در عایقهای خوب از معادله (۹۸-۱۴) محاسبه می‌شود. با ننگ داشتن پایینترین مرتبه $\sigma_c/\epsilon\omega$ به دست می‌آوریم

$$\tan \phi \approx \phi = \frac{\sigma_c}{\epsilon\omega} \quad (103-14)$$

به این ترتیب زاویه فاز بین E و B برابر است با

$$\frac{\phi}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \frac{\sigma_c}{\epsilon\omega} \quad (104-14)$$

مثال ۱۴-۱۰ وابستگی بسامدی خصوصیات اپتیکی ماده رسانا در این مثال خصوصیات اپتیکی مواد رسانا را در بسامد الکترومغناطیسی ω آزمایش می‌کنیم. ماده‌ای با رسانندگی σ_c ، گذردهی ϵ و تراوایی μ در نظر بگیرید. ضریب شکست n و ضریب جذب k این ماده توابعی از σ_c ، ω ، μ و ϵ هستند و با معادله (۹۱-۱۴) داده می‌شوند. شکلهای ۸-۱۴ و ۹-۱۴ نمودارهای n و k را به صورت تابعی از ω نشان می‌دهند. این شکلها نشان می‌دهند که وقتی ω بزرگ می‌شود از این رو $\sigma_c/\omega\epsilon$ کوچک می‌شود، خصوصیات دی‌الکتریکی و مغناطیسی (μ)، ϵ بر ضریب شکست حاکم می‌شود: $n \rightarrow \sqrt{KK_m}$. خصوصیات دی‌الکتریکی در همین حد، نیز بر ضریب جذب حاکم می‌شود، یعنی، ضریب جذب به صفر نزول می‌کند. از روی شکلها معلوم است که ماهیت رسانایی ماده در بسامدهای پایین، که $\sigma_c/\epsilon\omega \gg 1$ غالب است.



شکل ۸-۱۴ رفتار بسامدی ثابت اپتیکی n یک ماده رسانا.

فاز η را با نمادگذاری قطبی مختلط محاسبه می‌کنیم

$$\tilde{\eta} = |\eta| e^{-i\phi/2} \quad (98-14)$$

که در آن

$$|\tilde{\eta}| = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{[1 + (\sigma_c/\epsilon\omega)^2]^{1/2}} \quad \text{و} \quad \tan \phi = \frac{\sigma_c}{\epsilon\omega} \quad (99-14)$$

عملیات بالا نشان می‌دهد که وابستگی کلی انتشار به بسامد و خصوصیات محیط کاملاً پیچیده است. با این حال، بعضی حالت‌های محدود خاصی وجود دارند که بررسی آنها جالب است:

رساناهای خوب. رسانندگی فلزات و حتی نیرساناها بسیار زیاد است به طوری که نسبت $\sigma_c/\epsilon\omega$ حتی در بسامدهایی به بزرگی بسامدهای نوری خیلی بزرگتر از واحد است. در این حد، از آن نسبت به $\sigma_c/\epsilon\omega$ چشمپوشی می‌کنیم (و انتخاب می‌کنیم $K_m = 1$)، به این ترتیب

$$n = k = \sqrt{\frac{KK_m}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_c}{\epsilon\omega}} = \sqrt{\frac{\sigma_c}{2\epsilon_0\omega}} \quad (100-14)$$

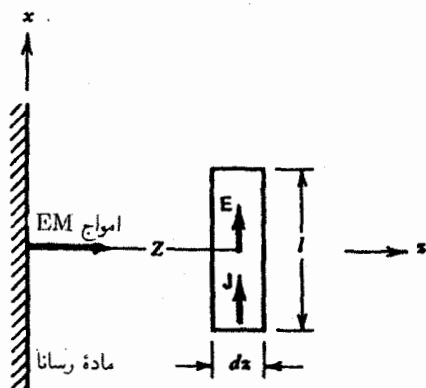
با قراردادن این نتیجه در معادله (۹۳-۱۴) عبارت زیر را برای عمق پوست به دست می‌آوریم

$$\delta = \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{\epsilon\omega}{\sigma_c}} \sqrt{\frac{2}{KK_m}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma_c\omega}} \quad (101-14)$$

که نشان می‌دهد در این حد δ به خصوصیات دی‌الکتریکی ماده بستگی دارد. با توجه به این موضوع که عمق پوست به طور معکوس با جذر حاصلضرب متناسب است، بسامد و رسانندگی نشان می‌دهند که امواج با بسامد بالاتر به اندازه امواج با بسامد پایتتر نفوذ نمی‌کنند. ضریب شکست فلزات به اندازه ضریب $\sqrt{(\sigma_c/2\epsilon\omega)}$ نسبت به آنچه که از خصوصیات دی‌الکتریکی ماده انتظار می‌رود: $\sqrt{KK_m}$ افزایش می‌یابد. این افزایش، کاهشی با همین ضریب را در طول موج تابش در ماده سبب می‌شود.

رابطه فازی بین میدانهای مغناطیسی و میدانهای الکتریکی شکل دیگری از انتشار در رساناهاست. معادله (۹۹-۱۴) نشان می‌دهد که وقتی $\sigma_c/\epsilon\omega \gg 1$ ، $\tan \phi$ بسیار بزرگ می‌شود، از این رو $\phi \rightarrow \pi/2$. بنابراین اختلاف فاز بین میدانهای E و B در یک رسانای کامل مساوی با $\pi/4$ است.

عایقهای خوب. رسانندگی عایقهای خوب کم است به طوری که نسبت $\sigma_c/\omega\epsilon$ حتی در بسامدهای بسیار پایین، از واحد بسیار کوچکتر است



شکل ۱۰-۱۴ اتلاف توان الکترومغناطیسی در یک ماده رسانا.

جریان dI ، در یک بره به ارتفاع h و طول l در امتداد جریان، و عمق در امتداد انتشار dz ، در راستای x است و با معادله زیر داده می‌شود

$$dI = E_0 \sigma_c h dz e^{-z(1-i)/\delta - i\omega t} \quad (107-14)$$

بنابراین کل جریان در محیط برابر است با

$$I = \int_0^\infty dI = E_0 \sigma_c h e^{-i\omega t} \int_0^\infty e^{-z(1-i)/\delta} dz$$

که به دست می‌دهد

$$I = \frac{E_0 \sigma_c h \delta e^{-i\omega t}}{1-i} = \frac{E_0 \sigma_c h \delta e^{-i(\omega t - \pi/4)}}{\sqrt{2}} \quad (108-14)$$

جزر میانگین مربعی I را می‌توان از معادله (۱۰۸-۱۴) به صورت زیر محاسبه کرد

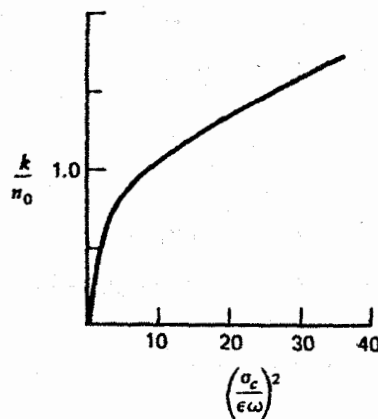
$$I_{rms} = \frac{E_0 \sigma_c h \delta}{2} \quad (109-14)$$

اکنون می‌خواهیم توان تلف شده در محیط را محاسبه کنیم. برای این کار باید مقاومت بره بالا را محاسبه کنیم. چون مقاومت یک رسانای مربع مستطیل شکل به طول l ، مساحت A ، و رسانندگی σ_c مساوی با $R = l/\sigma_c A$ است، در این صورت مقاومت بره برابر است با

$$R = \frac{l}{\sigma_c h dz} \quad (110-14)$$

میانگین توان تلف شده در بره برحسب dl و R با رابطه زیر داده می‌شود

$$dP = \frac{1}{\gamma} (dl) dI^* R \quad (111-14)$$



شکل ۹-۱۴ رفتار بسامدی ثابت اپتیکی k یک ماده رسانا.

عمق پوست ماده $\delta = c/\omega k$ مستقل از بسامد و در بسامدهای بالا تقریباً مساوی است با $n_0 c \sigma_c / \gamma \epsilon$. عمق پوست در بسامدهای پایین برابر است با $\sqrt{2/\mu_0 \sigma_c \omega}$ با امیدانس مشخصه ماده

$$|\hat{\eta}| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} / \left[1 + \left(\frac{\sigma_c}{\epsilon \omega} \right)^2 \right]^{1/4}$$

به ترتیب در بسامدهای بالا و پایین به

$$|\hat{\eta}| \rightarrow \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \text{و} \quad |\hat{\eta}| \rightarrow \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(\frac{\sigma_c}{\epsilon \omega} \right)^{-1/2}$$

نزدیک می‌شود. این موضوع نشان می‌دهد که $|\hat{\eta}|$ در رسانا کاهش می‌یابد.

مثال ۱۱-۱۴ اتلاف توان در یک رسانا

موج تخت تکفامی با بسامد ω و قطبیده در جهت \hat{x} ، در یک محیط با رسانایی بالا که فضای $z \geq 0$ را اشغال می‌کند، در امتداد محور z حرکت می‌کند. (شکل ۱۰-۱۴ را ببینید). محیط دارای گذردهی ϵ ، تراوایی μ و رسانندگی σ_c است. با استفاده از معادلات (۹۲-۱۴) و (۱۰۰-۱۴)، میدان الکتریکی به فاصله z در ماده با معادله زیر داده می‌شود

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{x} e^{-z(1-i)/\delta - i\omega t} \quad (105-14)$$

که در آن $\delta = \sqrt{2/\mu_0 \omega \sigma_c}$ است. چگالی جریان در محیط برابر است با $\mathbf{J} = \sigma_c \mathbf{E}$ ؛ به این ترتیب

$$\mathbf{J} = E_0 \sigma_c \hat{x} e^{-z(1-i)/\delta - i\omega t} \quad (106-14)$$

که در آن $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ، سرعت نور در خلأ است و $n = \sqrt{K K_m}$ ضریب شکست محیط است.

جواب معادله موج در محیطهای $\sigma_c = 0$ ، یک موج تخت است که در آن \mathbf{E} و \mathbf{B} فقط به یک مختصه دکارتی بستگی دارند، مثلاً در جهت \hat{k} ، \mathbf{E} و \mathbf{B} توابعی از $\hat{k} \cdot \mathbf{r} - vt$ هستند. این امواج را امواج عرضی نیز می‌نامند. معادلات ماکسول روابط داخلی زیر را بین \hat{k} ، \mathbf{E} و \mathbf{B} به دست می‌دهد

$$\hat{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \hat{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \hat{k} \times \mathbf{E} = v\mathbf{B} \quad |\mathbf{E}| = v|\mathbf{B}|$$

[۳۴-۱۴]، [۳۷-۱۴]

یعنی این سه بردار بر یکدیگر عمودند. یک شکل جواب، جواب سینوسی یا تکفام است که در آن \mathbf{E} و \mathbf{B} با یک تابع سینوسی یا یک تابع کسینوسی $\hat{k} \cdot \mathbf{r} - vt$ داده می‌شوند. با استفاده از نمادگذاری مختلط می‌نویسیم

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{e} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi)} \quad \mathbf{B} = B_0 \hat{\beta} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi)}$$

[۴۹-۱۴]، [۵۰-۱۴]

که در آن \hat{k} یک بردار موج است که جهت انتشار را مشخص می‌کند، \hat{e} و $\hat{\beta}$ بردارهای یکه هستند؛ ω بسامد نوسان موج، $k = \omega/v$ عدد موج، که برحسب طول موج، $k = 2\pi/\lambda$ نیز بیان می‌شود؛ و (ϕ, ϕ') و (E_0, B_0) فازها و دامنه‌های ثابت هستند. به جهت \mathbf{E} موج جهت قطبش موج می‌گویند. اگر \hat{e} در راستای یک جهت قرار گیرد، موج را یک موج قطبیده تخت یا خطی می‌نامند. ترکیبات قطبش خطی می‌تواند منجر به قطبش بیضوی یا دایره‌ای شود.

آهنگی که با آن انرژی با موج حمل می‌شود به صورت زیر با بردار پوئین‌تینگ \mathbf{S} داده می‌شود:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad [۶۸-۱۴]$$

اگر موج به ناحیه‌ای که دارای جریانهای الکتریکی \mathbf{J} است برخورد کند، در این صورت موج با آهنگ

$$\frac{dP}{dv} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad [۷۵-۷]$$

بر روی این جریانها کار انجام می‌دهد. درست مانند الکتروستاتیک و مغناطوستاتیک، امواج در هر لحظه از زمان انرژی الکترومغناطیسی ذخیره شده‌ای با چگالی زیر دارند

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad [۶۹-۱۴]$$

با قراردادن dI و R از معادلات (۱۰۷-۱۴) و (۱۱۰-۱۴) به دست می‌آوریم

$$dP = \frac{1}{2} \frac{E_0^2 \sigma_c h^2 l}{\sigma_c h} e^{-2z/\delta} dz \quad (۱۱۲-۱۴)$$

با انتگرال‌گیری dP به دست می‌آوریم

$$P = \frac{E_0^2 \sigma_c h l}{2} \int_0^\infty e^{-2z/\delta} dz = \frac{1}{4} E_0^2 \sigma_c h l \delta \quad (۱۱۳-۱۴)$$

مقاومت مؤثر را با نوشتن میانگین توان به شکل

$$P = R_{\text{eff}} I_{\text{rms}}^2$$

می‌توان به دست آورد.

با قراردادن I_{rms} از معادله (۱۰۹-۱۴) به دست می‌آوریم

$$R_{\text{eff}} = \frac{1}{(h\delta)\sigma_c} = \frac{1}{A\sigma_c} \quad (۱۱۴-۱۴)$$

که در آن A مساحت بره به ارتفاع h و عرض مساوی با عمق پوست است. ■

۸-۱۴ خلاصه

معادلات شبه ایستای الکترومغناطیسی $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ ، $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ، $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ ، $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f$ برای آخرین بار با تصحیح $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f$ با در نظر گرفتن اثر تغییر \mathbf{D} با زمان، اصلاح می‌شوند. افزودن جریان جابه‌جایی $\partial \mathbf{D} / \partial t$ به \mathbf{J}_f توسط ماکسول معادلات ماکسول را ارائه می‌دهد که این معادلات بر رفتار میدان الکترومغناطیسی کلاسیک آن‌طور که امروزه به آن اعتقاد داریم حاکم‌اند؛ یعنی

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_f \quad [۲-۱۴]، [۵-۱۴]$$

در یک محیط خطی μ ، ϵ ، σ_c و معادلات ماکسول به‌ازای $\rho_f = 0$ ، $\mathbf{J}_f = \sigma_c \mathbf{E}$ و (جریانها را فقط خود \mathbf{E} تولید می‌کند) به دست می‌دهند

$$\left[\nabla^2 - \mu \sigma_c \frac{\partial}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0 \quad [۱۶-۱۴]$$

که معادلات موج سه‌بعدی توأم با میرایی (جمله متناسب با σ_c) هستند. معادلات ماکسول حتی در خلأ پدیده موجی را برای \mathbf{E} و \mathbf{B} پیش‌بینی می‌کنند سرعت v موج برابر است با

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{n \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{c}{n} \quad [۱۹-۱۴]، [۲۴-۱۴]$$

کمیت $\omega k/c$ را طول جذب یا عمق پوست δ که به بسامد وابسته است تفسیر می‌کنیم

$$\delta = \frac{c}{\omega k} \quad [۹۳-۱۴]$$

برای رسانندگی بالا/یا بسامدهای پایین به طوری که $\sigma_c/\varepsilon\omega \gg 1$ (برای مواد غیرمغناطیسی) به دست می‌آوریم

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega_0 \sigma_c \omega}} \quad \text{و} \quad n \approx k \approx \sqrt{\frac{\sigma_c}{2\varepsilon_0 \omega}} \quad [۱۰۰-۱۴]$$

\mathbf{E} و \mathbf{H} در داخل مواد رسانا همفاز نیستند، با

$$\frac{E_0}{H_0} = \hat{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 + \frac{i\sigma_c}{\varepsilon\omega}\right)^{-1/2} \quad [۹۶-۱۴], [۹۷-۱۴]$$

که امپدانس مختلط محیط است.

مسائل

۱-۱۴ یک مولد ac به یک خازن مسطح با صفحات موازی متصل است. صفحات خازن قرصهای دایره‌ای به مساحت A هستند. بار روی صفحات برابر است با $q = q_0 \sin \omega t$. از تأثیرات لبه‌ای چشمپوشی کنید. (الف) جریانهای رسانش و جابه‌جایی را محاسبه کنید. این جریانها چگونه با هم مقایسه می‌شوند؟ (ب) جهت میدان مغناطیسی در داخل خازن چگونه است؟ (ج) بزرگی میدان مغناطیسی را در داخل خازن محاسبه کنید.

۲-۱۴ یک خازن استوانه‌ای هم‌محور به ترتیب دارای شعاعهای داخلی و خارجی ۵٫۰ و ۶٫۰ سانتیمتر و طول ۵٫۰ سانتیمتر است. ماده بین استوانه‌ها یک ثابت دی‌الکتریکی برابر ۶٫۷ دارد. استوانه‌ها را در اختلاف پتانسیل $V = ۲۵^\circ \sin ۳۷۷t$ قرار می‌دهیم. جریان جابه‌جایی I_D و جریان رسانش I_C را تعیین کنید. دو جریان را با هم مقایسه کنید.

۳-۱۴ فضای بین دو پوسته رسانای کروی هم‌مرکز به شعاعهای داخلی و خارجی a و b با یک دی‌الکتریک که برای آن $K = ۸٫۵$ است پر می‌شود. ولتاژ $V = ۱۵^\circ \sin ۵^\circ t$ اعمال می‌شود. جریانهای رسانش و جابه‌جایی را به دست آورید و آنها را با هم مقایسه کنید.

۴-۱۴ صریحاً نشان دهید که میدانهای (الف) $E = A e^{x-ct}$ و $B = -A \ln(x+ct)$ و (ب) $E = A e^{x-ct}$ و $B = A \ln(x+ct)$ جوابهای معادله موج یک‌بعدی داده‌شده با معادله (۱۷-۱۴) هستند.

۵-۱۴ (الف) در فضای آزاد داریم $\mathbf{E} = E_0 \hat{y} \sin(\omega t - kz)$. (ب) در فضای آزاد داریم \mathbf{D} ، \mathbf{B} و \mathbf{H} را پیدا کنید. (ب) در فضای آزاد داریم $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = H_0 \hat{x} e^{-i(\omega t + kz)}$ را تعیین کنید.

در واقع می‌توان نشان داد که انرژی پایسته است و می‌توان آن را به شکل قضیه پوینتینگ در هر نقطه از فضا بیان کرد؛ یعنی

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad [۶۶-۱۴]$$

می‌توان نشان داد

$$\mathbf{S} = u\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{k}} E^2}{\eta} \quad [۷۳-۱۴], [۷۵-۱۴]$$

که در آن $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ را امپدانس فضا می‌نامیم، و $\hat{\mathbf{k}}$ بردار یکه در جهت انتشار است. برای امواج تکفام تخت، میانگین زمانی شدت تابش عبارت است از

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{T} \text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \quad [۷۸-۱۴]$$

و

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T} \text{Re}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B}) \quad [۷۹-۱۴]$$

در یک محیط رسانا یک موج تکفام تخت دستخوش میرایی (تضعیف) می‌شود. تأثیر σ_c غیرصفر را با اصلاح جوابهای بالا از طریق معرفی یک گذردهی مختلط مؤثر و از این رو بردار موج $\hat{\mathbf{K}}$ و ضریب شکست \hat{n} ، به دست می‌آوریم؛ یعنی،

$$\hat{K}^2 = \frac{n_0^2 \omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{i\sigma_c}{\varepsilon\omega}\right) = \hat{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2}$$

که کلاhek روی آن نشان‌دهنده خصوصیت مختلط آن است. با گرفتن جذر \hat{K}^2 و نوشتن آن بر حسب قسمتهای حقیقی و موهومی به دست می‌آوریم

$$\hat{K} = \frac{\omega}{c} n + i \frac{\omega}{c} k \quad [۹۰-۱۴]$$

که در آن

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n_0}{\sqrt{2}} \left[\left(1 + \frac{\sigma_c^2}{\varepsilon^2 \omega^2}\right)^{1/2} \pm 1 \right]^{1/2} \quad [۱۹-۱۴]$$

میدان \mathbf{E} متناظر با آن که در امتداد محور z منتشر می‌شود به صورت

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-\omega k z/c} e^{-i\omega(t - nz/c)} \quad [۹۲-۱۴]$$

در می‌آید. به این ترتیب n را ضریب شکست حقیقی مؤثر محیط با وابستگی اضافی به ω و σ_c (تأثیر پاشنده) تفسیر می‌کنیم. وارون

۱۴-۱۱ وقتی یک موج EM قطبیده خطی با زاویه ۴۵° بر روی یک آینه بازتابنده فرود می‌آید، میدان الکتریکی امواج در مقابل آینه را می‌توان به صورت

$$\mathbf{E} = \hat{x} e^{i(ky - \omega t)} + \hat{y} e^{i(kx - \omega t)}$$

نوشت. (الف) \mathbf{E} را به صورت $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ بنویسید. (ب) آرایه بیضیها را (که نشان دهنده میدان الکتریکی اند) در نقاطی که مختصات آنها عبارتند از $kx = m\pi/4$ و $ky = n\pi/4$ (که در آن m و n به طور مستقل مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳، و ۴ را انتخاب می‌کنند) بنویسید. (از این آرایه می‌توان در آزمایشی استفاده کرد تا نقش در مقابل آینه را با جزئیات کافی بیان کند).

۱۴-۱۲ شار انرژی وابسته به نور خورشید که در جهت عمود بر سطح زمین می‌تابد برابر است با 1.4 kW/m^2 . (الف) اگر موج الکترومغناطیسی وابسته به آن یک موج تکدام قطبیده تخت انتخاب شود، بیشینه مقادیر E ، H ، و B را تعیین کنید. (ب) کل توان تابشی خورشید را با انتخاب فاصله زمین تا خورشید مساوی با $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ پیدا کنید.

۱۴-۱۳ (الف) فرض کنید $\mathbf{E} = E_0 \hat{x} \cos(\omega t - kz)$ ولت بر متر در فضای آزاد باشد. میانگین توان عبوری از یک مساحت دایره‌ای به قطر ۵ متر را در صفحه‌ای که در آن $z = 5 \text{ m}$ است پیدا کنید. (ب) فرض کنید در فضای آزاد

$$\mathbf{E} = 2 \times 10^2 \hat{\theta} \sin \theta \cos(\omega t - kr) / r \quad (\text{ولت بر متر})$$

و

$$\mathbf{H} = 0.53 \hat{\phi} \sin \theta \cos(\omega t - kr) / r \quad (\text{آمپر بر متر})$$

باشد. میانگین توان عبوری از یک پوسته به شکل نیمکره به شعاع $r = 10^2 \text{ m}$ و $0 \leq \theta \leq \pi/2$ را تعیین کنید.

۱۴-۱۴ رسانندگی σ_c خاک مرطوب برابر $(\Omega \cdot \text{m})^{-1} \times 10^{-2}$ و ثابت دی‌الکتریکی K برابر ۲٫۵ است. اگر میدان الکتریکی در خاک $E_0 \sin \omega t$ باشد که در آن $E_0 = 6 \times 10^{-6} \text{ V/m}$ و $\omega = 9 \times 10^1 \text{ rad/s}$ ، چگالی جریان جابه‌جایی و رسانش در خاک را تعیین کنید.

۱۴-۱۵ یک موج الکترومغناطیسی با بسامد 10^6 Hz در یک محیط آلومینیمی واقع در $z \geq 0$ در امتداد محور z "حرکت" می‌کند. رسانندگی آلومینیم $(\Omega \cdot \text{m})^{-1} \times 3.82 \times 10^6$ و تراوایی آن $K_m = 1$

۱۴-۶ یک موج الکترومغناطیسی در یک فریت که ثابتهای دی‌الکتریکی و مغناطیسی آن $K = 10$ و $K_M = 1000$ هستند، منتشر می‌شود. سرعت انتشار، و طول موج موجی با بسامد 100 MHz را پیدا کنید.

۱۴-۷ یک موج الکترومغناطیسی تخت قطبیده خطی $\mathbf{E} = E_0 \hat{x} e^{i(kz - \omega t)}$ که در آن $k = \omega/c$ و E_0 حقیقی است را در نظر بگیرید. (الف) چگالی انرژی u و بردار پوئینتینگ \mathbf{S} را محاسبه کنید، و نشان دهید که u همراه با موج حرکت می‌کند. (ب) میانگین زمانی \mathbf{S} را وقتی میانگین‌گیری روی زمان نامتناهی انجام می‌شود، و بار دیگر بر روی یک دوره تناوب انجام می‌شود، تعیین کنید. ۱۴-۸ اگر یک موج به موج مسئله ۱۴-۷ افزوده شود به طوری که داشته باشیم

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{x} e^{i(kz - \omega t)} + E'_0 \hat{x} e^{i(kz - \omega t + \phi)}$$

که در آن E'_0 حقیقی است، u ، \mathbf{S} و $\langle \mathbf{S} \rangle$ را برای موج برآیند پیدا کنید و نشان دهید که در حالت کلی هیچ‌یک از این کمیتها با حاصل جمع کمیتهای متناظر با آنها برای امواج مجزا مساوی نیستند.

۱۴-۹ فرض کنید یک موج به موج مسئله ۱۴-۷ افزوده شود به طوری داشته باشیم

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{x} e^{i(kz - \omega t)} + E'_0 \hat{y} e^{i(kz - \omega t + \phi)}$$

که در آن E'_0 حقیقی است. (الف) نشان دهید که در این حالت u ، \mathbf{S} و $\langle \mathbf{S} \rangle$ برای موج برآیند با حاصل جمع کمیتهای متناظر با آنها برای امواج مجزا برابرند. (ب) قطبش موج الکتریکی برآیند را تعیین کنید. (ج) امواج الکتریکی و مغناطیسی برآیند چگونه به هم مربوط می‌شوند؟ (د) اگر $E'_0 = 2E_0$ و $\phi = \pi/4$ باشد، مکان هندسی نوک \mathbf{E} در صفحه $z = 0$ را تعیین و رسم کنید.

۱۴-۱۰ فرض کنید یک موج به موج مسئله ۱۴-۷ افزوده می‌شود به طوری که داشته باشیم

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{x} e^{i(kz - \omega t)} + E_0 \hat{x} e^{i(-kz - \omega t)}$$

(الف) u و \mathbf{S} را تعیین کنید. (ب) در مورد اینکه چطور گاهی اوقات تمام انرژی در میدان الکتریکی و گاهی اوقات تمام انرژی در میدان مغناطیسی است بحث کنید. (ج) آیا \mathbf{S} در این انتقال نقشی دارد؟ (د) صفحات ثابت عمود بر محور z که هیچ گونه انرژی از آنها عبور نمی‌کند را پیدا کنید.

می‌کند. (الف) ضریب شکست مختلط محیط در بسامد موج را تعیین کنید. (ب) ضریب شکست مؤثر و ثابت جذب (تضعیف) را تعیین کنید. (ج) امپدانس مشخصه محیط چقدر است؟

۱۴-۱۹ قسمتی از فضای متناظر با $y > 0$ در یک کانال مربع مستطیل با سطح مقطع 1 m^2 با یک گاز با رسانندگی $\sigma_c = 10^4 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ پر شده است. یک میدان مغناطیسی با شدت یکنواخت در فضای تهی $y < 0$ برقرار می‌شود. از جریان جابه‌جایی چشمپوشی کنید و فرض کنید که B و E در داخل گاز فقط به y بستگی دارند و به ترتیب در امتداد محور z و x هستند. (الف) نشان دهید که میدان B به‌ازای $t > 0$ و $y > 0$ در معادله

$$\mu_0 \sigma_c \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}$$

صدق می‌کند. (ب) با استفاده از یک جایگزینی $\xi = \sqrt{\mu_0 \sigma_c} y / \sqrt{4t}$ عبارتی برای B پیدا کنید و سپس با استفاده از شرایط مرزی آن را تعیین کنید. (ج) فشار مغناطیسی را در $y = 0$ پیدا کنید، و سپس نیروی مغناطیسی وارد بر قسمتی از گاز که بین $y = 0$ و $y = 1$ است را در $t = 0$ پیدا کنید. (د) بزرگی نیروی مغناطیسی در $t = 1 \text{ s}$ چقدر است؟ راهنمایی: برای بیان جوابهای خود می‌توانید از توابع خطا استفاده کنید.

$$[\text{erfc}(z)] = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z'^2} dz'$$

است. دامنه میدان الکتریکی درست در داخل رسانا در $z = 0$ ، مساوی با $E_0 \hat{x}$ است. (الف) عبارتی برای میدان الکتریکی در داخل رسانا بنویسید. (ب) عمق پوست، سرعت موج و طول موج در آلومینیم را پیدا کنید. (ج) میدان مغناطیسی متناظر با آن را تعیین کنید. (د) اختلاف فاز بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در هر محل ثابت در آلومینیم را پیدا کنید.

۱۴-۱۶ یک موج تکفام تخت با بسامد 10^9 Hz که در امتداد محور \hat{x} قطبیده است در یک ماده با رسانایی جزئی با گذردگی $\epsilon = 18\epsilon_0$ ، تراوایی $\mu = 80\mu_0$ و رسانندگی σ_c به‌طوری که $\sigma_c/\epsilon\omega = 1$ در امتداد محور z حرکت می‌کند. شدت موج درست در داخل ماده در $z = +0$ برابر است با 1 W/m^2 . (الف) عبارتی برای میدان الکتریکی در داخل رسانا بنویسید. (ب) عمق پوست و سرعت موج را تعیین کنید. (ج) شدت در $z = 1 \text{ mm}$ چقدر است؟ (د) نسبت E/H را تعیین کنید. (ه) دامنه میدان E در $z = +0$ را محاسبه کنید. (و) فاز بین E و H را تعیین کنید.

۱۴-۱۷ امپدانس ذاتی و سرعت موج برای یک محیط رسانا که در آن $\sigma_c = 5 \times 10^7 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ و $\mu = \mu_0$ است را در بسامد $\omega = 2\pi \times 10^8 \text{ rad/s}$ محاسبه کنید.

۱۴-۱۸ یک موج الکترومغناطیسی با بسامد $3 \times 10^8 \text{ Hz}$ در یک محیط با رسانایی جزئی با ثابت دی‌الکتریکی $K = 20$ ، ثابت مغناطیسی $K_m = 1000$ ، و رسانندگی $\sigma_c = 2 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ حرکت

مسئله در نواحی که توزیعهای بار و جریان صفر می‌شوند، مستقیماً با حل معادلات موج میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بررسی می‌شود. از قسمتی از روش حل معادله لاپلاسی در فصل ۳ برای تولید یک بسط چندقطبی استفاده می‌شود. گسیل از دو قطبهای الکتریکی و مغناطیسی وابسته زمانی، به علاوه برخی از مسائل پراکندگی را می‌توان با این روش بررسی کرد.

۱۵-۱ معادله موج پتانسیلها با منبعها - تبدیلهای پیمانه‌ای
در فصل ۱۴ معادلات ماکسول را در غیاب توزیعهای بار خارجی $\rho_f = 0$ و توزیعهای جریان خارجی $\mathbf{J}_f = 0$ حل کردیم. در بخش ۱۴-۸ حالتی را که شامل جریانهای الکتریکی بود، در نظر گرفتیم؛ با این حال این جریانها خارجی نبودند بلکه توسط خود موج تابیده به صورت ویژگی رسانایی ماده: $\mathbf{J} = \sigma_e \mathbf{E}$ تولید می‌شدند. در این بخش حالتی را که مطالعه می‌کنیم شامل منابع جریان و بار خارجی است. محیط نامتناهی با گذردهی ϵ ، و تراوایی μ ، رسانندگی $\sigma_e = 0$ را در نظر بگیرید که در آن توزیعهای بار $\rho(\mathbf{r}, t)$ و جریان $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ که توابعی از مکان و زمان هستند وجود دارد. دو تقریب برای به دست آوردن میدانهای تولید شده توسط توزیعها وجود دارد: تقریب میدان یا تقریب پتانسیل. ما تقریب پتانسیل را دنبال می‌کنیم زیرا این تقریب محاسبات کمتری دارد. در واقع، قبلاً دیدیم که تقریب پتانسیل در الکتروستاتیک و مغناطوستاتیک نیز مناسبتر است.

در این فصل در مورد تولید تابش الکترومغناطیسی به وسیله بارهای متحرک بحث می‌کنیم. می‌بینیم که این تابش فقط وقتی بارها شتاب می‌گیرند تولید می‌شود. باری که حرکت نمی‌کند، در چارچوب مرجع خودش یک میدان الکتریکی ایستا و یک میدان مغناطیسی صفر تولید می‌کند. از طرف دیگر باری که به صورت یکنواخت حرکت می‌کند، یک میدان الکتریکی و یک میدان مغناطیسی که هر یک دارای وابستگی شعاعی $1/r^2$ هستند را تولید می‌کند. به این ترتیب بردار پوینتینگ و وابستگی شعاعی $1/r^4$ را دارد، و در نتیجه انتگرال آن بر روی یک سطح بسته در فواصل دور صفر می‌شود که این امر نشان دهنده آن است که تابش تولید نمی‌شود. یک بار شتابدار میدانهای الکتریکی و مغناطیسی اضافی تولید می‌کند که هر یک از آنها با شتاب متناسب است و وابستگی شعاعی $1/r$ دارد و از این رو بردار پوینتینگ متناظر با آن دارای وابستگی شعاعی $1/r^2$ است، و در نتیجه انتگرال بردار پوینتینگ در فواصل بزرگ متناهی است. این نشان دهنده آن است که بارهای شتابدار تابش را تولید می‌کنند.

تعدادی فرایند برای محاسبه تابش وجود دارد. در حالت کلی به ازای توزیعهای بار و جریان وابسته به زمان مفروض، با به دست آوردن پتانسیلهای نرده‌ای و برداری که سپس از آنها میدانها به دست می‌آیند، بحث می‌کنیم. یک بسط چندقطبی از پتانسیلها انجام می‌شود؛ این بسط به نوبه خود در به دست آوردن میدانهای وابسته به بارهای کند شتابدار و آنتنهای مفید است.

با استفاده از $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ و تعویض دیفرانسیل‌گیری نسبت به زمان و مکان در معادله (۵-۱۵) به دست می‌آوریم

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \varepsilon \mu \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mu \mathbf{J}_f \quad (۶-۱۵)$$

اکنون به معادله (۲-۱۴) باز می‌گردیم. با قراردادن $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ و معادله (۴-۱۵) در این معادله به دست می‌آوریم

$$-\varepsilon \nabla \cdot \left(\nabla \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \rho_f$$

که با تعویض دیفرانسیل‌گیری نسبت به زمان و مکان به دست می‌دهد

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho_f}{\varepsilon} \quad (۷-۱۵)$$

از معادلات (۶-۱۵) و (۷-۱۵) واضح است که تاکنون معادلات Φ و \mathbf{A} را که مستقل از یکدیگرند همان طور که در حالت برخورد با میدان بود به دست نیاوردیم. چون \mathbf{E} و \mathbf{B} نیروهای وارد بر بارها را تعیین می‌کنند و از این رو به طور سراسرتی به دنیای فیزیکی مربوط می‌شوند، در این صورت به‌ازای \mathbf{E} و \mathbf{B} مفروض، \mathbf{A} را تنها با یک رابطه (یعنی $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$) به طور یکتا نمی‌توان تعیین کرد؛ به این ترتیب این کمیت دارای درجه‌ای از اختیار است. در واقع، برای آنکه \mathbf{A} به صورت یکتا تعریف شود، مشتق آن باید مشخص شود. (در واقع تمام فیزیکدانها با این گفته که \mathbf{E} و \mathbf{B} به صورت سراسرتی از پتانسیلهای Φ و \mathbf{A} به دنیای فیزیکی مربوط می‌شوند، موافق نیستند).^۱ عمل مشخص کردن $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ، را شرط پیمانه‌ای می‌نامند. مثلاً در پیمانه لورنتس لازم است که

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (۸-۱۵)$$

که در آن $\nabla \cdot \mathbf{A}$ به آهنگ تغییر پتانسیل نرده‌ای نسبت به زمان مربوط می‌شود. با قراردادن پیمانه لورنتس در معادلات (۶-۱۵) و (۷-۱۵)

۱. تمام فیزیکدانها با این موضوع که میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} واقعی‌تر از پتانسیلهای Φ و \mathbf{A} هستند موافق نیستند. اثر آهارونوف-بوهم، که اولین بار در سال ۱۹۵۸ معرفی شد، بیان می‌کند که برخلاف نتایج مکانیک کلاسیکی، تأثیرات پتانسیلهای بر روی ذرات باردار حتی در ناحیه‌ای که تمام میدانها (و از این رو تمام نیروهای وارد بر ذرات) صفر می‌شوند، وجود دارند.

Y.Aharonov and D.Bohm, *Physical Review*, vol. 115, p.485, 1959 and A. Tonomura et al., *Physical Review Letters*, vol. 51, p. 331, 1983.

از به‌کارگیری دو معادله ماکسول [معادله‌های (۳-۱۴) و (۴-۱۴)] برای پیدا کردن روابط بین میدانهای $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ و $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ و پتانسیلهای برداری و نرده‌ای $\Phi(\mathbf{r}, t)$ و $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ شروع می‌کنیم. این روابط با آنچه که در حالتهای ایستا داشتیم یکسان نیست. چون $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ، در این صورت \mathbf{B} را می‌توان به صورت ناو پتانسیل برداری \mathbf{A} نوشت

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (۱-۱۵)$$

قراردادن این عبارت در معادله (۴-۱۴) به دست می‌دهد

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (۲-۱۵)$$

با تعویض مشتق‌گیری نسبت به زمان و مکان به دست می‌آوریم

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (۳-۱۵)$$

چون ناو بردار $(\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t)$ صفر است، در این صورت این عبارت باید با شیب یک پتانسیل نرده‌ای Φ مساوی باشد

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi(\mathbf{r}, t)$$

یا

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (۴-۱۵)$$

معادلات (۱-۱۵) و (۴-۱۵) روابط مطلوب بین میدانها و پتانسیلهای به دست می‌دهند. رابطه بین \mathbf{B} و \mathbf{A} با حالت مغناطوستاتیک یکسان است، بجز آنکه \mathbf{A} اکنون می‌تواند تابعی از زمان باشد. از طرف دیگر معادله (۴-۱۵) انحرافی از الکتروستاتیک را نشان می‌دهد؛ دیگر میدان الکتریکی گرادیان یک نرده‌ای نیست. این میدان حاصل جمع گرادیان $\Phi(\mathbf{r}, t)$ و مشتق \mathbf{A} نسبت به زمان است. سهم اخیر ماهیت پایستاری میدان الکتریکی را حذف می‌کند، و این امر پیامدی از قانون تجربی القای فاراده است (فصل ۱۱ را ببینید).

اکنون برای به دست آوردن معادلات دیفرانسیلی که Φ و \mathbf{A} در آنها صدق می‌کنند، معادلات (۱-۱۵) و (۴-۱۵) را می‌توان در معادلات ماکسول قرار داد. با قراردادن $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu$ ، $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ و معادلات (۱-۱۵) و (۴-۱۵) در معادله (۵-۱۴) به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \mathbf{J}_f \quad (۵-۱۵)$$

به این ترتیب

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_t \quad (۱۶-۱۵)$$

روشن است که $\nabla \cdot \mathbf{J}_t = 0$ و $\nabla \times \mathbf{J}_t = 0$ ، و بنابراین \mathbf{J}_l و \mathbf{J}_t قسمتهای عرضی و طولی جریان نام دارند که مبنای نام پیمانه عرضی است.

از پیمانه کولن یا پیمانه عرضی معمولاً در حالتی که توزیعهای بار یا جریان وجود ندارند: $\rho_f = 0$ و $\mathbf{J}_f = 0$ ، استفاده می‌شود به این ترتیب در این حالت انتخاب می‌کنیم $\Phi = 0$ ، و \mathbf{A} در معادله

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (۱۷-۱۵)$$

صدق می‌کند. به این ترتیب میدانها در این پیمانه از یک تک‌پتانسیل تنها به دست می‌آیند

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{و} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (۱۸-۱۵)$$

آموزنده است شرط پیمانه‌ای با وجود مواد رسانا در نظر بگیریم. قرار می‌دهیم $\rho_f = 0$ و $\mathbf{J} = \sigma_c \mathbf{E}$ با استفاده از فرایندی که در بالا برای رسیدن به معادلات (۶-۱۵) و (۷-۱۵) توضیح داده شد، به دست می‌آوریم

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \sigma_c \varepsilon \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sigma_c \mu \Phi \right] = 0$$

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

برای تفکیک این معادلات پیمانه زیر را انتخاب می‌کنیم

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\varepsilon\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \sigma_c \mu \Phi$$

که آنها را به معادلات موج میرایی

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \sigma_c \varepsilon \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (۱۹-۱۵)$$

$$\nabla^2 \Phi - \sigma_c \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (۲۰-۱۵)$$

با جملات میرایی $\sigma_c \varepsilon (\partial \mathbf{A} / \partial t)$ و $\sigma_c \mu (\partial \Phi / \partial t)$ که از ائتلاف در محیط رسانا ناشی می‌شود، تبدیل می‌کند.

همان طور که قبلاً گفتیم، شرط لورنتس رابطه‌ای بین پتانسیلهای برداری و نرده‌ای است. این شرط معمولاً به دو دلیل استفاده می‌شود،

جملات جفت‌شدگی در این معادلات حذف می‌شوند و در نتیجه یک معادله موج برای هر یک از دو کمیت \mathbf{A} و Φ به دست می‌آید

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_f \quad (۹-۱۵)$$

$$\nabla^2 \Phi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_f}{\varepsilon} \quad (۱۰-۱۵)$$

پیمانه مفید دیگری اصطلاحاً پیمانه کولن یا عرضی (بحث قبلی این پیمانه را در بخش ۵-۸ ببینید) است؛ در این پیمانه انتخاب می‌کنیم

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (۱۱-۱۵)$$

با قراردادن این معادله در معادله (۷-۱۵) یک معادله پواسون برای Φ (نه یک معادله موج) به دست می‌آید

$$\nabla^2 \Phi = \frac{-\rho_f}{\varepsilon} \quad (۱۲-۱۵)$$

با یک جواب

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho_f(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (۱۳-۱۵)$$

پتانسیل نرده‌ای در این پیمانه درست پتانسیل کولنی لحظه‌ای ناشی از چگالی بار $\rho(\mathbf{r}, t)$ است که از آن نام پیمانه کولن نتیجه می‌شود. این پتانسیل دارای شکل پتانسیل ایستایی است.

پتانسیل برداری در این پیمانه در معادله

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\varepsilon\mu \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mu \mathbf{J}_f$$

صدق می‌کند. اکنون نشان می‌دهیم که جمله $\nabla(\partial \Phi / \partial t)$ به \mathbf{J}_f مربوط می‌شود. در این صورت با استفاده از $\partial \rho_f(\mathbf{r}, t) / \partial t = -\nabla \cdot \mathbf{J}_f$ داریم

$$\mathbf{J}_l = -\varepsilon \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\nabla}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_f(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

و می‌توان نشان داد که

$$\mathbf{J}_f = \mathbf{J}_l + \mathbf{J}_t \quad (۱۴-۱۵)$$

که در آن

$$\mathbf{J}_t = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}_f}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (۱۵-۱۵)$$

با قراردادن معادلات (۲۱-۱۵) و (۲۲-۱۵) در شرط لورنتس بالا به دست می آوریم

$$\nabla^2 \psi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = - \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (23-15)$$

دو حالت باید در نظر بگیریم. اگر پتانسیل‌های اولیه Φ و \mathbf{A} در شرط لورنتس صدق کنند، یعنی، $\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu (\partial \Phi / \partial t) = 0$ ، در آن صورت پتانسیل‌های جدید Φ' و \mathbf{A}' با این شرط که در معادله

$$\nabla^2 \psi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (24-15)$$

که معادله موج زده‌ای همگن است صدق می‌کند، شرط لورنتس را برآورده می‌کنند. از طرف دیگر، اگر پتانسیل‌های اولیه در شرط لورنتس صدق نکنند یعنی، $\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu (\partial \Phi / \partial t) \neq 0$ با این حال، پتانسیل‌های جدید را می‌توان طوری انتخاب کرد تا در این شرط صدق کنند، با این شرط که ψ را طوری انتخاب کنیم که در معادله موج زده‌ای با $[\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu (\partial \Phi / \partial t)]$ که به صورت یک منبع غیرهمگن است، صدق کند. به عبارت دیگر، ψ باید در معادله (۲۳-۱۵) صدق کند. نتیجه می‌گیریم که همواره امکان اعمال شرط لورنتس ضمن آنکه اثرهای فیزیکی (یعنی، \mathbf{E} ، \mathbf{B} و از این رو نیروی وارد بر ذرات باردار) به قوت خود باقی است، وجود دارد.

مثال ۱-۱۵ پیمانه لورنتس

در این مثال پیمانه لورنتس و تبدیلات پیمانه‌ای را بررسی می‌کنیم. میدانهای معلوم \mathbf{E} و \mathbf{B} از دوجفت پتانسیل‌های زده‌ای و برداری: (Φ, \mathbf{A}) و (Φ_0, \mathbf{A}_0) به دست می‌آیند. پتانسیلها به صورت زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0(\mathbf{r}, t) + \omega \frac{\cos(kr - \omega t)}{r}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}, t) + \left[k \frac{\cos(kr - \omega t)}{r} - \frac{\sin(kr - \omega t)}{r^2} \right] \hat{\mathbf{r}}$$

ابتدا باید دقت کنیم که پتانسیلها را می‌توان به صورت

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sin(kr - \omega t)}{r}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\sin(kr - \omega t)}{r} \right]$$

نوشت. به این ترتیب این پتانسیلها را با استفاده از معادلات (۲۱-۱۵)

اولاً، این شرط معادلات جفت‌شده‌ای که در پتانسیل‌های \mathbf{A} و Φ صدق می‌کنند را به معادلات موج مستقل تبدیل می‌کند و آنها را در موقعیت هم‌ارزی قرار می‌دهد، و دوم آنکه این شرط به‌طور طبیعی با ملاحظات نظریه نسبت خاص مطابقت دارد (فصل ۱۷ را ببینید). از نظر اهمیت این پیمانه و سادگی در استفاده آن باید ببینیم که آیا می‌توان آن را همیشه بدون معرفی و علل اثرهای غیرفیزیکی استفاده کرد. یعنی، می‌خواهیم ببینیم که آیا اصلاً ممکن است پتانسیل‌های وابسته به میدانهای الکتریکی و مغناطیسی مفروض که در همان لحظه در شرط لورنتس نیز صدق می‌کنند را پیدا کرد. برای پاسخ به این سؤال با مجموعه مفروض \mathbf{E} ، \mathbf{B} ، \mathbf{A} و Φ شروع می‌کنیم به طوری که در معادلات (۱-۱۵) و (۴-۱۵) صدق کنند: $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t - \nabla \Phi$ و $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. چون تاو یک گزادیان زده‌ای صفر است، در این صورت پتانسیلی که با

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi \quad (21-15)$$

داده می‌شود، میدان فیزیکی یکسان \mathbf{B} را به دست می‌دهد. که در آن ψ هر تابع زده‌ای مکانی و زمانی است، با این حال، چون میدان الکتریکی به مشتق \mathbf{A}' نسبت به زمان بستگی دارد، پتانسیل زده‌ای به منظور ارائه میدان الکتریکی فیزیکی یکسان باید تغییر کند. به این ترتیب می‌نویسیم

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla \Phi'$$

با قراردادن معادله (۲۱-۱۵) و استفاده از (۴-۱۵) به دست می‌آوریم

$$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \psi - \nabla \Phi'$$

که به دست می‌دهد

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (22-15)$$

تبدیل معادله (۲۱-۱۵) و (۲۲-۱۵) را، تبدیل پیمانه‌ای می‌نامیم، و ناوردایی میدانها تحت این تبدیل را، ناوردایی پیمانه‌ای می‌نامیم.

اکنون که پتانسیل‌های جدید \mathbf{A}' و Φ' همان میدانهای فیزیکی \mathbf{E} و \mathbf{B} را به دست می‌دهند که به وسیله پتانسیل‌های اولیه \mathbf{A} و Φ داده می‌شوند اینکه آیا \mathbf{A}' و Φ' در شرط لورنتس

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \varepsilon \mu \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0$$

صدق می‌کنند یا نه را امتحان می‌کنیم.

اندازه می‌گیرد با آنچه که اصطلاحاً زمان تأخیری یا $t - r/c$ می‌نامیم، به منبعها مربوط می‌شود.

اکنون معادله موج پتانسیل نرده‌ای را به‌ازای یک $\rho(\mathbf{r}, t)$ معلوم حل می‌کنیم. ابتدا آن را برای یک بار نقطه‌ای q که در لحظه t در مبدأ قرار دارد حل می‌کنیم. اکنون باید توجه کنیم که وابستگی زمانی که برای بار نقطه‌ای در نظر می‌گیریم از حرکت بار ناشی نمی‌شود. بار، یک موجود ریاضی مجازی است که حرکت ندارد، اما بزرگی آن تابعی از زمان است. میدانهایی که با حرکت بارها تولید می‌شوند از آنچه که در این مورد در نظر می‌گیریم پیچیده‌ترند. به محض آنکه پتانسیل تولیدشده به‌وسیله بار نقطه‌ای مجازی به‌دست می‌آید، این پتانسیل با جمع بر روی کل توزیع بار واقعی تعمیم می‌یابد. با این حال توجه به این نکته مهم است که پتانسیل توزیع بار واقعی را می‌توان به حالت یک بار نقطه‌ای متحرک ربط داد. این موضوع را بعداً در این فصل می‌خوانیم.

معادله (۱۵-۱۰) را در نقاط خارج از مبدأ و در خلأ می‌نویسیم

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad r \neq 0 \quad (26-15)$$

به دلیل تقارن کروی یک بار نقطه‌ای، پتانسیل فقط یک وابستگی فضایی شعاعی دارد. فقط با استفاده از قسمت شعاعی لاپلاسی، معادله (۱۵-۲۶) می‌شود

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi(r, t) = 0 \quad (27-15)$$

جواب این معادله باید شبیه به جواب معادله ایستایی

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} = 0$$

یعنی وابستگی $1/r$ باشد. از این رو قرار می‌دهیم

$$\Phi(r, t) = \frac{\psi(r, t)}{r} \quad (28-15)$$

که در آن $\psi(r, t)$ تابعی از r و t است که باید محاسبه شود. با قراردادن معادله (۱۵-۲۸) در معادله (۱۵-۲۷) معادله زیر برای $\psi(r, t)$ به‌دست می‌آید

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (29-15)$$

توجه کنید تبدیلی که در معادله (۱۵-۲۸) دیدیم در معادله اولیه از مشتق اول معاف است، به این ترتیب این تبدیل معادله (۱۵-۲۹) را

و (۱۵-۲۲) نشان می‌دهند که

$$\psi = \frac{\sin(kr - \omega t)}{r} \quad \text{با} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 + \nabla \psi$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0 - \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (25-15)$$

Φ و \mathbf{A} را در شرط لورنتس به‌صورت زیر قرار می‌دهیم

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \epsilon \mu \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} + \nabla^2 \psi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

با استفاده از

$$\epsilon \mu = v^{-2} = \frac{k^2}{\omega^2} \quad \text{و} \quad \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}$$

به آسانی می‌توان نشان داد که

$$\nabla^2 \psi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

از این رو اگر \mathbf{A}_0 و Φ_0 در شرط لورنتس صدق کنند، در این صورت \mathbf{A} و Φ نیز در این شرط صدق می‌کنند. ■

۲-۱۵ پتانسیلهای تأخیری

در این بخش می‌خواهیم معادلات موج (۱۵-۹) و (۱۵-۱۰) را که با استفاده از پیمانه لورنتس به‌دست آمدند، حل کنیم. به دلیل وجود منابع در این معادلات، جواب آن از دو قسمت تشکیل می‌شود: یک جواب معادله همگن و یک جواب خاص معادله ناهمگن. در آن صورت کل جواب باید طوری نوشته شود که در شرایط مرزی مورد نظر صدق کند. چون در فصل ۱۴ مسئله همگن (بدون منبع) با جزئیات کامل بررسی شد، در این فصل بر تأثیر منابع تأکید می‌کنیم. روشی که استفاده می‌شود شبیه روشی است که برای حل معادله پواسون برای حالت‌های ایستا به‌کار می‌رود. [بخش ۳-۶ و معادلات (۱۵-۱۲) و (۱۵-۱۳) را نگاه کنید]. با این حال به دلیل مشتقات زمانی پتانسیلها در این مسئله نباید درست با همان روش عمل کرد. مثلاً اشتباه است بگویم که جواب مسئله وابسته به زمان با جواب ایستایی به‌دست می‌آید که وابستگی زمانی این جواب با وارد کردن جواب مربوط به منبع داده می‌شود (جواب آنی). این استدلال اشتباه است، به این دلیل که آنچه در مسافت r و زمان t مطابق با این مسافت دیده می‌شود از پارامترهای منبعها در همان لحظه ناشی نمی‌شود. آشفتگی الکترومغناطیسی (در خلأ) دارای سرعت متناهی c است، از این رو زمانی مساوی با r/c طول می‌کشد تا نور به ناظر برسد. بنابراین، آنچه که ناظر در زمان t

بینهایت می‌شود؛ به این ترتیب انتگرال‌گیری معادله (۱۵-۱) بر روی یک حجم کوچک Δv که مبدأ را شامل می‌شود به دست می‌دهد

$$\int_{\Delta v} \left(\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) dv = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Delta v} \rho_f dv = -\frac{q}{\epsilon_0} \quad (۳۷-۱۵)$$

که با قراردادن Φ از معادله (۱۵-۳۶) به دست می‌آوریم

$$\int_{\Delta v} f \nabla^2 \frac{1}{r} dv = -\frac{q}{\epsilon_0} \quad (۳۸-۱۵)$$

در حد، r بسیار کوچک می‌شود، در نتیجه $f(r-ct)$ می‌شود $f(-ct)$ ، که در این صورت می‌توان آن را از انتگرال خارج کرد

$$f \int_{\Delta v} \nabla^2 \frac{1}{r} dv = -\frac{q}{\epsilon_0} \quad (۳۹-۱۵)$$

چون $\nabla^2(1/r)$ مساوی است با $-\delta(\mathbf{r})$ ، که $\delta(\mathbf{r})$ تابع دلتای دیراک است، در این صورت انتگرال به دست می‌دهد $-\delta(\mathbf{r}) = -q/\epsilon_0$ ، یا f در نزدیکی $r=0$ برابر است با $q(t)/4\pi\epsilon_0$ بنابراین

$$f(r-ct) = \frac{q(t-r/c)}{4\pi\epsilon_0} \quad (۴۰-۱۵)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(t-r/c)}{r} \quad (۴۱-۱۵)$$

همان طور که در شروع این بخش خواندیم باید به این موضوع توجه کرد، که پتانسیلی که در زمان t دیده می‌شود، $\Phi(r, t)$ ، با بزرگی یا بار در زمان زودتر $t-r/c$ ارتباط دارد. این زمان را

$$t' = t - \frac{r}{c} \quad (۴۲-۱۵)$$

زمان تأخیری می‌نامیم. پتانسیل، مطابق با آن را پتانسیل تأخیری می‌نامند. معادله (۴۱-۱۵) را می‌توان به سادگی به حالت یک توزیع بار

مفروض $\rho(\mathbf{r}, t)$ تعمیم داد، یعنی آن را می‌توان به

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' \quad (۴۳-۱۵)$$

تعمیم داد که در آن

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c} \quad (۴۴-۱۵)$$

زمان تأخیری یک جزء معلوم توزیع واقع در \mathbf{r}' است.

به معادله موج شعاعی یک بعدی تبدیل می‌کند. معادله موج یک بعدی را می‌توان با استفاده از فرایند دالامبر (بخش ۱۴-۴ و مثال ۱۴-۳ را ببینید) حل کرد. دو متغیر u و v را برحسب r و t تعریف می‌کنیم

$$v = r - ct \quad \text{و} \quad u = r + ct \quad (۳۰-۱۵)$$

از این رو

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = c \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \quad \text{و} \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \quad (۳۱-۱۵)$$

با قراردادن مشتقات جزئی در معادله (۱۵-۲۹) به دست می‌آوریم

$$-4c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0 \quad (۳۲-۱۵)$$

که با انتگرال‌گرفتن نسبت به u می‌دهد $\partial \psi / \partial v = h(v)$ ، که در آن h یک تابع اختیاری است که فقط به v بستگی دارد. اکنون از تابع h نسبت به v می‌توان انتگرال گرفت

$$\psi = \int_0^v h(v) dv + g(u) \quad (۳۳-۱۵)$$

که در آن $g(u)$ یک تابع اختیاری است که فقط به u بستگی دارد. انتگرال را $f(u)$ انتخاب می‌کنیم. به این ترتیب

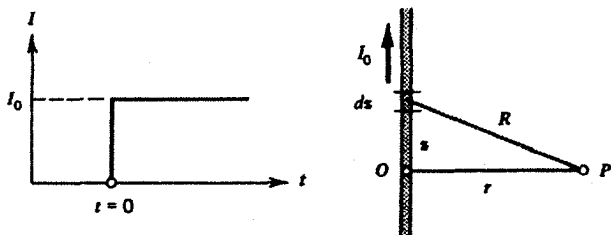
$$\psi = f(r-ct) + g(r+ct) \quad (۳۴-۱۵)$$

سهم جمله دوم در ψ فیزیکی نیست زیرا این سهم مستلزم یک موج فرودی است؛ این موج از بینهایت به سمت بار نقطه‌ای (مبدأ) منتشر می‌شود. اما سهم جمله اول فیزیکی است زیرا این جمله یک موج خروجی را توصیف می‌کند؛ این موج از منابع (مبدأ) به بینهایت منتشر می‌شود. از این رو g را حذف می‌کنیم و f را نگه می‌داریم؛ یعنی

$$\psi = f(r-ct) \quad (۳۵-۱۵)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{f(r-ct)}{r} \quad (۳۶-۱۵)$$

اکنون با استفاده از اطلاعات (شرط مرزی) مفروض در $r=0$ یعنی اینکه کل بار در مبدأ q است (هم‌ارز با کاربرد قانون گاوسی در الکتروستاتیک) تابع f را محاسبه می‌کنیم. برای استفاده از این اطلاعات از یک فرایند حدی باید استفاده کرد زیرا پتانسیل در $r=0$



شکل ۱-۱۵ محاسبه بردار پتانسیل تأخیری جریان رشته‌ای که ناگهان در $t = 0$ می‌چرخد.

جریان می‌یابد. پتانسیل نرده‌ای تولیدشده به وسیله جریان در نقطه مشاهده صفر است، زیرا چگالی بار ρ_f همه‌جا در سیم صفر است. پتانسیل برداری را با استفاده از پتانسیل برداری تأخیری مفروض در معادله (۴۷-۱۵) محاسبه می‌کنیم. با استفاده از تقریب رشته‌ای $I(t) = 0$ و $t \geq 0$ و انتخاب $I(t) = I_0$ و $J dv = I dl$ به‌ازای $t < 0$ می‌نویسیم

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{\mathbf{z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(t - R/c)}{R} dz \quad (50-15)$$

جریان تأخیری به دلیل سرعت متناهی اختلال محدود می‌شود. یک جزء مفروض به فاصله z از مبدأ فقط در صورتی در این جریان سهم دارد که فاصله از نقطه مشاهده از ct کمتر باشد. به این ترتیب $I(t - R/c) = 0$ هنگامی که $|z|^2 \geq c^2 t^2 - r^2$ و I_0 هنگامی که $|z|^2 < c^2 t^2 - r^2$. به این ترتیب وقتی $r \geq ct$ معادله (۵۰-۱۵) صفر می‌شود و

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 \hat{\mathbf{z}}}{4\pi} \int \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \quad r < ct \quad (51-15)$$

با انتگرال‌گیری از این انتگرال به‌دست می‌آوریم

$$2 \ln[z + (z^2 + r^2)^{1/2}]$$

از این رو

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 \hat{\mathbf{z}}}{4\pi} \ln \left(\frac{\sqrt{c^2 t^2 - r^2} + ct}{r} \right) \quad r < ct$$

$$\mathbf{A} = 0 \quad r \geq ct \quad (52-15)$$

توجه به این موضوع جالب است که وقتی $t \rightarrow \infty$ این پتانسیل به پتانسیل مستقل از زمان حالت پایا که در مثال ۸-۹ محاسبه شد

با استفاده از فرایندی مشابه، معادله (۹-۱۵) را می‌توان برای پتانسیل برداری حل کرد. این موضوع هنگامی مشخص می‌شود که بفهمیم هر مؤلفه دکارتی معادله (۹-۱۵) یک معادله نرده‌ای همسان با معادله موجی است که در پتانسیل نرده‌ای صدق می‌کند [معادله (۱۰-۱۵)] را ببینید. مثلاً مؤلفه z معادله (۹-۱۵) در خلا عبارت است از

$$\nabla^2 A_z - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -\mu_0 J_{fz} \quad (45-15)$$

مؤلفه‌های x و y مربوط به \mathbf{A} در معادلات مشابهی صدق می‌کنند. به این ترتیب در ادامه معادلات (۱۰-۱۵) و (۴۳-۱۵) می‌نویسیم

$$A_z(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_z(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (46-15)$$

از این رو $\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}$ به‌سادگی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (47-15)$$

که در آن $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ زمان تأخیری است، و $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ پتانسیل برداری تأخیری است. باید توجه کنیم که در پیمانه کولنی، پتانسیل نرده‌ای یک پتانسیل آنی است [که با معادله (۱۳-۱۵) داده می‌شود]، در صورتی که پتانسیل برداری یک پتانسیل تأخیری است. پس از تعیین پتانسیل‌های نرده‌ای و برداری به‌ازای یک توزیع بار و یک توزیع جریان مفروض، با استفاده از معادلات (۱-۱۵) و (۴-۱۵) به‌ترتیب می‌توان میدانهای مغناطیسی و الکتریکی را تعیین کرد. مثلاً میدان الکتریکی مطابق با پتانسیل نرده‌ای مفروض در معادله (۴۱-۱۵) عبارت است از

$$-\nabla\Phi = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{q(t - r/c)}{r} \quad (48-15)$$

یا

$$-\nabla\Phi = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q(t - r/c)}{r^2} + \frac{\dot{q}}{cr} \right] \quad (49-15)$$

که در آن \dot{q} مشتق q نسبت به متغیر $(t - r/c)$ است.

مثال ۲-۱۵ پتانسیل تأخیری یک جریان رشته‌ای مستقیم نامتناهی

همان‌طور که در شکل ۱-۱۵ نشان داده شده است جریان ثابت I در لحظه $t = 0$ در یک سیم رسانای مستقیم رشته‌ای نامتناهی

تبدیل می‌شود. در این حد $\sqrt{c^2 t^2 - r^2} \approx ct \rightarrow \infty$ به این ترتیب

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln r + \text{یک ثابت بسیار بزرگ} \quad (53-15)$$

مثال ۳-۱۵ پتانسیل نرده‌ای تأخیری یک دوقطبی الکتریکی
یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی $\hat{\mathbf{K}}p(t)$ واقع در مبدأ
و با یک جهت دلخواه $\hat{\mathbf{K}}$ ، با زمان تغییر می‌کند. میدان الکتریکی
ایجادشده با استفاده از نتیجه مسئله ۴-۱۵ محاسبه می‌شود. یعنی

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times (\hat{\mathbf{K}}\Phi) = \nabla \nabla \cdot (\hat{\mathbf{K}}\Phi) - \nabla^2 \hat{\mathbf{K}}\Phi \quad (54-15)$$

که در آن Φ تابع نرده‌ای است که در معادله موج همگن صدق می‌کند.
جواب استاندارد این معادله موج با (۳۶-۱۵) داده می‌شود، که با
قراردادن در معادله (۵۴-۱۵) به دست می‌آید

$$\mathbf{E} = \frac{\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r}}{r} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f'}{c^2 r^2} + \frac{f''}{c^2 r^2} \right) \mathbf{r} - \left(\frac{f}{r^2} + \frac{f'}{c^2 r^2} + \frac{f''}{c^2 r} \right) \hat{\mathbf{K}} \quad (55-15)$$

که در آن تک پریم به معنی مشتق‌گیری نسبت به شناسه‌هاست. اثرات
تأخیری در فواصل نزدیک به دوقطبی ناچیز می‌شود و بخش غالب
این میدان باید با میدان آنی همین شکل از میدان ایستا یک دوقطبی
با گشتاور دوقطبی $\hat{\mathbf{K}}\rho$ یکسان باشد. در حالی که $r \rightarrow \infty$ معادله
(۵۵-۱۵) به

$$\mathbf{E} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r}}{r} \mathbf{r} - \frac{f}{r^2} \hat{\mathbf{K}} \quad r \rightarrow \infty \quad (56-15)$$

تبدیل می‌شود. مقایسه این میدان با میدان یک دوقطبی ایستا در
جهت $\hat{\mathbf{K}}$:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \frac{\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r}}{r} \mathbf{r} - \frac{p}{r^2} \hat{\mathbf{K}} \right]$$

به دست می‌دهد $f = p/4\pi\epsilon_0$ ، و از این رو

$$f(t - r/c) = p(t - r/c)/4\pi\epsilon_0$$

از این رو پتانسیل تأخیری یک دوقطبی الکتریکی وابسته به میدان
الکتریکی که با معادله (۵۴-۱۵) داده می‌شود عبارت است از

$$\Phi = \frac{p(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (57-15)$$

۳-۱۵ امواج کروی و معادلات موج میدان - بسط

چندقطبی برای توزیعیهای متحرک آهسته

در فصل ۱۴ انتشار امواج تخت در نواحی فضای خالی از بار و
جریان که در آنجا فرض کردیم امواج فقط به مختصه دکارتی (امواج
تخت) بستگی دارند، بحث شد. این محدودیت غیرفیزیکی نیست؛
مثلاً تابشی که با توزیعیهای بار و جریان منتشر می‌شود و در مسافت‌های
دور نسبت به ابعاد این توزیعیها دیده می‌شود، به صورت کاملاً مناسبی با
امواج تخت توصیف می‌شود. در این بخش بار دیگر انتشار در نواحی
فضای خالی از جریان و بار را بدون هیچ گونه محدودیتی بر روی
فواصل از منابع را مطالعه می‌کنیم و بنابراین میدانهای تابش می‌توانند به
بیش از یک مختصه وابسته باشند. نظریه پیشرفته، در حالت فیزیکی
دیگری که در آن تابش به چیزی بیش از مختصات وابسته است مانند
پراکنش امواج تخت به وسیله اجسام رسانا یا دی‌الکتریک (مثلاً کره‌های
رسانا یا شکستار) کاربرد دارد. مثال ۶-۱۵ را برای این کاربرد ببینید.
این حالت‌های فیزیکی با معادلات موج میدانهای الکتریکی و
مغناطیسی در مختصات قطبی کروی به بهترین وجه توصیف می‌شوند.
بعداً در بخش ۴-۱۵ از معادلات پتانسیل برای رسیدن به نتایج مشابه
استفاده خواهیم کرد. معادله موج میدان الکتریکی را در خارج از منابع
خارجی و در غیاب مواد رسانا (برای خلا) در نظر می‌گیریم:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (17-14)$$

تابش تکفام مورد توجه ماست یعنی، انتخاب می‌کنیم

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} e^{-i\omega t} \quad (58-15)$$

که با جایگذاری، معادله موج را به معادله‌ای که مشهور به معادله
هلمهولتز برداری است تبدیل می‌کند:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0 \quad (59-15)$$

به علت ماهیت برداری \mathbf{E} ، این معادله را نمی‌توان به آسانی حل کرد،
زیرا در مختصات کروی تفکیک‌پذیر نیست. با این حال در زیر نشان
می‌دهیم که می‌توان آن را به یک معادله نرده‌ای تبدیل کرد و از این رو
با استفاده از تبدیل

$$\mathbf{E} = \mathbf{r} \times \nabla \psi \quad (60-15)$$

آن را جداسازی می‌کنیم. چون $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ ، و با استفاده از
 $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla f$ ، این تبدیل را نیز به صورت

و با استفاده از رابطه $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ ، می توان به گرادیان یک تابع نرده ای تبدیل کرد. به این ترتیب

$$\mathbf{E} = -\nabla \times (\mathbf{r}\psi) \quad (61-15)$$

$$(\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \psi = \nabla(\mathbf{r} \cdot \nabla \psi) - \nabla \psi \quad (66-15)$$

با قراردادن این شکل در معادله هلمهولتز به دست می آوریم

که با قراردادن در معادله (۶۵-۱۵) به دست می آید

$$-\nabla^2 [\nabla \times (\mathbf{r}\psi)] - \frac{\omega^2}{c^2} \nabla \times (\mathbf{r}\psi) = 0 \quad (62-15)$$

$$\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) = \mathbf{r} \nabla^2 \psi - \nabla(\psi - \mathbf{r} \cdot \nabla \psi) \quad (67-15)$$

با قراردادن این نتیجه در معادله (۶۴-۱۵) و استفاده از این موضوع که تاو گرادیان یک نرده ای، صفر است، به دست می آوریم

اکنون جمله اول در این معادله را ساده می کنیم. لاپلاسی یک بردار در معادله (۶۷-۱) داده می شود: $\nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{E}$. چون \mathbf{E} به صورت یک تاو بردار $\mathbf{r}\psi$ نوشته می شود، در این صورت $\nabla \cdot \mathbf{E}$ صفر است (دیورژانس تاو یک بردار صفر است). به این ترتیب معادله (۶۲-۱۵) به صورت زیر می شود

$$\nabla \times \mathbf{r} \left(\nabla^2 \psi + \frac{\omega^2}{c^2} \psi \right) = 0 \quad (68-15)$$

$$\nabla \times \left[\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}\psi) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{r}\psi \right] = 0 \quad (63-15)$$

این معادله اگر $(\omega^2/c^2)\psi + \nabla^2 \psi$ فقط تابعی از r یا متحد با صفر باشد، صادق است. به این ترتیب قرار می دهیم

در این صورت معادله (۶۳-۱۵) با استفاده از $\nabla \times (\mathbf{r}\psi) = -\mathbf{r} \times \nabla \psi$ به دست می آید

$$\nabla^2 \psi + \frac{\omega^2}{c^2} \psi = 0 \quad (69-15)$$

$$\nabla \times \left[\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{r}\psi \right] = 0 \quad (64-15)$$

که نشان می دهد ψ در یک معادله نرده ای همگن صدق می کند. این معادله، برخلاف معادله هلمهولتز برداری که با خود میدان الکتریکی برآورده می شود، معادله هلمهولتز نرده ای نام دارد. توجه کنید که در حد $\omega \rightarrow 0$ ، این معادله به معادله لاپلاسی $\nabla^2 \psi = 0$ ، که در فصل ۳ حل آن با استفاده از بسطهای سری (جواب چندقطبی) در ابعاد گوناگون بحث شد، تبدیل می شود. برای حل معادله هلمهولتز نرده ای (جواب چندقطبی) از بعضی فرمولبندیهای آن فصل استفاده می کنیم. اما قبل از به دست آوردن ψ ، ماهیت میدانها را بحث می کنیم. دو حالت در هنگام تشکیل میدانهای الکترومغناطیسی به وجود می آید

جمله اول در داخل کروشه این معادله با استفاده از اتحاد

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) \\ &\quad - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \end{aligned}$$

ساده می شود به این ترتیب

۱. الکترونیک عرضی (TR). در این حالت، با معادله هلمهولتز برای میدان \mathbf{E} شروع می کنیم. وابستگی میدان \mathbf{E} به مختصات فضایی در این حالت عبارت است از

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) &= \mathbf{r} \nabla^2 \psi - \nabla \psi (\nabla \cdot \mathbf{r}) + (\nabla \psi \cdot \nabla) \mathbf{r} \\ &\quad - (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \psi \end{aligned}$$

با استفاده از این واقعیت که $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ و $(\nabla \psi \cdot \nabla) \mathbf{r} = \nabla \psi$ ، به دست می آوریم

که نشان می دهد \mathbf{E} بر جهت شعاعی عمود است یا بر سطح کروی به مرکز مبدأ در نقطه مورد نظر مماس است. میدان \mathbf{B} مطابق با این حالت از معادله ماکسول $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ محاسبه می شود. در این صورت با انتخاب وابستگی زمانی \mathbf{E} و \mathbf{B} به شکل $e^{-i\omega t}$ (تابش تکفام)، داریم

$$\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) = \mathbf{r} \nabla^2 \psi - 2 \nabla \psi - (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \psi \quad (65-15)$$

جمله $(\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \psi$ را با استفاده از اتحاد برداری

$$\begin{aligned} \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ &\quad + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \quad (70-15)$$

از این رو

$$\mathbf{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) \quad (71-15)$$

۲. مغناطیس عرضی (TM). در این حالت، با معادله هلمهولتز برداری برای میدان \mathbf{B} شروع می‌کنیم

$$\nabla^2 \mathbf{B}' + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{B}' = 0 \quad (72-15)$$

استفاده از پریم بر روی \mathbf{B} به این علت است که تأکید کنیم این میدان با میدان \mathbf{B} معادله (71-15) یکی نیست. وابستگی میدان \mathbf{B}' به مختصات فضایی به صورت

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{c} \mathbf{r} \times \nabla \psi \quad (73-15)$$

انتخاب می‌شود که با توجه به آن میدان مغناطیسی بر جهت شعاعی عمود یا بر سطح کروی به مرکز مبدأ در نقطه مورد نظر مماس است. میدان \mathbf{E}' متناظر با این حالت از معادله ماکسول $\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t$ محاسبه می‌شود. انتخاب وابستگی زمانی \mathbf{E}' و \mathbf{B}' به شکل $e^{-i\omega t}$ به دست می‌دهد

$$\nabla \times \mathbf{B}' = -\frac{i\omega}{c^2} \mathbf{E}' \quad (74-15)$$

از این رو

$$\mathbf{E}' = \frac{ic}{\omega} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) \quad (75-15)$$

با میدانهای تعریف شده برحسب ψ و با استفاده از روشی که در حل معادله لاپلاس در مختصات کروی به کار بردیم، جوابهایی برای آن به دست می‌آوریم. با استفاده از $k = \omega/c$ و نوشتن ∇^2 در مختصات کروی، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 \quad (76-15)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها که در فصل ۳ برای حل مسائل مقدار مرزی الکتروستاتیکی بحث شد، این معادله را می‌توان حل کرد. اکنون اگرچه روشی که در این مورد استفاده می‌کنیم مانند روشی است که در مسائل الکتروستاتیکی دنبال شد، وجود جمله $k^2 \psi$ در این معادله، که نتیجه مستقیم انتشار است، جواب را پیچیده‌تر می‌کند. اگرچه

معادله سه بعدی (حالت کلی) را حل می‌کنیم، کاربردهایی که در این کتاب ارائه می‌شوند، تقارن سمتی دارند. به علاوه، در تمام کاربردهایی که در این کتاب در نظر خواهیم گرفت، از پایتترین دو جمله این بسط: $(l, m) = (1, 0)$ و $(l, m) = (0, 0)$ که در آن l و m ثابتهای جدایی هستند استفاده می‌شود. این جمله‌ها به صورت زیر هستند

$$\psi_{00} = C_0 \frac{e^{ikr}}{ikr} \quad \psi_{10} = -C_1 \frac{e^{ikr}}{kr} \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \cos \theta \quad (77-15)$$

که در آنها C_0 و C_1 ثابت هستند. برای حل حالت کلی مثال ۱۵-۴ را ببینید.

