



دوره فیزیک برکلی - جلد ۳

امواج

فرانک اس. کرافورد



ترجمه دکتر داریوش عظیمی گرگانی،
دکتر محمدرضا کلاهچی، سوسن انوری

دوره فیزیک برکلی - جلد ۳

امواج

فرانک اس. کرافورد

ترجمه

دکتر داریوش عظیمی گرگانی، دکتر محمدرضا کلاه‌چی، سوسن انوری

مرکز نشر دانشگاهی، تهران



Waves

Berkeley physics course-volume 3

Frank S. Crawford, Jr.

McGraw-Hill

امواج

دوره فیزیک برکلی - جلد ۳

تألیف فرانک اس. کرافورد

ترجمه دکتر داریوش عظیمی گرگانی، دکتر محمدرضا کلاه‌چی، سوسن انوری

ویراسته سوسن انوری

طراح جلد: نسرين صدری و اتق سفلی

نسخه پرداز: مسعود رزدام

حروفچین: مریم حسینی نیا

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

چاپ اول ۱۳۸۳

تعداد ۳۰۰۰

لیتوگرافی: عابد

چاپ: دایره سفید

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Crawford, Frank S.

کرافورد، فرانک

امواج / فرانک اس. کرافورد؛ ترجمه داریوش عظیمی گرگانی، محمدرضا کلاه‌چی،

سوسن انوری. - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۳.

ده، ۷۱۸ ص. : نمودار. - (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۱۶۷. فیزیک؛ ۱۱۰)

ISBN 964-01-1167-8

فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

بالای عنوان: دوره فیزیک برکلی - جلد ۳.

Waves, c1968.

عنوان اصلی:

کتابنامه: ص. ۷۰۳-۷۰۲.

نمایه.

۱. امواج. ۲. نوسانها. الف. عظیمی گرگانی، داریوش، مترجم. ب. کلاه‌چی، محمدرضا،

۱۳۴۰ - مترجم. ج. انوری، سوسن، مترجم. د. مرکز نشر دانشگاهی. ه. عنوان. و.

عنوان: دوره فیزیک برکلی.

۵۳۱/۱۱۳۳

الف ۸/۴/۱۵۷/۴۴

۱۳۸۳

م ۸۳ - ۳۰۲۸۲

کتابخانه ملی ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
۱	مقدمه بر جلد سوم
۵	۱ نوسانهای آزاد سیستمهای ساده
۵	۱-۱ مقدمه
۶	۲-۱ نوسانهای آزاد در سیستمهای با یک درجه آزادی
۹	مثال ۱: آونگ
۱۱	مثال ۲: جرم و فنر—نوسانهای طولی
۱۳	مثال ۳: جرم و فنر—نوسانهای عرضی
۱۷	مثال ۴: مدار LC
۱۹	۳-۱ خطی بودن و اصل برهم‌نهی
۲۲	مثال ۵: آونگ کروی
۲۳	۴-۱ نوسانهای آزاد سیستمهای دارای دو درجه آزادی
۲۵	مثال ۶: آونگ کروی ساده
۲۵	مثال ۷: نوسانگر هماهنگ دوی بعدی

۳۰	مثال ۸: نوسانهای طولی دو جرم جفت شده
۳۳	مثال ۹: نوسانهای عرضی دو جرم جفت شده
۳۶	مثال ۱۰: دو مدار LC جفت شده به هم
۳۸	۱-۵ زنش
۴۰	مثال ۱۱: زنش به وسیله دو دیپازون
۴۲	مثال ۱۲: زنش بین دو چشمه نور مرئی
۴۳	مثال ۱۳: زنش بین دو مد بهنجار در دو نوسانگر یکسان و به طور ضعیف جفت شده
۴۷	مثالهای نامتعارف
۴۸	مسائل و آزمایشهای خانگی
۶۲	۲ نوسانهای آزاد سیستمهای دارای چند درجه آزادی
۶۲	۱-۲ مقدمه
۶۵	۲-۲ مدهای عرضی تار پیوسته
۷۶	۳-۲ حرکت کلی تار پیوسته و آنالیز فوریه
۹۱	۴-۲ مدهای یک سیستم ناپیوسته با N درجه آزادی
۹۱	مثال ۱: نوسانهای عرضی در تار مهره دار
۱۰۰	مثال ۲: نوسانهای طولی در سیستمی با چندین جرم و فنر
۱۰۳	مثال ۳: فنر اسلینکی
۱۰۴	مثال ۴: شبکه LC
۱۰۶	مثال ۵: آونگهای به هم جفت شده
۱۰۹	مثال ۶: نوسانهای پلاسما
۱۱۳	مثالهای نامتعارف
۱۱۳	مسائل و آزمایشهای خانگی
۱۲۷	۳ نوسانهای واداشته
۱۲۷	۱-۳ مقدمه
۱۲۸	۲-۳ نوسانگر هماهنگ یک بعدی واداشته میرا
۱۳۶	مثال ۱: زمان فروافت در یک لوله پستی
۱۴۱	حالت ۱: بسامد محرک با بسامد طبیعی نوسان برابر است

- حالت ۲: میرایی صفر و زندهای تمام نشدنی
 ۱۴۱
- حالت ۳: زندهای گذرا
 ۱۴۲
- ۳-۳ تشدید در سیستم با دو درجه آزادی
 ۱۴۵
- مثال ۲: نوسانهای واداشته دو آونگ جفت شده
 ۱۴۶
- ۳-۴ صافیها
 ۱۵۱
- مثال ۳: دو آونگ جفت شده در نقش یک صافی مکانیکی
 ۱۵۲
- مثال ۴: صافی مکانیکی نوارگذر
 ۱۵۵
- مثال ۵: صافی مکانیکی پایین گذر
 ۱۵۶
- مثال ۶: صافی الکتريکی نوارگذر
 ۱۵۸
- مثال ۷: صافی الکتريکی پایین گذر
 ۱۵۹
- مثال ۸: صافی پایین گذر برای یک منبع تغذیه DC
 ۱۶۰
- ۵-۳ نوسانهای واداشته سیستم بسته با چندین درجه آزادی
 ۱۶۱
- مثال ۹: آونگهای جفت شده
 ۱۶۲
- مثال ۱۰: یون سپهر
 ۱۶۹
- مسائل و آزمایشهای خانگی
 ۱۷۸
- ۴ امواج پیشرونده
 ۱۸۹
- ۱-۴ مقدمه
 ۱۸۹
- ۲-۴ امواج پیشرونده هماهنگ در یک بعد و سرعت فاز
 ۱۹۱
- مثال ۱: امواج عرضی در یک تار مهردار
 ۱۹۸
- مثال ۲: امواج طولی در یک تار مهردار
 ۱۹۹
- مثال ۳: امواج الکترومغناطیسی در یون سپهر و سرعتهای فاز که از c تجاوز می کند
 ۲۰۵
- مثال ۴: خط انتقال نیرو - صافی پایین گذر
 ۲۰۶
- مثال ۵: خط انتقال نیرو با صفحات موازی
 ۲۰۹
- ۳-۴ ضریب شکست و پاشندگی
 ۲۱۲
- مثال ۶: مدل ساده "مولکول شیشه"
 ۲۱۹
- مثال ۷: پاشندگی یون سپهر
 ۲۲۳
- ۴-۴ امپدانس و شار انرژی
 ۲۳۱
- مثال ۸: امواج پیشرونده عرضی در تار پیوسته
 ۲۳۲

- ۲۳۶ مثال ۹: تابش امواج طولی بر روی یک فنر
- ۲۳۷ مثال ۱۰: امواج صوتی
- ۲۴۰ کاربرد: فشار پیمانه‌ای RMS برای شدت صوت دردناک
- ۲۴۱ کاربرد: دامنه صوت بلند دردناک
- ۲۴۱ کاربرد: دامنه صوتی که به زحمت می‌توان شنید
- ۲۴۱ کاربرد: توان خروجی شنوایی از یک نمونه بلندگوی دستگاه استریو
- ۲۴۲ کاربرد: مجموع دو صوت تقریباً دردناک
- ۲۴۲ مثال ۱۱: امواج پیشرونده در خط انتقال نیروی پایین‌گذر
- ۲۴۴ مثال ۱۲: خط انتقال نیرو با صفحات موازی
- ۲۴۹ کاربرد: یافتن ثابت خورشیدی
- ۲۵۶ کاربرد: مقایسه لامپ ۴۰ واتی و ماه
- ۲۵۷ کاربرد: آینه سفینه‌ای مانند ماه
- ۲۵۸ مسائل و آزمایشهای خانگی
- ۲۷۱ ۵ بازتاب
- ۲۷۱ ۱-۵ مقدمه
- ۲۷۱ ۲-۵ پایان‌دهی کامل
- ۲۷۲ مثال ۱: تار پیوسته
- ۲۷۵ مثال ۲: خط انتقال نیرو با صفحات موازی
- ۲۸۰ ۳-۵ بازتاب و عبور
- ۲۸۵ حالت ۱: جور بودن کامل امپدانس
- ۲۸۶ حالت ۲: نیروی کشش بینهایت
- ۲۸۶ حالت ۳: کشش صفر
- ۲۸۹ مثال ۳: بازتاب امواج صوتی
- ۲۹۲ مثال ۴: بازتابها در خطوط انتقال
- ۲۹۲ مثال ۵: مدار انتها اتصال کوتاه‌شده - امپدانس صفر
- ۲۹۳ مثال ۶: مدار انتها باز - امپدانس بینهایت
- ۲۹۴ مثال ۷: بازتاب در خط انتقالی که در ϵ ناپیوستگی دارد
- ۲۹۴ مثال ۸: بازتاب نور مرئی

۲۹۵	۴-۵ جورکردن امیدانس دو محیط شفاف
۲۹۸	مثال ۹: جورکردن نوری امیدانس
۳۰۰	مثال ۱۰: بوق نمایی
۳۰۰	مثال ۱۱: ضریب شکست باریک‌شده
۳۰۰	۵-۵ بازتاب در لایه‌های نازک
۳۰۱	مثال ۱۲: چرا اولین فریز سفید است
۳۰۳	مثال ۱۳: فریزهای فابری - پرو در یک تیغه میکروسکوپ
۳۰۴	مسائل و آزمایشهای خانگی
۳۲۲	۶ مدولاسیون، تپ و بسته‌موج
۳۲۲	۱-۶ مقدمه
۳۲۳	۲-۶ سرعت گروه
۳۲۹	مثال ۱: امواج رادیویی AM
۳۳۲	مثال ۲: تابش الکترومغناطیسی در خلأ
۳۳۲	مثال ۳: سایر امواج غیرپاشنده
۳۳۲	مثال ۴: امواج الکترومغناطیسی در یون‌سپهر
۳۳۳	مثال ۵: امواج سطحی روی آب
۳۳۴	کاربرد
۳۳۵	۳-۶ تپها
۳۴۲	مثال ۶: پهنای نوار در تلویزیون
۳۴۳	مثال ۷: پخش رادیویی با نور مرئی
۳۵۴	۴-۶ آنالیز فوریه تپها
۳۵۸	کاربرد: طیف بسامد مربعی
۳۶۰	کاربرد: تپ مربعی برحسب زمان
۳۶۳	کاربرد: نوسانگر هماهنگ میرا - پهنای خط طبیعی
۳۶۷	۵-۶ آنالیز فوریه بسته موج متحرک پیشرونده
۳۷۱	مسائل و آزمایشهای خانگی

- ۳۹۵ ۷ امواج دوبعدی و سه بعدی
- ۳۹۵ ۱-۷ مقدمه
- ۳۹۶ ۲-۷ امواج تخت هماهنگ و بردار انتشار
- ۳۹۹ حالت ۱: امواج الکترومغناطیسی در خلأ
- ۳۹۹ حالت ۲: امواج الکترومغناطیسی در یک محیط پاشنده
- ۳۹۹ حالت ۳: امواج الکترومغناطیسی در یون سپهر
- ۴۰۱ حالت ۱: امواج الکترومغناطیسی در خلأ
- ۴۰۱ حالت ۲: امواج الکترومغناطیسی در یک محیط پاشنده همگن
- ۴۰۱ حالت ۳: امواج الکترومغناطیسی در یون سپهر
- ۴۰۲ مثال ۱: امواج الکترومغناطیسی در یک موجبر مستطیل شکل
- ۴۰۸ مثال ۲: بازتاب و عبور نور فرودی از شیشه به هوا
- ۴۱۳ ۳-۷ امواج آب
- ۴۲۳ ۴-۷ امواج الکترومغناطیسی
- ۴۳۶ ۵-۷ تابش از بار نقطه‌ای
- ۴۵۳ مسائل و آزمایشهای خانگی
- ۴۶۹ ۸ قطبیدگی
- ۴۶۹ ۱-۸ مقدمه
- ۴۷۰ ۲-۸ توصیف حالت‌های قطبیدگی
- ۴۸۵ ۳-۸ تولید امواج عرضی قطبیده
- ۵۰۰ ۴-۸ شکست دوگانه
- ۵۰۹ ۵-۸ پهنای نوار، زمان همدوسی و قطبیدگی
- ۵۲۰ مسائل و آزمایشهای خانگی
- ۵۳۷ ۹ تداخل و پراش
- ۵۳۷ ۱-۹ مقدمه
- ۵۳۸ ۲-۹ تداخل بین دو چشمه نقطه‌ای همدوس
- ۵۵۴ ۳-۹ تداخل بین دو چشمه مستقل

- ۵۵۸ ۴-۹ چشمه "نقطه‌ای" نور چقدر می‌تواند بزرگ باشد؟
- ۵۶۳ ۵-۹ پهنای زاویه‌ای "باریکه" امواج پیشرونده
- ۵۶۷ کاربرد: باریکه لیزر در مقایسه با باریکه‌ای از نور چراغ
- ۵۶۸ ۶-۹ پراش و اصل هویگنس
- ۵۹۲ ۷-۹ اپتیک هندسی
- ۶۱۷ مسائل و آزمایشهای خانگی

- ۶۴۹ **مباحث کمی**
- ۶۴۹ ۱. مثالی "میکروسکوپیک" از نوسانگرهای یکسانی که به‌طور ضعیف به هم جفت شده‌اند
- ۶۵۲ ۲. رابطه پاشندگی برای امواج دوبروی
- ۶۵۶ ۳. نفوذ "ذره" در ناحیه فضایی "ممنوع‌الورود کلاسیکی"
- ۶۵۸ ۴. سرعت فاز و سرعت گروه برای امواج دوبروی
- ۶۶۰ ۵. معادلات موج برای امواج دوبروی
- ۶۶۱ ۶. تابش الکترومغناطیسی از "اتم" یک‌بعدی
- ۶۶۳ ۷. همدوسی زمانی و زنش اپتیکی
- ۶۶۴ ۸. چرا آسمان روشن است؟
- ۶۶۸ ۹. امواج الکترومغناطیسی در اجسام
- ۶۸۵ مثال: مدل ساده رابطه پاشندگی جسم رسانا
- ۶۸۷ حالت ۱: "محیط مقاومتی رقیق"
- ۶۸۸ حالت ۲: "محیط مقاومتی غلیظ"
- ۶۹۰ حالت ۱: ناحیه بسامدی پاشنده
- ۶۹۱ حالت ۲: ناحیه بسامدی واکنشی
- ۶۹۲ کاربرد: نقره جامد
- ۶۹۳ کاربرد: گرافیت

- ۶۹۵ **پیوست**
- ۶۹۵ پ-۱ سریهای تایلور
- ۶۹۶ پ-۲ سریهای معمولی استفاده شده
- ۶۹۸ پ-۳ برهم‌نهی تابعهای هماهنگ

پ-۴ تساویهای برداری

۷۰۰

مراجع برای مطالعه بیشتر

۷۰۲

مراجع عمومی

۷۰۲

مراجع خاص

۷۰۳

نماینه

۷۰۴

مقدمه بر جلد سوم

این جلد به بررسی امواج اختصاص دارد. این خود مبحث گسترده‌ای است. همه با پدیده‌های طبیعی بسیاری که با امواج ارتباط دارد آشنا هستند—از جمله امواج آب، امواج صوتی، امواج نوری، امواج رادیویی، زمین‌لرزه، امواج دوبروی. به‌علاوه، گذری سطحی بر قفسه‌های هر کتابخانه فیزیک گواه بر آن است که مطالعه حتی یک جنبه از پدیده‌های موجی—مثلاً امواج مافوق صوت در آب—ممکن است کتابها و یا مجلاتی را تماماً به خود اختصاص دهد و یا حتی فکر و ذکر تام دانشمندانی را جلب کند. جای شگفتی است که “متخصص” حرفه‌ای در یکی از این رشته‌های خاص معمولاً می‌تواند به‌آسانی با متخصصان رشته‌های خاص به قولی متفاوت، ارتباط برقرار کند. نخست، او باید با اصطلاحات آنها آشنا شود، یک‌گانه‌ی را که به‌کار می‌برند فراگیرد (مثلاً یک پارسک چیست)، و اینکه چه اعدادی مهم هستند. در واقع، هنگامی که متوجه می‌شود علاقه‌ای تازه پیدا کرده است، ممکن است، به نحوی تعجب‌انگیز به سرعت در رشته‌ای جدید “متخصص” شود. علت آن است که، دانشمندان زبان مشترکی دارند و این به‌خاطر آن است که بسیاری پدیده‌های فیزیکی کاملاً متفاوت و به ظاهر غیر مربوط با یکدیگر، را می‌توان برحسب مجموعه مشترکی از مفاهیم بیان کرد. بسیاری از این مفاهیم مشترک به‌طور ضمنی در واژه موج موجود است.

هدف اساسی این کتاب به‌وجود آوردن درکی از مفاهیم بنیادی موج و ارتباط آنها با یکدیگر است. به‌خاطر نیل به این هدف است که این کتاب نه برحسب پدیده‌های طبیعی قابل مشاهده‌ای مثل صوت، نور و غیره، بلکه طبق مفاهیم مربوط به موج سازمان یافته است.

هدف تکمیلی، آشنایی با نمونه‌های گوناگون مهم و جالبی است که از موج وجود دارد تا بدین ترتیب بتوان به این نکته واقف شد که مفاهیم مربوط کلی است و دارای موارد کاربردی گسترده‌ای است. بنابراین، بعد از معرفی هر مفهوم جدید، با به‌کار بستن آن در سیستمهای فیزیکی

متفاوت و گوناگون آن مفهوم را به روشنی نمایش می‌دهیم: سیم، اسلینکی، خطوط انتقال نیرو، استوانه‌هایی که برای پست‌کردن نقاشیهای بزرگ و غیره از آنها استفاده می‌شود، باریکه‌های نور از جمله این سیستمهای گوناگون است. این روش را می‌توان با رهیافت متفاوتی که مطابق آن ابتدا مفاهیم مفید را با استفاده از یک مثال ساده (مثلاً سیم کشیده شده) معرفی می‌کند و سپس به سیستمهای فیزیکی جالب دیگری می‌پردازد، مقایسه کرد.

با انتخاب مثالهایی که "شبهات" هندسی با یکدیگر دارند، امیدوارم دانشجویان را تشویق کنم که به دنبال وجوه تشابه و هم‌خانوادگی میان پدیده‌های متفاوت موجی باشد. همچنین امیدوارم محرکی باشم تا او این جرأت را پیدا کند که از این شبهات استفاده کند و به هنگام روبه‌رو شدن با پدیده‌های جدید "حدسی جسورانه" ارائه دهد. استفاده از شبهات دارای خطرهای گمراهیهای شناخته شده‌ای است، ولی این هم شبیه بسیاری چیزهای دیگر است. (این حدس که امواج نور ممکن است "درست شبیه" امواج مکانیکی، در محیطی زله مانند به نام "تر" باشد، بسیار ثمربخش بود؛ این تشبیه کمک کرد تا ماکسول در تلاش برای نوشتن معادلات معروفش راهنمایی شود. این تشبیه، پیش‌بینیهای جالبی را برانگیخت. هنگامی که آزمایشها - خصوصاً آزمایشهای مایکلسون و مورلی - نشان داد که این مدل مکانیکی ممکن نیست کاملاً صحیح باشد، اینشتین نشان داد که چگونه می‌توان این مدل را کنار گذاشت و در عین حال معادلات ماکسول را حفظ کرد. اینشتین ترجیح می‌داد مستقیماً صورت معادلات را در نظریه‌های حدس بزند - که ممکن است روش حدسی "محض" خوانده شود. این روزها، اگرچه بیشتر فیزیکدانها از تشابه و مدل‌های گوناگون برای حدس زدن کمک می‌گیرند، معمولاً فقط معادلات را به چاپ می‌رسانند.)

آزمایشهای خانگی سهم مهمی در این مجلد دارند.^۱ آنها می‌توانند منشأ لذت - و بینش عمیقتری - باشند، که از راه درس کلاسی و آزمایشهای آزمایشگاهی به دست نمی‌آید، اگرچه این دو راه نیز از اهمیت خاص خود برخوردارند. همه آزمایشهای خانگی از نوع "فیزیک آشپزخانه‌ای" هستند و فقط گاهی به اندک ابزار خاصی نیاز دارند. (یک جعبه وسایل آبتیکی هم لازم است. تهیه دیابازون، اسلینکی و استوانه‌های مخصوص پست‌کردن نقاشیهای بزرگ به عهده خواننده است، اینها ارزان‌اند و بنابراین "خاص" به شمار نمی‌آیند.) منظور اصلی واقعاً این است که این آزمایشها در خانه و نه در آزمایشگاه انجام شوند. خیلی از این آزمایشها را می‌توان با واژه نمایش بهتر توصیف کرد.

هر مفهوم اصلی که در متن درس بحث می‌شود، حداقل در یک آزمایش خانگی نشان داده می‌شود. علاوه بر نشان دادن مفاهیم، آزمایشهای خانگی این فرصت را برای دانشجویان به وجود می‌آورد

۱. آزمایشهای خانگی در مسائل این کتاب با دایرة توخالی مشخص شده است.

که "ارتباط" شخصی نزدیکی با پدیده مورد بحث پیدا کند. به خاطر جنبه "خانگی" آزمایشها، این ارتباط سر فرصت و خودمانی به وجود می آید. این نکته مهمی است. از دستیار آزمایش خبری نیست که توپ را بردارد و بدود هنگامی که شما هنوز مشغول خواندن قواعد بازی هستید (و یا روی توپ بنشینند وقتی که می خواهید آن را بردارید)؛ آموزگاری هم وجود ندارد که معنای آزمایش خودش را توضیح دهد، در حالی که آنچه شما واقعاً نیاز دارید این است که آزمایش را خودتان انجام دهید، با دستهای خودتان، سر فرصت و هرچند بار که دلتان می خواهد.

یک جنبه بسیار ارزشمند آزمایش خانگی این است که، اگر ساعت ده شب کشف کنید که آزمایش هفته قبل را اشتباهی فهمیده اید، تا ساعت ده و ربع می توان آن را دوباره برپا و اجرا کرد. این مسئله مهمی است. یک دلیلش آن است که در کار آزمایشی واقعی، هیچ کس دفعه اول "به هدف نمی زند." یکی از رموز موفقیت افکاری است که به دنبال انجام آزمایش به وجود می آید. (رموز دیگری هم وجود دارد.) در یادگیری، هیچ چیز کلافه کننده تر یا مشکل سازتر از این نیست که نتوان افکار خود را پی گرفت. به این خاطر که "دستگاه آزمایش از هم باز شده است"، یا "از ساعت پنج عصر گذشته است" و یا به دلیل احمقانه دیگری.

بالاخره، از راه آزمایشهای خانگی، امیدوارم به پرورش آنچه "قدرت تحسین پدیده ها" می نامم، کمک کنم. می خواهم چنان باشد که دانشجو با دستهای خودش کنجکاوانه سرگرم خلق صحنه ای باشد که توأمأً تعجب بر می انگیزد و چشمها، گوشها و مغز او را مسرور می کند...

سنگها با رنگهای شفاف

در کف جویبار می لرزند

شاید هم آب می لرزد

سسیکی^۱

۱. از مرجع زیر نقل و با اجازه ناشر چاپ شده است.

نوسانهای آزاد سیستمهای ساده

۱-۱ مقدمه

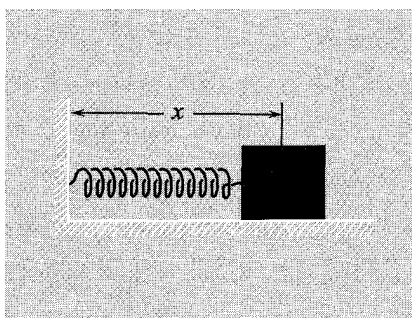
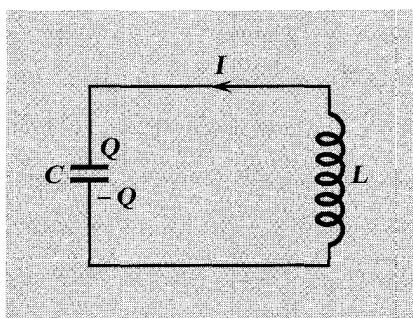
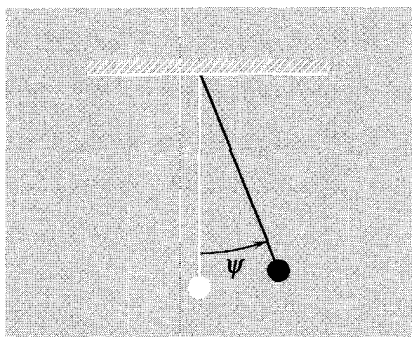
جهان پر از اجسامی است که حرکت می‌کنند. به طور کلی حرکت این اجسام را می‌توان به دو گروه تقسیم کرد: جسم متحرکی که در نزدیکی یک محل باقی می‌ماند یا از محلی به محل دیگر می‌رود. نمونه‌هایی از گروه اول بدین قرار است: نوسان آونگ، ارتعاش سیم ویلون، تلاطم آب در یک ظرف، ارتعاش (و یا هرگونه حرکت) الکترونها در اتم، و رفت و برگشت نور بین آینه‌های یک لیزر. نمونه‌هایی از حرکت گروه دوم را می‌توان غلتیدن توپ بازی هاکی، تپی که در امتداد طنابی که از یک سو کشیده شده حرکت می‌کند، امواج اقیانوس که به سوی ساحل می‌روند، باریکهٔ الکترونی یک لامپ تصویر تلویزیون و یا پرتو نوری که از یک ستاره خارج شده و به چشم می‌رسد نام برد. گاهی اوقات یک پدیدهٔ مشخص بسته به نظر بیننده، می‌تواند نمایشگر یکی از دو گروه (یعنی متحرک و یا به طور متوسط بدون حرکت) باشد. مثلاً امواج اقیانوس به سوی ساحل حرکت می‌کند اما آب (واردک روی سطح آب) بدون جابه‌جاشدن بالا و پایین (و همچنین جلو و عقب) می‌رود و یا تپ جابه‌جایی در امتداد طناب حرکت می‌کند اما خود طناب بدون اینکه از جایی به جای دیگر برود، ارتعاش می‌کند. ابتدا سیستمهایی را مطالعه می‌کنیم که در نزدیکی یک محل باقی می‌مانند و در اطراف

یک موقعیت متوسط نوسان یا ارتعاش می‌کنند. در فصلهای ۱ و ۲ حرکت سیستمهای بسته‌ای را بررسی خواهیم کرد که توسط یک عامل خارجی تحریک می‌شوند. و پس از آن بدون عامل خارجی آزادانه نوسان می‌کنند. چنین نوسانهایی را نوسانهای آزاد یا طبیعی می‌گویند. در فصل ۱ سیستمهای ساده‌ای را که یک یا دو جزء متحرک دارند مطالعه خواهیم کرد و در فصل ۲ نوسانهای آزاد سیستمهای با چندین جزء متحرک، بررسی خواهند شد. در این بررسی خواهیم دید که حرکت یک سیستم پیچیده با چندین جزء متحرک را همواره می‌توان به صورت ترکیبی از حرکتهای ساده‌تر در نظر گرفت که هر کدام را یک مد می‌نامند و همزمان حرکت می‌کنند. هر اندازه هم که سیستمی پیچیده باشد خواص هر مد آن شباهت زیادی به خواص یک نوسان‌کننده هماهنگ ساده دارد. بنابراین برای حرکت هر سیستم در هر یک از مدها نیروی بازگرداننده بر واحد جرم بر واحد جابه‌جایی برای هر جزء متحرک یکسان است و تمام اجزای متحرک با بسامد یکسان ω و فاز ثابت و یکسان φ نوسان می‌کنند که رابطه آن به صورت $\cos(\omega t + \varphi)$ است.

هر یک از سیستمهایی که بررسی خواهد شد با یک کمیت فیزیکی تعریف می‌شود که مقدار جابه‌جایی آن از حالت تعادل به زمان و مکان بستگی دارد. در مثالهای مکانیکی (که اجزای متحرک در آنها جرهمای نقطه‌ای است و تحت تأثیر نیروهای بازگرداننده هستند) کمیت فیزیکی عبارت است از جابه‌جایی جسم از محل تعادلش یعنی نقطه x, y, z . این جابه‌جایی با بردار $\psi(x, y, z, t)$ مشخص می‌شود. این تابع برداری را گاهی تابع موج می‌نامند. (این تابع فقط در صورتی یک تابع پیوسته از x, y, z است که در آن نتوان از تقریب پیوستگی استفاده کرد. یعنی نقاط مجاور آن نقطه نیز اساساً همان حرکت را داشته باشند). در برخی از مثالهای الکتریکی کمیت فیزیکی می‌تواند شدت جریان در یک سیم‌پیچ و یا بار الکتریکی در یک خازن باشد. در مثالهای دیگر، کمیت فیزیکی ممکن است میدان الکتریکی $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ و یا میدان مغناطیسی $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ باشد که در این حالت امواج را امواج الکترومغناطیسی می‌نامند.

۱-۲ نوسانهای آزاد در سیستمهای با یک درجه آزادی

ابتدا حرکت اجسامی را در نظر می‌گیریم که در نزدیکی یک محل باقی می‌مانند و در اطراف یک موقعیت متوسط نوسان یا ارتعاش می‌کنند. چنین سیستمهای ساده‌ای مانند آونگی که در یک صفحه نوسان می‌کند، وزنه‌ای که به فنری متصل است و یا یک مدار LC ، که وضع آنها در هر لحظه را می‌توان فقط با یک کمیت مشخص کرد، سیستمهای با یک درجه آزادی (تقریباً یعنی با یک جزء متحرک) می‌گویند (شکل ۱-۱). مثلاً نوسان یک آونگ متحرک با اندازه زاویه‌ای که نخ با محور عمودی می‌سازد و نوسان یک مدار LC با اندازه بار الکتریکی که بر روی خازن جمع



شکل ۱-۱ سیستمهای با یک درجه آزادی. (آونگ فقط در یک صفحه حرکت می‌کند).

می‌شود، مشخص می‌شود. (آونگی که بتواند آزادانه در تمام جهتها حرکت کند، مانند گلوله‌ای که به نخی متصل است دو درجه آزادی دارد، زیرا برای مشخص کردن موقعیت آونگ دو مختصه لازم است اما آونگ ساعت دیواری که فقط در یک صفحه حرکت می‌کند یک درجه آزادی دارد).

برای تمام سیستمهایی که یک درجه آزادی دارند، جابه‌جایی "جزء متحرک" از مقدار تعادلش با یک رابطه ساده جفت‌شده به زمان (به نام نوسان هماهنگ) مشخص می‌شود

$$\psi(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

هنگامی که جرمی نوسان می‌کند، ψ نشانگر جابه‌جایی جرم از حالت تعادلش است، اما در یک مدار LC نوسان‌کننده، ψ نشانگر شدت جریان در سیم‌پیچ و یا بار الکتریکی در خازن است. به‌طور دقیقتر معادله (۱) که بستگی یک کمیت فیزیکی به زمان را مشخص می‌کند فقط در صورتی صادق است که جزء متحرک از حالت تعادل خیلی دور نشود (مثلاً در مورد آونگی که با زاویه خیلی بزرگ نوسان می‌کند، معادله (۱) دقت کافی ندارد، و یا برای فنری که خیلی کشیده شود نیروی بازگرداننده با مقدار کشیدگی متناسب نیست و حرکت با معادله (۱) مشخص نمی‌شود.

به همین ترتیب اگر بار الکتریکی زیادی بر روی صفحات خازن جمع شود، بین دو صفحه خازن جرقه زده خواهد شد و چگونگی تغییرات بار الکتریکی در معادله (۱) صدق نخواهد کرد.

نام‌گذاری. در معادله (۱) نام‌گذاری کمیتها چنین است: A کمیت ثابت و مثبتی است که دامنه نامیده می‌شود. ω بسامد زاویه‌ای برحسب رادیان بر ثانیه و $\omega/2\pi = \nu$ بسامد برحسب دور بر ثانیه یا هرتز (و یا به اختصار cps یا Hz) است؛ معکوس ν را زمان تناوب T می‌گویند که برحسب ثانیه بر دور است

$$T = \frac{1}{\nu} \quad (2)$$

مقدار ثابت فاز φ به انتخاب مبدأ زمان بستگی دارد و در اغلب اوقات اندازه آن مهم نیست زیرا همیشه می‌توان مبدأ زمان را به گونه‌ای اختیار کرد که φ برابر صفر باشد و در این صورت به جای معادله (۱) روابط $\psi = A \sin \omega t$ و $\psi = A \cos \omega t$ وجود خواهد داشت.

نیروی بازگرداننده و لختی. در هر سیستم فیزیکی، چگونگی نوسان که با معادله (۱) بیان می‌شود از دو خاصیت ذاتی که در خلاف جهت یکدیگر اثر می‌کنند، نتیجه می‌شود: این دو خاصیت، نیروی بازگرداننده و لختی هستند. "نیروی بازگرداننده" با اعمال "سرعت" مناسب $d\psi/dt$ به جزء متحرک، می‌کوشد کمیت ψ را به صفر بازگرداند. هرچه ψ بزرگتر باشد نیروی بازگرداننده قویتر است. در یک مدار LC نوسان‌کننده، نیروی بازگرداننده ناشی از نیروی دافعه بین الکترونهاست؛ الکترونها بر اثر این نیرو تنها بر روی یکی از صفحات خازن جمع نمی‌شوند بلکه به‌طور مساوی بر روی هر دو صفحه توزیع می‌شوند و مجموع بار برابر صفر می‌شود. خاصیت دوم یعنی "لختی" با هرگونه تغییری در $d\psi/dt$ "مخالفت" می‌کند. در یک مدار LC نوسان‌کننده لختی در نتیجه القای L است که با هرگونه تغییری در شدت جریان یعنی $d\psi/dt$ (ψ بار خازن) مخالفت می‌کند. رفتار نوسانی. اگر حرکت را از حالتی که ψ مثبت و مقدار $d\psi/dt$ برابر صفر است شروع کنیم، نیروی بازگرداننده شتابی به‌وجود می‌آورد که حاصلش سرعت منفی است. هنگامی که ψ به صفر برمی‌گردد، سرعت منفی بیشینه می‌شود. نیروی بازگرداننده به‌ازای $\psi = 0$ برابر صفر است اما سرعت منفی از این نقطه به بعد جابه‌جایی منفی به‌وجود می‌آورد. آنگاه نیروی بازگرداننده مثبت می‌شود، اما اکنون می‌باید بر لختی سرعت منفی غلبه کند. سرانجام سرعت $d\psi/dt$ برابر صفر می‌شود که در آن هنگام جابه‌جایی بیشینه و منفی است و عمل در خلاف جهت تکرار می‌شود. این دور مرتباً تکرار می‌شود؛ یعنی نیروی بازگرداننده می‌خواهد ψ را به صفر برگرداند و در نتیجه سرعتی تولید می‌کند؛ لختی، سرعت را حفظ می‌کند و باعث می‌شود که ψ از حالت تعادل فراتر رود، در نتیجه سیستم نوسان می‌کند.

مفهوم فیزیکی ω^2 . رابطه بسامد زاویه‌ای نوسان یعنی ω با خواص فیزیکی سیستم در هر حالت (همان‌طور که نشان خواهیم داد) به صورت زیر است:

$$\boxed{\omega^2 = \text{نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم}} \quad (3)$$

گاهی اوقات، مثلاً در مورد مثالهای الکتریکی (مدار LC) "جرم لختی" واقعاً جرم نیست. نوسانهای میرا. اگر بربیک سیستم نوسان‌کننده عامل خارجی وارد نشود، سیستم برای همیشه مطابق معادله (۱) به نوسان ادامه می‌دهد. ولی در عمل به سبب پدیده‌های "اصطکاک" و یا "مقاومتی" حرکت "میرا" می‌شود. بنابراین توصیف واقع‌تری از یک سیستم نوسانگر "نوسان میرا" است. اگر سیستم در لحظه $t = 0$ "تحریک" شده و شروع به نوسان کند (مثلاً با ضربه زدن و یا بستن کلید در یک مدار و غیره) در این صورت خواهیم داشت:

$$\psi(t) = Ae^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

که در آن $t \geq 0$ و مقدار ψ برای $t < 0$ برابر صفر است. برای سادگی در مثالهای زیر به جای معادله واقع‌تر (۴) فراتر (از حالت تعادل) از معادله (۱) استفاده می‌کنیم یعنی در حقیقت با در نظر گرفتن زمان میرایی τ برابر با بینهایت (یا مقاومت در مورد مدار LC) صرف‌نظر می‌کنیم.

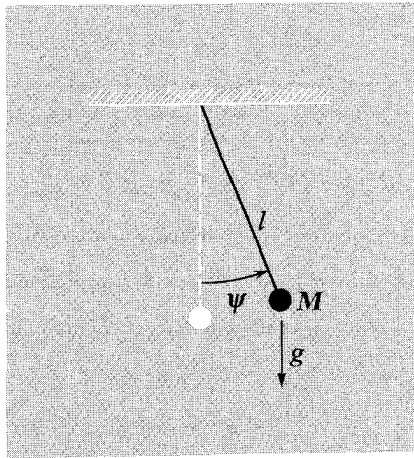
مثال ۱: آونگ

آونگ ساده‌ای را که شامل نخ یا میله بی‌وزنی به طول l است و یک سر آن به محل صلبی متصل شده و به انتهای آن گوله‌ای "نقطه‌ای" به جرم M متصل است در نظر می‌گیریم (شکل ۱-۲). زاویه‌ای را که نخ با محور عمودی می‌سازد ψ (برحسب رادیان) می‌نامیم. (چون آونگ در یک صفحه نوسان می‌کند موقعیت آن فقط با کمیت ψ مشخص می‌شود). در یک لحظه غیرمشخص مقدار جابه‌جایی گوله برابر طول قوس یعنی $l\psi$ و سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای برابر $l d\psi/dt$ است. شتاب مماسی آن برابر $l d^2\psi/dt^2$ است. نیروی بازگرداننده برابر با مؤلفه مماسی نیروست ولی نخ بر این مؤلفه نیرو اثری ندارد. وزن Mg مؤلفه مماسی $-Mg \sin \psi$ را به وجود می‌آورد. از این رو طبق قانون دوم نیوتون (یعنی نیرو برابر است با حاصلضرب جرم در شتاب) داریم

$$\frac{Ml d^2\psi}{dt^2} = -Mg \sin \psi(t) \quad (5)$$

اکنون با استفاده از بسط سری تیلور [معادله (۴) پیوست] داریم

$$\sin \psi = \psi - \frac{\psi^3}{3!} + \frac{\psi^5}{5!} - \dots \quad (6)$$



شکل ۱-۲ آونگ ساده.

که در آن چند نقطه معرف بقیه سری نامحدود است. هنگامی که ψ (برحسب رادیان) به اندازه کافی کوچک است می توان از تمام جمله های معادله (۶) به جز اولین جمله یعنی ψ صرف نظر کرد. اکنون این پرسش مطرح می شود که "به اندازه کافی کوچک" تا "چه اندازه کوچک" است؟ این پرسش جواب کلی ندارد بلکه بستگی به آن دارد که در یک آزمایش با چه دقتی می توان تابع $\psi(t)$ را تعیین کرد. (دقت کنید که در فیزیک هیچ کمیتی نیست که کاملاً قابل اندازه گیری باشد). مثلاً برای $\psi = 10^\circ \text{ rad}$ (57° درجه) مقدار $\sin \psi$ برابر 0.998 است و در بعضی از مسائل تساوی " $0.998 = 1.000$ " تقریب خوبی نیست، برای $\psi = 1^\circ \text{ rad}$ (57.3° درجه) مقدار $\sin \psi$ برابر 0.841 است و در برخی از مسائل تساوی " $0.8 = 1.0$ " تقریب کافی است. اگر اولین جمله معادله (۶) را نگاه داریم در این صورت معادله (۵) به شکل زیر درمی آید

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = -\omega^2 \psi \quad (7)$$

که در آن

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \quad (8)$$

جواب عمومی معادله (۷) نوسان هماهنگ است که با رابطه زیر داده می شود

$$\psi(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

توجه کنید که سرعت زاویه‌ای نوسان که از معادله (۸) به دست می‌آید، با تقریب $\sin \psi = \psi$ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\omega^2 = \text{نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم}$$

$$\omega^2 = \frac{Mg\psi}{(l\psi)M} = \frac{g}{l}$$

مقادیر ثابت A و φ با استفاده از شرایط اولیه یعنی مقدار جابه‌جایی و سرعت در لحظه $t = 0$ مشخص می‌شوند. (چون ψ جابه‌جایی زاویه‌ای است سرعت متناظر با آن را سرعت زاویه‌ای $d\psi/dt$ می‌نامند). بنابراین

$$\psi(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{\psi}(t) \equiv \frac{d\psi(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

پس

$$\psi(0) = A \cos \varphi$$

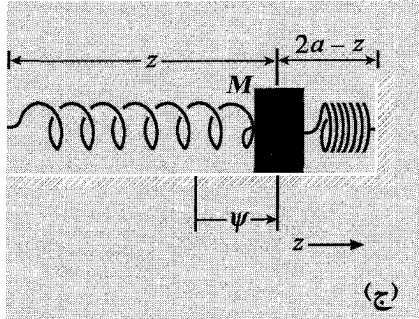
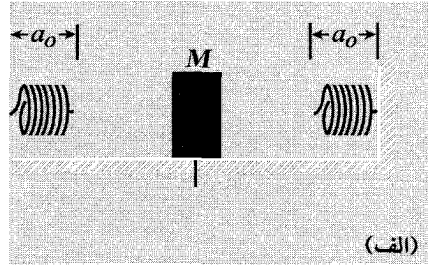
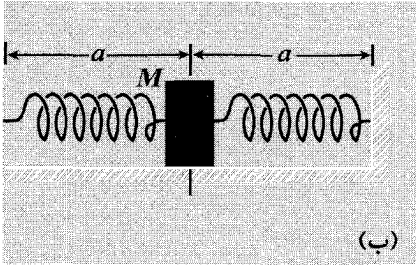
$$\dot{\psi}(0) = -\omega A \sin \varphi$$

از حل این دو رابطه مقدار ثابت A و φ و $\sin \varphi$ و $\cos \varphi$ (که φ را مشخص می‌کند) به دست می‌آید. ■

مثال ۲: جرم و فنر - نوسانهای طولی

جرم M بر روی سطح بدون اصطکاک می‌لغزد. این جرم به وسیله دو فنر متشابه که جرم آنها ناچیز است به دو دیوار صلب متصل است. ضریب ثابت فنرها K و طول هر کدام قبل از کشیده شدن برابر a_0 است. در حالت تعادل اگر طول هر فنر پس از کشیده شدن برابر a باشد بر هر فنر کشش $K(a - a_0)$ وارد می‌آید (شکل ۱-۳ الف و ب) اگر فاصله جرم M از دیوار سمت چپ برابر z باشد در این صورت فاصله آن از دیوار سمت راست برابر $(2a - z)$ است (شکل ۱-۳ ج). فنر سمت چپ نیروی $K(2a - z - a_0)$ را در امتداد z وارد می‌کند. نیروی کل F_z در امتداد z برابر با برهم‌نهی (مجموع) این دو نیرو است.

$$\begin{aligned} F_z &= -K(z - a_0) + K(2a - z - a_0) \\ &= -2K(z - a) \end{aligned}$$



شکل ۳-۱ نوسانهای طولی. (الف) فنرهای آزاد. (ب) فنرهای متصل، M در حالت تعادل. (ج) شکل کلی.

و با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم

$$\frac{M}{dt^2} z = F_z = -2K(z - a) \quad (9)$$

$a - z$ مقدار جابه‌جایی از وضع تعادل است که آن را با $\psi(t)$ نشان می‌دهیم

$$\psi(t) \equiv z(t) - a$$

در این صورت

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

اکنون می‌توان معادله (۹) را به شکل زیر نوشت

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega^2\psi \quad (10)$$

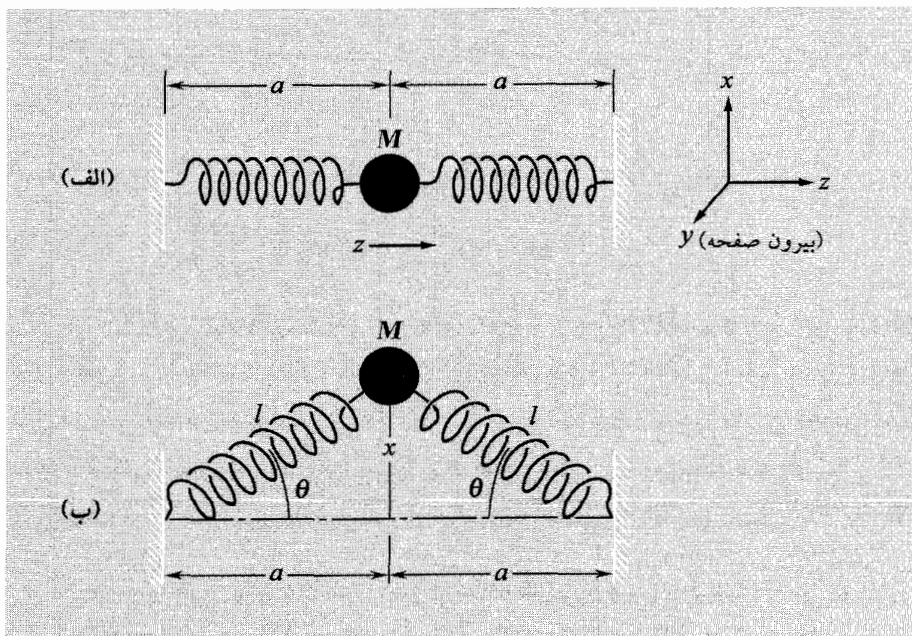
که در آن

$$\omega^2 = \frac{2K}{M} \quad (11)$$

جواب کلی معادله (۱۰) نوسان هماهنگ به صورت $\psi = A \cos(\omega t + \varphi)$ است. توجه کنید که معادله (۱۱) به شکل ω^2 با نیرو بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم برابر است زیرا که نیروی بازگرداننده برای جابه‌جایی ψ برابر $2K\psi$ است. ■

مثال ۳: جرم و فنر - نوسانهای عرضی

سیستمی را که در شکل ۴-۱ نشان داده شده در نظر بگیرید. دو فنر متشابه، جرم M را بین دو پایه صلب نگاه داشته‌اند. جرم فنرها ناچیز، ضریب ثابت آنها K و طول هر کدام قبل از کشیده شدن a است. هنگامی که M در وضع تعادل باشد، طول هر فنر برابر a است. از اثر شتاب گرانی صرف نظر می‌کنیم. (در این مسئله شتاب گرانی هیچ‌گونه نیروی بازگرداننده به وجود نمی‌آورد بلکه سبب "خمیدگی" سیستم می‌شود اما در اندازه تقریب مورد نظر هیچ‌گونه تأثیری ندارد.) در اینجا جرم M دارای سه درجه آزادی است: جرم M می‌تواند در امتداد z (یعنی در امتداد فنرها) حرکت و نوسان "طولی" تولید کند. این حرکت قبلاً بررسی شد و نیازی به تکرار آن نیست. جرم M همچنین می‌تواند در امتدادهای x و y نیز حرکت کند و نوسانهای "عرضی" پدید آورد. برای سادگی فقط حرکت در امتداد x را در نظر می‌گیریم. می‌توان تصور کرد که عامل بدون اصطکاکی وجود دارد که



شکل ۴-۱ نوسانهای عرضی. (الف) حالت تعادل. (ب) شکل کلی (برای حرکت در امتداد x).

سبب می‌شود حرکت در امتداد عرضی x به آزادی امکانپذیر باشد ولی مانع از حرکت در امتدادهای y و z است. (مثلاً می‌توان گلوله M را سوراخ کرد و میله بدون اصطکاکی را از میان آن عبور داد به طوری که میله در امتداد محور x به دیوارها متصل باشد. البته به سادگی می‌توان فهمید که وجود چنین قیدی ضروری نیست. از تقارن شکل ۴-۱ دیده می‌شود که وقتی سیستم در امتداد x نوسان می‌کند هیچ عاملی برای حرکت در امتدادهای y یا z وجود ندارد. چنین حالتی برای هر یک از دو درجه آزادی دیگر نیز صادق است یعنی در نتیجه نوسان در امتداد z هیچ‌گونه نیرویی در امتداد x و y به وجود نمی‌آید و در نتیجه نوسان در امتداد y نیز نیرویی در امتداد x یا z حاصل نمی‌شود). در حالت تعادل (شکل ۴-۱ الف) طول هر یک از فنرها برابر a و نیروی کشش هر کدام یعنی T_0 برابر است با

$$T_0 = K(a - a_0) \quad (12)$$

در حالت کلی (شکل ۴-۱ ب) طول هر فنر برابر l و نیروی کشش هر فنر برابر است با

$$T = K(l - a_0) \quad (13)$$

اگر مؤلفه این نیرو را در امتداد x در نظر بگیریم مشاهده می‌کنیم که هر فنر نیروی بازگرداننده $T \sin \theta$ را در امتداد x وارد می‌کند. با استفاده از قانون دوم نیوتون و با توجه به اینکه $\sin \theta$ برابر x/l است داریم

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x = -2T \sin \theta \\ &= -2K(l - a_0) \frac{x}{l} = -2Kx \left(1 - \frac{a_0}{l}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

معادله (۱۴) با فرضیهایی که شد (از جمله فرضی که با معادله (۱۳) بیان شد یعنی فنر یک فنر "خطی" یا فنری است که از "قانون هوک" پیروی می‌کند)، رابطه دقیق است. دقت کنید که طول فنر یعنی l که در سمت راست معادله (۱۴) ظاهر می‌شود تابع x است و بنابراین معادله (۱۴) دقیقاً به شکلی نیست که جواب آن نوسانهای هماهنگ باشد زیرا نیروی بازگرداننده‌ای که بر M اثر می‌کند دقیقاً به‌طور خطی با جابه‌جایی از حالت تعادل یعنی x متناسب نیست. ■

تقریب اسلینکی. برای به‌دست آوردن یک معادله تقریبی با نیروی بازگرداننده خطی دو روش جالب وجود دارد. در روش اول که تقریب اسلینکی نامیده می‌شود از کسر a_0/a نسبت به واحد صرف‌نظر می‌کنیم. بنابراین چون l همواره از a بزرگتر است در معادله (۱۴) از کسر a_0/l می‌توان

صرفنظر کرد. [اسلینکی یک فنر حلقوی است که طول آن در حالت آزاد یعنی a_0 در حدود ۷٫۵ سانتیمتر است. این فنر می‌تواند بدون آنکه از حد الاستیکی (کشسانی) خارج شود تا طول a که در حدود ۴٫۵ متر است کشیده شود. بدین ترتیب در معادله (۱۴) نامساوی $a_0/a < 1/60$ برقرار خواهد بود.] با استفاده از این تقریب معادله (۱۴) را به شکل زیر می‌توان نوشت

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (15)$$

که در آن

$$\omega^2 = \frac{2K}{M} = \frac{2T}{Ma} \quad (a_0 = 0) \quad (16)$$

جواب این معادله $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ است، یعنی نوسان هماهنگ. توجه کنید که برای اندازه دامنه A هیچ محدودیتی وجود ندارد. یعنی در نوسانهای "بزرگ" هم برای نیروی بازگرداننده یک رابطه کاملاً خطی وجود دارد. همچنین دقت کنید که بسامد نوسانهای عرضی که با معادله (۱۶) داده می‌شود، همان بسامد نوسانهای طولی است که از معادله (۱۱) به دست می‌آید. اما این یک نتیجه کلی نیست بلکه فقط در تقریب اسلینکی که در آن $a_0 = 0$ فرض شده است، صادق است.

تقریب نوسانهای کوچک. اگر در مقایسه با a ، از a_0 نتوان صرفنظر کرد (مثلاً در مورد کشیده شدن یک طناب لاستیکی) تقریب اسلینکی صدق نمی‌کند یعنی F_x در معادله (۱۴) برحسب x یک تابع خطی نیست. با وجود این می‌توان نشان داد که اگر جابه‌جاییهای x در مقایسه با طول a کوچک باشد، در این صورت اختلاف بین l و a برابر کمیتی از مرتبه $(x/a)^2$ خواهد بود. در تقریب نوسانهای کوچک در F_x ، از جمله‌هایی که برحسب x/a غیرخطی هستند صرفنظر می‌کنیم. اکنون عملیات جبری را انجام می‌دهیم: می‌خواهیم l را در معادله (۱۴) به صورت "جمله دیگر" $l = a +$ در نظر بگیریم که در آن "جمله دیگر" به‌ازای $x = 0$ برابر صفر می‌شود. چون l بزرگتر از a است خواه x مثبت و خواه منفی باشد، لذا "جمله دیگر" باید برحسب x یک تابع زوج باشد. درحقیقت از شکل ۱-۴ پیداست که

$$\begin{aligned} l^2 &= a^2 + x^2 \\ &= a^2(1 + \varepsilon) \quad \varepsilon \equiv \frac{x^2}{a^2} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} &= \frac{1}{a}(1 + \varepsilon)^{-(1/2)} \\ &= \frac{1}{a} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \varepsilon \right) + \left(\frac{3}{8} \varepsilon^2 \right) - \dots \right] \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن به جای عبارت $(1+x)^n$ به ازای $n = -1/2$ و $x = \varepsilon$ از بسط تایلور [معادله (۲۰) پیوست] استفاده شده است. اکنون تقریب نوسانهای کوچک را به کار می‌بریم. یعنی فرض می‌کنیم $\varepsilon \ll 1$ است و در سری نامحدود معادله (۱۷) از جمله‌های دوم به بالا صرفنظر می‌کنیم. (سرانجام از تمام جملات بجز اولین جمله یعنی $1/a$ صرفنظر خواهیم کرد.) بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} &\approx \frac{1}{a} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \varepsilon \right) \right] \\ &= \frac{1}{a} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

با قراردادن معادله (۱۸) در معادله (۱۴) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{2Kx}{M} \left(1 - \frac{a_0}{l} \right) \\ &= -\frac{2Kx}{M} \left\{ 1 - \frac{a_0}{a} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} \right) + \dots \right] \right\} \\ &= -\frac{2K}{Ma} (a - a_0)x + \frac{K}{M} a_0 \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

اگر از جمله‌های با توان سوم و بالاتر نیز صرفنظر کنیم [با قراردادن مقدار T از معادله (۱۲)] به دست می‌آوریم

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \approx -\frac{2K}{Ma} (a - a_0)x = -\frac{2T_0 x}{Ma} \quad (20)$$

معادله (۲۰) به شکل $d^2 x/dt^2 = -\omega^2 x$ است که در آن

$$\omega^2 = \frac{2T_0}{Ma} \quad (21)$$

بنابراین تغییرات $x(t)$ به شکل نوسان هماهنگ یعنی $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ به دست می‌آید.

دقت کنید که مقدار ω^2 که با رابطه (۲۱) داده می‌شود عبارت است از نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم: در نوسانه‌های کوچک نیروی بازگرداننده برابر با حاصلضرب کشش T_0 در $\sin \theta = x/a$ است (چون دو فنر وجود دارد). چون مقدار جابه‌جایی برابر x و اندازه جرم M است بنابراین نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم برابر با $(x/a)/xM \cdot 2T_0$ است. همان‌گونه که از معادلات (۱۶) و (۲۱) دیده می‌شود بسامد نوسانه‌های عرضی برای هر دو حالت تقریب اسلینکی (یعنی $a_0 = 0$) و تقریب نوسانه‌های کوچک (یعنی $x/a \ll 1$) با رابطه $\omega^2 = 2T_0/Ma$ داده می‌شود. همان‌طور که از معادلات (۱۱) و (۱۶) نتیجه می‌شود، نوسانه‌های طولی در تقریب اسلینکی نیز دارای همین بسامد هستند. اگر تقریب اسلینکی صادق نباشد (یعنی از a_0/a نتوان صرف‌نظر کرد) در این صورت همان‌گونه که از معادلات (۱۱)، (۱۲) و (۲۱) پیداست نوسانه‌های طولی و نوسانه‌های (کوچک) عرضی دارای بسامد یکسان نخواهند بود. در این حالت

$$(\omega^2)_{\text{طولی}} = \frac{2Ka}{Ma} \quad (22)$$

$$(\omega^2)_{\text{عرضی}} = \frac{2T_0}{Ma}, \quad T_0 = K(a - a_0) \quad (23)$$

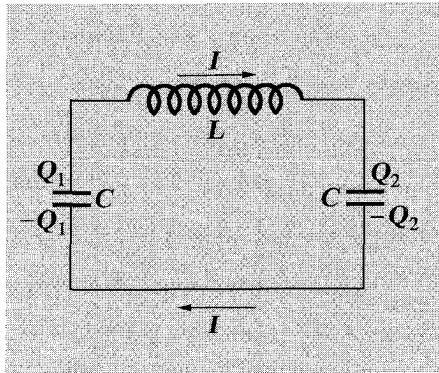
بنابراین در نوسانه‌های کوچک یک طناب لاستیکی (که در آن از a_0/a نمی‌توان صرف‌نظر کرد) نوسانه‌های طولی از نوسانه‌های عرضی تندتر هستند، یعنی

$$\frac{\omega_{\text{طولی}}}{\omega_{\text{عرضی}}} = \frac{1}{\left[1 - \frac{a_0}{a}\right]^{1/2}}$$

مثال ۴: مدار LC

(برای شرح کامل مدارهای LC به فصل ۸ جلد دوم سری برکلی مراجعه کنید.) یک سری مدارهای LC مانند شکل ۵-۱ را در نظر بگیرید. بار الکتریکی که از صفحه پایینی خازن سمت چپ به صفحه بالایی آن جابه‌جا می‌شود برابر Q_1 و باری که از صفحه پایینی خازن سمت راست به صفحه بالای آن منتقل می‌شود برابر Q_2 است. نیروی محرکه الکتریکی (emf) دو سر پیچ برابر "نیروی ضد محرکه الکتریکی" $L \frac{dI}{dt}$ است. بار مثبت Q_1 نیروی محرکه الکتریکی $C^{-1}Q_1$ را تولید می‌کند و از آنجا شدت جریانی در جهت فلش در شکل ۵-۱ به وجود می‌آید. یعنی از بار مثبت Q_1 کمیت مثبت $L \frac{dI}{dt}$ حاصل می‌شود. به همین ترتیب از شکل ۵-۱ پیداست که بار مثبت Q_2 کمیت منفی $L \frac{dI}{dt}$ را به وجود می‌آورد. بنابراین

$$L \frac{dI}{dt} = C^{-1}Q_1 - C^{-1}Q_2 \quad (24)$$



شکل ۵-۱ مدار LC سری. Q و I بار الکتریکی و شدت جریان هستند. علائم قراردادی برای Q و I نشان داده شده‌اند. اگر صفحه بالایی نسبت به صفحه پایینی مثبت باشد Q_1 (یا Q_2) مثبت است و اگر بار الکتریکی در امتداد پیکان داشته باشد I مثبت است.

در حالت تعادل هیچ بار الکتریکی بر روی هیچ‌کدام از خازنها نیست. بار Q_2 از بار Q_1 به وسیله جریان I به وجود آمده است. از این رو با استفاده از اصل پایستگی (بقای) بار الکتریکی و رعایت علامت مطابق شکل ۵-۱ داریم

$$Q_1 = -Q_2 \quad (25)$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = I \quad (26)$$

با وجود معادلات (۲۵) و (۲۶) فقط یک درجه آزادی وجود دارد. در هر لحظه حالت سیستم را می‌توان با Q_1 یا Q_2 و یا I مشخص کرد. چون در مبحثهای آینده (و در بررسی سیستمهای با بیش از یک درجه آزادی) استفاده از شدت جریان راحت‌ترین روش است، آن را در اینجا به کار می‌بریم. ابتدا با استفاده از معادله (۲۵) کمیت Q_1 را در معادله (۲۴) حذف می‌کنیم، سپس نسبت به t مشتق می‌گیریم و برای حذف Q_2 از معادله (۲۶) استفاده می‌کنیم

$$L \frac{dI}{dt} = C^{-1}Q_1 - C^{-1}Q_2 = -2C^{-1}Q_2$$

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} = -2C^{-1} \frac{dQ_2}{dt} = -2C^{-1}I$$

بنابراین شدت جریان $I(t)$ از معادله زیر پیروی می‌کند

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = -\omega^2 I$$

که در آن

$$\omega^2 = \frac{2C^{-1}}{L} \quad (27)$$

و تغییرات $I(t)$ به صورت نوسان هماهنگ است

$$I(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

معادله (۲۷) به روشنی نشان می‌دهد که ω^2 همواره "نیروی بازگرداننده" بر واحد "جابه‌جایی" بر واحد "لختی" است. در این رابطه "نیروی بازگرداننده" را می‌توان نیروی محرکه الکتریکی یعنی $2C^{-1}Q$ در نظر گرفت که در آن Q مقدار "جابه‌جایی بار" Q_2 است و در این صورت خودالقای L معرف "لختی بار" می‌شود. در نتیجه نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد لختی برابر با $(2C^{-1}Q)/QL$ است.

شاید متوجه تشابه ریاضی بین مثالهای ۲، ۳ و ۴ شده باشید. ما عمداً به این مثالها تقارن فضایی یکسان داده‌ایم ("لختی" در مرکز، "نیروهای محرک" به‌طور متقارن در هر دو طرف)، تا این تشابه به‌وجود آید. این تشابهات اغلب ابزار مفیدی برای کمک به حافظه هستند. ■

۳-۱ خطی بودن و اصل برهم‌نهی

در بخش ۲-۱ در حل مثالهایی برای نوسانهای آونگ و جرم و فنر فرض کردیم که نیروی بازگرداننده با ψ -متناسب است و (مثلاً) به ψ^2 و ψ^3 و غیره بستگی ندارد. هر معادله دیفرانسیلی که در آن توانهای بالاتر از توان اول ψ و توان اول $d\psi/dt$ و توان اول $d^2\psi/dt^2$ و غیره وجود نداشته باشد، برحسب ψ و مشتقهای آن برحسب زمان خطی نامیده می‌شود. علاوه بر این اگر در معادله‌ای تمام جمله‌ها به ψ بستگی داشته باشند معادله را همگن می‌گویند. اگر در معادله‌ای توانهای بالاتر از ψ یا مشتقهای آن وجود داشته باشد، معادله را غیرخطی می‌نامند. مثلاً رابطه (۵) یک معادله غیرخطی است زیرا $\sin \psi$ را با استفاده از معادله (۶) می‌توان بسط داد. فقط در صورتی که از توانهای بالاتر از ψ صرف‌نظر کنیم یک معادله خطی به‌دست می‌آید.

حل معادلات غیرخطی معمولاً مشکل است (معادله غیرخطی آونگ در جلد اول سری برکلی دقیقاً حل شده است). ولی در بسیاری از حالت‌های فیزیکی با تقریب خوبی می‌توان از معادلات خطی استفاده کرد. در این کتاب در همه موارد معادلات خطی به‌کار برده خواهد شد.

معادلات خطی همگن. معادلات دیفرانسیل خطی همگن دارای این خاصیت مهم و بسیار جالب هستند که مجموع هر دو جواب معادله خود نیز یک جواب معادله است. معادلات غیرخطی دارای چنین خاصیتی نیستند یعنی مجموع دو جواب یک معادله غیرخطی، جواب معادله نیست.

اکنون خواص ذکرشده برای این دو حالت (خطی و غیرخطی) را همزمان اثبات می‌کنیم. فرض کنید معادله دیفرانسیل حرکت یک سیستم با یک درجه آزادی، مثلاً یک آونگ، به صورت زیر است [مانند معادلات (۵) و (۶) در مورد آونگ یا معادله (۱۹) برای نوسانهای عرضی جرمی که به فترهایی متصل است]

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = -C\psi + \alpha\psi^2 + \beta\psi^3 + \gamma\psi^4 + \dots \quad (28)$$

اگر ضرایب ثابت α, β, γ و غیره همگی صفر باشند و یا بتوان با تقریب خوبی آنها را صفر در نظر گرفت، در این صورت معادله (۲۸) یک معادله خطی و همگن و در غیر این صورت غیرخطی است. اکنون فرض کنید که $\psi_1(t)$ و $\psi_2(t)$ دو جواب مختلف معادله (۲۸) هستند. مثلاً ψ_1 جواب معادله مربوط به حالتی است که گلوله آونگ دارای سرعت و مکان اولیه مشخصی است و ψ_2 مربوط به حالتی است که آونگ دارای سرعت و مکان اولیه دیگری است. بنابر فرض ψ_1 و ψ_2 در معادله (۲۸) صدق می‌کنند. یعنی

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -C\psi_1 + \alpha\psi_1^2 + \beta\psi_1^3 + \gamma\psi_1^4 + \dots \quad (29)$$

و

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -C\psi_2 + \alpha\psi_2^2 + \beta\psi_2^3 + \gamma\psi_2^4 + \dots \quad (30)$$

پرسشی که اکنون مطرح می‌شود این است که آیا برهم‌نهی ψ_1 و ψ_2 یعنی $\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$ در معادله (۲۸) صدق می‌کند یا خیر؟ یعنی آیا رابطه زیر برقرار است؟

$$\frac{d^2(\psi_1 + \psi_2)}{dt^2} = -C(\psi_1 + \psi_2) + \alpha(\psi_1 + \psi_2)^2 + \beta(\psi_1 + \psi_2)^3 + \dots? \quad (31)$$

پاسخ سؤال فقط در صورتی مثبت است که ضرایب α و β و غیره همگی صفر باشند. زیرا اگر معادلات (۲۹) و (۳۰) را با یکدیگر جمع کنیم حاصل جمع فقط در صورتی برابر با معادله (۳۱)

خواهد بود که روابط زیر برقرار باشند:

$$\frac{d^2 \psi_1}{dt^2} + \frac{d^2 \psi_2}{dt^2} = \frac{d^2 (\psi_1 + \psi_2)}{dt^2} \quad (32)$$

$$-C\psi_1 - C\psi_2 = -C(\psi_1 + \psi_2) \quad (33)$$

$$\alpha\psi_1^2 + \alpha\psi_2^2 = \alpha(\psi_1 + \psi_2)^2 \quad (34)$$

$$\beta\psi_1^3 + \beta\psi_2^3 = \beta(\psi_1 + \psi_2)^3 \quad (35) \text{ و غیره}$$

معادلات (۳۲) و (۳۳) هر دو صادق هستند اما معادلات (۳۴) و (۳۵) فقط در صورتی برقرار هستند که ضرایب α و β برابر صفر باشند. بنابراین دیده می‌شود که برهم‌نهمش دو جواب فقط و فقط در صورتی خود نیز یک جواب است که معادله خطی باشد.

این خاصیت که برهم‌نهمش جوابهای معادله خود نیز یک جواب باشد منحصر به معادلات خطی همگن است. به نوسانهایی که دارای چنین معادلاتی باشند، نوسانهایی می‌گویند که از اصل برهم‌نهمش پیروی می‌کنند. در این کتاب فقط این‌گونه نوسانها را مطالعه خواهیم کرد.

برهم‌نهمش شرایط اولیه. برای کاربرد اصل برهم‌نهمش، به‌عنوان مثال، حرکت یک آونگ ساده با نوسانهای کوچک را در نظر می‌گیریم. فرض کنید که جواب ψ_1 مربوط به یک سری از شرایط اولیه (مکان و سرعت) و جواب ψ_2 مربوط به سری دیگری از شرایط اولیه باشد. اکنون سری سوم شرایط اولیه یعنی برهم‌نهمش شرایط اولیه مربوط به جوابهای ψ_1 و ψ_2 را در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر به گلوله آونگ مکان اولیه‌ای برابر با جمع جبری مکان اولیه مربوط به حرکتهای $\psi_1(t)$ و $\psi_2(t)$ و همچنین سرعت اولیه‌ای برابر با جمع جبری سرعتهای اولیه مربوط به ψ_1 و ψ_2 می‌دهیم. در این حالت برای به دست آوردن معادله حرکت جدید یعنی $\psi_3(t)$ به محاسبه مجدد احتیاج نیست، زیرا که جواب ψ_3 دقیقاً برابر با برهم‌نهمش $\psi_1 + \psi_2$ است. این نتیجه فقط در صورتی درست است که نوسانهای آونگ آنقدر کوچک باشد که بتوان در نیروی بازگرداننده از جمله‌های غیرخطی صرف‌نظر کرد.

معادلات خطی غیرهمگن. در معادلات خطی غیرهمگن (یعنی معادلاتی که شامل جمله‌های مستقل از ψ است) نیز اصل برهم‌نهمش با اندک تفاوتی صادق است. مثالهای فیزیکی متعددی مشابه با یک نوسانگر هماهنگ تحریک شده وجود دارد که در آنها معادله زیر صدق می‌کند

$$\frac{Md^2\psi(t)}{dt^2} = -C\psi(t) + F(t) \quad (36)$$

که در آن $F(t)$ یک نیروی محرک "خارجی" و مستقل از $\psi(t)$ است. اصل برهم‌نهمش به این صورت بیان می‌شود: فرض کنید که نیروی محرک $F_1(t)$ نوسان $\psi_1(t)$ را ایجاد می‌کند (هنگامی

که F_1 تنها نیروی محرک است) و نیروی محرک دیگر $F_2(t)$ نوسان $\psi_2(t)$ را به وجود می‌آورد (هنگامی که فقط نیروی محرک $F_2(t)$ وجود دارد). اکنون اگر هر دو نیروی محرک همزمان وجود داشته باشند (به طوری که نیروی محرک کل برابر با برهم‌نهی $F_1(t) + F_2(t)$ باشد) نوسان مربوط به آن (یعنی جواب معادلهٔ ۳۶) از برهم‌نهی ψ_1 و ψ_2 ، $\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$ به دست می‌آید. نشان دادن اینکه این مطلب فقط در مورد معادلات خطی غیرهمگن مانند معادلهٔ (۳۶) درست است و در مورد معادله‌ای که برحسب $\psi(t)$ غیرخطی باشد صادق نیست را به شما واگذار می‌کنیم. (مسئلهٔ ۱-۱۶ را ببینید).

سیستمهایی که در بخش ۱-۲ مطالعه شدند و همچنین کلیهٔ مثالهای اصل برهم‌نهی در این بخش، همگی سیستمهای با یک درجهٔ آزادی هستند. با وجود این اصل برهم‌نهی برای سیستمهای با چندین درجهٔ آزادی (هنگامی که معادلات خطی هستند) نیز صادق است و در این کتاب در بیشتر موارد از آن استفاده خواهد شد بدون آنکه نام آن ذکر شود.

مثال ۵: آونگ کروی

برای روشن شدن کاربرد اصل برهم‌نهی در حالتی که دو درجهٔ آزادی وجود دارد، حرکت آونگی را در نظر می‌گیریم که شامل گلوله‌ای به جرم M و نخ به طول l است. این آونگ در همهٔ جهتها می‌تواند حرکت کند و از این رو آونگ کروی نامیده می‌شود. در حالت تعادل نخ عمودی و در امتداد z و گلوله در نقطهٔ $x = y = 0$ است. برای جابه‌جاییهای خیلی کوچک x و y به آسانی می‌توان نشان داد که $x(t)$ و $y(t)$ در معادلات دیفرانسیل زیر صدق می‌کنند

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{Mg}{l} x \quad (37)$$

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{Mg}{l} y \quad (38)$$

این دو معادله "جفت نشده" هستند یعنی مؤلفهٔ x نیرو فقط به x و مؤلفهٔ y نیرو فقط به y بستگی دارد. بنابراین در معادلهٔ (۳۷) متغیر y و در معادلهٔ (۳۸) متغیر x وجود ندارند. معادلات (۳۷) و (۳۸) را می‌توان مستقل از یکدیگر حل کرد، یعنی

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (39)$$

$$y(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (40)$$

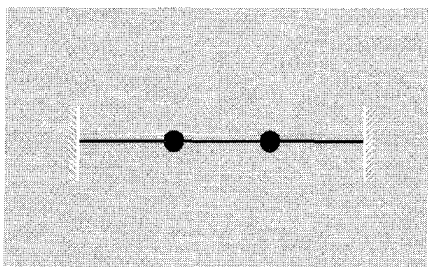
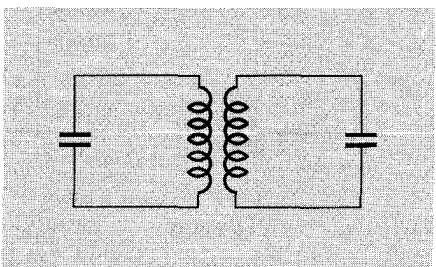
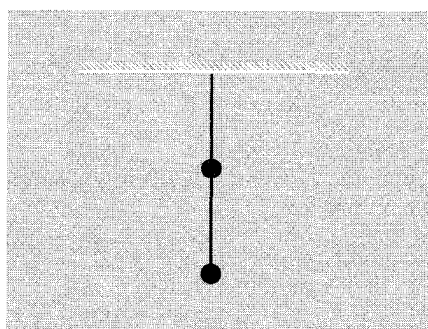
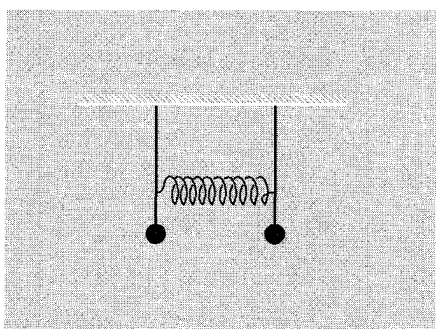
که در آنها

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

مقادیر ثابت $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ با شرایط اولیه سرعت و مکان در جهتهای x و y مشخص می‌شوند. اکنون حرکت کلی را می‌توان برهم‌نهی دو حرکت $\hat{x}x(t)$ و $\hat{y}y(t)$ در نظر گرفت که در آنها \hat{x} و \hat{y} بردارهای یکه هستند. اهمیت اصل برهم‌نهی در این است که می‌توان ابتدا حرکت در امتدادهای x و y را به‌طور جداگانه به‌دست آورد و سپس آنها را با یکدیگر جمع کرد تا حرکت کلی که شامل هر دو درجه آزادی است به‌دست آید. ■

۱-۴ نوسانهای آزاد سیستمهای دارای دو درجه آزادی

از سیستمهایی که دو درجه آزادی دارند مثالهای جالب بیشماری در طبیعت یافت می‌شود. زیباترین مثالها شامل مولکولها و ذرات بنیادی (به‌ویژه مزون طبیعی K) هستند که مطالعه آنها احتیاج به مکانیک کوانتومی دارد. مثالهای ساده‌تر عبارت‌اند از آونگ دوگانه (یعنی به گلوله آونگی که از سقف آویزان است آونگ دیگری متصل شده است)، دو آونگ که با فنری به یکدیگر متصل شده‌اند، تازی با دو مهره، و دو مدار جفت‌شده LC (شکل ۱-۶). برای مشخص کردن حالت هریک از این سیستمها، دو متغیر مانند ψ_a و ψ_b لازم است. مثلاً در مورد آونگ ساده‌ای که در همه جهتها



آزادانه می‌تواند حرکت کند "اجزای متحرک" ψ_a و ψ_b عبارت است از مختصات آونگ در صفحه افقی و در دو امتداد عمود برهم، در مورد آونگ جفت‌شده اجزای متحرک ψ_a و ψ_b مکانهای دو آونگ هستند و در مورد دو مدار LC جفت‌شده "اجزای متحرک" ψ_a و ψ_b بار الکتریکی دو خازن یا شدت جریان در مدارها هستند.

حرکت کلی سیستم دارای دو درجه آزادی می‌تواند در ظاهر کاملاً پیچیده باشد زیرا هیچ جزء آن حرکت ساده هماهنگ ندارد. با وجود این نشان می‌دهیم که با دو درجه آزادی و برای معادلات خطی حرکت، کلیترین حرکت، برهم‌نهمش دو حرکت مستقل هماهنگ ساده است که همزمان ادامه می‌یابند. این دو حرکت هماهنگ ساده (که در زیر شرح داده می‌شوند) را مدهای بهنجاری و یا فقط مد می‌گویند. با انتخاب مناسب شرایط آغاز به نوسان (یعنی مقادیر مناسب برای ψ_a ، ψ_b ، $d\psi_b/dt$ و $d\psi_a/dt$) سیستم را می‌توان در یک مد و یا مد دیگر به نوسان درآورد. بنابراین با وجودی که اجزای متحرک جفت‌شده هستند، مدها "جفت‌نشده" هستند.

ویژگیهای هر مد. هنگامی که فقط یک مد وجود دارد، هر جزء متحرک یک حرکت ساده هماهنگ دارد. تمام اجزاء با بسامد یکسان نوسان می‌کنند و به‌طور همزمان از محل تعادلشان (که در آن ψ برابر صفر است) می‌گذرند. از این رو در یک مد تنها هرگز روابطی مانند $\psi_a(t) = A \cos \omega t$ و $\psi_b(t) = B \sin \omega t$ (فاز مختلف) و یا $\psi_a(t) = A \cos \omega_1 t$ و $\psi_b(t) = B \cos \omega_2 t$ (بسامدهای مختلف) وجود ندارند. بلکه در یک مد تنها (که مد ۱ نامیده می‌شود) روابط زیر وجود دارند

$$\begin{aligned} \psi_a(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \psi_b(t) &= B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = \frac{B_1}{A_1} \varphi_a(t) \end{aligned} \quad (41)$$

که نشان‌دهنده فاز و بسامد یکسان برای هر دو درجه آزادی (یا اجزای متحرک) است. همین‌طور در مد ۲، دو درجه آزادی a و b برطبق معادلات زیر حرکت می‌کنند

$$\begin{aligned} \psi_a(t) &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \psi_b(t) &= B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \frac{B_2}{A_2} \psi_a(t) \end{aligned} \quad (42)$$

هر مد بسامد مشخصه‌ای دارد: ω_1 برای مد ۱ و ω_2 برای مد ۲. سیستم در هر مد نیز دارای "بیکربندی" یا "شکل" معینی است که با نسبت دامنه‌های حرکت اجزای متحرک مشخص می‌شود: A_1/B_1 برای مد ۱ و A_2/B_2 برای مد ۲. دقت کنید که در هر مد نسبت $\psi_a(t)/\psi_b(t)$

مقداری است ثابت و به زمان بستگی ندارد و برابر با A_1/B_1 یا A_2/B_2 است که می‌توانند مثبت یا منفی باشند.

کلیرین حرکت سیستم (همان‌طور که نشان داده خواهد شد) برهم‌نهم ساده دو مد است که هم‌زمان نوسان می‌کنند:

$$\begin{aligned}\psi_a(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \psi_b(t) &= B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\end{aligned}\quad (43)$$

اکنون مثالهای مشخصی را در نظر می‌گیریم.

مثال ۶: آونگ کروی ساده

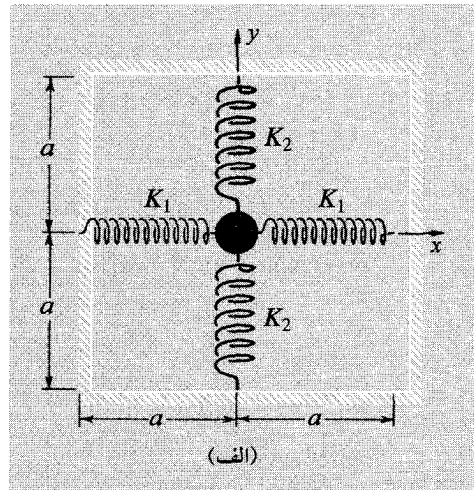
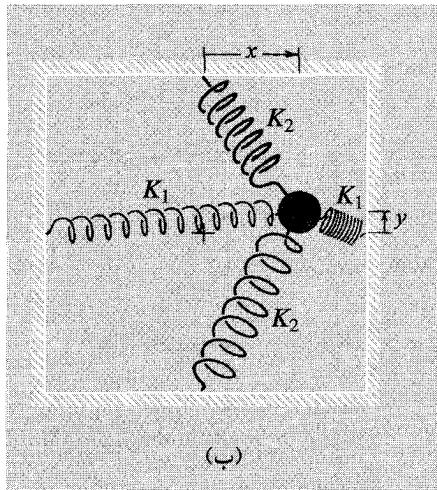
این مثال بسیار ساده است و پیچیدگی حرکت کلی را که با معادلات (۴۳) داده می‌شوند، نشان نمی‌دهد، زیرا هر دو مد که به ترتیب مربوط به نوسان در امتدادهای x و y اند دارای بسامد یکسان $\omega^2 = g/l$ هستند. در نتیجه به جای معادلات (۴۳) که برهم‌نهم مربوط به دو بسامد مختلف‌اند، از معادلات (۳۹) و (۴۰) نتایج ساده‌تر زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned}x(t) \equiv \varphi_a(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), & \omega_1 &= \omega \\ y(t) \equiv \psi_b(t) &= B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), & \omega_2 &= \omega_1 = \omega\end{aligned}\quad (44)$$

که در آن معادلات (۴۴) عمداً مشابه با معادلات (۴۳) نوشته شده‌اند. اگر دو مد دارای دو بسامد یکسان باشند حالت غیرعادی است و دو مد را در این حالت "واگن" می‌گویند. ■

مثال ۷: نوسانگر هماهنگ دوبعدی

شکل ۷-۱ جرم M را نشان می‌دهد که در صفحه xy به آزادی می‌تواند حرکت کند. این جرم با دو فنر بی‌وزن و کشیده‌نشده که ضریب ثابت فنری آنها K_1 است در امتداد x و با دو فنر بی‌وزن و کشیده‌نشده که ضریب ثابت فنری آنها K_2 است در امتداد y به دیواره‌ها متصل شده است. در تقریب نوسانهای کوچک که در آن از x^2/a^2 ، y^2/a^2 و xy/a^2 صرف‌نظر می‌شود، می‌توان نشان داد که مؤلفه x نیروی بازگرداننده فقط به دو فنر K_1 مربوط است. به همین ترتیب مؤلفه y نیروی بازگرداننده فقط به فنرهای K_2 بستگی دارد. برای اثبات می‌توانید مقادیر دقیق F_x و F_y را بنویسید و سپس جمله‌های غیرخطی را حذف کنید. اما در اینجا روش ساده‌تری را شرح می‌دهیم:



شکل ۷-۱ نوسانگر هماهنگ دوبعدی. (الف) تعادل. (ب) شکل کلی.

ابتدا حالت تعادل یعنی شکل ۷-۱ (الف) را در نظر می‌گیریم. اگر جرم M در امتداد $+x$ یک جابه‌جایی کوچک x پیدا کند با توجه به شکل ۷-۱ نیروی بازگرداننده برابر است با

$$F_x = -2K_1x, \quad F_y = 0$$

اکنون اگر جرم (که در انتهای جابه‌جایی اولیه است) در امتداد $+y$ یک جابه‌جایی کوچک y پیدا کند آیا مقدار F_x تغییر می‌کند یا خیر؟ فنرهای K_1 به اندازه‌ای که متناسب با y^2 است بلندتر می‌شوند که از آن صرف‌نظر می‌کنیم. طول فنرهای K_2 به اندازه‌ای که متناسب با y است تغییر می‌کند (یکی کوتاه‌تر و دیگری بلندتر می‌شود) اما تصویر نیروی آنها در امتداد x متناسب با x است. چون از حاصلضرب yx صرف‌نظر می‌کنیم، بنابراین F_x تغییر نمی‌کند. برای F_y استدلال مشابهی را نیز می‌توان به‌کار برد. بنابراین دو معادله خطی زیر به دست می‌آیند

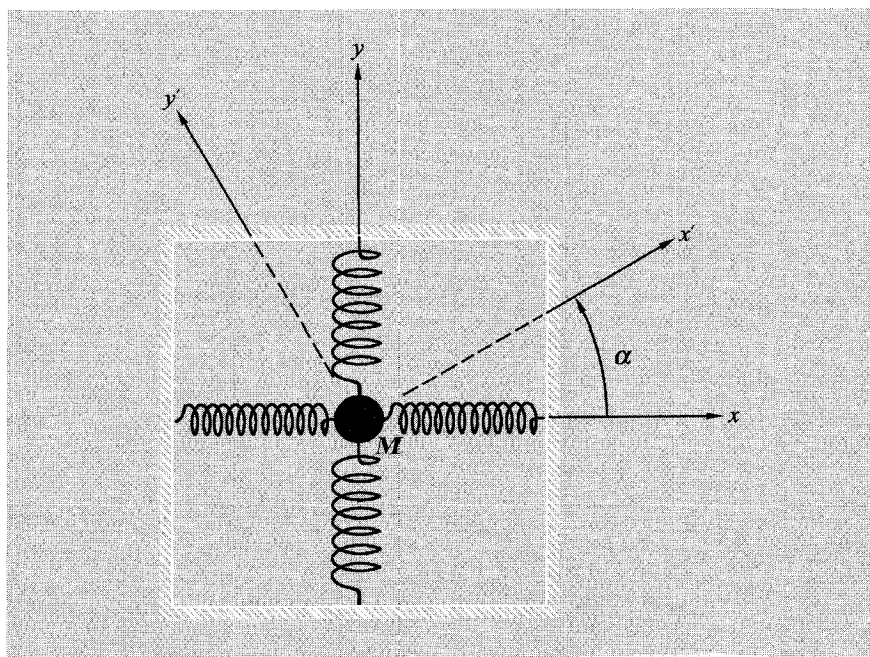
$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -2K_1x \quad \text{و} \quad M \frac{d^2y}{dt^2} = -2K_2y \quad (45)$$

که حل آنها عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), & \omega_1^2 &= \frac{2K_1}{M} \\ y &= B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), & \omega_2^2 &= \frac{2K_2}{M} \end{aligned} \quad (46)$$

می‌بینیم که حرکت x و حرکت y به یکدیگر جفت شده نیستند و هرکدام یک نوسان هماهنگ با بسامد مخصوص خود دارند. از این رو حرکت x مربوط به یک مد بهنجار نوسان و حرکت y مربوط به مد دیگر است. مد x دارای دامنه A_1 و ثابت فاز φ_1 است که فقط به مقادیر اولیه $x(0)$ و $\dot{x}(0)$ یعنی مکان و سرعت در لحظه $t = 0$ بستگی دارد. به همین ترتیب مد y دارای دامنه B_2 و ثابت فاز φ_2 است که فقط به مقادیر اولیه $y(0)$ و $\dot{y}(0)$ بستگی دارد. ■

مختصات بهنجار. توجه کنید که جواب کلی ما یعنی معادلات (۴۶) به اندازه معادلات (۴۳) کلی نیستند. این از خوش‌شانسی ماست زیرا انتخاب محورهای x و y در امتداد فنرها به معادلات جفت‌نشده (۴۵) منجر شد که هرکدام مربوط به یک مد هستند. یعنی انتخاب محورها به‌گونه‌ای است که در مقایسه با معادلات (۴۳)، ضریب A_2 در ψ_a و ضریب B_1 در ψ_b برابر صفرند. چنین محورهای مختصاتی را مختصات بهنجار می‌گویند. در این مثال مختصات بهنجار x و y هستند. فرض کنید که تا این اندازه خوش‌شانس یا خردمند نباشیم. اکنون به جای سیستم مختصات x و y محورهای مختصات x' و y' را که به اندازه زاویه α چرخیده است مانند شکل ۸-۱ انتخاب می‌کنیم. از شکل پیداست که هرکدام از مختصات بهنجار x و y یک ترکیب خطی از مختصات



شکل ۸-۱ دوران محورهای مختصات.

x' و y' است. اگر به جای مختصات "زیرکانه" x و y مختصات "عادی" x' و y' را به کار می‌بریم، به جای معادلات جفت‌نشده (۵) دو معادله دیفرانسیل "جفت‌شده" به دست می‌آوردیم که در هر معادله آن، هم x' و هم y' ظاهر می‌شوند.

برخلاف مثال بالا، در بسیاری از مسائل با دو درجه آزادی به سادگی نمی‌توان "با مشاهده"، محورهای مختصات بهنجار را پیدا کرد. از این رو معادلات حرکت با درجات مختلف آزادی معمولاً معادلات جفت‌شده هستند. یک روش برای حل این دو معادله دیفرانسیل جفت‌شده عبارت است از پیدا کردن متغیرهای جدیدی که ترکیب خطی از مختصات "عادی" باشند به طوری که این متغیرهای جدید در معادلات جفت‌نشده حرکت صدق کنند. این متغیرهای جدید را "مختصات بهنجار" می‌نامند. در مثال بالا با استفاده از مختصات "عادی" x' و y' به سادگی می‌توان مختصات بهنجار را پیدا کرد. کافی است سیستم مختصات را آنقدر دوران بدهیم تا x و y که هرکدام یک ترکیب خطی از x' و y' هستند، به دست آیند. در حالت کلی مثلاً در شکل ۱-۷ اگر فنرها عمود بر یکدیگر نباشند، باید از یک تبدیل خطی مختصات که کلیتر از دوران ساده محورهاست، استفاده کرد.

حل سیستماتیک مدها. بدون آنکه یک سیستم فیزیکی مشخصی در نظر بگیریم، فرض می‌کنیم که دو معادله همگن خطی درجه اول جفت‌شده به هم در مختصات "عادی" x و y وجود دارند

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a_{11}x - a_{12}y \quad (47)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -a_{21}x - a_{22}y \quad (48)$$

ابتدا فرض می‌کنیم که تنها در یک مد بهنجار نوسان داریم. یعنی فرض می‌شود که هر دو درجه آزادی x و y با حرکت هماهنگ با بسامد و ثابت فاز یکسان نوسان می‌کنند. بنابراین فرض می‌کنیم که:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad y = B \cos(\omega t + \varphi) \quad (49)$$

که در آن ω و B/A در این مرحله مجهول‌اند. پس

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y \quad (50)$$

با قراردادن معادله (۵۰) در معادلات (۴۷) و (۴۸) و تغییرات لازم، دو معادله خطی همگن برحسب

x و y به دست می آید

$$(a_{11} - \omega^2)x + a_{12}y = 0 \quad (51)$$

$$a_{21}x + (a_{22} - \omega^2)y = 0 \quad (52)$$

از هر یک از معادلات (51) و (52) نسبت y/x به دست می آید

$$\frac{y}{x} = \frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}} \quad (53)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}} \quad (54)$$

چون معادلات (53) و (54) باید دارای جواب یکسان باشند لازم است که شرط زیر برقرار باشد

$$\frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}}$$

یعنی

$$(a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{21}a_{12} = 0 \quad (55)$$

روش دیگر برای نوشتن معادله (55) آن است که درمیان ضرایب معادلات همگن خطی (51) و (52) را مساوی صفر قرار دهیم:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \omega^2 \end{vmatrix} \equiv (a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{21}a_{12} = 0 \quad (56)$$

معادله (55) یا (56) برحسب متغیر ω^2 یک معادله درجه چهار با دو جواب ω_1^2 و ω_2^2 است. بدین ترتیب اگر فرض کنیم نوسان تنها در یک مد وجود دارد، با دو روش می توان آن فرضها را نمایش داد. بسامد ω_1 بسامد مد ۱ و ω_2 بسامد مد ۲ است. شکل یا آرایش x و y در مد ۱ با قراردادن $\omega_1^2 = \omega^2$ در یکی از معادلات (53) یا (54) به دست می آید [این دو معادله به خاطر وجود معادله (56) یکسان هستند]. بنابراین

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{\omega_1^2} = \left(\frac{B}{A}\right)_{\omega_1^2} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}} \quad (الف \ 57)$$

به همین ترتیب

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{\omega_2^2} = \left(\frac{B}{A}\right)_{\omega_2^2} = \frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}} \quad (ب \ 57)$$

اکنون که بسامد مدها یعنی ω_1 و ω_2 و نسبت دامنه‌ها یعنی B_1/A_1 و B_2/A_2 مشخص شدند کلیتین شکل برهم‌نهمش دو مد را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (58)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{B_1}{A_1} A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{B_2}{A_2} A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ &= B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (59)$$

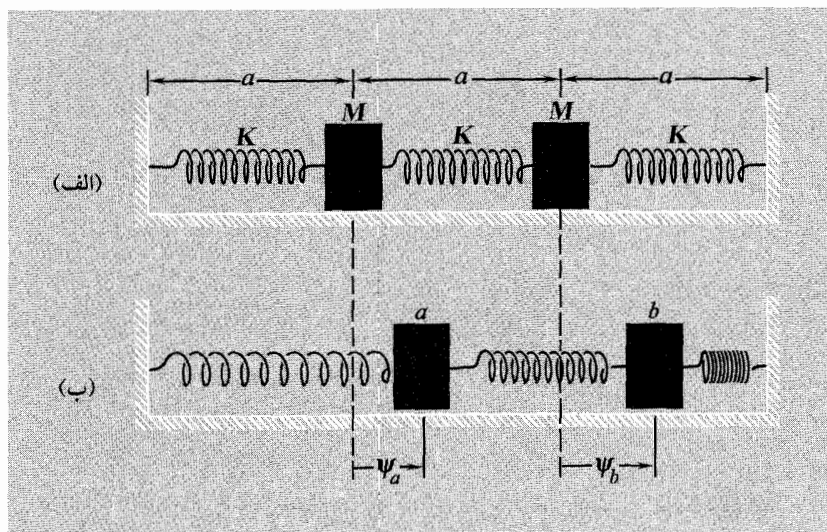
توجه کنید در حالتی که مقادیر A_1 ، φ_1 ، A_2 و φ_2 در معادله (58) کاملاً اختیاری باشد برای ضرایب معادله (59) هیچ‌گونه آزادی عمل وجود ندارد زیرا مقادیر φ_1 و φ_2 قبلاً اختیار شده و همچنین معادلات (57) می‌باید برقرار باشند.

