



الکتریسیتہ و مغناطیس

ادوارد ام. پورسل

ترجمہ منیرہ رہبر، ہالہ المعی

الکتریسیته و مغناطیس

ادوارد ام. پورسل

ترجمه منیژه رهبر، هاله المعی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران



Electricity and Magnetism
Berkeley Physics Course
Edward M. Purcell
McGraw-Hill, 1985

الکتریسیته و مغناطیس

فیزیک برکلی، جلد ۲

تألیف ادوارد ام. پورسل

ترجمه دکتر منیژه رهبر، هاله المعی

ویراسته سینا ملوانی

حروفچین: مینا مهرابی فرد

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

چاپ اول ۱۳۸۱

تعداد ۳۰۰۰

چاپ و صحافی: مازیار

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Purcell, Edward M.

پورسل، ادوارد

الکتریسیته و مغناطیس / ادوارد ام پورسل؛ ترجمه منیژه رهبر، هاله المعی؛ ویراستار سینا ملوانی. - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۱.

هشت، ۵۸۸ ص. - مصور. - (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۰۷۲. فیزیک؛ ۹۲)

ISBN 964-01-1072-8

فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

عنوان دیگر: الکتریسیته و مغناطیس: فیزیک برکلی.

Electricity and magnetism, 2nd ed., 1985.

عنوان اصلی:

۱. برق. ۲. مغناطیس. الف. رهبر، منیژه، ۱۳۲۴ - ، مترجم. ب. المعی، هاله، مترجم.

ج. مرکز نشر دانشگاهی. د. عنوان ه. عنوان. فیزیک برکلی.

۱۳۸۱

۵۳۷

QC۵۲۲/پ۴

م۸۱ - ۱۶۴۳۶

کتابخانه ملی ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار ویراست دوم جلد ۲
۳	پیشگفتار ویراست اول جلد ۲
۵	پیشگفتار دورهٔ درسی فیزیک برکلی
۷	۱. الکتروستاتیک: بارها و میدانها
۷	۱-۱ بار الکتریکی
۱۰	۲-۱ پایدگی بار
۱۱	۳-۱ کوانتیدگی بار
۱۳	۴-۱ قانون کولن
۱۸	۵-۱ انرژی یک دستگاه بار
۲۳	۶-۱ انرژی الکتریکی یک شبکهٔ بلور
۲۶	۷-۱ میدان الکتریکی
۳۱	۸-۱ توزیعهای بار
۳۲	۹-۱ شار
۳۴	۱۰-۱ قانون گاوس
۳۹	۱۱-۱ میدان یک توزیع بار کروی
۴۱	۱۲-۱ میدان یک بار خطی
۴۳	۱۳-۱ میدان یک ورقهٔ تخت نامتناهی باردار
۴۴	۱۴-۱ نیروی وارد بر یک لایهٔ بار

۴۸	۱۵-۱ انرژی وابسته به میدان الکتریکی
۵۱	مسائل
۶۰	۲. پتانسیل الکتریکی
۶۰	۱-۲ انتگرال خطی میدان الکتریکی
۶۳	۲-۲ اختلاف پتانسیل و تابع پتانسیل
۶۵	۳-۲ گرادیان یک تابع نرده‌ای
۶۸	۴-۲ به دست آوردن میدان از پتانسیل
۶۸	۵-۲ پتانسیل یک توزیع بار
۷۱	۶-۲ قرص با بار یکنواخت
۷۸	۷-۲ دیورژانس یک تابع برداری
۸۰	۸-۲ قضیه گاوس و شکل دیفرانسیلی قانون گاوس
۸۱	۹-۲ دیورژانس در مختصات دکارتی
۸۷	۱۰-۲ لاپلاسی
۸۹	۱۱-۲ معادله لاپلاس
۹۱	۱۲-۲ بازساختن فیزیک از ریاضی
۹۳	۱۳-۲ تاو یک تابع برداری
۹۷	۱۴-۲ قضیه استوکس
۹۸	۱۵-۲ تاو در مختصات دکارتی
۱۰۲	۱۶-۲ معنای فیزیکی تاو
۱۰۹	مسائل
۱۱۶	۳. میدانهای الکتریکی اطراف رساناها
۱۱۶	۱-۳ رساناها و عایقها
۱۱۸	۲-۳ رساناها در میدان الکترومغناطیسی
۱۲۴	۳-۳ مسئله کلی الکتروستاتیک با قضیه یکتایی
۱۲۸	۴-۳ چند دستگاه ساده از رساناها
۱۳۴	۵-۳ ظرفیت و خازن

- ۱۴۰ ۳-۶ پتانسیل و بار روی رساناهای مختلف
- ۱۴۳ ۳-۷ انرژی ذخیره شده در یک خازن
- ۱۴۴ ۳-۸ دیدگاههای دیگری از مسئله مقدار مرزی
- ۱۴۶ مسائل
- ۱۵۷ ۴-۱ جریانهای الکتریکی
- ۱۵۷ ۴-۱ جریان الکتریکی و چگالی جریان
- ۱۶۰ ۴-۲ جریانهای پایا و پایداری بار
- ۱۶۲ ۴-۳ رسانندگی الکترون و قانون اهم
- ۱۶۹ ۴-۴ فیزیک رسانش الکتریکی
- ۱۷۸ ۴-۵ رسانش در فلزات
- ۱۸۰ ۴-۶ نیمرساناها
- ۱۸۵ ۴-۷ مدارها و اجزای مدار
- ۱۹۱ ۴-۸ اتلاف انرژی در شارش جریان
- ۱۹۱ ۴-۹ نیروی محرکه الکتریکی و پیل ولتا
- ۱۹۶ ۴-۱۰ شبکه با چشمه های ولتاژ
- ۱۹۸ ۴-۱۱ جریانهای متغیر در خازنها و مقاومتها
- ۲۰۲ مسائل
- ۲۱۲ ۵-۱ میدانهای بارهای متحرک
- ۲۱۲ ۵-۱ از اورستد تا اینشتین
- ۲۱۴ ۵-۲ نیروهای مغناطیسی
- ۲۱۸ ۵-۳ اندازه گیری بار در حال حرکت
- ۲۲۱ ۵-۴ ناوردایی بار
- ۲۲۴ ۵-۵ میدان الکتریکی اندازه گیری شده در چارجوب مرجعهای متفاوت
- ۲۲۸ ۵-۶ میدان یک بار نقطه ای که با سرعت ثابت حرکت می کند
- ۲۳۴ ۵-۷ میدان بار هنگام شروع حرکت یا توقف
- ۲۳۸ ۵-۸ نیروی وارد بر بار متحرک

- ۲۴۱ ۹-۵ برهم‌کنش یک بار متحرک یا بارهای متحرک دیگر
- ۲۴۹ مسائل
- ۲۵۵ ۶. میدان مغناطیسی
- ۲۵۵ ۱-۶ تعریف میدان مغناطیسی
- ۲۶۳ ۲-۶ بعضی از مشخصات میدان مغناطیسی
- ۲۷۰ ۳-۶ پتانسیل برداری
- ۲۷۴ ۴-۶ میدان هر سیم حامل جریان
- ۲۷۷ ۵-۶ میدانهای حلقه‌ها و پیچ‌ها
- ۲۸۳ ۶-۶ متغیر B در یک ورقه جریان
- ۲۸۸ ۷-۶ چگونه میدانها تبدیل می‌شوند
- ۲۹۵ ۸-۶ آزمایش رولاتند
- ۲۹۵ ۹-۶ رسانایی الکتریکی در میدان مغناطیسی: اثر هال
- ۳۰۰ مسائل
- ۳۱۲ ۷. القای الکترومغناطیسی
- ۳۱۲ ۱-۷ کشف فاراده
- ۳۱۷ ۲-۷ یک میله رسانا که در میدان مغناطیسی یکنواخت حرکت می‌کند
- ۳۲۱ ۳-۷ حلقه‌ای که در میدان مغناطیسی غیر یکنواخت حرکت می‌کند
- ۳۳۰ ۴-۷ یک حلقه ساکن و چشمه میدان متحرک
- ۳۳۲ ۵-۷ قانون عمومی القا
- ۳۳۹ ۶-۷ القای متقابل
- ۳۴۲ ۷-۷ قضیه دوجانبگی
- ۳۴۴ ۸-۷ خود القا
- ۳۴۷ ۹-۷ یک مدار شامل خود القا
- ۳۵۰ ۱۰-۷ انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی
- ۳۵۳ مسائل
- ۳۶۵ ۸. مدارهای جریان متناوب
- ۳۶۵ ۱-۸ یک مدار تشدید

- ۲۸-۲ جریان متناوب ۳۷۲
- ۳-۸ شبکه‌های جریان متناوب ۳۸۱
- ۴-۸ رسانایی ظاهری و امپدانس ۳۸۴
- ۵-۸ توان و انرژی در مدارهای جریان متناوب ۳۸۸
- مسائل ۳۹۲
۹. معادله‌های ماکسول و امواج الکترومغناطیسی ۳۹۹
- ۱-۹ "چیزی گم شده است" ۳۹۹
- ۲-۹ جریان جابه‌جایی ۴۰۴
- ۳-۹ معادله‌های ماکسول ۴۰۷
- ۴-۹ یک موج الکترومغناطیسی ۴۰۹
- ۵-۹ موج‌دیس‌های دیگر؛ برهم‌نهی امواج ۴۱۲
- ۶-۹ انتقال انرژی به وسیله امواج الکترومغناطیسی ۴۱۷
- ۷-۹ یک موج در چارچوب دیگر چگونه به نظر می‌رسد ۴۱۹
- مسائل ۴۲۱
۱۰. میدانهای الکتریکی در ماده ۴۲۵
- ۱-۱۰ دی‌الکتریکها ۴۲۵
- ۲-۱۰ گشتاور یک توزیع بار ۴۳۰
- ۳-۱۰ پتانسیل و میدان یک دوقطبی ۴۳۵
- ۴-۱۰ لنگر و نیروی وارد بر یک دوقطبی در میدان خارجی ۴۳۸
- ۵-۱۰ دوقطبیهای اتمی و مولکولی؛ گشتاورهای دوقطبی القایی ۴۴۱
- ۶-۱۰ گشتاورهای دوقطبی دائمی ۴۴۶
- ۷-۱۰ میدان الکتریکی حاصل از ماده قطبیده ۴۴۸
- ۸-۱۰ نگاهی دیگر به خازن ۴۵۴
- ۹-۱۰ میدان یک کره قطبیده ۴۵۸
- ۱۰-۱۰ یک کره دی‌الکتریک در یک میدان یکنواخت ۴۶۳
- ۱۱-۱۰ میدان یک بار در محیط دی‌الکتریک، و قانون گاوس ۴۶۵
- ۱۲-۱۰ یک دیدگاه میکروسکوپیکی از دی‌الکتریک ۴۶۹

۴۷۳	۱۰-۱۳ قطبش در میدانهای متغیر
۴۷۴	۱۰-۱۴ جریان بار-مقید
۴۷۷	۱۰-۱۵ یک موج الکترومغناطیس در یک دی الکتریک
۴۷۸	مسائل
۴۸۶	۱۱. میدانهای مغناطیسی در ماده
۴۸۶	۱۱-۱ چگونه مواد مختلف به یک میدان مغناطیسی پاسخ می دهند
۴۹۲	۱۱-۲ نبود "بار" مغناطیسی
۴۹۵	۱۱-۳ میدان یک حلقهٔ جریان
۵۰۱	۱۱-۴ نیروی وارد بر یک دوقطبی در یک میدان خارجی
۵۰۵	۱۱-۵ جریانهای الکتریکی در آنها
۵۱۲	۱۱-۶ اسپین و گشتاور مغناطیسی الکترون
۵۱۶	۱۱-۷ پذیرفتاری مغناطیسی
۵۱۸	۱۱-۸ میدان مغناطیسی حاصل از مادهٔ مغناطیسی
۵۲۵	۱۱-۹ میدان یک آهنربای دائمی
۵۲۹	۱۰-۱۱ جریانهای آزاد، و میدان H
۵۳۵	۱۱-۱۱ فرومغناطیسی
۵۴۲	مسائل
۵۵۲	پیوست الف: مروری کوتاه بر نسیت خاص
۵۶۱	پیوست ب: تابش توسط یک بار شتابدار
۵۶۴	مسائل
۵۶۴	پیوست ج: ابرسانایی
۵۷۰	پیوست د: تشدید مغناطیسی
۵۷۴	مسائل
۵۷۶	پیوست ه: رابطه‌های دقیق بین یکاهای SI و CGS
۵۸۱	فهرست راهنما

پیشگفتار ویراست دوم جلد ۲

بازنگری در "الکتریسیته و مغناطیس" جلد دوم دورهٔ درسی فیزیک برکلی، با توجه به سه هدف عمده صورت گرفته است. ابتدا، کوشیده‌ام که کتاب را در بسیاری موارد واضحتر کنم. در خلال سالهای استفاده از این کتاب معلمان و دانشجویان موارد بسیاری را یافته‌اند که ساده‌سازی یا سازماندهی مجدد یک توضیح می‌توانست پیگیری مطلب را بسیار راحت‌تر کند. شکی نیست که در بعضی موارد باز هم فرصتهای اصلاح از دست رفته است که امیدوارم چندان زیاد نباشد.

هدف دوم آن بود که کتاب را در عمل از جلدهای دیگر دورهٔ فیزیک برکلی مستقل سازد. در طرح اصلی، این جلد بین جلد ۱ که هدف آن ارائهٔ نسبیت خاص بود، و جلد ۳ "امواج و نوسانها" که مبحث امواج الکترومغناطیسی به آن اختصاص یافته بود قرار داشت. اما معلوم شد که جلد ۲ اغلب به تنهایی به‌کار می‌رود. با توجه به این موضوع، تغییراتی در مواد داده و مواردی را اضافه کرده‌ام. رابطه‌های نسبیت خاص در پیوست الف به اختصار مرور شده‌اند. اما هنوز فرض شده است که آشنایی قبلی با نسبیت وجود دارد. این بررسی یک مرجع مفید و مختصر برای ایده‌ها و فرمولهایی است که برای فهمیدن میدان بارهای متحرک و تبدیل آنها از یک چارچوب به چارچوب دیگر لازم است. به‌دست آوردن معادله‌های ماکسول برای خلأ از فصل بسیار مفصل ۷ (در بارهٔ القایش) به یک فصل جدید ۹ منتقل شده است که در آنجا به‌طور طبیعی به بررسی امواج الکترومغناطیسی تخت، ایستاده و پیشرونده، می‌انجامد. سپس انتشار یک موج در محیط دی‌الکتریک را می‌توان در فصل ۱۰ دربارهٔ میدانهای الکتریکی در ماده بررسی کرد.

نیاز سوم، روزآمد کردن برخورد با بعضی از موضوعها، در فصل مربوط به رسانش الکتریکی از همه ضروری‌تر بود. فصل ۴ که اکنون به‌طور کلی بازنویسی شده است شامل بخشی دربارهٔ فیزیک نیمرساناهای همگن، از جمله نیمرساناهای آلاییده است. ابزارها، حتی پیوندگاه یکسوساز،

در نظر گرفته نشده‌اند، اما آنچه در بارهٔ نوارها، بخشنده‌ها و پذيرنده‌ها گفته شده است می‌تواند نقطهٔ آغاز اين مباحث برای مربيان باشد. به برکت الکترونیک حالت جامد، فیزیک پیل ولتا، با نزدیک شدن تعداد باتريهای مورد استفاده به مرتبهٔ بزرگی جمعیت جهان، رابطهٔ نزدیکتری با زندگی روزمره یافته است. در ویراست اول این کتاب به عنوان مثال، به واسطهٔ ناآگاهی از سلول الکترولیتی، سلولی را برگزیدم — سلول استاندارد وستون — که پیشرفت آن در فیزیک به سرعت کاملاً مهجور شد. بررسی و تحلیل یک باتری انبارشی سرب-اسید با نمودارهای جدید جایگزین این بخش شد که قدیمی، فراگیر، و غیرمهجور است.

کسی انتظار ندارد که در مرور یک کتاب درسی پایه در الکترومغناطیس کلاسیک، توجهی به پیشرفتهای فیزیک ذرات بنیادی شود. اما به دلیل دو پرسش مطرح شده در ویراست اول، اهمیت کوانتس بار، و نبود آشکار تک قطبیهای مغناطیسی این کار انجام شده است. مشاهدهٔ واپاشی پروتون تأثیر عمیقی در دیدگاه ما نسبت به پرسش اول خواهد داشت. جستجوهای جدی برای واپاشی پروتون، و نیز برای تک قطبیهای مغناطیسی، تا زمان نوشتن این کتاب به رویدادهای تأیید شده نینجامیده است، اما امکان این کشفیات بنیادی وجود دارد.

سه مبحث ویژه در توسعهٔ اختیاری کتاب، به صورت پیوستهای کوتاه وارد شده‌اند: پیوست ب: تابش بار شتابدار؛ پیوست ج: ابرسانایی؛ و پیوست د: تشدید مغناطیسی.

دستگاه یکاهای اساسی ما دستگاه CGS گاوسی باقی می‌ماند. یکاهای SI، آمپر، کولن، ولت، اهم، و تسلا نیز در کتاب وارد شده‌اند و در مسائل بسیاری به کار رفته‌اند. فرمولهای اصلی با فرمولبندی SI و دستور عمل صریح دربارهٔ یکاها و ضرایب تبدیل تکرار شده‌اند. نقشه‌های داخل جلد خلاصهٔ روابط بنیادی در دو دستگاه یکاهاست. یک نقشهٔ مخصوص در فصل ۱۱، در هر دو دستگاه، رابطه‌هایی مربوط به قطبش مغناطیسی را مرور می‌کند. از دانشجویان انتظار نداریم، و آنها را تشویق نمی‌کنیم، که این ضرایب تبدیل را حفظ کنند، اگر چه بعضی از آنها بر اثر کاربرد ممکن است کم‌وبیش عادی شوند، بلکه بهتر است در صورت نیاز به آنها رجوع کنند. ایرادی به یکاهای "مخلوط" مانند اهم-سانتی‌متر، که هنوز به صورت گسترده برای مقاومت ویژه به کار می‌رود، وارد نیست در صورتی که مفهوم آن کاملاً روشن باشد.

تعریف متر با توجه به سرعت نور، که اخیراً رسمی شده است، رابطهٔ دقیق بین یکاها را، چنانکه در پیوست ه توضیح داده شده است، ساده می‌سازد.

در این کتاب ۳۰۰ مسئله وجود دارد، که بیش از نیمی از آنها جدید است.

پیشگفتار ویراست اول جلد ۲

موضوع این جلد دورهٔ درسی فیزیک برکلی الکتریسیته و مغناطیس است. توالی موضوعها، به لحاظ خطوط کلی، چندان نامتداول نیست: الکتروستاتیک؛ جریانهای مانا؛ میدان مغناطیسی؛ القایش الکترومغناطیسی؛ قطبش الکتریکی و مغناطیسی در ماده. اما رهیافت ما با رهیافت سنتی تفاوت دارد. این تفاوت در فصل ۵ و ۶، که در آنجا بر مبنای کار جلد ۱ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بارهای متحرک را به صورت تجلی نسبیّت و نوردایی بار الکتریکی در نظر می‌گیریم، از همه جا چشمگیرتر است. این رهیافت توجه را به چند پرسش بنیادی چون پایستگی بار، نوردایی بار، و مفهوم میدان معطوف می‌دارد. تنها ابزار صوری نسبیّت خاص که در واقع ضروری است تبدیل مختصات لورنتس و فرمول جمع سرعتهاست. اگر چه، دانشجویی که به این بخش می‌رسد باید ایده‌ها و نگرشهایی را که هدف جلد ۱ توسعهٔ آنها بود — از جمله آمادگی نگرش به اجسام از چارچوبهای مرجع متفاوت، درک نوردایی، و توجه به بحثهای تقارن — داشته باشد. همچنین در جلد ۲ استفادهٔ بسیاری از بحثها بر مبنای برهم‌نهی کرده‌ایم.

برخورد ما با پدیده‌های الکتریکی و مغناطیسی در ماده در درجهٔ اول “میکروسکوپیکی” است، با تأکید بر سرشت اتمی و مولکولی دوقطبیهای الکتریکی و مغناطیسی. رسانش الکتریکی نیز به صورت میکروسکوپیکی بر اساس مدل دروده-لورنتس توصیف شده است. طبیعی است که بعضی پرسشها باید تا رسیدن دانشجویان به فیزیک کوانتومی در جلد ۴ ناتمام باقی بمانند. اما می‌توانیم آزادانه و به‌طور منطقی دربارهٔ مولکولها و اتمها به‌عنوان ساختارهای الکتریکی با اندازه، شکل، و سختی، دربارهٔ مدارهای الکترون و اسپین صحبت کنیم. کوشیده‌ایم تا مفهوم ماکروسکوپیکی میدانهای E و B در داخل ماده را که اغلب در کتابهای درسی مقدماتی از آن اجتناب، و گاهی نیز به‌صورت مبهم با آن برخورد می‌شود به دقت بررسی کنیم.

در جلد ۲، ابزار ریاضی دانشجویان با اضافه شدن آنالیز برداری، گرادیان، دیورژانس، تاور و

لاپلاسی بسط می‌یابد. این مفاهیم در صورت نیاز در فصل‌های اولیه گسترش می‌یابند. در مراحل اولیه از جلد ۲ در چند کلاس دانشگاه کالیفرنیا استفاده شد، و افراد زیادی که با دورهٔ درسی برکلی در ارتباط بودند آن را نقد کردند، مخصوصاً سهم ای. دی. کومینس و اف. اس. کرافورد، که در اولین کلاس‌هایی تدریس می‌کردند که از این کتاب استفاده شد، بارز بود. این افراد و دانشجویانشان موارد زیادی را یافتند که توضیح بیشتر، و یا تغییر جدی‌تری لازم بود؛ بسیاری از بازنگریها بر اساس پیشنهاد آنهاست. انتقادات دانشجویان از آخرین نسخهٔ مقدماتی را رابرت گورن گردآوری، و به سازماندهی مسائل کمک کرد. جی. دی. گاوندا که از نسخهٔ اولیه در دانشگاه تکزاس استفاده کرد، و ای. اف. تیلور از دانشگاه وسلین نیز انتقادهایی سازنده کردند. آلن کوفمان نیز در مراحل اولیه نوشتن نظریاتی را مطرح کرد. ا. فلز اغلب کارهای اولین پیش‌نویس را به‌عنوان اولین "دانشجوی آزمون" انجام داد.

گسترش این رهیافت به الکتریسیته و مغناطیس نه فقط به تشویق کمیتهٔ اولیهٔ کتاب، بلکه همکارانی صورت گرفت که به‌صورت موازی در به‌وجود آوردن مواد درسی جدید مشابهی در انستیتوی تکنولوژی ماساچوست سهیم بودند. در بین این افراد جی. ار. تسمان از مرکز آموزش علوم MIT و دانشگاه تافت در فرمولبندی اولیه و راهبرد اولیه سهم بسزایی داشت. او نسخهٔ اولیه را در کلاسش در MIT به‌کار برد، و بررسی نقادانه او باعث تغییرات و تصحیحات بیشتری شد.

ادوارد. ام. پورسل

پیشگفتار دورهٔ درسی فیزیک برکلی

این یک دورهٔ درسی فیزیک مقدماتی برای دانشجویانی است که رشتهٔ اصلی آنها علوم و مهندسی است. هدف نویسندگان ارائهٔ فیزیک مقدماتی حتی الامکان به صورتی است که فیزیکدانان در صف مقدم این رشته به کار می‌برند. هدف ما دوره‌ای است که به شدت بر مبنای فیزیک تأکید کند. اهداف ویژهٔ ما وارد کردن منسجم و روشن نسبیت خاص، فیزیک کوانتومی، و فیزیک آماری در برنامهٔ درسی مقدماتی است.

این دوره برای دانشجویانی است که یک درس فیزیک را در دبیرستان گذرانده‌اند. یک درس ریاضی شامل حسابان باید همزمان با آن گرفته شود.

در حال حاضر چند دورهٔ درسی فیزیک جدید در سطح کالج در ایالات متحده آمریکا در دست تهیه است. فکر تهیهٔ یک دورهٔ جدید به ذهن فیزیکدانان بسیاری خطور کرده است، که تحت تأثیر ضرورت پیشبرد علوم و مهندسی و تأکید فزاینده بر علوم در دبیرستانها و مدارس ابتدایی قرار دارند. این دوره در گفتگوی بین فیلیپ موریسون از دانشگاه کرنل و ج کیتل در اواخر سال ۱۹۶۱ طرح ریزی شد. جان می‌یز و همکارانش در بنیاد ملی علوم و والتر سی. میشلز که در آن هنگام رئیس کمیسیون کالج فیزیک بودند ما را تشویق کردند. یک کمیتهٔ غیررسمی تشکیل شد تا مراحل اولیهٔ کار را هدایت کند. اعضای اولیهٔ این کمیته عبارت بودند از لوئیس آلوارز، ویلیام بی. فرتز، چارلز کیتل، والتر. دی. نایت، فیلیپ موریسون، ادوارد. ام. پورسل، مالوین. ا. رودرمن، و جرولد ار. زخاریس. اولین جلسهٔ کمیته در مه ۱۹۶۲ در برکلی تشکیل شد؛ در آن زمان خطوط کلی مقدماتی برای یک دورهٔ فیزیک کاملاً جدید ترسیم شد. به واسطهٔ تعهدات سنگین چند تن از اعضای اولیه، کمیته در ژانویهٔ ۱۹۶۴ تا اندازه‌ای بازسازی شد، و اکنون متشکل از اعضای زیر و کسانانی است که در پیشگفتار هر جلد از آنها قدردانی شده است. خطوط کلی موقت و روحیهٔ وابسته به آن که تأثیر فراوانی بر مواد درسی داشت سرانجام به وجود آمد. این خطوط کلی شامل جزئیات و نگرشهایی بود که گمان می‌رفت نباید و نمی‌توان آنها را برای دانشجویان مقدماتی علوم و مهندسی در کالج تدریس کرد. هدف ما هرگز این نبود که دوره‌ای را به وجود آوریم که محدود به دانشجویان ممتاز یا دانشجویانی در سطوح پیشرفته باشد. ما خواستیم اصول فیزیک را از دیدگاههای تازه و وحدت‌یافته عرضه کنیم، و بنابراین بخشی از این دوره ممکن است علاوه بر دانشجویان برای مربیان نیز تازه باشد.

پنج جلد برنامه‌ریزی شده شامل موارد زیر خواهد بود:

۱. مکانیک (کیتل، نایت، رودرمن)

۲. الکتروسیسته و مغناطیس (پورسل)

۳. امواج و نوسانها (کرافورد)

۴. فیزیک کوانتومی (ویچمن)

۵. فیزیک آماری (رایف)

مؤلفان هر جلد آزاد بودند تا سبک و روش ارائه مناسب موضوع خود را برگزینند.

فعالیت اولیه این دوره باعث شد که آلن. ام. پورتیس آزمایشگاه جدیدی ابداع کند. چون با تأکید دوره بر مبانی فیزیک است، بعضی معلمان ممکن است احساس کنند که چندان به فیزیک تجربی نمی‌پردازد. آزمایشگاه پر از آزمایشهای مهم است، و چنان طراحی شده است که دوره را متوازن سازد. بنیاد ملی علوم با کمک غیرمستقیم و قابل ملاحظه دانشگاه کالیفرنیا به توسعه این دوره کمک مالی کردند. کمکهای مالی را شرکت خدمات آموزشی که یک سازمان غیرانتفاعی است می‌داد که برای اجرای برنامه‌های توسعه درسی تأسیس شده بود. ما به خصوص مدیون حمایت صمیمانه و پرشور گیلبرت اوکلی، جیمز الدریش، ویلیام جونز از شرکت خدمات آموزشی هستیم. این شرکت یک دفتر در برکلی تحت مدیریت شایسته خانم مری. ار. مالونی تأسیس کرد تا به توسعه دوره و آزمایشگاه کمک کند. دانشگاه کالیفرنیا ارتباط رسمی با برنامه ما ندارد، اما راههای مختلف کمکهای مهمی به ما کرده است. برای این کمکها ما به خصوص از دو مدیر بخش فیزیک، آگوست. سی. هلمهولتز و برتون. جی. مویز؛ هیأت علمی و کارمندان اداری بخش سپاسگزاریم. ابراهام اولسون به سازماندهی اولیه مسائل کمک فراوان کرد.

از تصحیحات و پیشنهادهای شما همواره استقبال می‌شود.

اوژن. دی. کومینس

فرانک. اس. کرافورد کوچک

والتر. دی. نایت

فیلیپ موریسون

آلن. ام. پورتیس

ادوارد. ام. پورسل

فردریک رایف

مالوین. ا. رودرمن

ابویند. ایچ. ویچمن

چارلز کیتل، رئیس

برکلی، کالیفرنیا



الکتروستاتیک: بارها و میدانها

۱-۱ بار الکتریکی

الکتریسیته در نظر کاشفان اولیه‌اش پدیده‌ای خارق‌العاده بود. بیرون کشیدن "بارقه‌ای از آتش" از درون اجسام، چیزی را به شدت برقرار کردن، تولید جریان دائمی، حتماً ترفندهایی استادانه لازم داشت. بجز جرقه آذرخش، پدیده‌های معمولی طبیعت از یخ بستن آب گرفته تا بزرگ شدن نهال، به‌کلی با رفتار عجیب و غریب اجسام الکتریسیته‌دار بی‌ارتباط شمرده می‌شد. حالا ما می‌دانیم که نیروهای الکتریکی تقریباً همهٔ خواص فیزیکی و شیمیایی ماده، از اتم گرفته تا سلولهای زنده را تعیین می‌کنند. این دانش را باید مرهون دانشمندان قرن نوزدهم، امپراتور، فارزاده، ماکسول و خلیج‌های دیگر، که ماهیت الکترومغناطیس را کشف کردند، باشیم. همین‌طور فیزیکدانان و شیمی‌دانان قرن بیستم که ساختمان اتمی ماده را شکافتند.

الکترومغناطیس کلاسیک با جریانها و بارهای الکتریکی و برهم‌کنشهای آنها سروکار دارد و این پدیده‌ها را طوری بررسی می‌کند که گویی همهٔ کمیتهای دخیل را می‌توان مستقلاً و با دقت نامحدود اندازه‌گیری کرد. در اینجا کلاسیک صرفاً به معنی "غیر کوانتومی" است. قانون کوانتومی و ثابت h در نظریهٔ کلاسیک الکترومغناطیس جایی ندارند، همان‌طور که در مکانیک معمولی.

در واقع نظریه کلاسیک، قبل از کشف پلانک کم و بیش به همین صورت فعلی پرداخته شده بود. خیلی هم خوب دوام آورده است. نه انقلاب فیزیکی کوانتومی و نه طرح نظریه نسبیت در معادله‌های میدان الکترومغناطیسی که ماکسول صد سال پیش نوشته است خدشه‌ای ایجاد نکرد. البته این نظریه کاملاً مثبتی بر تجربه بود و به خاطر همین در کاربردهای اولیه — برای سیم‌پیچ، خازن، مدارهای نوسانگر، و سرانجام امواج رادیویی و امواج نور — درست درآمد. اما حتی چنین موفقیت عظیمی هم نمی‌تواند تضمینی برای اعتبار آن در حوزه‌های دیگر، مثلاً داخل مولکول باشد. دو واقعیت به ما کمک می‌کند تا اهمیت ماندنی توصیف کلاسیک الکترومغناطیس را در فیزیک جدید توضیح بدهیم. اول اینکه نسبیت خاص هیچ تجدیدنظری را در الکترومغناطیس کلاسیک نمی‌طلبد. به لحاظ تاریخی، نسبیت خاص از دل نظریه الکترومغناطیس کلاسیک و آزمایشهای ملهم از آن سر برآورد. معادله‌های میدان ماکسول، که خیلی پیشتر از کارهای لورنتس و اینشتین نوشته شد، کاملاً با نسبیت سازگار بود. دوم اینکه معلوم شد برای فاصله‌های کوچکتر از 10^{-10} cm، 10^6 مرتبه کوچکتر از اتم، اصلاح کوانتومی نیروهای الکترومغناطیسی اهمیتی ندارد. می‌توانیم دافعه و جاذبه ذرات داخل اتم را با استفاده از همان قوانینی توصیف کنیم که برای ورقه‌های الکتروسکوپ به کار می‌بریم. هر چند برای پیشگویی رفتار ذرات تحت تأثیر این نیروها نیاز به مکانیک کوانتومی داریم. برای فاصله‌های از این هم کوچکتر، ماغمه‌ای از نظریه الکترومغناطیس و نظریه کوانتومی، به نام الکترودینامیک کوانتومی، تا حد قابل ملاحظه‌ای موفق بوده است. پیشگوییهای این نظریه، برای کوچکترین فاصله‌هایی که تا به حال پیدا شده تأیید شده‌اند.

فرض بر این است که خواننده با واقعیات بنیادی الکتریسته‌آشنایی دارد. ما نمی‌خواهیم همه آزمایشهای دال بر وجود بار الکتریکی را مرور کنیم. با دلایل اینکه ماده ساختار الکتریکی دارد هم کاری نداریم. از طرف دیگر، می‌خواهیم حتماً از مبانی تجربی قوانین بنیادی که همه چیز به آنها بستگی دارد، بررسی دقیقی داشته باشیم. در این فصل خواص فیزیکی بارهای الکتریکی ساکن — الکتروستاتیک — را مطالعه خواهیم کرد.

به یقین یک خاصیت بنیادی بار الکتریکی وجود آن به دو صورت مختلف است که از قدیم مثبت و منفی نامیده شده است. واقعیتی که می‌بینیم این است که تمام ذرات باردار را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد به طوری که اعضای هر دسته همدیگر را دفع کنند و اعضای دسته دیگر را جذب کنند. اگر دو جسم کوچک باردار A و B ، که از هم فاصله دارند، همدیگر را جذب کنند و اگر A جسم باردار سومی مثل C را جذب کند، همیشه B ، C را دفع خواهد کرد. مقایسه کنید با گرانث: فقط یک نوع جرم گرانشی وجود دارد، و هر جرم، هر جرم دیگر را جذب می‌کند.

ممکن است دو نوع بار مثبت و منفی را نمودهای متقابل یک چیز بدانیم، مثل راست و چپ که دو نوع دستاوری‌اند. در واقع، در فیزیک ذرات بنیادی بحثهایی که علامت بار را در

بردارند بعضی وقتها با بحث دستوارگی و با تقارن اساسی دیگر، همان رابطه دنباله‌ای از حوادث a ، بعد b ، بعد c را با دنباله معکوس زمانی c ، بعد b ، بعد a دارند. ما اینجا فقط با دوگانگی بار الکتریکی سروکار داریم. تا آنجا که می‌دانیم برای هر نوع ذره‌ای در طبیعت، پادذره‌ای هست. یعنی نوعی "تصویر آینه‌ای" الکتریکی. پادذره بار مخالف ذره را دارد. اگر ذره خاصیت ذاتی دیگری هم داشته باشد که مخالف آن خاصیت در طبیعت موجود باشد، پادذره‌اش باید آن خاصیت مقابل را دارا باشد ولی در خاصیتی که متضاد ندارد، مثل جرم، ذره و پادذره دقیقاً یکسان‌اند. بار الکترون منفی است؛ پادذره آن، که پوزیترون نامیده می‌شود بار مثبت دارد اما جرمش دقیقاً برابر جرم الکترون است. پادذره پروتون که پادپروتون نامیده می‌شود بارش منفی است. از ترکیب یک الکترون و یک پروتون، یک اتم هیدروژن معمولی به دست می‌آید. ممکن است یک پوزیترون و یک پادپروتون همان‌طور ترکیب شوند و اتم پادهیدروژن بسازند. با داشتن سنگ بناها، پوزیترون، پادپروتون، پادنوترون^۱، می‌شود تمام اتمهای پاد ماده را از پادهیدروژن گرفته تا پاد کهکشان درست کرد. البته یک اشکال عملی وجود دارد. اگر یک پوزیترون به الکترونی برسد، یا یک پادپروتون پروتونی را ببیند، این جفت ذره‌ها بلافاصله نابود و به تابش تبدیل می‌شوند. بنابراین تعجبی ندارد که پاد اتم که سهل است، حتی پوزیترون و پادپروتون هم در دنیای ما فوق‌العاده کمیاب و کم دوام‌اند. شاید هم در جایی از این عالم توده‌ای پادماده انباشته شده باشد. در این صورت کجایی آن از اسرار کیهانشناختی است.

عالم ما به‌طور قطع از ماده تشکیل می‌شود، نه پادماده، یعنی همه حاملهای بار منفی الکترون‌اند و همه حاملهای بار مثبت پروتون‌اند. پروتون تقریباً 2000 بار از الکترون سنگینتر است و از بعضی جهت‌های دیگر هم با الکترون خیلی فرق دارد. به این ترتیب در اتم ماده الکتریسیته مثبت و منفی سهم کاملاً متفاوتی دارند. تمام بار مثبت در هسته اتم است، داخل ساختار پرم جرمی که ابعادهش بیش از 10^{-12} cm نیست، در حالی که بار منفی در ناحیه‌ای 10^4 بار بزرگتر پخش شده است. اگر این عدم تقارن اساسی الکتریکی در کار نبود، معلوم نبود اتمها، یا مولکولها — و کل مواد — چه وضعی می‌داشتند.

آنچه برحسب تصادف بار منفی می‌نامیم، عیناً می‌توانست بار مثبت نام بگیرد. این نامگذاری یک تصادف تاریخی است در سرشت بار الکترون هیچ چیز منفی وجود ندارد. این بار هیچ شباهتی به عدد منفی ندارد. عدد منفی مثلاً در عمل ضرب با عدد مثبت تفاوت اساسی دارد چون مجذور یک عدد منفی، عددی با علامت مخالف می‌شود. اما حاصلضرب دو بار، اصلاً بار نیست؛ و هیچ وجه تشابهی در اینجا وجود ندارد.

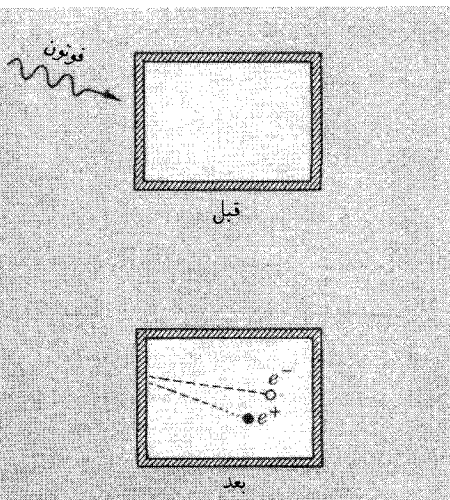
۱. درست است که بار الکتریکی نوترون صفر است، اما نوترون و پادذره‌اش یکی نیستند. در بعضی خواص که ما اینجا واردشان نمی‌شویم، این دو ذره مقابل هم‌اند.

دو خاصیت دیگر بار در ساختار الکتریکی ماده اهمیت اساسی دارند: بار، پایسته است و بار، کوانتیده است. این خواص به کمیت بار مربوط می‌شوند و بنابراین اندازه‌گیری بار را ایجاد می‌کنند. ما دقیقاً خواهیم گفت که چگونه می‌توان بار را برحسب نیروی بین بارهایی که به فاصله معینی از هم قرار گرفته‌اند، و چیزهایی از این قبیل، بیان کرد. اما بگذارید فعلاً این توانایی را مسلم فرض کنیم تا بتوانیم بی‌دردر دربارۀ این خواص بنیادی صحبت کنیم.

۱-۲ پایستگی بار

بار کل در یک سیستم منزوی هیچ‌وقت تغییر نمی‌کند. منظور ما از منزوی این است که هیچ ماده‌ای نمی‌تواند از مرز سیستم عبور کند. نور می‌تواند داخل سیستم بشود چون "ذرات" نور یعنی "فوتونها" اصلاً حامل بار نیستند. داخل سیستم ممکن است ذرات باردار از بین بروند یا دوباره ظاهر بشوند، اما این رویداد همیشه برای زوجهایی با بار مساوی و مخالف پیش می‌آید. مثلاً جعبه‌ای با دیواره‌های نازک را در خلأ در نظر بگیرید که در معرض پرتوهای گاما باشد. این جعبه می‌تواند عرصه رویداد "تولید زوج" باشد که در آن یک فوتون پرنرژی با تولید یک الکترون و یک پوزیترون به موجودیت خود خاتمه می‌دهد (شکل ۱-۱). دو ذره باردار تولید می‌شوند ولی بار کل داخل جعبه و روی جعبه تغییری نمی‌کند. رویدادی که بتواند قانون پایستگی را نقض کند این است که ذره‌ای با بار مثبت تولید شود بی‌آنکه همان لحظه ذره‌ای با بار منفی تولید شده باشد. چنین اتفاقی هرگز مشاهده نشده است.

البته اگر اندازه بارهای الکتریکی الکترون و پوزیترون دقیقاً مساوی نبود، تولید زوج باز هم



شکل ۱-۱ ذرات باردار به صورت زوجهایی با بار مساوی و مخالف تولید می‌شوند.

قانون محکم پایستگی بار را نقض می‌کرد. این برابری تجلی دوگانگی ذره-پادذره یک تقارن کلی طبیعت است که قبلاً ذکر شد.

در مطالعه الکترومغناطیس یک چیز برای ما روشن می‌شود. ناپایستگی بار با ساختار کنونی نظریه الکترومغناطیس کاملاً ناسازگار است. بنابراین در اینجا چه به عنوان یک اصل موضوع نظریه، و چه به عنوان یک قانون تجربی که تا به حال هیچ استثنایی بر نداشته، قانون پایستگی بار را بیان می‌کنیم:

در یک سیستم منزوی بار الکتریکی کل، یعنی جمع جبری بارهای مثبت و منفی موجود در هر لحظه، هیچگاه تغییر نمی‌کند.

دیر یا زود باید ببینیم که این قانون از عهده آزمون ناوردایی نسبی برمی‌آید یا نه. ما بحث کامل این پرسش مهم را به فصل ۵ موكول می‌کنیم. اما پاسخ این است که بله؛ و حکم بالا نه تنها در هر چارچوب لخت مفروضی معتبر است بلکه از آن مهمتر اگر ناظری در چارچوبهای متفاوت بار را اندازه‌گیری کنند، مقدار عددی یکسانی به دست می‌آورند. به عبارت دیگر بار الکتریکی کل یک سیستم منزوی، عددی به لحاظ نسبی ناورداست.

۱-۳ کوانتیدگی بار

همه بارهای الکتریکی موجود در طبیعت مضربهایی از یک اندازه بار هستند، و آن مقدار باری است که یک تک الکترون حمل می‌کند. این بار را با e نشان می‌دهیم. (وقتی علامت بار، مورد نظرمان باشد بار الکترون را $-e$ می‌نویسیم.) قبلاً دیدیم که پوزیترون هم دقیقاً حامل همان مقدار بار است که اگر قرار باشد بار پایسته بماند باید در هنگام نابودی یک پوزیترون و یک الکترون چیزی جز تابش بر جا نماند. آنچه اهمیت بیشتری دارد برابری دقیق بار همه ذرات دیگر است — مثلاً برابری دقیق بار مثبت پروتون و بار منفی الکترون.

این برابری را می‌توان به آسانی با تجربه آزمود. می‌توانیم ببینیم بار الکتریکی کل یک مولکول هیدروژن که از دو پروتون و دو الکترون تشکیل می‌شود، صفر است. در آزمایشی که جی جی کینگ^۱ انجام داد، گاز هیدروژن در مخزنی که از لحاظ الکتریکی عایق‌بندی شده بود متراکم شد. مخزن حاوی حدود $10^{14} \times 5$ مولکول (تقریباً ۱۷ گرم) هیدروژن بود. بعد گاز هیدروژن از طریق امکان

۱. ارجاع به آزمونهای بار را در مقاله و کتاب زیر می‌توانید بیابید.

J G King, *Phys Rev Lett*, 5:562 (1969).

V W Hughes, "Gravitation and Relativity", H Y Chieu and W F Hoffman (eds.),

W A Benjamin, New York, 1964, chap 13.

خروج پیدا می‌کرد، در حالی که راه خروج یونها (مولکولهایی که الکترون از دست داده‌اند یا الکترون اضافی جذب کرده‌اند) بسته بود. اگر بار پروتون با بار الکترون تفاوتی، مثلاً به اندازه یک در میلیارد، داشت باید هر مولکول هیدروژن باری معادل $e \cdot 10^{-9} \times 2$ می‌داشت. و خارج شدن تمام گاز هیدروژن از مخزن، باید بار کل مخزن را به اندازه $e \cdot 10^{16}$ تغییر می‌داد، که اثر فوق‌العاده عظیمی است. این آزمایش می‌توانست بار مولکولی اضافی به کوچکی $e \cdot 10^{-20} \times 2$ را هم آشکار کند، ولی چنین چیزی مشاهده نشد. بنابراین ثابت شد که اندازه بارهای پروتون و الکترون با تقریب بیش از ۱ قسمت در 10^{20} قسمت، با هم برابر است.

شاید به دلیلی که ما هنوز نمی‌توانیم بفهمیم، این برابری حقیقتاً دقیق باشد. شاید مربوط به این باشد که، طبق نظریه‌های جدید، احتمال بسیار کمی وجود دارد که پروتون بتواند به یک پوزیترون و ذرات بدون بار دیگر تبدیل شود. اگر این اتفاق بیفتد، حتی ناچیزترین اختلاف بین بار پروتون و بار پوزیترون، پایستگی بار را نقض خواهد کرد. هیچیک از آزمایشهای گوناگونی که برای آشکارسازی واپاشی پروتون طراحی نشده‌اند تا کنون — سال ۱۹۸۳ که این کتاب نوشته می‌شود — یک واپاشی قطعی را ثابت نکرده‌اند. اگر روزی این رویداد مشاهده شود، نشان خواهد داد که برابری دقیق اندازه بار پروتون و بار الکترون (پاد ذره پوزیترون) را می‌توان پیامد قانون کلی تر پایستگی بار در نظر گرفت. با این همه، در حال حاضر شواهد قاطعی داریم که ساختار داخلی همه ذرات دارای برهم‌کنش قوی که هادرون نامیده می‌شوند — دسته‌ای که پروتون و نوترون را هم در بر می‌گیرد — متشکل از واحدهای بنیادی به نام کوارک است که بار الکتریکی‌شان مضر بهایی از $e/3$ است. مثلاً پروتون از ۳ کوارک ساخته می‌شود، دو تا با بار $2/3e$ و یکی با بار $1/3e$ —. نوترون یک کوارک $2/3e$ و دو کوارک $1/3e$ دارد.

خیلیها دنبال تک کوارک گشته‌اند، چه به صورت آزاد و یا در داخل ماده معمولی. بار کسری کوارک، چون نمی‌تواند با هیچ تعداد الکترون یا پروتونی خنثی شود، باید حضور کوارک را برملا کند. تا به حال هیچ ذره‌ای با بار کسری یقیناً پیدا نشده است. زمینه‌های نظری برای این فرض وجود دارد که آزاد شدن یک کوارک از یک هادرون غیرممکن است، اما مسئله هنوز قابل بحث است.

البته واقعیت کوانتس بار خارج از حوزه الکترومغناطیس کلاسیک است. ما معمولاً کوانتیدگی بار را ندیده می‌گیریم و طوری رفتار می‌کنیم که گویی بارهای نقطه‌ای ما هر مقداری می‌توانند داشته باشند. این موضوع هیچ مشکلی پیش نمی‌آورد. اما یادمان باشد که نمی‌توان انتظار داشت نظریه کلاسیک ساختار ذرات بنیادی را تشریح کند. (معلوم نیست نظریه کوانتومی امروزی هم از پس کار بر بیاید!) آنچه الکترون را یکپارچه نگه می‌دارد همان قدر مرموز است که عاملی که میزان دقیق بار آن را ثابت نگه می‌دارد. چیزی فراتر از نیروهای الکتریکی باید دخیل باشد چون نیروهای الکتروستاتیکی بین قسمت‌های مختلف الکترون چه بسا دافعه باشند.

ما در مطالعه الکتروسیسته و مغناطیس، ذرات باردار را فقط حاملهای بار تلقی خواهیم کرد، با ابعادی آنقدر کوچک که ساختارشان برای اغلب کارهای ما کاملاً بی‌اهمیت است. مثلاً در مورد پروتون از آزمایشهای پراکندگی پراثری می‌دانیم که بار الکتریکی در دورتر از شعاع 10^{-13} cm احساس نمی‌شود. یادآوری می‌کنیم که تحلیل رادرفورد از پراکندگی ذرات آلفا نشان داد که حتی بار الکتریکی هسته‌های سنگینتر در ناحیه‌ای کوچکتر از 10^{-11} cm توزیع شده است. برای فیزیکدانان قرن نوزدهم هم یک "بار نقطه‌ای" مفهومی مجرد باقی ماند. امروز ما به عبارت ذرات اتمی عادت کرده‌ایم. دانه دانه بودن الکتروسیسته در توصیف امروزی ما از طبیعت آنقدر بدیهی است که یک بار نقطه‌ای را کمتر از توزیع باری که به‌کندی تغییر کند، غیرطبیعی می‌دانیم. وقتی چنین توزیع باری را در نظر می‌گیریم، آن را میانگین تعداد بسیار زیادی از ذرات بنیادی فرض می‌کنیم، همان‌طور که می‌توانیم چگالی ماکروسکوپیکی یک مایع را بدون توجه به دانه‌ای بودن آن در مقیاس مولکولی تعریف می‌کنیم.

۱-۲ قانون کولن

احتمالاً می‌دانید که برهم‌کنش بین بارهای الکتریکی ساکن با قانون کولن توصیف می‌شود: دو بار الکتریکی ساکن یکدیگر را با نیرویی که با حاصلضرب بزرگی بارها نسبت مستقیم و با مجذور فاصله آنها نسبت عکس دارد جذب یا دفع می‌کنند این قانون را می‌توانیم به‌طور خلاصه به‌صورت برداری زیر بیان کنیم:

$$\mathbf{F}_2 = k \frac{q_1 q_2 \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \quad (1-الف)$$

اینجا q_1 و q_2 عدد (زده‌ای)ند و بزرگی و علامت بارها را نشان می‌دهند. \hat{r}_{12} بردار یکه در راستای بار ۱ تا ۲ است،^۱ و \mathbf{F}_2 نیروی وارد بر بار ۲ است. به این ترتیب بنابه معادله ۱، علاوه بر چیزهای دیگر، بارهای مشابه همدیگر را دفع می‌کنند و بارهای مخالف همدیگر را جذب می‌کنند. به‌علاوه، نیرو تابع قانون سوم نیوتون است یعنی $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$.

بردار یکه \hat{r}_{12} نشان می‌دهد که نیرو موازی خط اتصال دهنده بارهاست. غیر از این هم نمی‌تواند باشد مگر اینکه خود فضا یک خاصیت جهتی ذاتی داشته باشد، چون تنها با دو بار نقطه‌ای در فضای خالی همسانگرد، هیچ جهت دیگری را نمی‌شود ممتاز کرد.

اگر خود بار نقطه‌ای نوعی ساختار داخلی داشت، با جهتی که یک محور را تعریف کند، آن وقت تنها یک کمیت عددی q برای توصیف بار کافی نبود. در واقع بعضی ذرات بنیادی، از

۱. قراردادی که اینجا می‌پذیریم شاید انتخاب طبیعی‌ای به نظر نیاید اما با کاربرد در قسمتهای دیگر فیزیک سازگارتر است و ما در سراسر این کتاب از آن پیروی می‌کنیم.

جمله الکترون، ویژگی دیگری هم دارند که اسپین نامیده می‌شود این ویژگی باعث می‌شود که بین دو الکترون، علاوه بر دافعه الکتروستاتیکی، یک نیروی مغناطیسی هم به‌وجود بیاید. این نیروی مغناطیسی در حالت کلی در راستای خط واصل بین بارها عمل نمی‌کند. این نیرو با عکس توان چهارم فاصله کاهش می‌یابد، و در ابعاد اتمی 10^{-8} cm، نیروی کولنی 10^4 برابر قویتر از برهم‌کنش مغناطیسی اسپینهاست. اگر بارها حرکت کنند نیروی مغناطیسی دیگری هم پیدا می‌شود و به همین دلیل است که ما در بیان قانون کولن بارها را ساکن فرض کردیم. در فصلهای آینده به این پدیده‌های مغناطیسی خواهیم پرداخت.

البته در معادله ۱ باید این فرض را هم بکنیم که هر دو بار جایگزیده‌اند، هر کدام ناحیه‌ای را اشغال می‌کنند که در مقایسه با r_{21} کوچک است. وگرنه نمی‌توانیم حتی فاصله r_{21} را دقیق تعریف کنیم.

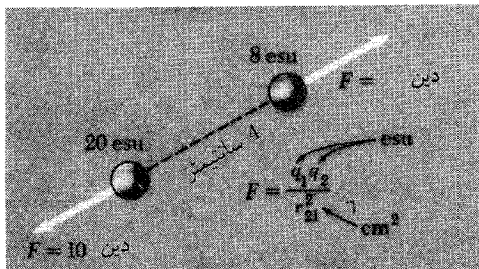
مقدار ثابت k در معادله ۱ بستگی به یکاهایی دارد که r و \mathbf{F} و q برحسب آنها بیان می‌شوند. معمولاً r_{21} را برحسب سانتی‌متر، \mathbf{F} را برحسب دین و بار را برحسب یکای الکتروستاتیک (esu) برمی‌گزینیم. دو بار یکسان به اندازه ۱ esu، اگر به فاصله ۱ سانتی‌متر از هم قرار گرفته باشند، هر کدام دیگری را با نیروی ۱ دین می‌رانند. معادله ۱، با $k = 1$ ، تعریف یکای بار در دستگاه یکاهای CGS الکتروستاتیک است، دین را نیرویی تعریف کرده‌ایم که به جرم یک گرمی شتاب یک سانتی‌متر بر مجذور ثانیه بدهد. شکل ۱-۲ الف خلاصه‌نویسی این رابطه است. مقدار e کوانتوم بنیادی بار الکتریکی، $10^{-10} \times 4.8 \times 10^{-10}$ esu است.

می‌خواهیم با یکای باری که کولن نام دارد هم آشنا بشویم. کولن یکای بار الکتریکی در دستگاه بین‌المللی (SI) است. این دستگاه مبتنی بر متر، کیلوگرم و ثانیه به‌عنوان یکاهای طول، جرم و زمان است و از یکاهای الکتریکی این دستگاه، با ولت، اهم، آمپر و وات آشنا هستیم.

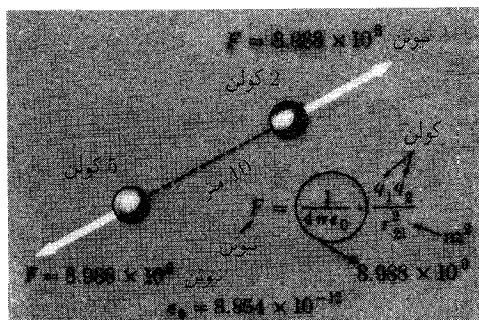
یکای نیرو در SI نیوتون دقیقاً برابر 10^5 دین است و نیرویی است که به جرم ۱ کیلوگرم شتاب ۱ متر بر مجذور ثانیه می‌دهد. در رابطه ۱ اگر \mathbf{F} برحسب نیوتون و r_{21} برحسب متر باشد، بارهای q_1 و q_2 برحسب کولن تعریف می‌شوند و در این صورت $k = 8.988 \times 10^9$. بار ۱ کولن برابر $10^9 \times 4.8 \times 10^{-10}$ esu است. معمول است که به جای k ضریب ثابت ϵ_0 را که دقیقاً $(4\pi k)^{-1}$ است تعریف کنند، به این ترتیب معادله ۱-الف این‌طور نوشته می‌شود

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \hat{r}_{21}}{r_{21}^2} \quad (1-b)$$

به‌عنوان مثال شکل ۱-۲ ب را ببینید. در بحث ما ثابت ϵ_0 در بسیاری از معادله‌هایی که در دستگاه



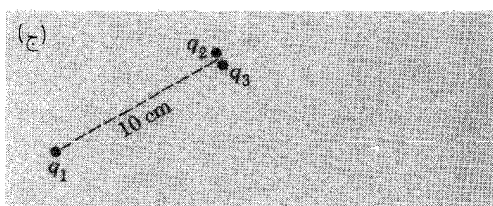
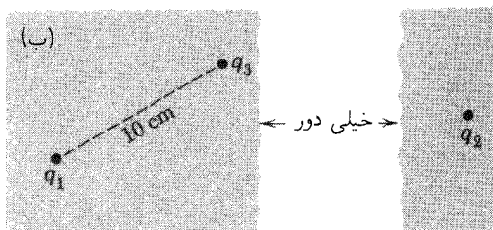
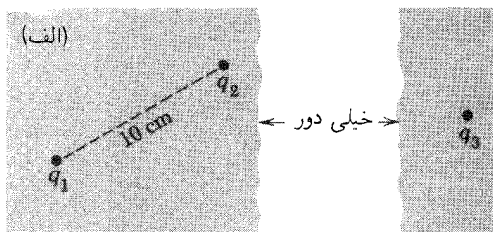
$1 = 10^9$ dynes
 $1 = 2.998 \times 10^{18}$ esu
 $e = 4.802 \times 10^{-10}$ esu = 1.602×10^{-19} کولن



شکل ۲-۱ قانون کولن برحسب یکاهای CGS الکتروستاتیک (بالا) و یکاهای SI (پایین) بیان شده است. ثابت ϵ_0 و ضریب تبدیل کولن به esu، چنانکه بعداً خواهیم دید، به سرعت نور مربوط اند. در شکل ثابتها را با دقت ۴ رقم اعشار نوشته‌ایم. مقادیرهای دقیق در پیوست ه آمده است.

SI نوشته می‌شوند، ظاهر خواهد شد. مقدار دقیق ϵ_0 و رابطه دقیق کولن با esu در پیوست ه آمده است. فعلاً برای ما تقریبهای زیر به اندازه کافی دقیق‌اند: $k = 9 \times 10^9$; $1 \text{ C} = 3 \times 10^9 \text{ esu}$ ؛ خوشبختانه بار الکتریکی e در هر دستگاه به یک مقدار تقریبی به یاد ماندنی نزدیک است: $e = 4.8 \times 10^{-10} \text{ esu} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

تنها راه آشکار کردن و اندازه‌گیری بارهای الکتریکی مشاهده برهم‌کنش اجسام باردار است. شاید تعجب‌آور باشد که چقدر از مفهوم قانون کولن در واقع فقط تعریف است. از قرار معلوم محتوای فیزیکی با اهمیت گزاره، بیان رابطه عکس مجذوری و استلزام جمع‌پذیری اثر بار الکتریکی است. برای اثبات نکته اخیر، باید بیش از دو بار در نظر بگیریم. وانگهی، اگر در دنیا فقط دو بار q_1 و q_2 را داشتیم تا با آنها آزمایش کنیم، اصلاً هیچوقت نمی‌توانستیم جداگانه اندازه‌شان را تعیین کنیم. فقط می‌توانستیم تحقیق کنیم که F متناسب با $1/r^2$ است. فرض کنید سه جسم حامل بارهای q_1 و q_2 و q_3 داشته باشیم. می‌توانیم نیروی وارد بر q_1 را وقتی q_2 ، 10° سانتی‌متر دورتر و q_3 بسیار دور است حساب کنیم (شکل ۱-۳ الف). بعد، می‌توانیم q_2 را خیلی دور فرض کنیم و q_3 را به جای قبلی q_2 بیاوریم، و دوباره نیروی وارد بر q_1 را حساب کنیم. بالاخره، q_2 و q_3 را کاملاً به هم نزدیک کنیم و هر دو را در 10° سانتی‌متری q_1 بگذاریم. از طریق اندازه‌گیری می‌فهمیم که



شکل ۱-۳ نیروی وارد بر q_1 در (ج) مجموع نیروهای وارد بر q_1 در (الف) و (ب) است.

نیروی وارد بر q_1 برابر با مجموع نیروهایی است که قبلاً اندازه‌گیری شده است. این نتیجه مهمی است که با استنتاج منطقی از تقارن، به صورتی که قبلاً نشان دادیم که نیروی بین دو بار باید در راستای خط واصل آنها باشد، قابل پیش‌بینی نیست. نیروی برهم‌کنش بین دو بار با حضور بار سوم تغییری نمی‌کند.

فرقی نمی‌کند چه مقدار بار در دستگاهمان داشته باشیم. برهم‌کنش بین هر دو زوج را می‌شود با قانون کولن (معادله ۱) محاسبه کرد. این مبنای اصل برهم‌نهی است که در بحث الکترومغناطیس بارها و بارها به آن متوسل خواهیم شد. معنای برهم‌نهی این است که دو چشمه را با "اضافه کردن" چشمه دوم به اولی به صورت یک دستگاه ترکیب کنیم، بدون اینکه پیکربندی هیچکدام از چشمه‌ها تغییر کند. اصل ما تضمین می‌کند که نیروی وارد بر یک بار در هر نقطه از دستگاه ترکیبی، جمع برداری نیروهایی است که هر چشمه اگر تنها بود بر بار واقع در آن نقطه اعمال می‌کرد. این اصل را نباید مسلم فرض کرد. در قلمرو بسیاری از پدیده‌ها، از جمله فاصله‌های بسیار کوچک یا نیروهای بسیار قوی، ممکن است برهم‌نهی دیگر صادق نباشد. می‌دانیم که اگر به پدیده‌های کوانتومی در میدان الکترومغناطیسی، از دیدگاه نظریه کلاسیک بنگریم، برهم‌نهی را نقض می‌کنند.

به این ترتیب فیزیک برهم‌کنشهای الکتریکی فقط در صورتی کاملاً نمایان می‌شود که بیش از دو بار داشته باشیم. می‌توانیم از بیان صریح معادلهٔ ۱ هم فراتر برویم و ادعا کنیم که سه بار شکل ۱-۳ در هر نقطه‌ای که باشند، نیروی وارد بر هر کدام، مثلاً q_2 دقیقاً با معادلهٔ زیر معین می‌شود:

$$\mathbf{F}_2 = \frac{q_2 q_1 \hat{\mathbf{r}}_{21}}{r_{21}^2} + \frac{q_2 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{22}}{r_{22}^2} \quad (2)$$

تأیید تجربی قانون عکس مجذور برای جاذبه و دافعهٔ الکتریکی تاریخچهٔ مفصلی دارد. خود کولن در سال ۱۷۸۶ این قانون را از راه اندازه‌گیری نیروی بین دو کرهٔ کوچک باردار با ترازوی پیچشی به دست آورد. اما ۲۰ سال پیش از آن جوزف پرستلی ضمن آزمایشی که بنیامین فرانکلین به او پیشنهاد کرده بود متوجه نبود آثار الکتریکی در یک ظرف توخالی باردار شد، و فکری به ذهنش رسید: "باید از این آزمایش بتوانیم نتیجه بگیریم که جاذبهٔ الکتریکی با همان قوانین گرانش، یعنی مجذور فاصله عمل می‌کند؛ چون به سادگی نشان داده می‌شود که اگر کرهٔ زمین به شکل یک پوسته بود، جسم داخل آن نمی‌توانست به یک طرف بیشتر از طرف دیگر کشیده شود.^۱ همین نظر مبنای آزمایش زیبایی بود که هنری کاوندیش در سال ۱۷۷۲ انجام داد. او پوستهٔ کروی رسانایی را باردار کرد که در داخل آن کرهٔ کوچکتری قرار داشت. کرهٔ کوچکتر به طور موقت به کرهٔ بزرگتر متصل می‌شد. بعد این اتصال قطع و پوستهٔ خارجی به دقت برداشته می‌شد. اگر بار الکتریکی روی کرهٔ داخلی وجود نداشت قانون عکس مجذور تأیید می‌شد. با این فرض که انحراف از قانون عکس مجذور را می‌توان با اختلافی در توان، مثلاً $\delta + 2$ به جای ۲، بیان کرد. کاوندیش نتیجه گرفت که δ باید کوچکتر از 3×10^{-6} باشد. آزمایش کاوندیش تقریباً ناشناخته ماند تا آنکه ماکسول، یک قرن بعد یادداشتهای کاوندیش را یافت و منتشر کرد (۱۸۷۶). در آن زمان ماکسول این آزمایش را با وسایل پیشرفته‌تری تکرار کرد و این حد را تا $10^{-6} < \delta$ رساند. جدیدترین اجراهای آزمایش کاوندیش، اگر به همان صورت تعبیر شود، حد فوق‌العاده کوچک $10^{-15} < \delta$ را به دست می‌دهد.^۲

اما در دومین قرن پس از آزمایش کاوندیش، مسئلهٔ مورد بحث کمی عوض شد. مهم نیست که قانون کولن با چه دقتی در مورد اجسام باردار در آزمایشگاه صادق است — آیا فاصله‌هایی وجود دارند که در آنها این قانون کاملاً نقض شود؟ در دو حوزه این نقض متصور است. در فاصله‌های بسیار کوچک، کمتر از 10^{-14} cm، که نظریهٔ الکترومغناطیسی که ما می‌شناسیم اصلاً آنجا به کار

1. Joseph Priestly, "The History and Present State of Electricity", Vol. II, London, 1767.

2. E R Williams, J G Faller, and H Hill *Phys Rev Lett*, **26**:721 (1971).

نمی‌آید. و برای فاصله‌های بسیار بزرگ مثلاً جغرافیایی تا نجومی، تحقیق قانون کولن به روش کاوندیش مسلماً عملی نیست. با این همه پدیده‌های الکترومغناطیسی بزرگ-مقیاسی را مشاهده می‌کنیم که ثابت کنند قوانین الکترومغناطیس کلاسیک در فاصله‌های بزرگ هم به‌کار می‌آیند. یکی از محکمترین آزمونها، مربوط به میدانهای مغناطیسی سیاره‌ای است، به‌ویژه میدان مغناطیسی سیاره بزرگ مشتری که در مأموریت پاونیر ۱۰ بررسی شد. تغییر فضایی این میدان به دقت تحلیل شد^۱ و معلوم شد این تغییر حداقل تا فاصله ۱۰^۵ کیلومتر دورتر از سیاره مشتری کاملاً با نظریه کلاسیک سازگار است. این نتیجه‌گیری در حکم آزمون، ولو غیرمستقیم، قانون کولن برای فاصله‌های بزرگ است.

خلاصه، ما هزار و یک دلیل برای اطمینان کافی به قانون کولن را در گستره عظیم ۲۴ دهه از ۱۰-۱۴ تا ۱۰^{۱۰} سانتی‌متر، اگر نه بیشتر، داریم، و آن را مبنایی برای توصیف الکترومغناطیس در نظر می‌گیریم.

۱-۵ انرژی یک دستگاه بار

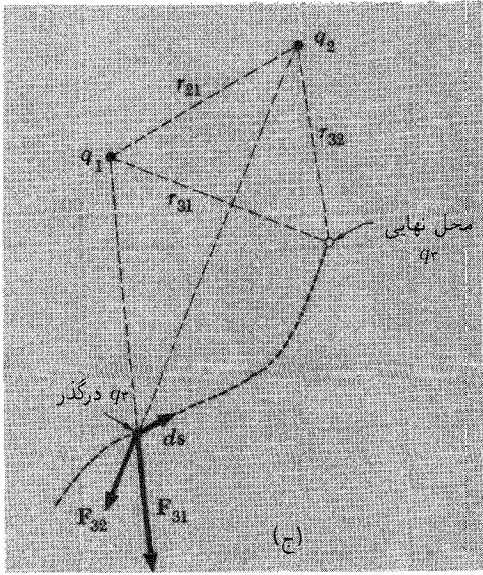
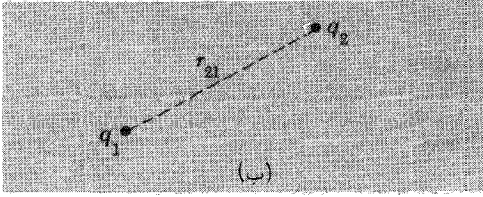
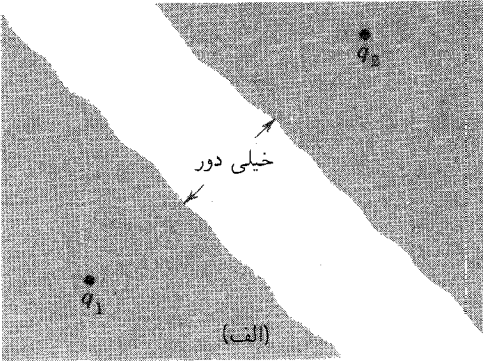
قانون کولن علی‌الاصول کل الکتروستاتیک را در برمی‌گیرد. با داشتن مقدار بارها و مکانهایشان می‌توانیم همه نیروهای الکتریکی را پیدا کنیم. یا اگر فرض کنیم بارها می‌توانند تحت تأثیر نیروهای دیگری حرکت کنند، می‌توانیم آرایش نهایی را که در آن توزیع بار ثابت می‌ماند پیدا کنیم. به همین قیاس قانونهای حرکت نیوتون هم کل مکانیک است. اما هم در مکانیک و هم در الکترومغناطیس با معرفی مفاهیم دیگر توان و بینش بیشتری به‌دست می‌آوریم. مهمترین این مفاهیم، انرژی است. در اینجا انرژی مفهوم مفیدی است چون نیروهای الکتریکی پایستارند. وقتی بارها را در میدان الکتریکی جابه‌جا می‌کنید هیچ انرژی از دست نمی‌رود که توان آن را باز یافت. همه چیز کاملاً برگشت‌پذیر است. اول ببینیم چه کاری باید روی دستگاه انجام بگیرد تا اجسام یا ذرات باردار در یک آرایش خاص قرار بگیرند. با دو جسم یا ذره باردار شروع می‌کنیم که از هم خیلی دورند (شکل ۱-۴ الف). فرض می‌کنیم مقدار بارها q_1 و q_2 باشد. کاری نداریم که برای خلق این دو توده بار در ابتدا چه انرژی لازم بوده، ذرات را به آرامی به هم نزدیک می‌کنیم تا فاصله‌شان $r_{۱۲}$ شود. چقدر کار انجام گرفته است؟

هیچ فرقی نمی‌کند که q_1 را به طرف q_2 بیاوریم یا برعکس. در هر مورد کار انجام گرفته انتگرال یک حاصلضرب است: نیرو ضربدر جابه‌جایی در راستای نیرو. نیروی لازم برای آوردن یکی از

I. Davis, Jr., A. S. Goldhaber, M. M. Nieto, *Phys. Rev. Lett.* **35**:1402 (1975).

برای مرور تاریخچه کشف حد بالای اعتبار نظریه الکترومغناطیس کلاسیک مرجع زیر را ببینید:

A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **43**:277 (1971).



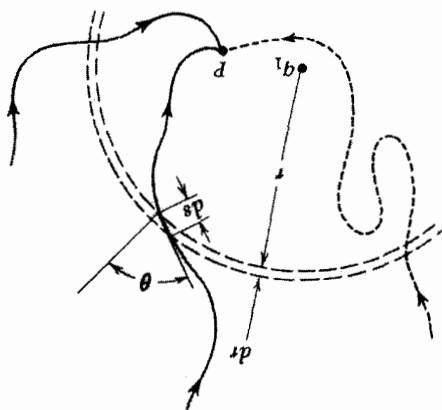
شکل ۱-۴ سه بار نزد هم آورده می شوند. اول q_2 را جلو می آوریم؛ بعد q_1 و q_2 ثابت نگه داشته می شوند و q_3 جلو می آید.

بارها به سمت دیگری، برابر و در جهت مخالف نیروی کولنی است.

$$W = \int_{r=\infty}^{r_{12}} \text{فاصله} \times \text{نیرو} = \int_{r=\infty}^{r_{12}} \frac{q_1 q_2 (-dr)}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (۳)$$

چون r از ∞ تا r_{12} تغییر کرده است و جابه‌جایی $-dr$ است. می‌دانیم که کار انجام گرفته روی دستگاه باید مثبت باشد چون بارها هم‌علامت‌اند و باید به سمت هم هل داده شوند. اگر q_1 و q_2 برحسب esu و r_{12} برحسب سانتی‌متر باشد از معادلهٔ ۳ کار برحسب ارگ به دست می‌آید.

مسیر هرچه باشد این کار فرقی نمی‌کند. بحث را برای دو بار q_1 و q_2 در شکل ۵-۱ تکرار می‌کنیم. اینجا q_1 را ثابت نگه داشته‌ایم و حرکت q_2 به سوی یک نقطهٔ معین را از دو مسیر متفاوت نشان داده‌ایم. هر پوستهٔ کروی نظیر آنچه بین r و $r + dr$ دیده می‌شود باید از هر دو مسیر بگذرد. نوکار لازم یعنی $-\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ در این قسمت از راه، برای هر دو مسیر یکسان است. زیرا مقدار \mathbf{F} در هر دو جا یکسان و در راستای شعاعی از q_1 است و $ds = dr / \cos \theta$ ؛ بنابراین $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F dr$. هر نوکار در طول یک مسیر با یک نوکار متناظر در مسیر دیگر جبران می‌شود. بنابراین حاصل جمعها باید مساوی باشد. این نتیجه حتی برای مسیرهای پیچ و خم‌داری نظیر مسیر نقطه‌چین در شکل ۵-۱ هم صادق است. (چرا؟)



شکل ۵-۱ چون نیرو مرکزی است، اجزای مسیرهای متفاوت بین r و $r + dr$ مقدار کار یکسانی لازم دارند.

۱. در اینجا برای اولین بار از ضرب عددی یا "ضرب نقطه‌ای" دو بردار استفاده کرده‌ایم. یادآوری: حاصلضرب عددی بردارهای \mathbf{A} و \mathbf{B} که با $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ نشان داده می‌شود مقدار عددی $AB \cos \theta$ است. A و B بزرگی بردارهای \mathbf{A} و \mathbf{B} و θ زاویهٔ بین آنهاست. برحسب مؤلفه‌های دکارتی دو بردار:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

حالا برمی‌گردیم به دو باری که در شکل ۱-۴ گذاشته بودیم، فرض کنید بار سوم q_3 را از جای دوری بیاوریم و در نقطه P_2 که فاصله‌اش از بار ۱، r_{31} و از بار ۲، r_{32} است بگذاریم. کار لازم برای این منظور عبارت است از:

$$W_3 = - \int_{\infty}^{P_2} \mathbf{F}_3 \cdot ds \quad (4)$$

از برکت جمع‌پذیری برهم‌کنشهای الکتریکی، که قبلاً بر آن تأکید کردیم، داریم:

$$\begin{aligned} - \int \mathbf{F}_3 \cdot ds &= \int (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}) \cdot ds \\ &= - \int \mathbf{F}_{31} \cdot dr - \int \mathbf{F}_{32} \cdot dr \end{aligned} \quad (5)$$

یعنی کار لازم برای آوردن q_3 تا P_2 برابر است با مجموع کار لازم وقتی که q_1 به تنهایی حاضر باشد و کار لازم وقتی که q_2 به تنهایی حضور داشته باشد.

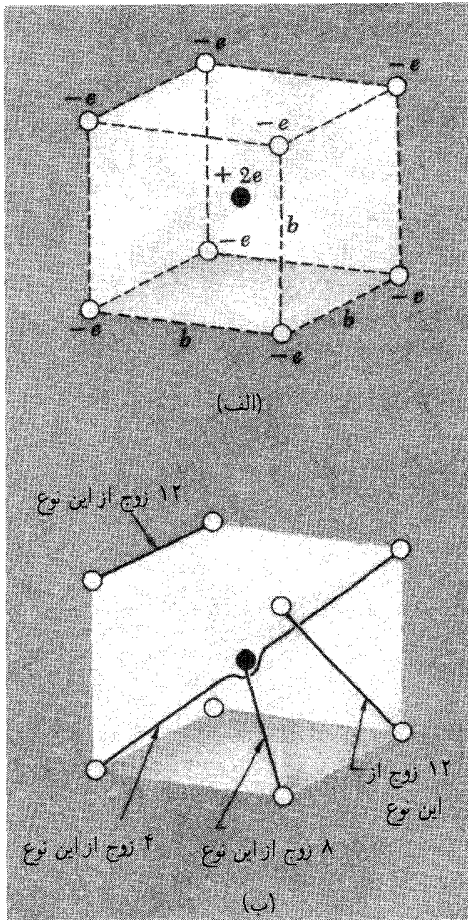
$$W_3 = \frac{q_1 q_3}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{32}} \quad (6)$$

کار کل انجام گرفته برای گردآوری این آرایش، که آن را U می‌نامیم، برابر می‌شود با

$$U = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \quad (7)$$

توجه دارید که q_1 ، q_2 و q_3 در این رابطه به صورت متقارن ظاهر شده‌اند و کاری به این نداریم که q_3 آخر از همه آورده شد. اگر q_3 را اول آورده بودیم باز هم همین نتیجه به دست می‌آمد. (امتحان کنید.) بنابراین U مستقل از ترتیب گرد آمدن بارهاست، چون U از مسیر آوردن هر بار هم مستقل است باید یک ویژگی مختص آرایش نهایی باشد U را انرژی پتانسیل الکتریکی این دستگاه به خصوص می‌نامیم. در تعریف انرژی پتانسیل، طبق معمول، اختیاراتی داریم. در این مورد صفر انرژی پتانسیل را متناظر با وضعیتی برگزیده‌ایم که سه بار از قبل موجودند اما فاصله آنها از هم بینهایت است. انرژی پتانسیل متعلق به کل آرایش است. هیچ دلیلی وجود ندارد که بتوانیم کسری از انرژی را به یکی از بارها نسبت بدهیم.

روشن است که چگونه می‌توان این نتیجه خیلی ساده را به هر تعداد بار تعمیم داد. اگر N بار متفاوت با هر آرایشی در فضا داشته باشیم، انرژی پتانسیل دستگاه با جمع‌بندی روی همه زوجها،



شکل ۱-۶ (الف) انرژی پتانسیل این آرایش نه بار نقطه‌ای از معادله ۹ به دست می‌آید. (ب) چهار نوع زوج در حاصل جمع دخیل‌اند.

مثل معادله ۷، به دست می‌آید. صفر انرژی پتانسیل مثل مورد قبل، متناظر با وضعیتی است که همه بارها بسیار از هم دورند.

به عنوان مثال، انرژی پتانسیل مجموعه هشت بار منفی را حساب کنیم که در رأسهای مکعبی به ضلع b قرار گرفته‌اند و در مرکز مکعب یک بار مثبت قرار دارد. این آرایش در شکل ۱-۶الف نشان داده شده است. فرض کنیم هر بار منفی یک الکترون با بار $-e$ است و ذره مرکزی به اندازه $2e$ بار مثبت دارد. با جمع‌بندی روی همه زوجها به دست می‌آوریم

$$U = \frac{8(-2e^2)}{(\sqrt{3}/2)b} + \frac{12e^2}{b} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}b} + \frac{4e^2}{\sqrt{3}b} = \frac{432e^2}{b} \quad (۸)$$

شکل ۱-۶ نشان می‌دهد که هر جمله این حاصل جمع از کجا می‌آید. انرژی مثبت است یعنی برای گردآوری این دستگاه باید کار انجام داد. البته اگر بگذاریم بارها از هم جدا شوند این کار با وارد کردن نیرو به اجسام خارجی دوباره دریافت می‌شود. یا اگر الکترون‌ها را از این آرایش جدا کنیم انرژی جنبشی کل ذرات برابر U می‌شود. این موضوع، چه ذرات را همزمان و به‌طور متقارن از هم جدا شوند و چه یکی یکی و به هر ترتیب، صادق است. اینجاست که اهمیت مفهوم انرژی پتانسیل کل دستگاه را درک می‌کنیم. فکرش را بکنید اگر قرار بود بردار نیروی برآیند وارد بر هر ذره را در هر مرحله از گردآوری این آرایش حساب کنیم مسئله چه اوضاعی داشت! البته در این مثال، تقارن هندسی این تکلیف را آسان می‌کرد؛ ولی با این حال باز هم کار خیلی پیچیده‌تر از محاسبه ساده بالا بود. دستورالعمل جمع‌بندی روی زوجها را می‌شود به صورت زیر نوشت:

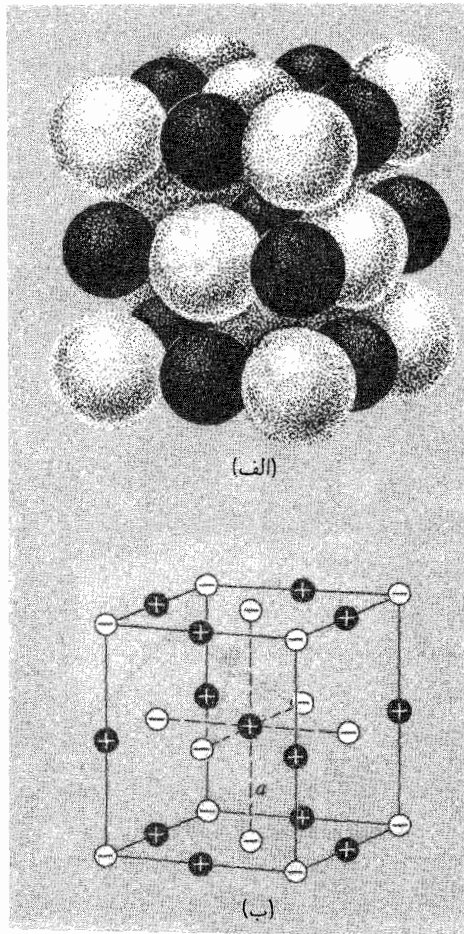
$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j}^N \frac{q_j q_k}{r_{jk}} \quad (9)$$

نماد جمع دوگانه، $\sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j}^N$ به این معناست: مورد $j = 1$ را در نظر بگیرید و روی $k = 2, 3, 4, \dots, N$ جمع ببندید، بعد j را مساوی ۲ بگیرید و روی $k = 1, 3, 4, \dots, N$ جمع ببندید و \dots تا $j = N$. واضح است که در این جمع هر زوج دو بار ظاهر می‌شوند و برای همین در مقابل جمع، ضریب $1/2$ گذاشته‌ایم.

۱-۶ انرژی الکتریکی یک شبکه بلور

این مفاهیم کاربرد مهمی در فیزیک بلورها دارد. می‌دانیم که یک بلور یونی مثل سدیم کلرید را می‌شود با تقریب خوب آرایه‌ای از یونهای مثبت (Na^+) و منفی (Cl^-) به صورت یک در میان در یک شبکه سه‌بعدی منظم در نظر گرفت. آرایش سدیم کلرید مطابق شکل ۱-۷ الف است. البته یونها نقطه‌های بردار نیستند، بلکه تقریباً توزیع بار کروی‌اند و بنابراین (چنانکه اکنون ثابت می‌کنیم) بر هم نیروی الکتریکی وارد می‌کنند. مثل این است که به جای هر یون یک بار نقطه‌ای معادل آن در مرکز یون قرار داده باشیم. این دستگاه الکتریکی هم‌ارز را در شکل ۱-۷ ب نشان داده‌ایم. انرژی پتانسیل الکتریکی شبکه بارها نقش مهمی در توصیف پایداری و انسجام بلور یونی دارد. ببینیم چطور می‌توانیم اندازه این انرژی را حساب کنیم.

مثل اینکه با حاصل جمعی روبه‌رو شده‌ایم که، اگر نامتناهی نباشد، خیلی بزرگ است. چون هر بلور ماکروسکوپیکی دست‌کم 10^{20} اتم دارد. آیا این جمع‌بندی همگرا می‌شود؟ چیزی که فعلاً می‌خواهیم به‌دست بیاوریم انرژی پتانسیل به‌ازای واحد حجم یا جرم بلور است. مطمئن هستیم که این انرژی



شکل ۱-۷ (الف) یک قطعه بلور سدیم کلرید با یونهای Na^+ و Cl^- که با نسبت‌های تقریباً واقعی نشان داده شده‌اند؛ (ب) به جای یونها بارهای نقطه‌ای قرار گرفته‌اند.

از اندازه بلور است به این دلیل که یک سر بلور ماکروسکوپیکی اثر چندانی بر سر دیگر بلور ندارد. دو گرم سدیم کلرید باید دو برابر یک گرم از همین ماده انرژی پتانسیل داشته باشد و شکل بلور اهمیتی ندارد چون اتمهای سطح کسر کوچکی از کل اتمها هستند. اگر بلور تنها از اتمهای هم علامت تشکیل می‌شد، این انتظار ما بیجا بود. در آن صورت یک گرم بلور بار الکتریکی عظیمی داشت و برای ساختن دو گرم بلور، یک انرژی افسانه‌ای لازم بود. (می‌توانید حساب کنید چقدر!) اما واقعیت این است که ساختار بلور، تناوبی از بارهای مثبت و منفی است. بنابراین هر تکه بلور با تقریب خیلی خوبی خنثی است. برای محاسبه انرژی پتانسیل، اول ملاحظه می‌کنیم که هر یون مثبت در موقعیتی معادل بقیه یونهای مثبت قرار دارد. به علاوه، هر چند ممکن است از شکل ۱-۷ در نظر اول به چشم نیاید،

آرایش یونهای مثبت اطراف یک یون منفی دقیقاً همان آرایش یونهای منفی اطراف یک یون مثبت است و ... بنابراین می‌توانیم یک یون را، فرقی نمی‌کند از کدام نوع، در مرکز بگیریم. برهم‌کنشهای آن را با یونهای دیگر جمع کنیم و به‌سادگی در تعداد کل هر دو نوع یونها ضرب کنیم. با این کار علامت جمع دوتایی در معادله ۹ تبدیل به یک حاصل جمع و یک ضرب N می‌شود؛ باز هم از ضرب $1/2$ استفاده کنیم چون هر جفت دو بار به حساب آمده است. به این ترتیب انرژی یک بلور سدیم کلرید که از N یون تشکیل شده باشد برابر است با:

$$U = \frac{1}{2} N \sum_{k=2}^{\infty} \frac{q_k q_k}{r_{1k}} \quad (10)$$

با در نظر گرفتن یون مثبت در مرکز مطابق شکل ۷-۱، این حاصل جمع تمام همسایه‌های دور و نزدیک را در برمی‌گیرد. جمله‌های اول این حاصل جمع به صورت زیرند:

$$U = \frac{1}{2} N \left(-\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}a} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}a} + \dots \right) \quad (11)$$

جمله اول از ۶ یون کلر مجاور حاصل می‌شود که فاصله‌شان از یون سدیم a است. جمله دوم مربوط به ۱۲ یون سدیم در یالهای مکعب است و غیره. در ضمن روشن است که این سری به هیچ‌وجه همگرا نمی‌شود؛ اگر بخواهیم فقط حاصل جمع جمله‌های مثبت را به دست بیاوریم می‌بینیم این حاصل جمع واگراست. برای محاسبه چنین حاصل جمعی ترتیبی بدهیم که همین‌طور که از مرکز به سمت بیرون پیش می‌رویم و یونهای هر چه دورتر را در نظر می‌گیریم، بتوانیم یونها را جزء گروههایی فرض کنیم که پوسته‌های تقریباً خنثی از ماده هستند. در این صورت اگر حاصل جمع شکسته شود، یونهای خیلی دورتر که آنها را نادیده گرفته‌ایم ترکیبهای مساوی از بارهای مثبت و منفی خواهند بود به طوری که می‌توانیم مطمئن باشیم سهمشان در انرژی کل ناچیز است. این روشی خام برای تشریح یک مسئله محاسباتی دقیق‌تر است. محاسبه عددی این سری با یک حسابگر به راحتی امکانپذیر است. در این مثال جواب چنین می‌شود:

$$U = \frac{-0.8738Ne^2}{a} \quad (12)$$

در اینجا N ، تعداد یونها، دو برابر تعداد مولکولهای NaCl است.

علامت منفی نشان می‌دهد که برای جدا کردن یونهای بلور باید کار انجام داد. به عبارت دیگر انرژی الکتریکی، همجسی بلور را توجیه می‌کند. اما اگر تمام قضیه همین باشد بلور باید

فرو پاشد چون مسلم است که انرژی پتانسیل توزیع بار با کاهش تمام فاصله‌ها، کمتر می‌شود. اینجا باز هم با مشکل آشنای فیزیک کلاسیک — که غیرکوانتومی است — روبه‌رو می‌شویم. بنا به قانونهای کلاسیک، هیچ دستگاه متشکل از ذرات ساکن نمی‌تواند فقط بر اثر نیروهای الکتریکی تعادل پایدار داشته باشد. آیا با این حساب تحلیل ما بی‌فایده بوده است؟ به هیچ‌وجه. خوشبختانه در فیزیک کوانتومی بلورها، می‌توان به انرژی پتانسیل الکتریکی معنایی داد و آن را با روش بالا محاسبه کرد.

۷-۱ میدان الکتریکی

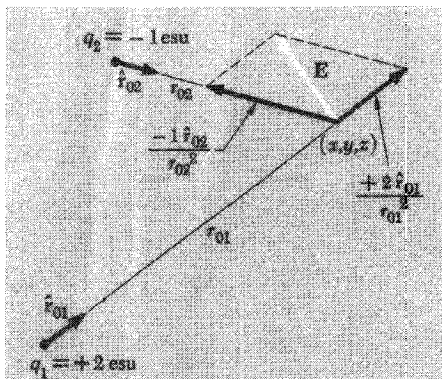
فرض کنید بارهای q_1, q_2, \dots, q_N به‌ترتیبی در فضا در نقاط ثابت قرار گرفته‌اند، و ما با نیرویی که آنها بر هم وارد می‌کنند کاری نداریم، فقط می‌خواهیم ببینیم روی بار دیگری، مثلاً q_0 ، که به آنها نزدیک می‌شود چه تأثیری دارند. می‌دانیم که نیروی کل وارد بر این بار را می‌توانیم با داشتن مختصات مکانی آن، x و y و z محاسبه کنیم. نیروی وارد بر بار q_0 برابر است با:

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=1}^N \frac{q_0 q_j \hat{\mathbf{r}}_{0j}}{r_{0j}^2} \quad (۱۳)$$

که در آن \mathbf{r}_{0j} فاصله برداری از زامین بار دستگاه تا نقطه (x, y, z) است. نیرو متناسب است با q_0 ، بنابراین اگر این نیرو را به q_0 تقسیم کنیم یک کمیت برداری به‌دست می‌آوریم که فقط به ساختار دستگاه بارهای اولیه q_1, \dots, q_N و موقعیت نقطه (x, y, z) بستگی دارد. این تابع برداری (x, y, z) را میدان الکتریکی ناشی از بارهای q_1, \dots, q_N می‌نامیم و با علامت \mathbf{E} نشان می‌دهیم. بارهای q_1, \dots, q_N را چشمه‌های میدان می‌نامیم. رابطه زیر را می‌توانیم به‌عنوان تعریف میدان الکتریکی یک توزیع بار، در نقطه (x, y, z) در نظر بگیریم:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j \hat{\mathbf{r}}_{0j}}{r_{0j}^2} \quad (۱۴-الف)$$

شکل ۸-۱ جمع برداری میدانهای حاصل از بار نقطه‌ای به اندازه 2 esu و یک بار نقطه‌ای به اندازه 1 esu - را در نقطه معینی از فضا نشان می‌دهد. در دستگاه یکاهای CGS، شدت میدان الکتریکی برحسب دین بر واحد بار یعنی dyne/esu بیان می‌شود. در دستگاه یکاهای SI، که واحد بار الکتریکی کولن و واحد نیرو بر نیوتون است، شدت میدان



شکل ۸-۱ میدان در یک نقطه حاصل جمع برداری میدانهای ناشی از هر یک از بارهای دستگاه است.

الکتریکی E برحسب نیوتون بر کولن بیان می شود و معادله ۱۴ به صورت زیر نوشته می شود:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j \hat{r}_{oj}}{r_{oj}^2} \quad (۱۴-ب)$$

فاصله r_{oj} برحسب متر اندازه گیری می شود.

پس از مقدمه پتانسیل الکتریکی در فصل بعد، از روش دیگری کاملاً هم ارز با این روش برای بیان واحد شدت میدان الکتریکی صحبت خواهیم کرد. این واحد در دستگاه CGS، ایستاولت بر سانتی متر و در دستگاه SI ولت بر متر است.

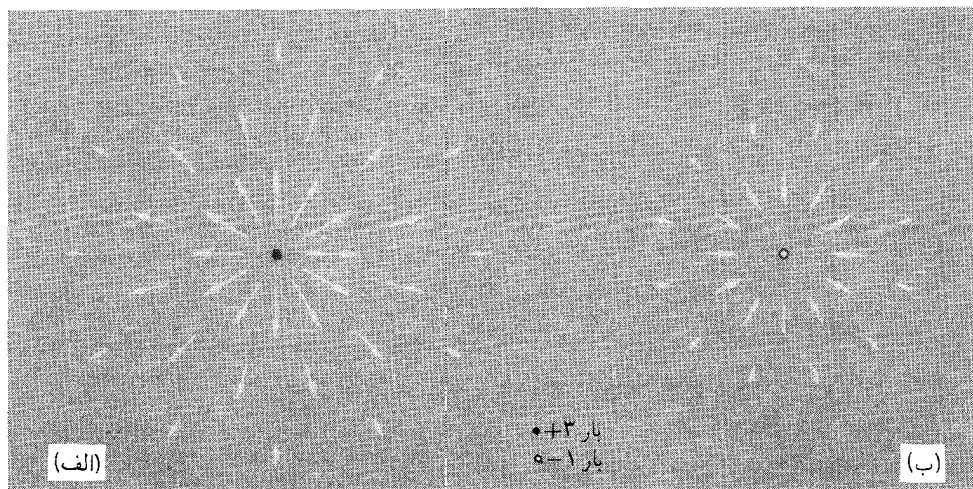
تا اینجا در واقع هیچ چیز تازه ای نداریم. میدان الکتریکی صرفاً بیان دیگری برای توصیف دستگاه بارهاست؛ چون نیروی وارد بر یک بار آزمون q را در هر نقطه، از لحاظ اندازه و راستا به دست می دهد. در این تعبیر باید قدری تأمل کنیم. جز در صورتی که بارهای چشمه واقعاً ثابت باشند، وارد کردن بار معینی مثل q ممکن است باعث تغییر مکان بارهای چشمه شود، در این صورت خود میدان، بنا بر تعریف معادله ۱۴، تغییر خواهد کرد. برای همین است که در شروع بحثمان بارها را ثابت فرض کردیم. گاهی اوقات برای تعریف میدان بار آزمون q را ”بینهایت کوچک“ در نظر می گیرند، در این صورت E حد F/q است وقتی q به سمت صفر میل کند. سعی نکنید تصور دقیقی از این مطلب در ذهن بیاورید. فراموش نکنیم که در جهان واقعی هیچ باری کوچکتر از e دیده نشده است! در حقیقت اگر بدون اشاره به یک بار آزمون، معادله ۱۴ را تعریف E در نظر بگیریم، هیچ مشکلی پیش نمی آید و لازم هم نیست چشمه ها ثابت باشند. اگر وارد کردن یک بار تازه باعث جابه جایی بارهای چشمه شود، در واقع تغییری در میدان الکتریکی پیش می آید، و اگر بخواهیم نیروی وارد بر بار تازه را بفهمیم باید برای محاسبه آن میدان الکتریکی جدید را به کار بگیریم.

شاید هنوز هم این پرسش برای شما مطرح باشد که میدان الکتریکی چیست؟ آیا چیزی واقعی است، یا اینکه صرفاً نام ضربی است در معادله‌ای که باید در چیز دیگری ضرب بشود تا مقدار عددی نیرویی را که در یک آزمایش اندازه می‌گیریم، به ما بدهد؟ توجه به دو نکته در اینجا می‌تواند مفید باشد: اول اینکه در عمل، هیچ فرقی نمی‌کند. شوخی نمی‌کنیم، جداً این‌طور است. دوم، این واقعیت را که بردار میدان الکتریکی در هر نقطه از فضا تنها لازمه یافتن نیروی وارد بر هر ذره در آن نقطه است، اصلاً نباید دست‌کم گرفت. اوضاع می‌توانست جور دیگری باشد. اگر هرگز آزمایشی انجام نگرفته بود می‌توانستیم تصور کنیم که در دو موقعیت متفاوت که بر بارهای واحد نیروی یکسانی وارد شود، بر بارهای آزمونی به اندازه ۲ واحد، ممکن است بسته به سرشت بارهای دیگر دستگاه نیروهای متفاوتی وارد شود. در این صورت تعریف میدان مفید نبود. میدان الکتریکی به هر نقطه از یک دستگاه، یک خاصیت محلی نسبت می‌دهد به این معنی که: اگر ما \mathbf{E} را در یک محل بدانیم، بی‌هیچ پرس‌وجوی دیگری، می‌دانیم که بر سر هر باری در آن محل چه می‌آید. کاری هم نداریم که این میدان از چه چیزی تولید شده است.

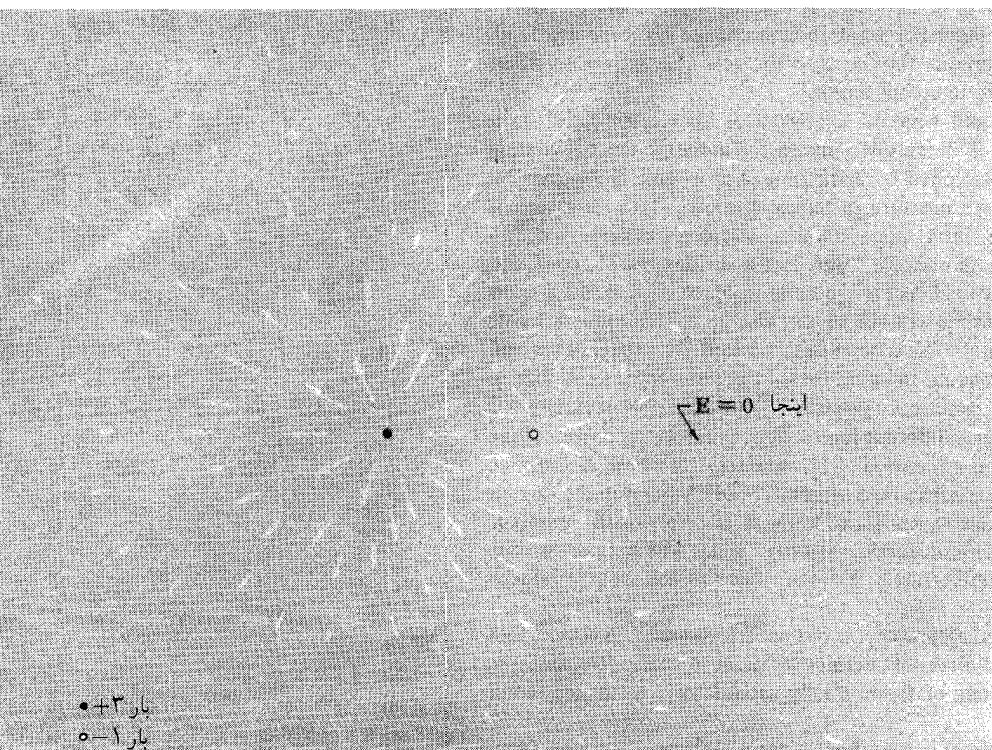
برای تشخیص یک میدان الکتریکی باید به هر نقطه از فضا یک بردار، یک بزرگی و یک جهت، نسبت دهیم. ما در این کتاب طرح‌های مختلفی برای تصویر کردن میدانهای برداری به‌کار می‌گیریم که البته هیچکدامشان کاملاً رضایتبخش نیستند.

یک تابع برداری در فضای سه‌بعدی را به آسانی نمی‌شود در دو بعد تصویر کرد. می‌توانیم بزرگی و جهت \mathbf{E} را در نقطه‌های مختلف با رسم پیکانهای کوچکی نزدیک آن نقطه‌ها مشخص کنیم، و هر جا که E بزرگتر باشد پیکانها را طول‌تر بکشیم.^۱ با این طرح در شکل ۱-۹ الف میدان یک بار نقطه‌ای منزوی به اندازه ۳ واحد بار، و در شکل ۱-۹ ب میدان یک بار نقطه‌ای به اندازه ۱- واحد بار نشان داده‌ایم. در واقع این تصاویر چیزی به درک ما از میدان یک بار منزوی اضافه نمی‌کند؛ یک میدان عکس مجذوری شعاعی ساده را بدون کمک تصویر هم می‌شود درک کرد. اینها را به خاطر این نشان می‌دهیم که می‌خواهیم در شکل ۱-۱۰ دو میدان را ترکیب کنیم تا میدان حاصل از دو بار را که با فاصله a از هم قرار دارند نشان بدهیم. کل چیزی که شکل ۱-۱۰ می‌تواند نشان بدهد میدان در صفحه حاوی بارهاست. برای داشتن تصویر سه‌بعدی کامل باید تصور کنیم که این شکل حول محور تقارنش چرخیده باشد. در شکل ۱-۱۰ نقطه‌ای در فضا وجود دارد که در آنجا \mathbf{E} صفر است. این نقطه در چه فاصله‌ای از نزدیکترین بار قرار گرفته است؟ توجه داشته باشید که اگر به طرف کناره‌های تصویر برویم میدان شعاعی از همه‌سو متوجه خارج است. می‌توان دید که

۱. چنین نمایشی در بهترین حالت هم نادقیق است. نشان دادن نقطه‌ای در فضا که بردار خاصی بر آن عمل می‌کند سخت است و حدود اندازه‌های میدان \mathbf{E} معمولاً آنقدر بزرگ است که عملاً نمی‌شود طول پیکانها را متناسب با آن کشید.

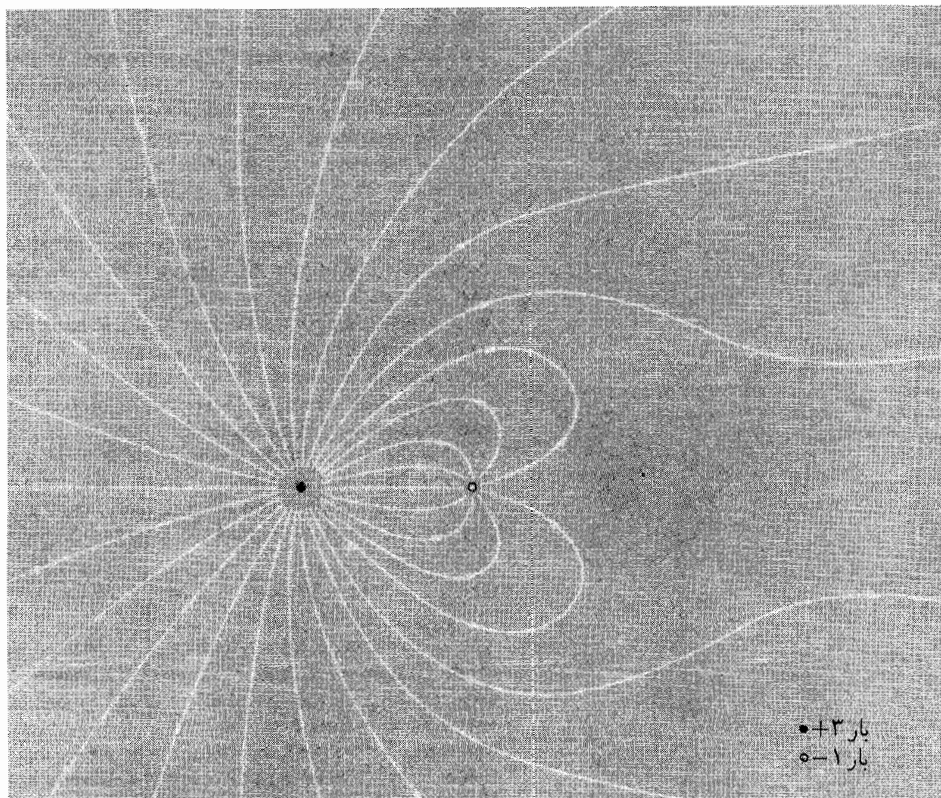


شکل ۹-۱ (الف) میدان یک بار $q_1 = 3$. (ب) میدان یک بار $q_2 = -1$ هر دو نمایش خام و فقط تا حدودی کمی است.



شکل ۱۰-۱ میدان در نزدیکی دو بار $q_1 = +3$ و $q_2 = -1$ برهم نهی میدانهای شکل ۹-۱ الف و ب است.

در فاصله بسیار دور از بارها، میدان الکتریکی خیلی شبیه میدان ناشی از یک بار مثبت نقطه‌ای است. همین انتظار را هم داریم چون فاصله بین دو بار در مقابل فاصله از یک نقطه بسیار دور ناچیز است و بار روی هم گذاشتن دو بار در یک نقطه، یک بار نقطه‌ای ۲ واحدی به دست می‌آوریم. یک راه دیگر برای تصویر کردن یک میدان برداری رسم خطوط میدان است. خطوط میدان منحنیهایی هستند که مماس بر آنها در هر نقطه، در جهت میدان در آن نقطه است. چنین منحنیهایی همه جا هموار و پیوسته‌اند مگر در تکیه‌هایی مثل بارهای نقطه‌ای، یا نقطه‌هایی مثل شکل ۱-۱۰ که در آنها میدان صفر می‌شود. طرح خطهای میدان، مستقیماً بزرگی میدان را معلوم نمی‌کند، هر چند می‌بینیم که به طور کلی هر جا که میدان قوی است خطهای میدان به هم نزدیک‌اند و وقتی به ناحیه‌ای که میدان ضعیف است نزدیک بشویم این خطها از هم فاصله می‌گیرند. در شکل ۱-۱۱ بعضی از



شکل ۱-۱۱ بعضی از خطوط میدان الکتریکی حول دو بار $q_1 = +3$ و $q_2 = -1$.

خطهای میدان بارهای شکل ۱-۱۰ رسم شده‌اند. یک بار مثبت ۳ واحدی و یک بار منفی ۱ واحدی. اینجا سرشت کاغذ و قلم ما، ما را به یک مقطع دوبعدی از یک کلاف سه‌بعدی محدود کرده است.

۸-۱ توزیعهای بار

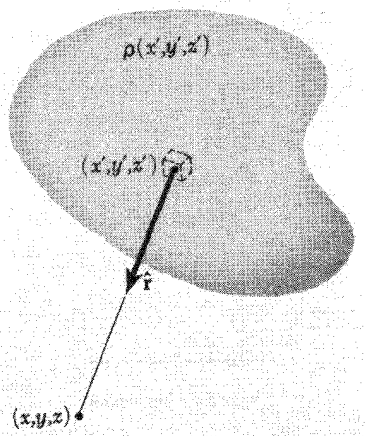
حالا وقتش رسیده است که بحث را از بار نقطه‌ای به توزیع پیوسته بار تعمیم بدهیم. یک توزیع حجمی بار با تابع نرده‌ای چگالی بار ρ تعریف می‌شود که تابعی از مکان است و بعد آن حجم/بار است. یعنی حاصلضرب ρ در جزء حجم، مقدار بار موجود در آن جزء حجم را می‌دهد. همین علامت اغلب برای جرم واحد حجم هم به‌کار می‌رود ولی ما در این کتاب همیشه مقدار بار در واحد حجم را با ρ نشان می‌دهیم. اگر ρ را برحسب مختصات x, y و z بنویسیم، آنگاه $\rho(x, y, z) dx dy dz$ بار موجود در جعبه کوچکی به حجم $dx dy dz$ است که در نقطه (x, y, z) قرار دارد.

البته در مقیاس اتمی چگالی بار از نقطه‌ای به نقطه دیگر خیلی فرق می‌کند؛ با این حال می‌شود ثابت کرد که چگالی بار در آن قلمرو هم مفهوم مفیدی است. ما این مفهوم را عمدتاً وقتی به‌کار می‌گیریم که با سیستمهای بزرگ مقیاس سروکار داریم. آنقدر بزرگ که جزء حجم $dv = dx dy dz$ نسبت به اندازه سیستم ما کاملاً کوچک است، و در عین حال این جزء حجم آنقدر بزرگ هست که حاوی تعدادی اتم یا بار بنیادی باشد. همان‌طور که قبلاً گفتیم، در تعریف چگالی جرم معمولی یک ماده هم با همین مسئله روبه‌رو هستیم.

اگر چشمه میدان الکتریکی به‌جای بارهای نقطه‌ای یک توزیع بار پیوسته باشد فقط باید حاصل جمع معادله ۱۴ را با انتگرال مناسبی عوض کنیم. این انتگرال، میدان الکتریکی در نقطه (x, y, z) را می‌دهد که از بارهایی در نقطه‌های دیگر (x', y', z') حاصل شده است:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \int \frac{\rho(x', y', z') \hat{\mathbf{r}} dx' dy' dz'}{r^2} \quad (15)$$

این یک انتگرال حجمی است. اگر (x, y, z) را ثابت نگه داریم و متغیرهای انتگرال، x', y', z' را برای تمام فضای حاوی بار در نظر بگیریم، سهمهای همه قسمت‌های توزیع بار را جمع‌بندی کرده‌ایم. بردار یکه $\hat{\mathbf{r}}$ از (x', y', z') به سمت (x, y, z) کشیده می‌شود — مگر اینکه بخواهیم یک علامت منفی جلوی انتگرال بگذاریم که در آن صورت می‌توانیم جهت $\hat{\mathbf{r}}$ را عوض کنیم. درست نگه داشتن علامتها همیشه در دسر دارد. بگذارید این‌طور به ذهن بسپاریم که جهت میدان الکتریکی از چشمه بار مثبت به سمت خارج است (شکل ۱-۱۲).

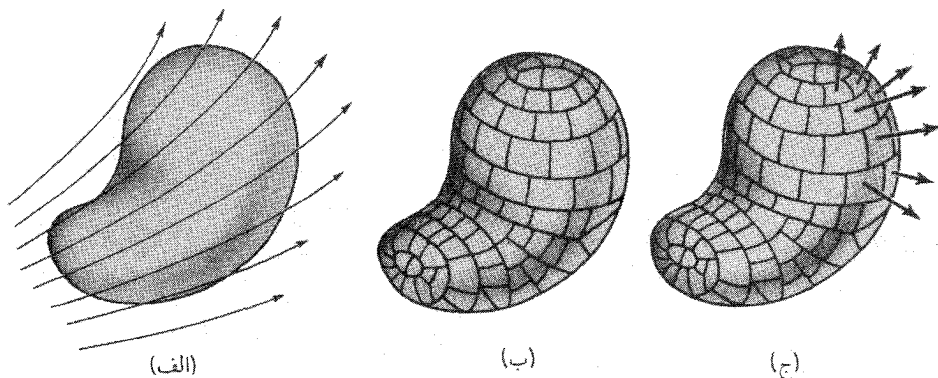


شکل ۱-۱۲ هر جزء حجم توزیع بار $\rho(x', y', z')$ سهمی در میدان الکتریکی \mathbf{E} در نقطه (x, y, z) دارد. میدان کل در این نقطه حاصل جمع این سهمهاست (معادله ۱۵).

در نزدیکی یک بار نقطه‌ای حقیقی، وقتی به بار نزدیک می‌شویم میدان $1/r^2$ بینهایت بزرگ می‌شود. صحبت از میدان در بار نقطه‌ای اصلاً معنی ندارد. چون، قبول داریم که، چشمه فیزیکی میدان ما تمرکز بینهایت بار در حجم صفر نیست بلکه مشکل از ساختارهای متناهی است، ما فقط از تکیه‌های ریاضی ناشی از نقطه‌ای بودن بار چشمپوشی می‌کنیم و خارج از مرز چشمه‌های اولیه را در نظر می‌گیریم. یک توزیع پیوسته $\rho(x', y', z')$ که هیچ‌جا نامتناهی نباشد اصلاً مشکلی ایجاد نمی‌کند. معادله ۱۵ را می‌توان برای پیدا کردن میدان در هر نقطه داخل توزیع بار به‌کار گرفت. مقدار زیر انتگرال در نقطه $r = 0$ نامتناهی نمی‌شود چون جزء حجم در صورت رابطه، در این حد متناسب با $r^2 dr$ است. به عبارت دیگر تا وقتی که ρ متناهی بماند، میدان هم در همه جا متناهی می‌ماند، حتی در داخل یا کرانه یک توزیع بار.

۹-۱ شار

رابطه بین میدان الکتریکی و چشمه‌های آن را می‌توان از راه بسیار ساده‌ای بیان کرد که برای ما خیلی مفید است. برای این کار احتیاج به تعریف کمیتی داریم که شار نامیده می‌شود. یک میدان الکتریکی را در فضا در نظر بگیرید و فرض کنید سطح بسته‌ای، مثلاً بادکنکی به هر شکل در این فضا باشد. شکل ۱-۱۳ یک چنین سطحی را نشان می‌دهد، میدان با چند خط میدان نشان داده شده است. حالا کل سطح را به تکه‌های کوچکی تقسیم کنید، آنقدر کوچک که سطح هر تکه را بشود عملاً تخت فرض کرد، و میدان برداری از تکه‌ای به تکه دیگر فرق محسوسی نکند. به عبارت دیگر نگذارید بادکنک چروک بخورد و نگذارید سطح بادکنک درست از یک تکیه‌ی میدان مثل یک بار نقطه‌ای بگذرد. مساحت هر قطعه اندازه معینی بر حسب cm^2 دارد. منظور ما از تکیه میدان نه تنها چشمه بار نقطه‌ای که در آن میدان به بینهایت میل می‌کند، بلکه هر جای دیگری

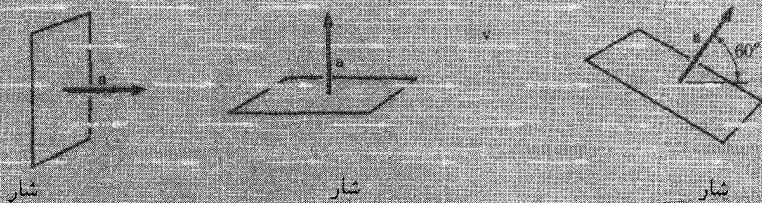


شکل ۱-۱۳ (الف) یک سطح بسته در یک میدان مغناطیسی. (ب) که به قطعه‌های کوچک تقسیم شده است. (ج) هر جزء سطح با یک بردار رو به خارج نمایش داده می‌شود.

و برای هر قطعه جهت معینی تعریف می‌شود — بردار عمود بر سطح رو به بیرون. (چون سطح بسته است می‌توانید از وضعیت بیرونی وضع داخلش را بفهمید و ابهامی ندارد.) این بزرگی و جهت را با یک بردار نشان می‌دهیم. در این صورت برای هر قطعه از سطح، مثلاً قطعه شماره z ، یک بردار \mathbf{a}_z داریم که مساحت و سمتگیری آن قطعه را معلوم می‌کند. شکل‌های ۱-۱۳ ب و ج مراحلی را که ذکر کردیم نشان می‌دهند. توجه کنید که بردار \mathbf{a}_z به هیچ وجه به شکل قطعه بستگی ندارد؛ و تا وقتی که قطعه‌ها به اندازه کافی کوچک‌اند، اهمیتی ندارد که سطح را چگونه تقسیم کرده باشیم.

فرض کنید \mathbf{E}_z بردار میدان الکتریکی در محل قطعه شماره z باشد. حاصلضرب نرده‌ای $\mathbf{E}_z \cdot \mathbf{a}_z$ یک عدد است. این عدد را شار عبوری از آن قطعه از سطح می‌نامیم. برای اینکه بفهمیم این نامگذاری از کجا آمده، یک تابع برداری در نظر می‌گیریم که نشان‌دهنده سرعت حرکت در یک شار — مثلاً یک رودخانه، باشد. در این رودخانه سرعت از جایی به جای دیگر فرق می‌کند اما در یک نقطه معین سرعت در همه زمانها ثابت است. این میدان برداری را با \mathbf{v} نشان می‌دهیم و برحسب متر بر ثانیه اندازه‌گیری می‌کنیم. بعد، اگر \mathbf{a} برحسب مترمربع مساحت قابی باشد که در آب فرو برده شده، $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$ آهنگ جریان آب از درون قاب برحسب مترمکعب بر ثانیه است (شکل ۱-۱۴). باید تأکید کنیم که تعریف ما از شار برای هر تابع برداری، معرف هر متغیر فیزیکی که باشد، قابل استفاده است.

→ است که در آن اندازه و جهت میدان به‌طور ناپیوسته تغییر کند، مثلاً یک لایه بسیار نازک از بار متراکم. در واقع این نوع ملایم‌تر تکینی در اینجا مشکلی پیش نمی‌آورد مگر اینکه قرار باشد سطح بادکنک ما در یک ناحیه متناهی بر سطح ناپیوستگی منطبق شود.



شکل ۱۴-۱ شار عبوری از قابی به مساحت a برابر است با $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$ که در آن \mathbf{v} سرعت شاره است. شار، حجم شارهای است که در واحد زمان از قاب می‌گذرد.

حالا شار عبوری از همهٔ قطعه‌ها را با هم جمع می‌کنیم تا شار عبوری از کل سطح را به دست بیاوریم. این یک کمیت زده‌ای است که با Φ نشان می‌دهیم:

$$\Phi = \sum_{\text{روی تمام } j} \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j \quad (۱۶)$$

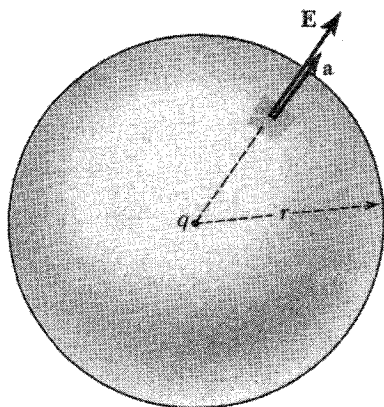
اگر قطعه‌ها بدون هیچ محدودیتی، کوچکتر و تعدادشان بیشتر شود، به جای رابطهٔ ۱۶ می‌توانیم انتگرال سطح زیر را بگیریم:

$$\Phi = \int_{\text{روی تمام سطح}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (۱۷)$$

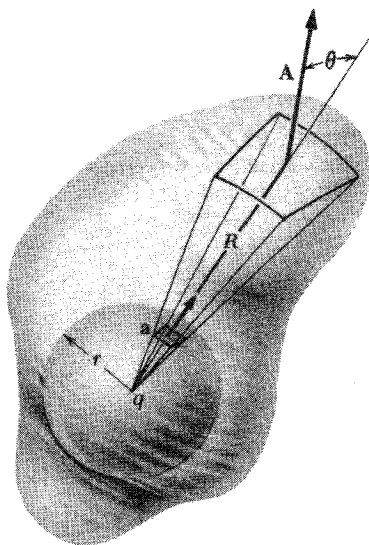
انتگرال سطح هر تابع برداری \mathbf{F} ، روی سطح S ، به این معناست: سطح S را به قطعه‌های کوچک تقسیم کنید، هر قطعه را با برداری رو به خارج نشان دهید به طوری که بزرگی آن بردار برابر مساحت آن قطعه باشد؛ در هر قطعه حاصلضرب زده‌ای بردار سطح قطعه و \mathbf{F} محلی را به دست بیاورید، این حاصلضربها را جمع‌بندی کنید و حد این حاصل جمع وقتی قطعه‌ها خیلی کوچک شوند، انتگرال سطح است. وحشت نکنید از اینکه قرار باشد چنین محاسباتی را برای سطح بدشکلی مثل شکل ۱۳-۱ انجام بدهید. خاصیت شگفت‌انگیزی که الان می‌خواهیم شرح بدهیم، ما را از این‌کار معاف می‌کند.

۱-۱۰ قانون گاوس

ساده‌ترین حالت ممکن را در نظر بگیرید؛ فرض کنید میدان، ناشی از یک بار نقطه‌ای مثبت منزوی q است، و سطح مورد نظر ما کره‌ای به شعاع r و به مرکز بار نقطه‌ای است (شکل ۱-۱۵). شار



شکل ۱۵-۱ در میدان E ناشی از بار نقطه‌ای q ، شار خارج شده از کره‌ای که بار q را احاطه می‌کند چقدر است؟



شکل ۱۶-۱ نمایش اینکه شار عبوری از هر سطح بسته اطراف بار q مساوی با شار عبوری از کره است.

عبوری از این سطح چقدر است؟ جوابش ساده است چون بزرگی E در هر نقطه از سطح q/r^2 است و راستای آن راستای بردار عمود بر سطح رو به خارج در هر نقطه است. بنابراین داریم:

$$\Phi = E \times \text{کل سطح} = \frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2 = 4\pi q \quad (۱۸)$$

شار مستقل از اندازه سطح است.

حالا سطح دومی در نظر بگیرید که سطح اول را احاطه کند ولی کروی نباشد، مثلاً بادکنکی مثل شکل ۱۶-۱. ما ادعا می‌کنیم که شار کل عبوری از این سطح همان است که از سطح کروی

عبور می‌کند. برای اثبات، مخروطی به رأس بار q را در نظر بگیرید که کره را در سطح کوچک a قطع می‌کند و به سمت خارج پیش می‌رود و قطعه A از آن را در فاصله R از بار نقطه‌ای قطع می‌کند. مساحت قطعه A بزرگتر از مساحت قطعه a است با دو ضریب: اول به نسبت مجذور فاصله $(R/r)^2$ و دوم به خاطر مایل بودن [انحراف از راستای قائم] به نسبت $1/\cos\theta$. زاویه θ زاویه بین راستای شعاعی و عمود بر سطح رو به خارج است (شکل ۱-۱۶). میدان الکتریکی در این ناحیه، از میدان روی کره به نسبت $(r/R)^2$ کوچکتر است و همچنان در راستای شعاعی است. با فرض اینکه $E_{(R)}$ میدان روی قطعه سطح خارجی و $E_{(r)}$ میدان کره باشد داریم

$$E_{(R)} \cdot A = E_{(R)} A \cos\theta = \text{شار عبوری از تکه خارجی} \quad (۱۹)$$

$$E_{(r)} \cdot a = E_{(r)} a = \text{شار عبوری از تکه داخلی}$$

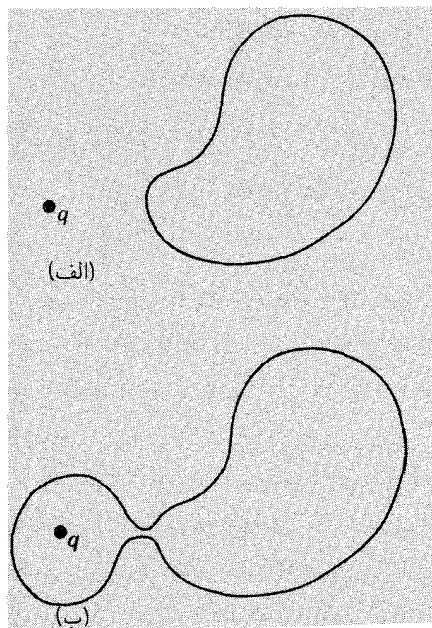
$$E_{(R)} A \cos\theta = \left[E_{(r)} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \left[a \left(\frac{R}{r} \right)^2 \frac{1}{\cos\theta} \right] \cos\theta = E_{(r)} a$$

این ثابت می‌کند که شار عبوری از دو قطعه یکسان است.

اکنون هر قطعه از سطح خارجی را به همین صورت می‌توان متناظر با بخشی از سطح کروی فرض کرد، بنابراین شار کل باید از هر دو سطح یکسان باشد یعنی شار عبوری از سطح جدید باید دقیقاً $4\pi q$ باشد. اما شکل و اندازه این سطح جدید اختیاری بود.^۱ نتیجه می‌گیریم که: شار میدان الکتریکی از هر سطح محیط بر بار نقطه‌ای q برابر با $4\pi q$ است. یک نتیجه فرعی این است که شار عبوری کل از سطح بسته صفر است، اگر بار خارج سطح بسته قرار بگیرد. اثبات این را به عهده خواننده می‌گذاریم و شکل ۱-۱۷ می‌تواند راهنمایی برای استدلال در این مورد باشد.

می‌شود جور دیگری به کل این قضایا نگاه کرد که نتیجه کاملاً واضح به نظر برسد. فرض کنید q چشمه‌ای باشد که — ذراتی مثل گلوله یا فوتون — در تمام جهتها با یک آهنگ معین گسیل کند. مسلم است که شار ذرات از دریچه‌ای به مساحت واحد به نسبت عکس مجذور فاصله دریچه از چشمه q کاهش می‌یابد. به این ترتیب می‌توان شدت میدان الکتریکی E را با تعداد گلوله‌هایی که در واحد زمان از واحد سطح می‌گذرد مقایسه کرد. بدیهی است که شار گلوله‌ها از هر سطحی که کاملاً q را احاطه کرده باشد مستقل از اندازه و شکل سطح است، چون صرفاً عبارت

۱. برای اطمینان سطح دوم را محیط بر کره فرض کردیم. لازم هم نیست این‌طور باشد. به علاوه، کره را می‌توانیم هر چه بخواهیم کوچک فرض کنیم.



شکل ۱۷-۱ نشان دادن اینکه شار عبوری از سطح بسته در (الف) صفر است می‌توانید از شکل (ب) استفاده کنید.

است از تعداد کل گلوله‌هایی که در واحد زمان گسیل می‌شوند. به همین ترتیب، شار E از سطح بسته باید مستقل از اندازه و شکل باشد. این خاصیت مشترک، ناشی از رفتار عکس مجذوری است.

حالا موقع استفاده از برهم‌نهی است، هر میدان الکتریکی مجموع میدانهای الکتریکی تک‌تک چشمه‌هاست. ما این خاصیت را در معادله قانون کولن، معادله ۱۳، بیان کردیم. واضح است که شار هم به همین معنا یک کمیت جمع‌پذیر است چون اگر تعدادی چشمه q_1, q_2, \dots, q_N داشته باشیم میدانهای آنها، اگر تک‌تک بنویسیم، E_1, E_2, \dots, E_N خواهد بود. شار Φ از سطح S در میدان واقعی را می‌شود به صورت زیر نوشت:

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_S (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_N) \cdot d\mathbf{a} \quad (20)$$

دیدیم که $\int_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{a}$ برابر است با $4\pi q_n$ اگر q_n داخل S باشد و در غیر این صورت صفر است. بنابراین هر بار q داخل سطح سهمی دقیقاً برابر با $4\pi q$ در انتگرال سطح معادله ۲۰ دارد و بارهای خارج سطح هم هیچ سهمی در انتگرال ندارند. حالا به قانون گاوس می‌رسیم:

شار میدان الکتریکی \mathbf{E} از هر سطح بسته، یعنی
 انتگرال $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ روی سطح، برابر است با 4π
 ضربدر بار کل داخل سطح:

(۲۱)

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi \sum_i q_i = 4\pi \int \rho dv$$

این عبارت داخل کادر را یک قانون می‌دانیم چون معادل قانون کولن است و اگر بار و میدان معین باشند این قانون به همان اندازه قانون اساسی برهم‌کنشهای الکتروستاتیکی قابل استفاده است. قانون گاوس و قانون کولن دو قانون مستقل فیزیکی نیستند بلکه دو بیان مختلف از یک قانون‌اند.^۱

اگر استدلالمان را مرور کنیم می‌بینیم که این استدلال مبتنی بر سرشت عکس مجذوری برهم‌کنش و البته جمع‌پذیری آن، یا برهم‌نهی است. بنابراین این قضیه را می‌شود برای هر میدان عکس مجذوری در فیزیک مثلاً میدان گرانشی، به‌کار برد.

به آسانی می‌شود دید که اگر قانون نیرو، مثلاً عکس توان سه باشد، قانون گاوس دیگر صادق نیست. چون در آن صورت شار میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q ، که از کره‌ای به شعاع R و به مرکز بار نقطه‌ای، عبور می‌کند برابر است با

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{4\pi q}{R} \quad (22)$$

اگر کره به اندازه کافی بزرگ باشد می‌شود شار را تا حد دلخواه کوچک کرد، در حالی‌که بار کل داخل ثابت است.

این قضیه مهم به دو طریق دست ما را بازر می‌کند. اول اینکه رابطه‌ای بین میدان و چشمه آن برقرار می‌کند که عکس قانون کولن است. قانون کولن به ما می‌گوید چطور میدان الکتریکی را از روی بارها به دست بیاوریم، با قانون گاوس می‌توانیم بار موجود در هر ناحیه را از روی میدان تعیین کنیم. دوم اینکه این رابطه ریاضی ابزار تحلیلی کارآمدی است که همان‌طور که دیدیم مسائل پیچیده را ساده می‌کند.

۱. البته تفاوتی در کار است که اینجا اهمیت ندارد، ولی به بحثهای بعدی ما در مورد بارهای متحرک مربوط می‌شود. قانون گاوس برای میدانهایی متنوعتر از میدانهای الکتروستاتیکی هم صادق است. میدانی که تابع عکس مجذور فاصله باشد ولی کروی نباشد در قانون گاوس صدق می‌کند. به عبارت دیگر قانون گاوس به خودی خود متضمن تقارن میدان چشمه نقطه‌ای نیست در حالی‌که برای قانون کولن این لازم است.

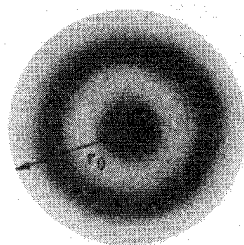
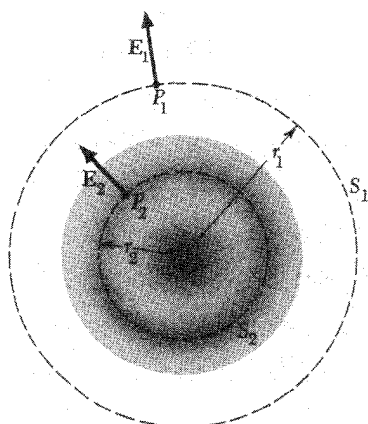
۱۱-۱ میدان یک توزیع بار کروی

از قانون گاوس می‌توانیم برای پیدا کردن میدان الکتریکی حاصل از یک توزیع بار متقارن کروی استفاده کنیم، یعنی توزیعی که در آن چگالی بار ρ فقط تابع فاصله شعاعی از نقطه مرکزی است. شکل ۱۸-۱ مقطع چنین توزیعی را نشان می‌دهد. در اینجا چگالی بار در مرکز زیاد است و فراتر از آن r چگالی صفر است. میدان الکتریکی در نقطه‌ای مثل P_1 خارج توزیع، یا P_2 داخل آن چقدر است (شکل ۱۹-۱)؟ اگر بخواهیم فقط با قانون کولن کار کنیم باید حاصل جمع بردارهای میدان الکتریکی ناشی از هر جزء حجم در توزیع بار را، در نقطه P_1 به دست بیاوریم. بگذارید روش دیگری را امتحان کنیم که هم از تقارن دستگاه و هم از قانون گاوس بیشترین بهره را بگیریم.

به خاطر تقارن کروی، میدان الکتریکی در هر نقطه باید در جهت شعاعی باشد، هیچ جهت دیگری یکتا نیست. به همین ترتیب بزرگی میدان E باید در همه نقطه‌های روی سطح کره S_1 به شعاع r_1 ، یکسان باشد چون همه این نقطه‌ها هم‌ارزند. این اندازه میدان را E_1 در نظر می‌گیریم. بنابراین شار عبوری از سطح S_1 برابر است با $4\pi r_1^2 E_1$ و مطابق قانون گاوس این شار باید 4π برابر بار داخل سطح باشد یعنی: (بار داخل S_1) $= 4\pi r_1^2 E_1$ و یا:

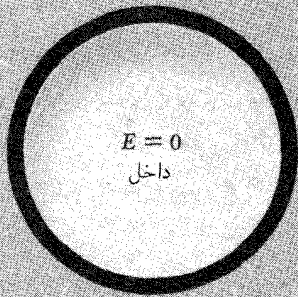
$$E_1 = \frac{S_1 \text{ داخل}}{r_1^2} \quad (23)$$

مقایسه این مقدار با میدان بار نقطه‌ای نشان می‌دهد که میدان در تمام نقطه‌های روی S_1



شکل ۱۹-۱ میدان الکتریکی یک توزیع بار کروی.

شکل ۱۸-۱ توزیع بار با تقارن کروی.



شکل ۲۰-۱ میدان داخل یک پوستهٔ کروی باردار صفر است.

همان است که اگر تمام بار داخل سطح S_1 در مرکز متمرکز بود داشتیم، همین حکم برای کره‌ای صادق است که داخل توزیع بار در نظر گرفته شود. میدان در هر نقطه روی S_2 برابر با موردی است که تمام بار داخل S_2 در مرکز باشد، و همهٔ بار بیرون S_2 نادیده گرفته شود. بدیهی است که میدان داخل یک توزیع بار کروی "توخالی" صفر است (شکل ۲۰-۱).

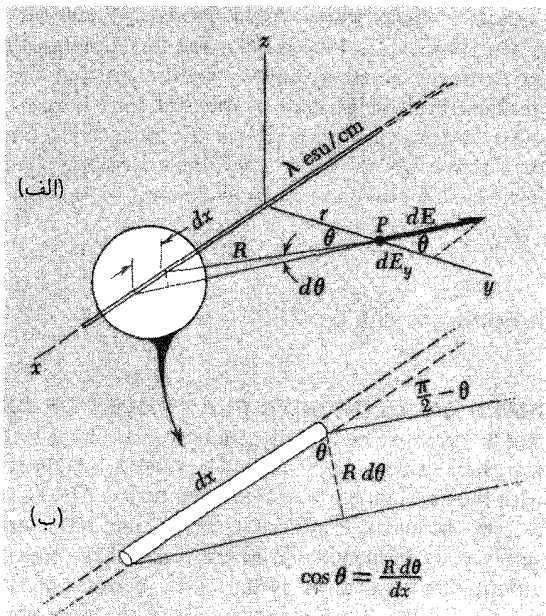
همین استدلال اگر برای میدان گرانشی به‌کار رود به ما می‌گوید که زمین، اگر توزیع جرمی کروی و متقارن فرض شود، اجسام بیرون را طوری جذب می‌کند که انگار تمام جرمش در مرکز متمرکز است. با این تعبیر آشنا هستیم. هر کس فکر می‌کند که این اصل خاصیت بدیهی مرکز جرم است. باید توجه داشته باشد که این قضیه در حالت کلی برای تمام شکلها صادق نیست. یک مکعب کامل با چگالی یکنواخت اجسام خارجی را، چنانکه گویی تمام جرم در مرکز هندسی‌اش متمرکز است، جذب نمی‌کند.

نیوتون این قضیه را بدیهی نمی‌دانست. او به اثبات این قضیه احتیاج داشت تا بتواند توضیح بدهد که گردش ماه به دور زمین و سقوط یک جسم بر زمین، هر دو تحت تأثیر یک نیروست. تاخیر ۲۰ ساله‌ای که در انتشار نظریهٔ گرانش نیوتون روی داد، حداقل تا حدودی به خاطر مشکلی بود که در اثبات این قضیه برای متقاعد کردن خودش داشت. برهانی که او سرانجام ابداع کرد و در سال ۱۶۸۶ در پرینکیپیا منتشر شد (کتاب اول، فصل ۱۲، قضیهٔ سی و یکم) مظهر مهارتی است که به کمک آن یک انتگرال‌گیری حجمی پر دردسر بدون کمک حساب انتگرالی که ما بلدیم، انجام گرفته است. این استدلال خیلی طولانی‌تر از کل بحث قبلی ما دربارهٔ قانون گاوس است، و خیلی پیچیده‌تر از آن اقامه شده است. می‌بینید که نیوتون با تمام خلاقیت و قوهٔ ابتکارش در ریاضیات، قانون گاوس را کم داشت. رابطه‌ای که حالا به نظر ما این قدر بدیهی و پیش پا افتاده است.

۱۲-۱ میدان یک بار خطی

یک سیم طویل مستقیم باردار را، صرفنظر از ضخامتش، می‌توان با مقدار بار در واحد طول مشخص کرد. فرض کنید λ که برحسب esu/cm اندازه‌گیری می‌شود، نشان‌دهنده این چگالی بار خطی باشد. این بار خطی با طول بینهایت و چگالی بار خطی ثابت λ ، چه میدان الکتریکی‌ای تولید می‌کند. این مسئله را از دو راه حل می‌کنیم. اول یک انتگرال‌گیری از قانون کولن شروع می‌شود.

برای محاسبه میدان در نقطه P ، که در شکل ۲۱-۱ نشان داده شده است، باید سهم همه قطعه‌های بار خطی را، که یکی از آنها به صورت قطعه‌ای به طول dx نشان داده شده است، با هم جمع کنیم. بار dq در این جزء را با رابطه $dq = \lambda dx$ داده می‌شود. اگر محور x را در راستای بار خطی در نظر بگیریم، می‌توانیم محور y را طوری بگیریم که از نقطه P بگذرد، و فاصله‌اش از نزدیکترین نقطه بر روی سیم r سانتی‌متر باشد. بهتر است همین اول کار از تقارن استفاده کنیم. بدیهی است که میدان الکتریکی در نقطه P باید در راستای y باشد، پس E_x و E_z هر دو صفرند.



شکل ۲۱-۱ (الف) میدان در نقطه P جمع برداری سهم‌های هریک از عناصر بار خطی است. (ب) جزئیات تفصیلی شکل (الف).

سهم بار dq در مؤلفه y میدان الکتریکی در نقطه P به صورت زیر است:

$$dE_y = \frac{dq}{R^2} \cos \theta = \frac{\lambda dx}{R^2} \cos \theta \quad (24)$$

که در آن θ زاویه‌ای است که میدان برداری dq با راستای y می‌سازد. مؤلفه y کل عبارت است از

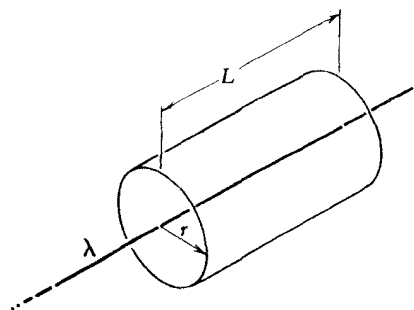
$$E_y = \int dE_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda \cos \theta}{R^2} dx \quad (25)$$

راحت‌تر است که θ را متغیر انتگرال در نظر بگیریم. چون $dx = R d\theta / \cos \theta$ و $R = r / \cos \theta$ انتگرال خواهد شد:

$$E_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda \cos \theta d\theta}{r} = \frac{\lambda}{r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{2\lambda}{r} \quad (26)$$

می‌بینیم که میدان یک بار خطی بینهایت طویل با چگالی بار خطی یکنواخت، متناسب با عکس فاصله از خط راست است. البته راستای میدان عمود بر خط است. اگر سیم حامل بار مثبت باشد میدان به سمت خارج است و اگر حامل بار منفی باشد میدان رو به سیم است.

قانون گاوس مستقیماً ما را به همین نتیجه می‌رساند. استوانه بسته‌ای به طول L و شعاع r حول قطعه‌ای از سیم مطابق شکل ۲۲-۱ فرض می‌کنیم و شار عبوری از این سطح را به دست می‌آوریم. همان‌طور که دیدیم به علت تقارن میدان شعاعی است. بنابراین شار عبوری از دو قاعده این "قوطی نازک" صفر است. شار عبوری از سطح استوانه به سادگی از حاصلضرب سطح $2\pi r L$ در E_r ، میدان روی سطح، به دست می‌آید. باری که با سطح احاطه شده λL است، بنابراین



شکل ۲۲-۱ استفاده از قانون گاوس برای یافتن میدان یک بار خطی.

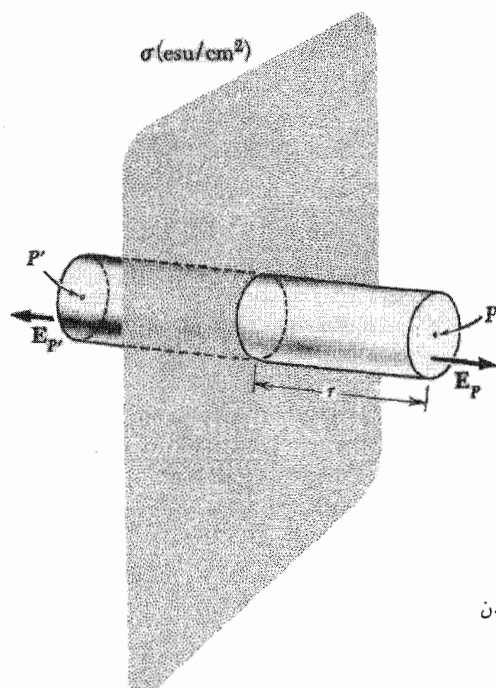
از قضیه گاوس داریم $4\pi\lambda L = 2\pi r L E_r$ یا

$$E_r = \frac{2\lambda}{r} \quad (27)$$

که همان رابطه ۲۶ است.

۱-۱۳ میدان یک ورقه تخت نامتناهی باردار

بار الکتریکی که به طور یکنواخت در یک ورقه نازک توزیع شده باشد توزیع بار سطحی نامیده می شود. یک صفحه صاف به وسعت بینهایت را با چگالی بار سطحی ثابت σ در نظر بگیرید. میدان الکتریکی در هر طرف این صفحه، هر اندازه ای داشته باشد، قطعاً باید عمود بر صفحه باشد، هیچ راستای یکتای دیگری در این سیستم وجود ندارد. به علاوه به خاطر تقارن، میدان باید در دو نقطه مقابل هم P و P' که در دو طرف صفحه واقع اند، هم اندازه و در جهت مخالف هم باشد. با مشخص شدن این واقعیتها، شدت میدان به آسانی از قانون گاوس به صورت زیر به دست می آید: استوانه ای مطابق شکل ۱-۲۳ رسم کنید که P در یک سمت و P' در سمت دیگر آن قرار بگیرد و سطح مقطع استوانه A باشد. شار خارج شده فقط در دو انتها پیدا می شود به طوری



شکل ۱-۲۳ استفاده از قانون گاوس برای به دست آوردن میدان یک ورقه تخت نامتناهی باردار.

اگر E_P اندازه میدان در P و $E_{P'}$ اندازه آن در P' باشد، شار خارج شده عبارت است از $AE_P + AE_{P'} = 2AE_P$. بار احاطه شده برابر است با σA . بنابراین $2AE_P = 4\pi\sigma A$ و یا

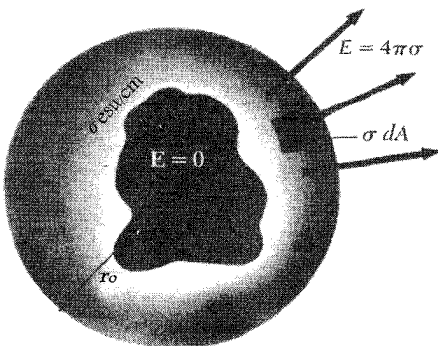
$$E_P = 2\pi\sigma \quad (28)$$

می بینیم که شدت میدان مستقل از r یعنی فاصله از صفحه است. معادله ۲۸ را می شود از محاسبه حاصل جمع برداری سهم همه اجزای کوچک بار ورقه در میدان در نقطه P ، با زحمت بیشتری به دست آورد.

دیدیم که میدان یک سیم باردار بینهایت طویل، با عکس فاصله از سیم تغییر می کرد در حالی که میدان صفحه بینهایت گسترده در تمام فاصله ها یکسان است. اینها صرفاً نتیجه این واقعیت است که میدان بار نقطه ای به صورت عکس مجذور فاصله تغییر می کند. اگر این موضوع زیاد برایتان واضح نیست، این طور به قضیه نگاه کنیم: به زبان ساده، در شکل ۱-۲۱ آن قسمت از بارخطی که عمده‌تاً منشأ میدان در P است، بخش نزدیک یعنی بار حاضر در فاصله ای از مرتبه بزرگی r است. اگر همه این بارها را یک جا جمع کنیم و بقیه بار را فراموش کنیم، بار جمع شده به اندازه $q \approx \lambda r$ خواهد بود که باید میدانی متناسب با q/r^2 یا λ/r تولید کند. در مورد ورقه، آن مقدار از بار که به این معنا "موثر" است با دور شدن از ورقه متناسب با r^2 زیاد می شود، در نتیجه کاهش $1/r^2$ در میدان ناشی از هر جزء بار، به این ترتیب جبران می شود.

۱-۱۴ نیروی وارد بر یک لایه بار

شکل ۱-۲۴ باری دارد که روی سطحی به طور یکنواخت با چگالی σ بر حسب esu/cm^2 توزیع شده است. داخل کره، همان طور که یاد گرفتیم، میدان الکتریکی چنین توزیع باری صفر است. خارج از کره میدان Q/r^2 است که در آن Q بار کل روی کره برابر است با $4\pi r^2 \sigma$. درست مجاور سطح کره از بیرون، شدت میدان $4\pi\sigma$ است. این را با معادله ۲۸ و شکل ۱-۲۳ مقایسه



شکل ۱-۲۴ سطح کروی با چگالی بار یکنواخت σ .

کنید. در هر دو مورد قانون گاوس رعایت شده است: تغییر E ، از یک طرف لایه به طرف دیگر، برابر با $4\pi\sigma$ است.

بر بارهایی که چنین توزیعی تشکیل داده‌اند چه نیروی الکتریکی وارد می‌شود؟ در نظر اول این سؤال ممکن است گیج‌کننده باشد چون میدان E از همین بارها ناشی می‌شود. آنچه باید در نظر بگیریم نیروی وارد بر بار کوچک dq است، مثلاً قطعهٔ کوچکی به مساحت dA و بار $dq = \sigma dA$. نیروی وارد بر dq از طرف همهٔ بارهای سطح کره، و نیروی وارد بر این قطعه از طرف بارهای خود این قطعه را، جداگانه در نظر بگیریم. نیروی اخیر مطمئناً صفر است. دافعهٔ کولنی بین بارهای این قطعه دقیقاً مصداق قانون سوم نیوتون است؛ کل قطعه نمی‌تواند خودش را براند. این مطلب کار ما را آسان می‌کند، چون می‌توانیم تمام میدان الکتریکی E به انضمام میدان ناشی از بارهای قطعه را، در محاسبهٔ نیروی dF وارد بر قطعه‌ای به بار dq ، به‌کار ببریم:

$$dF = E dq = E\sigma dA \quad (29)$$

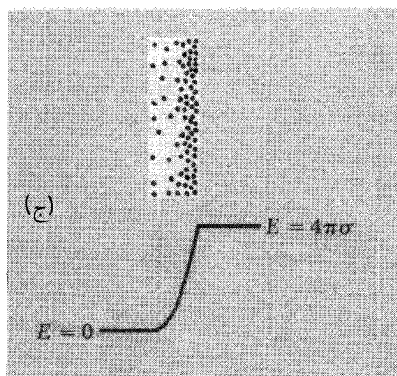
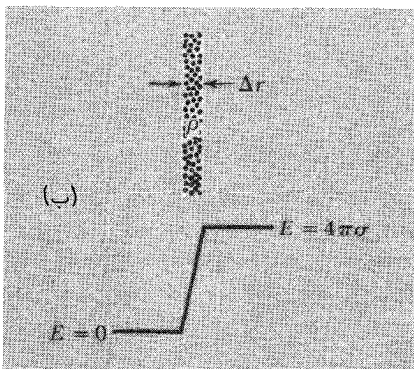
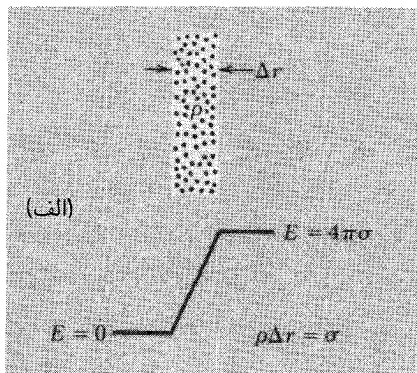
اما کدام E را اینجا بگذاریم، میدان خارج کره $E = 4\pi\sigma$ یا میدان داخل $E = 0$ ؟ جواب درست، که فوراً هم اثباتش می‌کنیم، میانگین دو میدان است:

$$dF = \frac{1}{2}(4\pi\sigma + 0)\sigma dA = 2\pi\sigma^2 dA \quad (30)$$

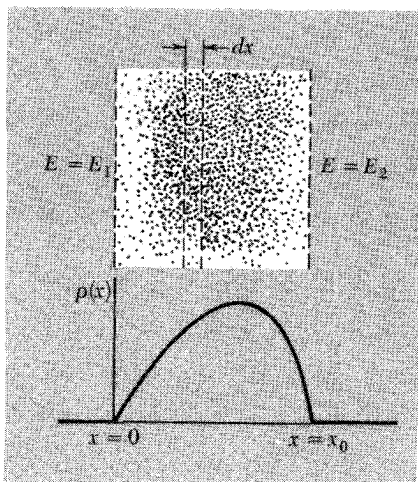
برای توجیه این میدان، باید مورد کلی‌تری را در نظر بگیریم، و این مورد باید واقعتر از یک لایهٔ بار سطحی باشد. ضخامت یک لایهٔ واقعی بار، صفر نیست. شکل ۱-۲۵ چند توزیع بار لایه‌ای دارای ضخامت را نشان می‌دهد. در هر نمونه، مقدار σ ، بار کل در واحد سطح لایه، یکسان است. این لایه‌ها ممکن است مقطعه‌های بخش کوچکی از سطح کره‌ی شکل ۱-۲۴، در مقیاسی که انحناى سطح قابل چشمپوشی است، باشند. اما برای بیان جامعتر، باید شدت میدان در سمت چپ را E_1 در نظر بگیریم (به‌جای میدان صفر داخل کره) و شدت میدان در سمت راست را E_2 فرض کنیم. قانون گاوس ایجاب می‌کند که برای σ مفروض در هر حالت داشته باشیم:

$$E_2 - E_1 = 4\pi\sigma \quad (31)$$

حالا این لایه را که میدان در آن به‌طور پیوسته از E_1 تا E_2 تغییر می‌کند و چگالی بار حجمی $\rho(x)$ از $x = 0$ تا $x = x_0$ وجود دارد، دقیقتر بررسی می‌کنیم (شکل ۱-۲۶). لایهٔ خیلی نازکتری به ضخامت $x_0 \ll dx$ را در نظر بگیرید که در واحد سطح دارای بار ρdx



شکل ۲۵-۱ کل تغییر میدان در یک لایه بار فقط بستگی به بار کل در واحد سطح دارد.



شکل ۲۶-۱ در لایه‌ای با چگالی $\rho(x)$ داریم
 $E(x + dx) - E(x) = 4\pi\rho dx$

است. نیروی وارد بر آن عبارت است از:

$$dF = E\rho dx \quad (۳۲)$$

بنابراین نیروی کل بر واحد سطح لایهٔ بار ما می‌شود:

$$F = \int_0^x E\rho dx \quad (۳۳)$$

اما قانون گاوس می‌گوید که dE تغییرات E در داخل لایهٔ نازک دقیقاً برابر است با $4\pi\rho dx$. بنابراین به جای ρdx در معادلهٔ ۳۳ می‌توانیم $dE/4\pi$ بگذاریم و انتگرال به صورت زیر درمی‌آید:

$$F = \frac{1}{4\pi} \int_{E_1}^{E_2} E dE = \frac{1}{8\pi} (E_2^2 - E_1^2) \quad (۳۴)$$

چون $E_2 - E_1 = 4\pi\sigma$ ، نتیجهٔ معادلهٔ ۳۴ را بعد از انتگرال‌گیری می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F = \frac{1}{4} (E_1 + E_2) \sigma \quad (۳۵)$$

همان‌طور که قول داده بودیم نشان دادیم که برای σ مفروض نیروی وارد بر واحد سطح یک لایهٔ بار را می‌توان برحسب میدان خارجی روی یک طرف لایه و میدان خارجی روی طرف دیگر لایه تعیین کرد.^۱ این مقدار تا وقتی که ضخامت لایه در مقایسه با کل سطح ناچیز باشد مستقل از این ضخامت است، و نیز مستقل از تغییرات $\rho(x)$ ، چگالی بار داخل لایه است.

جهت نیروی الکتریکی وارد بر یک جزء بار روی کره، چه بار مثبت باشد و چه بار منفی، حتماً رو به خارج است. اگر بارها از کره جدا نمی‌شوند، این نیروی رو به خارج باید با یک نیروی رو به داخل که در معادلهٔ ما منظور نشده موازنه شود تا بتواند حاملهای بار را سرجایشان نگه دارد. "غیر الکتریکی" خواندن چنین نیرویی خطاست. چون در ساختار آنها و انسجام ماده به‌طور کلی جاذبه و دافعهٔ الکتریکی نیروهای اساسی‌اند. تفاوت اینجاست که این نیروها تنها در فاصله‌های کوتاه، از اتم به اتم، یا الکترون به الکترون مؤثرند. در این مقیاس، بحث ما حکایت ذرات جدا از هم است. فرض کنید بادکنکی مثلاً به شعاع ۱۰ cm داشته باشیم که 20 esu بار منفی تا حد ممکن یکنواخت روی سطح خارجی آن پخش شده باشد. به این ترتیب یک توزیع بار سطحی با چگالی $\sigma = 20/400\pi = 0.16$ esu/cm^۲ داریم. نیروی خارجی مؤثر بر یک cm^۲ از بار سطحی

۱. توجه داشته باشید که این لزوماً همان میانگین داخل لایه نیست که کمیتی فاقد معنای خاص است.

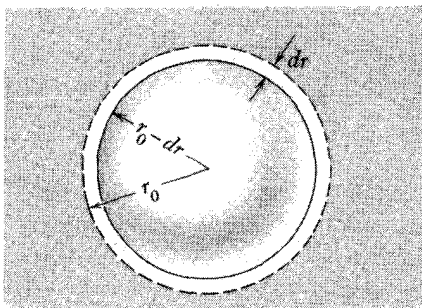
برابر است با $2\pi\sigma^2$ یا 16 dyne/cm^2 در واقع بار ما از حدود 4×10^{10} الکترون تشکیل شده است که به سطح لایه لاستیکی چسبیده‌اند. چون در هر یک cm^2 حدود 30 میلیون الکترون اضافی وجود دارد "دانه دانه" بودن توزیع بار هیچ نمودی ندارد. اما اگر می‌توانستیم به یکی از الکترونها اضافی نگاه کنیم می‌دیدیم فاصله‌اش با نزدیکترین همسایه تقریباً 10^{-4} cm است که در مقیاس اتمی فاصله بسیار زیادی است. این الکترون به یک مولکول لاستیک در آن نقطه چسبیده است، به‌طور الکتریکی چسبیده است مولکول لاستیک به مولکولهای لاستیک اطراف خودش چسبیده است و الکترون را بکشید، نیرویتان از این طریق به کل تکه لاستیک منتقل می‌شود. مگر اینکه الکترون را آنقدر محکم بکشید که از مولکول لاستیکی که به آن چسبیده است کنده بشود. این کاریک میدان الکتریکی چند هزار بار قویتر از میدان مثال ما لازم دارد.

۱۵-۱ انرژی وابسته به میدان الکتریکی

فرض کنید پوسته کروی بردار به آرامی فشرده شود به طوری که شعاعش از شعاع اولیه r_0 کوچکتر شود (شکل ۱-۲۷). برای این منظور باید در مقابل نیروی دافعه $2\pi\sigma^2$ دین بر هر cm^2 سطح، کار انجام بگیرد. اگر جا به جایی به اندازه dr باشد، کل کار انجام یافته برابر است با $(2\pi\sigma^2)(4\pi r_0^2) dr$ یا $8\pi^2 r_0^2 \sigma^2 dr$. این نشان می‌دهد که برای گرد هم آوردن دستگاه بار افزایشی در انرژی U ، که در بخش ۵-۱ درباره‌اش صحبت کردیم، لازم است:

$$dU = 8\pi^2 r_0^2 \sigma^2 dr \quad (36)$$

توجه کنید که میدان الکتریکی E چگونه تغییر کرده است. داخل پوسته‌ای به ضخامت dr میدان صفر بود و حالا $4\pi\sigma$ شده است. در شعاع بزرگتر از r_0 میدان بدون تغییر مانده است. در نتیجه ما میدانی به شدت $E = 4\pi\sigma$ به وجود آورده‌ایم که در ناحیه‌ای به حجم $4\pi r_0^2 dr$ حضور دارد. این کار را با صرف انرژی انجام دادیم که از رابطه ۳۶ به دست می‌آید. و اگر در آن به جای σ ،



شکل ۱-۲۷ منقبض کردن یک پوسته یا بادکنک کروی بردار.

$E/4\pi$ بگذاریم این طور نوشته می‌شود:

$$dU = \frac{E^2}{4\pi} 4\pi r^2 dr \quad (37)$$

این مثالی برای یک قضیه کلی است که فعلاً اثباتش نمی‌کنیم: انرژی پتانسیل یک دستگاه بار، U ، که کل کار لازم برای گرد هم آوردن بارهای دستگاه است از خود میدان قابل محاسبه است. به این ترتیب که به هر جزء حجم dv انرژی $(E^2/4\pi)dv$ نسبت بدهیم و در کل فضایی که میدان الکتریکی حضور دارد انتگرال‌گیری کنیم.

$$U = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{کل میدان}} E^2 dv \quad (38)$$

$E^2 \equiv \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ و البته:

ممکن است فکر کنید این انرژی در میدان "ذخیره" می‌شود. دستگاه که پایستار باشد، مسلم است که اگر بگذاریم بارها جدا شوند آن مقدار انرژی دوباره آزاد می‌شود، پس فکر خوبی است که فرض کنیم انرژی در این میان "یک جایی مانده است". توجیه ما وقتی درست از آب درمی‌آید که فکر کنیم انرژی، در جایی از فضا، با چگالی $E^2/4\pi$ برحسب erg/cm^3 ذخیره شده است. عیبی ندارد، اما واقعیت این است که ما هیچ جوری نمی‌توانیم انرژی ذخیره شده در یک سانتی‌متر مکعب خاص از فضا را، کاملاً مستقل از هر چیز دیگری، تعریف کنیم. فقط می‌توانیم انرژی کل را به طریق فیزیکی اندازه بگیریم، یعنی کار لازم برای آوردن بار از آرایشی به یک آرایش دیگر. همان‌طور که برای توصیف رفتار بارهای الکتریکی به جای قانون کولن از مفهوم میدان الکتریکی استفاده می‌شود، وقتی هم که به جای معادله ۹ معادله ۳۸ را برای بیان انرژی پتانسیل کل در یک دستگاه الکتروستاتیکی به‌کار می‌بریم، صرفاً نوع حساب و کتاب نگاه‌داشتن عوض می‌شود. بعضی وقتها تغییر دیدگاه، حتی اگر اول فقط تغییری در همین حد باشد، ممکن است الهام‌بخش مفاهیم جدید و عمیقتری باشد. مفهوم میدان الکتریکی به‌عنوان یک جوهر مستقل وقتی شکل می‌گیرد که رفتار دینامیکی اجسام باردار و تابش الکترومغناطیسی را مطالعه می‌کنیم.

اگر بخواهیم معادله ۳۸ را برای دستگاهی با بار نقطه‌ای به‌کار ببریم، به دردمر می‌افتم، یعنی وقتی که یک بار متناهی q با ابعاد صفر داشته باشیم. q را در مبدأ مختصات بگذاریم. در نزدیکی مبدأ E^2 به q^2/r^4 نزدیک می‌شود. با توجه به اینکه داریم: $dv = 4\pi r^2 dr$ ، جمله زیر انتگرال $E^2 dv$ مثل dr/r^2 رفتار می‌کند، و انتگرال ما در حد $r = 0$ ، بینهایت می‌شود. معنی‌اش

این است که بینهایت انرژی لازم است تا بار معینی را در حجم صفر جمع کنیم. حقیقتی است اما به ما کمکی نمی‌کند. در جهان واقعی ما با ذراتی مثل الکترون و پروتون سروکار داریم. اینها آنقدر کوچک‌اند که در بیشتر موارد، وقتی برهم‌کنش الکتریکی‌شان را در نظر می‌گیریم می‌توانیم آنها را نقطه‌ای فرض کنیم و ابعادشان را نادیده بگیریم. اینکه درست کردن چنین ذره‌ای چقدر انرژی می‌خواهد سوآلی است که از حیطة الکترومغناطیس کلاسیک خارج است. ما باید ذرات را همان‌طور که حاضر و آماده به ما عرضه شده بررسی کنیم. انرژی که ما با آن سروکار داریم کار انجام گرفته برای این طرف و آن طرف بردن آنهاست.

تفاوت این دو انرژی معمولاً واضح است. دو ذره باردار، مثلاً یک پروتون و یک پيون منفی در نظر بگیرید. فرض کنید \mathbf{E}_p میدان الکتریکی پروتون و \mathbf{E}_π میدان الکتریکی پيون باشد. میدان الکتریکی کل چنین است $\mathbf{E} = \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_\pi$ و $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ برابر است با $E_p^2 + E_\pi^2 + 2\mathbf{E}_p \cdot \mathbf{E}_\pi$. بنابر معادله ۳۸ انرژی کل میدان الکتریکی دستگاه این دو بار برابر است با

$$U = \frac{1}{4\pi} \int E^2 dv$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int E_p^2 dv + \frac{1}{4\pi} \int E_\pi^2 dv + \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{E}_p \cdot \mathbf{E}_\pi dv \quad (39)$$

مقدار انتگرال اول ویژگی هر پروتون منفرد است و یکی از ثابتهای طبیعت است که با حرکت دادن پروتون تغییری نمی‌کند. انتگرال دوم هم که تنها میدان الکتریکی پيون را در خود دارد همین‌طور است. این انتگرال سوم است که مستقیماً به ما مربوط می‌شود چون انرژی را بیان می‌کند که لازم است دستگاهی را گرد آورد که می‌دانیم اجزایش یک پروتون و یک پيون است.

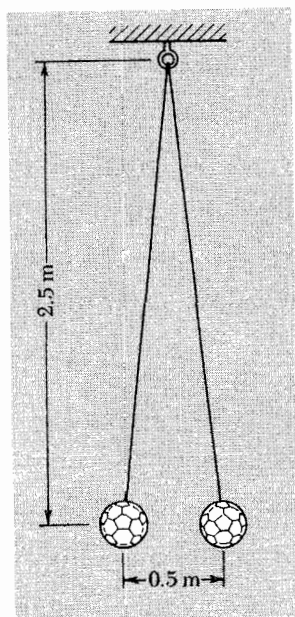
این تفاوت وقتی از بین می‌رود که دو ذره برهم‌کنشی چنان قوی داشته باشند که ساختار الکتریکی یکی با حضور دیگری واپیچیده شود. با علم به اینکه هر دو ذره در اصل مرکب‌اند (پروتون از سه کوارک و پيون از دو کوارک تشکیل می‌شود) در جریان نزدیک کردن این دو ذره چنین اتفاقی دور از انتظار نیست. واقعیت این است که تا فاصله 10^{-13} سانتی‌متری هیچ اتفاقی نمی‌افتد. در فاصله‌های کوتاهتر، برای ذراتی مثل پروتون و پيون که برهم‌کنش قوی دارند نیروهای غیرالکتریکی حاکم بر صحنه‌اند.

به همین دلیل است که لزومی ندارد جمله‌های مربوط به ”خود-انرژی“ مثل دو جمله اول انتگرال معادله ۳۹ را در انرژی مربوط به دستگاه ذرات باردار بنیادی وارد کنیم. در واقع می‌خواهیم حذفشان کنیم. یعنی وقتی که توزیع واقعی بارهای بنیادی مجزا (الکترون روی بادکنک لاستیکی) را با یک توزیع بار کاملاً پیوسته عوض می‌کنیم، دقیقاً همین کار را کرده‌ایم.

مسائل

۱-۱ در حوزه ذرات بنیادی واحد طبیعی جرم، جرم یک نوکلئون است، یعنی یک پروتون یا یک نوترون که سنگ بنای اصلی جرم دار برای ماده معمولی اند. با فرض اینکه جرم نوکلئون $g = 1.6 \times 10^{-24}$ و ثابت گرانشی $G = 6.7 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gs}$ است، جاذبه گرانشی دو پروتون را با دافعه الکتروستاتیکی دو پروتون مقایسه کنید. خواهید دید چرا گرانش را نیرویی بسیار ضعیف خواندیم. فاصله بین دو پروتون در هسته هلیوم در یک لحظه می تواند 10^{-13} cm باشد. دافعه الکتریکی بین دو پروتون در چنین فاصله ای چه اندازه است؟ برحسب نیوتون و پوند حساب کنید. نیروی هسته ای که بین هر زوج هادرون (از جمله نوترون و پروتون) در فاصله به این نزدیکی عمل می کند، حتی از نیروی دافعه الکتریکی هم بیشتر است. ۱-۲ با این فرض غیر واقعی که هیچ ذره باردار دیگری در اطراف نیست، در چه فاصله ای زیر یک پروتون، نیروی رو به بالای وارد بر یک الکترون با وزن الکترون برابر می شود (جرم الکترون تقریباً 10^{-27} گرم است).

۱-۳ دو توپ والیبال، هر یک به جرم 300 کیلوگرم که با طنابهای نایلونی بسته شده اند با یک مولد الکتریسیته ساکن باردار و مطابق شکل آویزان می شوند. به فرض مساوی بودن بارها، روی هر توپ چند کولن بار هست (یادآوری: وزن یک جرم 1 کیلوگرمی روی زمین 9.8 نیوتون است، همان طور که وزن یک جرم 1 گرمی 980 دین است).



شکل مسئله ۱-۳.

۴-۱ در هر رأس یک مربع یک ذره به بار q می‌گذاریم. در مرکز مربع یک بار نقطه‌ای به اندازه Q با علامت مخالف q به طور ثابت قرار دارد. مقدار Q چقدر باشد تا نیروی کل وارد بر هر یک از چهار ذره صفر باشد؟ با این مقدار Q ، چنانچه نیروی دیگری در کار نباشد، دستگاه در حال تعادل است. به نظر شما این تعادل پایدار است؟

جواب: $Q = 957q$

۵-۱ یک میله نازک پلاستیکی به شکل نیم‌دایره‌ای به شعاع R در آمده و بار Q در طول آن به طور یکنواخت توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی در مرکز نیم‌دایره را پیدا کنید.

۶-۱ سه بار مثبت A, B, C به ترتیب به اندازه $10^{-6} \times 3$ کولن، $10^{-6} \times 2$ کولن و $10^{-6} \times 2$ کولن در سه رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع 2 متر قرار دارند (الف) نیروی وارد بر هر بار چند نیوتون است؟

(ب) میدان الکتریکی در مرکز مثلث چند کولن/نیوتون است؟

جواب: (الف) 2.34 نیوتون بر A ، 1.96 نیوتون بر B و C .

(ب) 6.74×10^5 نیوتون بزرگولن.

۷-۱ آرایشی هندسی برای دو الکترون و یک پروتون پیدا کنید به طوری که انرژی پتانسیل دستگاه دقیقاً صفر باشد. در چند تا از این آرایشها سه ذره روی یک خط راست قرار دارند؟

۸-۱ برای یک بلور یونی یک‌بعدی نامتناهی، یعنی یک ردیف بار به اندازه e که به فاصله یکسان از هم قرار گرفته‌اند، انرژی پتانسیل هر یون را حساب کنید.

[راهنمایی: بسط سری $\ln(1+x)$ می‌تواند مفید باشد.]

۹-۱ یک حجم کروی به شعاع a با چگالی یکنواخت ρ از بار پر شده است می‌خواهیم انرژی پتانسیل U این کره باردار را حساب کنیم، یعنی مقدار کاری که برای جمع‌آوری این بارکروی لازم است. با توجه به اینکه میدان خارج یک توزیع بارکروی همان میدانی است که اگر تمام بار در مرکز کره متمرکز باشد خواهیم داشت، این کار را با ساختن لایه به لایه کره حساب کنید. نتیجه را بر حسب بارکل کره، Q بیان کنید.

جواب: $U = \frac{3}{5} (Q^2/a)$

۱۰-۱ در اوایل این قرن خیلها معتقد بودند جرم سکون الکترون منشأ صرفاً الکتریکی دارد، به خصوص وقتی که نظریه نسبیت خاص، هم‌ارزی جرم و انرژی را ثابت کرد. الکترون را توپ بارداری با چگالی بار حجمی ثابت فرض کنید که حداکثر شعاعش r_0 باشد. با استفاده از نتیجه مسئله ۹-۱ انرژی پتانسیل این دستگاه را مساوی mc^2 قرار بدهید و ببینید برای r_0 چه به دست

می‌آید. یکی از نقایص این مدل روشن است: چیزی نداریم که بارها را در کنار هم نگه دارد!

۱۱-۱ بار 1 esu در مبدأ قرار دارد. باری به اندازه 2 esu - در نقطه $x = 1$ روی محور x است.

(الف) نقطه‌ای روی محور x پیدا کنید که در آن میدان الکتریکی صفر باشد.

(ب) نقطه‌ای، ولو تقریبی، روی محور y پیدا کنید که در آن میدان الکتریکی موازی محور x باشد. [برای این قسمت می‌توانید از ماشین حساب کمک بگیرید].

۱۲-۱ یک مسئله دیگر برای ماشین حساب شما: دو یون مثبت و یک یون منفی در سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند. یک یون دیگر را کجا می‌توانیم بگذاریم که نیروی وارد بر آن صفر باشد؟ باز هم از این نقطه‌ها وجود دارد؟

۱۳-۱ عبور یک ابر رعدوبرق‌ساز میدان الکتریکی قائمی در جو ایجاد می‌کند که روی زمین شدت آن $۱ \text{ } \times 10^6$ استاولت بر سانتی‌متر اندازه‌گیری می‌شود.

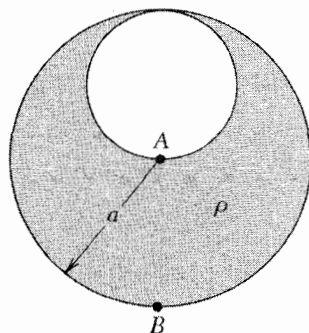
(الف) این ابر در هر یک سانتی‌متر مربع سطح افقی چند esu بار دارد؟

(ب) فرض کنید قطره‌های آبی به قطر یک میلی‌متر در ابر وجود دارد که می‌تواند 2.5 cm بارندگی ایجاد کند، و همین قطره‌ها هستند که بار الکتریکی دارند. شدت میدان الکتریکی در سطح هر قطره چقدر است؟

۱۴-۱ بار Q به‌طور یکنواخت در حلقه نازکی به شعاع b و به مرکز مبدأ مختصات که در صفحه xy واقع است، توزیع شده است. نقطه‌ای روی محور z مثبت پیدا کنید که در آن شدت میدان الکتریکی بیشترین مقدار را داشته باشد.

۱۵-۱ یک توزیع بار کروی در نظر بگیرید که چگالی آن از $r = 0$ تا $r = a$ مقدار ثابت ρ است و بعد از $r = a$ چگالی بار صفر است. میدان الکتریکی را برای تمام مقادیر r ، هم کوچکتر از a و هم بزرگتر از a ، پیدا کنید. آیا وقتی از سطح توزیع بار در $r = a$ می‌گذریم تغییر ناپیوسته‌ای در میدان وجود دارد؟ آیا در $r = 0$ تغییر ناپیوسته‌ای هست؟

۱۶-۱ کره‌ای به شعاع a از بار مثبتی با چگالی یکنواخت ρ پر شده است. بعد، کره کوچکتری به شعاع $a/2$ مطابق شکل از آن کنده می‌شود و خالی می‌ماند. جهت و اندازه میدان الکتریکی در نقاط A و B را پیدا کنید.



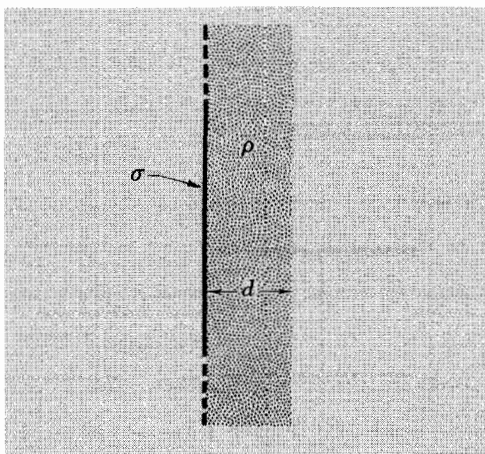
شکل مسئله ۱۶-۱.

۱۷-۱ الف) بار نقطه‌ای q در مرکز مکعبی به یال d قرار دارد. مقدار $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ روی یک وجه مکعب چقدر است؟

الف) بار q به یکی از گوشه‌های مکعب منتقل می‌شود. حالا شار میدان \mathbf{E} که از هر وجه مکعب می‌گذرد چقدر است؟

۱۸-۱ دو صفحه نامتناهی، دارای بار سطحی به چگالی $\sigma = 6 \text{ esu/cm}^2$ و $\sigma = -4 \text{ esu/cm}^2$ به فاصله 2 cm از هم به طور موازی قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی این دستگاه را بررسی کنید. حالا فرض کنید صفحه‌ها به جای اینکه موازی باشند یکدیگر را عمود بر هم قطع کنند. نشان دهید میدان در هر یک از چهار ناحیه‌ای که این صفحات در فضا ایجاد می‌کنند یکسان است.

۱۹-۱ روی یک صفحه نامتناهی باری با چگالی سطحی یکنواخت σ توزیع شده است. مجاور آن و موازی با آن یک لایه بار به ضخامت d و چگالی بار حجمی ρ قرار دارد. همه بارها ساکن‌اند. \mathbf{E} را در همه جا پیدا کنید.



شکل مسئله ۱۹-۱.

۲۰-۱ توزیع باری به صورت یک استوانه مستدیر، مثل یک لوله دراز باردار در نظر بگیرید. ثابت کنید داخل لوله میدان صفر است. ثابت کنید میدان در خارج از لوله همان است که اگر همه بار روی محور استوانه بود داشتیم. آیا اگر لوله چهارگوشی داشتیم که باری با چگالی سطحی ثابت روی آن توزیع شده بود، باز هم همین حکم صادق بود؟

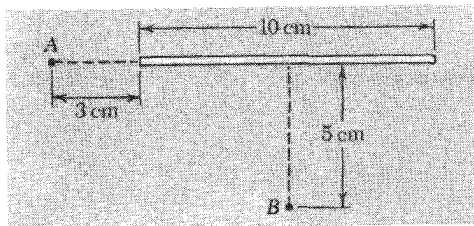
۲۱-۱ اتم هیدروژن خنثی در حالت معمولی کم و بیش مثل توزیع باری رفتار می‌کند که تشکیل شده از یک بار نقطه‌ای e که بار منفی‌ای با چگالی $\rho(r) = Ce^{-2r/a_0}$ آن را احاطه کرده است. در این رابطه a_0 شعاع بور برابر است با $10^{-8} \times 53 \text{ cm}$ و C مقدار ثابتی است که

بار منفی کل را دقیقاً مساوی e می‌کند. مقدار کل بار در داخل کره‌ای به شعاع a_0 چقدر است؟ شدت میدان الکتریکی در این فاصله از هسته چقدر است؟

۱-۲۲ سه ورقه باردار A ، B ، و C را در نظر بگیرید. سه ورقه موازی‌اند و B پایینتر از A و C پایینتر از B قرار دارد. روی هر ورقه بار سطحی با چگالی یکنواخت: 4 esu/cm^2 روی A ، 7 esu/cm^2 روی B و -3 esu/cm^2 روی C توزیع شده است. (این چگالی بار مربوط به هر دو طرف ورقه‌هاست.) نیروی الکتریکی وارد بر هر ورقه چند dyne/cm^2 است؟ ببینید که کل نیروی وارد بر سه ورقه صفر است.

جواب: $32\pi \text{ dyne/cm}^2$ بر A ؛ $14\pi \text{ dyne/cm}^2$ بر B ؛ $18\pi \text{ dyne/cm}^2$ بر C .
 ۱-۲۳ بار Q روی سطح کره‌ای به شعاع R به طور یکنواخت توزیع شده است. کره‌ای به چه بزرگی می‌تواند 90% انرژی ذخیره شده در میدان الکتروستاتیکی چنین توزیع باری را در خود داشته باشد؟
 جواب: کره‌ای به شعاع R .

۱-۲۴ میله نازکی به طول 10 cm حامل باری به مقدار 8 esu است که به طور یکنواخت در طول آن توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی در هر یک از نقطه‌های A و B را که در شکل نشان داده شده پیدا کنید.



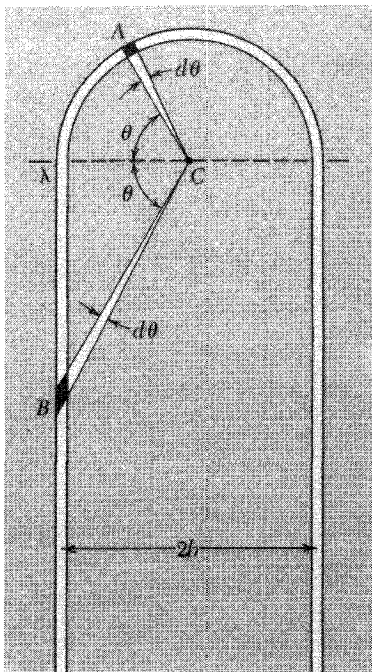
شکل مسئله ۱-۲۴.

۱-۲۵ رابطه ۱-۲۷ در دستگاه SI چنین نوشته می‌شود:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r}$$

که r بر حسب متر، λ بر حسب متر/کولن و E بر حسب کولن/نیوتون است. خط نیروی مربوط به یک جریان مستقیم ولتاژ بالا را که از دو رسانای موازی به فاصله ۳ متر از یکدیگر ایجاد می‌شود در نظر بگیرید. خطهای نیرو بارهای مخالف هم دارند. اگر شدت میدان الکتریکی در وسط فاصله بین آنها 15000 N/C باشد، چه اندازه بار مثبت اضافی در فاصله ۱ کیلومتری از رسانای مثبت باقی می‌ماند؟
 جواب: $C \times 10^{-4} \times 26.6$.

۲۶-۱ دو میله نازک طولی به فاصله $2b$ ، با قطعه‌ای به شکل نیم‌دایره به شعاع b ، مطابق شکل به هم متصل‌اند. باری به چگالی خطی λ در تمام طول رشته پخش می‌شود. نشان دهید که میدان E این توزیع بار در نقطه C صفر می‌شود. برای این کار سهم جزء واقع در A را با سهم جزء واقع در B ، که با مقادیر مساوی θ و $d\theta$ تعریف می‌شود، مقایسه کنید.



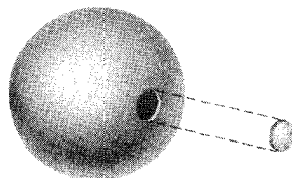
شکل مسئله ۲۶-۱.

۲۷-۱ یک صفحه شطرنج نامتناهی به ضلع s ، در مرکز هر خانه سفید بار e و در مرکز هر خانه سیاه بار $-e$ دارد. می‌خواهیم کار W لازم را برای انتقال یک بار از محلش روی صفحه تا فاصله بینهایت محاسبه کنیم. این انتقال در مسیر عمود بر صفحه شطرنج انجام می‌گیرد. با فرض اینکه W متناهی است (که البته فرض موجهی است اما اثباتش زیاد آسان نیست) این کار مثبت است یا منفی؟ برای به دست آوردن یک مقدار تقریبی W انتقال بار از خانه مرکزی یک صفحه 7×7 را در نظر بگیرید. (فقط ۹ جمله متفاوت در این حاصل جمع دخالت دارند.) یا برنامه‌ای بنویسید و کار لازم برای انتقال بار مرکزی از یک آرایش خیلی بزرگتر، مثلاً صفحه 101×101 را محاسبه کنید. مقایسه نتیجه محاسبه برای صفحه 101×101 با نتیجه مربوط به صفحه 99×99 و صفحه 103×103 ایده‌ای از آهنگ گرایش به سمت مقدار مربوط به آرایش نامتناهی را به دست می‌دهد.

۲۸-۱ سه پروتون و سه نوترون را در رئوس یک هشت وجهی منتظم به یال a قرار دارند. می‌خواهیم انرژی دستگاه را پیدا کنیم، یعنی کار لازم برای کنار هم آوردن بارها با شروع از وضعیتی که بارها بسیار از هم دورند. دو آرایش اساساً متفاوت وجود دارد. انرژی هر کدام چقدر است؟

جواب: $3.879e^2/a$ ، $-2.121e^2/a$.

۲۹-۱ در شکل زیر یک پوستهٔ کروی باردار به شعاع a می‌بینید که چگالی سطحی بار آن σ است، یک قطعهٔ کوچک دایره‌ای به شعاع $a \ll b$ از آن کنده می‌شود. جهت و بزرگی میدان در مرکز روزنه چقدر است؟ جواب از دو راه به دست می‌آید. می‌توانید با انتگرال‌گیری روی توزیع بار باقی‌مانده حاصل جمع سهم‌های همهٔ اجزاء را در میدان نقطهٔ مورد نظر به دست بیاورید. یا اینکه، از اصل برهم‌نهی استفاده کنید، و اثر قطعهٔ جدا شده را، عملاً مثل یک قرص کوچک در نظر بگیرید. به ارتباط این نتیجه با بحث ما در مورد نیروی وارد بر یک بار سطحی توجه کنید. شاید این هم راه سومی برای رسیدن به جواب باشد.



شکل مسئله ۲۹-۱.

۳۰-۱ دو پوستهٔ کروی هم‌مرکز به شعاع a و b ، $(b > a)$ ، به ترتیب دارای بار Q و $-Q$ هستند. بار به‌طور یکنواخت توزیع شده است. انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی این سیستم را پیدا کنید.

۳۱-۱ مثل بادکنک لاستیکی بارداری که در صفحهٔ ۴۸ توصیف شد، فرض کنید که بر تمام نقطه‌های یک حباب صابون یک نیروی الکتریکی رو به بیرون وارد می‌شود. اگر روی حبابی به شعاع R بار کل Q را داشته باشیم، اندازهٔ نیروی برآیندی که می‌خواهد یک نیمهٔ نیمکروی حباب را بکشد و از نیمهٔ دیگر جدا کند، چقدر می‌شود؟ (چون این نیرو تقسیم بر $2\pi R$ باید بیشتر از کشش سطحی لایهٔ حباب باشد، رفتار جالبی انتظار می‌رود!)

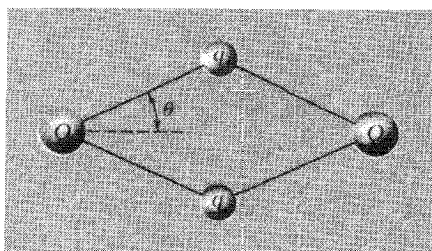
جواب: $\frac{Q^2}{8R^2}$.

۳۲-۱ فرض کنید سه ذره با بار مثبت مجبورند روی یک مسیر دایره‌ای ثابت حرکت کنند. اگر همهٔ بارها مساوی باشند بدیهی است که آرایش تعادل یک آرایش متقارن است که در آن ذرات روی دایره به فاصلهٔ 120° از هم قرار بگیرند. فرض کنید دو تا از بارها مساوی‌اند و آرایش تعادلی چنان است که این دو بار با هم به جای 120° ، 90° فاصله دارند. در این صورت اندازهٔ نسبی بار سوم چقدر است؟

جواب: 3.154 .

۳۳-۱ فرض کنید کره‌ای به شعاع a پر از بار منفی با چگالی یکنواخت است و کل بار برابر بار دو الکترون است. درون این دریای بار منفی دو پروتون جا بدهید و فرض کنید از حضور پروتونها که بگذریم توزیع بار منفی یکنواخت است. پروتونها کجا باید قرار بگیرند تا نیروی وارد بر هر یک از آنها صفر باشد؟ (شگفت‌انگیز است که این تصویر، تقلیدی از تصویر واقعی مولکول هیدروژن است؛ این معجزه را که ابر الکترونی در مولکول روی پروتونها فرو نمی‌ریزد، مکانیک کوانتومی توضیح می‌دهد.)

۳۴-۱ چهار جسم با بار مثبت، دو تا با بار Q و دو تا با بار q ، با چهار نخ غیرقابل کشش به طولهای مساوی به هم متصل‌اند. اگر نیرویی از خارج وارد نشود دستگاه مطابق شکل در حال تعادل است. نشان دهید $\tan^2 \theta = Q^2/q^2$. این کار را از دو راه می‌توانید انجام بدهید. می‌توانید نشان بدهید که این رابطه برقرار است اگر کل نیروی وارد بر هر جسم، یعنی جمع برداری کشش نخ و دافعه الکتریکی، صفر باشد. یا اینکه عبارت مربوط به انرژی U دستگاه را بنویسید (مثل رابطه ۷-۱ فقط به جای سه بار، چهار بار داریم) و آن را کمینه کنید.



شکل مسئله ۳۴-۱.

۳۵-۱ میدان الکتریکی دو پروتون را به فاصله b cm از هم در نظر بگیرید. طبق معادله ۳۸-۱ (که گفتیم اما اثباتش نکردیم) انرژی پتانسیل دستگاه از رابطه زیر به دست می‌آید

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathbf{E}^2 dv = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 dv$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathbf{E}_1^2 dv + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathbf{E}_2^2 dv + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dv$$

که در آن \mathbf{E}_1 میدان یک ذره تنها و \mathbf{E}_2 میدان یک ذره تنها دیگری است. اولین انتگرال سمت راست را باید "خود-انرژی الکتریکی" یک پروتون بنامیم؛ ویژگی ذاتی برای هر ذره، که به اندازه و ساختار پروتون مربوط می‌شود. ما همیشه در محاسبه انرژی پتانسیل یک دستگاه بار این جمله را نادیده می‌گیریم چون فرض می‌کنیم همیشه ثابت باقی می‌ماند؛ بر انتگرال دوم نیز همین می‌رود.

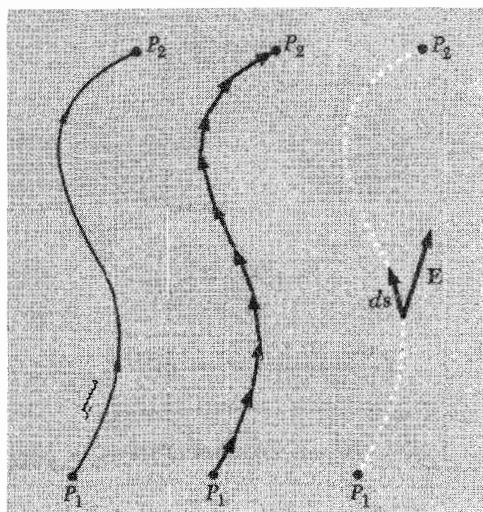
در انتگرال سوم فاصله بین بارها دخیل است. محاسبه انتگرال سوم مشکل نیست اگر به طریق زیر عمل کنید. انتگرال را در دستگاه مختصات قطبی کروی حساب کنید. یکی از پروتونها را در مبدأ و دیگری را روی محور قطبی در نظر بگیرید و ابتدا روی r انتگرال گیری کنید. به این ترتیب با محاسبه مستقیم می توانید نشان بدهید که مقدار انتگرال سوم e^2/b است، از قبل هم می دانستیم که کار لازم برای آوردن دو پروتون از بینهایت دور تا فاصله b از هم، اینقدر است. بنابراین شما درستی رابطه ۳۸ را برای این مورد تحقیق می کنید، و با استفاده از اصل برهم نهی می توانید استدلال کنید که رابطه ۳۸ باید انرژی لازم برای گردآوری هر دستگاه بار را بدهد.

پتانسیل الکتریکی

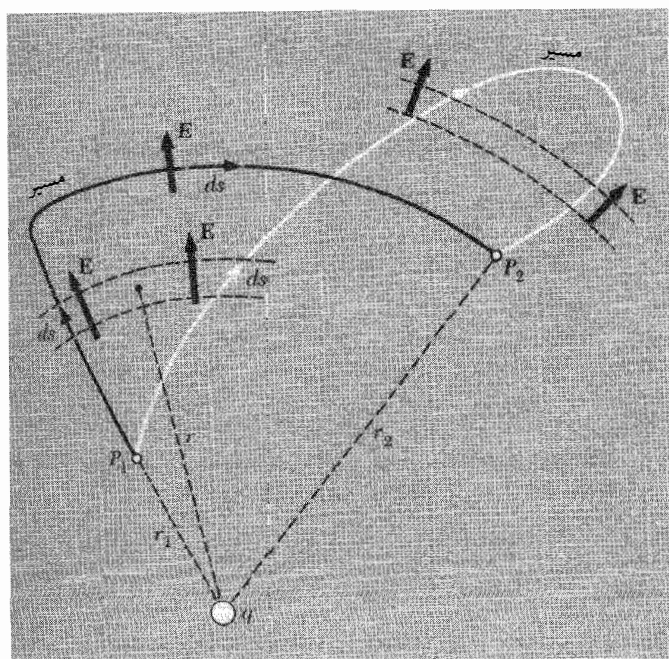
۱-۲ انتگرال خطی میدان الکتریکی

فرض کنید \mathbf{E} میدان یک توزیع بار ساکن باشد. P_1 و P_2 هم دو نقطه دلخواه در میدان باشند. انتگرال خطی E بین این دو نقطه $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ است که در امتداد مسیری از P_1 به P_2 مطابق شکل ۱-۲ گرفته می‌شود. این کار یعنی اینکه: مسیر انتخابی را به قطعه‌های کوچکی تقسیم کنید؛ هر قطعه را با برداری که دو سر آن قطعه را به هم وصل می‌کند نشان بدهید؛ ضرب عددی بردار آن قطعه از مسیر و میدان \mathbf{E} در آنجا را به دست بیاورید؛ این حاصلضربها را برای کل مسیر با هم جمع کنید. طبق معمول انتگرال باید حد این مجموع در نظر گرفته شود وقتی که قطعه‌ها بی‌اندازه کوتاه و تعدادشان بی‌اندازه زیاد باشد.

میدان یک بار نقطه‌ای q و مسیری از نقطه P_1 تا P_2 را در این میدان در نظر بگیریم. دو مسیر متفاوت در شکل ۲-۲ نشان داده شده است. محاسبه انتگرال خطی \mathbf{E} در مسیر A آسان است، این مسیر از یک قطعه شعاعی که از P_1 دور می‌شود، و یک قوس به شعاع r_2 تشکیل شده است. در قطعه شعاعی مسیر A ، \mathbf{E} و $d\mathbf{s}$ موازی‌اند. اندازه \mathbf{E} ، q/r^2 است، و $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ می‌شود $(q/r^2)ds$. بنابراین انتگرال خطی در این قطعه



شکل ۱-۲ تقسیم مسیر به اجزای کوچک ds .



شکل ۲-۲ میدان الکتریکی E ناشی از یک بار نقطه‌ای مثبت q است. انتگرال خطی E از P_1 تا P_2 در امتداد مسیر A برابر است با $q(1/r_1 - 1/r_2)$. اگر این انتگرال را در مسیر B ، یا هر مسیر دیگری از P_1 تا P_2 محاسبه کنیم همین نتیجه به دست می‌آید.

$$\int_r^{r_2} \frac{q dr}{r^2} = q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (۱)$$

است. در شاخهٔ دوم مسیر A که بخش قوسی است نتیجه صفر می‌شود چون \mathbf{E} در همهٔ نقطه‌های قوس بر $d\mathbf{s}$ عمود است. بنابراین کل انتگرال خطی برابر می‌شود با

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (۲)$$

حالا مسیر B را ببینیم. چون \mathbf{E} شعاعی است و اندازه‌اش q/r^2 است، $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (q/r^2) dr$ حتی وقتی که سمتگیری $d\mathbf{s}$ شعاعی نباشد. قطعه‌های متناظر مسیر A و مسیر B که در نمودار نشان داده شده در انتگرال سهم یکسان دارند. قسمتی از مسیر B که فراتر از شعاع r_2 پیچ می‌خورد اثر کلی‌اش صفر است؛ چون سهمهای دو نیمهٔ متناظر رو به داخل و رو به خارج یکدیگر را خنثی می‌کنند. برای کل انتگرال خطی، مسیر B عیناً همان حاصلی را به دست می‌دهد که مسیر A . چون مسیر B که در نظر گرفتیم هیچ ویژگی خاصی نداشت، معادلهٔ ۱ باید برای هر مسیری از P_1 تا P_2 برقرار باشد.

اینجا در اصل بحث بخش ۱-۵ را به بیانی دیگر استدلال کرده‌ایم. در آنجا بحث ما مربوط به کار انجام شده برای نزدیک کردن یک بار نقطه‌ای به بار نقطه‌ای دیگری بود. اما حالا سروکار ما با میدان الکتریکی کل تولید شده با هر توزیع باری است. یک قدم دیگر که جلو برویم به نتیجهٔ مهمی می‌رسیم. انتگرال خطی مجموع میدانها برابر است با حاصل جمع تک تک انتگرالهای خطی میدانها. یا، به عبارت دقیقتر، اگر داشته باشیم $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$ خواهیم داشت

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{s} + \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{s} + \dots \quad (۳)$$

که در آن همهٔ انتگرال‌گیرها را در یک مسیر انجام داده‌ایم. حالا هر میدان الکتروستاتیکی را می‌توانیم مجموع تعدادی (بلکه بینهایت) میدان ناشی از بار نقطه‌ای در نظر بگیریم، همان‌طور که در رابطهٔ ۱-۱۴ یا ۱-۱۵ بیان شده است. بنابراین اگر انتگرال خطی از P_1 تا P_2 برای هر یک از میدانهای بار نقطه‌ای $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots$ مستقل از مسیر باشد، میدان کل \mathbf{E} هم باید همین خاصیت را داشته باشد:

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \text{ برای هر میدان الکتروستاتیکی } \mathbf{E} \text{ در تمام مسیرهای بین } P_1 \text{ و } P_2, \text{ مقدار یکسان دارد.} \quad (۴)$$

نقطه‌های P_1 و P_2 ممکن است بر هم منطبق شوند. در این صورت تمام مسیرها منحنیهای بسته‌اند از جمله مسیرهایی به طول صفر. این ما را به نتیجه زیر می‌رساند:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \text{ خطی انتگرال خطی} \quad (5)$$

در هر مسیر بسته صفر است.

منظور از میدان الکتروستاتیکی، به عبارت دقیق، میدان الکتریکی بارهای ساکن است. بعداً با میدانهای الکتریکی ای روبه‌رو می‌شویم که در آنها انتگرال خطی مستقل از مسیر نیست. چنین میدانهایی معمولاً مربوط به بارهایی هستند که با سرعت در حرکت‌اند. فعلاً می‌توانیم بگوییم، اگر بارهای چشمه به اندازه کافی آهسته حرکت کنند میدان \mathbf{E} طوری خواهد بود که $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ عملاً مستقل از مسیر می‌شود البته اگر خود \mathbf{E} با زمان تغییر کند، در $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ باید میدانی تلقی شود که در لحظه مفروض در تمام طول مسیر وجود دارد. با این تلقی است که صحبت از انتگرال خطی در یک میدان الکتروستاتیکی متغیر معنی دارد.

۲-۲ اختلاف پتانسیل و تابع پتانسیل

چون در میدان الکتروستاتیکی، انتگرال خطی مستقل از مسیر است، می‌توانیم با استفاده از آن یک کمیت نرده‌ای ϕ_{21} را، بدون مشخص کردن هیچ مسیر به خصوصی تعریف کنیم:

$$\phi_{21} = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (6)$$

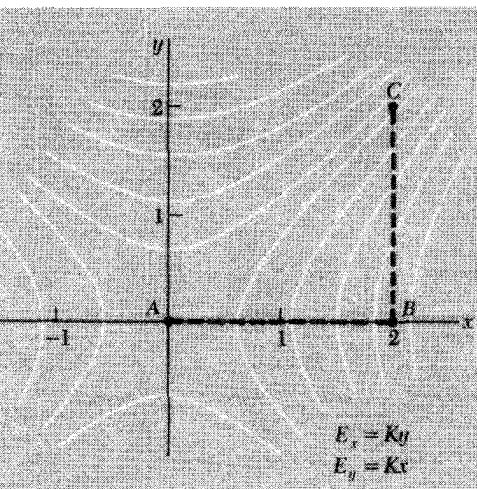
بنابراین ϕ_{21} کار انجام شده به‌ازای واحد بار، برای انتقال بار مثبت از P_1 به P_2 در میدان \mathbf{E} است. پس ϕ_{21} یک تابع نرده‌ای تک‌مقدار از دو وضعیت P_1 و P_2 است. این تابع را اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه می‌نامیم.

در دستگاه یکاهای CGS اختلاف پتانسیل برحسب erg/esu سنجیده می‌شود. این یکا هم برای خودش اسمی دارد: ایستاولت ("ایستا" از الکتروستاتیک گرفته شده است). ولت واحد اختلاف پتانسیل در دستگاه یکاهای SI است که در آن یکای بار، کولن و یکای انرژی، ژول است. یک ژول (10^7 ارگ) کار لازم است تا یک کولن بار از نقطه‌ای به نقطه دیگری که با آن یک ولت اختلاف پتانسیل دارد منتقل شود. رابطه دقیق واحدهای الکتریکی دستگاه CGS و دستگاه SI در پیوست ه داده شده است. در این رابطه‌ها جدیدترین تعریف رسمی متر برحسب سرعت نور را

در نظر گرفته‌ایم. ما به این رابطه‌های دقیق در حال حاضر نیازی نداریم. معمولاً دو رابطه تقریبی برای ما کافی است: یک کولن معادل 3×10^9 esu است. یک ولت معادل $1/300$ ایستاولت است. از برکت اینکه سرعت نور 3×10^8 متر بر ثانیه است این رابطه‌ها با دقت بیشتر از 10^6 درصد صادق‌اند.

فرض کنید P_1 را در یک جایگاه مرجع ثابت نگه داریم. پس ϕ_{P_1} فقط تابعی از P_2 است، یعنی تابعی از مختصات مکانی x, y, z . اگر یادمان بماند که این تعریف متضمن یک نقطه مرجع P_1 است، می‌توانیم ϕ_{P_1} را بدون شاخص فقط به صورت $\phi(x, y, z)$ بنویسیم. می‌توانیم بگوییم ϕ پتانسیل وابسته به میدان برداری \mathbf{E} است. ϕ یک تابع نرده‌ای از مکان، یا یک میدان نرده‌ای است (این دو یک معنی دارند). مقدار ϕ در یک نقطه صرفاً یک عدد است (برحسب واحد کار به ازای واحد بار) و هیچ جهتی ندارد. اگر میدان برداری \mathbf{E} معلوم باشد، تابع پتانسیل ϕ هم معلوم است، البته یک ثابت اختیاری جمع‌پذیر هم در کار است که ناشی از اختیار ما در انتخاب P_1 است.

به‌عنوان مثال، پتانسیل مربوط به میدان الکتریکی شکل ۲-۳ را پیدا کنیم. مؤلفه‌های میدان عبارت‌اند از $E_x = Ky$ ، $E_y = Kx$ و $E_z = 0$ که K مقداری ثابت است. چنین میدان الکتروستاتیکی وجود دارد. بعضی از خط‌های میدان در شکل نشان داده شده‌اند. چون $E_z = 0$ ، پتانسیل مستقل از z خواهد بود و ما تنها باید صفحه xy را در نظر بگیریم. فرض کنید x_1 و y_1 مختصات P_1 و x_2 و y_2 مختصات P_2 باشند. اگر P_1 را در مبدأ مختصات بگیریم که $x_1 = 0$ و $y_1 = 0$ بشود کارمان آسانتر است. برای محاسبه $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ از این نقطه مرجع تا یک نقطه



شکل ۲-۳ مسیر معین ABC در میدان الکتریکی $E_x = Ky$ ، $E_y = Kx$. بعضی از خط‌های میدان نشان داده شده‌اند.

عام (x_2, y_2) آسانترین راه، استفاده از مسیری مثل مسیر خط‌چین ABC در شکل ۲-۳ است.

$$\begin{aligned}\phi(x_2, y_2) &= - \int_{(0,0)}^{(x_2, y_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \\ &= - \int_{(0,0)}^{(x_2, 0)} E_x dx - \int_{(x_2, 0)}^{(x_2, y_2)} E_y dy\end{aligned}\quad (7)$$

اولین انتگرال سمت راست صفر است چون E_x در راستای محور x صفر است. انتگرال دوم در x ثابت گرفته می‌شود و $E_y = Kx_2$:

$$- \int_{(x_2, 0)}^{(x_2, y_2)} E_y dy = - \int_0^{y_2} K x_2 dy = -K x_2 y_2 \quad (8)$$

نقطه (x_2, y_2) هیچ خاصیت به‌خصوصی نداشت، بنابراین ما می‌توانیم زیرنویسها را برداریم:

$$\phi = -Kxy \quad (9)$$

این رابطه پتانسیل هر نقطه (x, y) در این میدان را، با توجه به صفر بودن پتانسیل در مبدأ، به دست می‌دهد. هر مقدار ثابتی را می‌توان به این معادله اضافه کرد. معنی‌اش فقط این است که نقطه مرجع که پتانسیلش صفر است در جای دیگر قرار دارد.

باید دقت کنیم که پتانسیل ϕ وابسته به یک میدان مفروض \mathbf{E} را با انرژی پتانسیل یک دستگاه بار اشتباه نگیریم. انرژی پتانسیل یک دستگاه بار، کل کار لازم برای گرد آوردن آن دستگاه است وقتی که از وضعی شروع کنیم که همه بارها کاملاً از هم دورند. مثلاً در معادله ۱-۸، U یعنی انرژی پتانسیل دستگاه بار شکل ۱-۶ را بیان کردیم. پتانسیل الکتریکی $\phi(x, y, z)$ مربوط به میدان شکل ۱-۶، کار لازم برای انتقال یک واحد بار مثبت از یک نقطه مرجع انتخابی به نقطه (x, y, z) در میدان ناشی از هشت بار است.

۲-۳ گرادیان یک تابع زرده‌ای

با معلوم بودن میدان الکتریکی می‌توانیم تابع پتانسیل الکتریکی را پیدا کنیم. اما عکس آن هم صحیح است؛ از روی پتانسیل می‌توانیم میدان را به دست بیاوریم. از معادله ۶ معلوم می‌شود که میدان به یک معنا مشتق تابع پتانسیل است. برای دقیقتر کردن این مفهوم گرادیان یک تابع زرده‌ای از مکان را تعریف می‌کنیم. فرض کنید $f(x, y, z)$ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر از مختصات باشد.

می‌توانیم با مشتق‌های جزئی آن $\partial f/\partial x$ ، $\partial f/\partial y$ ، و $\partial f/\partial z$ در هر نقطه از فضا برداری بسازیم که مؤلفه‌های x ، y ، z آن به ترتیب مساوی با این مشتق‌های جزئی باشند.^۱ این بردار را گرادیان f می‌نامیم و به صورت "grad f " یا ∇f می‌نویسیم.

$$\nabla f = \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (۱۰)$$

∇f برداری است که نشان می‌دهد تابع f در حوالی یک نقطه چگونه تغییر می‌کند. مؤلفه x این بردار مشتق جزئی f نسبت به x است که آهنگ تغییر f را وقتی در راستای x حرکت کنیم نشان می‌دهد. راستای بردار ∇f در هر نقطه، راستای حرکت از آن نقطه برای یافتن سریعترین افزایش f است. فرض کنید با تابعی فقط از دو متغیر x و y سروکار داریم، به طوری که تابع را در سه بعد بتوان با یک صفحه نمایش داد. اگر روی این سطح در نقطه‌ای بایستیم می‌بینیم سطح در یک جهت بالا می‌آید و در جهت مقابل پایین می‌رود. راستایی هست که در آن یک گام کوچک ما را بالاتر از همان گام در هر راستای دیگری قرار می‌دهد. گرادیان تابع، برداری است در این راستا که شیب‌دارترین سر بالایی است، و اندازه آن بردار اندازه شیب در آن راستاست.

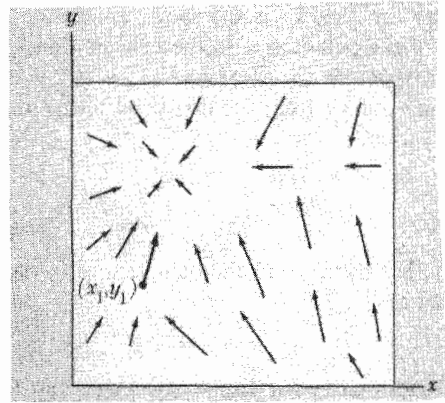
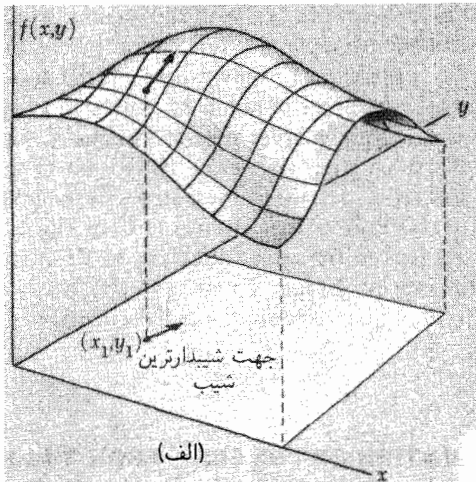
شکل ۲-۴ می‌تواند به درک این مطلب کمک کند. تابع به خصوصی از دو مختصه x و y در نظر بگیرید که با سطح $f(x, y)$ در شکل ۲-۴ الف نشان داده شده است. در مکان (x_1, y_1) سطح بیشترین شیب را در راستایی می‌گیرد که با جهت مثبت محور x زاویه‌ای در حدود ۸۰° می‌سازد. ∇f گرادیان $f(x, y)$ یک تابع برداری x و y است. شکل ۲-۴ ب این تابع را با بردارهایی در نقاط مختلف فضای دوبعدی از جمله نقطه (x_1, y_1) مشخص می‌کند. تابع برداری ∇f در معادله ۱۰ چیزی نیست جز کشاندن این تصور به فضای سه‌بعدی. (مواظب باشید شکل ۲-۴ الف را با فضای سه‌بعدی واقعی اشتباه نکنید، محور سوم در این شکل مقدار تابع $f(x, y)$ است.)

به‌عنوان مثالی از یک تابع سه‌بعدی در فضا، فرض کنید f فقط تابع r است، که r فاصله یادآوری می‌کنیم که مشتق جزئی یک تابع از x و y و z نسبت به x به صورت $\partial f/\partial x$ نوشته می‌شود و منظور از آن آهنگ تغییر تابع نسبت به x است وقتی دیگر متغیرهای y و z ثابت نگه داشته شوند. به عبارت دقیقتر

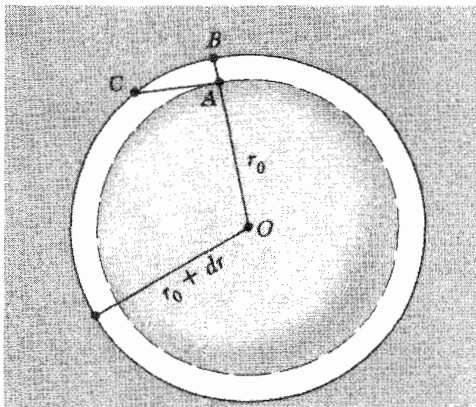
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

به‌عنوان مثال اگر $f = x^2 y z^2$ باشد، داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy z^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 z^2 \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2x^2 y z$$



شکل ۴-۲ (الف) تابع زده‌ای $f(x, y)$ با یک سطح نشان داده می‌شود. (ب) پیکانها تابع برداری، $\text{grad } f$ را نشان می‌دهند.



شکل ۵-۲ اگر f فقط تابع r باشد کوتاهترین راه ایجاد تغییر مفروض در f گام شعاعی AB است.

از یک نقطه ثابت O است. در کره‌ای به شعاع r_0 و مرکز O ، $f = f(r_0)$ یک مقدار ثابت است. در کره کمی بزرگتر به شعاع $r_0 + dr$ هم این مقدار ثابت و برابر $f = f(r_0 + dr)$ است. اگر بخواهیم تابع f را به $f(r_0 + dr)$ تغییر دهیم، کوتاهترین گامی که می‌توانیم برداریم در راستای شعاعی (مثلاً A به B) است و نه مثلاً A به C (شکل ۵-۲). بنابراین شیب f در راستای شعاعی بزرگترین مقدار است، پس ∇f در هر نقطه یک بردار در راستای شعاعی است. در واقع در این مورد $\nabla f = \hat{r}(df/dr)$ است که \hat{r} در هر نقطه بردار یکه در راستای شعاعی است.

۴-۲ به دست آوردن میدان از پتانسیل

حالا به آسانی می‌شود دید که رابطه تابع نرده‌ای f با تابع برداری ∇f ، گذشته از یک علامت منفی، همان رابطه پتانسیل φ با میدان \mathbf{E} است. مقدار φ را در دو نقطه نزدیک به هم (x, y, z) و $(x + dx, y + dy, z + dz)$ در نظر بگیرید. تغییر φ از نقطه اول تا نقطه دوم در تقریب اول برابر است با

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \quad (11)$$

از سوی دیگر از تعریف φ می‌توانیم تغییر را به صورت زیر بنویسیم:

$$d\varphi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (12)$$

بردار جابه‌جایی بسیار کوچک $d\mathbf{s}$ عبارت است از $\hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz$. بنابراین اگر \mathbf{E} را با $-\nabla\varphi$ نشان بدهیم رابطه‌های ۱۱ و ۱۲ با هم مساوی می‌شوند. به این ترتیب میدان الکتریکی منفی گرادینان پتانسیل است.

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (13)$$

علامت منفی به خاطر این به میان می‌آید که جهت میدان الکتریکی از ناحیه پتانسیل مثبت به سمت ناحیه پتانسیل منفی است، که بردار $\nabla\varphi$ از آنجا در جهت افزایش φ تعریف شده است. برای اینکه چگونگی استفاده از این رابطه را بفهمیم، برمی‌گردیم به مثال میدان در شکل ۲-۳. از پتانسیل معادله ۹، $\varphi = -Kxy$ ، می‌توانیم میدان الکتریکی را به این ترتیب به دست بیاوریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla(-Kxy) \\ &= -\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)(-Kxy) = K(\hat{x}y + \hat{y}x) \end{aligned} \quad (14)$$

۵-۲ پتانسیل یک توزیع بار

ما پتانسیل مربوط به یک بار نقطه‌ای را می‌دانیم، چون کار لازم برای آوردن یک بار نزدیک یک بار دیگر را در معادله ۳ فصل ۱ حساب کردیم. پتانسیل در هر نقطه، در میدان یک بار نقطه‌ای منفرد

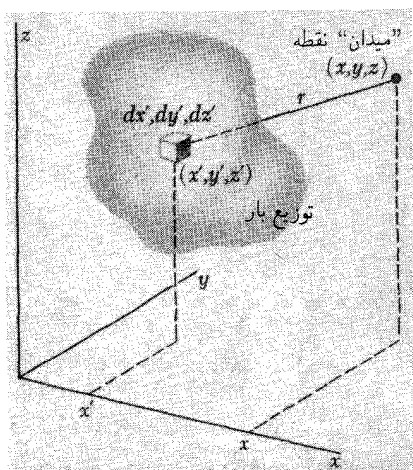
q ، برابر است با q/r که r فاصله از نقطه مورد نظر تا بار q است و پتانسیل نقاط بینهایت دور از بار q را صفر فرض کرده‌ایم.

اصل برهم‌نهی باید برای پتانسیل هم مثل میدان صادق باشد. اگر چشمه‌های متعدد داشته باشیم، تابع پتانسیل صرفاً حاصل جمع تابع پتانسیلهایی است که برای هر چشمه تنها داشتیم — به شرط اینکه در تمام موارد پتانسیل صفر را به یک مرجع نسبت بدهیم. اگر همه چشمه‌ها در یک منطقه محدود باشند، همیشه می‌توانیم پتانسیل صفر را در فاصله بینهایت دور فرض کنیم، و معمولاً ساده‌ترین کار هم همین است. اگر این قانون را بپذیریم، پتانسیل هر توزیع بار را می‌توان با انتگرال زیر مشخص کرد:

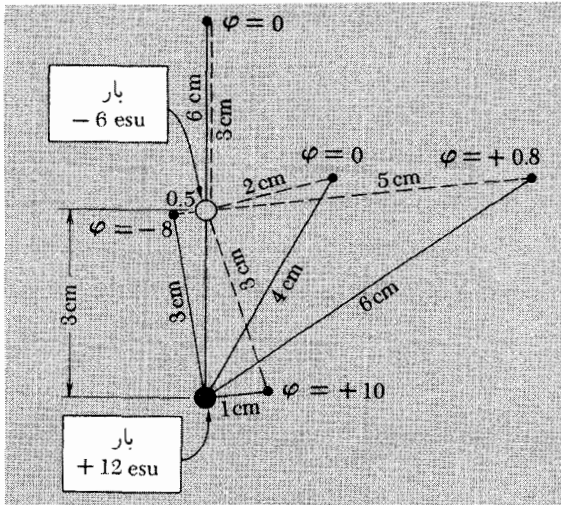
$$\varphi(x, y, z) = \int_{\text{تمام منبعها}} \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{r} \quad (15)$$

که r فاصله جزء حجم $dx' dy' dz'$ است تا نقطه (x, y, z) که در آنجا پتانسیل را محاسبه می‌کنیم (شکل ۶-۲). یعنی $r = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$. به تفاوت این انتگرال با انتگرالی که میدان الکتریکی یک توزیع بار را می‌دهد (معادله ۱-۱۵) توجه کنید. اینجا ما در مخرج r داریم نه r^2 و انتگرال نرده‌ای است نه بردار. از روی تابع پتانسیل نرده‌ای $\varphi(x, y, z)$ همیشه می‌توانیم مطابق معادله ۱۳ با گرفتن گرادیان با علامت منفی، میدان الکتریکی را به دست بیاوریم.

پتانسیل دو بار نقطه‌ای. مثال بسیار ساده‌ای را در نظر بگیریم، پتانسیل دو بار نقطه‌ای را که



شکل ۶-۲ هر جزء توزیع بار $\rho(x', y', z')$ در پتانسیل ϕ در نقطه (x, y, z) سهمی دارد. پتانسیل در این نقطه حاصل جمع تمام این سهمهاست (معادله ۱۵).



شکل ۷-۲ پتانسیل الکتریکی ϕ در نقطه‌های مختلف دستگاهی شامل دو بار نقطه‌ای. در فاصله‌های نامتناهی ϕ به سمت صفر می‌رود: ϕ برحسب ایستولت یا ارگ بر واحد بار داده شده است.

در شکل ۷-۲ نشان داده شده است حساب می‌کنیم. یک بار مثبت به اندازه ۱۲ esu به فاصله ۳ cm از یک بار منفی به اندازه ۶ esu قرار گرفته است. پتانسیل هر نقطه از فضای حاصل جمع پتانسیلهای مربوط به هر بار به تنهایی است. پتانسیل بعضی از نقاط فضا در نمودار داده شده است. اینجا هم جمع برداری در کار نیست، فقط جمع جبری کمیتهای نرده‌ای را داریم. مثلاً در دورترین نقطه سمت راست که ۶ cm از بار مثبت و ۵ cm از بار منفی فاصله دارد، مقدار پتانسیل $8 = 0 + (-6/5) + 12/6$ است. واحد پتانسیل از اینجا esu/cm به دست می‌آید که همان erg/esu یا ایستولت است. در فاصله بینهایت این پتانسیل به صفر نزدیک می‌شود. 8 ارگ کار لازم است تا یک واحد بار مثبت را از بینهایت به نقطه‌ای که در آن $V = 8$ stat V است بیاوریم. توجه کنید که در نمودار دو نقطه $\phi = 0$ است. کل کار انجام گرفته برای آوردن هر باری به هر یک از این نقطه‌ها صفر بوده است. می‌بینید که بینهایت نقطه از این نوع وجود دارند که در فضای سطحی محیط بر بار منفی را تشکیل می‌دهند. در واقع مکان نقطه‌هایی با یک مقدار به خصوص ϕ یک سطح است. یک سطح هم پتانسیل — که در نمودار دوبعدی ما به صورت یک منحنی نمایش داده می‌شود.

پتانسیل یک سیم طویل باردار. در کاربرد معادله ۱۵ یک شرط داریم: این معادله صادق نیست مگر آنکه تمام چشمه‌ها در ناحیه‌ای متناهی در فضا محدود شده باشند. یک مثال ساده

از مشکلات ناشی از توزیع بار تا فاصله‌های نامتناهی، سیم طویل بردار است که میدان \mathbf{E} آن را در بخش ۱-۱۲ بررسی کردیم، اگر بخواهیم انتگرال‌گیری را روی توزیع بار معادله ۱۵ انجام بدهیم، می‌بینیم که این انتگرال واگراست — یک جواب نامتناهی به دست می‌آوریم. چنین اشکالی در به دست آوردن میدان الکتریکی سیم بینهایت طویل در کار نبود چون سهم اجزای بار خطی در تولید میدان با فاصله به سرعت کاهش می‌یافت. مسلماً در دستگاہی که توزیع بارها تا بینهایت کشیده شده بهتر است صفر پتانسیل را جایی نزدیک مرکز قرار بدهیم. در این صورت موضوع فقط عبارت است از محاسبه اختلاف پتانسیل φ_{21} بین نقطه عام (x, y, z) و یک نقطه مرجع انتخابی با استفاده از معادله اساسی ۶.

برای اینکه ببینیم در مورد سیم بینهایت طویل پتانسیل چگونه به دست می‌آید، نقطه مرجع P_1 را به دلخواه در فاصله r_1 از سیم قرار می‌دهیم. در این صورت برای بردن باری از P_1 به نقطه دیگری مثل P_2 در فاصله r_2 ، کار لازم برای واحد بار عبارت است از:

$$\begin{aligned}\varphi_{21} &= - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{2\lambda}{r} \right) dr \\ &= -2\lambda \ln r_2 + 2\lambda \ln r_1\end{aligned}\quad (16)$$

می‌بینیم که پتانسیل الکتریکی برای سیم بردار به صورت زیر به دست می‌آید:

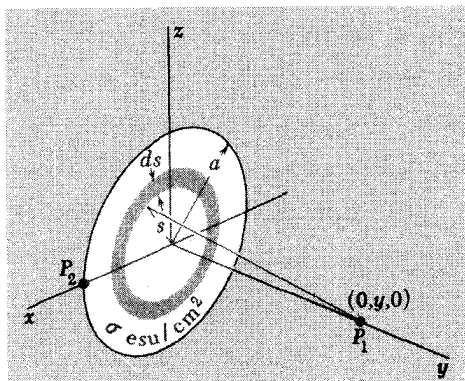
$$\varphi = -2\lambda \ln r + \text{const.}\quad (17)$$

مقدار ثابت، که در اینجا $2\lambda \ln r_1$ است، هیچ اثری در گرفتن $-\text{grad}\varphi$ برای به دست آوردن میدان \mathbf{E} ندارد. در این مورد:

$$-\nabla\varphi = -\hat{\mathbf{r}} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{2\lambda\hat{\mathbf{r}}}{r}\quad (18)$$

۲-۶ قرص با بار یکنواخت

حالا به عنوان مثال، پتانسیل و میدان الکتریکی اطراف یک قرص با بار یکنواخت را بررسی می‌کنیم. این مثل توزیع باری است که در بخش ۱-۱۳ بررسی کردیم، فقط ابعادش متناهی است. قرص صاف شکل ۲-۸، به شعاع a دارای بار مثبتی است که با چگالی ثابت σ ، بر حسب esu/cm^2 در سطح آن توزیع شده است. (این یک صفحه بار با ضخامت بی‌اندازه کوچک است نه اینکه در هر طرف صفحه یک لایه بار داشته باشیم. یعنی بار کل دستگاه $\pi a^2 \sigma$ است.) ما در بحثهای آینده



شکل ۸-۲ پیدا کردن پتانسیل در یک نقطه P_1 از محور یک قرص با بار یکنواخت.

مرتب با توزیع بار سطحی سروکار خواهیم داشت مخصوصاً در رساناهای فلزی. اما جسمی که فعلاً بررسی می‌کنیم رسانا نیست؛ اگر رسانا بود، همان‌طور که بعداً خواهیم دید، توزیع بار یکنواخت نمی‌ماند بلکه بارها طوری روی قرص قرار می‌گرفتند که بیشتر تجمع به سمت لبه قرص باشد. آنچه داریم یک قرص عایق، مثلاً یک صفحه پلاستیک است که بار طوری روی آن "افشانده" شده است که مقدار باری که هر یک سانتی‌متر مربع قرص دریافت کرده و نگه داشته، یکسان است.