مثال ۱۵-۴ جواب عمومی معادله هلمهولتز نرده‌ای

در روش جداسازی متغیرها ψ را به صورت حاصلضرب سه تابع که هر تابع فقط تابع یک متغیر است در نظر می‌گیریم:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)P(\theta)F(\phi) \quad (78-15)$$

با قراردادن این ضرب در معادله (76-15) و تقسیم آن بر $\psi^2 / r^2 \sin^2 \theta$ که در آن $r \neq 0$ و $\theta \neq 0$ ، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{R} \sin^2 \theta \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{P} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\phi^2} + k^2 r^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (79-15)$$

جمله سوم $[(d^2 F / d\theta^2) / F]$ فقط به ϕ بستگی دارد حال آنکه بقیه جملات در معادله به ϕ بستگی ندارند؛ بنابراین، این جمله را برابر یک ثابت جداسازی $-m^2$ ، قرار می‌دهیم. به این ترتیب

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\phi^2} = -m^2 \quad (80-15)$$

یا

$$\frac{d^2 F_m}{d\phi^2} + m^2 F_m = 0 \quad (81-15)$$

که در آن از شاخص m برای وابستگی F به m استفاده کرده‌ایم. با وارد کردن ثابت جداسازی $-m^2$ در معادله (79-15) و تقسیم آن بر $\sin^2 \theta$ ، که در آن $\theta \neq 0$ ، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 + \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (82-15)$$

جدول ۱-۱۵

$P_l^0 = \frac{1}{2} [3 \cos^2 \theta - 1]$	$P_l^0 = 1$
$P_l^1 = 3 \cos \theta [1 - \cos^2 \theta]^{1/2}$	$P_l^0 = \cos \theta$
$P_l^2 = 3(1 - \cos^2 \theta)$	$P_l^1 = \sin \theta$

که در آن $\eta = \cos \theta$ ، این چندجمله‌ایها را می‌توان از چندجمله‌ای لژاندر با l و یکسان، به دست آورد. جدول ۱-۱۵ وابستگی صریح چند تا از این چندجمله‌ایها به θ را نشان می‌دهد. ویژگی مهم این چندجمله‌ایها متعامد بودن آنهاست؛ یعنی

$$\int_{-1}^1 P_l^m(\eta) P_l^{m'}(\eta) d\eta = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (۸۹-۱۵)$$

که در آن $(l+m)!$ به معنی فاکتوریل $(l+m)$ یعنی

$$[(l+m)(l+m-1)\dots 1]$$

است.

معادله شعاعی را اکنون می‌توان با ثابتهای جداسازی تعیین شده برای مقادیر مختلف l حل کرد. با انتخاب $\xi = kr$ ، معادله (۸۴-۱۵) می‌شود

$$\frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d}{d\xi} R_l - [l(l+1) - \xi^2] R_l = 0 \quad (۹۰-۱۵)$$

برای نوشتن این معادله به شکل مشهور معادله بسل از جانشینی $R_l = \chi_l / \sqrt{\xi}$ استفاده می‌کنیم:

$$\xi^2 \frac{d^2 \chi_l}{d\xi^2} + \xi \frac{d\chi_l}{d\xi} - \left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \xi^2 \right] \chi_l = 0 \quad (۹۱-۱۵)$$

معادله بسل دارای دو جواب مستقل خطی به ازای هر l است. این جوابها به توابع بسل و نویمن مشهورند و به ترتیب به صورت $J_{l+1/2}(\xi)$ و $N_{l+1/2}(\xi)$ مشخص می‌شوند. هر دو جواب مشهورند و به صورت عددی جدولبندی شده‌اند. این جوابها از مرتبه نیمه صحیح هستند و غالباً توابع بسل استوانه‌ای نامیده می‌شوند ولی جوابهای متناظر با R_l ، توابع بسل و نویمن کروی نام دارند

$$\eta_l(kr) = \frac{\pi}{\sqrt{2kr}} N_{l+1/2}(kr) \quad j_l(kr) = \frac{\pi}{\sqrt{2kr}} J_{l+1/2}(kr) \quad (۹۲-۱۵)$$

جدول ۲-۱۵ وابستگی صریح تعدادی از این توابع را به r نشان

چون دو جمله اول این معادله فقط به r بستگی دارد، حال آنکه دو جمله آخر فقط به θ بستگی دارد، دو جمله اول را برابر یک ثابت: $l(l+1)$ ، قرار می‌دهیم. به این ترتیب

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{dP_l^m}{d\theta} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P_l^m = 0 \quad (۸۳-۱۵)$$

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{dR_l}{dr} - [l(l+1) - k^2 r^2] R_l = 0 \quad (۸۴-۱۵)$$

که در آن از شاخص l برای نشان دادن وابستگی R و P به l و از شاخص m برای وابستگی P به m استفاده کرده‌ایم. اکنون معادلات (۸۱-۱۵)، (۸۳-۱۵) و (۸۴-۱۵) را حل می‌کنیم.

جواب معادله (۸۱-۱۵) عبارت است از

$$F_m(\phi) = e^{\pm im\phi} \quad (۸۵-۱۵)$$

برای اینکه این جوابها توابع تک‌مقداری از ϕ باشند، دامنه m باید محدود باشد. برای آنکه جواب از نظر فیزیکی معنی داشته باشد، باید بعد از چرخش 2π جواب یکسانی به دست آید یا

$$F_m(\phi + 2\pi) = F_m(\phi) \quad (۸۶-۱۵)$$

که با توجه به آن باید m یک عدد صحیح مثبت یا صفر باشد. یک ویژگی مهم این جوابها که باید به آن توجه کرد این است که این جوابها متعامدند

$$\int_0^{2\pi} F_{m_1} F_{m_2}^* d\phi = 2\pi \delta_{m_1 m_2} \quad (۸۷-۱۵)$$

که در آن $\delta_{m_1 m_2}$ تابع دلتای کرونگر است.

معادله (۸۳-۱۵) به هر دو متغیر جداسازی $l(l+1)$ و m^2 بستگی دارد. برای حالت خاص $m=0$ ، این معادله به معادله لژاندر که در حل مسائل مقدار مرزی الکتروستاتیکی تقارن سمتی [معادله (۲۲-۳)] با آن روبه‌رو هستیم تبدیل می‌شود. معلوم شده است که فقط اگر l یک عدد صحیح مثبت باشد، این معادله خاص جوابهایی دارد که به ازای تمام مقادیر θ ، شامل 0° و 180° ، خوشرفتار است. این شرط در حالتی که m غیرصفر است نیز ضروری است. با این همه، به ازای یک l مفروض، مقادیر m به $l \leq m$ محدود می‌شوند. با این شرایط معادله (۸۳-۱۵) را معادله وابسته لژاندر می‌نامیم و جوابهای آن را چندجمله‌ایهای وابسته لژاندر می‌نامند؛ به ازای یک l و m مفروض، با استفاده از رابطه مولد داریم

$$P_l^m(\eta) = (1 - \eta^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\eta^m} P_l(\eta) \quad (۸۸-۱۵)$$

می‌شوند) توجه می‌کنیم. انتخاب حد $kr \rightarrow \infty$ در معادله (۹۵-۱۵) و استفاده از معادله (۹۴-۱۵) به دست می‌دهد:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{l,m} \left[C_l^m (-i)^{l+1} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{kr} + D_l^m (i)^{l+1} \frac{e^{-i(kr+\omega t)}}{kr} \right] P_l^m(\theta) e^{\pm im\phi} \quad (۹۶-۱۵)$$

جمله اول یک موج خروجی را نشان می‌دهد، حال آنکه جمله دوم یک موج فرودی (که از بینهایت به سمت مبدأ منتشر می‌شود) را نشان می‌دهد که منبع در بینهایت، آن را تولید می‌کند. بنابراین جمله دوم یک جواب فیزیکی را نشان نمی‌دهد. در نتیجه قرار می‌دهیم $D_l^m = 0$ و C_l^m را نگه می‌داریم. به این ترتیب داریم

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{l,m} C_l^m h_l^{(1)}(kr) P_l^m(\cos\theta) e^{\pm im\phi} \quad (۹۷-۱۵)$$

ملاحظات متناظر با این جواب را در ادامه معادله (۳۴-۱۵) ببینید. ■

در معادله (۷۷-۱۵) پایستری جواب، ψ_{00} فقط به فاصله شعاعی بستگی دارد و بنابراین سهمی در میدانهای الکترومغناطیسی ندارد. چون $\nabla\psi_{00}$ شعاعی است؛ از این رو $\mathbf{r} \times \nabla\psi_{00} = 0$ اما، جواب بعدی ψ_{10} ، در میدانهای EM سهم دارد. برای حالت TE، از معادلات (۶۰-۱۵)، (۷۱-۱۵) و (۷۷-۱۵) داریم

$$\nabla\psi_{10} = \left[\hat{\mathbf{r}} \left(\frac{i}{kr} - \frac{2}{k^2 r^2} - \frac{2i}{k^2 r^3} \right) k e^{ikr} \cos\theta - \hat{\theta} \left(\frac{1}{k^2 r^2} + \frac{i}{k^2 r^3} \right) k e^{ikr} \sin\theta \right] E_0 \quad (۹۸-۱۵)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times \nabla\psi_{10} = -\hat{\phi} E_0 \left(\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2 r^2} \right) e^{ikr} \sin\theta \quad (۹۹-۱۵)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{ikE_0}{\omega} e^{ikr} \left[2 \left(\frac{1}{k^2 r^2} + \frac{i}{k^2 r^3} \right) \cos\theta \hat{\mathbf{r}} - \left(\frac{i}{kr} - \frac{1}{k^2 r^2} - \frac{i}{k^2 r^3} \right) \sin\theta \hat{\theta} \right] \quad (۱۰۰-۱۵)$$

که در آن پتانسیل E_0 یک ثابت است. میدان الکتریکی تصادفاً در جهت $\hat{\phi}$ است، همان طور که در حالت TE فرض کردیم این میدان بر جهت شعاعی عمود است. از طرف دیگر، میدان مغناطیسی دارای یک مؤلفه در امتداد $\hat{\theta}$ و یک مؤلفه در امتداد $\hat{\mathbf{r}}$ است.

جدول ۲-۱۵

$\eta_l(kr)$	$j_l(kr)$	l
$-\frac{1}{kr} \cos kr$	$\frac{\sin kr}{kr}$	۰
$\frac{\cos kr}{(kr)^2} - \frac{\sin kr}{kr}$	$\frac{\sin kr}{(kr)^2} - \frac{\cos kr}{kr}$	۱
$-\left[\frac{3}{(kr)^2} - \frac{1}{kr} \right] \cos kr - \frac{3 \sin kr}{(kr)^2}$	$\left[\frac{3}{(kr)^2} - \frac{1}{kr} \right] \sin kr - \frac{3 \cos kr}{(kr)^2}$	۲

می‌دهد. این جدول همچنین نشان می‌دهد که j_l و η_l شامل ترکیبات توابع سینوسی و کسینوسی هستند. نشان دادن اینکه ترکیبات این توابع نماهای مختلط دارند، ساده است

$$h_l^{(2)}(kr) = j_l(kr) - i\eta_l(kr) \quad h_l^{(1)}(kr) = j_l(kr) + i\eta_l(kr) \quad (۹۳-۱۵)$$

توابع مختلط $h_l^{(1)}$ و $h_l^{(2)}$ را توابع هانکل می‌نامیم. برای kr حقیقی، مانند این حالت، $h_l^{(1)} = h_l^{(2)}$. جدول ۳-۱۵ وابستگی صریح تعدادی از توابع هانکل را به r نشان می‌دهد، چون خاصیت مجانبی توابع هانکل در مسائل تابش مفید است، در این حالت وقتی که $kr \rightarrow \infty$ این توابع به صورت زیر می‌شوند

$$h_l^{(1)}(kr) = h_l^{(2)*}(kr) \simeq (-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \quad (۹۴-۱۵)$$

اکنون کلی‌ترین جواب معادله موج زده‌ای را می‌توان نوشت:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{l,m} e^{-i\omega t} [C_l^m h_l^{(1)}(kr) + D_l^m h_l^{(2)}(kr)] P_l^m(\cos\theta) e^{\pm im\phi} \quad (۹۵-۱۵)$$

حال به آشفتگیهای تولیدشده به وسیله منابع واقع در نزدیکی مبدأ، و از این رو در امواج خروجی (که از مقادیر کوچک r به بینهایت منتشر

جدول ۳-۱۵

$h_l^{(1)}(kr)$	$h_l^{(2)}(kr)$	l
$\frac{e^{-ikr}}{ikr}$	$\frac{e^{ikr}}{ikr}$	۰
$-\frac{e^{-ikr}}{kr} \left(1 - \frac{i}{kr} \right)$	$-\frac{e^{ikr}}{kr} \left(1 + \frac{i}{kr} \right)$	۱
$-\frac{ie^{-ikr}}{kr} \left[1 - \frac{2i}{kr} - \frac{3}{(kr)^2} \right]$	$i \frac{e^{ikr}}{kr} \left[1 + \frac{2i}{kr} - \frac{3}{(kr)^2} \right]$	۲

از طرف دیگر، در حالت TM، جملات زیر در حالی که $kr \rightarrow 0$ غالب اند

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = -\frac{cB_0}{k^2 r^2} (\gamma \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (106-15)$$

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = -\hat{\phi} i \frac{B_0}{k^2 r^2} \sin \theta \quad (107-15)$$

میدان الکتریکی \mathbf{E}' حالت TM دارای وابستگی فضایی یک دوقطبی الکتریکی است [معادله (۲-۴۶)]. از طرف دیگر، میدان مغناطیسی \mathbf{B} حالت TE دارای وابستگی فضایی یک دوقطبی مغناطیسی است [معادله (۸-۹۸)]. از این رو نتیجه می‌گیریم که میدانهای حالت TE به وسیله یک دوقطبی مغناطیسی و میدانهای حالت TM به وسیله یک دوقطبی الکتریکی به وجود می‌آیند.

با مقایسه معادله (۱۰۶-۱۵) با میدان یک دوقطبی الکتریکی ایستا [معادله (۲-۴۶)] داریم

$$B_0 = -\frac{p_0 k^2}{4\pi\epsilon_0 c} \quad (108-15)$$

به این ترتیب

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \frac{ip_0 k^2}{4\pi\epsilon_0} e^{ikr} \left[\gamma \left(\frac{1}{k^2 r^2} + \frac{i}{k^2 r^3} \right) \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \left(\frac{i}{kr} - \frac{1}{k^2 r^2} - \frac{i}{k^2 r^3} \right) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] \quad (109-15)$$

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \hat{\phi} \frac{p_0 k^2}{4\pi\epsilon_0 c} e^{ikr} \left(\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2 r^2} \right) \sin \theta \quad (110-15)$$

به همین ترتیب، همین فرایند را می‌توان در حالت TE دنبال کرد و نشان داد که میدانهایی که با معادلات (۱۵-۹۹) و (۱۵-۱۰۰) توصیف می‌شوند ناشی از یک دوقطبی مغناطیسی در جهت محور z اند، $\mathbf{m} = m_0 \hat{\mathbf{z}} \cos \omega t$ ، یعنی

$$E_0 = \frac{m_0 k^2}{4\pi\epsilon_0 c} \quad (111-15)$$

نظم بالا نشان می‌دهد که میدانهای یک دوقطبی الکتریکی (مغناطیسی) کاملاً پیچیده‌اند. مثلاً میدان الکتریکی یک دوقطبی الکتریکی جملاتی دارد که به صورت $1/r$ ، $1/r^2$ و $1/r^3$ تغییر می‌کنند، در صورتی که میدان مغناطیسی متناظر با آن دارای جملاتی است که به صورت $1/r$ و $1/r^2$ تغییر می‌کنند. بحثهای کامل این میدانها را در بخشهای ۱۵-۱، ۱۵-۴، ۱۵-۵ و ۱۵-۶ می‌خوانیم. اکنون

برای حالت TM، از معادلات (۱۵-۷۳)، (۱۵-۷۵) و (۱۵-۷۷)، داریم

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = -\hat{\phi} B_0 \left(\frac{1}{kr} + \frac{1}{k^2 r^2} \right) e^{ikr} \sin \theta \quad (101-15)$$

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = icB_0 e^{ikr} \left[\gamma \left(\frac{1}{k^2 r^2} + \frac{i}{k^2 r^3} \right) \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \left(\frac{i}{kr} - \frac{1}{k^2 r^2} - \frac{i}{k^2 r^3} \right) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] \quad (102-15)$$

که در آن B_0 یک ثابت است. معادلات (۱۵-۹۹) تا (۱۵-۱۰۲) نشان می‌دهند که نقشهای E و B در حالت‌های TE و TM جابه‌جا می‌شوند. اکنون میدانهای $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ و $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ را می‌توان با ضرب قسمت‌های شعاعی میدان در $e^{-i\omega t}$ و انتخاب قسمت‌های حقیقی محاسبه کرد. به این ترتیب، برای حالت TM داریم

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) = -\hat{\phi} B_0 \left[\frac{\cos(\omega t - kr)}{kr} + \frac{\sin(\omega t - kr)}{k^2 r^2} \right] \sin \theta$$

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \gamma c B_0 \left[\frac{\sin(\omega t - kr)}{k^2 r^2} - \frac{\cos(\omega t - kr)}{k^2 r^3} \right] \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + B_0 \left[\frac{\cos(\omega t - kr)}{kr} + \frac{\sin(\omega t - kr)}{k^2 r^2} \right] \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (103-15)$$

از یک فرایند مشابه می‌توان برای حالت TE، برای محاسبه میدان \mathbf{E} و \mathbf{B} استفاده کرد.

اکنون در مورد ماهیت میدانها بحث می‌کنیم. یک دوقطبی الکتریکی را که در مبدأ در امتداد محور z قرار دارد و دامنه آن به طور سینوسی با زمان $\mathbf{p}(t) = p_0 \hat{\mathbf{z}} \cos \omega t$ تغییر می‌کند در نظر می‌گیریم. برای تعیین میدانهای EM تولیدشده به وسیله این دوقطبی میدانها در معادلات (۱۵-۹۹) تا (۱۵-۱۰۲) را امتحان می‌کنیم. مثلاً، میدانهای نزدیک به مبدأ را امتحان می‌کنیم. با انتخاب $kr \rightarrow 0$ ، اثرهای تأخیری اهمیت خود را از دست می‌دهد. در حالت TE جملات زیر غالب اند

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\hat{\phi} \frac{iE_0}{k^2 r^2} \sin \theta \quad (104-15)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{kE_0}{\omega k^2 r^2} (\gamma \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (105-15)$$

در فصلهای ۳ و ۸ این اثرها را در حالت‌های ایستایی و حالت پایا با استفاده از روش تصاویر مطالعه کردیم. در این مثال این اثرها را با وجود وابستگی زمانی در نظر می‌گیریم.

دستگاهی از بارها با چگالی $\rho(\mathbf{r}, t)$ و چگالی جریان $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ را در نزدیکی یک صفحه رسانای واقع در صفحه xy در نظر بگیرید. بازتاب دستگاه در صفحه این است که هر نقطه در \mathbf{r} با مختصات (x, y, z) به \mathbf{r}' با مختصات $(x, y, -z)$ تبدیل می‌شود. به علاوه، بازتاب با روش تصاویر منجر به یک تغییر علامت چگالی بار می‌شود: $\rho(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\rho(\mathbf{r}', t)$.

اکنون قانون بازتاب چگالی جریان را می‌توان از تبدیلات بالا به دست آورد. جریان با معادله (۶-۷) به چگالی ρ و سرعت \mathbf{v} بارها مربوط می‌شود: $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}$. از این رو بازتاب \mathbf{J} در صفحه منجر به چگالی جریان \mathbf{J}' می‌شود به طوری که

$$\mathbf{J}'(x, y, -z) = -\rho(x, y, -z) \frac{d\mathbf{r}}{dt}(x, y, -z) \quad (۱۱۷-۱۵)$$

یا

$$J'_x = -J_x \quad J'_y = -J_y \quad J'_z = J_z \quad (۱۱۸-۱۵)$$

گشتاور دوقطبی الکتریکی توزیع به همان شکل جریان تبدیل می‌شود، زیرا این گشتاور برحسب حاصلضرب چگالی بار و \mathbf{r} یعنی

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \int \rho \mathbf{r} dv$$

تعریف می‌شود. بنابراین

$$p'_x = -p_x \quad p'_y = -p_y \quad p'_z = p_z \quad (۱۱۹-۱۵)$$

اما، گشتاور دوقطبی مغناطیسی به صورت متفاوتی تبدیل می‌شود، زیرا این گشتاور برحسب ضرب خارجی چگالی جریان و \mathbf{r} ، یعنی $\mathbf{m} = 1/2 \int \mathbf{J} \times \mathbf{r} dv$ تعریف می‌شود. به این ترتیب

$$m'_x = m_x \quad m'_y = m_y \quad m'_z = -m_z \quad (۱۲۰-۱۵)$$

اگر دوقطبی الکتریکی وابسته به زمان به فاصله b از یک صفحه رسانای بزرگ واقع شود به طوری که $b \ll \lambda$ ، که در آن λ طول موج تابش گسیل شده است، در این صورت دوقطبی یک دوقطبی تصویری خواهد داشت که اندازه آن با معادله (۱۱۹-۱۵) داده می‌شود. چون فاصله بین دوقطبی و تصویر آن از λ بسیار کوچکتر است، در این صورت می‌توان ابتدا گشتاور دوقطبی آنها را به صورت برداری با هم جمع کرد.

میدانهای الکترومغناطیسی دوقطبی الکتریکی در فواصل بزرگ در مقایسه با طول موج تابش؛ یعنی $kr \gg 1$ ، را بررسی می‌کنیم. با انتخاب $kr \gg 1$ در معادلات (۱۰۹-۱۵) و (۱۱۰-۱۵)، و ضرب آنها در $e^{-i\omega t}$ و در نظر گرفتن قسمتهای حقیقی، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \frac{p_0 k^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(\omega t - kr)}{kr} \sin\theta \hat{\theta} \quad (۱۱۲-۱۵)$$

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) = \frac{p_0 k^2}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\cos(\omega t - kr)}{kr} \sin\theta \hat{\phi}$$

این میدانها، را میدانهای تابشی می‌نامیم که به صورت $1/r$ تغییر می‌کنند. میدان الکتریکی در جهت $\hat{\theta}$ است، در صورتی که میدان مغناطیسی در جهت $\hat{\phi}$ است؛ یعنی هر یک از دو میدان بر $\hat{\mathbf{r}}$ و بر دیگری عمود است. به علاوه، این میدانها با عبارت ساده زیر

$$\mathbf{E}' = c\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}' \quad (۱۱۳-۱۵)$$

به هم مربوط می‌شوند.

بردار پوئینتینگ $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ در ناحیه مورد نظر عبارت است از

$$\mathbf{S} = \frac{p_0^2 k^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \mu_0 c r^2} \cos^2(\omega t - kr) \sin^2\theta \hat{\mathbf{r}} \quad (۱۱۴-۱۵)$$

کل توان تابیده را می‌توان با انتگرالگیری \mathbf{S} بر روی یک کره به شعاع r محاسبه کرد:

$$P = \oint \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{p_0^2 k^4}{4\pi\mu_0 \epsilon_0^2 c} \cos^2(\omega t - kr) \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta$$

یا

$$P = \frac{p_0^2 k^4}{6\pi\epsilon_0^2 \mu_0 c} \cos^2(\omega - kr) \quad (۱۱۵-۱۵)$$

میانگین توان تابیده با میانگینگیری بر روی زمان به دست می‌آید. چون میانگین $\cos^2(\omega t - kr)$ مساوی با $1/2$ است، در این صورت

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 k^4}{12\pi\epsilon_0^2 \mu_0 c} = \frac{p_0^2 k^4 c}{12\pi\epsilon_0} \quad (۱۱۶-۱۵)$$

مثال ۱۵-۵ دوقطبی در نزدیکی صفحات رسانا- روش تصویرها تابش از دوقطبیهای الکتریکی و مغناطیسی وقتی یک صفحه رسانا به نزدیکی دوقطبیهای الکتریکی و مغناطیسی آورده می‌شود، تحت تأثیر قرار می‌گیرد. این موضوع در اثر بارها و جریانهای القاشده در رساناست.

امتداد محور x ایجاد می‌شوند را می‌توان با یک تبدیل مختصه که محور z را به محور x تبدیل می‌کند، به دست آورد. نتیجه عبارت است از

$$E_{\perp}(\mathbf{r}, t) = \frac{p_0 k^r}{4\pi\epsilon_0 kr} [\hat{\phi} \sin \phi - \hat{\theta} \cos \phi \cos \theta] e^{-i(\omega t - kr)} \quad (123-15)$$

$$B_{\perp}(\mathbf{r}, t) = -\frac{p_0 k^r}{4\pi\epsilon_0 ckr} [\hat{\phi} \cos \phi \cos \theta + \hat{\theta} \sin \phi] e^{-i(\omega t - kr)} \quad (124-15)$$

برای دوقطبی دوم، داریم

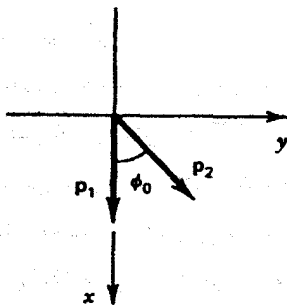
$$E_r(\mathbf{r}, t) = \frac{p_0 k^r}{4\pi\epsilon_0 kr} e^{i\pi/2} [\hat{\phi} \sin(\phi - \phi_0) - \hat{\theta} \cos(\phi - \phi_0) \cos \theta] e^{-i(\omega t - kr)} \quad (125-15)$$

$$B_r(\mathbf{r}, t) = -\frac{p_0 k^r}{4\pi\epsilon_0 ckr} e^{i\pi/2} [\hat{\phi} \cos(\phi - \phi_0) \cos \theta + \hat{\theta} \sin(\phi - \phi_0)] e^{-i(\omega t - kr)} \quad (126-15)$$

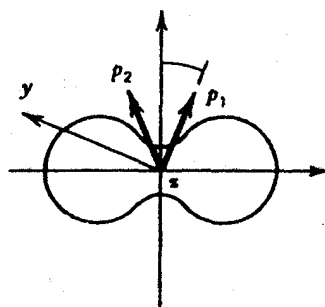
کل میدان ایجاد شده به وسیله دوقطبیها عبارت است از حاصل جمعهای برداری $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{B}_r$ و $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{E}_r$. با استفاده از $i = e^{i\pi/2}$ به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E} = \frac{p_0 k^r}{4\pi\epsilon_0 kr} (\hat{\phi} [\sin \phi + i \sin(\phi - \phi_0)] - \hat{\theta} [\cos \phi + i \cos(\phi - \phi_0)] \cos \theta) e^{-i(\omega t - kr)} \quad (127-15)$$

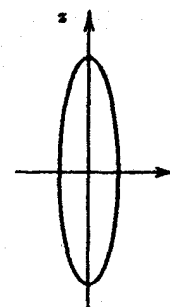
$$\mathbf{B} = -\frac{p_0 k^r}{4\pi\epsilon_0 ckr} (\hat{\phi} [\cos \phi + i \cos(\phi - \phi_0)] \cos \theta + \hat{\theta} [\sin \phi + i \sin(\phi - \phi_0)]) e^{-i(\omega t - kr)} \quad (128-15)$$



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۱۵-۲ برهم‌نهی میدانهای تابشی دوقطبی. (الف) نمایش طرحوار دو دوقطبی در صفحات xy . (ب) توزیع زاویه‌ای توان تابیده در صفحه xy . (ج) همین توزیع در صفحه عمود بر صفحه xy و مقارن با دوقطبیها.

به این ترتیب

$$p_T = p'(t) + p(t) = 2\hat{z} p_z = 2\hat{z} p \cos \alpha \quad (121-15)$$

که در آن α زاویه بین دوقطبی و عمود بر صفحه (محور z) است. چون توان تابیده توسط دوقطبی با مربع گشتاور دوقطبی متناسب است، در این صورت توان گسیل شده عبارت است از

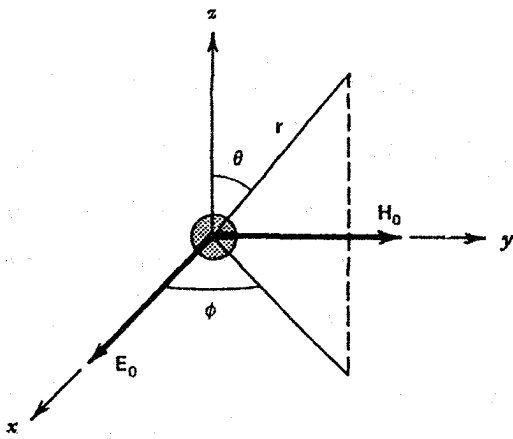
$$\text{توان} = 4P_0 \cos^2 \alpha \quad (122-15)$$

که در آن P_0 توان تابیده به وسیله دوقطبی در غیاب صفحه است. به این ترتیب هنگامی که دوقطبی بر صفحه عمود است، توان تابیده عبارت است از $4P_0$ ، هنگامی که دوقطبی با صفحه موازی است، توان صفر است. در حالت دوم تابش توزیعهای مرتبه بالای بار از قبیل تابش چارقطبی غالب است. ■

مثال ۱۵-۶ برهم‌نهی میدانهای تابشی دوقطبی

در این مثال در مورد برهم‌نهی میدانهای تابشی دوقطبی بحث می‌کنیم. دو دوقطبی را در نظر بگیرید که یکی از آنها در امتداد محور x واقع است و دارای وابستگی زمانی $p_1(t) = p_0 \hat{x} \cos \omega t$ است. همان طور که در شکل ۱۵-۲(الف) نشان داده شده است، دوقطبی دیگر در صفحه xy تحت زاویه $\phi = \phi_0$ نسبت به محور x قرار دارد و دارای وابستگی زمانی $p_2(t) = p_0 \sin \omega t$ است. فاصله بین آنها را بسیار کوچکتر از طول موج تابش انتخاب می‌کنیم، و از این رو فرض می‌کنیم هر دو آنها در مبدأ قرار دارند.

میدانهای تابشی الکترومغناطیسی که در فواصل دور به وسیله یک دوقطبی الکتریکی واقع در امتداد محور z ایجاد می‌شوند، با معادلات (۱۱۲-۱۵) داده می‌شوند. میدانهایی که به وسیله یک دوقطبی واقع در



شکل ۳-۱۵ پراکندگی موج الکترومغناطیسی به وسیله یک کره کوچک با قطبشهای الکتریکی و مغناطیسی مفروض.

به همین ترتیب، گشتاور دوقطبی مغناطیسی که عبارت است از

$$\mathbf{m}(t) = \beta_m H_0 \hat{y} e^{-i\omega t} \quad (۱۳۱-۱۵)$$

میدانهای تابشی ایجادشده به وسیله یک گشتاور دوقطبی الکتریکی در امتداد محور x در مثال ۶-۱۵ داده شده‌اند [معادلات (۱۲۳-۱۵)] و (۱۲۴-۱۵). به این ترتیب می‌نویسیم

$$\mathbf{E}_e = \frac{\beta_e E_0 k^r}{4\pi\epsilon_0 r} [\hat{\phi} \sin \phi - \hat{\theta} \cos \phi \cos \theta] e^{-i(\omega t - kr)}$$

$$\mathbf{B}_e = -\frac{\beta_e E_0 k^r}{4\pi\epsilon_0 cr} [\hat{\phi} \cos \phi \cos \theta + \hat{\theta} \sin \phi] e^{-i(\omega t - kr)} \quad (۱۳۲-۱۵)$$

همچنین می‌توان نشان داد میدانهای ایجادشده به وسیله دوقطبی مغناطیسی عبارت‌اند از

$$\mathbf{E}_m = \frac{\beta_m H_0 k^r}{4\pi\epsilon_0 cr} [-\hat{\phi} \sin \phi \cos \theta + \hat{\theta} \cos \phi] e^{-i(\omega t - kr)}$$

$$\mathbf{B}_m = -\frac{\beta_m H_0 k^r}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} [\hat{\phi} \cos \phi + \hat{\theta} \sin \phi \cos \theta] e^{-i(\omega t - kr)} \quad (۱۳۳-۱۵)$$

در این صورت از کل میدانهای $\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_m$ و $\mathbf{B} = \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_m$ برای محاسبه توان پراکنده به صورت تابعی از زاویه‌ها استفاده می‌شود. همچنین از این میدانها می‌توان برای بحث قطبش موج پراکنده استفاده کرد. این بحث و دیگر محاسبات را به عنوان تمرین کنار می‌گذاریم (مسئله ۱۴-۱۵ را ببینید).

میانگین زمانی بردار پوئین تینگ بر زاویه فضایی را می‌توان با انجام ضرب خارجی $\frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$ محاسبه کرد که از آن به دست می‌آوریم

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{p_0^r k^r}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \mu_0 c} [\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2(\phi - \phi_0) + \cos^2(\phi - \phi_0) \cos^2 \theta]$$

یا

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{p_0^r k^r c}{32\pi^2 \epsilon_0} (2 - [\cos^2 \phi + \cos^2(\phi - \phi_0)] \sin^2 \theta) \quad (۱۲۹-۱۵)$$

توزیع زاویه‌ای توان تابیده در جهتهایی که گشتاورهای دوقطبی عمودند یعنی $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ ، بیشینه است. به عنوان مثال حالتی را که در آن زاویه بین دوقطبیها $\phi_0 = 45^\circ$ است در نظر می‌گیریم. شکل ۲-۱۵ (ب) توزیع در صفحه دوقطبیها (صفحه xy) و شکل ۲-۱۵ (ج) توزیع یک صفحه عمود بر صفحه xy که با زاویه $\phi = 22.5^\circ$ تعریف می‌شود، را نشان می‌دهد.

پرشش در مورد قطبش موج تابیده و وابستگی آن به زاویه‌ها جالب است. این خصوصیات را به عنوان تمرین به عهده خواننده می‌گذاریم (مسئله ۱۱-۱۵ را ببینید).

* مثال ۷-۱۵ پراکندگی موج EM به وسیله یک کره کوچک در این مثال کاربرد نظریه بالا را (بسط چندقطبی) در مسئله پراکندگی امواج EM تخت به وسیله کره‌های بار آزاد و جریان آزاد شرح می‌دهیم. یک موج تکفام تخت قطبیده خطی بر روی کره‌ای که شعاع آن از طول موج فرودی بسیار کوچکتر است: $R \ll \lambda$ فرود می‌آید. به این دلیل، میدانهای EM خارجی در مجاورت کره را می‌توان یکنواخت در نظر گرفت؛ از این رو پراکندگی موج در ناحیه تابش را می‌توان از نقطه نظر تابش القاشده به وسیله گشتاورهای دوقطبی الکتریکی و مغناطیسی که تلقی کرد.

قطبشهای الکتریکی و مغناطیسی که را به ترتیب β_e و β_m در نظر می‌گیریم. همان طور که در شکل ۳-۱۵ نشان داده شده است، جهتهای انتشار و قطبش موج فرودی در امتداد محورهای x و z انتخاب شده‌اند. گشتاور دوقطبی الکتریکی که با $\mathbf{p} = \beta_e \mathbf{E}$ داده می‌شود که در آن میدان الکتریکی در مرکز کره محاسبه می‌شود. چون R بسیار کوچکتر از λ است در این صورت $kR \ll 1$. بنابراین

$$\mathbf{p}(t) = \beta_e E_0 \hat{x} e^{-i(\omega t - kr)} \Big|_{r=0} = \beta_e E_0 \hat{x} e^{-i\omega t} \quad (۱۳۰-۱۵)$$

۴-۱۵ تابش آنتنها

در این بخش تابش گسیل شده از اصطلاحاً آنتنهای ساده را در نظر می‌گیریم که این آنتنها سیمهای رسانای مستقیم کوتاه حامل جریانهای وابسته به زمان هستند. ابتدا با یک آنتن بسیار کوتاه (آنتن دیفرانسیلی) شروع می‌کنیم به طوری که طول آنتن از طول موج تابش گسیل شده (تقریب دوقطبی) بسیار کوچکتر است. در این صورت تابش آنتنهای بلندتر (با طولی مساوی یا نصف طول موج تابش)، از جمع میدانهای آنتنهای بسیار کوتاه ساخته می‌شود. سپس در مورد تابش یک ردیف از آنتنهای نیم طول موج بحث می‌کنیم که در آنها اثرهای تداخل شبیه به آنهایی است که در نور شناخت پدید می‌آید.

چون به آنتنهای بسیار کوچک که در فواصل دورند علاقه مندیم می‌توانیم مستقیماً از روش بسط چندقطبی میدان (امواج کروی) استفاده کنیم. اما از روش پتانسیل بخش ۲-۱۵ استفاده کنیم و آن را به فواصل دور تعمیم می‌دهیم. بعد از انجام این کار نشان می‌دهیم که هر دو روش نتایج یکسانی دارند.

۱-۴-۱۵ آنتنهای دیفرانسیلی - میدانهای دوقطبی الکتریکی

سیم بسیار کوتاهی را حامل جریان متغیر هماهنگ: $I = I_0 \cos \omega t$ در نظر بگیرید [شکل ۴-۱۵ (الف)]. منظور از "کوتاه" آن است که طول سیم از طول موج تابش گسیل شده بسیار کوتاهتر است. طول موج تابش گسیل شده برای بسامد نوسان ω عبارت است از $\lambda = 2\pi c/\omega$. به این ترتیب انتخاب می‌کنیم

$$l \ll \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (۱۳۴-۱۵)$$

این شرط برحسب دوره تناوب نوسانها، $T = 2\pi/\omega$ ، به صورت زیر می‌شود

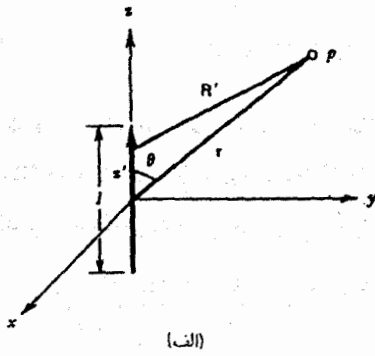
$$l \ll cT \quad (۱۳۵-۱۵)$$

این محدودیت بر روی طول موج آنتن را تقریب دوقطبی می‌نامیم. مثلاً به ازای $\omega = 10^8 \text{ rad/s}$ ، $\lambda = 19 \text{ cm}$ ، و این شرط وقتی صادق است که l از مرتبه ۱ mm باشد.

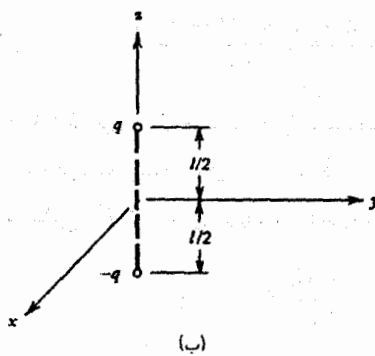
با استفاده از پتانسیل تأخیری [معادله (۴۷-۱۵)] پتانسیل برداری ایجاد شده به وسیله سیم را محاسبه می‌کنیم. با استفاده از تقریب رشته‌ای

$$J dv = Idl \text{ می‌نویسیم}$$

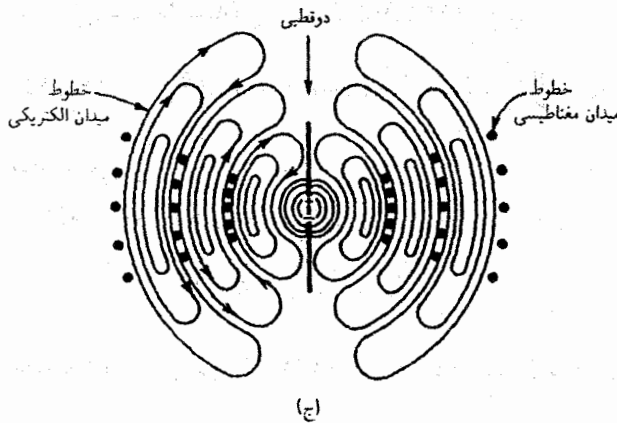
$$A = \frac{\mu_0 \hat{z}}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I_0 \cos[\omega(t - R'/c)]}{R'} dz' \quad (۱۳۶-۱۵)$$



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۴-۱۵ (الف) آنتن دیفرانسیلی. (ب) طرح دوقطبی نوسانگر هم‌ارز. (ج) خطوط میدان یک دوقطبی نوسانگر.

که در آن $R' = r - \hat{z}z'$ و از این رو

$$R' = r(1 - 2(z'/r) \cos \theta + z'^2/r^2)^{1/2}$$

چون می‌خواهیم A را در نقاطی تعیین کنیم که $l \gg r$ است، از این رو در مخرج قرار می‌دهیم $R' \approx r$. اما در این صورت نمی‌توان از تغییر در امتداد سیم چشمپوشی کرد مگر آنکه علاوه بر شرط $l \gg r$

عوض می‌کنیم و توجه می‌کنیم که $\int I(t-r/c)dt$ درست مساوی با بار $q(t-r/c)$ است. بنابراین

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{q(t-r/c)}{r} \right] \quad (143-15)$$

که در آن $r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$ پتانسیل نرده‌ای تأخیری یک بار نقطه‌ای واقع در مبدأ است (برای به‌دست آوردن این پتانسیل بخش ۱۵-۲ را ببینید). جالب است که این نتیجه را می‌توان به شکل [معادلات (۲-۴۵) و (۲-۶۸)]

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{I} \cdot \nabla) \frac{q(t-r/c)}{r} \quad (144-15)$$

نیز نوشت. این شکل نشان می‌دهد که پتانسیل نرده‌ای یک آنتن دیرانسیلی عبارت است از دیرانسیل پتانسیل تک‌قطبی تأخیری بار q . چون بار به فاصله از نقطه مشاهده وابسته است، پتانسیل نرده‌ای تأخیری به جریان بستگی دارد. این موضوع را می‌توان به سادگی با توجه به

$$\frac{\partial}{\partial z} q \left(t - \frac{r}{c} \right) = -\frac{1}{c} \dot{q} \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{zI(t-r/c)}{cr}$$

که در آن $I = \dot{q}$ مشتق q نسبت به شناسه آن است تشخیص داد. به این ترتیب

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{l}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{zq(t-r/c)}{r^2} + \frac{z}{r^2} \frac{I(t-r/c)}{c} \right] \quad (145-15)$$

در حالت تغییرات هماهنگ، نتیجه می‌گیریم

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{lq_0 k}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^2} \left[\frac{\cos(\omega t - kr)}{kr} - \sin(\omega t - kr) \right] \quad (146-15)$$

که در آن $k = \omega/c$ ، $q_0 = I_0/\omega$ و $q = q_0 \cos \omega t$. باید توجه کرد که وقتی نقطه مشاهده به سیم نزدیک می‌شود، در این صورت جمله اول در معادله (۱۴۵-۱۵) غالب می‌شود و $q(t-r/c)$ را می‌توان انتخاب کرد. به این ترتیب $\Phi(\mathbf{r}, t)$ به

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}(t) \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad kr \ll 1 \quad (147-15)$$

تبدیل می‌شود. این پتانسیل، دقیقاً پتانسیل آنی (نرده‌ای) یک دوقطبی با گشتاور دوقطبی $\mathbf{p}(t) = lq(t)\hat{\mathbf{z}}$ است که در آن اثرهای تأخیری

از تقریب دوقطبی نیز استفاده کنیم. یعنی شناسه کسینوس باید در $\omega T \gg (\omega z'/c) \cos \theta$

$$cT \gg z' \cos \theta \quad (137-15)$$

صدق کند که در آن T زمانی است که تغییر قابل ملاحظه‌ای در دامنه نوسانات (مثلاً دوره تناوب) رخ می‌دهد. معادله (۱۳۷-۱۵) درست تقریب دوقطبی است که در بالا فرض شد، زیرا $z' \cos \theta \leq l/2$. بنابراین

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \hat{\mathbf{z}}}{4\pi} I_0 \frac{\cos[\omega(t-r/c)]}{r} \int_{-l/2}^{l/2} dz'$$

یا

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 l \hat{\mathbf{z}}}{4\pi} I_0 \frac{\cos[\omega(t-r/c)]}{r} \quad (138-15)$$

باید توجه کرد که فرایند بالا فقط به تغییرات هماهنگ در توزیعهای جریان و بار محدود نمی‌شود. برای هر وابستگی زمانی مفروض که در تقریب دوقطبی، $I(t)$ ، صدق می‌کند، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 l \hat{\mathbf{z}}}{4\pi r} I(t-r/c) \quad (139-15)$$

گاهی اوقات استفاده از مؤلفه‌های \mathbf{A} در مختصات کروی مفید است. این مؤلفه‌ها به سادگی از معادله (۱۳۹-۱۵) به صورت

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 l}{4\pi r} I \left(t - \frac{r}{c} \right) (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (140-15)$$

محاسبه می‌شوند.

اکنون پتانسیل تأخیری نرده‌ای را می‌توان با استفاده از پیمانه لورنتس:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{A}$$

محاسبه کرد. با قراردادن (۱۳۹-۱۵) در این معادله به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\mu_0 c^2}{4\pi} l \frac{\partial}{\partial z} \frac{I(t-r/c)}{r} \quad (141-15)$$

برای به دست آوردن Φ باید نسبت به z مشتق گرفت و سپس بر روی زمان انتگرال‌گیری کرد. اما، در این حالت با نوشتن

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int^t \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{I(t-r/c)}{r} \right] dt \quad (142-15)$$

که در آن $1/\epsilon_0$ به جای $c^2 \mu_0$ قرار داده شده است، می‌توان راه نسبتاً متفاوتی برای حل آن انتخاب کرد. مرتبه مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری را

۱. معادلات (۱۴۸-۱۵) و (۱۴۹-۱۵) نشان می‌دهند که میدانهای یک آنتن ديفرانسیلی، یعنی ساده‌ترین انواع آنتنها، کاملاً پیچیده هستند. میدان الکتریکی دارای جمله‌هایی است که به صورت $1/r^2$ و $1/r^3$ تغییر می‌کنند، و میدان مغناطیسی جمله‌هایی دارد که به صورت $1/r$ و $1/r^2$ تغییر می‌کند. جمله‌هایی که با توانهای فرد r^{-1} تغییر می‌کنند با $\cos(\omega t - kr)$ متناسب هستند، در صورتی که جمله‌هایی که با توان زوج r^{-1} تغییر می‌کنند با $\sin(\omega t - kr)$ متناسب هستند، که این امر نشان می‌دهد اختلاف فاز $\pi/2$ بین دو مجموعه وجود دارد.

۲. جهت میدانها نیز جالب است. میدان \mathbf{B} کاملاً در جهت $\hat{\phi}$ است یا مغناطیس عرضی (TM)، در صورتی که میدان \mathbf{E} دارای مؤلفه‌هایی در جهت‌های \hat{r} و $\hat{\theta}$ است. چون تابش گسیل شده به وسیله میدانهای EM با ضرب خارجی $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ داده می‌شود، در این صورت مؤلفه \hat{r} میدان الکتریکی سهمی در تابش ندارد. به علاوه، چون E_θ به $\sin \theta$ بستگی دارد، در این صورت هیچ گونه تابشی در جهت‌های $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ (در امتداد جهت دوقطبی) وجود ندارد.

۳. وابستگی شعاعی میدانهای دوقطبی دارای سه ناحیه مجزا است: نواحی ایستا، القا و تابش. در مورد بعضی از جنبه‌های این نواحی در بخش ۱۵-۳ بحث شد. اکنون آنها را با جزئیات بیشتر بحث می‌کنیم. ناحیه ایستا (آنی) با شرط $kr \ll 1$ تعریف می‌شود که در آن میدان الکتریکی با وابستگی شعاعی $1/r^3$ غالب است. از طرف دیگر ناحیه تابش با شرط $kr \gg 1$ تعریف می‌شود. در این ناحیه \mathbf{E} و \mathbf{B} با وابستگی شعاعی $1/r$ غالب هستند و میدانهای تابش نامیده می‌شوند. ناحیه بینابین، که در آن kr از مرتبه واحد است، ناحیه القا نام دارد و میدان الکتریکی با وابستگی $1/r^2$ غالب می‌شود. به این ترتیب می‌نویسیم

$$\mathbf{E}_R = \frac{l I_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^3} \frac{1}{kr} \cos(\omega t - kr) \sin \theta \hat{\theta} \quad kr \gg 1$$

$$\mathbf{E}_I = \frac{l I_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^3} \frac{\sin(\omega t - kr)}{k^2 r^2} [2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}] \quad kr \approx 1 \quad (151-15)$$

$$\mathbf{E}_S = \frac{l I_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^3} \frac{\cos(\omega t - kr)}{k^2 r^2} [2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}] \quad kr \ll 1$$

که در آن شاخصهای R ، I ، و S به ترتیب معرف نواحی تابش، القا، و ایستا هستند. شکل ۱۵-۴ (ج) خطوط میدان \mathbf{E} و \mathbf{B} یک دوقطبی نوسانگر را نشان می‌دهد.

این نواحی در ارتباطات از اهمیت عملی برخوردارند. انتقال رادیویی

مهم نیستند. شکل ۱۵-۴ (ب) دوقطبی نوسانگر هم‌ارز را به صورت طرح‌وار نشان می‌دهد.

با پتانسیلهای برداری و نرده‌ای محاسبه شده، اکنون می‌توانیم میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متناظر با آنها را محاسبه کنیم. حالتی را که در آن جریان به صورت هماهنگ تغییر می‌کند در نظر می‌گیریم. با قراردادن معادله (۱۳۸-۱۵) در $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ به دست می‌آوریم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi k r} \hat{\phi} \frac{\omega^2}{c^2} \left[\cos(\omega t - kr) + \frac{1}{kr} \sin(\omega t - kr) \right] \sin \theta \quad (148-15)$$

که نشان می‌دهد میدان \mathbf{B} کاملاً در امتداد جهت $\hat{\phi}$ است. میدان الکتریکی ایجاد شده به وسیله سیم را می‌توان با قراردادن معادلات (۱۳۸-۱۵) و (۱۴۶-۱۵) در $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t - \nabla \Phi$ محاسبه کرد. با نوشتن ∇ در مختصات کروی به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E} = - \left(\frac{\partial A_r}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \hat{r} - \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \hat{\theta} - \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial t} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) \hat{\phi}$$

به این ترتیب

$$E_\phi = 0$$

$$E_\theta = - \frac{l I_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^3} \left[\left(\frac{1}{k^2 r^2} - \frac{1}{kr} \right) \cos(\omega t - kr) - \frac{1}{k^2 r^2} \sin(\omega t - kr) \right] \sin \theta \quad (149-15)$$

$$E_r = \frac{2l I_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^3} \left[\frac{\sin(\omega t - kr)}{k^2 r^2} - \frac{\cos(\omega t - kr)}{k^2 r^2} \right] \cos \theta$$

اگر تشخیص دهیم

$$p_0 = \frac{l I_0}{\omega} = l q_0 = \frac{4\pi \epsilon_0 c}{k^2} B_0 \quad (150-15)$$

که در آن همان طور که در شکل ۱۵-۴ (ب) به صورت طرح‌وار نشان داده شده است p_0 دامنه گشتاور دوقطبی توزیع بار-جریان در نظر گرفته می‌شود، این میدانها دقیقاً میدانهای یک دوقطبی الکتریکی هستند که آنها را قبلاً با استفاده از روش موج کروی (بسط چندقطبی میدان) به ازای $(l=1, m=0)$ به دست آورده‌ایم. علاوه بر بحثهای قبلی میدانهای دوقطبی، اکنون نظریه‌های زیر را ارائه می‌دهیم:

دقیق نیست زیرا اتلافهای ناشی از تابش باعث انحراف از وابستگی هماهنگ می‌شوند. جریان در آنتن را برابر

$$I(z', t) = I_0 \cos \omega t \cos kz' \quad (155-15)$$

می‌گیریم. وابستگی زمانی دقیقاً همان وابستگی آنتن کوتاه است. وابستگی فضایی $\cos kz'$ در $z' = \pm \pi/2k = \pm \lambda/4$ صفر می‌شود؛ به این ترتیب با انتخاب طول آنتن به اندازه $\lambda/2$ و انتخاب مرکز آن در مبدأ این توزیع جریان در شرط صفر شدن در دو انتهای آنتن صدق می‌کند. به علاوه، این یک موج ساکن است زیرا وابستگیهای زمانی و مکانی از طریق حاصلضرب وابستگیهای هماهنگ آنها وارد می‌شوند.

از فرایند زیر برای به دست آوردن میدانهای ایجاد شده به وسیله آنتن استفاده می‌کنیم. آنتن را به قطعه‌های بسیار کوچک زیادی تقسیم می‌کنیم. میدانهای هر یک از آنها میدانهای یک آنتن دیفرانسیلی هستند. دقت کنید که گشتاور دوقطبی مؤثر این آنتن را نمی‌توان با جمع گشتاورهای دوقطبی تمام اجزای دیفرانسیلی آن محاسبه کرد، زیرا بعضی از اجزای به اندازه فواصلی از مرتبه λ از یکدیگر جدا می‌شوند. باید یک جمع‌بندی (انتگرال‌گیری) از میدانهای دیفرانسیلی انجام داد. چون میدانهای برابند بسیار پیچیده هستند، در این مورد فقط به سهمی از میدانها که منجر به تابش می‌شوند — میدانهایی که به صورت $1/r$ تغییر می‌کنند — اکتفا می‌کنیم. به این ترتیب، میدان تابشی یک جزء به طول dz' و واقع در z' که به فاصله $R = r - \hat{z} z'$ از نقطه مشاهده است (شکل ۱۵-۶)، از معادلات (۱۴۸-۱۵) (۱۴۹-۱۵)، و (۱۵۵-۱۵) به دست می‌آید

$$dE_{\theta} = \frac{I_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^3} \frac{1}{kR} \cos(\omega t - kR) \sin \theta' \cos kz' dz' \quad (156-15)$$

$$dB_{\phi} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi kR} \frac{\omega^2}{c^2} [\cos(\omega t - kR)] \sin \theta' \sin kz' dz' \quad (157-15)$$

کل میدانها با انتگرال‌گیری این اجزای دیفرانسیلی بر روی z' تعیین می‌شوند. ابتدا میدان الکتریکی را در نظر می‌گیریم:

$$E_{\theta} = \frac{I_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^3} \int \frac{\cos(\omega t - kR)}{kR} \cos kz' \sin \theta' dz' \quad (158-15)$$

از میدان تابش استفاده می‌کند. مثلاً در بعضی استفاده‌های نظامی از ناحیه ایستا استفاده می‌شود (مثال ۱۵-۸ را ببینید).

با محاسبه میدانهایی که به وسیله یک آنتن دیفرانسیلی (یک دوقطبی الکتریکی) ایجاد می‌شود، می‌توان توان تابیده از این آنتن را محاسبه کرد. در بخش ۱۵-۳ توان تابیده به وسیله یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور $p_0 \hat{z} \cos \omega t$ [معادله (۱۱۶-۱۵)] مساوی با $p_0 = \langle P \rangle = p_0^2 k^4 c / 12\pi \epsilon_0$ به دست آمد. با استفاده از برابری بین جریان در آنتن [معادله (۱۵-۱۵)]، فوراً می‌توان برای آنتن نوشت

$$\langle P \rangle = \frac{l^2 I_0^2 k^4 c}{12\pi \epsilon_0 \omega^2} = \frac{1}{2} R I_0^2 \quad (152-15)$$

که در آن

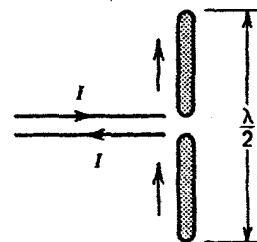
$$R = \frac{l^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad (153-15)$$

مقاومت تابش مؤثر آنتن است. این مقاومت را می‌توان برحسب نسبت l/λ نیز نوشت:

$$R = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 789 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \Omega \quad (154-15)$$

۱۵-۴-۲ تابش یک آنتن نیم‌موج

اکنون تابش یک آنتن واقعی را در نظر بگیرید. آنتنی را که در بخش ۱۵-۴ در نظر گرفتیم به قدری کوتاه بود که طول آن بسیار کوتاهتر از طول موج تابش گسیل شده بود. حال آنتنی را در نظر می‌گیریم که طول آن قابل مقایسه با طول موج است (شکل ۱۵-۵). دامنه جریان در حالت بسیار کوتاه طوری انتخاب شد که در امتداد سیم تغییر نکند. در حالت آنتن بلند جریان باید در امتداد طول آن تغییر کند، تا در دو انتهای سیم صفر شود. فرض می‌کنیم جریان با فاصله در امتداد سیم به صورت هماهنگ تغییر کند. اگرچه این تقریب خوبی است، اما



شکل ۱۵-۵ آنتن نیم‌موج.

می دهد (جدولی از انتگرالها را ببینید)

$$E_{\theta} = \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 r c} \cos(\omega t - kr) \frac{\cos[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin \theta} \quad (160-15)$$

به همین ترتیب، انتگرالگیری معادله (۱۵۷-۱۵) به دست می دهد

$$B_{\phi} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cos(\omega t - kr) \frac{\cos[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin \theta} \quad (161-15)$$

بردار پوینتینگ S، عبارت است از

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} / \mu_0 = E_{\theta} B_{\phi} \hat{\mathbf{r}} / \mu_0$$

بنابراین

$$\mathbf{S} = \frac{I_0^2}{4\pi^2 \epsilon_0 c r^2} \cos^2(\omega t - kr) \frac{\cos^2[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin^2 \theta} \hat{\mathbf{r}} \quad (162-15)$$

انتگرالگیری S بر روی یک کره به شعاع r توان تابیده را می دهد

$$P(t) = \frac{I_0^2}{2\pi\epsilon_0 c} \cos^2(\omega t - kr) \int_0^{\pi} \frac{\cos^2[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin^2 \theta} \sin \theta d\theta \quad (163-15)$$

انتگرال بر روی θ شکل بسته ندارد. انتگرالگیری عددی مقدار ۰٫۸۲ را به دست می دهد. به این ترتیب داریم

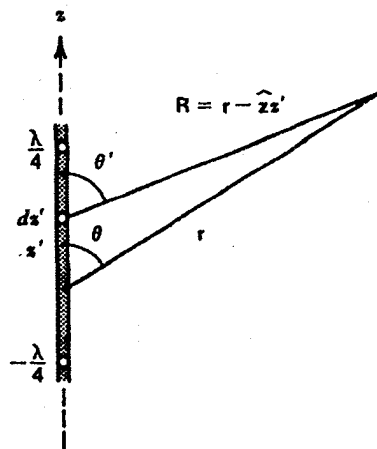
$$P(t) = 0.82 \frac{I_0^2}{2\pi\epsilon_0 c} \cos^2(\omega t - kr) \quad (164-15)$$

برای به دست آوردن توان، از جمله \cos^2 نسبت به زمان میانگین می گیریم چون میانگین جمله \cos^2 مساوی با ۱/۲ است، در این صورت

$$\langle P \rangle = 0.82 \frac{I_0^2}{4\pi\epsilon_0 c} = \frac{1}{2} R I_0^2 \quad (165-15)$$

که در آن $R = 73 \Omega$ مقاومت تابش مؤثر است.

جالب است در مورد قطبش و وابستگی زاویه ای تابش بحث کنیم. معادله (۱۶۰-۱۵) نشان می دهد که میدان الکتریکی در جهت θ است؛ به این ترتیب قطبش همواره در صفحه شامل دو قطبی است. این خصوصیت را قطبش عمودی می نامیم. معادله (۱۶۲-۱۵) نشان می دهد که با وابستگی زاویه ای که در شکل ۱۵-۷ نشان داده شده است و با $F(\theta) = \cos^2[(\pi \cos \theta)/2] / \sin^2 \theta$ داده می شود،



شکل ۱۵-۶ محاسبه میدانهای تابشی یک آنتن نیم موج.

چون R و θ' به z' وابسته هستند، انتگرال بالا کاملاً پیچیده است. این حال چون به حالتی که در آن $z' \approx \lambda \gg r$ (یعنی، فاصله نقطه مشاهده از ابعاد آنتن بسیار بزرگتر است) علاقه مندیم، در این صورت زاویه θ' را برای تمام اجزای می توان با θ تقریباً برابر گرفت و مخرج kR را می توان به صورت kr انتخاب کرد. اما از این تقریب نمی توان در شناسه $\cos(\omega t - kR)$ استفاده کرد؛ دلیلش آن است که kR به اندازه های تقریباً $\pi/2$ تغییر می کند که گرچه این تغییرات از kR بسیار کوچکتر هستند اما فاز جمله کسینوس را شدیداً تغییر می دهند. با این حال، با چشمپوشی از جمله های مرتبه z'^2 هنوز می توان تقریب زد

$$kR \approx k(r - z' \cos \theta)$$

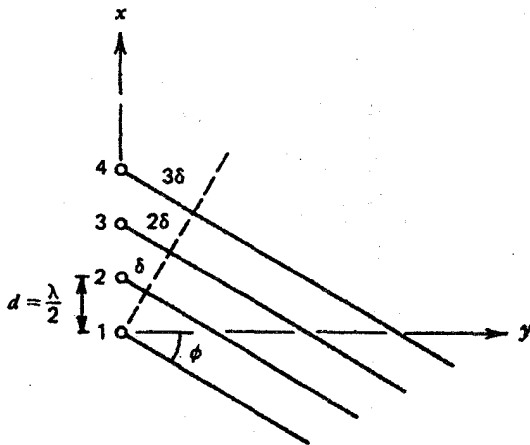
به این ترتیب E_{θ} می شود

$$E_{\theta} = \frac{I_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 kr} \int \cos[\omega t - kr + kz' \cos \theta] \cos kz' dz'$$

برای جدا کردن وابستگی r از z' ، جمله کسینوس را بسط می دهیم؛ به این ترتیب داریم

$$E_{\theta} = \frac{I_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 k^2 r} \left[\cos(\omega t - kr) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(kz' \cos \theta) \cos kz' dkz' - \sin(\omega t - kr) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(kz' \cos \theta) \cos kz' dkz' \right] \quad (159-15)$$

که در آن انتگرالگیری روی kz' انجام می شود. انتگرال دوم صفر می شود زیرا داخل انتگرال تابعی فرد از kz' است. انتگرال اول به دست



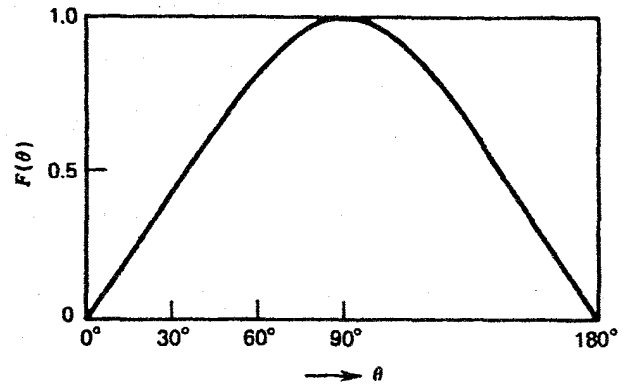
شکل ۸-۱۵ آرایه‌ای از انتهای نیم موج به فاصله $\lambda/2$.

شکل ۸-۱۵ که در آن یک آرایه خطی از دوقطبیهای نیم موج را نشان می‌دهد در نظر بگیرید، که این دوقطبیها به فواصل مساوی از یکدیگر و عمود بر صفحه xy قرار گرفته‌اند و فاصله بین آنها با نصف طول موج تابش برابر است. جریانها در تمام دوقطبیها مساوی و همفاز هستند. میدان الکتریکی که آرایه در نقطه P در ناحیه تابش تولید می‌کند با حاصل جمع برداری میدانهای مجزایی که هر یک از دوقطبیها تولید می‌کنند، برابر است. چون دوقطبیهای مختلف در فواصل متفاوتی از P هستند، در این صورت میدانهای متناظر با آنها در P دارای فاز و دامنه متفاوتی هستند. برای یک آرایش مفروض روابط معینی بین دامنه‌ها و فازها وجود دارند. توجه کنید چون تغییر در فواصل کاملاً کوچک است، از تغییر در دامنه‌های میدانهای مختلف می‌توان چشمپوشی کرد. با این همه تغییرات متناظر با فاز بسیار مهم است و می‌تواند سبب نابودی کامل میدان شود. شکل ۸-۱۵ نشان می‌دهد که فاصله دوقطبی m ام از نقطه مشاهده به اندازه $(m-1)d \sin \phi = (m-1)\delta$ از فاصله مورد نظر برای دوقطبی اول بیشتر است. اختلاف فاز متناظر با این افزایش فاصله برابر است با $2\pi(m-1)\delta/\lambda$. به این ترتیب میدان الکتریکی E_m دوقطبی m ام برحسب میدان الکتریکی دوقطبی اول، E_0 ، برابر است با

$$E_m = E_0 e^{2\pi i(m-1)\delta/\lambda} \quad (۱۶۶-۱۵)$$

با جمع بندی E_m روی m ، کل میدان به دست می‌آید

$$E = E_0 \sum_{m=1}^N e^{2\pi i(m-1)\delta/\lambda} = E_0 \frac{\sin\left(\frac{1}{2}N\alpha\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)} e^{i(N-1)\pi\delta/\lambda} \quad (۱۶۷-۱۵)$$



شکل ۷-۱۵ وابستگی زاویه‌ای میدان تابشی یک آنتن نیم موج.

تابش مستقل از ϕ است. این تابع زاویه‌ای در $\theta = \pi$ و $\theta = 0$ مساوی با صفر و در $\theta = \pi/2$ مساوی با واحد است. توزیع به‌ازای مقادیر دیگر θ یک تابع هموار از θ است.

مثال ۸-۱۵ ارتباطات از ناو هواپیما

در این مثال در مورد اهمیت مؤلفه‌های مختلف میدان دوقطبی در ارتباط با یک ناو را بحث می‌کنیم. میدان ایستا (وابستگی $1/r^2$) برای ارتباطات با امنیت بالا به دلیل ماهیت برد کوتاه آن در مقایسه با میدان تابش $1/r$ مناسب است. فرض کنید سیگنال کار مطلوب میدان الکتریکی $1 \mu V/cm$ ($10^{-6} V$) و کمینه سیگنال قابل آشکار $10^{-2} \mu V/cm$ باشد. اگر ارتباط مطلوب از یک مسافت $r_1 = 2 \text{ km}$ باشد، در این صورت فاصله r_2 که در آن میدان آشکار نیست برابر است با $100 = (r_2/r_1)^2$. بنابراین $r_2 = (100)^{1/2} \approx 9.8 \text{ km}$ ، اما، برای یک میدان تابشی فاصله‌ای که میدان آشکار نمی‌شود برابر است با 200 km ، که جذابیت میدان ایستا را نشان می‌دهد. برای کمینه‌کردن خطر امنیت میدان تابشی، بسامد تابش را می‌توان طوری انتخاب کرد که $kr_2 = 2\pi r_2/\lambda$ بسیار کوچکتر از یک باشد. چون نسبت میدان ایستا به میدان تابشی $(kr)^{-2}$ است، این امر عمدتاً میدان را ایستا می‌سازد. ■

مثال ۹-۱۵ آرایه آنتن

مشخص شد که تابش از یک آنتن نیم موج در جهتهای افقی (جهت $\hat{\phi}$) یکنواخت و تابع پیوسته‌ای از θ است. در بسیاری از کاربردها برای افزایش دریافت، بهینه‌کردن قدرت تفکیک و کمینه‌کردن اثرهای تداخل با فعالیتهای دیگر، باید مقدار معینی از توان را در جهتهای خاص متمرکز کنیم. این ویژگیهای مطلوب با استفاده از آرایه‌ای از دوقطبیهای نیم طول موج به دست می‌آید.

می‌کنیم: (۱) بزرگترین بعد توزیع را از طول موج غالب تابش (تقریب دوقطبی) بسیار کوچکتر انتخاب می‌کنیم و (۲) توزیعها در یک حجم که بزرگترین بعد آن از فاصله توزیع از نقطه مشاهده بسیار کوچکتر است کراندار هستند. چون بارهای متحرک را در نظر می‌گیریم، شرط (۲) مستلزم آن است که سرعت بارها در مقایسه با سرعت نور کوچک باشد، به طوری که در زمانی که طول می‌کشد تابش به نقطه مشاهده برسد، بعد توزیع همیشه بسیار کوچکتر از فاصله تا نقطه مشاهده است. با بسط پتانسیل نرده‌ای شروع می‌کنیم

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (169-15)$$

که در آن $\mathbf{r}, t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ فاصله از نقطه مشاهده نسبت به مبدأ، و \mathbf{r}' فاصله از جزء بار در یک حجم dv' نسبت به مبدأ است. چون $r'/r \ll 1$ و $r'/r \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/r$ را به صورت توانهای بسط می‌دهیم و پایستین جمله‌ها را نگه می‌داریم؛ یعنی

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{1/2} \approx r - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r} + \dots \quad (170-15)$$

و

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^2} \right] + \dots \quad (171-15)$$

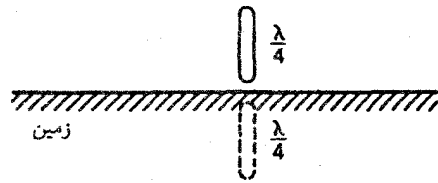
با قراردادن این بسطها در $\Phi(\mathbf{r}, t)$ به دست می‌آوریم

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{cr} \right) \left[1 + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^2} \right] dv' \quad (172-15)$$

اکنون با استفاده از سری تیلور، $\rho(\mathbf{r}', t - r/c + \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}/cr)$ را در مجاورت شناسه، $(\mathbf{r}', t - r/c)$ بسط می‌دهیم

$$\rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{cr} \right) \approx \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{cr} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{r}', t - r/c} + \dots \quad (173-15)$$

مبنای فیزیکی این نوع بسط تقریبی آن است که وقتی اثرهای تأخیری محاسبه می‌شوند توزیع را طوری اختیار می‌کنیم که در مبدأ قرار گیرد. یعنی، تمام اجزای توزیع صرف نظر از مکان \mathbf{r}' آنها زمان تأخیری $t' = t - r/c$ یکسانی دارند. با قراردادن معادله (۱۷۳-۱۵)



شکل ۹-۱۵ آنتن ربع موج به طور عمود و نزدیک به زمین بنا شده است.

که در آن $\alpha = 2\pi\delta/\lambda$. با استفاده از $\delta = d \sin \phi = 1/2 \lambda \sin \phi$ به دست می‌آوریم

$$|E| = |E_0| \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} N \sin \phi \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \sin \phi \right)} \quad (168-15)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که میدان به ϕ وابسته است، از این رو منجر به تمرکز توان در جهت‌های خاص می‌شود. جزئیات الگوی تابش را به صورت تمرین (مسئله ۱۵-۱۸ را ببینید) به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

مثال ۱۵-۱۰ آنتن ربع موج عمودی در نزدیکی یک صفحه متصل به زمین

هنگامی که طول یک آنتن نیم‌موج به طور نامناسبی بلند است، از یک ترکیب آنتن ربع موج و زمین می‌توان استفاده کرد. این ترکیب در بسامد پایین که در آن طول موج تابش بزرگ است کاربرد دارد. شکل ۹-۱۵ که در آن یک آنتن $\lambda/4$ به صورت عمودی به فاصله کوچکی در مقایسه با λ بالای سطح زمین واقع شده است را در نظر بگیرید. الگوی تابش مربوط به آنتن، ناشی از تابش مستقیمی است که به وسیله اجزای گوناگون آنتن و امواج بازتابیده تولید می‌شود. امواج بازتابیده از یک آنتن تصویری $\lambda/4$ درست در زیر زمین سرچشمه می‌گیرند. آنتن و تصویر، یک آنتن نیم‌موج را تشکیل می‌دهند؛ از این رو الگوی توان تابیده با معادلات (۱۶۲-۱۵) تا (۱۶۵-۱۵) داده می‌شود. ■

۱۵-۵ بسط چندقطبی پتانسیلهای تأخیری - تابش از بارهای متحرک کند - دوقطبی الکتریکی

پتانسیلهایی که با توزیعهای جریان و بار ایجاد می‌شوند با پتانسیلهای تأخیری در معادلات (۴۳-۱۵) و (۴۷-۱۵) داده می‌شوند. برای توزیعهای کلی، انتگرالهایی که در آنها شکلهای بسته وجود ندارد، بسیار پیچیده هستند. با استفاده از بعضی تقریبه‌ها پیشرفتهای تحلیلی در توزیعهای مشخصی به دست می‌آید. این توزیعها را با دو ویژگی تعریف

در معادله (۱۷۲-۱۵) و نگه داشتن جملاتی تا مرتبه r'/r به دست می آوریم

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(t-r/c)}{r^2} + \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{cr^2} \right] \quad (۱۷۴-۱۵)$$

که در آن

$$Q = \int \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) dv' \quad (۱۷۵-۱۵)$$

کل بار توزیع است که یک کمیت ثابت مستقل از زمان است، و

$$\mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) = \int \mathbf{r}' \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) dv' \quad (۱۷۶-۱۵)$$

گشتاور دوقطبی الکتریکی تأخیری توزیع است، و

$$\dot{\mathbf{p}}(t-r/c) = d\mathbf{p}/dt$$

معادله (۱۷۴-۱۵) سه جمله اول بسط را نشان می دهد. جملات از مرتبه بالاتر مثلاً جملات چارقطبی و غیره، به گشتاورهای بالای توزیع (توانهای بالاتر r'/r) بستگی دارند، که به این ترتیب توزیع آنها در مقایسه با جملاتی که قبلاً محاسبه کردیم ناچیز است. اما، اگر جملاتی که محاسبه می شوند به دلیل تقارن صفر شوند، جمله بعدی با مرتبه بالاتر غالب است.