کلیتین جواب معادلات (47) و (48) شامل برهم‌نهمش هر دو جواب مستقل است که در چهار شرط اولیه $x(0)$ ، $\dot{x}(0)$ ، $y(0)$ و $\dot{y}(0)$ صدق کنند. برهم‌نهمش دو مد بهنجار با چهار مقدار ثابت A_1 ، φ_1 ، A_2 و φ_2 که به وسیله چهار شرط اولیه تعیین می‌شوند خود نیز یک جواب است. بنابراین جواب کلی را می‌توان (اگرچه لزومی ندارد) به صورت برهم‌نهمش مدها نوشت.

مثال ۸: نوسانهای طولی دو جرم جفت شده

سیستم در شکل ۹-۱ نشان داده شده است. دو جرم M بر روی سطح بدون اصطکاک می‌لغزند. هر سه فنر بدون جرم و عین هم هستند و ثابت فنر برابر K است. به دست آوردن حل سیستماتیک مسئله را به دانشجویان واگذار می‌کنیم (مسئله ۱-۲۳) و در اینجا فقط مدهای بهنجار را حدس می‌زنیم. چون سیستم دارای دو درجه آزادی است بنابراین باید دو مد وجود داشته باشد. در یک مد هر جزء متحرک (هر جرم) با یک حرکت هماهنگ نوسان می‌کند. یعنی تمام اجزای متحرک با بسامد یکسان نوسان می‌کنند و از این رو نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم برای هر دو جرم یکسان است. (در بخش ۱-۲ دیدیم که ω^2 نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم است. این تعبیر برای هر جزء متحرک خواه به صورت یک سیستم مجزا و منفرد با یک درجه آزادی باشد و یا جزئی از یک سیستم بزرگتر صادق است. تنها شرط لازم آن است که حرکت یک حرکت هماهنگ با یک بسامد باشد.)

در این مثال چون جرمها مساوی هستند بنابراین فقط باید آرایشهایی را پیدا کنیم که در آنها نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی برای هر دو جرم یکسان باشد. ابتدا جابه‌جاییها را مساوی اختیار می‌کنیم: فرض کنید وقتی سیستم در حالت تعادل است هر دو جرم را به اندازه مساوی



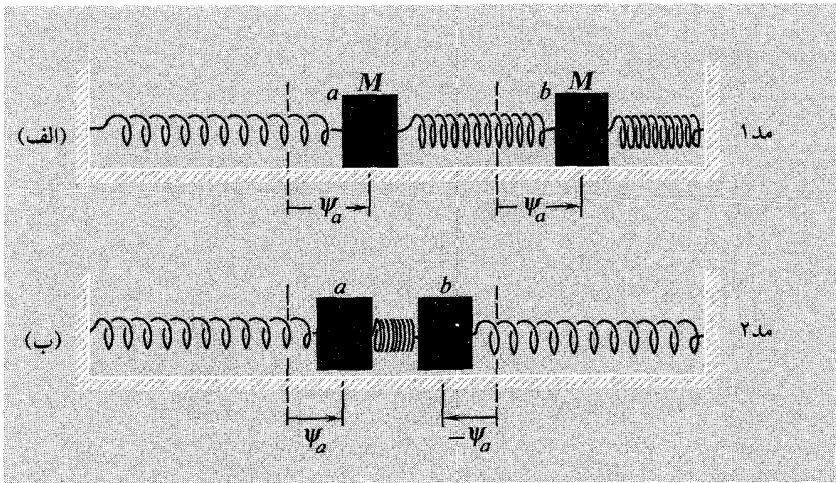
شکل ۹-۱ نوسانهای طولی. (الف) تعادل. (ب) شکل کلی.

به طرف راست جابه‌جا کنیم. آیا نیروی بازگرداننده بر هر دو جرم یکسان است؟ توجه کنید طول فنر میانی همان طولی است که در حالت تعادل داشت، پس هیچ نیرویی بر جرمها وارد نمی‌کند. چون فنر سمت چپ کشیده شده است جرم سمت چپ به سمت چپ کشیده می‌شود. جرم سمت راست با همان نیرو به سمت چپ فشار داده می‌شود زیرا فنر سمت راست به همان اندازه متراکم شده است. بدین ترتیب یک مد کشف کرده‌ایم!

$$(۶۰) \quad \text{مد ۱:} \quad \omega_1^2 = \frac{K}{M} \quad \psi_a(t) = \psi_b(t)$$

بسامد $\omega_1^2 = K/M$ در معادله (۶۰) از آنجا به دست آمده که اگر فنر میانی برداشته می‌شد هر یک از جرمها با آن بسامد نوسان می‌کرد.

اکنون دومین مد را حدس می‌زنیم. از تقارن سیستم پیداست که اگر a و b در دو جهت مختلف حرکت کنند می‌توان یک مد به دست آورد. اگر جرم a به اندازه فاصله ψ_a به سمت راست و جرم b به همان اندازه به سمت چپ حرکت کند، در این صورت نیروی بازگرداننده هر دو جرم یکسان خواهد بود. بنابراین برای دومین مد رابطه $\psi_b = -\psi_a$ وجود دارد. بسامد ω_2 را با در نظر گرفتن تنها یک جرم و پیدا کردن نیروی بازگرداننده بر واحد جرم می‌توان به دست آورد. برای این منظور جرم سمت چپ یعنی a را در نظر می‌گیریم. این جرم با نیروی $F_z = -K\psi_a$ به وسیله فنر سمت چپ به سمت چپ کشیده می‌شود. این جرم همچنین با نیروی $F_z = -2K\psi_a$ به وسیله فنر میانی



شکل ۱-۱۰ مدهای بهنجار نوسان طولی. (الف) مد با بسامد پایینتر. (ب) مد با بسامد بالاتر.

به سمت چپ فشار داده می‌شود. (ضریب دو برای آن است که فتر میانی به اندازه $2\psi_a$ متراکم شده است.) بنابراین اندازه خالص نیرو به‌ازای جابه‌جایی ψ_a برابر $-3K\psi_a$ و نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم برابر $3K/M$ است

$$\psi_a = -\psi_b, \quad \omega_2^2 = \frac{3K}{M} \quad \text{مد ۲:} \quad (۶۱)$$

مدها در شکل ۱-۱۰ نشان داده شده‌اند.

اکنون این مسئله را با استفاده از روش پیدا کردن مختصات بهنجار یعنی مختصات "زیرکانه" حل می‌کنیم. مختصات "زیرکانه" همواره یک ترکیب خطی از مختصات "عادی" معمولی است به طوری که به‌جای دو معادله خطی جفت‌شده دو معادله جفت‌نشده به‌دست می‌آید. از شکل ۱-۹ (ب) به‌سادگی دیده می‌شود که در حالت کلی معادلات حرکت عبارت‌اند از

$$M \frac{d^2\psi_a}{dt^2} = -K\psi_a + K(\psi_a - \psi_b) \quad (۶۲)$$

$$M \frac{d^2\psi_b}{dt^2} = -K(\psi_b - \psi_a) - K\psi_b \quad (۶۳)$$

با بررسی این معادلات حرکت معلوم می‌شود که به‌ترتیب با جمع‌کردن و تفریق‌کردن این معادلات از یکدیگر، معادلات جفت‌نشده موردنظر به‌دست می‌آیند. با جمع‌کردن معادلات (۶۲) و (۶۳) نتیجه می‌شود

$$M \frac{d^2}{dt^2}(\psi_a + \psi_b) = -K(\psi_a + \psi_b) \quad (۶۴)$$

و از کم کردن معادله (۶۳) از معادله (۶۲) رابطه زیر به دست می‌آید

$$M \frac{d^2(\psi_a - \psi_b)}{dt^2} = -3K(\psi_a - \psi_b) \quad (65)$$

معادلات (۶۴) و (۶۵) بر حسب متغیرهای $\psi_a + \psi_b$ و $\psi_a - \psi_b$ معادلات جفت‌نشده‌ای هستند. جواب این معادلات چنین است

$$\psi_a + \psi_b \equiv \psi_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad \omega_1^2 = \frac{K}{M} \quad (66)$$

$$\psi_a - \psi_b \equiv \psi_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad \omega_2^2 = \frac{3K}{M} \quad (67)$$

که در آنها A_1 و φ_1 به ترتیب دامنه و ثابت فاز مد ۱ و A_2 و φ_2 دامنه و ثابت فاز مد ۲ هستند. $\psi_1(t)$ مربوط به حرکت مرکز جرم است زیرا مرکز جرم در محل $(\psi_a + \psi_b)/2$ قرار دارد. [می‌توانستیم معادله (۶۴) را بر ۲ تقسیم و ψ_1 را محل مرکز جرم تعریف کنیم. ضریب تناسب $1/2$ اهمیت چندانی ندارد.] ψ_2 برابر با اندازه تراکم فنر میانی یا (به عبارت دیگر) جابه‌جایی نسبی دو جرم است. اگر زرنگتر می‌بودیم، از ابتدا ψ_1 و ψ_2 را انتخاب می‌کردیم چون حرکت مرکز جرم و "حرکت داخلی" (حرکت نسبی دو ذره) متغیرهای فیزیکی جالب توجه هستند. در بسیاری از حالتها به آسانی نمی‌توان یک معنی فیزیکی ساده برای مختصات بهنجار پیدا کرد. از این رو حتی پس از پیدا کردن مدها معمولاً همان مختصات "عادی" اولیه را به کار می‌بریم زیرا آنها را بهتر می‌توان درک کرد. در این مسئله مختصات بهنجار ψ_1 و ψ_2 را به دست آوردیم. اکنون به مختصات آشناتر ψ_a و ψ_b برمی‌گردیم. از حل معادلات (۶۶) و (۶۷) نتیجه می‌شود

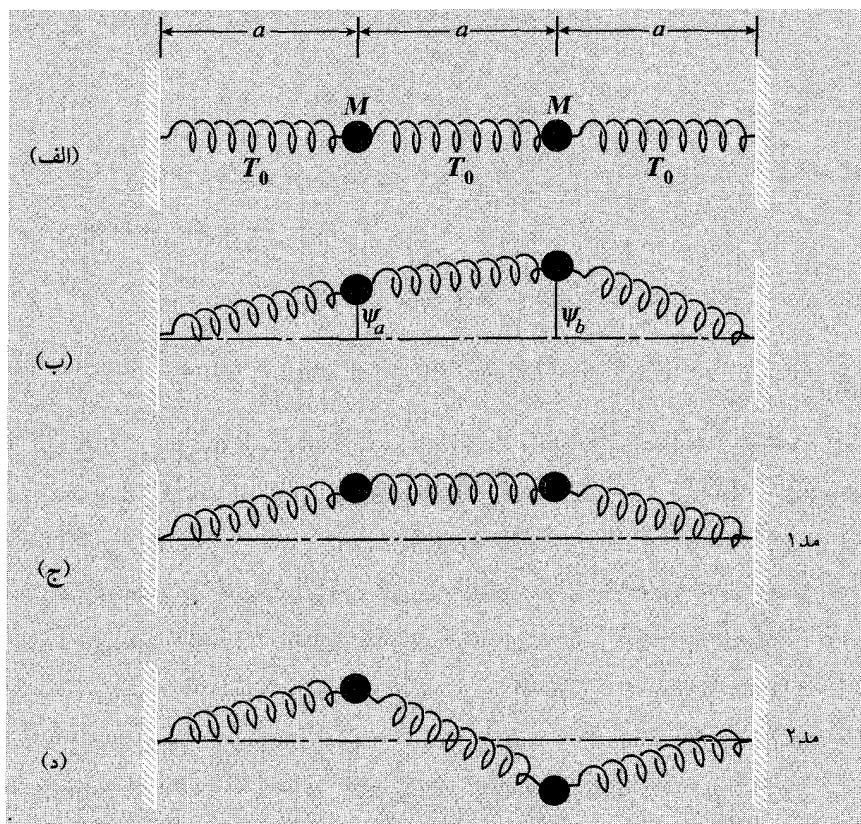
$$2\psi_a = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (68)$$

$$2\psi_b = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (69)$$

توجه کنید که در حرکتی که منحصراً مد ۱ دارد، A_2 برابر صفر است و برطبق معادلات (۶۸) و (۶۹) رابطه $\psi_b = \psi_a$ برقرار است. همین‌طور در مد ۲ روابط $A_1 = 0$ و $\psi_b = -\psi_a$ وجود دارد و این همان نتیجه‌ای است که قبلاً در معادلات (۶۰) و (۶۱) به دست آوردیم. ■

مثال ۹: نوسانهای عرضی دو جرم جفت‌شده

سیستمی را در نظر می‌گیریم که در شکل ۱-۱۱ نشان داده شده است و فرض می‌کنیم که نوسانها فقط در صفحه کاغذ می‌توانند انجام شوند، بنابراین فقط دو درجه آزادی وجود دارد. سه فنر بی‌وزن



شکل ۱۱-۱ نوسانهای عرضی. (الف) تعادل. (ب) شکل کلی. (ج) مد با بسامد پایینتر. (د) مد با بسامد بالاتر.

عین هم دارای طول اولیه a هستند که از فاصله بین جرمها در حالت تعادل یعنی a کوچکتر است و بنابراین هر سه آنها کشیده شده‌اند. وقتی سیستم در حالت تعادل است [شکل ۱۱-۱ (الف)] فنرها دارای کشش T_0 هستند.

به سبب تقارن سیستم مدها را به آسانی می‌توان حدس زد. این مدها در شکل ۱۱-۱ نشان داده شده‌اند. مد پایینتر (مد با بسامد پایینتر یعنی مدی که برای هریک از جرمها دارای نیروی بازگرداننده کوچکتر بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم است) به شکلی است [شکل ۱۱-۱ (ج)] که در آن فنر میانی نه کشیده و نه فشرده می‌شود. بنابراین با در نظر گرفتن هریک از جرمها به‌طور جداگانه و با توجه به اینکه نیروی بازگرداننده فقط با فنر متصل به دیوار به وجود می‌آید، بسامد را می‌توان به دست آورد. اکنون نشان می‌دهیم که برای تقریب اسلینکی (یعنی طول فنر کشیده نشده برابر صفر) و یا تقریب نوسانهای کوچک (یعنی هنگامی که جابه‌جاییها در مقایسه با فاصله a

خیلی کوچک هستند)، جابه‌جایی ψ_a جرم سمت چپ سبب می‌شود که به فنر سمت چپ نیروی بازگرداننده $T_0(\psi_a/a)$ وارد شود. بنابراین در این مد نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم یعنی ω_1^2 برابر است با

$$\omega_1^2 = \frac{T_0}{Ma} \left(\frac{\psi_b}{\psi_a} \right) = +1 \quad \text{مد ۱:} \quad (70)$$

اکنون این مطلب را نشان می‌دهیم. ابتدا تقریب اسلینکی (بخش ۱-۲) را در نظر می‌گیریم. در این تقریب، کشش T از کشش T_0 به اندازه ضریب l/a بزرگتر است که در آن l طول فنر و a طول در حالت تعادل است [شکل ۱-۱۱ (الف)]. نیروی بازگرداننده عرضی که فنر وارد می‌کند برابر است با حاصلضرب کشش T در سینوس زاویه بین فنر و محور تعادل فنرها یعنی نیروی بازگرداننده برابر با $T(\psi_a/l)$ است. اما چون $T = T_0(l/a)$ است این نیروی بازگرداننده برابر با $T_0(\psi_a/a)$ می‌شود و معادله (۷۰) به دست می‌آید. حال تقریب نوسانهای کوچک (بخش ۱-۲) را در نظر می‌گیریم. در این تقریب از افزایش طول فنر صرف‌نظر می‌شود زیرا اندازه آن از طول در حالت تعادل یعنی a فقط به اندازه کمیت $a(\psi_a/a)^2$ بیشتر است و بنابراین از افزایش کشش نیز صرف‌نظر می‌شود. پس هنگامی که جابه‌جایی برابر ψ_a است کشش برابر T_0 و نیروی بازگرداننده برابر با حاصلضرب کشش T_0 در سینوس زاویه بین فنر و محور تعادل است. چون نوسانهای کوچک هستند، این زاویه را نیز می‌توان "کوچک" در نظر گرفت و در نتیجه اندازه زاویه (برحسب رادیان) و سینوس آن با یکدیگر مساوی و هر دو برابر با ψ_a/a می‌شود. بنابراین نیروی بازگرداننده برابر $T_0(\psi_a/a)$ است و معادله (۷۰) به دست می‌آید.

به همین صورت بسامد مد ۲ [شکل ۱-۱۱ (د)] را به شرح زیر می‌توان به دست آورد. جرم سمت چپ را در نظر بگیرید. همان‌گونه که درباره مد ۱ دیدیم، در فنر سمت چپ نیروی بازگرداننده برابر با T_0/Ma است. در مد ۲، فنر میانی به فنر سمت چپ "کمک" می‌کند یعنی در حقیقت نیروی بازگرداننده‌ای دو برابر نیروی بازگرداننده فنر سمت چپ دارد. این مطلب را در تقریب نوسانهای کوچک به آسانی می‌توان مشاهده کرد: کشش فنر برای هر دو فنر T_0 است اما زاویه فنر میانی با محور دو برابر زاویه‌ای است که فنر انتهایی با محور می‌سازد، از این رو مؤلفه نیروی عرضی آن دو برابر است. بنابراین کل نیرو بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم یعنی ω_2^2 برابر است با

$$\omega_2^2 = \frac{T_0}{Ma} + \frac{2T_0}{Ma} = \frac{3T_0}{Ma} \left(\frac{\psi_b}{\psi_a} \right) = -1 \quad \text{مد ۲:} \quad (71)$$

توجه کنید در تقریب اسلینکی که در آن رابطه $T = K(a - a_0)$ به صورت $T = Ka$ درمی‌آید بسامد مدهای نوسان عرضی (معادلات ۷۰ و ۷۱) با بسامد مدهای نوسان طولی

(معادلات ۶۰ و ۶۱) یکسان هستند. بنابراین نوعی واگنی وجود دارد. این حالت در تقریب نوسانهای کوچک که در آن نمی‌توان از a_0 در مقایسه با a صرفنظر کرد، روی نمی‌دهد.

اگر حدس زدن مدها خیلی آسان نمی‌بود، در این صورت می‌بایست معادلات حرکت دو جرم a و b نوشته می‌شدند و به جای تصویر ذهنی از سیستم فیزیکی، به حل کردن معادلات می‌پرداختیم. این روش را به‌عهده دانشجویان می‌گذاریم (مسئله ۱-۲۰).

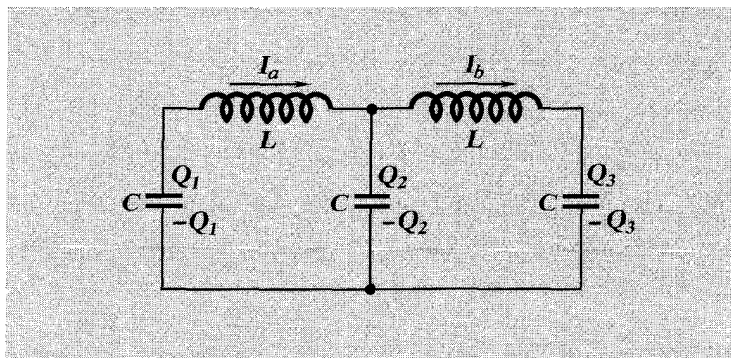
مثال ۱۰: دو مدار LC جفت‌شده به هم

سیستمی را که در شکل ۱۲-۱ نشان داده شده در نظر بگیرید. می‌خواهیم معادلات "حرکت" یعنی معادلات حرکت بارهای الکتریکی را به‌دست آوریم. نیروی محرکه الکتریکی در دو سربیشه سمت چپ برابر $L \frac{dI_a}{dt}$ است. بار مثبت Q_1 بر روی خازن سمت چپ نیروی محرکه الکتریکی $Q_1 C^{-1}$ را به‌وجود می‌آورد که سبب افزایش I_a (با رعایت علامت قراردادی) می‌شود. بار مثبت Q_2 بر روی خازن میانی نیروی محرکه الکتریکی $Q_2 C^{-1}$ را تولید می‌کند که سبب کاهش I_a می‌شود. بنابراین برای $L \frac{dI_a}{dt}$ رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{L dI_a}{dt} = C^{-1}Q_1 - C^{-1}Q_2 \quad (72)$$

و همین‌طور

$$\frac{L dI_b}{dt} = C^{-1}Q_2 - C^{-1}Q_3 \quad (73)$$



شکل ۱۲-۱ دو مدار LC جفت‌شده. شکل کلی بارها و شدت جریانها. پیکانها علامت قراردادی برای جریانهای مثبت را نشان می‌دهد.

همانگونه که در بخش ۱-۲ دیدیم، بهتر است حالت سیستم را به جای بار الکتریکی، برحسب شدت جریان بیان کنیم. بدین منظور از معادلات (۷۲) و (۷۳) برحسب زمان مشتق می‌گیریم و اصل پایستگی بار الکتریکی را به‌کار می‌بریم. از مشتق‌گیری روابط زیر نتیجه می‌شود

$$L \frac{d^2 I_a}{dt^2} = C^{-1} \frac{dQ_1}{dt} - C^{-1} \frac{dQ_2}{dt} \quad (74)$$

$$L \frac{d^2 I_b}{dt^2} = C^{-1} \frac{dQ_2}{dt} - C^{-1} \frac{dQ_3}{dt} \quad (75)$$

و از اصل پایستگی بار الکتریکی

$$\frac{dQ_1}{dt} = -I_a, \quad \frac{dQ_2}{dt} = I_a - I_b, \quad \frac{dQ_3}{dt} = I_b \quad (76)$$

با قراردادن معادلات (۷۶) در معادلات (۷۴) و (۷۵) معادلات جفت‌شده حرکت به‌دست می‌آید

$$L \frac{d^2 I_a}{dt^2} = -C^{-1} I_a + C^{-1} (I_b - I_a) \quad (77)$$

$$L \frac{d^2 I_b}{dt^2} = -C^{-1} (I_b - I_a) - C^{-1} I_b \quad (78)$$

حال که دو معادله حرکت را داریم می‌خواهیم دو مد بهنجار را به‌دست آوریم. این عمل را می‌توان با پیدا کردن مختصات بهنجار یعنی با حدس زدن و یا با روش سیستماتیک به‌دست آورد (مسئله ۱-۲۱). جوابها چنین است

$$I_a = I_b, \quad \omega_1^2 = \frac{C^{-1}}{L} \quad \text{مد ۱} \quad (79)$$

$$I_a = -I_b, \quad \omega_2^2 = \frac{3C^{-1}}{L} \quad \text{مد ۲}$$

دقت کنید که چون خازن میانی در مد ۱ هرگز دارای بار الکتریکی نمی‌شود، می‌توان آن را برداشت بدون آنکه تغییری در حرکت بارها به‌وجود آید. در مد ۱ همچنین اندازه بارهای Q_1 و Q_2 همواره مساوی و با علامت مخالف‌اند. در مد ۲ اندازه و علامت بارهای Q_1 و Q_3 همواره یکسان‌اند و اندازه بار Q_2 دو برابر آنها ولی با علامت مخالف است.

سه مثال (۸ تا ۱۰) نوسانهای طولی (شکل ۱-۹)، نوسانهای عرضی (شکل ۱-۱۱)، و مدارهای LC جفت‌شده (شکل ۱-۱۲) عمده‌توری انتخاب شدند که دارای تقارن فضایی یکسان باشند و معادلات حرکت و مدهای بهنجار هر سه از یک شکل ریاضی برخوردار باشند. این مثالها همچنین به این دلیل انتخاب شده‌اند تا تعمیم (به دو درجه آزادی) سیستمهای مشابه با یک درجه

آزادی باشند که آنها را در مثالهای ۲ تا ۴ بخش ۲-۱ بررسی کردیم و در شکلهای ۳-۱، ۴-۱، ۵-۱ نشان داده شده‌اند. در فصل ۲ این سه مثال را هنگامی که درجات آزادی به اندازه دلخواه زیاد باشد تعمیم خواهیم داد.

۵-۱ زنش

پدیده‌های فیزیکی فراوانی وجود دارند که در آنها حالت یک جزء متحرک مفروض برهم‌نهی دو نوسان هماهنگ با بسامدهای زاویه‌ای مختلف ω_1 و ω_2 هستند. مثلاً این دو نوسان هماهنگ ممکن است دو مد بهنجار سیستمی باشد که دو درجه آزادی دارد. یا متقابلاً دو نوسان هماهنگ ممکن است به سبب نیروهای محرکی باشند که به وسیله دو سیستم جفت‌نشده که به طور مستقل نوسان می‌کنند، به وجود آید. این حالت اخیر می‌تواند با دو دیپازون که بسامدهای متفاوت دارند، حاصل شود. هرکدام از دیپازونها "نت" مخصوص خود را با ایجاد نوسانهای هماهنگ که تغییرات فشار در نوک دیپازون را توصیف می‌کند، تولید می‌کند و این ارتعاشها در هوا به صورت امواج صوتی منتشر می‌شود. حرکتی که در پرده گوش القا می‌شود، برهم‌نهی دو نوسان هماهنگ است.

در تمام این مثالها، روابط ریاضی یکسان هستند. برای سادگی فرض می‌کنیم که دو نوسان هماهنگ دارای دامنه مساوی و همچنین دارای ثابت فاز یکسان هستند که آنها را برابر صفر می‌گیریم. اکنون برهم‌نهی دو نوسان هماهنگ ψ_1 و ψ_2 یعنی ψ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\psi_1 = A \cos \omega_1 t, \quad \psi_2 = A \cos \omega_2 t \quad (۸۰)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t \quad (۸۱)$$

مدولاسیون. اکنون معادله (۸۱) را به شکل دیگری در نظر می‌گیریم. بدین منظور بسامد زاویه‌ای "متوسط" یعنی ω_{av} و بسامد زاویه‌ای "مدولاسیون"، ω_{mod} ، را به شرح زیر تعریف می‌کنیم

$$\omega_{av} \equiv \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \quad \omega_{mod} \equiv \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \quad (۸۲)$$

از جمع و تفریق دو رابطه بالا نتیجه می‌شود

$$\omega_1 = \omega_{av} + \omega_{mod}, \quad \omega_2 = \omega_{av} - \omega_{mod} \quad (۸۳)$$

در این صورت معادله (۸۱) را می‌توان برحسب ω_{av} و ω_{mod} نوشت

$$\begin{aligned}\psi &= A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t \\ &= A \cos(\omega_{\text{av}} t + \omega_{\text{mod}} t) + A \cos(\omega_{\text{av}} t - \omega_{\text{mod}} t) \\ &= [2A \cos \omega_{\text{mod}} t] \cos \omega_{\text{av}} t\end{aligned}$$

یعنی

$$\psi = A_{\text{mod}}(t) \cos \omega_{\text{av}} t \quad (۸۴)$$

که در آن

$$A_{\text{mod}}(t) = 2A \cos \omega_{\text{mod}} t \quad (۸۵)$$

یعنی معادلات (۸۴) و (۸۵) نشانگر نوسانی با بسامد زاویه‌ای ω_{av} و دامنه A_{mod} است که دامنه‌اش ثابت نیست، بلکه برطبق معادله (۸۵) با زمان تغییر می‌کند. معادلات (۸۴) و (۸۵) معادلاتی دقیق هستند. در بیشتر موارد که ω_1 و ω_2 در یک حدود باشند، بهتر است که رابطه برهم‌نهی یعنی معادله (۸۱) را به صورت دو معادله (۸۴) و (۸۵) نوشت. زیرا در این صورت بسامد مدولاسیون در مقایسه با بسامد میانگین کوچک خواهد بود، یعنی:

$$\omega_1 \approx \omega_2; \quad \omega_{\text{mod}} \ll \omega_{\text{av}}$$

در این حالت دامنه مدولاسیون یعنی $A_{\text{mod}}(t)$ در هنگام چندین نوسان $\cos \omega_{\text{av}} t$ که نوسانهای "تند" نامیده می‌شوند فقط اندکی تغییر می‌کند و از این رو معادله (۸۴) معرف یک نوسان "تقریباً هماهنگ" با بسامد ω_{av} است. البته اگر A_{mod} دقیقاً ثابت باشد، معادله (۸۴) نمایشگر نوسان هماهنگ کامل با بسامد زاویه‌ای ω_{av} می‌شود. در چنین حالتی $\omega_{\text{av}} = \omega_1 = \omega_2$ است زیرا A_{mod} فقط در صورتی ثابت است که ω_{mod} برابر صفر باشد. اگر ω_1 و ω_2 اختلاف اندکی داشته باشند، در این صورت دو نوسان (کاملاً هماهنگ) ω_1 و ω_2 یک نوسان "تقریباً هماهنگ" یا "تقریباً تکفام" با بسامد ω_{av} و با دامنه‌ای که به آرامی تغییر می‌کند نامیده می‌شود.

نوسان تقریباً هماهنگ. نوسان تقریباً هماهنگ یک نتیجه کلی و بسیار مهمی است که به دفعات از آن استفاده خواهد شد: برهم‌نهی خطی دو یا چند نوسان کاملاً هماهنگ که بسامدهای مختلف (و همچنین دامنه‌ها و ثابت فازهای متفاوت) دارند و تمام این بسامدها در

یک دامنه نسبتاً باریک یا "نوار" بسامد قرار گرفته‌اند، منجر به نوسانی می‌شود که یک نوسان تقریباً هماهنگ با بسامد ω_{av} است و این بسامد در داخل گستره نوار نوسانهای "مؤلفه" که برهم‌نهی را تشکیل می‌دهند، قرار دارد. حرکت برابند، کاملاً یک نوسان هماهنگ نیست، زیرا دامنه و فاز کاملاً ثابت نیستند، بلکه "تقریباً ثابت" هستند. از تغییرات آنها در یک دوره نوسان با بسامد متوسط "تند" یعنی ω_{av} می‌توان صرف‌نظر کرد، به شرطی که گستره بسامد یا "پهنای نوار" نوسانهای هماهنگ مؤلفه، در مقایسه با ω_{av} کوچک باشد (این مطلب در فصل ۶ اثبات خواهد شد).

اکنون چند مثال فیزیکی درباره زنش را شرح می‌دهیم:

مثال ۱۱: زنش به وسیله دو دیپازون

وقتی موج صوتی به گوش می‌رسد، تغییری در فشار هوای مجاور پرده گوش به وجود می‌آورد. فرض کنید فشار پیمانه‌ای که در قسمت خارجی پرده گوش با دو دیپازون به شماره‌های ۱ و ۲ به وجود می‌آید، به ترتیب برابر ψ_1 و ψ_2 باشد. (فشار پیمانه‌ای عبارت است از فشار در سطح خارجی پرده گوش منهای فشار در سطح داخلی که فشار در سطح داخلی فشار اتمسفر است. این اختلاف فشار نیروی محرکی را تولید می‌کند که پرده گوش را به حرکت درمی‌آورد.)

اگر به دو دیپازون به طور همزمان با شدت یکسان ضربه‌ای زده شود، و دیپازونها در فاصله مساوی از پرده گوش قرار گیرند، دامنه و ثابت فاز برای فشارهای پیمانه‌ای ψ_1 و ψ_2 یکسان است و بنابراین معادله (۸۰) دقیقاً معرف دو فشار است. فشار کل (که نیروی کل بر پرده گوش را به دست می‌دهد) برابر با برهم‌نهی دو مؤلفه از دو دیپازون یعنی $\psi = \psi_1 + \psi_2$ است. این برهم‌نهی با معادله (۸۱) و یا معادلات (۸۴) و (۸۵) داده می‌شود. اگر بسامد دو دیپازون یعنی ψ_1 و ψ_2 بیش از حدود ۶ درصد با مقدار متوسط آن دو تفاوت داشته باشد، در این صورت گوش و مغز ارتعاشی با معادله (۸۱) را تشخیص می‌دهد، یعنی صدای کلی به صورت دو نت جداگانه که ارتفاع نت آنها اندکی مختلف است "شنیده" می‌شود. مثلاً اگر ν_2 برابر $5/4\nu_1$ باشد، دو نت با فاصله‌ای که برابر "سومین ماژور" است، شنیده خواهد شد. اگر ν_2 برابر $106/100\nu_1$ باشد، ν_2 به صورت نتی که بر حسب ارتفاع نت "یک نیم‌پرده بالاتر" از ν_1 است شنیده می‌شود. اما اگر اختلاف ν_1 و ν_2 کمتر از حدود ۱۰ cps باشد، گوش (و همچنین مغز) دیگر به سادگی اختلاف تنها را تشخیص نمی‌دهد (اما گوش یک موسیقی‌دان این تفاوت را خیلی بهتر می‌تواند تشخیص دهد). در این حالت برهم‌نهی دو موج به صورت "هم‌نواختی" دو نت ν_1 و ν_2 ، شنیده نمی‌شود، بلکه به صورت یک نت با بسامد ν_{av} که دامنه A_{mod} آن، همان‌گونه که با معادلات (۸۴) و (۸۵) داده شده است، به آرامی تغییر می‌کند. ■

آشکارساز قانون مربعی. دامنه مدولاسیون A_{mod} با بسامد زاویه‌ای مدولاسیون یعنی ω_{mod} نوسان می‌کند. وقتی $\omega_{\text{mod}}(t)$ به اندازه 2π (رادیان) اضافه می‌شود، دامنه A_{mod} یک دوره نوسان کامل (یعنی نوسان "کند" با بسامد مدولاسیون) انجام داده و به مقدار اولیه‌اش بازگشته است. در هر دوره مقدار A_{mod} ، دو بار برابر صفر می‌شود و در این دو بار گوش مطلقاً چیزی نمی‌شنود، چون صدایی وجود ندارد. در فاصله بین سکوتها، صدایی با ارتفاع نت متوسط شنیده می‌شود، زیرا تغییرات $\cos \omega_{\text{mod}} t$ عبارت است از صفر به $+1$ و سپس به صفر و بعد به -1 و مجدداً به صفر و باز به $+1$ و غیره. یعنی علامت A_{mod} در زمانهای متوالی شدت صدا مختلف است. اگر این آزمایش را یا دو دیپازون انجام دهید، متوجه خواهید شد که گوش این "دو نوع" شدت صدا را تشخیص نمی‌دهد. به عبارت دیگر گوش (و همچنین مغز) بین مقادیر مثبت و منفی A_{mod} تمایزی نمی‌دهد. بلکه تنها چیزی که تشخیص می‌دهد این است که اندازه A_{mod} بزرگ ("بلند") یا کوچک ("آهسته") است یعنی مربع A_{mod} بزرگ یا کوچک است. به این دلیل گوش (و همچنین مغز) را اغلب آشکارساز قانون مربعی می‌نامند. چون در هر دوره مدولاسیون (که در آن $\omega_{\text{mod}} t$ به اندازه 2π اضافه می‌شود) A_{mod}^2 دارای دو بیشینه است، میزان تکرار برای ترتیب "بلند، آهسته، بلند، آهسته، بلند، آهسته، ...". دو برابر بسامد مدولاسیون است و این میزان تکرار برای مقادیر بزرگ A_{mod} را بسامد زنش می‌گویند:

$$\omega_{\text{زنش}} = 2\omega_{\text{mod}} = \omega_1 - \omega_2 \quad (۸۶)$$

و یا به طور جبری می‌توان نشان داد که

$$A_{\text{mod}}(t) = 2A \cos \omega_{\text{mod}} t$$

$$[A_{\text{mod}}(t)]^2 = 4A^2 \cos^2 \omega_{\text{mod}} t$$

اما

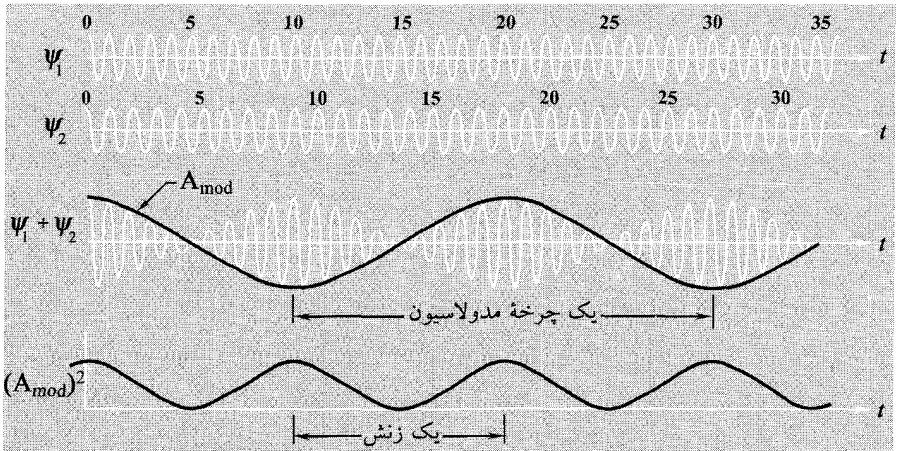
$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta] = \frac{1}{2} [1 + \cos 2\theta]$$

بنابراین

$$[A_{\text{mod}}(t)]^2 = 2A^2 [1 + \cos 2\omega_{\text{mod}} t]$$

یعنی

$$(A_{\text{mod}})^2 = 2A^2 [1 + \cos \omega_{\text{زنش}} t] \quad (۸۷)$$



شکل ۱۳-۱ زنش. ψ_1 و ψ_2 تغییرات فشار در گوشه هستند که با دو دیاپازون که نسبت بسامد آنها $\nu_1/\nu_2 = 10/9$ است، تولید می‌شوند. فشار کل عبارت است از برهم‌نهی $\psi_1 + \psi_2$ یک نوسان "تقریباً هماهنگ" با بسامد ν_{av} و با دامنه‌ای که به آرامی تغییر می‌کند، $A_{mod}(t)$ است. شدت صدا با $(A_{mod})^2$ متناسب است و شامل یک کمیت ثابت (مقدار متوسط) بعلاوه یک تغییرات سینوسی با بسامد زنش است. بسامد زنش دو برابر بسامد مدولاسیون است.

بنابراین A_{mod}^2 در اطراف مقدار متوسطش با بسامدی دو برابر بسامد مدولاسیون یعنی با بسامد زنش یعنی $\omega_1 - \omega_2$ نوسان می‌کند. برهم‌نهی دو نوسان هماهنگ با بسامدهای تقریباً مساوی که زنش به وجود می‌آورند در شکل ۱۳-۱ نشان داده شده است.

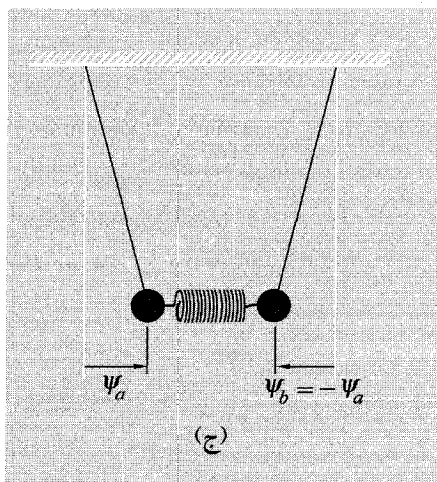
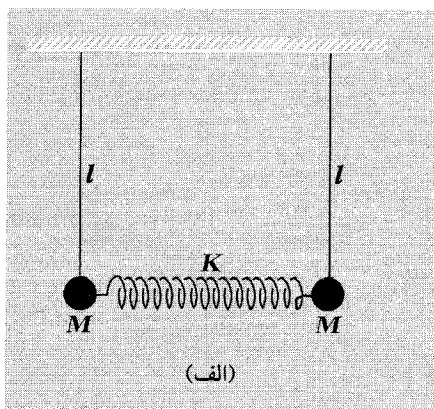
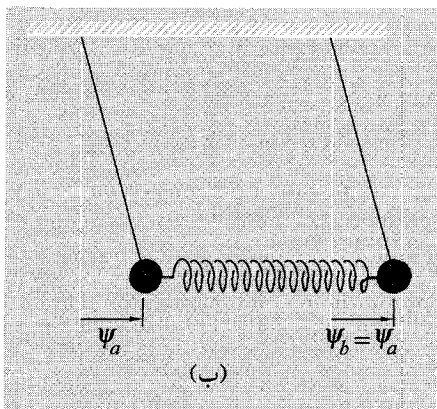
مثال ۱۲: زنش بین دو چشمه نور مرئی

در سال ۱۹۵۵، فارستر، گادماندن و جانسون با آزمایش زیبایی، زنش بین دو چشمه مستقل نور مرئی را با بسامدهای تقریباً مساوی نشان دادند.^۱ در این آزمایش چشمه‌های نور، دو لوله تخلیه گازی شامل اتمهای جیوه بودند که به‌طور آزاد با بسامد متوسط $\nu_{av} = 5.49 \times 10^{14}$ cps "خط سبز" درخشان جیوه تجزیه می‌شدند. اتمها در یک میدان مغناطیسی قرار گرفتند که در نتیجه آن تابش سبزرنگ به دو بسامد مجاور یکدیگر و با اختلاف بسامد متناسب با شدت میدان مغناطیسی "شکسته" شد. بسامد زنش برابر $\nu_1 - \nu_2 \approx 10^{11}$ cps بود که این بسامد در حدود بسامدهای "رادار" یا "میکروموج" است. چون آشکارساز آنها براساس اثر فتوالکتریک کار می‌کرد، جریان

1. A. T. Forrester, R. A. Gudmundsen, and P. O. Johnson, "Photoelectric mixing of incoherent light," *Phys. Rev.* 99, 1961 (1955).

الکتريکی خروجی آن، با مربع دامنه مدولاسيون برابند ميدان الکتريکی دو موج نورانی متناسب بود. از اين رواين آشکارساز یک آشکارساز قانون مربعی بود، خروجی اين آشکارساز، تغييرات زمانی را مشابه با "شدت صدا" يعنی A_{mod}^2 ، مانند شکل ۱۳-۱ نشان می داد.

مثال ۱۳: زنش بين دو مد بهنجار در دو نوسانگر يکسان و به طور ضعيف جفت شده سیستمی شامل دو آونگ يکسان را که به وسيله فنری به يکديگر جفت شده اند، مانند شکل ۱۴-۱ در نظر بگيريد. مدهای بهنجار سیستم را به سبب تشابه با نوسانهای طولی جرمهای متشابه که در



شکل ۱۴-۱ آونگهای همسان جفت شده. (الف) حالت تعادل. (ب) مد با بسامد پایينتر. (ج) مد با بسامد بالاتر.

بخش ۴-۱ مطالعه شد، به سادگی می‌توان حدس زد. در مد ۱ داریم $\psi_a = \psi_b$. در این حالت فنر اتصال را می‌توان برداشت، زیرا نیروی بازگرداننده فقط در نتیجه گرانی است. نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم (با فرض کوچک بودن دامنه نوسانها که در آنها نیروی بازگرداننده خطی وجود دارد) عبارت است از $Mg\theta/(l\theta)M = g/l$

$$\psi_a = \psi_b, \quad \omega_1^2 = \frac{g}{l} \quad \text{مد ۱:} \quad (۸۸)$$

در مد ۲ داریم $\psi_a = -\psi_b$. اگر گلوله سمت چپ را در نظر بگیریم، نیروی بازگرداننده فنر برابر $2K\psi_a$ است. (ضریب ۲ به سبب آن است که در این مد، هنگامی که گلوله a به اندازه ψ_a جابه‌جا می‌شود، فنر به اندازه $2\psi_a$ متراکم می‌شود.) نیروی بازگرداننده در نتیجه گرانی برابر با $Mg\theta = Mg\psi_a/l$ است. نیروهای فنر و گرانی هر دو هم‌علامت‌اند. بنابراین کل نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم برابر است با

$$\psi_a = -\psi_b, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{M} \quad \text{مد ۲:} \quad (۸۹)$$

اکنون "زنش بین دو مد" در این سیستم را بررسی می‌کنیم. معنی این عبارت چیست؟ هر دو شامل یک نوسان هماهنگ با یک بسامد مشخص است و حرکت کلی آونگ a از برهم‌نهمش دو مد به دست می‌آید

$$\psi_a(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$$

بنابراین اگر بسامد مدها تقریباً مساوی (و اگر دامنه‌های دو مد یکسان) باشند همان‌طور که در شکل ۱-۱۳ دیده می‌شود، $\psi_a(t)$ برابر با برهم‌نهمش $\psi_1 + \psi_2$ خواهد شد. بنابراین می‌توان گفت که حرکت آونگ a زنش به وجود می‌آورد. (البته همان‌طور که خواهیم دید، آونگ b هم زنش تولید می‌کند.) به‌طور کلی هر سیستم با دو درجه آزادی می‌تواند زنش به وجود آورد ولی سیستمی که در اینجا انتخاب شده بسیار ساده است، زیرا به سادگی می‌توان با استفاده از فنر به حد کافی ضعیف یا جرم بزرگ M بسامد زنش یعنی $\nu_1 - \nu_2$ را در مقایسه با بسامد متوسط کوچک اختیار کرد. [معادلات (۸۸) و (۸۹) را مقایسه کنید.]

زنش شبیه چیست؟ همان‌گونه که در بخش ۴-۱ دیدیم، جابه‌جایی گلوله‌ها یعنی ψ_a و ψ_b را می‌توان در مختصات بهنجار ψ_1 و ψ_2 با روابط برهم‌نهمش کلی بیان کرد

$$\begin{aligned} \psi_a &= \psi_1 + \psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \psi_b &= \psi_1 - \psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (۹۰)$$

مانند حالت دو دیپازون، بیشترین اثر زنش هنگامی حاصل می‌شود که دو مد دارای دامنه‌های مساوی باشند. [اگر هرکدام از A_1 یا A_2 در مقایسه با دیگری تقریباً صفر باشد، در این صورت هیچ اثر زنش وجود ندارد، زیرا (تقریباً) فقط یک نوسان هماهنگ موجود است. برای آنکه زنش قوی به وجود آید دو نوسان باید دارای دامنه‌های تقریباً برابر باشند.] بنابراین فرض می‌کنیم که $A_1 = A_2 = A$ باشد و همان‌گونه که خواهیم دید انتخاب ثابت فازها یعنی φ_1 و φ_2 به شرایط اولیه بستگی دارد. مانند مثال دو دیپازون $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ می‌گیریم. بنابراین با انتخاب این مقادیر برای A_1, A_2, φ_1 و φ_2 ، از معادلات (۹۰) نتیجه می‌شود

$$\psi_a(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t, \quad \psi_b(t) = A \cos \omega_1 t - A \cos \omega_2 t \quad (91)$$

و از آنجا سرعت گلوله‌ها به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_a(t) &\equiv \frac{d\psi_a}{dt} = -\omega_1 A \sin \omega_1 t - \omega_2 A \sin \omega_2 t \\ \dot{\psi}_b(t) &\equiv \frac{d\psi_b}{dt} = -\omega_1 A \sin \omega_1 t + \omega_2 A \sin \omega_2 t \end{aligned} \quad (92)$$

برای آنکه نشان دهیم چگونه می‌توان دو مد را تحریک کرد تا نوسانهای معادله (۹۱) به دست آیند، شرایط اولیه در زمان $t = 0$ را در نظر می‌گیریم. براساس معادلات (۹۱) و (۹۲) سرعت و مکان اولیه گلوله‌ها عبارت‌اند از

$$\psi_a(0) = 2A, \quad \psi_b(0) = 0; \quad \dot{\psi}_a(0) = 0, \quad \dot{\psi}_b(0) = 0$$

یعنی گلوله a را با جابه‌جایی اولیه $2A$ و گلوله b را با جابه‌جایی اولیه صفر نگاه می‌داریم و هر دو گلوله را از حالت سکون و همزمان، که آن را لحظه $t = 0$ می‌نامیم، رها می‌کنیم.

از این پس سیستم را تماشا می‌کنیم. (این آزمایش را باید خودتان انجام دهید. برای این منظور به دو قوطی کنسرو، یک فراسلینکی و مقداری نخ احتیاج دارید. به آزمایش خانگی شماره ۸-۱ مراجعه کنید.) پدیده زیبایی مشاهده می‌شود، بدین معنی که دامنه نوسان آونگ a به تدریج کم شده و دامنه نوسان آونگ b اضافه می‌شود تا سرانجام آونگ a می‌ایستد و آونگ b با همان دامنه و انرژی که آونگ a شروع به حرکت کرده بود، نوسان می‌کند (از نیروهای اصطکاکی صرف‌نظر کرده‌ایم). تمام انرژی ارتعاشی از یک آونگ به آونگ دیگر منتقل می‌شود. به علت تقارن سیستم این عمل ادامه می‌یابد. یعنی انرژی ارتعاشی بین آونگهای a و b به آهستگی انتقال پیدا می‌کند. یک دور کامل انتقال انرژی از a به b و مجدداً به a یک زنش است. زمان تناوب زنش مدتی است که این دور کامل طول می‌کشد و برابر با معکوس بسامد زنش است.

معادلات (۹۱) و (۹۲) تمام این مطالب را پیش بینی می کنند. با استفاده از $\omega_1 = \omega_{av} + \omega_{mod}$ و $\omega_2 = \omega_{av} - \omega_{mod}$ در معادلات (۹۱)، نوسانهای "تقریباً هماهنگ" به دست می آید

$$\begin{aligned}\psi_a(t) &= A \cos(\omega_{av} + \omega_{mod})t + A \cos(\omega_{av} - \omega_{mod})t \\ &= (2A \cos \omega_{mod}t) \cos \omega_{av}t \\ &\equiv A_{mod}(t) \cos \omega_{av}t\end{aligned}\quad (93)$$

و

$$\begin{aligned}\psi_b(t) &= A \cos(\omega_{av} + \omega_{mod})t - A \cos(\omega_{av} - \omega_{mod})t \\ &= (2A \sin \omega_{mod}t) \sin \omega_{av}t \\ &\equiv B_{mod}(t) \sin \omega_{av}t\end{aligned}\quad (94)$$

اکنون رابطه ای برای انرژی (جنبشی به علاوه پتانسیل) هریک از آونگها به دست می آوریم. دامنه نوسان یعنی $A_{mod}(t)$ را در یک دوره نوسان "تند" ثابت فرض می کنیم و از انرژی مبادله شده بین فنر، که جفت شدگی ضعیف را ایجاد می کند، و آونگ صرف نظر می کنیم. (اگر فنر خیلی ضعیف باشد، هرگز انرژی قابل ملاحظه ای در آن ذخیره نمی شود.) بنابراین در هنگام یک دوره نوسان تند، آونگ a یک نوسانگر هماهنگ با بسامد ω_{av} و دامنه ثابت A_{mod} است. بدین ترتیب به سادگی دیده می شود که انرژی کل آن دو برابر مقدار متوسط انرژی جنبشی (متوسط در یک دوره نوسان "تند") است.

$$E_a = \frac{1}{2} M \omega_{av}^2 A_{mod}^2 = 2 M A^2 \omega_{av}^2 \cos^2 \omega_{mod}t \quad (95)$$

همین طور

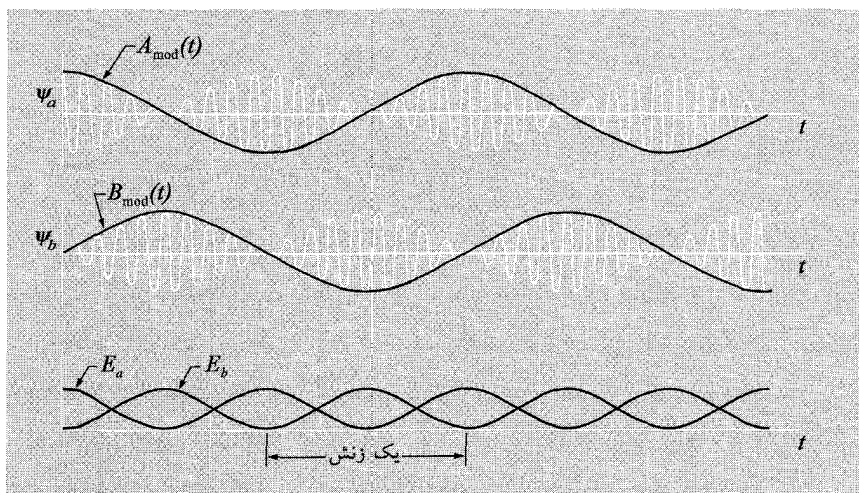
$$E_b = \frac{1}{2} M \omega_{av}^2 B_{mod}^2 = 2 M A^2 \omega_{av}^2 \sin^2 \omega_{mod}t \quad (96)$$

انرژی کل هر دو آونگ مقداری ثابت است، زیرا از جمع معادلات (۹۵) و (۹۶) نتیجه می شود

$$E_a + E_b = (2 M A^2 \omega_{av}^2) = E \quad (97)$$

و اختلاف انرژی کل بین دو آونگ برابر است با

$$\begin{aligned}E_a - E_b &= E(\cos^2 \omega_{mod}t - \sin^2 \omega_{mod}t) \\ &= E \cos 2\omega_{mod}t = E \cos(\omega_1 - \omega_2)t\end{aligned}\quad (98)$$



شکل ۱-۱۵ انتقال انرژی بین دو آونگ همسان که به طور ضعیف به یکدیگر جفت شده‌اند. انرژی با بسامد $|\nu_1 - \nu_2|$ یعنی بسامد زنش دو مد، بین a و b ردوبدل می‌شود.

از ترکیب معادلات (۹۷) و (۹۸) نتیجه می‌شود

$$E_a = \frac{1}{2} E [1 + \cos(\omega_1 - \omega_2)t] \quad (۹۹ \text{ الف})$$

$$E_b = \frac{1}{2} E [1 - \cos(\omega_1 - \omega_2)t] \quad (۹۹ \text{ ب})$$

معادلات (۹۹) نشان می‌دهد که انرژی کل E مقداری است ثابت و بین دو آونگ با بسامد زنش مبادله می‌شود. در شکل ۱-۱۵ منحنیهای $\psi_a(t)$ ، $\psi_b(t)$ ، E_a و E_b نشان داده شده‌اند. ■

مثالهای نامتعارف

در مطالعه سیستمهای میکروسکوپی، یعنی مولکولها یا ذرات بنیادی، مثالهای متعدد و زیبایی از سیستمها وجود دارند که از نظر ریاضی شبیه مثال مکانیکی دو آونگ یکسان‌اند که به طور ضعیف به یکدیگر جفت شده‌اند. برای درک این سیستمها به مکانیک کوانتومی احتیاج داریم. ”چیزی“ که بین دو درجه آزادی ”مبادله“ می‌شود، در تشابه با انتقال انرژی بین دو آونگی که به طور ضعیف به هم جفت شده‌اند، انرژی نیست بلکه احتمال است. چون انرژی ”کوانتیده“ است، برای مبادله شدن نمی‌توان آن را به اجزایی ”تقسیم“ کرد. یکی از دو ”جزء متحرک“ تمام انرژی را داراست و آنچه ”مبادله“ می‌شود احتمال دارا بودن انرژی تحریک است. دو مثال در این باره یعنی مولکول آمونیاک (که ”گوک“ ساعت آمونیاک است) و مزونهای طبیعی K در مبحث تکمیلی ۱ شرح داده شده‌اند.

مسائل و آزمایشهای خانگی^۱

۱-۱ بسامدهای دو مدار LC شکل ۱۲-۱ را که در آن $L = ۱۰\text{H}$ و $C = ۶\mu\text{F}$ است برحسب cps (دور بر ثانیه) پیدا کنید. شدت جریانها را نیز برای هر مدار رسم کنید.

جواب: $\nu_1 \approx ۲\text{cps}$, $\nu_2 \approx ۳۵\text{cps}$

۲-۱ یک قطعه کوچک چوب یا هر چیز دیگر را بر روی صفحه دوار یک گرامافون بگذارید و همان طور که صفحه دوار می چرخد از پهلو و فقط با یک چشم به آن نگاه کنید تا از احساس عمق رها شوید. در این حالت حرکت ظاهری (یعنی تصویر حرکت عمود بر خط دید شما) یک حرکت هماهنگ یعنی به شکل $x = x_0 \cos \omega t$ است. (الف) عبارت قبل را اثبات کنید. (ب) آونگ ساده ای را با متصل کردن یک وزنه کوچک (مانند یک پیچ یا مهره) به یک نخ درست و آن را از پشت صندلی آویزان کنید. طول نخ را تغییر دهید به طوری که، هنگامی که گرامافون برای ۴۵ دور تنظیم شده، آونگ را بتوان با تصویر حرکت قطعه چوب روی صفحه دوار همزمان به نوسان درآورد. این آزمایش به خوبی نشان می دهد که تصویر یک حرکت دورانی یکنواخت یک نوسان هماهنگ است. این آزمایش همچنین روش خوبی برای اندازه گیری g است. اگر اندازه g برابر همان مقدار استاندارد در "کتابهای درسی" یعنی ۹۸cm/s باشد، نشان دهید که برای $\nu = ۴۵\text{rpm}$ مقدار $l \approx ۴۵\text{cm}$ است. این عدد را به سادگی می توان به خاطر سپرد.

۳-۱ استفاده از تلویزیون به عنوان استروبوسکوپ. نوری که از یک دستگاه تلویزیون گسیل می شود یک سیستم استروبوسکوپ خوبی به وجود می آورد. یک نقطه مشخص بر روی صفحه تلویزیون بیشتر اوقات تاریک است و فقط در کسر کوچکی از زمان و با آهنگ تکرار مشخصی روشن می شود. (این مسئله را با حرکت دادن سریع انگشت خود در مقابل صفحه تلویزیون می توانید مشاهده کنید.) اگر این آهنگ تکرار مشخص را ν_{TV} بنامیم، هدف از این آزمایش اندازه گیری مقدار ν_{TV} است. در اینجا خواهیم دید که این بسامد برابر ۳۰ یا ۶۰ دور بر ثانیه است. (برای آنکه بسامد دقیقاً اندازه گیری شود، لازم است که تصویر تلویزیون ثابت بوده و دارای لرزش یا جابه جایی نباشد).

(الف) به عنوان یک آزمایش کاملاً تقریبی انگشت خود را با یک ریتم مثلاً در حدود ۴cps و به صورت نوسان پایدار در مقابل صفحه تلویزیون حرکت دهید. هنگامی که صفحه تلویزیون روشن است، هر بار که انگشت شما در مقابل صفحه قرار می گیرد، در مسیر نور از صفحه تلویزیون مانعی به وجود می آید. دامنه نوسان حرکت انگشت خود را اندازه بگیرید. فاصله بین سایه های متوالی انگشت را در نقطه ای که سرعت بیشینه است اندازه بگیرید و فرض کنید که حرکت سینوسی

۱. مسائلی که با علامت \circ مشخص شده مربوط به آزمایش خانگی است. - م.

است. با معلوم بودن دامنه و بسامد، سرعت پیشینه انگشت را محاسبه کنید. از مجموعه تمام این اندازه‌گیریها، بسامد ν_{TV} به دست می‌آید.

(ب) با استفاده از روزنامه یا چیز دیگری، تمام صفحه تلویزیون بجز یک نوار افقی به عرض چند سانتیمتر را بپوشانید. پشت به تلویزیون بنشینید و به تصویر صفحه آن در یک آینه نگاه کنید. آینه را تکان داده و حول یک محور افقی بچرخانید. چه نتیجه‌ای به دست می‌آورید؟ اکنون تمام صفحه بجز یک نوار عمودی را بپوشانید و آینه را حول یک محور عمودی تکان دهید. چه نتیجه‌ای به دست می‌آورید؟ (یک نتیجه آن است که اگر تمام صفحه تلویزیون بجز یک نوار افقی پوشیده شود، تلویزیون استروبوسکوپ بهتری خواهد بود.) اکنون پوشش روی صفحه تلویزیون را بردارید و آینه را حول یک محور افقی تکان دهید و به "خطوط متعدد صفحه تلویزیون" نگاه کنید. آیا متوجه می‌شوید که تعداد خطوط افقی بر واحد فاصله عمودی تصویر صفحه تلویزیون در آینه‌ای که دوران می‌کند برابر با نصف تعداد خطوط در هنگامی است که آینه ساکن است؟

(ج) روش دقیق دیگر برای اندازه‌گیری ν_{TV} استفاده از یک صفحه دوار گرامافون است. با استفاده از لُبه یک نقاله دایره‌ای بر روی یک قطعه کاغذ سفید رسم کرده و به این ترتیب یک صفحه استروبوسکوپ بسازید. آنگاه با مداد در فواصل زاویه‌ای مختلف علامتهایی بگذارید به طوری که علامتهای متوالی برهم‌نهمش استروبوسکوپی به وجود آورند. به این ترتیب که $1/3$ دایره را برای استروبوسکوپی با بسامد 120 cps ، $1/3$ برای بسامد 60 cps و $1/3$ برای بسامد 30 cps را علامت بگذارید. وسط قطعه کاغذ را سوراخ کنید و آن را مانند یک صفحه بر روی گرام قرار دهید. سپس سیستم را با نور تلویزیون روشن کنید و ببینید که کدام قطاع دایره ساکن به نظر می‌رسد. (صفحه استروبوسکوپی خیلی دقیق را از یکی از مغازه‌های فروش سیستمهای صوتی می‌توانید تهیه کنید).

۴-۱۰ اندازه‌گیری بسامد ارتعاش. (الف) سیمهای پیانو: اکنون که بسامد ν_{TV} را به دست آوردید (آزمایش خانگی ۱-۳) از تلویزیون برای اندازه‌گیری بسامد ارتعاش سیمهای پیانو استفاده کنید. بدین معنی که (در شب هنگامی که سایر چراغها خاموش است) پایینترین دواکتاو سیمها را با نور تلویزیون روشن کنید. پدال میراکننده را پایین نگاه داشته و در حالی که دست خود را در نزدیک وسط سیمها گذاشته‌اید، تمام این سیمها را به صدا درآورید. (اگر مانند هنگام نواختن پیانو، از کلیدهای پیانو استفاده کنید، دامنه‌های نوسان بسیار کوچک خواهند بود.) اکنون به سادگی می‌توانید ببینید که کدام سیم در "حالت سکون" است. سیم مربوطه را دقیقاً مشخص کنید و سپس سیمی را که یک اکتاو بتر است به صدا درآورید. اگر درست تشخیص داده باشید سیم بتر بایستی در

حالت سکون اما "دوتایه" به نظر برسد. (چرا؟) به این ترتیب سیمی از پیانو (و همچنین نت مربوط به آن در روی کلیدها) که دارای بسامد ν_{TV} است، مشخص می‌شود. بسامد هریک از اوکتاوه‌های متوالی این نت را با ضرب کردن در عدد ۲ می‌توان به دست آورد. جوابها را در کتاب راهنمای فیزیک و شیمی (در زیر فهرست "گامهای موسیقی") پیدا کنید و ببینید که آیا پیانوی شما کوک است یا خیر. (استاندارد کوک کردن گام معتدل بسامد 440 A است).

(ب) سیم گیتار: آزمایش مشابهی را می‌توان با یک سیم گیتار انجام داد. فرض کنید بمرترین سیم که سیم E است، کوک باشد. اگر این سیم را با نور تلویزیون استروبو سکویی کنید، ساکن به نظر نمی‌رسد. اکنون اگر این سیم را شل کنید، چون حدود یک چهارم فاصله بتر می‌شود یعنی از نت E به نت B می‌رود، در این صورت ساکن خواهد ماند. حال سیم را یک اکتاو دیگر بتر کنید و ببینید که آیا "دوتایه" است یا خیر؟ (در این بمرترین نت، سیم بسیار شل است، اما هنوز هم برای استروبو سکویی مناسب است.) با استفاده از این نتایج ارتفاع نت سیم یا نت بم E گیتار را پیدا کنید و بگویید که آیا E_{82} است یا E_{164} ؟

(ج) تیغه کماناره: آزمایش زیبای دیگر آن است که یک تیغه اره در حال نوسان را با نور تلویزیون استروبو سکویی کنید. تیغه را به وسیله گیره‌ای به میز ببندید و برای تغییر دادن ارتفاع نت صدای تیغه، طول آن را تغییر دهید.

۵-۱ انتقال انرژی بین دو نوسانگر متشابه که به طور ضعیف به یکدیگر جفت شده‌اند را در نظر بگیرید (بخش ۵-۱). در زمان $t = 0$ یعنی هنگامی که نوسانگر a تمام انرژی نوسان را داراست و نوسانگر b هیچ‌گونه انرژی ندارد، به سادگی می‌توان دید که کدام نوسانگر "متحرک" (نوسانگر a) و کدام یک "نیروی محرک" (نوسانگر b) است. اکنون زمان زنش $t = 1/4T$ یعنی یک چهارم دوره زنش پس از لحظه $t = 0$ را در نظر بگیرید. در این زمان آونگ a نیمی از انرژی خود را از دست داده و آونگ b همان مقدار انرژی را به دست آورده است، چون آونگها دارای دامنه یکسان‌اند. چگونه می‌توان "فهمید" که کدام یک از آونگها متحرک و کدام یک محرک است؟ و چگونه می‌توان فهمید که انرژی از کدام سو جریان می‌یابد؟ به بیان دیگر فرض کنید که به سیستم نگاه کرده و یک دوره نوسان (یک نوسان تند با بسامد در حدود ω_1 یا ω_2) آن را از لحظه‌ای که انرژی هر دو آونگ مساوی است دنبال می‌کنید. چگونه می‌توانید پیش‌بینی کنید که تقسیم انرژی بین دو آونگ آیا (الف) یکسان باقی می‌ماند؛ (ب) به گونه‌ای تغییر می‌کند که انرژی آونگ b افزایش یابد؛ (ج) تغییر آن در جهت عکس حالت (ب) است. سعی کنید از روابط ریاضی استفاده نکنید زیرا این راه بسیار ساده است. بلکه به خود سیستم نگاه کنید و ببینید کدام یک دیگری را می‌کشد و در چه موقع و غیره. (راهنمایی: روابط فاز نقش اساسی دارند).

۶-۱ یک سازوکار میرایی ("اصطکاک") طرح کنید که فقط مد ۱ آونگهای جفت شده شکل ۱-۱۴ را میرا کند. سازوکار دیگری طرح کنید که فقط مد ۲ را میرا کند. دقت کنید که اصطکاک در نقاط آویز (گیره‌ها) و همچنین مقاومت هوا هر دو مد را میرا می‌کند. پس این دو سازوکار مناسب نیستند. مبحث تکمیلی ۱ را بخوانید.

۷-۱۰ تیغه‌های کمان‌اره‌های جفت شده: تیغه‌های دو کمان‌اره را (که در مغازه‌های ابزارفروشی پیدا می‌شود) با گیره‌هایی به شکل C به یک میز ببندید، به طوری که در حدود 10° سانتیمتر آنها به آزادی بتواند نوسان کند. یک روش برای تنظیم آنها با بسامد یکسان آن است که قسمت بیرون آمده یک تیغه را آنقدر کوتاه کنید تا با یک ارتفاع نت مشخص ارتعاش کند و سپس تیغه دیگر را با صدای همان نت کوک کنید. روش دیگر آن است که هرکدام از تیغه‌ها را با استفاده از نور صفحه تلویزیون که به عنوان یک دستگاه استروپوسکوپ ساده است "استروپوسکپی" کنید. (آزمایش خانگی ۱-۳ را بخوانید). هنگامی که دو تیغه کاملاً نزدیک به هم کوک شدند، آنها را با یک نوار لاستیکی به یکدیگر جفت کنید. آنگاه به یکی از آنها ضربه‌ای بزنید و زنش بین مدها را مشاهده کنید. با حرکت دادن نوار لاستیکی به داخل و خارج و در امتداد تیغه‌ها جفت شدگی آنها را تغییر دهید. اگر دو تیغه کوک نباشند آیا زنش به دست می‌آید؟

مثالهای دیگری از دو نوسان کننده متشابه جفت شده که زندهای زیبایی به وجود می‌آورند عبارت‌اند از: (۱) دو آهنربای متشابه معلق که می‌توانند بر روی یک قطعه آهن نوسان کنند. این آهنرباها با میدان مغناطیسی به یکدیگر جفت شده‌اند. (۲) دو بند لباس یا دو سیم که یک انتهای هر دوی آنها به یک پایه قابل انعطاف بسته شده و دو انتهای دیگرشان به طور جداگانه به دو محل مختلف متصل شده است. (۳) دو سیم از یک گیتار که با ارتفاع نت یکسان کوک شده‌اند.

۸-۱۰ قوطیهای کنسرو جفت شده. قطر خارجی یکی از اندازه‌های استاندارد قوطیهای کنسرو در حدود ۷ سانتیمتر است و کاملاً در داخل انتهای یک فنر اسلینکی جای می‌گیرد. (فنر اسلینکی را می‌توانید از هر مغازه اسباب بازی فروشی بخرید). یک فنر اسلینکی و دو قوطی کنسرو تهیه کنید. از قوطیها به عنوان گلوله‌های آونگ استفاده کنید و آنها را با نخهایی به طول تقریباً 50° سانتیمتر که به دور قوطیها پیچیده شده، آویزان کنید. گلوله‌ها را به وسیله فنر اسلینکی (با کمک نوارچسب) به یکدیگر متصل کنید. بسامد دو مد ارتعاش طولی و بسامد انتقال انرژی را اندازه بگیرید. (از حالتی که یک آونگ در محل تعادلش قرار دارد و آونگ دیگر منحرف شده، شروع کنید). آیا آزمایش شما نشان می‌دهد که این بسامد همان بسامد زنش یعنی $\nu_1 - \nu_2$ است؟ با استفاده از بسامد پایتترین مد، بسامد زنش و تعداد حلقه‌های فنر اسلینکی به کار برده شده، معکوس ضریب ثابت فنری را به ازای یک حلقه از فنر اسلینکی یعنی K^{-1}/a محاسبه کنید.

این سیستم درحقیقت دارای چهار درجه آزادی است. علاوه بر دو درجه آزادی ارتعاش طولی و مدهای مربوط به آن که در بالا بررسی شد، دو مد ارتعاش عرضی نیز وجود دارد و آن هنگامی است که گلوله‌ها در امتداد عمود بر فنر ارتعاش می‌کنند. این دو مد را پیدا کرده و بسامد آنها را اندازه بگیرید. این بسامدها را با بسامدهای مربوط به مدهای ارتعاش طولی مقایسه کنید. نتیجه را شرح دهید.

۹-۱ آونگی را در نظر بگیرید که از نخى به طول یک متر و گلوله آلومینیومی به قطر ۵ سانتیمتر تشکیل شده است. آونگ دیگری از نخى به طول یک متر و گلوله‌ای برنجی به قطر ۵ سانتیمتر تشکیل شده است. این دو آونگ همزمان و با دامنه یکسان A به نوسان درمی‌آیند. پس از ۵ دقیقه که سیستم به حال خود گذاشته می‌شود، دامنه نوسان آونگ آلومینیومی نصف دامنه اولیه‌اش است. دامنه نوسان آونگ برنجی چه اندازه است؟ فرض کنید که اصطکاک در نتیجه سرعت بین گلوله و هواست و اتلاف لحظه‌ای میزان انرژی با مجذور سرعت گلوله متناسب است. نشان دهید که انرژی به‌طور نمایی کاهش پیدا می‌کند. (نشان دهید که برای هر نوع دیگر بستگی سرعت مثلاً v^4 انرژی به‌طور نمایی کاهش نمی‌یابد). نشان دهید که در حالت کاهش نمایی زمان کاهش میانگین با جرم گلوله متناسب است. پاسخ نهایی برای دامنه آونگ برنجی برابر $0.81A$ است.

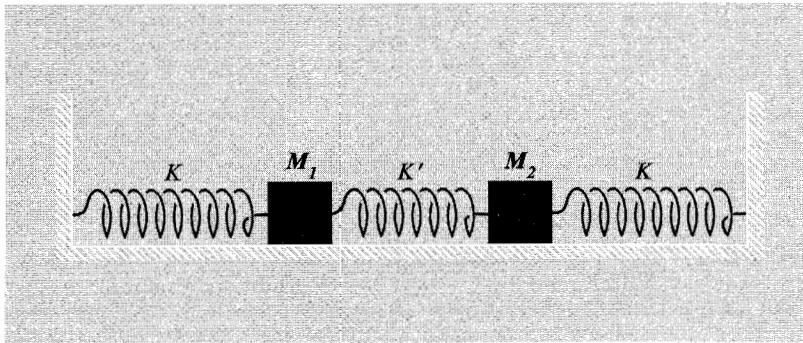
۱۰-۱ فنر بی‌وزنی در حالی که هیچ‌گونه وزنه‌ای به آن متصل نیست از سقف آویزان است. طول این فنر برابر 20 سانتیمتر است. جرم M را به انتهای پایین فنر متصل کنید. ابتدا جرم را با دست نگاه دارید به طوری که فنر در حالت آزاد باقی بماند. سپس ناگهان دست خود را بردارید. جرم و فنر شروع به نوسان می‌کنند. در هنگام نوسان، پایینترین وضع جرم 10 سانتیمتر زیر محلی است که جرم با دست در حالت سکون نگاه داشته شده بود. (الف) بسامد نوسان چقدر است؟ (ب) هنگامی که جرم 5 سانتیمتر پایینتر از محل سکون اولیه است، سرعت آن چه اندازه است؟

جوابها: (الف) 2 cps ؛ (ب) 70 cm/s

جرم دیگری برابر 300 گرم به جرم اولیه اضافه می‌کنیم، به طوری که جرم کلی برابر $M + 300$ گرم بشود. هنگامی که سیستم نوسان می‌کند، بسامد آن نصف بسامد سیستم با جرم M به تنهایی است. (ج) جرم M چقدر است؟ (د) وضع جدید تعادل را پیدا کنید.

جوابها: (ج) 100 g ؛ (د) 15 سانتیمتر پایینتر از وضع قبلی

۱۱-۱ مدها و بسامدهای سه فنر و دو جرم جفت شده که مانند شکل زیر بر روی سطح بدون اصطکاک می‌لغزند را به دست آورید. در حالت تعادل فنرها آزاد هستند. فرض کنید $M_1 = M_2 = M$ است.



شکل ۱۱-۱

۱۰-۱۲ زنش بین دو دیپازون. دو دیپازون که دارای بسامدهای مساوی هستند اختیار کنید. دیپازونهای $۴۴^{\circ}A$ و $۳۳۳۳C5$ در اغلب مغازه‌هایی که وسایل آزمایشگاهی می‌فروشند وجود دارند. دیپازونهای $۱۷C5$ و $۳۵A4$ (درگام بین‌المللی) نیز مناسب هستند.

دو دیپازون را به هم بزنید به طوری که فاصله نقطه برخورد از انتهای شاخه‌ها برای هر دو دیپازون یکسان باشد. هر دو دیپازون را نزدیک یک گوش نگاه دارید و مکان دیپازونها را طوری تنظیم کنید تا زنشها را بشنوید. با پیچیدن نوار لاستیکی به دور یک شاخه یکی از دیپازونها آن را "سنگین" کنید. با دور و نزدیک کردن نوار لاستیکی از انتهای شاخه، بسامد زنش را تغییر دهید.

برخی از چنگالهای معمولی غذاخوری و همچنین بعضی از چنگالهای تزادی (به شرطی که دسته آنها ارتعاشات را میرا نکند) دیپازونهای مناسبی هستند. برای آزمایش لازم است دو چنگال که ارتفاع نتهای آنها تقریباً یکسان است و زنش به وجود می‌آورند، پیدا کنید. برخی از گیلساهای شربت خوری نیز آوای صافی دارند. (این گیلساهای در هنگام نوسان معمولاً چندین مد را همزمان تولید می‌کنند.) وقتی به زنشهای حاصل از صدای زنگها گوش می‌کنید، زنشی را که تنها از یک زنگ به وجود می‌آید می‌شنوید! علت این امر آن است که بسامدهای دو مد صدای زنگ خیلی نزدیک به یکدیگر است و هنگامی که به لبه آن ضربه‌ای می‌زنید، هر دو مد با هم تحریک می‌شوند.

۱۰-۱۳ پدیده‌های غیرخطی در گوش - آهنگهای ترکیبی. برای این آزمایش به یک دیپازون $۴۴^{\circ}A$ و یک دیپازون $۲۳C5$ احتیاج دارید. (ترکیبهای دیگر نیز مناسب هستند.) همچنین به یک محیط ساکت نیز احتیاج است. دیپازونها را به یکدیگر بزنید. ابتدا دیپازون $۲۳C5$ را به گوش خود نزدیک کنید و سپس (در حالی که دیپازون $۲۳C5$ را دور می‌کنید) دیپازون $۴۴^{\circ}A$ را نزدیک کنید. آنگاه در حالی که دیپازون $۴۴^{\circ}A$ در مقابل گوش قرار دارد، دیپازون $۲۳C5$ را نزدیک گوش خود بیاورید. اما این بار به هیچ‌کدام از دو دیپازون $۴۴^{\circ}A$ و $۲۳C5$ توجه نکنید. بلکه به نتی که

در حدود یک مائور سوم بتر از $A_{۴۴}^{\circ}$ است گوش فرا دهید. (روش ابتدا گوش دادن به دیپازون C و سپس به A و آنگاه به هر دو، برای آن است که توجه شما را به بترشدن تدریجی ارتفاع نت صدا در حالت‌های متوالی جلب کند.) پس از چند آزمایش، هنگامی که هر دو دیپازون A و C در مقابل گوش قرار دارند، صدای نت F را که بتر از $A_{۴۴}^{\circ}$ است می‌توانید بشنوید. (بسیاری از اشخاص این نت را نمی‌شنوند، اما بیشتر نوازندگان ویلون می‌توانند آن را بی‌درنگ بشنوند. اگر نمی‌دانید که به چه نتی باید گوش کنید، با استفاده از یک پیانو، نتها را تمرین کنید.) هنگامی که هر سه نت یعنی F، C و A وجود دارد، صدای موزون F- مائور سه‌گانه شنیده می‌شود. برای آنکه ثابت کنید این پدیده در پرده گوش (و یا احتمالاً در غشای حلزونی) روی می‌دهد و نه در مغز (یعنی برای آنکه ثابت کنید این صدای موزون به سبب آن نیست که چون مغز می‌خواهد مائور سه‌گانه را بشنود، لذا نت کمبود یعنی F را اضافه می‌کند)، یکی از دیپازونها را در مقابل یک گوش و دیپازون دیگر را در مقابل گوش دیگر بگذارید. (این روش به شما کمک می‌کند که حقیقتاً صدای نت F را بشنوید.) اگر این پدیده "روانی" بود یعنی مغز می‌خواست جای خالی نت کمبود را پر کند، در این حالت هم باید بتواند این کار را انجام دهد. آیا (در عمل) چنین اتفاقی می‌افتد؟

در اینجا قسمتی از اثبات گفته می‌شود: فرض می‌کنیم فشار پیمانه‌ای درست در خارج از پرده گوش برابر $p(t)$ و پاسخ پرده گوش (یعنی مقدار جابه‌جایی آن) برابر $g(t)$ باشد، ممکن است $g(t)$ پاسخ غشای حلزونی در گوش درونی باشد، کاملاً مطمئن نیستیم. در هر حال می‌خواهیم برای پاسخی که از اصل برهم‌نهی پیروی نمی‌کند، توضیحی پیدا کنیم. بنابراین، هنگامی که مجموع بسامدهای ν_1 (یعنی $A_{۴۴}^{\circ}$) و ν_2 (یعنی $C_{۵۲۳}$) به گوش می‌رسند، پاسخ گوش نه تنها شامل ν_1 و ν_2 است، بلکه بسامد سوم ν_3 (یعنی تقریباً $F_{۳۴۹}$) نیز در آن وجود دارد. این پدیده نشانگر حالت غیرخطی است. (قبلاً دیدیم که جوابهای خطی از اصل برهم‌نهی پیروی می‌کنند و این خاصیت را دوباره خواهیم دید.) فرض می‌کنیم که $g(t)$ یک تابع غیرخطی از $p(t)$ باشد:

$$q(t) = \alpha p(t) + \beta p^2(t) + \gamma p^3(t)$$

اکنون $p(t)$ را به صورت برهم‌نهی دو نوسان هماهنگ مختلف (که با دو دیپازون تولید شده) در نظر می‌گیریم. برای سادگی فرض می‌کنیم که دامنه‌های مساوی و فازها برابر صفر است. همچنین برای سادگی نگارش سیستم واحدهایی به کار می‌بریم که در آن دامنه‌ها برابر واحد است. بنابراین

$$p(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$$

در نتیجه پاسخ $q(t)$ مربوط به بردهٔ گوش (و یا غشای حلزونی؟) به صورت زیر خواهد بود

$$q(t) = \alpha[\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t] + \beta[\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t]^2 + \gamma[\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t]^3$$

اگر β و γ صفر باشند، در این صورت $q(t)$ پاسخ خطی نامیده می‌شود (مانند پاسخ فیزیکی از قانون کاملاً خطی هوک پیروی می‌کند و تحت نیروی تراکمی قرار گرفته است). در این حالت $q(t)$ دقیقاً برهم‌نهی دو نوسان هماهنگ با بسامدهای ω_1 و ω_2 است. (بنابراین بسامد F شنیده نمی‌شود!) جملهٔ همراه β غیرخطی درجهٔ دوم و جملهٔ همراه γ غیرخطی درجهٔ سوم است.

اکنون می‌خواهیم $q(t)$ را به صورت برهم‌نهی نوسانهای هماهنگ بنویسیم. برای این منظور، به برخی از روابط مثلثاتی احتیاج است که ابتدا آنها را به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم $f(x) \equiv \cos x$ باشد. می‌دانیم که رابطهٔ $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$ برقرار است، بنابراین

$$f(x)f(y) = \frac{1}{2}f(x+y) + \frac{1}{2}f(x-y)$$

با استفاده از این نتیجه رابطهٔ زیر را (که برای جملهٔ غیرخطی درجهٔ سوم لازم است) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} [f(x)f(y)]f(z) &= \left[\frac{1}{2}f(x+y) + \frac{1}{2}f(x-y) \right] f(z) \\ &= \frac{1}{2}f(x+y)f(z) + \frac{1}{2}f(x-y)f(z) \\ &= \frac{1}{4}f(x+y+z) + \frac{1}{4}f(x+y-z) + \frac{1}{4}f(x-y+z) + \frac{1}{4}f(x-y-z) \end{aligned}$$

اکنون جملهٔ درجهٔ دوم پاسخ را پیدا می‌کنیم. اگر فرض کنیم $\theta_1 \equiv \omega_1 t$ و $\theta_2 \equiv \omega_2 t$ باشد، در این صورت (برای جملهٔ غیرخطی درجهٔ دوم) داریم

$$\begin{aligned} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)^2 &\equiv [f(\theta_1) + f(\theta_2)]^2 \\ &= [f(\theta_1)f(\theta_1)] + [2f(\theta_1)f(\theta_2)] + [f(\theta_2)f(\theta_2)] \\ &= \left[\frac{1}{2}f(\theta_1 + \theta_1) + \frac{1}{2}f(\theta_1 - \theta_1) \right] + [f(\theta_1 + \theta_2) + f(\theta_1 - \theta_2)] \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}f(\theta_2 + \theta_2) + \frac{1}{2}f(\theta_2 - \theta_2) \right] \end{aligned}$$

بنابراین جملهٔ درجهٔ دوم پاسخ شامل بسامدهای $2\omega_1$ ، $\omega_1 + \omega_2$ ، $\omega_1 - \omega_2$ ، ω_1 و $2\omega_2$ است. این بسامدها را آوای ترکیبی یا بسامدهای ترکیبی می‌گویند.

جمله غیرخطی درجه سوم پاسخ عبارت است از

$$\begin{aligned}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)^3 &= [f(\theta_1) + f(\theta_2)]^3 \\ &= f^3(\theta_1) + 3f^2(\theta_1)f(\theta_2) + 3f(\theta_1)f^2(\theta_2) + f^3(\theta_2)\end{aligned}$$

با استفاده از رابطه‌ای که برای $f(x)f(y)f(z)$ به دست آمد، می‌بینیم که جمله $f^3(\theta_1)$ برهم‌نهی نوسانهای هماهنگ با بسامدهای $3\omega_1$ و ω_1 ، جمله $f^2(\theta_1)f(\theta_2)$ برهم‌نهی بسامدهای $2\omega_1 + \omega_2$ ، $2\omega_1 - \omega_2$ و ω_1 ، $f(\theta_1)f^2(\theta_2)$ برهم‌نهی $2\omega_1 + \omega_2$ ، $2\omega_1 - \omega_2$ و ω_1 و $f^3(\theta_2)$ برهم‌نهی $3\omega_2$ و ω_2 است. بنابراین پاسخ درجه سوم برابر با برهم‌نهی نوسانهای هماهنگ، آوای ترکیبی $3\omega_1$ ، ω_1 ، $2\omega_1 \pm \omega_2$ ، $2\omega_2 \pm \omega_1$ و $3\omega_2$ است.

اکنون به آزمایش دیپازون برمی‌گردیم. اندکی محاسبه نشان می‌دهد که نت F از جمله غیرخطی درجه دوم نتیجه نمی‌شود، بلکه از جمله $2\omega_1 - \omega_2$ مربوط به درجه سوم به دست می‌آید

$$\nu_1 = A440$$

$$\nu_2 = C523$$

$$2\nu_1 - \nu_2 = 880 - 523 = 357$$

با مراجعه به کتاب راهنما معلوم می‌شود که بسامد F برابر ۳۴۹ و بسامد F# برابر ۳۷۰ است. بنابراین $2\nu_1 - \nu_2$ بسامد یک نت تقریباً "زیر" است که در $8/21$ فاصله F تا F# قرار دارد. (این نت همچنین کمی زیر به‌گوش می‌رسد.) (اگر دیپازونهایی را که درگام "درست" یا علمی کوک شده‌اند به‌کار ببرید، در این صورت بسامد دقیق F به دست می‌آید و صدای آن نیز دقیق خواهد بود).

اکنون به قسمت جالب موضوع توجه کنید. آیا پدیده غیرخطی درجه سوم در گوش روی می‌دهد؟ و یا شاید در غشای حلزونی در حال تشدید وجود دارد؟ به دلایل زیر، این پدیده در گوش روی نمی‌دهد: هنگامی که دو دیپازون را از گوش خود دور می‌کنیم، به طوری که شدت مشاهده‌شده از هر کدام کاهش یابد، باز هم جمله غیرخطی را می‌شنویم. اگر این پدیده در نتیجه پاسخ غیرخطی در پرده گوش می‌بود، شدت صدای آن برحسب فاصله می‌بایست خیلی سریعتر از جمله‌های ν_1 و ν_2 کاهش پیدا کند، ولی چنین نمی‌شود. همچنین جمله غیرخطی مربوط به $606 = 440 - 1046 = 2\nu_2 - \nu_1$ که تقریباً در وسط فاصله D و D# است باید وجود داشته باشد، اما ما آن را نمی‌شنویم. هیچ‌کدام از این دلایل ثابت نمی‌کند که غشای حلزونی عامل مؤثر است، بلکه فقط ثابت می‌کند که به‌نظر می‌رسد پرده گوش عامل مؤثر نیست. آیا این پدیده

فقط مربوط به غشای حلزونی است و یا انتهای عصب آن؟ پاسخ را نمی دانم. (من این پدیده را هنگامی که آزمایشهای خانگی را اختراع می کردم به طور تصادفی کشف کردم. شاید هم قبلاً کاملاً معلوم و شناخته شده بود.)

هماهنگهای نوری. هماهنگهای نوری (و جمع و تفریق بسامدها یعنی ترکیب بسامدها) را با استفاده از جزء کوچک غیرخطی در ثابت دی الکتریک یک جسم شفاف می توان به دست آورد. روی جلد مجله *Scientific American* شماره ژوئیه ۱۹۶۳ عکس زیبایی از یک پرتو نور قرمز با طول موج 6940° آنگستروم (هر آنگستروم مساوی 10^{-8} سانتیمتر) را که بر روی بلوری می تابد، نشان می دهد. از طرف مقابل بلور پرتو نور آبی به طول موج 3470° آنگستروم بیرون می آید. با نصف کردن طول موج، بسامد دو برابر می شود. بنابراین جمله غیرخطی یک جمله درجه دوم است.^۱

۱-۱۴ برهم نهش شرایط اولیه، برهم نهش حرکتی متناظر با شرایط اولیه را نتیجه می دهد. فرض کنید a و b دو نوسانگر جفت شده باشند. سه شرط اولیه متفاوت در نظر بگیرید:

(الف) a و b از حالت سکون و به ترتیب با دامنه های $+1$ و -1 رها می شوند؛

(ب) از حالت سکون و با دامنه های $+1$ و $+1$ رها می شوند؛

(ج) از حالت سکون و به ترتیب با دامنه های 2 و 0 رها می شوند؛ از این رو شرایط اولیه حالت

(ج) برابر با برهم نهش شرایط اولیه حالتی (الف) و (ب) است.

نشان دهید که حرکت در حالت (ج) برابر با برهم نهش حرکت در حالتی (الف) و (ب)

است.

۱-۱۵ حالت کلی مربوط به مثال مسئله ۱-۱۴ را اثبات کنید. (در شرایط اولیه، سرعتها و همچنین مکانها را در نظر بگیرید).

۱-۱۶ اصل برهم نهش را برای معادلات حرکت خطی و غیرهمگن مانند معادله (۳۶)، اثبات کنید. ثابت کنید که این اصل در معادلات غیرهمگن و غیرخطی صدق نمی کند.

۱-۱۷ برای سیستمی با سه درجه آزادی، سه معادله مشابه با معادلات کلی (۴۷) و (۴۸) بنویسید. نشان دهید که اگر یک مد در نظر گرفته شود، یک معادله درمینیانی مشابه با معادله (۵۶) به دست می آید با این تفاوت که درمینیان آن سه درسه است. نشان دهید که از این درمینیان یک معادله درجه سوم برحسب متغیر ω^2 به دست می آید. چون یک معادله درجه سوم دارای سه جواب است، پس سه مد وجود دارد. این حالت را به N درجه آزادی تعمیم دهید. از آنجا نتیجه می شود که برای هر

۱. به مقاله زیر مراجعه کنید:

سیستمی با N درجه آزادی N مد وجود دارد. این مدها حتماً وجود دارند چون در این مسئله روشی برای یافتن آنها، به دست می‌آورید.

۱۸-۱۰ زنش بین دو سیم ناهمسان گیتار که به‌طور ضعیف جفت شده‌اند. یک گیتار به امانت بگیرید. دو سیم از بتمترین سیمها را با بسامد مساوی کوک کنید. به یک سیم ضربه‌ای بزنید و سیم دیگر را از نزدیک تماشا کنید. (این سیمها باید تا آنجا که کاملاً ممکن است، با بسامد مساوی کوک شده باشند. درحقیقت دقیقترین روش کوک‌کردن، با بیشینه‌کردن زنشهایی که می‌بینید به دست می‌آید.) اکنون به سیم دیگر ضربه بزنید و تماشا کنید. آیا در هنگام زنش، انرژی کاملاً از یک سیم به سیم دیگر منتقل می‌شود؟ آیا می‌توانید با بهتر کوک‌کردن، انرژی را کاملاً منتقل کنید؟ آنچه مشاهده می‌کنید شرح دهید. چه توضیحی وجود دارد؟ مسئله ۱-۱۹ را ببینید.

۱۹-۱ آونگهای ناهمسان جفت‌شده. دو آونگ a و b را در نظر بگیرید که تارهایی با طولهای مساوی l ولی گلوله‌هایی با جرمهای متفاوت M_a و M_b دارند. این آونگها با فزنی که ثابت فنر K است و به گلوله‌ها متصل شده‌اند، به یکدیگر جفت شده‌اند. نشان دهید که معادلات حرکت (برای نوسانهای کوچک) عبارت‌اند از

$$M_a \frac{d^2 \psi_a}{dt^2} = -M_a \frac{g}{l} \psi_a + K(\psi_b - \psi_a)$$

$$M_b \frac{d^2 \psi_b}{dt^2} = -M_b \frac{g}{l} \psi_b - K(\psi_b - \psi_a)$$

با استفاده از روش پیدا کردن مختصات بهنجار، این دو معادله را حل کنید و دو مد را به دست آورید. نشان دهید که $\psi_1 \equiv (M_a \psi_a + M_b \psi_b) / (M_a + M_b)$ و $\psi_2 = \psi_a - \psi_b$ مختصات بهنجار هستند. بسامد و شکل مدها را پیدا کنید. اهمیت فیزیکی ψ_1 و همچنین ψ_2 چیست؟ برهم‌نهی دو مد را که مربوط به شرایط اولیه در زمان t است و در آن سرعت هر دو گلوله برابر صفر، دامنه گلوله a برابر A و دامنه گلوله b برابر صفر است، پیدا کنید. اگر انرژی کل گلوله a در زمان $t = 0$ برابر E باشد، رابطه‌ای برای $E_a(t)$ و $E_b(t)$ به دست آورید. جفت‌شدگی آونگها را ضعیف فرض کنید. آیا در هنگام یک زنش انرژی گلوله a کاملاً به گلوله b منتقل می‌شود؟ آیا این مطلب درست است که اگر آونگی که در ابتدا تمام انرژی را داراست، آونگ سنگین باشد، انرژی کاملاً منتقل نمی‌شود ولی اگر آونگ سبک باشد انرژی کاملاً منتقل می‌شود؟

جواب: $\omega_1 = \frac{g}{l}$, $\omega_2 = \frac{g}{l} + K \left(\frac{1}{M_a} + \frac{1}{M_b} \right)$

$$\psi_a = A \left(\frac{M_a}{M} \cos \omega_1 t + \frac{M_b}{M} \cos \omega_2 t \right), \quad \psi_b = A \frac{M_a}{M} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$$

که در آن $M = M_a + M_b$ است.