برای شروع کار، پتانسیل را در نقطه‌ای مثل P_1 روی محور تقارن، که آن را محور y قرار داده‌ایم، حساب می‌کنیم. فاصله همه اجزاء بار در یک حلقه نازک از قرص از P_1 مساوی است. اگر شعاع این قطعه حلقوی شکل s و پهنای آن ds باشد، مساحت قطعه $2\pi s ds$ است. بنابراین مقدار بار قطعه برابر است با $dq = \sigma 2\pi s ds$. فاصله تمام نقطه‌های این حلقه از P_1 یکسان و برابر است با $r = \sqrt{y^2 + s^2}$ ، بنابراین سهم حلقه در پتانسیل در P_1 است و یا برابر است با $2\pi\sigma s ds / \sqrt{y^2 + s^2}$. برای به دست آوردن پتانسیل کل قرص باید روی تمام چنین حلقه‌هایی انتگرال بگیریم:

$$\begin{aligned} \varphi(0, y, 0) &= \int \frac{dq}{r} = \int \frac{2\pi\sigma s ds}{\sqrt{y^2 + s^2}} \\ &= 2\pi\sigma \left[\sqrt{y^2 + s^2} \right]_{s=0}^{s=a} \end{aligned} \quad (19)$$

از قضا این انتگرال یک انتگرال ساده است که با قرار دادن $u = y^2 + s^2$ به شکل $\int u^{-1/2} du$

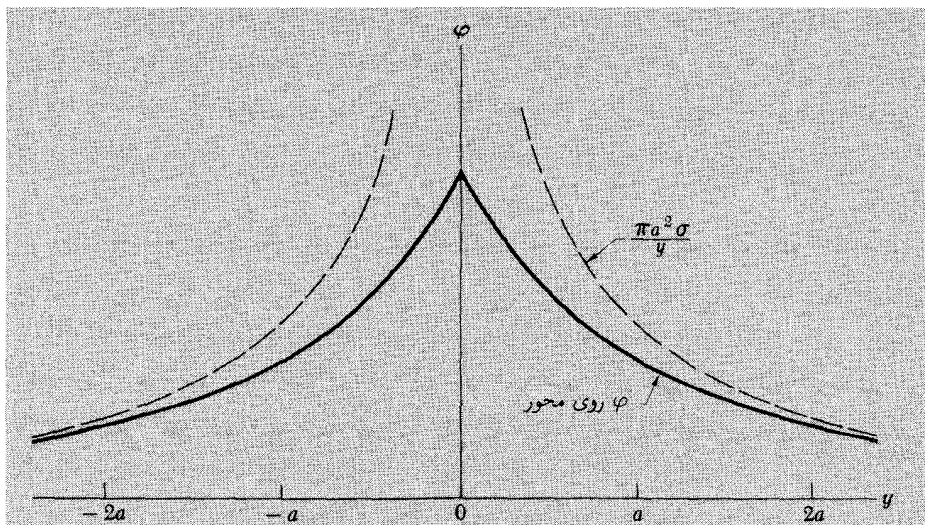
در می‌آید. با قرار دادن حدهای انتگرال داریم:

$$\varphi(\circ, y, \circ) = 2\pi\sigma(\sqrt{y^2 + a^2} - y) \quad y > \circ \quad \text{به‌ازای} \quad (20)$$

یک نکته جزئی در خور توجه است: نتیجه‌ای که در معادله ۲۰ نوشته‌ایم برای تمام نقطه‌های روی محور مثبت y صادق است. از تقارن فیزیکی دستگاه (دو طرف قرص هیچ فرقی با هم ندارند) معلوم می‌شود که مقدار پتانسیل برای y منفی و مثبت باید یکسان باشد و این در معادله ۱۹ هم، که فقط y^2 را دارد، پیداست. اما در نوشتن معادله ۲۰ در جذر گرفتن از y^2 علامتی را برگزیدیم که نتیجه تنها برای y مثبت صادق باشد. عبارت صحیح برای $y < \circ$ وقتی به دست می‌آید که ریشه دیگر را انتخاب کنیم:

$$\varphi(\circ, y, \circ) = 2\pi\sigma(\sqrt{y^2 + a^2} + y) \quad y < \circ \quad \text{به‌ازای} \quad (21)$$

با این حساب تعجبی ندارد که در $\varphi(\circ, y, \circ)$ در $y = \circ$ یک تکیگی داشته باشیم. در واقع در این نقطه، شیب تابع یک تغییر تند دارد که از شکل ۹-۲ پیداست. در این شکل پتانسیل را برحسب y روی محور رسم کرده‌ایم. پتانسیل در مرکز برابر با $\varphi(\circ, \circ, \circ) = 2\pi\sigma a$ است. این قدر کار لازم است تا یک واحد بار مثبت را از بینهایت، در هر مسیری بیآوریم و در مرکز قرص بگذاریم.



شکل ۹-۲ نمودار پتانسیل روی محور. منحنی خط چین پتانسیل بار نقطه‌ای $q = \pi a^2 \sigma$ است.

رفتار $\varphi(^\circ, y, ^\circ)$ برای y های بزرگ جالب است. برای $a \gg y$ می‌توانیم معادله 2° را به صورت زیر تقریب بزنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 + a^2} - y &= y \left[\left(1 + \frac{a^2}{y^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \\ &= y \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{y^2} \right) \dots - 1 \right] \approx \frac{a^2}{2y} \end{aligned} \quad (22)$$

در نتیجه

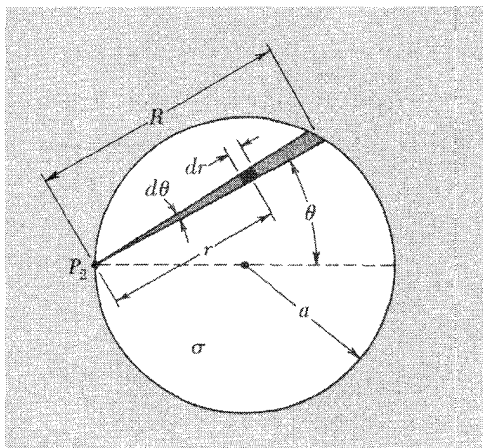
$$\varphi(^\circ, y, ^\circ) \approx \frac{\pi a^2 \sigma}{y} \quad \text{برای } y \gg a \quad (23)$$

حال $\pi a^2 \sigma$ بار کل q روی قرص است، و معادله 23 فقط عبارت مربوط به پتانسیل ناشی از یک بار نقطه‌ای به این اندازه است. همان‌طور که انتظار داریم، در فاصله قابل ملاحظه‌ای از قرص (نسبت به قطر آن) اهمیتی ندارد که بارها چگونه شکل گرفته‌اند، فقط بار کلی در تقریب اول اهمیت دارد. در شکل ۹-۲ تابع $\pi a^2 \sigma / y$ را به صورت منحنی خط چین رسم کرده‌ایم. می‌توانید ببینید که تابع پتانسیل محوری به سرعت به شکل مجانبی خود نزدیک می‌شود.

به دست آوردن پتانسیل نقطه‌های دیگر خارج از محور تقارن به این آسانی نیست، چون انتگرال معین در این موارد این‌قدر ساده نیست. در این موارد با چیزی به اسم انتگرال بیضوی سروکار داریم. این تابعها شناخته شده و جدول‌بندی شده‌اند، ولی هیچ دلیلی ندارد اینجا به جزئیات ریاضی مربوط به یک مسئله به‌خصوص بپردازیم. یک محاسبه ساده دیگر هم هست که می‌تواند آموزنده باشد. می‌توانیم پتانسیل نقطه‌ای، مثل نقطه P_2 در شکل ۹-۲ را که کاملاً بر لبه قرص واقع است به دست بیاوریم.

برای به دست آوردن پتانسیل P_2 ابتدا گوه باریکی به طول R و پهنای زاویه‌ای $d\theta$ مطابق شکل ۹-۲ در نظر می‌گیریم. یک جزء از گوه، قطعه سیاهی به فاصله r از P_2 و حاوی بار $\sigma r d\theta dr$ است. بنابراین سهم این جزء در پتانسیل نقطه P_2 ، برابر است با $\sigma d\theta dr$. به این ترتیب سهم کل گوه برابر می‌شود با $\sigma R d\theta \int_0^R dr = \sigma R d\theta$. با استفاده از قانون مثلث قائم‌الزاویه داریم $R = 2a \cos \theta$ ، و زاویه θ در کل قرص از $-\pi/2$ تا $\pi/2$ تغییر می‌کند. بنابراین پتانسیل در نقطه P_2 به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\phi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sigma a \cos \theta d\theta = 4\sigma a \quad (24)$$



شکل ۲-۱۰ به دست آوردن پتانسیل در نقطه P_2 روی لبه قرصی که بار یکنواخت دارد.

این مقدار را با $2\pi\sigma a$ ، پتانسیل در مرکز قرص مقایسه کنید. می بینیم که همان طور که انتظار می رود پتانسیل از مرکز به سمت لبه قرص افت می کند. بنابراین میدان الکتریکی در صفحه قرص باید یک مؤلفه رو به خارج داشته باشد. به همین دلیل است که قبلاً گفتیم، بار اگر آزادی حرکت داشته باشد، دوباره طوری توزیع می شود که تجمع به سمت لبه قرص باشد. به عبارت دیگر قرص با بار یکنواخت، سطحی با پتانسیل ثابت نیست. در حالی که هر سطح رسانا باید پتانسیلش ثابت بماند مگر آنکه بارهایش حرکت کنند.^۱

میدان الکتریکی روی محور تقارن را می توان مستقیماً از تابع پتانسیل محاسبه کرد:

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{d}{dy} 2\pi\sigma \left(\sqrt{y^2 + a^2} - y \right) \quad (25)$$

که نتیجه می شود

$$E_y = 2\pi\sigma \left[1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + a^2}} \right] \quad y > 0 \quad (26)$$

(اگر می خواهید مطمئن شوید، محاسبه مستقیم E_y ، برای نقطه های روی محور، از روی توزیع بار کار سختی نیست.)

وقتی y از طرف مثبت به صفر نزدیک می شود، E_y به مقدار $2\pi\sigma$ میل می کند. در طرف

۱. این واقعیت که سطح رسانا باید هم پتانسیل باشد در فصل ۳ به تفصیل بررسی می شود.

y منفی قرص، که آن را پشت قرص خواهیم خواند، E در جهت مخالف است و مؤلفه y آن E_y برابر است با $-2\pi\sigma$. این همان میدان یک صفحه بار نامتناهی با چگالی σ است که در بخش ۱-۱۳ به دست آمد. باید هم باشد، چون در نقطه‌های نزدیک به مرکز قرص بود و نبود بار فراتر از حاشیه قرص فرق زیادی نمی‌کند. به عبارت دیگر هر صفحه‌ای را اگر از خیلی نزدیک نگاه کنید، نامتناهی به نظر می‌رسد. در واقع E_y نه تنها در مرکز بلکه همه جا روی قرص مقدارش $2\pi\sigma$ است.

در شکل ۱۱-۲ بعضی از خط‌های میدان این دستگاه را نشان داده‌ایم و مقطع‌های سطوح پتانسیل ثابت را با صفحه yz به صورت خط چین رسم کرده‌ایم. نزدیک به مرکز قرص این سطوح شکل عدسی دارند ولی در فاصله‌های خیلی بزرگتر از a به صورت سطوح کروی هم پتانسیل اطراف بار نقطه‌ای در می‌آیند.

شکل ۱۱-۲ یک خاصیت عام خط‌های میدان و سطوح هم پتانسیل را نشان می‌دهد. خط میدانی که از هر نقطه می‌گذرد و سطح هم پتانسیلی که از آن نقطه عبور می‌کند برهم عمودند، درست مثل نقشه یک منطقه ناهموار که در آن شیب در منطقه‌ای که عمود بر سطح هموار باشد بیشترین مقدار را دارد. علتش این است که اگر میدان در یک نقطه، مؤلفه‌ای موازی با سطح هم پتانسیلی که از آن نقطه می‌گذرد داشته باشد، برای انتقال یک بار آزمون در امتداد سطح هم پتانسیل، کاری باید انجام بگیرد.

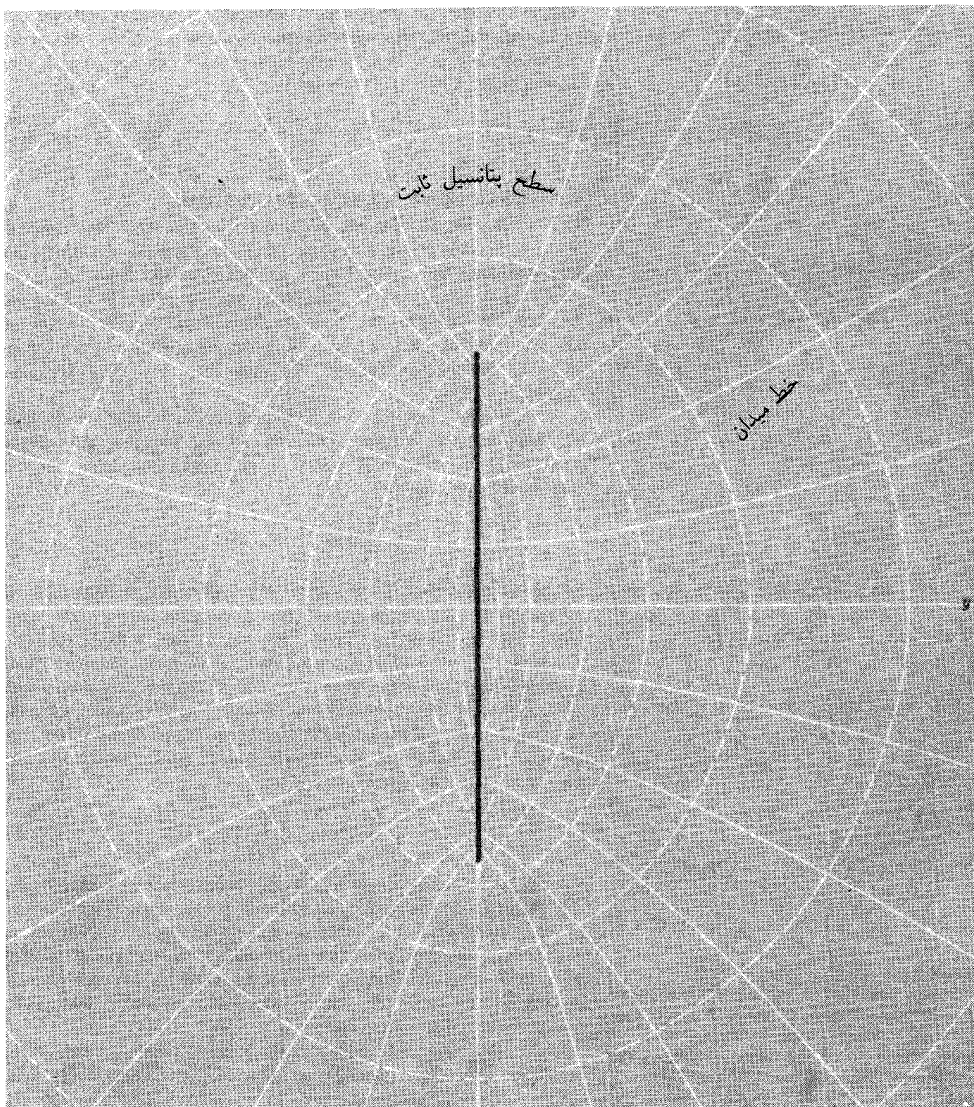
انرژی مربوط به میدان الکتریکی را می‌توان به صورت انتگرال $E^2 dv / 4\pi$ روی تمام فضا بیان کرد. این مقدار برابر است با کار لازم برای گردآوری این توزیع، با شروع از حالتی که بارهای بینهایت کوچک دور از هم داشته باشیم. در این مثال به خصوص، همان‌طور که در مسئله ۲-۲۷ نشان خواهیم داد، اگر پتانسیل در لبه قرص باردار معلوم باشد، محاسبه مستقیم این کار، چندان سخت نیست.

یک رابطه کلی بین کار U لازم برای گردآوری توزیع بار $\rho(x, y, z)$ و پتانسیل این توزیع یعنی $\phi(x, y, z)$ وجود دارد:

$$U = \frac{1}{4\pi} \int \rho \phi dv \quad (27)$$

معادله ۱-۹، برای انرژی یک دستگاه بارهای نقطه‌ای منفرد را می‌توان به این صورت نوشت:

$$U = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N q_j \sum_{k \neq j} \frac{q_k}{r_{jk}} \quad (28)$$



شکل ۱۱-۲ میدان الکتریکی یک قرص با بار یکنواخت. منحنیهای پر خطهای میدان‌اند. منحنیهای خط‌چین تقاطع سطوح پتانسیل ثابت با صفحه شکل‌اند.

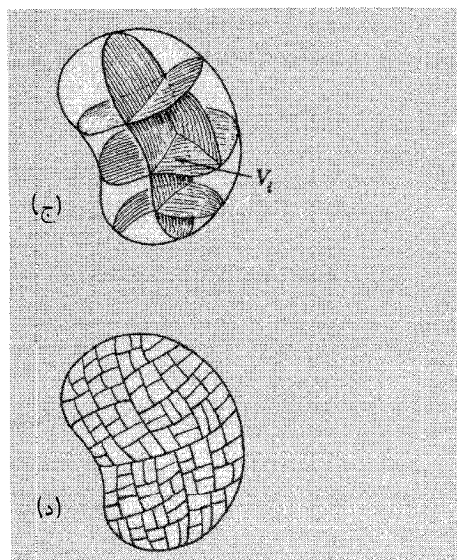
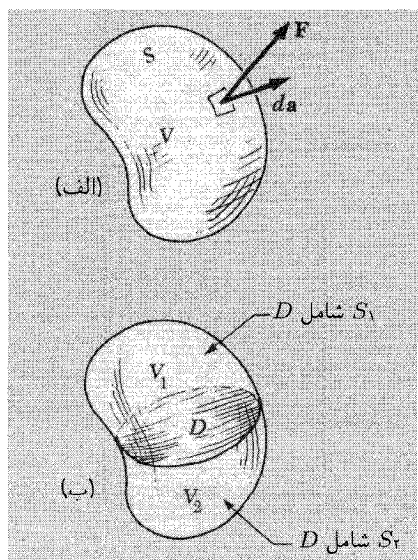
حاصل جمع دوم پتانسیل ناشی از همه بارها در محل بار z ام است. برای تطبیق این رابطه با یک توزیع پیوسته ما صرفاً به جای q مقدار ρdv و به جای جمع‌بندی روی z انتگرال قرار می‌دهیم و به این ترتیب رابطه ۲۷ را به دست می‌آوریم.

۷-۲ دیورژانس یک تابع برداری

میدان الکتریکی در هر نقطه جهت و اندازه معینی دارد. این اندازه و جهت یک تابع برداری، از مختصات است که بیشتر به صورت $\mathbf{E}(x, y, z)$ نوشته می‌شود. می‌خواهیم از چیزی صحبت کنیم که برای هر نوع تابع برداری، و نه فقط میدان الکتریکی، به درد می‌خورد و برای نشان دادن آن از علامت دیگری، $\mathbf{F}(x, y, z)$ استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر، موقتاً به جای فیزیک، به زبان ریاضی صحبت می‌کنیم و \mathbf{F} را صرفاً یک تابع برداری عام می‌نامیم، اما به سه بعد اکتفا می‌کنیم. حجم متناهی V به شکلی دلخواه را در نظر بگیرید، که سطح آن را با S نشان می‌دهیم، قبلاً با مفهوم Φ ، کل شاری که از سطح خارج می‌شود، آشنا شده‌ایم. این شار مقدار انتگرال سطحی \mathbf{F} روی تمام سطح S است:

$$\Phi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \quad (29)$$

$d\mathbf{a}$ ، چنانکه در شکل ۷-۲ الف نشان داده شده است، بردار بینهایت کوچکی است که بزرگی آن



شکل ۷-۲ الف) حجم V محدود به سطح S (ب) تقسیم می‌شود به دو قطعه محدود به سطحهای S_1 و S_2 . مهم نیست این تقسیم‌بندی تا کجا ادامه یابد. همان‌طور که از (ج) و (د) پیداست، حاصل جمع انتگرالهای سطح روی تمام قطعه‌ها برابر است با انتگرال سطح اولیه روی S برای هر تابع برداری \mathbf{F} .

مساحت جزء کوچکی از S است و راستای آن عمود بر این قطعه کوچک از سطح رو به بیرون است.

حالا فرض کنید V را با صفحه D که از میان "بادکنک" S می‌گذرد به دو قسمت تقسیم کنیم (شکل ۱۲-۱). دو قسمت V را با V_1 و V_2 نشان می‌دهیم و آنها را دو حجم مجزا تلقی می‌کنیم که باید انتگرال سطح را روی هر کدام جداگانه حساب کنیم. سطح مرزی S_1 از حجم V_1 شامل D هم هست، سطح S_2 هم همین‌طور، کاملاً معلوم است که مجموع دو انتگرال سطح

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_2 \quad (30)$$

برابر با انتگرال اصلی روی تمام سطح است که در معادله ۲۹ داشتیم. به این دلیل که هر قطعه معینی از D در انتگرال اول با یک علامت و در انتگرال دوم با همان مقدار و علامت مخالف شرکت می‌کند، جهت "رو به خارج" در هر مورد جهت "رو به داخل" در مورد دیگر است. به عبارت دیگر شار خروجی از V_1 از این سطح D ، شار ورودی به V_2 است. بقیه سطح زیر انتگرال با سطح کل حجم اولیه یکی است.

می‌توانیم تقسیم کردن سطح را آنگذر ادامه بدهیم که حجم V به قطعه‌های بسیار زیاد V_1, V_2, \dots, V_N با سطحهای S_1, S_2, \dots, S_N تقسیم شود. مهم نیست این تقسیم‌بندی تا کجاست. می‌توانیم مطمئن باشیم که

$$\sum_{i=1}^N \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \Phi \quad (31)$$

آنچه به دنبالش هستیم این است: در حدی که N خیلی زیاد بشود، می‌خواهیم چیزی را معرفی کنیم که ویژگی یک ناحیه کوچک به‌خصوص، و سرانجام، اطراف یک نقطه است. انتگرال سطحی

$$\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i \quad (32)$$

روی نواحی کوچک چنین کمیتی نیست، چون اگر همه جا را از نو تقسیم کنیم به‌طوری که N بشود $2N$ ، این انتگرال به دو جمله تقسیم می‌شود که هر یک کوچکتر از قبل است چون مجموع آنها مقدار ثابتی است. به عبارت دیگر هر چه حجمهایی که در یک محل معین در نظر می‌گیریم کوچکتر شوند انتگرال سطح روی هر یک از این حجمها، مدام کوچکتر می‌شود. اما توجه داریم که

در تقسیم‌بندی ما حجم هم به دو قسمت تقسیم می‌شود که مجموعشان برابر با حجم اولیه است. این به ما می‌گوید که برای هر جزء در فضای تقسیم شده، نسبت انتگرال سطحی به حجم را در نظر بگیریم:

$$\frac{\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i}{V_i} \quad (33)$$

به نظر می‌آید که اگر N به اندازه کافی زیاد باشد، یعنی اگر تقسیم‌بندیها به اندازه کافی ریز باشند، می‌توانیم هر بار که انتگرال سطح را نصف می‌کنیم، حجم را هم نصف کنیم به طوری که با ادامه تقسیم در یک ناحیه معین این نسبت به حد نزدیک شود. در این صورت این حد یک ویژگی مشخصه تابع برداری \mathbf{F} در آن حوالی است. این مقدار را دیورژانس \mathbf{F} می‌نامیم و به صورت $\text{div } \mathbf{F}$ در هر نقطه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{div } \mathbf{F} \equiv \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i \quad (34)$$

که در آن V_i حجم شامل نقطه مورد نظر، و S_i که انتگرال سطح روی آن گرفته می‌شود سطح حجم V_i است. باید این شرط را هم بگنجانیم که این حد وجود دارد و مستقل از چگونگی تقسیم کردن ماست. عجالتاً فرض می‌کنیم این طور باشد.

معنای $\text{div } \mathbf{F}$ را می‌شود این طور بیان کرد: $\text{div } \mathbf{F}$ عبارت است از شار خروجی از V_i برای واحد حجم؛ در حد حجم بینهایت کوچک V_i . معلوم است که این کمیت زده‌ای است. دیورژانس \mathbf{F} ممکن است از جایی به جای دیگر فرق کند، در حالی که مقدار آن در یک محل به خصوص (x, y, z) حد کسر معادله ۳۴ است وقتی V_i کوچکتر و کوچکتر شود و در عین حال همیشه شامل نقطه (x, y, z) باشد. بنابراین $\text{div } \mathbf{F}$ صرفاً یک تابع زده‌ای از مختصات است.

۸-۲ قضیه گاوس و شکل دیفرانسیلی قانون گاوس

اگر $\text{div } \mathbf{F}$ ، این تابع زده‌ای مختصات، را بدانیم، می‌توانیم برگردیم به انتگرال سطح در برگرفته یک حجم بزرگ: اول معادله ۳۱ را به این صورت می‌نویسیم

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N V_i \left[\frac{\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i}{V_i} \right] \quad (35)$$

در حد $N \rightarrow \infty$, $V_i \rightarrow 0$, جمله داخل کروشه دیورژانس \mathbf{F} است و حاصل جمع تبدیل به انتگرال حجم می‌شود:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \text{div } \mathbf{F} \, dv \quad (36)$$

رابطه ۳۶ قضیهٔ گاوس یا قضیهٔ دیورژانس نامیده می‌شود. این قضیه برای هر میدان برداری که دارای حد رابطهٔ ۳۴ باشد صادق است.

حالا ببینیم این قضیه برای میدان الکتریکی \mathbf{E} چه دارد. ما قانون گاوس را داریم که رابطهٔ زیر را تضمین می‌کند:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi \int_V \rho \, dv \quad (37)$$

اگر قضیهٔ دیورژانس برای هر میدان برداری صادق باشد، یقیناً برای \mathbf{E} صادق است:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \text{div } \mathbf{E} \, dv \quad (38)$$

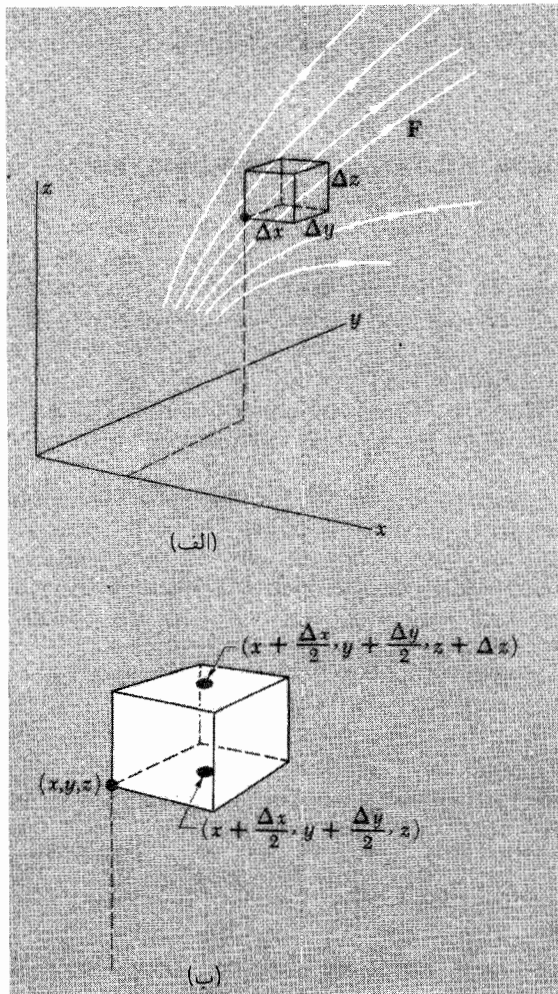
معادله‌های ۳۷ و ۳۸ برای هر حجمی که بخواهیم انتخاب کنیم — به هر شکل و هر اندازه و در هر کجا — صادق‌اند. با مقایسهٔ آنها می‌بینیم این تنهادر صورتی است که در هر نقطه

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (39)$$

باشد. اگر از این پس قضیهٔ دیورژانس را به‌عنوان بخشی از ابزارهای ریاضی خودمان بپذیریم، می‌توانیم معادلهٔ ۳۹ را صرفاً جانشینی برای قانون گاوس تلقی کنیم. این معادله، قانون گاوس به شکل دیفرانسیلی است، یعنی برحسب رابطهٔ بین چگالی بار و میدان در هر نقطه بیان می‌شود.

۹-۲ دیورژانس در مختصات دکارتی

با اینکه معادلهٔ ۳۴ تعریف بنیادی دیورژانس، مستقل از هر دستگاه مختصاتی است، بد نیست بدانیم چطور می‌شود دیورژانس یک تابع برداری را که شکل صریح آن معلوم باشد حساب کرد. فرض کنید تابع برداری \mathbf{F} برحسب مختصات دکارتی x, y, z بیان شده باشد. یعنی سه تابع زنده‌ای $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$ و $F_z(x, y, z)$ داشته باشیم. ناحیهٔ V_i را به‌صورت جعبهٔ مکعب مستطیل کوچکی در نظر می‌گیریم که یک رأس آن در نقطهٔ (x, y, z) است و ابعاده



شکل ۱۳-۲ محاسبه شار عبوری از جعبه‌ای به حجم $\Delta x \Delta y \Delta z$.

Δx ، Δy ، و Δz (شکل ۱۳-۲ الف). اینکه شکل دیگری هم همین حد را داشته باشد سوالی است که بعداً به آن می‌رسیم.

دو وجه مقابل جعبه را در نظر بگیرید، مثلاً وجه‌های بالایی و پایینی را که با بردارهای $\hat{z} \Delta x \Delta y$ و $-\hat{z} \Delta x \Delta y$ نشان داده می‌شوند. شار عبوری از این دو وجه فقط شامل مؤلفه z تابع \mathbf{F} است، و مقدار کل آن بستگی به اختلاف بین F_z در بالا و F_z در پایین جعبه دارد، یا به عبارت دقیقتر به اختلاف بین مقدار میانگین F_z در وجه بالایی و مقدار میانگین F_z روی وجه پایینی جعبه. در مقادیر کم در تقریب مرتبه اول این اختلاف $(\partial F_z / \partial z) \Delta z$ است. شکل ۱۳-۲ ب به توضیح این

مطلب کمک می‌کند. مقدار میانگین F_z روی سطح پایینی جعبه، اگر فقط تغییرات مرتبه اول F_z در این مستطیل کوچک را در نظر بگیریم، مقدار تابع در مرکز مستطیل است. این مقدار تا مرتبه اول Δx و Δy برابر است با^۱

$$F_z(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad (40)$$

برای به دست آوردن میانگین F_z در وجه بالایی مقدار تابع در مرکز سطح بالایی را در نظر می‌گیریم که در جابه‌جاییهای کوچک تا مرتبه اول عبارت است از

$$F_x(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial F_x}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial F_x}{\partial z} \quad (41)$$

شار کلی که از این دو وجه جعبه، که سطح هر یک $\Delta x \Delta y$ است، خارج می‌شود برابر است با

$$\underbrace{\Delta x \Delta y \left[F_z(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial F_z}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial F_z}{\partial z} \right]}_{\text{(شار خروجی به جعبه از بالا)}} - \underbrace{\Delta x \Delta y \left[F_x(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial F_x}{\partial y} \right]}_{\text{(شار ورودی به جعبه از پایین)}} \quad (42)$$

که به صورت $\Delta x \Delta y \Delta z (\partial F_z / \partial z)$ ساده می‌شود. بدیهی است که برای هر جفت وجه دیگر جعبه می‌شود رابطه مشابهی نوشت. یعنی شار کلی که از وجوه موازی با صفحه yz جعبه خارج می‌شود برابر است با $\Delta y \Delta z \Delta x (\partial F_x / \partial x)$. توجه کنید که در این مورد هم حاصلضرب $\Delta x \Delta y \Delta z$ به میان می‌آید. به این ترتیب شار کلی که از جعبه کوچک خارج می‌شود برابر است با

$$\Phi = \Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \quad (43)$$

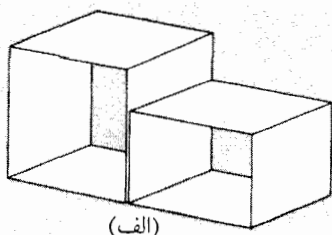
۱. این چیزی نیست جز شروع بسط تیلور تابع زده‌ای F_z ، در حوالی نقطه (x, y, z) . یعنی

$$F_z(x+a, y+b, z+c) = F_z(x, y, z) + \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) F_z + \dots + \left(\frac{1}{n!} \right) \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z} \right)^n F_z + \dots$$

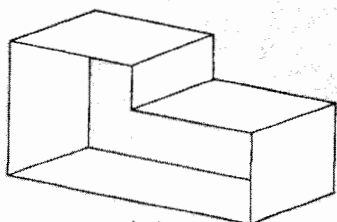
همه مشتقها را باید در نقطه (x, y, z) گرفت. در مسئله ما $a = \Delta x/2$ و $b = \Delta y/2$ و $c = 0$ و جمله‌های مرتبه بالاتر را در بسط در نظر نگرفته‌ایم.

حجم جعبه $\Delta x \Delta y \Delta z$ است، پس نسبت شار به حجم $\partial F_x / \partial x + \partial F_y / \partial y + \partial F_z / \partial z$ است و چون ابعاد جعبه اصلاً در این عبارت ظاهر نمی‌شود، اگر بگذاریم جعبه جمع شود، این عبارت به‌عنوان مقدار حدی باقی می‌ماند. [اگر جمله‌های متناسب با $(\Delta x)^2$ ، $(\Delta x \Delta y)$ و غیره را در محاسبه شار نگه داشته بودیم، در حد این جمله‌ها صفر می‌شدند.]

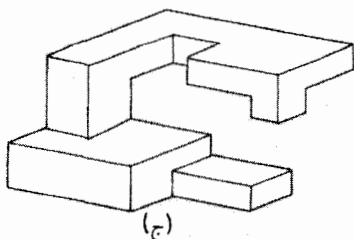
حالا می‌توانیم ببینیم چرا این حد قرار است مستقل از شکل جعبه باشد. واضح است که این حد مستقل از ابعاد جعبه چهارگوش است، اما این چیز مهمی نیست، به‌راحتی می‌شود دید که برای هر حجمی که بتوانیم با به هم چسباندن جعبه‌های کوچک چهارگوش با هر شکل و اندازه، بسازیم همین‌طور است. دو جعبه شکل ۲-۱۴ را در نظر بگیرید. حاصل جمع شار Φ_1 که از جعبه ۱ خارج می‌شود و شار Φ_2 که از جعبه ۲ خارج می‌شود، با برداشتن دیواره بین جعبه‌ها و یکی کردن آنها، هیچ تغییری نمی‌کند، چون هر شاری که از آن صفحه می‌گذرد برای یک جعبه منفی و برای جعبه دیگر مثبت است. بنابراین اگر شکل من‌درآوردی ۲-۱۴ ج را هم داشته باشیم نتیجه فرق نمی‌کند. تعمیم بیشتر آن را به‌عهده خواننده می‌گذاریم. اگر اول بتوانید ثابت کنید که جمع برداری



(الف)

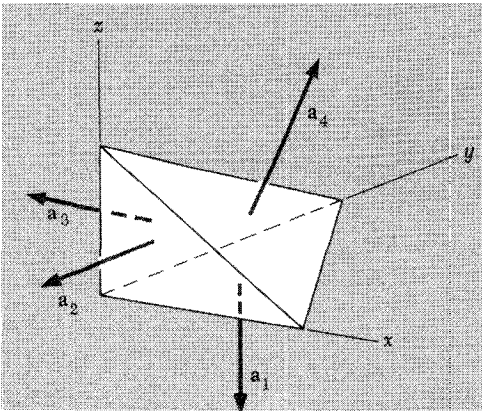


(ب)



(ج)

شکل ۲-۱۴ حد نسبت حجم/شار مستقل از شکل جعبه است.



شکل ۱۵-۲ می‌توانید ثابت کنید که $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$.

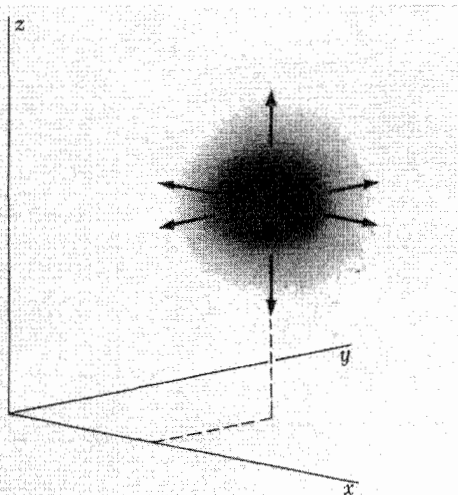
مساحت‌های سطوح چهاروجهی در شکل ۱۵-۲ صفر است، می‌توانیم این نتیجه را برای سطوح مایل هم تعمیم بدهیم.

نتیجه می‌گیریم که فقط با فرض مشتق‌پذیر بودن F_x ، F_y ، و F_z ، حد مورد نظر ما وجود دارد و از عبارت زیر به دست می‌آید:

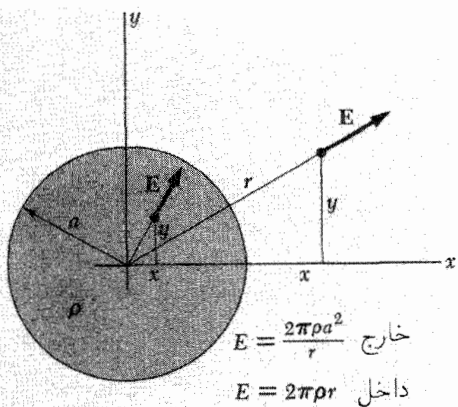
$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (44)$$

اگر $\operatorname{div} \mathbf{F}$ در نقطه‌ای مقدار مثبت داشته باشد، در حوالی آن نقطه — با در نظر گرفتن اینکه \mathbf{F} یک میدان سرعت است — یک “برونشارش” برآیند خواهیم داشت. مثلاً اگر هر سه مشتق جزئی معادله ۴۴ در نقطه P مثبت باشند، باید در حوالی این نقطه یک میدان برداری نظیر شکل ۱۶-۲ داشته باشیم. اما ممکن هم هست که میدان با اینکه دیورژانسش مثبت است به کلی با این شکل فرق داشته باشد، چون می‌شود هر تابع برداری دیگری مثل \mathbf{G} ، به طوری که داشته باشیم $\operatorname{div} \mathbf{G} = 0$ ، به آن اضافه کرد. به این ترتیب یک، دو یا سه مشتق جزئی می‌توانند منفی باشند و هنوز هم داشته باشیم $\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$. دیورژانس کمیتی است که فقط یکی از جنبه‌های تغییر فضایی یک میدان برداری را معلوم می‌کند.

این مطلب را در مورد میدان الکتریکی‌ای بررسی می‌کنیم که تجسم آن تا حدودی ساده است. یک استوانهٔ بینهایت طویل به شعاع a که از بار مثبتی به چگالی ρ پر شده است. بیرون استوانه میدان همان است که برای یک بار خطی محوری داشتیم. میدان شعاعی که بزرگی‌اش متناسب است با $1/r$. میدان الکتریکی داخل استوانه با به کار بردن قانون گاوس برای استوانه‌ای به شعاع $r < a$ به دست می‌آید. این را به عنوان یک تمرین ساده انجام دهید. خواهید دید که میدان داخلی



شکل ۱۶-۲ میدانی که در حوالی نقطه P دیورژانس غیر صفر دارد.



شکل ۱۷-۲ میدان داخل و خارج توزیع بار یکنواخت استوانه‌ای.

مستقیماً با r متناسب است، و البته باز هم شعاعی است. جوابهای درست اینهاست:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{2\pi\rho a^2}{r} & r > a & \text{به‌ازای} & (۴۵) \\
 E &= 2\pi\rho r & r < a & \text{به‌ازای}
 \end{aligned}$$

شکل ۱۷-۲ مقطع عمود بر محور استوانه را نشان می‌دهد. در اینجا انتخاب مختصات دکارتی زیاد مناسب نیست، ولی ما از این مختصات استفاده می‌کنیم تا تمرینی برای کاربرد معادله ۴۴

باشد. اگر $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ باشد، مؤلفه‌های میدان به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} E_x &= \left(\frac{x}{r}\right) E = \frac{2\pi\rho a^2 x}{x^2 + y^2} && r > a \text{ به‌ازای} \\ &= 2\pi\rho x && r < a \text{ به‌ازای} \\ E_y &= \left(\frac{y}{r}\right) E = \frac{2\pi\rho a^2 y}{x^2 + y^2} && r > a \text{ به‌ازای} \\ &= 2\pi\rho y && r < a \text{ به‌ازای} \end{aligned} \quad (46)$$

البته E_z صفر است.

خارج استوانهٔ باردار، $\text{div } \mathbf{E}$ توسط عبارت زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} &= 2\pi\rho a^2 \left[\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

داخل استوانه $\text{div } \mathbf{E}$ برابر است با

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 2\pi\rho(1 + 1) = 4\pi\rho \quad (48)$$

انتظار همین دو جواب را هم داشتیم. خارج از استوانه باری وجود ندارد، شار کلی که از هر حجم خارج می‌شود — چه کوچک باشد و چه بزرگ — صفر است، بنابراین حد نسبت حجم/شار هم صفر است. داخل استوانه نتیجه‌ای را به دست آوردیم که معادلهٔ اساسی ۳۹ ایجاب می‌کند.

۲-۱۰ لاپلاسی

تا اینجا دو تابع نرده‌ای مربوط به میدان الکتریکی را دیدیم، تابع پتانسیل φ و دیورژانس میدان یعنی $\text{div } \mathbf{E}$. در مختصات دکارتی رابطه‌ها به صورت زیرند

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi = -\left(\hat{x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \quad (49)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (50)$$

معادله ۴۹ نشان می‌دهد که مؤلفه x میدان \mathbf{E} عبارت است از $E_x = -\partial\varphi/\partial x$. با جاگذاری این عبارت و عبارتهای متناظر برای E_y و E_z در معادله ۵۰، رابطه‌ای میان $\text{div } \mathbf{E}$ و φ به دست می‌آوریم:

$$\text{div } \mathbf{E} = -\text{div grad}\varphi = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) \quad (51)$$

از علامت منفی که بگذاریم، عملیاتی که در معادله ۵۱ روی φ انجام می‌گیرد، "div grad" یا "گرفتن دیورژانس ازگرادیان..." خوانده می‌شود. علامت نشان دادن این عملیات ∇^2 است که عملگر لاپلاسی یا فقط لاپلاسی نام دارد. عبارت

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

دستور لاپلاسی در مختصات دکارتی است.

نماد ∇^2 را به صورت زیر توضیح می‌دهیم. عملگر گرادیان را بیشتر با ∇ نشان می‌دهیم که "دِل" خوانده می‌شود. در دستگاه مختصات دکارتی داریم

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \quad (52)$$

اگر این را یک بردار بدانیم، مجذورش می‌شود

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (53)$$

که همان عبارتی است که برای لاپلاسی در مختصات دکارتی تعریف کردیم. به این دلیل لاپلاسی را بیشتر "مجذور دِل" می‌نامیم و می‌گوییم "مجذور دِل φ " یعنی "div grad φ ". توجه کنید: در دستگاههای مختصات دیگر، مثلاً مختصات قطبی کروی، رابطه میان شکل صریح عملگر گرادیان و عملگر لاپلاسی به این سادگیها نیست. بد نیست یادمان بماند که تعریف عملگر لاپلاسی "دیورژانس گرادیان..." است.

حالا می‌توانیم یک رابطه محلی بین چگالی بار در یک نقطه و تابع پتانسیل در همسایگی بلافاصل آن نقطه تعریف کنیم. از شکل دیفرانسیلی قانون گاوس $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$ داریم

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho \quad (54)$$

معادله ۵۴، که معادله پواسون هم نامیده می‌شود، چگالی بار را به مشتقات دوم پتانسیل مربوط می‌کند. این معادله در مختصات دکارتی به این صورت نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho \quad (55)$$

این معادله را می‌شود بیان دیفرانسیلی رابطه‌ای دانست که در انتگرال معادله ۱۵ داشتیم، معادله‌ای که به ما می‌گوید چطور پتانسیل در یک نقطه را با جمع کردن سهم‌های همه چشمه‌های دور و نزدیک، به دست آورد.^۱

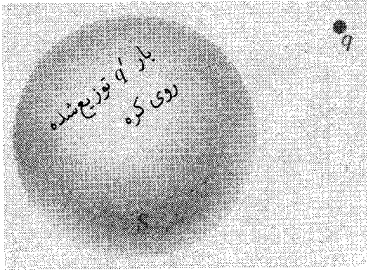
۱۱-۲ معادله لاپلاس

هر جا داشته باشیم $\rho = 0$ ، یعنی در هر جا که در آن بار الکتریکی موجود نباشد، پتانسیل الکتریکی φ باید در معادله زیر صدق کند

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (56)$$

این معادله لاپلاس است. در خیلی از شاخه‌های فیزیک به آن می‌رسیم. در واقع می‌شود گفت که از دیدگاه ریاضی نظریه میدانهای کلاسیک عمده‌تاً بررسی جوابهای این معادله است. رده توابعی که در معادله لاپلاس صدق می‌کنند، توابع هماهنگ خوانده می‌شوند. این توابع خواص قابل توجهی دارند، یکی اینکه: اگر $\varphi(x, y, z)$ در معادله لاپلاس صدق کند، مقدار میانگین φ روی سطح هر کره (لازم نیست کوچک باشد) برابر است با مقدار φ در مرکز کره. به آسانی می‌توانیم نشان بدهیم این در مورد پتانسیل الکتریکی φ در جایی که باز نباشد، صادق است. بار نقطه‌ای q و یک سطح کروی S که بار q' به‌طور یکنواخت روی آن توزیع شده، در نظر بگیرید. فرض کنیم بار q را از بینهایت به فاصله R از مرکز کره باردار آورده‌ایم (شکل ۲-۱۸). چون میدان الکتریکی کره همان است که اگر بار q' در مرکز کره متمرکز باشد خواهیم داشت، کار لازم برابر است با qq'/R . حالا فرض کنید بار نقطه‌ای q از اول همین جا باشد و کره باردار را بعداً از بینهایت بیآوریم. کار لازم در این مورد برابر است با حاصلضرب q' و میانگین پتانسیل ناشی از بار q روی سطح کره. مطمئناً کار اخیر هم برابر با qq'/R است، در نتیجه میانگین پتانسیل ناشی از q روی کره باید q/R باشد.

۱. در واقع می‌شود نشان داد که معادله ۵۵ هم‌ارز ریاضی معادله ۱۵ است. یعنی اگر عملگر لاپلاسی روی معادله ۱۵ اثر کند، نتیجه $-4\pi\rho$ می‌شود. ما نمی‌توانیم بحث را قطع کنیم و این عملیات را نشان بدهیم. باید یا حرف ما را سند بدانید یا خودتان بفهمید این نتیجه چطور به دست می‌آید.



شکل ۲-۱۸ کار لازم برای آوردن بار q' و توزیع آن روی کره برابر است با q' ضربدر میانگین پتانسیل ϕ ناشی از q ، روی سطح کره.

این مقدار در واقع پتانسیل ناشی از بار نقطه‌ای خارجی q در مرکز کره است. به این ترتیب حکم برای هر بار نقطه‌ای مجرد خارج کره اثبات می‌شود. اما پتانسیل تعدادی بار صرفاً حاصل جمع پتانسیلهای مربوط به تک تک بارهاست، و میانگین حاصل جمع همان حاصل جمع میانگینهاست. نتیجه این می‌شود که این حکم باید برای هر دستگاه بار که کلاً خارج کره S قرار می‌گیرد صادق باشد.

این خاصیت پتانسیل، که میانگین آن روی یک کره خالی برابر است با مقدار آن در مرکز، به واقعیتی مربوط می‌شود که به نظر شما ممکن است ناخوشایند باشد: نمی‌توانید میدان الکتروستاتیکی‌ای بسازید که یک ذره باردار را در تعادل پایدار در فضای خالی نگه دارد. این "قضیه ناممکنی" خاص، مثل دیگر قضیه‌های نظیرش در فیزیک، از فرضیه‌پردازیه‌ها و تلاش‌های بی‌فایده جلوگیری می‌کند. ببینیم چرا این قضیه صحت دارد. فرض کنید یک میدان الکتریکی داریم که در آن، برخلاف قضیه، نقطه‌ای مثل P وجود دارد که یک ذره با بار مثبت آنجا در تعادل پایدار خواهد بود. معنی‌اش این است که هر جابه‌جایی کوچک ذره از نقطه P ، باید ذره را به جایی ببرد که میدان الکتریکی مؤثر بر آن ذره را به نقطه P بازگرداند. اما این یعنی اینکه کره کوچکی به مرکز P باید در همه جای سطحش میدان \mathbf{E} به سمت داخل داشته باشد، این با قانون گاوس ناسازگار است چون در این ناحیه هیچ چشمه بار منفی‌ای در کار نیست. (بار آزمون ما به حساب نمی‌آید، تازه، آن هم مثبت است.) به عبارت دیگر شما نمی‌توانید یک منطقه خالی داشته باشید که میدان الکتریکی آنجا همیشه رو به داخل یا همیشه رو به خارج باشد، و این همان چیزی است که برای تعادل پایدار احتیاج دارید. برای بیان این واقعیت برحسب پتانسیل الکتریکی باید بگوییم، یک محل پایدار برای یک ذره باردار، نقطه‌ای است که در آنجا پتانسیل ϕ یا از همه نقطه‌های اطراف کمتر باشد (اگر بار ذره مثبت است) و یا از همه نقطه‌های اطراف بیشتر (در صورتی که بار ذره منفی است). واضح است که هیچکدام از این حالتها، برای تابعی که میانگین آن روی یک کره همیشه مساوی با مقدارش در مرکز است، ممکن نیست.

البته می‌شود ذره بارداری را در یک میدان الکتروستاتیکی در حال تعادل داشت، به این معنی

که نیروی وارد بر آن صفر باشد. در شکل ۱-۱۰ نقطه‌ای که آنجا $\mathbf{E} = 0$ است چنین محلی است. نقطه وسط فاصله بین دو بار مثبت مساوی، نقطه تعادلی برای یک بار دیگر است، چه مثبت باشد و چه منفی. اما تعادل، پایدار نیست. (اگر بار سوم یک کمی از نقطه تعادلش جابه‌جا بشود چه پیش می‌آید؟) در ضمن، با میدانهای الکتریکی متغیر با زمان، گیراندازی و نگه‌داشتن یک ذره باردار در حالت پایدار ممکن می‌شود.

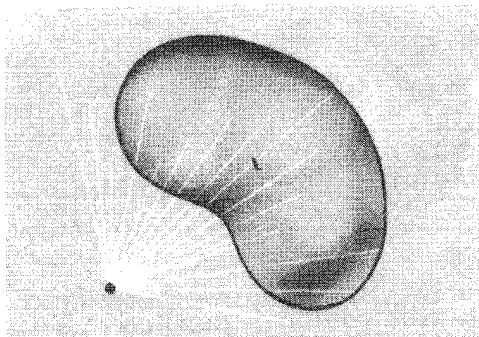
۱۲-۲ باز شناختن فیزیک از ریاضی

در چند بخش باقیمانده سروکارمان با رابطه‌های ریاضی و راههای جدیدی برای بیان حقایق قبلی است. مثال زیر شاید به جدا کردن فیزیک از ریاضی، و قانون از تعریف کمک کند. مجسم کنید اوضاع چطور می‌شد اگر نیروی الکتریکی یک نیروی کاملاً عکس مجذوری نبود، بلکه نیرویی بود با برد محدود، مثلاً نیرویی که به صورت زیر تغییر می‌کند

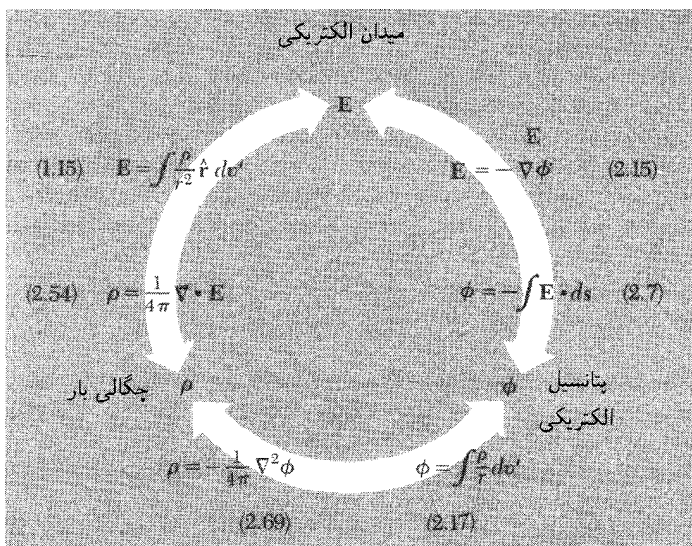
$$\frac{e^{-\lambda r}}{r^2} \quad (57)$$

در این صورت شکل انتگرالی قانون گاوس که در معادله ۳۷ بیان شد مسلماً بی‌اعتبار می‌شد، چون اگر سطح محیط بر چشمه را بسیار بزرگ در نظر بگیریم، میدان کوچک رو به صفری روی این سطح خواهیم داشت. وقتی سطح گسترده‌تر بشود، شار به جای آنکه ثابت بماند رو به صفر می‌رود. اما هنوز می‌توانیم در هر نقطه از فضا میدانی تعریف کنیم. می‌توانیم دیورژانس آن میدان را حساب کنیم و معادله ۳۸ که توصیف یک خاصیت ریاضی برای هر میدان برداری است، هنوز صادق خواهد بود. آیا تناقضی در کار است؟ خیر، چون معادله ۳۹ هم دیگر به درد نمی‌خورد. دیورژانس میدان دیگر همان چگالی چشمه نخواهد بود. این مطلب را با توجه به این نکته می‌توان درک کرد که یک حجم کوچک بدون چشمه ممکن است تحت تأثیر چشمه‌ای خارج از آن حجم، شار عبوری داشته باشد، در صورتی که میدان برد متناهی داشته باشد. همان‌طور که در شکل ۲-۱۹ نشان داده می‌شود شار ورودی به طرف نزدیکتر چشمه، بیشتر از شاری است که از حجم خارج می‌شود.

به این ترتیب می‌توانیم بگویم معادله‌های ۳۷ و ۳۹ هر دو یک قانون فیزیکی را بیان می‌کنند، قانون عکس مجذور که کولن با اندازه‌گیری مستقیم نیروهای بین اجسام باردار به دست آورد، در حالی که معادله ۳۸ بیان یک قضیه ریاضی است که به ما امکان می‌دهد حکم مربوط به این قانون را از شکل دیفرانسیلی به شکل انتگرالی، یا برعکس، تبدیل کنیم. رابطه‌هایی که \mathbf{E} ، ρ و ϕ را به هم مربوط می‌کنند همه در شکلهای ۲-۲۰ و ۲-۲۰ الف گرد آمده‌اند.

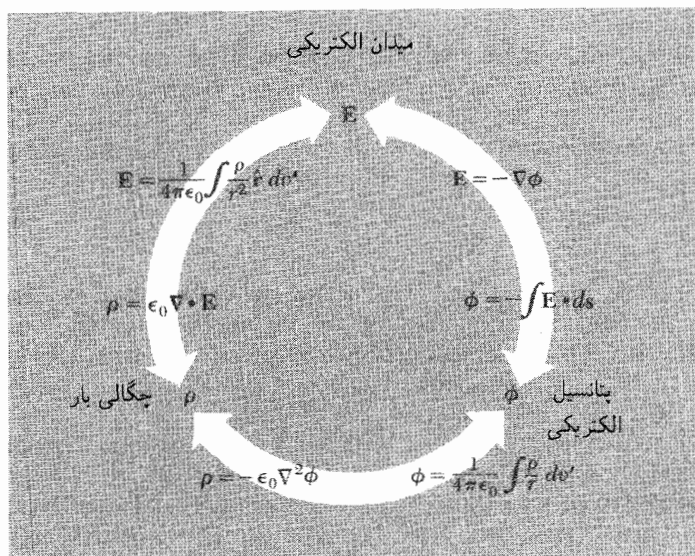


شکل ۱۹-۲ در میدانی که عکس مجذوری نباشد، شار عبوری از سطح بسته صفر نیست.



شکل ۲۰-۲ (الف) چگونه چگالی بار الکتریکی، پتانسیل الکتریکی، و میدان الکتریکی به هم مربوط‌اند. رابطه‌های انتگرالی شامل انتگرال خطی و انتگرال حجمی است. رابطه‌های دیفرانسیلی شامل گرادیان، دیورژانس، و دیورژانس گرادیان یا ∇^2 عملگر لاپلاسی است. چگالی بار، ρ ، برحسب esu/cm^3 ، پتانسیل ϕ برحسب ایستاولت، میدان E برحسب سانتی‌متر/ایستاولت و طول برحسب سانتی‌متر است.

چگونه می‌توانیم این رابطه‌های دیفرانسیلی چشمه و میدان را توجیه کنیم، وقتی که بار الکتریکی در جهان واقعی ژله‌ای نرم نیست بلکه متمرکز در ذراتی است که از باطنشان چیز زیادی نمی‌دانیم؟ راستش را بخواهید، عبارتی مثل معادله ۵۴، معادله پواسون، فقط در مقیاس ماکروسکوپیکی معنی دارد. چگالی بار ρ را باید مقدار میانگینی در ناحیه‌ای کوچک، اما متناهی، پر از ذره دانست.



شکل ۲-۲ (ب) همان رابطه‌ها در یکاهای SI. چگالی بار، ρ برحسب مترمکعب/کولن، پتانسیل ϕ برحسب ولت، میدان E برحسب ولت/متر و همه طولها برحسب متر هستند. $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ C/V}\cdot\text{m}$.

به این ترتیب تابع ρ به آن صورت که مورد نظر ریاضیدانهاست نمی‌تواند پیوسته باشد. وقتی در به‌دست آوردن شکل دیفرانسیلی قانون گاوس گذاشتیم ناحیه V_i جمع‌تر بشود، در عالم فیزیک می‌دانستیم که نباید بگذاریم این ناحیه خیلی زیاد کوچک شود. این شاید عملکرد شسته و رفته‌ای نباشد ولی واقع امر این است که ما با مدل پیوستار در دستگاه‌های الکتریکی بزرگ-مقیاس خیلی خوب جلو می‌رویم. در دنیای اتم ما ذرات بنیادی داریم و خلاصه داخل ذرات حتی اگر قانون کولن یک معنی‌هایی هم داشته باشد، جریان به کلی چیز دیگری است. خلاصه تا آنجا که با الکتروستاتیک سروکار داریم، تابع معادله لاپلاس است. اما حتی در خلا نمی‌توانیم مطمئن باشیم که رسیدن حد ابعاد صفر معنی فیزیکی داشته باشد.

۱۳-۲ تاو یک تابع برداری^۱

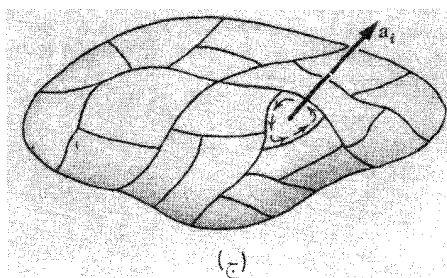
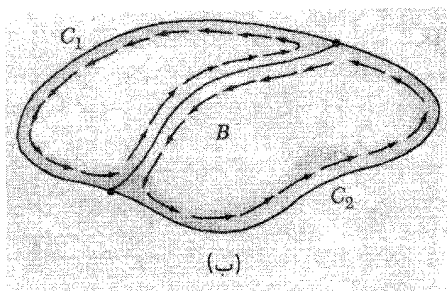
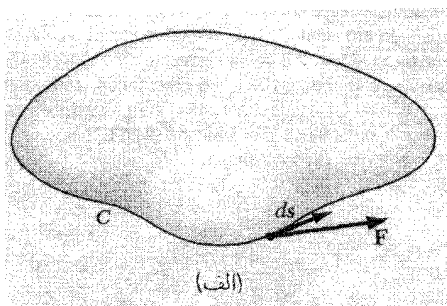
برای رسیدن به مفهوم دیورژانس که یک خاصیت محلی میدان برداری بود از انتگرال سطحی روی یک سطح بسته بزرگ شروع کردیم. اکنون انتگرال خطی یک میدان برداری $F(x, y, z)$ را در نظر

۱. این قسمت و بقیه فصل ۲ را می‌توانیم وقتی به فصل ۶ رسیدیم مطالعه کنیم. تا آن وقت تنها مورد استفاده ما از این مشتق برداری نشان دادن این است که برای یک میدان الکتروستاتیکی $\text{curl } E = 0$ که در قسمت ۲-۱۶ بررسی می‌شود.

بگیریم که روی یک مسیر بسته، مثلاً منحنی بسته C گرفته می‌شود. منحنی C را می‌توان مرز سطح S فرض کرد که روی C خیمه می‌زند. گردش اسم خوبی برای اندازه این انتگرال خطی در یک مسیر بسته است، این مقدار را با علامت Γ (گامای بزرگ) نشان می‌دهیم:

$$\Gamma = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (58)$$

ds در انتگرالده جزء مسیر است، بردار کوچکی که در هر نقطه بر منحنی C مماس است (شکل ۲۱-۲ الف). در دو جهت می‌شود منحنی C را طی کرد؛ باید آن را انتخاب کنیم که جهت ds مشخص باشد. ضمناً لازم نیست منحنی C در یک صفحه قرار بگیرد می‌توانید هر طور می‌خواهید خم و راستش کنید.



شکل ۲۱-۲ برای حلقه‌های تقسیم شده، حاصل جمع تمامی گردشها، Γ ، دور تا دور قطعه‌ها، برابر است با گردش Γ دور منحنی اولیه C .

حالا با مسیر جدیدی مثل B ، منحنی C را به دو حلقه C_1 و C_2 تقسیم کنید به طوری که هر دو حلقه شامل B باشد (شکل ۲-۲۱). روی هر دو حلقه در یک جهت انتگرال خطی را به دست بیاورید. به آسانی می‌توان دید که جمع دو گردش Γ_1 و Γ_2 همان گردش اولیه روی C است: دلیلش این است که پل B در دو انتگرال در دو جهت مخالف قرار می‌گیرد، و فقط قسمتهای باقی می‌مانند که انتگرال خطی اولیه روی C را تشکیل می‌دادند. به همین ترتیب تقسیم‌بندی بیشتر C و ایجاد حلقه‌های زیادی مثل $C_1, \dots, C_i, \dots, C_N$ ، حاصل جمع را تغییر نمی‌دهد:

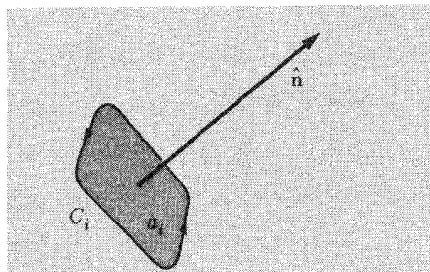
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^N \int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}_i \quad \text{یا} \quad \Gamma = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \quad (59)$$

در اینجا هم می‌توانیم با اضافه کردن پلهای جدید، عمل تقسیم را بینهایت ادامه بدهیم تا اینکه حدی به دست بیاوریم که به یک ویژگی کمی میدان \mathbf{F} در اطراف یک نقطه برسد. وقتی حلقه‌ها را تقسیم می‌کنیم، حلقه‌هایی با گردش کوچکتر درست می‌شوند اما اینها مساحتشان هم کوچکتر است. بنابراین طبیعی است که نسبت گردش حلقه به مساحت حلقه را در نظر بگیریم، درست همان‌طور که در بخش ۲-۷ نسبت شار به حجم را مورد توجه قرار دادیم. اما اینجا اوضاع کمی فرق می‌کند، چون مساحت a_i ، مربوط به جزئی از سطح که حلقه کوچک C_i را فرا می‌گیرد، در حقیقت یک بردار است؛ یعنی سطح در فضا یک سمتگیری دارد. در واقع همین‌طور که در محلی داریم حلقه‌ها را کوچکتر و کوچکتر می‌کنیم می‌توانیم ترتیبی بدهیم که حلقه‌ای در یک جهت خاص داشته باشیم. (یادتان باشد که ما خود را پایبند هیچ سطح به‌خصوصی روی کل منحنی C نکرده‌ایم.) بنابراین می‌توانیم از راههایی به کلی متفاوت، به حد مورد نظر برسیم، و انتظار داریم این مطلب در نتیجه‌هایمان بازتاب یابد.

در آخرین مرحله تقسیم، یک جهت خاص برای قطعه مورد نظرمان انتخاب می‌کنیم. بردار یکه $\hat{\mathbf{n}}$ عمود بر قطعه است و جهت آن وقتی اندازه قطعه اطراف نقطه معینی مانند P تا نزدیک صفر کوچک می‌شود، ثابت است. حد نسبت گردش به مساحت قطعه به این شکل نوشته می‌شود:

$$\lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{a_i} \quad \text{یا} \quad \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} \quad (60)$$

قاعده علامت این است که جهت $\hat{\mathbf{n}}$ و جهت پیمودن C_i در انتگرال خطی باید با قانون گردش انگشتان دست راست به هم مربوط باشند (شکل ۲-۲۲). حدی که از این راه به دست می‌آوریم یک کمیت زنده‌ای است که به نقطه P در میدان برداری \mathbf{F} ، و به راستای $\hat{\mathbf{n}}$ بستگی دارد. می‌توانستیم

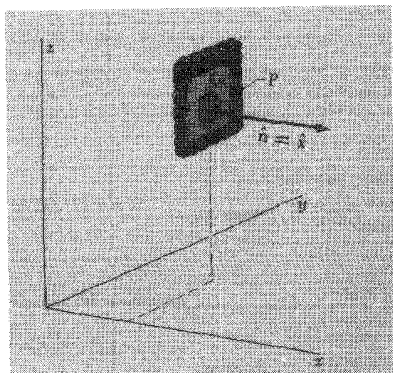


شکل ۲۲-۲ رابطه گردش انگشتان دست راست بین عمود بر سطح و جهت انتگرال خطی گردش.

سه جهت مثل \hat{x} ، \hat{y} و \hat{z} انتخاب کنیم و سه عدد مختلف به دست بیاوریم. این اعداد را می توانیم مؤلفه های یک بردار در نظر بگیریم. این بردار را \mathbf{F} می نامیم. یعنی عددی که با مشخص کردن جهت به خصوص \hat{n} برای حد به دست آوریم، مؤلفه بردار \mathbf{F} در آن جهت به خصوص است. این را به صورت معادله زیر بیان می کنیم:

$$(\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \hat{n} = \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} = \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot ds}{a_i} \quad (61)$$

برای مثال در شکل ۲۳-۲ مؤلفه x \mathbf{F} را با انتخاب $\hat{n} = \hat{x}$ به دست آورده ایم. در حالی که قطعه اطراف نقطه P کوچکتر و کوچکتر می شود، آن را در صفحه ای عمود بر محور x نگه داشته ایم. در حالت کلی بردار \mathbf{F} از جایی به جای دیگر فرق می کند. اگر اطراف نقطه دیگری این قطعه را کوچک می کردیم، نسبت گردش به مساحت ممکن بود بسته به سرشت تابع برداری \mathbf{F} مقدار دیگری داشته باشد. یعنی \mathbf{F} خودش یک تابع برداری از مختصات است. راستای آن در هر



شکل ۲۳-۲ قطعه اطراف نقطه P کوچکتر می شود در حالی که عمود بر آن در راستای x می ماند.

نقطه در فضا عمود بر صفحه‌ای است که از این نقطه می‌گذرد و گردش در آن بیشینه است. اندازه آن مقدار حدى گردش بر واحد سطح، در این صفحه گرد نقطه مورد نظر است.

دو جمله اخیر را می‌توان تعریفی برای \mathbf{F} دانست. در آنها هم مثل معادله ۶۹ اشاره‌ای به چارچوب مختصات نشده است. ما ثابت نکرده‌ایم که چیزی که این‌طور تعریف و نامگذاری کردیم بردار است؛ فقط این‌طور ادعا کردیم. داشتن جهت و اندازه کافی نیست چیزی را بردار کند. مؤلفه‌هایی که تعریف کردیم باید مثل مؤلفه‌های بردار رفتار کنند. فرض کنید در معادله ۶۱ به جای $\hat{\mathbf{n}}$ به ترتیب $\hat{\mathbf{x}}$ ، $\hat{\mathbf{y}}$ و $\hat{\mathbf{z}}$ گذاشته‌ایم و مؤلفه‌های x ، y و z تا \mathbf{F} را تعیین کرده‌ایم. اگر تاو \mathbf{F} یک بردار باشد، این سه مؤلفه به‌طور یکتا تعریف می‌شود. اگر جهت چهارمی برای $\hat{\mathbf{n}}$ انتخاب شود، طرف چپ معادله ۶۱ بدون تغییر می‌ماند و مقدار سمت راست، گردش در صفحه عمود بر $\hat{\mathbf{n}}$ جدید، بهتر است که با طرف چپ توافق کند! در حقیقت تا زمانی که مطمئن نباشیم تاو \mathbf{F} یک بردار است حتی معلوم نیست که حداکثر یک جهت وجود داشته باشد که برای آن گردش بر واحد سطح در P بیشینه است — این چیزی است که ما در تعریف اخیر به‌طور ضمنی فرض کردیم. واقعیت این است که معادله ۶۱ تعریف یک بردار هست اما این را ثابت نمی‌کنیم.

۱۴-۲ قضیه استوکس

از گردش دور یک قطعه سطح بینهایت کوچک می‌توانیم برگردیم به گردش دور حلقه بزرگ اولیه C :

$$\Gamma = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i = \sum_{i=1}^N a_i \left(\frac{\Gamma_i}{a_i} \right) \quad (62)$$

در آخرین مرحله فقط عبارت را در a_i ضرب و بعد بر آن تقسیم کرده‌ایم. حالا ببینید وقتی N بینهایت و همه a_i ها کوچک شوند بر سر سمت راست معادله چه می‌آید. کمیت داخل پرانتز می‌شود $(\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i$ که $\hat{\mathbf{n}}_i$ بردار یکه عمود بر قطعه i ام است. بنابراین ما در سمت راست، مجموع حاصلضربهای مساحت قطعه در مؤلفه عمودی $(\text{curl } \mathbf{F})$ را داریم که این مجموع روی تمام قطعه‌هایی که کل سطح S فراگیر منحنی C را تشکیل می‌دهند گرفته می‌شود. این چیزی نیست جز انتگرال سطحی بردار تاو \mathbf{F} روی S :

$$\sum_{i=1}^N a_i \left(\frac{\Gamma_i}{a_i} \right) = \sum_{i=1}^N a_i (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \longrightarrow \int_S d\mathbf{a} \cdot \text{curl } \mathbf{F} \quad (63)$$

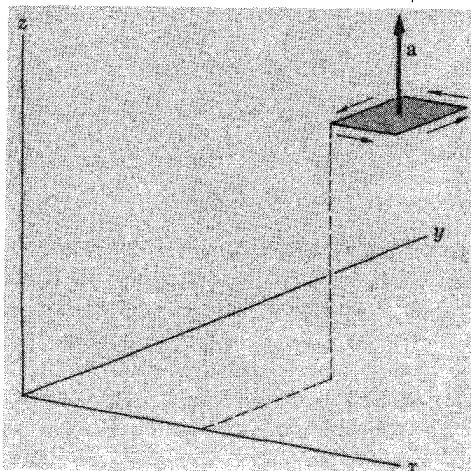
بنابراین داریم

$$\int_C \mathbf{F} \cdot ds = \int_C \text{curl } \mathbf{F} \cdot da \quad (۶۴)$$

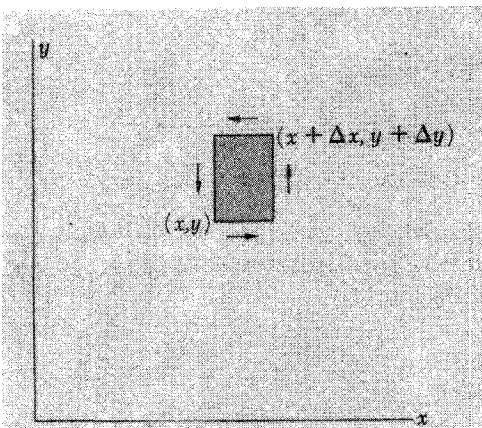
رابطه‌ای که در معادله ۶۴ بیان می‌شود یک قضیه ریاضی است که قضیه استوکس نام دارد. توجه کنید که ساختار آن چطور شبیه قضیه گاوس یعنی قضیه دیورژانس است. قضیه استوکس انتگرال خطی یک بردار را به انتگرال سطحی تاو بردار مربوط می‌کند. قضیه گاوس (رابطه ۳۶) انتگرال سطحی یک بردار را به انتگرال حجمی دیورژانس آن بردار مربوط می‌کند. قضیه استوکس یک سطح و منحنی محدودکننده آن را دربردارد. قضیه گاوس یک حجم و سطح محصورکننده آن را دربرمی‌گیرد.

۱۵-۲ تاو در مختصات دکارتی

معادله ۶۱ تعریف بنیادی تاو \mathbf{F} است که بدون ارجاع به دستگاه مختصات به خصوصی بیان می‌شود. از این نظر شبیه به تعریف بنیادی ما برای دیورژانس، معادله ۳۴، است. اینجا هم می‌خواهیم بدانیم چطور می‌توانیم تاو \mathbf{F} را وقتی که تابع برداری $\mathbf{F}(x, y, z)$ صریحاً معلوم باشد محاسبه کنیم. برای یافتن قاعده، انتگرال‌گیری معادله ۶۱ را انجام می‌دهیم، اما روی یک مسیر بسیار ساده، یعنی مسیری که قطعه مستطیل شکل از سطح موازی با صفحه xy را محدود می‌کند (شکل ۲-۲۴). یعنی ما فرض می‌کنیم $\hat{n} = \hat{z}$. مطابق قانونی که برای علامت گذاشتیم، جهت انتگرال‌گیری دور سطح باید از دید ناظری که در جهت \hat{n} نگاه می‌کند مطابق گردش عقربه‌های ساعت باشد. در شکل ۲-۲۵ ما مستطیل را از بالا به پایین، نگاه می‌کنیم.



شکل ۲-۲۴ گردش دور یک قطعه مستطیلی با $\hat{n} = \hat{z}$



شکل ۲۵-۲ نمای قطعه شکل ۲۴-۲ وقتی از بالا نگاه کنیم.

انتگرال خطی A دور چنین قطعه‌ای بستگی به تغییرات A_x با y و تغییرات A_y با x دارد. چون اگر A_x در طول ضلع بالایی قاب شکل ۲۵-۲ همان مقدار میانگین را داشته باشد که در طول ضلع پایینی قاب دارد، واضح است که سهم این دو مسیر در کل انتگرال با هم خنثی می‌شوند. همین امر برای دو طرف قاب صادق است. در مقادیر کوچک Δx و Δy تا مرتبه اول، اختلاف بین میانگین A_x روی قطعه بالایی مسیر در $y + \Delta y$ و میانگین آن روی قطعه پایینی در y برابر است با

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \Delta y \quad (۶۵)$$

استدلال شبیه همان است که در شکل ۱۳-۲ ب به کار رفت.

$$A_x = A_x(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \quad (\text{دور وسط ضلع پایینی قاب}) \quad (۶۶)$$

$$A_x = A_x(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (\text{در وسط ضلع بالایی قاب})$$

اینها مقادیر میانگین تا مرتبه اول در بسط تیلور هستند. اختلاف اینها ضربدر طول آن قطعه مسیر، Δx است که سهم کل آنها را در گردش تعیین می‌کند. این سهم برابر است با $-\Delta x \Delta y (\partial A_x / \partial y)$. علامت منفی به خاطر این است که ما در قسمت بالایی رو به سمت چپ انتگرال می‌گیریم، در نتیجه اگر A_x در بالا بیشتر مثبت باشد، در گردش سهم منفی خواهد داشت. سهم در طرف A_x در بالا بیشتر مثبت است و اینجا علامت مثبت است چون اگر A_y در سمت راست بیشتر

مثبت باشد نتیجه‌اش یک سهم مثبت در گردش است.

به این ترتیب، با چشمویشی از توانهای بالاتر Δx و Δy ، انتگرال خطی دور کل مستطیل برابر است با

$$\begin{aligned}\int_{\square} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} &= (-\Delta x) \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta y + (\Delta y) \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \Delta x \\ &= \Delta x \Delta y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (67)$$

حالا $\Delta x \Delta y$ اندازه مساحت مستطیل محصور است که ما با برداری در جهت z نشان داده‌ایم. معلوم است که کمیت

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (68)$$

حد نسبت

$$\frac{\text{انتگرال خطی دور قطعه}}{\text{مساحت قطعه}} \quad (69)$$

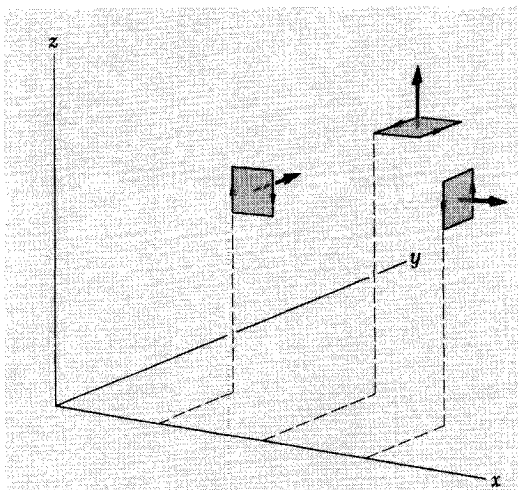
است وقتی اندازه قطعه به صفر میل کند. اگر قاب مستطیل با بردار عمود بر سطحش در جهت y نشان داده می‌شد، عبارت

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (70)$$

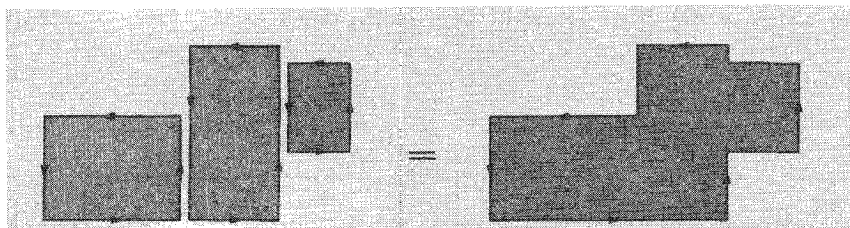
را برای حد متناظر با این نسبت می‌داشتیم، و اگر قاب با بردار عمودش در جهت x مشخص می‌شد، مثل قاب سمت راست شکل ۲-۲۶، داشتیم

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (71)$$

هر چند ما فقط مستطیلهای را در نظر گرفتیم، نتیجه حقیقتاً مستقل از شکل یک قطعه کوچک و حدود آن است. دلایل آن خیلی شبیه به مورد انتگرالهایی است که در قضیه دیورژانس داشتیم. مثلاً واضح است که می‌توانیم چهارگوشهای مختلفی را آزادانه کنار هم بگذاریم و شکلهای دیگری بسازیم چون انتگرالهای خطی در نوارهای مرزی دقیقاً همدیگر را خنثی می‌کنند (شکل ۲-۲۷).



شکل ۲-۲۶ برای هر سمتگیری، حد نسبت گردش/مساحت یک مؤلفه از تاو \mathbf{A} را در آن نقطه تعریف می‌کند. برای تعیین همه مؤلفه‌های بردار تاو \mathbf{A} در هر نقطه، همه قطعه‌ها باید دور آن نقطه جمع شوند؛ اینجا برای وضوح جدا از هم کشیده شده‌اند.



شکل ۲-۲۷ گردش در حلقه سمت راست مجموع گردشها در مستطیهاست و سطح سمت راست مجموع مساحت‌های مستطیهاست. این شکل نشان می‌دهد که چرا نسبت، گردش/مساحت، مستقل از شکل است.

نتیجه می‌گیریم که برای هر یک از این سمتگیرها، حد نسبت گردش به سطح مستقل از شکل مسیری است که انتخاب می‌کنیم. بنابراین، وقتی \mathbf{F} بر حسب x, y, z معلوم باشد فرمول کلی زیر را برای مؤلفه‌های تاو \mathbf{F} به دست می‌آوریم:

$$\text{curl } \mathbf{F} = \hat{x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (۷۲)$$

شاید برای شما به خاطر سپردن قانون زیر آسانتر از خود فرمول باشد: دترمینانی به این شکل تشکیل بدهید:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (۷۳)$$

آن را مطابق قانون دترمینانها بسط بدهید، تاو \mathbf{F} را مثل معادله ۷۲ به دست می آورید. توجه داشته باشید که مؤلفه x تاو \mathbf{F} بستگی به آهنگ تغییر F_z در جهت y ، و نیز به آهنگ تغییر F_y در جهت z با علامت منفی، و غیره دارد.

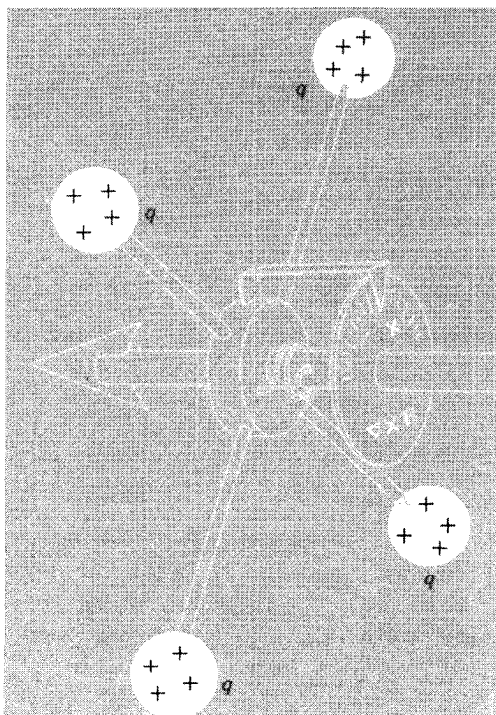
علامت $\nabla \times$ که خوانده می شود "دل ضربدر" و ∇ برداری به صورت زیر است

$$\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (۷۴)$$

و غالباً به جای کلمه تاو به کار می رود. اگر بنویسیم $\nabla \times \mathbf{F}$ ، از قانونهای تشکیل مؤلفه های ضرب برداری پیروی کنیم، خود به خود بردار تاو \mathbf{F} را به دست می آوریم. بنابراین تاو \mathbf{F} و $\nabla \times \mathbf{F}$ هر دو یک چیزند.

۱۶-۲ معنای فیزیکی تاو

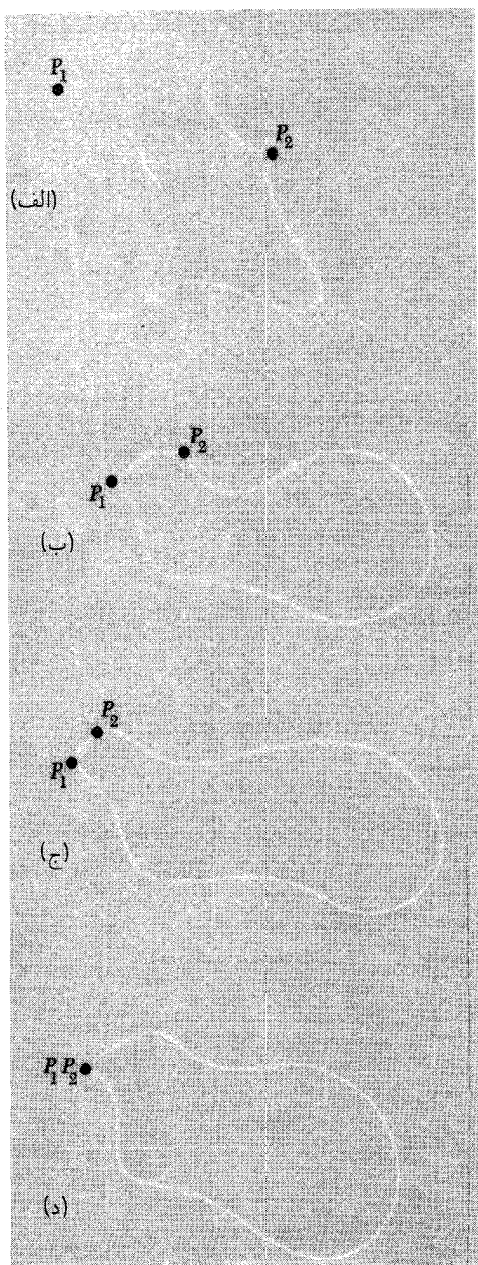
نام تاو برای ما یادآور این است که یک میدان برداری با تاو غیر صفر دارای گردش، یا جریان گردابی است. ماکسول از کلمه چرخش استفاده کرد و در آلمانی هنوز هم همین نام با علامت اختصاری rot به کار می رود. یک میدان برداری سرعت مانند \mathbf{G} مجسم کنید و فرض کنید تاو \mathbf{G} صفر نیست. سرعتها در این میدان یک چنین وضعی دارند: \uparrow یا \downarrow که احتمالاً در یک جهت در یک جریان کلی بر هم افزوده می شوند. مثلاً میدان سرعت آبی که از وان حمام خارج می شود معمولاً یک گردش دارد. تاو آن روی بیشتر قسمتهای سطح صفر نیست. چیزی که روی سطح جاری می شود ضمن حرکت می چرخد. در فیزیک شاره ها، هیدرودینامیک و آئرو دینامیک این مفهوم بیشترین اهمیت را دارد. برای ساختن یک "تاوسنج" برای میدان الکتریکی — حداقل در عالم خیال — می توانیم چند بار مثبت را مطابق شکل ۲-۲۸ با پره های عایق به تویی که چرخ ببندیم. اگر با این وسیله یک میدان الکتریکی را بررسی کنیم می بینیم که هر جا تاو \mathbf{E} صفر نباشد چرخ می خواهد دور محور بچرخد. اگر فزنی داشته باشیم که مانع چرخش شود، میزان پیچش می تواند لنگر را معلوم کند، و این لنگر متناسب با مؤلفه بردار تاو \mathbf{E} در راستای میله چرخ است. اگر بتوانیم جهتی از میله را که



شکل ۲۸-۲ تاوسنج.

لنگر برای آن بیشینه ساعتگرد و در جهت، بردار تاو E را به دست می‌آوریم. (البته این تاوسنج در میدانی که در ابعادی با اندازه چرخ دچار تغییرات زیادی بشود قابل اعتماد نیست.)

حالا به کمک همه این مباحث، درباره میدان الکتروستاتیکی E چه می‌توان گفت؟ نتیجه‌ای که به دست می‌آوریم خیلی ساده است. تاوسنج همیشه صفر را نشان خواهد داد! این پیامد واقعی است که قبلاً یاد گرفته‌ایم. در میدان الکتروستاتیکی انتگرال خطی E روی هر مسیر بسته‌ای صفر است. صرفاً برای یادآوری دلیل این امر می‌گوییم که انتگرال خطی E بین هر دو نقطه‌ای نظیر P_1 و P_2 در شکل ۲۹-۲ مستقل از مسیر است. وقتی دو نقطه P_1 و P_2 را نزدیک هم می‌آوریم انتگرال خطی در مسیر کوتاه‌تر شکل مسلماً رو به صفر می‌رود. مگر آنکه محل نهایی یک تکینی مثل یک بار نقطه‌ای باشد، که ما چنین موردی را کنار می‌گذاریم. بنابراین انتگرال خطی روی حلقه بسته در شکل ۲۹-۲ باید صفر باشد. اما حالا اگر گردش در هر مسیر بسته‌ای صفر باشد، بنابه قضیه استوکس انتگرال سطحی تاو E روی هر سطحی در هر کجا و به هر شکل و اندازه، صفر می‌شود. اما در این صورت تاو E باید همه‌جا صفر باشد، چون اگر در جایی صفر نباشد می‌توانیم



شکل ۲-۲۹ اگر انتگرال خطی بین P_1 و P_2 مستقل از مسیر باشد، انتگرال خطی روی یک حلقه بسته باید صفر باشد.

در آن حوالی، قطعه‌ای را در نظر بگیریم که نتیجه‌مان را نقض کند. همهٔ این جزئیات به این حکم ساده می‌انجامد که در میدان الکتروستاتیکی \mathbf{E}

$$\text{curl } \mathbf{E} = 0 \quad (\text{در همه جا}) \quad (75)$$

عکس این هم صادق است. اگر بدانیم تاو \mathbf{E} همه جا صفر است \mathbf{E} باید به صورت گرادیان یک تابع پتانسیل قابل توصیف باشد، یعنی می‌تواند یک میدان الکتروستاتیکی باشد. امتحانش راحت است. وقتی تابع برداری شکل ۲-۳ را معرفی می‌کردیم گفتیم که می‌تواند معرف یک میدان الکتروستاتیکی باشد. مؤلفه‌ها را با $E_x = Ky$ و $E_y = Kx$ مشخص کردیم که برای توصیف کامل میدان در فضای سه بعدی باید به اینها $E_z = 0$ را هم اضافه کنیم. با محاسبه تاو \mathbf{E} خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (\text{curl } \mathbf{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \\ (\text{curl } \mathbf{E})_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \\ (\text{curl } \mathbf{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = K - K = 0 \end{aligned} \quad (76)$$

یعنی \mathbf{E} گرادیان یک پتانسیل نوده‌ای است. از قضا دیورژانس این میدان به خصوص \mathbf{E} هم صفر است:

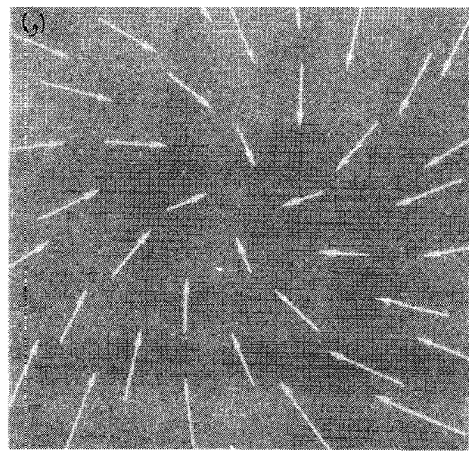
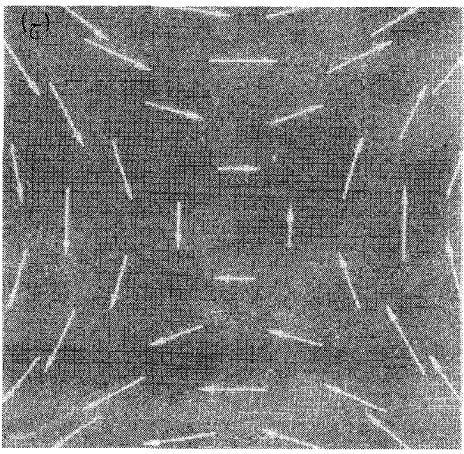
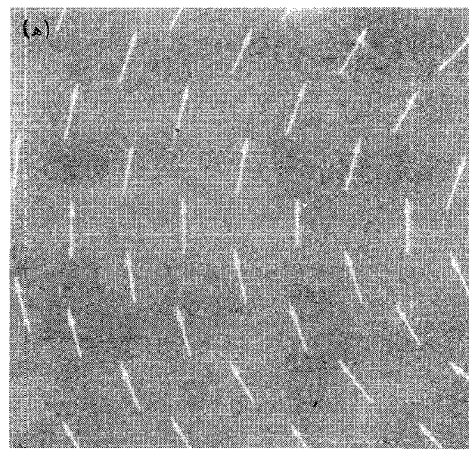
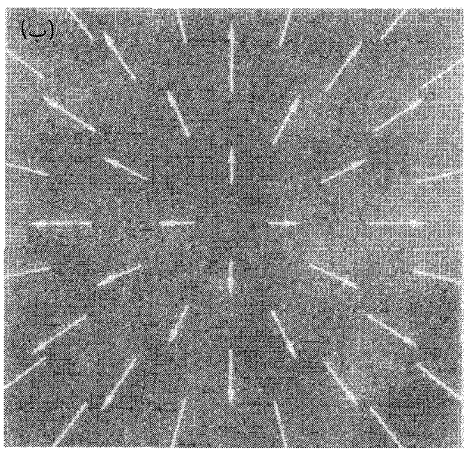
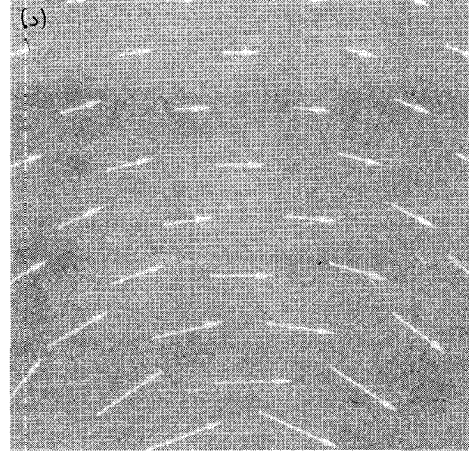
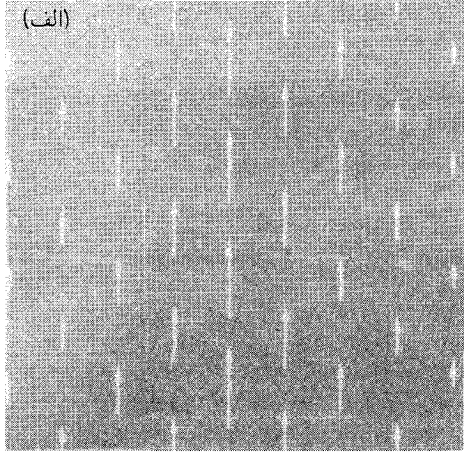
$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (77)$$

بنابراین نشاندندهٔ یک میدان الکتروستاتیکی در ناحیه‌ای خالی از بار است. از سوی دیگر تابع برداری دیگری هست که به همین سادگی با مؤلفه‌های $F_x = Ky$ ؛ $F_y = -Kx$ و $F_z = 0$ تعریف می‌شود ولی تاو آن صفر نیست. بلکه داریم

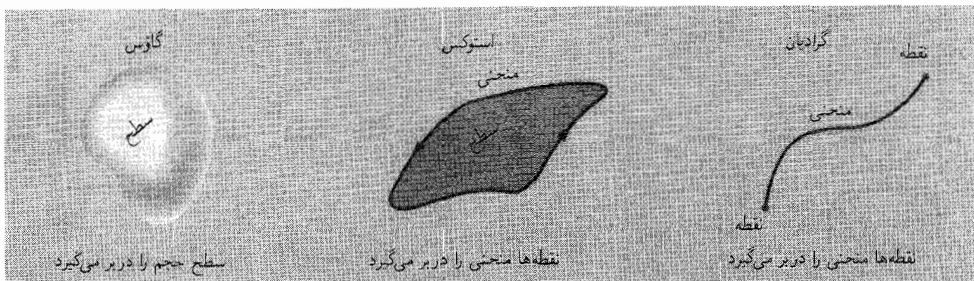
$$(\text{curl } \mathbf{F})_z = -2K \quad (78)$$

هیچ میدان الکتروستاتیکی نمی‌تواند به این شکل باشد. اگر طرح تقریبی چنین میدانی را رسم کنید، خیلی راحت می‌بینید که گردش دارد.

با توجه به میدانهای دوبعدی شکل ۲-۳ می‌توانید این جنبه‌های تابعهای برداری را تا حدی حس کنید. در چهار تا از این میدانها دیورژانس تابع برداری در ناحیهٔ نشان داده شده صفر است.



شکل ۲-۳۰ چهار تا از این میدانهای برداری در ناحیه نشان داده شده دیورژانس صفر دارند. سه تا از میدانها تو صفر دارند. می‌توانید پیدایشان کنید؟



$$\int_{\text{سطح}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\text{حجم}} \text{div } \mathbf{F} \, dv \quad \int_{\text{منحنی}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{سطح}} \text{curl } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\text{منحنی}} \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{s}$$

در مختصات دکارتی

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} & \text{curl } \mathbf{A} &= \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) & \text{grad } \varphi &= \hat{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ &= \nabla \cdot \mathbf{F} & &= \nabla \times \mathbf{A} & &= \nabla \varphi \\ \nabla &= \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

شکل ۲-۳۱ خلاصه بعضی رابطه‌های برداری.

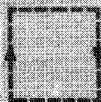
سعی کنید این چهار میدان را پیدا کنید. لازمه دیورژانس ورود شار به یک ناحیه یا خروج شار از آن است. این را می‌توانید به آسانی در بعضی از شکلهای تشخیص بدهید. در شکلهای دیگر می‌توان به آسانی فهمید که دیورژانس صفر است. در سه تا از میدانها تاو تابع برداری در آن بخش از میدان که نشان داده شده است صفر است. این سه میدان را، با بررسی اینکه انتگرال خطی روی هر حلقه‌ای در هر شکل صفر می‌شود یا نه، پیدا کنید. اصل مطلب تاو این است. بعد از بررسی شکلهای، درباره این سؤالا فکر کنید و بعد جوابتان را با توضیحات شکل ۲-۳۲ مقایسه کنید.

در بخشهای بعد، وقتی با میدانهای الکتریکی و مغناطیسی‌ای سروکار داشتیم که تاوشان صفر

(الف)

توجه کنید که اگر در جهت بردار پیش بروید، بردار ثابت می ماند. یعنی با $F_x = 0$ داریم $\text{div } \mathbf{F} = 0$. در نتیجه $\partial F / \partial y = 0$. توجه کنید که انتگرال خطی

در مسیر خط چین
صفر نیست



$$\text{div } \mathbf{F} = 0 \quad \text{curl } \mathbf{F} \neq 0$$

(د)

توجه کنید که وقتی در جهت \mathbf{F} پیش می روید، تا مرتبه اول، اندازه \mathbf{F} تغییری نمی کند. همین کافی است که مطمئن باشیم دیورژانس صفر است. ظاهراً گردش در مسیر نشان داده شده می تواند F^2 در قاعده بزرگتر ضعیفتر از قاعده کوچکتر است. در واقع، این می تواند یک میدان الکتروستاتیکی با F^2 متناسب با $1/r$ باشد که r فاصله تا نقطه ای در خارج تصویر است.

$$\text{div } \mathbf{F} = 0 \quad \text{curl } \mathbf{F} = 0$$

(ب)

این یک میدان مرکزی است. یعنی \mathbf{F} شعاعی

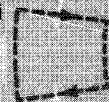
است و اندازه آن برای r معروض ثابت است. تا هر میدان شعاعی صفر است؛ گردش روی مسیر خط چین و هر مسیر دیگری صفر است. اما روشن است که دیورژانس صفر نیست



$$\text{div } \mathbf{F} \neq 0 \quad \text{curl } \mathbf{F} = 0$$

(ه)

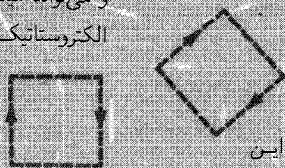
به همان دلیل که در مورد ۲ ذکر شد نتیجه می گیریم که دیورژانس \mathbf{F} صفر است. در اینجا مقدار \mathbf{F} همیشه یکسان است، بنابراین انتگرال خطی روی بازوی بزرگتر با انتگرال روی بازوی کوچکتر خنثی نمی شود، و گردش صفر نیست



$$\text{div } \mathbf{F} = 0 \quad \text{curl } \mathbf{F} \neq 0$$

(ج)

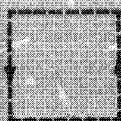
گردش مستملاً می تواند در مسیر مشخص شده صفر باشد. در واقع این مثل همان میدان شکل ۲-۲ است و می تواند میدان الکتروستاتیکی



باشد. از این تصویر به تنهایی نمی شود فهمید که $\text{div } \mathbf{F} = 0$ اما می توانید تحقیق کنید که دیورژانس هم می تواند صفر باشد

$$\text{div } \mathbf{F} = 0 \quad \text{curl } \mathbf{F} = 0$$

(و) واضح است که گردش در مسیر خط چین صفر نیست. به نظر می رسد که دیورژانس هم صفر نباشد چون می بینیم که بردارها از همه جهتهای سوی مرکز همگرا می شوند.



$$\text{div } \mathbf{F} \neq 0 \quad \text{curl } \mathbf{F} \neq 0$$

نیست، خواهید دید که تاویک میدان برداری ابزار ارزشمندی است. ما در اینجا مطرحش کردیم چون مفاهیمی که در تعریف تاو وارد می‌شود خیلی نزدیک به مفاهیمی است که در تعریف دیورژانس دخیل‌اند. می‌شود گفت دو نوع مشتق از یک میدان برداری را معرفی کرده‌ایم. یکی دیورژانس، که مربوط به آهنگ تغییر یک مؤلفه بردار در راستای خودش مثلاً $\partial F_x / \partial x$ و غیره است. دیگری تاو که نوعی "مشتق یک‌وری" است و مربوط به آهنگ تغییر F_x است وقتی در جهت y یا z حرکت کنیم.

معادله‌هایی که قضیه گاوس استوکس نامیده شدند در شکل ۲-۳۱ خلاصه شده‌اند. رابطه بین تابع پتانسیل نرده‌ای و انتگرال خطی گرادیان آن را نیز می‌توان عضوی از این خانواده قضایا به‌شمار آورد که در ستون سوم گنجانده شده است.

مسائل

۱-۲ تابع برداری زیر یک میدان الکتروستاتیکی را نشان می‌دهد:

$$E_x = 6xy \quad E_y = 3x^2 - 3y^2 \quad E_z = 0$$

انتگرال خطی \mathbf{E} از نقطه $(0, 0, 0)$ تا نقطه $(x_1, y_1, 0)$ را در مسیری که به صورت دو خط مستقیم از $(0, 0, 0)$ به $(x_1, 0, 0)$ و بعد به $(x_1, y_1, 0)$ می‌رود حساب کنید. همین محاسبه را برای دو ضلع دیگر مستطیل از طریق نقطه $(0, y_1, 0)$ انجام بدهید. اگر ادعاهای ما درست باشد باید جوابهایتان یکی شود. حالا تابع پتانسیل $\phi(x, y, z)$ را دارید. گرادیان این تابع را بگیرید و ببینید که به همان مؤلفه‌های میدان داده شده می‌رسید.

۲-۲ دو بار نشان داده شده در شکل ۲-۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید z مختصه مکانی روی خطی باشد که دو بار بر آن قرار دارند و در محل بار مثبت داشته باشیم $z = 0$. نمودار پتانسیل ϕ را در طول این خط از $z = -5$ تا $z = 15$ رسم کنید. ϕ را برحسب ایستاولت و z را برحسب سانتی‌متر در نظر بگیرید.

۳-۲ باری به اندازه 2 esu در مبدأ قرار دارد. دو بار هر کدام به اندازه 1 esu - در نقطه‌هایی که مختصات x, y, z شان $(1, 1, 0)$ و $(-1, 1, 0)$ است قرار دارند، به آسانی می‌شود دید که پتانسیل ϕ در نقطه $(0, 1, 0)$ صفر است اگر این پتانسیل در بینهایت صفر باشد. در نتیجه در نقطه‌ای روی محور x آن سوی $(0, 1, 0)$ تابع $\phi(0, y, 0)$ باید یک کمینه یا یک بیشینه داشته باشد. آن نقطه میدان الکتریکی \mathbf{E} باید صفر باشد. چرا؟ این نقطه را ولو به تقریب مشخص کنید.

جواب: $y = 1.6207$

۴-۲ میدان الکتریکی و توزیع باری را که با پتانسیل زیر سازگار است توصیف کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 < a^2 \quad \text{برای} \quad \phi = x^2 + y^2 + z^2$$

$$a^2 < x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{برای} \quad \phi = -a^2 + \frac{2a^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

۵-۲ کره‌ای به اندازه یک توپ بسکتبال تا پتانسیل 1000 - ولت باردار شده است. حدوداً چند الکترون اضافی در واحد سطح روی کره وجود دارد؟

جواب: 3×10^7 .

۶-۲ روی سطح کره‌ای به اندازه زمین 1 کولن بار به طور یکنواخت توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی درست بالای سطح چند متر/ولت است؟ اگر پتانسیل در بینهایت صفر باشد، پتانسیل کره چند ولت است؟

جواب: 1500 V ; $2.5 \times 10^{-4} \text{ V/m}$

۷-۲ چهار گوشه مربعی به ضلع 5 cm را در جهت عقربه‌های ساعت به ترتیب A ، B ، C و D می‌نامیم. باری به اندازه 2 esu در نقطه A ، و -3 esu در نقطه B می‌گذاریم، مقدار انتگرال خطی E از نقطه C تا نقطه D را تعیین کنید. (هیچ نیازی به انتگرال‌گیری واقعی نیست!)
۸-۲ برای استوانه شکل $17-2$ که توزیع باریکنواخت دارد:

(الف) نشان دهید عبارتی که برای میدان داخل استوانه به دست آمد تابع قانون گاوس است.

(ب) پتانسیل ϕ را برحسب r داخل و خارج استوانه به دست بیاورید. فرض کنید در $r = 0$

$$\phi = 0.$$

۹-۲ برای دستگاه شکل $10-2$ سطح هم‌پتانسیلی رسم کنید که بر لبه قرص مماس باشد. پیدا کنید این سطح در کدام نقطه محور تقارن را قطع می‌کند.

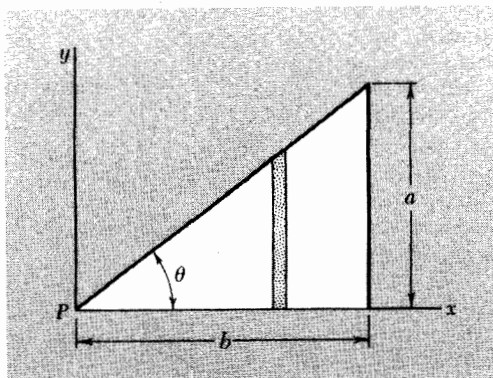
۱۰-۲ میله نازکی در طول محور z از $z = -d$ تا $z = d$ واقع شده است. میله دارای بار یکنواختی است که با چگالی خطی λ در طول آن توزیع شده است. با انتگرال‌گیری روی این توزیع بار، پتانسیل در نقطه P_1 روی محور z مختصات $0, 0, 2d$ را پیدا کنید. با یک انتگرال‌گیری دیگر پتانسیل در نقطه P_2 روی محور x را پیدا کنید و این نقطه را طوری تعیین کنید که پتانسیل آن برابر با پتانسیل در P_1 باشد.

جواب: $x = \sqrt{3}d$; $\lambda \ln 3$

۱۱-۲ نقطه‌های P_1 و P_2 در مسئله قبل روی یک بیضی قرار می‌گیرند که دو سر میله کانون‌هایش هستند و این را به آسانی می‌توانید با مقایسه مجموع فواصل P_1 و P_2 از دو سر میله تحقیق کنید.

از اینجا به این فکر می‌افزیم که تمام بیضی باید هم‌پتانسیل باشد. این حدس را با محاسبه پتانسیل در نقطه $(d, 0, d/2)$ که روی همین بیضی است تحقیق کنید. در واقع، گرچه دلیل روشنی نداریم، ولی همه سطوح هم‌پتانسیل این دستگاه خانواده‌ای از بیضیوارهای کشیده هم‌کانون هستند. ببینید می‌توانید این را ثابت کنید. باید رابطه‌ای برای پتانسیل در نقطه عام $(x, 0, z)$ در صفحه xz به دست بیاورید. بعد نشان بدهید که اگر x و z با معادله $x^2/(a^2 - d^2) + z^2/a^2 = 1$ به هم مربوط باشند، که معادله یک بیضی با کانونهای $z = \pm d$ است، پتانسیل تنها به پارامتر a بستگی خواهد داشت نه به x یا z .

۱۲-۲ یک مثلث قائم‌الزاویه به رأس P در مبدأ، که قاعده آن b و ارتفاعش a است، دارای بار سطحی یکنواختی به چگالی σ است. پتانسیل را در رأس P پیدا کنید. اول سهم نوار قائمی به پهنای dx را روی محور x پیدا کنید. نشان دهید که پتانسیل در P را می‌توان به این صورت نوشت

$$\phi_P = \sigma b \ln[(1 + \sin \theta) / \cos \theta]$$


شکل مسئله ۱۲-۲.

۱۳-۲ با محاسبه صریح مؤلفه‌های $\nabla \times \mathbf{E}$ نشان دهید که تابع برداری مسئله ۱-۲ یک میدان الکتروستاتیک است. (البته اگر آن مسئله را حل کرده باشید این مطلب را از راه دیگری یعنی پیدا کردن یک تابع نرده‌ای که این میدان گرادیان آن است اثبات کرده‌اید.) دیورژانس میدان را محاسبه کنید.

۱۴-۲ آیا تابع $f(x, y) = x^2 + y^2$ در معادله لاپلاس دوبعدی صدق می‌کند؟ تابع $g(x, y) = x^2 - y^2$ چگونه؟ تابع اخیر را رسم کنید. گرادیان را در نقطه‌های زیر پیدا کنید و جهت گرادینانها را با پیکانهای کوچک مشخص کنید: $(x = 0, y = 1)$; $(x = 1, y = 0)$; $(x = 0, y = -1)$; $(x = -1, y = 0)$.

۱۵-۲ تاو و دیورژانس هر یک از میدانهای برداری زیر را محاسبه کنید. اگر تاو صفر در آمد سعی

کنید تابع زده‌ای ϕ را که میدان برداری گرادیان آن است پیدا کنید:

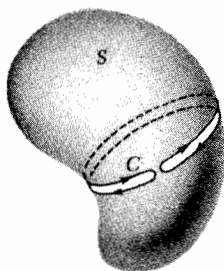
$$(الف) \quad F_x = x + y; F_y = -x + y; F_z = -2z$$

$$(ب) \quad G_x = 2y, G_y = 2x + 3z; G_z = 3y$$

$$(ج) \quad H_x = x^2 - z^2; H_y = 2; H_z = 2xz$$

۱۶-۲ اگر \mathbf{A} هر میدان برداری با مشتقهای پیوسته باشد داریم $\text{div}(\text{curl } \mathbf{A}) = 0$ ، یا با استفاده از علامت "دل"، $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$. این قضیه را بعداً لازم داریم. دو راه متفاوت برای اثبات این قضیه هست:

(الف) (محاسبه مستقیم در یک دستگاه مختصات به خصوص). با استفاده از فرمول ∇ در مختصات دکارتی زنجیره مشتقهای جزئی دوم را که لازمه $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ است به دست آورید.
 (ب) (استفاده از قضیه دیورژانس و قضیه استوکس، نیازمند هیچ دستگاه مختصاتی نیست):
 سطح S را در شکل در نظر بگیرید، بادکنکی است که تقریباً دو نیمه شده و منحنی بسته C مرز آنهاست. انتگرال خطی هر میدان برداری روی منحنی C را در نظر بگیرید. بعد با استدلال مناسب از استوکس و گاوس کمک بخواهید.



شکل مسئله ۱۶-۲.

۱۷-۲ با استفاده از تساوی $\nabla(\phi \nabla \phi) = (\nabla \phi)^2 + \phi \nabla^2 \phi$ و قضیه دیورژانس ثابت کنید معادله ۳۸ فصل ۱ و معادله ۲۷ فصل ۲ برای هر توزیع باری با گستره متناهی، هم‌ارزند.

۱۸-۲ یک استوانه دایره‌ای توخالی به شعاع a و طول b که دو انتهایش باز است، دارای بار Q است که به طور یکنواخت در سطح آن توزیع شده است. اختلاف پتانسیل بین نقطه‌ای روی محور در یک انتهای استوانه و نقطه وسط محور چقدر است؟ با رسم بعضی از خطهای میدان نشان دهید که به نظر شما میدان این استوانه چگونه باید باشد.

۱۹-۲ دو کره فلزی به شعاعهای R_1 و R_2 داریم که در فاصله‌ای از هم قرار دارند که در مقایسه با این شعاعها بسیار دور است. اگر بار کل Q که باید روی این دو کره تقسیم کنیم معلوم باشد،

تقسیم‌بندی چگونه باشد که انرژی پتانسیل توزیع بار نهایی کمترین مقدار ممکن شود؟ برای پاسخ دادن به این پرسش، ابتدا انرژی پتانسیل دستگاه را با تقسیم دلخواه بار q روی یک کره و بار $Q - q$ روی کره دیگر محاسبه کنید. بعد انرژی را برحسب q کمینه کنید. می‌توانید فرض کنید که هر باری روی یکی از این کره‌ها قرار بگیرد به‌طور یکنواخت روی کره پخش می‌شود و کره دیگر هم آنقدر دور است که اثر آن را می‌توان نادیده گرفت. وقتی تقسیم بهینه بارها را پیدا کردید، نشان دهید با این تقسیم اختلاف پتانسیل بین دو کره صفر است. (بنابراین می‌شود دو کره را با سیمی به هم وصل کرد بدون اینکه توزیع بارها عوض شود. این مورد خاصی از یک اصل بسیار کلی است که در فصل ۳ خواهیم دید: روی یک رسانا، بار طوری توزیع می‌شود که انرژی پتانسیل کل دستگاه کمینه باشد.)

۲-۲۰ به‌عنوان یک توزیع بار، هسته اتم طلا را می‌توان کره‌ای به شعاع $10^{-13} \text{ cm} \times 6$ فرض کرد که بار $Q = 79e$ تقریباً به‌طور یکنواخت در آن توزیع شده است. پتانسیل ϕ_0 در مرکز هسته را برحسب مگاولت بیان کنید. (اول یک فرمول کلی برای ϕ_0 در کره‌ای به شعاع a با بار Q به‌دست آورید. با استفاده از قانون گاوس میدان الکتریکی داخلی و خارجی را پیدا کنید و بعد انتگرال بگیرید تا پتانسیل پیدا شود.)

جواب: $\phi = 3Q/2a = 95000 \text{ statV} = 28.5 \text{ MeV}$

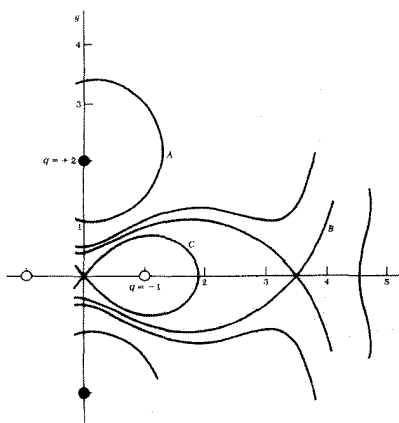
۲-۲۱ فرض کنید هشت پروتون در رئوس یک مکعب به‌طور دائم قرار گرفته‌اند. یک پروتون دیگر آزادانه در نزدیکی مرکز مکعب پرسه می‌زند. بار دیگری در کار نیست، گرانشی هم نیست. آیا پروتون نهم گیر افتاده است؟ آیا می‌تواند راه فراری بیابد که همه‌اش سرازیری انرژی پتانسیل باشد؟ با ماشین حساب امتحان کنید. دقت چندین رقمی لازم خواهد بود!

۲-۲۲ یک دانه غبار میان ستاره‌ای که تقریباً کره‌ای به شعاع $10^{-7} \times 3$ متر است آنقدر بار منفی دارد که پتانسیل آن 15^- ولت است. چند الکترون اضافی گرفته است؟ شدت میدان الکتریکی در سطح آن چند متر/ولت است؟

۲-۲۳ با یک مولد وان‌دوگراف پروتونها در یک اختلاف پتانسیل $10^6 \times 5$ ولت شتاب می‌گیرند. بعد باریکه پروتون از یک ورق نازک نقره می‌گذرد. عدد اتمی نقره ۴۷ است، و می‌توانید فرض کنید هسته نقره در مقایسه با پروتون آنقدر بزرگ است که حرکت محسوسی ندارد. نزدیکترین فاصله ممکن هر پروتون به یک هسته نقره چقدر است؟ در این محل شدت میدان الکتریکی وارد بر پروتون چقدر است؟

۲-۲۴ هر کدام از دو عبارت داخل کادر بخش ۱-۲ را می‌توانیم نتیجه فرعی دیگری به حساب بیاوریم. نشان دهید اگر انتگرال خطی $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ روی هر مسیر بسته صفر باشد نتیجه می‌شود که انتگرال خطی بین دو نقطه متفاوت مستقل از مسیر است.

۲۵-۲ دو بار نقطه‌ای هر کدام به اندازه 2 esu و دو بار نقطه‌ای هر یک به اندازه 1 esu - به طور متقارن به صورت زیر در صفحه xy قرار گرفته‌اند: بارهای مثبت در نقطه‌های $(0, 2)$ و $(0, -2)$ و بارهای منفی در نقطه‌های $(1, 0)$ و $(-1, 0)$. بعضی از منحنیهای همپتانسیل صفحه xy در شکل ۲۵-۲ رسم شده‌اند. (البته این منحنیها در واقع تقاطع سطوح همپتانسیل با صفحه xy هستند.) این شکل را خوب مطالعه کنید تا به شکل کلی‌اش پی ببرید. حالا مقدار پتانسیل ϕ را روی هر یک از منحنیهای A, B, C پیدا کنید. طبق معمول در بینهایت $\phi = 0$. این کار را با محاسبه پتانسیل در نقطه‌ای روی منحنی، نقطه‌ای که محاسبه از همه آسانتر باشد، انجام دهید. به طور تقریبی چند منحنی همپتانسیل بینابینی رسم کنید.



شکل مسئله ۲۵-۲.

۲۶-۲ از نتیجه مسئله ۱۲-۲ برای پاسخ به این سؤال استفاده کنید: اگر مربعی با چگالی بار سطحی σ و ضلع s در مرکزش همان پتانسیلی را داشته باشد که قرصی با همین چگالی بار سطحی و به قطر d دارد، نسبت s/d چقدر باید باشد؟ آیا جوابتان معقول است؟

۲۷-۲ با استفاده از نتیجه‌ای که در معادله ۲۴ بیان شد انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی قرص بارداری بخش ۲-۶ را محاسبه کنید. (راهنمایی: ببینید برای ساختن قرص باردار از شعاع صفر تا شعاع a با اضافه کردن حلقه‌هایی به پهنای dr ، چقدر کار لازم است، انرژی کلی را برحسب شعاع a و بار کل $Q = \pi a^2 \sigma$ بیان کنید.)

جواب: $8Q^2 / 3\pi a$

۲۸-۲ قرص نازکی به شعاع 3 cm یک سوراخ دایره‌ای به شعاع 1 cm در وسطش دارد. روی قرص بار سطحی 4 esu/cm^2 - به طور یکنواخت وجود دارد.

(الف) پتانسیل در مرکز سوراخ چند ایستاولت است؟ (پتانسیل صفر را در بینهایت فرض کنید.)

(ب) یک الکترون از حال سکون در مرکز سوراخ روی محور شروع به حرکت می‌کند و هیچ نیرویی جز نیروی دافعه بارهای روی قرص بر آن وارد نمی‌شود. سرعت نهایی الکترون چقدر است؟ ($g = 9 \times 10^{-28}$ جرم الکترون)

۲۹-۲ دو پوستهٔ کروی نارسانا به شعاع a ، یکی دارای بار سطحی یکنواخت Q و دیگری دارای بار سطحی یکنواخت $-Q$ است. کره‌ها را آنقدر نزدیک هم می‌آوریم تا به هم بچسبند. میدان الکتریکی داخل و خارج پوسته‌ها چگونه است؟ چقدر کار لازم است که کره‌ها را از هم دور کنیم؟

۳۰-۲ توزیع باری را در نظر بگیرید که چگالی آن داخل مکعبی به ضلع b همه جا مقدار ثابت ρ ، و خارج از مکعب همه جا صفر است. پتانسیل در فاصلهٔ بینهایت دور از مکعب بار را صفر بگیرید. پتانسیل در مرکز مکعب را با ϕ_0 و پتانسیل در یک رأس را با ϕ_1 نشان دهید. نسبت ϕ_0/ϕ_1 چقدر است؟ جواب را با محاسبهٔ مختصری همراه بحث ابعادی برهم‌نهی می‌توانید پیدا کنید. (پتانسیل در مرکز مکعبی با همین چگالی بار و ضلع دو برابر این در نظر بگیرید.)

۳۱-۲ یک ورق صاف نارسانا در صفحهٔ xy قرار دارد. تنها بارهای دستگاه روی این ورقه هستند. در فضای بالای ورقه، $z > 0$ ، پتانسیل چنین است $\phi = \phi_0 e^{-kz} \cos kx$ که در آن ϕ_0 و k مقادیر ثابت‌اند.

(الف) تحقیق کنید که ϕ در فضای بالای ورقه در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند.

(ب) خطهای میدان الکتریکی چگونه‌اند؟

(ج) توزیع بار روی ورقه را توصیف کنید.

۳۲-۲ برای اینکه نشان دهیم برای بردار بودن تنها داشتن اندازه و جهت کافی نیست، سعی می‌کنیم برداری را با معادلهٔ ۶۱ که طرف راستش مجذور شده باشد تعریف کنیم. اسم این بردار را می‌گذاریم متاو \mathbf{F} :

$$(\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \left[\lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{a_i} \right]^2$$

ثابت کنید این رابطه یک بردار را تعریف نمی‌کند. (راهنمایی: جهت معکوس $\hat{\mathbf{n}}$ را در نظر بگیرید.)

میدانهای الکتریکی اطراف رساناها

۳-۱ رساناها و عایقها

در اولین آزمایشهایی که با الکتریسیته انجام گرفت متوجه شدند که مواد مختلف از لحاظ توانایی نگه داشتن "خاصیت الکتریکی" با هم فرق می‌کنند. بعضی مواد به آسانی بر اثر مالش الکتریسیته دار می‌شوند و در همان حالت می‌مانند؛ بعضی مواد دیگر نمی‌توانند به این طریق الکتریسیته دار شوند، یا اگر هم بشوند نمی‌توانند این خاصیت را در خود نگه دارند. پژوهشگران اوایل قرن هجدهم فهرستی تهیه کرده بودند که در آن مواد به دو دسته "الکتریکی" و "غیرالکتریکی" تقسیم می‌شدند. در حدود سال ۱۷۳۰، آزمایشهایی مهم استفن گری در انگلستان نشان داد که "خاصیت الکتریکی" می‌تواند با یک رشته افقی از جسمی به جسم دیگری که چند صد متر دورتر از آن است منتقل شود، به شرط آنکه خود رشته را از بالا ریسمانهای ابریشمی نگه داشته باشد.^۱ وقتی این تمایز رسانا و نارسانا مشخص شد، پژوهشگران آن زمان دریافتند که حتی ماده غیرالکتریکی هم اگر روی شیشه نصب شود یا به یک ریسمان ابریشمی آویزان شود می‌تواند

۱. بدون شک "ریسمانی" که گری به‌کار برد در مقایسه با سیم فلزی رسانای ضعیفی است، اما برای انتقال بار در آزمایشهای الکتروستاتیک کافی است. گری این را هم فهمید که سیم نازک مسی رساناست، اما عمدتاً برای فاصله‌های دور از "ریسمان" استفاده می‌کرد.

به شدت الکتریسیته‌دار شود. یکی از تماشایی‌ترین نمایشهای همگانی آزمایش با الکتریسیته، الکتریسیته‌دار کردن پسر بچه‌ای بود که با ریسمانهای ابریشمی متعدد از یک شیروانی آویزان بود، موهای سرش راست ایستاده بود و جرقه‌های الکتریسیته را می‌شد از نوک دماغش بیرون کشید.

بعد از کارگری و همکارانش، درست کردن فهرست الکتریکیها و غیرالکتریکیها کلاً تبدیل به تقسیم مواد به دو دسته رسانای الکتریسیته و عایق الکتریسیته شد. این تمایز هنوز یکی از برجسته‌ترین تضادهای طبیعت است. رساناهای خوب متداول مثل فلزات معمولی از لحاظ رسانندگی الکتریکی با عایقهای معمولی مثل شیشه یا پلاستیک، با ضریبی از مرتبه 10^{20} تفاوت دارند. برای بیان این مطلب به زبان آزمایشگران قرن هجدهم نظیر گری یا بنیامین فرانکلین، باید بگوییم یک گوی فلزی سوار بر یک پایه فلزی می‌تواند الکتریسیته‌اش را در یک میلیونیم ثانیه از دست بدهد؛ و یک گوی فلزی که روی پایه شیشه‌ای قرار داشته باشد می‌تواند خاصیت الکتریکی‌اش را سالها حفظ کند. (برای اطمینان از ادعای اخیر باید شرایطی فراتر از امکانات یک آزمایشگاه قرن هجدهم فراهم باشد، می‌توانید بعضی از این شرایط را بگویید؟)

تفاوت الکتریکی بین یک رسانای خوب و یک عایق خوب به بزرگی تفاوت مکانیکی میان یک مایع و یک جامد است. این تفاوت اصلاً تصادفی نیست. هر دو خاصیت به تحرک ذرات اتمی بستگی دارند. در الکتریسیته، به تحرک حاملهای بار یعنی الکترونها و یونها؛ و در مکانیک به تحرک اتمها یا مولکولهایی که ساختار ماده را تشکیل می‌دهند. برای مقایسه بهتر، ما موادی را سراغ داریم که از نظر سیلان بین جامد و مایع قرار می‌گیرند، مثل قیر یا بستنی. در واقع بعضی مواد — مثل شیشه — با کم کردن دما به اندازه چند صد درجه، به تدریج و به صورت پیوسته از یک مایع روان تبدیل به یک جامد سخت دائمی می‌شوند. در رسانندگی الکتریکی هم مثالی از تغییر ماده در گستره وسیعی از رسانای خوب تا عایق خوب پیدا می‌شود، و نیز موادی که رسانندگی آنها بسته به شرایطی مثل دما به مقدار زیاد تغییر می‌کند. مواد جالب و پر مصرفی که نیمرسانا خوانده می‌شوند و ما در فصل ۴ به آنها می‌رسیم، این خاصیت را دارند.

گاهی جامد یا مایع خواندن یک ماده به مقیاس زمان و شاید مقیاس مسافت مربوطه بستگی دارد. یک تکه کلفت قیر معدنی در دست شما به اندازه کافی جامد به نظر می‌رسد. اما از لحاظ زمین‌شناسی یک مایع است که از منابع زیرزمینی جاری می‌شود و حتی دریاچه تشکیل می‌دهد. به دلایلی از این قبیل، می‌توانیم انتظار داشته باشیم که عایق یا رسانای الکتریسیته شمردن یک ماده می‌تواند به مقیاس زمانی پدیده‌ای که مطالعه می‌کنیم بستگی داشته باشد.

۳-۲ رساناها در میدان الکترومغناطیسی

ابتدا دستگاههای الکتروستاتیکی شامل رساناها را در نظر می‌گیریم. یعنی حالت مانای بارها و میدان الکتریکی که بعد از همه جابه‌جاییهای بارها در رساناها، بر دستگاه حاکم شده است. هر عایق موجود عایق کامل فرض می‌شود. همان‌طور که گفتیم عایقهای معمولی به حد قابل ملاحظه‌ای این خواسته ما را برآورده می‌کنند، بنابراین دستگاههای ما زیاد هم ساختگی نیستند. در واقع، هوای اطراف ما عایق بسیار خوبی است. دستگاههای الکتروستاتیکی مورد نظر ما نمونه‌هایی از این قبیل‌اند: دو کره فلزی بردار را در نظر بگیرید که از یکدیگر و از هر جسم دیگری جدا هستند. آنها را در وضعیتی تقریباً نزدیک به هم ثابت نگه دارید. میدان الکتریکی حاصل در همه جای فضای اطراف و بین آنها چیست و چگونه بارها روی هر یک از کره‌ها توزیع می‌شوند؟ با یک سؤال کلی‌تر شروع می‌کنیم. بعد از استقرار بارها در باره میدان الکتریکی درون ماده رسانا چه می‌توان گفت؟

در وضعیت ایستا بارها دیگر حرکتی ندارند. ممکن است بگویید در این صورت میدان الکتریکی درون ماده رسانا باید صفر باشد. باید دلیل بیاورید که، اگر این میدان صفر نباشد، بر حاملهای بار قابل حرکت نیرویی وارد می‌شود و به این وسیله آنها به حرکت در می‌آیند، و خلاصه ما وضعیت ایستایی نخواهیم داشت. چنین استدلالی توجه ندارد که ممکن است نیروهای دیگری بر حاملهای بار اثر کرده باشند که با یک نیروی الکتریکی خنثی شده باشند و آن وقت وضعیت ایستا ایجاد شده باشد. برای یادآوری اینکه از لحاظ فیزیکی ممکن است که نیروهایی جز نیروی الکتریکی بر حاملهای بار وارد شود، کافی است نیروی گرانی را در نظر بگیریم. یون مثبت وزن دارد، در یک میدان گرانشی پیوسته نیرویی بر آن وارد می‌آید؛ بر الکترون هم همین‌طور، و این نیروها هم مساوی نیستند. البته این مثال کمی بیجاست. می‌دانیم که نیروهای گرانشی در مقیاس اتمی کاملاً قابل چشم‌پوشی‌اند. اما نیروهای دیگری در کارند که می‌توانیم آنها را با مسامحه نیروهای "شیمیایی" بخوانیم. در باتری و بسیاری دیگر از صحنه‌های واکنش شیمیایی، از جمله سلولهای زنده، حاملهای بار بعضی اوقات برخلاف میدان الکتریکی کل حرکت می‌کنند؛ برای اینکه ممکن است واکنشی که می‌خواهد انجام بگیرد بیش از آنچه برای مقابله با میدان لازم است انرژی آزاد کند. شاید نخواهید این نیروها را غیرالکتریکی بنامید چرا که ما می‌دانیم ساختار اتمها و مولکولها و نیروهای بین آنها را می‌شود برحسب قانون کولن و مکانیک کوانتومی توصیف کرد. اما از دیدگاه نظریه الکتروستاتیک کلاسیک این را باید به کلی نامربوط تلقی کرد. مسلماً رفتار این نیروها با نیروی عکس مجذوری که مبنای نظریه ماست خیلی فرق می‌کند. لازمه غیرالکتریکی بودن نیروها به این معنا را در فصل ۲ کشف کردیم که دیدیم نیروهای عکس مجذوری به تنهایی نمی‌توانند یک ساختار ساکن پایدار بسازند.

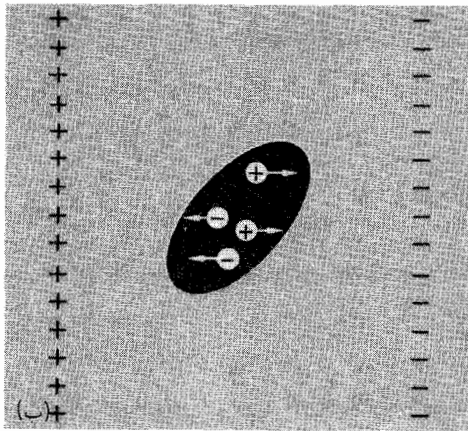
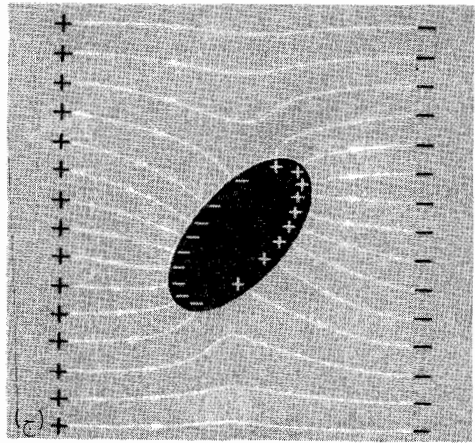
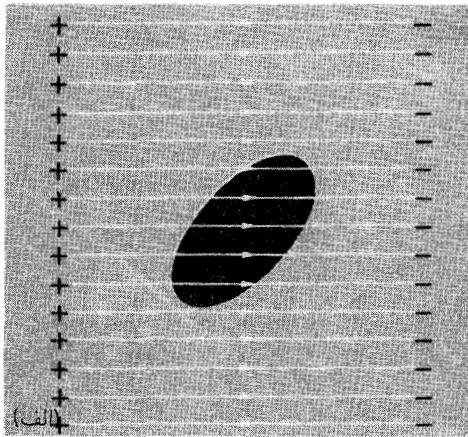
نکته صرفاً این است: ما باید در بعضی موارد نیروهای غیرکولنی خنثی نشده‌ای پیدا کنیم که روی حاملهای بار داخل یک مادهٔ رسانا اثر کنند. وقتی این طور شد، وضعیت الکتروستاتیکی هنگامی حاصل می‌شود که یک میدان الکتریکی متناهی درون رسانا وجود داشته باشد که اثر این نیروها را، هر چه که باشند، خنثی کند.

این هشدار را داشته باشید، اما عجلتاً برمی‌گردیم به مورد بسیار مهم و آشنایی که در آن هیچ جای نگرانی از این قبیل نیروها نیست. یعنی یک مادهٔ رسانای همگن و همسانگرد. در داخل چنین رسانایی، در حالت ایستا، با اطمینان می‌توانیم بگوییم که میدان الکتریکی باید صفر باشد.^۱ اگر نباشد، بارها باید حرکت کنند. نتیجهٔ صفر بودن میدان این است که همهٔ نواحی داخل رسانا، از جمله تمام نقطه‌هایی که درست زیر سطح رسانا واقع‌اند باید هم‌پتانسیل باشند. بیرون رسانا میدان الکتریکی صفر نیست. سطح رسانا باید یکی از سطحهای هم‌پتانسیل این میدان باشد.

فرض کنید بتوانیم به میل خودمان مادهٔ عایقی را به رسانا تبدیل کنیم. (غیر ممکن نیست — شیشه وقتی گرما ببیند رسانا می‌شود؛ هر گازی را می‌شود با پرتو x یونیده کرد.) شکل ۳-۱ الف یک نارسانای بدون بار را در میدان الکتریکی حاصل از دو لایهٔ بار ثابت نشان می‌دهد. میدان الکتریکی داخل و خارج جسم یکسان است. (یک مادهٔ چگال مثل شیشه این میدان را واپیچیده می‌کند، اثری که در فصل ۱۰ خواهیم دید اما اینجا کاری به این اثر نداریم.) حالا به نحوی بار (یا یون) متحرک ایجاد می‌کنیم تا جسم رسانا شود. همان‌طور که در شکل ۳-۱ ب می‌بینیم میدان بارهای مثبت را به یک طرف می‌کشد و بارهای منفی را به طرف مقابل. این بارها نمی‌توانند دورتر از سطح رسانا بروند. با تجمع این بارها روی سطح رسانا کم‌کم میدانی در داخل جسم تولید می‌شود که می‌خواهد میدان اول را خنثی کند. و در واقع جابه‌جایی آنقدر ادامه پیدا می‌کند تا میدان اصلی دقیقاً خنثی شود. توزیع نهایی بار روی سطح که در شکل ۳-۱ ج نشان داده شده، طوری است که میدان بارها و میدان ثابت خارجی که از ابتدا داشتیم ترکیب می‌شوند و میدان الکتریکی در داخل رسانا را صفر کنند. چون در هر رسانایی "خودبه‌خود" این امر پیش می‌آید، در حقیقت وقتی با میدانهای خارجی سروکار داریم فقط لازم است به سطح جسم رسانا توجه کنیم.

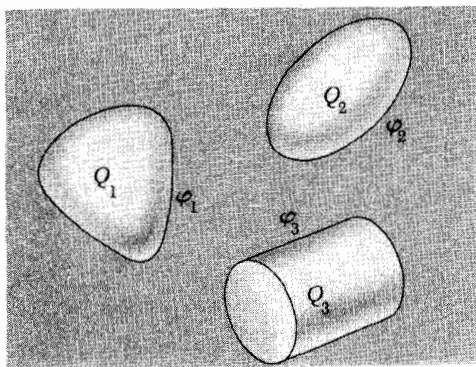
این مطلب را در نظر داشته باشید تا بینیم دربارهٔ دستگاهی متشکل از چند رسانا، با بارهای گوناگون چه باید گفت. فرض می‌کنیم در فضا بجز این دستگاه رساناها چیزی وجود ندارد. در

۱. وقتی از میدان الکتریکی درون ماده صحبت می‌کنیم، منظور ما میدان میانگینی است که در ناحیه‌ای گرفته می‌شود که نسبت به ساختار اتمی، بزرگ است. البته می‌دانیم که در مقیاس کوچک در نزدیکی یک هستهٔ اتم بگردیم در تمام مواد، از جمله رساناها میدانهای بسیار قوی وجود دارد. به‌طور معمول، میدان الکتریکی هسته‌ای سهمی در میدان میانگین داخل ماده ندارد، چون جهتش در دو طرف هسته، عکس هم است. اما اینکه چطور باید این میدان میانگین را تعریف کنیم و اندازه‌گیری کنیم بحثی است که در فصل ۱۰ خواهیم دید.



شکل ۱-۳ جسم در (الف) یک نارسانای خنثی است. هم بارهای مثبت و هم بارهای منفی داخل آن بی حرکت اند. در (ب) بارها آزاد شده اند و می خواهند حرکت کنند. بارها جابه جا می شوند تا وضعیت نهایی (ج) حاصل شود.

شکل ۲-۳ چند شیء را می بینیم. اگر بخواهید می توانید فکر کنید اینها چند قطعه فلز جامدند. جلوی حرکت اینها به وسیله عایقهای نامرئی — بر فرض ریسمانهای ابریشمی استفن گری — گرفته شده است. بار کل روی هر شیء، یعنی کل بار مثبت اضافی در مقابل بار منفی، برای هر شیء ثابت است چون هیچ راهی برای نشت بار وجود ندارد. این مقدار بار را برای رسانای n ام با Q_n نشان می دهیم. به علاوه هر شیء را با مقدار به خصوص تابع پتانسیل الکتریکی φ ، یعنی φ_n مشخص می کنیم. می گوئیم شیء شماره ۲ ”در پتانسیل φ_2 “ است. با دستگاه نشان داده شده، که در آن هیچ شیء فیزیکی تا بینهایت کشیده نمی شود، معمولاً آسانترین راه این است که پتانسیل صفر را



شکل ۲-۳ دستگاهی متشکل از سه رسانا. Q_1 بار روی رسانای ۱ است و φ_1 پتانسیل آن است، و غیره.

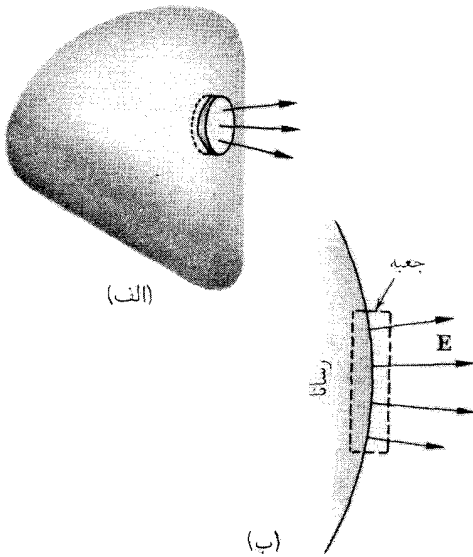
به نقاط بینهایت دور نسبت بدهیم. در این صورت φ_2 کار لازم بر واحد بار، برای آوردن یک بار آزمون بسیار کوچک از بینهایت دور و قرار دادن آن روی رسانای ۲ است. (توجه داشته باشید که این دقیقاً دستگاهی است که لازم است در آن بار آزمون کوچک نگه داشته شود، نکته‌ای که در بخش ۷-۱ به آن اشاره کردیم.)

چون سطح هر رسانا در شکل ۲-۳ لزوماً یک سطح هم‌پتانسیل است، میدان الکتریکی که $-\text{grad } \varphi$ است باید در هر نقطه عمود بر سطح رسانا باشد. اگر از داخل رسانا به سمت خارج برویم در سطح رسانا یک تغییر ناگهانی میدان الکتریکی داریم؛ \mathbf{E} خارج سطح صفر نیست، و در داخل صفر است. ناپیوستگی \mathbf{E} به خاطر حضور بار سطحی با چگالی σ است که می‌توانیم این بار را با قانون گاوس مستقیماً به \mathbf{E} مربوط کنیم. در اینجا می‌توانیم جعبه تختی در نظر بگیریم که یک تکه از سطح را احاطه کرده باشد (شکل ۳-۳) نظیر آنچه در بررسی قرص باردار در بخش ۲-۶ به کار بردیم. در اینجا از ”تِه“ جعبه که در داخل رسانا قرار می‌گیرد هیچ شاری نمی‌گذرد، و ما نتیجه می‌گیریم که $E_n = 4\pi\sigma$ ، که E_n مؤلفه عمود بر سطح میدان الکتریکی است. همان‌طور که قبلاً دیدیم چون میدان همیشه بر سطح عمود است اینجا مؤلفه دیگری در کار نیست. تمام بار Q_k بار سطحی است. یعنی انتگرال سطحی σ روی کل رسانا باید برابر Q_k باشد. به‌طور خلاصه، درباره هر دستگاه متشکل از رساناها، هر شکل و آرایشی داشته باشد، می‌توانیم گزاره‌های زیر را بنویسیم:

$$\varphi_k \text{ در تمام نقاط سطح رسانای } k \text{ ماب } \varphi = \text{const} \quad (1)$$

$$\text{در هر نقطه‌ای درست خارج رسانای } \mathbf{E} \text{ بر سطح عمود است و داریم } E = 4\pi\sigma \quad (2)$$

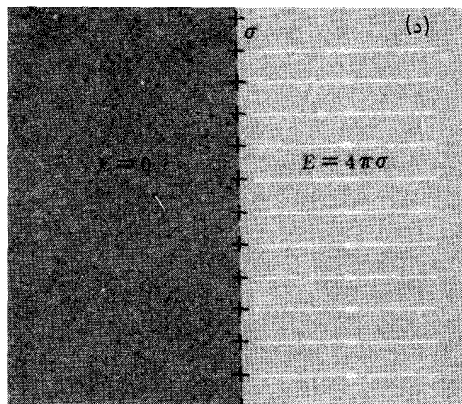
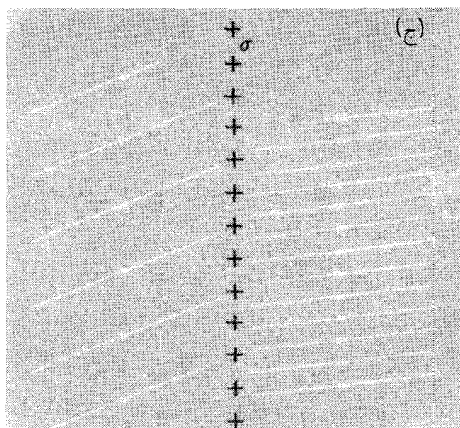
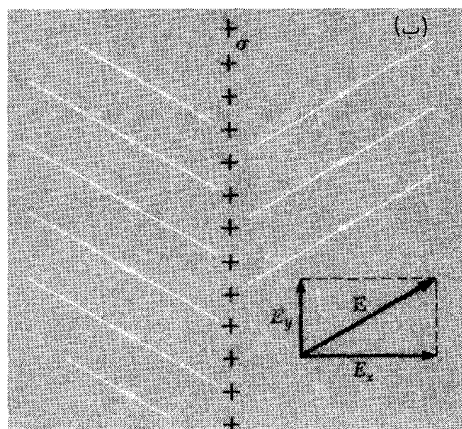
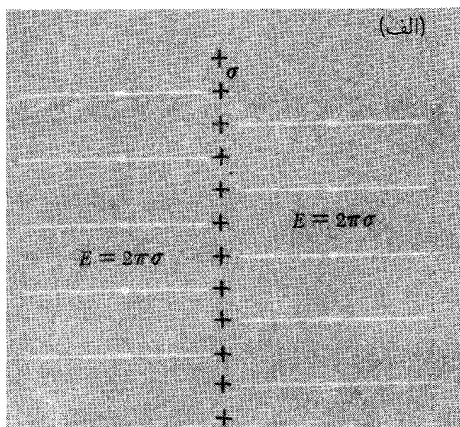
که در آن σ چگالی موضعی بار سطحی است.



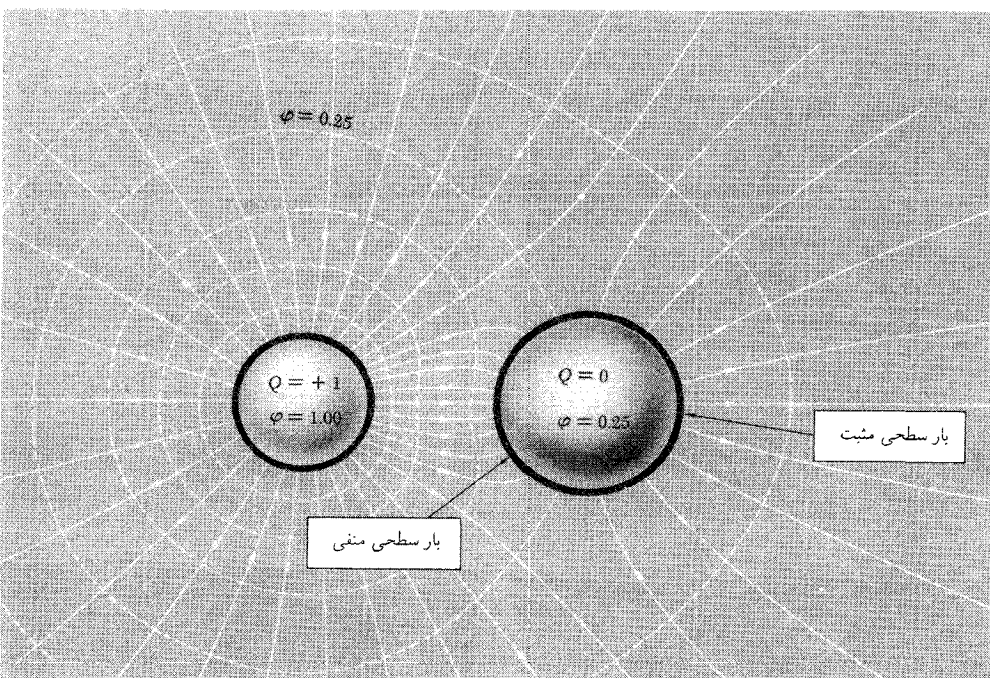
شکل ۳-۳ الف) قانون گاوس شدت میدان الکتریکی در سطح رسانا را به چگالی بار سطحی مربوط می‌کند (رابطه ۲). ب) مقطع سطح رسانا و جعبه.

$$Q_k = \int_{S_k} \sigma da = \frac{1}{4\pi} \int_{S_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (3)$$

\mathbf{E} میدان کل ناشی از همه بارهای دور و نزدیک در دستگاه است که بار سطحی فقط بخشی از آن است. بار سطحی روی یک رسانا باید آنقدر "خودش را میزان کند" که رابطه ۲ برقرار باشد. اینکه رسانا، برخلاف توزیعهای بار سطحی دیگر مورد خاصی است با مقایسه، در شکل ۳-۴ نشان داده می‌شود. شکل ۳-۵ میدان و توزیع بار را برای دستگاه ساده‌ای نظیر آنچه قبلاً گفتیم نشان می‌دهد. دو کره رسانا داریم، کره‌ای به شعاع واحد که بار کل +۱ واحد دارد و کره بزرگتری که بارش صفر است. ملاحظه کنید که چگالی بار سطحی روی هیچکدام از رساناها یکنواخت نیست. کره سمت راست که بار کلش صفر است، در ناحیه رو به کره دیگر چگالی بار سطحی منفی و در قسمت عقب سطح چگالی بار مثبت دارد. منحنی خط‌چین در شکل ۳-۵ سطحهای هم‌پتانسیل، یا به عبارت بهتر تقاطع سطحهای هم‌پتانسیل با صفحه شکل است. اگر خیلی دور برویم، می‌بینیم سطوح هم‌پتانسیل تقریباً کروی و خطوط میدان تقریباً شعاعی می‌شوند و میدان خیلی شبیه به میدان یک بار نقطه‌ای مثبت می‌شود که تمام بار موجود در کل دستگاه باشد.



شکل ۳-۴ (الف) یک صفحهٔ منزوی با بار سطحی. چیز دیگری در دستگاه وجود ندارد. این مورد در شکل ۱-۲۳ بررسی شد. میدان در هر طرف صفحه با فرض متقارن بودن، $2\pi\sigma$ به دست آمد. (ب) اگر بارهای دیگری در دستگاه وجود داشته باشد فقط می‌توانیم بگوییم که تغییر E_x در سطح باید $4\pi\sigma$ و تغییر E_y باید صفر باشد. غیر از میدان (الف) خیلی میدانهای دیگر می‌توانند این خاصیت را داشته باشند. دو میدان از این نوع در (ج) نشان داده شده‌اند. (د) اگر بدانیم در یک طرف سطح، محیط رساناست می‌دانیم که در طرف دیگر E باید عمود بر سطح باشد و اندازهٔ آن برابر است با $E = 4\pi\sigma$. بدون آنکه باعث حرکت بارها شود نمی‌تواند مؤلفهٔ موازی با سطح داشته باشد.



شکل ۵-۳ میدان الکتریکی اطراف دو کره رسانا که یکی بار کل واحد و دیگری بار کل صفر دارد. منحنیهای خط چین تقاطع سطحهای هم‌پتانسیل با صفحه شکل هستند. پتانسیل صفر در بینهایت است.

شکل ۵-۳، دست‌کم به‌طور کیفی، همه خصوصیات را که انتظار داشتیم نشان می‌دهد اما منظور دیگری هم از نشان دادن این شکل داریم. با اینکه دستگاه خیلی ساده است پاسخ دقیق ریاضی در این مورد را نمی‌توان از راه ساده‌ای به‌دست آورد. شکل ۵-۳ را با یک جواب تقریبی ساخته‌ایم. در واقع تعداد آرایشهای هندسی سه‌بعدی رساناها با پاسخ ریاضی به‌صورت بسته به‌طور اسفناکی کم است. فقط با توجه به حل چند مثال شسته رفته نمی‌شود چیز زیادی از فیزیک فهمید. به‌جای این‌کار، سعی می‌کنیم از ماهیت کلی مسئله ریاضی‌ای که چنین دستگاهی پیش می‌کشد، سر در بیاوریم.

۳-۳ مسئله کلی الکتروستاتیک؛ قضیه یکتایی

می‌توانیم مسئله را برحسب تابع پتانسیل φ مطرح کنیم، چون اگر بتوان φ را پیدا کرد \mathbf{E} فوراً از روی آن به‌دست می‌آید. خارج از رساناها همه جا φ باید در یک معادله دیفرانسیل جزئی که در فصل ۲ دیدیم صدق کند؛ یعنی در معادله لاپلاس: $\nabla^2 \varphi = 0$. این معادله را در دستگاه مختصات دکارتی

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (۴)$$

مسئله این است که تابعی پیدا کنیم که در معادله ۴ صدق کند و نیز شرایط خاص روی سطحهای رسانا را برآورده کند. ممکن است پتانسیل هر رسانا، φ_k ، ثابت یا معلوم باشد. (در دستگاه واقعی می‌توان پتانسیلها را با اتصال دائم به باتریها یا مولدهای دیگر ثابت نگاه داشت.) در این صورت پاسخ ما $\varphi(x, y, z)$ باید در تمام نقطه‌های روی هر یک از سطحها مقدار صحیح را داشته باشد. این سطحها کلاً ناحیه‌ای را محدود می‌کنند که φ در آن تعریف می‌شود، البته اگر یک سطح بزرگ "در بینهایت" را هم اضافه کنیم که برای وقتی که φ به صفر نزدیک می‌شود لازم داریم. بعضی وقتها ناحیه مورد نظر کلاً با یک سطح رسانا احاطه می‌شود؛ در این صورت می‌توانیم به این رسانا یک پتانسیل نسبت بدهیم و از هر چه خارج از آن است چشمپوشی کنیم. در هر حال ما با یک مسئله مقدار مرزی روبه‌رو هستیم که در آن مقداری که برای تابع روی مرز به دست می‌آید برای تمامی مرز مشخص شده است.

ممکن است به جای این کار، بار کل روی هر رسانا، Q_k ، را مشخص کنیم. (نمی‌توانیم به دلخواه تمام بارها و پتانسیلها را مشخص کنیم؛ در این صورت مسئله فرامعین می‌شود.) با مشخص بودن بارها در واقع مقدار انتگرال سطحی گرادیان φ روی سطح هر رسانا را تعیین کرده‌ایم. این کار مسئله را کمی عوض می‌کند. یا می‌شود دو نوع شرایط مرزی را "تلفیق کرد".

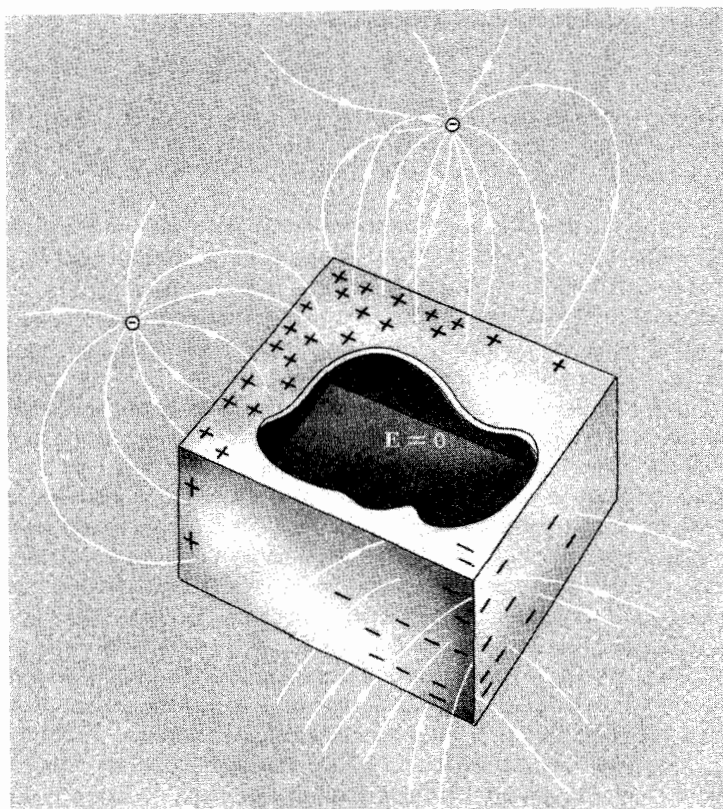
سؤال کلی مهمی که اینجا پیش می‌آید این است: اگر شرایط مرزی به نحوی داده شده باشد آیا مسئله جوابی ندارد، یا یک جواب دارد، یا بیش از یک جواب دارد؟ ما خیال نداریم جواب چنین پرسشی را در همه شرایط بدهیم، اما مورد مهمی هست که نشان می‌دهد چطور می‌شود چنین مسائلی را بررسی کرد، و نتیجه‌ای که به دست خواهیم آورد مفید است. فرض کنید پتانسیل هر رسانا، φ_k ، مشخص است و لازم است که φ در بینهایت دور، یا روی رسانایی که دستگاه را احاطه می‌کند، صفر شود. ثابت خواهیم کرد که این مسئله مقدار مرزی بیش از یک جواب ندارد. واضح است که مسئله به‌عنوان یک موضوع فیزیکی بالاخره یک جواب دارد، چون اگر واقعاً رساناها را به صورت مورد نظر چیده باشیم و با سیمهای بینهایت کوچک به پتانسیلهای مناسب وصل کرده باشیم، دستگاه در یک حالتی قرار گرفته است. اما اثبات ریاضی اینکه همیشه جوابی وجود دارد، به کلی مطالب دیگری است، و ما نمی‌خواهیم به آن بپردازیم. در عوض، فرض می‌کنیم که یک جواب $\varphi(x, y, z)$ وجود دارد و نشان می‌دهیم که باید یکتا باشد. استدلالی، که در همه این نوع اثباتها به کار می‌رود، به قرار زیر است.

فرض کنید تابع دیگری مثل $\psi(x, y, z)$ هم باشد که همین شرایط مرزی را برآورده کند. حالا معادله لاپلاس یک معادله خطی است. یعنی اگر φ و ψ در معادله ۴ صدق کنند، آنگاه $\varphi + \psi$ یا هر ترکیب خطی $c_1\varphi + c_2\psi$ هم، که c_1 و c_2 ثابت اند، باید در معادله صدق کند. به ویژه، تفاضل دو جواب ما، $\varphi - \psi$ باید در معادله ۴ صدق کند. این تابع را W می نامیم:

$$W(x, y, z) = \varphi(x, y, z) - \psi(x, y, z) \quad (۵)$$

البته W در شرایط مرزی صدق نمی کند. در واقع در سطح هر رسانا W صفر است چون ψ و φ روی سطح رسانای k ام مقدار یکسان φ_k را دارند. به این ترتیب W جواب یک مسئله الکتروستاتیک دیگر است، مسئله ای با همین رساناها که همه شان در پتانسیل صفر نگه داشته شوند. حالا می توانیم ادعا کنیم که، اگر این طور باشد، W باید در تمام نقطه های فضا صفر باشد. چون اگر نباشد، باید در یک جایی بیشینه یا کمینه باشد — یادتان باشد که W در بینهایت هم مثل مرز همه رساناها باید مقدارش صفر باشد — اگر W در نقطه ای مانند P فرینه باشد، کره ای به مرکز این نقطه در نظر می گیریم. همان طور که در فصل ۲ دیدیم، میانگین روی کره تابعی که در معادله لاپلاس صدق کند برابر مقدار آن در مرکز کره است. اگر تابع در مرکز بیشینه یا کمینه باشد این مطلب نمی تواند درست باشد؛ بنابراین W نمی تواند بیشینه یا کمینه باشد، و باید در همه جای فضا صفر باشد. نتیجه می شود که در همه جا $\psi = \varphi$ ، یعنی فقط یک جواب برای معادله ۴ وجود دارد که در شرایط مرزی مورد نظر صدق می کند.

حالا به آسانی می توانیم موضوع مهم دیگری را تشریح کنیم. در فضای داخل یک رسانای توخالی به هر شکل که باشد، اگر آن فضا خالی از بار باشد، میدان الکتریکی صفر است. میدان بیرون رسانا هر چقدر که باشد برای داخل رسانا این حکم صادق است. قبلاً دیده ایم که داخل یک پوسته کروی منزوی با بار یکنواخت، میدان صفر است، درست همان طور که میدان گرانشی درون پوسته یک جسم کروی توخالی صفر است. قضیه ای که اکنون بیان کردیم از یک جهت جالبتر است. جعبه فلزی مسدودی که قسمتی از آن را بریده ایم مطابق شکل ۳-۶ در نظر بگیرید. در مجاورت جعبه بارهایی وجود دارند و میدان خارجی تقریباً همان است که نشان داده شده است. روی سطح جعبه توزیع بار بسیار نایکنواخت است. اکنون میدان در هر کجای فضا، از جمله در درون جعبه، برابر است با مجموع میدان ناشی از این توزیع بار و میدانهای خارجی. شاید باورکردنی نباشد که بارهای سطحی بتوانند چنان زیرکانه روی جعبه صف آرایی کنند که میدانشان دقیقاً میدان خارجی را در هر نقطه ای درون جعبه خنثی کند. ولی این اتفاق می افتد، چنانکه در چند جمله می توانیم اثباتش کنیم.



شکل ۳-۶ میدان داخل یک جعبه مسدود رسانا همه جا صفر است.

تابع پتانسیل داخل جعبه، $\varphi(x, y, z)$ باید در معادله لاپلاس صدق کند. تمام مرز این ناحیه، یعنی جعبه، هم‌پتانسیل است، بنابراین داریم $\varphi = \varphi_0$ که در همه جای مرز مقداری ثابت است. واضح است که یک جواب در سرتاسر حجم $\varphi = \varphi_0$ است. اما بنا بر قضیه یکتایی تنها یک جواب می‌تواند وجود داشته باشد، پس جواب همین است. لازمه " $\varphi = \text{const.}$ " این است که داشته باشیم $\mathbf{E} = 0$ چون $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$.

نمود میدان الکتریکی در داخل یک محدوده رسانا همان‌طور که به لحاظ نظری جالب است در عمل هم مفید است. این خاصیت مبنای حفاظ الکتریکی است. در بیشتر کاربردهای عملی لازم نیست محفظه کاملاً بسته باشد. اگر دیواره‌ها سوراخهای کوچکی داشته باشد، یا از الک فلزی ساخته شده باشد، میدان در داخل بجز در مجاورت سوراخها، خیلی ضعیف خواهد بود. یک لوله فلزی که دو انتهایش باز باشد، اگر چند برابر قطرش درازا داشته باشد از فضای داخل جز در

نزدیکی دو انتها بسیار خوب محافظت می‌کند. البته ما فقط میدانهای استاتیک را در نظر می‌گیریم اما این مطلب در مورد میدانهایی که به‌کندی تغییر کنند هم صادق است. (میدانی را که به سرعت تغییر می‌کند می‌توان یک موج در نظر گرفت که درون لوله پیش می‌رود. اینجا به سرعت یعنی "در مدتی کوتاهتر از آنکه نور قطر لوله را طی می‌کند.")

۴-۳ چند دستگاه ساده از رساناها

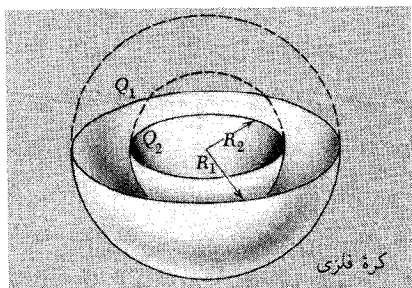
در این بخش چند آرایش بسیار ساده از رساناها را بررسی خواهیم کرد. با دو کره فلزی هم‌مرکز شروع کنیم که شعاعهایشان R_1 و R_2 و بارشان Q_1 و Q_2 است (شکل ۷-۳). با این اوضاع هیچ مشکل جدیدی نداریم. با توجه به تقارن معلوم است که بار روی هر کره باید یکنواخت توزیع شود، بنابراین مثال ما در واقع به فصل اول کتاب برمی‌گردد! بیرون کره بزرگتر میدان ناشی از بار $Q_1 + Q_2$ است، پس φ_1 پتانسیل کره بیرونی برابر است با:

$$\frac{Q_1 + Q_2}{R_1}$$

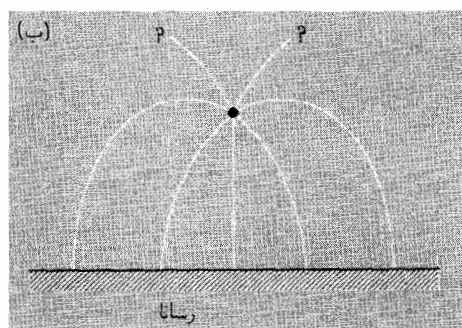
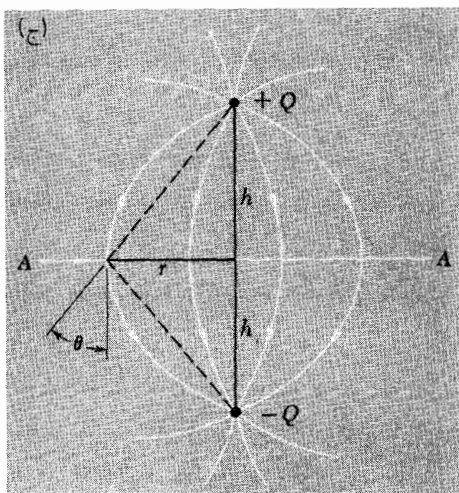
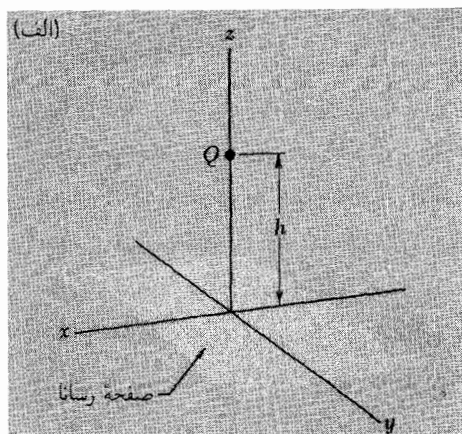
پتانسیل کره داخلی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{Q_1 + Q_2}{R_1} + \int_{R_1}^{R_2} -\frac{Q_2}{r^2} dr = \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} - \frac{Q_2}{R_1} \\ &= \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \end{aligned} \quad (6)$$

φ_2 پتانسیل در تمام نقطه‌های داخل کره هم هست. رابطه $\varphi_2 = Q_1/R_1 + Q_2/R_2$ را می‌توانستیم با یک برهم‌نهی ساده پیدا کنیم: Q_1/R_1 پتانسیل در داخل کره بزرگتر است اگر تنها خودش می‌بود، و Q_2/R_2 پتانسیل درون کره داخلی است اگر تنها خودش حضور می‌داشت. اگر کره‌ها بارهای مساوی و مخالف $Q_1 = -Q_2$ داشتند، فقط فضای بین کره‌ها میدان غیرصفر داشت.



شکل ۷-۳ با بارهای مفروض Q_1 و Q_2 روی پوسته‌های کروی، پتانسیل پوسته داخلی از رابطه ۶ به دست می‌آید.



شکل ۳-۸ (الف) یک بار نقطه‌ای Q بالای صفحه رسانایی نامتناهی. (ب) میدان باید چیزی شبیه به این باشد. (ج) میدان یک جفت بار مخالف.

یکی از ساده‌ترین دستگاههایی که در آن تحرک بارها در رسانا خودش را نشان می‌دهد، بار نقطه‌ای نزدیک یک صفحه رساناست. فرض کنید صفحه xy سطح یک رسانا باشد که تا بینهایت ادامه دارد. پتانسیل این صفحه را صفر بگیریم. حالا بار مثبت Q را بیاورید و در فاصله h سانتی‌متر بالای صفحه روی محور z قرار بدهید (شکل ۳-۸ الف). انتظار چه جور میدان و توزیع باری را داریم؟ انتظار داریم بار مثبت Q بار منفی را جذب کند، اما به سختی می‌شود توقع داشت که بار منفی با تراکم نامتناهی در پای عمود از Q انباشته شود. چرا نشود؟ وانگهی، یادمان هست که میدان الکتریکی روی سطح رسانا همیشه عمود بر سطح است. از سوی دیگر، در نزدیکی بار نقطه‌ای Q حضور صفحه رسانا تغییر اندکی ایجاد می‌کند؛ خطهای میدان باید از Q طوری راه بیفتد که انگار از یک بار نقطه‌ای به صورت شعاعی خارج می‌شوند. بنابراین ممکن است انتظار

چیزی مثل شکل ۳-۸ را داشته باشیم که بعضی جزئیاتش هنوز کمی نامعین است. البته همه چیز باید نسبت به محور z کاملاً متقارن باشد.

اما واقعاً چطور می‌توانیم مسئله را حل کنیم؟ پاسخ این است که با یک ترفند، اما ترفندی که هم آموزنده است و هم بیشتر وقتها مفید است. یک مسئله که حلش آسان باشد پیدا می‌کنیم که جوابش، یا بخشی از جوابش به درد مسئله مورد نظرمان بخورد. در اینجا مسئله آسان مربوط به دو بار نقطه‌ای مساوی و مخالف Q و $-Q$ است. در صفحه نیمساز خط واصل بین دو بار، صفحه‌ای که مقطع آن در شکل ۳-۸ ج با خط AA نشان داده می‌شود، میدان الکتریکی همه جا عمود بر صفحه است. اگر فاصله Q از این صفحه را مساوی h در مسئله اصلی‌مان بگیریم، نیمه بالایی میدان در شکل ۳-۸ ج همه نیازهای ما را برآورده می‌کند: میدان عمود بر صفحه رساناست و در همسایگی Q به میدان یک بار نقطه‌ای نزدیک می‌شود.

اینجا شرایط مرزی کاملاً همان نیست که در قضیه یکتایی بخش قبل تشریح کردیم. پتانسیل رسانا ثابت است، ولی در دستگاهمان یک بار نقطه‌ای داریم که در آن پتانسیل به بینهایت میل می‌کند. می‌توانیم بار نقطه‌ای را در حالت حدی یک رسانای کوچک کروی در نظر بگیریم که بار Q روی آن ثابت است. برای این شرایط مرزی ترکیبی — پتانسیل روی یک سطح و بار کل در جای دیگر — باز هم قضیه یکتایی صادق است. اگر جواب "قرضی" ما به این خوبی جور در بیاید باید خود جواب باشد.

شکل ۳-۹ جواب نهایی میدان در بالای صفحه با چگالی بار سطحی مفروض است. می‌توانیم شدت میدان و جهت در هر نقطه را از مسئله دو بار، شکل ۳-۸ ج با استفاده از قانون کولن پیدا کنیم. نقطه‌ای روی سطح را به فاصله R از مبدأ در نظر بگیریم. مجذور فاصله این نقطه از بار Q برابر است با $r^2 + h^2$ ، و مؤلفه میدان Q در این نقطه عبارت است از $(r^2 + h^2)^{-3/2} Q \cos \theta$. "بار تصویر" یعنی $-Q$ در پایین صفحه نیز همین مؤلفه z را دارد. بنابراین میدان الکتریکی از رابطه زیر به دست می‌آید:

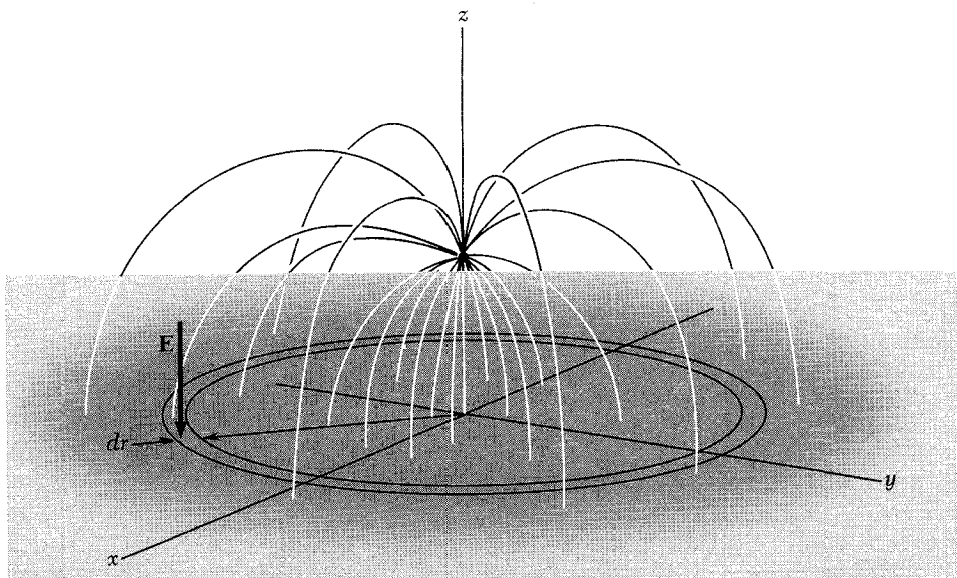
$$E_z = \frac{-2Q}{r^2 + h^2} \cos \theta = \frac{-2Q}{r^2 + h^2} \cdot \frac{h}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{-2Qh}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \quad (7)$$

از اینجا چگالی بار سطحی σ به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{E_z}{4\pi} = \frac{-Qh}{2\pi(r^2 + h^2)^{3/2}} \quad (8)$$

حالا بار کل روی سطح را با انتگرال‌گیری از این توزیع به دست می‌آوریم:

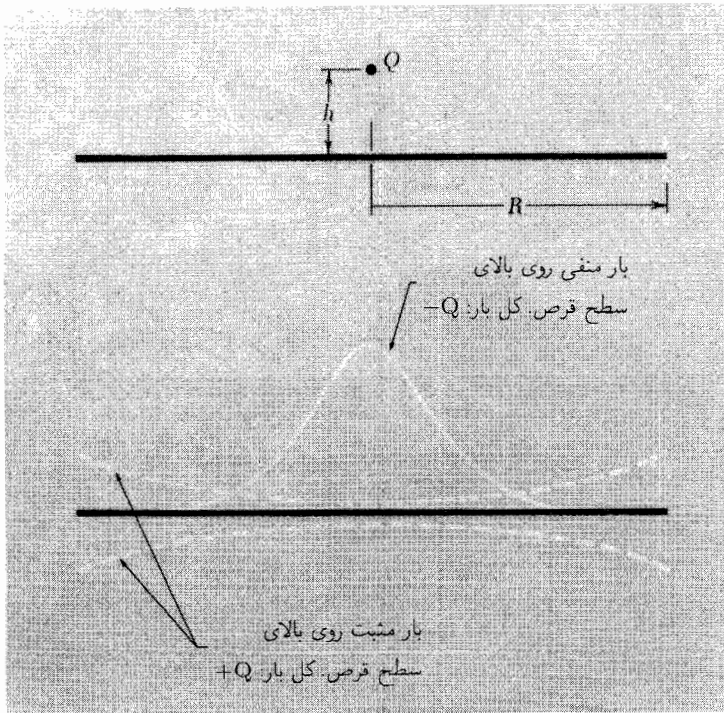
$$\int_0^\infty \sigma \cdot 2\pi r dr = -Q \int_0^\infty \frac{hr dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} = -Q \quad (9)$$



شکل ۹-۳ چند خط میدان برای بار بالای صفحه. شدت میدان روی سطح که از رابطه ۷ به دست می‌آید، چگالی بار سطحی σ را تعیین می‌کند.

انتظار همین نتیجه را هم داشتیم. این به آن معنی است که همهٔ شاری که از بار Q خارج می‌شود به سطح رسانا می‌انجامد.

یک نکتهٔ سر درگم‌کننده وجود دارد. اگر صفحهٔ رسانا قبل از اینکه بار Q را روی آن بگذاریم کاملاً بدون بار شود چه پیش می‌آید؟ اکنون رسانا بار کل $-Q$ را چگونه ظاهر کند؟ پاسخ این است که یک بار مثبت به مقدار $+Q$ باید برای جبران این وضع روی کل صفحه توزیع شود. برای آنکه ببینیم در اینجا چه می‌گذرد، فرض کنید که صفحهٔ رسانا واقعاً یک قرص فلزی است، ابعادش هم نامتناهی نیست بلکه شعاعش $R \gg h$ است. اگر بار $+Q$ به‌طور یکنواخت روی قرص منتشر شود چگالی حاصل در هر دو طرف قرص برابر خواهد بود با $Q/2\pi R^2$ که میدانی به اندازهٔ $2Q/R^2$ عمود بر صفحهٔ قرص تولید خواهد کرد. چون صفحهٔ ما رساناست و بار می‌تواند سوی آن جابه‌جا شود، چگالی بار و شدت میدان ناشی از آن در نزدیکی مرکز قرص کمتر از $2Q/R^2$ است. چون بار تمایل دارد که به سمت لبهٔ قرص برود. در هر حالت مرتبهٔ بزرگی میدان ناشی از این توزیع بار با ضریب h^2/R^2 کوچکتر از میدان معادلهٔ ۷ است. تا $R \gg h$ است حق داریم از این مقدار چشمپوشی کنیم و البته برای یک صفحهٔ رسانای نامحدود این مقدار صفر می‌شود. شکل ۱۰-۳ در دو طرح جداگانه چگالی بار سطحی σ را که از معادلهٔ ۸ به دست می‌آید، و نیز توزیع بار جبرانی Q روی سطح بالایی و پایینی قرص را نشان می‌دهد: در اینجا برای اینکه بتوانیم

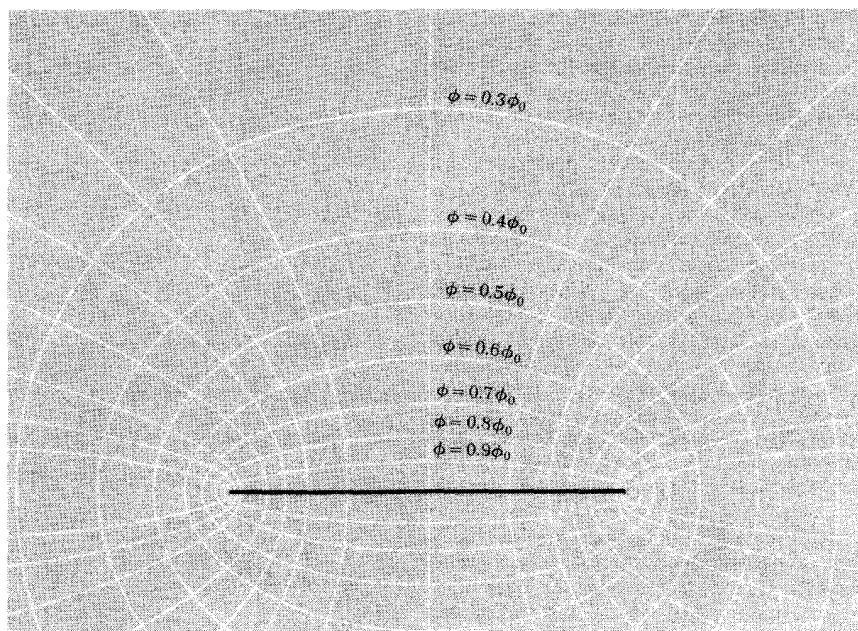


شکل ۳-۱۰ توزیع بار روی یک قرص رسانای خنثی که بار مثبت نقطه‌ای Q به فاصله h بالای مرکز قرص قرار گرفته است. البته چگالی بار سطحی واقعی در هر نقطه جمع جبری چگالیهای مثبت و منفی نشان داده شده است.

هر دو توزیع را به وضوح در یک شکل نشان بدهیم R را خیلی بزرگتر از h نگرفته‌ایم. توجه کنید که بار جبرانی مثبت روی سطح بالایی و پایینی قرص دقیقاً طوری پخش می‌شود که انگار نه انگار یک توده بار منفی در وسط سطح بالایی جمع شده است! در واقع بار مثبت هر کاری بکند مختار است چون میدان ناشی از توزیع بار منفی به علاوه میدان حاصل از بار نقطه‌ای Q که آن را القا کرده است، روی سطح قرص مؤلفه افقی‌شان صفر است، بنابراین هیچ اثری روی توزیع بار مثبت جبرانی ندارند.

قرص رسانای منزوی که در بالا به آن اشاره کردیم متعلق به رده دیگری از مسائل حل‌شدنی است، رده‌ای که شامل هر رسانای منزوی به شکل کره یا بیضی دوار است. بدون اینکه وارد ریاضیات بشویم^۱، در شکل ۳-۱۱ بعضی خطوط میدان الکتریکی و سطحهای هم‌پتانسیل اطراف

۱. به بیان ریاضی، این رده مسائل به این دلیل حل‌شدنی‌اند که دستگاه مختصات کروی از قضا یکی از دستگاههایی است که معادله لاپلاس در آن شکل خیلی ساده‌ای دارد.



شکل ۱۱-۳ سطوح هم‌پتانسیل و خطوط میدان برای قرص رسانای باردار.

قرص رسانا را نشان داده‌ایم. خطهای میدان هذلولی‌اند. سطحهای هم‌پتانسیل بیضی‌وارهای پخ هستند که از چرخش به دور قرص حاصل می‌شوند. پتانسیل خود قرص، نسبت به بینهایت، مقدار زیر است

$$\phi_0 = \frac{(\pi/2)Q}{a} \quad (10)$$

که در آن Q بار کل قرص و a شعاع آن است. این تصویر را با شکل ۱۱-۲ مقایسه کنید که مربوط به میدان یک قرص نارسانا با باریک‌نواخت است. در آنجا میدان الکتریکی در سطح قرص عمود بر سطح نبود بلکه یک مؤلفه شعاعی رو به بیرون داشت. اگر می‌شد این قرص شکل ۱۱-۲ را رسانا کرد، بار آنقدر خارج می‌شد تا میدان شکل ۱۱-۳ به دست آید. مطابق حل ریاضی‌ای که مبنای شکل ۱۱-۳ است، چگالی بار در مرکز قرص در این صورت درست نصف چگالی در مرکز قرص با باریک‌نواخت است.

شکل ۱۱-۳ نه فقط میدان قرص رسانا بلکه میدان هر رسانای کره‌وار پخ منزوی را نشان می‌دهد. برای درک این مطلب، یکی از سطوح هم‌پتانسیل دورانی — مثلاً آن را که مقطعش در

نمودار بیضی با نشانه $\phi = 0.6\phi$ است برگزینید. فرض کنید بتوانیم این سطح کره‌وار را روکش کنیم و روی آن بار Q بنشانیم. در این صورت میدان خارج آن خودبه‌خود شرایط مرزی را برآورده می‌کند: میدان الکتریکی عمود بر سطح؛ شار کل $4\pi Q$. این یک جواب است و با توجه به قضیهٔ یکتایی باید جواب برای یک رسانای باردار منزوی به آن شکل خاص باشند. تنها کاری که باید انجام دهیم پاک کردن خطهای میدان داخل رسانا است. اگر فرض کنید دو کره‌وار را روکش مسی کنیم، و بار Q روی سطح داخلی و بار $-Q$ روی سطح خارجی قرار دهیم. در شکل ۳-۱۱ قسمت بین این دو هم‌پتانسیل میدان بین دو چنین رسانای هم‌مرکزی را نشان می‌دهد.

این مطلب یک خط مشی کلی به ما نشان می‌دهد. با داشتن جواب هر مسئلهٔ الکتروستاتیکی که سطوح هم‌پتانسیلش مشخص باشند، می‌توانیم با مس‌پوش کردن یک یا چند سطح هم‌پتانسیل جواب هر دستگاه دیگری را که از دستگاه مسئلهٔ اول تشکیل یافته باشد پیدا کنیم. شاید بهتر باشد اسم این روش را بگذاریم "راه حلی در جستجوی مسئله" ماکسول این وضعیت را خوب توصیف کرده است: "به این ترتیب به نظر می‌رسد که آنچه ما به‌طور طبیعی مسئلهٔ معکوس تعیین شکل رساناها از روی پتانسیل معلوم می‌نامیم راحت‌تر از مسئلهٔ مستقیم تعیین پتانسیل است وقتی که شکل رسانا معلوم باشد."^۱

اگر مسئلهٔ ۲-۱۱ را حل کرده باشید مادهٔ خام یک مثال مهم را به‌دست آورده‌اید. دریافته‌اید که یک بار خطی یکنواخت به طول متناهی سطوح هم‌پتانسیلی به شکل بیضیویهای دوک‌وار هستند. به این ترتیب مسئلهٔ پتانسیل و میدان هر رسانای باردار منزوی به شکل کره‌وارکشیده تبدیل به محاسبهٔ تقریباً سادهٔ پتانسیل ناشی از یک بار خطی می‌شود. شما می‌توانید این را در مسئلهٔ ۳-۲۲ امتحان کنید.

۳-۵ ظرفیت و خازن

یک رسانای منزوی حامل بار Q دارای پتانسیل معین ϕ با پتانسیل صفر در بینهایت است. Q متناسب است با ϕ . ضریب تناسب تنها بستگی به اندازه و شکل رسانا دارد. این ضریب را ظرفیت آن رسانا می‌نامیم و با حرف C نشان می‌دهیم

$$Q = C\phi. \quad (11)$$

1. James Clerk Maxwell, "Treatise on Electricity and Magnetism" Vol I, 3d ed, Oxford University Press, 1891, chap VII; reprinted by Dover, New York, 1954.

هر دانشجوی فیزیک لازم است گاه‌به‌گاه به کتاب ماکسول رجوع کند. فصل هفتم این کتاب، جای خوبی برای تفکر دربارهٔ موضوع بحث فعلی ماست. در آخر جملهٔ اول نمودارهای زیبایی از میدانهای الکتریکی پیدا می‌کنید و کمی بعد از مطلبی که بالا نقل‌قول کرده‌ایم ماکسول دلیل ارائه این تصاویر را می‌گوید. می‌توان فکر کرد که او هم از ساخت و ظرافت این تصاویر خوشش آمده است.

بدیهی است یکاهای C بستگی به یکاهای Q و ϕ_0 دارد. بگذارید همچنان Q را برحسب eus و ϕ_0 را برحسب ایستالت بیان کنیم. برای یک رسانای منزوی کروی به شعاع a می‌دانیم که $\phi_0 = Q/a$. بنابراین ظرفیت کره مطابق معادلهٔ ۱۱ باید مقدار زیر باشد

$$C = \frac{Q}{\phi_0} = a \quad (12)$$

برای یک قرص منزوی به شعاع a ، مطابق معادلهٔ ۱۰ داریم $Q = (2/\pi)a\phi_0$ ، بنابراین ظرفیت چنان رسانایی می‌شود $C = (2/\pi)a$. این قدری کوچکتر از ظرفیت کره‌ای به همان شعاع است، و باید هم باشد. یکای ظرفیت در دستگاه CGS سانتی‌متر است، هیچ اسم دیگری هم لازم ندارد. چون ظرفیت دارای ابعاد طول است، برای رساناهایی به شکل مفروض، ظرفیت مثل بعد خطی یک جسم سنجیده می‌شود.

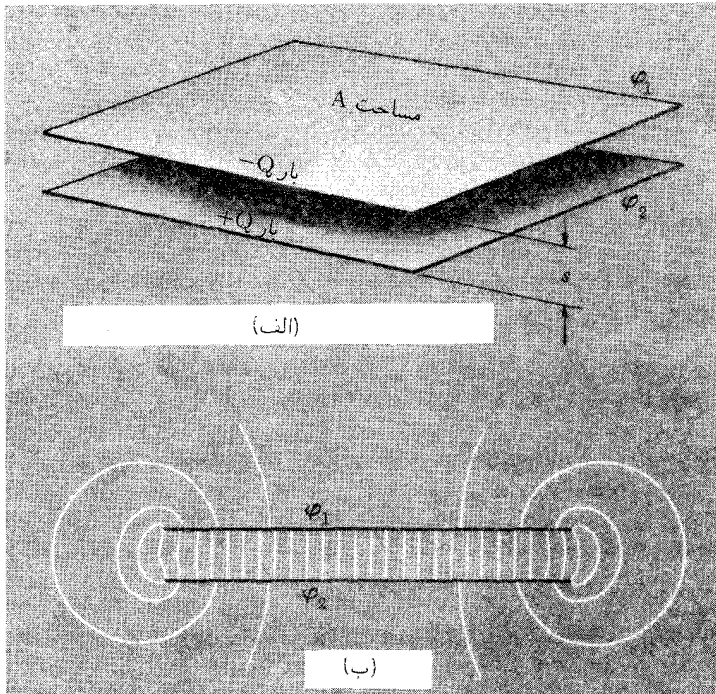
این مطلب در مورد رساناهای تک و منزوی است. هر وقت که با بار روی رساناها یا پتانسیل آنها سروکار داشته باشیم مفهوم ظرفیت مفید است. موردی که به مراتب بیشتر مورد توجه است دو رسانا با بارهای مخالف Q و $-Q$ است. در اینجا ظرفیت به صورت نسبت بار Q به اختلاف پتانسیل بین دو رسانا تعریف می‌شود. جسمی که تشکیل می‌شود از دو رسانا، مادهٔ عایقی که رساناها را جدا از هم نگه می‌دارد، و احتمالاً سیمهای رابط یا پایانه‌های الکتریکی، خازن نامیده می‌شود. بیشتر مدارهای الکترونیکی خازنهای متعدد دارند. ساده‌ترین نمونهٔ خازن، خازن تخت موازی است.

دو صفحهٔ رسانای تخت موازی یکدیگر و به فاصلهٔ s از هم قرار می‌گیرند (شکل ۳-۱۲ الف). فرض کنید مساحت هر صفحه A باشد و روی یکی از صفحه‌ها بار Q و روی صفحهٔ دیگر بار $-Q$ داشته باشیم. پتانسیل صفحه‌ها را φ_1 و φ_2 بگیرد. شکل ۳-۱۲ ب مقطع خطهای میدان در این دستگاه را نشان می‌دهد. دور از لبهٔ صفحه‌ها میدان در ناحیهٔ بین دو صفحه تقریباً یکنواخت است. اگر این میدان را یکنواخت تلقی کنیم اندازه‌اش $(\varphi_1 - \varphi_2)/s$ است. چگالی بار سطحی روی سطح داخلی هر یک از صفحه‌ها برابر است با:

$$\sigma = \frac{E}{4\pi} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{4\pi s} \quad (13)$$

اگر تغییر واقعی E و در نتیجه σ را که علی‌الاصول در نزدیکی لبهٔ صفحه‌ها رخ می‌دهد نادیده بگیریم، بار کل روی هر صفحه را می‌توانیم از عبارت سادهٔ زیر به دست بیاوریم:

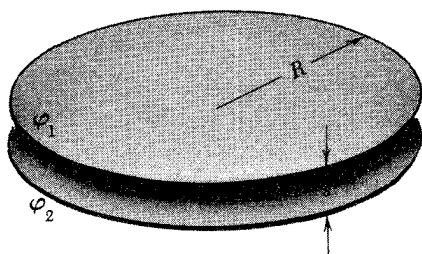
$$Q = A \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{4\pi s} \quad (\text{با چشمپوشی از اثرات لبه}) \quad (14)$$



شکل ۱۲-۳ (الف) یک خازن با صفحه‌های موازی. (ب) مقطع شکل (الف) که خطهای میدان را نشان می‌دهد.

انتظار داریم که هر چه فاصله بین صفحه‌ها یعنی s نسبت به ابعاد جانبی آنها کوچکتر باشد، رابطه ۱۴ دقیقتر باشد. البته اگر قرار باشد این مسئله الکتروستاتیک را با لبه و همه چیز برای یک شکل به خصوص صفحه به دقت حل کنیم، می‌توانیم به جای معادله ۱۴ از فرمول دقیق استفاده کنیم. برای اینکه نشان دهیم معادله ۱۴ چه تقریب خوبی است، در شکل ۳-۱۳ مقادیر ضریب تصحیح f ، که اختلاف بار Q به دست آمده از رابطه ۱۴ و مقدار دقیق Q به دست می‌دهد، در مورد دو قرص رسانا با فاصله‌های مختلف نوشته شده است. بار کل همیشه کمی بیشتر از آن است که معادله ۱۴ پیش‌بینی می‌کند. این مطلب همان‌طور که در شکل ۳-۱۲ ب می‌بینیم منطقی است چون مسلماً یک تراکم بار اضافی در لبه‌ها هست و علاوه بر این باری هم روی سطحهای خارجی نزدیک لبه‌ها قرار می‌گیرد.

ما در حال حاضر با جزئیات این تصحیح کاری نداریم. آنچه مورد نظر ماست خواص کلی دستگاه متشکل از دو رسانا یعنی خازن است. رابطه بین بار Q روی یکی از صفحات و اختلاف



شکل ۱۳-۳ ظرفیت حقیقی صفحه‌های گرد موازی برای مقادیر مختلف نسبت فاصله صفحه‌ها به شعاع صفحه، با نتیجه حاصل از رابطه ۱۴ مقایسه می‌شود. برای تصحیح اثر لبه می‌توان بار Q را به صورت

$$Q = \frac{A(\phi_1 - \phi_2)}{4\pi s} f$$

نوشت. برای صفحه‌های گرد ضریب f به صورت زیر بستگی به s/R دارد:

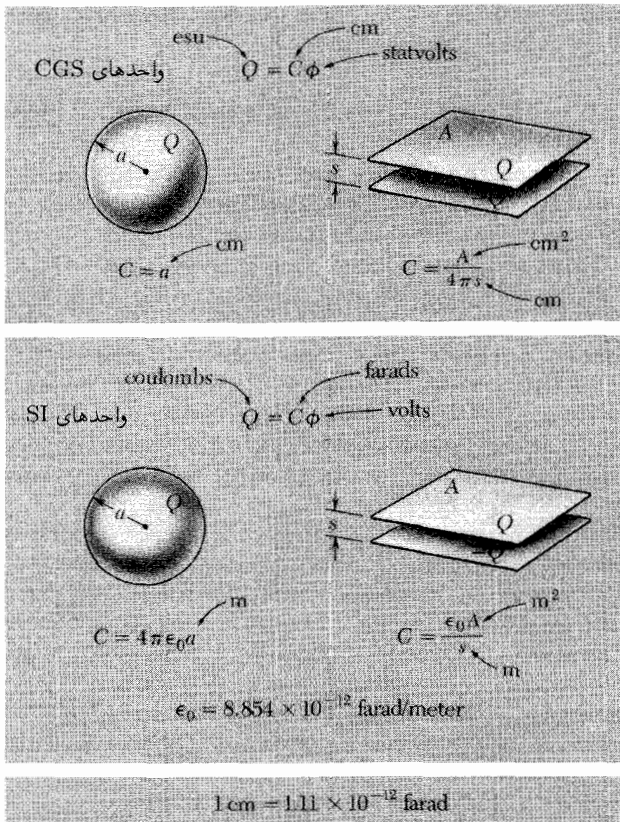
s/R	f
۰٫۲	۱٫۲۸۶
۰٫۱	۱٫۱۶۷
۰٫۰۵	۱٫۰۹۴
۰٫۰۲	۱٫۰۴۲
۰٫۰۱	۱٫۰۲۳

پتانسیل بین دو صفحه را می‌خواهیم. برای دستگاه به خصوصی که رابطه ۱۴ برای آن به کار می‌رود خارج قسمت $Q/(\phi_1 - \phi_2)$ برابر است با $A/4\pi s$. حتی اگر این مقدار تقریبی باشد، روشن است که فرمول دقیق فقط بستگی به اندازه و آرایش هندسی صفحه‌ها دارد. یعنی برای یک جفت رسانای ثابت، نسبت بار به اختلاف پتانسیل ثابت خواهد بود. ما این مقدار ثابت را ظرفیت خازن می‌نامیم و معمولاً با حرف C نشان می‌دهیم.

$$Q = C(\phi_1 - \phi_2) \quad (۱۵)$$

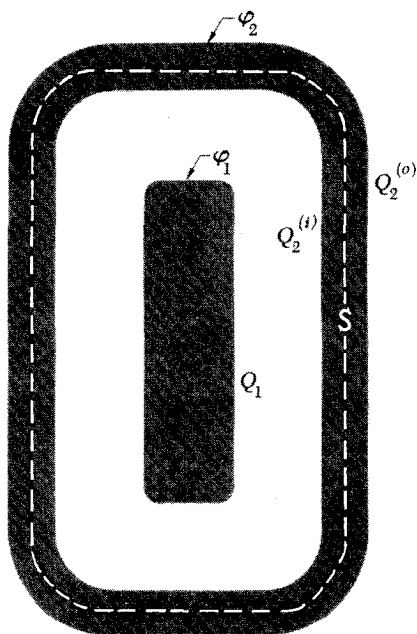
بنابراین ظرفیت خازن با صفحه‌های موازی، که میدان لبه‌هایش را نادیده می‌گیریم از رابطه زیر به دست می‌آید

$$C = \frac{A(\text{cm}^2)}{4\pi s(\text{cm})} \quad (۱۶)$$



شکل ۱۴-۳ یکاهای مربوط به ظرفیت.

بیشتر وقتها، مخصوصاً موقعی که با مدارهای الکتریکی سروکار داریم، باید بار را برحسب کولن و اختلاف پتانسیل را برحسب ولت بسنجیم. در این صورت ظرفیت، یعنی C در معادله ۱۴، برحسب فاراد سنجیده می‌شود. اگر ظرفیت خازنی یک فاراد باشد، وقتی که اختلاف پتانسیل بین صفحه‌ها یک ولت شود بار Q یک کولن است. در شکل ۱۴-۳ فرمولهای ظرفیت در هر دو دستگاه یکاهای CGS و SI خلاصه شده است. اگر ابهامی داشتید به آن رجوع کنید. معمولاً در هر عبارتی که شامل بار باشد یک اختلاف ضریب $4\pi\epsilon_0$ در کار می‌آید. از قضا فاراد یکای خیلی عظیمی است، ظرفیت یک کره منزوی به اندازه کل زمین کمتر از $1/10$ فاراد است. اما اشکالی پیش نمی‌آید. ما با یکاهای آشناتری مثل میکروفاراد (μF)، 10^{-6} فاراد، و پیکوفاراد (pF)، 10^{-12} فاراد، کار می‌کنیم. یک پیکوفاراد تقریباً معادل 1 cm است. اگر فاراد را یک کولن برولت تعریف کنیم بعد مقدار ثابت ϵ_0 به آسانی متر/فاراد به دست می‌آید.



شکل ۳-۱۵ خازنی که در آن یکی از رساناها دیگری را احاطه کرده است.

هر جفت رسانا با هر شکل و ترتیبی را می‌توان یک خازن در نظر گرفت. اما خازن با صفحات موازی بیشتر متداول است و محاسبه تقریبی ظرفیت آن بسیار آسان است. شکل ۳-۱۵ دو رسانا داخل یکدیگر را نشان می‌دهد. این ترکیب را هم می‌توانیم یک خازن بنامیم. در عمل یک تکیه‌گاه مکانیکی برای رسانای داخلی لازم می‌شود ولی ما کاری به این نداریم. به علاوه، برای انتقال بار الکتریکی به رساناها یا خارج کردن بار از آنها احتیاج به سیمهای رابط داریم که خودشان هم رسانا هستند. چون سیمی که از رسانای داخلی، شماره ۱، خارج می‌شود باید از فضای بین دو رسانا بگذرد، ناگزیر اختلالی در میدان الکتریکی این فضا پیش می‌آورد. برای کمینه کردن این اثر می‌توانیم سیمها را بینهایت نازک در نظر بگیریم. یا اینکه فرض کنیم سیمها قبل از تعیین پتانسیل برداشته شوند.

در این دستگاه می‌توانیم سه بار را مشخص کنیم: Q_1 ، بار کل روی رسانای داخلی؛ $Q_2^{(i)}$ ، مقدار بار روی سطح داخلی رسانای بیرونی؛ $Q_2^{(o)}$ ، بار روی سطح خارجی رسانای خارجی. اول توجه کنید که $Q_2^{(i)}$ باید مساوی $-Q_1$ باشد. چون سطحی مثل S در شکل ۳-۱۵ هر دوی این بارها را احاطه می‌کند و هیچ بار دیگری در میان نیست و شار عبوری از این سطح صفر است. این شار صفر است چون روی سطح S که در داخل ماده رسانا قرار می‌گیرد، میدان صفر است.

این طور که پیداست مقدار Q_1 ، میدان الکتریکی در ناحیه بین دو رسانا را به طور یکتا تعیین می‌کند و بنابراین اختلاف پتانسیل بین دو رسانا، $\varphi_1 - \varphi_2$ هم از روی آن معلوم می‌شود. به همین دلیل اگر دو جسم را به عنوان "صفحه‌ها"ی خازن در نظر بگیریم، فقط Q_1 یا قرینه آن $Q_2^{(i)}$ است که در تعیین ظرفیت دخالت دارد. ظرفیت برابر است با:

$$C = \frac{Q_1}{\varphi_1 - \varphi_2} \quad (17)$$

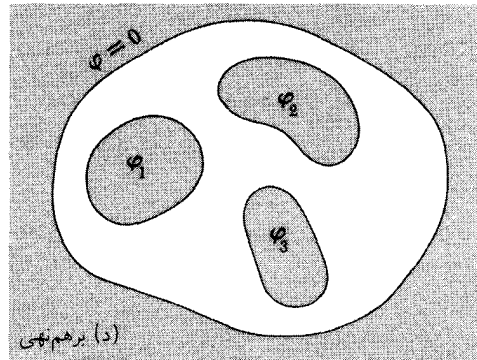
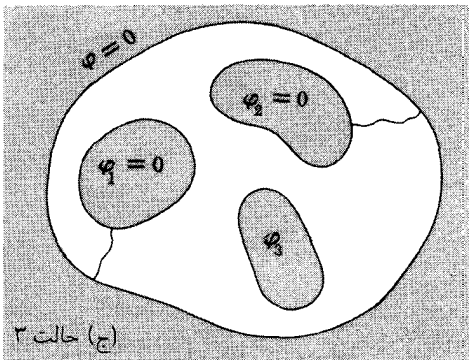
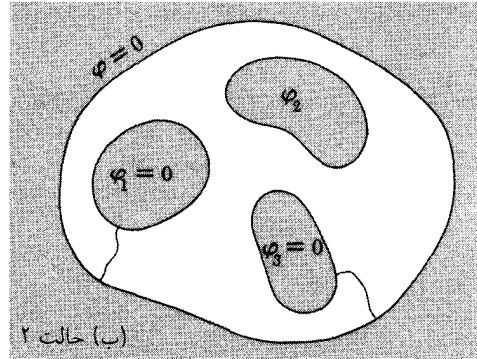
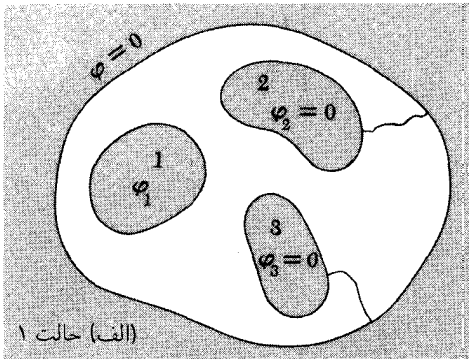
$Q_2^{(o)}$ ، که خود φ_2 به آن بستگی دارد در اینجا دخیل نیست. در واقع، احاطه کامل یک رسانا با دیگری ظرفیت خازن را از همه اشیاء خارج مستقل می‌کند.

۳-۶ پتانسیل و بار روی رساناهای مختلف

رسیده‌ایم به یک مسئله خیلی کلی‌تر، رابطه‌های بین بارها و پتانسیلهای هر تعداد رسانا با ترکیب مفروض، خازن دو رسانایی فقط یک مورد خاص است. برای حل آن تنها چیزهایی که به دردمان می‌خورند قضیه یکتایی و اصل برهم‌نهی است. برای اینکه چیز مشخصی در نظر داشته باشیم سه رسانای جدا از هم در نظر بگیرید که مطابق شکل ۳-۱۶ همه‌شان با یک پوسته رسانا احاطه شده باشند. پتانسیل این پوسته را می‌توانیم صفر بگیریم؛ نسبت به این مرجع، پتانسیلهای سه رسانا برای یک حالت مشخص دستگاه φ_1 و φ_2 و φ_3 است. بنابر قضیه یکتایی اطمینان داریم که اگر φ_1 ، φ_2 و φ_3 معین باشند، میدان الکتریکی در همه جای دستگاه معین است. در نتیجه بارهای Q_1 ، Q_2 و Q_3 روی هر رسانا هم به طور یکتا تعیین می‌شود.

لازم نیست بار روی سطح داخلی پوسته محیط را به حساب بیاوریم، چون همیشه برابر خواهد بود با $-(Q_1 + Q_2 + Q_3)$ - اگر بخواهید می‌توانید "بینهایت" را در نقش این پوسته در نظر بگیرید، و فرض کنید پوسته بی‌حد به اطراف کشیده شده باشد. ما در شکل این پوسته را آورده‌ایم چون برای بعضی‌ها دنبال کردن مراحل انتقال بار، وقتی رسانا متصل به چیزی باشد، آسانتر است.

در میان حالت‌های محتمل این دستگاه حالتی هست که φ_2 و φ_3 هر دو صفرند. این شرط را مطابق شکل ۳-۱۶ الف با اتصال رساناهای ۲ و ۳ به پوسته پتانسیل صفر، اعمال می‌کنیم. مانند قبل می‌توانیم فرض کنیم که سیمهای رابط چنان نازک‌اند که باری که روی آنها بماند قابل چشمپوشی است. البته واقعاً اهمیتی ندارد که شرط بالا چطور فراهم می‌شود. در چنان حالتی که ما حالت ۱ می‌نامیم، میدان الکتریکی در کل دستگاه و بار روی هر رسانا به طور یکتا با مقدار φ_1 تعیین می‌شود. به علاوه، اگر φ_1 دو برابر شود لازم است که شدت میدان همه جا دو برابر شود و در



شکل ۱۶-۳ حالت عمومی این دستگاه را می‌توان برهم نهی (د) از سه حالت (الف) تا (ج) تلقی کرد که در هر حالت همه رساناها بجز یکی به پتانسیل صفر متصل‌اند.

نتیجه هر کدام از بارهای Q_1, Q_2, Q_3 دو برابر شوند: یعنی، اگر $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ ، هر یک از سه بار باید متناسب با φ_1 باشند. به بیان ریاضی:

$$\left. \begin{array}{l} \text{حالت ۱} \\ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0 \end{array} \right\} Q = C_{11}\varphi_1; \quad Q_2 = C_{21}\varphi_1; \quad Q_3 = C_{31}\varphi_1 \quad (18)$$

سه ضریب ثابت C_{11}, C_{21}, C_{31} می‌توانند فقط وابسته به شکل و آرایش اجسام رسانا داشته باشند.

درست به همین روش می‌توانیم حالت ۲ (شکل ۱۶-۳ ب) را که در آن φ_1 و φ_2 صفرند، تحلیل کنیم. باز هم باید ابتدا یک رابطه خطی بین تنها پتانسیل غیرصفر در این حالت یعنی φ_3

بارهای مختلف پیدا کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{حالت ۲} \\ \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \end{array} \right\} Q_1 = C_{12}\varphi_2; \quad Q_2 = C_{22}\varphi_2; \quad Q_3 = C_{32}\varphi_2 \quad (19)$$

بالاخره، وقتی φ_1 و φ_2 صفر نگه داشته شوند، میدان و بارها متناسب با φ_3 هستند:

$$\left. \begin{array}{l} \text{حالت ۳} \\ \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \end{array} \right\} Q_1 = C_{13}\varphi_3; \quad Q_2 = C_{23}\varphi_3; \quad Q_3 = C_{33}\varphi_3 \quad (20)$$

اکنون برهم‌نهی سه حالت مثل ۱، ۲ و ۳ نیز یک حالت محتمل است. میدان الکتریکی در هر نقطه جمع برداری میدانهای الکتریکی در آن نقطه در سه حالت است، در حالی که بار روی یک رسانا مجموع بارهایی است که در سه حالت حمل می‌کند. در این حالت جدید پتانسیلها φ_1 و φ_2 هستند که هیچکدام الزاماً صفر نیستند. خلاصه، یک حالت کاملاً عام داریم. رابطه بین بارها و پتانسیلها به سادگی با جمع کردن معادله‌های ۱۸ تا ۲۰ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + C_{13}\varphi_3 \\ Q_2 &= C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + C_{23}\varphi_3 \\ Q_3 &= C_{31}\varphi_1 + C_{32}\varphi_2 + C_{33}\varphi_3 \end{aligned} \quad (21)$$

ظاهراً رفتار الکتریکی این دستگاه با ۹ ضریب ثابت $C_{11}, C_{12}, C_{13}, \dots, C_{33}$ مشخص می‌شود. در واقع تنها شش ثابت لازم است چون می‌شود اثبات کرد که در هر دستگاه $C_{12} = C_{21}$ ، $C_{13} = C_{31}$ و $C_{23} = C_{32}$. واضح نیست که چرا باید این‌طور باشد. در مسئله ۳-۲۷ برهانی مبتنی بر پایداری انرژی خواهید دید ولی برای این منظور احتیاج به مفهومی دارید که در بخش ۳-۷ مطرح می‌شود. ضرایب C در معادله‌های ۲۱ ضرایب ظرفیت نامیده می‌شوند. روشن است که بحث ما به هر تعداد رسانا قابل گسترش است.

دسته معادله‌هایی نظیر ۲۱ را می‌توان برحسب Q ها برای φ ها حل کرد. یعنی، یک دسته معادله خطی هم‌ارز با معادله‌های ۲۱ به صورت زیر وجود دارد:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 + P_{13}Q_3 \\ \varphi_2 &= P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 + P_{23}Q_3 \\ \varphi_3 &= P_{31}Q_1 + P_{32}Q_2 + P_{33}Q_3 \end{aligned} \quad (22)$$

P ها را ضرایب پتانسیل می‌نامیم، این ضرایب را می‌شود از روی C ها حساب کرد، و برعکس. در اینجا یک مثال ساده از نوع رابطه‌ای که انتظار داریم در هر دستگاه فیزیکی خطی برقرار باشد، داریم. این رابطه‌ها در مطالعه ساختارهای مکانیکی (که فشار را با بار مربوط می‌کند)، در تحلیل مدارهای الکتریکی (ارتباط ولتاژ و جریان)، و به‌طور کلی هر جا که اصل برهم‌نهی را بتوان به‌کار برد پیدایشان می‌شود.

۷-۳ انرژی ذخیره شده در یک خازن

خازنی به ظرفیت C در نظر بگیرید که اختلاف پتانسیل بین صفحاتش $\varphi_{۱۲}$ باشد. بار Q مساوی با $C\varphi_{۱۲}$ است. روی یک صفحه بار Q و روی صفحه دیگر بار $-Q$ وجود دارد. فرض کنید با انتقال یک بار مثبت dQ از صفحه منفی به صفحه مثبت، بار را از Q به $Q + dQ$ افزایش می‌دهیم. در این صورت در مقابل اختلاف پتانسیل $\varphi_{۱۲}$ کار انجام گرفته است. این کار برابر است با $dW = \varphi_{۱۲}dQ = Q dQ/C$. بنابراین برای باردار کردن خازن از حالت بدون بار تا یک حالت نهایی با بار Q_f کار لازم برابر است با

$$W = \frac{1}{C} \int_{Q=0}^{Q_f} Q dQ = \frac{Q_f^2}{2C} \quad (23)$$

این مقدار انرژی U است که در خازن "ذخیره می‌شود". این انرژی را می‌شود به صورت زیر هم بیان کرد

$$U = \frac{1}{2} C \varphi_{۱۲}^2 \quad (24)$$

برای خازنی با صفحه‌های موازی که مساحت هر صفحه‌اش A و فاصله بین صفحه‌هایش s باشد ظرفیت را $C = A/4\pi s$ و میدان الکتریکی را $E = \varphi_{۱۲}/s$ به دست می‌آوریم. بنابراین معادله ۲۴ معادل با مقدار زیر نیز هست

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{4\pi s} \right) (Es)^2 = \frac{E^2}{8\pi} \cdot As = \frac{E^2}{8\pi} \times \text{حجم} \quad (25)$$

این مقدار با فرمول کلی ما، معادله ۳۸ فصل ۱ برای انرژی ذخیره شده در یک میدان الکتریکی توافق دارد.^۱

۱. همه اینها در مورد خازن خلأ به‌کار می‌رود که شامل دو رسانا با فضای خالی بین آنهاست. می‌دانید که بیشتر خازنهایی که در مدارهای الکتریکی به‌کار می‌روند با یک عایق یا "دی‌الکتریک" پر می‌شوند. اثر این ماده را در فصل ۱۰ خواهیم دید.

معادله ۲۴ در مورد رسانای باردار منزوی هم به کار می‌رود. چنین رسانایی را می‌توان صفحه درونی یک خازن تلقی کرد که با یک رسانای بیرونی به ابعاد نامتناهی و پتانسیل صفر احاطه شده است. برای کره منزوی با شعاع a ظرفیت را $C = a$ به دست می‌آوریم و بنابراین داریم $U = 1/2 a \phi^2$ ، یا معادل آن $U = (1/2)(Q^2/a)$ که با جواب قبلی ما برای انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی کره باردار توافق دارد.

صفحه‌های یک خازن، که بارشان مخالف هم است، یکدیگر را جذب خواهند کرد؛ نیرویی مکانیکی لازم است تا آنها را جدا از هم نگه دارد. در مورد خازنی با صفحه‌های موازی این امر بدیهی است، و می‌توانیم نیروی وارد بر بار سطحی را به آسانی محاسبه کنیم. اما می‌توانیم بر مبنای معادله ۲۳ عبارت کلی‌تری به دست بیاوریم که انرژی ذخیره شده را به بار Q و ظرفیت C مربوط کند. فرض کنید که C به نوعی وابسته به یک مختصه خطی x است که جابه‌جایی یک «صفحه» خازن را، که می‌تواند رسانایی به هر شکل باشد، نسبت به صفحه دیگر می‌سنجد. فرض کنید F اندازه نیرویی باشد که باید بر هر صفحه وارد کرد تا بر نیروی جاذبه بین آنها غلبه کند و فاصله x ثابت بماند. حالا فرض کنید در حالی که بار Q ثابت است و یکی از صفحه‌ها هم ثابت نگه داشته شده، فاصله x را به اندازه Δx افزایش بدهیم. نیروی خارجی F روی صفحه دیگر کار $F \Delta x$ را انجام می‌دهد و اگر قرار باشد انرژی پایسته بماند. این کار باید به صورت افزایشی در انرژی ذخیره شده $Q^2/2C$ ظاهر شود. این افزایش انرژی با Q ثابت برابر است با

$$\Delta U = \frac{dU}{dx} \Delta x = \frac{Q^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{C} \right) \Delta x \quad (26)$$

با مساوی قرار دادن این مقدار با کار $F \Delta x$ داریم:

$$F = \frac{Q^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{C} \right) \quad (27)$$

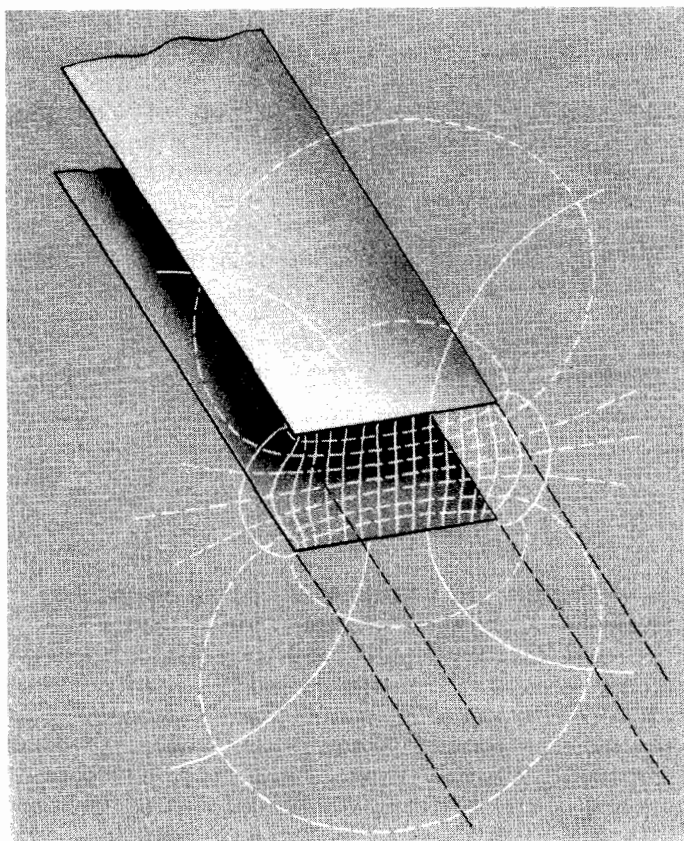
۳-۸ دیدگاههای دیگری از مسئله مقدار مرزی

درست نیست این تصور را به جا بگذاریم که روش کلی‌ای برای کلنجار رفتن با مسئله مقدار مرزی لاپلاس وجود ندارد. با اینکه بیش از این نمی‌توانیم این بحث را دنبال کنیم، چند روش مفید و جالب را ذکر می‌کنیم که ممکن است در مطالعه بیشتر فیزیک یا ریاضیات کاربردی به درد شما بخورد. ابتدا روش تحلیلی زیبایی را بررسی می‌کنیم که نگاهیست هم‌دیس خوانده می‌شود و مبتنی بر نظریه توابع یک متغیر مختلط است. متأسفانه این روش فقط برای دستگاههای دوبعدی به کار می‌رود. یعنی دستگاههایی که در آنها φ تنها به x و y بستگی دارد، مثلاً همه مرزهای رسانای

استوانه‌ای (به معنای عام) که در آنها جزء سطح موازی با محور z است. در این صورت معادله لاپلاس تبدیل می‌شود به

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (28)$$

که مقادیر مرزی روی خطها یا منحنیهایی در صفحه xy مشخص می‌شوند. بیشتر دستگانهایی که اهمیت کاربردی دارند شبیه یا به اندازه کافی شبیه به این موردند در نتیجه این روش گذشته از اهمیت ریاضی خود روش، استفاده عملی هم دارد. به‌عنوان مثال، پاسخ دقیق پتانسیل اطراف دو نوار دراز موازی را به آسانی می‌توان از روش نگاشت هم‌دیس به‌دست آورد. خطهای میدان و هم‌پتانسیلها در یک صفحه مقطع در شکل ۳-۱۷ نشان داده شده‌اند. این روش میدان لبه را برای



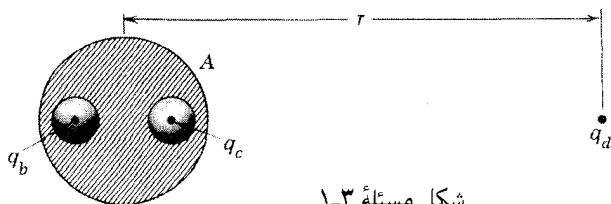
شکل ۳-۱۷ خطهای میدان و هم‌پتانسیلها برای دو نوار رسانای بینهایت دراز.

هر خازن موازی، که در آن لبه‌ها در مقایسه با فاصله بین دو صفحه دراز است، به دست می‌دهد. میدان شکل ۳-۱۲ ب از روی چنین پاسخی کشیده شده است. از این روش، بعد از مطالعهٔ تابعی یک متغیر مختلط در ریاضیات پیشرفته‌تر، می‌توانید استفاده کنید.

روش دوم یک روش عددی برای یافتن جوابهای تقریبی پتانسیل الکتروستاتیکی با مقادیرهای مرزی معین است. این روش، که به طرز شگفت‌آوری ساده است و کاربرد تقریباً عام دارد، مبتنی بر این خاصیت ویژهٔ توابع همساز است که قبلاً دیده‌ایم: مقدار تابع در یک نقطه برابر با میانگین آن در حوالی آن نقطه است. در این روش، تابع پتانسیل φ فقط با مقادیرهایی در یک ردیف نقطه‌های مجزا، به انضمام نقطه‌های مرزی، مشخص می‌شود. بعد مقادیرهای تابع در نقطه‌های غیرمرزی طوری تنظیم می‌شود که هر مقدار با میانگین مقادیرها در نقطه‌های اطراف، برابر شود. در اصل این کار را می‌شود با حل تعداد زیادی معادله‌های خطی توأم — به تعداد نقطه‌های درونی — انجام داد. اما پاسخ تقریبی را می‌توان از روش زیر که به روش واهلش معروف است به دست آورد. از نقطه‌های مرزی آرایه، یا شبکه، شروع کنید که مقادیرهای از پیش تعیین شده دارند. برای نقطه‌های درونی مقادیرهای اولیه را به دلخواه تعیین کنید. در هر نقطه مقدار پتانسیل را به میانگین مقادیرهایی در چهار نقطهٔ شبکهٔ مجاور (برای شبکه مربعی شکل) برسانید. این کار را تکرار کنید. تا جایی که تمام تغییراتی که در یک دور روبش شبکهٔ نقطه‌های درونی انجام می‌گیرد به‌طور قابل قبولی کوچک باشد. اگر بخواهید طرز استفاده از این روش را ببینید مسائل ۳-۳۰ و ۳-۳۱ مقدمات کار را روشن می‌کنند. اینکه همگرایی فرایند واهلش قابل تضمین، یا حتی قابل تسریع باشد، و اینکه روش واهلش بهترین راه برای مسئله باشد یا حل مستقیم معادله‌های توأم، پرسشهایی است مربوط به ریاضیات کاربردی که ما اینجا نمی‌توانیم واردشان بشویم. و البته به یک کامپیوتر سریع احتیاج است که هر دو روش را میسر کند.

مسائل

۳-۱. رسانای کروی A شامل دو کاواک کروی است. بار کل روی خود رسانا صفر است. اما در مرکز یکی از کاواکها بار نقطه‌ای q_b و در مرکز کاواک دیگر بار نقطه‌ای q_c قرار دارد. در فاصلهٔ زیاد r از این کره بار دیگر q_d قرار دارد. چه نیرویی بر هر یک از چهار شیء A ، q_b ، q_c و q_d وارد می‌شود؟ کدام جوابها تقریبی‌اند و بستگی به این دارند که r نسبتاً بزرگ باشد؟



شکل مسئلهٔ ۳-۱.

۲-۳ چه اشکالی در فرض وجود یک حفاظ گرانی وجود دارد، چیزی که بتواند راه را بر میدان گرانی "ببندد"، همان طور که به نظر می‌رسد یک صفحه فلزی راه را بر میدان الکتریکی "می‌بندد". تفاوت‌های بین چشمه گرانشی و چشمه‌های الکتریکی را در نظر بگیرید. توجه کنید که دیواره‌های جعبه در شکل ۳-۶ جلوی میدان چشمه‌های خارجی را نمی‌گیرند بلکه صرفاً می‌گذارند که بارهای سطحی یک میدان جبران‌کننده تولید کنند. چرا نمی‌شود چنین تدبیری برای میدان گرانی اندیشید؟ برای تحقق این امر به چیزی نیاز هست؟

۳-۳ در میدان یک بار نقطه‌ای بالای صفحه (شکل ۳-۹)، اگر یک خط میدان را که از بار نقطه‌ای در راستای افقی، یعنی موازی صفحه، شروع می‌شود دنبال کنید این خط در کجا سطح رسانا را قطع خواهد کرد؟ (قانون گاوس را لازم دارید و یک انتگرال‌گیری ساده.)

۴-۳ بار نقطه‌ای مثبت Q در فاصله 10 cm بالای یک صفحه رسانای افقی قرار گرفته است. بار مساوی منفی $-Q$ باید جایی روی خط عمودی که از Q بر صفحه فرود می‌آید قرار داده شود. کجا می‌توان بار $-Q$ را قرار داد که نیروی کل وارد بر آن صفر باشد؟

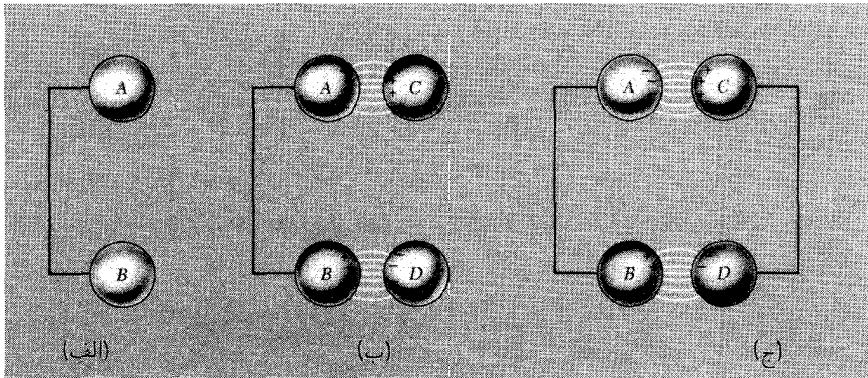
جواب: $y = 3.06\text{ cm}$.