اکنون از همین فرایند برای بسط $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ به صورت توانهای r'/r استفاده می کنیم. چون چگالی جریان با رابطه $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = \rho(d\mathbf{r}'/dt)$ تعریف می شود، در این صورت مرتبه صفر بسط \mathbf{J} از مرتبه اول r'/r است؛ از این رو برای سازگاری بسط، با بسط بالا برای $\Phi(\mathbf{r}, t)$ باید تنها مرتبه صفر را نگه داریم. در عبارت پتانسیل برداری

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv \quad (۱۷۷-۱۵)$$

پایینترین مرتبه $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ یا $1/r$ ، و پایینترین مرتبه بسط $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - r/c + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/c)$ را در نزدیکی شناسه $(\mathbf{r}', t - r/c)$ $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - r/c)$ نگه می داریم. بنابراین \mathbf{A} می شود

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{J} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) dv' \quad (۱۷۸-۱۵)$$

که نشان می دهد در این تقریب \mathbf{A} فقط به انتگرال حجمی چگالی جریان بستگی دارد. برای اینکه نتیجه را برای محاسبات میدانهای

EM به شکل مناسبتری در آوریم \mathbf{A} را برحسب گشتاور دوقطبی توزیع بار بازنویسی می کنیم. می توان نشان داد که (مثال ۱۱-۱۵ را ببینید)

$$\int \mathbf{J} dv = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (۱۷۹-۱۵)$$

و از این رو

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (۱۸۰-۱۵)$$

مثال ۱۱-۱۵

دیورژانس حاصلضرب مختصه x و چگالی جریان \mathbf{J} (یعنی $x\mathbf{J}$) را در نظر بگیرید. با استفاده از معادله (۱-۵۷)، می توان نوشت $\nabla \cdot (x\mathbf{J}) = (\hat{x} \cdot \mathbf{J}) + x\nabla \cdot \mathbf{J}$ یک حجم V و استفاده از قضیه دیورژانس به دست می دهد

$$\oint_S x\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_V \hat{x} \cdot \mathbf{J} dv + \int_V x\nabla \cdot \mathbf{J} dv \quad (۱۸۱-۱۵)$$

که در آن S سطح دربرگیرنده حجم V است با ضرب معادله (۱۸۱-۱۵) در \hat{x} و نوشتن جملات مشابه برای حاصلضربهای $y\mathbf{J}$ و $z\mathbf{J}$ ، و افزودن آنها به هم، به دست می آوریم

$$\oint_S \mathbf{r}\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_V \mathbf{J} dv + \int_V \mathbf{r}\nabla \cdot \mathbf{J} dv \quad (۱۸۲-۱۵)$$

انتگرال سطحی در فواصل دور از توزیع صفر می شود، از این رو $\int_V \mathbf{J} dv = -\int_V \mathbf{r}\nabla \cdot \mathbf{J} dv$ با استفاده از رابطه پیوستگی، می نویسیم $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t$ ؛ به این ترتیب

$$\int \mathbf{J} dv = \int \mathbf{r} \frac{\partial\rho}{\partial t} dv = \frac{d}{dt} \int \mathbf{r}\rho dv \quad (۱۸۳-۱۵)$$

با استفاده از $\mathbf{p} = \int \mathbf{r}\rho dv$ معادلات (۱۷۹-۱۵) و (۱۸۰-۱۵) را به دست می آوریم. توجه کنید که در حالت پایا همان طور که در معادله (۸-۹۹) داده شد، $\int \mathbf{J} dv = 0$.

باید توجه کنیم که پتانسیلهای برداری و نرده ای که در بالا آنها را محاسبه کردیم در شرایط لورنتس صدق می کنند. از این رو می توانستیم $\Phi(\mathbf{r}, t)$ را از \mathbf{A} و از شرط لورنتس محاسبه کنیم (مسئله ۱۷-۱۵ را ببینید).

اکنون با پتانسیلهای به دست آمده، \mathbf{E} و \mathbf{B} را می توان از $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ و $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ محاسبه کرد. حالت $Q = 0$ را انتخاب

میدان E_R را میدان تابشی می‌نامیم. این میدان دارای وابستگی $1/r$ است؛ از این رو این میدان در تابش سهم دارد. به علاوه این میدان به مشتق دوم گشتاور دوقطبی (و بنابراین به شتاب توزیع بار) بستگی دارد. میدان E_I ، میدان میانی (الفا) نام دارد؛ این میدان دارای وابستگی $1/r^2$ است و به مشتق اول گشتاور دوقطبی (و به این ترتیب به سرعت توزیع) بستگی دارد. سرانجام E_S میدان ایستا نام دارد؛ این میدان دارای وابستگی $1/r^3$ است و به خود گشتاور دوقطبی و از این رو به مکان توزیع بستگی دارد. در واقع اگر قرار دهیم $\mathbf{p} = p_0 \hat{z} \cos \omega t$ در این صورت میدانهای بالا دقیقاً میدانهای معادله (۱۵۱-۱۵) را می‌دهند که با یک آنتن دوقطبی دیفرانسیلی با برانگیختگی جریان سینوسی یا با یک دوقطبی الکتریکی متغیر سینوسی (TM) [معادله (۱۵۳-۱۵)] را ببینید] تولید می‌شوند.

میدان مغناطیسی مفروض در معادله (۱۸۵-۱۵) را می‌توان به صورت حاصل جمع میدانهای B_I و B_R (یعنی، $B = B_R + B_I$) نوشت که در آن

$$B_R = -\frac{\mu_0}{4\pi cr} \hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}} \quad (192-15)$$

$$B_I = -\frac{\mu_0}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{p}} \quad (193-15)$$

سهم B_R یک میدان تابشی است؛ این میدان به $\ddot{\mathbf{p}}$ بستگی دارد و دارای وابستگی شعاعی $1/r$ است. سهم B_I یک میدان القا است؛ این میدان به $\dot{\mathbf{p}}$ بستگی دارد و دارای وابستگی شعاعی $1/r^2$ است. در واقع می‌توان نشان داد که میدان B با یک ضرب خارجی ساده $\hat{\mathbf{r}}$ با $\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R$ به $\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R$ مربوط می‌شود

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R) \quad (194-15)$$

اگرچه توان تابش را در حالت تغییرات زمانی سینوسی به وسیله یک دوقطبی الکتریکی محاسبه کردیم، آموزنده است که توان را در حالت کلی غیرسینوسی که در آن $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ است تعیین کنیم. ابتدا توجه کنید که میدانهای تابشی \mathbf{E}_R و \mathbf{B}_R می‌توانند از طریق ضرب خارجی ساده زیر

$$\mathbf{E}_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}) = -c\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_R \quad (195-15)$$

به هم مربوط شوند. در این صورت بردار پوینتینگ $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ عبارت است از

$$\mathbf{S} = -\frac{c}{\mu_0} (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_R) \times \mathbf{B}_R = \frac{c}{\mu_0} \hat{\mathbf{r}} |\mathbf{B}_R|^2 \quad (196-15)$$

می‌کنیم. گرفتن تاو معادله (۱۵-۱۸) به دست می‌دهد

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{\dot{\mathbf{p}}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \times \dot{\mathbf{p}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \nabla \times \dot{\mathbf{p}} \quad (184-15)$$

چون $\dot{\mathbf{p}}$ تابعی از θ یا ϕ نیست. در این صورت

$$\nabla \times \dot{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{r}} \times \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}}{\partial r} = -\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{c} \right) \times \ddot{\mathbf{p}}$$

بنابراین

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{p}} - \frac{\mu_0}{4\pi cr} \hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}} \quad (185-15)$$

برای اینکه \mathbf{E} را محاسبه کنیم، $-\partial \mathbf{A} / \partial t$ و $-\nabla \Phi$ را محاسبه می‌کنیم. محاسبه اولی ساده است؛ یعنی

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (186-15)$$

اما محاسبه $-\nabla \Phi$ پیچیده‌تر است، زیرا Φ ضرب زده‌ای دو بردار را در بر می‌گیرد. با استفاده از رابطه برداری مفروض در معادله (۵۹-۱) و ویژگی $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ ، به دست می‌آوریم

$$-\nabla \Phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{cr} \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla \dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla \mathbf{p} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla \frac{\hat{\mathbf{r}}}{cr} + \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \frac{1}{cr} \hat{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \dot{\mathbf{p}}) + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \times (\nabla \times \mathbf{p}) \right] \quad (187-15)$$

توجه کنید که \mathbf{p} و $\dot{\mathbf{p}}$ توابعی از $t - r/c$ هستند، در این صورت عمل ∇ بر روی آنها را می‌توان با $\hat{\mathbf{r}}(\partial/\partial t)$ عوض کرد. به این ترتیب \mathbf{E} می‌شود

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_R + \mathbf{E}_I + \mathbf{E}_S \quad (188-15)$$

که در آن

$$\mathbf{E}_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} [\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{p}}) - \ddot{\mathbf{p}}] \quad (189-15)$$

$$\mathbf{E}_I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{cr^2} [r\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{p}}) - \dot{\mathbf{p}}] \quad (190-15)$$

$$\mathbf{E}_S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} [r\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}] \quad (191-15)$$

یک مبدأ اختیاری اندازه می‌گیریم در نظر بگیرید. گشتاور دوقطبی بار عبارت است از $\mathbf{p} = q\mathbf{r}'$ ؛ از این رو $\dot{\mathbf{p}} = q\dot{\mathbf{r}}' = q\dot{\mathbf{v}}$ که با قراردادن در معادله (۱۵-۱۹۹) به دست می‌آوریم

$$P = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{2}{3} |\ddot{\mathbf{r}}'|^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{2}{3} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \quad (۲۰۰-۱۵)$$

توان تابیده از یک بار شتابدار تند را در بخش زیر بررسی می‌کنیم.

۱۵-۶ پتانسیل لینارد-ویچرت — بارهای نقطه‌ای متحرک تند پتانسیلهای تأخیری پتانسیلهای توزیعیهای بار و جریان اختیاری $\rho(\mathbf{r}, t')$ و $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')$ را توصیف می‌کنند. در حالتی که توزیعیهای بار و جریان مفید هستند (سرعتهای اجزای مختلف توزیع از سرعتهای نور بسیار کوچکتر هستند)، و طول موج غالب تابش از اندازه واقعی توزیع (تقریب دوقطبی) بسیار کوچکتر است، بسط چندقطبی همان طور که در بخش قبل گفته شد، کاملاً مناسب است. در این بخش این محدودیتها را حذف می‌کنیم و توزیعیهای بار و جریان تند را بدون در نظر گرفتن تقریب دوقطبی در نظر می‌گیریم.

برای سادگی، حالت یک بار نقطه‌ای q در جهت دلخواه که مسیر آن کاملاً با بردار شعاعی $\mathbf{r}'(t')$ توصیف می‌شود را در نظر می‌گیریم. با استفاده از معادله (۱۵-۴۳) پتانسیل نرده‌ای تأخیری بار را محاسبه می‌کنیم

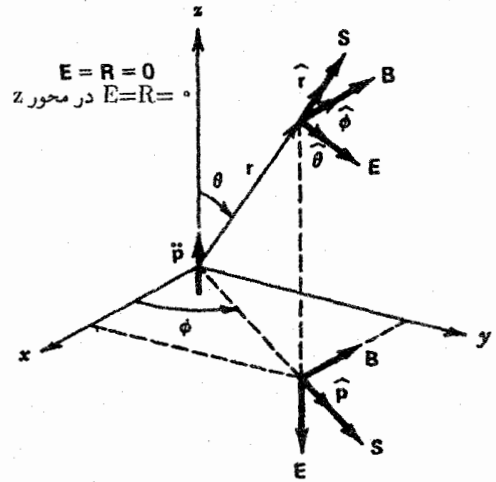
$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

چون با یک بار نقطه‌ای سروکار داریم، در این صورت ρ با \mathbf{r}' مستقیماً تغییر نمی‌کند و از این رو چگالی بار را می‌توان با یک تابع دلتای دایره‌ای عوض کرد. اما، به دلیل حرکت قابل ملاحظه بار، این چگالی لزوماً به یک توزیع بار گسترده به صورت تابعی از زمان شبیه است. دواثر را باید در نظر بگیریم: فاصله بین بار و نقطه مشاهده $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')$ با زمان تغییر می‌کند، و شناسه تابع دلتا که مکان بار را توصیف می‌کند به دلیل اثر تأخیری به زمان بستگی دارد. به این ترتیب می‌نویسیم

$$\rho(\mathbf{r}', t) = q\delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|}{c}\right) = q\delta(t' - t) \quad (۲۰۱-۱۵)$$

که در آن

$$t'' = t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} = t' - t + \frac{|\mathbf{R}|}{c} \quad (۲۰۲-۱۵)$$



شکل ۱۵-۱۰ نمودار طرحوار میدانهای تابشی یک دوقطبی الکتریکی وابسته به زمان که مشتق دوم آن در سه سمتگیری انتخاب شده در امتداد z است.

با قراردادن معادله (۱۵-۱۹۲) در این معادله به دست می‌آوریم

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c r^2} \hat{\mathbf{r}} |\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad (۱۹۷-۱۵)$$

حالتی را که در آن $\ddot{\mathbf{p}}$ در امتداد محور z است در نظر می‌گیریم. در این حالت \mathbf{S} می‌شود

$$\mathbf{S} = \frac{\hat{\mathbf{r}} |\dot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \quad (۱۹۸-۱۵)$$

شکل ۱۵-۱۰ نمودار طرحوار میدانهای تابشی است، که بردار پوینتینگ برای این دوقطبی را برای سه نقطه مشاهده — یکی در امتداد محور z ، یکی در صفحه xy ، و یکی در (θ, ϕ) دلخواه — نشان می‌دهد. کل توان تابیده با انتگرال گیری \mathbf{S} بر روی یک کره به شعاع r و به مرکز مبدأ محاسبه می‌شود. نتیجه عبارت است از

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{2}{c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad (۱۹۹-۱۵)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که توان تابیده با مربع مشتق دوم گشتاور دوقطبی توزیع متناسب است؛ از این رو توزیع فقط در صورتی تابش می‌کند که شتابدار باشد.

معادله (۱۵-۱۹۹) را می‌توان به حالت یک تک‌بار که تحت تأثیر حرکت شتابدار قرار گرفته است نسبت داد. لازم است سرعت بار از سرعت نور بسیار کوچکتر باشد زیرا معادله (۱۵-۱۹۹) با این شرط به دست آمد. بار q که مکان آن با \mathbf{r}' داده می‌شود، و آن را نسبت به

چون چگالی جریان برابر است با حاصلضرب چگالی بار و سرعت جزء بار، در این صورت از یک روش شبیه به روش استخراج پتانسیل زده‌ای می‌توان برای تعیین \mathbf{A} استفاده کرد. نتیجه عبارت است از

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}', t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\beta(t')}{R(t') - \beta(t') \cdot \mathbf{R}(t')} \quad (210-15)$$

که درست برابر است با حاصلضرب β/c و پتانسیل زده‌ای؛ یعنی

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\beta(t')\Phi(\mathbf{r}, t)}{c} \quad (211-15)$$

پتانسیلهای Φ و \mathbf{A} را که با معادلات (۲۰۹-۱۵) تا (۲۱۱-۱۵) داده می‌شوند به یاد دو دانشمندی که این روش را توسعه دادند، پتانسیلهای لیناردویچرت می‌نامند. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متناظر با آنها را می‌توان از $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ و $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ حساب کرد. محاسبه واقعی کاملاً پیچیده است و بنابراین فقط نتیجه را می‌نویسیم

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_v + \mathbf{B}_a \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_v + \mathbf{E}_a \quad (212-15)$$

که در آن

$$\mathbf{E}_v = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 K^2} (\mathbf{R} - R\beta)(1 - \beta^2)$$

$$\mathbf{E}_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 K^2} \left[\frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{R} - R\beta)}{K} - R\mathbf{a} \right]$$

$$\mathbf{B}_v = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c K^2} [(\beta \times \mathbf{R})(1 - \beta^2)] \quad (213-15)$$

$$\mathbf{B}_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 K^2} \left[\frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})(\beta \times \mathbf{R})}{K} + (\mathbf{a} \times \mathbf{R}) \right]$$

و

$$K = R(t') - \beta(t') \cdot \mathbf{R}(t')$$

شتاب بار \mathbf{a} با رابطه

$$\mathbf{a} = c \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad (214-15)$$

داده می‌شود و تمام کمیتها در زمان تأخیری $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ ارزیابی می‌شوند. باید توجه کرد که میدانهای بالا در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\mathbf{B} = \frac{\hat{\mathbf{n}}(t') \times \mathbf{E}}{c} \quad (215-15)$$

در این صورت محاسبه پتانسیل $\Phi(\mathbf{r}, t)$ مستلزم یک انتگرالگیری نسبت به زمان تأخیری t' بر روی کل حجمی که بار را شامل می‌شود؛ یعنی، از $-\infty$ تا ∞ است. به این ترتیب داریم

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|} dt' \quad (203-15)$$

اگر این خاصیت مهم تابع دلتای دیراک را در نظر بگیریم

$$\psi(x) = \int g(x) \delta(f(x)) dx = \frac{g(x)}{df(x)/dx} \Big|_{f(x)=0} \quad (204-15)$$

انتگرالگیری را به سادگی می‌توانیم انجام دهیم. به این ترتیب داریم

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R(t')} \cdot \frac{dt'}{dt'} \Big|_{t''=0} \quad (205-15)$$

چون تا جایی که به t' مربوط می‌شود t ثابت است، در این صورت

$$\frac{dt''}{dt'} = 1 - \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} R(t') \quad (206-15)$$

اما $d|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')| = \nabla|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')| \cdot d\mathbf{r}' = -\nabla|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')| \cdot d\mathbf{r}'$ بنابراین

$$\frac{dt''}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \nabla|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')| \cdot \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}$$

با انتخاب $(1/c)d\mathbf{r}'/dt' = \text{ذکر}$ و $\nabla|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')| = -\mathbf{R}(t')/R(t')$ (سرعت بار که به سرعت نور بهنجار شده است، به دست می‌آوریم

$$\frac{dt''}{dt'} = \frac{R(t') - \beta(t') \cdot \mathbf{R}(t')}{R(t')} \quad (207-15)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t') - \beta(t') \cdot \mathbf{R}(t')} \Big|_{t''=0} \quad (208-15)$$

اما با توجه به شرط $t'' = 0$ داریم $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|/c$ (زمان تأخیری). به این ترتیب

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t') - \beta(t') \cdot \mathbf{R}(t')} \quad (209-15)$$

پتانسیل برداری یک بار متحرک را می‌توان با استفاده از پتانسیل برداری تأخیری حساب کرد

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

می‌شوند. برای توزیعهای متحرک تند (غیر کراندار)، باید توزیعهای توان یکسان متفاوت باشند (مثال ۱۵-۱۳ را ببینید).

مثال ۱۵-۱۲ میرایی تابشی

حال روشن است که حرکت یک ذره باردار در حضور میدانهای الکترومغناطیسی تحت تأثیر نیروهای کولنی و لورنتس قرار می‌گیرد. در همان زمان یک ذره باردار که شتاب گرفته است، تابش الکترومغناطیسی تولید می‌کند. در این مثال اثر میدانهای تابش شده را بر روی حرکت بار شتابداری که این میدانها را تولید می‌کند، بررسی می‌کنیم. این پدیده را میرایی تابشی یا واکنش تابشی می‌نامیم.

بار q را که در یک میدان خارجی با سرعت $v \ll c$ و شتاب $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ حرکت می‌کند در نظر بگیرید. نیروی ناشی از میدان خارجی را یک نیروی بازگرداننده انتخاب می‌کنیم: $\mathbf{F}_e = -k\mathbf{r}$ که در آن \mathbf{r} مکان بار نسبت به مبدأ و k یک کمیت مثبت است. توان تابیده از بار به صورت زیر با معادله (۱۵-۲۰) داده می‌شود:

$$P = -\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2$$

متناظر با اتلافهای تابش، یک نیروی واکنش مؤثر \mathbf{F}_r وجود دارد به طوری که

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} q^2 \frac{|\dot{\mathbf{v}}|^2}{c^3}$$

که وقتی از آن بر روی یک دور انتگرال می‌گیریم به دست می‌آوریم

$$\oint \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v} dt = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \int |\dot{\mathbf{v}}|^2 dt$$

با انتگرالگیری سمت راست این معادله با روش جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$\int \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v} dt = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \Big|_{\text{دور}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} q^2 \int \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt$$

محاسبه مقدار $\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}$ بر روی یک دور صفر می‌شود، و بنابراین

$$\int \left(\mathbf{F}_r - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} q^2 \ddot{\mathbf{v}} \right) \cdot \mathbf{v} dt = 0 \quad (220-15)$$

به این ترتیب برای نیروی واکنش تابش در یک دور می‌توان انتخاب کرد

$$\mathbf{F}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} q^2 \ddot{\mathbf{v}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} q^2 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (221-15)$$

$$\mathbf{B}_a = \frac{\hat{\mathbf{n}}(t')}{c} \times \mathbf{E}_a \quad \text{و} \quad \mathbf{B}_v = \frac{\hat{\mathbf{n}}(t')}{c} \times \mathbf{E}_v \quad (216-15)$$

که در آن $\hat{\mathbf{n}}(t') = \mathbf{R}(t')/R(t')$

میدانهای \mathbf{E}_v و \mathbf{B}_v را میدانهای سرعت می‌نامیم؛ این میدانها به صورت R^{-2} نزول می‌کنند و همراه با بار حرکت می‌کنند. میدانهای \mathbf{E}_a و \mathbf{B}_a را میدانهای شتاب می‌نامیم؛ این میدانها به صورت R^{-1} نزول می‌کنند، و کل توان وابسته به آنها مستقل از R است. با توجه به این امر میدانهای تابشی به بارهایی که آنها را تولید می‌کنند به سختی نجسیده‌اند. در منطقه موج (یعنی در فواصل دور از بار) می‌توان از توان وابسته به میدانهای سرعت در مقایسه با تابش از میدانهای شتاب (میدانهای تابشی) چشمپوشی کرد.

باید توجه کنید که چون زمان مربوط به حرکت بار t' است حال آنکه $t = t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|/c$ مربوط به ناظر است، در این صورت توان تابیده در یک زاویه فضایی مفروض از دو جهت تفاوت دارند. اختلاف آنها به این خاطر است که گرچه کل انرژی تابیده یکسان است، اما ضریب dt/dt' مساوی با واحد نیست.

انرژی تابیده در یک زاویه فضایی $d\Omega$ که در یک فاصله زمانی dt در زمان t به وسیله ناظر اندازه‌گیری می‌شود برابر است با

$$-dW = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} R^2 dR dt$$

چون این انرژی توسط بار در زمان تأخیری $t' = t - R(t)/c$ تابیده می‌شود، در این صورت توان تابیده بر زاویه فضایی واحد برابر است با

$$-\frac{dW}{dt' dR} = \frac{dP}{d\Omega} = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} R^2 \frac{dt}{dt'} \quad (217-15)$$

با مشتق‌گیری $t' = t - R(t)/c$ نسبت به t' به دست می‌آوریم

$$1 = \frac{dt}{dt'} - \frac{1}{c} \frac{dR(t')}{dt'} \quad (218-15)$$

با استفاده از معادلات (۱۵-۲۰۶) و (۱۵-۲۰۷) به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt'} R(t') = -\frac{\boldsymbol{\beta}(t') \cdot \mathbf{R}}{R}$$

از این رو

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}}{R} = 1 - \beta \cos \theta \quad (219-15)$$

که در آن θ زاویه بین \mathbf{R} و $\boldsymbol{\beta}$ است.

برای بار یا توزیعهای متحرک کند (توزیعهای کراندار) مانند آنچه قبل از این بخش خواندیم، می‌توان قرار داد $r' \ll r$ و از این رو

این معادله توزیع زاویه‌ای تابش بار را می‌دهد. مطالعات بیشتر این الگورا به‌عنوان تمرین (مسئله ۱۵-۲۴ را ببینید) به خواننده واگذار می‌کنیم. محاسبه مقدار کل توان و انرژی تابیده نیز به‌صورت تمرین (مسئله ۱۵-۲۲ و ۱۵-۲۳ را ببینید) به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال ۱۴-۱۵ بار شتابدار با حرکت کند

بار q که با سرعت کم $c \ll |v|$ و شتاب کم dv/dt حرکت می‌کند در نظر بگیرید به طوری که در یک ناحیه که بزرگترین بعد آن R_0 است کراندار باقی می‌ماند. فرض کنید نقطه مشاهده در یک فاصله زیاد $r \gg R_0$ از مبدأ باشد. چون $r \ll R_0 < r'$ زمان تأخیری $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|/c$ را می‌توان $t' = t - r/c$ تقریب زد. فاصله بار از نقطه مشاهده، $\mathbf{R}(t') = \mathbf{r}(t') - \mathbf{r}'(t')$ را نیز برای تمام زمانها با $\mathbf{r}(t')$ مساوی می‌گیریم. کمیت $1/K^n = 1/(R(t') - \mathbf{R}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))^n$ که در آن n یک عدد صحیح است را با $1/k^n = (1 + n\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{r}})/r^n$ که در آن جمله پایتترین مرتبه در $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ را نگه داشته‌ایم، تقریب می‌زنیم. با قراردادن این جملات تقریبی در معادلات (۱۵-۲۱۳) عبارتهای زیر را با جملاتی که در زمان $t' = t - r/c$ محاسبه شده است به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_v &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[\hat{\mathbf{r}} \left(1 + \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) - \frac{\mathbf{v}}{c} \right] \\ \mathbf{E}_a &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left[\left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right) \hat{\mathbf{r}} - \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \times \left(\hat{\mathbf{r}} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right) \quad (15-229) \\ \mathbf{B}_v &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad \mathbf{B}_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \times \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

اکنون در مورد ماهیت میدانهای گوناگون بحث می‌کنیم. جمله اول \mathbf{E}_v ، $q\hat{\mathbf{r}}/4\pi\epsilon_0 r^2$ درست میدان کولنی q واقع در مبدأ است. در واقع اولین دو جمله شعاعی هستند و می‌توان آنها را به‌صورت یک میدان کولنی بار $Q = q(1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{v}/c)$ وابسته به سرعت مؤثر در نظر گرفت. سهم جمله آخر در \mathbf{E}_v در جهت خود سرعت است. از طرف دیگر میدان \mathbf{B}_v در این تقریب دقیقاً میدان بیوساوار است. میدانهای شتاب، \mathbf{E}_a و \mathbf{B}_a با $1/r$ متناسب هستند، و به این ترتیب این میدانها در فواصل دور غالب هستند. می‌توان فاصله r_0 که فراتر از آن این اتفاق می‌افتد را تخمین زد. چون $v/c \ll 1$ ، در این صورت در $r = r_0$ می‌توان قرار داد

$$E_v \cong E_a \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_0} \frac{dv}{dt'}$$

بنابراین معادله حرکت زیر بر حرکت بار به جرم m ، تحت تأثیر نیروهای خارجی و واکنشی، حاکم است.

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_r = -k\mathbf{r} + \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0} \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right) \quad (15-222)$$

مثال ۱۳-۱۵ توقف یک بار تند

در این مثال انرژی تابش‌یافته در حین توقف یک بار متحرک تند را محاسبه می‌کنیم. شتاب منفی را یکنواخت در امتداد جهت حرکت اولیه در نظر می‌گیریم. میدان الکتریکی در منطقه تابش با معادله (۱۵-۲۱۳) داده می‌شود، یا

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_a &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 K^2} [(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})\mathbf{R} - R^2 \mathbf{a} - R(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})\boldsymbol{\beta} \\ &\quad + R(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{a}] \quad (15-223) \end{aligned}$$

وقتی $\boldsymbol{\beta}$ و \mathbf{a} در یک جهت هستند، دو جمله آخر یکدیگر را حذف می‌کنند و \mathbf{E}_a می‌شود

$$\mathbf{E}_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 K^2} [(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})\mathbf{R} - R^2 \mathbf{a}] \quad (15-224)$$

استفاده از $\mathbf{B}_a = \hat{\mathbf{n}}(t') \times \mathbf{E}_a/c$ در عبارت بردار پوینتینگ به دست می‌دهد

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E}_a \times (\hat{\mathbf{n}}(t') \times \mathbf{E}_a) = \frac{1}{\mu_0 c} E_a^2 \hat{\mathbf{n}}(t') \quad (15-225)$$

مربع معادله (۱۵-۲۲۴) به دست می‌دهد

$$E_a^2 = \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 c^2 K^4} R^2 (R^2 a^2 - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})^2) \quad (15-226)$$

با انتخاب زاویه بین \mathbf{a} و \mathbf{R} مساوی با θ و قراردادن معادله (۱۵-۲۲۶) در معادله (۱۵-۲۲۵) به دست می‌آوریم

$$\mathbf{S} = \frac{q^2 a^2 R^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 \mu_0 c^3 K^4} \sin^2 \theta \hat{\mathbf{n}} \quad (15-227)$$

با قراردادن معادلات (۱۵-۲۲۷) و (۱۵-۲۱۹) در معادله (۱۵-۲۱۷) و توجه به این نکته که $K = R(1 - \beta \cos \theta)$ ، به دست می‌آید

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{(4\pi\epsilon_0)^2 \mu_0 c^3 (1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (15-228)$$

وارد بر جزء دوم dq_r ذره استفاده می‌کنیم. تنها اثر آن قسمت از میدان الکتریکی که به شتاب بستگی دارد را در نظر می‌گیریم، ولی می‌نویسیم

$$d\mathbf{F}(t) = -dq_r d\mathbf{E} = -\frac{dq_1 dq_r}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left[\left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'}(t') \right) \hat{\mathbf{r}} - \frac{d\mathbf{v}}{dt'}(t') \right] \quad (231-15)$$

که در آن r فاصله بین دو جزء $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ و $t' = t - r/c$ زمان تأخیر است. کل نیرو را با انتگرال‌گیری $d\mathbf{F}(t)$ بر روی تمام اجزای محاسبه می‌کنیم، اما چون $v(t')$ و t' به صورت پیامدی از اثرهای تأخیری به r بستگی دارند، این عمل در حالت کلی سراسر نیست. در این حالت اثر تأخیر را بر پایینترین مرتبه در $t - t'$ در نظر می‌گیریم، یعنی وقتی $dv(t')/dt'$ را بسط می‌دهیم می‌نویسیم

$$\frac{d\mathbf{v}(t')}{dt'} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} - \frac{r}{c} \frac{d^2\mathbf{v}(t)}{dt^2} + \dots \quad (232-15)$$

با قراردادن بسط در معادله (231-15) و انتگرال‌گیری، $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{dq_1 dq_r}{r} \left[\left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \right) \hat{\mathbf{r}} - \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \right] \\ &= -\frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \end{aligned}$$

با انرژی الکتروستاتیکی

$$U_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq_1 dq_r}{r}$$

و

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int dq_1 dq_r \left[\left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \right) \hat{\mathbf{r}} - \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \right] \\ &= \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \end{aligned}$$

در هر دو انتگرال dv/dt و d^2v/dt^2 را در امتداد محور z انتخاب کرده‌ایم و نوشته‌ایم $\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta \cos\phi \hat{\mathbf{x}} + \sin\theta \sin\phi \hat{\mathbf{y}} + \cos\theta \hat{\mathbf{z}}$ و در این صورت انتگرال‌گیری بر روی زوایا سهم غیر صفر $4/3$ را فقط در راستای $\hat{\mathbf{z}}$ به دست می‌دهد. به این ترتیب داریم

$$\mathbf{F} = -\frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \quad (233-15)$$

یا

$$r_0 = \frac{c^2}{dv/dt'}$$

با انتخاب $v^2 \approx 2(dv/dt')R_0$ می‌توانیم بنویسیم

$$r_0 \approx R_0 \left(\frac{c^2}{v^2} \right)$$

اکنون تابش گسیل شده از بار را بحث می‌کنیم. اگر تساوی $q(dv/dt) = \dot{\mathbf{p}} = q\hat{\mathbf{r}}$ که در آن \mathbf{p} گشتاور دوقطبی بار است، بنویسیم در این صورت به سادگی می‌توان نشان داد که بردار پوینتینگ و کل توان تابیده به وسیله بار با این کمیتها که با معادلات (198-15) و (200-15) داده می‌شوند یکسان‌اند. ■

مثال 15-15 گسیل تب

اگر یک بار تند که با سرعت $\mathbf{v} = v_0 \hat{\mathbf{z}}$ حرکت می‌کند در فاصله زمانی τ تحت تأثیر یک شتاب منفی ثابت $\mathbf{a} = -a_0 \hat{\mathbf{z}}$ متوقف شود ($v_f = 0$)، در این صورت یک ناظر واقع در فاصله r و زاویه θ تابش بار را در حین یک فاصله زمانی که لزوماً مساوی با τ نیست آشکار می‌کند. از معادله (219-15) به دست می‌آوریم

$$dt = \left[1 - \frac{v(t')}{c} \cos\theta \right] dt'$$

با انتخاب $v(t') = v_0 - a_0 t'$ و انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم

$$t = t' - \frac{v_0}{c} t' \cos\theta + \frac{1}{2c} a_0 t'^2 \cos\theta$$

اگر در $t' = \tau$ ، $v(t') = v_f = 0$ ، در این صورت $a_0 \tau = v_0$ ؛ از این رو

$$t = \tau \left(1 - \frac{v_0}{2c} \cos\theta \right) \quad (230-15)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که تب تابش که در نقطه مشاهده اندازه‌گیری می‌شود به زاویه θ بستگی دارد و در $\theta = \pi/2$ ، داریم $t = \tau$. ■

مثال 16-15 خودنیروی یک بار شتابدار کند

در این مثال ذره‌ای با بار متقارن کروی را که تحت تأثیر یک حرکت شتابدار قرار می‌گیرد در نظر می‌گیریم. اگر حرکت انتقالی است — یعنی، اگر شتاب در امتداد سرعت باشد و اگر حرکت کراندار است ($v/c \ll 1$) — در این صورت از نتایج مثال 15-14 برای تعیین نیروی یک جزء dq_1

که در آن

$$\mathbf{J}_t = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}_f}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad [15-15]$$

مؤلفه عرضی \mathbf{J} است و دارای ویژگی $\nabla \times \mathbf{J}_t = 0$ است. توجه کنید $\mathbf{J}_t = \mathbf{J}_f - \mathbf{J}$ ، که در آن $\nabla \cdot \mathbf{J}_t = 0$ طولی است. میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} که از Φ و \mathbf{A} مفروض به دست می‌آیند تحت انتقالهای پیمانه‌ای به شکل

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{و} \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi \quad [21-15], [22-15]$$

که در آنها ψ یک تابع زده‌ای است، هنوز به همان شکل (ناوردایی پیمانه‌ای) باقی می‌مانند. برای آنکه \mathbf{A}' و Φ' در شرط لورنتس صدق کنند ψ باید در معادله

$$\nabla^2 \psi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = - \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad [23-15]$$

صدق کند که اگر \mathbf{A} و Φ از قبل در شرط

$$\nabla^2 \psi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad [24-15]$$

صادق باشند معادله بالا به معادله موج همگن تبدیل می‌یابد. به این ترتیب همواره امکان صادق بودن پیمانه لورنتس وجود دارد.

حل معادلات موج در پیمانه لورنتس پتانسیلهای زده‌ای و برداری تأخیری (در خلأ) را به دست می‌دهد؛ یعنی

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad [43-15]$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad [47-15]$$

که در آنها t' زمان تأخیری است و با

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \quad [44-15]$$

داده می‌شود. به این ترتیب می‌بینیم که سوای معرفی زمان تأخیری، پتانسیلهای از نظر شکل با آنچه که در غیاب انتشار با آنها مواجه بودیم یکسان هستند.

در پیمانه کولن، Φ دقیقاً در معادله پواسون الکتروستاتیک صدق می‌کند، بجز آنکه ρ_f اکنون تابعی از زمان است. از این رو جواب Φ عبارت کولنی لحظه‌ای است

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad [13-15]$$

یکای ضریب $4U_0/3e^2$ یکای جرم است و اگر آن را m'_0 جرم "الکترومغناطیسی" مؤثر ذره بنامیم، (مثال ۱-۶ را ببینید) در این صورت F_1 ماهیت نیروی لختی را دارد. از طرف دیگر نیروی F_2 نیروی میرای تابشی است که در مثال ۱۵-۱۲ بحث شد. این نیرو مستقل از ساختار بار است و از این رو ضمن آنکه اندازه بار صفر می‌شود، ثابت باقی می‌ماند. با این حال می‌توان نشان داد که تصحیح مرتبه بالاتر معادله (۱۵-۲۳۲) در حد بار نقطه‌ای صفر می‌شود. در همین حد، m'_0 تا جایی که تقریباً به $1/r$ بستگی داشته باشد، نامتناهی می‌شود. ■

۷-۱۵ خلاصه

تابش از یک توزیع بار متحرک را می‌توان با دو روش محاسبه کرد. در روش اول پتانسیلهای و سپس میدانها (و از این رو تابش) را محاسبه می‌کنیم. در روش دوم میدانها را بدون نیاز به پتانسیلهای مستقیماً محاسبه می‌کنیم. با استفاده از $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ و $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ به روابط زیر می‌رسیم

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{و} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad [1-15], [4-15]$$

با استفاده از $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon$ و $\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{J}_f$ به علاوه روابط بالا بین میدانها و پتانسیلهای درمی‌یابیم که اگر از شرایط اضافی به نام پیمانه‌ها استفاده کنیم می‌توانیم به معادلات دیفرانسیل مستقل برای Φ و \mathbf{A} برسیم. در پیمانه لورنتس لازم است که

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad [8-15]$$

پتانسیلهای در این پیمانه در معادلات موج غیرهمگن زیر صدق می‌کنند

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \Phi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mu \mathbf{J}_f \\ \rho_f / \varepsilon \end{pmatrix} \quad [9-15], [10-15]$$

در پیمانه کولن (پیمانه عرضی) لازم است که

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad [11-15]$$

که این منجر به معادلات زیر برای پتانسیلهای می‌شود:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho_f}{\varepsilon} \quad [12-15]$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_f \quad [16-15]$$

TE و TM به ترتیب متناظر با میدانهای یک دوقطبی مغناطیسی و یک دوقطبی الکتریکی در امتداد محور z هستند. این میدانها پیچیده هستند زیرا اثرهای تأخیری را در بر دارند.

کاربرد تکنیک پتانسیل یا تکنیک میدان شامل، دوقطبیهای نوسانی در خلأ و در حضور صفحات رساناست. پراکندگی امواج الکترومغناطیسی به وسیله کره های رسانای کوچک، آنتنهای دیفرانسیلی و ربع طول موج، توزیعیهای بار کراندار متحرک کند، بارهای متحرک تند. پتانسیلها و از این رو میدانهایی که با یک آنتن دیفرانسیلی به طول l که حامل جریان تناوبی $I(t)$ با دوره تناوب T است، هنگامی که نقطه مشاهده در فواصل دوری قرار دارد $l \gg r$ و $l \ll cT = \lambda$ (تقریب دوقطبی)، پتانسیلها و میدانهای یک دوقطبی الکتریکی هستند. گشتاور دوقطبی مؤثر برابر است با $\varphi = II_0/\omega$ که در آن $\varphi = 2\pi/T$ و ω دامنه جریان است. توان میانگین کل که از آنتن تابش می شود برابر است با

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4} RI_0^2 \quad [152-15]$$

که در آن $R = 789(l/\lambda)^2 \Omega$ یک مقاومت تابشی مؤثر است. میدانهای یک آنتن بلندتر را می توان با انتگرال گرفتن از میدانهای آنتن دیفرانسیلی تعیین کرد. برای یک آنتن نیم موج مقاومت تابشی مؤثر برابر است با 73.1Ω .

برای توزیعیهای بار کراندار متحرک کند (یعنی، $v \ll c$ و $r' \ll r$) جمله های غالب پتانسیلها عبارت اند از

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{r^2} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{p}}}{cr} \right] \quad [174-15]$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int J(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) dv' \quad [178-15]$$

که در آن Q کل بار، $\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t - r/c) dv'$ گشتاور دوقطبی تأخیری، و $\dot{\mathbf{p}}$ مشتق \mathbf{p} نسبت به شناسه آن است. به این ترتیب میدانهای الکتریکی و مغناطیسی این توزیع، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یک بار نقطه ای و یک دوقطبی الکتریکی تا پایتترین مرتبه هستند. میدانهای تابشی، و از این رو \mathbf{S} ، عبارت اند از

$$\mathbf{E}_R = -c\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_R \quad \text{و} \quad \mathbf{B}_R = -\frac{\mu_0}{4\pi cr} \hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}} \quad [192-15], [195-15]$$

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 cr^2} \hat{\mathbf{r}} |\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{\hat{\mathbf{r}} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \theta}{16\pi\epsilon_0 c^3 r^2} \quad [197-15]$$

با این حال پتانسیل برداری در پیمانه کولن، پتانسیل برداری تأخیری است که مؤلفه عرضی \mathbf{J}_t جانشین \mathbf{J}_f می شود. در این صورت میدانها با استفاده از $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ و $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ از \mathbf{A} و Φ محاسبه می شوند.

در نواحی که $\rho_f = 0$ و $\mathbf{J}_f = 0$ می توان مستقیماً معادلات موج را برای \mathbf{E} (یا \mathbf{B}) حل کرد و با استفاده از معادلات ماکسول، \mathbf{B} (یا \mathbf{E}) را محاسبه کرد. به این ترتیب در خلأ و برای تابش تکفام $(\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}e^{-i\omega t})$ ، به دست می آوریم

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad k = \frac{\omega}{c} \quad [59-15]$$

این معادله برداری، را معادله برداری هلمهولتز می نامیم. باید توجه کنیم که حل مستقیم آن مشکل است. با این حال، رابطه زیر آن را به معادله زده ای هلمهولتز

$$\mathbf{E} = \mathbf{r} \times \nabla \psi \quad \nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (\text{TE}) \quad [60-15], [69-15]$$

که در آن ψ یک تابع زده ای است تبدیل می کند. میدان الکتریکی طوری تنظیم شده است که بر \mathbf{r} عمود باشد، و بنابراین آن را حالت الکتریکی عرضی (TE) می نامند. در این حالت میدان \mathbf{B} شکل

$$\mathbf{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) \quad (\text{TE}) \quad [71-15]$$

را به خود می گیرد. اگر نقش \mathbf{E} و \mathbf{B} را در این فرایند عوض کنیم، در این صورت حالت مغناطیسی عرضی (TM) یعنی،

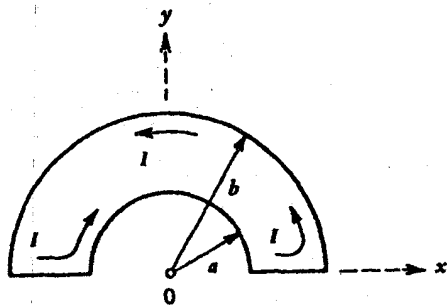
$$\mathbf{B}' = \frac{\mathbf{r} \times \nabla \psi}{c} \quad \mathbf{E}' = \frac{ic}{\omega} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) \quad (\text{TM}) \quad [73-15], [75-15]$$

به دست می آید که در آنها ψ در معادله زده ای هلمهولتز صدق می کند.

یک بسط چندقطبی ψ با استفاده از جداسازی متغیرها در اصل یک سری نامتناهی را می دهد. جملات با پایتترین مرتبه عبارت اند از

$$\psi_{10} = -C_1^0 \frac{e^{ikr}}{kr} \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \cos \theta \quad \text{و} \quad \psi_{00} = C_0^0 \frac{e^{ikr}}{ikr} \quad [77-15]$$

که در آنها C_1^0 و C_0^0 ثابت هستند. تابع ψ_{00} مقارن کروی است؛ از این رو این تابع هیچ گونه میدانی را ایجاد نمی کند؛ حال آنکه ψ_{10} مقارن سمتی دارد، و میدانهایی را ایجاد می کند که با آن در حالتی



شکل ۱۱-۱۵

موج [معادلات (۹-۱۵) و (۱۰-۱۵)] صدق می‌کنند. (ج) نیروی ناشی از میدان وارد بر محیط را به صورت تابعی از مکان و زمان پیدا کنید. ۴-۱۵ نشان دهید که یک جواب ممکن معادلهٔ ماکسول در فضای آزاد به صورت

$$\mathbf{B} = (\nabla \times \hat{\mathbf{K}}) \nabla \times (\hat{\mathbf{K}} \partial \Phi / \partial t), \mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times (\hat{\mathbf{K}} \Phi) \quad \text{الف)}$$

یا $\mathbf{E} = -\nabla \times (\hat{\mathbf{K}} \partial \Phi / \partial t), \mathbf{B} = \nabla \times \nabla (\hat{\mathbf{K}} \Phi)$ (ب) است که در آن $\hat{\mathbf{K}}$ یک بردار یکه ثابت و Φ در معادلهٔ موج زده‌ای صدق می‌کند. (مثال ۴-۱۵ را ببینید).

۵-۱۵ بار الکتریکی Q در یک توزیع متقارن کروی پیوسته در یک ناحیهٔ کراندار فضا توزیع می‌شود. نشان دهید که

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{B} = 0$$

۶-۱۵ جریان I در یک سیم که با معادلات پارامتری زیر توصیف می‌شود

$$x = \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{3/2}}, \quad y = \frac{2t}{(1+t^2)^{3/2}}, \quad z = \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} \quad -\infty < t < \infty$$

و در آن t فقط یک پارامتر است، برقرار است. نشان دهید که پتانسیل تأخیری در مبدأ با پتانسیل تأخیری در فاصلهٔ دور از سیم یکسان است. ۷-۱۵ پتانسیل برداری دو سیم موازی بلند نامتناهی ۱ و ۲، به فواصل ρ_1 و ρ_2 از یک نقطهٔ مشاهده در صفحهٔ سیمها را تعیین کنید. فاصلهٔ بین سیمها d است. جریان I_0 در سیم ۱ در لحظهٔ $t = 0$ و جریان I_0 در سیم ۲ در لحظهٔ $t = t_0$ برقرار می‌شود. معادله‌ای برای زمان به‌دست آورید که در آن زمان پتانسیلهای برداری سیمها در P یکسان شوند. وابستگی زمانی پتانسیل برداری سیمها را رسم کنید. ۸-۱۵ معادلهٔ خط نیرویی را تعیین کنید که به‌وسیلهٔ یک دوقطبی

انتگرال‌گیری روی یک کرهٔ کامل، کل توان تابیده را می‌دهد

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{c^3} \quad [199-15]$$

برای یک بار نقطه‌ای متحرک کند، $\ddot{\mathbf{p}} = q\ddot{\mathbf{v}}$ داریم

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2 |\ddot{\mathbf{v}}|^2}{c^3} \quad [200-15]$$

از بسط چندقطبی برای یک بار نقطه‌ای غیر جایگزیدهٔ q که با سرعت $v \approx c$ حرکت می‌کند، نمی‌توان استفاده کرد. اما از پتانسیل تأخیری برای این بار دقیقاً می‌توان انتگرال‌گیری کرد. نتیجه عبارت است از

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\beta(t')}{c} \Phi(\mathbf{r}, t) \quad [211-15], [209-15]$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t') - \beta(t') \cdot \mathbf{R}(t')}$$

که در آن $R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ، $\beta(t') = \mathbf{v}(t')/c$ و t' زمان تأخیری، این میدانها به‌وسیلهٔ

$$\mathbf{B} = \frac{\hat{\mathbf{n}}(t')}{c} \times \mathbf{E} \quad [215-15]$$

که در آن $\hat{\mathbf{n}}(t') = \mathbf{R}(t')/R(t')$ ، به هم مربوط می‌شوند. توان تابیده در یک زاویهٔ فضایی $d\Omega$ آن‌طور که ناظر اندازه‌گیری می‌کند با توانی که به‌وسیلهٔ بار تابش می‌کند، مساوی نیست زیرا $t \neq t'$. این زمانها به‌وسیلهٔ

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - \frac{\beta \cdot \mathbf{R}}{R} = 1 - \beta \cos \theta \quad [219-15]$$

که در آن θ زاویهٔ بین صفحات β و \mathbf{R} است به هم مربوط می‌شوند.

مسائل

۱-۱۵ با عمل جانشینی مستقیم نشان دهید که $\Phi = f(t - r/c)/r$ یک جواب معادلهٔ موج زده‌ای است.

۲-۱۵ الف) پتانسیل برداری در نقطهٔ $(0, 0)$ مدار جریانی با جریان $I(t)$ را که در شکل ۱۱-۱۵ نشان داده شده است تعیین کنید. ب) اگر $I(t) = \alpha t$ باشد، \mathbf{A} و \mathbf{E} را حساب کنید.

۳-۱۵ در یک محیط میدان الکترومغناطیسی برحسب پتانسیلهای برداری و زده‌ای $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}}(1/2)(x^2 + y^2) \sin \alpha t + \nabla \Psi$ و $\Phi = -\partial \Psi / \partial t$ که در آن Ψ یک تابع اختیاری و α یک ثابت است، توصیف می‌شود. الف) \mathbf{E} و \mathbf{B} را به‌دست آورید. ب) نشان دهید اگر قرار دهیم $\Psi \equiv 0$ ، در شرط لورنتس صدق می‌کند و \mathbf{A} و Φ در معادلهٔ

الکتریکی وابسته زمانی $\hat{z}p(t)$ (که در مثال ۱۵-۳ بحث شد) در صفحه‌ای شامل مبدأ و محور z ایجاد می‌شود. نتیجه را با خطوط نیروی یک دوقطبی الکتریکی ایستا مقایسه کنید.

۹-۱۵ یک دوقطبی الکتریکی $p(t) = p_0 \hat{z} \cos \omega t$ در مبدأ قرار دارد. (الف) میدانها و تابش را در امتداد دوقطبی تعیین کنید. (ب) قسمت (الف) را برای جهت عمود بر دوقطبی تکرار کنید. (ج) منحنی تابش را به صورت تابعی از θ ارائه دهید. (د) کل توان تابیده را به صورت تابعی از بسامد نوسانها، ω رسم کنید.

۱۰-۱۵ یک دوقطبی مغناطیسی وابسته به زمان $\mathbf{m} = m_0 \cos \omega t$ به فاصله b از یک صفحه رسانای بزرگ قرار دارد به طوری که $b \ll \lambda$ که در آن λ طول موج تابش گسیل یافته است. توان تابیده را وقتی دوقطبی (الف) با صفحه موازی و (ب) عمود بر صفحه است، تعیین کنید. این نتایج با توان تابیده در غیاب صفحه چگونه مقایسه می‌شوند؟
۱۱-۱۵ دو دوقطبی الکتریکی واقعی در مبدأ در صفحه xy را در نظر بگیرید. یکی از دوقطبیها عبارت است از $\mathbf{p}_1 = p_0 \hat{x} \cos \omega t$ و دیگری $\mathbf{p}_2 = p_0 (\cos \phi_0 \hat{x} + \sin \phi_0 \hat{y}) \sin \omega t$ (مثال ۱۵-۶ را ببینید). قطبش تابش را در حالت‌های زیر تعیین کنید: (الف) $\theta = 90^\circ$ ، (ب) $\theta = 0^\circ, \pi$ ، (ج) $\phi_0 = \pi/2$ ، $\theta = 0^\circ$ و $\phi_0 \neq \pi/2$.

۱۲-۱۵ معادلات (۱۲۳-۱۵) تا (۱۲۶-۱۵) را به دست آورید.

۱۳-۱۵ معادله (۱۳۳-۱۵) را به دست آورید.

۱۴-۱۵ یک موج الکترومغناطیسی که در راستای محور x قطبیده است و در امتداد محور z منتشر می‌شود، به وسیله یک کره بسیار کوچک پراکنده می‌شود. توان تابیده در امتداد محور x را محاسبه کنید (مثال ۱۵-۷ را ببینید).

۱۵-۱۵ یک سیم رسانا در مبدأ و در امتداد محور z جریان $I_0 \sin \omega t$ را که در آن $\omega = 5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ و $I_0 = 1 \text{ A}$ حمل می‌کند. (الف) طولی برای سیم در نظر بگیرید به طوری که تقریب دوقطبی حفظ شود. (ب) گشتاور دوقطبی سیم را تعیین کنید. (ج) مقاومت تابشی مؤثر آنتن را تعیین کنید.

۱۶-۱۵ یک آنتن خطی به طول l توزیع جریانی ساکن به دامنه I_0 و بسامد ω دارد. آنتن دارای n نیم طول موج جریان است و دو انتهای آنتن، گره هستند (بخش ۱۵-۴ تا ۱۵-۲ را برای یک آنتن نیم طول موج ببینید). (الف) عبارتی برای جریان در آنتن بنویسید. (ب) گشتاور دوقطبی الکتریکی بر طول واحد را تعیین کنید. (ج) میدان مغناطیسی که آنتن در منطقه تابش تولید می‌کند را تعیین کنید. (د)

توان تابیده شده از آنتن را تعیین کنید.

۱۷-۱۵ معادله (۱۷۴-۱۵) را از پتانسیل برداری که با (۱۷۸-۱۵) داده می‌شود، و شرط لورنتس به دست آورید.

۱۸-۱۵ الگوی تابش چهار دوقطبی نیم موج را که مانند آرایه آنتنی مثال ۱۵-۹ مرتب شده‌اند، رسم کنید.

۱۹-۱۵ یک آنتن نیم موج در نزدیکی زمین به فاصله‌ای که در مقایسه با طول موج λ کوچک است، با عمود بر زمین تحت زاویه 60° قرار گرفته است. الگوی تابش گسیل یافته را تعیین کنید.

۲۰-۱۵ یک دوقطبی الکتریکی با بارهای q و $-q$ به فاصله l از یکدیگر را در نظر بگیرید. بزرگی هریک از بارها به طور سینوسی با زمان در بسامد ω تغییر می‌کند. (الف) گشتاور دوقطبی بارها را تعیین کنید. (ب) جریانی که بین بارها جاری است را تعیین کنید. (ج) با استفاده از معادلات (۱۸۹-۱۵) و (۱۹۲-۱۵) میدانهای تابشی بارها را تعیین کنید. این میدانها در امتداد خطی که بارها را به هم وصل می‌کند، چگونه‌اند؟
۲۱-۱۵ یک ذره باردار با بار q و شتاب $a\hat{z}$ ابتدا در سرعتهای پایین $v_0 \hat{z}$ که در آن $v_0 \ll c$ ، و a یک ثابت است، حرکت می‌کند. (الف) توزیع زاویه‌ای تابش را تعیین کنید، این توزیع چگونه به v_0 بستگی دارد؟ (ب) کل توان و انرژی تابیده را تعیین کنید.

۲۲-۱۵ یک ذره باردار با بار q و شتاب $a\hat{z}$ ابتدا با سرعت $v_0 \hat{z}$ حرکت می‌کند. (الف) وابستگی زاویه‌ای توان تابیده را بنویسید. (ب) کل توان تابیده را تعیین کنید.

۲۳-۱۵ یک ذره باردار با بار q و سرعت اولیه $v_0 \hat{z}$ در امتداد سرعت آن به طور یکنواخت شتاب می‌گیرد. با استفاده از نتیجه مسئله ۱۵-۲۲، کل انرژی تابیده را تعیین کنید.

۲۴-۱۵ نشان دهید بیشینه توان گسیل یافته از بار مسئله ۱۵-۲۳ تحت زاویه θ_0 (نسبت به v) که با

$$\cos \theta_0 = (1/4\beta)[(1 + 24\beta^2)^{1/2} - 1]$$

و $\beta = v_0/c$ ، به دست می‌آید، مشاهده می‌شود. در مورد حدهای $\beta \rightarrow 0$ و $\beta \rightarrow 1$ بحث کنید.

۲۵-۱۵ یک دوقطبی الکتریکی واقع در مبدأ در صفحه xy با بسامد زاویه‌ای ω می‌چرخد. (الف) دوقطبی را به دو دوقطبی نوسانگر در راستای محورهای x و y تجزیه کنید. (ب) اختلاف فاز بین دو مؤلفه دوقطبی چقدر است؟ (ج) با استفاده از نتیجه مثال ۱۵-۶ توزیع زاویه‌ای توان تابیده از دوقطبی را پیدا کنید. (د) با استفاده از معادله (۱۹۷-۱۵) کمیت قسمت (ج) را تعیین کنید.

مسائل الکترومغناطیس با شرایط مرزی

گرفتیم که معادله $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ بر ناپیوسته بودن مؤلفه قائم \mathbf{D} ، با ناپیوستگی $D_{2n} - D_{1n} = \sigma$ ، دلالت دارد. از طرف دیگر معادلات $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ و $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f$ شرایط مرزی را برای مؤلفه‌های مماسی بردارهای \mathbf{E} و \mathbf{H} تعیین می‌کند. دیدیم که مؤلفه مماس بر مرز \mathbf{E} پیوسته ($\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}$) و مؤلفه مماس بر مرز \mathbf{H} ناپیوسته ($\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}$) است. سرانجام در حضور رساناها دریافتیم که معادله پیوستگی تحت شرایط پایا $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ ، ایجاب می‌کند که مؤلفه جریان عمود بر مرز پیوسته باشد ($J_{1n} = J_{2n}$).

شرایط مرزی میدانهای الکترومغناطیس تحت تأثیر معادلات ماکسول را می‌توان از این معادله‌ها پیدا کرد. روابط دیورژانس ماکسول یعنی

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(t) = \rho_f(t) \quad \text{و} \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(t) = 0$$

دقیقاً مانند دو معادله مغناطوستاتیک و الکتروستاتیک هستند. بجز اینکه \mathbf{D} و ρ_f به زمان وابسته‌اند. بنابراین با توجه به شکل ۱۶-۱ (الف)، نتیجه می‌گیریم که

$$B_{1n}(t) = B_{2n}(t) \quad (۱-۱۶)$$

$$D_{2n}(t) - D_{1n}(t) = \sigma_f(t) \quad (۲-۱۶)$$

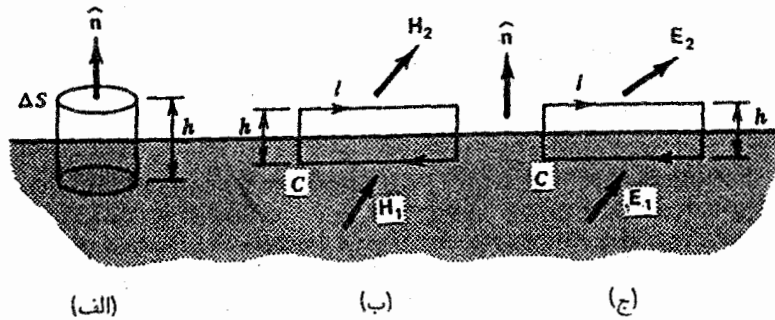
از طرف دیگر روابط تاو ماکسول

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_f$$

تا کنون روابط ماکسول را در دو حالت مهم مطالعه کردیم. در یک حالت، که در فصل ۱۴ بحث شد، انتشار امواج تخت در فضای بیکران را بررسی کردیم که شامل ماده‌ای با شاخصهای $(\epsilon, \mu, \sigma_c)$ در غیاب توزیع جریان و بارهای خارجی بود. در حالت دوم، که در فصل ۱۵ بحث شد، دوباره فضای بیکرانی داشتیم که شامل ماده‌ای با شاخصهای $(\epsilon, \mu, \sigma_c = 0)$ (یعنی نارسانا) و در حضور منابع بار و جریان بود. از این توزیعها تابش امواج غیرتخت نتیجه شد. در این فصل دسته دیگری از مسائل، تعمیم حالت اول، یعنی انتشار امواج تخت در محیطی عاری از توزیعهای بار و جریان و دربرگیرنده چندین نوع ماده با ویژگیهای دی‌الکتریک، مغناطیسی و رساناییهای مختلف را مطالعه می‌کنیم. اگرچه روشهای بررسی روابط میدان در هر نوع ماده به تنهایی همانهایی است که در فصل ۱۴ به‌کار رفت اما لازم است برای جورکردن جوابها شرایط مرزی در فصل مشترکها را نیز در نظر بگیریم. کاربرد این دسته از مسائل شامل بازتاب و شکست در مرزهای رسانا یا دی‌الکتریک، انتقال از لایه‌های نازک، انتشار در موجبرها و کاواکهای تشدید است.

۱۶-۱ شرایط مرزی روی میدانها

رفتار میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ایستا در گذر از مرزها را قبلاً بررسی کردیم. دیدیم که معادله $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ نشان می‌دهد که مؤلفه قائم \mathbf{B} در مرز پیوسته است ($B_{1n} = B_{2n}$). همین طور نتیجه



شکل ۱-۱۶ به دست آوردن شرایط مرزی مربوط به بردارهای میدان و چگالی جریان در مرز بین دو محیط (رسانا یا دی الکتریک)، با استفاده از معادله های ماکسول. (الف) از یک سطح قوطی شکل در فصل مشترک برای به دست آوردن شرایط روی \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{J} استفاده می شود. (ب) و (ج) برای به دست آوردن شرایط مرزی روی مؤلفه های مماسی \mathbf{E} و \mathbf{H} از مسیره های مستطیل شکل نشان داده شده در فصل مشترک استفاده می شود.

که \mathbf{K}_f چگالی جریان سطحی است. به این ترتیب داریم

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_t = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}} \quad (5-16)$$

یا

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2(t) - \mathbf{H}_1(t)) = \mathbf{K}_f(t) \quad (6-16)$$

انتگرال گیری مشابه از $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ روی مستطیل شکل ۱-۱۶ (ب)، شرط مطرح شده در معادله (۴-۱۶) را با فرض محدود بودن $\partial \mathbf{B} / \partial t$ به دست می دهد. سرانجام، با انتگرال گیری از رابطه پیوستگی $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial \rho / \partial t$ روی سطح قوطی شکل ۱-۱۶ (الف) و استفاده از قضیه دیورانس و نیز گرفتن حد $h \rightarrow 0$ به دست می آوریم [معادله (۴-۷) را ببینید].

$$(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S = - \int_{h \rightarrow 0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Delta S$$

یا

$$J_{2n} - J_{1n} = - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (7-16)$$

چون برای مواد اهمی $\mathbf{J} = \sigma_c \mathbf{E}$ و برای مواد خطی $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ است معادله های (۲-۱۶) و (۷-۱۶) دو شرط را برای مؤلفه قائم میدان الکتریکی در فصل مشترک به دست می دهند. اگر میدانهای موجود در محیط، فیزیکی باشند باید هر دو شرط همزمان برآورده شوند. علاوه بر این اگر فقط تابش تکفام مدنظر باشد چگالی سطحی بار به شکل $e^{-i\omega t}$ تغییر می کند. آن گاه $\partial \sigma_f / \partial t = -i\omega \sigma_f$. به این ترتیب روابط (۲-۱۶) و (۷-۱۶) می شود

$$\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \sigma_f \quad (8-16)$$

$$\sigma_{2c} E_{2n} - \sigma_{1c} E_{1n} = i\omega \sigma_f \quad (9-16)$$

کاملاً با روابط تاواستایی، $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f$ و $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ، متفاوت اند. با این حال شرایط مرزی، با در نظر گرفتن میدانها و جریانهای وابسته به زمان، همان شرایط ایستایی است

$$\mathbf{H}_{2t}(t) - \mathbf{H}_{1t}(t) = \mathbf{K}_f(t) \times \hat{\mathbf{n}} \quad (3-16)$$

$$\mathbf{E}_{1t}(t) = \mathbf{E}_{2t}(t) \quad (4-16)$$

برای اثبات این شرایط روی مؤلفه های مماسی $\mathbf{E}(t)$ و $\mathbf{H}(t)$ با استفاده از شکلهای ۱-۱۶ (ب) و ۱-۱۶ (ج)، همان روش به کاررفته در حالت ایستا را دنبال می کنیم. مثلاً برای \mathbf{H} از $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \partial \mathbf{D} / \partial t$ روی سطح ΔS ، که به مسیر مستطیلی در شکل ۱-۱۶ (الف) محدود شده است، انتگرال می گیریم. قسمتی از مستطیل که طول l و عرض h دارد در محیط ۲ واقع است. بنابراین

$$\int_{\Delta S} \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\Delta S} \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{a} + \int_{\Delta S} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

طرف چپ این معادله به کمک قضیه استوکس به انتگرال خطی روی C تبدیل می شود. پس داریم

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Delta S} \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{a} + \int_{\Delta S} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

برای تعیین تغییر \mathbf{H} در عبور از فصل مشترک، عرض مستطیل را خیلی کوچک در نظر می گیریم. به این ترتیب انتگرال خطی روی ابعاد عمود بر مرز صفر می شود. علاوه بر این اگر $\partial \mathbf{D} / \partial t$ محدود باشد آن گاه انتگرال آن روی ΔS در این حد صفر است. بنابراین

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{l} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Delta S} \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{a} = (\mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{l}$$

محیط با رسانایی کم. وقتی هر دو محیط کمی رسانا باشند جریانهایی در مواد القا می‌شوند. اما چگالی جریان سطحی ایجاد نمی‌کنند زیرا رسانندگیها متناهی‌اند. در نتیجه معادله (۵-۱۶) در نبود جریانهای سطحی خارجی دوباره نتیجه می‌دهد

$$\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t} \quad (13-16)$$

فصل مشترک رسانندگی الکتریک. وقتی رسانایی یکی از دو محیط بسیار خوب باشد آن‌گاه جریانهای سطحی می‌توانند به وجود آیند (مثال ۱۴-۱۱ را ببینید)، بنابراین میدان \mathbf{H} در عبور از فصل مشترک ناپیوسته است. در این حال برای تعیین شرط مرزی صحیح، شرط مرزی روی میدان الکتریکی متناظر را به همراه معادلات ماکسول به کار می‌بریم. میدانها در ناحیه ۱ با رابطه

$$\nabla \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_{f1} + \frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t}$$

به هم مربوط‌اند. با قراردادن $\mathbf{D}_1 = \epsilon_1 \mathbf{E}_1 e^{-i\omega t}$ و $\mathbf{J}_{f1} = \sigma_{c1} \mathbf{E}_1$ در این معادله به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\nabla \times \mathbf{H}_1}{\sigma_{c1} - i\omega \epsilon_1} \quad (14-16)$$

از طرف دیگر در همان ناحیه $\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\partial \mathbf{B}_1 / \partial t$ قرار دادن $\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1 e^{-i\omega t}$ نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\nabla \times \mathbf{E}_1}{i\omega \mu_1} \quad (15-16)$$

با توجه به معادله (۱۴-۱۶) در یک محیط با رسانایی زیاد (σ_{c1} خیلی بزرگ)، اگر \mathbf{H}_1 مشتق‌پذیر و محدود باشد، میدان الکتریکی \mathbf{E}_1 صفر است. در این صورت هر دو مؤلفه عمودی و مماسی صفرند یعنی

$$\mathbf{E}_{1t} = 0 \quad \text{و} \quad D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n} = 0 \quad (\sigma_{c1} \rightarrow \infty) \quad (16-16)$$

وقتی در یک محیط با رسانایی زیاد میدان الکتریکی صفر است، میدان \mathbf{H} نیز بر طبق معادله (۱۵-۱۶) صفر است. و این به معنی صفر بودن هر دو مؤلفه مماسی و عمودی \mathbf{H} است، یعنی

$$\mathbf{H}_{1t} = 0 \quad \text{و} \quad B_{1n} = \mu_1 H_{1n} = 0 \quad \sigma_{c1} \rightarrow \infty \quad (17-16)$$

با قراردادن این نتیجه در معادله (۵-۱۶) نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{H}_{2t} = \mathbf{K} \times \hat{n} \quad (\sigma_{c1} \rightarrow \infty) \quad (18-16)$$

خلاصه شرایط مرزی بحث‌شده در این بخش را برای حالتی که بارها یا جریانهای سطحی خارجی در فصل مشترک وجود ندارند در جدول ۱-۱۶ می‌خوانیم.

۱-۱۶-۱ حالت‌های خاص: مؤلفه قائم

مواد با رسانایی کم. برای یک σ_f غیرصفر دلخواه، روابط (۸-۱۶) و (۹-۱۶) را می‌توان ترکیب و σ_f را حذف کرد. بنابراین

$$\epsilon_1 \left(1 + i \frac{\sigma_{c1}}{\epsilon_1 \omega}\right) E_{1n} = \epsilon_2 \left(1 + i \frac{\sigma_{c2}}{\epsilon_2 \omega}\right) E_{2n}$$

یا

$$\left(1 + i \frac{\sigma_{c1}}{\epsilon_1 \omega}\right) D_{1n} = \left(1 + i \frac{\sigma_{c2}}{\epsilon_2 \omega}\right) D_{2n} \quad (10-16)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که نه تنها اندازه مؤلفه‌های قائم \mathbf{E} و \mathbf{D} در عبور از مرز تغییر می‌کند بلکه فاز آنها نیز تغییر می‌کند. همچنین می‌توان گفت که در حالت کلی مؤلفه قائم \mathbf{D} پیوسته نیست زیرا بار آزاد لزوماً در فصل مشترک انباشته می‌شود.

فصل مشترک دی الکتریک-دی الکتریک. وقتی رسانایی هر دو ماده صفر باشد معادله (۹-۱۶) نشان می‌دهد که $\sigma_f = 0$. بنابراین معادله (۸-۱۶) به صورت زیر در می‌آید

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (11-16)$$

فصل مشترک رسانندگی الکتریک. اگر محیط ۱ رسانای خوبی باشد (یعنی σ_{c1} خیلی بزرگ باشد) آن‌گاه E_{1n} باید صفر باشد و بنابراین ممکن است $\sigma_{c1} E_{1n}$ در معادله (۹-۱۶) محدود بماند. بنابراین

$$E_{1n} = 0 \quad \text{و} \quad D_{2n} = \sigma_f \quad (12-16)$$

محیط با رسانایی کم با $\epsilon_1 \sigma_{c2} = \epsilon_2 \sigma_{c1}$. اگر ویژگیهای دی الکتریکی و رسانایی محیط در شرط خاص زیر صدق کنند

$$\frac{\epsilon_1}{\sigma_{c1}} = \frac{\epsilon_2}{\sigma_{c2}}$$

آن‌گاه فصل مشترک، بدون توجه به اندازه میدان الکتریکی و جریان، بار سطحی نخواهد داشت ($\sigma_f = 0$). در این حالت خاص D_n پیوسته است.

۲-۱-۱۶ حالت‌های خاص: مؤلفه مماسی

فصل مشترک دی الکتریک-دی الکتریک. اگر مواد نارسانا باشند آن‌گاه $\sigma_{c1} = \sigma_{c2} = 0$. بنابراین جریانهای القایی وجود ندارند، در نتیجه از روابط (۵-۱۶) یا (۶-۱۶) به دست می‌آوریم

$$\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t} \quad (13-16)$$

جدول ۱-۱۶ خلاصه شرایط مرزی^۱

B_n	H_t	D_n	E_t	فصل مشترک
$B_{1n} = B_{2n}$	$H_{1t} = H_{2t}$	$D_{1n} = D_{2n}$	$E_{1t} = E_{2t}$	دی الکتریک-دی الکتریک
$B_{1n} = 0$	$H_{1t} = 0$	$D_{1n} = 0$	$E_{1t} = 0$	دی الکتریک-رسانایی زیاد
$B_{2n} = 0$	$H_{2t} = K \times \hat{n}$	$D_{2n} = \sigma$	$E_{2t} = 0$	$\sigma_{cl} \rightarrow \infty$
$B_{1n} = B_{2n}$	$H_{1t} = H_{2t}$	$\left(1 + i \frac{\sigma_{cl}}{\epsilon_1 \omega}\right) D_{1n}$ $= \left(1 + i \frac{\sigma_{cl}}{\epsilon_2 \omega}\right) D_{2n}$	$E_{1t} = E_{2t}$	رسانا-رسانا

۱. فرض می‌کنیم بارهای سطحی یا جریانهای سطحی خارجی در فصل مشترک وجود ندارند.

۲-۱۶ انتشار موج در عبور از فصل مشترک مواد نارسانا (دی الکتریک)

اکنون شرایط مرزی به دست آمده در بخش ۱-۱۶ را برای مطالعه انتشار امواج الکترومغناطیسی در عبور از فصل مشترک تخت بین دو محیط ناتراوا و نارسانا می‌توان به کار برد. ابتدا تابش عمودی و سپس تابش مایل را بررسی می‌کنیم.