پس از پیدا کردن $\omega_{\text{mod}} = 1/2(\omega_2 - \omega_1)$ و $\omega_{\text{av}} = 1/2(\omega_2 + \omega_1)$ مقادیر زیر به دست می‌آیند

$$\psi_a = (A \cos \omega_{\text{mod}} t) \cos \omega_{\text{av}} t + \left(A \frac{M_a - M_b}{M} \sin \omega_{\text{mod}} t \right) \sin \omega_{\text{av}} t$$

$$\psi_b = \left(2A \frac{M_a}{M} \sin \omega_{\text{mod}} t \right) \sin \omega_{\text{av}} t$$

انرژی هر دو آونگ را به آسانی می‌توان با تقریب جفت‌شدگی ضعیف به دست آورد، که در آن هنگام یک دور نوسان تند با بسامد ω_{av} ، از تغییرات زمانی سینوس یا کسینوس $\omega_{\text{mod}} t$ صرف‌نظر می‌شود، زیرا فرض می‌کنیم که $\omega_{\text{mod}} \ll \omega_{\text{av}}$ است. به علاوه در هر لحظه از انرژی ذخیره‌شده در فنر صرف‌نظر می‌کنیم. بنابراین نتیجه می‌شود

$$E_b = E \left(\frac{2M_a M_b}{M^2} \right) [1 - \cos(\omega_2 - \omega_1)t]$$

$$E_a = E \left[\frac{M_a^2 + M_b^2 + 2M_a M_b \cos(\omega_2 - \omega_1)t}{M^2} \right]$$

از این رو انرژی آونگ a (یعنی آونگی که در مبدأ زمان تمام انرژی را داراست) با بسامد زنش به طور سینوسی تغییر و بین مقدار بیشینه E و مقدار کمینه $E [(M_a - M_b)/M^2]$ نوسان می‌کند. انرژی آونگ b با بسامد زنش بین مقدار کمینه صفر و مقدار بیشینه $(2M_a M_b/M^2)E$ نوسان می‌کند. انرژی کل یعنی $E_a + E_b$ مقدار ثابت است (چون از میرایی صرف‌نظر می‌کنیم). اکنون به آزمایش خانگی ۱۸-۱ نگاه کنید. با یک بیان کیفی نشان دهید که چرا هنگامی که جرمها نابرابر هستند انتقال انرژی به طور کامل صورت نمی‌گیرد. [راهنمایی: دو حالت نهایی را در نظر بگیرید. (الف) M_a در مقایسه با M_b بسیار بزرگ است و (ب) M_a در مقایسه با M_b بسیار کوچک است.]

۱-۲۰ نوسانهای عرضی دو جرم جفت‌شده. با استفاده از تقریب اسلینکی یا تقریب نوسانهای کوچک دو معادله حرکت جفت‌شده را، برای جابه‌جاییهای عرضی ψ_a و ψ_b شکل ۱۱-۱ به دست آورید. (الف) با استفاده از روش سیستماتیک بسامدها و نسبت دامنه‌های دو مد بهنجار را پیدا کنید. (ب) ترکیبهای خطی ψ_a و ψ_b را که به معادلات جفت‌شده منجر می‌شوند یعنی مختصات بهنجار را به دست آورید و بسامدها و نسبتهای دامنه‌های دو مد را پیدا کنید.

جواب: معادلات (۷۰) و (۷۱) را ببینید.

۲۱-۱ نوسانهای دو مدار LC جفت شده. دو مد بهنجار نوسان مدارهای LC جفت شده را که در شکل ۱۲-۱ نشان داده شده با معادلات حرکت، (۷۷) و (۷۸) به دست آورید. (الف) روش سیستماتیک به کار برید. (ب) از روش پیدا کردن مختصات بهنجار استفاده کنید.

جواب: معادله (۷۹) را ببینید.

۲۲-۱ جسم سنگینی بر روی یک بالش لاستیکی که به عنوان ضربه گیر به کار می رود گذارده می شود و بالش به اندازه یک سانتیمتر فرو می رود. اگر به جسم به طور عمودی ضربه آهسته ای زده شود، جسم نوسان می کند. (نوسانها میرا خواهد بود. اما از میرایی صرف نظر می کنیم.) بسامد نوسان را برآورد کنید. (راهنمایی: فرض کنید که بالش مانند یک فنر قانون هوک عمل می کند).

جواب: در حدود 5cps .

۲۳-۱ نوسانهای طولی دو جرم جفت شده. سیستم در شکل ۹-۱ نشان داده شده است. معادلات حرکت، با معادلات (۶۲) و (۶۳) داده می شود. با استفاده از روش سیستماتیک که در معادلات (۴۷) تا (۵۹) داده شد، مدها را به دست آورید. شما نباید به سادگی کمیتها را در این معادله ها قرار دهید، بلکه باید مراحل مشابهی را "بدون نگاه کردن" اجرا کنید.

جواب: به معادلات (۶۰) و (۶۱) مراجعه کنید.

۲۴-۱ مد لب ریز (شَلپ شَلپ) در یک ظرف پهن پر آب. پایینترین مد نوسان در یک ظرف مایع را می توان مد "لب ریز" نامید. هرکس که بخواهد ظرف پهن پر از آب را بدون لب ریز شدن حرکت دهد، این مد به آسانی تحریک می شود.

یک ظرف پهن چهارگوش را تا قسمتی پر از آب کرده و آن را کمی تکان دهید. آب لب ریز می شود. روش بهتر آن است که ظرف را بر روی یک سطح تخت افقی قرار دهید، تا لبه پر از آب کنید و سپس آب بیشتر به آن اضافه کنید، به طوری که آب کمی بالاتر از سطح لبه ظرف قرار گیرد. ظرف را به آهستگی تکان دهید. پس از آنکه مدهای بالاتر میرا شد. مد لب ریز باقی می ماند که با میرایی بسیار کمی نوسان می کند. (با وجودی که برای نگاه داشتن آب "بالاتر از دیواره ها" از خاصیت کشش سطحی استفاده می شود این مد یک مد "گرانژی" است. استفاده از کشش سطحی برای آن است که میرایی کمینه شود.) سطح آب عملاً تخت باقی می ماند. (این سطح پس از آنکه مدهای بالاتر میرا شد، تخت می شود.) فرض کنید که در هنگام حرکت، سطح آب تخت باقی بماند، وقتی از حالت تعادل می گذرد، افقی و در انتهای نوسانها خمیده است. امتداد نوسان افقی را x و امتداد قائم را y اختیار کنید. \bar{x} و \bar{y} را مختصات افقی و قائم گرانیگاه آب در نظر بگیرید. \bar{x} و \bar{y} را مقادیر در حالت تعادل \bar{x} و \bar{y} اختیار کنید. رابطه ای برای $\bar{y} - \bar{x}$ بر حسب $\bar{x} - \bar{x}$ به دست آورید. (در این محاسبه، یک پارامتر مناسب فاصله سطح آب در یک انتهای

ظرف نسبت به سطح تعادلش است.) افزایش انرژی پتانسیل آب برابر $my(\bar{y} - \bar{y}_0)$ است. بنابراین معلوم می‌شود که $\bar{y} - \bar{y}_0$ متناسب با $(\bar{x} - \bar{x}_0)^2$ است. از این رو انرژی پتانسیل گرانیگاه مانند یک نوسانگر هماهنگ است. قانون دوم نیوتون را با فرض آنکه تمام جرم m در گرانیگاه است به کار ببرید. رابطه‌ای برای بسامد پیدا کنید.

جواب: $\omega^2 = 3gh_0/L^2$ که در آن h_0 عمق آب در حالت تعادل، $g = 980 \text{ cm/s}^2$ و L نصف طول ظرف در امتداد مسیر حرکت موج یعنی در امتداد x است. این رابطه را برای آزمایشی که با ظرف انجام می‌دهید به کار ببرید یعنی ω ، h_0 و L را اندازه بگیرید و ببینید که توافق آنها با رابطه چگونه است. اکنون به مسئله ۱-۲۵ مراجعه کنید.

۱-۲۵ امواج روی آب. در فرهنگ‌نامه‌ها، عمق متوسط دریاچه ژنو حدود 150 متر ذکر شده است. طول این دریاچه (با در نظر گرفتن انتهای باریک غربی آن) حدود 60 کیلومتر است. اگر دریاچه را مانند یک ظرف چهارگوش در نظر بگیریم، می‌توانیم از رابطه‌ای که در آزمایش خانگی ۱-۲۴ برای ω^2 به دست آوردیم، استفاده کنیم. با در نظر گرفتن این فرضها، زمان متناوب امواج روی آب (مدهای لبرین) که در امتداد طول دریاچه حرکت می‌کنند چقدر است؟ (زمان تناوب مشاهده شده در حدود یک ساعت است.) این امواج روی آب احتمالاً در نتیجه تغییرات ناگهانی فشار اتمسفر در یک قسمت دریاچه، نسبت به قسمت دیگر، به وجود می‌آید. دامنه‌های مشاهده شده، تا حدود 1.5 متر است.

در ماه ژوئن ۱۹۵۴ یک موج روی آب که دامنه آن در حدود 3 متر بود در دریاچه میشیگان روی داد و مقدار زیادی از ماهیگیران را از اسکله به خارج پرتاب کرد.

به نوشته مجله تایم^۱ تکان امواج حاصل از زلزله بزرگ آلاسکا در روز عید پاک ۱۹۶۴، امواجی روی آب رودخانه‌ها و دریاچه‌ها و بنادر در امتداد ساحل ایالات متحده به وجود آورد و حتی سبب شد که آب از لبه یک استخر هتلی در آتلانتیک سیتی در ایالت نیوجرسی به خارج ریخته شود.

نوسانهای آزاد سیستمهای دارای چند درجه آزادی

۱-۲ مقدمه

در فصل ۱ نوسان سیستمهایی را مطالعه کردیم که یک یا دو درجه آزادی داشتند. در این فصل سیستمهایی را مطالعه می‌کنیم که N درجه آزادی دارند و N می‌تواند عدد بسیار بزرگی هم باشد که آن را به طور غیردقیق "بینهایت" می‌نامیم.

برای هر سیستم با N درجه آزادی، همیشه دقیقاً N مد وجود دارد (مسئله ۱-۱۷). هر مد دارای بسامد مشخص ω و "شکل" خاصی است که با نسبت دامنه‌ها یعنی $A : B : C : D : \dots$ مشخص می‌شود. در هر مد، تمام اجزای متحرک به طور همزمان از محل تعادلشان عبور می‌کنند؛ یعنی در آن مد، تمام درجه‌های آزادی با فاز مساوی نوسان می‌کنند. بنابراین در هر مد تنها، فقط یک فاز وجود دارد که با شرایط اولیه تعیین می‌شود. چون در هر مد مفروض، هر درجه آزادی با بسامد مشخص ω نوسان می‌کند، برای تمام اجزای متحرک، نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم یعنی ω^2 ، یکسان است. برای مثال سیستمی در نظر بگیرید که دارای چهار درجه آزادی a, b, c, d و در نتیجه دارای

چهار مد است. فرض کنید که نسبت دامنه‌ها در مد ۱ برابر باشد با

$$A : B : C : D = 1 : 0 : -2 : 7$$

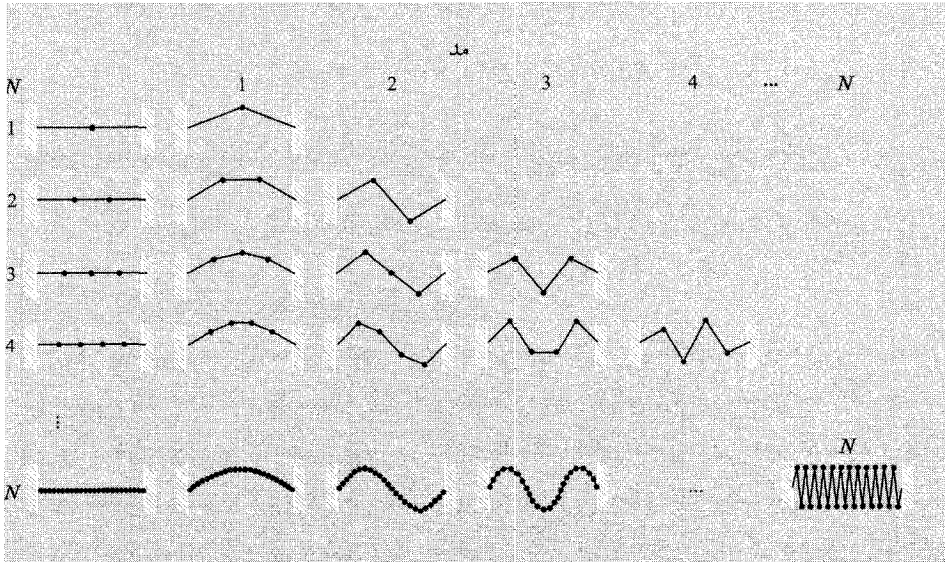
بنابراین معادلات حرکت a , b , c و d (اگر فقط مد ۱ وجود داشته باشد) عبارت‌اند از:

$$\psi_a = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad \psi_b = 0, \quad \psi_c = -2\psi_a, \quad \psi_d = 7\psi_a$$

که در آن A_1 و φ_1 به شرایط اولیه بستگی دارند.

اگر سیستمی شامل تعداد زیادی اجزای متحرک باشد که در یک ناحیه محدودی از فضا توزیع شده باشند، فاصله متوسط بین اجزای متحرک مجاور خیلی کوچک خواهد بود. اگر تعداد اجزای متحرک را بینهایت تصور کنیم، در نتیجه فاصله اجزای مجاور برابر صفر می‌شود و در چنین حالتی سیستم را "پیوسته" می‌نامند. تعبیر این فرض آن است که حرکت اجزای مجاور هم تقریباً یکسان است. با چنین فرضی بردار جابه‌جایی تمام اجزای متحرکی که در همسایگی نقطه (x, y, z) هستند را می‌توان با کمیت برداری $\psi(x, y, z, t)$ نمایش داد و بنابراین "جابه‌جایی" $\psi(x, y, z, t)$ تابعی از مکان (x, y, z) و زمان t است. این جابه‌جایی جایگزین جابه‌جاییهای $\psi_a(t)$ و $\psi_b(t)$ و غیره هرکدام از اجزا می‌شود. در چنین حالتی با امواج سروکار داریم.

امواج ساکن مدهای بهنجار هستند. مدهای یک سیستم پیوسته را امواج ساکن یا مدهای بهنجار و یا فقط مد می‌گویند. بر طبق آنچه گفته شد، یک سیستم واقعاً پیوسته دارای بینهایت جزء متحرک مستقل است، اگرچه در فضای محدودی جای دارند. بنابراین بینهایت درجه آزادی و از این رو بینهایت مد وجود دارد. این بیان برای یک سیستم واقعی، حقیقت ندارد. مثلاً یک لیتر هوا دارای بینهایت جزء متحرک نیست، بلکه فقط شامل 2.7×10^{22} مولکول است که هرکدام (برای حرکت در جهتهای x , y و z) دارای سه درجه آزادی هستند و بنابراین یک ظرف محتوی یک لیتر هوا دارای بینهایت مد ارتعاشی ممکن نیست، بلکه حداکثر فقط دارای 8×10^{22} مد است. اگر کسی دمیدن به داخل یک بطری یا فلوت را امتحان کرده باشد، به خوبی می‌داند که به سادگی نمی‌توان بیش از چند مد اولیه را تولید کرد. (برای تمایز مدها معمولاً مد با کمترین بسامد را شماره ۱ و بسامد بعدی بالاتر را شماره ۲ و غیره می‌نامند.) در عمل غالباً به چند (یا چند دوجین یا چند هزار) مد اولیه احتیاج است. همان‌طور که خواهیم دید، رفتار پایتترین مدها چنان است که انگار سیستم پیوسته است. کلی‌ترین حرکت هر سیستم را می‌توان به صورت برهم‌نهی تمام مدهای آن نوشت که در آن دامنه و فاز هر مد با استفاده از شرایط اولیه تعیین می‌شود. (در چنین حالت کلی) ظاهر هر سیستم ارتعاش‌کننده بسیار پیچیده است، چون چشم و مغز نمی‌توانند در آن واحد اشیای متعددی را بدون



شکل ۱-۲ مدهای ارتعاش عرضی یک تار مهردار. تار با N مهره دارای N مد است در مد m ، تار محور تعادل را $1 - m$ بار قطع می‌کند و m نیم طول موج دارد. مد با بالاترین بسامد شکل "زیگزاگ" دارد که نشان داده شده است.

تداخل در نظر بگیرند. هنگامی که تعداد زیادی مد وجود دارد، به آسانی نمی‌توان با نگاه کردن به حرکت کامل، هر مد را به‌طور جداگانه "مشاهده" کرد.

مدهای تار مهردار. ابتدا نوسانهای عرضی تار مهردار را مطالعه می‌کنیم. منظور ما از "تار" در واقع فنر است. یعنی فرض می‌کنیم فنرها، بدون جرم و خطی (یعنی تابع قانون هوک) هستند که جرمهای نقطه‌ای M را به یکدیگر متصل می‌کنند. (در شکلها، این فنرها را به‌جای حلقه حلقه با خطوط راست نشان می‌دهیم).

شکل ۱-۲ سیستمهای شامل چندین تار مهردار را نشان می‌دهد. اولین سیستم دارای $N = 1$ (یک درجه آزادی)، سیستم بعدی دارای $N = 2$ و غیره است. در هر حالت، شکل مدهای بهنجار بدون اثبات نشان داده شده است. بعداً بسامد و شکل دقیق هر مد را به‌دست خواهیم آورد.

شما باید (با فرض آنکه شکلهای نشان داده شده، شکل مدها هستند) بتوانید تشخیص دهید، که ترتیب شکلها به ترتیب افزایش بسامد مدهاست. زیرا با افزایش شماره مد (و در نظر گرفتن آنکه جابه‌جایی یک مهره مشخص، یکسان باقی می‌ماند)، تارها زاویه بزرگتری با محور تعادل می‌سازند. در نتیجه، در یک سیستم معین برای یک مهره مشخص، از یک شکل به شکل بعدی و بنابراین از یک بسامد مد به بسامد بعدی، نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم، افزایش پیدا می‌کند.

نکته آشکار دیگر این است که توالی شکل مدهای فرضی، همیشه دقیقاً N شکل به دست می‌دهد: اولین مد همیشه هیچ «گره» (محلی که تار محور را قطع می‌کند بجز نقاط انتهایی) ندارد، دومین مد، یک گره دارد و غیره. بالاترین مد همیشه بیشترین تعداد ممکن یعنی $N - 1$ گره دارد که به شکل «زیگزاگ» نشان داده می‌شود، یعنی تار بین هر دو جرم متوالی یک بار محور را قطع می‌کند.

۲-۲ مدهای عرضی تار پیوسته

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن N عدد خیلی بزرگ مثلاً $N = 1000000$ باشد. در این حالت، در مدهای پایین (مثلاً چند هزار مد اولیه)، چون بین هر دو گره تعداد زیادی مهره وجود دارد، جابه‌جایی تار از یک مهره به مهره بعدی به آهستگی تغییر می‌کند. [در اینجا بالاترین مدها را که به «مد زیگزاگ» نزدیک می‌شوند، در نظر نمی‌گیریم زیرا در آن حالت بیان تابع پیوسته $\psi(x, y, z, t)$ ممکن نیست.] به این دلیل، شکلهای لحظه‌ای مربوط به جابه‌جایی هر مهره یعنی $\psi_a(t), \psi_b(t), \psi_c(t), \psi_d(t)$ و غیره را در نظر نمی‌گیریم. بلکه برای تمام ذراتی که در همسایگی نقطه (x, y, z) (همسایگی یعنی در داخل یک مکعب بینهایت کوچک به اضلاع $\Delta x, \Delta y$ و Δz) در حالت تعادل هستند، بردار جابه‌جایی لحظه‌ای $\psi(x, y, z, t)$ را در نظر می‌گیریم:

$$\psi(x, y, z, t) = \hat{x}\psi_x(x, y, z, t) + \hat{y}\psi_y(x, y, z, t) + \hat{z}\psi_z(x, y, z, t) \quad (1)$$

که در آن $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ بردارهای یکه و ψ_x, ψ_y, ψ_z مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی ψ هستند. توجه به این نکته که x, y, z نشانگر حالت تعادل ذرات در آن همسایگی اند مهم است. از این رو x, y و z تابع زمان نیستند.

ارتعاش طولی و عرضی. معادله (۱) شکل بسیار کلی‌تری را از آنچه برای مطالعه ارتعاشات یک تار لازم است نشان می‌دهد. فرض کنید که در حالت تعادل تار در امتداد محور z ها کشیده شده باشد. در این صورت برای مشخص کردن حالت تعادل هر مهره، فقط مشخصه z (با دقت Δz) کافی است و معادله (۱) را به شکل ساده‌تر زیر می‌توان نوشت

$$\psi(z, t) = \hat{x}\psi_x(z, t) + \hat{y}\psi_y(z, t) + \hat{z}\psi_z(z, t) \quad (2)$$

ارتعاشات در امتداد محور z ارتعاشات طولی و ارتعاشات در امتداد محورهای x و y را ارتعاشات عرضی می‌نامند. در حال حاضر فقط ارتعاشات عرضی تار را در نظر می‌گیریم. بنابراین ψ_z برابر صفر می‌شود، یعنی

$$\psi(z, t) = \hat{x}\psi_x(z, t) + \hat{y}\psi_y(z, t) \quad (3)$$

قطبیدگی خطی. برای سادگی بیشتر فرض می‌کنیم که ارتعاشات فقط در امتداد محور \hat{x} وجود دارد (یعنی $\psi_y \equiv 0$). در این صورت ارتعاشات را قطبیده خطی در امتداد \hat{x} می‌گویند. حالت کلی قطبیدگی در فصل ۸ مطالعه خواهد شد. اکنون اگر برداریکته \hat{x} و شاخص مربوط به ψ_x را حذف کنیم، خواهیم داشت

$$(۴) \quad \text{جابه‌جایی عرضی لحظه‌ای برای ذراتی که در محل } z = \psi(z, t) \text{ در حالت تعادل هستند.}$$

اکنون یک قطعه بسیار کوچک از تار پیوسته را در نظر می‌گیریم. در حالت تعادل این قطعه در فاصله کوچکی به طول Δz و په مرکز z قرار دارد. نسبت جرم ΔM این قطعه بر طول Δz ، چگالی جرمی ρ تعریف می‌شود که واحد آن جرم بر واحد طول است:

$$(۵) \quad \Delta M = \rho \cdot \Delta z$$

چگالی جرمی در طول تار یکنواخت فرض می‌شود. کشش تار در حالت تعادل یعنی T نیز یکنواخت فرض می‌شود.

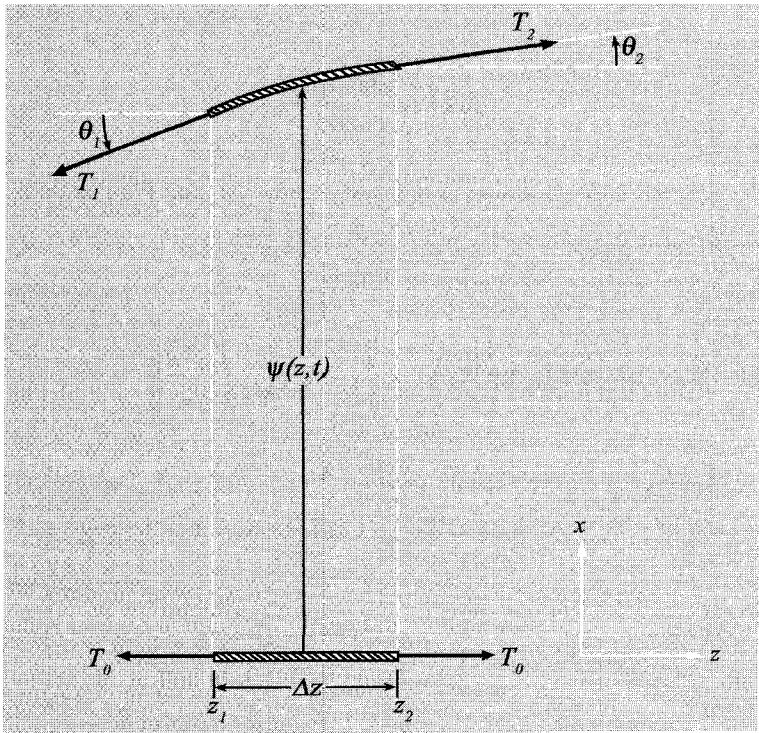
در حالت کلی (غیرتعادلی) این قطعه به‌طور متوسط، دارای یک جابه‌جایی عرضی $\psi(z, t)$ است (شکل ۲-۲). در این حالت این قطعه تار، دیگر خط کاملاً راست نیست، بلکه (به‌طور کلی) اندکی خمیده شده است. از این‌رو در شکل ۲-۲ زوایای θ_1 و θ_2 برابر نیستند. کشش قطعه تار دیگر برابر T نیست زیرا که طول آن بیشتر از طول در حالت تعادل یعنی Δz است. اکنون نیروی خالص F_x وارد بر قطعه را در لحظه‌ای که در شکل نشان داده شده، به‌دست می‌آوریم. انتهای چپ قطعه تار با نیروی $T_1 \sin \theta_1$ به‌سمت پایین کشیده می‌شود. انتهای راست قطعه تار با نیروی $T_2 \sin \theta_2$ به‌سوی بالا کشیده می‌شود. بنابراین مقدار خالص نیرو به‌سمت بالا برابر است با

$$(۶) \quad F_x(t) = T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1$$

اکنون $F_x(t)$ را برحسب $\psi(z, t)$ و مشتق آن را برحسب مکان به‌دست می‌آوریم

$$(۷) \quad \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} = t \text{ شیب تار در مکان } z \text{ در زمان } t$$

طبق شکل ۲-۲، شیب تار در نقطه z_1 برابر $\tan \theta_1$ و در نقطه z_2 برابر $\tan \theta_2$ است. همچنین $T_1 \cos \theta_1$ مؤلفه افقی کشش تار در نقطه z_1 و $T_2 \cos \theta_2$ مؤلفه افقی در نقطه z_2 است. اکنون می‌خواهیم برای حرکت، یک معادله دیفرانسیل خطی به‌دست آوریم. برای این منظور می‌توان از



شکل ۲-۲ نوسانهای عرضی یک تار پیوسته. وضع تعادل یک قطعه بینهایت کوچک در امتداد محور z در پایین نشان داده شده است. وضع و آرایش همان قطعه در حالت کلی در بالا نشان داده شده است.

تقریب اسلینکی یا تقریب نوسانهای کوچک استفاده کرد. در تقریب اسلینکی، چون قطعه تار با ضریب $1/\cos\theta$ از Δz بلندتر است، بنابراین T از T_0 با ضریب $1/\cos\theta$ بزرگتر است. بنابراین $T \cos\theta = T_0$. در تقریب نوسانهای کوچک، از افزایش طول قطعه تار صرفنظر کرده و همچنین $\cos\theta$ را با تقریب برابر واحد فرض می‌کنیم. در این حالت نیز $T \cos\theta = T_0$ می‌شود. بنابراین از معادله (۶) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
 F_x(t) &= T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1 \\
 &= T_2 \cos \theta_2 \tan \theta_2 - T_1 \cos \theta_1 \tan \theta_1 \\
 &= T_0 \tan \theta_2 - T_0 \tan \theta_1 \\
 &= T_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_2 - T_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_1
 \end{aligned} \tag{۸}$$

اکنون تابع $f(z)$ را تعریف می‌کنیم

$$f(z) = \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} \quad (۹)$$

که در آن با نوشتن $f(z)$ متغیر t را حذف کرده‌ایم، زیرا می‌خواهیم t را ثابت نگاه داریم. تابع $f(z)$ را در اطراف z_1 برحسب سری تیلور بسط داده و سپس $z = z_2$ قرار می‌دهیم. [به معادله (۳) پیوست مراجعه کنید].

$$f(z_2) = f(z_1) + (z_2 - z_1) \left(\frac{df}{dz} \right)_1 + \frac{1}{2} (z_2 - z_1)^2 \left(\frac{d^2 f}{dz^2} \right)_1 + \dots \quad (۱۰)$$

که در آن بر طبق شکل ۲-۲، $z_2 - z_1 = \Delta z$ است. اکنون به حدی میل می‌کنیم که در آن Δz به اندازه کافی کوچک باشد تا در معادله (۱۰) از جملات درجه دوم و بالاتر، بتوان صرفنظر کرد. بنابراین می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} f(z_2) - f(z_1) &= \Delta z \left(\frac{df}{dz} \right)_1 = \Delta z \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} \right) \\ &= \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} \right) \\ &= \Delta z \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (۱۱)$$

توجه کنید که در به دست آوردن معادله (۱۱) شاخص پایین ۱ حذف شده است. چون در سری تیلور یعنی معادله (۱۰) از مشتقهای بالاتر صرفنظر می‌کنیم، بنابراین مهم نیست در فاصله Δz در کجا مشتق z را برآورد کنیم. همچنین دقت کنید که با استفاده از نماد $\psi(z, t)$ ، مشتق برحسب مکان را باید به صورت مشتق جزئی نوشت.

اکنون برای به دست آوردن نیروی خالص بر روی قطعه تار، معادلات (۹) و (۱۱) را در معادله (۸) قرار می‌دهیم

$$F_x(t) = T \cdot \Delta z \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} \quad (۱۲)$$

حال قانون دوم نیوتون را به کار می‌بریم. نیروی F_x که با معادله (۱۲) داده می‌شود، برابر با حاصلضرب جرم ΔM قطعه در شتاب قطعه است. سرعت و شتاب قطعه در حالت تعادل z

برابر $\psi(z, t)$ و مشتقهای آن به شرح زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &= \text{جابہ جایی} \\ \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} &= \text{سرعت} \\ \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} &= \text{شتاب} \end{aligned} \quad (۱۳)$$

بنابراین از قانون نیوتون [با قرار دادن $\Delta M = \rho \cdot \Delta z$] نتیجه می‌شود

$$\rho \cdot \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = F_x = T \cdot \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

یعنی

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}} \quad (۱۴)$$

معادله کلاسیک موج. معادله (۱۴) یک معادله بسیار معروف دیفرانسیل درجه دوم خطی با مشتقات جزئی است. این معادله را معادله کلاسیک موج می‌گویند. ما این معادله را اغلب به‌کار خواهیم برد و بسیاری از خواص جوابهای آن و حالت‌های فیزیکی را که از آن استفاده می‌شود بررسی خواهیم کرد. (بدیهی است که در این معادله، ثابت مثبت T/ρ منحصر به تار است. در سایر کاربردهای فیزیکی، ضرایب مثبت دیگری در معادله موج جایگزین آن خواهد شد).

امواج ساکن. اکنون مدهای بهنجار یعنی امواج ساکن یک تار پیوسته را به دست می‌آوریم. بدین منظور فرض می‌کنیم که یک مد داریم. فرض می‌کنیم که تمام اجزای تار با یک حرکت هماهنگ و با بسامد زاویه‌ای ω یکسان و با ثابت فاز φ یکسان، نوسان می‌کنند. بنابراین $\psi(z, t)$ که عبارت است از جابہ جایی ذرات تار از محل تعادل z ، برای تمام ذرات یعنی تمام مقادیر z ، باید همان بستگی زمانی $\cos(\omega t + \varphi)$ را داشته باشد. مطابق معمول، ثابت فاز φ مربوط به "زمان آغاز" مد است. "شکل" یک مد که از درجه‌های آزادی جداگانه a ، b و c تشکیل شده است، با دامنه‌های ارتعاشی نسبی A ، B ، C و غیره مشخص می‌شود. در حالت اخیر، یعنی در مورد یک تار پیوسته، که در آن (تعداد بیشماری) درجه آزادی با پارامتر z مشخص شده‌اند، دامنه ارتعاش درجه‌های آزادی در z (یعنی در همسایگی کوچک z) را به صورت یک تابع پیوسته از z با نشانه $A(z)$ ، می‌توان نوشت. شکل $A(z)$ که تابعی از z است، به مد بستگی دارد یعنی برای هر مد، $A(z)$ متفاوتی وجود دارد. بنابراین شکل کلی یک موج ساکن را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\psi(z, t) = A(z) \cos(\omega t + \varphi) \quad (۱۵)$$

شتاب مربوط به معادله (۱۵) برابر است با

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi = -\omega^2 A(z) \cos(\omega t + \varphi) \quad (16)$$

مشتق جزئی مرتبه دوم معادله (۱۵) نسبت به z عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 [A(z) \cos(\omega t + \varphi)]}{\partial z^2} \\ &= \cos(\omega t + \varphi) \frac{d^2 A(z)}{dz^2} \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن به جای مشتق جزئی، مشتق ساده نسبت به z وجود دارد، زیرا $A(z)$ به زمان بستگی ندارد. با قرار دادن معادلات (۱۶) و (۱۷) در معادله (۱۴) و حذف ضریب مشترک $\cos(\omega t + \varphi)$ نتیجه می شود

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = -\omega^2 \frac{\rho_0}{T_0} A(z) \quad (18)$$

معادله (۱۸) شکل مد را نشان می دهد. از آنجا که هر مد، بسامد زاویه ای ω متفاوتی دارد، و از آنجا که ω^2 در معادله (۱۸) ظاهر می شود، همان گونه که انتظار می رود، مدهای مختلف شکلهای متفاوتی پیدا می کنند.

معادله (۱۸) به شکل معادله دیفرانسیل برای یک نوسان هماهنگ است، اما برای نوسانی برحسب مکان نه برحسب زمان. شکل کلی یک نوسان هماهنگ برحسب مکان را می توان به صورت زیر نوشت

$$A(z) = A \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) + B \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \quad (19)$$

که در آن ضریب ثابت λ نشانگر فاصله ای است که در آن یک نوسان کامل روی می دهد و از این رو طول موج نامیده می شود. این کمیت پارامتر نوسانهایی برحسب مکان است، همان گونه که برای نوسانهای برحسب زمان، پارامتر زمان تناوب T وجود دارد. طول موج λ برحسب واحد سانتیمتر بر هر دوره (یعنی یک دوره نوسان فضایی در امتداد z) و یا فقط برحسب سانتیمتر بیان می شود. برای آنکه نشان دهیم چگونه این جواب را برای معادله (۱۸) اختیار کرده ایم، از معادله (۱۹) دو مرتبه مشتق می گیریم:

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A(z) \quad (20)$$

اکنون از مقایسه معادلات (۱۸) و (۲۰) لزوماً نتیجه می‌شود که

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \omega^2 \left(\frac{\rho_0}{T_0}\right) = (2\pi\nu)^2 \frac{\rho_0}{T_0} \quad (21)$$

یعنی

$$\lambda\nu = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \equiv v_0 = \text{const.} \quad (22)$$

سرعت موج. معادله (۲۲) رابطه‌ای بین طول موج و بسامد را برای امواج ساکن عرضی در یک تار پیوسته همگن به دست می‌دهد. مقدار ثابت $(T_0/\rho_0)^{1/2}$ دارای بعد سرعت است، چون بعد $\lambda\nu$ طول بر زمان است. سرعت $v_0 \equiv (T_0/\rho_0)^{1/2}$ "را سرعت فاز امواج ساکن" در این سیستم می‌نامند. (امواج پیشرونده در فصل ۴ مطالعه خواهند شد.) در این بخش که درباره امواج ساکن بحث می‌شود، احتیاجی به سرعت فاز نیست زیرا امواج ساکن "به جایی نمی‌روند". این امواج مانند یک نوسانگر همانگ "توزیع شده" بسیار بزرگ "ایستاده‌اند و موج می‌خورند". چون می‌خواهیم تصویر ذهنی شما از امواج ساکن درست باشد، از این پس در این فصل، کمیت $(T_0/\rho_0)^{1/2}$ را سرعت نمی‌نامیم.

جواب کلی برای جابه‌جایی $\psi(z, t)$ تار در یک مد تنها (موج ساکن) از ترکیب معادلات (۱۵) و (۱۹) به دست می‌آید:

$$\psi(z, t) = \cos(\omega t + \varphi)[A \sin(2\pi z/\lambda) + B \cos(2\pi z/\lambda)] \quad (23)$$

شرایط مرزی. معادله (۲۳) تا حدودی بسیار کلی است. این معادله، اهمیت شرایط مرزی را آشکار نمی‌کند. تار مرتعش در دو انتها ثابت شده است، اما این داده‌ها را هنوز در جواب وارد نکرده‌ایم. بدین منظور به شرح زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید تمام طول تار برابر L باشد. مبدأ مختصات را در انتهای سمت چپ تار در نقطه $z = 0$ انتخاب می‌کنیم. بدین ترتیب انتهای سمت راست در $z = L$ قرار می‌گیرد. تار در نقطه $z = 0$ ثابت است، بنابراین $\psi(0, t)$ به ازای تمام مقادیر t باید صفر باشد. برای رعایت این شرط لازم است که $B = 0$ باشد. چون در تمام زمانهای t

$$\psi(0, t) = \cos(\omega t + \varphi)[0 + B] = 0 \quad (24)$$

بنابراین

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \sin \frac{2\pi z}{\lambda} \quad (25)$$

شرط مرزی دیگر آن است که تار در نقطه $z = L$ نیز ثابت است، پس $\psi(L, t)$ به ازای تمام مقادیر t باید صفر باشد. بدیهی است که در معادله (۲۵) نباید $A = 0$ اختیار شود، زیرا این حالتی است که در آن تار همواره در حالت سکون باقی می ماند. تنها راه برای آنکه شرط مرزی در L بتواند صدق کند، آن است که

$$\sin \frac{2\pi L}{\lambda} = 0 \quad (26)$$

یعنی فقط آن طول موجهای λ در این شرط مرزی می توانند صدق کنند که برای آنها تعداد نیم طول موجها یعنی L ، عدد درست باشد. بنابراین طول موجهای قابل قبول باید در یکی از حالت‌های زیر صدق کنند:

$$\frac{2\pi L}{\lambda} = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, \dots \quad (27)$$

(چرا حالت $2\pi L/\lambda = 0$ را در نظر نگرفتیم؟) این ترتیب، راههای ممکن برای صدق کردن شرایط مرزی تمام مدهای ممکن تار را در بر می گیرد. مدها را براساس این ترتیب شماره گذاری کنیم، یعنی اولین جمله در این ترتیب را شماره ۱ در نظر می گیریم. بنابراین براساس معادله (۲۷) طول موج مدها با روابط زیر داده می شود

$$\lambda_1 = 2L, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1, \quad \lambda_3 = \frac{1}{3}\lambda_1, \quad \lambda_4 = \frac{1}{4}\lambda_1, \quad \dots \quad (28)$$

نسبت بسامدهای هماهنگ. بسامد مدهای مختلف مربوط به طول موجهایی که از معادله (۲۲) به دست می آیند، عبارت‌اند از:

$$\nu_1 = \frac{v_0}{\lambda_1}, \quad \nu_2 = 2\nu_1, \quad \nu_3 = 3\nu_1, \quad \nu_4 = 4\nu_1, \quad \dots \quad (29)$$

بسامدهای $2\nu_1, 3\nu_1$ و غیره به ترتیب هماهنگهای دوم، سوم و غیره بسامد اصلی ν_1 نامیده می شوند. این خاصیت که بسامد مدها یعنی ν_2 و ν_3 و غیره به ترتیب هماهنگهای بسامد پایتترین مد یعنی ν_1 هستند، بدان جهت است که تار کاملاً همگن و انعطاف پذیر فرض شده است. در اغلب سیستمهای فیزیکی حقیقی، بسامد مدها از این ترتیب هماهنگی نسبت بسامدها پیروی نمی کنند. مثلاً بسامد مدها در یک تار با چگالی جرمی غیرهمگن، یک ترتیب هماهنگی از بسامد اصلی را تشکیل نمی دهند. مثلاً ممکن است نسبتهای $\nu_2 = 2.78\nu_1$ ، $\nu_3 = 4.62\nu_1$ و غیره وجود داشته باشد. برای یک سیم حقیقی پیانو یا ویولون، بسامد مدها تقریباً اما نه دقیقاً، از ترتیب

هماهنگی پیروی می‌کنند. زیرا این سیمها کاملاً انعطاف‌پذیر نیستند. (برای شرح کیفی این موضوع که چگونه این نسبت بسامدهای "هماهنگ" در نتیجه غیرهمگنی تار است، به مسئله ۲-۷ مراجعه کنید.)

مدهای تار در شکل ۲-۳ نشان داده شده است. حالت تعادل مربوط به اولین جمله‌ای است که در ترتیب معادله (۲۷) وجود ندارد یعنی $2\pi L/\lambda = 0$ و بسامد مربوط به آن صفر است. در این حالت حرکتی وجود ندارد و حالت تعادل، مد نامیده نمی‌شود.

عدد موج. عکس طول موج λ را عدد موج می‌گویند و به σ نشان می‌دهند. واحد عدد موج دور بر سانتیمتر و یا غالباً "معکوس سانتیمتر" است، این کمیت پارامتر نوسان برحسب مکان است، همان‌طور که ν پارامتر نوسان برحسب زمان است

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \text{عدد موج (دور بر سانتیمتر)} \quad (30)$$

حاصلضرب عدد موج در 2π را عدد موج زاویه‌ای، k ، می‌نامند و واحد آن رادیان بر سانتیمتر است. این کمیت برای نوسانهای برحسب مکان است، همان‌گونه که بسامد زاویه‌ای ω برای نوسانهای برحسب زمان است.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \text{عدد موج زاویه‌ای (رادیان بر سانتیمتر)} \quad (31)$$

با استفاده از این کمیتها، یک موج ساکن را می‌توان به چندین شکل معادل نوشت

$$\psi(z, t) = A \sin 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \frac{z}{\lambda} = A \sin 2\pi \nu t \sin 2\pi \sigma z = A \sin \omega t \sin kz \quad (32)$$

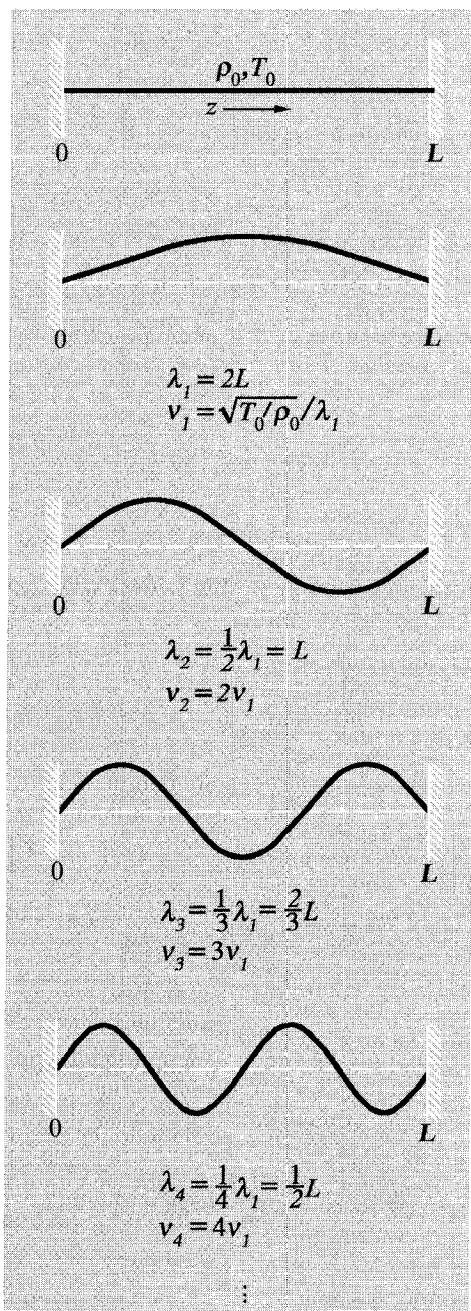
به همین صورت، ترتیب مدهای بهنجاری که با معادلات (۲۷)، (۲۸)، و (۲۹) داده می‌شوند را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$k_1 L = \pi \text{ rad}, \quad k_2 L = 2\pi \text{ rad}, \quad k_3 L = 3\pi \text{ rad}, \quad \dots \quad (33)$$

$$\sigma_1 L = \frac{1}{2} \text{ cycle}, \quad \sigma_2 L = 1 \text{ cycle}, \quad \sigma_3 L = \frac{3}{2} \text{ cycle}, \quad \dots \quad (34)$$

رابطه پاشندگی. معادله (۲۲) رابطه‌ای بین بسامد و طول موج مدهای بهنجار یک تار انعطاف‌پذیر یکنواخت را به دست می‌دهد

$$\nu = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \cdot \frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \cdot \sigma$$



شکل ۲-۳ مدهای تار همگن پیوسته با دو انتهای ثابت.

یا (با ضرب کردن در 2π)

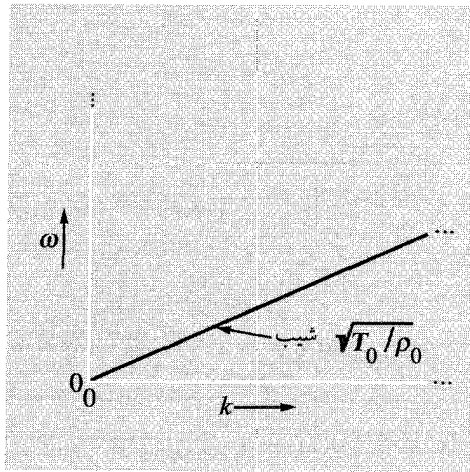
$$\omega = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} k \quad (35)$$

معادله (۳۵) رابطه‌ای بین بسامد و عدد موج برای مدهای بهنجار تار است. (توجه کنید که صفت "زاویه‌ای" را از عبارت "بسامد زاویه‌ای" و "عدد موج زاویه‌ای" حذف کرده‌ایم. این کار عملاً متداول است چون نشانه‌ها و واحدها همیشه هرگونه ابهامی را از میان برمی‌دارند.) این رابطه که در آن ω^2 برحسب تابع k است، رابطه پاشندگی نامیده می‌شود. این رابطه راه ساده‌ای برای مشخص کردن رفتار موجی یک سیستم است.

رابطه پاشندگی برای سیم حقیقی پیانو. رابطه پاشندگی که با معادله (۳۵) داده می‌شود، بینهایت ساده است اما روابط پیچیده‌تری را در آینده خواهیم یافت. در یک رابطه پاشندگی پیچیده، کمیت $\lambda v = \omega/k$ مقدار ثابتی نیست، یعنی به طول موج بستگی دارد. مثلاً قانون پاشندگی برای یک سیم حقیقی پیانو تقریباً برابر است با

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{T_0}{\rho_0} + \alpha k^2 \quad (36)$$

که در آن α یک ضریب ثابت مثبت کوچک است و اگر سیم کاملاً انعطاف‌پذیر باشد، مقدار آن صفر است. [در این حالت معادله (۳۶) به معادله (۳۵) تبدیل می‌شود.] مدهای یک سیم حقیقی پیانو دارای همان بستگی فضایی مدهای تار است که کاملاً انعطاف‌پذیر است، یعنی $\lambda_1 = 2\lambda$ ، $\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1$ ، $\lambda_3 = \frac{1}{3}\lambda_1$ ، و غیره، زیرا شرایط مرزی در هر دو حالت یکسان است. اما مدها در ترتیب "همانگی" $\nu_1 = 2\nu_2$ ، $\nu_2 = 3\nu_3$ و غیره صدق نمی‌کنند، زیرا رابطه پاشندگی یعنی معادله (۳۶) چنین ترتیبی را به دست نمی‌دهد. ترتیب همانگی فقط در حد ایده‌آل که در آن α برابر صفر یعنی $\lambda v = \text{const.}$ است، به دست می‌آید. در یک سیم حقیقی پیانو، بسامد مدهای بالاتر اندکی "زیرتر" (یعنی بسامدهای اندکی بالاتر) از بسامدهایی است که با ترتیب همانگی داده می‌شوند. امواج پاشنده و غیر پاشنده. امواجی را که در رابطه ساده پاشندگی یعنی $\omega/k = \text{const.}$ صدق می‌کنند، "امواج غیر پاشنده" می‌نامند. هنگامی که ω/k به طول موج و در نتیجه به بسامد بستگی داشته باشد، امواج را "پاشنده" می‌گویند. در امواج پاشنده معمولاً منحنی تغییرات ω را برحسب k رسم می‌کنند. در این مثال، یعنی تار انعطاف‌پذیر، همان‌گونه که در شکل ۲-۴ نشان داده شده است، منحنی به صورت خط مستقیمی است که از نقطه $\omega = k = 0$ می‌گذرد و دارای شیب $(T_0/\rho_0)^{1/2}$ است.



شکل ۲-۲ رابطه پاشندگی برای تار پیوسته، همگن و انعطاف‌پذیر.

۳-۲ حرکت کلی تار پیوسته و آنالیز فوریه

کلی‌ترین حالت حرکت یک تار پیوسته (با دو انتهای ثابت و برای ارتعاشات عرضی در امتداد x) از برهم‌نهی تمام مدها با شماره‌های (۱، ۲، ۳، ...) با دامنه‌های A_1, A_2, A_3, \dots و ثابتهای فاز $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ به‌دست می‌آید:

$$\psi(z, t) = A_1 \sin k_1 z \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin k_2 z \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots \quad (37)$$

که در آن مقادیر k_n همان‌طور که در بخش قبل ذکر شد، طوری انتخاب می‌شود که در شرایط مرزی $z = L$ و $z = 0$ صدق کنند و مقادیر ω_n با رابطه پاشندگی $\omega(k)$ به k_n مربوط می‌شوند. دامنه‌های A_n و ثابتهای فاز φ_n که چگونگی حرکت را برای تمام مکانهای z و تمام زمانهای t کامل می‌کنند با مشخص کردن شرایط اولیه یعنی جابه‌جایی لحظه‌ای $\psi(z, t)$ و سرعت لحظه‌ای مربوط به آن یعنی $v(z, t) = \partial\psi(z, t)/\partial t$ برای هر نقطه z در لحظه $t = 0$ تعیین می‌شوند.

حرکت تار با دو انتهای ثابت. فرض کنید که در زمان $t < 0$ به وسیله نوعی گیره تار را مجبور کنیم که به شکل $f(z)$ درآید. آنگاه با برداشتن ناگهانی گیره در زمان $t = 0$ ، تار را رها می‌کنیم. بنابراین در زمان $t = 0$ هر جزء تار دارای جابه‌جایی $\psi(z, 0)$ برابر $f(z)$ و سرعت $v(z, 0)$ برابر صفر است. اکنون جمله n ام در عبارت سرعت [که مشتق نسبت به زمان معادله (۲۷) است] متناسب با $\sin(\omega_n t + \varphi_n)$ است که در زمان $t = 0$ به $\sin \varphi_n$ تبدیل می‌شود. بنابراین با قرار

دادن هر ثابت فاز φ_n برابر صفر و یا برابر π برای تمام مقادیر z می‌توان $v(z, 0) = 0$ را در نظر گرفت. در این صورت، ثابت فاز $\varphi_1 = \pi$ (مثلاً) درست برابر با مقدار A_1 با علامت منفی است. بنابراین اگر تمام ثابتهای فاز را برابر صفر و دامنه‌های A_1, A_2 و غیره را مثبت و یا منفی قرار دهیم، این شرایط اولیه را می‌توانیم به دست آوریم. از این رو برای $v(z, 0) = 0$ داریم

$$\psi(z, t) = A_1 \sin k_1 z \cos \omega_1 t + A_2 \sin k_2 z \cos \omega_2 t + \dots \quad (38)$$

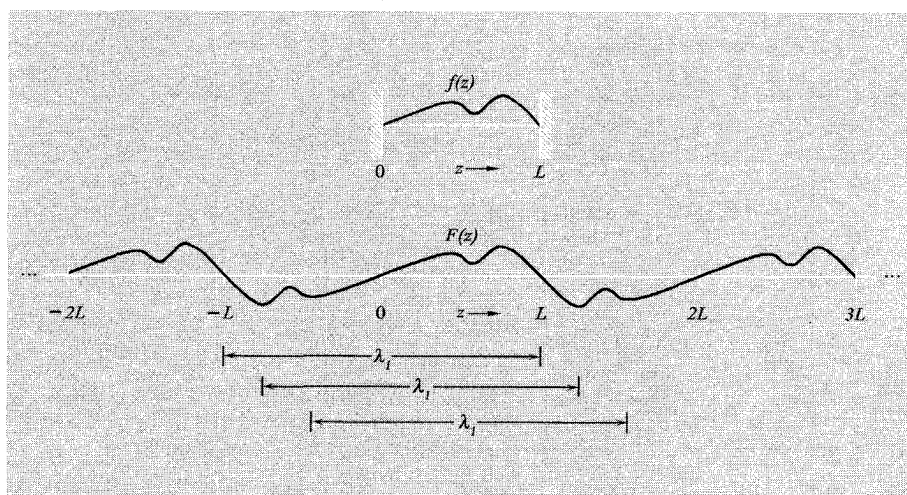
و در زمان $t = 0$

$$\psi(z, 0) = f(z) = A_1 \sin k_1 z + A_2 \sin k_2 z + \dots \quad (39)$$

بعداً خواهیم دید که معادله (۳۹)، دامنه‌های A_1 و A_2 را تعیین می‌کند.

سری فوریه برای تابعی که در دو انتها صفر است. تابع $f(z)$ می‌تواند یک تابع خیلی کلی از z باشد. تنها شرطی که قید شد، آن بود که تابع می‌بایست به شکل تار باشد. بنابراین تنها شرط لازم برای $f(z)$ آن است که به‌ازای $z = 0$ و $z = L$ مقدار $f(z) = 0$ باشد. همچنین تابع $f(z)$ در مقیاس «کوچک» نباید دارای «تیزی» باشد زیرا فرض بر آن است که تابع موج $\psi(z, t)$ تابعی با تغییرات آهسته از z است. بنابراین تابع $f(z)$ به‌طور مناسبی باید هموار باشد تا بتوان آن را به شکل تار درآورد و هنوز هم تاری داشت که از معادله دیفرانسیلی که در تقریب «پیوسته» به دست آوردیم، اطاعت کند. از این رو هر تابع مناسبی مانند $f(z)$ که به‌ازای $z = 0$ و $z = L$ برابر صفر باشد را می‌توان برحسب سریهایی به شکل معادله (۳۹) یعنی مجموع نوسانهای سینوسی، بسط داد. معادله (۳۹) را سری فوریه یا بسط فوریه می‌نامند. این معادله مثال خاصی از یک سری فوریه است که فقط در توابعی از $f(z)$ که به‌ازای $z = 0$ و $z = L$ صفر می‌شوند، صدق می‌کند. با وجود این، مجموعه بسیار وسیعتری از توابع را می‌توان به صورت بسطهای مناسب فوریه بیان کرد. اکنون این گروه از توابع را پیدا می‌کنیم.

تابع $f(z)$ مجبور بود به شکل تار باشد، بنابراین فقط بین $z = 0$ و $z = L$ تعریف شد. ولی توابع $\sin k_1 z, \sin 2k_1 z, \sin 3k_1 z$ و غیره که سری بینهایت معادله (۳۹) را تشکیل می‌دهند، به‌ازای تمام مقادیر z از $-\infty$ تا $+\infty$ تعریف شده‌اند. همچنین توجه کنید که $\sin k_1 z$ برحسب z یک تابع تناوبی با تناوب λ_1 است. یعنی این تابع در شرط تناوبی صدق می‌کند. بدین معنی که برای هر z مشخص، مقدار این تابع در $\lambda_1 + z$ همان مقداری است که به‌ازای z دارد. (در این مثال λ_1 برابر $2L$ است.) توجه کنید که تابع $\sin 2k_1 z$ برحسب z نیز یک تابع تناوبی با تناوب λ_1 است. (البته این تابع در فاصله λ_1 دارای دو دور است، از این رو تناوب این تابع هم $\lambda_1/2$ و هم λ_1 است.) در حقیقت تمام توابع سینوسی در بسط فوریه یعنی معادله (۳۹) برحسب z



شکل ۵-۲ ساختن یک تابع تناوبی $F(z)$ با تناوب $\lambda_1 = 2L$ از تابع $f(z)$ که در نقاط $z = 0$ و $z = L$ برابر صفر است. دقت کنید که تابع $F(z)$ در شرط تناوبی صدق می‌کند.

یک تابع تناوبی با تناوب λ_1 هستند. بنابراین بسط فوریه نیز یک تابع تناوبی با تناوب λ_1 است. از این رو گروهی از توابع را که بسط فوریه آنها به شکل معادله (۳۹) است می‌توان بدین ترتیب تعمیم داد: تمام توابع تناوبی $f(z)$ که تناوب آنها λ_1 است و در $z = 0$ و $z = 1/2\lambda_1$ صفر می‌شوند را می‌توان برحسب سریهای فوریه و به شکل معادله (۳۹) بسط داد. برای هر تابع مفروض $f(z)$ که فقط بین $z = 0$ و $z = L$ تعریف می‌شود و در این نقاط برابر صفر است، می‌توان یک تابع تناوبی $f(z)$ به شرح زیر پیدا کرد که دارای همان بسط فوریه $f(z)$ باشد: بین $z = 0$ و $z = L$ تابع $f(z)$ را با تابع $f(z)$ همزمان در نظر می‌گیریم. بین L و $2L$ با در نظر گرفتن "تصویر معکوس شده آینه‌ای" تابع $f(z)$ در یک "آینه" که در $z = L$ قرار دارد، تابع $F(z)$ را می‌سازیم. اکنون که تابع $F(z)$ را بین $z = 0$ و $z = 2L$ تعریف کردیم، آن را به سادگی در فواصل متوالی به طول $2L$ تکرار می‌کنیم، تا برای تمام مقادیر z ، تابع $F(z)$ تعریف شود. شکل ۵-۲ شکل تابع را نشان می‌دهد.

آنالیز فوریه یک تابع تناوبی از z . اکنون مجموعه‌توابعی را که برای آنها می‌توان بسط فوریه را به کار برد، بار دیگر بسط می‌دهیم: معادله (۳۹) فقط مربوط به توابعی است که با تناوب λ_1 تناوبی هستند و به ازای $z = 0$ و $z = 1/2\lambda_1$ برابر صفر می‌شوند. البته این شرط که تابع در نقاط $z = 0$ و $z = 1/2\lambda_1$ صفر شود به سبب انتخاب ویژه شرایط مرزی بود، بدین معنی که هر دو انتهای تار ثابت فرض شدند. بدون در نظر گرفتن این شرایط مرزی ویژه، جوابهای معادله

ارتعاش تار نه تنها شامل جملات $\sin mk_1 z$ است بلکه دارای جملات $\cos mk_1 z$ نیز خواهد بود. این توابع نیز برحسب z و با تناوب λ_1 تناوبی هستند، اما به ازای $z = 0$ و $z = 1/2\lambda_1$ صفر نمی شوند. (این توابع مربوط به ارتعاش تار هستند که یک یا هر دو انتهای آن آزاد است.) وقتی سری شامل این توابع نیز شود، سرانجام به مجموعه بسیار جامعی از توابع می رسیم که برای آنها می توان سری فوریه را نوشت: تمام توابع تناوبی (قابل قبول) مانند $F(z)$ با تناوب λ_1 یعنی تابعی که برای آنها به ازای جميع مقادیر z رابطه $F(z + \lambda_1) = F(z)$ برقرار است را می توان برحسب سری فوریه به شکل زیر بسط داد

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \sin n \frac{2\pi}{\lambda_1} z + B_n \cos n \frac{2\pi}{\lambda_1} z \right] \\ &= B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n \frac{2\pi}{\lambda_1} z + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n \frac{2\pi}{\lambda_1} z \\ &= B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nk_1 z + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos nk_1 z \end{aligned} \quad (40)$$

پیدا کردن ضرایب فوریه. فرایند پیدا کردن دامنه ها یا ضرایب فوریه یعنی B_n و A_n را (به ازای تمام مقادیر n) برای یک تابع تناوبی مفروض $F(z)$ آنالیز فوریه می نامند. اکنون نشان می دهیم که چگونه می توان این ضرایب را پیدا کرد.

ابتدا B_0 را به شرح زیر پیدا می کنیم: از هر دو طرف معادله (40) در یک دوره تناوب کامل $F(z)$ انتگرال می گیریم یعنی از $z = z_1$ تا $z = z_2$ که در آنها z_1 مقدار غیرمشخص z و $z_2 = z_1 + \lambda$ است. چون تابع $F(z)$ معلوم فرض می شود، انتگرال آن را می توان از z_1 تا z_2 که انتگرال سمت چپ معادله (40) است، به دست آورد. اکنون انتگرال سمت راست معادله (40) را در نظر بگیریم. در این سمت تعداد محدودی جمله و در نتیجه تعداد محدودی انتگرال وجود دارد. اولین جمله B_0 است که انتگرال زیر را به وجود می آورد

$$\int_{z_1}^{z_2} B_0 dz = B_0 (z_2 - z_1) = B_0 \lambda_1 \quad (41)$$

هنگامی که در یک دوره تناوب انتگرال گرفته شود، تمام بقیه جملات صفر خواهند شد. زیرا در هر دوره تناوبی کامل، $\sin nk_1 z$ و $\cos nk_1 z$ به طور یکسان مثبت و منفی می شوند و بنابراین انتگرال آنها برابر صفر می شود:

$$\int_{z_1}^{z_2} \sin nk_1 z dz = 0; \quad \int_{z_1}^{z_2} \cos nk_1 z dz = 0$$

از این رو مقدار B_0 به دست می آید. این مقدار برابر است با

$$B_0 \lambda_1 = \int_{z_1}^{z_2} F(z) dz \quad (42)$$

اکنون نشان می دهیم که چگونه A_m را می توان پیدا کرد، که در آن m مقدار مشخص n از یک تا بینهایت در معادله (۴۰) است. راه حل آن است که هر دو طرف معادله (۴۰) را در $\sin mk_1 z$ ضرب کنیم و از هر دو طرف آن در یک دوره تناوب کامل $F(z)$ انتگرال بگیریم. انتگرال سمت چپ را می توان محاسبه کرد زیرا تابع $F(z)$ معلوم است. اکنون انتگرال سمت راست را در نظر بگیرید. اولین جمله عبارت از حاصلضرب انتگرال B_0 در $\sin mk_1 z$ است. این انتگرال برابر صفر است، زیرا شامل m دوره تناوب کامل $\sin mk_1 z$ است. بنابراین فقط انتگرالهای خاصی را که در آن $n = m$ است، در نظر بگیرید. توان دوم $\sin mk_1 z$ در یک دوره تناوب $f(z)$ به طول λ_1 (که شامل m دوره تناوب کامل تابع $\sin mk_1 z$ است) به طور متوسط برابر $1/2$ است. بدین ترتیب جمله $1/2 A_m \lambda_1$ به انتگرال سمت راست معادله (۴۰) اضافه می شود. تمام جملات دیگر به شرح زیر برابر صفرند: مثلاً انتگرال $\sin nk_1 z \sin mk_1 z$ را هنگامی که m برابر n نیست، در نظر بگیرید. این عبارت را به شکل زیر می توان نوشت

$$\sin nk_1 z \sin mk_1 z = \frac{1}{2} \cos(n-m)k_1 z - \frac{1}{2} \cos(n+m)k_1 z \quad (43)$$

چون $n-m$ و $n+m$ اعداد درست هستند، هر یک از دو جمله سمت راست معادله (۴۳) در هر دوره تناوب کامل تابع $F(z)$ به طول λ_1 ، به دفعات مساوی مثبت و منفی می شوند. بنابراین، انتگرال هر دو جمله (بجز در حالتی که $n = m$ است و قبلاً به دست آوردیم) برابر صفر است. به همین ترتیب انتگرال جملات به شکل $\cos nk_1 z \sin mk_1 z$ برابر صفر است زیرا اتحاد زیر وجود دارد

$$\cos nk_1 z \sin mk_1 z = \frac{1}{2} \sin(m+n)k_1 z + \frac{1}{2} \sin(m-n)k_1 z$$

بنابراین نتیجه می شود که

$$\frac{1}{2} A_m \lambda_1 = \int_{z_1}^{z_2} \sin mk_1 z F(z) dz \quad (44)$$

به همین ترتیب می توان با ضرب کردن هر دو طرف معادله (۴۰) در $\cos mk_1 z$ و انتگرال گیری در یک دوره تناوب به طول λ_1 ، ضرایب B_m را به دست آورد. تنها جمله غیر صفر در انتگرال سمت

راست، جمله‌ای است که شامل ضریب B_m است. بنابراین نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{\lambda_1} B_m \lambda_1 = \int_{z_1}^{z_1 + \lambda_1} \cos mk_1 z F(z) dz \quad (45)$$

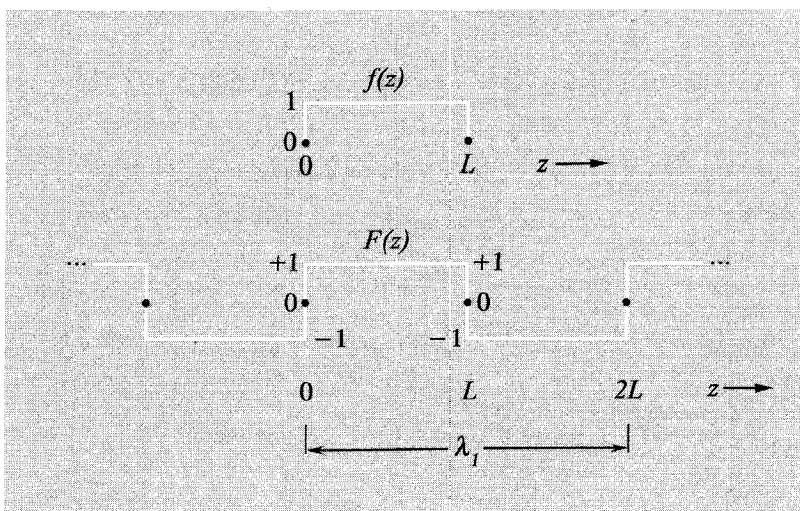
ضرایب فوریه: نتایج محاسبات با معادلات (۴۰)، (۴۲)، (۴۴)، (۴۵) داده می‌شوند که برای آنکه راحت به آنها مراجعه کنیم، همگی را در یک جا می‌نویسیم

$$\begin{aligned} F(z) &= B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mk_1 z + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos mk_1 z \\ B_0 &= \frac{1}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1 + \lambda_1} F(z) dz \\ A_m &= \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1 + \lambda_1} F(z) \sin mk_1 z dz \\ B_m &= \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1 + \lambda_1} F(z) \cos mk_1 z dz \end{aligned} \quad (46)$$

که در آن z_1 مقدار نامشخص z است. معادلات (۴۶) نشان می‌دهند که چگونه می‌توان هر تابع تناوبی از z مانند $F(z)$ را که دارای دوره تناوب λ_1 است، آنالیز فوریه کرد.

موج مربعی. حال یک مثال روشن، یعنی آنالیز فوریه یک "موج مربعی" را شرح می‌دهیم. تابع $f(z)$ را که در نقاط $z = 0$ و $z = L$ برابر صفر ولی در فاصله $0 < z < L$ برابر $+1$ است، در نظر می‌گیریم. (این تابع در نقاط $z = 0$ و $z = L$ ناپیوستگی دارد، به طوری که فرض مبحث قبل یعنی تابع در همه جا "هموار" است، در آن صادق نیست. بنابراین نمی‌توان انتظار داشت که سری فوریه بتواند نمایشگر کامل یک موج مربعی باشد. نتیجه آنکه در نقاط $z = 0$ و $z = L$ برای هر جزء متناهی سری یک "فرارفتگی میخی شکل" تیز وجود دارد. هرچه جملات بیشتری اضافه شود، بیشینه تیزتر می‌شود، اما ارتفاع آن به صفر نمی‌رسد).

تابع تناوبی $F(z)$ که براساس دستورالعمل شکل ۲-۵ نوشته می‌شود به شرح زیر است: $F(z) = 0$ به ازای $z = 0$ ، $F(z) = +1$ به ازای $0 < z < L$ ، $F(z) = 0$ به ازای $z = L$ ، $F(z) = -1$ به ازای $L < z < 2L$ و غیره، همان طور که در شکل ۲-۶ نشان داده شده است. با استفاده از معادلات (۴۶)، نتایج زیر را به آسانی می‌توان به دست آورد (مسئله ۲-۱۱). $B_0 = 0$ ؛ به ازای تمام مقادیر m ؛ $A_m = 0$ به ازای $m = 2, 4, 6, 8, \dots$ (اعداد



شکل ۲-۶ موج مربعی $F(z)$. موج مربعی تناوبی $F(z)$.

زوج، $A_m = 4/m\pi$ به ازای $m = 1, 3, 5, 7, \dots$ (اعداد فرد). بنابراین $F(z)$ با رابطه زیر داده می شود

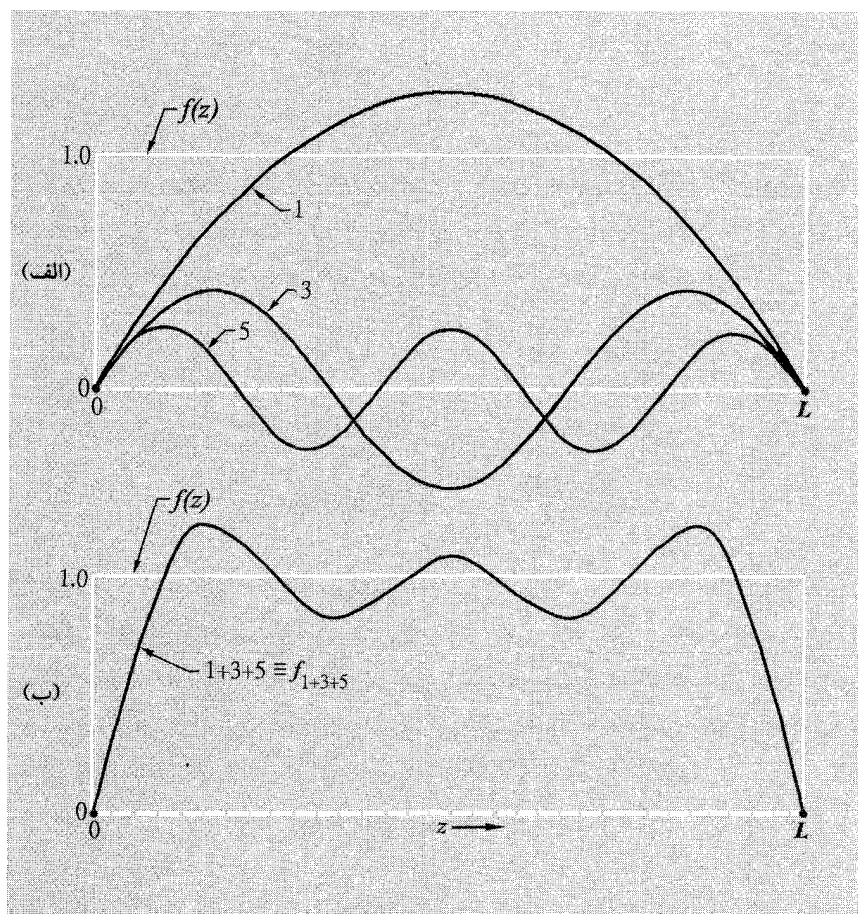
$$\begin{aligned}
 F(z) &= B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos mk_1 z + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mk_1 z \\
 &= \frac{4}{\pi} \left\{ \sin k_1 z + \frac{1}{3} \sin 3k_1 z + \frac{1}{5} \sin 5k_1 z + \dots \right\} \\
 &= 1.273 \sin \frac{\pi z}{L} + 0.424 \sin \frac{3\pi z}{L} + 0.255 \sin \frac{5\pi z}{L} + \dots \quad (47)
 \end{aligned}$$

شکل ۲-۷ تابع موج مربعی $f(z)$ ، منحنیهای سه جمله اول معادله (۴۷) و برهم نهش این سه جمله اول را نشان می دهد.

فرض کنید به جای آنکه یک فنر اسلینکی را مجبور کنیم که به شکل تابع $f(z)$ با گوشه های تیز درآید، در زمان صفر آن را دقیقاً به شکل تابع زیر درآوریم

$$g(z) = 1.273 \sin \frac{\pi z}{L} + 0.424 \sin \frac{3\pi z}{L} + 0.255 \sin \frac{5\pi z}{L} \quad (48)$$

این رابطه مربوط به سه جمله اول معادله (۴۷) است و در شکل ۲-۷ (ب) رسم شده است. اکنون فنر اسلینکی را در لحظه $t = 0$ رها می کنیم. مقدار $\psi(z, t)$ چقدر است؟ آیا شکل فنر با افزایش t ثابت باقی می ماند؟ (به مسئله ۲-۱۶ مراجعه کنید.)



شکل ۲-۷ آنالیز فوریه تابع موج مربعی $f(z)$. (الف) تابع موج مربعی $f(z)$ و سه جزء اولیه تجزیه فوریه آن. نشانه‌های ۱، ۳، و ۵ مربوط به مدهای بهنجار ۱، ۳، و ۵ هستند. (ب) تابع موج مربعی $f(z)$ و برهم‌نهی سه مؤلفه اول از بسط فوریه آن، f_{1+3+5} .

آنالیز فوریه یک تابع تناوبی برحسب زمان. تابع $F(z)$ که به ازای تمام مقادیر t تعریف شده و برحسب t تناوبی است با دوره تناوب T_1 مفروض است:

$$F(t + T_1) = F(t) \quad \text{به ازای هر مقدار } t \quad (49)$$

فرض می‌کنیم که تابع $F(t)$ را برحسب سری فوریه بتوان بسط داد:

$$F(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega_1 t, \quad (50)$$

که در آن

$$\omega_1 = 2\pi\nu_1 = \frac{2\pi}{T_1} \quad (51)$$

ضرایب فوریه را می‌توان از نتایج آنالیز فوریه یک تابع تناوبی فضایی یعنی $F(z)$ که در بالا مطالعه کردیم، مستقیماً به‌دست آورد. آنالیز ریاضی متغیر $\theta = \omega_1 t$ و متغیر $\theta = k_1 z$ را از هم تمیز نمی‌دهد. بنابراین ضرایب معادلات (۵۰) مستقیماً از معادلات (۴۶) به‌دست می‌آیند

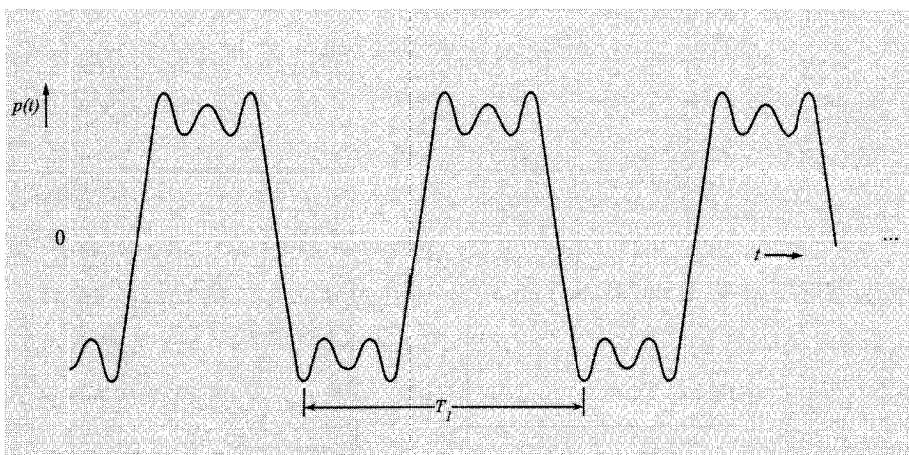
$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{1}{T_1} \int_{t_1}^{t_1+T_1} F(t) dt, \\ B_n &= \frac{2}{T_1} \int_{t_1}^{t_1+T_1} F(t) \cos n\omega_1 t dt, \\ A_n &= \frac{2}{T_1} \int_{t_1}^{t_1+T_1} F(t) \sin n\omega_1 t dt \end{aligned} \quad (52)$$

که در آنها زمان t_1 هر زمان مناسب می‌تواند باشد.

صدای همزمان چند سیم پیانو. در این حالت به‌جای آنالیز فوریه یک تابع معلوم $F(t)$ ، برهم‌نهی اجزای معلوم را در نظر می‌گیریم. فرض کنید پیانویی داریم که در "گام علمی" کوک شده است. (اگر می‌خواهید درباره گامهای موسیقی بیشتر بدانید، به آزمایش خانگی ۲-۶ مراجعه کنید.) فرض کنید $\nu_1 = 128 \text{ cps}$ است. این نت C است که یک اکتاو (یعنی با ضریب ۲ در بسامد) پایینتر از C میانی است. اکنون فرض می‌کنیم $\nu_3 = 3\nu_1 = 384 \text{ cps}$ باشد. این بسامد نت G بالاتر از C میانی است. فرض کنید $\nu_5 = 5\nu_1 = 640 \text{ cps}$ باشد. این نت E بالای G و بالاتر از C میانی است. اکنون هر سه نت را همزمان بنوازید؛ صدایی موزون و "باز" شنیده می‌شود. اگر این نتها را دقیقاً همزمان بنوازید، و اگر نیروی نواختن را طوری تنظیم کنید که فشار پیمانه‌ای هوا در گوش برای سیم C ۱۲۸ (با واحد مناسب) برابر $1.273 \sin 2\pi\nu_1 t$ و فشار حاصل از سیم G ۳۸۴ برابر $0.424 \sin 2\pi\nu_3 t$ و فشار به‌وسیله سیم E ۶۴۰ برابر $0.255 \sin 2\pi\nu_5 t$ باشد، در این صورت فشار کلی هوا وارد برگوش یعنی $p(t)$ برابر با برهم‌نهی زیر است:

$$p(t) = 1.273 \sin 2\pi\nu_1 t + 0.424 \sin 2\pi\nu_3 t + 0.255 \sin 2\pi\nu_5 t \quad (53)$$

اما معادله (۵۳) شباهت زیادی به معادله (۴۸) دارد که در شکل ۲-۷ (ب) ترسیم شده است. تنها کاری که برای به‌دست آوردن منحنی $p(t)$ باید بکنیم آن است که متغیرها را از $k_1 z$ به $k_1 t$ تغییر دهیم و منحنی شکل ۲-۷ (ب) را ادامه دهیم. بدین ترتیب نتیجه‌ای که در شکل ۲-۸ نشان داده شده است به‌دست می‌آید.



شکل ۸-۲ فشار پیمانه‌ای در گوش در نتیجه برهم‌نهمش انتهای C128، G384 و G640 با دامنه‌های نسبی و فازهای معادله (۵۳). زمان تناوب T_1 برابر $1/128$ ثانیه است.

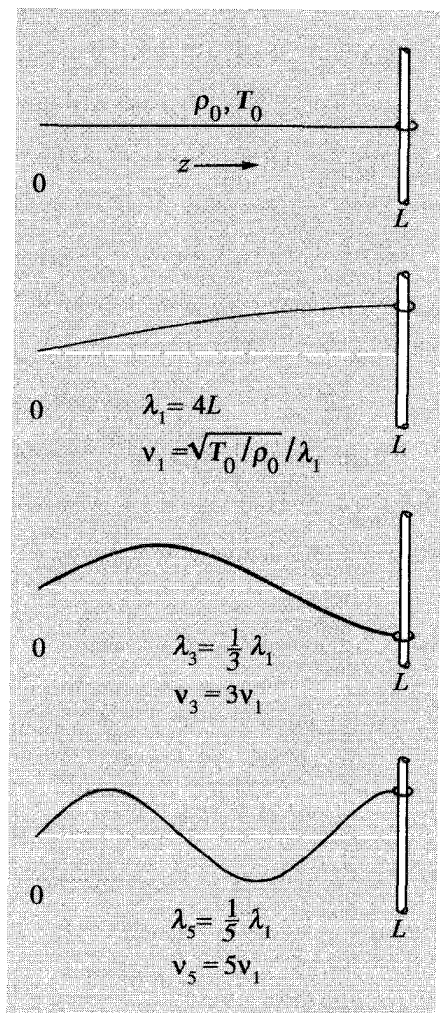
اگر تمام کلیدها را دقیقاً همزمان (یعنی با دقت خیلی کمتر از $\frac{1}{128}$ ثانیه) بنوازیم، فازهای نسبی سه نت، فازهای معادله (۵۳) نخواهند بود و برهم‌نهمش آنها مانند شکل ۸-۲ نیست. اما گوش این اختلاف را متوجه نمی‌شود! گوش (و مغز) بر روی فشار کلی آنالیز فوریه انجام می‌دهد. و این چنین باید باشد، زیرا هریک از نت‌های مجموعه همزمان نواخته‌شده تنها به‌تنهایی ”شنیده“ و تشخیص داده می‌شود. اما داده‌های مربوط به فاز نسبی تنها ظاهراً دور ریخته می‌شوند و یا شاید به‌دست نمی‌آیند. در غیر این صورت، اختلاف صدا را که به فازهای نسبی بستگی دارد، متوجه می‌شدید. دستگاه آشکارکننده ارتفاع نت در گوش غشای حلزونی نام دارد. این دستگاه در داخل یک عضو مارپیچی شکل که از مایعی پر است در گوش میانی قرار گرفته و حلزون گوش نامیده می‌شود. حلزون گوش به‌طور مکانیکی به پرده گوش جفت شده است. نزدیکترین نقطه انتهای غشای حلزونی به پرده گوش، با بسامد حدود 20000 cps و دورترین انتها به پرده گوش، با بسامد حدود 20 cps تشدید می‌شود. بنابراین دامنه بسامدهای قابل شنیدن در حدود 20 cps تا 20 kc است. عصب حلزونی گوش در غشای حلزونی، گیرنده‌های حسی دارد و ارتعاشات مکانیکی را به سیگنال‌های الکتریکی ”تبدیل“ می‌کند که به مغز هدایت می‌شوند و در آنجا به‌گونه‌ای تحلیل شده و احساس شنوایی را به‌وجود می‌آورند. با انجام مکرر این آزمایش، یعنی با نواختن همزمان نتها و مشاهده اینکه احساس شنوایی یکسان می‌ماند [با وجودی که $p(t)$ بسته به فازهای نسبی، شکل کاملاً متفاوتی دارد] داده‌های مربوط به فاز نسبی ارتعاشات قسمتهای مختلف غشای حلزونی از بین می‌رود. شاید هم این داده‌ها هرگز جمع‌آوری نمی‌شوند. شاید تبدیل‌کننده (انرژی از مکانیکی به الکتریکی)

یک آشکارساز با قانون مربعی است، یعنی آشکارسازی که خروجی آن سیگنال الکتریکی متناسب با مربع دامنه ارتعاش غشای حلزونی، است. شاید هم سیگنال عصبی، داده‌های مربوط به فاز را هم هدایت می‌کند [یعنی شاید سیگنال به جای $\psi^2(z, t)$ شامل $\psi(z, t)$ است]، اما مغز از داده‌های مربوط به فاز استفاده نمی‌کند، یعنی برهم‌نهی $\psi(z, t)$ از سیگنالهای عصبی مختلف را تشکیل نمی‌دهد. ظاهراً داده‌های مربوط به فاز برای تنازع بقا ارزش چندانی ندارند، زیرا در غیر این صورت انسان در دوران تکامل مسلماً نوعی سازوکار آشکارسازی فاز نیز به دست می‌آورد.

شرایط مرزی دیگر. در مسئله کلی ارتعاشات عرضی یک تار پیوسته، لازم نیست که هر دو انتهای تار ثابت باشد. حداقل تا آنجا که به ارتعاشات عرضی مربوط می‌شود، یک یا هر دو انتهای تار می‌تواند "آزاد" باشد. کشش و حالت تعادل تار را می‌توان با اعمال یک قید که به شکل حلقه بی‌وزن و بدون اصطکاک بر روی یک میله ثابت در امتداد x است، یعنی در امتداد عرضی محور تعادل تار (که همواره محور z انتخاب می‌شود) می‌لغزد، به دست آورد. در این صورت آرایش مدهای بهنجار با شکلهایی که برای تار با هر دو انتهای ثابت به دست آوردیم، تفاوت خواهند داشت. شکل مدها همچنان توابع سینوسی از z است که با معادله (۷۹) داده می‌شود. در حقیقت تمام شرح پیش از معادله (۲۳) یعنی جواب کلی جابه‌جایی تار در یک مدت، مستقلاً از شرایط مرزی است. فقط در بحث دنباله معادله (۲۳) بود که جواب را به حالت خاصی که در آن تار در نقاط $z = 0$ و $z = L$ ثابت است، منحصر کردیم.

در انتهای آزاد یک تار مرتعش (برحسب تعریف) هیچ نیروی عرضی به انتهای تار وارد نمی‌شود، یعنی میله بدون اصطکاک هیچ نیروی عرضی بر حلقه بدون اصطکاک وارد نمی‌کند. بنابراین (بر طبق قانون سوم نیوتون) تار و حلقه بدون اصطکاک هیچ نیروی عرضی بر میله بدون اصطکاک وارد نمی‌کنند. نتیجه آنکه تار افقی قرار می‌گیرد. شیب تار در انتهای آزاد در تمام لحظات برابر صفر است. اگر بخواهیم یک نیروی عرضی به انتهای آزاد تار وارد کنیم، تار به‌گونه‌ای حرکت می‌کند که نیرو را با وجودی که اعمال می‌شود، کاهش می‌دهد و به صفر می‌رساند. مقدار این نیرو هرگز از صفر تجاوز نمی‌کند و تار افقی، ولی البته نه بدون حرکت، باقی می‌ماند. (نتیجه آنکه نمی‌توانید چیزی را فشار دهید که در ازای این فشار به شما فشار دهد، اما می‌توانید آن را به هر جا که بخواهید حرکت دهید.)

در شکل ۲-۹ مدهای تار با یک انتهای ثابت و انتهای دیگر آزاد نشان داده شده است. مدهای متوالی را برحسب تعداد ربع طول موجهایی که در تار به طول L می‌گنجد، مشخص کرده‌ایم. دقت کنید که هماهنگهای زوج با بسامد $2\nu_1, 4\nu_1$ و غیره وجود ندارند. آنالیز فوریه تابع $f(z)$ که مقدار آن در $z = 0$ برابر صفر و شیب آن در $z = L$ برابر صفر است، در مسئله ۲-۲۹ شرح داده شده است.



شکل ۹-۲ مدهای یک تار پیوسته با یک انتهای ثابت و یک انتهای آزاد.

بستگی کیفیت تن به روش تحریک. هنگامی که به یک سیم پیانو، به وسیله چکش آن ضربه‌ای وارد شود، بسامد پایه (ν_1)، هماهنگ دوم یا اکتاو ($2\nu_1$)، اکتاو بعلاوه یک پنجم ($3\nu_1$)، اکتاو دوم ($4\nu_1$)، اکتاو دوم بعلاوه سومین ماژور ($5\nu_1$) و اکتاو دوم بعلاوه یک پنجم ($6\nu_1$) و همچنین هماهنگهای بالاتر تن پایه ν_1 ، همگی تا اندازه‌ای تحریک می‌شوند. مقدار و فاز هر مؤلفه فوریه (هر هماهنگ) به شکل اولیه و سرعت تمام اجزای سیم در لحظه درست پس از ضربه زدن به وسیله چکش بستگی دارد. این کمیتها تا حد زیادی، به محل چکش یعنی فاصله آن از

انتهای سیم بستگی دارند. هیچگونه مدی که در نقطهٔ ضربه زدن دارای گرهی باشد (یعنی نقطهٔ دائماً بدون حرکت)، به وسیلهٔ ضربهٔ چکش تحریک نمی شود، زیرا چکش به جزئی از سیم که به آن ضربه می زند، یک سرعت اولیه وارد می کند. مثلاً اگر وسط سیم را بکشیم مدهایی که در مرکز گره داشته باشند، تحریک نخواهند شد. دقت در شکل ۲-۳ نشان می دهد که در آن حالت، تمام هماهنگهای زوج وجود ندارند. بنابراین اگر وسط سیم را به گونه ای بکشیم که نت C_{128} حاصل شود، انتظار می رود که به صورت برهم نهش تنهای C_{128} ، G_{384} ، E_{640} و غیره ارتعاش کند. در این حالت "کیفیت تن" با کیفیت در حالتی که به نزدیک انتهای سیم ضربه ای وارد شود و سیم به صورت برهم نهش تنهای C_{128} ، C_{256} ، G_{384} ، C_{512} ، E_{640} ، G_{768} و غیره ارتعاش کند، به طور قابل ملاحظه ای تفاوت دارد.

مدهای تار همگن مجموعهٔ کامل توابع را تشکیل می دهد. در مطالعه تاری که هر دو انتهای آن ثابت بود، فهمیدیم که هر تابع مناسب $f(z)$ که بین $z = L$ و $z = 0$ تعریف شود و در نقاط $z = L$ و $z = 0$ برابر صفر باشد را می توان برحسب سری فوریه بسط داد

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nk_1 z; \quad k_1 L = \pi \quad (54)$$

به این دلیل توابع $\sin nk_1 z$ که در آن $n = 1, 2, 3, \dots$ است یک مجموعهٔ کامل از توابع [نسبت به توابع $f(z)$ که در نقاط $z = L$ و $z = 0$ برابر صفرند] نامیده می شوند. یک مجموعهٔ کامل از توابع، به صورت مجموعه ای تعریف می شود که در آن هر تابع (مناسب) $f(z)$ را با انتخاب مناسب ضرایب ثابتی، به صورت برهم نهش توابعی از آن مجموعه می توان نوشت.

تار ناهمگن. علاوه بر توابع سینوسی که سری فوریه را تشکیل می دهند، آیا مجموعه های کامل دیگری نیز وجود دارند؟ بلی، مجموعه های بیشماری! اکنون این مطلب را خواهیم خواند. فرض کنید که تار همگن نیست، یعنی یا چگالی جرمی آن و یا کشش آن (یا هر دو) تابع پیوسته ای از مکان یعنی z است. (مثال ساده برای یک "تار" با چگالی و کشش متغیر، یک فنر اسلینکی است که به طور قائم آویزان شده و دو انتهای بالا و پایین آن ثابت است. مقدار کشش در پایین فنر به اندازه وزن Mg که در آن M جرم کل است، کمتر از کشش در بالای فنر است.) در این حالت دیگر معادله حرکت یک قطعه کوچک از تار مانند معادله کلاسیک موج، به شکل زیر نیست

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}$$

بلکه اگر کشش در حالت تعادل $T_0(z)$ و چگالی $\rho_0(z)$ فرض شود، به سادگی می توان دریافت

(مسئله ۲-۱۰) که

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[T_0(z) \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} \right] \quad (55)$$

که فقط در صورتی که $T_0(z)$ و $\rho_0(z)$ مقادیر ثابت و مستقل از z باشند، این معادله به معادله کلاسیک موج تبدیل می‌شود. در یک مد بهنجار این تار ناهمگن، درست مانند هر مد یک تار همگن، تمام اجزای تار با یک حرکت هماهنگ و با بسامد و ثابت فاز مساوی، ارتعاش می‌کنند

$$\psi(z, t) = A(z) \cos(\omega t + \varphi) \quad (56)$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 A(z) \cos(\omega t + \varphi) \quad (57)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \cos(\omega t + \varphi) \frac{dA(z)}{dz} \quad (58)$$

با قرار دادن این روابط در معادله (55) و حذف عامل مشترک $\cos(\omega t + \varphi)$ ، معادله شکل مد، به دست می‌آید

$$\frac{1}{\rho_0(z)} \frac{d}{dz} \left[T_0(z) \frac{dA(z)}{dz} \right] = -\omega^2 A(z) \quad (59)$$

شکل سینوسی امواج ساکن مشخصه سیستمهای همگن است. شکل مد باکمیت $A(z)$ داده می‌شود که از حل معادله دیفرانسیل (59) و با در نظر گرفتن شرایط مرزی مناسب یعنی $A(z) = 0$ به ازای $z = 0$ و $z = L$ به دست می‌آید. شکل تابع $A(z)$ در صورتی سینوسی است که T_0 و ρ_0 مقادیر ثابت باشند. بنابراین نوسانهای سینوسی در فضا، فقط مشخصه شکل مدهای بهنجار یک سیستم همگن است.

مدهای تار ناهمگن مجموعه کامل توابع را تشکیل می‌دهند. در اینجا بدون اثبات، مشخصات مدهای بهنجار یک تار ناهمگن را که هر دو انتهای آن در نقاط $z = 0$ و $z = L$ ثابت‌اند، بیان می‌کنیم. پایینترین مد یعنی $A_1(z)$ مربوط به جوابی از معادله (59) است که فقط در $z = 0$ و $z = L$ برابر صفر است. (این جواب مانند یک نیم طول موج از یک "موج سینوسی اعوجاج یافته" است که بین صفر و L هیچ‌گونه گرهی ندارد.) بسامد این مد برابر ω_1 است. مد بعدی دارای یک گره بین $z = 0$ و $z = L$ است و از این رو به یک طول موج کامل از یک موج سینوسی اعوجاج یافته شباهت دارد و بسامد مشخصه آن ω_2 است. مد m ام دارای $m - 1$ گره بین $z = 0$ و $z = L$ است و به m نیم طول موج از یک موج سینوسی اعوجاج یافته شباهت دارد.