۵-۳ بار Q در فاصله h سانتی‌متری بالای یک صفحه رسانا، درست مثل شکل ۳-۸ الف قرار گرفته است. می‌خواهیم ببینیم چه مقدار کار باید انجام بگیرد تا این بار به فاصله بینهایت دور از صفحه منتقل شود. دانشجویی می‌گوید این کار برابر است با مقدار کار لازم برای اینکه دو بار Q و $-Q$ را که ابتدا فاصله‌شان از هم $2h$ سانتی‌متر است، بینهایت از هم دور کنیم. بنابراین $W = Q^2/2h$. دانشجوی دیگری نیروی وارد بر بار را در حال جابه‌جایی حساب می‌کند و از $F dx$ انتگرال می‌گیرد، اما جواب متفاوتی به دست می‌آورد. دانشجوی دوم چه چیزی را به دست آورده است، و جواب کدام دانشجو صحیح است؟

۶-۳ با حل مسئله مربوط به بار نقطه‌ای و صفحه رسانا، ما در واقع هر مسئله‌ای را که می‌توان با برهم‌نهی از این مسئله ساخت، حل کرده‌ایم. مثلاً فرض کنید یک سیم مستقیم به طول 200 متر با بار یکنواخت 10^2 esu در هر سانتی‌متر طول داریم که موازی سطح زمین و به فاصله 5 متر از زمین کشیده شده است. شدت میدان در سطح زمین درست پایین سیم چقدر است؟ (برای میدانهای ثابت زمین مثل یک رسانای خوب رفتار می‌کند.) نیروی الکتریکی وارد بر سیم چقدر است؟

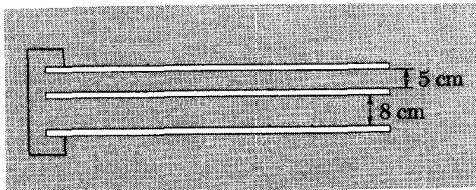
۷-۳ دو کره فلزی در شکل الف با سیمی به هم وصل‌اند؛ بار نهایی صفر است. در شکل ب دو کره رسانا با بار مخالف مطابق شکل جلو آورده می‌شوند و بارهایی با علامت مخالف در A و B القا می‌کنند. حالا اگر C و D را مطابق شکل ج با سیمی به هم وصل کنیم، می‌شود ادعا کرد که توزیع باری مثل شکل ب باید پا برجا بماند، چون هر تجمع باری با جاذبه بار مخالف نزدیکش

نگه داشته می‌شود. چه باید گفت؟ می‌توانید ثابت کنید چنین چیزی پیش نمی‌آید؟



شکل مسئله ۳-۷.

۳-۸ سه صفحه رسانا مطابق شکل موازی هم قرار گرفته‌اند. دو صفحه خارجی با سیمی به هم وصل‌اند. صفحه میانی منزوی شده و باری به اندازه 10^6 esu در هر سانتی‌متر مربع صفحه دارد. این بار به چه نسبتی به بار سطحی σ_1 روی یک طرف صفحه میانی و بار سطحی σ_2 روی طرف دیگر این صفحه تقسیم می‌شود؟



شکل مسئله ۳-۸.

۳-۹ دو بار هر یک به اندازه q و دو بار هر یک به اندازه $-q$ را طوری در چهار گوشه یک مربع قرار می‌دهیم که بارهای مخالف در دو سر یک قطر واقع شوند. نشان دهید که دو سطح هم‌پتانسیل وجود دارد که صفحه تخت هستند. از این راه میدان یک بار نقطه‌ای را که، به صورت متقارن در گوشه داخلی یک صفحه فلزی خمیده به صورت زاویه قائمه، قرار گرفته است پیدا کنید و کیفیت این میدان را با ترسیم نشان بدهید. چه آرایشهایی از صفحه‌های رسانا و بارهای نقطه‌ای از این راه قابل حل‌اند و چه آرایشهایی قابل حل نیستند؟ در مورد یک بار نقطه‌ای که روی نیمساز یک زاویه دو وجهی 120° بین دو صفحه رسانا قرار دارد چه می‌توان گفت؟

۳-۱۰ ظرفیت C خازنی که از دو پوستهٔ کروی هم‌مرکز تشکیل می‌شود چقدر است؟ شعاع داخلی پوستهٔ بیرونی a ؛ و شعاع خارجی پوستهٔ داخلی b است. جوابتان را در حالت حدی که فاصلهٔ بین رساناها، $a - b$ بسیار کوچکتر از b است امتحان کنید. در این حالت حدی فرمول ظرفیت خازن تخت موازی باید قابل استفاده باشد.

۳-۱۱ یک خازن با ظرفیت 100 pF تا 100 V باردار شده است. بعد از بارگرفتن باتری جدا می‌شود دو خازن به صورت موازی به یک خازن دیگر وصل می‌شود. اگر ولتاژ نهایی 30 V باشد ظرفیت خازن دوم چقدر است؟ چقدر انرژی به هدر رفته و چه بر سر این انرژی آمده است.

۳-۱۲ دو ورقهٔ مسطح آلومینیم‌اندود به قطر 15 cm به فاصلهٔ 4 mm از هم یک خازن تشکیل می‌دهند. ظرفیت این خازن چند pF است؟

۳-۱۳ ظرفیت بدن منزوی یک انسان را به طور تقریبی برآورد کنید. راهنمایی: این مقدار باید بین ظرفیت یک کرهٔ محاطی و یک کرهٔ محیطی باشد. در یک روز خشک زمستانی با پاکشیدن روی یک زیرانداز نایلونی به راحتی می‌توانید بدنتان را تا چند کیلوولت باردار کنید. این پدیده را می‌توانید از طول جرقه‌ای که با نزدیک کردن دستتان به دستگیرهٔ فلزی پیدا می‌شود ببینید. در چنین جرقه‌ای چقدر انرژی آزاد می‌شود؟
۳-۱۴ با دانستن اینکه ظرفیت یک قرص رسانای منزوی به شعاع a برابر است با $2a/\pi$ ، انرژی ذخیره شده در میدان چنین قرصی وقتی بار کل روی آن Q باشد، چقدر است؟ این جواب را با انرژی داخل میدان یک قرص رسانا با همان شعاع و با بار سطحی یکنواخت Q ، مقایسه کنید. (مسئلهٔ ۲-۲۷ را ببینید). کدام باید بزرگتر باشد؟ چرا؟

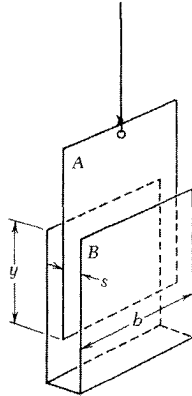
۳-۱۵ طول دو لولهٔ آلومینیمی هم‌محور 30 cm است. قطر بیرونی لولهٔ داخلی 3 cm و قطر داخلی لولهٔ بیرونی 4 cm است. وقتی این لوله‌ها به یک باتری 45 ولتی وصل شوند چقدر انرژی در میدان الکتریکی بین لوله‌ها ذخیره می‌شود؟

۳-۱۶ نیروی الکتریکی وارد بر یکی از صفحه‌های یک خازن موازی را حساب کنید. اختلاف پتانسیل بین صفحه‌ها 10 ایستاولت است و صفحه‌ها به شکل مربع به ضلع 20 cm با فاصلهٔ 3 cm از هم هستند. اگر صفحه‌ها منزوی باشند به طوری که بار تغییر نکند، چه مقدار کار خارجی می‌توان با نزدیک هم آوردن صفحه‌ها انجام داد؟ آیا این مقدار با انرژی که از ابتدا در میدان الکتریکی ذخیره شده بود برابر است؟

۳-۱۷ می‌خواهیم یک خازن خلاً کروی با شعاع کرهٔ خارجی معلوم a طراحی کنیم که بتواند بیشترین مقدار انرژی الکتریکی را در خود ذخیره کند به شرط اینکه شدت میدان الکتریکی در سطح کرهٔ داخلی بیشتر از E_0 نشود. شعاع کرهٔ رسانای داخلی، b ، چقدر باید باشد، و چه مقدار انرژی می‌تواند ذخیره شود؟

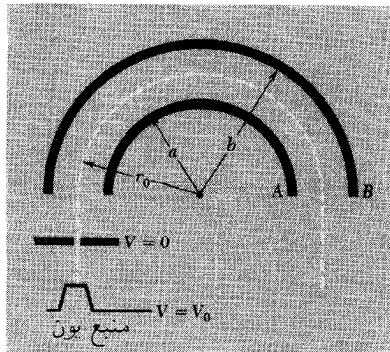
جواب: $3/4a$ و $(27/512)a^3 E_0^2$.

۱۸-۳ ورقه آلومینیمی A با رشته عایقی بین دو سطح یک ورقه آلومینیمی خمیده B مطابق شکل آویخته شده است. ورقه‌ها بارهای مخالف دارند؛ اختلاف پتانسیل برحسب ایستاولت برابر V است. این باعث می‌شود که علاوه بر وزن A ، یک نیروی F ، ورقه A را پایین بکشد. اگر بتوانیم F را اندازه بگیریم و ابعاد مختلف را بدانیم، می‌توانیم V را بفهمیم. به‌عنوان کاربردی از معادله ۲۷، رابطه‌ای به‌دست آورید که V را برحسب F و ابعاد مربوطه بیان کند.



شکل مسئله ۱۸-۳.

۱۹-۳ در دستگاهی که در شکل نشان داده شده است یونها از طریق اختلاف پتانسیل V_0 شتاب می‌گیرند و بعد وارد فضای بین دو الکترود نیم‌استوانه‌ای A و B می‌شوند. نشان دهید که یک یون مسیر نیم‌دایره‌ای به شعاع r_0 را می‌پیماید اگر پتانسیلهای الکترودهای داخلی و خارجی، به ترتیب، با مقادیرهای $(2V_0 \ln(b/r_0))$ و $(2V_0 \ln(a/r_0))$ ثابت بمانند. (فرض می‌شود طول الکترودهای استوانه‌ای A و B در راستای عمود بر نمودار، نسبت به فاصله بین الکترود خیلی زیاد است.)



شکل مسئله ۱۹-۳.

۲۰-۳ فرمول دقیق ظرفیت رسانایی به شکل کره‌وار کشیده به طول $2a$ و قطر $2b$ به صورت زیر است:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad \text{که در آن} \quad C = \frac{2a\varepsilon}{\ln\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)}$$

ابتدا تحقیق کنید که اگر $b = a$ باشد این رابطه تبدیل به رابطه صحیح ظرفیت یک کره می‌شود. حالا فرض کنید کره یک قطره آب دارای بار الکتریکی است. اگر این قطره با حجم ثابت و بار ثابت Q از شکل کروی به شکل بیضی‌وار کشیده در بیاید آیا انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی کمتر می‌شود و یا بیشتر؟ (حجم بیضی‌وار کشیده متناسب است با ab^2).

۲۱-۳ فرض کنید صفحه‌های xy ، xz و yz هر سه از فلز ساخته شده‌اند و در محل تقاطع به هم لحیم شده‌اند. یک بار نقطه‌ای Q در فاصله d از هر صفحه قرار دارد. با ترسیم این آرایش، بارهای تصویری را که برای برآوردن شرایط مرزی نیاز دارید توصیف کنید. جهت و بزرگی نیروی وارد بر Q چیست؟

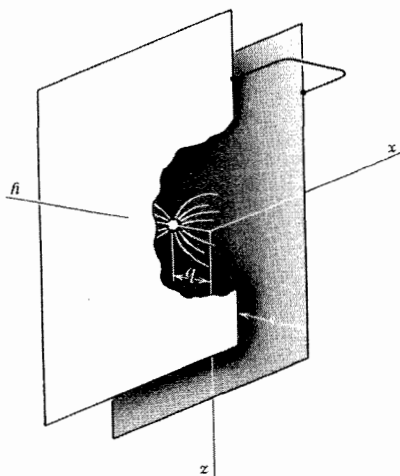
۲۲-۳ اگر مسئله ۲-۱۱ را حل کرده باشید باید بتوانید از جواب آن مسئله فرمولی را که در مسئله ۳-۲۰ برای ظرفیت کره‌وار کشیده داده شده است به دست بیاورید.

۲۳-۳ (الف) ظرفیت یک خازن را که از دو استوانه هم‌محور به شعاعهای a و b ، و به طول L ساخته شده است حساب کنید. فرض کنید $b - a \gg L$ در نتیجه تصحیح مربوط به انتهای خازن را می‌توان نادیده گرفت. صحت جواب خود را این‌طور امتحان کنید که، اگر فاصله بین استوانه‌ها یعنی $b - a$ در مقایسه با شعاع خیلی کوچک باشد، فرمول شما باید تبدیل به رابطه‌ای شود که برای خازنی با صفحه‌های موازی به دست می‌آید.

(ب) استوانه‌ای با قطر بیرونی $2r_0 = 2$ اینچ از یکی از بازوهای ترازوی شاهین‌دار طوری آویزان شده که محورش قائم است. قسمت پایینی این استوانه داخل یک استوانه دیگر هم‌محور با استوانه اول و به قطر داخلی $2r_1 = 3$ اینچ که ثابت است، قرار می‌گیرد. اگر اختلاف پتانسیل بین دو استوانه ۵ کیلوولت باشد بزرگی نیرویی را که می‌خواهد استوانه آویخته را بیشتر پایین بکشد حساب کنید.

۲۴-۳ دو صفحه موازی با سیمی به هم متصل‌اند و در نتیجه پتانسیل هر دو یکی است. فرض کنید یکی از صفحه‌ها منطبق بر صفحه xz است و دیگری منطبق بر صفحه $y = s$. فاصله s بین صفحه‌ها بسیار کوچکتر از ضلع صفحه‌هاست. یک بار نقطه‌ای Q بین صفحه‌ها در محل $y = b$ قرار می‌گیرد (شکل را ببینید). اندازه بار سطحی نهایی روی سطح داخلی هر صفحه چقدر است؟ البته بار سطحی نهایی روی سطح داخلی هر دو صفحه باید $-Q$ باشد (چرا؟) و

می‌توانیم حدس بزنیم که کسر بزرگتری از بار روی صفحه نزدیکتر یافت شود. اگر بار خیلی نزدیک به صفحه سمت چپ باشد، یعنی $s \ll b$ ، حضور صفحه سمت راست نمی‌تواند تأثیر زیادی داشته باشد. اما می‌خواهیم بدانیم بار دقیقاً چطور تقسیم می‌شود. اگر بخواهید از روش تصویر استفاده کنید خواهید دید احتیاج به یک زنجیره نامتناهی از تصاویر دارید، چیزی شبیه تصویرهایی که در آینه‌های موازی می‌بینید. محاسبه میدان حاصل در نقاط روی یکی از سطوح آسان نیست. با این همه پرسش ما را می‌شود با محاسبه بسیار ساده‌ای مبتنی بر اصل برهم‌نهی پاسخ داد. (راهنمایی: اضافه کردن یک بار Q دیگر در هر نقطه‌ای روی صفحه بار سطحی روی هر صفحه را دو برابر می‌کند. در واقع بار سطحی نهایی که با هر تعداد بار القا می‌شود مستقل از مکان این بارها روی صفحه است. اگر فقط می‌شد یک ورقه بار یکنواخت روی این صفحه داشته باشیم میدانهای الکتریکی ساده می‌شد و می‌توانستیم از قانون گاوس استفاده کنیم. از همین الهام بگیرید.)



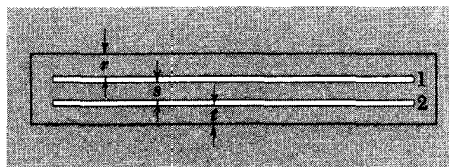
شکل مسئله ۳-۲۴.

۳-۲۵ (الف) نشان دهید مجذور اختلاف پتانسیل، $(\phi_2 - \phi_1)^2$ ، همان ابعاد نیرو را دارد. یعنی مرتبه بزرگی نیروهای الکتروستاتیکی بین اجسام تا حد زیادی از روی اختلاف پتانسیل دخیل، معین می‌شود. ابعاد فقط در نسبتها وارد می‌شوند و ممکن است شامل ضریب ثابتی مثل 4π باشند. مرتبه بزرگی نیرویی که انتظار دارید بین دو جسم با اختلاف پتانسیل ۱ ایستولت برقرار باشد چقدر است؟

(ب) اختلاف پتانسیلهایی که عملاً قابل حصول باشند، به دلیلی که مربوط به ساختار ماده

می‌شود، محدودند. بالاترین اختلاف پتانسیل الکتریکی که به دست بشر ایجاد شده است در حدود 10^7 ولت است که با یک مولد وان دوگراف که در فشار زیاد کار می‌کند به دست آمده است. (شتابدهنده‌های بیلیون ولتی با چنین اختلاف پتانسیل بزرگی کار نمی‌کنند.) به یک "مگا ولت مربع" چند پوند نیرو مربوط می‌شود؟ با این ملاحظات می‌شود فهمید چرا موتورهای الکتروستاتیکی کاربرد زیادی ندارند.

۳-۲۶ در شکل مقطع یک جعبه فلزی تخت را می‌بینید که دو صفحه تخت ۱ و ۲، هر یک به مساحت A ، در آن قرار دارند. فاصله‌های مختلف بین صفحه‌ها از هم و از بالا و پایین جعبه، که در شکل با s و t مشخص شده‌اند، در مقایسه با درازا و پهناى صفحه‌ها کوچک فرض می‌شوند، بنابراین تقریب خوبی است که از میدانهای لبه‌ای در محاسبه بار روی صفحه‌ها چشمپوشی کنیم. با این تقریب ضرایب ظرفیت C_{11} ، C_{22} ، و C_{12} را پیدا کنید. می‌توانید C_{21} را هم در بیایید تا ببینید طبق ادعای قضیه عامی که در مسئله ۳-۲۷ مطرح می‌شود با C_{12} مساوی است یا نه.



شکل مسئله ۳-۲۶.

۳-۲۷ با راهنمایی‌های زیر می‌توانید استدلال کنید که C_{12} همیشه باید با C_{21} برابر باشد. می‌دانیم که وقتی یک جزء بار dQ از پتانسیل صفر به رسانایی با پتانسیل ϕ منتقل می‌شود، یک عامل خارجی باید انرژی ϕdQ را تأمین کند. دستگاهی از دو رسانا در نظر بگیرید که در آن رساناها طوری باردار شده‌اند که پتانسیل آنها به ترتیب ϕ_{1f} و ϕ_{2f} است (f به معنی "نهایی"). اگر از حالتی که همه بارها و پتانسیلها صفرند شروع به کار کنیم، به این شرایط از راههای مختلفی می‌توانیم برسیم. دو راه بیشتر مورد توجه‌اند:

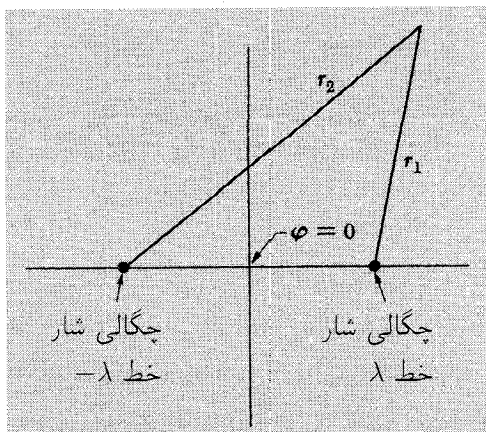
(الف) ϕ_2 را صفر نگه داریم و ϕ_1 را کم کم از صفر به ϕ_{1f} برسانیم، بعد در همان حال که ϕ_1 در ϕ_{1f} ثابت مانده، ϕ_2 را از صفر به ϕ_{2f} برسانیم.

(ب) همین کار را انجام بدهیم فقط جای ۱ و ۲ را عوض کنیم یعنی ابتدا ϕ_2 را از صفر به ϕ_{2f} برسانیم.

کار نهایی عامل خارجی را برای هر یک از دو برنامه باردار کردن محاسبه کنید. آنگاه استدلال را کامل کنید.

۳-۲۸ یک مسئله مرزی دوبعدی عادی مربوط به دو استوانهٔ مدور رسانای موازی، مثلاً دو لولهٔ

فلزی است که طولشان نامتناهی و پتانسیلشان متفاوت است. به لحاظ ریاضی این مسائل دوبعدی خیلی سربه راه‌تر از مسائل سه‌بعدی‌اند. کلید حل تمام مسائل مربوط به "دو لوله" میدان اطراف دو بار خطی موازی است که چگالی خطی آنها مساوی و مخالف هم است. همهٔ سطوح هم‌پتانسیل در این میدان استوانه‌ها مستدیرند! و همهٔ خطهای میدان هم دایره‌ای‌اند. ببینید می‌توانید این را اثبات کنید. آسانتر از همه این است که با پتانسیل کار کنید ولی باید توجه داشته باشید که در یک دستگاه دوبعدی نمی‌شود پتانسیل در بینهایت را صفر گرفت. فرض کنید پتانسیل در خط وسط فاصلهٔ بین بارهای خطی صفر باشد، یعنی در نقطهٔ مبدأ نمودار. پتانسیل در هر نقطه مجموع پتانسیلهایی است که جداگانه برای هر بار خطی حساب شده است. از اینجا فوراً می‌توانید بفهمید که پتانسیل متناسب است با $\ln(r_2/r_1)$ و بنابراین مقدار پتانسیل روی منحنی مسیر نقطه‌ای که نسبت فاصله‌هایش از دو نقطه ثابت است، مقداری ثابت خواهد بود. طرحی رسم کنید که بعضی از هم‌پتانسیلها را نشان دهد.

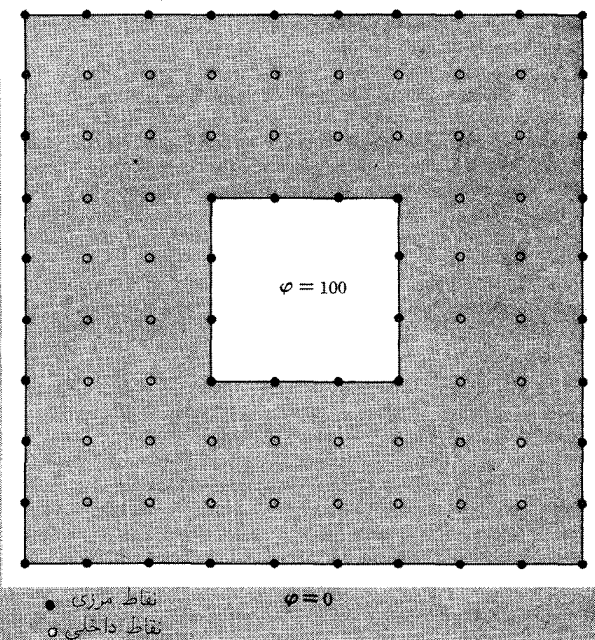
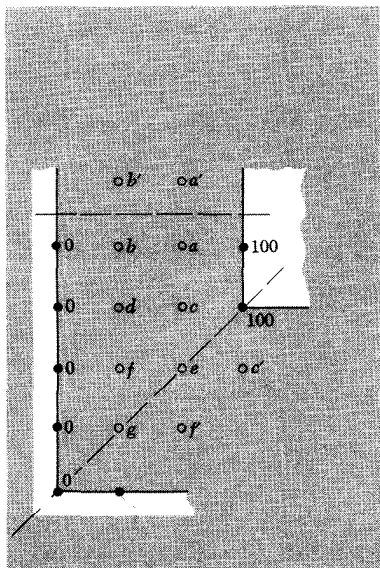


شکل مسئلهٔ ۳-۲۸.

۳-۲۹ فرض کنید $\varphi(x, y, z)$ تابعی باشد که در حوالی نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) قابل بسط به یک سری توانی است. برای مقدار φ در هر یک از شش نقطهٔ $(x_0 + \delta, y_0, z_0)$ ، $(x_0 - \delta, y_0, z_0)$ ، $(x_0, y_0 + \delta, z_0)$ ، $(x_0, y_0 - \delta, z_0)$ ، $(x_0, y_0, z_0 + \delta)$ ، $(x_0, y_0, z_0 - \delta)$ که به‌طور متقارن اطراف نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) قرار دارند، یک بسط سری تایلور بنویسید. نشان دهید که اگر φ در معادلهٔ لاپلاس صدق کند، میانگین این شش مقدار تا جملات مرتبه سوم δ برابر $\varphi(x_0, y_0, z_0)$ است.

۳-۳۰ در اینجا می‌بینیم که چگونه می‌توان معادلهٔ لاپلاس را برای مقدار مرزی معلوم به‌طور تقریبی فقط از طریق محاسبه حل کرد. این روش عبارت است از روش واهلس که در بخش ۳-۸ گفته

شد و مبتنی بر نتیجه مسئله ۳-۲۹ است. برای سادگی یک مثال دوبعدی در نظر می‌گیریم. در شکل دو مرز مربعی شکل هم‌پتانسیل، یکی داخل دیگری می‌بینیم. این شکل مقطع خازنی است که از دو لوله فلزی مربعی با اندازه‌های مختلف ساخته شده است. مسئله یافتن اعدادی است که برای هر ردیف نقطه‌های مجزا، تقریب خوبی از مقدارهای دقیق تابع پتانسیل دوبعدی $\phi(x, y)$ در آن نقطه‌ها باشند. برای این تمرین ردیف نقطه‌ها را قدری زمخت در نظر می‌گیریم که در مرزها مشکل پیش نیاید. به دلخواه، به مرز داخلی پتانسیل صد و به مرز خارجی پتانسیل صفر نسبت می‌دهیم. همه نقطه‌های روی این مرزها همین پتانسیل را خواهند داشت. در نقطه‌های داخل با هر مقداری می‌توانیم شروع کنیم اما با کمی تأمل عاقلانه می‌توانیم جلوی اتلاف وقت را بگیریم. می‌دانیم که مقادیر صحیح بین 0° و 100° هستند و انتظار داریم نقطه‌های نزدیکتر به مرز داخلی



شکل مسئله ۳-۳۰ به جای مقدار پتانسیل در یک نقطه داخلی، $1/4$ ضربدر مجموع مقادیر در چهار نقطه همسایه را قرار می‌دهیم: $1/4(100 + a + d + e)$ $c \rightarrow$ $a' = a$; $c' = c$, $b' = b$ و $f' = f$ برای

شروع کار مقادیر زیر پیشنهاد می‌شود:

$$a = 50 \quad e = 50$$

$$b = 25 \quad f = 25$$

$$c = 50 \quad g = 25$$

$$d = 25$$

پتانسیل بیشتری داشته باشند تا نقطه‌های نزدیکتر به مرز خارجی. بعضی از مقادیر مناسب برای شروع، در شکل پیشنهاد شده‌اند. بدیهی است که باید از موهبت تقارن آرایش بهره بگیرید: فقط محاسبهٔ هفت مقدار متفاوت درونی لازم است. حالا فقط باید به صورتی سازمان یافته این هفت نقطهٔ شبکهٔ داخلی را پشت سر بگذارید، به این ترتیب که مقدار در هر نقطهٔ داخلی را با مقدار میانگین در چهار نقطهٔ همسایه عوض کنید. کار را تا آنجا ادامه بدهید که تغییرات لازم در جاروب یک ردیف، به طور موجهی کوچک باشند. در این مسئله قرار می‌گذاریم که هر وقت تغییر در مقدار مطلق در یک دور روبش، بزرگتر از یک واحد نباشد، دست نگه داریم. واهلش مقادیر تا رسیدن به یک توزیع واقعاً بدون تغییر بستگی تام به پدیدهٔ فیزیکی پخش دارد. اگر با مقداری بسیار زیاد در یک نقطه، کار را شروع کنیم، این مقدار به سمت نزدیکترین همسایه‌ها، و بعد نزدیکترین همسایه‌های بعدی و ... "گسترده می‌شود" تا جایی که تراکم برطرف شود. مقادیر نهایی یک ردیف را به دست بیاورید، و مسیر تقریبی دو هم‌پتانسیل را برای $\phi = 25$ و $\phi = 50$ در تابع پیوستهٔ حقیقی $\phi(x, y)$ رسم کنید.

۳-۳۱ روش واهلش با محاسبه‌های ماشینی به خوبی سازگار است. برنامه‌ای برای بحث در مسئلهٔ مرزی مربع‌های هم‌مرکز بنویسید که شبکهٔ ریزتری داشته باشد، مثلاً شبکه‌ای که نصف این فضا را داشته باشد و تعداد نقطه‌های آن چهار برابر باشد. شاید فکر خوبی باشد که از حل شبکهٔ درشت استفاده کنیم و مقادیر آغازی را به واهلش در شبکهٔ ریزتر نسبت بدهیم.

۳-۳۲ خازنی از دو پوستهٔ کروی هم‌مرکز تشکیل می‌شود. پوستهٔ داخلی به شعاع a را رسانای ۱ و پوستهٔ خارجی به شعاع b را رسانای ۲ می‌نامیم. برای این دستگاه دو رسانا، C_{11} ، C_{22} و C_{12} را پیدا کنید.

جواب: $C_{11} = ab/(b - a)$ ؛ $C_{22} = b^2/(b - a)$ ؛ $C_{12} = -ab/(b - a)$.

جریانهای الکتریکی

۱-۴ جریان الکتریکی و چگالی جریان

جریان الکتریکی عبارت است از بار در حال حرکت. حاملهای بار می‌توانند ذرات فیزیکی مثل الکترون و پروتون باشند که ممکن است به چیزهای بزرگتری مثل اتم یا مولکول پیوسته باشند. در اینجا با سرشت حاملهای بارکاری نداریم بلکه فقط ترازوی بار الکتریکی بر اثر حرکت حاملها مورد نظر ماست. جریان الکتریکی در یک سیم مقدار باری است که از یک نقطه سیم در واحد زمان می‌گذرد. در دستگاه CGS یکای جریان esu/s است. در دستگاه SI یکای جریان ثانیه/کولن یا آمپر (amp) است. جریان یک آمپر معادل جریان $10^9 \times 2998$ esu/s است، که برابر است با $10^{18} \times 624$ بار بنیادی الکترونی در ثانیه.

آنچه به حساب می‌آید، بار کل منتقل شده با در نظر داشتن علامت بار است. بار منفی که به سمت شرق می‌رود معادل است با بار مثبتی که به سمت غرب حرکت می‌کند. آبی که از شیلنگ خارج می‌شود، بار عظیمی را — حدود 3×10^{23} الکترون در هر گرم آب — منتقل می‌کند. اما چون تعداد مساوی الکترون و پروتون همراه هم حرکت می‌کنند (هر مولکول آب ده تا از هر کدام دارد) جریان الکتریکی صفر است. از سوی دیگر، اگر یک نخ نایلونی را دارای بار منفی کنید و آن را بی‌وقفه در یک لوله نارسانا بکشید، یک جریان الکتریکی در جهت مخالف نخ ایجاد می‌شود.

ما از جریانی صحبت کردیم که در یک مسیر خوش تعریف، مثل یک سیم، حرکت می‌کند. اگر جریان پایا باشد — یعنی با زمان تغییر نکند — باید در تمام نقطه‌های درون سیم یکسان باشد، درست مثل یک وضع پایای عبور و مرور، که در آن تعداد خودروهایی که در هر ساعت از نقطه‌های مختلف یک جاده بدون انشعاب می‌گذرند، ثابت است.

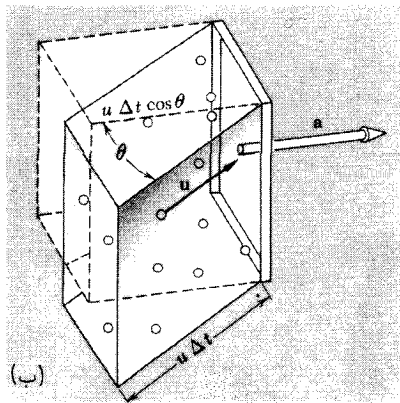
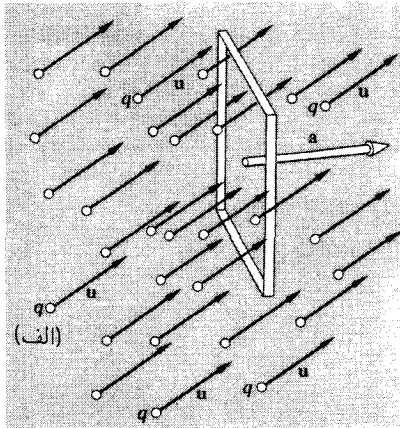
نوع کلی‌تر جریان، یک ترازد بار، متضمن حرکت حاملهای بار در فضای سه‌بعدی است. برای توصیف این جریان ما به مفهوم چگالی جریان نیاز داریم. باید مقادیر میانگین را در نظر بگیریم چون حاملهای بار، ذرات متمایزند. ما باید همان‌طور که در تعریف چگالی بار ρ دیدیم، فرض کنیم که مقیاس فاصله ما طوری است که در هر ناحیه کوچکی که می‌خواهیم میانگین بگیریم، تعداد زیادی ذره از هر قماشه‌ای که با آن سروکار داریم، موجود است.

اول وضعیت خاصی را در نظر بگیرید که به‌طور متوسط n ذره در cm^3 همگی با یک بردار سرعت \mathbf{u} حرکت می‌کنند و حامل بار یکسان q هستند. قاب کوچکی به مساحت \mathbf{a} را در نظر بگیرید که در جهت معینی ثابت قرار گرفته باشد (شکل ۱-۴ الف). در فاصله زمانی Δt چند ذره از این قاب می‌گذرد؟ اگر Δt از لحظه‌ای که در شکل ۱-۴ الف و ب نشان داده شده است شروع بشود، ذراتی که قرار است در Δt ثانیه بعدی از قاب بگذرند دقیقاً همانهایی هستند که حالا درون منشور مایل شکل ۱-۴ ب قرار دارند. سطح قاعده این منشور سطح قاب است و طول یال آن $u\Delta t$ است که مسافتی است که هر ذره در زمان Δt طی می‌کند. ذرات بیرون این منشور یا به دریاچه نمی‌خورند یا به آن نمی‌رسند. حجم منشور عبارت است از حاصلضرب قاعده در ارتفاع یا $au\Delta t \cos\theta$ که می‌توان آن را به صورت $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}\Delta t$ نوشت. به‌طور میانگین، تعداد ذرات در چنین حجمی برابر خواهد بود با $n\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}\Delta t$. بنابراین آهنگ میانگین عبور بار از این قاب، یعنی جریان عبوری از این قاب، که آن را I_a می‌نامیم برابر است با:

$$I_a = \frac{q(n\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}\Delta t)}{\Delta t} = nq\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \quad (1)$$

فرض کنید در میان این جمعیت انواع زیادی از ذرات داریم که بار q ، بردار سرعت \mathbf{u} و یا هر دو برای آنها متفاوت است. هر ذره سهمی در جریان دارد. فرض کنید هر نوع ذره را با یک زیرنویس k مشخص کنیم. هر k امین نوع ذره که به اندازه q_k بار دارد، با بردار سرعت \mathbf{u}_k حرکت می‌کند و میانگین چگالی فراوانی آن در هر سانتی‌متر مکعب n_k است. به این ترتیب جریان حاصل در قاب برابر است با:

$$I_a = n_1 q_1 \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_1 + n_2 q_2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_2 + \dots = \mathbf{a} \cdot \sum_k n_k q_k \mathbf{u}_k \quad (2)$$



شکل ۴-۱ (الف) مهاجرت دسته جمعی ذرات بارداری که همه با سرعت یکسان u پیش می‌روند. مساحت قاب a است. ذراتی که در Δt ثانیه بعدی از قاب خواهند گذشت آنهایی هستند که حالا درون منشور مایل (ب) اند. قاعده منشور a و ارتفاع آن $u \Delta t \cos \theta$ است، در نتیجه حجم آن می‌شود $au \Delta t \cos \theta$ یا $a \cdot u \Delta t$.

در سمت راست حاصلضرب نرده‌ای بردار a و یک بردار کمیت را داریم که می‌خواهیم اسمش را بگذاریم چگالی جریان J :

$$J = \sum_k n_k q_k u_k \quad (3)$$

اندازه چگالی جریان J را می‌شود برحسب $esu/s \text{ cm}^2$ بیان کرد. در دستگاه SI چگالی جریان برحسب آمپر بر مترمربع (A/m^2) بیان می‌شود.^۱

۱. بعضی اوقات با بیان چگالی برحسب A/cm^2 مخالفت می‌شود. در صورتی که هیچ اشتباهی در کار نیست. معنی این واحد کاملاً روشن است و همان است که واحدهای A و cm^2 بیان می‌کنند. (مدتها پیش از اینکه دستگاه SI رسماً متداول شود، دو سه نسل از مهندسان برق به خوبی با واحد A/in^2 کار می‌کردند!)

بگذارید سهم یک نوع از حاملهای بار، مثلاً الکترون، را که ممکن است سرعتهای مختلفی داشته باشد، در چگالی جریان بررسی کنیم. در یک رسانای معمولی، الکترونها توزیع سرعت کم و بیش کاتوره‌ای دارند که جهت و اندازه سرعتها با هم خیلی فرق می‌کند. فرض کنیم N_e تعداد کل الکترونها، با هر سرعتی، در واحد حجم باشد. می‌توانیم الکترونها را به گروههای متعددی تقسیم کنیم که در هر گروه سرعت و جهت الکترونها تقریباً یکی باشد. در این صورت سرعت میانگین همه الکترونها، مثل هر کمیت میانگین دیگر، این طور به دست می‌آید که در هر گروه تعداد الکترونها را در سرعت آن گروه ضرب کنیم، و بعد روی این حاصلضربها برای تمام گروهها جمع‌بندی کنیم و این مجموع را بر تعداد کل الکترونها تقسیم کنیم. در این صورت داریم:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{N_e} \sum_k n_k \mathbf{u}_k \quad (4)$$

علامت خطی که بالای کمیت گذاشته می‌شود، مثل $\bar{\mathbf{u}}$ ، به معنی میانگین توزیع است. با مقایسه معادله‌های ۴ و ۳ می‌بینیم که سهم الکترونها در چگالی جریان را می‌شود فقط برحسب سرعت میانگین الکترون نوشت. با توجه به اینکه برای الکترون $q = -e$ و با استفاده از زیرنویس e برای نشان دادن اینکه همه کمیتها مربوط به همین نوع حامل بارند، می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{J}_e = -eN_e\bar{\mathbf{u}}_e \quad (5)$$

ممکن است بدیهی به نظر برسد، اما ما موضوع را قدم به قدم بررسی کرده‌ایم تا روشن کنیم که جریان عبوری از قاب فقط بستگی به سرعت میانگین حاملها دارد که غالباً از لحاظ اندازه کسر کوچکی از سرعتهای کاتوره‌ای است.

۲-۴ جریانهای پایا و پایستگی بار

جریان I که از هر سطح S می‌گذرد صرفاً انتگرال سطحی زیر است:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (6)$$

وقتی صحبت از جریان پایا یا جریان مانا می‌کنیم که بردار چگالی جریان \mathbf{J} همه جا در طول زمان ثابت باشد. جریان مانا باید تابع قانون پایستگی بار باشد. ناحیه‌ای از فضا را در نظر بگیرید که با سطح بادکنک مانند S به طور کامل احاطه شده باشد. انتگرال سطحی \mathbf{J} روی کل S آنگاه

خروج بار از ناحیه بسته را می‌دهد. حال اگر بار دائماً از یک حجم ثابت خارج، یا به آن وارد، شود چگالی بار در داخل حجم باید بینهایت زیاد شود، مگر اینکه در آنجا مدام باری برای جبران این چگالی خلق شود. اما خلق بار چیزی است که هرگز اتفاق نمی‌افتد. بنابراین، برای توزیع باری که حقیقتاً مستقل از زمان باشد، انتگرال سطحی \mathbf{J} روی هر سطح بسته باید صفر باشد. این کاملاً معادل آن است که بگوییم در هر نقطه از فضا:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad (7)$$

برای پذیرفتن این هم‌ارزی، قضیه گاوس را به یاد بیاورید و تعریف بنیادی دیورژانس برحسب انتگرال سطحی روی سطح کوچکی که ناحیه مورد نظر را احاطه می‌کند. می‌توانیم عبارتی کلی‌تر از معادله ۷ به دست بیاوریم. فرض کنید جریان دائمی نباشد، \mathbf{J} همان‌طور که تابع x, y, z است تابع t هم باشد. چون $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ آهنگ لحظه‌ای خارج شدن بار از حجم احاطه شده، و $\int_V \rho dv$ بار کل در داخل حجم در هر لحظه است، داریم:

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv \quad (8)$$

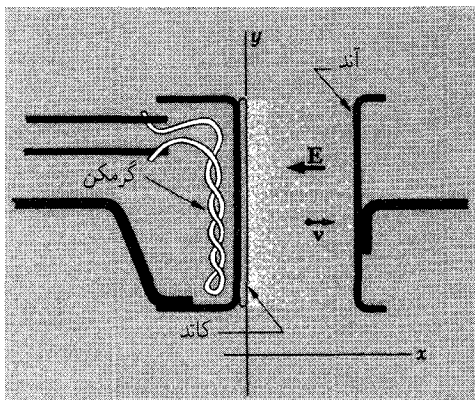
اگر بگذاریم حجم مورد نظر اطراف نقطه (x, y, z) جمع شود رابطه ۸ چنین می‌شود:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{توزیع بار مستقل از زمان}) \quad (9)$$

مشتق زمانی چگالی بار ρ به صورت مشتق جزئی نوشته می‌شود چون ρ معمولاً علاوه بر زمان تابع مختصات مکانی هم هست. معادله‌های ۸ و ۹ پایستگی بار را بیان می‌کنند. هیچ باری نمی‌تواند از مکانی خارج شود بی آنکه مقدار بار موجود در آنجا را کاهش دهد.

یک مثال مفید برای توزیع جریان پیوسته، اتفاقی است که در دیود تخت، یک لامپ خلاء دو الکترودی، پیش می‌آید: یکی از الکترودها، یعنی کاتد، با ماده‌ای پوشانده شده که وقتی گرم شود الکترون فراوانی گسیل می‌کند. الکتروود دیگر، یعنی آند، فقط یک صفحه فلزی است. آند با یک باتری، نسبت به کاتد، در پتانسیل مثبت نگه داشته می‌شود. الکترونها از این کاتد داغ با سرعت

۱. اگر گذار از معادله ۸ و ۹ روشن نباشد به تعریف بنیادی دیورژانس در فصل ۲ رجوع کنید. وقتی حجم جمع می‌شود، می‌توانیم سرانجام در سمت راست ρ را بیرون انتگرال حجمی داشته باشیم. انتگرال حجمی باید در یک لحظه از زمان گرفته شود. بنابراین مشتق زمانی آن بستگی به اختلاف بین انتگرال حجمی در زمان t و زمان $t + dt$ دارد. تنها اختلاف موجود، ناشی از تغییر ρ در آنجاست چون مرزهای حجم سر جای خود باقی مانده است.



شکل ۲-۴ یک دیود خلا با کاتد و آند تخت موازی.

بسیار کم خارج می‌شوند و بعد، چون دارای بار منفی هستند، بر اثر میدان الکتریکی بین کاتد و آند، به سمت آند مثبت شتاب می‌گیرند. در فضای بین کاتد و آند، از این الکترونها متحرک، جریان الکتریکی پدید می‌آید. این مدار با جریان الکترونها در سیمهای خارجی، احتمالاً از طریق حرکت یونها در باتری، یا چیزی از این قبیل، کامل می‌شود که ما فعلاً کاری با آن نداریم. در این دیود، چگالی محلی بار در هر ناحیه، صرفاً $-ne$ است که n چگالی کل الکترونها برحسب الکترون بر سانتی متر مکعب است. البته چگالی محلی جریان، \mathbf{J} ، برابر با $\rho\mathbf{v}$ است که \mathbf{v} سرعت الکترونها در این ناحیه است. در دیود تخت موازی می‌توانیم فرض کنیم که \mathbf{J} مؤلفه y یا z ندارد (شکل ۲-۴). اگر شرایط ثابت باشد، نتیجه می‌شود که J_x باید مستقل از x باشد چون اگر داشته باشیم $\text{div}\mathbf{J} = 0$ ، مطابق معادله ۷، اگر $J_y = J_z = 0$ باشد باید $\partial J_x / \partial x$ صفر شود. اگر یک جریان مداوم الکترون فقط در جهت محور x برقرار باشد، در هر ثانیه تعداد ثابتی الکترون باید از صفحه‌ای که بین آند و کاتد قرار دارد بگذرد. نتیجه می‌گیریم که ρv ثابت است. اما می‌بینیم که v ثابت نیست، v با x تغییر می‌کند چون الکترونها بر اثر میدان شتاب می‌گیرند. بنابراین ρ هم ثابت نیست. بلکه چگالی بار منفی نزدیک کاتد زیاد است و نزدیک آند کم؛ درست مثل چگالی اتومبیلها در یک بزرگراه که در حوالی راه‌اندان چگالی اتومبیل زیاد است و جایی که سرعت اتومبیلها زیاد است چگالی کم می‌شود.

۳-۴ رسانندگی الکترون و قانون اهم

راههای زیادی برای حرکت دادن بار وجود دارد، از جمله روشی که می‌توانیم اسمش را بگذاریم "ترابری دستی" حاملهای بار. در مولد الکتروستاتیکی وان دوگراف (مسئله ۳-۴) به یک کمر بند عایق بار سطحی داده می‌شود که این کمر بند بار را برای جابه‌جایی به یک الکتروود دیگر می‌رساند، مثل

پله برقی که افراد را جابه‌جا می‌کند. به این ترتیب یک جریان کامل به‌خوبی برقرار می‌شود. در جو، قطره‌های آب باردار که به خاطر وزش در حال سقوط هستند جزئی از مدار جریان الکتریکی زمین را تشکیل می‌دهند. در این بخش به یک عامل عامتر انتقال بار، یعنی نیرویی که میدان الکتریکی بر حاملهای بار وارد می‌کند، خواهیم پرداخت. یک میدان الکتریکی \mathbf{E} حاملهای بار مثبت را در یک جهت و حاملهای بار منفی را در جهت مخالف می‌راند. اگر یک نوع از این حاملها یا هر دو نوع بتوانند حرکت کنند یک جریان الکتریکی در جهت \mathbf{E} حاصل می‌شود. در بیشتر مواد و برای گستره وسیعی از مقادیر شدت میدان الکتریکی، به این نتیجه می‌رسیم که چگالی جریان متناسب با شدت میدان الکتریکی منشأ آن است. رابطه خطی بین چگالی جریان و میدان به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (۱۰)$$

ضریب σ رسانندگی ماده نامیده می‌شود. مقدار آن بستگی به جنس ماده مورد نظر دارد؛ برای رساناهای فلزی این ضریب بسیار بزرگ است و برای عایقهای خوب این ضریب خیلی کوچک است. به‌علاوه این ضریب ممکن است به حالت فیزیکی ماده — مثلاً دمای آن — هم مربوط باشد. اما اگر این مشخصات معلوم باشند σ ارتباطی به اندازه \mathbf{E} ندارد. اگر شدت میدان را دو برابر کنید و همه چیزهای دیگر را ثابت نگه دارید، چگالی جریان دو برابر می‌شود. در معادله ۱۰، σ یک کمیت زنده‌ای است و در نتیجه جهت \mathbf{J} همیشه همان جهت \mathbf{E} است. مطمئناً این همان چیزی است که از ماده‌ای که هیچ جهت ممتاز "درونی" ندارد، انتظار داریم. موادی وجود دارند که در آنها رسانندگی الکتریکی، خود بستگی به زاویه بین میدان مؤثر \mathbf{E} و یک محور درونی در ماده دارد. یک نمونه‌اش بلور گرافیت است که در مقیاس اتمی ساختار لایه‌لایه دارد. مثال دیگری از این مواد در مسئله ۴-۷ مطرح می‌شود. در چنین مواردی ممکن است \mathbf{J} در جهت \mathbf{E} نباشد. اما باز هم بین مؤلفه‌های \mathbf{J} و مؤلفه‌های \mathbf{E} رابطه‌های خطی برقرار است، رابطه‌هایی که از معادله ۱۰ به‌دست می‌آیند و در آنها σ به جای کمیت زنده‌ای یک کمیت تانسوری است.^۱ از حالا به بعد ما فقط مواد همسانگرد را در نظر می‌گیریم که در آنها رسانندگی الکتریکی در همه جهتها یکسان است.

۱. کلی‌ترین رابطه خطی بین دو بردار \mathbf{J} و \mathbf{E} به‌صورت زیر بیان می‌شود. به جای سه معادله هم‌ارز با معادله ۱۰، یعنی $J_x = \sigma E_x$ ، $J_y = \sigma E_y$ ، و $J_z = \sigma E_z$ ، باید داشته باشیم $J_x = \sigma_{xx} E_x + \sigma_{xy} E_y + \sigma_{xz} E_z$ ، $J_y = \sigma_{yx} E_x + \sigma_{yy} E_y + \sigma_{yz} E_z$ و $J_z = \sigma_{zx} E_x + \sigma_{zy} E_y + \sigma_{zz} E_z$.^۹ ضریب σ_{xx} و σ_{yy} و σ_{zz} یک تانسور تشکیل می‌دهند. (در این مورد به اقتضای تقارن معلوم می‌شود که $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ و $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ و $\sigma_{zx} = \sigma_{xz}$). به‌علاوه با انتخاب سمتگیری مناسب محورهای x, y, z ، همه ضرایب بجز σ_{xx} ، σ_{yy} و σ_{zz} را می‌شود صفر کرد.

معادله ۱۰ بیان قانون اهم است. این یک قانون تجربی و نتیجه کل آزمایش است نه قضیه‌ای که در همه جا پیروی از آن لازم باشد. در واقع، وقتی میدان الکتریکی بسیار قوی باشد، قانون اهم در مورد هر ماده به خصوص محکوم به شکست است. و خواهیم دید مواد جالب و قابل استفاده‌ای وجود دارند که در میدانهای نسبتاً ضعیف هم رفتارشان "غیراهمی" است. با این همه واقعیت قابل توجه این است که در گستره‌ای وسیع، برای اکثریت عمده مواد، چگالی جریان متناسب با میدان الکتریکی است. بعداً در این فصل توضیح می‌دهیم که چرا باید این طور باشد. اما فعلاً با فرض برقراری معادله ۱۰، می‌خواهیم نتیجه‌های آن را به کار بگیریم. آنچه مورد نظر ماست جریان کل I است که از سیم یا رسانایی به هر شکل که لبه‌ها یا ابتدا و انتهای آن معین است، می‌گذرد. هم‌چنین می‌خواهیم اختلاف پتانسیل بین ابتدا و انتهای رسانا را پیدا کنیم که به جای $\phi_2 - \phi_1$ یا ϕ_{12} آن را با علامت V (برای ولتاژ) نشان خواهیم داد. اگر \mathbf{J} همه جا داخل رسانا متناسب با \mathbf{E} باشد، I باید حتماً متناسب با V باشد. چون \mathbf{I} انتگرال \mathbf{J} روی سطح مقطع رساناست در حالی که V انتگرال خطی \mathbf{E} روی مسیری داخل رسانا از یک انتها به انتهای دیگر است. بنابراین رابطه بین V و I بیان دیگری از قانون اهم است که به صورت زیر خواهیم نوشت:

$$V = RI \quad (11)$$

ثابت R مقاومت رسانا بین دو انتهاست. R بستگی به اندازه و شکل رسانا و ضریب رسانندگی ماده رسانا، σ ، دارد. ساده‌ترین مثال یک میله فلزی به سطح مقطع A است که طول بین دو سر آن L باشد. جریان دائم I از یک سر این میله وارد و از سر دیگر آن خارج می‌شود (شکل ۳-۴). البته باید رساناهایی در کار باشند که جریان را به میله وارد و از آن خارج کنند. ما فرض می‌کنیم دو انتهای میله به این رسانا متصل باشد. داخل میله چگالی جریان عبارت است از

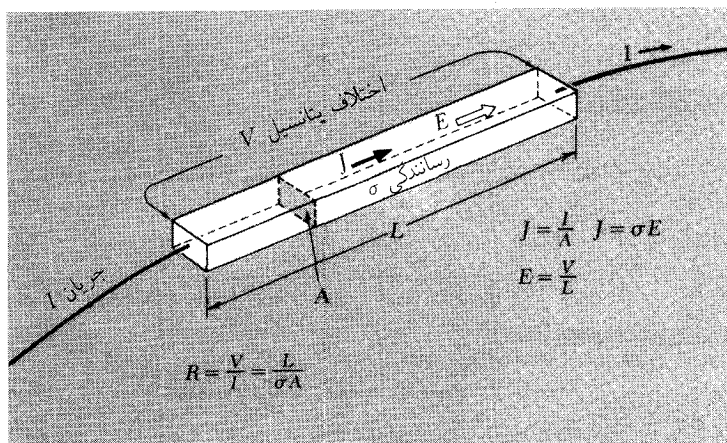
$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{I}}{A} \quad (12)$$

و شدت میدان الکتریکی مقدار زیر است

$$E = \frac{V}{L} \quad (13)$$

مقاومت R در معادله ۱۱ برابر است با V/I . با استفاده از معادله‌های ۱۰، ۱۲ و ۱۳ به آسانی به دست می‌آوریم

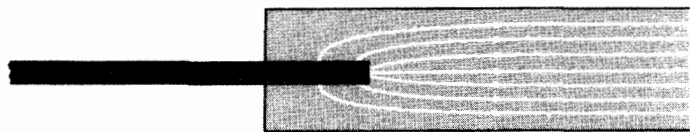
$$R = \frac{V}{I} = \frac{LE}{AJ} = \frac{L}{A\sigma} \quad (14)$$



شکل ۳-۴ مقاومت رسانایی به طول L ، با سطح مقطع یکنواخت A و رسانندگی σ .

برای رسیدن به این فرمول ساده چند فرض ضمنی کرده‌ایم. ابتدا، فرض کردیم که چگالی جریان در مقطع میله یکنواخت است. برای اینکه ببینیم چرا باید این طور باشد، فرض کنید J واقعاً در یک طرف میله بیشتر از طرف دیگر باشد. در این صورت E هم باید در همان طرف بیشتر باشد. اما به این ترتیب انتگرال خطی E از یک سر میله تا سر دیگر باید در مسیر یک طرف بزرگتر از همین انتگرال در مسیری در طرف دیگر باشد، و چنین چیزی در مورد یک میدان الکتروستاتیکی نمی‌تواند صدق کند. فرض دیگر این بود که J اندازه و جهت یکنواخت خود را در سرتاسر میله حفظ کند. تحقق این فرض بستگی دارد به رساناهای خارجی که جریان را به میله وارد یا از آن خارج می‌کنند، و اینکه این رساناها چطور به میله متصل‌اند. شکل ۴-۴ الف را با شکل ۴-۴ ب مقایسه کنید. فرض کنید که پایانه در شکل ۴-۴ ب از فلزی با رسانندگی خیلی بیشتر از رسانندگی میله ساخته شده است. به این ترتیب صفحه‌انتهای میله یک سطح هم‌پتانسیل خواهد بود که یک دستگاه جریان ایجاد می‌کند که معادله ۱۴ برای آن دقیقاً صادق است. اما همه‌ی چیزی که می‌توانیم درباره‌ی این "اثر پایانه‌ها" به طور کلی بگوییم این است که اگر پهنای میله در مقایسه با طول آن کوچک باشد، معادله ۱۴ R را با تقریب خوبی به دست خواهد داد.

فرض سوم این است که میله با یک محیط از لحاظ الکتریکی نارسانا احاطه شده است. بدون این فرض نمی‌توانیم یک مسیر جریان منزوی با پایانه‌ها را حتی تعریف کنیم، و درباره‌ی جریان I و مقاومت R حرفی بزنیم. به عبارت دیگر تفاوت زیاد رسانندگی عایق‌های خوبی مثل هوا، و رساناهاست که استفاده از سیم را، آن طور که ما می‌خواهیم، ممکن می‌کند. فرض کنید میله‌ی رسانای شکل ۳-۴ را به شکل دیگری مثلاً به شکل ۴-۵ خم کنیم. چون این میله در یک محیط نارسانا

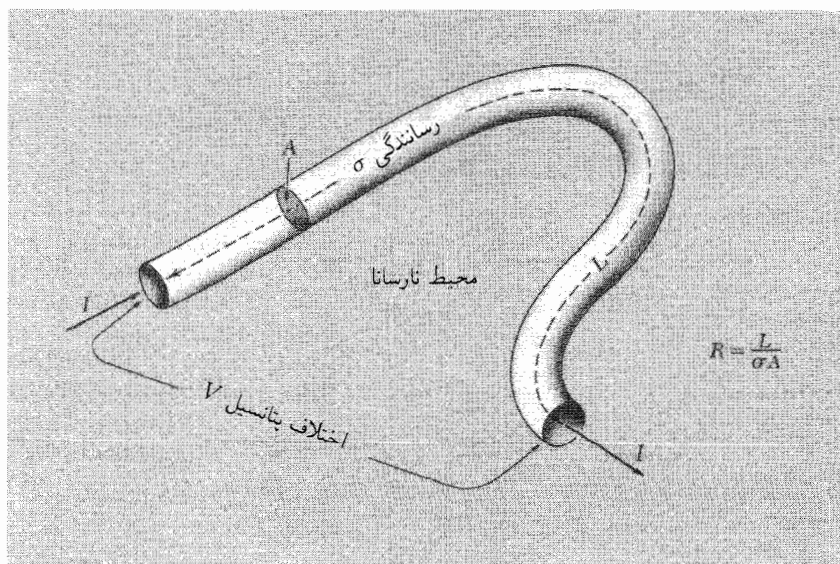


(الف)

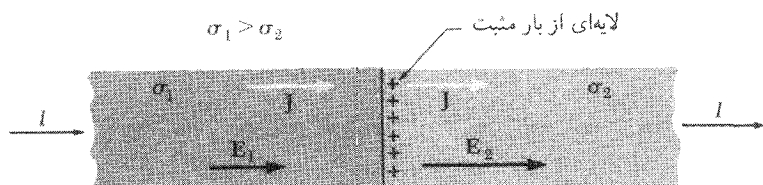


(ب)

شکل ۴-۴ راههای مختلف ورود جریان I به میله رسانا. در (الف) جریان قبل از اینکه چگالی J یکنواخت شود، تقسیم می‌شود. در (ب) اگر رسانندگی رسانای خارجی بیشتر از میله باشد انتهای میله یک سطح هم‌پتانسیل است و چگالی جریان از همان ابتدا یکنواخت است. برای رساناهای نازک طویل مثل سیمهای معمولی این اختلاف قابل چشمپوشی است.



شکل ۴-۵ تا آنجا که رساناهای ما در یک محیط نارسانا (هوا، روغن، خلا...) قرار دارند، مقاومت R بین دو انتهای رسانا بستگی به شکل آن ندارد و فقط بستگی به طول و سطح مقطع رسانا دارد.



شکل ۴-۶ وقتی جریان از این رسانای مرکب می‌گذرد، یک لایهٔ بار ایستا در فصل مشترک بین دو ماده ایجاد می‌شود، تا جهش لازم در مقدار میدان الکتریکی E را تأمین کند. در این مثال $\sigma_2 < \sigma_1$ ، در نتیجه E_2 باید بزرگتر از E_1 باشد.

قرار گرفته که جریانی به آن نشت نمی‌کند، مسئله‌ای که برای این شکل مطرح می‌شود از هر نظر عملاً همان مسئلهٔ شکل ۴-۳ است که قبلاً حل کرده‌ایم. اگر L را طول سیم در نظر بگیریم، معادلهٔ ۱۴ در مورد یک سیم خمیده هم، مثل یک میلهٔ راست، به خوبی صادق است.

در ناحیه‌ای که رسانندگی σ ثابت است، شرط $\text{div} \mathbf{J} = 0$ (معادلهٔ ۷) همراه با معادلهٔ ۱۰ ایجاب می‌کند که داشته باشیم $\text{div} \mathbf{E} = 0$. این یعنی اینکه چگالی بار در آن ناحیه صفر است. از سوی دیگر، اگر σ از جایی به جای دیگر فرق کند، شارش دائم جریان ممکن است مستلزم حضور بار ایستا در داخل رسانا باشد. شکل ۴-۶ یک مثال ساده را نشان می‌دهد، میله‌ای از دو جنس با رسانندگیهای متفاوت σ_1 و σ_2 ساخته شده است. چگالی جریان \mathbf{J} باید در دو طرف فصل مشترک یکسان باشد؛ در غیر این صورت بار همین‌طور آنجا جمع می‌شود. نتیجه می‌گیریم که میدان الکتریکی \mathbf{E} باید در دو ناحیه متفاوت باشد و در فصل مشترک یک تغییر ناگهانی داشته باشد. همان‌طور که قانون گاوس به ما می‌گوید، این ناپیوستگی در \mathbf{E} باید بازتاب حضور یک لایهٔ بار ایستا در فصل مشترک باشد. در مسئلهٔ ۴-۵ این مثال عمیقتر بررسی می‌شود.

همان‌طور که در معادلهٔ ۱۰ تعریف شد، رسانندگی عبارت است از چگالی جریان تقسیم بر شدت میدان. یکای CGS چگالی جریان $\text{esu/s} \cdot \text{cm}^2$ است. یکای شدت میدان الکتریکی در دستگاه CGS را می‌توان به صورت esu/cm^2 بیان کرد. بنابراین یکای رسانندگی σ در دستگاه CGS فقط s^{-1} است.

در بیان رابطهٔ بین چگالی جریان و میدان الکتریکی به جای رسانندگی σ می‌توانستیم از معکوس آن مقاومت ویژهٔ ρ استفاده کنیم:

$$\mathbf{J} = \left(\frac{1}{\rho} \right) \mathbf{E} \quad (15)$$

رسم شده که ρ و σ علاوه بر اینکه نماد چگالی بار حجمی و چگالی بار سطحی در بعضی از معادله‌های این کتاب هستند، علامت مقاومت ویژه و رسانندگی هم باشند. در بقیه این فصل همیشه ρ نماد مقاومت ویژه و σ نماد رسانندگی است. معادله ۱۴ برحسب مقاومت ویژه می‌شود:

$$R = \frac{\rho L}{A} \quad (۱۶)$$

یکای مقاومت ویژه در دستگاه CGS فقط ثانیه است. این ارتباط مقاومت و زمان یک تفسیر طبیعی دارد که در بخش ۴-۱۱ توضیح داده می‌شود. یکاهای متناظر در دستگاه SI با استفاده از یکای مقاومت، اهم، بیان می‌شود. تعریف اهم از معادله ۱۱ به صورت یک ولت بر آمپر به دست می‌آید. اگر R برحسب اهم باشد، از معادله ۱۶ معلوم می‌شود که ρ باید ابعاد اهم \times طول داشته باشد. بنابراین یکای رسمی ρ در دستگاه SI اهم-متر خواهد بود. اما می‌توان از یکای دیگری برای طول استفاده کرد که معنایش هم کاملاً روشن است. در واقع یکایی که هم در فیزیک و هم در صنعت رسانش الکتریکی، بیشتر متداول است، اهم-سانتی‌متر است ($\Omega\text{-cm}$). اگر مقاومت ویژه را با اهم-سانتی‌متر بسنجیم، یکای متناظر برای رسانندگی الکتریکی به صورت $\Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$

جدول ۴-۱ مقاومت ویژه و عکس آن، رسانندگی، برای چند ماده

ماده	مقاومت ویژه ρ	رسانندگی σ
مس خالص، ۲۷۳ K	$1.56 \times 10^{-6} \Omega \text{ cm}$	$6.4 \times 10^5 (\Omega \text{ cm})^{-1}$
	$1.73 \times 10^{-18} \text{ s}$	$5.8 \times 10^{17} (\text{s}^{-1})$
مس خالص، ۳۷۳ K	$2.24 \times 10^{-6} \Omega \text{ cm}$	$4.5 \times 10^5 (\Omega \text{ cm})^{-1}$
	$2.47 \times 10^{-18} \text{ s}$	$4.0 \times 10^{17} (\text{s}^{-1})$
ژرمانیم خالص، ۲۷۳ K	$200 \Omega \text{ cm}$	$(0.005) (\Omega \text{ cm})^{-1}$
	$2.2 \times 10^{-10} \text{ s}$	$4.5 \times 10^9 (\text{s}^{-1})$
ژرمانیم خالص، ۵۰۰ K	$0.12 \Omega \text{ cm}$	$8.3 (\Omega \text{ cm})^{-1}$
	$1.3 \times 10^{-12} \text{ s}$	$7.7 \times 10^{12} (\text{s}^{-1})$
آب خالص، ۲۹۱ K	$2.5 \times 10^2 \Omega \text{ cm}$	$4 \times 10^{-8} (\Omega \text{ cm})^{-1}$
	$2.8 \times 10^{-5} \text{ s}$	$3.6 \times 10^4 (\text{s}^{-1})$
آب دریا (بسته به شوری فرق می‌کند)	$25 \Omega \text{ cm}$	$0.04 (\Omega \text{ cm})^{-1}$
	$2.8 \times 10^{-11} \text{ s}$	$3.6 \times 10^{10} (\text{s}^{-1})$

توجه: $1.1 \times 10^{-10} \text{ s} = 100 \Omega \text{ cm} = 1 \text{ m}$.

یا $(\Omega\text{-cm})^{-1}$ نوشته می‌شود و "اهم-سانتی متر معکوس" نامیده می‌شود. باید تأکید کنیم که معادله‌های ۱۰ تا ۱۶ برای هر دستگاه یکاهای خودسازگار که انتخاب کنیم صادق است. در جدول ۴-۱ رسانندگی و مقاومت ویژه چند ماده با واحدهای مختلف را برای مقایسه آورده‌ایم. ضریب تبدیل اصلی هم داده شده است.

۴-۴ فیزیک رسانش الکتریکی

برای توصیف رسانش الکتریکی اول باید دربارهٔ آنها و مولکولها صحبت کنیم. یادتان هست که یک اتم خنثی، یعنی اتمی که همانقدر که الکترون دارد در هسته‌اش هم پروتون دارد، دقیقاً خنثی است (بخش ۱-۳). نیروی کلی که یک میدان الکتریکی بر چنین جسمی وارد می‌کند دقیقاً صفر است. و حتی اگر اتم خنثی به نحوی به حرکت واداشته شود، این یک جریان الکتریکی نخواهد بود. در مورد مولکول خنثی هم همین حرفها را می‌شود زد. ماده‌ای که تنها از مولکولهای خنثی ساخته شده است باید رسانندگی الکتریکی‌اش صفر باشد. در اینجا باید نکته‌ای را قید کنیم: ما در حال حاضر با جریان الکتریکی دائم، یعنی جریان مستقیم سروکار داریم نه جریان متناوب. یک میدان الکتریکی متناوب می‌تواند باعث تغییر شکل تناوبی مولکول شود و این جابه‌جایی بار الکتریکی، یک جریان الکتریکی متناوب واقعی خواهد بود. ما در فصل ۱۰ به این موضوع برمی‌گردیم. برای داشتن جریان دائم احتیاج به حاملهای بار متحرک، یا یونها، داریم. این یونها باید قبل از اعمال میدان الکتریکی در ماده حضور داشته باشند چون میدانهای الکتریکی مورد نظر ما آنقدر قوی نیستند که بتوانند الکترون از مولکول بکنند و یون درست کنند. بنابراین فیزیک رسانش الکتریکی دو سؤال محوری دارد: در واحد حجم ماده چند یون وجود دارد، و این یونها در یک میدان الکتریکی چگونه حرکت می‌کنند؟

در آب خالص در دمای اتاق، در هر لحظه معین تقریباً از هر یک میلیارد مولکول H_2O دو مولکول به یون منفی OH^- و یون مثبت H^+ تجزیه می‌شوند. (در واقع بهتر است بگوییم یون مثبت OH_2^+ ، یعنی یک پروتون که به یک مولکول آب چسبیده باشد.) به این ترتیب در هر یک سانتی‌متر مکعب آب در حدود 6×10^{13} یون منفی و به همین اندازه یون مثبت پیدا می‌شود. حرکت این یونها در میدان الکتریکی اعمال شده، مقدار رسانندگی مربوط به آب خالص در جدول ۴-۱ را توجیه می‌کند. اضافه شدن ماده‌ای مثل سدیم کلرید که مولکولهایش در آب به راحتی تجزیه می‌شوند، تعداد یونها را خیلی زیاده‌تر می‌کند، به همین خاطر است که رسانندگی الکتریکی

۱. ممکن است دانشجویان شیمی یادشان باشد که غلظت یون هیدروژن در آب خالص متناظر با مقدار pH برابر 10^{-7} است یعنی غلظت، 10^{-7} mol/l است. این معادل است با 10^{-17} mol/cm³. یک مول از هر ماده‌ای یعنی $10^{23} \times 6.02$ تا از آن ماده. عدد 6×10^{13} در بالا از اینجا آمده است.

آب دریا تقریباً یک میلیون برابر رسانندگی آب خالص است. آب دریا در هر cm^3 چیزی حدود 10^{20} یون دارد که عمدتاً یونهای Na^+ و Cl^- هستند.

در گازی مثل نیتروژن یا اکسیژن در دمای معمولی اصلاً یونی وجود ندارد مگر اینکه تابش یونندهای مثل نور فرابنفش، پرتو x ، یا تابش هسته‌ای بر این گاز اثر کند. برای مثال، نور فرابنفش می‌تواند یک الکترون از یک مولکول نیتروژن خارج کند و یک یون مولکولی N_2^+ با یک بار مثبت e بر جای بگذارد. الکترونی که به این ترتیب آزاد می‌شود یک یون منفی است. می‌تواند همان‌طور آزاد بماند یا اینکه به‌عنوان یک الکترون "اضافی" به مولکولی بچسبد و یک یون مولکولی منفی درست کند. مولکول اکسیژن اشتباهی زیادی برای یک الکترون اضافی دارد؛ وقتی هوا یونیده می‌شود، یونهای معمولی N_2^+ و O_2^- هستند. در هر صورت، رسانندگی گاز بستگی به تعداد یونهای موجود در هر لحظه دارد، که این تعداد یون به‌نوبه خود به شدت تابش یوننده و شاید بعضی چیزهای دیگر بستگی دارد. بنابراین جدولی برای رسانندگی گاز نداریم. دقیق‌تر گفته باشیم، رسانندگی نیتروژن خالص که از هر تابش یونندهای در امان باشد، صفر خواهد بود.^۱

با معلوم بودن غلظت یونهای مثبت و منفی در یک ماده، چطور می‌شود رسانندگی σ در معادله ۱۰ را تعیین کرد؟ اول گازی را در نظر بگیریم که اندکی یونیده است. مثلاً فرض می‌کنیم چگالی گاز برحسب مولکول بر سانتی‌متر مکعب، مثل چگالی هوای اتاق باشد یعنی در حدود 10^{19} مولکول بر سانتی‌متر مکعب، در میان این مولکولهای خنثی تک و توک یونهای مثبت و منفی پیدا می‌شوند. فرض کنید در واحد حجم N یون مثبت موجود باشد که جرم هر کدام M_+ و بارشان e است. همین مقدار هم یون منفی داشته باشیم که جرم هر کدام M_- و بار هر کدام $-e$ است. تعداد یونها در واحد حجم، $2N$ ، بسیار کوچکتر از تعداد مولکولهای خنثی است. وقتی یک یون به چیزی برخورد کند، آن چیز تقریباً همیشه یک مولکول خنثی است تا یک یون دیگر. به ندرت یک یون مثبت به یک یون منفی برخورد می‌کند و با آن ترکیب می‌شود و یک مولکول خنثی تولید کند. اگر فرایند دیگری برای تولید مداوم یون در کار نباشد، چنین باز ترکیبی^۲ دائماً تعداد یونها را کم خواهد کرد. اما در هر صورت آهنگ تغییر N آنقدر کند است که در اینجا قابل چشمپوشی است.

اکنون صحنه را، در مقیاس مولکولی، قبل از اعمال میدان الکتریکی مجسم کنید. مولکولها، و همین‌طور یونها، با سرعتهای کاتوره‌ای به نسبت دما، این طرف و آن طرف پرسه می‌زنند. بیشتر

۱. اما انرژی گرمایی چه؟ آیا گرما نمی‌تواند باعث یونش یک مولکول بشود؟ واقع امر این است که انرژی لازم برای یونش یک مولکول نیتروژن یعنی کندن یک الکترون از آن، صدها برابر انرژی گرمایی متوسط یک مولکول در دمای 300 K است. تمام جو زمین را که بگردید حتی یک یون هم پیدا نمی‌کنید که این‌گونه تولید شده باشد!

۲. البته منظور ما از "باز ترکیب" این دو یون این نیست که آنها در اصل با هم بوده‌اند. برخورد نزدیک یک یون مثبت با یک یون منفی، بیشتر چیزی شبیه جاذبه الکتروستاتیکی است. به هر حال، این اثر به‌طور کلی اهمیتی ندارد چون تعداد یونها در واحد حجم خیلی خیلی کمتر از تعداد مولکولهای خنثی است.

فضا خالی است و میانگین فاصله بین یک مولکول با نزدیکترین همسایه اش حدود ده برابر قطر مولکولی است. مسافت آزاد میانگین یک مولکول، یعنی میانگین فاصله‌ای که یک مولکول قبل از برخورد به مولکول دیگر طی می‌کند، خیلی بیشتر، شاید 10^{-5} cm، یا چند صد برابر قطر مولکولی است. مولکول یا یون در این گاز ۹۹٫۹ درصد از وقتش را مثل یک ذره آزاد می‌گذراند. اگر می‌شد یک یون معین را در لحظه مشخصی مثلاً $t = 0$ مشاهده کنیم، می‌دیدم با سرعتی مثل u در فضا حرکت می‌کند. بعد چه می‌شود؟ یون با سرعت ثابت همین‌طور در مسیر مستقیم می‌رود تا اینکه، دیر یا زود، به مولکولی نزدیک بشود، آنقدر نزدیک که نیروهای کوتاه‌برد قوی وارد کار شوند. در این برخورد انرژی جنبشی کل و تکانه کل دو جسم، مولکول و یون، پایسته می‌ماند ولی هم‌جهت و هم‌اندازه سرعت یون، تقریباً به‌طور ناگهانی، تغییر می‌کند و به مقدار u' می‌رسد. بعد با این سرعت جدید همین‌طور آزادانه می‌رود تا وقتی که برخورد دیگری سرعتش را تبدیل به u'' کند، و ... بعد از حداکثر چند تا از این برخوردها، یون دیگر برایش فرقی نمی‌کند در کدام جهت پیش برود. "یادش رفته" که در لحظه $t = 0$ در کدام جهت حرکت می‌کرده است. به عبارت دیگر اگر 10000 یون را که به‌صورت افقی به سمت جنوب می‌روند انتخاب و آنها را به مدت τ ثانیه تعقیب کنیم، جهت‌های نهایی سرعت آنها بی‌طرفانه روی یک کره توزیع می‌شود. تعداد برخوردهای لازم برای از میان رفتن حافظه جهت می‌مکن است برحسب اینکه تغییر تکانه در برخورد زیاد یا کم باشد کم و زیاد شود، و این هم به سرشت برهم‌کنش بستگی دارد. حالت حدی برخورد دو کره سخت کشسان است که بر اثر همان یک برخورد یک جهت جدید کاملاً کاتوره‌ای تولید می‌شود. لازم نیست زیاد نگران این اختلافها باشیم. موضوع این است که سرشت برخوردها هر چه باشد، یک بازه زمانی τ مشخصه هر دستگاه وجود دارد که با گذشت τ ثانیه ارتباط بین جهت سرعت اولیه و جهت سرعت نهایی یک یون در آن دستگاه، به‌طور کامل از بین می‌رود.^۱ این زمان مشخصه τ بستگی به یون و به حال و هوای محیط دارد، مسلم است که هر چه تعداد برخوردها بیشتر باشد این زمان کوتاهتر است چون در فاصله بین برخوردها اتفاق دیگری در گاز ما نمی‌افتد. اکنون آماده‌ایم که یک میدان الکتریکی یکنواخت E بر دستگاه اعمال کنیم. اگر فرض کنیم که با همان یک برخورد اول حافظه جهت به کلی از بین می‌رود بحث ما خیلی ساده‌تر می‌شود، یعنی همان‌طور که در مورد کره‌های سخت گفتیم. نتیجه اصلی ما واقعاً مستقل از این فرض خواهد بود. بلافاصله پس از یک برخورد، یون در یک جهت کاتوره‌ای شروع به حرکت می‌کند. سرعت بلافاصله پس از یک برخورد را با u^c نشان می‌دهیم. نیروی وارد بر یون، Ee ، دائماً به یون، تکانه منتقل می‌کند. پس از گذشت

۱. می‌شود با ارائه یک اندازه کمی از ارتباط بین جهت‌های ابتدایی و نهایی، تعریف دقیقی برای τ در یک دستگاه عام پیدا کرد. این یک مسئله آماری است مثل به‌دست آوردن اندازه‌ای برای ارتباط بین وزن موشها هنگام تولد و وزنشان هنگام بلوغ. اما بحث ما هیچ نیازی به یک تعریف کمی از τ ندارد.

زمان t ، یون به اندازه Eet تکانه اضافی از میدان گرفته است که این مقدار به صورت برداری به تکانه اولیه $M\mathbf{u}^c$ اضافه می‌شود. حالا تکانه یون برابر است با $M\mathbf{u}^c + E\mathbf{e}t$. اگر افزایش تکانه در مقایسه با $M\mathbf{u}^c$ کوچک باشد، باید سرعت تغییر زیادی نکرده باشد، در نتیجه می‌توانیم انتظار داشته باشیم برخورد بعدی همان موقعی اتفاق بیفتد که اگر میدان الکتریکی در کار نبود، اتفاق می‌افتاد. به عبارت دیگر اگر میدان الکتریکی زیاد قوی نباشد، میانگین زمان بین برخوردها که با \bar{t} نشان می‌دهیم مستقل از میدان \mathbf{E} است.

تکانه‌ای که از میدان گرفته می‌شود همیشه برداری در همان جهت است اما در هر برخورد این جهت از دست می‌رود چون جهت حرکت پس از برخورد هیچ ارتباطی به جهت قبلی ندارد و کاتوره‌ای است.

در یک لحظه معین تکانه میانگین همه یونهای مثبت چیست؟ پاسخ این پرسش، عجیب ساده است اگر به این شکل به مسئله نگاه کنیم: در لحظه مورد نظر، فرض کنید زمان را متوقف می‌کنیم و از هر یون می‌پرسیم از آخرین برخوردش چه مدت می‌گذرد. فرض کنید از یون مثبت شماره ۱ پاسخ t_1 بگیریم. به این ترتیب این یون باید علاوه بر تکانه $M\mathbf{u}^c$ که از آخرین برخوردش داشته است، یک تکانه eEt_1 هم گفته باشد، تکانه میانگین همه N یون مثبت برابر می‌شود با

$$M\bar{\mathbf{u}}_+ = \frac{1}{N} \sum_j (M\mathbf{u}_j^c + eEt_j) \quad (17)$$

در اینجا \mathbf{u}_j^c سرعت زامین یون بعد از آخرین برخوردش است. این سرعتهای \mathbf{u}_j^c جهتشان کاملاً کاتوره‌ای است و بنابراین سهمشان در میانگین صفر است. بخش دوم صرفاً $E\mathbf{e}$ برابر میانگین t_j است، یعنی میانگین زمان از آخرین برخورد. این مقدار باید برابر با میانگین زمان تا برخورد بعدی باشد، و هر دو باید با میانگین زمان بین برخوردها یعنی \bar{t} یکی باشند.^۱ نتیجه می‌گیریم که سرعت میانگین یک یون مثبت در حضور میدان الکتریکی دائمی \mathbf{E} برابر است با

$$\bar{\mathbf{u}}_+ = \frac{E\mathbf{e}\bar{t}_+}{M_+} \quad (18)$$

۱. ممکن است فکر کنید میانگین زمان برخوردها باید مساوی با مجموع میانگین زمان سیری شده از آخرین برخورد و میانگین زمان تا برخورد آینده است. اگر برخوردها در فاصله‌های زمانی کاملاً منظم اتفاق می‌افتادند، این فکر درست بود، اما این طور نیست. برخوردها رویدادهای مستقل کاتوره‌ای‌اند، و به این دلیل عبارت بالا صحیح است هر چند در نظر اول ممکن است متناقض بنماید. درباره‌اش فکر کنید. این موضوع در نتیجه اصلی ما تأثیری ندارد، اما اگر مسئله را بشکافید بصیرت آماری‌تان بیشتر می‌شود. (راه‌نمایی: اگر یک برخورد اثری در احتمال وجود برخورد دیگر نداشته باشد که مستقل بودن یعنی این — مهم نیست از یک زمان دلخواه شروع کنید یا از زمان یک برخورد.)

این نشان می‌دهد که سرعت میانگین یک حامل بار با نیروی وارد بر آن متناسب است. اگر فقط سرعت میانگین را در نظر بگیریم، مثل این است که محیط با نیرویی متناسب با سرعت در برابر حرکت مقاومت نشان می‌دهد. این مقاومت از نوع مزاحمت اصطکاکی است که شما اگر بخواید شربت غلیظی را با قاشق به هم بزنید حس می‌کنید، یک مزاحم "چسبناک". هر وقت حاملهای بار این طور رفتار کنند می‌توانیم انتظار چیزی مثل قانون اهم را داشته باشیم.

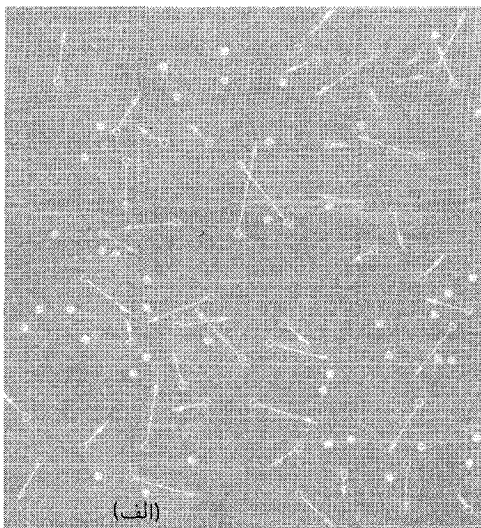
در معادله ۱۸ نوشته‌ایم \bar{t}_+ چون میانگین زمان برخوردها برای یونهای مثبت و منفی ممکن است به کلی فرق کند. یونهای منفی در جهت مخالف سرعت می‌گیرند، اما چون بارشان منفی است سهمشان در چگالی جریان \bar{J} با سهم یونهای مثبت جمع می‌شود. حالا معادله هم‌ارز با معادله ۴-۵، که شامل دو نوع یون هم باشد به صورت زیر است

$$\mathbf{J} = Ne \left(\frac{e\mathbf{E}\bar{t}_+}{M_+} \right) - Ne \left(\frac{-e\mathbf{E}\bar{t}_-}{M_-} \right) = Ne^2 \left(\frac{\bar{t}_+}{M_+} + \frac{\bar{t}_-}{M_-} \right) \mathbf{E} \quad (19)$$

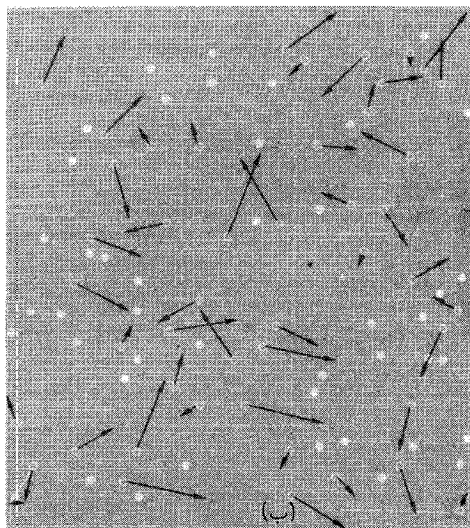
نظریه ما پیشگویی می‌کند که دستگاه تابع قانون اهم خواهد بود، چون معادله ۱۹ یک رابطه خطی بین \mathbf{J} و \mathbf{E} بیان می‌کند و دیگر کمیتها که ویژگیهای محیط هستند ثابت‌اند. معادله ۱۹ را با معادله ۱۰ مقایسه کنید. ضریب ثابت $Ne^2(\bar{t}_+/M_+ + \bar{t}_-/M_-)$ در نقش σ یعنی رسانندگی، ظاهر می‌شود.

ما درباره این دستگاه چند فرض به خصوص در نظر گرفتیم، اما اگر درست نگاه کنیم می‌بینیم که این فرضها تا جایی که رابطه خطی بین \mathbf{E} و \mathbf{J} مدنظر باشد، اساسی نیستند. اگر میدان \mathbf{E} زیاد قوی نباشد، هر دستگاهی با چگالی ثابت حاملهای بار آزاد که در آن حرکت حاملها بر اثر برخوردها یا دیگر برهم‌کنشهای داخل دستگاه مرتباً "کاتوره‌ای می‌شود" باید تابع قانون اهم باشد. نسبت \mathbf{J} به \mathbf{E} که رسانندگی σ محیط است، متناسب با تعداد حاملهای بار و زمان مشخصه τ یعنی زمان از دست رفتن ارتباط جهتی خواهد بود. تنها از طریق همین کمیت اخیر است که همه جزئیات پیچیده برخوردها وارد مسئله می‌شود. پرداختن یک نظریه دقیق برای رسانندگی هر دستگاه که تعداد حاملهای بارش معلوم باشد، موکول می‌شود به پرداختن نظریه‌ای برای زمان τ . در مثال به خصوص ما، به جای این کمیت از \bar{t} استفاده شد و یک نتیجه کاملاً معین برای رسانندگی σ پیش‌بینی شد. با معرفی کمیت کلّی تر τ و با امکان متفاوت بودن تعداد حاملهای مثبت و منفی، می‌توانیم نظریه‌مان را به صورت زیر خلاصه کنیم:

$$\sigma \approx e^2 \left(\frac{N_+\tau_+}{M_+} + \frac{N_-\tau_-}{M_-} \right) \quad (20)$$



(الف)



(ب)

شکل ۷-۴ (الف) توزیع کاتوره‌ای الکترونها و یونهای مثبت که تعداد هر کدام تقریباً مساوی است سرعت الکترونها با بردار نشان داده شده و در شکل (الف) کاملاً کاتوره‌ای است. در شکل (ب) رانشی به سمت راست که با بردار سرعت \rightarrow نشان داده می‌شود وارد شده است. این سرعت به هریک از سرعتهای اصلی الکترونها اضافه می‌شود، همان‌طور که در مورد الکترون گوشهٔ پایین سمت چپ نشان داده شده است.

از علامت \approx استفاده کردیم تا یادمان بماند که تعریف دقیقی از T نداده‌ایم. اما این کار شدنی است. برای تأکید بر این واقعیت که رسانش الکتریکی معمولاً فقط رانش مختصری به حرکت کاتوره‌ای حاملهای بار اضافه می‌کند، شکل ۷-۴ را منظرهٔ ماکروسکوپیکی دستگاه مورد بحث خود در نظر می‌گیریم. یونهای مثبت با نقطه‌های سفید و یونهای منفی با دایره نشان داده شده‌اند. فرض می‌کنیم یونهای منفی الکترون هستند و بنابراین، به خاطر جرم اندکشان، آنقدر بیشتر از یونهای مثبت تحرک دارند که ما می‌توانیم حرکت یونهای مثبت را روی هم‌رفته نادیده بگیریم. در شکل ۷-۴ الف توزیع ذرات و توزیع سرعت الکترونها کاملاً کاتوره‌ای است. برای رسم نمودار، مکان و علامت هر ذره از روی جدولی با مقادیر کاتوره‌ای تعیین شده است. بردارهای سرعت الکترونها هم از روی یک توزیع کاتوره‌ای ترسیم شده است، چیزی نظیر توزیع "ماکسولی" سرعتهای مولکولی در گاز. در شکل ۷-۴ ب از همان مکانها استفاده شده است ولی همهٔ سرعتها نمو اندکی به سمت راست دارند. یعنی، شکل ۷-۴ ب نشاندهندهٔ محیط یونیده‌ای است که در آن یک جریان خالص بار منفی به سمت راست، و معادل آن یک جریان مثبت به سمت چپ وجود دارد. شکل ۷-۴ الف وضعیتی را نشان می‌دهد که میانگین جریان صفر است.

بدیهی است که نباید انتظار داشته باشیم میانگین واقعی سرعتهای ۴۶ الکترون در شکل ۷-۴ الف

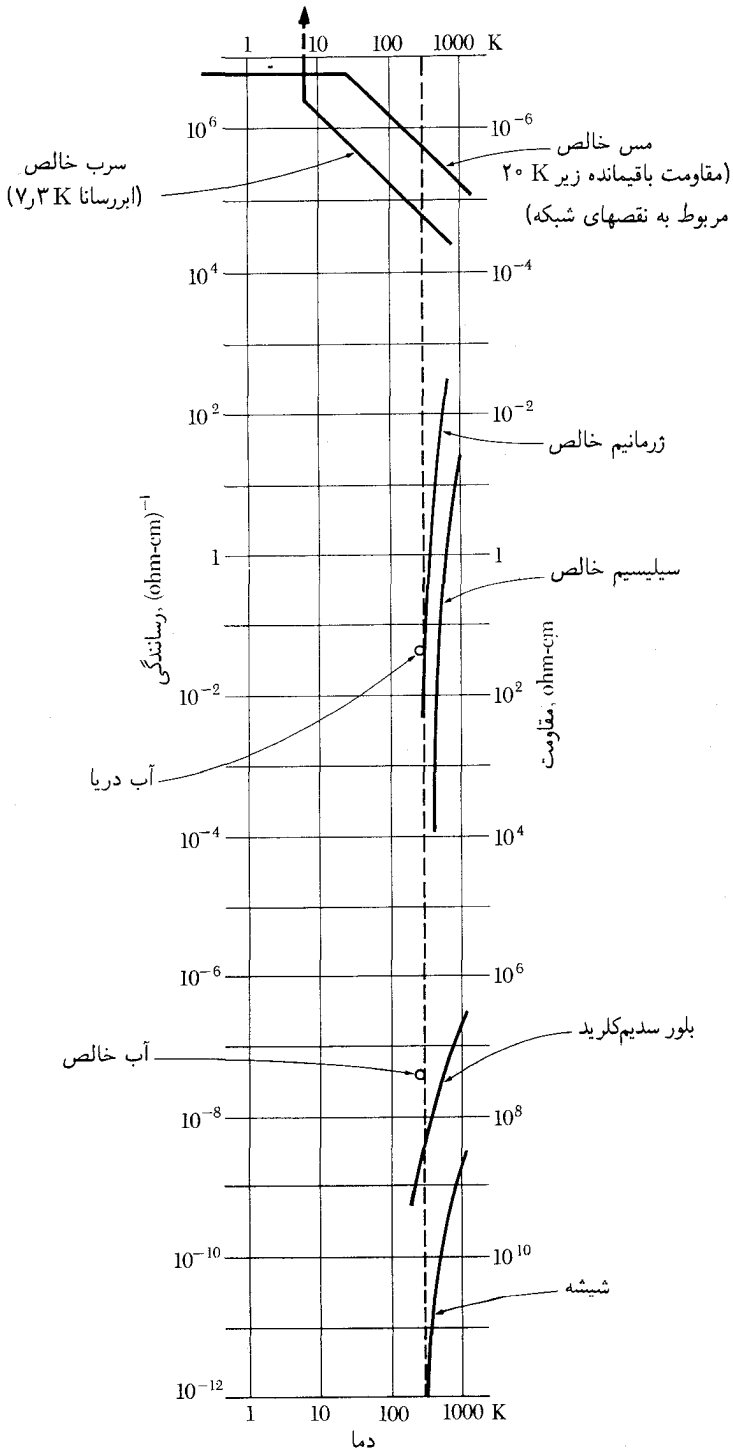
دقیقاً صفر باشد، چون این سرعتها به لحاظ آماری کمیت‌هایی مستقل‌اند. یک الکترون تأثیری بر رفتار الکترون دیگر ندارد. در واقع با نبود یک میدان هدایت‌کننده، یک جریان الکتریکی افت‌وخیزدار کاتوره‌ای وجود خواهد داشت که صرفاً نتیجه افت‌وخیزهای آماری در جمع برداری سرعت‌های الکترونهاست. این جریان خودجوش افت‌وخیزدار قابل اندازه‌گیری است. این جریان یک چشمه نوفه در تمام مدارهای الکتریکی است، و اغلب حد نهایی حساسیت قطعات را در آشکارسازی سیگنال‌های الکتریکی ضعیف تعیین می‌کند.

با توجه به این مطالب، موادی را که رسانندگی الکتریکی آنها برحسب دما در شکل ۴-۸ رسم شده است در نظر می‌گیریم. شیشه در دمای اتاق عایق خوبی است. در ساختار داخلی شیشه یونها کم نیستند، اما عملاً سر جایشان بی حرکت قفل شده‌اند. وقتی شیشه گرم شود، قدری از سختی ساختارش کم می‌شود، یونها می‌توانند هر چند وقت یکبار در جهتی که میدان الکتریکی هلشان می‌دهد حرکتی بکنند. در بلور سدیم کلرید هم همین اتفاق می‌افتد. یونها، که در این مورد Na^+ و Cl^- هستند، گاهی با پرسشهای کوتاه حرکت می‌کنند.^۱ آهنگ میانگین پیشرفت آنها متناسب با شدت میدان الکتریکی در دمای مورد نظر است، بنابراین از قانون اهم پیروی می‌کند. در این دو ماده اثر اصلی افزایش دما، افزایش تحرک یونهاست نه افزایش تعداد آنها.

سیلیسیم و ژرمانیم نیم‌رسانا نامیده می‌شوند. رسانندگی آنها هم، به دلیلی دیگر، به شدت تابع دماست. در دمای صفر مطلق این مواد کاملاً عایق‌اند، هیچ یونی ندارند و فقط اتم‌های خنثی دارند. اثر انرژی گرمایی این است که با آزاد کردن الکترون از بعضی اتمها، حامل‌های بار تولید می‌کند. افزایش زیاد رسانندگی در حدود دمای اتاق و بالاتر بازتاب افزایش تعداد الکترونهای متحرک است، نه افزایش تحرک یک الکترون منفرد. نیم‌رساناها را در بخش ۴-۶ مفصلتر بررسی خواهیم کرد.

فلزات، از جمله مس و سرب که در شکل ۴-۸ مثال زده‌ایم، رساناهای بهتری هستند. رسانندگی آنها عموماً با افزایش دما کاهش می‌یابد. در واقع در بیشتر قسمت‌های ناحیه‌ای که رسم شده است، رسانندگی فلز خالصی مثل مس یا سرب با دمای مطلق نسبت عکس دارد. این را می‌توان از شیب 45° منحنی لگاریتمی دید. اگر این رفتار وقتی مس و سرب تا دمای صفر مطلق سرد می‌شدند، ادامه می‌یافت می‌توانستیم انتظار داشته باشیم رسانندگی بینهایت زیاد شود. در دمای 10°K ، 0°K ، دمایی که اکنون به آسانی در آزمایشگاه قابل حصول است، می‌توان انتظار داشت رسانندگی هر فاز تا 3000000 برابر رسانندگی در دمای اتاق برسد. متأسفانه در مورد مس این انتظار برآورده نمی‌شود. ضمن سرد کردن مس وقتی دمای آن به حد 2°K می‌رسد، رسانندگی آن دیگر زیادتر نمی‌شود و ثابت می‌ماند. در بخش بعد سعی می‌کنیم این مطلب را توضیح بدهیم. در مورد سرب، که در حالت عادی رسانایی‌اش ضعیفتر از مس است، اتفاق خیلی عجیبتری می‌افتد. وقتی یک

۱. این امر متضمن نوعی اختلال در آرایه کاملاً منظم یونها در شکل ۱-۷ است.



شکل ۸-۴ رسانندگی الکتریکی بعضی مواد. توجه کنید که هم رسانندگی و هم دمای مطلق در مقیاس لگاریتمی نوشته شده‌اند.

سیم سربی را سرد می‌کنیم، پایتتر از دمای ۷۲ K مقاومت آن ناگهان به کلی از بین می‌رود. این فلز ابررسانا می‌شود. یعنی اگر یک جریان الکتریکی یک بار در مداری از سیم سربی برقرار شود، به‌طور نامحدود (حتی سالیان سال!) ادامه خواهد یافت بدون اینکه هیچ میدان الکتریکی‌ای برای هدایت آن در کار باشد. می‌توان گفت رسانندگی بینهایت است، هر چند که رسانندگی در حالت ابررسانایی مفهوم خود را از دست می‌دهد. سیم سربی وقتی تا دمای بالاتر از ۷۲ K گرم می‌شود. مقاومت معمولی‌اش را به همان سرعتی که از دست داده بود دوباره به دست می‌آورد. بسیاری از فلزات، بیش از ۲۰ عنصر و تعداد بیشماری از ترکیبات فلزی می‌توانند ابررسانا شوند. دمای گذار از حالت رسانندگی معمولی به ابررسانندگی بستگی به ماده دارد. بالاترین دمای گذار که تا کنون مشاهده شده ۲۱ K است.

مدل ما در مورد یونهایی که در میدان الکتریکی شتاب می‌گیرند و حرکتشان مدام بر اثر برخوردها سد می‌شود، در اینجا به کلی بی‌اعتبار می‌شود. در حالت ابررسانندگی همهٔ موانع سر راه حرکت الکترونها به نحوی از میان برداشته می‌شوند. تازه، خیلی آثار مغناطیسی عجیب و مرموز در ابررساناها ظاهر می‌شود. در این مرحله از بحث نمی‌توانیم پدیدهٔ ابررسانندگی را به‌طور کامل توصیف کنیم. در پیوست ج توضیحات بیشتری آمده است که بعد از مطالعهٔ بخش مغناطیس قابل درک خواهد بود.

از ابررسانندگی که بگذریم، همهٔ این مواد از قانون اهم پیروی می‌کنند. با دو برابر کردن میدان الکتریکی، اگر بقیهٔ شرایط از جمله دمای محیط ثابت بمانند، شدت جریان هم دو برابر می‌شود. دست کم اگر میدان بسیار قوی نباشد، این ادعا صادق است. به آسانی می‌شود دید که قانون اهم در مورد گازی که به‌طور جزئی یونیده باشد دیگر صادق نیست. فرض کنید میدان الکتریکی چنان قوی است که سرعت اضافی‌ای که الکترون بین برخوردها به دست می‌آورد با سرعت گرمایی آن قابل مقایسه است. در این صورت زمان بین برخوردها کوتاهتر از زمان برخوردها قبل از اعمال میدان است. این اثری است که در نظریهٔ ما گنجانده نشده است و باعث می‌شود که رسانندگی به شدت میدان بستگی داشته باشد.

نقض بارزتر قانون اهم وقتی روی می‌دهد که میدان الکتریکی را آنقدر افزایش بدهیم که یک الکترون بتواند بین برخوردها چنان انرژی‌ای کسب کند که اگر به یک اتم خنثی بخورد بتواند الکترون دیگری را از آن اتم بکند. بعد این دو الکترون می‌توانند به همین صورت الکترونها دیگری را آزاد کنند. یونس به سرعت افزایش می‌یابد و یک مسیر رسانا بین الکترونها ایجاد می‌شود. این یک جرقه است. وقتی شمع اتومبیل روشن می‌شود، یا وقتی بعد از راه رفتن روی فرش در یک روز خشک، دست به دستگیرهٔ در می‌زنید، همین اتفاق می‌افتد. همیشه در هوا مقداری الکترون وجود دارد که از هیچ راه دیگری نباشد از پرتوهای کیهانی آزاد شده‌اند. چون برای شروع جرقه یک الکترون

هم کافی است، عملاً حدی برای شدت میدان الکتریکی که در یک گاز برقرار می‌شود وجود دارد. هوا با فشار جو با میدان الکتریکی تقریباً 3×10^6 کیلوولت بر سانتی‌متر یا 10^6 استاولت بر سانتی‌متر در هم شکسته می‌شود. در گازی با فشار کم، که مسیر آزاد الکترون می‌تواند خیلی طولانی باشد، مثل لوله‌ای یک لامپ مهتابی معمولی، یک میدان الکتریکی معمولی می‌تواند با یونشی که با آهنگ ثابت بر اثر برخورد الکترون ایجاد می‌شود یک جریان دائمی برقرار کند. مبنای فیزیکی این پدیده قدری پیچیده است و این رفتار بسیار دور از رفتار اهمی است.

۴-۵ رسانش در فلزات

رسانندگی زیاد فلزات ناشی از الکترونهاى داخل فلز است که به اتمها نچسبیده‌اند بلکه می‌توانند آزادانه در کل ماده جامد حرکت کنند. دلیل این امر این است که جریان الکتریکی در یک سیم مسی — برخلاف جریان در یک محلول یونی — هیچ ماده شیمیایی معینی را جابه‌جا نمی‌کند. جریان الکتریکی می‌تواند سالها ادامه داشته باشد بی‌آنکه باعث کوچکترین تغییری در سیم شود. این جریان فقط می‌تواند الکترونهاى در حال حرکت باشد که از یک سر سیم وارد و از سر دیگر سیم خارج می‌شوند.

از درس شیمی می‌دانیم که اتمهای فلزات الکترونهاى خارجی‌شان را نسبتاً راحت از دست می‌دهند. اگر اتم فلز منزوی می‌بود این الکترونها به اتم وصل بودند، اما در یک جامد که تعداد زیادی از این اتمها در مجاورت هم‌اند، این الکترونها می‌توانند جدا شوند. به این ترتیب اتمها تبدیل به یونهاى مثبت می‌شوند، و این یونهاى مثبت در شبکه صلب جامد فلزی، معمولاً یک آرایه منظم دارند. الکترونهاى جدا شده، که ما اسمشان را می‌گذاریم الکترونهاى رسانش، داخل این شبکه سه‌بعدی یونهاى مثبت در حرکت‌اند.

تعداد الکترونهاى رسانش زیاد است. مثلاً فلز سدیم در هر 1 cm^3 دارای $10^{22} \times 2.5$ اتم است که هر اتم یک الکترون رسانش دارد. تعجبی ندارد که سدیم رسانای خوبی است! اما توجه کنید، اینجا یک معمای بفرنج در کار است. اگر نظریه ساده رسانش را در این مورد به‌کار ببریم این معما خودش را نشان می‌دهد. همان‌طور که دیدیم تحریک حاملهای بار با زمان τ تعیین می‌شود که زمانی است که الکترون آزادانه بدون برخورد به چیزی حرکت می‌کند، اگر $10^{12} \times 2.5$ الکترون در هر سانتی‌متر مکعب داشته باشیم که جرم هر کدام هم m_e باشد فقط با اندازه‌گیری تجربی رسانندگی سدیم می‌توانیم زمان آزاد میانگین τ برای یک الکترون را محاسبه کنیم. رسانندگی سدیم در دمای اتاق در دستگاه یكاهای CGS برابر است با $10^{17} \times 1.9$. با حل معادله ۲۰ برای ۱. حتی می‌شود این خاصیت را تعریف یک عنصر فلزی در نظر گرفت. در این صورت این عبارت که فلزات رساناهای خوبی هستند تا حدودی زیاده‌گویی است.

τ_- و با در نظر گرفتن $N_+ = 0$ چون حامل مثبت متحرکی وجود ندارد، خواهیم داشت

$$\tau_- = \frac{\sigma m_e}{Ne^2} = \frac{(1.9 \times 10^{17}) \times (9 \times 10^{-28})}{(2.5 \times 10^{22}) \times (23 \times 10^{-20})} = 3 \times 10^{-12} \text{ s}$$

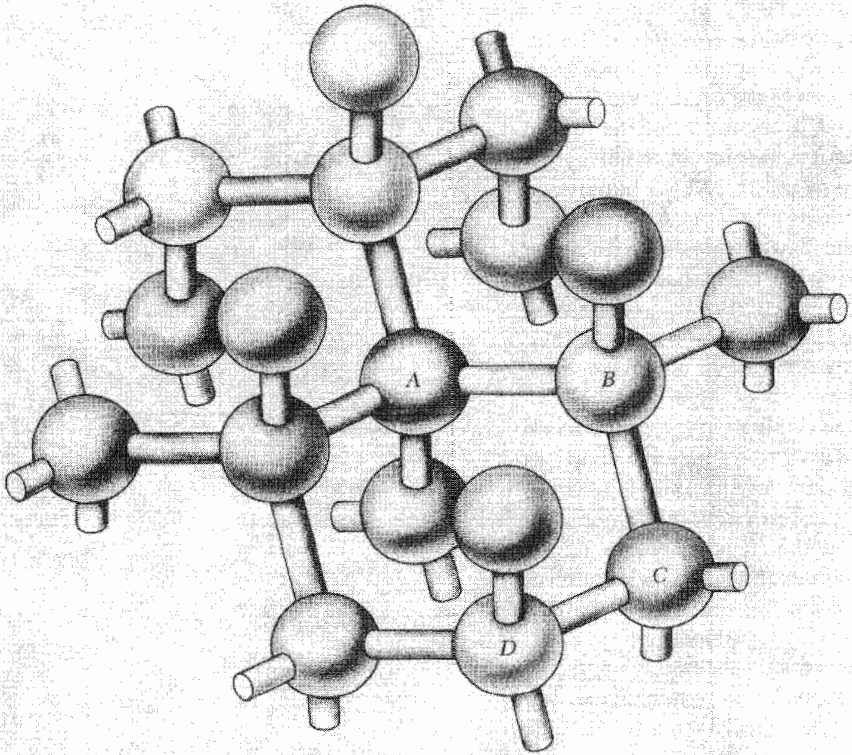
به نظر می‌رسد این زمان برای عبور بدون برخورد الکترون از شبکه یونهای سدیم، عجیب طولانی باشد. مطابق نظریه جنبشی سرعت گرمایی الکترون در دمای اتاق باید در حدود 10^7 سانتی‌متر بر ثانیه باشد، که الکترون در این مدت باید فاصله‌ای به اندازه 3×10^{-7} سانتی‌متر را پیماید. یونها در یک بلور سدیم عملاً در تماس با یکدیگرند. فاصله بین مرکزهای یونهای مجاور فقط 3.8×10^{-8} سانتی‌متر است و میدانهای الکتریکی قوی و تعداد زیادی الکترون مرزی، بیشتر فضای بین آنها را پر می‌کنند. الکترون چگونه می‌تواند از میان این همه مانع، مسافتی به اندازه 10^{-7} برابر فاصله شبکه‌ای را طی کند و هیچ منحرف هم نشود؟ چرا شبکه یونها برای الکترونهای رسانش اینقدر نفوذپذیر است؟

فیزیکدانها در این معما مانده بودند تا اینکه خاصیت موجی حرکت الکترون کشف شد و مکانیک کوانتومی این مطلب را توضیح داد. در اینجا فقط اشاره‌ای به چگونگی این توضیح می‌کنیم. می‌شود این جور گفت: ما دیگر نباید فکر کنیم الکترون ذره کوچک بارداری است که با هر میدان الکتریکی روبه‌رو شود منحرف می‌شود. الکترون به این صورت جایگزیده نیست. بیشتر شبیه موج گسترده‌ای است که در هر لحظه با ناحیه بزرگتری از بلور برهم‌کنش دارد. آنچه حرکت این موج را در بلور به هم می‌زند آرایه منظم یونها نیست، هر چند این آرایه چگال است، بلکه وجود یک بی‌نظمی در این آرایه است. (یک موج نوری که در آب پیش می‌رود اگر به یک حباب یا یک ذره معلق برخورد کند پراکنده می‌شود، اما در خود آب نه، این قیاس تا حدودی صادق است.) در بلوری که به لحاظ هندسی کامل و بی‌نقص باشد موج الکترونی هرگز پراکنده نمی‌شود، یعنی الکترون هیچ‌وقت به مانعی بر نمی‌خورد؛ زمان τ بینهایت می‌شود. اما بلورهای حقیقی، دست‌کم به دو دلیل ناکامل‌اند. یکی اینکه یونها دارای ارتعاشهای گرمایی کاتوره‌ای‌اند که باعث می‌شود در هر لحظه، مختصری بی‌نظمی هندسی در بلور وجود داشته باشد، و هر چه دما بالاتر برود این حالت بیشتر می‌شود. به خاطر همین اثر است که رسانندگی یک فلز خالص با بالا رفتن دما کم می‌شود. این پدیده را در قسمت سراسیمی منحنی σ برای مس خالص و سرب خالص در شکل ۴-۸ می‌بینیم. دیگر اینکه در بلور واقعی، بی‌نظمی‌هایی به صورت اتمهای بیگانه، یا ناخالصی، و نقص شبکه‌ای — نقصهایی در قرار گرفتن آرایه اتمی — وجود دارد. پراکندگی ناشی از این بی‌نظمیها، زمان آزاد τ را محدود می‌کند. مقاومت ویژه باقیمانده مستقل از دما در منحنی مربوط به مس در شکل ۴-۸ به سبب چنین نقصهایی است.

در فلزات، قانون اهم به دقت تمام حتی برای جریانهایی خیلی قویتر از آنکه بتوانند دوام زیادی داشته باشند، صادق است. هیچ انحرافی از این قانون به طور تجربی مشاهده نشده است. مطابق یک پیشگویی نظری، وقتی چگالی جریان به حدود 10^9 A/cm^2 برسد می شود انتظار خطایی از مرتبه ۱ درصد را داشت این جریان بیش از یک میلیون برابر بزرگتر از جریانهای معمول در سیمهای مدارهای معمولی است.

۶-۴ نیم رساناها

در یک بلور سیلیسیم هر اتم چهار همسایه دارد. آرایش سه بعدی آنها در شکل ۹-۴ نشان داده شده است. سیلیسیم هم مثل کربن که در جدول تناوبی درست بالایش قرار دارد، چهار الکترون

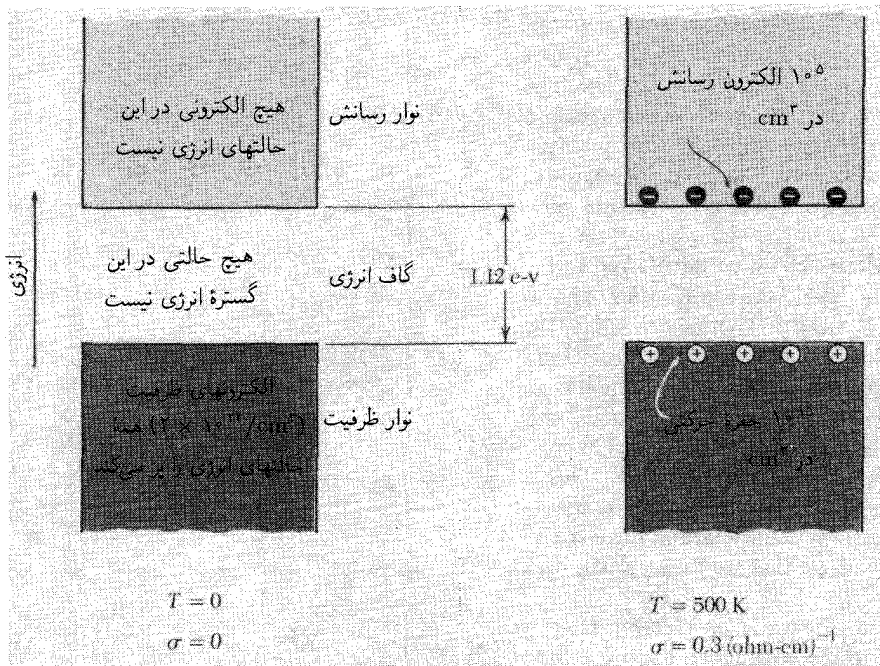


شکل ۹-۴ ساختار بلور سیلیسیم. گویها اتمهای Si هستند. هر میله نمایشگر یک پیوند کووالانسی بین اتمهای مجاور است که با به اشتراک گذاشتن یک الکترون حاصل می شود. برای این کار چهار الکترون ظرفیت در هر اتم لازم است. الماس و نیز ژرمانیم همین ساختار را دارند.

ظرفیت دارد، درست به تعداد الکترونیایی که لازم است تا با همسایگانش پیوندی با یک الکترون مشترک — یا به قول شیمیدانها پیوند کووالانسی — داشته باشد این آرایش مرتب ساختار بسیار سختی را ایجاد می‌کند. در واقع، اتمهای کربن به این طریق در الماس، سخت‌ترین ماده شناخته شده، قرار می‌گیرند. بلور کامل سیلیسیم، که تمام پیوندهایش صحیح و سالم باشند، یک عایق تمام و کمال است؛ هیچ الکترون متحرکی هم ندارد. اما مجسم کنید بتوانیم یک الکترون را از یکی از این جفتهای پیوند بیرون بکشیم و آن را چند صد برابر فاصله شبکه‌ای در بلور جابه‌جا کنیم. با این کار یک بار مثبت در جای الکترون بیرون کشیده باقی می‌ماند و یک الکترون سست هم به دست می‌آید. مقدار معینی هم انرژی باید مصرف کنیم. بحث انرژی را همین الان ادامه می‌دهیم. اما اول توجه داشته باشید که ما دو بار متحرک به وجود آورده‌ایم نه یکی. الکترون آزاد شده متحرک است. می‌تواند مثل الکترون رسانش یک فلز حرکت کند، مثل او منتشر بشود و دقیقاً جایگزیده نباشد. حالت کوانتومی‌ای را که این الکترون اشغال می‌کند حالتی در نوار رسانش می‌نامیم. بار مثبتی هم که بر جا می‌ماند متحرک است. اگر این بار مثبت را مثل یک الکترون از دست رفته در پیوند بین اتمهای A و B در شکل ۴-۹ فرض کنیم، می‌بینیم که این تهیجای میان الکترونهاي ظرفیت می‌تواند به پیوند بین B و C منتقل شود، از آنجا به پیوند بین C و D و غیره، درست مثل جابه‌جایی الکترون از پیوندی به پیوند دیگر. در واقع حرکت حفره، که از این به بعد می‌خواهیم این اسم را به‌کار ببریم، حتی از این هم آزادانه‌تر است. حفره مثل یک الکترون رسانش در شبکه روان می‌شود. فرقی این است که حفره یک بار مثبت است. یک میدان الکتریکی E حفره را در جهت E شتاب می‌دهد نه در جهت عکس آن. حفره طوری عمل می‌کند مثل اینکه جرمی قابل مقایسه با جرم الکترون دارد. این رفتار کمی مرموز است چون حفره ناشی از حرکت دسته‌جمعی تعداد زیادی الکترون ظرفیت است.^۱ با وجود این، خوشبختانه، حفره بسیار شبیه به یک ذره واقعی با بار مثبت عمل می‌کند و ما از این پس حفره را این‌طور تصور خواهیم کرد.

حداقل انرژی لازم برای بیرون کشیدن یک الکترون از حالت ظرفیت در سیلیسیم و رها کردن آن در نوار رسانش برابر است با $10^{-12} \times 1.8$ ارگ یا 1.8×10^{-12} الکترون‌ولت (eV). (یک الکترون‌ولت کار انجام شده در جابه‌جایی یک بار الکتریکی میان دو نقطه با اختلاف پتانسیل یک ولت است.) این مقدار گاف انرژی بین دو نوار حالت‌های ممکن، نوار ظرفیت و نوار رسانش است. برای الکترون حالت‌های انرژی بینابینی وجود ندارد. این نردبان انرژی در شکل ۴-۱۰ نشان داده

۱. این معما را نمی‌شود با قیاس با حباب درون مایع توضیح داد. در یک دستگاه گریز از مرکز، حبابهای درون مایع به طرف محور می‌روند؛ حفره‌های مورد بحث ما به سمت بیرون خواهند رفت. یک تعبیر صحیح اما پر رمز و راز که فقط با مطالعه مکانیک کوانتومی قابل فهم می‌شود این است: حفره به لحاظ دینامیکی مانند یک بار مثبت با جرم مثبت رفتار می‌کند زیرا تهیجایی در حالت‌هایی با بار منفی و جرم منفی است.



شکل ۴-۱۰ نمایش طرح‌واره‌های انرژی در سیلیسیم، که شامل همه حالت‌های ممکن الکترونهاست که به ترتیب انرژی قرار گرفته‌اند. دو الکترون نمی‌توانند حالت‌های یکسان داشته باشند. در دمای صفر، نوار ظرفیت پر است؛ یک الکترون می‌تواند هر حالت در دسترسی را اشغال کند. نوار رسانش خالی است. در $T = 500 \text{ K}$ در هر 1 cm^3 بلور، 10^{15} الکترون در پایینترین حالت‌های نوار رسانش هستند و 10^{15} حفره در نوار ظرفیت بر جای مانده است.

شده است. دو الکترون هرگز نمی‌توانند حالت کوانتومی کاملاً یکسان داشته باشند - این یکی از قانونهای بنیادی فیزیک است. بنابراین حالت‌هایی که در نردبان انرژی قرار دارند باید حتی در صفر مطلق هم اشغال شده باشند. از بخت خوش تعداد حالتها در نوار ظرفیت دقیقاً برای جا دادن تمام الکترونها کافی است. همان‌طور که در شکل ۴-۱۰ الف نشان داده شده است در $T = 0$ همه این حالت‌های ظرفیت اشغال شده‌اند و هیچ‌کدام از حالت‌های نوار رسانش اشغال نشده‌اند.

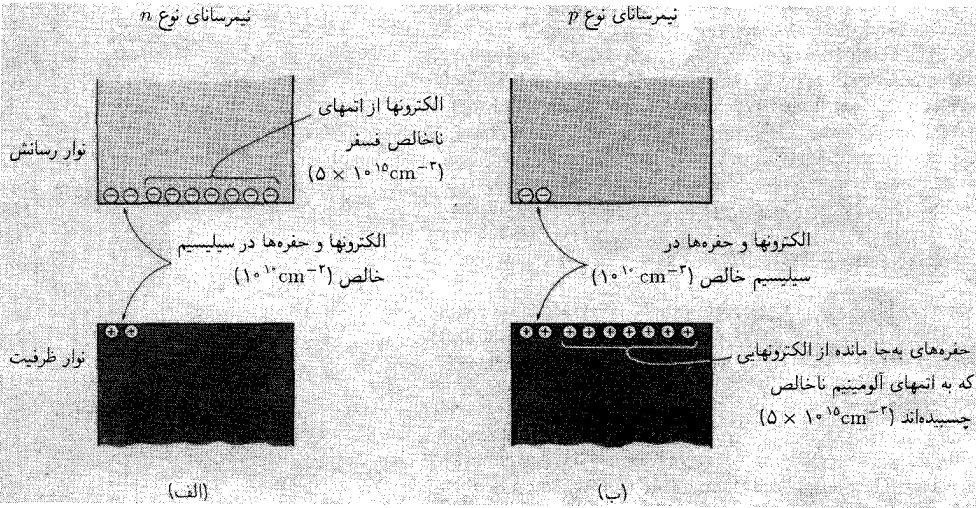
اگر دما به اندازه کافی زیاد باشد، انرژی گرمایی می‌تواند بعضی از الکترونها را از نوار ظرفیت به نوار رسانش ببرد. تأثیر دما در احتمال اشغال شدن حالت‌های الکترون با عامل نمایی $e^{-\Delta E/kT}$ ، که ضریب بولتزمان نام دارد، بیان می‌شود. فرض کنید که دو حالت به نامهای ۱ و ۲ در برای الکترون موجود باشد که انرژی الکترون در حالت ۱ برابر با E_1 و انرژی در حالت ۲ برابر با E_2 است. فرض کنیم p_1 احتمال وجود الکترون در حالت ۱ و p_2 احتمال پیدا شدن الکترون در حالت ۲ باشد.

در دستگاهی در تعادل گرمایی که دمایش T باشد نسبت p_2/p_1 تنها بستگی به تفاضل انرژی، $\Delta E = E_2 - E_1$ ، دارد. این مقدار برابر است با

$$\frac{p_2}{p_1} = e^{-\Delta E/kT} \quad (21)$$

مقدار ضریب ثابت k ، ثابت بولتزمن، برابر است با 1.38×10^{-16} erg/K یا 1.38×10^{-23} J/K. این رابطه برای هر دو حالتی صادق است. این رابطه بر جمعیت حالت‌های در دسترس روی نردبان انرژی حاکم است. برای پیشگویی تعداد الکترونها در نوار رسانش در یک دمای مفروض باید دربارهٔ تعداد حالت‌های در دسترس، اطلاعات بیشتری داشته باشیم. اما این نشان می‌دهد که چرا تعداد الکترونها در رسانش در واحد حجم به شدت تابع دماست. در $T = 300$ K انرژی kT تقریباً 0.025 eV است. ضریب بولتزمن مربوط به حالت‌هایی با اختلاف انرژی ۱ eV خواهد شد e^{-40} یا $10^{-18} \times 4$. در دمای اتاق در سیلیسیم تعداد الکترونها در هر سانتی‌متر مکعب حدود 10^{10} است. در 500 K حدود 10^{15} الکترون در واحد حجم در نوار رسانش پیدا می‌شود و به همین تعداد حفره در نوار ظرفیت وجود دارد (شکل ۴-۱۰ ب). هم حفره‌ها و هم الکترونها در رسانندگی در این دما، که 3×10^{-1} $(\Omega \text{cm})^{-1}$ است، سهم‌اند. ژرمانیم هم مثل سیلیسیم رفتار می‌کند فقط گاف انرژی‌اش کمی کوچکتر است یعنی 0.7 eV. در هر دمای مفروض، تعداد حفره‌ها و الکترونها در رسانش در ژرمانیم بیشتر از سیلیسیم است، در نتیجه همان‌طور که از شکل ۴-۸ پیداست، رسانندگی بیشتر است. الماس هم می‌توانست نیمرسانا باشد، اما گاف انرژی‌اش آنقدر بزرگ است (۵.۵ eV) که در هیچ دمای قابل حصول در نوار رسانش یک الکترون هم پیدا نمی‌شود.

بلور سیلیسیم فقط با 10^{10} حفره و الکترون رسانش در هر سانتی‌متر مکعب، در دمای اتاق عملاً عایق است. اما اگر اتم‌های دیگری وارد شبکهٔ سیلیسیم خالص کنیم، تغییر فوق‌العاده‌ای می‌کند. این مبنای کار همهٔ قطعات شگفت‌انگیز الکترونیک نیمرساناهاست. فرض کنید کسر بسیار کوچکی از اتم‌های سیلیسیم — مثلاً در 10^7 تا — را با اتم‌های فسفر عوض کنیم. (این «آلایش» سیلیسیم را از راه‌های گوناگونی می‌توان انجام داد.) اتم‌های فسفر، که حالا در هر 1 cm^3 تعدادشان تقریباً 5×10^{15} تا است، جایگاه‌های مقرر را در شبکهٔ سیلیسیم اشغال می‌کنند. اتم فسفر ۵ الکترون ظرفیت دارد، که یکی از آنها برای ساختار چهار پیوندی بلور سیلیسیم کامل، زیادی است. الکترون اضافی به آسانی سست می‌شود. فقط 0.04 eV انرژی لازم است تا آن را تا نوار رسانش بالا بکشد. در این مورد چیزی که به جا می‌ماند یک حفرهٔ متحرک نیست بلکه یک یون مثبت فسفر است که حرکتی ندارد. حالا تقریباً 5×10^{15} الکترون در نوار رسانش داریم و رسانندگی تقریباً



شکل ۴-۱۱ در یک نیم‌رسانای نوع n بیشتر حاملهای بار، الکترونهاي حاصل از اتمهای ناخالصی پنج ظرفیتی مثل فسفر هستند. در نیم‌رسانای نوع p اکثریت حاملهای بار حفره‌ها هستند. حفره وقتی تولید می‌شود که یک اتم ناخالصی سه ظرفیتی مثل آلومینیم یک الکترون به چنگ می‌آورد تا چهار پیوند کووالانسی با سیلیسیمهای همسایه‌اش را کامل کند. در هر مورد چند حامل بار مثبت که در بلور خالص در دمای اتاق پیدا می‌شود وجود دارند. اعداد داخل پرانتز مربوط به مثال ما یعنی 5×10^{15} اتم ناخالصی در 1 cm^3 در دمای اتاق است. در این شرایط اکثریت حاملهای بار عملاً به اندازه اتمهای ناخالصی است در حالی که حاملهای اقلیت بسیار کمترند.

$1(\Omega\text{cm})^{-1}$ است. تعداد حفره‌ها خیلی کم است، همانهایی که در بلور خالص در دمای اتاق داشتیم. چون تقریباً تمام حاملهای بار منفی هستند، این بلور "فسفر آلائیده" را نیم‌رسانای نوع n می‌نامیم (شکل ۴-۱۱ الف).

حالا در بلور سیلیسیم خالص، اتمهای آلومینیم را به‌عنوان ناخالصی وارد کنیم. اتم آلومینیم سه الکترون ظرفیت دارد، یکی کمتر از آنچه برای ساختن چهار پیوند کووالانسی در جایگاه شبکه‌ای لازم است. این کمبود به سادگی جبران می‌شود اگر یکی از الکترونهاي ظرفیت به‌صورت دائمی به اتم آلومینیم بپیوندد و پیوندهای اطراف آن را کامل کند. انرژی لازم فقط 0.5 eV است، خیلی کمتر از 1.2 eV که برای بالا کشیدن الکترون ظرفیت تا نوار رسانش لازم است. این ترفیع یک جای خالی یک حفره متحرک در نوار ظرفیت به جا می‌گذارد و از اتم آلومینیم یک یون منفی ثابت

می‌سازد. از برکت حفره‌هایی که به این ترتیب ایجاد می‌شوند — که تعدادشان در دمای اتاق تقریباً مساوی تعداد اتمهای آلومینیم اضافه شده به بلور است — رسانایی بلور خیلی بهتر می‌شود. البته چند تایی الکترون هم در نوار رسانش وجود دارد، به اندازه‌ای که در سیلیسیم خالص در دمای اتاق باید وجود داشته باشد. اما اکثریت قاطع حاملهای بار متحرک مثبت‌اند، و می‌توانیم این ماده را یک نیمرسانای نوع p بنامیم (شکل ۴-۱۱ ب).

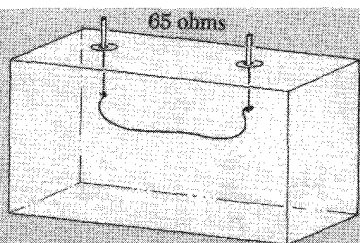
وقتی تعداد حاملهای بار تعیین شد، چه الکترون چه حفره و چه هر دو، رسانندگی به تحرک آنها بستگی خواهد داشت، که مانند رسانش فلزات، محدود به پراکندگی حاملها در داخل بلور است. یک نیمرسانای همگن به تنهایی تابع قانون اهم است. رفتار غیراھمی جالب قطعات نیمرسانا — مثل یکسوکننده و یا ترازبستور — از ترکیب ماده نوع n با ماده نوع p به صورتهای مختلف، به دست می‌آید.

۴-۷ مدارها و اجزای مدار

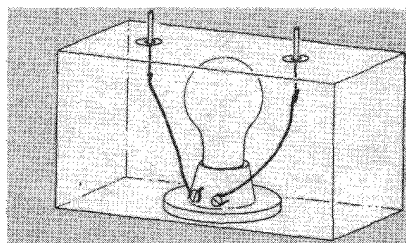
ابزارهای الکتریکی معمولاً پایانه‌های (ورودی و خروجی) مشخصی دارند که سیمها باید به آنها وصل شوند. جریان از این مسیرها می‌تواند به ابزار وارد یا از آن خارج شود. به خصوص، اگر دو پایانه، و فقط دو پایانه، با سیم به یک جسم خارجی متصل شوند و جریان دائمی با پتانسیل ثابت برقرار باشد، در این صورت واضح است که جریان در دو پایانه باید مساوی و در خلاف جهت هم باشد.^۱ در این مورد می‌توانیم از آن جریان I که از ابزار می‌گذرد و آن ولتاژ V که “بین دو پایانه” یا “در پایانه‌ها” برقرار است یعنی اختلاف پتانسیل الکتریکی‌شان، صحبت کنیم. نسبت V/I برای یک جریان مفروض I عدد معینی با واحد مقاومت است (اگر V برحسب ولت و I برحسب آمپر باشد، این عدد برحسب اهم است). اگر قانون اهم در همه اجزای جسمی که جریان از آن می‌گذرد، رعایت شود این نسبت ثابت است و مستقل از مدار است. این یک عدد به طور کامل رفتار الکتریکی جسم را، برای جریان دائمی (dc) بین دو پایانه مفروض، توصیف می‌کند. با این ملاحظات تقریباً بدیهی، ما یک مفهوم ساده، یک جزء مدار را معرفی می‌کنیم.

پنج جعبه شکل ۴-۱۲ را نگاه کنید. هر کدام دو پایه دارند و محتویات هر جعبه فرق می‌کند. اگر هر کدام از این جعبه‌ها را با اتصال سیم به پایانه‌ها به یک مدار الکتریکی وصل کنیم، نسبت اختلاف پتانسیل بین پایانه‌ها به جریان در سیمی که به پایانه وصل کرده‌ایم، ۶۵ اهم می‌شود. می‌گوییم مقاومت بین پایانه‌ها در هر جعبه ۶۵ اهم است. این عبارت مطمئناً برای همه مقادیر

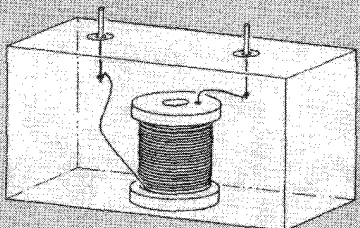
۱. کاملاً ممکن است که از یک سر جسمی که دو پایانه دارد، چهار آمپر جریان وارد شود و از پایانه دیگر سه آمپر خارج شود. اما در این صورت جسم بار مثبتی با آهنگ ۱ کولن در ثانیه ذخیره خواهد کرد. پتانسیل جسم به سرعت تغییر می‌کند — و این نمی‌تواند دوام زیادی داشته باشد. بنابراین چنین جریانی نمی‌تواند دائمی و یا مستقل از زمان باشد.



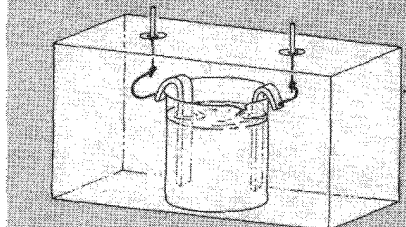
(الف)



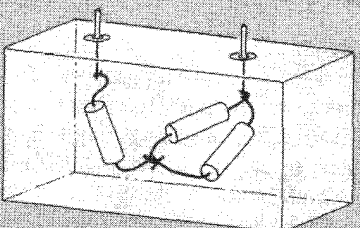
(د)



(ب)



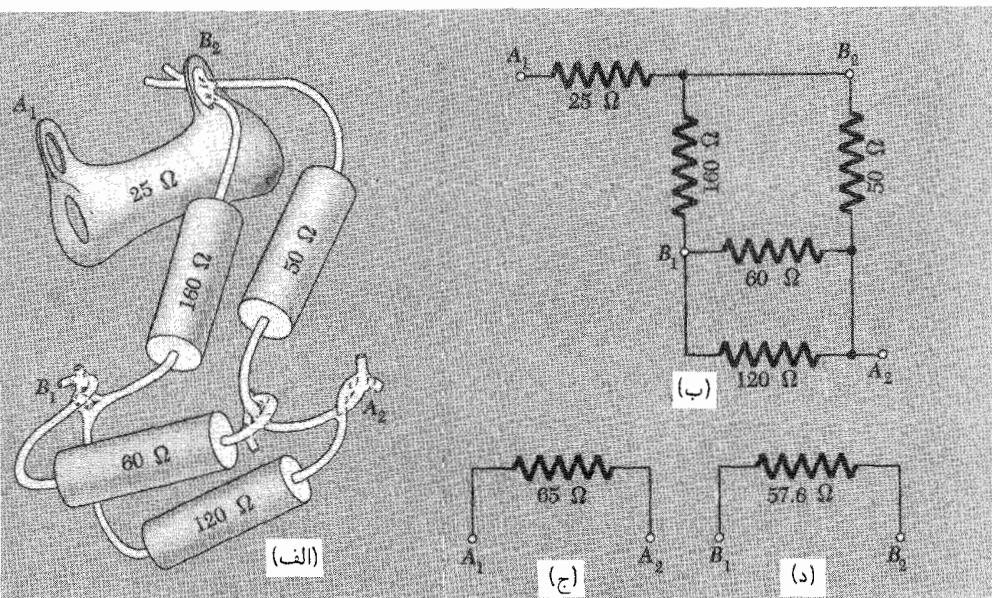
(ه)



(ج)

شکل ۴-۱۲ قطعات مختلفی که برای جریان مستقیم، معادل مقاومت ۶۵ اهمی هستند. (الف) سیم نیکروم شماره ۴۰ به طول ۲۸ cm. (ب) قرقره ۱/۲ پوندی شماره ۳۸ از سیم مسی لعابدار (به طول ۱۰۳ ft). (ج) دو مقاومت اهمی و یک مقاومت ۳۰ اهمی. (د) لامپ تنگستن (سرد) ۲۵ وات و ۱۵ ولتی. (ه) محلول پتاسیم کلرید (KCl) با الکترودهایی با اندازه و فاصله معین.

جریان و اختلاف پتانسیل، صادق نیست. ضمن بالا رفتن اختلاف پتانسیل یا ولتاژ بین پایانه‌ها، خیلی چیزها ممکن است پیش بیاید که نسبت جریان/ولتاژ را عوض کند، و ممکن است در بعضی جعبه‌ها زودتر از جعبه‌های دیگر این اتفاق بیفتد. باید بتوانید حدس بزنید کدام یک از جعبه‌ها زودتر از همه در دسر درست می‌کند. با این همه، حد معینی وجود دارد که پایینتر از آن حد، همه جعبه‌ها رفتار خطی دارند، و در این محدود، برای جریانهای دائمی همه جعبه‌ها یکسان‌اند. یکسان به این معنی که: اگر مداری شامل یکی از این جعبه‌ها باشد در رفتار مدار هیچ فرقی نمی‌کند که کدام

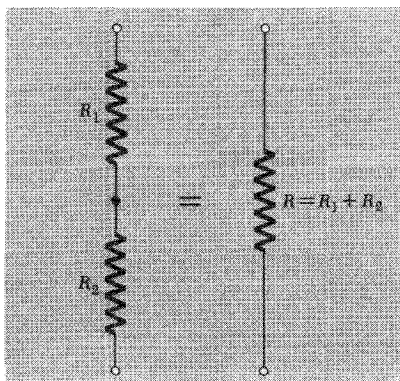


شکل ۴-۱۳ (الف) مقاومتهای متصل به هم؛ (ب) نمودار مدار؛ (ج) و (د) مقاومت معادل بین دو جفت پایانه معین.

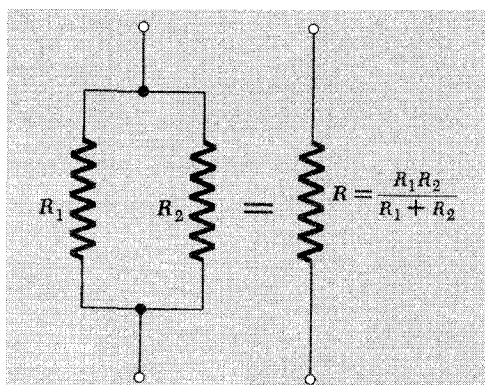
جعبه را قرار داده باشیم. جعبه معادل یک مقاومت ۶۵ اهمی است^۱. اما این مقاومت را با علامت نشان می‌دهیم و در توصیف مداری که این جعبه یکی از اجزای آن است، به جای جعبه از این نماد استفاده می‌کنیم. به این ترتیب یک شبکه یا مدار الکتریکی مجموعه‌ای است از چنین اجزایی که با سیمهایی با مقاومت ناچیز به هم وصل شده‌اند.

اگر شبکه‌ای شامل اجزای متعدد در نظر بگیریم که به هم وصل‌اند و دو نقطه را به‌عنوان پایانه انتخاب کنیم، می‌توانیم فکر کنیم که همه اجزاء، تا جایی که این دو پایانه مورد نظر هستند، معادل یک مقاومت واحد عمل می‌کنند. می‌گوییم که شبکه فیزیکی اجسام شکل ۴-۱۳ الف با نمودار ۴-۱۳ ب نشان داده می‌شود و نیز شکل ۴-۱۳ ج مدار معادل پایانه‌های $A_1 A_2$ است. مدار معادل برای پایانه‌های $B_1 B_2$ در شکل ۴-۱۳ د آمده است. اگر این مجموعه را داخل جعبه‌ای بگذارید که فقط آن جفت پایانه‌ها در دسترس باشند، چنین مجموعه‌ای از یک مقاومت ۵۷٫۶ اهمی قابل تمیز نخواهد بود. یک قاعده بسیار مهم وجود دارد. فقط اندازه‌گیرهای جریان مستقیم مجاز است! همه چیزهایی

۱. ما از اصطلاح مقاومت باری جسمی حقیقی که اختصاصاً برای این کار ساخته شده است استفاده می‌کنیم. بنابراین یک "سیم‌پیچ مقاومتی ۱۰ وات ۲۰۰ اهمی" قطعه‌ای است شامل یک سیم‌پیچ روی یک پایه عایق با پایانه‌هایش که هدف استفاده از آن به‌صورتی است که میانگین توان تلف شده در آن بیش از ۱۰ وات نباشد.



شکل ۱۴-۴ مقاومت‌های متوالی.

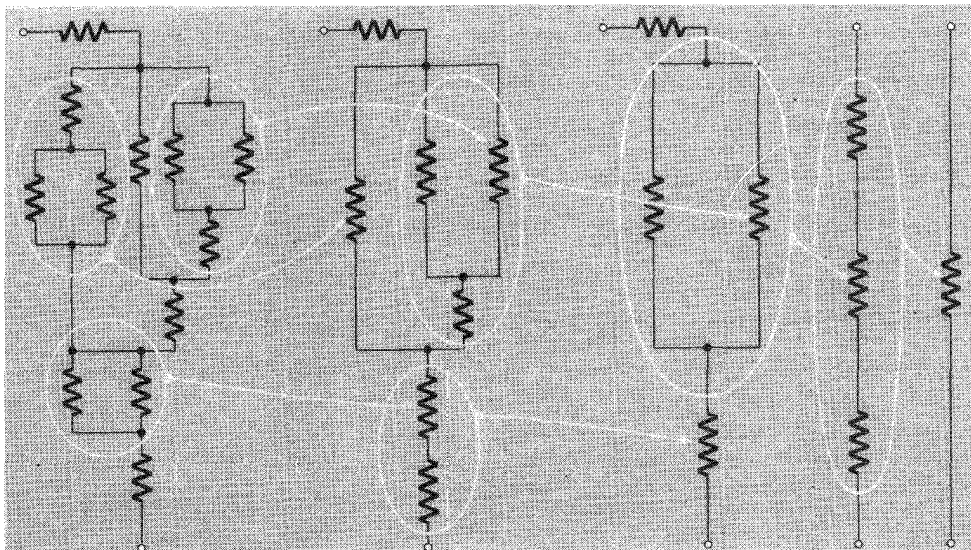


شکل ۱۵-۴ مقاومت‌های موازی.

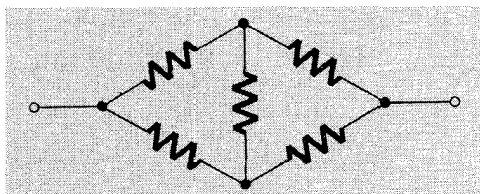
که گفتیم بستگی به این دارد که جریان و میدان الکتریکی نسبت به زمان ثابت باشند؛ اگر این طور نباشد ممکن است رفتار یک جزء مدار فقط به مقاومت مربوط نباشند. مفهوم مدار معادل را می‌توان از این شبکه‌های dc به دستگاههایی تعمیم داد که در آنها جریان و ولتاژ با زمان تغییر می‌کنند. در واقع آنجاست که این مفهوم بیشترین کاربرد را دارد. ما فعلاً زیاد آمادگی نداریم که وارد آن حوزه بشویم. در اینجا وقت کمی را صرف روشهای محاسبه مقاومت معادل شبکه‌ای از اجزای مدار می‌کنیم. در مورد گروههای موازی و متوالی کارمان آسان است. ترکیبی شبیه شکل ۱۴-۴ دو مقاومت R_1 و R_2 را به صورت متوالی نشان می‌دهد. مقاومت معادل برابر است با

$$R = R_1 + R_2 \quad (22)$$

ترکیبی نظیر شکل ۱۵-۴ مقاومت‌های موازی را نشان می‌دهد. به دلیلی که باید خودتان بتوانید ارائه



شکل ۱۶-۴ خلاصه کردن شبکه‌ای که فقط از ترکیبهای موازی و متوالی تشکیل شده است.



شکل ۱۷-۴ یک شبکه ساده پل. این شبکه را نمی‌شود به روش شکل ۱۶-۴ خلاصه کرد:

کنید مقاومت معادل R از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (23)$$

این تمام چیزی است که در سرورکار داشتن با مداری شبیه شکل ۱۶-۴ لازم داریم. این مدار به ظاهر پیچیده را می‌توان مرحله به مرحله در ترکیبهای متوالی یا موازی خلاصه کرد. اما شبکه ساده شکل ۱۷-۴ را نمی‌توان به این شکل خلاصه کرد، بنابراین روش کلی‌تری لازم است. در هر شبکه‌ای از مقاومتها با جریان ثابت باید شرایط زیر برقرار باشد:

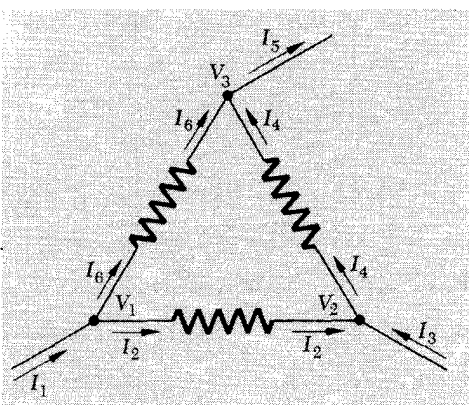
۱. جریانی که از هر جزء مدار می‌گذرد باید برابر باشد با ولتاژ دو سر آن جزء تقسیم بر مقاومت آن جزء.

۲. در یک گره شبکه، یعنی نقطه‌ای که در آن سه سیم یا بیشتر به هم متصل می‌شوند، جمع جبری جریانها داخل گره باید صفر باشد (این بیان همان قانون قدیمی پایستگی بار، معادله ۷، به زبان مدار است).

۳. مجموع اختلاف پتانسیلهایی که به ترتیب اطراف یک حلقه از شبکه گرفته شود، یعنی مسیری که از یک گره شروع و به همان گره ختم شود، باید صفر باشد (این بیان شبکه‌ای خاصیت عام میدان الکتریکی استاتیکی است: در هر مسیر بسته داریم $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$).

بیان جبری این شرایط برای هر شبکه دقیقاً آن تعداد معادله خطی مستقل به دست می‌دهد که لازم است تا یک پاسخ و تنها یک پاسخ برای مقاومت معادل بین دو گروه داشته باشیم. ما این ادعا را اثبات نمی‌کنیم. جالب است توجه کنیم که ساختار مسئله یک شبکه dc فقط ارتباط به توپولوژی شبکه دارد، یعنی به آن خصوصیتی از نمودار اتصالها که مستقل از هر گونه تغییر شکل در خطوط نمودار مدار است.

شبکه dc مقاومتها یک دستگاه خطی است، ولتاژها و جریانها را یک دسته معادله‌های خطی که بیان شرطهای ۱ و ۲ و ۳ هستند تعیین می‌کند. بنابراین هر برهم‌نهی از حالت‌های ممکن شبکه خود یک حالت ممکن است. شکل ۴-۱۸ بخشی از یک شبکه با جریانهای معین I_1 ، I_2 و ... در سیمها را نشان می‌دهد که در گره‌ها ولتاژهای معین V_1 ، V_2 و ... برقرار است. اگر مجموعه دیگری از جریانها و پتانسیلها، مثلاً I'_1 ، ... و V'_1 و ... حالت ممکن دیگری در این بخش از شبکه باشد، مجموعه $(I_1 + I'_1)$ ، ...، $(V_1 + V'_1)$ و ... هم حالت ممکن دیگری است. این جریانها و ولتاژهای متناظر با برهم‌نهی هم در شرایط ۱، ۲ و ۳ صدق می‌کنند. بعضی قضیه‌های کلی درباره شبکه‌ها، که در مهندسی برق مفید و جالب‌اند، مبتنی بر این خاصیت است.



شکل ۴-۱۸ جریانها و پتانسیلها در گره‌های یک شبکه.

۸-۴ اتلاف انرژی در شارش جریان

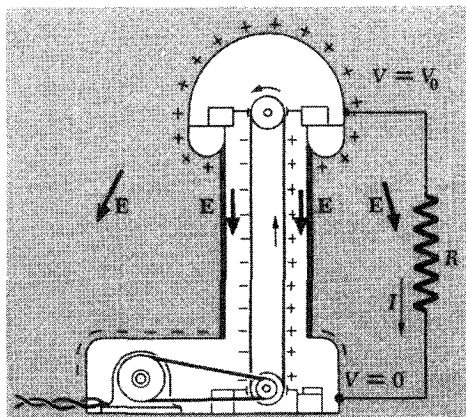
شارش جریان در یک مقاومت با اتلاف انرژی همراه است. اگر برای راندن بار الکتریکی با سرعت میانگین v ، نیروی F لازم باشد، هر عاملی که این وظیفه را بر عهده دارد باید کاری با آهنگ $F \cdot v$ انجام دهد. اگر یک میدان الکتریکی E یونی با بار q را براند، داریم $F = qE$ و آهنگ انجام کار برابر است با $qE \cdot v$. انرژی که به این ترتیب مصرف می‌شود سرانجام به گرما تبدیل می‌شود. در مدل رسانش یونی ما نحوه این مصرف انرژی کاملاً روشن است. یون بین برخوردها مقداری انرژی جنبشی اضافی و همین‌طور تکانه، به دست می‌آورد. یک برخورد یا حداکثر چند برخورد جهت تکانه یون به صورت کاتوره‌ای تغییر می‌دهد اما الزاماً انرژی جنبشی را به وضعیت معمول برنمی‌گرداند. برای این منظور یون باید انرژی جنبشی را به مانعی که با آن برخورد می‌کند انتقال بدهد. فرض کنید جرم حامل بار خیلی کوچکتر از جرم اتم خنثایی باشد که با آن برخورد می‌کند. انتقال میانگین انرژی جنبشی وقتی یک توپ بیلیارد با یک توپ بولینگ برخورد کند، اندک است. بنابراین یون (توپ بیلیارد) به ذخیره کردن انرژی اضافی ادامه می‌دهد تا جایی که انرژی جنبشی میانگین‌اش آنقدر زیاد شود که انرژی میانگین از دست رفته در یک برخورد برابر با مقدار انرژی کسب شده بین برخوردها شود. به این ترتیب پس از "گرم شدن" حاملهای بار، کاری که نیروی الکتریکی صرف راندن حاملهای بار می‌کند سرانجام به صورت انرژی جنبشی کاتوره‌ای، یا گرما به محیط داده می‌شود. فرض کنید جریان دائمی I برحسب آمپر از مقاومت R اهم می‌گذرد. در هر ثانیه، I کولن بار بین دو نقطه با اختلاف پتانسیل V ولت منتقل می‌شود، که داریم $V = IR$. به این ترتیب کار انجام شده در یک ثانیه برابر است با $I^2 R$ ژول. ($1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg}$). وات یا ولت آمپر، واحد متناظر توان P (آهنگ انجام کار) است ($1 \text{ W} = \text{J/s}$).

$$P = I^2 R \quad (24)$$

شارش دائمی جریان در یک مدار dc طبیعتاً نیاز به یک چشمه انرژی دارد تا میدان الکتریکی محرک حاملهای بار را برقرار نگه دارد. ما تا اینجا وارد بحث نیروی محرکه الکتریکی نشده‌ایم و تنها قسمتهایی از مدار کامل را مطالعه کرده‌ایم؛ "باتری" را بیرون کادر گذاشته‌ایم. در بخش ۹-۴ بعضی از چشمه‌های نیروی محرکه الکتریکی را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۹-۴ نیروی محرکه الکتریکی و پیل ولتا

منشأ نیروی محرکه الکتریکی در مدار جریان مستقیم، سازوکاری است که حاملهای بار را در سوی مخالف جهتی که میدان الکتریکی می‌خواهد حرکت دهد، انتقال می‌دهد. دستگاه مولد



شکل ۱۹-۴ در مولد وان دوگراف، حاملهای بار به طور مکانیکی در جهت خلاف جهتی که میدان الکتریکی می خواهد آنها را حرکت دهد، حرکت می کنند.

الکتروستاتیک وان دوگراف (شکل ۱۹-۴) یک نمونه بزرگ مقیاس از چنین سازوکاری است. با کار مداوم همه اجزاء، در مقاومت خارجی جریانی به دست می آید که در جهت میدان الکتریکی \mathbf{E} جاری است، و انرژی در این مقاومت با آهنگ IV_0 ، یا $I^2 R$ تلف می شود (تبدیل به گرما می شود). درون بدنه دستگاه هم یک میدان الکتریکی رو به پایین وجود دارد. در اینجا اگر حاملهای بار به یک کمر بند عایق بچسبند می توانند در جهت مخالف میدان الکتریکی حرکت کنند. بارها چنان محکم به کمر بند می چسبند که در میدان الکتریکی رو به پایین نمی توانند روی کمر بند سرازیر شوند. (اما تحت تأثیر میدان بسیار قویتری که در شانه پایانه جایگزیده است می توانند از کمر بند کنده شوند، فعلاً به وسایل نزدیک قرقره ها که بار را به کمر بند منتقل می کنند یا از روی آن جمع می کنند کاری نداریم.) انرژی لازم برای کشیدن کمر بند از جای دیگری تأمین می شود، معمولاً از یک موتور الکتریکی که به خط نیرو وصل است، اما از موتور بنزینی هم می توان استفاده کرد، یا حتی ممکن است یک نفر برای دستگاه هندل بزند. این مولد وان دوگراف در حکم یک باتری است با نیروی محرکه الکتریکی ای که تحت این شرایط V_0 ولت است.

در باتریهای معمولی آنچه حاملهای بار را در جایی که میدان الکتریکی در خلاف جهت حرکت آنهاست به حرکت در می آورد، انرژی شیمیایی است. یعنی، یک بار مثبت می تواند به جایی با پتانسیل الکتریکی بالاتر برود. این کار در صورتی ممکن است که بار مثبت در یک واکنش شیمیایی شرکت کند که بیش از انرژی که برای بالا بردن پتانسیل الکتریکی اش لازم است، انرژی شیمیایی آزاد می کند.

برای اینکه ببینیم این کار چگونه انجام می شود، یک پیل ولتای خاص را بررسی می کنیم. پیل ولتا نام کلی یک چشمه شیمیایی مولد نیروی محرکه الکتریکی است. در آزمایشهای گالوانی حدود سال ۱۷۹۰، تکانه های پای قورباغه معروف، نشان دهنده تولید شیمیایی جریان الکتریسته

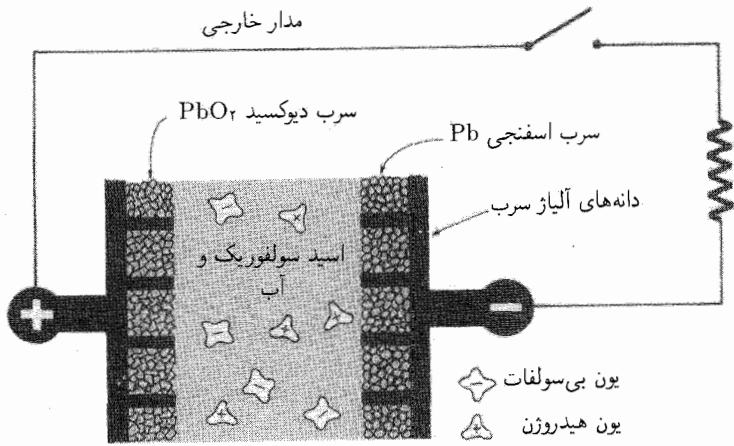
بود. این ولتا بود که ثابت کرد چشمه جریان، آن طور که گالوانی می‌گفت "الکتریسیته جانوری" نیست بلکه تماس فلزهای متفاوت در مدار است. ولتا قصد داشت اولین باتری را بسازد؛ توده‌ای از سلولهای اولیه هر کدام متشکل از یک قرص روی و یک قرص نقره که بین آنها مقوایی آغشته به آب نمک قرار داشت. باتری‌ای که رادیوی ترانزیستوری شما را به‌کار می‌اندازد البته بسته‌بندی مرتب و جمع‌وجوری دارد ولی اساس کارش همین است. انواع مختلف پیل‌های ولتا که استفاده از آنها متداول است ترکیب شیمیایی‌شان فرق می‌کند ولی خصوصیات مشترکی دارند: دو الکتروند با جنس متفاوت در یک محلول یونیده یا الکترولیت فرو رفته‌اند.

به‌عنوان یک نمونه، پیل اسید سولفوریک - سرب را که جزء اصلی باتری اتومبیل است بررسی می‌کنیم. این پیل یک خاصیت مهم دارد که برگشت‌پذیری عملیات آن است. با انباره‌ای که از این پیلها ساخته می‌شود و بارها قابل شارژ شدن است، انرژی را می‌توان به‌صورت الکتریکی ذخیره کرد و پس گرفت.

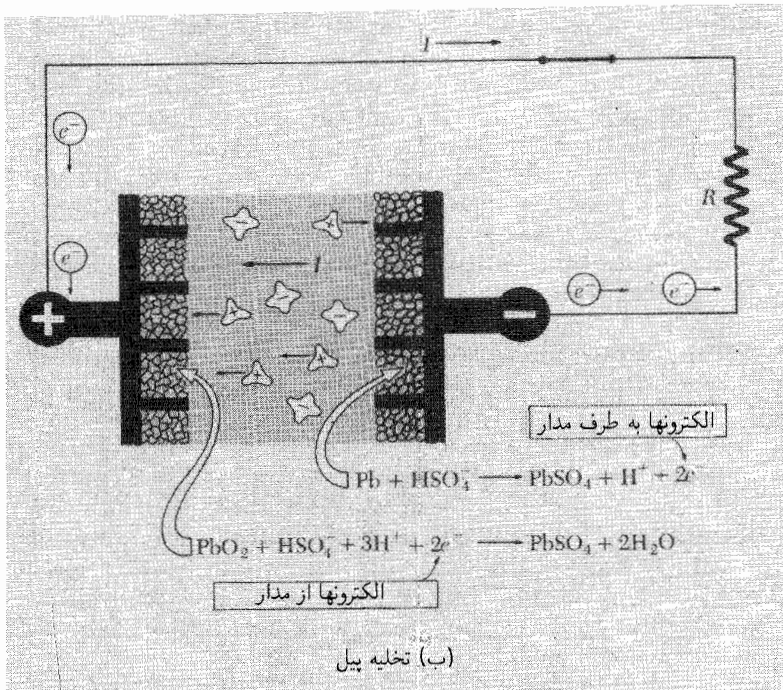
یک پیل اسید سولفوریک-سرب که کاملاً شارژ شده باشد دارای صفحه‌های مثبتی است که حاوی گرد متخلخل سرب دیوکسید، PbO_2 ، است و صفحه‌های منفی‌ای که حاوی سرب خالص به‌صورت اسفنجی است. قاب شبکه از آلیاژ سرب ساخته می‌شود. همه صفحه‌های مثبت به یکدیگر و به پایانه مثبت پیل متصل‌اند. صفحه‌های منفی هم که به یکدیگر متصل‌اند یک در میان به فاصله کمی از صفحه‌های مثبت بین آنها قرار دارند. طرح شکل ۴-۲۰ فقط قسمت کوچکی از یک صفحه مثبت و یک صفحه منفی را نشان می‌دهد. الکترولیت اسید سولفوریک همه جا داخل پیل و فضای بین ماده فعال را پر می‌کند و قابلیت نفوذ آن سطح بزرگی برای واکنش شیمیایی تأمین می‌کند.

اگر پایانه‌های پیل به مدار خارجی‌ای وصل نشود پیل در همین وضع می‌ماند. اختلاف پتانسیل بین پایانه‌ها نزدیک به ۲٫۱ ولت خواهد بود. این اختلاف پتانسیل مدار-باز "به‌طور خودکار" بر اثر واکنش شیمیایی اجزای پیل پدید می‌آید. این اختلاف پتانسیل در واقع نیروی محرکه الکتریکی پیل است که برای آن علامت \mathcal{E} به‌کار می‌رود. مقدار آن به غلظت اسید سولفوریک در الکترولیت بستگی دارد، اما به اندازه، تعداد و فاصله بین صفحه‌ها بستگی ندارد.

اکنون پایانه‌های پیل را به یک مدار خارجی با مقاومت R وصل می‌کنیم. اگر مقدار R خیلی کم نباشد، اختلاف پتانسیل V بین پایانه‌های پیل فقط کمی از مقدار اختلاف پتانسیل مدار-باز \mathcal{E} افت می‌کند، و جریان $I = V/R$ در مدار برقرار می‌شود (شکل ۴-۲۰). الکترون‌ها وارد پایانه مثبت می‌شوند و الکترونهای دیگری از پایانه منفی خارج می‌شوند. در هر الکتروند واکنشهای شیمیایی انجام می‌گیرد، اثر کلی همه اینها تبدیل سرب، سرب دیوکسید و اسید سولفوریک به سرب سولفات و آب است. به‌ازای هر مولکول سرب سولفات که از این طریق ساخته می‌شود، یک بار

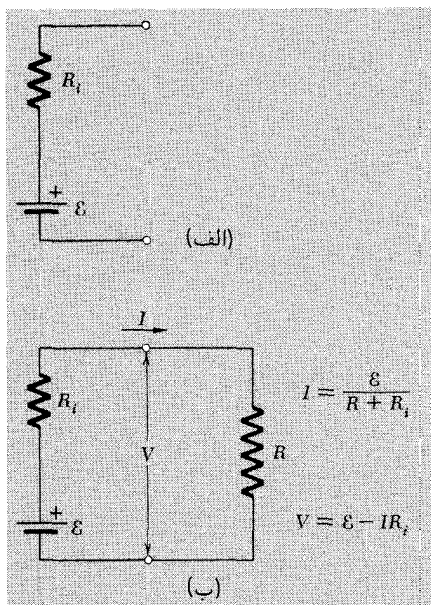


(الف) پیل شارژ شده



(ب) تخلیه پیل

شکل ۴-۲۰ طرحی، نه با مقیاس درست، که طرز کار پیل سرب-اسید سولفوریک را نشان می‌دهد. الکترولیت، محلول اسید سولفوریک در دانه‌های سرب دیوکسید در صفحه مثبت و سرب اسفنجی در صفحه منفی نفوذ می‌کند. اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های مثبت و منفی ۲٫۱ ولت است. اگر مدار خارجی بسته شود واکنشهای شیمیایی در فصل مشترک مایع-جامد در هر دو صفحه انجام می‌گیرد. بر اثر این واکنشها مقدار اسید سولفوریک در الکترولیت کاهش می‌یابد، الکترون در مدار خارجی از پایانه منفی به پایانه مثبت می‌رود و به این ترتیب جریان I تولید می‌شود. برای شارژ دوباره پیل، باید به جای مقاومت R چشمه‌ای با نیروی محرکه الکتریکی بزرگتر از ۲٫۱ ولت قرار دهیم که جریان را در جهت مخالف در پیل راه بیندازد و هر دو واکنش را معکوس کند.

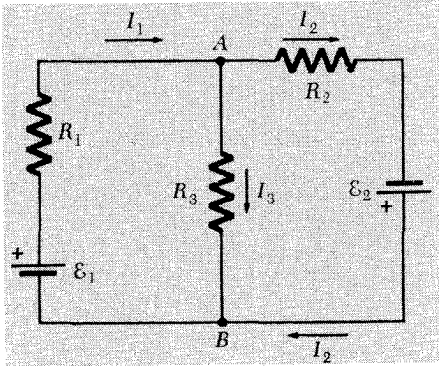


شکل ۲۱-۴ (الف) مدار معادل یک پیل ولتا فقط یک مقاومت R_i است که به یک نیروی محرکه الکتریکی با مقدار ثابت \mathcal{E} به طور متوالی متصل باشد. (ب) محاسبه جریان در مداری که شامل یک پیل ولتاست.

در مدار تولید و انرژی $e\mathcal{E}$ آزاد می‌شود. از این انرژی، مقدار eV به صورت گرما در مقاومت خارجی R ظاهر می‌شود. اختلاف بین \mathcal{E} و V ناشی از مقاومت خود الکترولیت است که جریان I باید در داخل پیل از آن بگذرد. اگر این مقاومت داخلی را با R_i نشان دهیم، دستگاه را می‌شود با مدار معادل شکل ۲۱-۴ توصیف کرد.

با ادامه تخلیه باتری الکترولیت با آب رقیقتر و نیروی محرکه الکتریکی \mathcal{E} کمی کمتر می‌شود. معمولاً وقتی می‌گویند باتری خالی شده که \mathcal{E} کمتر از ۱٫۷۵ ولت شود. برای دوباره پر کردن باتری، باید چشمه ولتاژی با نیروی بیشتر از \mathcal{E} به پایانه‌های باتری وصل کنیم به طوری که جریان را در جهت عکس جریان قبلی در مدار به حرکت وا دارد. در این صورت واکنشهای شیمیایی در جهت عکس واکنشهای قبلی صورت می‌گیرند تا جایی که تمام سرب سولفات دوباره به سرب دیوکسید و سرب تبدیل شود. مصرف انرژی برای پر کردن قدری بیشتر از انرژی است که باتری در حال تخلیه به دست می‌دهد، چون مقاومت داخلی R_i باعث می‌شود که در عبور جریان از باتری توانی به اندازه $I^2 R_i$ تلف شود.

توجه کنید که در شکل ۲۰-۴ ب جریان I در الکترولیت از حرکت خالص یونهای مثبت به سمت صفحه مثبت تولید می‌شود. بدیهی است میدان الکتریکی در الکترولیت رو به صفحه مثبت است نه در جهت دور شدن از آن. با وجود این انتگرال خطی \mathbf{E} روی کل مدار، چنانکه



شکل ۴-۲۲ شبکه‌ای با دو چشمه ولتاژ.

برای هر میدان الکتروستاتیکی باید باشد، صفر است. توضیحش این است: دو جهش خیلی نیز در پتانسیل در فصل مشترک الکترولیت و صفحه مثبت و فصل مشترک الکترولیت با صفحه منفی وجود دارد. در این فصل مشترکها یونها در جهت مقابل یک میدان الکتریکی قوی با نیروهای ناشی از واکنشهای شیمیایی حرکت می‌کنند. این ناحیه است که متناظر با کمر بند یک مولد وان دوگراف است.

هر نوع پیل ولتا نیروی محرکه مخصوص به خودش را دارد که معمولاً بین ۱ تا ۳ ولت است. انرژی دخیل در واکنشهای شیمیایی، به‌ازای هر مولکول، در اصل، انرژی به‌دست آمده یا از دست رفته در انتقال الکترون خارجی از اتمی به اتم دیگر است. این انرژی هیچوقت از چند الکترون ولت بیشتر نمی‌شود. می‌توانیم اطمینان داشته باشیم که هیچکس به فکر اختراع پیل ولتایی با نیروی محرکه الکتریکی ۱۲ ولت نمی‌افتد. باتری ۱۲ ولتی اتومبیل تشکیل شده از ۶ پیل اسید سولفوریک-سرب جداگانه که به‌صورت متوالی به هم متصل‌اند.

۴-۱۰ شبکه با چشمه‌های ولتاژ

شبکه مقاومتها ممکن است بیش از یک نیروی محرکه الکتریکی، یا چشمه ولتاژ داشته باشد. مدار شکل ۴-۲۲ دو باتری دارد که نیروی محرکه الکتریکی‌شان به ترتیب \mathcal{E}_1 و \mathcal{E}_2 است. علامت پایانه مثبت هر باتری در کنار علامت قراردادی باتری نشان داده شده است. فرض کنید مقاومت داخلی یکی از باتریها در مقاومت R_1 و مقاومت داخلی باتری دیگر در مقاومت R_2 به حساب آمده است. فرض کنید مقاومتها معلوم‌اند و می‌خواهیم جریانها را در شبکه پیدا کنیم. با انتخاب جهت دلخواهی برای جریانهای I_1 ، I_2 ، و I_3 در شاخه‌های شبکه، شرایطی را که در بخش ۴-۷

گفتیم روی مسئله اعمال می‌کنیم و سه معادله مستقل زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ \mathcal{E}_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 &= 0 \\ \mathcal{E}_2 + R_2 I_2 - R_3 I_3 &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

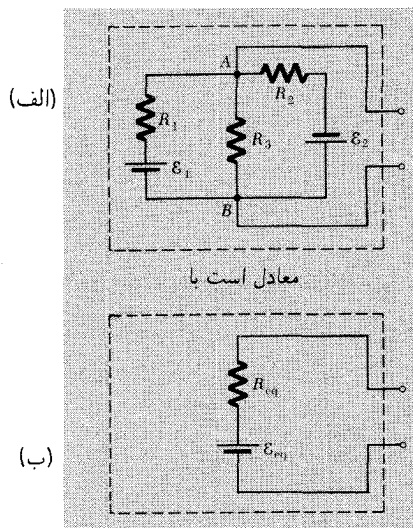
برای کنترل علامتها، توجه کنید که در نوشتن معادله‌های دو حلقه در هر کدام از حلقه‌ها در جهتی پیش رفته‌ایم که جریان از باتری وارد آن حلقه می‌شود. با حل این سه معادله برای I_1 ، I_2 و I_3 نتیجه‌های زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_1 R_3 + \mathcal{E}_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \\ I_2 &= \frac{\mathcal{E}_2 R_1 + \mathcal{E}_2 R_3 + \mathcal{E}_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \\ I_3 &= \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \end{aligned} \quad (26)$$

اگر در مورد به خصوصی مقدار I_3 منفی در آمد صرفاً به این معنی است که جریان در آن شاخه مخالف جهتی که ما برای جریان مثبت در نظر گرفته‌ایم، جاری می‌شود.

تصور کنید چنین شبکه‌ای قسمتی از یک شبکه بزرگتر باشد که به دو گره آن وصل شده است. مثلاً سیمهایی را به دو گره A و B وصل کنیم و بقیه اجزاء را در یک "جعبه سیاه" می‌گذاریم که فقط این دو سیم پایانه‌های خارجی‌اش باشند (شکل ۴-۲۳ الف). طبق یک قضیه کلی به نام قضیه تونن مطمئن هستیم که این جعبه، به هر مدار دیگری هم که وصل شود، کاملاً معادل یک چشمه ولتاژ منفرد با نیروی محرکه \mathcal{E}_{eq} و مقاومت داخلی R_{eq} است. این در مورد هر شبکه شامل چشمه ولتاژ و مقاومتها، هر چقدر هم که پیچیده باشد، صدق می‌کند. مقادیر \mathcal{E}_{eq} و R_{eq} به آسانی تعیین می‌شوند. \mathcal{E}_{eq} ولتاژ بین دو پایانه است وقتی هیچ چیز بیرون از جعبه به آنها وصل نباشد. در مثال ما این ولتاژ صرفاً $I_3 R_3$ است که I_3 از معادله ۲۶ به دست می‌آید. مقاومت R_{eq} مقاومتی است که بین دو پایانه، وقتی همه مقادیر نیروی محرکه الکتریکی داخلی صفر باشد، اندازه‌گیری می‌شود. در مثال ما این مقدار برابر با مقاومت معادل سه مقاومت R_1 ، R_2 ، و R_3 است که به طور موازی به هم متصل‌اند، که این مقدار برابر است با $R_1 R_2 R_3 / (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)$.

اگر از داخل جعبه خبر نداشته باشیم چه؟ می‌توانیم \mathcal{E}_{eq} و R_{eq} را با دو اندازه‌گیری تجربی به دست بیاوریم: ولتاژ مدار-باز را با یک ولت‌متر که جریان داخلش ناچیز است اندازه بگیریم؛ که



شکل ۴-۲۳ مقاومت R_{eq} را مساوی با مقاومت بین پایانه‌ها بگیرید اگر در (الف) همه نیروهای محرکه الکتریکی صفر باشند. E_{eq} را مساوی ولتاژ بین پایانه‌ها در (الف) با مدار خارجی باز در نظر بگیرید. در این صورت مدار پایینی با مدار بالایی معادل است. نمی‌توانید هیچ فرقی بین اندازه‌گیری جریان مستقیم در پایانه‌های دو مقدار پیدا کنید.

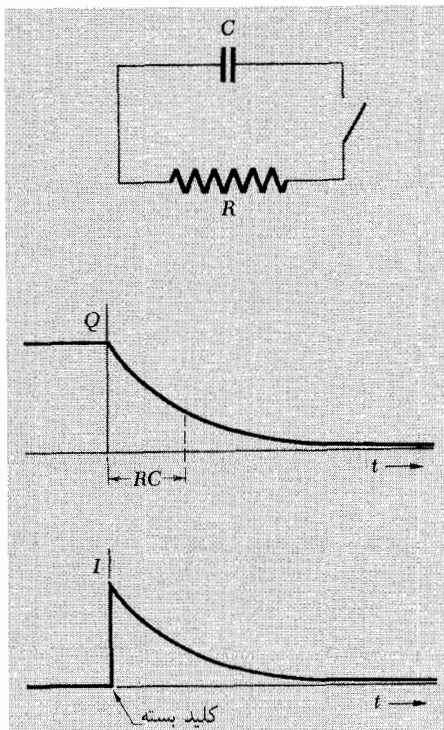
\mathcal{E}_{eq} است. بعد پایانه‌ها را با یک آمپرسنج که مقاومتش ناچیز است به هم وصل کنیم؛ این آمپرسنج جریان مدار کوتاه I_{sc} را اندازه می‌گیرد. به این ترتیب خواهیم داشت

$$R_{eq} = \frac{\mathcal{E}_{eq}}{I_{sc}} \quad (27)$$

در تحلیل یک مدار پیچیده گاهی بد نیست یک بخش دو پایانه‌ای را با \mathcal{E}_{eq} و R_{eq} معادل آن عوض کنیم. در قضیهٔ تئورین فرض بر خطی بودن همه اجزای مدار و برگشت پذیر بودن جریان باتری است. اگر یکی از باتریهای ما پیل خشک غیرقابل پر شدن با جریان معکوس باشد، باید احتیاط کرد!

۱۱-۴ جریانهای متغیر در خازنها و مقاومتها

فرض کنید خازنی به ظرفیت C با پتانسیل V_0 پر شده باشد و بعد با اتصال به مقاومت R به طور ناگهانی تخلیه شود. شکل ۴-۲۴ خازن را با علامت قراردادی \parallel مقاومت R و کلیدی که فرض می‌کنیم در لحظه $t = 0$ بسته باشد، نشان می‌دهد. بدیهی است که ضمن شارش جریان خازن کم‌کم بارش را از دست می‌دهد، ولتاژ دو سر خازن ضعیف می‌شود و این به نوبه خود جریان را کاهش می‌دهد. برای اینکه ببینیم دقیقاً چه پیش می‌آید فقط لازم است شرایط حاکم بر مدار را بنویسیم. فرض کنید Q بار روی خازن در هر لحظه، و V اختلاف پتانسیل بین صفحه‌ها و نیز ولتاژ دو سر مقاومت R باشد. فرض کنید جریان، که در صورت عبور از طرف مثبت خازن، مثبت



شکل ۴-۲۴ بار و جریان در یک مدار RC . بار با ضریب $1/e$ در زمان RC کم می‌شود.

فرض می‌شود I باشد. این کمیتها، که همه تابع زمان اند، باید به صورت زیر به هم مربوط باشند:

$$Q = CV \quad \text{و} \quad I = \frac{V}{R} \quad \text{و} \quad -\frac{dQ}{dt} = I \quad (28)$$

با حذف I و V معادله‌ای به دست می‌آوریم که بر تغییر زمانی Q حاکم است:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} \quad (29)$$

اگر این را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} \quad (30)$$

می‌توانیم از دو طرف انتگرال بگیریم و رابطهٔ زیر را به دست بیاوریم:

$$\ln Q = \frac{-t}{RC} + \text{const.} \quad (31)$$

بنابراین حل معادلهٔ دیفرانسیل ما می‌شود

$$Q = (\text{ثابت دیگر}) \times e^{-t/RC} \quad (32)$$

گفتیم که در $t = 0$ ، $V = V_0$ ، بنابراین برای $t = 0$ داریم $Q = CV_0$. این معادله ضریب ثابت را تعیین می‌کند و حالا می‌توانیم رفتار دقیق Q را بعد از اینکه کلید بسته شد بدانیم:

$$Q = CV_0 e^{-t/RC} \quad (33)$$

رفتار جریان I مستقیماً از این رابطه پیدا می‌شود:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} \quad (34)$$

با بستن کلید جریان ناگهان به مقدار V_0/R می‌رسد و بعد به طور نمایی به صفر می‌رسد. زمان مشخصهٔ این افت ثابت RC است. تعجبی ندارد که این حاصلضرب مقاومت و ظرفیت ابعاد زمانی داشته باشد، چون می‌دانیم که C دارای ابعاد طول است، و قبلاً در تعریف اهم-سانتی‌متر دیدیم که مقاومت \times طول ابعاد زمان دارد. در صحبت از مدار یا بخشی از مدار خیلی وقتها حرف "ثابت زمانی RC " به میان می‌آید.

در دستگاه یکاهای SI یکای ظرفیت فاراد است. خازنی با ظرفیت ۱ فاراد برای اختلاف پتانسیل ۱ ولت، ۱ کولن بار دارد. اگر R برحسب اهم و C برحسب فاراد باشد، حاصلضرب RC زمانی برحسب ثانیه است. فقط محض امتحان، توجه کنید که $\Omega = V/A = s - V/C$ در حالی که $F = C/V$. اگر بفهمیم که مدار شکل ۴-۲۴ از یک خازن $0.5 \mu\text{F}$ میکروفارادی و یک مقاومت $5 \text{ M}\Omega$ ، که هر دو در هر آزمایشگاه معمولی یافت می‌شوند، تشکیل شده است، خواهیم داشت

$$RC = 5 \times 10^6 \times 0.5 \times 10^{-6} \quad \text{یا} \quad 0.25 \text{ s}$$

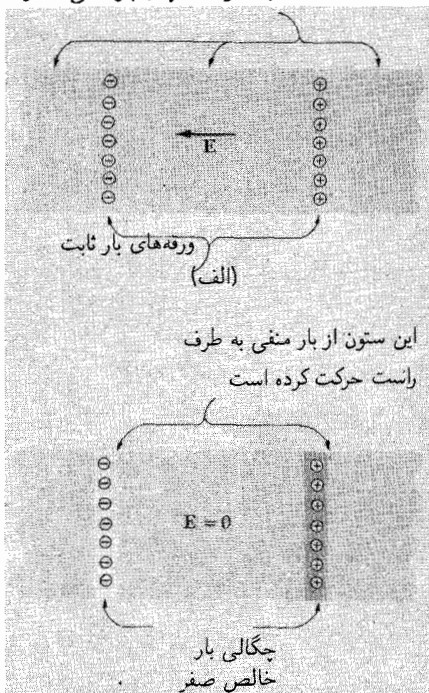
به طور کلی در هر دستگاه الکتریکی که از رساناهای باردار و مسیرهای مقاومت‌دار جریان، تشکیل یافته باشد، یک مقیاس زمانی—که شاید تنها مقیاس زمانی نباشد—برای فرایندهای دستگاه

از حاصلضرب مقاومت در ظرفیت به دست می‌آید. این با نظر قبلی ما دربارهٔ ابعاد مقاومت ارتباط دارد. خازنی در نظر بگیرید که مساحت صفحه‌هایش A و فاصلهٔ بین آنها s باشد. ظرفیت C آن برابر است با $A/4\pi s$. حالا فرض کنید فاصلهٔ بین صفحه‌ها ناگهان با مادهٔ رسانایی با مقاومت ρ پر شود. برای اینکه دربارهٔ تأثیر این کار روی ظرفیت خازن بحثی پیش نیاید، فرض کنیم که این مادهٔ رسانا گازی باشد که خیلی کم یونیده است؛ ماده‌ای با این چگالی مشکل بتواند کوچکترین اثری بر ظرفیت داشته باشد. این مسیر رسانای جدید می‌تواند خازن را همان‌طور تخلیه کند که مقاومت خارجی در شکل ۴-۲۴ می‌کند. این کار با چه سرعتی اتفاق می‌افتد؟ مقاومت مسیر یعنی R برابر است با $\rho s/A$ و ثابت زمانی RC برابر است با $\rho/4\pi$. $(\rho s/A)(A/4\pi s) = \rho/4\pi$. مثلاً اگر گاز کم یونیدهٔ ما مقاومت 10^8 اهم سانتی‌متر داشته باشد، ثابت زمانی تخلیهٔ خازن در حدود 10^6 میکروثانیه خواهد بود. این ثابت زمانی ارتباطی به اندازه و شکل خازن ندارد.

آنچه در اینجا به دست می‌آوریم صرفاً ثابت زمانی واهلش یک میدان الکتریکی در یک محیط رسانا توسط توزیع مجدد بار است. ما در واقع برای توصیف این زمان نیازی به صفحه‌های خازن نداریم. فرض کنید که دو ورقهٔ دو ورقهٔ حامل بار، یکی با بار مثبت و یکی با بار منفی، مقابل هم وارد یک رسانا کنیم، مثلاً یک نیمرسانای نوع n (شکل ۴-۲۵ الف). چه چیزی این بارها را ناپدید

زمینهٔ خنثی از یونهای مثبت

به علاوهٔ حاملهای بار منفی متحرک



شکل ۴-۲۵ در یک محیط رسانا، اینجا یک نیمرسانای نوع n ، دو ورقهٔ ثابت باردار، یکی منفی و یکی مثبت، با حرکت ملایم کل حاملهای بار متحرک بین ورقه‌ها خنثی می‌شوند. (الف) قبل از حرکت دستهٔ بارهای منفی. (ب) بعد از اینکه چگالی کل بار در هر ورقه به صفر رسیده است.

خواهد کرد؟ آیا حاملهای بار منفی از ورقه سمت چپ راه می افتند، از فضای فاصله افتاده می گذرند و وقتی به صفحه سمت راست رسیدند بارهای مثبت را خنثی می کنند؟ حتماً خیر— اگر اوضاع این طور بود باید زمان لازم متناسب با فاصله بین ورقه ها می بود. به جایش این وضع را داریم: کل جمعیت حاملهای بار منفی که فاصله بین ورقه ها را پر می کند بر اثر میدان الکتریکی به حرکت در می آیند. تنها یک جابه جایی بسیار خفیف این ابر باردار کافی است که بار منفی اضافی سمت چپ را حرکت بدهد، و در سمت راست، بار منفی اضافی لازم برای خنثی کردن ورقه مثبت را تأمین کند (شکل ۴-۲۵ ب). به عبارت دیگر در داخل رسانا خنثی شدن از طریق تعدیل مختصر کل توزیع بار حاصل می شود نه حرکت طولانی چند حامل بار. به این دلیل است که زمان واهلش می تواند مستقل از اندازه دستگاه باشد. در فلزی با مقاومت نوعی 10^{-5} اهم سانتی متر، مقدار $\rho/4\pi$ در حدود 10^{-18} ثانیه است، این مرتبه بزرگی کوتاهتر از زمان آزاد میانگین یک الکترون رسانش در فلز است. هیچ معنی ندارد به چنین زمانی زمان واهلش بگوییم. نظریه ما، در حال حاضر، درباره رویدادهایی با مقیاس زمانی چنین کوتاه، چیزی برای گفتن ندارد.

مسائل

۱-۴ تعداد 5×10^{10} یون دو بار مثبت در هر cm^2 داریم که همگی با سرعت 10^7 cm/s به سمت غرب در حرکت اند. در همان ناحیه 10^{11} الکترون در هر cm^2 داریم که با سرعت 10^8 cm/s به سمت شمال شرقی حرکت می کنند. (نپرسید چطور ترتیب این کار را داده ایم!) جهت J را پیدا کنید؟ اندازه آن بر حسب esu/s cm^2 و بر حسب A/m^2 چقدر است؟

جواب: $48,8^\circ$ غرب جنوب، $10^9 \text{ esu/s cm}^2 \times 14,5$ ؛ $10^4 \text{ A/m}^2 \times 1,7$.

۲-۴ در یک سنکروترون الکترونی ۶ گیگا الکترون ولتی (GeV)، الکترونها یک مسیر تقریباً دایره ای به طور 240° متر را طی می کنند. معمولاً در هر دور شتابدهی 10^{11} الکترون در این مسیر گردش می کنند. سرعت الکترونها عملاً سرعت نور است. جریان چقدر است؟ این مسئله خیلی ساده را مطرح می کنیم که تأکید کرده باشیم در تعریف جریان به عنوان آهنگ انتقال بار هیچ لازم نیست سرعت حاملهای بار غیرنسبیتی باشد، و اینکه هیچ مانعی ندارد یک ذره باردار معین چندین بار در ثانیه به عنوان جزئی از جریان به حساب بیاید.

جواب: $20 \times 10^9 \text{ A}$.

۳-۴ در یک مولد الکتروستاتیک وان دوگراف، یک کمر بند لاستیکی به عرض 3° سانتی متر با سرعت 2° متر بر ثانیه حرکت می کند. به کمر بند از طریق غلتک پایینی بار سطحی داده می شود، چگالی بار سطحی آنقدر هست که در هر طرف کمر بند میدانی به اندازه 4° ایستاولت بر سانتی متر تولید کند. جریان چند میلی آمپر است؟

۴-۴ نخستین پیامهای تلگرافی که در سال ۱۸۵۸ از اقیانوس اطلس گذشت، از طریق کابلی به طول ۳۰۰۰ کیلومتر بین نیوفوندلند و ایرلند بود. رسانای داخل این کابل از هفت سیم مسی به قطر 73 mm تشکیل می‌شد که به هم بسته شده بودند و در یک غلاف عایق قرار داشتند.

(الف) مقاومت رسانا را حساب کنید. مقاومت ویژه مس را $10^{-6} \times 3$ اهم سانتی‌متر بگیریید که مربوط به مسی است که به خالص بودنش شک داشته باشیم.

(ب) مسیر برگشت جریان در خود اقیانوس بود. با فرض اینکه مقاومت ویژه آب دریا در حدود ۲۵ اهم سانتی‌متر است ببینید می‌توانید نشان دهید که مقاومت اقیانوس باید خیلی کمتر از مقاومت کابل بوده است؟

۵-۴ نشان دهید که مقدار نهایی بار در پیوندگاه دو ماده در شکل ۴-۶ برابر است با $(1/\sigma_2 - 1/\sigma_1)(I/4\pi)$ که در آن I جریان عبوری از پیوندگاه برحسب esu/s و رسانندگیهای σ_1 و σ_2 در دستگاه یکاهای CGS برحسب s^{-1} بیان می‌شوند.

۶-۴ سیمی از جنس قلع خالص را از درون حدیده‌ای می‌گذرانیم که قطر سیم را ۲۵ درصد کم می‌کند و طول سیم را افزایش می‌دهد. مقاومت سیم با چه ضریبی افزایش می‌یابد؟ بعد این سیم را با وردنه به صورت نواری پهن می‌کنیم که طولش باز هم بیشتر می‌شود، به طوری که بعد از این کار طول سیم دو برابر طول اولیه‌اش می‌شود. کل تغییر مقاومت چقدر است؟ فرض کنید در این میان چگالی و مقاومت ویژه ثابت مانده‌اند.

۷-۴ یک رسانای ورقه ورقه‌ای، تشکیل شده از لایه‌های نقره به ضخامت 10° آنگستروم و لایه‌های قلع به ضخامت 200 آنگستروم که یک در میان روی هم چیده شده‌اند. این ماده مرکب را در مقیاس بزرگ می‌توان ماده‌ای همگن ولی ناهمسانگرد در نظر گرفت که رسانندگی الکتریکی آن برای جریانهای عمود بر صفحه لایه‌ها σ_{\perp} و برای جریانهای موازی با این صفحه، مقدار متفاوت σ_{\parallel} است. با دانستن اینکه رسانندگی نقره 7.2 برابر رسانندگی قلع است، نسبت $\sigma_{\perp}/\sigma_{\parallel}$ را پیدا کنید.

جواب: 457 .

۸-۴ یک سیم مسی به طول ۱ کیلومتر به دو سر یک باتری ۶ ولتی متصل است. مقاومت ویژه مس $10^{-6} \times 1.7$ اهم سانتی‌متر و تعداد الکترونهای رسانش در هر سانتی‌متر مکعب 8×10^{22} است. سرعت رانش الکترونهای رسانش در این شرایط چقدر است؟ چقدر طول می‌کشد که یک الکترون یک بار در مدار گردش کند؟

۹-۴ در جو زمین معمولاً بیشترین چگالی الکترونهای آزاد (که توسط نور فرابنفش خورشید آزاد می‌شوند) 10^6 در هر cm^3 است. این چگالی در ارتفاع حدود 10° کیلومتری یافت می‌شود که در آن چگالی هوا آنقدر کم است که مسیر آزاد میانگین الکترون حدود 10 cm است. در دمای آنجا

سرعت متوسط الکترون 10^7 cm/s است. رسانندگی برحسب s^{-1} و برحسب $(\text{اهم سانتیمتر})^{-1}$ چقدر است؟

جواب: $2 \times 10^8 s^{-1}$, $2 \times 10^{-4} (\Omega \text{cm})^{-1}$

۱۰-۴ یونی در درون یک مایع چنان با مولکولهای خنثی محاصره می شود که اصلاً نمی شود حرف از "مسیر آزاد" بین برخوردها زد. با این حال جالب است ببینیم اگر رسانندگی آب خالص از جدول ۱-۴ به دست آید و مقادیر N_+ و N_- در هر cm^3 ، 10^{12} باشد، برای τ از معادله ۲۰ چه مقداری به دست می آوریم. سرعت گرمایی معمول برای مولکول آب $5 \times 10^4 \text{ cm/s}$ است. در این زمان τ یون چقدر می تواند جلو برود؟

جواب: $2.5 \times 10^{-8} \text{ cm}$

۱۱-۴ مقاومت ویژه آب دریا در حدود ۲۵ اهم سانتی متر است. حاملهای بار عمدتاً Na^+ و Cl^- هستند که تعداد هر کدام در هر cm^3 حدود 3×10^{20} تاست. اگر یک لوله پلاستیکی به طول ۲ متر از آب دریا پر کنیم و به دو سر آن الکترودهای یک باتری ۱۲ ولتی را وصل کنیم. سرعت رانش میانگین یونها برحسب cm/s چقدر است؟

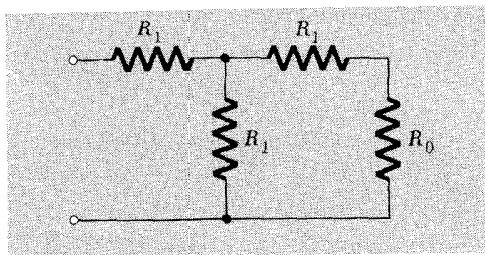
۱۲-۴ از شکلهای بخش ۴-۶ استفاده کنید و ببینید در دمای 500 K رسانندگی سیلیسیم خالص و چگالی حفره ها و الکترونها رسانش چقدر است و زمان آزاد میانگین بین برخوردها در این دما چقدر می شود. فرض کنید این زمان برای حفره و الکترون یکسان است.

۱۳-۴ در یک دیود پیوندی سیلیسیم ناحیه تخت پیوندگاه بین نیم رساناهای نوع n و نوع p را می توان به صورت تقریبی با دو ورقه بار متصل به هم، یکی مثبت و دیگری منفی، نشان داد. گذشته از پیوندگاه، خارج از این لایه های بار، پتانسیل ثابت است و مقدار آن برای ماده نوع n ، ϕ_n و در ماده نوع p ، ϕ_p است. با فرض اینکه اختلاف بین ϕ_p و ϕ_n ، 3 eV و ولت و ضخامت هر یک از ورقه های بار 1 cm و 10^{-6} باشد چگالی بار در هر یک از ورقه ها را پیدا کنید و نمودار ϕ برحسب موضع x را در پیوندگاه رسم کنید. شدت میدان الکتریکی در وسط صفحه چقدر است؟

۱۴-۴ به معادله ۲۰ و شکل ۱۰-۴ رجوع کنید. فرض کنید که $\tau_+ = \tau_-$ و $M_+ = M_- = m_e$ اگر از حضور 10^{15} الکترون در هر cm^3 نوار رسانش و همین تعداد حفره، رسانندگی $(\Omega \text{cm})^{-1}$ حاصل شود، مقدار زمان آزاد میانگین τ چقدر باید باشد؟ سرعت rms یک الکترون در دمای 500 K برابر است با $5 \times 10^7 \text{ cm/s}$. مسیر آزاد میانگین را با فاصله بین اتمهای سیلیسیم مجاور که $2.35 \times 10^{-8} \text{ cm}$ است مقایسه کنید.

۱۵-۴ فرض کنید که هر کدام از مقاومت های مدار سمت چپ شکل ۱۶-۴ مقدارشان 100 اهم است. مقدار تنها مقاومت معادل در دورترین نقطه سمت راست شکل چقدر است؟

۱۶-۴ در مدار شکل مقدار R_0 معین است. مقدار R_1 چقدر باید باشد تا مقاومت ورودی بین پایانه‌ها برابر R_0 شود.

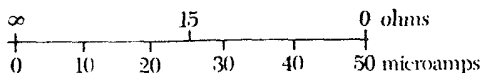


شکل مسئله ۱۶-۴.

۱۷-۴ اگر ولتاژ در پایانه‌های یک باتری اتومبیل با اتصال به یک مقاومت $5\ \Omega$ اهمی از 12.3 ولت به 9.8 ولت فرود آید. مقاومت داخلی چقدر است؟

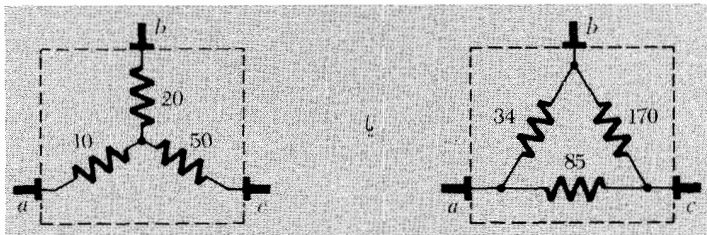
۱۸-۴ نشان دهید که اگر یک باتری با emf ثابت \mathcal{E} و مقاومت داخلی R_i به مقاومت متغیر خارجی R وصل شود، بیشینه توانی که به مقاومت خارجی داده می‌شود وقتی است که $R = R_i$.

۱۹-۴ میکروآمپرسنجی داریم که در انحراف کامل عقربه 50 میکروآمپر را می‌خواند و مقاومت پیچ آن 20 اهم است. با اضافه کردن دو مقاومت R_1 و R_2 و یک باتری 1.5 ولتی می‌توانید این وسیله را به یک اهم‌سنج تبدیل کنید. وقتی دو سر خروجی این اهم‌سنج را به هم وصل می‌کنیم عقربه به طور کامل منحرف می‌شود و مقاومت صفر را نشان می‌دهد. وقتی دو خروجی را به یک مقاومت مجهول R وصل کنیم، اگر مقیاس مناسبی انتخاب شده باشد، انحراف عقربه مقدار مقاومت را نشان خواهد داد. به خصوص می‌خواهیم نصف انحراف کامل عقربه معرف مقاومت 15 اهم باشد. مقدار R_1 و R_2 چقدر باید باشد؟ اتصالها چگونه باید باشند؟ و نشانه‌های مقیاس‌بندی اهم برای 5 اهم و 50 اهم (نسبت به درجه‌بندی قبلی میکروآمپرسنج) کجا باید واقع شوند؟



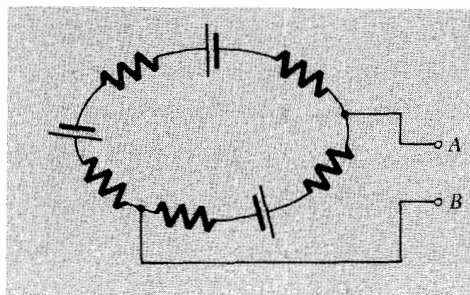
شکل مسئله ۱۹-۴.

۲۰-۴ جعبه سیاهی با سه پایانه a, b, c و فقط حاوی سه مقاومت و سیمهای اتصال است. با اندازه‌گیری مقاومت بین جفت پایانه‌ها می‌فهمیم که $R_{ab} = 30\Omega$ و $R_{ac} = 60\Omega$ و $R_{bc} = 70\Omega$. نشان دهید که محتوای جعبه می‌تواند هر کدام از مدارهای زیر باشد: آیا امکان دیگری هم هست؟ آیا دو جعبه کاملاً هم‌ارزند؟ یا اندازه‌گیری خارجی‌ای وجود دارد که آنها را از هم تشخیص دهد؟



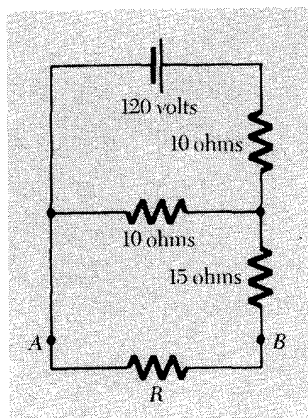
شکل مسئله ۲۰-۴.

۲۱-۴ در مدار شکل هر پنج مقاومت برابر 100Ω اهم و نیروی محرکه الکتریکی هر باتری برابر $1.5V$ ولت است. ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه برای پایانه‌های A و B را پیدا کنید. سپس \mathcal{E} و R_0 را برای مدار معادل تونن حساب کنید.



شکل مسئله ۲۱-۴.

۲۲-۴ مقاومت R باید بین دو پایانه A و B مدار شکل قرار بگیرد. برای چه مقدار R توان تلف شده در مقاومت بیشترین مقدار را دارد؟ برای پاسخ دادن به این سؤال مدار معادل تونن را طرح کنید و بعد از نتیجه مسئله ۱۸-۴ کمک بگیرید. چه مقدار توان در مقاومت R مصرف می‌شود؟



شکل مسئله ۲۲-۴.

۲۳-۴ فرض کنید ماده رسانا در شکل ۲۵-۴ سیلیسیم نوع n با 10^{15} الکترون در هر cm^3 نوار رسانش است. چگالی اولیه بار روی ورقه‌ها را طوری در نظر بگیرید که شدت میدان الکتریکی 1 stat V/cm باشد. توزیع بار حائل چقدر باید جابه‌جا شود تا مجدداً خنثایی حاصل شود و میدان الکتریکی به صفر برسد.

۲۴-۴ برای تشریح نکته‌ای که در اولین پانویست بخش ۷-۴ داشتیم جعبه سیاهی در نظر بگیرید که مکعبی تقریباً به ضلع 10 cm با دو اتصال خروجی است و هر کدام از این پایانه‌ها با سیمی به یک مدار خارجی وصل است. بجز این، جعبه مطلقاً منزوی است. جریانی به شدت تقریباً 1 آمپر از این جزء مدار می‌گذرد. حالا فرض کنید که جریان ورودی و جریان خروجی به اندازه یک قسمت در میلیون با هم اختلاف دارند. اگر اتفاق دیگری نیفتد چه مدت طول می‌کشد که پتانسیل جعبه 1000 ولت بالا برود؟

۲۵-۴ به مطلبی که درباره تخلیه خازن C در مقاومت R داشتیم برگردید و نشان دهید که انرژی تلف شده در مقاومت با انرژی که در اصل در خازن ذخیره شده جور درمی‌آید. فرض کنید کسی ایراد بگیرد که خازن هیچ‌وقت واقعاً خالی نمی‌شود چون Q فقط برای $t = \infty$ صفر است. چطور می‌توانید جوابش را بدهید؟ باید با فرضهای منطقی پیدا کنید چقدر طول می‌کشد که بار خازن به 1 الکترون برسد.

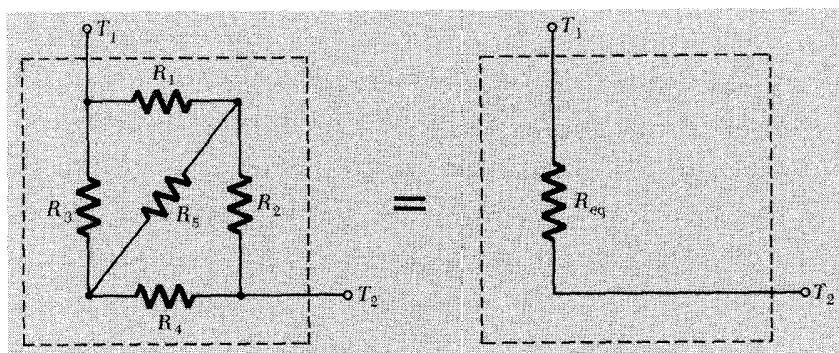
۲۶-۴ طول دو میله گرافیتی مساوی است. یکی استوانه‌ای به شعاع a است. دیگری مخروطی است که شعاع یک قاعده‌اش a است و کم‌کم باریک می‌شود تا شعاع قاعده دیگرش به b برسد. نشان دهید که مقاومت الکتریکی از یک قاعده تا قاعده دیگر میله مخروطی a/b برابر مقاومت

الکتریکی میله استوانه‌ای است. راهنمایی: فرض کنید میله از قرصهای نازکی تشکیل شده است که همه به صورت متوالی به هم متصل‌اند.

۲۷-۴ در این مسئله با مقاومت معادل R_{eq} بین پایانه‌های T_1 و T_2 شبکه با پنج مقاومت سروکار داریم. یک راه برای به دست آوردن فرمول R_{eq} این است که جریان I را که از T_1 وارد می‌شود برای اختلاف ولتاژ مفروض V بین T_1 و T_2 به دست بیاوریم؛ آنگاه داریم $R_{eq} = V/I$. حل مسئله از این راه مستلزم محاسبات جبری خسته‌کننده‌ای است که امکان اشتباه در آن هم زیاد است. بنابراین ما جواب را برایتان می‌نویسیم:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4 + R_5 (R_1 R_3 + R_2 R_4 + R_1 R_4)}{R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_3 R_4 + R_5 (R_1 R_2 R_3 + R_4)}$$

با در نظر گرفتن تقارن شبکه می‌توانید جمله‌های مجهول را بنویسید. حالا جواب را با محاسبه مستقیم R_{eq} در سه حالت خاص زیر امتحان کنید: (الف) $R_5 = 0$ ، (ب) $R_5 = \infty$ ، و (ج) $R_1 = R_3 = 0$ ، جوابهایتان را با آنچه از فرمول بالا به دست می‌آید مقایسه کنید.



شکل مسئله ۲۷-۴

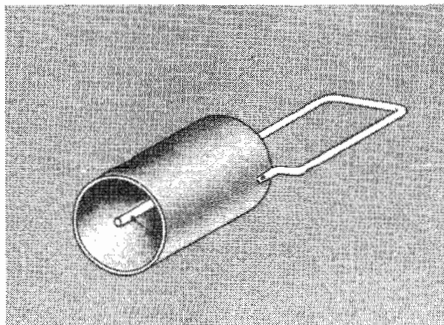
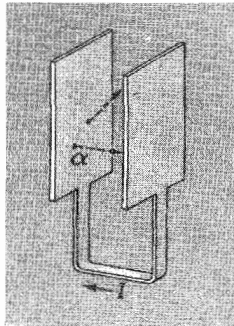
۲۸-۴ یک انباره ۱۲ ولتی اسیدسرب با ظرفیت ۲۰ آمپر ساعت دارای جرم ۱۰ kg است. (الف) وقتی این باتری خالی شود چند کیلوگرم سرب سولفات تشکیل می‌شود (وزن مولکولی $PbSO_4$ برابر ۳۰۳ است).

(ب) برای ذخیره انرژی حاصل از یک کیلوگرم بنزین با موتوری به کارایی ۲۰٪، چند کیلوگرم از این نوع باتریها لازم است؟ (گرمای احتراق بنزین: $45 \times 10^4 \text{ J/g}$).

۲۹-۴ پیل خشک ۱٫۵ ولتی معمولی که مصارف بی‌شماری دارد، انرژی خود را با اکسید کردن استوانه از جنس روی که قطب منفی آن است آزاد می‌کند، در همین حال منگنز دی‌اکسید MnO_2 در قطب مثبت به Mn_2O_3 تبدیل می‌شود. (این پیل را پیل کربن-روی می‌نامند اما میله کربن صرفاً رسانای داخلی است.) پیلی به اندازه D، با وزن ۹۰ گرم می‌تواند ۱۰۰ میلی‌آمپر جریان برای مدت تقریباً ۳۰ ساعت تأمین کند.

(الف) انرژی ذخیره شده این پیل را، برحسب کیلوگرم/ژول، با انرژی ذخیره شده باتری سرب-اسید در مسئله ۲۸-۴ مقایسه کنید. متأسفانه پیل قابل شارژ مجدد نیست.
 (ب) با یک جرقه‌یل دستی با کارایی ۵۰٪ که با پیل D کار می‌کند چقدر می‌توانید خودتان را بالا بکشید؟

۳۰-۴ نتیجه مسئله ۳-۲۴ به ما کمک می‌کند شارش جریان را در مدارهای که بخشی از آن از حرکت ذرات باردار در فضای بین دو الکترود تشکیل می‌شود، بفهمیم. پرسش این است که ماهیت جریان، وقتی فقط یک ذره این فضا را طی می‌کند، چیست؟ (اگر بتوانیم جوابش را پیدا کنیم، به آسانی می‌توانیم هر جریانی شامل تعداد بیشتری الکترون را که در هر زمان وارد می‌شوند توصیف کنیم.) مدار ساده شکل را در نظر بگیرید که از دو الکترود تشکیل شده است که در خلأ با سیم



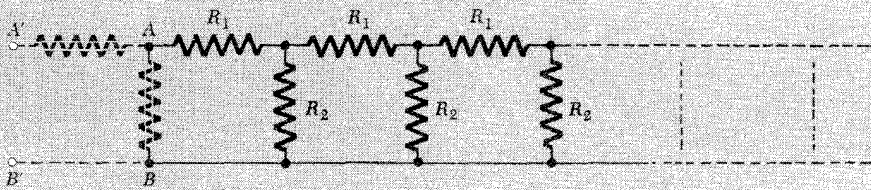
شکل مسئله ۳۰-۴.

کوتاهی به هم متصل‌اند. فرض کنید فاصله الکترودها 2 mm باشد. یک ذره آلفای نسبتاً کند به بار $2e$ از یک هسته پرتوزا در صفحه سمت چپ گسیل می‌شود. مستقیماً با سرعت ثابت 10^8 cm/s به طرف صفحه سمت راست می‌رود و روی این صفحه متوقف می‌شود. یک نمودار کمی جریان برحسب زمان برای جریان در سیم رابط رسم کنید. همین کار را برای یک ذره آلفا که فاصله بین دو صفحه را با همان سرعت اما با زاویه 45° نسبت به خط عمود طی می‌کند انجام دهید. (در واقع برای تپهایی به این کوتاهی القابندگی سیم رابط، که اینجا ندیده گرفته شده است، روی شکل تپ اثر می‌گذارد.) فرض کنید الکترودها استوانه‌ای باشند و ذره آلفا از سیم نازکی روی محور الکترود استوانه‌ای کوچک گسیل شود. آیا تپ جریان همان شکل را خواهد داشت؟

۴-۳۱ با یک علامت قراردادی \times به معنای "عبور بدون تماس دو سیم از روی هم" می‌توانیم هر شبکه‌ای را به صورت تخت رسم کنیم. فرض کنید مکعبی در هر یالش یک مقاومت دارد. در هر رأس سیمهای رابط سه مقاومت به هم لحیم شده‌اند. این شبکه را در یک نمودار مدار نشان بدهید. مقاومت معادل بین دو گره را که به صورت قطری دو رأس متقابل مکعب را به هم وصل می‌کنند؛ در حالتی که تمام مقاومتها مساوی R_0 باشد به دست بیورید. برای این کار لازم نیست چند دستگاه معادله را حل کنید، از تقارن استفاده کنید. حالا مقاومت معادل بین دو گره مربوط به دو سر قطر یک وجه مکعب را پیدا کنید. اینجا هم در نظر گرفتن تقارن مسئله را خیلی ساده می‌کند. در هر دوی این محاسبات، اگر به جای مدار تخت، طرحی از ساختار مکعبی مدار بکشید به شما کمک می‌کند تقارنهای لازم در جریانه‌ها را مشخص کنید.

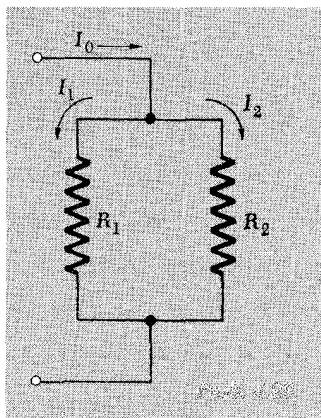
۴-۳۲ ابعاد بعضی از انواع مهم شبکه‌ها نامتناهی است، در شکل زنجیره‌ای از مقاومت‌های متوالی و موازی می‌بینیم که به طرف راست تا بینهایت ادامه دارند. خط پایینی سیم بدون مقاومتی برای برگشت جریان از تمام آنهاست. این شبکه را زنجیره تضعیف‌کننده یا شبکه نردبانی هم می‌گویند. مسئله پیدا کردن "مقاومت شبکه" یعنی مقاومت معادل بین پایانه‌های A و B است. در این مسئله عمدتاً روش حل مورد توجه ماست، که پیچ و خمهای عجیب و غریب دارد و در خیلی جاهای دیگر فیزیک هم که تکرار قطعات یکسان را داریم به درد می‌خورد (حتی در اپتیک، در زنجیره نامتناهی عدسیها). نکته اینجاست که مقاومت شبکه که هنوز آن را نمی‌دانیم — بگوییم R_0 — با اضافه شدن یک دسته مقاومت جدید به جلوی زنجیره که آن را یک واحد طولتر بکند، هیچ تغییری نخواهد کرد. اما حالا، با اضافه کردن این قسمت می‌بینیم که این مقاومت جدید صرفاً عبارت است از مقاومت R_1 به صورت سری با ترکیب موازی R_2 و R_0 . فوراً معادله‌ای به دست می‌آوریم که برای R_0 قابل حل است. نشان دهید که، اگر ولتاژ ورودی V_0 به چنین زنجیره‌ای اعمال شود، ولتاژ در گره‌های بعدی به صورت سری هندسی افت می‌کند. مقاومتها چه نسبتی باید داشته باشند تا این تضعیف‌کننده در هر مرحله ولتاژ را نصف کند؟ روشن است که یک نردبان

حقیقتاً نامتناهی عملی نیست. می‌توانید راهی پیشنهاد کنید که بعد از چند قسمت بدون وارد کردن خطایی در عمل تضعیف، مدار را به پایان برسانیم؟



شکل مسئله ۴-۳۲.

۳۳-۴ شکل دو مقاومت موازی به اندازه R_1 و R_2 را نشان می‌دهد. جریان I_0 یک جوری بین آنها تقسیم می‌شود. نشان دهید که شرط $I_1 + I_2 = I_0$ همراه با شرط کمینه اتلاف توان، به همان مقادیر جریانی می‌انجامد که از فرمولهای معمولی جریان به دست می‌آوریم. این مطلب یک کلی برای تغییرات جریان در شبکه‌های جریان مستقیم را بیان می‌کند: برای جریان ورودی مفروض I_0 ، توزیع جریانها در شبکه همیشه به‌گونه‌ای است که اتلاف توان کل را به حداقل برساند.



شکل مسئله ۴-۳۳.



میدانهای بارهای متحرک

۵-۱ از اورستد تا اینشتین

در زمستان سال ۱۸۱۹-۱۸۲۰ هانس کریستین اورستد در دانشگاه کپنهاگ به دانشجویان سال بالای الکتریسیته، گالوانیسم و مغناطیس درس می‌داد. درس الکتریسیته الکتروستاتیک بود؛ گالوانیسم مربوط به آثار جریانهای پیوسته باتریها یعنی بحثی بود که با کشف اتفاقی گالوانی و آزمایشهای بعدی ولتا باز شده بود؛ در مغناطیس دانستنیهای قدیمی درباره سنگهای مغناطیسی، عقربه‌های قطب‌نما، و میدان مغناطیسی زمین بحث می‌شد. برای بعضیها روشن بود که باید ارتباطی بین جریانهای گالوانی و بار الکتریکی وجود داشته باشد، هر چند جز این واقعیت که هر دوی اینها باعث شوک می‌شوند، کمتر دلیل مستقیمی برای این ادعا وجود داشت. از سوی دیگر ظاهر امر چنین بود که الکتریسیته و مغناطیس کاری به کار هم ندارند. با این حال اورستد تصویری، شاید مبهم، داشت که دست از سرش بر نمی‌داشت: اینکه مغناطیس مثل جریان گالوانی ممکن است "شکل پنهانی" از الکتریسیته باشد. در جستجوی نمودی از این شکل پنهانی او قبل از شروع کلاس آزمایشی انجام داد که در آن یک جریان گالوانی از سیمی بر روی عقربه قطب‌نما و عمود بر آن، می‌گذشت. هیچ اتفاقی نیفتاد. بعد از درس به صرافت افتاد آزمایش را با سیمی موازی عقربه

قطب‌نما انجام دهد. عقربه به سرعت منحرف شد، و وقتی جریان گالوانی معکوس شد عقربه هم در جهت مقابل چرخید!

در جامعه علمی زمینه چنین کشفی بیش از حد فراهم بود. خبر که به آزمایشگاههای دیگر رسید، توفانی از آزمایشها و کشفیات جدید بر پا شد، چیزی نگذشت که امپر، فاراده و دیگران توصیف اساساً کامل و دقیقی از رفتار مغناطیسی جریانهای الکتریکی ارائه کردند. اوج کشفیات فاراده، کشف القای الکترومغناطیسی، کمتر از ۱۲ سال بعد از آزمایش اورستد بود. از دو قرن پیش، وقتی کار عظیم ویلیام گیلبرت به نام مغناطیس^۱ در سال ۱۶۰۰ منتشر شد، دانش بشر از مغناطیس هیچ پیشرفتی نکرده بود. جدا از این کشفیات تجربی، نظریه کلاسیک الکترومغناطیس هم پیشرفت زیادی کرده بود. فرمولبندی ریاضی ماکسول از این نظریه، در سال ۱۸۸۸ با نشان دادن امواج الکترومغناطیسی هرتز با موفقیت تأیید شد.

ریشه‌های تاریخی نسبت خاص در الکترومغناطیس است. لورنتس با کشف الکترودینامیک بارهای متحرک خیلی به فرمولبندی نهایی اینشتین نزدیک شد. و عنوان مقاله مهم اینشتین در سال ۱۹۰۵ "نظریه نسبیت" نبود بلکه "الکترودینامیک اجسام متحرک" بود. امروز ما در اصل موضوعهای نسبیت و مفاهیم ضمنی آنها نظام وسیعی را می‌بینیم که نه فقط قانونهای الکترومغناطیس، بلکه تمام قانونهای فیزیکی را در بر می‌گیرد. انتظار داریم هر نظریه فیزیکی کاملی به لحاظ نسبیتی ناوردا باشد. یعنی در همه چارچوبهای مرجع لخت داستان یک جور تعریف شود. راستش را بخواهید خیلی قبل از اینکه اهمیت ناوردایی نسبیتی معلوم شود، فیزیک یک نظریه به لحاظ نسبیتی ناوردا داشت: نظریه الکترومغناطیس ماکسول. اینکه بدون یک نظریه کامل میدان الکترومغناطیسی هم می‌شد به نسبت خاص رسید یا نه البته پرسشی است که باید در تاریخ علم درباره‌اش بحث شود؛ شاید هم جوابش را نشود داد. ما فقط می‌توانیم بگویم تاریخ مسیر نسبتاً واضحی را نشان می‌دهد که از عقربه قطب‌نما اورستد شروع می‌شود و به اصل موضوعهای اینشتین می‌رسد.

با این همه، نسبیت نه شاخه‌ای از الکترومغناطیس است نه پیامد وجود نور. اصل اساسی نسبیت خاص، که تا به حال هیچ مشاهده‌ای آن را نقض نکرده است، هم‌ارزی چارچوبهای مرجعی است که نسبت به هم با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. در واقع، بدون اینکه اسمی از نور به میان بیاید هم می‌شود فرمولهای نسبیت خاص را فقط از اصل اساسی نسبیت خاص و این فرض که همه جهتهای فضایی هم‌ارزند، به دست آورد.^۱ ثابت جهانی c که در این فرمولها

1. De Magnete

۲. نگاه کنید به

N. David Mermin, "Relativity Without Light", *American Journal of Physics*, 52, 119 (1984).

به عنوان سرعت حدی ظاهر می شود مقداری است که یک ذره پر انرژی می تواند به آن نزدیک شود، اما هیچ وقت نمی تواند از آن فراتر برود. مقدار c را می توان با آزمایشی تحقیق کرد که نه نور و نه هر چیز دیگری (مثلاً نوترینو) که فکر می کنیم دقیقاً با همان سرعت حرکت کند، در آن دخیل باشد. به عبارت دیگر حتی اگر امواج الکترومغناطیسی وجود نداشتند هم نسبت خاص را داشتیم.

بعداً در همین فصل مسیر تاریخی از اورستد تا اینشتین را در جهت عکس طی می کنیم. نسبت خاص را مسلم فرض می کنیم و می بینیم یک دستگاه الکتروستاتیکی بار و میدان در یک چارچوب مرجع دیگر چطور به نظر می آید. به این ترتیب می توانیم نیروهایی را که بر بارهای الکتریکی متحرک وارد می شوند و نیز نیروهای بین جریانهای الکتریکی را پیدا کنیم. از این لحاظ، مغناطیس یک نمود نسبی الکتریسیته است.^۱ اما قبل از هر چیز، بعضی از پدیده هایی را که می خواهیم توضیح بدهیم، مرور می کنیم.

۲-۵ نیروهای مغناطیسی

اگر از دو سیم موازی جریانهای همسو بگذرد، یکدیگر را جذب می کنند. نیروی وارد بر واحد طول یکی از سیمها با فاصله بین سیمها نسبت عکس دارد (شکل ۱-۵ الف). با معکوس کردن جهت یکی از جریانها نیرو دافعه می شود. بنابراین دو قسمت سیم شکل ۱-۵ ب که هر دو بخشی از یک مدارند می خواهند از هم دور شوند. بین دو رشته جریان الکتریکی دائمی نوعی "کنش از دور" وجود دارد. به نظر می آید بار الکتریکی ساکن روی سطح سیم هیچ کاری با این نیرو ندارد. ممکن است از این بارها وجود داشته باشد و پتانسیل سیمها با هم فرق کند اما نیرویی که مورد نظر ماست که در آن کلی ترین قانون جمع سرعتها که با چارچوبهای مرجع لخت سازگار است نشان داده شده است باید به شکل

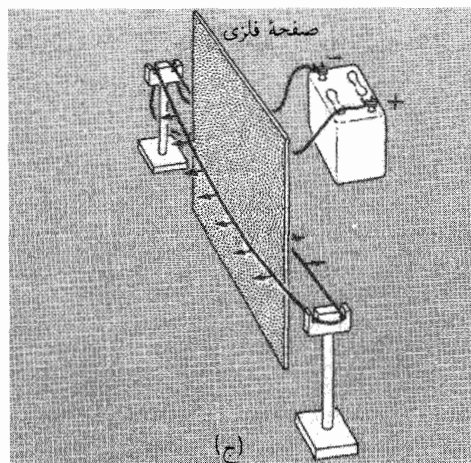
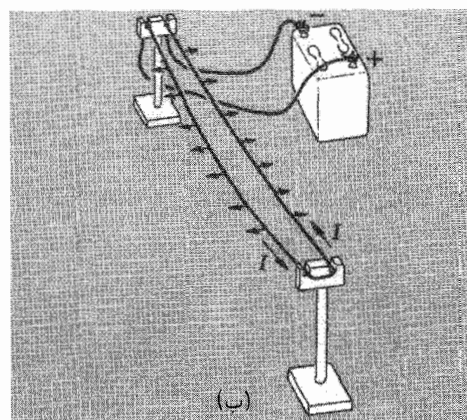
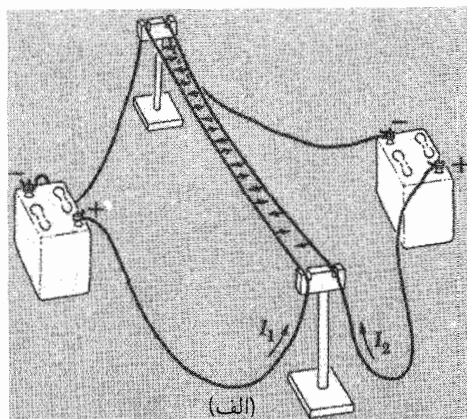
$$v = (v_1 + v_2) / (1 + v_1 v_2 / c^2)$$

این جهان، ما فقط باید سرعتهای کوچکتر v ، v_1 و v_2 را اندازه بگیریم. در مقاله مریمین به نتیجه های دیگر نسبت خاص هم که از اصل هم انرژی چارچوبها به دست می آید اشاره می شود.

۱. تا آنجا که من می دانم اولین شرح بر این رهیافت در مقاله ل. پیچ با مشخصات زیر آمده است.

"A Derivation of the Fundamental Relations of Electrodynamics from Those of Electrostatics, *American Journal of Science*, XXXIV:57 (1912).

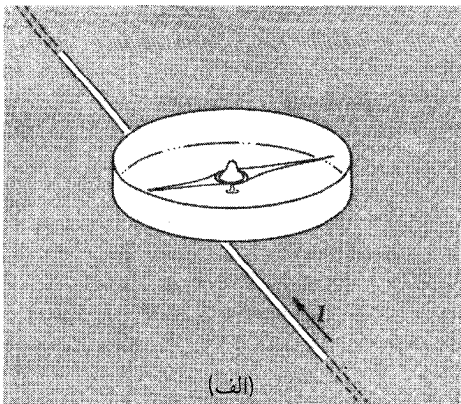
برای پیچ که فقط ۷ سال بعد از مقاله انقلابی اینشتین مقاله اش را نوشت، طبیعی بود که نسبت را بیشتر مستحق تأیید بدانند تا الکترودینامیک را. در جمع بندی مقاله او می خوانیم: "از دیدگاه دیگر، این واقعیت را، که توانسته ایم با اصل نسبیت رابطه های اساسی الکترودینامیک را از روابط الکتروستاتیک نتیجه بگیریم، می توان تأییدی بر اصل نسبیت دانست."



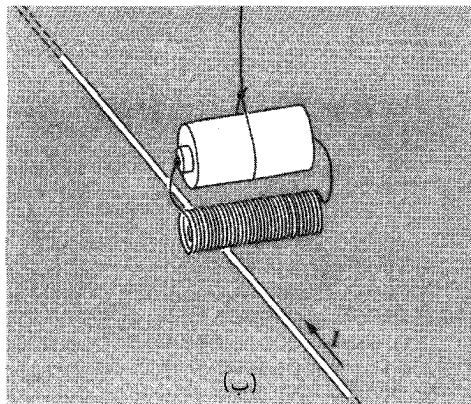
شکل ۱-۵ (الف) سیمهای موازی حامل جریانهای همسو به سمت هم کشیده می‌شوند. (ب) دو سیم موازی با جریانهای مخالف از هم دور می‌شوند. (ج) قرار دادن یک صفحه فلزی بین سیمها تأثیری بر نیروها ندارد.

فقط بستگی به حرکت بار در سیم، یعنی جریانها دارد. قرار دادن یک ورقه فلزی بین دو سیم، هیچ تأثیری بر این نیرو ندارد (شکل ۱-۵ ج). این نیروهای جدید که با حرکت بارها در کار می‌آیند نیروهای مغناطیسی نامیده می‌شود.

عقربه قطب‌نمای اورستد (شکل ۱-۵ الف) شباهت چندانی به مدار جریان مستقیم ندارد. اما حالا می‌دانیم، همان‌طور که امپرا اولین بار حدس زد، آهن مغناطیس شده پر از بارهای دائماً متحرک — یعنی جریان الکتریکی در مقیاس اتمی است. یک سیم پیچ کوچک همراه پیلای که جریان از آن به دست بیاید (شکل ۱-۵ ب) درست مثل عقربه قطب‌نمایی عمل می‌کند که تحت تأثیر جریانی در آن حول و حوش باشد.



(الف)



(ب)

شکل ۲-۵ یک عقربه قطب‌نما (الف) و یک سیم پیچ حامل جریان (ب) تحت تأثیر جریانی در یک رسانای نزدیک، یک جور رفتار می‌کنند. جهت جریان I جهت‌ی است که یونهای مثبت اگر حامل بودند در آن جهت حرکت می‌کردند. در میدان مغناطیسی زمین نیمه رنگین عقربه قطب‌نما رو به شمال است.