۱-۲-۱۶ تابش عمودی

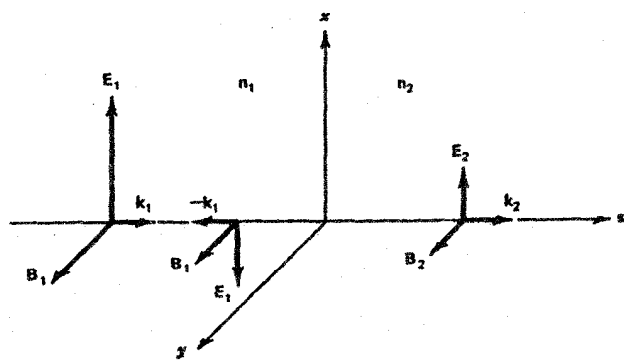
یک موج الکترومغناطیسی با بسامد ω و دامنه E_1 که در راستای محور x قطبیده است، به طور عمود (در راستای محور z) بر فصل مشترک دو محیط (خطی) دی الکتریک ساده با ضرایب شکست n_1 و n_2 مطابق شکل ۲-۱۶ می‌تابد. بخشی از موج در فصل مشترک بازتابیده و بقیه آن، اگر در محیط ۲ اتلافی نباشد، عبور می‌کند. پدیده بازتاب یک پدیده شناخته شده است و در صورتی که بخواهیم شرایط مرزی صادق باشد حتماً لازم است. بنابراین فرض می‌کنیم سه موج داریم. بسامد امواج بازتاب و تراگسیل را مساوی بسامد موج تابشی می‌گیریم. این حالت، به شرطی که مواد خطی (ساده) باشند و شرایط مرزی در تمام زمانها صدق کند الزامی است. بنابراین می‌نویسیم

موج تابشی: $B_1 \hat{y} e^{i(K_1 z - \omega t)}$ $E_1 \hat{x} e^{i(K_1 z - \omega t)}$

موج بازتاب: $B_1' \hat{y} e^{-i(K_1 z + \omega t)}$ $- E_1' \hat{x} e^{-i(K_1 z + \omega t)}$

موج تراگسیل: $B_2 \hat{y} e^{i(K_2 z - \omega t)}$ $E_2 \hat{x} e^{i(K_2 z - \omega t)}$

که دامنه میدان B با روابط $B = E/v = nE/c$ و $k = n\omega/c$ به دامنه E وابسته است. حال شرایط مرزی را به کار می‌بریم:



شکل ۲-۱۶ تراگسیل و بازتاب از یک فصل مشترک دی الکتریک در تابش عمودی.

۱. پیوستگی مؤلفه مماسی میدان الکتریکی در $z = 0$ نتیجه می‌دهد

$$E_1 - E_1' = E_2 \quad (۱۹-۱۶)$$

این شرط، لزوم مساوی بودن بسامدها را، در صورت صادق بودن شرایط مرزی در تمام زمانها دوباره اثبات می‌کند.

۲. پیوستگی مؤلفه مماسی $H = B/\mu_0$ در $z = 0$ به دست می‌دهد

$$B_1 + B_1' = B_2 \quad (۲۰-۱۶)$$

یا با استفاده از $B = nE/c$ داریم

$$n_1(E_1 + E_1') = n_2 E_2 \quad (۲۱-۱۶)$$

۲-۲-۱۶ تابش مایل — همسازی فاز

حالت خاصی از پدیده بازتاب و تراگیل از فصل مشترک، تابش عمودی است. در این زیربخش حالت کلی تر تابش مایل را بررسی می کنیم، که در آن برخلاف حالت تابش عمودی، ضرایب فرنل قطبیدگیهای p و s یکی نیستند. این اختلاف در کاربردهای عملی، مثل ایجاد موج قطبیده بسیار مفید است.

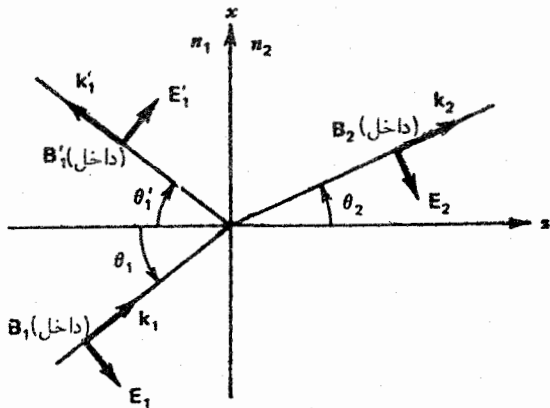
قطبیدگی p . ابتدا انتشار موج p را تحلیل می کنیم. شکل ۳-۱۶ به طور طرحوار موجهای تابشی، بازتاب و تراگیل را نشان می دهد. انتشار امواج بازتاب و تراگیل را در صفحه تابش، یعنی صفحه دربرگیرنده k_1 و راستای عمود بر فصل مشترک (صفحه کاغذ)، در نظر می گیریم. علاوه بر این، همان طور که در حالت تابش عمودی انجام شد، بسامدهای سه موج را یکسان می گیریم^۱ به این ترتیب برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی می نویسیم

$$E_1 e^{i(k_1 \cdot r - \omega t)} \quad \frac{n_1}{c} \hat{k}_1 \times E_1 e^{i(k_1 \cdot r - \omega t)} \quad \text{موج تابشی: (۲۶-۱۶)}$$

$$E'_1 e^{i(k'_1 \cdot r - \omega t)} \quad \frac{n_1}{c} \hat{k}'_1 \times E'_1 e^{i(k'_1 \cdot r - \omega t)} \quad \text{موج بازتاب: (۲۷-۱۶)}$$

$$E_T e^{i(k_T \cdot r - \omega t)} \quad \frac{n_T}{c} \hat{k}_T \times E_T e^{i(k_T \cdot r - \omega t)} \quad \text{موج تراگیل: (۲۸-۱۶)}$$

که k_1 ، k'_1 و k_T بردارهای انتشار امواج با بردارهای یکدیگر \hat{k}_1 ، \hat{k}'_1 و \hat{k}_T و زوایای متناظر θ_1 ، θ'_1 و θ_T نسبت به راستای عمود بر فصل مشترک اند.



شکل ۳-۱۶ بازتاب و شکست برای تابش مایل در فصل مشترک دی الکتریک با میدان الکتریکی تابشی در صفحه تابش (قطبیدگی p) یا صفحه کاغذ (صفحه xx).

۱. این موضوع تنها برای مواد خطی (ساده) مورد قبول است. وقتی که مواد ثابتهای دی الکتریکی وابسته به میدان (مثل بلورهای غیرخطی) دارند، هماننگاهای بسامد موج تابشی نیز ممکن است به وجود آیند.

از حل همزمان روابط (۱۶-۱۹) و (۱۶-۲۱) برای E'_1 و E_T به دست می آوریم

$$r_{12p} = \frac{E'_1}{E_1} = \frac{n_T - n_1}{n_T + n_1} \quad t_{12p} = \frac{E_T}{E_1} = \frac{2n_1}{n_T + n_1} \quad (۲۲-۱۶)$$

که r_{12p} ضریب بازتاب فرنل و t_{12p} ضریب تراگیل فرنل است. اکنون بازتابندگی و تراگیلندگی، R و T را برحسب شدتهای امواج بازتاب و تراگیل به صورت زیر تعریف می کنیم

$$R = \frac{\langle S'_1 \rangle}{\langle S_1 \rangle} \quad T = \frac{\langle S_T \rangle}{\langle S_1 \rangle} \quad (۲۳-۱۶)$$

که $\langle S_1 \rangle$ ، $\langle S'_1 \rangle$ و $\langle S_T \rangle$ میانگین زمانی شدتهای امواج تابشی، بازتابشی و تراگیل است. چون $\langle S \rangle = n \langle E^2 \rangle / \mu c$ است آن گاه روابط (۲۲-۱۶) و (۲۳-۱۶) نتیجه می دهند

$$R = r_{12p}^2 \quad T = \frac{n_T}{n_1} t_{12p}^2 \quad (۲۴-۱۶)$$

چون در بحث بالا فرض کردیم که فصل مشترک بدون اتلاف است، انرژی باید پایستار باشد. به راستی اگر عبارتهای صریحی برای r_{12p} و t_{12p} به کار ببریم به دست می آوریم $R + T = 1$.

حال قطبش موج تابشی را در حالت کلی تر (قطبیدگی بیضوی) بررسی می کنیم

$$E = [E_{1x} \hat{x} + E_{1y} \hat{y}] e^{i(k_1 z - \omega t)}$$

توجه کنید که صفحه تابش (صفحه ای که توسط عمود بر فصل مشترک، و بردار موج موج تابشی تعریف می شود) در تابش قائم یکتا نیست در صورتی که در تابش مایل یکتاست. مؤلفه موج قطبیده در صفحه تابش را قطبیدگی p و مؤلفه موج قطبیده در راستای عمود بر این صفحه را قطبیدگی s می نامیم و آنها را برای شاخص گذاری ضرایب فرنل به کار می بریم. چون در تابش عمودی قطبیدگیهای p و s همسای بر صفحه فصل مشترک اند بین ضرایب تراگیل آنها تفاوتی وجود ندارد. در زیر نشان می دهیم که

$$r_{12s} = -r_{12p} \quad t_{12p} = t_{12s} \quad (۲۵-۱۶)$$

ماهیت برداری این نتیجه تأیید دوباره‌ای بر این فرض است که k_1 ، k'_1 و k_2 هم صفحه‌اند. از طرف دیگر به کمک اندازه‌های آن به دست می‌آوریم

$$k_1 \sin \theta_1 = k'_1 \sin \theta'_1 = k_2 \sin \theta_2 \quad (۳۴-۱۶)$$

چون هر دو موج فرود و بازتاب در یک محیط منتشر می‌شوند، بردار انتشار آنها باید هم اندازه باشند یعنی $k_1 = k'_1$. بنابراین تساوی

$$k_1 \sin \theta_1 = k'_1 \sin \theta'_1$$

نتیجه می‌دهد $\theta_1 = \theta'_1$. این نتیجه، مساوی بودن زوایای تابش و بازتاب، قانون بازتاب است. چون $k = \omega/v = n\omega/c$ ، تساوی دیگر [معادله (۳۴-۱۶)]، نتیجه می‌دهد

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (۳۵-۱۶)$$

که قانون شکست یا قانون اسنل است.

اکنون ضرایب بازتاب و تراگسیل فرنل با حل معادله (۳۲-۱۶) برای E_1/E_1 و E'_1/E_1 به‌طور همزمان به دست می‌آید:

$$r_{12p} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}$$

$$t_{12p} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (۳۶-۱۶)$$

با به‌کار بردن قانون اسنل می‌توان ضرایب شکست را از عبارتهای بالا حذف کرد

$$r_{12p} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$t_{12p} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (۳۷-۱۶)$$

قطبیدگی s . میدان الکتریکی موج تابشی در حالت قطبیدگی s بر صفحه تابش عمود است. بنابراین میدان مغناطیسی در صفحه تابش، مطابق شکل ۱۶-۴، قرار دارد. توجه کنید که در این حالت قطبیدگی میدان مغناطیسی در اثر بازتاب و عبور تغییر می‌کند (به جای قطبیدگی میدان الکتریکی که در قطبیدگی p تغییر می‌کرد). با این حال، مانند حالت قطبیدگی p ، بسامدهای سه موج را یکسان و بردارهای انتشار را هم صفحه (در صفحه تابش) می‌گیریم. پیوستگی مؤلفه‌های مماسی \mathbf{E} و \mathbf{H} نتیجه می‌دهد

$$E_1 e^{i(k_1 \cdot \rho)} + E'_1 e^{i(k'_1 \cdot \rho)} = E_2 e^{i(k_2 \cdot \rho)} \quad (۳۸-۱۶)$$

حال شرایط مرزی را به‌کار می‌بریم. (۱) در فصل مشترک ($z = 0$) مؤلفه مماسی میدان الکتریکی پیوسته است. پس،

$$E_1 \cos \theta_1 e^{i(k_1 \cdot \rho)} - E'_1 \cos \theta'_1 e^{i(k'_1 \cdot \rho)} = E_2 \cos \theta_2 e^{i(k_2 \cdot \rho)} \quad (۲۹-۱۶)$$

که بردار شعاعی در صفحه فصل مشترک است. (۲) مؤلفه مماسی میدان \mathbf{H} در فصل مشترک ($z = 0$) پیوسته است. به این ترتیب

$$n_1 E_1 e^{i(k_1 \cdot \rho)} + n_1 E'_1 e^{i(k'_1 \cdot \rho)} = n_2 E_2 e^{i(k_2 \cdot \rho)} \quad (۳۰-۱۶)$$

یادآوری می‌کنیم که دو شرط مربوط به مؤلفه‌های مماسی برای تعیین میدانها همه‌جا کافی است. شرایط روی مؤلفه‌های عمودی اطلاعات اضافی (نشان دهید) به دست می‌دهد. توجه کنید این روابط در مقایسه با تابش عمودی با یک ضریب فاز $e^{ik \cdot \rho}$ تفاوت دارد. برای اینکه این دو شرط در هر نقطه از فصل مشترک صدق کنند، ابتدا لازم است ضرایب فاز همساز شوند و سپس دامنه‌ها باید به‌طور مناسبی به هم مربوط شوند. به این ترتیب لازمه همسازي فازها این است که

$$k_1 \cdot \rho = k'_1 \cdot \rho = k_2 \cdot \rho \quad (۳۱-۱۶)$$

و دامنه‌ها به شکل زیر به هم مربوط‌اند

$$E_1 \cos \theta_1 - E'_1 \cos \theta'_1 = E_2 \cos \theta_2 \quad n_1 (E_1 + E'_1) = n_2 E_2 \quad (۳۲-۱۶)$$

که θ_1 ، θ'_1 و θ_2 به ترتیب زوایای تابش، بازتاب و شکست‌اند. ابتدا نتایج همسازي فازها را بحث می‌کنیم. چون $\rho = -\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \rho)$ که $\hat{\mathbf{n}}$ (در این حالت $\hat{\mathbf{z}}$) بردار یکه عمود بر فصل مشترک و به دور از ماده ۱ است آن‌گاه

$$\mathbf{k} \cdot \rho = -\mathbf{k} \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \rho)] = -(\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \rho)$$

بنابراین معادله (۳۱-۱۶) می‌شود

$$(\mathbf{k}_1 \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \rho) = (\mathbf{k}'_1 \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \rho)$$

$$= (\mathbf{k}_2 \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \rho)$$

یا

$$\mathbf{k}_1 \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}'_1 \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}_2 \times \hat{\mathbf{n}} \quad (۳۳-۱۶)$$

اکنون برخی حالت‌های حدی نتایج بالا را بررسی می‌کنیم:

تابش عمودی. در تابش عمودی (یعنی $\theta_1 = \theta_2 = 0$) روابط (۳۶-۱۶) و (۴۲-۱۶) نتیجه می‌دهند

$$r_{12p} = -r_{12s} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

$$t_{12p} = t_{12s} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} \quad (44-16)$$

این همان نتیجه‌ای است که قبلاً در معادله (۲۵-۱۶) دیدیم. ضرایب بازتاب و تراگسیل برای s و p مشابه‌اند زیرا آنها به ترتیب به مربع r_{12} و t_{12} وابسته‌اند. همان طور که قبلاً خواندیم، در تابش عمودی صفحه تابش تعریف نمی‌شود. به این جهت دو ضریب بازتاب باید یکی باشند.

تابش خراشان. در تابش خراشان (تقریباً مماسی) موج فرودی تحت زاویه $\theta_1 \simeq \pi/2$ به فصل مشترک می‌تابد. به این ترتیب روابط (۳۶-۱۶) و (۴۲-۱۶) نتیجه می‌دهند

$$r_{12p} = r_{12s} = -1 \quad t_{12p} = t_{12s} = 0 \quad (45-16)$$

بنابراین

$$R_p = R_s = 1 \quad T_p = T_s = 0 \quad (46-16)$$

که مشخص‌کننده بازتاب کلی برای هر دو قطبیدگی است.

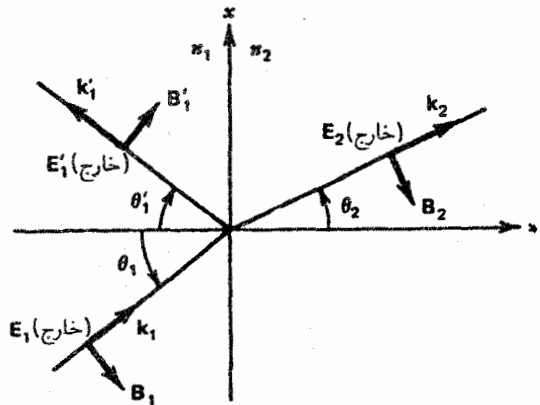
اکنون اگر محیط ۱ هوا ($n_1 = 1$) و محیط ۲ مثلاً شیشه معمولی ($n_2 = 1.5$) باشد آنگاه در تابش عمودی $R_p = R_s = 0.04$ به این ترتیب بازتاب از سطح یک دی الکتریک وقتی پرتو تابشی از حالت عمودی تا حالت خراشان تغییر می‌کند به شکل چشمگیری افزایش می‌یابد.

تابش بحرانی - بازتاب داخلی کلی. وقتی موج از محیط با ضریب شکست بزرگتر طوری به فصل مشترک دو محیط بتابد که زاویه شکست آن $\theta_2 = \pi/2$ شود، زاویه تابش را، تابش در زاویه بحرانی می‌نامیم. از روابط (۳۶-۱۶) و (۴۲-۱۶) با انتخاب $n_1 > n_2$ و θ_2 برابر با بیشترین مقدار ممکن (یعنی $\pi/2$) به دست می‌آوریم

$$r_{12p} = 1 \quad \text{و} \quad r_{12s} = 1 \quad (47-16)$$

یا

$$R_p = R_s = 1 \quad (48-16)$$



شکل ۴-۱۶ بازتاب و شکست تابش مایل در فصل مشترک دی الکتریک به طوری که میدان الکتریکی تابشی عمود بر صفحه تابش (قطبیدگی s)، یعنی صفحه کاغذ (xz)، باشد.

$$n_1 E_1 \cos \theta_1 e^{i(k_1 \cdot \rho)} - n_1 E_1' \cos \theta_1' e^{i(k_1' \cdot \rho)}$$

$$= n_2 E_2 \cos \theta_2 e^{i(k_2 \cdot \rho)} \quad (39-16)$$

ابتدا همسازی فاز را مطرح می‌کنیم: $k_1 \cdot \rho = k_1' \cdot \rho = k_2 \cdot \rho$. این همان رابطه‌ای است که در حالت قطبیدگی p با آن مواجه شدیم. بنابراین هم قانون بازتاب و هم قانون اسنل را به کار می‌بریم. علاوه بر این، مانند قبل، این تساوی دوباره هم صفحه بودن k_1 ، k_1' و k_2 را تأیید می‌کند. همسازی فاز روابط (۳۸-۱۶) و (۳۹-۱۶) را به معادله‌های زیر تبدیل می‌کند

$$E_1 + E_1' = E_2 \quad (40-16)$$

و

$$n_1 E_1 \cos \theta_1 - n_1 E_1' \cos \theta_1 = n_2 E_2 \cos \theta_2 \quad (41-16)$$

ضرایب بازتاب و تراگسیل فرنل به ترتیب از حل همزمان این روابط

برای E_2/E_1 و E_1'/E_1 به دست می‌آیند، یعنی

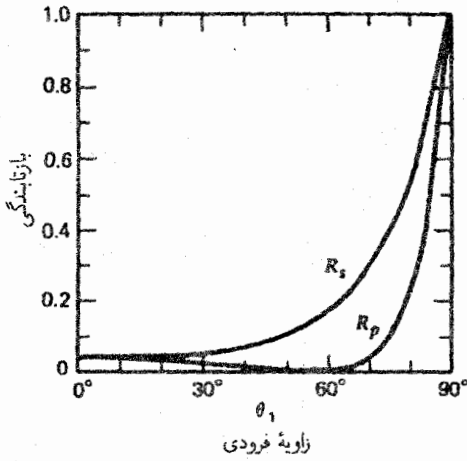
$$r_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}$$

$$t_{12s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (42-16)$$

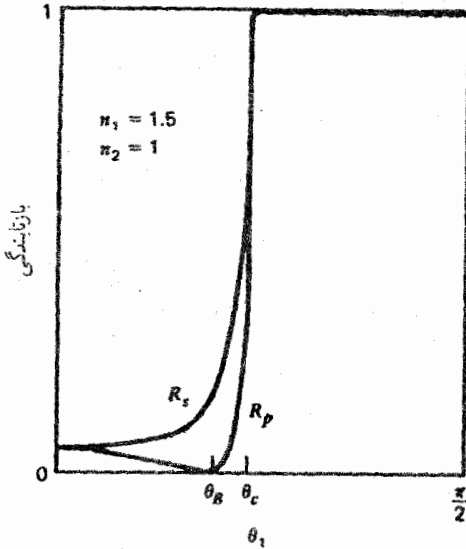
با به کار بردن قانون اسنل ضرایب شکست را می‌توان از عبارتهای r_{12s} و t_{12s} به روش زیر حذف کرد

$$r_{12s} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}$$

$$t_{12s} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (43-16)$$



شکل ۵-۱۶ بازتابندگی از ماده‌ای با ضریب شکست بزرگتر که تشکیل یک فصل مشترک مسطح برای هر دو قطبیدگی‌های p و s می‌دهد و پدیدهٔ بروستر را نشان می‌دهد.



شکل ۶-۱۶ بازتابندگی از ماده‌ای با ضریب شکست کوچکتر که تشکیل یک فصل مشترک مسطح را برای هر دو قطبیدگی p و s می‌دهد و نشان‌دهنده پدیده زاویهٔ بروستر و زاویهٔ بحرانی است.

به این ترتیب بازتاب داخلی کلی در هر زاویه بزرگتر از، یا مساوی با زاویه بحرانی اتفاق می‌افتد. شکل ۵-۱۶ بازتابندگی را برای قطبیدگی‌های s و p با تابش از محیط غلیظتر دو محیط شفاف نشان می‌دهد. از طرف دیگر شکل ۶-۱۶ بازتابندگی را در حالتی که تابش از محیط رقیقتر انجام می‌شود، و نشان‌دهندهٔ پدیدهٔ تابش بحرانی است، نشان می‌دهد.

پدیدهٔ بازتاب داخلی کلی کاربردهای بسیار مفیدی دارد. منشور بازتاب کلی و لولهٔ نوری را، که در شکل ۷-۱۶ نشان داده‌ایم، از آن

این نتایج مشخص می‌کنند که شدت موج بازتاب برابر شدت موج تابشی است یا به بیان دیگر موج به یک بازتاب داخلی کلی تن داده است. زاویهٔ تابشی که برای آن بازتاب داخلی کلی رخ می‌دهد را زاویهٔ بحرانی θ_c می‌نامیم و می‌توان آن را از قانون اسنل به دست آورد. با انتخاب $\theta_r = \pi/2$ در معادلهٔ (۳۵-۱۶) به دست می‌آوریم

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \quad \text{یا} \quad \theta_c = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \quad (۴۹-۱۶)$$

تابش با زاویهٔ بزرگتر از زاویهٔ بحرانی. چون $|\sin \theta| \leq 1$ است قانون اسنل محدودیتی را بر زوایای تابش، که تحت آن شکست مستقیم رخ می‌دهد، تحمیل می‌کند. مثلاً در زوایای تابش بزرگتر از زاویهٔ بحرانی، به کمک رابطهٔ $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ نتیجه می‌گیریم که

$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_c} = \alpha > 1 \quad (۵۰-۱۶)$$

این شرط با فرض حقیقی بودن θ_2 صادق نیست. به راستی اگر $\sin \theta_2 > 1$ باشد آن‌گاه $\cos \theta_2$ موهومی محض است. یعنی

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = i\beta \quad (۵۱-۱۶)$$

که β کمیتی حقیقی است. با قراردادن معادلهٔ (۵۱-۱۶) در روابط (۳۶-۱۶) و (۴۲-۱۶) به دست می‌آوریم

$$\hat{r}_{12p} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - in_1 \beta}{n_2 \cos \theta_1 + in_1 \beta}$$

$$\hat{r}_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - in_2 \beta}{n_1 \cos \theta_1 + in_2 \beta} \quad (۵۲-۱۶)$$

که شاخص روی \hat{r}_{12p} و \hat{r}_{12s} مختلط بودن هر دو کمیت را نشان می‌دهد. ضرایب فرنل مختلط در بازتاب از محیط رسانا نیز ظاهر می‌شود (بخش بعدی را ببینید). چون بازتابندگی R_p با رابطهٔ

$$\langle S'_1 \rangle / \langle S_1 \rangle = |\mathbf{E}'_1 \times \mathbf{H}_1| / |\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1|$$

تعریف می‌شود آن‌گاه نتیجه می‌گیریم

$$R_p = \hat{r}_{12p} \hat{r}_{12p}^* = |r_{12p}|^2 \quad \text{و} \quad R_s = \hat{r}_{12s} \hat{r}_{12s}^* = |r_{12s}|^2 \quad (۵۳-۱۶)$$

بنابراین از روابط (۵۲-۱۶) و (۵۳-۱۶) مشخص می‌شود (آن را نشان دهید) که بدون توجه به مقدار β ، و در نتیجه برای هر $\theta_1 > \theta_c$ بازتابندگی برای هر دو قطبیدگی p و s برابر با یک می‌شود یعنی

$$R_p = R_s = 1 \quad \theta_1 > \theta_c \quad (۵۴-۱۶)$$

صفر نمی شود ($r_{12s} = \cos 2\theta_B \neq 0$). بنابراین امواج بازتابیده در راستای عمود بر صفحه تابش کاملاً قطبیده اند. از اثر زاویه بروستر در ساختن لیزرها (مثال ۱۶-۲ را ببینید) و دیگر کاربردها به طور گسترده استفاده می شود. از آن جمله مطالعه ساختمان آنها و ویژگیهای سطوح را می توان نام برد.



شکل ۱۶-۲ شکل طرحوار منشورها و لوله های نوری بازتاب داخلی کلی.

جمله اند. وقتی تابش بر وجه AB عمود باشد آن گاه زاویه تابش روی وتر منشور 45° است. چون زاویه بحرانی برای فصل مشترک شیشه کراون-هوا 41° است پس روی وتر بازتاب داخلی کلی به وجود می آید. در مثال دوم نور، همان طور که نشان داده ایم، به شرطی می تواند در طول آن منتشر شود که تحت زاویه بزرگ مناسبی برای بازتاب داخلی کلی وارد استوانه دی الکتریک جامد شود. وقتی پرتو نور کانونی شده، به استوانه ساخته شده از پلاستیک شفاف وارد شود ممکن است پرتو نور از لوله (استوانه) عبور کند. (مسئله ۱۶-۷ را ببینید).

۱۶-۲-۳ قطبش به وسیله بازتاب و شکست - زاویه بروستر امواج الکترومغناطیسی تابش شده از بیشتر منابع معمولی (مثل تخلیه الکتریکی در گازها، قوسها و لامپهای نور سفید) قطبیده نیستند. یعنی جهت قطبش نسبت به راستای انتشار متقارن است. بنابراین می گوئیم نور طبیعی است. در این زیر بخش نشان می دهیم که امواج غیر قطبیده را به چند راه، بازتابهای ساده و/یا شکست در فصل مشترکهای بین مواد شفاف، می توان به قطبیده تبدیل کرد. تأثیر قطبیدگی در اثر بازتاب را با بررسی ضرایب بازتاب برای امواج p و s می توان فهمید

$$r_{12p} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad r_{12s} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}$$

به ازای $\tan(\theta_1 + \theta_2) = \infty$, $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ بنابراین r_{12p} صفر می شود. بر طبق قانون اسنل $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ ، آن گاه زاویه تابش θ_B که برای آن r_{12p} صفر می شود با رابطه زیر داده می شود

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_B \right) = n_2 \cos \theta_B$$

یا

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (55-16)$$

زاویه θ_B را زاویه بروستر، بعد از کاشف این پدیده، می نامند. باید توجه کرد وقتی r_{12p} در این زاویه صفر می شود، ضریب بازتاب امواج s

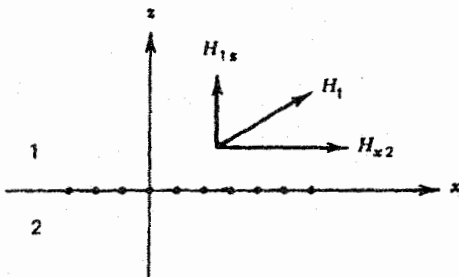
یک موج غیر قطبیده با عبور از یک ماده شفاف نیز می تواند قطبیده شود. با بررسی نسبت t_{12s} به t_{12p} به کمک روابط (۱۶-۳۷) و (۱۶-۴۳) به دست می آوریم

$$\frac{t_{12s}}{t_{12p}} = \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad \text{یا} \quad \frac{T_s}{T_p} = \cos^2(\theta_1 - \theta_2) \quad (56-16)$$

که اندازه این نسبت برای تابش عمودی ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) برابر با ۱ است و با افزایش زاویه کوچک می شود، با وجود این هرگز صفر نمی شود. از تکرار N بار این تراگسیل، نسبت فوق به شکل $\cos^{2N}(\theta_1 - \theta_2)$ است، که با انتخاب N بزرگ، خیلی کوچک می شود. به این ترتیب امواج غیر قطبیده را می توان با انتخاب N مناسب تا هر درجه معینی قطبیده کرد. این روش اهمیت زیادی در بخش فروسخ طیف الکترومغناطیسی و در حالتی که شدت تابش خیلی زیاد است، مثل باریکه لیزر شدید، دارد.

مثال ۱۶-۱ شرایط مرزی - ورقه جریان

شرایط مرزی را که در بخش ۱۶-۲ بررسی کردیم می توان برای تعیین میدان مغناطیسی وقتی که از یک نایبوستگی می گذرد (شکل ۱۶-۸ را ببینید) به کاربرد. مثلاً یک ورقه جریان با چگالی سطحی $K = -10 \hat{y} \text{ A/m}$ واقع در صفحه $z = 0$ را در نظر می گیریم. تراوایی مواد پرکننده فضاهای $z < 0$ و $z > 0$ به ترتیب $5\mu_0$ و $2\mu_0$ و میدان مغناطیسی در ناحیه $z > 0$ را $H_2 = 15\hat{x} + 8\hat{z} \text{ A/m}$ فرض می کنیم. میدان B_2 در ناحیه ۲، $B_2 = 5\mu_0 H_2 = (75\hat{x} + 40\hat{z})\mu_0$ تسلا

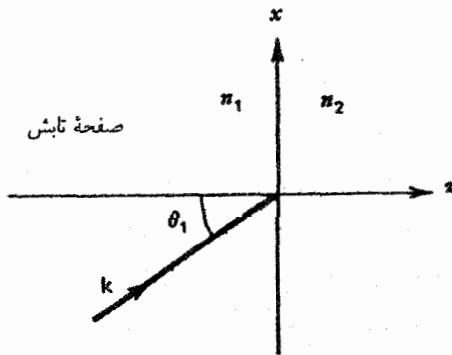


شکل ۱۶-۸ استفاده از شرایط مرزی برای تعیین میدانها در عبور از یک ورقه جریان.

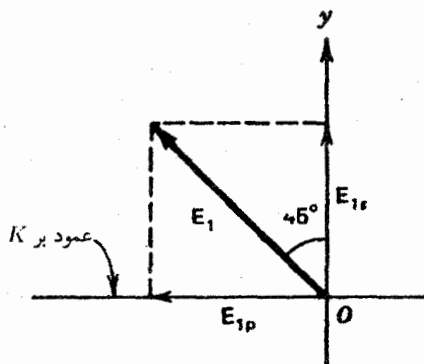
تنها قطبیدگی p بین درجه‌ها به دفعات رفت و برگشت دارد و هر بار بهره را بیشتر می‌کند و در نتیجه خروجی لیزر موج قطبیده p می‌شود. ■

مثال ۳-۱۶ چرخش قطبشی در اثر شکست

مطابق شکل ۱۶-۱۰ (الف) یک موج نوری به‌طور مایل تحت زاویه θ_1 روی فصل مشترک تخت بین دو محیط دی‌الکتریک با ضرایب شکست n_1 و n_2 می‌تابد. موج، قطبیده خطی با جهت قطبش 45° درجه نسبت به صفحه تابش [شکل ۱۶-۱۰ (ب) را ببینید] است. در شکل ۱۶-۱۰ (ب) صفحه کاغذ همان صفحه فصل مشترک و صفحه تابش را عمود بر صفحه کاغذ در نظر گرفته‌ایم و Ox مرز دو محیط است. دامنه‌های قطبیدگی‌های p و s موج تابشی با هم مساوی و برابرند با $E_{1p} = E_1/\sqrt{2}$ و $E_{1s} = E_1/\sqrt{2}$. از روابط (۱۶-۳۷) و (۱۶-۴۳) دامنه امواج تراگسیل را به‌دست می‌آوریم



(الف)



(ب)

شکل ۱۶-۱۰ مفهوم چرخش قطبشی پس از شکست. (الف) صفحه تابش و صفحه کاغذ است. (ب) صفحه کاغذ عمود بر صفحه تابش است و میدان E را در بر دارد.

است. اکنون با به‌کار بردن شرایط مرزی، روابط (۱۶-۱) و (۱۶-۵) می‌توانیم میدانها را در ناحیه ۱ تعیین کنیم. از $B_{1n} = B_{2n}$ به‌دست می‌آوریم $B_{1n} = 4^\circ \mu_0 \hat{z} T$ و بنابراین $H_{1n} = 2^\circ \hat{z} A/m$. از $(H_2 - H_1)_t = K \times \hat{n}$ ، که \hat{n} بردار یکه عمود بر فصل مشترک و در جهت خارج از ماده ۱ است به‌دست می‌آوریم

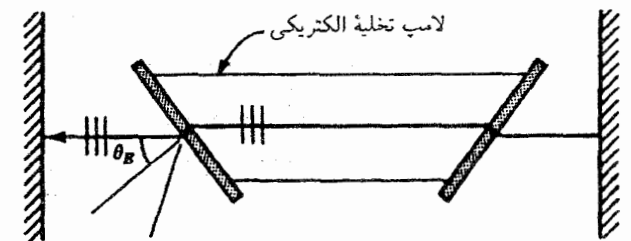
$$(H_2 - H_1)_t = -1^\circ \hat{y} \times \hat{z} = -1^\circ \hat{x} A/m$$

پس $H_{1y} = H_{2y} = 0$ و $H_{1x} = H_{2x} + 1^\circ = 25$. بنابراین

$$H_1 = H_n \hat{z} + H_{1x} \hat{x} = 2^\circ \hat{z} + 25 \hat{x} A/m$$

$$B_1 = \mu_0 (4^\circ \hat{z} + 5^\circ \hat{x}) T$$

مثال ۲-۱۶ طراحی یک لوله پلاسمای Ne-He - اثرهای قطبش از مفهوم زاویه بروستر به‌طور گسترده در ساختن لیزرهایی استفاده می‌شود که فقط "قطبیدگی خطی" ایجاد می‌کنند. شکل ۱۶-۹ نمودار طرح‌حواری از یک لیزر هلیم-نون است. یک لامپ تخلیه الکتریکی هلیم-نون بین دو آینه موازی با بازتاب شدید (۹۹٫۹ درصد بازتابندگی) قرار می‌گیرد. فرض می‌کنیم یک باریکه نور واجهنده بین دو آینه وجود دارد. در هر رفت و برگشت باریکه، به دلیل بازتاب از درجه‌های لامپ تخلیه و سایر اثرها دچار اتلاف می‌شود و با عبور از بین اتلاف‌های متمرکز در داخل لامپ بر شدت آن افزوده می‌شود. برای اینکه لیزر کار کند باید بهره بر اتلاف فزونی یابد. همان‌طور که نشان دادیم با ساخت و تنظیم درجه‌های لامپ تخلیه با زاویه بروستر، تقریباً تمام بازتاب مربوط به قطبیدگی p نور لیزر در سطح درجه را می‌توان حذف کرد. اما برای قطبیدگی خطی دیگر (یعنی قطبیدگی s) بازتاب شدیدی در درجه‌ها ایجاد می‌شود و بنابراین شدت آن کمتر از اندازه لازم برای ایجاد نوسانهای لیزری افت می‌کند. در نتیجه



شکل ۱۶-۹ نمودار طرح‌حواری لیزر هلیم-نون با کاربرد پدیده زاویه بروستر برای ایجاد باریکه لیزری قطبیده.

باید توجه کرد که مفهوم بازتاب داخلی کلی، کاربرد عملی مهمی در نورشناخت دارد. موقعی که با مواد دی الکتریک غیرساده سروکار داریم می توان منشور قطبشی ساخت که آنها را قطبیده های بازتاب داخلی کلی می نامیم. ■

مثال ۵-۱۶ انتقال انرژی در بازتاب کلی

در این مثال توان تراگسیل را در حالت بازتاب داخلی کلی تحقیق می کنیم. در نگاه اول این نتیجه گرفته می شود که تراگسیلندگی به علت بازتابندگی [معادله (۱۶-۵۴) را ببینید] برابر با ۱ باید صفر باشد اما وقتی \hat{t}_{12} را در این حالت بررسی کنیم نتیجه می گیریم که صفر نیست، یعنی

$$\hat{t}_{12p} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + in_1 \beta} \neq 0 \quad \hat{t}_{12s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + in_2 \beta} \neq 0$$

این تناقض ظاهری را می توان با بررسی انتشار در محیط ۲ از بین برد. میدان الکتریکی در این ناحیه شکل معادله (۱۶-۲۸) را یعنی $E_2 \exp[i(k_2 \cdot r - \omega t)]$ دارد. طبق بحث مطرح شده در ادامه معادله (۱۶-۵۱)، در زاویه تابش بزرگتر از زاویه بحرانی ($\theta_1 > \theta_c$)، زاویه شکست θ_2 مختلط است، به طوری که کسینوس آن موهومی محض است. با بسط ضرب نرده ای $k_2 \cdot r$ و کاربرد $\cos \hat{\theta}_2 = i\beta$ عبارت زیر را برای میدان الکتریکی به دست می آوریم

$$E_2 e^{i(k_2 \cos \theta_2 z + k_2 \sin \theta_2 x - \omega t)} = E_2 e^{-\beta k_2 z} e^{i(\alpha k_2 x - \omega t)} \quad (۱۶-۶۲)$$

که $\alpha = \sin \theta_1 / \sin \theta_c = (1 + \beta)^{1/2}$ است. به این ترتیب برای $\theta_1 > \theta_c$ ، موج در راستای محور x (فصل مشترک بین دو ماده) منتشر می شود و در جهت z در محیط رسانا افت می کند. میدان مغناطیسی متناظر نیز در طول سطح منتشر شده و در محیط افت می کند. درجه نفوذ میدانها با ثابت افت βk_2 مشخص می شود. برخلاف این موضوع که به نظر می رسد میدان در محیط دوم نفوذ می کند، میانگین بردار پوئین تینگ در راستای عمود بر فصل مشترک صفر است. و این نشانه نبود تراگسیل توان در محیط است (مسئله ۱۶-۲ را ببینید). ■

مثال ۶-۱۶ تابش موج بر روی یک تیغه دی الکتریک یا یک فصل مشترک لایه ای - پوشش پادبازتاب و آینه های دی الکتریک یک تیغه دی الکتریک با ضریب شکست n_2 ، ضخامت d و وجوه مسطح موازی بین دو محیط غیرتراوا با ضرایب شکست n_1 و n_3 مطابق شکل ۱۶-۱۱ قرار گرفته است. یک موج قطبیده خطی با تابش عمودی روی فصل مشترک لایه ای می تابد. هنگام برخورد موج

$$E_{r,p} = t_{12p} E_{1p} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \left(\frac{E_1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$E_{r,s} = t_{12s} E_{1s} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \left(\frac{E_1}{\sqrt{2}} \right)$$

به این ترتیب زاویه θ' که قطبش موج تراگسیل با صفحه تابش می سازد از رابطه زیر به دست می آید

$$\frac{E_{r,s}}{E_{r,p}} = \cos(\theta_1 - \theta_2) = \tan \theta' \quad \text{یا} \quad \theta' = \tan^{-1}[\cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

بنابراین قطبش به اندازه $\delta\theta = \theta' - \pi/4$ چرخیده است. ■

مثال ۴-۱۶ قطبش پس از بازتاب کلی

در این مثال در مورد قطبش یک موج پس از تحمل بازتاب داخلی کلی از سطح دی الکتریک بحث می کنیم. یک موج قطبیده خطی را که از ناحیه ای با ضریب شکست n_1 به ماده ای با ضریب شکست $n_2 < n_1$ می تابد در نظر می گیریم. نمادگذارهای استفاده شده در شکل های (۱۶-۳) و (۱۶-۴) را به کار می بریم. صورت و مخرج معادله (۱۶-۵۲) را در همیوغ مختلط مخرج ضرب می کنیم. نتیجه می شود

$$\hat{r}_{12p} = \frac{E'_1}{E_1} = \frac{(n_2 \cos \theta_1 - in_1 \beta)^2}{n_2^2 \cos^2 \theta_1 + n_1^2 \beta^2} \quad (۱۶-۵۷)$$

فاز صفحه E'_1 نسبت به E_1 ، ϕ_p را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\frac{E'_1}{E_1} = |\hat{r}_{12p}| e^{i\phi_p} \quad \text{یا} \quad \left(\frac{E'_1}{E_1} \right)^{1/2} = |\hat{r}_{12p}|^{1/2} e^{i\phi_p/2} \quad (۱۶-۵۸)$$

از مقایسه شکل دوم معادله (۱۶-۵۸) با معادله (۱۶-۵۷) به دست می آوریم

$$\tan\left(\frac{\phi_p}{2}\right) = -\frac{n_1 \beta}{n_2 \cos \theta_1} \quad (۱۶-۵۹)$$

با کاربرد معادله (۱۶-۵۱) و قانون اسنل، β را برحسب θ_1 به دست می آوریم. بنابراین

$$\tan \frac{\phi_p}{2} = \frac{(\sin^2 \theta_1 - n_2^2/n_1^2)^{1/2}}{(n_2^2/n_1^2) \cos \theta_1} \quad (۱۶-۶۰)$$

به همین ترتیب نتیجه می گیریم

$$\tan \frac{\phi_s}{2} = \frac{(\sin^2 \theta_1 - n_2^2/n_1^2)^{1/2}}{\cos \theta_1} \quad (۱۶-۶۱)$$

چون ϕ_p در حالت کلی متفاوت با ϕ_s است، موج بازتاب در حالت کلی قطبیده بیضوی است.

که $\theta_r = n_r \omega d / c$ و $\theta_t = n_t \omega d / c$ است. با حل همزمان این روابط، مثلاً می‌توان نشان داد

$$\frac{E_1}{E_r} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{n_r}{n_1} \right) \cos \theta_r - i \left(\frac{n_r}{n_1} + \frac{n_r}{n_2} \right) \sin \theta_r \right] e^{i\theta_r}$$

بنابراین شدت تراگسیل با رابطه زیر داده می‌شود

$$\frac{E_1^2}{E_r^2} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{n_r}{n_1} \right)^2 \cos^2 \theta_r + \frac{1}{4} \left(\frac{n_r}{n_1} + \frac{n_r}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_r$$

(برای تفصیل بیشتر این نتیجه مسئله ۱۶-۵ را ببینید).

این فصل مشترک لایه‌های کاربرد مهمی در نورشناخت دارد. مثلاً اگر محیط n_2 بخشی از یک دستگاه نوری (برای مثال یک عدسی) و محیط ۱ هوا ($n_1 = 1$) باشد، آن‌گاه با انتخاب n_2 و d مناسب می‌توان موج بازتاب را برای یک طول موج معین، λ_0 ، کمینه کرد. پوشش نوری (محیط n_2) را پوشش پادبازتاب می‌نامیم. بازتابندگی سطح یک شیشه ($n_2 = 1.5$) را با نشان دادن یک لایه شفاف نازک از کربولیت ($n_2 = 1.36$) یا منگنز فلورید ($n_2 = 1.35$) به ضخامت d که از رابطه $n_2 d = \lambda_0 / 4$ به دست می‌آید می‌توان کم کرد.

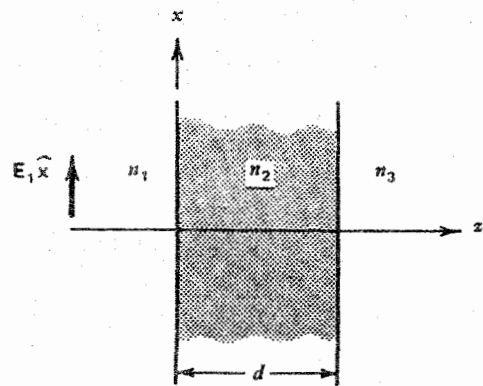
در حالت کلی اگر $n_1 < n_2 < n_3$ را انتخاب کنیم می‌توان نشان داد که بازتابندگی در تابش عمودی، برای $n_2 d = (2m + 1) \lambda_0 / 4$ عدد صحیح یا صفر است، کمینه شده و با رابطه زیر داده می‌شود

$$R_{\min} = \frac{(n_1 n_2 - n_3^2)^2}{(n_1 n_2 + n_3^2)^2}$$

به همین شکل می‌توان نشان داد که برای $n_2 d = m \lambda_0 / 2$ بازتابندگی بیشینه و از رابطه زیر به دست می‌آید

$$R_{\max} = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}$$

اکنون نشان می‌دهیم که بازتابندگی یک محیط با ضریب شکست n_2 نسبت به محیط دیگری با ضریب شکست n_1 می‌توان با اضافه کردن یک لایه نازک با ضریب شکست $n_2 > n_3$ بین آنها افزایش داد. مثلاً، اگر لایه مناسبی از استبنایت ($n \approx 3$) یا روی سولفید ($n \approx 2.3$) را روی شیشه بنشانیم بازتابندگی شیشه افزایش می‌یابد. مجموعه‌ای از لایه‌ها می‌توانند بازتابندگی بسیار بزرگی را (آینه‌های دی‌الکتریک)، که از بهترین بازتابندگیهای آینه‌های فلزی (که بخش بعد بحث می‌شود) در طول موجهای نوری نیز فراتر می‌روند، به وجود آورند. این ویژگی آینه‌های دی‌الکتریک آنها را تا چگالیهایی توان بسیار زیاد (از لیزرهای با قدرت زیاد)، که در آن آینه‌های فلزی (به‌خاطر جذب بازمانده‌ها)، صدمه می‌بینند مقاوم می‌کند (مسئله ۱۶-۶ را ببینید). ■



شکل ۱۱-۱۶ بازتاب و تراگسیل از تیغه دی‌الکتریک در تابش عمودی که می‌توان از آنها برای تعیین پوششهای پادبازتاب و آینه‌های دی‌الکتریک استفاده کرد.

با فصل مشترک $z = 0$ ، بخشی از شدت موج به دلیل ناپیوستگی در ضریب شکست بازمی‌تابد. به این ترتیب در ناحیه $z < 0$ دو موج در جهت خلاف یکدیگر منتشر می‌شوند. بخشی از موج تراگسیل در فاصله $0 < z < d$ نیز از فصل مشترک $z = d$ بازمی‌تابد. بنابراین در این ناحیه هم دو موج در خلاف جهت هم منتشر می‌شوند. اما در ناحیه $z > d$ فقط یک موج که در راستای z منتشر می‌شود وجود دارد. به این ترتیب در سه ناحیه عبارتهای زیر را داریم:

$$E_1 \hat{x} e^{i(k_1 z - \omega t)} - E'_1 \hat{x} e^{-i(k_1 z + \omega t)} \quad z < 0$$

$$B_1 \hat{y} e^{i(k_1 z - \omega t)} + B'_1 \hat{y} e^{-i(k_1 z + \omega t)} \quad z < 0$$

$$E_r \hat{x} e^{i(k_2 z - \omega t)} - E'_r \hat{x} e^{-i(k_2 z + \omega t)} \quad 0 < z < d$$

$$B_r \hat{y} e^{i(k_2 z - \omega t)} + B'_r \hat{y} e^{-i(k_2 z + \omega t)} \quad 0 < z < d$$

$$E_T \hat{x} e^{i(k_3 z - \omega t)} \quad B_T \hat{y} e^{i(k_3 z - \omega t)} \quad z > d$$

که دامنه میدان B با رابطه‌های $B_i = n_i E_i / c$ و $k_i = n_i \omega / c$ به دامنه E وابسته است.

اکنون پیوستگی مؤلفه‌های مماسی میدان E و مؤلفه‌های مماسی میدان H را در $z = 0$ و $z = d$ به کار می‌بریم. به دلیل ماهیت غیرتراوای مواد، پیوستگی مؤلفه‌های مماسی H هم‌ارز پیوستگی مؤلفه‌های مماسی B است. با اعمال این شرایط نتیجه می‌گیریم

$$E_1 - E'_1 = E_r - E'_r$$

$$n_1(E_1 + E'_1) = n_2(E_r + E'_r)$$

$$E_r e^{i\theta_r} - E'_r e^{-i\theta_r} = E_T e^{i\theta_r}$$

$$n_2(E_r e^{i\theta_r} + E'_r e^{-i\theta_r}) = n_3 E_T e^{i\theta_r}$$

نتایج قبلی معادله (۱۶-۲۲) را می توان با قراردادن \hat{n}_2 به جای n_2 در این حالت نیز به کار برد، یعنی

$$\hat{r}_{12} = \frac{(\hat{n}_2 - n_1)}{\hat{n}_2 + n_1} \quad \hat{t}_{12} = \frac{2n_1}{\hat{n}_2 + \hat{n}_1} \quad (63-16)$$

که در آن علامت بالای \hat{r}_{12} و \hat{t}_{12} بر مختلط بودن این کمیتها دلالت می کند. سایر صورتهای مناسب این معادلات را می توان از طریق نشان دادن مقادیر \hat{n}_2 بر حسب اجزای حقیقی و موهومی آن: $\hat{n}_2 = n_2 + ik_2$ نوشت. به این ترتیب

$$\hat{r}_{12} = \frac{(n_2 - n_1) + ik_2}{(n_2 + n_1) + ik_2} \quad \hat{t}_{12} = \frac{2n_1}{(n_2 + n_1) + ik_2} \quad (64-16)$$

به علت ماهیت مختلط \hat{r}_{12} و \hat{t}_{12} ، امواج بازتاب و تراگسیل نسبت به موج تابشی تغییر فاز دارند. برای تعیین این تغییرات ضرایب فرنل را به صورت قطبی کروی می نویسیم

$$\hat{r}_{12} = |\hat{r}_{12}| e^{i\phi_r} \quad \hat{t}_{12} = |\hat{t}_{12}| e^{i\phi_t} \quad (65-16)$$

که

$$|\hat{r}_{12}| = \left[\frac{(n_2 - n_1)^2 + k_2^2}{(n_2 + n_1)^2 + k_2^2} \right]^{1/2}$$

$$|\hat{t}_{12}| = \frac{2n_1}{[(n_2 + n_1)^2 + k_2^2]^{1/2}} \quad (66-16)$$

$$\tan \phi_r = \frac{2n_1 k_2}{n_1^2 - n_2^2 + k_2^2} \quad \tan \phi_t = \frac{-k_2}{n_2 + n_1}$$

این نتایج به روشنی نشان می دهند که فاز میدانهای الکتریکی بازتاب و تراگسیل نسبت به فاز میدان الکتریکی فرودی تغییر یافته اند. این تغییرات برای میدان بازتابنده درست مساوی با ϕ_r و برای موج تراگسیل درست مساوی با ϕ_t است.

به دنبال محاسبه ضرایب فرنل، ضرایب بازتاب و تراگسیل را می توان حساب کرد. به دلیل ماهیت مختلط بودن ضرایب باید در محاسبه احتیاط کرد. با استفاده از تعاریف داده شده در روابط (۱۶-۲۳) و (۱۶-۲۴) به دست می آوریم

$$R = r_{12} r_{12}^* = |\hat{r}_{12}|^2 \quad (67-16)$$

و

$$T = 1 - R \quad (68-16)$$

۱۶-۳ انتشار از فصل مشترک تخت رسانا دی الکتریک - ضرایب فرنل مختلط

تاکنون بازتاب و تراگسیل از یک فصل مشترک مسطح بین دو محیط دی الکتریک بررسی شدند. در این بخش حالتی را که یکی از دو محیط رساناست بررسی می کنیم. بازتاب از فصل مشترکهای فلزی کاربردهای عملی زیادی دارد. کارکرد آینه ها در بسامدهای نوری و بسامدهای میکروموج با انتخاب ماده ای با رسانایی بسیار زیاد، بر این اصل استوار است. برای سادگی ابتدا فرود عمودی و سپس فرود مایل بحث می کنیم.

۱۶-۳-۱ تابش عمودی

در مورد انتشار امواج الکترومغناطیس در داخل محیط رسانا در فصل ۱۴ بحث شد. نتیجه گرفتیم که انتشار امواج را می توان با استفاده از یک ضریب شکست مختلط و یک بردار انتشار مختلط، که هر دو به بسامد وابسته اند، [معادله (۱۴-۸۲)] توصیف کرد

$$\hat{n} = n_0 \left(1 + i \frac{\sigma_c}{\epsilon \omega} \right)^{1/2} = n + ik \quad \text{و} \quad \hat{k} = \frac{\omega}{c} \hat{n} \quad [82-14]$$

که علامت $(\hat{\quad})$ مختلط بودن کمیت را مشخص می کند. قسمت حقیقی \hat{n} یعنی n ، ضریب شکست واقعی محیط را نشان می دهد در حالی که قسمت موهومی آن، k ، جذب محیط را مشخص می کند. در این بخش می خوانیم که ضریب بازتاب از این فصل مشترک، وقتی که جذب خیلی ضعیف است، به یک می رسد و به این ترتیب با مفهوم آینه های با بازتابندگی زیاد روبه رو می شویم.

فرض می کنیم موجی با بسامد ω ، دامنه E_1 ، که در جهت x قطبیده است، در راستای z عمود بر صفحه فصل مشترک بین یک ماده دی الکتریک با گذردهی ϵ_1 (ضریب شکست n_1) و یک ماده رسانا با گذردهی ϵ_2 و رسانایی σ_{c2} (ضریب شکست مختلط \hat{n}_2) منتشر می شود. انتشار را می توان به صورت طرحوار با شکل ۱۶-۲ (که از آن قبلاً برای انتشار در عبور از فصل مشترک دی الکتریک استفاده کردیم) نمایش داد که در آن به جای n_2 و \hat{n}_2 به جای k_2 ، $\hat{k}_2 = \hat{n}_2 \omega / c$ قرار داده ایم.

برخورد با این مسئله بسیار شبیه برخورد با محیط نارسانا (بخش ۱۶-۲-۱) است. این بیان بر این واقعیت استوار است که شرایط مرزی میدانها در هر دو مورد یکسان است: مؤلفه های مماسی E و H پیوسته اند [روابط (۱۶-۴) و (۱۶-۱۳)] را ببینید. در واقع

و ضرایب فرنل می شود

$$\hat{r}_{12p} = \frac{\hat{n}_r \cos \theta_1 - n_1 \cos \hat{\theta}_r}{\hat{n}_r \cos \theta_1 + n_1 \cos \hat{\theta}_r}$$

$$\hat{t}_{12p} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{\hat{n}_r \cos \theta_1 + n_1 \cos \hat{\theta}_r} \quad (۷۳-۱۶)$$

$$\hat{r}_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - \hat{n}_r \cos \hat{\theta}_r}{n_1 \cos \theta_1 + \hat{n}_r \cos \hat{\theta}_r}$$

$$\hat{t}_{12s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + \hat{n}_r \cos \hat{\theta}_r} \quad (۷۴-۱۶)$$

با به کار بردن روابط (۶۷-۱۶) و (۶۸-۱۶) بازتابندگی و تراگسیلندگی به سادگی از این ضرایب به دست می آید.

روابط (۷۲-۱۶) تا (۷۴-۱۶) روابطی فشرده و بنابراین مناسب برای محاسبه توانهای بازتاب و تراگسیلندگی، با این حال، استفاده از آنها برای تعیین راستاهای انتشار مناسب نیست. زیرا آنها شامل زوایای مختلط و حاصلضربهای کمیت‌های مختلط هستند. خوب است انتشار را با قواعد حقیقی که زوایای حقیقی را شامل می شوند توصیف کنیم. اگر این کار انجام شود، آن‌گاه تعریف زاویه حقیقی شکست در محیط رسانا امکان پذیر است و بنابراین رسم یک نمودار واقعی انتشار ممکن می شود.

برای انجام این کار همسازی فاز در مرزها را بررسی می کنیم. با قراردادن \hat{k}_r به جای k_r در معادله‌های (۳۱-۱۶) و (۳۳-۱۶) به دست می آوریم

$$\hat{k}_r \cdot \rho = k_r \cdot \rho \quad (۷۵-۱۶)$$

و

$$\hat{k}_r \times \hat{z} = k_r \times \hat{z} \quad (۷۶-۱۶)$$

که $\hat{z} = \hat{n}$ بردار یکه عمود بر فصل مشترک است. با نوشتن \hat{k}_r بر حسب قسمتهای حقیقی و موهومی، $\hat{k}_r = K_r + iK_i$ ، K_i و K_r ، و برابری قسمتهای حقیقی و موهومی معادله (۷۶-۱۶) به دست می آوریم

$$k_r \times \hat{z} = K_r \times \hat{z} \quad K_i \times \hat{z} = 0 \quad (۷۷-۱۶)$$

این معادله‌ها شرایطی را در مورد اندازه‌ها و جهت‌های قسمتهای حقیقی و موهومی \hat{k}_r به دست می دهند

۱. K_i و K_r هر دو در صفحه تابش اند.

۲. رابطه دوم نشان می دهد که K_i در راستای \hat{n} یا عمود بر

چون موج تراگسیل سرانجام در محیط رسانا جذب می شود معمول است که T را جذب، یعنی A ، بنامیم. بنابراین می نویسیم $A = 1 - R$. روابط (۶۷-۱۶) و (۶۸-۱۶) به صراحت R و A را بر حسب ویژگیهای ماده به دست می دهند

$$A = \frac{2n_1 n_r}{(n_r + n_1)^2 + k_r^2} \quad R = 1 - \frac{2n_1 n_r}{(n_r + n_1)^2 + k_r^2} \quad (۶۹-۱۶)$$

جالب است در اینجا در مورد مواد رسانای خوب مثل فلزات ($\sigma_c / \epsilon \omega \gg 1$) بحث کنیم. در این حالت داریم $n_r \approx \sqrt{\sigma_c / 2\epsilon_0 \omega} \gg 1$ [معادله (۱۴-۱۰) را ببینید]. معادله (۶۹-۱۶) نشان می دهد که در این حد، به طریق زیر A به صفر و R به یک نزدیک می شود

$$A = \frac{2}{k_r} \quad R = 1 - \frac{2}{k_r} \quad (۷۰-۱۶)$$

یا

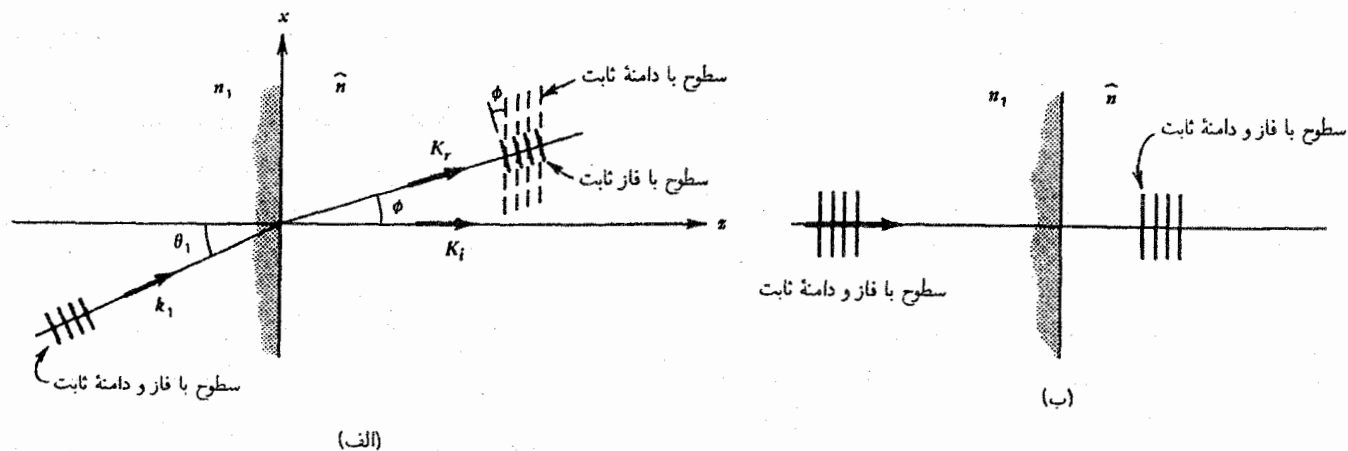
$$A = 2\sqrt{\frac{2\epsilon_0 \omega}{\sigma_c}} \quad R = 1 - 2\sqrt{\frac{2\epsilon_0 \omega}{\sigma_c}} \quad (۷۱-۱۶)$$

این رابطه فرمول هاگن روبنز نام دارد. برای مواد رسانا در بسامدهایی به بزرگی 10^{15} هرتز (بسامدهای نوری و فروسرخ) این رابطه قابل قبول است. برای رساناهای متوسط این معادله در بسامدهای پایینتر از بسامدهای میکروموج صحیح است. اکنون آن را برای تعیین بازتابندگی آلومینیم به کار می بریم. با در نظر گرفتن عدد $38.2 \times 10^6 (\Omega \cdot m)^{-1}$ برای رسانندگی و 10^9 rad/s برای ω اندازه $R = 0.999976$ و $A = 2.4 \times 10^{-4}$ به دست می آید. با این حال در $\omega = 10^{15} \text{ rad/s}$ ، $A = 0.24$ است. بنابراین می بینیم که در بسامدهای نوری آلومینیم یک بازتاب دهنده خوبی نیست.

۱۶-۳-۲ تابش مایل

حالت تابش مایل بسیار پیچیده تر از حالت متناظر در فصل مشترک دی الکتریک-دی الکتریک است. این پیچیدگی به این علت است که بردار انتشار و زاویه شکست هر دو مختلط اند. با وجود اینکه نمایش ترسیمی طرح انتشار با زوایای مختلط ممکن نیست، اما تحلیل ریاضی آن باید مشابه حالت دی الکتریک-دی الکتریک باشد، با این تفاوت که n_r و θ_r توسط کمیت‌های متناظر مختلط \hat{n}_r و $\hat{\theta}_r$ جایگزین می شود. بنابراین قانون اسنل می شود

$$\hat{n}_r \sin \hat{\theta}_r = n_1 \sin \theta_1 \quad (۷۲-۱۶)$$



شکل ۱۲-۱۶ نمایش طرحوار بازتاب و تراگسیل از یک فصل مشترک رسانا که در آن صفحه‌های با دامنه و فاز ثابت را نشان داده‌ایم. (الف) در تابش مایل، برخلاف فصل مشترک دی الکتریک این صفحات با هم زاویه ϕ (زاویه شکست) می‌سازند. (ب) در تابش عمودی این صفحات برهم منطبق‌اند.

از حل این روابط (که قانون اسنل را هم شامل می‌شود) می‌توان K_i, K_r و ϕ را به دست آورد. قسمتهای حقیقی و موهومی معادله (۸۱-۱۶) نتیجه می‌دهد

$$K_r \cos \phi = \text{Re}(\hat{k}_r \cos \hat{\theta}_r) \quad (۸۲-۱۶)$$

$$K_i = \text{Im}(\hat{k}_r \cos \hat{\theta}_r) \quad (۸۳-۱۶)$$

حال قسمتهای حقیقی و موهومی $\hat{k}_r \cos \hat{\theta}_r$ را به دست می‌آوریم. با نوشتن $\cos \hat{\theta}_r$ برحسب $\sin \hat{\theta}_r$ داریم

$$\hat{k}_r \cos \hat{\theta}_r = (\hat{k}_r^2 - \hat{k}_r^2 \sin^2 \hat{\theta}_r)^{1/2}$$

و یا به کار بردن

$$\hat{k}_r^2 = \mu_o \epsilon_r \omega^2 + i \mu_o \sigma_r \omega \quad \text{و} \quad \hat{k}_r \sin \hat{\theta}_r = k_1 \sin \theta_1$$

به دست می‌آوریم

$$\hat{k}_r \cos \hat{\theta}_r = [(\mu_o \epsilon_r - \mu_o \epsilon_1 \sin^2 \theta_1) \omega^2 + i \mu_o \sigma_r \omega]^{1/2}$$

یا برحسب ویژگی دی الکتریک تغییر یافته ماده رسانا، $\bar{\epsilon}_r$ داریم

$$\hat{k}_r \cos \hat{\theta}_r = [\mu_o \bar{\epsilon}_r \omega^2 + i \mu_o \sigma_r \omega]^{1/2} \quad (۸۴-۱۶)$$

که

$$\bar{\epsilon}_r = \epsilon_r - \epsilon_1 \sin^2 \theta_1 \quad (۸۵-۱۶)$$

فصل مشترک است

$$K_i = K_i \hat{z} \quad (۷۸-۱۶)$$

۳. از طرف دیگر با توجه به اندازه رابطه اول داریم

$$k_1 \sin \theta_1 = K_r \sin \phi \quad (۷۹-۱۶)$$

که ϕ زاویه حقیقی بین K_r و راستای عمود بر فصل مشترک است. شکل ۱۲-۱۶ (الف) نمایش انتشار است و صفحه‌های با دامنه ثابت و فاز ثابت را نشان می‌دهد. چون صفحه‌های با فاز ثابت و با دامنه ثابت به ترتیب بر K_i و K_r عمودند زاویه بین آنها همان ϕ است. با این حال، آن‌طور که در شکل ۱۲-۱۶ (ب) نشان داده‌ایم، این صفحه‌ها در تابش عمودی بر یکدیگر منطبق‌اند.

برای تعیین ϕ و اندازه‌های K_i و K_r ، به روابط بیشتری بین آنها و پارامترهای انتشار، k_1, θ_1 و ویژگیهای ماده رسانا نیاز داریم. چون \hat{k}_r با محور z زاویه $\hat{\theta}_r$ می‌سازد و همزمان زاویه مؤلفه حقیقی آن با محور z است، از طرفی قسمت موهومی آن در راستای z است داریم

$$\begin{aligned} (K_r \sin \phi) \hat{x} + (K_r \cos \phi + i K_i) \hat{z} \\ = (\hat{k}_r \sin \hat{\theta}_r) \hat{x} + (\hat{k}_r \cos \hat{\theta}_r) \hat{z} \end{aligned}$$

از برابر قرار دادن مؤلفه‌های x و z دو طرف و استفاده از معادله (۷۲-۱۶) به دست می‌آید

$$K_r \sin \phi = \hat{k}_r \sin \hat{\theta}_r = k_1 \sin \theta_1 \quad (۸۰-۱۶)$$

$$K_r \cos \phi + i K_i = \hat{k}_r \cos \hat{\theta}_r \quad (۸۱-۱۶)$$

حال می توان نوشت

$$\hat{k}_r \cos \hat{\theta}_r = \frac{\omega}{c} [\bar{n} + i\bar{k}] \quad (۸۶-۱۶)$$

که \bar{n} و \bar{k} به کمک ثابتهای اپتیکی مواد که با رابطه (۸۲-۱۴) و با تغییر ε_r به $\bar{\varepsilon}_r$ داده می شود به دست می آیند. به این ترتیب داریم

$$K_r \cos \phi + iK_i = \frac{\omega}{c} (\bar{n} + i\bar{k}) \quad (۸۷-۱۶)$$

که اگر قسمتهای حقیقی و موهومی دو طرف را با هم مساوی قرار دهیم به دست می آوریم

$$K_r \cos \phi = \frac{\omega}{c} \bar{n} \quad \text{و} \quad K_i = \frac{\omega}{c} \bar{k} \quad (۸۸-۱۶)$$

اکنون می توانیم معادله اول را با معادله (۷۹-۱۶) برای به دست آوردن K_r حل کنیم. با افزودن توان دوم این روابط به دست می آوریم

$$K_r = \frac{\omega}{c} \sqrt{\bar{n}^2 + n_1^2 \sin^2 \theta_1} \quad (۸۹-۱۶)$$

به این ترتیب می توان ضریب شکست مؤثر حقیقی را برای محیط رسانا تعریف کرد

$$N(\theta_1) = \sqrt{\bar{n}^2 + n_1^2 \sin^2 \theta_1} \quad (۹۰-۱۶)$$

روابط (۷۹-۱۶) و (۸۸-۱۶) برحسب $N(\theta_1)$ می شود

$$N(\theta_1) \sin \phi = n_1 \sin \theta_1 \quad (۹۱-۱۶)$$

و

$$N(\theta_1) \cos \phi = \bar{n} \quad (۹۲-۱۶)$$

معادله (۹۱-۱۶) مانند قانون اسنل برای مواد دی الکتریک است که آن را به شکل طرحوار در شکل ۱۶-۱۲ (الف) رسم کرده ایم. وقتی ضریب شکست مؤثر $N(\theta_1)$ معلوم باشد می توان از آن برای تعیین زاویه شکست ϕ استفاده کرد. با این حال به خاطر وابستگی پیچیده $N(\theta_1)$ به ویژگیهای ماده رسانا و زاویه تابش، این رابطه پیچیده است. علاوه بر این معادله (۹۲-۱۶) را نیز می توان برای تعیین زاویه شکست به کار برد. به علت ماهیت پیچیده این روابط بحث بیشتر آنها مفید نیست. با وجود این برخی موارد ویژه را (مواد با رسانایی بالا) که در کاربردهای عملی از اهمیت زیادی برخوردارند، ضمن چند مثال بحث می کنیم.

اکنون که قواعد حقیقی را برای انتشار امواج EM از فصل مشترک یک رسانا تعیین کردیم، جالب است که میدانهای موج تراگسیل (به ماده رسانا) را برحسب مقادیر حقیقی بیان کنیم. بنابراین می نویسیم

$$\mathbf{E}_r e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{E}_r e^{i(\mathbf{K}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t) - K_i z} \quad (۹۳-۱۶)$$

که \mathbf{K}_r با محور z زاویه ϕ می سازد. عمق پوسته $\delta = 1/K_i = c\omega/\bar{k}$ است.

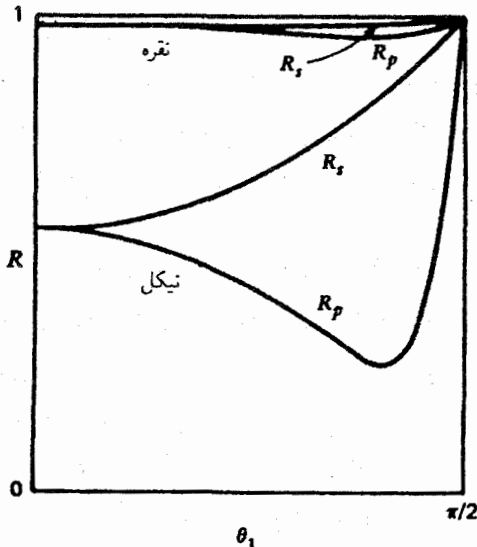
مثال ۷-۱۶ ثابتهای اپتیکی یک فلز در تابش مایل

یک موج الکترومغناطیسی با بسامد $\omega = 2\pi \text{ GHz}$ از یک محیط دی الکتریک با $\varepsilon_1 = 10\varepsilon_0$ ، روی فصل مشترک رسانا به رسانندگی $\sigma_c = 0.5 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ ، و ثابت دی الکتریک $\varepsilon_2 = 11.5\varepsilon_0$ ، تحت زاویه تابش 30° درجه می تابد. گذردهی مؤثر ماده رسانا با توجه به معادله (۸۵-۱۶) $\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1 = 9\varepsilon_0$ است. ثابتهای اپتیکی ماده، \bar{n} و \bar{k} ، از معادله (۸۲-۱۴) با انتخاب ε مساوی با $\bar{\varepsilon}_r$ محاسبه می شوند. نتیجه می شود $\bar{n} = 3.3$ و $\bar{k} = 1.38$. ضریب شکست مؤثر ماده $N(\theta_1)$ از معادله (۹۰-۱۶) حساب می شود $N(\theta_1) = 3.66$. با قراردادن $N(\theta_1)$ و θ_1 در رابطه $N(\theta_1) \sin \phi = n_1 \sin \theta_1$ ، زاویه شکست 25.6° به دست می آید. یادآور می شویم که رابطه $N(\theta_1) \cos \phi = \bar{n}$ نیز همان نتیجه را به دست می دهد.

اکنون زاویه شکست را در حالت حدی $\sigma_c = 0$ حساب می کنیم. در این حد ماده نارسناست. بنابراین قانون اسنل $n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1$ نتیجه می دهد $\theta_2 = 27.8^\circ$. این نتیجه نشان می دهد $\phi < \theta_2$ ، که بیان می دارد ویژگی رسانایی ماده باعث کوچک شدن زاویه شکست می شود. ■

مثال ۸-۱۶ ضرایب فرنل برای یک فصل مشترک رسانای خوب - آینه فلزی

می توان از نتیجه بخش ۱۶-۳-۲، عبارت ساده ای برای عبور موج از فصل مشترک بین یک دی الکتریک و رسانای خوب به دست آورد. برای این کار باید $\sigma_c/\varepsilon\omega \gg 1$ را انتخاب کنیم. در نتیجه ضریب شکست مختلط $|\hat{n}|$ خیلی بزرگتر از واحد می شود. اگر $|\hat{n}| \gg 1$ باشد آن گاه لازمه محدود ماندن $n_2 \sin \hat{\theta}_2$ در شکل مختلط قانون اسنل، یعنی معادله (۷۲-۱۶) $n_1 \sin \theta_1 = \hat{n}_2 \sin \hat{\theta}_2$ ، این است که $\hat{\theta}_2 \approx 0$ باشد. علاوه بر این دو حالت حدی وجود دارند که باید جداگانه بررسی شوند: نزدیک تابش عمودی $1/|\hat{n}_2| \gg \pi/2 - \theta_1$ و نزدیک تابش خراشان (تقریباً مماسی) $1/|\hat{n}_2| \ll \pi/2 - \theta_1$.