(برای یک تار پیوسته) بینهایت مد وجود دارد. توابع $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$ و ... که بستگی فضایی مدها را به دست می دهند، نسبت به هر تابع مناسب $f(z)$ که در نقاط $z = 0$ و $z = L$ برابر صفر باشد، یک مجموعه کامل تشکیل می دهند. تابع مناسب $f(z)$ تابعی است که تاریا فشر اسلینکی، بدون آنکه هیچ یک از فرضها نقض شود، می تواند از آن پیروی کند. در چنین حالتی می توان یک گیره به شکل $f(z)$ ساخت و تار ناهمگن را به شکل آن درآورد و سپس تار را در زمان $t = 0$ از حالت سکون رها کرد. تار به صورت برهم نهش بینهایت از مدهایش ارتعاش خواهد کرد

$$\psi(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_m(z) \cos \omega_m t \quad (60)$$

بنابراین در زمان $t = 0$

$$\psi(z, 0) = f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m A_m(z) \quad (61)$$

معادله (61) نشان می دهد که تابع $f(z)$ را (با در نظر گرفتن مفروضات) می توان برحسب مجموعه توابع $A_m(z)$ بسط داد. از این رو $A_m(z)$ یک مجموعه کامل از توابع را تشکیل می دهد. این استدلال، دقیقاً مشابه استدلالی است که در آن نشان دادیم توابع سینوسی سری فوریه نسبت به توابع $f(z)$ که به ازای $z = 0$ و $z = L$ برابر صفر می شوند، یک مجموعه کامل را تشکیل می دهند. ویژه تابعها. برای آنکه بتوان تاری با چگالی جرمی و کشش غیریکنواخت داشت، بینهایت راه مختلف وجود دارد. بنابراین بینهایت مجموعه کامل $A_m(z)$ مختلف وجود دارد. از این رو برای بسط توابع $f(z)$ ، تنها مجموعه کامل توابع، توابع سینوسی برحسب z نیستند. اما این توابع، مجموعه بسیار مهمی هستند، زیرا بسیار ساده اند و درک آنها آسان است. به علاوه، هر وقت که سیستم مورد مطالعه در فضا همگن باشد، این توابع شکل مدها را به دست می دهند. اما هنگامی که چنین حالتی وجود ندارد، توابع سینوسی خیلی مفید نیستند. در این حالت باید توابع مناسب $A_m(z)$ را که مربوط به مدهای بهنجار سیستم هستند پیدا کرده و به کار برد. این توابع $A_m(z)$ ، و یا به صورت کلیتر $A_m(x, y, z)$ در یک سیستم سه بعدی، ویژه تابعها نامیده می شوند. این توابع بستگی فضایی مدهای بهنجار را به دست می دهند.

در هر مکان x, y, z ، و z بستگی زمانی یک مد همیشه با رابطه $\cos(\omega t + \varphi)$ داده می شود. بنابراین هر مد عبارت است از نوسان همزمان و کوچک (آنقدر کوچک که معادلات خطی به دست آید) تمام اجزای متحرک، یعنی تمام اجزایی که با بسامد مساوی و ثابت فاز مساوی، نوسان می کنند. هنگامی که تمام سیستم در یک مد تنهاست، سیستم مانند یک نوسانگر عظیم ضربان و تپش دارد. هر مد "شکل" مخصوص به خود یعنی ویژه تابع خودش را دارد. هنگامی که شکل ویژه تابعها سینوسی باشد، رابطه بین بسامد مد و شکل یعنی $\omega(k)$ را رابطه پاشندگی می نامند. البته هنگامی که

این توابع سینوسی نباشند، کمیتی به نام طول موج یا عدد موج k وجود ندارد. در این حالت رابطه بین بسامد ω و k به شکل معمولاً "رابطه پاشندگی" نامیده نمی شود.

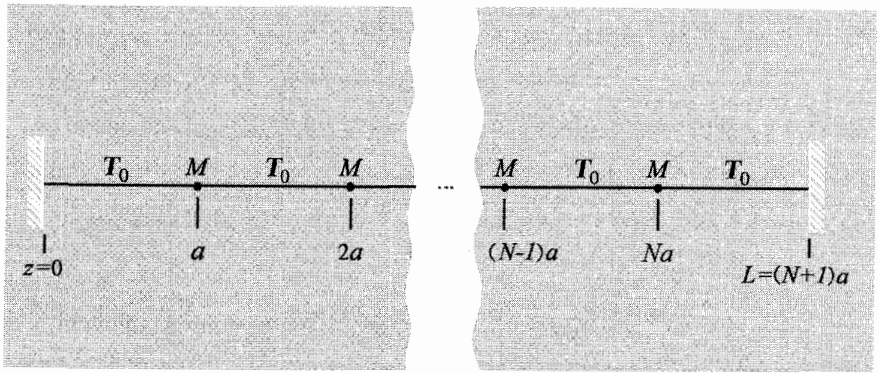
سیستمهای ناهمگن را بیش از این بررسی نخواهیم کرد. در درس فیزیک کوانتومی، ویژه تابعهای (یا شکلهای) امواج ساکن دوبروی در سیستمهای با انرژی پتانسیل غیر ثابت را مطالعه خواهیم کرد. این امواج، مشابه امواج ساکن یک تار ناهمگن است. به مبحث تکمیلی شماره ۲ مراجعه کنید.

۴-۲ مدهای یک سیستم ناپیوسته با N درجه آزادی

در بخش ۲-۲ یک تار پیوسته را که سیستمی با بینهایت درجه آزادی است، مطالعه کردیم. هیچ سیستم مکانیکی دارای بینهایت درجه آزادی نیست و ما به سیستمهای حقیقی علاقه مند هستیم. در این بخش جواب دقیق مدهای یک تار یکنواخت مهردار را که دارای N مهره و هر دو انتهای آن ثابت است، به دست می آوریم. در حالت حدی که تعداد مهرهها یعنی N برابر بینهایت (و طول تار برابر L) اختیار شود، امواج ساکنی که در بخش ۲-۲ مطالعه شد، به دست می آید. اما مقصود ما، تنها این مطلب نیست. بلکه خواهیم دید که با در نظر گرفتن حالت حدی تار پیوسته، برخی رفتار فوق العاده جالب سیستم را حذف کردیم. به خاطر داشته باشید هنگامی که N بسیار بزرگ ولی بینهایت نیست، برای آنکه بتوان از توابع هموار $\psi(z, t)$ برای نشان دادن جابه جایی استفاده کرد، باید از در نظر گرفتن بالاترین مدها یعنی مدهای $1, 2, \dots, N-1, N, m = N$ و غیره صرف نظر کرد. یعنی باید به مقادیر m خیلی کوچکتر از N اکتفا کرد. چون مد N همان گونه که در شکل ۲-۱ نشان داده شده است آرایش زیگزاگ دارد، مهره های مجاور یکدیگر جابه جایی تقریباً مساوی ندارند. جالبترین نتیجه تازه ای که از این بخش به دست می آید، این است که قانون پاشندگی به دست آمده برای یک تار پیوسته، یعنی $\omega = w$ "برابر است با حاصلضرب عدد ثابتی در k "، به طور کلی صادق نیست. رابطه بین بسامد و طول موج به این مفهوم که هنگامی که طول موج نصف می شود، بسامد دو برابر می شود (یعنی نسبت بسامدهای هماهنگ را به دست می دهد) تقریبی است که برای تار با انعطاف پذیری فقط در حد پیوستگی صادق است. این نکته که این قانون در مورد یک تار "گره دار" (اما به جز این یکنواخت) صدق نمی کند، مثالی است از یک پدیده جالب فیزیکی که پاشندگی نامیده می شود. اگر در محیطی رابطه ساده پاشندگی بالا یعنی $\omega = w$ "برابر با حاصلضرب عدد ثابتی در k " برقرار باشد، آن محیط را (برای امواج مشخص) "غیر پاشنده" می گویند. اگر هرگونه رابطه پاشندگی دیگر برقرار باشد، محیط را "پاشنده" می نامند. اکنون مثالی در نظر می گیریم:

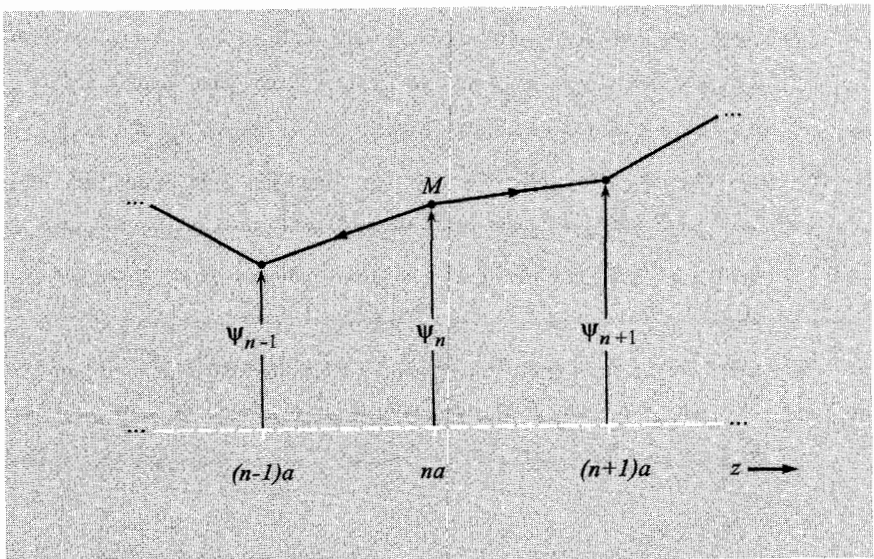
مثال ۱: نوسانهای عرضی در تار مهردار

سیستم در شکل ۲-۱۰ نشان داده شده است و دارای N مهره است. تار در نقاط $z = 0$ و



شکل ۲-۱۰ آرایش در حالت تعادل تار مهردار.

$L = z =$ ثابت شده است. مهرها در نقاط $z = a, 2a, \dots, Na$ قرار گرفته‌اند. تمام طول L برابر $(N + 1)a$ و جرم هر مهردار برابر M است. قطعات تار (یا فنر) مشابه هستند. این قطعات بی‌وزن‌اند و قانون هوک برای آنها کاملاً صادق است. کشش هر قطعه در حالت تعادل برابر T_0 است. اگر برای فنرها (تارها) تقریب اسلینکی (کشش متناسب با طول) برقرار باشد، نوسانها می‌توانند دارای دامنه خیلی بزرگ باشند و با وجود این معادلات حرکت خطی را به دست دهند. اگر فنرها اسلینکی نباشند، برای به دست آوردن معادلات خطی، باید به نوسانهای با دامنه کوچک اکتفا کرد. اکنون آرایش کلی نشان داده شده در شکل ۲-۱۱ را در نظر می‌گیریم. [البته این شکل کاملاً



شکل ۲-۱۱ آرایش کلی تار مهردار برای نوسانهای عرضی در امتداد x .

هم کلی نیست زیرا در آن فقط نوسانهای عرضی در امتداد x در نظر گرفته شده است. بعداً نوسانهای طولی را در امتداد z در نظر می‌گیریم. البته حرکت کلی برهم‌نهی نوسانهای طولی در امتداد z و نوسانهای عرضی در امتداد x و y است. [جابه‌جایی مهره m به طرف بالا (در شکل) از محل تعادلش برابر $\psi_n(t)$ است که در آن $1, 2, 3, \dots, N-1, N$ ، برای محاسبه، مهره دلخواه n و مهره‌های مجاور آن $n-1$ (در سمت چپ) و $n+1$ (در سمت راست) را در نظر می‌گیریم.

معادله حرکت. می‌خواهیم معادله حرکت مهره m را به دست آوریم. اما چون قبلاً مسئله‌ای کاملاً شبیه به این مثال حل کردیم (برای یک درجه آزادی در بخش ۱-۲ و برای دو درجه آزادی در بخش ۱-۴) حل آن را به عهده دانشجویان واگذار می‌کنیم تا با استفاده از تقریب اسلینکی یا تقریب نوسانهای کوچک، نشان دهند که با اعمال قانون نیوتون برای حرکت مهره m ، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$M \frac{d^2 \psi_n(t)}{dt^2} = T \cdot \left[\frac{\psi_{n+1}(t) - \psi_n(t)}{a} \right] - T \cdot \left[\frac{\psi_n(t) - \psi_{n-1}(t)}{a} \right] \quad (62)$$

معادله (۶۲) کاملاً کلی است و برای هر حرکت اختیاری سیستمی که به طور آزاد نوسان می‌کند، یعنی برهم‌نهی اختیاری N مد مختلف، صادق است.

مدهای بهنجار. می‌خواهیم بسامد و شکل هر یک از مدها را به دست آوریم. بنابراین فرض می‌کنیم که فقط یک مد تنها با بسامد ω وجود دارد. تمام مهره‌ها با بسامد ω یکسان و ثابت فاز φ یکسان به طور هماهنگ نوسان می‌کنند. شکل هر مد با نسبت دامنه‌های مهره‌ها داده می‌شود. فرض می‌کنیم در مد مورد نظر، دامنه ارتعاش مهره m برابر A_n باشد. بنابراین در یک مد تنها داریم

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= A_1 \cos(\omega t + \varphi); \psi_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi); \dots; \\ \psi_{n-1} &= A_{n-1} \cos(\omega t + \varphi); \psi_n(t) = A_n \cos(\omega t + \varphi); \\ \psi_{n+1}(t) &= A_{n+1} \cos(\omega t + \varphi); \dots \end{aligned} \quad (63)$$

و با استفاده از معادله (۶۳) داریم

$$\frac{d^2 \psi_n(t)}{dt^2} = -\omega^2 \psi_n(t) = -\omega^2 A_n \cos(\omega t + \varphi) \quad (64)$$

اکنون از معادله (۶۴) در سمت چپ معادله (۶۲) و از معادلات (۶۳) در سمت راست آن استفاده

می‌کنیم. سپس عامل مشترک بستگی بسامد یعنی $\cos(\omega t + \varphi)$ را حذف می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$-M\omega^2 A_n = \frac{T_0}{a}(A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1});$$

یعنی

$$A_{n+1} + A_{n-1} = A_n \left(2 - \frac{Ma}{T_0} \omega^2 \right) \quad (65)$$

معادله (65) پیچیده به نظر می‌آید. این معادله شکل مد با بسامد زاویه‌ای ω را به دست می‌دهد. اکنون آن را با حدس زدن جسورانه حل می‌کنیم. در این حدس زدن جواب قبلی برای مدهای یک تار پیوسته که هر دو انتهای آن در نقاط $z = L$ و $z = 0$ ثابت بود، ما را راهنمایی می‌کند. در آن مسئله نشان دادیم که شکل مدها با رابطه زیر داده می‌شود

$$A(z) = A \sin \frac{2\pi z}{\lambda} = A \sin kz \quad (66)$$

در حالت حدی وقتی که تعداد مهره‌ها بینهایت باشد (حد پیوسته)، جوابی که برای A_n به دست می‌آید باید به معادله (66) منجر شود. بیایید جوابی را بیازماییم که صرفاً با قرار دادن $z = na$ در معادله (66) به دست می‌آید

$$A_n = A \sin \frac{2\pi na}{\lambda} = A \sin kna \quad (67)$$

و همچنین

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A \sin k(n+1)a = A \sin(kna + ka) \\ &= A(\sin kna \cos ka + \cos kna \sin ka) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= A \sin k(n-1)a = A \sin(kna - ka) \\ &= A(\sin kna \cos ka - \cos kna \sin ka) \end{aligned}$$

$$A_{n+1} + A_{n-1} = 2A \sin kna \cos ka = 2A_n \cos ka \quad (68)$$

با قرار دادن معادله (68) در معادله (65) نتیجه می‌شود

$$2A_n \cos ka = A_n \left(2 - \frac{Ma}{T_0} \omega^2 \right) \quad (69)$$

رابطه دقیق پاشندگی برای تار مهردار. معادله (۶۹) برای هر مهرة n صادق است، خواه A_n برای آن مهرة مشخص و در آن مد مشخص، صفر باشد یا نباشد. بنابراین می توان n را مربوط به مهراهی اختیار کرد که بر روی گره واقع نشده یعنی برای آن A_n مخالف صفر است. از این رو A_n را حذف می کنیم و شرطی را به دست می آوریم که در جوابی که حدس زده ایم باید صدق کند، تا آن جواب یک جواب واقعی باشد:

$$2 \cos ka = 2 - \frac{Ma}{T} \omega^2$$

یعنی

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{2T}{Ma} (1 - \cos ka) \\ &= \frac{2T}{Ma} \left[1 - \left(\cos^2 \frac{ka}{2} - \sin^2 \frac{ka}{2} \right) \right] \\ \omega^2 &= \frac{4T}{Ma} \sin^2 \frac{ka}{2} = \frac{4T}{Ma} \sin^2 \frac{\pi a}{\lambda} \end{aligned} \quad (70)$$

معادله (۷۰) که در یک مد با بسامد زاویه ای ω ، بسامد را به طول موج (یا عدد موج) مربوط می سازد، رابطه پاشندگی برای یک تار مهردار است.

شرایط مرزی. تاکنون شرایط مرزی را کاملاً مشخص نکرده ایم. هنگامی که به جای رابطه کلی تر

$$A_n = A \sin kna + B \cos kna \quad (71)$$

معادله (۶۷) را نوشتیم، شرط مرزی در $z = 0$ را اعمال کرده بودیم بدین معنی که در آن نقطه، جابه جایی تار در هر مد برابر صفر باشد. برای آنکه در معادله (۷۱) شرط $A_0 = 0$ برای $z = na = 0$ برقرار باشد، باید $B = 0$ باشد. اکنون باید شرط مرزی در $z = L$ یعنی نقطه ای که در آنجا نیز جابه جایی تار برابر صفر است را اعمال کنیم. دیوار در نقطه $z = L$ مربوط به "مهرة ثابت $N + 1$ " است. بنابراین باید $A_{N+1} = 0$ باشد.

$$A_{N+1} = A \sin k(N + 1)a = A \sin kL = 0 \quad (72)$$

برای معادله (۷۲) تعداد N جواب ممکن وجود دارد. هر جواب مربوط به یک مد تنهای m است به طوری که $m = 1, 2, 3, \dots, N$ است. شماره مدها به گونه ای است که $m = 1$ بلندترین طول موج را دارد. بنابراین

$$k_1 L = \pi, \quad k_2 L = 2\pi, \dots, \quad k_m L = m\pi, \dots, \quad k_N L = N\pi \quad (73)$$

دلیل اینکه فقط N جواب وجود دارد [مدها با معادله (۷۳) مشخص شده‌اند] این است که آخرین جمله معادله (۷۳) مربوط به شکل کاملاً زیگزاگ است: وقتی از نقطه $z = 0$ شروع کنیم، اولین قطعه تار به سمت اولین مهره، به طرف بالا "زیگ" است، دومین تار به سمت مهره ۲ به طرف پایین "زاگ" است، ...، تار $N + 1$ از مهره N به سمت دیوار زاگ (یا زیگ) است. معادله (۷۲) جوابهای دیگری مانند $k_{N+1}L = (N + 1)\pi$ ، $k_{N+2}L = (N + 2)\pi$ و غیره نیز دارد، اما برای تمام زیگ‌زاگهایی که این جوابها در خود دارند، به تعداد بیشتری قطعه متصل‌کننده مهره‌ها، از آنچه موجود هست، نیاز داریم.

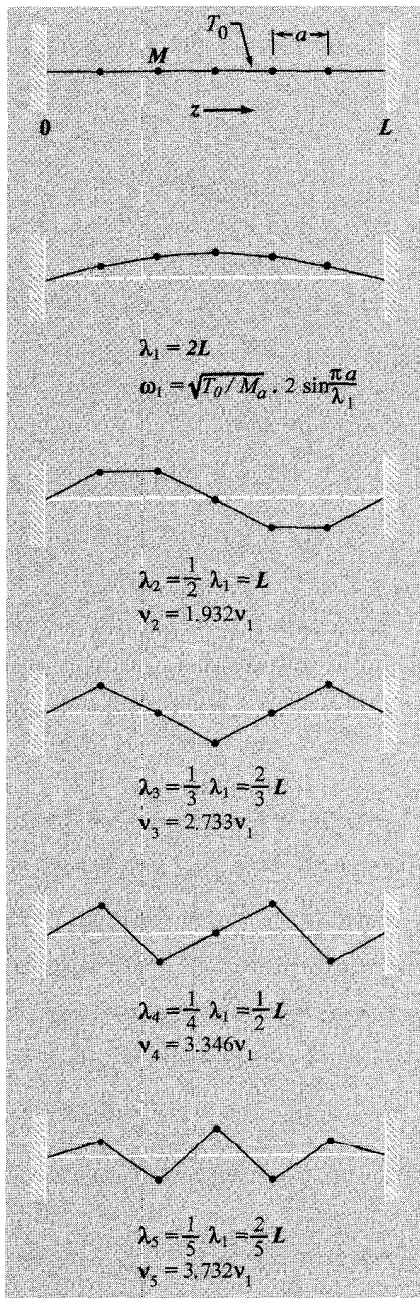
معادله شکل مدها یعنی معادله (۶۵)، بدون در نظر گرفتن شرایط مرزی به دست آمد. (شکل ۲-۱۱ هیچ‌گونه شرط مرزی در بر ندارد.) کلی‌ترین جواب این معادله به صورت معادله (۷۱) است که در آن B/A و k به وسیله شرایط اولیه تعیین می‌شوند. اگر معادله (۷۱) را در معادله (۶۵) قرار دهید، رابطه پاشندگی یعنی معادله (۷۰) به دست می‌آید و به سادگی می‌توان نشان داد (مسئله ۲-۱۹) که این رابطه مستقل از شرایط مرزی یعنی مستقل از مقادیر A ، B و k است. با در نظر گرفتن شرایط مرزی ویژه‌ای (یعنی تار در نقاط $z = 0$ و $z = L$ ثابت شده است) شکل مدها از معادله (۷۲) به دست می‌آید و مقدار k_m با معادله (۷۳) داده می‌شود. بدین ترتیب بسامدهای ω_m از معادله (۷۰) نتیجه می‌شود.

دقت کنید که شکل مدهای معادله (۷۳) دقیقاً همان شکلهایی است که برای یک تار پیوسته به دست آوردیم، تنها اختلاف آن این است که برای تار پیوسته $N = \infty$ است و از این رو بالاترین مد وجود ندارد. علاوه بر این، در یک تار مهره‌دار، قطعات تار مستقیم هستند و از تابع هموار سینوسی A_m که از میان مهره‌ها می‌گذرد، پیروی نمی‌کنند.

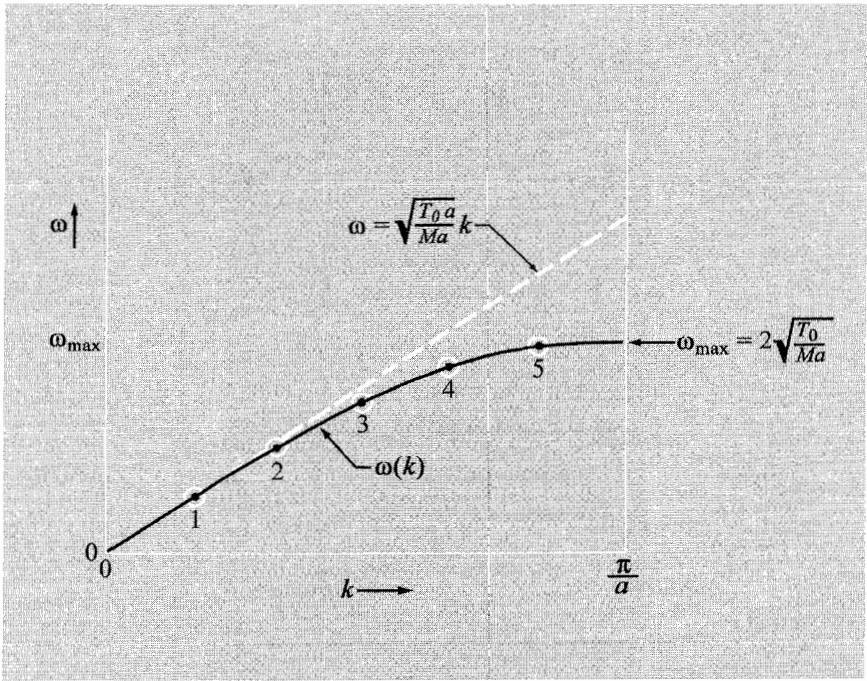
شکل مدها در حالت $N = 5$ در شکل ۲-۱۲ نشان داده شده است. در شکل ۲-۱۳ رابطه پاشندگی که با معادله (۷۰) داده می‌شود، رسم شده است:

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{T}{Ma}} \sin \frac{ka}{2} \quad (74)$$

پنج نقطه‌ای که با شماره مشخص شده‌اند، مقادیر ω و k را برای پنج مد تار با پنج مهره که دو انتهای آن ثابت است، نشان می‌دهد. اگر تعداد دیگری مهره داشتیم و یا شرایط مرزی دیگری وجود می‌داشت (مثلاً انتهای تار در $L = z$ آزاد بود) نقاط نمایشگر مدها بر روی همان منحنی ω_k ولی در محل‌های دیگری قرار می‌گرفتند. از این رو منحنی شکل ۲-۱۳ برای هر تار مهره‌دار صادق است.



شکل ۲-۱۲ مدهای تار با پنج مهره.



شکل ۲-۱۳ رابطه پاشندگی برای تار مهردار. پنج نقطه عددگذاری شده مربوط به پنج مد تازی با پنج مهره است که هر دو انتهای آن ثابت است. شرایط مرزی دیگری یا تعداد دیگری مهره. نقاط دیگری را بر روی همین نمودار به دست می دهند.

حد پیوسته یا حد طول موج بلند. در تقریب پیوسته فرض می کنیم در ناحیه بین $\alpha = 0$ و $\alpha = L$ تعداد بینهایت مهره وجود دارد. از این رو فاصله بین مهره ها، یعنی a به سمت صفر میل می کند. اگر هنگامی که فواصل بین مهره ها یعنی a "بسیار کوچک" ولی دقیقاً صفر نیست به خواص رابطه دقیق پاشندگی یعنی معادله (۷۴) توجه کنیم، می بینیم که رابطه پاشندگی به سمت رابطه پاشندگی، برای یک تار پیوسته میل می کند. اکنون باید بدانیم که منظور از "کوچک" چیست یعنی کوچک نسبت به چه؟ هنگامی که فاصله مهره ها یعنی a نسبت به طول موج λ کوچک است، تقریب پیوسته تقریب خوبی است:

$$a \ll \lambda; \quad ka = 2\pi \frac{a}{\lambda} \ll 1$$

اکنون بسط سری تیلور را به کار می بریم [معادله (۴) پیوست را ببینید]

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

با قرار دادن x برابر ka ، این سری را در معادله (۷۴) وارد می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\omega(k) &= \sqrt{\frac{T_0}{Ma}} \left[\frac{1}{2}ka - \frac{1}{48}(ka)^3 + \dots \right] \\ &= \sqrt{\frac{T_0 a}{M}} k \left[1 - \frac{1}{24}(ka)^2 + \dots \right]\end{aligned}$$

یعنی

$$\omega(k) \approx \sqrt{\frac{T_0 a}{M}} k \quad (75)$$

معادله (۷۵) حالت "غیرپاشنده" قانون پاشندگی است که در بخش ۲-۳ برای یک تار پیوسته به دست آوردیم که در آن $M/a = \rho_0$ است.

رابطه پاشندگی برای سیم حقیقی پیانو. اکنون دیدیم که مدهای یک تار ناپیوسته در رابطه پاشندگی موج غیرپاشنده یعنی معادله (۷۴) صدق نمی‌کنند. بنابراین مثلاً نت‌های فرعی یک سیم پیانو یعنی سیمی که آهنگ اصلی آن نت $C128$ است، می‌تواند دقیقاً با اکتاو $C256$ ، دوازدهم $G384$ ، اکتاو دوگانه $C512$ و غیره برابر نباشد. این درست است؛ آنها برابر نیستند. بر طبق معادله (۷۴) و یا ساده‌تر، از منحنی آن در شکل ۲-۱۳ پیداست که افزایش در مقدار k ، افزایشی متناسب با آن در مقدار بسامد ایجاد نمی‌کند، بلکه اندکی کمتر است. بنابراین می‌توان انتظار داشت که نت‌های فرعی سیم پیانو، نسبت به پیش‌بینی نظریه تار پیوسته، اندکی "بم" باشند، یعنی برای هماهنگ دوم $256 < \nu_2$ و برای هماهنگ سوم $384 < \nu_3$ و غیره باشد. این مطلب نادرست است! نت‌های فرعی یک سیم پیانو بم نیستند بلکه نسبت به پیش‌بینی ساده "نت‌های فرعی هماهنگ" معادله (۷۵) زیر هستند. زیرا نه مدل تار کاملاً پیوسته و با انعطاف‌پذیری کامل، و نه مدل تار مهره‌دار، هیچ‌کدام به‌طور کامل یک سیم پیانو را شرح نمی‌دهند. در حقیقت مدل تار مهره‌دار، بدتر از مدل تار پیوسته است زیرا "تصحیحی" که در جواب مدل تار پیوسته به وجود می‌آورد علامت اشتباهی دارد! اشکال مدل تار پیوسته در مورد یک سیم پیانو این نیست که سیم به چند مهره احتیاج دارد بلکه آن است که یک سیم حقیقی پیانو، کاملاً انعطاف‌پذیری ندارد. هنگامی که سیم را خم کنید، حتی وقتی هیچ کششی برای کشیدن آن به حالت مستقیم وجود ندارد، سیم مجدداً به‌وضع مستقیم درمی‌آید. در نتیجه نیروی بازگرداننده بر روی یک قطعه کوچک خمیده از سیم (یعنی نیرویی که می‌خواهد سیم را به حالت مستقیم درآورد — سیم در حالت تعادل مستقیم است) اندکی بیشتر از نیرویی است که به‌وسیله مدل "با انعطاف‌پذیری کامل" پیش‌بینی می‌شود. بسامد مد البته با رابطه ω^2 مساوی است با نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم داده می‌شود. مدهای

بالتر، طول موجهای کوتاهتر دارند و بنابراین برای آنها سیم بیشتر خم می‌شود. بنابراین سختی تار در مدهای بالاتر بیش از مدهای پایینتر اهمیت دارد و از این رو بسامد تندتر از آنچه در مدل تار انعطاف‌پذیر پیش‌بینی می‌شود، افزایش می‌یابد.

در این بحث یک "نکته ظریف" جالبی وجود دارد. نیروی بازگرداننده در نتیجه کشش و نیروی بازگرداننده در نتیجه سختی، هر دو با افزایش k اضافه می‌شوند. بنابراین اگر در مقادیر بیشتر k نسبت به مقادیر کمتر آن، سختی نقش نسبتاً بزرگتری را بازی کند، نیروی بازگرداننده در نتیجه سختی بیش از نیروی بازگرداننده در نتیجه کشش برحسب k باید افزایش پیدا کند. نیروی بازگرداننده در نتیجه کشش متناسب با k^2 و نیروی بازگرداننده در نتیجه سختی متناسب با k^4 است. بنابراین رابطه پاشندگی برای یک سیم حقیقی پیانو، با رابطه زیر داده می‌شود

$$\omega^2 \approx \frac{T_0}{\rho_0} k^2 + \alpha k^4 \quad (76)$$

که در آن α عددی ثابت و ناشی از سختی است. اگر جمله مربوط به سختی هم متناسب با k^2 می‌بود، باز هم رابطه پاشندگی "غیرپاشنده" یعنی معادله (75) به دست می‌آمد که در آن به جای $T_0/\rho_0 + \alpha$ کمیت $(T_0/\rho_0) + \alpha$ قرار می‌گرفت. نسبت بسامدها نیز نسبتهای "هماهنگ" یعنی $\nu_2 = 2\nu_1$ ، $\nu_3 = 3\nu_1$ و غیره می‌بود. اکنون مثالهای بیشتری را در نظر می‌گیریم:

مثال ۲: نوسانهای طولی در سیستمی با چندین جرم و فنر

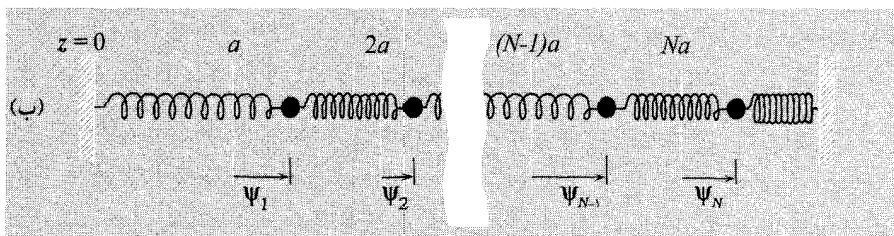
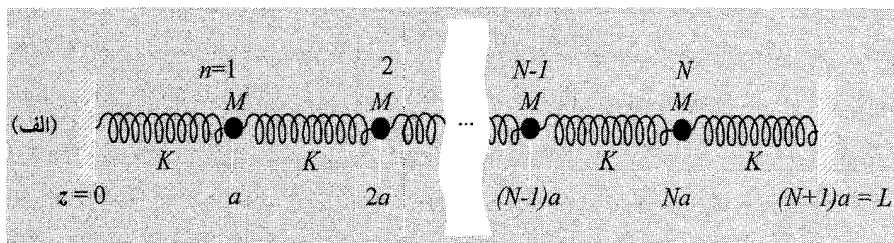
این مثال، مثال مهمی است، زیرا مدل بسیار ساده‌ای عنوان می‌کند که به فهمیدن امواج صوتی کمک می‌کند. (امواج صوتی از ارتعاشات طولی تشکیل شده‌اند یعنی ارتعاشاتی که بر "جبهه موج" عمودند).

حالتهای $N = 1$ و $N = 2$ را به ترتیب در بخش ۱-۲ و ۱-۴ بررسی کردیم. اینک حالت کلی در نظر می‌گیریم که شامل N جرم است و با فنرهایی به هم جفت شده‌اند و در شکل ۱۴-۲ نشان داده شده است.

معادله حرکت مهرة m به سادگی به دست می‌آید. (اگر مشکلی دارید، حل حالت $N = 2$ در بخش ۱-۴ را دوره کنید). نتیجه آنکه

$$M \frac{d^2 \psi_n}{dt^2} = K(\psi_{n+1} - \psi_n) - K(\psi_n - \psi_{n-1}) \quad (77)$$

شکل ریاضی معادله (77) همان شکل معادله حرکت برای جابه‌جاییهای عرضی یعنی معادله



شکل ۲-۱۴ نوسانهای طولی N جرم و $N + 1$ فنر. (الف) آرایش حالت تعادل. (ب) آرایش کلی.

(۶۲) است بجز آنکه به جای ضریب ثابت T_0/a ، ضریب ثابت فنر یعنی k قرار داده شده است. بنابراین تمام محاسبات ریاضی قبلی می‌تواند تکرار شود. از این رو رابطه پاشندگی [با قرار دادن k به جای T_0/a در معادله (۷۴)] به دست می‌آید

$$\omega(k) = 2\sqrt{K/M} \sin \frac{ka}{2} = 2\sqrt{K/M} \sin \frac{\pi a}{\lambda} \quad (78)$$

برای مد یا عدد موجی k حرکت جرم m با رابطه زیر داده می‌شود

$$\psi_n(t) = A \sin nka \cos[\omega(k)t + \varphi] \quad (79)$$

که در آن N امکان مختلف برای k به صورت زیر است

$$k_1 L = \pi, \quad k_2 L = 2\pi, \quad \dots, \quad k_N L = N\pi \quad (80)$$

منحنی رابطه پاشندگی که در شکل ۲-۱۳ رسم شده است، باید فقط به طور مناسبی دوباره نشانگذاری شود تا نمایشگر معادله (۷۸) باشد.

پارامترهای متمرکز شده و پارامترهای توزیع شده. در هنگام مطالعه ارتعاشات عرضی یک تار مهردار، حد پیوسته را در نظر گرفتیم که در آن (با ثابت نگاه داشتن L) فاصله بین مهره‌ها یعنی a

به سمت صفر میل می‌کند. هنگامی که a/λ به اندازه کافی کوچک است، به طوری که تقریب پیوسته، تقریب خوبی است، در این صورت مدل فیزیکی دیگری از سیستم را می‌توان به کار برد. به جای تصویر ذهنی از فنرهای بدون جرمی که به آنها متناوباً جرمهای نقطه‌ای متصل شده و فاصله بین آنها یعنی a به سمت صفر میل می‌کند، می‌توان جرم را به طور یکنواخت در طول فنر توزیع کرد. در این صورت دیگر جرمهای متمرکز شده و فنرهای بدون جرم (با ثابتهای فنری متمرکز شده) وجود ندارد. به جای آن فقط یک فنر دراز که جرم در طول آن توزیع شده است وجود دارد. فنر اسلینکی مثال خوبی در این باره است. به جای "طول تکرار" یعنی a ، اکنون می‌توان طول در امتداد z فقط یک دور از فنر ماریچی را در نظر گرفت. معنای پارامترهای M و K به ترتیب جرم یک دور (از فنر ماریچ) و ضریب ثابت فنری یک دور است. اگر کلاً N دور وجود داشته باشد (در اینجا N تعداد درجه‌های آزادی نیست) در این صورت جرم کلی برابر NM است. ضریب ثابت فنری کل (یعنی ضریب ثابت فنری تمام طول فنر به طول $L = Na$) برابر K/N است. (زیرا دو فنر متشابه که به طور سری قلاب شده باشند، یک فنر درازتر تشکیل می‌دهند که ضریب ثابت فنری آن نصف ضرایب هر یک از دو فنر است.)

به جای نگه داشتن طول تکرار a (از یک دور ماریچ) می‌توان آن را (در تقریب پیوسته) با قرار دادن M/a به جای جرم بر واحد طول یعنی $\rho_0 = M/a$ (چگالی جرمی خطی) از رابطه‌ها کاملاً حذف کرد. به همین ترتیب می‌توان k یعنی ثابت فنری یک حلقه را حذف کرد و به جای آن کمیتی که مشخصه جنس فنر و ساختمان آن است، قرار داد. این کمیت، معکوس ثابت فنری بر واحد طول یعنی $1/a K$ است. این مطلب به سادگی در زیر دیده می‌شود. برای فنری که تمام طول آن $L = Na$ است، ثابت فنری K_L ، N مرتبه کوچکتر از k است:

$$K_L = \frac{1}{N}K = \frac{a}{L}K \quad (81)$$

بنابراین $K_L \cdot L = Ka$ که مستقل از L است یعنی Ka مربوط به خاصیت "حالت فنری" جسم و مستقل از طول فنر است. چون می‌خواهیم با کمیتهایی که دارای بعد "چیزی بر واحد طول" هستند، سروکار داشته باشیم، رابطه

$$K_L \cdot L = Ka$$

را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\frac{K^{-1}}{a} = \frac{K_L^{-1}}{L} \quad (82)$$

اکنون نتیجه را بدین گونه می توانیم بیان کنیم که معکوس ثابت فزری بر واحد طول مربوط به خاصیت فزری بوده و مستقل از طول آن است.

مثال ۳: فزری اسلینکی

اسلینکی یک فزری ماریچ با $N \approx 100$ دور است و قطر هر دور آن در حدود ۷ سانتیمتر است. طول این فزری در حالت کشیده نشده در حدود ۶ سانتیمتر است. هنگامی که آن را تا طول L در حدود یک متر بکشیم، تقریب بسیار خوب اسلینکی در آن صدق می کند. "طول تکرار" یعنی a به صورت طول به ازای یک دور یعنی $a = L/N$ داده می شود. (البته جرم توزیع شده است نه به صورت متمرکز شده در فواصل به طول a). رابطه پاشندگی برای نوسانهای طولی با در نظر گرفتن حد پیوسته و با شروع معادله (۷۸) به دست می آید

$$\begin{aligned} \omega(k) &= 2\sqrt{\frac{K}{M}} \sin \frac{ka}{2} \\ &= 2\sqrt{\frac{K}{M}} \left[\frac{ka}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{ka}{2} \right)^3 + \dots \right] \\ &\approx \sqrt{\frac{Ka^3}{M}} k \\ &= \sqrt{\frac{Ka}{M/a}} k \end{aligned} \quad (83)$$

رابطه پاشندگی برای نوسانهای عرضی برابر است با [به معادله (۷۵) مراجعه کنید]

$$\begin{aligned} \omega(k) &\approx \sqrt{\frac{T_0}{M/a}} k \\ &\approx \sqrt{\frac{Ka}{M/a}} k \end{aligned} \quad (84)$$

زیرا در تقریب اسلینکی $T_0 = Ka$ است. بنابراین رابطه پاشندگی برای نوسانهای طولی و نوسانهای عرضی فزری اسلینکی یکسان است. بنابراین اگر شرایط مرزی یکسان باشد (مثلاً هر دو انتها برای نوسانهای در امتداد x ، y و z ، ثابت شده باشند)، مدهای ارتعاشی x ، y و z ترتیب یکسانی از طول موجها و بسامدها خواهند داشت. به آسانی می توانید ثابت کنید که مدهای طولی و عرضی بسامدهای برابر دارند. مؤکداً توصیه می کنیم که اکنون برخی از آزمایشهای خانگی را

که با فتر اسلینکی است، انجام دهید. برای فهمیدن امواج هیچ راهی بهتر از آنکه خودتان امواج را درست کنید، نیست. یک فتر اسلینکی تهیه کنید. (این فتر در مغازه‌های اسباب‌بازی فروشی وجود دارد).

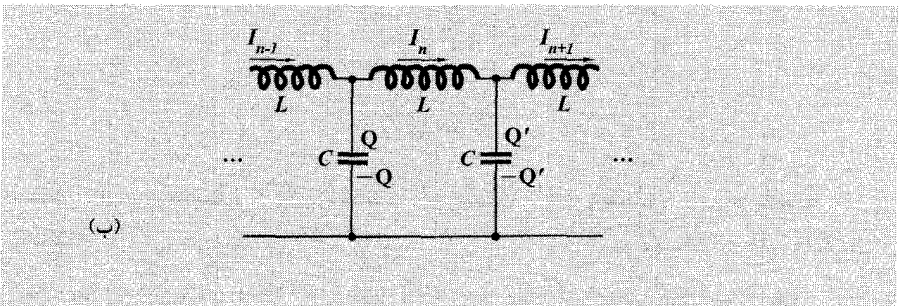
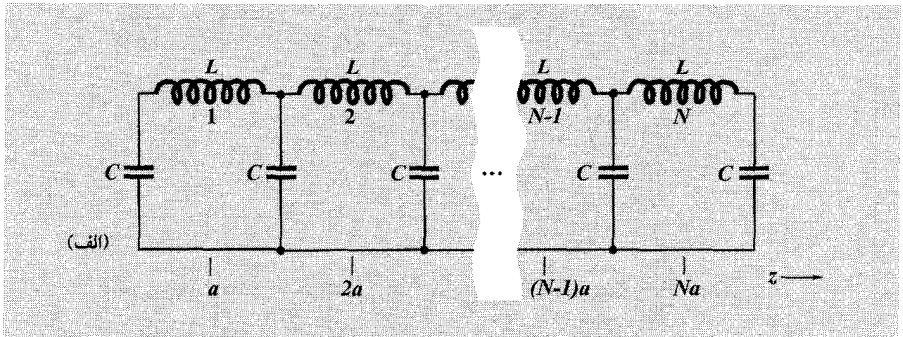
مثال ۴: شبکه LC

رشته خازنها و القاگرهای جفت‌شده را که در شکل ۱۵-۲ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. از شکل ۱۵-۲ (ب) (و بحث درباره همین شبکه در بخش ۴-۱ برای حالت $N = 2$) به سادگی معلوم می‌شود که معادله نیروی محرکه دو سر القاگر m ام با رابطه زیر داده می‌شود

$$L \frac{dI_n}{dt} = -C^{-1}Q' + C^{-1}Q$$

بنابراین

$$L \frac{d^2 I_n}{dt^2} = -C^{-1} \frac{dQ'}{dt} + C^{-1} \frac{dQ}{dt}$$



شکل ۱۵-۲ شبکه القاگرها و خازنهای جفت‌شده. (الف) پارامترهای متمرکز. (ب) آرایش کلی جریان و بار در القاگر m ام.

با استفاده از بقای بار به منظور حذف کردن dQ'/dt و dQ/dt نتیجه می شود

$$\begin{aligned} L \frac{d^2 I_n}{dt^2} &= -C^{-1}[I_n - I_{n+1}] + C^{-1}[I_{n-1} - I_n] \\ &= C^{-1}[I_{n+1} - I_n] - C^{-1}[I_n - I_{n-1}] \end{aligned} \quad (۸۵)$$

معادله (۸۵) دارای همان شکل ریاضی معادله (۷۷) است، یعنی معادله حرکتی که نوسانهای طولی یک رشته جرم و فنر را مشخص می کند. بنابراین بدون آنکه هنوز درباره شرایط مرزی نگران باشیم، می توانیم رابطه پاشندگی و جواب عمومی برای شدت جریانها در القاگرها را بنویسیم. رابطه پاشندگی با قرار دادن C^{-1}/L به جای K/M در معادله (۷۸) به دست می آید

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{C^{-1}}{L}} \sin \frac{ka}{2} \quad (۸۶)$$

برای یک مد تنها، جواب عمومی معادله (۸۵) بدون توجه به شرایط مرزی عبارت است از

$$I_n(t) = [A \sin nka + B \cos nka] \cos[\omega(k)t + \varphi] \quad (۸۷)$$

که در آن مقادیر ثابت A و B و رشته مقادیر k مربوط به مدها به شرایط مرزی در دو انتهای سیستم بستگی دارد.

مفهوم ka . ممکن است متوجه شده باشید که در معادله ای که رفتار مدار LC را مشخص می کند یعنی معادله (۸۵)، فاصله a وجود ندارد. چنین فاصله ای در شکل ۲-۱۵ نشان داده شده است اما لزومی به انجام آن نبود، زیرا یک نمودار الکتریکی یک نمودار فضایی نیست و رفتار مدار به شکل فضایی آن بستگی ندارد. پس معنی ka در رابطه پاشندگی یعنی معادله (۸۶) و در جواب عمومی برای شدت جریانها، معادله (۸۷)، چیست؟ هنگامی که طول در امتداد z ، مانند حالت تار نوسان کننده، واقعاً معنای فیزیکی مهمی دارد، معنی k ، افزایش بر واحد طول فاز در امتداد z تابع عمومی $A \sin kz + B \cos kz$ که شکل مد را به دست می دهد، است. هنگامی که پارامترهای متمرکز شده، مانند حالت تار مهره دار، وجود دارد، رابطه $z = na$ را می نویسیم که در آن $n = 1, 2, 3, \dots$ شماره مهره هاست. بنابراین کمیت ka که در تابع شکلی $A \sin nka + B \cos nka$ ظاهر می شود، برابر با حاصلضرب اندازه فاز (تابع شکلی) برحسب رادیان بر واحد فاصله در فاصله بین جرمهای متمرکز شده است. بنابراین ka عبارت است از مقدار افزایش فاز برحسب رادیان وقتی از جرم متمرکز شده n به جرم متمرکز شده بعدی یعنی $n + 1$ می رویم. در حالت سیستمی با القاگرها و خازنهای متمرکز شده، هنگامی که از یک القاگر به القاگر بعدی می رویم، کمیت ka به طور مشابه

مقدار افزایش در فاز تابع "شکلی" $A \sin nka + B \cos nka$ است. در اینجا به مشخص کردن فاصله a بین القاگرها واقعاً احتیاجی نیست. بنابراین به جای ka می‌توان نشانه دیگری مثلاً θ قرار داد که θ نشانگر افزایش فاز، هنگامی که n در تابع شکلی $A \sin n\theta + B \cos n\theta$ به اندازه یک واحد افزایش پیدا می‌کند، است. چون این نمادگذاری بسیار انتزاعی است و تشابه ریاضی با مثالهای مکانیکی را دربر ندارد، بنابراین، این تصور را که القاگرهای متمرکز شده با فاصله a از یکدیگر جدا شده‌اند، نگاه می‌داریم.

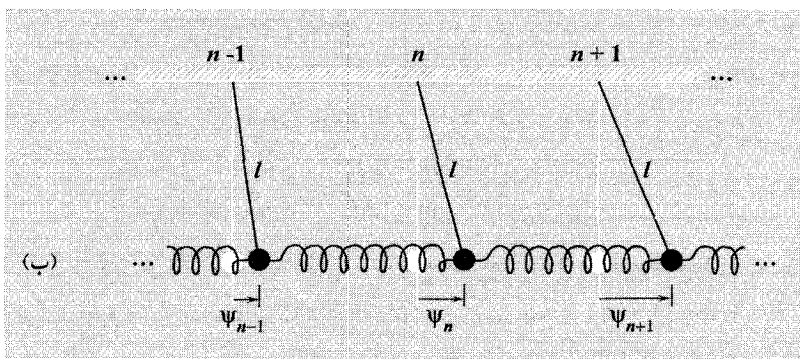
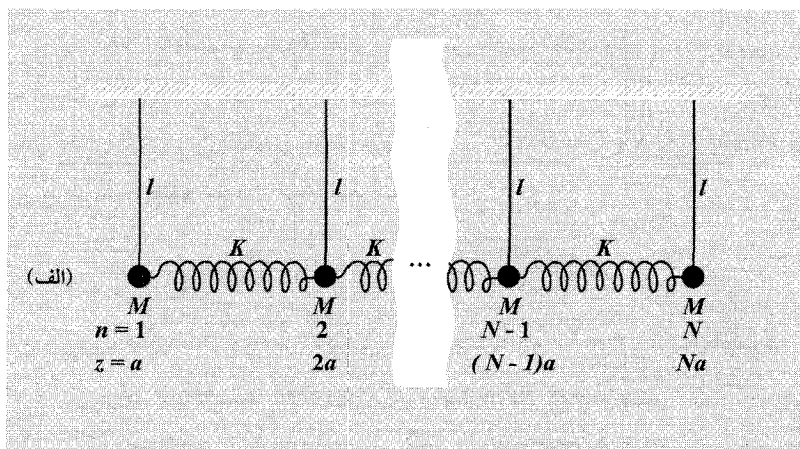
شکلهای دیگر رابطه پاشندگی. توجه کرده‌اید که در هر سیستم با پارامتر متمرکز شده که تاکنون در این بخش در نظر گرفته‌ایم، رابطه دقیق پاشندگی به شکل زیر است

$$\omega(k) = \omega_{\max} \sin \frac{ka}{\gamma} \quad (88)$$

که در شکل ۲-۱۳ رسم شده است و در آن ω_{\max} مقدار ثابتی است که به سیستم فیزیکی بستگی دارد. این شکل رابطه پاشندگی فقط به خاطر انتخاب سیستم است. در تمام حالتها مورد مطالعه، سیستمی انتخاب شده که در آن نیروی بازگرداننده برای یک جرم (یا القای) مفروض کاملاً در نتیجه جفت‌شدگی آن جرم به جرمهای مجاور بوده و متناسب با جابه‌جایی نسبی آن جرم و جرمهای مجاورش باشد. تعداد چنین سیستمهایی بی‌شمار است. اما شکلهای متعدد جالب و مهم دیگری از رابطه پاشندگی نیز وجود دارد. مثلاً سیستمهایی با این خاصیت وجود دارد که در آنها نیروی بازگرداننده بر روی یک جزء متحرک مفروض دارای دو قسمت مستقل است. یک قسمت در نتیجه نیروی وابستگی از وابستگی با اجزای متحرک مشابه مجاور حاصل می‌شود. اگر این قسمت تنها نیروی مؤثر بود، رابطه پاشندگی به شکل معادله (۸۸) درمی‌آمد. قسمت دیگر در نتیجه وابستگی به نیروهای "خارجی" است. این قسمت خارجی فقط به جابه‌جایی جزء متحرک از محل تعادلش و نه به جابه‌جاییهای اجزای مجاور، بستگی دارد. اگر تنها این قسمت وجود می‌داشت، اجزای متحرک جفت‌شده می‌بودند و جابه‌جاییهای آنها، مختصات بهنجار تمام سیستم می‌شد. این نوع سیستم در مثال زیر نشان داده شده است.

مثال ۵: آونگهای به هم جفت‌شده

سیستم در شکل ۲-۱۶ نشان داده شده است. نیروی بازگرداننده هر جرم از دو قسمت تشکیل شده است. قسمت "خارجی" در نتیجه سنگینی است. این نیرو با جابه‌جایی جرم از محل تعادلش متناسب است و مستقل از جابه‌جایی جرمهای مجاورش است. دومین نیروی مستقل در



شکل ۱۶-۲ آهنگهای جفت شده. (الف) تعادل. (ب) آرایش کلی.

نتیجه وابستگی یک جرم مفروض به جرمهای مجاورش به وسیله فرهاست. این نیرو به جابه جایی جرمهای مجاور بستگی دارد.

اکنون رابطه پاشندگی را حدس می زنیم. اگر فقط وابستگی بین جرمها وجود داشت، یعنی g برابر صفر بود، در این صورت رابطه پاشندگی برای نوسانهای طولی جرمهای جفت شده به دست می آمد. بنابراین نیروی بازگرداننده بر واحد جابه جایی بر واحد جرم یعنی ω^2 با رابطه (۷۸) داده می شد

$$\omega^2 = 4 \frac{K}{M} \sin^2 \frac{ka}{2}, \quad g = 0 \quad \text{اگر} \quad (۸۹)$$

اینک فرض کنید که (در حالتی که $g = 0$ است) نوسانهایی در یک مد تنها وجود دارد که دارای شکل مشخصی هستند که با مقدار مشخصی از k که شرایط مرزی معین می کند، تعیین شده اند.

تصور کنید که مقدار g را بتوانیم با استفاده از یک "پیچ کنترل گرانش" از مقدار صفر تا مقدار نهایی آن یعنی 9.8° (با واحدهای cgs) به تدریج افزایش دهیم. (یک روش عملیتر می توان اختراع کرد. چه کمیت دیگری را می توانید تغییر دهید؟) هنگامی که g را از صفر به مقدار خیلی کوچک g' افزایش دهیم، نیروی بازگرداننده بر واحد جابه جایی بر واحد جرم برای هر ذره، به اندازه مساوی افزایش پیدا می کند و سهم حاصل از g' برابر است با

$$\text{سهم } g' \text{ در } \omega^2 \text{ برای هر جرم برابر } \frac{g'}{l} \text{ است}$$

یعنی تمام جرمها با همان شکل، و همان ترکیب خطی از $\sin kz$ و $\cos kz$ به نوسان ادامه می دهند، اما فقط تندتر نوسان می کنند زیرا هنگامی که g' صفر بود، این جرمها نیروی بازگرداننده بر واحد جابه جایی بر واحد جرم یعنی ω^2 یکسان داشتند و اکنون به توان دوم بسامد هر جرم یک مقدار مساوی اضافه شده است. بنابراین باز هم تمام جرمها، ω^2 یکسان دارند و از این رو در یک مد هستند. بنابراین با افزایش تدریجی g ، مدها را بدون مخلوط کردن آنها، نگاه خواهیم داشت. شکل و طول موج آنها مانند حالت $g = 0$ است و کل نیروی بازگرداننده بر واحد جرم بر واحد جابه جایی عبارت است از

$$\omega^2(k) = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M} \sin^2 \frac{ka}{2} \quad (90)$$

اگر اثباتی را ترجیح می دهید که کمتر کیفی است، به مسئله ۲-۲۶ مراجعه کنید، در آنجا خودتان معادله حرکت جرم n را به دست آورده و رابطه پاشندگی یعنی معادله (۹۰) را اثبات خواهید کرد و شکل مدها را به دست خواهید آورد. (آیا می توانید نشان دهید که برای شرایط مرزی شکل ۲-۱۶، در پایینترین مد، $k = 0$ است؟)

در بخشهای آینده مثالهای بیشتری از قوانین پاشندگی که به شکل معادله (۹۰) هستند و آنها را به شکل کلی زیر می توان نوشت، در نظر خواهیم گرفت

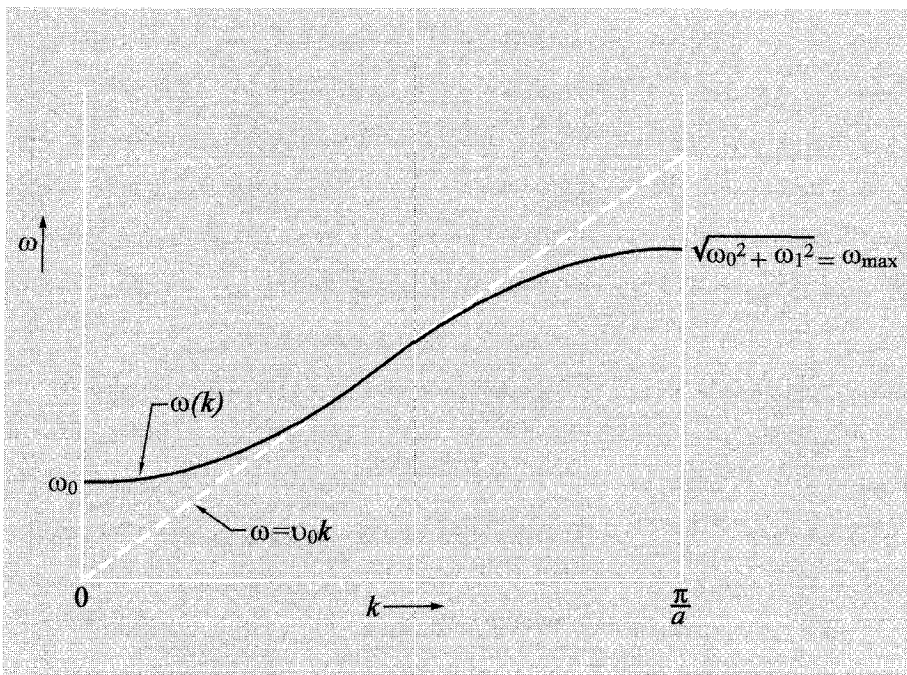
$$\omega^2(k) = \omega_0^2 + v_1^2 \sin^2 \frac{ka}{2} \quad (91)$$

در حد پیوسته، که در آن $ka \ll 1$ است، این رابطه به صورت زیر درمی آید

$$\omega^2(k) = \omega_0^2 + v_1^2 k^2 \quad (92)$$

که در آن v_1 مقدار ثابتی و برابر $\omega_0^2 a^2 / 4$ است.

قوانین پاشندگی به شکل معادله (۹۲) را هنگامی در نظر خواهیم گرفت که تابش الکترومغناطیس در یک موجبر و امواج الکترومغناطیسی در یون سپهر کره زمین را مطالعه می کنیم. (قانون پاشندگی



شکل ۱۷-۲ رابطه پاشندگی برای آونگهای جفت شده.

برای امواج نسبیتهی دوپرویی در توصیف کوانتومی ذرات نیز همین شکل را داراست. (معادله ۹۱) در شکل ۱۷-۲ رسم شده است.

مثال ۶: نوسانهای پلاسما

این مسئله مثال جالبی از سیستمی است که رابطه پاشندگی آن مانند رابطه پاشندگی آونگهای جفت شده است. در فصل ۴ رابطه پاشندگی را برای امواج الکترومغناطیسی در یون سپهر کره زمین به دست خواهیم آورد. این رابطه به شکل معادله (۹۲) خواهد بود

$$\omega^2(k) = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad (93)$$

که در آن c سرعت نور است و ω_p که "بسامد نوسان پلاسما" نام دارد، با رابطه زیر داده می شود

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m} \quad (94)$$

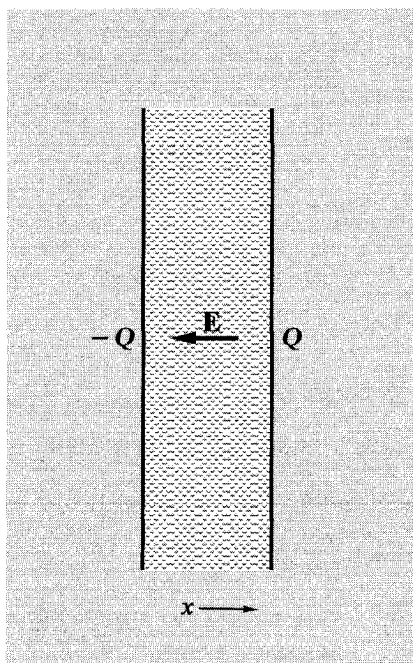
در اینجا N چگالی عددی الکترونها (تعداد الکترونها در سانتیمتر مکعب)، e بار الکترون، و m جرم الکترون است. از شکل ۲-۱۷ پیداست که مد با پایتترین بسامد ممکن برای سیستمی با رابطه پاشندگی مانند معادله (۹۱) یا (۹۲) مدی است که در آن $k = 0$ یعنی طول موج برابر بینهایت است. این مطلب بدین معنی است که تمام آونگها با ثابت فاز مساوی و دامنه مساوی نوسان می‌کنند. بنابراین بسامد آونگ با رابطه $\omega^2 = g/l$ داده می‌شود. در مثال حاضر، بسامد پایتترین مد، همان‌گونه که با قرار دادن $k = 0$ در معادله (۹۳) دیده می‌شود، بسامد نوسان پلازما یعنی ω_p است. اکنون مد مزبور را در نظر گرفته و بسامد آن یعنی معادله (۹۴) را به دست می‌آوریم. ■

یک پلاسمای خنثی شامل مولکولهای خنثی گازی است که برخی از مولکولهای آن یونیزه‌اند. هر مولکول تک‌بار یونیزه، شامل یک یون مثبت است که یک الکترون (منفی) آزاد کرده است. یون سیهر کرده زمین لایه‌ای از هواست (در حقیقت چندین لایه با خواص تا اندازه‌ای متفاوت است) که شامل تعداد زیادی مولکولهای یونیزه هوا (مولکولهای N_2 و O_2) است. یونش هر مولکول هوا معمولاً با جذب یک کوانتوم نور ماوراء بنفش که از خورشید گسیل می‌شود، انجام می‌گیرد. بیشترین چگالی یونی و الکترون آزاد در فاصله حدود 200 تا 300 کیلومتری بالای سطح زمین وجود دارد. در ارتفاعهای بالاتر از آن، چگالی الکترونی (و یونی) کاهش می‌یابد، زیرا چگالی مولکولهای هوای خنثی که باید یونیزه شوند، کاهش پیدا می‌کند. در ارتفاعهای کمتر از آن نیز، چگالی الکترونی کاهش می‌یابد، زیرا قسمت عمده تابش ماوراء بنفش زودتر جذب شده است. (بدون لایه حفاظتی هوا در بالای سرمان، در نتیجه آفتاب سوختگی خیلی زود از بین می‌رویم.) چون پلازما (به‌طور متوسط) خنثی است، به‌صورت یک چشمه میدان الکتروستاتیک عمل نمی‌کند. با وجود این، در یک لحظه ممکن است یک ناحیه از پلازما دارای بار اضافی اندکی و ناحیه مجاور آن، به‌همان اندازه کمبود بار داشته باشد. چنین حالتی یک میدان الکتریکی در پلازما به‌وجود می‌آورد. تحت تأثیر میدان الکتریکی، یونها در یک جهت (یعنی در امتداد میدان) و الکترونها در جهت دیگر شتاب می‌گیرند. بارهای الکتریکی در جهتهایی حرکت می‌کنند که به از بین رفتن ازدیاد و نقصان بار که میدان الکتریکی را به‌وجود می‌آوردند، منجر شود. بنابراین یک "نیروی بازگرداننده" وجود دارد. هنگامی که بار الکتریکی اضافی از بین رفت و به صفر رسید و میدان الکتریکی مربوط به آن به صفر کاهش یافت، یونها و الکترونها سرعت کافی به دست آورده‌اند. لختی آنها سبب می‌شود "نایستند" و دوباره ازدیاد و نقصان بار با علامت مخالف نسبت به حالت اولیه، به دست آید. در اینجا وضعیت معمولی را داریم که باعث می‌شود تا نوسانها پس از تحریک شدن همچنان ادامه یابند.

اگر فقط به حرکت خالص بار الکتریکی به جلو و عقب از یک ناحیه به ناحیه دیگر علاقه مند باشیم، می‌توانیم یونهای مثبت را فراموش کنیم و تمام حرکت بار را در نتیجه حرکت الکترونها در نظر بگیریم. چون نیروی الکتریکی بر الکترونها و یونها به یک اندازه اثر می‌کند، شتاب حرکت یک الکترون، به نسبت کوچکی جرمش، (در حدود 3×10^4) بزرگتر از شتاب یک یون تک‌بار است. اکنون حالت ساده‌ای را که در آن پلاسما بین دو دیواره محدودکننده قرار دارد، بررسی می‌کنیم. از حرکت یونها در مقایسه با حرکت الکترونها صرف‌نظر می‌کنیم. در لحظه غیر مشخص ممکن است یک بار اضافی Q در روی یک دیواره و نقصان بار متناظر آن در روی دیواره دیگر وجود داشته باشد. این حالت، یک میدان الکتریکی یکنواخت در فضا، در پلاسما به وجود می‌آورد (جلد دوم، سری برکلی، بخش ۳-۵)، که با رابطه زیر داده می‌شود

$$E_x = -4\pi \frac{Q}{A} \quad (95)$$

که در آن A مساحت دیواره و علامت منفی نشانه آن است که E_x می‌خواهد بار Q را به صفر برگرداند. هیچ چشمه میدان الکتریکی دیگری وجود ندارد. (پلاسمای بین دیواره‌ها خنثی است



شکل ۱۸-۲ نوسانها در یک پلاسمای محبوس.

چون هر الکترونی که از یک ناحیه مفروض به طرف راست حرکت کند و خارج شود، الکترون دیگری از سمت چپ وارد می‌شود و جای آن را می‌گیرد. جرم یک الکترون تنها m و بار آن q است. برای هر الکترون در پلازما، از قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود

$$\frac{m d^2 x}{dt^2} = qE_x \quad (96)$$

(از سایر نیروهایی که بر الکترونها اثر می‌کند و از برخوردهای الکترونها و یونها حاصل می‌شود، صرف‌نظر می‌کنیم. متوسط این نیروها صفر است و در برابند حرکت بار الکتریکی اثری ندارند.) اکنون تصور کنید در هر سانتیمتر مکعب N الکترون آزاد وجود دارد و هر الکترون از آن مکان (تعادلی) که به‌طور متوسط اختیار می‌کند، به اندازه فاصله x جابه‌جا می‌شود. بنابراین بار خالصی که بر روی یک دیواره می‌نشیند (و از دیواره دیگر جدا می‌شود) برابر است با

$$Q = NqAx \quad (97)$$

اگر از معادله (97) دو بار نسبت به زمان مشتق بگیریم و معادلات (96) و (95) را در آن قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{4\pi Nq^2}{m} Q \quad (98)$$

جواب این معادله عبارت است از

$$Q = Q_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

که در آن

$$\omega^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m} \equiv \omega_p^2 \quad (99)$$

کمیت ω_p را بسامد نوسان پلازما می‌نامند.

چگالی الکترون آزاد یعنی N یون سیهر کره زمین با ارتفاع و با زمان تغییر می‌کند. پس از غروب آفتاب، باز ترکیب یونها و الکترونها که مولکولهای خنثی را به وجود می‌آورد، ادامه می‌یابد اما تشکیل یونهای جدید متوقف می‌شود. بنابراین در شب، چگالی الکترونی کاهش می‌یابد. حدود بسامد نوسان پلازما در روز یعنی $\nu_p (= \omega_p / 2\pi)$ به‌طور نمونه برابر است با

$$\nu_p \approx 10^6 \text{ تا } 30 \text{ Mc} \quad (\text{مگادور بر ثانیه}) \quad (100)$$

که از آن $N \approx 10^6$ تا $N \approx 10^7$ الکترون بر سانتیمتر مکعب به دست می‌آید.

مثالهای نامتعارف

اگر فرضیهٔ دوبروی را که می‌گوید هر ذره با اندازهٔ حرکت p دارای عدد موجی k است که با رابطهٔ $p = \hbar k$ داده می‌شود را با "شرط بسامد بور" که می‌گوید هر ذره با انرژی E دارای بسامد موجی ω است و با رابطهٔ $E = \hbar\omega$ داده می‌شود، ترکیب کنیم، با معلوم بودن رابطهٔ بین E و p ، رابطهٔ پاشندگی بین ω و k ذرات را می‌توان به دست آورد. مثالهایی در این باره را در مبحث تکمیلی ۲ می‌خوانیم. ■

مسائل و آزمایشهای خانگی

۱-۲۰ فتر اسلینکی - بستگی بسامد به طول. یک سر فتر اسلینکی را در دست چپ و انتهای فتر را در دست راست بگیرید و دستهایتان را به اندازهٔ تقریباً یک متر باز کنید. بسامد نوسانات عرضی عمودی را اندازه بگیرید (نگران شل شدن فتر نباشید). سپس فتر را تا جایی که می‌توانید بکشید. بسامد را حساب کنید. نتیجه را بررسی کنید. برای تعیین وارون ثابت فتر بر حلقه از اندازهٔ بسامد استفاده کنید. فرض کنید N تعداد کل حلقه‌های فتر اسلینکی است. فتر را طوری ببندید که N حلقهٔ آن آزاد باشد. قبل از انجام آزمایش بستگی بسامد به N/N را پیش‌بینی کنید. سپس آزمایش را انجام دهید.

۲-۲۰ فتر اسلینکی به‌عنوان سیستم پیوسته. دو سر فتر اسلینکی را به جایی محکم کنید. [نوار، سیم، مادگی (مانند سنجاق قفلی)، و گیره‌های C شکل برای این کار مناسب‌اند]. طول مناسب در حدود ۲٫۵ تا ۳ متر است. نگران شل شدن فتر نباشید. پاینتیرین مد عرضی در هر جهت عرضی را ایجاد کنید. بسامدهای دو مد را اندازه بگیرید. همچنین پاینتیرین مد طولی را ایجاد کنید و بسامد آن را اندازه بگیرید. (دو روش خوب برای ایجاد مدهای دلخواه وجود دارد. یکی جمع نگه داشتن فتر به روش مناسب و ول کردن آن است؛ دیگری گرفتن آن در نزدیک یک سر و به آرامی تکان دادن آن با بسامد مناسب است تا دامنهٔ مناسب به وجود آید و سپس ول شود. دو روش را به کار ببرید.) سپس چگونگی ایجاد مد دوم را که در آن طول L به اندازهٔ دو نیم طول موج است فرا گیرید. این کار را برای سه جهت x ، y ، و z انجام دهید. بسامدها را حساب کنید. با کمی تمرین می‌توانید مدهای سوم را هم ایجاد کنید.

حال پاینتیرین مد عمودی و دومین مد طولی را همزمان ایجاد کنید. (این کار به آسانی با کسیدگی اولیهٔ مناسب انجام می‌شود.) به سیستم نگاه کنید و بسامد زنش بین مد طولی (دومین) و پاینتیرین مد دوقلوی عمودی را حساب کنید. این کار وقتی طرح آن را ریختید و چند دقیقه تمرین کردید آسان می‌شود. این کار روش خوبی است برای بررسی اینکه ضریب دقیق ۲ در بسامد وقتی از حالت اولیه به اکتاو اول می‌رویم به دست می‌آید. به همین ترتیب به آسانی می‌توانید پاینتیرین مد عمودی و دومین مد افقی را همزمان به دست آورید.

۳-۲ اندازه‌گیری صفر. آزمایش خانگی ۲-۲ را بخوانید (گرچه برای انجام این آزمایش لازم نیست آن را حل کنید). فرض کنید بسامدهای اسلینکی را با شمردن نوسانها تقریباً ده ثانیه و سپس تقسیم تعداد دورهای کامل بر زمان اندازه بگیرید. فرض کنید ساعت را با دقت ± 1 ثانیه بخوانید و یک نوسان کامل را با دقت در حدود $\pm 1/4$ دور تخمین بزنید. بسامد $1/8$ پایبندترین مد در حدود 1 cps است. بسامد $1/2$ دومین مد در حدود 2 cps است.

(الف) دقت نسبی (یا درصدی) که اندازه‌گیری شما از بسامد $1/8$ می‌دهد تقریباً چقدر است؟ برای $1/2$ چقدر است؟ (جواب باید به صورت " $1^\circ \pm 1^\circ$ و $1/8 = 2^\circ \pm 2^\circ$ " یا چیزی شبیه آن باشد.)

(ب) سپس فرض کنید دو مد را همزمان ایجاد کرده‌اید و بسامد زنش بین بسامد $1/8$ و $1/2$ را همان‌طور که در آزمایش خانگی ۲-۲ بیان شد به دست آورید. این عمل را می‌توان با دیدن زنشها در حدود 1° ثانیه یعنی 1° دور $1/8$ انجام داد. فرض کنید می‌توانستید با دقت $1/4$ زنش آشکار کنید، در آن زمان هیچ زنشی بین $1/8$ و $1/2$ نبود. بنابراین نتیجه آزمایش $1/8 - 1/2 = 0$ می‌شد. دقت آزمایش چقدر است؟ (جوابی مانند " $1^\circ \pm 1^\circ$ " یا چیزی شبیه آن می‌خواهیم.) دقت تخمین کمیت $1/8 - 1/2$ (به همین روش بیان می‌شود) که از ترکیب نتایج اندازه‌گیریهای مستقل $1/8$ و $1/2$ از قسمت (الف) به دست می‌آید چیست؟ آیا مزیت آزمایشی در روش شمارش زنشها می‌بینید؟ توضیح دهید چه کار بهتری با این روش می‌توانید انجام دهید. سعی کنید اگر امکان دارد این روش را به جمله‌ای مانند "چطور یک اندازه‌گیری انجام دهیم" تعمیم دهید.

۴-۲ "کیفیت صدای" فراسلینکی. کیفیت صدای یک آلت موسیقی به هماهنگی که تحریک می‌شود بستگی دارد [مثلاً، هماهنگهای زوج در کلارینت (قره‌نی) حذف می‌شوند (یا تقریباً حذف می‌شوند) و فقط $1/8$ ، $3/8$ ، $5/8$ و غیره باقی می‌مانند.] مرکز فنر را پیدا کنید (فنر را مانند آزمایش خانگی ۲-۲ آویزان کنید). فنر را با یک فشار دست ناگهانی به مرکز آن تحریک کنید. فشارهای مختلف را امتحان کنید. به زودی خواهید دید که هماهنگهای زوج همیشه حذف می‌شود و هرچه تحریک ضربه‌ای بیشتر باشد تعداد مدهای فردی که تحریک می‌شود بیشتر خواهد بود، آیا می‌توانید روشی پیشنهاد کنید که مدهای زوج تحریک شوند؟

سعی کنید با انگشت سیم پیانو یا یک گیتار را در جاهای مختلف به صدا درآورید — در وسط یا نزدیک انتهای آن — و ببینید آیا تفاوتی در کیفیت صدا ایجاد می‌شود.

۵-۲ پیانو به‌عنوان ماشین تحلیلگر فوریه — حساسیت گوش به فاز. در مقابل پیانو بایستید. پدال ضربه‌گیر آن را به طرف پایین فشار دهید. داخل ناحیه سیمها و تخته صدا بلند فریاد بزنید "هی".

سپس گوش کنید. فریاد بزنید "اوه". همه حروف صدا دار را امتحان کنید. سیمهای پیانو به صدا درمی آیند (به شکل نامشخصی) و سپس آنالیز فوری صدای شما را ادامه می دهند. توجه کنید که حرف صدا دار قابل تشخیص به مدت چند ثانیه باقی می ماند. این موضوع در مورد اهمیت فاز نسبی مؤلفه های فوری که صدا را به وجود می آورند برای مغز و گوش شما چه نکته ای را در بر دارد؟

۲۰-۶ هماهنگهای پیانو - مقیاس اعتدال مساوی. برای سه مقیاس معمول زیر به جدولهای مفید شدت در کتاب مرجع شیمی و فیزیک در مورد مقیاسهای موسیقی نگاه کنید.

گام استاندارد آمریکا (A۴۴۰)

گام بین المللی (A۴۳۵) مقیاس معتدل با فاصله های مساوی

مقیاس درست یا علمی (بر پایه C۲۵۶ که A۴۲۶٫۶۷ را می دهد)

ابتدا مقیاس علمی را توضیح می دهیم. ۲۵۶ cps را معادل یک واحد بسامد بگیرد، $\nu = 1$ ، بنابراین هماهنگهای نت اصلی برابرند با $\nu = 2, 3, 4, \dots$ ؛ زیرهماهنگها با $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ تعریف می شوند. C میانگین در پیانو C۲۵۶ است (اگر پیانو به آن شکل کوک شده باشد). که به آن C_۴ گفته می شود. (شاخص زیر C نشانه اکتاوست. شاخص زیر C با افزایش هر اکتاو C زیاد می شود.) فرض کنید سیمهای پیانو کاملاً از قانون پاشندگی "سیم کاملاً انعطاف پذیر پیوسته" پیروی کند. آنگاه مد بسامد سیم شامل ترتیب هماهنگ $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ است. نامها و بسامدهای اولین ۱۶ هماهنگ سیم C_۴ و همچنین دو زیر هماهنگ اول به قرار زیرند (زیر C_۴ و اکتاوهایش خط کشیده ایم):

نام: C_۸ B_۷ Bb_۷ G#_۷ G_۷ F#_۷ E_۷ D_۷ C_۷ Bb_۶ G_۶ E_۶ C_۶ G_۵ C_۵ C_۴ C_۳ F_۳

ν : $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶

یک اکتاو همیشه با یک ضریب ۲ در بسامد بالاتر است (G_۷ و G_۶ را مقایسه کنید). حال مقیاسی با تک اکتاو بین C_۴ و C_۵ بسازید که از تقسیم یا ضرب هماهنگها و زیرهماهنگهای C_۴ با توان مناسب ۲ به وجود می آید. آنگاه مقیاس علمی یا دیاتونیک در C مازور را به دست می آوریم. (دیاتونیک یعنی فقط "نتهای سفید" را روی صفحه پیانو داریم و هیچ یک از "نتهای سیاه" وجود ندارد.)

نام: C B A G F E D C

ν : ۱ $\frac{9}{8}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{15}{8}$ ۲

ما دزدانه وارد A شده‌ایم. در واقع $\frac{5}{4}F$ است.) نت C در این مقیاس پرده‌ای نامیده می‌شود.

کوچکترین بازه موسیقی در مقیاس دیاتونیک مینور دوم نام دارد. نسبت بسامد برای مینور دوم برابر است با $1067 = \frac{16}{5} = \frac{C}{B} = \frac{F}{E}$. نسبت بزرگتر بعدی مازور دوم نامیده می‌شود. دو نوع مازور دو داریم: $1125 = \frac{9}{8} = \frac{B}{A} = \frac{G}{F} = \frac{D}{C}$ ، $111 = \frac{10}{9} = \frac{E}{D} = \frac{A}{G}$. همچنین دو نوع نسبت بزرگتر بعدی، یعنی مینور سوم داریم: $1185 = \frac{32}{27} = \frac{F}{D}$ ، $1200 = \frac{6}{5} = \frac{C}{A} = \frac{G}{E}$. تنها یک نوع مازور سوم وجود دارد: $1250 = \frac{5}{4} = \frac{B}{G} = \frac{A}{F} = \frac{E}{C}$. حال از نظر موسیقی مشکلی پیش می‌آید. فرض کنید در جریان ترکیب در یک پیانو که با این مقیاس کوک شده باشد ناگهان تصمیم بگیرید که یک "علامت کلید" را عوض کنید، یعنی به مقیاس دیاتونیک با نت متفاوت مانند پرده‌ای تغییر دهید. مثلاً می‌خواهید از مازور C به مازور D بروید. شما همان نوع مقیاس را یعنی همان نسبت بسامد قبل را می‌خواهید. بنابراین اولین مازور دوم در مقیاس جدید یعنی، E/D ، به مازور دوم از نوع D/C با نسبت 1125 را می‌خواهید. متأسفانه نمی‌توانید از E که قبلاً داشته‌اید استفاده کنید، زیرا $111 = E/D$. بنابراین سیم جدیدی لازم دارید E' ، با $1265 = \frac{(1125)(D/C)}{E'/C} = \frac{E'/C}{E/C} = 1250$ که مد بعدی بعد از E' سیم جدیدی لازم دارد که $F\sharp$ نامیده می‌شود. ما آن را در نسبت $F\sharp/D = E/C$ می‌سازیم، بنابراین $1407 = \frac{5}{4} \left(\frac{1}{8} \right) = F\sharp$. (که کلید سیاهی در پیانو است.) توجه کنید که پیانو اکنون یک نوع جدید از مینور دوم لازم دارد: $1555 = F\sharp/F$. همان‌طور که مقیاس را کامل می‌کنید باید کلیدهای بیشتری اضافه کنید. سپس اگر بخواهید هنوز در کلید دیگر بنوازید، اوضاع بدتر و بدتر می‌شود. (سعی کنید مقیاس D را کامل کنید.) باید "کلید سیار" $C\sharp$ را اضافه کنید تا نت مربوط به B روی مقیاس C را به دست آورید. اما چه سیمهای "پریم‌دار" دیگری لازم دارید؟

مقیاس معتدل با فاصله‌های مساوی با ساختن همهٔ تنهایی که به طوری مساوی روی مقیاس لگاریتمی جای گرفته‌اند به دست می‌آید. اکتاو به ۱۲ مینور دوم تقسیم می‌شود ("نیم‌پرده‌ها") که هرکدام از آنها نسبت بسامدی $1059 = \frac{2^{1/12}}$ دارند. پس همهٔ مازورهای دوم نسبت $1122 = \frac{2^{1/12}}$ دارند؛ همهٔ مینورهای سوم نسبت $1122 = \frac{2^{1/12}}$ و غیره دارند. هیچ‌کدام از بازه‌ها "درست" نیستند به جز اکتاوها، اما همهٔ بازه‌ها در مقیاس دیاتونیک که بر پایهٔ هر نت پرده‌ای قرار دارد به مقادیر درست نزدیک‌اند.

آزمایشهای زیر را انجام دهید:

۱. کلید مثلاً Bb را به طور یکنواخت فشار دهید، به طوری که پدال میراکننده را بلند کنید بدون

اینکه صدای نت شنیده شود. حال به تندی به نت پایتتر ضربه بزنید و چند ثانیه نگه دارید، و کلید پایتتر را در حالی که نت پایتتر میرا می شود رها کنید. اگر حالا صدای سیم $B\flat$ را می شنوید این صدا از تحریک هماهنگهای موجود در نقش مد سیم مرتعش پایتتر به وجود آمده است. سیمهای پایتتر دیگر را امتحان کنید. نت یک اکتاو پایین به صدا درمی آید. بنابراین $B\flat$ ۱۲ امین کلید، B ، به صدا درمی آید، چون B سومین هماهنگ آن است. همین طور سیم C به صدا درمی آید چون $B\flat$ هفتمین هماهنگ است که این هماهنگ در سیم C مرتعش وجود دارد. روش دیگر انجام این آزمایش این است که در حالی که آهسته نتهای بالاتر مختلف را فشار می دهید تا ببینید آیا آنها برانگیخته می شوند یا نه همان نت پایتتر را مثلاً $C\sharp$ را فشار دهید. وقتی نتی را که برانگیخته شده یافتید، نت همسایه را که یک مینور دوم فاصله دارد تکرار کنید. آیا برانگیخته می شود؟

۲. این دفعه یک کلید نت پایین را آهسته فشار دهید و به یک نت بالاتر به تندی ضربه زنید. اگر نت بالاتر یکی از صداهای فرعی سیم پایتتر باشد، شما آن صدای فرعی را در سیم پایتتر بدون برانگیختگی پایتترین مد (اصلی) سیم پایتتر برانگیخته می کنید. بنابراین می فهمید که هماهنگهای سیم پایتتر چه صدایی می دهد وقتی با صدای اصلی بلند پوشیده نشده باشد؟

۳. از روش شماره ۲ استفاده کنید تا چگونگی صدای اولین ۶ یا ۷ هماهنگ $C\sharp$ (C پایتتر) را به دست آورید. سپس یاد بگیرید که وقتی به طور معمولی به کلید پایتتر ضربه می زنید چطور هماهنگ خاصی را در نقش نت گوش کنید. مثلاً برای اینکه بفهمید هماهنگ هفتم، $B\flat$ چطور صدایی دارد وقتی به $C\sharp$ ضربه زده می شود، $C\sharp$ را به آرامی پایین نگه دارید و به $B\flat$ به تندی ضربه بزنید. با این کار چگونگی صدای $B\flat$ را وقتی هماهنگ هفتم $C\sharp$ است می فهمیم. سپس وقتی هنوز حضور ذهن دارید سیم $C\sharp$ را بزنید و روی به صدای درآمدن $B\flat$ تمرکز کنید (که بر $C\sharp$ اصلی غالب می شود). توجه کنید که بسامد این نت وقتی مانند ۷ امین هماهنگ $C\sharp$ یعنی سیم $C\sharp$ زده می شود دقیقاً مانند بسامد نت اصلی سیم $B\flat$ نیست. ولی به قدری به آن نزدیک است که احتمالاً می تواند برانگیخته شود اما همین که $B\flat$ میرا شد و چند ثانیه طول کشید که سیم $C\sharp$ فراموش کند که چطور برانگیخته شده است، آن سیم (۷ امین هماهنگ) با بسامد خودش نه بسامد برانگیختگی به نوسان درمی آید. بنابراین صدای آن کمی با نت تحریک شده تفاوت دارد. (البته اگر پیانو کوک نباشد، صدای خیلی متفاوتی می دهد.) زیرا با این تفاوت بسامد کوچک می توانید زنشهایی را بشنوید:

۴. به آرامی $C\sharp$ را پایین نگه دارید. به تندی $C\sharp$ را بزنید. این کار مد دوم سیم $C\sharp$ را تحریک می کند. حال قبل از اینکه صدای آن قطع شود سیم $C\sharp$ را بزنید و سیم $C\sharp$ را دوباره بزنید، به آرامی سعی کنید صدای آن را با آنچه از هماهنگ دوم $C\sharp$ باقی مانده است جور کنید (این کار روی بعضی پیانوها بهتر شنیده می شود، و باید در اتاق آرام دیگری انجام شود.)

۵. دو تا از پایینترین نتها در پیانو نتهای A. ۲۷۵ و A# ۲۹۱ است. بنابراین بسامد زنش آنها 196cps است که به آسانی به دست می آید. دو نت را به آرامی با همدیگر بزنید. وقتی فکر می کنید زنشهایی می شنوید، بگذارید یک کلید بالا بیاید ولی نه آن یکی. این کار را انجام دهید تا زنشها از بین بروند؟ (آیا پیانو کوک است؟)

۲-۷ چرا یک تار پیوسته ایده آل دقیقاً نسبتهای بسامد "هماهنگ" را می دهد ولی یک تار مهره دار این کار را نمی کند. تار مهره داری را در نظر بگیرید که شامل تعداد زیادی مهره باشد (مثلاً 100 تا) که از دو طرف محکم شده است. این تار را اساساً پیوسته در نظر می گیریم. فرض کنید این تار در پایینترین مد نوسان می کند؛ آنگاه طول L یک نیم موج از موج سینوسی است. حال مد دوم را در نظر بگیرید. طول L دو نیم موج است، بنابراین اولین نصف L یک نیم موج است. اکنون 50 مهره اول نصف تار را وقتی در مد دوم قرار دارد با تمام 100 مهره وقتی تار در پایینترین مد قرار دارد مقایسه کنید. در هر حالت مهره ها منحنی دارند که یک نیم موج از موج سینوسی است. مهره ۱ (در مد ۲) را با مهره های میانگین ۱ و ۲ (در مد ۱) مقایسه کنید؛ مهره ۲ (در مد ۲) را با مهره های ۳ و ۴ (در مد ۱) مقایسه کنید، و غیره. بنابراین در مد ۲ مهره ۱۷ همان دامنه ای را دارد که میانگین مهره های ۳۳ و ۳۴ در مد ۱ دارند (اگر امواج سینوسی دامنه یکسان داشته باشند). اما در مد ۲ تار در مهره ۱۷ زاویه ای دو برابر بزرگتر از زاویه محور تعادل می سازد تا مهره ۳۳ و ۳۴ در مد ۱ (از تقریب زاویه کوچک استفاده کنید). بنابراین نیروی بازگرداننده در واحد جابه جایی روی مهره ۱۷ دو برابر آن در دو مهره ۳۳ و ۳۴ است. همچنین جرم مهره ۱۷ تنها نصف دو مهره ۳۳ و ۳۴ است. بنابراین نیروی بازگرداننده در واحد جابه جایی در واحد جرم برای مهره ۱۷ در مد ۲ چهار برابر بزرگتر است از همان نیرو برای ترکیب مهره های ۳۳ و ۳۴ در مد ۱. بنابراین در تقریب "تقریباً پیوسته" (که دلالت دارد بر "تعداد زیادی" مهره)، داریم $\omega_2 = 2\omega_1$.

این بحث در صورتی که تعداد مهره ها کم باشد کارساز نیست. علت را توضیح دهید. پس می بینید که چرا نسبتهای هماهنگ $\omega_2 = 2\omega_1$ ، $\omega_3 = 3\omega_1$ ، و ... را در حد پیوسته، اما نه وقتی که تعداد کمی مهره است به دست می آوریم همان طور که در شکل ۲-۱۲ نشان داده شده است.

۲-۸ اگر پولتان را با سود 9.5% (در سال یا به صورت مراحه مرکب) سرمایه گذاری کنید چند سال طول می کشد تا دو برابر شود؟ [راهنمایی: مقیاس معتدل با فاصله های مساوی را در نظر بگیرید (آزمایش خانگی ۲-۶) را ببینید].

۲-۹ مقیاس دیاتونیک "درست" را برای ماژور D که در آزمایش خانگی ۲-۶ گفتیم کامل کنید. آنجا دیدیم که باید یک سیم E' جدید به نام E' به آن اضافه کنیم. اولین "نت سیاه" F# را لازم

داریم. همچنین نت سیاه دیگر $C\#$ را احتیاج داریم. در مورد A, F, G ، و B چه می‌دانیم؟ آیا می‌توانیم از آنهايي که داریم استفاده کنیم یا به G', F', A' ، و B' نیاز داریم؟
 ۲-۱۰ معادله (۵۵) یعنی معادله موج را برای تار غیر یکنواخت به دست آورید؟
 ۲-۱۱ نتیجه معادله (۴۷) را برای ضرایب فوریه $F(z)$ که در شکل ۲-۶ رسم شده است به دست آورید.

۲-۱۲ پیکربندیهای مد و بسامدها را برای سه مد اول ارتعاش عرضی تار پیوسته با کشش T ، چگالی جرمی ρ ، و طول L و شرایط مرزی دو طرف آزاد به دست آورید. (آنها از روی میله‌ای بی‌اصطکاک که از حلقه‌های بی‌جرم در انتهای تار عبور می‌کند سر می‌خورند.) نشان دهید که پایتترین مد خاصیت ویژه طول موج بینهایت و بسامد صفر دارد. در این مد، تار با سرعتی یکنواخت تبدیل می‌شود. (که شامل احتمال باقی ماندن آن در حالت سکون با جابه‌جایی دلخواه است.)
 ۲-۱۳ پیکربندی سه مد و بسامدهای ارتعاشات عرضی تار مهره‌دار یکنواخت که سه مهره دارد و چهار قسمت تار با شرایط مرزی دو طرف آزاد است را به دست آورید. (در انتهای قسمت آخر تار حلقه‌های بی‌جرم است که روی میله‌های بی‌اصطکاک می‌لغزند.) پایتترین مد را با آنچه در مسئله ۲-۱۲ داشتیم مقایسه کنید.

۲-۱۴ شبکه LC سه القاگر و چهار خازن را همان‌طور که در شکل ۲-۱۵ برای $N = 3$ مرتب شده‌اند، در نظر بگیرید، بجز اینکه، دو خازن بیرونی اتصال کوتاه شده‌اند. سه مد — پیکربندی جریان و بسامدها را به دست آورید. اهمیت فیزیکی پایتترین مد “ویژه” در این مسئله را با مسئله ۲-۱۳ مقایسه کنید. شرایط مرزی را با آنچه در مسئله ۲-۱۳ داده شده است مقایسه کنید.

۲-۱۵ سیم پیاو را که صدای C میانی، $C256$ (در مقیاس علمی) دارد، در نظر بگیرید. چگالی فولاد سیم در حدود 9g/cm^3 است. (این همان چگالی جرمی خطی ρ نیست، چرا؟) فرض کنید قطر سیم $\frac{1}{8}\text{mm}$ و طول آن 100cm باشد. کشش آن برحسب dyne و kg-wt و پوند چقدر است؟ $1\text{g-wt} = 980\text{dyne}$ ، $1\text{lb} = 454\text{g-wt}$.

جواب: $104\text{lb} \approx 47\text{kg-wt} \approx T$.

۲-۱۶ $\psi(z, t)$ را برای فزاسلینکی که در $t = 0$ مقید است از تابع $g(z)$ که با معادله (۴۸) داده شده است به دست آورید. منحنی $\psi(z, t_0)$ را که در آن $\omega t_0 = \pi/3$ بکشید. شکل $\psi(z, t_0)$ را با $\psi(z, 0)$ که در شکل ۲-۷ نشان داده شده است مقایسه کنید.

۲-۱۷ کشش سیم فولادی گیتار را با کشش سیم زه با همان طول، قطر، و گام (پایتترین مد) مقایسه کنید. چگالی فولاد در حدود 9g/cm^3 است؛ چگالی زه بیشتر از 1g/cm^3 نیست. آیا قترهای سیم فولادی گیتارها واقعاً با سیم زهی گیتارها برابر است؟ به گیتارها نگاه کنید و این

موضوع را بفهمید. وقتی یک بار نگاه کردید و نسبت قطرها را تخمین زدید، دوباره نسبت کشش را در دو مورد حساب کنید.

۱۸-۲ معادله موج کلاسیکی (۱۴) را به روش زیر به دست آورید: دقیقاً با معادله (۶۲) آغاز کنید. حال تقریب پیوسته را به کار برید. به جای شاخص m ، شاخص z را به کار برید، فاصله مهره‌ها را a بگیرید. از بسط سری تیلور در طرف راست معادله (۶۲) استفاده کنید. یک جمله بیشتر از آنچه لازم است برای به دست آوردن معادله موج کلاسیکی اضافه کنید.

۱۹-۲ نشان دهید که اگر معادله (۷۱) را جواب معادله حرکت ارتعاشی عرضی تار مهره‌دار بگیریم (معادله ۶۵) رابطه پاشندگی با معادله (۷۰) به دست می‌آید. نشان دهید که این واقعیت مستقل از انتخاب ثابتهای A ، B ، و k است که به شرایط اولیه و شرایط مرزی بستگی دارد.

۲۰-۲ از معادله (۷۳) و (۷۰) برای به دست آوردن نسبت بسامدهایی که در شکل ۱۲-۲ برای $N = 5$ داده شده است استفاده کنید.