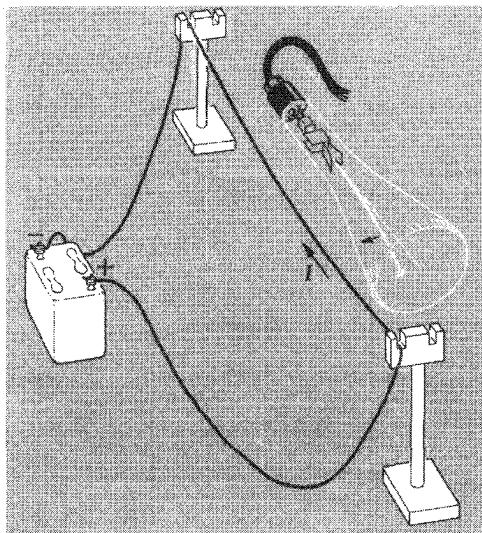
اگر به جای یک سیم حامل جریان، حرکت یک ذره باردار آزاد را در نظر بگیریم، می‌بینیم اتفاق مشابهی می‌افتد. در یک لامپ پرتو کاتدی الکترونها به جای اینکه در مسیر مستقیم حرکت کنند بسته به جهت جریان در سیم خارجی به سمت سیم یا در جهت دور شدن از آن منحرف می‌شوند (شکل ۳-۵). قبلاً با این پدیده در آزمایشگاه آشنا شده‌اید و می‌دانید که این برهم‌کنش جریانه‌ها و سایر بارهای متحرک را می‌شود با معرفی میدان مغناطیسی توصیف کرد. (یادتان هست که میدان الکتریکی راه ساده‌ای برای توصیف کنش از دور بین بارهای ساکن بود که در قانون کولن بیان شد.) می‌گوییم که به یک جریان الکتریکی یک میدان مغناطیسی وابسته است که فضای اطراف را پر می‌کند. به یک جریان دیگر، یا هر ذره باردار متحرکی که در این میدان واقع شود، نیرویی متناسب با شدت میدان مغناطیسی در آن محل وارد می‌شود. این نیرو برای یک ذره باردار همیشه عمود بر سرعت است. کل نیروی وارد بر ذره‌ای به بار q از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (۱)$$

که در آن \mathbf{B} میدان مغناطیسی است.^۱

۱. در اینجا ما برای اولین بار از ضرب برداری، یا ضرب خارجی دو بردار استفاده می‌کنیم. یادآوری: بردار $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ برداری است که هم بر \mathbf{v} و هم بر \mathbf{B} عمود است و بزرگی‌اش $vB \sin \theta$ است که θ زاویه بین راستاهای \mathbf{v} و \mathbf{B} است. جهت بردار $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ از قانون دست راست تعیین می‌شود. در مختصات دکارتی ما $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$ و داریم:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}(v_y B_z - v_z B_y) + \hat{\mathbf{y}}(v_z B_x - v_x B_z) + \hat{\mathbf{z}}(v_x B_y - v_y B_x)$$



شکل ۳-۵ مثالی از نیروی جاذبه بین دو جریان همسو. مقایسه کنید با شکل ۱-۵ الف. می‌توانیم این اثر را به منزله انحراف یک باریکه الکترون در یک میدان مغناطیسی تعبیر کنیم.

معادله ۱ را تعریفی برای B در نظر می‌گیریم. فعلاً گنجاندن ضریب $1/c$ در جمله دوم کاملاً اختیاری است، در این کار آزادیم چون هنوز یکایی برای B مشخص نکرده‌ایم. در ابتدای فصل بعد با بحث یکاها سروکار خواهیم داشت. آنچه عجلتاً مورد نظر ماست این است که شدت میدان مغناطیسی برداری است که بخش متناسب با سرعت را در نیروی وارد بر بار متحرک تعیین می‌کند. به عبارت دیگر دستور "بزرگی و جهت بردار B را در فلان نقطه تعیین کن" عملیات زیر را می‌طلبد: ذره‌ای با بار مفروض q در نظر بگیرید. نیروی وارد بر q را در حال سکون اندازه بگیرید تا E معین شود. بعد نیروی وارد بر ذره را وقتی سرعتش v است اندازه بگیرید؛ اندازه‌گیری را در یک جهت دیگر v تکرار کنید. حالا یک B پیدا کنید به طوری که همه این نتیجه‌ها در معادله ۱ صدق کنند؛ این B میدان مغناطیسی در نقطه مورد نظر است.

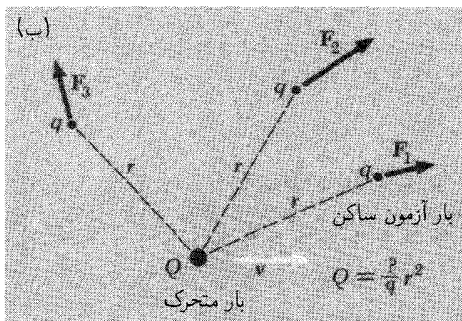
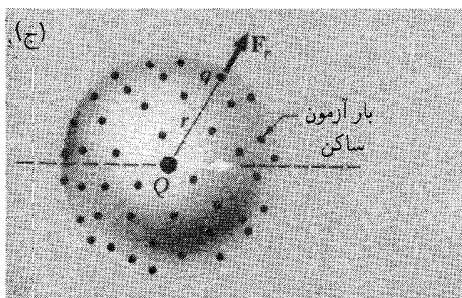
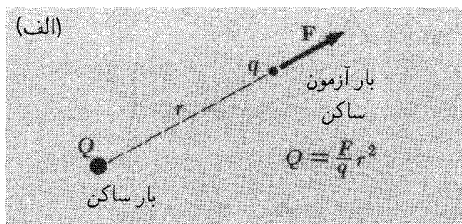
روشن است که به این ترتیب چیزی توضیح داده نمی‌شود. چرا باید معادله ۱ صادق باشد؟ چرا همیشه می‌توانیم یک B پیدا کنیم که برای همه سرعت‌های ممکن با این معادله ساده سازگار باشد؟ می‌خواهیم بدانیم چرا نیرویی متناسب با سرعت وجود دارد؟ واقعاً جای تأمل است که این نیرو اکیداً با v متناسب است و اثر میدان الکتریکی اصلاً بستگی به v ندارد؛ در صفحات بعد خواهیم دید چرا این‌طور است. آنجا معلوم می‌شود که اگر قرار باشد نیروهای بین بارهای الکتریکی تابع اصول نسبیت خاص باشند، باید یک میدان B با این خواص وجود داشته باشد. از این دیدگاه

نیروهای مغناطیسی یک نمود نسبیتی بار متحرک اند.

در پیوست الف مروری بر اندیشه‌های اساسی فرمولهای نسبیت خاص آمده است. حالا فرصت مناسبی است که نگاهی به آنها بیندازید.

۳-۵ اندازه‌گیری بار در حال حرکت

چطور می‌خواهیم مقدار بار الکتریکی یک ذره در حال حرکت را اندازه بگیریم؟ تا این سؤال به جایی نرسد، کاری به این نداریم که حرکت چه تأثیری بر خود بار دارد. بار را فقط از روی آثارش می‌شود اندازه‌گیری کرد. یک بار نقطه‌ای q در حال سکون را می‌توان از روی نیرویی که بر بار آزمون q در یک فاصله معین از آن وارد می‌کند، اندازه گرفت (شکل ۴-۵ الف). این اندازه‌گیری بر مبنای قانون کولن است. اما اگر باری که می‌خواهیم اندازه بگیریم در حال حرکت باشد، جای پای محکمی نداریم. حالا در فضا یک جهت به خصوص داریم، جهت لحظه‌ای حرکت. ممکن است نیروی وارد بر بار آزمون q ، همان‌طور که به فاصله بین دو بار بستگی دارد، به جهت Q تا q هم بستگی داشته باشد. برای مکانهای متفاوت بار آزمون (شکل ۴-۵ ب) نیروهای متفاوتی به دست



شکل ۴-۵ (الف) اندازه یک بار ساکن با نیروی وارد بر بار آزمون ساکن و قانون کولن تعیین می‌شود. (ب) در مورد بار متحرک، با توجه به اطلاعات فعلی ما، نیرو ممکن است به محل بار آزمون بستگی داشته باشد. در این صورت روش (الف) به کار نمی‌آید. (ج) در لحظه عبور Q از مرکز آزایی کروی بارهای آزمون، نیروی شعاعی وارد بر هر یک از بارها را اندازه بگیرید و مقدار میانگین F_r را برای تعیین Q به کار ببرید. این کار معادل اندازه‌گیری انتگرال سطحی \mathbf{E} است.

می‌آوریم. با قرار دادن این نیروها در قانون کولن مقادیر متفاوتی برای کمیت Q به دست می‌آید. به علاوه، ما هنوز مطمئن نیستیم که نیرو همیشه در جهت بردار شعاعی \mathbf{r} خواهد بود.

برای منظور کردن این احتمال، توافق می‌کنیم که Q را با میانگین‌گیری از تمام جهتها تعریف کنیم. فرض کنید تعداد زیادی بار آزمون بینهایت کوچک روی یک کره توزیع شده باشند (شکل ۵-۴ج). در لحظه‌ای که بار متحرک از مرکز کره می‌گذرد، مؤلفه شعاعی نیروی وارد بر هر بار آزمون را اندازه بگیرید، و میانگین این مقادیر نیرو را برای محاسبه Q به کار ببرید. این دقیقاً عملیاتی است که برای تعیین انتگرال سطحی میدان الکتریکی روی آن کره، در زمان t لازم است. در اینجا همه بارهای آزمون ساکن اند. یادتان هست که نیروی وارد بر واحد بار، بنا به تعریف، میدان الکتریکی در آن نقطه است. از این لحاظ به نظر می‌رسد قانون گاوس راه سر راست‌تری^۱ برای تعریف مقدار بار متحرک یا مقدار یک دسته بار متحرک است، تا قانون کولن. چنین تعریفی را به صورت زیر می‌توانیم بیان کنیم. مقدار بار الکتریکی در یک ناحیه با انتگرال سطحی میدان الکتریکی \mathbf{E} روی یک سطح بسته S ، که آن ناحیه را احاطه می‌کند، تعریف می‌شود. این سطح S در یک چارچوب مختصات F تثبیت شده است. میدان \mathbf{E} در هر نقطه (x, y, z) در زمان t در این چارچوب از طریق نیروی وارد بر بار آزمون در حال سکون در F در همان زمان و مکان اندازه‌گیری می‌شود. انتگرال سطحی باید برای یک زمان به خصوص t تعیین شود. یعنی مقادیر میدانی که به کار می‌رود آنهایی هستند که ناظران مستقر در تمام نقطه‌های سطح S همزمان اندازه می‌گیرند. (این هیچ اشکالی پیش نمی‌آورد، چون S در چارچوب F ساکن است.) این انتگرال سطحی روی S را در لحظه t به صورت زیر نشان می‌دهیم

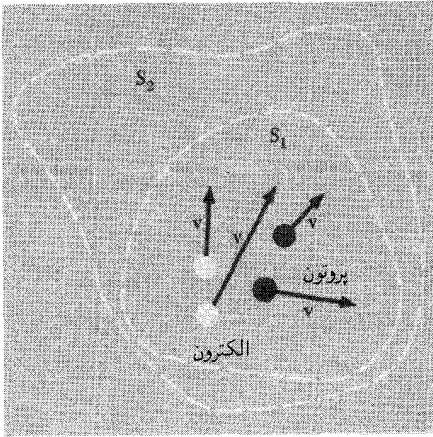
$$\int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (2)$$

مقدار بار داخل S را برابر با $1/4\pi$ این انتگرال تعریف می‌کنیم:

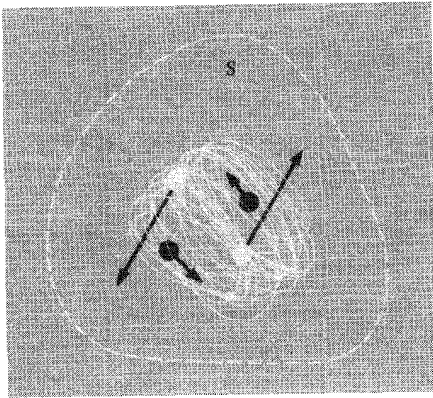
$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (3)$$

ناراحت می‌شدیم اگر مقدار Q که به این ترتیب تعیین می‌شود به اندازه و شکل سطح بستگی می‌داشت. مطابق قانون گاوس در مورد بار ساکن نباید این‌طور باشد. اما ما از کجا بدانیم که قانون گاوس برای بارهای متحرک هم صادق است؟ خوشبختانه هست. می‌توانیم به عنوان یک واقعیت تجربی قبولش کنیم. این خاصیت اساسی میدان الکتریکی بارهای متحرک به ما امکان می‌دهد

۱. این تنها راه ممکن نیست. مثلاً می‌توانید این قاعده اختیاری را بپذیرید که بار آزمون همیشه باید در مسیر مستقیم رو به جلو (در جهت حرکت) سر راه باری باشد که می‌خواهیم اندازه‌گیری کنیم. باری که این‌طور تعریف شود خصوصیات ساده‌ای را که ما درباره‌اش صحبت می‌کنیم ندارد و به این ترتیب نظریه شما پیچیده و پر دردسر از آب در می‌آید.



شکل ۵-۵ قانون گاوس برای میدان بارهای متحرک هم صادق است. شار E که از سطح S_2 عبور می‌کند برابر است با شار E از سطح S_1 که در همان لحظه حساب شده باشد.



شکل ۶-۵ آیا شار عبوری E از سطح S به حالت حرکت ذرات باردار بستگی دارد؟ آیا انتگرال سطحی E روی S مثل شکل ۵-۵ است؟ در اینجا ذرات، به صورت مولکول هیدروژن، به یکدیگر وابسته‌اند.

مقدار بار را با معادله ۳ تعریف کنیم. از این به بعد می‌توانیم درباره مقدار بار در یک ناحیه یا در مورد یک ذره صحبت کنیم، و این معنایی کاملاً معین دارد حتی اگر بار در حرکت باشد. همه این نکته‌ها در مثال شکل ۵-۵ خلاصه شده است. دو پروتون و دو الکترون در یک لحظه به‌خصوص در حال حرکت نشان داده شده‌اند. این یک واقعیت است که انتگرال سطحی میدان الکتریکی E روی سطح S_1 دقیقاً برابر است با انتگرال سطحی روی S_2 که در همان لحظه گرفته شده باشد، و ما، همان‌طور که در الکتروستاتیک از قانون گاوس استفاده می‌کردیم، از این انتگرال برای تعیین بار کل داخل سطح استفاده می‌کنیم. در شکل ۶-۵ یک پرسش تازه مطرح می‌شود. اگر ذرات یکسان سرعت‌های متفاوت داشتند چطور؟ مثلاً فرض کنید دو پروتون و دو الکترون با هم یک مولکول هیدروژن تشکیل بدهند. آیا بار کل دقیقاً همان خواهد بود که قبل از تشکیل هیدروژن بود؟

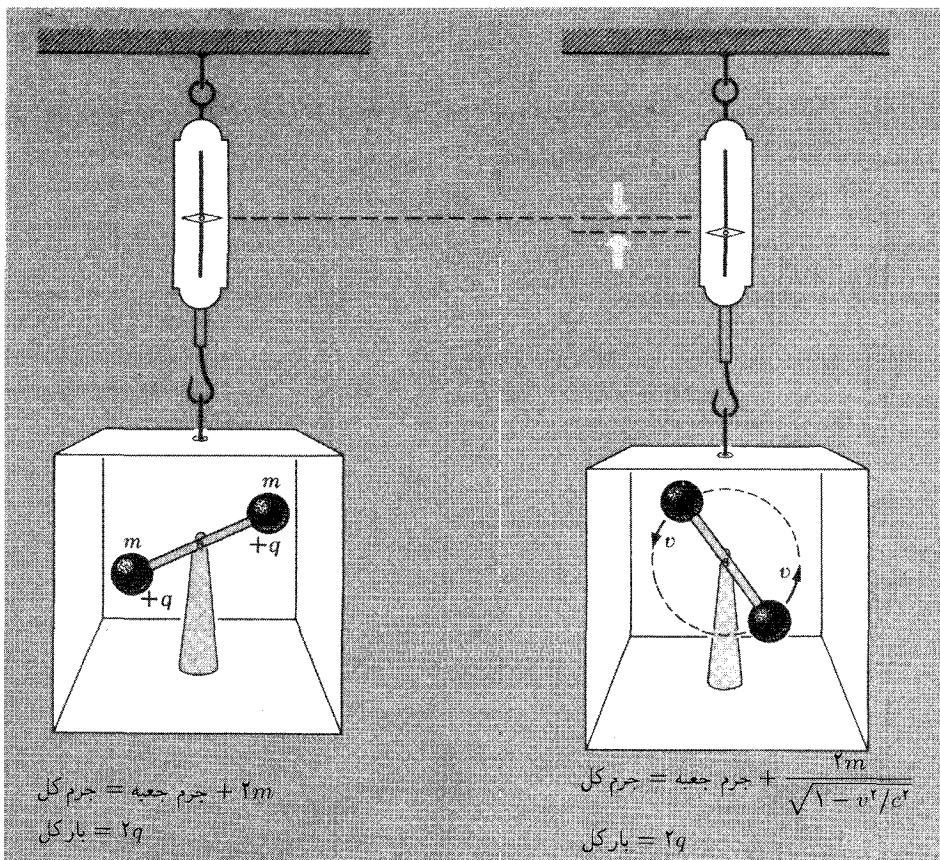
۴-۵ ناوردایی بار

شواهد تجربی قاطعی وجود دارند دال بر اینکه بار کل یک دستگاه با حرکت حاملهای بار تغییری نمی‌کند. ما آنقدر عادت کرده‌ایم این فرض را مسلم بدانیم که به‌ندرت به این فکر می‌افتیم که این واقعیت چقدر قابل تأمل و اساسی است. برای اثبات، می‌توانیم به خنثی بودن کامل اتمها و مولکولها به لحاظ الکتریکی اشاره کنیم. در فصل ۱ آزمون تجربی خنثایی مولکول هیدروژن را توصیف کردیم، و ثابت کردیم که اندازه بار الکتریکی پروتون و الکترون با دقت بیش از ۱ در $۱۰^{۲۰}$ مساوی است. همین آزمایش برای اتمهای هلیوم انجام شد. اتم هلیوم دو پروتون و دو الکترون دارد یعنی همان ذرات بارداری که مولکول هیدروژن را می‌سازند. در اتم هلیوم حرکت این ذرات با اتم هیدروژن خیلی فرق می‌کند. مخصوصاً پروتونها، به جای اینکه با فاصله ۷ره آنگستروم به‌کندی بچرخند، در هسته هلیوم محکم به هم چسبیده‌اند و انرژی جنبشی حرکتشان از مرتبه ۱ میلیون الکترون‌ولت است. اگر حرکت کوچکترین تأثیری بر مقدار بار می‌داشت، نمی‌توانستیم هم در مولکول هیدروژن و هم در اتم هلیوم خنثایی دقیق بارهای الکترونها و هسته را داشته باشیم. در واقع نشان داده می‌شود که اتم هلیوم هم با همین دقت تجربی خنثی است.

دلیل دیگر با بررسی طیف ایتیکی ایزوتوپهای یک عنصر به‌دست می‌آید، یعنی اتمهایی که جرم هسته‌هایشان متفاوت است اما بار هسته‌ها، لااقل اسماً، یکسان است. اینجا هم حرکت پروتونها در داخل هسته‌ها تفاوت بارزی دارد اما مقایسه خطهای طیفی دو نمونه هیچ تفاوتی نشان نمی‌دهد که بشود آن را به یک اختلاف ولو جزئی در بار کل هسته‌ها نسبت داد.

جرم به این معنا ناوردا نیست. می‌دانیم که جرم یک ذره بر اثر حرکت با ضریب $1/(1-v^2/c^2)^{1/2}$ تغییر می‌کند. برای تأکید بر این تفاوت، در شکل ۵-۷ یک آزمایش خیالی نشان داده‌ایم. در جعبه سمت راست دو ذره باردار سنگین به دو انتهای میله‌ای که روی محوری قرار گرفته است متصل‌اند و با سرعت ثابت v می‌چرخند. جرم کل در سمت راست بیشتر از جرم در سمت چپ است و این موضوع را با وزن کردن جعبه با ترازوی فنردار یا اندازه‌گیری نیروی لازم برای شتاب دادن آن می‌توان نشان داد.^۱ اما بار الکتریکی کل تغییری نمی‌کند. آزمایشی واقعی معادل با این آزمایش می‌توان ترتیب داد که در آن یک طیف‌نگار جرمی به‌وضوح اختلاف جرم بین یک مولکول دوتریم یونیده (دو پروتون، دو نوترون، یک الکترون) و یک اتم هلیوم یونیده (آن هم با دو پروتون، دو نوترون و یک الکترون) را نشان بدهد. این دو مولکول ساختارهای بسیار متفاوتی دارند که در آن ذرات تشکیل‌دهنده مولکول با سرعتهای بسیار متفاوت می‌چرخند. تفاوت انرژی به‌صورت تفاوت قابل

۱. اختلاف جرم نه تنها به انرژی جنبشی ذرات بلکه به هر تغییری در انرژی پتانسیل هم بستگی دارد، از جمله به کرنش کشسان میله‌ای که ذرات را نگه می‌دارد. اگر میله نسبتاً سخت باشد، این سهم در مقایسه با جمله v^2/c^2 کوچک است. ببینید می‌توانید دلیلش را نشان بدهید.

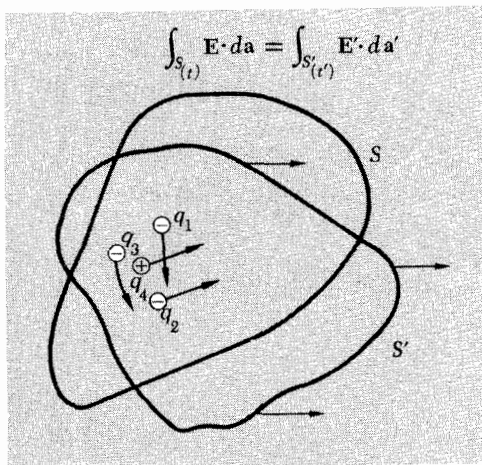


شکل ۷-۵ یک آزمایش خیالی برای نشان دادن ناوردایی بار. بار داخل جعبه را می‌توان با اندازه‌گیری میدان الکتریکی اطراف جعبه، و یا اندازه‌گیری نیروی وارد بر یک بار آزمون دور به دست آورد.

سنجشی در جرم مشهود است. اما در بار الکتریکی دو یون، تا دقت بسیار زیاد، کوچکترین تفاوتی آشکار نمی‌شود.

این ناوردایی بار معنای خاصی به کوانتش بار می‌بخشد. در فصل ۱ ابراهیمیت — رمز — این واقعیت تأکید کردیم که بار هر ذره بنیادی برابر با بار ذره بنیادی دیگری از همان نوع است. حالا می‌بینیم که این برابری دقیق نه فقط در مورد ذراتی که نسبت به هم ساکن‌اند، بلکه در مورد ذراتی که هر حرکتی نسبت به هم داشته باشند نیز صادق است.

آزمایشهایی که توصیف کردیم، و خیلی آزمایشهای دیگر، نشان می‌دهند که مقدار انتگرال سطحی قانون گاوس ما، $\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ ، تنها به تعداد دو نوع ذرات باردار داخل سطح S بستگی



شکل ۵-۸ انتگرال سطحی \mathbf{E} روی S برابر است با انتگرال \mathbf{E}' روی S' . بار در همهٔ چارچوبهای مرجع یکسان است.

دارد نه به چگونگی حرکت آنها. مطابق اصل نسبیت چنین حکمی اگر در یک چارچوب لخت صادق باشد باید در هر چارچوب لخت صادق باشد. بنابراین اگر F' چارچوب لخت دیگری باشد که نسبت به F حرکت می‌کند، و اگر S' سطح بسته‌ای در آن چارچوب باشد که در لحظهٔ t همان باری را احاطه می‌کند که سطح S در لحظهٔ t ، باید داشته باشیم

$$\int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S'(t')} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{a}' \quad (4)$$

البته \mathbf{E}' در F' اندازه‌گیری می‌شود، یعنی با نیروی وارد بر بار آزمون ساکن در F' . تفاوت بین t و t' را نباید از نظر دور داشت. همان‌طور که می‌دانیم رویدادهایی که در F همزمان‌اند، لازم نیست در F' همزمان باشند. هر یک از انتگرالهای سطح در معادلهٔ ۴ باید در لحظه‌ای در چارچوب خودشان محاسبه شوند. اگر بارها روی کرانهٔ S یا S' واقع باشند، باید تحقیق کرد که بارهایی که در لحظهٔ t داخل S هستند همانهایی‌اند که در لحظهٔ t' داخل S' هستند. اگر مطابق شکل ۵-۸ بارها کاملاً جدا از کرانه باشند، که ما برای تشریح معادلهٔ ۴ این حالت را در نظر داریم، هیچ مشکلی پیش نمی‌آید.

معادلهٔ ۴ بیان صوری نوردایی نسبیتی بار است. می‌توانیم سطح گاوسی‌مان را در هر چارچوب لختی انتخاب کنیم؛ جواب انتگرال سطح، مستقل از چارچوب خواهد بود. نوردایی بار همان پایستگی بار نیست که در فصل ۴ صحبتش را کردیم و به صورت ریاضی با رابطهٔ زیر نشان دادیم

$$\text{div } \mathbf{J} = \frac{-\partial \rho}{\partial t}$$

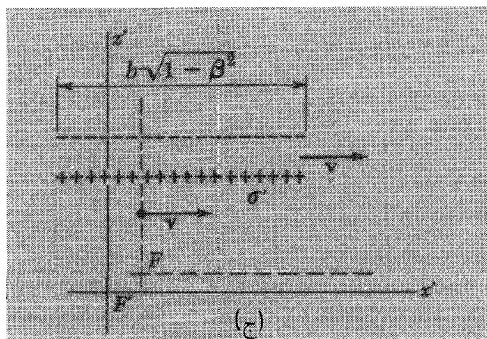
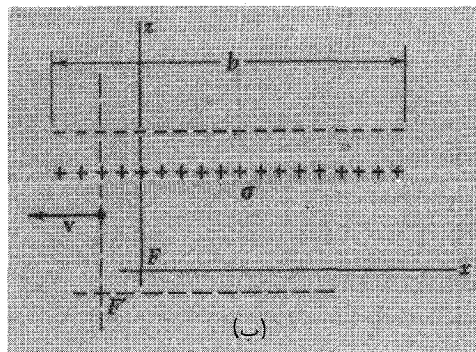
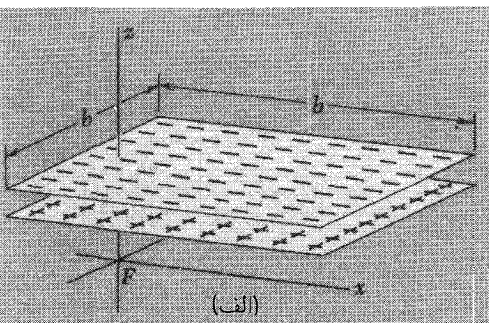
پایستگی بار ایجاب می‌کند که اگر سطح بسته‌ای در یک دستگاه مختصات حاوی مقداری بار باشد، و اگر هیچ ذره‌ای از مرز سطح نگذرد، آنگاه باید بار کل داخل سطح ثابت باشد. ناوردایی بار ایجاب می‌کند که اگر از چارچوب مرجع دیگری به این مجموعه سطح و بار نگاه کنیم، دقیقاً همان مقدار بار را اندازه‌گیری کنیم. انرژی پایسته است، اما انرژی یک ناوردای نسبیتی نیست. بار پایسته است، اما بار یک ناوردای نسبیتی هم هست. به زبان نسبیت، انرژی یکی از مؤلفه‌های یک چار بردار است، در حالی که بار یک کمیت زده‌ای است که یک عدد ناوردای نسبت به تبدیل لورنتس است. این واقعیت عینی با پیامدهای مهم است که به‌طور کامل سرشت میدان بارهای متحرک را تعیین می‌کند.

۵-۵ میدان الکتریکی اندازه‌گیری شده در چارچوب مرجعهای متفاوت

اگر قرار باشد بار تحت تبدیل لورنتس ناوردای باشد، میدان الکتریکی \mathbf{E} باید به نحو خاصی تغییر کند “تبدیل \mathbf{E} ” به معنای پاسخ به این پرسش است: اگر ناظری در چارچوب لخت معین F اندازه میدان الکتریکی \mathbf{E} را در نقطه معینی از فضا زمان، فلان مقدار statV/cm به دست بیاورد، ناظر دیگری در همان نقطه در یک چارچوب لخت دیگر F' چه میدانی به دست خواهد آورد؟ برای رده معینی از میدانها، این پرسش را با کاربرد قانون گاوس در دستگاههای ساده می‌توانیم پاسخ بدهیم.

در چارچوب F (شکل ۹-۵ الف) دو ورقه ساکن با چگالی بار یکنواخت σ و $-\sigma$ برحسب esu/cm^2 داریم. این ورقه‌ها مربعهایی به ضلع b سانتی‌متر هستند که موازی با صفحه xy قرار گرفته‌اند و فاصله بین آنها در مقایسه با ابعادشان آنقدر کوچک است که می‌توان میدان بین آنها را یکنواخت در نظر گرفت. اندازه این میدان از دید ناظری در چارچوب F ، دقیقاً $4\pi\sigma$ است. حالا یک چارچوب لخت F' در نظر بگیرید که نسبت به F با سرعت v به سمت چپ حرکت می‌کند برای ناظری در F' ، “مربع”های باردار دیگر مربع نیستند. بعد x' آنها از مقدار b به مقدار $b\sqrt{1-\beta^2}$ انقباض یافته، که β طبق معمول نسبت v/c است. اما بار کل ناورداست، یعنی مستقل از چارچوب مرجع است، بنابراین چگالی باری که در F' اندازه‌گیری می‌شود باید به نسبت γ یعنی $1/\sqrt{1-\beta^2}$ بزرگتر از σ باشد. شکل ۹-۵ مقطع دستگاه را در F (ب) و در F' (ج) نشان می‌دهد. اگر همه دانش ما درباره میدان الکتریکی بارهای متحرک معادله ۴ باشد، درباره میدان الکتریکی در F' چه می‌توانیم بگوییم؟

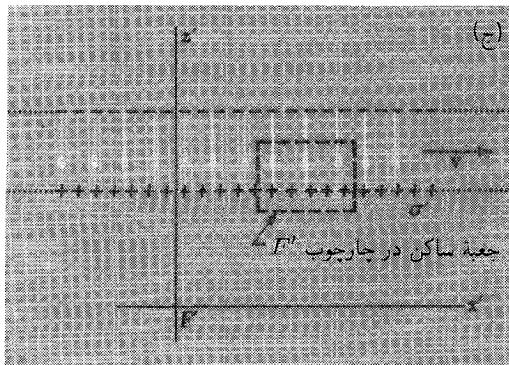
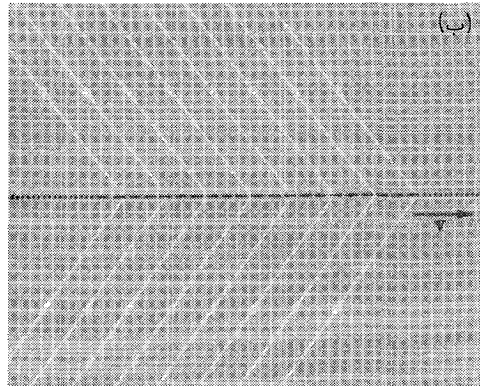
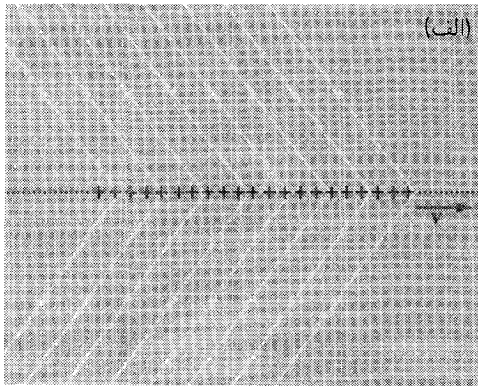
به یک دلیل می‌توانیم خاطر جمع باشیم که میدان الکتریکی در خارج از این ورقه‌ها صفر و در بین آنها یکنواخت است، لافل در حد وقتی که ابعاد ورقه‌ها بینهایت شود، این‌طور است. میدان یک ورقه نامتناهی با بار یکنواخت نه به فاصله از ورقه بستگی دارد و نه به مکان نقطه در ورقه.



شکل ۹-۵ (الف) دو ورقهٔ مربعی با چگالی بار $+\sigma$ و $-\sigma$ در یک چارچوب لخت F ساکن‌اند. (ب) نمای مقطعی در چارچوب F . F' چارچوب دیگری است که نسبت به F در جهت $-\hat{x}$ حرکت می‌کند. (ج) مقطع ورقه‌های بار در چارچوب F' . ورقهٔ کوتاه‌تر حامل همان مقدار بار است، بنابراین چگالی بار بیشتر است: $\sigma' = \gamma\sigma$.

در این دستگاه هیچ چیز نیست که مکانی را در ورقه مشخص کند. اما با توجه به آنچه در حال حاضر می‌دانیم، میدان یک ورقهٔ متحرک با بار مثبت ممکن است مثل شکل ۹-۵ (الف) باشد. اما اگر هم این‌طور باشد، میدان ورقهٔ متحرکی با بار منفی با همان سرعت، به شکل ۹-۵ (ب) خواهد بود و از برهم‌نهی این دو میدان در خارج از ورقه‌های باردار، میدان صفر و بین آنها یک میدان یکنواخت عمود به صورت شکل ۹-۵ (ج) به دست می‌آید (در واقع، چنانکه هم اکنون ثابت خواهیم کرد، میدان یک ورقهٔ باردار متحرک در صفحهٔ خودش عمود بر ورقه است، برخلاف میدانهای فرضی شکلهای ۹-۵ (الف) و ۹-۵ (ب)).

می‌توانیم قانون گاوس را به جعبه‌ای که در چارچوب F' ساکن است، جعبه‌ای که مقطع آن در شکل ۹-۵ (ج) نشان داده شده است، اعمال کنیم. محتوای بار جعبه با σ' تعیین می‌شود و میدان خارج ورقه‌ها صفر است. بنابر قانون گاوس اندازهٔ E'_z که تنها مؤلفهٔ میدان داخلی است باید

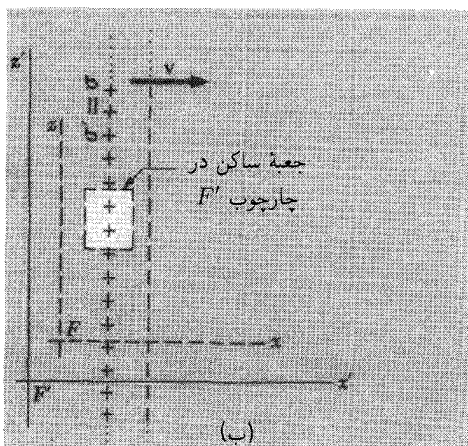
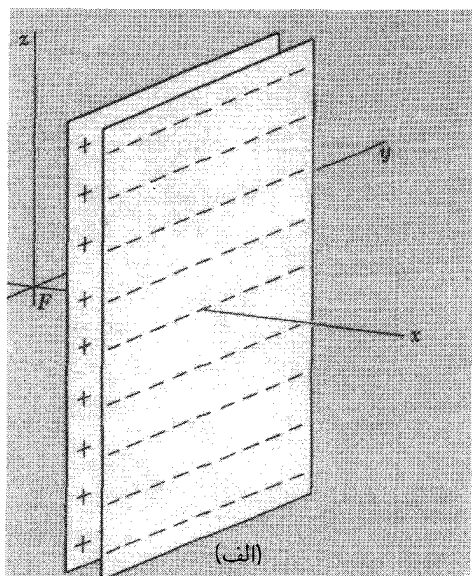


شکل ۱۰-۵ (الف) شاید میدان یک ورقه متحرک با بار مثبت این طور باشند (واقعاً نیست، اما ما هنوز تحقیق نکرده ایم). (ب) اگر میدان ورقه مثبت مثل شکل ۱۰-۵ (الف) باشد، میدان ورقه ای با بار منفی این طور خواهد بود. (ج) برهم نهی میدانهای ورقه های مثبت و منفی نظیر این خواهد بود، حتی اگر شکل ۱۰-۵ (الف) و ب درست باشد.

$4\pi\sigma'$ باشد یا $4\pi\sigma/\sqrt{1-\beta^2}$.

$$E'_z = \frac{E_z}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma E_z \quad (5)$$

اکنون فرض کنید اوضاع جور دیگری باشد و ورقه های باردار ساکن در چارجوب F' مطابق شکل ۱۱-۵ عمود بر محور x قرار گرفته باشند. حالا ناظری که در F' است میدانی در جهت x به اندازه $E_x = 4\pi\sigma$ گزارش می کند. در این مورد، چگالی بار سطحی برای ناظری در F' همان است که ناظر در F مشاهده می کند. ورقه ها منقبض نمی شوند، فقط فاصله بین آنها منقبض



شکل ۱۱-۵ میدان الکتریکی در یک چارچوب مرجع دیگر (با سرعت موازی با میدان). (الف) در چارچوب F . (ب) نمای مقطعی در چارچوب مرجع F' .

می‌شود که آن هم در تعیین میدان نقشی ندارد. این بار با اعمال قانون گاوس بر جعبه ساکن در F' داریم:

$$E'_x = \epsilon \pi \sigma' = \epsilon \pi \sigma = E_x \quad (۶)$$

همه آنها برای آرایش ساده‌ای از بارها که اینجا تصویر شد، خوب است؛ اما آیا نتیجه‌ای که به دست آوردیم اعتبار کلی‌تری دارد؟ این پرسش ما را به کنه معنای میدان می‌برد. اگر قرار است میدان الکتریکی E در نقطه‌ای از فضا زمان معنایی یکتا داشته باشد، نحوه ظاهر شدن E در چارچوب مرجعهای دیگر در همان حوالی از فضا زمان، نباید به سرشت چشمه‌های میدان E ، هر جا که باشند، بستگی داشته باشد. به عبارت دیگر، ناظری که در F است با اندازه‌گیری میدان اطراف خودش در یک زمان معین، باید بتواند تنها از روی این اندازه‌گیری نتیجه‌ای را که ناظرهایی در چارچوبهای دیگر در همین نقطه از فضا زمان به دست می‌آورند، پیشگویی کند. اگر چنین نباشد، میدان مفهوم بیهوده‌ای خواهد بود. گواه اینکه چنین است، سازگاری نظریه میدان ما با تجربه است. با توجه به این مطالب، معادله‌های ۵ و ۶ اهمیتی فراتر از مورد به‌خصوص ورقه‌های باردار

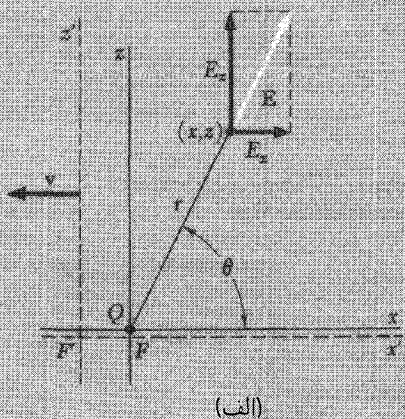
موازی پیدا می‌کنند. هر توزیع باری که می‌خواهید، در نظر بگیرید. به طوری که تمام قسمتهایش نسبت به چارچوب F ساکن باشند. اگر ناظری در F اندازه میدان در جهت z را E_z به دست بیاورد، ناظر دیگری در چارچوب F' برای همان نقطه از فضا زمان میدان $E'_z = \gamma E_z$ را گزارش خواهد کرد. یعنی، در اندازه‌گیری E'_z خودش عددی به دست می‌آورد که γ برابر عددی است که ناظر چارچوب F در اندازه‌گیری E_z خودش به دست آورده است. از سوی دیگر، اگر ناظری که در F است در جهت x میدان E_x را اندازه بگیرد، که جهت سرعت F' نسبت به F است، ناظری که در F' است میدان E'_x را برابر با E_x گزارش خواهد کرد. بدیهی است که جهت‌های y و z معادل‌اند و هر دو عمود بر سرعت v هستند. هر چه درباره E'_z گفته‌ایم در مورد E'_y هم صادق است. جهت E در چارچوب F هر چه باشد، می‌توانیم آن را برهم‌نهمی از میدانهای در جهت x و y و z تلقی کنیم، و از تبدیل هر یک از اینها بردار میدان E' در همان نقطه در F' را پیشگویی کنیم. این مطالب را به صورتی که درباره حرکت در هر جهتی مناسب باشد خلاصه می‌کنیم: بارهای ساکن در چارچوب F یک میدان E تولید می‌کنند. فرض کنید چارچوب F' با سرعت v نسبت به F حرکت می‌کند. در هر نقطه در F ، E را به یک مؤلفه طولی $E_{||}$ موازی با v و یک مؤلفه عرضی E_{\perp} عمود بر راستای v تجزیه کنید. در همان نقطه از فضا زمان در F' ، میدان E' باید به مؤلفه‌های $E'_{||}$ و E'_{\perp} تجزیه شود، $E'_{||}$ موازی با v و E'_{\perp} عمود بر آن، حالا آموخته‌ایم که

$$\begin{aligned} E'_{||} &= E_{||} \\ E'_{\perp} &= \gamma E_{\perp} \end{aligned} \quad (7)$$

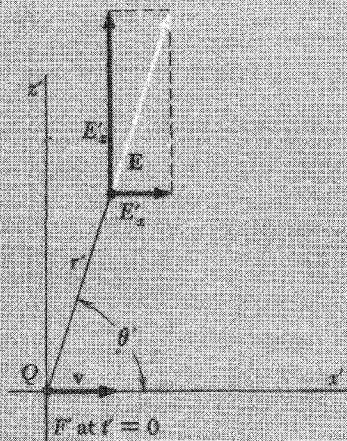
نتیجه ما فقط برای میدانهای ناشی از بارهای ساکن در F معتبر است. چنانکه خواهیم دید، اگر بارها در چارچوب F حرکت داشته باشند، برای پیشگویی میدان الکتریکی در F' دانستن دو میدان در F لازم است، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی. اما ما قبلاً نتیجه مفیدی به دست آورده‌ایم که هر وقت بتوانیم چارچوب مرجع لختی پیدا کنیم که همه بارها در آن ساکن باشند، برای ما کافی است. حالا می‌خواهیم از این نتیجه برای مطالعه میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای که با سرعت ثابت حرکت می‌کند، استفاده کنیم.

۵-۶ میدان یک بار نقطه‌ای که با سرعت ثابت حرکت می‌کند

بار نقطه‌ای Q در چارچوب F در مبدأ ساکن است (شکل ۵-۱۲ الف). مقدار میدان الکتریکی E در همه نقطه‌ها Q/r^2 است و جهت آن شعاعی و رو به بیرون است. در صفحه xy مؤلفه‌های



(الف)



(ب)

شکل ۱۲-۵ میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای (الف) در چارچوبی که بار در آن ساکن است و (ب) در چارچوبی که بار در آن با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

میدان در هر نقطه (x, y) عبارت‌اند از:

$$E_x = \frac{Q}{r^2} \cos \theta = \frac{Qx}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{Q}{r^2} \sin \theta = \frac{Qz}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \quad (۸)$$

چارچوب دیگری مانند F' در نظر بگیرید که نسبت به F در جهت x منفی با سرعت v حرکت می‌کند. رابطه بین مختصات یک رویداد را در دو چارچوب لازم داریم، که برای این منظور باید به تبدیل لورنتس در معادله ۲ پیوست الف مراجعه کنیم. برای سادگی کار می‌توانیم فرض کنیم که مبدأهای دو چارچوب در لحظه صفر از دید ناظران هر دو چارچوب برهم منطبق‌اند. به عبارت دیگر این رویداد، انطباق دو مبدأ، را با توجه به معادله ۲ می‌توان رویداد A با مختصات $x_A = 0, y_A = 0, z_A = 0, t_A = 0$ در چارچوب F و $x'_A = 0, y'_A = 0, z'_A = 0, t'_A = 0$ در چارچوب F' دانست. در این صورت رویداد B نقطه‌ای از فضا-زمان است که می‌خواهیم تعیین کنیم. می‌توانیم حرف B را بنویسیم و مختصات آن را در F فقط x, y, z, t و

در F' فقط x', y', z', t' بنامیم. در این صورت معادلهٔ ۲ پیوست الف به این صورت در می‌آید

$$x' = \gamma x - \gamma\beta ct \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma t - \frac{\gamma\beta x}{c}$$

اما این تبدیل برای چارجوب F' ای بود که نسبت به F در جهت مثبت x حرکت کند، که با توجه به کاهش x' با افزایش t ، فوراً معلوم می‌شود. برای پیدا کردن تبدیل لورنتس مسئلهٔ خودمان، که در آن چارجوب F' در جهت مقابل حرکت می‌کند، باید یا علامت β را عوض کنیم یا جای پریمها را. ما دومی را انتخاب می‌کنیم چون می‌خواهیم x و z را برحسب x' و z' بیان کنیم: تبدیل لورنتسی که لازم داریم این است:

$$x = \gamma x' - \gamma\beta ct' \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \gamma t' - \frac{\gamma\beta x'}{c} \quad (۹)$$

مطابق معادله‌های ۵ و ۶، $E'_z = \gamma E_z$ و $E'_x = E_x$. با استفاده از معادله‌های ۸ و ۹ می‌توانیم مؤلفه‌های E'_x و E'_z را برحسب مختصات در F' بیان کنیم. برای لحظهٔ $t' = 0$ ، وقتی Q از مبدأ در F' می‌گذرد، داریم

$$E'_x = E_x = \frac{\gamma Q x'}{[(\gamma x')^2 + z'^2]^{3/2}} \quad (۱۰)$$

$$E'_z = \gamma E_z = \frac{\gamma Q z'}{[(\gamma x')^2 + z'^2]^{3/2}}$$

اولاً توجه کنید که $E'_z/E'_x = z'/x'$ یعنی بردار \mathbf{E}' با محور x' همان زاویه‌ای را می‌سازد که با بردار شعاعی \mathbf{r}' می‌سازد. بنابراین جهت \mathbf{E}' مطابق شکل ۵-۱۲ ب شعاعی و رو به بیرون در امتداد خطی است که از مکان لحظه‌ای Q رسم شود. صبر کنید این نتیجه جا بیفتد! یعنی اینکه، اگر Q ، مبدأ دستگاه پریم‌دار را دقیقاً سر ساعت $0^\circ ۱۲$ ظهر پشت سر بگذارد، که اسمش را ”زمان پریم“ می‌گذاریم، ناظر در هر کجا از دستگاه پریم‌دار مستقر باشد گزارش خواهد کرد که میدان الکتریکی در قلمرو او، سر ساعت $0^\circ ۱۲$ ظهر دقیقاً در جهت شعاعی است که از مبدأ می‌گذرد. در نظر اول این به معنای انتقال آنی اطلاعات است! چطور ناظری از یک فرسخی می‌تواند بفهمد ذره در همان لحظه کجاست؟ اصلاً نمی‌تواند. منظور از این نتیجه این نیست. یادتان باشد که این ذره با سرعت ثابت همیشه در حرکت بوده است و این حرکت از روی ”برنامهٔ پرواز“ی انجام می‌گیرد که ذره باید سر ظهر از مبدأ بگذرد. این اطلاعات مدتها در دسترس بوده است. اگر

خواهیم از علت و معلول صحبت کنیم، این پیشینه ذره است که میدان را تعیین می‌کند. حالا خواهیم دید اگر تغییر غیرمنتظره‌ای در این برنامه پرواز پیش آمد چه می‌شود. برای پیدا کردن شدت میدان مقدار $E_x'^2 + E_z'^2$ را، که مربع اندازه میدان E'^2 است، محاسبه می‌کنیم.

$$E'^2 = E_x'^2 + E_z'^2 = \frac{\gamma^2 Q^2 (x'^2 + z'^2)}{[(\gamma x')^2 + z'^2]^2} = \frac{Q^2 (x'^2 + z'^2)}{\gamma^2 [x'^2 + z'^2 - \beta^2 z'^2]^2}$$

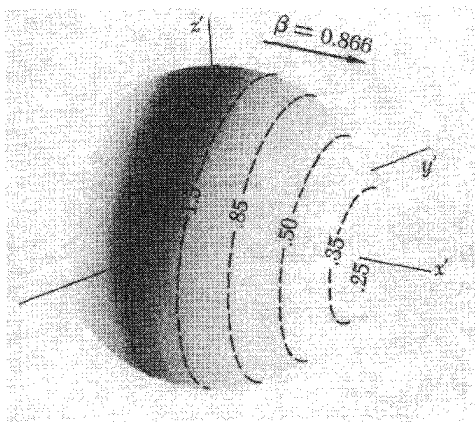
$$= \frac{Q^2 (1 - \beta^2)^2}{(x'^2 + z'^2)^2 \left(1 - \frac{\beta^2 z'^2}{x'^2 + z'^2}\right)^2} \quad (11)$$

(اینجا استثنائاً، اگر β را داخل جمله‌ها بکنیم فرمول مرتبتر است.) فرض کنیم r' فاصله از بار Q ، که عجالتاً در مبدأ است، تا نقطه (x', z') باشد که می‌خواهیم میدان را آنجا اندازه‌گیری کنیم: $r' = (x'^2 + z'^2)^{1/2}$. فرض کنید θ' زاویه بین این بردار شعاعی و سرعت بار Q باشد که در چارچوب F' در جهت مثبت x' حرکت می‌کند. به این ترتیب چون $z' = r' \sin \theta'$ ، اندازه میدان را می‌توان به صورت زیر نوشت

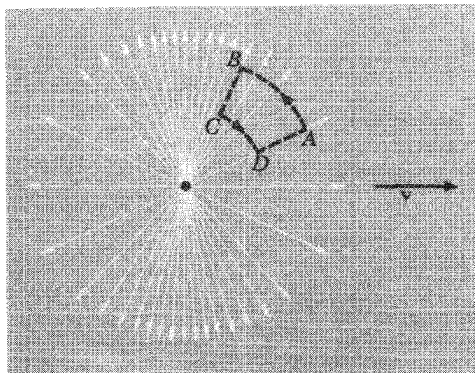
$$E' = \frac{Q}{r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}} \quad (12)$$

مبدأ مختصات هیچ خاصیت به خصوصی ندارد، صفحه $x'z'$ هم در مقایسه با هر صفحه دیگری که از محور x' بگذرد ویژگی خاصی ندارد. بنابراین می‌توانیم بگویم به‌طور کلی میدان الکتریکی باری با حرکت یکنواخت در یک لحظه معین در جهت شعاعی است که از مکان ذره در آن لحظه می‌گذرد و اندازه آن از معادله ۱۲ تعیین می‌شود که در آن θ' زاویه بین جهت حرکت بار و بردار شعاعی است که از مکان لحظه‌ای بار به نقطه مورد نظر رسم می‌شود.

برای سرعت‌های کم میدان به صورت $E' \approx Q/r'^2$ ساده می‌شود، و در هر لحظه عملاً همان میدان بار نقطه‌ای ساکن در F' ، در مکان لحظه‌ای بار Q است. اما اگر β^2 قابل چشمپوشی نباشد، میدان در هر فاصله‌ای از بار، در راستای عمود بر حرکت قویتر است تا در راستای حرکت. اگر می‌خواستیم شدت میدان را با چگالی خط‌های میدان نشان دهیم، که غالباً این کار را می‌کنیم، خط‌های میدان مایل به تراکم در گردۀ نانی عمود بر جهت حرکت‌اند. شکل ۵-۱۳ چگالی خط‌های باری را نشان می‌دهد که در جهت x' با سرعت $v/c = 0.866$ در حرکت است. این خط‌ها از یک کره واحد عبور می‌کنند. نمایش ساده‌تر میدان در شکل ۵-۱۴ آمده است که مقطعی را در



شکل ۱۳-۵ شدت در جهتهای مختلف میدان یک بار متحرک. در این لحظه بار از مبدأ چارچوب $x'y'z'$ می‌گذرد. اعداد نشان‌دهنده شدت میدان ضربدر Q/r'^2 هستند.

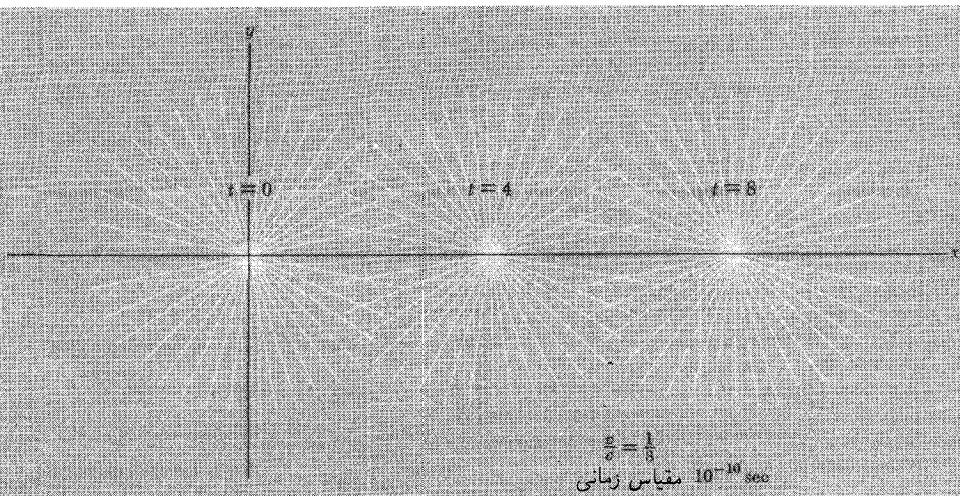


شکل ۱۴-۵ نمایش دیگری از میدان باری با حرکت یکنواخت.

میدان با تعدادی خط میدان در صفحه $x'z'$ نشان می‌دهد.^۱

به این میدان الکتریکی باید توجه کرد. این میدان از نظر کروی متقارن نیست، تعجبی هم ندارد چون در این چارچوب جهت ممنازی که جهت حرکت بار است وجود دارد. اما میدان در صفحه‌ای عمود بر جهت حرکت بار متقارن است. در ضمن، همین کافی است تا ثابت بکنیم که میدان یک ورقه با بار یکنواخت که در صفحه خودش حرکت می‌کند باید عمود بر صفحه باشد. این میدان را حاصل جمع میدان بارهای بسیار کوچکی فرض کنید که به طور یکنواخت روی صفحه پخش شده‌اند. چون تک تک این میدانها نسبت به جهت حرکت در شکل ۱۴-۵ تقارن پس و پیش

۱. در نمودار دوبعدی مثل شکل ۱۴-۵ نمی‌شود به درستی شدت میدان را با چگالی خطهای میدان نشان داد. جز در صورتی که بعضی از خطها را به دلخواه جدا کنیم، چگالی خطها در شکل با ضریب $1/r'^2$ کم می‌شود در حالی که شدت میدانی که می‌خواهیم نشانش بدهیم با ضریب $1/r'^2$ کاهش می‌یابد. بنابراین شکل ۱۴-۵ تنها تغییر کیفی E' را با r' و θ' نشان می‌دهد.



شکل ۱۵-۵ میدان الکتریکی یک بار متحرک که برای $v/c = 1/3$ در سه لحظه رسم شده است.

دارند، حاصل جمعشان فقط می‌تواند عمود بر ورقه باشد. میدان نمی‌تواند مثل شکل ۱۵-۱۰ الف باشد.

میدان شکل ۱۴-۵ میدانی است که هیچ توزیع بار سناکنی، هر شکلی هم داشته باشد، نمی‌تواند آن را تولید کند. چون در این میدان انتگرال خطی \mathbf{E}' روی هیچ مسیر بسته‌ای صفر نیست. به‌عنوان مثال، مسیر بسته $ABCD$ در شکل ۱۴-۵ را در نظر بگیرید. مسیرهای قوسی که عمود بر میدان هستند سهمی در انتگرال خطی ندارند؛ در بخشهای شعاعی، میدان در مسیر BC قویتر است تا مسیر DA ، بنابراین گردش \mathbf{E}' روی این مسیر صفر نیست. اما یادتان باشد این یک میدان الکتروستاتیکی نیست. میدان الکتریکی \mathbf{E}' ضمن حرکت چشمه بار در هر نقطه از چارچوب F' با زمان تغییر می‌کند.

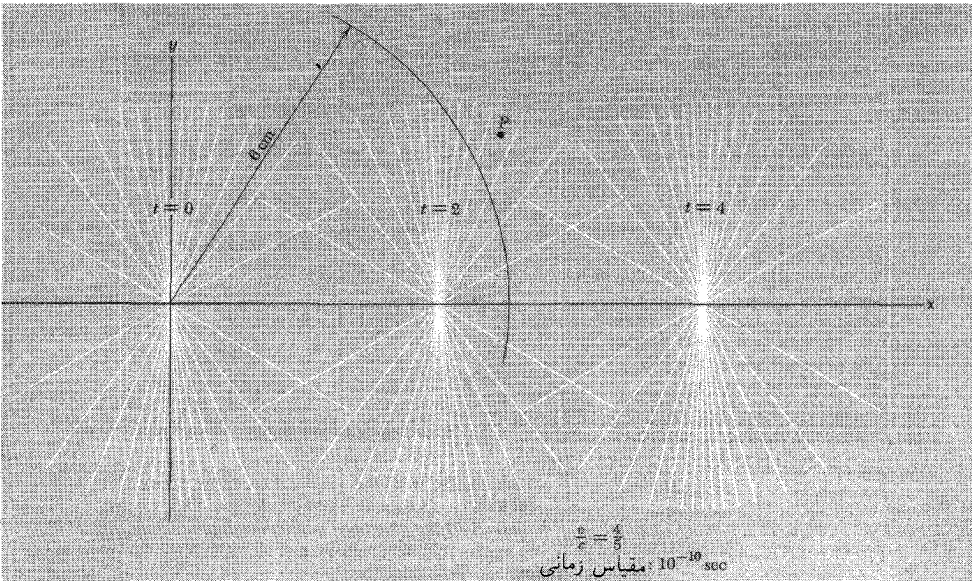
شکل ۱۵-۵ میدان الکتریکی را در چارچوب مرجعی نشان می‌دهد که الکترون در آن با سرعت ثابت در جهت x حرکت می‌کند.^۱ در شکل ۱۵-۵ سرعت الکترون $33c$ است، بنابراین انرژی جنبشی‌اش حدود 300000 eV [30 کیلو الکترون‌ولت (keV)] می‌شود. مقدار β^2 برابر $1/9$ است و میدان الکتریکی با میدان بار ساکن زیاد فرقی نمی‌کند. در شکل ۱۶-۵ سرعت $8c$ و متناظر با انرژی جنبشی 35 keV است. اگر واحد زمان برای هر نمودار 10^{-10} s فرض شود فاصله، همان‌طور که ترسیم شده است، در مقیاس واقعی است. البته این نمودار برای

۱. قبلاً بار ما در چارچوب بدون پریم ساکن بود و در چارچوب پریم دار حرکت می‌کرد. اینجا xyz را برای چارچوبی قبول کردیم که بار در آن حرکت دارد. خواستیم ادامه بحث با علامتهای پریم شلوع نشود.

هر ذرهٔ بارداری که با این کسر از سرعت نور حرکت کند به همین صورت معتبر است. ما انرژیهای مربوط به الکترون را صرفاً به این خاطر ذکر کردیم که فکر نکنید سرعتهای نسبیتهایی چیزی خارج از امکانات عادی آزمایشگاه است.

۷-۵ میدان بار هنگام شروع حرکت یا توقف

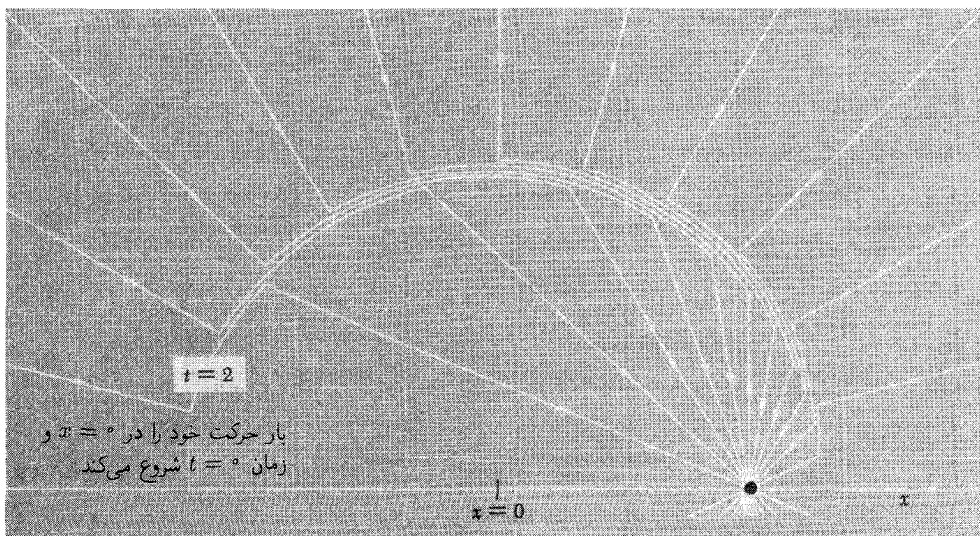
باید به دقت توجه داشته باشیم که منظور از سرعت یکنواخت، همان طور که از نام آن پیداست، حرکتی است که با سرعت ثابت در یک مسیر مستقیم تا ابد ادامه داشته باشد. اگر الکترون ما در گذشته دور، تا قبل از اینکه در نمودار در لحظه $t = 0$ ظاهر شود، بر روی محور x منفی حرکت نداشته باشد چه می شود؟ فرض کنید الکترون در حالت سکون کامل در مبدأ نشسته است منتظر اینکه ساعت $t = 0$ را نشان بدهد. درست قبل از اینکه $t = 0$ بشود، عاملی ناگهان یک شتاب بزرگ به الکترون می دهد تا سرعتش به v برسد و در جهت مثبت محور x با این سرعت راه بیفتد. حرکت الکترون از این به بعد دقیقاً مانند حرکت الکترونی است که شکل ۵-۱۶ برای آن رسم شده است. اما شکل ۵-۱۶ به درستی میدان الکتریکی را که شرح آن رفت، نشان نمی دهد. برای اینکه ببینیم این طور است میدانی در نقطه P در لحظه $t = 2$ یعنی $t = 2 \times 10^{-10}$ ثانیه در نظر بگیرد.



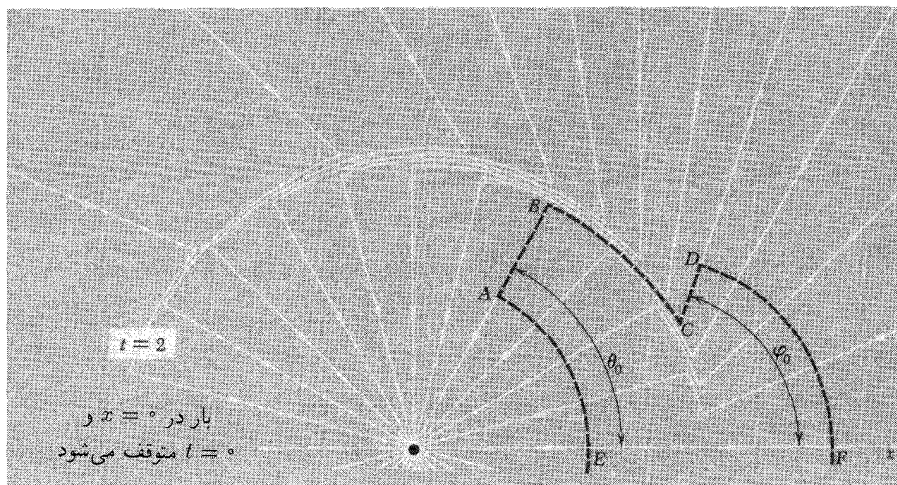
شکل ۵-۱۶ میدان الکتریکی یک بار متحرک برای $v/c = 4/5$ که در سه لحظه رسم شده است.

در زمان $10^{-10} \times 2$ ثانیه یک علامت نوری ۶ cm طی می‌کند. چون این نقطه بیشتر از ۶ cm با مبدأ فاصله دارد، نمی‌تواند خبر حرکت کردن الکترون را در لحظه $t = 0$ دریافت کرده باشد! جز در صورت نقض آشکار نسبیت — که ما قوانین نسبیت را مبنای کلی بحثمان قرار داده‌ایم — میدان در نقطه P در لحظه $t = 2$ ، و در واقع در تمام نقاط بیرون از کره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۶ cm، باید میدان یک بار ساکن در مبدأ باشد.

از سوی دیگر، در نزدیکی خود بار متحرک، فرقی نمی‌کند در گذشته دور چه اتفاقی افتاده باشد. هر چه از بار دورتر و دورتر شویم، در لحظه $t = 2$ ، میدان باید به نحوی تغییر کرده باشد تا از شکلی که در نمودار ۵-۱۶ می‌بینیم به میدان یک بار در مبدأ تبدیل شود. بدون اینکه بدانیم اطلاعات با چه سرعتی حرکت می‌کند، بیش از این نمی‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم. فرض کنید — فقط فرض — که اطلاعات با بیشترین سرعتی که با اصول نسبیت تناقض نداشته باشد پیش می‌رود. در این صورت اگر از زمان شتاب‌گیری چشمپوشی کنیم، انتظار داریم در لحظه $t = 2$ میدان در کره‌ای به شعاع ۶ cm، میدان یک بار نقطه‌ای با حرکت یکنواخت باشد. اگر این‌طور باشد میدان الکترونی که ناگهان از حالت سکون در لحظه $t = 0$ ، سرعت v می‌گیرد، باید چیزی شبیه به شکل ۵-۱۷ باشد. گذار میدان از نوعی به نوع دیگر، درون پوسته‌ی کروی نازکی صورت می‌گیرد



شکل ۵-۱۷ الکترونی که در چارچوب آزمایشگاه ساکن است ناگهان در لحظه $t = 0$ شتاب می‌گیرد و از آن پس با سرعت ثابت حرکت می‌کند. این شکل میدان الکتریکی را طوری که در لحظه $t = 2$ در چارچوب آزمایشگاه به نظر می‌رسد، نشان می‌دهد.



شکل ۱۸-۵ الکترونی که با سرعت ثابت حرکت می‌کرده است در لحظه $t = 0$ به مبدأ می‌رسد، ناگهان متوقف می‌شود و همان جا ساکن می‌ماند. این شکل، میدان را در لحظه $t = 2$ از دید چارچوب مرجع آزمایشگاه نشان می‌دهد. خط‌چینها یک خط میدان از A تا D را دنبال می‌کنند. دوران تمام خط $EABCD F$ حول محور x سطح بسته‌ای را تولید می‌کند که شار کل عبوری از آن باید صفر باشد. شار ورودی به عرقچین $F D$ باید برابر با شار خروجی از عرقچین $E A$ باشد. این شرط برای تعیین رابطه بین θ و ϕ کافی است.

(که در حالت واقعی ضخامت آن بستگی به مدت زمان لازم برای شتاب‌گیری دارد). این پوسته با سرعت c بزرگتر می‌شود در حالی که مرکزش در $x = 0$ می‌ماند. نوک پیکان خطهای میدان جهت میدان را برای وقتی که، مطابق فرض ما، چشمه میدان یک بار منفی باشد نشان می‌دهد. شکل ۱۸-۵ میدان الکترونی را نشان می‌دهد که تا لحظه $t = 0$ با سرعت یکنواخت در حرکت بوده و در این لحظه که به $x = 0$ رسیده ناگهان متوقف شده است. اکنون خبر توقف الکترون نمی‌تواند در مدت زمان t به نقطه‌ای دورتر از ct از مبدأ برسد. میدان خارج کره‌ای به شعاع $R = ct$ باید همان باشد که اگر الکترون با همان سرعت قبلی به حرکتش ادامه می‌داد، داشتیم. به همین دلیل است که در سمت راست شکل ۱۸-۵ می‌بینیم که جهت خطهای میدان دقیقاً رو به پایین به سمت جایی است که الکترون اگر متوقف نشده بود، آنجا بود. (توجه کنید که این نتیجه آخری به فرضی که در نمودار قبل کردیم، یعنی اینکه خبر با هر سرعتی که می‌تواند حرکت می‌کند. ارتباطی ندارد.) به نظر می‌رسد میدان دارد راه خودش را می‌رود!

ارتباط دادن خطهای میدان داخلی و خارجی تقریباً ساده است. فقط یک راه برای این کار وجود دارد که با قانون گاوس سازگار باشد. اگر شکل ۱۸-۵ را به عنوان مثال در نظر بگیریم، از

نقطه‌ای مثل A روی خط میدان شعاعی که با محور x زاویه θ می‌سازد، خط میدان را تعقیب می‌کنیم تا جایی که به میدان خارجی برسیم و روی خطی قرار بگیریم که زاویه‌اش را با محور x ، φ می‌نامیم. (البته این خط از مکان برونیابی شده بار، چشمه ظاهری میدان خارجی، شعاعی است.) A و D را با کمانهایی به محور x وصل می‌کنیم، کمان AE به مرکز چشمه میدان داخلی، و کمان DF به مرکز چشمه ظاهری میدان خارجی. منحنی $EABCD$ را حول محور x می‌چرخانیم تا یک سطح دورانی ایجاد شود. چون سطح حاوی هیچ باری نیست، انتگرال سطحی E روی کل سطح باید صفر باشد. تنها سهم انتگرال مربوط به عرقچینه‌های کروی است، چون سطحی که از دوران $ABCD$ ایجاد می‌شود بنا به تعریف موازی میدان است. میدان در عرقچین داخلی ناشی از یک بار نقطه‌ای ساکن در مبدأ است. میدان در عرقچین خارجی میدان یک بار نقطه‌ای است که با سرعت ثابت حرکت می‌کند و در این لحظه در مکان $x = 2v$ است. این میدان از معادله ۱۲ به دست می‌آید. اگر مسئله ۵-۱۱ را حل کنید خواهید دید این شرط که "شاری که وارد یک عرقچین می‌شود برابر با شار است که از عرقچین دیگر خارج می‌شود"، ایجاب می‌کند که داشته باشیم

$$\tan \phi_0 = \gamma \tan \theta. \quad (13)$$

حضور γ در این فرمول شگفت‌انگیز نیست. قبلاً "تراکم نسبیتی" خطهای میدان باری با حرکت سریع را، که در شکل ۵-۱۴ تشریح شد، دیده‌ایم. پدیده جدید مهم در شکل ۵-۱۸ حرکت زیگ‌زاگ که در خط میدان $ABCD$ است. علت این امر وجود γ در معادله ۱۳ نیست بلکه این است که چشمه ظاهری میدان خارجی از محل چشمه میدان داخلی جابه‌جا شده است. اگر AB و CD متعلق به یک خط میدان باشند پاره‌خط رابط BC باید تقریباً عمود بر یک بردار شعاعی باشد. در آنجا یک میدان الکتریکی عرضی داریم که اگر ازدحام خطهای میدان را بسنجیم، در مقایسه با میدان شعاعی قویتر است. با گذشت زمان، حرکت زیگ‌زاگ خطهای میدان با سرعت c به صورت شعاعی به خارج منتقل خواهد شد. اما ضخامت پوسته میدان عرضی بیشتر نخواهد شد چون با مدت زمان فرایند شتاب‌گیری تعیین می‌شود.

پوسته در حال انبساط میدان الکتریکی عرضی، پوسته پیش می‌رود حتی اگر کمی دیرتر، — مثلاً در لحظه $t = 3$ — ناگهان به الکترون شتابی بدهیم که به سرعت اولش برگردد. با این کار فقط یک پوسته جدید بیرون رونده تولید می‌شود که خیلی شبیه به میدان شکل ۵-۱۷ است. میدان واقعاً راه خودش را می‌رود! آنچه اینجا جلوی چشم ما جان می‌گیرد یک موج الکترومغناطیسی است. میدان مغناطیسی که آن هم بخشی از این موج است فعلاً در نظر گرفته نشده است. بعداً در فصل ۹، خواهیم دید چگونه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی با هم در انتشار یک آشفتگی

الکتریکی در فضای خالی همکاری می‌کنند. چیزی که اینجا کشف کردیم این است که چنین امواجی باید وجود داشته باشند اگر طبیعت با اصول نظریه نسبیت سازگار باشد، و اگر بار الکتریکی یک ناوردای نسبیتی باشد.

ما با تحلیل "حرکت زیگ‌زاگ در خط میدان" خیلی کارها می‌توانیم بکنیم. در پیوست ب می‌بینیم که چطور می‌شود به آسانی فرمول دقیق و ساده‌ای برای آهنگ تابش انرژی از یک بار الکتریکی شتابدار، به دست آورد. حالا باید دوباره سراغ بار با حرکت یکنواخت برویم که دیدنیهای دیگری هم در انبان دارد.

۵-۸ نیروی وارد بر بار متحرک

معادله ۱۲ نیروی وارد بر یک بار ساکن را، در میدان بار دیگری با حرکت یکنواخت، تعیین می‌کند. حالا سؤال دیگری داریم: بر یک بار متحرک، که در میدان ناشی از بارهای دیگر حرکت می‌کند، چه نیرویی وارد می‌شود؟

اول به بار متحرکی می‌پردازیم که در میدان ناشی از بارهای ساکن حرکت می‌کند. موردی که بررسی می‌کنیم یک الکترون است که بین صفحه‌های باردار یک اسیلوسکوپ حرکت می‌کند، یا یک ذره α که در میدان کولنی اطراف یک هسته اتم در حرکت است. چشمه‌های میدان در هر حالت همه بارهای ساکن در چارچوب مرجعی هستند که ما آن را "چارچوب آزمایشگاه" می‌نامیم. در یک لحظه از زمان در محلی از این چارچوب آزمایشگاه ذره‌ای با بار q را مشاهده می‌کنیم که در آن با سرعت v در این میدان الکتروستاتیکی در حرکت است. چه نیرویی بر بار q وارد می‌شود؟ نیرو به معنای تغییر در تکانه است، بنابراین پرسش ما در واقع این است که در این مکان و در این لحظه، در چارچوب مرجع آزمایشگاه ما، آهنگ تغییر تکانه ذره، dp/dt ، چقدر است؟ (منظور ما از نیروی وارد بر ذره متحرک همین است.) پاسخ این پرسش در آنچه قبلاً آموخته‌ایم نهفته است. به این دستگاه از یک چارچوب مختصات F' ، که در لحظه مورد نظر همراه ذره حرکت می‌کند نگاه کنیم. در این "چارچوب ذره" ذره ما دست‌کم به‌طور لحظه‌ای، ساکن است. حالا این بارهای دیگرند که در حال حرکت هستند. با این وضع بلدیم چه کار کنیم. بار q همان است که بود؛ بار ناورداست. نیروی وارد بر بار ساکن q صرفاً E' است که E' میدان الکتریکی مشاهده شده در چارچوب F' است. می‌دانیم با داشتن E چطور باید E' را پیدا کنیم؛ معادله ۷ قانون ما را تأمین می‌کند. پس با دانستن E می‌توانیم آهنگ تغییر تکانه ذره را از دید ناظری در چارچوب F' پیدا کنیم. به این ترتیب مسئله ما موکول می‌شود به این سؤال که نیرو، یعنی آهنگ تغییر تکانه، از یک چارچوب لخت به یک چارچوب لخت دیگر، چه تبدیلی دارد؟

پاسخ این پرسش در معادله‌های ۱۲ و ۱۳ پیوست الف آمده است. آن مؤلفه از نیرو که با

حرکت نسبی دو چارچوب موازی است در چارچوب متحرک همان مقدار را دارد که در چارچوبی که ذره در آن ساکن است. مؤلفه عمود بر سرعت نسبی در چارچوب متحرک همیشه با ضریب $1/\gamma$ کوچکتر از مقدار این مؤلفه در چارچوب سکون ذره است. این نتیجه‌ها را با علامتهای \parallel و \perp برای مؤلفه‌های تکانه در معادله ۱۴ خلاصه می‌کنیم، که به ترتیب نشان‌دهنده مؤلفه‌های موازی با سرعت نسبی F' و F و عمود بر این سرعت هستند. در معادله ۷ هم همین کار را کرده بودیم.

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = \frac{dp'_{\parallel}}{dt'} \quad (۱۴)$$

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp'_{\perp}}{dt'}$$

توجه کنید که این رابطه‌ها نسبت به کمیتهای پریم‌دار و بدون پریم متقارن نیستند. چارچوب سکون ذره، که در این مورد قرار شد F' نامیده شود، وضع خاصی دارد. در این چارچوب، اندازه مؤلفه عرضی نیرو بزرگتر از اندازه آن در چارچوب دیگر است.

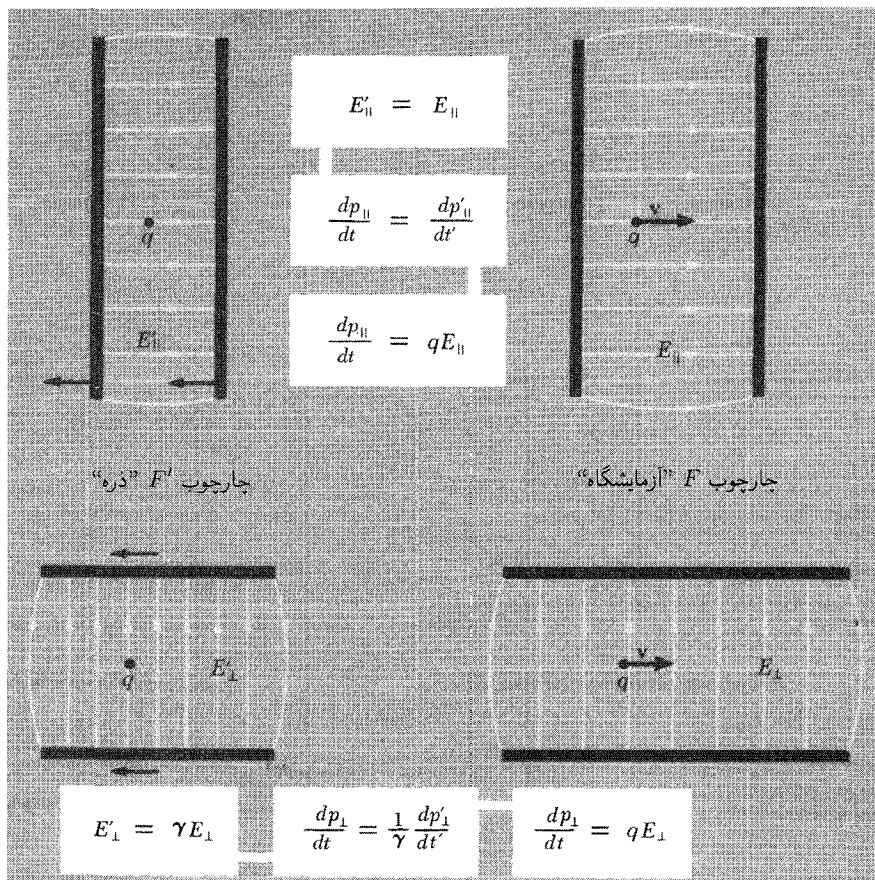
با داشتن قانون تبدیل نیرو، معادله ۱۴، و قانون تبدیل مؤلفه‌های میدان الکتریکی، معادله ۷، برمی‌گردیم به ذره بارداری که در میدان \mathbf{E} حرکت می‌کند، و به نکته‌ای می‌رسیم که به طرز شگفت‌آوری ساده است. اول E_{\parallel} را در نظر بگیرید، مؤلفه‌ای از \mathbf{E} که با جهت لحظه‌ای حرکت ذره باردار ما موازی است. حالا به چارچوبی مثل F' برویم که در این لحظه همراه ذره حرکت می‌کند. در این چارچوب میدان الکتریکی طولی E'_{\parallel} است و طبق معادله ۷، $E'_{\parallel} = E_{\parallel}$. بنابراین نیروی dp'_{\parallel}/dt' برابر است با:

$$\frac{dp'_{\parallel}}{dt'} = qE'_{\parallel} = qE_{\parallel} \quad (۱۵)$$

اگر به چارچوب F برگردیم، ناظرها دارند نیروی طولی را اندازه‌گیری می‌کنند، یعنی آهنگ تغییر مؤلفه طولی تکانه که dp_{\parallel}/dt است. طبق معادله ۱۴، $dp_{\parallel}/dt = dp'_{\parallel}/dt'$ ، بنابراین در چارچوب F مؤلفه طولی نیرو که این ناظران به دست می‌آورند برابر است با

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = \frac{dp'_{\parallel}}{dt'} = qE_{\parallel} \quad (۱۶)$$

البته با گذشت زمان ذره در F' ساکن نمی‌ماند. ذره با میدان \mathbf{E}' شتاب می‌گیرد و سرعت ذره در چارچوب لخت F' یعنی \mathbf{v}' ، کم‌کم از صفر بالاتر می‌رود. اما چون شتاب لحظه‌ای مورد نظر ماست، فقط با مقادیر بسیار کوچک v' سروکار داریم و شرط معادله ۱۴ به دقت برآورده می‌شود. برای E_{\perp}



شکل ۱۹-۵ در چارچوبی که بارهای مولد میدان \mathbf{E} در آن ساکن اند، نیروی وارد بر بار q که می‌تواند با هر سرعتی در حرکت باشد، صرفاً $q\mathbf{E}$ است.

مؤلفه عرضی میدان در F ، تبدیل عبارت است از $E'_{\perp} = \gamma E_{\perp}$ ، بنابراین داریم: $dp'_{\perp}/dt' = q\gamma E_{\perp}$ ، اما با تبدیل دوباره نیرو در F داریم $dp_{\perp}/dt = (\gamma)(dp'_{\perp}/dt')$ ، بنابراین بعد از ساده کردن رابطه‌ها، γ حذف می‌شود:

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} = \frac{1}{\gamma}(\gamma E_{\perp} q) = qE_{\perp} \quad (17)$$

پیام رابطه‌های ۱۶ و ۱۷ فقط این است: نیروی وارد بر بار متحرک در چارچوب F ، q برابر میدان الکتریکی \mathbf{E} در آن چارچوب است، و این نیرو جداً مستقل از سرعت ذره است. شکل ۱۹-۵ یادآور این امر و نحوه کشف این واقعیت است.

قبلاً وقتی گفتیم سهم میدان الکتریکی در نیروی وارد بر بار متحرک qE است از این نتیجه استفاده کردیم چون این نتیجه برایتان آشنا و ساده است ممکن است فکر کنید بدیهی است و بهبوده برای اثبات آن وقت تلف کرده‌ایم. اکنون می‌توانیم این را یک واقعیت تجربی فرض کنیم. صحت این نتیجه تا سرعت‌های خیلی نزدیک به سرعت نور، در مورد الکترون تا ضریب $\gamma = 10^4$ ، تحقیق شده است. از این لحاظ این یک قانون بسیار مهم است. بحث این فصل نشان می‌دهد که این واقعیت در عین حال پیامد مستقیم ناوردایی بار است.

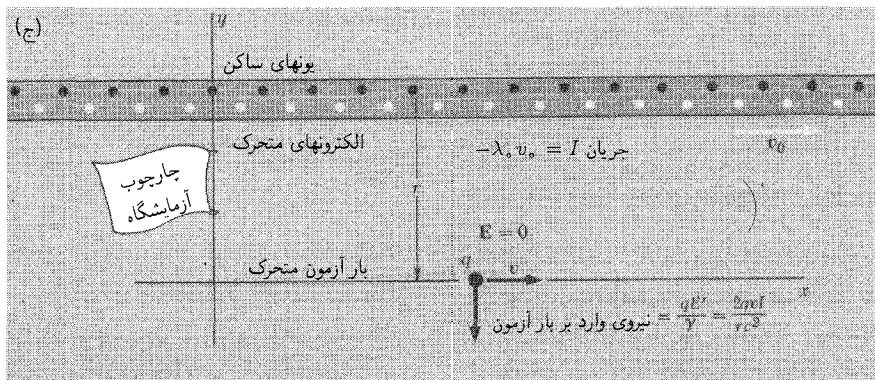
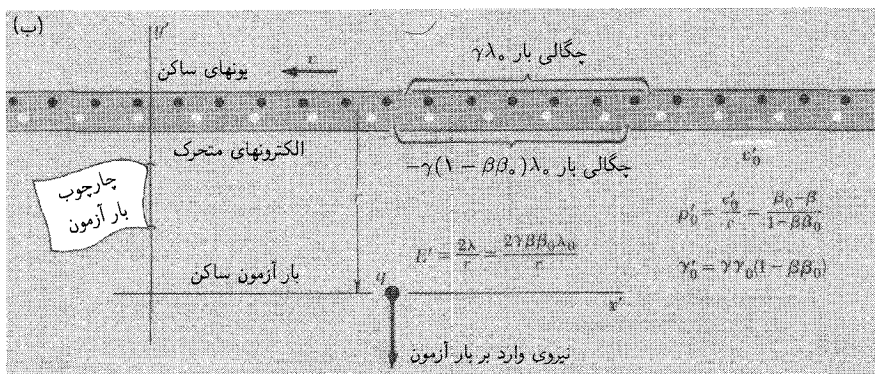
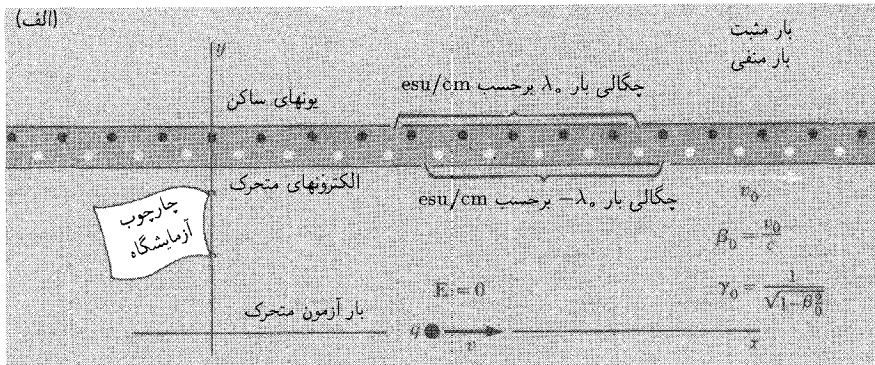
۹-۵ برهم‌کنش یک بار متحرک با بارهای متحرک دیگر

می‌دانیم که بر یک بار متحرک نیرویی وابسته به سرعت اثر می‌کند. چنین نیرویی مربوط به یک میدان مغناطیسی است که چشمه‌های آن جریانهای الکتریکی، یعنی بارهای متحرک دیگرند. آزمایش اورستد نشان داد که جریانهای الکتریکی می‌توانند در آهنربا نفوذ کنند اما در آن زمان سرشت آهنربا کاملاً مرموز بود. چیزی نگذشت که آمپر و دیگران برهم‌کنش جریانهای الکتریکی را، به صورت جاذبه بین دو سیم موازی حامل جریانهای همسو، کشف کردند. این کشف رهنمون آمپر به این فرضیه شد که در یک ماده مغناطیسی جریانهای الکتریکی دائمی وجود دارد. در این صورت آزمایش اورستد را می‌توان چنین تعبیر کرد که جریان گالوانی در سیم با جریانهای دائمی میکروسکوپیکی در عقربه قطب‌نما برهم‌کنش دارد و رفتار خاص عقربه قطب‌نما نتیجه این برهم‌کنش است. آمپر فرمولبندی کامل و زیبایی برای برهم‌کنش جریانهای دائمی، و هم‌ارزی ماده مغناطیسی شده با دستگاههای جریانهای دائمی ارائه داد. تقریباً یک قرن طول کشید تا حدس هوشمندانه او درباره سرشت واقعی مغناطیسی در آهن به تأیید نهایی برسد.

اینکه آثار مغناطیسی جریان الکتریکی ناشی از هر چیزی غیر از انتقال ساده بار است یا نه، برای آمپر و هم عصرانش روشن نبود. آیا حرکت جسمی که الکتریسیته ساکن دارد همان آثاری را ایجاد می‌کند که یک جریان گالوانی دائمی؟ در اواخر قرن، کارهای نظری ماکسول نشان داد که پاسخ این سؤال مثبت است. اولین مدرک مستقیم با آزمایش هنری رولاند به دست آمد که در انتهای فصل ۶ به آن خواهیم رسید.

از دیدگاه کنونی ما، برهم‌کنش جریانهای الکتریکی را می‌توان یک نتیجه اجتناب‌ناپذیر قانون کولن دانست. اگر اصول نسبیت معتبرند، اگر بار الکتریکی ناورداست، و اگر قانون کولن برقرار است، آنگاه، چنانکه نشان خواهیم داد، آثاری که معمولاً "مغناطیسی" می‌نامیم، باید پیش بیایند. به محض اینکه برهم‌کنش الکتریکی بین یک بار متحرک و بارهای متحرک دیگر را بررسی کنیم، این آثار ظاهر می‌شوند. با یک دستگاه بسیار ساده می‌توانیم این موضوع را نشان بدهیم.

در چارچوب آزمایشگاه شکل ۵-۲۰ الف با مختصات مکانی x, y, z ، خطی از بارهای



شکل ۵-۲۰ یک بار آزمون q موازی جریان در سیم حرکت می‌کند. (الف) در چارجوب آزمایشگاه سیمی که بارهای مثبت در آن ثابت هستند ساکن است. جریان از الکترونهاست که با سرعت v_0 به سمت راست می‌روند تشکیل می‌شود. بار کل سیم صفر است. بیرون سیم میدان الکتریکی وجود ندارد. (ب) در چارجوبی که بار آزمون در آن ساکن است، یونهای مثبت با سرعت v به سمت چپ و الکترونها با سرعت v'_0 به سمت راست می‌روند. چگالی خطی یک بار مثبت بزرگتر از چگالی خطی یک بار منفی است. به نظر می‌آید سیم دارای بار مثبت شده و منشأ آن یک میدان خارجی E'_r است که بر بار آزمون ساکن q نیروی qE'_r وارد می‌کند. (ج) اگر به چارجوب آزمایشگاه برگردیم مقدار این نیرو qE'_r/γ است که متناسب است با حاصلضرب سرعت بار آزمون، v ، و جریان داخل سیم یعنی $-\lambda_0 v_0$.

مثبت ساکن وجود دارد که از دو طرف تا بینهایت کشیده شده است. این بارها را به اختصار یون می‌نامیم. در اصل اینها باید نمایندهٔ یونهای مس در ساختار چگال یک سیم مسی باشند. خطی هم از بارهای منفی وجود دارد که آنها را الکترون می‌نامیم. همهٔ الکترونها با سرعت v به طرف راست در حرکت‌اند. در سیم واقعی الکترونها و یونها با هم آمیخته‌اند؛ در نمودار برای وضوح آنها را جدا از هم کشیده‌ایم. چگالی خطی بار مثبت λ برحسب esu/cm است. چگالی خطی بار منفی در طول خط الکترونها دقیقاً همین مقدار است. یعنی هر طولی از "سیم" را در نظر بگیریم، در یک لحظهٔ معین به تعداد مساوی الکترون و پروتون دارد.^۱ بارکل سیم صفر است. بنابه قانون گاوس از استوانه‌ای که حاوی باری نیست هیچ شاری نمی‌تواند بگذرد، پس میدان الکتریکی بیرون از سیم همه جا باید صفر باشد. بر بار آزمون ساکن q در نزدیکی این سیم هیچ نیرویی وارد نمی‌شود.

فرض کنید که بار آزمون در چارچوب آزمایشگاه ساکن نیست بلکه در جهت محور x با سرعت v حرکت می‌کند. به چارچوب x' و y' می‌رویم که همراه بار آزمون در حرکت است (شکل ۵-۲۰ب). بار آزمون q در این چارچوب ساکن است اما یک چیز دیگر تغییر کرده است: به نظر می‌آید سیم باردار شده است! به دو دلیل: یونهای مثبت به هم نزدیک‌ترند و الکترونها از هم بیشتر فاصله دارند. چون چارچوب آزمایشگاهی که در آن یونهای مثبت ساکن‌اند دارد با سرعت v حرکت می‌کند، فاصلهٔ بین یونهای مثبت، از دید چارچوب بار آزمون، با ضریب $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ یا $1/\gamma$ منقبض شده است. به همین نسبت چگالی خطی بار مثبت در این چارچوب بیشتر است، مقدار این چگالی باید $\gamma\lambda$ باشد. محاسبهٔ چگالی بار منفی کمی بیشتر کار می‌برد چون الکترونها قبلاً در چارچوب آزمایشگاه با سرعت v حرکت می‌کرده‌اند. بنابراین چگالی خطی الکترونها در چارچوب آزمایشگاه، که $-\lambda$ بود، قبلاً با انقباض لورنتس افزایش یافته بود. در چارچوب سکون الکترون چگالی بار منفی باید $-\lambda/\gamma$ باشد که در آن γ ضریب لورنتس مربوط به v است.

حالا سرعت الکترون در چارچوب بار آزمون را لازم داریم تا چگالی الکترونها را در آن چارچوب حساب کنیم. برای پیدا کردن این سرعت (v'_0 در شکل ۵-۲۰ب) باید سرعت $-v$ را با سرعت v جمع کنیم و یادمان باشد که از فرمول نسبیتی جمع سرعتها (معادلهٔ ۶ در پیوست الف) استفاده کنیم. فرض کنیم $\beta'_0 = v'_0/c$ و $\beta_0 = v_0/c$ و $\beta = v/c$ داریم

$$\beta'_0 = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta\beta_0} \quad (18)$$

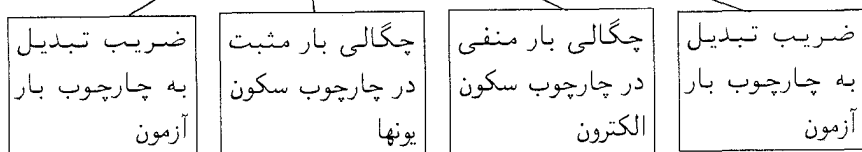
۱. لازم نیست حتماً این‌طور باشد. اما همیشه می‌توانیم با تنظیم تعداد الکترونها در واحد طول این تساری را برقرار کنیم. فرض می‌کنیم این کار شده باشد.

ضریب γ'_0 متناظر لورنتس، که با قدری محاسبه از معادله ۱۸ به دست می‌آید برابر است با

$$\gamma'_0 = (1 - \beta_0'^2)^{-1/2} = \gamma\gamma_0(1 - \beta\beta_0) \quad (19)$$

با این ضریب است که چگالی خطی بار منفی در چارچوب سکون خود الکترون، از دید ناظری که در چارچوب بار آزمون اندازه‌گیری می‌کند، افزایش می‌یابد. چگالی خطی بار در سیم در چارچوب بار آزمون، λ' ، را حالا می‌توانیم محاسبه کنیم:

$$\lambda' = \gamma\lambda_0 - \frac{\lambda_0}{\gamma_0}\gamma\gamma_0(1 - \beta\beta_0) = \gamma\beta\beta_0\lambda_0 \quad (20)$$



سیم بار مثبت دارد. قانون گاوس، وجود یک میدان الکتریکی شعاعی E'_r را تضمین می‌کند که از فرمول میدان بار خطی نامتناهی که با آن آشنا هستیم به دست می‌آید

$$E'_r = \frac{2\lambda'}{r'} = \frac{2\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{r'} \quad (21)$$

در محل بار آزمون q این میدان در جهت $-y'$ است. بر بار آزمون نیروی زیر وارد می‌شود

$$F'_y = qE'_y = -\frac{2q\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{r'} \quad (22)$$

اکنون برگردیم به چارچوب آزمایشگاه که دوباره در شکل ۵-۲۰ نشان داده شده است. نیروی وارد بر بار q در آنجا چه اندازه‌ای دارد؟ اگر مقدار آن در چارچوب سکون بار آزمون qE'_y باشد، ناظرانی که در چارچوب آزمایشگاه هستند نیروی را گزارش خواهند کرد که با ضریب $1/\gamma$ کوچکتر است. چون $r = r'$ ، نیروی وارد بر بار آزمون متحرک ما، که در چارچوب آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شود، برابر است با

$$F_y = \frac{F'_y}{\gamma} = -\frac{2q\beta\beta_0\lambda_0}{r} \quad (23)$$

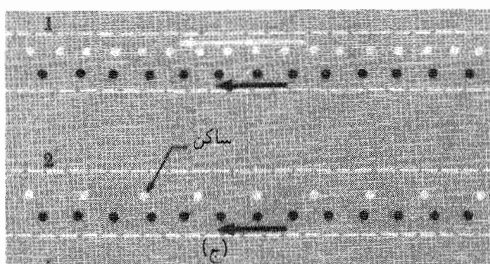
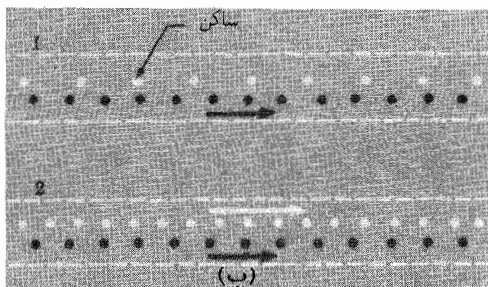
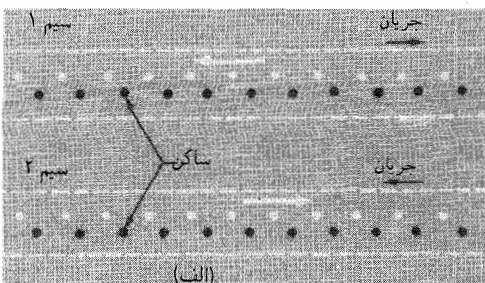
اما $v_0 - \lambda_0 \beta_0 c$ - جریان کل در سیم، در چارچوب آزمایشگاه است، چون برابر است با مقدار باری که در هر ثانیه از نقطه‌ی معینی می‌گذرد. جریان را مثبت خواهیم نامید اگر برابر با بار مثبتی باشد که در جهت مثبت x جاری است. در این مثال جریان ما منفی است. نتیجه را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$$F_y = \frac{\gamma I}{rc^2} qv_x \quad (24)$$

فهمیدیم که در چارچوب آزمایشگاه بر بار آزمون متحرک نیرویی در جهت y وارد می‌شود که متناسب با جریان درسیم و مناسب با سرعت بار آزمون در جهت x است.

جالب توجه است که نیروی وارد بر بار متحرک آزمون به تک‌تک سرعت یا چگالی حاملهای بار بستگی ندارد بلکه فقط به یک حاصلضرب، در اینجا $\beta_0 \lambda_0$ ، بستگی دارد که بار منتقل شده را تعیین می‌کند. اگر جریان I معینی داشته باشیم. مثلاً 10^7 esu/s، که به اندازه ۳۳ میلی‌آمپر است، هیچ فرقی نمی‌کند که این جریان متشکل از الکترونها یا پرانرژی باشد که با سرعتی برابر ۹۹ درصد سرعت نور حرکت می‌کنند، یا از الکترونها فلزی باشد که حرکت گرمایی کاتوره‌ای در یک جهت دارند، یا از یونهاى باردار محلولی که در آن یونهاى مثبت در یک جهت و یونهاى منفی در جهت دیگر حرکت می‌کنند. یا همان‌طور که در مسئله ۵-۱۸ خواهیم دید، ممکن است ترکیبی از این الکترونها جریان را تشکیل بدهد. به علاوه، نیروی وارد بر بار آزمون دقیقاً متناسب با سرعت بار آزمون یعنی v است. استنتاج ما به هیچ‌وجه محدود به سرعت‌های کم نبود، چه برای حاملهای بار در سیم و چه برای بار متحرک q . معادله ۲۴، بدون هیچ محدودیتی به دقت صادق است.

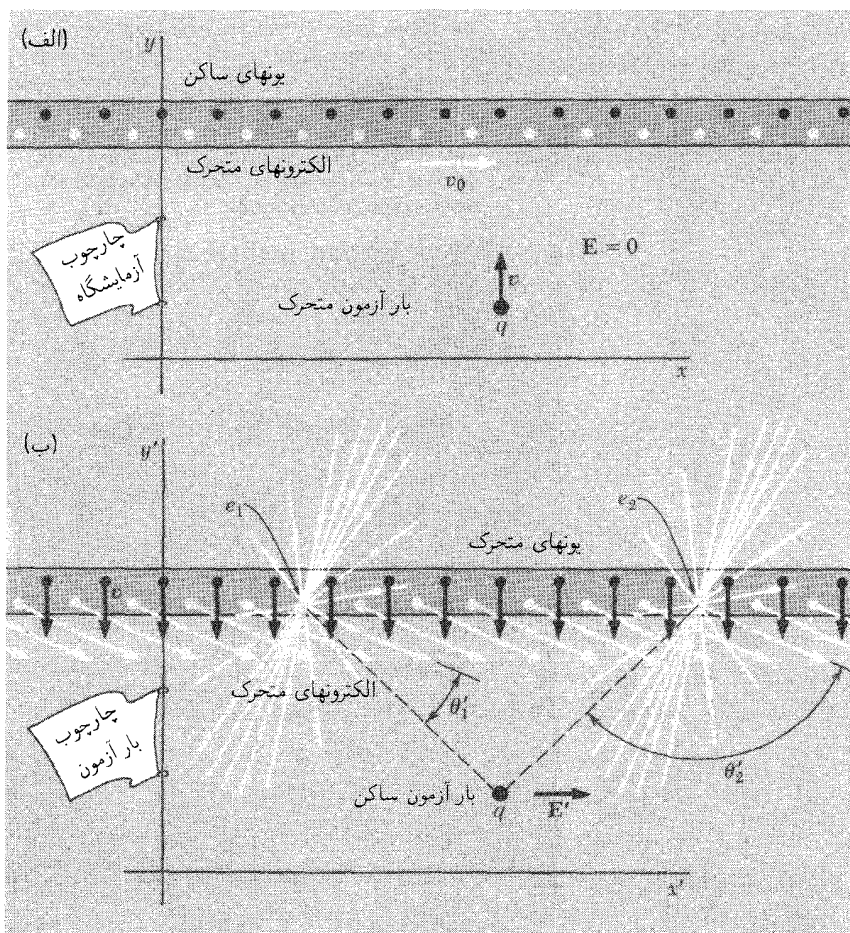
بینیم با این بحث چگونه می‌توان دافعه واقعی رساناهایی را که حامل جریان‌هایی در جهت‌های مخالف‌اند توضیح داد (شکل ۵-۱ب در ابتدای فصل). در شکل ۵-۲۱الف دو سیم با چنین جریان‌هایی در چارچوب آزمایشگاه نشان داده شده است. فرض کنید سیمها در چارچوب آزمایشگاه بدون بارند. در این صورت هیچ نیرویی از سیم مقابل یونهاى مثبتی که در چارچوب آزمایشگاه ساکن‌اند وارد نمی‌شود. با انتقال به چارچوبی که در آن یک سری از بارها ساکن‌اند (شکل ۵-۲۱ب)، می‌بینیم که توزیع الکترونها در سیم دیگر بیشتر از توزیع یونهاى مثبت دچار انقباض لورنتس شده است، به همین خاطر الکترونهاى که در این چارچوب ساکن‌اند از طرف سیم دیگر دفع می‌شوند. اما وقتی به چارچوبی می‌رویم که در آن، آن یکی الکترونها ساکن‌اند (شکل ۵-۲۱ج)، همین وضع را می‌بینیم آنها هم دفع می‌شوند. این نیروهای دافعه در چارچوب آزمایشگاه هم فقط با تفاوت یک ضریب γ مشاهده می‌شوند. نتیجه می‌گیریم که دو خط جریان الکترونها در چارچوب آزمایشگاه همدیگر را دفع می‌کنند. در صورتی‌که الکترونها داخل سیم باقی بمانند، با اینکه مستقیماً نیرویی از



شکل ۲۱-۵ (الف) دو سیم حامل جریانهای مخالف در چارچوب آزمایشگاه. جریان، مثل سیم مسی، تنها ناشی از حرکت یونهای منفی (الکترونها) است. (ب) چارچوب سکون الکترونها سیم ۱. توجه کنید که در سیم ۲ یونهای مثبت به هم نزدیک‌اند اما توزیع الکترونها از این هم بیشتر منقبض شده است. (ج) چارچوب سکون الکترونها سیم ۲. درست مثل شکل (ب) برای این الکترونها ساکن به نظر می‌رسد که سیم دیگر دارای بار منفی شده است.

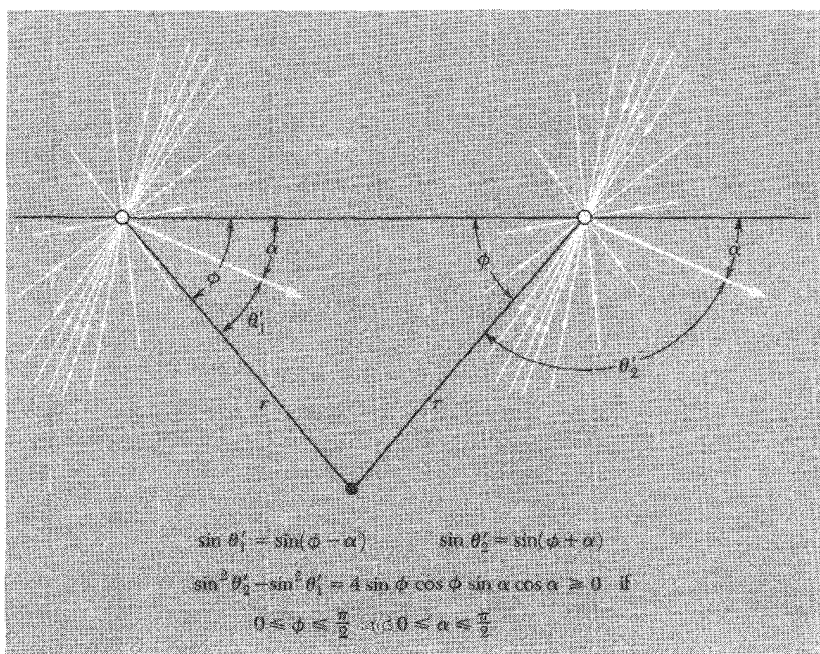
طرف سیم دیگر بر یونهای مثبت ساکن وارد نمی‌شود، این یونها غیرمستقیم تحت تأثیر این نیروی دافعه خواهند بود. بنابراین سیمها، مطابق شکل ۱-۵ ب، از هم دور خواهند شد تا آنکه یک نیروی خارجی با این نیروی دافعه برابری کند.

اگر ذره باردار موازی یک سیم حامل جریان حرکت کند، بر آن نیرویی عمود بر جهت حرکتش وارد می‌شود. اگر عمود بر سانا حرکت کند چه؟ سرعت عمود بر سیم باعث وارد شدن نیرویی موازی با سیم می‌شود. باز هم نیرو عمود بر جهت حرکت ذره است. برای اینکه ببینیم چطور این نتیجه حاصل می‌شود به چارچوب آزمایشگاه این دستگاه برمی‌گردیم و به بار آزمون سرعتی به اندازه u در جهت // می‌دهیم (شکل ۲۲-۵ الف). با انتقال به چارچوب سکون بار آزمون (شکل ۲۲-۵ ب)، می‌بینیم که یونهای مثبت به صورت عمودی رو به پایین حرکت می‌کنند. این یونها مسلماً نمی‌توانند



شکل ۲۲-۵ (الف) "سیم" با جریان بارهای منفی متحرک، یا "الکترونها" مثل شکل ۲۰-۵ است، اما اکنون بار آزمون به طرف سیم در حرکت است. (ب) در چارچوب سکون بارهای مثبت یا "یونها" در جهت \hat{y} حرکت می‌کنند. الکترونها اربیبی حرکت می‌کنند. چون میدان یک بار متحرک در جهتهای تقریباً عمود بر سرعتش قویتر است، یک الکترون در سمت راست، مثل e_2 ، میدانی در مکان بار آزمون ایجاد می‌کند که قویتر از میدان الکترون قرینه سمت چپ در آن مکان است. بنابراین جمع برداری میدانها در این چارچوب، مؤلفه‌ای در جهت \hat{x} دارد.

یک میدان افقی در محل بار آزمون تولید کنند. مؤلفه x' مربوط به میدان یک‌یون از سمت چپ، دقیقاً با مؤلفه x' میدان یونی که در محل قرینه آن در سمت راست است خنثی می‌شود. اثری که در پی آن هستیم ناشی از الکترونها است. همه الکترونها در این چارچوب به صورت مورب، سر



شکل ۵-۲۳ با نگاه دقیقتری به وضع هندسی شکل ۵-۲۲ می بینیم که برای هر جفت الکترون هم فاصله از بار آزمون، برای آنکه در سمت راست است مقدار $\sin^2 \theta'$ بزرگتر است. بنابراین مطابق معادله ۵-۱۲ میدان قویتری در محل بار آزمون تولید خواهد کرد.

پایینی و به سمت راست حرکت می کنند. دو الکترون متقارن e_1 و e_2 را در نظر بگیرید. میدانهای الکتریکی آنها، که به لحاظ نسبیتی در جهت حرکت الکترونها منقبض شده است، با یک دسته خطهای میدان به روش شکل ۵-۱۴ نشان داده شده است. می توانید ببینید که، با اینکه فاصله e_1 از بار آزمون یکسان است، میدان الکترون e_2 در آن محل قویتر از میدان الکترون e_1 خواهد بود. دلیلش این است که خط واصل بین e_2 و بار آزمون بر جهت حرکت e_2 خیلی نزدیک به عمود است. به عبارت دیگر، زاویه θ' که در مخرج کسر معادله ۱۲ ظاهر می شود در اینجا برای e_1 و e_2 متفاوت است، به طوری که داریم $\sin^2 \theta'_2 > \sin^2 \theta'_1$. این امر برای هر جفت الکترونی که روی خط به صورت متقارن قرار داشته باشند صادق است، می توانید به کمک شکل ۵-۲۳ این را تحقق کنید. الکترون سمت راست همیشه برنده است. بنابراین جمع بندی روی تمام الکترونها به یک میدان برابند E' در جهت \hat{x} منجر خواهد شد. مؤلفه y' میدان الکترونها با میدان یونها دقیقاً خنثی می شود. صفر بودن E'_y را قانون گاوس تضمین می کند، چون تعداد بارها در واحد طول سیم همان است که در چارچوب آزمایشگاه بود. سیم در هر دو چارچوب بدون بار است.

نیروی وارد بر بار آزمون ما، qE'_x ، وقتی به چارچوب آزمایشگاه برگردیم، نیرویی متناسب با v در جهت \hat{x} خواهد بود. اگر \mathbf{B} برداری در راستای \hat{z} و رو به ما به سمت بیرون از نمودار باشد، جهت \hat{x} ، جهت $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ است. می‌توان نشان داد که مقدار این نیروی وابسته به سرعت در اینجا هم از معادلهٔ ۲۴ به دست می‌آید: $F = 2quI/rc^2$. همهٔ آنچه از فیزیک لازم داریم در معادلهٔ ۱۲ جمع است، اما انتگرال‌گیری‌اش کمی زحمت دارد و ما اینجا انجام نخواهیم داد.

در این فصل دیدیم چگونه ناوردایی بار مستلزم وجود نیرو بین جریانهای الکتریکی است. لازم نیست حتماً یکی از این دو را علت دیگری بدانیم. اینها صرفاً دو جنبهٔ الکترومغناطیس‌اند که رابطهٔ بین آنها قانون کلی‌تری را به خوبی نشان می‌دهد: فیزیک در تمام چارچوبهای مرجع لخت یکی است. اگر قرار باشد هر دستگاه بارهای متحرک را با رفت و برگشت بین دستگاههای مختصات مختلف تحلیل کنیم کارمان هم خسته‌کننده می‌شود و هم گیج‌کننده. راه بهتری وجود دارد. تأثیر کلی یک جریان بر جریان دیگر، یا یک جریان بر یک بار متحرک را می‌توان با معرفی یک میدان جدید یعنی میدان مغناطیسی، به‌طور کامل و موجز بیان کرد.

مسائل

۱-۵ خازنی متشکل از دو صفحهٔ مستطیل موازی به فاصلهٔ عمودی ۲ cm است. ابعاد شرقی-غربی و شمالی-جنوبی صفحه‌ها به ترتیب ۲° cm و ۱° cm است. خازن با اتصال موقت به یک باتری ۳۰° ولتی (۱ ایستاولت) پر شده است. چند الکترون اضافی روی صفحهٔ منفی وجود دارد؟ شدت میدان الکتریکی بین صفحه‌ها چقدر است؟ حالا مقادیر زیر را در چارچوب مرجعی اندازه‌گیری کنید که نسبت به آزمایشگاه، که صفحه‌ها در آن ساکن‌اند، با سرعت $0.6c$ به سمت شرق حرکت می‌کند: سه بعد خازن؛ تعداد الکترونهاى اضافی روی صفحهٔ منفی؛ شدت میدان الکتریکی بین صفحه‌ها. همین‌ها را برای چارچوب مرجعی که با سرعت $0.6c$ رو به بالا می‌رود به دست آورید.

۲-۵ روی یک رشتهٔ نایلونی به قطر ۱ cm و $0.1c$ و طول ۴ cm تعداد 5×10^8 الکترون اضافی به صورت یکنواخت روی سطح توزیع شده‌اند. شدت میدان الکتریکی در سطح رشته در چارچوبهای زیر چقدر است؟

(الف) در چارچوب سکون رشته

(ب) در چارچوبی که در آن رشته با سرعت $0.9c$ در جهت موازی با طول خود حرکت کند.

۳-۵ یک باریکهٔ الکترون ($\gamma = 20$) با انرژی ۹۵ مگا الکترون‌ولت (MeV) معادل جریان $0.5c$ میکروآمپر از خلأ عبور می‌کند. بعد عرضی باریکه کمتر از ۱ mm است و هیچ بار مثبتی در آن حوالی وجود ندارد.

(الف) در چارچوب آزمایشگاه شدت میدان الکتریکی در فاصلهٔ ۱ سانتی‌متری باریکه تقریباً

چقدر است، فاصله میانگین یک الکترون با الکترون جلوتر از آن از دید ناظری که موازی باریکه اندازه‌گیری می‌کند چقدر است؟

(ب) به همین پرسشها در چارچوب سکون الکترون پاسخ دهید.

۴-۵ مسیر یک ذره باردار را در نظر بگیرید که با سرعت $0.8c$ در جهت x وارد ناحیه بزرگی می‌شود که در آنجا میدان الکتریکی یکنواختی در جهت y وجود دارد. نشان دهید که سرعت x ذره باید واقعاً کم شود. مؤلفه x تکانه چه می‌شود؟

۵-۵ ورقه بارداری با چگالی بار سطحی یکنواخت σ در چارچوب F در نظر بگیرید که زاویه دو وجهی بین صفحه‌های xy و yz را نصف می‌کند. میدان الکتریکی این ورقه ساکن البته عمود بر ورقه است. از دید ناظری در چارچوب F' که نسبت به F با سرعت $0.6c$ در جهت x حرکت می‌کند، این ورقه چگونه توصیف می‌شود؟ چگالی بار سطحی σ' و شدت و جهت میدان الکتریکی در F' چقدر است؟ آیا این میدان هم عمود بر ورقه است؟

۶-۵ در حلقه باریکه، برخوردکننده پاد پروتونی که به سمت شرق می‌رود به پروتونی می‌رسد که به سمت غرب در حرکت است، فاصله نزدیکترین رهیافت 10^6 cm است. انرژی جنبشی هر ذره در چارچوب آزمایشگاه 93 GeV متناظر با $10^5 = \gamma$ است. در چارچوب سکون پروتون، شدت بیشینه میدان الکتریکی ناشی از بار پاد پروتون، در محل پروتون چقدر است؟ تقریباً به چه مدت میدان از نصف مقدار بیشینه‌اش بیشتر بوده است؟

۷-۵ نسبتی‌ترین ذرات بارداری که ما می‌شناسیم پرتوهای کیهانی‌اند که از فضای بیرون از جو به ما می‌رسند. گاهی انرژی جنبشی یکی از این ذرات آنقدر زیاد است که می‌تواند در جو "آبشاری عظیمی" از ذرات ثانویه راه بیندازد و سرانجام به اندازه 10^{11} eV (بیش از یک ژول!) انرژی آزاد کند. ذره اولیه که احتمالاً پروتون است، باید $10^8 \approx \gamma$ داشته باشد. در هنگام عبور این ذره در چه فاصله‌ای از آن میدان به 1 V/m خواهد رسید؟ در این فاصله ضخامت "قرص" خطهای میدان تقریباً چقدر است؟
جواب: 4 m؛ 10^{-10} m $\times 4$.

۸-۵ در چارچوب آزمایشگاه یک پروتون در لحظه $t = 0$ در مبدأ ساکن است. در آن لحظه یک پیون منفی که در امتداد محور x با سرعت $0.6c$ در حرکت است به نقطه 1 cm $0.8c = x$ می‌رسد. هیچ بار دیگری در آن حوالی نیست. مقدار نیروی وارد بر پیون چقدر است؟ مقدار نیروی وارد بر پروتون چقدر است؟ قانون سوم نیوتون در اینجا به چه صورتی در آید؟

۹-۵ در یک اسیلوسکوپ پرتو کاتدی ولتاژ بالا، صفحه‌های منحرف‌کننده دو مستطیل با 4 cm طول و 1.5 cm عرض است که به فاصله $0.8c$ از هم قرار دارند. بین این صفحه‌ها اختلاف پتانسیل 6000 V برقرار است. الکترونی که در یک اختلاف پتانسیل 250 کیلوولتی شتاب گرفته است از سمت چپ وارد این قسمت منحرف‌کننده می‌شود. الکترون در ابتدا موازی صفحه‌ها و

در وسط فاصله بین آنها حرکت می‌کرده است. می‌خواهیم محل الکترون و جهت حرکت آن را بعد از خارج شدن از میدان منحرف‌کننده، در طرف دیگر صفحه‌ها پیدا کنیم. از میدان حاشیه‌ای صفحه‌ها چشمپوشی می‌کنیم و فرض می‌کنیم میدان الکتریکی بین صفحه‌ها همه جا یکنواخت است، جرم الکترون ساکن را می‌توان 50° keV در نظر گرفت. ابتدا با پاسخ به پرسشهای زیر تحلیل مورد نظر را در چارچوب آزمایشگاه انجام دهید: $\gamma = ?$ ؛ $\beta = ?$ ؛ در واحد mc ، $p_x = ?$ ؛ مدت زمان حضور بین صفحه‌ها $= ?$ (تغییر سرعت افقی را که در مسئله ۴-۵ بحث شده در نظر نگیرید)؛ مؤلفه عرضی تکانه به دست آمده در واحد mc $= ?$ ؛ سرعت عرضی در خروجی $= ?$ ؛ مکان عمودی در خروجی $= ?$ ؛ جهت پرواز الکترون خروجی $= ?$ ؛ اکنون همه این فرایندها را از دید یک چارچوب لخت که وقتی الکترون وارد ناحیه منحرف‌کننده می‌شود همراه آن است، توصیف کنید: صفحه‌ها چطور به نظر می‌رسند؟ میدان بین آنها چقدر است؟ در این دستگاه مختصات چه بر سر الکترون می‌آید؟ هدف اصلی این تمرین اطمینان دادن به شما از سازگاری کامل دو توصیف است. ۵-۱۰ در چارچوب سکون ذره‌ای با بار q_1 ، یک ذره دیگر با بار q_2 که با سرعت v قابل مقایسه با سرعت نور در حرکت است به ذره اول نزدیک می‌شود. اگر این ذره به حرکتش روی خط مستقیم ادامه بدهد، از فاصله d از محل ذره اول عبور خواهد کرد. فرض می‌کنیم جرم این ذره به قدری زیاد است که انحرافش از خط راست هنگام رسیدن به ذره اول، در مقایسه با d کوچک است. همین‌طور ذره اول آنقدر سنگین است که جابه‌جایی آن از مکان اولیه هنگام نزدیک شدن ذره دیگر، در مقایسه با d کوچک است. (الف) نشان دهید که افزایش تکانه هر ذره در نتیجه روبرویی عمود بر v است و مقدار آن برابر است با $2q_1q_2/vd$. (قانون گاوس اینجا مفید است.)

(ب) جرم ذرات برحسب کمیت‌های دیگر چقدر باشد تا فرضهای ما موجه شود.

۵-۱۱ معادله ۱۳ را با انتگرال‌گیری حل کنید و شار E عبوری از هر عرقچین کروی در شکل ۵-۱۸ را پیدا کنید. در عرقچین داخلی شدت میدان ثابت است و جزء سطح را می‌توان $2\pi r^2 \sin \theta d\theta$ در نظر گرفت. در عرقچین خارجی میدان از معادله ۱۲ با تغییر لازم در نمادها به دست می‌آید و جزء سطح $2\pi r^2 \sin \phi d\phi$ است. انتگرالی که لازم دارید این است

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(a^2 + x^2)^{1/2}}$$

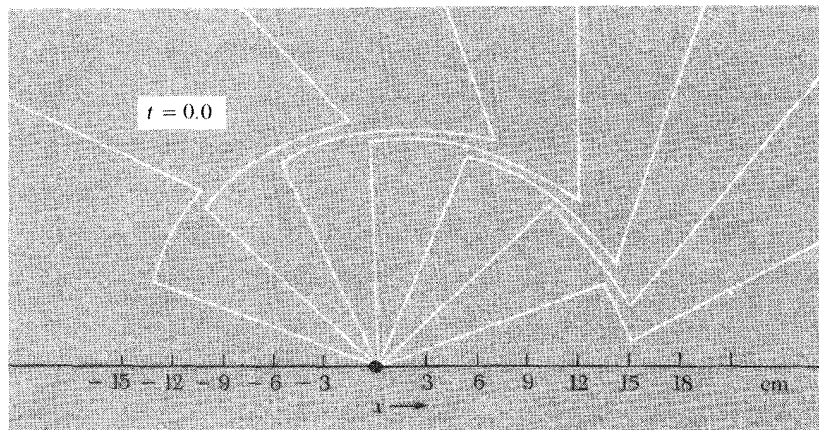
۵-۱۲ در میدان بار متحرک Q که از معادله ۱۲ به دست می‌آید، می‌خواهیم زاویه δ را چنان پیدا کنیم که نیمی از شار کل Q بین دو سطح مخروطی $\theta' = \pi/2 + \delta$ و $\theta' = \pi/2 - \delta$ بماند. اگر مسئله ۵-۱۱ را حل کرده باشید بیشتر کار را انجام داده‌اید. برای $1 \gg \gamma$ باید به این نتیجه برسید که زاویه بین دو مخروط تقریباً $1/\gamma$ است.

۱۳-۵ در شکل الکترونی در لحظه $t = 0^\circ$ و میدان الکتریکی مربوط به آن را در همین لحظه می بینید. فاصله ها در نمودار برحسب سانتی متر داده شده است.

(الف) تعریف کنید چه اتفاقی در حال وقوع بوده است؟ توصیف خود را تا آنجا که می توانید کامل و کمتی کنید.

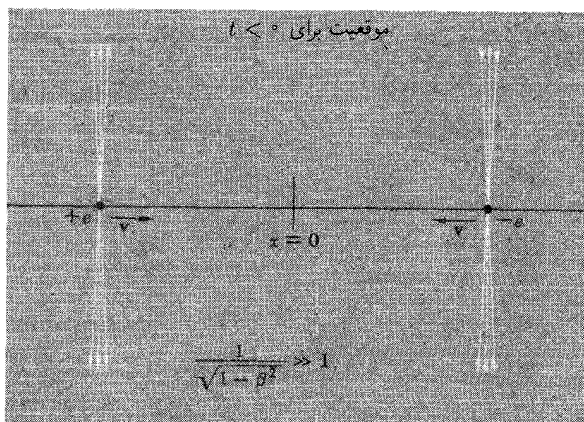
(ب) الکترون در لحظه $t = -7.5 \times 10^{-10}$ s کجا بوده است؟

(ج) شدت میدان الکتریکی در مبدأ در آن لحظه چقدر بوده است؟



شکل مسئله ۱۳-۵.

۱۴-۵ در شکل یک ذره مثبت بسیار نسبیتی از سمت چپ و یک ذره منفی با همان سرعت از



شکل مسئله ۱۴-۵

سمت راست به مبدأ نزدیک می‌شوند. این ذره‌ها در لحظه $t = 0$ به مبدأ می‌رسند و به گونه‌ای انرژی جنبشی خود را از دست می‌دهند و به‌عنوان ذره‌های خنثی همان جا می‌مانند. به نظر شما میدان الکتریکی در یک لحظه $t > 0$ به چه شکل است؟ خط‌های میدان را رسم کنید، میدان با گذشت زمان چگونه تغییر می‌کند؟

۱۵-۵ در شکل ۵-۲۰ فاصله نسبی نقطه‌های سیاه و سفید طوری تنظیم شده است که مطابق با $\gamma = 1.2$ و $\gamma = 0.8$ باشد. β_0 را پیدا کنید. مقدار چگالی بار کل λ' را در چارچوب بار آزمون به‌صورت کسری از λ_0 پیدا کنید.

۱۶-۵ فرض کنید سرعت بار آزمون در شکل ۵-۲۰ مساوی سرعت الکترونها، v_0 شده است.

پس از آن چگالی خطی بار مثبت و بار منفی در چارچوب بار آزمون چقدر خواهد بود؟

۱۷-۵ دو پروتون موازی هم و به فاصله r با سرعت یکسان βc در چارچوب آزمایشگاه حرکت می‌کنند. مطابق معادله ۱۲، در مکان لحظه‌ای یکی از پروتونها میدان الکتریکی E ناشی از پروتون دیگر که در چارچوب آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شود $\gamma e/r^2$ است. اما نیروی وارد بر پروتون که در چارچوب آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شود $\gamma e^2/r^2$ نیست. این امر را با به‌دست آوردن نیرو در چارچوب سکون پروتون و تبدیل آن در چارچوب آزمایشگاه توضیح بدهید. نشان دهید که اگر یک میدان مغناطیسی β برابر قویتر از میدان الکتریکی این پروتون را در سفرش در چارچوب آزمایشگاه همراهی کند، این اختلاف قابل توجیه است.

۱۸-۵ مخلوطی از بارهای خطی در نظر بگیرید که در آن انواع مختلف حاملها هر کدام سرعت خودش را دارد. برای یکی از انواع، k ، چگالی خطی بار که در چارچوب F اندازه‌گیری می‌شود λ_k و سرعت آن $\beta_k c$ موازی خط است. سهم این حاملها در جریان در F برابر می‌شود با $I_k = \lambda_k \beta_k c$. در چارچوب F' که موازی خط با سرعت βc نسبت به F — حرکت می‌کند، چه تعداد از این حاملهای نوع k در جریان و بار سهمینند؟ با دنبال کردن مراحل که در تبدیلهای در شکل ۵-۲۰ در نظر گرفتیم، باید بتوانید نشان دهید که

$$\lambda'_k = \gamma \left(\lambda_k - \frac{\beta I_k}{c} \right) \quad I'_k = \gamma (I_k - \beta c \lambda_k)$$

اگر هر یک از اجزای جریان و چگالی بار خطی این‌طور تبدیل شوند، در نهایت λ و I باید به‌صورت زیر باشند

$$\lambda' = \gamma \left(\lambda - \frac{\beta I}{c} \right) \quad I' = \gamma (I - \beta c \lambda)$$

اکنون تبدیل لورنتس را برای چارچوبی که موازی حرکت می‌کند برای هر بار خطی و جریان، با هر ترکیبی، به دست آورده‌اید.

۱۹-۵ پروتونی روی محور x با سرعت $v_x = -c/2$ به سمت مبدأ حرکت می‌کند. در مبدأ به هسته سنگینی برخورد می‌کند، به صورت کشسان برمی‌گردد و روی محور x تقریباً با همان سرعت دور می‌شود. با یک ترسیم تقریبی نشان دهید میدان الکتریکی ناشی از این پروتون در لحظه $t = 10^{-10}$ ثانیه پس از اینکه پروتون به مبدأ رسید، چگونه است؟

۲۰-۵ یک پروتون روی محور z در نقطه $z = a$ قرار دارد. یک میون منفی با سرعت $0.8c$ روی محور x حرکت می‌کند. میدان الکتریکی برآیند این دو ذره را در این چارچوب، در زمانی که میون از مبدأ می‌گذرد در نظر بگیرید. در آن لحظه مقادیر E_x و E_z در نقطه $(a, 0, 0)$ روی محور x چقدر است؟

جواب: $E_z = -0.354 e/a^2$; $E_x = -0.0645 e/a^2$

۲۱-۵ در یک اسیلوسکوپ چشمه الکترونها کاتی است در پتانسیل 125 kV - نسبت به آند و ناحیه محصور آن سوی دریچه آند. در این ناحیه یک جفت صفحه موازی به طول 5 cm در جهت x (جهت حرکت باریکه الکترون)، و به فاصله 8 mm در جهت y قرار دارند. یک الکترون با سرعت ناچیز از کاتد جدا می‌شود، به سمت آند شتاب می‌گیرد، و بعد از بین این دو صفحه انحراف‌دهنده در لحظه‌ای می‌گذرد که پتانسیل صفحه پایینی 120 V - و پتانسیل صفحه بالایی 120 V + است.

در عبارات زیر جاهای خالی را پر کنید. ثابتهای تقریبی زیر را به کار ببرید: جرم الکترون ساکن مساوی $10^5 \times 5$ و غیره. وقتی الکترون به آند می‌رسد، انرژی جنبشی‌اش _____ الکترون‌ولت است، جرمش با ضریب _____ افزایش می‌یابد و سرعت آن c _____ است. تکانه آن gm cm/s _____ در جهت x است. آن سوی آند الکترون از میان دو صفحه موازی فلزی می‌گذرد. میدان بین صفحه‌ها _____ سانتی‌متر/ایستاولت است؛ نیروی وارد بر الکترون _____ دین رو به بالاست. الکترون _____ ثانیه بین صفحه‌هاست و هنگام خروج از این ناحیه تکانه‌ای در جهت y به اندازه gm cm/s _____ کسب می‌کند. حالا مسیر آن با زاویه _____ رادیان رو به بالاست.

یک نوترون تند که درست همراه با الکترون در حرکت است وقتی الکترون از مبدأ می‌گذرد رویدادهای زیر را گزارش می‌دهد: "ما آنجا نشسته بودیم که این خازن با سرعت _____ سانتی‌متر بر ثانیه به سمت ما پرید. من طوری نشدم ولی یک میدان الکتریکی به اندازه _____ ایستاولت بر سانتی‌متر به الکترون چنان شتابی داد که بعد از رفتن خازن الکترون داشت با سرعت _____ سانتی‌متر بر ثانیه از من دور می‌شد.

میدان مغناطیسی

۶-۱ تعریف میدان مغناطیسی

به هر باری که موازی جریانی از بارهای دیگر حرکت کند، نیرویی در جهت عمود بر سرعت آن وارد می‌شود. این نکته را می‌توان در انحراف باریکه الکترون در شکل ۵-۳ دید. در بخش ۵-۹ دیدیم که این مطلب با قانون کولن، ناوردایی بار، و نسبییت خاص سازگار و در واقع با توجه به آنها ضروری است. و دیدیم که نیرویی عمود بر سرعت ذره باردار، در جهت عمود بر سیم حامل جریان به وجود می‌آید. برای یک جریان معین، اندازه این نیرو، که آن را برای مورد شکل ۵-۲۰ الف محاسبه کردیم، با حاصلضرب بار ذره q و سرعت v در چارچوب مرجع متناسب است. همان‌طور که میدان الکتریکی \mathbf{E} را به صورت بردار نیرو بر واحد بار ساکن تعریف کردیم، می‌توانیم میدان دیگر \mathbf{B} را با بخش وابسته به سرعت نیروی وارد بر بار متحرک تعریف کنیم. رابطه‌ای که این موضوع را مشخص می‌کند در ابتدای فصل ۵ معرفی شد. در اینجا دوباره آن را با دقت بیشتر بررسی می‌کنیم.

در لحظه t ذره‌ای با بار q با سرعت \mathbf{v} از نقطه (x, y, z) چارچوب مرجع ما می‌گذرد. در این لحظه نیروی وارد بر ذره (آهنگ تغییر تکانه آن) \mathbf{F} است. می‌دانیم میدان الکتریکی در این زمان و مکان \mathbf{E} است. بنابراین، میدان مغناطیسی در این زمان و مکان با بردار \mathbf{B} مشخص می‌شود که

در رابطه برداری زیر صدق می‌کند

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (۱-الف)$$

البته، در اینجا \mathbf{F} فقط شامل نیروی وابسته به بار است و به‌عنوان مثال شامل وزن ذره حامل بار نیست. همواره یک بردار \mathbf{B} وجود دارد که در رابطه ۱ صدق کند. با معلوم بودن مقادیر \mathbf{E} و \mathbf{B} در یک ناحیه، می‌توان با استفاده از معادله ۱ نیروی وارد بر هر ذره دیگر را که با هر سرعتی در آن ناحیه حرکت می‌کند پیش‌بینی کرد. برای میدان‌هایی که با زمان و مکان تغییر می‌کنند، معادله ۱ رابطه محلی بین مقادیر لحظه‌ای \mathbf{F} ، \mathbf{E} ، \mathbf{v} و \mathbf{B} است. البته همه این مقادیر را باید در یک چارچوب لخت اندازه گرفت.

در مورد "بار آزمون" ما در چارچوب آزمایشگاه شکل ۵-۲۰ الف میدان الکتریکی \mathbf{E} صفر بود. اگر بار q در جهت مثبت محور x حرکت کند $\mathbf{v} = \hat{x}v$ ، دیدیم که نیروی وارد بر آن در جهت منفی y ، و اندازه آن $\frac{2Iqv}{rc^2}$ است:

$$\mathbf{F} = -\hat{y} \frac{2Iqv}{rc^2} \quad (۲)$$

در این مورد باید میدان مغناطیسی برابر باشد با

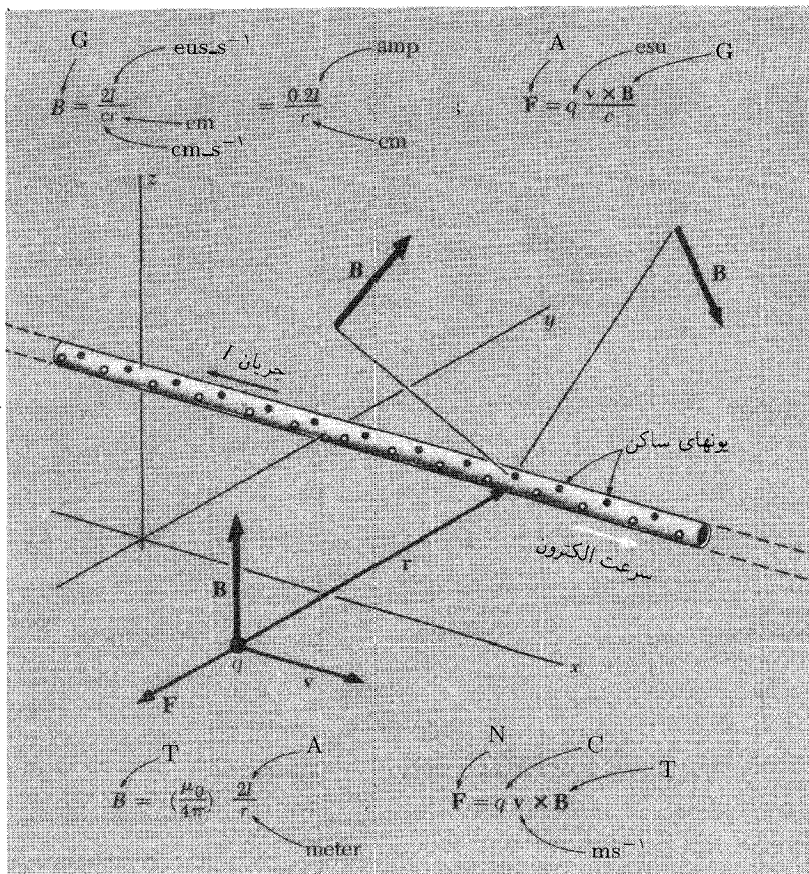
$$\mathbf{B} = \hat{z} \frac{2I}{rc} \quad (۳-الف)$$

پس معادله ۱ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (\hat{x} \times \hat{z}) \left(\frac{qv}{c} \right) \left(\frac{2I}{rc} \right) = -\hat{y} \frac{2Iqv}{rc^2} \quad (۴)$$

که با معادله ۲ سازگار است.

رابطه \mathbf{B} با \mathbf{v} و جریان I در شکل ۱-۶ نشان داده شده است. سه جهت عمود بر هم وجود دارد: جهت بردار \mathbf{B} در نقطه مورد نظر، جهت بردار \mathbf{r} از این نقطه به سیم، و جهت جریان در سیم. در اینجا مسئله دستاوردگی برای اولین بار در بررسی ما مطرح می‌شود. با پذیرش معادله ۱ برای تعریف \mathbf{B} و سازگاری با قانون متداول ضرب برداری، یعنی $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ و غیره، در مختصاتی مانند شکل ۱-۶، جهت \mathbf{B} را تعیین کردیم. این رابطه یک دستاوردگی دارد، که می‌توان آن را با در نظر گرفتن ذره‌ای که در طول سیم در جهت جریان حرکت می‌کند و در عین حال در جهت \mathbf{B} به

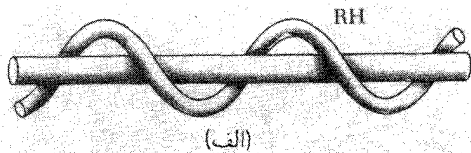


شکل ۱-۶ میدان مغناطیسی جریان در یک سیم دراز مستقیم و نیروی وارد بر ذره باردار که در این میدان حرکت می‌کند.

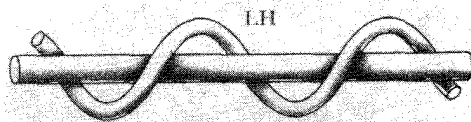
دور سیم می‌چرخد، مجسم کرد. مسیر آن، هر طور که به آن نگاه کنید، مانند شکل ۲-۶ الف یک مارپیچ راستگرد است، و نه مانند شکل ۲-۶ ب یک مارپیچ چپگرد.

آزمایش مانند آزمایش اورستد شکل ۲-۵ الف را در نظر بگیرید. جهت جریان با اتصال سیم به باتری معین می‌شود. جهت عقربه را با رنگی کردن یک سر که آن را نوک پیکان می‌نامیم، می‌توان تعیین کرد. بنا به سنت اورستد انتهای را که به طرف شمال قرار دارد رنگی می‌کنند که قسمت سیاه در شکل ۲-۵ الف است. اگر این شکل را با شکل ۱-۶ مقایسه کنید می‌بینید که B را طوری

۱. اکنون می‌دانیم که میدان مغناطیسی زمین بارها در طول تاریخ زمین‌شناسی معکوس شده است. اگر این صفحه ۱۰۵ سال دوام بیاورد، که بعید است، احتیاج به تجدید نظر خواهد داشت.



(الف)



(ب)

شکل ۲-۶ یادآوری. ماریچ (الف) را ماریچ راستگرد و ماریچ (ب) را ماریچ چپگرد می‌نامیم.

تعریف کرده‌ایم که به سوی "قطب شمال محلی" است. یا به عبارت دیگر، پیکان جریان و عقربه در شکل ۲-۵ الف یک ماریچ راستگرد را توصیف می‌کند، (شکل ۲-۶) مانند جهت جریان و بردار \mathbf{B} در شکل ۱-۶. این بدان معنا نیست که الکترومغناطیس دارای ویژگی ذاتی راستگردی است، بلکه پیامد خودسازگاری قوانین مربوطه و تعاریفی است که با آنها سر و کار داریم. به هر حال، توجه کنید که مسئله دستگردی هرگز در الکتروستاتیک مطرح نمی‌شود. از این نظر بردار \mathbf{B} با بردار \mathbf{E} تفاوت دارد. همان‌طور که بردار سرعت زاویه‌ای در مکانیک با بردار نشاندهنده سرعت خطی متفاوت است.

در مورد یک‌هایی که شدت میدان مغناطیسی را بیان می‌کنند، توجه کنید که طبق معادله معرف ۱، \mathbf{B} همان بعد \mathbf{E} را دارد، زیرا عامل \mathbf{v}/c بی‌بعد است. با F برحسب dyne و بار q برحسب esu، یکایی شدت میدان مغناطیسی dyne/esu است. نام این یکا گاوس (G) است. اگر یکایی dyne/esu به‌عنوان یکایی شدت میدان الکتریکی به‌کار رود، نام ویژه‌ای ندارد. این یکا همان statV/cm (ایستاولت بر سانتی‌متر)، یعنی واژه‌ای است که معمولاً به‌عنوان یکایی شدت میدان الکتریکی در دستگاه CGS به‌کار می‌بریم. وقتی از معادله ۳ برای محاسبه شدت میدان مغناطیسی حاصل از جریان I در فاصله r از یک سیم مستقیم استفاده می‌کنیم، \mathbf{B} برحسب گاوس (یا dyne/cm) به‌دست می‌آید، اگر I برحسب esu/s، r برحسب cm و c برحسب cm/s باشد.

در دستگاه SI معادله‌ها تا اندازه‌ای متفاوت‌اند، زیرا در معادله نیروی معادل، معادله ۱ که \mathbf{B} را تعریف می‌کند به‌صورت زیر است

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (۱-ب)$$

که در آن، \mathbf{F} برحسب N، q برحسب C، \mathbf{E} برحسب V/m، و \mathbf{v} برحسب m/s است. توجه

کنید که c در معادله ظاهر نمی‌شود. در یک میدان مغناطیسی به شدت واحد، بر بار یک کولن که با سرعت یک متر بر ثانیه عمود بر میدان حرکت کند، نیروی یک نیوتون وارد می‌شود. یکای B که این‌طور تعریف می‌شود تسلا (T) است. یک تسلا دقیقاً معادل 10^4 گاوس است. رابطه بین میدان و جریان، که با معادله ۳ هم‌ارز است با یکاهای SI به صورت زیر در می‌آید:

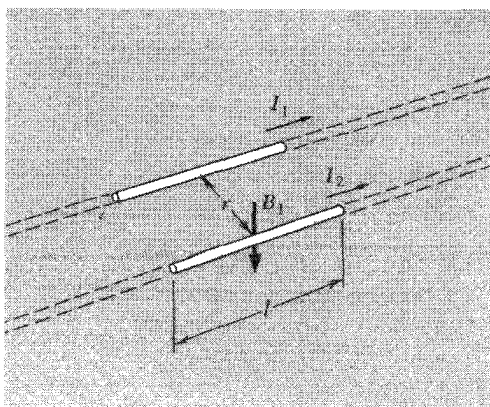
$$B = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (3-b)$$

که در آن B برحسب تسلا، I برحسب آمپر، و r برحسب متر است. ثابت μ_0 ، مانند ثابت ϵ_0 در الکتروستاتیک، یک یکای بنیادی دستگاه یکاهای SI است. مقدار آن دقیقاً برابر $4\pi \times 10^{-7}$ است. بگذارید از معادله‌های ۱ و ۳ برای محاسبه نیروی مغناطیسی بین سیمهای موازی حامل جریان استفاده کنیم. r را فاصله بین سیمها و I_1 و I_2 را جریانهایی در نظر می‌گیریم که در یک جهت هستند. مطابق شکل ۳-۶ سیمها بینهایت دراز در نظر گرفته می‌شوند — که برای موارد عملی که طول سیمها در مقایسه با فاصله آنها زیاد باشد فرضی منطقی است. می‌خواهیم نیروی وارد بر طول l یکی از سیمها را پیش‌بینی کنیم. جریان در سیم میدان مغناطیسی به شدت

$$B_1 = \frac{2I_1}{cr} \quad (5)$$

در محل سیم ۲ ایجاد می‌کند. در داخل سیم ۲ تعداد n_2 بار متحرک با بار q_2 و سرعت v_2 در هر سانتی‌متر سیم وجود دارد که جریان I_2 را به وجود می‌آورند:

$$I_2 = n_2 q_2 v_2 \quad (6)$$



شکل ۳-۶ جریان I_1 ، میدان مغناطیسی B_1 را در رسانای ۲ به وجود می‌آورد. زیرا نیروی وارد بر طول l رسانای ۲ از معادله ۷-ب یا ۷-الف به دست می‌آید.

معادلهٔ ۱ نیروی وارد بر هر بار $q_2 v_2 B_1 / c$ است. بنابراین، نیروی وارد بر هر سانتی متر سیم $n_2 q_2 v_2 B_1 / c$ یا به سادگی $I_2 B_1 / c$ دین بر سانتی متر است. با توجه به معادلهٔ ۴، نیروی وارد بر طول l سیم ۲ برابر است با

$$F = \frac{2 I_1 I_2 l}{c^2 r} \quad (۷-الف)$$

روشن است که نیروی وارد بر همان طول از سیم ۱ بر اثر سیم ۲ نیز از همین رابطه به دست می‌آید. ما به علایم نپرداخته‌ایم، زیرا می‌دانیم جریانهای هم جهت یکدیگر را جذب می‌کنند. همین محاسبه که با استفاده از یکاهای SI و معادله‌های ۱-ب و ۳-الف انجام گیرد، به رابطهٔ زیر می‌انجامد

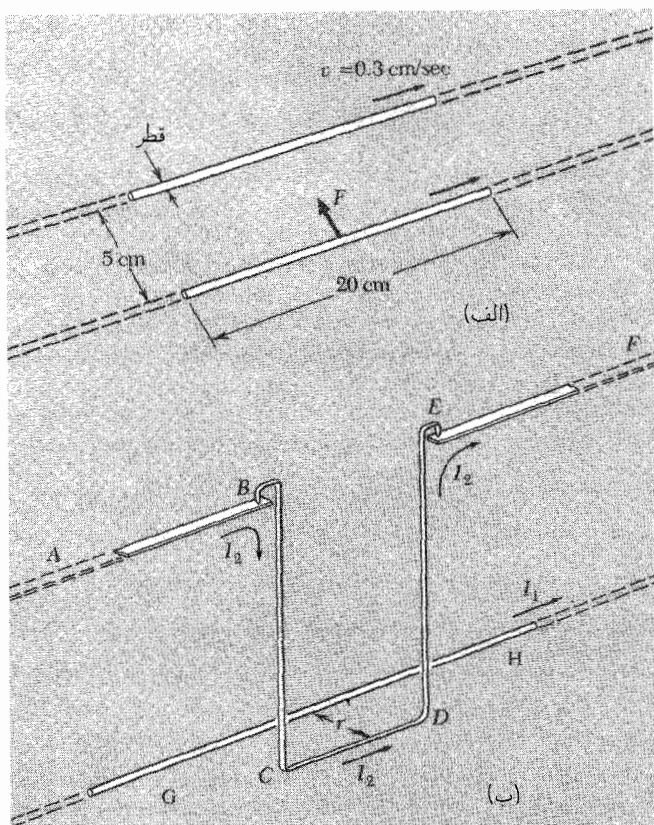
$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 l}{d} \quad (۷-ب)$$

که در آن F برحسب نیوتون، و I_1 و I_2 برحسب آمپر است. چون عامل l/d که در معادله‌های ۷-الف و ۷-ب ظاهر می‌شوند بی‌بعدند، l و d را می‌توان با هر یکایی بیان کرد.^۲ بیاید از معادلهٔ ۶ برای زوج سیمهای شکل ۶-۴ استفاده کنیم. این سیمها از جنس مس به قطر ۱ mm با فاصلهٔ ۵ cm از یکدیگر هستند. در مس تعداد الکترونهاى رسانش در سانتی متر مکعب، چنانکه در فصل ۴ گفته شد، برابر 8.45×10^{22} است. بنابراین $(8.45 \times 10^{22})(\pi/4)(1 \text{ cm})^3$ یا $10^{20} \times 6.6$ الکترون رسانش در ۱ cm سیم وجود دارد. اگر سرعت سوق میانگین \bar{v} برابر 3 cm/s باشد (البته سرعت کاتوره‌ای آنها بسیار بیشتر است). جریان در هر سیم برابر است با

$$I = nq\bar{v} = (6.6 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3})(4.8 \times 10^{-19} \text{ esu})(3 \text{ cm/s}) \\ = 9.5 \times 10^{10} \text{ esu/s} \quad (۸)$$

۱. B_1 میدان داخل سیم ۲ بر اثر جریان در سیم ۱ است. هنگامی که در فصل ۱۱ میدانهای مغناطیسی داخل ماده را بررسی کنیم، درمی‌یابیم که اغلب رساناها، از جمله مس و آلومینیم به استثنای آهن، تأثیر اندکی بر میدان مغناطیسی دارند. فعلاً از چیزهایی مانند آهن و مواد فرومغناطیسی احتراز می‌کنیم. بنابراین به آسودگی می‌توان فرض کرد که میدان مغناطیسی در داخل سیم عملاً میدانی است که همان جریان را در خلأ به وجود می‌آورد.

۲. معادلهٔ ۷-ب را معمولاً به‌عنوان تعریف اولیهٔ آمپر در دستگاه SI، با μ_0 برابر $4\pi \times 10^{-7}$ ، در نظر می‌گیرند. یعنی می‌توان گفت که یک آمپر جریانی است که اگر از دو سیم بینهایت دراز موازی به فاصلهٔ d از یکدیگر عبور کند، نیرویی برابر 2×10^{-7} نیوتون بر طول d یکی از سیمها وارد می‌کند. سایر یکاهای الکتریکی SI برحسب آمپر تعریف می‌شوند. بنابراین، یک کولن یک آمپر-ثانیه، یک ولت یک ژول به کولن و یک اهم یک ولت بر آمپر است (پیوست ه).



شکل ۴-۶ (الف) جریان در هر سیم مسی 9.5×10^{10} esu/s، و نیروی F وارد بر طول 20 سانتی متری رسانا 8° دین است. (ب) یک راه برای اندازه گیری نیرویی وارد بر طولی از رسانا. بخش $BCDE$ مانند آونگی در زیر محورهای رسانا تاب می خورد. نیروی وارد بر طول CD به واسطه میدان رسانای مستقیم GH تنها نیرویی است که سبب انحراف آونگ از وضعیت قائم می شود.

نیروی جاذبه بر طول 20 cm سیم برابر است با

$$F = \frac{2I^2l}{c^2d} = \frac{2(9.5 \times 10^{10})^2 \times 20}{(3 \times 10^{10})^2 \times 5} = 8^\circ \text{ dyne} \quad (9)$$

8° دین نیروی زیادی نیست، ولی به آسانی می توان آن را اندازه گرفت. شکل ۴-۶ ب نشان می دهد که چگونه می توان نیروی وارد بر طول معینی از رسانا را مشاهده کرد. c^2 در مخرج معادله ۹ یادآور آن است که، همان طور که در فصل قبل دیدیم، این اثر نسبیتی و متناسب با v^2/c^2 و منشأ آن انقباض لورنتس است. در اینجا v کمی کمتر از سرعت یک مورچه قبارق نیروی قابل ملاحظه ای

تولید می‌کند! علت آن است که الکترونهاى رسانش نمایندهٔ بار منفی بسیار زیادى هستند که در حالت عادى به علت خنثى شدن دقیق آنها به وسیلهٔ بار مثبت متوجه آن نمى‌شویم. برای شناخت این نیرو، دافعهٔ بین سیمها در شکل ۳-۶ را در نظر بگیرید. در صورتی که بار $10^{20} \times 6.6$ الکترون در سانتی متر خنثى نمى‌شد. نیرو درست، v^2/c^2 برابر نیرویى می‌شد که در بالا محاسبه کردیم، یعنی تقریباً 40 تریلیون تن به ازای هر سانتی متر سیم! اگر الکترونهاى موجود در یک قطرهٔ باران از زمین دور شوند، پتانسیل زمین چند صد میلیون ولت افزایش می‌یابد.

تودهٔ ماده، از قطرهٔ باران گرفته تا سیارات، در واقع به دقت خنثى است. می‌بینیم که هر قطعه مادهٔ بزرگتر از مولکول، همان تعداد الکترون دارد که پروتون، در غیر این صورت میدان الکتریکی حاصل به اندازه‌ای قوی می‌شد که بار اضافی را بدون هیچ مقاومتی پرتاب می‌کرد. این رویداد برای الکترونهاى سیم مسی، حتى اگر بار اضافی بیش از 10^{-10} برابر بار کل نبود، رخ می‌داد. از طرف دیگر، یک میدان مغناطیسی نمى‌تواند بدین سان خود را نابود کند. شدت آن هر قدر هم که زیاد باشد، بر بار ساکن نیرویى وارد نمى‌کند. به این دلیل نیروی حاصل از حرکت می‌تواند صحنه‌گردان باشد. دومین جملهٔ طرف راست معادلهٔ ۱ می‌تواند از جملهٔ اول بسیار بزرگتر شود. به واسطهٔ این جملهٔ دوم است که یک موتور الکتریکی می‌تواند موتور اتومبیل را خاموش کند. در قلمرو اتمی که نیروی کولننى بین زوج ذره‌هاى باردار وارد می‌شود، نیروهاى مغناطیسی نسبت به نیروهاى الکتریکی در درجهٔ دوم اهمیت قرار می‌گیرند. این نیروها با همان ضریبی که انتظار داریم، یعنی مربع نسبت سرعت ذره به سرعت نور ضعیف‌ترند.

در انتها با میدانهاى مغناطیسی با شدتهاى تا 10^5 گاؤس روبه‌رو می‌شویم. شدیدترین میدانهاى که در آزمایشگاه می‌توان تولید کرد در همین حدود هستند. گرچه میدانهاى تا چند میلیون کیلوگاؤس نیز برای مدت کوتاه تولید شده‌اند، در ماشینهاى الکتریکی معمولی مانند موتورهای الکتریکی، 10^4 گاؤس (یا تسلا)^۱ معمولتر است. شدت میدان مغناطیسی در سطح زمین چند دهم گاؤس و در هستهٔ فلزی آن که جریانهای مولد میدان جریان دارند مسلماً چندین بار بیشتر است. در اطراف خورشید و بر سطح آن می‌توان نمایش جالبی از میدانهاى مغناطیسی را مشاهده کرد. یک لکهٔ خورشیدی فوران میدان مغناطیسی با شدت محلی چند هزار گاؤس است. بعضی ستاره‌ها میدانهاى مغناطیسی قویتری دارند. قویترین میدانهاى مغناطیسی، میدان موجود در سطح یک ستارهٔ نوترونی یا تپ اختر است که شدت آن می‌تواند به مقدار باور نکردنی 10^{12} گاؤس برسد. در مقیاس گسترده‌تر، در کهکشان ما بعضی میدانهاى مغناطیسی وجود دارند که در سرتاسر فاصلهٔ

۱. نیکلا تسلا (۱۸۵۶-۱۹۴۳) مخترع و مهندس برق که یکا در سیستم SI به افتخار او نامگذاری شده است، موتور القایی جریان متناسب و سایر دستگاههای الکترومغناطیسی سودمند را اختراع کرد. کار گاؤس در مغناطیس بیشتر مربوط به میدان مغناطیسی زمین بود. این مطلب به شما کمک می‌کند تا به یاد داشته باشید کدام یکا بزرگتر است.

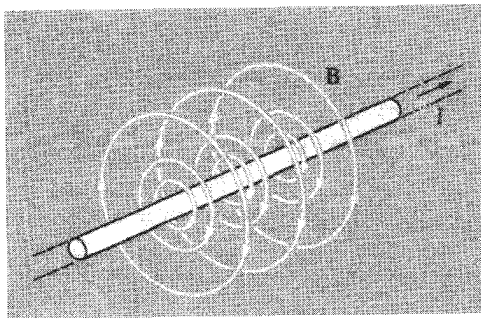
هزاران سال نوری فضای میان ستاره‌ای گسترده شده‌اند. شدت این میدانها را می‌توان با استفاده از رصدهای اخترشناسی رادیویی به‌دست آورد. این شدت در حدود چند میکروگاوس است که برای مؤثر بودن میدان مغناطیسی به‌عنوان یک عامل قابل ملاحظه در دینامیک محیط میان ستاره‌ای کافی است.

۲-۶ بعضی از مشخصات میدان مغناطیسی

میدان مغناطیسی، مانند میدان الکتریکی وسیله‌ای برای توصیف چگونگی برهم‌کنش ذره‌های باردار با یکدیگر است. اگر بگوییم میدان مغناطیسی در نقطه $(۴۵, ۳۲, ۶۰)$ در ساعت $۱۲:۰۰$ ظهر افقی و در جهت منفی محور y قرار دارد و بزرگی آن ۵ گاوس است، در مورد شتاب ذره باردار متحرک در آن نقطه فضا زمان اظهار نظر کرده‌ایم. نکته قابل توجه آن است که در این مورد آنچه را باید درباره یک کمیت برداری \mathbf{B} بگوییم به سادگی بیان کرده‌ایم. با استفاده از آن می‌توان بخش وابسته به سرعت نیروی وارد بر هر ذره باردار را که با هر سرعتی حرکت می‌کند پیش‌بینی کرد. این مطلب ما را از هرگونه توضیح بیشتر درباره سایر ذره‌های باردار مولد میدان بی‌نیاز می‌کند. به عبارت دیگر، اگر دو سیستم کاملاً متفاوت از ذره‌های باردار، در یک نقطه معین میدانهای یکسان \mathbf{E} و \mathbf{B} را تولید کنند، رفتار هر ذره آزمون در آن نقطه در هر دو سیستم یکسان است. بدین دلیل است که مفهوم میدان، به‌عنوان واسطه در برهم‌کنش ذره سودمند است. به این علت، میدان را موجودی مستقل در نظر می‌گیریم.

آیا این میدان واقعیت است یا ذره‌هایی که هدف از ابداع میدان توصیف برهم‌کنش آنها از دیدگاه کنونی ماست؟ این سؤالی است بنیادی که فعلاً به آن نمی‌پردازیم. افرادی که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی برایشان موجوداتی حقیقی بودند — از جمله فاراده و ماکسول — با بصیرتی که از این راه به‌دست آوردند به کشفیاتی بزرگ نایل شدند. بنابراین، مانند آنها به میدان مغناطیسی به‌صورت ملموس می‌نگریم تا بعضی از ویژگیهای آن را فرا بگیریم.

تاکنون فقط میدان مغناطیسی یک سیم مستقیم یا رشته جریان پایدار را بررسی کردیم. دیدیم که جهت میدان در همه جا عمود بر صفحه‌ای است که از رشته و نقطه مشاهده میدان تشکیل می‌شود. اندازه این میدان با $1/r$ متناسب است. خطوط میدان مانند شکل ۵-۶ دایره‌هایی هستند که رشته را احاطه می‌کنند. جهت \mathbf{B} طبق قرارداد قبلی ما در مورد حاصلضرب خارجی دو بردار، و با توجه به این تصمیم (اختیاری) تعیین می‌شود که جمله دوم معادله ۱ را به صورت $(q/c)\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ بنویسیم، و این واقعیت فیزیکی را در نظر بگیریم که بار مثبتی که در جهت جریان مثبت حرکت می‌کند به جای دفع شدن، جذب آن می‌شود. این فرضها در صورتی سازگارند که جهت \mathbf{B} را با جهت جریان به‌صورت شکل ۵-۶ مرتبط کنیم. اگر به جهت جریان مثبت بنگریم، خواهیم دید



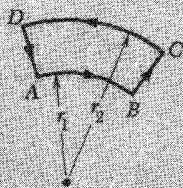
شکل ۵-۶ خطوط میدان مغناطیسی برای یک سیم مستقل حامل جریان.

که خطوط B در جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیچیده‌اند، یا شاید ترجیح می‌دهید که رابطه دست راست را به خاطر آورید.

بگذارید انتگرال خطی B در یک مسیر بسته در این میدان را بررسی کنیم (به خاطر داشته باشید که بررسی مشابه در میدان الکتریکی بار نقطه‌ای به یافتن یک ویژگی ساده و بنیادی میدانهای الکتروستاتیکی انجامید). ابتدا مسیر $ABCD$ شکل ۶-۶الف را در نظر بگیرید. این مسیر در صفحه عمود بر مسیر قرار دارد؛ در واقع کافی است که در این صفحه کار کنیم، زیرا B مؤلفه موازی سیم ندارد. انتگرال خطی B مسیر به دلایل زیر صفر است. مسیرهای BC و DA بر B عمودند و سهمی ندارند. B در امتداد AB ، به اندازه r_2/r_1 قویتر از امتداد CD است، اما CD به همان اندازه از AB درازتر است، زیرا این دو کمان زاویه یکسانی را با سیم می‌سازند. در نتیجه دو کمان سهم برابر و با علامت مخالف دارند و کل انتگرال صفر است.

بنابراین انتگرال خطی در هر مسیر متشکل از قطعه شعاعها و کمانها، مانند شکل ۶-۶ب نیز صفر است. کافی است قدمی دیگر برداریم تا به این نتیجه کلی برسیم که انتگرال خطی حول هر مسیری که سیم را در بر نگیرد صفر است. برای صاف کردن گوشه‌ها فقط باید نشان دهیم که انتگرال حول مثلثهای کوچک نیز صفر است. در مورد میدان الکتریکی نیز همین مسئله را داشتیم. مسیری که سیم را در بر نگیرد، مانند شکل ۶-۶ج است، که اگر از سیم ساخته شده باشد می‌توان آن را باز کرد. انتگرال حول همه این نوع مسیرها صفر است.

اکنون مسیر دایره‌ای مانند شکل ۶-۶د را در نظر می‌گیریم که سیم را در بر گرفته است. در اینجا پیرامون دایره $2\pi r$ و میدان برابر $2I/cr$ همه جا موازی مسیر است، به طوری که مقدار انتگرال خطی حول این مسیر ویژه $(2I/c)(2\pi r)$ و یا $4\pi I/c$ است. اکنون ادعا می‌کنیم که هر مسیری که یک بار دور سیم بگردد نتیجه مشابهی می‌دهد. برای مثال، مسیر پر پیچ و خم C در شکل ۶-۶ه را در نظر بگیرید. مسیر C' در شکل ۶-۶و را چنان می‌سازیم که از مسیر



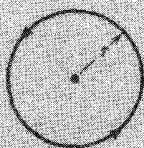
(الف) مسیری که در صفحه عمود بر سیم قرار دارد



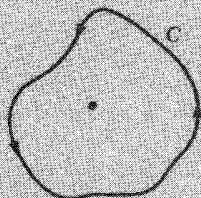
(ب) مسیری که از قطعه شعاعها و کمانها تشکیل شده است



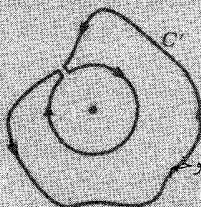
(ج) مسیری که سیم را در بر می‌گیرد



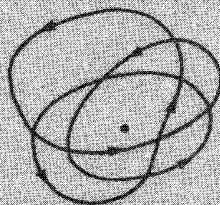
(د) مسیر دایره‌ای که سیم را در بر گرفته است



(ه) مسیر بی‌بج‌وختم که سیم را در بر گرفته است



(ز) مسیر دایره و مسیر بی‌بج‌وختم که سیم را در بر گرفته است



(ز) حلقه متشکل از N دور که سیم را در بر گرفته است

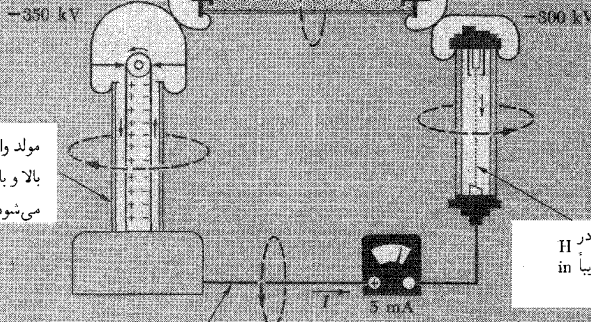
شکل ۶-۶ انتگرال خطی میدان مغناطیسی B بر روی هر مسیر بسته، فقط به جریان در بر گرفته شده بستگی دارد.

C و یک مسیر دایره‌ای تشکیل شده باشد ولی سیم را در بر نگیرد. انتگرال خطی حول C' باید صفر باشد، و بنابراین انتگرال حول C باید منفی انتگرال حول دایره باشد که قبلاً مقدار آن را برابر $\frac{4\pi I}{c}$ به دست آوردیم. روشن است که علامت به جهت گردش مسیر بستگی دارد. نتیجه‌گیری کلی به صورت زیر است

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} \times \text{جریانی که مسیر در بر می‌گیرد} \quad (۱۰)$$

معادله ۱۰ در صورتی صادق است که مسیر یکبار دور رشته بگردد. روشن است که اگر مسیر

آب خالص؛ بارهای منفی با سرعت 3.5 cm/s به راست؛ یونهای مثبت با سرعت 2 cm/s به چپ حرکت می‌کنند.



مولد وان دوگراف؛ بار منفی به طرف بالا و بار مثبت به طرف پایین حمل می‌شود. $v \sim 2000 \text{ cm/s}$

باریکه الکترون بر انرژی در H خلا؛ سرعت الکترون تقریباً $2.4 \times 10^{10} \text{ cm/s}$

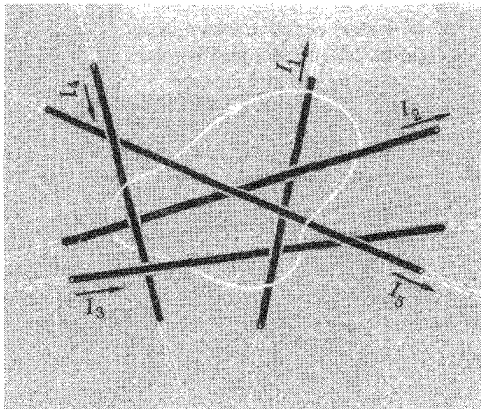
سیم مسی؛ الکترونهای رسانش با سرعت میانگین تقریباً 10^{-2} cm/s به چپ رانده می‌شود.

شکل ۷-۶ انتگرال خطی B حول هر قسمت از این مدار دارای مقداری دقیقاً یکسان است، اگر چه حاملان بار در قسمتهای مختلف کاملاً متفاوت‌اند.

مانند مسیر شکل ۷-۶، N بار حلقه بزند، نتیجه N برابر نتیجه انتگرال خطی خواهد بود. همان طور که قبلاً تأکید کردیم، میدان مغناطیسی فقط تابع آهننگ انتقال بار یعنی تعداد واحدهای باری است که از یک نقطه معین مدار در ثانیه می‌گذرند. شکل ۷-۶ مدار حامل جریان ۵ میلی‌آمپر را نشان می‌دهد که معادل $15 \times 10^6 \text{ esu/s}$ است. سرعت میانگین حاملان بار در گستره از 10^{-2} cm/s در یک قسمت مدار تا ۸^۰ سرعت نور در قسمت دیگر است. انتگرال خطی B در مسیر بسته در همه قسمت‌های این مدار مساوی و برابر است با:

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi I}{c} = \frac{4\pi \times (15 \times 10^6 \text{ esu/s})}{3 \times 10^{10} \text{ cm/s}} = 0.00628 \text{ G}\cdot\text{cm} \quad (11)$$

آنچه راکه با استفاده از اصل برهم‌نهی برای رشته دراز مستقیم جریان، ثابت کردیم. برای میدان

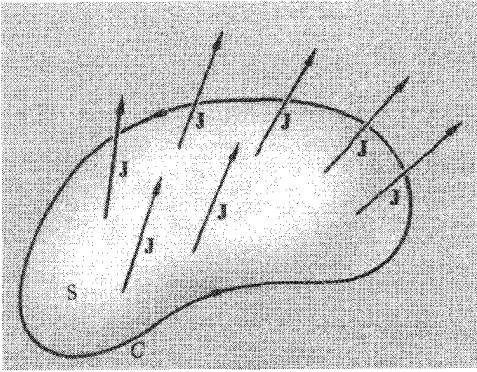


شکل ۸-۶ برهم‌نهی رشته سیمهای مستقیم. انتگرال خطی B حول مسیر بسته در جهتی که با نوک پیکان مشخص شده است برابر است با $(4\pi/c)(-I_1 + I_2)$.

حاصل از هر سیستم متشکل از رشته‌های مستقیم نیز صادق است. در شکل ۸-۶ سیمها حامل جریان در جهتهای مختلف هستند. اگر معادله 10° برای میدان یکی از این سیمها صادق باشد، باید برای میدان کل که جمع برداری میدان سیمها در هر نقطه است نیز صادق باشد. این میدان کاملاً پیچیده است. با وجود این، می‌توان مقدار انتگرال خطی B حول مسیر بسته شکل ۸-۶ را با توجه به اینکه چه جریانهایی در چه جهت از مسیر می‌گذرند برآورد کرد.

به هر حال، ما به چه چیزهای دیگری غیر از سیمهای دراز مستقیم نیز علاقه‌مندیم. می‌خواهیم میدان حاصل از هر توزیع جریان را بشناسیم — برای مثال، میدان حاصل از جریان در یک حلقه بسته، که حلقه دایره‌ای جریان ساده‌ترین مورد آن است. شاید بتوان این میدان را با استفاده از حاملان بار با تبدیل مناسب به‌دست آورد. یک حلقه جریان می‌تواند مجموعه الکترونیایی باشد که با سرعت ثابت در یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کنند. اما در اینجا راه‌برد ما موفق نیست. مشکل از آنجا ناشی می‌شود که الکترون متحرک در مسیر دایره‌ای، بار شتابدار است، در صورتی‌که میدانهای مغناطیسی که با جدیت به‌دست آوردیم مربوط به بارهایی بودند که با سرعت ثابت حرکت می‌کردند. بنابراین برنامه به‌دست آوردن میدان را در اینجا رها می‌کنیم و به این واقعیت ساده می‌پردازیم که: این میدانهای کلی‌تر دقیقاً از همان قانون معادله 10° پیروی می‌کنند. انتگرال خطی B حول یک سیم خمیده برابر است با میدان حول یک سیم مستقیم حامل همان جریان. چون این نتیجه‌گیری فراتر از چیزهایی است که تاکنون استنتاج کرده‌ایم، باید به آن به‌صورت یک اصل موضوع بنگریم که با آزمونهای تجربی ثابت شده است.

برای بیان این قانون به کلی‌ترین صورت، باید به توزیع حجمی جریان بپردازیم. توزیع کلی جریان پایا را می‌توان با چگالی حجمی جریان $\mathbf{J}(x, y, z)$ نشان داد که از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌کند ولی تابع زمان نیست. جریان در سیم فقط حالت خاصی است که در آن مقدار \mathbf{J}



شکل ۹-۶. \mathbf{J} چگالی جریان محلی است. انتگرال سطحی \mathbf{J} بر روی S جریانی است که خم C را در برمی‌گیرد.

در سیم بزرگ و در سایر نقاط صفر است. در فصل ۴ در مورد توزیع حجمی جریان بحث کردیم و دیدیم که برای جریانهای مستقل از زمان، \mathbf{J} باید در معادله پیوستگی، یا شرط پایستگی بار صدق کند.

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad (۱۲)$$

خم بسته C را در ناحیه‌ای که جریان وجود دارد در نظر بگیرید. کل جریانی که C در بر می‌گیرد، شار \mathbf{J} از این سطح، یعنی انتگرال $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ روی سطح S است (شکل ۹-۶). بنابراین، بیان کلی رابطه ۱۰ به صورت زیر درمی‌آید

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (۱۳)$$

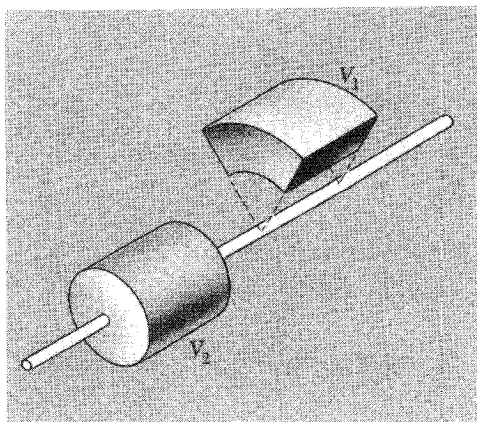
بگذارید این رابطه را با قضیه استوکس در فصل ۲ مقایسه کنیم:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} \quad (۱۴)$$

می‌بینیم که بیان هم‌ارز معادله ۱۳ به صورت زیر است:

$$\boxed{\operatorname{curl} \mathbf{B} = \frac{4\pi \mathbf{J}}{c}} \quad (۱۵\text{-الف})$$

این ساده‌ترین و کلی‌ترین فرم بیان رابطه بین میدان مغناطیسی و بارهایی است که منشأ آن هستند.



شکل ۶-۱۰ شار خالص \mathbf{B} از هر دو جعبه صفر است.

به هر حال، معادله ۱۵ برای تعیین $\mathbf{B}(x, y, z)$ با معلوم بودن $\mathbf{J}(x, y, z)$ کافی نیست، زیرا بردار میدانهای مختلف می‌توانند تاویکسان داشته باشند. پس باید آن را با شرطی دیگر کامل کنیم. بهتر است به فکر دیورژانس \mathbf{B} باشیم. با مراجعه به میدان مغناطیسی یک سیم مستقیم، می‌بینیم که دیورژانس میدان صفر است. شما نمی‌توانید در هیچ جا جعبه کوچکی رسم کنید، حتی جعبه‌ای که سیم را در برگرد، که شار خالصی به طرف خارج یا داخل داشته باشد. کافی است توجه کنید که جعبه‌های V_1 و V_2 در شکل ۶-۱۰ شار خالصی ندارد و حتی اگر حجمشان صفر شود، شار خالصی پیدا نمی‌کنند. پس برای این میدان $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ، و در نتیجه برای برهم‌نهی‌هایی از این میدانها نیز چنین خواهد بود. دوباره فرض می‌کنیم که این اصل را می‌توان به میدان حاصل از هر توزیع جریانی گسترش داد، بنابراین قرینه معادله ۱۲ شرط زیر است:

$$\boxed{\text{div } \mathbf{B} = 0} \quad (16)$$

در دستگاه یکاهای SI رابطه میدان مغناطیسی \mathbf{B} برحسب تسلا و چگالی جریان، برحسب تسلا و چگالی جریان، برحسب A/cm^2 به صورت زیر است

$$\text{curl } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (15\text{-ب})$$

ما به میدانهایی علاقه‌مندیم که جریانهایی مربوط به آن در ناحیه محدودی قرار دارند. پس چشمه‌هایی بینهایت دور و چشمه‌های بینهایت شدید را در نظر نخواهیم گرفت. با توجه به این نکته و با استفاده از معادله‌های ۱۵ و ۱۶ و معلوم بودن \mathbf{J} ، می‌توان \mathbf{B} را به صورت یکتا تعیین کرد. زیرا اگر فرض کنیم که دو میدان مختلف \mathbf{B}_1 و \mathbf{B}_2 در این دو معادله صدق کنند. تفاوت

آنها یعنی میدان برداری $\mathbf{D} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$ است که دیورژانس و تاو آن در همه جا صفر است. این میدان چه شکلی دارد؟ با داشتن تاو صفر، میدان باید گرادیان تابع پتانسیل $f(x, y, z)$ باشد: $\mathbf{D} = \nabla f$. اما $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ ، پس در همه جا $\nabla \cdot \nabla f = 0$ یا $\nabla^2 f = 0$. در مرز احاطه‌کننده‌ای که به اندازه کافی دور است، f باید مقدار ثابت f_0 را اختیار کند. چون f در همه جای داخل مرز در معادله لاپلاس صدق می‌کند، نمی‌تواند هیچ‌جا دارای بیشینه یا کمینه باشد (بخش ۲-۱۱) و بنابراین باید مقدار آن همه جا f_0 باشد. پس $\mathbf{D} = \nabla f = 0$ و $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$. در مورد میدان الکتروستاتیک معادله‌های هم‌ارز معادله‌های ۱۵ و ۱۶ معادله زیر بودند

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \text{و} \quad \operatorname{curl} \mathbf{E} = 0 \quad (17)$$

در مورد میدان الکتریکی، به هر حال، می‌توانستیم از قانون کولن شروع کنیم که سهم هر بار را در میدان الکتریکی در هر نقطه مستقیماً بیان می‌کند. در اینجا باید کاری کنیم که رابطه‌ای از آن نوع به دست آوریم.^۱ این کار با استفاده از تابع پتانسیل امکانپذیر است.

۳-۶ پتانسیل برداری

دیدیم که تابع پتانسیل نرده‌ای $\varphi(x, y, z)$ راه ساده‌ای برای محاسبه میدان الکتروستاتیکی حاصل از یک توزیع بار است. اگر توزیع بار $\rho(x, y, z)$ باشد، پتانسیل در هر نقطه (x_1, y_1, z_1) از انتگرال حجمی زیر به دست می‌آید

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = \int \frac{\rho(x_2, y_2, z_2) dv_2}{r_{12}} \quad (18)$$

انتگرال‌گیری بر روی توزیع بار انجام می‌گیرد و r_{12} اندازه فاصله از (x_2, y_2, z_2) تا (x_1, y_1, z_1) است. میدان الکتریکی \mathbf{E} ، منهای گرادیان φ است:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (19)$$

در اینجا به علت سرشت اساساً متفاوت B نمی‌توان از این شگرد استفاده کرد. چون تاو \mathbf{B} الزاماً صفر نیست، بنابراین \mathbf{B} عموماً نمی‌تواند گرادیان یک پتانسیل نرده‌ای باشد. به هر حال، نوع ۱. شاید دانشجو به این فکر بیفتد که چرا نمی‌توانیم از معادل قانون کولن برای برهم‌کنش جریانها استفاده کنیم. پاسخ آن است که قطعه‌ای از رشته جریان، برخلاف بار الکتریکی، شیء مستقلی نیست که بتوان آن را به صورت فیزیکی منزوی کرد. شما نمی‌توانید آزمایشی ترتیب دهید تا میدان را از قسمتی از مدار معین کنید. اگر بقیه مدار وجود نداشته باشد، جریان نمی‌تواند بدون تخلف از شرط پیوستگی پایا باشد.

دیگری از مشتق برداری، یعنی ناو را می‌شناسیم. ثابت شده است که می‌توان \mathbf{B} را نه به صورت گرادین یک تابع نرده‌ای، بلکه به صورت ناو یک تابع برداری نشان داد، مانند این

$$\boxed{\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A}} \quad (20)$$

با استفاده از تشابه آشکار، \mathbf{A} را پتانسیل برداری می‌نامیم. در اینجا معلوم نیست که چرا این شگرد سودمند است. ولی در ادامه بحث روشن خواهد شد، باعث دلگرمی است که معادله ۱۶ خود به خود صادق است، زیرا برای هر مقدار \mathbf{A} داریم $\text{div curl } \mathbf{A} = 0$. به عبارت دیگر، این واقعیت که $\text{div } \mathbf{B} = 0$ به ما این امکان را می‌دهد که \mathbf{B} را صورت ناو تابع برداری دیگری نشان دهیم. حال باید راهی برای محاسبه \mathbf{A} با معلوم بودن \mathbf{J} به دست آوریم، به طوری که معادله ۲۰ میدان مغناطیسی صحیح را بدهد. با توجه به معادله ۱۵، رابطه بین \mathbf{J} و \mathbf{A} به صورت زیر است

$$\text{curl}(\text{curl } \mathbf{A}) = \frac{4\pi\mathbf{J}}{c} \quad (21)$$

معادله ۲۱ که یک معادله برداری است، در واقع از سه معادله تشکیل شده است. ما فقط در مورد یکی از آنها، مثلاً مؤلفه x معادله کار می‌کنیم. مؤلفه x برای $\text{curl } \mathbf{B}$ برابر $\partial B_z / \partial y - \partial B_y / \partial z$ است. مؤلفه‌های z و y برای \mathbf{B} به ترتیب عبارت‌اند از

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (22)$$

بنابراین قسمت مربوط به مؤلفه x معادله ۲۱ به صورت زیر است

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = \frac{4\pi J_x}{c} \quad (23)$$

فرض می‌کنیم که توابع ما چنان‌اند که می‌توان مرتبه معادله دیفرانسیل را تعویض کرد. با استفاده از این نکته و اندکی تغییر ترتیب، می‌توان معادله ۲۳ را به صورت زیر نوشت

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = \frac{4\pi J_x}{c} \quad (24)$$

برای تقارن بیشتر، جمله $\partial^2 A_x / \partial x^2$ را به طرف چپ معادله بالا اضافه و کم می‌کنیم

$$-\frac{\partial A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \frac{4\pi J_x}{c} \quad (25)$$

سه جمله اول معادله بالا منفی لاپلاسی A_x است. کمیت داخل پرانتز دیورژانس \mathbf{A} است. اکنون در ساختن \mathbf{A} تا اندازه‌ای آزادی عمل داریم. ما فقط به تاو آن علاقه‌مندیم؛ دیورژانس آن می‌تواند هر چیز دلخواه باشد. پس شرط زیر را اعمال می‌کنیم^۱

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (26)$$

به عبارت دیگر، در میان توابع مختلفی که ممکن است در شرط $\operatorname{curl} \mathbf{A} = \mathbf{B}$ صدق کنند، نامزدهایی را در نظر می‌گیریم که دیورژانس صفر داشته باشند. پس قسمتی از معادله ۲۵ حذف می‌شود و خواهیم داشت

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\frac{4\pi J_x}{c} \quad (27)$$

J_x تابع نرده‌ای شناخته شده‌ای از x, y, z است. بگذارید معادله ۲۷ را با معادله پواسون ۲-۲۴ که به صورت زیر بود مقایسه کنیم

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi \rho \quad (28)$$

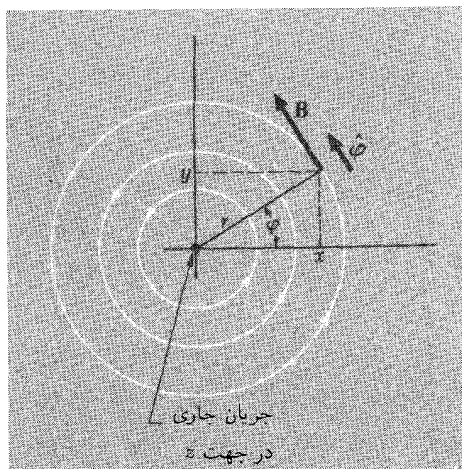
دو معادله شکل یکسانی دارند. می‌دانستیم که معادله ۲۸ را چگونه حل کنیم. انتگرال حجمی در معادله ۱۸ دستورکار است. بنابراین، حل معادله ۲۷ باید به صورت زیر باشد

$$A_x(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{c} \int \frac{J_x(x_2, y_2, z_2) dv_2}{r_{12}} \quad (29)$$

سایر مؤلفه‌ها باید در رابطه‌های مشابه صدق کنند. همه آنها را می‌توان در یک فرمول برداری خلاصه کرد:

$$\mathbf{A}(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(x_2, y_2, z_2) dv_2}{r_{12}} \quad (30)$$

۱. برای اینکه ببینیم چرا می‌توانیم چنین کنیم، فرض کنید \mathbf{A} چنان است که $\operatorname{curl} \mathbf{A} = \mathbf{B}$ ولی $\operatorname{div} \mathbf{A} = f(x, y, z) \neq 0$. با در نظر گرفتن f به صورت چگالی بار ρ در میدان الکتروستاتیکی، به روشنی می‌توان میدان \mathbf{F} را چنان یافت که مشابه میدان الکتروستاتیکی \mathbf{E} باشد، به طوری که $\operatorname{div} \mathbf{F} = f$. ولی می‌دانیم که تاو چنین میدانی صفر خواهد بود. بنابراین می‌توانیم $-\mathbf{F}$ را به \mathbf{A} بیفزاییم و میدان جدیدی با تاو مناسب و دیورژانس صفر به دست آوریم.



شکل ۱۱-۶ بعضی از خطهای میدان اطراف یک رشته جریان. جهت جریان به طرف شما (خارج از صفحه کاغذ) است.

فقط یک مانع وجود دارد. برای به دست آوردن معادله ۲۷ فرض کردیم که $\text{div } \mathbf{A} = 0$. چگونه می دانیم که این شرط در مورد \mathbf{A} که از رابطه ۳۰ به دست می آید صادق است؟ خوشبختانه می توان نشان داد که چنین است.

به عنوان مثالی از پتانسیل برداری، سیم دراز مستقیم حامل جریان I را در نظر بگیرید. در شکل ۱۱-۶ می بینیم که جریان به طرف خارج صفحه و در جهت مثبت محور z است. می دانیم که میدان مغناطیسی یک سیم مستقیم چگونه است. خطوط میدان چنانکه در شکل ۵-۶ دیدیم دایره اند. خطوطی چند در شکل ۱۱-۶ نشان داده شده اند. اندازه \mathbf{B} برابر $2I/cr$ است. با استفاده از بردار یکه $\hat{\phi}$ در جهت "محیطی" می توان بردار \mathbf{B} را به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{B} = \frac{2I\hat{\phi}}{cr} \quad (31)$$

با توجه به اینکه بردار یکه $\hat{\phi} = \sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$ برابر $-\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$ است، می توانیم این رابطه را برحسب x و y به صورت زیر بنویسیم:

$$\mathbf{B} = \frac{2I(-\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y})}{c\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2I}{c} \left(\frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{x^2 + y^2} \right) \quad (32)$$

یک تابع برداری $\mathbf{A}(x, y, z)$ که در رابطه $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ صدق می کند به صورت زیر است:

$$\mathbf{A} = -\hat{z} \frac{I}{c} \ln(x^2 + y^2) \quad (33)$$

برای تحقیق آن مؤلفه‌های $\nabla \times \mathbf{A}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{A})_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{-2Iy}{c(x^2 + y^2)} \quad (= B_x) \\(\nabla \times \mathbf{A})_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{2Ix}{c(x^2 + y^2)} \quad (= B_y) \\(\nabla \times \mathbf{A})_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \quad (= B_z)\end{aligned} \quad (34)$$

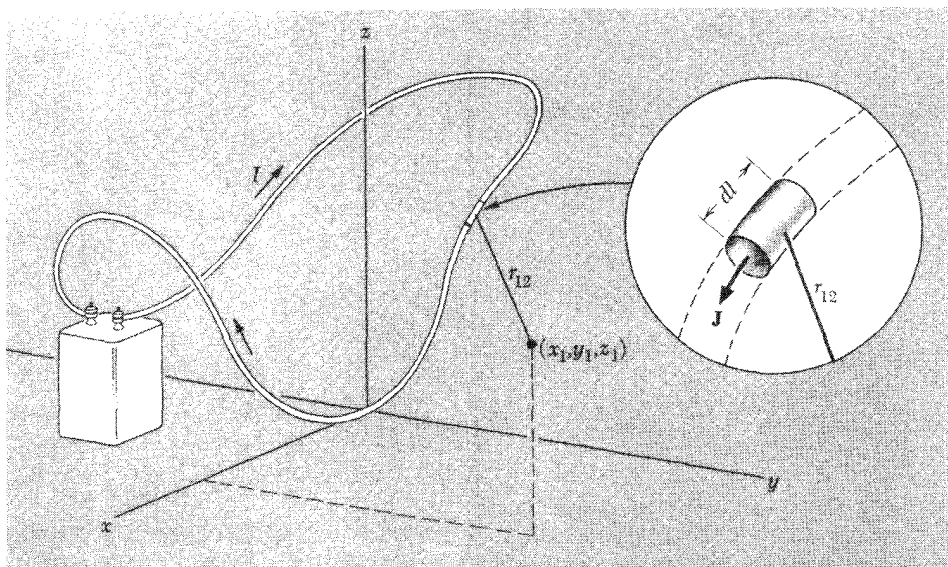
البته، این تنها تابعی نیست که می‌تواند به‌عنوان پتانسیل برداری برای این تابع \mathbf{B} به‌خصوص به‌کار رود. به \mathbf{A} در معادله ۳۳ می‌توان هر تابع برداری با تاو صفر را افزود: در داخل سیم، \mathbf{B} فرق می‌کند، بنابراین، \mathbf{A} نیز باید متفاوت باشد. یافتن تابع پتانسیل برداری مناسب در داخل یک سیم گرد جامد مشکل نیست — مسئله ۶-۲۶ را ببینید.

اتفاقاً، \mathbf{A} در مثال بالا را نمی‌توان با استفاده از معادله ۳۰ به‌دست آورد. انتگرال به علت نامتناهی بودن سیم واگرا می‌شود. این مطلب شاید مشکلی را به خاطر شما آورد که در فصل ۲ برای به‌دست آوردن پتانسیل نرده‌ای میدان الکتریکی یک سیم بردار داشتیم. در واقع، این دو مسئله، چنانکه از شکل هندسی و تشابه معادله‌های ۳۰ و ۱۸ انتظار می‌رود، ارتباط نزدیک دارند. دیدیم (معادله ۲-۱۷) که یک پتانسیل نرده‌ای مناسب برای مسئله بار خطی به‌صورت ثابت اختیاری $-\lambda \ln(x^2 + y^2) + \text{const}$ است. در اینجا پتانسیل صفر مربوط به نقطه اختیاری است که نه روی سیم قرار دارد و نه در بینهایت. هر دو پتانسیل نرده‌ای و برداری معادله ۳۳ در مبدأ و بینهایت هستند.

۴-۶ میدان هر سیم حامل جریان

شکل ۶-۱۲ یک حلقه سیم حامل جریان I را نشان می‌دهد. پتانسیل برداری \mathbf{A} در نقطه (x_1, y_1, z_1) با توجه به معادله ۳۰ با انتگرال‌گیری روی حلقه به‌دست می‌آید. برای جریان در یک سیم نازک می‌توان جزء حجم dv_2 را بخش کوتاهی از سیم به طول dl در نظر گرفت. چگالی جریان J برابر I/a است، که در آن a سطح مقطع و $dv_2 = a dl$ است. بنابراین $J dv_2 = Idl$ و اگر بردار $d\mathbf{l}$ را در راستای جریان مثبت در نظر بگیریم، می‌توانیم به سهولت Idl را جایگزین $J dv_2$ کنیم. در نتیجه برای یک سیم نازک یا رشته، می‌توان معادله ۳۰ را به‌صورت انتگرال خطی روی مدار نوشت

$$\mathbf{A} = \frac{I}{c} \int \frac{d\mathbf{l}}{r_{12}} \quad (35)$$



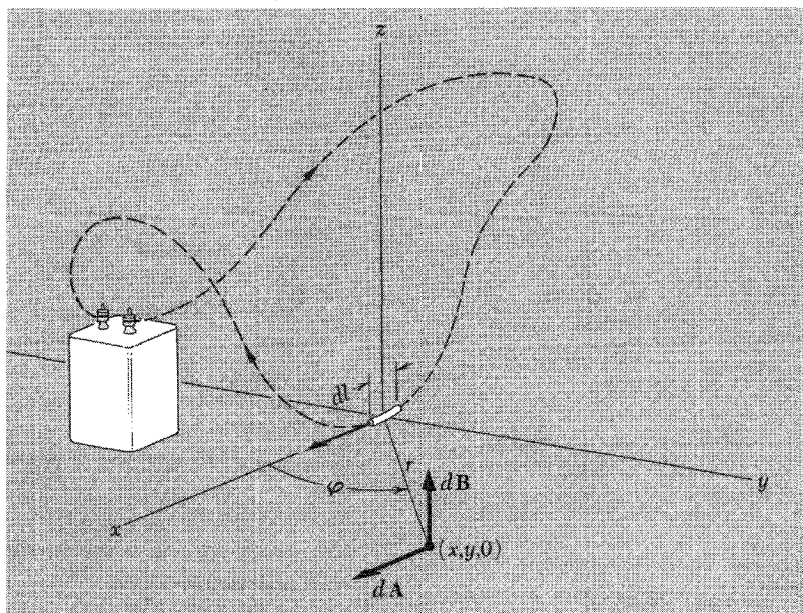
شکل ۱۲-۶ هر جزء را حلقه جریانی سهمی در پتانسیل برداری A در نقطه (x_1, y_1, z_1) دارد.

محاسبه A در همه جا و یافتن B با گرفتن تاو آن، می‌تواند طولانی باشد. بهتر است که یک قسمت از انتگرال خطی برای A را مانند بخشی از سیم که در مبدأ قرار دارد و در آن جریانی در جهت x می‌گذرد منزوی کرد (شکل ۱۳-۶). طول این قسمت را با dl نشان می‌دهیم. فرض کنید dA سهم این قسمت در انتگرال A باشد. سپس در نقطه (x, y, z) در صفحه xy dA در جهت مثبت محور x برابر است با

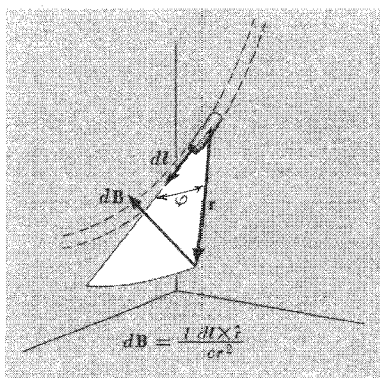
$$dA = \hat{x} \frac{(I/c)dl}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (36)$$

با توجه به تقارن، روشن است که سهم این قسمت A در تاو A باید بر صفحه xy عمود باشد. با نشان دادن قسمت B مربوط با dB خواهیم داشت

$$\begin{aligned} dB &= \text{curl}(dA) = \hat{z} \left(-\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= \hat{z} \frac{(I/c)dly}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \hat{z} \frac{(I/c)dl \sin \varphi}{r^2} \end{aligned} \quad (37)$$



شکل ۱۳-۶ اگر سهم dA سهم جزء نشان داده شده در A را پیدا کنیم، سهم آن در B را می‌توان از رابطه $B = \text{curl } A$ به دست آورد.



شکل ۱۴-۶ میدان هر مدار را می‌توان با استفاده از رابطه موجود برای سهم هر جزء مدار محاسبه کرد.

با این نتیجه می‌توانیم فوراً خود را از یک دستگاه مختصات به خصوص رها کنیم. زیرا فقط سمتگیری نسبی جزء dl و بردار شعاع r از این جزء به نقطه‌ای که B وجود دارد حائز اهمیت است. سهم هر بخش کوتاه dl در B را می‌توان برداری عمود بر صفحه متشکل از dl و r با اندازه $I dl \sin \varphi / r^2 c$ در نظر گرفت، که در آن φ زاویه میان dl و r است. این مطلب را می‌توان با استفاده از ضرب برداری و با توجه به شکل ۱۳-۶ به شکل فشرده زیر نوشت.

$$d\mathbf{B} = \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{cr^2} \quad (38)$$

اگر با قواعد محاسبه‌های برداری آشنا باشید، می‌توانید از معادله ۳۵ به ۳۸ میان‌تربزینید. با نوشتن $d\mathbf{B} = \nabla \times d\mathbf{A}$ و $\nabla \cdot d\mathbf{A} = Idl/cr$ را به صورت بردار در نظر می‌گیریم و با تغییر ترتیب ضرب برداری علامت را عوض می‌کنیم. در اینجا $d\mathbf{l}$ ثابت است، بنابراین ∇ فقط بر روی $1/r$ اثر می‌کند، در غیر این صورت نمی‌توانستیم این کار را انجام دهیم! یادآور می‌شویم که $\nabla(1/r) = -\hat{\mathbf{r}}/r^2$ (مانند رفتن از پتانسیل کولنی به میدان کولنی). بنابراین:

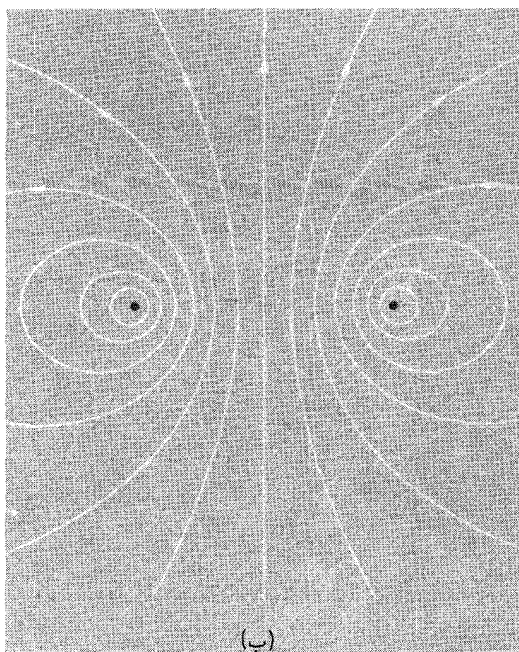
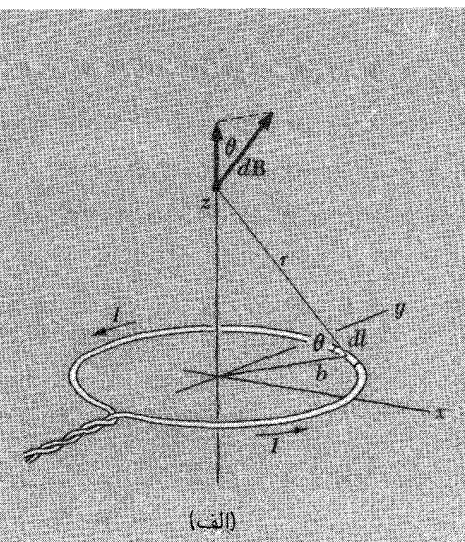
$$\begin{aligned} d\mathbf{B} &= \nabla \times \frac{I d\mathbf{l}}{cr} = -\frac{I}{c} d\mathbf{l} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= -\frac{I}{c} d\mathbf{l} \times \left(-\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{cr^2} \end{aligned} \quad (39)$$

از لحاظ تاریخی، معادله ۳۸ به قانون بیو-ساووار معروف است. معنای معادله ۳۸ آن است که اگر \mathbf{B} با انتگرال‌گیری بر روی مدار کامل، با در نظر گرفتن سهم هر جزء، از این رابطه محاسبه شود، \mathbf{B} حاصل صحیح خواهد بود. همان‌طور که در پانویشت پایان بخش ۶-۲ دیدیم، سهم هر قسمت از مدار به صورت فیزیکی قابل شناسایی نیست. در واقع، معادله ۳۸ برای به دست آوردن نتیجه صحیح برای \mathbf{B} رابطه منحصر به فردی نیست — می‌توان به آن هر تابعی را که انتگرال آن روی مسیر بسته صفر شود افزود.

به نظر می‌رسد که پتانسیل برداری را پس از انجام خدمت لازم کنار گذاشته‌ایم. در واقع، اغلب آسانتر است که در عمل میدان یک سیستم جریان را به جای پیدا کردن پتانسیل برداری در ابتدای کار، مستقیماً از معادله ۳۸ محاسبه کنیم. در بخش بعد در این مورد با چند مثال تمرین خواهیم کرد. اما پتانسیل برداری به دلایلی عمیقتر حائز اهمیت است. از یک نظر، این پتانسیل شباهت بارز بین رابطه میدان الکتروستاتیکی \mathbf{E} و منبع آن یعنی بار الکتریکی را با رابطه میدان مغناطیسی \mathbf{B} و جریان پایا نشان می‌دهد، بزرگترین فایده آن در آینده در مطالعه میدانهای وابسته به زمان و تابش الکترومغناطیسی خواهد بود.

۵-۶ میدانهای حلقه‌ها و پیچه‌ها

یک رشته حامل جریان به صورت یک حلقه دایره‌ای به شعاع b در شکل ۶-۱۵ ب نشان داده شده است. می‌توان بدون هیچ محاسبه‌ای پیشگویی کرد که میدان مغناطیسی این چشمه باید چیزی



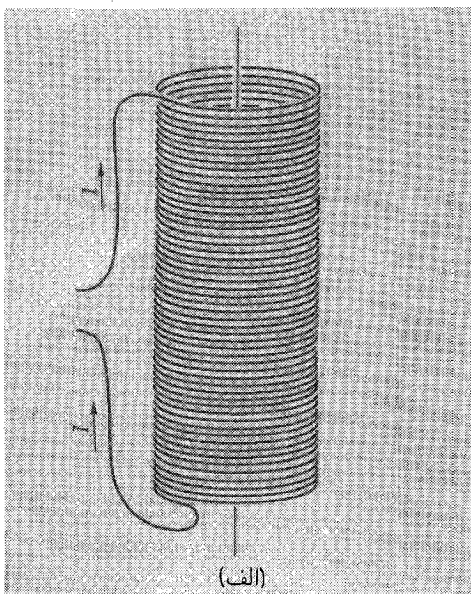
شکل ۱۵-۶ میدان مغناطیسی یک جریان حلقه‌ای. (الف) محاسبه روی محور میدان؛ (ب) بعضی از خطهای میدان.

شبهه شکل ۱۵-۶ ب باشد، که در آن خطهای میدان را در صفحه‌ای رسم کرده‌ایم که از محور تقارن می‌گذرد. این میدان باید به‌طور کلی حول محور z در شکل ۱۵-۶ الف، تقارن چرخشی داشته باشد، و خطهای میدان باید نسبت به صفحه حلقه، صفحه xy ، متقارن باشند. در فاصله خیلی نزدیک به رشته، میدان شبیه به میدان یک سیم طویل مستقیم است، زیرا قسمتهای دور حلقه اهمیت چندانی ندارند.

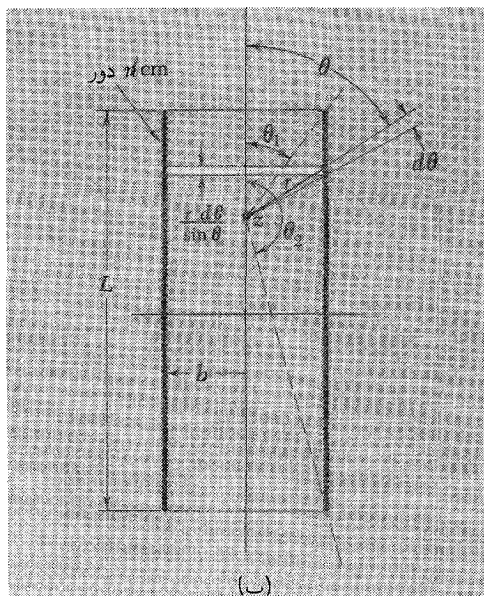
محاسبه میدان در روی محور با استفاده از معادله ۳۸ آسان است. هر جزء حلقه به طول dl سهمی برابر dB در جهت عمود بر r خواهد داشت. فقط باید مؤلفه z میدان dB را در نظر بگیریم. زیرا می‌دانیم که میدان کل در روی محور باید در جهت z باشد

$$dB_z = \frac{I dl}{cr^2} \cos \theta = \frac{I dl}{cr^2} \frac{b}{r} \quad (40)$$

با انتگرال‌گیری بر روی حلقه، به سادگی داریم $\int dl = 2\pi b$ ، به طوری که میدان روی محور در هر



(الف)



(ب)

شکل ۶-۱۶ (الف) سیمولوه. (ب) محاسبه میدان روی محور سیمولوه.

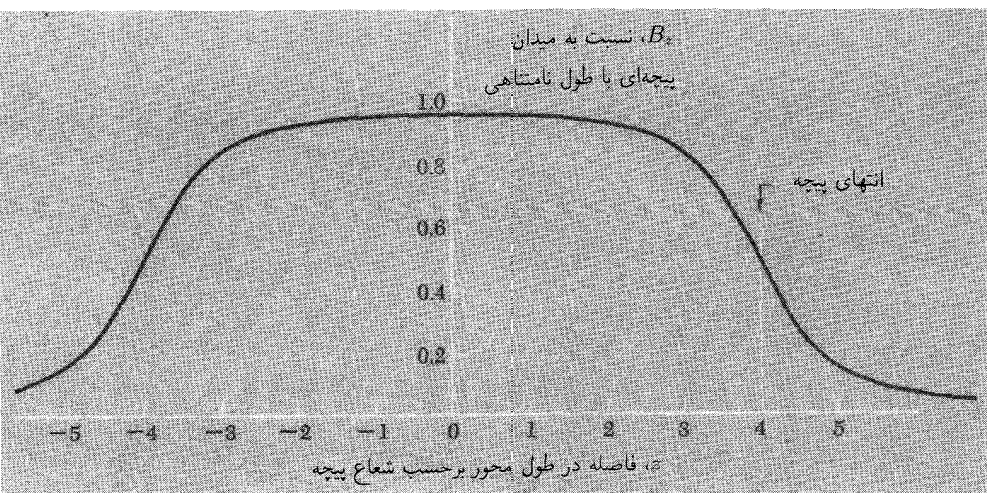
نقطه z برابر است با

$$B_z = \frac{2\pi b^2 I}{cr^3} = \frac{2\pi b^2 I}{c(b^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\text{میدان روی محور}) \quad (41)$$

در مرکز حلقه $z = 0$ ، اندازه میدان مغناطیسی برابر است با

$$B_z = \frac{2\pi I}{cb} \quad (42)$$

پیچه استوانه‌ای سیم در شکل ۶-۱۶ الف معمولاً سیمولوه خوانده می‌شود. فرض می‌کنیم که سیم نزدیک به هم و یکنواخت است به طوری که تعداد دورهای سیم در یک سانتی‌متر در امتداد استوانه مقدار ثابت n است. اکنون مسیر جریان در عمل ماریچی است، اما اگر تعداد دورها زیاد و فاصله آنها کم باشد، می‌توان آن را نادیده گرفت و کل سیمولوه را معادل ردیفی از حلقه‌های جریان به حساب آورد. پس می‌توان از معادله ۴۱ به عنوان مبنایی برای محاسبه میدان در هر نقطه مانند z در روی محور پیچه استفاده کرد. ابتدا سهم حلقه جریان بین شعاعهایی از نقطه z را در نظر می‌گیریم که با این محور زاویه‌های θ و $\theta + d\theta$ می‌سازند. طول این قطعه از سیمولوه که در



شکل ۱۷-۶ شدت میدان B_z ، روی محور سیملوله‌ای که در شکل ۱۸-۶ نشان داده شده است.

شکل ۱۶-۶ ب هاشور زده شده است، $r d\theta / \sin \theta$ است، و بنابراین هم‌ارز حلقه حامل جریان $Inr d\theta / \sin \theta$ است. چون $r = b / \sin \theta$ سهم این حلقه در میدان محوری به صورت زیر است

$$dB_z = \frac{2\pi b^2}{cr^2} \frac{Inr d\theta}{\sin \theta} = \frac{2\pi In}{c} \sin \theta d\theta \quad (43)$$

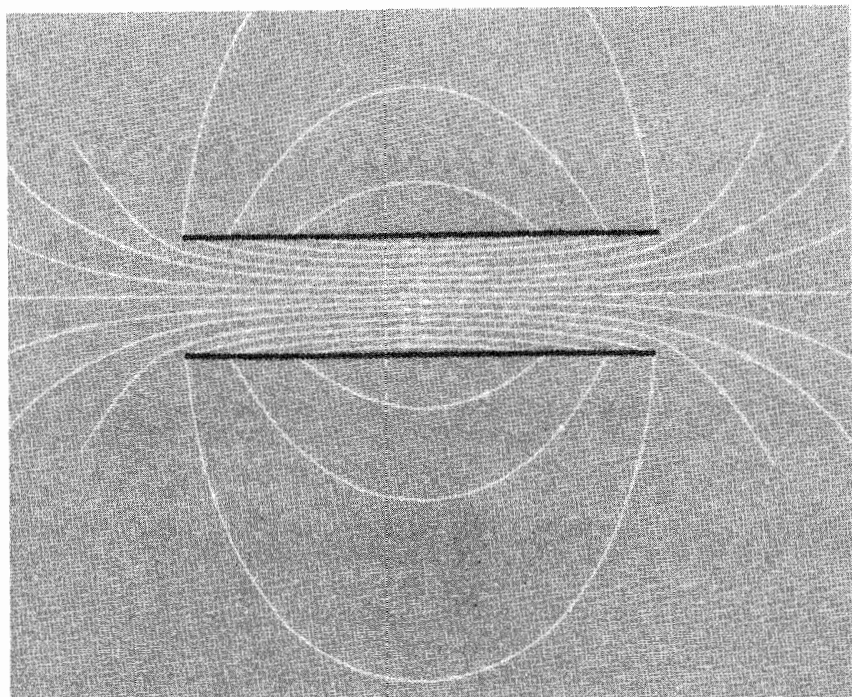
انتگرال‌گیری بین حدهای θ_1 و θ_2 نتیجه زیر را می‌دهد

$$B_z = \frac{2\pi In}{c} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{2\pi In}{c} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (44)$$

از معادله ۴۴ برای رسم نمودار شکل ۱۷-۶ مربوط به شدت میدان روی محور بیجه‌ای استفاده کرده‌ایم که طولش چهار برابر قطر آن است. عرض نمودار شدت میدان B_z نسبت به شدت میدان در بیجه‌ای است با طول نامتناهی که تعداد دورهای آن در سانتی‌متر و جریان در هر دور آن با بیجه یکسان است. برای بیجه نامتناهی $\theta_1 = 0$ و $\theta_2 = \pi$ است، به طوری که

$$B_z = \frac{4\pi In}{c} \quad (\text{سیملوله بینهایت طولی}) \quad (45)$$

در مرکز بیجه "چهار-به-یک" میدان تقریباً به این بزرگی است، و تا نزدیک شدن به یکی از دو انتهای آن تقریباً ثابت می‌ماند.

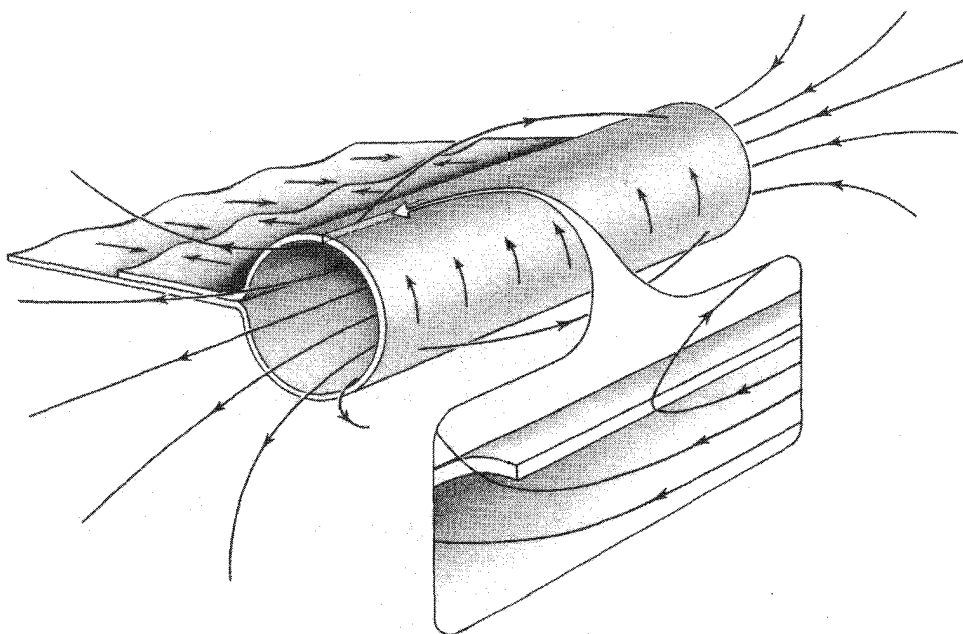


شکل ۱۸-۶ خطهای میدان در اطراف یک سیمولوله.

شکل ۱۸-۶ خطهای میدان مغناطیسی را در داخل و اطراف پیچه‌ای با این تناسبها نشان می‌دهد. توجه کنید که بعضی از خطهای میدان در واقع در سیم‌پیچ نفوذ می‌کنند. صفحه استوانه‌ای جریان یک سطح ناپیوستگی برای میدان مغناطیسی است. البته، اگر میدان را از نزدیک در مجاور سیمها بررسی کنیم، هیچ تغییر ناگهانی نمی‌بینیم ولی در داخل و اطراف هر سیم الگوی پیچیده موج‌داری خواهیم یافت.

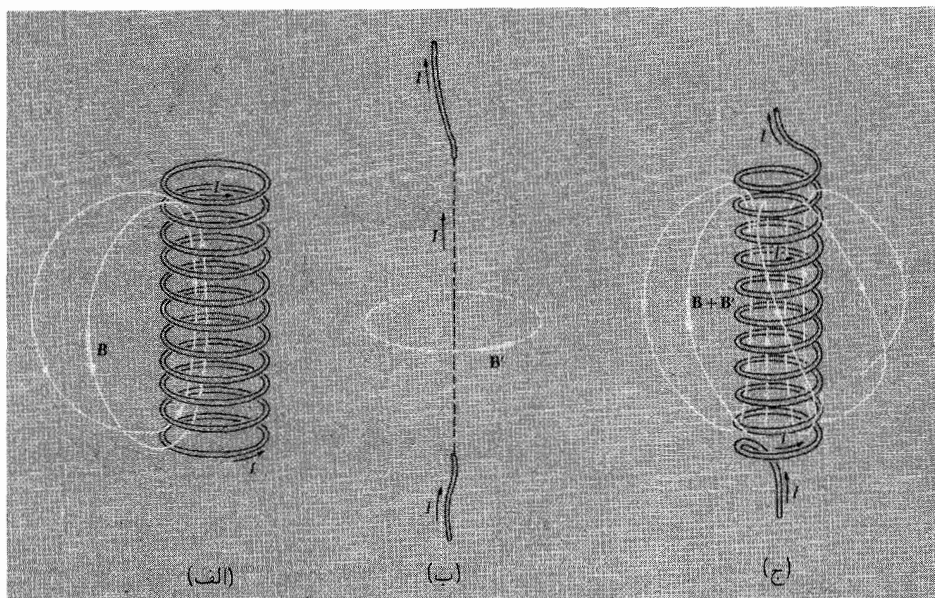
ساخت یک سیمولوله طویل متشکل از یک دوررسانای پهن و نازک نوار مانند، چون شکل ۱۹-۶ امکانپذیر است. محاسبه‌ها و نمودار شکل ۱۸-۶ در این مورد دقیقاً به‌کار می‌رود، فقط باید در آن به جای nI جریان در سانتی‌متر را قرار داد که از ورقه می‌گذرد. چنانکه از شکل ۱۹-۶ برمی‌آید تغییر جهت خط میدان که در دیواره نفوذ می‌کند اکنون کاملاً در داخل ضخامت این ورقه رخ می‌دهد.

در محاسبه میدان سیمولوله شکل ۱۶-۶ آن را به‌صورت ردیفی از حلقه‌ها در نظر گرفتیم و جریان طولی موجود در هر پیچه را که از یک طرف آن داخل و از طرف دیگر خارج می‌شود



شکل ۱۹-۶ سیملوله‌ای متشکل از یک ورقه استوانه‌ای رسانا. تصویر کوچک نشان می‌دهد که چگونه جهت خطهای میدان در داخل رسانای حامل جریان تغییر می‌کند.

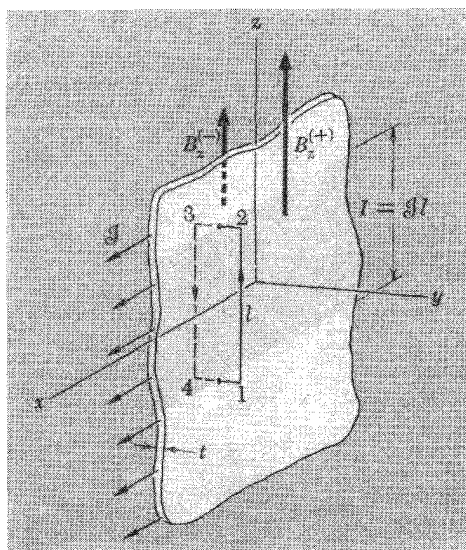
نادیده گرفتیم. حال ببینیم که اگر این جریان را به حساب آوریم میدان چه تغییری می‌کند. پیچۀ مارپیچی شکل ۶-۲ ج، تا آنجا که به میدان خارجی آن مربوط می‌شود، معادل برهم‌نهی ردیفی از حلقه‌های جریان و یک رسانای محوری در شکل ۶-۲ ب است. با افزودن میدان دوم، B' ، به میدان اولی، B ، میدان خارجی پیچۀ را به دست می‌آوریم. این میدان تاب مارپیچی دارد. بعضی از خطهای میدان در شکل ۶-۲ ج رسم شده‌اند. در مورد میدان داخل سیملوله، جریان طولی I در واقع روی خود استوانه شارش می‌کند. این توزیع جریان، یعنی یک لولۀ توخالی یکنواخت جریان، میدانی برابر صفر در داخل استوانه تولید می‌کند — پس میدانی که قبلاً محاسبه کردیم تغییر نمی‌کند. اگر یک خط میدان حلقه‌زن را از داخل به خارج و مجدداً به داخل دنبال کنیم، متوجه می‌شویم که این خط روی خود بسته نمی‌شود. خطهای میدان عموماً بسته نمی‌شوند. شاید جالب باشد که ببینیم چه اتفاقی می‌افتد اگر سیمی که جریان I را از پیچۀ دور می‌کند در امتداد محور پیچۀ قرار دهیم تا جریان از انتهای آن خارج شود.



شکل ۶-۲۰ پیچۀ ماریچ (ج) معادل ردیفی از حلقه‌های دایره‌ای است، که هر یک حامل جریان I هستند و در شکل (الف) نشان داده شده‌اند، به اضافه جریانی I موازی با محور پیچ. مسیر حول پیچۀ جریانی I را در بر می‌گیرد، میدان این جریان، B' را باید به میدان B حلقه‌ها افزود تا میدان خارجی پیچۀ ماریچی به دست آید.

۶-۶ تغییر B در یک ورقه جریان

در مثال شکل ۶-۱۹ یک سیملوله داشتیم که از یک ورقه خمیده جریانی ساخته شده بود. اکنون موردی ساده‌تر یعنی یک ورقه تخت، بدون مرز جریانی را در نظر می‌گیریم. می‌توان آن را یک ورقه مسی با ضخامت یکنواخت در نظر گرفت که در آن جریانی با چگالی و جهت ثابت در همه جا در داخل فلز جریانی دارد. برای رجوع به جهت‌ها، ورقه‌ای را در صفحه xz مشخص می‌کنیم و می‌گذاریم تا جریانی در جهت x باشد. چون صفحه نامتناهی و بدون لبه فرض شده است، رسم تصویر آن مشکل است! برای اینکه چیزی برای رسم کردن داشته باشیم. قطعه شکسته شده‌ای از این صفحه در شکل ۶-۲۱ نشان داده شده است؛ بقیه آن را که در سراسر صفحه گسترده است باید خودتان مجسم کنید. ضخامت این ورقه اهمیت چندانی ندارد، ولی می‌توان ضخامت آن را مقدار معین t در نظر گرفت. اگر چگالی جریانی در داخل فلز برحسب J ، $\text{esu/cm}^2\text{s}$ باشد، هر سانتی‌متر ارتفاع، در جهت z ، شامل نواری از جریانی به مقدار Jt esu/s است. این مقدار را چگالی جریانی سطحی یا چگالی جریانی ورقه‌ای می‌نامیم و برای تشخیص آن از چگالی جریانی



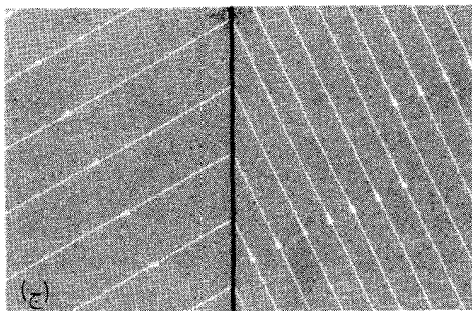
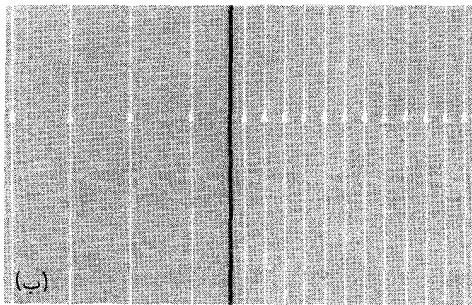
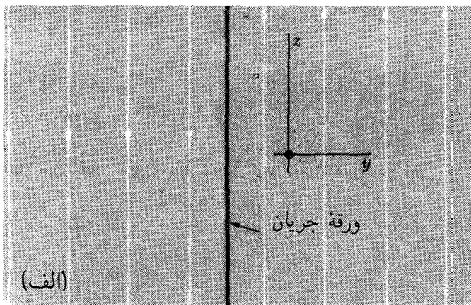
شکل ۶-۲۱ در یک ورقه جریان سطحی، مؤلفه موازی B باید از یک طرف به طرف دیگر تغییر کند.

J از نماد \mathcal{J} استفاده می‌کنیم. یکای \mathcal{J} ، esu/cm s است. اگر به آنچه در داخل ورقه می‌گذرد علاقه‌مند نباشیم، \mathcal{J} کمیت مفیدی است. چنانکه خواهیم دید این \mathcal{J} است که تغییر میدان مغناطیسی از یک طرف ورقه تا طرف دیگر آن را تعیین می‌کند.

میدان شکل ۶-۲۱ صرفاً ناشی از ورقه نیست. میدان دیگری در جهت z وجود دارد که ناشی از چشمه دیگری است. میدان کل، که شامل جریان ورقه نیز هست با بردارهای B نشان داده شده است که در جلو و عقب ورقه رسم شده‌اند.