شکل ۱۳-۱۶ بازتابندگی از فصل مشترک یک رسانا برای قطبیدگیهای p و s و برای نقره و نیکل، که قابل مقایسه با زاویه بروستر مربوط به فصل مشترک دی الکتریک است.

کرد. با قراردادن از روابط (۹۵-۱۶) یا (۷۷-۱۶) در $R_s = \hat{r}_{12s} \hat{r}_{12s}^*$ و نگه داشتن پایتترین مرتبه \hat{n}_r^{-1} به دست می آوریم

$$R_s = 1 - 4n_1 \eta_r \cos \theta_1 \quad (98-16)$$

که $\hat{n}_r = \eta_r + i\eta_r' = \hat{n}_r^{-1}$ این نتیجه مشخص می کند که بازتابندگی امواج الکترومغناطیسی قطبیدگی s برای تمام زوایای تابش تقریباً برابر ۱ است و به مقدار کمیته خود در تابش عمودی ($\theta_1 = 0$) می رسد.

بازتابندگی قطبیدگی p برای تابش نزدیک به عمود و نزدیک به مماس (تابش خراشان) عبارتهای دیگری دارد و می توان با استفاده از $R_p = \hat{r}_{12p} \hat{r}_{12p}^*$ و روابط (۹۵-۱۶) و (۹۶-۱۶) آنها را حساب کرد (مسئله ۱۰-۱۶ را ببینید). نتایج به صورت زیر هستند

$$R_p = 1 - \frac{4n_1 \eta_r}{\cos \theta_1} \quad (\text{تابش تقریباً عمودی}) \quad (99-16)$$

$$R_p = \frac{(\phi_0 - n_1 \eta_r)^2 + n_1^2 \eta_r'^2}{(\phi_0 + n_1 \eta_r)^2 + n_1^2 \eta_r'^2} \quad (\text{تابش خراشان})$$

این نتایج نشان می دهند که بازتابندگی از فلز، وقتی زاویه تابش از حالت عمود تا مماس تغییر کند به مقدار بسیار کم تغییر می یابد و همیشه خیلی بزرگ است. شکل ۱۳-۱۶ بازتابندگی از فصل مشترک هوا-فلز را برای قطبیدگیهای p و s به شکل تابعی از زاویه تابش نشان می دهد که به کمک روابط (۷۳-۱۶) و (۷۴-۱۶) و درسامد نوری با $i = 0.05$ و $\hat{n}_r = 2 + 3i$ برای نقره و $\hat{n}_r = 2 + 3i$ برای نیکل رسم شده اند. در هر دو مورد، با

الف) تابش تقریباً عمودی. با انتخاب $\hat{\theta}_r \approx 0$ روابط (۷۳-۱۶) و (۷۴-۱۶) می شوند

$$\hat{r}_{12p} = \frac{\hat{n}_r \cos \theta_1 - n_1}{\hat{n}_r \cos \theta_1 + n_1}, \quad \hat{r}_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - \hat{n}_r}{n_1 \cos \theta_1 + \hat{n}_r} \quad (94-16)$$

$$\hat{t}_{12p} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{\hat{n}_r \cos \theta_1 + n_1}, \quad \hat{t}_{12s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + \hat{n}_r}$$

نوشتن این روابط برحسب قسمتهای حقیقی و موهومی \hat{n}_r مفید است. با استفاده از (۸۲-۱۴) می نویسیم $\hat{n}_r = n_r + ik_r$ بنابراین

$$\hat{r}_{12p} = \frac{(n_r - n_1 / \cos \theta_1) + ik_r}{(n_r + n_1 / \cos \theta_1) + ik_r}, \quad \hat{r}_{12s} = \frac{(n_1 \cos \theta_1 - n_r) - ik_r}{(n_1 \cos \theta_1 + n_r) + ik_r}$$

برای یک جسم با رسانایی زیاد روابط (۹۳-۱۶) با انتخاب $\hat{n}_r \cos \theta_1 \gg n_1$ و $\hat{n}_r \gg n_1 \cos \theta_1$ بنابراین داریم

$$\hat{r}_{12p} = 1 - \frac{2n_1}{\hat{n}_r \cos \theta_1}, \quad \hat{r}_{12s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{\hat{n}_r} - 1 \quad (95-16)$$

$$\hat{t}_{12p} = \frac{2n_1}{\hat{n}_r}, \quad \hat{t}_{12s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{\hat{n}_r}$$

ب) تابش تقریباً خراشان. برای تابش با زاویه ای نزدیک به مماس که $\phi_0 = \pi/2 - \theta_1 \ll 1/|\hat{n}_r|$ (یعنی $\cos \theta_1 \approx \phi_0$) می توان نشان داد که (مسئله ۹-۱۶ را ببینید) ضرایب فرنل برای قطبیدگی p با عبارتهای زیر داده می شوند

$$\hat{r}_{12p} = \frac{\phi_0 - n_1 / \hat{n}_r}{\phi_0 + n_1 / \hat{n}_r}, \quad \hat{t}_{12p} = \frac{2n_1 \phi_0 / \hat{n}_r}{\phi_0 + 1 / \hat{n}_r} \quad (96-16)$$

برای قطبیدگی s داریم

$$\hat{r}_{12s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{\hat{n}_r} - 1, \quad \hat{t}_{12s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{\hat{n}_r} \quad (97-16)$$

که مانند عبارتهای معادله های (۹۵-۱۶) برای تابش نزدیک به عمود است. سرانجام در حد رسانایی زیاد (رسانای ایده آل یا کامل $\hat{n}_r \rightarrow \infty$) بدون توجه به تغییرات زاویه تابش داریم $\hat{r}_{12p} \rightarrow 1$ و $\hat{r}_{12s} \rightarrow -1$.

مثال ۹-۱۶ ضریب بازتاب یک سطح با رسانایی زیاد - آینه های فلزی

در مثال قبل، ضرایب فرنل برای عبور موج از یک فصل مشترک تخت رسانای خوب را حساب کردیم. اکنون می توان با استفاده از این ضرایب بازتابندگی از فصل مشترک را به صورت تابعی از زاویه تابشی بررسی

زیاد شدن زاویه تابش از صفر تا $\pi/2$ ، R_s به طور پیوسته و یکنواخت و یکنواخت زیاد می شود. از طرف دیگر R_p در هر دو مورد یک کمینه دارد. این اثر قابل مقایسه با زاویه بروستر در فصل مشترک دی الکتریک است، و به طور تحلیلی در مثال زیر بررسی شده است. ■

مثال ۱۶-۱۰ بازتاب از فلزات - مقایسه با زاویه بروستر
وقتی یک موج الکترومغناطیسی روی مرز دو دی الکتریک تحت زاویه بروستر می تابد بازتابندگی امواج p صفر می شود. در این مثال مشابه این حالت را در بازتاب از فلز بررسی می کنیم (شکل ۱۶-۱۳ را ببینید). زاویه ϕ_0 که در آن R_p کمینه می شود را می توان با اعمال شرط $\partial R / \partial \phi_0 = 0$ تعیین کرد. این اثر در واقع در زوایای تابش بزرگ (تابش خراشان) رخ می دهد. ϕ_0 را می توان با استفاده از معادله (۱۶-۹۹) در حالت R_p ، به دست آورد. با این همه ساده تر است که از $R_p = \hat{r}_{12p} \hat{r}_{12p}^*$ همراه با معادله (۱۶-۹۶) استفاده کرد

$$R_p = \frac{\phi_0 - n_1 \hat{\eta}_r}{\phi_0 + n_1 \hat{\eta}_r} \cdot \frac{\phi_0 - n \hat{\eta}_r^*}{\phi_0 + n \hat{\eta}_r^*}$$

که دوباره $\hat{\eta}_r = 1/\hat{n}_r$ آن گاه شرط $\partial R / \partial \phi_0 = 0$ نتیجه می دهد

$$\phi_0^2 (\hat{\eta}_r^* + \hat{\eta}_r) - n_1^2 |\hat{\eta}_r|^2 (\hat{\eta}_r^* + \hat{\eta}_r) = 0$$

به این ترتیب داریم

$$\phi_0 = \phi_m = \frac{\pi}{4} - \theta_m = n_1 |\hat{\eta}_r| = \frac{n_1}{|\hat{n}_r|} \quad (16-100)$$

به سادگی می توان نشان داد که بازتابندگی از فصل مشترک در این زاویه تابش اندازه کمیته (مسئله ۱۶-۱۱ را ببینید) زیر را دارد

$$R_p = \frac{|\hat{\eta}_r| - \eta_r}{|\hat{\eta}_r| + \eta_r} \quad (16-101)$$

اکنون نتایج بالا را با اطلاعات شکل ۱۶-۱۳ برای نیکل مقایسه می کنیم. چون $\hat{n}_r = 2 + 3i$ است آن گاه $|\hat{n}_r| = 3.6$ ، $\eta_r = \text{Re} \hat{\eta}_r = 0.1538$ که با قراردادن در روابط (۱۶-۱۰۰) و (۱۶-۱۰۱) به دست می آید $\phi_m = 15.8^\circ$ یا $\theta_m = 74.2^\circ$ و $R_p = 0.278$ از روی شکل نیز $\theta_m = 74.1^\circ$ و $R_p = 0.287$ اندازه گیری می شود. ■

مثال ۱۶-۱۱ قطبش در اثر بازتاب از فصل مشترک فلزی
بعضی از اثرهای قطبش ناشی از بازتاب در فصل مشترک فلزی را در این مثال بررسی می کنیم. این اثرها در زاویه تابشی که بازتابیدگیها

را کمینه می کند، یعنی زاویه مشابه با زاویه بروستر داده شده با معادله (۱۶-۱۰۰) بررسی می شود. موج s بازتابیده، نسبت به موج تابشی s انتقال فاز δ_s دارد که با معادله $\hat{r}_{12s} = |\hat{r}_{12s}| e^{i\delta_s}$ مشخص می شود. با نوشتن $1/\hat{n}_r = \hat{\eta}_r = \eta_r + i\eta_r'$ داریم

$$\tan \delta_s = \frac{2\eta_r' \cos \theta_1}{-1 + 2\eta_r \cos \theta_1} \quad (16-102)$$

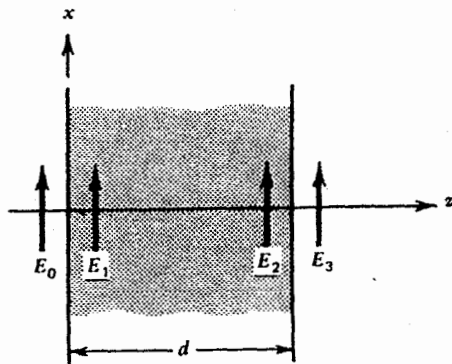
موج p بازتابیده نسبت به موج p تابشی انتقال فاز δ_p دارد که با رابطه $|\hat{r}_{12p}| = R_p^{1/2}$ با در نظر گرفتن داده می شود. با $\hat{r}_{12p} = |\hat{r}_{12p}| e^{i\delta_p}$ که، از معادله (۱۶-۱۰۱) به دست می آید، و به کار بردن معادله (۱۶-۹۶) به دست می آوریم

$$\tan \delta_p = \frac{-2\phi_m n_1 \eta_r'}{\phi_m^2 - n_1^2 |\hat{\eta}_r|^2} \rightarrow \infty \quad (16-103)$$

به این ترتیب $\delta_p = \pi/2$. اکنون قطبش موج بازتابیده را می توان تعیین کرد. با این حال بحث بیشتر قطبش را به عنوان تمرین (مسئله ۱۶-۱۲ را ببینید) به خواننده واگذار می کنیم. ■

مثال ۱۶-۱۲ انتقال از یک ورقه فلزی

در این مثال انتقال امواج الکترومغناطیسی را از یک ورقه فلزی که در شکل ۱۶-۱۴ نشان داده ایم بررسی می کنیم. یک موج الکترومغناطیسی با دامنه $E_0 \hat{x}$ و بسامد ω به طور عمود بر یک ورقه نقره با ضریب رسانایی σ_c و ضخامت d می تابد، d را به حد کافی بزرگ می گیریم تا بتوانیم از بازتابهای چندگانه چشمپوشی کنیم. دامنه های موج الکتریکی را در داخل ورقه بلافاصله در سطح جلویی $E_1 \hat{x}$ و بلافاصله در سطح عقبی $E_2 \hat{x}$ می گیریم. دامنه موج تراگیسیل را $E_3 \hat{x}$ فرض می کنیم. این دامنه ها به کمک شرایط مرزی برحسب دامنه موج تابشی



شکل ۱۶-۱۴ بازتاب و تراگیسیل از یک ورقه فلزی به حد کافی ضخیم به طوری که بتوان از بازتابهای چندگانه چشمپوشی کرد.

دارند). در این بخش به بررسی انتشار با وجود بیش از یک مرز (مرزهای چندگانه) می‌پردازیم. مثالی از این نوع قسمتی از فضا است که از همه طرف با دیواره‌های فلزی جدا شده باشد. چنین چیزی را تشدیدکننده کاواکی می‌نامیم. مثال دیگر، که آن را موجبر می‌خوانیم، قسمتی از فضا به شکل لوله طویل دو سر باز است که با دیواره رسانا محدود شده باشد. این بخش فقط در مورد موجبرهایی که از استوانه فلزی میان‌تهی و نیز کاواکهایی که از جعبه‌های فلزی میان‌تهی ساخته شده‌اند و میدان فقط در قسمت تهی آنها وجود دارد بحث می‌کنیم. موجبرهایی با ساختار دیگر، مثل خطوط انتقال با سیمهای موازی و استوانه‌های دی‌الکتریک با ثابتهای دی‌الکتریک بزرگ، نیز ممکن است. علاوه بر این، فرض می‌کنیم که رسانایی مواد خیلی بزرگ (رسانای کامل یا ایده‌آل) است، به طوری که بازتابندگی امواج s و p برای تمام زوایای تابش یک می‌شود. در این حد عمق پوسته صفر می‌شود، به این معنی که در داخل ماده میدان وجود ندارد و بنابراین اتلاف توان نداریم.^۱

در موجبرها و تشدیدکننده‌های کاواکی همه تابش الکترومغناطیسی در دیواره‌ها محدود می‌شوند؛ بنابراین آنها اثر جفت‌شدگیهای خازنی و القایی را حذف و همچنین از اتلاف توان مربوط به تابش جلوگیری می‌کنند. در نتیجه با تزریق امواج الکترومغناطیسی از یک طرف و گردآوری آنها در طرف دیگر (با استفاده از آنتن‌ها) از آنها برای انتقال انرژی الکتریکی استفاده می‌کنیم.

قبلاً دیدیم که عبور موج از یک مرز ساده تحت قانون اسنل و ضرایب فرنل صورت می‌گیرد. در شرایطی که بیش از یک مرز وجود داشته باشد با برهم‌نهی جوابهای متمایز در مرزهای منفرد مسئله را حل می‌کنیم. به خاطر برهم‌نهی جوابهای مختلف، پدیده تداخل نقش مهمی در موجبرها بازی می‌کند.

۱۶-۴-۱ انتشار بین دو صفحه رسانا (آینه‌های فلزی)

به منظور ساده‌کردن بحث موجبرها، ابتدا مسئله‌ای با شرایط مرزی ساده‌تر، یعنی، انتشار امواج الکترومغناطیسی در فضایی را بررسی می‌کنیم که با دو صفحه موازی با رسانایی بسیار خوب (رسانای کامل) فقط از دو طرف محدود باشد. صفحه‌ها را مطابق شکل ۱۶-۱۵ در $y = a$ و $y = 0$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم ماده پرکننده

۱. برای بحث در مورد اتلاف توان در کاواکها و موجبرهای واقعی به فصل ۸ کتاب زیر مراجعه کنید.

به دست می‌آیند. برای انجام این کار باید ضریب شکست مختلط نقره را در تابش عمودی تعیین کنیم. با به کار بردن معادله (۱۴-۸۲) برای $\sigma_c/\epsilon_0\omega \gg 1$ و $K_m = 1$ ، به دست می‌آوریم

$$\hat{n}_r = \sqrt{i} \sqrt{\frac{\sigma_c}{\epsilon_0\omega}} = \sqrt{\frac{\sigma_c}{\epsilon_0\omega}} e^{i\pi/4} = (1+i) \sqrt{\frac{\sigma_c}{2\epsilon_0\omega}}$$

به این ترتیب معادله (۱۶-۲۲) به دست می‌دهد

$$\frac{E_r}{E_0} = \frac{2n_1}{\hat{n}_r + n_1} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\sigma_c}{\epsilon_0\omega}} e^{i\pi/4}}$$

موج به هنگام پیشرفت در نقره تضعیف می‌شود که با عمق پوسته $\delta = \sqrt{2/\mu_0\sigma_c\omega}$ مشخص می‌شود یعنی

$$\frac{E_r}{E_1} = e^{-d/\delta}$$

اکنون میدان تراگسیل را می‌توان با به کار بردن معادله (۱۶-۲۲) به روش زیر حساب کرد

$$\frac{E_r}{E_1} = \frac{2\hat{n}_r}{\hat{n}_r + n_1} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\epsilon_0\omega}{\sigma_c}} e^{-i\pi/4}}$$

برای $\omega = 400\pi \times 10^6$ rad/s، $\sigma_c = 617 \times 10^6$ ($\Omega \cdot m$)⁻¹، $d = 10^{-5}$ m و $\sqrt{\sigma_c/\epsilon_0\omega} = 7.45 \times 10^2$ می‌آوریم $\delta = 4.5 \times 10^6$ m و بنابراین

$$\frac{E_r}{E_0} = 2.68 \times 10^{-5} e^{-i\pi/4} \quad \frac{E_r}{E_0} = 2.9 \times 10^{-6} e^{-i\pi/4}$$

$$\frac{E_r}{E_0} = 0.57 \times 10^{-5} e^{-i\pi/4}$$

به این ترتیب درمی‌یابیم که میدان تراگسیل و میدان در ورقه نسبت به میدان تابشی 45° اختلاف فاز دارند. حال می‌توان چشمپوشی از بازتابهای چندگانه برای یک d معین را توجیه کرد زیرا عمق پوسته و ضریب شکست ورقه محاسبه می‌شود. با این حال آن را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

۱۶-۴ موجبرها و تشدیدکننده‌های کاواکی

در بخشهای قبل انتشار امواج الکترومغناطیسی را در عبور از یک فصل مشترک تخت بین مواد رسانا و دی‌الکتریک بررسی کردیم (مثالهای ۱۶-۶ و ۱۶-۱۲ با مسائلی در مورد مرزهای چندگانه سروکار

یا

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{x} \sin(k \cos \theta y) e^{i(k \sin \theta z - \omega t)} \quad (105-16)$$

که $E_0 = 2iE'$ است. میدان الکتریکی که در بالا به دست آوردیم، هنوز به طور کامل تعیین نشده است، زیرا با وجود اینکه دامنه E_0 ، بسامد ω ، و اندازه بردار موج k از خارج کنترل می شوند ولی هنوز شرایط مرزی صحیح را برآورده نمی سازند. راستای بردار موج و بنابراین زاویه θ در این مرحله نامعین است. و لذا می توان آنها را طوری انتخاب کرد که شرایط مرزی را برآورده سازند. مؤلفه مماسی میدان الکتریکی در سطح رسانای بسیار خوب صفر می شود [معادله (16-16)]. این شرط از قبل در صفحه $y = 0$ صادق بوده است. که معادل است با استفاده از ضریب فرنل $r_{12s} = -1$ در نوشتن رابطه (16-16). با این حال همین شرط مرزی در $y = a$ رابطه $\sin(ka \cos \theta) = 0$ را به دست می دهد که دلالت دارد بر

$$\cos \theta = \frac{n\pi}{ka} \quad \text{یا} \quad ka \cos \theta = n\pi \quad (106-16)$$

که n یک عدد صحیح مثبت است. به این ترتیب برای یک k و a مشخص تعدادی راستا (مدهای) متمایز برای انتشار موج بین دو صفحه وجود دارند که آنها را با TE_n علامت گذاری می کنیم. توجه کنید که برای تعیین جواب یکتا فقط از شرایط مرزی \mathbf{E} استفاده کردیم. زیرا شرایط مرزی روی \mathbf{H} اطلاعات زائدی را (مثال 16-17) را برای شرایط روی \mathbf{H} ببینید) به دست می دهد.

اکنون با جوابهای یکتای تعیین شده بین دو صفحه می توانیم در مورد شکلهایی از انتشار بحث کنیم. اکنون طول موجهای مؤثر در جهات y و z را تعیین و سرعت فاز و گروه را برای هر مد موج بررسی می کنیم. با نوشتن معادله (105-16) به شکل زیر آغاز می کنیم

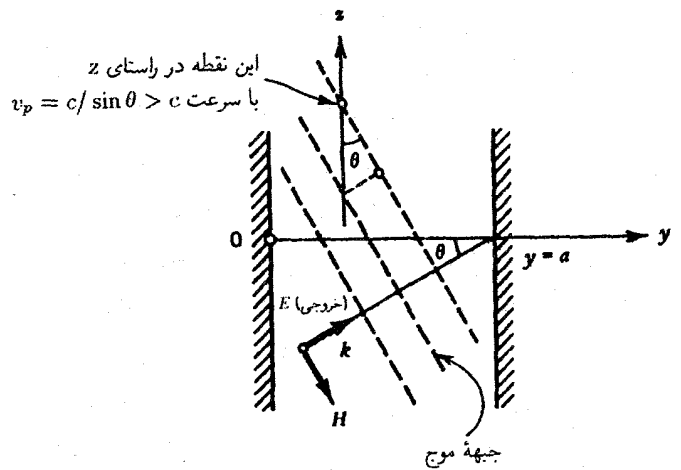
$$\mathbf{E} = E_0 \hat{x} \sin(k_c y) e^{i(k_g z - \omega t)} \quad (107-16)$$

که

$$k_g = k \sin \theta \quad \text{و} \quad k_c = k \cos \theta \quad (108-16)$$

توجه کنید که می توان k_c و k_g را برحسب طول موجهای مؤثر به صورت زیر نوشت

$$k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} \quad \text{و} \quad k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad (109-16)$$



شکل ۱۵-۱۶ نمودار طرحوار انتشار بین دو صفحه رسانای بسیار خوب موازی و بزرگ که نشان دهنده جهت موج و سرعت فاز در راستای z است.

فضای بین آنها گذردهی و تراوایی مساوی با خلا یعنی ϵ_0 و μ_0 داشته و بار الکتریکی و جریان وجود نداشته باشد. فرض کنید یک موج با بسامد ω (طول موج در خلا $\lambda_0 = c/2\pi\omega = 2\pi/k$)، بردار موج k (در صفحه $y-z$)، و قطبیده در جهت x ، تحت زاویه θ بر صفحه $y = a$ فرود آید. چون موج در جهت x قطبیده است (قطبش s)، میدان الکتریکی بر صفحه مماس است. این حالت را موج الکتریکی عرضی (TE) می نامیم. اگر قطبیدگی میدان الکتریکی در صفحه yz و میدان مغناطیسی H در راستای x (قطبیدگی p) باشد این حالت را موج مغناطیسی عرضی (TM) می نامیم (مسائل 16-16 و 17-16 را ببینید). با اینکه در این مرحله برای بردار موج راستای اختیاری انتخاب کرده ایم اما در زیر می خوانیم که زاویه θ به ناچار به مقادیر منفصل محدود می شود. با این حال، متوجه می شویم که در غیاب یکی از صفحه ها، زاویه تابش به مقادیر منفصل محدود نخواهد شد. میدان الکتریکی موج بین دو صفحه، مجموع میدانهای موجهای تابشی و بازتاب است چون دو صفحه رسانای بسیار خوب (رسانای کامل) فرض شده اند، ضریب فرنل $r_{12s} = -1$ است (مثال 16-8) را ببینید، یعنی دامنه موج بازتابیده مساوی با دامنه موج تابشی با اختلاف فاز π است یعنی

$$\mathbf{E} = E' \hat{x} e^{i(k_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} - E' \hat{x} e^{i(k_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (104-16)$$

با به کار بردن $\mathbf{k}_1 = k \cos \theta \hat{y} + k \sin \theta \hat{z}$ ، $\mathbf{r} = z \hat{z} + y \hat{y}$ و $\mathbf{k}'_1 = -k \cos \theta \hat{y} + k \sin \theta \hat{z}$ می شود

$$\mathbf{E} = E' \hat{x} [e^{ik \cos \theta y} - e^{-ik \cos \theta y}] e^{i(k \sin \theta z - \omega t)}$$

چون $\sin \theta \leq 1$ است، $v_p \geq c$ خواهد بود. در واقع در $\theta = 0$ (یعنی درست در حالت قطع)، $\lambda_c \rightarrow \lambda_0$ و v_p بینهایت می‌شود. ممکن است این نتیجه متناقض با نظریه نسبیت، مبنی بر اینکه انرژی نمی‌تواند با سرعتی بیش از سرعت نور انتشار یابد، جلوه کند. اما وقتی که می‌فهمیم انرژی الکترومغناطیسی بین صفحه‌ها با سرعت فاز منتشر نمی‌شود بلکه با سرعت گروه، که در زیر نشان خواهیم داد که کوچکتر از سرعت نور است، منتشر می‌شود این تناقض ظاهری از بین می‌رود. به این ترتیب مسئله در هماهنگی کامل با نظریه نسبیت است.

سرعت گروه را از تعریف $u v_g = S$ [معادله (۱۴-۷۵)] یا از شکل میانگین آن، $\langle S \rangle = \langle v_g \rangle$ که چگالی انرژی ذخیره شده در میدان الکترومغناطیس و S بردار پوینتینگ است، می‌توان حساب کرد. از قراردادن معادله (۱۶-۱۰۷) در $-\partial \mathbf{B} / \partial t = \nabla \times \mathbf{E}$ و انتخاب $e^{-i\omega t}$ به عنوان وابستگی \mathbf{B} نسبت به زمان، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{B} = \frac{E_0}{\omega} [k_g \hat{y} \sin(k_c y) + i k_c \hat{z} \cos(k_c y)] e^{i(k_g z - \omega t)} \quad (16-114)$$

از روابط (۱۴-۶۸) تا (۱۴-۷۱) می‌نویسیم $u = 1/2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$ و $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ با به کار بردن روابط (۱۴-۷۸) و (۱۴-۷۹) می‌توان متوسط زمانی S و u را حساب کرد. به این ترتیب

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4} \left[\epsilon_0 |E|^2 + \frac{|B|^2}{\mu_0} \right] \quad \text{و} \quad \langle S \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B})$$

به جای \mathbf{E} و \mathbf{B} روابط (۱۶-۱۰۷) و (۱۶-۱۱۴) را قرار می‌دهیم. نتیجه می‌شود

$$\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} |E_0|^2 \left\{ \left[1 + \left(\frac{k_c}{k} \right)^2 \right] \sin^2(k_c y) + \left(\frac{k_g}{k} \right)^2 \cos^2(k_c y) \right\}$$

$$\langle S \rangle = \frac{\epsilon_0 c}{2} |E_0|^2 \hat{z} \frac{k_g}{k} \sin^2(k_c y)$$

با انتگرال‌گیری از $\langle u \rangle$ و $\langle S \rangle$ نسبت به y و تقسیم آن بر a ، متوسط چگالی انرژی و بردار پوینتینگ بر واحد طول را در عبور از فضای بین دو صفحه می‌توان حساب کرد. با یادآوری اینکه

$$\frac{1}{a} \int_0^a \sin^2(k_c y) dy = \frac{1}{a} \int_0^a \cos^2(k_c y) dy = \frac{1}{2}$$

داریم

$$\frac{\langle u \rangle}{a} = \frac{1}{4} \epsilon_0 |E_0|^2 \quad \frac{\langle S \rangle}{a} = \frac{1}{4} \epsilon_0 |E_0|^2 c \frac{k_g}{k} \hat{z}$$

با به کار بردن $\lambda_0 = 2\pi/k = c/2\pi\omega$ ، طول موج در فضای تهی، عبارتهای زیر را برای طول موجها به دست می‌آوریم

$$\lambda_c = \frac{\lambda_0}{\cos \theta} \quad \lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sin \theta} \quad (16-110)$$

طول موجها و اعداد موج را نیز می‌توان با استفاده از رابطه (۱۶-۱۰۶) برحسب عدد صحیح n نوشت، یعنی

$$\lambda_c = \frac{2a}{\pi} \quad \lambda_g = \left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{n^2}{4a^2} \right)^{-1/2} \quad (16-111)$$

$$k_c = \frac{n\pi}{a} \quad k_g = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{n^2}{4a^2} \right)^{1/2}$$

دو رابطه زیر را نیز می‌توان نوشت

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_c} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2$$

$$k^2 g = k^2 - k_c^2 = k^2 - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \quad (16-112)$$

اهمیت فیزیکی λ_0 و λ_c از این حقیقت ناشی می‌شود که برای یک a و n معین یک شرط حد بالای قطع برای λ_0 ، طول موج امواج در فضای تهی که می‌تواند در فضای بین دو صفحه منتشر شود وجود دارد. این موضوع را با به کار بردن روابط (۱۶-۱۱۱) یا (۱۶-۱۱۲) می‌توان فهمید. وقتی که $(2\pi/\lambda_0)^2 - (2\pi/\lambda_c)^2 < 0$ است λ_0 یک کمیت موهومی می‌شود. در نتیجه جمله نمایی $e^{ik_g z}$ برای $z > 0$ نمایی منفی خواهد داشت. و بنابراین موج به صورت نمایی افت می‌کند. به این ترتیب اگر موج بین دو صفحه بدون تضعیف منتشر شود باید داشته باشیم $\lambda_0 < \lambda_c = 2a/n$. بنابراین نام طول موج قطع، و طول موج موجبر به ترتیب به λ_0 و λ_c اطلاق می‌شود. علاوه بر این، چون $\sin \theta \leq 1$ است λ_0 از طول موج در خلا، λ_0 بزرگتر است.

اکنون سرعتهای فاز و گروه موج را بررسی می‌کنیم. با توجه به اینکه، در فضای تهی، سرعت فاز سرعت صفحه‌های با فاز ثابت، و سرعت گروه، سرعت انتقال انرژی موج، هر دو c است مطلب را شروع می‌کنیم. وقتی که امواج مانند حالت اخیر محدود می‌شوند، این سرعتها دیگر مساوی c نیستند. از تعریف $v_p = dz/dt$ و استفاده از صفحه‌های با فاز ثابت، $2\pi z/\lambda_g - \omega t = \text{const.}$ ، سرعت فاز را می‌توان به دست آورد. به این ترتیب (شکل ۱۶-۵ را ببینید)

$$v_p = \frac{\omega \lambda_g}{2\pi} = \frac{c}{\sin \theta} \quad (16-113)$$

به این ترتیب سرعت گروه، v_g ، می‌شود.

$$v_g = \frac{\langle S \rangle / a}{\langle u \rangle / a} = c \frac{k_g}{k} \hat{z} = c \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \hat{z}$$

یا

$$v_g = c \sin \theta \hat{z} \quad (115-16)$$

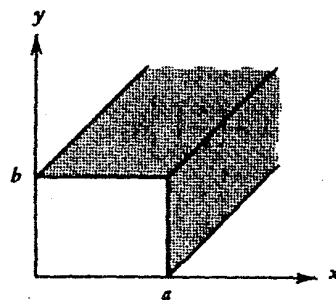
توجه کنید که سرعت گروه، همان طور که در بالا بیان شد، از سرعت نور در خلأ کمتر است. علاوه بر این توجه به رابطه $v_p v_g = c^2$ نیز جالب است. بررسی مشروح انرژی، شدت، سرعت فاز و سرعت گروه مربوط به هر مد در مسئله ۱۶-۱۸ مطرح می‌شود.

سرانجام یادآوری می‌کنیم موجی که آن را الکترومغناطیس عرضی (TEM) می‌نامیم می‌تواند با $E_z = H_z = 0$ بین دو صفحه متشرف شود. در این حالت روی ω و θ محدودیتی نیست (مسئله ۱۶-۱۹ را ببینید).

۱۶-۴-۲ موجبرها

انتشار امواج الکترومغناطیسی بین دو صفحه موازی، فلزی و بزرگ را در زیربخش قبل بحث کردیم. در این مورد انتشار موج در داخل یک لوله فلزی را بررسی می‌کنیم. برای سادگی فقط موجبرهای مستطیلی را تحلیل می‌کنیم. یک موجبر چهارگوش که ابعاد سطح مقطع آن a و b و محور آن در راستای z است، مطابق شکل ۱۶-۱۶، در نظر می‌گیریم. برای آسانی تحلیل، مانند طول موج λ_g که در انتشار بین دو صفحه موازی با آن مواجه شدیم، طول موج λ_g وابسته به انتشار موج در راستای z را در نظر می‌گیریم. به این ترتیب وابستگی میدانها به z را به صورت $e^{i(k_g z)}$ فرض می‌کنیم.

حال حالت TE را بررسی می‌کنیم، یعنی $E = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y$ را انتخاب می‌کنیم. با وجود این سه مؤلفه میدان H غیرصفرند، یعنی



شکل ۱۶-۱۶ یک موجبر مستطیلی با راستای انتشار در جهت z .

$H = \hat{x}H_x + \hat{y}H_y + \hat{z}H_z$ (مثال ۱۶-۱۴ را برای TM ببینید). در نبود توزیعهای بار و جریان در داخل موجبر، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در معادله موج برداری غیرمیرای همگن صدق می‌کنند

$$\nabla^2 \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = 0$$

در مختصات دکارتی، این رابطه به پنج معادله موج نرده‌ای تجزیه می‌شود. کافی است که معادله را برای یکی از مؤلفه‌ها حل کنیم، آن‌گاه با استفاده مستقیم از روابط ماکسول، مؤلفه‌های دیگر به دست می‌آیند. بنابراین معادله زیر را بررسی می‌کنیم

$$\nabla^2 H_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0 \quad (116-16)$$

وابستگی زمانی، و وابستگی به z مؤلفه H_z را به شکل $e^{i(k_g z - \omega t)}$ در نظر می‌گیریم و در مختصات دکارتی ∇^2 را بسط می‌دهیم. این معادله به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + (k^2 - k_g^2) H_z = 0 \quad (117-16)$$

قبل از حل این معادله، به کمک معادله‌های تان ماکسول، H_y ، H_x ، E_y و E_x را برحسب H_z می‌نویسیم. وابستگی زمانی و وابستگی به z تمام مؤلفه‌های میدانها را به شکل $e^{i(k_g z - \omega t)}$ فرض می‌کنیم. آن‌گاه از رابطه $\nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ روابط زیر را از بین روابط دیگر پیدا می‌کنیم

$$E_x = \frac{\mu_0 \omega}{k_g} H_y \quad \text{و} \quad E_y = -\frac{\mu_0 \omega}{k_g} H_x \quad (118-16)$$

همچنین از رابطه $\nabla \times \mathbf{H} - \partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ روابط

$$i \epsilon_0 \omega E_x + \frac{\partial H_z}{\partial y} - i k_g H_y = 0$$

و

$$i \epsilon_0 \omega E_y + i k_g H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \quad (119-16)$$

را از بین بقیه روابط می‌نویسیم. ترکیب این روابط نتیجه زیر را، از بین سایر روابط، بین H_x و H_z و نیز بین H_y و H_z به دست می‌دهد

$$i k_g \left[1 - \left(\frac{k}{k_g} \right)^2 \right] H_x = \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (120-16)$$

$$i k_g \left[1 - \left(\frac{k}{k_g} \right)^2 \right] H_y = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

به این ترتیب روابط (۱۶-۱۱۸) و (۱۶-۱۲۰)، مؤلفه‌های E_y ، E_x ، H_y و H_x را برحسب H_z به دست می‌دهند. اکنون H_z را از معادله (۱۶-۱۱۷) به دست می‌آوریم. از روش جدا کردن متغیرها استفاده می‌کنیم. با قراردادن $H_z(x, y) = h_1(x)h_2(y)$ و تقسیم بر H_z نتیجه می‌گیریم

$$-\frac{1}{h_1} \frac{d^2 h_1}{dx^2} = \frac{1}{h_2} \frac{d^2 h_2}{dy^2} + k^2 - k_g^2$$

با برابر قراردادن دو طرف با ثابت جدایی k_x^2 به دست می‌آوریم

$$\frac{d^2 h_1}{dx^2} + k_x^2 h_1 = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d^2 h_2}{dy^2} + k_y^2 h_2 = 0 \quad (۱۶-۱۲۱)$$

که

$$k_x^2 + k_y^2 - k^2 - k_g^2 = 0 \quad (۱۶-۱۲۲)$$

که A_{mn} ها ثابت‌اند. هر جمله از این جمع بینهایت که یک مد نام دارد با دو عدد صحیح m و n شاخص‌گذاری شده است. هر یک از این جمله‌ها یک مد TE_{mn} است که TE، همان طور که گفتیم به معنی الکتریکی عرضی است.

رابطه بین λ_g هر مد موجبر با طول موج تابش در فضای تهی، را می‌توان با قراردادن k_x و k_y در رابطه (۱۶-۱۲۲) مانند روشی که برای دو صفحه موازی به کار رفت [معادله (۱۶-۱۱۲)] به دست آورد به این ترتیب داریم

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2 &= \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 \end{aligned} \quad (۱۶-۱۲۵)$$

که

$$\frac{1}{\lambda_c^2} = \left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2 \quad (۱۶-۱۲۶)$$

طول موج قطع λ_c را مشخص می‌کند.

در این بحث فقط، در مورد انتشار میدانهای TE یا TM (مثال ۱۶-۱۴ را ببینید) در موجبرهای مستطیلی بحث کردیم. اما می‌توان در حالت کلی نشان داد که این میدانها و ترکیب خطی آنها، همه حالت‌هایی هستند که می‌توانند در این موجبرها و لوله‌ها منتشر شوند. مثلاً می‌توان نشان داد که این موضوع برای مدهای TEM صحیح است که در آن به‌ازای تمام مقادیر x و y و z ، داریم $E_z = H_z = 0$ (مسئله ۱۶-۲۲ را ببینید).

۱۶-۴-۳ تشدیدکننده‌های کاواکی

در این زیربخش نوسانهای الکترومغناطیسی را در قسمتی از فضا که از همه طرف با دیواره‌های فلزی محدود شده، یعنی تشدیدکننده کاواکی،

به این ترتیب روابط (۱۶-۱۱۸) و (۱۶-۱۲۰)، مؤلفه‌های E_y ، E_x ، H_y و H_x را برحسب H_z به دست می‌دهند.

اکنون H_z را از معادله (۱۶-۱۱۷) به دست می‌آوریم. از روش جدا کردن متغیرها استفاده می‌کنیم. با قراردادن $H_z(x, y) = h_1(x)h_2(y)$ و تقسیم بر H_z نتیجه می‌گیریم

$$-\frac{1}{h_1} \frac{d^2 h_1}{dx^2} = \frac{1}{h_2} \frac{d^2 h_2}{dy^2} + k^2 - k_g^2$$

با برابر قراردادن دو طرف با ثابت جدایی k_x^2 به دست می‌آوریم

$$\frac{d^2 h_1}{dx^2} + k_x^2 h_1 = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d^2 h_2}{dy^2} + k_y^2 h_2 = 0 \quad (۱۶-۱۲۱)$$

که

$$k_x^2 + k_y^2 - k^2 - k_g^2 = 0 \quad (۱۶-۱۲۲)$$

رابطه (۱۶-۱۲۱) را به همراه شرایط مرزی "مسئله ویژه مقدار" و معادله (۱۶-۱۲۲) را شرط ویژه مقدار می‌نامیم. معادله h_1 جواب $\sin k_x x$ و $\cos k_x x$ و معادله h_2 جواب $\sin k_y y$ و $\cos k_y y$ دارد. به این ترتیب عمومی‌ترین جواب برای $H_z(x, y, z)$ می‌شود

$$\begin{aligned} H_z(x, y, z) &= [A_1 \sin k_x x \sin k_y y + A_2 \sin k_x x \cos k_y y \\ &+ A_3 \cos k_x x \sin k_y y + A_4 \cos k_x x \cos k_y y] e^{ik_g z} \end{aligned}$$

که A_i ها ثابت‌هایی هستند که باید به کمک شرایط مرزی حساب شوند. با به کار بردن روابط (۱۶-۱۱۸) و (۱۶-۱۲۰) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i\mu_0 \omega k_y}{k_g^2} \left[1 - \left(\frac{k}{k_g}\right)^2 \right]^{-1} [A_1 \sin k_x x \cos k_y y - A_2 \sin k_x x \\ &\sin k_y y + A_3 \cos k_x x \cos k_y y - A_4 \cos k_x x \sin k_y y] e^{ik_g z} \end{aligned} \quad (۱۶-۱۲۳)$$

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{i\mu_0 \omega k_x}{k_g^2} \left[1 - \left(\frac{k}{k_g}\right)^2 \right]^{-1} [A_1 \cos k_x x \sin k_y y + A_2 \cos k_x x \\ &\cos k_y y - A_3 \sin k_x x \sin k_y y - A_4 \sin k_x x \cos k_y y] e^{ik_g z} \end{aligned}$$

اکنون با توجه به اینکه می‌توان از هر یک از شرایط مرزی میدان الکتریکی یا از شرایط مرزی میدان مغناطیسی استفاده کرد، زیرا هر مجموعه برای تعیین جواب یکتا کافی است، شرایط مرزی را در مورد میدان الکتریکی به کار می‌بریم اما برای بحث روی شرایط H مثال ۱۶-۱۷ را ببینید. در سطح رسانا میدان الکتریکی مماسی صفر می‌شود. با قراردادن $E_y = 0$ در $x = a$ و $x = 0$ نتیجه می‌شود

که l عدد صحیح مثبت یا صفر است و n همان اعداد به کار رفته در E_x است

$$F_1(y) = A'_1 \sin k'_y y + A'_2 \cos k'_y y \quad (۱۳۳-۱۶)$$

در این رابطه k'_y ثابتی است که باید تعیین شود. سرانجام برای E_z نیز به همین روش و با شرایط مرزی $E_z = 0$ در $x = 0, a$ و در $y = 0, b$ ، به دست می آوریم

$$E_z = E_{0z} F_1(z) \sin\left(\frac{l\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \quad (۱۳۴-۱۶)$$

که همان l و m مربوط به E_x و E_y را به کار برده ایم و

$$F_2(z) = A''_1 \sin k''_z z + A''_2 \cos k''_z z \quad (۱۳۵-۱۶)$$

که k''_z ثابتی است که باید تعیین شود.

مجهولهای باقیمانده یعنی F_1, F_2, F_3 و رابطه بین دامنه میدانها در سه بعد را می توان، اکنون، از رابطه دیورژانس ماکسول $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ تعیین کرد. با قراردادن روابط (۱۳۰-۱۶)، (۱۳۲-۱۶) و (۱۳۴-۱۶) در $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ نتیجه می گیریم

$$E_{0x} \frac{dF_1}{dx} \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c} z\right) + E_{0y} \frac{dF_2}{dy} \sin\left(\frac{l\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c} z\right) + E_{0z} \frac{dF_3}{dz} \sin\left(\frac{l\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) = 0 \quad (۱۳۶-۱۶)$$

لازمه صفرشدن این رابطه به ازای تمام مقادیر x, y, z این است که $k_x = l\pi/a, A_2 = A'_2 = A''_2 = 1$ و $A_1 = A'_1 = A''_1 = 0$ و $k'_y = m\pi/b$ و $k''_z = n\pi/c$ بنابراین

$$F_1 = \cos\left(\frac{l\pi}{a} x\right) \quad F_2 = \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \\ F_3 = \cos\left(\frac{n\pi}{c} z\right) \quad (۱۳۷-۱۶)$$

علاوه بر این، برای برقرار بودن رابطه (۱۳۶-۱۶) رابطه زیر باید صادق باشد

$$\frac{l\pi}{a} E_{0x} + \frac{m\pi}{b} E_{0y} + \frac{n\pi}{c} E_{0z} = 0 \quad (۱۳۸-۱۶)$$

بنابراین میدانهای مجاز در کاواک با روابط (۱۳۰-۱۶)، (۱۳۲-۱۶)، (۱۳۴-۱۶) و (۱۳۷-۱۶) و (۱۳۸-۱۶) مشخص می شوند.

بررسی می کنیم. کاواک را به شکل مکعب مستطیل با ابعاد a, b و c فرض می کنیم. چون فضا از همه طرف محدود شده است کاواک از هر موج منتشرشونده ای برای کاواک قابل قبول نیست بلکه جوابها امواج ساکن در سه راستای عمود بر هم هستند.

برای امواج تکفام، یعنی امواجی با وابستگی زمانی $e^{-i\omega t}$ ، میدان الکتریکی در روابط $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ و $\nabla^2 \mathbf{E} + (\omega/c)^2 \mathbf{E} = 0$ صدق می کند. در مختصات دکارتی، هر مؤلفه \mathbf{E} در معادله موج زده ای صادق است. ابتدا معادله را برای E_x حل می کنیم

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_x = 0 \quad (۱۲۷-۱۶)$$

می توان با به کار بردن روش جداسازی متغیرها جواب کلی را برای E_x به صورت زیر به دست آورد

$$E_x = (A_1 \sin k_x x + A_2 \cos k_x x)(B_1 \sin k_y y + B_2 \cos k_y y) \\ (C_1 \sin k_z z + C_2 \cos k_z z) \quad (۱۲۸-۱۶)$$

که

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (۱۲۹-۱۶)$$

و $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ ثابتهایی هستند که باید به کمک شرایط مرزی مشخص شوند و k_x, k_y, k_z ثابتهای جداسازی اند که آنها را نیز باید به کمک شرایط مرزی (مثلاً شرایط مرزی \mathbf{E}) و از $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ به دست آورد. چون در سطح یک ماده رسانای خوب، میدان الکتریکی مماسی صفر است، جواب رابطه (۱۲۸-۱۶) را به شرط $E_x = 0$ در $x = 0, a, z = 0, c, y = 0, b$ موکول می کنیم. که لازمه آن $C_2 = B_2 = 0$ و $k_y = m\pi/b$ و $k_z = n\pi/c$ است، که در آن m و n اعداد صحیح مثبت یا صفرند. به این ترتیب

$$E_x = E_{0x} F_1(x) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c} z\right) \quad (۱۳۰-۱۶)$$

که

$$F_1(x) = A_1 \sin k_x x + A_2 \cos k_x x \quad (۱۳۱-۱۶)$$

به همین روش جواب معادله موج زده ای برای E_y ، موکول به شرایط مرزی مناسب ($E_y = 0$ در $x = 0, a$ و در $z = 0, c$) است، نتیجه می شود

$$E_y = E_{0y} F_2(y) \sin\left(\frac{l\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c} z\right) \quad (۱۳۲-۱۶)$$

TE، $F_{oz} = 0$ می‌گیریم، در نتیجه معادله (۱۳۸-۱۶) می‌شود

$$\frac{l\pi}{a} E_{ox} + \frac{m\pi}{b} E_{oy} = 0 \quad (\text{TE}) \quad (141-16)$$

از طرف دیگر بنابر تعریف برای مد TM، $H_{oz} = 0$ است. در این حالت [از معادله (۱۴۰-۱۶)] لازم است که

$$\frac{l\pi}{a} E_{oy} - \frac{m\pi}{b} E_{ox} = 0 \quad (\text{TM}) \quad (142-16)$$

نتایج بالا نشان می‌دهند که میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{H} در کاواک در هر نقطه همواره $\pi/2$ اختلاف فاز دارند. بنابراین امواج ساکن در کاواک انرژی منتقل نمی‌کنند (مسئله ۱۶-۲۶ را ببینید). سرانجام تکرار می‌کنیم که برای به‌دست‌آوردن این نتایج رسانایی دیواره‌های کاواک را بینهایت فرض کردیم. بنابراین میدان E مماسی و جریانها روی دیواره صفرند. در نتیجه اتلاف توان وجود ندارد. با این حال، در هر کاواک واقعی که دیواره‌ها رسانایی محدودی دارند، جریان در دیواره‌ها به‌وجود می‌آید. به همین جهت نتیجه وجود جمله $I^2 R$ ، اتلاف توان است، یعنی ضمن تضعیف جریانها باعث جاری شدن انرژی به خارج کاواک می‌شوند. این اتلاف هر منحنی پاسخ تشدید تیز را میرا و تبدیل به یک منحنی پهن، مانند جواب مدار تشدید RLC سری می‌کند. علاوه بر این، مفهوم عامل Q را که برای کیفیت (تیزی) منحنی تشدید در نظریه مدارها به‌کار می‌رود می‌توان در کاواکها هم به‌کار برد.^۱

مثال ۱۳-۱۶ سرعت فاز و گروه در تابش بین صفحه‌های موازی قبلاً نشان دادیم که سرعتهای فاز و گروه مربوط به تابش بین دو صفحه فلزی موازی به ترتیب $c/\sin\theta$ و $c\sin\theta$ است [روابط (۱۱۳-۱۶) و (۱۱۵-۱۶)]. در حالت کلی این سرعتها از روابط زیر به‌دست می‌آیند

$$v_p = \frac{\omega}{k_g} \quad \text{و} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk_g} \quad (143-16)$$

رابطه اول را با قراردادن رابطه (۱۰۸-۱۶) در $v_p = \omega/k_g$ می‌توان به‌سادگی امتحان کرد و به‌دست آورد

$$v_p = \frac{\omega}{k \sin\theta} = \frac{c}{\sin\theta}$$

رابطه دوم را نیز با استفاده از معادله (۱۱۲-۱۶)، یعنی $\omega = c(k_g^2 + k_c^2)^{1/2}$ و یا $k_g^2 = k^2 - k_c^2 = \omega^2/c^2 - k_c^2$ به‌دست آورد

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_g} = ck_g(k_g^2 + k_c^2)^{-1/2}$$

بسامد نوسانهای موجود در کاواک [رابطه (۱۲۹-۱۶) را ببینید] از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{l^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} + \frac{n^2\pi^2}{c^2} \quad (139-16)$$

رابطه (۱۳۸-۱۶) نشان می‌دهد که فقط دو تا از ثابتهای E_{ox} ، E_{oy} و E_{oz} مستقل‌اند و بنابراین نوسانهای مجاز در حالت کلی برای $l, m, n \neq 0$ واگنی دوگانه دارند. معنی این واگنی این است که متناظر با هر بسامد مجاز دو مد نوسانی مجاز با شکل میدان الکترومغناطیسی متفاوت وجود دارند. با این حال اگر یکی از اعداد صحیح صفر باشد آن‌گاه واگنی وجود ندارد (مسئله ۱۶-۲۴ را ببینید). از معادله ماکسول $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \partial \mathbf{H} / \partial t$ می‌توان میدان مغناطیسی متناظر را محاسبه کرد. با در نظر گرفتن وابستگی زمانی \mathbf{H} به شکل $e^{-i\omega t}$ داریم $\nabla \times \mathbf{E} = i\mu_0 \omega \mathbf{H}$. به این ترتیب

$$H_x = -\frac{i}{\mu_0 \omega} \left(\frac{m\pi}{b} E_{oz} - \frac{n\pi}{c} E_{oy} \right) \sin \frac{l\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{n\pi z}{c}$$

$$H_y = -\frac{i}{\mu_0 \omega} \left(\frac{n\pi}{c} E_{ox} - \frac{l\pi}{a} E_{oz} \right) \cos \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{n\pi z}{c}$$

$$H_z = -\frac{i}{\mu_0 \omega} \left(\frac{l\pi}{a} E_{oy} - \frac{m\pi}{b} E_{ox} \right) \cos \frac{l\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi z}{c} \quad (140-16)$$

یادآوری می‌کنیم که روابط $\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t$ و $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ باید تازهای برای میدانها به‌دست نمی‌دهند.

باید توجه کرد که در بحث بالا عمومی‌ترین میدانهای الکتريکی عرضی مجاز در یک کاواک مستطیلی TE_{lmn} را حساب کردیم. اگر $m = 0$ باشد آن‌گاه E_x ، E_z ، H_y و H_z صفر شده و E_y غیرصفر باقی می‌مانند. اما اگر دو عدد از سه عدد l و m و n صفر باشند تمام مؤلفه‌های \mathbf{E} و \mathbf{H} صفر می‌شوند. بنابراین پایبندترین مد وقتی است که فقط یکی از آنها صفر باشد. مثلاً اگر $n = 0$ باشد تمام مؤلفه‌های میدان الکترومغناطیسی صفرند. بنابراین $n = 1$ پایبندترین مد است. اکنون اگر $m = 0$ و $l = m = 0$ باشد باز هم تمام مؤلفه‌ها صفر خواهند شد. اکنون به‌سادگی می‌توانیم این جواب کلی را به شکلهای مختلف انتشار اختصاص دهیم. z را محور انتشار موجبر قبلی در نظر می‌گیریم، آن‌گاه دو نوع موج یکی مد TM که در آن H_z صفر است و دیگری مد TE که در آن $E_z = 0$ ، را برای تمام مقادیر ممکن l ، m و n فرض می‌کنیم. توجه کنید که این مدهای ویژه را نسبت به محور نسبتاً دلخواه (در این مورد) z در نظر گرفته‌ایم. به این ترتیب بنابر تعریف برای مد

1. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd ed. (New York: Wiley, 1975) p. 356.

با قراردادن c/ω به جای $(k_g^x + k_c^x)^{-1/2}$ و $k \sin \theta$ به جای k_g ، نتیجه می‌شود $v_g = c \sin \theta$.

مثال ۱۴-۱۶ امواج TM در موجبر مستطیلی

میدانهای TE در داخل یک موجبر را با انتخاب $E_z \equiv 0$ از قبل تعیین کردیم، در این صورت میدان مغناطیسی مجاز به داشتن مؤلفه طولی H_z است. در این مثال حالت مغناطیسی عرضی را بحث می‌کنیم. با این انتخاب که $H_z = 0$ ، میدان الکتریکی مجاز به داشتن یک مؤلفه طولی است. به این ترتیب مانند حالت TE، معادله زیر را حل می‌کنیم

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + \frac{d^2 E_z}{dy^2} + \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 \right] E_z = 0 \quad (144-16)$$

با توجه به شرط مرزی مبنی بر صفر شدن میدان الکتریکی مماس در سطح یک رسانای خوب داریم

$$E_z(x, y, z) = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\pi z/\lambda_g} \quad (145-16)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که پایینترین مد غیرصفر امواج TM در یک موجبر TM_{11} است زیرا TM_{10} همواره صفر است. در حالی که پایینترین مد غیرصفر TE، TE_{10} است. حال بقیه مؤلفه‌های \mathbf{E} و \mathbf{H} و خواص آنها را می‌توان از معادله‌های ماکسول به دست آورد. این مطلب را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

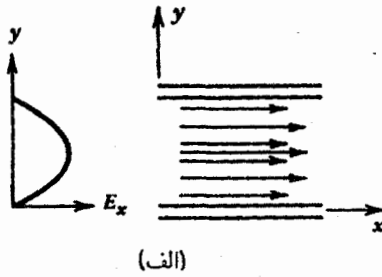
مثال ۱۵-۱۶ نقش میدان بین صفحه‌های رسانا

در این مثال درباره نقشهای ممکن میدان بین دو صفحه رسانای خوب و موازی بحث می‌کنیم. برای امواج TE این میدان از رابطه (۱۰۷-۱۶) به دست می‌آید. پایینترین مد ممکن را که از روابط (۱۰۷-۱۶) و (۱۱۴-۱۶)، با $n = 1$ ، حاصل می‌شود در نظر می‌گیریم. یعنی

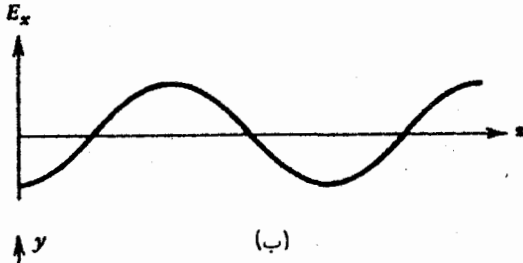
$$\mathbf{E} = E_0 \hat{x} \sin \frac{\pi y}{a} e^{i(k_g z - \omega t)} \quad k_g = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{4a^2} \right)^{1/2}$$

$$\mathbf{B} = \frac{E_0}{\omega} \left[k_g \hat{y} \sin \frac{\pi y}{a} + i \frac{\pi}{a} \hat{z} \cos \frac{\pi y}{a} \right] e^{i(k_g z - \omega t)}$$

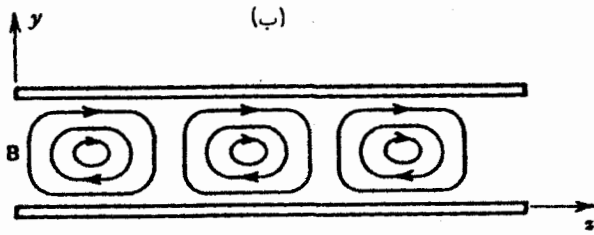
میدان الکتریکی کاملاً در جهت x است. شکلهای ۱۷-۱۶ (الف) و ۱۷-۱۶ (ب) وابستگی آن را به y و z نشان می‌دهد. همچنین شکل ۱۷-۱۶ (الف)، نمای انتهایی ترسیمهاست، که در آن چگالی بیشتر خطوط میدان الکتریکی در وسط را در مقایسه با کناره‌ها نشان می‌دهد.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۱۷-۱۶ نقشهای میدان بین دو صفحه رسانای خوب و بزرگ. (الف) نمای انتهایی که نمایش وابستگی $|\mathbf{E}|$ به راستای عمود بر صفحه‌ها (راستای y) است. (ب) وابستگی $|\mathbf{E}|$ به جهت انتشار. (ج) وابستگی $|\mathbf{B}|$ به جهت انتشار و به جهت عمود بر صفحه‌ها (y و z).

میدان \mathbf{B} در راستای y و z مؤلفه دارد. علاوه بر این وابستگیهای دو مؤلفه به z به اندازه $\pi/2$ با هم اختلاف فاز دارند که باعث مشکلتر شدن تعیین نقش نسبت به میدان \mathbf{E} می‌شود. انتظار داریم که خطوط میدان \mathbf{B} به هم نزدیک باشند. نزدیک سطوح صفحه‌ها $(y = 0, a)$ ، $\sin \pi y/a$ صفر می‌شود و میدان کاملاً مماسی است. نزدیک $y = a/2$ ، $\cos \pi y/a$ صفر شده و میدان کاملاً عمود بر دو صفحه (جهت y) می‌شود. شکل ۱۴-۱۶ (ج) چند خط میدان \mathbf{B} را نمایش می‌دهد.

مثال ۱۶-۱۶ چگالی مدهای مجاز تشدیدکننده کاواکی

چگالی نوسانهای الکترومغناطیسی مجاز در بازه بسامد $d\omega$ در یک تشدیدکننده کاواکی، که در بخش ۳-۴-۱۶ بحث شد، را می‌توان به کمک اعداد موج در سه راستای عمود بر هم یعنی، $k_x = l\pi/a$ ، $k_z = n\pi/c$ ، $k_y = m\pi/b$ حساب کرد. در یک بازه بسامد $d\omega$ و بنابراین در بازه اعداد موج dk_x ، dk_y و dk_z ، تعداد نوسانها می‌شود

دامنهٔ امواج بازتاب و شکست که به E_1 بهنجار شده است،

$$E_2/E_1 = t_{12p} \text{ و } E_1'/E_1 = r_{12p}$$

$$r_{12p} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad t_{12p} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad [۳۷-۱۶]$$

ضرایب r_{12s} و r_{12p} را ضرایب فرنل می‌نامیم. اگر قطبیدگی موج عمود بر صفحه تابش باشد (قطبیدگی s). قوانین بازتاب و شکست همان است اما ضرایب فرنل می‌شود

$$r_{12s} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad t_{12s} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad [۴۳-۱۶]$$

اگر $\theta_1 = 0$ باشد تابش را تابش عمودی می‌گوییم. در این صورت $\theta_1 = \theta_1' = \theta_2 = 0$ است و

$$r_{12p} = -r_{12s} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad t_{12p} = t_{12s} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}$$

$$[۲۲-۱۶]$$

بازتابندگی و تراکسیلندگی، R و T برحسب بردارهای پوئینتینگ و برحسب ضرایب فرنل به صورت زیر تعریف می‌شوند*

$$R_p = \frac{\langle S_1' \rangle}{\langle S_1 \rangle} = r_{12p}^2 \quad T_p = \frac{\langle S_2 \rangle}{\langle S_1 \rangle} = \frac{n_2}{n_1} t_{12p}^2 \quad [۲۳-۱۶], [۲۴-۱۶]$$

پایستاری توان را با رابطهٔ $R+T=1$ بیان می‌کنیم. عبارتهای مشابهی برای قطبیدگی s وجود دارد.

اگر $\theta_1 \approx \pi/2$ باشد، تابش را تابش خراشان می‌نامیم. در این حالت $r_{12p} = r_{12s} = -1$ و $t_{12p} = t_{12s} = 0$. بنابراین $R_p = R_s = 1$ و $T_p = T_s = 0$ که بازتاب کلی را در هر دو حالت مشخص می‌کند.

$$\text{اگر } n_1 > n_2 \text{ و}$$

$$\theta_1 \geq \theta_c = \sin^{-1}(n_2/n_1) \quad [۴۹-۱۶]$$

تابش را تابش زاویهٔ بحرانی می‌نامیم. در $\theta_1 = \theta_c$ ، θ_2 به مقدار بیشینه خود، $\pi/2$ ، می‌رسد و $R_p = R_s = 1$ (بازتاب داخلی کلی). برای $\theta_1 > \theta_c$ ، زاویهٔ θ_2 ، مختلط می‌شود، یعنی

$$\cos \theta_2 = i\beta = i(\sin^2 \theta_1 / \sin^2 \theta_c - 1)^{1/2}$$

$dN = dl dm dn = (abc/\pi^2) dk_x dk_y dk_z$ در مختصات کروی می‌توان نوشت $dk_x dk_y dk_z = k^2 dk d \cos \theta d\phi$ که θ و ϕ ، راستای k را مشخص می‌کند. به این ترتیب با $dN = (V/\pi^2) k^2 dk d(\cos \theta) d\phi$ که حجم کاواک است. با انتگرال‌گیری روی زوایا نتیجه می‌شود $dN = (4V/\pi^2) k^2 dk$ و با نوشتن $k = \omega/c$ آن‌گاه داریم $k^2 dk = (\omega^2/c^3) d\omega$ بنابراین

$$\frac{dN}{d\omega} = \frac{4V}{\pi^2 c^3} \omega^2$$

که نشان می‌دهد برای یک $d\omega$ یعنی در بسامدهای بالاتر چگالی بیشتر است. مثلاً وقتی بسامد میکروموج به بسامد نوری تغییر یابد چگالی تقریباً با یک ضریب 10^{10} رشد می‌کند. این اثر نقش مهمی در ملاحظات طراحی و تعمیر میزرها (عمل در بسامدهای میکروموج) به لیزرها (عمل در بسامدهای نوری) دارد. ■

مثال ۱۷-۱۶ شرایط مرزی روی H در موجبر

در بحث قبل میدانها را با اعمال شرایط مرزی روی میدان الکتریکی در داخل موجبرها و تشدیدکننده‌های کاواکی تعیین کردیم. در این مثال مجموعه شرایط مرزی معادل مربوط به میدان مغناطیسی را به دست می‌آوریم که می‌تواند در تعیین میدانها به کار رود. موجبر بخش ۱۶-۴-۲ را در نظر می‌گیریم. از رابطهٔ (۱۷-۱۶) نتیجه می‌شود که مؤلفه قائم میدان مغناطیسی در سطح یک ماده رسانای خوب صفر است. $H_n = 0$. این شرط به معنی این است که $H_x = 0$ اگر $a = 0$ ، $x = 0$ و $H_y = 0$ اگر $b = 0$ ، $y = 0$. وقتی این شرایط را با روابط (۱۶-۱۲) ترکیب کنیم به دست می‌آوریم $\partial H_z / \partial x = 0$ در $x = 0$ ، a و $\partial H_z / \partial y = 0$ در $y = 0$ ، b . یادآور می‌شویم که با توجه به این دو شرط وابستگی H_z به x و y به صورت توابع کسینوسی (معادلهٔ ۱۶-۱۴) را ببینید) است. ■

۵-۱۶ خلاصه

یک موج الکترومغناطیسی قطبیدهٔ خطی با بسامد ω و دامنهٔ E_1 ، از ناحیه‌ای با ضریب شکست n_1 روی فصل مشترک تخت با ماده‌ای با ضریب شکست n_2 و تحت زاویه تابش θ_1 می‌تابد. اگر قطبیدگی موج در صفحهٔ تابش (قطبیدگی p) باشد در این صورت زوایای بازتاب و شکست، θ_2 و θ_1' ، به کمک قوانین بازتاب و شکست (قانون اسنل) به θ_1 ، (مطابق شکل‌های ۱۶-۲ و ۱۶-۳)، وابسته است

$$\theta_1' = \theta_1 \quad n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad [۳۵-۱۶]$$

که در بالا تعریف شد، است. به این ترتیب صفحه‌های با فاز ثابت با صفحه‌های با دامنه ثابت زاویه ϕ می‌سازند.

مانند حالت دی‌الکتریک، یک زاویه بروستر مشابه وجود دارد، با این تفاوت که چندان چشمگیر نیست. همچنین در رساناهایی خوب و/یا بسامدهای پایین اختلاف بین ضرایب s و p قابل چشمپوشی است. در رسانای ایده‌آل، $\sigma_c/\epsilon\omega \rightarrow \infty$ ، $\hat{r}_{12s} = -1$ و $\hat{r}_{12p} = 1$ ، به دست می‌آید. که نتیجه می‌شود $R_p = R_s = 1$. در حالت کلی در یک فصل مشترک رسانا داریم

$$R = \hat{r}_{12}\hat{r}_{12}^* = |\hat{r}_{12}|^2 \quad \text{و} \quad A = T = 1 - R$$

$$[۶۷-۱۶]، [۶۸-۱۶]$$

که A جذب است.

وقتی امواج الکترومغناطیسی به ناحیه‌ای از فضا که با مواد رسانای خوب احاطه شده محدود شده باشند دو صفحه موازی یا یک لوله شرایط معینی وجود دارند که برای انتشار امواج باید برآورده شوند. برای دو صفحه که به فاصله a از هم قرار دارند، و برای n صحیح، یک طول موج قطع $\lambda_c = 2a/n$ وجود دارد که در آن امواج با طول موج $\lambda_0 > \lambda_c$ نمی‌توانند منتشر شوند. طول موج مؤثر موج منتشر شده، که آن را λ_g می‌نامیم، از طول موج λ_0 بزرگتر می‌شود و از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\frac{1}{\lambda_g} \equiv \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_c} \quad \lambda_c = \frac{2a}{n} \quad [۱۱۱-۱۶]$$

چون λ_c اندازه‌های متمایزی دارند، متناظر با آن نیز اندازه‌های متمایزی خواهند داشت. سرعت‌های فاز و گروه موج منتشر شده عبارت‌اند از

$$v_p = \frac{c}{\sin \theta} \quad v_g = c \sin \theta \quad \sin \theta = \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \quad [۱۱۳-۱۶]، [۱۱۵-۱۶]$$

بنابراین

$$v_p v_g = c^2$$

برای لوله‌ای با مقطع چهارگوش و ابعاد a و b ، برای طول موج قطع در مد TE_{mn} داریم

$$\frac{1}{\lambda_c^2} = \left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2 \quad [۱۲۶-۱۶]$$

که یک کمیت موهومی محض است. بنابراین ضرایب فرنل نیز مختلط می‌شوند، یعنی

$$\hat{r}_{12p} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - i n_1 \beta}{n_2 \cos \theta_1 + i n_1 \beta} \quad \hat{r}_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - i n_2 \beta}{n_1 \cos \theta_1 + i n_2 \beta} \quad [۵۲-۱۶]$$

و بازتابندگی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$R_p = \hat{r}_{12p} \hat{r}_{12p}^* = |\hat{r}_{12p}|^2 = 1 \quad R_s = |\hat{r}_{12s}|^2 = 1$$

اگر

$$\theta_1 = \theta_B = \tan^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \quad [۵۵-۱۶]$$

باشد آن‌گاه $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ و در این صورت زاویه تابش را زاویه بروستر می‌نامیم. در این حالت r_{12p} صفر می‌شود و

$$R_p = 0 \quad R_s = \frac{n_2}{n_1} \cos^2 2\theta_B$$

این اثر را می‌توان برای قطبی کردن امواج الکترومغناطیسی به کار برد. وقتی فصل مشترک محیطها رساناست، n_2 و θ_2 مختلط می‌شوند. بنابراین برای تشخیص مختلط بودن، یک شاخص (\hat{n}_2) روی آنها، $\hat{\theta}_2$ می‌گذاریم. فرمولبندی ریاضی و نتایج آن مانند فصل مشترک دی‌الکتریک-دی‌الکتریک است، به شرطی که از \hat{n}_2 و $\hat{\theta}_2$ استفاده شود. با این حال نتایج فیزیکی برحسب کمیت‌های حقیقی با حالت غیررسانا بسیار متفاوت است. قانون اسنل می‌شود

$$N(\theta_1) \cos \phi = \bar{n} \quad \text{یا} \quad N(\theta_1) \sin \phi = n_1 \sin \theta_1 \quad [۹۱-۱۶]، [۹۲-۱۶]$$

که ϕ زاویه شکست است

$$N(\theta_1) = (\bar{n}^2 + n_1^2 \sin^2 \theta_1)^{1/2} \quad [۹۰-۱۶]$$

و \bar{n} ثابت اپتیکی ماده رسانا با گذردهی مؤثر زیر است

$$\bar{\epsilon}_2 = \epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_1 \quad [۸۵-۱۶]$$

اندازه جذب به طول نفوذ در راستای عمود بر فصل مشترک وابسته است. طول جذب (عمق پوسته) ماده در راستای عمود بر فصل مشترک، وارون $\omega \bar{k}/c$ است که \bar{k} ثابت اپتیکی محیط با گذردهی مؤثر محیط،

به دست آورید. برای $\omega = \omega_0$ ، dn_2 را طوری تعیین کنید که (الف) کمینه و (ب) بیشینه باشد.

۷-۱۶ یک تار نوری مانند شکل ۵-۱۶ در نظر بگیرید. ضریب شکستهای تار و محیط اطراف، 1.55 و 1 است. بزرگترین زاویه بین محور تار و جهت پرتو نوری که در تار منتشر می شود را حساب کنید. از مواد پوششی برای پوشاندن تار استفاده شده است. تغییر زاویه را وقتی که ماده پوششی ضریب شکست مساوی 1.52 و 1.50 دارد، به دست آورید.

۸-۱۶ یک ماده با رسانایی σ_c و گذردهی ϵ ناحیه $z \geq 0$ را پر کرده است. یک موج تخت تکفام با بسامد ω روی فصل مشترک رسانا به طور عمود می تابد. نشان دهید نسبت دامنه بازتاب به دامنه تابش برابر است با $(\hat{n}_2 + 1)/(\hat{n}_2 - 1)$ ، که

$$\hat{n} = n_2 + ik_2 = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0} (1 + i\sigma_c/\epsilon\omega)^{1/2}$$

۹-۱۶ یک موج قطبیده p از یک ماده با ضریب شکست n_1 بر یک فصل مشترک مسطح رسانای خوب می تابد. زاویه تابش θ_1 نزدیک تابش خراشان است $1 \ll \phi_0 = (\pi/2 - \theta_1)$. نشان دهید ضرایب فرنل با روابط (۹۶-۱۶) داده می شوند.

۱۰-۱۶ دو قسمت معادله (۹۶-۱۶) را به دست آورید.

۱۱-۱۶ معادله (۱۰۱-۱۶) را به دست آورید.

۱۲-۱۶ یک موج الکترومغناطیسی روی یک فصل مشترک مسطح رسانای خوب با زاویه تابش $(\pi/2 - \phi_m)$ می تابد به طوری که بازتابندگی امواج p را (مثال ۱۰-۱۶) را ببینید) کمینه می کند. (الف) نشان دهید موج p در اثر بازتاب به اندازه $\pi/2$ اختلاف فاز می یابد. (ب) نشان دهید موج s در اثر بازتاب به اندازه π اختلاف فاز پیدا می کند. (ج) نسبت دامنه های قطبیده های p و s برای آنکه موج بازتاب، (الف) قطبیده دایره ای (ب) قطبیده خطی باشد چقدر است.

۱۳-۱۶ یک موج الکترومغناطیسی با دامنه $H_0 \hat{x} = 3 \hat{x} (A/m)$ و بسامد $\omega = 400\pi \times 10^6 \text{ rad/s}$ بر روی ورقه ای از نقره به ضخامت $15 \mu\text{m}$ و رسانایی $(\Omega \cdot \text{m})^{-1} = 62 \times 10^6$ به طور عمود می تابد. دامنه های میدان را درست پس از ورود به ورقه، درست پس از خروج از ورقه، و درست قبل از خروج از ورقه به دست آورید.

۱۴-۱۶ دو صفحه موازی مسی نامتناهی به فاصله 8 cm از هم قرار دارند. یک موج TE با بسامد 3×10^9 هرتز در صفحه yz ، که y بر دو صفحه عمود است، منتشر می شود. (الف) طول موج قطع را

که m و n اعداد صحیح اند.

بسامد نوسانهای موجود در کاواکی چهارگوش به ابعاد a, b, c و عبارت است از

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{l^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{c^2}$$

مسائل

۱-۱۶ نواحی $z < 0$ و $z > 0$ به ترتیب با موادی با تراوایی $1.5\mu_0$ و $5\mu_0$ پر شده اند. میدانهای مغناطیسی در این نواحی برحسب تسلا برابر با $B_1 = 2.4 \hat{x} + 1.0 \hat{z}$ و $B_2 = 2.5 \hat{x} - 1.75 \hat{y} + 1.0 \hat{z}$ است. توزیع جریان را در $z = 0$ تعیین کنید.