۲۱-۲ پیکربندیهای مد و بسامدها را برای نوسانات عرضی تار مهره‌دار با ۵ مهره که یک سر آنها ثابت و سر دیگر آن آزاد است به دست آورید. ۵ نقطه مربوط به رابطه پاشندگی $\omega(k)$ مانند شکل ۱۳-۲ را رسم کنید.

۲۲-۲ با بررسی شکل ۱۳-۲ و طرح کلی سیستم، راهی ساده برای اضافه کردن ۶ نقطه دیگر به شکل ۱۲-۲ نشان دهید، به طوری که مدهایی برای تار مهره‌دار با ۱۱ مهره که دو سر آن ثابت است به دست دهد.

۲۳-۲ نشان دهید که معادله‌های (۷۳) و (۷۴) جوابهای یکسانی برای بسامدهای با $N = 1$ و $N = 2$ می‌دهند همان‌طور که در بخش ۱-۲ و ۴-۱ به دست آوردیم.

۲۴-۲ طرح کلی پیکربندیهای ۵ مد یک تار با پنج مهره مربوط به معادله‌های (۷۸) و (۸۰) را رسم کنید.

۲۵-۲ رابطه پاشندگی سیستم نشان داده شده در شکل ۱۵-۲ را رسم کنید.

۲۶-۲ نشان دهید که برای سیستم آونگهای جفت‌شده نشان داده شده در شکل ۱۶-۲ معادله حرکت m امین گلوله آونگ با معادله زیر بیان می‌شود (برای نوسانهای کوچک).

$$\frac{d^2 \psi_n}{dt^2} = -\frac{g}{l} \psi_n + \frac{aK}{M} \left(\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{a} \right) - \frac{aK}{M} \left(\frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{a} \right)$$

نشان دهید که جواب عمومی برای یک مد، بدون توجه به شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$\psi_n(t) = \cos(\omega t + \varphi)[A \sin nka + B \cos nka]$$

نشان دهید رابطه پاشندگی به صورت زیر است

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M} \sin^2 \frac{ka}{2}$$

نشان دهید که برای شرایط مرزی نشان داده شده در شکل ۲-۱۶ (یعنی گلوله‌های انتهایی تارهای جفت شده به دیوار وصل نیستند)، جواب بالا به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\psi_n(t) = \cos(\omega t + \varphi) B \cos nka$$

که m امین گلوله در $z = (n - \frac{1}{2})a$ قرار گرفته است. نشان دهید که در پایینترین مد $k = 0$ است. طرح کلی پیکربندی آن را رسم کنید. اگر ثابت گرانشی کم کم به صفر نزدیک شود رفتار این سیستم در این پیکربندی چگونه می‌شود؟ طرح کلی پیکربندی برای $N = 3$ را رسم کنید و بسامدهای سه مد آن را بگویید؟

۲-۲۷ سیستم خازنها و القاگرهای جفت شده که شبیه سیستم آونگهای جفت شده شکل ۲-۱۶ است را به دست آورید، به طوری که معادله حرکت برای m امین القاگر مانند معادله حرکت برای m امین گلوله آونگ باشد که در شکل ۲-۲۶ به دست آوردیم. رابطه پاشندگی را به دست آورید. ۲-۲۸ در مسئله آونگهای جفت شده به حد پیوسته بروید (مسئله ۲-۲۶)، نشان دهید که معادله حرکت به صورت معادله موج شکل زیر است

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \psi + v_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

۲-۲۹ هر کدام از عبارتهای شماره دار زیر را با دو روش (الف) روش "فیزیکی" که از مدهای طبیعی تار پیوسته با شرایط مرزی مناسب استفاده می‌کند، و (ب) روش آنالیز فوریه تابع تناوبی z ثابت کنید.

۱. هر تابع $f(z)$ (قابل قبول) تعریف شده بین $z = 0$ و $z = L$ و دارای مقدار صفر در $z = 0$ و شیب صفر در $z = L$ می‌تواند برحسب سری فوریه شکل زیر بسط داده شود

$$f(z) = \sum_n A_n \sin nk_1 z; \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots; \quad k_1 L = \frac{\pi}{4}$$

(نکته: در استفاده از روش آنالیز فوریه باید ابتدا یک تابع تناوبی از $f(z)$ بسازید به طوری که بتوانید از فرمول آنالیز فوریه استفاده کنید.)

۲. هر تابع $f(z)$ (قابل قبول) تعریف شده بین $z = 0$ و $z = L$ و دارای شیب صفر در $z = 0$ و مقدار صفر در $z = L$ را می‌توان برحسب سری فوریه به شکل زیر بسط داد:

$$f(z) = B_0 + \sum_n B_n \cos nk_1 z; \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots; \quad k_1 L = \pi$$

۳. هر تابع $f(z)$ (قابل قبول) تعریف شده بین $z = 0$ و $z = L$ و دارای شیب صفر در $z = 0$ و مقدار صفر در $z = L$ را می‌توان برحسب سری فوریه به شکل زیر بسط داد:

$$f(z) = \sum_n B_n \cos nk_1 z; \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots; \quad k_1 L = \frac{\pi}{2}$$

۲-۳ آنالیز فوریهٔ تپ مربعی که به طور تناوبی تکرار می‌شود. وقتی به طور متناوب دست می‌زنید فشار هوای حاصل در گوشتان را می‌توانید با تپ مربعی که به طور تناوبی تکرار می‌شود تخمین بزنید. بگذارید $F(t)$ فشار پیمانه‌ای در گوشتان باشد، $F(t)$ را $+1$ واحد در بازهٔ زمانی Δt بگیرید و قبل و بعد از بازه صفر بگیرید. این "تپ مربعی" با ارتفاع واحد و پهنای Δt به طور متناوب در بازهٔ زمانی طول T_1 تکرار می‌شود (روی منحنی $F(t)$ برحسب t). بازهٔ کوتاه Δt مدت هر کف زدن را نشان می‌دهد. تناوب T_1 زمانی است بین کف‌زدنهای متوالی. بسامد $\nu_1 = T_1^{-1}$ بسامد کف زدن است. باید آنالیز فوریه $F(t)$ را انجام دهید.

(الف) نشان دهید که می‌توانید مبدأ زمان را طوری انتخاب کنید که فقط \cos های $n\omega_1 t$ ظاهر شوند، یعنی

$$F(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega_1 t$$

(ب) نشان دهید که $B_0 = \Delta t / T_1$ که دقیقاً کسری "از" زمان است. نشان دهید که

$$B_n = \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi\nu_1 \Delta t), \quad n = 1, 2, \dots \text{ برای}$$

(ج) نشان دهید که برای $\Delta t \ll T_1$ نت "اصلی" ν_1 و هماهنگهای پایین $2\nu_1, 3\nu_1, 4\nu_1$

و غیره اساساً مقادیرهای مساوی برای دامنه‌های فوریه B_n دارند.

(د) طرح کلی B_n برحسب $n\nu_1$ را هنگامی که n به اندازهٔ کافی بالاست به طوری که B_n دویا

سه مرتبه از صفر می‌گذرد بکشید.

(ه) از قسمت (د) نشان دهید که "مهمترین" بسامدها (یعنی آنهایی که مقدار B_n بزرگی

دارند) از بسامد اصلی ν_1 به بسامدی از مرتبهٔ $1/\Delta t$ می‌روند. بنابراین ممکن است $1/\Delta t$ را

ν_{\max} بنامیم. البته، واقعاً از آنجایی که سری فوریه به $n = \infty$ بسط داده می‌شود بسامد بیشینه‌ای

وجود ندارد. اما مهمترین بسامدها بین صفر و ν_{\max} قرار دارد. "نوار بسامد" بسامدهای غالب "پهنای نواری" مساوی با $\nu_{\max} = 1/\Delta t$ دارد. بنابراین بسامدهای مهم عبارتاند از

$$\nu = 0, \nu_1, 2\nu_1, 3\nu_1, 4\nu_1, \dots, \nu_{\max} = \frac{1}{\Delta t}$$

پهنای نوار بسامدهای غالب را می توان $\Delta\nu$ نامید. پس نتیجه شما به صورت زیر نوشته می شود

$$\Delta\nu \Delta t \approx 1$$

این رابطه بسیار مهمی است، که نه تنها در $F(t)$ فرض شده با تپ مربعی تکرار شده با پهنای Δt ، صدق می کند بلکه برای هر شکل تپ با این مشخصه که در تمام زمان صفر و در طول زمان Δt غیر صفر است صدق می کند. اگر (مانند این مثال) تپ در بازه های زمانی T_1 تکرار شود، بسامدهای دائمی به قرار زیرند: $0, \nu_1, 2\nu_1, 3\nu_1$ و غیره تا در حدود $1/\Delta t$. اگر تپ تکرار نشود و فقط یک بار اتفاق افتد، (همان طور که در فصل ۶ نشان خواهیم داد) "طیف فوریه" بسامدهای مهم هنوز نوار بسامد گسترده ای از صفر تا در حدود $1/\Delta t$ را اشغال می کند، اما یک طیف پیوسته است که شامل همه بسامدها در نوار بسامد است نه فقط بسامد اصلی ν_1 و هماهنگهایش.

این مسئله به شما کمک می کند تا طیف بسامدی تابش الکترومغناطیسی که به آن تابش سنکروترون می گویند و به وسیله الکترونهاي نسبیتی که حرکت دایره ای یکنواخت دارند گسیل می شود را بفهمید. در فصل ۷ نشان خواهیم داد که، یک الکترون غیرنسبیتی که حرکت یکنواخت دایره ای با بسامد ν_1 دارد، موج الکترومغناطیسی ای از خود گسیل می کند که فقط بسامد ν_1 را دارد. زیرا میدان الکتریکی در تابش سرعتهای الکترون غیرنسبیتی فقط متناسب است با مؤلفه شتاب بار که عمود بر خط دید بار تا ناظر است. برای حرکت دایره ای این شتاب تصویر شده یک حرکت هماهنگ ساده است. بنابراین برای یک الکترون غیرنسبیتی میدان تابشی متناسب با $\cos(\omega_1 t)$ (یا \sin) است. برای الکترون نسبیتی، میدان تابشی وابستگی زمانی $\cos \omega_1 t$ را ندارد. در عوض شدت تابش قویاً در جهت متمرکز است، در امتداد جهت لحظه ای سرعت بار. وقتی الکترون مستقیماً در جهت جلو به طرف ناظر است تابشی گسیل می کند که بعداً به وسیله ناظر آشکارسازی می شود. در تمام زمانهای دیگر تابشی که گسیل می شود به ناظر نمی رسد، بنابراین میدان الکتریکی که ناظر اندازه گیری می کند در فاصله زمانی کوتاه Δt در هر تناوب T_1 قوی است و در تمام زمانهای دیگر صفر است. بنابراین طیف بسامد مشاهده شده شامل $\nu_1 = 1/T_1$ و هماهنگهای $2\nu_1, 3\nu_1$ و غیره تا بسامد بیشینه (مهم) در حدود $1/\Delta t$ است. نشان دهید که فاصله زمانی Δt تقریباً با $\Delta\theta/2\pi \approx \Delta t/T_1$ داده می شود که $\Delta\theta$ "پهنای تمام زاویه ای" طرح تابش است.

۳۱-۲ امواج ساکن دندان‌اره‌ای در آبهای کم‌عمق. امواج آبهای کم‌عمق امواجی هستند که در آنها دامنه حرکت آب در ته لگن، دریاچه یا اقیانوس از نظر اندازه با دامنه در سطح آن قابل مقایسه است. مد لب‌ریز (شَلپ‌شَلپ) یک موج آب کم‌عمق است (آزمایش خانگی ۱-۲۴). این موضوع را با ریختن چند دانه قهوه در داخل آب به طوری که بعضی از دانه‌ها نزدیک ته آب باشند نشان دهید. مد لب‌ریز را تحریک کنید (مدی که در آن سطح اساساً تخت باقی بماند) و حرکت دانه‌های قهوه را در ته و در سطح نزدیک مرکز لگن نگاه کنید. همچنین حرکت را نزدیک دیواره‌های آن نگاه کنید.

حال موج ساکن دندان‌اره‌ای در آب کم‌عمق ایده‌آل زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید دو لگن هم‌شکل مستقل حاوی آب با عمق تعادل، h ، در مد لب‌ریز نوسان می‌کنند. لگنها در مجاورت هم هستند به طوری که اگر از هم جدا نشده بودند می‌توانستند یک لگن دراز در جهت نوسان افقی به وجود آورند. فرض کنید فازهای نوسانها طوری باشند که آب یک لگن همیشه به طور افقی در جهت مخالف به دیگری بریزد و سبب شود که آب به هم برخورد کند و در یک زمان به مقدار ارتفاع بیشینه در هر دو لگن در دیواره‌های جداکننده دو لگن برسد. حال تصور کنید دیواره‌هایی که دو لگن را جدا می‌کنند را جابه‌جا کنیم. وقتی دیواره‌ها در جای خود قرار دارند آب در سطح مرزی هیچ حرکت افقی ندارد. هنوز هم به خاطر تقارن حرکت دو حجم از آب ندارد (حالا به هم وصل شده‌اند و یک حجم واحد به وجود آورده‌اند). حرکت بدون تغییر ادامه می‌یابد! می‌توانیم اتصال لگنها را در صورتی که بخواهیم ادامه دهیم. اکنون موج ساکن با شکل دندان‌اره‌ای داریم. بیایید این شکل را با موج سینوسی تخمین بزنیم. پس می‌بینیم که طول یک لگن برابر نصف طول موج است. (نکته: اگر شما این تابع تناوبی z را آنالیز فوریه کنید، اولین و دائمی‌ترین جمله در بسط فوریه همان خواهد بود که در تقریب دندان‌اره‌ای استفاده کردیم). این تقریب را در فرمولی که بسامد مد لب‌ریز را می‌دهد استفاده کنید (آزمایش خانگی ۱-۲۴). بنابراین نشان دهید که به دست می‌آید

$$\lambda v = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{gh} = 1.10 \sqrt{gh}$$

می‌بینیم که این امواج غیرپاشنده‌اند. (نکته: رابطه پاشندگی برای امواج سینوسی آب کم‌عمق عبارت است از: $\lambda v = \sqrt{gh}$. تقریب دندان‌اره‌ای، حداکثر 10% سرعت انتشار را می‌دهد).

برای امواج آب عمیق (امواجی که عمق آب تعادلشان با طول موجشان بسیار قابل مقایسه است)، دامنه موج با عمق زیر سطح به صورت نمایی کم می‌شود، یعنی با ضریب $e = 2.718 \dots$ برای هر افزایش در عمق به مقدار $\lambda/2\pi \equiv k$ (لاتدا بار) خوانده می‌شود) طول موج

کاهش یافته گفته می‌شود. با یک تقریب معمولی می‌توانیم بگوییم که موج آب عمیق چیزی شبیه موج آب کم‌عمق از سطح پایین آن تا عمق مؤثر $\lambda = h$ است که در آن ناحیه دامنه به‌طور نسبی بزرگ و تقریباً ثابت است، که برای اعماق بیشتر از λ دامنه خیلی کوچک است. بنابراین حدس می‌زنیم که رابطه پاشندگی برای امواج آب عمیق از رابطه پاشندگی امواج آب کم‌عمق با جایگزین کردن عمق تعادل h در امواج کم‌عمق با دامنه متوسط طول تضعیف‌شده λ برای امواج آب عمیق به‌دست می‌آید. این فرض همان‌طور که در فصل ۷ نشان خواهیم داد صحیح است. بنابراین قانون پاشندگی برای امواج آب عمیق با رابطه $\lambda v = \sqrt{g\lambda}$ به‌دست می‌آید.

۳۲-۲ آنالیز فوریه دندان‌اره‌ای متقارن. منظور از دندان‌اره‌ای متقارن این است که لبه‌های جلویی و عقبی هر دندانه شیب یکسانی دارد. بگذارید در یکی از قله‌ها (نقطه‌های دندان) $z = 0$ باشد. نشان دهید که دندان‌اره‌ای تناوبی $f(z)$ سری فوریه‌ای به‌شکل زیر دارد

$$f(z) = 0.82A \left[\cos k_1 z + \frac{1}{4} \cos 2k_1 z + \frac{1}{9} \cos 3k_1 z + \dots \right]$$

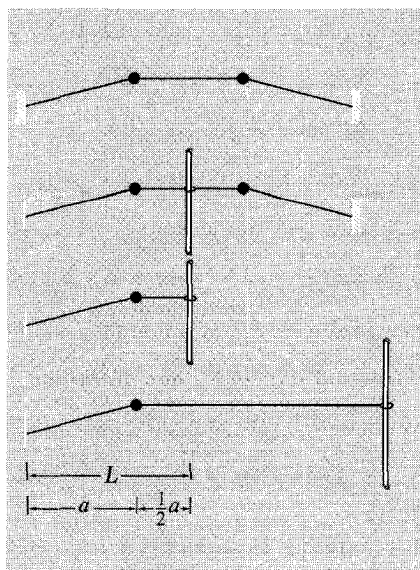
که $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ و λ_1 طول دندانه است (از یک قله به بعدی)، و A دامنه دندانه است یعنی $2A$ فاصله عمودی از کمینه (در دره) تا بیشینه (در قله) است. بنابراین می‌بینیم که سهم m امین جمله، دامنه‌ای متناسب با $1/n^2$ دارد. این موضوع نشان می‌دهد که چقدر تقریب مسئله ۳۱-۲ خوب بود که دندان‌اره‌ای را با مؤلفه اول فوریه تخمین می‌زد تا رابطه پاشندگی $\lambda v = 1.10 \sqrt{g\lambda}$ را به‌دست آوریم.

۳۳-۲ مدهای کشش سطحی. امواج ساکن کشش سطحی دایره‌ای را می‌توان آشکارا به‌صورت زیر نشان داد: یک فنجان کاغذی یا پلاستیکی را لب‌به‌لب پر آب کنید و کمی بیشتر به آن اضافه کنید به طوری که آب بالای فنجان پر شود. به آرامی به فنجان ضربه بزنید. نگاه کنید! برای اینکه امواج را به سادگی ببینید به بازتاب آسمان نگاه کنید. یا یک چیز سبک در چند فوتی سطح آن نگاه دارید و به طرح روی ته آن که به خاطر اثر عدسی مانند امواج به‌وجود می‌آید نگاه کنید. برای اینکه کشش سطحی درگیر با آن را ببینید کمی ماده پاک‌کننده به آب اضافه کنید.

۳۴-۲ شرایط مرزی در تار یک طرف آزاد. چهار سیستم مختلف نشان داده شده در شکل ۳۴-۲ را در نظر بگیرید.

۱. نشان دهید که همه چهار سیستم در مدهای نشان داده شده بسامد یکسان دارند.

۲. فرض کنید که می‌خواهید برای قیدی روی عدد موج در حالت‌های (ج) و (د) همان فرمولی را به‌کار ببرید که در حالت (الف) استفاده کردید. پس نشان دهید که L در فرمول شما باید برابر $\frac{1}{2}a$ در موارد دیگر باشد. فرمول را به‌دست آورید.



شکل م ۲-۳۴

۳۵-۲. تار انعطاف‌پذیری به طول L با کشش تعادلی T بین دو حامل ثابت کشیده شده است. جرم آن در واحد طول ρ است به طوری که جرم کل آن $M = \rho L$ است. تار با یک شیپور چکشی که به طور ضربه‌ای سرعت عرضی v_0 را به قسمت‌های کوچک به طول a در مرکز آن منتقل می‌کند به نوسان درمی‌آید. دامنه‌های پایتترین سه هماهنگ واداشته را حساب کنید.

نوسانهای واداشته

۱-۳ مقدمه

در فصلهای ۱ و ۲ نوسانهای آزاد در سیستمهای مختلف را مطالعه کردیم. در این فصل نوسانهای واداشته این گونه سیستمها را مطالعه خواهیم کرد. یعنی رفتار سیستمها را هنگامی که به گونه ای یک نیروی خارجی مفروض و جفت شده به زمان به سیستم اعمال می شود، بررسی می کنیم. بدون آنکه حالت کلی را از دست بدهیم، نیروهای محرک هماهنگی را در نظر گرفته و پاسخ سیستم را برحسب بسامد مطالعه می کنیم.

در بخش ۲-۳ نوسانهای آزاد در یک نوسانگر یک بعدی میرا را مرور خواهیم کرد. سپس پاسخ گذرای سیستم را، هنگامی که نوسانگر میرا از حالت سکون شروع به حرکت می کند و با نیروی نوسان کننده هماهنگی تحریک می شود، در نظر می گیریم. پدیده جالب "زنشهای گذرا" بین نیروی محرک و حالت "گذرای" نوسان آزاد را به دست خواهیم آورد. سپس نوسانهای حالت پایا را مطالعه خواهیم کرد، این نوسانها پس از آنکه حالتهای گذرا به صفر فروافتاده اند، باقی می ماند. پاسخ تشدیدی نوسانگر تحریک شده را هنگامی که بسامد تحریک را به آهستگی تغییر می دهیم، مطالعه خواهیم کرد. در بخش ۳-۳ سیستمی با دو درجه آزادی را بررسی می کنیم و خواهیم دید که هر یک

از مدهای نوسان آزاد در حرکت تحریک شده یک جزء متحرک مفروض، سهمی دارد. در حقیقت نتیجه بسیار ساده‌ای که به دست می‌آید این است که حرکت یک جزء متحرک مفروض، برهم‌نهی مؤلفه‌های مستقلی است که هر مؤلفه از یک مد نتیجه می‌شود. در بخش ۳-۴ رفتار قابل ملاحظه سیستمی با چندین درجه آزادی را خواهیم دید که با بسامد بالاتر و پایتتر از بسامد پایتترین مد آن تحریک می‌شود. در بخش ۳-۵ رفتار یک سیستم تحریک شده متشکل از چندین آونگ جفت شده را مطالعه خواهیم کرد. از آن پس به بررسی امواج نمایی خواهیم پرداخت.

تمام پدیده‌هایی را که در این فصل بحث می‌شوند، به طور تجربی می‌توان با آزمایشهای ساده خانگی به وسیله آونگهای جفت شده و با استفاده از فنر اسلینکی به عنوان فنر جفت‌کننده و قوطیهای کنسرو به اندازه (۳۰۰ گرمی) استاندارد (که کاملاً در داخل فنر اسلینکی جای می‌گیرند) به عنوان گلوله‌ها و صفحه دوار گرامافون به عنوان نیروی محرک، مطالعه کرد.

۳-۲ نوسانگر هماهنگ یک بعدی واداشته میرا

این بخش تا اندازه‌ای مروری از فصل ۷ جلد اول سری برکلی است که در آن نوسانهای آزاد و نوسانهای واداشته در حالت پایا را برای نوسانگر میرا مطالعه کردید. همچنین "پاسخ گذرا" را برای نوسانگری که بر آن یک نیروی محرک هماهنگ وارد می‌شود، هنگامی که نوسانگر در ابتدا در وضع تعادلش در حال سکون است، مطالعه خواهیم کرد.

جرم نقطه‌ای M را که در جهت x نوسان می‌کند در نظر بگیرید. جابه‌جایی آن از وضع تعادل برابر $x(t)$ است. فتری با ثابت فنر $K = M\omega_0^2$ ، نیروی بازگرداننده $-M\omega_0^2 x(t)$ را به جرم M وارد می‌کند. اگر نیروی دیگری وجود نمی‌داشت، این جرم با سرعت زاویه‌ای ω_0 نوسان هماهنگ می‌کرد. به این جرم همچنین نیروی اصطکاک $-M\Gamma\dot{x}(t)$ وارد می‌شود که در آن Γ ضریب ثابتی است که ثابت میرایی بر واحد جرم یا به سادگی ثابت میرایی نامیده می‌شود. به این جرم نیروی خارجی $F(t)$ هم وارد می‌شود. بنابراین با استفاده از قانون نیوتون، معادله حرکت جرم M ، به صورت معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم غیر همگن زیر است

$$M\ddot{x}(t) = -M\omega_0^2 x(t) - M\Gamma\dot{x}(t) + F(t) \quad (1)$$

نخست یک حالت خاص را در نظر می‌گیریم، حالتی که فاقد نیروی خارجی است. فروافت حالت گذرا برای نوسانهای آزاد. معادله حرکت یعنی معادله (۱)، به صورت زیر در می‌آید

$$\ddot{x}(t) + \Gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (2)$$

جواب $x_1(t)$ به شکل زیر را امتحان می‌کنیم

$$x_1(t) = e^{-(1/2)t/\tau} \cos(\omega_1 t + \theta) \quad (3)$$

که در آن مقادیر τ ، ω_1 و θ مجهول هستند. جانشانی مستقیم معلوم می‌کند که معادله (۳) برای هر مقدار ثابت فاز θ ، جواب معادله (۲) است، به شرطی که داشته باشیم

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \quad (4)$$

$$\omega_1^2 = \omega^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2 \quad (5)$$

کلی‌ترین جواب معادله (۲) برهم‌نهمش دو جواب خطی مستقل است که در آنها دو ثابت "دلخواه" را به‌گونه‌ای می‌توان اختیار کرد که مقادیر جابه‌جایی و سرعت اولیه یعنی $x_1(0)$ و $\dot{x}_1(0)$ را به‌دست دهند. دو جواب مستقل با قراردادن θ (مثلاً) برابر با صفر یا $-\frac{1}{4}\pi$ به‌دست می‌آید. بنابراین جواب کلی را به شکل زیر می‌توان نوشت

$$x_1(t) = e^{-(1/2)\Gamma t} (A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t) \quad (6)$$

به‌سادگی ضرایب ثابت A_1 و B_1 از دو رابطه $\omega_1 A_1 = \dot{x}_1(0)$ و $B_1 = x_1(0)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین از معادله (۶) نتیجه می‌شود

$$x_1(t) = e^{-(1/2)\Gamma t} \left\{ x_1(0) \cos \omega_1 t + \left[\dot{x}_1(0) + \frac{1}{4}\Gamma x_1(0) \right] \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} \right\} \quad (7)$$

هنگامی که $\frac{1}{4}\Gamma$ نسبت به ω کوچک است، نوسان میرای ضعیف نامیده می‌شود. هنگامی که $\frac{1}{4}\Gamma$ برابر ω است حرکت میرای بحرانی نام دارد. در این حالت از معادله (۵) نتیجه می‌شود که ω_1 برابر صفر است. در جواب یعنی معادله (۷) به‌جای $\cos \omega_1 t$ عدد یک و به‌جای $\sin \omega_1 t$ $(1/\omega_1)$ کمیت t را قرار می‌دهیم، زیرا در حالت حدی هنگامی که ω_1 به سمت صفر میل می‌کند $(1/\omega_1) \sin \omega_1 t$ برابر t است.

هنگامی که $\frac{1}{4}\Gamma$ بزرگتر از ω است، نوسانگر تند میرا نامیده می‌شود. در این حالت، از معادله (۵) مقدار ω_1 منفی به‌دست می‌آید. در این حالت ω_1 به صورت زیر داده می‌شود

$$\omega_1 = \pm i|\omega_1|, \quad |\omega_1| = \sqrt{\frac{1}{4}\Gamma^2 - \omega^2} \quad (8)$$

که در آن τ جذر ۱- است. جواب به شکل معادله (۷) با هم برقرار است و آن را به شکل زیر می توان نوشت (مسئله ۲۵-۳)

$$x_1(t) = e^{-(\gamma/2)\Gamma t} \left\{ x_1(0) \cosh |\omega_1|t + \left[\dot{x}_1(0) + \frac{1}{\gamma}\Gamma x_1(0) \right] \frac{\sinh |\omega_1|t}{|\omega_1|} \right\} \quad (9)$$

ما فقط حالتی را در نظر می گیریم که در آن $\frac{1}{\gamma}\Gamma$ کمتر از ω است که در این حالت نوسانگر کندمیرا نامیده می شود. این حالت شامل حالت میرای ضعیف می شود که در آن $\omega \ll \frac{1}{\gamma}\Gamma$ است. در حالت میرای ضعیف، ضریب میرایی $e^{-(\gamma/2)\Gamma t}$ را در طول هر دور نوسان می توان اساساً ثابت در نظر گرفت. بنابراین با ثابت در نظر گرفتن $e^{-(\gamma/2)\Gamma t}$ در هنگام مشتق گیری معادله (۶) نسبت به زمان، سرعت با تقریب خوبی به دست می آید. به آسانی نشان داده می شود که انرژی (جنبشی به علاوه پتانسیل) در طول هر دور، اساساً ثابت است، اما در فاصله زمانی که شامل چندین دور است، به طور نمایی فرو می افتد:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{\gamma} M \dot{x}_1^2(t) + \frac{1}{\gamma} M \omega_1^2 x_1^2(t) \\ &= E_0 e^{-\Gamma t} = E_0 e^{-t/\tau} \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن

$$E_0 = \frac{1}{\gamma} M (\omega_1^2 + \dot{\omega}_1^2) \left(\frac{1}{\gamma} A_1^2 t + \frac{1}{\gamma} B_1^2 \right) \quad (11)$$

اکنون به یک نوسانگر کند میرا که به آن یک نیروی خارجی $F(t)$ که مخالف صفر است وارد می شود، می پردازیم.

نوسان در حالت پایا تحت نیروی محرک هماهنگ. مجموعه بسیار وسیعی از توابع $F(t)$ را بر حسب بسامدهای مختلف ω به صورت بسط فوریه می توان نوشت:

$$F(t) = \sum_{\omega} f(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] \quad (12)$$

مثلاً همان طور که در بخش ۲-۳ دیدیم، هر تابع تناوبی (معمول) مانند $F(t)$ را با این روش می توان بسط داد. به علاوه همان گونه که در فصل ششم خواهیم دید، بسیاری از توابع غیر تناوبی را بر حسب سری فوریه یا انتگرال فوریه می توان بسط داد. تنها یک مؤلفه فوریه از چنین نیرویی را در نظر بگیرید:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \quad (13)$$

که در آن مبدأ زمان به گونه ای اختیار شده که ثابت فاز برابر صفر باشد. هنگامی که دریافتیم چگونه $x(t)$ را برای یک نیروی محرک هماهنگ مانند معادله (۱۳) به دست آوریم، می توانیم $x(t)$ را برای یک برهم نهش مانند معادله (۱۲) پیدا کنیم. زیرا بنا به بحث بخش ۱-۳، اصل برهم نهش در معادله خطی غیرهمگن صدق می کند به طوری که جواب مربوط به برهم نهش نیروهای خارجی مختلف، درست برهم نهش هر یک از جوابهاست. بنابراین لازم است که فقط معادله غیرهمگن را با یک نیروی خارجی متشکل از یک مؤلفه هماهنگ در نظر بگیریم:

$$M\ddot{x}(t) + M\Gamma\dot{x}(t) + M\omega_0^2 x(t) = F_0 \cos \omega t \quad (14)$$

می خواهیم جواب حالت پایای معادله (۱۴) را پیدا کنیم. جواب حالت پایا، حرکت نوسانگر را پس از آنکه نیروی محرک هماهنگ برای مدت زمانی بسیار طولانی در مقایسه با زمان فروافت τ ، به آن اعمال شده است، می دهد. در این هنگام "نوسانهای گذرا" که رفتار نوسانگر را در هنگام چند میانگین اولیه زمان فروافت، پس از اعمال نیروی محرک ابتدایی شرح می دهد، به صفر فرو افتاده اند. آنگاه نوسانگر با بسامد محرک ω ، نوسانهای هماهنگی انجام می دهد. در اینجا هیچ گونه ثابت قابل تنظیم یا "دلخواه" وجود ندارد. دامنه نوسان با دامنه F_0 نیروی محرک متناسب است. ثابت فاز با ثابت فاز نیروی محرک بستگی مشخصی دارد.

دامنه های جذبی و کشسان. به جای آنکه نوسان را برحسب دامنه و ثابت فاز آن بیان کنیم، می توانیم آن را برحسب دو دامنه A و B بیان کنیم، به طوری که مؤلفه نوسان $A \sin \omega t$ با نیروی محرک $F \cos \omega t$ به اندازه 90° درجه اختلاف فاز داشته و مؤلفه نوسان $B \cos \omega t$ با نیروی محرک هم فاز باشد. از این رو حالت پایا یعنی $x_s(t)$ را با انتخابهای مناسب برای مقادیر A و B به صورت زیر می توان نوشت

$$x_s(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (15)$$

با جانشانی مستقیم می توان نشان داد که $x_s(t)$ در معادله (۱۴) صدق می کند، اگر و فقط اگر A و B با روابط زیر داده شوند

$$A = \frac{F_0}{M} \frac{\Gamma \omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2]} \equiv A_{ab} \quad (16)$$

$$B = \frac{F_0}{M} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2]} \equiv A_{el} \quad (17)$$

ضریب ثابت A_{ab} دامنه جذبی نامیده می شود. ضریب ثابت A_{el} دامنه کشسان نامیده می شود. گاهی دامنه کشسان، دامنه "پاشنده" نامیده می شود. این نامها بدان سبب انتخاب شده اند که

متوسط زمانی توان جذبی ورودی تماماً در نتیجهٔ جملهٔ $A_{ab} \sin \omega t$ است. جملهٔ $A_{el} \cos \omega t$ در توان جذبی لحظه‌ای یعنی $P(t)$ سهم دارد، اما متوسط آن در یک دور نوسان در حالت پایا برابر صفر است. این نتایج از آنجا به دست می‌آید که توان لحظه‌ای $P(t)$ حاصل ضرب نیروی $F_0 \cos \omega t$ در سرعت $\dot{x}(t)$ است. سرعت لحظه‌ای دارای مؤلفه‌ای است که با نیرو هم‌فاز است و نیز دارای مؤلفه دیگری است که با نیرو به اندازهٔ 90° درجه اختلاف فاز دارد. فقط مؤلفه‌ای از سرعت که با نیرو هم‌فاز است به متوسط زمانی توان یعنی P مربوط می‌شود. این سرعت "هم‌فاز" از مؤلفهٔ جابه‌جایی "خارج از فاز" یعنی $A_{ab} \sin \omega t$ نتیجه می‌شود. این روابط به طور جبری به صورت زیر است:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

$$x_s(t) = A_{ab} \sin \omega t + A_{el} \cos \omega t$$

$$\dot{x}_s(t) = \omega A_{ab} \cos \omega t - \omega A_{el} \sin \omega t$$

بنابراین توان ورودی لحظه‌ای حالت پایا با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$P(t) = F(t)\dot{x}_s(t) = F_0 \cos \omega t [\omega A_{ab} \cos \omega t - \omega A_{el} \sin \omega t] \quad (18)$$

اگر متوسط زمانی در هر دور را با علامت $\langle \rangle$ نشان دهیم، خواهیم داشت

$$P = F_0 \omega A_{ab} \langle \cos^2 \omega t \rangle - F_0 \omega A_{el} \langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle$$

اما

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2} \quad (19)$$

که در آن T زمان تناوب نوسان است. به همین ترتیب

$$\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin 2\omega t \rangle = 0 \quad (20)$$

از این رو متوسط زمانی توان ورودی در حالت پایا به دست می‌آید

$$P = \frac{1}{2} F_0 \omega A_{ab} \quad (21)$$

در معادلهٔ (۲۱) ثابت شده است که متوسط زمانی توان ورودی با دامنهٔ A_{ab} متناسب است یعنی دامنهٔ آن قسمت از جابه‌جایی در حالت پایا، $x_s(t)$ ، که 90° درجه با نیروی محرک اختلاف

فاز دارد. این نتیجه مستقل از قرارداد انتخاب فاز است، و به همین خاطر به جای رابطه کلی تر $\cos(\omega t + \varphi)$ ، نیرو متناسب با $\cos \omega t$ انتخاب شد.

در حالت پایا، متوسط زمانی توان با متوسط زمانی توان مصرف شده به وسیله اصطکاک برابر باشد. نیروی اصطکاک لحظه‌ای برابر $-M\Gamma \dot{x}(t)$ است. توان اصطکاک لحظه‌ای برابر با حاصلضرب نیروی اصطکاک در سرعت است. به آسانی می‌توانید نشان دهید که متوسط زمانی توان تلف شده به سبب اصطکاک با رابطه زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} P_{fr} &= M\Gamma \langle \dot{x}_s^2 \rangle \\ &= \frac{1}{T} M\Gamma \omega^2 [A_{ab}^2 + A_{el}^2] \end{aligned} \quad (22)$$

و می‌توانید نشان دهید که این رابطه در حقیقت با متوسط زمانی توان ورودی یعنی P که با معادله (۲۱) داده شد، برابر است (به مسئله ۳-۶ مراجعه کنید).

در حالت پایا، انرژی ذخیره شده در نوسانگر کاملاً ثابت نیست، زیرا توان ورودی لحظه‌ای یعنی $F(t)\dot{x}_s(t)$ که با معادله (۱۸) داده می‌شود، با توان تلف شده اصطکاک لحظه‌ای یعنی $M\Gamma \dot{x}_s^2(t)$ برابر نیست. فقط هنگامی که متوسط در یک دور به دست آید، توان ورودی با توان تلف شده در نتیجه اصطکاک برابر است. متوسط زمانی انرژی ذخیره شده مورد توجه است. به آسانی می‌توانید نشان دهید که برای نوسان در حالت پایا متوسط زمانی انرژی ذخیره شده یعنی E با رابطه زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{T} M \langle \dot{x}_s^2 \rangle + \frac{1}{T} M \omega^2 \langle x_s^2 \rangle \\ &= \frac{1}{T} M (\omega^2 + \omega_0^2) \left(\frac{1}{T} A_{ab}^2 + \frac{1}{T} A_{el}^2 \right) \end{aligned} \quad (23)$$

(به مسئله ۳-۱ مراجعه کنید). توجه کنید که جمله پتانسیل ω^2 متوسط زمانی انرژی جنبشی و جمله ω_0^2 با ω متوسط زمانی انرژی پتانسیل است. این دو کمیت فقط در صورتی مساوی هستند که $\omega = \omega_0$ باشد. (یادآوری می‌شود که برای یک نوسانگر آزاد با میرایی ضعیف، متوسط زمانی انرژی جنبشی و پتانسیل برابرند.) این مطلب را به طور کیفی به شرح زیر می‌توان دریافت: اگر ω در مقایسه با ω_0 بزرگ باشد، سرعت جرم M قبل از آنکه فرصت داشته باشد جابه‌جایی بزرگی انجام دهد و بنابراین قبل از آنکه بتواند انرژی پتانسیل زیاد ذخیره شده در فنر را به دست آورد، معکوس می‌شود. از سوی دیگر، اگر ω در مقایسه با ω_0 کوچک باشد، سرعت هرگز خیلی بزرگ نمی‌شود و بنابراین متوسط زمانی انرژی پتانسیل غالب است.

توجه کنید که برای $\omega = \omega$ ، انرژی ذخیره شده E که با معادله (۲۳) داده می‌شود برابر با حاصلضرب توان مصرفی در حالت پایا [که با معادله (۲۲) داده شد] در زمان فروافت نوسانهای آزاد، τ ، است. این مطلب به‌طور کیفی قابل درک است: اگر نیروی محرک را قطع کنیم، اصطکاک سبب می‌شود که انرژی نوسانگر، همان‌گونه که در معادله (۱۰) نشان داده شده است، با زمان فروافت میانگین، τ ، به‌طور نمایی "از بین رود." هنگامی که نوسانگر را با بسامد طبیعی آن که برای میرایی ضعیف اساساً ω است تحریک کنیم، دامنه نوسان به زیاد شدن ادامه می‌دهد تا اینکه حالت پایا فرا رسد، که در آن توان ورودی با توان تلف‌شده در نتیجه اصطکاک برابر می‌شود. از آنجا که اصطکاک قسمت عمده انرژی را در زمان τ به هدر می‌دهد، انرژی ذخیره‌شده در حالت پایا با انرژی که "اخیراً" یعنی در زمان τ به‌وسیله نیروی محرک اعمال شده است، برابر است. بنابراین انتظار می‌رود که در حالت تعادل، انرژی ذخیره‌شده تقریباً برابر با حاصلضرب توان ورودی در τ باشد که با حاصلضرب توان اصطکاک در τ برابر است. قبلاً دیدیم که چنین حالتی در واقع برای $\omega = \omega$ وجود دارد. (در حالتی که ω برابر ω نیست، رابطه بین توان ورودی و انرژی ذخیره‌شده را مشکل‌تر می‌توان حدس زد).

تشدید. اکنون تغییرات پاسخ نوسانگر را هنگامی که بسامد محرک را به آهستگی تغییر می‌دهیم، در نظر می‌گیریم. به آهستگی یعنی چنان که همیشه در هر فاصله زمانی که برابر با مدت چندین زمان فروافت میانگین τ باشد، بسامد اساساً ثابت باقی بماند، به طوری که همواره اساساً حالت پایا وجود داشته باشد. متوسط زمانی توان ورودی یعنی P با رابطه زیر داده می‌شود [معادلات (۲۱) و (۱۶)]

$$P = P_0 \frac{\Gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (24)$$

که در آن P_0 مقدار P در حالت "تشدید" یعنی به‌ازای $\omega = \omega_0$ است. بیشترین حالت P در حالت تشدید روی می‌دهد. "نقاط نیم‌توان" مربوط به مقادیری از ω است که به‌ازای آنها کمیت P نصف مقدار بیشینه را داراست. می‌توانید نشان دهید که نقاط نیم‌توان با رابطه زیر داده می‌شوند (مسئله ۳-۱۱)

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \Gamma \omega \quad (25)$$

که معادل است با

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \pm \frac{1}{2}\Gamma \quad (26)$$

[توجه کنید که معادله (۲۵) دو معادله درجه دوم جداگانه برحسب ω است. هر یک از معادلات درجه دوم، یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. معادله (۲۶) از دو جواب مثبت به دست می آید.] فاصله بسامد بین دو نقطه نیم توان تمام پهنای بسامد به ازای نصف توان بیشینه یا به سادگی تمام پهنای تشدید نام دارد که به صورت $(\Delta\omega)_{fwhm}$ یا به سادگی $\Delta\omega$ نوشته می شود. برطبق معادله (۲۶)

$$(\Delta\omega)_{fwhm} = \Gamma \quad (27)$$

قبلاً به دست آورده ایم [معادله (۴)] که در نوسانهای آزاد، میانگین طول عمر فروافت τ با رابطه $\tau = 1/\Gamma$ داده می شود. بنابراین یک رابطه خیلی مهم بین تمام پهنای تشدید در نوسانهای واداشته و میانگین زمان فروافت در نوسانهای آزاد به دست می آید:

$$\boxed{\tau_{\text{آزاد}} T_{\text{تشدید}}(\Delta\omega) = 1} \quad (28)$$

یعنی پهنای بسامد منحنی تشدید برای نوسانهای واداشته با معکوس طول عمر فروافت در نوسانهای آزاد برابر است. این نتیجه کاملاً عمومیت دارد. این رابطه نه فقط برای سیستمی با یک درجه آزادی برقرار است، بلکه همان طور که بعداً نشان خواهیم داد، برای سیستمهای با چندین درجه آزادی نیز صادق است. در این حالتها، تشدیدها در بسامدهای مدهای بهنجار برای نوسان آزاد غیر میرا روی می دهد، درست همان گونه که در یک نوسانگر یک بعدی روی می دهد. (بسامد تشدید ω فقط به شرطی که ثابت میرایی یعنی Γ صفر باشد، با بسامد نوسان ω_1 در نوسان آزاد برابر است. در نوسانهای آزاد میرا، به سبب ضریب میرایی $e^{-(1/2)\Gamma t}$ ، بسامد از ω_1 به ω "کشیده" می شود. در نوسانهای واداشته، دامنه ثابت است و بسامد تشدید همان بسامد نوسان آزاد خواهد بود، اگر هیچ گونه میرایی وجود نمی داشت.) هنگامی که چندین درجه آزادی وجود دارد، پهنای تشدید و زمان فروافت آزاد برای هر مد در معادله (۲۸) صدق می کند، به شرطی که بسامدهای تشدید به اندازه کافی از یکدیگر جدا باشد، به طوری که یکدیگر را "نوشانند".

معادله (۲۸) از نظر تجربی نتایج خیلی مهمی را در بردارد. گاهی اوقات مطالعه کردن پاسخ تشدید یک سیستم به طور تجربی، آسانتر از مطالعه کردن فروافت آزاد آن است. در آن حالت برای به دست آوردن $\Delta\omega$ به جای پاسخ تشدید، زمان فروافت میانگین در نوسان آزاد را با محاسبه می توان به دست آورد. در این صورت زمان فروافت از معادله (۲۸) به دست می آید.

مثال ۱: زمان فروافت در یک لوله پستی

در اینجا کاربردی از معادله (۲۸) درباره سیستمی با چندین درجه آزادی نشان داده می‌شود. یک لوله پستی مقوایی اختیار کنید. این لوله را به‌طور ناگهانی تحریک کنید و سپس بگذارید به‌طور آزاد فرو افتد. برای انجام این کار لوله را به آهستگی به سر خود بزنید. این ضربه پایینترین مد را که در آن طول لوله برابر نصف طول موج است، تحریک می‌کند. سیستم نوسان می‌کند. سیستم از دو انتهای لوله انرژی صوتی را به‌خارج گسیل می‌کند و همچنین قسمتی از انرژی صوتی به‌وسیله "مالش" هوا به سبب ساییده‌شدن به دیواره‌های ناهموار لوله تلف می‌شود (یعنی انرژی صوتی به "گرما" تبدیل می‌شود). بنابراین نوسانهای میرا وجود دارد. پرسش این است که زمان فروافت میانگین چقدر است؟ گوش شما به آسانی تشخیص می‌دهد که یک بسامد عمده وجود دارد یعنی همان بسامد مهمی که هنگامی که به‌طور یکنواخت از یک انتها به‌داخل لوله می‌دمید، می‌شنوید. اما زمان فروافت آنقدر سریع است که نمی‌توان آن را با گوش غیر مسلح اندازه‌گیری کرد. بنابراین دو راه وجود دارد. می‌توانید یک میکروفون تقویت‌کننده صوتی و یک اسیلوسکوپ اختیار کنید. جاروب اسیلوسکوپ را در همان زمانی راه بیندازید که نوسانها را تحریک و خروجی تقویت‌کننده را به صفحات عمودی متصل کنید. (این عمل با یک اسیلوسکوپ خوب که یک "راه‌انداز داخلی" داشته باشد، به آسانی انجام می‌شود، به‌طوری که ابتدای خروجی تقویت‌کننده را برای راه‌اندازی جاروب می‌توان به‌کاربرد.) از صفحه اسیلوسکوپ عکس بگیرید و τ را مستقیماً یا به‌طور غیر مستقیم به‌شرح زیر اندازه بگیرید: یک مولد سیگنال صوتی اختیار کنید. با آن یک بلندگوی کوچک در ورودی لوله را تحریک کنید. این عمل، لوله را با نوسانهای پایا و با بسامد سیگنال تحریک می‌کند. در انتهای دیگر، تابش خروجی لوله را با میکروفون بگیرید و دامنه موج را بر روی اسیلوسکوپ اندازه‌گیری کنید. اکنون بسامد محرک را تغییر دهید. به‌طور تجربی، آسانتر آن است که بسامد محرک را ثابت نگاه داشت و طول لوله را با یک قسمت متحرک تغییر داد. توان دوم دامنه را برحسب معکوس طول لوله (چرا معکوس؟) رسم کنید. نقاط نیم‌توان خروجی را پیدا کنید. بدین ترتیب Δw به‌دست می‌آید. آنگاه برای به‌دست آوردن τ از معادله (۲۸) استفاده کنید.

بدون این دستگاه، هنوز هم می‌توانید به‌خوبی کار را انجام دهید. یک دیپازون و پنج یا شش لوله به‌کار ببرید که جز در طولهایشان، مشابه هستند. دیپازون را به سرعت در امتداد ردیف لوله‌ها حرکت دهید و سعی کنید "تمام پهنا در نصف بیشینه توان خروجی" را تعیین کنید. ممکن است بتوانید راهی پیدا کنید که یک ضریب دو را در شدت یک ارتفاع نت مفروض تشخیص دهید. در هر حالت Δw (و از این رو زمان تجزیه) را با دقت یک ضریب دو می‌توان برآورد کرد. زمان فروافت برای لوله‌های پستی معمولاً بین ۲۰ تا ۵۰ میلی‌ثانیه به‌دست می‌آید. (به آزمایش خانگی ۳-۲۷ مراجعه کنید). ■

بستگی دامنه کشسان به بسامد. جمله $A_{el} \cos \omega t$ در نوسان پایا یعنی $x_s(t)$ جزئی از $x_s(t)$ است که با نیروی محرک $F_0 \cos \omega t$ هم‌فاز است. همان‌گونه که قبلاً شرح دادیم، این جمله "کشسان" سهمی در متوسط زمانی انرژی جذبی ندارد. علاوه بر این، در تشدید (یعنی به‌ازای $\omega = \omega_0$) مقدار A_{el} برابر صفر است. آیا این بدان معنی است که A_{el} اهمیتی ندارد؟ خیر. در حقیقت هنگامی که بسامد محرک که از بسامد تشدید دور است، جمله کشسان جمله غالب است. این مطلب را به این صورت در می‌یابیم: دامنه کشسان با رابطه زیر داده می‌شود (معادله ۱۷)

$$A_{el} = \frac{F_0}{M} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (29)$$

نسبت دامنه‌های کشسان و جذبی با رابطه زیر داده می‌شود (به معادلات (۱۶) و (۱۷) مراجعه کنید)

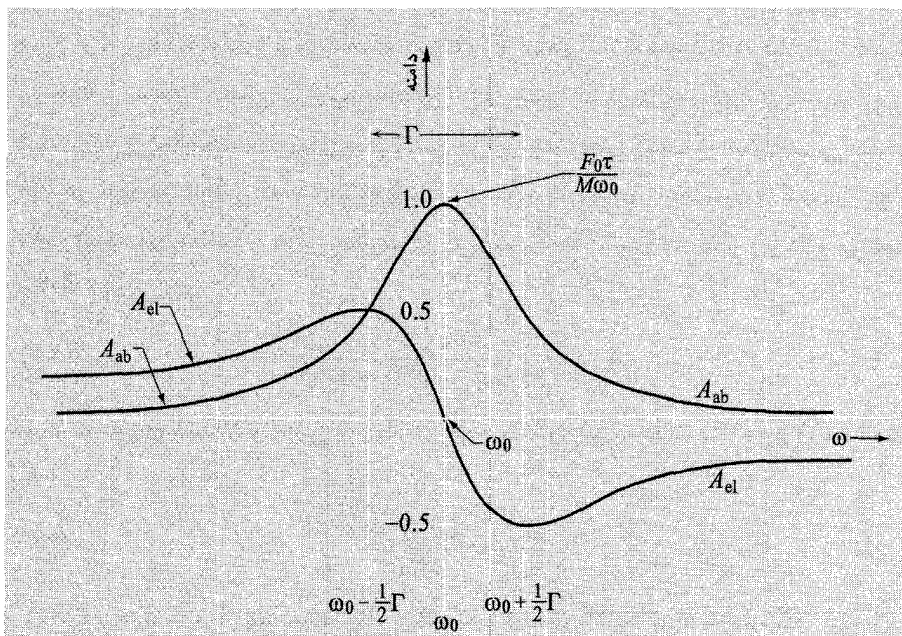
$$\frac{A_{el}}{A_{ab}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\Gamma \omega} \quad (30)$$

برای مقادیر ω کوچکتر از ω_0 کمیت A_{el}/A_{ab} مثبت است و با انتخاب ω به‌اندازه کافی کوچک، این کمیت را می‌توان هر قدر که بخواهید بزرگ کنید. برای مقادیر ω بزرگتر از ω_0 کمیت A_{el}/A_{ab} منفی است و با انتخاب ω به‌اندازه کافی بزرگ، قدرمطلق آن را می‌توانید هر قدر که بخواهید بزرگ کنید. در هر دوی این حالتها، رابطه $|\omega_0^2 - \omega^2| \ll \Gamma \omega$ وجود دارد و به‌شرطی که بخواهیم از مقدار بسیار کوچک متوسط زمانی توان صرفنظر کنیم، می‌توانیم از مؤلفه $A_{ab} \sin \omega t$ در $x_s(t)$ صرفنظر کنیم. (هنگامی که از تشدید دور هستیم، جذب توان در مقایسه با آنچه در حالت تشدید وجود دارد بسیار کوچک است.) بنابراین در حالت دور از تشدید، جواب حالت پایا با رابطه $A_{el} \cos \omega t$ داده می‌شود که در آن A_{el} با صرفنظر کردن از جمله $\Gamma^2 \omega^2$ در مخرج کسر معادله (۲۹) به‌دست می‌آید:

$$x_s(t) \approx A_{el} \cos \omega t \approx \frac{F_0 \cos \omega t}{M(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (31)$$

توجه کنید که ثابت میرایی یعنی Γ در نتیجه به‌دست آمده یعنی معادله (۳۱) کاملاً حذف شده است. در حقیقت به آسانی دیده می‌شود که اگر در معادله (۱۴) مقدار $\Gamma = 0$ را قرار دهیم، معادله (۳۱) جواب دقیق معادله حرکت در حالت پایا، یعنی معادله (۱۴) را به‌دست می‌دهد (مسئله ۳-۱۳ را ببینید).

در شکل ۱-۳ دامنه‌های جذبی و کشسان در نزدیکی تشدید رسم شده است.



شکل ۱-۳ تشدید در نوسانگر به حرکت درآمد. هنگامی که به نوسانگر نیروی خارجی $F_0 \cos \omega t$ اعمال می‌شود، نوسان در حالت پایا به صورت زیر است: $x_s(t) = A_{ab} \sin \omega t + A_{el} \cos \omega t$.

دیگر "منحنیهای تشدید". رفتار نوسانگر هماهنگ واداشته با کمیت‌های متعددی بیان می‌شود که هنگامی که برحسب بسامد رسم شوند، "شکل‌های تشدید" مشابه (ولی نه دقیقاً یکسان) را نمایش می‌دهند. این کمیتها عبارت‌اند از دامنهٔ جذبی A_{ab} ، توان دوم قدرمطلق دامنه یعنی $|A|^2 \equiv A_{el}^2 + A_{ab}^2$ ، توان خروجی P (که همچنین با توان تلف شده برابر است)، انرژی ذخیره شده E . در اینجا تمام آنها را برای مقایسه می‌نویسیم. از معادلات (۱۶)، (۱۷)، (۲۲) و (۲۲) نتیجه می‌شود

$$A_{ab}(\omega) = A_{ab}(\omega_0) \frac{\Gamma^2 \omega_0 \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (32)$$

$$|A(\omega)|^2 = |A(\omega_0)|^2 \frac{\Gamma^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (33)$$

$$P(\omega) = P(\omega_0) \frac{\Gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (34)$$

$$E(\omega) = E(\omega_0) \frac{\frac{1}{2} \Gamma^2 (\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (35)$$

در تمام این کمیتها "مخرج تشدید" D که با رابطه زیر داده می‌شود، مشترک است

$$D \equiv (\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2 \omega^2 = (\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2 + \Gamma^2 \omega^2$$

در نزدیکی تشدید (یعنی نزدیک $\omega = \omega_0$)، تمام تغییرات سریع D نسبت به ω تقریباً در نتیجه ضریب $(\omega_0 - \omega)^2$ در جمله اول است. ظاهر شدن ω در جای دیگر در D و در صورت کسرهای چهار کمیت بالا، تغییرات بسیار آهسته‌تری را سبب می‌شود. بنابراین دامنه جذبی و سایر کمیت‌های بالا، فقط در "نزدیکی" تشدید نسبتاً مهم هستند. (کلمه "نزدیک" را اگر خیلی زیاد دقیق نباشیم، مثلاً می‌توانیم در داخل فاصله $\omega_0 + 10^\circ \Gamma < \omega < \omega_0 - 10^\circ \Gamma$ تعریف کنیم.) در ناحیه نزدیک تشدید و برای میرایی ضعیف یعنی $\Gamma \ll \omega_0$ ، در همه جای عبارت D بجز در ضریب حساس $(\omega_0 - \omega)^2$ در اولین جمله، با تقریب بسیار خوبی می‌توان ω را مساوی ω_0 قرار داد. در این صورت D به صورت زیر در می‌آید:

$$D \approx (\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega_0)^2 + \Gamma^2 \omega_0^2 = 4\omega_0^2 \left[(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{1}{4}\Gamma\right)^2 \right]$$

با همان تقریب، در مخرج‌های هر چهار کمیت تشدید می‌توان $\omega = \omega_0$ را قرار داد. در این صورت هر چهار کمیت شکل یکسان پیدا می‌کنند که آن را می‌توان با R نشان داد:

$$R(\omega) \equiv \frac{\left(\frac{1}{4}\Gamma\right)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{1}{4}\Gamma\right)^2} \quad (36)$$

[ثابت تناسب به‌گونه‌ای اختیار شده است که $R(\omega_0) = 1$ باشد.] توجه کنید که $R(\omega)$ یک تابع زوج از $(\omega - \omega_0)$ است یعنی در اطراف بسامد تشدید متقارن است. به آسانی دیده می‌شود که همان‌گونه که در مورد رابطه دقیق برای تمام پهنا در نصف تمام بیشینه وجود دارد، در $R(\omega)$ نیز تمام پهنا در نصف بیشینه برابر Γ است.

در درس اپتیک، بستگی بسامد که با رابطه $R(\omega)$ نمایش داده می‌شود معمولاً "شکل خط لورنتس" نامیده می‌شود. در فیزیک هسته‌ای، $R(\omega)$ را "منحنی تشدید برایت - ویگنر" می‌نامند که در آن به جای ω_0 و ω ، از $E_0 = \hbar\omega_0$ و $E = \hbar\omega$ استفاده می‌شود. در اپتیک و فیزیک هسته‌ای هم، درست مانند نوسانگر هماهنگ، منحنیهای دقیق تشدید همواره پیچیده‌تر از $R(\omega)$ هستند.

حالت گذرا در نوسانهای واداشته. می‌خواهیم جواب معادله (۵)، یعنی معادله دیفرانسیل یک نوسانگر هماهنگ میرا را که به‌طور هماهنگ تحریک شده است برای شرایط اولیه دلخواه مفروض $x(0)$ و $\dot{x}(0)$ به‌دست آوریم. برای این منظور به جواب عمومی احتیاج داریم. جواب عمومی عبارت است از برهم‌نهی جواب در حالت پایا یعنی $x_s(t)$ و جواب عمومی $x_1(t)$ معادله همگن حرکت (یعنی معادله نوسانهای آزاد):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_s(t) + x_1(t) \\ &= A_{ab} \sin \omega t + A_{e1} \cos \omega t + e^{-(\nu/\gamma)\Gamma t} [A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t] \end{aligned} \quad (37)$$

که در آن A_1 و B_1 مقادیر ثابت دلخواهی هستند و می‌توان آنها را به‌گونه‌ای اختیار کرد که در شرایط اولیه مربوط به جابه‌جایی و سرعت صدق کنند. به شرح زیر می‌توان دید که معادله (۳۷) جواب کلی است: نخست آنکه این جواب در معادله دیفرانسیل درجه دوم مفروض صدق می‌کند. دوم آنکه با انتخاب مناسب برای مقادیر A_1 و B_1 ، آن را با شرایط اولیه دلخواه $x(0)$ و $\dot{x}(0)$ می‌توان تطبیق داد. این دو برطبق نظریه معادلات دیفرانسیل، جواب را به یک جواب منحصر به فرد تبدیل می‌کند.

نوسانگرهای در ابتدا ساکن. اکنون جواب کلی را به حالت جالبی اختصاص می‌دهیم که در آن در زمان $t = 0$ نوسانگر عملاً در محل تعادلش در حالت سکون است. ابتدا B_1 را برابر با $-A_{e1}$ انتخاب می‌کنیم، چون به‌وسیله آن شرط اولیه که در آن $x(0) = 0$ ، به‌دست می‌آید. اکنون A_1 را هرچه ساده‌تر انتخاب می‌کنیم، یعنی به‌گونه‌ای که سرعت اولیه $\dot{x}(0)$ اساساً برابر صفر باشد. چون فقط میرایی ضعیف را در نظر می‌گیریم، در هر دور مفروض، کمیت $e^{-(\nu/\gamma)\Gamma t}$ را عملاً ثابت اختیار می‌کنیم. با این تقریب می‌توانید نشان دهید که $\dot{x}(0) \approx \omega A_{ab} + \omega_1 A_1$ است. از آنجا که می‌خواهیم محرک را با بسامدهایی که خیلی دور از تشدید نیستند در نظر بگیریم، فقط کافی است $A_1 = -A_{ab}$ را اختیار کنیم. بنابراین

$$\dot{x}(0) \approx (\omega - \omega_1) A_{ab} \quad (38)$$

که به‌ازای $\omega = \omega_1$ و یا به‌ازای $A_{ab} = 0$ (که مستلزم $\Gamma = 0$ است) برابر صفر می‌شود، با این انتخابها $x(0) = 0$ و $\dot{x}(0) \approx 0$ نتیجه می‌شود. بنابراین معادله (۳۷) به‌صورت زیر در می‌آید

$$x(t) = A_{ab} [\sin \omega t - e^{-(\nu/\gamma)\Gamma t} \sin \omega_1 t] + A_{e1} [\cos \omega t - e^{-(\nu/\gamma)\Gamma t} \cos \omega_1 t] \quad (39)$$

برخی از حالت‌های خاص و جالب ذکر می‌شود.

حالت ۱: بسامد محرک با بسامد طبیعی نوسان برابر است
با قراردادن $\omega = \omega_1$ در معادله (۳۹) رابطه زیر به دست می‌آید

$$x(t) = [1 - e^{-(1/\gamma)\Gamma t}] [A_{ab} \sin \omega t + A_{el} \cos \omega t] = [1 - e^{-(1/\gamma)\Gamma t}] x_s(t) \quad (40)$$

که در آن $x_s(t)$ جواب حالت پایاست. از این رو هنگامی که بسامد محرک با بسامد طبیعی نوسان یعنی ω_1 دقیقاً برابر باشد، جواب حالت پایا "از ابتدا وجود دارد". دامنه نوسان آن از صفر تا مقدار نهایی‌اش در حالت پایا به طور هموار افزوده می‌شود.

حالت ۲: میرایی صفر و زنشهای تمام‌نشدنی

با قراردادن $\Gamma = 0$ داریم $A_{ab} = 0$ و رابطه زیر به دست می‌آید

$$A_{el} = \frac{F_0/M}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

در این صورت از معادله (۳۹) نتیجه می‌شود

$$x(t) = \frac{F_0}{M} \frac{[\cos \omega t - \cos \omega_0 t]}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (41)$$

معادله (۴۱) مشابه با برهم‌نهش دو نوسان هماهنگ است که هنگامی که پدیده زنش بین دو دیاپازون در بخش ۱-۵ را مطالعه کردیم، در نظر گرفتیم. یادآور می‌شویم که $x(t)$ را می‌توانیم به صورت برهم‌نهش دو نوسان دقیقاً هماهنگ مانند معادله (۴۱) بنویسیم و یا به‌گونه دیگر، به صورت نوسان "تقریباً هماهنگ" با بسامد متوسط "تند" یعنی $\omega_{av} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ و دامنه "با تغییر آهسته" که با بسامد "کند" مدولاسیون یعنی $\omega_{mod} = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)$ به طور هماهنگ نوسان می‌کند. از روش دوم رابطه زیر به دست می‌آید (مسئله ۳-۲۲)

$$x(t) = A_{mod}(t) \sin \omega_{av} t \quad (42)$$

که در آن

$$A_{mod}(t) = \frac{F_0}{M} \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (43)$$

بنابراین دامنه نوسان با بسامد مدولاسیون یعنی $\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)$ برای همیشه نوسان می‌کند. انرژی ذخیره‌شده در اطراف مقدار متوسطش نوسان می‌کند، یعنی برطبق رابطه زیر از صفر تا مقدار

ماکزیم آن E اضافه می‌شود

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 \sin^2 \frac{1}{4}(\omega_0 - \omega)t \\ &= \frac{1}{4} E_0 [1 - \cos(\omega_0 - \omega)t] \end{aligned} \quad (44)$$

از این رو انرژی بین بسامد محرک و بسامد طبیعی نوسان برای همیشه با بسامد زنش، نوسان می‌کند.

برای آنکه زنشهای تقریباً تمام‌نشدنی را مشاهده کنید یک قوطی کنسرو یا شیء دیگری را به تاری در حدود ۴۵cm آویزان کنید. این آونگ را به وسیله یک نوار لاستیکی به طول چند متر به یک گرامافون که با سرعت ۴۵rpm می‌چرخد، متصل کنید.

در حالت خاصی که $\omega = \omega_0$ است، معادله (۴۳) نشان می‌دهد که دامنه نوسانهای تند به طور خطی و برای همیشه افزایش می‌یابد؛ زمان تناوب زنش در این حالت، برابر بینهایت است:

$$x(t) = \left[\frac{1}{2} \frac{F_0 t}{M \omega_0} \right] \sin \omega_0 t \quad (45)$$

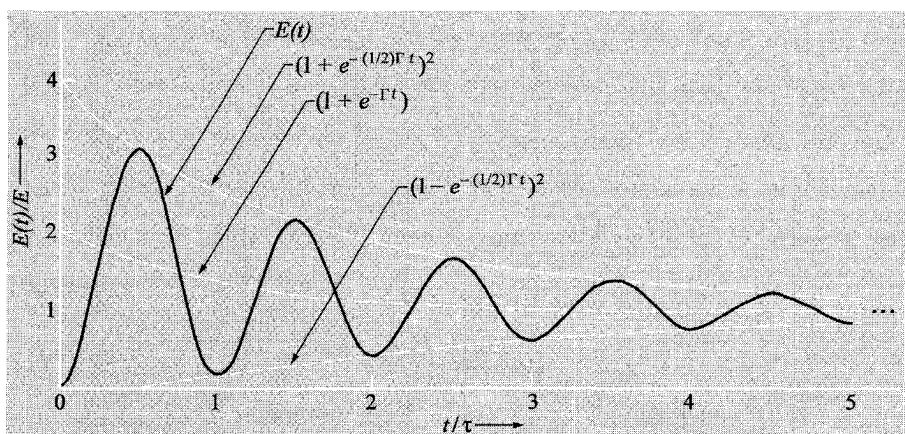
پس از گذشت بینهایت زمان، دامنه بینهایت می‌شود.

حالت ۳: زنشهای گذرا

برای میرایی ضعیف و برای ω نزدیک به ω_1 مشکل نیست (اما خسته‌کننده است) که نشان دهیم انرژی ذخیره‌شده تقریباً با رابطه زیر داده می‌شود (مسئله ۳-۲۴)

$$E(t) = E [1 + e^{-\Gamma t} - 2e^{-(1/2)\Gamma t} \cos(\omega - \omega_1)t] \quad (46)$$

که در آن E انرژی در حالت پایدار است. (اگر ω را مساوی ω_0 اختیار کنیم، حالت ۱ در بالا به دست می‌آید. اگر $\Gamma = 0$ اختیار کنیم، حالت ۲ در بالا به دست می‌آید.) از این رو دیده می‌شود که اگر در زمان شروع $t = 0$ ، هیچ انرژی در نوسانگر ذخیره نشده باشد، انرژی $E(t)$ تا مقدار پایدارش، به طور یکنواخت افزایش پیدا نمی‌کند، مگر اینکه بسامد محرک ω با بسامد نوسان آزاد ω_1 دقیقاً برابر باشد. در عوض انرژی با بسامد زنش یعنی $\omega - \omega_1$ نوسانهایی انجام می‌دهد. بنابراین نیروی محرک، گاهی با یک فاز نسبی که به افزایش دامنه نوسان کمک می‌کند به جلو رانده می‌شود، اما گاهی (یعنی یک دوم یک زمان تناوب زنش دیرتر) با فاز مخالف



شکل ۲-۳ زنشهای گذرا. (زمان تناوب زنش با زمان فروافت τ مساوی انتخاب شده است). انرژی ذخیره‌شده $E(t)$ از صفر شروع به زیادشدن می‌کند و با بسامد زنش بین نیروی محرک و نوسانهای طبیعی، نوسانهای میرا انجام می‌دهد و سرانجام در مقدار حالت پایا E ثابت می‌ماند.

به جلو رانده می‌شوند و از این رو نوسانها را کاهش می‌دهد. اگر هیچ‌گونه میرایی وجود نداشت، این زنشها مانند حالت ۲ برای همیشه ادامه می‌یافت. اما به سبب میرایی، نوسانگر فازش را کم‌کم نسبت به فاز نیروی محرک تنظیم می‌کند. پس از زمان به‌اندازه‌ی کافی طولانی، نوسانگر در یک حالت پایای ارتعاشی بدون زنش قرار می‌گیرد و دقیقاً با بسامد محرک ω نوسان می‌کند. در این حالت فاز نسبی بین نوسانگر و نیروی محرک چنان تثبیت شده است، که مقدار انرژی داده شده به نوسانگر در هر فشار (دور) نیروی محرک، با انرژی تلف‌شده در یک دور در نتیجه اصطکاک دقیقاً برابر می‌شود. بنابراین انرژی نوسانگر ثابت باقی می‌ماند و فاز نسبی نوسانگر و نیروی محرک نیز ثابت باقی می‌ماند. انباشته‌شدن گذرای انرژی در شکل ۲-۳ نشان داده شده است.

به‌دست آوردن کیفی شکل تشدید. اکنون نتیجه حاصل از مطالعه پاسخ گذرای نوسانگر را به‌کار می‌بریم، تا نسبت دامنه نوسان در حالت پایای دقیقاً در بسامد تشدید، به دامنه نوسان در سایر بسامدها را، حدس بزنیم. در ابتدا نوسانگر را در حالت سکون در نظر می‌گیریم و آن را دقیقاً با بسامد تشدیدش تحریک می‌کنیم. اگر هیچ‌گونه میرایی وجود نداشت، دامنه نوسان به‌طور خطی با زمان برای همیشه افزایش پیدا می‌کرد. [به معادله (۴۵) مراجعه کنید]. در حقیقت دامنه نوسان به‌طور خطی با زمان، شروع به افزایش می‌کند، زیرا در ابتدا هنگامی

که تندی متوسط کوچک باشد، میرایی قابل صرفنظر کردن است. با وجود این، به سبب میرایی، سرانجام دامنه نوسان به مقداری می‌رسد که با دامنه‌ای که در زمان تقریبی τ می‌توان "به دست آورد"، برابر است. در نتیجه میرایی، این دامنه فقط حرکتی را که "اخیراً" یعنی در فاصله زمانی τ به دست آورده است، می‌تواند نگاه دارد. این دامنه را با تصور اینکه نیروی بیشینه F_0 در زمان τ به جلو رانده شده است و اندازه حرکت بیشینه $F_0 \tau$ را به جرم وارد می‌کند، می‌توان حدس زد. اما اندازه حرکت بیشینه جرم در حال سکون، برابر با حاصلضرب M در سرعت بیشینه یعنی $\omega_0 A(\omega_0)$ است. از این رو $F_0 \tau \approx M \omega_0 A(\omega_0)$ است و نتیجه می‌شود

$$A(\omega_0) \approx \frac{F_0 \tau}{M \omega_0} \quad (47)$$

این حدسها برای دامنه در حالت پایا و به‌ازای $\omega = \omega_0$ است.

اکنون نوسانگر را با بسامد ω که با بسامد تشدید ω_0 اختلاف بسیار دارد، تحریک می‌کنیم. اگر هیچ‌گونه میرایی وجود نداشت، دامنه با بسامد مدولاسیون یعنی $\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)$ برای همیشه نوسان می‌کرد و انرژی نوسانگر با بسامد زنش یعنی $\omega - \omega_0$ نوسان می‌کرد. اینک میرایی را "وارد می‌کنیم". اتلاف انرژی در نتیجه میرایی بستگی به توان دوم سرعت دارد. بنابراین در زمانی که انرژی بیشینه است، میرایی بیشترین مقدار را دارد. در زمانهایی که انرژی صفر است، هیچ‌گونه میرایی وجود ندارد. از این رو در منحنی انرژی برحسب زمان اثر میرایی "بریدن قله‌ها" است. اثر میرایی همچنین "پرکردن دره‌ها" است. سرانجام زنشها میرا می‌شوند. هنگامی که زنشها وجود دارند، می‌توان حدس زد که دامنه تا حدود نصف مقدار بیشینه‌ای که در ابتدا به آن می‌رسد، میرا می‌شود. بنابراین در معادله (۴۳) به جای $1/2$ کمیت $\sin \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t$ را قرار می‌دهیم. از این رو برای ω دور از ω_0 از معادله (۴۳) نتیجه می‌شود

$$A(\omega) \approx \frac{F_0}{M} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (48)$$

به عبارت دیگر، می‌توان حدس زد که $A(\omega)$ مربوط به اندازه حرکت بیشینه‌ای است که به وسیله نیروی بیشینه F_0 که در کسری از یک زمان تناوب زنش یعنی f به جلو رانده می‌شود، می‌تواند وارد شود. این اندازه حرکت برابر با حاصلضرب M در دامنه $A(\omega)$ در بسامد زاویه‌ای متوسط یعنی $\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ است. زمان تناوب زنش یعنی T برابر با $2\pi/(\omega_0 - \omega)$ است. بنابراین

می‌توان حدس زد که

$$\frac{F_0 f 2\pi}{(\omega_0 - \omega)} \approx MA(\omega) \frac{1}{\gamma} (\omega_0 + \omega)$$

اگر به اندازه کافی باهوش باشیم که حدس بزنیم $f = 1/4\pi$ است، از این رابطه معادله (۴۸) به دست می‌آید.

از جواب دقیق می‌دانیم که چون A_{e1} در تشدید برابر صفر است، دامنه نوسان در تشدید دقیقاً برابر $A_{ab}(\omega_0)$ است. در حقیقت، با مقایسه معادلات (۴۷) و (۱۶) می‌توان ثابت کرد که دامنه حدس زده شده ما یعنی $A(\omega_0)$ با $A_{ab}(\omega_0)$ برابر است. می‌دانیم که دور از تشدید، از جواب دقیق نتیجه می‌شود که دامنه نوسان اساساً برابر $A_{e1}(\omega)$ است. با مقایسه معادلات (۴۸) و (۱۷) می‌توان ثابت کرد که دامنه حدس زده شده یعنی $A(\omega)$ برای مقادیر ω دور از ω_0 حقیقتاً با $A_{e1}(\omega)$ دور از تشدید برابر است.

۳-۳ تشدید در سیستم با دو درجه آزادی

در فصل ۱ یافتیم که هر مد سیستمی که به طور آزاد نوسان می‌کند و بیش از یک درجه آزادی دارد، بسیار شبیه به یک نوسانگر هماهنگ ساده عمل می‌کند. اختلاف اصلی در آن است که سیستم در یک ناحیه محدود از فضا جای دارد و از این رو "نوسانگر هماهنگ" به جای آنکه منحصر به یک جرم نقطه‌ای باشد در سرتاسر ناحیه‌ای که سیستم در آن جای دارد، گسترده شده است. بنابراین هر مد "شکل" مخصوص به خود را دارد، مفهومی که در نوسانگر یک بعدی به آن احتیاجی نیست.

در فصل ۱ در مطالعه مدهای سیستمهایی که به طور آزاد نوسان می‌کنند از میرایی صرف نظر کردیم. هنگامی که میرایی در نظر گرفته شود (همان طور که خواهیم دید) هر مد، مشابه با یک نوسانگر یک بعدی میراست. از این رو هر مد، سازوکار میرایی مشخصه خودش و ثابت میرایی Γ را دارد و بنابراین هر مد، زمان فروافت مشخصه خودش یعنی τ را داراست. در بعضی از سیستمها، سازوکار میرایی ممکن است مربوط به هر یک از "اجزای متحرک" باشد و بنابراین تمام مدها ممکن است ثابت میرایی و زمان فروافت تقریباً یکسانی داشته باشند. مثالی در این باره سیستمی است با دو آونگ متشابه که به وسیله فنری به هم جفت شده‌اند و میرایی با مالیدن چیزی بر روی یکی از دو تار نگاهدارنده یا بر روی هر گلوله ایجاد می‌شود. چون هر دو گلوله در هر مد به طور مساوی حرکت می‌کنند، دو مد زمان فروافت یکسانی دارند. در سیستمهای دیگر، سازوکار میرایی، به مدها بستگی دارد. مثلاً روی فنری که دو آونگ را به هم جفت می‌کند، ممکن است یک نوارکشی چسبانیده

شود، به طوری که هنگامی که فتر منبسط یا متراکم می شود یک میرایی اصطکاکی به وجود می آورد. اگر این اثر، تنها سازوکار میرایی باشد، در این صورت مد ۲ (یعنی مدی که در آن فتر کشیده و متراکم می شود) ضریب ثابت میرایی خیلی بزرگتر از مد ۱ دارد یعنی $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$ و بنابراین مد ۲ دارای زمان فروافت خیلی کوتاهتری از مد ۱ است: $\tau_2 \ll \tau_1$.

هنگامی که سیستمی را که دارای مدهای متعدد است تحریک کنیم، هر وقت که بسامد محرک به بسامد یک مد نزدیک شود، یک تشدید روی می دهد. بنابراین دامنه های جذبی کشسان برای یک جزء متحرک مفروض، به سادگی از برهم نهش دامنه هایی که از هر تشدید حاصل می شوند (یعنی هر مد از یک سیستم تحریک نشده) به دست می آیند. شکل هر یک از این مؤلفه ها مشابه همان شکلی است که در بخش ۳-۲ برای سیستمی که تنها یک درجه آزادی دارد به دست آوردیم.

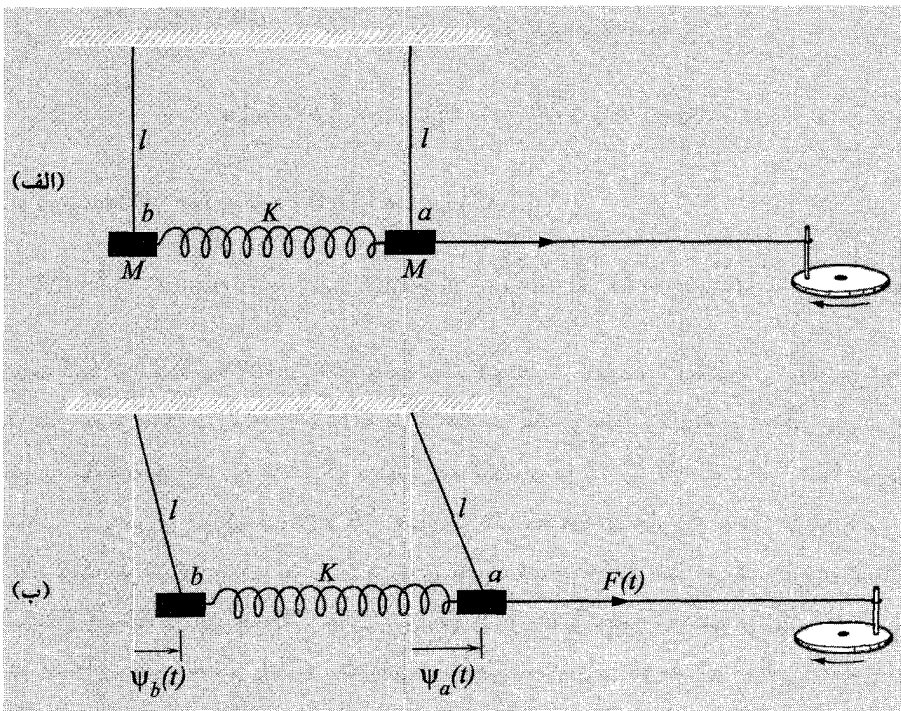
اگر بسامد محرک را به آهستگی تغییر دهیم و میزان جذب انرژی به وسیله یک جزء متحرک مفروض را برحسب تابعی از بسامد محرک ω رسم کنیم، هر بار که ω از همسایگی بسامد یک مد می گذرد، یک تشدید به دست می آوریم. (دو واژه "بسامد تشدید" و "بسامد مد" را به صورت عبارتهایی که می توانند جانشین یکدیگر شوند به کار خواهیم برد، با وجودی که یکی از آنها به نوسانهای واداشته و دیگری به نوسانهای آزاد مربوط است.) در هر تشدید تمام - پهنای بسامد با رابطه زیر داده می شود [معادله (۲۸) را ببینید].

$$\Delta\omega = \Gamma = \frac{1}{\tau}$$

که در آن $\Delta\omega$ تمام - پهنای در نصف بیشینه توان جذبی است و در آن Γ و τ ثابت میرایی و زمان فروافت برای نوسانهای آزاد در آن مد مشخص هستند. این رابطه در صورتی برقرار است که میرایی به اندازه کافی ضعیف باشد و فاصله بسامدی بین تشدیدها در مقایسه با نیم پهنای آنها بزرگ باشد. در این حالت، در هر نقطه منحنی، دامنه جذبی حداکثر از یک مد نصیب می برد. از طرف دیگر، نتیجه می شود که در حالت عادی هیچ یک از دامنه های کشسانی قابل اغماض نیستند. (مسئله ۳-۲۰ را ببینید).

مثال ۲: نوسانهای واداشته دو آونگ جفت شده

سیستم در شکل ۳-۳ نشان داده شده و همچنین در آزمایش خانگی ۳-۸ شرح داده شده است (که در آن گلوله آونگها قوطیهای کنسرو هستند، فتریک فتر اسلینکی است، نیروی محرک به وسیله صفحه دوار یک گرامافون که با حدود ۳ متر کش به سیستم جفت شده است ایجاد می شود و



شکل ۳-۳ نوسانهای واداشته آونگهای جفت شده. (الف) حالت تعادل. (ب) ییکریندی در حالت کلی.

میرایی با مالیدن تارها بر روی چیزی به وجود می آید. برای سادگی فرض می کنیم که هر دو آونگ ثابت میرایی Γ یکسان دارند. به آسانی دیده می شود که معادلات حرکت عبارت اند از

$$M\ddot{\psi}_a = -\frac{Mg}{l}\psi_a - K(\psi_a - \psi_b) - M\Gamma\psi_a + F_0 \cos \omega t \quad (49)$$

$$M\ddot{\psi}_b = -\frac{Mg}{l}\psi_b + K(\psi_a - \psi_b) - M\Gamma\psi_b \quad (50)$$

قبلاً نوسانهای آزاد چنین سیستمی را بدون میرایی مطالعه کردیم. از این رو معلوم می شود که اگر F_0 و Γ هر دو صفر باشند، مدها به صورت زیر داده می شوند

$$\psi_a = \psi_b, \quad \omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \psi_1 = \frac{1}{2}(\psi_a + \psi_b) \quad \text{مد ۱} \quad (51)$$

$$\psi_a = -\psi_b, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{M}, \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(\psi_a - \psi_b) \quad \text{مد ۲} \quad (52)$$

که در آنها ψ_1 و ψ_2 مختصات بهنجار هستند.

هر مد مانند نوسانگر واداشته عمل می‌کند. اکنون از مختصات بهنجار ψ_1 و ψ_2 استفاده می‌کنیم. اگر معادلات (۴۹) و (۵۰) را با یکدیگر جمع کنیم، نتیجه می‌شود

$$M\ddot{\psi}_1 = -\frac{Mg}{l}\psi_1 - M\Gamma\dot{\psi}_1 + \frac{1}{4}F_0 \cos \omega t \quad (53)$$

از تقریق معادله (۵۰) از معادله (۴۹) نتیجه می‌شود

$$M\ddot{\psi}_2 = -M \left[\frac{g}{l} + \frac{2K}{M} \right] \psi_2 - M\Gamma\dot{\psi}_2 + \frac{1}{4}F_0 \cos \omega t \quad (54)$$

توجه کنید که معادلات (۵۳) و (۵۴) جفت نشده هستند. در مقایسه با معادله (۱) دیده می‌شود که هریک از معادلات (۵۳) و (۵۴) به شکل مناسب یک نوسانگر واداشته هماهنگ میرایند. از این رو، مختصه بهنجار ψ_1 مانند یک نوسانگر هماهنگ ساده با جرم M ، ثابت فنر $M\omega_1^2$ ، ثابت میرایی Γ و نیروی محرک $\frac{1}{4}F_0 \cos \omega t$ عمل می‌کند. مختصه بهنجار ψ_2 به طور مشابه با جرم M ، ثابت فنر $M\omega_2^2$ ، ثابت میرایی Γ و نیروی محرک $\frac{1}{4}F_0 \cos \omega t$ عمل می‌کند. این دو نوسان مستقل هستند، بنابراین جوابهای حالت پایا برای ψ_1 و ψ_2 را به طور جداگانه می‌توانیم بنویسیم. هر مد مانند یک نوسانگر واداشته یک بعدی عمل می‌کند. بنابراین هر مد دامنه جذبی خودش و دامنه کشسان خودش را دارد و در آن بسامد شدید بسامد مد را می‌دهد، درست مانند نوسانگر یک بعدی.

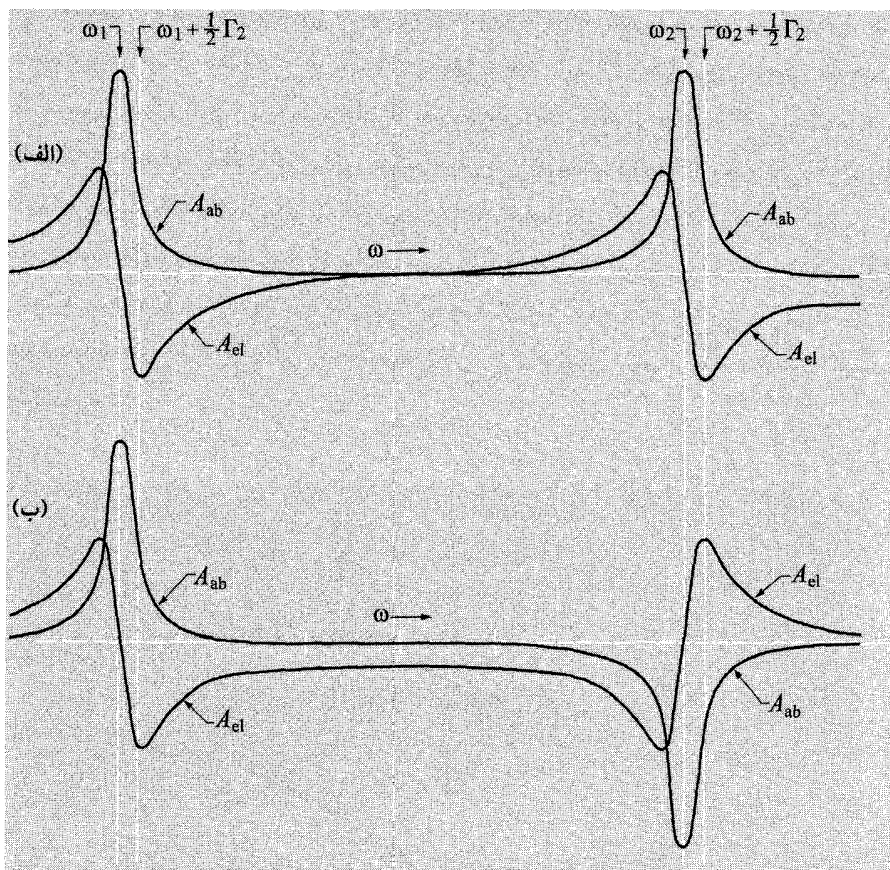
هر جزء به صورت برهم‌نهمش مدهای واداشته حرکت می‌کند. اکنون حرکت دو جزء متحرک a و b را در نظر می‌گیریم. برطبق معادلات (۵۱) و (۵۲) داریم

$$\psi_a = \psi_1 + \psi_2, \quad \psi_b = \psi_1 - \psi_2 \quad (55)$$

برطبق معادله (۵۵) دامنه جذبی جزء a درست مجموع دامنه‌های جذبی حامل از دو مد است. دامنه جذبی جزء b ، برابر با اختلاف دامنه‌های جذبی دو مد است. به همین ترتیب، دامنه کشسان جزء a برابر با مجموع دامنه‌های کشسان دو مد و دامنه کشسان جزء b برابر با اختلاف آنهاست.

هنگامی که بسامد محرک با یکی از بسامد مدها برابر باشد، دراین صورت حرکت a و b اساساً همان حرکتی است که آن مد (برای نوسانهای آزاد) می‌داشت.

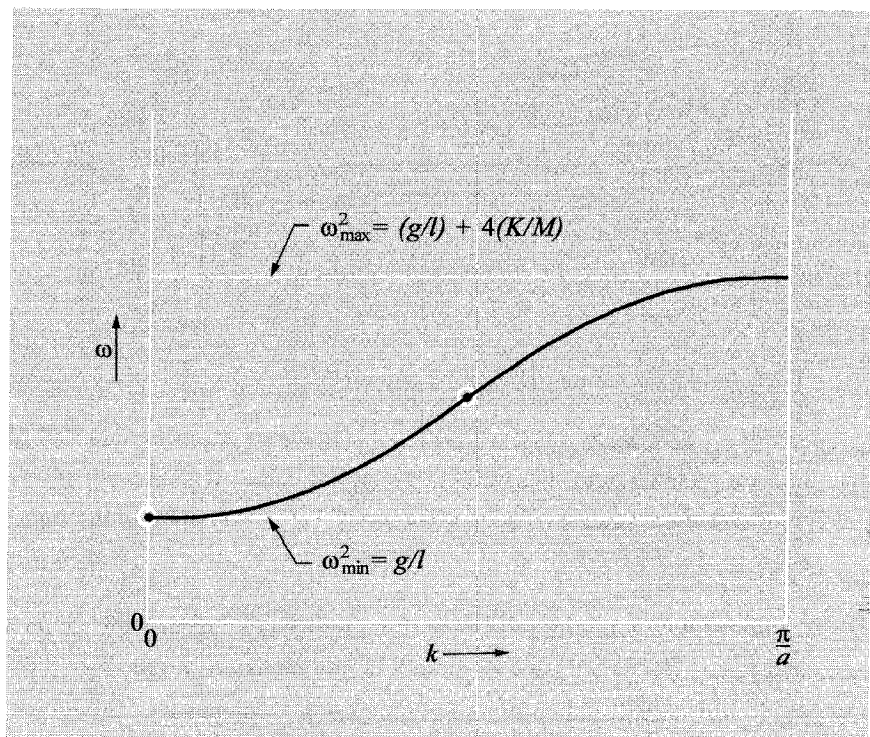
در شکل ۳-۴ دامنه‌های جذبی و کشسان برای ψ_a و ψ_b رسم شده است.



شکل ۳-۴ تشدید در سیستمی با دو درجه آزادی. منحنیهای تغییرات دامنه‌های جذبی و کشسان برحسب بسامد برای (الف) آونگی که مستقیماً به نیروی محرک جفت شده است و (ب) آونگی که از نیروی محرک دورتر است. جدایی بسامد زاویه‌ای $\omega_2 - \omega_1$ سی برابر نصف پهنای تشدید در هر یک از مدها، $\frac{1}{4} \Gamma$ ، اختیار شده است.

در این مثال، این نتیجه کلی به دست آمد که دامنه حالت پایا برای هر جزء متحرک را به صورت برهم‌نهمش مؤلفه‌های هر تشدید، یعنی هر مد سیستمی که به طور آزاد در حال نوسان است، می‌توان نوشت. هر مؤلفه در این برهم‌نهمش به همان صورت است که نوسانگر واداشته متناظر با آن مد دارد. مؤلفه‌های حاصل از هر مد، بستگی به آن دارد که نیروی محرک چگونه به سیستم جفت شده باشد. برای آرایش ۳-۳، هر جزء متحرک، به طور مساوی (بدون در نظر گرفتن علامت) از دو مد سهم می‌برد. اما اگر کش را به جای اینکه به یکی از گلوله‌ها ببندیم، به وسط فنر بسته بودیم، سهم دو مد کاملاً متفاوت می‌بود. بنابراین سهم نسبی هر مد بستگی به جزئیات چگونگی اعمال نیروی محرک دارد.

نوسانهای واداشته سیستمی با چندین آونگ جفت شده. تصور کنید فقط به جای دو آونگ، تعداد زیادی آونگ جفت شده در یک آزایی خطی وجود دارد. اگر یک نیروی محرک هماهنگ به سیستم اعمال کنیم و بسامد محرک را تغییر دهیم (اما بسامد را به اندازه کافی آهسته تغییر دهیم تا همیشه در "حالت پایا" باقی بمانیم)، هر وقت که بسامد محرک از مقدار یکی از بسامد مدها می‌گذرد، یک تشدید به دست خواهیم آورد. (البته همان طور که در بالا شرح داده شد، نیروی محرک باید به گونه‌ای جفت شده باشد، که بعضی از مدها تحریک نشوند. در این صورت در بسامد این گونه مدها هیچ تشدیدی وجود ندارد.) درست همان گونه که در سیستمهای با دو درجه آزادی دیدیم، دامنه در حالت پایای هر جزء متحرک عبارت از برهم‌نهی سهم هر یک از مدهای سیستم خواهد بود.



شکل ۵.۳ رابطه پاشندگی برای آونگهای جفت شده. دو نقطه مربوط به دو تشدید در دو آونگ جفت شده است. تشدید در سیستمهای مشابه با بیش از دو آونگ جفت شده را با نقطه‌های مناسب بر روی همین نمودار می‌توان نشان داد. تعداد نقطه‌ها با تعداد تشدیدها برابر است که این هم با تعداد مدهای نوسان آزاد برابر است.

یک روش خوب برای آنکه بسامدهای تشدیدی و اعداد موج مربوط به آنها را به دست آوریم آن است که رابطه پاشندگی (که مستقل از شرایط مرزی و تعداد درجه‌های آزادی است) را رسم کنیم و به ازای هر مقدار تشدید در سیستم مشخص مورد نظر، بر روی منحنی، یک نقطه بگذاریم. رابطه پاشندگی برای آونگهای جفت شده در شکل ۲-۱۷ رسم شده است. این منحنی در شکل ۳-۵ دوباره رسم شده است و دو نقطه آن مربوط به مدهایی است که با شرایط مرزی سیستمی شامل دو آونگ که اکنون مطالعه کردیم، تعیین شده‌اند.