انتگرال خطی B را حول مستطیل ۱۲۳۴۱ در شکل ۶-۲۱ در نظر بگیرید که یکی از ضلعهای بزرگ در جلوی سطح و ضلع دیگر در پشت آن قرار گرفته است و ضلعهای کوچکتر صفحه را سوراخ می‌کنند. B_z^+ را مؤلفه میدان مغناطیسی بلافاصله جلوی سطح و B_z^- را مؤلفه میدان مغناطیسی بلافاصله عقب صفحه روی محور z در نظر می‌گیریم. منظور ما در اینجا میدان همه چشمه‌های موجود از جمله خود ورقه است. انتگرال خطی B حول اضلاع بزرگتر $l(B_z^+ - B_z^-)$ است. (حتی اگر چشمه‌های دیگری با مؤلفه‌های موازی با اضلاع کوچک مستطیل وجود داشته باشد. می‌توان این اضلاع را بسیار کوتاهتر از اضلاع بزرگتر نگه داشت، چون فرض می‌کنیم که ورقه، در مقایسه با مقیاس هر تغییری در میدان، نازک است.) جریانی که مستطیل را در برمی‌گیرد

$$I \mathcal{J} \text{ است. بنابراین داریم } I(B_z^+ - B_z^-) = 4\pi \mathcal{J} l/c \text{ یا}$$

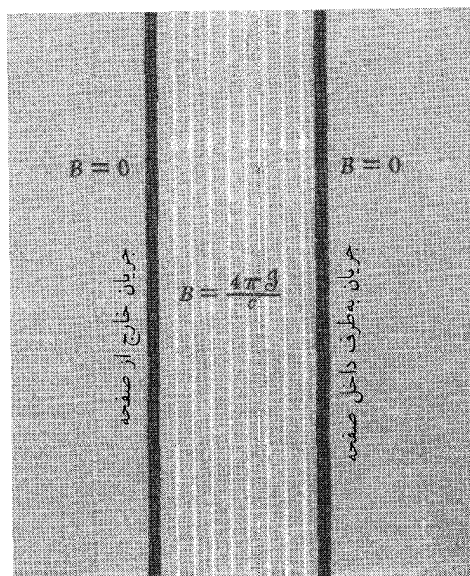


شکل ۲۲-۶ بعضی از شکلهای ممکن میدان مغناطیسی کل در نزدیکی یک ورقه جریان. جریان در جهت \hat{x} (به طرف خارج صفحه) است. (الف) میدان ورقه تنها. (ب) میدان برهم نهاده شده بر یک میدان یکنواخت در جهت z (وضعیت شکل ۲۱-۶). (ج) برهم نهاده شده بر میدانی یکنواخت در جهت دیگر. در هر مورد مؤلفه B_z در عبور از ورقه به میزان $4\pi \mathcal{J}/c$ تغییر می‌کند و B_y تغییر نمی‌کند.

$$B_z^+ - B_z^- = \frac{4\pi \mathcal{J}}{c} \quad (۴۶)$$

ورقه جریان با چگالی \mathcal{J} باعث جهشی در مؤلفه B می‌شود که موازی سطح و عمود بر \mathcal{J} است. این می‌تواند تغییر میدان الکتریکی در ورقه‌ای از بار را به یاد شما آورد. در آنجا، مؤلفه عمودی \mathbf{E} ناپیوسته است، اندازه این جهش تابع چگالی بار سطحی است.

اگر ورقه تنها چشمه میدان موجود باشد، روشن است که میدان حول ورقه متقارن خواهد بود. B_z^+ برابر $2\pi \mathcal{J}/c$ و B_z^- برابر $-2\pi \mathcal{J}/c$ است. این موضوع در شکل ۲۲-۶ الف نشان داده شده است. وضعیت دیگری که در آن اثر ورقه جریان با میدان موجود از چشمه دیگر بر هم نهاده شده است در شکل ۲۲-۶ ب و ج نشان داده شده‌اند. فرض کنید دو ورقه حامل بارهای سطحی برابر و در جهت مخالف مطابق شکل ۲۳-۶ وجود دارد، و بجز آنها چشمه دیگری موجود نیست. جهت جریان بر صفحه کاغذ عمود، و در طرف چپ به سمت خارج و در طرف راست، به سمت



شکل ۲۳-۶ میدان مغناطیسی بین ورقه‌های جریان تخت موازی.

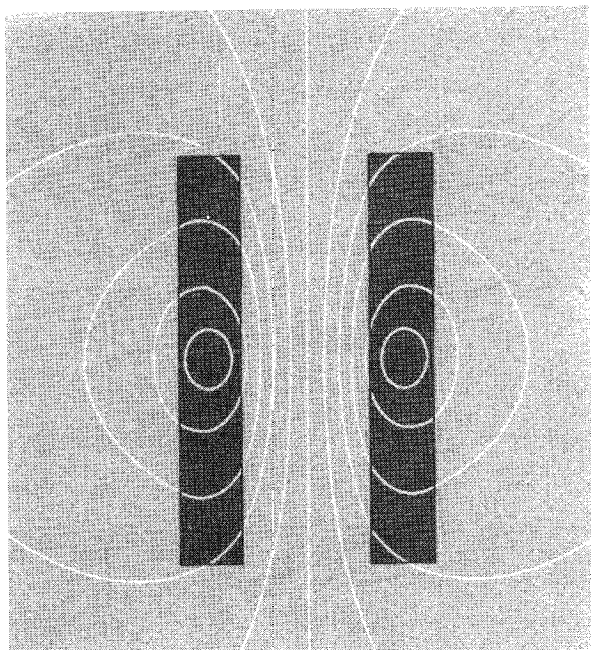
داخل است. میدان بین ورقه‌ها $4\pi j/c$ است و در خارج میدانی وجود ندارد. این وضعیت هنگامی پیش می‌آید که دو نوار یا تیغه موازی حامل جریان مانند شکل ۲۴-۶ در فاصله‌ای قرار گرفته باشند که نسبت به عرض آنها کوچک است. معمولاً میله‌هایی که برای توزیع جریانهای زیاد در نیروگاهها به کار می‌رود به این صورت است.

همان‌طور که قبلاً در ارتباط با شکل ۱۹-۶ بیان کردیم، تغییر B در داخل ورقه صورت می‌گیرد. برای مقدار j یکسان، هر چه ورقه نازکتر باشد، گذار ناگهانی‌تر است. در فصلهای ۱ و ۲ در بررسی ناپیوستگی در مؤلفه عمودی E به وضعیتی بسیار شبیه این مورد برخوردیم. در آنجا پرسش در مورد نیروی وارد بر بار سطحی بسیار سازنده بود، و در اینجا همین سؤال را مطرح می‌کنیم.

بخش مربعی از ورقه‌ای به ضلع ۱ سانتی‌متر را در نظر بگیرید. جریان آن j ، طول مسیر ۱ سانتی‌متر، و میدان متوسطی که بر جریان اثر می‌کند، با فرض یکنواختی جریان در ضخامت ورقه $1/2(B_z^+ - B_z^-)$ است. بنابراین نیروی وارد بر این توزیع جریان برابر است با

$$\text{نیروی وارد بر ۱ سانتی‌متر مربع ورقه} = \frac{1}{4}(B_z^+ - B_z^-) \frac{j}{c} \quad (47)$$

با توجه به معادله ۴۶، می‌توان به جای j/c مقدار $(B_z^+ - B_z^-)/4\pi$ را قرار داد، به طوری که



شکل ۶-۲۴ سطح مقطع میدان مغناطیسی یک زوج میله که حامل جریان در جهت‌های مخالف هستند.

نیروی وارد بر هر سانتی‌متر مربع را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \text{نیرو بر سانتی‌متر مربع} &= \left(\frac{B_z^+ + B_z^-}{2} \right) \left(\frac{B_z^+ - B_z^-}{4\pi} \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} [(B_z^+)^2 - (B_z^-)^2] \end{aligned} \quad (48)$$

مانند تنش حاصل از فشار هیدروستاتیکی، نیرو عمود بر سطح و با مساحت آن متناسب است. برای اطمینان از علامت، می‌توانیم جهت نیرو را در موردی خاص مانند شکل ۶-۲۳ در نظر بگیریم. نیرو بر روی هر رسانا به طرف خارج است. مثل آنکه ناحیه با میدان شدید، ناحیه پر فشار باشد. رانش هر یک از دو رسانای حامل جریان در جهت مخالف را، که در شکل ۶-۲۴ دیده می‌شود، می‌توان مثالی از آن را در نظر گرفت.

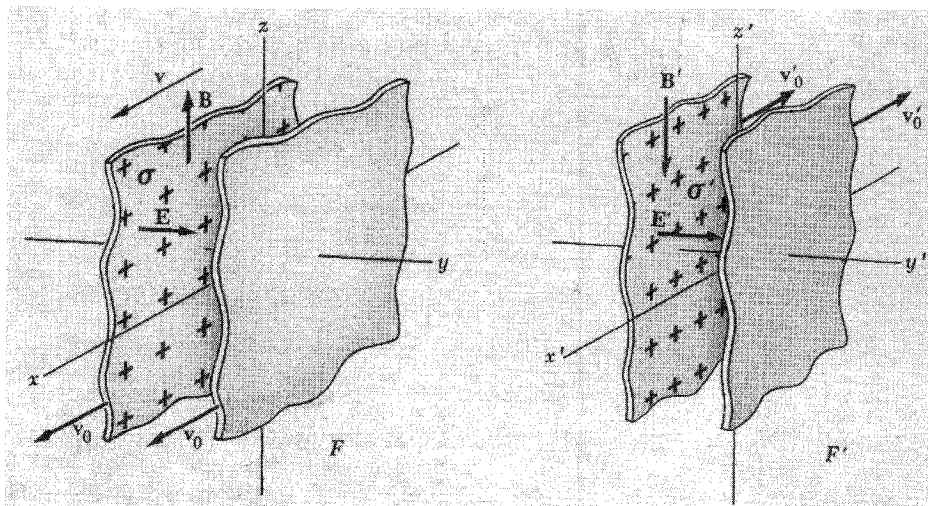
ما یک ورقه تخت نامتناهی را در نظر گرفته‌ایم، اما وضعیت تقریباً در مجاور هر سطحی که در آن تغییری در B صورت گیرد، به همین ترتیب است. هرگاه مؤلفه B موازی با سطح از یک طرف سطح به طرف دیگر از B_1 تا B_2 تغییر کند، می‌توان نه تنها نتیجه گرفت که ورقه‌ای از جریان

در سطح آن وجود دارد، بلکه سطح تحت تنش $(B_x^2 - B_y^2)/4\pi$ دین بر سانتی متر مربع نیز قرار دارد. این یکی از اصول کنترل کننده در مغناطویدرودینامیک است. مطالعه شاره‌هایی که رسانای الکتریکی هستند، مورد توجه مهندسان برق و اختر فیزیکدانان است.

۶-۷ چگونه میدانها تبدیل می‌شوند

اگر یک ورقه بار سطحی موازی خودش حرکت کند، یک جریان سطحی به وجود می‌آورد. اگر چگالی بار یکنواخت σ را روی سطح داشته باشیم، و سطح با سرعت v بلغزد، چگالی جریان سطحی برابر است با $\mathcal{J} = \sigma v$: این فکر ساده به ما کمک می‌کند که ببینیم چگونه با رفتن از یک چارچوب مرجع به چارچوب دیگر کمیت‌های میدان الکتریکی و مغناطیسی تغییر می‌کنند.

دو ورقه تخت از بارهای سطحی موازی با صفحه xz را در شکل ۶-۲۵ در نظر بگیرید. مجدداً در شکل فقط قطعاتی از سطح را نشان داده‌ایم؛ سطحها واقعاً نامتناهی هستند. در چارچوب لخت F ، با مختصات x, y, z ، چگالی بار سطحی روی یک ورقه σ و روی ورقه دیگر $-\sigma$ است. در اینجا σ به معنای بار در واحد سطح است که ناظرهای ساکن در چارچوب F اندازه می‌گیرند. (این مقدار چگالی بار در چارچوب سکون خود بارها نیست، در این چارچوب، چگالی به اندازه ضرب $1/\gamma$ کمتر است.) در چارچوب F میدان الکتریکی یکنواخت \mathbf{E} در جهت مثبت محور



شکل ۶-۲۵ چنانکه در چارچوب F در سمت چپ مشاهده می‌شود، چگالی بار سطحی σ و چگالی جریان σv است. چارچوب F' در طرف راست با سرعت v در جهت x نسبت به F حرکت می‌کند. در F' چگالی بار سطحی σ' و چگالی جریان $\sigma' v'$ است.

y است، و قانون گاوس به ما اطمینان می‌دهد که، مطابق معمول، شدت آن برابر است با

$$E_y = 4\pi\sigma \quad (49)$$

در چارچوب F هر دو ورقه با سرعت v در جهت مثبت x حرکت می‌کنند. به طوری که یک جفت ورقه جریان داریم. چگالی بار سطحی در یک ورقه $\mathcal{J}_x = \sigma v$ و منفی مقدار آن در ورقه دیگر است. مانند ترتیب شکل ۶-۲۳ میدان بین این دو ورقه جریان برابر است با

$$B_z = \frac{4\pi\mathcal{J}_x}{c} = \frac{4\pi\sigma v}{c} \quad (50)$$

چارچوب لخت F' چارچوبی است که از دیدگاه F در جهت مثبت محور x با سرعت v حرکت می‌کند. ناظری که در F' قرار دارد، چه میدانی را اندازه می‌گیرد؟ برای پاسخ به این پرسش باید ببینیم که چشمه‌ها در F' چگونه به نظر می‌رسند؟

در F' مؤلفه سرعت ورقه‌های حامل بار در امتداد x' برابر است با v'_0 ، که با استفاده از فرمول جمع سرعتها به دست می‌آید

$$v'_0 = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v/c^2} = c \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta} \quad (51)$$

درست مانند مثال قبل در مورد بار خطی متحرک در بخش ۵-۹، انقباض لورنتس چگالی بار در این چارچوب متفاوت است. می‌توانیم از همان بحث قبلی استفاده کنیم. چگالی در چارچوب سکون بارها برابر است با $\sigma(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$ یا σ/γ_0 ، و بنابراین چگالی بار سطحی در چارچوب F' برابر است با

$$\sigma' = \sigma \frac{\gamma_0'}{\gamma_0} \quad (52)$$

طبق معمول، γ_0' برابر است با $(1 - v_0'^2/c^2)^{-1/2}$. با استفاده از معادله ۵۱ می‌توان γ_0' را حذف و آن را برحسب β_0 و β یا γ بیان کرد. با انجام این کار داریم

$$\sigma' = \sigma\gamma(1 - \beta_0\beta) \quad (53)$$

چگالی بار سطحی در چارچوب F' برابر است با سرعت بار x چگالی بار:

$$\mathcal{J}' = \sigma' v'_0 = \sigma \gamma (1 - \beta_0 \beta) c \frac{(\beta_0 - \beta)}{1 - \beta_0 \beta} = \sigma \gamma (v_0 - v) \quad (54)$$

اکنون می‌دانیم که چشمه‌ها در چارچوب F' چگونه به نظر می‌رسند، بنابراین می‌دانیم که میدانها در آن چارچوب باید چگونه باشند. برای اظهار این مطلب، مجدداً از اصلهای نسبیت استفاده می‌کنیم که شامل فرمولهایی است که میدان الکتریکی را با چگالی بار سطحی، و میدانهای مغناطیسی را با چگالی جریان سطحی مرتبط می‌کند. بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$E'_y = 4\pi\sigma' = \gamma \left[4\pi\sigma - \left(\frac{4\pi\sigma v_0}{c} \right) \left(\frac{v}{c} \right) \right] \quad (55)$$

$$B'_z = \frac{4\pi}{c} \mathcal{J}' = \gamma \left[\frac{4\pi\sigma v_0}{c} - 4\pi\sigma \left(\frac{v}{c} \right) \right] \quad (56)$$

در بازنگری به مقادیر E_y و B_z در معادله‌های ۴۹ و ۵۰، می‌بینیم که می‌توان نتیجه را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z) \\ B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y) \end{aligned} \quad (57)$$

اگر ساندویچ ورقه‌های جریان به جای صفحه xz با صفحه xy موازی بود، رابطه‌هایی را به دست می‌آوردیم که E'_z را به E_z و B'_y و B_y را به B'_y و B_y مرتبط می‌کرد. البته شکل آنها با رابطه‌های بالا یکی است، اما اگر جهتها را دنبال کنید، درمی‌یابید که تفاوتی در علامت وجود دارد که ناشی از قانونهای مربوط به جهت \mathbf{B} است.

اکنون باید بیاموزیم که چگونه مؤلفه‌های میدان در جهت حرکت تغییر می‌کنند. در بخش ۵-۵ دیدیم که مؤلفه طولی \mathbf{E} در دو چارچوب اندازه یکسانی دارد. اینکه این مطلب برای مؤلفه طولی \mathbf{B} نیز صادق است را می‌توان به صورت زیر دید. فرض کنید یک مؤلفه طولی \mathbf{B} ، مانند B_x در ترتیب شکل ۲۵-۶ را یک سیموله حول محور x در چارچوب F تولید می‌کند. می‌دانیم که شدت میدان در داخل سیموله فقط به جریان در سیم، I ، که بار در ثانیه است، و n تعداد دوره‌های سیم در سانتی‌متر در طول محور بستگی دارد. در چارچوب F' تعداد دوره‌ها در سانتی‌متر بر اثر انقباض لورنتس بیشتر می‌شود. اما جریانی که ناظر در چارچوب F' اندازه می‌گیرد کمتر می‌شود، زیرا از

نظر او ناظر F که جریان را با شمارش تعداد الکترونهايي که از یک نقطه سیم در ثانیه می گذرند اندازه می گیرید از ساعتی استفاده می کند که کند کار می کند. اتساع زمان اثر انقباض طول را در حاصل ضرب nI خشی می کند. در واقع هر کمیت با ابعاد $^{-1}$ (درازای طولی) \times $^{-1}$ (زمان) بر اثر تبدیل لورنتس تغییر نمی کند. به طوری که $B'_x = B_x$.

با یادآوری نکته ای که در ابتدای فصل ۵ در بحث پس از معادله ۵-۶ مطرح شد ویژگیهای تبدیل میدان، ویژگیهای محلی هستند. مقادیر \mathbf{E} و \mathbf{B} در هر نقطه از فضا زمان در یک چارچوب باید به طور یکتا با مؤلفه های مشاهده شده در هر چارچوب دیگر در همان نقطه فضا زمان تعیین شود. بنابراین اینکه در به دست آوردن رابطه از چشمه ساده ای استفاده کردیم (ورقه های باردار موازی با بار یکنواخت) کلیت مسئله را محدود نمی کند. در واقع از هر نوع تبدیلی با هر مبدأ و پیکربندی برای مؤلفه های میدان الکتریکی و مغناطیسی استفاده کنیم به همان قانونهای کلی می رسم.

فهرست کامل تبدیلهای در زیر داده شده است. تمام کمیتهای پریم دار در چارچوب F' اندازه گیری شده اند، که از دیدگاه F با سرعت v در جهت مثبت x حرکت می کند. کمیتهای بدون پریم، حاصل اندازه گیری در چارچوب F هستند. طبق معمول، β به جای v/c و γ به جای $(1 - \beta^2)^{-1/2}$ قرار گرفته است.

$$\begin{array}{l} E'_x = E_x \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z) \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y) \\ B'_x = B_x \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta B_z) \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y) \end{array} \quad (58)$$

معادله های داخل جعبه ما را با واقعیت شگفت انگیزی در مورد \mathbf{E} و \mathbf{B} روبه رو می کند. اگر چاپگر اشتباهاً E را با B و y را با z عوض می کرد، درست همین معادله ها به دست می آمد! در صورتی که دیدگاه قبلی ما از مغناطیس نوعی اثر "مرتبه دوم" ناشی از تغییرات نسبیتی در میدانهای الکتریکی بارهای متحرک بود. بدون شک پدیده های مغناطیسی که در طبیعت مشاهده می کنیم با پدیده های الکتریکی متفاوتی بارز دارند. دنیای اطراف ما ابدأ نسبت به الکتریسیته و مغناطیس متقارن نیست. با وجود این، اگر چشمه ها را از این تصویر خارج کنیم، درمی یابیم که خود میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} به صورت بسیار متقارنی با یکدیگر در ارتباط اند.

به نظر می رسد که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی از یک لحاظ مؤلفه های موجود واحدی هستند. می توان از میدان الکترومغناطیسی صحبت کرد و مؤلفه های $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ و B_z را شش مؤلفه میدان در نظر گرفت. همین میدان اگر از چارچوبهای مرجع لخت مختلف نظاره شود، با مجموعه متفاوتی از این مؤلفه ها نشان داده می شود. همان طور که یک بردار در دستگاههای مختلف که نسبت به هم می چرخند با مؤلفه های مختلف نشان داده می شود. به هر

حال، میدان الکترومغناطیسی که بدین ترتیب درست شده است از نظر ریاضی یک بردار نیست. بلکه چیزی است که تانسور نامیده می شود. کلیت معادله های داخل جعبه، روال تبدیل مؤلفه های این تانسور در انتقال از یک چارچوب لخت به چارچوب دیگر است. ما در اینجا قصد گسترش این زبان ریاضی را نداریم. در واقع، اکنون توجه خود را به روش قدیمی بحث در مورد میدان الکتریکی به عنوان یک میدان برداری و میدان مغناطیسی به عنوان میدان برداری دیگر معطوف می کنیم که با آن به صورتی که در فصل ۷ بررسی خواهیم کرد جفت شده است. برای پیگیری بیشتر وحدت میدان الکترومغناطیسی به صورتی که در فضا زمان چهاربعدی نشان داده می شود، باید منتظر دوره های پیشرفته تر باشید.

می توانیم تبدیل معادله های میدان ۵۸ را به صورت زیباتری بنویسیم که معمولاً سودمند است. اگر βc سرعت چارچوب F' نسبت به چارچوب F باشد. همواره می توانیم میدانها را در هر دو چارچوب F و F' به بردارهای موازی و عمود بر راستای β تجزیه کنیم. بنابراین با استفاده از نمادگذاری واضح زیر:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} & \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp} & \mathbf{B}' &= \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp} \end{aligned} \quad (59)$$

می توان تبدیلهای را به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \beta \times \mathbf{B}_{\perp}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \beta \times \mathbf{E}_{\perp}) \end{aligned}} \quad (60\text{-الف})$$

در مورد خاصی که به معادله ۵۹ انجامید، β برابر $\beta \hat{x}$ ، \mathbf{E}_{\perp} برابر \hat{y} و \mathbf{B}_{\perp} برابر \hat{z}/c است. تقارن تبدیل در صورت کلی تر معادله ۶۰ چشمگیرتر است.

در دستگاه یکاهای SI، با \mathbf{E} برحسب ولت بر متر و \mathbf{B} برحسب تسلا، تبدیل لورنتس میدانها به صورت زیر در می آید:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma\left(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \beta \times \mathbf{B}_{\perp}\right) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \beta \times \mathbf{E}_{\perp}\right) \end{aligned}} \quad (60\text{-ب})$$

در این دستگاه، متأسفانه، استفاده از یکاهای متفاوت برای \mathbf{E} و \mathbf{B} تقارن اساسی الکترومغناطیسی

خلاً را می‌پوشاند. گذشته از هر چیز میدانهای الکتریکی و مغناطیسی مؤلفه‌های یک تانسور هستند. تبدیل لورنتس چیزی چون چرخش است که \mathbf{E} را تا حدی به \mathbf{B}' و \mathbf{B} را تا حدی به \mathbf{E}' تبدیل می‌کند. بنابراین کاملاً طبیعی و مناسب است که تنها پارامتر معادله 60° نسبت بدون بُعد β باشد. برای مقایسه‌ای که غیرمنطقی نیست، تصور کنید که مقرر شده است تا مؤلفه‌های جابه‌جایی شرق-غرب برحسب سانتی‌متر و مؤلفه‌های شمال-جنوب برحسب اینچ بیان شوند. تبدیلی که سبب چرخش محورهای مختصات شود، لااقل از لحاظ زیبایی شناسی، جالب توجه نیست. همین‌طور اگر طبق معمول به جای \mathbf{B} بردار \mathbf{H} را قرار دهیم، که در فصل ۱۱ خواهیم دید و مقدار آن برابر \mathbf{B}/μ_0 است، تقارن به معادله 60° باز نخواهد گشت.

در مورد خاصی که حائز اهمیت است، رابطه ساده‌ای بین بردارهای میدان الکتریکی و مغناطیسی وجود دارد. فرض کنید چارچوبی وجود دارد — که آن را چارچوب بدون پریم می‌نامیم — که در آن \mathbf{B} در یک ناحیه صفر است. پس در هر چارچوب دیگر F' که با سرعت βc نسبت به چارچوب خاص حرکت کند، طبق معادله 60° داریم

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \mathbf{E}_{\perp} \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = 0 \quad \mathbf{B}'_{\perp} = -\gamma \beta \times \mathbf{E}_{\perp} \quad (61)$$

اما در هر مورد $\beta \times \mathbf{E}_{\parallel} = 0$ ، زیرا \mathbf{E}_{\parallel} طبق تعریف موازی β است. بنابراین رابطه بین \mathbf{E}' و \mathbf{B}' به صورت ساده زیر درمی‌آید

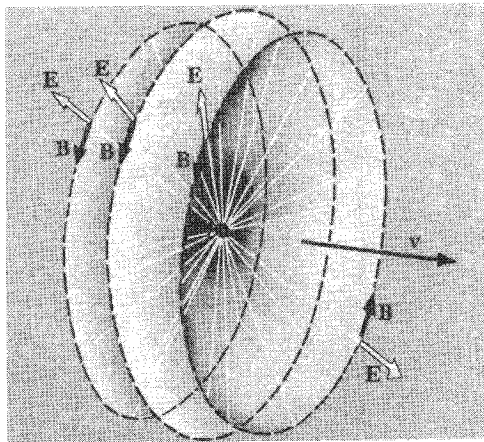
$$\mathbf{B}' = -\beta \times \mathbf{E}' \quad (62)$$

این رابطه در هر چارچوبی برقرار است اگر در یک چارچوب $\mathbf{B} = 0$ باشد. به خاطر داشته باشید که βc سرعت چارچوب مورد نظر نسبت به چارچوب خاصی است که در آن $\mathbf{B} = 0$ است. به همین ترتیب، می‌توان از معادله 60° نتیجه گرفت که اگر چارچوبی وجود داشته باشد که برای آن $\mathbf{E} = 0$ باشد، در هر چارچوب دیگر

$$\mathbf{E}' = \beta \times \mathbf{B}' \quad (63)$$

مانند قبل، βc سرعت چارچوب F' نسبت به چارچوب ویژه F است که در آن، در این مورد $\mathbf{E} = 0$ است.

چون معادله‌های ۶۲ و ۶۳ تنها حاوی کمیت‌هایی هستند که در یک چارچوب مرجع اندازه گرفته شده‌اند، استفاده از آنها در مواردی که محدودیتی برای میدانهای متغیر در فضا وجود داشته



شکل ۶-۲۶ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، در یک لحظه از زمان برای باری که به صورت یکنواخت حرکت می‌کند.

باشد، آسان است. یک مثال مناسب، میدان بار نقطه‌ای q است که با سرعت ثابت حرکت می‌کند، این مسئله را در فصل ۵ بررسی کردیم، فرض کنید که چارچوب بدون پریم، چارچوبی باشد که در آن بار ساکن است. در این چارچوب، البته میدان مغناطیسی وجود ندارد. معادله ۶۱ به ما می‌گوید که در چارچوب آزمایشگاه، که در آن بار با سرعت v حرکت می‌کند، باید یک میدان مغناطیسی عمود بر میدان الکتریکی و امتداد حرکت وجود داشته باشد. قبلاً شکل دقیق میدان الکتریکی در این چارچوب را به دست آوردیم. می‌دانیم که میدان از مکان لحظه‌ای ذره به صورت شعاعی است، و بزرگی آن از معادله ۱۲ فصل ۵ به دست می‌آید. خطهای میدان مغناطیسی باید، همان‌طور که تقریباً در شکل ۶-۲۶ نشان داده شده است، دایره‌هایی حول جهت حرکت باشند. وقتی سرعت ذره زیاد باشد، به طوری که $\gamma \gg 1$ ، «پره‌های» شعاعی که خطهای میدان الکتریکی هستند در هم می‌روند و یک قرص نازک را تشکیل می‌دهند. همین‌طور خطهای میدان مغناطیسی در همین قرص متمرکز می‌شوند. در این مورد بزرگی B تقریباً با E برابر می‌شود، یعنی، بزرگی میدان مغناطیسی برحسب گاؤس درست برابر می‌شود با بزرگی میدان الکتریکی در همان نقطه و در همان لحظه از زمان برحسب ایستاولت بر سانتی‌متر.

ما در دو فصل اخیر با شروع از قانون کولن راه درازی را پیموده‌ایم، که در هر گام فقط شرایط سازگاری با نسبیت و ناوردایی بار الکتریکی را دنبال کرده‌ایم. اکنون می‌توان دید که وجود میدان مغناطیسی و رابطه تقارن عجیب آن با میدان الکتریکی پیامد لازم این اصول کلی است. مجدداً به خواننده یادآوری می‌کنیم که این به هیچ‌وجه ترتیب تاریخی کشف و روشن شدن قانونهای الکترومغناطیس نیست. یک جنبه ضمنی جفت‌شدگی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در

معادله ۵۸ در آزمایشهای مایکل فاراده با جریانهای الکتریکی آشکار شد. این مطالب در فصل ۷ بررسی خواهد شد. این واقعه مربوط به ۷۵ سال قبل از زمانی می‌شود که اینشتین در مقاله تاریخی خود در سال ۱۹۰۵ معادله ۵۸ را نوشت.

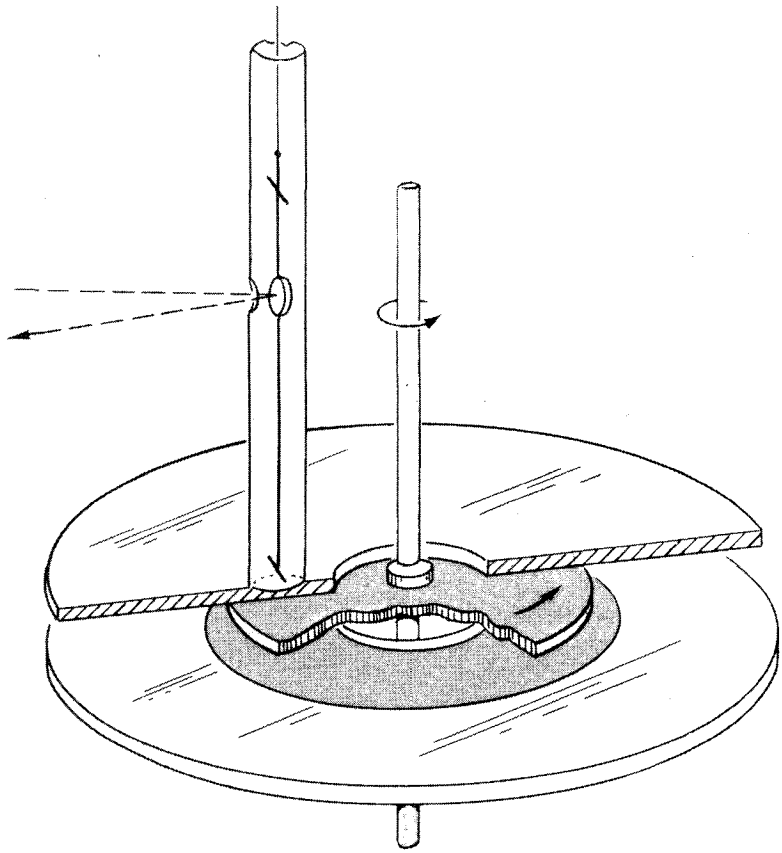
۶-۸ آزمایش رولاند

همان‌طور که در بخش ۵-۹ اشاره کردیم، ۱۰۰ سال پیش روشن نبود که جریان در یک سیم و اجسام باردار متحرک الزاماً چشمه‌های میدان مغناطیسی هستند. طبق دیدگاه وحدت‌یافته الکتریسته و مغناطیس که حاصل کار ماکسول بود، هر بار متحرک باید یک میدان مغناطیسی تولید می‌کرد، اما به دست آوردن دلیل تجربی مشکل بود.

اینکه حرکت ورقه‌های باردار الکتروستاتیکی، میدان مغناطیسی تولید می‌کند را اولین بار هنری رولاند دانشمند بزرگ امریکایی نشان داد که به واسطه تکمیل توری پراش مشهور است. رولاند اندازه‌گیریهای دقیق و ماهرانه بسیاری را انجام داد، که هیچیک از آنها به اندازه آشکارسازی و اندازه‌گیری میدان مغناطیسی یک قرص باردار چرخان نمایانگر ذوق تجربی وی نبود. میدانی که باید آشکار می‌شد چیزی بود در حدود 10^{-5} برابر میدان مغناطیسی زمین که اندازه‌گیری آن حتی با دستگاههای فعلی کاری است مشکل! در شکل ۶-۲۷، طرحی از دستگاه رولاند و رونوشت اولین صفحه مقاله‌ای را می‌بینید که آزمایش در آن تشریح شده است. نتیجه رولاند، ده سال قبل از اینکه هرتز امواج الکترومغناطیسی را کشف کند، تأیید نه چندان بارز نظریه میدان الکترومغناطیسی ماکسول بود.

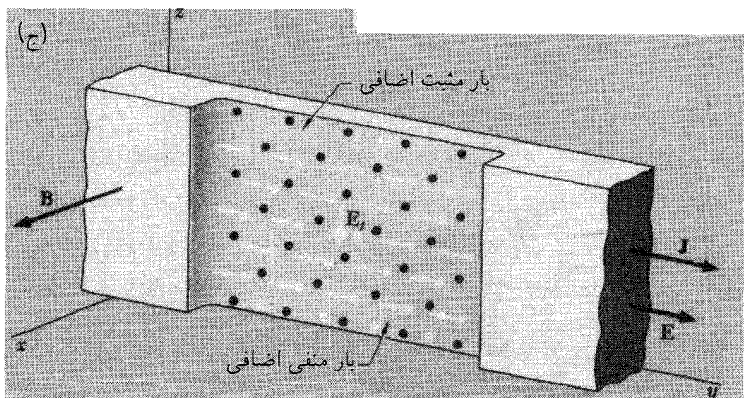
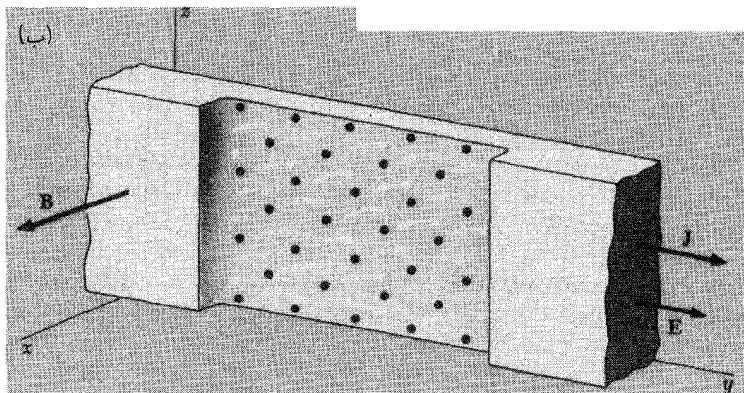
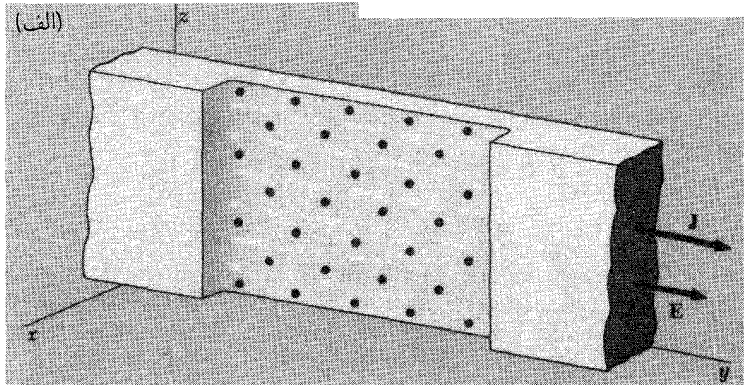
۶-۹ رسانایی الکتریکی در میدان مغناطیسی: اثر هال

وقتی در یک میدان مغناطیسی جریانی از یک رسانا عبور کند، نیروی $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (q/c) مستقیماً به حاملهای بار متحرک وارد می‌شود. اما ما نیروی وارد بر کل رسانا را مشاهده می‌کنیم. بگذارید چگونگی کار را بررسی کنیم. شکل ۶-۲۸الف بخشی از یک میله فلزی را نشان می‌دهد که در آن یک جریان یکنواخت وجود دارد. بر اثر میدان \mathbf{E} الکترونها با سرعت متوسط \bar{v} به طرف چپ رانده می‌شوند، این سرعت همان معنای \bar{v} را در بحث رسانش فصل ۴ دارد. الکترونها رسانش به‌طور سیستماتیک با نقطه‌های سفید مشخص شده‌اند. نقطه‌های سیاه یونهای مثبت هستند که چارجوب صلب میله فلزی جامد را تشکیل می‌دهند. چون الکترونها منفی‌اند، جریانی در جهت y داریم. چگالی جریان \mathbf{J} ، و میدان \mathbf{E} طبق معمول با رسانندگی فلز، σ ، به هم مربوط می‌شوند: $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. در شکل ۶-۲۸الف بجز میدان مغناطیسی ناشی از جریان، که آن را نادیده می‌گیریم،



شکل ۶-۲۷ قسمتهای اساسی دستگاه رولاند. در لوله سمت چپ دو عقربه مغناطیسی شده کوتاه به صورت افقی معلواند.

میدان مغناطیسی دیگری وجود ندارد. اکنون میدان خارجی \mathbf{B} را در جهت x اعمال می‌کنیم. حالت حرکت بلافاصله پس از برقراری میدان در شکل ۶-۲۸ ب نشان داده شده است. الکترونها به طرف پایین منحرف شده‌اند. اما چون نمی‌توانند از قسمت پایین میله فرار کنند، به سادگی در آنجا انباشته می‌شوند تا بار منفی در انتهای میله و بار مثبت اضافی متناظر با آن را در بالای میدان الکتریکی \mathbf{E}_t به وجود آورند که در آن نیروی به طرف بالا به بزرگی eE_t ، دقیقاً با نیروی به طرف پایین $(e/c)\mathbf{v}\mathbf{B}$ متعادل می‌شود. در حالت پایا (که به سرعت حاصل می‌شود!) حرکت به طور متوسط مجدداً افقی است، و در داخل فلز، این میدان الکتریکی عرضی \mathbf{E}_t در دستگاه



شکل ۶-۲۸ (الف) جریانی در میله فلزی وجود دارد. فقط بخش کوتاهی از میله نشان داده شده است. الکترونها رسانش (نه با اندازه و تعداد طبیعی) با نقطه‌های سفید و یونهای مثبت شبکه بلور با نقطه‌های سیاه نشان داده شده‌اند. پیکانها نماینده سرعت متوسط \bar{v} هستند. (ب) اعمال میدان مغناطیسی در جهت x ، سبب (در ابتدا) انحراف الکترونهاى متحرک به طرف پایین می‌شود. (ج) توزیع بار تغییر یافته مؤلفه عرضی میدان الکتریکی E_y را تولید می‌کند. در این میدان به یونها مثبت ساکن نیرویی به طرف پایین وارد می‌شود.

مختصات متصل به شبکه فلز (شکل ۶-۲۸ ج) وجود دارد. این میدان نیرویی به طرف پایین به یونهای مثبت وارد می‌کند. بدین ترتیب نیروی $\mathbf{B} \times \nabla(-e/c)$ وارد بر الکترونها، به میله جامد منتقل می‌شود. بدیهی است که میله چیزی که آن را نگه داشته است می‌فشارد.

درباره اثر مغناطیسی همرفت الکتریکی^۱

آزمایشهایی که در این مقاله توصیف می‌شوند با این هدف انجام شده‌اند که تعیین کنند آیا جسم الکتریکی متحرک اثرهای مغناطیسی ایجاد می‌کند یا نه. به نظر می‌رسد که برای این سؤال زمینه‌های نظری وجود داشته باشند، با توجه به اینکه می‌بینیم کنش مغناطیسی یک جریان الکتریکی را می‌توان نتیجه کنش متقابل رساننده و جریان دانست. بنابراین انجام یک آزمایش ارزشمند است. استاد ماکسول در "رساله‌ای درباره الکتریسیته" بند ۷۷۰ کنش مغناطیسی یک سطح الکتریسیته‌دار متحرک را محاسبه کرده است، اما وجود این کنش هنوز به‌طور نظری یا تجربی ثابت نشده است.

دستگاه مورد استفاده متشکل از قرص لاستیکی سخت به قطر ۲۱٫۱ سانتی‌متر و ضخامت ۵ سانتی‌متر است که می‌تواند حول یک محور افقی با سرعت ۶۱ دور در ثانیه بچرخد. در هر طرف این قرص در فاصله ۶ سانتی‌متر صفحه‌های شیشه‌ای به قطر ۳۸٫۹ سانتی‌متر ثابت شده‌اند که در مرکز آنها سوراخی به قطر ۷٫۸ سانتی‌متر وجود دارد. صفحه لاستیکی در دو طرف آب طلا داده شده است و صفحه‌های شیشه‌ای دارای حلقه‌ای از آب طلا در یک طرف هستند که ابعاد خارجی و داخلی آن به ترتیب ۲۴٫۰ سانتی‌متر و ۸٫۹ سانتی‌متر است. طرفهای آبکاری شده را می‌توان به طرف قرص دوار یا دور از آن قرار داد، ولی معمولاً آن را به طرف قرص قرار می‌دهند تا بتوان مسئله را به راحتی حل کرد و تردیدی در مورد برق‌دار شدن وجود نداشته باشد. صفحه‌های خارجی معمولاً به زمین وصل می‌شوند؛ قرص داخلی به کمک نقطه‌ای در فاصله یک سوم میلی‌متر از لبه که به طرف آن برگشته است به باتری متصل می‌شود. چون لبه پهن است نقطه تخلیه نمی‌شود مگر اینکه اختلاف پتانسیلی بین آن و لبه وجود داشته باشد. بین باتری الکتریکی و قرص، ...

۱. این مقاله از مرجع زیر گرفته شده است

American Journal of Science [3], XV, 30-38, 1878

این آزمایش در آزمایشگاه دانشگاه برلن با مساعدت استاد هلمهولتز انجام شد که ما مدیون نظرهای مشورتی و هستیم. فکر این آزمایش در سال ۱۸۶۸ به ذهن من خطور کرد و در یادداشتی مربوط به آن زمان ثبت شد.

شرط اینکه نیروی عرضی متوسط وارد بر یک حامل بار صفر باشد به صورت زیر است

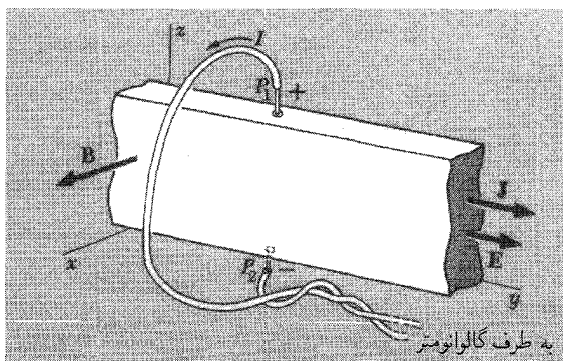
$$\mathbf{E}_t + \frac{\bar{\mathbf{v}}}{c} \times \mathbf{B} = 0 \quad (64)$$

فرض کنید که m حامل بار در سانتی متر مربع وجود دارد. به طور کلی، بار هر یک را با q نشان می دهیم. در این صورت چگالی جریان \mathbf{J} برابر است با $nq\bar{\mathbf{v}}$. اگر \mathbf{J}/nq را به جای $\bar{\mathbf{v}}$ در معادله ۶۳ قرار دهیم، رابطه ای بین میدان عرضی \mathbf{E}_t با کمیت های قابل اندازه گیری \mathbf{J} و \mathbf{B} به دست می آوریم:

$$\mathbf{E}_t = \frac{-\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{nqc} \quad (65)$$

برای الکترونها $q = -e$ است، به طوری که در این مورد جهت $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ به صورتی است که در شکل ۶-۲۸ ج نشان داده شده است.

وجود میدان عرضی را می توان به راحتی نشان داد. سیمهایی به نقطه های P_1 و P_2 در لبه های مخالف میله متصل می شوند (شکل ۶-۲۹)، نقطه های اتصال به دقت مشخص می شوند به طوری که هنگام عبور جریان در میله این نقطه ها در یک پتانسیل و \mathbf{B} صفر باشد. سیمها به یک ولت سنج متصل می شوند. پس از برقراری میدان \mathbf{B} نقطه های P_1 و P_2 دیگر در یک پتانسیل نیستند. اختلاف پتانسیل برابر است با E_1 ضربدر عرض میله، و در موردی که تصویر شده است نسبت به P_2 مثبت است. در مدار خارجی از P_1 به P_2 یک جریان ثابت وجود دارد که



شکل ۶-۲۹ اثر هال. با اعمال میدان مغناطیسی عمود بر رسانای حامل جریان، اختلاف پتانسیلی بین نقطه های دو طرف میله مشاهده می شود. این نقطه ها در نبود میدان در یک پتانسیل هستند. این موضوع با وجود میدان E_t در داخل میله سازگار است. با اندازه گیری "ولتاژ هال" می توان تعداد حاملان بار در سانتی متر مکعب و علامت آنها را تعیین کرد.

بزرگی آن با توجه به مقاومت ولت سنج تعیین می‌شود. توجه کنید در صورتی که جریان I متشکل از حاملان بار مثبت باشد، که برخلاف الکترونهايي که به طرف چپ حرکت می‌کنند، به طرف راست می‌روند اختلاف پتانسیل وارون می‌شود.

این اثر را ای. اچ. هال، که زیر نظر رولاند در دانشگاه جان هاپکینز کار می‌کرد، در سال ۱۸۷۹ کشف کرد. در آن روزها کسی سازوکار رسانایی در فلزات را نمی‌دانست. خود الکترون ناشناخته بود. بنابراین، توجیه نتیجه به دست آمده مشکل بود. معمولاً، علامت "ولتاژ هال" با رسانایی به وسیله حاملان بار منفی سازگار بود، اما حتی در این مورد نیز استثناهایی وجود داشت. شناخت کامل اثر هال در رساناهای فلزی فقط به کمک نظریه کوانتومی فلزات ۵۰ سال پس از کشف هال امکانپذیر شد.

اثر هال به ویژه در مطالعه نیمرساناها بسیار سودمند است. در این مورد، اثر هال می‌تواند تراکم و علامت حاملان بار را مستقیماً تعیین کند. همان‌طور که انتظار داریم، نیمرساناهای نوع n و نوع p که در فصل ۴ توصیف شدند، دارای ولتاژهای هال با علامت مخالف هستند. چون ولتاژ هال با B متناسب است. یک نیمرسانای مناسب در ترتیب شکل ۶-۲۹ می‌تواند پس از مدرج شدن به عنوان وسیله‌ای ساده و فشرده برای اندازه‌گیری میدان مغناطیسی نامعلوم به کار رود. یک مثال در این مورد در مسئله ۶-۳۵ آورده شده است.

مسائل

۶-۱ فرض کنید که مقدار جریان I در مدار شکل ۵-۱ ب $10^{10} \times 6 \text{ esu/s}$ یا 20 A است. فاصله بین سیمها 5 cm است. بزرگی نیرویی که به‌طور افقی بر سانتی‌متر طول یکی از سیمها وارد می‌شود چقدر است؟

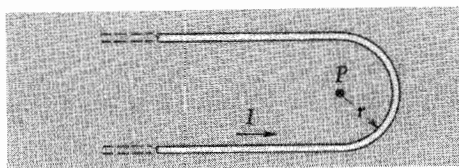
۶-۲ جریان 8000 آمپری از یک میله آلومینیمی به قطر 4 سانتی‌متر می‌گذرد. با فرض یکنواخت بودن چگالی جریان در سطح مقطع، شدت میدان مغناطیسی را در فاصله 1 cm ، 2 cm ، 3 cm از محور میله حساب کنید.

۶-۳ فرض کنید که میدان مغناطیسی یک حلقه دایره‌ای جریان از معادله 41 به دست آید. انتگرال خطی میدان را در امتداد محور از $-\infty$ تا ∞ به‌طور صریح محاسبه، و فرمول کلی زیر را بررسی کنید

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi I}{c}$$

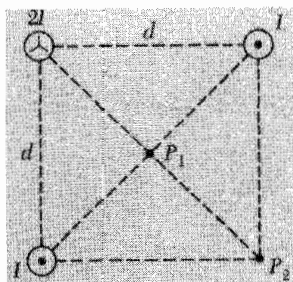
چرا می‌توان قسمت "برگشت" مسیر را که برای کامل کردن یک حلقه بسته ضروری است نادیده گرفت؟

۴-۶ یک سیم بلند به صورتی که در شکل آمده خم شده است. رابطه دقیق برای میدان مغناطیسی در نقطه P که در مرکز نیمدایره قرار دارد به دست آورید.



شکل مسئله ۴-۶

۵-۶ سه سیم دراز مستقیم مطابق نمودار قرار گرفته‌اند. یک سیم حامل جریان $2I$ به داخل صفحه کاغذ است، هر یک از دو سیم دیگر حامل جریان I در جهت مخالف هستند. شدت میدان مغناطیسی در نقطه P_1 و P_2 چقدر است؟



شکل مسئله ۵-۶

۶-۶ فرض کنید که جریان I_2 در شکل ۶-۶ برابر I ، اما در جهت مخالف است، به طوری که GH باید جایگزین CD شود. همچنین فرض کنید که AB و EF به صورت عمود بالای GH قرار دارند، و طول BC و CD به ترتیب 30 cm و 15 cm است، و رسانای $BCDE$ که سیمی مسی با قطر 1 mm است مانند (الف) دارای وزن 8 dyne/cm است. در حالت تعادل، انحراف قاب معلق از امتداد قائم به گونه‌ای است که $r = 15\text{ cm}$ ، بزرگی جریان برحسب esu/s و یا آمپر چقدر است؟ آیا ترازمندی پایدار است؟

۷-۶ هسته فلزی زمین تا 3000 km یعنی حدود نصف شعاع زمین امتداد دارد. فرض کنید میدان مغناطیسی در سطح زمین که شدتش در قطب شمال مغناطیسی 50 G است، بر اثر جریان حول "استوانه‌ای" این هسته به وجود می‌آید. مقدار جریان برحسب آمپر چقدر است

جواب: $3 \times 10^9\text{ A}$.

۸-۶ یک سیم حامل جریان I در امتداد محور y تا مبدأ و از آنجا به طور نامحدود در امتداد محور x تا بینهایت امتداد دارد. نشان دهید که میدان مغناطیسی در ربع $x > 0, y > 0$ صفحه xy از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B_z = \frac{I}{c} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

۹-۶ ا.ج. سی اورستد در شرح آزمایشی که طی آن موفق به کشف اثر جریان بر عقربه مغناطیسی شد چنین نوشت: "اگر فاصله سیم رابط از عقربه بیش از سه چهارم اینچ نباشد، انحراف عقربه زاویه‌ای در حدود 45° می‌سازد". اگر فاصله افزایش یابد، زاویه به همان نسبت کم می‌شود. میزان انحراف با توان باتری نیز به همین ترتیب تغییر می‌کند. چه جریانی برحسب آمپر از "سیمهای رابط" آزمایش اورستد می‌گذشته است؟ مؤلفه افقی میدان مغناطیسی زمین در کینهاک در سال ۱۸۲۰ مانند امروز ۲ \cdot گاوس بوده است.

۱۰-۶ یک خط انتقال نیروی جریان مستقیم 50 کیلوولتی از دو رسانا به فاصله 2 متر از یکدیگر تشکیل شده است. هنگامی که این خط 10 مگاوات انتقال می‌دهد. میدان مغناطیسی در وسط دو رسانا چقدر است؟

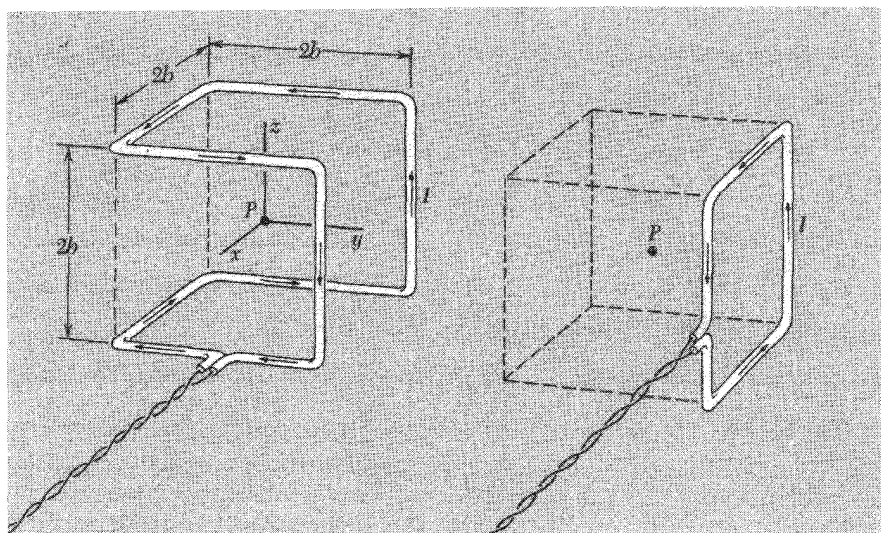
۱۱-۶ یک سیمولوله از پیچش 2 لایه سیم مسی شماره 14 روی استوانه‌ای به قطر 8 سانتی‌متر به وجود آمده است. در هر لایه 4 دور در سانتی‌متر وجود دارد. طول سیمولوله 32 سانتی‌متر است. با استفاده از جدول مشخصات سیم در می‌بایم که سیم مسی شماره 14 با قطر 163 ر $^\circ$ سانتی‌متر دارای مقاومت 10 ر $^\circ$ اهم در 75°C است (پیچه داغ می‌شود!). اگر این سیمولوله به یک مولد 50 ولتی متصل شود، شدت میدان مغناطیسی در مرکز آن برحسب گاوس و توان مصرفی برحسب ولت چقدر می‌شود؟

۱۲-۶ جریان I از قاب سیمی که در شکل نشان داده شده است می‌گذرد.

(الف) جهت میدان مغناطیسی در P ، در مرکز مکعب چقدر است؟

(ب) با استفاده از برهم‌نهی نشان دهید که میدان در P با آنچه با جایگزین کردن قاب با یک حلقه مربعی به دست می‌آید یکسان است.

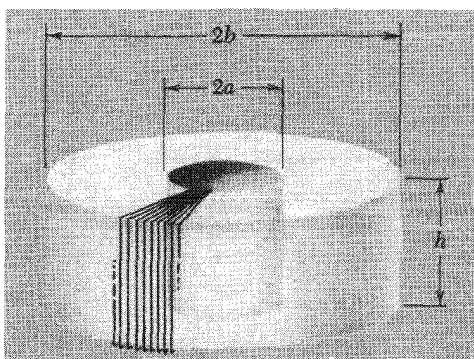
۱۳-۶ یک راه تولید میدان مغناطیسی بسیار یکنواخت، استفاده از یک سیمولوله بسیار دراز و کار در وسط قسمت داخلی آن است. این کار معمولاً آسان است اما سبب اتلاف فضا و توان می‌شود. آیا می‌توانید راههایی را پیشنهاد کنید که در آن دو پیچه کوتاه یا حلقه جریان را بتوان طوری قرار داد که یکنواختی خوبی در ناحیه‌ای محدود حاصل شود؟ راهنمایی: دو حلقه جریان هم‌محور به



شکل مسئله ۱۴-۶.

شعاع a را در نظر بگیرید که فاصله محوری آنها b باشد. در مورد یکنواختی میدان در حوالی نقطه‌ای از محور که وسط دو پیچه است تحقیق کنید. بزرگی فاصله b را برای یک شعاع معین پیچه a پیدا کنید که برای آن میدان در فاصله دو پیچه تا حد امکان یکنواخت است.

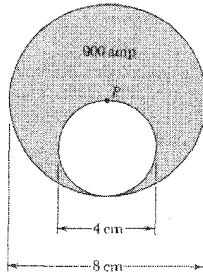
۱۴-۶ یک پیچه به‌طور یکنواخت روی چنبره‌ای با مقطع مستطیلی پیچیده شده است. به‌طور کلی N دور سیم وجود دارد که فقط چند تای آن در شکل نشان داده شده است. با این تعداد دور سیم فرض می‌کنیم که جریان در سطح چنبره در رخهای پایانی طوقی به‌صورت شعاعی، و روی سطحهای استوانه‌ای داخلی و خارجی به‌طور طولی جریان دارد. با این فرض، ابتدا بی‌زیرید که



شکل مسئله ۱۴-۶.

تقارن ایجاد می‌کند که میدان مغناطیسی در همه جا در جهت "پیرامونی" باشد. یعنی خطهای میدان دایره‌هایی حول محور چنبره هستند. ثانیاً، ثابت کنید که میدان در تمام نقطه‌های خارج چنبره از جمله در داخل حفره مرکزی صفر است، ثالثاً، بزرگی میدان را برحسب شعاع در داخل چنبره پیدا کنید. ۱۵-۶ برای یک آزمایش حساس مغناطیسی، فیزیکدانی می‌خواهد میدان مغناطیسی زمین را در حجم تقریباً $30 \times 30 \times 30$ cm خنثی کند، به طوری که میدان باقیمانده در این ناحیه در هر نقطه بیش از 10 mG نباشد. شدت میدان مغناطیسی زمین در این محل 55 G است و با جهت قائم زاویه 30° می‌سازد. می‌توان این میدان را با دقت میلی‌گاوس در حجم مورد نظر ثابت فرض کرد. (میدان مغناطیسی زمین به ندرت ممکن است در طول یک فوت تغییر کند، ولی در آزمایشگاه معمولاً اختلالهای محلی وجود دارد.) آرایشی از پیچه‌ها را پیشنهاد کنید که برای این کار مناسب باشد، و تعداد آمپر دورهای لازم را برای دستگاه خنثی‌کننده برآورد کنید.

۱۶-۶ یک میله دراز مسی به قطر 8 cm حفره استوانه‌ای خارج از مرکزی دارد که در نمودار نشان داده شده است. این رسانا حامل جریان 90° A در جهت "داخل صفحه" است. می‌خواهیم جهت شدت میدان مغناطیسی در نقطه P را که روی استوانه‌ای خارجی قرار دارد برحسب گاوس تعیین کنیم.

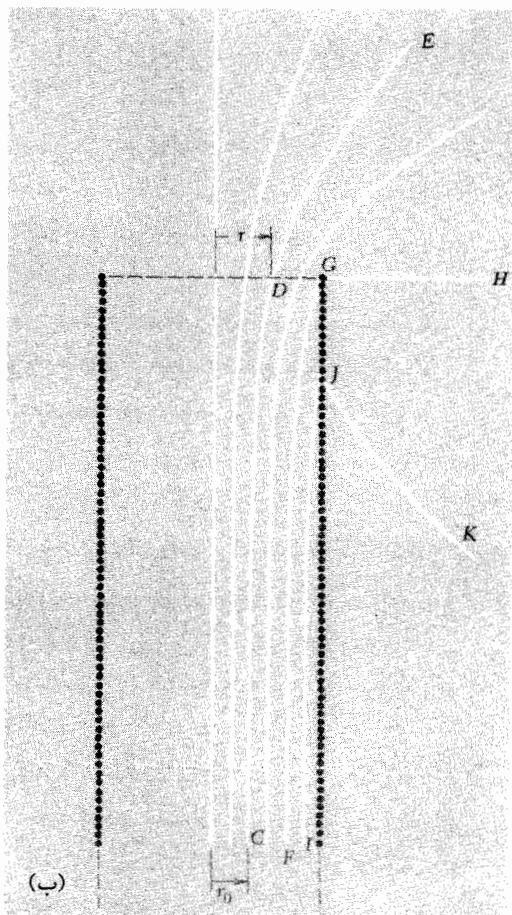
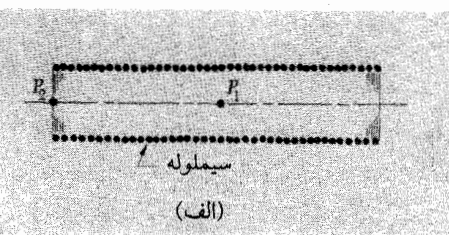


شکل مسئله ۱۶-۶.

۱۷-۶ با استفاده از اصل برهم‌نهی می‌توان واقعیت‌های ساده‌ای را در مورد میدانهای سیمولوه به دست آورد. بدین صورت که اگر دو سیمولوه با قطر یکسان و طول L به یکدیگر متصل شوند، سیمولوه‌ای به طول $2L$ می‌سازند. دو سیمولوه نیم‌متناهی اگر به هم لولا شوند، سیمولوه‌ای متناهی می‌سازند و غیره. (سیمولوه نیم‌متناهی، سیمولوه‌ای است که یک سرش در اینجا و سر دیگری در بینهایت باشد.) بعضی از واقعیت‌هایی را که می‌توانید با این روش ثابت کنید عبارت‌اند از:

(الف) در سیمولوه با طول متناهی قسمت (الف) شکل، میدان مغناطیسی روی محور در نقطه P_1 در یک سر تقریباً نصف میدان در نقطه P_2 در مرکز است (آیا اندکی بیش از نصف است، یا اندکی کمتر از نصف؟)

- (ب) در سیملوله نیم‌متناهی که در قسمت (ب) نشان داده شده است، خط میدان FGH که از انتهای سیم‌پیچ می‌گذرد خط راستی است که از G تا بینهایت امتداد دارد.
- (ج) شار B که از رخ پایانی سیملوله نیم‌متناهی می‌گذرد نصف شاری است که از پیچه‌ای در فاصله دور به داخل برمی‌گردد.
- (د) هر خط میدان در فاصله r_0 cm از محور در داخل پیچه از انتهای آن در شعاع $r_1 = \sqrt{2}r_0$ خارج می‌شود.
- نشان دهید که این گفته‌ها صحیح‌اند. چه چیزی دیگری را می‌توان دریافت؟



۱۸-۶ دو استوانهٔ طویل هم‌محور تا اختلاف پتانسیل 5° ایستاولت برادر شده‌اند. قطر خارجی استوانهٔ داخلی ۶ سانتی‌متر و قطر داخلی استوانهٔ خارجی ۸ سانتی‌متر است. استوانهٔ خارجی ساکن است و استوانهٔ داخلی با سرعت ثابت 3° دور در دقیقه حول محور خود می‌چرخد. میدان مغناطیسی تولید شده را توصیف و شدت آن را برحسب گاوس تعیین کنید. اگر هر دو استوانه با سرعت 3° دور در ثانیه در یک جهت بگردند چه رخ می‌دهد؟

۱۹-۶ دانشجویی اظهار داشت که "شما تقریباً مرا متقاعد کردید که نیروی بین جریانها، که فکر می‌کردم نیروی مغناطیسی است، با میدانهای الکتریکی بارهای متحرک توصیف می‌شود. اما اگر چنین است، چرا صفحه‌های فلزی در شکل ۵-۱۵ ج یک سیم را در برابر اثر سیم دیگر محافظت می‌کند؟ آیا می‌توانید آن را توجیه کنید؟

۲۰-۶ فرض کنید شرایط به‌گونه‌ای است که مؤلفهٔ میدان مغناطیسی موازی با صفحهٔ ورقه در دو طرف دارای اندازهٔ یکسان است اما جهت آن با حرکت از میان ورقه به اندازهٔ 90° تغییر می‌کند؟ در این حالت چه اتفاقی می‌افتد؟ آیا نیرویی بر صفحه اعمال می‌شود؟ آیا رابطه‌های نیروی وارد بر جریان صفحه‌ای در مواردی از این نوع به‌کار می‌رود؟

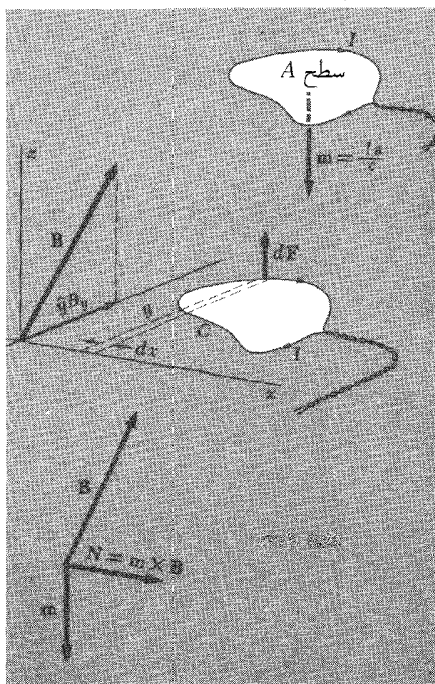
۲۱-۶ از آنجا که رشته‌های جریان موازی یکدیگر را جذب می‌کنند، می‌توان تصور کرد که جریان در یک میلهٔ جامد مانند رسانای شکل ۲-۶ تمایل به تمرکز در نزدیکی محور میله را دارد. یعنی الکترونهاى رسانش، به جای اینکه طبق معمول در داخل فلز به‌طور یکنواخت توزیع شوند، در اطراف محور متراکم می‌شوند و بیشتر جریان در این ناحیه خواهد بود. به نظر شما چه چیزی مانع از این رویداد می‌شود؟ آیا این واقعه اصلاً رخ می‌دهد؟ در صورت وجود این پدیده، آیا می‌توانید آزمایشی را جهت آشکارسازی آن پیشنهاد کنید؟

۲۲-۶ هدف اصلی این مسئله یافتن لنگر وارد بر یک حلقهٔ جریان در میدان مغناطیسی ثابت است. میدان ثابت B دارای جهتی در فضا است. مختصات خود را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که B عمود بر محور x باشد، و حلقهٔ جریان مانند شکل در صفحهٔ xy قرارگیرد. شکل و اندازهٔ حلقهٔ اختیاری است، می‌توان فرض کرد که جریان را اتصالهای پیچ خورده‌ای تأمین می‌کنند که نیروی خالص وارد بر آنها صفر است. جزء کوچکی از حلقه را در نظر بگیرید و سهم آن را در لنگر حول محور x محاسبه کنید. فقط مؤلفهٔ z نیرو، و در نتیجه مؤلفهٔ y میدان B که در شکل با $\hat{y} B_y$ نشان داده شده است در آن دخیل خواهد بود. انتگرالی را بنویسید که لنگرکل را می‌دهد. نشان دهید که این انتگرال، بدون توجه به عاملهای ثابت، سطح حلقه را می‌دهد. گشتاور مغناطیسی یک حلقهٔ جریان به صورت بردار m با بزرگی Ia/c تعریف شده است که در آن I جریان برحسب یکایی الکتروستاتیک بر ثانیه، a سطح حلقه برحسب سانتی‌متر مربع، و جهت بردار عمود بر حلقه طبق شکل و قاعدهٔ دست راست با جریان در ارتباط است. (ما مجدداً در فصل ۱۱ حلقهٔ جریان و گشتاور مغناطیسی آن را بررسی می‌کنیم.) اکنون نشان دهید که

نتیجه به دست آمده ایجاب می‌کند که گشتاور N وارد بر هر حلقه جریان از معادله برداری زیر به دست آید

$$N = m \times B$$

نیروی خالص وارد بر حلقه چقدر است؟



شکل مسئله ۶-۲۲.

۶-۲۳ در بعضی موارد، شتاب دادن یونهای هیدروژن منفی در سیکلوترون سودمند است. یک یون هیدروژن منفی H^- ، اتم هیدروژنی است که یک الکترون اضافی به آن متصل شده است. اتصال نسبتاً ضعیف است: میدان الکتریکی برابر با 1.5×10^4 ایستولت بر سانتی متر (که در معیار اتمی میدان کوچکی است) سبب آزاد شدن الکترون و به جا ماندن اتم هیدروژن می‌شود. اگر بخواهیم یونهای H^- را تا انرژی جنبشی 1 GeV (10^9 eV) شتاب دهیم، بزرگترین میدان مغناطیسی که می‌تواند یونها را تا رسیدن به انرژی نهایی در مدار دایره‌ای نگه دارد چقدر است؟ (برای یافتن γ در این مسئله فقط به جرم سکون یون H^- نیاز دارید، که عملاً برابر جرم پروتون، یعنی تقریباً 1 GeV است.)

۲۴-۶ الکترونی با سرعت 10^8 ° روی مدار دایره‌ای به شعاع 10^{-8} سانتی‌متر حرکت می‌کند. شدت میدان مغناطیسی تولید شده در مرکز مدار چقدر است؟ (اعداد داده شده از لحاظ بزرگی نمونه‌ای اعداد مربوط به الکترون در اتم‌اند.)

۲۵-۶ آیا می‌توانید یک پتانسیل برداری ابداع کنید که متناظر با میدان یکنواخت در جهت z باشد: $B_x = 0, B_y = 0, B_z = B_0$ ؟

۲۶-۶ یک سیم گرد به شعاع r_0 حامل جریان I است که به‌طور یکنواخت در سطح سیم توزیع شده است. فرض کنید که محور z محور سیم باشد که در آن \hat{z} جهت جریان است. نشان دهید که پتانسیل برداری به شکل $\mathbf{A} = \text{const.} \times \hat{z}(x^2 + y^2)$ میدان مغناطیسی \mathbf{B} مربوط به این جریان را تمام نقطه‌های داخل سیم به‌درستی به‌دست می‌دهد. مقدار این ثابت چقدر است؟

۲۷-۶ ذره‌ای با بار q و جرم m با سرعت v در میدان مغناطیسی \mathbf{B} حرکت می‌کند. در اینجا \mathbf{B} عمود بر v است و هیچ میدان الکتریکی وجود ندارد. نشان دهید که مسیر ذره خمی به شعاع R است که از رابطه $R = pc/qB$ به‌دست می‌آید، که در آن p تکانه ذره، $\beta\gamma mc$ است. (توجه کنید که نیروی $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$ فقط می‌تواند جهت تکانه ذره را تغییر دهد و نه اندازه آن را، جهت \mathbf{p} در زمان کوتاه Δt تحت چه زاویه $\Delta\theta$ تغییر می‌کند؟) اگر \mathbf{B} در همه جا یکسان باشد ذره مسیر دایره‌ای را طی می‌کند. زمان یک دوره کامل را پیدا کنید.

۲۸-۶ پروتونی با انرژی جنبشی 10^{16} eV ($\gamma = 10^7$) عمود بر میدان مغناطیسی میان ستاره‌ای در ناحیه‌ای از کهکشان حرکت می‌کند که شدت میدان مغناطیسی در آن $3 \times 10^{-6} \text{ G}$ است. شعاع خمیدگی مسیر آن چقدر است و چه زمانی برای یک دور کامل لازم است؟ (از نتیجه‌های مسئله ۲۷-۶ استفاده کنید.)

۲۹-۶ یک شتابدهنده انرژی بالا، باریکه‌ای از پروتونهای با انرژی 2 GeV (یعنی $2 \times 10^9 \text{ eV}$) بر پروتون) تولید می‌کند. جریان آن برابر 1 mA است. قطر باریکه در چارچوب آزمایشگاه 2 mm اندازه‌گیری شده است:

(الف) شدت میدان الکتریکی که این باریکه در فاصله 1 cm از محور باریکه تولید می‌کند چقدر است؟

(ب) شدت میدان مغناطیسی در همین فاصله چقدر است؟ اکنون چارچوب F' را در نظر بگیرید که همراه پروتونها حرکت می‌کند. میدانهای اندازه‌گیری شده در F' چقدرند؟ برای این مسئله می‌توانید انرژی سکون پروتون را 10^9 eV در نظر بگیرید.

۳۰-۶ در دستگاه مختصات x, y, z در حوالی مبدأ، میدان الکتریکی \mathbf{E} به بزرگی 10° ایستاولت بر سانتی‌متر وجود دارد که با محور x زاویه 30° ، و با محور y زاویه 60° می‌سازد. محورهای

چارچوب F' با محورهای بالا موازی است. اما با سرعت $v = 0.6c$ در جهت y نسبت به این چارچوب حرکت می‌کند. جهت و بزرگی میدان مغناطیسی ای را که این ناظر گزارش می‌دهد به دست آورید.

۳۱-۶ از دید ناظرهای چارچوب F ، رویدادهای زیر در صفحه xy رخ می‌دهد. یک یون یک بار مثبت که با سرعت ثابت $v = 0.6c$ در جهت \hat{y} حرکت می‌کند در لحظه $t = 0$ از مبدأ می‌گذرد. در همان لحظه یون مشابهی که با همان سرعت ولی در جهت $-\hat{y}$ حرکت می‌کند از نقطه $(0, 0, 2)$ روی محور x می‌گذرد. فاصله‌ها برحسب سانتی‌متر است.

(الف) شدت و جهت میدان الکتریکی در $t = 0$ و در نقطه $(3, 0, 0)$ چقدر است؟

(ب) شدت و جهت میدان مغناطیسی در همان محل و در همان زمان چقدر است؟

جواب: $\mathbf{E} = (25/18)e\hat{x}$; $\mathbf{B} = (2/3)e\hat{z}$

۳۲-۶ دو الکترون را در یک لامپ پرتوکاتی در نظر بگیرید که در مسیرهای موازی در کنار هم با سرعت یکسان v حرکت می‌کنند. فاصله بین آنها، یعنی فاصله‌ای که در جهت عمود بر سرعتشان اندازه گرفته می‌شود r است. نیروی وارد بر یکی از آنها به علت وجود دیگری، که در چارچوب آزمایشگاه مشاهده می‌شود چقدر است؟ اگر v در مقایسه با c بسیار کوچک باشد، پاسخ شما e^2/r^2 خواهد بود. اما v کوچک نیست و باید مواظب باشید.

(الف) آسانترین راه به دست آوردن پاسخ آن است که به چارچوبی بروید که با الکترونها حرکت می‌کند. در این چارچوب دو الکترون ساکن‌اند، فاصله بین آنها هنوز r است (چرا؟) و نیرو درست e^2/r^2 است. اکنون نیرو را با استفاده از قانون تبدیل معادله ۱۴ فصل ۵ به چارچوب آزمایشگاه تبدیل کنید (مواظب دستگاه پریم‌دار باشید؛ نیرو در چارچوب آزمایشگاه از چارچوب الکترون بزرگتر است یا کوچکتر؟)

(ب) اگر به‌طور کامل در چارچوب آزمایشگاه کار کنید باید پاسخ یکسانی به دست آورید. در چارچوب آزمایشگاه در وضعیتهای لحظه‌ای الکترون ۱، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ناشی از الکترون ۲ وجود دارند (شکل ۲۶-۶). نیروی خالص وارد بر الکترون ۱ را که در این میدانها با سرعت v حرکت می‌کند محاسبه کنید و نشان دهید که نتیجه‌ای مشابه مورد (الف) به دست می‌آورد. نموداری رسم کنید که جهت میدانها و نیروها را نشان دهد.

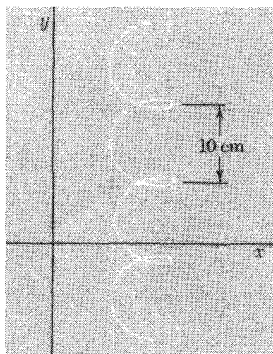
(ج) با توجه به این نمودار، درباره نیروی بین الکترونهايي که در کنار هم حرکت می‌کنند در

حد $c \rightarrow v$ چه اظهار نظری می‌کنید؟

۳۳-۶ شکل مسیر یونهای مثبتی را نشان می‌دهد که در صفحه xy حرکت می‌کنند. میدان مغناطیسی یکتواخت به شدت 6000 گاوس در جهت \hat{z} وجود دارد. هر دوره حرکت چرخزادی در 1 میکروثانیه کامل می‌شود. بزرگی و جهت میدان الکتریکی موجود چقدر است؟ راهنمایی:

چارچوبی را در نظر بگیرید که در آن میدان الکتریکی صفر است.

جواب: $E = -2\hat{x} \text{ statV/cm}$



شکل مسئله ۳۳-۶.

۳۴-۶ میدان مغناطیسی موجود در بالای قرص چرخان در آزمایش رولاند را به طور تقریبی محاسبه کنید. اطلاعات مربوطه را از مقاله او که در شکل ۲۷-۶ چاپ شده است بگیرید. باید بدانید که پتانسیل قرص چرخان نسبت به صفحه‌هایی که در بالا و پایین آن به زمین متصل شده است در بیشتر آزمایش‌های 10° کیلوولت بوده است. این اطلاعات در قسمتهای بعدی مقاله او داده شده است، مانند توصیف قسمت اساسی دستگاه مغناطیس شیخ "ناپایدار" که در لوله عمودی سمت چپ نشان داده شده است. این ترتیبی است که در آن دو عقربه مغناطیسی در دو جهت مخالف به طور محکم روی یک پایه به هم متصل شده‌اند، به طوری که گشتاور حاصل از میدان مغناطیسی زمین روی هر یک از آنها خنثی می‌شود. میدان ناشی از قرص چرخان را که به طور عمده روی عقربه نزدیکتر عمل می‌کند، می‌توان در حضور میدان یکنواخت بسیار شدیدتر آشکار کرد. این تنها احتیاط لازم در آزمایش رولاند نبود.

۳۵-۶ یک کاوه هال برای اندازه‌گیری میدانهای مغناطیسی از سیلیسیم آلاییده با آرسنیک ساخته شده است که $10^{15} \times 2$ الکترون رسانش در سانتی‌متر مکعب دارد و مقاومت ویژه آن 1.6 اهم سانتی‌متر است. ولتاژ هال در دو طرف نوار سیلیسیم نوع- n با عرض 2 سانتی‌متر، ضخامت 0.5 سانتی‌متر، و طول 5 سانتی‌متر بین دو انتهای ضخیمتر اندازه گرفته می‌شود که در یک مدار به باتری 1 ولتی متصل‌اند. هنگامی که این کاوه در میدان مغناطیسی 1 کیلوگاوسی قرار گیرد چه ولتاژی بین دو سر این نوار 2 سانتی‌متری اندازه گرفته می‌شود.

جواب: 7.8 میلی‌ولت.

۳۶-۶ نشان دهید که معادله ۶۵ در دستگاه SI به صورت $E_t = -\mathbf{J} \times \mathbf{B}/nq$ در می‌آید که در آن E_t برحسب V/m ، B برحسب T ، n برحسب m^{-3} و q برحسب C است.

۳۷-۶ دو سیملوله را در نظر بگیرید که یکی از آنها مدلی از دیگری در مقیاس یکدهم است. سیملوله بزرگتر به طول ۲ متر و قطر ۱ متر است و روی آن سیمهایی مسی به قطر ۱ سانتی‌متر پیچیده شده است. وقتی پیچه به مولد جریان مستقیم ۱۲° ولتی متصل شود، میدان مغناطیسی در مرکز آن ۱۰۰۰ گاوس می‌شود. مدل کوچک شده دارای ابعاد خطی در اندازه دقیق یکدهم، از جمله برای قطر سیم است. تعداد دورها یکی است و طوری طراحی شده است که میدان مرکزی یکسانی تولید کند.

(الف) نشان دهید که ولتاژ لازم یکسان، یعنی برابر ۱۲° ولت است.

(ب) پیچه‌ها را با توجه به توان تلف شده و مشکل انتقال این گرما به دستگاه خنک‌کننده

مقایسه کنید.

۳۸-۶ این مسئله مربوط به دانه‌های غبار باردار میان ستاره‌ای است که موضوع مسئله ۲-۲۲ بود. جرم دانه‌ها را که در آن مسئله دخیل نبود می‌توان $۱۰^{-۱۳}$ گرم در نظر گرفت. فرض کنید که این دانه آزادانه، با سرعت $c \ll v$ در صفحه عمود بر میدان مغناطیسی میان ستاره‌ای حرکت می‌کند که شدت آن $۱۰^{-۶} \times ۳$ گاوس است. چقدر طول می‌کشد تا این دانه یک مدار دایره‌ای را طی کند.

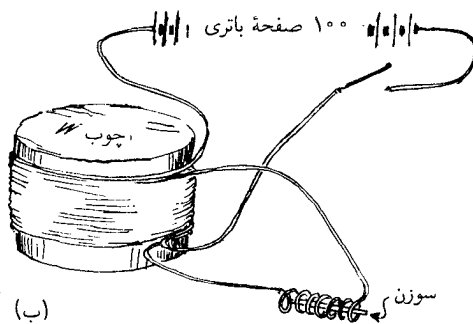
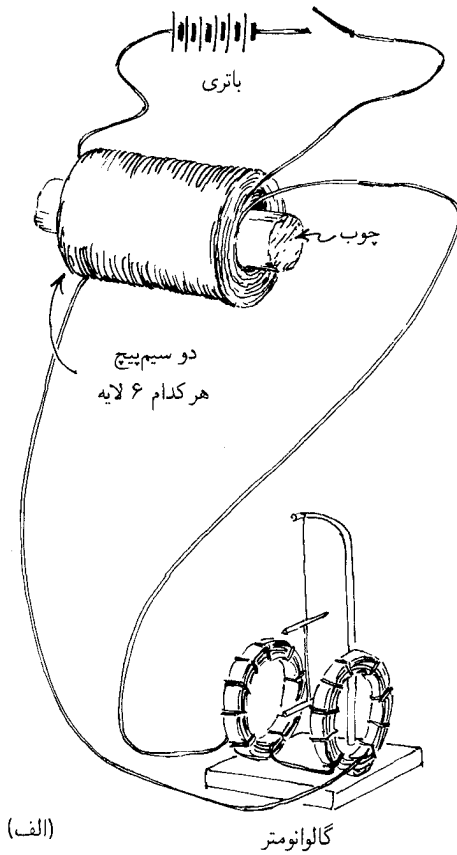


القای الکترومغناطیسی

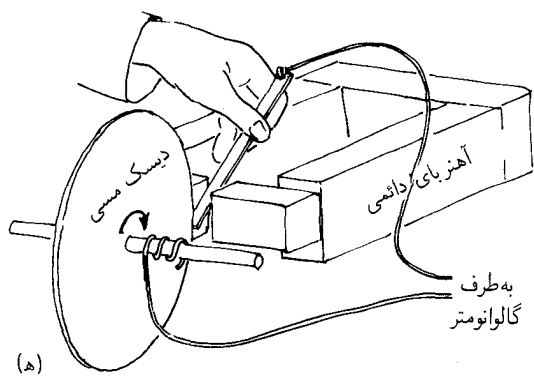
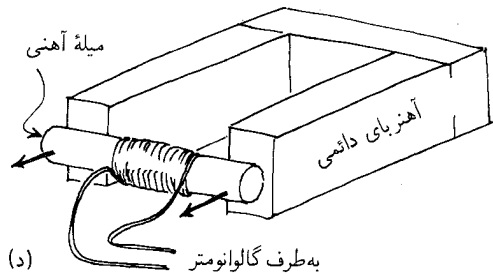
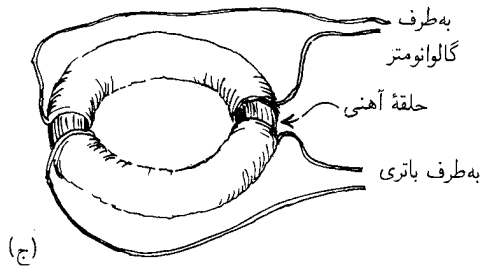
۷-۱ کشف فاراده

۱. توانایی الکتریسیته فشار قوی در تولید حالت الکتریکی مخالف در اطرافش را با اصطلاح کلی القایش بیان می‌کنند؛ این اصطلاح را که در زبان علمی پذیرفته شده است می‌توان به مفهوم توانی به کار برد که جریان الکتریکی می‌تواند در القای حالتی خاص در ماده اطراف خود داشته باشد. با این مفهوم است که قصد دارم این اصطلاح را در این مقاله به کار برم.

۲. بعضی از اثرهای القایی جریانهای الکتریکی قبلاً مشخص و بیان شده‌اند: مانند مغناطیدگی؛ آزمایشهای آمپر در نزدیک کردن یک قرص مسی به یک مارپیچ تخت؛ تکرار آزمایشهای او با الکترومغناطیسه‌های خارق‌العاده آراگو و شاید چند آزمایش دیگر. اما هنوز بعید به نظر می‌رسد که بتوان آنها را اثرهایی دانست که القایش تولید شده به وسیله جریانها به وجود می‌آورد؛ به‌ویژه آنکه با کنار گذاشتن آهن، تقریباً تمام این اثرها از میان می‌روند، در حالی که بسیاری از اجسامی که پدیده‌های معین القایش با الکتریسیته فشار قوی را نشان می‌دهند، هنوز باقی می‌مانند تا القایش الکتریسیته جاری بر آنها اعمال شود.



شکل ۷-۱ (الف تا ه) تعبیر نویسنده از بعضی آزمایشهای فاراده که در "پژوهشهای تجربی در الکتریسیته" در سال ۱۸۳۹ آورده است.



شکل ۷-۱ (ادامه).

۳. به علاوه، اگر نظریه زیبایی آمپر یا هر نظریه دیگر را بپذیریم، یا در این مورد احتیاط فکری لازم را به عمل آوریم، هنوز بسیار عجیب به نظر می‌رسد که چون هر جریان الکتریکی با شدت کنش مغناطیسی عمود بر جریان همراه است، هنگامی که رساناهای خوب الکتریسیته در محدوده این کنش قرار می‌گیرند نباید جریانی در آنها القا شود، یا اثر محسوسی معادل نیرو بر چنین جریانی وارد شود.

۴. این ملاحظات، و نتایج آنها، امید به دست آوردن الکتریسیته از مغناطیس معمولی را در من ایجاد کرده است و این انگیزه را به وجود آورده است تا اثر القایی جریانهای الکتریکی را در زمانهای مختلف به صورت تجربی بررسی کنم. اخیراً به نتیجه مثبتی نیز رسیده‌ام؛ که نه تنها آرزوهای مرا تحقق بخشیده است، بلکه کلیدی را به دست آورده‌ام که می‌تواند پدیده‌های مغناطیسی آراگو را به طور کامل تبیین کند، و حالت جدیدی را کشف کنم که به احتمال زیاد تأثیر قابل ملاحظه‌ای در برخی از اثرهای مهم جریانهای الکتریکی داشته باشد.

۵. قصد دارم نتیجه‌ها را نه آن گونه که به دست آمده‌اند بلکه طوری تشریح کنم که دیدگاه موجزی از کل را بدهند.

بدین‌گونه است که مایکل فاراده کشف القایش الکترومغناطیسی را آغاز می‌کند. این متن قسمتی از مقاله‌ای بوده که فاراده در سال ۱۸۳۱ ارائه کرد. این قسمت از "پژوهشهای تجربی در الکتریسیته" او نقل شده است که در سال ۱۸۳۹ در لندن منتشر شد. پس از این مقدمه چند آزمایش در مقاله توصیف شده است که در آن فاراده جنبه‌های اصلی تولید اثرهای الکتریکی را در نتیجه کنش مغناطیسی روشن کرده است.

منظور فاراده از "الکتریسیته فشار قوی" بارهای الکتروستاتیکی است، و القایش به مفهومی که در اولین جمله آمده است، چیزی بیش از آنچه در فصل ۳ آموخته‌ایم نیست. حضور بار سبب باز توزیع بارها در رساناهای مجاور می‌شود. سؤال فاراده این بود که چرا جریان الکتریکی جریان دیگری را در رساناهای مجاور تولید نمی‌کند؟

تولید میدانها مغناطیسی به وسیله جریانهای الکتریکی پس از کشف اورستد به طور کامل بررسی شد. منبع آزمایشگاهی آشنای این جریانهای "گالوانیک" پیلها و ولتایی بود. حساسترین آشکارساز برای این جریانها یک گالوانومتر بود. این گالوانومتر از یک عقربه مغناطیسی تشکیل شده بود که مانند عقربه قطب‌نما روی یک محور قرار داشت و یا به وسیله رشته‌های نازک بین دو سیم پیچ آویزان بود. گاهی از عقربه دیگری استفاده می‌شد که خارج از پیچه بود و به طور محکم به عقربه اول متصل شده بود تا اثر میدان مغناطیسی زمین را خنثی کند (شکل ۷-۱ الف). طرحهای شکل ۷-۱ ب تا ه چند آزمایش القای فاراده را نشان می‌دهد. باید روایت خود او را که یکی از آزمایشهای کلاسیک علمی است بخوانید تا متوجه تدبیر او در پیشبرد تحقیقات و ذهن باز و آگاهی او در بررسی شواهد بشوید.

در آزمایشهای اولیه فاراده متحیر بود که چرا جریان پایا اثر قابل آشکارسازی بر روی مدار مجاور خود ندارد. او پیچه‌های سیمی مختلفی را ساخت که شکل ۷-۱ الف نمونه‌ای از آن است، دو رسانا را طوری پیچید که بسیار نزدیک هم قرار گیرند و تنها یک عایق نازک پارچه‌ای یا کاغذی

آنها را از هم جدا کند. یک رسانا با گالوانومتر مداری را تشکیل می‌داد. از رسانای دیگر جریان شدید یک باتری می‌گذشت. اما گالوانومتر به صورت نوسان‌کننده‌ای منحرف نمی‌شد. در یکی از این آزمایشها فاراده متوجه شد که اختلال اندکی در گالوانومتر هنگام وصل کردن جریان و اختلال دیگری در موقع قطع آن رخ می‌دهد. با دنبال کردن این سر نخ، او بدون هیچ تردیدی ثابت کرد که جریان در رسانای دیگر نه به واسطه یک جریان پایا بلکه بر اثر یک جریان متغیر تولید می‌شود. یکی از شگردهای تجربی درخشان فاراده در این مرحله، جایگزین کردن گالوانومتر، که متوجه شده بود آشکارساز خوبی برای یک تپ کوتاه مدت جریان نیست، با یک پیچۀ ساده بود که در آن یک عقربه فولادی نامغناطیده (شکل ۷-۱ ب) گذاشته بود. او دریافت که عقربه بر اثر تپ جریان القا شده در هنگام اتصال جریان اولیه مغناطیسی باقی می‌ماند، و می‌توان آن را به وسیله تپ جریان القایی در هنگام قطع مدار اولیه در جهت مخالف مغناطیسی کرد.

این توصیف خود او از یک آزمایش دیگر است:

در آزمایشهای قبلی سیمها نزدیک هم قرار داشتند و اتصال القاگر با باتری در صورت لزوم برقرار می‌شد؛ اما از آنجا که می‌توان تصور کرد که این کنش خاص فقط در لحظه‌های ایجاد یا قطع جریان اعمال می‌شود، القایش به صورت دیگری صورت می‌گرفت. چند فوت سیم مسی به صورت زیگززاگ که نشان‌دهنده حرف W بود روی یک تخته گسترده شد؛ یک سیم دیگر درست به همین ترتیب روی تخته دیگر قرار داده شد، به طوری که وقتی سیمها به هم نزدیک می‌شدند در همه نقطه‌ها با هم در تماس بودند بجز اینکه یک ورقه کاغذ کلفت بین آنها قرار داشت. یکی از سیمها به گالوانومتر و دیگری به یک باتری ولتایی متصل بود. سیم اول به طرف سیم دوم حرکت می‌کرد و هنگام نزدیک شدن عقربه منحرف می‌شد با دور کردن سیم، عقربه در جهت مخالف منحرف می‌شد. نزدیک و دور کردن همزمان سیمها با ارتعاش عقربه همراه بود و این ارتعاش بسیار شدید شد؛ اما وقتی حرکت سیمها به طرف یکدیگر و یا دور از هم متوقف می‌شد، عقربه گالوانومتر به جای اول خود باز می‌گشت.

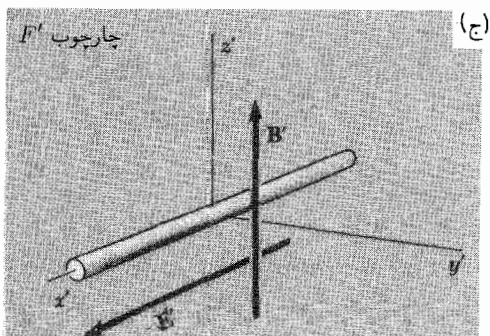
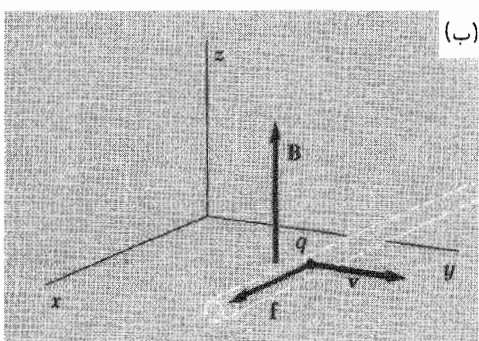
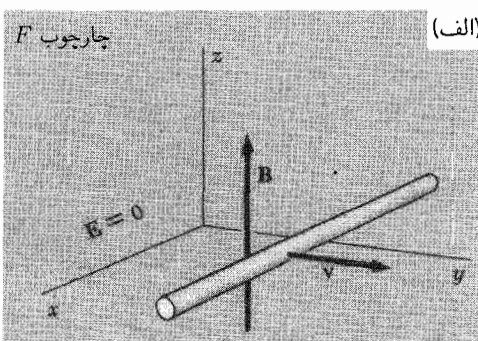
با نزدیک شدن سیمها به یکدیگر جریان القا شده در خلاف جهت جریان القاکننده بود. با دور شدن سیمها از یکدیگر، جریان القا شده در همان جهت القاکننده بود. وقتی سیمها ساکن بودند، جریان القایی وجود نداشت.

در این فصل برهم‌کنش الکترومغناطیسی را مطالعه می‌کنیم که فاراده در این آزمایشها کشف کرد. از دیدگاه کنونی ما، القایش را می‌توان پیامد طبیعی نیروی وارد بر بار متحرک در یک میدان مغناطیسی دانست. به صورت محدود، می‌توان قانون القایش را از آنچه می‌دانیم استنتاج کرد. ادامه این درس مجدداً از ترتیب تاریخی مطلب دور می‌شویم، اما این کار (با استفاده از کلمات خود فاراده از انتهای اولین قسمتی که نقل شد) "برای به دست آوردن دیدی اجمالی از کل مطلب است".

۲-۷ یک میلهٔ رسانا که در میدان مغناطیسی یکنواخت حرکت می‌کند

شکل ۲-۷ الف یک قطعه سیم راست یا میلهٔ فلزی باریک را نشان می‌دهد که با سرعت ثابت v در جهت عمود بر طولش حرکت می‌کند. در فضایی که میله حرکت می‌کند یک میدان مغناطیسی B وجود دارد که نسبت به زمان ثابت است. این میدان را می‌توان با استفاده از یک سیملولهٔ بزرگ تولید کرد که تمام منطقهٔ نمودار را در برگیرد. چارچوب مرجع F با مختصات x, y, z چارچوبی است که سیملوله نسبت به آن ساکن است. در نبود میله هیچ میدان الکتریکی در این چارچوب وجود ندارد، بلکه فقط یک میدان مغناطیسی یکنواخت B موجود است.

میله که رساناست، حاوی ذره‌های بارداری است که در صورت وارد آمدن نیرو بر آنها حرکت می‌کنند. هر ذرهٔ بارداری که با میله به حرکت در آید، مانند ذرهٔ با بار q در شکل ۲-۷ ب ناچار در



شکل ۲-۷ الف) یک میلهٔ رسانا در میدان مغناطیسی حرکت می‌کند. (ب) به هر بار q که با میله حرکت کند نیروی $\mathbf{B} \times \mathbf{v} (q/c)$ وارد می‌شود. (ج) چارچوب مرجع F' با میله حرکت می‌کند. در این چارچوب میدان الکتریکی E' وجود دارد.

میدان مغناطیسی \mathbf{B} حرکت می‌کند و نیروی زیر به آن وارد می‌شود

$$\mathbf{f} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (۱)$$

که جهت \mathbf{B} و \mathbf{v} به‌گونه‌ای است که در شکل ۷-۲ نشان داده شده است. اگر q مثبت باشد، نیرو در جهت مثبت x است، و برای الکترونها منفی که در واقع در بسیاری از رساناها، حاملان بار هستند نیرو در جهت مخالف است. پیامدهای حرکت بارهای مثبت، منفی یا هر دوی آنها یکسان است.

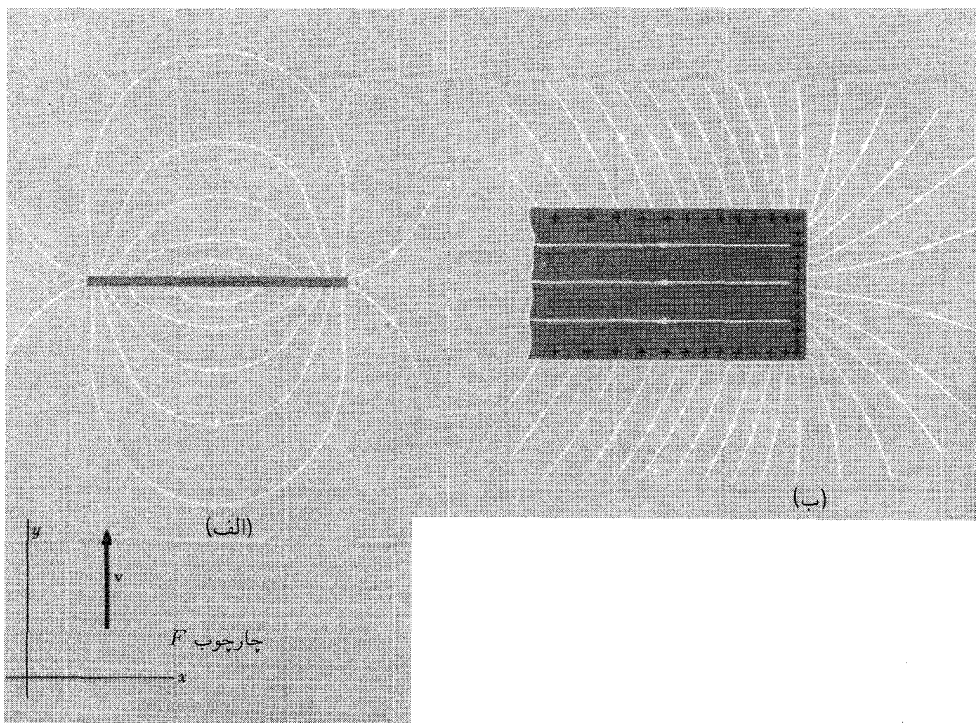
هنگامی که میله با سرعت ثابت حرکت می‌کند و همه چیز در حالت پایاست، نیروی \mathbf{f} در رابطه ۱ با نیرویی مساوی با علامت مخالف متوازن می‌شود. این فقط می‌تواند ناشی از میدان الکتریکی در میله باشد. میدان الکتریکی به این صورت تولید می‌شود: نیروی \mathbf{f} بارهای منفی را به یک انتهای میله می‌راند و سبب می‌شود که انتهای دیگر دارای بار مثبت شود. این کار ادامه می‌یابد تا اینکه بارهای مجزا میدان الکتریکی \mathbf{E} را به‌وجود آورند، به‌طوری که در همه نقطه‌های داخل میله داشته باشیم

$$q\mathbf{E} = -\mathbf{f} \quad (۲)$$

در این صورت حرکت بار نسبت به میله متوقف می‌شود. این توزیع بار علاوه بر میدان داخلی، در خارج از میله نیز یک میدان الکتریکی به‌وجود می‌آورد. میدان خارجی چیزی مانند میدان بارهای مثبت و منفی جدا از هم است، با این تفاوت که بارها به‌طور کامل در دو انتهای میله متمرکز نیستند. بلکه در امتداد آن توزیع شده‌اند. میدان خارجی در شکل ۷-۳ الف رسم شده است. شکل ۷-۳ ب منظره بزرگ شده‌ای از بارهای مثبت انتهای میله است که توزیع بار در سطح و بعضی از خطهای میدان در خارج و داخل رسانا را نشان می‌دهد. این چگونگی اوضاع در هر لحظه از زمان در چارچوب F است.

اکنون بگذارید این دستگاه را از چارچوب F' مشاهده کنیم که با میله حرکت می‌کند. با نادیده گرفتن میله، در این چارچوب F' که در شکل ۷-۲ ج نشان داده شده است، میدان مغناطیسی \mathbf{B}' را (که اگر v کوچک باشد با \mathbf{B} تفاوت چندانی ندارد) همراه با یک میدان الکتریکی یکتواخت که از معادله ۶-۶۳ به‌دست می‌آید مشاهده می‌کنیم

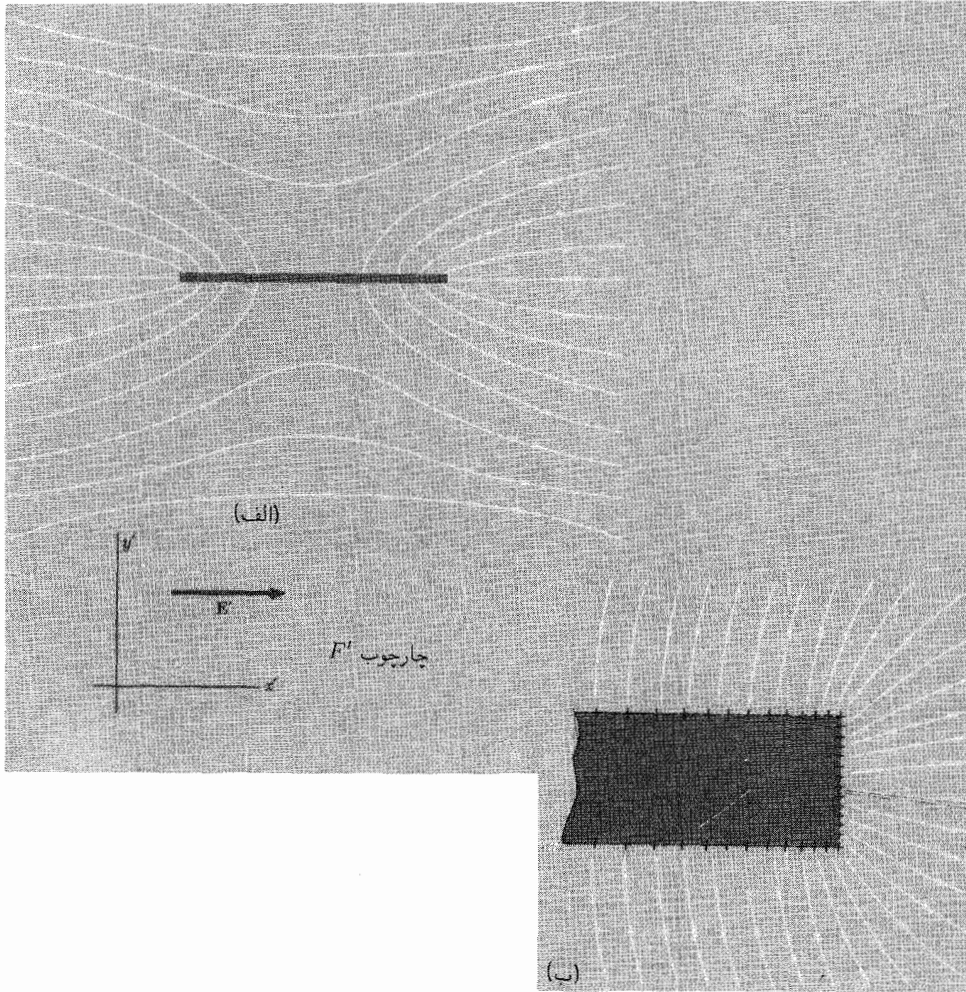
$$\mathbf{E}' = -\frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{B}' = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}' \quad (۳)$$



شکل ۳-۷ الف میدان الکتریکی که در یک لحظه در چارچوب F دیده می‌شود. یک میدان الکتریکی در اطراف میله و در داخل آن وجود دارد. چشمهٔ این میدان بارهای سطح میله‌اند که در شکل (ب) نشان داده شده است. (ب) تصویر بزرگ شدهٔ انتهای راست میله.

با افزودن میله به این دستگاه، یک میله رسانای ساکن را در یک میدان الکتریکی یکنواخت قرار می‌دهیم. در این صورت بار موجود در سطح میله چنان توزیع می‌شود که میدان الکتریکی در داخل آن صفر شود، مانند مورد جعبهٔ فلزی شکل ۳-۶ یا هر رسانای دیگر در میدان الکتریکی. حضور میدان مغناطیسی B' بر این توزیع بار ایستا تأثیری ندارد. شکل ۴-۷ الف بعضی از خطهای میدان الکتریکی را در چارچوب F' نشان می‌دهد و در تصویر بزرگ شدهٔ انتهای میله در شکل ۴-۷ ب می‌بینیم که میدان الکتریکی در داخل میله صفر است.

بجز برای انقباض لورنتس، که از مرتبهٔ دوم v/c است، توزیع بار در یک لحظه در چارچوب F که در شکل ۲-۷ ب دیده می‌شود با چارچوب F' یکسان است. میدانهای الکتریکی تفاوت



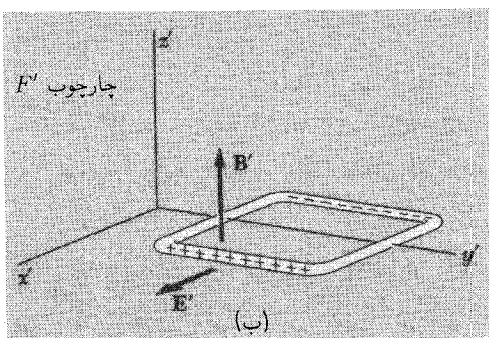
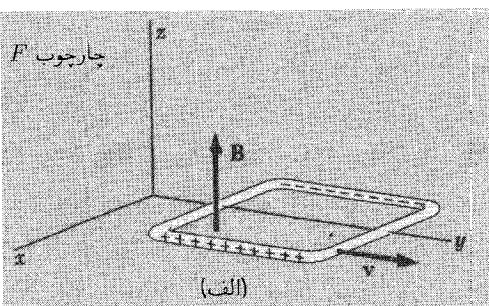
شکل ۴-۷ (الف) میدان الکتریکی در چارچوب F' که در آن میله ساکن است. این میدان برهم‌نهی میدان یکنواخت E' و میدان توزیع بار سطحی است. نتیجه میدان الکتریکی صفر در داخل میله است که در تصویر بزرگ شده (ب) نشان داده شده است. با شکل ۳-۷ مقایسه کنید.

دارند زیرا میدان شکل ۳-۷ فقط حاصل توزیع بار سطحی است، در حالی که میدان الکتریکی شکل ۴-۷، میدان توزیع بار سطحی به علاوه میدان الکتریکی یکنواختی است که در آن چارچوب وجود دارد. ناظری که در F' است می‌گوید "در داخل میله میدان الکتریکی $E = (v/c) \times B$

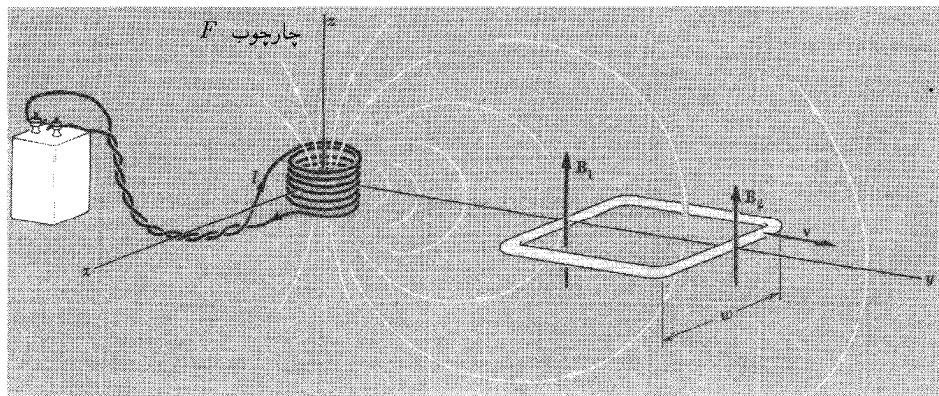
تولید شده است. این میدان نیروی $q\mathbf{E} = -q(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$ را وارد می‌کند که با نیروی $q(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$ متوازن می‌شود که در غیر این صورت سبب حرکت بار q در امتداد میله می‌شد. ناظری که در F' است می‌گوید "در داخل میله میدان الکتریکی وجود ندارد، اگرچه یک میدان مغناطیسی یکنواخت وجود دارد، اما نیرویی از آن حاصل نمی‌شود، زیرا باری حرکت نمی‌کند". هر دو گفته درست است.

۷-۳ حلقه‌ای که در میدان مغناطیسی غیریکنواخت حرکت می‌کند

چه می‌شد اگر یک حلقه مستطیل شکل سیمی مانند شکل ۷-۵ می‌ساختیم و آن را در میدان یکنواخت \mathbf{B} با سرعت ثابت به حرکت در می‌آوریم؟ برای پیشگویی آنچه روی می‌دهد، فقط باید از خود بپرسیم — با پذیرش چارچوب F' — اگر این حلقه را در میدان الکتریکی یکنواخت می‌گذاشتیم چه می‌شد. روشن است که دو طرف مخالف مستطیل باری پیدا می‌کنند، اما این تمام چیزی است که به وقوع می‌پیوندد. اما، فرض کنید که میدان \mathbf{B} در چارچوب F ، اگرچه برحسب زمان ثابت است، اما در فضا یکنواخت نباشد. برای روشن شدن موضوع در شکل ۷-۶ میدان \mathbf{B} را همراه یک سیمولوه کوتاه به عنوان چشمه نشان داده‌ایم. این سیمولوه، همراه با باتری که جریان ثابت آن را تأمین می‌کند، در حوالی مبدأ چارچوب F ثابت شده است. (قبلاً گفتیم که



شکل ۷-۵ (الف) در اینجا حلقه در یک میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} حرکت می‌کند. (ب) از دیدگاه چارچوب F' ، که در آن حلقه ساکن است، میدانها \mathbf{B}' و \mathbf{E}' است.



شکل ۶-۷ در اینجا میدان B که از F مشاهده می‌شود یکنواخت نیست. هم بزرگی و هم جهت آن از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کند.

هیچ میدان الکتریکی در F وجود ندارد؛ اگر در واقع از یک سیمولوله با مقاومت متناهی برای تولید میدان استفاده کنیم، باتری و این مدار یک میدان الکتریکی خواهند داشت. این میدان با مسئله ما ارتباطی ندارد و می‌توانیم آن را نادیده بگیریم. یا می‌توانیم سیمولوله و باتری را در داخل یک جعبه فلزی بگذاریم، و مطمئن شویم که بار کل صفر است.)

اکنون، مکان حلقه‌ای را که در چارچوب F با سرعت v در جهت y حرکت می‌کند، در لحظه t چنان برمی‌گزینیم که شدت میدان مغناطیسی در طرف چپ حلقه B_1 و در طرف راست B_2 باشد (شکل ۶-۷). اگر f نیروی وارد بر بار q باشد که در امتداد حلقه حرکت می‌کند. این نیرو تابع مکان حلقه در این لحظه از زمان است. حال انتگرال خطی f را روی تمام حلقه محاسبه می‌کنیم. برای دو ضلعی از حلقه که با جهت حرکت موازی اند، f بر جزء مسیر ds عمود است، پس چیزی از آن حاصل نمی‌شود. با در نظر گرفتن سهم دو ضلع دیگر که طول هر کدام از آنها w است، داریم

$$\int \mathbf{f} \cdot ds = \frac{qv}{c}(B_1 - B_2)w \quad (4)$$

اگر فرض کنیم که زمان حرکت بار q در تمام حلقه به اندازه کافی کوتاه است به طوری که مرقعیت حلقه تغییر قابل ملاحظه‌ای نمی‌کند، معادله ۴ کار نیروی f را می‌دهد. کار انجام شده بر واحد بار $\int \mathbf{f} \cdot ds$ ($1/q$) است. این کمیت را نیروی محرکه الکتریکی می‌گوییم. و از نماد \mathcal{E} برای نشان دادن آن استفاده می‌کنیم، و اغلب آن را با emf نشان می‌دهیم. \mathcal{E} همان بُعد پتانسیل الکتریکی را دارد و در دستگاه CGS بر حسب ایستولت، یا ارگ بر واحد بار اندازه‌گیری می‌شود.

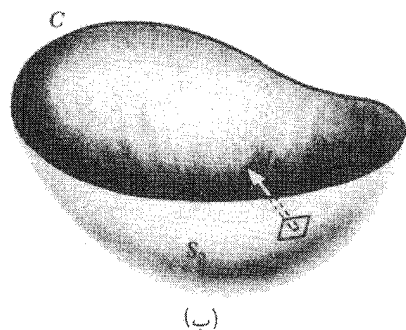
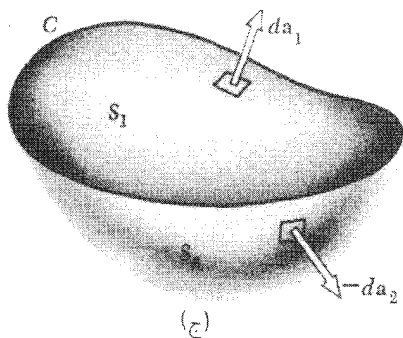
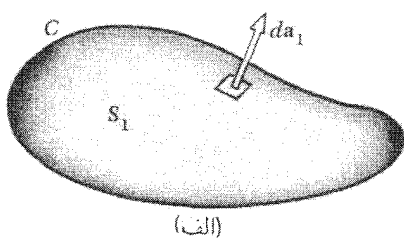
یکای آن در SI ولت است.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \quad (5)$$

جمله نیروی محرکه الکتریکی را قبلاً در بخش ۴-۱۰ آوردیم. این جمله طبق تعریف کار انجام شده بر واحد بار دخیل در حرکت در مدار سلول ولتایی بود. اکنون تعریف emf را گسترش می‌دهیم تا شامل همه عواملی شود که سبب حرکت بار در مسیر بسته می‌شود. اگر مسیر یک مدار فیزیکی با مقاومت R باشد، emf طبق قانون اهم جریان $I = \mathcal{E}/R$ را تولید می‌کند. در این مورد به‌خصوص \mathbf{f} را نیروی وارد بر بار در میدان مغناطیسی در نظر می‌گیریم و بزرگی \mathcal{E} برابر است با

$$\mathcal{E} = \frac{vw}{c}(B_1 - B_2) \quad (6)$$

نیروی محرکه الکتریکی که از معادله ۶ به دست می‌آید رابطه‌ای ساده با آهنگ تغییر شار مغناطیسی دارد که از حلقه می‌گذرد. منظور از شار مغناطیسی که از حلقه می‌گذرد انتگرال سطحی \mathbf{B} روی رویه‌ای است که حلقه مرز آن است. شار Φ که از خم بسته یا حلقه C در شکل ۷-۷ الف می‌گذرد،



شکل ۷-۷ الف) شاری که از C می‌گذرد برابر است با $\Phi = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1$ ؛ رویه دیگری است S_2 می‌توان از آن برای محاسبه Φ استفاده کرد. (ج) با ترکیب S_1 و S_2 و تشکیل یک رویه بسته که برای آن $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ باید صفر شود، ثابت می‌شود که $\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2$.

انتگرال B روی S_1 است:

$$\Phi_{S_1} = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 \quad (۷)$$

می‌توان رویه‌های بسیاری را رسم کرد که مرز آنها C باشد. شکل ۷-۷ ب یک سطح دیگر S_2 را نشان می‌دهد. چرا برای محاسبه شار، مشخص کردن رویه مورد استفاده لازم نیست؟ تفاوتی نمی‌کند زیرا $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ برای تمام رویه‌ها یکسان است. در یک دقیقه تکلیف این مطلب را برای همیشه روشن می‌کنیم. شاری که از سطح S_2 می‌گذرد $\int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2$ است. توجه کنید که بردار $d\mathbf{a}_2$ از بالای سطح بیرون زده است، برای سازگار بودن با انتخاب طرف S_1 : اگر شار خالصی که از C می‌گذرد به طرف بالا باشد، نتیجه یک عدد مثبت است.

$$\Phi_{S_2} = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2 \quad (۸)$$

در بخش ۶-۲ دیدیم که دیورژانس میدان مغناطیسی صفر است: $\text{div} \mathbf{B} = 0$. بنابراین از قضیه گاوس نتیجه می‌گیریم که اگر S یک رویه بسته ("بالون") و V حجم داخل آن باشد داریم:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \text{div} \mathbf{B} \, dv = 0 \quad (۹)$$

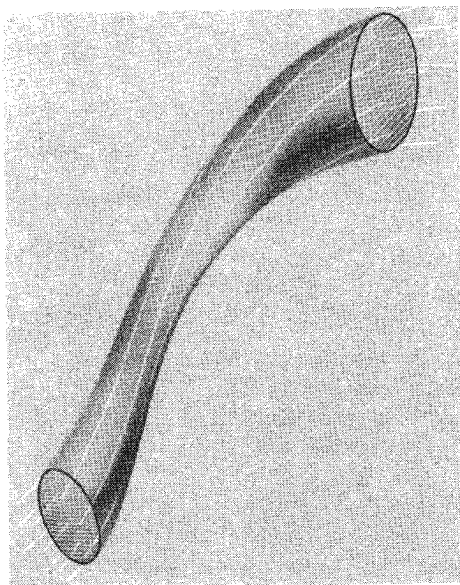
این رابطه را برای یک سطح بسته مانند دُهل به‌کار می‌بریم که از اتصال S_1 و S_2 مانند شکل ۷-۷ به‌دست می‌آید در روی S_2 عمود به طرف خارج برخلاف بردار $d\mathbf{a}_2$ است که در محاسبه شاری که از C می‌گذرد به‌کار بردیم. بنابراین

$$0 = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot (-d\mathbf{a}_2)$$

یا

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2 \quad (۱۰)$$

که نشان می‌دهد تفاوتی نمی‌کند که برای محاسبه شار عبوری از C از چه سطحی استفاده کنیم. این مطلب روشن می‌شود اگر پی ببریم که $\text{div} \mathbf{B} = 0$ باعث نوعی پایداری فضایی شار است. هر شاری که وارد یک حجم شود. آن را ترک می‌کند. (اما وضعیت را در کل فضا در یک

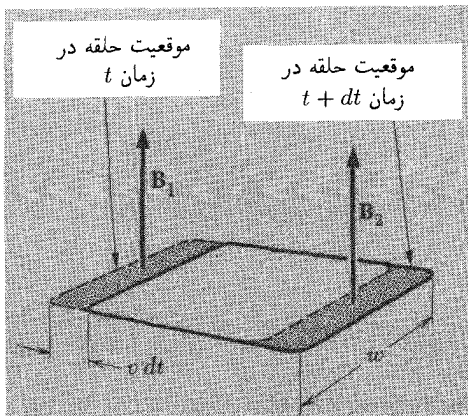


شکل ۷-۸ یک لولهٔ شار. خطهای میدان مغناطیسی در سطح لوله قرار دارند. لوله مقداری از شار Φ را در بر می‌گیرد. هر کجا که آن را قطع کنید در می‌یابید که روی مقطع برابر Φ می‌شود. لازم نیست که لولهٔ شار گرد باشد. می‌توانید از هر کجا و با هر سطح مقطع شروع کنید و مسیر خطهای میدان چگونه تغییر اندازه و شکل مقطع را با پیشرفت شما در امتداد لوله تعیین می‌کند.

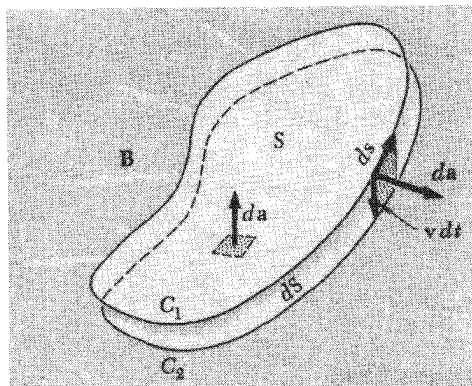
لحظه از زمان بررسی می‌کنیم.) اغلب مجسم کردن "لوله‌های" شار مفید است. یک لولهٔ شار (شکل ۷-۸) سطحی است که در هر نقطهٔ روی آن میدان مغناطیسی در صفحهٔ رویه قرار دارد. از این رویه شاری نمی‌گذرد، و می‌توان آن را حاوی مقداری شار در نظر گرفت، مانند یک کابل تلفن که حاوی سیم‌هایی است. از هر خم بسته‌ای که به‌طور محکم اطراف یک لولهٔ شار کشیده شده است، شار یکسانی می‌گذرد. در مورد میدان الکتریکی \mathbf{E} این مطلب فقط در ناحیه‌هایی صادق است که در آن بار الکتریکی وجود ندارد، زیرا $\text{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ دیورژانس میدان مغناطیسی همواره در همه جا صفر است.

حال به حلقهٔ مستطیلی متحرک برمی‌گردیم، می‌خواهیم آهنگ تغییر شاری را پیدا کنیم که از حلقه می‌گذرد. در زمان dt حلقه مسافت $v dt$ را می‌پیماید. این حرکت شار کلی را که از حلقه می‌گذرد یعنی $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ را روی رویهٔ فراگیر حلقه به دو طریق تغییر می‌دهد. همان‌طور که در شکل ۷-۹ می‌بینید شار به دست آمده در طرف راست $B_2 w v dt$ است، در حالی که شار از دست رفته در طرف چپ $B_1 w v dt$ است. بنابراین $d\Phi$ ، تغییر شار در زمان dt برابر است با

$$d\Phi = -(B_1 - B_2) w v dt \quad (11)$$



شکل ۹-۷ در بازه dt ، حلقه شار $B_2 w v dt$ را به دست می‌آورد و شار $B_1 w v dt$ را از دست می‌دهد.



شکل ۱۰-۷ حلقه در زمان dt از محل C_1 به C_2 می‌رود.

می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \quad (12)$$

می‌توان نشان داد که این رابطه به‌طور کلی برای حلقه‌ای به هر شکل و با هر نوع حرکت صادق است. حلقه C در شکل ۱۰-۷ در زمان t در محل C_1 و در زمان $t + dt$ در محل C_2 است. جزء معین ds این حلقه با سرعت v به محل جدید خود منتقل می‌شود. S سطحی را نشان می‌دهد که حلقه در زمان t می‌پوشاند. شاری که در این لحظه از حلقه می‌گذرد برابر است با

$$\Phi(t) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (13)$$

میدان مغناطیسی \mathbf{B} ناشی از چشمه‌هایی است که در چارچوب مرجع ما مانا هستند و در هر

نقطه معین با زمان تغییر نمی‌کنند. در زمان $t + dt$ سطحی که حلقه را می‌پوشاند، سطح اولیه S ثابت در فضا است، که "حاشیه" dS به آن افزوده شده است. (به یاد داشته باشید که می‌توان از هر سطحی که حلقه را بپوشاند برای محاسبه شار که از آن می‌گذرد استفاده کرد.) پس

$$\Phi(t + dt) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi(t) + \int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (14)$$

در نتیجه تغییر شار در زمان dt درست برابر شار است که از حاشیه dS می‌گذرد یعنی $\int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$. روی این حاشیه، جزء سطح $d\mathbf{a}$ را می‌توان به صورت $(\mathbf{v} dt) \times dS$ نوشت، به طوری که انتگرال روی سطح dS به صورت انتگرال در مسیر C درآید. بدین ترتیب

$$d\Phi = \int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_C \mathbf{B} \cdot [(\mathbf{v} dt) \times dS] \quad (15)$$

چون dt برای این انتگرال‌گیری ثابت است، می‌توان آن را خارج کرد و نوشت

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times dS) \quad (16)$$

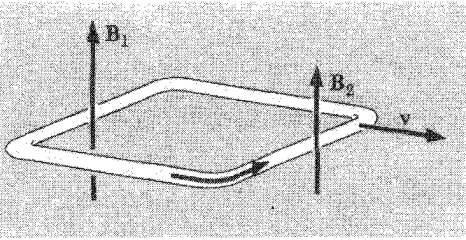
حاصل ضرب $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ هر سه بردار در رابطه $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$ صدق می‌کند. با استفاده از این اتحاد برای تغییر ترتیب انتگرالده در معادله ۱۶ داریم

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot dS \quad (17)$$

حال نیروی وارد بر بار q که در امتداد حلقه حرکت می‌کند درست برابر $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})/c$ است، به طوری که نیروی محرکه الکتریکی، یک انتگرال خطی نیروی وارد بر واحد بار در امتداد حلقه است، درست برابر با تعداد زیر است

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot dS \quad (18)$$

با مقایسه معادله‌های ۱۷ و ۱۸ رابطه ساده‌ای را که قبلاً در معادله ۱۲ داشتیم به دست می‌آوریم. این رابطه اکنون برای هر شکل حلقه و هر نوع حرکت آن صادق است (حتی لازم نبود فرض کنیم \mathbf{v} برای تمام قسمت‌های حلقه یکی است!). به طور خلاصه، انتگرال خطی حول هر حلقه متحرک \mathbf{f}/q ، نیروی وارد بر واحد بار، درست $-1/c$ برابر آهنگ تغییر شار است که از حلقه می‌گذرد.



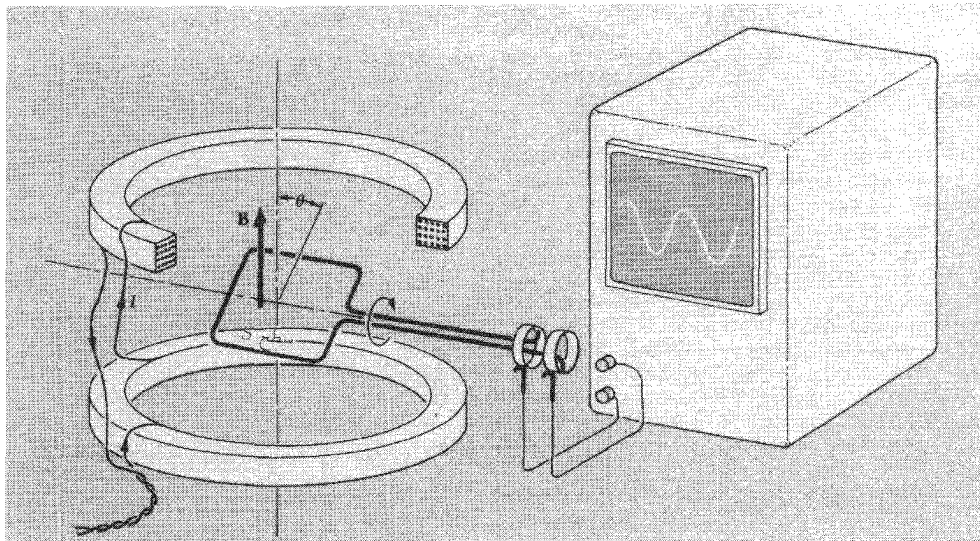
شکل ۷-۱۱ شاری که از حلقه می‌گذرد به طرف بالا است و بزرگی آن با گذشت زمان کاهش می‌یابد. پیکان جهت نیروی محرکه الکتریکی را نشان می‌دهد. یعنی جهتی که بار مثبت روانه می‌شود.



شکل ۷-۱۲ با سقوط حلقه، شاری که از آن به طرف پایین می‌گذرد افزایش می‌یابد. طبق قانون لنز emf القا در جهتی است که با پیکان نشان داده شده است، زیرا این جهتی است که باید جریان داشته باشد تا شاری به طرف بالا در حلقه تولید کند. واکنش دستگاه به‌گونه‌ای است که با هرگونه تغییر مخالفت می‌کند.

جهت انتگرال خطی و راستایی که در آن شار مثبت خوانده می‌شود، با استفاده از قاعده دست راست به دست می‌آید. به عنوان مثال، در شکل ۷-۶ شار از حلقه به سمت بالا می‌گذرد و کاهش می‌یابد. اگر علامت منفی را در نظر بگیریم، این قاعده نیروی محرکه الکتریکی را پیشگویی می‌کند که می‌خواهد بار مثبت را در حلقه در خلاف جهت عقربه‌های ساعت براند، به طوری که با نگاه کردن به حلقه از بالا دیده می‌شود (شکل ۷-۱۱).

راه بهتری برای برخورد با مسئله علامت و جهت وجود دارد. توجه کنید که اگر جریانی باید در جهت نیروی محرکه الکتریکی القا، در وضعیت شکل ۷-۱۱ وجود داشته باشد، خود این جریان شاری را در حلقه تولید می‌کند که جهت آن به‌گونه‌ای است که با تغییر شار مخالفت کند. این یک واقعیت بنیادی فیزیکی است که نتیجه قرارداد اختیاری درباره علامتها و جهتها نیست. بلکه نشاندهنده تمایل دستگاهها به ایستادگی در برابر تغییر است. این موضوع را به طور سنتی قانون لنز می‌نامند. مثال دیگر قانون لنز در شکل ۷-۱۲ آمده است. حلقه رسانا در میدان مغناطیسی پیچیده سقوط می‌کند. شاری که از حلقه می‌گذرد به طرف پایین است و بزرگی آن افزایش می‌یابد. برای مخالفت با این تغییر، شار جدیدی به طرف بالا لازم است. باید جریان در حلقه در جهت پیکانها وجود داشته باشد تا چنین شاری را تولید کند. قانون لنز اطمینان می‌دهد که نیروی محرکه الکتریکی القا در جهت مناسب برای تولید چنین جریانی است.



شکل ۷-۱۳ دو پیچه میدان مغناطیسی B را تولید می‌کنند که در اطراف حلقه تقریباً یکنواخت است. در حلقه که با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد، یک نیروی محرکه الکتریکی القا می‌شود که به صورت سینوسی تغییر می‌کند.

اگر نیروی محرکه الکتریکی باعث تولید جریان در حلقه نشان داده شده در شکل‌های ۷-۶ و ۷-۱۱ شود، که در صورت متناهی بودن مقاومت حلقه روی می‌دهد، مقداری انرژی در حلقه تلف می‌شود. این انرژی از کجا تأمین می‌شود؟ برای پاسخ به این پرسش نیرویی را در نظر بگیرید که بر جریان حلقه وارد می‌شود اگر در جهت پیکان شکل ۷-۱۱ باشد. به رسانای طرف راست B_2 نیرویی به طرف راست وارد می‌شود، در حالی که جهت مخالف حلقه در میدان B_1 به سمت چپ رانده می‌شود. اما B_1 بزرگتر از B_2 است. پس بر حلقه نیرویی به طرف چپ وارد می‌شود، که با حرکت مخالف می‌کند. برای حرکت حلقه با سرعت ثابت باید یک عامل خارجی در کار باشد، و انرژی که صرف این کار می‌شود در نهایت به صورت گرما در حلقه در می‌آید. فکر می‌کنید اگر از قانون لنز تخلف می‌شد، یا اگر نیروی وارد بر حلقه در جهتی بود که به حرکت حلقه کمک می‌کرد چه روی می‌داد!

یک جزء بسیار متداول ماشینها و دستگاههای الکتریکی، حلقه یا پیچه‌ای است که در یک میدان مغناطیسی می‌چرخد. بگذارید آنچه را آموخته‌ایم در مورد دستگاه شکل ۷-۱۳، یک حلقه که با سرعت ثابت در میدان مغناطیسی تقریباً یکنواخت می‌چرخد، به کار ببریم. لوازم مکانیکی، یاتاقانها، قسمت‌های محرک و غیره رسم نشده‌اند. دو پیچه ثابت میدان B را تولید می‌کنند. فرض

کنید که حلقه با سرعت زاویه‌ای ω رادیان بر ثانیه می‌چرخد. اگر مکان آن در هر لحظه با زاویه θ مشخص شود، داریم $\theta = \omega t + \alpha$ ، که α محل حلقه در $t = 0$ است. مؤلفه عمود بر صفحه B برابر است با $B \sin \theta$. بنابراین شاری که در زمان t از حلقه می‌گذرد، برابر است با

$$\Phi(t) = SB \sin(\omega t + \alpha) \quad (19)$$

که در آن S سطح حلقه است. برای نیروی محرکه القایی داریم

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{SB\omega}{c} \cos(\omega t + \alpha) \quad (20)$$

اگر حلقه به جای بسته بودن به سیمهای خارجی که در شکل ۷-۱۳ نشان داده شده‌اند متصل شود، می‌توان در این پایانه‌ها اختلاف پتانسیلی را آشکار کرد که به‌طور سینوسی تغییر می‌کند.

یک مثال عددی طرزکار این دستگاه را نشان خواهد داد. فرض کنید سطح حلقه شکل ۷-۱۳ برابر 8° سانتی‌متر مربع و شدت میدان B برابر 5° گاوس باشد و حلقه 3° دور در ثانیه بچرخد. این صورت $3^\circ \times 2\pi = \omega$ یا 188 رادیان بر ثانیه است. دامنه، یعنی بیشینه بزرگی نیروی محرکه الکتریکی نوسانی که در حلقه القا می‌شود، برابر است با

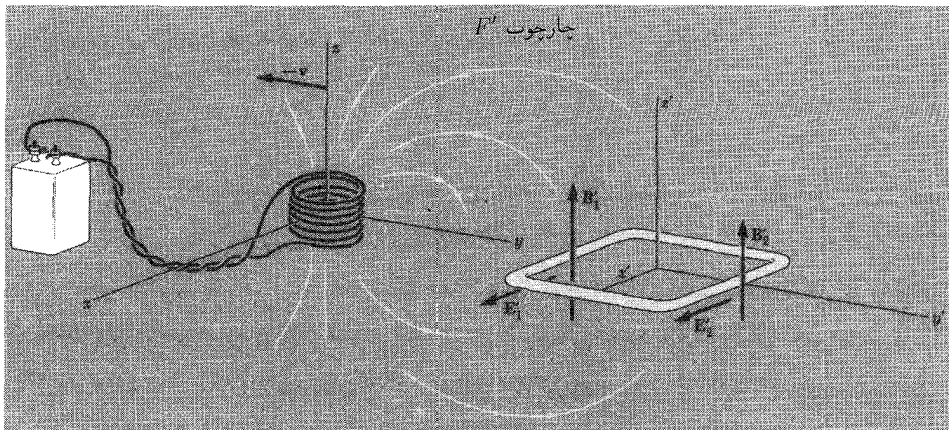
$$\mathcal{E}_0 = \frac{SB\omega}{c} = \frac{(8^\circ \text{ cm}^2)(5^\circ \text{ G})(188 \text{ s}^{-1})}{3 \times 10^{10} \text{ cm/s}} \quad (21)$$

$$= 2.51 \times 10^{-5} \text{ G}\cdot\text{cm} \quad \text{یا} \quad \text{statV}$$

یک گاوس-سانتی‌متر برابر ۱ استاواولت است. به خاطر داشته باشید که میدان الکتریکی E و میدان مغناطیسی B در دستگاه CGS ابعادی یکسان دارند و با عامل بدون بُعد v/c به هم مربوط می‌شوند.

۷-۴ یک حلقه ساکن و چشمه میدان متحرک

اگر بخواهیم، می‌توانیم به رویدادهای شکل ۷-۶ از چارچوبی بنگریم که با حلقه حرکت می‌کند. این مطلب فیزیک مسئله را تغییر نمی‌دهد، بلکه فقط واژه‌هایی که با آنها مسئله را توصیف می‌کنیم عوض می‌شوند. فرض کنید F' با مختصات x' ، y' ، z' چارچوب متصل به حلقه باشد، که اکنون آن را ساکن در نظر می‌گیریم (شکل ۷-۱۴). پیچ و باتری، که در چارچوب F ساکن بودند، در جهت $-y'$ با سرعت $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$ حرکت می‌کنند. اگر B'_1 و B'_2 میدان مغناطیسی در دو انتهای



شکل ۷-۱۴ از دیدگاه چارچوب F' ، حلقه ساکن است و چشمه میدان حرکت می‌کند. هر دو میدان \mathbf{B}' و \mathbf{E}' وجود دارند و تابع مکان و زمان‌اند.

حلقه در زمان t' باشد که ناظر F' اندازه می‌گیرد. در این دو محل در F' یک میدان الکتریکی وجود دارد. طبق معادله ۶-۶۳ داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_1 &= -\frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'_1}{c} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}'_1}{c} \\ \mathbf{E}'_2 &= -\frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'_2}{c} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}'_2}{c} \end{aligned} \quad (22)$$

برای ناظران F' این یک میدان الکتریکی واقعی است. این میدان یک میدان الکتروستاتیک نیست. انتگرال خطی \mathbf{E}' حول هر مسیر بسته F' معمولاً صفر نیست. در واقع انتگرال خطی \mathbf{E}' حول حلقه مستطیلی برابر است با

$$\int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}' = \frac{wv}{c} (B'_1 - B'_2) \quad (23)$$

می‌توان این انتگرال خطی معادله ۲۳ را نیروی محرکه الکتریکی \mathcal{E}' در این مسیر نامید. اگر یک ذره باردار یک دور گرد مسیر بگردد، \mathcal{E}' کار انجام شده در آن مسیر به‌ازای واحد بار است. \mathcal{E}' با آهنگ تغییر شاری که از حلقه می‌گذرد ارتباط دارد. برای مشاهده آن، توجه کنید که وقتی حلقه ساکن است، طرح میدان مغناطیسی با سرعت $-v$ حرکت می‌کند. بنابراین، برای شاری که در بازه زمانی dt' در دو انتهای حلقه تلف می‌شود یا به‌دست می‌آید، نتیجه‌ای مشابه معادله ۱۱

به دست می آوریم و نتیجه می گیریم که

$$\mathcal{E}' = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi'}{dt'} \quad (24)$$

می توان توصیف دو چارچوب مرجع F ، که در آن چشمه \mathbf{B} ساکن است و F' ، که در آن حلقه ساکن است را به صورت زیر خلاصه کرد:

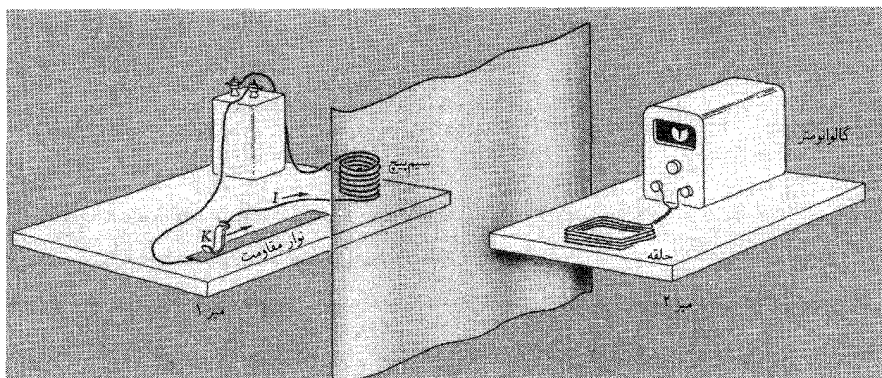
ناظر F' می گوید ”در اینجا یک میدان مغناطیسی داریم که اگرچه از لحاظ فضایی یکنواخت نیست ولی بر حسب زمان ثابت است. هیچ میدان الکتریکی وجود ندارد. حلقه سیمی با سرعت \mathbf{v} در میدان مغناطیسی حرکت می کند، بنابراین بر بارهای موجود در آن نیروی $\mathbf{B} \times (\mathbf{v}/c)$ دین به ازای واحد بار وارد می شود. انتگرال خطی این نیرو به ازای واحد بار، حول تمام حلقه نیروی محرکه الکتریکی \mathcal{E}' و برابر است با $-(1/c)(d\Phi'/dt')$. شار Φ' برابر $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ روی سطح S است که در لحظه t بنا به ساعت من حلقه را می پوشاند.“

ناظر F' می گوید ”این حلقه ساکن است و فقط یک میدان الکتریکی می تواند سبب حرکت بارهای آن شود. اما در واقع یک میدان الکتریکی \mathbf{E}' در آنجا وجود دارد. به نظر می رسد که این میدان را اجسام مغناطیس گونه ای تولید کرده باشند که در این لحظه با سرعت $-\mathbf{v}$ حرکت می کنند و در عین حال یک میدان مغناطیسی قوی \mathbf{B}' تولید می کنند. میدان الکتریکی به گونه ای است که $\int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}'$ حول این حلقه ساکن صفر نیست، بلکه $1/c -$ آهنگ تغییر شار $d\Phi'/dt'$ است که از حلقه می گذرد. شار Φ' روی سطحی که حلقه را می پوشاند $\int \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{a}'$ است که مقادیر B' باید در لحظه t' روی این سطح با ساعت من اندازه گیری شود.“

نتیجه گیریهای ما تا اینجا به لحاظ نسبیتی دقیق است. این نتایج برای هر سرعت $v \leq c$ صادق است در صورتی که تفاوت بین \mathbf{B} و \mathbf{B}' و t و t' و غیره را با دقت در نظر بگیریم. اگر $v \ll c$ باشد، به طوری که بتوان v^2/c^2 را نادیده گرفت، \mathbf{B}' عملاً برابر \mathbf{B} خواهد بود و می توان با اطمینان تفاوت بین t و t' را نادیده گرفت.

۵-۷ قانون عمومی القا

بگذارید با دستگاهی که در شکل ۷-۱۵ نشان داده شده است سه آزمایش انجام دهیم. میزها چرخ دارند بنابراین، می توان به راحتی آنها را حرکت داد. یک گالوانومتر حساس به حلقه مستطیلی ما متصل شده است، و برای افزایش نیروی محرکه الکتریکی القایی به جای یک دور سیم، چند دور سیم روی حلقه می پیچیم. گرچه ممکن است حساسیت با توجه به چشمه میدان مغناطیسی ضعیفی که در نظر گرفته شده است ناچیز باشد. شاید شما بتوانید آزمایش عملی تری را در آزمایشگاه طراحی کنید.



شکل ۷-۱۵ فرض می‌کنیم یکی از میزها حرکت می‌کند، یا هر دو میز ثابت‌اند، جریان در پیچه را می‌توان به تدریج تغییر داد.

آزمایش ۱. با جریان ثابت در پیچه و میز ۱ در حال سکون، میز ۲ را با سرعت v به طرف راست حرکت دهید. گالوانومتر منحرف می‌شود. تعجب نمی‌کنیم، زیرا این وضع را قبلاً در بخش ۷-۳ تحلیل کرده‌ایم.

آزمایش ۲. با جریان ثابت در پیچه و میز ۲ در حال سکون، میز ۱ را با سرعت v به چپ حرکت می‌کنند. گالوانومتر منحرف می‌شود این هم شگفت‌آور نیست. هم اکنون دربارهٔ هم‌ارزی آزمایشهای ۱ و ۲ بحث کردیم، این هم‌ارزی مثالی از نوردایی لورنتس یا، برای سرعت‌های کم میز، نوردایی گالیله است. می‌توان در هر دو آزمایش انحراف گالوانومتر را نتیجهٔ تغییر آهنگ شار B در حلقه دانست.

آزمایش ۳. هر دو میز ساکن‌اند، اما جریان I در پیچه را با لغزاندن اتصال K در امتداد نوار مقاومت تغییر می‌دهیم. این کار را چنان انجام می‌دهیم که آهنگ کاهش میدان B در حلقه با آزمایشهای ۱ و ۲ یکسان باشد. آیا گالوانومتر منحرف می‌شود؟

برای ناظری که در حلقهٔ میز ۲ قرار دارد و میدان مغناطیسی در آن حوالی را برحسب زمان اندازه می‌گیرد، راهی برای تشخیص میان آزمایشهای ۱ و ۲ و ۳ وجود ندارد. پردهٔ سیاهی را میان دو میز در نظر بگیرید. گرچه ممکن است تفاوت‌هایی جزئی میان پیکربندیهای میدان در ۲ و ۳ وجود داشته باشد، اما ناظری که از پشت پرده خبر ندارد، نمی‌تواند تنها بر اساس اندازه‌گیریهای موضعی B تصمیم بگیرد که این مورد کدام است. بنابراین، اگر گالوانومتر به همان اندازهٔ آزمایش ۳ منحرف نمی‌شد، به معنای آن بود که رابطهٔ بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در یک ناحیه به سرشت یک چشمهٔ دوردست بستگی دارد. میدان الکتریکی وابسته به این میدانهای

مغناطیسی که ویژگیهای موضعی آنها اساساً یکسان است به گونه‌ای است که برای آن $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ است.

به تجربه درمی‌یابیم که آزمایش ۳ با آزمایش ۱ و ۲ هم‌ارز است. گالوانومتر به همان اندازه آزمایش قبل منحرف می‌شود. آزمایش فاراده اولین تجلی این واقعیت بنیادی است. نیروی محرکه الکتریکی که مشاهده می‌کنیم فقط به آهنگ تغییر شار \mathbf{B} بستگی دارد و نه به هیچ چیز دیگر. می‌توان قانون القای فاراده را به صورت یک رابطه کلی نوشت:

اگر C خم بسته ساکنی در مختصات x, y, z باشد، و S سطحی که آن را می‌پوشاند، و اگر $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ میدان مغناطیسی اندازه‌گیری شده در x, y, z و در زمان t باشد. خواهیم داشت

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \quad (25)$$

با استفاده از مشتق برداری تاو، می‌توان قانون را به صورت دیگر نوشت. اگر رابطه

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (26)$$

برای هر خم C و سطح فراگیر S صادق باشد، بنابر قانون نتیجه می‌گیریم که در هر نقطه

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (27)$$

برای اینکه نشان دهیم معادله ۲۷ نتیجه معادله ۲۶ است، طبق معمول می‌گذاریم تا C حول نقطه‌ای، که فرض می‌کنیم برای تابع \mathbf{B} نانکین است، منقبض شود. در این صورت در نهایت تغییرات \mathbf{B} روی تکه کوچکی از سطح \mathbf{a} که C را می‌پوشاند قابل چشمپوشی است و انتگرال صرفاً به $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$ میل می‌کند. اکنون بنابه (معادله ۲-۶۱) حد $\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ با کوچک شدن تکه سطح برابر $\mathbf{a} \cdot \text{curl } \mathbf{E}$ است. سپس در حد داریم

$$\mathbf{a} \cdot \text{curl } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \left(-\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right) \quad (28)$$

از آنجا که این رابطه برای هر a بینهایت کوچک صادق است، پس باید^۱

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (۲۹)$$

با توجه به اینکه \mathbf{B} ممکن است علاوه بر مکان تابع زمان هم باشد. باید به جای $d\mathbf{B}/dt$ بنویسیم $\partial\mathbf{B}/\partial t$. در این صورت دو بیان کاملاً هم‌ارز برای قانون القا خواهیم داشت:

$$\boxed{\begin{aligned} \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \\ \text{curl } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}} \quad (۳۰\text{-الف})$$

در معادله ۳۰ میدان الکتریکی \mathbf{E} باید برحسب یکاهای CGS ایستاولت بر سانتی‌متر، \mathbf{B} برحسب گاوس، $d\mathbf{s}$ برحسب سانتی‌متر، $d\mathbf{a}$ برحسب سانتی‌متر مربع، و c برحسب سانتی‌متر بر ثانیه بیان شود. در این صورت نیروی محرکه الکتریکی $\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ برحسب ایستاولت به دست می‌آید. با یکاهای SI رابطه‌ای که به صورت معادله ۳۰ بیان شده است به صورت زیر در می‌آید:

$$\boxed{\begin{aligned} \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \\ \text{curl } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}} \quad (۳۰\text{-ب})$$

در اینجا \mathbf{E} برحسب ولت بر متر، \mathbf{B} برحسب تسلا، $d\mathbf{s}$ و $d\mathbf{a}$ به ترتیب برحسب متر و مترمربع است. نیروی محرکه الکتریکی $\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ برحسب ولت به دست می‌آید. شار مغناطیسی Φ ، یعنی $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ در دستگاه یکاهای CGS برحسب گاوس-سانتی‌مترمربع، و در دستگاه یکاهای SI برحسب تسلا-مترمربع است که 10^8 بار بزرگتر است. (یکای شار در SI و بر خوانده می‌شود.)

اگر در مورد یکاها دچار تردید شدید، تعریفهای زیر می‌توانند مفید باشند:

نیروی محرکه الکترومغناطیسی برحسب ایستاولت برابر است با

$$\frac{1}{c} \text{ در آهنگ تغییر شار برحسب } \text{G/cm}^2\text{s} \quad (۳۱\text{-الف})$$

۱. اگر این مطلب بدیهی نیست. توجه کنید که انتخاب \mathbf{a} در جهت x ثابت می‌کند که $(\text{curl } \mathbf{E})_x = (-1/c)(d\mathbf{B}_x/dt)$ و غیره.

(۳۱-ب) نیروی محرکه الکتریکی برحسب ولت برابر است با
 $T\text{-cm}^2/s$ آهنگ تغییر شار برحسب

(۳۱-ج) نیروی محرکه الکتریکی برحسب ولت برابر است با
 $G\text{-cm}^2/s$ در آهنگ تغییر شار برحسب 10^{-8}

گزاره سوم با دو گزاره اول سازگار است زیرا $1\text{ m}^2 = 10^4\text{ cm}^2$ و $T = 10^4\text{ G}$. اگر این مطلب سر گیج کننده است، آن را به خاطر نسپارید، فقط به یاد داشته باشید که می توان آن را در این صفحه یافت. عبارت دیفرانسیلی $\text{curl } \mathbf{E} = -(\frac{1}{c})\partial\mathbf{B}/\partial t$ نکته ای را روشن می کند، که قبلاً سعی کردیم درباره سرشت محلی رابطه های میدان بیان کنیم. تغییرات زمانی \mathbf{B} در مجاورت یک نقطه، مقدار $\text{curl } \mathbf{E}$ را در آن نقطه کاملاً مشخص می کند و به چیز دیگری بستگی ندارد. البته، خود \mathbf{E} کاملاً مشخص نمی شود. می توان هر میدان الکتروستاتیکی با $\text{curl } \mathbf{E} = 0$ را بر هم نهاد، بدون اینکه این رابطه تغییر کند.

به عنوان یک مثال محکم، پیچیهایی مانند شکل ۷-۱۳ را در نظر بگیرید که به جای جریان مستقیم، جریان متناوبی با بسامد ۶۰ دور در ثانیه از آنها می گذرد. جریان در میدان مغناطیسی به صورت $\sin(2\pi \cdot 60 \cdot t)$ یا $\sin 377t$ تغییر می کند. فرض کنید دامنه جریان به گونه ای است که بزرگی میدان مغناطیسی \mathbf{B} در ناحیه مرکزی به بیشینه 5° گاوس می رسد. می خواهیم میدان الکتریکی القایی، و نیروی محرکه الکتریکی را در مسیر دایره ای به شعاع 10 سانتی متر در شکل ۷-۱۶ بررسی کنیم. می توان فرض کرد که میدان \mathbf{B} در داخل این دایره در هر لحظه از زمان عملاً یکنواخت است

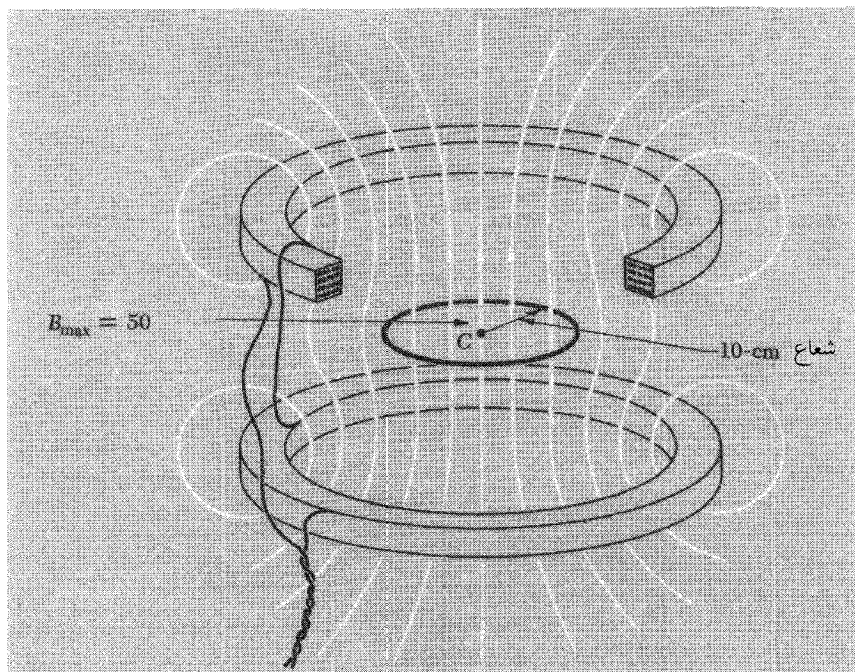
$$B = 5^\circ \sin 377t \quad (32)$$

\mathbf{B} برحسب گاوس و t برحسب ثانیه است. شاری که از حلقه C می گذرد برابر است با

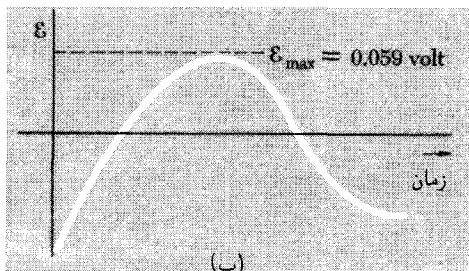
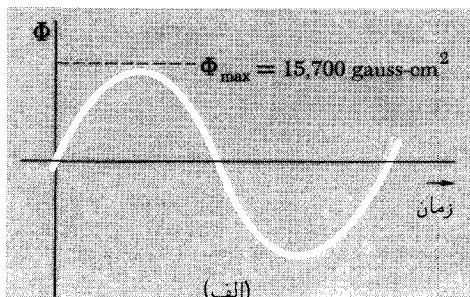
$$\begin{aligned} \Phi &= \pi r^2 B = \pi \times 10^2 \times 5^\circ \sin 377t \\ &= 15700 \sin 377t \quad (\text{G-cm}^2) \end{aligned} \quad (33)$$

با استفاده از معادله ۳۱-ج برای محاسبه نیروی محرکه الکتریکی برحسب ولت داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -(10^{-8}) \frac{d\Phi}{dt} = -(10^{-8})(377)(15700) \cos 377t \\ &= -0.59 \cos 377t \quad (\text{V}) \end{aligned} \quad (34)$$

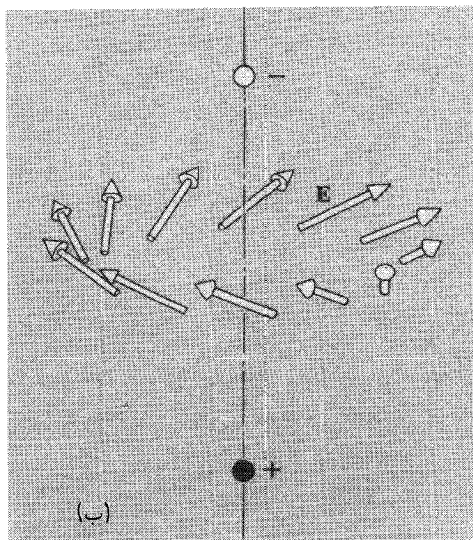
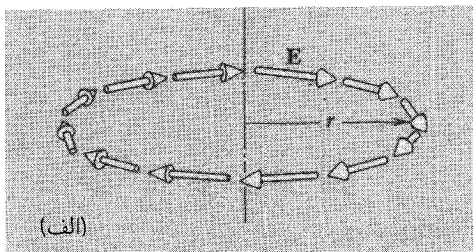


شکل ۷-۱۶ جریان متناوب در پیچ‌ها یک میدان مغناطیسی تولید می‌کند که در مرکز بین 50 گاوس بالاسو و 50 گاوس پایین سو تغییر می‌کند. میدان مغناطیسی در داخل C در هر لحظه تقریباً یکنواخت است.



شکل ۷-۱۷ (الف) شاری که از دایره C می‌گذرد. (ب) نیروی محرکه الکتریکی مربوط به مسیر C .

بیشینه مقدار B برابر است با 59 میلی‌ولت؛ علامت منفی نشان می‌دهد که اگر جهت‌ها را درست تعیین کرده باشیم، قانون لنز محترم شمرده می‌شود. تغییرات Φ و ϵ برحسب زمان در شکل ۷-۱۷ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۸-۷ میدان الکتریکی در مسیر دایره‌ای C . (الف) در نبود چشمه‌هایی غیر از جریان نوسانی متفاوت. (ب) با در نظر گرفتن میدان الکتروستاتیکی دو بار بر روی محور.

خود میدان الکتریکی چگونه تغییر می‌کند؟ معمولاً نمی‌توان \mathbf{E} را با دانستن $\text{curl } \mathbf{E}$ به تنهایی تعیین کرد. اما در اینجا مسیر C دایره‌ای حول مرکز یک سیستم متقارن است. اگر میدان الکتریکی دیگری وجود نداشته باشد، می‌توان فرض کرد که \mathbf{E} در صفحه دایره C قرار دارد و بزرگی آن ثابت است. در این صورت تعیین بزرگی E ساده است زیرا $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \mathcal{E}$ ، که قبلاً محاسبه کرده‌ایم. در این صورت میدان الکتریکی در روی دایره در یک لحظه معین ممکن است مانند شکل ۱۸-۷ الف باشد. اما اگر چشمه‌های دیگر میدان موجود باشند، شکلی کاملاً متفاوت خواهد داشت. اگر بار مثبت و منفی مانند شکل ۱۸-۷ ب روی محور قرار گرفته باشد، میدان الکتریکی در مجاورت دایره، برهم‌نهی میدان الکتروستاتیکی این دو بار و میدان الکتریکی القایی خواهد بود.

۶-۷ القای متقابل

دو مدار، یا دو حلقه C_1 و C_2 در مکانهای ثابت نسبت به یکدیگر قرار دارند (شکل ۷-۱۹). با استفاده از یک باتری و یک مقاومت متغیر، جریان قابل کنترلی از مدار C_1 می‌گذرد. اگر میدان مغناطیسی موجود با مقدار I_1 ثابت در مدار C_1 ، و Φ_{21} شار باشد که به‌واسطه B_1 از C_2 می‌گذرد. داریم

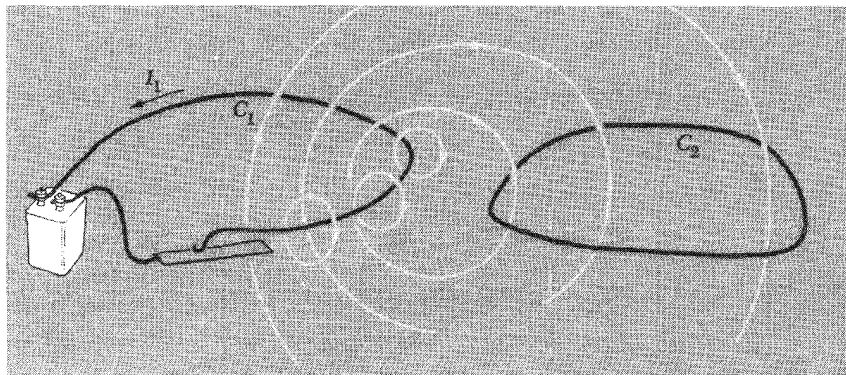
$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_2 \quad (35)$$

که در آن S_2 سطح فراگیر حلقه C_2 است. اگر شکل و وضعیت دو مقدار ثابت باشد، Φ_{21} با I_1 متناسب خواهد بود:

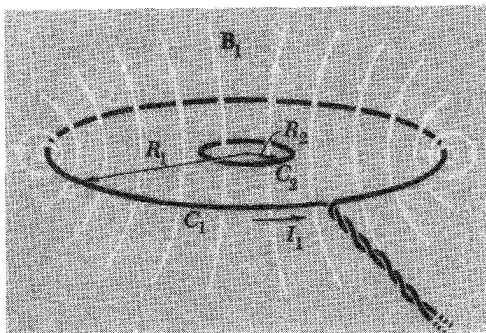
$$\frac{\Phi_{21}}{I_1} = \text{const.} \quad (36)$$

اکنون فرض کنید که I_1 با زمان تغییر می‌کند، اما این تغییر به اندازه کافی کند است، به طوری که رابطه بین میدان B_1 در هر نقطه در حوالی C_2 و جریان I_1 در C_1 در هر لحظه از زمان مانند ارتباط جریانهای ثابت است (برای مشاهده ضرورت این قید، فرض کنید C_1 و C_2 در فاصله 10° متری از یکدیگر هستند و جریان C_1 را در مدت 10° نانو ثانیه دو برابر می‌کنیم!) شار Φ_{21} متناسب با تغییر I_1 تغییر می‌کند. نیروی محرکه الکتریکی به بزرگی مقدار زیر در مدار C_2 القا می‌شود

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{\text{const.}}{c} \frac{dI_1}{dt} \quad (37)$$



شکل ۷-۱۹ جریان I_1 در حلقه C_1 باعث می‌شود که شار Φ_{21} از حلقه C_2 بگذرد.



شکل ۷-۲۰ جریان I_1 در حلقه C_1 میدان B_1 را تولید می‌کند که در ناحیه حلقه کوچک C_2 تقریباً یکنواخت است.

در اینجا مقدار ثابت همان مقدار ثابت معادله ۳۶ است. اگر c در مخرج را وارد مقدار ثابت کنیم و آن را به صورت یک مقدار ثابت M_{21} بنویسیم، معادله ۳۷ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathcal{E}_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (38)$$

ثابت M_{21} را ضریب القای متقابل می‌نامیم. مقدار آن با توجه به شکل هندسی قرار گرفتن حلقه‌ها تعیین می‌شود. بدیهی است که یک‌ها به انتخاب یک‌های \mathcal{E} ، I ، و t بستگی دارند. اگر \mathcal{E} برحسب ایستاولت (statV)، یا esu/cm ، و I برحسب esu/s باشد، یکای M_{21} عبارت است از $\text{cm}^{-1}\text{s}^{-2}$.

احتمال دارد که شما هنگام استفاده از این رابطه از ولت و آمپر استفاده کنید. در دستگاه یک‌های SI، \mathcal{E} برحسب ولت، و I برحسب آمپر، یکای M_{21} عبارت است از $\text{V}\text{-A}^{-1}\text{s}$ یا $\Omega\text{-s}$. این یکا هنری نامیده می‌شود.^۱ یعنی اگر تغییر جریان I_1 با آهنگ یک آمپر بر ثانیه، نیروی محرکه الکتریکی ۱ ولت را در مدار C_2 القا کند، القای متقابل M_{21} برابر یک هنری است.

به‌عنوان مثال، مدارهای شکل ۷-۲۰ متشکل از دو حلقه هم‌صفحه هم‌مرکز، یک حلقه کوچک C_2 و حلقه بزرگتر از C_1 را در نظر بگیرید. M_{21} در این مورد چقدر است؟ در مرکز C_1 وقتی I_1 جریان دارد، میدان B_1 از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B_1 = \frac{2\pi I_1}{cR_1} \quad (39)$$

۱. این یکا به نام جوزف هنری (۱۷۹۷-۱۸۷۸) برجسته‌ترین فیزیکدان آمریکایی زمان خود نامگذاری شده است. هنری القای الکترومغناطیسی را همزمان با آزمایشهای فاراده به‌طور مستقل کشف کرد. وی اولین کسی بود که متوجه پدیده خود القایی شد. هنری مغناطیسهایی الکتریکی و پیش نمونه موتورهایی برقی را توسعه داد، رله الکتریکی را اختراع کرد، و مقدمات اختراع تلگراف را فراهم ساخت.

که در آن I_1 برحسب esu/s، و B برحسب G است. در اینجا صرفاً از معادله ۶-۲۲ استفاده کرده‌ایم. فرض می‌کنیم که $R_2 \ll R_1$ ، به طوری که بتوان تغییرات B در داخل حلقه کوچکتر را نادیده گرفت. شاری که از حلقه می‌گذرد برابر است با

$$\Phi_{21} = (\pi R_2^2) \frac{2\pi I_1}{c R_1} = \frac{2\pi^2 I_1 R_2^2}{c R_1} \quad (40)$$

بنابراین "ثابت" معادله ۳۶ در این مورد خاص، برابر است با $2\pi^2 R_2^2 / c R_1$. و نیروی محرکه الکتریکی که در C_2 القا می‌شود برابر است با

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{1}{c} \frac{2\pi^2 R_2^2}{c R_1} \frac{dI_1}{dt} \quad (41)$$

که \mathcal{E}_{21} برحسب statV و I_1 برحسب esu/s است. برای بیان القای متقابل برحسب هنری، می‌دانیم که ایستولت برابر 300 V ، و 3×10^9 ، $I(\text{esu/s}) = I(\text{A}) \times 3 \times 10^9$ ، به طوری که

$$\mathcal{E}(\text{V}) = -\frac{2\pi^2 R_2^2}{R_1} \times 10^{-9} \frac{dI}{dt} (\text{A/s}) \quad (42)$$

بنابراین اگر R_1 و R_2 برحسب سانتی‌متر باشد، مقدار M_{21} برحسب هنری برابر است با

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-9} R_2^2}{R_1} \quad (43)$$

ضمناً، علامت منفی که تاکنون آن را حفظ کرده‌ایم، در این مرحله چیز زیادی را بیان نمی‌کند. برای اطمینان از اینکه نیروی محرکه الکتریکی در C_2 جریان را در چه جهتی می‌راند، قانون لنز قابل اعتمادترین راهنماست.

اگر مدار C_1 به جای یک حلقه از N_1 دور تشکیل شده باشد، میدان B_1 در مرکز به‌ازای جریان معین I_1 ، N_1 بار قویتر خواهد بود. همچنین، اگر حلقه کوچک C_2 متشکل از N_2 دور باشد که شعاع همه آنها R_2 است، نیروی محرکه الکتریکی در هر دور به دور بعدی اضافه می‌شود، و نیروی محرکه الکتریکی کل در مدار N_2 برابر میدان برای یک دور خواهد بود. پس برای دورهای چندگانه در هر پیچ القای متقابل از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-9} N_1 N_2 R_2^2}{R_1} \quad (44)$$

با این فرض که دورها در هر پیچه به دقت کلاف شده‌اند، و سطح مقطع کلاف در مقایسه با شعاع پیچه کوچک است. اما القای متقابل M_{21} مفهوم خوش تعریفی برای دو مدار با هر شکل و توزیعی دارد. این تعریف نسبت نیروی محرکه الکتریکی برحسب ولت در مدار ۲ بر اثر تغییر جریان در مدار ۱، به آهنگ تغییر جریان I_1 برحسب آمپر بر ثانیه است. یعنی

$$M_{21} = \frac{\mathcal{E}_{21}}{\left(\frac{dI_1}{dt}\right)} \quad (45)$$

اگر \mathcal{E}_{21} برحسب ولت و dI_1/dt برحسب آمپر بر ثانیه باشد، M_{21} برحسب هنری به دست می‌آید.

۷-۷ قضیهٔ دوجانبگی

در بررسی مدارهای C_1 و C_2 امکان داشت نیروی محرکه القایی در مدار C_1 بر اثر تغییر جریان در C_2 مورد نظر باشد. در این صورت یک ضریب القای متقابل دیگر M_{12} دخیل خواهد بود:

$$M_{12} = \frac{\mathcal{E}_{12}}{\left(\frac{dI_2}{dt}\right)} \quad (46)$$

جالب توجه است که برای هر دو مدار،

$$M_{12} = M_{21} \quad (47)$$

این یک تقارن هندسی نیست. حتی مثال سادهٔ شکل ۷-۲۰ نسبت به مدار مقارن نیست. توجه کنید که R_1 و R_2 به صورتهای مختلف در تعریف M_{21} وارد می‌شوند: معادلهٔ ۴۷ به ما اطمینان می‌دهد که اگر برای دو مدار نامشابه

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-9} N_1 N_2 R_2^2}{R_1}$$

باشد. در این صورت M_{12} برابر مقدار زیر است

$$M_{12} = \frac{2\pi^2 \times 10^{-9} N_1 N_2 R_1^2}{R_2}$$

و نه آن چیزی که با تعویض ۱ و ۲ در همه جا به دست می‌آوریم!

برای اینکه این قضیه، یعنی معادلهٔ ۴۷، را ثابت کنیم، باید نشان دهیم که شار Φ_{12} که در نتیجهٔ جریان I در مدار C_1 از مدار C_2 می‌گذرد برابر است با شار Φ_{21} که از مدار C_2 می‌گذرد وقتی که جریان مساوی I از مدار C_1 بگذرد. برای این کار از پتانسیل برداری استفاده می‌کنیم. بنابراین قضیهٔ استوکس:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\text{curl } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} \quad (48)$$

به‌ویژه اگر \mathbf{A} پتانسیل برداری مربوط به میدان مغناطیسی \mathbf{B} باشد. یعنی اگر $\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A}$ خواهیم داشت

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi_S \quad (49)$$

یعنی انتگرال خطی پتانسیل برداری گرد یک حلقه برابر است با شار \mathbf{B} که از آن حلقه می‌گذرد. اما پتانسیل برداری به چشمهٔ جریان طبق رابطهٔ ۳۵-۶ مربوط می‌شود

$$\mathbf{A}_{21} = \frac{I}{c} \int_{C_1} \frac{d\mathbf{s}_1}{r_{21}} \quad (50)$$

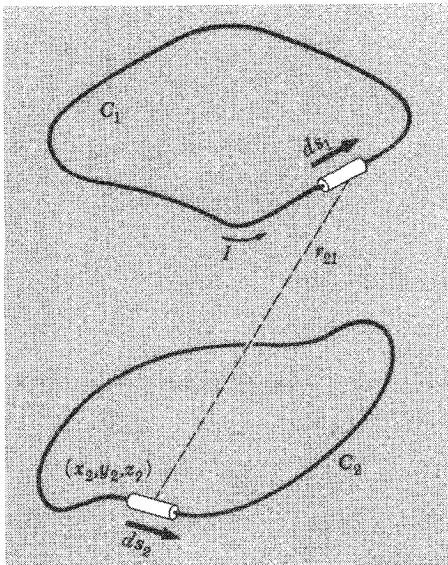
\mathbf{A}_{21} پتانسیل برداری میدان مغناطیسی حاصل از جریان I (esu/s) در مدار C_1 در نقطهٔ (x_2, y_2, z_2) است: جزء حلقهٔ C_1 : بزرگی فاصله از آن جزء تا نقطهٔ (x_2, y_2, z_2) است.

شکل ۷-۲۱ دو حلقهٔ جریان را نشان می‌دهد که جریان I از C_1 می‌گذرد. اگر (x_2, y_2, z_2) نقطه‌ای روی حلقهٔ C_2 باشد. شاری که به‌واسطهٔ جریان I در C_1 از C_2 می‌گذرد برابر است با

$$\Phi_{21} = \int_{C_2} \mathbf{A}_{21} \cdot d\mathbf{s}_2 = \int_{C_2} d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{A}_{21} = \frac{I}{c} \int_{C_2} d\mathbf{s}_2 \cdot \int_{C_1} \frac{d\mathbf{s}_1}{r_{21}} \quad (51)$$

همین‌طور، شاری که به‌واسطهٔ جریان I در C_2 از C_1 می‌گذرد، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\Phi_{12} = \frac{I}{c} \int_{C_1} d\mathbf{s}_1 \cdot \int_{C_2} \frac{d\mathbf{s}_2}{r_{12}} \quad (52)$$



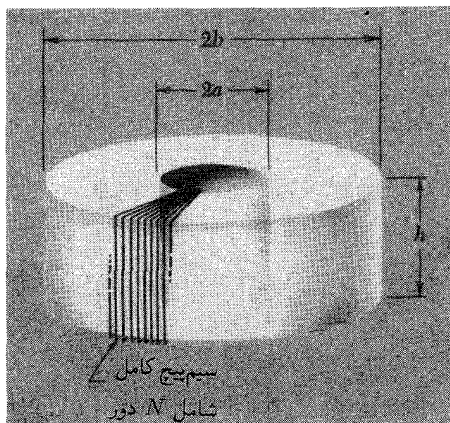
شکل ۷-۲۱ محاسبه شار ϕ_2 که در نتیجه عبور جریان I از مدار C_1 از C_2 می‌گذرد.

اما $r_{12} = r_{21}$ ، زیرا که اینها اندازه فاصله هستند و نه بردار. معنی هر یک از انتگرالهای بالا این است: حاصلضرب نرده‌ای یک زوج جزء خط، که هر یک روی یک حلقه قرار دارند، را بر فاصله بین آنها تقسیم کنید و روی تمام زوجها جمع ببندید. تنها تفاوت بین معادله‌های ۵۱ و ۵۲ ترتیب انجام این کار است، و این ترتیب تأثیری در مجموع نهایی ندارد. در نتیجه $\Phi_{12} = \Phi_{21}$ که مستقیماً به نتیجه $M_{12} = M_{21}$ می‌انجامد. به‌واسطه این قضیه، لازم نیست که تفاوتی بین M_{21} و M_{12} قائل شویم. بنابراین می‌توان از القای متقابل M هر دو مدار صحبت کرد.

قضیه‌هایی از این نوع را اغلب قضیه‌های “دوجانبگی” می‌نامند. قضیه‌های دوجانبگی دیگری در مدارهای الکتریکی وجود دارند که با این مورد بی‌ارتباط نیستند. این ممکن است رابطه $C_{jk} = C_{kj}$ را به خاطر شما بیاورد که در بخش ۳-۶ توضیح داده شد و در مسئله ۳-۲۷ مورد بررسی قرار گرفت. قضیه دوجانبگی یک قانون تقارن عمومی را بیان می‌کند که در ساختار ظاهری سیستم نمایان نیست.

۷-۸ خود القا

هنگامی که جریان I_1 تغییر کند. شار عبوری از مدار C_1 نیز تغییر می‌کند، در نتیجه یک نیروی محرکه الکتریکی القا می‌شود. اگر آن را \mathcal{E}_{11} بنامیم. چشمه شار هر چه باشد، قانون القا صادق



شکل ۲۲-۷ پیچۀ چنبره‌ای با سطح مقطع مستطیل فقط چند دور نشان داده شده است.

خواهد بود

$$\mathcal{E}_{11} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{11}}{dt} \quad (53)$$

که در آن Φ_{11} شار میدان B_1 است که به واسطهٔ جریان I_1 در مدار ۱ از این مدار می‌گذرد. علامت منها نشان می‌دهد که نیروی محرکه همواره در جهتی است که با تغییر جریان مخالفت می‌کند — قانون لنز. از آنجا که Φ_{11} با I_1 متناسب است می‌توان نوشت

$$\mathcal{E}_{11} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \quad (54)$$

ثابت L_1 خود القایی مدار خوانده می‌شود.

به‌عنوان مثال مداری که می‌توان L_1 را برای آن محاسبه کرد، پیچۀ چنبره‌ای مستطیلی مسئلهٔ ۱۴-۶ را در نظر بگیرید که مجدداً در شکل ۲۲-۷ نشان داده شده است. (اگر روی آن مسئله کار کرده باشید) درمی‌یابید که عبور جریان I ، برحسب esu/s ، در پیچهای N دور، میدانی تولید می‌کند که شدت آن، در فاصلهٔ شعاعی r از محور پیچه، از رابطهٔ $B = 2NI/cr$ به‌دست می‌آید. شار کل از یک دور پیچه، انتگرال این میدان روی سطح مقطع پیچه است:

$$\Phi (\text{یک دور}) = h \int_a^b \frac{2NI}{cr} dr = \frac{2NIh}{c} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (55)$$

شاری که از مداری با N دور می‌گذرد، N بار بزرگتر است.

$$\Phi = \frac{2N^2 I h}{c} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (56)$$

بنابراین نیروی محرکه القایی \mathcal{E} برابر است با

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{2N^2 h}{c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \frac{dI}{dt} \quad (57)$$

خود القایی این پیچه از رابطه زیر به دست می‌آید

$$L = \frac{2N^2 h}{c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (58)$$

اگر I برحسب esu/s و \mathcal{E} برحسب ایستولت اندازه‌گیری شود، معادله ۵۸ بیان درست القاییدگی است. برای I برحسب آمپر و \mathcal{E} برحسب ولت، یکای مناسب L مانند مورد القای متقابل هنری است. با تبدیل این یکاها خواهیم داشت

$$L(H) = 2 \times 10^{-9} N^2 h \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (59)$$

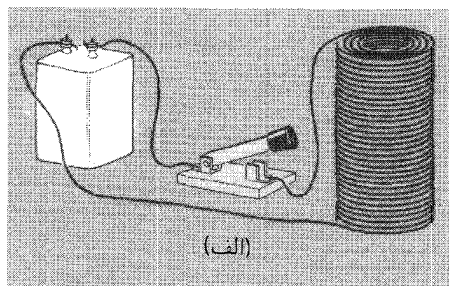
شاید فکر کنید یکی از حلقه‌هایی که قبلاً در نظر گرفتیم مثال ساده‌تری برای نشان دادن محاسبه خود القایی می‌بود. اما، اگر بخواهیم القاییدگی یک حلقه دایره‌ای از سیم را محاسبه کنیم به مشکل گیج‌کننده‌ای برمی‌خوریم. ساده کردن مسئله با فرض اینکه قطر سیم صفر است فکر جالبی به نظر می‌رسد. اما به زودی درمی‌یابیم که اگر جریان محدودی از سیم به قطر صفر بگذرد، شاری که از حلقه حاصل از این رشته می‌گذرد بینهایت می‌شود! زیرا میدان B در حوالی جریان رشته‌ای به صورت $1/r$ تغییر می‌کند که r فاصله از رشته است، و انتگرال (مساحت سطح) $B \times$ به صورت $\int (dr/r)$ در $r = 0$ واگرا می‌شود. برای اجتناب از این مسئله می‌توان شعاع سیم را محدود در نظر گرفت و نه صفر، که به هر حال واقعتر است. البته محاسبات اندکی پیچیده می‌شود که جای نگرانی نیست. مشکل اساسی آن است که قسمتهای مختلف سیم اکنون مدارهای متفاوتی با مقادیر مختلف شار به نظر می‌رسند، که به هم پیوسته‌اند. حال دیگر مطمئن نیستیم که منظورمان از شاری که از مدار می‌گذرد چیست. در واقع به علت تفاوت نیروی محرکه الکتریکی در حلقه‌های مختلف رشته‌ای که می‌توان مدار را به آنها تقسیم کرد، هنگام عبور جریانهای با شدت متغیر یک باز توزیع جریان صورت می‌گیرد. در نتیجه، القاییدگی مدار ممکن است تا حدی به سرعت تغییر I بستگی داشته باشد و مقدار ثابتی نباشد که معادله ۵۴ ایجاب می‌کند.

در مثال پیچه چنبره‌ای با نادیده گرفتن میدان در مجاورت هر دور سیم پیچ از این گرفتاری اجتناب کردیم. بخش اعظم شار از خود سیمها نمی‌گذرد و در این موارد اثری که ما را نگران می‌ساخت اهمیت چندانی ندارد.

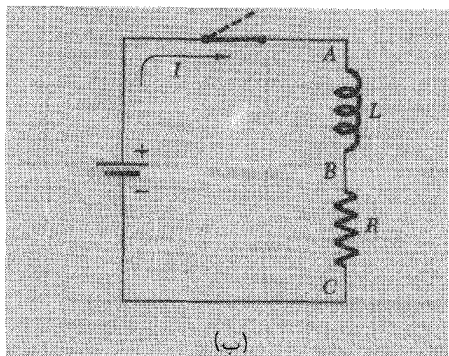
۹-۷ یک مدار شامل خود القا

فرض کنید یک باتری با نیروی محرکه الکتریکی \mathcal{E} را به یک پیچه، یا القاگر با خود القایی L متصل کرده‌ایم. خود پیچه، سیمهای رابط و حتی باتری دارای مقاومت هستند. مهم نیست که این مقاومت چطور در مدار توزیع شده است. همه آنها را می‌توان در یک مقاومت R که در نمودار شکل ۷-۲۳ با نماد مقاومت نشان داده شده است یکپارچه کرد. همچنین، بقیه مدار به‌ویژه سیمهای رابط، اندکی در خود القایی کل مدار شرکت می‌کنند: فرض می‌کنیم که این اثرها در L در نظر گرفته شده‌اند. به عبارت دیگر، شکل ۷-۲۳ با نشاندن مدار فیزیکی ایده‌آل است: القاگر L ، که با نشان داده می‌شود، مقاومتی ندارد؛ مقاومت R القایدگی ندارد. ما این مدار ایده‌آل را بررسی می‌کنیم.

اگر جریان در مدار با آهنگ dI/dt تغییر کند، نیروی محرکه الکتریکی $L dI/dt$ در جهتی القا می‌شود که با تغییر مخالفت کند. نیروی محرکه الکتریکی ثابت \mathcal{E} باتری نیز وجود دارد. اگر جهت مثبت جریان را جهتی در نظر بگیریم که باتری جریان در مدار می‌فرستد، نیروی محرکه الکتریکی خالص در هر لحظه $\mathcal{E} - L dI/dt$ است. این نیرو باعث می‌شود که جریان



(الف)



(ب)

شکل ۷-۲۳ یک مدار ساده متشکل از پیچه از پیچه (الف) و مقاومت (ب).

I از مقاومت R بگذرد. یعنی

$$\mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt} = RI \quad (60)$$

می‌توان وضعیت را به این صورت نیز بیان کرد. اختلاف پتانسیل بین نقطه‌های A و B که آن را ولتاژ دو سر القاگر می‌نامیم، $L \frac{dI}{dt}$ است که اگر I در جهتی که نشان داده شده است افزایش یابد، قسمت بالای القاگر مثبت است. اختلاف پتانسیل بین B و C ، ولتاژ دو سر مقاومت، RI است، که قسمت بالای مقاومت مثبت است. بنابراین مجموع ولتاژ دو سر القاگر و ولتاژ دو سر مقاومت $L \frac{dI}{dt} + RI$ است. این مقدار برابر است با اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های باتری یعنی \mathcal{E}_0 (باتری ایده‌آل ما مقاومت داخلی ندارد). بنابراین

$$\mathcal{E}_0 = L \frac{dI}{dt} + RI \quad (61)$$

که صرفاً بیان مجدد معادلهٔ ۶۰ است.

قبل از حل ریاضی معادلهٔ ۶۰، ببینیم وقتی کلید را در لحظهٔ $t = 0$ می‌بندیم چه اتفاقی می‌افتد. قبل از بستن کلید، الزاماً $I = 0$ است. پس از گذشت زمان طولانی از بستن کلید، حالت مانایی در مدار برقرار می‌شود، و جریان عملاً در I_0 ثابت می‌شود. در این حالت و پس از آن، $\frac{dI}{dt} \approx 0$ می‌شود و معادلهٔ ۶۰ به صورت زیر درمی‌آید

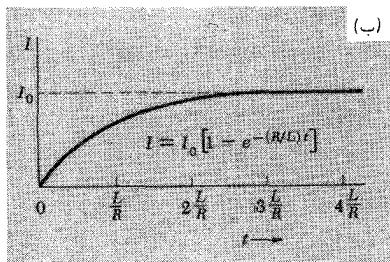
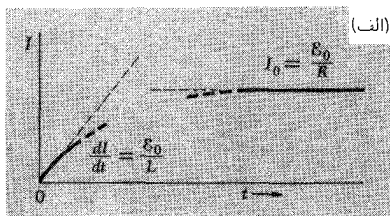
$$\mathcal{E}_0 = RI_0 \quad (62)$$

گذرا از جریان صفر به حالت مانای I_0 به‌طور ناگهانی در $t = 0$ صورت نمی‌گیرد. زیرا در این حالت $\frac{dI}{dt}$ نامتناهی می‌شود. در واقع، درست پس از $t = 0$ جریان I به اندازه‌ای کوچک خواهد بود که می‌توان جملهٔ دوم RI در معادلهٔ ۶۰ را نادیده گرفت، که خواهیم داشت

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \quad (63)$$

لقایندگی L آهنگ افزایش جریان را محدود می‌کند.

معلومات فعلی ما در شکل ۷-۲۴ الف خلاصه شده است. اکنون فقط باید ببینیم که تغییر کلی چگونه صورت می‌گیرد. معادلهٔ ۶۰ یک معادلهٔ دیفرانسیل بسیار شبیه معادلهٔ ۲۹ در فصل ۴



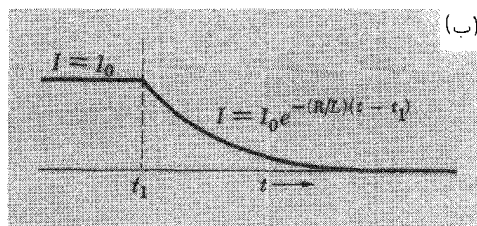
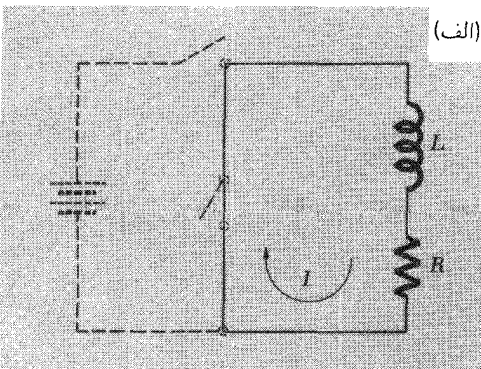
شکل ۲۴-۷ (الف) چگونگی رفتار جریان در ابتدا و پس از گذشت زمان طولانی. (ب) تغییرات کامل جریان برحسب زمان در مدار شکل ۲۳-۷.

است. بدون کار بیشتر می‌توان حل معادلهٔ ۶۰ را با شرایط اولیهٔ $I = 0$ در $t = 0$ به صورت زیر نوشت:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) \quad (64)$$

نمودار شکل ۲۴-۷ ب نشان می‌دهد که جریان به صورت نهایی به مقدار مجانبی I_0 نزدیک می‌شود. "ثابت زمانی" این مدار برابر است با L/R . اگر L برحسب هنری و R برحسب اهم اندازه‌گیری شود، مقدار آن برحسب ثانیه به دست می‌آید. چون $H \sim VA^{-1}s$ و $\Omega \sim VA^{-1}$ است.

اگر پس از برقراری جریان I_0 کلید را باز کنیم و جریان را ناگهان به صفر برسانیم چه رخ می‌دهد؟ این کار باعث می‌شود که $L \frac{dI}{dt}$ منهای بینهایت شود! این فاجعه می‌تواند چیزی بیش از یک مسئلهٔ ریاضی باشد. افراد بسیاری هنگام باز کردن مدارهای به شدت القایی کشته شده‌اند. آنچه عموماً به وقوع می‌پیوندد این است که ولتاژ القایی بسیار زیاد جرقه‌ای را میان اتصالات کلید به وجود می‌آورد، به طوری که جریان در مدار ادامه می‌یابد. اکنون بگذارید مطابق شکل ۲۵-۷ الف با بستن مسیر رسانای میان ترکیب LR باتری را از مدار حذف کنیم و در عین حال آن را قطع



شکل ۲۵-۷ الف) مدار LR . ب) فروافت نمایی جریان در مدار LR .

کنیم. اکنون معادلهٔ مدار به صورت زیر است

$$0 = L \frac{dI}{dt} + RI \quad (۶۵)$$

با شرایط اولیهٔ $I = I_0$ در $t = t_1$ ، که در آن لحظه‌ای است که مدار کوتاه بسته شده است. جواب معادلهٔ یک تابع فروافت نمایی ساده است:

$$I = I_0 e^{-(R/L)(t-t_1)} \quad (۶۶)$$

که زمان مشخصهٔ آن L/R مانند قبل است.

۷-۱۰ انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی

در خلال فروافت جریان که با معادلهٔ ۶۶ و شکل ۲۵-۷ توصیف می‌شود، انرژی در مقاومت R تلف می‌شود. از آنجا که انرژی تلف شده در هر بازهٔ کوتاه dt برابر است با $RI^2 dt$ ، کل انرژی تلف شده پس از بستن کلید در زمان t_1 باید برابر مقدار زیر باشد

$$U = \int_{t_1}^{\infty} RI^2 dt = \int_{t_1}^{\infty} RI_0^2 e^{-2(R/L)(t-t_1)} dt \quad (۶۷)$$

با قرار دادن $x = 2R(t - t_1)/L$ می‌توان انتگرال را به سادگی محاسبه کرد

$$U = RI_0^2 \left(\frac{L}{2R} \right) \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad (۶۸)$$

چشمه این انرژی، میدان مغناطیسی مربوط به القاگر بود. در واقع، درست همان کاری را که باتری انجام داده بود تا در وهله اول جریان را تشکیل دهد، و خیلی پیش از انرژی بود که در مقاومت بین $t = 0$ و $t = t_1$ تلف می‌شد، که آن را نیز باتری تأمین می‌کرد. برای مشاهده عمومی بودن این رابطه، توجه کنید که اگر جریان فزاینده‌ای در القاگر داشته باشیم، باید کار انجام شود تا جریان را در مقابل نیروی الکتریکی القایی $L dI/dt$ برقرار کند. بنابراین، کار انجام شده در زمان dt برابر است با

$$dW = LI \frac{dI}{dt} dt = LI dI = \frac{1}{2} L d(I^2) \quad (69)$$

بنابراین، می‌توان انرژی کل

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \quad (70)$$

را به القاگری که حامل جریان I است نسبت داد. با فروافت نهایی جریان، این مقدار انرژی در جای دیگری ظاهر می‌شود.

طبیعی است که این انرژی را انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی القاگر در نظر بگیریم، درست همان‌طور که انرژی یک خازن باردار را انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی آن تلقی کردیم. انرژی خازنی که تا اختلاف پتانسیل V باردار شده است برابر است با $1/2 CV^2$ و می‌توان با نسبت دادن مقدار انرژی $(1/\lambda\pi) E^2 dv$ به جزء حجم dv که در آن شدت میدان E است آن را محاسبه کرد. این مطلب که رابطه مشابهی برای انرژی ذخیره شده در القاگر برقرار است، گرچه دلپذیر است اما غیرمنتظره نیست. یعنی، می‌توان به میدان مغناطیسی چگالی انرژی $(1/\lambda\pi) B^2$ را نسبت داد، و با جمع‌بندی انرژی کل میدان، مقدار $1/2 LI^2$ را به دست آورد.

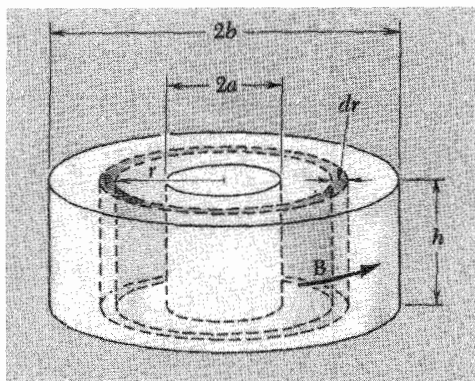
برای نشان دادن طرز کار در یک مورد، می‌توان به پیچه چنبره‌ای رجوع کرد که القاییدگی آن را در بخش ۷-۸ محاسبه کردیم. درمی‌یابیم که (معادله ۵۸)

$$L = \frac{2N^2 h}{c^2} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (71)$$

شدت میدان مغناطیسی B ، بر اثر عبور جریان I ، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B = \frac{2NI}{cr} \quad (72)$$

برای محاسبه انتگرال حجم $B^2/\lambda\pi$ می‌توان از جزء حجم متشکل از پوسته استوانه‌ای شکل ۷-۲۶ به حجم $2\pi r h dr$ استفاده کرد. با گسترش این پوسته از $r = a$ تا $r = b$ کل فضای حاوی



شکل ۷-۲۶ محاسبه انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی پیچۀ چنبره‌ای شکل ۷-۲۲.

میدان مغناطیسی جاروب می‌شود. (به خاطر داشته باشید که میدان B همه جا در خارج از چنبره صفر است.)

$$\frac{1}{\lambda\pi} \int B^2 dv = \frac{1}{\lambda\pi} \int_a^b \left(\frac{\nu NI}{cr} \right)^2 \nu \pi r h dr = \frac{N^2 h I^2}{c^2} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (۷۳)$$

با مقایسه نتیجه با معادله ۷۱ می‌بینیم که در واقع

$$\frac{1}{\lambda\pi} \int B^2 dv = \frac{1}{\nu} LI^2 \quad (۷۴)$$

حکم کلی‌تر، نظیر حکم مربوط به میدان الکتریکی معادله ۳۸ فصل ۱، آن است که انرژی U وابسته به هر میدان مغناطیسی $B(x, y, z)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{\lambda\pi} \int_{\text{میدان الکتریکی}} B^2 dv \quad (۷۵-الف)$$

اگر B برحسب گاوس و ν برحسب مترمکعب باشد، U در معادله ۷۵-الف برحسب ارگ به دست می‌آید. در معادله ۷۰، می‌توان از هنری و آمپر برای L و I استفاده کرد، در این صورت U برحسب ژول خواهد بود. معادله زیر هم‌ارز معادله ۷۵-الف در دستگاه SI برای U برحسب ژول، B برحسب تسلا، و ν برحسب مترمکعب است

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{میدان الکتریکی}} B^2 dv \quad (۷۵-ب)$$

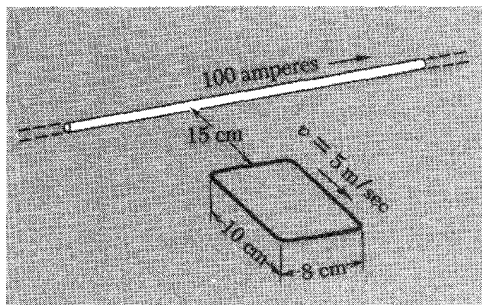
مسائل

۱-۷ بیشینه نیروی محرکه القایی در پیچه^{۴۰۰۰} دوری، به شعاع میانگین ۱۲ سانتی متر، که در میدان مغناطیسی زمین به شدت ۵ر۰ گاوس با سرعت ۳۰ دور در ثانیه می چرخد چقدر است؟
جواب: ۰۰۵۷ر۰ ایستاولت یا ۱۷۱ر۱ ولت.

۲-۷ یک سیم بلند موازی محور y است و محور z را در نقطه ^{$z = h$} قطع می کند. جریان I از این سیم می گذرد و از یک رسانای دور دست برمی گردد که می توان میدانش را نادیده گرفت. در صفحه ^{xy} حلقه^{مربعی} قرار دارد که اضلاع آن به طول b با سیم دراز موازی اند. حلقه در جهت x با سرعت ثابت v می لغزد. بزرگی نیروی محرکه الکتریکی را که هنگام عبور مرکز حلقه از محور y در آن القا می شود به دست آورید.

۳-۷ در ناحیه^{مرکزی} یک سیملوله که به چشمه^{توان} با بسامد رادیویی متصل است، میدان مغناطیسی $10^6 \times 25$ دور بر ثانیه با دامنه^۴ گاوس نوسان می کند. دامنه^{میدان الکتریکی} نوسان کننده در نقطه ای که ۳ سانتی متر از محور فاصله دارد چند ایستاولت بر سانتی متر است؟ (این نقطه در ناحیه ای قرار دارد که میدان مغناطیسی تقریباً یکنواخت است.)

۴-۷ نیروی محرکه الکتریکی حلقه^{متحرک} در شکل را در لحظه ای که حلقه در محل نشان داده شده قرار دارد محاسبه کنید. مقاومت حلقه را آنقدر بزرگ در نظر بگیرید که بتوان اثر جریان در حلقه را نادیده گرفت. از این نظر، مقدار مقاومت چقدر باشد تا بتوان آن را ایمن در نظر گرفت جهت جریان را در این لحظه مشخص کنید.



شکل مسئله ۴-۷.

۵-۷ فرض کنید که حلقه^{شکل ۶-۷} دارای مقاومت R است. نشان دهید که اگر کسی حلقه را با سرعت ثابت بکشد در بازه ^{dt} کاری انجام می دهد که درست برابر انرژی تلف شده در این مدت است، اگر بتوان خودالقایی حلقه را نادیده گرفت. چشمه^{این انرژی} در شکل ۷-۱۴ که حلقه ساکن است چیست؟

۶-۷ آیا پیشگویی تغییرات سینوسی ساده نیروی محرکه الکتریکی در حلقه گردان شکل ۷-۱۳ بستگی به مربع بودن حلقه دارد یا یکنواخت بودن میدان مغناطیسی، یا هر دوی آنها؟ توضیح دهید. آیا می‌توان ترتیبی از حلقه‌های گردان و پیچ‌های ثابت را پیشنهاد کرد که emf آن قطعاً غیرسینوسی باشد؟ منحنی تغییرات ولتاژ-زمان را که با این ترتیب انتظار دارید روی صفحه اسیلوسکوپ ببینید رسم کنید.

۷-۷ خودالقایی یک سیمولوه استوانه‌ای به قطر 10° سانتی‌متر و طول ۲ متر را محاسبه کنید. این سیمولوه یک لایه سیم‌پیچ با 1200° دور دارد. در تقریب اول فرض کنید که میدان مغناطیسی در داخل سیمولوه تا لبه‌های آن یکنواخت است. اندازه خطای ناشی از این فرض را برآورد کنید. مقدار L بزرگتر از نتیجه تقریبی شماست یا کوچکتر از آن؟

۸-۷ یک مقاومت را چطور پیچیم که خودالقایی آن کوچک شود؟

۹-۷ فرمولی تقریبی برای القای دو حلقه دایره‌ای با شعاع یکسان a را به دست آورد که مانند چرخهایی روی یک محور به فاصله b از یکدیگر قرار دارند. از تقریب مناسب برای $a \gg b$ استفاده کنید.

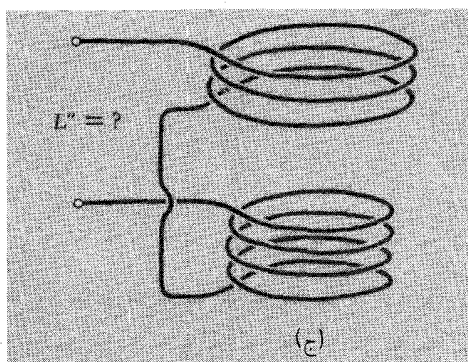
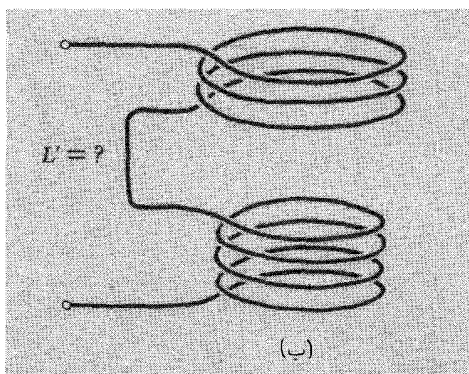
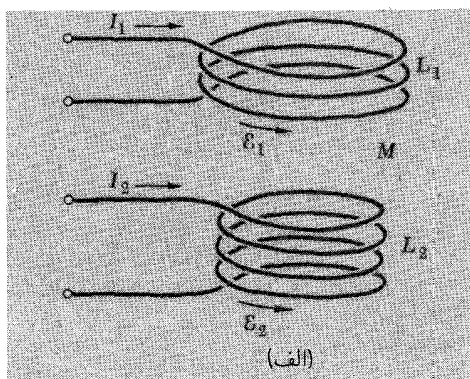
۱۰-۷ پیچه‌هایی که برای نخستین بار تکان مختصر ولی قابل آشکارسازی در گالوانومتر فاراده ایجاد کردند به گفته خود او هر یک متشکل از 203 ft سیم مسی بودند که دور یک قطعه بزرگ چوب پیچیده شده بود. دورهای ماریچ دوم (یعنی پیچه تک‌لایه) میان دورهای سیم‌پیچ اول قرار داشت اما با یک نخ قند از آن جدا بود. قطر خود سیم مسی $1/20$ اینچ بود. فاراده ابعاد قطعه چوبی یا دورهای پیچه را نداده است. در این آزمایش، یکی از پیچه‌ها به «باتری 100° صفحه‌ای» وصل بود. ببینید آیا می‌توانید برآوردی تقریبی از تداوم و بزرگی تپ جریانی که از گالوانومتر می‌گذرد برحسب آمپر داشته باشید.

۱۱-۷ بخش (الف) شکل دو پیچه با خودالقاییهای L_1 و L_2 را نشان می‌دهد. در وضعیت نسبی نشان داده شده القای متقابل آن M است. جهت مثبت جریان و نیروی محرکه الکتریکی در هر پیچه با پیکانهایی در شکل نشان داده شده است. معادله‌هایی که جریانه‌ها و نیروهای محرکه الکتریکی را به هم مربوط می‌کنند به صورت زیرند

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt} \quad \text{و} \quad \mathcal{E}_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} \pm M \frac{dI_1}{dt}$$

اگر M همواره یک مقدار ثابت مثبت باشد، چگونه می‌توان علامتها را در این معادله‌ها برگزید؟ چه می‌شد اگر جهت دیگری را برای جهت مثبت جریان و نیروی محرکه الکتریکی مثبت در پیچه پایینی برمی‌گزیدیم. اکنون دو پیچه را مانند قسمت (ب) شکل به هم متصل کنید تا یک مدار

تشکیل دهند. القایدگی L' این مدار برحسب L_1, L_2 و M چقدر است؟ القایدگی مدار متشکل از دو پیچۀ حالت (ج) چقدر است؟ کدامیک از مدارهای (ب) و (ج) خودالقایی بیشتری دارند؟ با توجه به اینکه خودالقایی هر مدار باید کمیتی مثبت باشد (چرا نمی‌تواند منفی باشد؟) ببینید آیا می‌توانید نتیجه‌ای کلی به‌دست آورید که برای هر زوج پیچه، در ارتباط با بزرگی نسبی L_2, L_1 و M معتبر باشد.



شکل مسئله ۷-۱۱.

۷-۱۲ یک جریان اقیانوسی با سرعت ۲ گره (تقریباً ۱ متر بر ثانیه) در ناحیه‌ای وجود دارد که در آن مؤلفه عمودی میدان مغناطیسی زمین 35 G است. رسانندگی آب دریا در این ناحیه $4 \text{ } (\Omega\text{-cm})^{-1}$ است. با فرض اینکه مؤلفه افقی دیگری برای \mathbf{E} بجز جمله حرکتی $\mathbf{B} \times (\mathbf{v}/c)$ وجود ندارد، چگالی جریان الکتریکی افقی را برحسب آمپر بر مترمربع به‌دست آورید. اگر یک بطری آب دریا را با این سرعت در میدان زمین حمل می‌کردید، آیا جریانی در آن به‌وجود می‌آید؟

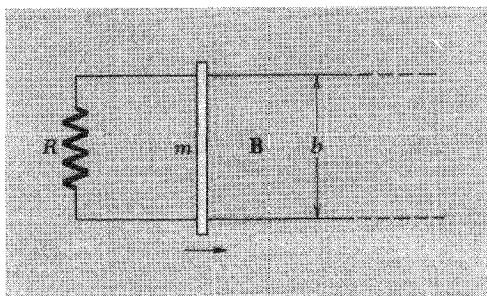
۱۳-۷ یک پیچه به مقاومت $1 \text{ } \Omega$ اهم و خودالقایی 5 mH میلی‌هنری به دو سر یک باتری بزرگ 12 V ولتی با مقاومت واقعی ناچیز متصل شده است. چه مدت پس از بسته شدن کلید جریان به 90% درصد مقدار نهایی می‌رسد؟ تا آن زمان چه مقدار انرژی برحسب ژول در میدان مغناطیسی ذخیره شده است؟ تا آن زمان چقدر انرژی از باتری کشیده می‌شود؟

۱۴-۷ یک میلهٔ فلزی به جرم m بدون اصطکاک روی دو ریل دراز رسانا به فاصلهٔ b می‌لغزد. به یک انتهای ریلها مقاومت R متصل شده است؛ مقاومت میله و ریلها در مقایسه با R ناچیز است. میدان یکنواخت B بر صفحهٔ شکل عمود است. در زمان $t = 0$ به میله سرعت v_0 به طرف راست داده می‌شود. پس از آن چه روی می‌دهد؟

(الف) آیا میله هرگز از حرکت باز می‌ایستد؟ در این صورت چه وقت؟

(ب) چه مسافتی را می‌پیماید؟

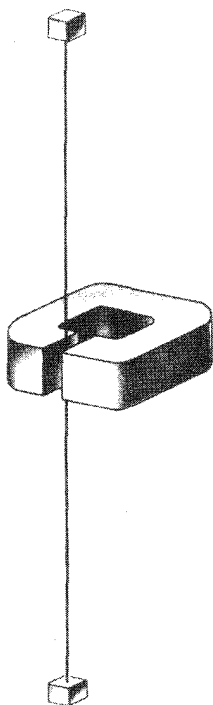
(ج) چه بر سر پایداری انرژی می‌آید؟



شکل مسئلهٔ ۱۴-۷.

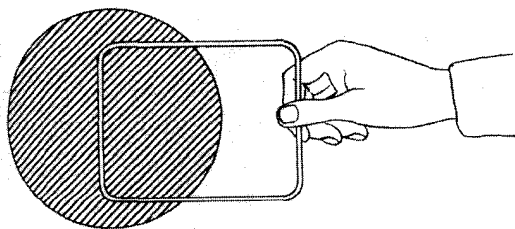
۱۵-۷ یک سیم سخت از شکافی در یک آهنربای کوچک می‌گذرد که شدت میدان در آن 5000 G گاوس است. طول سیم در داخل شکاف 1.8 m سانتی‌متر است. بزرگی ولتاژ متناوب القایی را هنگامی که سیم با بسامد 2000 Hz هرتز و دامنهٔ $3 \text{ } \mu\text{V}$ سانتی‌متر نوسان می‌کند به دست آورید.

۱۶-۷ ناحیهٔ هاشوردار قطب یک آهنربای الکتریکی را نشان می‌دهد که در آن یک میدان مغناطیسی قوی عمود بر صفحهٔ کاغذ وجود دارد. قاب مستطیلی از میلهٔ آلومینیومی به قطر 5 mm میلی‌متر ساخته شده است که خم شده و دو سر آن به هم جوش خورده است. فرض کنید با اعمال نیروی 1 N نیوتون در وضعیت نشان داده شده، بتوان قاب را در 1 s ثانیه از آهنربا دور کرد. سپس نیروی 2 N نیوتون افزایش می‌یابد، قاب در مدت _____ ثانیه خارج می‌شود. مقاومت ویژهٔ برنج دو برابر مقاومت ویژهٔ آلومینیوم است. اگر قاب از میلهٔ برنجی 5 mm میلی‌متری ساخته شده بود،



شکل مسئله ۷-۱۵.

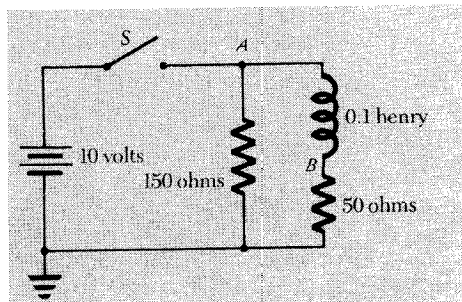
نیروی لازم برای کشیدن آن در ۱ ثانیه _____ نیوتون می‌شود. اگر قاب از آلومینیم ۱ سانتی‌متری ساخته شده بود، نیروی لازم برای خارج کردن آن در ۱ ثانیه _____ می‌شد. در تمام موارد لختی قاب را نادیده بگیرید.



شکل مسئله ۷-۱۶.

۱۷-۷ در مدار نشان داده شده در نمودار باتری 10° ولتی مقاومت داخلی ناچیزی دارد. کلید S برای چند ثانیه بسته و سپس باز می‌شود. یک منحنی رسم کنید که محور افقی آن زمان برحسب

میلی‌ثانیه باشد و پتانسیل نقطه A را نسبت به زمین درست ۱° میلی‌ثانیه قبل و پس از باز کردن کلید S نشان دهد. تغییرات پتانسیل در نقطه B را در همان دوره زمانی نشان دهید.



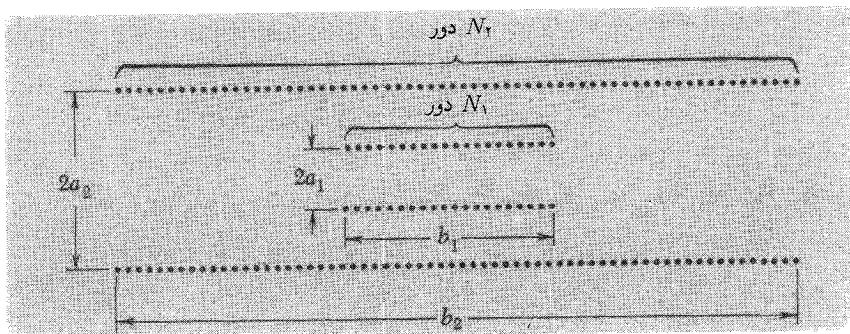
شکل مسئله ۷-۱۷.

۷-۱۸ یک پیچه دایره‌ای N دوری به شعاع a در میدان یک آهنربای الکتریکی قرار دارد. میدان مغناطیسی بر پیچه عمود است و شدت آن در سطح برابر مقدار ثابت B است. پیچه با یک جفت اتصال پیچ‌خورده به مقاومت خارجی متصل است. مقاومت کل این مدار بسته شامل خود پیچه R است. فرض کنید که آهنربای الکتریکی قطع شود، میدان آن کم و بیش به صفر می‌رسد. نیروی محرکه الکتریکی القایی سبب عبور جریان از مدار می‌شود. فرمولی برای بار کل $Q = \int I dt$ که از مقاومت می‌گذرد به دست آورید، و بگویید چرا این فرمول به سرعت افت میدان به صفر بستگی ندارد.

۷-۱۹ در مورد استفاده از قضیه $\Phi_{21} = \Phi_{12}$ برای دو حلقه کوچک و بزرگ هم‌مرکز شکل ۷-۲۰ بحث کنید. با جریان ثابت I_1 در حلقه خارجی، روشن است که Φ_{21} شاری که از حلقه داخلی می‌گذرد، با افزایش R_1 کم می‌شود، زیرا میدان در مرکز ضعیفتر می‌شود. اما با جریان ثابت در حلقه داخلی، چرا باید Φ_{21} شار در حلقه خارجی با افزایش R_1 کاهش یابد؟ R_2 را ثابت بگیرید. باید این کار را بکنیم تا قضیه صادق باشد.

۷-۲۰ آیا می‌توانید با استفاده از قضیه $\Phi_{21} = \Phi_{12}$ روشی برای به دست آوردن شدت میدان مغناطیسی یک حلقه جریان در نقاطی از صفحه حلقه که در فاصله‌های بسیار بزرگتر از شعاع حلقه قرار دارند ابداع کنید؟ (راهنمایی: اثر تغییر کوچک ΔR_1 را در شعاع حلقه خارجی شکل ۷-۲۰ در نظر بگیرید؛ این تغییر باید در Φ_{12} و Φ_{21} اثری یکسان داشته باشد.)

۷-۲۱ شکل سیمولوله‌ای را به شعاع a_1 و طول b_1 نشان می‌دهد که در داخل سیمولوله درازتری به شعاع a_2 و طول b_2 قرار گرفته است. تعداد دور پیچه داخلی N_1 و برای پیچه خارجی N_2 است. فرمولی برای القای متقابل M به دست آورید.



شکل مسئله ۲۱-۷.

۲۲-۷ حلقه‌ای به شعاع a حامل بار ایستای q است. این حلقه در میدان مغناطیسی به شدت B_0 قرار دارد که با محور حلقه موازی است و طوری قرار دارد که می‌تواند آزادانه حول این محور بچرخد. اگر میدان قطع شود، چقدر تکانه زاویه‌ای به حلقه اضافه می‌شود؟ فرض کنید جرم حلقه m باشد. نشان دهید اگر حلقه ابتدا ساکن باشد، دارای سرعت زاویه‌ای $\omega = qB_0 / 2mc$ می‌شود. توجه کنید که مانند مسئله ۱۸-۷ نتیجه فقط به مقادیر اولیه و نهایی شدت میدان بستگی دارد.

۲۳-۷ در بخش اعظم فضای میان ستاره‌ای کهکشان ما یک میدان مغناطیسی وجود دارد. بنابر شواهد موجود شدت این میدان در بیشتر نواحی میان 10^{-6} و 10^{-5} گاوس است. با پذیرش 3×10^{-6} گاوس مرتبه بزرگی انرژی ذخیره شده را در میدان مغناطیسی پیدا کنید. برای این منظور می‌توان فرض کرد که کهکشان قرصی به قطر تقریبی 10^{22} سانتی‌متر و ضخامت 10^{21} سانتی‌متر است. فرض کنید که ستارگان کهکشان در حدود 10^{24} ارگ در ثانیه تابش می‌کنند. این انرژی برابر چند سال نور ستاره است؟

۲۴-۷ یک سیمولوله ابررسانا که برای تصویرگیری تمام بدن با تشدید مغناطیسی هسته‌ای طراحی شده است دارای قطر 9 متر و طول 22 متر است. میدان در مرکز این سیمولوله 4 تسلاست. انرژی ذخیره شده در میدان این پیچه را برحسب ژول به تقریب برآورد کنید.

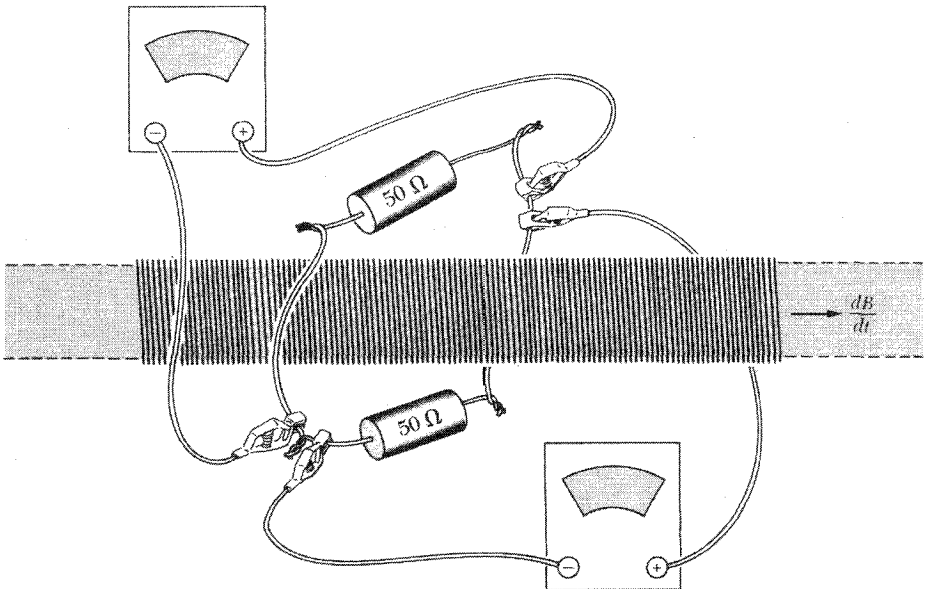
۲۵-۷ با توجه به برآوردهای موجود شدت میدان مغناطیسی در سطح یک ستاره نوترونی، یا تپ اختر می‌تواند به بزرگی 10^{12} گاوس باشد. چگالی انرژی این میدان چقدر است؟ با استفاده از هم‌ارزی جرم-انرژی مقدار آن را برحسب گرم بر سانتی‌متر مکعب بیان کنید.

۲۶-۷ فاراده کوشش ناموفقی برای آشکارسازی جریان القایی در هنگام حرکت قسمتی از مدار متشکل از آب را در میدان مغناطیسی زمین چنین توصیف کرده است:

بنابراین آزمایشهایی را (در شرایط مساعد) بدین ترتیب در پل واترلو انجام دادم؛ یک سیم مسی به طول نهصد و شصت فوت را روی جان پناه پل پهن کردم و از دو انتهای آن سیمهایی را آویختم که صفحه‌های بزرگ فلزی به آنها متصل شده بود تا اتصال با آب را کامل کند. بنابراین

سیم و آب مدار رسانایی را تشکیل می‌دادند؛ و چون آب با جزر و مد بالا و پایین می‌رفت، امیدوار بودم که جریانهایی را شبیه جریانهای گوی برنجی به‌دست آورم. انحرافهای مداومی را در گالوانومتر به‌دست آوردم، اما این انحرافها نامنظم بودند، و همواره مربوط به اثرهایی سوای آن چیزی بود که جستجو می‌کردم. شرایط مختلف آب مانند خلوص در دو طرف رودخانه؛ تفاوت دما، تفاوت مختصر صفحه‌ها؛ لیمبی که به‌کار رفته بود؛ اتصال کم و بیش کاملی که بر اثر پیچ خوردن و غیره به‌وجود می‌آمد؛ همگی به نوبت اثرهایی را به‌وجود می‌آوردند؛ و اگر چه من فقط روی آبی آزمایش می‌کردم که از میان قوسها می‌گذشت؛ به جای مس از پلاتین استفاده کردم؛ و تمام احتیاطهای لازم را به عمل آوردم، ولی پس از سه روز نتوانستم هیچ نتیجه رضایتبخشی به‌دست آورم.^۱

فرض کنید که مؤلفه عمودی میدان 5×10^{-5} گاوس می‌بود، برای سرعت جریانهای جزر و مدی در رود تیمز مقدار قابل قبولی در نظر بگیرید و بزرگی ولتاژ القایی را که فاراده می‌خواست آشکار کند برآورد کنید. $27-7$ می‌توان ولت‌سنج را وسیله‌ای در نظر گرفت که انتگرال خطی $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ را در مسیر بسته C ثبت می‌کند. قسمتی از C در داخل دستگاه قرار دارد؛ بقیه قسمت‌ها شامل اتصالات خارجی ولت‌سنج و رساناهایی است که این اتصالاتها به آن وصل شده‌اند. برای تعیین علامت، وقتی ولت‌سنج

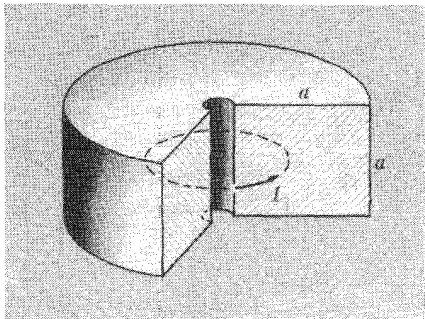


شکل مسئله ۷-۲۷.

1. "Experimental Researches in Electricity", Vol I, London, 1839, p. 55.

انتگرال $E \cdot ds$ را در مسیر داخلی از پایانه با علامت \oplus تا پایانه با علامت \ominus بزرگتر از صفر ثبت می‌کند، علامت مثبت است. با به خاطر داشتن این مطلب، ترتیب شکل را در نظر بگیرید. سیمولوله به اندازه‌ای بلند است که می‌توان میدان مغناطیسی خارجی را نادیده گرفت. سطح مقطع سیمولوله 20 سانتی‌متر مربع و میدان در داخل به طرف راست است و آهنگ 100 گاوس در ثانیه افزایش می‌یابد. دو ولت‌سنج یکسان به صورتی که در شکل نشان داده شده است به نقطه‌های حلقه‌ای متصل‌اند که مدار را در برمی‌گیرد و شامل دو مقاومت 50 اهمی است. ولت‌سنجها می‌توانند تا میکروولت را اندازه بگیرند و مقاومت داخلی بالایی دارند. هر ولت‌سنج چه چیز را نشان می‌دهد؟ اطمینان یابید که پاسخ شما از هر نظر با معادله 25 سازگار است.

۲۸-۷ میدان در داخل رساناهای خوب نمی‌تواند به سرعت تغییر کند. دیدیم که جریان در یک مدار القایی به صورت نمایی با زمان مشخصه L/R (معادله 66) کاهش می‌یابد. در یک رسانای بزرگ مانند هسته فلزی زمین شناسایی "مدار" آسان نیست. با وجود این، می‌توان مرتبه بزرگی فروافت و آنچه را که به آن بستگی دارد با تقریبهایی منطقی یافت. جسم استوانه‌ای شکل را با سوراخی در وسط آن در نظر بگیرید. که سطح مقطع آن مربع و از ماده جامدی با رسانندگی σ ، برحسب s^{-1} ساخته شده است. جریان I در این استوانه وجود دارد. البته جریان روی سطح مقطع پخش شده است اما فرض می‌کنیم که مقاومت آن مربوط به سیمی با سطح a^2 و طول πa است، یعنی $R \approx \pi/a\sigma$. برای میدان B می‌توان میدان در مرکز یک حلقه را با جریان I و شعاع $a/2$ در نظر گرفت. برآورد منطقی برای انرژی ذخیره شده برابر $B^2/8\pi$ در حجم استوانه است. چون $dU/dt = -I^2 R$ ، زمان فروافت انرژی برابر $\tau \approx U/I^2 R$ است. نشان دهید که بجز برای یک عامل عددی که به تقریبهای مختلف بستگی دارد، $\tau \approx \sigma a^2/c^2$ است. شعاع هسته زمین 3000 کیلومتر است و تصور می‌شود که رسانندگی آن $10^{16} s^{-1}$ یعنی تقریباً یک دهم رسانندگی آهن در دمای متعارفی باشد. مقدار τ را برحسب قرن ارزیابی کنید.

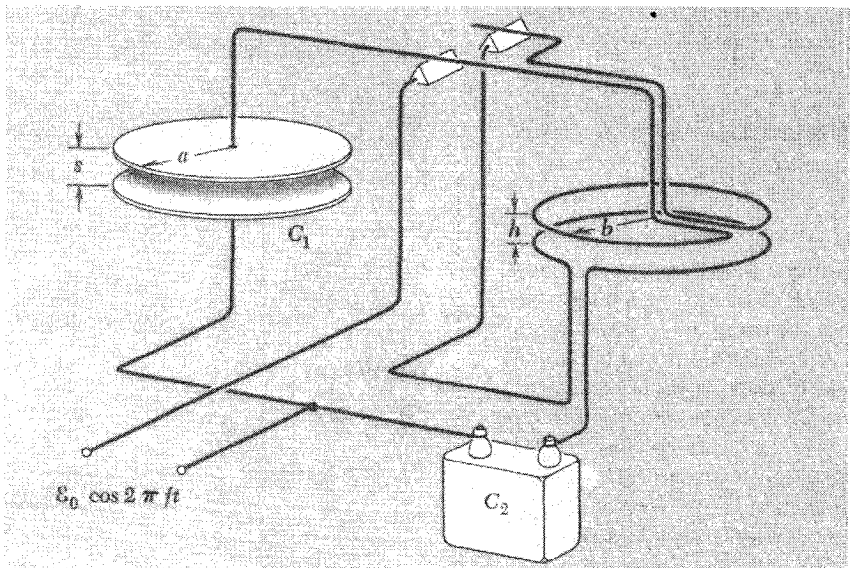


شکل مسئله ۲۸-۷.