۲-۱۶ یک موج الکترومغناطیسی قطبیده خطی با بسامد ω از یک محیط با ضریب شکست n_1 روی فصل مشترک مسطح محیطی به ضریب شکست $n_2 < n_1$ می تابد. زاویه تابش θ_1 از زاویه بحرانی θ_c بزرگتر است. (الف) جهت انتشار و سرعت فاز میدان E در محیط n_2 را تعیین کنید. (ب) جهت و ضریب تضعیف این موج را به دست آورید. (ج) نشان دهید که متوسط بردار پوینتینگ تراگسیل صفر است.

۳-۱۶ انتشار موج بررسی شده در مسئله ۲-۱۶ را در نظر بگیرید و جهت قطبیدگی موج نسبت به صفحه تابش را 45° فرض کنید. فاز قطبیدگیهای p و s ، ϕ_p و ϕ_s ، را در مثال ۴-۱۶ حساب کردیم. (الف) زاویه های تابش را برای $\phi_p = \phi_s$ تعیین کنید. (ب) اختلاف فاز بیشینه را به دست آورید. (ج) آیا می تواند $\pi/2 = \phi_p - \phi_s$ باشد، که در نتیجه موج بازتابیده قطبیده دایره ای باشد.

۴-۱۶ ناحیه $z_0 \leq z \leq 0$ با ماده ای دی الکتریک با گذردهی $\epsilon = 4\epsilon_0$ و تراوایی $\mu = \mu_0$ پر شده است. یک موج قطبیده خطی با دامنه $E_0 \hat{x}$ و بسامد زاویه ای ω از ناحیه $z < 0$ به طور عمود بر فصل مشترک $z = 0$ می تابد. نشان دهید نسبت شدت بازتاب به شدت تابش در ناحیه $z < 0$ برابر است با

$$\left[1 + \frac{16}{9} \csc^2 \left(\frac{2\omega z_0}{c} \right) \right]^{1/2}$$

۵-۱۶ فصل مشترک لایه ای بررسی شده در مثال ۶-۱۶ را در نظر بگیرید. بردار پوینتینگ تراگسیل را حساب کنید و آن را برای موارد $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = 2, n_5 = 1$ و $n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1$ برحسب بسامد رسم کنید.

۶-۱۶ فصل مشترک لایه ای بررسی شده در مثال ۶-۱۶ را که $n_1 < n_2 < n_3$ است در نظر بگیرید. بردار پوینتینگ بازتابنده را

برای مد TE_1 تعیین کنید. (ب) طول موج موجبر را برای مد TE_1 مشخص کنید.

۱۵-۱۶ یک موج الکترومغناطیسی با بسامد ω و عدد موج k بدون تضعیف در جهت z بین دو صفحه رسانای کامل واقع در $y = 0$ و $y = a$ منتشر می‌شود. (الف) با به‌کار بردن $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ نشان دهید دامنه میدان الکتریکی مستقل از x است. (ب) معادله دیفرانسیل دامنه الکتریکی را به صورت تابعی از y به دست آورید، و میدان الکتریکی را بر حسب زمان و مکان تعیین کنید. (ج) کمترین مقدار ω را که موج بدون تضعیف می‌تواند انتشار یابد پیدا کنید.

۱۶-۱۶ دو صفحه رسانای کامل در $y = a$ و $y = 0$ قرار دارند. یک موج TM با $H_x = H_0 \cos(ky \cos \beta) \cos(kz \sin \beta - \omega t)$ و $H_y = H_z = 0$ بین دو صفحه منتشر می‌شود که β ، H_0 ، و k ثابت‌اند. (الف) عبارتی را برای \mathbf{E} بین صفحات به دست آورید. (ب) رابطه بین β ، a ، و k را تعیین کنید. (ج) نشان دهید که میانگین زمانی بردار پوینتینگ به طور کامل در راستای z است. (د) توان میانگین عبوری از مستطیل مقید به $x = a$ ، $x = 0$ ، $y = b$ ، $y = 0$ را حساب کنید. ۱۷-۱۶ انتشار امواج TM بین دو صفحه رسانای کامل موازی واقع در $y = a$ و $y = 0$ را در نظر بگیرید. (الف) میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} که در صفحه yz و بین دو صفحه منتشر می‌شوند را تعیین کنید. (ب) پایتترین مد کدام است. (ج) نقش میدان پایتترین مد را رسم کنید. ۱۸-۱۶ انتشار موج TE بین دو صفحه مطرح شده در بخش ۱۶-۴-۱ را در نظر بگیرید. (الف) میانگین چگالی انرژی و میانگین بردار پوینتینگ بر واحد عرض را برای پایتترین دو مد حساب کنید. (ب) برای همان مدها v_g و v_p را به دست آورید.

۱۹-۱۶ (الف) نشان دهید امواج TEM که برای آنها $E_z = H_z = 0$ است می‌توانند بین دو صفحه رسانای موازی بزرگ واقع در $x = 0$ و $x = a$ وجود داشته باشند. مثلاً $\mathbf{H} = H_0(z)\hat{y}$ و $\mathbf{E} = E_0(z)\hat{x}$ را انتخاب کنید. (ب) نشان دهید این جواب محدودیتی روی ω ندارد و حتی برای جریان مستقیم ($\omega = 0$) نیز می‌تواند وجود داشته باشد. ۲۰-۱۶ سرعتهای فاز و گروه امواج الکترومغناطیسی را در موجبرهای مستطیلی با دیواره‌های رسانای کامل تعیین کنید. وابستگی آنها را به طول موج در فضای آزاد پیدا کنید.

۲۱-۱۶ یک موجبر مستطیلی با ابعاد a و b را در راستای محورهای

x و y در نظر بگیرید که محورش در راستای z است. (الف) نشان دهید اگر $a > b$ بزرگترین طول موج قطع مد TE_{mn} ، برای $m = 1$ ، $n = 0$ رخ می‌دهد. (ب) اگر $a = 2b$ باشد بسامدهای قطع را در موارد $m, n \leq 4$ در جدولی مشخص کنید. (ج) چه مدهایی در بازه طول موج $2a - 1a$ و $2a - 4a$ منتشر می‌شوند.

۲۲-۱۶ امکان وجود موج TEM در یک موجبر را که برای آن $E_z = H_z = 0$ ، برای تمام x ، y ، و z است بررسی کنید. (الف) نشان دهید ω برای یک مجموعه گسسته‌ای از بسامدها محدود نیست. (ب) H_x و H_y را برای یک موجبر مستطیلی به ابعاد a و b به ترتیب در راستاهای x و y تعیین کنید. (ج) با استفاده از روابط ماکسول نشان دهید این جوابهای معادله موج برای عدد مدهای حقیقی n و m صادق نیستند. (توجه کنید که جوابهایی برای امواج TEM در موجبرهای استوانه‌ای هم‌محور و با صفحه‌های موازی وجود دارند، (مسئله ۱۶-۱۹ را ببینید).

۲۳-۱۶ نشان دهید که جواب $m = n = 0$ در یک موجبر مستطیلی در تمام معادله‌های ماکسول و شرایط مرزی صادق نیست حتی اگر در معادله موج صدق کند [توجه کنید که H_x و H_y لزوماً برای این حالت خاص (مد TE) صفر نیستند].

۲۴-۱۶ یک تشدیدکننده کاواکی با دیواره‌های رسانای کامل، شکلی مکعب مستطیل به ابعاد a ، b و c دارد. مدهای مجاز در کاواک به ترتیب با اعداد صحیح l ، m و n مشخص می‌شوند. (الف) واگنی مدهای مجاز را وقتی l ، m و n مخالف صفرند تعیین کنید. (ب) واگنی را موقعی که l ، m یا n صفرند به دست آورید. (ج) مرتبه واگنی را برای حالتی که a ، b و c به نسبت اعداد صحیح هستند بحث کنید.

۲۵-۱۶ نوسانهای TE در یک کاواک مکعب مستطیل به اضلاع a ، b و c را که $E_z \equiv 0$ است در نظر بگیرید. میدانهای مدهای مجاز را تعیین کنید. (ب) پایتترین مد کاواک را به دست آورید. (ج) طیف بسامدهای تشدید را وقتی $a = b = c$ است حساب کنید. (د) نشان دهید میدانهای قسمت (الف) را، از حالت خاص میدانهای کلی به دست آمده در بخش ۱۶-۴-۳ می‌توان به دست آورد.

۲۶-۱۶ نشان دهید میدانهای مربوط به یک تشدیدکننده کاواکی، مانند آنچه در بخش ۱۶-۴-۳ بررسی شد، هیچ‌گونه انرژی‌ای تراگسیل نمی‌کند.

نظریه نسبیت خاص - الکترودینامیک

۱-۱۷ تبدیل گالیله و معادله موج

نیوتون اولین کسی است که اصل نسبیت (نسبیت گالیله) را در بحث قوانین حرکت خود مطرح کرد. در این بحث حرکت اشیا در ناحیه‌ای از فضا چه آن ناحیه در حال سکون باشد، چه در حال حرکت یکنواخت خطی (مستقیم‌الخط) یکسان است.

برای بررسی اعتبار این اصل، دو چارچوب S و S' را در نظر می‌گیریم با محورهای موازی که در زمان $t = 0$ مبدأ آنها بر هم منطبق‌اند. این دو چارچوب به ترتیب به ناحیه ساکن و به ناحیه با حرکت یکنواخت در جهت z و با سرعت v وصل‌اند. مختصات مکانی و زمانی یک حادثه ایجادشده در این فضا، که در چارچوبهای S و S' اندازه‌گیری می‌شود با روابطی که آن را تبدیل گالیله می‌نامیم به هم مربوط‌اند

$$\begin{aligned}x' &= x & y' &= y \\z' &= z - vt \\t' &= t\end{aligned}\quad (1-17)$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که با قراردادن این تبدیل در قوانین نیوتون، که در چارچوب S بیان شده است، این قوانین به قوانین مشابه در S' تبدیل می‌شود. یعنی می‌گوییم که قوانین نیوتون تحت تبدیل گالیله ناوردایند و بنابراین تعیین سرعت مطلق هر چارچوب مرجع با آزمایشهای مکانیکی ممکن نیست.

برهم‌کنش الکترومغناطیسی بین دو ذره باردار متحرک سریع در فیزیک جدید از اهمیت خاصی برخوردار است که معمولاً در دو مرحله بررسی می‌شود. اول میدانهای ایجادشده به‌وسیله یکی از بارها را به‌دست می‌آوریم و بعد برهم‌کنش بین میدانها و بار دیگر را تعیین می‌کنیم. چون در فصل ۱۵ میدانهای ایجادشده به‌وسیله توزیع بار و جریانهای وابسته به زمان را به‌دست آوردیم، در این فصل بعضی جنبه‌های حرکت بارها در میدانهای الکترومغناطیسی خارجی را بررسی می‌کنیم اما برهم‌کنش هر بار با میدان ایجادشده توسط خود آن بار را (خود برهم‌کنش) بحث نمی‌کنیم.

اما، در حین بحث، با بعضی اشکالات مواجه می‌شویم. زیرا اندازه میدان به علت وابسته‌بودن آن به نوع حرکت ناظر یکتا نیست. هدف از این فصل پاسخ به سؤالات زیر است. آیا معادله‌های حاکم بر الکترومغناطیس (روابط ماکسول) به حرکت ناظر وابسته است؟ چگونه پتانسیلها و میدانهایی که ناظر متحرک اندازه می‌گیرد به اندازه‌گیریهای ناظرهای دیگر وابسته است؟ اما در این کتاب از محدوده جوابهای این سؤالات خارج نمی‌شویم (یعنی مکانیک نسبیتی را فرمولبندی نمی‌کنیم). جواب این سؤالات در قلب نظریه نسبیت خاص که تاریخچه‌ای در هم آمیخته با الکترومغناطیس دارد قرار دارد. در واقع وحدت الکتریسته، مغناطیس و نورشناخت لازمه پذیرش نسبیت خاص است. لورنتس و پوانکاره در مطالعه الکترومغناطیس زمینه کار نظری را به‌وجود آوردند و فعالیت اینشتین نظریه را بر یک مبنای عمومی‌تر قرار داد.

از طرف دیگر به خوبی معلوم شده است که انتشار امواج مکانیکی در محیط ساکن دارای یک سرعت ثابت نسبت به محیط است. در چارچوب مرجعی که نسبت به محیط حرکت می‌کند این امواج پیچیده‌تر ظاهر می‌شوند. با بررسی معادله موج مکانیکی در یک بعد که با سرعت ثابت c نسبت به محیط ساکن منتشر می‌شود (تحت تبدیل گالیه) پیچیدگی به وجود آمده را به سادگی می‌بینیم

$$\frac{\partial^2 \Phi}{dz^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

با نوشتن $\partial/\partial t = \partial/\partial t' - v(\partial/\partial z')$, $\partial/\partial z = \partial/\partial z'$ به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} + \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} - \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t' \partial z'} = 0$$

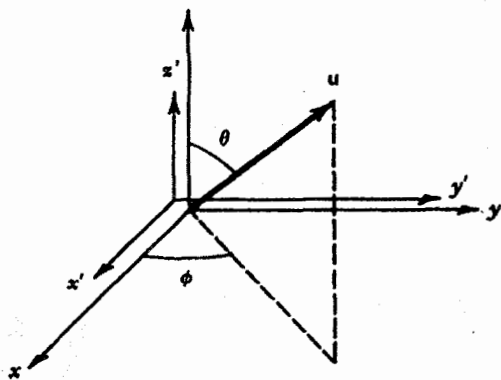
که نشان می‌دهد دیگر معادله تبدیل یافته با معادله اولیه هم شکل نیست (یعنی ناوردا نیست).

چون بررسی پدیده‌های الکتریسته، مغناطیس و نور ما را به فرمولبندی قوانین حرکت ذرات باردار، معادلات ماکسول، راهنمایی می‌کند منطقی است که این قوانین را تحت تبدیل گالیه بررسی کنیم. چون روابط ماکسول مستقیماً به یک معادله موج نرده‌ای حاکم بر هر مؤلفه دشارتی E و B منجر می‌شود می‌توان فهمید که تبدیل گالیه موجب ناوردا شدن معادله موج الکترومغناطیسی نمی‌شود. بنابراین نتیجه می‌گیریم که این تبدیل برای قوانین حرکت ذرات باردار صحیح نیست. این ناتوانی و یافته‌های تجربی دیگر (بخش ۳-۱۷ را ببینید) باعث می‌شود که تبدیل صحیحی پیدا کنیم که در بخش بعد آن را می‌خوانیم.

۲-۱۷ تبدیل لورنتس

لورنتس با مطالعه خصوصیات تبدیل معادله‌های ماکسول تبدیلی به دست آورد که آن را "تبدیل لورنتس" می‌نامیم و شکل معادله را تغییر نمی‌دهد. برای آشنایی با این تبدیل دو دستگاه مختصات S و S' را که S' نسبت به S با سرعت یکنواخت v در راستای محور z حرکت می‌کند در نظر می‌گیریم. حرکت طوری است که محورهای مختصات همواره موازی می‌مانند و در زمان $t = 0$ برهم منطبق‌اند. مختصات مکانی و زمانی دو دستگاه (x', y', z', t') و (x, y, z, t) با تبدیل لورنتس به هم مربوط‌اند

$$\begin{aligned} x' &= x & y' &= y \\ z' &= \frac{z - vt}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} & t' &= \frac{t - (v/c^2)z}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (2-17)$$



شکل ۱-۱۷ دو دستگاه مختصات که نسبت به هم با سرعت یکنواخت v در راستای محور z حرکت دارند. دو دستگاه در زمان $t = 0$ برهم منطبق‌اند و همواره موازی باقی می‌مانند.

معمولاً از علائم اختصاری زیر برای ساده‌نویسی استفاده می‌کنیم

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{و} \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad (3-17)$$

برای به دست آوردن تبدیلهای وارون که x, y, z و t را برحسب x', y', z', t' به دست می‌دهد، در معادلات (۲-۱۷) یا (۳-۱۷) صرفاً مکان علائم پریم دار و بدون پریم دار را با یکدیگر عوض می‌کنیم و نیز v را به $-v$ تغییر می‌دهیم. به کمک تبدیلهای بالا رابطه بین سرعتها در S و S' را نیز می‌توان به دست آورد. به همین دلیل شکل ۱-۱۷ را در نظر می‌گیریم. اگر بردار سرعت u در دستگاه S' که با محور z' زوایای قطبی θ' و ϕ' را می‌سازد مؤلفه‌های $u'_x = \partial x'/\partial t'$, $u'_y = \partial y'/\partial t'$, $u'_z = \partial z'/\partial t'$ داشته باشد آن‌گاه مؤلفه‌های نظیر در دستگاه S یعنی $u_x = \partial x/\partial t$, $u_y = \partial y/\partial t$, $u_z = \partial z/\partial t$ را می‌توانیم از معادله (۲-۱۷) یا از تبدیل وارون به دست آوریم. با به کار بردن دستور زنجیره‌ای داریم

$$dx = dx' \quad dy = dy' \quad (4-17)$$

$$\begin{aligned} dz &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} [dz' + v dt'] \\ dt &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left[dt' + \left(\frac{v}{c}\right)^2 dz'\right] \end{aligned} \quad (5-17)$$

حد می‌توان از روابط (۶-۱۷) و (۷-۱۷) نتیجه گرفت که $u'_x = u_x$ ، $u'_z = u_z + v$ ، $u'_y = u_y$.

همان طور که قبلاً گفتیم تبدیلهای گالیله بین دو چارچوب مرجع در حرکت نسبی قبل از معرفی تبدیل لورنتس، سابقه طولانی در فیزیک کلاسیک دارند. همچنین دانستیم که تبدیل گالیله روی قوانین حرکت نیوتون بی‌تأثیر است، با این نتیجه که تعیین سرعت مطلق هر چارچوب مرجع با وسایل مکانیکی غیرممکن است.

بیشینه سرعت ممکن برای هر ناظر. از معادله‌های (۲-۱۷) روشن است که سرعتی بالاتر از سرعت نور، c ، وجود ندارد. حالت $v > c$ ، جمله $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ را موهومی و بنابراین مختصات زمان یا مکان را نیز موهومی می‌کند.

تبدیل سرعت لورنتس نیز نشان می‌دهد که به‌دست‌آوردن سرعتی بزرگتر از نور، با جمع سرعتها حتی اگر هر یک به سرعت نور خیلی نزدیک باشند، غیرممکن است. این نتیجه را با به‌کار بردن روابط (۸-۱۷) و (۹-۱۷) می‌توان فهمید. برای حالت سرعت موازی ($\theta' = \theta = 0$) از معادله (۹-۱۷) به‌دست می‌آوریم

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad (11-17)$$

که نشان می‌دهد حتی اگر u' و v با c برابر باشند، u بدون تجاوز از c با آن برابر می‌شود.

ثابت بودن سرعت نور. با توجه به جایگاه تبدیلهای لورنتس، برای همه چارچوبهای مرجع متحرک با سرعت یکنواخت، فقط یک مقدار برای سرعت نور وجود دارد یعنی سرعت نور برای تمام چارچوبهای لخت یکسان است. [معادله (۱۱-۱۷) را ببینید].

ناوردایی معادله موج. می‌خواهیم بررسی کنیم معادله موج الکترومغناطیسی همگن و نرده‌ای تحت تبدیل لورنتس چه تغییری می‌کند. معادله زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (12-17)$$

که Φ تابعی نرده‌ای است و نماینده پتانسیل نرده‌ای، مؤلفه‌های دکارتی پتانسیل برداری یا مؤلفه‌های دکارتی میدان الکتریکی یا میدان مغناطیسی است. مشتقها، نسبت به x ، y ، z و t ، را می‌توان با

به این ترتیب با قراردادن روابط (۴-۱۷) و (۵-۱۷) در $u_i = dx_i/dt$ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \frac{dx'}{dt' + (v/c)^2 dz'} \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \frac{u'_x}{1 + vu'_z/c^2} \end{aligned} \quad (6-17)$$

$$u_y = \frac{(1 - v^2/c^2)^{1/2} u'_y}{1 + vu'_z/c^2} \quad u_z = \frac{u'_z + v}{1 + vu'_z/c^2} \quad (7-17)$$

اندازه u و زوایای قطبی θ و ϕ که با محور z می‌سازد را می‌توانیم از معادله‌های (۶-۱۷) و (۷-۱۷) برحسب θ' و ϕ' به‌دست آوریم. نتایج (مسئله ۳-۱۷ را ببینید) عبارت‌اند از $\phi = \phi'$ و

$$\tan \theta = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \frac{u' \sin \theta'}{u' \cos \theta' + v} \quad (8-17)$$

$$u = \frac{[u'^2 + v^2 + 2u'v \cos \theta' - (u'v^2/c^2) \sin^2 \theta']^{1/2}}{1 + u'v/c^2 \cos \theta'} \quad (9-17)$$

تبدیل وارون که (u', θ') را برحسب (u, θ) می‌دهد را می‌توان با تعویض علامتهای پریم و تغییر علامت v به‌دست آورد. اکنون نکات زیر را درباره مختصات لورنتس و تبدیلهای سرعت بیان می‌کنیم:

حد کوچکی v/c (تبدیل گالیله). تبدیل لورنتس که با معادله (۲-۱۷) بیان می‌شود در محدوده سرعتهای کم، یعنی $v/c \ll 1$ به تبدیل گالیله تغییر می‌یابد. با چشمپوشی از v^2/c^2 و توانهای بالاتر در این روابط به‌دست می‌آید

$$x = x' \quad y = y' \quad z = z' + vt \quad t = t' \quad (10-17)$$

اینها تبدیلهای مختصات گالیله معادله (۱۱-۱۷) است. قابل توجه است که بگوئیم تبدیل گالیله را می‌توان تبدیل لورنتس به حساب آورد به شرطی که سرعت نور بینهایت باشد ($c \rightarrow \infty$).

وقتی سرعت دستگاه مختصات، v ، و سرعت u در مقایسه با سرعت نور کوچک باشند ($v/c \ll 1$ ، $u/c \ll 1$ و $uv/c^2 \ll 1$) تبدیل سرعت لورنتس به تبدیل گالیله تبدیل می‌شود. در این

به کار بردن تبدیل لورنتس و دستور زنجیره‌ای برحسب مقادیر پریم دار نوشت. که نتیجه می‌دهد

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z'^2} = \left(\frac{\partial}{\partial z'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1} \quad (13-17)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial z'} \right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1} \quad (14-17)$$

با قراردادن مشتقهای مرتبه دوم در معادله (۱۲-۱۷) به دست می‌آوریم

$$\nabla'^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} = \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

که نشان می‌دهد شکل معادله موج در دستگاه پریم دار حفظ می‌شود و چون معادله همگن است می‌توانیم Φ و Φ' را با هم عوض کنیم و بنویسیم

$$\nabla'^2 \Phi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t'^2} = 0 \quad \Phi \rightarrow \Phi' \quad (15-17)$$

این نتیجه مشخص می‌کند که معادله موج همگن تحت تبدیل لورنتس ناورد است، در حالی که تحت تبدیل گالیه، همان طور که در بخش ۱-۱۷ نشان دادیم ناوردا نیست.

ناوردایی جزء "طول" و ویژه زمان. ابتدا مفهوم جزء "طول" و ویژه زمان را بیان می‌کنیم. در فیزیک کلاسیک که شامل برهم‌کنشهای الکترومغناطیسی نیست (نسبیت گالیه)، مختصات زمان و مکان به هم وابسته نیستند. به این معنی که جزء بینهایت کوچک فاصله، $ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}$ و جزء بینهایت کوچک زمان، dt ، تحت تبدیل گالیه به صورت جدا از هم ناوردایند [معادله (۱-۱۷)] را ببینید. بنابراین

$$ds^2 = ds'^2 \quad \text{و} \quad dt^2 = dt'^2 \quad (16-17)$$

در مباحث فیزیکی که برهم‌کنشهای الکترومغناطیسی را در بر دارد (نسبیت لورنتس)، مختصات زمان و مکان به هم مربوط‌اند. در نتیجه جزء دیفرانسیلی "طول" را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (17-17)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که این طول تحت تبدیل لورنتس ناورد است. (مسئله ۵-۱۷ را ببینید). مفهوم ناوردایی جزء طول، یعنی

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (18-17)$$

ما را به مفهوم "ویژه زمان" ناوردا راهنمایی می‌کند. ویژه زمان را زمان اندازه‌گیری شده در چارچوب مرجع متحرک، یعنی، در S' تعریف می‌کنیم. بنابراین برای هر رویدادی که در S' رخ می‌دهد، $dx' = dy' = dz' = 0$ و ویژه زمان نام دارد. با به کار بردن معادله (۱۸-۱۷) برای این حالت به دست می‌آوریم

$$-c^2 dt'^2 = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (19-17)$$

چون ds یک کمیت ناورد است بنابراین ویژه زمان $ds = (1/c) dt'$ نیز یک کمیت ناورد است.

انقباض زمان. اکنون می‌توانیم معادله (۱۹-۱۷) را برحسب سرعت چارچوب S' بنویسیم. با قراردادن $dx/dt = v_x$ ، و به همین ترتیب برای بقیه، dt می‌شود

$$dt = dt' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \quad (20-17)$$

که $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. باید توجه کنید که ویژه زمان t' ، در بعضی از کتابهای نسبیت اغلب با τ_0 نشان داده می‌شود. معادله (۱۷-۲۰) چیزی را نشان می‌دهد که آن را انقباض زمان می‌نامیم. مثلاً این معادله نشان می‌دهد که زمانی که ساعت واقع در S' اندازه می‌گیرد، کمتر از زمانی است که ساعت واقع در چارچوب بی حرکت S نشان می‌دهد. به این ترتیب ساعت متحرک نسبت به یک ناظر کندتر از ساعت ساکن نسبت به همان ناظر کار می‌کند.

انقباض طول. جسمی را در نظر بگیرید که نسبت به چارچوب S' ، که خود با سرعت v نسبت به چارچوب S ، به موازات z در حرکت است، ساکن است. $z'_1 = z_1 - vt$ ، بعد جسم در راستای محور z' است که در S' اندازه‌گیری می‌شود. برای تعیین طول متناظر از دید ناظر S تبدیل لورنتس را به کار می‌بریم. با مساوی قراردادن زمان مشاهده z_1 و z_2 نتیجه می‌گیریم

$$z_2 - vt = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} z'_2 \quad \text{و} \quad z_1 - vt = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} z'_1 \quad (21-17)$$

این است که

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' - \omega' t' \quad (24-17)$$

که پریم مشخص‌کننده کمیتهای اندازه‌گیری شده در چارچوب مرجع S' است که با سرعت v نسبت به S و موازی با محور z حرکت می‌کند و در زمان $t = 0$ بر آن منطبق است. با استفاده از تبدیل لورنتس [معادله (۲۰-۱۷)] می‌توان نشان داد که

$$k'_x = k_x \quad k'_y = k_y \quad k'_z = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(k_z - \frac{v}{c^2} \omega\right) \quad (25-17)$$

$$\omega' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} (\omega - vk_z) \quad (26-17)$$

در مختصات قطبی کروری \mathbf{k} و \mathbf{k}' را طوری انتخاب می‌کنیم که به ترتیب با محورهای z و z' (جهت v) زوایای θ و θ' بسازد. چون $k = \omega/c$ ، $k'_z = k' \cos \theta'$ و $k_z = k \cos \theta$ ، $k' = \omega'/c$ می‌توان نشان داد که

$$\omega' = \frac{\omega}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) \quad (27-17)$$

صورت کسر همان انتقال معمولی دوپلر است که در سرعت‌های کم ($v/c \ll 1$) معتبر است. از طرف دیگر ضریب $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ انتقال معمولی را در سرعت‌های بالاتر اصلاح می‌کند. همچنین می‌توان نشان داد که

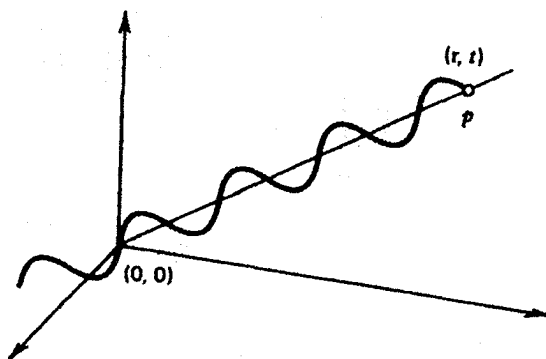
$$\tan \theta' = \frac{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2} \sin \theta}{\cos \theta - v/c} \quad (28-17)$$

که رابطه بین راستاهای بردارهای موج در دو چارچوب (مسئله ۷-۱۷) را ببینید) را می‌دهد. همچنین می‌توان نشان داد که

$$\omega' = \frac{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2} \omega}{1 + (v/c) \cos \theta'} \quad (29-17)$$

مثال ۱۰-۱۷ انبساط زمان

الف) سفینه فضایی. سفینه‌ای به جرم 10^6 تن برای رفتن به ستاره‌ای دورو بازگشت به زمین با سرعت ثابت مساوی با $c(1 - 1/2 \times 10^{-4})$ طراحی شده است. فاصله بین زمین و ستاره $d = 5$ سال نوری است. زمان رفت و برگشت این سفینه که با ساعت ساکن روی زمین اندازه‌گیری می‌شود، $10 \approx 2d/v$ سال نوری است.



شکل ۲-۱۷ شکل موج یک موج الکترومغناطیسی تخت در زمان t ، که نشان‌دهنده تعداد قله‌ای است که از مبدأ در فاصله زمانی صفر تا t به نقطه مشاهده P می‌رسد.

به این ترتیب $l = z_2 - z_1$ می‌شود

$$l = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} l' \quad (22-17)$$

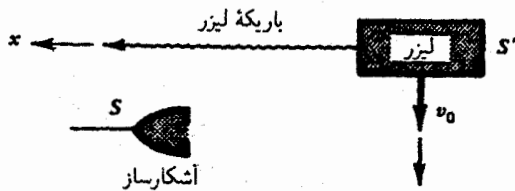
باید توجه کنیم که در برخی از کتابهای نسبیت علامت l به جای l' به کار می‌رود.

این نتیجه نشان می‌دهد که طول جسم در راستای محور z وقتی از چارچوب S دیده شود کوچک شده است. این اثر را قاعده انقباض فیتزجرالد-لورنتس می‌نامیم. اگرچه نقاط z_1 و z_2 به طور همزمان در t اندازه‌گیری می‌شوند اما نقاط z'_1 و z'_2 در S' به طور همزمان اندازه‌گیری نمی‌شوند.

فاز، بردار موج و بسامد امواج الکترومغناطیسی. فاز ϕ یک موج الکترومغناطیسی تخت (شکل ۲-۱۷) در زمان t و مکان \mathbf{r} نسبت به چارچوب S برابر است با

$$\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \quad (23-17)$$

که \mathbf{k} بردار موج است. ناظر P که در فاصله \mathbf{r} از مبدأ قرار دارد، تعداد قله‌های موج را که از وی عبور می‌کند می‌شمارد. قله‌ها را به صورت زیر شماره‌گذاری می‌کنیم. قله‌ای که در زمان t از مبدأ عبور می‌کند را با ۱، قله بعدی را با ۲ و به همین ترتیب. وقتی قله ۱ به ناظر می‌رسد، او شمارش را شروع کرده و آن را ۱ می‌شمارد. در زمان t او $N = \phi/2\pi$ یا $N = (1/2)\pi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ قله موج می‌شمارد. چون صرفاً یک عدد است باید مستقل از دستگاه مختصات و بنابراین تحت تبدیل لورنتس ناوردا باشد (مسئله ۶-۱۷ را ببینید). ناوردایی به معنی



شکل ۳-۱۷ اثر دوپلر (نسبیتی) عرضی. لیزری که به طور عمود بر باریکه خروجی اش نسبت به یک آشکارساز ساکن در حرکت است.

می‌دهیم. می‌توان معادله (۲۶-۱۷) را برای تعیین ω به کار برد یعنی

$$\omega_0 = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-1/2} (\omega - v_0 k_z) \quad (۳۰-۱۷)$$

چون بردار موج تابش لیزری در امتداد x است، پس $k_z = 0$ بنابراین

$$\omega = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{1/2} \omega_0 \quad (۳۱-۱۷)$$

همین نتیجه را از معادله (۲۷-۱۷) به دست می‌آوریم. چون زاویه بین انتشار و راستای حرکت S' نسبت به S ، $\theta = \pi/2$ است پس $\cos \theta = 0$ و بنابراین معادله (۲۷-۱۷) به نتیجه بالا تبدیل می‌شود. نتیجه به دست آمده از معادله (۳۱-۱۷) را اثر دوپلر عرضی یا انتقال به سرخ می‌نامیم. توجه کنید که آشکارساز چه به طرف منبع نزدیک و چه از آن دور شود نتیجه همین خواهد بود. علاوه بر این، جمله غالب در بسط، جمله درجه دوم (درجه دوم v/c) است؛ یعنی بسامد به v_0^2/c^2 وابسته است، که در حالت کلی آن را از اثر مرتبه اول کوچکتر می‌سازد. این انتقال دوپلری عرضی نسبیتی به روش طیف‌نگاری در اتمهای در حال حرکت (در ۱۹۳۸) دیده شده است. جهت انتشار که به کمک آشکارساز اندازه‌گیری می‌شود را می‌توانیم از معادله (۲۵-۱۷) یا از معادله (۲۸-۱۷) به دست آوریم (مسئله ۱۷-۸ را ببینید). ■

مثال ۳-۱۷ تبدیل زاویه فضایی

باریکه نوری، که ناظری واقع در چارچوب S آن را اندازه‌گیری می‌کند شامل زاویه فضایی $d\Omega$ است. می‌خواهیم زاویه فضایی متناظر باریکه را از دید ناظر S' ، که در راستای محور z با سرعت v نسبت به ناظر اول حرکت می‌کند حساب کنیم.

چون $d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\phi$ ، پس $d\Omega'$ در S' برابر

$$d\Omega' = \sin \theta' \, d\theta' \, d\phi'$$

است. زاویه ϕ' که ناظر S' اندازه می‌گیرد همان است که ناظر S می‌بیند. زاویه θ' را می‌توان از معادله (۲۸-۱۷) محاسبه کرد. با به کار بردن

برای تخمین مقدار غذا، نوشیدنی، و سایر مواد لازم برای سفر باید زمان رفت و برگشت را دانست که با ساعت متصل به سفینه یعنی $t' = \sqrt{1 - v^2/c^2} t = 0.1 \times 10^6 = 0.17$ سال است. به این ترتیب مسافران باید نیازهای خود را در عوض ۱۰ سال به اندازه ۱۲ ماه تأمین کنند که نسبتاً گران نیست. اما برای رساندن سرعت سفینه به مقدار فرض شده انرژی بسیار زیادی لازم است.

ب) واپاشی موثنا. وقتی یک موثون، یک ذره بنیادی به جرم $2.07m_e$ که m_e جرم الکترون است، به صورت ساکن در آزمایشگاه به وجود می‌آید ناظر ساکن واقع در آزمایشگاه، عمر ذره، یعنی زمانی که ذره قبل از واپاشی به چیزی دیگر باقی می‌ماند، را $t' = 1.52 \times 10^{-6}$ ثانیه اندازه می‌گیرد. چون این ویژه زمان یک رویداد اندازه‌گیری شده در چارچوب ساکن است از t' استفاده کرده‌ایم.

برای آزمون مفهوم انبساط زمان باید تغییر طول عمر ذره را وقتی در حال حرکت نسبت به آزمایشگاه ایجاد می‌شود پیدا کنیم. در واقع تولید ذره با سرعت $v \approx 0.98c$ در جو بالای زمین در برخوردهای پروتوکیانی با هسته اتفاق می‌افتد. ناظر واقع در آزمایشگاه روی زمین، که مفهوم انبساط زمان را به کار می‌برد، عمر طولانیتر t را برای ذره متحرک پیش‌بینی می‌کند. یعنی

$$t = \frac{t'}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} = 5t' = 7.6 \times 10^{-6} \text{ s}$$

بنابراین در واقع اگر ذره طولانیتر عمر کند ناظر واقع در آزمایشگاه فاصله طولانیتری را در مقایسه با آنکه بدون کاربرد مفهوم نسبیت انتظار دارد اندازه خواهد گرفت. مشاهدات تجربی انجام‌یافته در حقیقت معلوم می‌کند که ذرات فواصل طولانیتری را می‌پیمایند و بنابراین مفهوم انبساط زمان را تأیید می‌کنند. این پدیده واپاشی، برای ناظر متحرک همراه با موثونهای در حال واپاشی، چگونه به نظر می‌رسد؟ این سؤال را به‌عنوان تمرین (مسئله ۱۷-۱) را ببینید) به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

مثال ۲-۱۷ اثر دوپلر عرضی - انتقال به سرخ

یک منبع لیزری با سرعت v در راستای محور z نسبت به یک آشکارساز حرکت می‌کند. راستای باریکه لیزر از دید ناظر ساکن نسبت به آشکارساز، مطابق شکل ۳-۱۷، در طول محور x است. بسامد باریکه لیزر اندازه‌گیری شده در چارچوب ساکن نسبت به لیزر ω_0 است. چارچوب ساکن نسبت به لیزر S' و چارچوب ساکن نسبت به آشکارساز را S انتخاب می‌کنیم. وقتی که پروتو به آشکارساز می‌رسد، آشکارساز بسامدی متفاوت با ω_0 اندازه می‌گیرد، که آن را با ω نشان

همچنین زوایای تابش و بازتاب نسبت به خط عمود را در چارچوب S ، θ_1 و θ_2 نامگذاری می‌کنیم.

از معادله (۱۷-۲۸) یا (۱۷-۳۲) می‌نویسیم

$$\cos \theta'_2 = \frac{\cos \theta_2 - \beta}{1 - \beta \cos \theta_2} \quad \cos \theta'_1 = \frac{\cos \theta_1 - \beta}{1 - \beta \cos \theta_1} \quad (۱۷-۳۴)$$

با انتخاب $\cos \theta'_1 = -\cos \theta'_2$ در این معادله‌ها به دست می‌آوریم

$$\frac{\cos \theta_2 - \beta}{1 - \beta \cos \theta_2} = -\frac{\cos \theta_1 - \beta}{1 - \beta \cos \theta_1}$$

با تغییر ترتیب جمله‌ها نتیجه می‌گیریم

$$\cos \theta_2 = -\frac{(1 + \beta^2) \cos \theta_1 - 2\beta}{1 - 2\beta \cos \theta_1 + \beta^2} \quad (۱۷-۳۵)$$

اکنون رابطه بین ω_2 و ω_1 را تعیین می‌کنیم. با به کار بردن معادله (۱۷-۲۷) می‌نویسیم

$$\omega'_1 = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (1 - \beta \cos \theta_1)$$

$$\omega'_2 = \frac{\omega_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} (1 - \beta \cos \theta_2)$$

با برابری $\omega'_1 = \omega'_2$ به دست می‌آوریم

$$\omega_2 = \frac{1 - 2\beta \cos \theta_1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \omega_1 \quad \text{یا} \quad \omega_2 = \frac{1 - \beta \cos \theta_1}{1 - \beta \cos \theta_2} \omega_1 \quad (۱۷-۳۶)$$

۱۷-۳ اصول نسبیت خاص

اگرچه لورنتس با پژوهش خود در الکتروپنایمیک، که منجر به کشف تبدیل لورنتس شد، اساس نظریه نسبیت خاص را بنیان نهاد، اما به راستی او نتایج بعدی این نظریه را، به دست نیاورده بود. این اینشتین و یوانکاره بودند که با توجه به جزئیات دلایل تجربی جدید عامل تحولات نظری شدند که به ظهور نظریه نسبیت خاص انجامید.

در این بخش این نظریه را بررسی می‌کنیم. اما قبل از ارائه اصول آن، توصیف کوتاهی از تاریخچه پیشرفت آن بیان می‌کنیم. این کار درک بهتری از اهمیت نظریه ارائه می‌دهد و نشان می‌دهد که چگونه بسیاری از مسائل به وسیله آن حل می‌شود و بسیاری از سردرگمی‌های فیزیک برطرف می‌شود.

در سال ۱۸۶۵ ماکسول معادله‌های الکترومغناطیس را با معرفی جریان جابه‌جایی تغییر داد تا تناقضهای موجود در آن، را حذف

روابط مثلثاتی می‌توان نشان داد که

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - v/c}{1 - (v/c) \cos \theta} \quad \sin \theta' = \frac{(1 - v^2/c^2)^{1/2} \sin \theta}{1 - v/c} \quad (۱۷-۳۲)$$

به این ترتیب

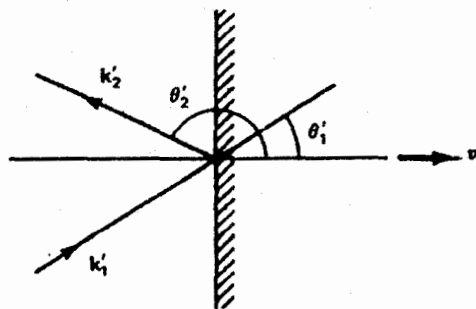
$$d\Omega' = \frac{1 - v^2/c^2}{[1 - (v/c) \cos \theta]^2} d\Omega \quad (۱۷-۳۳)$$

برای $v/c = 0.95^\circ$ ، نتیجه بالا نشان می‌دهد که $d\Omega'/d\Omega$ از مقدار بیشینه خود در $\theta = 0^\circ$ (یعنی 39°) به اندازه کمینش در $\theta = \pi$ (یعنی 24°) افت می‌کند. علاوه بر این می‌توان نشان داد که برای هر سرعت v ، $\int d\Omega' = 4\pi$ است. ■

مثال ۱۷-۴ قوانین بازتاب از آینه متحرک

یک آینه S' نسبت به چارچوب آزمایشگاه S با سرعت v در راستای عمود بر سطح آن حرکت می‌کند. از دید ناظر ساکن نسبت به آینه، یک موج قطبیده خطی با بسامد ω' و بردار موج k'_1 ، به طور مایل بر روی سطح آن تحت زاویه θ'_1 نسبت به خط عمود تابش می‌کند. این حالت در شکل ۱۷-۴ نشان داده شده است. او موج بازگشتی را تحت زاویه θ'_2 نسبت به خط عمود و با بسامد ω'_2 و بردار موج k'_2 می‌بیند. بر طبق قوانین بازتاب در S' موج تحت زاویه $\theta'_2 = \pi - \theta'_1$ با بسامد $\omega'_2 = \omega'_1$ بازمی‌تابد.

با وجود این قوانین بازتاب از دید آینه متحرک و از دید ناظر ساکن در آزمایشگاه یکسان نیستند. این قوانین با به کار بردن معادله‌های (۱۷-۲۷) و (۱۷-۲۸) به دست می‌آیند. ابتدا بسامد امواج تابشی و بازتاب از دید ناظر ساکن نسبت به آزمایشگاه را ω_1 و ω_2 می‌نامیم.



شکل ۱۷-۴ بازتاب از یک آینه فیزی با رسانایی خوب که در راستای عمود بر سطح حرکت می‌کند.

کند. یکی از نتایج خوب این تغییر، توصیف ماهیت نور بود. مجموعه معادله‌های جدید ماکسول نور را به الکترومغناطیس ربط داد و نشان داد که نور دقیقاً یک موج الکترومغناطیسی است.

با تثبیت ماهیت موجی نور، پژوهشگران انتشار آن را مطالعه کردند. با توجه به واقعیتهای قبلی که موج مکانیکی برای انتشار به محیط مادی نیاز دارد، پژوهشگران فرض کردند که نور نیز برای انتشار به محیط مادی نیازمند است. با این دید که نور در تمام فضا منتشر می‌شود، باید محیط مادی، که آن را "اتر" نامیدند، در تمام این فضا نفوذ کرده باشد. علاوه بر این فرض شد که می‌توان از چگالی این محیط مادی و نیز برهم‌کنش آن با ماده چشم پوشید.

با این حال این محیط ویژه بعضی مسائل را به وجود آورد: دربارهٔ حالت حرکت اتر چه می‌دانیم؟ چگونه معادله‌های ماکسول تحت تبدیل گالیله تبدیل می‌شوند؟ وجود اتر دلالت بر این داشت که قوانین الکترومغناطیس تحت تبدیل مختصات گالیله ناوردا نیستند. یعنی یک دستگاه مختصات ممتاز وجود دارد که در آن اتر ساکن است، که با این موضوع که قوانین مکانیک در تمام دستگاههای لخت، یا دستگاههایی که نسبت به یکدیگر حرکت یکنواخت دارند، متناقض بود.

برای از بین بردن این تناقض و اجتناب از جدا کردن الکترومغناطیس از بقیهٔ فیزیک، راه‌حلهای زیادی ارائه شد. این راه‌حلهای عبارت‌اند از:

۱. فرض می‌کنیم سرعت نور نسبت به یک چارچوب مرجع که منبع نسبت به آن ساکن است c باشد.

۲. چارچوب مرجع ممتاز برای نور را چارچوبی در نظر می‌گیریم که نسبت به محیط انتشاردهندهٔ نور (اتر) ساکن است.

۳. فرض می‌کنیم اجسام نجومی، برخلاف این موضوع که اتر با ماده برهم‌کنش خیلی ضعیفی دارد، اتر را به همراه خود می‌کشند.

این راه‌حلهای بعد از پیداشدن سه آزمایش اصلی زیر، به زودی کنار گذاشته شدند:

۱. مشاهدهٔ ابیراهی نور ستارگان - یعنی تغییر در مکان ظاهری ستاره‌های دور. این مشاهده با فرضی که سرعت نور با محیط انتقال‌دهندهٔ آن تعیین می‌شود یا اینکه اتر با زمین کشیده می‌شود، تناقض دارد.

۲. اندازه‌گیری سرعت نور در سیال متحرک در سال ۱۸۵۹ (آزمایش فیروز). این آزمایش نشان داد که در صورت وجود اتر، باید تا حدی به وسیلهٔ اجسام ریز کشیده می‌شد به طوری که درجهٔ کشش به ضریب شکست اجسام وابسته است. این نتیجه فرضیهٔ کشش اتر را خیلی

ظاهری و نه فیزیکی جلوه می‌دهد.

۳. اندازه‌گیری حرکت زمین نسبت به چارچوب مرجع ممتاز، اتر، در ۱۸۸۷ (آزمایش مایکلسون و مورلی). این آزمایش نشان داد که برای حرکت نسبی از اتر مدرکی وجود ندارد. این موضوع بر دو مطلب اشاره دارد: یا چارچوب ممتاز وجود ندارد، یا زمین اتر را همراه خود می‌کشد. گرچه این نتیجهٔ منفی را می‌توان با فرضیهٔ کشش اتر تبیین کرد، اما این تعبیر با دو آزمایش نخست سازگار نیست.

با توجه به نتیجهٔ منفی آزمایشهای مایکلسون-مورلی، پوانکاره اصل نسبیت را با این بیان که قوانین فیزیکی در تمام چارچوبهایی که نسبت به یکدیگر با سرعت یکنواخت در حرکت‌اند یکسان است دوباره مطرح کرد. اینشتین همزمان و به‌طور مستقل نسبیت خاص را با روشی عمومی و کامل، در به‌دست آوردن نتایج لورنتس و مفاهیم آن فرمولبندی کرد. این فرضیه‌ها عبارت‌اند از:

۱. قوانین طبیعت در تمام چارچوبهای مرجع گالیله، چارچوبهایی که نسبت به هم با سرعت یکنواخت حرکت می‌کنند، یکسان‌اند.
۲. سرعت نور، مستقل از حرکت منبع و ناظر ثابت است. با این فرض می‌توان تبدیل لورنتس را، که تبدیل درستی برای پدیده‌های الکترومغناطیس است (مسئلهٔ ۱۷-۱۲ را ببینید)، به‌دست آورد.

۱۷-۴ هندسهٔ فضا-زمان (فضای چهاربعدي) - چار-بردار

و چار-تانسور

هنگام استفاده از نسبیت خاص در کاربردهای فیزیکی بهتر است برای t موقعیتی برابر با سه مختصهٔ مکانی x ، y و z در نظر گیریم، و چیزی را که هندسهٔ فضا-زمان (فضای چاربعدي) نام دارد معرفی کنیم. همچنین بردارهای سه‌بعدي را که در فضای سه‌بعدي می‌شناسیم به آنچه که آن را چار-بردار می‌نامند تعمیم دهیم.

۱۷-۴-۱ فضای سه‌بعدي - فضای اقلیدسی

قبل از معرفی فضای چاربعدي کمی دربارهٔ فضای سه‌بعدي صحبت می‌کنیم. دستگاه مختصات x ، y ، و z را با مبدأ O در نظر می‌گیریم. طول بردار مکان، R ، یک نقطه با مختصات آن x_1 ، x_2 و x_3 که به ترتیب به جای x ، y ، و z هستند از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (۱۷-۳۷)$$

مختصات نقطه پس از هر تبدیل دستگاه مختصات به (x'_1, x'_2, x'_3) تغییر می‌یابد. این تبدیل را، به شرطی که مختصات جدید با ترکیب

خطی از مختصات قبلی به دست آید، خطی می‌نامیم. یعنی

$$x'_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j \quad (38-17)$$

که ضرایب a_{ij} ثابت‌هایی مستقل از مختصات هستند و i و j از ۱ تا ۳ شمرده می‌شوند. علاوه بر این تبدیل را "متعامد" می‌نامیم اگر حقیقی (ضرایب a حقیقی) باشد و طول بردار بدون تغییر باقی بماند یعنی

$$R'^2 = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = R^2 \quad (39-17)$$

چون چرخش دستگاه مختصات حول هر محور x_1, x_2, x_3 یا حول هر ترکیبی از آنها یک تبدیل خطی است و طول بردار را حفظ می‌کند، این چرخشها را متعامد خطی می‌گوییم (مثال ۱۷-۵ را ببینید). سرانجام فضای اقلیدسی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. یک فضا را اقلیدسی می‌نامیم اگر دارای دو شرط باشد. اول طول بردار مکان مجموع مربعات مختصات نقطه پایانی بردار باشد که از رابطه (۱۷-۳۷) به دست می‌آید. دوم چرخش در فضا واقعی باشد.

۱۷-۴-۲ فضای چهار بعدی - فضای مینکوفسکی

حال فضایی را که مختصات یک نقطه آن با سه مختصه فضایی x, y, z و مختصه چهارم بر مبنای زمان، ct ، که c سرعت نور است داده شده است در نظر می‌گیریم. طول بردار مکان R یک نقطه که مختصات آن (x, y, z, ct) است از رابطه $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + c^2 t^2$ که به سادگی از معادله (۱۷-۳۷) نتیجه می‌شود، به دست نمی‌آید. در واقع باید آن را به صورت زیر نوشت [معادله (۱۷-۱۷) را ببینید]

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad (40-17)$$

اکنون تأثیر تبدیل لورنتس روی R را تعیین می‌کنیم. چارچوب متحرکی را در راستای z با سرعت v در نظر می‌گیریم. با به کار بردن معادله (۱۷-۲) می‌توان به سادگی نشان داد که

$$R'^2 = R^2 \quad (41-17)$$

یا

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad (42-17)$$

روابط (۱۷-۴۱) و (۱۷-۴۲) مشخص می‌کنند که طول هر بردار در فضای چهار بعدی تحت تبدیل لورنتس بدون تغییر باقی می‌ماند.

بنابراین تبدیل لورنتس یک تبدیل متعامد خطی است. با این حال این موضوع که طول بردار در این فضا مجموع مربعات مختصات نقطه نهایی بردار نیست، مشکل ساز است و مشخص می‌شود که فضای چهار بعدی، اقلیدسی نیست. برای اینکه این موضوع از دید ریاضی شبیه فضای اقلیدسی شود، مینکوفسکی با استفاده از یک شگرد ریاضی یعنی تعویض علامت منفی $c^2 t^2$ معادله (۱۷-۴۰) با $c^2 t^2$ که $i = \sqrt{-1}$ ، عدد موهومی است، نوشت

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2 \quad (43-17)$$

یا

$$R^2 = x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 + x^2_4 \quad (44-17)$$

که x_1, x_2, x_3 به جای x, y, z و

$$x_4 = ict \quad (45-17)$$

است.

با استفاده از علائم مینکوفسکی و اختصارهای معادله (۱۷-۳)، $\beta = v/c$ و $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ تبدیل لورنتس معادله (۱۷-۲) می‌شود

$$x'_1 = x_1 \quad x'_2 = x_2 \quad (46-17)$$

$$x'_3 = \gamma x_3 + i\beta\gamma x_4 \quad (47-17)$$

$$x'_4 = -i\beta\gamma x_3 + \gamma x_4 \quad (48-17)$$

علاوه بر این، آنها را می‌توان به شکل معادله (۱۷-۳۸) نوشت یعنی

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^4 a_{\mu\nu} x_\nu \quad (49-17)$$

که μ و ν را باید از ۱ تا ۴ شمرد و $a_{\mu\nu}$ ثابت‌هایی مستقل از مختصات هستند. توجه کنید که معمولاً از شاخصهای یونانی (یعنی μ و ν) برای علامتگذاری بردارهای چهار بعدی و از شاخصهای لاتین (i و j) برای بردارهای سه بعدی استفاده می‌شود. از مقایسه روابط (۱۷-۴۶) تا (۱۷-۴۸) با (۱۷-۴۹) معلوم می‌شود که ضرایب $a_{\mu\nu}$ به ترتیب $a_{11} = 1, a_{22} = 1, a_{33} = \gamma, a_{44} = i\beta\gamma, a_{34} = -i\beta\gamma, a_{43} = \gamma$ و $a_{\mu\nu} = 0$ بهتراست که $a_{\mu\nu}$ را به شکل ماتریس

$$a_{\mu\nu} = \begin{matrix} & \xrightarrow{x_\nu} \\ \mu \downarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (50-17)$$

تبدیل وارون که x_μ را بر حسب چهار مختصه چارچوب متحرک می‌دهد با وارون کردن (۱۷-۴۹) به دست می‌آید

$$x_\mu = \sum_{\nu=1}^4 x'_\nu a_{\nu\mu} \quad (51-17)$$

با استفاده از ماتریس معادله (۱۷-۵۰) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 & x_2 &= x'_2 \\ x_3 &= \gamma x'_3 - i\beta\gamma x'_4 & (52-17) \\ x_4 &= i\beta\gamma x'_3 + \gamma x'_4 \end{aligned}$$

این نتایج نشان می‌دهند که تبدیل وارون را می‌توان با تعویض علامت پریم‌دار با بی‌پریم و β با $-\beta$ به دست آورد.

روشن است که فضای مینکوفسکی یک فضای مختلط است زیرا یکی از مختصات $x_4 = ict$ موهومی محض است و بنابراین هر تبدیل آن مختلط است. به علاوه تبدیل در این فضا معامد است. [معادله (۱۷-۴۴) را ببینید] و ممکن است چرخش تحت یک زاویه مختلط در صفحه $x_3 - x_4$ (مثال ۱۷-۸ را ببینید) به نظر آید. لازمه خاصیت تعامد [معادله (۱۷-۴۱) را ببینید] این است که ضرایب تبدیل $a_{\mu\nu}$ معادله (۱۷-۵۰) در رابطه زیر صدق کنند

$$\sum_{\mu=1}^4 a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda}$$

که $\delta_{\nu\lambda}$ برای $\lambda = \nu$ برابر با یک و برای $\lambda \neq \nu$ صفر است (اثبات در مثال ۱۷-۶ را ببینید).

گرچه شکل ریاضی این فضا کاملاً شبیه فضای اقلیدسی است اما به دلیل ماهیت مختلط آن در مقایسه با ماهیت حقیقی فضای اقلیدسی، از نظر فیزیکی این‌گونه نیست. در واقع این فضا پس از مینکوفسکی که شگرد ریاضی، معادله (۱۷-۴۵) معرفی کرد به عنوان فضای مینکوفسکی شناخته شد. اما باید توجه کرد که بعضی از خواص این فضا را می‌توان با در نظر گرفتن آن به صورت فضای اقلیدسی، به شکل ریاضی به دست آورد.

۱۷-۴-۳ خواص برداری فضای چهاربعدی

در زیربخش قبل، فضای چهاربعدی را که در آن مختصات فضا و زمان موقعیت یکسانی داشتند را معرفی کردیم. حال بعضی از جنبه‌های جبر برداری در این فضا را برای اینکه بتوانیم معادله‌های الکترومغناطیس را در فضای جدید دوباره طرح‌ریزی کنیم نشان می‌دهیم.

بردارهای چهاربعدی - چار-بردار. در فضای (مکانی) سه‌بعدی کمیته‌ها به شکل زده‌ای، برداری و تانسور با مرتبه‌های مختلف دسته‌بندی می‌شوند و از طرف دیگر در فضای چهاربعدی کمیته‌ها را به شکل زده‌ایهای لورنتس (یا زده‌ایها)، چار-بردار لورنتس (یا چار-بردارها) و تانسورهای لورنتس (یا چار-تانسورها) دسته‌بندی می‌کنیم. در فضای چهاربعدی مختصات یک نقطه را با (x_1, x_2, x_3, x_4) نشان می‌دهیم و برای اختصار آنها را با x_μ ، که μ از ۱ تا ۴ تغییر می‌کند نمایش می‌دهیم. چهار مختصه تشکیل یک بردار چهاربعدی را می‌دهد. در حالت کلی یک بردار چهاربعدی A_μ ، مجموعه‌ای از کمیته‌های A_1, A_2, A_3, A_4 هستند، که مثل مختصات x_1, x_2, x_3, x_4 تحت تبدیل لورنتس تبدیل می‌شوند. بردارهای چهاربعدی را همچنین چار-بردارها یا بردارهای جهانی می‌نامیم. با به کار بردن معادله‌های (۱۷-۴۶) تا (۱۷-۴۸) و معادله (۱۷-۵۱) داریم

$$A'_\mu = \sum_{\nu=1}^4 a_{\mu\nu} A_\nu \quad A_\mu = \sum_{\nu=1}^4 A'_\nu a_{\nu\mu} \quad (53-17)$$

یا

$$\begin{aligned} A'_1 &= A_1 & A'_2 &= A_2 & (54-17) \\ A'_3 &= \gamma A_3 + i\beta\gamma A_4 & A'_4 &= -i\beta\gamma A_3 + \gamma A_4 \end{aligned}$$

از طرف دیگر یک "زده‌ای جهانی" کمیته‌ای است که تحت تبدیل لورنتس بدون تغییر باقی می‌ماند. سرانجام یک نقطه در فضا و زمان (فضای مینکوفسکی) را یک "نقطه جهانی" و مسیر یک ذره نقطه‌ای در این فضا را "خط جهانی" می‌نامیم.

گرا دیان چهاربعدی. وقتی از یک زده‌ای لورنتس Φ نسبت به x'_μ مشتق می‌گیریم مؤلفه‌های به دست آمده $\partial\Phi/\partial x'_\mu$ که μ از ۱ تا ۴ شمرده می‌شود، مثل یک چار-بردار تبدیل می‌شوند که می‌توان به ترتیب زیر آن را نشان داد. با استفاده از دستور زنجیره‌ای می‌نویسیم

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x'_\mu} = \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \quad (55-17)$$

اما

$$x_\nu = \sum_{\mu=1}^4 a_{\mu\nu} x'_\mu$$

و به این ترتیب $\partial x_\nu / \partial x'_\mu = a_{\mu\nu}$ که $a_{\mu\nu}$ ها ضرایب تبدیل لورنتس هستند. بنابراین

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x'_\mu} = \sum_{\nu=1}^4 a_{\mu\nu} \frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu} \quad (56-17)$$

از معادله (۵۳-۱۷) داریم

$$A_\mu = \sum_{\nu=1}^4 A'_\nu a_{\nu\mu}$$

$$A'_\mu = \sum_{\nu=1}^4 a_{\mu\nu} A_\nu$$

و به این ترتیب معادله (۶۲-۱۷) می شود

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\nu} = \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \quad (۶۳-۱۷)$$

$$A_\mu = \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} \quad (۵۷-۱۷)$$

جمع هر طرف را دیورژانس چهاربعدی یک چار-بردار می نامیم. این شبیه دیورژانس سه بعدی است که در فصل ۱ تعریف شد

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

علامت \square گاهی برای نشان دادن دیورژانس چهاربعدی استفاده می شود. به این ترتیب

$$\text{div } A_\mu = \square \cdot A_\mu = \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \quad (۶۴-۱۷)$$

همچنین توجه کنید که معادله (۶۳-۱۷) که دیورژانس چهاربعدی یک چار-بردار را نشان می دهد یک زده ای لورنتس است.

لاپلاسی چهاربعدی یا عملگر دالامبری. لاپلاسی ∇^2 با گرفتن دیورژانس گرادیان یک زده ای، $\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \nabla^2 \Phi$ ، در فضای سه بعدی تعریف شد. لاپلاس چهاربعدی یا عملگر دالامبری را نیز با روشی مشابه می توان به دست آورد. با گرفتن دیورژانس چهاربعدی از گرادیان چهاربعدی یک زده ای به دست می آوریم $\square \cdot \square \Phi = \square^2 \Phi$ آشکارا داریم

$$\square^2 \Phi = \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\mu^2} = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi \quad (۶۵-۱۷)$$

با استفاده از روشهایی که برای به دست آوردن خواص تبدیل گرادیان و دیورژانس چهاربعدی به کار بردیم، می توان نشان داد که لاپلاسی چهاربعدی یک زده ای لورنتس نیز یک زده ای لورنتس است. یعنی می توان نشان داد که

$$\square'^2 \Phi = \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'_\nu{}^2} = \square^2 \Phi = \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\mu^2} \quad (۶۶-۱۷)$$

به علاوه اگر \square^2 روی توابع دیگری، مثل چار-بردار A_μ عمل کند کمیت های به دست آمده خواص تبدیلی توابعی که تحت عمل قرار گرفته اند را حفظ می کنند. یعنی $\square^2 A_\mu$ یک چار-بردار است.

یا

که

این نتیجه مشخص می کند که $\partial \Phi / \partial x_\mu$ یک چار-بردار است. این عمل مانند عمل گرادیان ∇ در فضای سه بعدی است. علامت \square را در مقایسه با ∇ گاهی برای فضای چهاربعدی به کار می بریم. بنابراین می نویسیم

$$\text{grad } \Phi = \square \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} \quad (۵۸-۱۷)$$

دیورژانس چهاربعدی. وقتی از یک چار-بردار، A_μ ، نسبت به x_μ مشتق بگیریم مؤلفه های به دست آمده $\partial A_\mu / \partial x_\mu$ ، یا مجموع آنها که $\mu = 1, 2, 3, 4$ است تحت تبدیل لورنتس مانند یک زده ای تبدیل می شوند. این را می توان با استفاده از روش مشابهی که در مورد گرادیان استفاده شد نشان داد. با استفاده از دستور زنجیره ای می نویسیم

$$\frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\nu} = \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial A'_\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} \quad (۵۹-۱۷)$$

اما

$$x_\mu = \sum_{\nu=1}^4 x'_\nu a_{\nu\mu}$$

بنابراین $\partial x_\mu / \partial x'_\nu = a_{\nu\mu}$ به این ترتیب معادله (۵۹-۱۷) می شود

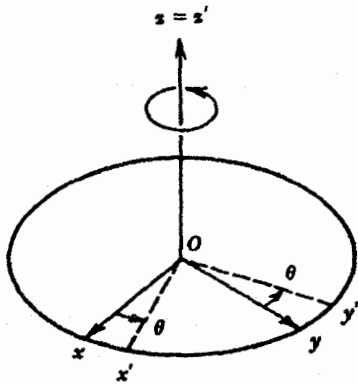
$$\frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\nu} = \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial A'_\nu}{\partial x_\mu} a_{\nu\mu} \quad (۶۰-۱۷)$$

با جمع معادله (۶۰-۱۷) روی ν به دست می آوریم

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\nu} = \sum_{\nu=1}^4 \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial A'_\nu}{\partial x_\mu} a_{\nu\mu} \quad (۶۱-۱۷)$$

با تعویض ترتیب جمع روی μ و ν و استفاده از این موضوع که ضرایب $a_{\mu\nu}$ مستقل از x_μ است، به دست می آوریم

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\nu} = \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_{\nu=1}^4 A'_\nu a_{\nu\mu} \quad (۶۲-۱۷)$$



شکل ۵-۱۷ چرخش در فضای سه بعدی حول محور z.

با نوشتن این تبدیل به صورت معادله (۱۷-۳۸) می‌توان به سادگی نشان داد که ضرایب a عبارت‌اند از

$$a_{11} = \cos \theta, \quad a_{12} = \sin \theta, \quad a_{21} = -\sin \theta,$$

$$a_{22} = \cos \theta, \quad a_{33} = 1, \quad a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$$

اکنون نشان می‌دهیم که این چرخش یک تبدیل متعامد است. طول بردار مکان \mathbf{R} در دستگاه مختصات اولیه برابر

$$R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

است. در دستگاه جدید (یعنی دستگاه پریم‌دار) می‌شود \mathbf{R}' ، که $R' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$ است. با قراردادن x' ، y' و z' برحسب x ، y و z نتیجه می‌گیریم

$$R' = [(x \cos \theta + y \sin \theta)^2 + (-x \sin \theta + y \cos \theta)^2 + z^2]^{1/2}$$

با بسط جمله‌های توان ۲ و توجه به اینکه $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ است، به دست می‌آوریم $R' = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ یعنی چرخش، متعامد است. ■

مثال ۶-۱۷ تبدیل لورنتس به عنوان تبدیل متعامد

معادله (۱۷-۴۱)، بدان معنی است که تبدیل لورنتس متعامد است. در این مثال، دلالت این شرط را بر ضرایب $a_{\mu\nu}$ تعیین می‌کنیم. می‌نویسیم

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^4 a_{\mu\nu} x_\nu$$

آن‌گاه معادله (۱۷-۴۱) معادل است با

$$\sum_{\mu=1}^4 x'^2_\mu = \sum_{\nu=1}^4 x^2_\nu \quad (17-72)$$

چار-تانسورها. چار-بردار لورنتس را گاهی تانسورهای مرتبه اول در فضای چهار بعدی می‌نامیم. تانسورهای مرتبه بالاتر را به همین روش تعریف می‌کنیم. مثلاً تانسور مرتبه ۲، $T_{\mu\nu}$ ، مجموعه‌ای از ۱۶ کمیت است که با دو شاخص نشانه‌گذاری و بر طبق قانون زیر تبدیل می‌شود

$$T'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda,\sigma=1}^4 a_{\mu\lambda} a_{\nu\sigma} T_{\lambda\sigma} \quad (17-67)$$

که $a_{\mu\nu}$ و $a_{\mu\lambda}$ ضرایب ماتریس تبدیل لورنتس هستند [معادله (۱۷-۵۰)].

یک تانسور مرتبه دوم، که در بخش بعد با آن روبه‌رو می‌شویم، را از مشتق‌گیری یک چار-بردار A_μ نسبت به x_ν ، که μ و ν از ۱ تا ۴ تغییر می‌کنند، به دست می‌آوریم. با استفاده از روشهای قبل، نشان می‌دهیم که ۱۶ مؤلفه، $\partial A_\mu / \partial x_\nu$ ، به دست آمده طبق قانون زیر تبدیل می‌شوند

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x'_\nu} = \sum_{\lambda,\sigma=1}^4 a_{\mu\lambda} a_{\nu\sigma} \frac{\partial A'_\lambda}{\partial x'_\sigma} \quad (17-68)$$

تانسورهایی را که متقارن و پادمتقارن می‌نامیم می‌توان از $\partial A_\mu / \partial x_\nu$ ساخت. مثلاً

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \quad (17-69)$$

که یک تانسور متقارن است و در رابطه $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ صدق می‌کند. از طرف دیگر تانسور

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \quad (17-70)$$

یک تانسور پادمتقارن است زیرا $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$. توجه کنید که چهار مؤلفه قطری یک تانسور پادمتقارن، $T_{\mu\mu}$ ، صفرند. بنابراین فقط شش مؤلفه مستقل دارد. از طرف دیگر تانسور متقارن، ۹ مؤلفه مستقل دارد.

مثال ۵-۱۷ چرخش در سه بعد

در این مثال خواص چرخش در فضای سه بعدی را بررسی می‌کنیم. یک دستگاه دکارتی با مبدأ O را در نظر می‌گیریم. اگر دستگاه حول محور z به اندازه زاویه θ بچرخد (که آن را در شکل ۵-۱۷ نشان داده‌ایم) آن‌گاه x ، y و z به x' ، y' و z' به صورت زیر تبدیل می‌شوند

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad z' = z \quad (17-71)$$

کنید که زاویه چرخش θ باشد؛ آنگاه در کنار معادله‌های (۷۱-۱۷) می‌نویسیم

$$x'_\tau = x_\tau \cos \theta + x_\tau \sin \theta \quad (۷۶-۱۷)$$

با مقایسه معادله (۷۶-۱۷) با معادله (۴۷-۱۷) به دست می‌آوریم

$$\cos \theta = \gamma \quad \text{و} \quad \sin \theta = i\beta\gamma$$

یا

$$\tan \theta = i\beta = \frac{iv}{c} \quad (۷۷-۱۷)$$

■ که نشان می‌دهد زاویه چرخش حقیقی نیست.

۱۷-۵ الکترودینامیک نسبیتی - هموردایی الکترودینامیک

اکنون می‌توانیم فرمولبندی چهاربعدی معادله‌های الکترومغناطیس را مطرح کنیم. یک روش فرمولبندی این معادله‌ها، که مختصات فضا-زمان در شرایطی برابر بحث می‌شوند، را فرمولبندی هموردا می‌نامیم.

معادله پیوستگی. معادله پیوستگی که بار و چگالی جریان را به هم مربوط می‌کند عبارت است از

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

یا با به‌کار بردن $x_\tau = ict$ داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + ic \frac{\partial \rho}{\partial x_\tau} = 0 \quad (۷۸-۱۷)$$

چون دیورژانس چهاربعدی [معادله (۶۴-۱۷)] با رابطه

$$\square \cdot A_\mu = \nabla \cdot \mathbf{A} + \partial A_\tau / \partial x_\tau$$

داده می‌شود آنگاه معادله (۷۸-۱۷) را با معرفی چار-بردار چگالی جریان (مسئله ۱۷-۱۴ را ببینید) می‌توانیم به صورت هموردا مطرح کنیم یعنی

$$J_\mu = (\mathbf{J}, ic\rho) = (J_1, J_2, J_3, ic\rho) \quad (۷۹-۱۷)$$

با این چار-بردار معادله ۷۸-۱۷ شکل هموردایی زیر را به خود می‌گیرد

$$\square \cdot J_\mu = \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad (۸۰-۱۷)$$

طرف چپ می‌شود

$$\sum_{\mu=1}^4 x'_\mu = \sum_{\mu=1}^4 \left(\sum_{\nu=1}^4 a_{\mu\nu} x_\nu \right) \left(\sum_{\lambda=1}^4 a_{\mu\lambda} x_\lambda \right)$$

یا

$$\sum_{\mu=1}^4 x'_\mu = \sum_{\mu,\nu,\lambda=1}^4 a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} x_\nu x_\lambda \quad (۷۳-۱۷)$$

معادله‌های (۷۲-۱۷) و (۷۳-۱۷) با یکدیگر سازگارند اگر

$$\sum_{\mu=1}^4 a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} \quad (۷۴-۱۷)$$

که $\delta_{\nu\lambda}$ تابع دلتای کرونکر است؛ که اگر $\nu \neq \lambda$ باشد صفر و اگر $\nu = \lambda$ باشد یک است. معادله (۷۴-۱۷) شرطی است که تعامد تبدیل را بیان می‌کند.

مثال ۱۷-۷ دیفرانسیل حجم چهاربعدی

دیفرانسیل حجم چهاربعدی را به شکل $d^4x = -i dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ تعریف می‌کنیم. قانون تبدیل این جزء حجم را از تبدیل x_μ به دست می‌آوریم که رابطه آشنای $d^4x' = J d^4x$ را نشان می‌دهد، که J دترمینان ژاکوبی است

$$J = \frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}$$

دترمینان ژاکوبی $\partial(q, p) / \partial(u, v)$ با ماتریس زیر تعریف می‌شود

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(u, v)} = \begin{bmatrix} \partial q / \partial u & \partial p / \partial u \\ \partial q / \partial v & \partial p / \partial v \end{bmatrix}$$

می‌توان نشان داد که دترمینان ژاکوبی درست همان دترمینان $a_{\mu\nu}$ است و چون $|a_{\mu\nu}| = 1$ است پس

$$d^4x' = d^4x \quad (۷۵-۱۷)$$

■ که بیان می‌کند که "چار-حجم" یک زده‌ای لورنتس است.