۳-۴ صافیها

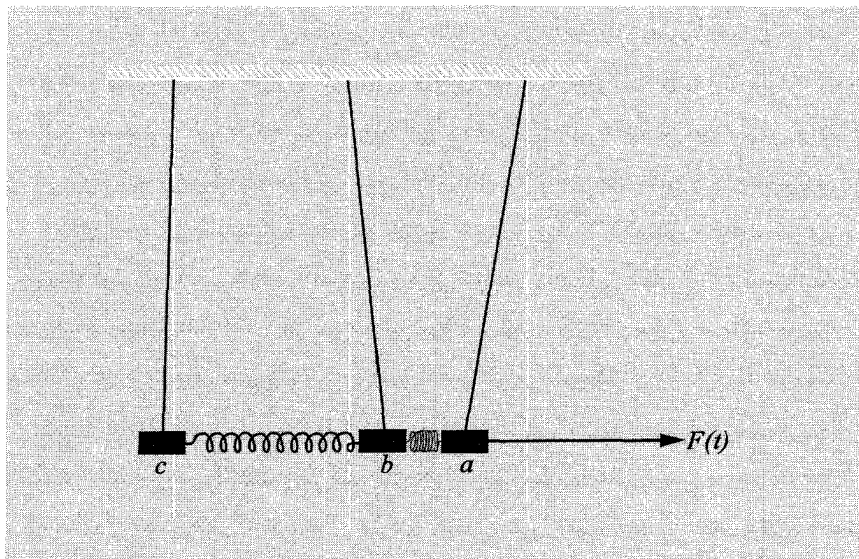
هنگامی که سیستمی را با بسامد ω تحریک کنیم، در حالت پایا حرکت هر جزء متحرک برهم‌نهم سهم تمام تشدیدهاست. به ویژه نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم یعنی ω^2 ، که در حالت پایا برای تمام اجزای متحرک یکسان است، عبارت از برهم‌نهم پیکربندیهای مربوط به مدهای مختلف است. اکنون به طور کیفی می‌بینیم که وقتی ω^2 را تغییر می‌دهیم چه اتفاقی می‌افتد. ابتدا تصور کنید که ω درجایی بین کمینه و بیشینه بسامد مدها قرار گرفته است ولی نزدیک هیچ تشدید مشخصی قرار ندارد. در این صورت دامنه یک جزء متحرک مفروض، اساساً فقط شامل مؤلفه‌های کشسان از تمام مدهاست. بسته به آنکه چه جزء متحرکی را در نظر بگیریم، مؤلفه‌های مدهای مختلف، علامتهای متفاوتی دارند. [معادلات (۵۵) را ببینید و مؤلفه‌های مد ۲ در ψ_a و ψ_b را مقایسه کنید]. همان‌طور که ω^2 را افزایش می‌دهیم، ممکن است به یک بسامد تشدید نزدیک شویم. هنگامی که با افزایش بسامد از یک تشدید رد می‌شویم، علامت مؤلفه کشسان آن مد، معکوس می‌شود. اگر همان‌طور به افزایش بسامد ادامه دهیم و از بسامد یک مد دیگر برویم، دامنه اجزای متحرک مختلف به روش کم و بیش پیچیده‌ای افزایش یا کاهش می‌کنند. سرانجام از بسامد بالاترین مد می‌گذریم. پس از آن دیگر هیچ‌گونه تغییر علامتی در مؤلفه‌ها وجود ندارد، یعنی با افزایش بسامد پس از بالاترین تشدید، علامت هر مؤلفه در دامنه کشسان هر جزء مفروض، تغییر نمی‌کند. بنابراین اجزای متحرک کم و بیش شکل بالاترین مد را (البته نه دقیقاً) نگاه می‌دارند. اکنون موضوع بسیار جالبی روی می‌دهد. اگر سیستم به صورت یک آزایی خطی باشد و آن را از یک انتها با بسامد بیشتر از بسامد بالاترین مد به حرکت درآوریم، نزدیکترین جزء متحرک به انتهای حرکت داده شده بیشترین دامنه را دارد، جزء متحرک مجاور آن دامنه کوچکتری دارد، سومین جزء متحرک دارای دامنه باز هم کوچکتر است و غیره. با افزایش فاصله از انتهای ورودی سیستم، دامنه تضعیف می‌شود. بنابراین سیستم را یک صافی می‌نامیم.

مثال ۳: دو آونگ جفت شده در نقش یک صافی مکانیکی

دو آونگ جفت شده شکل ۳-۳ را به عنوان مثال در نظر بگیرید. فرض کنید که انتهای ورودی (آونگ a) را با بسامد بیشتر از بسامد مد ω_2 به حرکت در آوریم. اکنون آونگ a مستقیماً به نیروی محرک جفت شده است. بنابراین، در حالت پایدار، قسمتی از نیروی بازگرداننده بر روی آونگ a با نیروی محرک تعیین می شود. چنین حالتی برای آونگ b وجود ندارد. نیروی بازگرداننده این آونگ، درست مانند حالت نوسانهای آزاد، فقط به وسیله فنر و گرانی تأمین می شود. در یک مد نوسان آزاد، بیشترین مقدار نیروی بازگرداننده بر واحد جابه جایی که فنر (و گرانی) می تواند به وجود آورد، مربوط به شکل بالاترین مد است که در آن گلوله ها در دو جهت مخالف یکدیگر حرکت می کنند. اما اکنون کافی نیست که این مقدار را برابر ω_1 بگیریم، حتی اگر پیکربندی مدها کاملاً همان پیکربندی بالاترین مد باشد که در آن اندازه $|B|$ نوسان آونگ b با اندازه $|A|$ نوسان آونگ a برابر است. تنها راهی که آونگ b می تواند همان نیروی بازگرداننده بر واحد جرم بر واحد جابه جایی مانند آونگ a داشته باشد، آن است که آونگ b جابه جایی کمتری داشته باشد: $|B| < |A|$. هرچه مقدار ω از ω_2 بیشتر باشد، جابه جایی مربوط به آونگ b نسبت به جابه جایی آونگ a کوچکتر است. به بیان دیگر، آونگ b نمی تواند با آونگ a همگام باشد، مگر اینکه مسافت کمتری حرکت کند.

اگر به جای دو آونگ، سه یا تعداد بیشتری آونگ جفت شده در یک ردیف خطی داشته باشیم و اگر آنها را از یک انتها با بسامدی بیشتر از بسامد بالاترین مد به حرکت در آوریم، حالت مشابهی روی می دهد. پیکربندی حالت پایا، شبیه پیکربندی بالاترین مد است، یعنی هر گلوله با فازی مخالف فاز گلوله های مجاور هر دو طرفش حرکت می کند. در این حالت بیشترین نیروی بازگرداننده بر واحد جرم بر واحد جابه جایی ممکن است برای هر گلوله حاصل شود. اما هنوز کافی نیست که این مقدار را برابر ω_2 بگیریم مگر آنکه هر گلوله نسبت به گلوله بعدی نزدیکتر به انتهای ورودی (انتهای به حرکت درآمده) جابه جایی کمتری داشته باشد. از این رو همان طور که از انتهای به حرکت درآمده سیستم دورتر می شویم، دامنه حرکت گلوله های متوالی کاهش می یابد. ■

بسامد قطع بالا. بنابراین مثالی از یک صافی مکانیکی داریم. اگر به انتهای ورودی نیروی $F_0 \cos \omega t$ وارد کنیم، به شرطی که ω بسیار بزرگتر از بسامد بالاترین مد سیستم باشد، دامنه حرکت انتهای خروجی (دورترین انتها از نیروی محرک) بسیار کوچکتر از دامنه انتهای ورودی است. پیکربندی سیستم درست مانند پیکربندی بالاترین مد است بجز آنکه وقتی از انتهای به حرکت درآمده دور می شویم، دامنه بیشتر و بیشتر کاهش می یابد. بسامد بالاترین مد (نوسان آزاد) را یک بسامد قطع (نوسان واداشته) می نامند. اعمال نیروی محرک به یک انتها با بسامد بالاتر از بسامد



شکل ۳-۶ صافی مکانیکی. بسامد محرک بیشتر از بسامد بالاترین مد است. پیکربندی سیستم به گونه‌ای است که در آن فازهای نسبی گلوله‌ها، مانند فازهای نسبی بالاترین مد هستند. دامنهٔ "خروجی" (گلولهٔ c) کمتر از دامنهٔ "ورودی" (گلولهٔ a) است.

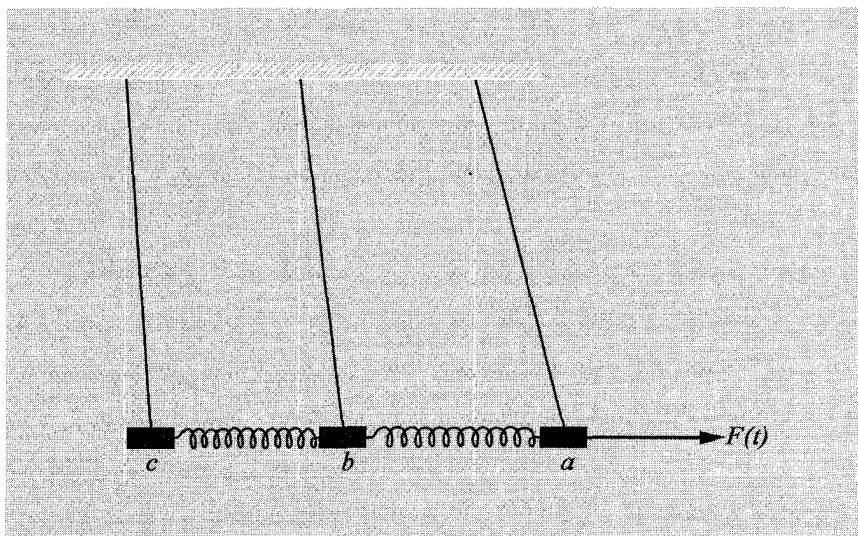
قطع، حرکتی به وجود می‌آورد که از "صافی" عبور نمی‌کند بلکه "قطع" می‌شود. در چنین حالتی می‌گوییم که سیستم در حال "بالاتر از قطع به حرکت درآمده" است. در شکل ۳-۶ سیستمی با سه آونگ جفت‌شدهٔ را نشان می‌دهد که در بالاتر از قطع، به حرکت درآمده است (چنین حالتی را به آسانی می‌توان با یک فنر اسلینکی و سه قوطی کف‌سرو به وجود آورد. به آزمایش خانگی ۳-۱۶ مراجعه کنید).

بسامد قطع پایین. اکنون اگر سیستم را با بسامد کمتر از پایینترین بسامد طبیعی (یعنی بسامد پایینترین مد در نوسانهای آزاد) به حرکت درآوریم چه اتفاقی می‌افتد. در اینجا نشان می‌دهیم که اگر بسامد محرک خیلی کمتر از پایینترین بسامد طبیعی باشد، در این صورت دامنهٔ خروجی (یعنی دامنهٔ دورترین گلوله از نیروی محرک) خیلی کمتر از دامنهٔ ورودی (دامنهٔ گلولهٔ به حرکت درآمده) است. بنابراین بسامد پایینترین مد هم یک بسامد قطع است.

سیستم شامل دو آونگ جفت‌شده را در نظر بگیرید (شکل ۳-۳). پایینترین مد مربوط به آرایشی است که در آن تمام آونگها هم‌فاز با یکدیگر و با دامنهٔ مساوی نوسان می‌کنند. فنرها کشیده یا متراکم نشده‌اند و نیروی بازگرداننده فقط در نتیجهٔ گرانی است. از این رو بسامد $\omega_1 = \sqrt{g/l}$ است. اکنون تصور کنید که سیستم را با بسامد ω که کمتر از بسامد ω_1 است، به حرکت درآوریم.

بنابراین در حالت پایا، نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم یعنی ω^2 برای هر گلوله باید از g/l کمتر باشد. برای گلوله‌ای که در انتهای ورودی است، قسمتی از نیروی بازگرداننده، به وسیله وابستگی مستقیم به نیروی محرک به وجود می‌آید، به گلوله دوم فقط به وسیله گرانی و فنر نیرو وارد می‌شود. تنها راهی که به وسیله آن، نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم می‌تواند کمتر از g/l بشود این است که فنر، مؤلفه نیرویی به وجود آورد که علامتش مخالف نیرویی باشد که به وسیله گرانی ایجاد می‌شود. به آسانی دیده می‌شود که جابه‌جایی گلوله b ، باید کمتر از گلوله a ، اما در همان جهت باشد (پس فنر کشیده می‌شود). از این رو فازهای نسبی به مانند پایتترین مد است اما برای دامنه‌های نسبی چنین نیست. (دامنه گلوله b کوچکتر از دامنه گلوله a است).

اگر سه یا تعداد بیشتری آونگ جفت شده داشته باشیم که با بسامد پایتتر از بسامد پایتترین مد به حرکت درآید، نتیجه بالا صدق می‌کند. فازهای نسبی همان فازهای نسبی موجود در پایتترین مد هستند ولی همان‌طور که از انتهای ورودی دورتر و دورتر می‌شویم، دامنه‌ها به تدریج کاهش می‌یابند. این حالت را در شکل ۷-۳ می‌بینیم. آسانترین راه برای فهمیدن شکل ۷-۳ آن است که فکر کنیم بسامد محرک برابر صفر است. بنابراین فقط یک نیروی ثابت وجود دارد، آونگها بی حرکت هستند و قوه درک شما بلافاصله می‌گوید که پیکربندی آونگها به راستی شبیه به شکل ۷-۳ است.



شکل ۷-۳ صافی مکانیکی. بسامد محرک کمتر از بسامد پایتترین مد است. پیکربندی سیستم به گونه‌ای است که فازهای نسبی گلوله‌ها، به مانند فازهای نسبی بالاترین مد هستند. دامنه خروجی (گلوله c) کمتر از دامنه ورودی (گلوله a) است.

نام‌گذاری. باند بسامد بین بسامدهای قطع پایین و قطع بالا نوارگذر صافی نامیده می‌شود. برای بسامدهای محرک که در داخل نوارگذر قرار دارند، دامنهٔ انتهای خروجی با دامنهٔ انتهای ورودی قابل مقایسه است. برای بسامدهای محرک که خارج از نوارگذر قرار دارند، دامنهٔ خروجی کوچکتر از دامنهٔ ورودی است. بنابراین سیستم را صافی نوارگذر می‌نامیم. اگر بسامد قطع پایین صفر باشد (یعنی پایینترین مد، بسامد صفر داشته باشد) سیستم را صافی پایین‌گذر می‌نامیم. مثلاً اگر در سیستم آونگهای جفت‌شده، طول تار آونگها برابر بینهایت بشود، در این صورت تارها همیشه عمودی باقی می‌مانند و هیچ‌گونه نیروی بازگرداننده به‌وجود نمی‌آورند. (بنابراین تارها، با نگاهداری گلوله‌ها بر روی یک "میز بدون اصطکاک" معادل است.) بنابراین بسامد پایینترین مد برابر صفر است (که مربوط به حرکت انتقالی است.) اگر سیستم را از یک انتها به حرکت درآوریم، یک صافی پایین‌گذر خواهیم داشت که بسامدهای از صفر تا بسامد قطع بالا را عبور می‌دهد.

اگر بسامد پایینترین مد بزرگتر از صفر، اما بسامد بالاترین مد "بینهایت" باشد، سیستم را صافی بالاگذر می‌نامند. مثلاً اگر در سیستم آونگهای جفت‌شده، K/M به سمت بینهایت میل کند، یک صافی بالاگذر به‌دست می‌آید. بنابراین فنرها آن‌چنان سخت (یا جرمها آنقدر کوچک) خواهند بود که بدون آنکه به کاهش متوالی دامنه‌ها احتیاجی باشد و بدون توجه به آنکه بسامد محرک تا چه اندازه زیاد است، فنرها همیشه می‌توانند به‌اندازهٔ کافی نیروی بازگرداننده بر واحد جرم بر واحد جابه‌جایی به‌وجود آورند.

سیستمی که از دو یا سه (یا بیشتر) آونگ با قوطی کنسرو که با فتر اسلینکی به هم جفت شده‌اند تشکیل شده باشد و از یک انتها با یک گرمافون به حرکت درآید، خواص یک صافی نوارگذر را به خوبی می‌تواند نمایش دهد. (به آزمایش خانگی ۳-۱۶ مراجعه کنید).

مثال ۴: صافی مکانیکی نوارگذر

دو آونگ جفت‌شده که از یک انتها به حرکت درآمده باشند، مانند شکل ۳-۳، یک صافی ساده و مکانیکی نوارگذر را تشکیل می‌دهند. می‌توان نشان داد (مسئلهٔ ۳-۲۸) که نسبت دامنهٔ خروجی به دامنهٔ ورودی (با صرف‌نظر کردن از میرایی) با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\frac{\psi_b}{\psi_a} \approx \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega^2} \quad (56)$$

که در آن

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{K}{M} \quad (57)$$

توجه کنید که هنگامی که ω با یکی از دو مقدار شدید ω_1 یا ω_2 برابر است، نسبت دامنه‌ها همان نسبتی است که در مد مربوط به آن خواهد بود: مقدار ψ_b/ψ_a به‌ازای $\omega = \omega_1$ برابر $1 +$ و به‌ازای $\omega = \omega_2$ برابر $1 -$ است. هنگامی که ω از بسامد پایتترین مد یعنی ω_1 کمتر می‌شود، نسبت دامنه‌ها مثبت باقی می‌ماند و از $1 +$ یعنی مقدار آن به‌ازای $\omega_1 = \omega$ به $(\omega_1^2 + \omega^2)/(\omega_1^2 - \omega^2)$ یعنی مقدار آن به‌ازای $\omega = 0$ کاهش پیدا می‌کند. بنابراین به‌شرطی که گسترهٔ بسامد نوارگذر در مقایسه با بسامد متوسط نوارگذر کوچک باشد، نوسانهای با بسامدهای محرک خیلی پایتتر از بسامد قطع پایین، هنگام عبور از صافی به‌شدت تضعیف می‌شوند. هنگامی که ω از بسامد بالاترین مد یعنی ω_2 بیشتر می‌شود، نسبت دامنه‌ها منفی باقی می‌ماند. با افزایش ω ، اندازهٔ دامنه کاهش پیدا می‌کند و در بسامدهای به‌اندازهٔ کافی بالا مقدار آن برابر $2\omega^2/(\omega_1^2 - \omega^2) -$ می‌شود. از این رو بسامدهای محرک خیلی بالاتر از بسامد قطع بالا به‌شدت تضعیف می‌شوند.

مثال ۵: صافی مکانیکی پایین‌گذر

دو آونگ جفت‌شده مانند شکل ۳-۳ را در نظر بگیرید. اکنون ارتفاع محل نگاهدارندهٔ نخ را اضافه کرده و طول نخها را نیز زیادتر کنید (به‌طوری که گوله‌ها در همان محلی که بودند، باقی بمانند). هنگامی که نخها "بینهایت بلند" شدند، به‌ازای هر جابه‌جایی محدود گوله‌ها، نخها باز هم عمودی باقی می‌مانند. بنابراین گرانی هیچ‌گونه نیروی بازگرداننده‌ای وارد نمی‌کند و نخها فقط مانند یک نگاهدارندهٔ معادل با یک میز بدون اصطکاک عمل می‌کنند. بنابراین بسامد پایتترین مد یعنی $\omega_1 = g/l$ به‌سمت صفر میل می‌کند. از این رو یک صافی پایین‌گذر داریم که بسامدهای بین صفر و بسامد قطع بالا یعنی $2K/M = \omega_1^2$ را عبور می‌دهد. (چنین حالتی برای دو جرم که با فنری جفت شده‌اند و بر روی یک میز بدون اصطکاک قرار گرفته‌اند و از یک انتها به‌وسیلهٔ یک نیروی محرک هماهنگ به حرکت در می‌آیند، نیز صدق می‌کند.) نسبت تضعیف دامنه یعنی ψ_b/ψ_a با قراردادن ω_1 برابر با صفر در معادلهٔ (۵۶) به‌دست می‌آید:

$$\frac{\psi_b}{\psi_a} = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - 2\omega^2} = \frac{K/M}{(K/M) - \omega^2} \quad (58)$$

می‌بینیم که نسبت تضعیف به‌ازای بسامد صفر برابر $1 +$ است. این نسبت به‌ازای $\omega_1^2 = \omega^2$ بینهایت است، (به این معنی که ψ_a صفر است). به‌ازای بسامد بالا، مقدار آن $1 -$ است. در بسامدهای خیلی بالا، مقدار آن خیلی کوچک (و منفی) می‌شود.

اکنون کاربردی از معادله (۵۸) را می‌خوانیم. تصور کنید یک قطعه ظریف از دستگاهی داریم که تحت تأثیر تکان آهسته افقی کار نخواهد کرد، اما تکانهای آهسته عمودی صدمه‌ای به آن نمی‌زند. بنابراین دستگاه را بر روی یک صفحه مسطح نصب می‌کنیم که بر روی یک میز مسطح، افقی و بدون اصطکاک قرار دارد، (نگاهداننده بدون اصطکاک با لایه نازکی از هوا ایجاد می‌شود). برای آنکه از افتادن صفحه مسطح از روی میز جلوگیری کنیم باید یک نگاهداننده افقی تهیه کنیم. تصور کنید که دیوارها، کف و سقف همگی با مؤلفه بسامد 2°cps یا بیشتر ارتعاش می‌کنند و بدترین حالت بسامد 2°cps است. فرض کنید اگر صفحه به وسیله نگاهداننده‌های صلب به دیوارها متصل شود، (دامنه) ارتعاش 10° مرتبه بیش از آن است که بتوان تحمل کرد. فرض کنید که وزن دستگاه با صفحه برابر 10Kg باشد. چه باید کرد؟ حال دستگاه و صفحه آن را از طریق یک صافی پایین‌گذر که شامل یک فنر در امتداد x و فنر دیگری در امتداد y است، به دیوارها می‌بندیم. هر فنر دارای ثابت فنری K است (که باید تعیین شود). درجه‌های آزادی x و y مستقل هستند، بنابراین فقط باید حرکت x را در نظر گرفت. دیوار در محل اتصال به فنر را "جزء متحرک a " و دستگاه را "جزء متحرک b " می‌نامیم. در به دست آوردن معادله (۵۸)، دو جرم را که با فنری جفت شده‌اند در نظر می‌گیریم که در آن جرم a با نیروی $F_0 \cos \omega t$ به حرکت درآمده است. البته از نظر جرم b معلوم نیست که چه چیز جرم a را به جلو می‌راند، بلکه فقط معلوم است که جرم b از طریق فنر K به یک جزء متحرک جفت شده است و در حالت پایا بین حرکت آن و حرکت جرم a رابطه مشخصی وجود دارد که همان رابطه‌ای است که با معادله (۵۸) داده می‌شود. بنابراین حتی هنگامی که به جای جرم a یک دیوار لرزان وجود دارد، معادله (۵۸) را می‌توان به‌کاربرد که در آن ψ_a نشانگر حرکت انتهای فنر متصل به دیوار است. می‌خواهیم مقدار ψ_b/ψ_a برای بسامدهای 2°cps یا بالاتر، از 10^{-2} کمتر باشد:

$$\frac{\psi_a}{\psi_b} = 1 - \frac{\omega^2}{K/M} = -100$$

یعنی

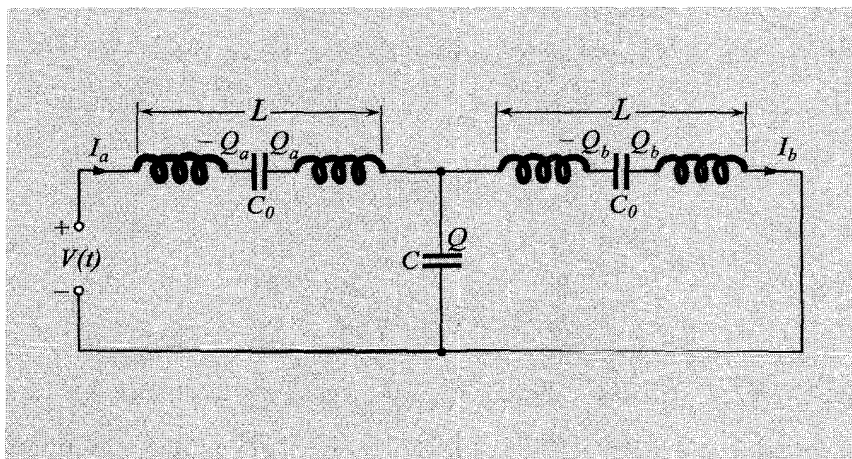
$$\frac{K}{M} = \frac{\omega^2}{100}, \quad \sqrt{\frac{K}{M}} \approx \frac{\omega}{10}$$

برای یک دیوار ثابت، بسامد زاویه‌ای نوسان طبیعی برای دستگاه و صفحه برابر $\sqrt{K/M}$ است. اگر بخواهیم بسامدهای ν و بالاتر را با ضریب حداقل $f = 10^{-2}$ تضعیف کنیم، در این صورت ثابت فنری K باید آنقدر ضعیف باشد که بسامد طبیعی نوسان دستگاه کمتر از $f^{1/2} \nu$ بشود. در مثال اخیر، بسامد طبیعی باید از $2 \text{cps} = \frac{2}{10} = 0.2$ کمتر باشد.

اکنون مثال دیگری می‌گوییم. تصور کنید بر روی صندلی که نشسته‌اید ناراحت هستید چون صندلی به‌طور عمودی با بسامد 2°cps ارتعاش می‌کند. (مثلاً صندلی یک هواپیما یا چیزی مشابه آن) بنابراین بر روی یک بالش می‌نشینید. بالش دامنهٔ تکانهای عمودی را با ضریب 10° کاهش می‌دهد. (در این حالت شما راحت هستید.) هنگامی که بر روی بالش می‌نشینید، سطح بالای آن تا چه اندازه فرو می‌رود؟ (مسئلهٔ ۳-۱۲).

مثال ۶: صافی الکتریکی نوارگذر

اکنون مشابه الکتریکی مثال مکانیکی دو آونگ جفت‌شدهٔ شکل ۳-۳ را پیدا می‌کنیم. به‌جای هر جرم M ، القاگر L را جایگزین می‌کنیم. به‌جای فنر جفت‌کننده با ثابت فنری K ، خازنی با ظرفیت معکوس C^{-1} قرار می‌دهیم. نیروی بازگردانندهٔ ناشی از گرانش، بر روی هر آونگ، به‌جابه‌جایی آن آونگ بستگی دارد و به جفت‌شدگی آن آونگ به آونگ دیگر مربوط نیست. همین‌طور، یک نیروی محرکه الکتریکی باید به‌وجود آورد که هر القاگر را مستقل از جفت‌شدگی آن به القاگر دیگر، تحریک کند. این عمل را با شکستن القاگر به دو نیمه و واردکردن یک خازن C به‌طور سری در وسط القاگر انجام می‌دهیم. سرانجام از مقاومت R هر القاگر (که مربوط به سیم‌پیچی است که القاگر از آن درست شده است) صرف‌نظر می‌کنیم. از بقیهٔ مقاومتها نیز صرف‌نظر می‌کنیم. سیستم در شکل ۳-۸ نشان داده شده است.



شکل ۳-۸ مدارهای LC جفت‌شده که از یک انتها با ولتاژ $V(t)$ تحریک شده است. این مدار مشابه الکتریکی دو آونگ جفت‌شدهٔ شکل ۳-۳ است.

به دست آوردن معادلات حرکت و یافتن مختصات و مدهای بهنجار را به عهده شما می گذاریم. (مسئله ۳-۲۹). در اینجا نتایج را با تشابهی که با آونگهای جفت شده دارد، به سادگی حدس می زنیم:

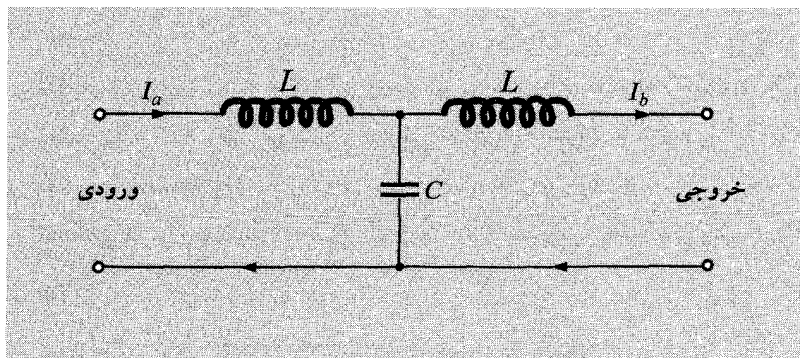
$$\begin{aligned} \text{مد ۱: } I_a &= I_b, & \omega_1^2 &= \frac{C_0^{-1}}{L} \\ \text{مد ۲: } I_a &= -I_b, & \omega_2^2 &= \frac{C_0^{-1}}{L} + \frac{2C^{-1}}{L} \end{aligned} \quad (59)$$

اگر از میرایی صرف نظر کنیم (یعنی از مقاومت سیم پیچها صرف نظر کنیم)، تضعیفی که به وسیله صافی نوارگذر به دست می آید، با معادله (۵۶) داده می شود:

$$\frac{I_b}{I_a} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega^2} = \frac{\sqrt{LC}}{(\sqrt{LC_0}) + (\sqrt{LC}) - \omega^2} \quad (60)$$

مثال ۷: صافی الکتریکی پایین گذر
اگر در شکل ۳-۸ خازن C را مدار کوتاه کنیم یعنی دو سر خازن را با سیم بدون مقاومت به هم وصل کنیم، ظرفیت آن به طور مؤثر بینهایت می شود. بسامد پایینترین مد برابر صفر است که مربوط به حالت پایای DC (جریان مستقیم) است. بنابراین یک صافی پایین گذر داریم که در شکل ۳-۹ نشان داده شده است. نسبت تضعیف شدت جریان با معادله (۶۰) داده می شود که در آن مقدار \sqrt{C} برابر صفر قرار داده شده است:

$$\frac{I_b}{I_a} = \frac{\omega^2}{\omega_2^2 - 2\omega^2} = \frac{\sqrt{LC}}{(\sqrt{LC}) - \omega^2} \quad (61)$$



شکل ۳-۹ صافی الکتریکی پایین گذر.

مثال ۸: صافی پایین‌گذر برای یک منبع تغذیه DC

این حالت کاربرد بسیار عملی معادله (۶۱) است. در یک نمونه منبع تغذیه جریان مستقیم (DC)، جریان متناوب (AC) از پریز برق دیوار با بسامد 60°cps و با ولتاژ rms (جذر میانگین مربعی) در حدود 110° ولت تأمین می‌شود. این ولتاژ به سیم‌پیچ ورودی یک ترانسفورماتور اعمال می‌شود. بسته به مقدار ولتاژ DC که در نهایت می‌خواهیم داشته باشیم، سیم‌پیچ خروجی ترانسفورماتور ممکن است دورهای بیشتر (مبدل افزایشنده) و یا دورهای کمتر (مبدل کاهشنده) از سیم‌پیچ ورودی داشته باشد. سیم‌پیچ خروجی به دوطرف یک دیود که جریان را فقط در یک جهت عبور می‌دهد، متصل شده است. بدین ترتیب جریان DC "نیم‌موج یک‌سوسوده" به دست می‌آید. در عمل از دو دیود و سیم‌پیچ خروجی با سر میانی برای به دست آوردن "یک‌سوسودن تمام موج" استفاده می‌شود. این شدت جریان برای باردارکردن یک خازن به‌کار می‌رود که بعداً به‌عنوان یک منبع ولتاژ پایدار عمل می‌کند. با وجود این، بار الکتریکی (و از آن‌رو ولتاژ) خازن دقیقاً ثابت نیست. این بار الکتریکی با تقریب خوبی با یک مقدار ثابت به‌علاوه یک "موجک" که با بسامد 120°cps (برای یک‌سوسودن تمام موج) نوسان می‌کند، داده می‌شود. (پرسش: چرا بسامد موجک، دو برابر بسامد AC ورودی است؟) اگر این خازن باردار به‌عنوان یک منبع ولتاژ DC برای تغذیه رادیو یا لامپهای گرمافون به‌کار رود، خروجی رادیو شامل "وزوز" مزاحم با بسامد 120°cps خواهد بود. (برای شنیدن صدای این وزوز به یک رادیو، درست پس از روشن شدن و قبل از گرم شدن لامپهای آن گوش کنید. البته رادیویی که با باتری کار می‌کند، این صدای "وزوز" را ندارد. یا می‌توانید یک ساعت الکتریکی یا یک "چراغ با شدت زیاد" که در آن لامپهای ۱۲ ولتی چراغ جلوی ماشین به‌کار می‌رود، پیدا کنید. هر دو این دستگاهها سیم‌پیچهای القایی دارند و صدای وزوز در نتیجه تنش مکانیکی در سیم‌پیچها را می‌توانید بشنوید. چرا این وزوز به‌جای بسامد 60°cps با بسامد 120°cps است؟)

برای آنکه از این وزوز با بسامد 120°cps راحت شویم، خازن را به دوطرف ترمینالهای خروجی صافی پایین‌گذر شکل ۳-۹ وصل می‌کنیم و خروجی صافی را به‌عنوان یک منبع ولتاژ DC به‌کار می‌بریم. مقادیری که معمولاً برای L و C در یک صافی به‌کار می‌روند عبارت‌اند از (به دفترچه راهنمای رادیوآماتورها مراجعه کنید) $L = 10 \text{ h}$ ، $C = 6 \mu\text{f}$. بنابراین بسامد قطع بالا با رابطه زیر داده می‌شود

$$\nu_2 = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{2}{LC}} = \frac{1}{6.28} \sqrt{\frac{2}{10 \times 6 \times 10^{-6}}} = 29.1 \text{ cps}$$

ضریب تضعیف برای مؤلفه cps ۱۲۰ شدت جریان با معادله (۶۱) داده می‌شود

$$\frac{I_b}{I_a} = \frac{\nu_1^2}{\nu_1^2 - 2\nu^2} = \frac{(2991)^2}{(2991)^2 - 2(120)^2} = -0.3^\circ$$

بنابراین مؤلفه موجک با ضریب در حدود ۱۰۰ کاهش پیدا می‌کند ولی صافی بر مؤلفه DC اثری ندارد.

۵-۳ نوسانهای واداشته سیستم بسته با چندین درجه آزادی

در این بخش رفتار سیستمی شامل آونگهای مشابه جفت شده را که تحت تأثیر نیروی محرکی با بسامد دلخواه ω نوسانهای حالت پایا دارند، مطالعه می‌کنیم. در ابتدا شرایط مرزی را مشخص نخواهیم کرد و همچنین مشخص نخواهیم کرد که کدام جزء یا اجزای متحرک مستقیماً به نیروی محرک جفت شده‌اند. (مشخصات اخیر را جزئی از شرایط مرزی می‌توان تصور کرد.) در اینجا فقط معادله حرکت گلوله آونگی را که مستقیماً به هیچ نیروی محرکی جفت نشده در نظر می‌گیریم. با این عمل، جواب عمومی حرکت گلوله‌ای با شرایط مرزی نامشخص را می‌توانیم پیدا کنیم. البته در هر حالت مشخص لازم است که شرایط سیستم، مانند آنکه دو انتها آزاد است یا ثابت (یا هیچ‌کدام) و یا محلی که نیروها اعمال می‌شوند و غیره را کاملاً مشخص کرد.

صرفنظر کردن از میرایی. در اینجا جملات میرایی را از معادلات حذف خواهیم کرد. آیا این عمل کلی بودن نتایج را محدود خواهد کرد؟ البته، اما نه به‌طور خیلی جدی. یادآور می‌شویم که در بخش ۳-۳ دیدیم مادامی که ω نزدیک هیچ تشدید (یعنی بسامد مد در نوسانهای آزاد سیستم) نیست، جابه‌جایی هر جزء متحرک عبارت از برهم‌نهی فقط مؤلفه‌های کشسان از هر مد است. دامنه‌های جذبی مؤلفه‌ای ندارد. زیرا هنگامی که بسامد تغییر می‌کند، دامنه‌های جذبی خیلی تندتر از دامنه‌های کشسان، افت پیدا می‌کنند، تا مادامی که مقدار ω حداقل ۵ یا ۱۰ نیم-پهنا دور از هر بسامد تشدید است، از جملات جذبی می‌توانیم صرفنظر کنیم. این عمل با قراردادن $\Gamma = 0$ در نتایج محاسبات معادل است. بنابراین در معادلات حرکت، $\Gamma = 0$ قرار خواهیم داد اما با وجود این فرض خواهیم کرد که مقداری میرایی وجود دارد به‌طوری که سیستم به حالت پایای نوسانی با بسامد برابر با بسامد محرک ω می‌رسد. زیرا می‌دانیم که اگر واقعاً هیچ‌گونه میرایی وجود نداشت، در این صورت سیستم به هیچ حالت پایایی نمی‌رسید بلکه برای همیشه به "زنشهای تمام‌نشده" ادامه می‌داد. فرض بر آن است که میرایی وجود دارد اما از شرح رفتار سیستم، هنگامی که ω به یک تشدید نزدیک است، خودداری می‌کنیم. (از نتایج بخش ۳-۳ می‌دانیم که رفتار سیستم چگونه است).

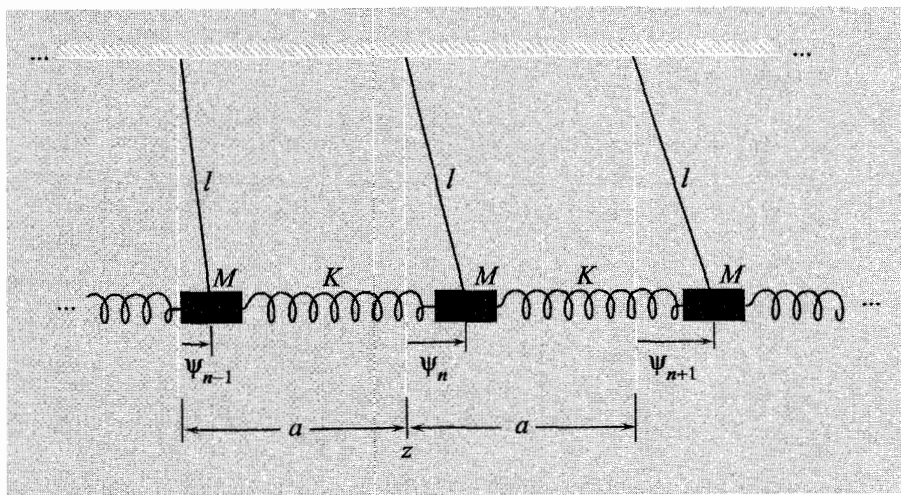
فازهای نسبی اجزای متحرک. یک نتیجه مهم صرفنظرکردن از دامنه‌های جذبی در مدهای مختلف این است که هر مد (به جابه‌جایی یک جزء متحرک مفروض) مؤلفه‌ای می‌دهد که با نیروی محرک $F_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ یا هم‌فاز است و یا 180° درجه اختلاف فاز دارد. زیرا همان‌گونه که در بخش ۳-۳ نشان دادیم، دامنه کشسان برابر با حاصلضرب یک عدد ثابت مثبت یا منفی در $\cos(\omega t + \varphi_0)$ است. روش دیگر به‌دست آوردن این نتیجه بدون نگاه‌کردن به بخش ۳-۳ به شرح زیر است: فرض کنید که هیچ‌گونه میرایی وجود ندارد، اما با وجود این به نحوی سیستم را به حالت پایا با نوسان محرک ω در آورده‌ایم. چون هیچ میرایی وجود ندارد، هیچ‌گونه مصرف انرژی نیز نیست. بنابراین نیروی محرک نباید هیچ‌گونه کار مثبت یا منفی بر روی هیچ‌کدام از اجزای متحرک، انجام دهد. (در غیر این صورت، نیروی محرک در هر دور نوسان مقداری کار انجام می‌داد). چنین عملی مستلزم آن است که جابه‌جایی هر جزء متحرک با نیروی محرک یا هم‌فاز باشد و یا 180° درجه اختلاف فاز داشته باشد، یعنی فقط دامنه‌های کشسان وجود دارد.

از این رو نتیجه بسیار مهمی به‌دست می‌آید. بدین معنی که در حالت پایا (و برای ω که به یک تشدید نزدیک نباشد) تمام اجزای متحرک ثابت فاز یکسان دارند و این ثابت فاز با ثابت فاز نیروی محرک یکسان است. (چون دامنه هر جزء متحرک یا مثبت یا منفی می‌شود، بنابراین مجبور نیستیم که درباره ثابت فاز 180° درجه صحبت کنیم). نتیجه دیگر این است که نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم یعنی ω^2 برای تمام اجزای متحرک یکسان است، زیرا تمام اجزای متحرک با بسامد یکسان نوسان می‌کنند. (دقت کنید که این مطالب درست همان شرایطی است که برای یک مد بهنجار تنها در یک سیستم غیر میرا که به‌طور آزاد نوسان می‌کند، وجود دارد!). اکنون آماده هستیم که یک سیستم مشخص را در نظر بگیریم.

مثال ۹: آونگهای جفت‌شده

اکنون دیگر نباید تعجب کنید که فقط با تغییر نامها (مثلاً تغییر "طول نخ" به "ظرفیت" و "جرم" به "القا") و ترسیم نمودارهای جدید، می‌توان از نتایج نهایی برای آونگهای جفت‌شده، بدون تکرارکردن جزئیات ریاضی، نتایجی برای سیستمهای فیزیکی متفاوت به‌دست آورد. (این کار را مکرراً در فصل ۲ انجام دادیم). اکنون فقط آونگهای جفت‌شده مورد نظر ما هستند.

سه آونگ متشابه جفت‌شده در یک آرایه خطی (که تعداد کل آونگهای سمت چپ و شرایط مرزی نامشخص است) در شکل ۳-۱۰ نشان داده شده است. معادله حرکت برای جابه‌جایی



شکل ۳-۱۰ آونگهای جفت شده با شرایط مرزی نامشخص.

$\psi_n(t)$ گلوله n (برای نوسانهای کوچک) برابر است با

$$M\ddot{\psi}_n = -M\omega_0^2\psi_n + K(\psi_{n+1} - \psi_n) - K(\psi_n - \psi_{n-1}) \quad (۶۲)$$

که در آن

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

پیش از آنکه حل دقیق معادله (۶۲) را به دست آوریم، جوابهای آن را در حالت تقریب پیوسته مطالعه خواهیم کرد. یعنی هیچ گونه اطلاعاتی درباره حرکت پیکربندیهای مانند بالاترین مد نوسان آزاد که در آن گلوله های متوالی پیکربندی "پس و پیش" دارند، به دست نخواهیم آورد. ("پس و پیش" مشابه افقی حرکت عرضی "زیگزاگ" است). بنابراین مجبوریم خود را (فعالاً) به بسامدهایی که کاملاً پایینتر از بسامد قطع بالاست، محدود کنیم. فقط هنگامی که معادله را دقیقاً حل کنیم، می توانیم درباره حرکت هنگامی که بسامد محرک در قسمت بالای گستره نوارگذر و بیشتر از بسامد قطع بالاست، بحث کنیم. ■

تقریب پیوسته. فرض می کنیم که $\psi_n(t)$ با افزایش n به طور آهسته افزایش پیدا می کند. یعنی فرض می کنیم که تمام گلوله ها در نزدیکی گلوله n که وضعیت تعادلش در نقطه z است، قرار دارند، تقریباً همان حرکت گلوله n را دارا هستند، به طوری که حرکت گلوله در نقطه z را با تابع پیوسته

$\psi(z, t)$ می‌توان شرح داد. جملات مناسب در معادله (۶۲) را برحسب سری تیلور بسط می‌دهیم:

$$\psi_n(t) = \psi(z, t)$$

$$\psi_{n+1}(t) = \psi(z + a, t) = \psi(z, t) + a \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} + \dots$$

$$\psi_{n-1}(t) = \psi(z - a, t) = \psi(z, t) - a \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} + \dots$$

از این رو

$$\psi_{n+1} - \psi_n = a \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \dots$$

$$\psi_n - \psi_{n-1} = a \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \dots$$

بنابراین با قراردادن این عبارتها (و همچنین $\psi_n(t) = \partial^2 \psi(z, t) / \partial t^2$) در معادله (۶۲) نتیجه می‌شود

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi(z, t) + \frac{K a^2}{M} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}} \quad (۶۳)$$

معادله موج کلاین-گوردون. معادله (۶۳) یک معادله موج مشهور است. بجز هنگامی که ω برابر صفر است، این معادله، معادله کلاسیک موج نیست. این معادله گاهی اوقات "معادله موج کلاین-گوردون" نامیده می‌شود. (این معادله برای امواج دوبروی ذرات آزاد نسبیتی، برقرار است. به مبحث تکمیلی ۲ مراجعه کنید).

فرض کنید که تمام اجزای متحرک در حالت پایا و با بسامد محرک ω نوسان می‌کنند و به وسیله نیروی محرک هیچ‌گونه کاری انجام نمی‌شود و بنابراین تمام اجزای متحرک، ثابت فاز یکسان دارند. بنابراین

$$\psi(z, t) = \cos(\omega t + \varphi) A(z) \quad (۶۴)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) A(z) \quad (۶۵)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \cos(\omega t + \varphi) \frac{d^2 A(z)}{dz^2} \quad (۶۶)$$

با قراردادن معادلات (۶۴)، (۶۵) و (۶۶) در معادله (۶۳) و حذف کردن ضریب مشترک $\cos(\omega t + \varphi)$ ، معادله دیفرانسیل پیکربندی فضایی آونگها هنگامی که در حالت پایا و با بسامد ω به حرکت درآمده‌اند، به دست می‌آید:

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = \frac{M}{K a^2} (\omega_0^2 - \omega^2) A(z) \quad (۶۷)$$

جوابهای معادله (۶۷) در دو حالت $\omega^2 > \omega_0^2$ و $\omega^2 < \omega_0^2$ بستگیهای کاملاً متفاوتی به z دارد. هنگامی که ω^2 بزرگتر از ω_0^2 است، امواج سینوسی از نوعی که قبلاً (بخش ۲-۲) در مورد تار پیوسته مطالعه کردیم، به دست می آید:

$\omega^2 > \omega_0^2$: امواج سینوسی. برای $\omega^2 > \omega_0^2$ معادله (۶۷) به شکل زیر است

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = -k^2 A(z) \quad (68)$$

که در آن k^2 ضریب ثابت مثبتی است

$$k^2 = (\omega^2 - \omega_0^2) \frac{M}{K a^2} \quad (69)$$

معادله (۶۹) رابطه پاشندگی امواج در سیستم در حالت $\omega^2 > \omega_0^2$ است. جواب عمومی معادله (۶۸) عبارت است از

$$A(z) = A \sin kz + B \cos kz \quad (70)$$

که در آن A و B ضرایب ثابتی هستند که با شرایط مرزی تعیین می شوند. بسته به شرایط مرزی، طول موجهای مشخص (و بسامدهای محرک مربوط به آن) هستند که یک "تشدید" را به وجود می آورد. بسامدهای تشدید، همان بسامدهای مدهای بهنجار (امواج ساکن) سیستمی است که به طور آزاد نوسان می کند.

اکنون به یک مطلب جدید و مهم می رسیم:

$\omega^2 < \omega_0^2$: امواج نمایی. اگر ω^2 کمتر از ω_0^2 باشد، ثابت مثبت κ را به عنوان جذر کمیت مثبت زیر تعریف می کنیم

$$\kappa^2 = (\omega_0^2 - \omega^2) \frac{M}{K a^2} \quad (71)$$

(کاپا را با حرف بزرگ K که به ظاهر شبیه آن است، اشتباه نکنید). معادله (۷۱) رابطه پاشندگی در حالت $\omega^2 < \omega_0^2$ است. بنابراین معادله (۶۷) به شکل زیر در می آید

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = \kappa^2 A(z) \quad (72)$$

وجود علامت مثبت در سمت راست معادله (۷۲) سبب می شود که شکل جواب آن با شکل جوابهای سینوسی معادله (۶۵) که به ظاهر شبیه آن است، تفاوت کلی داشته باشد. به علت وجود

علامت منفی در معادله (۶۸)، جواب آن یعنی تابع سینوسی $A(z)$ که با معادله (۷۰) داده می‌شود، همیشه به سمت محور z خم می‌شود. بنابراین همیشه سرانجام محور z را قطع می‌کند. پس از قطع کردن، این تابع دوباره خم می‌شود و سرانجام محور را مجدداً قطع می‌کند و غیره، از این رو باعث نوسانهایی در فضا می‌شود. متقابلاً، علامت مثبت در سمت راست معادله (۷۲) بدین معنی است که جواب آن یعنی $A(z)$ همیشه از محور z دور می‌شود. بنابراین اگر $A(z)$ مقدار مثبت و شیب مثبت (یا مقدار و شیب منفی) داشته باشد، هرگز به محور z بر نمی‌گردد. اما اگر مقدار آن مثبت و شیب آن منفی باشد، این تابع با افزایش z آهسته‌تر و آهسته‌تر به محور z نزدیک می‌شود. اگر سرانجام محور z را با شیب منفی (که امکانش هست ولی نه لزوماً) قطع کند، با افزایش z به مقادیر بیشتر و بیشتر منفی $A(z)$ دست می‌یابد، اما هرگز محور z را دوباره قطع نمی‌کند. جواب عمومی معادله (۷۲) برهم‌نهمش دو تابع نمای است:

$$A(z) = Ae^{-\kappa z} + Be^{+\kappa z} \quad (۷۳)$$

برای آنکه ببینید این مقدار $A(z)$ یک جواب است، از آن مشتق بگیرید:

$$\begin{aligned} \frac{dA(z)}{dz} &= -\kappa Ae^{-\kappa z} + \kappa Be^{+\kappa z} \\ \frac{d^2 A(z)}{dz^2} &= (-\kappa)^2 Ae^{-\kappa z} + (\kappa)^2 Be^{+\kappa z} = \kappa^2 A(z) \end{aligned}$$

پس معادله (۷۳) در معادله (۷۲) صدق می‌کند. ضرایب ثابت A و B با شرایط مرزی تعیین می‌شوند. بنابراین برای $\omega^2 < \omega_0^2$ ، جواب عمومی $\psi(z, t)$ به صورت زیر است

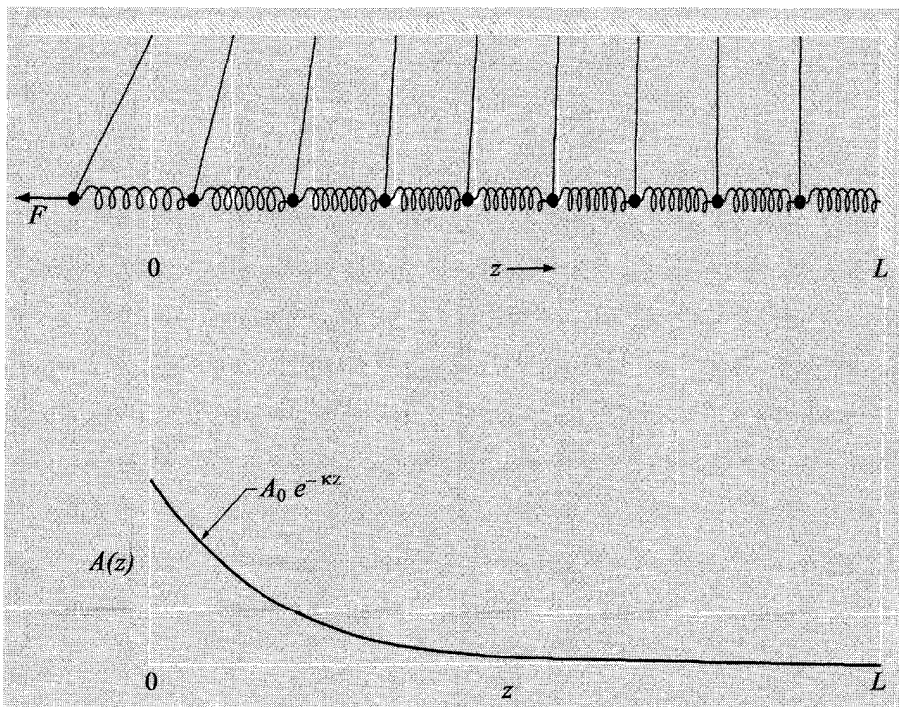
$$\psi(z, t) = (Ae^{-\kappa z} + Be^{+\kappa z}) \cos(\omega t + \varphi) \quad (۷۴)$$

آونگهای جفت شده در نقش صافی بالاگذر. معادله (۷۴) شکل کلی یک موج نمایی را به دست می‌دهد. بسامد $\omega_0^2 = g/l$ به عنوان بسامد قطع پایین عمل می‌کند. چنین چیزی انتظار می‌رفت زیرا همان مقدار را برای بسامد قطع پایین سیستم ساده‌ای شامل دو آونگ جفت شده به دست آوردیم. به ازای بسامد پایتترین مد، تمام آونگها به طور هم فاز تاب می‌خورند و نیروی بازگرداننده فقط به وسیله گرانی به وجود می‌آید. فنرها کشیده یا متراکم نشده‌اند. طول موج برابر "بینهایت" است یعنی k برابر صفر است. اگر سیستم پایتتر از بسامد قطع به حرکت درآید، سیستم نمی‌تواند بستگی فضایی سینوسی را برای دامنه‌های نسبی گلوله‌های در حال نوسان نگاه دارد. بلکه در عوض، دامنه‌های نسبی گلوله‌ها، همان‌طور که با معادله (۷۴) داده شده‌اند، به طور نمایی به فاصله بستگی دارد. بنابراین سیستم مانند یک صافی بالاگذر عمل می‌کند. (در

حقیقت سیستم یک صافی نوارگذراست، اما چون سیستم فقط در تقریب پیوسته مطالعه می‌شود، از در نظر گرفتن پاسخ سیستم نزدیک بالاترین مدها، که پیکربندی آنها "زیگزاگ" است باید اجتناب کنیم).

تصور کنید که سیستم در نقطه $z = 0$ به حرکت درآمده است و از $z = 0$ تا $z = L$ ادامه دارد و آخرین فنر به یک دیوار صلب محکم شده است. کاملاً بدیهی است که اگر ما سیستم را پایینتر از قطع به حرکت درآوریم، با افزایش فاصله z از انتهای به حرکت درآمده، دامنه $A(z)$ باید کاهش یابد. اگر سیستم بسیار دراز باشد، یعنی اگر L بزرگ باشد، هنگامی که به دیوار در نقطه $z = L$ برسیم، دامنه باید خیلی کوچک باشد. در حد وقتی L "بینهایت" شود، در نقطه $z = L$ دامنه باید صفر باشد. این شرط مستلزم آن است که مؤلفه $Be^{+\kappa z}$ در معادله (۷۴) وجود نداشته باشد یعنی B باید صفر باشد. این حدس درست است. (به مسئله ۳-۳۰ مراجعه کنید).

در شکل ۱۱-۳ مثالی از این حالت را نشان می‌دهیم. توجه کنید برای مثالی که در شکل ۱۱-۳ نشان داده شده است بین بستن یا نبستن انتهای واقع در نقطه $z = L$ اختلاف بسیار اندکی وجود



شکل ۱۱-۳ آونگهای جفت‌شده به حرکت درآمده از انتهای سمت چپ با بسامد پایینتر از بسامد قطع ω . (الف) پیکربندی لحظه‌ای سیستم. (ب) منحنی $A(z)$.

دارد. اگر $\kappa L \gg 1$ باشد، قبل از آنکه به نقطه $z = L$ برسیم، دامنه نوسان عملاً برابر صفر است. بنابراین به طور تجربی می توان به جای طول "بینهایت"، طول محدود L را که در مقایسه با $1/\kappa$ بزرگ باشد، اختیار کرد. (به آزمایش خانگی ۳-۱۶ مراجعه کنید).

اصطلاحات امواج نمایی. ضریب ثابت κ ثابت تضعیف دامنه یا به سادگی ثابت تضعیف نامیده می شود. واحد آن کسری از تضعیف دامنه بر واحد طول یا به سادگی تضعیف بر واحد طول است. این واحدها با در نظر گرفتن دامنه $A(z)$ به دست می آیند و این دامنه به وسیله نیروی محرکی در انتهای چپ یک سیستم دراز به وجود می آید و سیستم آفندر دراز است که فقط قسمت نمایی کاهنده وجود دارد:

$$\psi(z, t) = A(z) \cos \omega t \quad (75)$$

که در آن

$$A(z) = Ae^{-\kappa z} \quad (76)$$

تضعیف دامنه نسبی بر واحد طول دامنه $A(z)$ به شرح زیر تعریف می شود

$$-\frac{1}{A(z)} \frac{dA(z)}{dz} = \text{تضعیف دامنه نسبی بر واحد طول} \quad (77)$$

در حالتی که $A(z)$ با معادله (۷۶) داده می شود، این رابطه با κ برابر است. از طرف دیگر، وقتی $A(z)$ با رابطه $A(z) = B \exp(+\kappa z)$ داده می شود، هنگامی که z کاهش پیدا می کند دامنه آن به جای آنکه افزایش پیدا کند، تضعیف می شود. با وجود این هیچ ابهامی پیش نمی آید و κ را همچنان می توان ثابت تضعیف نامید. هنگامی که جواب عمومی $A \exp(-\kappa z) + B \exp(+\kappa z)$ وجود دارد، هنوز هم همان نام گذاری را برای κ نگاه می داریم، اگرچه $A(z)$ ممکن است برای بعضی از مقادیر z افزایش یافته و برای برخی دیگر کاهنده باشد. به سادگی می توان گفت که $A(z)$ برهم نهد دو جمله است، یک جمله که با افزایش z تضعیف می شود و دیگری جمله ای که با کاهش z تضعیف می شود. معکوس κ طول δ است که عبارت است از مسافتی که در آن دامنه $e^{-\kappa z} = e^{-z/\delta}$ با ضریب $e = 2.718 \dots$ تضعیف می شود. این فاصله طول تضعیف دامنه یا طول تضعیف e برابر یا به سادگی طول تضعیف نامیده می شود:

$$\frac{1}{\kappa} = \delta = \text{طول تضعیف} \quad (78)$$

بین ثابت تضعیف κ برای امواج نمایی تضعیف شده و عدد موج k برای امواج سینوسی نکته مشترکی وجود دارد: k تضعیف نسبی بر واحد فاصله است، k تعداد رادیانها بر واحد فاصله

است. به همین ترتیب، طول تضعیف δ و طول موج λ به گونه‌ای مشابه هستند: δ فاصله برای تضعیف با ضریب e^{-1} است و λ فاصله برای افزایش فاز به اندازه 2π است.

روابط پاشندگی. برای مقادیر ω بالاتر از بسامد قطع پایین ω_c امواج سینوسی وجود دارد. بسامد و عدد موج با معادله (۶۹) به یکدیگر مربوط می‌شوند که آن را دوباره به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\omega^2 = \omega_c^2 + \left(\frac{Ka^2}{M} \right) k^2 \quad (79)$$

برای مقادیر ω پایینتر از بسامد قطع پایین ω_c ، امواج سینوسی وجود ندارد. (این امواج "قطع" می‌شوند.) به جای آن امواج نمایی وجود دارد. بسامد ω و ثابت تضعیف k با معادله (۷۱) به یکدیگر مربوط هستند که آن را دوباره به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\omega^2 = \omega_c^2 - \left(\frac{Ka^2}{M} \right) k^2 \quad (80)$$

معادلات (۷۹) و (۸۰) رابطه کامل پاشندگی سیستم را (در تقریب پیوسته) تشکیل می‌دهند. در دامنه‌ای از بسامد که در آن نوسانهای واداشته، امواج سینوسی هستند، رابطه پاشندگی معادله (۷۹) برای نوسانهای واداشته همان رابطه‌ای است که برای مدهای نوسان آزاد به دست آوردیم. [به بخش ۲-۴، معادلات (۹۰)، (۹۱)، و (۹۲) مراجعه کنید.] این مطلب تصادفی نیست. در هر دو حالت، ابتدا معادله حرکت مهره m را به دست آوردیم و سپس این فرض را که تمام اجزای متحرک با بسامد یکسان ω (بسامد در یک حالت و بسامد نوسان حالت پایا در حالت دیگر) و ثابت فاز یکسان نوسان هماهنگ می‌کنند، وارد کردیم. رابطه پاشندگی از این فرضها حاصل شد. حالت کلی این است: رابطه پاشندگی برای نوسانهای واداشته سینوسی، همان رابطه برای نوسانهای آزاد است. محیط پاشنده یا واکنشی. در مثالی که در نظر گرفتیم، "محیطی" که در آن امواج به وجود می‌آیند از سیستم آونگهای جفت شده تشکیل شده است. محیطی که می‌تواند امواج سینوسی را نگاه دارد (انتقال دهد)، محیط پاشنده می‌نامند. یعنی اینکه ω پایینتر از بسامد قطع ω_c نیست. محیطی که نتواند امواج سینوسی را نگاه دارد، اما به جای آن امواج نمایی (بدون اتلاف انرژی) بدهد، محیط واکنشی نام دارد. البته یک محیط می‌تواند به ازای بعضی از بسامدها واکنشی و به ازای سایر بسامدها پاشنده باشد، همان گونه که در مثال آونگهای جفت شده وجود دارد.

مثال ۱۰: یونسپهر

یونسپهر کره زمین مثالی از یک محیط است (برای امواج الکترومغناطیس) که برای بسامدهای بالاتر از بسامد قطع (که بسامد نوسان پلازما ν_p نامیده می‌شود) محیط پاشنده است و برای

بسامدهای پایبتر از بسامد قطع، محیط واکنشی است. رابطه پاشندگی برای نوسانهای به حرکت درآمده در یون سپهر کره زمین خیلی شبیه به رابطه پاشندگی برای آونگهای جفت شده است. این رابطه به صورت زیر داده می شود

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2, \quad \omega > \omega_p \quad (۸۱)$$

و

$$\omega^2 = \omega_p^2 - c^2 k^2, \quad \omega < \omega_p$$

بسامد نوسان پلاسما، بسامد پایبترین مد ارتعاش الکترونهاى آزاد است که در معادله (۹۹) بخش ۲-۴ به دست آوردیم. بسامد نوسان پلاسما ($\omega_p = \omega_p / 2\pi$) در هنگام روز بین ۱۰ تا ۳۰ Mc است. اگر یون سپهر به وسیله یک ایستگاه رادیویی که بسامدهای AM مثلاً $1000 \text{ Kc} = \nu$ پخش می کند "از یک انتها" تحریک شود، مادامی که $\nu \ll \nu_p$ است، مانند یک محیط واکنشی عمل می کند. در این محیط درست مانند حالت آونگهای جفت شده در شکل ۳-۱۱، امواج به طور نمایی تضعیف می شوند. در این فرایند هیچ کاری بر روی یون سپهر انجام نمی شود، زیرا (ثابت می شود) که سرعت هر الکترون با میدان الکتریکی اطرافش به اندازه $90^\circ \pm$ اختلاف فاز دارد. در مورد آونگهای به حرکت درآمده شکل ۳-۱۱، انرژی متوسط خروجی نیروی محرک (با صرف نظر کردن از میرایی) برابر صفر است. انرژی که به طور لحظه ای به آونگها داده می شود، در زمانی بعد، در طی دوره تناوب، به نیروی محرک برمی گردد. در حالت مسئله سه بعدی ایستگاه رادیویی و محیط یون سپهر، چنین حالتی وجود ندارد: مقدار بسیار کمی از انرژی که ایستگاه رادیویی منتشر می کند، به آن برمی گردد. یون سپهر هیچ انرژی جذب نمی کند و امواج نه فقط به سوی فرستنده بلکه در یک ناحیه وسیع به سمت زمین منعکس می شوند. این بازتاب کلی از "سطح زیرین" محیط یون سپهر، روشی به وجود می آورد که برای پخش به گیرنده های دوردست که "دور از دید" در آن سوی افق قرار دارند، به کار می رود: یون سپهر به سادگی سیگنالها را برمی گرداند. هر وقت ω پایبتر از بسامد قطع ω باشد، این کار عملی است.

بسامدهای پخش رادیویی FM و تلویزیونی در حدود 10 Mc هستند. این بسامد از بسامد قطع ۱۰ تا 30 Mc یون سپهر بزرگتر است. بنابراین در بسامدهای FM و TV، یون سپهر مانند یک محیط پاشنده عمل می کند. یعنی یون سپهر "شفاف" می شود. هیچ گونه تضعیف نمایی امواج وجود ندارد، چون امواج سینوسی هستند. بنابراین بازتاب کلی امواج الکترومغناطیس به سوی زمین وجود ندارد و از محیط یون سپهر نمی توان برای فرستادن سیگنالها، به همان روشی که بسامدهای AM را می توان فرستاد، استفاده کرد. از این رو فرستادن امواج به "خط دید" محدود است.

یون سپهر برای امواج الکترومغناطیس با بسامد $\nu \approx 10^5$ cps یعنی در حدود بسامد نور مرئی، نیز یک محیطی پاشنده است. می دانیم که یون سپهر برای بسامد 10^5 cps واکنشی نیست، زیرا در غیر این صورت ستاره‌ها یا خورشید را نمی دیدیم. [اما قوهٔ بینایی ما برای دیدن بسامدهایی که از میان یون سپهر عبور کرده و اشیاء را روشن می‌کردند، تکامل پیدا می‌کرد و بدین ترتیب ممکن بود به جای آنها، ستاره‌های ماوراء بنفش را ببینیم.] در یکی از فصلهای آینده، رابطهٔ پاشندگی یون سپهر یعنی معادلهٔ (۸۱) را به دست خواهیم آورد.

نفوذ موج به داخل یک محیط واکنشی. هنگامی که یون سپهر به وسیلهٔ یک ایستگاه رادیویی با بسامد پایینتر از قطع تحریک می‌شود، امواج رادیویی به سمت زمین به طور کامل منعکس می‌شوند. اما، تقریباً می‌توان این طور گفت که، این عمل تماماً در یک محل روی نمی‌دهد. اکنون یک مثال مشابه یعنی آونگهای جفت شده را (که شکل رابطهٔ پاشندگی آنها مانند یون سپهر است) در تقریب پیوسته در نظر می‌گیریم. تصور کنید که اولین گلوله در نقطهٔ $z = 0$ با هر نیرویی که لازم است تا حرکت $\psi_1(t) = A_1 \cos \omega t$ را به وجود آورد، به حرکت درآید. در ناحیهٔ بین $z = 0$ و $z = L$ تعدادی آونگ جفت شده وجود دارد که طول هر کدام l_1 است، به طوری که

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l_1} < \omega^2 \quad (82)$$

از این رو این ناحیه (که آن را ناحیهٔ ۱ می‌نامیم) پاشنده است. (نیروی محرک "ایستگاه رادیویی" است. ناحیه از $z = 0$ تا $z = L$ "هوای معمولی" است، نه "پلازما"). در نقطهٔ $z = L$ نخ آونگها ناگهان کوتاهتر شده و طول هر کدام l_2 می‌شود، به طوری که

$$\omega_2^2 = \frac{g}{l_2} > \omega^2 \quad (83)$$

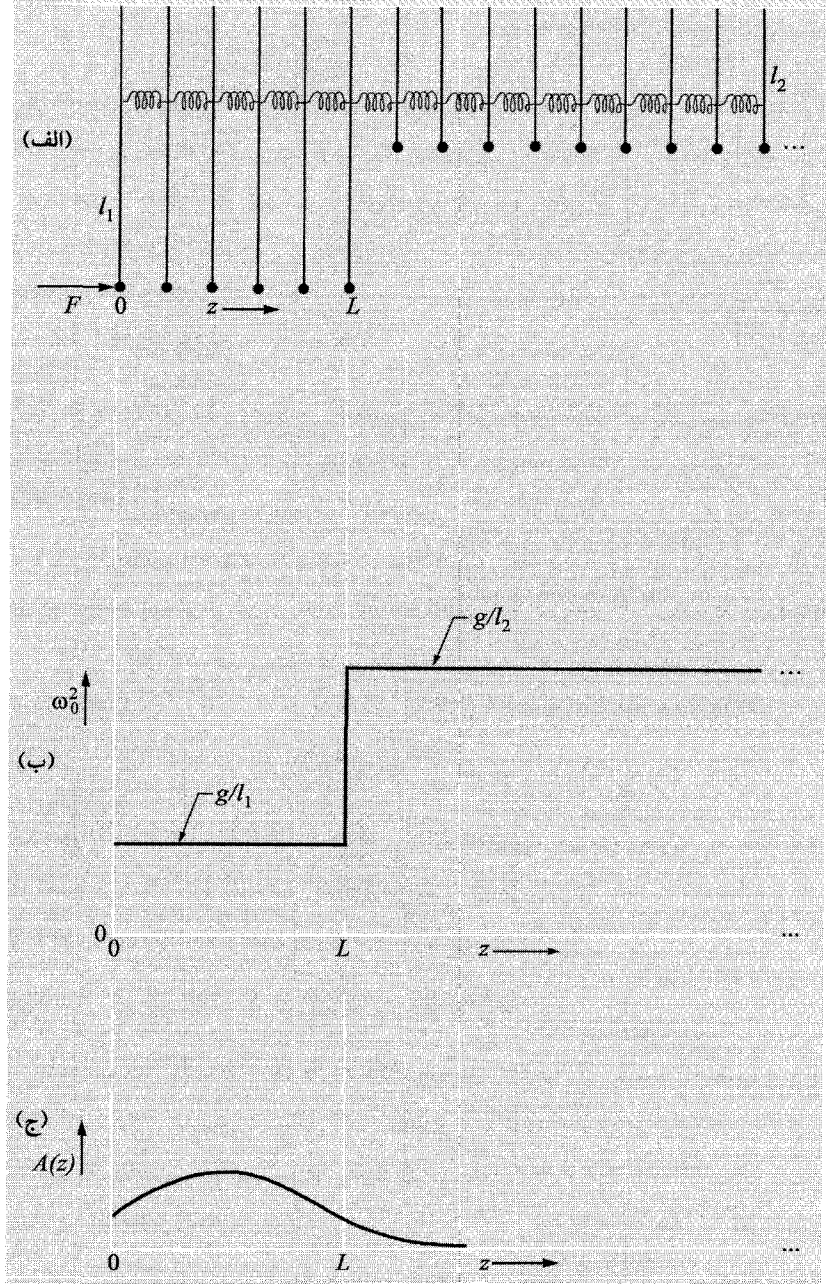
از این رو این ناحیه (که ناحیهٔ ۲ نام دارد) واکنشی است. (ناحیهٔ ۲ "پلازما" است.) این ناحیه تا $z = \infty$ ادامه دارد. سیستم در شکل ۳-۱۲ نشان داده شده است.

اکنون $\psi(z, t)$ را پیدا می‌کنیم که مقدار آن در نقطهٔ $z = 0$ برابر با $A_1 \cos \omega t$ است. برای هر مقدار z رابطهٔ زیر را داریم

$$\psi(z, t) = A(z) \cos \omega t \quad (84)$$

که در آن $A(z)$ باید تعیین شود. در ناحیهٔ ۲ یعنی ناحیهٔ واکنشی بین $z = L$ و بینهایت، $A(z)$ باید با رابطهٔ زیر داده شود

$$A_2(z) = C e^{-\kappa(z-L)} \quad (85)$$



شکل ۳-۱۲ آونگهای جفت شده با تغییر ناگهانی ω در نقطه $z = L$. (الف) سیستم مورد نظر آونگ در نقطه $z = 0$ به نیروی خارجی جفت شده است. (ب) منحنی ω بر حسب z . برای بسامدهای ω محرک بین $\sqrt{g/l_1}$ و $\sqrt{g/l_2}$ ، ناحیه ۱ (از $z = 0$ تا $z = L$) پاشنده است و ناحیه ۲ (از $z = L$ تا $z = \infty$) واکنشی است. (ج) منحنی تغییرات دامنه $A(z)$ بر حسب بسامد محرک ω نزدیک پایتترین بسامد تشدید سیستم.

که در آن C ثابت مجهول است و κ با رابطه زیر داده می شود

$$\kappa^2 = \frac{M}{Ka^2} \left(\frac{g}{l_2} - \omega^2 \right) \quad (۸۶)$$

با فرض آنکه ω^2 از بسامد قطع g/l_2 کمتر است. در ناحیه پاشنده بین $z = L$ و $z = 0$ مقدار $A(z)$ با رابطه زیر داده می شود

$$A_1(z) = A \sin k(z - L) + B \cos k(z - L) \quad (۸۷)$$

که در آن A و B ثابتهای مجهول هستند و k با رابطه زیر داده می شود

$$k^2 = \frac{M}{Ka^2} \left(\omega^2 - \frac{g}{l_1} \right) \quad (۸۸)$$

با فرض آنکه ω^2 بزرگتر از g/l_1 است. اکنون شرایط مرزی را وارد می کنیم: در نقطه $z = L$ توابع $A_1(z)$ و $A_2(z)$ باید به طور هموار به یکدیگر متصل شوند، یعنی مقدار و شیب آنها در نقطه $z = L$ باید مساوی باشد. با مساوی قرار دادن مقدار آنها در $z = L$ ، نتیجه $B = C$ به دست می آید. با مساوی قرار دادن شیب آنها در نقطه $z = L$ رابطه $kA = -\kappa C$ نتیجه می شود. بنابراین در ناحیه ۱ داریم

$$A_1(z) = C \left[\frac{-\kappa}{k} \sin k(z - L) + \cos k(z - L) \right] \quad (۸۹)$$

شرایط مرزی در نقطه $z = 0$ این است که به ازای $z = 0$ رابطه $A_1(z) = A_0$ وجود دارد. بنابراین از معادله (۸۹) نتیجه می شود

$$C = \frac{A_0}{\frac{\kappa}{k} \sin kL + \cos kL} \quad (۹۰)$$

جواب کامل با معادلات (۸۴)، (۸۵)، (۸۹) و (۹۰) به علاوه رابطه پاشندگی یعنی معادلات (۸۶) و (۸۸) داده می شود.

تشدید. مخرج کسر معادله (۹۰) برای بعضی از مقادیر kL صفر می شود و دامنه C برابر بینهایت به دست می آید. (هنگامی که از میرایی صرف نظر نشود، هیچ دامنه بینهایتی به دست نمی آید.) این مقادیر kL ، بسامدهای تشدید سیستم را تعیین می کنند. برای به دست آوردن بسامدهای تشدید، باید از معادلات پاشندگی و همچنین از معادله (۹۰) استفاده کرد. (به مسئله ۳-۳۱ مراجعه کنید.) دامنه $A(z)$ برای مقادیر ω نزدیک پایینترین تشدید در شکل ۳-۱۲ رسم شده است که در آن C مقداری بزرگ ولی نه بینهایت گرفته شده است.

مدهای مقید. از شکل ۳-۱۲ (ج) دیده می‌شود که یک محیط واکنشی که تا فاصله زیادی ادامه دارد (در این مثال تا $L' = \infty$) مانند یک "دیوار تدریجی" عمل می‌کند. گلوله‌ای که در نقطه $z = L$ است، مانند گلوله‌ای که به دیوار است، محکم نگاه داشته نشده است، با وجود این حرکت گلوله به اندازه چند فاصله تضعیف δ پس از نقطه $z = L$ ، قابل چشمپوشی است. بدین ترتیب حدس زده می‌شود که اگر اطراف یک ناحیه پاشنده را با یک ناحیه واکنشی بینهایت ضخیم از هر دو طرف بپوشانیم، می‌توانیم مدهای (نوسان آزاد) آونگها را در ناحیه پاشنده به دست آوریم، درست مانند آنکه آونگها بین دو دیوار قرار داشته باشند. این حدس درست است. مدها را مدهای مقید می‌نامند. این مدها تقریباً در بسامدهای تشدید سیستم شکل ۳-۱۲ روی می‌دهند.

یکی از خصوصیات جالب مدهای مقید این است که حتی اگر تعداد "بینهایت" آونگ در ناحیه پاشنده وجود داشته باشد، فقط تعداد محدودی مدهای مقید موجود است. زیرا هنگامی که از یک مد مقید به مد بالاتر بعدی می‌رویم، بسامد افزایش می‌یابد تا وقتی که سرانجام به مد مقیدی برسیم که برای آن بسامد از $\sqrt{g/l_2}$ بزرگتر است. به ازای $\omega^2 > g/l_2$ ناحیه‌های خارجی پاشنده هستند و برای "نگاه‌داشتن" نوسانها در ناحیه مرکزی دیگر مفید نیستند.

در فیزیک کوانتومی، نشان داده می‌شود که امواج دو بروی الکترونها در اتم، مانند مدهای مقید آونگهای جفت شده عمل می‌کنند. مدهای نوسان الکترونهای مقید نامیده می‌شوند، مثالی از سیستم کوانتومی با حالتهاى مقید در مبحث تکمیلی ۳ داده شده است.

حل دقیق نوسانهای واداشته سیستم آونگهای جفت شده. ویژگیهای نوسانهای واداشته آونگهای جفت شده را در تقریب پیوسته مطالعه کردیم. اکنون حل دقیق معادله حرکت یک آونگ در آرایه خطی یعنی معادله (۶۲) را که در اینجا مجدداً می‌نویسیم، به دست می‌آوریم:

$$\ddot{\psi}_n = -\omega_0^2 \psi_n + \frac{K}{M} (\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) \quad (91)$$

فرض می‌کنیم که تمام اجزای متحرک، حرکت نوسانی هماهنگ با بسامد و ثابت فاز یکسان دارند:

$$\psi_n = A_n \cos \omega t \quad (92)$$

با جانشانی معادله (۹۲) در معادله (۹۱) و حذف کردن ضریب $\cos \omega t$ ، رابطه زیر به دست می‌آید

$$-\omega^2 A_n = -\omega_0^2 A_n - \frac{2K}{M} A_n + \frac{2K}{M} \left(\frac{A_{n+1} + A_{n-1}}{2} \right) \quad \text{یعنی}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{A_{n+1} + A_{n-1}}{A_n} \right) \quad (93)$$

گستره بسامدی ناحیه پاشنده. (در اصطلاح صافها، این سیستم "نوارگذر" است.) در ناحیه پاشنده، نوسانها در فضا، سینوسی هستند. بنابراین جوابی به شکل زیر فرض می‌کنیم

$$A_n = A \sin kna + B \cos kna \quad (۹۴)$$

از آنجا

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A \sin(kna + ka) + B \cos(kna + ka) \\ A_{n-1} &= A \sin(kna - ka) + B \cos(kna - ka) \end{aligned} \quad (۹۵)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} A_{n+1} + A_{n-1} &= 2A \sin kna \cos ka + 2B \cos kna \cos ka \\ &= 2 \cos ka (A \sin kna + B \cos kna) = 2 \cos ka A_n \end{aligned} \quad (۹۶)$$

با جانشانی این نتیجه در معادله (۹۳) رابطه زیر به دست می‌آید

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M}(1 - \cos ka) \quad (۹۷)$$

یعنی

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{M} \sin^2 \frac{ka}{2} \quad (۹۸)$$

معادله (۹۸) قانون پاشندگی در گستره بسامدی ناحیه پاشنده است. این معادله بسامدهای $\omega^2 = \omega_0^2$ تا $\omega^2 = \omega_0^2 + 4K/M$ ، متناظر با مقادیر ka از $ka = 0$ تا $ka = \pi$ را به دست می‌دهد. معادله (۹۸) دقیقاً همان رابطه پاشندگی است که در معادله (۹۰) بخش ۲-۴ برای آونگهای جفت شده که به طور آزاد نوسان می‌کنند، به دست آوردیم.

گستره واکنشی پایینی. با استفاده از تجربه‌ای که در تقریب پیوسته داریم، می‌توانیم حدس بزنیم که جواب عمومی برای بسامدهایی که پایتتر از بسامد قطع ω هستند به شکل موج نمایی است:

$$A_n = Ae^{-\kappa na} + Be^{+\kappa na} \quad (۹۹)$$

بنابراین

$$A_{n+1} + A_{n-1} = (e^{\kappa a} + e^{-\kappa a})A_n \quad (۱۰۰)$$

بنابراین از معادله (۹۳) قانون پاشندگی به دست می‌آید

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M} \left[1 - \frac{1}{2}(e^{\kappa a} + e^{-\kappa a}) \right] \quad (۱۰۱)$$

معادله (۱۰۱) را می‌توان به شکلی درآورد که شبیه معادلات (۹۷) و (۹۸) باشد. با استفاده از تعاریف سینوس هیبربولیک و کسینوس هیبربولیک [معادلات (۱۱) و (۱۲) پیوست] نتیجه می‌شود

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M}(1 - \cosh \kappa a) \quad (102)$$

یا

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{4K}{M} \sinh^2 \frac{1}{2} \kappa a \quad (103)$$

به‌ازای $\omega = \omega_0$ از جواب پاشنده، یعنی معادله (۹۸) مقدار $k = 0$ به‌دست می‌آید و از جواب واکنشی یعنی معادله (۱۰۳) مقدار $\kappa = 0$ نتیجه می‌شود. این دو جواب مربوط به "امواج مسطح" است و بدین ترتیب با هم توافق دارند.

گستره واکنشی بالایی. این گستره شامل تمام بسامدهای بالاتر از بسامد قطع بالا یعنی ω_{\max} است که در آن $\omega_{\max}^2 = \omega_0^2 + 4K/M$ است. در این گستره مطالعه ما درباره صافیهای دارای دو درجه آزادی، ما را راهنمایی می‌کند. در آنجا دیدیم که نوسانهای واداشته با بسامد بالاتر از بسامد قطع، شکل زیگزاگ یعنی مانند شکل بالاترین مد را دارند، اما با افزایش فاصله از انتهای ورودی، تضعیف دامنه برای آنها وجود دارد. (شکل ۳-۶ را ببینید). اکنون حدس می‌زنیم که شکل A_n با موج نمایی زیگزاگ به‌صورت زیر داده می‌شود

$$A_n = (-1)^n (Ae^{-\kappa na} + Be^{+\kappa na}) \quad (104)$$

بنابراین [پس از همان مرحله‌ای که معادله (۱۰۰) را به‌دست داد، بجز علامتهای منفی] نتیجه می‌شود

$$A_{n+1} + A_{n-1} = -A_n (e^{\kappa a} + e^{-\kappa a})$$

بنابراین قانون پاشندگی از معادله (۹۳) به‌دست می‌آید

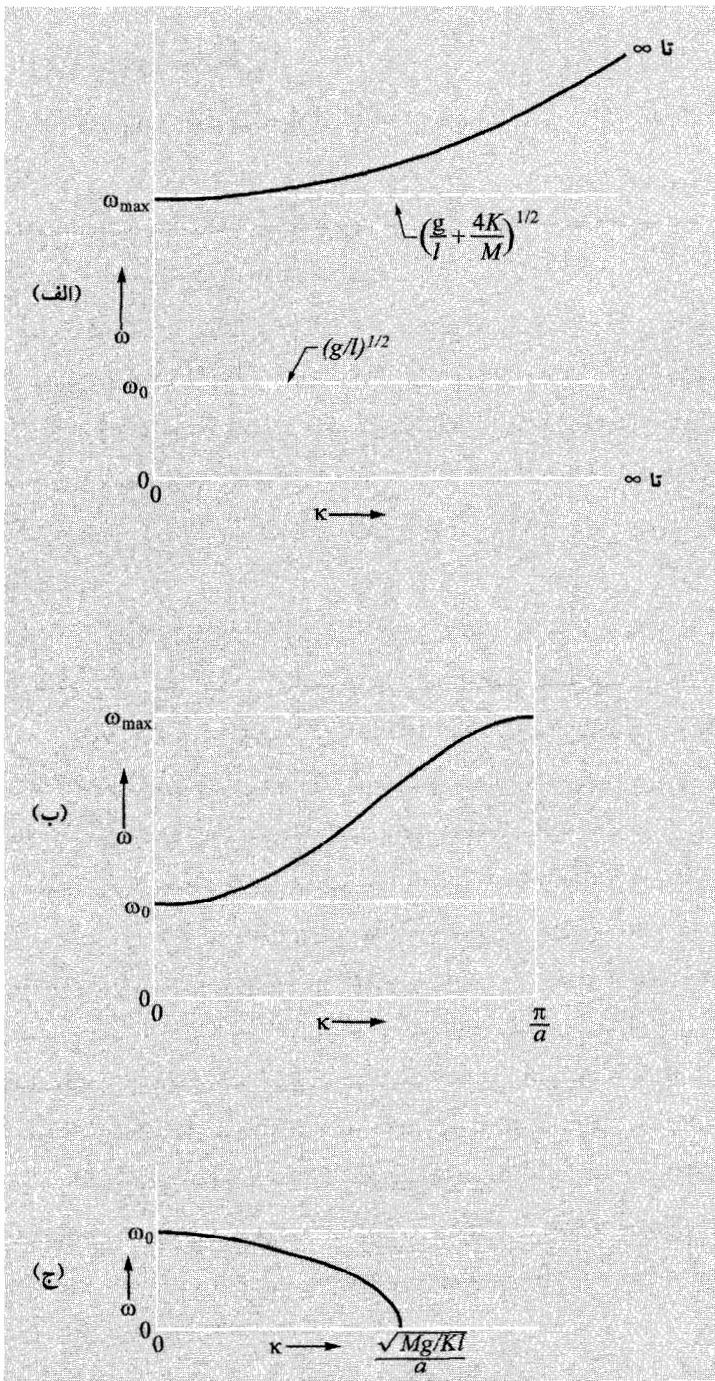
$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 + \frac{2K}{M} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (e^{\kappa a} + e^{-\kappa a}) \right\} \\ &= \omega_0^2 + \frac{2K}{M} \{ 1 + \cosh \kappa a \} \end{aligned} \quad (105)$$

$$= \omega_0^2 + \frac{4K}{M} \cosh^2 \frac{1}{2} \kappa a \quad (106)$$

به‌ازای $\kappa = 0$ مقدار ω_{\max}^2 برابر با $\omega^2 = \omega_0^2 + 4K/M$ است. بنابراین دقیقاً در بسامد قطع بالا یعنی ω_{\max} هیچ تضعیف وجود ندارد.

در شکل ۳-۱۳ قانون دقیق پاشندگی را برای تمام بسامدها، برطبق معادلات (۹۸)، (۱۰۳) و

(۱۰۶)، رسم کرده‌ایم.



شکل ۳-۱۳ رابطه کامل پاشندگی برای آونگهای جفت شده. (الف) بالاتراز بسامد قطع بالا: امواج به صورت

مسائل و آزمایشهای خانگی

۱-۳ معادله (۱۰) را ببینید و عملیات جبری‌ای را که در به‌دست آمدن $E = E_0 e^{-t/\tau}$ حذف شده است پر کنید.

۲-۳ با جانشینی مستقیم نشان دهید که $x_1(t)$ که با معادله (۳) داده شده است جواب معادله حرکت نوسانگر هماهنگ میرا، یعنی معادله (۲) است.

۳-۳ نشان دهید اگر $x_1(t)$ جواب معادله (۱) برای نیروی محرک $F_1(t)$ و $x_2(t)$ جواب دیگری برای نیروی محرک $F_2(t)$ باشد، آنگاه $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ جواب نیروی $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$ است، به شرط آنکه شرایط اولیه $x(0)$ و $\dot{x}(0)$ برای برهم‌نهی نیز مجموع شرایط مرزی باشد یعنی $x(0) = x_1(0) + x_2(0)$ و $\dot{x}(0) = \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)$.

۴-۳ با جایگذاری نشان دهید که معادله‌های (۱۵)، (۱۶)، و (۱۷) جوابی برای معادله (۱۴) به‌دست می‌دهند.

۵-۳۰ زنده‌های گذرا. برای این آزمایش و آزمایشهای بعدی شما به یک میز صفحه‌گرامافون احتیاج دارید. در این آزمایش شما باید آونگی را با صفحه چرخان گرامافون به حرکت درآورید. برای گلوله آونگ می‌توانید از قوطی کنسرو یا چیز دیگری استفاده کنید. سرعت مناسب صفحه چرخان گرامافون ۴۵cpm است. (طول نخ آونگ چقدر است؟) با چسب یک جعبه مقوایی سبک را به صفحه چرخان گرامافون ببندید و یک مداد را راست روی جعبه بچسبانید. یک حلقه نخ دور مداد ببیچید. یک انتهای نوار لاستیکی به هم محکم شده با طول ۶ تا ۸ فوت را به حلقه بسته‌شده ببندید و انتهای دیگر آن را به نخ آونگ گره بزنید. بسامد نوسان آونگ برای نوسانه‌های آزاد را حساب کنید (یک ساعت معمولی با عقربه ثانیه‌شمار تنها چیزی است که احتیاج دارید). بسامد زنش را وقتی آونگ به حرکت درآمده است اندازه بگیرید. طولهای مختلف نخ را امتحان کنید. برای میراشدن کتاب، تخته یا چیزی در کنار نخ آونگ بگذارید تا با آن تماس پیدا کند. (شکاف بهترین است، یعنی یک تخته یا کتاب در هر طرف). دلیل داشتن چنین نوار لاستیکی جفت شده بلندی، ساختن یک فتر به اندازه کافی ضعیف است. همچنین بهترین کار این است که نوار لاستیکی را نزدیک بالای نخ آونگ جفت کنید به طوری که دامنه حرکت نخ در آن نقطه به‌طور قابل ملاحظه‌ای کمتر از دامنه حرکت مداد (روی صفحه چرخان) حتی برای دامنه بزرگ آونگ باشد. این موضوع نیروی محرک مستقل از دامنه آونگ را تضمین می‌کند.

۶-۳ معادله (۲۲) را برای اتلاف توان مربوط به اصطکاک اثبات کنید. تحقیق کنید که این اتلاف توان برابر توان ورودی داده‌شده با معادله (۲۱) است.

۳۰-۷ تشدید در فنر اسلینکی میرا. فنر اسلینکی را تا حدود ۸ فوت بکشید و از دو طرف نگه دارید. یک طرف آن باید طوری به گیره وصل شود که به آسانی آزاد شود و دوباره با تعداد حلقه‌های مختلف فنر بین گیره‌ها قرار گیرد. فنر اسلینکی را با صفحه چرخان گرامافون آزمایش خانگی ۳-۵ به حرکت درآورید، از یک نوار لاستیکی جفت‌شده بلند استفاده کنید. از سرعت ۴۵rpm استفاده کنید. بسامد نوسان آزاد فنر را اندازه بگیرید. (یکاهای rpm مناسب هستند.) این بسامد را می‌توان با تغییر تعداد حلقه‌های فنر بین گیره‌های ثابت، تغییر داد. (آزمایش خانگی ۲-۱). زمان فروافت میانگین T را اندازه بگیرید. میرایی را با اضافه کردن یک نوارچسب دراز (از نوع کششی) در طول اسلینکی افزایش دهید به طوری که زمان مناسبی (مثلاً ۱۰ تا ۲۰ ثانیه) به دست آید. منحنی تشدید را رسم کنید یعنی $|A|^2$ را برحسب ω رسم کنید که ω در ۴۵rpm ثابت نگه داشته شده است. به رابطه‌های فازی توجه کنید و اطمینان پیدا کنید که آنها را فهمیده‌اید. یک راه اندازه‌گیری $|A|$ استفاده از نوری است که سایه‌های تیز و مشخص به وجود می‌آورد (حباب شفاف به جای حباب نیمه‌شفاف، یعنی چشمه نقطه‌ای). سایه یک قطعه نوار روی اسلینکی را روی دیوار یا زمین اندازه بگیرید. تمام پهنای مورد انتظار در نیم‌بیشینه را برحسب دوره‌های اسلینکی در حالی که آزمایش را انجام می‌دهید حساب کنید. (اگر بفهمید که تشدید به طور نامناسبی باریک و تیز است یا زمان طولانی برای از بین رفتن زندهای گذرا لازم است ممکن است تصمیم بگیرید که زمان میرایی را کوتاه کنید.)

مشکلاتی که ممکن است بروز کند: اگر نوار لاستیکی کاملاً شل شود و ناگهان محکم کشیده شود آنالیز فوری به کار گرفته شده توسط نوار لاستیکی شامل هماهنگهای ۴۵rpm و خود ۴۵rpm است. اینها هماهنگهای اسلینکی را تحریک می‌کنند و حداقل مشکل جالبی است. مشکل دیگر نوار لاستیکی را طوری بکشید که صدای تودماغی از آن حاصل شود و به نوسان آن نگاه کنید. اطمینان حاصل کنید که نوسانات آن بسیار سریعتر از یک یا دو برابر ۴۵rpm باشد؛ در غیر این صورت اتفاقات عجیبی رخ می‌دهد. شما ممکن است مشکلات دیگری پیدا کنید. آیا می‌توانید ناپدید شدن دامنه کشسان و پدیدار شدن دامنه جذب را وقتی دقیقاً در تشدید هستید ببینید، یعنی فاز نسبی گرامافون (مداد) و اسلینکی را نگاه کنید. از ضرب تمام پهنای تشدید در زمان فروافت میانگین چه به دست می‌آید؟ آیا نتیجه شما (با در نظر گرفتن خطاهای آزمایشگاهی) با معادله (۲۸) توافق دارد؟

۳۰-۸ نوسانات واداشته در سیستم دو قوطی کنسرو جفت‌شده. شکل آن در شکل ۳-۳ نشان داده شده است و نظریه آن در بخشهای ۳-۳ و ۳-۴ داده شده است. تارها به چوبهایی وصل‌اند که می‌توانند دور آنها بیچند یا بسامدها را تغییر دهند. چوبها را از کتابخانه یا میز یا چیزی آویزان

کنید. طولهای تار باید در گستره 30° تا 70° سانتیمتر متغیر باشد. وقتی طول تار را تغییر می‌دهید، ω و $\dot{\omega}$ را هم چنان تغییر می‌دهید که اختلاف آن ثابت باقی می‌ماند. بنابراین تغییر تار در حالی که بسامد محرک ثابت باشد تقریباً برابر است با تغییر بسامد محرک در حالی که ω و $\dot{\omega}$ ثابت باشد. برای طولهای نار معین، بسامدهای ۲ مد (با گرامفون جفت نشده) را اندازه بگیرید. سپس سیستم را در 45rpm به حرکت درآورید. نوسانات طولی (اصلی) را با به‌خط‌کردن جهتهای جفت‌شده در طول اسلینکی به حرکت درآورید. مدهای طولی و عرضی همان بسامدها را دارند که به آسانی می‌توانید معین کنید. این موضوع می‌تواند باعث مزاحمت شود، هر چند جالب باشد — مخصوصاً در نزدیکی تشدید. پنج بسامد جالب برای زدن وجود دارد، یعنی دو بسامد تشدید و ناحیه خیلی پایین، نمره بین، و خیلی بالاتر از تشدید. مشخصه‌های صافی را در بالا و پایین قطع مطالعه کنید. ارتباط فازها را بررسی کنید — فقط نگاه کنید و ببینید آیا می‌فهمید. اگر هیچ میرایی ایجاد نشود زندهای گذرا می‌توانند مدت زیادی طول بکشند. بهترین راه میراکردن تار مالش آن روی چیزی است. احتمالاً زمان زیادی صرف می‌شود تا رد منحنی تشدید پیدا شود. از یافتن آنها صرف‌نظر کنید. امیدواریم این کار را در آزمایش خانگی ۳-۷ انجام داده باشید. در عوض زمانهای میرای دو مد را اندازه بگیرید و تمام پهنای تشدید مورد انتظار، Γ ، را با استفاده از $\Delta\omega T = 1$ حساب کنید. این وضعیت چقدر به وضعیت توصیف‌شده در شکل ۲-۴ نزدیک است. آیا معادله‌های صافی مکانیکی بخش ۳-۴ را می‌توان به‌کار بست؟

روش دیگر تغییر بسامدهای نسبی، البته استفاده از دورهای ۷۸، ۳۳، و 16rpm است. متأسفانه اینها متغیر پیوسته ایجاد نمی‌کنند.