۲۹-۷ مقدار ثابت c را که در معادله‌های ماکسول ظاهر می‌شود می‌توان با آزمایشهای الکتریکی که فقط شامل میدانهای کم بسامد است تعیین کرد. ترتیبی را در نظر بگیرید که در شکل نشان داده شده است. نیروی بین صفحه‌های خازن با نیروی بین سیمهای موازی حامل جریان در همان جهت متعادل می‌شود. یک ولتاژ که به صورت سینوسی با بسامد f تغییر می‌کند به صفحه‌های موازی با خازن با ظرفیت C_1 و همچنین خازن C_2 اعمال می‌شود. باری که به داخل و خارج C_2 شارش می‌کند جریان را در حلقه‌ها تشکیل می‌دهد. فرض کنید که C_2 و فاصله‌های مربوطه طوری تنظیم شده‌اند که متوسط زمانی نیروی پایین‌سو در حلقه بالایی C_1 دقیقاً با متوسط زمانی نیروی پایین‌سو در حلقه بالایی متعادل می‌شود. (البته وزن دو طرف باید چنان تنظیم شود که در هنگام قطع متعادل باشد.) نشان دهید که در این شرایط، ثابت c را می‌توان به صورت زیر از کمیت‌های اندازه‌گیری شده محاسبه کرد:

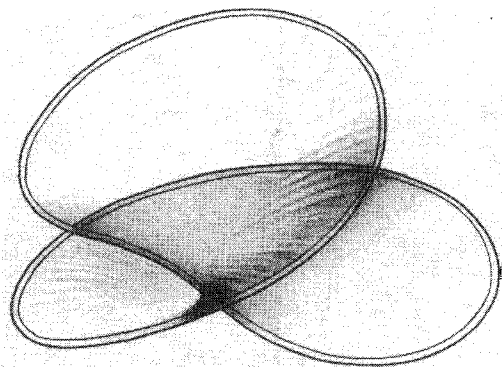
$$c = (2\pi)^{3/2} a \left(\frac{b}{h}\right)^{1/2} \left(\frac{C_2}{C_1}\right) f \quad (\text{cm/s})$$

توجه کنید که بجز اندازه‌گیری نسبت دو ظرفیت C_1 و C_2 فقط اندازه‌گیری فاصله و زمان (برای بسامد) ضروری است. بدین ترتیب، یکاهای الکتریکی در نتیجه مؤثر نیستند. (آزمایش عملاً در

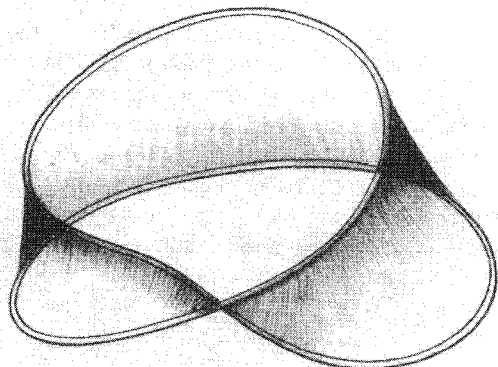


بسامدهای حتی 60° دور در ثانیه امکان پذیر است، اگر مقدار C_2 10^6 برابر C_1 باشد و حلقه‌های جریان با چندین دور ساخته شوند تا اثر یک جریان کوچک را چند برابر کنند.

۷-۳۰ حلقه‌ای را در نظر بگیرید که در شکل نشان داده شده است. فرض کنید می‌خواهیم شار B را که از این حلقه می‌گذرد محاسبه کنیم. دو سطح محدودکننده این حلقه در شکل (الف) و (ب) نشان داده شده‌اند. تفاوت اساسی آنها در چیست؟ اگر یکی از این دو سطح برای محاسبه انتگرال سطحی $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ و یافتن شار مناسب باشد، این سطح کدام است؟ سطح متناظر را برای پیچه متشکل از سه دور توصیف کنید. نشان دهید که نتیجه به دست آمده با این گفته قبلی ما که برای پیچه متراکم متشکل از N دور، نیروی محرکه الکتریکی N برابر است با یک حلقه با همان اندازه و شکل سازگاری دارد.



(الف)

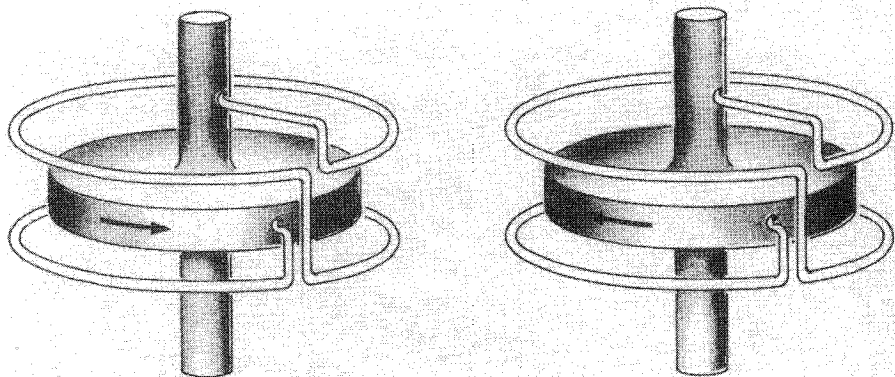


(ب)

شکل مسئله ۷-۳۰.

۷-۳۱ در این سؤال واژه دینامو برای مولدی به کار می‌رود که به صورت زیر کار می‌کند. با استفاده از یک عامل خارجی — مثلاً محور یک توربین بخار — رسانا در یک میدان مغناطیسی به حرکت در می‌آید، و نیروی محرکه الکتریکی القایی را در مدار القا می‌کند که رسانا بخشی از آن است. چشمه میدان مغناطیسی جریانی است که بر اثر این نیروی محرکه القایی از مدار می‌گذرد. یک مهندس برق آن را مولد dc خودانگیخته می‌خواند. یکی از ساده‌ترین دیناموهای ممکن در شکل زیر رسم شده است. این دینامو فقط دو بخش اساسی دارد. یک بخش قرص فلزی جامد و محوری است که می‌تواند حرکت چرخشی داشته باشد. بخش دیگر ”پیچه“ دو دوری است که ثابت است و با اتصالهای لغزنده یا ”جاروبها“ به محور و لبه قرص گردان متصل شده است. یکی از دو وسیله‌ای که در شکل نشان داده شده است یک دیناموی بالفعل است، اما دیگری

چنین نیست. کدام یک از این دو وسیله دیناموست؟ توجه کنید که پاسخ این پرسش نمی‌تواند به هیچ قراردادی در مورد دستگردی جهت‌های مدار بستگی داشته باشد. یک موجود هوشمند برون زمینی که این طرحها را بررسی کند می‌تواند به این پرسش پاسخ دهد، در صورتی که چیزی در مورد پیکانها بداند! فکر می‌کنید چه عاملی جهت جریان در این دینامو را تعیین می‌کند؟ چه عامل بزرگی جریان را تعیین می‌کند؟



شکل مسئله ۷-۳۱.

۷-۳۲ یک دینامو مانند مثال مسئله قبل دارای سرعت بحرانی ω است. اگر قرص با سرعت زاویه‌ای کمتر از ω بچرخد، هیچ اتفاقی نمی‌افتد. فقط در رسیدن به این سرعت است که \mathcal{E} القایی به اندازه کافی بزرگ می‌شود و می‌تواند جریان کافی جهت میدان مغناطیسی لازم برای القای \mathcal{E} تولید کند. سرعت بحرانی فقط تابع شکل و اندازه رساناها و رسانندگی σ است. به خاطر داشته باشید که بعد σ ، s^{-1} است. اگر d بعد مشخصه‌ای باشد که اندازه دینامو را بیان می‌کند مانند شعاع قرص در این مثال، با بحث ابعادی نشان دهید که ω باید از رابطه $\omega = Kc^2/d^2$ به دست آید که در آن K عامل عددی بدون بعد است که فقط به ترتیب و اندازه نسبی قسمت‌های مختلف دینامو بستگی دارد. برای یک دیناموی کوچک که کاملاً از مس ساخته شده باشد، نمی‌توان به سرعت بحرانی ω رسید. خاصیت فرومغناطیسی با تولید میدان مغناطیسی بسیار قویتر از آنچه جریان در پیچها به تنهایی تولید می‌کنند، مولدهای dc معمولی را ممکن می‌سازد. برای دینامویی به اندازه زمین، که d برای آن به جای چند متر چند صد کیلومتر است، سرعت بحرانی بسیار کوچکتر است. میدان مغناطیسی زمین را قطعاً یک دیناموی فرومغناطیسی تولید کرده است که حرکت‌های موجود در شاره فلزی هسته زمین در آن دخیل‌اند. این شاره آهن مذاب است، اما حتی اندکی هم فرومغناطیسی نیست، زیرا بسیار داغ است. این مطلب را در فصل ۱۱ بررسی خواهیم کرد.

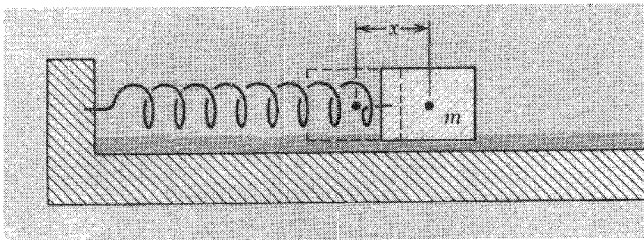


مدارهای جریان متناوب

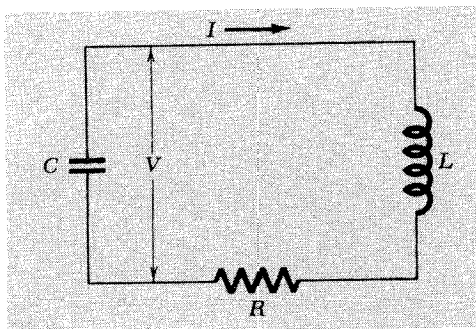
۱-۸ یک مدار تشدید

جرم متصل به فنر مثال معروف یک نوسانگر است. اگر دامنه نوسان خیلی بزرگ نباشد، حرکت تابع سینوسی از زمان خواهد بود. در این صورت، آن را نوسانگر هماهنگ می‌نامیم. مشخصه هر نوسانگر هماهنگ نیروی بازگرداننده متناسب با جابه‌جایی جرم m از حالت تعادل است، $F = -kx$ (شکل ۱-۸). در نبود سایر نیروهای خارجی، اگر جرم جابه‌جا شود با دامنه ثابت و بسامد $\omega = \sqrt{k/m}$ نوسان خواهد کرد. اما معمولاً نوعی اصطکاک سرانجام آن را متوقف می‌کند. ساده‌ترین مورد حالتی است که نیروی کند کننده با سرعت جسم dx/dt متناسب باشد. حرکت در شماره چسبیده مثالی از این مورد است. دستگاهی را که در آن نیروی بازگرداننده با جابه‌جایی جرم x ، و نیروی کند کننده با مشتق dx/dt متناسب باشد نوسانگر هماهنگ می‌نامند.

مدار الکتریکی متشکل از خازن و القاگر شرایط یک نوسانگر هماهنگ را دارد. در واقع، با توجه به خطی بودن شگفت‌انگیز اجزای مدار الکتریکی واقعی، نوسانگر الکتریکی هماهنگ میرا از بیشتر نوسانگرهای مکانیکی بهتر است. سیستمی که ابتدا مطالعه می‌کنیم مدار "RLC سری" است که نمودار آن در شکل ۲-۸ آمده است.



شکل ۱-۸ یک نوسانگر هماهنگ میرا.



شکل ۲-۸ یک مدار RLC سری.

اگر Q بار خازن این مدار در زمان t باشد، اختلاف پتانسیل، یا ولتاژ دو سر خازن V است که با ولتاژ دو سر ترکیب القاگر L و مقاومت R یکی است. اگر صفحه بالایی خازن بار مثبت داشته باشد، V را مثبت و جهت مثبت جریان را جهت پیکان در شکل ۲-۸ در نظر می‌گیریم. با این انتخاب علامتها، رابطه بین بار Q ، جریان I ، و اختلاف پتانسیل دو سر خازن به صورت زیر است

$$I = -\frac{dQ}{dt} \quad Q = CV \quad V = L\frac{dI}{dt} + RI \quad (۱)$$

می‌خواهیم دو متغیر از سه متغیر Q ، I ، و V را حذف کنیم. از دو معادله به دست می‌آوریم $I = -C \frac{dV}{dt}$ و معادله سوم به صورت $V = -LC(d^2V/dt^2) - RC(dV/dt)$ می‌آید، یا

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right) \frac{dV}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right) V = 0 \quad (۲)$$

این یک معادله دیفرانسیل درجه دوم با ضرایب ثابت است جواب زیر را امتحان می‌کنیم

$$V = Ae^{-\alpha t} \cos \omega t \quad (۳)$$

که در آن A ، α ، و ω ثابت هستند. مشتق اول و دوم این تابع به صورت زیر است

$$\frac{dV}{dt} = Ae^{-\alpha t}[-\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t] \quad (۴)$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = Ae^{-\alpha t}[(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \sin \omega t] \quad (۵)$$

با قرار دادن در معادله ۲، عامل مشترک $Ae^{-\alpha t}$ حذف می‌شود و داریم

$$(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \sin \omega t - \frac{R}{L}(\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + \frac{1}{LC} \cos \omega t = 0 \quad (۶)$$

رابطه بالا در صورتی برای همه مقادیر ω صادق است که ضریبهای $\sin \omega t$ و $\cos \omega t$ هر دو صفر باشد. یعنی، لازم است که

$$2\alpha\omega - \frac{R\omega}{L} = 0 \quad (۷)$$

و

$$\alpha^2 - \omega^2 - \alpha \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0 \quad (۸)$$

از اولین معادله شرطی برای α به دست می‌آید:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad (۹)$$

در حالی که معادله دوم ایجاب می‌کند که

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \alpha \frac{R}{L} + \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \quad (۱۰)$$

چون مقدار ثابت ω یک عدد حقیقی است، ω نمی‌تواند منفی باشد. بنابراین در صورتی می‌توانیم جوابی به صورت معادله ۳ داشته باشیم که $R^2/4L^2 \leq 1/LC$ باشد. در واقع برای "میرایی خفیف"، یعنی مقاومت کم، که می‌خواهیم بررسی کنیم، فرض می‌کنیم که مقادیر R ، L و C در مدار به‌گونه‌ای است که رابطه $R < 2\sqrt{L/C}$ برقرار است.

تابع $Ae^{-\alpha t} \cos \omega t$ تنها جواب ممکن نیست. $Be^{-\alpha t} \sin \omega t$ نیز جوابی به همان خوبی با همان شرایط معادله‌های ۹ و ۱۰ برای α و ω است. جواب عمومی مجموع دو جواب است

$$V(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad (11)$$

ثابتهای اختیاری A و B را می‌توان با توجه به شرایط اولیه تعیین کرد. این چندان جالب توجه نیست. اینکه جواب در هر مورد معین به صورت تابع سینوسی یا کسینوسی، یا برهم‌نهی‌ای از آنها باشد موضوعی است که به انتخاب مبدأ زمان بستگی دارد. پدیده لازم یک نوسان سینوسی میراست.

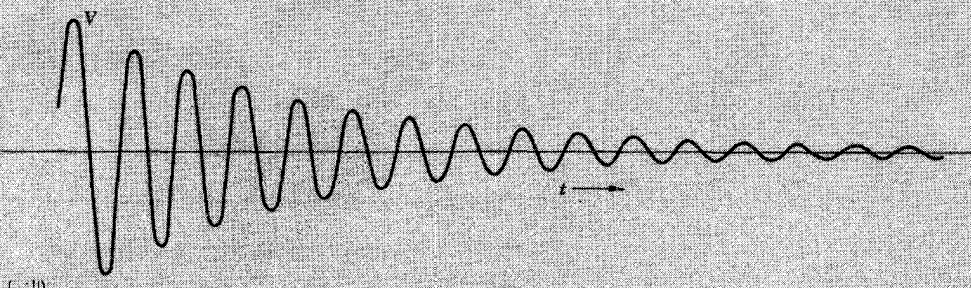
تغییرات ولتاژ برحسب زمان در شکل ۳-۸ الف نشان داده شده است. البته این موضوع نمی‌تواند در همه زمانهای گذشته صادق باشد. باید در لحظه‌ای از زمان گذشته به‌گونه‌ای به مدار انرژی می‌دادیم، و سپس می‌گذشتیم تا کار کند. به‌عنوان مثال، امکان داشت که با مدار باز خازن را پر و سپس آن را به پیچ متصل کنیم.

در شکل ۳-۸ ب مقیاس زمانی گسترش یافته و منحنی خط‌چین که تغییرات I را نشان می‌دهد به آن اضافه شده است. بگذارید برای V تابع کسینوسی میرای معادله ۳ را در نظر بگیریم. این صورت تغییرات جریان برحسب زمان از رابطه زیر به دست می‌آید

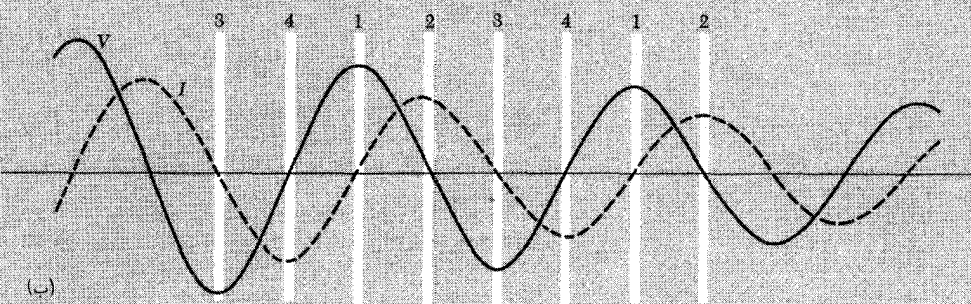
$$I = -C \frac{dV}{dt} = AC\omega \left(\sin \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \cos \omega t \right) e^{-\alpha t} \quad (12)$$

نسبت α/ω معیاری از میرایی است. اگر α/ω بسیار کوچک باشد، وقتی که دامنه اندکی فرو می‌افتد، نوسانهای بسیاری صورت می‌گیرد. از شکل ۳-۸ موردی را برمی‌گزینیم که در آن $\alpha/\omega \approx 0.4^\circ$. در این صورت جمله کسینوسی در معادله ۱۲ چندان بزرگ نیست. همه کار آن در واقع انتقال فاز به اندازه زاویه کوچک $\tan^{-1}(\alpha/\omega)$ است. به طوری که نوسان جریان در حدود یک چهارم چرخه با نوسان ولتاژ اختلاف فاز دارد.

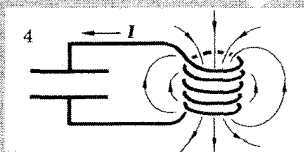
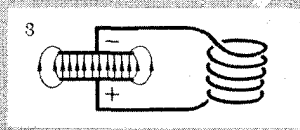
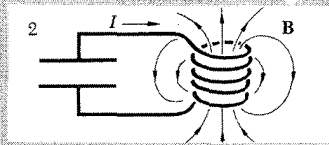
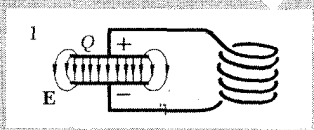
نوسان در واقع انتقال انرژی از خازن به القاگر یا از میدان الکتریکی به میدان مغناطیسی و برعکس است. در زمانهای علامتگذاری شده در شکل ۳-۸ همه انرژی در میدان الکتریکی است. پس از یک چهارم چرخه، در نقطه ۲، خازن تخلیه شده است و تقریباً تمام انرژی در میدان



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۳-۸ (الف) نوسان سینوسی میرای ولتاژ در مدار RLC ، (ب) بخشی از (الف) که در آن مقیاس زمانی گسترش یافته است و شامل نمودار جریان I نیز هست. (ج) انتقال دوره‌ای انرژی از میدان الکتریکی به میدان مغناطیسی و برعکس. هر تصویر شرایط را در زمانی نشان می‌دهد که با عدد متناظر در (ب) مشخص شده است.

مغناطیسی پیچیده است. در همین حال، مقاومت مدار R کار خود را انجام می‌دهد، و با ادامه نوسان، انرژی باقیمانده در میدانها به تدریج از میان می‌رود.

میرایی نسبی در یک نوسانگر را معمولاً با عددی به نام Q بیان می‌کنند. عدد Q (که نباید آن را با بار خازن اشتباه گرفت!) کیفیت یا عامل کیفیت را نشان می‌دهد. البته هیچکس آن را به این نامها نمی‌شناسد، بلکه آن را فقط Q می‌گوییم. هر چه میرایی کمتر باشد، عدد Q بزرگتر است. برای نوسانگری با بسامد ω ، نسبت بی‌بعدی به صورت زیر است:

$$Q = \omega \frac{\text{انرژی ذخیره شده}}{\text{میانگین توان تلف شده}} \quad (۱۳)$$

یا شاید ترجیح می‌دهید که Q را تعداد رادیانهای شناسه ωt (که 2π ضربدر تعداد دوره‌هاست) در نظر بگیرید که برای کاهش انرژی نوسانگر با ضریب $1/e$ لازم است.

در مدار ما انرژی ذخیره شده با V^2 یا I^2 ، و در نتیجه با $e^{-2\alpha t}$ متناسب است. انرژی در زمان $1/2\alpha$ ، که شامل $\omega/2\alpha$ رادیان است، با ضریب $1/e$ کاهش می‌یابد، پس برای مدار RLC داریم

$$Q = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{\omega L}{R} \quad (۱۴)$$

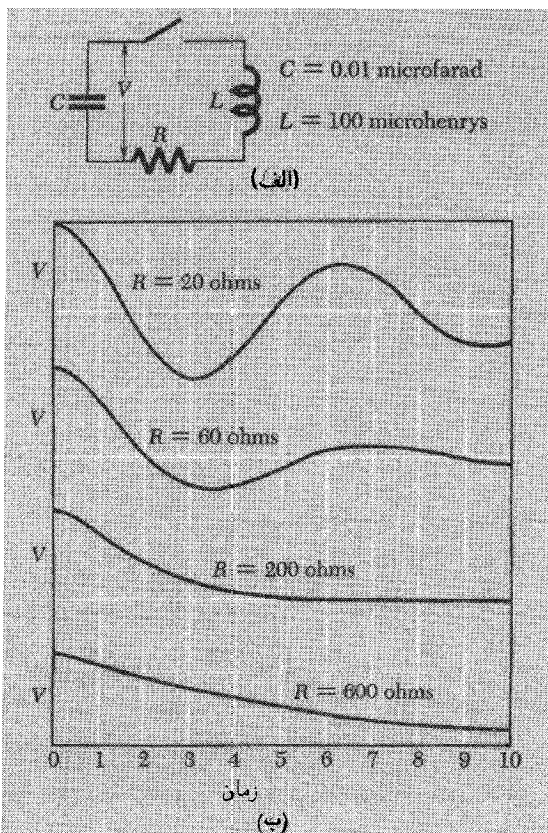
به عنوان یک برآورد تقریبی، Q ی نوسان چه چیزی را در شکل ۸-۳ نشان می‌دهد؟ بدیهی است که حالت کلی مورد مطالعه ما شکل بعضی موارد ساده خاص است. اگر $R = 0$ باشد، نوسانگری کاملاً نامیرا داریم که بسامد ω_0 آن از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (۱۵)$$

اغلب با سیستمهایی سروکار داریم که در آنها میرایی به اندازه کافی کوچک است و می‌توان آن را در محاسبه بسامد نادیده گرفت. همان‌طور که در معادله ۱۰ می‌توان دید و نیز مسئله ۸-۹ نشان خواهد داد، میرایی خفیف فقط اثر مرتبه دومی در ω دارد.

برای تکمیل بحث آنچه را که در مدار فوق میرا، که در آن $R < 2\sqrt{L/C}$ ، می‌گذرد به اختصار مرور می‌کنیم. معادله ۲ جوابی به صورت $V = Ae^{-\beta t}$ برای دو مقدار β دارد، جواب عمومی به صورت زیر است

$$V(t) = Ae^{-\beta_1 t} + Be^{-\beta_2 t} \quad (۱۶)$$



شکل ۴-۸ (الف) با خازن پر، کلید در $t = 0$ بسته می‌شود. (ب) چهار مورد نشان داده شده است که یکی از آنها با $R = 200 \Omega$ مربوط به میرایی بحرانی است.

نوسانی وجود ندارد، بلکه فقط یک فروافت نمایی داریم. در حالت خاص میرایی "بحرانی"، $\beta_1 = \beta_2$, $R = 2\sqrt{L/C}$ و جواب معادله دیفرانسیل ۲ به صورت زیر درمی‌آید

$$V(t) = (A + Bt)e^{-\beta t} \quad (۱۷)$$

وضع بدین قرار است. که وضعیت بحرانی، برای L و C معین، حالتی است که در آن انرژی با بیشترین سرعت ممکن تلف می‌شود (مسئله ۴-۸).

می‌توانید گستره کامل این رفتار را در شکل ۴-۸ ببینید، که در آن $V(t)$ برای دو مدار تخت میرا و یک مدار با میرایی بحرانی رسم شده است. خازن و القاگر ثابت می‌مانند و فقط مقاومت تغییر کرده است. بسامد زاویه‌ای طبیعی $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ برای این مدار 10^6 s^{-1} است، که با

بسامد $2\pi/10^6$ دور بر ثانیه یا ۱۵۹ کیلوهرتز متناظر است.

کار مدار با پر شدن خازن تا اختلاف پتانسیل، مثلاً ۱ ولت و بستن کلید در زمان $t = 0$ شروع می‌شود. یعنی $V = 1$ در $t = 0$ شرط اولیه است. همین‌طور $I = 0$ در $t = 0$ زیرا القاگر نمی‌گذارد جریان به‌طور ناپیوسته تغییر کند. بنابراین، شرط اولیه دیگر برای V به‌صورت $dv/dt = 0$ در $t = 0$ است. توجه کنید که هر چهار منحنی فروافت به‌صورت یکسان آغاز می‌شوند. در میرایی شدید ($R = 60 \Omega$) بخش اعظم منحنی فروافت مانند فروافت نمایی ساده یک مدار RC است. فقط در بخش اولیه که منحنی گرد می‌شود تا با شیب صفر آغاز شود، وجود القايدگي L نمایان می‌شود.

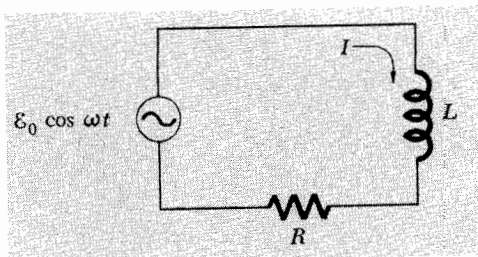
۲-۸ جریان متناوب

مدار تشدیدي که در بالا بررسی کردیم چشمه انرژی نداشت، و در نتیجه محکوم به فعالیت گذرا بود، یعنی نوسانی بود که دیر یا زود از میان می‌رفت. در یک مدار جریان متناوب با حالت مانا سروکار داریم، یعنی جریان یا ولتاژی که بدون تغییر دامنه به‌صورت سینوسی نوسان می‌کند. نوعی نیروی محرکه الکتریکی نوسانی مدار را به‌کار می‌اندازد.

بسامد f جریان متناوب معمولاً برحسب دور بر ثانیه [یا به افتخار کاشف امواج الکترومغناطیسی برحسب هرتز بیان می‌شود]. بسامد زاویه‌ای $\omega = 2\pi f$ کمیتی است که معمولاً در معادله‌های ما ظاهر می‌شود. همواره فرض می‌کنیم که یکای آن رادیان بر ثانیه است. این یکا نام مخصوصی ندارد و آن را به‌سادگی به‌صورت s^{-1} می‌نویسیم. بنابراین جریان عادی (در امریکای شمالی) با بسامد 60 Hz دارای $\omega = 377 s^{-1}$ است.

بگذارید یک نیروی محرکه الکتریکی به‌صورت $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ به مدار متشکل از مقاومت و القايدگي اعمال کنیم. می‌توان \mathcal{E} را با ماشینی شبیه شکل ۷-۱۳ تولید کرد که دارای موتوری است که میل‌گردان را با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخاند. نماد موجود در سمت چپ شکل ۸-۵ روش متداول برای نمایش حضور نیروی محرکه الکتریکی متناوب در یک مدار است. این شکل نشان می‌دهد که یک مولد به‌صورت سری به بقیه مدار متصل شده است. اما لازم نیست که نیروی محرکه الکتریکی را در محل خاصی از مدار در نظر بگیرید. انتگرال خطی حول تمام مدار است که اهمیت دارد. شکل ۸-۵ می‌تواند مداری را نیز نشان دهد که در آن نیروی محرکه الکتریکی

۱. هاینریش هرتز در سال ۱۸۸۷ نشان داد که بر اثر نوسان جریان در مدار الکتریکی ماکروسکوپیکی، امواج الکترومغناطیسی تولید می‌شود. بسامد این امواج در حدود 10^6 دور بر ثانیه، متناظر با طول موج 30 سانتی‌متر بود. اگر چه نظریه ماکسول، که ۱۵ سال قبل از آن گسترش یافته بود، تردیدی باقی نمی‌گذاشت که نور پدیده‌ای الکترومغناطیسی است. آزمایشهای هرتز نقطه عطف بارزی در تاریخ الکترومغناطیس است.



شکل ۵-۸ یک مدار دارای القایدگی که با نیروی محرکه القایی متناوب به کار می‌افتد.

ناشی از تغییر میدان مغناطیسی روی تمام سطحی است که مدار در برمی‌گیرد. مانند مورد معادله ۶۱-۷، مجموع افت پتانسیل در اجزای مختلف این مدار را برای نیروی محرکه الکتریکی \mathcal{E} قرار می‌دهیم. بنابراین معادله جریان به صورت زیر درمی‌آید

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (18)$$

اکنون برحسب شرایط اولیه، یعنی اینکه چگونه و چه وقت مولد را روشن کنیم، ممکن است رفتار گذرا وجود داشته باشد. اما فقط به حالت مانا علاقه‌مندیم که در آن جریان با دامنه و فاز لازم برای صادق بودن معادله ۱۸ با بسامد نیروی محرک نوسان می‌کند. برای نشان دادن امکان این مطلب، جریان زیر را در نظر بگیرید

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (19)$$

برای تعیین ثابتهای I_0 و φ ، آن را در معادله ۱۸ قرار می‌دهیم:

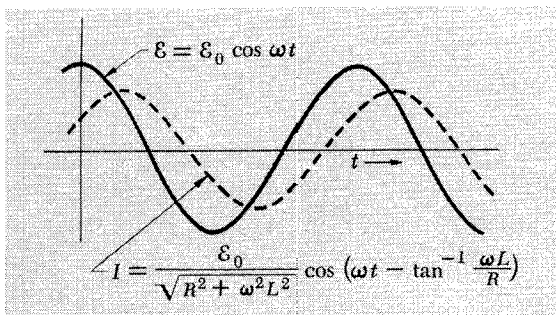
$$-LI_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) + RI_0 \cos(\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (20)$$

توابع $\sin \omega t$ و $\cos \omega t$ را می‌توان جدا کرد:

$$\begin{aligned} & -LI_0 \omega (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) \\ & + RI_0 (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (21) \end{aligned}$$

با قرار دادن ضرایب $\sin \omega t$ و $\cos \omega t$ برابر صفر خواهیم داشت

$$-LI_0 \omega \cos \varphi - RI_0 \sin \varphi = 0 \quad (22)$$



شکل ۶-۸ جریان I در مدار شکل ۵-۸، که همراه با نیروی محرکه الکتریکی \mathcal{E} روی یک محور زمان رسم شده‌اند. به اختلاف فاز توجه کنید.

که نتیجه می‌دهد

$$\tan \varphi = -\frac{\omega L}{R} \quad (23)$$

$$-LI_0 \omega \sin \varphi + RI_0 \cos \varphi - \mathcal{E}_0 = 0 \quad (24)$$

که نتیجه می‌شود

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R \cos \varphi - \omega L \sin \varphi} \quad (25)$$

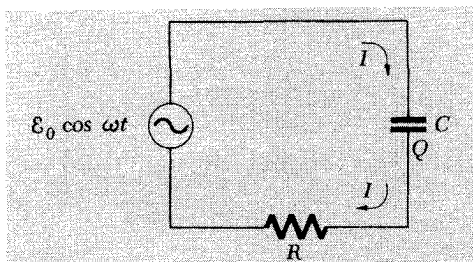
$$= \frac{\mathcal{E}_0}{R(\cos \varphi + \sin \varphi \tan \varphi)} = \frac{\mathcal{E}_0 \cos \varphi}{R}$$

و چون

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (\text{از معادله } 23) \quad (26)$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (27)$$

در شکل ۶-۸ نوسانهای \mathcal{E} و I روی یک نمودار رسم شده‌اند. چون φ زاویه‌ای منفی است، جریان اندکی پس از نیروی محرکه الکتریکی پیشینه می‌شود. می‌گوییم ”در یک مدار القایی جریان از ولتاژ عقب می‌افتد“. کمیت ωL را که دارای بُعد مقاومت است، و می‌توان آن را برحسب اهم بیان کرد، واکنشی القایی می‌نامند.



شکل ۷-۸ یک نیروی محرکه الکتریکی متناوب در مداری با القایدگی و ظرفیت.

اگر به جای القاگر L خازن C را قرار دهیم، مانند شکل ۷-۸، مداری داریم که معادله آن به صورت زیر است

$$-\frac{Q}{C} + RI = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (28)$$

جواب حالت مانای زیر را در نظر بگیرید

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (29)$$

چون $I = -dQ/dt$ است، داریم

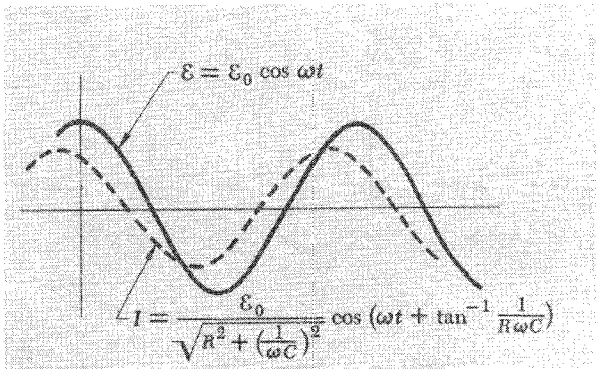
$$Q = - \int I dt = -\frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \quad (30)$$

توجه کنید که برای به دست آوردن Q با انتگرال گیری از I ، مسئله افزودن ثابت انتگرال گیری وجود ندارد، چون می دانیم که در حالت مانا Q باید حول صفر نوسان کند. قرار دادن Q در رابطه ۲۸ به رابطه زیر می انجامد

$$\frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi) + RI_0 \cos(\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (31)$$

مانند قبل، با توجه به اینکه ضرایب $\sin \omega t$ و $\cos \omega t$ باید جداگانه صفر شود، شرایط مربوط به I_0 و φ به دست می آید

$$\tan \varphi = \frac{1}{R\omega C} \quad (32)$$



شکل ۸-۸ جریان در مدار RC . انتقال فاز در اینجا را با انتقال فاز در مدار القایی شکل ۸-۶ مقایسه کنید. بیشینه I در اینجا اندکی قبل از بیشینه \mathcal{E} به وقوع می‌پیوندد.

و

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \quad (33)$$

توجه کنید که اکنون زاویه فاز مثبت است. یعنی به اصطلاح، در مدار ظرفیتی، جریان "مقدم بر ولتاژ است". معنای این گفته در شکل ۸-۸ نمایان است. به زبان ریاضی، تابع

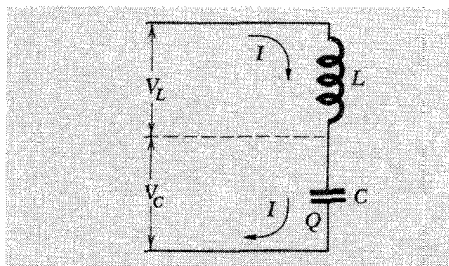
$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right) \quad (34)$$

یک انتگرال خصوصی معادله دیفرانسیل ۱۸ است. به این جواب می‌توان یک تابع مکمل، یعنی هر جواب معادله دیفرانسیل همگن زیر را اضافه کرد

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0 \quad (35)$$

اکنون، این همان معادله ۶۵ فصل ۷ است، که در بخش ۷-۹ دیدیم جواب آن به صورت یک تابع با فروافت نمایی است،

$$I \sim e^{-(R/L)t} \quad (36)$$



شکل ۹-۸ القاگر و خازن سری، معادل یک جزء واکنشی است که برحسب اینکه $\omega^2 LC$ بزرگتر یا کوچکتر از ۱ باشد، القاگر است یا خازن.

اهمیت فیزیکی این مطلب به قرار زیر است: یک جواب گذرا را، که با چند شرط اولیه مشخص می‌شود، با مؤلفهٔ نزولی $I(t)$ به صورت معادلهٔ ۳۶ نشان می‌دهند. پس از گذشت زمان $t \gg L/R$ ، این جواب از میان می‌رود و فقط جواب پایانی نوسان سینوسی با بسامد محرک باقی می‌ماند که با انتگرال خصوصی معادلهٔ ۳۴ نشان داده می‌شود.

همانندی نتیجه‌های مدار RL و RC راهی برای نگرش به القاگر و خازن سری نشان می‌دهد. فرض کنید یک جریان متناوب $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ به‌گونه‌ای از این ترکیب می‌گذرد (شکل ۹-۸). ولتاژ دو سر القاگر V_L برابر خواهد بود با

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = -I_0 \omega L \sin(\omega t + \varphi) \quad (37)$$

ولتاژ دو سر خازن، با علامتی که با V_C سازگار است، برابر است با

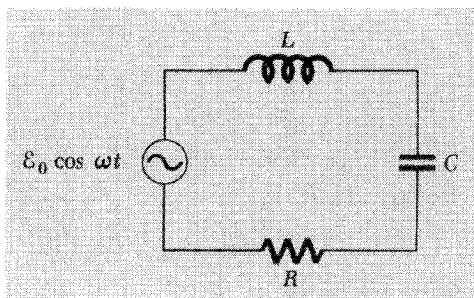
$$V_C = -\frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi) \quad (38)$$

ولتاژ دو سر ترکیب آنها به قرار زیر است

$$V = V_L + V_C = -\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (39)$$

برای هر ω معین، این ترکیب به‌موضوع معادل است با یک جزء مدار، یک القاگر یا خازن، برحسب اینکه کمیت $\omega L - 1/\omega C$ مثبت باشد یا منفی. به‌عنوان مثال، فرض کنید که $\omega L > 1/\omega C$ در این حالت ترکیب با القاگر L' هم‌ارز است، به‌طوری که

$$\omega L' = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (40)$$



شکل ۸-۱۰ مدار RLC که با یک نیروی محرکه الکتریکی سینوسی کار می‌کند.

هم‌ارزی فقط به معنای آن است که رابطه بین جریان و ولتاژ برای نوسان پایا در بسامد خاص ω یکسان است. در این صورت می‌توان برای مداری که در این بسامد کار می‌کند به جای L و C مقدار L' را قرار داد.

با استفاده از آن برای مدار RLC شکل ۸-۱۰ فقط باید جواب معادله‌های ۲۳ و ۲۷ را برای RL که با نیروی محرکه الکتریکی $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$ کار می‌کند به خاطر بیاوریم و به جای ωL مقدار $\omega L - 1/\omega C$ را قرار دهیم:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (41)$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{R\omega C} - \frac{\omega L}{R} \quad (42)$$

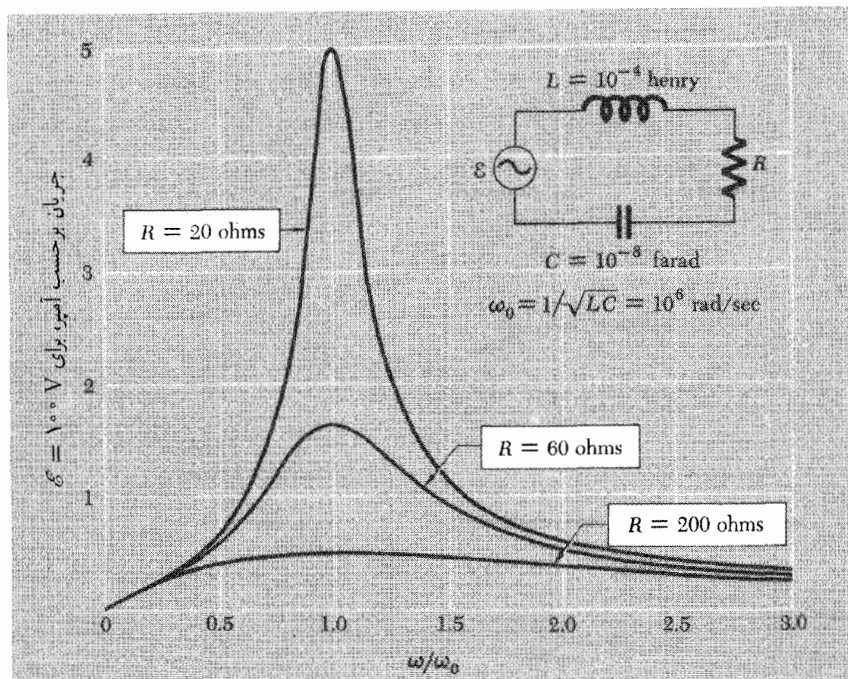
برای دامنه ثابت \mathcal{E}_0 نیروی محرکه الکتریکی، و اجزای مدار L ، C ، و R ، بیشترین جریان در بسامدی به دست می‌آید که در آن رابطه زیر برقرار باشد

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad (43)$$

مانند آن است که بگوییم $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$ که ω_0 بسامد تشدید مدار بدون میرایی است. در این مورد معادله ۴۱ به صورت زیر درمی‌آید

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 \cos \omega t}{R} \quad (44)$$

این درست جریانی است که از مدار شامل فقط یک مقاومت می‌گذرد.



شکل ۱۱-۸ یک نیروی محرکه الکتریکی با دامنه 100 ولت به مدار RLC سری اعمال می‌شود. اجزای مدار همان اجزای مدار میرای شکل ۴-۸ هستند. دامنه جریان از معادله ۴۱ محاسبه و برحسب ω/ω_0 برای سه مقدار مختلف مقاومت رسم شده است.

به عنوان مثال، مدار شکل ۴-۸ الف را در نظر بگیرید که اکنون فقط به چشمه یا مولد نیروی محرکه الکتریکی $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ متصل شده است. بسامد محرک ω ممکن است با بسامد تشدید $\omega = 1/\sqrt{LC}$ تفاوت داشته باشد، که برای خازن معین (11° رادیان بر ثانیه) و القایدگی (100° میکروهنری) برابر است با 10^6 رادیان بر ثانیه (یا $2\pi/10^6$ دور بر ثانیه). شکل ۱۱-۸ دامنه جریان نوسانی برحسب بسامد محرک ω را، برای سه مقدار مختلف مقاومت مدار R ، نشان می‌دهد. دامنه نیروی محرکه الکتریکی در هر مورد 100 ولت است. توجه کنید که قله تشدید در $\omega = \omega_0$ برای کمترین مقدار مقاومت از همه تیزتر و بارزتر است. این همان مقاومت R است که برای آن، در حالت یک نوسانگر میرا بدون هیچ نیروی محرکه الکتریکی emf ، مدار رفتار شکل ۴-۸ ب را داشت. Q ی مدار، که از معادله ۱۴ به صورت L/R تعریف می‌شود، در این L/R ω^* برابر

* ω در معادله ۱۴ بسامد نوسانگر میرایی بود که نوسان آن آزادانه از میان می‌رفت، که برای میرایی متوسط یا ضعیف عملاً با ω یکی است. در اینجا ω در تعریف Q استفاده می‌کنیم. در بحث فعلی ما ω هر بسامدی است که برای استفاده در مدار برمی‌گزینیم.

است با $20/(10^6 \times 10^{-4})$ ، یا ۵. به طور کلی، هر چه مقدار Q ی یک مدار بیشتر باشد، قلهٔ پاسخ آن برحسب بسامد محرک ω باریکتر و بلندتر است. به طور دقیقتر، بسامدهایی را در همسایگی ω_0 ، به صورت $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ ، در نظر بگیرید. در این صورت در تقریب اول $\Delta\omega/\omega_0$ ، $\omega L - 1/\omega C$ در مخرج معادلهٔ ۱۴ را می‌توان به صورت تقریبی زیر نوشت:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) - \frac{1}{\omega_0 C (1 + \Delta\omega/\omega_0)} \quad (45)$$

و چون ω_0 برابر است با $1/\sqrt{LC}$ ، این رابطه به صورت زیر درمی‌آید

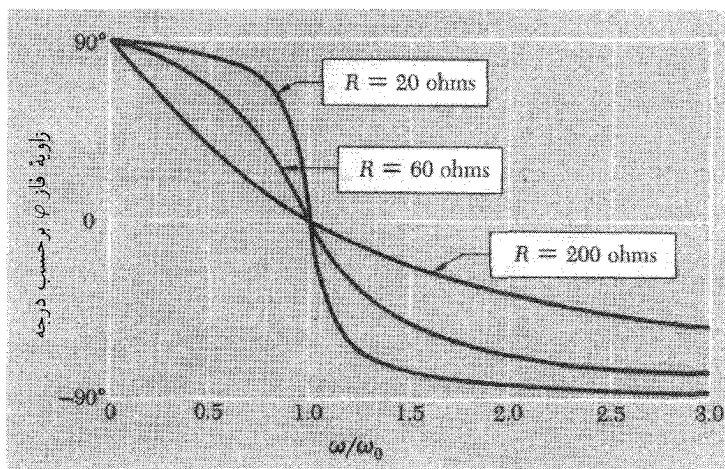
$$\omega_0 L \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} - \frac{1}{1 + \Delta\omega/\omega_0} \right) \approx \omega_0 L \left(2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \quad (46)$$

درست در حالت تشدید، کمیت زیر رادیکال در معادلهٔ ۴۱ برابر R^2 می‌شود. با دور شدن از تشدید کمیت زیر رادیکال در R ، $|\omega L - 1/\omega C| = R$ ، یا وقتی تقریباً رابطهٔ زیر برقرار باشد، دو برابر می‌شود.

$$\frac{2|\Delta\omega|}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q} \quad (47)$$

که به معنای آن است که دامنهٔ جریان در $1/2Q$ $|\Delta\omega/\omega_0|$ به $1/\sqrt{2}$ مقدار قله افت می‌کند. این نقطه‌ها را نقطه‌های “نیم-توان” می‌گویند، زیرا انرژی یا توان، به طوری که در بخش ۸-۵ خواهیم گفت، با مجذور دامنه متناسب است. معمولاً عرض قلهٔ تشدید را با عرض میان نقطه‌های نیم-توان بیان می‌کنند. روشن است که این درست $1/Q$ برابر خود بسامد تشدید است. مدارهای با Q ی بسیار بیشتر از این کاملاً متداول‌اند. در یک گیرندهٔ رادیو با استفاده از مدار تشدید با Q ی برابر چند صد می‌توان یک ایستگاه خاص را در میان ایستگاه‌های مختلف برگزید. ساختن مدارهای تشدید میکروموج با Q برابر 10^4 یا حتی 10^5 بسیار راحت است.

زاویهٔ φ ، که فاز نسبی نوسانهای جریان و نیروی محرکهٔ الکتریکی را بیان می‌کند، با بسامد مطابق شکل ۸-۱۲ تغییر می‌کند. در بسامدهای بسیار کم خازن مانع اصلی عبور جریان و φ مثبت است. در حالت تشدید $\varphi = 0$ است. هر چه Q بزرگتر باشد، φ با تجاوز بسامد از ω_0 سریعتر از مثبت به منفی منتقل می‌شود.

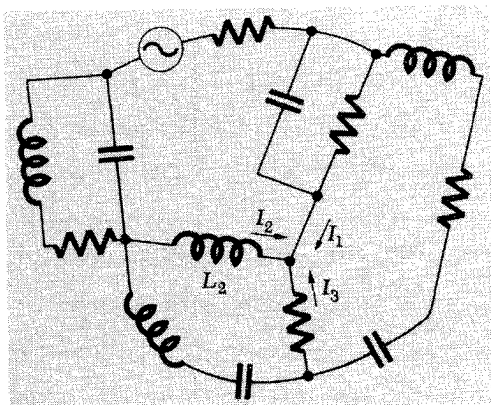


شکل ۸-۱۲ تغییر زاویه فاز برحسب بسامد در مدار شکل ۸-۱۱.

۳-۸ شبکه‌های جریان متناوب

یک شبکه جریان متناوب، هر مجموعه‌ای از مقاومتها، خازنها و القاگرهاست که در آن جریان با بسامد ثابت ω نوسان می‌کند. یک نیروی محرکه الکتریکی یا بیشتر عامل نوسان در این بسامد است. شکل ۸-۱۳ نمودار چنین مداری است که چشمه نیروی محرکه الکتریکی را با نماد Ⓢ نشان می‌دهد. در شاخه‌ای از این شبکه، مثلاً در شاخه‌ای که حاوی القاگر L_2 است، تغییر جریان برحسب زمان به صورت زیر است

$$I_2 = I_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (48)$$



شکل ۸-۱۳ یک شبکه جریان متناوب.

چون بسامد کل شبکه ثابت است، دو عدد مانند دامنه I_0 و ثابت فاز φ در رابطه بالا، برای تعیین جریان در یک شاخه خاص در هر زمان کافی است. همین طور، ولتاژ دو سر یک شاخه با دامنه و فاز معین نوسان می‌کند

$$V_2 = V_0 \cos(\omega t + \theta_2) \quad (49)$$

اگر جریانها و ولتاژها را در تمام شاخه‌های یک شبکه تعیین کرده باشیم، آن را کاملاً تجزیه و تحلیل کرده‌ایم. پیدا کردن آنها، البته با تشکیل و حل همه معادله‌های دیفرانسیل مربوطه امکان پذیر است، و اگر رفتار گذرای شبکه مورد نظر باشد، می‌توان چنین کاری را انجام داد. برای حالت پایا در بسامد معین ω ، می‌توان از روش بسیار ساده‌تر و زیباتری استفاده کرد. اساس این روش دو فرض زیر است

۱. یک جریان یا ولتاژ متناوب را می‌توان با یک عدد مختلط نشان داد.

۲. هر شاخه یا جزء مدار در بسامد معین، با رابطه بین ولتاژ و جریان در آن شاخه مشخص

می‌شود.

در اولین فرض از اتحاد ریاضی جالب توجه زیر استفاده می‌شود

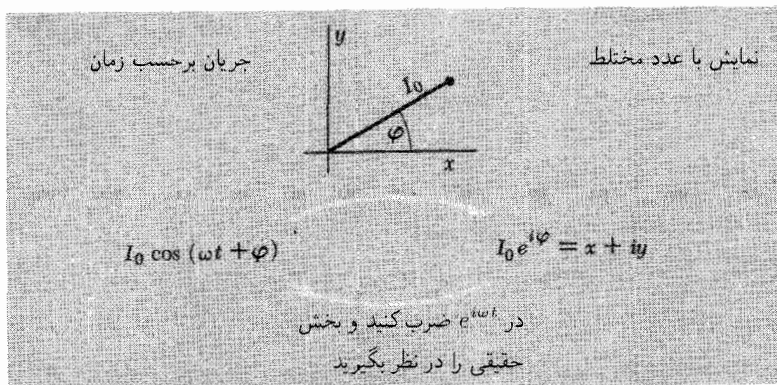
$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (50)$$

که $i^2 = -1$. برای این کار از قاعده نمایش زیر استفاده می‌کنیم:

جریان متناوب $I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ را با عدد مختلط $I_0 e^{i\varphi}$ نشان می‌دهیم، یعنی عددی که بخش حقیقی آن $I_0 \cos \varphi$ و بخش موهومی آن $I_0 \sin \varphi$ است. به عبارت دیگر، اگر عدد مختلط $x + iy$ نمایانگر جریان I باشد، تغییرات جریان برحسب زمان بخش حقیقی حاصلضرب $(x + iy)e^{i\omega t}$ است.

شکل ۸-۱۴ یادآور این مطابقت دوسویه است. چون عدد مختلط $z = x + iy$ را می‌توان به کمک نمودار بر یک صفحه دوبعدی نشان داد، مجسم کردن ثابت فاز به صورت زاویه $\tan^{-1} y/x$ و دامنه I_0 ، به صورت قدرمطلق $\sqrt{x^2 + y^2}$ راحت است.

آنچه این کار را مفید می‌سازد. واقعیت زیر است: نمایش مجموع دو جریان برابر است با مجموع نمایشهای آنها. دو جریان I_1 و I_2 را در نظر بگیرید که در پیوندگاه سیمهای شکل ۸-۱۳



شکل ۸-۱۴ قاعده‌های نمایش جریان متناوب با یک عدد مختلط.

به یکدیگر می‌پیوندند. در هر لحظه از زمان t مجموع جریانها برابر است با

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_2 &= I_{01} \cos(\omega t + \varphi_1) + I_{02} \cos(\omega t + \varphi_2) \\
 &= (I_{01} \cos \varphi_1 + I_{02} \cos \varphi_2) \cos \omega t \\
 &\quad - (I_{01} \sin \varphi_1 + I_{02} \sin \varphi_2) \sin \omega t
 \end{aligned} \tag{۵۱}$$

از طرف دیگر، مجموع اعداد مختلط، که بر طبق قاعدهٔ ما با I_1 و I_2 نمایش داده شده‌اند، برابر است با

$$\begin{aligned}
 I_{01} e^{i\varphi_1} + I_{02} e^{i\varphi_2} &= (I_{01} \cos \varphi_1 + I_{02} \cos \varphi_2) \\
 &\quad + i(I_{01} \sin \varphi_1 + I_{02} \sin \varphi_2)
 \end{aligned} \tag{۵۲}$$

اگر طرف راست معادلهٔ ۵۲ را در $\cos \omega t + i \sin \omega t$ ضرب کنید، و بخش حقیقی حاصلضرب را در نظر بگیرید، درست چیزی را به دست می‌آورید که در طرف راست معادلهٔ ۵۱ وجود دارد. یعنی، به جای اضافه یا کم کردن خود توابع دوره‌ای زمان، می‌توان اعداد مختلطی را اضافه یا کم کرد که معرف آنهاست. یا به عبارت دیگر، جبر جریانهای متناوب از لحاظ جمع کردن آنها با یکدیگر با جبر اعداد مختلط یکسان است. این مطابقت شامل ضرب نمی‌شود. عدد مختلط $I_{01} I_{02} e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ نشاندهندهٔ حاصلضرب دو تابع جریان در معادلهٔ ۵۱ نیست.

اما در تجزیه و تحلیل شبکه، فقط باید جریانها و ولتاژها را با هم جمع کنیم. به عنوان مثال، در محل برخورد I_1 با I_2 در شکل ۸-۱۳، شرط فیزیکی در هر لحظه از زمان آن است که

جریان خالص در پیوندگاه صفر باشد. بنابراین شرط

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (53)$$

باید برقرار باشد، که در آن I_1 ، I_2 و I_3 توابع دوره‌ای واقعی زمان هستند. با توجه به مطابقت موجود، می‌توان این رابطه را با گزارهٔ جبری ساده‌ای بیان کرد که می‌گوید مجموع سه عدد مختلط برابر صفر است. همین عمل را می‌توان برای ولتاژها انجام داد. مجموع افت ولتاژهای لحظه‌ای در هر حلقهٔ شبکه باید برابر نیروی محرکهٔ الکتریکی حلقه در آن لحظه باشد. به جای این شرط که توابع ولتاژ دوره‌ای را به هم مربوط می‌کند، می‌توان یک حکم در مورد اعداد مختلطی را قرار داد که نشان‌دهندهٔ توابع نوسانی $V_1(t)$ ، $V_2(t)$ و غیره هستند.

۴-۸ رسانایی ظاهری و امپدانس

ارتباط بین جریان در یک جزء مدار و ولتاژ دو سر آن را می‌توان با رابطهٔ بین اعداد مختلط معرف ولتاژ و جریان نشان داد. به ترکیب القاگر-مقاومت شکل ۵-۸ نگاه کنید. نوسان ولتاژ با \mathcal{E}_0 و جریان با $I_0 e^{i\varphi}$ نشان داده شده است، که در آن $I_0 = \mathcal{E}_0 / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ و $\tan \varphi = -\omega L / R$ است. اختلاف فاز φ ، و نسبت دامنهٔ جریان به دامنهٔ ولتاژ از ویژگیهای مدار در این بسامد است. عدد مختلط Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{با} \quad \varphi = \tan^{-1} \left(-\frac{\omega L}{R} \right) \quad (54)$$

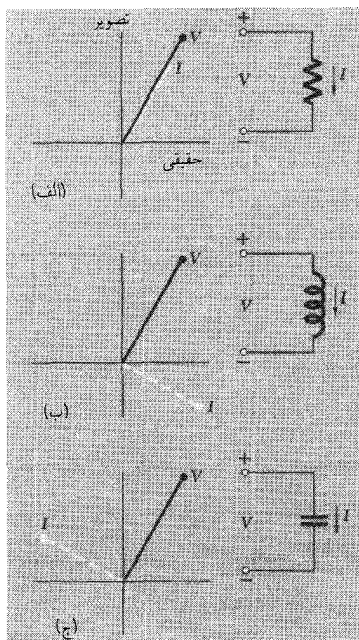
در این صورت رابطهٔ زیر برقرار است

$$I = YV \quad (55)$$

که در آن V عدد مختلطی است که ولتاژ دو سر ترکیب سری R و L را نشان می‌دهد و I عدد مختلط معرف جریان است. Y را رسانایی ظاهری می‌نامند. همین رابطه را می‌توان با عکس Y بیان کرد، که با Z نشان داده می‌شود و امپدانس خوانده می‌شود:

$$V = \left(\frac{1}{Y} \right) I = ZI \quad (56)$$

در اینجا از حاصلضرب دو عدد مختلط استفاده می‌کنیم، اما فقط یکی از اعداد نشان‌دهندهٔ جریان یا ولتاژ متناوب است. عدد دیگر امپدانس یا رسانایی ظاهری است. بنابراین جبری را






شکل ۸-۱۵ و I و V اعداد مختلطی هستند که ولتاژ دو سر یک جزء مدار و جریانی را که از آن می‌گذرد نشان می‌دهند. فاز نسبی نوسان جریان و ولتاژ در اینجا به صورت زاویهٔ میان "بردارها" نشان داده شده است. (الف) در مقاومت جریان و ولتاژ همفازند. (ب) در القاگر، جریان از ولتاژ عقب است. (ج) در خازن جریان مقدم بر ولتاژ است.

به کار می‌بریم که شامل دو دسته اعداد مختلط است، مثلاً اعدادی که معرف امپدانسها هستند و اعدادی که جریانش را نشان می‌دهند. حاصلضرب دو "عدد امپدانس" مانند حاصلضرب دو "عدد جریان" معرف چیزی نیست.

امپدانس برحسب اهم اندازه‌گیری می‌شود. در واقع، اگر مدار فقط از مقاومت R تشکیل شده باشد، امپدانس حقیقی و به سادگی برابر R است، به طوری که معادلهٔ ۵۶ مانند قانون اهم برای مدار جریان مستقیم است؛ $V = RI$.

رسانی ظاهری یک القاگر بدون مقاومت برابر است با کمیت موهومی $Y = -i/\omega L$. این را می‌توان با صفر کردن R در معادلهٔ ۵۴ دید. ضریب $-i$ نشان می‌دهد که نمایش جریان به اندازهٔ $\pi/2$ از نوسان ولتاژ عقب است. در نمودار عدد مختلط، اگر ولتاژ را با V نشان دهیم (شکل ۸-۱۵ ب)، جریان را می‌توان با I به صورتی نشان داد که در شکل آمده است. برای خازن، $Y = i\omega C$ ، همان طور که در بیان جریان شکل ۸-۱۸ آمده است. در این مورد ارتباط بین V و I به صورتی است که در شکل ۸-۱۵ ج نشان داده شده است. در هر تصویر چگونگی تعیین علامت نسبی V و I مشخص شده است. در صورتی که این کار به طور سازگار انجام نشود، هرگونه تقدم و تأخیر بی معنی است. توجه کنید که همواره جهت جریان مثبت را چنان تعیین می‌کنیم که با اعمال ولتاژ مثبت به یک مقاومت، جریان مثبت حاصل شود (شکل ۸-۱۵ ج).

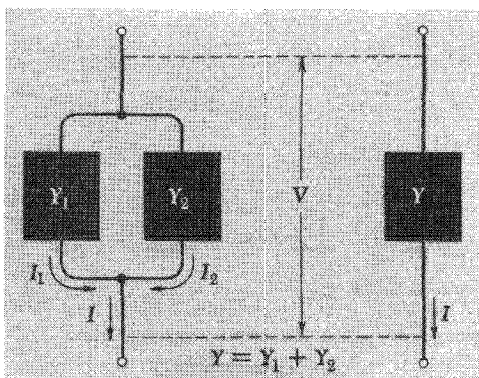
ویژگیهای سه جزء مدار بنیادی در زیر خلاصه شده است.

امپدانس $Z = \frac{V}{I}$	رسانایی ظاهری، Y	نماد
R	$\frac{1}{R}$	
$i\omega L$	$\frac{-i}{\omega L}$	
$\frac{-i}{\omega C}$	$i\omega C$	
$V = ZI$	$I = YV$	

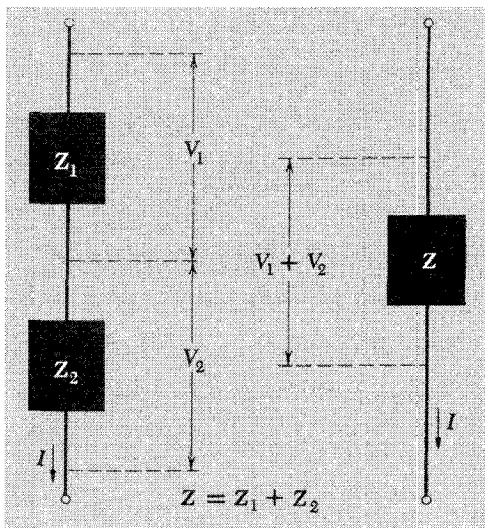
می‌توان با استفاده از این اجزاء هر مداری را ساخت. وقتی اجزاء یا ترکیبی از آنها به صورت موازی به هم متصل شده باشند، استفاده از رسانایی ظاهری راحت‌تر است، زیرا در این حالت رساناییهای ظاهری با هم جمع می‌شوند. در شکل ۸-۱۶ دو جعبه سیاه با رساناییهای ظاهری Y_1 و Y_2 به طور موازی به هم متصل شده‌اند. در این صورت

$$I = I_1 + I_2 = Y_1 V + Y_2 V = (Y_1 + Y_2) V \quad (57)$$

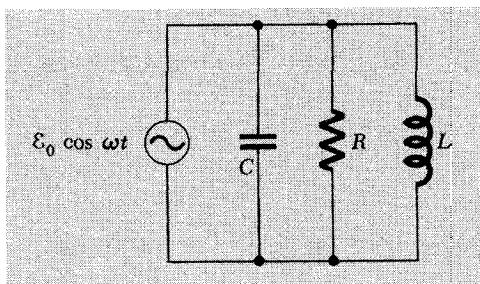
که نشان می‌دهد تک جعبه سیاه دارای رسانایی ظاهری معادل $Y = Y_1 + Y_2$ است. شکل ۸-۱۷ به روشنی نشان می‌دهد برای اجزایی که به طور سری به هم متصل شده‌اند، امپدانسها با هم جمع می‌شود. درست مثل اینکه در مورد شبکه جریان مستقیم صحبت می‌کنیم! در واقع اکنون مسئله شبکه ac به مسئله شبکه dc تبدیل شده است، فقط با این تفاوت که با اعداد مختلط سروکار داریم.



شکل ۸-۱۶ ترکیب موازی رساناییهای ظاهری.



شکل ۸-۱۷ ترکیب سری امیدانسها.



شکل ۸-۱۸ یک مدار تشدید موازی. مانند معادله ۵۸ رسانیی ظاهری مختلط سه جزء را با هم جمع کنید.

به عنوان مثال، بگذارید به مدار "موازی RLC" شکل ۸-۱۸ نگاه کنیم. ترکیب رسانیی ظاهری سه شاخه موازی برابر است با

$$Y = \frac{1}{R} + i\omega C - \frac{i}{\omega L} \quad (58)$$

ولتاژ به سادگی \mathcal{E}_0 است، به طوری که جریان مختلط برابر است با

$$I = YV = \mathcal{E}_0 \left[\frac{1}{R} + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right] \quad (59)$$

دامنه نوسان جریان قدرمطلق عدد مختلط I و برابر است با $\mathcal{E}_0 \left[\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 \right]^{1/2}$ و زاویه فاز $\tan^{-1}(R\omega C - R/\omega L)$ است.

به این روش فقط می‌توان با اجزای مدار خطی کار کرد، یعنی اجزایی که در آن جریان با ولتاژ متناسب است. به عبارت دیگر، مدار را باید بتوان با معادلهٔ دیفرانسیل خطی توصیف کرد. برای یک جزء غیرخطی حتی نمی‌توان امیدانس تعریف کرد. اجزای غیرخطی مدار ابزارهایی مهم و جالب توجه‌اند. اگر با آنها در آزمایشگاه کار کرده باشید، می‌توانید ببینید که چرا تسلیم این نوع تجزیه و تحلیل نمی‌شوند.

این تمام چیزی است که در مورد نوسان پیوسته در بسامد ثابت پیشگویی کردیم. رفتار گذرای مدار مسئله‌ای دیگر است. اما، برای مداری خطی، ابزارهایی را که اکنون به‌وجود آورده‌ایم، حتی برای حالت‌های گذرا، کاربرد دارند. علت آن است که رفتار غیر پایا را می‌توان با برهم‌نهی نوسانهای پایا با بسامدهای مختلف نشان داد، و پاسخ به هر یک از این بسامدها را می‌توان مانند حالتی محاسبه کرد که تنها آن بسامد وجود دارد.

۵-۸ توان و انرژی در مدارهای جریان متناوب

اگر ولتاژ دو سر مقاومت R برابر $V_0 \cos \omega t$ باشد، جریان برابر است با $I = (V_0 / R) \cos \omega t$. توان لحظه‌ای، یعنی آهنگ لحظه‌ای اتلاف انرژی در مقاومت، برابر است با

$$P = RI^2 = \frac{V_0^2}{R} \cos^2 \omega t \quad (60)$$

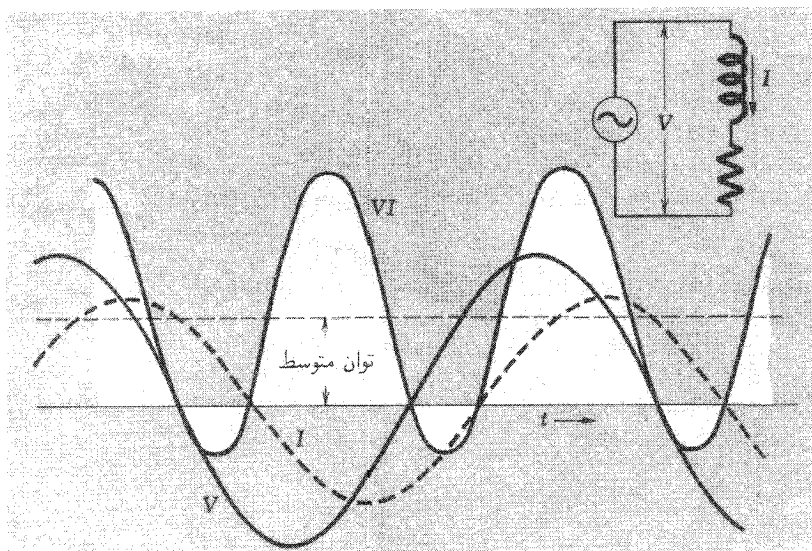
چون میانگین $\cos^2 \omega t$ روی چرخه‌های بسیار برابر است با $1/2$ ، میانگین توان تلف شده در مدار برابر است با

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} \quad (61)$$

معمولاً ولتاژ و جریان در مدارهای ac را نه با دامنه، که با $1/\sqrt{2}$ ضربدر دامنه نشان می‌دهند. این مقدار را اغلب ریشهٔ میانگین مربعی (rms) می‌نامند. وجود عامل $1/2$ در معادلهٔ ۶۱ بدین علت است، به‌طوری که

$$\bar{P} = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} \quad (62)$$

به‌عنوان مثال، ولتاژ متداول خطوط انتقال نیرو در امریکای شمالی 120° ولت است، که با دامنهٔ $120\sqrt{2}$ متناظر است. اختلاف پتانسیل بین پایه‌های پریز برق در اتاق شما (اگر ولتاژ برابر مقدار



شکل ۸-۱۹ توان لحظه‌ای VI آهنگ انتقال انرژی از چشمه نیروی محرکه الکتریکی در سمت چپ مدار به اجزای طرف راست است. میانگین زمانی این مقدار با خط چین افقی نشان داده شده است.

متداول باشد) برابر است با

$$V(t) = 170 \cos 377t \quad (۶۳)$$

که در آن V برحسب ولت و t برحسب ثانیه است. یک آمپرسنج ac طوری مدرج شده است که وقتی دامنه برابر 1414 را آمپراست مقدار 1 آمپر را نشان دهد.

به طور کلی، آهنگ لحظه‌ای تحویل جریان به یک جزء مدار VI ، حاصلضرب ولتاژ و جریان لحظه‌ای، با در نظر گرفتن علامت است. این جنبه عبور جریان در مدار ساده LR شکل ۸-۵ را در نظر بگیرید. در شکل ۸-۱۹ نمودارهای جریان و ولتاژ را مجدداً رسم کرده‌ایم و در ضمن یک منحنی متناسب با حاصلضرب VI را به آن افزوده‌ایم. VI مثبت به معنای انتقال انرژی از چشمه نیروی محرکه الکتریکی، یا مولد، به ترکیب LR است. توجه کنید که VI در بعضی قسمتهای چرخه منفی است. در این دوره‌ها مقداری انرژی به مولد منتقل می‌شود. این موضوع را می‌توان با نوسان انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی القاگر توجیه کرد. انرژی ذخیره شده، $1/2 LI^2$ ، در هر چرخه دو بار بیشینه می‌شود.

توان میانگین \bar{P} با خط چین افقی متناظر است. برای محاسبه مقدار آن، بگذارید حاصلضرب VI را با $V = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ و $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} VI &= \mathcal{E}_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) \\ &= \mathcal{E}_0 I_0 (\cos^2 \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \omega t \sin \varphi) \end{aligned} \quad (64)$$

با نوشتن جمله متناسب با $\cos \omega t \sin \omega t$ به صورت $\frac{1}{2} \sin 2\omega t$ روشن است که میانگین زمانی آن صفر می‌شود، در حالی که میانگین $\cos^2 \omega t$ برابر است با $\frac{1}{2}$. بنابراین میانگین زمانی به صورت زیر درمی‌آید

$$\bar{P} = \overline{VI} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 \cos \varphi \quad (65)$$

اگر هر دوی جریان و ولتاژ را با مقادیر rms برحسب ولت و آمپر بیان کنیم، خواهیم داشت

$$\bar{P} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \varphi \quad (66)$$

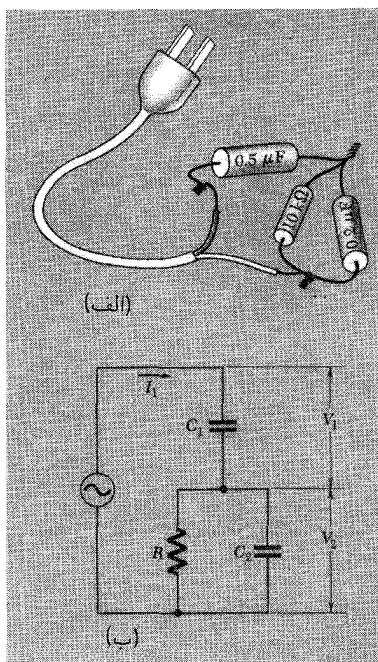
در این مدار همه انرژی تلف شده به مقاومت می‌رود. طبیعی است که هر القاگر واقعی دارای مقاومت است. به منظور تجزیه و تحلیل مدار، مقاومت القاگر را در مقاومت R ادغام کرده‌ایم. بدیهی است که گرما در محل واقعی مقاومت تولید می‌شود.

برای تمرین روشهای بخش ۸-۴، مدار شکل ۸-۲۰الف را تجزیه و تحلیل می‌کنیم. یک مقاومت 10000 اهم، 1 وات، به دو خازن $2 \mu\text{F}$ و $5 \mu\text{F}$ میکروفاراد متصل شده است. مدار به خروجی 120 ولت، 60 هرتز متصل شده است. سؤال: آیا مقاومت 1 واتى بیش از اندازه داغ می‌شود؟ در جریان یافتن اینکه آیا توان میانگین تلف شده در R از مقدار اسمی 1 وات تجاوز می‌کند، بعضی از جریانها و ولتاژهایی را محاسبه خواهیم کرد که باید در این مدار اندازه بگیریم. یک روش کار در این مدار در زیر خلاصه شده است.

$$C_T \text{ رسانایی ظاهری} = i\omega C_T = (377)(2 \times 10^{-7})i$$

$$= 0.754 \times 10^{-4} i \Omega^{-1}$$

$$\text{مقاومت رسانایی ظاهری} = \frac{1}{R} = 10^{-2} \Omega^{-1}$$



شکل ۸-۲۰ یک شبکه واقعی (الف) آماده برای اتصال به چشمه نیروی محرکه القایی، و (ب) نمودار مدار.

رسانایی ظاهری مدار $= 10^{-2}(1 + 0.754i) \Omega^{-1}$

امپدانس مدار $= \frac{1}{10^2(1 - 0.754i)}$
 $= \frac{10^2(1 + 0.754i)}{1^2 + 0.754^2}$

$= (6360 - 4800i) \Omega$

امپدانس $C_1 = -\frac{i}{\omega C} = -\frac{i}{(377)(5 \times 10^{-7})}$
 $= -5300i \Omega$

امپدانس کل مدار $= (6360 - 10100i) \Omega$

$I_1 = \frac{120}{6360 - 10100i} = \frac{120(6360 + 10100i)}{(6360)^2 + (10100)^2}$
 $= (5.27 + 8.53i) \times 10^{-2} \text{ A}$

چون از ۱۲۰° ولت استفاده کرده‌ایم که ولتاژ rms است، جریان rms را به دست می‌آوریم. یعنی قدرمطلق عدد مختلط I_1 ، جریان rms، برابر است با $۱۰^{-۲} \text{ A}$ $[(۵۳۷)^2 + (۸۵۳)^2]^{1/2} \times ۱۰^{-۲}$ یا ۱۰ mA ۱۰° . یک میلی آمپرسنج ac که به صورت سری در خط قرار گرفته است جریان ۱۰° میلی آمپر را خواهد خواند. این جریان دارای زاویه فاز $(۵۳۷/۰.۸۵۳ \text{ r}) = \tan^{-1} \varphi$ یا ۱۰° رادیان نسبت به خط ولتاژ است. میانگین توان تحویلی به مدار برابر است با

$$\bar{P} = (۱۲۰ \text{ V})(۰.۰۱۰ \text{ A}) \cos ۱۰^\circ = ۰.۶۴ \text{ W}$$

در این مدار مقاومت تنها عامل تلف کننده است، پس این مقدار باید توان تلف شده در آن باشد. برای نشان دادن آن، می‌توان ولتاژ V_2 دو سر مقاومت را به دست آورد

$$V_1 = I_1 \left(\frac{-i}{\omega C} \right) = (۵۳۷ + ۸۵۳i)(-۵۳۰^\circ i) ۱۰^{-۲}$$

$$= (۴۵۷.۲ - ۲۸۷.۴i) \text{ V}$$

$$V_2 = ۱۲۰ - V_1 = (۷۴.۸ + ۲۸۷.۴i) \text{ V}$$

البته جریان I_2 در R با V_2 همفاز است، به طوری که توان میانگین در R برابر خواهد بود با

$$\bar{P} = \frac{V_2^2}{R} = \frac{(۷۴.۸)^2 + (۲۸۷.۴)^2}{۱۰^۴} = ۰.۶۴ \text{ W} \quad (۶۷)$$

که گفته ما را تأیید می‌کند.

بنابراین از توان اسمی مقاومت فراتر نرفته‌ایم، که اطمینان از آن ارزشمند است. در واقع، داغ شدن بیش از حد مقاومت تنها به توان میانگین تلف شده در آن بستگی ندارد بلکه به اینکه مقاومت چگونه از شر این گرما خلاص شود نیز بستگی دارد. توان اسمی مقاومت فقط راهنمایی تقریبی است.

مسائل

۸-۱ خود القایی یک القاگر، برحسب هنری، چقدر باشد تا وقتی به طور سری با یک لامپ ۱۲۰° ولت، ۶۰° واتنی قرار می‌گیرد و ترکیب آنها به خط ولتاژ ۲۴۰° ولت، ۶۰° هرتز متصل می‌شود به طور عادی کار کند؟ (ابتدا واکنایی القایی لازم را تعیین کنید. می‌توانید مقاومت القاگر و خودالقایی لامپ را نادیده بگیرید.)

۲-۸ یک مقاومت 2000 اهم و یک خازن 1 میکروفاراد به صورت سری به یک خط 120° ولت (rms)، 60 هرتز متصل شده‌اند.

(الف) امپدانس این ترکیب چقدر است؟

(ب) مقدار rms جریان چقدر است؟

(ج) توان تلف شده در مدار چقدر است؟

(د) یک ولت‌سنج ac که به دو سر مقاومت متصل شده است چه چیزی را نشان می‌دهد؟

اگر به دو سر خازن متصل شود چه چیزی را نشان خواهد داد.

(ه) اگر صفحه‌های افقی یک لامپ پرتو کاتدی به دو سر مقاومت و صفحه‌های عمودی آن

به دو سر خازن متصل شود. طرحی را رسم کنید که انتظار دارید روی صفحه ببینید.

۳-۸ یک مقاومت 1000 اهم ، یک خازن 500 پیکوفاراد ، و یک القاگر 2 میلی‌هنری به طور

موازی به هم متصل شده‌اند. امپدانس این ترکیب در بسامد $10 \text{ کیلوسیکل بر ثانیه}$ چقدر است؟

در بسامد $10 \text{ مگاسیکل بر ثانیه}$ چه اندازه است؟ قدرمطلق امپدانس در چه بسامدی بیشینه

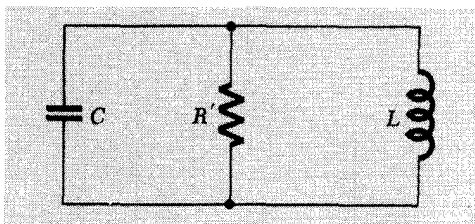
است؟

۴-۸ در مدار تشدید در شکل جزء تلف‌کننده مقاومت R' است که به جای سری به صورت

موازی به ترکیب LC متصل شده است. معادله‌ای مانند معادله ۲ برای این مدار به دست آورید.

شرایطی را نیز برای جواب مسئله مانند شرایط مدار سری RLC پیدا کنید. اگر یک مدار RLC

سری و مدار $R'LC$ موازی دارای L ، C و Q یکسان باشند، رابطه R و R' چگونه است؟



شکل مسئله ۴-۸.

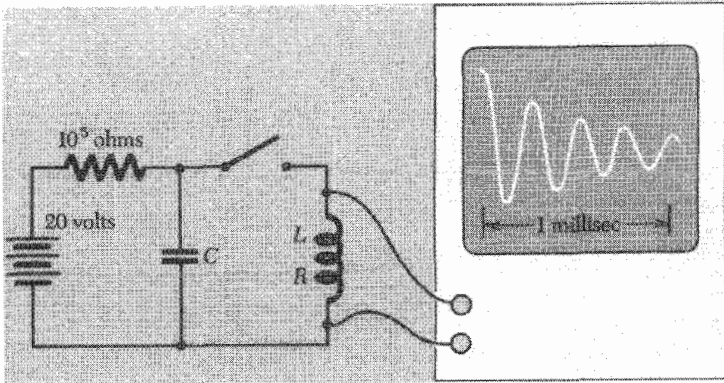
۵-۸ پیچ‌های که در نمودار نشان داده شده است دارای القایدگی 1 ر° هنری است. وقتی کلید

بسته می‌شود، جاروب اسیلوسکوپ به کار می‌افتد.

(الف) مقدار خازن C را به بهترین صورت ممکن به دست آورید.

(ب) مقدار مقاومت R پیچ را برآورد کنید.

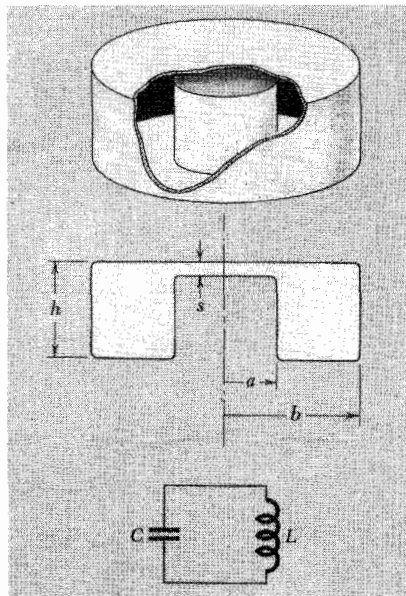
(ج) اندازه ولتاژ دو سر ورودی اسیلوسکوپ مدتی مثلاً 1 ثانیه پس از بسته شدن کلید چقدر است؟



شکل مسئله ۵-۸.

۶-۸ برای مدار شکل ۴-۸ مقدار β_1 و β_2 را برای حالت فوق میرا، با $R = 600 \Omega$ تعیین کنید. نسبت ثابتهای A و B در معادله ۱۶ را هم به دست آورید.

۷-۸ یک کاواک تشدیدی به صورتی که در شکل نشان داده شده است، بخش لازم بسیاری از نوسانگرهای میکروموج است. آن را می توان یک مدار ساده LC در نظر گرفت. القایدگی آن با



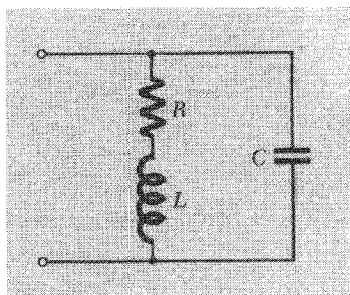
شکل مسئله ۷-۸.

چنبره‌ای با یک دور برابر است؛ این القاگر مستقیماً به خازنهای صفحه موازی متصل شده است. رابطه‌ای برای بسامد تشدید این مدار به دست آورید و طرح پیکربندی میدانهای مغناطیسی و الکتریکی را رسم کنید.

۸-۸ برای مدار میرای RLC شکل ۸-۳، رابطه‌ای برای انرژی کل ذخیره شده در مدار، انرژی در خازن به اضافه انرژی در القاگر، در هر لحظه t به دست آورید. نشان دهید که حالت میرایی بحرانی، $R = 2\sqrt{L/C}$ ، حالتی است که در آن انرژی کل با بیشترین سرعت تلف می‌شود.

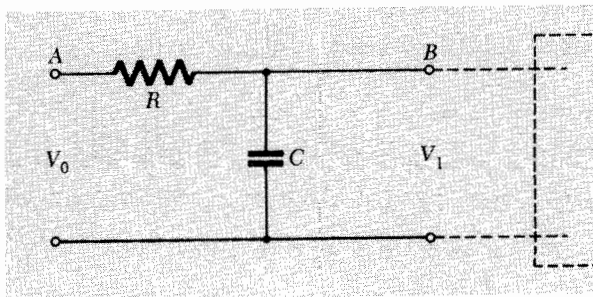
۹-۸ با استفاده از معادله‌های 10° و 13° ، اثر میرایی را بر بسامد مدار RLC سری به دست آورید. اگر $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ بسامد مدار بدون میرایی باشد. فرض کنید مقاومت کافی به مدار اضافه شده تا Q را از ∞ به 10° برساند. بسامد ω چند درصد از ω_0 منحرف می‌شود؟

۱۰-۸ آیا می‌توان بسامدی را یافت که در آن امپدانس پایانه‌های این مدار کاملاً حقیقی باشد؟



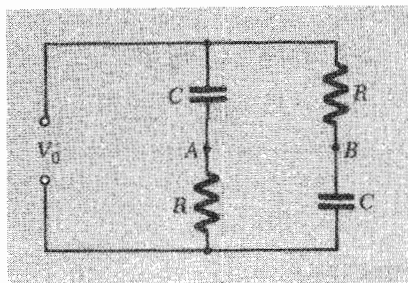
شکل مسئله ۸-۱۰.

۱۱-۸ ولتاژ متناوب $V_0 \cos \omega t$ به پایانه‌های A اعمال می‌شود. پایانه‌های B به تقویت‌کننده صوتی با امپدانس ورودی بسیار زیاد متصل شده‌اند. (یعنی، عبور جریان از تقویت‌کننده ناچیز است.) نسبت $|V_1|^2/V_0^2$ را محاسبه کنید. در اینجا $|V_1|$ قدرمطلق دامنه ولتاژ مختلط در پایانه B است. مقادیر R و C را چنان برگزینید که برای سیگنال 5000 هرتز، $|V_1|^2/V_0^2 = 0.1$ شود. این مدار ابتدایی‌ترین صافی "پایین گذر" است، که در آن میرایی با زیاد شدن بسامد افزایش می‌یابد. نشان دهید که برای بسامدهای به اندازه کافی زیاد، توان سیگنال با دو برابر شدن بسامد با ضریب $1/4$ کاهش می‌یابد. آیا می‌توانید یک صافی با قطع مؤثرتر، مثلاً با ضریب $1/16$ بر اوکتاو طراحی کنید؟



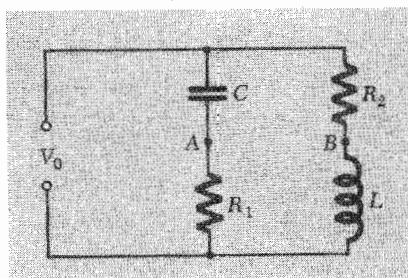
شکل مسئله ۸-۱۱.

۸-۱۲ اگر در مدار شکل $V_{AB} = V_B - V_A$ باشد. نشان دهید برای هر بسامد ω داریم $|V_{AB}|^2 = V_0^2$. بسامدی را بیابید که در آن اختلاف فاز V_{AB} و V_0 برابر 90° است.



شکل مسئله ۸-۱۲.

۸-۱۳ نشان دهید که شرط $R_1 R_2 = L/C$ برای اجزای مدار زیر صادق است، اختلاف ولتاژ بین نقطه‌های A و B در هر بسامد صفر است. دربارهٔ مناسب بودن این مدار به‌عنوان یک پل ac برای اندازه‌گیری القاپذیری مجهول بحث کنید.



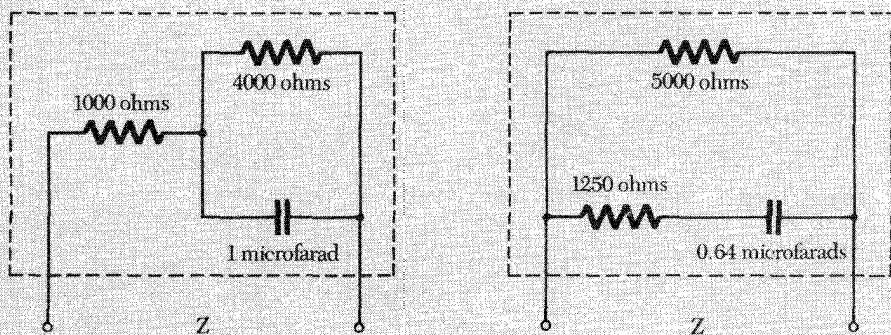
شکل مسئله ۸-۱۳.

۱۴-۸ در آزمایشگاه یک القاگر با القایدگی مجهول L و مقاومت مجهول R را می‌یابید. با استفاده از یک اهم‌سنج dc، یک ولت‌سنج ac با امپدانس زیاد، یک خازن ۱ میکروفاراد، و یک مولد سیگنال ۱۰۰۰ هرتز، R و L را به صورت زیر تعیین کنید. با توجه به اهم‌سنج R برابر ۳۵ اهم است. خازن را به صورت سری به القاگر و مولد سیگنال متصل می‌کنید. ولتاژ دو سر آنها ۱۰ر۱ ولت است. ولتاژ دو سر خازن به تنهایی ۱۵ر۵ ولت است. در بررسی متوجه می‌شوید که ولتاژ دو سر القاگر نیز به تنهایی ۲۵ر۴ ولت است. اندازه L چقدر است؟ آیا بررسی شما با این مقدار سازگار است؟

۱۵-۸ نشان دهید که امپدانس Z پایانه‌های هر یک از دو مدار زیر برابر است با

$$\frac{5000 + 16 \times 10^{-2} \omega^2 - 16i\omega}{1 + 16 \times 10^{-6} \omega^2}$$

چون این پایانه‌ها در همهٔ بسامدها امپدانس یکسانی دارند، دو جعبهٔ سیاه از خارج کاملاً هم‌ارز و غیرقابل تشخیص‌اند. ببینید آیا می‌توانید قاعده‌های کلی برای ساختن جعبهٔ سمت راست با معلوم بودن مقاومتها و خازن جعبهٔ سمت چپ به دست آورید.

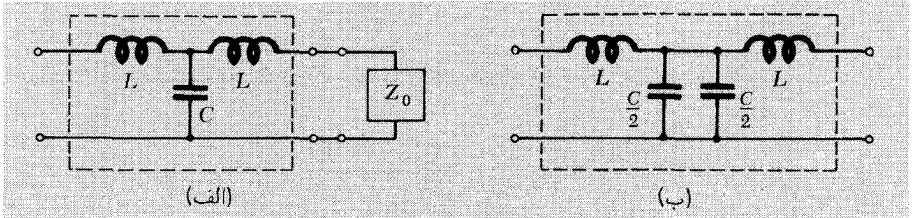


شکل مسئلهٔ ۱۵-۸.

۱۶-۸ جعبهٔ (الف) با چهار پایانه از خازن C و القاگرهای با القایدگی برابر، L ، تشکیل شده است که مطابق شکل به هم متصل شده‌اند. امپدانس Z باید به پایانه‌های سمت راست متصل شود. برای بسامد معین ω مقدار Z چقدر باشد تا امپدانس بین پایانه‌های سمت چپ (امپدانس "ورودی") برابر Z شود. می‌بینید که اگر $\omega^2 < 2/LC$ باشد، مقدار لازم Z برابر مقاومت خالص R می‌شود. زنجیره‌ای از این جعبه‌ها را می‌توان به صورت یک شبکهٔ نردبانی به هم متصل

کرد که شبیه نردبانی از مقاومت‌های مسئله ۴-۳۲ است. اگر زنجیره به مقاومتی با مقدار صحیح R_0 ختم شود، امپدانس ورودی آن در بسامد ω ، بدون توجه به تعداد جعبه‌های موجود در زنجیره، برابر R_0 خواهد بود.

Z_0 برای مورد خاص $\omega = \sqrt{2/LC}$ چقدر است؟ توجه به اینکه محتوای جعبه (الف) در این مورد را می‌توان با محتوی جعبه (ب) نیز نشان داد به درک مطلب کمک می‌کند.



شکل مسئله ۸-۱۶.

معادله‌های ماکسول و امواج الکترومغناطیسی

۹-۱ “چیزی گم شده است”

بگذارید رابطه بین بارها و میدانها را مرور کنیم. چنانکه در فصل ۲ آموختیم، گزاره هم‌ارز قانون کولن، رابطه دیفرانسیلی زیر است

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (۱)$$

که چگالی بار الکتریکی ρ و میدان الکتریکی \mathbf{E} را به هم مربوط می‌کند. این رابطه علاوه بر بارهای ساکن برای بارهای متحرک هم معتبر است. یعنی، ρ می‌تواند علاوه بر اینکه تابع مکان است، تابع زمان هم باشد. همان‌طور که در فصل ۵ تأکید کردیم، معتبر بودن معادله ۱ برای بارهای متحرک با ناوردایی بار سازگار است. بدون توجه به اینکه یک ذره باردار منزوی چگونه حرکت می‌کند، بار آن، که به‌صورت انتگرال \mathbf{E} روی سطحی اندازه‌گیری می‌شود که آن را فرا گرفته، در همهٔ چارچوبهای مرجع یکسان است.

بار الکتریکی متحرک جریان الکتریکی است. چون بار هرگز خلق و نابود نمی‌شود، چگالی

بار ρ و چگالی جریان \mathbf{J} همواره در رابطه زیر صادق‌اند

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2)$$

ابتدا این "معادله پیوستگی" را به صورت معادله ۹ در فصل ۴ نوشتیم.

اگر چگالی جریان \mathbf{J} برحسب زمان ثابت باشد، آن را توزیع جریان مانا می‌نامیم. میدان مغناطیسی یک توزیع جریان مانا در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (3)$$

با این رابطه در فصل ۶ کار کردیم.

اکنون به توزیعهای بار و میدانی علاقه مندیم که با زمان تغییر می‌کنند. فرض کنید که توزیع بار $\rho(x, y, z, t)$ با $\partial \rho / \partial t \neq 0$ موجود است. مثلاً ممکن است خازنی داشته باشیم که از طریق یک مقاومت تخلیه می‌شود. طبق معادله ۲، $\partial \rho / \partial t \neq 0$ ایجاب می‌کند که

$$\operatorname{div} \mathbf{J} \neq 0$$

اما بنابر معادله ۳، چون دیورژانس تاو هر تابع برداری همواره صفر است (مسئله ۲-۱۶)

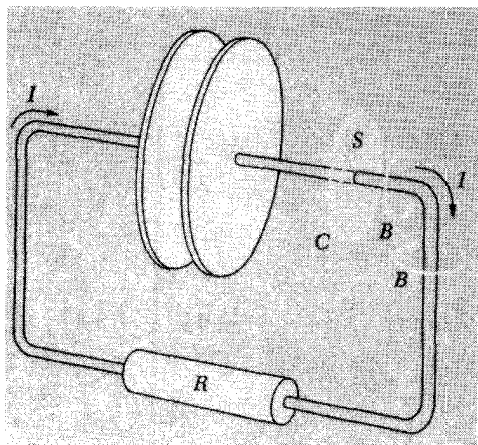
$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{B}) = 0 \quad (4)$$

این تناقض نشان می‌دهد که معادله ۳ برای سیستمی که در آن چگالی بار با زمان تغییر می‌کند نمی‌تواند درست باشد. البته، کسی مدعی درستی آن نبود؛ یک توزیع جریان مانا، که برای آن معادله ۳ معتبر است، توزیعی است که در آن نه تنها چگالی جریان \mathbf{J} ، بلکه حتی چگالی بار ρ نیز مستقل از زمان است.

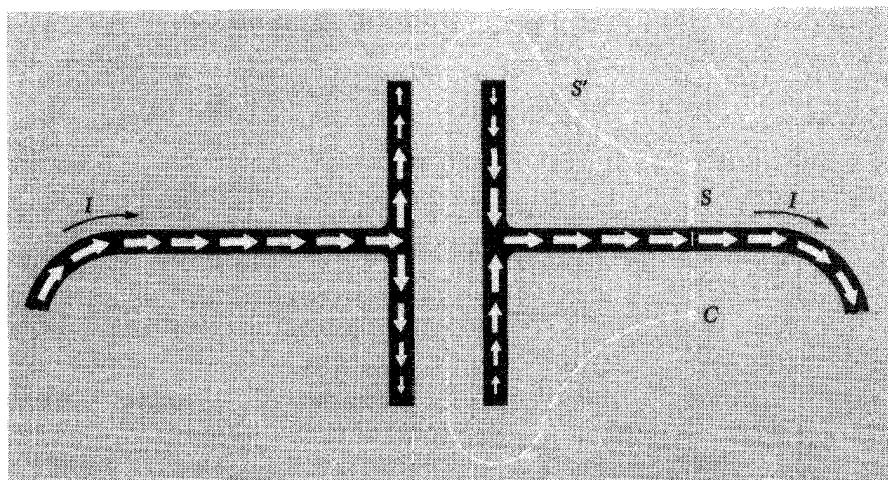
با در نظر گرفتن انتگرال خطی میدان مغناطیسی حول سیمی که بار را از صفحه خازن شکل ۹-۱ خارج می‌کند، می‌توان مسئله را به صورت دیگر مطرح کرد. بنابر قضیه استوکس

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{I} = \int_S \operatorname{curl} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (5)$$

سطح S از میان رسانایی می‌گذرد که جریان I از آن عبور می‌کند. در داخل این رسانا، $\operatorname{curl} \mathbf{B}$ مقدار محدودی، برابر $4\pi \mathbf{J}/c$ دارد، و انتگرال طرف راست برابر $4\pi I/c$ می‌شود. یعنی اگر



شکل ۹-۱ خازن، که چنان پر شده است که صفحه سمت راست مثبت است، از طریق مقاومت تخلیه می‌شود. میدان مغناطیسی \mathbf{B} اطراف سیم وجود دارد. انتگرال $\text{curl } \mathbf{B}$ روی سطح S که از سیم می‌گذرد، برابر است با $4\pi I/c$.



شکل ۹-۲ پیکانهای سفید عبور جریان در رساناها را نشان می‌دهند. از سطح S' ، که مانند سطح S خم مرز آن است، جریانی نمی‌گذرد.

خم C نزدیک به سیم و دور از شکاف خازن باشد، میدان مغناطیسی در آنجا با میدان مغناطیسی اطراف هر سیم حامل همان جریان تفاوتی ندارد. اکنون سطح S' در شکل ۹-۲ نیز سطحی است که C را فرا گرفته است، و می‌تواند مانند سطح S در بیان قضیه استوکس معادله ۵ به کار رود. اما از این سطح، هیچ جریانی نمی‌گذرد! با وجود این، $\text{curl } \mathbf{B}$ نمی‌تواند بدون نقض قضیه

استوکس روی S' صفر شود. بنابراین $\text{curl } \mathbf{B}$ ، روی S' باید به چیزی سوای چگالی جریان \mathbf{J} وابسته باشد.

فقط می‌توان نتیجه گرفت که، در حالت کلی که توزیع جریان تغییر می‌کند، باید رابطه دیگری جایگزین معادله ۳ شود. بنابراین بگذارید بنویسیم

$$\text{curl } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + (?) \quad (6)$$

و ببینیم آیا می‌توان کشف کرد که (؟) چه چیزی باید باشد.

خط فکری دیگر پاسخ را مطرح می‌کند. به خاطر داشته باشید که قانونهای تبدیل میدان مغناطیسی، معادله ۵۸ فصل ۶، برای \mathbf{E} و \mathbf{B} کاملاً متقارن هستند. حال در پدیده القای فاراده با یک میدان مغناطیسی متغیر، چنانکه در معادله ۳۰ فصل ۷ دیدیم، یک میدان الکتریکی همراه است

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7)$$

این یک رابطه محلی است که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را در فضای تهی به هم مربوط می‌کند— بارها مستقیماً دخیل نیستند. اگر تقارن نسبت به \mathbf{E} و \mathbf{B} برقرار باشد، باید انتظار داشته باشیم که میدان الکتریکی متغیر بتواند یک میدان مغناطیسی تولید کند. باید پدیده القایی مانند معادله ۷ وجود داشته باشد، که در آن نقش \mathbf{E} و \mathbf{B} عوض شده است. ثابت خواهد شد که باید علامت را هم تغییر دهیم، و این تنها کار لازم است:

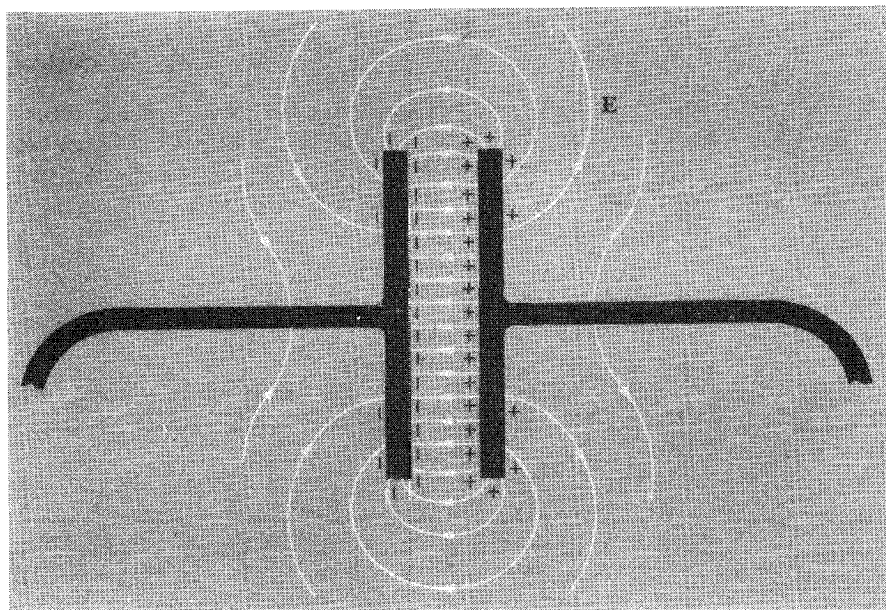
$$\text{curl } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (8)$$

این همان جمله گمشده معادله ۶ است که جستجو می‌کردیم. برای امتحان آن، می‌نویسیم

$$\text{curl } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (9)$$

و دیوژرانس دو طرف را می‌گیریم:

$$\text{div}(\text{curl } \mathbf{B}) = \text{div} \left(\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \right) + \text{div} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (10)$$



شکل ۹-۳ میدان الکتریکی در یک لحظه معین. اندازه E با گذشت زمان کم می‌شود.

چنانکه قبلاً دیدیم، طرف چپ الزاماً صفر است. در جمله دوم طرف راست می‌توانیم ترتیب مشتق‌گیری نسبت به مختصات فضا و زمان را عوض کنیم. پس

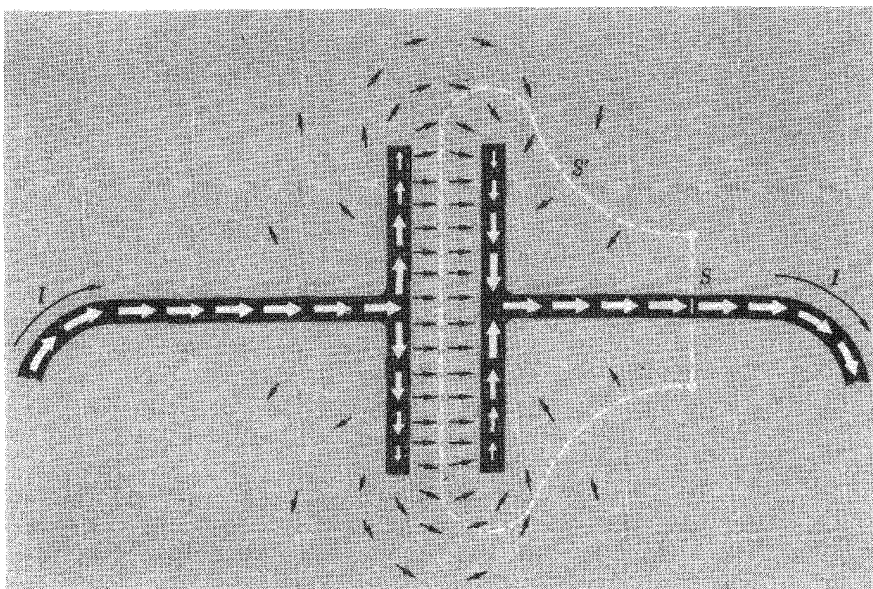
$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{E}) = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (11)$$

با توجه به معادله ۱ طرف راست معادله ۱۰ اکنون به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (12)$$

با توجه به شرط پیوستگی معادله ۲ صفر است.

جمله جدید مشکل شکل ۹-۲ را حل می‌کند. با خارج شدن بار از خازن، شدت میدان الکتریکی، که در هر لحظه دارای پیکربندی شکل ۹-۳ است کم می‌شود. در این مورد $\partial \mathbf{E} / \partial t$ در جهت مخالف \mathbf{E} است. تابع برداری $(1/c)(\partial \mathbf{E} / \partial t)$ با پیکانهای سیاه در شکل ۹-۴ نشان داده شده است. با $\operatorname{curl} \mathbf{B} = (4\pi/c)\mathbf{J} + (1/c)\partial \mathbf{E} / \partial t$. اکنون انتگرال $\operatorname{curl} \mathbf{B}$ روی S' همان مقدار انتگرال روی سطح S است. بر روی S' جمله دوم شامل همه چیز است؛ بر روی S جمله اول، جمله شامل \mathbf{J} ، عملاً چیزی است که اهمیت دارد.



شکل ۹-۴ جریان رسانش (پیکانهای سفید) و جریان جابه‌جایی (پیکانهای سیاه).

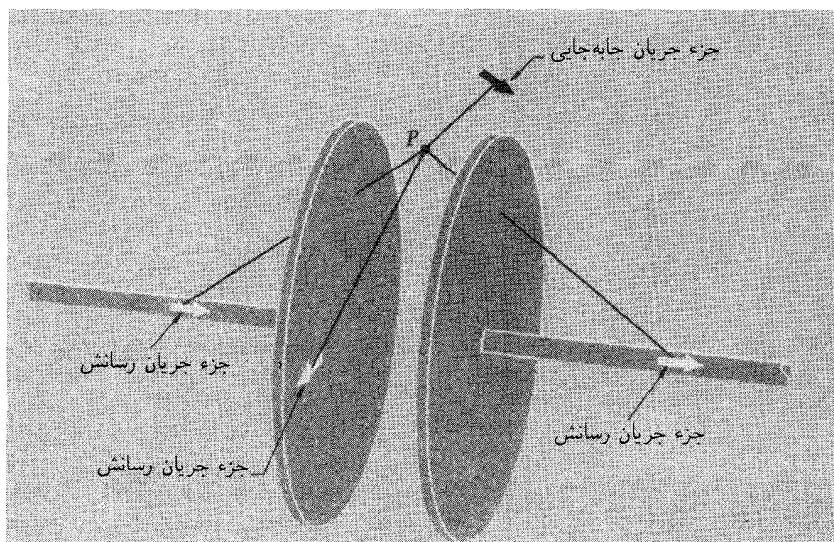
۹-۲ جریان جابه‌جایی

توجه کنید که به نظر می‌رسد میدان برداری $(\partial \mathbf{E} / \partial t) / c$ ادامه‌توزیع جریان رسانش است. ماکسول آن را جریان جابه‌جایی نامید، و این نام باقی‌مانده است، اگر چه دیگر چندان مناسب به نظر نمی‌رسد. برای دقت بیشتر، می‌توان چگالی جریان جابه‌جایی \mathbf{J}_d را تعریف کرد تا بتوان آن را از چگالی جریان رسانش \mathbf{J} تمیز داد، با نوشتن معادله ۸۴ بدین صورت داریم

$$\text{curl } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{J} + \mathbf{J}_d) \quad (13)$$

که $\mathbf{J}_d \equiv (\gamma / 4\pi) (\partial \mathbf{E} / \partial t)$

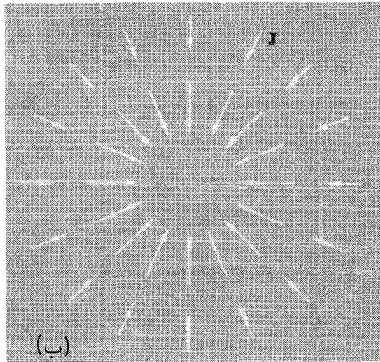
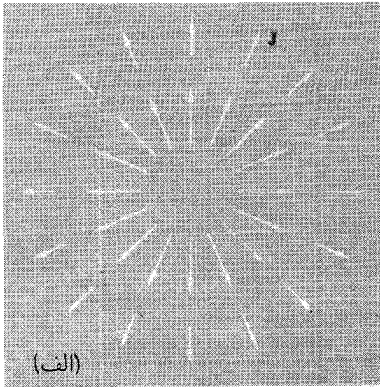
هنگامی که جریان رسانش برحسب زمان تغییر می‌کند برای سازگاری رابطه بین جریان و میدان مغناطیسی با معادله پیوستگی به جمله جدیدی نیاز داشتیم. این جمله، وجود اثر القایش جدیدی را ایجاب می‌کند که در آن به میدان الکتریکی متغیر یک میدان مغناطیسی وابسته بود. اگر این اثر واقعی است، چرا فاراده آن را کشف نکرد؟ یک دلیل آن است که وی در جستجوی آن نبود، اما دلیل بنیادی‌تری وجود دارد که چرا آزمایشگرانی مانند فاراده نتوانستند هیچ اثر جدیدی را آشکار کنند که بتوان آن را به جمله آخر معادله ۹ نسبت داد. در هر دستگاهی که میدانهای



شکل ۹-۵ برای جریانهایی که به‌کندی تغییر می‌کنند، سهم کل جریان در میدان مغناطیسی در هر نقطه از جریانهای جابه‌جایی صفر است. میدان مغناطیسی در P را می‌توان با استفاده از فرمول بیوساوار به‌دست آورد که فقط در مورد جزء جریانهای رسانش اعمال شود.

الکتریکی متغیر وجود داشته باشد، همزمان با آن جریانهای رسانش، بارهای متحرک، نیز وجود دارد. تنها چیزی که انتظار دارید این جریانهای رسانش تولید کنند میدان مغناطیسی B ، همه جا در اطراف دستگاه است. در واقع این درست میدانی است که محاسبه می‌کنید. اگر این واقعیت را نادیده بگیرد که مدارها ممکن است پیوسته نباشند، و از فرمول بیوساوار، معادله ۳۸ فصل ۶، برای یافتن سهم هر جزء جریان رسانش در میدان هر نقطه‌ای از فضا استفاده کنید.

به‌عنوان مثال، نقطه P در فضای بین صفحات خازن در حال تخلیه را در نظر بگیرید (شکل ۹-۵). هر جزء جریان رسانش در سیمها و روی سطح صفحه‌ها، بنابر فرمول بیوساوار در میدان در نقطه P شرکت دارد. آیا باید اجزای چگالی جریان جابه‌جایی J_d را هم در نظر بگیریم؟ پاسخ نسبتاً تعجب‌آور است. می‌توان J_d را در نظر گرفت؛ اما اگر دقت کنیم تا همه توزیع جریان جابه‌جایی را به حساب آوریم، اثر خالص آن برای میدانهایی که به‌کندی تغییر می‌کنند صفر است. برای اینکه ببینیم چرا چنین است، توجه کنید که تابع برداری J_d که با پیکانهای سیاه در شکل ۹-۴ مشخص شده‌اند، همان شکل میدان الکتریکی E در شکل ۹-۳ را دارد. میدان الکتریکی عملاً یک میدان الکتروستاتیکی است، بجز اینکه به‌کندی از میان می‌رود. بنابراین، انتظار داریم که ناو آن عملاً صفر باشد، که ایجاب می‌کند $\text{curl } J_d$ عملاً صفر شود. به‌طور دقیقتر، داریم



شکل ۹-۶ این شکل نشان می‌دهد که منظورمان از توزیع جریان شعاعی چیست. چگالی جریان \mathbf{J} برای چشمه نقطه‌ای در (الف)، و یا برای "چاهک" نقطه‌ای در (ب) مانند میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای است. هر توزیع جریان با $\text{curl } \mathbf{J} = 0$ را می‌توان از برهم‌نهی این چشمه و چاهکها ساخت، و در نتیجه میدان مغناطیسی آن صفر است.

$\text{curl } \mathbf{E} = (-1/c)(\partial \mathbf{B} / \partial t)$ و با جریان جابه‌جایی $\mathbf{J}_d = (1/4\pi)(\partial \mathbf{E} / \partial t)$ ، با تغییر ترتیب مشتق‌گیری خواهیم داشت

$$\text{curl } \mathbf{J}_d = \frac{1}{4\pi} \text{curl} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\text{curl } \mathbf{E}) = -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (14)$$

که برای تغییرات به اندازه کافی کند میدان می‌توان آن را نادیده گرفت. می‌توان میدانی را که به‌کندی تغییر می‌کند شبه-ایستا نامید. حال اگر \mathbf{J}_d میدان برداری بدون تاو باشد، این میدان را می‌توان همانند میدان الکتروستاتیکی که از میدان بارهای نقطه‌ای تشکیل می‌شود، از برهم‌نهی جریانهای شعاعی که از چشمه‌های نقطه‌ای خارج می‌شوند و یا به سوی "چاهکهای" نقطه‌ای می‌روند ساخت (شکل ۹-۶). اما میدان مغناطیسی هر توزیع جریان شعاعی متقارن هر طور که محاسبه

شود، با توجه به تقارن آن باید صفر شود. زیرا در هیچ جا، بجز جهت شعاعی، جهت یکتایی وجود ندارد.

در میدان جریانهای شبه-ایستا، جریانهای رسانش تنها چشمه‌های لازم برای میدان مغناطیسی هستند. به عبارت دیگر، اگر فاراده چیزی مانند شکل ۹-۵ ترتیب داده بود، و می‌توانست میدان مغناطیسی را در P ، مثلاً با استفاده از یک عقربه اندازه بگیرد، متعجب نمی‌شد. او نیازی به جریان جابه‌جایی برای توجیه آن نداشت.

برای مشاهده این اثر القایش، به میدانهایی نیازمندیم که به سرعت تغییر کنند. در واقع، باید تغییرات در زمانی صورت گیرد که طول می‌کشد تا نور از دستگاه عبور کند. بدین سبب نمایش مستقیم آن در زمان هرتز انجام شد، که سالها پس از آن بود که ماکسول قانون آن را به دست آورد.

۳-۹ معادله‌های ماکسول

جیمز کلارک ماکسول (۱۸۳۱-۱۸۷۹)، پس از عذر بسیار در گزارش پژوهشهای الکتریکی فاراده، به فرمولبندی ریاضی نظریه‌ای برای الکتریسیته و مغناطیس پرداخت. ماکسول نمی‌توانست از نسبییت استفاده کند—این نظریه ۵۰ سال بعد پیشنهاد شد—ساختمان الکتریکی ماده هنوز یک معما بود، و گمان نمی‌رفت که بین نور و الکترومغناطیس ارتباطی وجود داشته باشد. بسیاری از بحثهایی که برای روشن کردن گام بعدی کرده‌ایم در آن زمان غیر قابل تصور بود. با وجود این، با توسعه نظریه ماکسول، جمله‌ای که درباره‌اش بحث می‌کردیم، $\partial \mathbf{E} / \partial t$ ، به‌طور طبیعی در فرمولبندی او ظاهر شد. وی آن را جریان جابه‌جایی نامید. ماکسول علاوه بر میدانهای الکتریکی در خلأ، به میدان الکتریکی اجسام جامد نیز علاقه‌مند بود، و هنگامی که درباره جریان جابه‌جایی صحبت می‌کند اغلب بارهای متحرک را نیز در نظر می‌گیرد. این نکته را در فصل ۱۰ که به میدانهای الکتریکی در ماده می‌پردازیم روشن خواهیم کرد. ماکسول خود فضا را هم ملایی متشکل از "اتر"، می‌دانست به طوری که حتی در نبود ماده جامد، جریان جابه‌جایی در چیزی به وقوع می‌پیوست. اما مانعی ندارد—معادله‌های ریاضی او کاملاً واضح و بدون ابهام بودند، و وارد کردن جریان جابه‌جایی یک کشف نظری تراز اول بود.

توصیف ماکسول از میدان الکترومغناطیسی اساساً کامل بود. ما از راههای متفاوت به قسمتهای مختلف آن رسیده‌ایم، و اکنون آنها را طوری گردآوری می‌کنیم که به‌طور سنتی معادله‌های ماکسول خوانده می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \text{curl } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
 \text{curl } \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\
 \text{div } \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\
 \text{div } \mathbf{B} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{۱۵-الف}$$

این معادله‌ها برای میدانهای موجود در خلأ در حضور چگالی بار ρ و جریان الکتریکی، یعنی بارهای متحرک با چگالی \mathbf{J} نوشته شده‌اند.

اولین معادلهٔ قانون القایش فاراده است. دومین معادله رابطهٔ میدان مغناطیسی با چگالی جریان جابه‌جایی، یا آهنگ تغییر میدان الکتریکی، و چگالی جریان رسانش یا حرکت بار را بیان می‌کند. معادلهٔ سوم با قانون کولن هم‌ارز است. بنابر معادلهٔ چهارم بجز جریانها چشمهٔ دیگری برای میدانهای مغناطیسی وجود ندارد. دربارهٔ این سیمای طبیعت در فصل ۱۱ بیشتر بحث خواهیم کرد.

توجه کنید که بی‌تقارنی این معادله‌ها، نسبت به \mathbf{B} و \mathbf{E} به حضور بار الکتریکی و جریان رسانش الکتریکی بستگی کامل دارد. در فضای تهی، جمله‌های شامل ρ و \mathbf{J} صفرند و معادله‌های ماکسول به صورت زیر در می‌آیند

$$\begin{aligned}
 \text{curl } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{div } \mathbf{E} &= 0 \\
 \text{curl } \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \text{div } \mathbf{B} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{۱۶}$$

در اینجا جملهٔ مربوط به جریان جابه‌جایی تنها چیزی است که اهمیت دارد. حضور آن، همراه با جملهٔ همتایش در معادلهٔ اول، امکان وجود امواج الکترومغناطیسی را ایجاب می‌کند. با تشخیص آن ماکسول نظریهٔ الکترومغناطیسی نور را به صورت موفقیت‌آمیزی گسترش داد.

برحسب یکاهای SI معادله‌های ماکسول به صورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{curl } \mathbf{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} \\ \text{div } \mathbf{E} &= \varepsilon_0 \rho \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (15\text{-b})$$

در مورد یکاها یادآور می‌شود که E برحسب ولت بر متر، B برحسب تسلا، ρ برحسب کولن بر مترمکعب، و J برحسب آمپر بر مترمربع است. در این معادله‌ها c ظاهر نمی‌شود. اما اگر جمله‌های مربوط به بار و جریان را از معادله‌های ۱۵-ب حذف کنیم و آنچه باقی می‌ماند را با معادله‌های ماکسول (۱۶) مربوط به فضای تهی مقایسه کنیم. روشن می‌شود که c باید در ثابت $\varepsilon_0 \mu_0$ نهفته باشد. در واقع $1/c^2 = \varepsilon_0 \mu_0$ ، روش به‌دست آوردن مقدار دقیق ε_0 در پیوست و بیان شده است.

۹-۴ یک موج الکترومغناطیسی

می‌خواهیم یک میدان الکترومغناطیسی ساده تولید کنیم که معادله‌های ماکسول برای فضای تهی، معادله‌های ۱۶، در آن صدق کند. فرض کنید یک میدان الکتریکی \mathbf{E} ، همه جا موازی با \hat{z} ، وجود دارد که شدت آن فقط به مختصه فضایی y و زمان بستگی دارد. رابطه آن را با مختصات به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

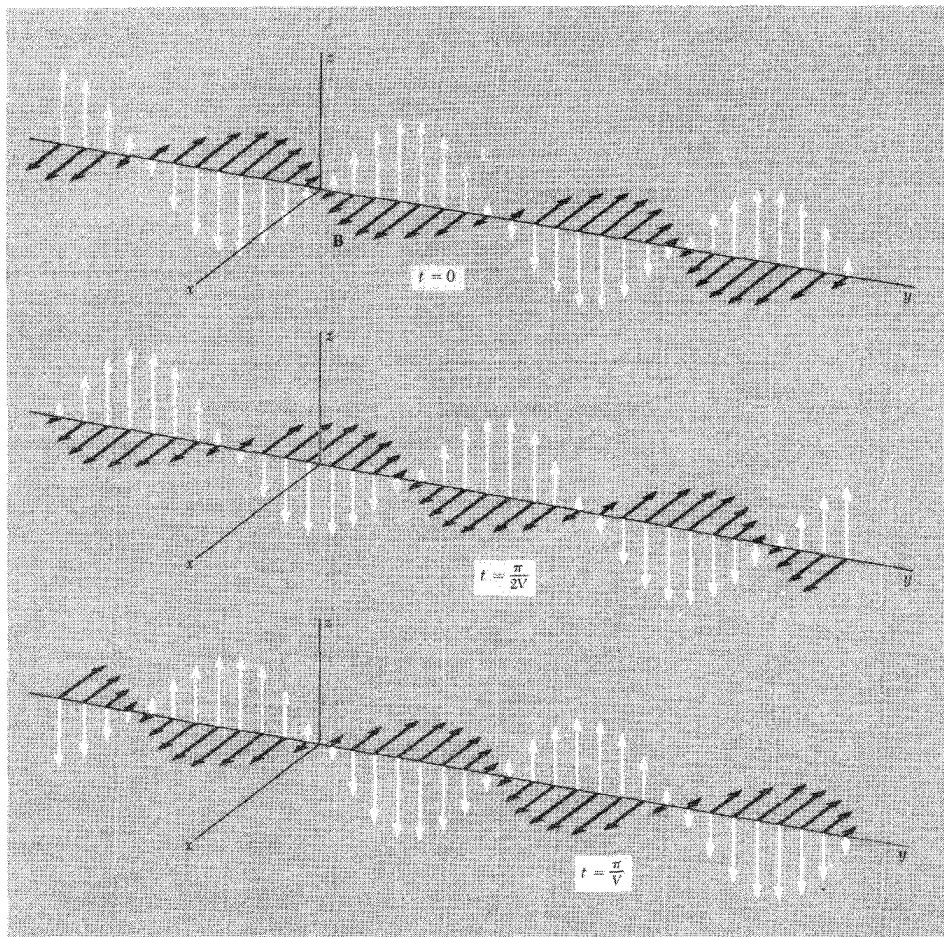
$$\mathbf{E} = \hat{z} E_0 \sin(y - vt) \quad (17)$$

که در آن E_0 و v مقادیری ثابت‌اند. این میدان همه فضا را پر کرده است — لااقل همه فضایی را که اکنون با آن سروکار داریم. به یک میدان مغناطیسی هم نیازمندیم. فرض می‌کنیم که این میدان فقط دارای مؤلفه x است، و رابطه آن با y و t مشابه E است:

$$\mathbf{B} = \hat{x} B_0 \sin(y - vt) \quad (18)$$

که در آن B_0 یک ثابت دیگر است.

شکل ۹-۷ می‌تواند به تجسم این میدانها کمک کند. نمایش دو تا از میدانها که همه فضا



شکل ۷-۹ موجی که با معادله‌های ۱۷ و ۱۸ توصیف می‌شود در سه زمان مختلف نشان داده شده است. این موج در جهت مثبت محور y به طرف راست حرکت می‌کند.

را پر کرده باشد به کمک نمودار دشوار است. به خاطر داشته باشید که چیزی برحسب n و یا $\tilde{\omega}$ تغییر نمی‌کند؛ هر چیزی که در نقطه‌ای روی محور y روی دهد در همه جای صفحه عمودی که از آن نقطه می‌گذرد به وقوع می‌پیوندد. با گذشت زمان طرح کامل میدان، به واسطه شکل خاص شناسه تابع سینوسی معادله‌های ۱۷ و ۱۸، به طور مداوم به راست می‌لغزد. برای این شناسه، مقدار $y - vt$ در $y + \Delta y$ و $t + \Delta t$ ، در صورتی که $\Delta y = v\Delta t$ باشد، همان مقدار y و t است. به عبارت دیگر، در اینجا یک موج تخت داریم که با سرعت ثابت v در جهت \hat{y} حرکت می‌کند. اکنون نشان می‌دهیم که اگر بعضی شرایط برقرار باشد، این میدان الکترومغناطیسی در

معادله‌های ماکسول صدق می‌کند، بدیهی است که برای این میدان $\text{div } \mathbf{E}$ و $\text{div } \mathbf{B}$ هر دو صفر است. سایر مشتق‌های دخیل عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{E} &= \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial E_z}{\partial y} = \hat{\mathbf{x}} E_0 \cos(y - vt) \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -v \hat{\mathbf{z}} E_0 \cos(y - vt) \\ \text{curl } \mathbf{B} &= -\hat{\mathbf{z}} \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\hat{\mathbf{z}} B_0 \cos(y - vt) \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -v \hat{\mathbf{x}} B_0 \cos(y - vt) \end{aligned} \quad (19)$$

با قرار دادن در دو معادله "القایش" ۱۶ و حذف عامل مشترک، $\cos(y - vt)$ ، درمی‌یابیم که باید شرایط زیر برقرار باشد،

$$B_0 = \frac{v E_0}{c} \quad \text{و} \quad E_0 = \frac{v B_0}{c} \quad (20)$$

که روی هم رفته ایجاب می‌کند که

$$B_0 = E_0 \quad \text{و} \quad v = \pm c \quad (21)$$

اکنون می‌دانیم که امواج الکترومغناطیسی باید دارای مشخصات زیر باشند:

۱. طرح میدان با سرعت c حرکت می‌کند. در حالت $v = -c$ این موج در جهت مخالف، یا جهت $-\hat{\mathbf{y}}$ در حرکت است. وقتی ماکسول در سال ۱۸۶۲ (از راهی دشوارتر) به این نتیجه رسید، ثابت c در معادله‌های وی فقط رابطه‌ای بین کمیت‌های الکتریکی را بیان می‌کرد که در آزمایش با خازنها، پیچ‌ها، و مقاومتها به دست آمده بود. بدون شک، ابعاد این ثابت همان ابعاد سرعت بود، اما هنوز متوجه ارتباط آن با سرعت نور نشده بودند. سرعت نور را فیزواندکی پیش از آن در سال ۱۸۵۷ اندازه گرفته بود. ماکسول نوشت "سرعت امواج عرضی در محیط فرضی ما، که از آزمایش‌های الکترومغناطیسی کولروش و وبر محاسبه شده است توافقی چنان با سرعت نور که از آزمایش‌های اپتیکی فیزو محاسبه شده است دارد، که به سختی می‌توانیم از این نتیجه‌گیری اجتناب کنیم که "نور از نوسانهای عرضی همان محیطی تشکیل شده است که باعث پدیده‌های الکتریکی و مغناطیسی می‌شود." جمله‌های ایرنیک از ماکسول است.

۲. در هر نقطه موج در هر لحظه از زمان، شدت میدان الکتریکی و مغناطیسی برابر است. B در دستگاه یکاهای CGS برحسب گاوس و E برحسب ایستاولت بر سانتی‌متر بیان می‌شوند، اما بعد B و E یکی است و این یکاها هم‌ارزند. اگر شدت میدان الکتریکی 10° ایستاولت بر سانتی‌متر باشد، شدت میدان مغناطیسی وابسته به آن 10° گاوس است.

۳. میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی بر یکدیگر و بر جهت حرکت، یا انتشار عمود هستند. بدون شک، در مثال خود این فرض را کرده‌ایم، اما نشان دادن لزوم این شرط مشکل نیست، به شرطی که میدانها به مختصات عمود بر جهت انتشار بستگی نداشته باشند. توجه کنید که اگر $v = -c$ باشد، که در این صورت جهت انتشار $-\hat{y}$ است. باید $B_0 = -E_0$ باشد. این موضوع، دستورگی جهت‌های سه‌گانه لازم یعنی جهت \mathbf{E} ، جهت \mathbf{B} ، و جهت انتشار را حفظ می‌کند. بدین طریق می‌توان آن را بدون ارجاع به چارچوب مرجع خاص بیان کرد: موج همواره در جهت بردار $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ حرکت می‌کند.

هر موج الکترومغناطیسی تخت در فضای تهی دارای این سه ویژگی است.

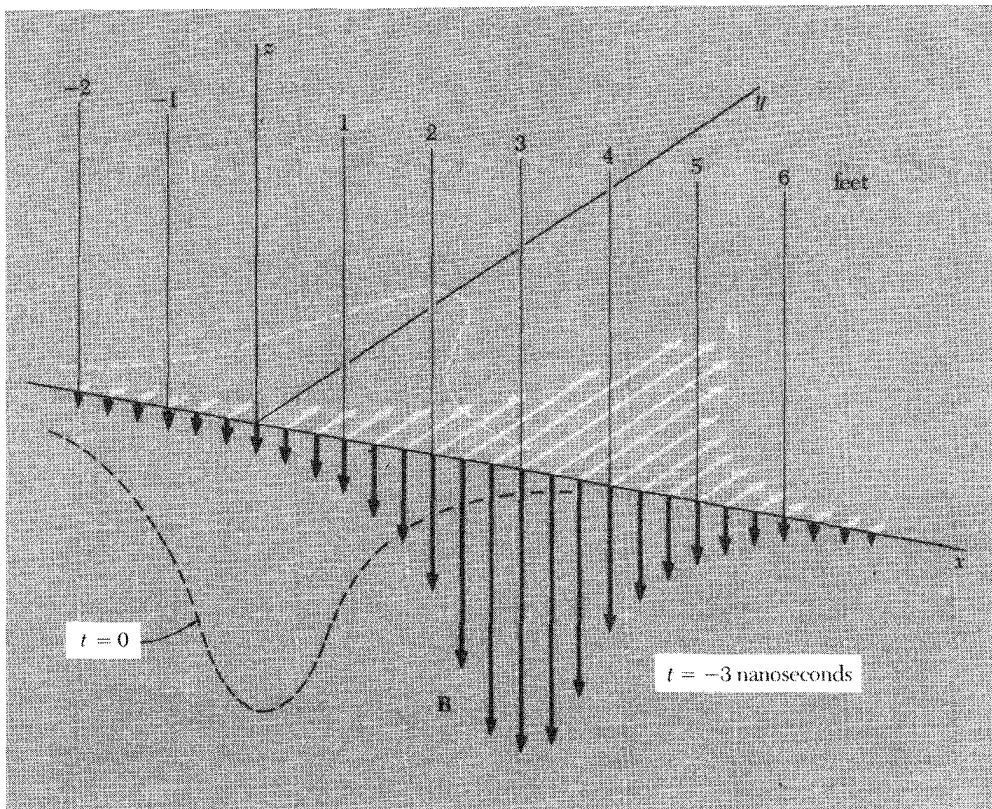
۵-۹ موج‌دیسسه‌های دیگر؛ برهم‌نهی امواج

در مثالی که مطالعه کردیم، تابع $\sin(y - vt)$ را فقط به خاطر سادگی آن برگزیدیم. "موجی بودن" تابع سینوسی هیچ ارتباطی با ویژگی اساسی حرکت موجی نداشت، که انتشار پایدار یک شکل یا طرح—هر طرحی است، آنچه سبب انتشار طرح می‌شود، سرشت تابع نیست بلکه چگونگی ترکیب y و t در شناسه آن است. اگر هر تابع دیگر $f(y - vt)$ را جایگزین تابع سینوسی می‌کردیم، طرحی به دست می‌آوردیم که با سرعت v در جهت \hat{y} حرکت می‌کرد. به علاوه، می‌توان مانند قبل از معادله‌های 2° استفاده کرد، و موج ما سه ویژگی را که بیان کردیم خواهد داشت.

یک مثال دیگر، موج الکترومغناطیسی تخت در شکل ۹-۸ است، که به صورت ریاضی زیر بیان می‌شود

$$\mathbf{E} = \frac{\delta \hat{y}}{\sqrt{1 + (x + ct)^2}} \quad \mathbf{B} = \frac{-\delta \hat{z}}{\sqrt{1 + (x + ct)^2}} \quad (22)$$

این میدان الکترومغناطیسی که در معادله‌های ماکسول، معادله‌های ۱۶، صادق است. یک موج تخت است زیرا چیزی به y یا z بستگی ندارد. این موج با توجه به علامت $+$ در شناسه $x + ct$ در جهت $-\hat{x}$ حرکت می‌کند. این در واقع جهت $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ است. در این موج چیزی نوسان نمی‌کند و تناوب ندارد؛ بلکه فقط یک تب الکترومغناطیسی با دنباله‌های بلند است. در زمان $t = 0$ ناظری



شکل ۸-۹ موجی که با معادله ۲۲ بیان شده است در جهت منفی محور x حرکت می‌کند. این موج ۳ نانوثانیه پیش از اینکه قله‌اش از مبدأ بگذرد نشان داده شده است.

که در مبدأ یا هر نقطه‌ی دیگر روی صفحه‌ی yz است، بیشینه‌ی شدتهای میدان $E = 5 \text{ statV/cm}$ و $B = 5 \text{ G}$ را تجزیه می‌کند. در شکل ۸-۹ میدان را در $t = -3 \text{ ns}$ نشان داده‌ایم، و فاصله‌های برحسب فوت است (سرعت نور تقریباً یک فوت بر نانوثانیه است).

معادله‌های ماکسول برای \mathbf{E} و \mathbf{B} در فضای تهی خطی است. برهم‌نهی دو جواب نیز یک جواب معادله است. هر تعداد امواج الکترومغناطیسی می‌توانند بدون تأثیر بر یکدیگر در یک محیط منتشر شوند. میدان \mathbf{E} ، در یک نقطه‌ی فضا زمان جمع برداری میدانهای الکتریکی تک‌تک موجها است، این برای \mathbf{B} نیز صادق است.

یک مثال مهم، برهم‌نهی دو موج تخت یکسان است که در جهت‌های مختلف حرکت می‌کنند. یک موج را در نظر بگیرید که در جهت \hat{y} حرکت می‌کند و با رابطه‌ی زیر داده شده است

$$\mathbf{E}_\lambda = \hat{\mathbf{z}}E_0 \sin \frac{\gamma\pi}{\lambda}(y - ct) \quad \mathbf{B}_\lambda = \hat{\mathbf{x}}E_0 \sin \frac{\gamma\pi}{\lambda}(y - ct) \quad (23)$$

این موج با مثال اول ما فقط تفاوتی اندک دارد. در آن λ ی تابع دوره‌ای را وارد کرده‌ایم، و دامنه میدان مغناطیسی را صرفاً مساوی دامنه میدان الکتریکی قرار داده‌ایم. اکنون موج دیگری را در نظر بگیرید:

$$E_\gamma = \hat{\mathbf{z}}E_0 \sin \frac{\gamma\pi}{\lambda}(y + ct) \quad B_\gamma = -\hat{\mathbf{x}}E_0 \sin \frac{\gamma\pi}{\lambda}(y + ct) \quad (24)$$

این یک موج با همان دامنه و طول موج است که در جهت $-\hat{\mathbf{y}}$ منتشر می‌شود. اگر هر دو موج موجود باشند، هنوز معادله‌های ماکسول صادق‌اند، اکنون میدانهای الکتریکی و مغناطیسی عبارت‌اند از

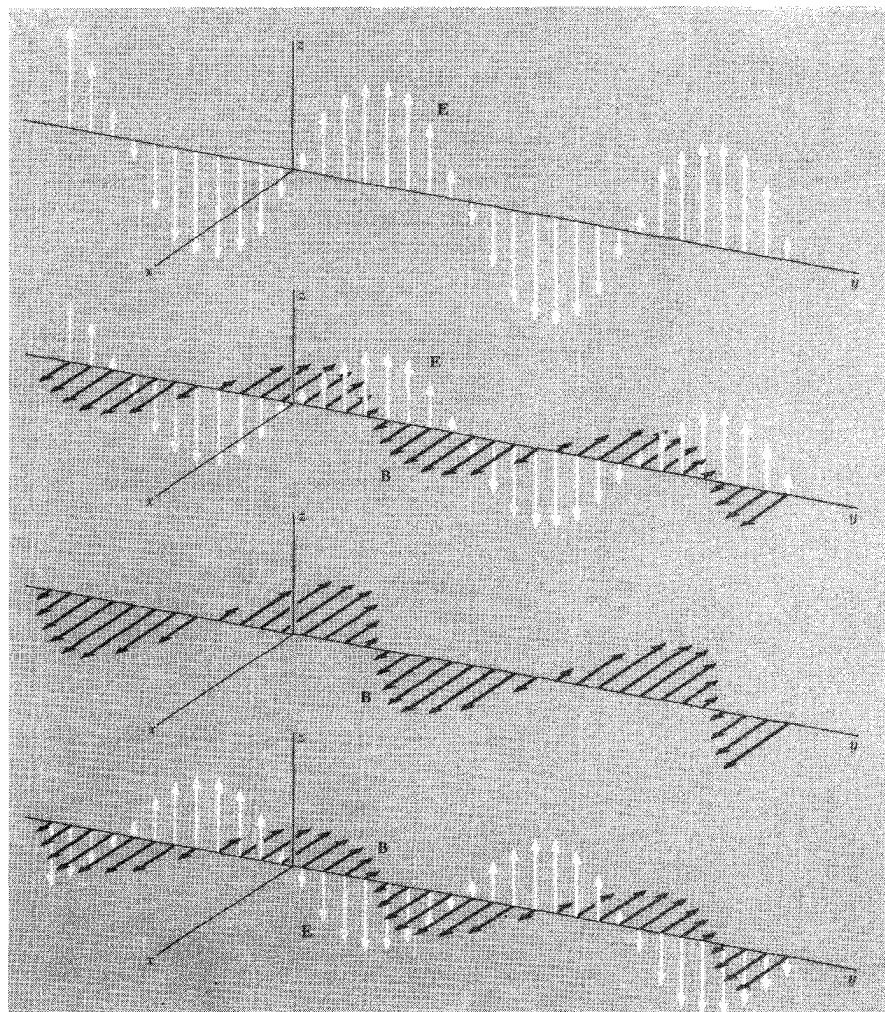
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\lambda + \mathbf{E}_\gamma = \hat{\mathbf{z}}E_0 \left[\sin \left(\frac{\gamma\pi y}{\lambda} - \frac{\gamma\pi ct}{\lambda} \right) + \sin \left(\frac{\gamma\pi y}{\lambda} + \frac{\gamma\pi ct}{\lambda} \right) \right] \quad (25)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_\lambda + \mathbf{B}_\gamma = \hat{\mathbf{x}}E_0 \left[\sin \left(\frac{\gamma\pi y}{\lambda} - \frac{\gamma\pi ct}{\lambda} \right) - \sin \left(\frac{\gamma\pi y}{\lambda} + \frac{\gamma\pi ct}{\lambda} \right) \right]$$

با یادآوری فرمول مربوط به سینوس مجموع دو زاویه، به آسانی می‌توانید معادله‌های ۲۵ را به صورت زیر در آورید

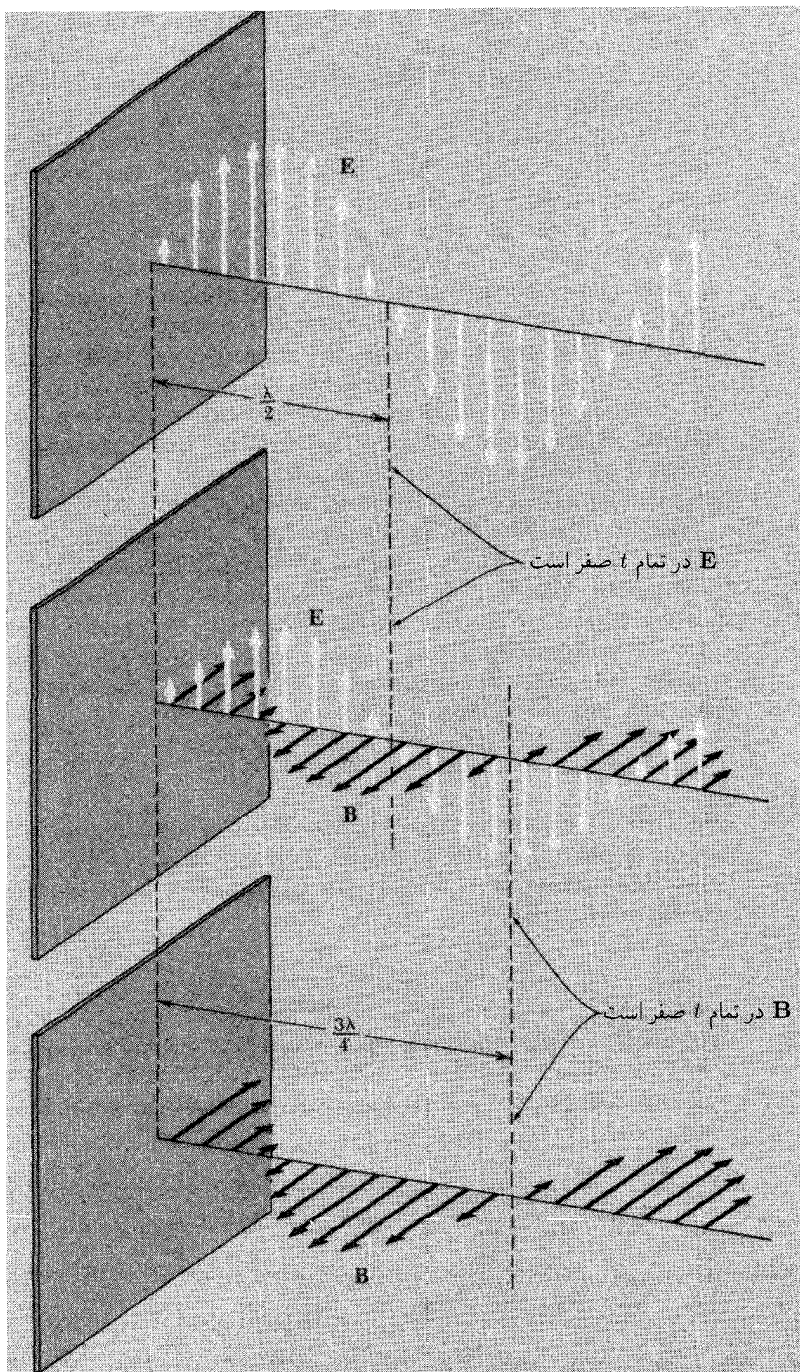
$$\mathbf{E} = \gamma \hat{\mathbf{z}}E_0 \sin \frac{\gamma\pi y}{\lambda} \cos \frac{\gamma\pi ct}{\lambda} \quad \mathbf{B} = -\gamma \hat{\mathbf{x}}E_0 \cos \frac{\gamma\pi y}{\lambda} \sin \frac{\gamma\pi ct}{\lambda} \quad (26)$$

میدانی را که معادله ۲۶ توصیف می‌کند یک موج ایستاده می‌گویند. شکل ۹-۹ شکل آن را در زمانهای مختلف نشان می‌دهد. عامل c/λ بسامد نوسان میدان در هر نقطه x ، و $\gamma\pi c/\lambda$ بسامد زاویه‌ای متناظر با آن است. بنابر معادله‌های ۲۶ هرگاه $\gamma\pi ct/\lambda$ برابر عدد درست باشد، که در هر نیم‌دور رخ می‌دهد، میدان مغناطیسی \mathbf{B} همه جا ناپدید می‌شود. از طرف دیگر هرگاه $\gamma\pi ct/\lambda$ برابر یک عدد درست به اضافه نیم باشد، $\cos \gamma\pi ct/\lambda = 0$ و میدان الکتریکی همه جا ناپدید می‌شود. بیشینه‌های \mathbf{B} و بیشینه‌های \mathbf{E} در مکانها و زمانهای مختلف روی می‌دهد. برخلاف امواج پیشرونده، میدان الکتریکی و مغناطیسی امواج ساکن هم در مکان و هم در زمان "ناهمگام" است. توجه کنید که در همه زمانها روی صفحه $y = 0$ و روی هر صفحه‌ای که برای آن y برابر تعداد درستی نیم طول موج باشد $\mathbf{E} = 0$ است. فرض کنید بتوانیم صفحه xz را در $y = 0$ با ورقه‌ای از فلز کاملاً رسانا بپوشانیم. مؤلفه میدان الکتریکی موازی با سطح روی یک رسانای کامل



شکل ۹-۹ یک موج ایستاده، حاصل از برهم‌نهی یک موج که در جهت مثبت y (معادله ۲۳) حرکت می‌کند و موج مشابهی که در جهت منفی y (معادله ۲۴) در حرکت است. با شروع از شکل بالا، میدانها در چهار زمان مختلف نشان داده شده‌اند، که به ترتیب یک هشتم دوره کامل از هم فاصله دارند.

باید صفر باشد. در غیر این صورت جریانی که از آن می‌گذرد نامتناهی می‌شود. این مسئله شرایط مرزی شدیدی را بر هر میدان الکترومغناطیسی در فضای اطراف آن اعمال می‌کند. اما برای موج ایستاده ما که با معادله‌های ۲۶ توصیف می‌شود این شرایط از قبل وجود دارد، علاوه بر آن برای تمام فضای $\theta > 0$ نیز در معادله‌های ماکسول صدق می‌کند. بنابراین، جواب حاضر آماده‌ای برای



شکل ۹-۱۰ یک موج ایستاده که بر اثر بازتاب از یک آینه کاملاً رسانا تولید شده است.

مسئلهٔ یک موج تخت الکترومغناطیسی است که در فرود عمودی، از یک آینهٔ تخت رسانا بازتابیده می‌شود (شکل ۹-۱۰). برای $\theta > 0$ موج فرودی با معادلهٔ ۲۳ و موج بازتابیده با معادلهٔ ۲۴ توصیف می‌شود. در پشت آینه یا میدانی وجود ندارد، و یا اگر وجود داشته باشد ارتباطی با میدان در جلوی آینه ندارد. بلافاصله در جلوی آینه یک میدان مغناطیسی موازی سطح وجود دارد که از معادله‌های ۲۶: $\mathbf{B} = -2\hat{\mathbf{x}}E_0 \sin(2\pi ct/\lambda)$ به دست می‌آید. پرش \mathbf{B} از این مقدار در جلوی ورقهٔ رسانا به صفر در پشت آن نشان می‌دهد که باید یک جریان متناوب در ورقه وجود داشته باشد.

می‌توانید یک ورقهٔ رسانا را در هر صفحه‌ای نصب کنید که در آن \mathbf{E} که از معادله‌های ۲۶ به دست می‌آید همواره برابر صفر باشد، و امواج الکترومغناطیسی ایستاده را در میان دو آینه به دام اندازید. چنین ترتیبی دارای کاربردهای زیادی است، از جمله لیزرها. در واقع، با درک ویژگیهای یک موج الکترومغناطیسی تخت ساده، می‌توانید انواع بسیاری از ابزارهای الکترومغناطیسی را مانند تداخل‌سنجها، موجبرهای مکعب مستطیلی توخالی، خطهای نواری تجزیه و تحلیل کنید.

۹-۶ انتقال انرژی به وسیلهٔ امواج الکترومغناطیسی

انرژی که زمین از خورشید دریافت می‌کند در فضا به صورت امواج الکترومغناطیسی که در معادلهٔ ۱۶ صدق می‌کند حرکت کرده‌اند. انرژی در هنگام حرکت در کجاست؟ این انرژی هنگام رسیدن به زمین چگونه وارد ماده می‌شود؟

برای یک میدان الکتریکی ایستا، مانند میدان بین صفحه‌های یک خازن پر، می‌دانیم که انرژی کل سیستم را می‌توان با نسبت دادن انرژی $(E^2/\lambda\pi)dv$ به جزء حجم dv و جمع کردن اجزاء به دست آورد. دوباره به معادلهٔ ۳۸ فصل ۱ نگاه کنید. همین‌طور انرژی ذخیره شده در تولید یک میدان مغناطیسی را می‌توان با فرض اینکه هر جزء حجم dv میدان حاوی $(B^2/\lambda\pi)dv$ واحد انرژی است محاسبه کرد. به معادلهٔ ۷۵ فصل ۷ نگاه کنید. فکر وجود انرژی در میدان با مشاهده نور خورشید ناخوشایندتر می‌شود، زیرا این نور از خلا گذشته است که در آن بار یا جریانی وجود ندارد که چیزی را داغ کند.

می‌توان از این فکر برای محاسبهٔ آهنگ تحویل انرژی یک موج الکترومغناطیسی استفاده کرد. یک موج تخت پشرونده (و نه ایستاده) را به هر شکل در لحظه‌ای از زمان در نظر بگیرید. به جزء حجم بسیار کوچک dv مقدار انرژی $1/\lambda\pi(E^2 + B^2)dv$ را نسبت دهید که در آن \mathbf{E} و \mathbf{B} میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در آن حجم و در آن لحظه هستند. اکنون فرض کنید که این انرژی با سرعت c در راستای انتشار حرکت می‌کند. از این راه می‌توان مقدار انرژی را که در واحد زمان از واحد سطح عمود بر راستای انتشار می‌گذرد به دست آورد.

بگذارید این را در مورد امواج سینوسی به کار بریم که با معادله‌های ۱۷ و ۱۸ بیان شوند. در لحظه $t = 0$ ، $E^z = E_0^z \sin^2 y$. همین‌طور $B^z = E_0^z \sin^2 y$ چون دریافتیم که B_0 باید مساوی E_0 باشد. بنابراین چگالی انرژی این میدان باید $(1/8\pi)(E_0^z \sin^2 y + E_0^z \sin^2 y)$ یا $E_0^z \sin^2 y / 4\pi$ باشد. چون میانگین $\sin^2 y$ در یک طول موج کامل $1/2$ است. پس میانگین چگالی انرژی این میدان $E_0^z / 8\pi$ است، و $E_0^z c / 8\pi$ میانگین انرژی است که از "پنجره‌ای" به سطح واحد و عمود بر راستای y می‌گذرد. به‌طور کلی می‌توان گفت که برای هر موج پیوسته تکراری، چه سینوسی باشد و چه نباشد، جریان انرژی به‌ازای واحد سطح، که آن را چگالی توان S می‌نامیم، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$S = \frac{\overline{E^z} c}{4\pi} \quad (27)$$

که در آن $\overline{E^z}$ میانگین شدت میدان الکتریکی است، که برای امواج سینوسی با دامنه E_0 برابر بود با $E_0^z / 2$. اگر E برحسب ایستاولت بر سانتی‌متر، و c برحسب سانتی‌متر بر ثانیه باشد، S برحسب ارگ بر سانتی‌متر مربع بر ثانیه به دست می‌آید. برحسب یکاهای SI فرمول چگالی توان برحسب وات بر مترمربع به صورت زیر است

$$S = \frac{\overline{E^z}}{\sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}} \quad (28)$$

که در آن E شدت میدان برحسب ولت بر متر است. ثابت $\sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ دارای بُعد مقاومت، و مقدار آن برابر است با 376.73 اهم. با گرد کردن آن به 377 اهم، یک فرمول مناسب به دست می‌آید که می‌توان آن را به راحتی به خاطر سپرد:

$$S(\text{W/m}^2) = \frac{\overline{E^z}(\text{V/m})^2}{377\Omega} \quad (29)$$

که مانند یک مقاومت معمولی است

$$W = \frac{(V)^2}{\Omega}$$

وقتی امواج الکترومغناطیسی به یک رسانای الکتریکی برخورد کنند، میدان الکتریکی موج سبب عبور جریان می‌شود. این کار اغلب باعث می‌شود که انرژی موج به صورت انرژی تلف شده

در رسانا درآید. بازتاب کامل موج فرودی در شکل ۹-۱۰ یک مورد خاص بود که در آن رسانندگی سطح بازتابنده بینهایت بود. اگر مقاومت ویژه بازتابنده صفر نباشد، دامنه موج بازتابنده کمتر از موج فرودی خواهد بود. به عنوان مثال، آلومینیم نور مرئی را در فرود عمودی با کارایی ۹۲ درصد باز می‌تاباند. یعنی، ۹۲ درصد انرژی فرودی باز می‌تابد، دامنه موج بازتابنده $\sqrt{0.92}$ یا ۹۶٪ موج فرودی است. ۸ درصد انرژی تلف شده در آلومینیم، که در آن جریان حاصل از میدان الکتریکی با مقاومت اهمی مواجه می‌شود، تبدیل به گرما می‌شود. البته، آنچه اهمیت دارد مقاومت ویژه آلومینیم در بسامد موج نور است، که در این مورد برابر است با $10^{14} \times 5$ هرتز. این مقدار ممکن است با مقاومت ویژه dc یا کم بسامد فلز تفاوت داشته باشد. اما بازتابندگی اغلب فلزات برای نور مرئی به طور عمده به واسطه الکترونهاي رسانش بسیار متحرک است که باعث می‌شوند فلزات رسانای خوبی برای جریانهای پایا باشند. تصادفی نیست که رساناهای خوب اغلب درخشان هستند. اما این را که چرا مس تمیز قرمز رنگ به نظر می‌رسد در حالی که آلومینیم "نقره‌ای" است نمی‌توان بدون توجه به نظریه مفصل ساختار الکترونی این فلزات توضیح داد.

هنگام برخورد امواج الکترومغناطیسی با ماده نارسانا نیز انرژی جذب می‌شود. اندکی از نوری که به لاستیک سیاه برخورد کند باز می‌تابد، اگرچه لاستیک عایقی عالی برای میدانهای الکتریکی کم بسامد است. در این مورد کنش میدان الکتریکی پر بسامد بر الکترونهاي مولکولهای ماده در اتلاف انرژی الکترومغناطیسی دخیل است. به طور کلی این موضوع در جذب نور در هر چیز اطراف ما، از جمله شبکیه چشم صادق است.

بعضی عایقها امواج الکترومغناطیسی را با جذب بسیار کم عبور می‌دهند. شفافیت شیشه برای نور مرئی، که با آن به خوبی آشنایم، در واقع یک ویژگی جالب توجه است. در خالصترین تارهای نوری که برای تراکسیل سیگنالهای صوتی و تصویری به کار می‌روند، موج قبل از اینکه بیشتر انرژی خود را از دست دهد مسافت ۱ کیلومتر یا بیش از 10^9 طول موج را می‌پیماید. اما، هر چقدر یک محیط شفاف باشد، انتشار موج الکترومغناطیسی در آن با انتشار موج در خلأ تفاوت کلی دارد. ماده با میدان الکترومغناطیسی برهم‌کنش دارد. برای به حساب آوردن این برهم‌کنش باید معادله‌های ۱۶ را به طوری که در فصل بعد خواهیم دید اصلاح کرد.

۹-۷ یک موج در چارچوب دیگر چگونه به نظر می‌رسد

یک موج الکترومغناطیسی در خلأ حرکت می‌کند. جهت حرکت آن، نسبت به یک چارچوب لخت F ، با بردار یکه \hat{n} داده می‌شود. اگر E و B میدانهای الکتریکی و مغناطیسی باشند که یک ناظر در یک محل و زمان در F اندازه گرفته است. یک ناظر در چارچوب دیگر که اتفاقاً در همان زمان از آن محل می‌گذرد، چه چیزی را اندازه می‌گیرد؟ فرض کنید چارچوب F' نسبت به F با سرعت

v در جهت \hat{x} حرکت می‌کند و محورهایش مانند شکل ۶-۲۵ با آن موازی است. بگذارید \hat{n} را نیز در جهت \hat{x} برگزینیم. اکنون می‌توان برای تبدیل مؤلفه‌های میدان از معادله‌های ۵۸ فصل ۱۶ استفاده کرد. بگذارید آنها را دوباره بنویسیم:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z) & E'_z &= \gamma(E_z + \beta E_y) \\ B'_x &= B_x & B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z) & B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y) \end{aligned} \quad (30)$$

کلید مسئله ما چگونگی تبدیل دو کمیت زده‌ای خاص یعنی $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ و $E^2 - B^2$ است. بگذارید با استفاده از معادله ۳۰، $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}'$ را محاسبه کنیم و ببینیم رابطه آن با $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ چگونه است.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' &= E'_x B'_x + E'_y B'_y + E'_z B'_z \\ &= E_x B_x + \gamma^2 (E_y B_y + \beta E_y E_z - \beta B_y B_z - \beta^2 E_z B_z) \\ &\quad + \gamma^2 (E_z B_z - \beta E_y E_z + \beta B_y B_z - \beta^2 E_y B_y) \\ &= E_x B_x + \gamma^2 (1 - \beta^2) (E_y B_y + E_z B_z) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (31)$$

حاصلضرب زده‌ای $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ در تبدیل لورنتس میدانها تغییر نمی‌کند؛ این حاصلضرب یک ناورداست. محاسبه همانند که به عنوان مسئله ۹-۱۳ به خواننده واگذار شده است، نشان می‌دهد که $(E_x'^2 + E_y'^2 + E_z'^2 - (B_x'^2 + B_y'^2 + B_z'^2))$ نیز یک ناورداست، یعنی

$$E'^2 - B'^2 = E^2 - B^2 \quad (32)$$

ناوردایی این دو کمیت فقط مربوط به میدان الکترومغناطیسی موجی که اکنون با آن سروکار داریم نیست بلکه یک ویژگی مهم همه میدانهای الکترومغناطیسی است. در مورد میدان موج مفهوم آن بسیار ساده و سراسر است. می‌دانیم که در موج تخت \mathbf{B} عمود بر \mathbf{E} و $B = E$ است. پس هر یک از دو ناوردای $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ و $E^2 - B^2$ صفرند. و اگر یک ناوردا در هر چارچوبی صفر باشد، در تمام چارچوبهای دیگر نیز صفر خواهد بود. می‌بینیم که هر تبدیل لورنتس موج E و B را عمود بر هم و با اندازه مساوی به جا می‌گذارد. یک موج نوری در هر چارچوب مرجع لخت یک موج نوری به نظر می‌رسد. این نباید باعث تعجب ما شود. می‌توان گفت که صرفاً یک دوره کامل زده‌ایم، و مجدداً به اصول نسبیت یعنی نقطه آغاز کار اینشتین رسیده‌ایم. در واقع، بنابه روایت زندگینامه‌ای خود اینشتین، او ۱۰ سال قبل از آن (در سن ۱۶ سالگی!) به این فکر افتاده بود که اگر کسی بتواند همراه موج نور "حرکت کند" چه چیزی را مشاهده می‌کند. به این پرسش

می‌توان با معادلهٔ ۳۰ که درست به همان شکل مقاله سال ۱۹۰۵ اینشتین داده شده است پاسخ داد. کافی است بگذاریم $E_y = E_0$, $E_x = E_z = 0$, $B_z = E_0$, $B_x = B_y = 0$. یعنی با توجه به اینکه $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ در جهت \hat{x} است، موج در این جهت حرکت می‌کند. با استفاده از معادله‌های ۳۰ و $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$ درمی‌یابیم که

$$E'_y = E_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad B'_z = E_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (33)$$

در چارچوب F' دامنهٔ موج کم می‌شود. البته سرعت موج در F' نیز مانند F برابر است با c . موج الکترومغناطیسی چارچوب سکون ندارد. در حد $\beta = 1$ ، دامنه‌های E'_y و B'_z در چارچوب F' به صفر کاهش می‌یابند. موج ناپدید شده است!

مسائل

۱-۹ اگر میدان الکتریکی در فضای آزاد برابر باشد با

$$\mathbf{E} = E_0 (\hat{x} + \hat{y}) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(z + ct)\right)$$

با $E_0 = 2 \text{ statV/cm}$ ، میدان مغناطیسی، بدون توجه به هر میدان مغناطیسی ایستا، چقدر باید باشد؟

۲-۹ چگالی توان نور خورشید در زمین تقریباً برابر است با ۱ کیلووات بر مترمربع. شدت میدان مغناطیسی rms چقدر است؟

جواب: ۲۰۲ گاوس یا 2×10^{-6} تسلا.

۳-۹ یک پروتون آزاد قبل از اینکه موج معادلهٔ ۲۲ از کنار آن بگذرد در مبدأ ساکن است. انتظار دارید که در زمان $t = 1 \mu\text{s}$ آن پروتون در کجا باشد؟ دامنهٔ تپ برحسب ایستاولت بر سانتی‌متر و جرم پروتون مساوی است با 1.67×10^{-27} گرم. راهنمایی: چون تداوم تپ فقط چند نانوثانیه است، می‌توان جابه‌جایی پروتون در خلال گذر تپ را نادیده گرفت. همین‌طور اگر سرعت پروتون بسیار زیاد نباشد، می‌توان از اثر میدان مغناطیسی در حرکت آن چشم پوشید. اولین چیزی که باید محاسبه کرد تکانه‌ای است که پروتون ضمن عبور تپ به دست می‌آورد.

۴-۹ فرض کنید در مسئلهٔ قبل اثر میدان مغناطیسی کاملاً ناچیز نیست. این مطلب چه تغییری در جهت سرعت نهایی پروتون می‌دهد؟

۵-۹ یک میدان الکترومغناطیسی به شرح زیر در فضای آزاد وجود دارد:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 & E_y &= E_0 \sin(kx + \omega t) & E_z &= 0 \\ B_x &= 0 & B_y &= 0 & B_z &= -E_0 \sin(kx + \omega t) \end{aligned}$$

(الف) نشان دهید که اگر بین ω و k رابطه خاصی وجود داشته باشد، این میدان در معادله‌های ماکسول صدق می‌کند.

(ب) فرض کنید $\omega = 10^{10} \text{ s}^{-1}$ و $E_0 = 0.5 \text{ statV/cm}$ طول موج برحسب سانتی‌متر چقدر است؟ میانگین چگالی انرژی در یک ناحیه بزرگ برحسب ارگ بر سانتی‌متر مکعب چقدر است؟ با استفاده از آن چگالی توان، جریان انرژی را برحسب ارگ بر سانتی‌متر مربع بر ثانیه محاسبه کنید. ۶-۹ با شروع از معادله‌های ماکسول مستقل از چشمه یا "فضای آزاد" برای یکاهای SI، که با حذف جمله‌های حاوی ρ و \mathbf{J} از معادله‌های ۱۵-ب به دست می‌آیند. موجی را در نظر بگیرید که با معادله‌های ۱۷ و ۱۸ توصیف می‌شوند ولی اکنون E_0 برحسب ولت بر متر و B_0 برحسب تسلاست. E_0 ، B_0 و v چه شرایطی باید داشته باشند تا در معادله‌های ماکسول صدق کنند؟

۷-۹ فرمولهایی را برای \mathbf{E} و \mathbf{B} بنویسید که موج الکترومغناطیسی سینوسی تخت با ویژگیهای زیر را مشخص کند. موج در جهت $-\hat{x}$ حرکت می‌کند؛ بسامد آن 10^8 مگاهرتز است (10^8 دور بر ثانیه)؛ میدان الکتریکی بر جهت \hat{z} عمود است.

۸-۹ نشان دهید که میدان الکترومغناطیسی زیر

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{z} \cos kx \cos ky \cos \omega t$$

$$\mathbf{B} = B_0 (\hat{x} \cos kx \sin ky - \hat{y} \sin kx \cos ky) \sin \omega t$$

در صورتی که $E_0 = \sqrt{2} B_0$ و $\omega = \sqrt{2} ck$ باشد در معادله‌های ۱۵-الف صدق می‌کند. این میدان می‌تواند در داخل یک جعبه فلزی مربعی به اندازه π/k در جهتهای x و y و ارتفاع دلخواه وجود داشته باشد. میدان مغناطیسی چگونه است؟

۹-۹ از تمام انرژی الکترومغناطیسی موجود در عالم، بیشترین مقدار به صورت امواج با طول موج حدود میلی‌متری است. این امواج مربوط به تابش زمینه میکروموج کیهانی است که پنزیاس و ویلسون در سال ۱۹۶۵ کشف کردند. این تابش ظاهراً تمام فضا، از جمله فضای میان کهکشانی را پر کرده است، و چگالی انرژی آن برابر است با 4×10^{-12} ارگ بر سانتی‌متر مکعب. شدت میدان الکتریکی rms را در این تابش برحسب ایستاولت بر سانتی‌متر به دست آورید و آن را به

ولت بر متر تبدیل کنید. تقریباً در چه فاصله‌ای از یک فرستنده رادیویی ۱ کیلوواتی شدت موج الکترومغناطیسی با این مقدار برابر است؟

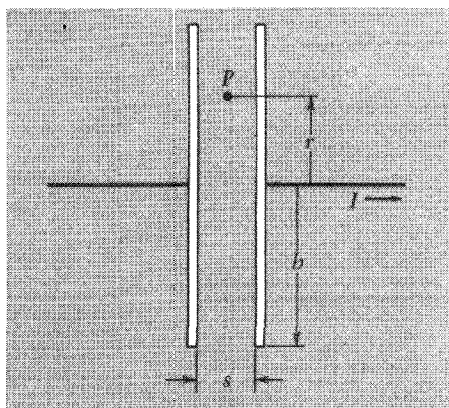
جواب: 6×10^6 ولت بر متر، ۳ کیلومتر.

۹-۱۰ میدان مغناطیسی در خازن در حال تخلیه شکل ۹-۱ را می‌توان با جمع کردن سهم همه اجزای جریان رسانش که در شکل ۹-۵ نشان داده شده‌اند به دست آورد. این کار ممکن است به طول بینجامد. اگر بتوان فرض کرد که حول این محور تقارن وجود دارد، بسیار راحت‌تر است که میدان مغناطیسی B را در یک نقطه با استفاده از قانون انتگرال

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{c} \int_S \left(\frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{a}$$

برای یک مسیر دایره‌ای که از آن نقطه می‌گذرد به دست آورد. فقط باید جریان کلی را که این مسیر در برمی‌گیرد بدانیم. با استفاده از این مطلب، میدان را در نقطه P که در وسط دو صفحه خازن و به فاصله r از محور تقارن قرار دارد بیابید (این میدان را با میدان الکتریکی القا شده E در مثال شکل ۷-۱۶ مقایسه کنید).

جواب: $B = 2Ir/cb^2$ و $B = (4\pi I/c)(r^2/b^2)$.



شکل مسئله ۹-۱۰.

۹-۱۱ از یک ماهواره در یک مدار مانا سیگنالی با توان ۱۰ کیلووات به زمین فرستاده می‌شود و عرض باریکه آن ناحیه‌ای به قطر تقریبی 10^6 کیلومتر را می‌پوشاند. شدت میدان الکتریکی در گیرنده‌ها، برحسب میلی‌ولت بر متر چقدر است؟

۹-۱۲ یک موج سینوسی از سطح محیطی باز می‌تابد که مشخصات آن طوری است که نیمی

از انرژی فرودی را جذب می‌کند. میدان حاصل از برهم‌نهی موج فرودی و بازتابیده را در نظر بگیرید. ناظری که در نقطه‌ای از این میدان قرار دارد در می‌یابد که میدان الکتریکی با دامنه E نوسان می‌کند. نسبت بزرگترین دامنه‌ای که این ناظر ملاحظه می‌کند به کوچکترین دامنه‌ای که هر ناظر دیگر ملاحظه می‌کند چقدر است؟ (این را در اصطلاح عامیانه آزمایشگاهی نسبت ولتاژ موج ایستاده VSWR می‌گویند).

۱۳-۹ با شروع از تبدیل میدان که از معادله 60° فصل ۶ به دست می‌آید، نشان دهید که کمیت نرده‌ای $E^2 - B^2$ تحت تبدیل ناورداست. به عبارت دیگر، نشان دهید که $E'^2 - B'^2 = E^2 - B^2$. این کار را فقط با جبر برداری، بدون نوشتن مؤلفه‌های x ، y و z می‌توان انجام داد. (تجزیه به بردارهای موازی و عمود برای این کار مناسب است، زیرا $\mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{E}_\parallel = 0$ و $\mathbf{B}_\parallel \times \mathbf{E}_\parallel = 0$ غیره.)

میدانهای الکتریکی در ماده

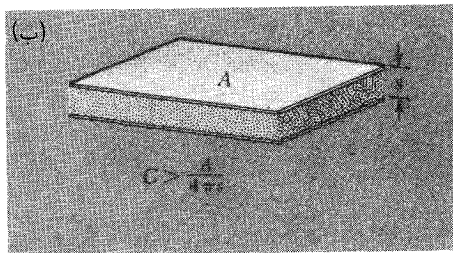
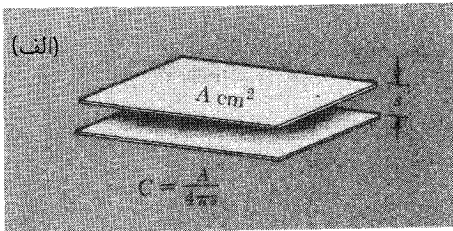
۱-۱۰ دی الکتریکها

خازنی که در فصل ۳ مطالعه کردیم از دو رسانا تشکیل شده بود، که جدا از یکدیگر بودند، و چیزی در بین آنها نبود. دستگاه دو رسانایی با ظرفیت C مشخص می‌شد، C مقداری ثابت بود که اندازه بار روی خازن (بار مثبت Q روی یک صفحه، بار منفی مساوی آن روی صفحه دیگر) را به اختلاف پتانسیل الکتریکی میان دو رسانا، $\varphi_1 - \varphi_2$ ، مربوط می‌کرد. اگر اختلاف پتانسیل را با $\varphi_{۱۲}$ نشان دهیم:

$$C = \frac{Q}{\varphi_{۱۲}} \quad (۱)$$

برای خازن صفحه موازی، دو صفحه مسطح به مساحت A سانتی‌مترمربع داریم که فاصله آنها از هم s است، دیدیم که ظرفیت خازن از رابطه زیر به دست می‌آید

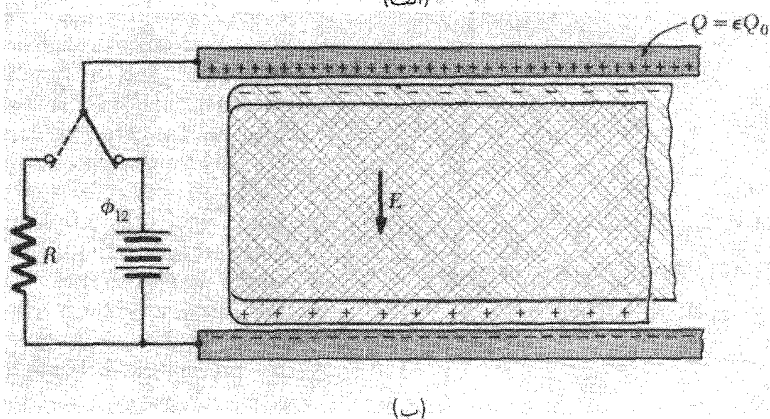
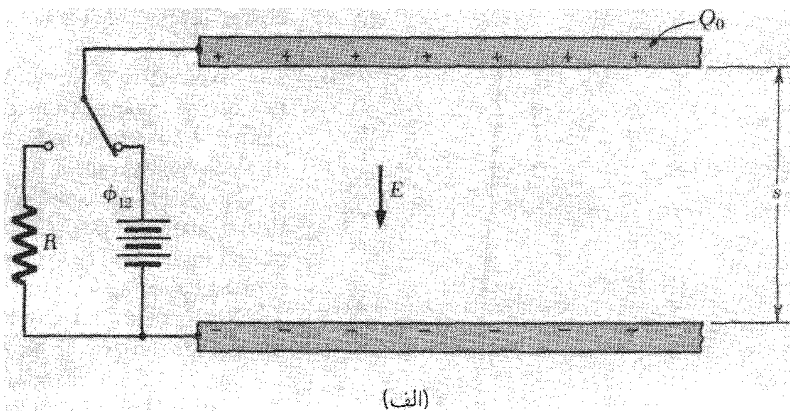
$$C = \frac{A}{4\pi s} \quad (۲)$$



شکل ۱۰-۱ (الف) یک خازن متشکل از صفحه‌های رسانای موازی. (ب) همان صفحه‌ها با تیغه‌ای از عایق در بین آنها.

چنین خازنهایی را می‌توان در ابزارهای الکتریکی یافت. آنها را خازنهای خلأ می‌نامند و از صفحه‌هایی تشکیل شده‌اند که در داخل بطری کاملاً تخلیه شده قرار دارد. از این خازن‌ها در مواردی استفاده می‌شود که در آنها پتانسیلهای بسیار زیاد و به سرعت متغیر دخیل‌اند. به هر حال، خازنهایی که در آنها فضای بین صفحه‌ها را یک جامد رسانا یا مایع پر کرده است بسیار متداول‌ترند. بیشتر خازنهایی که در آزمایشگاه با آن کار کرده‌اید از این نوع‌اند و چند دوجین از آنها در هر گیرنده تلویزیونی موجود است. برای رساناهایی که در محیط مادی قرار دارند، معادله ۲ با تجربه سازگار نیست. فرض کنید که فضای بین صفحه‌های شکل ۱۰-۱ الف را با تیغه‌ای از پلاستیک مانند شکل ۱۰-۱ ب پر کرده‌ایم. در آزمایش با این خازن جدید، هنوز تناسب ساده‌ای بین بار و اختلاف پتانسیل می‌یابیم، به طوری که هنوز می‌توان ظرفیت را با معادله ۱ تعریف کرد. اما درمی‌یابیم که C به طور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر از چیزی است که معادله ۲ پیشگویی می‌کرد. یعنی، برای همان اختلاف پتانسیل و فاصله میان دو صفحه بار بیشتری روی هر صفحه می‌یابیم و تیغه پلاستیکی باید عامل آن باشد.

به طور کلی درک این مسئله چندان مشکل نیست. تیغه پلاستیکی متشکل از مولکولهاست، مولکولها از اتمها تشکیل شده‌اند که به نوبه خود از ذرات با بار الکتریکی، الکترون‌ها و هسته‌های اتم تشکیل شده است. میدان الکتریکی بین صفحه‌های خازن بر این بارها اعمال می‌شود، و اگر صفحه بالایی خازن مانند شکل ۱۰-۲ مثبت باشد، بارهای منفی را بالا و بارهای مثبت را پایین می‌کشد. هیچ چیز حرکت چندان نمی‌کند (الکترونهای آزاد جدا از اتم وجود ندارد که مانند مورد یک رسانای فلزی آماده حرکت باشند) بارها اندکی جابه‌جا می‌شوند، زیرا ساختار اتم بینهایت



شکل ۱۰-۲ چگونه یک دی الکتریک بار روی صفحه های خازن را افزایش می دهد. (الف) فضای بین صفحه ها خالی است $Q_0 = C \phi_{12}$. (ب) فضای بین صفحه ها با یک ماده نارسانا، یعنی یک دی الکتریک پر شده است. میدان الکتریکی بار منفی را به طرف بالا می کشد، و بار مثبت را پایین می راند، و لایه ای از بار منفی خنثی نشده را روی سطح بالایی دی الکتریک نمایان می سازد. بار کل در قسمت بالا که شامل بار Q روی صفحه بالایی نیز هست با مورد (الف) یکسان است. خود Q اکنون بزرگتر از Q_0 است. $Q = \epsilon Q_0$ ، که Q مقدار باری است که از مقاومت R می گذرد اگر خازن با بستن کلید تخلیه شود.

صلب نیست. تأثیر آن در داخل تیغه پلاستیکی بدین گونه است که توزیع بار منفی، از دیدگاه کلی، و توزیع بار مثبت کل (هسته های اتمی) چنانکه در شکل ۱۰-۲ ب نشان داده شده است، اندکی جابه جا می شود. درون قطعه خنثی باقی می ماند، اما لایه نازکی از بار منفی خنثی نشده در بالای تیغه ظاهر می شود، همراه با لایه متناظری از بار منفی در پایین آن.

در حضور لایه های بار منفی القایی در زیر صفحه بالایی، خود بار Q روی صفحه افزایش می یابد. در واقع، Q باید افزایش یابد، تا جمع جبری Q و لایه بار القایی، برابر Q_0 شود. وقتی پس

از پاسخگویی به چند پرسش دربارهٔ میدان الکتریکی داخل ماده به این مسئله در بخش ۱۰-۸ بازگشیم می‌توانیم آن را ثابت کنیم. اکنون نکتهٔ مهم آن است که بار Q در شکل ۱۰-۲ ب از Q_0 بزرگتر است و این Q برابر است با بار خازن در رابطهٔ $Q = C\varphi$. این بار است که از باتری خارج می‌شود، و این مقدار بار است که وقتی خازن را با بستن کلید در نمودار تخلیه می‌کنیم از مقاومت R می‌گذرد. اگر این کار را انجام دهیم، لایهٔ بار القایی، که بخشی از بار Q نیست، به سادگی در تیغه ناپدید می‌شود.

طبق این توضیح قابلیت یک ماده به خصوص در افزایش ظرفیت باید به مقدار بار الکتریکی در ساختار آن و سهولت جابه‌جایی الکترونها نسبت به هسته‌های اتمی بستگی داشته باشد. ضریب افزایش ظرفیت وقتی یک خازن خالی با ماده به خصوصی پر می‌شود، Q/Q_0 در مثال ما، را ثابت دی‌الکتریک آن ماده می‌گویند، معمولاً نماد ϵ برای آن به کار می‌رود. خود ماده را وقتی دربارهٔ رفتار در میدان الکتریکی صحبت می‌کنیم معمولاً دی‌الکتریک می‌نامند. اما هر ماده همگن غیررسانا را می‌توان بدین صورت مشخص کرد. جدول ۱۰-۱ فهرست مقادیر ثابت دی‌الکتریک برای ترکیب گوناگونی از مواد است.

هر ثابت دی‌الکتریک موجود در جدول بزرگتر از ۱ است. اگر توضیح ما درست باشد همین را باید انتظار داشته باشیم. حضور دی‌الکتریک هنگامی می‌تواند سبب کاهش ظرفیت به کمتر از ظرفیت خازن خالی شود که با اعمال میدان الکتریکی الکترونها آن در خلاف جهت نیروی حاصل حرکت کنند. به هر صورت، چنین رفتاری برای میدانهای الکتریکی نوسانی عجیب نیست. اما برای میدانهای پایا که در اینجا بررسی می‌کنیم، روال کار بدین‌گونه نیست.

ثابت دی‌الکتریک خلأ کامل البته طبق تعریف ما دقیقاً 1° است. برای گازها در شرایط معمولی، ϵ فقط اندکی از 1° بزرگتر است، زیرا گاز بیشتر یک فضای خالی است. ثابت دی‌الکتریک جامدها و مایعهای معمولی بین ۲ تا ۶ یا چیزی مانند آن است. اما توجه کنید که آمونیاک مایع استثنایی بر این قاعده، و آب مایع یک استثنای تماشایی است. در واقع آب اندکی رساننده است، این موضوع چنانکه خواهیم گفت، مانع از این نمی‌شود که برای آن ثابت دی‌الکتریک تعریف کنیم و آن را اندازه بگیریم. رسانندگی یونی مایع علت این ثابت دی‌الکتریک عظیم آب نیست. می‌توانید با یادآوری اینکه در واقع تفاوت میان ϵ و 1° است که تأثیر الکتریکی ماده را نشان می‌دهد، به این ویژگی غیرعادی آب در ثابت دی‌الکتریکی بخار آن پی ببرید. مقادیر ϵ در جدول را برای بخار آب و هوا مقایسه کنید.

وقتی ثابت دی‌الکتریک یک ماده معین تعیین شد، شاید بتوان با اندازه‌گیری ظرفیت خازنی که با آن پر شده است، نه تنها خازنهای دو صفحه‌ای، بلکه هر سیستم الکتروستاتیکی که از رساناها و قطعات دی‌الکتریک به هر شکل تشکیل شده است، رفتار آن را پیشگویی کرد. یعنی، می‌توانیم

جدول ۱-۱۰ ثابت دی‌الکتريک مواد مختلف

ماده	شرایط	ثابت دی‌الکتريک
هوا	گاز، ۱،۰°C	۱،۰۰۰۵۹
متان، CH _۴	گاز، ۱،۰°C	۱،۰۰۰۸۸
هیدروژن کلرید، HCl	گاز، ۱،۰°C	۱،۰۰۴۶
آب، H _۲ O	گاز، ۱،۱۱۰°C	۱،۰۱۲۶
	مایع، ۲۰°C	۸۰٫۴
بنزن، C _۶ H _۶	مایع، ۲۰°C	۲٫۲۸
متانول، CH _۳ OH	مایع، ۲۰°C	۳۳٫۶
آمونیاک، NH _۳	مایع، -۳۴°C	۲۲٫۶
روغن معدنی	مایع، ۲۰°C	۲٫۲۴
سدیم کلرید، NaCl	جامد، ۲۰°C	۶٫۱۲
گوگرد، S	جامد، ۲۰°C	۴٫۰
سیلیسیم، Si	جامد، ۲۰°C	۱۱٫۷
پلی‌اتیلن	جامد، ۲۰°C	۲٫۳ - ۲٫۲۵
چینی	جامد، ۲۰°C	۸٫۰ - ۶٫۰
موم پارافین	جامد، ۲۰°C	۲٫۵ - ۲٫۱
شیشه پیرکس ۷۰۷۰	جامد، ۲۰°C	۴٫۰۰

میدانهای الکتريکی موجود در خلأ خارج از دی‌الکتريکها را برای بارها و پتانسیلهای روی رساناهای سیستم پیشگویی کنیم.

نظریه‌ای که با آن بتوان این کار را انجام داد را فیزیکی‌دانهای قرن نوزدهم به‌طور کامل تدوین کرده بودند. چون تصویر کاملی از ساختار اتمی ماده نداشتند، باید تصویری کم و بیش ماکروسکوپیکی را می‌پذیرفتند. از دیدگاه آنها، درون دی‌الکتريک، گستره بی‌شکلی از "ژله ریاضی" کاملاً هموار بود که تنها ویژگی الکتريکی که آن را از خلأ متمایز می‌ساخت ثابت دی‌الکتريک سوای ۱ بود.

اگر تنها به توصیف ماکروسکوپیکی ماده در یک میدان الکتريکی بپردازیم، که پاسخگویی به برخی از پرسشهای ظاهراً بدیهی — و یا شاید مطرح کردن پرسشها به گونه‌ای که بتوان به آنها پاسخی با معنی داد دشوار است. به‌عنوان مثال، شدت میدان الکتريکی در داخل تیغه پلاستیکی شکل ۱-۱۰ ب، وقتی بارهایی روی صفحه‌ها وجود دارد. چقدر است؟ شدت میدان الکتريکی با نیروی وارد بر بار آزمون تعریف می‌شود. چگونه می‌توان، بدون اینکه چیزی را مختل کرد، بار

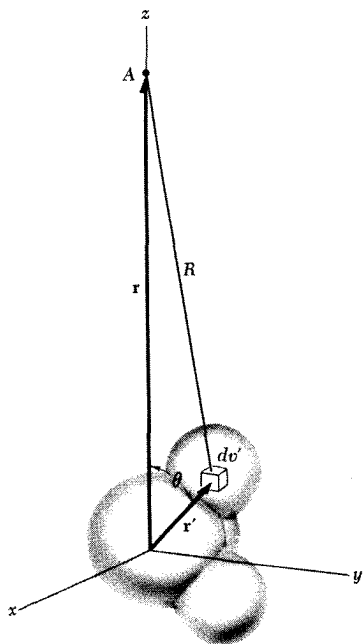
آزمون را در داخل یک جامد کاملاً چگال نهاد و نیروی وارد بر آن را اندازه گرفت؟ اگر این نیرو را اندازه گرفتیم، مفهوم آن چیست؟ می‌توانید به فکر ایجاد یک سوراخ و گذاشتن بار آزمون در آن بيفتید به طوری که بار بتواند در سوراخ حرکت کند، و بتوانید نیروی وارد بر آن را مانند نیروی وارد بر یک ذره آزاد اندازه بگیرید. اما در این صورت، شما میدان الکتریکی دی‌الکتریک را اندازه نمی‌گیرید، بلکه میدان را در کاواک موجود در دی‌الکتریک اندازه می‌گیرید که کاملاً چیزی دیگر است.

خوشبختانه خط حمله دیگری در اختیار ماست، خطی که از سطح میکروسکوپیکی یا اتمی آغاز می‌شود. می‌دانیم که ماده از اتمها و مولکولها ساخته شده است، که اینها نیز به نوبه خود از ذرات باردار بنیادی تشکیل شده‌اند. ما چیزهایی درباره اندازه و ساختار این اتمها، چیزهایی در مورد آرایش آنها در بلورها، مایعات، و گازها می‌دانیم، به جای توصیف تیغه دی‌الکتریک به صورت حجمی بدون ساختار و سنگ بنایی ژله مانند، آن را به صورت مجموعه‌ای از مولکولهای موجود در خلأ در نظر خواهیم گرفت. اگر بتوانیم دریابیم که بارهای الکتریکی یک مولکول وقتی به تنهایی در یک میدان الکتریکی قرار دارد چه می‌کنند، می‌توانیم رفتار دو تا از این مولکولها را وقتی در فاصله‌ای از هم در خلأ قرار گرفته‌اند درک کنیم. فقط باید تأثیر میدان الکتریکی ناشی از یک مولکول را بر مولکول دیگر در نظر بگیریم. این مسئله خلأ است. اکنون فقط باید مسئله را به جمعیت مثلاً 10^{20} مولکول در هر سانتی‌متر مکعب که خلأ را اشغال کرده‌اند گسترش دهیم، و این مسئله دی‌الکتریک واقعی است. امیدواریم که این کار را بدون تولید 10^{20} مسئله جداگانه به انجام برسانیم.

اگر این برنامه تحقق یابد دو پاداش در انتظار ماست. یکی اینکه سرانجام می‌توانیم چیزی با معنی درباره میدانهای الکتریکی و مغناطیسی داخل ماده بگوییم، و به پرسشهایی از این نوع پاسخ دهیم. مهم‌تر از آن، می‌فهمیم که چگونه پدیده‌های الکتریکی و مغناطیسی در ماده از ساختار اتمی آن نشأت می‌گیرد و بنابراین می‌تواند سرشت این ساختار را نمایان سازد. ما اثرهای الکتریکی و مغناطیسی را جداگانه مطالعه خواهیم کرد. از دی‌الکتریکها شروع می‌کنیم. چون اولین هدف ما توصیف میدان الکتریکی حاصل از یک اتم یا مولکول است، این به ما کمک خواهد کرد تا مشاهداتی کلی درباره میدان الکتروستاتیکی خارجی هر سیستم کوچک از این بارها انجام دهیم.

۱۰-۲ گشتاور یک توزیع بار

یک اتم یا مولکول از بارهای الکتریکی تشکیل شده است که حجم کوچکی، شاید در حدود چند آنگستروم مکعب (10^{-24} cm^3) از فضا را اشغال کرده است. ما به میدان الکتریکی در خارج از این حجم علاقه‌مندیم که ناشی از توزیع بار پیچیده است. توجه ما مخصوصاً به میدان در



شکل ۳-۱۰ محاسبه پتانسیل در نقطه A از یک توزیع بار مولکولی.

فاصله دور از چشمه، یعنی دور در مقایسه با اندازه چشمه، معطوف است. کدام ویژگی ساختار بار میدان را در نقطه‌های دور تعیین می‌کند؟ برای پاسخگویی به این پرسش، بگذارید به برخی از ساختارهای اختیاری بار بنگریم و ببینیم چگونه می‌توانیم میدان در خارج آن را محاسبه کنیم. شکل ۳-۱۰ نوعی توزیع بار را نشان می‌دهد که در مجاورت مبدأ مختصات قرار دارد. این توزیع ممکن است مولکولی متشکل از چند هسته مثبت و تعداد زیادی الکترون باشد. به هر صورت فرض می‌کنیم که بتوان آن را با تابع توزیع بار معین $\rho(x, y, z)$ نشان داد، که برای الکترونها منفی و برای هسته‌ها مثبت است. برای یافتن میدان الکتریکی در نقطه‌های دور می‌توان کار خود را از محاسبه پتانسیل توزیع بار آغاز کرد. بدین منظور بگذارید نقطه A را در خارج از توزیع بار روی محور z در نظر بگیریم (از آنجا که تقارن خاصی را برای توزیع بار در نظر نگرفته‌ایم، محور z هیچ ویژگی خاصی ندارد). اگر r فاصله A از مبدأ باشد، پتانسیل الکتریکی در A را که با φ_A نشان داده می‌شود می‌توان مطابق معمول با افزودن سهم همه اجزای توابع بار به دست آورد:

$$\varphi_A = \int \frac{\rho(x', y', z') dv'}{R} \quad (3)$$

dv' در زیر انتگرال جزء حجم در داخل توزیع بار، $\rho(x', y', z')$ توزیع بار در آنجا، و R در مخرج فاصله نقطه A از این جزء حجم است. انتگرال گیری البته بر روی مختصات x', y', z' انجام می شود و شامل تمام منطقه ای می شود که بار در آن قرار دارد. می توان R را بر حسب r و فاصله r' از مبدأ تا جزء بار بیان کرد. اگر زاویه بین r' و محوری باشد که A بر روی آن قرار دارد، با استفاده از قانون کسینوسها داریم:

$$R = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{1/2} \quad (۴)$$

با قرار دادن مقدار R انتگرال به صورت زیر درمی آید

$$\varphi_A = \int \rho dv' (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{-1/2} \quad (۴-الف)$$

اکنون می خواهیم از این واقعیت استفاده کنیم که برای یک نقطه دور مانند A ، r' برای همه قسمت های توزیع بار از r کوچکتر است. بنابراین باید ریشه دوم در معادله ۴ را بر حسب توانهای r/r' بسط داد. با نوشتن

$$(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \theta \right) \right]^{-1/2} \quad (۵)$$

و استفاده از بسط $(1 + \delta)^{-1/2} = 1 - 1/2\delta + 3/8\delta^2 + \dots$ پس از گردآوری تمام جمله های با یک توان r/r' خواهیم داشت

$$(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{جمله های توان} \\ \text{بالاتر} \end{array} \right) \right] \quad (۶)$$

اکنون r ثابتی در انتگرال گیری است، بنابراین می توان آن را از زیر انتگرال خارج کرد و پتانسیل در نقطه A را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \varphi_A = & \frac{1}{r} \underbrace{\int \rho' dv'}_{K_0} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\int r' \cos \theta \rho' dv'}_{K_1} \\ & + \frac{1}{r^3} \underbrace{\int r'^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) \rho' dv'}_{K_2} + \dots \end{aligned} \quad (۷)$$

مقدار هر یک از انتگرالهای K_0, K_1, K_2 و غیره در بالا، فقط به ساختار توزیع بار بستگی دارد، نه به فاصله از نقطه A . بنابراین پتانسیل برای همه نقطه‌های امتداد محور z را می‌توان به صورت سری توان $1/r$ با ضرایب ثابت نوشت:

$$\varphi_A = \frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \dots \quad (A)$$

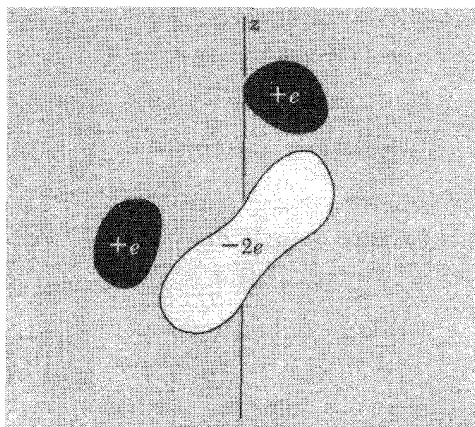
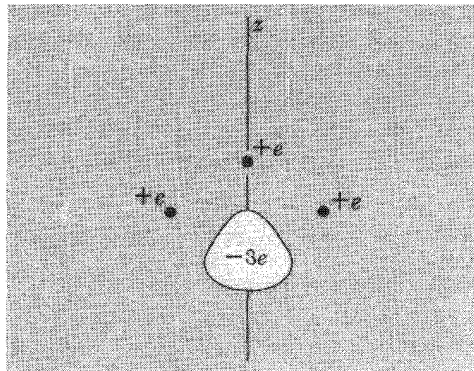
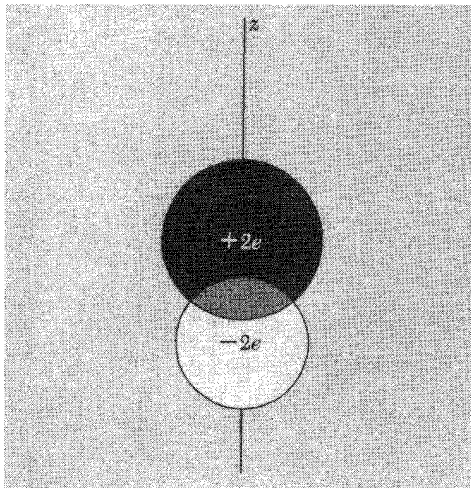
برای اتمام مسئله باید پتانسیل φ را در همه نقطه‌های دیگر به دست آوریم، تا بتوانیم میدان الکتریکی را به صورت $-\text{grad } \varphi$ محاسبه کنیم. اکنون به اندازه کافی پیش رفته‌ایم، تا بتوانیم نکته لازم را بیرون آوریم: رفتار پتانسیل در فاصله‌های زیاد از چشمه را اولین جمله سری تعیین می‌کند که ضریب آن صفر نیست.

بگذارید نگاه دقیقتری به این ضرایب داشته باشیم. ضریب K_0 ، $\int \rho dv'$ است که چیزی نیست بجز بار کل در توزیع بار. اگر مانند مورد یک مولکول خنثی، مقدار مساوی بار مثبت و منفی داشته باشیم، K_0 صفر خواهد بود. برای مولکول یک بار یونیده K_0 برابر e است. اگر K_0 صفر نباشد، هر چقدر که K_1, K_2 و غیره بزرگ باشند، اگر به اندازه کافی بیرون برویم، جمله K_0/r غالب می‌شود. پس از آن، پتانسیل و میدان به مقدار مربوط به بار نقطه‌ای به مبدأ نزدیک می‌شوند. فرض کنید که یک مولکول خنثی داریم، به طوری که K_0 برابر صفر است. اکنون توجه ما به دومین جمله با ضرایب $K_1 = \int r' \cos \theta \rho dv'$ معطوف می‌شود. از آنجا که $r' \cos \theta$ برابر است با z' ، این جمله جابه‌جایی نسبی بار مثبت و منفی به سوی A را تعیین می‌کند. مقدار آن برای توزیعهایی که در شکل ۱-۴ رسم شده‌اند، و در آنها چگالیهای بار مثبت و منفی جداگانه نشان داده شده است، غیر صفر است. در واقع، همه توزیعهای بار که در آنجا نشان داده شده‌اند، تقریباً دارای یک مقدار K_1 هستند. به علاوه، — نکته مهم این است — اگر توزیع بار خنثی باشد مقدار K_1 به محلی که به عنوان مبدأ انتخاب شده است بستگی ندارد. یعنی، اگر به جای z' بگذاریم $z'_0 + z'$ و در واقع مبدأ را جابه‌جا کنیم، مقدار انتگرال تغییر نمی‌کند:

$$\int (z'_0 + z') \rho dv' = \int z'_0 \rho dv' + z'_0 \int \rho dv'$$

و انتگرال دوم برای توزیع بار خنثی همواره صفر است.

بدیهی است که اگر $K_0 = 0$ و $K_1 \neq 0$ باشد، پتانسیل در امتداد محور x به صورت مجانبی (یعنی با رفتن به فاصله‌های دورتر تقریب ما بهتر می‌شود) به صورت $1/r^2$ تغییر می‌کند. بنابراین انتظار داریم که شدت میدان الکتریکی، برخلاف رابطه $1/r^2$ برای میدان یک بار نقطه‌ای،

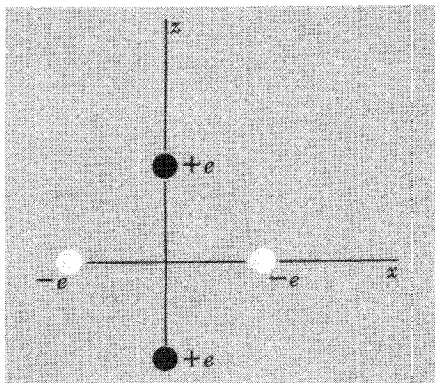


شکل ۱۰-۴ چند توزیع بار با $K_0 = 0$ و $K_1 \neq 0$. یعنی هر یک از آنها دارای بار خالص صفر، و گشتاور دوقطبی غیر صفر است.

به طور مجانبی، به صورت $1/r^3$ تغییر کند. البته، فقط درباره پتانسیل روی محور z بحث کردیم. پس از به دست آوردن دیدگاهی کلی از وضعیت موجود، به مسئله شکل دقیق میدان باز خواهیم گشت.

اگر K_0 و K_1 هر دو صفر باشد، و K_2 صفر نباشد، رفتار پتانسیل در فاصله‌های زیاد به صورت $1/r^3$ است، و شدت میدان با عکس توان چهارم فاصله فرو می‌افتد. شکل ۱۰-۵ توزیع باری را نشان می‌دهد که برای آن K_0 و K_1 هر دو صفر است (و بدون توجه به جهتی که برای محور z برگزیده‌ایم صفر خواهد ماند) در حالی که K_2 صفر نیست.

کمیت‌های K_0 ، K_1 ، K_2 ، مربوط به چیزی است که گشتاورهای توزیع بار خوانده می‌شوند. با استفاده از این زبان، K_0 را، که بار خالص است، گشتاور تک‌قطبی یا شدت تک‌قطبی می‌نامند.



شکل ۱-۵ برای این توزیع بار $K_0 = K_1 = 0$ ، اما $K_2 \neq 0$. این یک توزیع باگشتاور چارقطبی غیرصفر است.

K_1 مؤلفه‌ای از گشتاور دوقطبی توزیع بار است. گشتاور دوقطبی دارای بُعد بار x جابه‌جایی است؛ این گشتاور یک بردار است و مؤلفه z آن است. ثابت سوم K_2 با گشتاور چارقطبی توزیع ارتباط دارد، ثابت بعدی با گشتاور هشت قطبی و الی آخر. گشتاور چارقطبی یک بردار نیست بلکه یک تانسور است. توزیع بار که در شکل ۱-۵ نشان داده شده است گشتاور چارقطبی غیرصفر دارد.

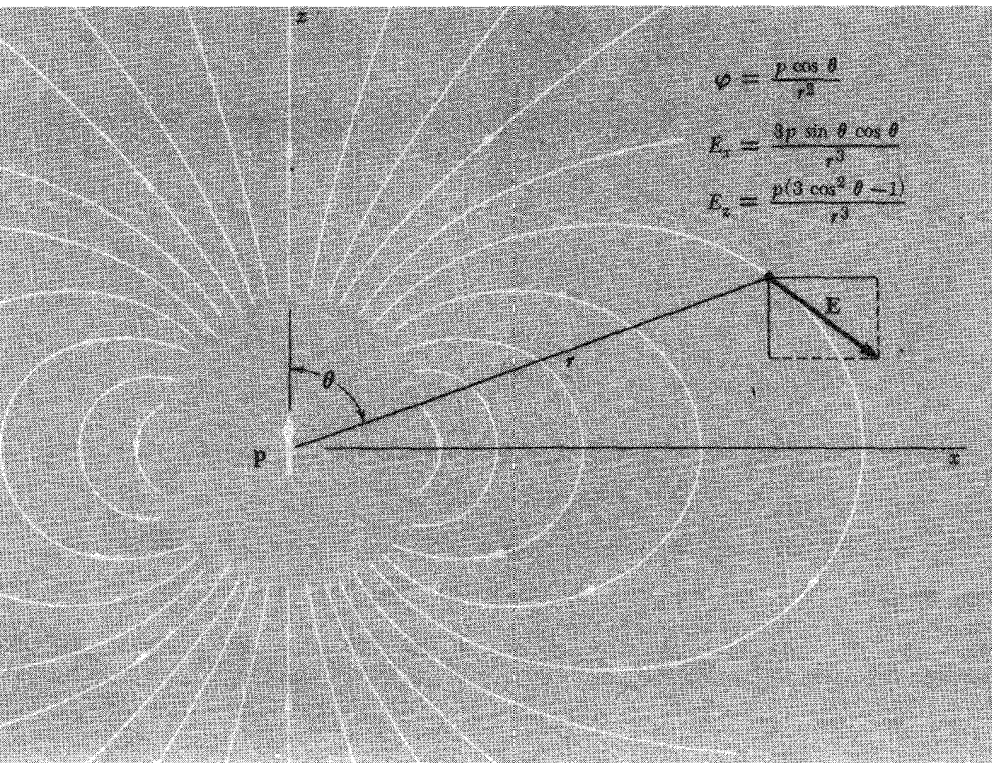
امتیاز توصیف بار با این سلسله مراتب گشتاورها در آن است که جنبه‌هایی از توزیع بار را که میدان در فاصله زیاد را مشخص می‌کند متمایز می‌سازد. اگر فقط به میدان در مجاورت توزیع بار علاقه‌مند باشیم، این کاری حاصل است. برای کار اصلی ما، فهمیدن اینکه در دی‌الکتریک چه می‌گذرد، فقط شدت تک‌قطبی (بار خالص) و شدت دوقطبی قطعه‌های ساختمانی مولکولی اهمیت دارد. می‌توان همه گشتاورهای دیگر را نادیده گرفت. و اگر قطعه‌های ساختمانی خنثی باشند، فقط باید گشتاورهای دوقطبی آنها را در نظر گرفت.

۱-۳ پتانسیل و میدان یک دوقطبی

سهم دوقطبی در پتانسیل نقطه A ، در فاصله r از مبدأ از رابطه $\int r' \cos \theta \rho dv'$ (به دست می‌آید. می‌توان $r' \cos \theta$ را که تصویر \mathbf{r}' در جهت به سوی A است به صورت $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$ نوشت. بنابراین می‌توانیم پتانسیل را بدون ارجاع به هیچ محور اختیاری به صورت زیر بنویسیم

$$\varphi_A = \frac{1}{r^2} \int \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \rho dv' = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \int \mathbf{r}' \rho dv' \quad (9)$$

که پتانسیل را در هر نقطه‌ای می‌دهد. انتگرال طرف راست معادله ۹ گشتاور دوقطبی توزیع بار است. بدیهی است که این گشتاور یک بردار با بُعد بار \times فاصله است. ما این بردار گشتاور دوقطبی



شکل ۱۰-۶ میدان الکتریکی یک دوقطبی، که با خطهای میدان نشان داده شده است.

را با \mathbf{p} نمایش می‌دهیم:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho dv' \quad (10)$$

با استفاده از گشتاور دوقطبی \mathbf{p} ، می‌توان معادله ۹ را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\varphi(r) = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{r^2} \quad (11)$$

میدان الکتریکی منفی گرادین این پتانسیل است. برای اینکه ببینیم میدان دوقطبی چگونه است، دوقطبی \mathbf{p} را در مبدأ در جهت z قرار می‌دهیم (شکل ۱۰-۶). با این آزمایش،

$$\varphi = \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (12)$$

البته پتانسیل و میدان حول محور z متقارن است بگذارید در صفحه xz کار کنیم که در آن $\cos \theta = z/(z^2 + x^2)^{1/2}$. در این صفحه، داریم

$$\varphi = \frac{pz}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \quad (۱۳)$$

مؤلفه‌های میدان الکتریکی را می‌توان فوراً به دست آورد:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3pxz}{(x^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3p \sin \theta \cos \theta}{r^2}$$

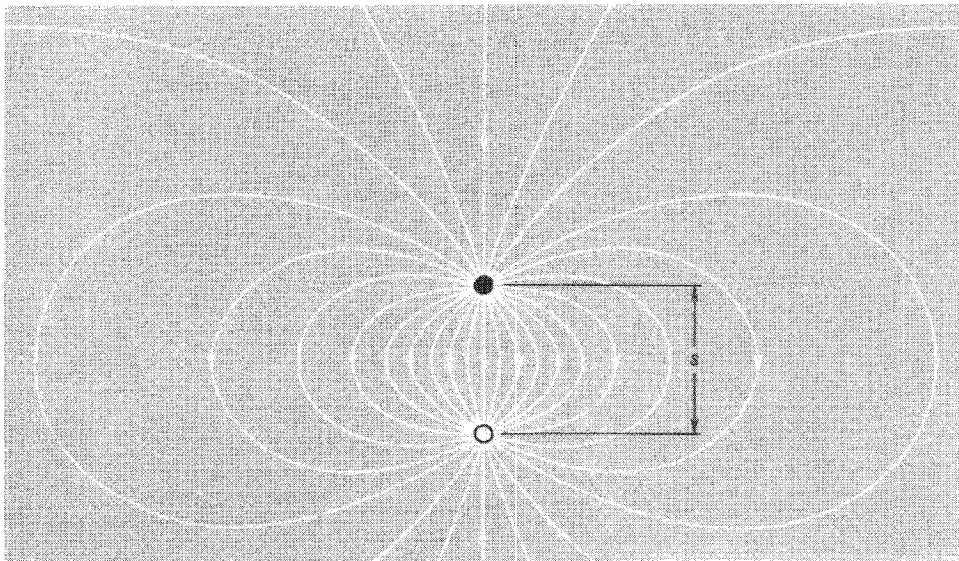
$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = p \left[\frac{3z^2}{(x^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \right] \quad (۱۴)$$

$$= \frac{p(3 \cos^2 \theta - 1)}{r^2}$$

میدان دوقطبی را می‌توان در مختصات قطبی r و θ به صورت ساده‌تر نوشت. اگر E_r مؤلفه \mathbf{E} در جهت \hat{r} و E_θ مؤلفه عمود بر \hat{r} در جهت θ فزاینده باشد. داریم

$$E_r = \frac{2p}{r^3} \cos \theta \quad E_\theta = \frac{p}{r^3} \sin \theta \quad (۱۵)$$

می‌توانید این رابطه را با معادله ۱۴ مقایسه کنید، یا اگر بدانید چگونه می‌توان گرادیان را در مختصات قطبی یافت، می‌توانید آن را مستقیماً به عنوان منفی گرادیان پتانسیل φ از رابطه ۱۲ به دست آورید. اگر در هر جهتی از دوقطبی دور شوید، درمی‌یابید که شدت میدان الکتریکی همان‌طور که انتظار داشتیم به صورت $1/r^3$ فرو می‌افتد. در امتداد محور z ، میدان با گشتاور دوقطبی p موازی، و اندازه آن $2p/r^3$ است. در صفحه استوایی جهت میدان با p موازی و مقدار آن p/r^3 است. این میدان شاید میدانی را به خاطر شما آورد که قبلاً دیده‌اید. بار نقطه‌ای روی صفحه رسانا با تصویر بار آن را به خاطر آورید. شاید ساده‌ترین توزیع بار مربوط به گشتاور دوقطبی دو بار نقطه‌ای $+q$ و $-q$ باشد که در فاصله s از هم قرار دارند. برای سیستمی از بارهای نقطه‌ای معادله ۱۵ به صورت یک مجموع درمی‌آید. گشتاور دوقطبی جفت بار نقطه‌ای ما برابر qs است، و جهت بردار از بار منفی به بار مثبت است. در شکل ۷-۱۰ میدان این جفت بار را نشان داده‌ایم، تا تأکید کنیم که میدان مجاور بارها یک میدان دوقطبی نیست. این توزیع بار گشتاورهای چندقطبی بسیاری دارد، در واقع تعداد آنها بینهایت است، بنابراین فقط میدان دور در فاصله‌های $s \gg r$ است که می‌تواند نماینده یک میدان دوقطبی باشد.

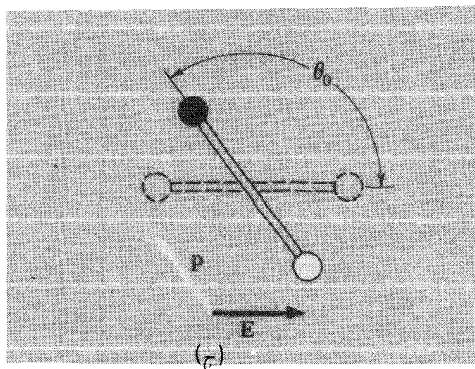
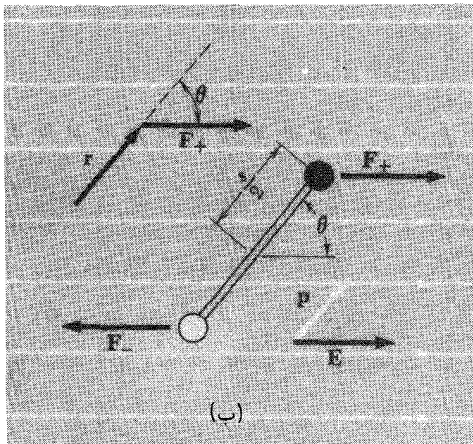
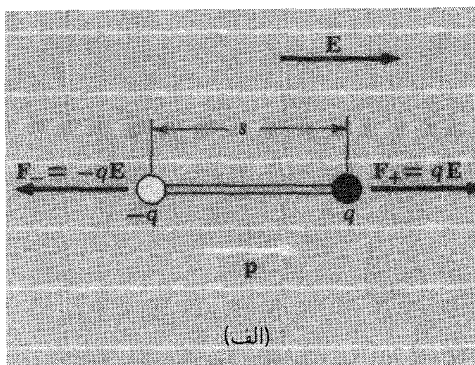


شکل ۱۰-۷ میدان الکتریکی یک جفت بار نقطه‌ای مساوی و با علامت مخالف در فاصله‌هایی که در مقایسه با فاصله دو بار s بزرگ باشد، تقریباً میدان یک دوقطبی است.

برای تولید یک میدان دوقطبی درست در مرکز باید بگذاریم تا s به صفر میل کند در حالی که q را بدون حد افزایش می‌دهیم تا $p = qs$ را متناهی نگه داریم. این تجرید بسیار تکین چندان جالب توجه نیست. می‌دانیم که توزیع بار مولکولی ما میدانهای نزدیک پیچیده‌ای دارد، بنابراین در هر صورت نمی‌توان ناحیه‌های نزدیک را به راحتی نمایش داد. خوشبختانه نیازی به این کار نداریم.

۱۰-۴ لنگر و نیروی وارد بر یک دوقطبی در میدان خارجی

فرض کنید دو بار $-q$ و $+q$ به صورت مکانیکی به هم متصل شده‌اند به طوری که فاصله s بین آنها، ثابت است. می‌توانید فکر کنید که بارها به انتهای یک میله کوتاه نارسا به طول s چسبانده شده‌اند. این جسم را یک دوقطبی می‌نامیم گشتاور دوقطبی آن به سادگی qs است. بیایید این دوقطبی را در یک میدان الکتریکی خارجی، یعنی میدان یک چشمه دیگر بگذاریم. اکنون به میدان خود دوقطبی علاقه‌ای نداریم. ابتدا یک میدان الکتریکی یکنواخت را، مانند شکل ۱۰-۸ الف در نظر بگیرید. انتهای مثبت دوقطبی با نیرویی به شدت Eq به طرف راست و انتهای منفی آن با همین نیرو به طرف چپ کشیده می‌شود. بنابراین برآیند نیرو و لنگر وارد بر جسم در این محل صفر است بدیهی است که بر یک دوقطبی که مانند شکل ۱۰-۸ ب با جهت میدان زاویه θ می‌سازد لنگری وارد می‌شود. به طور کلی لنگر \mathbf{N} حول محوری که از یک مبدأ برگزیده می‌گذرد $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$



شکل ۱۰-۸ (الف) یک دوقطبی در میدان یکنواخت. (ب) لنگر وارد بر دوقطبی برابر است با $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ برداری به سمت داخل صفحه است. (ج) کار انجام شده در چرخش دوقطبی از سمتگیری موازی میدان به سمتگیری نشان داده شده در شکل برابر است با $pE(1 - \cos\theta_0)$.

است، که در آن \mathbf{F} لنگری است که در فاصله r از مبدأ اعمال می‌شود. اگر مبدأ را در مرکز دوقطبی بگیریم، به طوری که $r = s/2$ باشد، داریم

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_+ + (-\mathbf{r}) \times \mathbf{F}_- \quad (۱۶)$$

\mathbf{N} برداری عمود بر شکل، و اندازه آن برابر است با

$$N = \frac{s}{2}Eq \sin\theta + \frac{s}{2}Eq \sin\theta = sqE \sin\theta = pE \sin\theta \quad (۱۷)$$

این را می‌توان به صورت ساده زیر نوشت

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (18)$$

هنگامی که نیروی کل وارد بر دوقطبی صفر است، مانند این مورد، لنگر به انتخاب مبدأ بستگی ندارد، بنابراین مشخص کردن آن لازم نیست.

سمتگیری دوقطبی در شکل ۱۰-۸ الف دارای کمترین انرژی است. برای چرخاندن آن به هر موقعیت دیگر باید کار انجام داد. بگذارید کار لازم برای چرخاندن دوقطبی از وضعیت موازی با میدان، به اندازه زاویه θ را که در شکل ۱۰-۸ ج نشان داده شده است محاسبه کنیم. چرخش در زاویه بسیار کوچک $d\theta$ به مقدار کار $N d\theta$ نیاز دارد. بنابراین کل کار انجام شده برابر است با

$$\int_0^{\theta_0} N d\theta = \int_0^{\theta_0} pE \sin \theta d\theta = pE(1 - \cos \theta_0) \quad (19)$$

وارون کردن دوقطبی، یعنی چرخش آن از یک سر به سر دیگر، متناظر با $\theta_0 = \pi$ است و نیازمند کار برابر $2pE$ است.

بدیهی است که برآیند نیروی وارد بر دوقطبی در هر میدان یکنواخت، بدون توجه به سمتگیری آن صفر است. در یک میدان غیریکنواخت، نیروی وارد بر دو سر دوقطبی دقیقاً برابر و در جهت مخالف نیست و برآیند نیرو بر جسم وارد می‌شود. یک مثال ساده، یک دوقطبی در میدان یک نقطه‌ای Q است. اگر دوقطبی مانند شکل ۱۰-۹ الف به طور شعاعی قرار گرفته باشد و سر مثبت آن به بار مثبت Q نزدیکتر باشد، برآیند نیرو به طرف خارج خواهد بود، و اندازه آن برابر خواهد بود با

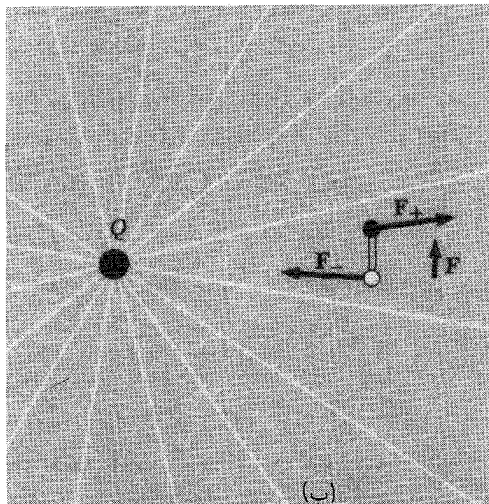
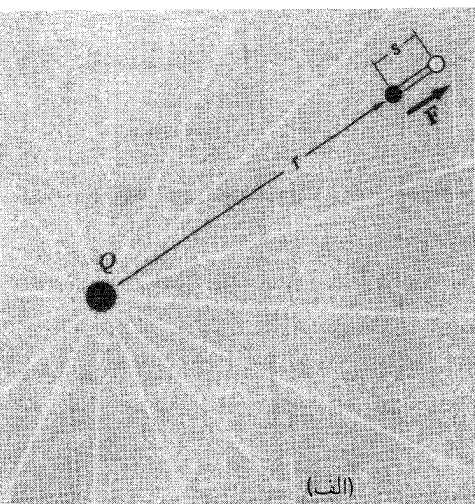
$$F = (q) \frac{Q}{r^2} + (-q) \frac{Q}{(r+s)^2} \quad (20)$$

برای $s \ll r$ ، فقط باید آن را تا مرتبه اول s/r برآورد کنیم، که آن را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

$$F = \frac{qQ}{r^2} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{r}\right)^2} \right] \approx \frac{qQ}{r^2} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{2s}{r}} \right] \approx \frac{2sqQ}{r^3} \quad (21)$$

برحسب گشتاور دوقطبی p ، می‌توان آن را به صورت ساده زیر نوشت

$$F = \frac{2pQ}{r^3} \quad (22)$$



شکل ۱۰-۹ نیروی وارد بر دوقطبی در یک میدان غیریکنواخت. (الف) برآیند نیروی وارد بر دوقطبی در این موقعیت شعاعی و به طرف خارج است. (ب) برآیند نیروی وارد بر دوقطبی در این وضعیت به طرف بالاست.

اگر دوقطبی بر میدان عمود باشد، مانند شکل ۱۰-۹ ب، نیرویی وجود خواهد داشت. اکنون نیروهای وارد بر دو سر دوقطبی گرچه برابرند، اما درست در جهت مخالف نیستند. به دست آوردن یک فرمول کلی برای نیروی وارد بر دوقطبی در یک میدان غیریکنواخت مشکل نیست. نیرو اساساً به گرادیانهای مؤلفه‌های مختلف میدان بستگی دارد. به طور کلی، مؤلفه x نیروی وارد بر گشتاور دوقطبی \mathbf{p} برابر است با

$$F_x = \mathbf{p} \cdot \text{grad } E_x \quad (23)$$

فرمولهای مشابهی برای F_y و F_z وجود دارد.

۱۰-۵ دوقطبیهای اتمی و مولکولی؛ گشتاورهای دوقطبی القایی

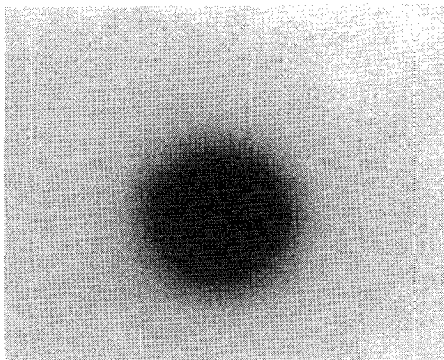
ساده‌ترین اتم یعنی اتم هیدروژن را در نظر بگیرید، که از هسته و یک الکترون تشکیل شده است. اگر فرض کنید که الکترون دارای بار منفی — مانند مدل اتمی اولیه نیلس بور — چون سیاره‌ای که گرد خورشید می‌چرخد، گرد هسته در حرکت است نتیجه خواهید گرفت که اتم، در هر لحظه از زمان، یک گشتاور دوقطبی الکتریکی دارد. بردار گشتاور دوقطبی \mathbf{p} در جهت موازی با بردار شعاع

الکترون-پروتون است، و اندازه آن e برابر فاصله الکترون-پروتون است. جهت این بردار با چرخش الکترون در مدارش، در این تصویر از اتم، پیوسته تغییر می‌کند. بدون شک، میانگین زمانی P برای یک مدار دایره‌ای صفر است، اما انتظار داریم مؤلفه‌های دوقطبی که به‌طور متناوب تغییر می‌کنند میدانهای الکتریکی نوسانی سریع و تابش الکترومغناطیسی تولید کنند. نبود چنین تابشی در اتم هیدروژن معمولی یکی از پارادوکسهای گیج‌کننده فیزیک کوانتومی اولیه بود. مکانیک کوانتومی جدید می‌گوید بهتر است اتم هیدروژن در پایینترین حالت انرژی (وضعیت عادی اغلب اتمهای هیدروژن موجود در عالم) را ساختاری با تقارن کروی در نظر بگیریم که بار الکترونی آن، به‌صورت میانگین زمانی، در ابری که هسته را احاطه کرده توزیع شده است. چیزی در مسیر دایره‌ای نمی‌چرخد و نوسان نمی‌کند. اگر بتوانیم عکسی با زمان نوردی کمتر از 10^{-16} ثانیه بگیریم، شاید الکترونی را ملاحظه کنیم که در فاصله دور از هسته جایگزیده شده است. اما در فرایندهایی که در آنها زمانهای بسیار طولانی‌تر دخیل‌اند، در واقع توزیع همواری از بار منفی هسته را احاطه کرده است و چگالی آن به تدریج با گسترش به طرف خارج در تمام جهتها کاهش می‌یابد. بار کل این توزیع درست برابر $-e$ ، یعنی بار الکترون است. تقریباً نیمی از این بار در کره‌ای به شعاع 5×10^{-8} cm (۵ رده) قرار دارد. چگالی به طرف خارج به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد؛ کره‌ای به شعاع 2.2 آنگستروم حاوی 99 درصد بار است. میدان الکتریکی در اتم، درست چیزی است که توزیع بار مانایی به این شکل، همراه با بار مثبت هسته تولید می‌کند.

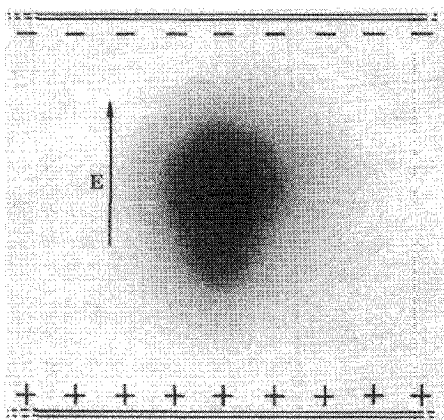
یک تصویر مشابه بهترین چیزی است که می‌توان برای اتمها و مولکولها پذیرفت. می‌توان هسته‌های یک مولکول را بارهای نقطه‌ای در نظر گرفت، زیرا برای هدفهای فعلی ما اندازه آنها کوچکتر از آن است که اهمیتی داشته باشد. ساختار الکترونیکی کامل مولکول را باید به‌صورت ابری از بار منفی در نظر گرفت که چگالی آن به آرامی تغییر می‌کند. شکل این ابر و تغییر چگالی بار در داخل آن البته برای مولکولهای مختلف فرق می‌کند. اما در کناره‌های ابر چگالی همواره به‌طور نمایی فرو می‌افتد، به طوری که صحبت کردن درباره اندازه و شکل توزیع بار مولکولی بی‌معنی است.