مثال ۱۷-۸ تبدیل لورنتس به عنوان یک چرخش مختلط در فضای چهاربعدی

اکنون نشان می‌دهیم که تبدیل لورنتس را می‌توان به صورت یک چرخش در صفحه $x_2 - x_4$ تحت یک زاویه مختلط تعبیر کرد. فرض

و $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ نتیجه می‌شوند و میدانها را به صورت جدا از هم به پتانسیلهای \mathbf{A} و Φ ، که قبلاً به شکل یک چار-بردار آنها را با هم ترکیب کردیم، مربوط می‌کنند. با به کار بردن معادله (۱۷-۸۱) می‌توان نشان داد که مؤلفه‌های E_1 و B_1 عبارتهای صریح زیر را دارند

$$B_1 = \frac{\partial A_z}{\partial x_y} - \frac{\partial A_y}{\partial x_z} \quad (۱۴-۱۷)$$

$$iE_1 = \frac{\partial A_1}{\partial x_z} - \frac{\partial A_z}{\partial x_1} \quad (۱۵-۱۷)$$

همچنین می‌توان عبارتهای صریحی از E_2, E_3, B_2, B_3 نوشت. واضح است که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی عناصر تانسور شدت میدان، $F_{\mu\nu}$ ، مرتبه دوم و پادمتقارن، مانند آنچه که در معادله (۱۷-۷۰) تعریف شد هستند. یعنی

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \quad (۱۶-۱۷)$$

که A_μ ، چار-بردار پتانسیل، معادله (۱۷-۸۱) است. تحت تبدیل لورنتس طبق معادله (۱۷-۶۷) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$F'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda, \sigma} a_{\mu\lambda} a_{\nu\sigma} F_{\lambda\sigma} \quad (۱۷-۸۷)$$

تانسور شدت میدان صریحاً به صورت زیر است

$$F_{\mu\nu} = \begin{matrix} & \xrightarrow{x'} & & \\ \mu \downarrow & \begin{bmatrix} \circ & B_z & -B_y & -iE_1/c \\ -B_z & \circ & B_x & -iE_2/c \\ B_y & -B_x & \circ & -iE_3/c \\ iE_1/c & iE_2/c & iE_3/c & \circ \end{bmatrix} & & \end{matrix} \quad (۱۷-۸۸)$$

با ترکیب میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در یک چار-تانسور می‌توانیم معادله‌های ماکسول را به شکل هموردا بنویسیم. اکنون معادله‌های زیر را بررسی می‌کنیم

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (۱۷-۸۹)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (۱۷-۹۰)$$

بسط دیورژانس سه‌بعدی معادله (۱۷-۸۹) نتیجه می‌دهد

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = \frac{J_z}{ic\epsilon_0} \quad (۱۷-۹۱)$$

معادله‌های موج پتانسیل و شرط لورنتس. معادله‌های موج برای پتانسیل برداری \mathbf{A} و نردهای Φ را با روابط (۱۵-۹) و (۱۵-۱۰) نشان دادیم. یادآوری می‌کنیم که رابطه

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

عملگر دیفرانسیلی طرف چپ هر دو معادله موج است. به علاوه، چون \mathbf{J} و ρ مؤلفه‌های فضایی و زمانی چار-بردار J_μ هستند، آنگاه \mathbf{A} و Φ را باید با هم ترکیب کنیم تا تشکیل یک چار-بردار به شکل زیر دهند

$$A_\mu = \left(\mathbf{A}, \frac{i\Phi}{c} \right) = \left(A_1, A_2, A_3, \frac{i\Phi}{c} \right) \quad (۱۷-۸۱)$$

با به کار بردن معادله‌های (۱۷-۷۹) و (۱۷-۸۱) برای چار-بردارهای چگالی جریان و پتانسیل، معادله‌های موج، شکل تک‌هموردای زیر را دارند

$$\square^2 A_\mu = \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu^2} = -\mu_0 J_\mu \quad (۱۷-۸۲)$$

شرط لورنتس که پتانسیل برداری را به پتانسیل نردهای مربوط می‌کند برابر است با

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

بنابراین شکل هموردایی مانند شکل هموردای معادله پیوستگی به خود می‌گیرد

$$\square \cdot A_\mu = \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad (۱۷-۸۳)$$

معادله‌های ماکسول. معادله‌های ماکسول در خلأ عبارت‌اند از $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ، $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + (1/c^2) \partial \mathbf{E} / \partial t$ ، $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ و $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ نوشتن آنها به شکل هموردا، همان طور که در معادله پیوستگی، معادله موج و شرط لورنتس عمل شد، روش روشنی وجود ندارد. این مطلب احتمالاً مشخص می‌کند که، مانند قبل، میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} برای تشکیل یک چار-بردار با هم ترکیب نمی‌شوند، بلکه ممکن است چار-تانسورهای از مرتبه بالاتر ایجاد کنند.

معادله‌های ماکسول شروع خوبی برای اثبات جمله‌های بالا نیستند. اما معادله‌های $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ و $\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$ که از آنها نتیجه می‌شوند، مناسب‌ترند. این معادله‌ها از معادله‌های، $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

چون [از معادله (۸۸-۱۷)] $B_1 = F_{23}$ است آن‌گاه

$$B'_1 = F'_{23} = \sum_{\lambda, \sigma} a_{2\lambda} a_{3\sigma} F_{\lambda\sigma} \quad (97-17)$$

با بسط جمعها روی λ و σ و به‌کار بردن ماتریس معادله (۱۷-۵۰) نتیجه می‌گیریم که بسیاری از جمله‌های معادله (۹۷-۱۷) صفرند و $B'_1 = a_{12} a_{33} F_{23} + a_{32} F_{23}$ یا

$$B'_1 = \gamma B_1 + \frac{\beta\gamma}{c} E_2$$

از طرف دیگر مؤلفه B'_2 ، که مؤلفه در راستای حرکت است، تحت تبدیل لورنتس ناورداست. این موضوع را به‌روش زیر نشان می‌دهیم

$$B'_2 = F'_{13} = \sum_{\lambda, \sigma} a_{1\lambda} a_{3\sigma} F_{\lambda\sigma} = a_{11} a_{32} F_{12} = B_2$$

با روشی مشابه می‌توان نشان داد که تبدیل همه مؤلفه‌های میدان عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} E'_1 &= \gamma(E_1 - c\beta B_2) & B'_1 &= \gamma\left(B_1 + \frac{\beta}{c} E_2\right) \\ E'_2 &= \gamma(E_2 + c\beta B_1) & B'_2 &= \gamma\left(B_2 - \frac{\beta}{c} E_1\right) \\ E'_3 &= E_3 & B'_3 &= B_3 \end{aligned} \quad (98-17)$$

روابط در معادله (۹۸-۱۷) مشخص می‌کنند که مؤلفه‌های موازی با جهت حرکت، تحت تبدیل لورنتس بدون تغییر باقی می‌مانند. این روابط را به حالتی که چارچوب S' نسبت به S با سرعت دلخواه v حرکت دارد نیز تعمیم می‌دهیم

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel} & B'_{\parallel} &= B_{\parallel} \\ E'_{\perp} &= \gamma[\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}] & B'_{\perp} &= \gamma\left[\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}}{c^2}\right] \end{aligned} \quad (99-17)$$

که شاخص \parallel معرف مؤلفه موازی با \mathbf{v} و \perp معرف مؤلفه عمود بر \mathbf{v} است.

تبدیل میدانها را نیز می‌توان به شکل برداری به‌صورت زیر بیان کرد

$$\mathbf{E}' = \gamma[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] - (\gamma - 1)\mathbf{v} \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})}{v^2}$$

با قراردادن E_1, E_2, E_3 برحسب $F_{\mu\nu}$ از معادله (۸۸-۱۷)، معادله (۹۱-۱۷) به شکل زیر در می‌آید

$$-ic \frac{\partial F_{21}}{\partial x_1} - ic \frac{\partial F_{22}}{\partial x_2} - ic \frac{\partial F_{23}}{\partial x_3} = \frac{J_2}{ic\epsilon_0} \quad (92-17)$$

با افزودن $-ic \partial F_{22} / \partial x_{22} \equiv 0$ به این معادله به‌دست می‌آید

$$\sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = \mu_0 J_{\mu} \quad \mu = 2 \quad (93-17)$$

معادله (۹۳-۱۷) شکل هموردایی (۸۹-۱۷) است. با روشی مشابه، شکل هموردایی معادله (۹۰-۱۷) که همان معادله (۹۳-۱۷) با $\mu = 1, 2, 3$ است نتیجه می‌شود. به این ترتیب رابطه

$$\sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = \mu_0 J_{\mu} \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \quad (94-17)$$

معادله‌های (۸۹-۱۷) و (۹۰-۱۷) را نشان می‌دهد. همچنین می‌توان نشان داد که شکل هموردایی معادله‌های همگن ماکسول

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{و} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (95-17)$$

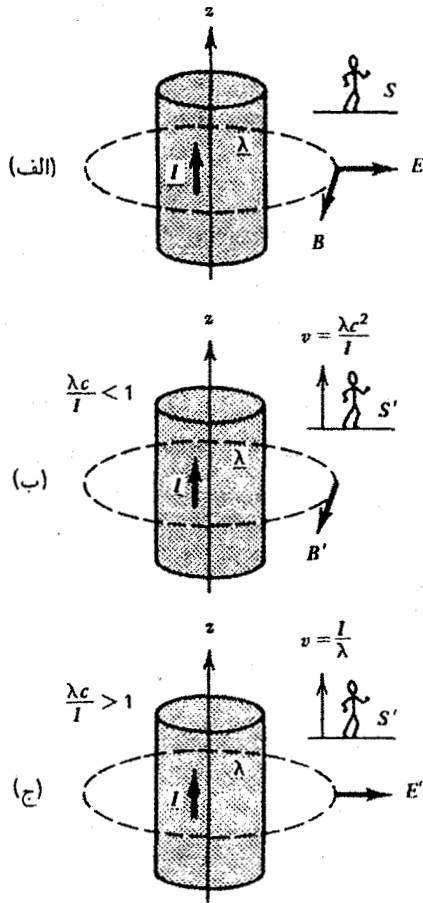
از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0 \quad \mu \neq \nu \neq \lambda = 1, 2, 3, 4 \quad (96-17)$$

هر جمله از معادله (۹۶-۱۷) یک تانسور مرتبه سوم است زیرا $F_{\mu\nu}$ یک تانسور مرتبه دوم و مشتق آن نسبت به x_{λ} که $\mu \neq \nu \neq \lambda$ است، مرتبه تانسور را یک واحد افزایش می‌دهد.

کاربردی از فرمولبندی هموردایی میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} برحسب چارستانسورها این است که خاصیت تبدیل تانسور شدت میدان، [معادله (۸۸-۱۷)]، را برای به‌دست‌آوردن قوانین تبدیل این میدانها به‌کار ببریم. یک ناظر ساکن در چارچوب مرجع S را در نظر می‌گیریم که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی در آن \mathbf{E} و \mathbf{B} هستند. اکنون میدانهای \mathbf{E}' و \mathbf{B}' را که ناظر متحرک با سرعت v در طول محور z ، مشاهده می‌کند حساب می‌کنیم. طبق معادله (۸۷-۱۷) داریم

$$F'_{\mu\nu} = \sum_{\sigma, \lambda} a_{\mu\lambda} a_{\nu\sigma} F_{\lambda\sigma}$$



شکل ۶-۱۷ میدانهای یک استوانه طویل و ثابت که همزمان دارای چگالی بار، و جریان یکنواخت است و در یک چارچوب لخت متحرک در راستای محور استوانه اندازهگیری می شود. ناظر نسبت به استوانه با سرعت (الف) صفر، (ب) $\lambda c^2 / I$ و (ج) I / λ حرکت می کند.

و x_2 ، معادله (۹۹-۱۷) نتیجه می دهد

$$E'_\rho = \gamma(E_\rho - vB_\phi) = \frac{\gamma}{2\pi\rho} \left(\frac{\lambda}{\epsilon_0} - v\mu_0 I \right) \quad (۱۰۱-۱۷)$$

$$B'_\phi = \gamma \left(B_\phi - \frac{v}{c^2} E_\rho \right) = \frac{\gamma}{2\pi\rho} \left(\mu_0 I - \frac{v}{c^2} \frac{\lambda}{\epsilon_0} \right) \quad (۱۰۲-۱۷)$$

اکنون نشان می دهیم که در سرعتهای معین ناظر S' می تواند فقط یا میدان الکتریکی محض یا میدان مغناطیسی محض را مشاهده کند. ابتدا حالت $\lambda c / I < 1$ (استوانه جریان دار) را بررسی می کنیم. وقتی ناظر S' با سرعت $v = \lambda / \epsilon_0 \mu_0 I$ حرکت می کند در این صورت میدانهای الکتریکی و مغناطیسی به صورت زیر

$$\mathbf{B}' = \gamma \left[\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \right] - (\gamma - 1) \mathbf{v} \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}{v^2} \quad (۱۰۰-۱۷)$$

اغلب لازم است که میدانها در دستگاه بی پریم را برحسب میدانها در دستگاه پریم دار تعیین کرد. روابط نتیجه شده تبدیل وارون هستند. به سادگی می توان نشان داد که تبدیل وارون از معادله (۹۸-۱۷) تا معادله (۱۰۰-۱۷) با تعویض کمیتهای پریم دار با بی پریم و نیز v با $-v$ به دست می آید. در نهایت توجه کنید که تبدیلهایی که از معادله های (۹۸-۱۷) تا (۱۰۰-۱۷) به دست می آیند، مشخص می کنند که میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} وجود مستقل ندارند بلکه کاملاً به هم وابسته اند.

مثال ۹-۱۷ $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ و $E'^2 - c^2 B'^2$ نرده ایهای لورنتس اند در این مثال برای اینکه نشان دهیم $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ یک نرده ای لورنتس است معادله (۹۸-۱۷) را به کار می پریم. یعنی نشان می دهیم $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}'$ با جایگذاری برای مؤلفه های پریم دار از معادله (۹۸-۱۷)، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' &= \gamma^2 (E_\parallel - c\beta B_\parallel) \left(B_\parallel + \frac{\beta}{c} E_\parallel \right) \\ &+ \gamma^2 (E_\perp + c\beta B_\perp) \left(B_\perp - \frac{\beta}{c} E_\perp \right) + E_\perp B_\perp \end{aligned}$$

با بسط جمله ها به دست می آوریم

$$\mathbf{E}' \odot \mathbf{B}' = (\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2) [E_\parallel B_\parallel + E_\perp B_\perp] + E_\perp B_\perp = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

با به کار بردن روشی مشابه می توان نشان داد که $E'^2 - c^2 B'^2$ نیز یک نرده ای لورنتس است (مسئله ۱۷-۱۵ را ببینید).

مثال ۱۰-۱۷ یک استوانه باردار حامل جریان یک استوانه به طول ∞ با چگالی طولی λ به طور یکنواخت باردار است. همچنین استوانه حامل جریان I با توزیع یکنواخت، مطابق شکل ۶-۱۷، است. ناظر S' با سرعت v در راستای موازی با محور استوانه حرکت می کند.

از دید ناظر S که نسبت به استوانه ساکن است [شکل ۶-۱۷ (الف)]،

میدانهای الکتریکی و مغناطیسی برابرند با

$$\mathbf{E} = E_\rho \hat{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\rho\epsilon_0} \hat{\rho} \quad \mathbf{B} = B_\phi \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

با به کار بردن تبدیل لورنتس میدانهایی را که ناظر S' مشاهده می کند را می توان حساب کرد. با انتخاب ρ ، ϕ و z به ترتیب به جای x_2 ، x_1

می شوند [شکل ۱۷-۶ (ب) را ببینید]

E' و B' موازی اند، در نظر می گیریم. آن گاه میدانها، وقتی در هر چارچوب دیگری (که نسبت به S' در جهت مشترک E' و B' حرکت می کنند) مشاهده شوند، موازی باقی می ماند [معادله (۱۷-۹۹) را ببینید]. به این ترتیب فقط باید سرعت چارچوب S' را تعیین کنیم که در راستای عمود بر صفحه E و B حرکت می کند. مثلاً اگر E و B در صفحه xy باشند آن گاه یک چارچوب متحرک در راستای محور z با سرعت مناسب v ، مطابق شکل ۱۷-۷، می تواند E' و B' را موازی کند. اکنون اگر E' و B' بر حسب تصادف در امتداد محور x قرار گیرند، آن گاه S' هم می تواند هر سرعتی را در جهت x بدون تغییری در موازی بودن به دست آورد.

به این ترتیب با انتخاب $E' \times B' = 0$ و v در جهت $E \times B$ - یعنی عمود بر صفحه E و B - می توان با ضرب وارون معادله (۱۷-۱۰۰) نشان داد که (مسئله ۱۷-۱۶ را ببینید)

$$\frac{v}{c} = \hat{n} \frac{E' + c^2 B' - \sqrt{(E'^2 - c^2 B'^2)^2 + 4c^2 (E \cdot B)^2}}{2c |E \times B|} \quad (17-105)$$

که \hat{n} بردار یکه عمود بر صفحه E و B است. اندازه میدانهای E' و B' را نیز با تبدیل لورنتس می توان تعیین کرد. که به عنوان تمرین به خواننده واگذار می کنیم (مسئله ۱۷-۱۶ را ببینید).

مثال ۱۷-۱۲ تانسور شدت میدان در حضور مواد دی الکتریکی و مغناطیسی

در حضور موادی که خواص دی الکتریکی و مغناطیسی دارند، میدانهای E, D, H, B به بردارهای قطبیده و مغناطیده مواد، P و M ، با رابطه زیر به هم مربوط اند

$$E = \frac{(D - P)}{\epsilon_0} \quad B = \mu_0 (H + M) \quad (17-106)$$

با جانشینی مؤلفه های E_i و B_i تانسور شدت میدان [معادله (۱۷-۸۸)] به ترتیب با مقادیر، $(D_i - P_i)/\epsilon_0$ و $(H_i + M_i)$ ، μ_0 به سادگی می توان نشان داد که $F_{\mu\nu}$ بر حسب دو تانسور $H_{\mu\nu}$ و $M_{\mu\nu}$ بیان می شود که

$$H_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & H_x & -H_y & -icD_z \\ -H_x & 0 & H_z & -icD_x \\ H_y & -H_z & 0 & -icD_y \\ icD_z & icD_x & icD_y & 0 \end{bmatrix} \quad (17-107)$$

$$B'_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \left(1 - \frac{\lambda^2 c^2}{I^2}\right)^{1/2} \quad E'_\rho = 0 \quad (17-103)$$

که از $\gamma = (1 - \lambda^2 c^2 / I^2)^{-1/2}$ استفاده کرده ایم. در این حالت استوانه مانند یک رسانای حامل جریان رفتار می کند. حال حالتی را که $\lambda c / I > 1$ (استوانه باردار) است بررسی می کنیم. در این حالت وقتی S' با سرعت I/λ حرکت می کند میدانهای الکتریکی و مغناطیسی [شکل ۱۷-۶ (ج) را ببینید] به صورت زیر می شوند

$$E'_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\rho\epsilon_0} \left(1 - \frac{I^2}{\lambda^2 c^2}\right)^{1/2} \quad B'_\phi = 0 \quad (17-104)$$

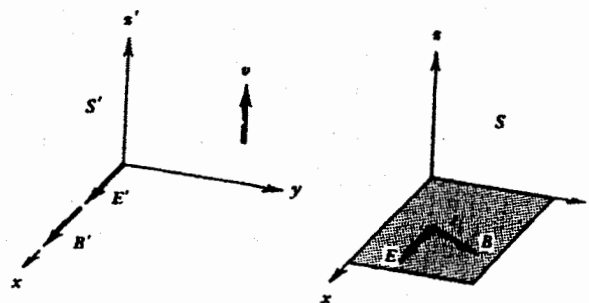
که $\gamma = (1 - I^2 / \lambda^2 c^2)^{-1/2}$ را به کار برده ایم. در این وضعیت استوانه مانند یک رسانای باردار عمل می کند.

آخرین حالت را که $\lambda c / I = 1$ است نیز بررسی می کنیم. در این مورد چارچوب مرجعی وجود ندارد که در آن میدانهای الکترومغناطیسی به طور خالص الکتریکی یا مغناطیسی باشند. همان طور از معادله های (۱۷-۱۰۳) و (۱۷-۱۰۴) پیداست سرعت چارچوب در این حالت به سرعت نور می رسد و هر دو میدان صفر می شوند.

مثال ۱۷-۱۱ میدانهای موازی E و B

یک موج الکترومغناطیسی یکنواخت با میدانهای E و B را در چارچوب مرجع S فرض می کنیم. می خواهیم سرعت v چارچوب مرجع S' را نسبت به چارچوب S که در آن میدانها موازی اند، مطابق شکل ۱۷-۷، پیدا کنیم.

تعداد زیادی چارچوب وجود دارند که می توانند موازی باشند. برای اثبات این موضوع، چارچوب متحرک S' با سرعت v را، که در آن



شکل ۱۷-۷ میدان الکترومغناطیسی (E و B) در دو چارچوب متحرک نسبت به هم که نشان می دهد E و B در یکی از آنها به صورت موازی است.

$$M_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & M_x & -M_y & icP_x \\ -M_x & 0 & M_y & icP_y \\ M_y & -M_x & 0 & icP_z \\ -icP_x & -icP_y & -icP_z & 0 \end{bmatrix} \quad (108-17)$$

$$F_{\mu\nu} = \mu_0 (H_{\mu\nu} + M_{\mu\nu}) \quad (109-17)$$

توجه کنید که معادله (۱۰۹-۱۷) روابط $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ و $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ را با هم ترکیب می‌کند تا یک رابطه تنها به دست آید.

هر دو $M_{\mu\nu}$ و $H_{\mu\nu}$ چار-تانسورهای پادمتقارن مرتبه دوم اند (تانسورهای لورنتس). این تانسورها تحت تبدیل لورنتس بر طبق معادله (۱۷-۶۷) یا معادله (۱۷-۸۷) تبدیل می‌شوند. با به کار بردن همین روش می‌توانیم قوانین تبدیل \mathbf{E} و \mathbf{B} را به دست آوریم، نتیجه می‌گیریم

$$P'_{\parallel} = P_{\parallel} \quad M'_{\parallel} = M_{\parallel}$$

$$P'_{\perp} = \gamma \left(P_{\perp} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{M}_{\perp} \right) \quad M'_{\perp} = \gamma (\mathbf{M}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{P}_{\perp}) \quad (110-17)$$

از این تبدیلهای در مسائل ۱۷-۲۰، ۱۷-۲۱ و ۱۷-۲۳ بیشتر استفاده

می‌کنیم.

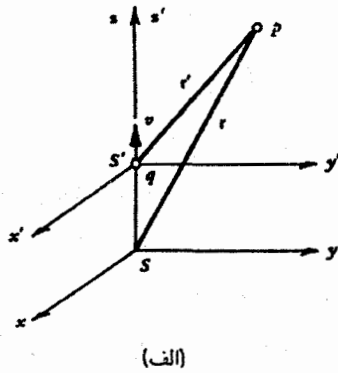
مثال ۱۷-۱۳ پتانسیلهای یک بار متحرک یکنواخت

یک بار نقطه‌ای q با سرعت یکنواخت \mathbf{v} در طول محور z نسبت به یک ناظر S ، که نسبت به آزمایشگاه ساکن است، حرکت می‌کند [شکل ۱۷-۸ (الف) را ببینید]. از دید ناظر S' که نسبت به بار q ساکن است، پتانسیلهایی که بار ایجاد می‌کند برابر است با

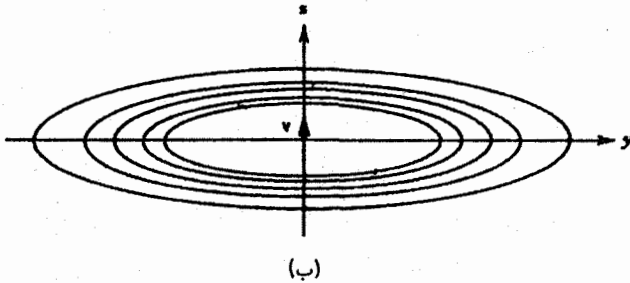
$$\Phi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \quad \mathbf{A}' = 0 \quad (111-17)$$

که $\mathbf{r}' = \gamma(z - vt)\hat{z} + x\hat{x} + y\hat{y}$ از دید ناظر S پتانسیلهای همان پتانسیلهای نیستند. آنها را با استفاده از خواص تبدیل چار-بردار $A_{\mu} = (A, i\Phi/c)$ از معادله (۱۷-۵۴) می‌توان محاسبه کرد. با به کار بردن تبدیل وارون معادله (۱۷-۵۴) به دست می‌آوریم $A_1 = A_2 = 0$ و $A_3 = -i\beta\gamma A'_3$ ، $A_4 = \gamma A'_4$

$$\Phi = \gamma\Phi' \quad \text{و} \quad A_3 = \frac{\beta\gamma}{c}\Phi' = \frac{\beta}{c}\Phi \quad (112-17)$$



(الف)



(ب)

شکل ۱۷-۸ تعیین پتانسیلهای یک بار نقطه‌ای با حرکت یکنواخت با استفاده از تبدیل لورنتس چار-پتانسیل. (الف) نمودار حرکت. (ب) نمودار سطوح هم‌پتانسیل، در صفحه yz . سطوح به فاصله مساوی‌اند و Φ یا A_z را نشان می‌دهند.

با قراردادن Φ' از معادله (۱۱۱-۱۷) به دست می‌آوریم

$$\Phi = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0 r'} \quad A_z = \frac{\mu_0 v \gamma q}{4\pi r'} \quad (113-17)$$

بهرتر است که کمیت R^* را به صورت زیر معرفی کنیم

$$R^* = \frac{r'}{\gamma} \quad (114-17)$$

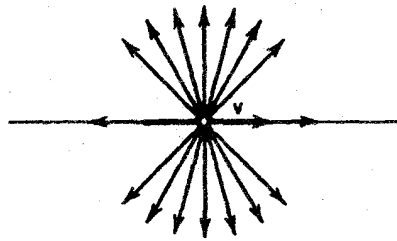
برحسب R^* معادله‌های (۱۱۳-۱۷) را می‌توان به شکل زیر نشان داد

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^*} \quad A_z = \frac{\mu_0 v}{4\pi} \frac{q}{R^*} \quad (115-17)$$

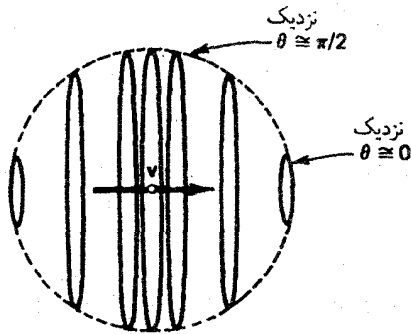
شکل ۱۷-۸ (ب) چند سطح هم‌پتانسیل در صفحه yz را که به فاصله مساوی قرار دارند نشان می‌دهد. این سطوح یا Φ یا A_z را نشان می‌دهند. می‌بینیم که پتانسیلهای گرادیان بزرگتری در راستای عمود بر حرکت نسبت به راستای موازی با آن دارند.

مثال ۱۷-۱۴ میدانهای ناشی از یک بار متحرک یکنواخت

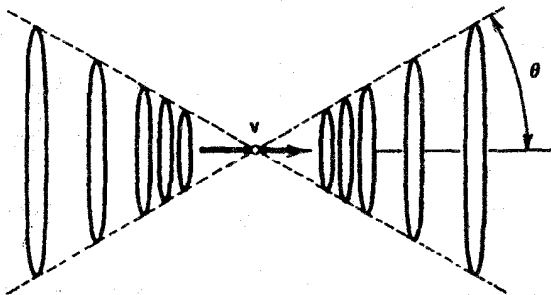
بار متحرک یکنواخت مثال ۱۷-۱۳ را در نظر می‌گیریم. میدانهایی که بار ایجاد می‌کنند از پتانسیلهای زنده‌ای و برداری بار، Φ و \mathbf{A} ،



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۹-۱۷ نمایش خطوط میدان \mathbf{E} و \mathbf{B} ناشی از بار نقطه‌ای متحرک. (الف) خطوط میدان \mathbf{E} . (ب) خطوط میدان \mathbf{B} به صورت تابعی از θ . (ج) خطوط میدان \mathbf{B} به صورت تابعی از r .

شکل ۹-۱۷ (الف) خطوط میدان \mathbf{E} بار را نشان می‌دهد. این خطوط، خطوط مستقیم شعاعی هستند که از مکان فعلی بار نشأت می‌گیرند و این یک خاصیت قابل ملاحظه است چون میدانها از زمانهای قابل توجه (جلوتر) تأخیری شروع می‌شوند. به علاوه این شکل نشان می‌دهد که خطوط در جهت عمود بر \mathbf{v} متمرکز شده‌اند [شکل ۱۷-۸ (ب) را ببینید]. شکل‌های ۹-۱۷ (ب) و ۹-۱۷ (ج) به ترتیب خطوط میدان \mathbf{B} را به صورت تابعی از r و θ نشان می‌دهند. هر دو شکل نشان می‌دهند که خطوط میدان مغناطیسی دایره‌هایی با مراکز واقع در طول محور z ، یعنی در طول مسیر بار هستند. به علاوه، این شکلها نشان می‌دهند که خطوط نزدیک به بار در جهت عمود بر \mathbf{v} متمرکز شده‌اند. ■

با به کار بردن روابط $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ و $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ حساب می‌شوند. این پتانسیلها در مثال ۱۷-۱۳ با به کار بردن تبدیل لورنتس به دست آمدند. اما در این مثال میدانها را از روی پتانسیلها به دست نمی‌آوریم بلکه مستقیماً از تبدیل لورنتس به دست می‌آوریم. از دید ناظر S' ساکن نسبت به بار، میدانها (مثال قبل را ببینید) از روابط زیر به دست می‌آیند

$$\mathbf{E}' = \frac{q\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \quad \mathbf{B}' = 0 \quad (116-17)$$

که $\mathbf{r}' = x\hat{x} + y\hat{y} + \gamma(z-vt)\hat{z} = \rho\hat{\rho} + \gamma(z-vt)\hat{z}$ است. در چارچوب S ، میدانها را می‌توان با استفاده از معادله (۱۷-۹۹) حساب کرد، چون v در راستای محور z است، بنابراین جهتهای موازی و عمود به ترتیب در راستاهای z و ρ اند. به این ترتیب تبدیل وارون معادله (۱۷-۹۹) برای میدانهای الکتریکی نتیجه می‌دهد

$$E_z = E'_z \quad E_\rho = \gamma E'_\rho \quad (117-17)$$

میدانها برحسب کمیت \mathbf{R}^* ، که در معادله (۱۷-۱۱۴) تعریف شد، برابرند با

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(z-vt)}{\gamma^2(R^*)^3} \quad E_\rho = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{\gamma^2(R^*)^3} \quad (118-17)$$

میدان کل با نمایش برداری $\mathbf{E} = E_z\hat{z} + E_\rho\hat{\rho}$ می‌شود

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{(R^*)^3} (1-\beta^2) \quad (119-17)$$

که $\mathbf{R} = (z-vt)\hat{z} + \rho\hat{\rho}$ بردار مکان بار در چارچوب S است. به علاوه می‌توان به سادگی نشان داد که معادله (۱۷-۱۱۹) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{\gamma^2 R^3 [1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} \quad (120-17)$$

که θ زاویه بین \mathbf{R} و \mathbf{v} است.

خواص تبدیل میدان مغناطیسی به دست می‌دهد:

$$B_z = B'_z = 0 \quad B_\perp = \frac{\gamma}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}'_\perp = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}_\perp \quad (121-17)$$

چون $\mathbf{v} = v\hat{z}$ ، $\mathbf{E}_\perp = E_\rho\hat{\rho}$ و $\hat{z} \times \hat{\rho} = \hat{\phi}$ بردار یکه در جهت $\hat{\phi}$ است آن‌گاه

$$\mathbf{B}_\perp = \frac{v}{c^2} E_\rho \hat{\phi} = \frac{\mu_0 v q}{4\pi} \frac{\rho}{\gamma^2 (R^*)^3} \hat{\phi} \quad (122-17)$$

(فضازمان) جدید مختلط (از دید فیزیک غیر اقلیدسی) است، و فضای مینکوفسکی نام دارد. اما از دید ریاضی همان شکل فضای اقلیدسی را دارد. این تبدیل را می‌توان نه فقط به هندسه بلکه همچنین به مکانیک، الکترومغناطیس و الکترودینامیک در بین سایر موضوعها تعمیم داد.

این تبدیل در مورد هر چار-بردار در این فضا به کار می‌رود. این بردارها شامل چار-بردارهای مختصات $x_\mu(\mathbf{r}, ict)$ ، چار-بردار پتانسیل $A_\mu(\mathbf{A}, i\Phi/c)$ ، چار-بردار جریان $J_\mu(\mathbf{J}, ic\rho)$ می‌شود، که مربوط به الکترومغناطیس است. به علاوه چار-تانسورها نیز در این فضا تعریف می‌شوند. مثالی در این مورد، تانسور مرتبه دوم است که با دو تبدیل لورنتس پی‌درپی تعریف می‌شود. مؤلفه‌های میدان مغناطیسی و الکتریکی اجزای این تانسور $F_{\mu\nu}$ را تشکیل می‌دهند

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \quad [۸۶-۱۷]$$

تبدیل لورنتس برای یک دستگاه متحرک با سرعت v در راستای z عبارت است از

$$a_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \quad [۵۰-۱۷]$$

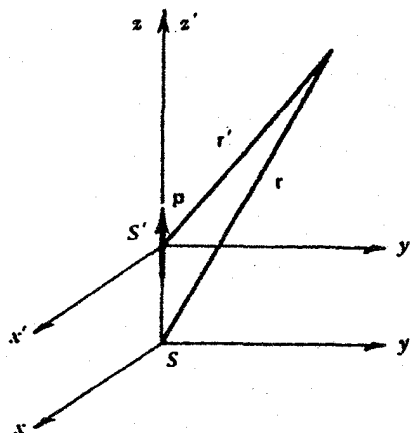
که $\beta = v/c$ و $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ است، و

$$T'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda, \sigma=1}^4 a_{\mu\lambda} a_{\nu\sigma} T_{\lambda\sigma} \quad \text{و} \quad B'_\mu = \sum_{\nu=1}^4 a_{\mu\nu} B_\nu \quad [۵۳-۱۷], [۶۷-۱۷]$$

که B_μ و $T_{\mu\nu}$ به ترتیب هر بردار و هر تانسور مرتبه دوم را مشخص می‌کنند.

بعضی از مضامین یا واقعیتهایی که از تبدیلهای به دست می‌آیند عبارت‌اند از:

۱. سرعت انتشار تابش الکترومغناطیسی در خلا، c ، در هر دستگاه مختصات متحرک یکنواخت (دستگاه لخت) ثابت است.
۲. کمیت $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ با این تبدیل ناورد است.
۳. معادله موج و معادله‌های ماکسول تحت تبدیل لورنتس (که لازم است میدانها مانند اجزای تانسور و پتانسیلهای مانند مؤلفه‌های بردار، تبدیل شوند) بدون تغییرند (هموردا).



شکل ۱۷-۱۰ تعیین پتانسیلهای یک دوقطبی الکتریکی متحرک یکنواخت با به کار بردن تبدیل لورنتس چار-پتانسیل.

مثال ۱۷-۱۵ دوقطبی الکتریکی در حرکت یکنواخت
یک دوقطبی الکتریکی $\mathbf{p} = p \cdot \hat{z}$ مطابق شکل ۱۷-۱۰، با سرعت یکنواخت v در راستای محور z نسبت به ناظر ساکن آزمایشگاه حرکت می‌کند.

از نظر ناظر S' که نسبت به \mathbf{p} ساکن است پتانسیلی که دوقطبی ایجاد می‌کند برابر است با

$$\Phi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3} \quad \mathbf{A}' = 0 \quad (۱۲۳-۱۷)$$

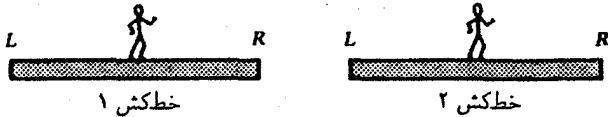
که $\mathbf{r}' = \gamma(z - vt)\hat{z} + x\hat{x} + y\hat{y}$ است. پتانسیلهای در S را می‌توان از (۱۲۳-۱۷) با استفاده از تبدیل وارون [معادله (۱۷-۵۴)] را ببینید] حساب کرد. به این ترتیب $\Phi = \gamma\Phi'$ و $A_z = \beta\gamma\Phi'/c$ با قراردادن Φ' از (۱۲۳-۱۷) و استفاده از کمیت مناسب \mathbf{R}^* از معادله (۱۱۴-۱۷)، به دست می‌آوریم

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}^*}{\gamma(R^*)^3} \quad A_z = \frac{v}{c^2} \Phi \quad (۱۲۴-۱۷)$$

۱۷-۶ خلاصه

لورنتس با مطالعه خواص تبدیل معادله‌های ماکسول، تبدیلی به دست آورد که تبدیل لورنتس نامیده می‌شود. این تبدیل، متغیرهای مکان و زمان را به هم آمیخته و بنابراین آنها را در حالتی مشابه به شکل (x, y, z, ict) ، که $i = \sqrt{-1}$ است، قرار می‌دهد. تبدیل در سرعت‌های پایین (نسبت به سرعت نور) منجر به تبدیل مشهور گالیله می‌شود، که فضا و زمان از دید آن از یکدیگر مستقل‌اند. فضای چهاربعدی

به ترتیب نسبت به خط‌کشهای ۱ و ۲ مطابق شکل ۱۷-۱۱، ساکن‌اند. (الف) فاصله زمانی Δt بین لحظاتی که دو انتهای راست و چپ خط‌کشها از مقابل هم می‌گذرند را از دید ناظرهای ۱ و ۲ تعیین کنید. ترتیبی که دو انتها از کنار هم می‌گذرند از دید ناظر ۱ و ۲ و از دید ناظر سومی که هر دو خط‌کش نسبت به او با سرعت‌های مساوی اما در خلاف جهت در حرکت‌اند چیست؟



شکل ۱۱-۱۷

۱۷-۳ تبدیل سرعت در مختصات قطبی کروی که با روابط (۱۷-۸) و (۱۷-۹) داده می‌شوند را تحقیق کنید. ۱۷-۴ سه چارچوب مرجع S ، S' و S'' با سرعت یکنواخت نسبت به هم حرکت می‌کنند به طوری که محورهایشان با هم موازی می‌ماند. چارچوب S'' نسبت به S' با سرعت v_1 در راستای محور z' و S' نسبت به S با سرعت v_2 در راستای محور z در حرکت‌اند. (الف) نشان دهید که چارچوبهای S و S'' با یک تبدیل لورنتس و با سرعت

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$$

با هم در ارتباط‌اند.

۱۷-۵ نشان دهید که جزء "طول" چهاربعدی که با معادله (۱۷-۱۷) داده شده است یک ناوردای لورنتس است.

۱۷-۶ نشان دهید قله‌های موج در یک موج الکترومغناطیسی، یک کمیت ناوردای لورنتس است.

۱۷-۷ معادله (۱۷-۲۸) را اثبات کنید که رابطه بین جهت‌های بردارهای موج مربوط به یک موج الکترومغناطیسی را که از دو چارچوب مشاهده می‌شود نشان می‌دهد. همچنین نشان دهید این معادله را می‌توان از معادله (۱۷-۸) به دست آورد.

۱۷-۸ اثر دوپلر عرضی که در مثال ۱۷-۲ بیان شد را در نظر بگیرید. جهت انتشار موج در دستگاهی که منبع نسبت به آن ساکن است را تعیین کنید.

۱۷-۹ فرض کنید ستاره‌ها به صورت یکنواخت توزیع شده‌اند. توزیع آنها را که ناظر متحرک با سرعت $c \approx v$ اندازه می‌گیرد تعیین کنید. ۱۷-۱۰ یک آینه با سرعت $c \approx v$ نسبت به آزمایشگاه در راستای

۴. روابط مختلف در الکترومغناطیس شکلهای زیر را در نمادگذاری چار-فضا دارند

۱۷-۸۰ رابطه پیوستگی $\square \cdot J_\mu = 0$

۱۷-۸۳ شرط لورنتس $\square \cdot A_\mu = 0$

۱۷-۸۲ معادله موج پتانسیل $\square^2 A_\mu = -\mu_0 J_\mu$

۱۷-۹۴ معادله‌های ماکسول $\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J_\mu$

۱۷-۹۶ $\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu \neq \lambda = 1, 2, 3, 4$

که علامت $\square \cdot$ و \square^2 کمیت‌های مشابه گرادیان، دیورژانس و لاپلاسی در فضای سه‌بعدی‌اند

۱۷-۵۸ $\square \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu}$

۱۷-۶۴ $\square \cdot A_\mu = \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}$

۱۷-۶۶ $\square^2 \Phi = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi$

مؤلفه‌های میدان آشکارا به شکل زیر تبدیل می‌شوند

۱۷-۹۹ $E'_{||} = E_{||} \quad E'_{\perp} = \gamma(E_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp})$
 $B'_{||} = B_{||} \quad B'_{\perp} = \gamma \left(B_{\perp} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}}{c^2} \right)$

که $||$ شاخص مؤلفه‌های موازی و \perp شاخص مؤلفه‌های عمود بر \mathbf{v} است. با به کار بردن این تبدیلهای می‌توان میدانهایی را که بار متحرک یکنواخت ایجاد می‌کند (به کمک میدانهای ایجاد شده که در چارچوبی که بار در آن ساکن است)، تعیین کرد.

مسائل

۱۷-۱ یک موئون با سرعت زیاد را که در اثر برخورد‌های ذرات پرتوی کیهانی از فضای خارجی با هسته‌ها در جو (مثال ۱۷-۱ را ببینید) ایجاد می‌شود، در نظر می‌گیریم. واپاشی از دید ناظری که با موئون واپاشنده حرکت می‌کند را تحلیل کنید. این واپاشیها از دید ناظر ثابت روی زمین چگونه به نظر می‌رسد.

۱۷-۲ دو خط‌کش با طول مساوی l_0 و در حال سکون، در جهت‌های مخالف با سرعت یکنواخت نسبی v حرکت می‌کنند. ناظر ۱ و ۲

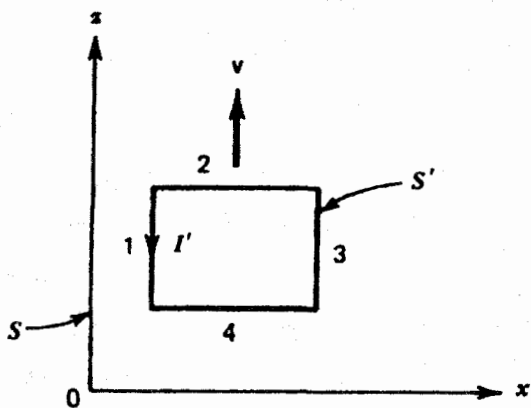
۱۷-۱۹ یک بار نقطه‌ای متحرک یکنواخت را در نظر می‌گیریم. (مثال ۱۷-۱۳ را ببینید). (الف) $-\nabla\Phi$ را تعیین و خطوط میدان منطبق بر این میدان در شکل ۱۷-۸ (ب) را ترسیم کنید. (ب) $-\partial A/\partial t$ را تعیین کنید و خطوط میدان منطبق بر این میدان را در شکل ۱۷-۸ (ب) بکشید. (ج) نشان دهید شدت $-\partial A/\partial t$ برای شعاعی کردن میدان الکتریکی کل $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial A/\partial t$ و برای کوچک کردن آن در طول حرکت مطابق شکل ۱۷-۹ (الف) کافی است.

۱۷-۲۰ میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} یک دوقطبی الکتریکی که در راستای محور z و با سرعت v نسبت به آزمایشگاه در حرکت است را با به‌کار بردن تبدیل لورنتس میدانها تعیین کنید. گشتاور دوقطبی در چارچوب ساکن آن $\mathbf{p} = p_0 \hat{z}$ است.

۱۷-۲۱ تبدیل لورنتس برای گشتاورهای دوقطبی الکتریکی \mathbf{P} و مغناطیسی \mathbf{m} را پیدا کنید [راهنمایی: فرمول تبدیل را برای \mathbf{P} و \mathbf{M} به‌کار برید].

۱۷-۲۲ یک میله رسانا به طول l با سرعت ثابت v عمود بر خود میله در یک میدان مغناطیسی حرکت می‌کند (مثال ۱۱-۵ را ببینید). emf القایی در میله را با استفاده از (الف) تبدیل میدانها و (ب) تبدیل پتانسیلها، به‌دست آورید.

۱۷-۲۳ یک حلقه سیم مستطیل‌شکل، مسطح، جریان I' را که ناظر S' ، ساکن نسبت به حلقه، اندازه می‌گیرد، از خود عبور می‌دهد. حلقه نسبت به آزمایشگاه S با سرعت v در حرکت است (همان‌طور که در شکل ۱۷-۱۲ نشان داده‌ایم). طول اضلاع ۱ و ۲، a و b است. (الف) بار روی تمام اضلاع را که ناظر واقع در چارچوب S مشاهده می‌کند حساب کنید. (ب) گشتاور دوقطبی الکتریکی حلقه را در S تعیین کنید. (ج) گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه در S را به‌دست آورید.



شکل ۱۷-۱۲

عمود بر سطح آن حرکت می‌کند. یک موج نوری با بسامد ω_1 ، از دید ناظر ساکن نسبت به آزمایشگاه، به‌طور عمود روی آینه می‌تابد. بسامد موج بازتاب را وقتی که آینه از دید همان ناظر نزدیک می‌شود و نیز موقعی که دور می‌شود به‌دست آورید.

۱۷-۱۱ قانون بازتاب یک موج تخت تکفام را، از یک آینه متحرک در راستای موازی با سطح آن به‌دست آورید.

۱۷-۱۲ تبدیل لورنتس را از دومین اصل نسبیت خاص یعنی ثابت بودن سرعت نور به‌دست آورید.

۱۷-۱۳ طول موج یک موج نوری اندازه‌گیری شده در چارچوبی که منبع نسبت به آن ساکن است، λ_0 است. طول موج آن را که ناظر متحرک با سرعت v نسبت به منبع اندازه می‌گیرد در هر دو حالت (نزدیک‌شونده و دورشونده) به‌دست آورید.

۱۷-۱۴ (الف) به‌طور تجربی ثابت شده است $\rho dx_1 dx_2 dx_3$ یک ناوردای لورنتس است (ρ چگالی بار است). که آن را به‌عنوان ناوردایی بار الکتریکی می‌شناسیم. این ناوردایی را برای به‌دست آوردن خاصیت تبدیلی ρ به‌کار برید. آیا این موضوع، J_r را، یک چارچوب‌دار قابل قبول می‌کند؟ (ب) تعداد الکترونها در واحد طول رسانای استوانه‌ای λ_0 است. وقتی جریان در سیم برقرار می‌شود الکترونها در طول سیم با سرعت سوق v جابه‌جا می‌شوند. چگالی خطی λ مربوط به الکترونهای متحرک در سیم را که ناظر ساکن نسبت به سیم اندازه می‌گیرد برحسب λ_0 و v ، c به‌دست آورید. فرض می‌کنیم که الکترونها قبل از برقراری جریان ساکن‌اند.

۱۷-۱۵ نشان دهید $E'^2 - c^2 B'^2$ یک نرده‌ای لورنتس است.

۱۷-۱۶ یک موج الکترومغناطیسی یکنواخت با میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} را ناظر ساکن در چارچوب S مشاهده می‌کند. در چارچوب S' ، میدانهای \mathbf{E}' و \mathbf{B}' موازیند. (الف) نشان دهید S' نسبت به S با سرعت v ، که از معادله (۱۷-۱۰۵) به‌دست می‌آید، حرکت می‌کند. (ب) میدانهای \mathbf{E}' و \mathbf{B}' را برحسب ناوردهای میدان $E^2 - c^2 B^2$ و $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ تعیین کنید.

۱۷-۱۷ در چارچوب مرجع S میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} یک موج الکترومغناطیسی برهم عمودند. سرعت چارچوب S' را که در آن (الف) $\mathbf{E}' = 0$ و (ب) $\mathbf{B}' = 0$ است به‌دست آورید.

۱۷-۱۸ یک بار متحرک یکنواخت را در نظر می‌گیریم. (الف) نشان دهید که حرکت، \mathbf{E} را در راستای خط حرکت موقعی که با میدان کولنی بار ایستا مقایسه شود کوچک می‌کند. (ب) نشان دهید \mathbf{E} در راستای حرکت فشرده می‌شود. این خواص را در ارتباط با تبدیل $\mathbf{E}'_{||} = \mathbf{E}_{||}$ تعبیر کنید.

پیوست الف. دستگاه یکاها

را در یک رابطهٔ مکتوب تشخیص دهد، و از این رو اعدادی را که باید در جستجوی یک جواب عددی در آن رابطه بگذارد، انتخاب کند. به علاوه، این پیوست راهنمایی است تا بتوان یک معادلهٔ معین را از یک دستگاه به دستگاه دیگر تبدیل کرد.

الف-۱ قوانین نیرو - منشأ دستگاهها

در تمام این کتاب از دستگاه SI استفاده شده است. این دستگاه بر پایهٔ چهار کمیت استوار است. متر، کیلوگرم، ثانیه و آمپر، حال آنکه دستگاه گاوسی بر سانتیمتر، گرم، و ثانیه استوار است. برای پی بردن به منشأ این دستگاهها و دستگاههای دیگر آزمایش دو قانون نیرو مورد نیاز است: قانون کولن بین دو بار، و نیروی مغناطیسی بر واحد طول بین دو سیم حامل جریان:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \quad \frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{II'}{r} \quad (\text{SI, MKSA}) \quad (\text{الف-۱})$$

که می توان آنها را به صورت کلی تر زیر بازنویسی کرد

$$F = C_e \frac{qq'}{r^2} \quad \frac{dF}{dl} = 2C_m \frac{II'}{r} \quad (\text{الف-۲})$$

q و I به جای بار و جریان، F به جای نیرو، l و r به جای طول و فاصله، و مقادیر عددی $1/(4\pi\epsilon_0)$ و $\mu_0/4\pi$ ، کمیتهایی هستند که در دستگاه SI استفاده می شوند و نسبت آنها $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$ ، مربع سرعت نور است.

اگر همیشه از یک مجموعه از یکاهای مکانیکی (یکاهای نیرو، انرژی، توان و...)، مثلاً، 2 (زمان)/سرعت \times جرم، 2 (زمان)/(مسافت) \times جرم،

اگر تاریخ پیشرفت علم و دستگاه یکاهایی که در خدمت علم بوده است، را بررسی کنیم می بینیم که تکامل دستگاهها بازتابی از مراحل گوناگون پیشرفت خود علم است. مثلاً، یکاهای دستگاه الکتروستاتیکی (esu)، به این منظور معرفی شد که فرمولبندی الکتروستاتیک و خصوصیات الکتریکی ماده را با هم وفق دهد. از طرف دیگر، دستگاه یکاهای الکترومغناطیسی میدان مغناطیس و خصوصیات مغناطیسی ماده (که جدا از الکتریسیته مطالعه شد) را با هم سازگار می کند.

هنگامی که وحدت میان میدانهای الکتریسیته و مغناطیس محرز شد، و میدان نظریهٔ الکترومغناطیسی به دست آمد، دستگاههای جدیدی از یکاها برای تطبیق با نظریهٔ جدید به وجود آمدند. این دستگاهها شامل دستگاه مشهور بین المللی (SI) که به MKSA معروف است، و دستگاه گاوسی است. ارائهٔ مکانیک کوانتومی و ظهور میدانهای اتمی، پلاسما، هسته‌ای و فیزیک ذرات، شاخه‌های جدیدی از علوم را ایجاد کرد که باعث انتخاب دستگاه یکاها برای هر شاخه شد.

چون در دستگاه SI یکاهای عملی آمپر، ولت و اهم استفاده می شود این دستگاه، دستگاه جهانی در نظریهٔ الکترومغناطیسی و کاربردهای مهندسی آن شده است. از سوی دیگر، دستگاه گاوسی در حوزه‌های دیگر فیزیک به طور گسترده‌ای استفاده می شود. چون برهم‌کنشهای الکترومغناطیسی در حوزه‌های دیگر فیزیک نقش دارند، یک فیزیکدان باید با فرمولبندی نظریهٔ الکترومغناطیسی هم در دستگاه SI و هم در دستگاه گاوسی آشنا باشد تا بتواند آنها را به یکدیگر تبدیل کند.

هدف از این پیوست، ارائهٔ بحث کاملی از دستگاههای گوناگون نیست، بلکه ارائهٔ شرح مختصری است که دانشجو بتواند دستگاه یکاها

$C_e = c^2$. در این صورت قوانین نیرو عبارت‌اند از:

$$F = c^2 \frac{qq'}{r^2} \quad \frac{dF}{dl} = \frac{2II'}{r} \quad (\text{emu}) \quad (\text{الف-۵})$$

یکاهای جریان و چگالی جریان I و J به ترتیب عبارت‌اند از آب‌امپر و آب‌امپر بر سانتیمتر مربع. این تعریف از این گفته ناشی می‌شود که جریان هر یک از دو جریان رشته‌ای بسیار بلند، یک آب‌امپر است، در صورتی که نیروی برهم‌کنش بر طول واحد بین دو رشته به فاصله یک سانتیمتر از یکدیگر یک دین بر سانتیمتر باشد. واحد بار، آب‌امپرنائیه است، حال آنکه واحد چگالی بار $\rho = \mathbf{J}/\mathbf{v}$ عبارت است از آب‌کولن بر سانتیمتر مکعب. این کار را می‌توان به همین نحو ادامه داد و کمیت‌هایی مانند آب‌ولت، آب‌فاراد، و از این قبیل را تعریف کرد. با این همه، در این حالت، باید توجه کنید که یکای \mathbf{B} از $\mathbf{F} \times \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ ناشی می‌شود و برابر است با $G = 10^{-2} \text{ T}$. در نتیجه، یکای شار مغناطیسی عبارت است از سانتیمترمربع \times گاؤس، که نام یک ماکسول بر آن گذاشته شده است.

الف-۳ دستگاه گاؤسی

یکاهای طول، جرم، زمان و از این رو نیرو در دستگاه گاؤسی به ترتیب عبارت‌اند از سانتیمتر، گرم، ثانیه و دین. یعنی این دستگاه درست مانند دستگاه‌های esu و emu یک دستگاه cgs است. هر یک از ثابت‌های C_m و C_e بیش از یک مقدار دارند؛ در واقع دستگاه یک دستگاه مخلوط است که در آن ρ ، \mathbf{J} ، و \mathbf{E} در یکای esu اندازه‌گیری می‌شوند، و \mathbf{B} در یکای emu.

در این دستگاه، معادلات ماکسول به صورتی نوشته می‌شوند که در

جدول زیر آمده‌اند

معادلات ماکسول

ماکروسکوپی	میکروسکوپی
$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_f$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_f + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

بردارهای میدان به صورت زیر به هم مربوط‌اند

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad \text{و} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \quad (\text{الف-۶})$$

$(\text{زمان})^2 / (\text{مسافت}) \times \text{جرم}$ ، استفاده کنیم، و با درک این نکته که $I = q/t$ ، وقتی t نشان‌دهنده زمان است، در این صورت، با یک انتخاب آزاد مقادیر عددی و ابعاد ثابت‌های C_m و C_e ، تا جایی که نسبت این دو ثابت همواره در رابطه

$$\frac{C_e}{C_m} = c^2 \quad (\text{الف-۳})$$

صدق کنند، دستگاه یکاهای دیگر را می‌توان به دست آورد.

استفاده صریح از 4π در C_m و C_e یک دستگاه (مانند دستگاه SI) از این نظر مناسب است که ضرایب عددی 4π در معادلات ماکسول ظاهر نمی‌شوند و به این دلیل چنین دستگاهی را یک دستگاه یکای گویا می‌نامند.

اکنون با استفاده از رئوس مطالب بالا در مورد دستگاه‌های esu و emu بسیار مختصر بحث می‌کنیم، زیرا امروزه از این دستگاه‌ها استفاده نمی‌شود، به جای آن دستگاه گاؤسی را به دلیل استفاده زیاد آن شرح می‌دهیم.

الف-۲ دستگاه‌های الکتروستاتیکی و الکترومغناطیسی

در دستگاه esu، یکاهای طول، جرم و زمان را به صورت سانتیمتر، گرم، و ثانیه (cgs) انتخاب می‌کنیم و از این رو یکای نیرو عبارت است از $\text{dyn} = 10^{-7} \text{ N}$. در این دستگاه $C_e = 1$ و بنابراین $C_m = 1/c^2$ را انتخاب می‌کنیم. در این صورت قوانین نیرو به صورت زیر می‌شوند:

$$F = \frac{qq'}{r^2} \quad \frac{dF}{dl} = \frac{2II'}{c^2 r} \quad (\text{esu}) \quad (\text{الف-۴})$$

در این دستگاه، یکای بار عبارت است از استات‌کولن. این تعریف از این جمله به دست می‌آید که بار هر یک از دو بار نقطه‌ای یک استات‌کولن است، در صورتی که نیروی برهم‌کنش بین دو بار به فاصله یک سانتیمتر از یکدیگر مساوی با یک دین باشد. استات‌امپر بر سانتیمتر مربع، یکای چگالی جریان، با رابطه $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ تعریف می‌شود، استات‌کولن بر سانتیمتر مکعب و \mathbf{v} سانتیمتر بر ثانیه است. یکای میدان الکتریکی، استات‌ولت بر سانتیمتر با رابطه $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ تعریف می‌شود، \mathbf{F} بر حسب دین و q بر حسب استات‌کولن است. سرانجام یکای esu میدان مغناطیسی \mathbf{B} با رابطه $\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ تعریف می‌شود.

در دستگاه emu، یکاهای طول، جرم، زمان، و از این رو، نیرو را درست مانند دستگاه esu به ترتیب با سانتیمتر، گرم، ثانیه و دین انتخاب می‌کنیم. در این دستگاه قرار می‌دهیم $C_m = 1$ ، و در نتیجه

چگالی انرژی الکترومغناطیسی مربوط به میدانها، و بردار پوینتینگ در این دستگاه عبارتند از

$$u = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (\text{الف-۱۲})$$

همانطور که در بالا گفتیم، دستگاه MKSA (SI) به طور گسترده در کاربردهای مهندسی الکتریکی استفاده می شود. زیرا در این دستگاه از یکاهای آمپر، ولت، اهم، هنری و فاراد استفاده می شود. این نکته را از روی جدول الف-۱، که روابط عددی یکاهای SI را به یکاهای گاوسی نشان می دهد، می توان فهمید. به دلایل عملی $\text{statA} = 0.33 \times 10^{-9} \text{ A}$ بسیار کوچک است و $\text{abA} = 10 \text{ A}$ ، کمی از حد متعارف بزرگتر است. $\text{statV} = 300 \text{ V}$ ، $\text{statH} = 9 \times 10^{11} \text{ H}$ ، همگی بسیار بزرگ اند. از طرف دیگر، $\text{statF} = 1.1 \times 10^{-12} \text{ F}$ بسیار کوچک است. با این حال، توجه کنید که یکای تسلا SI برای اهداف عملی بسیار بزرگ است، حال آنکه $G = 10^{-4} \text{ T}$ ، بیشتر از یک یکای عملی است.

جدول الف-۲ روابط نمادین متغیرهای SI به متغیرهای گاوسی را نشان می دهد. این جدول برای تبدیل سریع از SI به گاوسی یا از گاوسی به SI، مفید است.

روابط ساختاری در مواد ساده را به صورت زیر می نویسیم

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{J} = \sigma_c \mathbf{E} \quad (\text{الف-۷})$$

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (\text{الف-۸})$$

با توجه به معادلات (الف-۶) تا (الف-۸) داریم

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi \quad \text{و} \quad \mu = 1 + 4\pi\chi_m \quad (\text{الف-۹})$$

از روابط

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{و} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

می فهمیم که در این دستگاه می توان میدانها را بنابر

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{و} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{الف-۱۰})$$

به پتانسیلها ربط داد.

نیروی لورنتس وارد بر یک بار q که در ناحیه ای از میدانهای \mathbf{E} و

\mathbf{B} حرکت می کند عبارت است از

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (\text{الف-۱۱})$$

جدول الف-۱

کمیت	SI (MKSA)	گاؤسی
طول	۱ متر (m)	10^2 سانتیمتر (cm)
جرم	۱ کیلوگرم (kg)	10^3 گرم (g)
زمان	۱ ثانیہ (s)	۱ ثانیہ (s)
نیرو	۱ نیوتون (N)	10^5 دین (dyn)
کار، انرژی	۱ ژول (J)	10^7 ارگ (erg)
توان	۱ وات (W)	10^7 ارگ بر ثانیہ (erg/s)
ظرفیت (C)	۱ فاراد (F)	9×10^{11} استات فاراد (statF)
بار (q)	۱ کولن (C)	3×10^9 استات کولن (statC)
چگالی بار (ρ)	یک کولن بر متر مکعب (C/m^3)	3×10^3 سانتیمتر مکعب/استات کولن ($statC/cm^3$)
رسانندگی (σ_c)	10^{-1} (اهم-متر) $^{-1} (\Omega \cdot m)$	9×10^9 (استات-اهم-سانتیمتر) ($stat\Omega \cdot cm$)
جریان (I)	۱ آمپر (A)	3×10^9 استات آمپر (statA)
		10^{-1} = آب آمپر (abA)
چگالی جریان (J)	۱ آمپر بر متر مربع (A/m^2)	3×10^5 سانتیمتر مربع/استات آمپر ($statA/cm^2$)
جابه جایی (D)	۱ کولن بر متر مربع (C/m^2)	$10^5 \times 12\pi$ سانتیمتر/استات ولت (statV/cm)
میدان الکتریکی (E)	۱ ولت بر متر مربع (V/m)	$10^{-2} \times 1/3$ سانتیمتر/استات ولت (statV/cm)
القا (L)	۱ هنری (H)	$10^{-11} \times 1/9$ استات هنری (statH)
شدت مغناطیسی (H)	۱ آمپر بر متر (A/m)	$10^{-2} \times 4\pi$ ارستد (Oe)
شار مغناطیسی (F)	۱ وبر (Wb)	10^8 ماکسول (Mx)
میدان مغناطیسی (B)	۱ متر مربع/وبر = ۱ تسلا (T)	10^4 گاؤس (G)
مغناطش (M)	۱ آمپر بر متر (A/m)	10^{-2} ارستد (Oe)
قطبش (P)	۱ کولن بر متر مربع (C/m^2)	3×10^5 سانتیمتر/استات ولت (statV/cm)
پتانسیل (Φ)	۱ ولت (V)	$1/300$ استات ولت (statV)
مقاومت (R)	۱ اهم (Ω)	$10^{-11} \times 1/9$ استات اهم (stat Ω)

جدول الفد-۲

گاووسی	SI (MKSA)	کمیت
$4\pi\epsilon_0 C$	C	ظرفیت
$(4\pi\epsilon_0)^{1/2} q$	q	بار
$(4\pi\epsilon_0)^{1/2} \rho(\sigma, \lambda)$	$\rho(\sigma, \lambda)$	چگالی بار
$4\pi\epsilon_0 \sigma_c$	σ_c	رسانندگی
$(4\pi\epsilon_0)^{1/2} I$	I	جریان
$(4\pi\epsilon_0)^{1/2} J, (K)$	$J(K)$	چگالی جریان
ϵ	K	ثابت دی الکتریک
$(4\pi\epsilon_0)^{1/2} p$	p	گشتاور دو قطبی (الکتریکی)
$(4\pi/\mu_0)^{1/2} m$	m	گشتاور دو قطبی (مغناطیسی)
$(\epsilon_0/4\pi)^{1/2} D$	D	بردار جابه جایی
$(4\pi\epsilon_0)^{-1/2} E$	E	میدان الکتریکی
$(4\pi\epsilon_0)^{-1} L$	L	القا
$(4\pi\mu_0)^{-1/2} H$	H	شدت مغناطیسی (H)
$(\mu_0/4\pi)^{1/2} F$	F	شار مغناطیسی
$(\mu_0/4\pi)^{1/2} B$	B	میدان مغناطیسی (B)
$(4\pi/\mu_0)^{1/2} M$	M	مغناطش
$K_m \mu_0$, در این صورت	μ	تراوایی مغناطیسی
$K_m \rightarrow \mu$ (۲)		
μ	K_m	تراوایی مغناطیسی (نسبی)
$K\epsilon_0$, در این صورت	ϵ	گذردهی
$K \rightarrow \epsilon$ (۲)		
$(4\pi\epsilon_0)^{1/2} P$	P	قطبش
$(4\pi\epsilon_0)^{-1} R$	R	مقاومت
$(4\pi\epsilon_0)^{-1} \rho$	ρ	مقاومت ویژه
$(4\pi\epsilon_0)^{-1/2} \Phi$	Φ	پتانسیل نزده ای
c	$(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$	سرعت نور
$4\pi\chi(\chi_m)$	$\chi(\chi_m)$	پذیرفتاری
$(\mu_0/4\pi)^{1/2} A$	A	پتانسیل برداری

پیوست ب. دیورژانس، تاو، گرادیان، و لاپلاسی

مختصات کروی

مختصات دکارتی

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

مختصات استوانه‌ای

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

پیوست ج. برخی از ثابتهای بنیادی فیزیک

بهترین مقدار (۱۹۷۳)		مقدار محاسبه شده	نماد	ثابت
خطا ^۲	مقدار ^۱			
—	۲٫۹۹۷۹۲۴۵۸	$۳٫۰۰ \times ۱۰^۸$ m/s	c	سرعت نور در خلأ
۲٫۹	۱٫۶۰۲۱۸۹۲	$۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}$ C	e	بار بنیادی
۵٫۱	۹٫۱۰۹۵۳۴	$۹٫۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}$ kg	m_e	جرم سکون الکترون
۰٫۰۰۰۸	۸٫۸۵۴۱۸۷۸۱۸	$۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}$ F/m	ϵ_0	ثابت گذردهی
—	4π (دقیقاً)	$۱۲٫۶ \times ۱۰^{-۷}$ H/m	μ_0	ثابت تراوایی
۵٫۱	۱٫۶۷۲۶۴۸۵	$۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}$ kg	m_p	جرم سکون پروتون
۵٫۱	۶٫۰۲۲۰۴۵	$۶٫۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ /mol	N_A	ثابت آووگادرو
۳۲٫۰	۱٫۳۸۰۶۶۲	$۱٫۳۸ \times ۱۰^{-۲۳}$ J/K	k	ثابت بولتزمن
۳٫۱۰	۲٫۲۴۱۳۸۳	$۲٫۲۴ \times ۱۰^{-۲}$ m ^۳ /mol	V_m	حجم مولی گاز ایده‌آل در STP ^۲
۰٫۸۲	۵٫۲۹۱۷۷۰۶	$۵٫۲۹ \times ۱۰^{-۱۱}$ m	a_0	شعاع بور
۳٫۹	۹٫۲۷۴۰۷۸	$۹٫۲۷ \times ۱۰^{-۲۴}$ J/T	μ_B	مگنتون بور

۱. با همان یکا و توان ده در مقدار محاسبه شده.

۲. قسمت بر میلیون.

۳. فشار و دمای متعارف (STP) = صفر سانتیگراد و فشار یک اتمسفر

منبع: مقادیر این جدول از یک لیست بلند بالا که به وسیله

E. Richard cohen and B. N. Taylor, *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, Vol. 2, no. 4, 1973.

به دست آمده است انتخاب شده‌اند.

پیوست د. بعضی از یکاهای SI استخراج شده با اسامی خاص

برحسب یکای پایه SI	برحسب یکاهای دیگر	یکای SI		کمیت
		نماد	نام	
s^{-1}		Hz	هرتز	بسامد
$m \cdot kg/s^2$		N	نیوتون	نیرو
$kg \cdot m^2/s^2$	N · m	J	ژول	انرژی، کار، کمیت گرما
$kg \cdot m^2/s^2$	J/s	W	وات	توان، شار تابندگی
A · s		C	کولن	کمیت الکتریسیته، بار الکتریکی
$kg \cdot m^2/A \cdot s^2$	W/A	V	ولت	پتانسیل الکتریکی، اختلاف پتانسیل، نیروی محرکه الکتریکی
$A^2 s^2/kg \cdot m^2$	C/V	F	فاراد	ظرفیت
$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^2$	V/A	Ω	اوم	مقاومت الکتریکی
$kg \cdot m^2/A \cdot s^2$	V · s	Wb	وبر	شار مغناطیسی
$kg/A \cdot s^2$	Wb/m ²	T	تسلا	میدان مغناطیسی
$Kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^2$	Wb/A	H	هنری	القا

جواب مسائل فرد

فصل ۱

$$\pm(3\hat{x} - 2\hat{y} + 6\hat{z})/\sqrt{7} \quad 1-1$$

$$2x + 3y + 6z = -28 \quad 3-1$$

$$7\hat{x} - 3\hat{y} + 8\hat{z} \quad 5-1$$

$$c = -1, b = 2, a = 4 \quad (\text{الف}) \quad 9-1$$

$$\Phi = (1/2)(x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 4xy + 8xz - 2yz) \quad (\text{ب})$$

$$\Phi = \ln(a/r) \quad 11-1$$

۱۳-۳، ۳V که در آن V حجم محصور در S است.

$$90 \quad \hat{n} = (x\hat{x} + y\hat{y})/(x^2 + y^2)^{1/2} = \hat{\rho} \quad (\text{الف}) \quad 15-1$$

$$\circ n(n+1)r^{n-1}, 1/r^2 \quad 19-1$$

$$\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z} \quad 21-1$$

فصل ۲

$$172N \quad 1-2$$

$$6.39 \times 10^4 \lambda V/m \hat{\rho} \quad 3-2$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma z}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \right) \hat{z} \quad 5-2$$

$$\mathbf{E} = (32\hat{x}/3 + 8\hat{y} + 16\hat{z})/4\pi\epsilon_0 \quad 7-2$$

$$9-2 \quad \mathbf{E} \text{ به ازای } |x| > 1, -1 < x < 1, \text{ و } |x| < 1$$

به ترتیب برابر است با $\sigma\hat{x}/\epsilon_0, -\sigma\hat{x}/\epsilon_0, -\sigma\hat{x}/\epsilon_0$ (ب) به ترتیب به ازای

$$\circ, -\sigma\hat{x}/\epsilon_0, \text{ و } |x| > 1 \text{ برابر است با } |x| < 1$$

$$\mathbf{E} = (5/4\epsilon_0 r)[1 - 2e^{-2r}(r^2 + r + 1/2)]\hat{r} \quad 11-2$$

$$13-2 \quad (\text{الف}) \quad \sin(V \cdot m) \quad 10^{-7} C/\epsilon_0 \quad 1r_1$$

$$2\pi/\epsilon_0 \sin(V \cdot m) \quad (\text{ب})$$

$$\circ (\text{ج})$$

$$\circ (\text{د})$$

$$\rho = \epsilon_0 (18 \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta)/r \sin \theta \quad (\text{الف}) \quad 15-2$$

$$a \leq \rho \leq b \text{ به ازای } \rho_0 = \alpha\epsilon_0 \quad (\text{ب})$$

$$\Phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{\sqrt{l^2 + r_1^2} + l}{r_1} \right| \quad (\text{الف}) \quad 17-2$$

$$\Phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 + c \quad (\text{ب})$$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = -(\lambda/2\pi\epsilon_0) \ln(r_2/r_1) \quad (\text{ج})$$

یک سیم نامتناهی

$$\mathbf{E}_1 = \rho_0 \mathbf{r}/3\epsilon_0 \quad (\text{الف}) \quad 19-2$$

$$\mathbf{E}_2 = \rho'_0 \mathbf{r}'/3\epsilon_0 \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{E} = \rho_0 z_0 \hat{z}/3\epsilon_0 \quad (\text{ج})$$

$$\Phi = -\rho_0 z_0 r' \cos \theta'/3\epsilon_0 \quad (\text{د})$$

$$\hat{z} \cdot \mathbf{p} = \pi\sigma R^2 \hat{z} \quad 23-2$$

$$\mathbf{F} = (q/4\pi\epsilon_0 r^2)[3\mathbf{p} \cdot \hat{r}]\hat{r} - \mathbf{p} \quad 25-2$$

$$\tau = -qp\hat{\phi} \sin \theta/(4\pi\epsilon_0 r^2)$$

$$\mathbf{F} = 6qdl(d^2 + l^2)^{-3/2}(p_x \hat{z} + p_z \hat{x})/4\pi\epsilon_0 \quad (\text{الف}) \quad 27-2$$

$$\text{با } \mathbf{F} = (p_1/4\pi\epsilon_0 l^2)[3\hat{x}(\mathbf{p} \cdot \hat{z}) + 3\hat{z}(\mathbf{p} \cdot \hat{x})] \quad (\text{ب})$$

$$p_1 = 2qdl^2(d^2 + l^2)^{-3/2}\hat{x}$$

$$Q_{zz} = 2qz_0^2/9, p, = 0 \quad \text{گشتاور تک قطبی, } \circ \quad (\text{الف}) \quad 29-2$$

$$Q_{zz} = qR^2/6, p, = 0 \quad \text{گشتاور تک قطبی, } \circ \quad (\text{ب})$$

فصل ۳

$$\Phi = V \frac{\ln \tan \theta/2}{\ln \tan \theta_1/2} \quad (\text{الف}) \quad 1-3$$

$$\mathbf{E} = -\frac{V\hat{\theta}}{r \sin \theta \ln(\tan \theta_1/2)}$$

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 V}{r \ln(\tan \theta_1/2)} \quad (\text{ب})$$

در λ - استوانه که در آنجا ϕ را نسبت به محور x اندازه می‌گیریم و مبدأ در مرکز استوانه است، $\gamma_- = ((\Delta/2)^2 + R^2)^{1/2} - \Delta/2$

$$\gamma_+ = ((\Delta/2)^2 + R^2)^{1/2} - \Delta/2$$

$$\frac{dF}{dl} = -(\lambda^2/4\pi\epsilon_0) \left[\left(\frac{\Delta}{r}\right)^2 + R^2 \right]^{-1/2} \quad (ب)$$

$$\Phi = \frac{\beta}{\epsilon_0} (R_2 - R_1) \quad r \leq R_1 \quad \text{به‌ازای ۱۹-۳}$$

$$-\frac{\beta}{2\epsilon_0} (r + R_1^2/r - 2R_2) \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad \text{به‌ازای}$$

$$\frac{\beta}{2\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)/r \quad r \geq R_2 \quad \text{به‌ازای}$$

$$\Phi(z < -z_0) = \frac{\rho_0 z_0}{\epsilon_0} z + \frac{\pi \rho_0 z_0^2}{2\epsilon_0} + B_0 \quad ۲۱-۳$$

$$\Phi(z \geq z_0) = -\frac{\rho_0 z_0}{\epsilon_0} z + \frac{\pi \rho_0 z_0^2}{2\epsilon_0} + B_0$$

$$\Phi(-z_0 \leq z \leq z_0) = \frac{\rho z_0^2}{\epsilon_0} \cos(\pi z/z_0) + B_0$$

که در آن B_0 یک ثابت است.

$$\phi(x, y, z) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0 \alpha} e^{\mp \alpha z} \cos \alpha_1 x \cos \alpha_2 y \quad ۲۳-۳$$

تخت و خمیده؛ (ب) $Q_p = 0$ ؛ (ج) خنثی از نظر الکتریکی؛ (د) علامت منفی به‌ازای $z > 0$ و علامت مثبت به‌ازای $z < 0$.

$$-\frac{q}{\pi a^2} e^{-r/a} + q\delta(r) \quad ۲۵-۳$$

فصل ۴

۱-۴ (الف) $\sigma_P = -P$ ؛ $\rho_p = 0$ بر روی سطح

تخت و خمیده؛ (ب) $Q_p = 0$ ؛ (ج) خنثی از نظر الکتریکی؛ (د)

$2\pi R^2 P \hat{z}/3$ ، با استفاده از دو روش یکسان است.

$$\rho_P = -(2ax^2 + b + a + cy) \quad ۳-۴$$

$$\sigma_P = [ax^2 + (b+a)x^2 + (cx^2 + px)\sqrt{R^2 - x^2}]/R$$

$$\mathbf{E} = q\hat{r}/2\pi(\epsilon_0 + \epsilon)r^2 \quad \text{(الف)} \quad ۵-۴$$

(ب) در طرف خلأ $\sigma_f = q\epsilon_0/[2\pi a^2(\epsilon_0 + \epsilon)]$ در طرف

دی‌الکتریک $\sigma_f = q\epsilon/[2\pi a^2(\epsilon_0 + \epsilon)]$

$$\sigma_P = -q(\epsilon - \epsilon_0)/[2\pi a^2(\epsilon + \epsilon_0)] \quad \text{(ج)}$$

$$\rho_P = -q\alpha/4\pi r^2 \quad \text{(ب)} \quad \mathbf{D} = q\hat{r}/4\pi r^2 \quad \text{(الف)} \quad ۷-۴$$

۹-۴ (الف) $\mathbf{E} = \lambda\hat{\rho}/2\pi\epsilon_0\rho$ که در آن $\lambda = q/L$ ؛ (ب) با

$$\mathbf{E} = \lambda\hat{\rho}/2\pi\alpha \quad \epsilon = \alpha/\rho$$

$$K_1 \tan \theta_1 = K_2 \tan \theta_2 \quad ۱۱-۴$$

۱۳-۴ به ترتیب در کره و در پوسته،

$$\mathbf{E} = -V\hat{\theta}/r \sin \theta \ln \left(\frac{\tan \theta_1/2}{\tan \theta_2/2} \right) \quad ۳-۳$$

$$\theta_1 \text{ در } \sigma = -\epsilon_0 V/r \sin \theta_1 \ln \left(\frac{\tan \theta_1/2}{\tan \theta_2/2} \right)$$

$$\theta_2 \text{ در } \sigma = \epsilon_0 V/r \sin \theta_2 \ln \left(\frac{\tan \theta_1/2}{\tan \theta_2/2} \right)$$

۵-۳

$$\mathbf{E} = \hat{r} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 (R_2^2 - R_1^2)} \left(1 + 2\frac{R_1^2}{r^2} \right) \cos \theta \right]$$

$$+ \hat{\theta} \left[\frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 (R_2^2 - R_1^2)} \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) \sin \theta \right],$$

$$\sigma(R_1, \theta) = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{2\delta \cos \theta}{(R_2^2 - R_1^2)} \right)$$

$$\sigma(R_2, \theta) = \frac{q}{4\pi} \left(-\frac{1}{R_2^2} + \frac{\delta(1 + 2R_1^2/R_2^2)}{R_2^2 - R_1^2} \cos \theta \right); \quad -q$$

۷-۳

$$\Phi_1 = \frac{2\sigma_0 R}{2\epsilon_0} \left[2 - \left(\frac{r}{R}\right) \cos \theta + \frac{1}{\delta} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]$$

$$\frac{1}{2} (2 \cos^2 \theta - 1) \quad r \leq R \quad \text{به‌ازای}$$

$$\Phi_r = \frac{2\sigma_0 R}{2\epsilon_0} \left[2 \left(\frac{R}{r}\right) - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos \theta \right]$$

$$+ \frac{1}{\delta} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{1}{2} (2 \cos^2 \theta - 1) \quad r \geq R \quad \text{به‌ازای}$$

$$V(x, y) = \frac{2V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m \sin h \frac{m\pi z_0}{y_0}} \sin h \frac{m\pi z}{y_0} \sin \frac{m\pi y}{y_0} \quad ۹-۳$$

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{2R^2} \cdot \sigma = -\frac{q}{4\pi R^2} \left(1 + \frac{2}{2} \frac{l}{R} \cos \theta \right) \quad ۱۱-۳$$

$$\mathbf{F} = -\frac{p^2 \left(\frac{R}{z_0}\right)^2 \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 (z_0 - R^2/z_0)^2} \quad \text{(الف)} \quad ۱۳-۳$$

$$\mathbf{F} = \frac{q\mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0 z_0^2} \quad \text{(ب)}$$

$$\tau = 0, \quad F = -\frac{p^2 R z_0}{2\pi\epsilon_0 (z_0^2 - R^2)^2} (z_0^2 + 2R^2) \quad ۱۵-۳$$

(الف) ۱۷-۳

$$\sigma(\phi) = -\lambda(\gamma_- - \gamma_+) \frac{R(\gamma_- + \gamma_+) + \gamma_- \gamma_+}{(R^2 + 2\gamma_+ R \cos \phi + \gamma_+^2)(R^2 + 2\gamma_- R \cos \phi + \gamma_-^2)}$$

۱۹-۵ $\frac{N\alpha}{\epsilon_0} = \frac{K-1}{K+2} = 0.00096 \neq 1$ ؛ به این ترتیب گاز
فروالکتریک نیست؛ $\frac{N\alpha}{\epsilon_0} = 0.367 \neq 1$ ؛ به این ترتیب مایع،
فروالکتریک نیست.