۳-۹ یک مته چکشی پیاده‌رو را با آهنگ تقریبی 2cps می‌کوبد. دسته آن با همان بسامد به‌دست کارگر ضربه وارد می‌کند. یک صافی پایین‌گذر برای الحاق به‌دسته طراحی کنید تا دامنه ارتعاشات با ضریب 10° در دسته کم شود. یک راه ساده (که نیازمند فکر زیادی نیست) آن است که جرم بدنه وسیله (یعنی قسمتی که تیغه چکش به آن ضربه می‌زند) را با ضریب 10° افزایش دهیم. چون این وسیله در حدود 5° پوند وزن دارد مجموعه‌ای از فنرها و جرمها را امتحان کنید. ۳-۱۰ تحقیق کنید که زمان متوسط انرژی ذخیره‌شده E برای نوسان حالت پایا با معادله (۲۳) داده می‌شود؟

۳-۱۱ تحقیق کنید که نقاط نیم‌توان برای منحنی تشدید حالت پایا با معادلات (۲۵) و (۲۶) داده می‌شود؟

۳-۱۲ صافی مکانیکی. (بخش ۳-۴ را ببینید). یک دستگاه ظریف روی زمین گذاشته‌ایم که ارتعاشات عمودی در حدود 2cps دارد. می‌خواهید این تکان آهسته را با ضریب 10° کم کنید،

بنابراین دستگاه را روی بالشتک بگذارید. حدود چقدر از بالشتک فرو می‌رود وقتی دستگاه را روی آن می‌گذارید؟ (راهنمایی: مثال بعد از معادله (۵۸) را در بخش ۳-۴ ببینید. همچنین بالشتک را با قانون کامل هوک فنر تخمین بزنید.)

جواب: تقریباً ۶cm.

۳-۱۳ نشان دهید که برای حالتی که ثابت میرایی Γ صفر است معادله (۳۱) جواب دقیق حالت پایای نوسانگر واداشته معادله (۱۴) است.

۳-۱۴ نشان دهید که اگر آونگهای شکل ۳-۱۰ با حلقه‌ها جفت شده باشند، معادلات حرکتشان برای نوسان افقی عرضی مانند معادلات حرکت طولی است.

۳-۱۵ سیستمی شامل القاگر و خازنها را که حرکتی شبیه معادله (۶۳) دارند بکشید و معادلات حرکت آن را به دست آورید.

۳-۱۶ صافی نوارگذر مکانیکی. فقط با دو آونگ جفت شده، نمی‌توان مشخصه‌نمایی رفتار صافی را دید. هر منحنی می‌تواند از دو نقطه بگذرد. یک قوطی کنسرو داخل اسلینکی وسط راه دو قوطی دیگر قرار دهید و آن را مانند شکل ۳-۶ و ۳-۷ آویزان کنید. سیستم را با گرامافون به بالای قطع و پایین قطع هدایت کنید. نسبت ψ_a/ψ_b و ψ_b/ψ_a را اندازه بگیرید. آیا مساوی‌اند؟ آیا باید مساوی باشند؟

۳-۱۷ فرض کنید ناگهان یون سپهر در مرز، آنجایی که بسامد قطع ν_p ناگهان از صفر تا ۲۰ Mc افزایش پیدا می‌کند شروع شود. فاصله تضعیف دامنه δ را برای موجهای رادیویی AM با بسامد ۱۰۰۰ Kc به دست آورید.

جواب: حدود ۲٫۵ متر، مستقل از بسامد، به اندازه‌ای که بسامد از پایین قطع دور است.

۳-۱۸ با استفاده از آونگهای جفت شده به عنوان راهنما، رابطه پاشندگی کاملی برای سیستمی مشابه القاگرها و خازنهای جفت شده بنویسید. قانون پاشندگی را در نوارگذر و در دو ناحیه قطع بسامد می‌خواهیم.

۳-۱۹ نشان دهید که اگر از تقریب میرایی ضعیف استفاده کنیم و اگر به طور مناسب نزدیک تشدید بمانیم، دامنه‌های جذب و کشتان را می‌توان به شکل زیر نوشت (با انتخاب یکاهای مناسب)

$$A_{ab} = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad A_{el} = \frac{-x}{x^2 + 1}$$

که در آن $x = (\omega - \omega_0)/\frac{1}{2}\Gamma$

۳-۲۰ فرض کنید سیستمی با دو بسامد تشدید ω_1 و ω_2 داریم که سهمهای مساوی از دامنه کشتان یک قسمت متحرک دارد. برای ω دور از ω_1 و ω_2 می‌توانیم بنویسیم (برحسب بعضی

یک‌ها یا یک‌های دیگر)

$$A_{el} = \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2}$$

نشان دهید اگر ω_1 با ω_2 خیلی بیشتر از اختلاف آنها $\omega_2 - \omega_1$ تفاوت داشته باشد، آنگاه A_{el} (با تقریب خوب) درست دو برابر بزرگی هر کدام از سهم‌هاست. یعنی نشان دهید:

$$A_{el} = \left(\frac{2}{\omega_{av}^2 - \omega^2} \right) \{ 1 + \epsilon^2 + \dots \}$$

که

$$\omega_{av}^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2), \quad \epsilon = \frac{1}{2} \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{\omega_{av}^2 - \omega^2}$$

۳-۲۱ با قانون دقیق پاشندگی برای آونگهای جفت‌شده معادله‌های (۹۸)، (۱۰۳)، و (۱۰۶) شروع کنید. فرض کنید دارید $1 \ll a/\lambda$ و $1 \ll a/\delta$. آنگاه تقریب پیوسته می‌تواند خوب باشد. (چرا؟) فرمول پاشندگی را برحسب سری تیلور بسط دهید و تنها جمله مهم آن را نگاه دارید. نتیجه خود را با نتیجه به‌دست آمده با تقریب پیوسته در بخش ۳-۵ مقایسه کنید.

۳-۲۲ زنشهای گذرای تمام‌نشده‌نی. (بخش ۳-۲ را ببینید). تحقیق کنید که "دامنه مدوله‌شده تقریباً نوسان هماهنگ" جابه‌جایی نوسانگر برای نوسان‌گذرا با میرایی صفر به‌وجود می‌آورد یعنی معادله (۴۳) را تحقیق کنید. نشان دهید که برای میرایی صفر و بسامد محرک دقیقاً در تشدید، دامنه مدوله‌شده خطی با زمان به‌وجود می‌آید (معادله ۴۵).

۳-۲۳ نفوذ نمایی در ناحیه واکنشی. سیستمی از قوطیهای کنسرو و فنر اسلینکی مانند شکل ۳-۱۲ تهیه کنید. سیستم گرامفون محرک را به یک انتهای ناحیه پاشنده جفت کنید. طولها را طوری طراحی کنید که ۷۸rpm بالای بسامد قطع، ۴۵rpm در نوارگذر و ۳۳rpm (و ۱۶rpm) پایین بسامد قطع باشند. اگر راه آسان و سریعی برای تغییر فوری همه طولهای فنر به همان مقدار پیدا کردید، می‌توانید با ثابت نگه‌داشتن بسامد محرک و جستجوی تشدیدها، ω^2 (و بنابراین همه بسامدهای تشدید) را تغییر دهید.

۳-۲۴ زنشهای گذرا. معادله (۴۶) که بستگی زمانی انرژی ذخیره‌شده در نوسانگر به حرکت درآمده را با انرژی صفر در زمان صفر می‌دهد را ثابت کنید. فرض کنید میرایی ضعیف است. فرض کنید بسامد محرک نزدیک (اما نه دقیقاً برابر) ω_1 است. بنابراین بهتر است ω را مساوی ω_1 بگیرید. (خوب نیست در عبارتی مانند $\cos \omega t - \cos \omega_1 t$ ، ω را مساوی ω_1 بگیرید، زیرا حتی اگر اختلاف کمی بین ω و ω_1 وجود داشته باشد، بالاخره به اثر بزرگی می‌انجامد یعنی به یک انتقال نسبی بزرگ در فاز.)

۲۵-۳ نشان دهید که نتیجه نوسانگر "تند میرا"، از معادله (۹) که به دنبال معادله‌های (۷) و (۸) می‌آید به دست می‌آید. (راهنمایی: ابتدا تساویهای $\sin ix = i \sinh x$, $\cos ix = \cosh x$ را تحقیق کنید، سپس آنها را به کار برید.)

۲۶-۳ میرایی بحرانی. با شروع از معادله نوسانهای آزاد زیر میرایی یعنی معادله (۷)، نشان دهید که جواب میرایی بحرانی به صورت زیر می‌شود

$$x_1(t) = e^{-(1/2)\Gamma t} \left\{ x_1(0) + \left[\dot{x}_1(0) + \frac{1}{2}\Gamma x_1(0) \right] t \right\}$$

نشان دهید که این همان نتیجه‌ای است که اگر با معادله نوسانهای بالای میرایی شروع می‌کردیم یعنی معادله (۹) به دست می‌آمد.

۲۷-۳۰ پهنای بسامد تشدید لوله پستی. مطالب بعد از معادله (۲۸) را بخوانید. در پایینترین مد طبیعی امواج صوتی در یک لوله پستی که دو طرف آن باز است، طول لوله اساساً نصف طول موج است. (یک "تصحیح آخر" کوچک وجود دارد، به طوری که طول لوله واقعاً در حدود قطر یک لوله کمتر از نصف طول موج است.) سرعت صوت حدود 330 m/s است. اگر دیپازون شما 523 cps باشد، و طول لوله پستی در حدود 32 cm باشد به شدت تشدید می‌شود. (الف) این جمله را تحقیق کنید. بنابراین بسامد تشدید ν لوله به طول L به صورت زیر است

$$\nu = \frac{523}{(L/L_0)} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

که L_0 حدود 32 cm است. (L_0 دقیقاً 32 cm نخواهد بود به خاطر اثر انتهایی که در بالا توضیح دادیم.)

(ب) فرمول بالا را ثابت کنید. حال ۵ یا ۶ لوله پستی را با مقادیر L که به طور معقول انتخاب شده باشد ببرید به طوری که قله منحنی تشدید و دو نقطه نیم‌توان در هر کنار قله را "بپوشاند." انتظار می‌رود که شدت صوت I "شکل تشدید"ی داشته باشد که با معادله زیر داده می‌شود

$$I = \frac{\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{1}{2}\Gamma\right)^2}$$

که I را مساوی ν در $\omega = \omega_0$ بهنجار کرده‌ایم، در آزمایش شما بسامد محرک ν آن است که دیپازون دارد و بنابراین ثابت است. بسامد تشدید ν با تغییر طول لوله عوض می‌شود. برای تشدید طول لوله را L_0 که شامل تصحیح آخر باشد بگیرد (این کار به آسانی با هوا، زدن لوله به سرتان و مقایسه گام آن با گام دیپازون انجام می‌شود)، و طولهای دو لوله را که مربوط به نقاط نیم‌توان

است پیدا کنید. بنابراین باید پهنای کامل Γ را پیدا کنید. این کار غیر مستقیم زمان فروافت نوسان آزاد را می‌دهد. مسئله تجربی اصلی ابداع روش ساده قابل قبولی برای تخمین کاهش در شدت صوت با ضریب دو است.

۲۸-۳ دو آونگ جفت شده به عنوان صافی نوارگذر مکانیکی. سیستم شکل ۳-۳ و توصیف آن در بخش ۳-۳ را در نظر بگیرید. از میرایی صرف نظر کنید. نشان دهید که

$$\psi_a \approx \frac{F_0}{2M} \cos \omega t \left\{ \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right\}$$

$$\psi_b \approx \frac{F_0}{2M} \cos \omega t \left\{ \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right\}$$

و

$$\frac{\psi_b}{\psi_a} \approx \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega^2}$$

که ω_1 بسامد پایینتر دو مد است، ω_2 بسامد بالاتر و ω بسامد تحریک است.

۲۹-۳ صافی نوارگذر الکتریکی. صافی نشان داده شده در شکل ۳-۸ را در نظر بگیرید. معادله دیفرانسیلی برای I_a و I_b پیدا کنید. نشان دهید که مختصات عمود $I_a + I_b$ و $I_a - I_b$ است و مدها با معادله (۵۹) داده می‌شوند.

۳۰-۳ آونگهای جفت شده. آرایه‌ای خطی از آونگهای جفت شده در نظر بگیرید که با بسامد قطع پایین در $z = 0$ تحریک می‌شود و به دیوار صلبی در $z = L$ که در شکل ۳-۱۱ نشان داده شده است وصل است. نشان دهید که اگر $\psi(z, t)$ مساوی $A_0 \cos \omega t$ در $z = 0$ باشد، آنگاه $\psi(z, t) = A(z) \cos \omega t$ است که

$$A(z) = A_0 \frac{e^{\epsilon \kappa z} - e^{-\kappa L} e^{-\kappa(L-z)}}{1 - e^{-2\kappa L}}$$

توجه کنید که برای $L \rightarrow \infty$ این فرمول تبدیل به شکل ساده $A_0 e^{-\kappa z}$ می‌شود.

۳۱-۳ تشدید در سیستم آونگهای جفت شده. بحث بعد از معادله (۹۰) را مطالعه کنید. مقادیر تشدید ω^2 را به صورت زیر به دست آورید. (الف) نشان دهید که در تشدید داریم

$$k \cot kL = -\kappa$$

که نشان می‌دهد مقادیر تشدید $kL \equiv \theta$ باید در ربع دوم دایره $(90^\circ \text{ تا } 180^\circ)$ ، ربع چهارم $(270^\circ \text{ تا } 360^\circ)$ ، ربع ششم، ربع هشتم، والی آخر قرار گیرد. (ب) بگذارید Ka^2/ML^2 مساوی "یک واحد" نیروی بازگرداننده در واحد جابه‌جایی در واحد جرم یعنی واحد ω^2 شود. بگذارید

$\omega_1^2 = g/l_1$, $\omega_2^2 = g/l_2$ باشد، آنگاه نشان دهد که مقادیر تشدید ω^2 با رسم برحسب θ از دو تابع زیر به دست می آید

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \theta^2$$

$$\omega^2 = \omega_2^2 - \theta^2 \cot^2 \theta$$

تشدیدها با نصف نقاط برخورد دو منحنی داده می شوند. چرا فقط نصف؟ (توجه: ω_1^2 ، ω_2^2 و ω^2 در معادلات بالا بی بعدند؛ یعنی در یکاهای Ka^2/ML^2 داده می شوند.) یک طرح کلی بکشید که طرح نمونه بسامدهای تشدید را نشان دهد. در بسامدهای بالا چه اتفاقی می افتد؟

۳-۳۲ بازتاب کلی نور مرئی از آینه نقره اندود. فرض کنید الکترون "ظرفیت" یک اتم نقره به الکترون "آزاد" در نقره جامد تبدیل می شود. ظرفیت نقره، وزن اتمی، و چگالی جرمی نقره را (در کتاب مرجع فیزیک و شیمی) پیدا کنید. بنابراین چگالی عددی N الکترون آزاد در واحد حجم در نقره جامد را پیدا کنید. فرض کنید رابطه پاشندگی برای نور در نقره دارای همان شکل برای نور (یا امواج الکترومغناطیسی) در یون سپهر باشد، یعنی فرض کنید

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2, \quad \omega^2 \geq \omega_p^2 \quad \text{اگر}$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 - c^2 k^2, \quad \omega^2 \leq \omega_p^2 \quad \text{اگر}$$

که $\omega_p^2 = 4\pi Ne^2/m$ و e و m بار و جرم الکترون هستند.

(الف) بسامد قطع ν_p را برای نقره جامد حساب کنید. نشان دهید که بسامد ν نور مرئی زیر بسامد قطع است. بنابراین انتظار داریم که یک لایه به اندازه کافی ضخیم نقره بازتاب کلی برای فرود عمودی نور مرئی بدهد. این چیزی است که ظاهر "نقره ای" آینه نقره اندود را به وجود می آورد.

(ب) فاصله تضعیف متوسط δ برای نور قرمز در خلأ با طول موج 6500×10^{-8} cm و نور آبی در خلأ با طول موج 4500×10^{-8} cm را حساب کنید. یک آینه "نیمه نقره اندود" یک قطعه شیشه با لایه نقره است که نازکتر از فاصله تضعیف است به طوری که نصف نور عبور کند (این بازتاب، کلی نیست). فرض کنید به یک لامپ با نور "سفید" از داخل یک آینه نیمه نقره اندود نگاه کنید. (نور "سفید" واقعاً شامل رنگهای مرئی است.) آیا انتظار دارید نور عبوری سفید به نظر آید؟ یک تهرنگ آبی داشته باشد؟ یک تهرنگ قرمز داشته باشد؟ در مورد نور بازتابی چه می گوئید؟

(ج) لایه نقره چقدر ضخیم باید باشد تا شدت (که متناسب با مربع دامنه است) نور آبی را در قسمت عقب لایه با ضریب 10^0 کم کند؟ چنین آینه ای 90% از نور فرودی را باز می تاباند. (واقعاً بازتابندگی برای نور مرئی بیشتر نزدیک 95% است. از اتلاف انرژی مربوط به مقاومت نقره

صرف نظر کرده‌ایم. همچنین سطح آینه ممکن است با کسب یک اکسید نقره که خصوصیات آن کاملاً متفاوت با نقره فلزی است تیره شود.)

(د) برای چه بسامدهایی لایه نقره شفاف می‌شود؟ (همچنین طول موج خلا را بدهید. این نور "فرابنفش" نامیده می‌شود.)

۳۰-۳۳ امواج ساکن آب کم عمق دندان‌اره‌ای. این موضوع در مسئله ۲-۳۱ توضیح داده شد. حال می‌خواهیم بفهمیم چطور پایینترین مدهای دندان‌اره‌ای در یک ظرف آب تحریک می‌شود. پایینترین مد دندان‌اره‌ای مد لبریز (شلب شلب) است که فقط $\frac{1}{4}$ "دندانه" وجود دارد. سطح آن تخت است. طول ظرف آب نصف طول موج است. مد دندان‌اره‌ای بعدی یک دندان کامل دارد یعنی طول ظرف اندازه یک طول موج (پایینترین مؤلفه فوریه دندان‌اره‌ای) است. این مد تحریک نمی‌شود مگر نوسانات را با تکان دادن ظرف به جلو و عقب تحریک کنید. توضیح دهید چرا تحریک نمی‌شود. مد بعدی $\frac{1}{2}$ دندانه است یعنی سه ناحیه تخت. بنابراین طول ظرف $\frac{3}{4}$ طول موج است. شما می‌توانید این مد را تحریک کنید. با استفاده از آزمون و خطا، به آرامی ظرف را تکان دهید. وقتی فکر می‌کنید که آن مد را به وجود آوردید، ظرف را آزاد کنید و بگذارید آزادانه نوسان کند. بعد از کمی تمرین، می‌توانید مد را تشخیص دهید و آن را تحریک کنید. در اینجا روش سیستماتیکتری را می‌گوییم. یک مترونوم قرض بگیرید یا یکی بسازید. این کار را با آویزان کردن یک وزنه به یک نخ (یک آونگ) که حین حرکت به یک کاغذ برخورد می‌کند و صدایی تولید می‌کند انجام دهید. برای این مترونوم، ظرف را با ضرب مترونوم به آرامی تکان دهید و منتظر یک حالت پایا شوید. سرعت ضرب یا بسامد مترونوم را تغییر دهید تا تشدید را پیدا کنید. وقتی به تشدید نزدیک شدید زندهای گذرا را نگاه کنید! آنها نه تنها زیبا هستند؛ بلکه به ما می‌گویند که چقدر از تشدید فاصله داریم. بسامد تشدید مورد انتظار را حساب کنید و از $v = \sqrt{gh}$ استفاده کنید. این کار را در حالی که آزمایش را انجام می‌دهید بکنید، تا به سرعت تشدید را بیابید. (یعنی در محدوده اشتباه جستجو نکنید). وقتی تشدید را می‌یابید، ظرف را آزاد بگذارید تا آزادانه نوسان کند؛ نوسانات آزاد را زمان‌گیری کنید. اگر از یک ظرف به اندازه کافی سبک استفاده می‌کنید که جرم آن مربوط به آب آن است و نه مربوط به ظرف و اگر جرم کلی دارید که به اندازه کافی برای فشار واکنشی روی دستتان بزرگ است، می‌توانید با ترکیب احساس روی دستتان و تماشا کردن تشدید را بیابید. سپس دیگر احتیاجی به مترونوم نخواهید داشت.

اگر امواج را در دو جهت افقی تحریک کنید می‌توانید "نقاط" نوک دندانه را ببینید. وقتی آنها شکستند و به هوا پرت شدند می‌توانید مطمئن باشید که هیچ نظریه موجی خطی نمی‌تواند آنها را توصیف کند.

۳۴-۳۰ امواج ساکن سطح دوبعدی مستطیلی روی آب. یک ظرف جایشی به شکل مستطیل بگیریید (البته نه از جنس لوسیت خشک بلکه از نوع پلی اتیلن انعطاف پذیر و نرم). آن را تا لبه پر از آب کنید و سپس آن را لبریز کرده به طوری که آب روی سطح آن بالا بیاید. (این کار باعث کاهش میرایی کناره‌های آن می‌شود.) به آرامی به آن ضربه بزنید و شبکه امواج ساکن نوسانی آزاد را ببینید. یک ژيروسکوپ اسباب‌بازی (از هر مغازه اسباب‌بازی‌فروشی) به دست آورید. ژيروسکوپ دورانی را کنار ظرف نگه دارید (یا مثلاً آن را بین دو طرف ظرف شیرینی که روی هم هستند قرار دهید.) می‌توانید دراز شدن طول موج نوسانات واداشته (امواج ساکن) را وقتی تدریجاً ژيروسکوپ می‌ایستد ببینید. همچنین احتمالاً اثر عبور از تشدید را خواهید دید.

۳۵-۳۰ امواج ساکن در آب. (الف) یک دیپازون مرتعش را در آب فرو ببرید و به امواج نگاه کنید، مخصوصاً امواج بین دو شاخه دیپازون.

(ب) یک دیپازون مرتعش تخت را روی سطح آب بگیریید (مانند دو کنده درخت موازی) و بین دو شاخه دیپازون نگاه کنید. (بعضی از مدهای دیپازون به سرعت میرا می‌شوند. یکی از آنها چند ثانیه‌ای دوام می‌آورد.) سعی کنید که با یک چشمه نور کوچک در زوایای مختلف آن را روشن کنید (موازی و عمود بر شاخه‌ها) تا ساختار شگفت‌انگیز آن را ببینید.

۳۶-۳ هماهنگها و زیرهماهنگها. یک نوسانگر هماهنگ با بسامد نوسانات طبیعی $1 \text{ cps} = 1^\circ$ و زمان فروافت طولانی داریم. اگر این نوسانگر با یک نیروی نوسانی به طور هماهنگ در بسامد 1 cps به حرکت درآید، یک دامنه بزرگ به دست می‌آورد، یعنی در بسامد محرک "تشدید" می‌شود. هیچ نیروی محرک نوسانی دیگری به طور هماهنگ دامنه بزرگی در یک تشدید تولید نمی‌کند.

(الف) این جمله را اثبات کنید. بعد، فرض کنید این نوسانگر علت نیرویی است که به طور متناوب در تپهای مربعی با دوره 18° که هر ثانیه تکرار می‌شود، تکرار شود.

(ب) آنالیز فوریه تپ مربعی را به طور کیفی توصیف کنید.

(ج) آیا نوسانگر هماهنگ تحت اثر نیروی محرک "تشدید می‌شود" (با یک دامنه بزرگ)؟

(د) فرض کنید نیروی محرک همان تپ مربعی است (با پهنای 18°) اما دو بار در ثانیه

تکرار می‌شود. آیا نوسانگر تشدید می‌شود؟ همین پرسش را برای آهنگ تکرار ۳ بار در ثانیه، ۴ بار

در ثانیه، ۵ بار در ثانیه، ۶ بار در ثانیه، ۷ بار در ثانیه، ۸ بار در ثانیه، ۹ بار در ثانیه انجام دهید.

(ه) حال به موضوع جدیدی می‌رسیم، اگر همان نوسانگر را با همان تپ مربعی با زمان تکرار

20° بار در ثانیه تحریک کنیم چه اتفاقی می‌افتد؟ آیا نوسانگر تشدید می‌شود؟ توجه داشته باشید

که بسامد نوسانگر در این حالت یک زیرهماهنگ آهنگ تکرار اصلی تپ مربعی محرک است.

(و) به همین ترتیب نیروی محرکی شامل تپهای مربعی مکرر ۳، ۴، و ... را ضربدر بسامد نوسانگر در نظر بگیرید؟ آیا نوسانگر تشدید می‌شود؟ توضیح دهید.

(ز) حال دوباره به موضوعی متفاوت برمی‌گردیم. فرض کنید که نیروی محرک تنها به یک نوسانگر که جابه‌جایی‌اش از حالت تعادل مثبت است جفت شده است. مثلاً این حالتی است که که شما بچه‌ای را روی تاب هل می‌دهید. وقتی او را هل می‌دهید که جابه‌جایی‌اش او را نزدیک بازوهای شما قرار می‌دهد (نیروی محرک). دوباره این پرسش را در نظر بگیرید که آیا می‌توانید زیرهماهنگها را در این حالت "جفت‌شدگی متقارن" تحریک کنید. فرض کنید "تاب" در 1cps نوسان می‌کند. اگر تاب را در 2cps (با چشمان بسته، یعنی چه تاب آنجا رسیده باشد چه نباشد) هل بدهید، آیا تشدید حاصل می‌شود؟ اگر در 3cps هل بدهید چگونه؟ در 35cps چگونه؟ توضیح دهید. حال توضیح دهید چگونه یک بسامد بالای نیروی محرکی که از (مثلاً) موتور هواپیما تولید می‌شود می‌تواند یک تشدید در بسامد پایینتری که زیرهماهنگ بسامد محرک است را تحریک کند، یعنی $\frac{1}{2}$ ، و ... بسامد محرک. آیا تحریک زیرهماهنگها در سیستمهایی که می‌توانند تکان بخورند یا تلق و تولوق بکنند معمولی است؟ توضیح دهید.

امواج پیشرونده

۱-۴ مقدمه

سیستمهایی که در فصلهای ۱، ۲ و ۳ در نظر گرفتیم، سیستمهای بسته بودند، یعنی سیستمهایی که با مرزهای مشخصی بسته شده بودند به طوری که تمام انرژی در داخل محدوده سیستم باقی می ماند. در آنجا دیدیم که نوسانهای آزاد در یک سیستم بسته را برحسب برهم نهش امواج ساکن یعنی مدها و نوسانهای واداشته حالت پایا را برحسب برهم نهش مؤلفه های موج ساکن که از مدها نتیجه می شود، می توان بیان کرد. مشخصه مدهای موجود به وسیله شرایط مرزی تعیین می شود.

سیستمهای باز. در فصل ۴ نوسانهای واداشته در سیستمهای باز یعنی سیستمهایی را که هیچ مرز خارجی ندارند، در نظر خواهیم گرفت. مثلاً اگر شخصی که شیپور می نوازد با یک ریسمان بلند از سبد یک بالون در ارتفاع زیاد از سطح زمین معلق شود، حداقل تا اندازه ای که می توان از پژواکها یعنی بازتابهای حاصل از سطح زمین به سمت نوازنده شیپور صرف نظر کرد، هوا مانند یک سیستم باز یا محیط باز برای امواج صوتی عمل می کند. اگر همان نوازنده شیپور برعکس در یک سیستم بسته که کف، دیوارها و سقف آن از چوب سخت است بنوازد، اثر آن کاملاً متفاوت خواهد بود. در این حالت هوای داخل اتاق مانند یک سیستم بسته عمل می کند و اگر به طور مناسب

تحریک شود، با بسامد مدهایش به حالت تشدید در خواهد آمد. با وجود این اگر دیوارهای اتاق با ماده‌ای که کاملاً صدا را جذب می‌کند پوشیده شود، به طوری که امواج هرگز به سمت فرستنده (یعنی شیپور) بازتابیده نشوند، در این صورت دیوارهای اتاق به گونه‌ای رفتار می‌کنند مثل آنکه اتاق یک سیستم کاملاً باز و بدون مرزهای خارجی است. بنابراین برای آنکه سیستمی یک سیستم باز باشد لزومی ندارد که محیط واقعاً تا بینهایت ادامه داشته باشد.

امواج تولیدشده به وسیله یک نیروی محرک که به یک محیط باز جفت شده است، امواج پیشرونده نامیده می‌شوند. این امواج از آشفتگی که آنها را به وجود آورده است دور می‌شوند. امواج پیشرونده این ویژگی مهم را دارند که انرژی و اندازه حرکت را منتقل می‌کنند. بنابراین اگر قطعه سنگی را به داخل یک حوض آرام بیندازید، امواج دایره‌ای که از مکان برخورد سنگ به بیرون گسترده می‌شوند، ممکن است بعداً انرژی جنبشی را به یک حشره شناور در فاصله دور منتقل کنند و یا ممکن است انرژی پتانسیل گرانشی یک تکه چوب را که نیمی از آن داخل و نیمی خارج از آب و بر روی یک ساحل شنی قرار گرفته، اضافه کنند و آن را به داخل ساحل برانند.

اگر یک نیروی محرک (که به یک محیط باز جفت شده است) با حرکت هماهنگ نوسان کند، امواج پیشرونده‌ای که تولید می‌کند امواج پیشرونده هماهنگ نامیده می‌شوند. در حالت پایا، تمام اجزای متحرک سیستم با حرکت هماهنگ و با بسامد محرک نوسان می‌کنند.

روابط میان دامنه‌ها. اگر امواج در دو یا سه بعد پخش شوند، هر چه جزء متحرک از چشمه موج دورتر باشد (با فرض آنکه چشمه کوچک است)، دامنه حرکت کوچکتر خواهد بود. از طرف دیگر، اگر محیط یک بعدی باشد (مثلاً یک فتر کشیده که از یک انتها واداشته و تا بینهایت ادامه دارد و به یک دستگاه جاذب موج منتهی می‌شود) در این صورت (با فرض آنکه محیط همگن باشد) دامنه حرکت هماهنگ اجزای متحرک با زیاد شدن فاصله از چشمه کم نمی‌شود. این حالت نه تنها برای امواج یک بعدی (مانند یک فنر) بلکه همچنین برای «امواج مستقیم» دو بعدی (تلاطم اقیانوس حاصل از یک طوفان دوردست)، و «امواج تخت» سه بعدی (امواج رادیویی حاصل از یک ستاره دور) برقرار است.

روابط میان فازها. فاز نسبی بین دو جزء متحرک در محیطی باز که یک موج پیشرونده هماهنگ را حمل می‌کند با فاز نسبی یک موج ساکن در یک سیستم بسته اختلاف بسیار دارد. در مورد یک موج ساکن، که ممکن است یک مد بهنجار نوسان آزاد در یک سیستم بسته و یا یک نوسان واداشته یک سیستم بسته باشد، تمام اجزای متحرک نسبت به یکدیگر به طور هم فاز (بجز علامتهای منفی احتمالی) نوسان می‌کنند. در یک موج پیشرونده چنین

حالتی وجود ندارد. بلکه اگر جزء متحرک b نسبت به جزء متحرک a از نیروی محرک دورتر باشد، در این صورت جزء b همان حرکت جزء a را منتهی در زمانی دیرتر انجام می‌دهد، زیرا مدتی طول می‌کشد تا موج از a به b منتقل شود. از این رو جزء b دارای ثابت فازی است که با ثابت فاز a تفاوت دارد و مقدار آن برابر با حاصلضرب بسامد در زمان تأخیر است.

۲-۴ امواج پیشرونده هماهنگ در یک بعد و سرعت فاز

فرض کنید سیستمی یک‌بعدی شامل یک تار همگن و پیوسته که از $z = 0$ تا بینهایت است وجود دارد. تا در نقطه $z = 0$ به پایانه خروجی دستگاهی ("فرستنده") متصل شده است که می‌تواند تار را تکان بدهد و از این رو امواج پیشرونده در امتداد تار "گسیل" کند. فرض کنید که جابه‌جایی $D(t)$ پایانه خروجی به صورت زیر با نوسان هماهنگ داده می‌شود

$$D(t) = A \cos \omega t \quad (1)$$

می‌خواهیم جابه‌جایی $\psi(z, t)$ یک جزء متحرک را که در مکان z قرار دارد پیدا کنیم که در آن z هر محل غیرمشخص بین $z = 0$ تا بینهایت است. مقدار $\psi(z, t)$ در $z = 0$ را به آسانی می‌توان پیدا کرد. از آنجا که تار مستقیماً به پایانه خروجی فرستنده بسته شده است، جابه‌جایی تار در نقطه $z = 0$ برابر با $D(t)$ است:

$$\psi(0, t) = D(t) = A \cos \omega t \quad (2)$$

سرعت فاز. از تجربه معمول مشاهده امواج پیشرونده آب، درمی‌یابیم که تا هنگامی که خصوصیات محیط (مثلاً عمق آب) ثابت بماند، این امواج با سرعت ثابت منتقل می‌شوند. هنگامی که امواج، امواج پیشرونده هماهنگ باشند، این سرعت، سرعت فاز v_φ نامیده می‌شود. همچنین معلوم می‌شود که حرکت یک جزء متحرک در مکان z در زمان t همان حرکت جزء متحرک در نقطه $z = 0$ در زمان زودتر t' است که در آن t' به اندازه زمانی که طول می‌کشد تا موج فاصله z را با سرعت v_φ بپیماید، از زمان t زودتر است:

$$t' = t - \frac{z}{v_\varphi} \quad (3)$$

بنابراین برای شکل یک موج سینوسی پیشرونده داریم

$$\begin{aligned}\psi(z, t) &= \psi(0, t') \\ &= A \cos \omega t' \\ &= A \cos \omega \left(t - \frac{z}{v_\varphi} \right) \\ &= A \cos \left(\omega t - \frac{\omega z}{v_\varphi} \right)\end{aligned}\quad (۴)$$

توجه کنید که به ازای z ثابت، $\psi(z, t)$ یک نوسان هماهنگ بر حسب زمان است. همچنین توجه کنید که به ازای t ثابت، $\psi(z, t)$ یک نوسان سینوسی در فضا است. البته هر دوی این عبارتها در مورد یک موج ساکن سینوسی که مثلاً به شکل زیر است، نیز صادق است:

$$\psi(z, t) = B \cos \omega t \cos(\alpha - kz) \quad (۵)$$

که در آن α مقدار ثابت است. برای زمان ثابت، بستگی مکانی موج پیشرونده که با معادله (۴) داده شده است، همان شکل بستگی مکانی موج ساکن معادله (۵) را دارد. بنابراین، اگر موج پیشرونده را به شکل زیر بنویسیم

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz) \quad (۶)$$

در آن صورت همان مفهوم عدد موج k (و طول موج λ) را همان گونه که در مورد یک موج ساکن به کار بردیم، دربارهٔ یک موج پیشرونده سینوسی با زمان ثابت می توان به کار برد. با مقایسهٔ معادلات (۴) و (۵) دیده می شود که برای یک موج پیشرونده سینوسی در یک زمان ثابت، میزان افزایش زاویهٔ فاز بر واحد طول یعنی k با رابطهٔ زیر داده می شود

$$k = \frac{\omega}{v_\varphi} \quad (۷)$$

یعنی سرعت فاز با رابطهٔ زیر داده می شود

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k}} \quad (۸ \text{ الف})$$

و یا چون $\omega = 2\pi\nu$ و $k = 2\pi/\lambda$ است داریم

$$\boxed{v_\varphi = \lambda\nu} \quad (۸ \text{ ب})$$

و یا چون $\nu = 1/T$ است، پس

$$v_{\varphi} = \frac{\lambda}{T} \quad (۸ ج)$$

سرعت فاز یک موج پیشرونده سینوسی کمیت بینهایت مهمی است. در اینجا شکلهای مختلف معادلات (۸) را داده‌ایم و اصرار می‌کنیم که هرکدام از آنها را به صورت تمام و کمال یاد بگیرید. در شکل ۱-۴ یک موج پیشرونده سینوسی نشان داده شده است.

معادلات (۸) آنقدر مهم هستند که اکنون روش دیگری برای به دست آوردن آنها ذکر می‌کنیم. از یک موج پیشرونده سینوسی، تابع فاز $\varphi(z, t)$ را که در جهت $+z$ منتشر می‌شود، به عنوان آرگومان تابع موج $\cos(\omega t - kz)$ تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(z, t) = \omega t - kz \quad (۹)$$

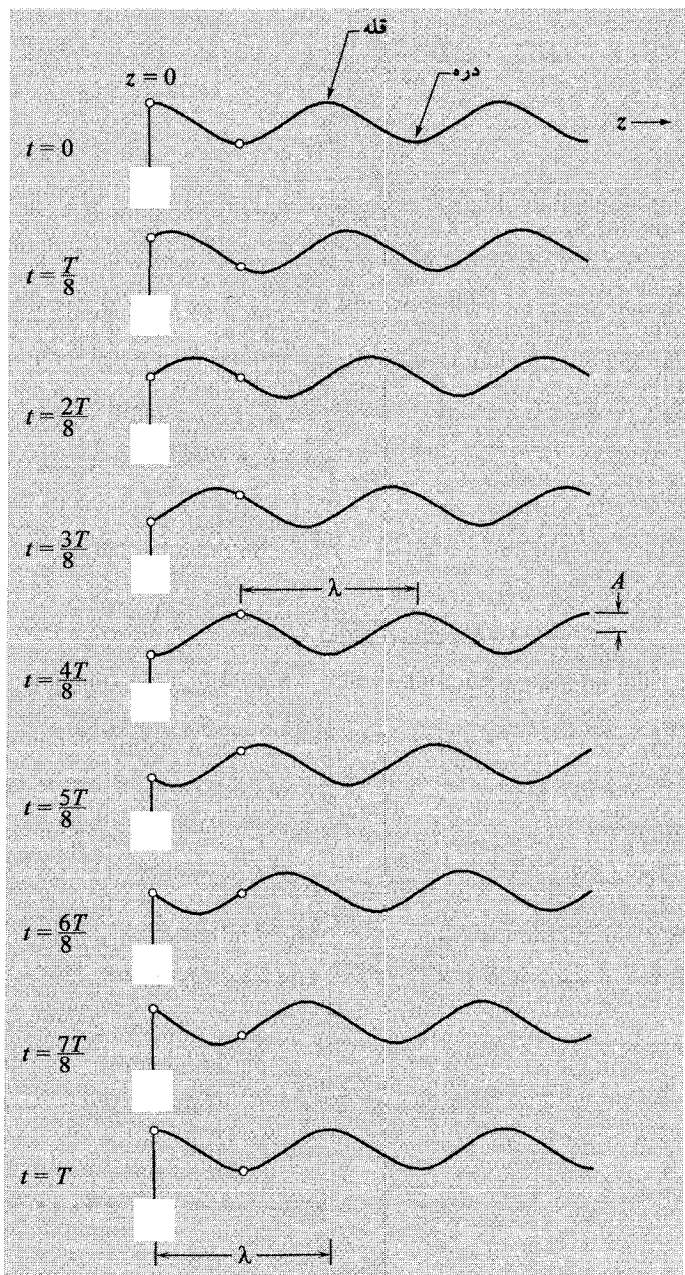
[ثابت فاز ممکن در معادله (۹) را حذف کرده‌ایم.] به ازای یک z مفروض، مقدار فاز در جمله $-kz$ به طور خطی با z افزایش پیدا می‌کند. برای مقادیر بزرگتر z ، مقدار فاز کاهش می‌یابد زیرا این فاز مربوط به امواجی است که در زمانهای زودتر گسیل شده‌اند. (قرارداد ما برای علامت فاز مثبت عمومی نیست. بعضیها ترجیح می‌دهند که $kz - \omega t$ را فاز بنامند.) اگر بخواهیم یک قله [بیشینه $\cos \varphi(z, t)$ یا دره [کمینه $\cos \varphi(z, t)$] مفروض از موجی را هنگامی که موج منتشر می‌شود دنبال کنیم، برای آنکه فاز $\varphi(z, t)$ را ثابت نگاه داریم، باید همان‌گونه که t تغییر می‌کند مقادیر مختلف z را نیز در نظر بگیریم. بنابراین با گرفتن دیفرانسیل کامل $\varphi(z, t)$ و قراردادن نتیجه برابر با صفر، می‌توان رابطه‌ای بین z و t برای نقطه‌ای از ثابت فاز به دست آورد. دیفرانسیل کامل $\varphi(z, t)$ به صورت زیر است

$$d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dt + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz = \omega dt - k dz \quad (۱۰)$$

که به شرطی که بین dz و dt رابطه زیر برقرار باشد، برابر صفر می‌شود

$$v_{\varphi} \equiv \left(\frac{dz}{dt} \right)_{[d\varphi=0]} = \frac{\omega}{k} \quad (۱۱)$$

که همان معادله (۸ الف) است.



شکل ۱-۴ نیروی محرک در نقطه $z = 0$ حرکت هماهنگ با زمان تناوب T را به وجود می‌آورد. موج پیشرونده سینوسی در جهت $+z$ منتشر می‌شود. طول موج برابر λ است. سرعت فاز برابر $\lambda/T = \omega/k$ است. هر نقطه از تار همان حرکت هماهنگ در نقطه $z = 0$ را ولی در زمانی دیرتر، انجام می‌دهد.

آیا امواج پیشرونده همان رابطه پاشندگی امواج ساکن را دارند؟ در فصل ۲ دیدیم که رابطه پاشندگی که ω را برحسب تابعی از k (یا k را برحسب تابعی از ω) برای امواج ساکنی که در یک محیط مفروض نوسان می‌کنند، به دست می‌دهد به شرایط مرزی بستگی ندارد، اگرچه مقادیر مخصوص k به شرایط مرزی بستگی دارند. در فصل ۳ دیدیم که امواج ساکنی که از نوسانهای واداشته یک سیستم بسته نتیجه می‌شوند، کاملاً در همان قانون پاشندگی امواج ساکنی که به طور آزاد نوسان می‌کنند، صدق می‌کنند و برای آنها مقادیر مخصوص k ، به شرایط مرزی بستگی دارد. (ما همچنین نوع جدیدی از امواج یعنی موج نمایی را برای سیستمی که بالاتر یا پایینتر از بسامدهای پیشینه و کمینه مدهای آن تحریک شده است، کشف کردیم.) در مطالعه کنونی امواج پیشرونده در سیستمهای باز، هیچ‌گونه شرایط مرزی، بجز شرطی که در انتها به فرستنده جفت شده، وجود ندارد. انتظار می‌رود که رابطه پاشندگی (مانند قبل) مستقل از شرایط مرزی باشد. اما درباره امواج پیشرونده چیزی وجود دارد که با امواج ساکنی که از نوسانهای آزاد یا نوسانهای واداشته در یک سیستم بسته نتیجه می‌شوند، کاملاً متفاوت است و آن فاز نسبی اجزای متحرک مختلف است. در هر دو حالت نوسانهای آزاد و واداشته (با صرفنظر کردن از میرایی) تمام اجزای متحرک فاز یکسان دارند. اما برای امواج پیشرونده چنین نیست. آیا این امر بر رابطه پاشندگی تأثیر ندارد؟ همان‌طور که اکنون نشان خواهیم داد، خیر.

قانون پاشندگی برای یک آرایه خطی آونگهای جفت شده. اکنون مثال مشخصی در نظر می‌گیریم، اما مثالی که به اندازه کافی کلی است تا بتواند ما را قانع کند که به راستی تمام روابط پاشندگی برای امواج پیشرونده و برای امواج ساکن شکل یکسان دارند. در معرفی یک موج پیشرونده، از تار پیوسته به عنوان یک مثال ساده استفاده کردیم. ولی البته امواج پیشرونده را درست مانند امواج ساکن، هم در سیستمهای با پارامترهای متمرکز شده و هم در سیستمهای پیوسته می‌توانیم داشته باشیم. بنابراین برای به دست آوردن یک نتیجه بسیار کلی، آن سیستم فوق‌العاده غنی یعنی آونگهای جفت شده را در نظر می‌گیریم. قانون دقیق پاشندگی را برای یک آرایه خطی بینهایت از آونگهای جفت شده که در نقطه $z = 0$ به حرکت درآمده است، پیدا می‌کنیم. از شما می‌خواهیم که به شکل ۳-۱۰ بخش ۳-۵ که شکل کلی سه آونگ جفت شده متوالی را نشان می‌دهد، نگاه کنید و خود را متقاعد سازید که معادله دقیق گلوله n ام همان‌گونه است که در معادله (۳-۶۲) بخش ۳-۵ داده شده است و در اینجا مجدداً نوشته می‌شود:

$$\ddot{\psi}_n = -\frac{g}{l}\psi_n + \frac{K}{M}(\psi_{n+1} - \psi_n) - \frac{K}{M}(\psi_n - \psi_{n-1}) \quad (12)$$

از آنجا که تمام اجزای متحرک هم برای امواج ساکن حالت پایا و هم برای نوسانهای واداشته حالت

پایای یک سیستم بسته، باید با حرکت هماهنگ نوسان کنند، نتیجه می‌شود که ثابت فاز برای ψ_n هر مقداری باشد، باید داشته باشیم

$$\ddot{\psi}_n = -\omega^2 \psi_n \quad (۱۳)$$

با قراردادن معادله (۱۳) در معادله (۱۲) و حذف کردن جمله‌ها و تقسیم کردن بر $\psi_n(t)$ نتیجه می‌شود

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{M} - \frac{K(\psi_{n+1} + \psi_{n-1})}{M\psi_n} \quad (۱۴)$$

موج پیشرونده سینوسی. اکنون فرض می‌کنیم که یک موج پیشرونده سینوسی به شکل زیر داریم

$$\psi_n = A \cos(\omega t + \varphi - kz), \quad z = na$$

در این صورت به آسانی می‌توان نشان داد که

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = 2\psi_n \cos ka$$

بنابراین معادله (۱۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{M}(1 - \cos ka) \quad (۱۵)$$

یعنی

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M} \sin^2 \frac{1}{2}ka \quad (۱۶)$$

این رابطه کاملاً همان قانون پاشندگی است که در معادلات (۳-۹۱) تا (۳-۹۸) بخش ۳-۵ برای نوسانهای واداشته به دست آوردیم. دیده می‌شود که دامنه بسامد امواج سینوسی برای امواج پیشرونده و امواج ساکن یکسان است، این دامنه از ω_{\min} تا ω_{\max} ادامه دارد که در آن

$$\omega_{\min}^2 = \frac{g}{l} \equiv \omega_0^2, \quad \omega_{\max}^2 = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M} \quad (۱۷)$$

امواج نمایی در یک سیستم باز. برای بسامدهای محرک پایینتر از بسامد قطع پایین یعنی ω_0 ، ممکن است حدس بزنیم که قانون پاشندگی برای یک سیستم واداشته باز مجدداً همان قانون در مورد یک سیستم بسته است. این حدس درست است. بنابراین برای یک سیستم باز شامل آونگهای جفت شده که از $z = 0$ تا $z = +\infty$ ادامه دارد و در نقطه $z = 0$ با بسامد $\omega < \omega_0$ به حرکت درآمده است، داریم

$$\psi(z, t) = Ae^{-kz} \cos \omega t, \quad z = na, \quad (۱۸)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{4K}{M} \sinh^2 \frac{1}{2}ka \quad (۱۹)$$

امواج نمایی زیگزاگ. به همین ترتیب برای یک بسامد محرک بالاتر از بسامد قطع بالایی، امواج نمایی زیگزاگ به دست می آید

$$\psi(z, t) = A(-1)^n e^{-\kappa z} \cos \omega t, \quad z = na \quad (20)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{M} \cosh^2 \frac{1}{4} \kappa a \quad (21)$$

بنابراین یک موج نمایی در یک سیستم واداشته باز با موج نمایی در حالت کلی یک سیستم واداشته بسته فقط از آن جهت تفاوت دارد که جواب $e^{+\kappa z}$ را که به ازای $z = +\infty$ به سمت بینهایت می رود، باید در نظر نگیریم. توجه کنید که در یک موج نمایی، تمام اجزای متحرک با فاز یکسان نوسان می کنند [به معادلات (۱۸) و (۲۰) مراجعه کنید]، بنابراین چیزی به نام سرعت فاز وجود ندارد، زیرا نه موجی وجود دارد که بدون تغییر شکل منتشر شود و نه حتی موجی که با تغییر شکل ولی با قله ها و دره های موجی قابل تشخیص، منتشر شود.

بنابراین با مثال آونگهای جفت شده نشان دادیم که در یک محیط مفروض قانون پاشندگی که ω و k را به یکدیگر مربوط می کند، برای امواج پیشرونده و برای امواج ساکن حاصل از نوسانهای آزاد یا نوسانهای واداشته حالت پایای یک سیستم بسته، یکسان است.

امواج سینوسی پاشنده و ناپاشنده. هنگامی که قانون پاشندگی شکل ساده زیر را داشته باشد

$$v(k) = \frac{\omega(k)}{k} = \text{ثابتی که به } k \text{ بستگی ندارد} \quad (22)$$

امواج را ناپاشنده می نامند و در غیر این صورت، آنها را پاشنده می نامند. (استفاده از نشانه k : تالیفاً نشان می دهد که در هر دو حالت، امواج، سینوسی هستند.) شکل یک موج پاشنده که از برهم نهش امواج ساکن با اعداد موج مختلف تشکیل شده است، هنگامی که برهم نهش در فضا پیش می رود، تغییر می کند، زیرا مؤلفه های با طول موجهای مختلف، با سرعتهای متفاوت منتقل می شوند. بنابراین مؤلفه های مختلف بسامدی در برهم نهش "پاشنده" می شوند. امواج پاشنده، امواج سینوسی هستند که برای آنها سرعت فاز یعنی $v_p = \omega/k$ با طول موج تغییر می کند.

امواج نمایی واکنشی. هنگامی که بسامد محرک ω در "نوارگذر" بین بسامد قطع پایین (که ممکن است در بعضی مثالها بسامد بسامد صفر باشد) و بسامد قطع بالا (که ممکن است در بعضی مثالها بسامد بینهایت باشد) قرار ندارد، در این صورت، همان گونه که دیدیم، امواج برحسب بستگی فضایی شان نمایی (و نه سینوسی) هستند. این نوع موج نمایی گاهی اوقات "واکنشی" نامیده می شود، در حالی که به یک موج سینوسی "پاشنده" گفته می شود. گاهی اوقات از یک "محیط

پاشنده" یا یک "محیط واکنشی" صحبت می‌شود. البته یک محیط واحد می‌تواند در یک دامنه بسامد (نوارگذر) پاشنده و در دامنه دیگر (خارج از نوارگذر) واکنشی باشد. در مثالهای زیر درباره سرعت فاز امواج پاشنده بحث خواهیم کرد.

مثال ۱: امواج عرضی در یک تار مهردار

رابطه پاشندگی^۱ برای امواج عرضی در یک تار مهردار با کشش تعادلی T ، جرم مهرة M و فاصله بین مهرةها a برابر است با [به معادله ۲-۷ بخش ۲-۴ مراجعه کنید]

$$\omega^2 = \frac{4T_0}{Ma} \sin^2 \frac{1}{2} ka, \quad 0 \leq k \leq \frac{\pi}{a} \quad (23)$$

بنابراین سرعت فاز برای امواج پیشرونده عرضی با رابطه زیر داده می‌شود

$$v_\varphi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{4T_0 \sin^2 \frac{1}{2} ka}{Ma k^2} \quad (24)$$

که در آن $0 \leq k \leq \pi$ است. برای بسامدهای بالاتر از بسامد قطع بالا که برابر $\sqrt{4T_0/Ma}$ است، امواج به شکل امواج نمایی زیگزاگ هستند و چیزی به صورت سرعت فاز وجود ندارد. برای بسامدهای بین صفر و ω ، امواج، امواج پاشنده هستند، زیرا سرعت فاز ثابت نیست بلکه به k بستگی دارد. در حد طول موج بلند (یا فاصله مهرةهای کوچک) که در آن $1 \ll a/\lambda$ است، سرعت فاز عملاً مستقل از طول موج می‌شود، به طوری که امواج ناپاشنده می‌شوند. این مطلب را با بسط $\sin \frac{1}{2} ka$ بر حسب سری تیلور می‌توانیم ببینیم:

$$\begin{aligned} v_\varphi &= \sqrt{\frac{T_0 a}{M} \frac{\sin\left(\frac{1}{2} ka\right)}{\left(\frac{1}{2} ka\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{T_0 a}{M} \frac{\left(\frac{1}{2} ka\right) - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} ka\right)^3 + \dots}{\left(\frac{1}{2} ka\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{T_0 a}{M} \left[1 - \frac{1}{24} (ka)^2 + \dots\right]} \quad (25) \end{aligned}$$

۱. نمایش تجربی بسیار خوبی از این رابطه پاشندگی، معادله (۲۳)، در مقاله زیر ارائه شده است:

سپس با تعریف ρ_0 به عنوان جرم متوسط بر واحد طول در حالت تعادل یعنی $M/a \equiv \rho_0$ برای تار پیوسته داریم

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \quad (26)$$

بنابراین سرعت فاز برای امواج پیشرونده عرضی در یک تار پیوسته، مقداری ثابت و مستقل از بسامد است. معادله (۲۶) با نتیجه‌ای که در فصل ۲ برای ω/k برای قانون پاشندگی امواج ساکن در یک تار پیوسته [معادله (۲۲-۲) بخش ۲-۲] به دست آوردیم، یکسان است. ■

مثال ۲: امواج طولی در یک تار مهره‌دار

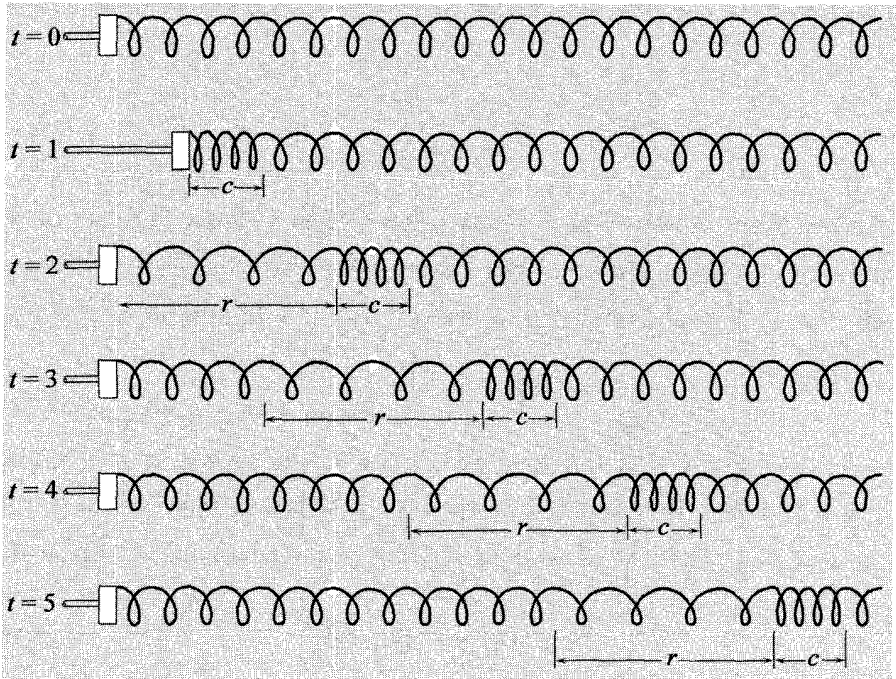
قانون پاشندگی در این حالت از همان قانون درباره امواج عرضی ولی با نشانیدن حاصلضرب ثابت فتری K در فاصله مهره‌ها a به جای کشش T_0 [به معادله (۷۸-۲) بخش ۲-۴ مراجعه کنید] به آسانی به دست می‌آید. در حد پیوسته، [با نشانیدن Ka به جای T_0 در معادله (۲۶)] رابطه زیر به دست می‌آید

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{Ka}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{K_L L}{\rho_0}} \quad (27)$$

که در آن $Ka = K_L L$ برای آن نوشته شده که یادآوری شود اگر فترها را به طور سری جمع کنید و یک فتر بلند به طول L بسازید، ثابت فتری کل یعنی K_L درست برابر با حاصلضرب a/L در ثابت فتری K یک قطعه فتر به طول a است. برطبق معادله (۲۷) امواج طولی در یک تار پیوسته، ناپاشنده هستند. شکل ۲-۴ یک "بسته موج" پیشرونده را که شامل یک "تراکم" و یک "انبساط" است و در روی فتر حرکت می‌کند، نشان می‌دهد. ■

سرعت فاز صوت - مدل نیوتون. نیوتون اولین کسی بود که رابطه‌ای به دست آورد که سرعت امواج صوتی در هوا را پیش‌بینی می‌کرد. فرمول نیوتون پاسخ نادرست می‌دهد؛ این فرمول سرعتی در حدود 280 m/s را پیش‌بینی می‌کند، در حالی که سرعت مشاهده شده [در STP (دما و فشار استاندارد)] یعنی در یک اتمسفر فشار و در دمای 0°C برابر 332 m/s است. راه حل نیوتون بسیار ساده است و اینکه چرا پاسخ نادرست می‌دهد کاملاً جالب توجه است. حال راه حل او را شرح می‌دهیم.

اگر هوا در یک ظرف بسته محدود شود، بر روی دیواره‌های ظرف و به سمت خارج فشاری وارد می‌کند. بنابراین هوا مانند یک فتر متراکم شده عمل می‌کند که می‌خواهد خودش را باز کند. تصور کنید که ظرف، استوانه درازی است که یک انتهای آن به وسیله دیواری بسته و انتهای دیگر با



شکل ۲-۴ موج پیشرونده طولی شامل یک تراکم c و یک انبساط r است و در روی فنر منتشر می‌شود. ششمین حلقه مارپیچی دارای علامتی است، تا بتوان حرکتش را دنبال کرد.

یک پیستون بی‌وزن قابل حرکت بسته شده است. پس، هوا مانند یک فنر متراکم شده است که در طول استوانه ادامه می‌یابد و پیستون را با نیرویی به اندازه F به خارج از استوانه فشار می‌دهد. در حالت تعادل نیروی خارجی به اندازه F بر روی پیستون همسنگ با نیروی هواست. برای فنری با طول طبیعی L_1 ، طول متراکم L (که $L < L_1$ است) و ثابت فنری K_L ، نیروی F با رابطه زیر داده می‌شود

$$F = K_L(L_1 - L)$$

اگر طول فنر یعنی L تغییر کند، تغییر F با مشتق‌گیری از این رابطه به دست می‌آید یعنی

$$dF = -K_L dL \quad (28)$$

به همین ترتیب، هوا نیرویی بر روی پیستون وارد می‌کند که با رابطه زیر داده می‌شود

$$F = pA$$

که در آن p فشار و A مساحت سطح مقطع استوانه است. اگر پیستون از مکان تعادلش به مقدار کوچکی جابه‌جا شود، به طوری که طول L استوانه به اندازه dL (مثلاً) تغییر کند، در این صورت حجم به اندازه $dV = A dL$ تغییر می‌کند. بنابراین تغییر F برابر است با

$$dF = A dp = A \left(\frac{dp}{dV} \right) A dL \quad (29)$$

که در آن شاخص صفر بدین معنی است که dp/dV در حجم تعادل محاسبه می‌شود. با مقایسه معادلات (۲۸) و (۲۹) دیده می‌شود که "ثابت فنری معادل" برای هوای لوله با رابطه زیر داده می‌شود

$$K_L = -A^2 \left(\frac{dp}{dV} \right) \quad (30)$$

فرض کنید که یک فنر متراکم با ثابت فنری K_L و طول L و چگالی جرمی خطی ρ_0 (خطی) در حالت تعادل نگاه‌داشته شده است. در این صورت سرعت فاز امواج طولی، با رابطه زیر داده می‌شود [معادله (۲۷) را ببینید]

$$v^2 = \frac{K_L L}{\rho_0} \quad (31)$$

در استفاده از معادله (۳۱) برای امواج صوتی برای مقدار K_L معادله (۳۰) را به کار می‌بریم. همچنین حجم تعادل برابر $V_0 = AL_0$ است و چگالی جرمی خطی با رابطه زیر داده می‌شود

$$\rho_0 L_0 = AL_0 \quad (32)$$

که در آن ρ_0 چگالی جرمی حجمی در حالت تعادل است. با وارد کردن معادلات (۳۰) و (۳۲) در معادله (۳۱) و حذف صفت "جرمی" از چگالی جرمی حجمی در حالت تعادل، ρ_0 ، برای سرعت صوت رابطه زیر به دست می‌آید

$$v^2 = - \frac{V_0 (dp/dV)}{\rho_0} \quad (33)$$

اکنون باید dp/dV یعنی میزان تغییر فشار با حجم را پیدا کنیم. در اینجا نیوتون، قانون بویل را به کار برد که می‌گوید در دمای ثابت حاصلضرب فشار در حجم مقدار ثابت است:

$$pV = p_0 V_0, \quad p = \frac{p_0 V_0}{V} \quad (34)$$

که در آن p_0 فشار در حالت تعادل است. با مشتق‌گیری نتیجه می‌شود

$$\frac{dp}{dV} = - \frac{p_0 V_0}{V^2}$$

یعنی، در حالت تعادل که در آن $V = V_0$ است، داریم

$$V_0 \left(\frac{dp}{dV} \right)_0 = -p_0 \quad (35)$$

بنابراین از معادله (۳۳) جواب نیوتون به دست می‌آید

$$v_{\text{نیوتون}} = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} \quad (36)$$

برای هوا در شرایط STP داریم

$$p_0 = 1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^6 \text{ dyn/cm}^2$$

$$\rho_0 = \frac{29 \text{ g/mol}}{22.4 \text{ L/mol}} = 1.29 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3 \quad (37)$$

بنابراین نیوتون برای سرعت صوت مقدار زیر را پیدا کرد

$$v_{\text{نیوتون}} = \sqrt{\frac{1.01 \times 10^6}{1.29 \times 10^{-3}}} = 2.8 \times 10^2 \text{ cm/s} = 280 \text{ m/s} \quad (38)$$

سرعت تجربی (که باید آن را به خاطر بسپارید)، برای هوا در شرایط STP برابر است با

$$v = 332 \text{ m/s}$$

$$= 745 \text{ mile/h}$$

$$= 1 \text{ mile}/4.8 \text{ s} \quad (39)$$

[شاید شما با روش متداول برآورد فاصله تا آذرخش با شمردن تعداد ثانیه‌ها بین دیدن برق و شنیدن رعد، آشنا باشید. زیرا تقریباً "هر کیلومتر برابر ۳ ثانیه" است. به همین ترتیب، سرعت صوت را با استفاده از یک کرومتر و یک ترقه (که همکار شما آن را می‌ترکاند) می‌توانید اندازه بگیرید.]

تصحیح اشتباه نیوتون. اکنون پرسش جالبی مطرح می‌شود: چگونه نیوتون توانست آن چنان به جواب درست نزدیک شود (که نشان می‌دهد چیزی در محاسبه او درست است) و در عین حال ۱۵ درصد اشتباه کرد (که نشان می‌دهد چیزی در محاسبه او نادرست است)؟ اشکال از فرض قانون بویل نتیجه می‌شود که فقط در دمای ثابت برقرار است. در یک موج صوتی، دما ثابت باقی نمی‌ماند. بر روی هوایی که (در یک لحظه مفروض) در یک ناحیه تراکم قرار گرفته،

کاری انجام شده است. این هوا از دمای تعادلش اندکی داغتر می‌شود. نواحی مجاور، به اندازه یک نیم طول موج دورتر، از نواحی منبسط هستند. این نواحی هنگام منبسط شدن اندکی سرد شده‌اند. (انرژی پایسته است؛ انرژی اضافی در ناحیه تراکم با کاستی انرژی در ناحیه انبساط برابر است.) به سبب افزایش دما در ناحیه تراکم، فشار و تراکم بزرگتر از مقداری است که با قانون بویل پیش‌بینی می‌شود، و فشار در انبساط کمتر از مقدار پیش‌بینی شده است. این اثر نیروی بازگرداننده‌ای بزرگتر از آنچه انتظار می‌رفت، و در نتیجه سرعت فاز بزرگتری به وجود می‌آورد.

پس باید به جای قانون بویل (که در دمای ثابت برقرار است)، از قانون بی‌دررو گازها باید استفاده کنیم که رابطه بین p و V را هنگامی که هیچ‌گونه گرمایی جریان ندارد به دست می‌دهد. (برای گرما وقت کافی وجود ندارد که از نواحی تراکم به نواحی انبساط جریان پیدا کند و بدین ترتیب دما را برابر کند. یعنی پیش از آنکه چنین حالتی روی دهد، یک نیم دور سپری شده و ناحیه قبلی تراکم یک ناحیه انبساط شده است. بنابراین، نتیجه مثل حالتی است که «دیوارهایی» وجود می‌داشتند و از جریان پیدا کردن گرما از یک ناحیه به ناحیه دیگر جلوگیری می‌کردند.) می‌توان نشان داد که این رابطه به صورت زیر داده می‌شود

$$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma, \quad p = p_0 V_0^\gamma V^{-\gamma} \quad (40)$$

که در آن γ مقدار ثابتی است که «نسبت گرمای ویژه در فشار ثابت به گرمای ویژه در حجم ثابت» نامیده می‌شود و مقدار عددی آن برابر است با

$$\gamma = 1.40 \quad \text{برای هوا در شرایط STP}$$

با مشتق‌گیری از معادله (۴۰) و قراردادن $V = V_0$ نتیجه می‌شود

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma p_0 V_0^\gamma V^{-\gamma-1}$$

$$V_0 \left(\frac{dp}{dV} \right)_0 = -\gamma p_0$$

با قراردادن این رابطه در معادله (۳۲) برای سرعت صوت نتیجه صحیح به دست می‌آید

$$v_{\text{صوت}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

$$= \sqrt{1.40} v_{\text{نیوتن}} = 332 \text{ m/s} \quad (41)$$

حال ببینیم که چرا گرما وقت ندارد از یک ناحیه تراکم به یک ناحیه انبساط جریان پیدا کند و دما را برابر کند. برای آنکه گرما بتواند جریان پیدا کند و دما را در همه جا ثابت نگه دارد، گرما باید در زمانی که در مقایسه با نصف زمان تناوب نوسان، کوچک است (پس از نصف زمان تناوب محل تراکما و انبساطها عوض می‌شود) در مسافتی به اندازه یک نیم طول موج (یعنی از یک تراکم به یک انبساط) جریان پیدا کند. از این رو برای آنکه گرما به اندازه کافی تند جریان پیدا کند، لازم است داشته باشیم

$$v(\text{جریان گرما}) \gg \frac{\frac{1}{2}\lambda}{\frac{1}{2}T} = v_{\text{صوت}} \quad (۴۲ \text{ الف})$$

بنابراین نتیجه می‌شود که جریان گرما عمدتاً در نتیجهٔ رسانایی است یعنی، در نتیجهٔ انتقال انرژی جنبشی انتقالی از یک مولکول هوا به مولکول دیگر از طریق برخورد است. برای یک مولکول هوا به جرم M در هوای با دمای مطلق T ، سرعت rms گرمایی (سرعت انتقالی در نتیجهٔ انرژی گرمایی) در امتداد مفروض z برابر است با

$$v_{\text{rms}} = \langle v_z^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{kT}{M}} \quad (۴۲ \text{ ب})$$

که در آن k ثابتی است که آن را ثابت بولتزمن می‌نامند. سرعت صوت را نیز می‌توان برحسب T و M بیان کرد. این رابطه به صورت زیر داده می‌شود

$$v_{\text{صوت}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma kT}{M}} \quad (۴۲ \text{ ج})$$

بنابراین، جدا از ضریب ثابت $\sqrt{\gamma}$ ، سرعت صوت با سرعت گرمایی rms یک مولکول در امتداد z برابر است. بنابراین اگر مولکولها قبل از آنکه برخوردهایی انجام دهند، مسافتهایی در حدود $\frac{1}{2}\lambda$ را به خط مستقیم طی می‌کردند، برای انتقال گرما "درست" به موقع می‌رسیدند. این مولکولها به طور متوسط در معادلهٔ (۴۲ الف) صدق نمی‌کردند، اما برخی از مولکولهای استثنائاً تند، در این معادله صدق می‌کردند. بنابراین مقدار قابل ملاحظه‌ای از گرما در یک نیم‌زمان تناوب می‌توانست منتقل شود، اما مولکولها به جای آنکه فاصله‌های در حدود $\frac{1}{2}\lambda$ را در خطوط مستقیم ببینند، راهشان را به صورت کتره‌ای و به طور زیگزاگ طی می‌کنند و فاصله‌های بین برخوردها فقط در حدود 10^{-5} cm (برای هوا در شرایط STP) است. تا مادامی که طول موج در مقایسه با 10^{-5} cm بلند است، قانون بی‌درو تقریب بسیار خوبی است. (کوئاهترین طول موج برای امواج صوتی شنوایی مربوط به 20000 cps $\approx v$ است به طوری که 1.6 cm $= \frac{10^4}{2} \times 10^4 \times 3.32 \approx v/\lambda$).

مثال ۳: امواج الکترومغناطیسی در یون سپهر و سرعتهای فاز که از c تجاوز می‌کند رابطه پاشندگی برای امواج الکترومغناطیسی در یون سپهر (تقریباً) برابر است با

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad (43)$$

که در آن c سرعت نور و $\omega_p = \sqrt{4\pi N} v_p$ بسامد زاویه‌ای نوسانهای طبیعی الکترونها در پلاسماست. برای بسامدهای محرک ω بالاتر از بسامد قطع ω_p ، یون سپهر محیطی پاشنده است و از این رو امواج الکترومغناطیسی، سینوسی هستند. چنین حالتی برای بسامدهای FM یا TV در حدود 10^6 Mc برقرار است. سرعت فاز برای یک موج پیشرونده با بسامد ω برابر است با

$$v_\varphi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2} \quad (44)$$

اما این سرعت از c یعنی سرعت نور در خلأ (و تمام امواج الکترومغناطیسی دیگر از جمله امواج 10^6 مگاسیکلی که اکنون در نظر گرفتیم) تجاوز می‌کند.

سرعت فاز به راستی از سرعت c تجاوز می‌کند، اما این بدان معنی نیست که با نظریه نسبیت مغایر است. به خاطر آورید که سرعت فاز v_φ فقط رابطه فاز بین حالت پایای نوسان هماهنگ یک جزء متحرک (مثلاً یک الکترون در یون سپهر) در مکان z_1 و نوسان جزء متحرک دیگر در مکان z_2 را به دست می‌دهد. در حالت پایای نوسان هماهنگ، به هیچ وجه نمی‌توان گفت که کدام نوسان در z_2 در "نتیجه" یک نوسان بخصوص در z_1 است. در واقع هیچ‌کدام. تمام سیستم در حالت پایاست که پس از یک زمان طولانی که در آن حالت‌های گذرا از بین رفته‌اند، به دست آمده است. بعداً (در فصل ۶) نشان خواهیم داد که اگر موجی را با تغییر دامنه‌اش مدوله کنید و بدین وسیله داده‌هایی (مثلاً یک برنامه تلویزیونی) را از طریق امواج الکترومغناطیسی بفرستید، در این صورت مدولاسیونها با سرعت فاز منتشر نمی‌شوند. مدولاسیونها با سرعت دیگری که سرعت گروه نامیده می‌شود، منتشر می‌شوند. سرعت گروه همیشه کمتر از c ، یعنی سرعت نور در خلأ است.

اکنون می‌خواهیم بفهمیم که چگونه می‌توان سرعت فاز بزرگتر از c به دست آورد. توجه کنید که "اشکال" (اگر قبول این مطلب برای شما مشکل است)، در مقدار ثابت ω_p^2 است که در رابطه پاشندگی ظاهر می‌شود. اگر ω_p^2 صفر بود، سرعت فاز با c برابر می‌شد و بنابراین از c تجاوز نمی‌کرد. این مقدار ثابت، نیروی بازگرداننده بر روی یک الکترون بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم است که به نوسانهای آزاد الکترون در پلاسما منجر می‌شود:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{M} \quad (45)$$

این نیرو مشابه مؤلفه گرانشی نیروی بازگرداننده در آونگهای جفت شده است. رابطه پاشندگی آونگهای جفت شده (در تقریب طول موج بلند) به صورت زیر است

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{K a^2}{M} k^2 \quad (46)$$

که همان شکل کلی رابطه پاشندگی را برای یون سپهر یعنی معادله (۴۳) دارد. حال فرض کنید که تمام فزهایی که آونگها را در آرایه خطی به یکدیگر جفت می کند قطع کنیم، یعنی $K = 0$ باشد. [به آسانی نمی توان تصور کرد که در معادله (۴۳) چگونه می تواند $c = 0$ باشد. از این نظر انتخاب آونگهای جفت شده آسانتر است.] در این صورت رابطه پاشندگی برای آرایه آونگها، سرعت فاز را به دست می دهد

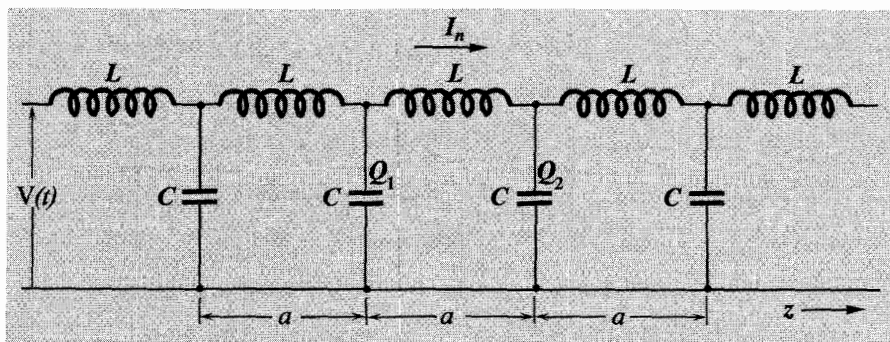
$$v_{\varphi}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{lk^2} \quad (47)$$

که با انتخاب lk^2 به اندازه کافی کوچک، می تواند بزرگتر از سرعت نور در خلأ باشد! به طور فیزیکی می دانیم چگونه باید آن را ترتیب داد. بین آونگها مطلقاً هیچ گونه جفت شدگی نیست. به آسانی یک ردیف طولانی از آونگها ترتیب می دهیم، به طوری که همگی با دامنه مساوی نوسان کنند و ثابت فاز بین یک آونگ و آونگ بعدی به طور یکنواخت افزوده شود، به طوری که طول موج (مسافتی که به ازای آن ثابت فاز به اندازه 2π افزایش پیدا کرده است) از حاصلضرب c در زمان تناوب مشترک آونگها بزرگتر شود. در این صورت سرعت فاز از c تجاوز می کند! این یک شوخی نیست. این یک سرعت فاز است و از c تجاوز می کند.

از طرف دیگر، اگر بخواهیم دامنه حرکت یکی از آونگهای دوردست را با وسیله ای تغییر دهیم، خواهیم دید که این عمل را به سرعت نمی توان انجام داد. اگر آونگها را به یکدیگر جفت کنیم، به طوری که برای اصلاح کردن رفتار یک آونگ دوردست به وسیله تغییر حرکت یک آونگ نزدیکتر راهی موجود باشد (منظور غیر از این راه که خود را به آونگ دوردست برسانیم)، در این صورت خواهیم دید که نمی توانیم یک مدولاسیون را با سرعت فاز در امتداد آرایه بفرستیم، زیرا سرعت فاز تا اندازه زیادی با جفت شدگی بین آونگها هیچ ربطی ندارد. در عوض، مدولاسیون با سرعت گروه، که از c کمتر است، حرکت می کند. ■

مثال ۴: خط انتقال نیرو - صافی پایین گذر

سیستم در شکل ۴-۳ نشان داده شده است. خط انتقال نیرو از انتهای ورودی ($z = 0$) به وسیله یک ولتاژ در حال نوسان هماهنگ تحریک می شود. از مقاومت صرف نظر می کنیم. در بخش ۲-۴



شکل ۳-۴ خط انتقال نیروی واداشته در نقطه $z = 0$ و امتدادیافته تا بینهایت.

یافتیم که شکل معادلات حرکت برای این سیستم، با شکل معادلات مربوط به نوسانهای طولی یک سیستم شامل جرم و فنریکسان است به شرطی که به جای K مقدار C^{-1}/a و به جای M مقدار L/a را قرار دهیم. رابطه پاشندگی در دامنه بسامد پاشنده (نوارگذر) از صفر تا $\omega_c = 2\sqrt{C^{-1}/L}$ به صورت زیر به دست آمد

$$\omega^2 = \frac{4C^{-1}}{L} \sin^2 \frac{1}{2} ka$$

در حد بسامد پایین ($k \approx 0$) یا حد پیوسته ($a \approx 0$) به جای $\sin \frac{1}{2} ka$ می توان $\frac{1}{2} ka$ را قرار داد. در این صورت، سرعت فاز به صورت زیر داده می شود

$$v_\varphi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{(C/a)(L/a)} \quad (48)$$

که در آن C/a ظرفیت خازنی موازی بر واحد طول و L/a القایندگی سری بر واحد طول است. بنابراین برای خط انتقال نیرو در حالت پیوسته (یا هر جفت رسانای موازی) در خلا، سرعت فاز برابر با معکوس جذر ظرفیت بر واحد طول ضربدر القایندگی بر واحد طول است و یک مقدار ثابت مستقل از بسامد است. بنابراین امواج ولتاژ و شدت جریان امواج غیرپاشنده اند. ■

آیا سرعت فاز این خط انتقال نیروی پایین گذر از c می تواند تجاوز کند؟ از مثال ۳ (مربوط به یون سپهر) می دانیم که بدون تناقض با نسبیت ممکن است سرعت فازی داشت که از c تجاوز کند. اما، حداقل در آن مثال، می توانستیم هر سرعت فازی را که می خواهیم داشته باشیم و این دلیل خوبی داشت: بسامد قطع پایین ω_p وجود داشت. دیدیم که حتی می توانیم سیستمی از آونگهای جفت شده با سرعت فاز متجاوز از c درست کنیم. اما در صافی پایین گذر کنونی، هیچ گونه

بسامد قطع مانند آن وجود ندارد. یعنی هیچ "نیروی بازگرداننده" بجز نیرویی که به وسیله وابستگی به خازنهای مجاور حاصل می‌شود، بر روی شدت جریانهای القاگرها اثر نمی‌کند. بنابراین نباید انتظار داشته باشیم که بتوانیم سرعت فازی که از c تجاوز کند، پیدا کنیم. اکنون معادله (۴۸) را در نظر می‌گیریم. سرعت فاز را به اندازه‌ای بزرگ که امکان دارد اختیار می‌کنیم. یعنی می‌خواهیم القاییدگیهای سری در واحد طول و ظرفیتهای موازی در واحد طول، هر چقدر که ممکن است کوچک باشند. با بررسی شکل ۳-۴ دیده می‌شود که با قرار دادن یک سیم صاف به جای هر القاگر متمرکز شده، القاییدگی بر واحد طول را به یک کمینه می‌توان رساند. ظرفیت موازی را هم به سادگی با برداشتن تمام ظرفیتهای متمرکز شده می‌توان بیشینه کرد. در ابتدا ممکن است تصور کنید که چون اکنون هر دو مقدار c/a و L/a صفر است، معادله (۴۸) برای v_p مقدار بینهایت به دست می‌دهد. این تصور نادرست است. نباید فراموش کرد که دو سیم صاف (که یکی جریان را می‌برد و دیگری آن را می‌آورد) خودالقا بر واحد طول غیرصفر دارند. این سیمها همچنین ظرفیت موازی بر واحد طول غیرصفر دارند. در حقیقت می‌توانید نشان دهید (شاید پس از کمی مرور کردن جلد دوم سری برکلی) که ظرفیت موازی بر واحد طول و القاییدگی سری بر واحد طول برای دو سیم موازی، صاف و بینهایت بلند با روابط زیر داده می‌شوند (مسئله ۴-۸)

$$\frac{C}{a} = \frac{1}{4 \ln \left(\frac{D+r}{r} \right)} \quad (\text{esu}) \quad (49)$$

$$\frac{L}{a} = \frac{4}{c^2} \ln \left(\frac{D+r}{r} \right) \quad (\text{esu}) \quad (50)$$

که در آن r شعاع هر سیم و D فاصله بین سیمها (از نزدیکترین سطح یک سیم تا نزدیکترین سطح سیم دیگر) است. از حاصلضرب معادلات (۴۹) و (۵۰) نتیجه قابل ملاحظه زیر به دست می‌آید

$$\frac{C L}{a a} = \frac{1}{c^2} \quad (51)$$

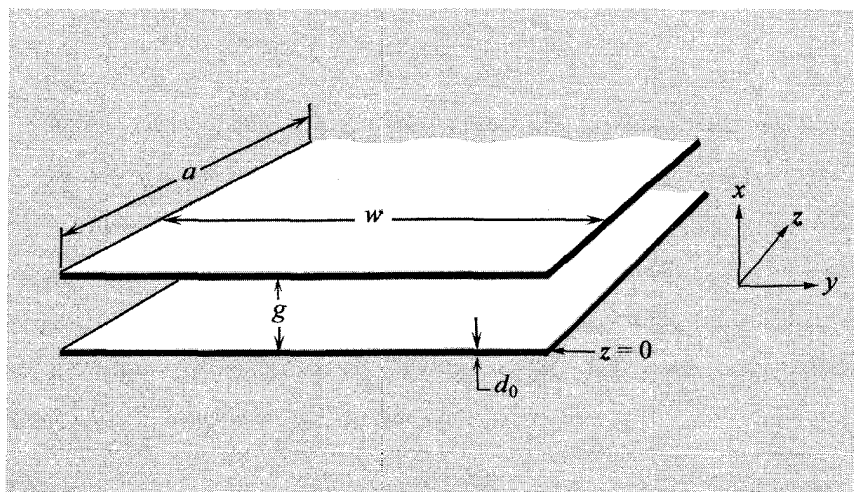
بنابراین از معادله (۴۸) نتیجه می‌شود که سرعت فاز برای امواج پیشرونده شدت جریان (یا ولتاژ) در یک خط انتقال نیروی شامل دو سیم موازی صاف، برابر c یعنی سرعت نور در خلا است.

سرعت فاز خطوط انتقال نیروی مستقیم و موازی. اکنون تصور کنید که خطوط انتقال نیروی دیگری با استفاده از "جفت سیمهای موازی" بنا کنیم که یکی شدت جریان را به انتهای خط می‌برد و دیگری آن را برمی‌گرداند. این خطوط را خطوط انتقال نیروی مستقیم و موازی می‌نامیم. در اینجا نباید تعجب کنید اگر دریابید که با وجودی که L/a و C/a کاملاً به شکل

هندسی مدار بستگی دارند، حاصلضرب آنها همیشه مانند معادله (۵۱) برابر $1/C^2$ است. این مطلب را بدین گونه می توان فهمید که فکر کنید چه اتفاقی می افتد اگر ولتاژ را در یک طرف خط انتقال نیرو ناگهان تغییر دهید. هر "جفت سیم" یک تپ ولتاژ با سرعت c حمل می کند. تپ حاصل از یک جفت سیم نمی تواند تپ حاصل از جفت دیگر را آشفته کند، زیرا امواج تا آنجا که ممکن است تند حرکت می کنند - چیزی نمی تواند از آنها بگذرد تا آنها آشفته شوند.

مثال ۵: خط انتقال نیرو با صفحات موازی

سیستم شامل دو صفحه رسانای موازی با پهنای w در امتداد y است که سطوح داخلی آنها با فاصله y در امتداد x از یکدیگر جدا شده اند و جریان را در امتداد z حمل می کنند، همان گونه که در شکل ۴-۴ نشان داده شده است. می خواهیم ظرفیت و القایدگی در واحد طول در امتداد z را محاسبه کنیم. بدین منظور پتانسیل $V(t)$ بین صفحات در $z = 0$ را ثابت اختیار می کنیم. بنابراین جریان ثابتی داریم. (می توان فرض کرد که صفحات در نقطه $z = \infty$ به یکدیگر متصل شده اند و به این ترتیب مطمئن می شویم که جریانی که به خارج می رود مسیر برگشت دارد. به گونه دیگر، به سادگی می توان تصور کرد که دو صفحه تا بینهایت ادامه دارند و هرگز به یکدیگر متصل نمی شوند - نتایج در هر دو حالت یکسان است).



شکل ۴-۴ خط انتقال نیرو با صفحات موازی. نیروی محرک (که نشان داده نشده است) در نقطه $z = 0$ یک اختلاف پتانسیل $V(t)$ بین صفحات ایجاد می کند و شدت جریان $I(t)$ را به وجود می آورد (که در هر لحظه) در جهت $+z$ در روی یک صفحه به خارج می رود و در جهت $-z$ از صفحه دیگر برمی گردد. بعد a یک طول اختیاری در امتداد z است که نسبت به طول موج پیشرونده کوچک اختیار شده است.

صفحه پایینی را مثبت و صفحه بالایی را منفی اختیار می‌کنیم. بنابراین میدان الکتریکی در جهت $+x$ است (به شکل ۴-۴ مراجعه کنید). فرض کنید w در مقایسه با y بزرگ است، به طوری که هیچ‌گونه "اثر لبه‌ای" وجود ندارد. مقدار جابه‌جایی بار بر روی سطحی از صفحات (که در شکل ۴-۴ مشخص شده است) به پهنای w در امتداد y و طول a در امتداد z ، برابر Q می‌گیریم. طول a اختیاری است اما اگر آن را به‌طور صریح وارد کنیم به اثبات رابطه کمک می‌کند. فرض می‌کنیم که ظرفیت این سطح از صفحات برابر C باشد. بنابراین، روابط زیر به دست می‌آیند (اگر به مطالعه دوباره احتیاج دارید به جلد دوم سری برکلی بخش ۳-۵ مراجعه کنید).

$$Q = CV \quad (52)$$

$$V = gE_x \quad (53)$$

$$E_x = \frac{4\pi Q}{wa} \quad (54)$$

که در آن معادلات (۵۲) و (۵۳) هم در سیستم واحدهای esu و هم در سیستم واحدهای MKS برقرار است و معادله (۵۴) برابر است با حاصلضرب 4π در بار الکتریکی بر واحد سطح و میدان الکتریکی در سیستم esu (استات‌ولت بر سانتیمتر) را به دست می‌دهد. از حل این سه معادله برای به دست آوردن c ، رابطه ظرفیت بر واحد طول به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{C}{a} = \frac{w}{4\pi g} \quad (55)$$

اکنون القاییدگی بر واحد طول یعنی L/a را به دست می‌آوریم. صفحه پایینی به پایانه مثبت یک منبع تغذیه و صفحه بالایی به پایانه منفی متصل شده است. بنابراین جریان I در صفحه پایینی در جهت $+z$ و در صفحه بالایی در جهت $-z$ جریان دارد. با استفاده از قاعده دست راست و شکل ۴-۴، می‌توانید نشان دهید که میدان مغناطیسی بین صفحات در جهت $+y$ است. به آسانی می‌توانید خود را متقاعد کنید که میدان الکتریکی در ناحیه خارجی صفحات برابر صفر است. فرض کنید خودالقای آن قسمت از صفحات که در شکل ۴-۴ مشخص شده برابر L باشد. شار مغناطیسی از سطح ga با رابطه زیر داده می‌شود

$$\Phi = B_y ga \quad (56)$$

میدان مغناطیسی B_y به صورت زیر است

$$\omega B_y = \frac{4\pi I}{c} \quad (57)$$

(به جلد دوم سری برکلی بخش ۶-۶ مراجعه کنید. ”چگالی جریان برگه“ که در آنجا تعریف شده است همان I/w است که در اینجا به کار برده ایم.) خودالقای L با رابطه زیر تعریف می شود [به جلد دوم سری برکلی بخش ۷-۸ معادلات (۷-۵۳) و (۷-۵۴) مراجعه کنید]

$$L \frac{dI}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

یعنی برای جریان ثابت I داریم

$$LI = \frac{1}{c} \Phi \quad (58)$$

از حل معادلات (۵۶)، (۵۷) و (۵۸) برای به دست آوردن L ، برای خودالقای بر واحد طول رابطه زیر پیدا می شود

$$\frac{L}{a} = \frac{4\pi g}{c^2 w} \quad (59)$$

شاید از اینکه خودالقای L با استفاده از جریان ثابت محاسبه کرده ایم نگران باشید چون می دانید که معادله ماکسول که معادله (۵۷) را برای جریانهای ثابت به دست می دهد، چنین است (به جلد دوم سری برکلی بخش ۷-۱۳ مراجعه کنید)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (60)$$

بنابراین از مؤلفه مربوط به جمله ”جریان جابه جایی“ یعنی $(1/c) \partial \mathbf{E} / \partial t$ صرف نظر کرده ایم. معلوم می شود که (مسئله ۴-۱۰) این حذف به شرطی قابل قبول است که ضخامت d هر صفحه در رابطه زیر صدق کند

$$d \ll \lambda \quad (61)$$

فرض می کنیم این شرط برقرار است.

سرعت فاز v_φ برای امواج پیشرونده [با استفاده از معادلات (۴۸)، (۵۵) و (۵۹)] به صورت زیر داده می شود

$$v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{(L/a)(C/a)}} = c \quad (62)$$

بنابراین معلوم می شود که سرعت فاز در دو مثال کاملاً مختلف خطوط مستقیم و موازی انتقال نیرو برابر با c است. پس می توان گفت که این یک نتیجه کلی است: سرعت فاز برای هر خط انتقال نیرو شامل دو رسانای موازی، مستقیم و یکسان که به تنهایی در خلأ قرار گرفته باشند، برابر c است. ■

۳-۴ ضریب شکست و پاشندگی

اگر فضای بین صفحات خط انتقال نیرو با صفحات موازی، با یک ماده دی‌الکتریک که ثابت دی‌الکتریک ϵ دارد پر شود، ظرفیت با ضریب ϵ افزایش پیدا می‌کند (به جلد دوم سری برکلی، بخش ۹-۹ مراجعه کنید). (چنین حالتی برای خط انتقال نیرو با سیمهای موازی نیز وجود دارد، بجز آنکه در این حالت باید تمام فضا را با دی‌الکتریک پر کرد، در مورد یک خازن با صفحات موازی، میدان الکتریکی خارج از ناحیه بین صفحات برابر صفر است و بنابراین اهمیتی ندارد که در آنجا ماده دی‌الکتریک وجود داشته باشد یا نباشد.) به همین ترتیب اگر ماده داخل شده تراوایی مغناطیسی μ داشته باشد، در این صورت خودالقا با ضریب μ اضافه می‌شود. [ما فقط موادی مانند شیشه، آب، هوا یا مواد مشابه را در نظر خواهیم گرفت که برای آنها تراوایی مغناطیسی الزاماً واحد است. بنابراین احتیاجی نیست که در اینجا مبحث فیزیک مواد مغناطیسی را مرور کنید (جلد دوم سری برکلی، فصل ۱۰). در مبحثی که به دنبال می‌آید ضریب ثابت μ را به‌کار خواهیم برد ولی هنگام در نظر گرفتن یک مثال واقعی آن را همیشه برابر با واحد قرار خواهیم داد.] بنابراین سرعت فاز امواج پیشرونده جریان و ولتاژ که در امتداد یک خط انتقال نیرو با صفحات موازی (با هر خط انتقال نیروی موازی و مستقیم دیگر) منتشر می‌شود و در آن تمام فضا با یک ماده با ثابت دی‌الکتریک ϵ و تراوایی مغناطیسی μ پر شده است، با رابطه زیر داده می‌شود

$$v_{\varphi} = \sqrt{\frac{a}{L} \frac{a}{C}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} v_{\varphi} \text{ (خلاً)}$$

یعنی

$$\boxed{v_{\varphi} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}} \quad (۶۳)$$

معادله (۶۳) را که برای حالت خاص امواج پیشرونده جریان و ولتاژ در یک خط انتقال نیرو به‌دست آوردیم، حقیقتاً یک نتیجه بسیار کلی است. این رابطه برای هر نوع موج الکترومغناطیسی که از میان ماده می‌گذرد برقرار است. در نتیجه، برای مثال، معادله (۶۳) برای نور مرئی که در داخل قطعه‌ای شیشه یا ماده دی‌الکتریک دیگری منتشر می‌شود، صادق است.