مکانیک کوانتومی بین حالت‌های مانا و حالت‌های وابسته به زمان یک اتم تفاوتی بارز می‌گذارد. حالت با کمترین انرژی یک ساختار مستقل از زمان، یعنی یک حالت ماناست. باید همچنین باشد. این حالت اتم و مولکول است که در اینجا به آن علاقه‌مندیم. البته، اتم می‌تواند انرژی الکترومغناطیسی تابش کند. این وضعیت در مورد اتم در حالت ناپایدار رخ می‌دهد که در آن یک بار الکتریکی نوسانگر وجود دارد.

شکل $10-10$ توزیع بار را در اتم هیدروژن معمولی نشان می‌دهد. این مقطعی از ابر با تقارن کروی است که چگالی آن با سایه‌زدن نشان داده شده است. بدیهی است که گشتاور دوقطبی



شکل ۱۰-۱۰ میانگین زمانی توزیع در اتم هیدروژن معمولی. سایه نشاندهنده چگالی بار الکترونی (منفی) است.



شکل ۱۱-۱۰ در میدان الکتریکی بار منفی به یک طرف، و هسته مثبت به طرف دیگر کشیده می‌شود. واپیچیدگی در این شکل به شدت اغراق‌آمیز است. برای واپیچیدگی اتم به این اندازه میدان لازم 10^8 ولت بر سانتی‌متر است.

چنین توزیعی صفر است. این موضوع برای هر اتم در حالت با کمترین انرژی، بدون توجه به تعداد الکترونهای آن، صادق است، زیرا در همه این حالتها توزیع الکترون تقارن کروی دارد. این برای هر اتم یونیده صادق است، اگر چه یک یون دارای گشتاور تک‌قطبی یعنی بار خالص است.

تاکنون به چیز جالب توجهی بر نخورده‌ایم. اما بگذارید اتم هیدروژن را مانند شکل ۱۰-۱۱ در میدان الکتریکی یک چشمه خارجی بگذاریم. میدان الکتریکی اتم را واپیچیده می‌کند، منفی را به طرف پایین و هسته مثبت را به سوی بالا می‌کشد. اتم واپیچیده یک گشتاور دوقطبی دارد زیرا "مرکز جرم" بار منفی دیگر بر هسته مثبت منطبق نیست، بلکه با آن فاصله‌ای برابر Δz دارد. اکنون گشتاور دوقطبی اتم $e\Delta z$ است.

یک میدان به شدت E چه مقدار واپیچیدگی ایجاد می‌کند؟ به خاطر داشته باشید که میدانهای الکتریکی قبلاً در اتم مختل نشده وجود دارد، بزرگی آنها از مرتبه e/a^2 است، که a بعد نوعی اتم

است. انتظار داریم که واپیچیدگی نسبی ساختار اتم، که با نسبت $\Delta z/a$ اندازه گرفته می شود، همان مرتبه بزرگی نسبت میدان اختلالی E به میدانهای داخلی باشد که اتم را یکپارچه نگه می دارد. به عبارت دیگر، پیشگویی می کنیم که

$$\frac{\Delta z}{a} \approx \frac{E}{e/a^2} \quad (24)$$

اکنون a طولی از مرتبه 10^{-8} سانتی متر و e/a^2 تقریباً 10^7 ایستاولت بر سانتی متر است، میدانی که هزاران بار شدیدتر از هر میدان پایایی است که می توانیم در آزمایشگاه تولید کنیم. ظاهراً واپیچیدگی اتم در هر مورد عملی بسیار مختصر است. اگر معادله ۲۴ صادق باشد، نتیجه می گیریم که گشتاور دوقطبی p اتم واپیچیده، که درست برابر $e\Delta z$ است، برابر خواهد بود با

$$p = e\Delta z \approx a^2 E \quad (25)$$

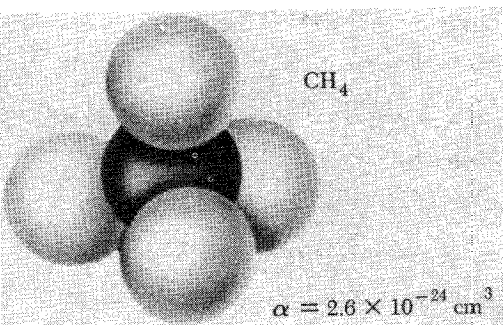
چون اتم پیش از اعمال میدان E تقارن کروی داشت، بردار گشتاور دوقطبی p در جهت میدان E است. عاملی که p را به E مرتبط می کند قطبش پذیری اتمی می گویند، و معمولاً آن را با α نشان می دهند

$$p = \alpha E \quad (26)$$

توجه کنید که α دارای بُعد حجم است. طبق برآورد ما مرتبه بزرگی آن در حدود 10^{-24} cm^3 و چیزی مانند حجم اتم است. مقدار آن برای یک اتم به خصوص به جزئیات ساختار الکترونی اتم بستگی دارد. یک محاسبه دقیق کوانتوم مکانیکی برای قطبش پذیری اتم هیدروژن مقدار $\alpha = 9/2a_0^3$ را پیشگویی می کند که a_0 شعاع بور و برابر است با $10^{-8} \times 0.52 \text{ cm}$ که فاصله مشخصه اتم H در حالت عادی آن است. قطبش پذیری الکتریکی چند نمونه از اتمها، که به طور تجربی تعیین شده اند، در جدول ۱۰-۲ داده شده است. مثالها برحسب تعداد

جدول ۱۰-۲

قطبش پذیری اتمی، برحسب یکای 10^{-24} cm^3									
عنصر	H	He	Li	Be	C	Ne	Na	A	K
α	۰٫۶۶	۰٫۲۱	۱۲	۹٫۳	۱٫۵	۰٫۴	۲۷	۱٫۶	۳۴



شکل ۱۰-۱۲ مولکول متان، متشکل از چهار اتم هیدروژن در یک اتم کربن.

الکترونها مرتب شده‌اند. به تغییرات گسترده α توجه کنید. اگر با جدول تناوبی عناصر آشنا باشید، می‌توانید متوجه روند منظمی بشوید. هیدروژن و فلزات قلیایی، مانند لیتیم، سدیم، و پتاسیم، که اولین ستون جدول تناوبی را اشغال می‌کنند، مقادیر بزرگ α دارند، و این با افزایش عدد اتمی به صورت منظم از هیدروژن تا پتاسیم افزایش می‌یابد. قطبش‌پذیری اتمی گازهای نادر بسیار کوچکتر است، اما برای آنها نیز با پیشروی در خانواده، از هلیم تا نئون و کریپتون زیاد می‌شود. ظاهراً، اتمهای قلیایی، به‌عنوان یک گروه، بر اثر میدان الکتریکی به آسانی تغییر شکل می‌دهند، در حالی‌که ساختار الکترونی گازهای نادر بسیار سخت‌تر است. الکترونها با وابستگی کم یا الکترونها «ظرفیت» در ساختار اتمهای قلیایی مسئول قطبش‌پذیری آسان هستند.

یک مولکول نیز بر اثر اعمال میدان الکتریکی دارای گشتاور دوقطبی القایی می‌شود. مولکول متان که در شکل ۱۰-۱۲ نشان داده شده است متشکل از چهار اتم هیدروژن در گوشه‌های یک چهاروجهی حول یک اتم کربن مرکزی است. این جسم یک قطبش‌پذیری الکتریکی دارد که به طور تجربی برابر مقدار زیر تعیین شده است

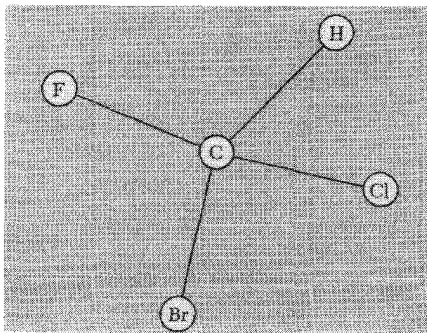
$$۲٫۶ \times ۱۰^{-۲۴} \text{ cm}^3$$

مقایسه این مقدار با مجموع قطبش‌پذیریهای یک اتم کربن و چهار اتم هیدروژن منزوی جالب توجه است. با گرفتن داده‌ها از جدول ۱۰-۲، درمی‌یابیم که $\alpha_C + 4\alpha_H = ۴٫۱ \times ۱۰^{-۲۴} \text{ cm}^3$. ظاهراً پیوند اتمها در یک مولکول به‌گونه‌ای ساختار الکترونی را تغییر داده است. اندازه‌گیرهای قطبش‌پذیری اتمی و مولکولی را مدتهاست شیمییدانها به‌عنوان شاهدهی بر ساختار مولکولی به‌کار می‌برند.

۱۰-۶ گشتاورهای دوقطبی دائمی

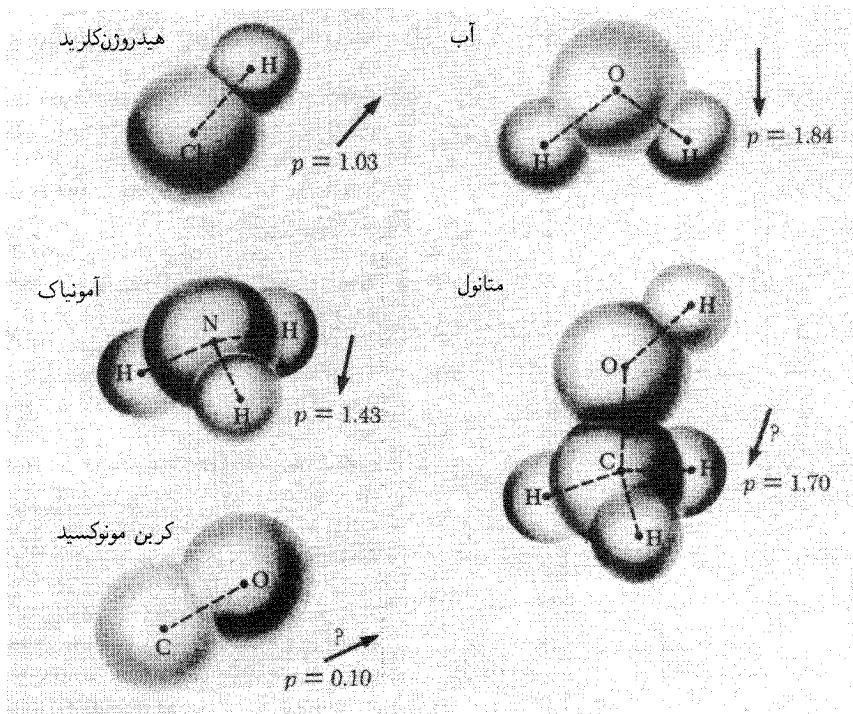
بعضی مولکولها چنان ساخته شده‌اند که حتی در نبود میدان الکتریکی گشتاور دوقطبی الکتریکی دارند این مولکولها در حالت عادی نامتقارن‌اند. یک مثال مولکولی است که در شکل ۱۰-۱۳ نشان داده شده است. یک مثال ساده‌تر مولکولی دو اتمی است که از دو اتم نامتشابه ساخته شده باشد، مانند هیدروژن کلرید، HCl. هیچ نقطه‌ای روی محور این مولکول وجود ندارد که مولکول حول آن متقارن باشد؛ دو انتهای مولکول از لحاظ فیزیکی متفاوت‌اند. کاملاً تصادفی است اگر گرانیگاه بار مثبت، و منفی بر یک نقطه در امتداد این محور بیفتند. وقتی مولکول HCl از اتمهای H و Cl که در ابتدا کروی هستند تشکیل می‌شود، الکترون اتم H تا اندازه‌ای بر ساختار Cl منتقل می‌شود، و هسته هیدروژن را تا اندازه‌ای برهنه می‌گذارد. بنابراین، مقداری بار مثبت اضافی در سر هیدروژنی مولکول و متناظر با آن مقداری بار منفی اضافی در سر کلر به وجود می‌آید. بزرگی گشتاور دوقطبی الکتریکی حاصل برابر است با $10^{-18} \times 3.0 \times 10^{-10}$ esu-cm، که با جابه‌جایی یک الکترون به اندازه حدود ۲^۰ آنگستروم هم‌ارز است. برعکس اتم هیدروژن در یک میدان ۳^۰ کیلوولت بر سانتی‌متر، با قطبش‌پذیری جدول ۱۰-۲، دارای گشتاور دوقطبی القایی کمتر از 10^{-22} esu-cm می‌شود. به‌عنوان یک قانون کلی، گشتاورهای دوقطبی دائمی، اگر وجود داشته باشند، بسیار بزرگتر از گشتاوری هستند که می‌توان با استفاده از میدانهای الکتریکی آزمایشگاهی القا کرد.^۱ بدین سبب، فرق بین مولکولهای قطبی، مولکولهایی با گشتاورهای دوقطبی "داخلی" بدین نام خوانده می‌شود، و مولکولهای ناقطبی بسیار بارز است.

در آغاز این بخش ۱۰-۵ گفتیم که اتم هیدروژن، در هر لحظه از زمان، یک گشتاور دوقطبی دارد. اما اینکه میانگین زمانی آن صفر باشد را به علت حرکت سریع الکترون رد کردیم. اکنون



شکل ۱۰-۱۳ یک مولکول بدون هیچ نوع تقارن، بروموکلروفلوروئورومتان. این متانی است که سه هالوژن مختلف جایگزین سه هیدروژن آن شده است. طول پیوندها و یالهای چهاروجهی با هم کمی تفاوت دارند.

۱. دلیل خوبی برای این موضوع وجود دارد. میدانهای الکتریکی در اتمها و مولکولها، چنانکه در بخش قبل گفتیم، به‌طور طبیعی از مرتبه $e/(10^{-8} \text{cm})^2$ هستند که تقریباً 10^9 ولت بر سانتی‌متر است. نمی‌توان این میدان را در آزمایشگاه بر ماده اعمال کرد زیرا این میدان ماده را قطعه‌قطعه می‌کند.



شکل ۱۰-۱۴ چند مولکول قطبی معروف. اندازه گشتاور دوقطبی دائمی p برحسب واحد 10^{-18} esu.cm داده شده است.

به نظر می‌رسد که راجع به گشتاورهای دوقطبی مولکولی طوری صحبت می‌کنیم که گویی یک مولکول جسمی ساکن مانند چوگان بیس‌بال است که می‌توان دو سر آن را سر فرصت بررسی کرد و دید کدام‌یک بزرگتر است! مولکولها کندتر از الکترونها حرکت می‌کنند، اما حرکت آنها در مقیاس معمولی سریع است. پس چرا می‌توانیم به آنها گشتاورهای دوقطبی دائمی نسبت دهیم؟ اگر این ناسازگاری ناراحتان می‌کند، باید شما را ستود. جواب کامل را نمی‌توان بدون اطلاع از مکانیک کوانتومی داد، اما در این تفاوت، مقیاس زمانی حرکت دخیل است. زمانی که طول می‌کشد تا یک مولکول با محیط اطرافش برهم‌کنش کند معمولاً کوتاهتر از زمانی است که طول می‌کشد تا حرکت ذاتی مولکول گشتاور دوقطبی را به صورت هموار میانگین بگیرد. بنابراین مولکول در واقع چنان عمل می‌کند که گویی دارای گشتاوری است که راجع به آن صحبت می‌کنیم. زمانی بسیار کوتاه در جهان یک مولکول و همسایگانش می‌تواند ابدی به نظر برسد.

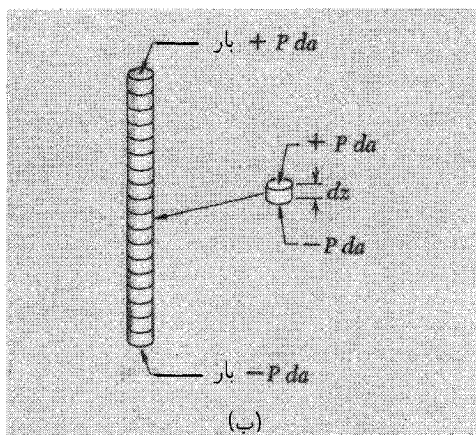
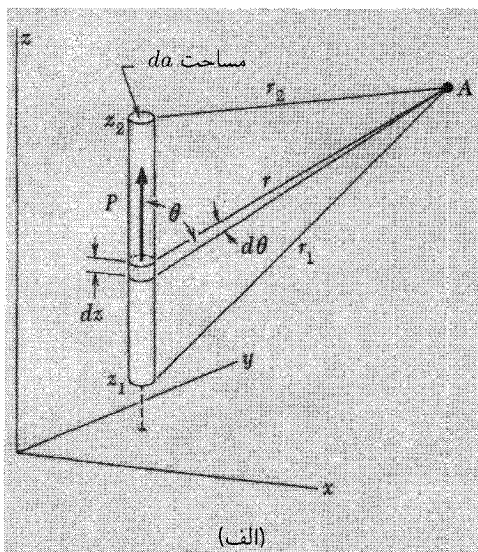
چند مولکول قطبی معمولی در شکل ۱۴-۱۰ نشان داده شده‌اند، جهت و اندازه گشتاور دوقطبی دائمی در هر مورد نشان داده شده است. مولکول آب دارای گشتاور دوقطبی الکتریکی

است زیرا وسط آن خم شده است، محورهای O—H با هم زاویه‌ای در حدود 105° می‌سازند. این یک ساختار عجیب و غریب با پیامدهای فراوان است. گشتاور دوقطبی مولکول تا اندازه زیادی مسئول ویژگیهای آب به‌عنوان یک حلال است، و نقش تعیین‌کننده‌ای در شیمی محیطهای آبی دارد. تصور اینکه اگر اجزای مولکول H_2O مانند مولکول CO_2 ، در خط راست قرار داشتند جهان چگونه می‌بود، مشکل است. باید اضافه کنیم که شکل مولکول H_2O یک هوسبازی طبیعت نیست. مکانیک کوانتومی به روشنی نشان می‌دهد که چرا مولکولی متشکل از یک اتم هشت الکترونی که به دو اتم تک‌الکترونی پیوسته است ترجیح می‌دهد که خم شود.

رفتار مواد قطبی به‌عنوان دی‌الکتریک با مواد متشکل از مولکولهای ناقصی تفاوتی بارز دارد. ثابت دی‌الکتریک آب در حدود 80 ، و برای الکل متیلیک 33 است، در حالی که برای یک نمونه مایع ناقصی ثابت دی‌الکتریک در حدود 2 است. در مواد ناقصی اعمال میدان الکتریکی، گشتاور دوقطبی مختصری در هر مولکول القا می‌کند. در مواد قطبی گشتاورها به تعداد زیاد از قبل موجودند، اما در نبود میدان، در جهتهای کاتوره‌ای قرار دارند به طوری که هیچ اثر بزرگ مقیاسی ندارند. اعمال یک میدان الکتریکی صرفاً آنها را تا اندازه‌ای همسو می‌کند. اما، در فرایندهای دیگر، اثرهای ماکروسکوپیکی را مقدار خالص قطبش در واحد حجم تعیین می‌کند.

۱۰-۷ میدان الکتریکی حاصل از ماده قطبیده

فرض کنید با گردآوری تعداد زیادی مولکول در یک ناحیه تهی فضا، یک قطعه ماده می‌سازیم. همچنین فرض کنید که همه این مولکولها در یک جهت قطبیده‌اند. فعلاً لازم نیست نگران سرشت مولکولها یا وسیله تأمین قطبش آنها باشیم. فقط به میدان الکتریکی‌ای علاقه‌مندیم که آنها در این شرایط تولید می‌کنند؛ بعداً می‌توانیم میدانهای دیگر چشمه‌های موجود را هم وارد کنیم. در صورت تمایل، می‌توانید تصور کنید که اینها مولکولهایی با گشتاورهای دوقطبی دائم‌اند که به‌طور منظم به صف شده‌اند، و همه در یک جهت قرار دارند، و در جای خود منجمد شده‌اند. تنها چیزی که باید تعیین کنیم N ، تعداد دوقطبیها در سانتی‌متر مکعب، و گشتاور هر دوقطبی p است. فرض خواهیم کرد که N به قدری بزرگ است که هر حجم کوچک ماکروسکوپیکی dv حاوی تعداد زیادی دوقطبی است. شدت کل دوقطبی در چنین حجمی $pN dv$ است. در هر نقطه‌ای که در مقایسه با اندازه این جزء حجم از آن دور است، میدان الکتریکی حاصل از این دوقطبیها عملاً همان چیزی است که اگر به جای آنها تنها یک دوقطبی با شدت $pN dv$ قرار دهیم به‌دست می‌آید. pN را چگالی قطبش می‌نامیم و با P نمایش می‌دهیم که یک کمیت برداری با ابعاد بارسانتی‌متر/سانتی‌متر مکعب، یا بار بر سانتی‌متر مربع است. بنابراین $P dv$ گشتاور دوقطبی وابسته به هر جزء حجم dv به‌منظور محاسبه میدان الکتریکی در یک فاصله است. به هر حال ماده ما



شکل ۱۵-۱۰ یک ستون از ماده قطبیده (الف) در هر نقطه خارجی A ، همان میدانی را تولید می‌کند که دو بار در دو سر ستون (ب).

فقط از اجتماع مولکولهای خنثی تشکیل شده است؛ بار خالصی در سیستم یا روی هیچ مولکول وجود ندارد، بنابراین فقط باید گشتاورهای دوقطبی را به عنوان چشمه‌های میدان در دور دست در نظر بگیریم.

در شکل ۱۵-۱۰ یک ستون باریک یا استوانه‌ای از این ماده قطبیده نشان داده شده است. سطح مقطع آن da است و به صورت عمودی از z_1 تا z_2 امتداد یافته است. چگالی قطبش P در داخل این ستون در امتداد طول و نقطه‌های در جهت z یکنواخت است. می‌خواهیم پتانسیل الکتریکی حاصل از این ستون قطبش را در یک نقطه خارجی محاسبه کنیم. یک جزء این حجم، به ارتفاع dz ، دارای گشتاور دوقطبی $P dv = P da dz$ است. سهم آن در پتانسیل نقطه A را می‌توان با ارجاع به فرمول معادله ۱۲ برای پتانسیل یک دوقطبی نوشت.

$$d\varphi_A = \frac{P da dz \cos \theta}{r^2} \quad (27)$$

پتانسیل حاصل از کل ستون برابر است با

$$\varphi_A = P da \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz \cos \theta}{r^2} \quad (28)$$

این ساده‌تر از آن است که به نظر می‌رسد: $dz \cos \theta$ درست $-dr$ است، به طوری که انتگرالده،

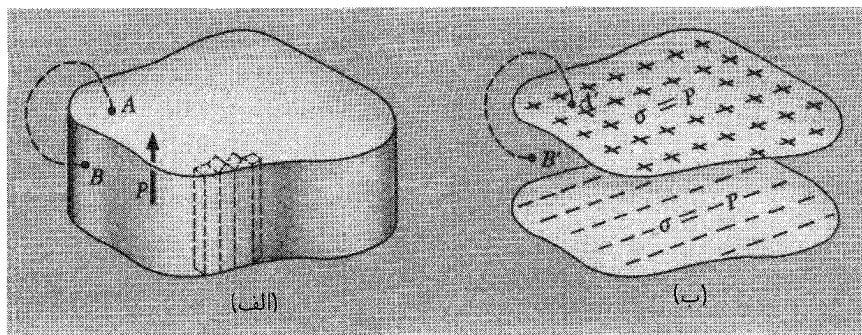
دیفرانسیل کامل، $d(1/r)$ است. بنابراین حاصل انتگرالگیری برابر است با

$$\varphi_A = P da \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (29)$$

معادله ۲۹ درست همان عبارت مربوط به پتانسیل حاصل از دو بار نقطه‌ای در A است، یک بار مثبت به بزرگی $P da$ در بالای ستون در فاصله r_2 از A ، و یک بار منفی به همان اندازه در پایین ستون. چشمه متشکل از ستونی از ماده قطبیده، لااقل تا آنجا که به میدان آن در نقطه‌های خارجی مربوط می‌شود، با دو بار متمرکز هم‌ارز است.

این را می‌توان بدون استفاده از ریاضیات به طریق دیگر اثبات کرد. بخش کوچکی از ستون به ارتفاع dz را در نظر بگیرید، که حاوی گشتاورهای دوقطبی به مقدار $P da dz$ است. بگذارید مدل یا جایگزین آن را یک نارسانای ناقطبیده به همان اندازه و شکل در نظر بگیریم که یک بار $P da$ در بالا، و یک بار $-P da$ در پایین آن. این قطعه کوچک همان گشتاور دوقطبی تکه‌ای از ستون اصلی ما را دارد، و بنابراین سهم آن در میدان هر نقطه دور دست A یکسان است. (میدان در داخل مدل ما، یا در فاصله نزدیک به آن ممکن است با میدان اصلی متفاوت باشد—اما اهمیتی ندارد.) اکنون مجموعه‌ای از این قطعه‌ها را روی هم بگذارید تا مدلی از ستون قطبیده به دست آید. این قطعه‌ها باید همان میدانی را در نقطه A تولید کنند که ستون کامل تولید می‌کرد، زیرا هر قطعه همان سهمی را دارد که همتایش در ستون اولیه (شکل ۱۰-۱۵ ب). اکنون ببینید چه داریم! در هر محل اتصال بار مثبت در بالای یک قطعه بر بار منفی در پایین قطعه بالای آن منطبق است، و حاصل بار صفر است. تنها بارهایی که خنثی نمی‌شوند بار منفی $-P da$ در پایین قطعه پایینی و بار مثبت $P da$ در بالای قطعه بالایی است. از نقطه دور دستی مانند A ، این بارها نقطه‌ای به نظر می‌رسند. بنابراین، مانند قبل نتیجه می‌گیریم که دو بار این چنین در نقطه A درست همان میدانی را تولید می‌کنند که تمام ماده قطبیده.

بدون هیچگونه محاسبه بیشتر می‌توان این موضوع را به تیغه، یا استوانه قائم که به هر نسبت در جهت عمود بر رخهای موازی قطبیده است گسترش داد (شکل ۱۰-۱۶ الف). تیغه را می‌توان به بسته‌ای از ستونها تقسیم کرد، و پتانسیل در خارج آن مجموعه سهم ستونهاست، که هر یک را می‌توان با باری در دو سر آن جایگزین کرد. بارهای بالایی، که برای هر ستون به سطح قاعده da برابر است با $P da$ ، یک ورقه یکنواخت از بار سطحی به چگالی $\sigma = P \sin \theta$ بر واحد سطح می‌سازند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که پتانسیل در همه جای خارج از یک تیغه یا استوانه قطبیده یکنواخت درست همان چیزی است که از دو ورقه بار سطحی که در محل سطوح بالایی و پایینی



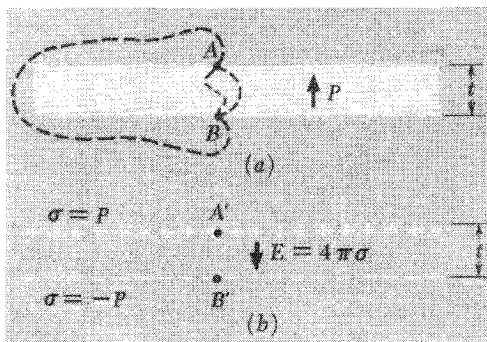
شکل ۱۰-۱۶ یک قطعه ماده قطبیده (الف) و دو ورقه بار (ب) تا آنجا که به میدان خارج از آنها مربوط می‌شود هم‌ارزند.

تیغه قرار گرفته باشند، و چگالی بار سطحی آنها به ترتیب $\sigma = P$ و $\sigma = -P$ باشد حاصل می‌شود (شکل ۱۰-۱۶ ب).

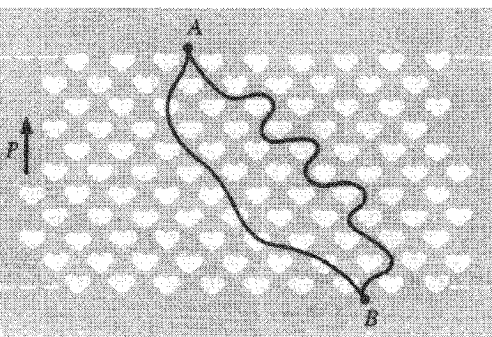
اکنون آمادگی نداریم که چیزی دربارهٔ میدان داخل تیغه بگوییم. اما، پتانسیل را در همهٔ نقطه‌های سطح تیغه، بالا، پایین یا اطراف آن می‌دانیم. هر دو نقطهٔ مانند A و B را می‌توان با مسیری متصل کرد که کاملاً در داخل میدان خارجی قرار دارد، به طوری که انتگرال خطی $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ را میدان خارجی کاملاً معین می‌کند. این انتگرال باید همان انتگرال در مسیر $A'B'$ در شکل ۱۰-۱۶ باشد. یک نقطه واقع بر سطح دی‌الکتریک می‌تواند در گسترهٔ میدانهای مولکولی بسیار قوی یعنی میدان نزدیک مولکول باشد که آن را به حساب نیاوردیم. بگذارید توافق کنیم که مرز دی‌الکتریک سطحی است که از خارجی‌ترین هستهٔ اتم به اندازهٔ کافی دور است — 1° یا 2° آنگستروم لبه‌ای مناسب است — به طوری که در هر نقطهٔ خارج این مرز، میدانهای نزدیک تک‌تک اتمها سهم ناچیزی در کل انتگرال از A به B دارد.

با به خاطر داشتن این مطلب، بگذارید صفحهٔ پهن و نسبتاً نازکی از مادهٔ قطبیده به ضخامت t را در نظر بگیریم که مقطع آن در شکل ۱۰-۱۷ الف نشان داده شده است. شکل ۱۰-۱۷ ب مقطع ورقه‌های بار معادل را نشان می‌دهد. برای سیستم متشکل از دو ورقهٔ بار میدان را البته در فضای خارج و بین دو ورقه، می‌دانیم. شدت میدان داخلی، در فاصلهٔ دور از لبه‌ها، درست $4\pi\sigma$ و به طرف پایین است، و بنابراین اختلاف پتانسیل بین نقطه‌های A' و B' برابر $4\pi\sigma t$ ایستاولت است. همین اختلاف پتانسیل باید میان نقطه‌های متناظر A و B روی تیغهٔ قطبیدهٔ ما وجود داشته باشد، زیرا میدان خارجی کل در دو سیستم یکسان است.

آیا این میدان در داخل نیز همانند است؟ حتماً نه، زیرا تیغه پر از هسته و الکترون است، با



شکل ۱۷-۱۰ الف) انتگرال خطی E از A به B باید در همه مسیره‌های داخلی یا خارجی یکسان باشد، زیرا میدانهای میکروسکوپیکی داخلی یا میدانهای الکتریکی اتمی نیز پایستارند ($\text{curl } \mathbf{E} = 0$). ورقه‌های بار هم‌ارز آن (ب) همان میدان خارجی را دارند.



شکل ۱۸-۱۰ میدان میکروسکوپیکی واقعی در هر مسیر از A به B یکسان است.

میدانهای میلیونها ولت بر سانتی‌متر که اینجا در یک جهت و آنجا در جهت دیگر است. اما یک چیز یکسان است؛ انتگرال خطی میدان در هر مسیر داخلی از A به B باید درست $\varphi_B - \varphi_A$ باشد، که همان‌طور که دیدیم با $\varphi_{B'} - \varphi_{A'}$ یکی است، و برابر $4\pi\sigma t$ ، یا $4\pi Pt$ است. باید چنین باشد، زیرا وارد کردن بارهای اتمی، بدون توجه به توزیعشان، نمی‌تواند ویژگی پایستار میدان الکتریکی را از میان ببرد، که به این صورت بیان می‌شود که $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ مستقل از میدان الکتریکی، یا $\text{curl } \mathbf{E} = 0$ است.

می‌دانیم که در شکل ۱۷-۱۰ ب) اختلاف پتانسیل بین ورقه‌های بالایی و پایینی، بجز در نزدیکی لبه‌ها، تقریباً ثابت است، زیرا میدان الکتریکی داخلی عملاً یکنواخت است. بنابراین در ناحیه مرکزی ورقه قطبیده ما اختلاف پتانسیل بین بالا و پایین باید ثابت باشد. در این ناحیه انتگرال خطی $\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ از هر نقطه A در تیغه بالایی به هر نقطه B در پایین، در هر مسیری باید همواره همان مقدار $4\pi Pt$ را بدهد. شکل ۱۸-۱۰ یک "دیدگاه بزرگ شده" از ناحیه مرکزی تیغه است، که در آن مولکولهای قطبیده را وا داشته‌اند تا چیزی مانند مولکولهای H_2O به نظر برسند و همه در یک جهت قرار گیرند. نخواستیم میدانهای شدید موجود بین مولکولها و در داخل آنها را نشان دهیم.

(میدان در فاصله ده آنگستروم از مولکول آب، با توجه به شکل 10^{-14} و معادله ۱۵، چند صد کیلوولت بر سانتی‌متر است.) باید پیکربندیهای میدان پیچیده‌ای را در مجاور هر مولکول مجسم کنید. اکنون \mathbf{E} در $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ میدان الکتریکی کل را در نقطه معینی از فضا، داخل یا خارج مولکول، نشان می‌دهد؛ و شامل این میدانهای شدید و پیچیده که ذکر کردیم نیز هست. پس به این نتیجه‌گیری جالب توجه رسیدیم که هر مسیری از میان این توده بارها و میدانها بگذرد، بدون توجه به اینکه از مولکولها اجتناب یا در آنها نفوذ می‌کند، باید مقدار یکسانی را برای انتگرال مسیر بدهد، یعنی، مقدار مربوط به سیستم شکل 10^{-17} ب که در آن میدان کاملاً یکنواخت و شدت $4\pi P$ است. با توجه به این مطلب، میانگین فضایی میدان الکتریکی در داخل تیغه قطبیده ما باید $-4\pi P$ باشد. منظور از میانگین فضایی یک میدان \mathbf{E} در حجمی مانند V ، که می‌توان آن را با $\langle \mathbf{E} \rangle_V$ نشان داد. دقیقاً این است که:

$$\langle \mathbf{E} \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{E} dv \quad (30)$$

یک راه نمونه‌برداری منصفانه از میدان در dv های برابر و کوچک که می‌توان حجم V را به آنها تقسیم کرد، اندازه‌گیری میدان در امتداد هر خط در بسته‌ای از خطهای موازی با فاصله کم است. دیدیم که انتگرال خطی \mathbf{E} در امتداد هر مسیر یا همه آنها درست برابر همان چیزی است که اگر در میدان الکتریکی ثابت به شدت $-4\pi P$ می‌بود. یعنی توجیه این نتیجه‌گیری که در داخل هر تیغه دی‌الکتریک قطبیده شکل 10^{-17} و 10^{-18} میانگین فضایی میدان الکتریکی ناشی از همه بارهای متعلق به دی‌الکتریک برابر است با

$$\langle \mathbf{E} \rangle = -4\pi P \quad (31)$$

این میدان میانگین یک کمیت ماکروسکوپیکی است. حجمی که میانگین‌گیری در آن صورت می‌گیرد باید به اندازه کافی بزرگ باشد تا تعداد زیادی از مولکولها را در برگیرد، در غیر این صورت میانگین از یک حجم به حجم مجاور آن تغییر می‌کند. میدان میانگین $\langle \mathbf{E} \rangle$ که با معادله ۳۰ تعریف می‌شود در واقع تنها میدان الکتریکی میکروسکوپیکی در داخل دی‌الکتریک است که می‌توانیم در باره‌اش صحبت کنیم. در پاسخ به این پرسش که میدان الکتریکی در داخل ماده دی‌الکتریکی چیست؟ تنها پاسخ قانع‌کننده همین است.

\mathbf{E} در انتگرالده طرف راست معادله ۳۰، را می‌توان میدان میکروسکوپیکی خواند. اگر کسی را بفرستیم تا مقادیر میدان لازم برای انتگرالده مسیر را اندازه بگیرد، او میدانهای الکتریکی در خلأ را، البته در حضور بار الکتریکی، اندازه می‌گیرد. وی به ابزارهای بسیار ظریف نیازمند است، زیرا شاید

لازم باشد میدان الکتریکی در نقطه به خصوص درست در نوک یک مولکول را اندازه بگیرد. آیا مجازیم که درباره گرفتن انتگرال خطی \mathbf{E} در مسیری صحبت کنیم که گوشه جنوب شرقی مولکولی را دور، و سپس به داخل همسایه‌اش تونل می‌زند؟ آری. توجیه آن، این دلیل محکم است که قانونهای الکترومغناطیس در مقیاس فاصله‌های بسیار کوچکتر از اندازه اتمی صادق هستند. حتی می‌توان آزمایشی را توصیف کرد که می‌تواند برای اندازه‌گیری میانگین میدان الکتریکی میکروسکوپیکی در امتداد مسیری به‌کار رود که کاملاً در محدوده ابعاد اتمی است. آنچه باید انجام دهیم شلیک یک ذره باردار پر انرژی، مانند ذره آلفا، در ماده است. از تغییر خالص تکانه ذره می‌توان میانگین میدان الکتریکی را، که در تمام مسیر بر آن وارد شده است، به‌دست آورد.

بگذارید ویژگیهای میانگین، یا میدان ماکروسکوپیکی $\langle \mathbf{E} \rangle$ را که با معادله ۳۰ تعریف می‌شود مرور کنیم. انتگرال خطی آن بین هر دو نقطه A و B ، که به اندازه کافی از هم فاصله داشته باشند، مستقل از مسیر است. بنابراین نتیجه می‌شود که $\text{curl} \langle \mathbf{E} \rangle = 0$ و اینکه $\langle \mathbf{E} \rangle$ منفی‌گرادیان یک پتانسیل $\langle \varphi \rangle$ است. این تابع پتانسیل $\langle \varphi \rangle$ خودش یک میانگین هموار شده پتانسیل میکروسکوپیکی φ ، از دیدگاه معادله ۳۰، است. (مقدار اخیر در داخل هر هسته اتم بالغ بر چند میلیون ولت می‌شود!) انتگرال سطحی $\langle \mathbf{E} \rangle$ ، یعنی $\int \langle \mathbf{E} \rangle \cdot d\mathbf{a}$ بر روی هر سطحی که حجم نسبتاً بزرگی را در بر می‌گیرد، برابر است با 4π برابر بار داخل آن حجم.^۱ به عبارت دیگر، $\langle \mathbf{E} \rangle$ از قانون گاوس پیروی می‌کند، حکمی که می‌توان به صورت دیفرانسیلی $\text{div} \langle \mathbf{E} \rangle = 4\pi \langle \rho \rangle$ نیز بیان کرد، با این تفاهم که $\langle \rho \rangle$ نیز میانگین محلی روی حجم ماکروسکوپیکی مناسب است. خلاصه آنکه، کمیت‌های میانگین فضایی $\langle \mathbf{E} \rangle$ ، $\langle \varphi \rangle$ ، $\langle \rho \rangle$ ، با یکدیگر همان ارتباط را دارند که میدان الکتریکی، پتانسیل، و چگالی بار در خلأ. از این پس، هرگاه درباره میدان الکتریکی \mathbf{E} در داخل هر قطعه از ماده بسیار بزرگتر از مولکول است صحبت کردیم منظورمان یک میدان میانگین یا ماکروسکوپیکی است که با معادله ۳۰ تعریف می‌شود، حتی هنگامی که علامت $\langle \quad \rangle$ حذف شده باشد.

۱۰-۸ نگاهی دیگر به خازن

در آغاز این فصل به‌طور کیفی گفتیم که چگونه حضور دی‌الکتریک در بین صفحات خازن ظرفیت آن را افزایش می‌دهد. اکنون آماده‌ایم تا خازن پر از دی‌الکتریک را تجزیه و تحلیل کنیم. آنچه هم اکنون درباره میدان الکتریکی داخل ماده آموختیم کلید مسئله است. دیدیم که میدان ماکروسکوپیکی \mathbf{E} میانگین فضایی میدان میکروسکوپیکی است. انتگرال خطی این میدان ماکروسکوپیکی \mathbf{E} بین ۱. این را بدون اثبات بیان می‌کنیم، و بررسی رابطه انتگرال سطحی میدان میانگین با میانگین انتگرالهای سطحی میدانهای میکروسکوپیکی را به فصل بعد موکول می‌کنیم، که در بخش ۱۱-۸ در ارتباط با میدان مغناطیسی درون ماده مطرح می‌شود (شکل ۱۱-۱۸).

دو نقطه A و B مستقل از مسیر و برابر است با اختلاف پتانسیل. در بازنگری به شکل ۱۰-۲ الف می‌بینیم که میدان \mathbf{E} در خازن تهی باید برابر φ_{12}/s باشد. اما اختلاف پتانسیل بین صفحه‌ها، φ_{12} ، که باتری به وجود آورده است، در خازن پر از دی‌الکتریک نیز درست همین مقدار است (شکل ۱۰-۲ ب). بنابراین میدان \mathbf{E} در دی‌الکتریک، که اکنون به‌عنوان میدان ماکروسکوپی می‌شناسیم، نیز باید همین مقدار را داشته باشد، زیرا این میدان در همان فاصله s امتداد یافته و یکنواخت است. (ضخامت لایه‌های نمودار در مقایسه با s ناچیز است.) پس بار کل روی صفحه بالایی و در مجاورت آن باید برابر مقدار خازن تهی، یعنی Q_0 باشد. برای اثبات آن باید فقط قانون گاوس را برای یک جعبه مناسب موهومی به‌خاطر آوریم که مطابق شکل ۱۰-۱۹ لایه‌های بار را در برمی‌گیرد، بار از دو قسمت تشکیل شده است، بار روی صفحه Q (که در هنگام تخلیه خازن آن را ترک می‌کند) و Q' ، باری که متعلق به دی‌الکتریک است. حال طبق تعریف ϵ داریم $Q = \epsilon Q_0$. بنابراین، اگر طبق آنچه نتیجه گرفتیم $Q + Q' = Q_0$ باشد، باید داشته باشیم

$$Q' = Q_0 - Q = Q_0(1 - \epsilon) \quad (32)$$

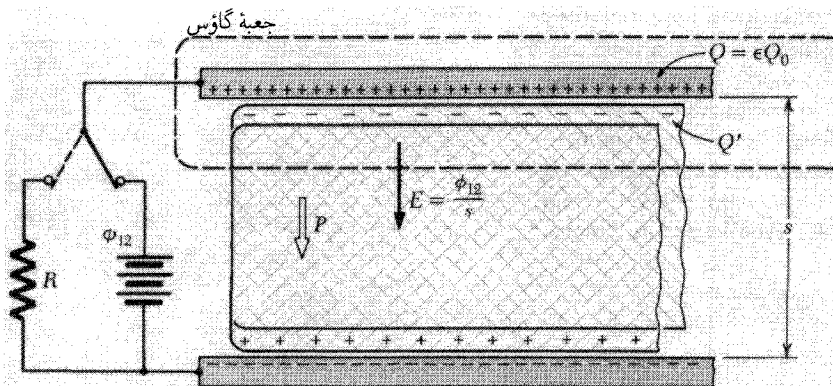
می‌توان این سیستم را برهم‌نهی یک خازن خلأ و یک تیغه دی‌الکتریکی قطبیده در نظر گرفت. شکل ۱۰-۱۹ الف و ب. در خازن خلأ با بار ϵQ_0 ، میدان الکتريکی E'' برابر ϵ ضربدر میدان E است. در تیغه دی‌الکتریک قطبیده منزوی میدان الکتريکی E' مطابق معادله ۳۱، برابر است با $4\pi P -$. برهم‌نهی این دو جسم میدان واقعی E را به‌وجود می‌آورد.

$$E = E'' + E' = \epsilon E + 4\pi P \quad (33)$$

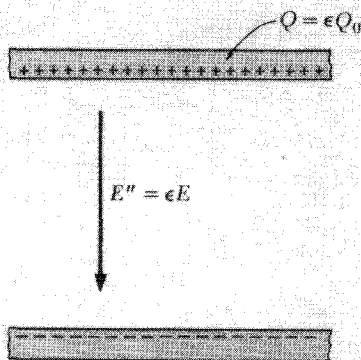
معادله ۳۳ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{P}{E} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \quad (34)$$

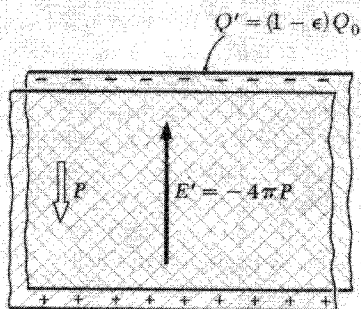
نسبت P/E را پذیرفتاری الکتريکی ماده دی‌الکتریک می‌نامند و با χ_e (خی یونانی) نشان می‌دهند. در بیشتر مواد در شرایط عادی این میدان \mathbf{E} در دی‌الکتریک است که \mathbf{P} را به‌وجود می‌آورد. رابطه آنها کاملاً خطی است. یعنی، می‌توان گفت که پذیرفتاری الکتريکی χ_e یک ویژگی ثابت ماده به‌خصوص است و به شدت میدان الکتريکی یا اندازه و شکل الکترودها بستگی ندارد. اما، مواردی نیز وجود دارد که در آنها معمولاً موادی متشکل از مولکولهای قطبی دخیل‌اند و می‌توان قطبش را منجمد کرد. یک قطعه یخ که با اعمال میدان خارجی قطبیده و سپس تا دمای هلیوم



(الف)



(ب) صفحات تنها

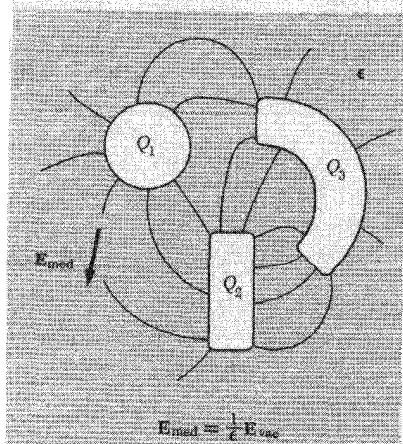
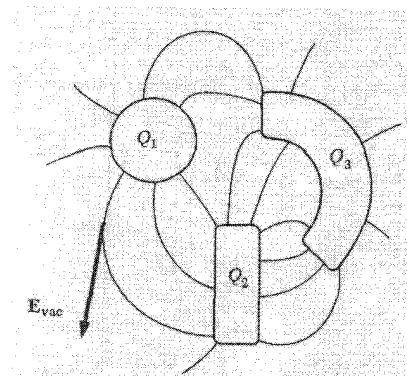


(ج) دی الکتریک تنها

شکل ۱۰-۱۹ خازن پر از دی الکتریک شکل ۱۰-۲۰ ب. میدان E که میدان میانگین یا ماکروسکوپیکی در دی الکتریک است، ϕ_{12}/s برابر میدان در خازن تهی شکل ۱۰-۲۰ الف است. بار داخل جعبه گاوس برابر Q یعنی بار خازن تهی است. سیستم را می توان برهم نهی یک خازن خلاً (ب) و یک دی الکتریک قطبیده (ج) در نظر گرفت.

مایع سرد شده است پس از حذف میدان خارجی قطبش خود را به صورت نامحدود حفظ می کند، بنابراین یک مثال واقعی از تیغه قطبیده فرضی در شکل ۱۰-۱۸ است. به طور دقیق، پر کردن خازن خلاً با ماده دی الکتریک ظرفیت آن را در صورتی دقیقاً با ضریب ϵ ، که مشخصه ماده است، افزایش می دهد که فضای اطراف آن، یا حداقل همه فضایی را که در

آن هر گونه میدان الکتریکی وجود دارد را نیز پرکنیم در مثال مورد بحث ما تلویحاً فرض شد که صفحه‌ها در مقایسه با فاصله بین آنها به اندازه‌ای بزرگ‌اند که "اثر لبه‌ها" از جمله مقدار بار اندکی را که در خارج صفحات نزدیک لبه وجود دارد می‌توان نادیده گرفت (شکل ۳-۱۲ ب)، می‌توان یک بیانیه کلی درباره سیستم رساناهایی به هر شکل و با هر ترتیب که کابلاً در داخل یک دی‌الکتریک همگن، مثلاً در مخزن بزرگی از روغن، قرار دارند صادر کرد. با هر گونه بارهای، Q_1 ، Q_2 و غیره بر روی رساناهای مختلف، میدان الکتریکی ماکروسکوپیکی محیطی E در هر نقطه از محیط درست $1/\epsilon$ برابر میدان خالی E_0 است که در آن محل با همان بارها بر روی همان رساناها در خلأ وجود می‌داشت (شکل ۱۰-۲۰). این مطلب در نیمرساناها پیامدهای مهمی دارد. به عنوان مثال، هنگامی که سیلیسیم با فسفر آلاینده شود تا نیمرسانای نوع n بسازد، ثابت دی‌الکتریک بزرگ بلور سیلیسیم (جدول ۱۰-۱) جاذبه الکتریکی بین بیرونی‌ترین الکترون اتم فسفر و بقیه اتم



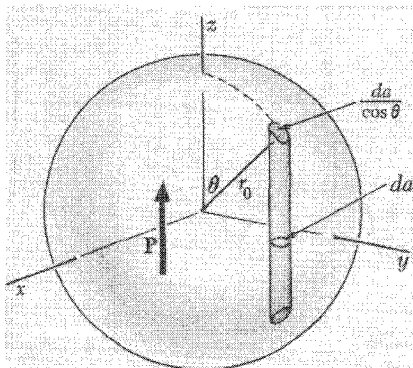
شکل ۱۰-۲۰ برای باریکسان بر روی رساناها، حضور محیط دی‌الکتریکی شدت میدان الکتریکی (و در نتیجه اختلاف پتانسیل) را با ضریب $1/\epsilon$ کم می‌کند. بارهای Q_1 ، Q_2 و Q_3 بارهایی هستند که اگر سیستم را تخلیه کنیم از رسانا خارج می‌شوند.

را کاهش می‌دهد. این مطلب، مانند شکل ۴-۱۱الف، باعث می‌شود که الکترون به راحتی یون باقیمانده P را ترک کند و به نوار رسانش بپیوندد.

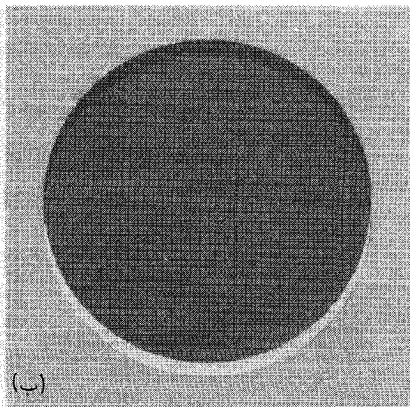
این مورد ما را با مسئله کلی تری روبه‌رو می‌کند. چه می‌شود اگر بخشی از فضای سیستم ما پر از ماده دی‌الکتریک و بخشی از آن تهی باشد، و میدانهای الکتریکی در هر دو قسمت وجود داشته باشند؟ کار خود را با یک مثال تا اندازه‌های ساختگی و سازنده آغاز می‌کنیم، یک کره قطبیده توپر در فضایی که در آن چیز دیگری وجود ندارد.

۱۰-۹ میدان یک کره قطبیده

فرض می‌کنیم کره توپر شکل ۱۰-۲۱الف به صورت یکنواخت قطبیده است، به طوری که گویی از ماده تیغه شکل ۱۰-۱۶الف تراشیده شده است. میدان الکتریکی در داخل و خارج این کره چگونه باید باشد؟ مطابق معمول چگالی قطبش را با P نشان می‌دهیم، که بزرگی و جهت آن در سراسر حجم کره ثابت است. ماده قطبیده را می‌توان مانند تیغه شکل ۱۰-۱۶الف، به ستونهایی موازی با P تقسیم کرد، و به جای هر یک از آنها باری به بزرگی $(P \times \text{سطح مقطع ستون})$ در بالا و پایین ستون گذاشت. بنابراین میدانی که در جستجوی آن هستیم، میدان یک توزیع بار سطحی است که با چگالی $\sigma = P \cos \theta$ در سطح یک کره پخش شده است. عامل $\cos \theta$ ، چنانکه در شکل به وضوح دیده می‌شود، بدین سبب وارد می‌شود که ستونی به سطح مقطع da در سطح کره

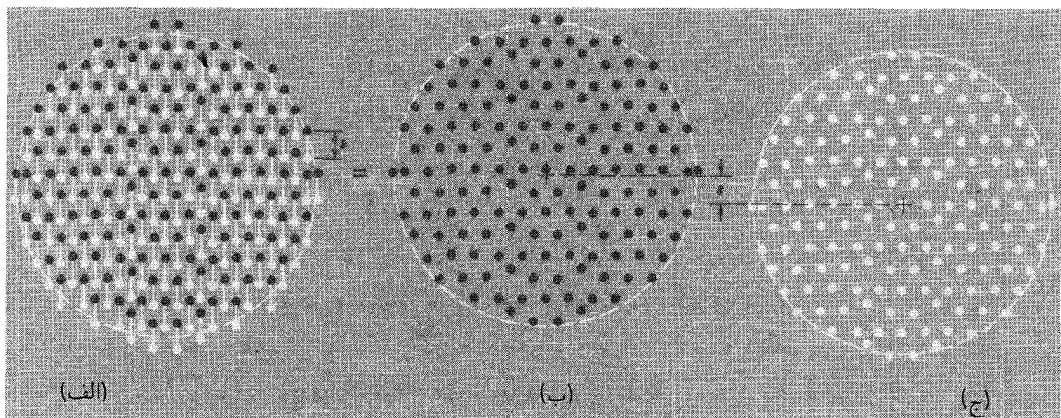


(الف)



(ب)

شکل ۱۰-۲۱الف) کره قطبیده را به میله‌های قطبیده تقسیم کنید، و به جای هر میله تکه‌هایی از بار روی سطح کره بگذارید. (ب) یک گوی با چگالی بار مثبت و یک گوی با چگالی بار منفی، که اندکی جابه‌جا شده‌اند. با توزیع بار واقعی بر روی سطح کره هم‌ارزند.



شکل ۱۰-۲۲ یک کره از دو قطبهای همسو شده (الف) با دو کره برهم‌نهادۀ اندکی جابه‌جا شده از بار مثبت، (ب) و بار منفی، (ج) هم‌ارز است.

قطعه‌ای به سطح مقطع $da/\cos\theta$ به وجود می‌آورد. شکل ۱۰-۲۱ ب سطح مقطع این پوسته بار معادل است که در آن چگالی بار را با ضخامتهای متغیر نیم‌دایره سیاه در بالا (چگالی بار مثبت) و نیم‌دایره روشن در پایین (چگالی بار منفی) نشان داده‌ایم.

اگر قبلاً به نظراتان نرسیده است، این شکل می‌تواند این فکر را مطرح کند که قطبش \mathbf{P} ناشی از جابه‌جایی مختصر به طرف بالای گویی پر از بار مثبت با چگالی یکنواخت ρ ، نسبت به گویی با چگالی منفی $-\rho$ است. این ترکیب بار مثبت خنثی نشده‌ای دارد که از بالا بیرون زده و بار منفی خنثی نشده‌ای که از پایین نمایان است، و مقدار آن در طول مرز دقیقاً به صورت $\cos\theta$ تغییر می‌کند. در داخل کره، چگالیهای بار مثبت و منفی همپوش هستند و دقیقاً یکدیگر را خنثی می‌کنند. با این دیدگاه، راه بسیار راحتی برای محاسبه میدان در خارج پوسته بار سطحی جلوی ما گذاشته می‌شود. چنانکه می‌دانیم، میدان خارجی هر توزیع بار کروی، همان میدانی است که در صورت تراکم همه بار در مرکز آن به وجود می‌آید، بنابراین برهم‌نهی دو کره با بار کل Q و $-Q$ ، که فاصله مرکز آنها جابه‌جایی اندک s است. یک میدان خارجی تولید می‌کند که همان میدان دو بار نقطه‌ای Q و $-Q$ در فاصله s سانتی‌متر از یکدیگر است. این درست یک دوقطبی با گشتاور دوقطبی $Qs = p_0$ است.

یک توصیف ماکروسکوپیکی ماده قطبیده به همین نتیجه‌گیری می‌انجامد. در شکل ۱۰-۲۲ الف دوقطبیهای مولکولی مسئول قطبش \mathbf{P} را به صورت تقریبی با زوج بارهای q و $-q$ در فاصله s سانتی‌متر نشان دادیم که یک گشتاور دوقطبی $p = qs$ می‌سازند. با تعداد N دوقطبی در سانتی‌مترمکعب، $P = Np = Nqs$ ، تعداد کل این دوقطبیها در کره برابر است با

$N r_0^3 (4\pi/3)$. بارهای مثبت، که جداگانه در نظر گرفته می‌شوند (شکل ۱۰-۲۲ ب)، با محتوای بارکل $Q = (4\pi/3) r_0^3 N q$ در سراسر کره توزیع شده‌اند، و بارهای منفی کره مشابهی را اشغال کرده‌اند که مرکزش جابه‌جا شده است (شکل ۱۰-۲۲ ج). بدیهی است که اگر میدان "کاملاً خارج" از این توزیع مورد نظر ما باشد، به جای هر یک از این توزیعهای بار می‌توان یک بار نقطه‌ای در مرکز آن قرار داد. منظور از "کاملاً خارج" فاصله به اندازه کافی زیاد از سطح است به طوری که دانه‌ای بودن واقعی توزیع بار اهمیت نداشته باشد، و البته این چیزی است که همواره وقتی از میدانهای ماکروسکوپیکی صحبت می‌کنیم باید آن را نادیده بگیریم. بنابراین برای اهداف فعلی، تصویر کره‌های همپوش با چگالی بار یکنواخت و توصیف برحسب دوقطبیهای واقعی در خلأ هم‌ارزند^۱، و نشان می‌دهد که میدان در خارج از این توزیع بار با میدان یک دوقطبی که در مرکز قرار گرفته باشد یکسان است. گشتاور این دوقطبی p_0 صرفاً قطبش کل در کره است:

$$p_0 = Qs = \frac{4\pi}{3} r_0^3 Nqs = \frac{4\pi}{3} r_0^3 P \quad (35)$$

کمیت‌های Q و s هیچکدام به طور جداگانه اهمیتی ندارند و می‌توان اکنون آنها را از بحث خارج کرد. میدان خارجی یک کره قطبیده به صورت ماکروسکوپیکی نه تنها در فاصله زیاد از کره، بلکه حتی در روی سطح آن با میدان یک دوقطبی p_0 که در مرکز آن قرار دارد هم‌ارز است. آنچه باید انجام دهیم تا شکل ۱۰-۲۳ را، که نمایش خطوط میدان است، به دست آوریم کنار گذاشتن سطح دایره‌ای در شکل ۱۰-۶ است.

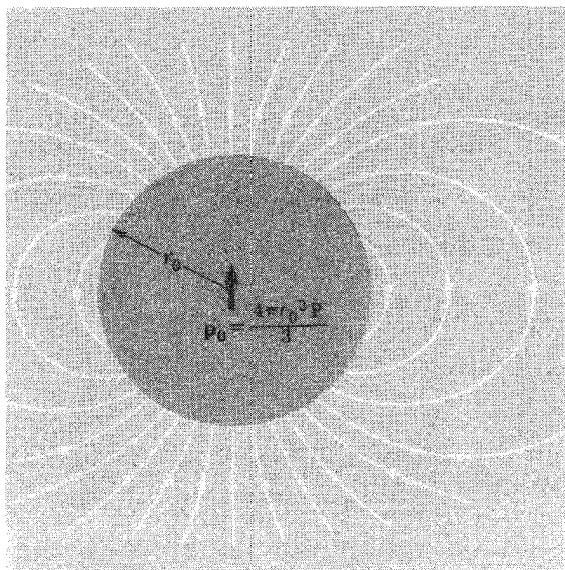
میدان داخلی مسئله‌ای است متفاوت. بگذارید نگاهی به پتانسیل $\varphi(x, y, z)$ بیندازیم. پتانسیل در همه نقطه‌های روی مرز کروی را می‌دانیم زیرا میدان خارجی را می‌دانیم. این درست پتانسیل دوقطبی $p_0 \cos\theta/r^2$ است، که روی مرز کروی به شعاع r_0 به صورت زیر درمی‌آید

$$\varphi = p_0 \frac{\cos\theta}{r_0^2} = \frac{4\pi}{3} P r_0 \cos\theta \quad (36)$$

چون $z = r_0 \cos\theta$ است، می‌بینیم که پتانسیل یک نقطه روی کره فقط به مختصه z آن بستگی دارد:

$$\varphi = \frac{4\pi}{3} P z \quad (37)$$

۱. این ممکن است کاملاً بدیهی به نظر برسد، اما در این مورد به تفضیل کار کرده‌ایم تا تفاوت میان تصویر "گوی بار یکنواخت"، با آنچه درباره شکل داخل یک ماده می‌دانیم، ما را گمراه نکند.



شکل ۱۰-۲۳ میدان خارج از یک کره با قطبش یکنواخت با میدان یک دوقطبی که در مرکز آن قرار گرفته باشد دقیقاً یکسان است.

مسئله یافتن میدان داخلی تبدیل به این مسئله شده است: معادله ۳۷ پتانسیل را در هر نقطه روی مرز منطقه‌ای می‌دهد که در داخل آن φ باید در معادله لاپلاس صادق باشد. طبق قضیه یکتایی که در فصل ۳ ثابت کردیم، این برای تعیین φ در داخل کره کافی است. اگر بتوانیم یک جواب به دست آوریم، این همان جواب مطلوب است. اکنون تابع Cz ، که در آن C یک مقدار ثابت است، در معادله لاپلاس صدق می‌کند، به طوری که معادله ۳۷ در واقع جواب پتانسیل را در داخل کره می‌دهد. این پتانسیل یک میدان الکتریکی یکنواخت در جهت $-z$ است.

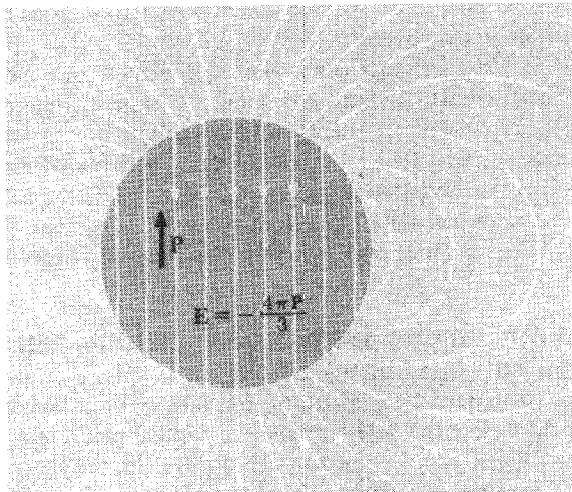
$$E_z = -\frac{\partial \varphi_{in}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{4\pi P z}{3} \right) = -\frac{4\pi P}{3} \quad (38)$$

چون جهت \mathbf{P} تنها چیزی است که محور z را مشخص می‌کند، می‌توانیم نتیجه‌مان را به صورت کلی‌تر زیر بنویسیم:

$$\mathbf{E}_{in} = -\frac{4\pi \mathbf{P}}{3} \quad (39)$$

این میدان ماکروسکوپیکی \mathbf{E} در ماده قطبیده است.

شکل ۱۰-۲۴ هر دو میدان داخلی و خارجی را نشان می‌دهد. در قطب بالایی کره، شدت



شکل ۱۰-۲۴ میدان یک کره قطبیده یکنواخت، در داخل و خارج آن.

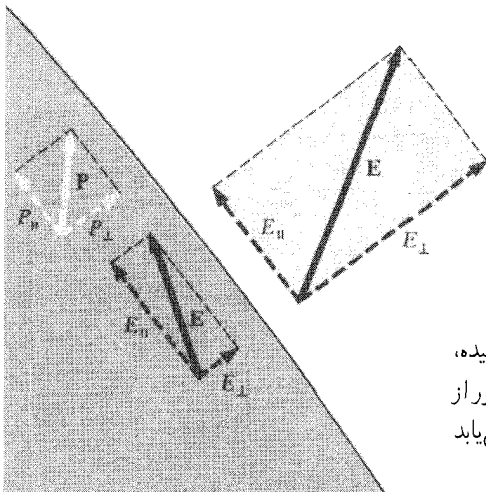
میدان خارجی به طرف بالا با استفاده از معادلهٔ ۱۴ برای میدان یک دوقطبی برابر است با

$$E_z = \frac{2p_0}{r^3} = \frac{2(4\pi r_0^3 P/3)}{r_0^3} = \frac{8\pi P}{3} \quad (\text{در خارج}) \quad (40)$$

که درست دو برابر بزرگی میدان داخلی به طرف پایین است.

این مثال قانونهای کلی رفتار مؤلفه‌های میدان را در سطح محیط قطبیده نشان می‌دهد. \mathbf{E} در مرزهای محیط قطبیده ناپیوسته است درست مانند آنچه در سطح خلاً حامل چگالی بار سطحی $\sigma = P_{\perp}$ وجود می‌داشت. نماد P_{\perp} مؤلفهٔ عمود بر سطح و به طرف خارج را نشان می‌دهد. نتیجه می‌شود که E_{\perp} ، مؤلفهٔ عمود \mathbf{E} ، باید به‌طور ناگهانی به اندازهٔ $4\pi P_{\perp}$ تغییر کند، در حالی که E_{\parallel} مؤلفهٔ موازی با این مرز پیوسته می‌ماند، یعنی، مقدار آن در دو سوی مرز یکسان است (شکل ۱۰-۲۵). در واقع، در قطب شمال کرهٔ ما بار خالص E_z برابر است با $(-4\pi P/3) - 8\pi P/3$ یا $4\pi P$. با رجوع به معادلهٔ ۱۵ برای میدان دوقطبی، می‌توانید بررسی کنید که مؤلفهٔ موازی با سطح از داخل به خارج در همه جای کره پیوسته است.

هیچکدام از این نتیجه‌گیریها بستگی به این ندارد که قطبش چگونه به‌وجود آمده است. با این فرض که هر کره به‌طور یکنواخت قطبیده است، شکل ۱۰-۲۴ میدان آن را نشان می‌دهد. هر میدان ناشی از سایر میدانها را می‌توان روی آن نهاد، و بدین ترتیب سیستمهای بسیاری را نشان داد. این موضوع تأثیری در ناپیوستگی \mathbf{E} در مرز محیط قطبیده ندارد. بنابراین قانونهایی که اکنون بیان کردیم در هر سیستمی به‌کار می‌رود، ناپیوستگی در \mathbf{E} را فقط قطبش موجود تعیین می‌کند.

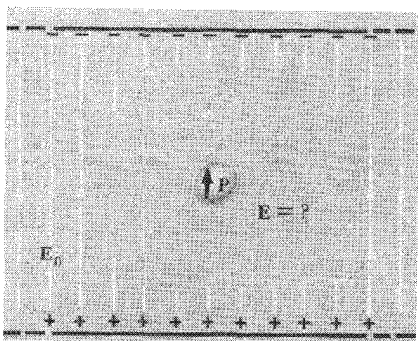


شکل ۱۰-۲۵ تغییر E در مرز دی الکتریک قطبیده، در هر دو سوی مرز یکسان است. E_{\perp} با عبور از دی الکتریک به خلاف به اندازه $4\pi P_{\perp}$ افزایش می یابد (E و P با یک مقیاس رسم نشده اند).

۱۰-۱۰ یک کره دی الکتریک در یک میدان یکنواخت

به عنوان یک مثال، بگذارید کره ای از ماده دی الکتریک با ثابت دی الکتریک ϵ را در میدان الکتریکی یکنواخت E_0 قرار دهیم که مانند میدان بین صفحه های موازی یک خازن خلا است (شکل ۱۰-۲۶). چشمه های این میدان، یعنی بار روی صفحه ها را دور از کره بگذارید، به طوری که با وارد کردن کره جابه جا نشوند. در این صورت میدان در مجاورت کره هر چه باشد، در فاصله های زیاد E_0 باقی می ماند. منظور ما از قرار دادن در میدان یکنواخت همین است. میدان کل در مجاورت کره دیگر یکنواخت نیست. این میدان مجموع یکنواخت E_0 چشمه های دور دست و میدان E' است که خود ماده قطبیده تولید کرده است:

$$E = E_0 + E' \quad (41)$$



شکل ۱۰-۲۶ چشمه های میدان E_0 ثابت می ماند. در کره دی الکتریکی قطبیدگی P تولید می شود. میدان کل E برهم نهی E_0 و میدان کره قطبیده است.

میدان E' به قطبیدگی P دی الکتریک بستگی دارد، که به نوبه خود تابع مقدار E در داخل کره است:

$$P = \chi_e E = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E \quad (42)$$

هنوز نمی دانیم که میدان کل E چگونه است؛ فقط می دانیم که معادله ۲۴ باید در هر نقطه در داخل کره صادق باشد. اگر کره به صورت یکنواخت قطبیده شود، فرضی که برای توجیه نتایج ما لازم است، معادله ۳۹ رابطه بین قطبیدگی کره و میدان E' مربوط به آن را در نقطه های داخلی می دهد. (در معادله ۳۹ از نماد E برای این میدان استفاده کردیم؛ در آن مورد این تنها میدان موجود بود.)

$$E'_{in} = -\frac{4\pi P}{3} \quad (43)$$

اکنون معادله های کافی برای حذف P و E' را در اختیار داریم، و می توانیم رابطه ای میان E و E_0 به دست آوریم. با استفاده از معادله های ۴۱ و ۴۳ در می یابیم:

$$E = E_0 - \frac{4\pi P}{3} = E_0 - \frac{\epsilon - 1}{3} E \quad (44)$$

با حل آن برای E داریم

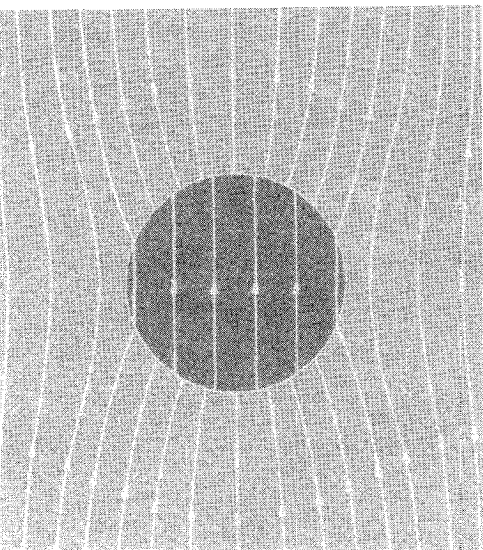
$$E = \left(\frac{3}{2 + \epsilon} \right) E_0 \quad (45)$$

چون ϵ بزرگتر از یک است، عامل $3/(2 + \epsilon)$ کوچکتر از یک می شود، میدان داخل دی الکتریک ضعیفتر از E_0 است. قطبیدگی برابر است با

$$P = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) E_0 \quad (46)$$

فرض قطبیدگی یکنواخت اکنون خودسازگار به نظر می رسد.^۱ برای محاسبه میدان کل E در خارج از کره باید E_0 را با میدان یک دوقطبی مرکزی با گشتاور P ضربدر حجم کره جمع برداری کنیم. برخی از خطهای میدان E در داخل و خارج کره در شکل ۱۰-۲۷ نشان داده شده اند.

۱. این چیزی است که کار با سیستم را آسان می کند. برای یک استوانه دی الکتریکی به طول متناهی در میدان الکتریکی، این فرض صادق نیست. میدان E' یک استوانه با قطبش یکنواخت - مثلاً استوانه ای که ارتفاع آن با قطرش برابر است - در داخل استوانه یکنواخت نیست. (این میدان چگونه به نظر می رسد؟) بنابراین $E = E_0 + E'$ نمی تواند یکنواخت باشد - اما در این مورد $P = \chi_e E$ نیز نمی تواند یکنواخت باشد. در واقع فقط دی الکتریکهایی بیضوار که کره مورد خاص آن است، در میدان یکنواخت دارای قطبیدگی یکنواخت می شوند.



شکل ۱۰-۲۷ میدان کل E ، در داخل و خارج کره دی‌الکتریک.

۱۰-۱۱ میدان یک بار در محیط دی‌الکتریک، و قانون گاوس

فرض کنید در نقطه‌ای از حجم بزرگ و همگن یک دی‌الکتریک، بار متراکم Q وجود دارد، که بخشی از ساختار منظم مولکولی نیست. به‌عنوان مثال، فرض کنید که یک کره کوچک باردار و در داخل یک مخزن روغن انداخته شده است. همان‌طور که قبلاً گفتیم، میدان الکتريکی در روغن $1/\epsilon$ برابر میدانی است که Q در خلأ تولید می‌کرد.

$$E = \frac{Q}{\epsilon r^2} \quad (۴۷)$$

جالب است ببینیم قانون گاوس چگونه حاصل می‌شود. انتگرال سطحی \mathbf{E} (که به یاد داشته باشید میدان ماکروسکوپیکی، یا میانگین فضایی است) روی کره‌ای که Q را احاطه کرده است، اگر معادله ۴۷ را قبول داشته باشیم، مقدار $4\pi Q/\epsilon$ را می‌دهد و نه $4\pi Q$ را، چرا؟ پاسخ آن است که Q تنها بار داخل کره نیست. بارهای دیگری نیز هستند که اتمها و مولکولهای دی‌الکتریک را تشکیل می‌دهند. معمولاً هر حجم روغن از لحاظ الکتريکی خنثی است. اما اکنون روغن به‌صورت شعاعی قطبیده است، که بدان معنی است که بار Q ، با فرض مثبت بودن، بارهای منفی مولکولهای روغن را به طرف خود کشیده است و بارهای مثبت را عقب رانده است. اگر چه جابه‌جایی هر مولکول ممکن است بسیار کم باشد. اما تعداد مولکولهای روغن با بار منفی در هر کره‌ای که حول Q رسم کنیم بیش از مقدار مولکولهای روغن با بار مثبت است. بنابراین، بار

خالص در کره، که شامل بار "خارجی" Q در مرکز نیز هست، از بار Q کمتر است. در واقع مقدار آن Q/ϵ است.

تشخیص بار خارجی Q از بارهایی که دی الکتریک را تشکیل می دهند اغلب مفید است. اولین بار را تا اندازه ای می توانیم کنترل کنیم — می توان به یک جسم، مانند صفحه یک خازن باری را افزود یا از آن کم کرد. این بار اغلب بار آزاد خوانده می شود. بارهای دیگر را، که اجزای یکپارچه آنها یا مولکولهای دی الکتریک هستند، معمولاً بار مقید می نامند، بار ساختاری شاید نام بهتری باشد. این بارها متحرک نیستند بلکه کم و بیش به صورت کشسان مقیدند، و با جابه جایی اندک در قطبش سهیم هستند.

می توان یک کمیت برداری ابداع کرد که با چیزی مانند قانون گاوس فقط با بارهای آزاد ارتباط داشته باشد. در سیستمی که هم اکنون بررسی کردیم، برای یک بار نقطه ای که در دی الکتریک غوطه ور است، بردار $\epsilon \mathbf{E}$ دارای این ویژگی است. یعنی، $\int_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ روی سطح بسته S ، برابر است با $4\pi q$ اگر Q بار Q را در بر بگیرد، و در غیر این صورت صفر است. با توجه به اصل برهم نهی، این مطلب باید برای هر مجموعه ای از بارهای آزاد که با چگالی بار آزاد $\rho_{\text{آزاد}}(x, y, z)$ در محیط دی الکتریکی همگن نامتناهی بیان می شود صادق باشد:

$$\int_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi \int_V \rho_{\text{آزاد}} dv \quad (48)$$

که در آن V حجمی است که سطح S آن را در بر می گیرد. یک چنین رابطه انتگرالی ارتباطی "موضعی" را بین دیورژانس بردار میدان $\epsilon \mathbf{E}$ و چگالی بار آزاد ایجاب می کند:

$$\text{div}(\epsilon \mathbf{E}) = 4\pi \rho_{\text{آزاد}} \quad (49)$$

چون ϵ در سراسر محیط ثابت فرض شده است، معادله ۴۹ چیز تازه ای برای گفتن ندارد. به هر حال، می تواند به ما کمک کند تا نقش بار مقید را مجزا کنیم، اما در هر سیستم، رابطه بنیادی میان میدان الکتریکی \mathbf{E} و چگالی بار کل مقید $\rho_{\text{مقید}} + \rho_{\text{آزاد}}$ معتبر می ماند:

$$\text{div} \mathbf{E} = 4\pi(\rho_{\text{آزاد}} + \rho_{\text{مقید}}) \quad (50)$$

از معادله های ۴۹ و ۵۰ نتیجه می شود که

$$\text{div}(\epsilon - 1)\mathbf{E} = -4\pi \rho_{\text{مقید}} \quad (51)$$

بنابر معادله ۳۴ داریم $\mathbf{E} = (\epsilon - 1)\mathbf{P}$ ، به طوری که معادله ۵۱ ایجاب می‌کند که

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho_{\text{مقید}} \quad (52)$$

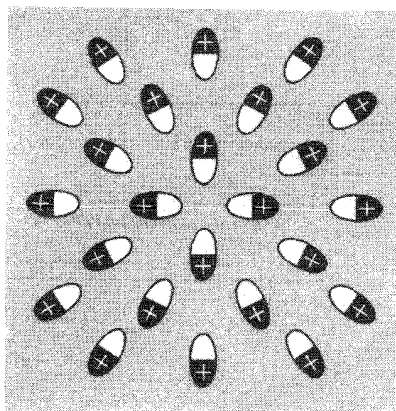
معادله ۵۲ بیانگر یک رابطه موضعی است. این رابطه نمی‌تواند به شرایط سیستم در نقطه‌های دیگر یا اینکه چگونه آرایش خاصی از بارهای مقید حفظ می‌شود بستگی داشته باشد. هر آرایشی از بار مقید که در واحد حجم دارای اضافه بار موضعی از پروتونهای هسته‌ای نسبت به الکترونهای اتمی باشد باید قطبشی را با دیورژانس معین نشان دهد. به طوری که معادله ۵۲، نه فقط در دی‌الکتریک نامتناهی، بلکه به طور کلی نیز باید صادق باشد. می‌توان با تجسم چند مولکول قطبی که چنان قرار گرفته‌اند تا قطبشی با دیورژانس مثبت تولید کنند، احساسی از آنچه در معادله ۵۲ بیان شده است به دست آورد (شکل ۱۰-۲۸). جهت دوقطبیها به طرف خارج است، که الزاماً تراکم اندکی از بار منفی در مرکز باقی می‌گذارد. البته، معادله ۵۲ مربوط به میانگین بر روی اجزای حجم چنان بزرگی است که \mathbf{P} و $\rho_{\text{مقید}}$ را باید کمیت‌هایی با تغییرات هموار در نظر گرفت.

از معادله‌های ۵۰ و ۵۲ رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$\operatorname{div} (\mathbf{E} + \epsilon \mathbf{P}) = \epsilon \rho_{\text{آزاد}} \quad (53)$$

این مستقل از هر ارتباطی بین \mathbf{E} و \mathbf{P} است. این رابطه به آنچه دی‌الکتریک می‌نامیم و در آنها \mathbf{P} متناسب است با \mathbf{E} محدود نمی‌شود.

معمولاً ترکیب $\mathbf{E} + \epsilon \mathbf{P}$ را به نام بردار جابه‌جایی الکتریکی می‌شناسیم و آن را با نماد \mathbf{E}



شکل ۱۰-۲۸ دوقطبیهای مولکولی طوری ترتیب یافته‌اند که $\operatorname{div} \mathbf{P} > 0$ باشد. به تراکم بار منفی در مرکز که با معادله ۵۲ سازگار است توجه کنید.

نشان می‌دهیم. یعنی \mathbf{D} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \epsilon \pi \mathbf{P} \quad (۵۴)$$

در یک دی‌الکتریک همسانگرد، \mathbf{D} به سادگی برابر است با $\epsilon \mathbf{E}$ ، اما رابطه

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \epsilon \pi \rho_{\text{آزاد}} \quad (۵۵)$$

در هر شرایطی که بتوان کمیتهای ماکروسکوپیکی \mathbf{P} و \mathbf{E} ، و ρ را تعریف کرد صادق است. ظاهر معادلهٔ ۵۵ ممکن است این فکر را مطرح کند که باید به \mathbf{D} به صورت یک میدان برداری بنگریم که چشمهٔ آن توزیع بار آزاد $\rho_{\text{آزاد}}$ است، همان‌طور که توزیع بار ρ چشمهٔ \mathbf{E} است. این فکر نادرست است. میدان الکتروستاتیکی \mathbf{E} — بجز برای افزودن یک میدان ثابت — منحصراً با توزیع بار ρ تعیین می‌شود، زیرا علاوه بر قانون $\operatorname{div} \mathbf{E} = \epsilon \pi \rho$ ، یک شرط عمومی دیگر $\operatorname{curl} \mathbf{E} = 0$ وجود دارد. این درست نیست، که به‌طور کلی $\operatorname{curl} \mathbf{D} = 0$ است. بنابراین توزیع بار آزاد برای تعیین \mathbf{D} با استفاده از معادلهٔ ۵۵ کافی نیست. چیز دیگری، مانند شرایط مرزی در سطحهای مختلف دی‌الکتریک لازم است. شرایط مرزی در مورد \mathbf{D} صرفاً شق دیگر بیان شرایط مرزی مربوط به \mathbf{E} و \mathbf{P} است، که قبلاً در پایان بخش ۱۰-۹ و در شکل ۱۰-۲۵ بیان شدند.

در این رهیافت به میدانهای الکتریکی در ماده، وارد کردن \mathbf{D} ترفندی است که کمک چندانی نمی‌کند. ما \mathbf{D} را ذکر کردیم زیرا به‌طور سنتی محترم شمرده می‌شود، ماکسول آن را شروع کرد، و دانشجویان حتماً در کتابهای دیگر، که در بسیاری از آنها حرمتی بیش از آنچه سزاوار است به آن می‌نهند، با آن روبه‌رو می‌شوند.^۱

نتیجه‌گیری اصلی دربارهٔ میدانهای الکتریکی در ماده را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

۱. ماده می‌تواند قطبیده شود، وضعیت آن را، تا آنجا که به میدان ماکروسکوپیکی مربوط می‌شود، چگالی قطبش \mathbf{P} تعیین می‌کند که گشتاور دو قطبی در واحد حجم است. سهم این ماده
۱. اهمیت \mathbf{D} در فرمولبندی ماکسول از نظریهٔ الکترومغناطیس، و انتخاب نام جابه‌جایی را شاید بتوان به تمایل او به مدلی مکانیکی برای "اتر" مربوط کرد او در کتاب زیر اشاره کرده است که این تمایل ممکن است خود ماکسول را در کاربرد آن در نظریهٔ مربوط به مسئلهٔ بازتاب نور از یک دی‌الکتریک گمراه کرده باشد.

در میدان الکتریکی \mathbf{E} با سهم توزیع بار مقید ρ موجود در خلا با چگالی $-\text{div } \mathbf{P} = \rho_{\text{مقید}}$ یکسان است. به ویژه، در سطح ماده قطبیده، که در آن ناپوستگی در \mathbf{P} وجود دارد، به چگالی بار سطحی $\sigma = -P_n$ ساده می شود. هر توزیع بار آزاد موجود را به این اضافه کنید، و میدان الکتریکی در خلا میدانی است که این توزیع بار کل تولید می کند. این میدان الکتریکی میکروسکوپیکی \mathbf{E} هم در داخل ماده است و هم در خارج آن، با در نظر گرفتن اینکه در داخل ماده میدان میانگین فضایی میدان میکروسکوپیکی واقعی است.

۲. اگر \mathbf{P} در ماده با \mathbf{E} متناسب باشد، ماده را دی الکتریک می نامیم. پذیرفتاری الکتریکی χ_e و ثابت دی الکتریک ϵ مشخصه آن ماده را به این صورت تعریف می کنیم: $\chi_e = \mathbf{P}/\mathbf{E}$ و $\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$. بارهای آزادی که در دی الکتریک شناورند، مولد میدانهای الکتریکی هستند که شدت آن $1/\epsilon$ میدانی است که همان بارها در خلا تولید می کنند.

۱۰-۱۲ یک دیدگاه میکروسکوپیکی از دی الکتریک

قطبش \mathbf{P} در دی الکتریک تجلی گشتاورهای دوقطبی الکتریکی اتمها یا مولکولهای ماده در بزرگ مقیاس است. \mathbf{P} چگالی متوسط گشتاور دوقطبی، بردار گشتاور دوقطبی در واحد حجم، است که البته در ناحیه ای بزرگ که حاوی تعداد بسیار زیادی اتم است میانگین گیری شده است. اگر یک میدان الکتریکی وجود نداشته باشد تا جهت برتری را به وجود آورد، \mathbf{P} صفر خواهد بود. این برای یک مایع یا گاز معمولی به طور قطع و در مورد جامدات در صورتی صادق است که امکان "انجماد" قطبش ذکر شده در بخش ۱۰-۸ را نادیده بگیریم. در حضور یک میدان الکتریکی در محیط، قطبش به دو طریق به وجود می آید. (۱) هر اتم یا مولکول دارای یک گشتاور دوقطبی القایی متناسب با میدان الکتریکی \mathbf{E} وارد بر اتم یا مولکول و در جهت آن می شود. (۲) اگر مولکولهای با گشتاور دوقطبی دائمی در محیط موجود باشد، سمتگیری آنها دیگر کاملاً کاتوره ای نیست؛ همخط شدن گشتاورهای دوقطبی آنها در جهت میدان اندکی بر همخط شدنشان در خلاف جهت آن برتری دارد، هر دو اثر (۱) و (۲) به قطبش در جهت \mathbf{E} ، یعنی به مقدار مثبت پذیرفتاری الکتریکی \mathbf{P}/\mathbf{E} می انجامد.

بگذارید ابتدا گشتاورهای دوقطبی اتمی را در محیطی در نظر بگیریم که اتمها یا مولکولها نسبتاً دور از هم اند. یک مثال، گاز با چگالی جوئی است، که در آن چیزی مانند $10^{19} \times 3$ مولکول در سانتی متر مکعب وجود دارد. فرض خواهیم کرد که میدان \mathbf{E} وارد بر هر مولکول میدان میانگین یا میکروسکوپیکی \mathbf{E} موجود در محیط یکسان است. در این فرض میدان موجود در محل مولکول را که گشتاور دوقطبی القایی مولکول مجاور تولید می کند نادیده گرفته ایم. اگر α قطبش پذیری هر مولکول و N تعداد متوسط مولکولها در سانتی متر مکعب باشد. گشتاور دوقطبی القایی در هر

مولکول برابر است با αE ، و قطبش حاصل در محیط P به سادگی برابر است با

$$P = N\alpha E \quad (56)$$

این رابطه بلافاصله پذیرفتاری الکتریکی χ_e را می‌دهد:

$$\chi_e = \frac{P}{E} = N\alpha \quad (57)$$

و ثابت دی‌الکتریک ϵ برابر است با

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e = 1 + 4\pi N\alpha \quad (58)$$

مولکول متان در شکل ۱۰-۱۲ دارای قطبش‌پذیری $cm^3 \times 10^{-24} \times 2.6$ است. در شرایط متعارفی $0^\circ C$ و فشار جوئی تقریباً $10^{19} \times 2.8$ مولکول در 1 cm وجود دارد. بنابر معادله ۵۸ ثابت دی‌الکتریک متان در این چگالی باید برابر مقدار زیر باشد

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1 + 4\pi N\alpha = 1 + 4\pi \times 2.8 \times 10^{19} \times 2.6 \times 10^{-24} \\ &= 1.00088 \end{aligned}$$

این با مقدار ϵ برای متان در جدول ۱۰-۱ سازگار است. این سازگاری شگفت‌انگیز نیست، زیرا مقدار α در شکل ۱۰-۱۲ احتمالاً با اعمال نظریه ساده‌ای به دست آمده است که هم‌اکنون برای ثابت دی‌الکتریک که به‌طور تجربی اندازه‌گیری شده است مطرح کردیم.

در بخش ۱۰-۵ متوجه شدیم که مرتبه بزرگی قطبش‌پذیری اتمی α که دارای بعد حجم است، با حجم یک اتم برابر است. بنابراین، حاصلضرب $N\alpha$ ، که بنابر معادله ۵۷ درست برابر است با χ_e ، در حدود کسری از حجم محیط است که اتمها اشغال کرده‌اند. اما چگالی یک گاز در شرایط متعارفی یک هزارم چگالی همان ماده است که به مایع یا جامد چگالیده باشد. در مورد متان این نسبت نزدیک به $1/1000$ ، و برای هوا $1/700$ است. در حدود 99.9 درصد گاز متشکل از فضای خالی است. از طرف دیگر، در جامد یا مایع مولکولها عملاً در تمام تماس با یکدیگرند و کسری از حجم را که اشغال می‌کنند چندان کوچکتر از یک نیست. بنابراین به‌طور کلی در ماده چگال، قطبش القایی به پذیرفتاری χ_e از مرتبه واحد می‌انجامد. در واقع، همان‌طور که فهرست مختصر جدول ۱۰-۱ نشان می‌دهد و جدولبندی گسترده‌تری آن را تأیید می‌کند، پذیرفتاری اغلب

مابعات ناقطبی و جامدات، یعنی مقدار $(\epsilon - 1)/4\pi$ ، در گستره 10^1 تا 10^8 است. اکنون می توان دید چرا چنین است.

همچنین خواهیم دید چرا توسعه یک نظریه دقیق برای یک جسم جامد یا مایع راحت نیست. وقتی اتمها به هم نزدیک می شوند تا تقریباً یکدیگر را "لمس کنند"، نمی توان اثر یک اتم بر اتمهای مجاورش را نادیده گرفت. فاصله b بین نزدیکترین همسایه ها تقریباً $N^{-1/3}$ است. بگذارید میدان الکتریکی E گشتاور دوقطبی $p = E\alpha$ را در هر اتم القا کند. دوقطبی p هر اتم میدانی به شدت $E' \approx p/b^2$ در محل اتم بعدی به وجود می آورد. اما $1/b^3 \approx N$ ، بنابراین $E' \approx E\alpha N$. همان طور که اکنون گفتیم، αN در ماده چگال از مرتبه واحد است. بنابراین E' کوچک نیست، و حتماً نمی توان از آن در مقایسه با E چشم پوشید. این پرسش که میدان مؤثری که یک اتم را در این شرایط قطبیده می کند چیست پاسخ روشنی ندارد.^۱

مولکولهای با گشتاورهای دوقطبی الکتریکی دائمی، مولکولهای قطبی، با تلاش برای همخط شدن در جهت موازی با میدان پاسخ می دهند. تا زمانی که گشتاور دوقطبی p در جهت میدان E نیست، لنگر $p \times E$ می خواهد آن را به جهت E بچرخاند (معادله ۱۸ و شکل ۱۰-۸). البته اگر p درست در مخالف E باشد، لنگر صفر است، اما این وضعیت ناپایدار است. لنگر وارد بر دوقطبی الکتریکی لنگر وارد بر خود مولکول است. حالت با کمترین انرژی هنگامی به وجود می آید که همه مولکولهای قطبی چرخیده و در جهت E قرار گرفته باشند. در حالی که مولکولها می چرخند تا کاملاً با میدان همخط شوند بخشی از انرژی خود را، از طریق اصطکاک چرخشی، به محیط می دهند. قطبش حاصل عظیم خواهد بود. در آب در حدود $10^{22} \times 3$ مولکول در سانتی متر مکعب وجود دارد. گشتاور دوقطبی هر مولکول (شکل ۱۰-۱۴) برابر است با $10^{-18} \times 1.84$ esu-cm، با همان همخط شدن کامل دوقطبیها P برابر $10^4 \times 5.6$ esu/cm² خواهد بود. اگر شکل ۱۰-۲۴ تصویر یک قطره آب بود که این گونه قطبیده است، میدان الکتریکی درست در خارج از قطره از 10^5 ایستاولت بر سانتی متر تجاوز می کرد!

اما این واقعه رخ نمی دهد. با اعمال هر میدان معقول E هرگز چیزی نزدیک به همخط شدن کامل به وقوع نمی پیوندد. چرا؟ دلیل آن اساساً همان است که هرگز همه مولکولهای هوای موجود در یک اتاق را روی کف اتاق نمی یابیم—که در واقع آرایشی با کمترین انرژی پتانسیل است. باید درباره دما و درباره انرژی اغتشاش گرمایی بیندیشیم که هر مولکول در دمای معین T از خود نشان می دهد. اندازه این انرژی kT است، که k یک ثابت جهانی به نام ثابت بولتزمن است.

۱. یک برخورد ابتدایی و تقریبی با این مسئله را که به چیزی انجامید که اکنون رابطه کلاؤسیوس-موساتی نامیده می شود، می توان در بخش ۹-۱۳ ویرایش اول این کتاب یافت.

در دمای اتاق kT در حدود 4×10^{-14} ارگ است. در یک سیستم در دمای T میانگین انرژی جنبشی انتقالی یک مولکول — یا از این لحاظ، هر شیء کوچک یا بزرگ — برابر است با $3/2 kT$. به عبارت بهتر، میانگین انرژی دورانی یک مولکول درست برابر است با kT . اما همه مولکولهای هوا در مجاورت کف اتاق جمع نمی‌شوند، زیرا تغییر انرژی پتانسیل گرانشی در بالا بردن مولکولی به جرم 5×10^{-23} گرم به اندازه چند متر، که می‌توانید به آسانی محاسبه کنید، در حدود 10^{-17} ارگ است، که از $1/1000$ مقدار kT کمتر است. از طرف دیگر، حتی وقتی که گردان‌ها دما وجود دارد، هوا در حوالی کف اتاق از هوای مجاور سقف چگالتر است. که این درست همان تغییر فشار جو بر حسب ارتفاع است. هوا در نزدیکی زمین (وقتی اختلاف سطح اندک است) با کسر mgh/kT چگالتر است، که mgh تفاوت انرژی پتانسیل گرانشی بین دو سطح است.

همین‌طور در دی‌الکتریک با افزایش مختصر دوقطبیهای مولکولی در جهت انرژی پتانسیل کمتر، یعنی در امتداد E و یا مؤلفه‌ای در آن جهت روبه‌رو خواهیم شد. کسر دوقطبیهای اضافی در جهت برتر از مرتبه pE/kT خواهد بود. صورت کسر تفاوت انرژی پتانسیل را نشان می‌دهد. در واقع کار لازم برای چرخاندن یک دوقطبی از جهت E به جهت مخالف pE است (معادله ۱۹) اما با میانگین‌گیری در زاویه‌های مختلف عاملهای عددی دیگری وارد می‌شوند که آنها را به حساب نمی‌آوریم. با N دوقطبی در واحد حجم قطبش P ، که در صورت همخط بودن آن برابر Np می‌بود، با ضریب pE/kT کوچکتر خواهد بود. بنابراین انتظار داریم که قطبش از مرتبه بزرگی زیر باشد

$$P \approx Np \left(\frac{pE}{kT} \right) = \frac{Np^2}{kT} E \quad (59)$$

و پذیرفتاری برابر است با

$$\chi_e = \frac{P}{E} \approx \frac{Np^2}{kT} \quad (60)$$

برای آب در دمای اتاق کمیت طرف راست معادله ۶۰ برابر است با 3×10^{-3} ، در حالی که با $\epsilon = 80$ ، مقدار واقعی χ_e برابر است با 6.3×10^{-3} . بدیهی است که در این مورد، ضریب در حدود 2.1 در طرف راست معادله ۶۰ لازم است، تا مرتبه بزرگی پیش‌بینی شده را به پیشگویی درست تبدیل کند. به دست آوردن این ضریب به‌طور نظری بسیار مشکل است، زیرا برهم‌کنش مولکولهای مجاور مسئله را حتی از مورد دی‌الکتریک ناقطبی مشکلتر می‌کند.

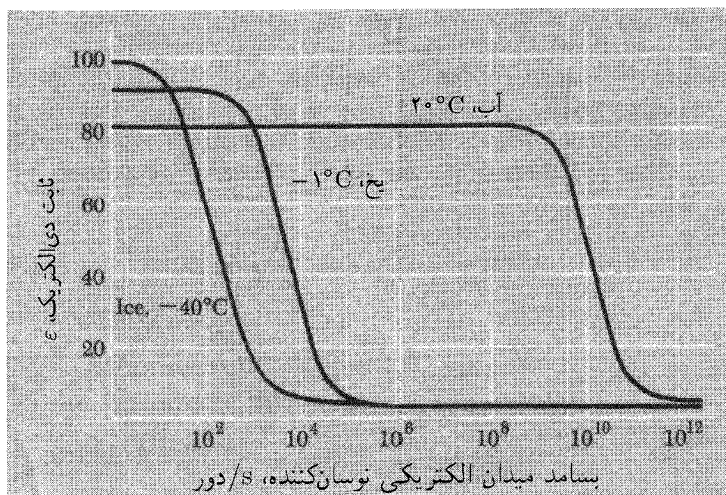
اگر میدان الکتریکی ۱ ایستولت بر سانتی متر را بر آب اعمال کنید، قطبش حاصل $P = (1 - \epsilon_0) / 4\pi \text{ esu/cm}^2$ ، با همخط شدن $10^{18} \times 3.4$ دوقطبی H_2O در سانتی مترمکعب، یا در حدود یک مولکول در 10000 است. با وجود این، مقدار آن در حدود یک مرتبه بزرگی از قطبشی که همان میدان در دی الکتریک ناقطبی تولید می کند بزرگتر است.

۱۰-۱۳ قطبش در میدانهای متغیر

تاکنون فقط میدانهای الکتروستاتیکی در ماده را بررسی کردیم. حال باید به آثاری از میدان الکتریکی بنگریم که برحسب زمان تغییر می کنند، مانند میدان در خازنی که در مدار جریان متناوب است. پرسش مهم این است، آیا تغییرات قطبش تغییرات میدان را دنبال می کند؟ آیا نسبت P به E در هر لحظه، همان P به E در میدان الکتریکی ایستاست؟ برای تغییرات کند نباید تفاوتی وجود داشته باشد، اما مانند همیشه معیار کندی به فرایند فیزیکی مورد نظر بستگی دارد. ثابت شده است که قطبش القایی و سمتگیری دوقطبیهای دائمی، دو فرایند با پاسخ زمانی کاملاً متفاوت اند.

قطبش القایی آنها و مولکولها بر اثر واپیچیدگی ساختار الکترونی به وقوع می پیوندد. جرم دخیل در فرایند کم، و ساختار بسیار سفت است؛ بسامدهای طبیعی ارتعاش بسیار زیاد است. به عبارت دیگر، مشخصه حرکت الکترونها در آنها و مولکولها دورههایی از مرتبه 10^{-16} ثانیه است. که چیزی مانند دوره یک موج نور مرئی است. برای یک اتم 10^{-14} ثانیه زمانی است طولانی. و اتم در میزان کردن ساختار الکترونی خود در چنین زمانی دچار مشکل نمی شود. بدین سبب، رفتار مواد کاملاً ناقطبی در جریان مستقیم (بسامد صفر) تا بسامدهای نزدیک به نور مرئی عملاً یکسان است. قطبش با میدان همگام است، و پذیرفتاری $\chi_e = P/E$ مستقل از بسامد است.

سمتگیری یک مولکول قطبی فرایندی است که با واپیچیدگی ابر الکترونی به تنهایی تفاوتی بارز دارد. کل چارچوب مولکولی باید بچرخد. در مقیاس میکروسکوپیکی، این کار مانند چرخاندن یک بادام زمینی از یک سر به سر دیگر در یک کیسه بادام زمینی است. کشش اصطکاکی می خواهد که چرخش از لنگر عقب بماند و دامنه قطبش حاصل کم شود. اینکه چنین اثری در کجای مقیاس زمانی قرار بگیرد، از یک ماده قطبی به ماده قطبی دیگر به طور قابل ملاحظه ای تغییر می کند. در آب، "زمان پاسخ" برای سمتگیری چیزی مانند 10^{-11} ثانیه است. ثابت دی الکتریک تا بسامدهای حدود 10^{11} هرتز در حدود 80 باقی می ماند، در بالاتر از 10^{11} هرتز ϵ به مقدار اندک مربوط به یک مایع ناقطبی سقوط می کند. دوقطبی دیگر نمی تواند تغییرات سریع میدان را دنبال کند. در مواد دیگر، به ویژه جامدات، زمان مشخصه می تواند بسیار درازتر باشد. در یخ درست زیر نقطه انجماد زمان پاسخ برای قطبش الکتریکی در حدود 10^{-5} ثانیه است. شکل ۱۰-۲۹ چند منحنی تجربی تغییرات ثابت دی الکتریک برحسب بسامد را برای آب و یخ نشان می دهد.



شکل ۱۰-۲۹ تغییرات ثابت دی الکتریک آب و یخ برحسب بسامد.

۱۰-۱۴ جریان بار-مفید

هر جا که قطبش در ماده برحسب زمان تغییر کند، یک جریان الکتریکی، حرکت واقعی بار، وجود دارد. فرض کنید که N دوقطبی در یک سانتی متر مکعب دی الکتریک وجود دارد، و در هر بازه زمانی dt از \mathbf{p} تا $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ تغییر می کند. در این صورت چگالی قطبش ماکروسکوپیکی از $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$ تا $\mathbf{P} + d\mathbf{P} = N(\mathbf{p} + d\mathbf{p})$ تغییر می کند. فرض کنید که تغییر $d\mathbf{p}$ در نتیجه حرکت بار q در فاصله ds در هر اتم باشد: $qds = d\mathbf{p}$. در این صورت در طی زمان dt در واقع ابری از بار با چگالی $\mathbf{P} = Nq$ با سرعت $v = ds/dt$ حرکت می کند. این جریان رسانش با چگالی \mathbf{J} برحسب $\text{esu/s}\cdot\text{cm}^2$ است:

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v} = Nq\frac{ds}{dt} = N\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (61)$$

ارتباط بین آهنگ تغییر قطبش و چگالی جریان، $\mathbf{J} = d\mathbf{P}/dt$ ، مستقل از جزئیات مدل است. یک قطبش متغیر یک جریان رسانش است، که با جریانهای دیگر تفاوتی ندارد. این جریان طبعاً چشمه یک میدان مغناطیسی است. اگر جریان دیگری وجود نداشته باشد، باید معادله دوم ماکسول، $\text{curl } \mathbf{B} = (1/c)(\partial\mathbf{E}/\partial t + 4\pi\mathbf{J})$ را به صورت زیر بنویسیم

$$\text{curl } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} \right) \quad (62)$$

تنها تفاوت بین یک چگالی جریان رسانش "معمولی" و چگالی جریان $\partial\mathbf{P}/\partial t$ آن است که در یکی بار آزاد متحرک و در دیگری بار مفید متحرک دخیل است. یک تفاوت عملی تقریباً بارز

وجود دارد— نمی‌توانید یک جریان بار مقید پایا داشته باشید که همواره بدون تغییر تداوم داشته باشد. معمولاً ترجیح می‌دهیم که با حفظ \mathbf{J} فقط به‌عنوان نماد چگالی جریان بار آزاد، حساب جریان بار آزاد را از جریان بار مقید جدا کنیم. سپس برای وارد کردن همهٔ جریانها در معادلهٔ ماکسول آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\text{curl } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{J} \right) \quad (63)$$

\uparrow \uparrow
 چگالی جریان چگالی جریان
 بار آزاد بار مقید

در یک محیط دی‌الکتریک، $\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E}$ ، و از معادلهٔ ۶۳ به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$\text{curl } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \left(\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{J} \right) \quad (64)$$

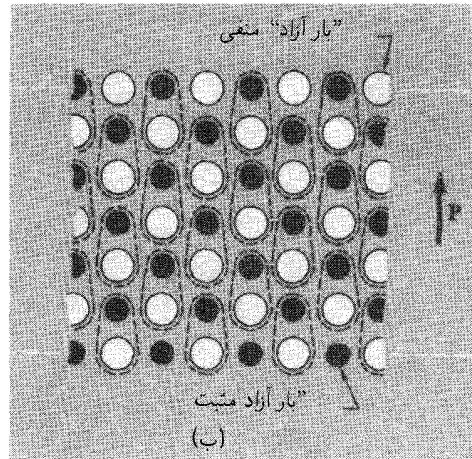
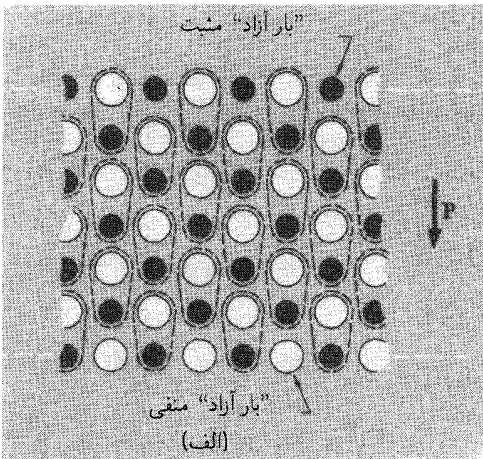
به‌طور کلی، معادلهٔ ۶۳ را می‌توان با وارد کردن بردار \mathbf{D} ، که قبلاً به‌صورت $\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ تعریف شد، خلاصه کرد:

$$\text{curl } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{J} \right) \quad (65)$$

$\partial \mathbf{D} / \partial t$ را معمولاً جریان جابه‌جایی می‌نامند. در واقع، بخشی از آن که شامل $\partial \mathbf{P} / \partial t$ است، چنانکه دیدیم، شامل یک جریان رسانش سر راست، یعنی بارهای متحرک واقعی است. تنها بخش چگالی جریان کل که بار متحرک ساده نیست، بخش $\partial \mathbf{E} / \partial t$ است، که جریان جابه‌جایی خلاً واقعی است که در بخش ۹ دربارهٔ آن بحث کردیم. اتفاقاً، اگر بخواهیم همهٔ مؤلفه‌های چگالی جریان کامل را برحسب یک‌گانه‌هایی که متناظر با یکای \mathbf{J} است در نظر بگیریم، باید توجه کنیم که 4π در جملهٔ اول ظاهر نمی‌شود، و باید آن را با نوشتن معادلهٔ ۶۳ به‌صورت زیر مرتب کنیم:

$$\text{curl } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) \quad (66)$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 چگالی جریان چگالی جریان چگالی جریان
 بار آزاد بار مقید جابه‌جایی خلاً



شکل ۱۰-۳ همان شبکه یونی، که زوج بارهای آن به صورت "مولکول" به دو صورت دسته‌بندی شده‌اند. بردار قطبش به طرف پایین است (الف)، و یا به طرف بالا (ب) دو سیستم از نظر فیزیکی یکسان‌اند؛ تفاوت تنها در توصیف آن است.

در تشخیص بار مفید از بار آزاد پرسشی دخیل است که تا کنون با آن برخورد قاطع نکرده‌ایم: آیا می‌توان همواره "گشتاورهای دوقطبی مولکولی" در ماده را به‌ویژه در ماده جامد بدون ابهام شناسایی کرد؟ پاسخ منفی است. بگذارید دیدگاهی میکروسکوپیکی از یک نانک نازک از بلور کلرید سدیم داشته باشیم. آرایش یونهای سدیم مثبت و یونهای کلر منفی در شکل ۱-۷ نشان داده شده است. شکل ۱۰-۳ مقطعی از بلور است، که به طرف راست و چپ گسترش یافته است. در صورت تمایل، می‌توانیم یک زوج یون مجاور را به صورت یک مولکول خنثی با گشتاور دوقطبی در نظر بگیریم. با دسته‌بندی آنها مانند شکل ۱۰-۳ الف محیط را با چگالی قطبش ماکروسکوپیکی یکنواخت P توصیف می‌کنیم، که برداری به طرف پایین است. در همان حال، مشاهده می‌کنیم که لایه‌ای از بارهای مثبت در بالای بلور و بارهای منفی در پایین آن وجود دارد، که جزء مولکولهای ما نیستند، و باید بار آزاد در نظر گرفته شوند.

اما می‌توانستیم یونها را به صورت شکل ۱۰-۳ ب نیز دسته‌بندی کنیم. در این صورت P برداری به طرف بالاست، اما لایه‌ای از بار منفی آزاد در بالای بلور و لایه‌ای از بار مثبت آزاد را در زیر آن داریم. هر دو بیان درست‌اند. شما در پیدا کردن یک توصیف درست دیگر که در آن P صفر است و هیچ بار آزادی وجود ندارد مشکلی نخواهید داشت. در هر یک از دو بیان $E = 0$ پیشگویی می‌شود. میدان ماکروسکوپیکی E یک کمیت فیزیکی مشاهده‌پذیر است. این کمیت فقط به توزیع بار بستگی دارد، نه به اینکه چگونه این توزیع را بیان کرده‌ایم.

این مثال به ما می آموزد که در جهان اتمی واقعی تشخیص بین بار مقید و بار آزاد کم و بیش اختیاری است، و در نتیجه در مفهوم چگالی قطبش P نیز چنین است. دوقطبی مولکولی فقط در صورتی مفهومی خوش تعریف است که مولکولها قابل شناسایی باشند — یعنی در موردی که دلیل فیزیکی برای این گفته وجود داشته باشد. "این اتم متعلق به این مولکول است و نه به آن مولکول". در بسیاری از بلورها چنین استنادی بی معنی است. یک اتم یا یون می تواند با همه همسایگانش برهم کنشی تقریباً یکسان داشته باشد؛ فقط می توان درباره تمام بلور به صورت یک تک مولکول صحبت کرد.

۱۰-۱۵ یک موج الکترومغناطیس در یک دی الکتریک

در معادله های ۱۵ فصل ۹ معادله های ماکسول را برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در خلأ با در نظر گرفتن جمله های مربوط به چشمه، چگالی بار ρ و چگالی جریان \mathbf{J} نوشتیم. اکنون می خواهیم یک میدان الکترومغناطیسی را در یک محیط دی الکتریکی بیکران در نظر بگیریم. دی الکتریک یک نارسانای کامل است، بنابراین در آن جریان آزادی وجود ندارد. یعنی، آخرین جمله طرف راست معادله های ۶۳ تا ۶۵، چگالی جریان بار آزاد \mathbf{J} ، صفر است. بار آزادی نیز وجود ندارد، اما اگر $\text{div } \mathbf{E}$ صفر نباشد، چگالی بار مقید می تواند غیر صفر باشد. بگذارید فقط میدانهای با $\text{div } \mathbf{E} = 0$ را در نظر بگیریم. در این صورت ρ ، هم برای بار مقید و هم برای بار آزاد در سراسر محیط صفر خواهد بود. در اولین معادله القا تغییری صورت نمی گیرد، $\text{curl } \mathbf{E} = -(\mathbf{1}/c)(\partial \mathbf{B}/\partial t)$ برای معادله دوم اکنون معادله ۶۴ را بدون جمله بار آزاد در نظر می گیریم: $\text{curl } \mathbf{B} = (\epsilon/c)(\partial \mathbf{E}/\partial t)$. ثابت دی الکتریک ϵ هم جریان بار مقید و هم جریان جابه جایی خلأ را به حساب می آورد. مجموعه کامل معادله های ما به صورت زیر درمی آید

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{E} &= -\frac{\mathbf{1}}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{div } \mathbf{E} &= 0 \\ \text{curl } \mathbf{B} &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \text{div } \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (67)$$

تفاوت این معادله ها با معادله ۱۶ فصل ۹ فقط در حضور عامل ثابت ϵ در دومین معادله القاست. مانند بخش ۹-۴، بگذارید یک میدان الکترومغناطیسی موج گونه بسازیم که در معادله های ماکسول صدق کند. این بار تابع موج آزمون خود را به صورت کلی تری در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \hat{\mathbf{z}} E_0 \sin(ky - \omega t) \\ \mathbf{B} &= \hat{\mathbf{x}} B_0 \sin(ky - \omega t) \end{aligned} \quad (68)$$

زاویه $(ky - \omega t)$ را فاز موج می‌نامیم. برای یک نقطه که با سرعت ω/k در جهت مثبت محور y حرکت می‌کند، فاز $ky - \omega t$ ثابت می‌ماند. به عبارت دیگر، ω/k سرعت فاز این موج است. از این عبارت وقتی استفاده می‌کنیم که خواهیم بین دو نوع سرعت فاز و سرعت گروه تفاوت قائل شویم. در موردی که بررسی می‌کنیم تفاوتی بین این دو وجود ندارد، و ما ω/k را، مانند v در بحث بخش ۹-۴ فقط سرعت موج می‌نامیم. در هر مکان ثابت، مانند $y = y_0$ میدانها برحسب زمان با سرعت زاویه‌ای ω نوسان می‌کند. در هر لحظه از زمان، مانند $t = t_0$ ، فاز در صفحه‌هایی که یک موج طول λ با هم فاصله دارند به اندازه 2π تغییر می‌کند، که $\lambda = 2\pi/k$ است. مشتقات فضایی و زمانی مورد نیاز همان مشتقات معادله ۹-۱۹ با تغییری اندک هستند:

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{E} &= \hat{x}E_0 k \cos(ky - \omega t) & \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -\hat{z}E_0 \omega \cos(ky - \omega t) \\ \text{curl } \mathbf{B} &= -\hat{z}B_0 k \cos(ky - \omega t) & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\hat{x}B_0 \omega \cos(ky - \omega t) \end{aligned} \quad (69)$$

با قرار دادن این معادله‌ها در معادله ۶۷، درمی‌یابیم که معادله‌ها در صورتی صادق‌اند که داشته باشیم

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \quad \text{و} \quad B_0 = \sqrt{\epsilon} E_0. \quad (70)$$

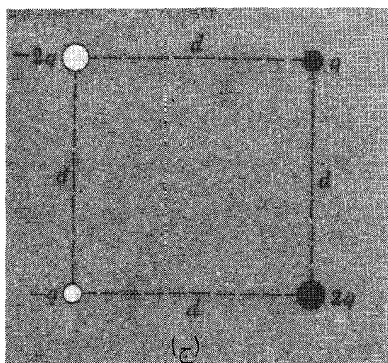
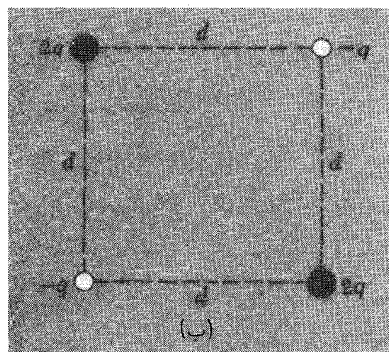
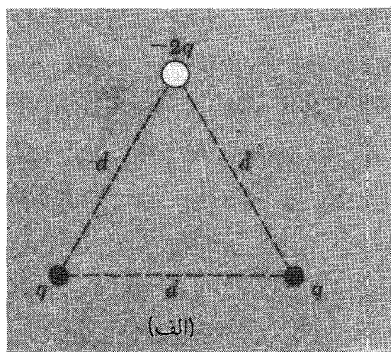
سرعت موج ω/k با ضریب $1/\sqrt{\epsilon}$ با سرعت نور در خلأ تفاوت دارد. دامنه‌های میدان الکتریکی و مغناطیسی، E_0 و B_0 که برای موج در خلأ دقیقاً برابرند، در اینجا با ضریب $\sqrt{\epsilon}$ اختلاف دارند، و دامنه الکتریکی کوچکتر است. از لحاظ دیگر موج مانند موج تخت در خلأ است: \mathbf{B} بر \mathbf{E} عمود است، و موج در جهت $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ حرکت می‌کند. البته اگر موج در دی‌الکتریک را با موجی با همان بسامد در خلأ مقایسه کنیم، طول موج در دی‌الکتریک به اندازه $1/\sqrt{\epsilon}$ از طول موج در خلأ کوتاهتر است، زیرا سرعت برابر است با طول موج ضربدر بسامد. نوری که در شیشه حرکت می‌کند یک مثال موجی است که توصیف کردیم. در اپتیک معمولاً ضریب شکست n یک محیط را به صورت سرعت نور در خلأ به سرعت نور در آن محیط تعریف می‌کنیم. اکنون متوجه شدیم که n چیزی بیش از $\sqrt{\epsilon}$ نیست. در واقع اکنون بنیان نظریه کلاسیکی اپتیک نهاده شده است.

مسائل

۱-۱۰ مقداری نوارهای پلی‌اتیلنی با ثابت دی‌الکتریک ۲٫۳ به عرض ۵٫۷ سانتی‌متر و ضخامت ۰٫۲۵ سانتی‌متر، نوار آلومینیومی به عرض ۵ سانتی‌متر و ضخامت ۰٫۱۳ سانتی‌متر در ۰٫۰۰۱۳ سانتی‌متر

اختیار دارید. می‌خواهید خازنی با ظرفیت در حدود 5×10^{-6} میکروفاراد، به صورت غلتک استوانه‌ای فشرده بسازید. بگویید چطور می‌توانید این کار را انجام دهید، مقدار نوار لازم از هر نوع و قطر کلی خازن را پس از ساخت برآورد کنید.

۱۰-۲ در سال ۱۷۴۶ شخصی به نام استاد موشنبرگ در لید آب یک بطری را در تماس با یک سیم که از گلوله بطری به ماشین الکتروستاتیکی وصل شده بود بردار کرد. وقتی دستیارش، که بطری را در یک دستش نگه‌داشته بود، خواست با دست دیگری سیم را قطع کند، دچار شوکی شدید شد. بنابراین دانشمندانی که در زمینه برق کار می‌کردند متوجه نیروی خازن ساده شدند. کشف "بطری لید" آزمایشهای الکتریکی را متحول کرد. در سال ۱۷۴۷ بنیامین فرانکلین چیزهایی در مورد آزمایشهایی با بطری شگفت‌انگیز آقای موشنبرگ نوشته بود. بطری چیزی بجز یک شیشه با رساناهایی در دو طرف آن نبود. برای اینکه بینیم چگونه بطری چنان هیجانی تولید کرد، ظرفیت یک بطری یک لیتری را که ضخامت دیواره‌های آن ۲ میلی‌متر است برآورد کنید، ثابت دی‌الکتریک شیشه ۴ است. یک خازن کروی از هوا با همین ظرفیت چه قطری دارد؟ ۱۰-۳ اندازه گشتاور دوقطبی هر یک از توزیع بارهای بخش الف، ب و ج در شکل چقدر است؟



شکل مسئله ۱۰-۳.

جهت بردار گشتاور دوقطبی p چیست؟

۱۰-۴ در مولکول هیدروژن کلرید فاصله بین هسته کرب و پروتون 1.28 \AA آنگستروم است. فرض کنید که الکترون اتم هیدروژن به طور کامل به اتم کرب منتقل شود و همراه سایر الکترونها یک توزیع کروی از بار منفی را به مرکز هسته کرب تشکیل دهد. گشتاور دوقطبی این مدل در مقایسه با گشتاور دوقطبی واقعی در شکل ۹-۱۶ چقدر است؟ گرانیگاه توزیع بار منفی باید در کجای مولکول واقعی قرار داشته باشد؟ (هسته کرب دارای بار $17e$ ، و هسته هیدروژن دارای بار e است.)

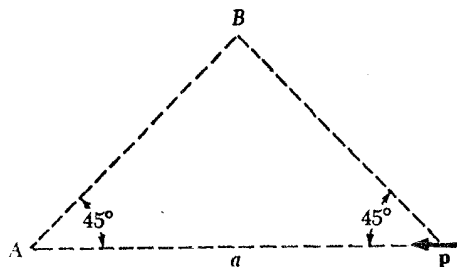
۱۰-۵ یک مولکول هیدروژن کلرید در مبدأ مختصات طوری قرار گرفته است که خط $H-Cl$ در امتداد محور z و Cl در بالاترین نقطه قرار دارد. جهت میدان الکتریکی و شدت آن بر حسب ایستاولت بر سانتی متر، در نقطه‌ای به فاصله 10° آنگستروم بالاتر از مبدأ روی محور z چیست؟ در نقطه‌ای به فاصله 10° آنگستروم از مبدأ، روی محور y چطور؟

۱۰-۶ یک خازن صفحه موازی با ظرفیت اندازه‌گیری شده $C = 250 \text{ cm}$ تا اختلاف پتانسیل 6 ایستاولت پر شده است. فاصله صفحه‌ها از هم 1.5 cm است. ما به میدان در خارج از خازن یا میدان "حاشیه‌ای" علاقه‌مندیم که معمولاً آن را نادیده می‌گیریم. به ویژه، می‌خواهیم میدان را در فاصله‌ای از خازن بدانیم که در مقایسه با ابعاد خازن بزرگ است. این کار را می‌توان با در نظر گرفتن توزیع بار روی خازن به صورت یک دوقطبی انجام داد. شدت میدان را در موارد زیر برآورد کنید. (الف) در نقطه‌ای به فاصله 3 متر از خازن در محل صفحه‌ها.

(ب) در نقطه‌ای در همان فاصله در جهت عمود بر صفحه‌ها.

۱۰-۷ در بخش ۴-۱۱ درباره زمان واهلش خازنی صحبت کردیم که با ماده‌ای با مقاومت ویژه ρ پر شده است. اگر به آن مسئله نگاه کنید متوجه می‌شوید که ما از مسئله ثابت دی‌الکتریک ماده اجتناب کرده‌ایم. اکنون می‌توانیم این غفلت را جبران کنیم. مقدار ϵ را به صورت درست وارد عبارت ثابت زمانی کنید. یک خازن نشت‌دار که برای همه ما اهمیت دارد از دیواره سلولهای زنده تشکیل می‌شود، عایقی که (در میان وظیفه‌های بسیار آن!) دو شاره رسانا از هم جدا می‌سازد. این ویژگیهای الکتریکی به ویژه در سلولهای عصبی مورد توجه‌اند، زیرا انتشار علائم عصبی با تغییرات سریع اختلاف پتانسیل الکتریکی بین داخل و خارج سلول همراه است. ظرفیت غشاء سلول نوعاً در حدود 1 میکروفاراد بر سانتی متر مربع سطح است. به نظر می‌رسد که غشاء از ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک حدود 3 تشکیل شده است. می‌توانید حدس بزنید که این چه ضخامتی را ایجاد می‌کند. اندازه‌گیرهای دیگر نشان داده‌اند که مقاومت 1 سانتی متر مربع غشاء سلول، با اندازه‌گیری در شاره رسانا از یک طرف تا طرف دیگر در حدود 1000 اهم به دست آمده است. نشان دهید که ثابت زمانی این خازن نشتی مستقل از سطح خازن است. مقدار آن در این مورد چقدر است؟ مقاومت ویژه ρ این ماده غشاء در کجای نقشه شکل ۴-۸ قرار دارد؟

۸-۱۰ چقدر کار در جابه‌جایی یک واحد بار مثبت در میدان دوقطبی P از A به B انجام می‌شود؟



شکل مسئله ۸-۱۰.

۹-۱۰ جهت نیرویی که از طرف میدان دوقطبیهای کناری بر دوقطبی مرکز وارد می‌شود چیست؟ اندازه نیرو را محاسبه کنید.



شکل مسئله ۹-۱۰.

۱۰-۱۰ یک دوقطبی به قدرت $p = 2.0 \text{ esu-cm}$ در مبدأ و در جهت \hat{z} قرار دارد. به میدان این دوقطبی یک میدان الکتریکی یکنواخت به شدت ۵ ایستولت بر سانتی‌متر در جهت \hat{y} اضافه می‌شود. در چند نقطه، و در کجا میدان کل صفر است؟

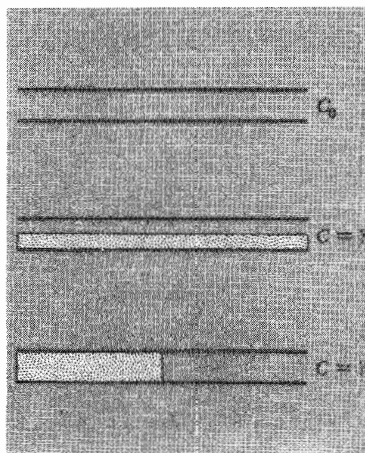
جواب: $(2.216, +3.134, 0)$ و $(-2.216, -3.134, 0)$.

۱۱-۱۰ معادله یک خط میدان دوقطبی در مختصات قطبی با معادله ساده $r = r_0 \sin^2 \theta$ بیان می‌شود که در آن r_0 شعاعی است که در آن خط میدان از صفحه استوای دوقطبی می‌گذرد. با نشان دادن اینکه در هر نقطه روی این منحنی مماس بر منحنی در جهت میدان است درستی این گفته را ثابت کنید.

۱۲-۱۰ فرمول مربوط به دوقطبی دی‌الکتریکی را می‌توان برای توصیف یک کره فلزی در یک میدان یکنواخت به‌کار برد. برای نشان دادن آن، حالت حدی $\epsilon \rightarrow \infty$ را در نظر بگیرید، و نشان دهید که میدان خارجی به‌صورتی است که در شرایط مرزی رسانای کامل صدق می‌کند. میدان داخلی چگونه؟ چند خط میدان را در این حالت حدی رسم کنید. اندازه گشتاور دوقطبی که در یک کره رسانا به شعاع a در میدان E_0 القا می‌شود چقدر است؟ شعاع کره رسانا با قطبش‌پذیری برابر با اتم هیدروژن در جدول ۲-۱۰ چقدر است؟

۱۰-۱۳ با در نظر گرفتن اینکه چگونه وارد کردن یک دی الکتریک انرژی ذخیره شده در خازن را تغییر می دهد، نشان دهید که رابطه درست چگالی انرژی در دی الکتریک باید به صورت $\epsilon E^2 / 8\pi$ باشد. سپس انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی را با انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی برای موجی که در بخش ۱۰-۱۵ مطالعه کردیم مقایسه کنید.

۱۰-۱۴ شکل سه خازن را نشان می دهد که مساحت و فاصله صفحه های آنها یکسان است. ظرفیت خازن C_0 خلاً است. نیمی از دو خازن دیگر با دی الکتریکی با ثابت دی الکتریک ϵ پر شده است که مطابق شکل به صورتهای متفاوت قرار می گیرند. ظرفیت هر یک از دو خازن را پیدا کنید (اثرهای لبه را نادیده بگیرید).



شکل مسئله ۱۰-۱۴.

۱۰-۱۵ گشتاور دوقطبی الکتریکی مولکول آب در شکل ۱۰-۱۴ داده شده است. فرض کنید بتوان کاری کرد که دوقطبیهای مولکولی در یک فنجان آب همه رو به پایین باشند. بزرگی چگالی بار سطحی را در سطح بالایی پیدا کنید، و آن را برحسب الکترون بر سانتی متر مربع بیان کنید. ۱۰-۱۶ در بخش ۱۰-۱۰ این یکنواخت بودن میدان الکتریکی در داخل کره قطبیده را از شکل پتانسیل در مرز استنتاج کردیم. می توانید آن را با برهم نهی میدانهای داخلی دو گلوله بار که مرکزشان جداساز ثابت کنید.

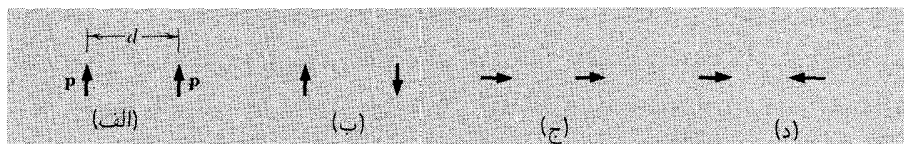
(الف) نشان دهید که میدان \mathbf{E} در داخل توزیع بار یکنواخت با r متناسب است.

(ب) اکنون دو توزیع بار کروی با چگالی ρ و $-\rho$ را در نظر بگیرید که مرکز آنها C_1 و C_2

است و نشان دهید که میدان برآیند ثابت و با خط واصل C_1 به C_2 موازی است.

(ج) به همین ترتیب میدان یک میله استوانه ای را تحلیل کنید که عمود بر محورش قطبیده است.

۱۵-۱۷ چهار آرایش مختلف گشتاورهای دوقطبی الکتریکی دو مولکول قطبی مجاور در شکل نشان داده شده است. انرژی پتانسیل را در هر مورد به دست آورید، انرژی پتانسیل طبق تعریف کار لازم برای نزدیک کردن دو مولکول از فاصلهٔ بینهایت است، در حالی که سمتگیری گشتاورهای آنها در جهت معین باقی می ماند. این الزاماً ساده ترین راه محاسبهٔ آن نیست. شما همواره می توانید آنها را طوری به هم نزدیک کنید و سپس آنها را بچرخانید.



شکل مسئله ۱۵-۱۷.

۱۵-۱۸ پدیدهٔ آبدار شدن در شیمی مایعات آبی مهم است. منظور از آن جمع شدن خوشه‌ای از مولکولهای آب در اطراف یک یون است که نسبتاً محکم به آن چسبیده‌اند. نیروی جاذبه بین یک دوقطبی و بار نقطه‌ای مسئول آن است. انرژی لازم برای جدا کردن یک یون حامل تک بار e را از مولکول آب برآورد کنید، فرض کنید که یون در ابتدا در فاصلهٔ ۵ \AA آنگستروم از محل مؤثر دوقطبی H_2O قرار دارد. (این فاصله در واقع کمیتی خوش تعریف نیست، زیرا در نگرش از نزدیک، توزیع بار آن یک دوقطبی بینهایت کوچک نیست.) کدام قسمت مولکول آب در نزدیکترین فاصله از یون منفی است؟

۱۵-۱۹ بین هر یون و اتم خنثی نیرویی وجود دارد که به صورت زیر تولید می شود. میدان الکتریکی یون اتم را قطبیده می کند؛ میدان این دوقطبی القایی یا یون واکنش می کند. نشان دهید که این نیرو همواره جاذبه است، و با عکس توان پنجم فاصلهٔ r تغییر می کند. رابطه‌ای برای انرژی پتانسیل مربوط به آن به دست آورید، به طوری که انرژی صفر متناظر با فاصله بینهایت باشد. برای چه فاصلهٔ r بزرگی این انرژی پتانسیل با مقدار kT در دمای اتاق، که $۱۰^{-۴} \times ۴$ ارگ است، برابر می شود، در صورتی که یون تک بار، و اتم سدیم باشد؟ (جدول ۱۵-۲).

۱۵-۲۰ اتمهای قطبش پذیر A و B در فاصلهٔ ثابت از هم قرار گرفته‌اند. قطبش پذیری هر اتم α است. امکان حالت جالب توجه زیر را در نظر بگیرید. اتم A را یک میدان الکتریکی قطبیده کرده است که چشمهٔ آن گشتاور دوقطبی الکتریکی \mathbf{p} مربوط به اتم B است. این گشتاور دوقطبی در اتم B را یک میدان الکتریکی القا کرده است که چشمهٔ آن گشتاور دوقطبی اتم A است. آیا چنین چیزی می تواند رخ دهد؟ اگر بلی، تحت چه شرایطی؟ اگر نه، چرا؟

۱۵-۲۱ موادی را که به عنوان عایق یا دی الکتریک در خازنهای به کار می روند برحسب استقامت دی الکتریکی درجه بندی می کنند، که به صورت بیشترین میدان الکتریکی داخلی تعریف می شود

که دی الکتریک می تواند بدون فروریزش الکتریکی تحمل کند. معمولاً استقامت دی الکتریکی را بر حسب کیلوولت بر میل بیان می کنند (یک میل برابر است با 10^6 اینچ یا 254×10^6 سانتی متر). به عنوان مثال میلار (یک فیلم پلی استری دو پونت) وقتی به صورت ورقه نازک - در یک خازن نوعی، به کار رود استقامت دی الکتریکی آن 14 کیلوولت بر میل ارزیابی شده است. ثابت دی الکتریک ϵ میلار 3.25 ، و چگالی آن 1.40 g/cm^3 است. بیشینه مقدار انرژی را که یک خازن پر از میلار می تواند ذخیره کند محاسبه و آن را بر حسب ژول بر کیلوگرم میلار بیان کنید. فرض کنید الکترودها و پوشش، 25 درصد وزن خازن را تشکیل دهند، با این انرژی ذخیره شده خازن را چقدر می توان بالا برد؟ این خازن را از لحاظ وسیله ذخیره سازی انرژی با باتریهای مسائل $4-28$ و $4-29$ مقایسه کنید.

$10-22$ با استفاده از مقادیر ϵ که برای آب، آمونیاک، و متانول که در جدول $10-1$ داده شده است، پذیرفتاری الکتریکی χ_e هر یک از آنها را حساب کنید. پیشگویی نظری معادله 60 را می توان به صورت $\chi_e = CNp^2/kT$ نوشت، که عامل C را هنوز نمی شناسیم، ولی انتظار داریم مرتبه بزرگی آن در حدود واحد باشد. چگالی مایعها به ترتیب برابر است با 10^3 ، 10^3 ، 10^3 و 10^3 گرم بر سانتی متر مکعب؛ وزن مولکولی آنها 18 ، 17 ، و 32 است. مقدار گشتاور دوقطبی را از شکل $10-14$ بگیرید، و در هر مورد مقدار C لازم برای برازش مقدار مشاهده شده χ_e را بیابید.

$10-23$ یک میدان الکتریکی نوسانی $E_0 \cos \omega t$ را در داخل یک محیط دی الکتریک در نظر بگیرید که عایق کامل نیست. محیط دارای ثابت دی الکتریک ϵ و رسانندگی σ است. این می تواند میدان الکتریکی در یک خازن نشتی باشد که بخشی از یک مدار تشدید است، یا می تواند میدان الکتریکی در محل به خصوصی از یک موج الکترومغناطیسی باشد. نشان دهید که عامل Q ، که با معادله 13 در فصل 8 تعریف شده است، برای این سیستم برابر است با $\epsilon\omega/4\pi\sigma$ ، و آن را برای آب دریا در بسامد 10^6 MHz برآورد کنید (رسانندگی در جدول $4-1$ داده شده است، و ثابت دی الکتریک را می توان با مقدار آن برای آب خالص در همان بسامد یکی گرفت به شکل $10-29$ نگاه کنید). نتیجه حاصل چه پیشنهادی را برای انتشار امواج دسیمتری در آب دریا مطرح می کند؟

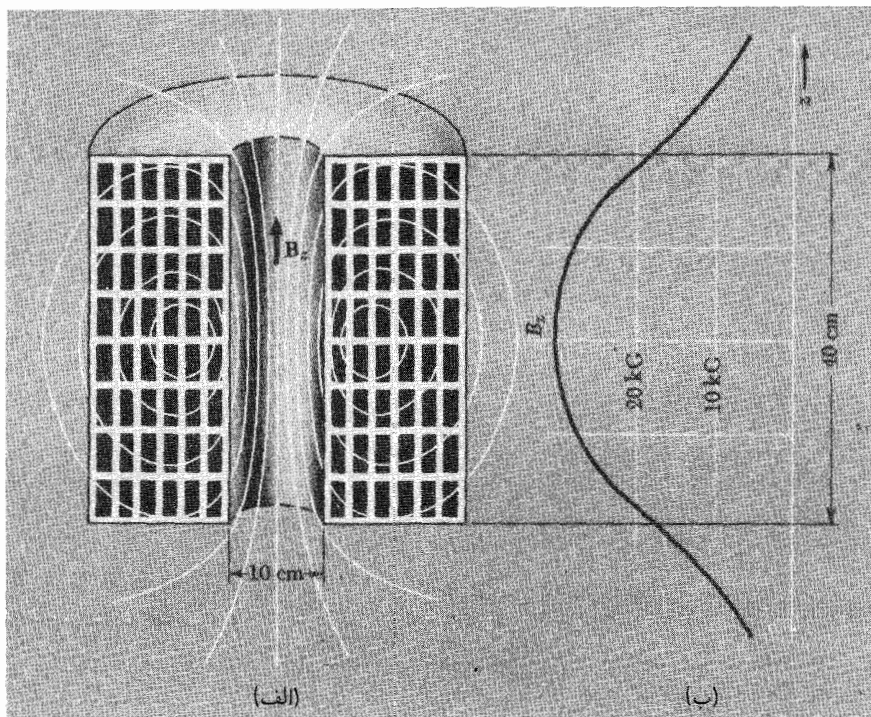
$10-24$ یک قطعه شیشه با ضریب شکست $n = \sqrt{\epsilon}$ ، بخش $0 < y < \pi/2$ را پر کرده است، و سطح آن در صفحه xy است. یک موج تخت که در جهت مثبت y در فضای خالی $0 < y < \pi/2$ در حرکت است بر این سطح فرود می آید. میدان الکتریکی در این موج برابر است با $\hat{z} E_0 \sin(ky - \omega t)$. یک موج در داخل شیشه وجود دارد، که دقیقاً با معادله 68 بیان می شود. یک موج بازتابیده نیز در فضای $0 < y < \pi/2$ موجود است که در جهت منفی y از شیشه دور می شود. میدان الکتریکی

آن برابر است با $\hat{z}E_r \sin(ky + \omega t)$. البته هر موج دارای میدان مغناطیسی مربوط به خود با دامنه به ترتیب B_z ، B_x ، و B_y است. میدان مغناطیسی کل باید در $y = 0$ پیوسته باشد، و میدان الکتریکی کل، که موازی با سطح است، نیز باید پیوسته باشد. نشان دهید که این شرط و ارتباط B_x به E_x که با معادله $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ داده می‌شود، برای تعیین نسبت E_z به E_r کافی است. وقتی یک موج به طور قائم بر فصل مشترک هوا-شیشه فرود می‌آید، چه کسری از آن باز می‌تابد اگر ضریب شکست ۱٫۶ باشد؟

میدانهای مغناطیسی در ماده

۱-۱۱ چگونه مواد مختلف به یک میدان مغناطیسی پاسخ می دهند

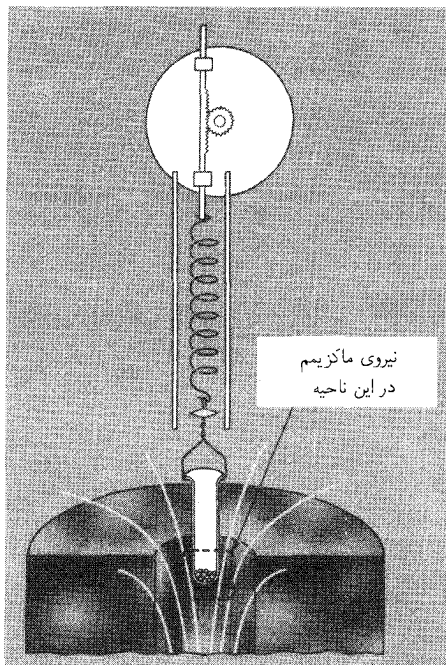
فرض کنید که با یک میدان مغناطیسی بسیار قوی آزمایشهایی انجام می دهیم. به طور دقیق، فرض کنید که یک سیملوله به قطر داخلی ۱۰ سانتی متر و به طول ۴۰ سانتی متر، مانند آنچه در شکل ۱-۱۱ نشان داده شده است، ساخته ایم. قطر خارجی آن ۴۰ سانتی متر است، و بخش اعظم آن پر از سیم پیچهای مسی است این پیچه با اعمال توان الکتریکی ۴۰۰ کیلووات در مرکز آن میدان الکتریکی ۳۰۰۰۰۰ گاوسی یا ۳ تسلائی تولید می کند، و جریان حدود ۱۱۶ لیتر آب بر دقیقه لازم است تا گرمای تولید شده را خارج کند. این جزئیات عملی را متذکر می شویم تا نشان دهیم که این وسیله، اگرچه چیز خارق العاده ای نیست، اما یک آهنربای آزمایشگاهی آبرومند است. شدت میدان در مرکز آن 10^5 برابر میدان مغناطیسی زمین، و احتمالاً ۵ تا ۱۰ بار شدیدتر از میدان در نزدیکی هر آهنربای میله ای یا نعل اسبی است که با آن آزمایش کرده اید. میدان در نزدیکی مرکز سیملوله نسبتاً یکنواخت است، و روی محور سیملوله در انتهای آن تقریباً به نصف مقدار مرکزی فرو می افتد. یکنواختی این میدان از میدان سیملوله شکل ۶-۱۸ کمتر است، زیرا پیچه با برهم نهی "شبهه ای" سیملوله هایی با نسبت طول-قطر از ۱ : ۴ تا ۱ : ۱ هم ارز است. در واقع، اگر پیچه را



شکل ۱۱-الف) یک پیچه که برای تولید میدان مغناطیسی شدید طراحی شده است. مقطع سیم‌پیچی که با آب خنک می‌شود نشان داده شده است. (ب) نمودار شدت میدان B_z روی محور پیچه.

این گونه تحلیل کنیم و از فرمولی (معادله ۶-۴۴) استفاده کنیم که برای میدان روی سیملوله‌ای با یک لایه سیم‌پیچ به دست آوریم، به دست آوردن دقیق میدان محوری مشکل نیست. نمودار شدت میدان بر روی محور، با در نظر گرفتن میدان مرکزی برابر با 3° کیلوگاوس، در شکل ۱۱-الف نشان داده شده است. شدت درست در انتهای پیچه برابر است با 18000° گاوس، و در آن حوالی میدان با شیب تقریبی 1700° گاوس بر سانتی‌متر تغییر می‌کند.

بگذارید مواد مختلفی را در این میدان بگذاریم و ببینیم آیا نیرویی بر آنها وارد می‌شود. به طور کلی، نیرویی را آشکار می‌سازیم. این نیرو هنگامی که جریان در پیچه قطع شود از میان می‌رود. به زودی متوجه خواهیم شد که شدت این نیرو، وقتی بیشینه است که نمونه ما در نزدیکی انتهای پیچه که dB_z/dz بزرگ است قرار گرفته باشد، و نه در مرکز پیچه که شدت میدان مغناطیسی B_z از همه جا بیشتر است. از این پس بگذارید هر نمونه را درست در انتهای بالایی پیچه قرار دهیم. شکل ۱۱-ب) یک چنین نمونه‌ای را نشان می‌دهد، که در یک لوله آزمایش قرار دارد و به یک فنر



شکل ۱۱-۲ ترتیبی برای اندازه‌گیری نیروی وارد بر یک ماده در میدان مغناطیسی.

آویزان است که می‌توان آن را طوری مدرج کرد که نیروی اضافی حاصل از میدان مغناطیسی را نشان دهد. بدیهی است که باید یک آزمایش "پوچ" را با لولهٔ آزمایش و فنر به تنهایی انجام دهیم تا نیروی مغناطیسی وارد بر چیزهایی غیر از نمونه را به دست آوریم.

در چنین آزمایشی درمی‌یابیم که نیروی وارد بر یک مادهٔ به‌خصوص، مثلاً آلومینیم فلزی، تا وقتی که نمونه بسیار بزرگ نباشد، با جرم نمونه متناسب است و به شکل آن بستگی ندارد. (آزمایشهای انجام شده با نمونهٔ کوچک در این پیچه نشان می‌دهد که نیرو در ناحیه‌ای به طول چند سانتی‌متر در انتهای پیچه عملاً ثابت می‌ماند؛ اگر از نمونه‌هایی با حجمی نه بیش از ۱ تا ۲ سانتی‌متر مکعب استفاده شود، می‌توان آنها را کاملاً در این ناحیه نگه داشت.) می‌توانیم نتیجه‌های کمی، برای مادهٔ معین، را برحسب اینکه چند دین نیرو برگرم نمونه، در شرایط $B_z = 18000 \text{ G}$ و $dB_z/dz = 1700 \text{ G/cm}$ وارد می‌شود بیان کنیم.

اما ابتدا به نتایج کیفی می‌پردازیم، که اندکی سر درگم‌کننده‌اند، برای تعداد زیادی مواد خالص کاملاً معمولی، نیروی مشاهده شده گرچه به آسانی قابل اندازه‌گیری است، اما به‌رغم کوشش فراوان برای تولید یک میدان مغناطیسی قوی، به‌صورت مضحکی کوچک هستند. این نیرو نوعاً در حدود ۱۰ تا ۲۰ دین برگرم است، که بیش از چند درصد وزن نمونه نیست. برای بعضی نمونه‌ها نیرو رو

به بالا، و برای نمونه‌های دیگر به طرف پایین است. این جهت ربطی به جهت میدان مغناطیسی، که می‌توان آن را با معکوس کردن جهت جریان در پیچه تعیین کرد، ندارد. در عوض، به نظر می‌رسد بعضی مواد همواره، بدون توجه به جهت میدان، در جهت شدت میدان افزایشده، و بعضی دیگر در جهت شدت میدان کاهشده کشیده می‌شوند.

در واقع متوجه می‌شویم که بعضی مواد با نیروی بسیار بزرگتری جذب پیچه می‌شوند. به‌عنوان مثال، بلورهای مس کلرید با نیروی 28° دین بر گرم نمونه به طرف پایین کشیده می‌شوند. در این آزمایش اکسیژن مایع رفتاری تماشایی دارد؛ این ماده با نیرویی تقریباً ۸ برابر وزنش به داخل پیچه کشیده می‌شود. در واقع، اگر بخواهیم فلاسک بدون درپوشی از اکسیژن مایع را از انتهای پایینی پیچه بالا بیاوریم، مایع در داخل فلاسک بالا می‌آید و از آن خارج می‌شود. (فکر می‌کنید که سرانجام چه می‌شود؟) از طرف دیگر، نیتروژن مایع، هیچ‌گونه هیجانی تولید نمی‌کند؛ یک گرم نیتروژن مایع با نیروی ضعیف 1° دین از پیچه دور می‌شود. در جدول ۱-۱۱ فهرست نتایجی داده شده است که در چنین آزمایشی به‌دست می‌آید. مواد، از جمله آنهایی که قبلاً ذکر کردیم، چنان انتخاب شده‌اند که، با نمونه‌گیری پراکنده‌ای که انجام داده‌ایم، رفتار مغناطیسی گسترده‌ای را که در مواد معمولی مشاهده می‌کنیم نشان دهند.

چنانکه می‌دانید، چند ماده که معروفترین آنها فلز آهن است، بسیار "مغناطیسی‌تر" از هر ماده دیگر هستند. در جدول ۱-۱۱ نیروی وارد بر قطعه ۱ گرمی آهن داده شده است که در همان محل نمونه‌های دیگر در میدان مغناطیسی قرار داده شده است. نیرو تقریباً یک پوند است! (البته آنقدر ساده‌لوح نیستیم که آهن‌ها را به چند گرم آهن که در یک لوله آزمایش به فتر ظریفی آویزان است نزدیک کنیم — باید از آویز متفاوتی استفاده کنیم.) توجه کنید که نیروی وارد بر یک گرم آهن و نیروی وارد بر یک گرم مس با ضریب بیش از 10^5 تغییر می‌کنند، در غیر این صورت این فلزات تفاوت چندانی ندارند. ضمناً این نشان می‌دهد که اندازه‌گیرهای مغناطیسی قابل اعتماد در موادی مانند مس ممکن است راحت نباشد. آلودگی چند قسمت در میلیون با ذرات آهن فلزی نتیجه را به کلی مخدوش می‌کند.

یک تفاوت کلی دیگر بین رفتار آهن و مگنتیت و سایر مواد جدول وجود دارد. فرض کنید یک آزمایش ساده، با تغییر شدت میدان آهن‌ها، انجام دهیم تا اطمینان یابیم که نیروی وارد بر نمونه متناسب با میدان است. به‌عنوان مثال، می‌توانیم جریان را نصف کنیم. که بر اثر آن شدت میدان B_z و شیب آن dB_z/dz هر دو نصف می‌شوند. در این صورت، درمی‌یابیم که برای هر ماده بالاتر از آهن در جدول، نیرو یک چهارم مقدار قبلی آن می‌شود، در صورتی‌که نیروی وارد بر نمونه آهن، و مگنتیت، فقط به نصف یا اندکی کمتر تقلیل می‌یابد. ظاهراً، نیرو لااقل در این شرایط، برای Fe و Fe_2O_4 تقریباً با شدت میدان، و برای سایر مواد فهرست شده با مربع شدت میدان متناسب است.

جدول ۱۱-۱ نیروی وارد بر نمونه ۱ گرمی در نزدیکی لبه بالایی پیچه که در آن $B_z = 18000 \text{ G}$ و $dB_z/dz = 1700 \text{ G/cm}$ است.

ماده	فرمول	نیرو، دین ^۱
دیامغناطیسی		
آب	H ₂ O	-۲۲
مس	Cu	-۲٫۶
سدیم کلرید	NaCl	-۱۵
گوگرد	S	-۱۶
الماس	C	-۱۶
گرافیت	C	-۱۱۰
نیتروژن مایع	N ₂	۱۰ - (۷۸ K)
پارامغناطیسی		
سدیم	Na	۲۰
آلومینیم	Al	۱۷
مس کلرید	CuCl ₂	۲۸۰
نیکل سولفات	NiSO ₄	۸۳۰
اکسیژن مایع	O ₂	۷۵۰۰ (۹۰ K)
فرومغناطیسی		
آهن	Fe	۴۰۰۰۰۰
مگنتیت	Fe ₃ O ₄	۱۲۰۰۰۰

۱. جهت نیرو به طرف پایین (به داخل پیچه) +؛ به طرف بالا - . همه اندازه‌گیریها، بجز در مواردی که ذکر شده، در دمای ۲۰°C انجام گرفته است.

به نظر می‌رسد که در اینجا با چند پدیدهٔ مختلف و پیچیده سروکار داریم. به عنوان گامی کوچک در جهت درک مطلب، می‌توانیم طبقه‌بندیهایی را وارد کنیم.

اولاً، موادی را که آهنربای ما به‌طور خفیف دفع می‌کند، مانند آب، سدیم، کلرید، کوارتز، و غیره، دیامغناطیسی می‌خوانند. اغلب ترکیبهای معدنی و عملاً تمام ترکیبهای آلی دیامغناطیسی هستند. در واقع، ثابت شده است که دیامغناطیسی یک ویژگی هر اتم و مولکول است. وقتی رفتار عکس آن مشاهده می‌شود، بدین سبب است که اثری متفاوت و قویتر بر دیامغناطیسی غلبه می‌کند، اثری که به جاذبه می‌انجامد.

موادی را که به طرف میدان قویتر جذب می‌شوند پارامغناطیسی می‌نامند. در بعضی موارد، به ویژه در فلزاتی مانند Al ، Na ، و بسیاری دیگر، پارامغناطیسی از دیامغناطیسی عادی چندان قویتر نیست. مواد دیگر مانند $NiSO_4$ و $CuCl_2$ در فهرست ما، اثر پارامغناطیسی بسیار شدیدتر است، این خاصیت با کم شدن دما افزایش می‌یابد که در دماهای نزدیک صفر مطلق به اثرهای کاملاً بزرگ می‌انجامد. افزایش پارامغناطیسی با کم شدن دما تا اندازه‌ای مسئول نیروی بزرگی است که برای اکسیژن مایع ثبت شده است. اگر فکر می‌کنید توجیه اینها راحت است، توجه کنید که مس دیامغناطیسی و مس کلرید پارامغناطیسی است، اما سدیم پارامغناطیسی است در حالی که سدیم کلرید دیامغناطیسی است.

سرانجام، موادی که رفتاری چون آهن و مگنتیت دارند را فرومغناطیسی می‌نامند. علاوه بر فلزات عادی این گروه، آهن، کبالت، و نیکل تعدادی آلیاژ و ترکیبهای بلورین فرومغناطیسی شناخته شده‌اند. در واقع، تحقیقات جاری در فرومغناطیسی این فهرست را پیوسته طولیتر می‌کند.

در این فصل به دو کار می‌پردازیم. یکی توسعه روشی برای بررسی پدیده‌های بزرگ مقیاس از جمله ماده مغناطیده، که در آن خود ماده با چند پارامتر و رابطه‌های تجربی بین آنها مشخص می‌شود. این کار مانند بررسی دی‌الکتربکها بر مبنای رابطه‌های مشاهده شده بین میدان الکتریکی و قطبش کپه‌ای است. گاهی این نظریه را پدیده شناختی می‌نامیم؛ این بیشتر یک توصیف است تا توجیه. کار بعدی ما کوشش در جهت درک، لااقل به طور کلی، منشأ اتمی اثرهای مغناطیسی مختلف است. اثرهای مغناطیسی، حتی بیش از پدیده‌های دی‌الکتربکی اگر فهمیده شوند، می‌توانند بعضی از جنبه‌های بنیادی ساختار اتمی را نمایان سازند.

یک واقعیت کلی در جدول بارز است. انرژی دخیل در دیامغناطیسی و پارامغناطیسی، در مقیاس انرژیهای مولکولی، بسیار کم است. مثال حدی اکسیژن مایع را در نظر بگیرید. برای دور کردن ۱ گرم اکسیژن مایع از آهنربا انرژی که باید مصرف شود، برحسب ارگ، برابر است با 7500 دین ضربدر چند سانتی متر (چون شدت میدان در فاصله چند سانتی متری به طور قابل ملاحظه‌ای کم می‌شود). مرتبه بزرگی آن چیزی در حدود 10^5 ارگ می‌شود. یعنی کمتر از 10^{-17} ارگ بر مولکول، که تعداد آنها 2×10^{22} در ۱ گرم مایع است. برای تبخیر ۱ گرم اکسیژن مایع 50 کالری، یا در حدود 10^{-13} ارگ بر مولکول لازم است. (بیشتر انرژی صرف جدا کردن مولکولها از یکدیگر می‌شود.) آنچه در نتیجه میدان مغناطیسی در سطح مولکولی در اکسیژن مایع روی دهد، از لحاظ انرژی مسئله‌ای بی‌اهمیت است.

حتی یک میدان مغناطیسی قوی از لحاظ انرژی تأثیر چندان در واکنشهای شیمیایی، از جمله بیوشیمیایی ندارد. شما می‌توانید دست و بازوی خود را در سیمولوه 30 کیلوگاوسی بگذارید بدون اینکه احساس یا پیامد خاصی را به وجود آورد. پیشگویی پارامغناطیسی یا دیامغناطیسی بودن بازوی شما مشکل است، اما به هر حال، نیروی وارد بر آن چیزی بیش از کسری از یک

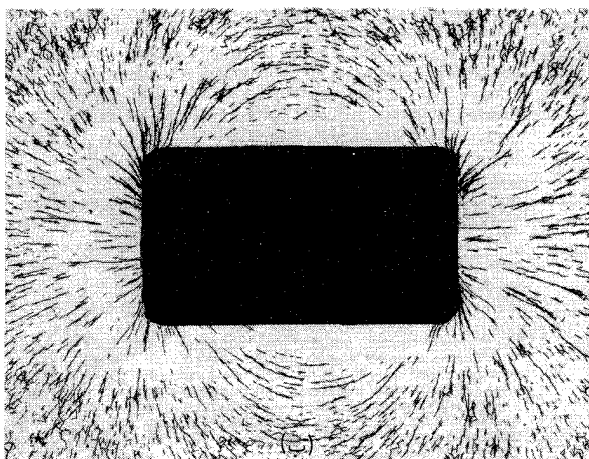
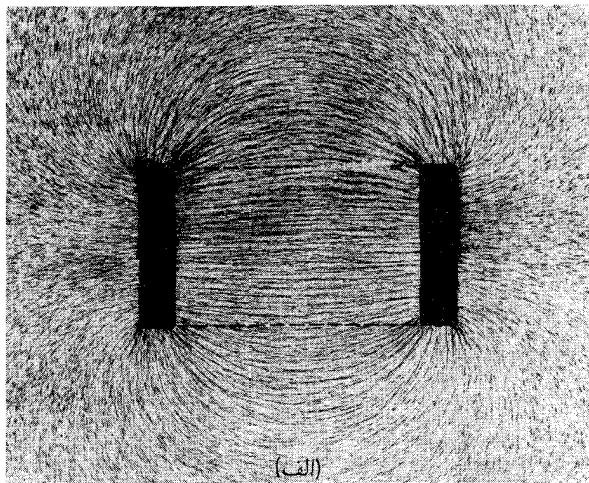
اونس نیست. همین‌طور، حضور دست شخص در حوالی نمونه شکل ۱۱-۲ بیش از چند قسمت در میلیون میدان را مختل نمی‌کند و نیروی وارد بر نمونه را تغییر نمی‌دهد. در تصویرگیری از تمام بدن با تشدید مغناطیسی هسته، میدانی مغناطیسی با شدتی تا چند کیلوگاوس سراسر بدن را فرا می‌گیرد بدون اینکه هیچ اثر فیزیولوژیکی داشته باشد. به نظر می‌رسد که تنها خطر ناشی از میدانهای مغناطیسی بزرگ مقیاس، قوی، و پایا آن است که میدان مغناطیسی حاشیه‌ای اشیای آهنی لث را گرفته و به داخل آهنربا پرتاب می‌کنند.

نقش میدان مغناطیسی در برهم‌کنش با ماده با نقش میدان الکتریکی تفاوتی بارز دارد. علت آن ساده و بنیادی است. اتمها و مولکولها از ذراتی با بار الکتریکی ساخته شده‌اند که با سرعتهایی حرکت می‌کنند که در مقایسه با سرعت نور کوچک است. میدان مغناطیسی هیچگونه نیرویی بر بار الکتریکی ساکن وارد نمی‌کند؛ نیروی وارد بر بار متحرک با v/c متناسب است. نیروهای الکتریکی در صحنه اتمی نقش غالب را دارند. همان‌طور که قبلاً گفتیم، به نظر می‌رسد که مغناطیس، لااقل در جهان ما، یک اثر نسبیتی باشد. اگر ماده از ذراتی با بار مغناطیسی ساخته شده بود، داستان کاملاً متفاوت می‌شد. اکنون باید بگوییم که منظور از بار مغناطیسی چیست و نبود آشکار آن چه اهمیتی دارد.

۱۱-۲ نبود "بار" مغناطیسی

میدان مغناطیسی در خارج از یک میله قطبیده مانند عقربه قطب‌نما به میدان الکتریکی در خارج از میله‌ای که به صورت الکتریکی قطبیده است، یعنی میله‌ای که دارای بار مثبت اضافی در یک سر و بار منفی اضافی در سر دیگر است، شباهت کامل دارد (شکل ۱۱-۳). می‌توان تصور کرد که چشمه‌های میدان مغناطیسی با آن همان ارتباطی را دارند که بار الکتریکی با میدان الکتریکی دارد. بنابراین، قطب شمال عقربه قطب‌نما محل اضافه بار مغناطیسی از یک نوع، و قطب جنوب محل اضافه بار مغناطیسی از نوع مخالف آن است. می‌توان "بار شمال" را مثبت و "بار جنوب" را منفی نامید، جهت میدان مغناطیسی از مثبت به منفی است، قاعده‌ای مانند آن برای میدان الکتریکی و بار الکتریکی پذیرفته شده است. از نظر تاریخی، این قاعده‌ای را نشان می‌دهد که جهت مثبت میدان مغناطیسی را تعیین کرده است.^۱ آنچه ما بار مغناطیسی نامیدیم معمولاً شدت قطب مغناطیسی خوانده می‌شود.

۱. به خاطر داشته باشید که در فصل ۶ جهت مثبت B را با ارجاع به جهت (جهت حرکت بار مثبت) و قاعده دست راست تعیین کردیم اکنون قطب شمال به معنای "قطب شمال جوی" عقربه مغناطیسی است. ما هیچ دلیلی نداریم که چرا قطبیت مغناطیسی زمین باید در یک جهت به خصوص باشد. انتخاب الکتریسته "مثبت" فرانکلین ربطی به این موضوع ندارد بنابراین این واقعیت که برای سازگاری باید به جای قاعده دست چپ از قاعده دست راست استفاده کرد، تصادف محض است.



شکل ۱۱-۳ (الف) میدان الکتریکی دو قرص یا بار مخالف (مقطع الکترودها به صورت میله‌های سیاه صلب نشان داده شده‌اند) همان میدان الکتریکی میله قطبیده است. یعنی اگر فرض کنید که این میله ناحیه داخلی مرز خط چین را اشغال کرده است، میدان خارجی به صورت رسم شده در شکل است. میدان الکتریکی به کمک رشته‌های سیاه کوچک شناور در روغن که در امتداد خطهای میدان قرار گرفته‌اند، مرئی شده است. این روش زیبایی نمایش پیکربندی میدان الکتریکی کار هارولد. م. واگه، در آزمایشگاه فیزیک پالمردانشگاه پرینستون است که تصویر اصلی این شکل را نیز تهیه کرده است. (ب) میدان مغناطیسی اطراف یک استوانه مغناطیده با سمگیری قطعه‌های کوچک سیم نیکلی شناور در گلیسرین نشان داده شده است. (کوشش در جهت بهبود نمایش سنتی با براده آهن با پذیرش روش واگه چندان موفق نبوده است. سیمهای نیکل به رشته‌های طولی می‌پیوندند که به طرف آهن‌با کشیده می‌شود.) نمودارهای نظری میدان در دو سیستم در شکل ۱۱-۲ نشان داده شده است.

این فکر در تمام موارد بکر است و موجه تر هم می شود اگر به خاطر آوریم که معادله های بنیادی میدان الکترومغناطیسی بر حسب \mathbf{E} و \mathbf{B} کاملاً متقارن اند. پس چرا نباید انتظار داشته باشیم که چشمه های میدان را متقارن بباییم؟ اگر بار مغناطیسی را چشمه ممکن میدان مغناطیسی ایستای \mathbf{B} در نظر بگیریم، خواهیم داشت $\text{div } \mathbf{B} = 4\pi\eta$ که در آن η با همانندی کامل با چگالی بار الکتریکی ρ ، چگالی بار مغناطیسی است. دو بار مغناطیسی مثبت (یا قطبهای شمال) به شدت واحد، که در فاصله ۱ سانتی متری از هم قرار دارند، یکدیگر را با نیروی ۱ دین می رانند و غیره.

مشکل اینجاست که اوضاع بدین قرار نیست. طبیعت به دلایلی از این موقعیت استفاده نکرده است. جهان اطراف ما از این نظر کاملاً نامتقارن است زیرا ما هیچ گونه بار مغناطیسی نمی یابیم. کسی تاکنون بار مغناطیسی منزوی اضافی از یک نوع — مثلاً یک قطب شمال منزوی — را مشاهده نکرده است. اگر یک چنین تک قطبی مغناطیسی وجود می داشت، می توانستیم به راههای مختلف آن را تشخیص دهیم. اگر این تک قطبی در میدان مغناطیسی یکنواخت قرار بگیرد، بر خلاف دو قطبی مغناطیسی، بر آن نیرویی وارد می شود. بنابراین، اگر یک ذره بنیادی حامل بار مغناطیسی در میدان مغناطیسی ایستا، به طور مداوم شتاب بگیرد مانند یک الکترون یا پروتون که در میدان الکتریکی به طور مداوم شتاب می گیرد. با رسیدن به انرژیهای زیاد، می توان آن را در برهم کنش با ماده آشکار کرد. یک تک قطبی مغناطیسی متحرک یک جریان مغناطیسی است؛ این جریان را باید یک میدان الکتریکی احاطه کند، همان طور که یک میدان مغناطیسی یک جریان الکتریکی را فرا می گیرد. با شگردهای مبتنی بر این ویژگیهای یکتا، فیزیکدانان در آزمایشهای بسیاری به جستجوی تک قطبی مغناطیسی پرداخته اند. با پیشرفتهای اخیر در نظریه ذرات بنیادی که وجود لا اقل چند تک قطبی مغناطیسی از بقایای ”مهبانگ“ را که آغاز احتمالی جهان است مطرح می کند، این جستجو از سر گرفته شده است. اما تاکنون حتی یک تک قطبی هم آشکار نشده است، و اکنون معلوم شده است که این تک قطبها حتی در صورتی که وجود هم داشته باشند بسیار نادرند. البته، اثبات وجود حتی یک ذره با بار مغناطیسی پیامدهای عمیقی خواهد داشت، اما این واقعیت را تغییر نمی دهد که در ماده ای که می شناسیم تنها چشمه های میدان مغناطیسی جریانهای الکتریکی هستند. تا آنجا که می دانیم

$$\boxed{\text{div } \mathbf{B} = 0} \quad (\text{در همه جا}) \quad (۱)$$

این ما را به فرض آمپر باز می گرداند، به نظر او وجود مغناطیس در ماده به واسطه تعداد زیادی حلقه های ظریف جریان الکتریکی است که در ماده توزیع شده اند. ما کار خود را با مطالعه میدان مغناطیسی حاصل از یک حلقه جریان در نقطه های نسبتاً دور از حلقه آغاز خواهیم کرد.

۱۱-۳ میدان یک حلقه جریان

یک حلقه بسته رساننده، که الزاماً دایره‌ای نیست، مانند شکل ۱۱-۴ الف در صفحه x حول مبدأ قرار دارد. یک جریان پایای I ، برحسب esu/s در این حلقه وجود دارد. ما به میدان مغناطیسی حاصل از این جریان — نه در نزدیکی حلقه، بلکه در نقطه‌های دور از آن مانند P_1 در شکل علاقه‌مندیم. فرض خواهیم کرد که r_1 ، فاصله تا P_1 از ابعاد حلقه بسیار بزرگتر است برای ساده کردن نمودار P_1 را در صفحه yz گذاشته‌ایم، ثابت خواهد شد که این قیدی را به وجود نمی‌آورد. این محل مناسبی برای استفاده از پتانسیل برداری است. ابتدا پتانسیل برداری \mathbf{A} را در محل P_1 ، یعنی $\mathbf{A}(0, y_1, z_1)$ محاسبه خواهیم کرد. با توجه به آن روشن است که پتانسیل برداری در هر نقطه دیگر (x, y, z) دور از حلقه چیست. سپس با گرفتن تاو \mathbf{A} میدان مغناطیسی \mathbf{B} را به دست می‌آوریم:

برای جریان محدود به سیم، مانند معادله ۳۵ فصل ۶ داریم:

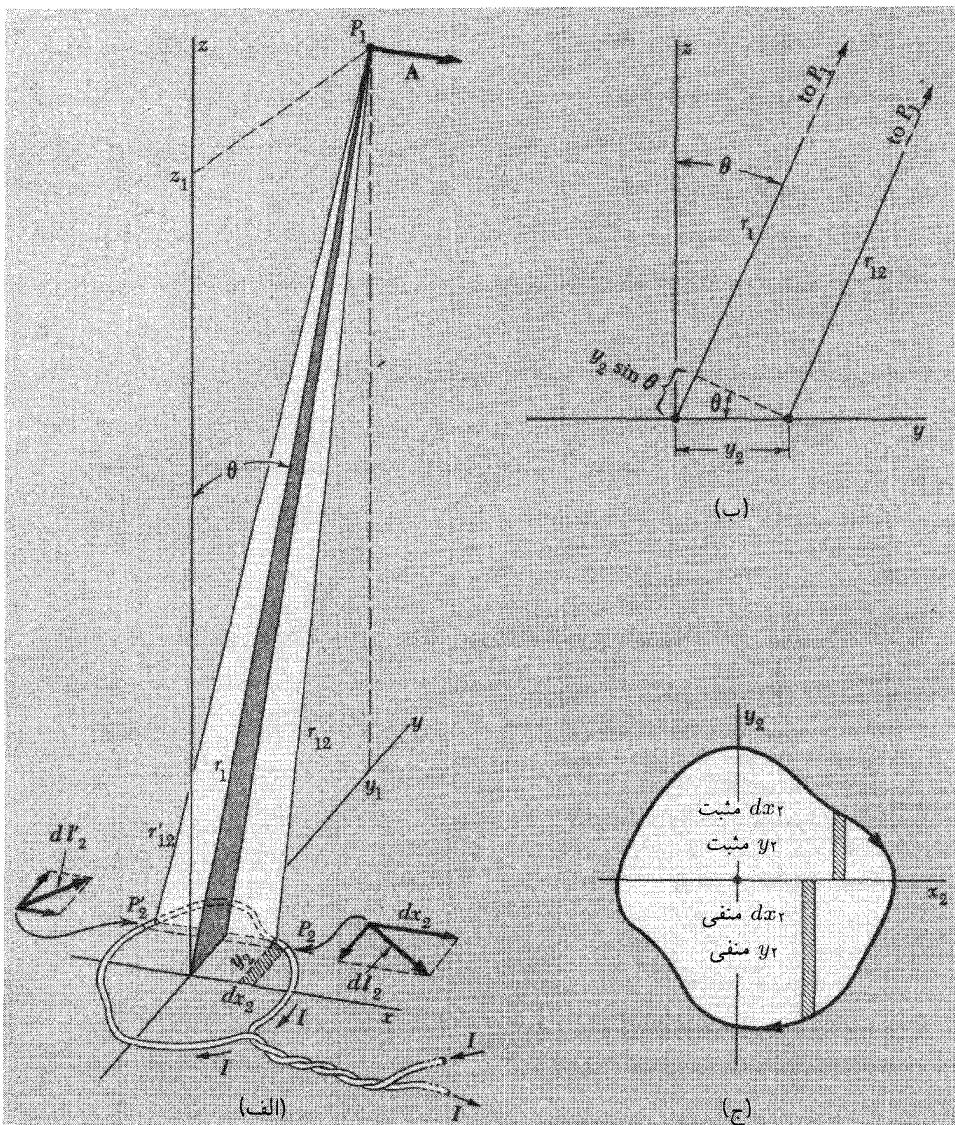
$$\mathbf{A}(0, y_1, z_1) = \frac{I}{c} \int_{\text{حلقه}} \frac{dl_2}{r_{12}} \quad (2)$$

در آن هنگام فقط سهم قطعه کوچکی از مدار مورد نظر ما بود: اکنون باید حول تمام حلقه انتگرال بگیریم. تغییرات r_{12} مخرج را حول حلقه در نظر بگیرد. اگر P_1 دور باشد، تغییرات مرتبه اول در r_{12} فقط به مختصه y_2 قطعه dl_2 بستگی دارد، نه به x_2 . این باید در منظره جانبی شکل ۱۱-۴ ب روشن باشد. بنابراین، با نادیده گرفتن کمیتهای متناسب با $(x_2/r_{12})^2$ ، می‌توان r'_{12} را که در منظره جانبی روی هم قرار گرفته‌اند مساوی در نظر گرفت. و به طور کلی، تا نسبت مرتبه اول (فاصله تا P_1 / ابعاد حلقه)، داریم

$$r_{12} \approx r_1 - y_2 \sin \theta \quad (3)$$

اکنون به دو جزء مسیر dl_2 و dl_2 بنگرید که در شکل ۱۱-۴ الف نشان داده شده است. برای آنها dy_2 برابر و با علامت مخالف‌اند، و همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، r_{12} ‌ها تا مرتبه اول برابرند. بنابراین، تا این مرتبه سهم آنها در انتگرال خطی خنثی می‌شود، و این برای تمام حلقه صادق است. بنابراین \mathbf{A} در P_1 مؤلفه y نخواهد داشت. بدیهی است که مؤلفه z هم نخواهد داشت، زیرا خود مسیر جریان در هیچ‌جا مؤلفه z ندارد. مؤلفه x پتانسیل برداری ناشی از بخش dx انتگرال خطی است. پس

$$\mathbf{A}(0, y_1, z_1) = \hat{\mathbf{x}} \frac{I}{c} \int \frac{dx_2}{r_{12}} \quad (4)$$



شکل ۴-۱۱ (الف) محاسبه پتانسیل برداری A در نقطه‌ای دور از حلقه جریان. (ب) منظره جانبی با نگرستن در امتداد محور x ، نشان می‌دهد که اگر $y_2 \gg r_1$ ، $r_{12} \approx r_1 - y_2 \sin \theta$. (ج) منظره بالایی، برای نشان دادن اینکه $\int_{\text{حلقه}} y_2 dx_2$ مساحت حلقه است.

بدون از دست رفتن تقریب مرتبه اول، می‌توان معادله ۳ را به صورت زیر درآورد

$$\frac{1}{r_{12}} \approx \frac{1}{r_1} \left(1 + \frac{y_2 \sin \theta}{r_1} \right) \quad (5)$$

و با استفاده از آن برای انتگرالده داریم

$$\mathbf{A}(\theta, y_1, z_1) = \hat{\mathbf{x}} \frac{I}{cr_1} \int \left(1 + \frac{y_2 \sin \theta}{r_1} \right) dx_2 \quad (6)$$

در انتگرال‌گیری r_1 و θ ثابت هستند. بدیهی است که $\int dx_2$ حول حلقه صفر می‌شود. حال $\int y_2 dx_2$ حول حلقه، بدون توجه به شکل آن، درست برابر است با مساحت حلقه (شکل ۱۱-۴ ج). پس سرانجام خواهیم داشت

$$\mathbf{A}(\theta, y_1, z_1) = \hat{\mathbf{x}} \frac{I \sin \theta}{cr_1^2} \times (\text{مساحت حلقه}) \quad (7)$$

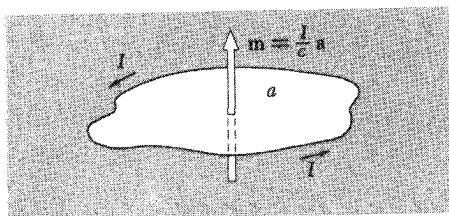
در اینجا نکته ساده و حساسی وجود دارد: چون شکل حلقه مطرح نیست، مقید کردن P_1 به صفحه yz تفاوت بارزی به وجود نمی‌آورد. در نتیجه اگر معادله ۷ را به صورت عام بیان کنیم باید در آن نتیجه‌ای را داشته باشیم که می‌جوئیم: پتانسیل برداری یک حلقه جریان به هر شکل، در فاصله r ، که از ابعاد حلقه بسیار بزرگتر است، برداری است عمود بر صفحه‌ای که از \mathbf{r} و عمود بر صفحه حلقه تشکیل شده است، و بزرگی آن برابر است با

$$A = \frac{Ia \sin \theta}{cr^2} \quad (8)$$

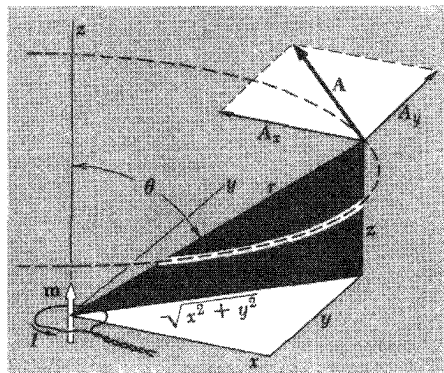
که a مساحت حلقه است.

این پتانسیل برداری حول محور حلقه متقارن است، که متقارن بودن \mathbf{B} را ایجاب می‌کند. توضیح این مطلب آن است که ما ناحیه‌هایی را در نظر می‌گیریم که به قدری از حلقه دور هستند که جزئیات شکل حلقه تأثیر چندانی ندارد. تمام حلقه‌ها که برای آنها حاصلضرب جریان \times مساحت یکسان است میدان دور یکسانی تولید می‌کنند. ما حاصلضرب Ia/c را گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه جریان می‌نامیم، و آن را با \mathbf{m} نشان می‌دهیم. بدیهی است که گشتاور دوقطبی یک بردار است، که جهت آن بر حلقه عمود است، همین‌طور بردار \mathbf{a} که مساحت جهت‌دار مسیری است که حلقه را احاطه کرده است.

$$\mathbf{m} = \frac{I}{c} \mathbf{a} \quad (9)$$



شکل ۵-۱۱ بنا به تعریف، بردار گشتاور مغناطیسی طبق قاعدهٔ پیچ راست‌گرد که در اینجا نشان داده شده است با جریان ارتباط دارد.



شکل ۶-۱۱ یک دوقطبی مغناطیسی که در مبدأ قرار دارد. در هر نقطهٔ دور از حلقه، A برداری موازی با صفحهٔ xy است که بر دایره‌ای حول محور z مماس است.

برای علامت، بگذارید بپذیریم که جهت m و جهت شارش جریان مثبت در حلقه طبق قاعدهٔ پیچ راست‌گرد که در شکل ۵-۱۱ نشان داده شده است به هم مربوط می‌شوند. (گشتاور دوقطبی حلقه در شکل ۱۱-۴ الف، طبق این قاعده به طرف پایین است.) پتانسیل برداری برای میدان دوقطبی مغناطیسی m را می‌توان به صورت منظم با بردار نوشت:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (10)$$

که در آن برداری که در جهت از حلقه به نقطه‌ای است که \mathbf{A} برای آن محاسبه می‌شود. می‌توانید کنترل کنید که این با قرارداد علامت ما سازگار است. توجه کنید که جهت \mathbf{A} باید همواره جهت جریان در نزدیکترین بخش حلقه باشد.

شکل ۶-۱۱ یک دوقطبی مغناطیسی را نشان می‌دهد که در مبدأ قرار گرفته است، و بردار گشتاور دوقطبی m در جهت مثبت z است. برای بیان پتانسیل برداری در هر نقطهٔ (x, y, z) ، می‌دانیم که $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ و $\sin \theta = \sqrt{x^2 + y^2}/r$. اندازهٔ A پتانسیل برداری در آن نقطه برابر است با

$$A = \frac{m \sin \theta}{r^2} = \frac{m \sqrt{x^2 + y^2}}{r^3} \quad (11)$$

از آنجا که \mathbf{A} بر دایره افقی حول محور z مماس است، مؤلفه‌های آن برابرند با

$$\begin{aligned} A_x &= A \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{-my}{r^2} \\ A_y &= A \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{mx}{r^2} \\ A_z &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

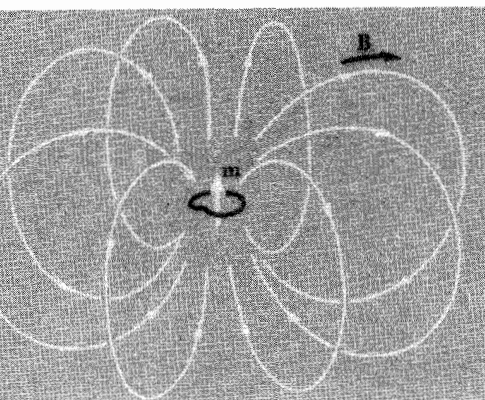
اجازه بدهید \mathbf{B} را برای نقطه‌ای در صفحه xz برآورد کنیم، با یافتن مؤلفه‌های \mathbf{A} و سپس (نه قبل از آن!) قرار دادن $y = 0$ داریم

$$\begin{aligned} B_x &= (\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{mx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{3mxz}{r^5} \\ B_y &= (\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{-my}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{3myz}{r^5} \\ B_z &= (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ &= m \left[\frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right] = \frac{m(3z^2 - r^2)}{r^5} \end{aligned} \quad (13)$$

در صفحه xz ، $y = 0$ ، $\sin \theta = x/r$ ، و $\cos \theta = z/r$. مؤلفه‌های در هر نقطه آن صفحه با رابطه‌های زیر داده شده‌اند:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{3m \sin \theta \cos \theta}{r^2} \\ B_y &= 0 \\ B_z &= \frac{m(3 \cos^2 \theta - 1)}{r^2} \end{aligned} \quad (14)$$

اکنون به بخش ۱۰-۳ برمی‌گردیم، که در آنجا در معادله ۱۰-۱۴ مؤلفه‌های میدان \mathbf{E} یک دوقطبی الکتریکی \mathbf{p} را در صفحه xz بیان کردیم، که درست مانند دوقطبی مغناطیسی \mathbf{m} قرار

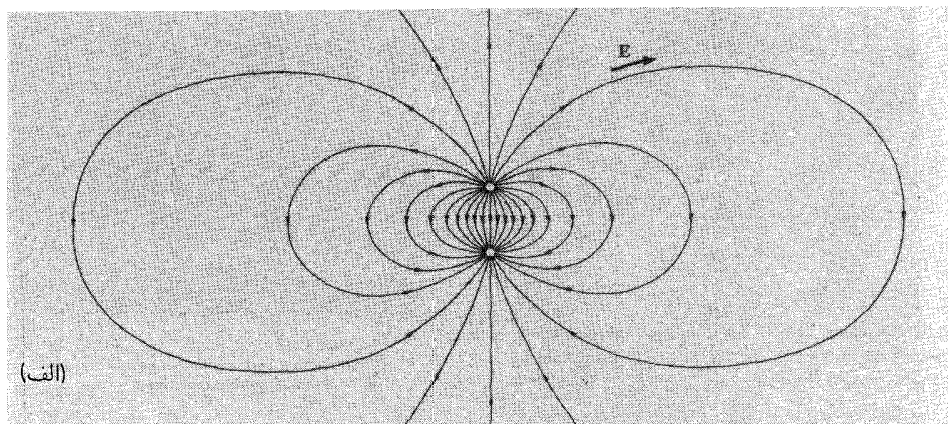


شکل ۷-۱۱ بعضی از خطهای میدان مغناطیسی در میدان یک دوقطبی مغناطیسی، یعنی یک حلقه کوچک جریان.

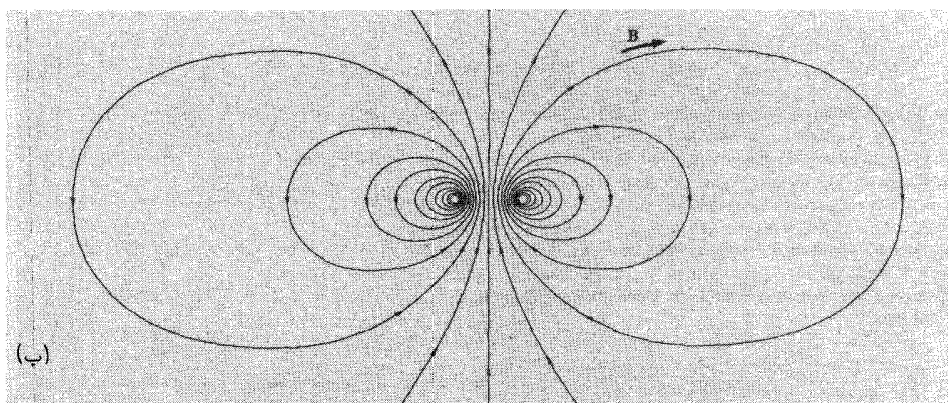
گرفته بود. بیانها مشابه‌اند. بنابراین دریافتیم که میدان مغناطیسی یک حلقه کوچک جریان در نقطه‌های دور همان شکلی را دارد که میدان دو بار مجزا. می‌دانیم که میدان، یعنی میدان دوقطبی الکتریکی، چگونه است. شکل ۷-۱۱ کوششی است در جهت نشان دادن شکل سه‌بعدی میدان مغناطیسی B ناشی از حلقه جریان با گشتاور دوقطبی m . مانند مورد دوقطبی الکتریکی، میدان در مختصات قطبی کروی به صورت ساده‌تری بیان می‌شود:

$$B_r = \frac{2m}{r^3} \cos \theta \quad B_\theta = \frac{m}{r^3} \sin \theta \quad B_\varphi = 0 \quad (15)$$

میدان مغناطیسی نزدیک به حلقه جریان با میدان الکتریکی نزدیک به یک زوج بار مثبت و منفی، که در مقایسه با شکل ۸-۱۱ نشان می‌دهد، تفاوتی بارز دارد. توجه کنید که میدان الکتریکی بین بارها به طرف پایین است، در حالی که در داخل حلقه جریان میدان مغناطیسی به طرف بالاست. اگرچه میدانهای دور همانندند، که بازتاب این واقعیت است که میدان مغناطیسی در همه جا، حتی در داخل چشمه، در رابطه $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ صدق می‌کند. خطهای میدان مغناطیسی پایان نمی‌یابند. البته منظور ما از نزدیک و دور نسبت به اندازه حلقه جریان یا فاصله بارهاست. اگر فرض کنیم که اندازه حلقه جریان کوچک شود، جریان افزایش می‌یابد به طوری که گشتاور دوقطبی $m = Ia/c$ ثابت می‌ماند، و به گشتاور دوقطبی بینهایت کوچک نزدیک می‌شویم که همتای گشتاور دوقطبی الکتریکی است که در فصل ۱۰ توصیف شد.



(الف)

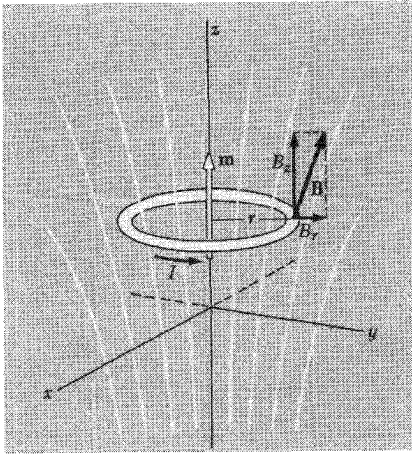


(ب)

شکل ۱۱-۸ (الف) میدان الکتریکی یک زوج بار مساوی با علامت مخالف. در دور دست میدان مانند میدان یک دوقطبی الکتریکی می‌شود. (ب) میدان مغناطیسی یک حلقه جریان. در دور دست میدان مانند میدان یک دوقطبی مغناطیسی می‌شود.

۱۱-۴ نیروی وارد بر یک دوقطبی در یک میدان خارجی

یک حلقه جریان دایره‌ای به شعاع r را در نظر بگیرید که در میدان مغناطیسی سیستم جریان دیگر چون یک سیملوله قرار گرفته است. در شکل ۱۱-۹، یک میدان B رسم شده است که به طور کلی در جهت z است. این یک میدان یکنواخت نیست. بلکه، با پیشروی در جهت z ضعیفتر می‌شود؛ این مطلب از باز شدن خطهای میدان معلوم می‌شود. بگذارید، برای راحتی فرض کنیم که میدان حول محور z متقارن است. در این صورت میدان شبیه میدان در انتهای بالایی سیملوله در شکل ۱۱-۱ است. میدانی که در شکل ۱۱-۹ نشان داده شده است شامل میدان مغناطیسی



شکل ۹-۱۱ یک حلقهٔ جریان در میدان مغناطیسی ناهمگن (میدان خود حلقه نشان داده نشده است). به واسطهٔ مؤلفهٔ شعاعی B_r ، به طور کلی نیرویی بر حلقه وارد می‌شود.

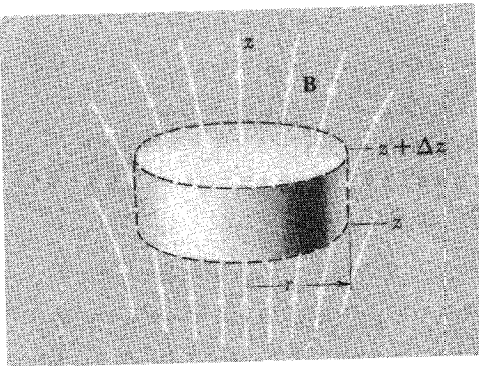
حلقهٔ جریان نیست. می‌خواهیم نیرویی را بیابیم که میدانهای دیگر، که بهتر است آنها را میدانهای خارجی بنامیم، بر حلقهٔ جریان وارد می‌کنند. بر ایند نیروی وارد بر حلقهٔ جریان به واسطهٔ میدان خودش مطمئناً صفر است، بنابراین می‌توانیم میدان خود حلقه را در این بحث نادیده بگیریم. اگر وضعیت شکل ۹-۱۱ را مطالعه کنید، به این نتیجه می‌رسید که نیروی خالصی بر حلقهٔ جریان وارد می‌شود. این نیرو به وجود می‌آید زیرا میدان خارجی \mathbf{B} همه جا در اطراف حلقه دارای مؤلفهٔ برون‌سوی B_r است. بنابراین هرگاه جریان در جهتی که نشان داده شده است وجود داشته باشد به هر جزء حلقه، dl ، باید نیرویی به بزرگی $IB_r dl/c$ به طرف پایین وارد شود. اگر بزرگی B_r در همهٔ نقطه‌های حلقه یکسان باشد، چنانکه از یک میدان با گسترش متقارن انتظار می‌رود، بزرگی نیروی کل پایین‌سو برابر است با

$$F = \frac{2\pi r IB_r}{c} \quad (۱۶)$$

اکنون می‌توان B_r را مستقیماً به گرادینان B_z مربوط کرد. چون در همهٔ نقطه‌ها $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ، شار خالص میدان مغناطیسی به خارج از هر حجم صفر است. استوانهٔ کوچکی به شعاع r و ارتفاع Δz را در نظر بگیرید (شکل ۱۱-۱۰). شار برون‌سو از سطح جانبی $2\pi r(\Delta z)B_r$ و شار خالص برون‌سو از سطحهای انتهایی برابر است با

$$\pi r^2 [-B_z(z) + B_z(z + \Delta z)]$$

که تا مرتبهٔ اول در فاصلهٔ کوتاه Δz برابر است با $\pi r^2 (\partial B_z / \partial z) \Delta z$. اگر شار کل را مساوی



شکل ۱۱-۱۰ می‌توان با استفاده از قضیه گاوس B_r و $\partial B_z / \partial z$ را به هم مربوط کرد که به معادله ۱۷ می‌انجامد.

صفر قرار دهیم: $\circ = \pi r^2 (\partial B_z / \partial z) \Delta z + 2 \pi r B_r \Delta z$

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (17)$$

برای کنترل علامت، توجه کنید که بنابر معادله ۱۷، هنگامی که B_z به طرف بالا کاهش می‌یابد، B_r مثبت است، نگاهی به شکل نشان می‌دهد که این درست است. اکنون نیروی وارد بر دوقطبی را می‌توان برحسب گرادیان مؤلفه B_z میدان خارجی بیان کرد:

$$F = \frac{2 \pi r I}{c} \frac{r}{c} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\pi r^2 I}{c} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (18)$$

عامل $\pi r^2 I / c$ اندازه m گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه جریان است. بنابراین نیروی وارد بر حلقه را می‌توان به سادگی برحسب گشتاور دوقطبی بیان کرد:

$$F = m \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (19)$$

ما آن را ثابت نکرده‌ایم، اما تعجب نخواهید کرد که بشنود برای حلقه‌های کوچک به هر شکل دیگر نیرو فقط به حاصلضرب جریان \times مساحت، یعنی گشتاور دوقطبی، بستگی دارد. شکل حلقه مهم نیست. البته، ما فقط درباره حلقه‌هایی بحث می‌کنیم که به اندازه کافی کوچک‌اند به طوری که فقط تغییرات مرتبه اول میدان خارجی در گستره حلقه قابل ملاحظه است.

حلقه شکل ۱۱-۹ دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی \mathbf{m} بالاسوست، و نیروی وارد بر آن پایین‌سوست. بدیهی است که اگر بتوانیم جریان در حلقه و در نتیجه \mathbf{m} را معکوس کنیم، جهت نیرو وارون می‌شود. این وضعیت را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

گشتاور دوقطبی موازی با میدان خارجی. نیرو در جهت شدت میدان صعودی وارد می‌شود. گشتاور دوقطبی پاد موازی با میدان خارجی: نیرو در جهت شدت میدان نزولی وارد می‌شود. میدان خارجی یکنواخت: نیروی صفر.

روشن است که این کلی‌ترین وضعیت نیست. گشتاور m می‌تواند نسبت به میدان B هر جهتی را داشته باشد، و مؤلفه‌های مختلف B می‌توانند تغییرات فضایی متفاوتی داشته باشند. به‌دست آوردن فرمولی برای نیروی F در حالت کلی مشکل نیست. این فرمول درست مانند فرمول کلی معادلهٔ ۱۰-۲۳ برای نیروی وارد بر گشتاور دوقطبی الکتریکی در یک میدان الکتریکی غیریکنواخت است. یعنی مؤلفهٔ x نیروی وارد بر هر گشتاور دوقطبی مغناطیسی m از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$F_x = m \cdot \text{grad } B_x \quad (20)$$

با فرمولهای متناظر برای F_x و F_y .

در معادله‌های ۱۹ و ۲۰ نیرو برحسب dyne، و گرادیان میدان مغناطیسی برحسب G/cm است، و گشتاور دوقطبی مغناطیسی m از معادلهٔ ۹، $m = Ia/c$ به‌دست می‌آید، که I برحسب esu/s، a برحسب cm^2 ، و c برحسب cm/s است. چند راه هم‌ارز برای بیان یکاهای m وجود دارد. ما erg/G را می‌پذیریم. چنانکه در معادلهٔ ۹ می‌بینید،

$$m = \frac{\text{dyne}}{\text{G/cm}} = \frac{\text{dyne}\cdot\text{cm}}{G} = \frac{\text{erg}}{G}$$

اکنون می‌توان دید که در آزمایشهایی که در ابتدای این فصل شرح دادیم چه می‌گذرد. ماده‌ای که در محل نمونهٔ شکل ۱۱-۲ قرار دارد به داخل سیملوله جذب می‌شود اگر حاوی گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی موازی با میدان B پیچه باشد. اگر گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی ماده در جهت خلاف یا پاد موازی با میدان باشند، نمونه از سیملوله به خارج رانده می‌شود. نیرو به شیب شدت میدان محوری بستگی دارد، و در وسط سیملوله صفر است. همین‌طور اگر شدت کل گشتاورهای دوقطبی نمونه با شدت میدان B متناسب باشد. در یک محل معین نیرو با B در $\partial B/\partial z$ ، و در نتیجه با مربع جریان سیملوله متناسب است. این رفتاری است که در مواد دیامغناطیسی و پارامغناطیسی مشاهده شده است. به نظر می‌رسد که نمونه‌های فرومغناطیسی باید گشتاورهای مغناطیسی تقریباً مستقل از شدت میدان داشته باشند، به هر حال باید آنها را برای بحث جداگانه کنار بگذاریم.

چگونه اعمال یک میدان مغناطیسی به یک ماده گشتاورهای دوقطبی‌ای تولید می‌کند که شدت کل آن با میدان اعمال شده متناسب است؟ و چرا باید این گشتاورها در بعضی مواد با میدان موازی و در مواد دیگر در جهت خلاف آن باشند؟ اگر بتوانیم به این پرسشها پاسخ دهیم، در راهی هستیم که به درک فیزیک دیامغناطیسی و پارامغناطیسی می‌انجامد.

۱۱-۵ جریانهای الکتریکی در اتمها

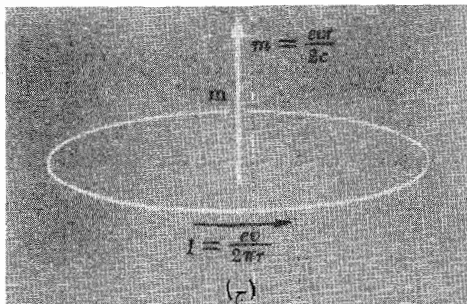
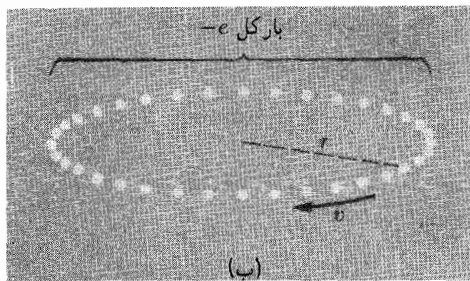
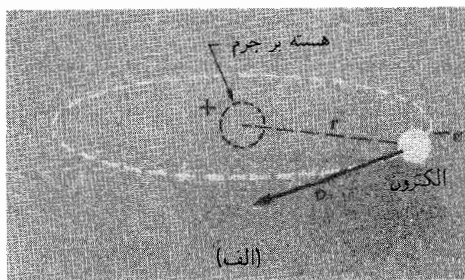
می‌دانیم که اتم از یک هسته مثبت تشکیل شده است که الکترونهای منفی آن را احاطه کرده‌اند. برای توصیف کامل آن به مفاهیم مکانیک کوانتومی نیازمندیم. خوشبختانه، یک مدل ساده که تجسم آن راحت است می‌تواند دیامغناطیسی را به خوبی توجیه کند. این مدل مانند مدل اولیه بور در نظریه کوانتومی اتم هیدروژن یک مدل سیاره‌ای است که در آن الکترونها در مدارهای دور هسته قرار دارند.

کار خود را با یک الکترون شروع می‌کنیم که با سرعت ثابت در مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. چون در اینجا نمی‌خواهیم ساختار اتمی را توجیه کنیم، به اینکه چرا الکترون در این مدار است نمی‌پردازیم. فقط می‌پرسیم که اگر الکترون در این مدار حرکت کند، باید منتظر چه اثرهای مغناطیسی باشیم؟ در شکل ۱۱-۱۱ الکترونی را می‌بینیم که به صورت یک ذره حامل بار الکتریکی متمرکز e - مجسم شده است که با سرعت v در مدار دایره به شعاع r حرکت می‌کند. در مرکز بار هسته‌ای مثبت وجود دارد، که سیستم را از نظر الکتریکی خنثی می‌سازد، اما حرکت هسته، به واسطه جرم زیادش، به قدری کند است که می‌توان اثرهای مغناطیسی آن را نادیده گرفت.

در هر لحظه، الکترون و بار مثبت به صورت یک دوقطبی الکتریکی به نظر می‌رسند، اما میانگین زمانی دوقطبی الکتریکی صفر است، و میدان الکتریکی پایایی در فاصله دور تولید نمی‌کند. ما در بخش ۱۰-۵ در این مورد بحث کردیم. میانگین زمانی میدان مغناطیسی سیستم در دور دست صفر نیست. بلکه، درست برابر است با میدان یک حلقه جریان. چون، تا آنجا که به میانگین زمانی مربوط می‌شود، تفاوتی نمی‌کند که همه بار منفی در یک جا جمع باشد و حول مسیر بچرخد یا مانند شکل ۱۱-۱۱ ب به صورت تکه‌هایی باشد که حرکت دسته جمعی یکنواخت بی‌پایانی دارند. جریان مقدار باری است که در ثانیه از یک نقطه معین حلقه می‌گذرد. چون الکترون $v/2\pi r$ دور در ثانیه می‌زند، جریان برحسب esu/s ، اگر e برحسب esu باشد برابر است با

$$I = \frac{ev}{2\pi r} \quad (21)$$

الکترون مداری معادل یک حلقه جریان با این اندازه است و جهت جریان مثبت مطابق



شکل ۱۱-۱۱ (الف) مدلی از یک اتم که در آن الکترون با سرعت v در مدار دایره‌ای حرکت می‌کند. (ب) حرکت دسته جمعی بار معادل آن و جریان الکتریکی میانگین همان است که اگر $-e$ به قطعه‌های کوچک تقسیم می‌شد و حلقه‌ای از بار تشکیل می‌داد. (ج) گشتاور مغناطیسی $1/c$ در حاصلضرب جریان و مساحت است.

شکل ۱۱-۱۱ ج برخلاف v است. بنابراین میدان دور آن، میدان یک دوقطبی مغناطیسی به قدرت زیر است

$$m = \frac{\pi r^2 I}{c} = \frac{e v r}{2c} \quad (22)$$

بگذارید به صورت گذرا به رابطه ساده بین گشتاور مغناطیسی m مربوط به مدار الکترون، و تکانه زاویه‌ای مدار کل L توجه کنیم. تکانه زاویه‌ای برداری به بزرگی $L = m_e v r$ است، که m_e جرم الکترون است^۱، و پایین‌سوست اگر الکترون در جهتی حرکت کند که در شکل ۱۱-۱۱ الف نشان داده شده است. توجه کنید که حاصلضرب $v r$ هم در m وجود دارد و هم در L . با توجه لازم به

۱. ما با سرعتهای v بسیار کوچکتر از c سروکار داریم، بنابراین m_e جرم سکون و برابر است با $9.1 \times 10^{-28} \text{g}$. انتخاب نماد m برای گشتاور مغناطیسی در این فصل، استفاده از نماد دیگری را برای جرم الکترون ضروری می‌سازد. برای تکانه زاویه‌ای از نماد L استفاده می‌کنیم، زیرا معمولاً در فیزیک اتمی از نماد L برای تکانه زاویه‌ای مداری استفاده می‌شود، که چیزی است که در اینجا بررسی می‌کنیم.

$$\mathbf{m} = \frac{-e}{2m_e c} \mathbf{L} \quad (23)$$

در این رابطه چیزی بجز ثابتهای بنیادی دخیل نیست، که باید باعث این شود که گمان برید در همه موارد صادق است. در واقع، چنین نیز هست، اگرچه در اینجا به اثبات آن نمی‌پردازیم. این رابطه برای مدارهای بیضوی صادق است، و حتی برای مدارهای به شکل گل که در یک میدان مرکزی که عکس مجذوری نیست به وجود می‌آید هم صدق می‌کند. تکانه زاویه‌ای یک ثابت حرکت است. بنابراین با استفاده از رابطه کلی که با معادله ۲۳ بیان می‌شود (و فقط برای حالت خاص به دست آوردیم)، نتیجه می‌گیریم که هر گاه تکانه زاویه‌ای پایسته بماند، گشتاور مغناطیسی نیز هم از نظر بزرگی و هم از نظر جهت پایسته می‌ماند. عامل

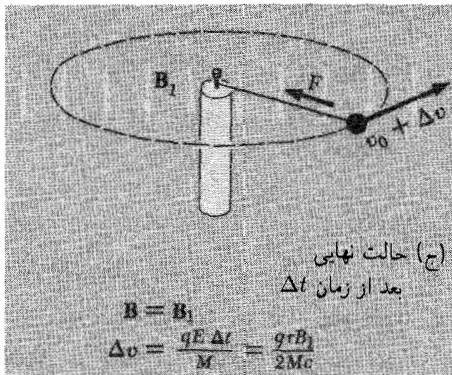
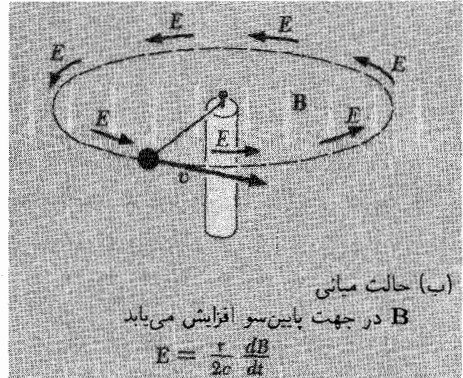
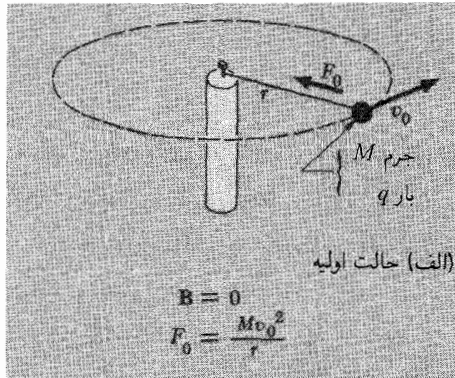
$$\frac{-e}{2m_e c} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{گشتاور مغناطیسی}}{\text{تکانه زاویه‌ای}}$$

را نسبت مغناطو مکانیکی مداری می‌نامند.^۱ ارتباط نزدیک بین گشتاور مغناطیسی و تکانه زاویه‌ای در هر توصیفی از مغناطیس اتمی حائز اهمیت است.

چرا متوجه میدانهای مغناطیسی الکترونهاى مداری در همه آنهاى هر جسم نمی‌شویم؟ پاسخ باید این باشد که آنها متقابلاً یکدیگر را خنثی می‌کنند. در هر قطعه معمولی از ماده تعداد الکترونهاى که در یک جهت حرکت می‌کنند برابر است با تعدادی که در جهت دیگر در حرکت‌اند. همین انتظار را هم داریم، زیرا عاملی وجود ندارد که چرخش در یک جهت را ذاتاً آسانتر از چرخش در جهت دیگر کند، و یا جهت محوری یکتایی را متمایز سازد. باید چیزی در ساختار ماده وجود داشته باشد که نه تنها یک محور، بلکه یک جهت چرخش گرد این محور را متمایز کند.

می‌توان قطعه‌ای از ماده را در نبود هر میدان مغناطیسی خارجی مجسم کرد، که حاوی الکترونهاى چرخان با بردارهای تکانه زاویه‌ای مختلف و گشتاورهای مغناطیسی مداری متناظر باشد که در همه جهتهای فضا توزیع شده‌اند. مدارهایی را در نظر بگیرید که صفحه آنها تقریباً با صفحه xy موازی است، و در این صفحه‌ها همان تعداد m بالاسو وجود دارد که m پایین‌سو. بگذارید ببینیم وقتی که میدان مغناطیسی خارجی در جهت z برقرار می‌شود، چه بر سر یکی از این مدارها می‌آید.

۱. بسیاری افراد این کمیت را نسبت ژیرومغناطیسی می‌نامند. بعضی دیگر آن را نسبت مغناطوژیریک می‌نامند. آن را به هر نام که بخواهیم چنین استنباط می‌شود که صورت کسر گشتاور مغناطیسی است.



شکل ۱۱-۱۲ افزایش میدان مغناطیسی B یک میدان الکتریکی E القا می کند که به جسم باردار چرخان شتاب می دهد...

ابتدا یک سیستم الکترومغناطیسی را تحلیل می کنیم که شباهت چندانی به اتم ندارد. در شکل ۱۱-۱۲ جسمی با جرم M و بار الکتریکی q وجود دارد، که با نخی به طول ثابت r به یک نقطه ثابت بسته شده است. این نخ نیروی مرکزگرایی را فراهم می کند که جسم را در مدار دایره ای نگه می دارد. بزرگی این نیروی F_0 ، چنانکه می دانیم از رابطه زیر به دست می آید

$$F_0 = \frac{Mv_0^2}{r} \quad (24)$$

در حالت اولیه شکل ۱۱-۱۲ الف، میدان مغناطیسی خارجی وجود ندارد. حال با استفاده از یک سیمولۀ بزرگ مناسب، یک میدان B در جهت منفی z تولید می کنیم که در هر لحظه از زمان

در همه جا یکنواخت است. در حالی که این میدان با آهنگ dB/dt رشد می‌کند، یک میدان الکتریکی القایی \mathbf{E} در اطراف مسیر به وجود می‌آید که در شکل ۱۱-۱۲ ب مشخص شده است. برای یافتن بزرگی این میدان \mathbf{E} توجه داریم که آهنگ تغییر شار در این مدار دایره‌ای برابر است با

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} \quad (25)$$

این رابطه انتگرال خطی میدان الکتریکی را تعیین می‌کند، که تنها چیزی است که اهمیت دارد (فقط برای تقارن و سادگی فرض می‌کنیم که در همه طول مسیر یکسان است).

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\pi r^2}{c} \frac{dB}{dt} = \int \pi r E \quad (26)$$

بنابراین درمی‌یابیم که

$$E = \frac{r}{\sqrt{c}} \frac{dB}{dt} \quad (27)$$

تاکنون علامتها را نادیده گرفتیم، اما اگر قاعده دلخواه خود برای یافتن جهت نیروی محرکه الکتریکی القایی را در مورد شکل ۱۱-۱۲ به کار ببرید، خواهید دید که اگر q یک بار مثبت باشد، \mathbf{E} باید جهتی باشد که به جسم شتاب می‌دهد. شتاب در امتداد مسیر، dv/dt ، را نیروی qE معین می‌کند:

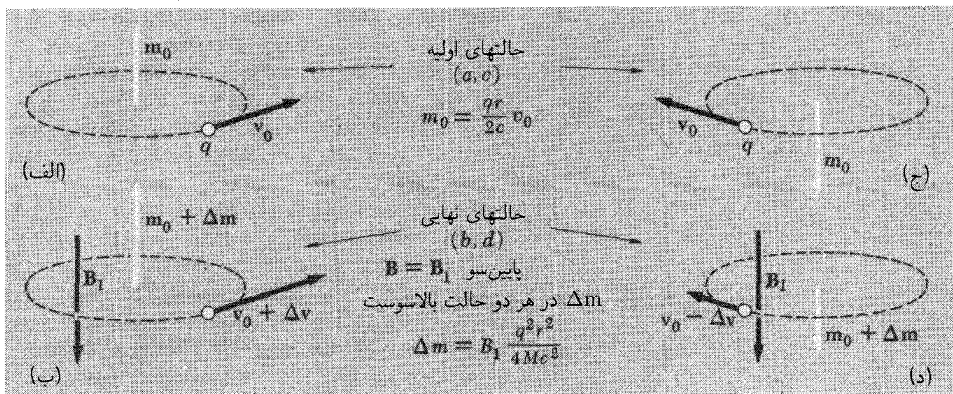
$$M \frac{dv}{dt} = qE = \frac{qr}{\sqrt{c}} \frac{dB}{dt} \quad (28)$$

به طوری که رابطه‌ای بین تغییر v و تغییر \mathbf{B} به دست می‌آوریم:

$$dv = \frac{qr}{\sqrt{Mc}} dB \quad (29)$$

شعاع r با توجه به طول نخ ثابت است، عامل qr/\sqrt{Mc} مقداری ثابت است. اگر Δv تغییر در کل فرایند رساندن میدان به مقدار نهایی B_1 باشد. در این صورت

$$\Delta v = \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v} dv = \frac{qr}{\sqrt{Mc}} \int_0^{B_1} dB = \frac{qr B_1}{\sqrt{Mc}} \quad (30)$$



شکل ۱۱-۱۳ تغییر بردار گشتاور مغناطیسی، برای هر دو جهت حرکت، در خلاف جهت B است.

توجه کنید که زمان حذف شده است — چه تغییر به آهستگی صورت گیرد یا سریع، سرعت نهایی یکسان است.

سرعت بیشتر بار در حالت نهایی به معنای افزایش در گشتاور مغناطیسی M بالاسوست. یک جسم با بار منفی در شرایط مشابه کند می‌شود، که به معنای کاهش گشتاور مغناطیسی پایین سوی آن است. در هر مورد، اعمال میدان B_1 تغییری در گشتاور مغناطیسی به وجود می‌آورد که خلاف میدان است. بزرگی تغییر گشتاور مغناطیسی Δm برابر است با

$$\Delta m = \frac{qr}{2c} \Delta v = \frac{q^2 r^2}{4Mc^2} B_1 \quad (31)$$

همین‌طور برای بارهای مثبت یا منفی، که در جهت دیگر حرکت می‌کنند، تغییر القایی در گشتاور مغناطیسی برخلاف تغییر در میدان مغناطیسی اعمال شده است. شکل ۱۱-۱۳ این را برای یک بار مثبت نشان می‌دهد. به نظر می‌رسد که رابطه زیر برای هر نوع بار و هر جهت چرخش صادق باشد:

$$\Delta m = -\frac{q^2 r^2}{4Mc^2} B_1 \quad (32)$$

در این مثال با استفاده از نخ به طول ثابت، r را ثابت نگه داشتیم. بگذارید ببینیم کشش نخ چه تغییری کرده است. فرض خواهیم کرد که B_1 به اندازه کافی کوچک است به طوری که

$\Delta v \ll v$. در حالت نهایی به نیروی مرکزگرایی به بزرگی زیر نیاز داریم

$$F_{\lambda} = \frac{M(v_0 + \Delta v)^2}{r} \approx \frac{Mv_0^2}{r} + \frac{2Mv_0 \Delta v}{r} \quad (33)$$

که جمله متناسب با $(\Delta v)^2$ را نادیده گرفتیم. اما اکنون خود میدان مغناطیسی نیرویی به طرف داخل به بار متحرک وارد می‌کند که از رابطه $q(v_0 + \Delta v)B_{\lambda}/c$ به دست می‌آید. با استفاده از معادله ۳۰ برای بیان B_{λ} برحسب Δv ، درمی‌یابیم که این نیروی به طرف داخل به بزرگی $(2Mc\Delta v/r)(v_0 + \Delta v)/c$ است، که تا مرتبه اول $\Delta v/v_0$ برابر $2Mv_0 \Delta v/r$ می‌شود. این درست چیزی است که، بنابر معادله ۳۳، لازم داریم تا از هرگونه قید اضافی بر روی نخ اجتناب کنیم! بنابراین کشش نخ در مقدار F_0 بدون تغییر می‌ماند.

که به نتیجه‌گیری شگفت‌انگیزی دلالت می‌کند: نتیجه حاصل، معادله ۳۲، باید برای هر نوع نیروی مهارکننده، بدون توجه به چگونگی تغییر آن با شعاع، معتبر باشد. می‌توان به جای نخ، یک فنر کشسان گذاشت بدون اینکه نتیجه تغییر کند—هنوز شعاع در حالت نهایی بدون تغییر است. و یا اینکه بلافاصله به سیستمی برویم که به آن علاقه‌مندیم، می‌توان جاذبه کولنی یک هسته برای یک الکترون را جایگزین آن کرد. یا می‌تواند نیروی مؤثری باشد که به الکترون در اتمی که دارای تعداد زیادی الکترون وارد می‌شود، و بستگی آن به شعاع باز هم متفاوت است.

بگذارید این را برای الکترون یک اتم به‌کار ببریم، به جای جرم M جرم m_e و به جای q^2 مقدار e^2 را قرار دهیم. اکنون Δm گشتاور مغناطیسی‌ای است که بر اثر اعمال میدان B_{λ} به اتم القا شده است. به عبارت دیگر $\Delta m/B_{\lambda}$ قطبش‌پذیری مغناطیسی است، که مانند قطبش‌پذیری الکتریکی در بخش ۱-۵ تعریف می‌شود. به خاطر داشته باشید که α دارای بُعد حجم است و معلوم شده که مرتبه بزرگی آن 10^{-24} cm^3 یعنی در حدود حجم یک اتم است. با استفاده از معادله ۳۲ قطبش‌پذیری مغناطیسی مربوط به یک الکترون در مداری به شعاع r برابر است با

$$\frac{\Delta m}{B_{\lambda}} = -\frac{e^2 r^2}{4m_e c^2} \quad (34)$$

این نیز دارای بُعد حجم است، زیرا $e^2/m_e c^2$ یک طول است، یعنی شعاع کلاسیکی الکترون r_0 ، که مقداری ثابت و برابر است با $2.8 \times 10^{-13} \text{ cm}$. بگذارید به جای شعاع r مقدار شعاع بور $5.3 \times 10^{-8} \text{ cm}$ را قرار دهیم. در این صورت معادله ۳۴ مقدار $\Delta m/B_{\lambda} = 2 \times 10^{-30} \text{ cm}^3$ را می‌دهد. توجه کنید که این پنج تا شش مرتبه بزرگی از قطبش‌پذیریهای الکتریکی نوعی در جدول ۱-۲ کوچکتر است. کوچکتر بودن آن تقریباً به نسبت شعاع کلاسیکی الکترون r_0 به شعاع اتمی است.

بگذارید ببینیم آیا این می‌تواند نیروی وارد بر نمونه‌های دیامغناطیسی در جدول ۱۱-۱ را توجیه کند. تعداد کل الکترونها در یک گرم از هر جسم تقریباً یکسان است. مقدار آن در حدود یک الکترون به‌ازای دو نوکلئون، یا $10^{23} \times 3$ الکترون در هر گرم از ماده است. (به‌خاطر داشته باشید که برای بیشتر عناصر عدد جرمی در حدود دو برابر عدد اتمی است.) البته اکنون باید به جای r^2 ، میانگین مربعی شعاع مدار (r^2) را قرار داد که میانگین‌گیری بر روی همه الکترونها اتم انجام شده است، که بعضی از آنها شعاعی بزرگتر از دیگران دارند. در واقع مقدار $\langle r^2 \rangle$ از یک اتم به اتم دیگر در جدول تناوبی کمی تغییر می‌کند، و a_0^2 مربع شعاع بور که از آن استفاده کردیم، برآورد بسیار خوبی باقی می‌ماند. با اختیار کردن آن، پیشگویی می‌کنیم که یک میدان ۱۸ کیلوگاوسی در ۱ گرم ماده گشتاور مغناطیسی به بزرگی زیر القا کند

$$\begin{aligned} \Delta m &= (3 \times 10^{23})(2 \times 10^{-30})(1.8 \times 10^4) \\ &= 1.1 \times 10^{-2} \text{ cm}^2\text{-G} \end{aligned} \quad (35)$$

که در شیب 1700 گاوس بر سانتی‌متر نیرویی تولید می‌کند که بزرگی آن برابر است با

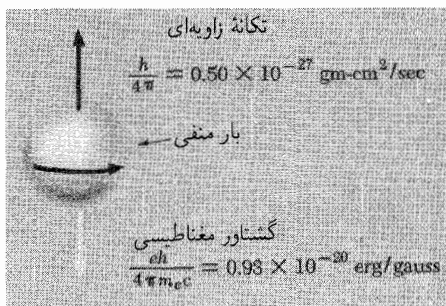
$$F = \Delta m \frac{\partial B_z}{\partial z} = 1.1 \times 10^{-2} \times 1700 = 1.9 \text{ dyne} \quad (36)$$

سازگاری این مقدار با مقادیر مربوط به چند ماده دیامغناطیسی خالص که در جدول ۱۱-۱ آمده است بهتر از آن است که انتظار داریم.

اکنون می‌توان دید که چرا دیامغناطیسی یک پدیده عمومی تقریباً نامشخص است. این پدیده در مولکولها و اتمها یکسان است. این واقعیت که یک مولکول می‌تواند ساختاری بسیار بزرگتر از یک اتم باشد — یک مولکول می‌تواند از صدها هزار اتم تشکیل شده باشد — معمولاً شعاع میانگین مربعی مؤثر مدار را زیاد نمی‌کند. این بدان دلیل است که در یک مولکول هر الکترون معین بر روی یک اتم به‌خوبی جایگزین شده است. استثناهای جالب توجهی وجود دارد که یکی از آنها — گرافیت — در جدول ۱۱-۱ آمده است. دیامغناطیسی غیرعادی گرافیت به‌واسطه ساختار غیرعادی آن است که اجازه می‌دهد برخی الکترونها آزادانه در داخل گروه هامنی از اتمها در شبکه بلور حرکت کنند. برای این الکترونها (r^2) به‌صورت غیرعادی بزرگ است.

۱۱-۶ اسپین و گشتاور مغناطیسی الکترون

الکترون دارای یک تکانه زاویه‌ای است که ارتباطی به حرکت مداری آن ندارد. رفتار آن به لحاظ مختلف چنان است که گویی پیوسته گرد محور خودش می‌چرخد. این ویژگی را اسپین می‌نامند. وقتی

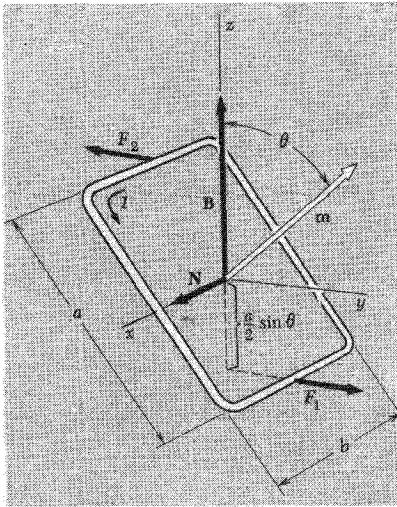


شکل ۱۱-۱۴ تکانه زاویه‌ای ذاتی، یا اسپین الکترون و گشتاور مغناطیسی وابسته به آن، توجه کنید که نسبت گشتاور مغناطیسی به تکانه زاویه‌ای $e/m_e c$ است و نه مقدار $e/2m_e c$ که برای حرکت مداری (معادله ۲۳) به دست آمد. این هیچ توجیه کلاسیک ندارد.

بزرگی تکانه زاویه‌ای اسپین اندازه‌گیری می‌شود. همواره نتیجه یکسان $h/4\pi$ به دست می‌آید، که h ثابت پلانک و برابر است با $6.626 \times 10^{-27} \text{ g-cm}^2/\text{s}$. اسپین الکترون پدیده‌ای است کوانتومی. اهمیت آن برای ما در آن است که به این تکانه ذاتی، یا "داخلی" یک گشتاور مغناطیسی وابسته است، که مانند اسپین بدون تغییر است. جهت این گشتاور مغناطیسی همان است که با در نظر گرفتن الکترون به صورت گلوله‌ای از بار منفی که گرد محورش می‌چرخد انتظار می‌رود. یعنی، بردار گشتاور مغناطیسی چنانکه در شکل ۱۴-۱۱ نشان داده شده است با بردار تکانه زاویه‌ای اسپین پاد موازی است. اما، اندازه این گشتاور مغناطیسی نسبت به تکانه زاویه‌ای دو برابر مقدار مربوط به حرکت مداری است. هر نوع کوشش در جهت ابداع یک مدل کلاسیک در این زمینه بی‌مورد است؛ زیرا ویژگی‌های آن اصولاً کوانتوم مکانیکی است. حتی لازم نیست بگوییم که این یک حلقه جریان است. نکته مهم آن است که رفتار آن در موارد زیر مانند یک حلقه جریان است: (۱) این حرکت میدانی تولید می‌کند که در فاصله دور، میدان یک دوقطبی مغناطیسی است؛ (۲) در یک میدان خارجی \mathbf{B} لنگر وارد بر آن همان است که بر حلقه جریان با گشتاور دوقطبی معادل آن وارد می‌شود؛ (۳) در فضایی که الکترون اشغال می‌کند، مانند چشمه‌های معمولی میدان مغناطیسی که با آنها آشنا هستیم، در همه جا $\text{div } \mathbf{B} = 0$ است. از آنجا که اندازه گشتاور مغناطیسی اسپین همواره یکسان است، میدان خارجی فقط می‌تواند جهت آن را تغییر دهد. بر یک دوقطبی مغناطیسی در یک میدان خارجی لنگری وارد می‌شود. اگر مسئله ۶-۲۲ را حل کرده باشید، ثابت کرده‌اید که لنگر \mathbf{N} وارد بر یک حلقه جریان به هر شکل، با گشتاور دوقطبی \mathbf{m} ، در یک میدان \mathbf{B} ، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (37)$$

برای کسانی که این کار را نکرده‌اند، بگذارید تا لنگر را برای یک مورد ساده کلاسیک محاسبه کنیم. در شکل ۱۱-۱۵ یک حلقه سیم مستطیلی را می‌بینیم که حامل جریان I است. این حلقه دارای



شکل ۱۱-۱۵ محاسبه لنگر وارد بر یک حلقه جریان در میدان مغناطیسی B . گشتاور مغناطیسی حلقه جریان m است.