فصل ۶

۱-۶ $3Q^2/20\pi\epsilon_0 R$

۳-۶ $q_r = -\frac{qa}{l} \left(1 - \frac{2a}{l}\right), q_l = -\frac{2qa}{l}$

$q_r = \frac{qa^2}{l^2} \left(3 - \frac{2a}{l}\right)$

۵-۶ (الف) $P_{ii} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a}$

(ب) $P_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 l}$

(ج) $q_r = q/8, q_r = q/4, q_r = q/2, q_l = q/8$

۷-۶ (الف) $\mathbf{E}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$ $r \geq c$ و $a \leq r \leq b$ در غیر

این صورت میدان صفر است.

(ب) $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

(ج) $4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-1}$

(د) $4\pi\epsilon_0 c, 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-1}$

۹-۶ در مرتبه اول در $\delta, \Delta C = 0$ ؛ به ازای تصحیحات مرتبه‌های

بالتر، $\Delta C \neq 0$.

۱۱-۶ (الف) $Q_1 = \frac{-qR_1}{d}$

(ب) $\Phi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$

(ج) با نتایج قبلی یکسان است.

۱۵-۶ (الف) $u = 18\epsilon_0 V_0^2/\rho^2$

(ب) $U = 1.5 \times 10^{-1} J$

۱۷-۶ $U = \frac{50\epsilon_0}{3} J$

۱۹-۶ (الف) $\Phi = \frac{V\phi}{\beta}$

(ب) در $\phi = \beta$ و در $\phi = 0$ $\sigma = \frac{\epsilon_0 V}{\beta\rho}$

در $\phi = \beta$ و در $\phi = 0$ $-Q = \frac{\epsilon_0 Vh}{\beta} \ln(\rho_2/\rho_1)$

$\sigma_P = -A(\epsilon_1 - \epsilon_0)(2\theta + \cot\theta)/r$
 $-Aa^2(\epsilon_2 - \epsilon_0)\cot\theta/r^2$

در $\sigma_P = A(2\epsilon_0 - \epsilon_1 - \epsilon_2)\theta, r = a$

و در $\sigma_f = A\theta(\epsilon_1 + \epsilon_2), \sigma_P = Aa^2(\epsilon_2 - \epsilon_0)\theta/b^2, r = b$

۱۵-۴ اگر $\epsilon_1 > \epsilon_2$ باشد، در این صورت محورهای استوانه و قرص موازی با میدان می‌شوند (تعادل پایدار). اگر $\epsilon_1 < \epsilon_2$ ، در این صورت محورها عمود بر یکدیگر می‌شوند.

۱۷-۴ (الف) $F = -q^2/16\pi\epsilon_0 d^2$ ؛ (ب) با (الف) یکسان است.

۱۹-۴ در استوانه $\mathbf{E}_1 = -P_0 \hat{x}/2\epsilon_0, \Phi_1 = P_0 \rho \cos\phi/2\epsilon_0$

$\Phi_2 = P_0 \rho_0^2 \cos\phi/2\epsilon_0 \rho$

$\mathbf{E}_2 = P_0 \rho_0^2 (\cos\phi \hat{\rho} + \sin\phi \hat{\phi})/2\epsilon_0 \rho^2$

۲۱-۴ (الف) $[(x + \Delta x)^{n+1} - x^{n+1}]\hat{x}/\Delta x (n+1)$ ؛ (ب)

با (ب) یکسان است.

۲۳-۴ (الف) به ازای $0 \leq x \leq d$ $\Phi = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + \frac{(2\epsilon_0 + \epsilon_0)}{2\epsilon_0(\epsilon_0 + \epsilon_0)} d\rho x$

به ازای $d \leq x \leq 2d$ $\Phi = \rho d(2d - x)/2(\epsilon_0 + \epsilon_0)$

(ب) در $x = 0$

$\frac{dF}{da} = \frac{\rho^2 d^2 (2\epsilon_0 + \epsilon_0)^2}{\lambda \epsilon_0 (\epsilon_0 + \epsilon_0)^2} \hat{x}$

$\frac{dF}{da} = -\frac{\epsilon_0 \rho^2 d^2}{\lambda (\epsilon_0 + \epsilon_0)^2} \hat{x}$

فصل ۵

۱-۵ $\alpha = 1.3 \times 10^{-21} C^2 m^2 V^{-1}$

۳-۵ (الف) $p_i = \alpha \mathbf{E} = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0 R^2} (3(\mathbf{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \mathbf{p})$

(ب) $U = -p_i \cdot \mathbf{E} = -\frac{\alpha}{(4\pi\epsilon_0 R^2)^2} (3(\mathbf{p} \cdot \hat{r})^2 + p^2)$

۵-۵ (الف) $\alpha = \frac{1}{2 \left(\frac{E_0}{p_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)}$

(ب) $\alpha' = \frac{1}{\frac{E_0}{p_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R^2} \right)}$

۷-۵ $\alpha = 4\pi\epsilon_0 R_0^2 + \frac{p_0}{E_0} \left(\coth\eta - \frac{1}{\eta} \right)$ که در آن $\eta = p_0 E_0 / kT$

$\langle P \rangle = 4\pi\epsilon_0 R_0^2 E_0 + \frac{p_0^2 E_0}{2kT}$

۱۷-۸ الف)

$$\mathbf{B} = \mu_0 IR^2 \hat{z} / 2(z^2 + R^2)^{3/2} + 2\mu_0 IR^2 z \rho \hat{\rho} / 4(z^2 + R^2)^{5/2}$$

$$\mathbf{B} = -B_0 [\hat{x}z/b + \hat{z}(1 + x/b)] \quad \text{الف) ۱۹-۸}$$

$$\mathbf{F} = eB_0 [-\hat{y}(1+x/b)\hat{x} + \hat{x}(1+x/b)\hat{y} + \hat{y}\hat{z}z/b] \quad \text{ب)}$$

$$\mathbf{m} = \pi R^2 NI \hat{z} \quad \text{الف) ۲۱-۸}$$

ب) صفر

$$\tau = \pi R^2 NIB_0 (\hat{y} - \hat{x}) / \sqrt{2} \quad \text{ج)}$$

$$\mathbf{m} = \pi a^2 I (\hat{x} + \hat{z}) = 10^{-7} \pi (\hat{x} + \hat{z}) A \cdot \text{m}^2 \quad \text{الف) ۲۳-۸}$$

$$\mathbf{B} = \pi \times 10^{-11} [(27/25 - 1)\hat{x} + 26\hat{y}/25 - \hat{z}] / 5^2 \text{ T} \quad \text{ب)}$$

$$\mathbf{m} = 2\pi \rho \omega R^2 \hat{z} / 15 \quad \text{الف) ۲۵-۸}$$

$$\mathbf{m} = 2\pi \sigma \omega R^2 z / 3 \quad \text{ب)}$$

فصل ۹

$$\sigma_m = [a_1 x^2 + (a_1 y^2 + b_1) y] / r, \rho_m = -2(a_1 x + a_1 y) \quad \text{الف) ۱-۹}$$

$$\mathbf{J}_m = 0 \quad \text{ب)}$$

$$\mathbf{K}_m = \hat{x}z(a_1 y^2 + b_1) / r - \hat{y}z a_1 x^2 / r + \hat{z}[a_1 x^2 y - x(a_1 y^2 + b_1)] / r$$

$$\text{الف) ۳-۹} \quad \sigma_m = 0, \rho_m = 0 \quad \text{بر روی سطوح تخت}$$

$$\sigma_m = M_0 \cos \phi$$

$$\mathbf{K}_m = M_0 y \quad \text{در ته}, \mathbf{K}_m = -M_0 \hat{y}, \mathbf{J}_m = 0 \quad \text{ب) در سر}$$

$$\mathbf{K}_m = M_0 \hat{z} \sin \phi \quad \text{و بر روی نوار}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M} (1 - T/4R), \mathbf{H} = -\mathbf{M} T/4R \quad \text{ج)}$$

$$\text{الف) ۵-۹} \quad \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}_0 \quad \text{که به } M_1 \text{ بستگی ندارد.}$$

$$\text{الف) ۷-۹} \quad \rho_1 < \rho < \rho_2 \quad \text{به ازای}$$

$$\rho > \rho_2 \quad \mathbf{B} = \mu_0 I \hat{\phi} (\rho^2 - \rho_1^2) / (\rho_2^2 - \rho_1^2) 2\pi \rho$$

$$\mathbf{B} = 0, \rho < \rho_1 \quad \text{به ازای}, \mathbf{B} = \mu_0 I \hat{\phi} / 2\pi \rho$$

$$\text{ب) به ازای } \rho_1 < \rho < \rho_2$$

$$\rho > \rho_2 \quad \mathbf{A} = \mu_0 I \hat{z} (-\rho^2 + 2\rho_1^2 \ln \rho) / 4\pi (\rho_2^2 - \rho_1^2)$$

$$\mathbf{A} = -\mu_0 I \hat{z} \ln \rho / 2\pi$$

$$\text{ج) } \mathbf{B} \text{ با الف) یکسان است.}$$

$$\mathbf{B} = 9k B_0 \hat{z} / [2k+1](k+2) - 2(R_1/R_2)^2 (k-1)^2] \quad \text{الف) ۹-۹}$$

که در آن $k = \mu_2 / \mu_1$, وقتی $k \ll \mu_1$, $\mu_2 \ll \mu_1$, $k \rightarrow 0$ و $\mathbf{B} = 0$: یک اثر حفاظ.

$$\rho > a \quad \text{به ازای } \mathbf{B}_1 = \mu_1 \mu_0 M_0 \hat{x} / (\mu_0 + \mu_2), \rho < a \quad \text{الف) ۱۱-۹}$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mu_2 M_0 \rho_0^2 (\cos \phi \hat{\rho} + \sin \phi \hat{\phi}) / (\mu_0 + \mu_2) \rho^2$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}/3) \quad \text{الف) ۱۳-۹}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad \text{ب)}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}/2) \quad \text{ج)}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 h}{\beta} \ln(\rho_2/\rho_1) \quad \text{ج)}$$

$$\tau = -\frac{\epsilon_0 h V^2}{2\beta} \quad \text{د)}$$

الف) موازی با میدان: پایدار، عمود بر میدان، ناپایدار؛

$$W = -12\pi \epsilon_0 a^2 E_0^2 / l^2 \quad \text{ب)}$$

$$W = -\frac{bq^2}{4\pi \epsilon_0 (r^2 - b^2)} \quad \text{الف) ۲۳-۶}$$

ب) بلی

$$\frac{bq^2}{4\pi \epsilon_0 (r^2 - b^2)} + \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{bq}{2r^2} \right) \quad \text{ج)}$$

فصل ۷

$$3.1 \text{ cm/s} \quad \text{۱-۷}$$

$$\frac{1}{2\pi \sigma_c l} \ln\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{1}{2\pi \sigma_c r} \ln\left(\frac{b}{c}\right) \quad \text{۳-۷}$$

$$Q = Q_0 e^{-(\sigma_c/\epsilon_0 K)t} \quad \text{الف) ۵-۷}$$

$$\frac{Q_0^2 d}{2A\epsilon_0 K} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \quad \text{ب)}$$

$$\tau = 3.8 \times 10^{-22} \text{ s} \quad \text{ج)}$$

$$\mathbf{I} = \alpha E_0 a^2 \hat{x} \quad \text{ج) ۷-۷}$$

$$1.4 \times 10^5 \text{ A} \quad \text{۱۱-۷}$$

$$Q = \sum_{i,k} I_i I_k R_{ik} \quad \text{۱۳-۷}$$

فصل ۸

$$m d^2 \mathbf{r} / dt^2 = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{الف) ۱-۸}$$

$$\mathbf{B} \text{ کوچکترین} = 5.69 \times 10^2 \text{ T} \quad \text{ب)}$$

$$\mathbf{F}/l = -(I\mu_0 K_0 \hat{y}/\pi) \tan^{-1}(W/2h) \quad \text{۳-۸}$$

$$\mathbf{F}/l = -I\mu_0 K_0 \hat{y}/2$$

$$\text{الف) ۵-۸} \quad \nabla \times \mathbf{B} = 0, \rho \neq 0 \quad \text{ضمن آنکه } \rho \rightarrow 0 \text{ (جریان}$$

$$\text{رشته‌ای), } \nabla \times \mathbf{B} \rightarrow \infty$$

$$\mathbf{B} = (\mu_0 I_1 / 2\pi \rho) \hat{\phi} \quad \text{الف) ۹-۸}$$

$$\mathbf{F} = \mu_0 I_1 z_0 \ln(\rho_2/\rho_1) / 2\pi \quad \text{ب)}$$

$$\Delta \mathbf{A} = \mu_0 I_1 \ln(\rho_2/\rho_1) / 2\pi \quad \text{ج)}$$

$$\text{د) } \mathbf{F} \text{ وارد بر } ab \text{ برابر است با } \mu_0 I_1 I_2 \hat{z} \ln(\rho_2/\rho_1) / 2\pi$$

$$\mathbf{F} \text{ وارد بر } bc \text{ برابر است با } -\mu_0 I_1 I_2 z_0 \hat{y} / 2\pi \rho_1$$

$$\mathbf{A} = -(\mu_0 I \ln \rho) \hat{z} / 2\pi \quad \text{۱۱-۸}$$

$$\mathbf{B} = 2\sqrt{2} \mu_0 I \hat{z} / \pi a \quad \text{۱۳-۸}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 IN \hat{z} / 4R \quad \text{۱۵-۸}$$

$2,37 \times 10^{-6} \text{ H/m}$ ۱۵-۱۱

$\frac{\mu_0 \pi R_1 R_2}{2h^2}$ (الف) ۱۷-۱۱

$\mu_0 R \left[\ln \left(\frac{\lambda R}{h} \right) - 2 \right]$ (ب)

فصل ۱۲

$62,5 \text{ J}$ (الف) ۱-۱۲

25 Wb (ب)

$U/l = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}, B = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \hat{\phi}$ (الف) ۳-۱۲

$L/l = \mu_0 / 8\pi$ (ب)

$2,3 \times 10^{-2} \text{ W}$ (الف) ۵-۱۲

$I_{\text{بیشینه}} = 4 \times 10^{-2} \text{ A}$ (ب)

$2,5 \times 10^{-2} \text{ H}$ (ج)

شعاعی $F = \mu_0 N I^2 / 2l, U = \frac{\pi R^2 \mu_0 N^2 I^2}{2l}$ (الف) ۷-۱۲

(ب) با (الف) یکسان است.

$\frac{\mu_0}{2\pi} I_1 \ln \rho \hat{z}$ (الف) ۹-۱۲

$\frac{U}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \ln R$ (ب)

$F/l = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R}$ (ج)

$F = -\frac{3\mu_0 a^2 b^2 I_1 I_2}{2l^2}$ ۱۱-۱۲ در راستای محور x

فصل ۱۳

$V = RI + L \frac{dI}{dt}$ (الف) ۱-۱۳

$I = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-(R/L)t})$ (ب)

$V_0 e^{-Rt/L}$ (ج)

$V_0 (e^{-Rt/L} - e^{-R(t-T)/L})$ (د)

$Q = 8,66$ (الف) ۵-۱۳

$0,1 \text{ H}$ (ب)

$0,52$ (ج)

$I = \frac{V_0}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}} \sin(\omega t + \phi)$ (الف) ۷-۱۳

$\tan \phi = \omega L / R$

(ب)

(ج) V_R نسبت به V_L تأخیر فاز دارد.

$m = q\omega R^2 \hat{z} / 2$ ۱۵-۹

$dF/dl = \mu_0 I^2 b / 4\pi (a^2 - b^2)$ ۱۹-۹

$B = \mu_0 M (1 - \rho_0^2 / \lambda L^2 - l_0 / \rho_0) \approx \mu_0 M$ ۲۱-۹

$1,24 \text{ T}$ ۲۳-۹

$A = \pi t^2 B R^2 \hat{z} (z^2 + R^2)^{-2/2} / \lambda$ (الف) ۲۵-۹

(ب)

$\pi t^2 B R^2 \hat{z} \{ [(z-d)^2 + R^2]^{-2/2} + [(z+d)^2 + R^2]^{-2/2} \} / \lambda$

فصل ۱۰

$m = -\frac{e\omega \rho^2}{\gamma} \hat{z}$ (الف) ۱-۱۰

$m = -\frac{e\rho^2}{\gamma} \left(\omega + \frac{eB}{\gamma m_e} \right) \hat{z}$ (ب)

$\langle r \rangle = \langle r^2 \rangle^{1/2} = 7,8 \times 10^{-11} \text{ m}$ (ج)

$3,67 \text{ K}$ ۳-۱۰

$3,3 \times 10^{-2}$ (الف) ۵-۱۰

$2,63 \times 10^{-2} (\text{A} \cdot \text{m}^2)$ (ب)

$m = 18 \text{ A} \cdot \text{m}^2, M = 1,8 \times 10^6 \text{ A/m(T)}$ (ج)

$\gamma = 2654, M_0 = 8,44 \times 10^5 \text{ A/m}$ ۷-۱۰

فصل ۱۱

$\rho > \rho_0$ به ازای $E = 0,5\rho\hat{\phi}, \rho \leq \rho_0$ به ازای $E = 0,5\rho_0\hat{\phi}/\rho$

$E = 0,5\rho_0\hat{\phi}/\rho$

$\rho \leq R$ به ازای $A_\phi = \frac{R^2 B_0}{2\rho}, \rho \geq R$ به ازای $A_\phi = \frac{1}{\rho} \rho B_0$

$A_\phi = \frac{1}{\rho} \rho B_0$

$\rho \leq R$ به ازای $E_\phi = -\frac{R^2}{2\rho} \frac{dB_0}{dt}, \rho \geq R$ به ازای $E_\phi = -\frac{\rho}{2} \frac{dB_0}{dt}$

$E_\phi = -\frac{\rho}{2} \frac{dB_0}{dt}$

$J = \sigma_c E_\phi \hat{\phi}$ (ج)

$\epsilon = \frac{\mu_0 I A}{2\pi l(l+a)} v$ (الف) ۵-۱۱

$M = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{l} \right)$ (ب)

$-7,5 \cos \omega t$ (الف) ۷-۱۱

$-7,5 \cos \omega t - 2,25 \sin \omega t$ (ب)

$I_r = \frac{\mu_0 I_1 A_1 A_2}{2\pi r^2} \omega \sin \omega t$ ۹-۱۱

$\frac{\mu_0}{\lambda \pi} + \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a)$ ۱۳-۱۱

$y = \pm x$ محور راستای بیضوی در راستای $m = n \pm 1$

۶۵٫۲ W (الف) ۱۳-۱۴

۲۲۲ W (ب)

$E = E_0 \hat{x} \exp[-z/\delta - i\omega(t - nz/c)]$ (الف) ۱۵-۱۴

$\omega = c/n = 5.11 \times 10^8 \text{ m/s}$, $\delta = 8.15 \times 10^{-5} \text{ m}$ (ب)

$\lambda = 5.12 \times 10^{-7} \text{ m}$

$B = (1+i)\hat{y}E/\delta\omega$ (ج)

$\pi/4$ (د)

$v = 4.74 \times 10^7 \text{ m/s}$, $\hat{n} = 3.98 \times 10^{-2} e^{-i\pi/4} \Omega$ ۱۷-۱۴

$B = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\xi'} d\xi' \right)$ (ب) ۱۹-۱۴

$F = 8 \times 10^5 \text{ N}$, $P_m = 8 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ (ج)

$F = 2 \times 10^5 \text{ N}$ (د)

فصل ۱۵

$B = -\rho\hat{\phi} \sin at$, $E = -\frac{1}{2}\hat{z}\alpha\rho^2 \cos at$ (الف) ۳-۱۵

$F(x,t) = \frac{\hat{\rho}}{\mu} \left(\gamma\rho - \frac{1}{\gamma}\varepsilon\mu\alpha^2\rho^2 \right) \sin^2 at \text{ N/m}^2$ (ج)

$A_1 = \mu_0 I_0 \hat{z} \ln \left(\sqrt{c^2 t'^2 - \rho_1^2} + ct'/\rho_1 \right) / 4\pi$ ۷-۱۵

$A_2 = \mu_0 I_0 \hat{z} \ln \left(\sqrt{c^2 t'^2 - \rho_2^2} + ct'/\rho_2 \right) / 4\pi$

$A = A_1 + A_2$, $\rho_2 < ct'$ و $\rho_1 < ct'$ اگر

$A = A_1$, $\rho_2 \geq ct'$ و $\rho_1 < ct'$ اگر

$A = A_2$, $\rho_2 < ct'$ و $\rho_1 > ct'$ اگر

و اگر $\rho_2 > ct'$ و $\rho_1 > ct'$ ، $A = 0$ ، $t' = t - t_0$ ، پتانسیل برداری وقتی یکسان است که

$\left(\sqrt{c^2 t'^2 - \rho_1^2} + ct' \right) \rho_2 = \left(\sqrt{c^2 t'^2 - \rho_2^2} + ct' \right) \rho_1$

$B = 0$, $S = 0$ (الف) ۹-۱۵

$E = \rho_0 \hat{z} [\cos(\omega t - kz)/z^2 - \omega \sin(\omega t - kz)/cz^2] / 2\pi\epsilon_0$

$E = -\rho_0 \hat{z} [\cos \omega t - kx] / x^2$ (ب)

$-\omega \sin(\omega t - kx) / cx^2 - \omega^2 \cos(\omega t - kx) / c^2 x^2 / 4\pi\epsilon_0$

$B = \rho_0 \omega \hat{y} [k \cos(\omega t - kx) + \sin(\omega t - kx) / x] / 4\pi\epsilon_0 c^2 x$

$S = (\rho_0 / 4\pi\epsilon_0)^2 (kw^2 / c^2 \mu_0) \hat{x} \cos^2(\omega t - kx) / x^2$

$\rho_0 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx) / 6\pi\epsilon_0 c^2$ (د)

۱۱-۱۵ (الف) خطی در جهت $\hat{\phi}$; (ب) دایره‌ای در جهت $-\hat{x} - i\hat{y}$ ؛

(ج) بیضوی

$V_r = 0$, $V_1 = 2$ (ب) ۱۱-۱۳

(ج) ۱، ۲، و صفر آمپر در R_2 و R_3

$V_r = 4.48 \cos(t - 63.5^\circ) = 4.48 \cos(t - 1.1)$ ۱۳-۱۳

$\phi = -1.1 \text{ rad}$

$R_r = \omega \sqrt{L_r}$ ۱۵-۱۳

$\frac{1}{L_1(C_1 + 2C)} \omega^2 = \frac{C_1 + 2C}{L_1 C_1 (C_1 + 2C)}$ (الف) ۱۹-۱۳

$\omega^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \cdot \frac{1}{L_1 C_1}$, $C = 0$ ، به‌ازای $\omega^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$ (ب)

• به‌ازای $C \gg C_1$

$\pi/2$ (ب) ۲۱-۱۳

$C_1 = 10^{-6} \text{ F}$ (الف) ۲۳-۱۳

$Q_0 \gg 1$ ؛ هر دو، زیرا $Z = 10^4$, $Q_0 = 10^5$ (ب)

(ج) $z \approx 25(1 + 18i)$ ، القایی

$C_r = 0.25 \times 10^{-6} \text{ F}$ (د)

$0.9\omega_0$ و ω_0 به ترتیب در 45° ، 4×10^{-2} (ه)

$z_r = -\frac{i\omega L}{\omega^2 LC - 1}$, $z_1 = i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$ (الف) ۲۵-۱۳

$0 \leq \frac{(\omega^2 LC - 1)^2}{\omega^2 LC} \leq 4$ (ب)

فصل ۱۴

$I_D = I_C = q_0 \omega \cos \omega t$ (الف) ۱-۱۴

$B = B\hat{\phi}$ (ب) z بر صفحات عمود است

$\mu_0 q_0 \omega \rho \cos(\omega t) / 2A$ (ج)

$I_D = I_C = 7.1 \times 10^{-5} \left(\frac{ba}{b-a} \right) \cos 50^\circ t$ ۳-۱۴

$H = -E/c\mu_0$, $B = -E/c$, $D = \epsilon_0 E$ (الف) ۵-۱۴

$E = H/c\epsilon_0 = c\mu_0 H$ (ب)

$u = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)$ (الف) ۷-۱۴

$|v| = c$ در آن $S = uv$, $S = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) \hat{z}$

(ب) برای هر دو $\frac{1}{\epsilon_0} \epsilon_0 c E_0^2 \hat{z}$

(۹-۱۴) $(E_0 \neq E'_0)$ قطبش بیضی

(ج) B بر E عمود است.

$E = E_0 \hat{x} \cos \omega t + 2E_0 \hat{y} \cos(\omega t - \pi/4)$ (د)

$E_0 = \hat{x}e^{iky} + \hat{y}e^{ikx}$, $E = E_0 e^{-i\omega t}$ (الف) ۱۱-۱۴

(ب) $m = n \pm 4$ ، 45° در زاویه خطی در زاویه

قطبیده خطی در زاویه 135° ، $m = n \pm 2$ ، 135° در زاویه دایره‌ای،

$$\lambda_c = \left[\left(\frac{m}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2b} \right)^2 \right]^{-1/2} \leq 2a \quad \text{(الف) ۲۱-۱۶}$$

با $m = 1$ و $n = 0$ داده می‌شود.

(ب) ω_{mn} (بهنجارشده به ω_{10}): $\omega_{02} = 4, \omega_{01} = 2$
 $\omega_{20} = 2, \omega_{12} = 4, \omega_{11} = 2, \omega_{10} = 1, \omega_{02} = 6$
 $\omega_{22} = 5, \omega_{21} = 3, \omega_{20} = 3, \omega_{12} = 4, \omega_{11} = 2, \omega_{10} = 1$
 $\omega_{22} = 5, \omega_{21} = 3, \omega_{20} = 3, \omega_{12} = 4, \omega_{11} = 2, \omega_{10} = 1$
 (الف) ۲۵-۱۶

$$\mathbf{E} = \hat{x} E_{ox} \cos\left(\frac{l\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right) + \hat{y} E_{oy} \sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right)$$

که در آن $(E_{oy}/E_{ox}) = -(lb/ma)$

$$\mathbf{H} = -\frac{iE_{ox}}{\mu_0 \omega} \left[\frac{nl\pi b}{mac} \hat{x} \sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{c}z\right) + \frac{n\pi}{c} \hat{y} \cos\left(\frac{l\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{c}z\right) - 2 \frac{n\pi}{b} \hat{z} \cos\left(\frac{l\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right) \right]$$

TE_{111} (ب)
 $\omega^2/c^2 = (\pi^2/a^2)(l^2 + m^2 + n^2)$ (ج)

فصل ۱۷

۱-۱۷ طول عمر برابر است با $10^{-6} \times 1.52$ s. فاصله تا زمین به اندازه ضریب ۵ منقبض می‌شود، بنابراین همان نتیجه را به دست می‌دهد.

$$\frac{dN}{d\Omega'} = \frac{N_0}{4\pi} \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta \cos \theta')^2} \quad 9-17$$

$$\omega_1 = \omega_2 \text{ و } \theta_1 = \theta_2 \quad 11-17$$

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad 13-17$$

۱۷-۱۷ (الف) وقتی $E < cB$ و $\mathbf{v} = \mathbf{B} \times \mathbf{E}/B^2$ ، وقتی $E > cB$ و $\mathbf{E}' = c\mathbf{B}' = \mathbf{B}\sqrt{c^2 B'^2 - E'^2}/B$ ، $\mathbf{E}' = \mathbf{E}\sqrt{E'^2 - c^2 B'^2}/E$ ، $\mathbf{B}' = 0$ و $\mathbf{v} = c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}/E'^2$ در حالت اخیر \mathbf{B}' در هر چارچوبی که در جهت \mathbf{E}' حرکت می‌کند، نیز صفر خواهد بود.

(الف) ۱۹-۱۷

$$-\nabla\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^{*2}} [(z - vt)\hat{z} + (x\hat{x} + y\hat{y})(1 - \beta^2)]$$

۱۵-۱۵ (الف) $l \ll 3.8 \text{ cm}$ ؛ انتخاب کنید $l = 0.1 \text{ mm}$ ؛ (ب)
 $R = 6 \times 10^{-2} \Omega$ ؛ (ج) $p \approx 3 \times 10^{-22} \text{ C} \cdot \text{m}$

۱۹-۱۵ الگوی یک آنتن ربع طول موج که به طور عمود در نزدیکی زمین قرار دارد، یعنی، یک آنتن عمودی نیم طول موج

۲۱-۱۵ (الف) $dP/d\Omega = q^2 a^2 \sin^2 \theta / 16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2$ مستقل از v

(ب) $E = q^2 a v_0 / 6\pi\epsilon_0 c^2, P = q^2 a^2 / 6\pi\epsilon_0 c^3$

۲۳-۱۵ $E = q^2 a / (6\pi\epsilon_0 c^2) \int_0^\beta (1 - \beta^2)^{-2} d\beta$ که در آن $\beta_0 = v_0/c$

۲۵-۱۵ (الف) $p(t) = p_0 \sin \omega t \hat{x} + p_0 \cos \omega t \hat{y}$ (ب) $\pi/2$

(ج) $dP/d\Omega = p_0^2 k^2 c (1 + \cos^2 \theta) / 8\pi^2 \epsilon_0$

فصل ۱۶

۱-۱۶ $(3.5\hat{x} + 3.4\hat{y})/\mu_0 \text{ A/m}$

۳-۱۶ (الف) $\theta_1 = \sin^{-1} n_2/n_1$ یا $\pi/2$

(ب) $(\phi_p - \phi_s)_{\text{پیشینه}} = (1 - n_1^2/n_2^2)/(n_2/n_1)$

(ج) بلی به شرط آنکه $1 - n_1^2/n_2^2 \geq 2n_2/n_1$ و

$n_2/n_1 \leq 0.414$

۵-۱۶ $T = 3/[4 - 15 \sin^2(2\omega d/c)]$

$T = 8/[9 + 72 \sin^2(4\omega d/c)]$

$T = 1/[4/27 - 45 \sin^2(2\omega d/c)/1296]$

۷-۱۶ $49.82, -0.96, -1.63$

۱۳-۱۶ $6.13 \times 10^{-2}, 3.14 \times 10^{-2}, 2.1 \times 10^{-2} \text{ A/m}$

۱۵-۱۶ (الف) $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 = \partial E_x / \partial x = 0$

(ب) $d^2 E_x / dy^2 + (\omega^2/c^2 - k^2) E_x = 0$

$\mathbf{E} = E_0 \hat{x} \sin(n\pi y/a) e^{i(kz - \omega t)}$

(ج) $\omega > \frac{\pi c}{a}$

۱۷-۱۶ (الف) $\mathbf{B} = B_0 \hat{x} \cos(ky \cos \theta) e^{i(kz \sin \theta - \omega t)}$

$\mathbf{E} = -cB_0 [\hat{y} \sin \theta \cos(ky \cos \theta) - \hat{z} i \cos \theta \sin(ky \cos \theta)] e^{i(kz \sin \theta - \omega t)}$

که در آن $\cos \theta = n\pi/ka$ و n یک عدد صحیح است؛ (ب) $n = 0$

۱۹-۱۶ (الف) $\mathbf{E} = \hat{x} E_0 e^{i(kz - \omega t)}$

و H_x ، $x = a$ و $x = 0$ در $\mathbf{H} = \hat{y} (E_0/\mu_0 c) e^{i(kz - \omega t)}$ صفرند.

(ب) جواب در معادله موج و شرایط مرزی بدون محدودیتی روی ω صدق می‌کند.

$$p'_{\perp} = p_{\perp} - \frac{v}{c^2} \times m_{\perp}, m'_{\parallel} = \gamma m_{\parallel}, p'_{\parallel} = \gamma p_{\parallel} \quad (۲۱-۱۷)$$

$$m'_{\perp} = m_{\perp} + v \times p_{\perp}$$

۲۳-۱۷ (الف) $q_s = -q_r = -vaI'/c^2$ رویه‌های دو و چهار

تغییر نمی‌کنند، (ب) $q_r b$ ، (ج) $m = m'$

$$-\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\mu_0 q v v}{4\pi R^{*2}} (z - vt) \quad (ب)$$

$$E = -\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{qR}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 R^{*2}} \quad (ج)$$

که از مکان کنونی بار، شعاعی است.

نمایه

- آزمایش مایکلسون-مورلی ۳۹۸
 آنتن ۳۴۶-۳۴۳، ۳۴۸-۳۴۹
 آرایه ۳۴۸
 نیم موج ۳۴۶
 آینه
 دی الکتریک ۳۷۱
 فلزی ۳۷۷، ۳۷۹
 ابرسانا ۱۵۱
 ابیراهی ۳۹۸
 اتر ۳۹۷-۳۹۸
 اتلاف انرژی ۱۶۴
 اثر
 پرده‌ای ۱۰۳
 پیروالکتریک ۹۹
 دوپلر ۳۹۶
 عرضی ۳۹۶، ۴۱۱
 ادمیتانس ۲۸۸
 اسپین ۲۳۲-۲۳۱، ۲۳۵-۲۳۶
 استرادیان ۸
 استوانه مغناطیده ۲۰۴، ۲۰۷، ۲۱۷
 اشباع ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۳۰
 افت جریان مغناطیسی ۲۲۴
 افت لگاریتمی ۲۸۱
 القا
 ضریب ۲۵۲
 قانون فاراده ۲۴۵
- گرم کردن ۲۴۷
 مغناطیسی ۱۷۲
 موتور ۲۵۲
 مولد ۲۵۲
 ناحیه ۳۴۵، ۳۵۱
 القای متقابل ۲۵۳
 چنبره و سیملوله ۲۵۴-۲۵۳
 حلقه‌های موازی ۲۵۵
 سیمهای موازی ۲۶۰
 الکتروت ۹۰، ۱۲۵
 امیدانس ۲۸۵
 جور کردن ۲۸۹
 ذاتی ۳۱۷، ۳۲۰
 فضای آزاد ۳۱۷
 موج ۳۱۷-۳۱۶
 انتقال به سرخ ۳۹۶
 انتگرال خطی ۱۵-۱۴
 انتگرال سطحی ۱۱
 انرژی
 اتلاف ۱۶۴
 افت پسماند ۲۶۶
 الکتروستاتیک ۱۲۸، ۱۳۹-۱۳۸
 بارهای آزاد ۱۲۸
 برهم‌کنش ۱۴۱
 پایستگی ۳۱۵
 توزیع بار کروی ۱۲۹
- جنبشی ۱۵۰، ۱۷۴
 چگالی جریان ۲۶۳
 خازن ۱۳۷
 خود ۱۴۱
 خودالقایی ۲۶۲-۲۶۱
 دستگاه رساناها ۱۳۰
 دوقطبی در میدان خارجی ۴۲، ۲۶۴
 سمتی (جهتی) ۱۹۷، ۲۶۴
 مغناطیسی ۲۶۱
 انرژی برهم‌کنش ۱۴۱
 دوقطبی در میدان خارجی ۲۶۴
 دوقطبی-دوقطبی ۱۲۱، ۲۴۰، ۲۶۵
 مغناطش ۲۶۵
 مغناطیسی ۲۶۴، ۲۷۰-۲۶۹
 انرژی پتانسیل
 بار نقطه‌ای ۱۲۸
 دو بار نقطه‌ای ۱۲۸
 و پتانسیل نرده‌ای ۱۲۸
 انقباض طول ۳۹۴
 انقباض فیتزجرالد-لورنتس ۳۹۵
 باتری ۱۶۴
 خورشیدی ۱۶۵
 هسته‌ای ۱۶۵، ۱۶۶
 بار
 آزاد ۹۱
 القایی ۹۶

پاشنده و غیرپاشنده ۳۱۱	بردار	اندازه ۲۱
پایستگی (پایستاری)	انتشار ۳۱۱	پایستگی ۱۵۰، ۱۳۶، ۲۱
انرژی ۳۱۵	انتگرال خطی ۱۵	تقارن ۲۱
بار ۱۵۰، ۱۳۶، ۲۱	انتگرال سطحی ۱۱	توزیع ۲۶، ۲۷، ۲۹، ۳۰، ۳۶، ۳۹، ۴۳، ۴۵
پتانسیل	اندازه ۳	۸۰-۸۳، ۶۱
تأخیری ۳۳۱، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۴۹	به عنوان سطح ۸	چگالی حجمی ۲۴
چهاربعدی ۴۰۴	پایه ۱	چگالی خطی ۲۵
قطبش ۹۱	تاو ۱۳	چگالی سطحی ۲۵
کولنی لحظه‌ای ۳۲۹	تعریف ۳	شتابدار ۳۵۵-۳۵۶
لیناردویچرت ۳۵۲	جابه‌جایی ۹۶	قطبش ۹۱
نرده‌ای مغناطیسی ۱۹۲-۱۸۸، ۲۰۵-۲۰۸	جمع ۳	متحرک سریع ۳۵۲-۳۵۵
پتانسیل، نرده‌ای ۳۴	چهاربعدی ۳۹۸، ۴۰۰	مثبت ۲۱
بار خطی ۵۷	دیورژانس ۱۱، ۱۷	مغناطیسی ۱۷۶
بار کروی ۳۹	سیملوله ۲۰	مقید ۹۱
بار نقطه‌ای ۳۴، ۳۵۳، ۴۰۸	شار ۱۱	منفی ۲۱
بار نقطه‌ای متحرک ۳۳۲، ۳۵۲	ضرب در نرده‌ای ۳	ناوردا ۴۱۲
بارهای خطی موازی ۷۷-۷۶	ضرب نرده‌ای ۶	بار آزاد ۹۶
برای B یکنواخت ۲۰۰-۱۹۹	عمود بر سطح ناپوستگی ۳۳-۳۲	انرژی ۱۲۸
برداری ۱۸۲، ۱۹۲، ۲۰۷-۲۰۵	گرادیان ۹	چگالی ۹۶
بسط چندقطبی ۴۱-۴۰، ۱۹۴، ۳۴۹	مربع ۲-۳	بار خطی
پوسته ۳۸	مشتق ۱۸	پتانسیل ۵۷
پیوستگی ۵۶	مکان ۴	میدان الکتریکی ۲۶، ۳۰
تأخیری ۳۳۱، ۳۳۳، ۳۳۴	مؤلفه ۳	بار نقطه‌ای ۲۲
جریانهای سیم مستقیم ۱۸۳	موج ۳۱۱	به عنوان عنصر جریان ۳۴۳
چارقطبی ۴۵-۴۴	بردار یکه ۳	پتانسیل برداری ۳۵۳، ۴۰۸
حلقه ۳۶	استوانه‌ای ۴	پتانسیل نرده‌ای ۳۴، ۳۵۳، ۴۰۸
حلقه‌های کوچک ۱۹۴	دکارتی ۴-۳	تابش از ۳۵۵
دوقطبی ۳۴، ۴۱	کروی ۵	دستگاه ۲۲، ۱۲۸
سیملوله ۲۰۰-۱۹۹	برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی ۱۲۰، ۱۲۷، ۲۴۰	میدان نسبی ۳۵۴-۳۵۳، ۴۰۹-۴۰۸
شرایط مرزی ۱۸۳، ۲۱۳	برهم‌نهی ۲۲	بارهای تصویری ۷۰
ضریب ۱۳۰، ۱۳۲-۱۳۳	بسامد	استوانه‌های موازی ۷۷
قرص باردار ۳۶	پل ۳۰۱	دو سطح ۷۹
مغناطیسی ۱۹۲-۱۸۸، ۲۰۷-۲۰۵	تشدید ۲۸۳	دی‌الکتریک نیمه‌متناهی ۱۰۹
مواد مغناطیده ۲۰۷-۲۰۵	جدول ۳۱۲	رسانای تخت نیمه‌متناهی ۶۹-۶۸، ۳۴۰-۳۳۹
و انرژی ۱۲۸	حوزه ۲۷۴، ۲۸۴	کره رسانا ۷۲
هشت‌قطبی ۵۱-۵۰	سیکلوترون ۱۷۴	نیرو ۷۰
پذیرفتار ۲۲۸	قطع ۳۸۳-۳۸۱	بازتاب
پذیرفتاری	بسط برحسب چندقطبی ۴۰، ۳۳۴، ۳۴۹	زاویه ۳۶۶-۳۶۵
الکتریکی ۹۸	پاد فرومغناطیس ۲۴۱	قانون ۳۶۶-۳۶۵
تانسور ۹۸، ۲۰۹	پارامغناطیس ۲۰۹، ۲۲۸	کلی ۳۶۷، ۳۷۱
جدول ۲۰۹	پاشندگی ۳۱۱، ۳۲۰	پشتاترون ۲۴۸

آنتن دیفرانسیلی ۳۴۳	لورنتس ۳۹۲	جرمی ۲۰۹
استوانه‌ای ۳۱۸، ۲۷۰، ۱۸۴، ۱۷۷	نمادها ۴۱۷	مغناطیسی ۲۰۹، ۱۹۶
پوسته استوانه‌ای ۴۰۶	تخلیه الکتریکی ۲۸۰	باریم تیتانیت ۱۲۴
پیچه ۲۲۶، ۲۲۳	تخلیه بار خازن ۲۸۱	مولی ۲۰۹
چنبره ۱۸۱	تداخل ۳۴۸	پسماند ۲۱۰، ۱۲۵
حلقه ۲۶۴، ۱۹۴، ۱۹۳	تراوایی ۲۱۰	مغناطیسی ۲۱۱
حلقه دایره‌ای ۲۶۹، ۱۹۱، ۱۸۶	فضای تهی ۱۷۶	پل
حلقه مستطیلی ۲۴۷، ۱۹۹	تشدید ۲۹۷، ۲۹۶، ۲۹۱	بسامد ۳۰۱
دو حلقه موازی ۲۵۶، ۲۵۵	پاد ۲۹۴	ظرفیت ۳۰۱
سیم ربع موج ۳۴۹	سری ۲۹۱	ماکسول ۳۰۱
سیم نیم موج ۳۴۸، ۳۴۶	فاز ۲۹۴	پوششهای پادبازتاب ۳۷۲
سیملوله ۲۶۸، ۲۶۴، ۲۴۶، ۱۹۴، ۱۸۷، ۱۸۱	موازی ۲۹۳	پیچه هلمهولتر ۲۰۰
قرص ۱۹۴، ۱۸۸	تشدیدکننده کاواکی ۳۸۳، ۳۷۹	پیمانه
قطعه سیم ۲۵۵-۲۵۶	تضعیف ۲۹۷-۳۲۰	عرضی ۳۲۹
کابل هم محور ۳۱۸	تعامل ۴۰۲، ۳۳۷، ۶۴، ۵۹	کولن ۳۲۹، ۱۸۲
کره ۲۱۹	تکانه زاویه‌ای ۲۰۲	لورنتس ۴۰۳، ۳۳۰، ۳۲۸
مستقیم رشته‌ای ۱۷۹ از ۱۸۴، ۲۱۵، ۲۲۱	تک قطبی	تابش
۳۳۳، ۲۶۹، ۲۶۴	الکتریکی ۴۱	بحرانی ۳۶۷
نقاط بار متحرک ۱۷۴، ۳۵۲، ۳۵۵، ۴۰۸	مغناطیسی ۱۷۷	خراشان ۳۷۷، ۳۶۷
۴۰۹-۴۱۰	توزیع بار کروی ۸۱-۸۲، ۳۸-۳۹، ۲۸-۲۹	عمود ۳۶۴
ورقه ۲۴۷	توزیعهای بار	مایل ۳۷۶، ۳۷۴، ۳۶۵
ثابت	استوانه غیریکنواخت ۶۶	تابع
انتشار ۳۱۱	بارهای نقطه‌ای ۱۰۸، ۱۰۲، ۴۵، ۴۳، ۲۲	بریلوئن ۲۳۷
بولتزمن ۲۳۴، ۱۵۰، ۱۲۱	۴۰۸-۴۰۹، ۳۵۲، ۳۴۴	بسل ۳۳۷
دی الکتریک ۹۸	پوسته استوانه‌ای ۴۰۶، ۱۳۵، ۸۲، ۳۸	دلتهای دیراک ۱۹
جدول ۹۸	تقارن کروی ۳۹	لازون ۲۳۴، ۱۲۲
جابه‌جایی ۶	توزیع جایگزیده ۳۴۹، ۴۰	نیومن ۳۳۷
جام فاراده ۸۴	چارقطبی ۴۵	هانکل ۳۳۸
جداسازی متغیرها ۶۴، ۵۹	حلقه ۴۴، ۳۶، ۲۷	تانسور
جریان	خطی ۲۶، ۳۰، ۴۳	پذیرفتاری ۲۰۹، ۹۸
آزاد ۲۰۸-۲۰۹	دوقطبی ۴۱۰، ۳۴۹، ۱۰۷، ۴۳، ۳۵	گشتاور چارقطبی ۴۵
ادی ۲۵۹، ۲۴۷	سطح عمومی ۱۱۰	مقارن ۴۰۲
القایی ۲۵۹، ۲۴۷	سطحی ۱۳۵، ۲۹، ۲۷	مرتبه دوم ۴۰۲
پایا ۱۷۷، ۱۵۲، ۱۵۱	قرص ۱۸۸، ۳۶	مرتبه سوم ۴۰۵
ترازو ۱۷۹	کره غیریکنواخت ۱۳۷، ۱۰۳، ۶۱، ۴۴	میدان الکترومغناطیسی ۴۰۴
تصویری ۲۲۱	کره یکنواخت ۱۳۲، ۱۲۹، ۱۱۱، ۸۱، ۲۹	تانسورهای چهاربعدی ۴۰۲
جابه‌جایی ۳۰۴-۳۰۶، ۱۴۹	۳۰۶	تاو ۱۳
چار ۴۰۳-۴۰۴	نمایی ۸۳، ۸۲	تبدیل
رسانش ۱۴۹	نوار نامتناهی ۸۷، ۸۰	اندازه عددی ۴۱۶
رشته‌ای ۱۷۳	هشت قطبی ۵۰	پیمانه‌ای ۳۳۰، ۳۲۷
تقریب ۱۷۴	توزیعهای جریان	گالیه ۳۹۳، ۳۹۱

دستگاه	مغناطیسی ۲۲۶	گشتاور دوقطبی ۱۹۳
چیگرد ۶	حلزونی ۱۷۵	سطحی ۱۸۳، ۱۷۹
راستگرد ۶	حلقه	طولی ۳۲۹
مختصات ۳	جریان ۱۸۶	عرضی ۳۲۹
یکاهای الکتروستاتیکی ۴۱۴	رولاند ۲۱۰	مغناطش ۲۰۴، ۲۰۳
یکاهای الکترومغناطیسی ۴۱۴	RC ۲۷۸	همرفت ۱۴۹
دلتهای کرونکر ۵۹، ۶۴، ۳۳۷	RL ۲۷۷	جزء جریان ۱۸۶
دمای کوری ۱۲۴، ۲۳۸، ۱۲۴، ۲۳۹	RLC ۲۸۰	بارهای نقطه‌ای مثل ۳۴۳
دوقطبی	حوزه‌ها ۲۷۶، ۲۷۴، ۲۴۰	نیروی بین ۱۷۸
القاشده ۲۴۵	خازن	جزء حجم ۹
انرژی در میدان خارجی ۱۹۷، ۴۱	استوانه‌ای ۱۳۵	جمع بردارها ۳
انرژی سمتگیری مغناطیسی، دائمی ۱۲۱، ۲۳۳	انرژی ۱۳۷	جواب دالامبر ۳۰۸، ۳۱۲
پتانسیل ۳۵، ۴۱	با صفحات موازی ۱۰۰، ۱۳۴، ۱۴۰، ۱۴۳	جورشدهگی فاز ۳۶۵
تابش ۳۳۸، ۳۴۱، ۳۴۳، ۳۴۹	۱۴۴، ۱۵۶، ۳۰۵	چار بردار چگالی جریان ۴۰۳
تصویری ۷۱، ۷۴، ۷۵، ۷۶	سری ۱۳۶	چارچوب مرجع لخت ۲۴۴
تقریب ۳۴۴	غیر هم محور ۶۴	چرخش ۱۵
دائمی ۱۲۱	غیر هم مرکز ۶۰	چگالی انرژی
گشتاور روی ۴۳-۴۲، ۱۹۷	کروی ۳۷، ۵۷، ۱۳۵، ۱۳۸، ۱۴۰	الکتروستاتیک ۱۳۹
میدان الکتريکی ۳۵، ۳۴۳، ۳۴۹	گوه شکل ۵۸	الکترومغناطیسی ۳۱۶
میدان مغناطیسی ۱۹۵	مخروطی ۵۸	در دی الکتریک ۱۳۹
نقطه‌ای ۳۵	موازی ۱۳۶	قطبش ۱۳۹
نیروی روی ۱۹۷-۱۹۶، ۴۲	خط هم محور	متوسط زمانی ۳۱۷
دوقطبی مغناطیسی ۱۹۲	بازتاب ۳۶۶، ۳۶۶، ۳۷۲	مغناطش ۳۱۶
انرژی سمتی ۱۹۷	تراگسیل ۳۶۴، ۳۶۶، ۳۷۲	مغناطیسی ۲۶۳
تابش ۳۳۸	خودالفا ۲۶۰، ۲۷۱	چگالی بار
جریان رشته‌ای ۱۹۳	ضریب جفت شدگی ۲۵۹	حجمی ۲۴
سیملوله ۱۹۴	مد TEM ۲۸۳، ۳۹۰	خطی ۲۵
گشتاور روی ۱۹۷	میدانهای مغناطیسی ۳۱۸	سطحی ۲۵
میدان ۱۹۲، ۱۹۵	خطوط B و H ۲۰۸، ۲۱۹، ۴۰۹	قطبش ۹۱
نیروی روی ۱۹۷-۱۹۶	خطوط E ۲۴-۲۳	مقید ۹۱
دیدیکها ۱۸	بار نقطه‌ای ۲۵-۲۴، ۴۰۹	چگالی جریان
دی الکتریک ۹۰	دوقطبی ۲۴، ۳۶۰-۳۵۹	حجمی ۱۴۹
خطی ۹۸	شکست ۱۱۴	سطحی ۱۷۹، ۱۸۳
قدرت ۹۹	معادله دیفرانسیل برای ۲۴	قطبش ۱۴۹
میدان الکتريکی در درون ۱۰۵	خودالقایی ۲۵۶	مغناطش ۲۰۴
نیروی روی ۱۴۴	استوانه‌های موازی ۲۶۰	مقید ۲۰۴-۲۰۳
و ظرفیت ۱۳۴	انرژی ۲۶۲-۲۶۱	چنبره ۱۸۱
همسانگرد ۹۸	پیچه چنبره‌ای ۲۵۷	چندجمله‌ایهای لژاندر ۵۹
همگن ۹۸	خط هم محور ۲۶۰	چندقطبها ۴۸
دیامغناطیس ۲۳۲	سیملوله ۲۵۷	حفاظ ۸۳، ۲۲۶
دیفرانسیل حجم چهاربعدی ۴۰۴	خودنیرو ۳۵۶	الکتروستاتیکی ۸۳

نوار گذر ۲۹۶	نور ۳۰۸، ۲۳	دیورژانس ۱۷، ۱۱
صفحه فرود ۳۶۵	سطح هم پتانسیل ۳۴	چهار بعدی ۴۰۱
ضرایب	بارهای خطی موازی ۷۷	رابطه کلازیوس-موساتی ۱۱۸
القا ۲۵۲	دوقطبی ۴۰	راکتانس ۲۸۶-۲۸۷
پتانسیل ۱۳۰، ۱۳۲، ۱۳۳	سطح	رایانه های قیاسی ۲۷۸
ظرفیت ۱۳۰	بردار ۸	رسانا ۳۲
فرزل ۳۶۵، ۳۷۳	جزء ۷	خوب ۳۲۱
مقاومت ۶۱	سیکلوئید ۱۷۵	نیروی روی ۱۱۰
ضرب	سیموله	رسانایی ۱۵۱
برداری ۶	پتانسیل برداری ۱۹۹-۲۰۰	رسانندگی ۱۵۱
سه گانه ۶	خودالقا ۲۵۷	جدول ۱۵۲
داخلی ۶	گشتاور دوقطبی ۱۹۴	گذردهی ۱۵۵
نرده ای ۶	مدار مغناطیسی ۲۲۳	روابط برداری ۱۷-۱۶
سه گانه ۶	میدان مغناطیسی ۱۸۱، ۱۸۷	روابط مشخصه ۹۸، ۲۰۹
- برداری ۶	و قانون فاراده ۲۴۶	روشهای تصاویر ۶۹، ۱۰۸، ۱۶۲، ۲۲۱
ضرب	شار	ریشه میانگین مربعی ۲۹۱
g ۲۳۶	الکتریکی ۲۸	زاویه
لانه ۲۳۶	بردار ۱۱	بازتاب ۳۶۶
بازتاب ۳۶۴، ۳۶۶، ۳۷۲	توان ۳۱۶	بحرانی ۳۶۸
تراگیل ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۷۲	مغناطیسی ۱۸۳، ۲۱۰، ۲۱۵	بروستر ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۸
توان ۲۹۰	شدت مغناطیسی ۲۰۸	تخت ۸
جفت شدگی ۲۵۹	شرایط اولیه ۲۸۰	خرانشان ۳۶۷
شکست ۳۰۸	شرایط مرزی، میدان الکتریکی ۳۳، ۵۵، ۳۶۱	فاز ۲۸۱، ۲۸۶-۲۸۵، ۲۹۱، ۳۱۹
مختلط ۳۱۹، ۳۷۳، ۳۷۴	بردارهای میدان مغناطیسی ۱۸۳، ۲۱۳، ۳۶۱	فرود ۳۶۶
کیفیت ۲۸۱	۳۸۷	فضایی ۲۸-۶، ۱۹۰، ۳۹۶-۳۹۷
وامغناطش ۲۱۹	پتانسیل برداری ۱۸۲، ۲۱۳-۲۱۲	قطبش ۳۶۸-۳۶۹
طول موج	پتانسیل نرده ای ۵۶	زمان
جدول ۳۱۲	مغناطیسی ۲۱۲، ۲۱۳	انسیساط ۳۹۴، ۳۹۵
فضای تهی ۳۱۱	چگالی جریان ۱۵۳	برخورد ۱۶۳
قطع ۳۸۱، ۳۸۳	رسانای کامل ۱۸۲	تأخیری ۳۳۳-۳۳۲
موجبر ۳۸۱	و معادله لاپلاس ۵۳	حوزه ۲۷۴، ۲۷۶
ظرفیت	شرط لورنتس ۳۲۹-۳۲۸	واهلش ۱۵۲، ۱۶۳، ۲۷۷، ۲۷۸
اثر دی الکتریک ۱۳۵-۱۳۴	شکست	ویژه ۳۹۴
استوانه های موازی ۱۳۵	خطوط B ۳۶۸	زیر میرایی ۲۸۰
استوانه های هم محور ۱۳۵	خطوط E ۱۱۴	سرد کننده مغناطیسی ۲۶۷-۲۶۶
صفحه و استوانه ۱۳۶	زاویه ۳۶۶	سرعت
صفحه های موازی ۱۳۴، ۱۴۰	ضریب ۳۱۱-۳۱۰	تبدیل ۳۹۳-۳۹۲
ضریب ۱۳۰	قانون ۳۶۷-۳۶۶، ۳۷۴، ۳۷۵	جمع ۳، ۳۹۳، ۴۱۱
کره ۱۳۴	صافها ۲۹۵	سوق ۱۴۹-۱۴۸
کره های هم مرکز ۱۳۵، ۱۴۰	بالا گذر ۲۹۶	فاز ۲۸۲، ۳۸۵
عایق ۳۲، ۳۲۱	پایین گذر ۲۹۷	گروه ۳۸۲، ۳۸۵

- عدد موج ۳۱۲
عمق پوست ۳۲۰
عمل در فاصله ۲۳
عملگر، دالامیری ۴۰۱
دل ۱۶، ۱۵، ۹
لاپلاسی ۱۶
عملگر دل ۱۶، ۱۵، ۹
چار بردار ۴۰۰
عناصر حافظه ۲۳۰، ۱۲۵
فاز ۳۹۵، ۳۱۰
فازور ۲۸۴
فرکانس شدید ۲۹۱
فرمول هاگن-روبنز ۳۷۴
فروالکتریسیته ۱۲۴
فرومغناطیس ۲۳۵، ۲۲۶، ۲۱۰
فری مغناطیس ۲۴۱
فریت ۲۴۱
فشار
- الکتریکی ۱۱۱-۱۱۲
تابشی ۳۱۶-۳۱۷
مغناطیسی ۳۲۶، ۲۶۳
فصل مشترک ۳۳، ۱۰۱، ۵۵، ۲۱۴، ۳۶۱، ۳۷۱
لایه‌ای ۳۷۱
فضا-زمان ۳۹۸
فضای
- اقلیدسی ۳۹۸، ۳۹۹
چهار بعدی ۳۹۸
مینکوفسکی ۳۹۹
فضای تهی
تراوایی ۱۷۶
گذردهی ۲۳
فوق میرا ۲۸۲
قاعده بک‌کب ۶
قانون
- آمیر ۱۷۷-۱۸۱
اسنل ۳۶۶، ۳۷۴، ۳۷۶
اهم ۱۵۱
بیوساوار ۱۸۸-۱۸۵، ۳۵۵
فازاده ۲۴۴، ۲۴۶، ۲۵۲
کوری ۱۲۴
کولن ۲۱
- برای قطبهای مغناطش ۲۰۶
در دی‌الکتریک ۱۰۳
کیرشهوف ۱۶۷، ۲۷۵
گاوس ۲۷، ۳۰
برای D ۹۶
برای J ۱۵۴، ۱۶۴-۱۶۳
برای مغناطیس ۱۹۷-۱۹۶
و رسانا ۳۳
لنز ۲۳۲-۲۳۱، ۲۴۵
مداری، آمیر ۱۸۱-۱۷۷
مش ۲۸۶
نودال ۲۸۷
قرارداد پیچ راستگرد ۶، ۱۵، ۱۷۷
قرارداد علامت ۶، ۱۵، ۱۷۷، ۲۴۵
قرص فاراده ۲۵۲
قرص، پتانسیل ۳۷-۳۶
قضایای گرین ۱۷
قضیه
ارنشاو ۵۳
استوکس ۱۳، ۱۴، ۱۷
پوئین‌تینگ ۳۱۶
دیورژانس ۱۲
گاوس ۱۲
قطب مغناطیسی ۱۷۷
قطبش ۸۹، ۳۶۵، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۸
اشباع ۲۱۱-۲۰۱
بیضوی ۳۱۴
چگالی بار ۹۱
چگالی جریان ۱۴۹
خطی ۳۱۳
دائمی ۱۲۵
موج ۳۱۳-۳۱۵
قطبش‌پذیری ۱۱۸، ۱۲۰، ۱۲۲
تغییر شکل ۱۲۰
سمتی ۱۲۲
مولکولی ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰
کاواک شدید ۳۷۹، ۳۸۳
کاواک میدان مغناطیسی ۲۲۹
کره
باردار ۲۹، ۳۹-۳۸، ۴۳، ۶۱، ۸۱
دی‌الکتریک در میدان خارجی ۱۰۴-۱۰۵
- دی‌الکتریک در میدان یکنواخت ۱۰۵
رسانا در جریان خارجی ۱۶۰-۱۵۹
رسانا در محیط رسانا ۱۵۴، ۱۵۶، ۱۵۸
رسانا در میدان یکنواخت ۶۲، ۱۱۲
ظرفیت ۱۳۳
قطبیده یکنواخت ۹۴
مغناطیده یکنواخت ۲۰۶، ۲۱۸
مغناطیسی در میدان خارجی ۲۱۶
گاف ۲۲۴
هوا ۲۲۶-۲۲۴، ۲۳۰
گذردهی ۹۸
فضای تهی ۲۳
و رسانایی ۱۵۶-۱۵۵
گرادیان ۹
چهار بعدی ۴۰۰
گرمای ژول ۱۶۴
گسیل تپ ۳۵۶
گشتاور چارقتبی ۴۵
پتانسیل ۴۴
خطی ۴۵
دو بعدی ۴۵
گشتاور دوقطبی ۴۱، ۴۳، ۸۹
القایی ۱۱۹
جدول ۱۱۹
گشتاور روی دوقطبی ۴۳-۴۲
گشتاور مغناطیسی ۱۹۲
لاپلاسی ۱۶
چهار بعدی ۴۰۱
لایه دوقطبی ۵۶، ۹۲
لایه‌ای ۲۴۷
لیزر هلیوم-نئون ۳۱۲، ۳۷۰-۳۶۹
ماده فری مغناطیس ۲۴۱
ماشین وان‌دوگراف ۸۴
مد ۳۳۵-۳۳۸، ۳۳۸، ۳۸۲
TEM ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۹۰
TE ۳۳۵، ۳۳۸
TM ۳۳۵، ۳۳۸
مدار
انتگرال‌گیر ۲۷۸
جفت‌شده ۲۸۳
مشق‌گیر ۲۷۸

صفحة تخت نامحدود ۲۹-۳۰	مقاومت ۱۵۱، ۱۵۴، ۱۵۷، ۱۶۱، ۱۶۲	مغناطیسی ۲۲۲، ۲۲۳
غیرپایسته ۲۴۶	تابشی ۳۴۶	هم‌ارز نورتین ۲۸۸
کاواک ۱۰۴-۱۰۵	ضریب ۱۶۱	AC ۲۸۴
میدان	و ظرفیت ۱۵۵-۱۵۶	RC ۲۷۸
برداری ۳	ویژه ۱۵۱	RL ۲۷۷
پایستار ۱۵، ۱۷، ۲۰	مقاومت (مغناطیسی) ۳۲۸-۳۲۹	RLC ۲۸۰
چارقطبی خطی ۴۶	مقاومتها (سری و موازی) ۱۶۷	مدارهای AC ۲۸۴
دوقطبی ۳۴۹، ۳۴۳، ۱۹۵، ۳۵	مگنتون بور ۲۰۲	مدارهای جفت‌شده ۲۸۳
مغناطیسی ۱۷۲	منحصر به فرد بودن ۳۲۸-۳۲۹، ۱۰۱، ۵۲-۵۳	مشقت بردار ۴۰۱، ۱۸
میدان موضعی ۲۳۶، ۱۱۷	منحنی مغناطش ۲۱۰	معادلات
مولکولی ۲۳۶، ۱۷۱	منطقه	شبه‌ایستا ۲۷۴-۲۷۵
واقطبیگی ۱۲۶، ۱۰۶، ۹۴-۹۵	ایستا ۳۵۱، ۳۴۵	ماکروسکوپی ۲۰۸
وامغناطش ۲۱۹	تابشی ۳۵۱، ۳۴۵-۳۴۶	ماکسول ۳۰۴، ۳۰۷، ۳۱۰، ۳۱۱، ۴۱۴
هدایتی ۳۵۵، ۲۴۸	همبند ساده ۱۸۹، ۱۴۲	شکل نسبی ۴۰۴
میدان مغناطیسی ۱۷۲	موج	معادله
استوانه مغناطیده ۲۱۷، ۲۰۷، ۲۰۴	ایستاده ۳۴۶	یواسون ۵۲، ۸۰، ۱۰۱، ۱۸۲-۱۸۳، ۲۱۳-۲۱۲
پسماند ۲۱۱	تخت ۲۲	پیوستگی ۱۵۰، ۱۵۰، ۳۰۵
بیجه چنبره‌ای ۱۸۱	خروجی ۳۳۸	وابسته لژاندر ۳۳۷
تعریف کاواک ۲۲۹-۲۳۰	ساکن ۳۴۶	هلمهولتز ۳۳۷
جریان دایره‌ای ۱۸۶	سینوسی ۳۱۰	معادله لاپلاس ۵۲، ۵۶، ۶۷، ۱۰۱، ۱۵۷، ۱۸۹
جریان سیم مستقیم ۱۸۷	عرضی ۳۱۰	۲۱۲
خطوط ۲۰۸	فرودی ۳۳۸	برای جریانهای پایا ۱۵۷، ۱۵۸
سیملوله ۱۸۶	قطبش ۳۱۳-۳۱۵	جواب منحصر به فرد ۵۳، ۱۰۱
شرایط مرزی ۲۱۳، ۱۸۳	کروی ۳۳۴	دوبعدی ۵۹، ۶۴
شکست ۳۳۰	میرا ۳۰۷، ۳۲۰-۳۱۹، ۳۷۶	مختصات استوانه‌ای ۶۴
کره مغناطیده ۲۱۸، ۲۰۶	موجبر ۳۷۹	مختصات دکارتی ۶۷
مغناطیس دائم ۲۲۵	مولد، القا ۲۵۲	مختصات کروی ۵۹
نقطه باردار متحرک ۴۰۸، ۳۵۳	مؤلفه‌های بردار ۳	یک‌بعدی ۵۶
ورقه جریان ۱۷۹	مولکول قطبی ۱۱۹، ۹۸-۹۹	معادله موج ۳۰۷، ۳۲۷، ۳۳۴، ۳۹۱، ۳۹۳
میدانهای شتاب ۳۵۴	میدان الکتریکی ۲۳	تبدیل ۴۰۳، ۳۹۳
میدانهای متقاطع ۱۷۳	استوانه طویل ۳۰	مستقل از زمان ۳۱۹، ۳۳۴
میرایی بحرانی ۲۸۲	القایی ۲۴۶	مغناطش ۲۰۲
میرایی تابشی ۳۵۴	بار خطی ۲۶، ۳۰	اشباع ۲۱۰، ۲۳۴
ناوردا ۳۹۴، ۳۹۱	بارهای نقطه‌ای متحرک ۳۵۲	انرژی برهم‌کنش ۲۶۵
ناوردایی بیمانه‌ای ۳۳۰	به‌عنوان کمیت فیزیکی ۱۱۲	جریانها ۲۰۳، ۲۰۴
نرده‌ای ۳	تعریف ۲۳	چگالی انرژی ۲۶۴-۲۶۳
نرده‌ایهای چهاربعدی ۴۰۰	توزیع کروی ۳۸-۳۹	چگالیهای جریان ۲۰۴-۲۰۳
نسبیت	حرکتی ۲۴۸	خودبه‌خود ۲۳۸
خاص ۳۹۷	در دی الکتریک ۱۰۵	مغناطیس دائمی ۲۰۴-۲۰۳، ۲۱۲-۲۱۱، ۲۱۳
گالیه ۳۹۳، ۳۹۱	دوقطبی ۳۵	۲۲۵
نور	شرایط مرزی ۳۴، ۵۵، ۳۶۱	میدان ۲۲۵-۲۲۶

ولتاژ، القایی ۲۵۲، ۲۴۵	القایی ۲۴۵	سرعت ۳۰۸، ۲۳
ویژه زمان ۳۹۴	حرکتی ۲۴۸	لوله ۳۶۹
هشت قطبی ۵۱، ۴۸	خود-القائا ۲۵۳	نیرو (ی)
هلیسیته ۳۱۴	مبدل ۲۸۴	تعادل ۲۳۵، ۲۳۲
هماهنگیهای منطقه‌ای ۵۹	نیروی محرکه حرکتی ۲۴۸-۲۴۹	چگالی ۱۱۱
همسانگردی ۹۸	نیروی محرکه مغناطیسی ۲۲۴	روی توزیع بار ۱۱۰
هموردایی ۴۰۳	Mmf ۲۲۳-۲۲۴	روی جریان ۱۴۴، ۱۴۳
یکا (های)	نیروی میرا ۱۶۳	روی دستگاه بارهای نقطه‌ای ۲۲
الکتروستاتیک ۴۱۴	تابشی ۳۵۴	روی دوقطبی ۴۲
الکترومغناطیسی ۴۱۴ Emu	نیمرساناها ۱۵۱	روی دی‌الکتریک ۱۴۴
دستگاه گاوسی ۴۱۴	وآدارندگی ۲۱۱	روی رساناها ۱۱۲
گویا ۲۳	واگنی ۳۸۵	مغناطیسی ۲۶۷
۲۲-۲۳ MKSA	وامغناطش بی‌دررو ۲۶۷	وآدارنده ۲۱۱
۴۱۴، ۲۳، ۴۱۳-۴۱۴، ۲۲ SI	ورقه تخت، میدان الکتریکی ۲۹	نیروی محرکه الکتریکی (emf) ۲۴۵، ۱۶۵
	ورقه جریان ۱۷۹	تونن ۲۸۸