گشتاور مغناطیسی m ، به بزرگی $m = Iab/c$ است. لنگر وارد بر این حلقه ناشی از نیروهای F_1 و F_2 است که بر سیمهای افقی وارد می‌شود. بزرگی هر یک از این نیروها $F = IbB/c$ است و بازوی آن فاصله $(a/2) \sin \theta$ است، می‌بینیم که بزرگی لنگر وارد بر حلقه برابر است با

$$N = 2 \frac{IbB}{c} \frac{a}{2} \sin \theta = \left(\frac{Iab}{c} \right) B \sin \theta = mB \sin \theta \quad (38)$$

این لنگر در جهتی وارد می‌شود که m را موازی B سازد؛ آن را با بردار N در جهت مثبت محور x به صورتی نشان می‌دهند که در شکل آمده است. توجه کنید که معادله ۳۷ درست متناظر با فرمولی است که در فصل ۱۰ برای لنگر وارد بر یک دوقطبی الکتریکی p در میدان خارجی E ، یعنی $N = p \times E$ به دست آوردیم. سمتگیری m در جهت B ، مانند دوقطبی الکتریکی موازی با E ، وضعیت با کمترین انرژی است. همین‌طور کار لازم برای چرخاندن دوقطبی m از حالت موازی به پاد موازی $2mB$ است (به وسیله معادله ۱۰-۱۹ می‌توان به سادگی از این نتیجه برای مورد مغناطیسی استفاده کرد).

اگر گشتاورهای اسپین الکترون در یک ماده بتوانند آزادانه سمتگیری کنند، انتظار داریم که سمتگیری در جهت میدان اعمال شده B را، که سمتگیری با کمترین انرژی است، ترجیح دهند. فرض کنید که هر الکترون در یک گرم ماده این سمتگیری را اختیار کند. قبلاً حساب کردیم که 3×10^{23} الکترون در یک گرم از هر چیز وجود دارد. گشتاور مغناطیسی مربوط به اسپین الکترون، m_s ، در شکل ۱۱-۱۴ برابر با $9.3 \times 10^{-24} \text{ erg/G}$ داده شده است. گشتاور مغناطیسی کل اسپینهای

همخط ما برابر است با $(10^{-20} \times 9) \times (3 \times 10^{23}) \text{ erg/G}$ یا 2700 erg/G . نیروی وارد بر چنین نمونه‌ای، در پیچه‌ای با شیب میدان 1700 G/cm برابر است با $4.6 \times 10^6 \text{ dyne}$ ، یا کمی بیش از 10^7 پوند!

بدیهی است که این مقدار از نیروی ثبت شده برای هر نمونه پارامغناطیسی بسیار بیشتر است. فرضه‌ایمان از دو نظر غلط بودند. اولاً، همه گشتاورهای اسپین الکترون نمی‌توانند آزادانه سمتگیری کنند. ثانیاً، جنبش گرمایی مانع از همخط شدن کامل گشتاورهایی می‌شود که آزادند.

در بیشتر اتمها و مولکولها الکترونها به صورت زوج‌اند، و اسپین زوجها بدون توجه به جهت میدان مغناطیسی اعمال شده برخلاف یکدیگرند. در نتیجه، گشتاور مغناطیسی چنین زوج الکترونی دقیقاً یکدیگر را خنثی می‌کنند. آنچه باقی می‌ماند دیامغناطیسی حرکت مداری است که قبلاً آن را بررسی کردیم. اغلب مولکولها کاملاً دیامغناطیسی هستند. تعداد کمی از مولکولها (در واقع بسیار کم) دارای تعداد الکترون فرد هستند. بدیهی است در این مولکولها خنثی شدن کامل گشتاورهای اسپین به صورت دو به دو امکان‌پذیر نیست. نیتریک اکسید NO، با ۱۵ الکترون در مولکول مثالی در این مورد است؛ این مولکول پارامغناطیسی است. مولکول اکسیژن O_2 دارای ۱۶ الکترون است، اما ساختار الکترونی آن به‌گونه‌ای است که اسپین دو الکترون خنثی نشده باقی می‌ماند. در اتمهای منفرد الکترونها داخلی معمولاً توزیع شده‌اند، و اگر یک الکترون خارجی توزیع نشده وجود داشته باشد، اسپین آن هنگامی که اتم بخشی از یک ترکیب یا بلور است با اسپین یک الکترون مجاور زوج می‌شود. اما، بعضی اتمها اسپینهای الکترون توزیع شده‌ای دارند که می‌توانند حتی هنگامی که اتم به اتمهای دیگر متصل است نسبتاً آزادانه در یک میدان سمتگیری کنند. مثالهای مهم در این مورد عناصر جدول تناوبی از کروم تا مس هستند که شامل آهن، کبالت و نیکل است گروه دیگر عناصر دارای این ویژگی گروه خاکهای کمیاب دور و بر گادولینیم است. ترکیبات یا آلیاژهای این عناصر معمولاً پارامغناطیسی، و در بعضی موارد فرومغناطیسی هستند. تعداد اسپینهای الکترون دخیل در پارامغناطیسی نوعاً یک یا دو الکترون به‌ازای هر اتم است. می‌توان هر اتم پارامغناطیسی را مجهز به یک گشتاور مغناطیسی m چرخان در نظر گرفت که اگر اغتشاشهای گرمایی وجود نداشت در میدان B مانند یک عقربه مغناطیسی کوچک در جهت میدان قرار می‌گرفت.

جنبش گرمایی همواره یک توزیع کاتوره‌ای از جهت‌های محور اسپین به وجود می‌آورد. درجه همخط شدن نهایی نشاندهنده سازش بین تمایل اختیار کردن حالت با کمترین انرژی، و تأثیر سرگردانی ناشی از حرکت گرمایی است. قبلاً با این مسئله مواجه شده‌ایم. در بخش ۱۰-۱۲ همخط شدن گشتاورهای دو قطبی الکتریکی مولکولهای قطبی را در میدان الکتریکی E بررسی کردیم. معلوم شد که این همخطی تابع نسبت دو انرژی: pE مزیت انرژیکی سمتگیری دو قطبی p موازی E در مقایسه با میانگین بر روی سمتگیریهای کاملاً کاتوره‌ای، و kT ، متوسط انرژی

گرمایی مربوط به هر شکلی از حرکت مولکولی در دمای مطلق T است. فقط اگر pE از kT بسیار بزرگتر می‌بود، گشتاورهای دوقطبی کاملاً همخط می‌شدند. اگر pE از kT بسیار کوچکتر باشد، قطبش در حالت تعادل با همخط شدن کامل کسر کوچکی، تقریباً pE/kT ، از دوقطبیها هم‌ارز است. می‌توان این نتیجه را مستقیماً برای پارامغناطیس به‌کار برد. کافی است به جای pE مقدار mB ، انرژی دخیل در سمتگیری گشتاور دوقطبی مغناطیسی m در میدان مغناطیسی B را قرار دهیم. در صورتی که mB/kT کوچک باشد، گشتاور مغناطیسی کل حاصل از اعمال میدان B به N دوقطبی تقریباً $(mB/kT)Nm$ ، یا $(Nm^2/kT)B$ خواهد بود. گشتاور القایی با B متناسب است و با دما نسبت عکس دارد.

برای یک گشتاور اسپین الکترون در میدان ۱۸ کیلوگاوس، mB برابر است با $۱۰^{۱۶} \times ۱۰^۶$ ارگ. در دمای اتاق، kT برابر است با $۱۰^{-۱۴} \times ۴$ ارگ، در این مورد mB/kT در واقع کوچک است. اما اگر می‌توانستیم دما را تا ۱ K کاهش دهیم در همان میدان، mB/kT در حدود یک می‌شد. با کمتر کردن دما می‌توانستیم انتظار داشته باشیم به همخطی کامل با گشتاور کل Nm برسیم. به این شرایط اغلب می‌توان در آزمایشهای دمای کم دست یافت. در واقع، پارامغناطیسی برخلاف قطبش دی‌الکتریکی در دماهای کم، هم ابهت بیشتری دارد و هم جالب توجه‌تر است. دوقطبیهای الکتریکی مولکولی کاملاً در جای خود منجمد می‌شوند، و قابلیت سمتگیری را از دست می‌دهند. گشتاورهای اسپین الکترون هنوز به‌طور قابل ملاحظه‌ای آزادند.

۱۱-۷ پذیرفتاری مغناطیسی

دیدیم که در هر دوی مواد دیامغناطیسی و پارامغناطیسی یک گشتاور مغناطیسی متناسب با میدان اعمال شده به‌وجود می‌آید. لافل، این چیزی است که در بیشتر حالتها رخ می‌دهد. در دماهای بسیار کم، و در میدانهای نسبتاً شدید، می‌توان دید که گشتاور مغناطیسی القایی با افزایش شدت میدان به یک مقدار حدی میل می‌کند، که متوجه آن شده‌ایم. با کنار گذاشتن این اثر "اشباعی" رابطه بین گشتاور و میدان اعمال شده خطی است، به‌طوری که ویژگیهای مغناطیسی یک ماده را می‌توان از نسبت گشتاور القا شده به میدان اعمال شده مشخص کرد. این نسبت پذیرفتاری مغناطیسی نامیده می‌شود. این نسبت برحسب اینکه گشتاور ۱ گرم، یا ۱ سانتی‌مترمکعب، یا یک مول ماده را برگزینیم، پذیرفتاری ویژه، یا پذیرفتاری حجمی یا پذیرفتاری مولی نامیده می‌شود. بحث ما در بخش ۱۱-۵ نشان داد که برای مواد دیامغناطیسی پذیرفتاری ویژه، بر مبنای گشتاور القا شده بر گرم، باید برای تمام مواد تقریباً یکسان باشد. اما، پذیرفتاری حجمی، بر اساس گشتاور مغناطیسی بر سانتی‌مترمکعب، به موردی که اکنون بررسی می‌کنیم بیشتر ارتباط دارد.

گشتاور مغناطیسی بر واحد حجم را قطبش مغناطیسی، یا مغناطیدگی می‌نامیم و با نماد M نشان می‌دهیم. اکنون مغناطیدگی M و میدان مغناطیسی B ابعادی یکسان دارند.^۱ برای اثبات آن، به خاطر آورید که میدان B یک دوقطبی مغناطیسی از رابطه^۲ (فاصله)/گشتاور دوقطبی مغناطیسی به دست می‌آیند، در حالی که M ، چنانکه هم اکنون تعریف کردیم، دارای ابعاد حجم/گشتاور دوقطبی مغناطیسی است، اکنون اگر پذیرفتاری مغناطیسی حجمی را، که با χ_m نشان داده می‌شود، با رابطه زیر تعریف کنیم

$$M = \chi_m B \quad (\text{هشدار: اظهار نظر زیر را ببینید}) \quad (39)$$

پذیرفتاری یک عدد بی‌بعد خواهد بود، که برای مواد دیامغناطیسی منفی، و برای مواد پارامغناطیسی مثبت است. این درست روالی است که در معادله^{۱۰-۳۴} بیان شد، و با آن پذیرفتاری الکتریکی χ_e را به صورت نسبت قطبش الکتریکی P به میدان الکتریکی E تعریف کردیم. اگر پارامغناطیسی سهمی در پذیرفتاری داشته باشد، آن را با χ_{pm} نشان می‌دهیم و رابطه‌ای همانند معادله^{۶۰} فصل قبل خواهیم داشت

$$\chi_{pm} \approx \frac{Nm^2}{kT} \quad (40)$$

البته در پذیرفتاری کامل χ_m سهم همیشگی دیامغناطیسی، که منفی است و می‌توان آن را از معادله^{۳۴} به دست آورد، وجود دارد.

متأسفانه، معادله^{۳۹} تعریف متداول پذیرفتاری مغناطیسی حجمی نیست. در تعریف معمول به جای میدان B ، میدان دیگر H که در بخش ۱۱-۱۰ به آن برمی‌خوریم، ظاهر می‌شود. تعریف برحسب H اگرچه غیرمنطقی است اما نوعی توجیه عملی دارد، و سنت استفاده از آن به اندازه‌ای جا افتاده است که ناچار باید تسلیم آن شویم. اما در این فصل می‌خواهیم حتی‌الامکان راهی را دنبال کنیم که به طور طبیعی و سازگار با توصیف میدانهای الکتریکی در ماده هم‌ارز است. یک تشابه شایان توجه به صورت زیر است: میدان ماکروسکوپی B در داخل ماده برابر میانگین میکروسکوپی B به دست می‌آید، درست همان طور که معلوم شد E ماکروسکوپی میانگین میکروسکوپی E است.

تا هنگامی که χ_m خیلی کوچکتر از یک باشد، تفاوت تعریف هیچ پیامد عملی ندارد. مقادیر χ_m برای مواد دیامغناطیسی خالص جامد یا مایع، نوعاً بین $10^{-6} \times 10^{-5}$ و $10^{-6} \times 10^{-1}$ — اگرچه بعد M و B یکسان است، اما بیان آنها را برحسب یکاهای همانند به واسطه ظاهر شدن یک عامل 4π همراه‌کننده است. بنابراین اگر نامی برای یکاهای M لازم شد، از ارگ برگاؤس-سانتی مترمکعب استفاده خواهیم کرد.

است. حتی برای اکسیژن در شرایطی که در جدول ۱۱-۱ آمده است، پذیرفتاری پارامغناطیسی کمتر از 10^{-3} است. این به معنای آن است که میدان مغناطیسی حاصل از گشتاورهای دوقطبی در ماده، لااقل میانگین بزرگ مقیاس آن، از میدان اعمال شده B بسیار ضعیفتر است. این به ما اطمینان می‌دهد که در چنین سیستمهایی می‌توان فرض کرد که میدان وارد بر دوقطبی اتمی برای سمتگیری آنها همان میدانی است که در نبود نمونه وجود دارد. به هر حال، ما به سیستمهای دیگری علاقه‌مندیم که در آنها میدان گشتاورهای مغناطیسی کوچک نیست. بنابراین باید، درست مانند مورد قطبش الکتریکی، آن میدانهای مغناطیسی را بررسی کنیم که خود ماده مغناطیسی، هم در داخل ماده و هم در خارج از آن، تولید می‌کند.

۱۱-۸ میدان مغناطیسی حاصل از ماده مغناطیسی

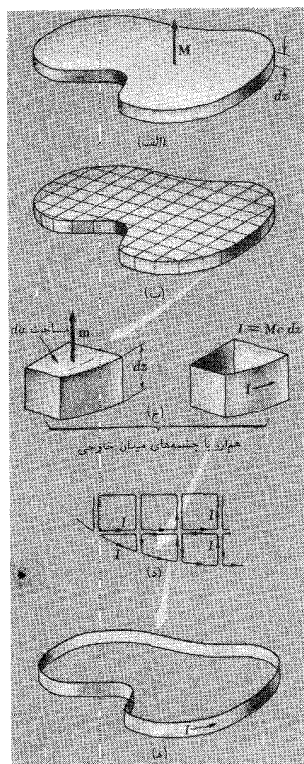
اگر یک قطعه ماده حاوی تعداد زیادی دوقطبی مغناطیسی همسو باشد که به‌طور یکنواخت در داخل آن توزیع شده‌اند می‌گویند به‌طور یکنواخت مغناطیده است. بردار مغناطش M به سادگی حاصلضرب تعداد دوقطبیهای سمتگیری کرده در واحد حجم و گشتاور مغناطیسی m هر دوقطبی است. اینکه چگونه همخطی این دوقطبیها حفظ می‌شود مورد نظر ما نیست. ممکن است میدانهای از چشمه دیگر اعمال شوند، اما به این موضوع علاقه‌مند نیستیم. فقط می‌خواهیم میدان حاصل از خود دوقطبیها را بررسی کنیم.

ابتدا تیغه‌ای از ماده به ضخامت dz را در نظر بگیرید، که عمود بر جهت مغناطش مطابق شکل ۱۱-۱۶ الف ورقه ورقه شده است. این تیغه را می‌توان به کاشیهای کوچکی تقسیم کرد. یکی از این کاشیها که مساحت سطح بالایی آن da است، دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی $M da dz$ است، که M گشتاور دوقطبی در واحد حجم است (شکل ۱۱-۱۶ ب). میدان مغناطیسی که این کاشی در همه نقطه‌های دور تولید می‌کند — دور در مقایسه با اندازه کاشی — درست برابر میدان هر دوقطبی با همان گشتاور مغناطیسی است. می‌توان با خم کردن یک نوار رسانا به عرض dz به شکل یک کاشی و برقراری جریان $I = Mcdz$ در این حلقه (شکل ۱۱-۱۶ ج) یک دوقطبی با این قدرت ساخت. این کار به حلقه گشتاور دوقطبی زیر را می‌دهد:

$$m = \frac{I}{c} \times \text{مساحت} = \frac{Mcdz}{c} da = M da dz \quad (41)$$

که همان گشتاور دوقطبی کاشی است.

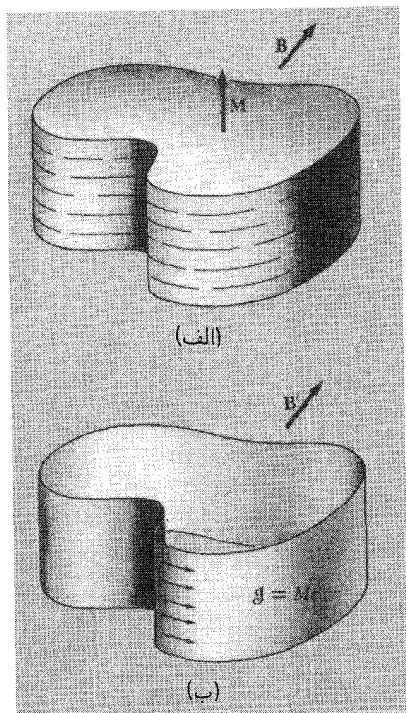
بگذارید مطابق شکل ۱۱-۱۶ د به جای هر کاشی موجود در تیغه یک حلقه جریان بگذاریم. جریان در تمام آنها برابر است و در نتیجه، در هر مرز داخلی جریانهای مساوی و در جهت مخالف



شکل ۱۱-۱۶ تیغه نازک که عمود بر سطح پهن خود مغناطیده است، تا آنجا که به میدان مغناطیسی خارجی آن مربوط می‌شود، با یک نوار جریان هم‌ارز است.

داریم که با جریان صفر هم‌ارز است. بنابراین "جعبه تخم‌مرغ" حلقه‌ها معادل یک نوار حامل جریان $Mc dz$ است که در خارج حلقه‌ها کشیده شده است (شکل ۱۱-۱۶). اکنون می‌توان این کاشیها را تا وقتی به اندازه مولکول نرسیده‌ایم، کاملاً کوچک کرد. اندازه آنها باید به اندازه کافی بزرگ باشد تا مغناطش از یک کاشی به کاشی بعدی تغییر قابل‌ملاحظه‌ای نکند. در داخل این محدوده، می‌توان گفت که میدان در هر نقطه خارجی، حتی در نزدیکی تیغه، همان میدان نوار جریان است. فقط باید از این لایه‌ها، یا تیغه‌ها، مطابق شکل ۱۱-۱۷ الف یک تیغه کامل بسازیم. در این صورت کل قطعه با نوار پهن شکل ۱۱-۱۷ ب هم‌ارز است که در آن جریان $Mc dz$ برحسب $esu/s\text{-cm}$ در هر نوار dz ، یا به طور ساده‌تر، جریان سطحی به چگالی \mathcal{J} برحسب $esu/s\text{-cm}$ برقرار است که \mathcal{J} از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\mathcal{J} = Mc \quad (42)$$

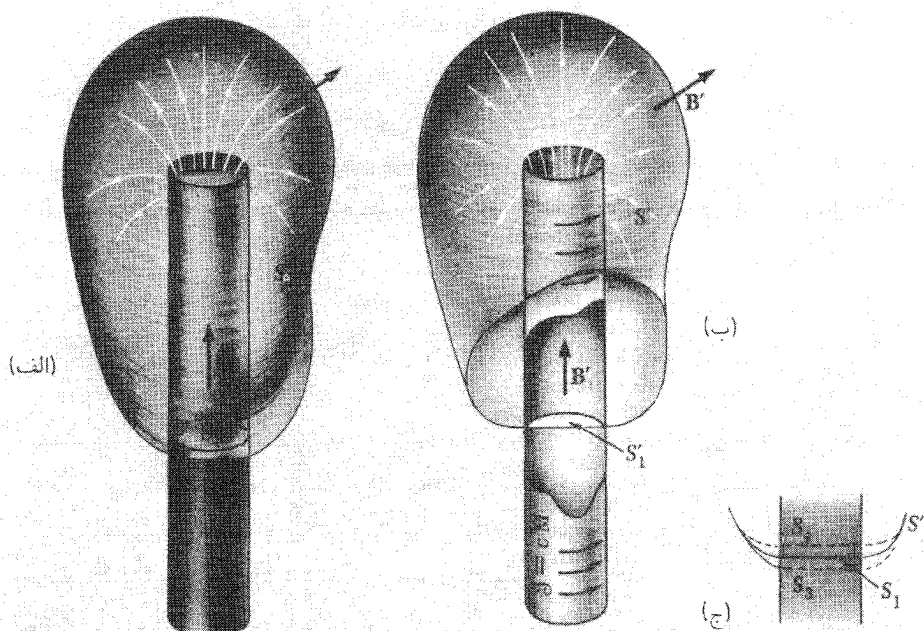


شکل ۱۱-۱۷ قطعه‌ای که به طور یکنواخت مغناطیده است با یک نوار جریان سطحی هم‌ارز است.

میدان مغناطیسی B در هر نقطه‌ی خارج از قطعه‌ی مغناطیده شکل ۱۱-۱۷ الف و یا حتی در نزدیکی آن، مادامی که به فاصله‌های مولکولی نرسیده‌ایم، همان میدان B' در نقطه‌ی نظیر آن در مجاورت نوار پهن جریان شکل ۱۱-۱۷ ب است.

اما میدان در داخل قطعه‌ی مغناطیده چگونه است؟ در اینجا با پرسشی مشابه آنچه در فصل ۱۰ داشتیم روبرو هستیم. در داخل ماده، اگر میدان مغناطیسی را در مقیاس اتمی که آن را میکروسکوپیک نامیدیم مشاهده کنیم، این میدان به هیچ‌وجه یکنواخت نیست. این میدان هم به لحاظ اندازه و هم از نظر جهت بین نقطه‌هایی که فاصله‌شان فقط چند آنگستروم است به شدت تغییر می‌کند. این میدان میکروسکوپیک B همان میدان مغناطیسی در خلاست، زیرا همان‌طور که در فصل ۱۰ تأکید کردیم، از لحاظ میکروسکوپیک ماده مجموعه‌ای از ذرات و بارهای الکتریکی در فضای تهی است. تنها میدان بزرگ مقیاس که می‌توان به‌طور یکتا در داخل ماده تعریف کرد میانگین فضایی میدان میکروسکوپیک است.

به‌واسطه‌ی نبود اثرهای مربوط به بار مغناطیسی، فکر می‌کنیم که خود میدان میکروسکوپیک در رابطه‌ی $\text{div } B = 0$ صادق است. اگر این موضوع صحت داشته باشد، مستقیماً نتیجه می‌شود



شکل ۱۱-۱۸ (الف) یک میله استوانه‌ای که به طور یکنواخت مغناطیده است. (ب) استوانه توخالی یا غلاف جریان هم‌ارز آن، که دارای میدان B' است. (ج) می‌توان از داخل میله نمونه برداری کرد، و میانگین فضایی میدان میکروسکوپیک را با استفاده از سطوح موازی و با فاصله کم S_1, S_2, \dots به دست آورد.

که میانگین فضایی میدان میکروسکوپیک داخلی در قطعه ما برابر است با میدان B' در داخل استوانه تهی جریان معادل آن.

برای نشان دادن آن، میله دراز شکل ۱۸-الف را در نظر بگیرید که به موازات طولش مغناطیده است. هم‌اکنون نشان دادیم که میدان خارجی همان میدان استوانه دراز جریان است (در عمل با یک سیم‌لوله تک‌حلقه‌ای معادل است) که در شکل ۱۱-۱۸ ب نشان داده شده است. در شکل ۱۱-۱۸ الف S یک سطح بسته را نشان می‌دهد که بخش S_1 آن از داخل میله می‌گذرد. چون علاوه بر میدان خارجی، باری میدان مغناطیسی داخلی نیز $\text{div } \mathbf{B} = 0$ است، پس $\text{div } \mathbf{B}$ در سراسر حجمی که S در برمی‌گیرد صفر است. بنابراین از قضیه گاوس نتیجه می‌گیریم که انتگرال سطح \mathbf{B} بر روی S باید صفر شود، انتگرال سطحی \mathbf{B}' روی سطح بسته S' نیز صفر است. روی قسمتهایی از S و S' که خارج از استوانه‌هاست، B و B' یکسان‌اند. بنابراین انتگرال سطح \mathbf{B} روی قرص داخلی S_1 باید با انتگرال سطح \mathbf{B}' روی قرص داخلی S'_1 برابر باشد. این مطلب باید برای هر یک از قرصهای موازی نزدیک به هم S_2, S_3, \dots و غیره در شکل ۱۱-۱۸ ج

صادق باشد، زیرا میدان در خارج از استوانه در این حوالی بسیار کوچک است، به طوری که بخشهای خارجی چیزی را تغییر نمی‌دهد. اکنون انتگرال‌گیری سطحی روی یک سری صفحات با فاصله مساوی از این نوع راه مناسبی برای محاسبه میانگین حجمی میدان \mathbf{B} است، زیرا از تمام اجزاء به طور مساوی نمونه برداری می‌کند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که میانگین فضایی میدان میکروسکوپی \mathbf{B} در داخل میله مغناطیده، با میدان \mathbf{B}' در داخل غلاف جریان شکل ۱۱-۱۸ برابر است.

مقایسه با آنچه در تحلیل پرسش متناظر در بخش ۱۰ به دست آمد سازنده است. شکل ۱۱-۱۹ این دو دستاورد را در کنار هم نشان می‌دهد. خواهید دید که این دو به صورت منطقی موازی‌اند، اما در هر مرحله تفاوتی وجود دارد که بازتاب این بی‌تقارنی بنیادی است که بدین صورت تجلی می‌کند که بارهای الکتریکی چشمه میدانهای الکتریکی هستند، در حالی که بارهای الکتریکی متحرک چشمه میدانهای مغناطیسی‌اند. به عنوان مثال، در بحثهای مربوط به میانگین میدان میکروسکوپی، برای مورد الکتریکی کلید مسئله این فرض است که برای میدان الکتریکی میکروسکوپی $\text{curl } \mathbf{E} = 0$. برای مورد مغناطیسی، فرض کلیدی این است که برای میدان مغناطیسی میکروسکوپی $\text{div } \mathbf{B} = 0$.

اگر مغناطش \mathbf{M} در حجم ماده یکنواخت نباشد بلکه برحسب مکان به صورت $\mathbf{M}(x, y, z)$ تغییر کند، توزیع جریان هم‌ارز به سادگی از رابطه زیر به دست می‌آید

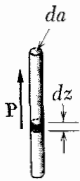
$$\mathbf{J} = c \text{curl } \mathbf{M} \quad (43)$$

بگذارید این موضوع را در یک مورد بررسی کنیم. فرض کنید که مغناطشی در جهت z وجود دارد، که با پیشروی در جهت y شدیدتر می‌شود. این در شکل ۱۱-۲۰ الف آمده است، که منطقه کوچکی از ماده را نشان می‌دهد که به قطعات کوچک تقسیم شده است. این قطعات چنان کوچک در نظر گرفته شده‌اند که می‌توان مغناطش را در یک قطعه یکنواخت در نظر گرفت. سپس می‌توان به جای هر قطعه یک نوار جریان، با چگالی جریان سطحی $\mathcal{J} = cM_z$ قرار داد. اگر ارتفاع هر قطعه Δz باشد، جریان I در چنین نواری برابر است با $\mathcal{J} \Delta z$ یا $cM_z \Delta z$. حال چگالی جریان در هر نوار اندکی بیشتر از نواری است که در طرف چپ آن قرار دارد. جریان در هر حلقه به مقدار زیر بیشتر از حلقه‌ای است که در طرف چپ آن قرار دارد

$$\Delta I = c \Delta z \Delta M_z = c \Delta z \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y \quad (44)$$

در هر فصل مشترک این ردیف از قطعات جریان خالصی به بزرگی ΔI در جهت x وجود دارد

الف) به عنوان چشمه میدان الکتریکی خارجی E

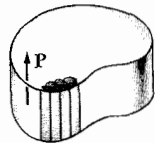


هم‌ارز است با

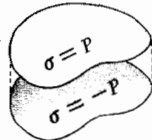
$$q = P da$$

$$q = -P da$$

به واسطه وجود یک تکه ماده قطبیده، حجم $da dz$ دارای گشتاور دوقطبی برابر مقدار زیر است:



یک قطعه با قطبش یکنواخت را می‌توان به چنین میله‌هایی تجزیه کرد. در نتیجه همان میدان خارجی را دارد که دور ورقه بار سطحی با

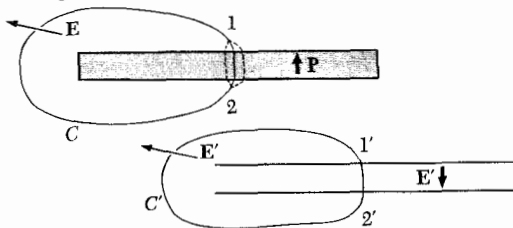


$$\sigma = P_n$$

به‌طور کلی برای قطبش غیریکنواخت، ماده قطبیده با توزیع بار $\rho = \text{div} P$ هم‌ارز است

اثبات اینکه هم‌ارزی به میانگین فضایی میدانهای خارجی گسترش می‌یابد

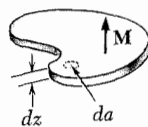
یک تیغهٔ پهن نازک با قطبیدگی یکنواخت و ورقه‌های بار سطحی هم‌ارز آن را در نظر بگیرید. در نزدیکی وسط تیغه، میدان خارجی



کوچک و $E' = E'$ یکنواخت است. اگر برای میدان خارجی $\nabla \times E = 0$ باشد، $\oint_C E \cdot dl = 0$ خواهد بود. اما در مسیر خارجی $E = E'$ پس برای همهٔ مسیرهای داخلی $\int_{1'}^2 E' \cdot dl = \int_1^2 E \cdot dl$

نتیجه‌گیری: $(E) = E'$: میانگین فضایی میدان الکتریکی داخلی با میدان E' که توزیع بار معادل که در بالا توصیف شد در همان نقطه در خلأ تولید می‌کند هم‌ارز است (همراه با هر چشمهٔ خارجی).

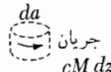
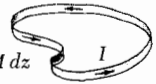
ب) به عنوان چشمهٔ میدان مغناطیسی خارجی B



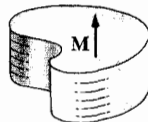
هم‌ارز است با

$$\frac{I}{c} = M dz$$

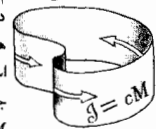
حجم $da dz$ به‌واسطه وجود یک تکه ماده مغناطیده دارای گشتاور دوقطبی برابر است با مقدار زیر است



یک قطعه با مغناطیدگی یکنواخت را می‌توان به چنین لایه‌هایی تقسیم کرد.

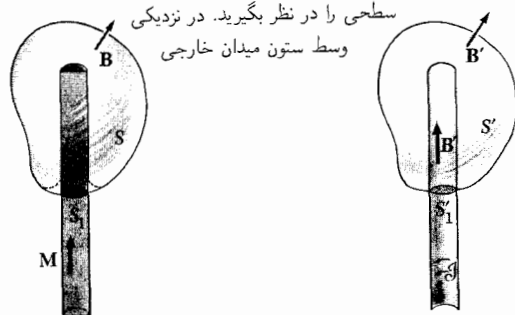


در نتیجه قطعه دارای همان میدان خارجی است که یک نوار پهن جریان سطحی با $j = cM$



به‌طور کلی‌تر، برای مغناطیدگی یکنواخت، ماده مغناطیده با توزیع جریان $J = c \text{curl} M$ هم‌ارز است.

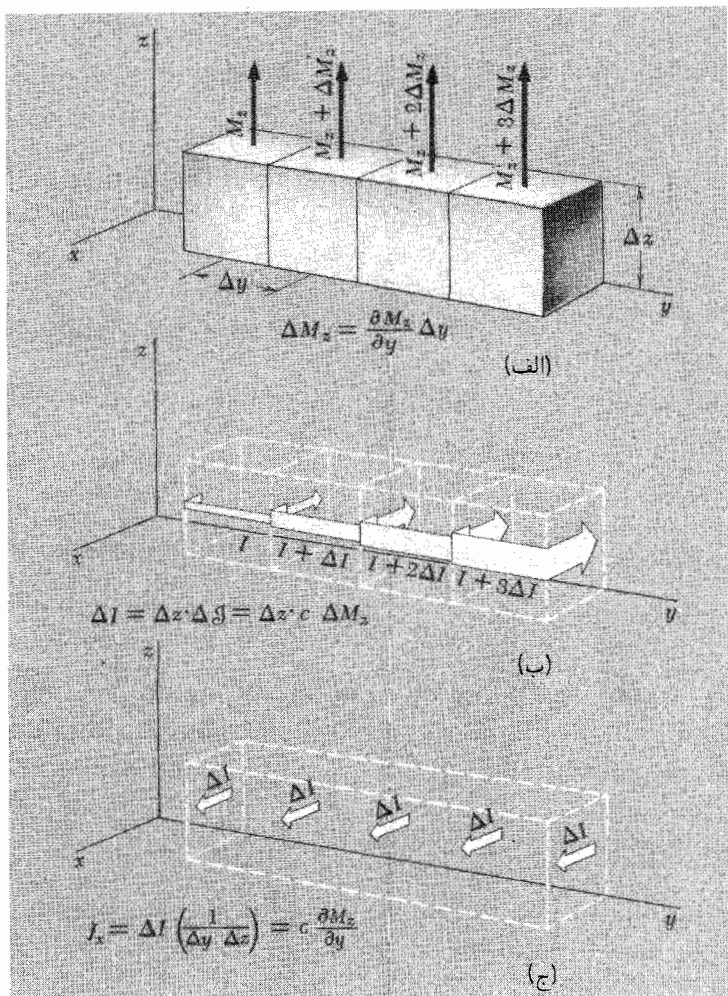
یک ستون بلند با مغناطیدگی یکنواخت و استوانهٔ هم‌ارز آن از جریان



سطحی را در نظر بگیرید. در نزدیکی وسط ستون میدان خارجی

کوچک و $B' = B'$ یکنواخت است. اگر برای میدان داخلی $\nabla \cdot B = 0$ باشد، خواهیم داشت $\int_S B \cdot da = 0$. اما در سطح خارجی ستون $B = B'$. بنابراین در هر قسمت داخلی سطحی مانند S_1, S_2 و غیره $\int_{S_1} B \cdot da = \int_{S_1'} B' \cdot da'$

نتیجه‌گیری: $(B) = B'$: میانگین فضایی میدان مغناطیسی داخلی با میانگین میدان B' که توزیع جریان معادل، که در بالا توصیف شد، در همان نقطه در خلأ تولید می‌کند هم‌ارز است (همراه با هر چشمهٔ خارجی).



شکل ۱۱-۲۰ مغناطش غیریکنواخت با چگالی جریان حجمی هم‌ارز است.

(شکل ۱۱-۲۰ ج). برای به‌دست آوردن جریان در واحد سطح که در جهت x وجود دارد باید ΔI را در تعداد قطعات در واحد سطح، که برابر است با $1/(\Delta y \Delta z)$ ضرب کنیم. بنابراین

$$J_x = \Delta I \left(\frac{1}{\Delta y \Delta z} \right) = c \frac{\partial M_z}{\partial y} \quad (۴۵)$$

راه دیگر به‌دست آوردن جریان در جهت x آن است که مؤلفه y مغناطش در جهت z تغییر کند. اگر این مورد را، با استفاده از ستون عمودی قطعات دنبال کنید، درمی‌یابید که چگالی جریان

در جهت x از رابطه زیر به دست می آید

$$J_x = -c \frac{\partial M_y}{\partial z} \quad (۴۶)$$

به طور کلی، با برهم نهی این دو مورد داریم

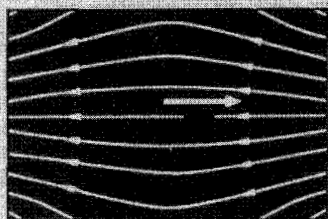
$$J_x = c \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) = c(\text{curl } \mathbf{M})_x \quad (۴۷)$$

که برای اثبات معادله ۴۳ کافی است.

۹-۱۱ میدان یک آهنربای دائمی

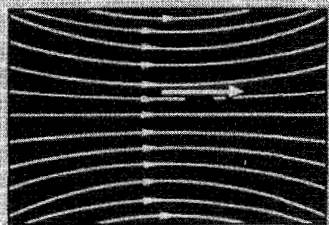
ما، حتی در آزمایشگاه به ندرت با کره‌ها و میله‌های قطبیده‌ای مواجه می‌شویم که در فصل ۱۰ درباره آنها صحبت کردیم. در بعضی مواد قطبش الکتریکی منجمد شده است، اگرچه اغلب به صورت تراکم بار آزاد تغییر شکل می‌دهد. برای به دست آوردن شکل ۱۱-۳ الف که میدان یک میله قطبیده را نشان می‌دهد، از دو قرص باردار استفاده شده است. از طرف دیگر، مواد با قطبش مغناطیسی دائمی، یعنی مغناطش دائمی شناخته شده و سودمند هستند. آهنرباهای دائمی را می‌توان با بهره‌گیری از بسیاری از آلیاژها و ترکیبات مواد فرومغناطیسی ساخت. این پرسش را که چه چیزی این امکان را فراهم می‌سازد به بخش ۱۱-۱۱ موکول و در آن فیزیک فرومغناطیسی را به اختصار بررسی می‌کنیم. در این بخش، با مسلم فرض کردن وجود آهنرباهای دائمی، می‌خواهیم میدان مغناطیسی \mathbf{B} یک میله استوانه‌ای را که به طور یکنواخت مغناطیده است بررسی و آن را با میدان الکتریکی \mathbf{E} برای یک میله قطبیده با همان شکل مقایسه کنیم.

شکل ۱۱-۲۱ مقطع هر یک از این استوانه‌های توپر را نشان می‌دهد. در هر مورد قطبش موازی محور و یکنواخت است. یعنی قطبش \mathbf{p} و مغناطش \mathbf{M} در تمام نقطه‌های داخل استوانه‌های مربوطه اندازه و جهت یکسانی دارند. که در حالت مغناطیسی، یکسان بودن تعداد اسپینهای الکترون همخط و هم جهت را در هر میلی متر مکعب از آهنربای دائمی ایجاب می‌کند. (با مواد آهنربای دائمی جدید می‌توان به تقریب خوبی از این حالت دست یافت.) منظورمان از میدان داخل استوانه، البته میدان ماکروسکوپی است که به صورت میانگین فضایی میدان میکروسکوپی تعریف شده است. با در نظر گرفتن این موضوع، خطوط میدان را هم در داخل و هم در خارج از میله‌ها در شکل ۱۱-۲۱ نشان داده‌ایم. به هر حال، این میله‌ها نباید نزدیک یکدیگر باشند؛ بلکه فقط برای



E

(الف)



شکل ۱۱-۲۱ (الف) میدان الکتریکی E در خارج و داخل یک استوانه با قطبیدگی یکنواخت. (ب) میدان مغناطیسی B در خارج و داخل یک استوانه با مغناطیدگی یکنواخت. در هر مورد، میدان داخلی میکروسکوپی، یعنی میانگین موضعی میدان اتمی یا میکروسکوپی، نشان داده شده است.

سهولت مقایسه نمودارها را در کنار هم گذاشته‌ایم. هر میله منزوی شده است و در فضایی قرار دارد که حاوی میدان دیگری نیست. (اگر میله‌ها نزدیک یکدیگر بودند، فکر می‌کنید کدام میله میدان میله دیگر را سخت مختل می‌کرد؟)

در خارج از میله‌ها میدانهای E و B یکسان به نظر می‌رسند. در واقع خطهای میدان مسیر یکسانی را دنبال می‌کنند. این تعجب‌آور نیست اگر به خاطر آورید که میدانهای دور برای دوقطبی الکتریکی و دوقطبی مغناطیسی مشابه هستند. هر تکه کوچک آهنربا یک دوقطبی مغناطیسی، و هر تکه کوچک میله قطبیده (گاهی الکتروت خوانده می‌شود) یک دوقطبی الکتریکی است، و میدان خارجی برهم‌نهی همه میدانهای دور است.

میدان B ، در داخل و خارج، همان میدان غلاف استوانه‌ای جریان است. در واقع اگر سیمولۀ نازکی متشکل از یک لایه سیم را روی استوانه مقوایی می‌پیچیدیم، می‌توانستیم یک باتری به آن بیاویزیم و نسخه بدل میدان خارجی و داخلی B یک آهنربای دائمی را به دست آوریم. (البته پیچۀ داغ، و باتری خالی می‌شود؛ اسپینهای الکترون، جریان آزاد و بدون اصطکاک را به وجود می‌آورند!) میدان الکتریکی E ، هم در داخل و هم در خارج از میله قطبیده، میدان دو قرص باردار است، که در دو انتهای استوانه قرار دارند.

توجه کنید که شکل میدانهای داخلی E و B اصولاً متفاوت است: B به طرف راست است، در دو انتهای استوانه پیوسته است و جهت آن در سطح استوانه‌ای به سرعت تغییر می‌کند. E به

طرف چپ است، از سطح استوانه‌ای چنان می‌گذرد که گویی سطحی وجود ندارد، اما در دو انتهای استوانه ناپیوسته است. این تفاوتها ناشی از تفاوت بین "داخل" دوقطبی الکتریکی و "داخل" دوقطبی مغناطیسی فیزیکی است که در شکل ۱۱-۸ مشاهده می‌شود. منظور از فیزیکی چیزی است که طبیعت در اختیار ما قرار داده است.

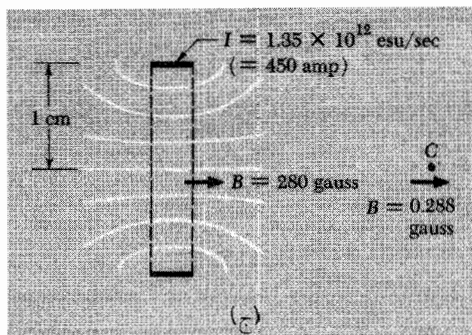
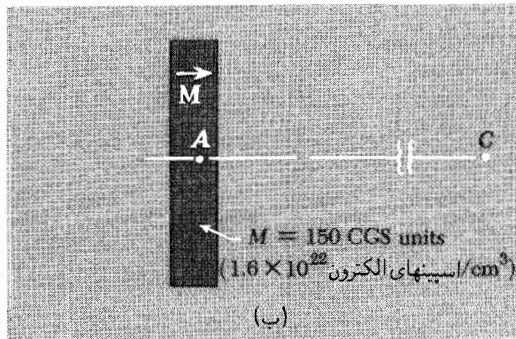
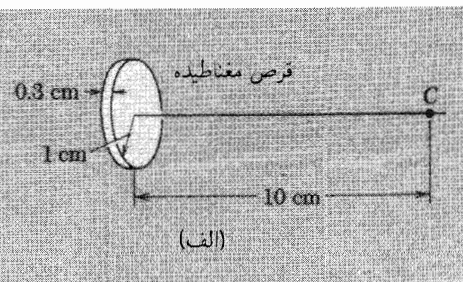
اگر فقط به میدان خارجی علاقه‌مند بودیم، می‌توانستیم از هر کدام از تصاویر برای توصیف آهنربایمان استفاده کنیم. می‌توانستیم بگوییم که میدان مغناطیسی آهنربای دائمی ناشی از لایه‌ای از بار مغناطیسی مثبت است — یک چگالی سطحی قطبهای شمال مغناطیسی در انتهای دست راست آهنربا و لایه‌ای از بار منفی مغناطیسی، قطبهای جنوب، در انتهای دیگر. می‌توانستیم یک تابع پتانسیل زده‌ای φ_{mag} را چنان اختیار کنیم که $\mathbf{B} = -\text{grad}\varphi_{\text{mag}}$ باشد تابع پتانسیل φ_{mag} با چگالی قطب غیرواقعی همان رابطه‌ای را دارد که پتانسیل الکتریکی با چگالی بار دارد. سادگی پتانسیل زده‌ای در مقایسه با پتانسیل برداری تا اندازه‌ای دلپذیر است. به علاوه، پتانسیل زده‌ای مغناطیسی را می‌توان به صورت تر و تمیز به جریانهای مربوط کرد که چشمه‌های واقعی \mathbf{B} هستند، و در نتیجه می‌توان بدون استفاده صریح از قطبها از پتانسیل زده‌ای بهره گرفت. می‌توانید در طراحی آهنرباها و یا محاسبه میدانهای مغناطیسی از این ترفند استفاده کنید.

اما اگر بخواهید میدان داخل مواد مغناطیسی را درک کنید، باید تصور قطب مغناطیسی را رها کنید. با استفاده از انحراف ذرات باردار پر انرژی در آهن مغناطیده، و همچنین اثرات مغناطیسی بر نوترونهای کند که به آسانی از ماده می‌گذرند نشان داده شده است که میدان مغناطیسی ماکروسکوپی در داخل یک آهنربای دائمی به جای اینکه مانند شکل ۱۱-۲۱ الف باشد، چون شکل ۱۱-۲۱ ب است.

شکل ۱۱-۲۲ الف یک آهنربای دائمی به شکل قرص را نشان می‌دهد که در آن مغناطش با محور تقارن موازی است. احتمالاً بیشتر آهنرباهایی را دیده‌اید که میله‌ای شکل‌اند. اما با استفاده از برخی مواد جدید، می‌توان آهنربایی به شکل قرص مسطح با شدت قابل ملاحظه ساخت. مغناطش M برحسب یکاهای CGS برابر است با 150 . گشتاور مغناطیسی الکترون برابر است با $10^{-20} \times 93$ ارگ بر گاوس، بنابراین این مقدار M متناظر با $10^{22} \times 1.6$ اسپین الکترون همخط شده در سانتی متر مکعب است. این قرص با یک نوار جریان با چگالی سطحی $\mathcal{J} = cM$ در لبه آن هم‌ارز است. در این لبه به عرض 3 cm ، جریان برابر است با

$$0.3cM = (0.3)(3 \times 10^{10})(150)$$

یا $1.35 \times 10^{12} \text{ esu/s}$ ، یعنی مقدار 45° آمپر—یعنی بیش از جریانی است که از یک باتری



شکل ۱۱-۲۲ (الف) قرصی که به صورت یکنواخت موازی با محورش مغناطیسه است. (ب) منظره سطح مقطع قرص. (ج) جریان هم‌ارز یک نوار جریان به مقدار 1.35×10^{12} esu/s یا 450 A است که در لبه قرص جریان دارد. میدان مغناطیسی B با میدان یک سیم‌لوله بسیار کوتاه، یا تقریباً میدان یک حلقه ساده جریان به شعاع 1 سانتی‌متر هم‌ارز است.

اتومبیل در مدار کوتاه می‌کشید! میدان B در هر نقطه فضا، از جمله نقطه‌های داخل قرص، همان میدان نوار جریان است. به عنوان مثال، B در حوالی مرکز قرص تقریباً برابر است با

$$B = \frac{2\pi I}{rc} = \frac{2\pi(0.3cM)}{rc} = \frac{2\pi(0.3)(150)}{(1.0)} = 280 \text{ G} \quad (48)$$

در این تقریب فرض می‌کنیم که همه جریان در نواری به عرض 0.3 سانتی‌متر در یک حلقه نازک متمرکز است. (در تقریب همانند در مثال الکتریکی فرض کردیم که ورقه‌های بار معادل در مقایسه با فاصله‌شان بزرگ هستند.) محاسبه میدان در یک نقطه دور دست برای یک حلقه جریان آسان است، اما می‌توانیم، در یک محاسبه تقریبی، مانند مورد الکتریکی عمل کنیم. یعنی، می‌توانیم گشتاور مغناطیسی کل جسم را بیابیم، و میدان دور یک دوقطبی با شدت را به دست آوریم.

۱۱-۱۰ جریانهای آزاد، و میدان \mathbf{H}

فرق گذاشتن بین جریانهای مقید و آزاد اغلب مفید است. جریانهای مقید جریانهای مربوط به گشتاورهای مولکولی یا اتمی، از جمله گشتاور ذرات اسپین دار است. حلقه‌های جریان مولکولی که آمپر مجسم می‌کرد، چشمه مغناطیسی است که اکنون بررسی می‌کنیم. جریانهای آزاد جریانهای رسانش معمولی هستند که در مسیره‌های ماکروسکوپیکی جاری هستند — جریانهایی که می‌توان آنها را با یک کلید به راه انداخت و متوقف کرد و با یک آمپرسنج اندازه گرفت.

چگالی جریان \mathbf{J} در معادله ۴۳ میانگین ماکروسکوپیکی جریانهای مقید است، پس بگذارید از این پس آن را با $\mathbf{J}_{\text{مقید}}$ نشان دهیم:

$$\mathbf{J}_{\text{مقید}} = c \operatorname{curl} \mathbf{M} \quad (49)$$

در سطحی که \mathbf{M} ناپیوسته است، مانند کناره یک قطعه مغناطیسه در شکل ۱۱-۱۷، دارای یک چگالی سطحی \mathcal{J} هستیم که نشاندهنده جریان مقید نیز هست.

متوجه می‌شویم که ارتباط \mathbf{B} ، هم در خارج از ماده و هم به‌عنوان میانگین فضایی در داخل ماده، با $\mathbf{J}_{\text{مقید}}$ مانند ارتباط با هر چگالی جریان دیگر است. یعنی $\operatorname{curl} \mathbf{B} = (4\pi/c) \mathbf{J}_{\text{مقید}}$. اما این رابطه مربوط به حالتی است که جریانهای آزاد وجود ندارند. اگر این جریانها را در نظر بگیریم، میدان حاصل از آنها به سادگی به میدان حاصل از ماده مغناطیسه اضافه می‌شود و داریم

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{J}_{\text{مقید}} + \mathbf{J}_{\text{آزاد}}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{کل}} \quad (50)$$

بگذارید $\mathbf{J}_{\text{مقید}}$ را با استفاده از معادله ۴۹ برجسب \mathbf{M} بیان کنیم. در این صورت معادله ۵۰ به صورت زیر درمی‌آید

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (c \operatorname{curl} \mathbf{M}) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{آزاد}}$$

که می‌تواند به صورت زیر مرتب شود

$$\operatorname{curl} (\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{آزاد}} \quad (51)$$

اکنون اگر یک تابع برداری $\mathbf{H}(x, y, z)$ را در هر نقطه از فضا به صورت زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} \quad (52)$$

معادله ۵۱ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\text{curl} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{آزاد}} \quad (\text{الف-۵۳})$$

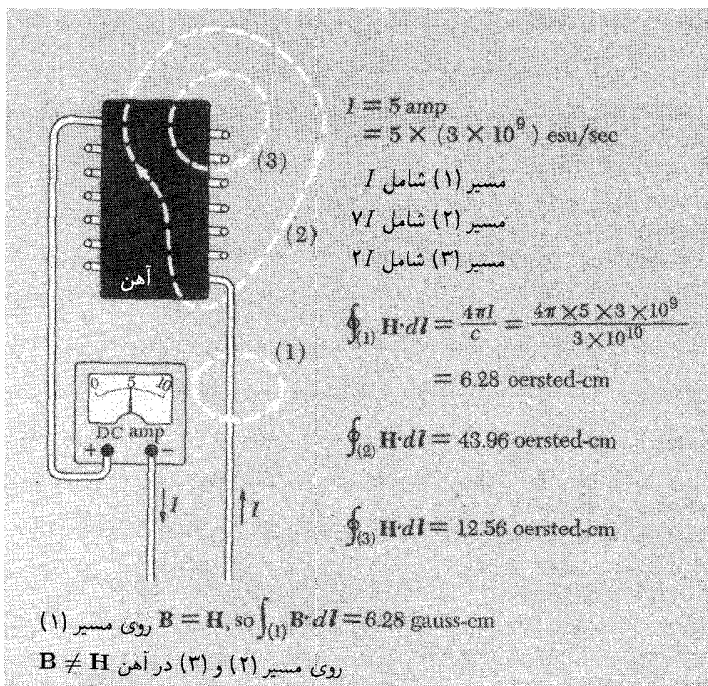
به عبارت دیگر، رابطه بردار \mathbf{H} ، که با معادله ۵۲ تعریف می‌شود، با جریان آزاد، همان رابطه \mathbf{B} با جریان کل، یعنی مفید به اضافه آزاد است. اما این هم سنگی کامل نیست، زیرا همواره $\text{div} \mathbf{B} = 0$ در حالی که دیورژانس تابع برداری \mathbf{H} الزاماً صفر نیست.

این موضوع حتماً بردار \mathbf{D} را به یاد شما می‌آورد که در فصل قبل، تا اندازه‌ای با بی‌میلی، وارد کردیم. به یاد آورید که ارتباط \mathbf{D} با بار آزاد همان ارتباط \mathbf{E} بود با بار کل. اگرچه به \mathbf{D} اهمیت چندانی ندادیم، اما بردار \mathbf{H} ، به دلیلی عملی که به فهمیدنش می‌ارزد، واقعاً مفید است. در سیستم‌های الکتریکی، آنچه می‌توانیم به راحتی کنترل و اندازه‌گیری کنیم، اختلاف پتانسیل اجسام است و نه مقدار بار آزاد بر روی آنها. بنابراین، میدان الکتریکی \mathbf{E} را مستقیماً کنترل می‌کنیم. اما کنترل \mathbf{D} از عهده ما خارج است، و چون به هر حال کمیتی بنیادی نیست، آنچه بر سرش می‌آید اهمیت چندانی ندارد اما در سیستم‌های مغناطیسی، جریانهای آزاد درست چیزی است که می‌توان به راحتی کنترل کرد. ما این جریانها را در سیمها هدایت می‌کنیم، آنها را با آمپرسنج اندازه می‌گیریم، با عایق‌بندی آنها را به بسترهای خوش‌تعریف می‌رانیم و غیره. به‌عنوان یک قاعده، ما کنترل کمتری بر مغناطش و در نتیجه \mathbf{B} داریم. بنابراین بردار کمکی \mathbf{H} مفید است، اگرچه \mathbf{D} چنین نیست. رابطه انتگرالی هم‌ارز معادله ۵۳-الف عبارت است از

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{J}_{\text{آزاد}} \cdot d\mathbf{a} = \frac{4\pi}{c} I_{\text{آزاد}} \quad (\text{الف-۵۴})$$

که در آن $I_{\text{آزاد}}$ جریان آزاد کلی است که مسیر C را در بر می‌گیرد. فرض کنید که پیچهای را حول یک قطعه آهن بیچیم و جریان I را، که می‌توان با اتصال یک آمپرسنج به‌طور سری اندازه گرفت، در آن بفرستیم این یک جریان آزاد، و تنها جریان آزاد در سیستم است. بنابراین، چیزی که به‌طور قطع می‌دانیم انتگرال خطی \mathbf{H} حول هر مسیر بسته است، چه این مسیر از آهن بگذرد و چه نگذرد. انتگرال فقط به تعداد دورهای پیچ که توسط این مسیر به هم مربوط شده‌اند، بستگی دارد و به مغناطش آهن بستگی ندارد. تعیین \mathbf{M} و \mathbf{B} در این سیستم ممکن نسبتاً مشکل باشد. انتخاب یک کمیت که بتوان آن را مستقیماً تعیین کرد مفید است.

شکل ۱۱-۲۳ این ویژگی \mathbf{H} را با یک مثال نشان می‌دهد، و یادآور یکاهایی است که می‌توان در عمل به‌کار برد. H همان بُعد B را دارد؛ در سیستم CGS گاوسی ارتباط آنها جریان برحسب esu/s



شکل ۱۱-۲۳ نمایش رابطه بین جریان آزاد و انتگرال خطی H.

درست مانند هم است. همان طور که می دانید، یکای شدت میدان مغناطیسی گاوس نامگذاری شده است. ضرورتی ندارد که نام دیگری بر یکای H بگذاریم. با وجود این، افرادی که علاقه مند به نامگذاری چیزها هستند یکای H را ارستد نامیده اند که نامی مخصوص به خود آن است. چون خواهید دید که این نام در جای دیگر نیز به کار می رود، آن را در شکل ۱۱-۲۳ معرفی کرده ایم.

ما B را بردار میدان مغناطیسی بنیادی در نظر می گیریم زیرا نبود بار مغناطیسی، که در بخش ۱۰-۲ بررسی کردیم، ایجاب می کند که در همه جا حتی در داخل آنها و مولکولها $\text{div } B = 0$ باشد. از $\text{div } B = 0$ ، همان طور که در بخش ۱۱-۸ نشان دادیم، نتیجه می گیریم که میانگین میدان ماکروسکوپی در داخل ماده B است نه H . به پیامدهای این مطلب در گذشته همواره توجه نشده و حتی به درستی فهمیده نشده اند. به هر حال، H امتیازهایی عملی دارد که قبلاً بیان کردیم. در بعضی کتابهای قدیمی تر می بینید که H به عنوان میدان مغناطیسی اولیه معرفی شده است. سپس B به صورت $H + 4\pi M$ تعریف، و القایش مغناطیسی نامیده می شود. حتی بعضی از نویسندگان جدید که B را میدان اولیه در نظر می گیرند خود را ملزم می دانند که آن را القایش مغناطیسی بنامند زیرا نام میدان مغناطیسی به لحاظ تاریخی بر H تقدم داشته است

این موضوع دست و پاگیر و پا در هوا به نظر می‌رسد. اگر به آزمایشگاه بروید و از یک فیزیکدان پرسید چه باعث می‌شود که مسیر پیوندها در اتاقک حباب خمیده شود، پاسخ او به احتمال زیاد "میدان مغناطیسی" خواهد بود و نه "القایش مغناطیسی". به ندرت می‌شنوید که یک ژئوفیزیکدان درباره القایش مغناطیسی زمین یا یک اختر فیزیکدان راجع به القایش مغناطیسی در کهکشان صحبت کند. پیشنهاد می‌کنیم که \mathbf{B} را همچنان میدان مغناطیسی بنامیم. اما برای \mathbf{H} ، اگرچه نامهای دیگری برای آن اختراع شده است، اما ما آن را میدان \mathbf{H} ، و یا حتی میدان مغناطیسی \mathbf{H} خواهیم خواند.

این نامهاست که باعث دردرس می‌شود، نه نمادها. همه توافق دارند که در دستگاه CGS گاوسی رابطه میان \mathbf{B} ، \mathbf{M} و \mathbf{H} چیزی است که در معادله ۵۲ بیان شده است. در خلأ تفاوتی بین \mathbf{B} و \mathbf{H} وجود ندارد، زیرا در جایی که ماده نیست \mathbf{M} باید صفر باشد. اغلب می‌بینید که معادله‌های ماکسول برای میدانهای خلأ به جای \mathbf{E} و \mathbf{B} برحسب \mathbf{E} و \mathbf{H} نوشته می‌شوند. برحسب یکاهای SI رابطه بین \mathbf{H} و جریان آزاد به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{آزاد}} \quad (۵۳\text{-ب})$$

که معادل انتگرالی آن به صورت زیر است:

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_{\text{آزاد}} \cdot d\mathbf{a} = I_{\text{آزاد}} \quad (۵۴\text{-ب})$$

چون $\mathbf{J}_{\text{آزاد}}$ برحسب آمپر بر مترمکعب بیان می‌شود، یکای \mathbf{H} آمپر بر متر است. در فضای تهی $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$. هنگامی که از یکاهای SI در توصیف موج الکترومغناطیسی استفاده می‌کنیم، معمولاً به جای \mathbf{B} و \mathbf{E} از \mathbf{H} و \mathbf{E} برای میدانهای مغناطیسی و الکتریکی استفاده می‌کنیم. برای موج تخت در فضای تهی که در بخش ۹-۴ مطالعه کردیم، در رابطه بین دامنه مغناطیسی H_0 برحسب آمپر بر متر و دامنه الکتریکی E_0 برحسب ولت بر متر ثابت $\sqrt{\mu_0}/\epsilon_0$ دخیل است که دارای بُعد مقاومت و مقدار تقریبی ۳۷۷ اهم است. برای مقدار دقیق آن، به پیوست ه نگاه کنید. قبلاً این ثابت را در بخش ۹-۶ دیدیم که در عبارت مربوط به چگالی توان موج تخت در معادله ۲۸ ظاهر شد. شرایط نظیر E_0 و B_0 ، که برحسب یکاهای CGS با معادله ۲۰ در بخش ۹-۴ بیان شد، برحسب یکاهای SI به صورت زیر درمی‌آید

$$E_0 \text{ (V/m)} = H_0 \text{ (A/m)} \times 377 \Omega \quad (۵۵)$$

این یک دستگاه یکای مناسب برای بررسی میدانهای الکترومغناطیسی در خلأ است که چشمه‌های آن جریانها و ولتاژهای متناوب هستند. اما به خاطر داشته باشید که میدان مغناطیسی بنیادی در داخل ماده B است نه H که در بخش قبل به دست آوردیم. موضوع تنها مربوط به تعریف نیست، بلکه پیامد نبود بار مغناطیسی است.

رابطه H با B و M در شکل ۱۱-۲۴ برای هر دو دستگاه یکا نشان داده شده است. این رابطه‌ها چه M با B متناسب باشد و چه نباشد برقرارند. اما اگر M با B متناسب باشد، با H نیز متناسب خواهد بود. در واقع، تعریف سنتی پذیرفتاری مغناطیسی حجمی χ_m ، مقداری نیست که از نظر منطقی برتر و با رابطه ۳۹ داده شده است، بلکه مقدار زیر است

$$M = \chi_m H \quad (۵۶)$$

که از این پس با بی‌میلی می‌پذیریم.

آهنربای دائمی در شکل ۱۱-۲۱ ب مثال آموزنده‌ای از رابطه H با B و M است. برای به دست آوردن H در نقطه‌ای در داخل ماده مغناطیده، باید میدان مغناطیسی B در آن نقطه را با بردار $4\pi M$ - جمع برداری کنیم. شکل ۱۱-۲۵ این را برای نقطه معین P نشان می‌دهد. معلوم شده است که خطهای H در داخل آهنربا درست مثل خطهای E در داخل استوانه قطبیده شکل ۱۱-۲۱ الف است. این همان چیزی است که باید باشد، زیرا اگر در واقع قطبهای مغناطیسی به جای جریانهای مغناطیسی چشمه مغناطش بودند، میدان مغناطیسی ماکروسکوپی در داخل ماده H بود نه B ، و شباهت بین قطبش مغناطیسی، و قطبش الکتریکی کامل می‌شد.

در آهنربای دائمی هیچ جریان آزادی وجود ندارد. در نتیجه، انتگرال خطی H بنابه معادله ۵۴ باید حول هر مسیر بسته صفر باشد. می‌توان دید که خطهای H باید واقعاً شبیه خطهای E در شکل ۱۱-۲۱ الف باشند، زیرا همان‌طور که می‌دانیم انتگرال خطی میدان الکتروستاتیک حول هر مسیر بسته صفر است. در این مثال آهنربای دائمی، معادله ۵۶ به کار نمی‌رود. بردار مغناطش M با H متناسب نیست، بلکه به طرز عمل آوردن ماده بستگی دارد. اینکه چرا این‌طور می‌شود را در بخش بعد بیان خواهیم کرد.

برای هر ماده‌ای که در آن M با H متناسب باشد، به طوری که علاوه بر رابطه بنیادی ۵۲، معادله ۵۶ نیز به کار رود، داریم:

$$B = H + 4\pi M = (1 + 4\pi\chi_m)H \quad (۵۷)$$

$$m = \frac{IA}{c}$$

esu_s s⁻¹
cm²

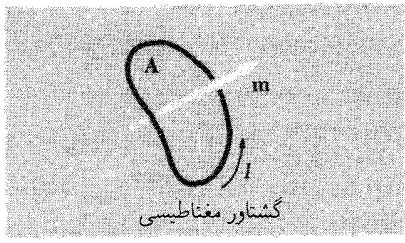
$$G^{-1}$$

$$B = \frac{2m}{r^3}$$

cm³

$$H = B$$

oersted



$$m = IA$$

ampere
meter²

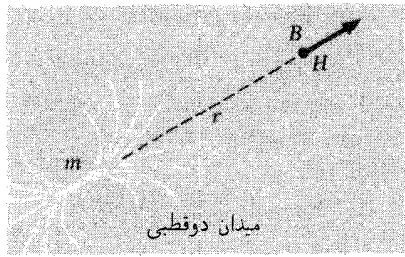
$$\text{joule-tesla}^{-1}$$

$$B = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{2m}{r^3}$$

meter³

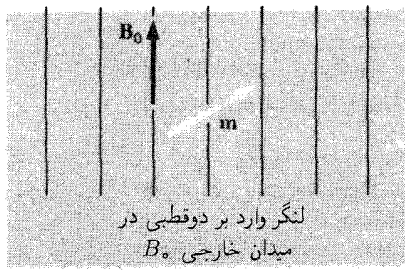
$$H = \frac{B}{\mu_0}$$

amp-meter⁻¹



$$\text{لنگر} = m \times B_0$$

dyne-cm



$$\text{لنگر} = m \times B_0$$

newton-meter

گشتاور در ۱ سانتیمترمکعب

$$\text{erg-G}^{-1} \text{cm}^{-3}$$

$$\text{curl } \mathbf{M} = \frac{1}{c} \mathbf{J}_{\text{مقد}}$$

esu-sec⁻¹cm⁻²



گشتاور در ۱ سانتیمترمکعب

$$\text{joule-tesla}^{-1} \text{meter}^{-3}$$

$$\text{curl } \mathbf{M} = \mathbf{J}_{\text{مقد}}$$

amp-meter⁻²

$$\text{curl } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{J}_{\text{آزاد}} + \mathbf{J}_{\text{مقد}})$$

$$\text{curl } \mathbf{B} = (\mathbf{J}_{\text{آزاد}} + \mathbf{J}_{\text{مقد}})$$

تعریف: $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$

تعریف: $\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}$

سپس: $\text{curl } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{آزاد}}$

سپس: $\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{مقد}}$

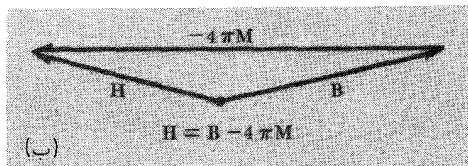
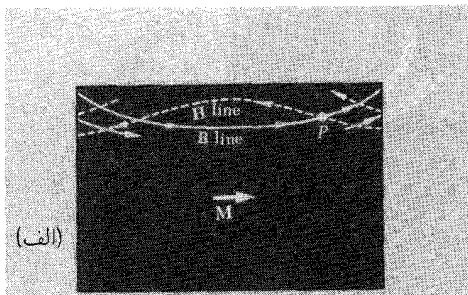
یا $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I_{\text{آزاد}}$

esu-sec⁻¹

یا $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{آزاد}}$

آمپر

شکل ۱۱-۲۴ خلاصه رابطه‌هایی که شامل B, H, M, m, J_{آزاد} و J_{مقد} هستند.



شکل ۱۱-۲۵ (الف) رابطه B, H و M در نقطه‌ای در داخل استوانه مغناطیده آهن شکل ۱۱-۲۱ ب. (ب) رابطه بردارها در نقطه P .

B با H متناسب است. ضریب تناسب $(1 + 4\pi\chi_m)$ را گذردهی مغناطیسی می‌نامند و معمولاً با μ نشان می‌دهند:

$$B = \mu H \quad (58)$$

در توصیف فرومغناطیسی، معمولاً به جای پذیرفتاری χ از گذردهی μ استفاده می‌شود.

۱۱-۱۱ فرومغناطیسی

فرومغناطیسی مدت زیادی است که به انسان خدمت و او را شگفت‌زده کرده است. آهن‌ربا (مگنتیت) را در عهد باستان می‌شناختند، و شاید در تاریخ آهن فقط تأثیر آن به شکل شمشیر از تأثیرش به صورت عقربه قطب‌نما مهم‌تر باشد. برای مدتی بیش از یک قرن فن‌آوری الکتریکی به شدت وابسته به این بود که فقط یک فلز فراوان دارای این ویژگی عجیب است. با وجود این، فقط در سالهای اخیر شناختی بنیادی از فرومغناطیسی حاصل شده است.

قبلاً برخی ویژگیهای فرومغناطیسی را بیان کردیم. در یک میدان مغناطیسی بسیار قوی نیروی وارد بر یک ماده فرومغناطیسی در جهتی است که آن را، مانند ماده پارامغناطیسی، به داخل میدان شدیدتر می‌کشد، اما این نیرو به جای تناسب با حاصلضرب B و گرادیان آن، با خود گرادیان متناسب است. همان‌طور که در پایان بخش ۱۱-۴ گفتیم، این نشان می‌دهد که اگر میدان به اندازه کافی قوی باشد، گشتاور مغناطیسی ماده فرومغناطیسی به یک مقدار حدی خواهد رسید. جهت

بردار گشتاور مغناطیسی را هنوز میدان کنترل می‌کند، زیرا در غیر این صورت نیرو همواره در جهت شدت میدان فزاینده وارد نخواهد شد.

در آهنرباهای دائمی حتی بدون اعمال یک میدان خارجی یک گشتاور مغناطیسی مشاهده می‌کنیم، و اندازه و جهت این گشتاور با اعمال میدان خارجی، در صورتی که بسیار قوی نباشد، حفظ می‌شود. میدان آهنربای دائمی البته همیشه وجود دارد، و ممکن است به این فکر بیفتید که آیا نمی‌تواند چشمه‌های خود را همخط نگه دارد. اما، اگر مجدداً به شکل ۱۱-۲۱ ب و ۱۱-۲۵ بنگرید، متوجه می‌شوید که M معمولاً با B یا H موازی نیست. این نشان می‌دهد که دوقطبیهای مغناطیسی باید با چیزی سواى نیروهای مغناطیسی خالص مقید شده باشند.

مغناطش مشاهده شده در مواد فرومغناطیسی بسیار بیش از آن است که در مواد پارامغناطیسی با آن سروکار داریم. آهنرباهای دائمی معمولاً دارای میدانهایی در گستره چند هزار گاوس هستند. کمیت مشخصه این مواد بیشتر مقدار حدی مغناطشی، گشتاور مغناطیسی بر واحد حجم، است که ماده در یک میدان بسیار قوی به دست می‌آورد. این را مغناطش اشباع می‌نامند. می‌توان مغناطش اشباع آهن را از داده‌های جدول ۱۱-۱ اسنتاج کرد. در یک میدان با گرادیان ۱۷۰۰ گاوس بر سانتی‌متر، نیروی وارد بر ۱ گرم آهن برابر است با ۴×۱۰^۵ دین. از شکل ۱۹، که نیروی وارد بر دوقطبی را به گرادیان میدان ربط می‌دهد، درمی‌یابیم که

$$m = \frac{F}{dB/dz} = \frac{4 \times 10^5 \text{ dyne}}{1700 \text{ G/cm}} \quad (59)$$

$$= 235 \text{ erg/G} \quad (\text{برای } 1 \text{ g})$$

برای به دست آوردن گشتاور بر سانتی‌مترمکعب m را در چگالی آهن، ۷.۸ گرم بر سانتی‌مترمکعب، ضرب می‌کنیم. بنابراین مغناطش M برابر است با

$$M = 235 \times 7.8 = 1830 \text{ erg/G-cm}^3 \quad (60)$$

باید به جای M ، مقدار $4\pi M$ را با شدت میدان برحسب گاوس مقایسه کنیم. جالبتر است ببینیم که این مغناطش با چند گشتاور اسپین الکترون متناظر است. با تقسیم M بر گشتاور الکترون که در شکل ۱۱-۱۴ داده شده است، $10^{-20} \times 9.3$ ارگ بر گاوس، مقدار حدود 2×10^{23} گشتاور اسپین بر سانتی‌مترمکعب را به دست می‌آوریم. اما 1 سانتی‌مترمکعب آهن حاوی در حدود 10^{23} اتم است. به نظر می‌رسد که مغناطش اشباع متناظر با حدود 2 اسپین به خط شده به ازای هر اتم است. چون بیشتر الکترونهاى اتم زوج شده‌اند و هیچ نوع اثر مغناطیسی

ندارند، این نشان می‌دهد که ما اساساً با همخطی کامل اسپین الکترونی‌های در ساختار اتم سروکار داریم که می‌توانند آزادانه در یک جهت قرار گیرند.

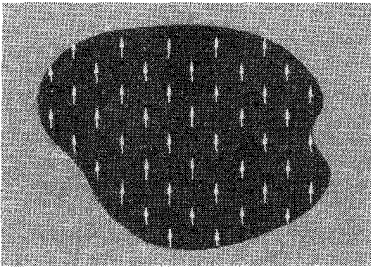
یک واقعیت جالب دربارهٔ فرومغناطیسی به صورت زیر است: یک مادهٔ فرومغناطیسی معین، مثلاً آهن خالص، ویژگی‌های فرومغناطیسی خود را، اگر تا دمای معینی گرم شود، ناگهان از دست می‌دهد. در بالاتر از 77°C ، آهن خالص رفتاری همانند یک مادهٔ پارامغناطیسی دارد. اگر تا کمتر از 77°C سرد شود، بلافاصله ویژگی‌های فرومغناطیسی را به دست می‌آورد. این دمای گذار، که به افتخار پی‌یر کوری، که یکی از محققان اولیه در این زمینه بود، نقطهٔ کوری نامیده می‌شود، برای مواد مختلف فرق می‌کند. برای نیکل خالص این دما 358°C است.

این رفتار فرومغناطیسی چیست که آشکارا آهن در دمای کمتر از 77°C را از آهن در دمای بیش از 77°C و مس را در هر دما متمایز می‌سازد؟ این خاصیت مربوط به همخط شدن خودبه‌خود گشتاورهای مغناطیسی اتمی در یک جهت است که همخطی محورهای اسپین بعضی الکترونها را در هر اتم آهن ایجاد می‌کند. منظور ما از خودبه‌خود، آن است که موردی برای دخالت هیچ میدان مغناطیسی خارجی وجود ندارد. در ناحیه‌ای از آهن که به اندازهٔ کافی بزرگ است تا حاوی چند میلیون اتم باشد، تقریباً همهٔ اسپین‌ها و گشتاورهای مغناطیسی در یک جهت قرار دارند. در دمای خیلی کمتر از نقطهٔ کوری — مثلاً دمای اتاق برای آهن — همخطی تقریباً کامل است. اگر بتوانید به صورت سحرآمیز به داخل بلور آهن فلزی نگاه کنید و گشتاورهای مغناطیسی بنیادی را به صورت بردارهایی با نوک پیکان بر روی آنها ببینید، شاید چیزی مانند شکل ۱۱-۲۶ را مشاهده کنید.

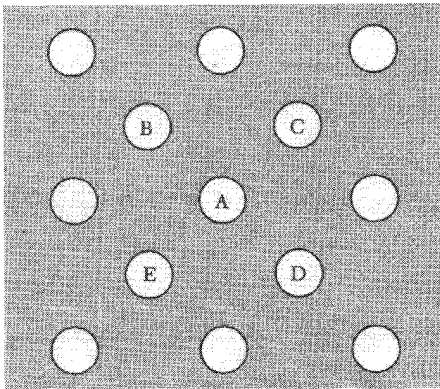
تعجب‌آور نیست که دمای زیاد این آرایش منظم را از میان ببرد. به عبارتی، انرژی گرمایی دشمن نظم است. یک بلور که آرایهٔ منظمی از اتم‌هاست، در دمای معینی، نقطهٔ ذوب، به مایع تبدیل می‌شود که ترتیبی بسیار نامنظم‌تر است. نقطهٔ ذوب، مانند نقطهٔ کوری، برای مواد مختلف متفاوت است. بگذارید در اینجا توجه خود را به خود حالت منظم معطوف کنیم. دو یا سه پرسش بدیهی هستند:

- پرسش ۱: چه چیزی باعث به خط شدن اسپین‌ها می‌شود و آنها را همخط نگه می‌دارد؟
- پرسش ۲: چگونه، بدون حضور یک میدان خارجی، اسپین‌ها یک جهت را برمی‌گزینند و نه جهت دیگر را؟ چرا گشتاورهای شکل ۱۱-۲۶ به طرف پایین، یا راست، یا چپ نیستند؟
- پرسش ۳: اگر گشتاورهای اتمی همه به خط شده‌اند، چرا هر قطعه آهن در دمای اتاق یک آهن‌ربای قوی نیست؟

پاسخ به این سه پرسش به ما کمک می‌کند، لااقل به‌طور کلی، که رفتار مواد فرومغناطیسی را



شکل ۱۱-۲۶ نظم جهت‌های اسپین در ناحیه کوچکی از بلور آهن. هر پیکان نشان‌دهنده گشتاور مغناطیسی یک اتم آهن است.

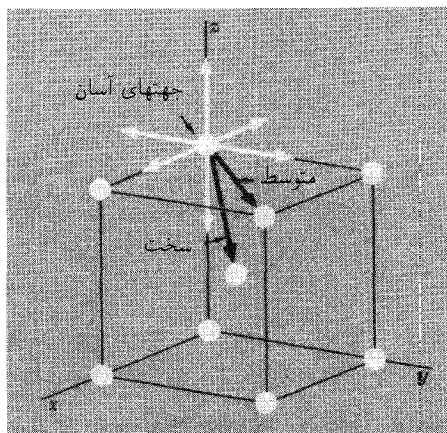


شکل ۱۱-۲۷ یک اتم A و نزدیکترین همسایگانش در شبکه بلور. (البته شبکه واقعی سه‌بعدی است.)

هنگامی که یک میدان خارجی، نه خیلی قوی و نه خیلی ضعیف، اعمال می‌شود درک کنیم. این رفتار شامل پدیده‌های گوناگونی است که تا کنون شرح نداده‌ایم.

پاسخ ۱. به دلایلی که به مکانیک کوانتومی ساختار اتم آهن مربوط می‌شود، موازی بودن اسپین اتمهای آهن مجاور از لحاظ انرژی مطلوب است. این به علت برهم‌کنش مغناطیسی نیست. بلکه اثری قویتر از آن است، به علاوه اسپینهای موازی چه به صورت $\uparrow\uparrow$ یا $\rightarrow\rightarrow$ مطلوب‌ترند. (برهم‌کنشهای دو قطبی به این صورت عمل نمی‌کنند - مسئله ۱۰-۱۷). حال اگر اتم A (شکل ۱۱-۲۷) بخواهد که اسپینش در همان جهت اسپین همسایگانش، اتمهای B, C, D و E باشد، و هر یک از آنها ترجیح بدهد که اسپینی در همان جهت اسپین همسایگانش از جمله اتم A داشته باشد، می‌توانید فوراً مجسم کنید که هرگاه یک اکثریت موضعی به وجود آید، تمایل شدیدی به "یکپارچگی وجود دارد" و این عادت گسترش می‌یابد.

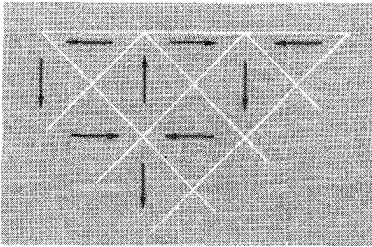
پاسخ ۲. با شروع از یک حالت نامنظم - به عنوان مثال اگر آهن بدون اعمال میدان خارجی تا کمتر از نقطه کوری سرد شود - گزینش یک جهت از میان جهت‌های هم‌ارز مختلف بلور تا اندازه‌ای



شکل ۱۱-۲۸ در آهن جهتی که از نظر انرژی برای مغناطش مطلوب است در امتداد بلور مکعبی قرار دارد.

به‌طور تصادفی صورت می‌گیرد. آهن خالص از بلورهای حجم مرکزدار تشکیل شده است. هر اتم هشت همسایه مجاور دارد. تقارن محیط بر همه جنبه‌های فیزیکی اتم، از جمله جفت‌شدگی میان اسپینها، اعمال می‌شود. در آهن محورهای مکعب اتفاقاً محور را راحت‌ترین مغناطش هستند. یعنی اسپینها علاقه‌مندند در همان جهت قرار بگیرند. اما اگر این جهت یکی از شش جهت $\pm\hat{x}$ ، $\pm\hat{y}$ ، $\pm\hat{z}$ باشد، آنها آن را حتی بیشتر دوست دارند (شکل ۱۱-۲۸). این مهم است زیرا به معنای آن است که اسپینها نمی‌توانند به راحتی از یک جهت دسته جمعی به جهت هم‌ارزی بچرخند که بر آن عمود است. برای این کار، آنها مجبورند از سمتگیریهایی بگذرند که کمتر مطلوب‌اند. درست همین عامل بازدارنده است که آهن‌رباهای دائمی را امکان‌پذیر می‌سازد.

پاسخ ۳. یک قطعه آهن که مغناطیده نیست در واقع از حوزه‌های بسیاری تشکیل شده است، در هر یک از این حوزه‌ها اسپینها در یک جهت به خط شده‌اند، اما این جهت با جهت اسپینها در حوزه مجاور فرق دارد. به‌طور میانگین در سراسر یک قطعه آهن "نامغناطیده"، همه جهت‌ها حضوری یکسان دارند، بنابراین بزرگ مقیاس میدان مغناطیسی به وجود نمی‌آید. حتی در یک تک‌بلور حوزه‌های مغناطیسی با برجا هستند. حوزه‌ها معمولاً به لحاظ معنای روزمره واژه، میکروسکوپی هستند. در واقع می‌توان آنها را با استفاده از یک میکروسکوپ کم‌قدرت رؤیت کرد. اما البته در مقیاس اتمی عظیم‌اند، بنابراین یک حوزه مغناطیسی نوعاً شامل میلیون‌ها گشتاور مغناطیسی بنیادی است. شکل ۱۱-۲۹ تقسیم به حوزه‌ها را نشان می‌دهد. تقسیم به حوزه‌ها از این رو پیش می‌آید که به لحاظ انرژی از آرایشی که در آن همه اسپینها در یک جهت باشد ارزانتر است. آرایش اخیر مربوط به یک آهن‌ربای دائمی با میدانی قوی است که به فضای اطراف آن گسترش می‌یابد. انرژی ذخیره شده در این میدان خارجی بیش از انرژی لازم برای چرخاندن کسر کوچکی از اسپینها در



شکل ۱۱-۲۹ آرایش ممکن حوزه‌های مغناطیسی در یک تک‌بلور یکنواخت آهن.

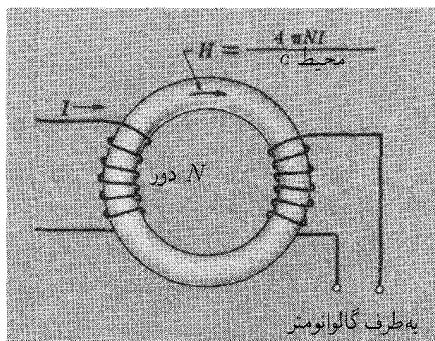
بلور، یعنی از خط خارج کردن اسپینهای موجود در مرز یک حوزه نسبت به همسایگان بلافاصل آنهاست. بنابراین ساختار حوزه حاصل یک پیامد کمینه کردن انرژی است.

اگر پیچیده‌ای را دور یک میله آهنی ببیچیم، می‌توانیم با گذراندن جریان از سیم یک میدان مغناطیسی به ماده اعمال کنیم. در این میدان، گشتاورهایی که موازی میدان هستند، انرژی کمتری از آنهایی دارند که با میدان پاد موازی هستند. این باعث مزیت بعضی حوزه‌ها نسبت به حوزه‌های دیگر می‌شود؛ گشتاورهای دارای جهت مساعد^۱، حتی الامکان به هزینه دیگران رشد می‌کنند. یک حوزه مانند یک کانون، با توسعه اعضایش، رشد می‌کند. این عمل در مرزها به وقوع می‌پیوندد. اسپینهای متعلق به یک حوزه نامساعد که در مجاورت یک حوزه با جهت مساعد قرار دارند، با پذیرش جهت مساعد به صف حامیان می‌پیوندند. این کار صرفاً مرز حوزه را، که چیزی نیست بجز فصل مشترک میان دو گروه اسپین، جابه‌جا می‌کند. این کار در یک تک‌بلور به آسانی صورت می‌گیرد. یعنی اعمال یک میدان بسیار ضعیف، با حرکت مرز، می‌تواند سبب رشد بسیار زیاد حوزه و در نتیجه تغییر کلی مغناطش شود. اما حرکت مرزهای حوزه، با توجه به ساختار دانه‌ای ماده می‌تواند مشکل باشد.

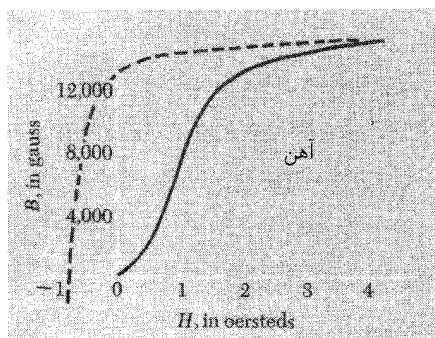
اگر میدان اعمال شده در امتداد یکی از جهت‌های "آسان" نباشد (به عنوان مثال، در مورد یک بلور مکعبی)، با تمام شدن حوزه‌های نامساعد هنوز گشتاورهایی باقی می‌مانند که دقیقاً موازی با میدان نیستند. اکنون ممکن است برای همخط کردن آنها با جهت میدان، به طوری که در نهایت بیشترین مغناطش ممکن را تولید کنند، میدان بسیار قویتری لازم باشد.

بیاید نگاهی به پیامدهای بزرگ مقیاس این مسئله بیندازیم که در رفتار مغناطیسی یک قطعه آهن در میدانهای مختلف ظاهر می‌شود. یک ترتیب آزمایشی مناسب، چنبره‌ای آهنی است که دو پیچ دور آن پیچیده‌ایم (شکل ۱۱-۳۰). این ترتیب عملاً یک میدان یکنواخت در آهن به وجود می‌آورد، بدون اینکه اثرات انتهایی ایجاد کند که مسئله را پیچیده می‌کند. با اندازه‌گیری ولتاژ القا

۱. در این بحث از اسپینها و گشتاورها به صورت مترادف استفاده می‌کنیم. گشتاور یک جنبه ذاتی اسپین است، و اگر یکی از آنها به خط شود دیگران هم می‌شوند. برای دقت بیشتر، باید یادآور شویم که برای الکترونها بردارهای گشتاور مغناطیسی و تکانه زاویه‌ای در جهت مخالف یکدیگر هستند (شکل ۱۱-۱۴).



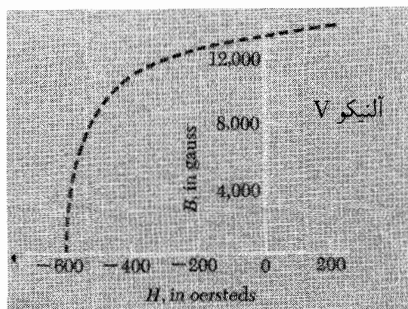
شکل ۱۱-۳۰ ترتیبی برای بررسی ارتباط بین M و B یا H و B در یک ماده فرومغناطیسی.



شکل ۱۱-۳۱ منحنی مغناطش آهن نسبتاً خالص. منحنی خط چین با کاهش H از یک مقدار مثبت زیاد به دست آمده است.

شده در یکی از پیچ‌ها می‌توانیم تغییرات شار Φ ، و در نتیجه تغییرات B در داخل آهن را تعیین کنیم. اگر رد این تغییرات در B را، با شروع از $B = 0$ ، دنبال کنیم، همواره می‌دانیم که B چیست. جریانی که از پیچ دیگری می‌گذرد H را تولید می‌کند، که آن را متغیری مستقل در نظر می‌گیریم. اگر B و H را بدانیم، همواره می‌توانیم M را محاسبه کنیم. معمولاً به جای M تغییرات B را برحسب H رسم می‌کنند. یک نمونه منحنی $B-H$ برای آهن در شکل ۱۱-۳۱ نشان داده شده است. توجه کنید که مقیاسهای محور طول و عرض تفاوتی بارز دارند. اگر آهنی در پیچ نبود، ارزش ۱ آرستد درست ۱ گاوس بود. هنگامی که میدان H فقط چند آرستد باشد، B به هزاران گاوس صعود می‌کند. البته در اینجا B و H مربوط به مقدار میانگین در کل حلقه آهنی است؛ در این حالت ساختار ریز حوزه‌ها هرگز خود را نشان نمی‌دهد.

با شروع از آهن نامغناطیده، $B = 0$ و $H = 0$ ، افزایش H سبب صعود B به صورتی کاملاً غیرخطی، در ابتدا آرام سپس با سرعت بیشتر، و پس از آن بسیار کند می‌شود و سرانجام هموار می‌شود. آنچه در نهایت ثابت می‌شود B نیست، بلکه M است. اما در این نمودار چون $M = (B - H)/4\pi$ و $H \ll B$ ، تفاوت بین B و $4\pi M$ محسوس نیست.



شکل ۱۱-۳۲ آلنیکوی V یک آلیاژ آلومینیم، نیکل، و کبالت است که برای آهنرباهای دائمی به کار می‌رود. این بخش منحنی مغناطش را با بخش نظیر منحنی مشخصه "ماده مغناطیسی نرم" که در شکل ۱۱-۳۱ نشان داده شده است مقایسه کنید.

در بخش پایینی منحنی $B-H$ حرکت مرزهای حوزه حکمفرماست، یعنی رشد حوزه‌هایی با "جهت درست" به هزینه حوزه‌هایی در "جهت غلط". در بخش هموار منحنی، گشتاورهای اتمی به کمک "نیروی وحشی" با میدان همخط می‌شوند. در اینجا آهن یک فلز چند بلوری است، بنابراین فقط کسر کوچکی از ریز بلورها این شانس را دارند که جهت آسانی برای به خط شدن با میدان داشته باشند. اکنون اگر جریان را در پیچه به آرامی کاهش دهیم، و بدین ترتیب H را کم کنیم، منحنی رد اولیه خود را دنبال نمی‌کند. بلکه رفتاری را به دست می‌آوریم که با منحنی خط چین در شکل ۱۱-۳۱ نشان داده شده است. این برگشت‌ناپذیری را پسمانی می‌نامند. این بیشتر بدین سبب است که حرکت‌های مرز حوزه تا اندازه‌های برگشت‌ناپذیر است. این دلایل با توجه به آنچه تاکنون گفته‌ایم بدیهی نیست، اما فیزیکدانهایی که در زمینه فرومغناطیسی کار می‌کنند آنها را به خوبی فهمیده‌اند. این برگشت‌ناپذیری یک دردسر است، و سبب اتلاف انرژی در بسیاری از کاربردهای مواد فرومغناطیسی — مثلاً، در مبدل‌های جریان متناوب می‌شود. اما در مغناطیسه‌های دائمی این ویژگی ضروری است، و در این کاربردها هدف تقویت برگشت‌ناپذیری است. شکل ۱۱-۳۲ بخش نظیر منحنی $B-H$ را برای یک آلیاژ خوب آهنربای دائمی نشان می‌دهد. توجه کنید که پیش از اینکه B به صفر برسد باید H در جهت معکوس 60° ارستد شود. اگر پیچه را قطع و خارج کنیم، مقدار B برابر 13000 گاوس باقی می‌ماند که پسمان خوانده می‌شود. چون H صفر است، این مقدار اساساً، بجز برای عامل 4π ، همان مقدار مغناطش M است. این آلیاژ یک مغناطش دائمی به دست آورده است، یعنی مغناطشی که اگر فقط در معرض میدانهای مغناطیسی ضعیف قرار بگیرد تا ابد تداوم خواهد داشت. همه اطلاعاتی که در نوارها و صفحه‌های مغناطیسی ضبط می‌شوند، تداوم خود را مدیون این پدیده فیزیکی هستند.

مسائل

- ۱-۱۱ با استفاده از داده‌های جدول ۱۱-۱ پذیرفتاری دیامغناطیسی آب را تعیین کنید.
- ۲-۱۱ در فصل ۶ میدان را در نقطه‌ای روی محور یک حلقه جریان به شعاع a محاسبه کردیم.

(معادله ۶-۴۱) نشان دهید برای $b \gg z$ این مقدار به یک دو قطبی مغناطیسی میل می‌کند، و پیدا کنید چقدر باید روی محور حرکت کنیم تا میدان با دقت ۱ درصد میدانی شود که یک دو قطبی بینهایت کوچک با همان گشتاور دو قطبی در آن نقطه تولید می‌کند.

۱۱-۳ بزرگی گشتاور مغناطیسی ۱ g اکسیژن مایع در یک میدان ۱۸ kG، با استفاده از داده‌های جدول ۱۱-۱، چقدر است؟ اگر چگالی اکسیژن مایع در ۹۰ K برابر باشد با ۰.۸۵ g/cm^3 ، پذیرفتاری مغناطیسی χ_m چقدر است؟

۱۱-۴ در قطب شمال مغناطیسی زمین، میدان مغناطیسی عمودی و دارای شدت ۰.۶۲ گاوس است. میدان زمین در سطح و دورتر تقریباً میدان یک دو قطبی مرکزی است.

(الف) اندازه گشتاور دو قطبی برحسب آرگ بر گاوس چقدر است؟

(ب) برحسب ژول بر تسلا چطور؟

(ج) فرض کنید که چشمه میدان یک حلقه جریان در "استوای" هسته فلزی زمین به شعاع

۳۰۰۰ کیلومتر، یعنی در حدود نصف شعاع زمین است. اندازه جریان چقدر باید باشد؟

۱۱-۵ یک سیملوله مانند آنچه در بخش ۱۱-۱ گفته شد در زیرزمین یک آزمایشگاه فیزیک قرار دارد. یک فیزیكدان در طبقه بالای ساختمان، در ارتفاع ۱۸ متری و به فاصله افقی ۲۴ متر، شاکی است که میدان این سیملوله اندازه‌گیرهای او را مختل می‌کند. با فرض اینکه سیملوله در شرایطی کار می‌کند که ذکر شد، و با در نظر گرفتن آن به صورت یک دو قطبی مغناطیسی ساده، شدت میدان را در محل فیزیكدان شاکی پیدا کنید. درباره اینکه آیا موجبی برای نارضایتی وجود دارد اظهار نظر کنید.

۱۱-۶ مکعبی از مگنتیت به ضلع ۵ سانتی‌متر تا مقدار اشباع در جهت عمود بر دو رخ آن مغناطیده است. اندازه نوار جریان بار مقید را به دست آورید که از مدار متشکل از چهار رخ دیگر مکعب می‌گذرد. مغناطش اشباع در مگنتیت $۱۰^5 \times ۴۸$ ژول بر تسلا بر متر مکعب است. آیا میدان این آهنربای مکعبی عقبه‌ای را که در فاصله دو متری قرار دارد منحرف می‌کند؟

۱۱-۷ کره‌ای به شعاع R حامل بار Q است که به طور یکنواخت با چگالی $\sigma = Q/4\pi R^2$ در سطح آن توزیع شده است. این پوسته بار با سرعت زاویه‌ای ω رادیان بر ثانیه حول یکی از محورهای کره می‌گردد. گشتاور مغناطیسی آن را به دست آورید. (کره را به نوارهای باریک بار چرخان تقسیم کنید؛ جریان معادل هر یک از این نوارها، و گشتاور دو قطبی آن را بیابید و روی همه نوارها انتگرال‌گیری کنید.)

جواب: $QR^2\omega/3c$.

۱۱-۸ نشان دهید کار لازم برای کشیدن ۱ گرم ماده پارامغناطیسی از ناحیه‌ای که در آن شدت میدان مغناطیسی B است به ناحیه‌ای که شدت میدان ناچیز برابر است با $1/2 \chi B^2$ ، که χ پذیرفتاری

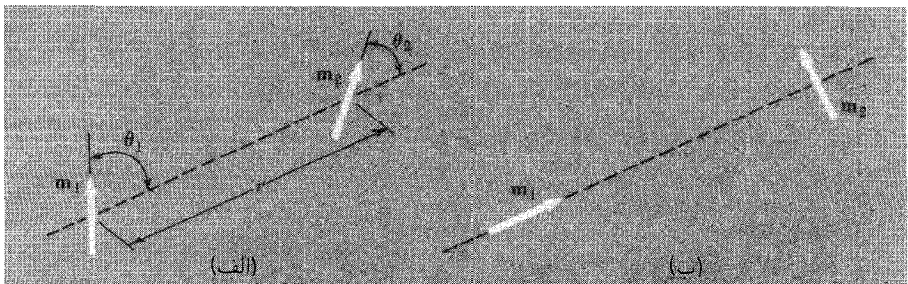
ویژه است. سپس حساب کنید که درست چقدر کار، به ازای یک گرم، لازم است تا اکسیژن مایع را از مکان مذکور در بخش ۱۱-۱ جدا کنیم. (البته، این فقط در شرایطی به کار می‌رود که χ در گستره شدتهای میدان دخیل ثابت باشد.)

۹-۱۱ یک سیمولوله استوانه‌ای یک لایه سیم پیچ به شعاع r_0 دارد. این سیمولوله به اندازه‌ای دراز است که میدان مغناطیسی در نزدیکی یک انتهای آن را می‌توان میدان یک سیمولوله نیم-نامتناهی در نظر گرفت. نشان دهید که نقطه‌ای روی محور سیمولوله که در آن بیشترین نیرو به نمونه وارد می‌شود، در فاصله $r_0/\sqrt{15}$ از انتهای آن قرار دارد.

۱۰-۱۱ برای یک دوقطبی الکتریکی متشکل از دو بار Q و $-Q$ که در فاصله s از یکدیگر قرار دارند، حجم منطقه نزدیک، که در آن میدان با میدان یک دوقطبی ایده‌آل تفاوت اساسی دارد، با s^2 متناسب است. شدت میدان در این منطقه، در نقطه‌های همانند با تغییر s متناسب با Q/s^2 تغییر می‌کند. گشتاور دوقطبی $P = Qs$ است، اگر P را ثابت نگه داریم و s را کوتاه کنیم، حاصلضرب حجم و شدت میدان چه رفتاری را خواهد داشت؟ همین بحث را برای میدان مغناطیسی یک حلقه جریان تکرار کنید. نتیجه حاصل این است: اگر به میانگین فضایی میدان در هر حجم حاوی دوقطبی علاقه‌مند باشیم، تفاوت اساسی بین بخشهای داخلی دوقطبیهای الکتریکی و مغناطیسی را، حتی وقتی که دوقطبیهای مورد نظر از جهات دیگر بینهایت کوچک‌اند، نمی‌توان نادیده گرفت.

۱۱-۱۱ معادله‌های ماکسول را در صورتی بنویسید که علاوه بر بار الکتریکی و جریانهای بار الکتریکی، بار مغناطیسی و جریانهای بار مغناطیسی نیز وجود می‌داشتند. هر نماد جدیدی را که لازم دارید ابداع کنید و به دقت بگویید که این نمادها معرف چه چیزی هستند. مخصوصاً مواظب علامتهای + و - باشید.

۱۲-۱۱ می‌خواهیم انرژی لازم برای نزدیک کردن دو دوقطبی را از بینهایت به فاصله‌ای که در قسمت (الف) شکل زیر، که با فاصله r و زاویه‌های θ_1 و θ_2 مشخص شده است، به دست آوریم. هر دو دوقطبی در صفحه کاغذ قرار دارند. شاید ساده‌ترین راه محاسبه انرژی این باشد. دوقطبیها



شکل مسئله ۱۱-۱۲.

را از بینهایت به هم نزدیک کنید در حالی که سمتگیری آنها به صورتی است که در شکل (ب) نشان داده شده است. این عمل مستلزم هیچ کاری نیست، زیرا نیروی وارد بر هر دو قطبی صفر است. اکنون کار لازم برای چرخاندن m_1 را به سمتگیری نهایی اش با ثابت نگه داشتن m_2 محاسبه کنید. سپس کار لازم برای چرخاندن m_2 به وضعیت نهایی اش را محاسبه کنید. بدین ترتیب نشان دهید که کل کار انجام شده، که آن را انرژی پتانسیل سیستم می نامیم، برابر است با $(\sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2) m_1 m_2 / r^3$.

۱۱-۱۳ دو رأس متقابل یک هشت وجهی منتظم به ضلع b بر محور z قرار دارد. در هر یک از این رئوس، و نیز در هر یک از چهار رأس دیگر، یک دو قطبی به شدت m در جهت \hat{z} قرار دارد. با استفاده از نتیجه مسئله ۱۱-۱۲، انرژی پتانسیل این سیستم را محاسبه کنید.

۱۱-۱۴ بگذارید پذیرفتاری مغناطیسی معادله ۳۹ را، برای تمیز آن از پذیرفتاری متداول χ_m معادله ۵۶، با χ'_m نشان دهیم. نشان دهید که

$$\chi_m = \chi'_m / (1 - 4\pi\chi'_m)$$

۱۱-۱۵ در مگنتیت، Fe_2O_4 ، مغناطش اشباع M_0 برحسب یگاهای CGS برابر است با 480 ارگ بر گاوس بر سانتی متر مکعب. با کتریهای مگنتیت، که بلاک مور در سال ۱۹۷۵ کشف کرد، حاوی بلورهای مگنتیت است که تقریباً مکعبی و با بُعد 5×10^{-6} سانتی متر هستند. خود یک باکتری به اندازه 10^{-4} سانتی متر، می تواند حاوی 10^6 تا 20^6 تا از این بلورها باشد که به شکل زنجیر به هم متصل شده اند. آهنربا کل سلول را در امتداد میدان مغناطیسی زمین نگه می دارد، و بدین ترتیب جهت حرکت باکتری را کنترل می کند. انرژی دخیل در چرخش یک سلول حاوی چنین آهنربایی را به میزان 90° در میدان مغناطیسی زمین محاسبه، و آن را با انرژی جنبش گرمایی kT مقایسه کنید.

۱۱-۱۶ یک آلیاژ آهنربای دائمی جالب توجه از ساماریم و کبالت دارای مغناطش اشباع 750 ارگ بر گاوس بر سانتی متر مکعب است، که این خاصیت را در میدانهای خارجی تا 15 کیلوگاوس حفظ می کند. این نزدیکترین چیز به مغناطش به سختی منجمد شده است که تاکنون به دست آمده است. کره ای از ساماریم-کبالت به شعاع 1 سانتی متر را در نظر بگیرید که به طور یکنواخت مغناطیده است. (الف) شدت میدان مغناطیسی B درست خارج از کره در یکی از قطبهای آن چقدر است؟ (ب) در استوای مغناطیسی اش چقدر است؟ (ج) فرض کنید دو کره از این نوع به هم چسبیده اند به طوری که قطبهای غیرهمنام آنها بر هم مماس است. چه نیرویی برای جدا کردن آنها لازم است؟

۱۱-۱۷ یک صفحه آهنی به ضخامت 2 cm تا مقدار اشباع در جهت موازی با سطح صفحه مغناطیده است. یک موئون 10 GeV که عمود بر سطح حرکت می‌کند وارد صفحه می‌شود و با اتلاف انرژی اندک از آن می‌گذرد. اگر جرم سکون موئون 200 MeV و مغناطش اشباع آهن معادل $10^{23} \times 1.5$ گشتاور الکترون بر سانتی متر مکعب باشد، انحراف زاویه‌ای مسیر موئون را به تقریب محاسبه کنید.

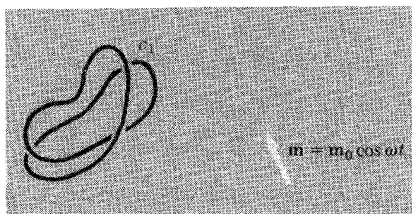
۱۱-۱۸ سه عقربه مغناطیسی در گوشه‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع افقی قرار داده شده‌اند. مانند عقربه‌های معمولی، هر عقربه مغناطیسی یک دوقطبی مغناطیسی است که می‌تواند در صفحه افقی بچرخد. در این مورد میدان مغناطیسی زمین دقیقاً خنثی شده است. تنها میدانی که بر هر دوقطبی اعمال می‌شود مربوط به دو دوقطبی دیگر است. این عقربه‌ها در نهایت چه سمتگیری خواهند داشت؟ (از مباحث تقارن استفاده کنید!) آیا می‌توانید پاسخ خود را برای N عقربه در رئوس یک N ضلعی تعمیم دهید؟

۱۱-۱۹ گشتاور دوقطبی الکتریکی یک مولکول قطبی نوعاً از مرتبه 10^{-18} esu-cm است (شکل ۱۰-۱۴). گشتاور مغناطیسی یک اتم یا مولکول با یک اسپین الکترون زوج نشده برابر است با 10^{-20} ارگ بر گاوس. اگرچه از نامهای مختلفی برای یکاها استفاده می‌کنیم، ابعاد گشتاور دوقطبی الکتریکی و گشتاور دوقطبی مغناطیسی در واقع یکی است. بنابراین مقایسه عددی حائز اهمیت است (چون با یکاهای SI چنین نیست) که بار دیگر یادآور می‌شود که در مقیاس اتمی، مغناطیس اثری نسبتاً ضعیف است. اما قطبش P و مغناطش M_1 را در بزرگ مقیاس در نظر بگیرید. چه چیزی نسبت دست یافتنی P در یک دی‌الکتریک را به M در یک ماده فرومغناطیسی در عمل محدود می‌کند، و فکر می‌کنید که بزرگی این مقدار چقدر می‌تواند باشد؟

۱۱-۲۰ فرض کنید که یک دوقطبی مغناطیسی m در مرکز هر مربع یک صفحه شطرنج قرار دارد، که در مربعهای سفید جهت دوقطبی به طرف بالا، و در مربعهای سیاه به طرف پایین است. ضلع هر مربع s است. (الف) کار لازم را برای بردن یکی از این دوقطبیها به بینهایت، در حالی که حمل و سمتگیری 63 دوقطبی دیگر ثابت است، محاسبه کنید. بدین ترتیب تعیین کنید که کدام یک از این دوقطبیها پیوند محکمتری دارد. (ب) چه مقدار کار باید انجام داد تا همه 64 دوقطبی را به فاصله بینهایت از یکدیگر برد؟ برای پاسخگویی به این پرسشها باید یک برنامه کوچک بنویسید و آن را اجرا کنید.

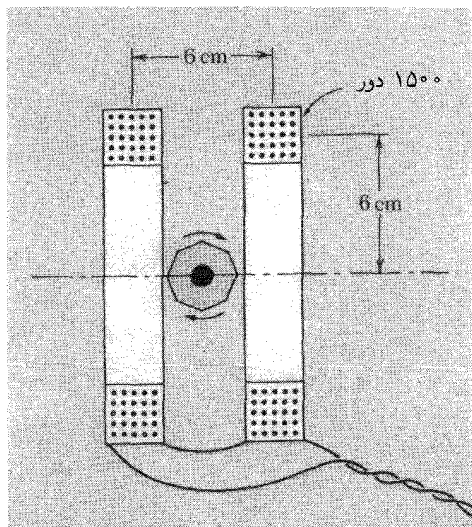
۱۱-۲۱ دوقطبی مغناطیسی \mathbf{m} در نمودار با بسامد ω نوسان می‌کند. بخشی از شار آن از مدار C_1 می‌گذرد، و نیروی محرکه $\mathcal{E}_1 \sin \omega t$ را در آن القا می‌کند. محاسبه \mathcal{E}_1 آسان می‌بود اگر می‌دانستیم که C_1 چه مقدار از شار دوقطبی را در برمی‌گیرد، اما محاسبه این مقدار ممکن است مشکل باشد. فرض کنید تمام آنچه درباره C_1 می‌دانیم این است: اگر جریان I_1 در C_1 وجود داشت، در محل

m میدان مغناطیسی B_1 را تولید می‌کند. مقدار B_1/I_1 به ما گفته شده است، اما چیز دیگری در مورد C_1 ، حتی شکل و محل آن را، نمی‌دانیم. نشان دهید که این اطلاعات برای مربوط ساختن \mathcal{E}_1 به m_0 با فرمول ساده $\mathcal{E} = (\omega/I_1)B_1 \cdot m$ کافی است. راهنمایی: m را به صورت حلقه‌ای کوچک به مساحت A نشان دهید که حامل جریان I_2 است. این مدار را C_2 محاسبه کنید: سپس دوجانبگی القای متقابل را که در بخش ۷-۷ اثبات شد به خاطر آورید (توجه کنید که این فرمول برحسب یکاهای CGS یا SI صادق است. در دستگاه اول $\mathcal{E}I$ برحسب ارگ بر ثانیه و m_0 برحسب ارگ بر گاوس است. در دستگاه آخر $\mathcal{E}I$ برحسب وات و m_0 برحسب ژول بر تسلاست).



شکل مسئله ۱۱-۲۱.

۱۱-۲۲ جهت میدان مغناطیسی زمین در گذشته زمین‌شناختی را می‌توان از مطالعه مغناطش باقیمانده در سنگها استنتاج کرد. گشتاور مغناطیسی یک نمونه سنگ را می‌توان با چرخاندن آن در داخل یک پیچه و اندازه‌گیری ولتاژ متناوبی که بدین وسیله القا می‌شود تعیین کرد. دو پیچه در

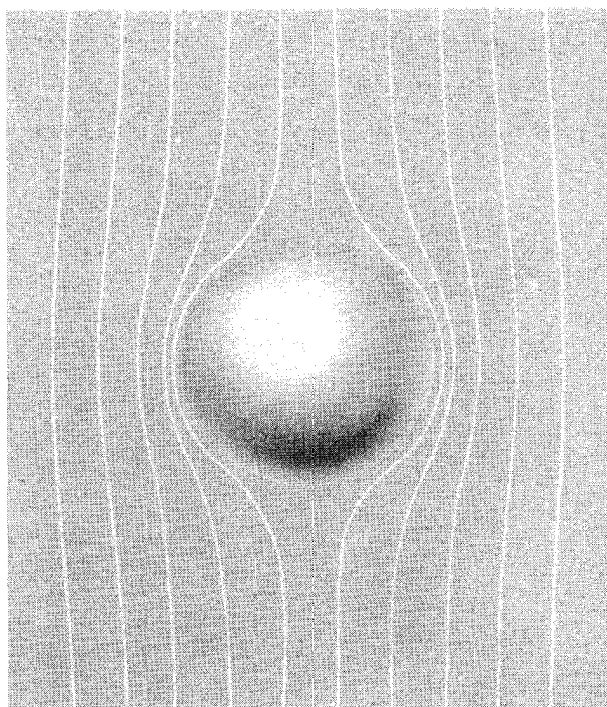


شکل مسئله ۱۱-۲۲.

نمودار به صورت سری به هم متصل شده‌اند. هر پیچه 15° دور به شعاع میانگین ۶ سانتی متر دارد. قطعه سنگ را به کمک میله‌ای عمود بر صفحه نمودار با سرعت 174° دور در دقیقه می‌چرخانیم. (الف) اگر دامنه نیروی محرکه القایی ۱ میلی‌ولت باشد، گشتاور مغناطیسی سنگ چقدر است؟ فرمولی که در مسئله ۱۱-۲۱ به دست آمد در اینجا مفید است.

(ب) مرتبه بزرگی کمترین مقدار ماده فرومغناطیسی که می‌تواند اثری به این اندازه تولید کند چقدر است؟

۱۱-۲۳ یک دوقطبی مغناطیسی m در یک میدان مغناطیسی به شدت B قرار دارد، به طوری که گشتاور دوقطبی در خلاف جهت میدان است. نشان دهید که در میدان کل یک سطح کروی به مرکز دوقطبی وجود دارد که از آن هیچ خط میدانی نمی‌گذرد. می‌توان گفت که میدان خارجی از این کره "بیرون رانده شده است". خطهای میدان در خارج از کره در شکل رسم شده‌اند. خطهای میدان در داخل کره چگونه هستند؟ شدت میدان بلافاصله خارج کره چقدر است؟ در استوای آن چقدر است؟ به جای دوقطبی، تا آنجا که به تأثیرش بر میدان خارجی مربوط می‌شود، می‌توان جریانهایی را گذاشت که از سطح کروی می‌گذرند، فقط باید توزیع صحیح جریان را تعیین کرد میدان

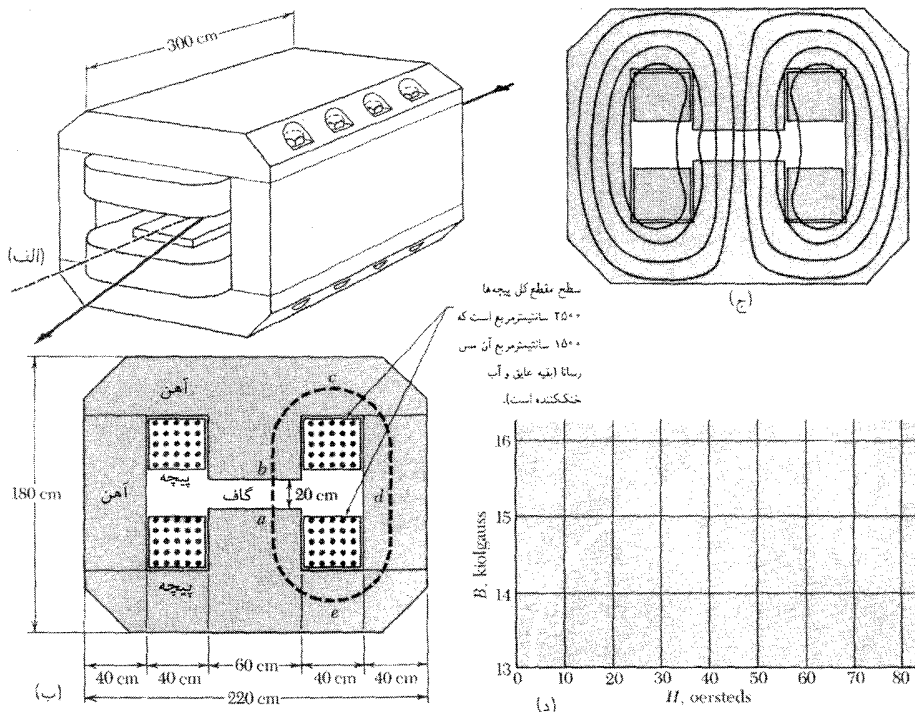


شکل مسئله ۱۱-۲۳.

داخل کره در این مورد چقدر است؟ چگونه می‌توانید اطمینان حاصل کنید؟ (این پیکربندی مهمی در مطالعه ابرسانایی است. یک کره ابرسانا، در واقع کل میدان را از داخلش بیرون می‌راند).

۱۱-۲۴ بر روی چنبره آهنی به قطر داخلی ۱۰ سانتی‌متر و قطر خارجی ۱۲ سانتی‌متر ۲۰ دور سیم پیچیده شده است با استفاده از منحنی $B-H$ شکل ۱۱-۳۱ جریان لازم را برای تولید میدان ۱۲۰۰۰ گاوس در آهن برآورد کنید.

۱۱-۲۵ برای منحرف کردن باریکه‌های از ذرات پر انرژی در یک آزمایش، یک میدان مغناطیسی به شدت ۱۶۰۰۰ گاوس در ناحیه‌ای مکعب‌مستطیلی به طول ۳ متر در امتداد باریکه، عرض ۶۰ سانتی‌متر و ارتفاع ۲۰ سانتی‌متر لازم است. آهنربای مناسب را می‌توان در امتداد خطهای (الف) و (ب) طراحی کرد که در شکل نشان داده شده‌اند. مقادیر زیر را تعیین کنید (۱) کل دورهای لازم را در دو پیچه برای تولید یک میدان ۱۶ کیلوگاوسی در گاف؛ (۲) توانی که باید تأمین شود برحسب کیلووات؛ (۳) تعداد دورهایی که هر پیچه باید داشته باشد، و سطح مقطع سیم متناسب با آن، به طوری که میدان مطلوب وقتی حاصل شود که پیچه‌ها به طور سری به منبع تغذیه ۴۰۰ ولت



شکل مسئله ۱۱-۲۵.

dc متصل شده باشند. برای استفاده در بخش (۱)، بخشی از منحنی $B-H$ برای آهن مغناطیسی آرمکو در بخش (د) شکل نشان داده شده است. تنها چیزی که باید تعیین کنید انتگرال خطی H حول مسیری مانند $abcdea$ است. در شکاف $H = B$ است. می‌توانید فرض کنید که شدت میدان B در آهن همان شدت میدان در شکاف است. خطهای میدان چیزی مانند آنهایی است که در بخش (ج) شکل نشان داده شده است. می‌توانید طول مسیر در آهن را تقریباً برآورد کنید. این مسیر چندان مهم نیست، زیرا در خواهید یافت که مسیر دراز $bcdea$ ، در مقایسه با سهم مسیر ab مربوط به هوا، سهم نسبتاً کمی در انتگرال خطی دارد. (در واقع، نادیده گرفتن H در آهن، برای شدتهای میدان کم تقریب بدی نیست.) برای (۲) مقاومت ویژه مس را $\rho = 2.0 \times 10^{-6} \Omega\text{-cm}$ در نظر بگیرید، و بگذارید هر پیچه حاوی N دور باشد. خواهید دید که توان لازم برای یک تعداد معین آمپر دور مستقل از N است؛ یعنی، برای تعداد زیادی از سیم نازک و یا تعداد کمی از سیم کلفت یکسان است، اگر سطح مقطع مس چنانکه مشخص شده است ثابت بماند. بنابراین طراح N و سطح مقطع رسانا را چنان برمی‌گزیند که آهن‌ربا را به چشمهٔ توان مورد نظر جفت کند.

۱۱-۲۶ مولکول آب H_2O حاوی 10^6 الکترون جفت شده و در نتیجه گشتاور مغناطیسی صفر است. ساختار الکترونی آن کاملاً دیامغناطیسی است. اما، هستهٔ هیدروژن، پروتون، ذره‌ای است دارای اسپین ذاتی و گشتاور مغناطیسی. گشتاور مغناطیسی پروتون در حدود 70° بار کوچکتر از گشتاور الکترون است. در آب، دوا اسپین پروتون در یک مولکول به صورت پاد موازی قفل نشده‌اند بلکه عملاً آزادند تا هر کدام فقط با توجه به جنبش گرمایی سمتگیری کند.

(الف) با استفاده از معادلهٔ ۴، پذیرفتاری پارامغناطیسی آب را در $20^\circ C$ حساب کنید.

(ب) بزرگی گشتاور مغناطیسی القایی در ۱ لیتر آب در میدان ۱۵ کیلوگاوسی چقدر است؟

(ج) اگر یک دور سیم را دور یک فلاسک یک لیتری بپیچید، چه جریانی، برحسب میکروآمپر،

گشتاور مغناطیسی هم‌ارزی را تولید می‌کند؟

جواب: 1.0×10^{-6} میکروآمپر.

۱۱-۲۷ شخصی که چیزهایی دربارهٔ نظریهٔ کوانتومی اتم می‌داند ممکن است از نکته‌ای در تحلیل ما در بخش ۱۱-۵ در مورد اثر میدان مغناطیسی بر سرعت مداری یک الکترون اتمی دچار دردسر شود. وقتی سرعت تغییر می‌کند، در حالی که r ثابت می‌ماند، تکانهٔ زاویه‌ای mvr تغییر می‌کند. اما فرض می‌شود که تکانهٔ زاویه‌ای یک مدار درست برابر مضرب صحیحی از ثابت $h/2\pi$ باشد، که h یک ثابت کوانتومی عمومی، ثابت پلانک، است. چگونه mvr می‌تواند بدون نقض این قانون کوانتومی بنیادی تغییر کند؟ حل این پارادوکس برای مکانیک کوانتومی ذرات باردار مهم است، اما این موضوع در مکانیک کوانتومی عجیب نیست. وقتی پایستگی انرژی را برای ذرهٔ حامل بار q ، که در میدان خارجی E حرکت می‌کند، در نظر می‌گیریم همواره همراه با انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv^2$ ،

انرژی پتانسیل $q\varphi$ را نیز به حساب می‌آوریم، که در آن φ پتانسیل الکتریکی زرده‌ای در محل ذره است. پس نباید تعجب کنیم که در هنگام مطالعه پایستگی تکانه علاوه بر تکانه معمولی $M\mathbf{v}$ کمیتی را در نظر بگیریم که شامل پتانسیل برداری میدان مغناطیسی، \mathbf{A} ، است. ثابت شده است که تکانه را باید به صورت $M\mathbf{v} + (q/c)\mathbf{A}$ در نظر گرفت که \mathbf{A} پتانسیل برداری میدان خارجی است که در محل ذره برآورد می‌شود. می‌توان $M\mathbf{v}$ را تکانه جنبشی و $(q/c)\mathbf{A}$ را تکانه پتانسیل نامید. (در نسبیت گنجانیدن جمله $q\mathbf{A}/c$ گامی بدیهی است، چون φ و \mathbf{A}/c ، پتانسیلهای زرده‌ای و برداری، درست مانند انرژی و تکانه یک "چار بردار" می‌سازند). بنابراین تکانه زاویه‌ای که در اینجا مورد توجه ماست نباید به صورت

$$\mathbf{r} \times \left(M\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A} \right) \quad \text{بلکه} \quad \mathbf{r} \times M\mathbf{v}$$

باشد.

اکنون به مورد بار چرخان در انتهای نخ در شکل ۱۱-۱۲ برمی‌گردیم. ابتدا تحقیق کنید که پتانسیل برداری مربوط به میدان \mathbf{B} در جهت z منفی برابر است با $\mathbf{A} = (B/2)(-\hat{x}y + \hat{y}x)$. سپس ببینید با برقراری میدان چه بر سر تکانه زاویه‌ای $\mathbf{r} \times [M\mathbf{v} + (q/c)\mathbf{A}]$ می‌آید.

پیوست الف

مروری کوتاه بر نسبیت خاص

با این فرض که خواننده با نسبیت خاص آشناست، در اینجا فکریهای اصلی و فرمولهایی را مرور می‌کنیم که از فصل ۵ به بعد در کتاب به‌کار رفته‌اند. اساسی‌ترین مفاهیم عبارت‌اند از مفهوم چارچوب مرجع لخت برای رویدادهای فضا-زمان و تبدیل مختصات یک رویداد از یک چارچوب لخت به چارچوب دیگر.

یک چارچوب مرجع، دستگاه مختصاتی مجهز به میله‌های اندازه‌گیری و ساعت‌هاست. ساعت‌ها در همه جا هستند. وقتی واقعه‌ای در مکان معین رخ می‌دهد، وقوع آن از ساعتی که در محل بوده است، و در آنجا باقی می‌ماند، خوانده می‌شود. یعنی، زمان با استفاده از یک ساعت محلی اندازه‌گیری می‌شود که در آن چارچوب ساکن است، ساعت‌های متعلق به چارچوب همگی همزمان شده‌اند. یک راه انجام این کار (که تنها راه ممکن نیست) را اینشتین در مقاله معروف سال ۱۹۰۵ خود توصیف کرده است. از سیگنال‌های نوری استفاده می‌شود. از نقطه A ، در زمان t_A ، یک تپ کوتاه نوری به نقطه دور B فرستاده می‌شود. این تپ، مطابق ساعت نقطه B ، در زمان t_B به این نقطه می‌رسد و بلافاصله به طرف نقطه A باز می‌تابد. و در زمان t'_A به این نقطه می‌رسد. اگر $t_B = (t_A + t'_A)/2$ باشد، ساعت‌های A و B همزمان هستند. در غیر این صورت، یکی از آنها باید تنظیم شود. بدین ترتیب، تمام ساعت‌های موجود در چارچوب را می‌توان همزمان کرد. توجه کنید که کار ناظران در راه کار صرفاً ثبت زمان ساعت‌های محلی برای مقایسه بعدی است.

یک رویداد با مختصات x, y, z ، و t فضا و زمانی خود در یک چارچوب مرجع برگزیده

مشخص می‌شود. این رویداد ممکن است عبور یک ذره در زمان t_1 ، از نقطه فضایی (x_1, y_1, z_1) باشد. تاریخچه حرکت ذره دنباله‌ای از این رویدادهاست. فرض کنید که دنباله این ویژگی را دارد که در هر زمان t داریم $x = v_x t$ ، $y = v_y t$ ، $z = v_z t$ ، که v_x, v_y, v_z مقادیری ثابت هستند. این رویداد حرکت بر خط راست با سرعت ثابت نسبت به این چارچوب را بیان می‌کند. یک چارچوب مرجع لخت چارچوبی است که در آن یک جسم منزوی، که از تأثیرهای خارجی آزاد است، این‌گونه حرکت می‌کند. به عبارت دیگر، یک چارچوب لخت چارچوبی است که در آن قانون اول نیوتون صادق باشد. در ورای همه اینها، از جمله همزمان کردن ساعتها، دو فرض درباره فضای تهی وجود دارد: این فضا همگن است؛ یعنی، همه مکانهای موجود هم‌ارزند. فضا همسانگرد است؛ یعنی همه جهتهای فضا هم‌ارزند.

دو چارچوب، که آنها را F و F' می‌خوانیم، می‌توانند از چند نظر تفاوت داشته باشند. یکی را می‌توان نسبت به دیگران جابه‌جا کرد، به طوری که مبدأ مختصات F' در نقطه‌ای از چارچوب F ثابت باشد که مبدأ مختصات F نیست. یا محورهای F' ممکن است با محورهای F موازی باشند. در مورد زمان‌بندی رویدادها، اگر F و F' نسبت به یکدیگر حرکت نکنند، ساعتی که در F ساکن است در F' نیز ساکن خواهد بود. در این مورد می‌توان همه ساعت‌های F' را چنان تنظیم کرد که با ساعت‌های F سازگار باشند و هرگونه تفاوت را نادیده می‌گیریم. تفاوت‌های موجود در محل چارچوب و سمتگیری آن فقط در صورتی پیامدهای جالب توجه ندارند که فضا همگن و همسانگرد باشد. اکنون فرض کنید که مبدأ چارچوب F' نسبت به مبدأ چارچوب F در حرکت است. توصیف دنباله رویدادها با مقادیر مختصات و زمان ساعتها در F ممکن است با توصیف همان رویدادها با مقادیر مختصات در F' و زمانهای اندازه‌گیری شده با ساعت‌های F' تفاوت داشته باشد. چگونه باید این دو توصیف را به هم مربوط کرد؟ در پاسخ به این پرسش فقط به موردی علاقه‌مندیم که F یک چارچوب لخت، و F' چارچوبی است که با سرعت ثابت و بدون چرخش نسبت به F در حرکت است. در این مورد F' نیز یک چارچوب لخت است.

مبنای نسبیت خاص این اصل موضوع است که به نظر می‌رسد پدیده‌های فیزیکی که در چارچوب‌های مرجع لخت مختلف مشاهده می‌شوند دقیقاً از قوانین یکسانی پیروی می‌کنند. از این نظر هر چارچوب به خوبی چارچوب دیگر است، هیچ چارچوبی منحصر به فرد نیست. این اصل نسبیت، در صورت واقعیت داشتن، برای تعیین چگونگی ارتباط توصیف رویدادها در یک چارچوب به توصیف همان رویدادها در چارچوب‌های دیگر کافی است. در این مورد به نظر می‌رسد که یک سرعت جهانی، که در همه چارچوبها یکسان است، وجود دارد که مقدارش را باید با آزمایش یافت. بعضی اوقات این گزاره که اندازه‌گیری سرعت نور در هر چارچوب مرجع، چه چشمه نور در آن چارچوب ثابت باشد و چه نباشد، باید به نتیجه یکسانی بینجامد، به‌عنوان اصل موضوع دوم

اضافه می‌شود. می‌توان این را به‌جای یک اصل مستقل، به‌عنوان گزاره‌ای دربارهٔ سرشت نور در نظر گرفت. این اصل تأکید می‌کند که امواج الکترومغناطیسی در واقع با سرعت حدی که اصل نسبیت ایجاب می‌کند حرکت می‌کنند. چیزهای دیگری — مانند نوترینوها — هم با همین سرعت حرکت می‌کنند، اما عادت کرده‌ایم که سرعت حدی را “سرعت نور” بنامیم. نتیجه‌گیریهایی حاصل از اصل نسبیت را، که به‌صورت فرمولهای نسبیت خاص بیان می‌شود، آزمایشهای بی‌شماری تأیید کرده است. هیچ چیزی در فیزیک نیست که بنیان محکمتری داشته باشد.

دو رویداد A و B در یک چارچوب مرجع F مشاهده می‌شوند. استعمال مشاهده می‌شوند در اینجا کوتاه شدهٔ این جمله است “که مختصات فضازمانی آنها را میله‌های اندازه‌گیری و ساعت‌های چارچوب F تعیین می‌کنند.” (به خاطر داشته باشید که ناظران ما صرفاً مجهز به کاغذ و مداد هستند، و ما باید ناظری را در محل هر رویداد بگماریم!) جابه‌جایی یک رویداد از رویداد دیگر با چهار عدد زیر داده شده است

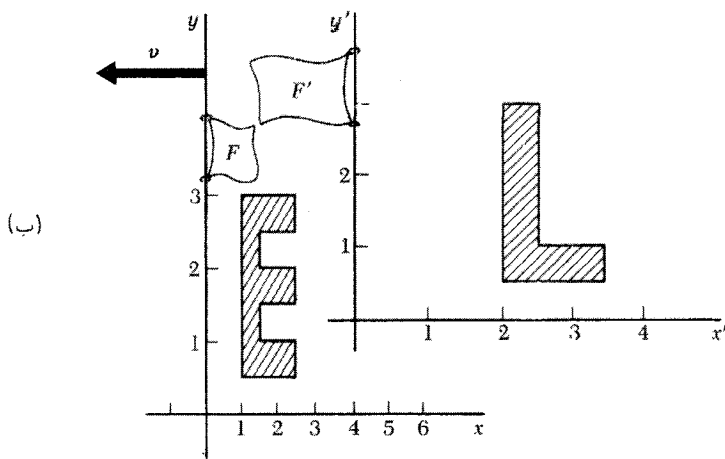
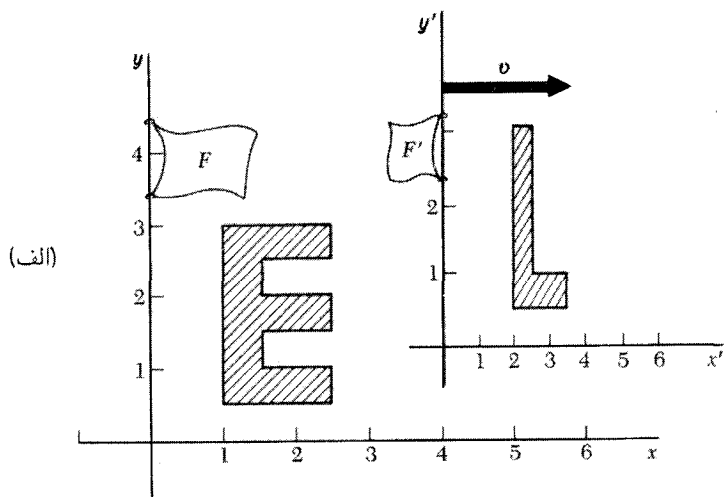
$$x_B - x_A, \quad y_B - y_A, \quad z_B - z_A, \quad t_B - t_A \quad (1)$$

محل همین دو رویداد را می‌توان با معلوم بودن مختصات آنها در چارچوب دیگر F' تعیین کرد. فرض کنید F' نسبت به F به‌صورتی حرکت می‌کند که در شکل الف-۱ نشان داده شده است. محور فضایی F' با محور F موازی باقی می‌ماند، در حالی که از نظر چارچوب F ، چارچوب F' با سرعت v در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. بدیهی است که این یک مورد خاص است، اما حاوی جالبترین نکته‌های فیزیکی است.

رویداد A ، چنانکه در F' مشاهده می‌شود، در t'_A, x'_A, y'_A, z'_A رخ می‌دهد، آخرین این اعداد چیزی است که ساعت متعلق به F' (یعنی ساعتی که در F' ساکن است) نشان می‌دهد. جابه‌جایی فضازمان، یا بازهٔ میان رویدادهای A و B در F' با این مقدار در F یکی نیست. مؤلفه‌های آن را تبدیل لورنتس به مؤلفه‌های چارچوب F مربوط می‌کند:

$$\begin{aligned} x'_B - x'_A &= \gamma(x_B - x_A) - \beta\gamma c(t_B - t_A) \\ y'_B - y'_A &= y_B - y_A \\ z'_B - z'_A &= z_B - z_A \\ t'_B - t'_A &= \gamma(t_B - t_A) - \beta\gamma(x_B - x_A)/c \end{aligned} \quad (2)$$

در این معادله‌ها c سرعت نور، $\beta = v/c$ ، و $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ است. تبدیل معکوس همان ظاهری را دارد که در صورت منحصر به فرد بودن هیچ چارچوب باید داشته باشد. این تبدیل را



شکل الفـ۱ دو چارچوب با سرعتی نسبی v حرکت می‌کنند. “E” در چارچوب F ساکن است. “L” در چارچوب F' ساکن است. در این مثال داریم $\beta = v/c = 0.866$ ، $\gamma = 2$. (الف) محل اشیاء از نظر ناظران F در یک لحظه خاص از زمان t بنا بر ساعت F . (ب) محل اشیاء از نظر ناظران F' در یک لحظه از زمان t' بنا بر ساعت F' .

پرسش: فرض کنید که ساعت‌های دو چارچوب طوری تنظیم شده‌اند که ساعت لبه چپ E ، ساعت لبه راست L را در لحظه $t = 0$ بنا بر ساعت محلی در F و $t' = 0$ بنا بر ساعت محلی F' لمس می‌کند. فاصله‌ها را برحسب فوت در نظر بگیرید و فرض کنید که c برابر باشد با ۱ فوت بر نانو ثانیه. همه ساعت‌های F چه عددی را برای t در (الف) نشان می‌دهند؟ ساعت‌های F' چه عددی را برای t' در (ب) نشان می‌دهند؟ پاسخ: $t = 462 \text{ ns}$ ، $t' = 404 \text{ ns}$. اگر با این اعداد موافق نیستید، مثال را دوباره مطالعه کنید.

می‌توان به راحتی از معادله‌های ۲ با عوض کردن نمادهای پریم‌دار و بدون پریم و معکوس کردن علامت β به دست آورد.

دو رویداد A و B در F همزمانند اگر $t_B - t_A = 0$ باشد. اما $t'_B - t'_A = 0$ نیست مگر اینکه $x_B = x_A$ باشد. بنابراین رویدادهایی که در یک چارچوب لخت همزمانند ممکن است در چارچوب دیگر همزمان نباشند. این "نسبیت همزمانی" را با این واقعیت آشکار که ناظر واقع در فاصله‌ی نابرابر از دو انفجار همزمان، درخش نور حاصل از آنها را در زمانهای مختلف دریافت می‌کند اشتباه نکنید. زمانهای t'_B و t'_A را ساعت‌های محلی در هر رویداد، ساعت‌هایی که در F' ساکن هستند و قبلاً به دقت همزمان شده‌اند، ثبت می‌کنند.

یک میله ساکن در F' را در نظر بگیرید، که به موازات محور x' از x'_A تا x'_B امتداد دارد، طول آن در F' درست برابر است با $x'_B - x'_A$. طول میله که در چارچوب F اندازه گرفته می‌شود فاصله $x_B - x_A$ بین دو نقطه در چارچوب F است که دو سر میله بنابر ساعت F همزمان از آنها می‌گذرد. در این صورت برای این دو رویداد، $t_B - t_A = 0$. با این شرط، از اولین معادله تبدیل لورنتس در بالا بلافاصله رابطه‌ی زیر را به دست می‌آوریم

$$x_B - x_A = (x'_B - x'_A) / \gamma \quad (3)$$

این همان انقباض لورنتس معروف است. به تقریب می‌توان گفت طولهای میان نقطه‌های ثابت در F' را، که موازی سرعت نسبی هستند، ناظران چارچوب F با ضریب $1/\gamma$ کوتاه‌تر اندازه می‌گیرند. اگر جای F' و F عوض شود، این حکم صادق می‌ماند. طولهای عمود بر سرعت نسبی در دو چارچوب یکسان‌اند.

یکی از ساعت‌های F' را در نظر بگیرید. این ساعت با سرعت v در چارچوب F حرکت می‌کند. اگر t'_A زمانی باشد که این ساعت هنگام گذر از یکی از ساعت‌های F نشان می‌دهد؛ زمان ساعت محلی در این لحظه t_A است. پس از آن ساعت متحرک از مقابل ساعت دیگری در F می‌گذرد. در این رویداد، ساعت محلی F زمان t_B را نشان می‌دهد، و زمان ساعت متحرک به صورت t'_B ثبت می‌شود. فاصله‌ی دو رویداد در چارچوب F برابر است با $x_B - x_A = v(t_B - t_A)$. با قرار دادن این مقدار در چهارمین معادله‌ی تبدیل لورنتس، معادله‌ی ۲، بلافاصله به دست می‌آوریم

$$t'_B - t'_A = \gamma(t_B - t_A)(1 - \beta^2) = (t_B - t_A) / \gamma \quad (4)$$

بنابر ساعت متحرک، زمان سپری شده میان دو رویداد کمتر از آن است که ساعت‌های ساکن در F نشان می‌دهند. این اتساع زمان است که در "پارادوکس دوقلوها" نمایان می‌شود. این مطلب را

آزمایشهای بسیار، از جمله آزمایشی که در خلال آن ساعت اتمی دور دنیا به پرواز در آورده شد، تأیید کرده است.

با به خاطر داشتن اینکه "ساعتهای متحرک با ضریب $1/\gamma$ کند کار می‌کنند"، و اینکه "کاغذ نمودار متحرک موازی با جهت حرکتش با ضریب $1/\gamma$ کوتاه می‌شود"، می‌توانید پیامدهای تبدیل لورنتس را بدون نوشتن معادله‌ها مجسم کنید. باید تأکید کرد که این رفتار ویژگی فیزیکی غیرعادی ساعتها و کاغذ ما نیست، بلکه به اندازه‌گیری فضا و زمان در شرایط نسبیتی مربوط می‌شود. فرمول جمع سرعتها را، که از آن در فصل ۵ استفاده کردیم، می‌توان به آسانی از معادله‌های تبدیل لورنتس به دست آورد. فرض کنید جسمی با سرعت u_x در جهت مثبت محور x چارچوب F حرکت می‌کنند. سرعت آن در چارچوب F' چیست؟ برای ساده کردن مطلب فرض کنید جسم متحرک در $t = 0$ از مبدأ می‌گذرد. در این صورت محل آن در F در هر زمان t به سادگی برابر است با $x = u_x t$. برای ساده‌تر کردن، فرض کنید که مبدأهای فضا و زمان F و F' برهم منطبق هستند. در این صورت اولین و آخرین معادله‌های تبدیل لورنتس به صورت زیر در می‌آیند

$$t' = \gamma t - \beta \gamma x/c \quad \text{و} \quad x' = \gamma x - \beta \gamma ct$$

با قرار دادن $u_x t$ به جای x در طرف راست هر یک از معادله‌ها و تقسیم اولی بر دومی، خواهیم داشت

$$\frac{x'}{t'} = \frac{u_x - \beta c}{1 - \beta u_x/c} \quad (5)$$

طرف چپ معادله سرعت جسم در چارچوب F' ، u'_x است. در فرمول معمولاً به جای βc مقدار v را می‌گذارند

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} \quad (6)$$

با حل معادله ۶ برای u'_x می‌توانید ثابت کنید که عکس آن عبارت است از

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} \quad (7)$$

و این رابطه‌ها در هیچ مورد به سرعت، u_x و یا u'_x ، بزرگتر از c نمی‌انجامد.

مؤلفه سرعت عمود بر v ، سرعت نسبی چارچوبها، البته به صورتی متفاوت تبدیل می شود. با به خاطر داشتن اینکه $y' = y$ و اینکه ساعت‌های متحرک کند هستند، باید داشته باشیم $u'_y = u_y/\gamma$. در این مورد تبدیل معکوس $u_y = \gamma u'_y$ است، و نه $u_y = \gamma u'_y$. چه چارچوب ما F باشد یا F' ، همیشه ساعت چارچوب ناظر دیگر است که در مقایسه با ساعت‌های ساکن در چارچوب ما کند کار می کند.

یک پیامد دینامیکی نسبیت خاص را می توان به صورت زیر بیان کرد. ذره ای را در نظر بگیرید که با سرعت \mathbf{u} در یک چارچوب لخت F' حرکت می کند. در می یابیم که اگر به ذره تکانه $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{u}$ و انرژی $\gamma m_0 c^2$ را نسبت دهیم، که m_0 مقداری ثابت و مشخصه ذره است، تکانه $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{u}$ و انرژی $\gamma m_0 c^2$ ذره در برهم کنش با ذرات دیگر پایسته می ماند. m_0 را جرم سکون ذره می نامیم. این جرم را می توان در چارچوبی که در آن ذره چنان کند حرکت می کند که مکانیک نیوتونی صادق است — مثلاً با زدن ذره به جرمی استاندارد تعیین کرد. عامل γ که در m_0 ضرب می شود $(1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ است، که در آن u سرعت ذره در چارچوب F است.

اگر \mathbf{p} و E ، تکانه و انرژی ذره در چارچوب F معلوم باشد، تکانه و انرژی ذره در چارچوب دیگر F' چیست؟ مانند پیش، فرض می کنیم که F' ، نسبت به F ، با سرعت v در جهت مثبت x حرکت می کند. معلوم می شود که تبدیل به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma p_x - \beta \gamma E/c \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \\ E' &= \gamma E - \beta \gamma c p_x \end{aligned} \quad (8)$$

توجه کنید که در اینجا βc ، مانند آنچه در معادله های ۲ وجود داشت، سرعت نسبی در چارچوب است، نه سرعت ذره.

این تبدیل را با معادله های ۲ مقایسه کنید. شباهت کامل می شود اگر به جای p در معادله های ۸، cp ، به جای t در معادله های ۲، ct را در نظر بگیریم. مجموعه ای از چهار کمیت که بدین ترتیب تبدیل می شوند را یک چارچوب بردار می گویند.

معنای نیرو آهنگ تغییر تکانه است. نیروی وارد بر یک جسم به سادگی $d\mathbf{p}/dt$ است، که \mathbf{p} تکانه ذره در یک چارچوب مرجع برگزیده است، و t با ساعت‌های این چارچوب اندازه گیری می شود. برای یافتن چگونگی تبدیل نیروها، ذره ای به جرم m_0 را در نظر بگیرید که در ابتدا در مبدأ چارچوب F ساکن است و نیروی f در زمان کوتاه Δt بر آن اثر می کند. می خواهیم آهنگ

تغییر تکانه، dp'/dt' را در چارچوب F' به دست آوریم. مانند پیش می‌گذاریم F' در جهت x چارچوب F حرکت کند. ابتدا اثر مؤلفه نیروی f_x را در نظر بگیریم. در زمان Δt ، p_x از صفر به $f_x \Delta t$ افزایش می‌یابد، در حالی که افزایش x به قرار زیر است

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{f_x}{m_0} \right) (\Delta t)^2 \quad (9)$$

وانرژی ذره به اندازه $\Delta E = (f_x \Delta t)^2 / 2m_0$ افزایش می‌یابد، که انرژی جنبشی ذره در چارچوب F است. (سرعت ذره در F هنوز به اندازه‌ای کم است که مکانیک نیوتونی به کار می‌رود.) با استفاده از اولین معادله از معادله‌های ۸ تغییر p'_x را به دست می‌آوریم:

$$\Delta p'_x = \gamma \Delta p_x - \beta \gamma \Delta E / c \quad (10)$$

و استفاده از چهارمین معادله از معادله‌های ۸ رابطه زیر را می‌دهد

$$\Delta t' = \gamma \Delta t - \beta \gamma \Delta x / c$$

اکنون هر دوی ΔE و Δx با $(\Delta t)^2$ متناسب‌اند، به طوری که وقتی حد $\Delta t \rightarrow 0$ را می‌گیریم، آخرین جمله این معادله‌ها حذف می‌شود، و می‌دهد

$$\frac{dp'_x}{dt'} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p'_x}{\Delta t'} = \frac{\gamma f_x}{\gamma} = f_x \quad (11)$$

نتیجه‌گیری: مؤلفه نیروی موازی با حرکت نسبی در چارچوب متحرک همان مقدار را دارد که در چارچوب سکون ذره.

مؤلفه عرضی نیرو رفتاری متفاوت دارد. در چارچوب F ، $\Delta p_y = f_y \Delta t$ ، اما اکنون $\Delta p'_y = \Delta p_y$ و $\Delta t' = \gamma \Delta t$ ، به دست می‌آوریم

$$\frac{dp'_y}{dt'} = \frac{f_y \Delta t}{\gamma \Delta t} = \frac{f_y}{\gamma} \quad (13)$$

مؤلفه نیروی عمود بر حرکت نسبی چارچوب، که در F' مشاهده می‌شود، با ضریب $1/\gamma$ از مقداری که ناظران چارچوب سکون ذره تعیین می‌کنند کوچکتر است.

تبدیل یک نیرو از F' به چارچوب متحرک دیگر F'' اندکی پیچیده تر است. اما اگر مجبور به این کار باشیم می‌توانیم همواره با تبدیل به چارچوب سکون ذره و سپس به چارچوب متحرک دیگر این کار را انجام دهیم.

مرور خود را با این اظهار نظر درباره ناوردایی لورنتس پایان می‌دهیم. اگر دو طرف معادله ۸ را به توان دو برسانید و به خاطر داشته باشید که $\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1$ ، می‌توانید به آسانی نشان دهید که

$$c^2(p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2) - E'^2 = c^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - E^2 \quad (14)$$

بدیهی است که این کمیت $c^2 p^2 - E^2$ بر اثر تبدیل لورنتس تغییر نمی‌کند. این مقدار را اغلب چار تکانه ناوردا می‌نامند (اگر چه دارای بعد مربع انرژی است). مقدار آن در تمام چارچوبهای مرجع، از جمله چارچوب سکون ذره، یکسان است. در چارچوب سکون، تکانه ذره صفر و انرژی E آن درست برابر است با $m_0 c^2$. بنابراین چار تکانه ناوردا $m_0^2 c^4 - E^2$ است. نتیجه می‌گیریم که در هر چارچوب دیگر

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \quad (15)$$

ناوردایی که به همین ترتیب با معادله‌های ۲ ساخته می‌شود عبارت است از

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - c^2(t_B - t_A)^2$$

اگر این مقدار برای دو رویداد A و B مثبت باشد، می‌گویند این رویداد فاصله فضاگونه دارند. همواره می‌توان چارچوبی را یافت که در آن این دو رویداد همزمان باشند. اگر این ناوردا منفی باشد، رویدادها فاصله زمانگونه دارند. در این صورت چارچوبی وجود دارد که در آن این رویدادها در زمانهای مختلف، اما در یک محل، رخ می‌دهند. اگر این "بازه ناوردا" صفر باشد، دو رویداد را می‌توان با یک درخش نور به هم مربوط کرد.

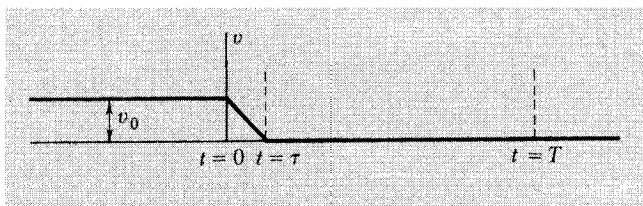
پیوست ب

تابش توسط یک بار شتابدار

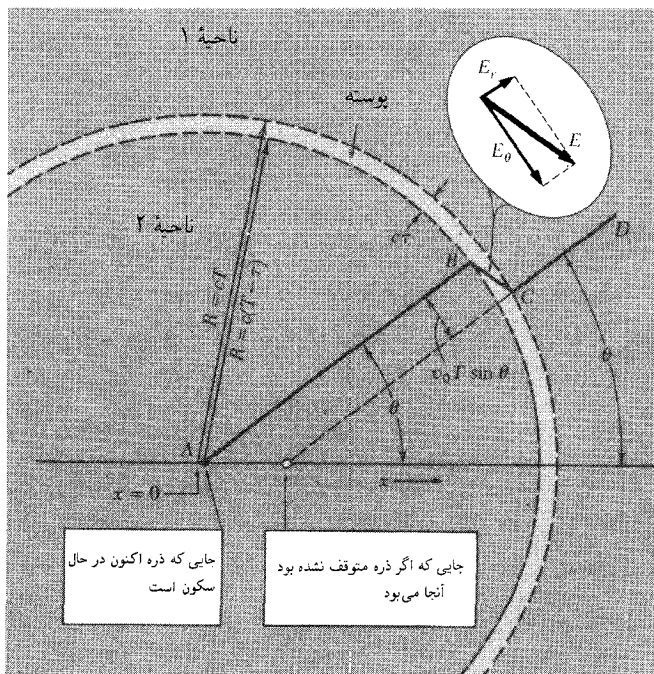
یک ذره دارای بار q برای مدت طولانی با سرعت ثابت v_0 بر خط راست در حرکت است. فرض کنید که این ذره به جسمی برخورد می‌کند، و در مدت کوتاهی با شتاب منفی ثابت، در زمان τ ، به حالت سکون در می‌آید. نمودار تغییرات سرعت برحسب زمان در شکل ب-۱ حرکت آن را بیان می‌کند. میدان الکتریکی این ذره پس از آن چگونه به نظر می‌رسد؟ شکل ب-۲ نشان می‌دهد که چگونه می‌توان آن را به دست آورد.

فرض می‌کنیم که v_0 در مقایسه با c کوچک است. اگر $t = 0$ لحظه آغاز کند شدن؛ و $x = 0$ مکان ذره در آن لحظه باشد. در هنگام توقف کامل، ذره در $x = \frac{1}{2}v_0\tau$ است. این فاصله، اگرچه کوشیده‌ایم آن را در نمودار نشان دهیم، در مقایسه با فاصله‌های دیگری که با آنها سروکار داریم کوچک است.

اکنون میدان الکتریکی را در $t = T \gg \tau$ بررسی می‌کنیم. ناظرانی که فاصله آنها از مبدأ از $R = cT$ دورتر است، نمی‌توانند از کند شدن ذره آگاه شده باشند. در این ناحیه، ناحیه ۱ در شکل ب-۲، میدان باید میدان باری باشد که با سرعت ثابت v_0 در حرکت بوده و هنوز در حرکت است. به نظر می‌رسد که میدان چنانکه در بخش ۵-۷ دیدیم از محل کنونی ذره نشأت می‌گیرد، که برای ناظری که در هر کجای ناحیه ۱ قرار دارد، نقطه $x = v_0 T$ بر روی محور x است. یعنی محلی که ذره اگر کند نشده بود اکنون در آنجا می‌بود. از طرف دیگر، برای هر ناظری که فاصله‌اش از مبدأ کمتر از $c(T - \tau)$ است، یعنی برای هر ناظر در



شکل ب-۱ نمودار سرعت-زمان برای ذره‌ای که تا زمان $t = 0$ با سرعت ثابت v_0 حرکت کرده است. سپس تحت تأثیر شتاب منفی ثابت به بزرگی $a = v_0 / \tau$ قرار گرفته است که آن را در زمان $t = \tau$ متوقف کرده است. فرض می‌کنیم v_0 در مقایسه با c کوچک است.



شکل ب-۲ نمودار فضایی برای $t = T \gg \tau$ ، مدتی پس از آنکه ذره متوقف شده است. برای ناظران در ناحیه ۱ میدان مربوط به باری است که در $x = v_0 T$ قرار دارد، برای ناظران ناحیه ۲ این میدان مربوط به ذره‌ای ساکن در نزدیکی مبدأ است. ناحیه گذار پوسته‌ای به ضخامت $c\tau$ است.

ناحیه ۲، میدان همان میدان باری است که در حوالی مبدأ در حال سکون است (در واقع در $x = 1/2 v_0 \tau$).

میدان در ناحیه گذار، پوسته‌ای کروی به ضخامت $c\tau$ ، چگونه به نظر می‌رسد؟ قانون گاوس کلید حل این مسئله است. یک خط میدان مانند AB روی مخروطی حول محور x قرار دارد که حاوی مقداری از شار حاصل از بار q است. اگر CD همان زاویه θ را با محور بسازد، روی مخروطی قرار دارد که حاوی همان مقدار شار است. (چون v_0 کوچک است، انقباض نسبی خطوط میدان که در شکل‌های ۵-۱۳، و ۵-۱۷ مرئی است در اینجا قابل چشمپوشی است.) بنابراین AB و CD باید قسمتهایی از یک خط میدان باشند که با پاره خط BC به هم مربوط شده‌اند. این جهت میدان \mathbf{E} را در داخل پوسته تعیین می‌کند: که جهت پاره خط BC است. این میدان \mathbf{E} در داخل پوسته دارای یک مؤلفه شعاعی E_r ، و یک مؤلفه عرضی E_θ است. با استفاده از هندسه شکل می‌توان این نسبت را به آسانی یافت

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{v_0 T \sin \theta}{c\tau} \quad (۱)$$

اکنون مقدار E_r در ضخامت پوسته باید همان مقدار میدان در ناحیه ۲ در نزدیکی B باشد (مجدداً قانون گاوس!) بنابراین $E_r = q/R^2 = q/c^2 T^2$ ، و با قرار دادن در معادله ۱ به دست می‌آوریم

$$E_\theta = \frac{v_0 T \sin \theta}{c\tau} E_r = \frac{qv_0 \sin \theta}{c^2 T \tau} \quad (۲)$$

اما $v_0/\tau = a$ ، بزرگی شتاب (منفی) است، و $cT = R$ ، به طوری که نتیجه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E_\theta = \frac{qa \sin \theta}{c^2 R} \quad (۳)$$

در اینجا واقعیت جالب توجهی آشکار می‌شود. E_θ با $1/R$ متناسب است نه با $1/R^2$! با گذشت زمان و افزایش R ، میدان عرضی E_θ سرانجام بسیار قویتر از E_r می‌شود. همراه این میدان الکتریکی عرضی (یعنی، میدان عمود بر \mathbf{R}) میدان مغناطیسی با همان قدرت وجود دارد که بر هر دوی \mathbf{R} و \mathbf{E} عمود است. این یک ویژگی کلی امواج الکترومغناطیسی است، که در فصل ۹ توجیه شد.

بگذارید انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی عرضی بالا را، در کل پوسته کروی، محاسبه کنیم. چگالی انرژی برابر است با

$$\frac{E_\theta^2}{4\pi} = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{4\pi R^2 c^2} \quad (۴)$$

حجم پوسته $4\pi R^2 c\tau$ ، و میانگین مقدار $\sin^2 \theta$ روی کره $2/3$ است.^۱ بنابراین انرژی کل میدان عرضی برابر است با

$$\frac{2}{3} 4\pi R^2 c\tau \frac{q^2 a^2}{4\pi R^2 c^2} = \frac{1}{3} \frac{q^2 a^2 \tau}{c^2}$$

به این مقدار باید همین قدر انرژی را که در میدان مغناطیسی عرضی ذخیره شده است بیفزاییم.

$$\text{کل انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی عرضی} = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2 \tau}{c^2} \quad (5)$$

شعاع R حذف شده است. این مقدار انرژی بدون تضعیف با سرعت c از محل کند شدن به طرف خارج حرکت می‌کند. چون مدت زمان کند شدن است، و نیز طول تب الکترومغناطیسی است که یک ناظر در دور دست اندازه می‌گیرد، می‌توانیم بگوییم که توان تابش شده (P_{rad}) در طول فرایند شتاب‌گیری برابر بوده است با

$$P_{\text{rad}} = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3} \quad (6)$$

چون مربع شتاب لحظه‌ای در معادلهٔ ۶ ظاهر می‌شود، مثبت یا منفی بودن a اهمیتی ندارد. البته نباید هم داشته باشد، چون متوقف شدن در یک چارجوب لخت می‌تواند آغاز به حرکت در چارجوب دیگر باشد. چون از چارجوبهای مختلف صحبت می‌کنیم، خود P_{rad} ناوردای لورنتس است، که چیزی است بسیار مفید. این بدان علت است که P_{rad} برابر است با زمان/انرژی، و انرژی مانند زمان، چنانکه در پیوست الف دیدیم، مؤلفهٔ چهارم یک چار بردار است.

در اینجا نتیجهٔ کلی‌تر از آنچه انتظار داشتیم به دست آوردیم. معادلهٔ ۶ آهنگ تابش انرژی توسط ذرهٔ بارداری را می‌دهد که با شتاب متغیر در حرکت است — مثلاً، ذره‌ای که با حرکت هماهنگ ساده ارتعاش می‌کند. این درگسترهٔ وسیعی از سیستمهای تابشگر از آنتنهای رادیو تا اتمها و هسته‌ها به‌کار می‌رود.

مسائل

ب-۱ یک الکترون که در ابتدا با سرعت ثابت v در حرکت است با شتاب منفی یکنواخت a پس از گذشت زمان $t = v/a$ متوقف می‌شود. انرژی الکترومغناطیسی را که در خلال کند شدن

۱. محور قطبی ما در این شکل محور x است: $\cos^2 \theta = x^2/R^2$. با خطی که میانگین روی کره را نشان می‌دهد $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = 1/3 R^2$ بنابراین $\overline{\cos^2 \theta} = 1/3$ و $\overline{\sin^2 \theta} = 1 - \overline{\cos^2 \theta} = 2/3$.

گسیل می‌شود با انرژی جنبشی اولیه الکترون مقایسه کنید. نسبت را برحسب دو طول، مسافتی که نور در زمان t می‌پیماید و شعاع کلاسیکی الکترون $r_0 = e^2/mc^2$ بیان کنید.

ب- یک الکترون که به طور کشسان مقید شده است با حرکت هماهنگ ساده با بسامد ω و دامنه A ارتعاش می‌کند.

(الف) میانگین آهنگ اتلاف انرژی بر اثر تابش را بیابید.

(ب) اگر انرژی برای جبران این اتلاف تأمین نشود، چقدر طول می‌کشد تا انرژی نوسانگر به $1/e$ مقدار اولیه خود فرو افتد.

جواب (ب): $3mc^3/2e^2\omega^2$.

ب- یک موج الکترومغناطیسی تخت به بسامد ω و دامنه میدان الکتریکی E_0 بر یک الکترون منزوی فرود می‌آید. در نوسان سینوسی الکترون حاصل از آن، بیشینه شتاب برابر است با E_0/m . توان تابشی میانگین این بار نوسانگر در چرخه‌های بسیار چقدر است؟ (توجه کنید که این مقدار مستقل از بسامد ω است). این توان تابشی میانگین را بر $E_0^2 c/4\pi$ چگالی توان میانگین (توان در واحد سطح جبهه موج) در موج فرودی تقسیم کنید. مقدار ثابت σ با ابعاد سطح به دست می‌آید که سطح مقطع پراکندگی خوانده می‌شود. انرژی که الکترون تابش یا پراکنده می‌کند، و بنابراین موج تخت از دست می‌دهد، با انرژی که به سطح σ می‌تابد هم‌ارز است. (موردی که در اینجا بررسی می‌شود و در آن یک الکترون آزاد دخیل است که حرکتی غیرنسبیتی دارد اغلب به نام جی. جی. تامسون کاشف الکترون، که اولین بار این محاسبه را انجام داد، پراکندگی تامسون خوانده می‌شود).

ب- فرمول اصلی ما، معادله ۶، برای ذرات نسبیتی مفید است، اگرچه در به دست آوردن آن فرض کردیم که $v \ll c$. آنچه باید انجام دهیم تبدیل به یک چارچوب لخت F' است که در آن ذره مورد نظر، لااقل به طور موقت، آهسته حرکت می‌کند، معادله ۶ را در این چارچوب به کار برید، سپس تبدیل معکوس را به هر چارچوب دلخواه انجام دهید. یک الکترون بسیار نسبیتی ($\gamma \gg 1$) را که عمود بر میدان مغناطیسی \mathbf{B} حرکت می‌کند در نظر بگیرید. الکترون به طور پیوسته عمود بر میدان شتاب گرفته است و باید تابش کند. این الکترون با چه آهنگی انرژی از دست می‌دهد؟ برای پاسخگویی به این پرسش، به چارچوب F' که همراه الکترون حرکت می‌کند بروید، E' و P'_{rad} را در این چارچوب بیابید. اکنون نشان دهید که چون توان عبارت است از زمان/انرژی، $P_{\text{rad}} = P'_{\text{rad}}$. این تابش را معمولاً تابش سنکروترون می‌نامند.

جواب: $P_{\text{rad}} = 2/3\gamma^2 B^2 e^2/m^2 c^3$.

پیوست ج

ابرسانایی

فلز سرب در دمای اتاق رسانای نسبتاً خوبی است. مقاومت ویژه آن، مانند سایر فلزات خالص، تقریباً متناسب با دمای مطلق تغییر می‌کند. با سرد شدن سرب به 15 K مقاومت آن به حدود $1/20$ مقدار آن در دمای اتاق می‌رسد، و با کاهش بیشتر دما، کم شدن مقاومت ادامه می‌یابد. اما با گذر از دمای 7.22 K ، بدون هشدار قبلی، تغییر تکان‌دهنده‌ای رخ می‌دهد: مقاومت الکتریکی سیم سربی ناگهان از میان می‌رود! این مقدار به اندازه‌ای کوچک می‌شود که جریان در حلقه بسته‌ای از سیم سربی سردتر از 7.22 K ، جریانی که معمولاً در کمتر از یک میکروثانیه از میان می‌رود، برای سالها بدون تغییر قابل اندازه‌گیری در آن ادامه خواهد داشت. این پدیده مستقیماً نمایش داده شده است. سایر آزمایشها نشان می‌دهد که این جریان می‌تواند بیلونها سال تداوم داشته باشد. به‌سختی می‌توان از گفتن اینکه مقاومت صفر است طفره رفت. بدیهی است که چیزی کاملاً متفاوت با رسانش الکتریکی معمولی در سرب در دمای کمتر از 7.22 K رخ می‌دهد. این پدیده را ابرسانایی می‌نامیم.

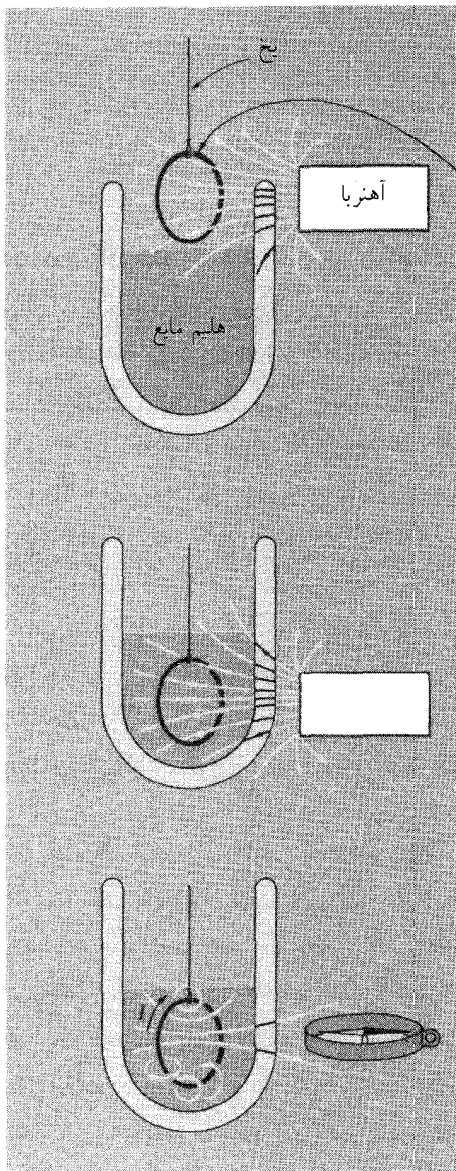
ابرسانایی را آزمایشگر بزرگ هلندی کامرلینگ اونز در سال ۱۹۱۱ کشف کرد. وی این پدیده را ابتدا در جیوه مشاهده کرد، که دمای بحرانی آن 4.16 K است. از آن پس چند دوجین فلز خالص و آلیاژ پیدا شده‌اند که ابرسانا می‌شوند. گستره دماهای بحرانی آنها از چند صدم درجه تا بالاترین دمای کشف شده 23.2 K برای ترکیبی از نیوبیم و ژرمانیم است. شگفت اینکه، بعضی از بهترین رساناهای عادی مانند نقره، مس، و فلزهای قلیایی از جمله عناصری هستند که ابرسانا نمی‌شوند.

ابرسانایی فقط اخیراً به‌طور رضایتبخشی توجیه شده است. این پدیده اصولاً پدیده‌ای کوانتوم مکانیکی و بسیار ظریف است. جریان الکتریکی که آزادانه جاری است از الکترونیایی تشکیل شده است که حرکتی کاملاً منظم دارند. مانند حرکت الکترونی در یک اتم، این جریان الکترونی از آشفتگیهای اندک مصون است، و به همین دلیل: برای ایجاد هرگونه تغییر در وضعیت حرکت، انرژی محدودی لازم است. این چیزی مانند وضعیت یک عایق است که در آن تمام ترازهای نوار ظرفیت اشغال شده‌اند و با یک گاف انرژی از ترازهای انرژی بالاتر در نوار رسانش جدا شده‌اند. اما برخلاف الکترونیایی که نوار ظرفیت را پر کرده‌اند، و جریان خالص حاصل از آنها صفر است. پایبندترین حالت انرژی الکترونیهای ابررسانا می‌توانند دارای یک سرعت برآیند و در نتیجه عبور جریان در یک جهت باشند. چرا باید چنین حالت عجیبی در پایبندتر از یک دمای بحرانی امکان‌پذیر شود؟ در اینجا نمی‌توانیم آن را توجیه کنیم.^۱ در این پدیده، برهم‌کنش الکترونیهای رسانش نه فقط با یکدیگر، بلکه با تمامی شبکه یونهای مثبتی که در آن حرکت می‌کنند، دخیل است. بدین سبب است که مواد مختلف، دماهای بحرانی متفاوت دارند، و بعضی مواد تا صفر مطلق رسانای معمولی باقی می‌مانند. در فیزیک ابررسانایی، میدانهای مغناطیسی اهمیتی بیش از حد انتظار دارند. باید فوراً بگوییم که پدیده‌های ابررسانایی به هیچ‌وجه معادله‌های ماکسول را نقض نمی‌کنند. بنابراین جریان مداومی که می‌تواند از حلقه سیم ابررسانا بگذرد، در صورتی که مقاومت حلقه واقعاً صفر باشد، پیامد مستقیم قانون القايش فاراده است. زیرا اگر با مقدار معین شار Φ که از حلقه می‌گذرد شروع کنیم، چون $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ حول حلقه همواره صفر می‌ماند، $d\Phi/dt$ باید صفر باشد. شار نمی‌تواند تغییر کند، جریان I در حلقه به‌طور خودبه‌خود مقدار لازم برای نگه‌داشتن شار در Φ را اختیار می‌کند. شکل ج-۱ طرح کلی نمایش ساده‌ای از این مطلب است، و نشان می‌دهد که چگونه می‌توان جریان مداومی را در یک مدار ابررسانای منزوی برقرار کرد.

میدان مغناطیسی در داخل خود ماده ابررسانا (بجز در محل‌های بسیار نزدیک به سطح) همواره صفر است. این یک پیامد معادله‌های ماکسول نیست، بلکه یک ویژگی حالت ابررسانایی است، که معمایی است به همان اندازه بنیادی و در عین حال گیج‌کننده که نبود مقاومت. شرط $\mathbf{B} = 0$ در داخل توده ابررسانا به‌وسیله جریانهایی که از لایه نازکی از سطح می‌گذرند خودبه‌خود برقرار می‌ماند.

یک میدان مغناطیسی قوی، ابررسانایی را از میان می‌برد. هیچ‌کدام از ابررساناهایی که قبل از

۱. ظهور ناگهانی یک حالت منظم در یک دمای بحرانی یادآور همخط شدن خودبه‌خود اسپینهای الکترون است که در آهن در پایبندتر از دمای کوری رخ می‌دهد (در بخش ۱۱-۱۱ تذکر داده شد). در این پدیده‌های تعاونی همواره تعداد زیادی ذرات برهم‌کنش‌کننده دخیل‌اند. یک پدیده تعاونی شناخته شده‌تر انجاماد آب است، که آن هم با یک دمای بحرانی خوش‌تعریف مشخص می‌شود.



حلقهٔ لجم (آلیاژ سرب-قلع) رسانای معمولی؛ جریان صفر، آهنربای دائمی باعث می‌شود که شار Φ از حلقه بگذرد.

حلقه تا پایتتر از دمای بحرانی سرد می‌شود. (بخشی از هلیوم تبخیر شده است.) شاری که از حلقه می‌گذرد تغییر نمی‌کند. اکنون حلقه ابررساناست.

آهنربا برداشته شده است، اکنون جریان مستمر I از حلقه می‌گذرد، تا شار را در مقدار Φ نگه‌دارد. عقربهٔ قطب‌نما به میدان جریان مستمر پاسخ می‌دهد.

شکل ج-۱ برقرار کردن جریان مداوم در یک حلقهٔ ابررسانا. حلقه از لجم معمولی ساخته شده است که آلیاژ سرب-قلع است. (الف) حلقه، که هنوز سرد نشده است، رسانای معمولی با مقاومت اهمی است. بالا آوردن آهنربای دائمی، جریان در حلقه را کم می‌کند که به سرعت از میان می‌رود و شار مغناطیسی حاصل از آهنربا را که از حلقه می‌گذرد به مقدار Φ نگه می‌دارد. (ب) سطح حمام هلیوم بدون تغییر محل حلقه و آهنربای دائمی بالا آورده می‌شود. اکنون حلقه، که تا دمای کمتر از دمای بحرانی سرد شده است، یک ابررسانا با مقاومت صفر است. (ج) آهنربا برداشته می‌شود. شاری که از حلقه با مقاومت صفر می‌گذرد نمی‌تواند تغییر کند. این شار به کمک جریانی که مادام که دمای حلقه پایتتر از دمای بحرانی است از آن می‌گذرد برابر Φ باقی می‌ماند. میدان مغناطیسی جریان مداوم را می‌توان با یک قطب‌نما نشان داد.

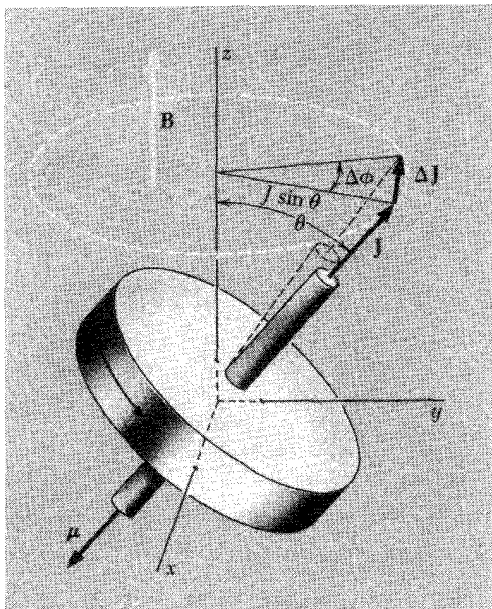
سال ۱۹۵۷ شناخته شده بودند نمی‌توانستند بیش از چند صد گاؤس را تحمل کنند. این موضوع مانع از کاربرد عملی رساناهای با مقاومت صفر شده بود. نمی‌توان جریان زیادی را از یک سیم ابرسانا گذراند زیرا میدان مغناطیسی این جریان حالت ابرسانایی را از میان می‌برد. اما بعداً نوع دیگری از ابرسانا کشف شد که می‌توانست مقاومت صفر را تا میدانهای 10^5 گاؤس و بیشتر حفظ کند. یک ابرسانا از این نوع که کاربرد گسترده دارد، آلیاژی از نیوبیم و قلع با دمای بحرانی 18 K است و اگر تا 4 K سرد شود در میدانهای تا 200 کیلوگاؤس ابرسانا باقی می‌ماند. اکنون سیمولوله‌های ابرسانا، که بدون هزینهٔ بیش از آنچه برای سرد کردن آنها لازم است، میدانهای پایای 50 تا 100 کیلوگاؤسی تولید می‌کنند بسیار متداول هستند. چشم‌اندازهای مناسبی برای استفاده از ابرساناها در ماشینهای الکتریکی بزرگ و در خطوط انتقال انرژی الکتریکی در فاصله‌های زیاد وجود دارد.

در انتهای دیگر مقیاس، فیزیک کوانتومی ابرسانایی، اندازه‌گیریهای الکتریکی با حساسیت و درستی بی‌سابقه‌ای را امکان‌پذیر می‌سازد، که استاندارد کردن ولت برحسب یک بسامد نوسان قابل اندازه‌گیری از آن جمله است. برای فیزیکدانها، ابرسانایی تجلی خیره‌کننده‌ای از مکانیک کوانتومی در بزرگ مقیاس است. می‌توان مغناطیس دائمی آهن‌ریا در شکل ج-۱ را ردیابی کرد. (تا رسیدن به گشتاور مغناطیسی ذاتی یک الکترون چرخان، که نوعی ابرجریان در مدار با اندازه کوچکتر از 10^{-8} است). حلقهٔ لحیم که جریان مستمیری از آن می‌گذرد از یک لحاظ مانند یک اتم غول‌آساست، که حرکت الکترونهای وابسته به آن، گرچه تعداد آنها بسیار زیاد است، به صورت رفتار کاملاً منظم یک حالت کوانتومی مرتب شده است.

پیوست د

تشدید مغناطیسی

الکترون دارای تکانه زاویه‌ای اسپین \mathbf{J} است. بزرگی آن همواره یکسان و برابر است با $\hbar/4\pi$ یا $5.271 \times 10^{-28} \text{g-cm}^2/\text{s}$. به محور اسپین یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی μ به بزرگی $9.273 \times 10^{-20} \text{erg/G}$ (بخش ۱۱-۶) وابسته است. بر الکترون در میدان مغناطیسی لنگری وارد می‌شود که می‌خواهد گشتاور دوقطبی را با میدان همخط کند. پاسخ آن مانند هر ژيروسکوپ است که به سرعت می‌چرخد: محور اسپین به جای اینکه در امتداد میدان قرار گیرد با حرکت تقدیمی حول جهت میدان می‌چرخد. بگذارید ببینیم چرا هر آهنربای چرخان چنین می‌کند. گشتاور مغناطیسی μ در شکل د-۱ نشان داده شده است، همان‌طور که برای هر جسم دارای بار منفی مانند الکترون انتظار داریم این گشتاور در جهت مخالف تکانه زاویه‌ای \mathbf{J} است. میدان مغناطیسی \mathbf{B} (میدان یک سیملوله یا آهنربایی که نشان داده نشده است) لنگری ایجاد می‌کند که می‌خواهد μ را در جهت \mathbf{B} قرار دهد. این لنگر، در زمانی که در تصویر نشان داده شده است، برداری در جهت منفی \hat{x} است. بزرگی آن از معادله ۳۸ فصل ۱۱ به دست می‌آید؛ این مقدار برابر است با $\mu B \sin \theta$. در زمان کوتاه Δt این لنگر یک نمو برداری $\Delta \mathbf{J}$ را در جهت بردار لنگر و با بزرگی $\mu B \sin \theta \Delta t$ به تکانه زاویه‌ای فرفره‌ما می‌افزاید. بدین وسیله، مؤلفه افقی \mathbf{J} ، که برابر $J \sin \theta$ است، به اندازه زاویه کوچک $\Delta \psi$ می‌چرخد که از رابطه زیر به دست می‌آید



شکل ۱- حرکت تقدیمی یک فرفره مغناطیسی در میدان خارجی. تکانه زاویه‌ای اسپین \mathbf{J} و گشتاور دوقطبی μ ، مانند مورد هر چرخنده دارای بار منفی در جهت مخالف هستند.

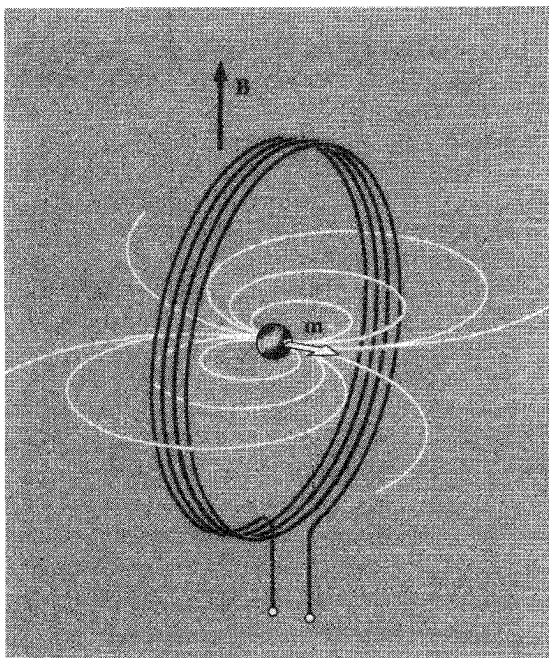
$$\Delta\psi = \frac{\Delta J}{J \sin \theta} = \frac{\mu B \Delta t}{J} \quad (1)$$

با ادامه این کار انتهای بالایی بردار \mathbf{J} به سادگی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_p حول یک دایره حرکت می‌کند:

$$\omega_p = \frac{\Delta\psi}{\delta t} = \frac{\mu B}{J} \quad (2)$$

که آهنگ حرکت تقدیمی محور اسپین است. توجه کنید که چون $\sin \theta$ حذف شده است، این مقدار برای هر زاویه کج شدن یکسان است.

برای الکترون μ/J برابر است با $1.759 \times 10^8 \text{ s}^{-1} \text{ G}^{-1}$. در یک میدان ۱ گاوسی بردار اسپین با آهنگ $1.759 \times 10^8 \text{ rad/s}$ ، یا 2800×10^6 دور بر ثانیه می‌چرخد. گشتاور تکانه زاویه‌ای اسپین پروتون درست برابر الکترون، $\hbar/4\pi$ است. اما گشتاور مغناطیسی وابسته به آن کوچکتر است. این چیزی است که انتظار داریم، زیرا جرم پروتون 1836 برابر جرم الکترون است.



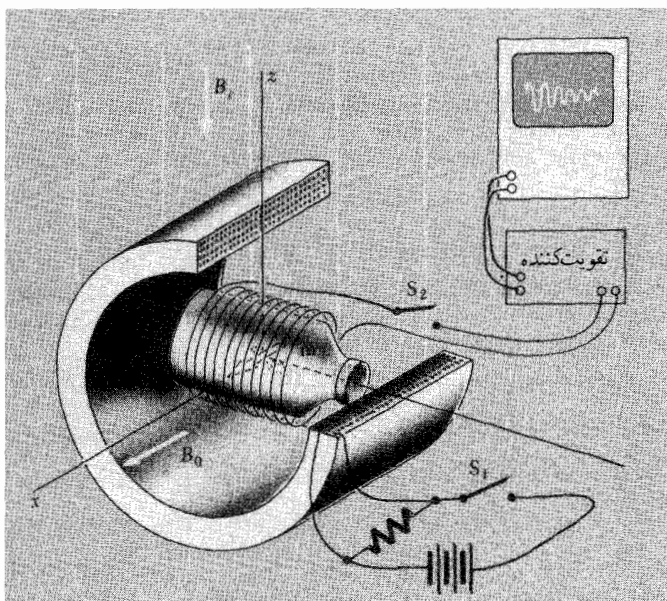
شکل د-۲ یک گشتاور دوقطبی که در مرکز یک پیچه دارای حرکت تقدیمی است، باعث تغییر متناوب شاری می‌شود که از پیچه می‌گذرد، و یک نیروی محرکه الکتریکی در پیچه القا می‌کند. توجه کنید که شار حاصل از دوقطبی m که پیچه به هم می‌پیوندد همان شاری است که در خارج آن حلقه می‌زند (مسئله د-۱).

مانند مورد تکانه زاویه‌ای مداری (معادله ۱۱-۲۳) گشتاور مغناطیسی یک ذره بنیادی اسپین‌دار، در صورتی که سایر شرایط یکسان باشد، باید با جرم آن نسبت عکس داشته باشد. در واقع گشتاور مغناطیسی پروتون 1.411×10^{-23} erg/G است، که فقط 66° بار از گشتاور الکترون کوچکتر است، و نشان می‌دهد که پروتون به‌گونه‌ای یک ذره مرکب است. در میدان ۱ گاوسی، اسپین پروتون با آهنگ ۴۲۵۸ دور بر ثانیه می‌چرخد. در حدود ۴۰ درصد از هسته‌های اتمی پایدار دارای گشتاور زاویه‌ای ذاتی و گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی وابسته به آن هستند.

می‌توان حرکت تقدیمی گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی را از طریق تأثیرشان بر یک مدار الکتریکی آشکار ساخت. پروتونی را در میدان مغناطیسی B در نظر بگیرید، که اسپین آن بر میدان عمود است، و مانند شکل د-۲ یک پیچه کوچک سیمی آن را در بر گرفته است. حرکت تقدیمی پروتون، مانند چرخش دو سر یک آهنربای میله‌ای کوچک، باعث می‌شود که یک شار متناوب از پیچه بگذرد. ولتاژی با بسامد حرکت تقدیمی در پیچه القا می‌کند. همان‌طور که انتظار دارید، ولتاژی که یک پروتون بدین ترتیب القا می‌کند به قدری ضعیف است که قابل آشکارسازی نیست.

اما فراهم آوردن پروتونهای بیشتر راحت است، ۱ سانتی متر مکعب آب حاوی $10^{22} \times 7$ پروتون است، و همه آنها حرکت تقدیمی با یک بسامد دارند. متأسفانه، همه آنها در یک لحظه در یک جهت نیستند. در واقع، محورهای اسپین و گشتاورهای مغناطیسی آنها چنان به صورت یکنواخت در جهتهای ممکن توزیع شده‌اند که میدانهای آنها تقریباً یکدیگر را خنثی می‌کند. اما اگر گام دیگری برداریم، این خنثی شدن کامل نخواهد بود. اگر یک میدان مغناطیسی قوی B را به آب اعمال کنیم، برای مدت چند ثانیه، تعداد گشتاورهای مغناطیسی پروتون در جهت B ، جهتی که از لحاظ انرژی مزیت دارد، بیشتر خواهد بود. مرتبه بزرگی این کسر اضافی، مانند پارامغناطیسی عادی، برابر خواهد بود با $\mu B/kT$. این مقدار ممکن است از یک در میلیون بیشتر نباشد، اما اگر گشتاورهای خنثی نشده، به حرکت تقدیمی در پیچه واداشته شوند، سیگنال قابل مشاهده‌ای را تولید می‌کنند. یک روش ساده برای مشاهده حرکت تقدیمی اسپینهای هسته‌ای در میدانهای ضعیف مانند میدان مغناطیسی زمین در شکل ۳-۳ نشان داده شده است. طرحهای بسیار دیگری برای مشاهده حرکت تقدیمی الکترونها و هسته‌ها به کار رفته است. در این طرحها معمولاً ترکیبی از میدان مغناطیسی پایا و میدانهای مغناطیسی نوسانی با بسامدی در حوالی ω_p دخیل‌اند. برای اسپینهای الکترون (تشدید پارامغناطیسی الکترون، یا EPR) بسامدها نوعاً چند هزار مگاهرتز هستند، در حالی که برای اسپینهای هسته‌ای (تشدید مغناطیسی هسته‌ای، یا NMR) این بسامدها چند ده مگاهرتزند. بسامد دقیق حرکت تقدیمی یا تشدید، در یک میدان معین را می‌توان با برهم‌کنشهای مغناطیسی داخل مولکولی اندکی جابه‌جا کرد. این موضوع NMR را، به‌ویژه در شیمی، مفید ساخته است. محل یک پروتون در یک مولکول پیچیده را اغلب می‌توان از انتقال اندک بسامد حرکت تقدیمی آن به دست آورد.

میدانهای مغناطیسی به راحتی در مواد نامغناطیسی معمولی نفوذ می‌کنند، که شامل میدانهای مغناطیسی متناوب نیز می‌شود اگر بسامد آنها یا رسانندگی الکتریکی ماده بسیار زیاد نباشد. یک میدان ثابت 2000 گاؤسی که به بطری آب در مثال ما اعمال شود. باعث حرکت تقدیمی و قطبش پروتون با بسامد $10^6 \times 8516$ دور بر ثانیه می‌شود. میدان گشتاورهای چرخان سیگنالی با بسامد 8516 MHz در پیچه خارج بطری القا می‌کند. این مطلب برای بدن انسان نیز به کار می‌رود، که اگر آن را یک دی‌الکتریک در نظر بگیریم، به سادگی مجتمعی از اشیای کم‌بیش آبکی است. در تصویرگیری NMR از داخل بدن به کمک تشدید مغناطیسی هسته‌ای نقشه برداری می‌شود. تراکم اتمهای هیدروژن در محل به خصوص به کمک سیگنال با بسامد رادیویی نمایان می‌شود که پروتونهای چرخان در پیچه خارجی القا کرده‌اند. محل دقیق چشمه در داخل بدن را می‌توان با اندازه‌گیری دقیق بسامد سیگنال تعیین کرد اگر میدان ثابت B ، که طبق معادله ۲ بسامد را تعیین می‌کند، تغییرات فضایی با گرادیان معین داشته باشد.



شکل د-۳ وسیله‌ای برای مشاهده حرکت تقدیمی اسپین پروتون در میدان زمین B_e . یک بطری آب را دو پیچه متعامد در بر گرفته‌اند. با کلید S_2 باز و کلید S_1 بسته، سیمولوله بزرگ یک میدان مغناطیسی قوی B_0 تولید می‌کند. مانند مورد پارامغناطیسی معمولی (بخش ۱۱-۶) اگر دوقطبی در جهت میدان باشد انرژی کم می‌شود، اما جنبش گرمایی سبب بی‌نظمی می‌شود. در اینجا دوقطبیها پروتونهایی (هسته هیدروژن) در مولکولهای آب هستند. وقتی ترازمندی گرمایی حاصل شد، که در این مورد چند ثانیه طول می‌کشد، مغناطش چیزی می‌شود که با همخط کردن کسر کوچک $\mu B_0 / kT$ تمام گشتاورهای پروتون را در جهت میدان به دست می‌آورد. اکنون میدان مغناطیسی قوی B_0 را قطع کرده و کلید S_2 را وصل می‌کنیم تا پیچه حول بطری را به تقویت‌کننده وصل کنیم. اکنون گشتاور مغناطیسی m در صفحه xy حول میدان نسبتاً ضعیف باقیمانده B_e ، با بسامدی که از معادله ۲ به دست می‌آید، حرکت تقدیمی دارد. مؤلفه متناوب y بردار چرخان m یک ولتاژ متناوب در پیچه القا می‌کند که می‌توان آن را تقویت و مشاهده کرد. از بسامد آن می‌توان B_e را با دقت تعیین کرد. خود این سیگنال، با از میان رفتن مغناطش حاصل از میدان قوی B_0 بر اثر جنبش گرمایی، در عرض چند ثانیه میرا می‌شود. مغناطومترهایی از این نوع و انواع دیگر را ژئوفیزیکدانها برای اکتشاف میدان مغناطیسی زمین، و باستانشناسان برای پیدا کردن محل اشیای عتیقه به‌کار می‌برند.

مسائل

د-۱ در مرکز پیچه‌ای به شعاع a در شکل د-۲ یک تک‌پروتون حرکت تقدیمی با آهنگ زاویه‌ای ω_p دارد. فرمولی برای دامنه نیروی محرکه الکتریکی القایی در پیچه برحسب ولت به دست آورید،

a برحسب cm، ω_p برحسب rad/s، و گشتاور پروتون 2.718×10^{-23} erg/G است.

جواب: $\omega/a \approx 10^{-3} \times 6.84$.

د-۲ (الف) اگر بطری شکل د-۳ حاوی 200 سانتی متر مکعب آب در دماهای اتاق، و B_0 برابر 1000 گاوس باشد، برآیند گشتاور مغناطیسی m چقدر است؟ با استفاده از نتیجه مسئله د-۱ سیگنال ولتاژ موجود در یک پیچۀ 500 دوری به شعاع 4 سانتی متر را وقتی شدت میدان B_0 برابر 400 گاوس است تقریباً برآورد کنید.

پیوست ۵

رابطه‌های دقیق بین یکاهای SI و CGS

در سال ۱۹۸۳ کنفرانس عمومی اوزان و مقادیر متر را به صورت رسمی، فاصله‌ای تعریف کرد که نور در $1/299792458$ ثانیه در خلأ می‌پیماید. ثانیه برحسب یک بسامد اتمی طوری تعریف می‌شود که در اینجا به آن نمی‌پردازیم. یک عدد نه رقمی برگزیده شد تا مقدار c با دقیقترین مقدار اندازه‌گیری شده در گستره دقت آن سازگار شود. از این پس سرعت نور، طبق تعریف، 299792458 متر بر ثانیه است. آزمایشی که در آن زمان گذر تپ نور از نقطه A به نقطه B اندازه‌گیری می‌شود را باید اندازه‌گیری فاصله A تا B در نظر گرفت، نه اندازه‌گیری سرعت نور.

در حالی‌که این گام پیامدهای عملی فوری ندارد، اما یک ساده‌سازی مطلوب از روابط دقیقی است که یکاهای مختلف الکترومغناطیسی را به هم مربوط می‌کند. همان‌طور که در فصل ۹ آموختیم، معادله‌های ماکسول برای میدانهای خلأ، که برحسب یکاهای SI فرمولبندی شده بود، پاسخی به صورت موج پیشرونده با سرعت $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ دارد. ثابت μ_0 در SI همواره به صورت دقیق $4\pi \times 10^{-7}$ تعریف می‌شود، در حالی‌که مقدار ϵ_0 به مقدار سرعت نور بستگی دارد که به‌طور تجربی تعیین می‌شود، و هرگونه اصلاح آن نیازمند تنظیم مقدار ϵ_0 است. اما اکنون ϵ_0 دارای یک مقدار دائمی و کاملاً دقیق مربوط به خود با توجه به شرط زیر است

$$(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} = 299792458 \text{ m/s} \quad (1)$$

در دستگاه CGS چنین پرسشی پیش نمی‌آید. هر جا که c دخیل باشد، به صورت ساده‌ای ظاهر می‌شود، و همهٔ کمیتها با شروع از یکای الکتروستاتیکی بار، esu ، که در تعریف آن بنا بر قانون کولن عامل دلخواهی دخیل نیست، به دقت تعریف می‌شوند.

با پذیرش معادلهٔ ۱ که پیامد بازتعریف متر است، رابطهٔ بین یکاها در دستگاههایی که به کار می‌بریم را می‌توان با دقت نامحدود بیان کرد. این رابطه‌ها در جدول ۱-۱ برای کمیت‌های بنیادی که با آنها سروکار داریم داده شده‌اند. در این جدول نماد "۳" به جای مقدار دقیق اعشاری ۸٫۹۹۷۹۲۴۵۸ و نماد "۹" به جای مربع ۱۷ رقمی این عدد یعنی ۲۸۷۳۶۸۱۷۶۴٫۹۸۷۵۵۱۷۸۷۳۶۸۱۷۶۴ گذاشته شده است.

اعداد دقیق جالب توجه نیستند و برای کار ما کاملاً بی‌موردند. نزدیک بودن "۳" تا این اندازه به خوش‌شانسی صرف است، و پیامدهای تصادفی طول متر و ثانیه است. وقتی دقت 10^9 به اندازهٔ کافی خوب است فقط باید به خاطر داشته باشیم که "۳۰۰ ولت یک ایستولت است" و " $10^9 \times 3$ esu یک کولن است". با دقت خیلی کمتر، اما هنوز در محدودهٔ ۱۲ درصد، یک خازن ۱ سانتی‌متری معادل ۱ پیکوفاراد است.

یک ثابت مهم SI عبارت است از $(\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$ ، که مقاومت برحسب اهم است. مقدار دقیق آن در جدول زیر داده شده است. تمایل بر آن است که آن را به صورت "۳۷۷ اهم" به خاطر بسپاریم و حتی به آن ارجاع دهیم. این مقدار نسبت شدت میدان الکتریکی E ، برحسب ولت بر متر، در یک موج تخت در خلأ، به شدت میدان مغناطیسی H وابسته به آن برحسب آمپر بر متر است. بدین دلیل ثابت $(\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$ را گاهی با Z_0 نشان می‌دهند و آن را تا اندازه‌ای اسرارآمیز، امیدانس خلأ می‌نامند. در موج تخت در خلأ که در آن E_{rms} ریشهٔ میانگین مربعی میدان الکتریکی برحسب ولت بر متر است، چگالی میانگین توان تراگسیلده، برحسب وات بر مترمربع، برابر است با E_{rms}^2/Z_0 .

رابطهٔ منطقی یکاهای الکتریکی SI با یکدیگر اکنون شکلی به خود می‌گیرند که اندکی متفاوت است. قبل از تعریف مجدد متر معمولاً یکی از یکاهای الکتریکی را به صورت زیر اولیه در نظر می‌گرفتند: مقدار دقیق آن را، لااقل از نظر اصولی، می‌توانستیم به روالی تعیین کنیم که در آن فقط یکاهای مکانیکی و الکتریکی SI دخیل باشند. بنابراین آمپر، که معمولاً این نقش را بدان می‌دادند، به صورت نیرو برحسب نیوتون میان دو جریان موازی با استفاده از معادلهٔ ۶-۷ الف تعریف می‌شد. این کار ممکن بود زیرا ثابت μ_0 در این رابطه دارای مقدار دقیق $10^{-7} \times 4\pi$ است. سپس با در نظر گرفتن آمپر به عنوان یکای الکتریکی اولیه، کولن دقیقاً برابر با ۱ آمپر-ثانیه تعریف می‌شد. خود کولن به واسطهٔ حضور ϵ_0 در قانون کولن، سزاوار آن نبود که یکای اولیه باشد. اکنون که علاوه بر μ_0 به ϵ_0 نیز مقدار عددی دقیقی نسبت داده شده است، می‌توان دستگاه را با شروع از هر نقطهٔ

جدول ۱-

برحسب یکاهای CGS	SI برحسب یکاهای	
$10^7 \text{ erg} =$	1 J	انرژی
$10^5 \text{ dyne} =$	1 N	نیرو
$10^9 \text{ esu} \times "3" =$	1 C	بار الکتریکی
$10^9 \text{ esu/s} \times "3" =$	1 A	جریان الکتریکی
$1 \text{ استاولت (erg/esu)} =$	$10^2 \text{ V} \times "3" =$	پتانسیل الکتریکی
$1 \text{ استاولت بر سانتی متر (dyne/esu)} =$	$10^4 \text{ V/m} \times "3" =$	میدان الکتریکی E
$10^4 \text{ گاوس (dyne/esu)} \times "9" =$	1 T	میدان مغناطیسی B
$4\pi \times 10^{-2} \text{ Or} =$	1 A/m	میدان مغناطیسی H
$10^{11} \text{ cm} \times "9" =$	1 F	ظرفیت
$(10^{11} \times "9")^{-1} \text{ s}^2/\text{cm} =$	1 H	القایدگی
$(10^{11} \times "9")^{-1} \text{ s/cm} =$	1Ω	مقاومت

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \Omega \cdot \text{s/m}$$

$$\epsilon_0 = (4\pi \times "9" \times 10^9)^{-1} \text{ s}/\Omega \cdot \text{m}$$

$$(\mu_0 / \epsilon_0)^{1/2} = 40\pi \times "3" \Omega = 376.73 \dots \Omega$$

$$"3" = 2.99792458 \dots$$

$$"9" = "3" \times "3"$$

آغازی ساخت. از این نظر همهٔ یکاها پایگاهی برابر دارند، و انتخاب یکای اولیه اهمیت خود را از دست می‌دهد. این پرسش را، که به هر حال هرگز جالب توجه نبود، اکنون می‌توان به تاریخ سپرد.

ثابت‌های فیزیکی

299792458^* m/s	c	سرعت نور
$4.803 \times 10^{-10} \text{ esu}$	e	بار بنیادی
$1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$		
$9.110 \times 10^{-28} \text{ g}$	m_e	جرم الکترون
$1.673 \times 10^{-24} \text{ g}$	m_p	جرم پروتون
$6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	N_0	عدد آووگادرو
$1.381 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$	k	ثابت بولتزمن
$6.626 \times 10^{-27} \text{ erg s}$	h	ثابت پلانک
$6.672 \times 10^{-8} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}$	G	ثابت گرانشی
$9.285 \times 10^{-21} \text{ erg G}^{-1}$		گشتاور مغناطیسی الکترون
$1.411 \times 10^{-23} \text{ erg G}^{-1}$		گشتاور مغناطیسی پروتون

* اختصاص این مقدار دقیق به c تعریف جدید متر را، چنانکه در پیوست ه بیان شد، تشکیل می‌دهد. مقادیر دیگر ثابتها در اینجا به‌طور اختیاری به چهار رقم گرد شده است. به استثنای ثابت گرانشی G همه آنها به‌طور تجربی با دقتی بیش از چهار رقم اندازه‌گیری شده‌اند.

SI یکای	CGS یکای		
m	cm	<i>s</i>	فاصله
kg	g	<i>m</i>	جرم
s	s	<i>t</i>	زمان
$m s^{-1}$	$cm s^{-1}$	<i>v</i>	سرعت
$kg m s^{-1}$	$g cm s^{-1}$	<i>p</i>	تکانه
$N(kg m s^{-2})$	dyne($g cm s^{-2}$)	<i>F</i>	نیرو
$J(N m)$	erg(dyne cm)	<i>W</i>	انرژی، کار
$W(J s^{-1})$	$erg s^{-1}$	<i>P</i>	توان
$C(A s)$	esu	<i>q</i>	بار الکتریکی
$C m^{-2}$	esu cm^{-2}	ρ	چگالی بار
$V(JC^{-1})$	statV($erg esu^{-1}$)	φ	پتانسیل الکتریکی
$Vm^{-1}(NC^{-1})$	statV cm^{-1} ($dyne esu^{-1}$)	<i>E</i>	میدان الکتریکی
$A(Cs^{-1})$	esu s^{-1}	<i>I</i>	جریان الکتریکی
Am^{-2}	esu $s^{-1} cm^{-2}$	<i>J</i>	چگالی جریان
$\Omega(VA^{-1})$	$cm^{-1} s$	<i>R</i>	مقاومت
Ωm	s	ρ	مقاومت ویژه
$T(Nm^{-1}A^{-1})$	G($dyne esu^{-1}$)	<i>B</i>	میدان مغناطیسی
Am^{-1}	Or($dyne esu^{-1}$)	<i>H</i>	میدان مغناطیسی
$W(T m^2)$	G cm^2	Φ	شار مغناطیسی
$F(\Omega^{-1}s)$	cm	<i>C</i>	ظرفیت
$H(\Omega s)$	$cm^{-1}s^2$	<i>L, M</i>	القایش

$$1 C = 3 \times 10^9 \text{ esu} \quad 1 A = 3 \times 10^9 \text{ esu s}^{-1}$$

$$300 \text{ V} = 1 \text{ statV} \quad 3 \times 10^4 \text{ Vm}^{-1} = 1 \text{ statVcm}^{-1}$$

$$1 T = 10^4 G \quad 1 \Omega = 9 \times 10^{11} \text{ cm}^{-1} s$$

$$1 F = 9 \times 10^{11} \text{ cm} \quad 1 H = 9 \times 10^{11} \text{ cm}^{-1} s^2$$

فهرست راهنما

- | | |
|---|----------------------------------|
| اضافه کشیدن جریان ۷۹ | آزمون موج |
| اعوجاج | ~ سینوسی ۱۳۹ |
| ~ دامنه ۴۶۴ | ~ مربعی ۱۳۹-۱۴۱ |
| ~ قانون مربعی ۲۹ | آشکارساز |
| ~ مدولاسیون متقابل ۴۸۵-۴۸۷ | ~ اضافه ولتاژ ۴۳۲ |
| ~ هماهنگ ۴۶۵ | ~ حد ۳۰۲ |
| افزاینده جریان برای تقویت‌کننده عملیاتی | ~ عبور از صفر ۳۰۱ |
| ۲۷۳-۲۷۵ | ~ فاز ۴۹۳-۴۹۴ |
| اکتاو در بسامد ۱۳۲ | ~ قله فعال ۲۹۷-۲۹۸ |
| القاگری سیم پایه ۱۴۳-۱۴۴ | آمیزنده درگیرنده‌های (AM) ۴۹۰ |
| الکترونیک، آمپرسنج ۲۲۶ | آهنگ |
| امپدانس | ~ بحرانی خیز ولتاژ ۴۳۴ |
| ~ تطبیق یافته ۱۲۷ | ~ گردش ۱۸۲، ۲۳۴ |
| ~ خروجی | آی جی فت (فت درجه-عایق) IGFET ۵۹ |
| ~ با فیدبک ولتاژ ناوارونگر ۲۰۷ | اثر |
| ~ چشمه پیرو ۳۳-۳۷ | ~ اتصال بند پوتینی ۲۰۱ |
| ~ ورودی | ~ پیژوالکتریک ۳۹۷ |
| ~ از تقویت‌کننده تفاضلی ۱۶۶ | ~ میلر ۱۰۵ |
| ~ با فیدبک ولتاژ ناوارونگر | اجزای مدارهای مجتمع (IC) ۱۵۴ |
| ۲۰۷-۲۰۵ | از سرگیر آشکارساز قله ۲۹۸ |
| امیتر پیرو پوش پول ۱۷۲ | |

- انتگرال گیر ۳۱۸-۳۲۲
 انحراف از میزان ۲۶۱-۲۶۳
 ~ ورودی ۲۶۱-۲۶۳
 باززدایی (باز تولید) ۴۲۶
 باز شدن چفت در جریان کم ۴۲۸
 بازگشت dc ۱۷۳
 بی‌اتراسازی ۱۵۲
 بی‌ایه‌های
- آینه جریان از تقویت‌کننده تفاضلی ۱۶۹
 چشمه ۲۱-۲۲
 ~ صفر برای مسافت ۶۴
 ~ کردن فت پیوندی ۴، ۱۰-۲۳
 ~ مقسم ولتاژ ۱۹-۲۲
 ~ منبع جریان ۲۲-۲۴
 بدنه (بستر زیربنای) مسافت ۵۹
 برشگر ۲۹۸
 ~ فت پیوندی ۴۳
 ~ مثبت فعال ۲۹۸-۲۹۹
 بسامد
- باترورث ۲۸۳-۲۸۸
 ~ بالاگذران ۲۸۶
 ~ پاسخ تخت ۲۸۳-۲۸۸
 ~ پایین‌گذران ۲۸۱-۲۸۸
 ~ شکاف ۳۷۹، ۳۸۳
 ~ فعال ۲۸۱-۲۸۸
 ~ نوار گذران ۲۸۶
 پس‌زنی القایی ۳۶۳
 پسماند ۳۱۲-۳۱۳
 پنجره ۳۰۸
 IC ۱۵۳
 پولک ۱۵۲
 پهنای نوار ۱۳۶-۱۳۸
 ~ توان ۱۸۴-۱۸۶
 ~ تقویت‌کننده فیدبک ۲۳۰-۲۴۱
 ~ وارونگر ۲۶۰-۲۶۱
 ~ قابل تنظیم ۲۶۶
 پیش تقویت‌کننده ۱۸۸
- تبدیل
- چارگوش به مثلثی ۳۲۸-۳۲۹
 ~ سینوسی به چارگوش ۳۲۶
 ~ شکل موج ۳۲۶-۳۳۰
 ~ مثلثی با پالس ۳۲۹
- توان دسی‌بل ۱۱۸-۱۲۵
 ~ حلقه ۲۰۱
 ~ قابل تنظیم ۲۶۸-۲۶۹
 ~ ولتاژ
- بلور تشدید متوالی ۴۰۰-۴۰۱
 بهره

تجمع

- ~ با توان متوسط ۱۸۹
- ~ عملیاتی ۱۷۰-۱۹۰
- ~ بای فت ۱۷۴
- ~ خطی پالایه‌های فعال ۲۸۱-۲۸۸
- ~ مشخصات ۱۷۶-۱۹۰
- ~ فیدبک منفی ۴۰۷-۴۰۹
- ~ کاسکود ۴۸-۵۰، ۶۵
- ~ کم نوفه ۴۵-۴۶
- ~ مجموع‌یاب ۲۷۱-۲۷۳
- ~ میان‌گیر ۴۴
- ~ ناوارونگر ۲۵۲-۲۵۹
- ~ نمونه‌گیر و نگه‌دار ۷۴-۷۵
- ~ وارونگر ۲۵۸-۲۷۳
- ~ ولتاژ ۲۵۲-۲۷۳
- ~ ناوارونگر ۲۵۲-۲۵۹
- ~ وارونگر ۲۵۸-۲۷۳
- ~ ویدئو ۹۰
- ~ ac ۲۵۳
- ~ dc ۷۱-۷۴، ۱۳۵-۱۳۸
- ~ تندهی خروجی ac ۱۷۹
- تنظیم
- ~ بار ۳۵۱-۳۵۳
- ~ کننده متوالی ۳۴۳
- ~ کننده‌های سه‌سر ۳۵۴-۳۶۰
- ~ کننده‌های کلیدزنی ۳۶۲-۳۶۵
- ~ گره‌های ولتاژ ۱۹۱
- ~ منبع ۳۵۲
- ~ ولتاژ با فیدبک ۳۳۹-۳۴۶
- ~ تولید شکل موج ۳۳۰-۳۳۴
- ~ تیریسورها(ی) ۴۲۶-۴۴۹
- ~ دوسویه ۴۳۹-۴۴۱
- ~ SCR ۴۳۳-۴۳۹
- ~ بزرگ مقیاس (LSI) ۱۵۶
- ~ کوچک مقیاس (SSI) ۱۵۶
- ~ میان مقیاس (MSI) ۱۵۶
- ~ تحریک با ماشه‌کشی ۴۲۷
- ~ تحریک‌پذیری با نور (LASCR) ۴۳۷
- تحلیل
- ~ ترانزیستور دوقطبی در بالا بسامد ۱۱۳-۱۱۸
- ~ فت در بالا بسامد ۱۰۵-۱۱۳
- ~ تراشه (چیپ) ۱۵۳
- ~ ترانزیستور تک‌پیوندی (UJT) ۴۴۱-۴۴۵
- ~ تریاک ۴۴۰-۴۴۱
- تشدید
- ~ متوالی در بلور ۴۰۰-۴۰۱
- ~ موازی ۴۰۰
- ~ تقارن نیم‌موج ۴۵۹-۴۶۲
- تقویت‌کننده
- ~ ابزار دقیق ۲۷۹
- ~ با کنترل فت پیوندی ۲۵۶
- ~ بسامد رادیویی (RF) ۱۹۰
- ~ بسامد متوسط (IF) ۱۹۰
- ~ یَر توان صوتی ۱۸۹
- ~ پهن نوار ۱۹۰
- ~ تقاضلی (دیف امپ) ۱۵۷
- ~ توان ۳۰۱-۳۰۳
- ~ جریان ۲۲۹
- ~ چشمه مشترک (CS) ۲۷-۳۳
- ~ دررو مشترک (CD) ۳۳-۳۷
- ~ دریچه مشترک (CG) ۳۷-۳۹
- ~ رده C ۷۹
- ~ صوتی ۲۵۵-۲۵۷

- خروجی ۴۴۵-۴۴۱ UJT ~
- ~ تک سر ۱۵۹
- جداسازی ~ دوسر ۱۵۸
- خواص دیگر دسی بلها ۱۲۳ ~ دیودی ۱۵۵
- خود بایاس ۱۲-۱۹ ~ لایه تهی ۱۵۵
- جرقه زدن در اتومبیل ۴۴۶-۴۴۸
- جریان
- ~ دررو (درین) ۴
- ~ انحراف از میزان ورودی ۱۶۱
- درصد مدوله سازی ۵۰۷-۵۰۹
- دسی بلها ۱۱۸ ~ بایاس ورودی ۱۶۱
- دوحالته نهفته ۷۳ ~ دره ۴۴۴
- دهه برحسب بسامد ۱۳۲ ~ دنباله ۱۶۰
- دیاک ۴۳۹ ~ ماشه ۴۲۸
- دیود ~ نگه دارنده ۴۲۹
- جفت
- ~ جریان ثابت ۵۰
- ~ شاکلی ۴۲۹
- ~ $pnpn$ ۴۲۹
- ~ شادگی ترانسفورماتوری ۳۸۹
- ~ کننده ثابت ۹۱
- چشمه (سورس) ۴
- ~ پیرو ۳۴-۳۷
- چفت ۴۲۶
- راه انداز(ی)
- ~ اشمیت ۳۱۰-۳۱۸
- ~ SCR با ترانزیستور تک پیوندی (UJT) ۴۴۸
- ~ SCR با دیاک ۴۴۸
- حاصلضرب پهنای نوار در بهره حلقه
- ~ زیاتیک ۸۲
- ~ باز ۲۳۱-۲۳۲
- ~ رسانی متقابل ۲۵-۲۷
- ~ بسته ۲۳۲-۲۳۴
- ~ در تقویت کننده فیدبک ۲۱۸
- ~ حامل ۵۰۴
- ~ زاویه فاز ۱۳۳-۱۳۵
- ~ حداکثر ولتاژ در یجه چشمه ۶۹-۷۰
- ~ زمان
- ~ حلقه قفل شده با فاز (PLL) ۴۹۳-۴۹۹
- ~ تأخیر اشباع ۷۹
- ~ خازن
- ~ خیز ۱۳۹-۱۴۱
- ~ تسریع کننده ۳۱۲-۳۱۵
- ~ ذخیره ۷۹
- ~ جریان کننده در تقویت کننده عملیاتی ۱۷۳
- ~ گیرها ۴۰۹-۴۱۹
- ~ کنارگذران ۲۵۳، ۲۵۵

- زمین مجازی ۲۲۴-۲۲۶
- زوج
- ~ بلند دنباله ۱۶۰
- ~ دارلینگتون ۳۴۳
- زیربنا از ماسفت ۵۹
- زیمنس ۲۵
- سپر ۴۰۵
- ~ بازدارنده ۴۰۵
- سرعت عمل مقایسه‌گر ۳۰۴
- سری LM340 از تنظیم‌کننده‌های ولتاژ ۳۵۷-۳۵۴
- سیگنال(های)
- ~ مد مشترک ۱۶۶
- ~ مدوله‌کننده ۵۰۴
- ~ کاذب ۴۹۱-۴۹۳
- سیلیسیم دیوکسید ۵۹
- شبکه
- ~ پس‌افتی ۹۶-۱۰۲
- ~ پیش‌افتی ۱۳۴
- ~ پیش‌افتی-پس‌افتی ۳۷۵-۳۷۶
- ~ جداسازی ۲۵۵
- شکل موج تناوبی ۴۵۴
- ضریب کاهش حساسیت ۲۱۰-۲۱۱
- طبقه‌های زنجیره‌ای ۱۲۸
- طیف ۴۵۷-۴۵۸
- ~ (مدوله‌سازی دامنه) AM ۵۰۹-۵۱۰
- ظرفیت(های)
- ~ پراکنده ۱۴۳-۱۴۴
- ~ پراکنده سیم‌کشی ۱۴۲
- ~ داخلی فت ۱۰۶-۱۱۰
- عملکرد
- ~ تک منبع تغذیه ۲۵۴، ۲۶۷
- ~ حلقهٔ باز ۱۸۱
- ~ حلقهٔ بسته ۱۸۱
- فت پیوندی JFET
- ~ با کانال n ۳
- ~ با کانال p ۴
- ~ ترانزیستور با اثر میدان پیوندی ۳-۵۱
- ~ با کانال n ۳
- ~ بایاس کردن ۴، ۱۰-۲۳
- ~ تقویت‌کنندهٔ چشمه مشترک CD
- و CG و CS ۲۷-۳۹
- ~ رسانایی متقابل ۲۵-۲۷
- ~ کلید آنالوگ ۳۹-۴۵
- ~ دریچه-عایق ۵۹
- فراهنگ ۳۹۸
- فصل مشترک‌سازی ۸۰، ۳۰۶
- فوتو-چفت SCR ۴۳۷
- فیدبک
- ~ جریان
- ~ ناوارونگر ۲۱۶-۲۲۱
- ~ وارونگر ۲۲۸-۲۳۰
- ~ منفی ۱۸۱
- ~ با تقویت‌کننده‌های عملیاتی
- ۱۹۸-۲۴۲
- ~ پهنای نوار ۲۳۰-۲۴۱
- ~ فیدبک جریان: ناوارونگر
- ۲۱۶-۲۲۱

- گریزگرمایی ۷۸-۷۹
 گستره گیرش ۴۹۶
 گیرنده سوپرهترودین ۵۱۳-۵۱۴
 لایه وارون نوع n ۶۷
 ماس عمودی (VMOS) ۷۷-۸۲
 ماسفت (MOSFET)
 بدنه (بستر زیربنای) ~ ۵۹
 ~ حالت وصل عادی ۶۲
 ~ (فت نیمرسانای اکسید فلز) ۵۹-۸۲
 ~ عمودی ۷۸-۸۲
 ~ نوع افزایش ۶۶-۸۲
 ~ نوع تهی ۵۹-۶۵
 ماشه برای بایاس معکوس ۴۲۹
 مبدل ۷۷
 ~ آنالوگ به دیجیتال (قیاسی به رقمی) A/D
 ۳۰۷
 ~ دیجیتال به آنالوگ (رقمی به قیاسی) D/A
 ۲۷۳
 ~ (ماس مکمل) CMOS ۷۶-۷۸
 ~ ولتاژ به جریان ۲۱۸، ۲۷۵-۲۷۹
 ~ dc به dc ۳۶۰-۳۶۱
 متغیر رشته‌ای ۱۹۶-۱۹۷
 مجموع و تفاضل بسامدها ۴۷۸-۴۹۳
 محافظ ۴۳۵
 ~ SCR ۴۳۵
 محدودکننده جریان ۴۹، ۳۴۶-۳۵۲
 مد
 ~ تهی ۶۰
 ~ فت پیوندی ۲۶-۲۷
 مدارهای
- ~ فیدبک جریان: وارونگر
 ۲۲۸-۲۳۰
 ~ فیدبک ولتاژ: ناوارونگر
 ۱۹۸-۲۱۶
 ~ فیدبک ولتاژ: وارونگر ۲۲۱-۲۲۹
 ~ در تقویت‌کننده‌های مجزا
 ۲۴۲-۲۴۵
 ~ ولتاژ ناوارونگر ۱۹۸-۲۱۷
 ~ ولتاژ وارونگر ۲۲۱-۲۲۹
 قضیه میلر ۱۰۲-۱۰۵، ۲۲۳
 قطبها ۲۸۲
 کران بندی ۲۲۹
 ~ مثبت فعال ۲۲۹
 ~ dc ۲۲۹
 کلید
 ~ آنالوگ ۳۹-۴۵
 ~ فت پیوندی ۳۹-۴۵
 ~ از سرگیر فت پیوندی ۳۲۱
 ~ سیلیسیمی قابل کنترل ۴۳۹
 ~ (SCS) ۴۳۹
 ~ شنت ۴۱-۴۲
 ~ متوالی ۴۲
 کنترل
 ~ بهره خودکار ویدئویی ۲۷۰-۲۷۲
 ~ بهره خودکار (AGC) ۴۶-۴۹، ۲۵۷-۲۵۹
 ~ ویدئویی ۲۷۰-۲۷۲
 ~ جفتگر نوری ۴۴۷
 ~ SCR با ریز پردازنده (میکروپروسور)
 ۴۴۹

- منبع
- ~ تقویت‌کننده عملیاتی خطی ۲۵۲-۲۹۰
- ~ ناوارونگر ۲۵۲-۲۵۹
- ~ واوارونگر ۲۵۸-۲۷۳
- ~ تقویت‌کننده عملیاتی غیرخطی ۲۹۵-۳۳۴
- ~ انتگرال‌گیر ۳۱۸-۳۲۲
- ~ تبدیل شکل موج ۳۲۶-۳۳۰
- ~ تولید شکل موج ۳۳۰-۳۳۴
- ~ راه‌انداز اشمیت ۳۱۰-۳۱۸
- ~ مدارهای دیودی فعال ۲۹۵-۲۹۹
- ~ مشتق‌گیر ۳۲۲-۳۲۶
- ~ مقایسه‌گرها ۳۰۰-۳۱۰
- ~ دیودی فعال ۲۹۵-۲۹۹
- ~ مجتمع (IC) ۱۵۴-۱۵۵
- ~ تک‌سنگ ۱۵۶
- ~ دو رگه (هیبرید) ۱۵۶
- ~ ضخیم لایه ۱۵۶
- ~ نازک لایه ۱۵۶
- مدوله‌سازی دامنه ۴۹۰، ۵۰۴-۵۱۴
- مشتق‌گیر ۳۲۲-۳۲۶
- مقاومت
- ~ بالاکش ۳۰۴
- ~ حالت وصل استاتیکی ۴۰-۴۲
- ~ ac ۴۰
- ~ dc ۴۰-۴۱
- ~ غوطه‌ور ۳۰-۳۱
- ~ کنترل جریان ۳۴۶
- ~ (متغیر حساس به ولتاژ) (VVR) ۴۵
- ~ میان بیسی ۴۴۱
- مقایسه‌گر (ها) ۳۰۰-۳۱۰
- ~ پنجره ۳۰۷-۳۱۰
- ~ مدارهای مجتمع (IC) ۳۰۴-۳۱۰
- ~ تغذیه ۱۷۲
- ~ جریان ۹۸، ۲۷۵-۲۷۹
- ~ کنترل‌شده با ولتاژ ۵۷۵-۵۷۹
- ~ هاوولد ۲۷۸
- منحنی رسانایی متقابل ۷-۹، ۶۲، ۶۸-۶۹
- موتور قایق ۴۰۳
- موج
- ~ دندان‌اره‌ای ۴۵۷-۴۵۸
- ~ دوره‌ای ۳۲۶
- ~ زدایی ۳۵۳-۳۵۴
- ~ مجموع ۴۷۴
- مؤلفه dc شکل موج ۴۶۱-۴۶۲
- مولتی‌پلکس ۴۲-۴۳
- مولد
- ~ شیب ۴۱۸-۴۱۹
- ~ موج دندان‌اره‌ای ۴۳۲
- ~ شکل موج مثلثی ۳۳۲-۳۳۴
- موهو ۲۵
- ناحیه اهمی ۴۵
- نسبت
- ~ بازدارندگی ذاتی ۴۴۲
- ~ واپس‌زنی مد مشترک (CMRR) ۱۶۸، ۱۷۹
- نظریه تقویت‌کننده عملیاتی (آپ‌امپ) ۱۵۱-۱۹۱
- ~ برای تقویت‌کننده عملیاتی ۱۷۰-۱۹۰
- ~ برای سایر مدارهای مجتمع (IC) خطی ۱۸۸-۱۹۱
- نقطه
- ~ لغزش ۳۰۱، ۳۰۸
- ~ بالایی ۳۰۸

- ~ غیرخطی ۳۳۴-۳۳۵
 وارونگر کلیدپذیر ۲۶۴-۲۶۵
 ورودی
 ~ تک سر ۱۵۸
 ~ دوسر ۱۵۸
 ~ وارونگر به ناوارونگر بند پوتینی ۲۶۴
 وسیله‌های قانون مربعی ۹
 ولتاژ
 ~ آستانه ۶۷-۶۸، ۴۱۱
 ~ آغازگر نوسان ساز ۳۷۴
 ~ انحراف از میزان
 ~ خروجی ۱۶۲
 ~ دیود ۲۹۵-۲۹۸
 ~ ورودی ۱۶۲، ۱۷۶
 ~ پیرو ۲۱۵-۲۱۶
 ~ تنگش ۵
 ~ عبور از شکست ۴۲۸
 ~ کنترل زمان سنج ۵۵۵-۳۰۶
- هم‌اھنگھا ۴۵۵-۴۶۷
 یکسوساز
 ~ سیلیسیمی قابل کنترل (SCR)
 ۴۳۳-۴۳۹، ۴۴۶-۴۴۹
 ~ فعال ۲۹۶-۲۹۸
 ۱۲۴-۱۲۵ dmB
- ~ پایینی ۳۰۸
 ~ نیم توان ۹۰
 نمودارهای بُد ۱۲۹-۱۳۵
 نوسان ساز ۳۷۵-۴۱۹
 ~ آرمسترانگ ۳۹۴-۳۹۵
 ~ با کنترل ولتاژ (VCO) ۴۱۷، ۴۹۴-۴۹۵
 ~ بلوری ۳۹۶-۴۰۳
 ~ یل وین ۳۷۵-۳۸۲
 ~ پیرس ۴۰۱
 ~ تغییر فاز ۳۸۵
 ~ کلاپ ۳۹۶
 ~ کولپیتس ۳۸۶-۳۹۴
 ~ واهلشی ۳۳۰-۳۳۴، ۴۴۵-۴۴۶،
 ۴۵۸-۴۵۹
 ~ هارتلی ۳۹۵-۳۹۶
 ~ LC ۳۸۶-۳۹۶
 ~ RC ۳۷۵-۳۸۶
 ~ T دوقلو ۳۸۲-۳۸۴
 نوسانهای
 ~ مزاحم (پارازیتی) ۴۰۷-۴۰۸
 ~ ناخواسته ۴۰۳-۴۰۹
 نوفه ۴۵، ۴۹۹-۵۰۱
 ~ گرمایی ۵۰۰-۵۱۰
 واپیچش
 ~ آھنگ گردش ۱۸۳