اکنون کلی‌بودن معادله (۶۳) را بررسی می‌کنیم. دیدیم که این رابطه برای امواج جریان و ولتاژ که در یک خط انتقال نیرو منتشر می‌شوند، برقرار است. اکنون فضای بین صفحات خط انتقال نیرو را با میدانهای الکتریکی و مغناطیسی پر می‌کنیم. (میدان الکتریکی مربوط به ولتاژ بین دو طرف صفحات است و میدان مغناطیسی مربوط به جریان در امتداد صفحات است.) بنابراین

طرحهای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی با همان سرعت امواج جریان و ولتاژ منتشر می‌شوند. (البته طرحهای میدان، خود نیز موج هستند— این طرحها در فضا و زمان تغییر می‌کنند و این مشخصه است که یک موج را تشکیل می‌دهد.) هنگامی که فضا خلأ است، سرعت برابر c است. اما می‌دانیم که c سرعت تمام امواج الکترومغناطیسی در خلأ است، خواه بین صفحات یک خط انتقال نیرو قرار داشته یا نداشته باشند. هنگامی که فضا با ماده‌ای با مقادیر ثابت ϵ و μ پر شود، سرعت امواج میدان الکتریکی و مغناطیسی (که امواج ولتاژ و جریان را همراهی می‌کنند) برابر $c/\sqrt{\epsilon\mu}$ است. به نظر معقول می‌آید که این مقدار، سرعت تمام امواج الکترومغناطیسی در چنین ماده‌ای است بدون توجه به چشمه آنها، یعنی آیا این امواج، امواج الکترومغناطیسی هستند که امواج ولتاژ و جریان در صفحات یک خط انتقال نیرو را همراهی می‌کنند و یا مثلاً امواج الکترومغناطیسی هستند که به وسیله لامپی در دوردست یا یک آنتن رادیو یا یک ستاره تولید شده‌اند. یکی از نکاتی که در فصلهای ۱ تا ۳ سعی کردیم اثبات کنیم این است که رابطه پاشندگی مستقل از شرایط مرزی است. این رابطه فقط به خواص ذاتی امواج و محیط بستگی دارد. امواج الکترومغناطیسی به وسیله ولتاژ اعمال شده به انتهای یک خط انتقال نیرو یا به وسیله یک فرستنده یا آنتن و بدون استفاده از یک خط انتقال نیرو می‌توانند تولید شوند. این امواج فقط نشانگر شرایط مرزی متفاوت یعنی راههای مختلف تحریک کردن سیستم هستند. (سیستم محیطی است شامل ماده‌ای با ضرایب ثابت ϵ و μ). قانون پاشندگی یعنی معادله (۶۳) مستقل از این شرایط است. این مطلب را ثابت نکردیم، اما امیدواریم که آن را موجه ساخته باشیم. (این مطلب را در فصل ۷ اثبات خواهیم کرد.) معادله (۶۳) برای تمام تابشهای الکترومغناطیس و به ویژه برای نور برقرار است. (جزئیات تابش الکترومغناطیس را در فصل ۷ مطالعه خواهیم کرد.) ضریب $\sqrt{\mu\epsilon}$ را ضریب شکست می‌نامند و با n نشان می‌دهند. شما باید تمام راههای زیر را برای بیان کردن اثر ضریب شکست یاد بگیرید. اگر مثال شیشه را به خاطر بسپارید، که ضریب شکست آن برای نور مرئی در حدود ۱٫۵ است، به شما کمک می‌کند تا سایر مثالها را درست در ذهن جای دهید. بدین ترتیب در تمام روابط زیر باید یک تصویر ذهنی تشکیل دهید، از اینکه در مقایسه شیشه با خلأ، چه کمتهایی بزرگتر و چه کمتهایی کوچکتر می‌شود

$$n = \frac{c}{v_\phi} = \sqrt{\mu\epsilon} \quad (64)$$

$$\lambda = \frac{1}{n} \frac{c}{\nu} = \frac{1}{n} \lambda \quad (\text{خلأ}) \quad (65)$$

$$k = n \frac{\omega}{c} = nk \quad (\text{خلأ}) \quad (66)$$

جدول ۱-۴ ضرایب شکست اجسام معمولی

جسم	ضریب شکست، $\lambda = 5893\text{\AA}$
هوا (STP)	1.0002926
آب (20°C)	1.33
شیشه کراون روی	1.52
شیشه سربی سنگین	1.90
لوسیت ^۱	1.50
نوار چسب شفاف اسکاچ	1.50

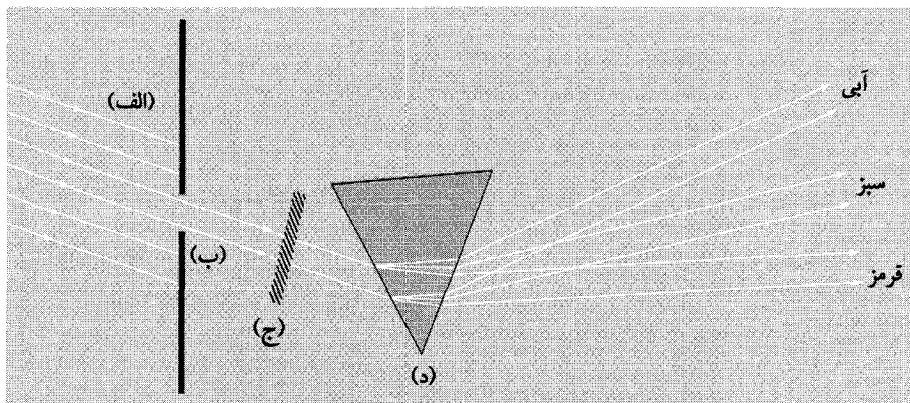
۱. لوسیت با املاي Leucite نوعی سیلیکات است به رنگ سفید خاکستری و با فرمول 4SiO_2 , Al_2O_3 , K_2O .

البته محیط بر بسامد نیروی محرک تأثیری ندارد و c سرعت نور در خلأ است. بنابراین اگر بخواهید طول موج در خلأ را نمایش دهید، فقط می‌توانید آن را c/ν به جای، مثلاً، λ ، بنامید. به همین ترتیب $\omega/c = k(\text{خلأ})$. برای شیشه، طول موج نور مرئی، فقط در حدود $\frac{1}{4}$ مقدار آن در خلأ است. تعداد موجها در هر سانتیمتر، یعنی $\sigma = 1/\lambda$ ، در شیشه 1.5 برابر خلأ است.

جدول ۱-۴ مقادیر ضریب شکست اجسام معمولی را برای نور زرد سدیم با طول موج $\lambda = 5893\text{\AA}$ ($1\text{\AA} = 10^{-10}\text{m}$) واحد آنگستروم $= 10^{-8}$ سانتیمتر) به دست می‌دهد. شما باید مقادیر تقریبی $n = \frac{4}{3}$ برای شیشه و پلاستیک، $n = \frac{4}{3}$ برای آب و $n = 1 + 0.3 \times 10^{-2} = 1.003$ برای هوا را به خاطر بسپارید.

تغییرات ضریب شکست با رنگ — پاشندگی. یک منشور (که یک قطعه گوه‌شکل از شیشه یا ماده شفاف دیگری است)، باریکه نور تابشی را به اندازه‌ای که به رنگ، یعنی طول موج نور بستگی دارد، خم می‌کند. رنگهای مختلف در یک باریکه موازی از نور "سفید" تحت زوایای مختلف خم شده و از این رو "پاشیده" می‌شوند، یعنی از منشور با زوایای مختلف خارج می‌شوند و بر روی پرده‌ای که در پشت منشور قرار گرفته طرح رنگین کمانمانندی را به وجود می‌آورند. این طرح در شکل ۵-۴ نشان داده شده است.

شکست و قانون اسنل. هر موقع که یک باریکه نور با یک رنگ مفروض از سطحی عبور کند که در آن سرعت فاز مقدار جدیدی داشته باشد، یعنی ضریب شکست n تغییر کند، باریکه نور خم شده یعنی شکسته می‌شود. مقدار شکست به n_1/n_2 ، یعنی نسبت ضریب شکست در محیط ۱ (که باریکه از آن می‌تابد) به ضریب شکست در محیط ۲ (که باریکه از آن می‌گذرد)، بستگی دارد. این مقدار همچنین به زاویه تابش که عبارت است از زاویه‌ای که باریکه نور تابشی با



شکل ۴-۵ پاشندگی. نور خورشید (الف) بر روی یک پرده کدر که دارای شکافی (ب) عمود بر صفحه کاغذ است می‌افتد. باریکه نور سفید که به وسیله شکاف تشکیل می‌شود ابتدا از میان یک صافی (ج) می‌گذرد که فقط یک رنگ از نور را عبور می‌دهد و سپس از میان یک منشور شیشه‌ای (د) می‌گذرد که نور را به اندازه‌ای که به رنگ آن بستگی دارد، خم می‌کند. آبی بیش از قرمز خم می‌شود. بدون صافی تمام رنگها وجود دارد و به همان ترتیبی که در یک رنگین‌کمان دیده می‌شود، گسترده می‌شوند.

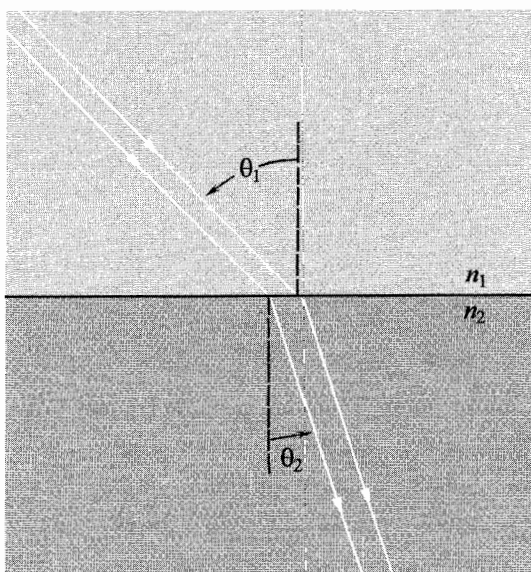
عمود بر سطح می‌سازد، بستگی دارد. زاویه شکست عبارت است از زاویه‌ای که باریکه شکست با عمود بر سطح می‌سازد. (زاویه تابش و زاویه شکست را همیشه زوایای مثبت بین 0° و 90° اختیار می‌کنیم.) این تعریفها در شکل ۴-۶ نمایش داده شده‌اند.

به آسانی می‌توان رابطه بین n_1/n_2 و θ_1 و θ_2 را به شرح زیر به دست آورد. "قله‌های موج" باریکه نور، یا "جبهه‌های موج"، همان‌طور که در امواج سه‌بعدی مورد بحث، نامیده می‌شوند، بر جهت حرکت باریکه نور عمود هستند. هنگامی که یک جبهه موج مفروض به مرزی می‌رسد (مانند رفتن از هوا به داخل شیشه) که در آن ضریب شکست افزایش پیدا می‌کند، یک انتهای جبهه موج قبل از انتهای دیگر به مرز می‌رسد از این رو سرعت فاز در یک انتها کاهش می‌یابد قبل از آنکه در انتهای دیگر کاهش پیدا کند. بنابراین زاویه جبهه موج تغییر می‌کند، چیزی شبیه تغییر زاویه صافی از رژه‌روندگان، هنگامی که حرکت یک انتهای صف کند می‌شود، در حالی که انتهای دیگر کند نمی‌شود. رابطه‌های هندسی در شکل ۴-۷ نشان داده شده‌اند.

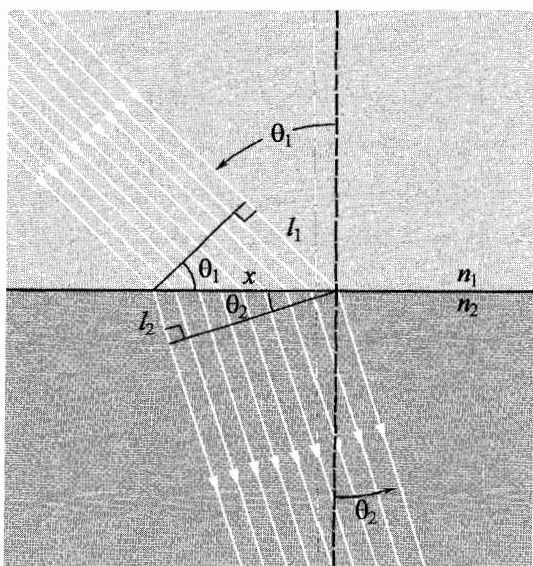
دو مثلث قائم‌الزاویه را که وتر مشترک x دارند، در شکل ۴-۷ در نظر بگیرید. از شکل دیده می‌شود که

$$l_1 = x \sin \theta_1, \quad l_2 = x \sin \theta_2 \quad (67)$$

زمانی که طول می‌کشد تا موج در محیط ۱ به اندازه مسافت l_1 و در محیط ۲ به اندازه مسافت l_2



شکل ۴-۶ نام‌گذاری. برای یک باریکه نور که در جهتی که با پیکان مشخص شده است حرکت می‌کند، θ_1 زاویه تابش و θ_2 زاویه شکست نامیده می‌شود.



شکل ۴-۷ شکست. اگر n_2 بزرگتر از n_1 باشد، انتهای جبهه موج در سمت راست (وقتی در امتداد جهت حرکت باریکه نگاه کنیم) مسافت l_2 را طی می‌کند که کوچکتر از مسافت l_1 است که به وسیله انتهای سمت چپ پیموده می‌شود. در این صورت، همان‌گونه که نشان داده شده است، باریکه به سمت عمود خم می‌شود.

منتشر شود را برابر t اختیار می‌کنیم. در این صورت

$$l_1 = \frac{ct}{n_1}, \quad l_2 = \frac{ct}{n_2} \quad (۶۸)$$

از این رو

$$ct = n_1 l_1 = n_2 l_2$$

بنابراین با استفاده از معادله (۶۷) داریم

$$\boxed{n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2} \quad (۶۹)$$

معادله (۶۹) قانون اسنل برای شکست نور نامیده می‌شود.

پاشندگی شیشه. اکنون از قانون پاشندگی در منشور نتیجه می‌گیریم که ضریب شکست نور آبی بیشتر از ضریب شکست نور قرمز است. در اینجا مقادیری برای شیشه کراون روی که از کتاب راهنمای فیزیک و شیمی برداشته شده، ذکر شده است. طول موجها برحسب واحد آنگستروم (10^{-8} cm) و میکرون (10^{-4} cm) هستند. بسامدها ($\nu = c/\lambda$) برحسب واحد 10^{14} Hz (یک هرتز = یک دور برثانیه) داده شده است.

جدول ۲-۴ را به‌طور تقریبی می‌توان خلاصه کرد و گفت که ضریب شکست شیشه در تمام دامنه بسامدهای نور مرئی در حدود ۱٫۵ است و مقدار پاشندگی، یعنی میزان تغییر n با λ ، برابر با حدود ۶ میل (یعنی حدود 0.006) افزایش ضریب شکست به‌ازای هر 1000 \AA کاهش طول‌موج است.

جدول ۲-۴ پاشندگی ضریب شکست در شیشه

n	$\nu (10^{14} \text{ Hz})$	$\lambda (\mu)$	$\lambda (\text{ \AA})$	نام رنگ
۱٫۵۳۹	۸٫۳۱	۰٫۳۶۱	۳۶۱۰	ماوراء بنفش نزدیک
۱٫۵۲۸	۶٫۹۲	۰٫۴۳۴	۴۳۴۰	آبی تیره
۱٫۵۲۳	۶٫۱۸	۰٫۴۸۶	۴۸۶۰	سبز - آبی
۱٫۵۱۷	۵٫۱۰	۰٫۵۸۹	۵۸۹۰	زرد
۱٫۵۱۴	۴٫۵۷	۰٫۶۵۶	۶۵۶۰	قرمز
۱٫۵۱۱	۳٫۹۱	۰٫۷۶۸	۷۶۸۰	قرمز خیلی سیر
۱٫۵۰۵	۲٫۵۰	۱٫۲۰	۱۲۰۰۰	فروسرخ
۱٫۴۹۷	۱٫۵۰	۲٫۰۰	۲۰۰۰۰	فروسرخ دور

شما می‌توانید پاشندگی آب را با یک منشور ساده که از دو تیغه شیشه‌ای میکروسکوپ، (به علاوه چسب شیشه و نوارچسب) ساخته شده است و یک صافی ارغوانی که نور سبز را جذب می‌کند ولی نورهای قرمز و آبی را عبور می‌دهد، مطالعه کنید. (به آزمایش خانگی ۴-۱۲ مراجعه کنید). چرا ضریب شکست با بسامد تغییر می‌کند؟ اکنون به مثال خط انتقال نیرو برمی‌گردیم. سرعت فاز برابر است با

$$v_{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(C/a)(L/a)}}$$

به‌طور کیفی، اگر C را افزایش دهیم، چون "نیروی بازگرداننده" یعنی نیروی محرکه الکتریکی $Q^{-1}C$ ، برای بار مفروض کمتر می‌شود، سرعت فاز کندتر می‌شود. همچنین اگر L را افزایش دهیم، چون "لختی" بزرگتر می‌شود، سرعت فاز کوچکتر می‌شود.

اجسامی را در نظر می‌گیریم که تراوایی مغناطیسی μ برابر 10^7 دارند. (برای شیشه اختلاف μ با واحد فقط در حدود پنجمین رقم اعشاری است). بنابراین فقط لازم است بفهمیم که چگونه

$$v_{\varphi} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{n} \quad (70)$$

به بسامد بستگی دارد.

در جلد دوم سری برکلی بخش ۹-۹ دیدیم که در خازنی که با دی‌الکتریک پر شده است و میدان الکتریکی $\mathbf{E}_Q(t)$ در نتیجه بار Q بر روی صفحات دارد، متوسط فضایی میدان محلی یعنی $\mathbf{E}(t)$ در دی‌الکتریک عبارت است از برهم‌نهی $\mathbf{E}_Q(t)$ و میدان $-\epsilon\pi\mathbf{P}(t)$ که از قطبیدگی الکتریکی القایی نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_Q(t) - \epsilon\pi\mathbf{P}(t) \quad (71)$$

که در آن $\mathbf{P}(t)$ گشتاور دوقطبی القایی بر واحد حجم است:

$$\mathbf{P}(t) = Nqx(t)\hat{x} \quad (72)$$

در اینجا N چگالی عددی بارهای قطبش‌پذیر (تعداد در واحد حجم)، q بار الکتریکی هر بار قطبش‌پذیر، $x(t)$ جابه‌جایی بار از مکان تعادلش و \hat{x} بردار واحد است. اکنون \mathbf{E} و \mathbf{P} ، \mathbf{E}_Q را در امتداد \hat{x} اختیار و نشانه‌های برداری را حذف می‌کنیم. از آنجا که ظرفیت C با رابطه $C = Q/V$ تعریف می‌شود و در آن V اختلاف پتانسیل بین صفحات است، دیده می‌شود که با وارد کردن دی‌الکتریک، کاهش میدان الکتریکی در نتیجه قطبیدگی القایی (با کاهش متناسبی در

مقدار V)، افزایشی در مقدار C به وجود می‌آورد. ضریبی که به وسیله آن C افزایش پیدا می‌کند، ثابت دی‌الکتریک یعنی ϵ نامیده می‌شود. بنابراین بر طبق معادلات (۷۱) و (۷۲)

$$\epsilon = \frac{E_Q}{E} = 1 + \frac{\Psi \pi P(t)}{E(t)} = 1 + \frac{\Psi \pi N q x(t)}{E(t)} \quad (73)$$

مثال ۶: مدل ساده "مولکول شیشه"

علی‌رغم سادگی مدلی که اکنون درست خواهیم کرد، این مدل تمام خصوصیات موفق هر مدل کلاسیکی (یعنی پیش از مکانیک کوانتومی) که برهم‌کنش میکروسکوپی نور با ماده را شرح می‌دهد، عملاً از خود بروز می‌دهد. این موفقیت ناچیزی نیست زیرا همان‌طور که خواهیم دید، مکانیک کلاسیک بسیاری از خصوصیات مشاهده‌شده این پدیده‌ها را پیش‌بینی می‌کند. دلیل آن است که بیان کوانتومی بر بیان کلاسیک مقدم است ولی لزوماً آن را نقض نمی‌کند؛ بیان کوانتومی، در حالت حدی شامل بیان کلاسیک می‌شود و بیان کلاسیک تحت شرایطی که در گستره وسیعی از پدیده‌های روزمره حاکم است کاربرد دارد.

فرض می‌کنیم که یک "مولکول شیشه" شامل یک هسته سنگین بی‌حرکت است که به آن یک بار q با جرم نسبتاً کوچک M ، متصل شده است. بار الکتریکی به وسیله فزنی با ثابت فزنی $M\omega_0$ متصل شده است. حرکت بار الکتریکی میراست که ثابت میرایی Γ دارد. بنابراین معادله حرکت بار q با رابطه زیر داده می‌شود

$$M\ddot{x} = -M\omega_0^2 x - M\Gamma\dot{x} + qE(t) \quad (74)$$

اکنون تصور می‌کنیم که میدان خارجی $E_Q(t)$ به‌طور هماهنگ با بسامد ω تغییر می‌کند. بنابراین $P(t)$ و $E(t)$ نیز با بسامد ω تغییر خواهند کرد. بنابراین میدان برای یک مولکول "نوعی" مفروض می‌تواند برابر زیر اختیار شود

$$E(t) = E_0 \cos \omega t \quad (75)$$

اما معادله (۷۴) همان نوسانگر واداشته هماهنگ است که در بخش ۳-۲ در نظر گرفته شد که در آن $F_0 = qE_0$ است. جواب $x(t)$ برای نوسانهای حالت پایا با رابطه زیر داده می‌شود

$$x(t) = A_{el} \cos \omega t + A_{ab} \sin \omega t \quad (76)$$

که در آن A_{ab} و A_{el} دامنه‌های جذبی و کشسان هستند. اکنون در مورد یک ماده شفاف "بی‌رنگ" مانند شیشه بی‌رنگ یا آب، هیچ تشدید مهمی برای مولکولهای شیشه در ناحیه نور مرئی وجود

ندارد. (به این دلیل است که شیشه شفاف با "بی‌رنگ" است). در مورد موادی مانند شیشه رنگی یا صافیهای ژلاتین در آزمایشگاه اپتیک، در ناحیه نور مرئی تشدیدهایی وجود دارد. در حقیقت جذب انرژی تابشی در نتیجه جمله $A_{ab} \sin \omega t$ در این تشدیدهاست که قسمتی از طیف رنگی را از نور سفید تابیده شده کم می‌کند و رنگ عبور داده شده را که می‌بینید باقی می‌گذارد. (اکنون لازم است که به یک چشمه نور "سفید" مانند یک لامپ ال‌تھابی با استفاده از توری پراش و صافیها نگاه کنید). ما نمی‌خواهیم رفتار صافیهای رنگی در بسامدهای نزدیک به تشدیدهای جذبی را در نظر بگیریم. بنابراین در معادله (۷۶) از جمله $A_{ab} \sin \omega t$ صرف‌نظر می‌کنیم. از فصل ۳ می‌دانیم که مادامی که در نزدیکی یک تشدید نیستیم، این فرض تقریب خوبی است. حالت کلی (شامل جذب) در مبحث تکمیلی ۹ بحث می‌شود.

بنابراین ضریب شکست با رابطه زیر داده می‌شود

$$n^2 = \epsilon = 1 + 4\pi Nq \frac{x(t)}{E(t)} = 1 + 4\pi Nq \frac{A_{el}}{E_0} \quad (77)$$

با فرض آنکه از تشدید دور هستیم، یعنی در معادله (۷۴)، $\Gamma = 0$ است، داریم [به معادله (۳-۱۷) بخش ۲-۳ مراجعه کنید]

$$A_{el} = \frac{F_0}{M} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{qE_0}{M} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

بنابراین رابطه زیر به دست می‌آید

$$\boxed{\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = n^2 = \epsilon = 1 + \frac{4\pi Nq^2}{M} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}} \quad (78)$$

برای آنکه بتوان این نتیجه را که براساس یک مدل ساده با یک تشدید تنهاست برای یک قطعه واقعی از شیشه به‌کاربرد، باید مؤلفه‌های وارد به $1 - n^2$ از تمام تشدیدهای مهم را جمع کنیم. در این حالت، ω در معادله (۷۸) را می‌توان به معنای یک بسامد تشدید "متوسط" تقریبی اختیار کرد. (به مسئله ۳-۲۰ مراجعه کنید). برای N باید حاصلضرب تعداد مولکولهای شیشه بر سانتیمتر مکعب در تعداد متوسط مؤلفه‌های تشدید در هر مولکول را به دست آورد. تعداد الکترونیهای که مؤلفه‌های اصلی را تشکیل می‌دهند با تعداد الکترونیهای "پوسته خارجی" یا "ظرفیت" تقریباً برابر است. هنگامی که ω در دامنه بسامدهای نور مرئی است، مهمترین تشدیدها در شیشه در بسامدهای "ماوراء بنفش" هستند که مربوط به طول موجهای $\lambda = c/\nu$ در حدود 1000 \AA (یعنی 10^{-5} cm) یا کمتر است. طول موجهای نور مرئی در حدود 5 برابر بیش از این مقدار هستند. بنابراین بسامدهای

ω نور مرئی نیز به طور مشابه ۵ برابر کوچکتر از بسامد متوسط تشدید یعنی ω است. بنابراین برطبق معادله (۷۸)، $1 - n^2$ مثبت است. توجه کنید که همانگونه که ω افزوده می شود (و همواره کمتر از ω باقی می ماند) مخرج $\omega^2 - \omega_0^2$ در معادله (۷۸) کوچکتر می شود و از آن رو $1 - n^2$ بزرگتر می شود. از این رو ضریب شکست نور آبی (بسامد بالاتر) از ضریب شکست نور قرمز بزرگتر است. این مطلب با نتیجه تجربی که یک منشور نور آبی را بیشتر از نور قرمز خم می کند، توافق دارد. ■

سرعتهای فاز که از c بزرگتر هستند. هنگامی که بسامد محرک ω تابش الکترومغناطیس (نور) کمتر از بسامد تشدید ω_0 باشد، نتایجی که در بالا داده شد، به دست می آید، یعنی: سرعت فاز کمتر از c است، طول موج کمتر از طول موج در خلأ است و افزایش بسامد به افزایش ضریب شکست منجر می شود. این حالت، پاشندگی "بهنجار" نامیده می شود. هنگامی که بسامد محرک بیشتر از بسامد تشدید است مانند حالت نور "ماوراء بنفش فرین" در شیشه، در آن صورت از معادله (۷۸) نتیجه می شود که $1 - n^2$ منفی است یعنی n^2 کمتر از یک است. اگر n^2 بین صفر و ۱ باشد، آنچه مجدداً به دست می آید پاشندگی بهنجار نامیده می شود. اما در این حالت سرعت فاز بیشتر از c است. طول موج بیشتر از طول موج در خلأ است و افزایش بسامد مجدداً به افزایش ضریب شکست منجر می شود. (هنگامی که بسامد سرانجام بسیار بزرگ شود، n سرانجام به ۱ افزایش پیدا می کند و رفتار نور مانند رفتارش در خلأ است.) چنین است که در گستره بسامدی $\omega_0 + \frac{1}{2}\Gamma < \omega < \omega_0 - \frac{1}{2}\Gamma$ ضریب شکست با افزایش ω کاهش می یابد. نام این حالت، پاشندگی "بی هنجار" است.

مبدأ فیزیکی سرعتهای فاز بزرگتر از c در رابطه حساسی است که بین فاز نیروی محرک $qE(t)$ و فاز نوسان $x(t)$ بار و داشته q برقرار است. می دانیم که اگر بسامد محرک پایتتر از بسامد تشدید باشد، در این صورت $x(t)$ می تواند نیروی $qE(t)$ را "دنبال" کند. بنابراین بارهای الکتریکی در همان جهت نیرو جابه جا می شوند و میدانی به وجود می آورند که می خواهد میدان اولیه را از بین ببرد. (این حالت برای هر بار، چه مثبت و چه منفی، برقرار است.) این میدان کاهش یافته، یک نیروی بازگرداننده کاهش یافته و از آن رو یک سرعت فاز کاهش یافته به وجود می آورد. از طرف دیگر، هنگامی که بار الکتریکی با بسامدی بالاتر از بسامد تشدیدش تحریک می شود، بار "عقب می ماند" و جابه جایی $x(t)$ همواره در خلاف جهت نیروی لحظه ای $qE(t)$ است. بنابراین، مثلاً هنگامی که توپی را که وقتی در تماس با دست شما نیست آزادانه حرکت می کند، از یک دست به دست دیگر می رانید، هنگامی که توپ در تماس با دست راست شما و در دورترین فاصله اش در سمت راست قرار دارد، بیشینه نیروی به سمت چپ وارد می کنید. مقدار جابه جایی در هر لحظه مفروض عمده در نتیجه نیروی وارد شده در یک نیم دور قبل از آن است. بنابراین میدان در

نتیجهٔ جابه‌جایی نسبی بارها سبب افزایش میدان اولیه می‌شود. این افزایش یک نیروی بازگرداننده افزوده شده و از این رو سرعت فاز بیشتری از سرعت فاز در خلأ به وجود می‌آورد.

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که دربارهٔ سرعت فاز بیشتر از c چیزی مرموزتر از حالت تویی که علی‌رغم آنکه به طرف چپ رانده می‌شود در طرف راست قرار دارد، وجود ندارد.

امواج نمایی - گسترهٔ بسامدی واکنشی. هنگامی که بسامد محرک ω از بسامد تشدید ω تجاوز کند، در این صورت برطبق معادلهٔ (۷۸)، n^2 کمتر از ۱ می‌شود. مادام که n^2 بین صفر و یک قرار دارد، امواج سینوسی داریم، یعنی k^2 یک عدد مثبت است. مسلماً برای ω به اندازهٔ کافی بزرگ (با فرض همیشگی $\omega > \omega$)، چنین حالتی موجود است، زیرا برای ω خیلی بزرگ، مقدار n^2 فقط اندکی کوچکتر از واحد است. اما بین $\omega = \omega$ و علاوه چندین Γ [به طوری که شکل تقریبی A_{ei} را که معادلهٔ (۷۸) از آن نتیجه شد بتوانیم به کار ببریم] و $\omega = \infty$ ناحیه‌ای وجود دارد که در آن از معادلهٔ (۷۸) مقدار n^2 منفی به دست می‌آید. چنین حالتی، برای گسترهٔ بسامدی زیر برقرار است

$$\frac{4\pi Nq^2}{M} > \omega^2 - \omega^2 \quad (79)$$

که در آن برای آنکه مطمئن شویم کاملاً بالای تشدید هستیم و می‌توانیم رابطهٔ تقریبی برای A_{ei} به کار ببریم. فرض می‌کنیم $\Gamma\omega \gg \omega^2 - \omega^2$ است، هنگامی که معادلهٔ (۷۹) برقرار باشد، در این صورت از معادلهٔ (۷۸) نتیجه می‌شود که n^2 منفی است، یعنی k^2 منفی است. این مطلب بدین معنی است که معادلهٔ دیفرانسیل برای بستگی فضایی امواج به شکل زیر که مربوط به امواج سینوسی است نیست

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} = -k^2 \psi(z, t) \quad k^2 > 0 \quad (80 \text{ الف})$$

بلکه در عوض به صورت زیر است

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} = +\kappa^2 \psi(z, t) \quad \kappa^2 > 0 \quad (80 \text{ ب})$$

که مربوط به امواج نمایی است. این حالتی است که قبلاً، مثلاً در سیستمی از آونگهای جفت شده، مطالعه کردیم. هنگامی که رابطهٔ پاشندگی یعنی k^2 برحسب ω ، برای یک مقدار منفی به دست می‌دهد، فقط نام k^2 را به $-\kappa^2$ تغییر می‌دهیم و توجه می‌کنیم که امواج به جای سینوسی، نمایی هستند. پس از آنکه حالت خاصی را که در آن ω برابر صفر است در نظر گرفتیم، به دست آوردن کیفی شرط وجود توابع نمایی یعنی معادلهٔ (۷۹) را بیان خواهیم کرد. این حالت خاص، آن طور که هم‌اکنون نشان خواهیم داد، قانون پاشندگی برای یون سپهر را به دست می‌دهد.

مثال ۷: پاشندگی یون سپهر

در بخش ۲-۴ (مثال ۲-۶) مدل ساده‌ای از پلاسمای یون سپهر کرة زمین عنوان کردیم و بسامد ω_p نوسانهای آزاد را در آنچه ”مد لبریز“ یون سپهر می‌توانست نامیده شود، به دست آوردیم (این مد با طول موج بینهایت مشابه با مد لبریز در یک ظرف آب است که در آن هنگامی که آب موج می‌زند، سطح آب مسطح باقی می‌ماند). در آن مدل، از حرکت یونهای مثبت و همچنین از هر گونه میرایی حرکت الکترونهای ”آزاد“ صرف نظر کردیم. (در حقیقت میرایی در نتیجه برخوردهای الکترونها با یونهاست که نتیجه آن انتقال انرژی از نوسان به انرژی ”گرمایی“ کاتوره‌ای است.) بنابراین معادله حرکت یک الکترون تنها با بار q و جرم M برابر است با

$$M\ddot{x} = qE(t) \quad (۸۱)$$

که در آن $E(t)$ میدان الکتریکی در مکان الکترون است. در نوسانهای آزاد، $E(t)$ کاملاً در نتیجه قطبیدگی در واحد حجم است:

$$E(t) = -4\pi P(t) = -4\pi Nqx(t) \quad (۸۲)$$

بنابراین برای نوسانهای آزاد از معادلات (۸۱) و (۸۲) نتیجه می‌شود

$$\ddot{x} = -\frac{4\pi Nq^2}{M}x \equiv -\omega_p^2 x \quad (۸۳)$$

بدین ترتیب اثبات قبلی معادله حرکت برای نوسانهای با بسامد پلاسمای یعنی ω_p را (به شکل خلاصه‌تری) تکرار کرده‌ایم. اکنون تصور کنید که پلاسمای از یک انتها به وسیله یک فرستنده رادیویی یا تلویزیونی تحریک می‌شود. (فرض کنید که شکل هندسی مدار از نوع مستقیم و موازی مانند خط انتقال نیرو با صفحات موازی است، به طوری که مسئله ما به حد ممکن ساده‌تر بشود) بنابراین $E(t)$ [مشابه با معادله (۷۱)] برهم‌نهدش زیر است

$$E(t) = E_{\text{فرستنده}} - 4\pi P(t) \quad (۸۴)$$

که در آن $E_{\text{فرستنده}}$ میدانی است که در غیاب الکترونهای آزاد موجود می‌بود. معادله حرکت الکترون مشابه با معادله حرکت الکترون در ”مولکول شیشه“ است، به شرطی که هم ”ثابت فزنی“ $K = M\omega_p^2$ و هم ثابت میرایی Γ را مساوی صفر قرار دهیم [به معادله (۷۴) مراجعه کنید]. بنابراین

الکترون آزاد دارای "بسامد تشدید صفر" یعنی $\omega = 0$ است. بدین ترتیب ضریب شکست، یعنی رابطه پاشندگی، تنها با قرار دادن $\omega = 0$ در معادله (۷۸) به دست می‌آید:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = n^2 = \varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (۸۵)$$

که در آن

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{M}$$

از ضرب کردن معادله (۸۵) در ω^2 معادله‌ای که قبلاً داشتیم به دست می‌آید

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad \omega^2 \geq \omega_p^2 \quad (۸۶)$$

در ناحیه بسامدی واکنشی، امواج نمایی داریم:

$$\omega^2 = \omega_p^2 - c^2 k^2 \quad \omega^2 \leq \omega_p^2 \quad (۸۷)$$

عادلاته است که بگوییم مدل ما از یون‌سپهر، مدل دقیقی نیست. برخی از فرضهای فیزیکی ما در بسامدهای گوناگون و به دلایل جالب مختلف، از اعتبار می‌افتد، و رابطه دقیق پاشندگی در حقیقت به‌طور قابل ملاحظه‌ای از آنچه که به‌وسیله معادلات (۸۶) و (۸۷) داده شد، پیچیده‌تر است. مثلاً در بسامدهایی که به‌اندازه کافی پایین است، یک الکترون، در هر دور نوسان به‌طور متوسط چندین برخورد با یونها انجام می‌دهد. در نتیجه نیروی میرایی نیروی غالب است، در حالی که در این مدل از میرایی صرف‌نظر کردیم. همچنین، در برخی بسامدها، تشدیدهایی وجود دارد بجز تشدید که در بسامد نوسان پلاسما یعنی ω_p روی می‌دهد. برای مثال، نوسانهای پلاسما برای یونهای مثبت سنگینتر و کندتر، در بسامدهای پایین مهم می‌شوند. (بسامد نوسان پلاسمای آنها در حدود 10^6 kc است.) به‌طور مشابه "بسامد سیکلوترون" که مربوط به حرکت دایره‌ای الکترونها در میدان مغناطیسی زمین (در حدود $\frac{1}{4}$ گاوس) است، اهمیت دارد.^۱

۱. برای بحث جالبی از نتایج تجربی به مقاله زیر

"Ionosphere Explorer I Satellite: First Observations from the Fixed-Frequency Topside Sounder," W. Calvert, R. Knecht, and T. Van Zandt, *Science* **146**, 391 (Oct. 16, 1964).

مراجعة کنید.

توضیح کیفی بسامد قطع پایین. می دانیم که در هر سیستمی (مثلاً در سیستمی از آونگهای جفت شده) بسامد پایبترین مد ممکن در نوسانهای آزاد، همان پایبترین بسامد ممکن برای وجود امواج سینوسی تحت یک نیروی محرک هماهنگ است. بنابراین برای نوسانهای واداشته، بسامد پایبترین مد، یک بسامد قطع پایین است. برای بسامدهای محرک پایبتر از بسامد قطع، امواج به جای سینوسی، نمایی هستند.

طول موج امواج سینوسی دقیقاً به ازای بسامد قطع بینهایت بلند می شود، درست همان گونه که فاصله تضعیف در مورد امواج نمایی بینهایت می شود. (در مورد آونگهای جفت شده، آونگهای همگی هم فاز حرکت می کنند.) بنابراین اگر بخواهیم برای هر قانون پاشندگی، بسامد قطع پایین را پیدا کنیم، فقط کافی است در رابطه پاشندگی $k = 0$ قرار دهیم. در این صورت بسامدی که با قرار دادن $k = 0$ از قانون پاشندگی به دست می آید، بسامد قطع است که آن را $\omega_{c.o.}$ می نامیم. در مثال بالا برای ضریب شکست، داریم [به معادله (۷۸) مراجعه کنید]

$$n^2 = \frac{e^2 k^2}{\omega^2} = 1 + \frac{4\pi N q^2}{M} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

با قرار دادن $k = 0$ بسامد قطع پایین به دست می آید:

$$\omega_{c.o.}^2 = \omega_0^2 + \frac{4\pi N q^2}{M} \quad (۸۸)$$

در اینجا نیز مانند همیشه، ω^2 نیروی بازگرداننده بر واحد جرم بر واحد جابه جایی است. طبق آنچه (در بالا) درباره یون سیهر آمد، این نیروی بازگرداننده (بر واحد جرم بر واحد جابه جایی) برای نوسانهای آزاد الکترونها در یون سیهر برابر $\omega_p^2 = 4\pi N e^2 / M$ است. این مقدار پایبترین مد بهنجار نوسان الکترونهاست و طول موج بینهایت دارد، یعنی تمام الکترونها هم فاز نوسان می کنند. بدیهی است که اگر اکنون به هر بار در حال نوسان به وسیله فتری با ثابت فتری $M\omega_0^2$ یک نیروی پیوندی بیفزاییم، در این صورت به هر بار فقط یک نیروی بازگرداننده (بر واحد جرم بر واحد جابه جایی) برابر ω_0^2 اضافه کرده ایم. بارها هنوز هم می توانند همگی به طور هم فاز نوسان کنند، به طوری که k هنوز صفر باقی بماند و سیستم در پایبترین مد نوسان آزادش قرار داشته باشد. از این رو دیده می شود که سمت راست معادله (۸۸) نیروی بازگرداننده بر واحد جرم بر واحد جابه جایی برای پایبترین مد نوسان آزاد را به دست می دهد. پس، این بسامد قطع پایین است. از این رو معادله (۸۸) و همچنین نامساوی معادله (۷۹) به دست می آیند، که هر دو در گستره بسامدی "واکنشی" که در آن امواج نمایی هستند، برقرار است.

در اینجا توضیح دیگری که حاوی خواص فیزیکی بیشتری برای بسامد قطع پایین در قانون پاشندگی برای ضریب شکست است، ارائه می‌دهیم. برای سادگی کار فرض می‌کنیم $\omega = \omega_0$. در این صورت "مدل" همان یون سپهر است. پرسش این است که چرا یک بسامد قطع پایین یعنی، معادله (۸۹) وجود دارد؟

$$\omega_{c.o.}^2 = \frac{4\pi Nq^2}{M} \quad (89)$$

ابتدا باید خاطر نشان کنیم که از بسیاری جهات یون سپهر (یا مدل ما از آن)، چیزی مانند یک رسانای فلزی است. در هر دو حالت الکترونها "آزادی" وجود دارند که اگر یک میدان الکتریکی در محیط برقرار شود، جریان الکتریکی را حمل خواهند کرد. برای یک رسانای فلزی در یک میدان الکتریکی "استاتیک" (یعنی میدانی که در آن بارها در حال سکون هستند و میدانها برحسب زمان همگی ثابت‌اند)، میدان الکتریکی در داخل رسانا برابر صفر است. دلیل آنکه میدان صفر است، این نیست که فلز به‌گونه‌ای میدان محرک خارجی را "مسدود" کرده یا آن را بلعیده است. میدان خارجی در حقیقت در آنجا و در داخل فلز قرار دارد. اما این میدان در نتیجه برهم‌نهی با میدان دیگر "خشی" می‌شود، یعنی میدانی که به‌وسیله بارهایی که به‌سطح فلز رانده شده‌اند، تولید شده است. اگر میدان محرک به‌طور ناگهانی از صفر اضافه شود، به‌علت لختی که الکترونها دارند، زمانی وقت لازم است تا الکترونهايي که در فلز هستند، شروع به حرکت کنند و میدان در ابتدا در داخل فلز برابر صفر نیست بلکه میدانی است که در نتیجه میدان محرک خارجی است. پس از آنکه بارها حرکت کرده و به‌حالت تعادل رسیدند، میدانی تولید می‌کنند که با میدان محرک بر هم نهاده شده و برآیند صفر به‌وجود می‌آورد. (اگر چنین نشود، پس هنوز در حالت تعادل نیستند. بارها آنقدر حرکت می‌کنند تا این حالت به‌وجود آید.) زمانی را که برای رسیدن به‌حالت تعادل طول می‌کشد "زمان واهلس میانگین" می‌نامیم و به τ نمایش می‌دهیم. اگر میدان محرک در زمانی که در مقایسه با τ کوتاه باشد، معکوس شود در این‌صورت جریان بار قبل از آنکه مجبور شود در جهت دیگر به‌عقب جریان یابد، برای خشی کردن میدان وقت ندارد. بنابراین بسامد قطع در حدود τ^{-1} خواهد بود. برای تابش الکترومغناطیس با بسامدی که در مقایسه با بسامد قطع τ^{-1} زیاد باشد، الکترونها وقت کافی برای خشی کردن میدان و رساندن آن به‌صفر، ندارند. بنابراین محیط برای بسامدهای بالاتر از قطع "شفاف" خواهد شد. به‌ازای بسامد "بینهایت" الکترونها برای حرکت کردن ابداً وقت ندارند و تابش مانند تابش در خلأ عبور می‌کند. اگر سیستم از یک انتها با بسامدهایی کمتر از بسامد قطع یعنی τ^{-1} تحریک شود، سیستم مانند یک صافی بالاگذر که با بسامد پایینتر از قطع تحریک شده، عمل خواهد کرد. در نقاطی که به انتهای تحریک شده نزدیک هستند،

میدان عملاً همان میدان محرک است. در نقاطی که نسبت به انتهای واداشته دور هستند، حرکت الکترونها برای خنثی کردن میدان تأیید شده وقت کافی دارد، و با افزایش فاصله، میزان خنثی شدن بیشتر و بیشتر می شود — تضعیف نمایی.

اکنون زمان واهلش τ را تخمین می زنیم. تصور کنید که میدان E از زمان صفر شروع شود. این میدان شتابی که با رابطه $\frac{dv}{dt} = \frac{qE}{M}$ داده می شود، تولید می کند. اگر این شتاب در طول زمان t ثابت می ماند، الکترونها فاصله $\frac{1}{2}at^2$ را می پیموندند، که در آن a شتاب است. با حذف ضریب $\frac{1}{2}$ برای این برآورد تقریبی، جابه جایی x بر حسب زمان t با رابطه زیر داده می شود

$$x \approx \frac{qE_0}{M} t^2 \quad (90)$$

تصور کنید که حرکت بارها به وسیله "سطوح" پلاسما (یون سپهر) یا فلز محدود شود. بار کلی اضافه شده به یک سطح و کم شده از سطح دیگر برابر است با

$$Q = Nqx A \quad (91)$$

که در آن N چگالی عددی، A مساحت سطح مقطع و x جابه جایی است. بار Q در یک سطح و بار $-Q$ در سطح دیگر، یک میدان یکنواخت E تولید می کنند که با رابطه زیر داده می شود

$$E = 4\pi \frac{Q}{A} = 4\pi Nqx \approx 4\pi Nq \frac{qE_0 t^2}{M} \quad (92)$$

اگر زمان t به اندازه کافی طولانی باشد، به طوری که E (میدان حذف کننده) زیاد شده و برابر E_0 (میدان محرک) شود، در این صورت به حالت تعادل رسیده ایم. بنابراین زمان واهلش τ با قرار دادن $E \approx E_0$ و $t \approx \tau$ در معادله (۹۲) به دست می آید:

$$\omega_{c.o.}^2 \approx \tau^{-2} \approx \frac{4\pi Nq^2}{M}$$

که با نتیجه دقیق، یعنی (۸۹) توافق دارد.

بحث کیفی ضریب شکست در گستره بسامدی پاشنده. یک ذره باردار مجزا شده که در خلأ نوسان می کند، امواج الکترومغناطیسی گسیل می کند که در خلأ با سرعت نور حرکت می کنند. بنابراین هنگامی که موج نور تابش، یک ذره باردار تنها را تحریک می کند تا در حالت پایا نوسان کند، بار در حال نوسان تابشی گسیل می دارد که در خلأ با سرعت c حرکت می کند. میدان تابش بار در حال نوسان با میدان تابش اولیه برهم نهاده شده و برابندی به وجود می آورد. هنگامی که تعداد زیادی بار وجود دارد،

مثلاً در یک قطعه شیشه (یا در یون سپهر)، هر بار به وسیله میدان الکتریکی محلی در مجاورت بار، تحریک می‌شود. این میدان به نوبه خود، نتیجه برهم‌نهی میدانی است که اگر هیچ بار ("میدان تابش اولیه") نبود، وجود داشت، به علاوه میدانهایی که به وسیله تمام بارهای در حال نوسان تابش شده‌اند. هر بار در حال نوسان (مثلاً در یک قطعه شیشه) امواجی تابش می‌کند که در خلا با سرعت نور حرکت می‌کنند، با وجودی که امواج "از میان شیشه می‌گذرند"، چگونه ممکن است که برهم‌نهی امواجی که همگی سرعت یکسان c ، بسامد یکسان ν و بنابراین طول موج یکسان c/ν دارند، برابندی بدهد که طول موجش λ برابر c/ν نباشد و سرعت فازی آن با c اختلاف داشته باشد؟ پاسخ در لغت "فاز" است. همه چیز به فاز نسبی بین میدان تابش شده به وسیله یک بار در حال نوسان تنها و میدانی که در حال تحریک کردن آن است، بستگی دارد. اگر میدان تابش شده به وسیله بار واداشته دقیقاً با تابش محرک هم فاز می‌بود، در این صورت در یک نقطه مشاهده در دور دست میدان کلی (به وسیله آنچه که "تداخل سازنده" نام دارد) افزایش پیدا می‌کرد، اما هیچ‌گونه تغییر فازی در میدان کلی به وجود نمی‌آورد و در نتیجه بر سرعت فاز تأثیری نداشت. به همین ترتیب، اگر میدان تابش شده به وسیله بار، میدان محرک (یا میدان تابش اولیه) به اندازه 180° درجه اختلاف فاز داشت، برهم‌نهی میدانهای تابش شده و محرک برابندی به دست می‌داد که از میدان تابش اولیه (به وسیله "تداخل مخرب") کمتر می‌بود، اما تغییر فاز به وجود نمی‌آورد. برای آنکه تابش حاصل از بارها بتواند فاز برابند را تغییر دهد، باید شامل مؤلفه‌ای باشد که یا $+90^\circ$ درجه و یا -90° درجه با میدان محرک اختلاف فاز داشته باشد. ثابت فاز برابند عمده‌تاً به وسیله میدان محرک تعیین می‌شود (زیرا میدان محرک از مؤلفه بینهایت کوچک حاصل از بارتهایی که در نظر می‌گیریم، بزرگتر است)، اما ثابت فاز به وسیله مؤلفه حاصل از بار در حال نوسان اندکی "کشیده" می‌شود.

بنابراین تصور کنید که مثلاً در یک نقطه ثابت در دور دست نسبت به بار واداشته، میدان در نتیجه تابش اولیه برابر $E_0 \cos \omega t$ است. یعنی میدان الکتریکی که در نقطه مشاهده بدون بودن شیشه وجود دارد. این میدان مثلاً در نتیجه الکترونیهای در حال نوسان یک لامپ چراغ دور است. هنگامی که شیشه بین لامپ چراغ دور و ناظر قرار می‌گیرد، مؤلفه میدان حاصل از الکترونیهای در حال نوسان لامپ چراغ هنوز با رابطه $E_0 \cos \omega t$ داده می‌شود و هنوز هم (از میان شیشه و همه چین) با سرعت c عبور می‌کند. اکنون تصور کنید که مؤلفه کوچکی از مولکولهای در حال نوسان شیشه با میدان $\mathcal{E} \sin \omega t$ داده می‌شود که در آن \mathcal{E} بسیار کوچک و (مثلاً) مثبت است. این تابش نیز از میان بقیه شیشه با سرعت c عبور می‌کند، اما این تابش طبق فرض، نسبت به تابش محرک 90° درجه تغییر فاز دارد. در نقطه مشاهده برابند میدان در حال نوسان از برهم‌نهی زیر به دست می‌آید:

$$E(t) = E_0 \cos \omega t + \mathcal{E} \sin \omega t$$

برای $E \ll \mathcal{E}$ رابطه بالا معادل است با

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t - \delta) \quad \delta \equiv \frac{\mathcal{E}}{E_0} \ll 1$$

همان‌گونه که به آسانی می‌توانید (با استفاده از $\cos \delta \approx 1$ و $\sin \delta \approx \delta$)، به این نتیجه برسید. از این رو می‌بینیم، هنگامی که شیشه وجود دارد در نقطه مشاهده مقدار برآیند $E(t)$ تغییر فاز δ دارد. ناظر در نقطه مشاهده برای آنکه فاز $E(t)$ یک مقدار مفروض را به دست آورد باید "مدت بیشتری صبر کند" یعنی باید صبر کند تا $\omega t - \delta$ به مقداری برسد که اگر شیشه وجود نداشت ωt به آن مقدار می‌رسید. بنابراین چنین شخصی می‌گوید که سرعت فاز کمتر از c است. دقت کنید که اگر مؤلفه شیشه با $\cos \omega t$ متناسب بود، در این صورت هیچ‌گونه تغییر فازی وجود نمی‌داشت و بنابراین برآیند برابر بود با

$$E(t) = (E_0 + \mathcal{E}) \cos \omega t$$

و سرعت فاز برابر با مقدار آن در خلأ یعنی c می‌شد. در عوض، تجربه نشان می‌دهد که علی‌رغم این حقیقت که هر مؤلفه برهم‌نهی با سرعت c حرکت می‌کند، سرعت فاز منتهج به c تفاوت دارد. یعنی در یک زمان مفروض، تابش حاصل از مولکولهای شیشه با تابش حاصل از لامپ چراغ که در همان زمان وارد می‌شود باید به اندازه $\pm 90^\circ$ درجه اختلاف فاز داشته باشد.

تنها چیزی که باقی می‌ماند این است که نشان دهیم که یک مؤلفه بینهایت کوچک از مولکولهای در حال تابش شیشه به راستی با میدان محرک به اندازه $\pm 90^\circ$ درجه اختلاف فاز دارد. این مطلب را در زیر نشان می‌دهیم. تصور کنید که میدان تابش (اولیه) برابر $E_0 \cos \omega t$ است. بنابراین بار در حال نوسان برای مقادیر ω دور از تشدید، دارای جابه‌جایی $x(t) = A_{el} \cos \omega t$ است. در فصل ۷، خواهیم آموخت که تابش حاصل از یک بار در حال نوسان با "شتاب تأخیری" متناسب است. یعنی هنگامی که تابش در حال گسیل شدن است میدان تابش شده در فاصله z از بار، با شتاب بار در زمان زودتر یعنی $t - (z/c)$ متناسب است. در حرکت هماهنگ شتاب حاصل ضرب $\omega^2 -$ در جابه‌جایی است. بنابراین به این نتیجه وحشتناک می‌رسیم که تابش حاصل از هر یک از بارهای در حال نوسان با $\cos \omega t$ متناسب است در حالی که به این نتیجه رسیدیم که اگر خواهیم سرعت فازی که با c اختلاف دارد به دست آوریم، تابش مذکور باید با $\sin \omega t$ متناسب باشد اگر قرار باشد سرعت فاز را متفاوت با c به دست آوریم! دلیل آن چنین است: تصور کنید که یک "موج تخت" از تابشی داریم که در جهت z منتشر می‌شود. بنابراین در یک لحظه مفروض نه فقط مؤلفه حاصل از مولکولی که مستقیماً در مسیر نقطه مشاهده است، بلکه تمام مؤلفه‌های حاصل از تیغه نازکی از شیشه‌ای، عمود بر جهت انتشار موج، را باید در نظر بگیریم. همان‌گونه که هم‌اکنون دیدیم،

نزدیکترین مولکول به نقطه مشاهده با مؤلفهٔ بینهایت کوچکی که با میدان محرک هم فاز است (با صرف نظر کردن از علامتهای مثبت یا منفی)، در برهم نهش شرکت می کند. اما سایر مولکولهای تیغه دورتر هستند. برای رسیدن مؤلفه های آنها (که همیشه با سرعت c حرکت می کنند) مدت بیشتری طول می کشد. هنگامی که بر روی یک تیغه با عرض بینهایت انتگرال می گیریم، (همان گونه که در فصل ۷ نشان خواهیم داد)، نتیجه می گیریم که مؤلفه خالص حاصل از تیغه دارای فازی است که 90° درجه عقبتر از فاز نزدیکترین مولکول است. به عبارت دیگر، مولکول متوسط تیغه نسبت به نزدیکترین مولکول به طور مؤثر، یک ربع طول موج دورتر از نقطه مشاهده است. بدین ترتیب، منشأ 90° درجه اختلاف فاز را پیدا کردیم و می توانیم ببینیم که چگونه بسیاری از امواج که همگی با سرعت c حرکت می کنند، می توانند برهم نهاده شده و برابندی به وجود آورند که سرعت فاز آن c نیست. پس این پرسش که آیا سرعت فاز بیشتر یا کمتر از c است فقط مربوط به آن است که آیا نوسانهای واداشته با تابش تحریک کننده هم فاز است یا 180° درجه اختلاف فاز دارد. این مطلب همان گونه که خواهیم دید، بستگی به آن دارد که بسامد محرک پایینتر یا بالاتر از بسامد شدید است. از آنجا که تمام مولکولها در حالت پایا هستند، دربارهٔ این حقیقت که سرعت فاز می تواند از c تجاوز کند، نباید "نگران" بود.

نام گذاری: چرا همیشه \mathbf{E} را در نظر می گیریم و از \mathbf{B} صرف نظر می کنیم؟ همیشه خیر، اما اغلب این کار را می کنیم. قسمتی از دلیل اینکه ما معمولاً اثر امواج الکترومغناطیسی را بر حسب \mathbf{E} بیان می کنیم و در فرمول \mathbf{B} را در نظر نمی گیریم، به شرح زیر است: هنگامی که امواج الکترومغناطیسی با ذرهٔ بارداری با بار q و سرعت \mathbf{v} برهم کنش می کند، نیروی وارد بر ذره با نیروی لورنتس (جلد دوم، سری برکلی، بخش ۵-۲) داده می شود

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$$

در مورد یک موج پیشروندهٔ الکترومغناطیسی در خلأ، نتیجه می شود که \mathbf{E} و \mathbf{B} اندازهٔ لحظه ای یکسان دارند. بنابراین اندازهٔ نیروی حاصل از \mathbf{B} از اندازهٔ نیروی حاصل از \mathbf{E} با یک ضریب در حدود $|v/c|$ کوچکتر است. پس نتیجه می شود هنگامی که \mathbf{E} و \mathbf{B} از چشمه های نور معمولی یا حتی از یک لیزر قوی حاصل می شوند، میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} به اندازهٔ کافی ضعیف هستند به طوری که بیشینهٔ سرعت $|v|$ که در حرکت حالت پایای الکترونها واداشته در یک قطعه ماده معمولی به دست می آید، در مقایسه با c ناچیز است. از این رو مثالهای فیزیکی بسیار زیادی وجود دارند که در آنها می توانیم از نیروی حاصل از \mathbf{B} صرف نظر کنیم. به این دلیل است که بر \mathbf{E} تأکید می کنیم. گاهی اوقات با وجودی که \mathbf{B} بر طبق بحث بالا کوچک است، اثرهای آن می تواند غالب باشد.

البته اگر B و E حاصل از تابش (امواج پیشرونده) نبوده و (مثلاً) حاصل از میدانهای استاتیک در نتیجه بارها و شدت جریانهای مستقل باشند، در این صورت B و E مجبور نیستند که اندازه مساوی داشته باشند. مثلاً می‌توانیم $|E| = 0$ و $|B| = 10^6 \text{ kG}$ داشته باشیم.

۴-۴ امپدانس و شار انرژی

در مطالعه مدها و امواج ساکن، دریافتیم که یک محیط پیوسته را می‌توان با دو پارامتر مشخص کرد، یکی "نیروی بازگرداننده" و دیگری "لختی" است. در یک تار پیوسته، کشش در حالت تعادل T ، نیروی بازگرداننده، و چگالی جرمی ρ_0 ، لختی را به دست می‌دهد. در یک خط انتقال نیروی پایین‌گذر، پارامترهای مربوط عبارت از $(C/a)^{-1}$ ، یعنی معکوس ظرفیت موازی بر واحد طول و L/a ، یعنی القابیدگی بر واحد طول، هستند. در امواج طولی بر روی یک فنر، پارامتر نیروی بازگرداننده برابر Ka و پارامتر لختی $M/a = \rho_0$ است. در امواج صوتی، "خاصیت فیزی" با ρ_0 و لختی با چگالی جرمی حجمی ρ_0 داده می‌شود. در تمام حالتها، مدهای امواج ساکن به روشی که مانند یک نوسانگر هماهنگ ساده است، رفتار می‌کنند (در آونگهای جفت شده یا یک خط انتقال نیروی نوارگذار، به پارامتر دیگری یعنی بسامد قطع پایین، احتیاج است).

امواج پیشرونده رفتار کاملاً متفاوتی با امواج ساکن دارند. این امواج انرژی و اندازه حرکت را منتقل می‌کنند. روابط فاز، با روابط فاز امواج ساکن متفاوت است. یک سیستم گسترده که امواج پیشرونده را حمل می‌کند مانند "یک نوسانگر هماهنگ بزرگ" رفتار نمی‌کند، در صورتی که به هنگام حمل امواج ساکن، رفتارش چنین است. بنابراین پارامترهای نوسانگر هماهنگ، یعنی نیروی بازگرداننده و لختی، برای بیان محیطی که امواج پیشرونده حمل می‌کند، بهترین پارامترهای فیزیکی نیستند. کمیتی که محیطی را که امواج پیشرونده حمل می‌کند مشخص می‌کند، سرعت فاز یعنی v_φ است. برای امواج عرضی روی یک تار، این کمیت با رابطه زیر داده می‌شود

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{T}{\rho_0}} \quad (93)$$

که درست یک ترکیب مشخصی از پارامترهای نیروی بازگرداننده و لختی یعنی T و ρ_0 است. ترکیب مستقل دیگری از T و ρ_0 با رابطه زیر داده می‌شود

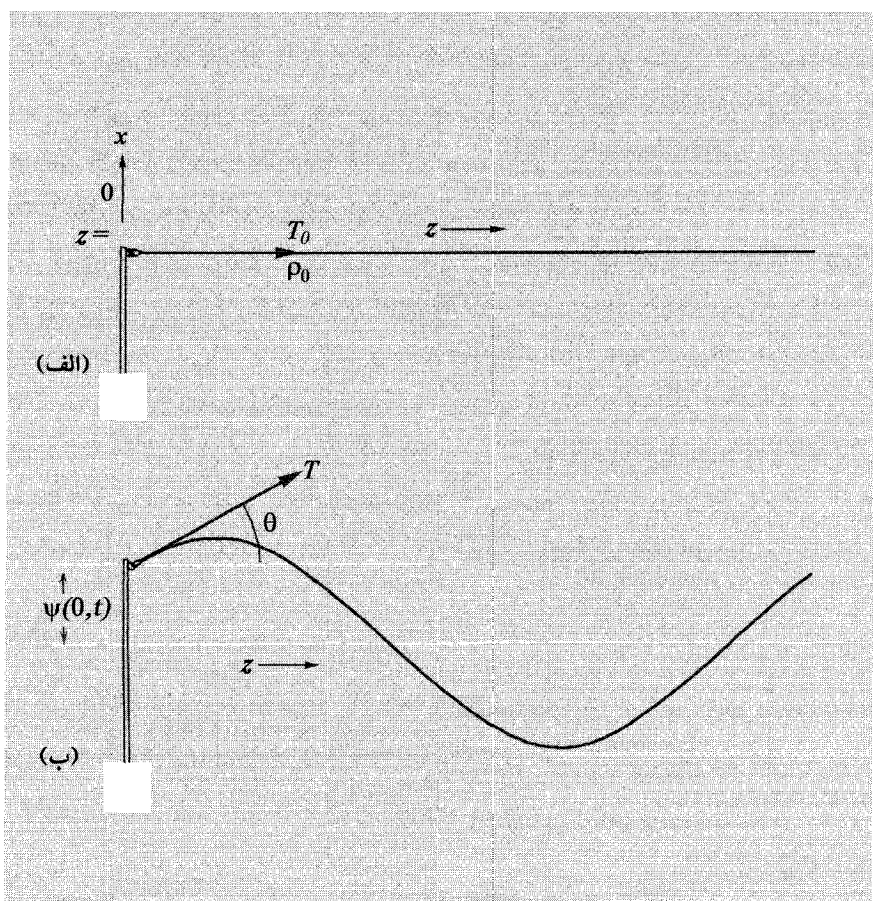
$$Z = \sqrt{\rho_0 T} \quad (94)$$

این کمیت برای امواج پیشرونده بر روی یک تار پیوسته امپدانس مشخصه یا به‌سادگی امپدانس نامیده می‌شود. همان‌طور که نشان خواهیم داد، امپدانس آهنگ تابش انرژی بر روی تار را به‌وسیله

نیروی محرک مفروض تعیین می‌کند. بنابراین نتیجه می‌شود که سرعت فاز و امپدانس دو پارامتر طبیعی هستند که امواج پیشرونده را در یک محیط مشخص توصیف می‌کنند.

مثال ۸: امواج پیشرونده عرضی در تار پیوسته

تصور کنید که تار پیوسته‌ای داریم که از چپ به راست کشیده شده است و انتهای چپ آن در $z = 0$ به وسیله یک نیروی در حال نوسان هماهنگ به طور عرضی تحریک شده است. سیستم در شکل ۸-۴ نشان داده شده است. اتصالی که به وسیله آن نیروی محرک به فنر متصل می‌شود یعنی "پایانه خروجی فرستنده" را با حرف چ (چپ) نمایش می‌دهیم و فنر بلافاصله در تماس با



شکل ۸-۴ گسیل امواج پیشرونده عرضی. (الف) تعادل. (ب) حالت کلی.

پایانه را با حرف r (راست) نشان می‌دهیم. در حالت تعادل [شکل ۴-۸ (الف)]، بر روی چ هیچ مؤلفه عرضی نیرو وجود ندارد. نیرو در امتداد z ، کشش در حالت تعادل یعنی T_0 است. در پیکربندی کلی شکل ۴-۸ (ب)، کشش فنر برابر T است. مؤلفه عرضی نیرویی که به وسیله فنر بر پایانه خروجی فرستنده وارد می‌شود یعنی F_x (ر بر چ) با رابطه زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} F_x(\text{ر بر چ}) &= T \sin \theta \\ &= (T \cos \theta) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= T \tan \theta \\ &= T_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \quad (95)$$

نتیجه (۹۵) برای یک فنر اسلینکی ایده‌آل که در آن $T = T_0 / \cos \theta$ است دقیقاً برقرار است. این رابطه همچنین برای هر فنری، به شرط اینکه زاویه θ کوچک باشد، برقرار است. ■

امپدانس مشخصه. اکنون فرض می‌کنیم که فرستنده یک محیط کاملاً باز (تار) را در حالت پایا تحریک می‌کند، به طوری که امواج پیشرونده‌ای در جهت $+z$ می‌فرستد. در این صورت $\psi(z, t)$ به شکل زیر خواهد بود

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz) \quad (96)$$

از مشتق‌گیری نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = kA \sin(\omega t - kz) \quad (97)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kz) \quad (98)$$

مقایسه معادلات (۹۷) و (۹۸) و با استفاده از $v_\varphi = \omega/k$ می‌بینیم که برای امواج پیشرونده در جهت $+z$ داریم

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{v_\varphi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (99)$$

با وارد کردن معادله (۹۹) در معادله (۹۵) (برای امواج پیشرونده) رابطه زیر به دست می‌آید

$$F_x(\text{ر بر چ}) = -\frac{T_0}{v_\varphi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (100)$$

کمیت $\partial\psi/\partial t$ درست سرعت عرضی تار در نقطه‌ای است که در آن تار به پایانه خروجی فرستنده متصل شده است. کمیت T_0/v_φ ثابت است. بنابراین معلوم شد که هنگامی که فرستنده امواج پیشرونده می‌فرستد "نیروی عکس‌العملی" که به وسیله محیط (تار بر روی پایانه خروجی فرستنده چ وارد می‌شود، یک نیروی میرایی یا نیروی جلوگیری است. یعنی هنگامی که فرستنده، امواج پیشرونده در جهت چ به ر می‌فرستد، تار با نیرویی که به طور منفی با سرعت اعمال شده بر آن متناسب است، با حرکت مخالفت می‌کند. ثابت تناسب امپدانس مشخصه Z نامیده می‌شود:

$$F_x(\text{بر چ}) = -Z \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (101)$$

که در آن

$$Z = \frac{T_0}{v_\varphi} \quad (102)$$

برای امواج پیشرونده عرضی در یک تار پیوسته داریم

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \quad (\text{cm/s}) \quad (103)$$

بنابراین

$$Z = \frac{T_0}{v_\varphi} = \sqrt{T_0 \rho_0} \quad \text{dyn/(cm/s)} \quad (104)$$

توان خروجی فرستنده. مشخصترین چیز درباره یک نیروی میرایی این است که این نیرو انرژی را "تلف" یا "جذب" می‌کند. در مثال حاضر، بهتر آن است که بگوییم، تار انرژی فرستنده را که به صورت "تابش" است، جذب می‌کند. انرژی که فرستنده از دست می‌دهد تلف نمی‌شود زیرا که انرژی به نوع "نازل" آن "گرما" تبدیل نشده است. در عوض، این انرژی به داخل تار تابش شده است که می‌تواند به یک "گیرنده" دور منتقل شود و در آنجا می‌تواند کاملاً بازیافته شود (همان‌گونه که در آینده خواهیم آموخت). توان خروجی تابش شده با حاصلضرب نیروی عرضی وارد شده به وسیله فرستنده بر روی تار در نقطه $z = 0$ در سرعت عرضی تار در نقطه $z = 0$ داده می‌شود. با استفاده از این مطلب که F_x (چ بر ر) مقدار منفی F_x (ر بر چ) است (همان قانون سوم نیوتون)، و با استفاده از معادله (۱۰) معلوم می‌شود که توان خروجی لحظه‌ای یعنی $p(t)$ (برحسب ارگ بر ثانیه) با رابطه زیر باید داده شود

$$P(t) = F_x(\text{چ بر ر}) \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (\text{کلی}) \quad (105)$$

$$P(t) = \left(Z \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) \frac{\partial\psi}{\partial t} = Z \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \right)^2 \quad (\text{موج پیشرونده})$$

اولین تساوی در معادله (۱۰۵) کلی است. تساوی دوم چنین نیست، بلکه فقط برای امواج پیشرونده صادق است.

در معادله (۱۰۵) توان خروجی را برحسب کمیت موجی $\partial\psi/\partial t$ بیان کرده‌ایم که مربوط به سرعت عرضی لحظه‌ای تار (در نقطه $z = 0$) برحسب سانتیمتر برثانیه است. کمیت موجی جالب و مهم دیگر، نیروی عرضی F_x (ر بر ج) است که (برحسب دین) با معادله (۹۵) داده شده است. توان خروجی فرستنده را می‌توان برحسب این کمیت با معادلات (۹۵) و (۹۹) بیان کرد

$$P(t) = F_x \left(\text{ج بر } \right) \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (\text{کلی})$$

$$= \left[-T \cdot \frac{\partial\psi}{\partial z} \right] \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (\text{کلی})$$

$$P(t) = \left[-T \cdot \frac{\partial\psi}{\partial z} \right] \left[-v_\varphi \frac{\partial\psi}{\partial z} \right] \quad (\text{موج پیشرونده}) \quad (106)$$

$$= \frac{v_\varphi}{T} \left[-T \cdot \frac{\partial\psi}{\partial z} \right]^2$$

$$= \frac{1}{Z} \left[-T \cdot \frac{\partial\psi}{\partial z} \right]^2$$

اولین و دومین تساوی در معادله (۱۰۶) کلی هستند؛ سومین تساوی این‌طور نیست؛ بلکه فقط برای امواج پیشرونده صادق است.

علت اینکه به‌خود در دسر می‌دهیم تا $P(t)$ را به‌روشهای متفاوت اما معادل، در معادلات (۱۰۵) و (۱۰۶) بیان کنیم، این است که، همواره دو کمیت موجی از نظر فیزیکی جالب هستند و در بعضی از سیستمها یکی از آنها را به‌کار می‌بریم در حالی که در سیستمهای دیگر از دیگری استفاده می‌کنیم. مثلاً در مورد امواج صوتی خواهیم دید که فشار نسبی، نقشی مانند نقش نیروی بازگرداننده امواج عرضی یعنی $-T \cdot \partial\psi/\partial z$ در مورد تار بازی می‌کند و سرعت طولی هوا در امواج صوتی نقشی مشابه سرعت عرضی تاری یعنی $\partial\psi/\partial t$ بازی می‌کند. به‌همین ترتیب در مورد تابش الکترومغناطیس خواهیم دید که میدان مغناطیسی عرضی B_y نقشی مشابه نقش سرعت عرضی تاری یعنی $\partial\psi/\partial t$ را دارد، در حالی که میدان الکتریکی عرضی E_x نقشی مشابه با نقش نیروی بازگرداننده تاری یعنی $-T \cdot \partial\psi/\partial z$ را بازی می‌کند.

انتقال انرژی به‌وسیله یک موج پیشرونده. توان تابش شده $P(t)$ که از نقطه $z = 0$ به‌وسیله فرستنده به‌شکل امواج پیشرونده گسیل می‌شود برابر با مقدار انرژی است که در واحد زمان در جهت $z +$ از هر نقطه z نسبت به مبدأ، می‌گذرد. (از میرایی صرف‌نظر می‌کنیم). در حقیقت،

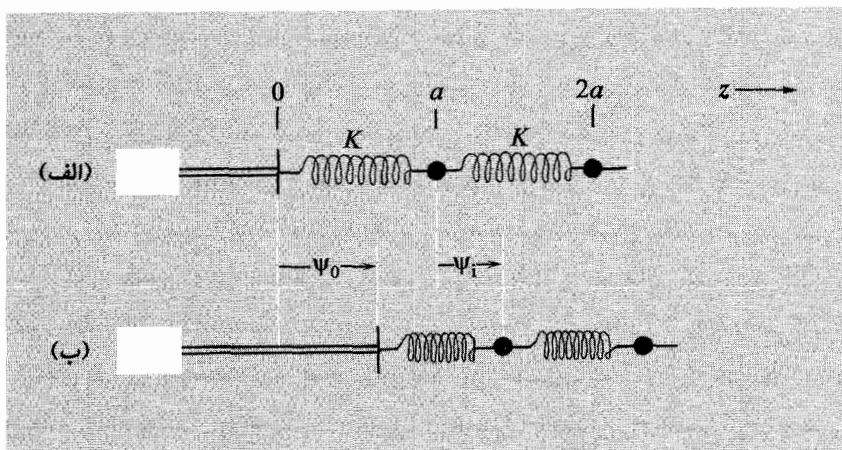
هنگامی که نتایج برای عبور انرژی از چ به ر (چپ به راست) در پایانه خروجی فرستنده به دست آوردیم، می‌توانستیم به جای نقطه $z = 0$ از یک نقطه نامشخص z در محیط صحبت کرده باشیم. تنها چیزی که احتیاج داشتیم، محیطی بود که بتواند امواج پیشرونده را حمل کند. اگر با در نظر گرفتن این ملاحظه، مراحل به دست آوردن را مرور کنید، به سرعت خواهید دید که برای امواج پیشرونده توان تابش شده که از یک نقطه مفروض z در جهت $z +$ می‌گذرد، با روابطی مشابه با معادلات (۱۰۵) و (۱۰۶) داده می‌شود، بجز آنکه سرعت عرضی $\partial\psi/\partial t$ و نیروی بازگرداننده $\partial\psi/\partial z - T$ به جای نقطه $z = 0$ در یک نقطه کلی z محاسبه می‌شوند. از این رو برای یک موج پیشرونده بر روی یک تار، داریم

$$P(z, t) = Z \left[\frac{\partial\psi(z, t)}{\partial t} \right]^2 \quad (۱۰۷)$$

یا

$$P(z, t) = \frac{1}{Z} \left[-T \cdot \frac{\partial\psi(z, t)}{\partial z} \right]^2 \quad (۱۰۸)$$

مثال ۹: تابش امواج طولی بر روی یک فنر
 اکنون گسیل امواج طولی شامل تراکم و انقباض را بر روی یک فنر در نظر می‌گیریم. با استفاده از روش ساده نیوتون (اما پس از تصحیح کردن اشتباه مشهور او)، می‌توانیم این نتایج را برای بیان تابش امواج صوتی، اختیار کنیم. سیستم در شکل ۹-۴ نشان داده شده است.
 در معادلات حرکت برای حرکت عرضی یک فنر مهردار، کمیت Ka دقیقاً به همان روشی



شکل ۹-۴ گسیل امواج پیشرونده طولی. (الف) تعادل. (ب) حالت کلی.

وارد می‌شود که کشش تعادل T در معادلات حرکت نوسان عرضی فنر مه‌ره‌دار وارد می‌شود. [به معادله (۲-۷۷) بخش ۲-۴ و بحث بلافاصله پس از آن مراجعه کنید]. به این دلیل است که سرعت فاز یکی با معادله دیگری از طریق ردوبدل کردن T و Ka ، به دست می‌آید. [به معادله (۲۷) بخش ۲-۴ مراجعه کنید]. به همین ترتیب می‌توان روابط امپدانس مشخصه و شار انرژی برای امواج طولی بر روی یک فنر پیوسته را به سادگی با جایگزین کردن Ka به جای T در نتایجی که برای نوسان عرضی به دست آوردیم، پیدا کرد. بنابراین از معادلات (۱۰۳)، (۱۰۴)، (۱۰۷) و (۱۰۸) برای امواج طولی نتایج زیر به دست می‌آید

$$v_{\varphi} = \sqrt{\frac{Ka}{\rho_0}}, \quad Z = \sqrt{Ka\rho_0}. \quad (109)$$

و جریان توان در یک موج عرضی (برحسب ارگ بر ثانیه) برابر است با

$$P(z, t) = Z \left[\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} \right]^2 = \frac{1}{Z} \left[-Ka \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} \right]^2 \quad (110)$$

کمیت $\psi(z, t)$ عبارت است از جابه‌جایی از مکان تعادل جزئی از فنر که در مکان تعادل z قرار دارد؛ اگر جابه‌جایی در جهت $+z$ باشد، این کمیت مثبت است. سرعت مربوط به این جابه‌جایی برابر $\partial \psi(z, t) / \partial t$ است. چنین است که $-Ka \partial \psi(z, t) / \partial z$ عبارت است از نیرویی در جهت $+z$ ، که به وسیله جزئی از فنر که مکان تعادلش در سمت چپ نقطه z است بر روی جزئی از فنر که مکان تعادلش در سمت راست نقطه z است، وارد می‌شود، پس از آنکه مقدار تعادلی نیرو یعنی F_0 از آن کم شود (مسئله ۴-۲۹):

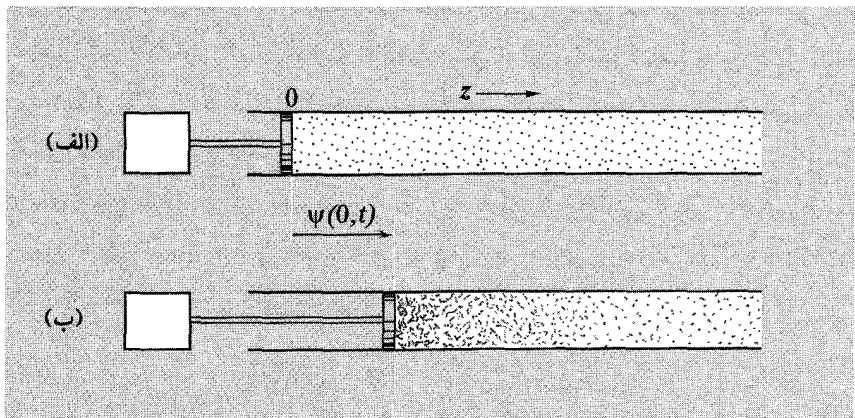
$$F_z(\text{چ بر } \rho) = F_0 - Ka \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} \quad (111)$$

نیروی F_0 در معادله (۱۱۱) در نتیجه انبساط یا تراکم فنرها در پیکربندی تعادلی آنهاست. این نیرو در هیچ موجی سهم ندارد. به این دلیل است که فقط نیروی اضافی بر F_0 یعنی $-Ka \partial \psi / \partial z$ در دومین تساوی معادله (۱۱۰) ظاهر می‌شود.

مثال ۱۰: امواج صوتی

اکنون مدل نیوتون را همان‌گونه که در بخش ۲-۴ بحث شد، برای امواج صوتی به کار می‌بریم. سیستم در شکل ۴-۱۰ نشان داده شده است.

در بخش ۲-۴ سرعت فاز صوت را با استفاده از شباهت امواج صوتی نیوتون به امواج طولی بر روی یک تار پیوسته، به دست آوردیم. در آنجا چگالی جرمی حجمی هوا در حالت تعادل را به جای



شکل ۱۰-۴ گسیل امواج صوتی طولی. (الف) تعادل. (ب) حالت کلی.

چگالی جرمی خطی فنر در حالت تعادل قرار دادیم و به جای Ka فنر، فشار هوا در حال تعادل p_0 ضربدر ضریب معروف γ را قرار دادیم، تا نتیجه را به دست آوردیم. بنابراین به آسانی می‌توانیم روابط امپدانس و انرژی را برای امواج صوتی حدس بزنیم. فقط کافی است در روابط امواج طولی بر روی یک فنر، γp_0 را به جای Ka قرار دهیم. از این رو برای امواج صوتی [از معادلات (۱۰۹) و (۱۱۰)] نتایج زیر را به دست می‌آوریم

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}, \quad Z = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0} \quad (112)$$

و شدت جریان انرژی در یک موج پیشرونده صوتی برحسب ارگ بر سانتیمترمربع بر ثانیه برابر است با

$$I(z, t) = Z \left[\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} \right]^2 = \frac{1}{Z} \left[-\gamma p_0 \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} \right]^2 \quad (113)$$

کمیت $\psi(z, t)$ عبارت است از جابه‌جایی یک قطعه از هوا در امتداد جهت z از مکان تعادلی آنکه z است. کمیت $\partial \psi(z, t) / \partial t$ سرعت مربوط به این جابه‌جایی است. کمیت $-\gamma p_0 \partial \psi(z, t) / \partial z$ برابر است با نیرو بر واحد سطح در جهت z که به وسیله هوایی که در سمت چپ z است بر روی هوای در سمت راست t وارد می‌شود (به‌خاطر داشته باشید که z مکان تعادلی هواست، و نه مکان لحظه‌ای آن)، پس از آنکه مقدار تعادل آن نیرو بر واحد سطح یعنی p_0 ، از آن کم شود:

$$\frac{F_z(\text{ج بر } A)}{A} = p_0 - \gamma p_0 \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} \quad (114)$$

این رابطه از معادله (۱۱۱) برای امواج طولی بر روی یک فنر و با جایگزین کردن p_0 به جای E_0 و γp_0 به جای Ka به دست می‌آید. فشار تعادل p_0 در هیچ موجی سهم ندارد. به کمیت $\partial\psi/\partial z - \gamma p_0$ نام فشار پیمانه‌ای، p_g می‌دهیم:

$$p_g = -\gamma p_0 \frac{\partial\psi(z, t)}{\partial z} \quad (115)$$

برای هوا در شرایط STP داریم

$$p_0 = 1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^6 \text{ dyn/cm}^2$$

$$\rho_0 = 1.29 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

بنابراین از معادلات (۱۱۲) نتیجه می‌شود

$$v_\varphi = 3.32 \times 10^4 \text{ cm/s} \quad (116)$$

$$Z = 42.8 \frac{(\text{dyn/cm}^2)}{(\text{cm/s})} \quad (117)$$

شدتهای استاندارد صوت. شدت یک موج صوتی پیشرونده به صورت مقدار انرژی که از واحد سطح در واحد زمان منتشر می‌شود، تعریف می‌شود. استاندارد متداولی که برای شدت صوت به کار می‌رود، به صورت زیر داده می‌شود

$$\text{شدت استاندارد} = I_0 = 1 \mu\text{w/cm}^2 = 10^{-6} \text{ erg/cm}^2\text{s} \quad (118)$$

که در آن از $1 \text{ W} = 10^7 \text{ erg/s}$ و $1 \mu\text{w/cm}^2 = 10^{-6} \text{ W}$ استفاده شده است. شخصی که با یک آهنگ مکالمه‌ای متوسط صحبت می‌کند در حدود 10^0 ارگ بر ثانیه انرژی صوتی می‌فرستد. در هنگام صحبت، دریچه دهان در حدود 10^0 سانتیمتر مربع است. بنابراین اگر از یک انتهای یک لوله پستی به طوری صحبت کنید که تمام انرژی صوتی در جهت z (به پایین لوله) برود شدت صوت در حدود $I_0 = 10^0 \text{ erg/s} / 10^0 \text{ cm}^2$ است. از این رو برای آنکه اندازه I_0 را حس کنید، می‌توانید از کسی بخواهید که از میان یک لوله (کوتاه) پستی با شما صحبت کند. (در یک لوله دراز، امواج به وسیله اصطکاک دیوارهای ناهموار مقوایی و به وسیله تابش به خارج از اطراف لوله، تضعیف می‌شوند.) اگر شخص تا آنجا که می‌تواند، به داخل لوله پستی، بلند فریاد بکشد، شدت در حدود $10^0 I_0$ می‌شود. برای شدتهای 10^0 تا 10^{100} برابر I_0 ، شنونده احساس درد می‌کند.

شدت ضعیفترین صوتی که می‌تواند شنیده شود، به بسامد آن بستگی دارد. در حدود $10^{-10} I$ (یعنی 440 Hz یا 440 cps) آستانه شنوایی یک شخص نوعی در حدود $10^{-10} I$ است. بنابراین گوش انسان از نظر شدت دارای گستره دینامیکی بسیار وسیعی با ضریب 10^{12} (از $10^{-10} I$ تا $10^2 I$) است.

نام‌گذاری - دسی بل. هر وقت شدت صوت با ضریب 10 اضافه شود، می‌گویند به اندازه یک بل اضافه شده است. بنابراین گستره دینامیکی گوش در حدود 12 بل است. هر وقت که شدت با ضریب 10^1 اضافه شود، این شدت به اندازه 1 بل یا یک دسی بل اضافه شده است. بنابراین

$$\begin{aligned} 1 \text{ db} &= \text{ضریب } 1.26 \text{ در شدت} = \text{ضریب } 10^1 = 1 \text{ دسی بل} \\ 1 \text{ bel} &= 10 \text{ db} = \text{ضریب } 10 \text{ در شدت} \end{aligned} \quad (119)$$

یک شخص با حس شنوایی متوسط به زحمت می‌تواند افزایش بلندی صدا در حدود 1 db را تشخیص دهد.

کاربردهای زیر مربوط به محاسبات امپدانس و شار صوتی است.

کاربرد: فشار پیمانه‌ای RMS برای شدت صوت دردناک

برای شدت صوت دردناک، جذر میانگین مربعی فشار پیمانه‌ای (برحسب اتمسفر) چقدر است؟ می‌خواهیم پاسخ برحسب اتمسفر باشد زیرا به این پرسش علاقه‌مندیم که آیا درد همان علتی را دارد که هنگام شنا در عمق حدود 5 متر در زیر سطح آب احساس می‌کنید (بدون آنکه به وسیله بلعیدن، هوا را به داخل گوش درونی بفرستید). می‌دانیم که 10 متر آب برابر یک اتمسفر فشار است، بنابراین در عمق 5 متری فشار پیمانه‌ای در حدود نیم اتمسفر است. آیا این فشار پیمانه‌ای است که یک موج صوتی دردناک داراست؟

حل: شدت دردناکی بودن را $I = 1000 I_0$ اختیار کنید. بنابراین برطبق معادله (۱۱۳) داریم

$$\begin{aligned} \langle p_g^2 \rangle^{1/2} &= (ZI)^{1/2} \\ &= (1000 ZI_0)^{1/2} \\ &= [(1000)(42.8)(10)]^{1/2} = 650 \text{ dyn/cm}^2 \end{aligned}$$

این عدد در مقایسه با $1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^6 \text{ dyn/cm}^2$ بسیار کوچک است. بنابراین یک نتیجه جالب به دست می‌آید که درد فقط در نتیجه بسیار بالا بودن متوسط زمانی فشار نیست، زیرا 600 dyn/cm^2 برابر $6 \times 10^{-4} \text{ atm}$ است که مانند شنا کردن در عمق نیم‌سانتیمتری آب است.

کاربرد: دامنه صوت بلند دردناک

دامنه A در تغییر مکانهای مولکولهای هوا برای یک صوت بلند دردناک چقدر است؟ فرض کنید $\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz)$ در این صورت مربع $\partial\psi/\partial t$ و متوسط آن در یک دوره از z ثابت، برابر با $\frac{1}{4}\omega^2 A^2$ است. سپس از معادله (۱۱۳) و فرض آنکه بسامد برابر 440 cps است، نتیجه می شود

$$\begin{aligned} A &= \frac{(2I/Z)^{1/2}}{\omega} \\ &= \frac{(2 \times 1000 \times 10 / 42,8)^{1/2}}{(6,28 \times 440)} \\ &= 2,5 \times 10^{-2} \text{ cm} = \frac{1}{4} \text{ mm} \end{aligned}$$

کاربرد: دامنه صوتی که به زحمت می توان شنید

دامنه جابه جاییهای هوا برای صوتی که به زحمت می توان شنید چقدر است؟ فرض کنید که شدت برابر $10^{-10} I_0$ است. دامنه با جذر I متناسب است. بنابراین برای بسامد 440 Hz، نتیجه برابر است با حاصلضرب جذر 10^{-13} در نتیجه ای که در کاربرد بالا به دست آوردیم که در آن $I = 1000 I_0$ اختیار شده بود. از این رو

$$\begin{aligned} A &= 10^{-6,5} (2,5 \times 10^{-2}) \\ &= \frac{2,5 \times 10^{-8}}{\sqrt{10}} \approx 10^{-8} \text{ cm} \end{aligned}$$

این عدد در حدود قطر یک اتم نوعی است. پس گوش شما آنقدر زیاد حساس است که می تواند حرکات پرده گوش در حدود یک قطر اتمی را تشخیص دهد!

کاربرد: توان خروجی شنوایی از یک نمونه بلندگوی دستگاه استریو

توان تقریبی شنوایی (صوتی) خروجی (برحسب وات) که انتظار دارید از یک نمونه بلندگوی دستگاه استریو به دست آورید، چقدر است؟ فرض کنید که یک دوستدار موسیقی می خواهد اتاق درازی را که دیوارهای جانبی بازتاب کننده دارد ولی دیوار عقب آن جاذب صوت است با امواج پیشرونده بلند دردناکی به شدت $100 I_0$ پر کند. تصور کنید که مساحت سطح مقطع اتاق $10^5 \text{ cm}^2 \approx 300 \text{ cm} \times 300 \text{ cm}$ است. در انتهای اتاق که در آنجا بلندگو تابش می کند، می توان فرض کرد که بلندگو تمام دیوار را به عنوان تخته صوتی تحریک می کند و یا می توان از اولین قسمت اتاق برای به وجود آوردن یک "بوق" به تدریج باریک شده به منظور "جوگردن امپدانسها" بین

بلندگو و اتاق، استفاده کرد. (جو رکوردن امپدانس در فصل ۵ بحث خواهد شد) در هر حال، صوت خروجی به صورت زیر داده می‌شود

$$P = I \times \text{مساحت} = (100)I_0 \times 10^5 = 10^7 \mu W \\ = 10 W$$

بنابراین توان خروجی صوتی برابر 10° وات در دستگاههای استریو متداول است.

کاربرد: مجموع دو صوت تقریباً در دناک

تصور کنید شخصی به زحمت می‌تواند درد با شدت $10^\circ I_0$ با بسامد $A440$ را تحمل کند اما وی نمی‌تواند درد با شدت $20^\circ I_0$ و با همان بسامد را تحمل کند. تصور کنید که این مطلب برای نت $C512$ نیز صادق است، یعنی با این نت شخص می‌تواند شدت $10^\circ I_0$ را تحمل کند، اما نمی‌تواند شدت $20^\circ I_0$ را تحمل کند. اگر هر دو نت با هم هر کدام با شدت $10^\circ I_0$ به صدا درآیند، چه اتفاقی می‌افتد؟ شدت کلی اکنون برابر $20^\circ I_0$ است. آیا او می‌تواند تحمل کند؟ نمی‌دانم. (حدسی در ذهن دارم). امیدواریم شما را متقاعد کرده باشیم که اکنون می‌توانید به برخی از پرسشهای جالب درباره صوت پاسخ دهید. ما هنوز امواج ساکن صوتی را بحث نکرده‌ایم، اما این امواج درست مانند امواج ساکن طولی بر روی یک فنر اسلینکی رفتار می‌کنند. بنابراین اکنون اگر به آزمایشهای خانگی مربوط به صوت نگاه کنید، در فهم آنها نباید اشکالی داشته باشید.

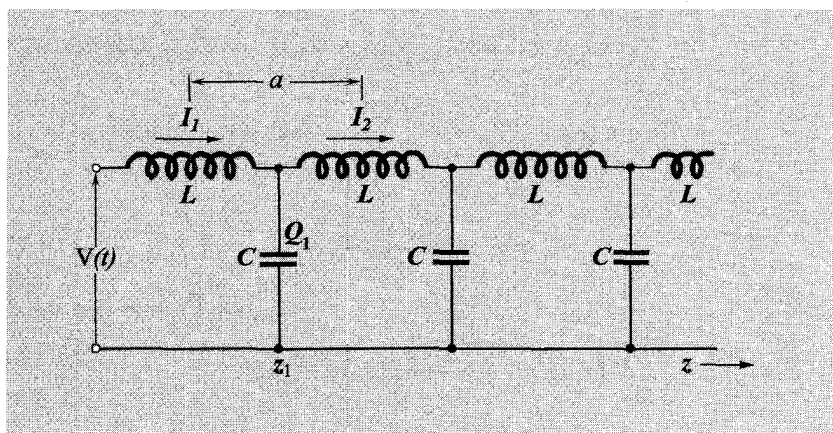
مثال ۱۱: امواج پیشرونده در خط انتقال نیروی پایین‌گذر

سیستم این مثال مهم در شکل ۱۱-۴ نشان داده شده است. نیروی محرک، ولتاژ $V(t)$ است که در نقطه $z = 0$ اعمال می‌شود. ما فقط حد طول موج بلند (یعنی حد پیوسته) را در نظر می‌گیریم که در آن $V(z, t)$ و $I(z, t)$ توابع پیوسته از z هستند. اگر خط انتقال نیرو بینهایت دراز باشد (یا به یک جسم جذب‌کننده کامل منتهی شود)، سیستم بازی وجود دارد که امواج پیشرونده ولتاژ $V(z, t)$ و شدت جریان $I(z, t)$ را حمل می‌کند. اگر ولتاژ محرک $V(t)$ در انتهای ورودی به شکل زیر باشد

$$V(t) = V_0 \cos \omega t \quad (120)$$

در این صورت موج ولتاژ $V(z, t)$ در $z = 0$ باید با $V_0 \cos \omega t$ برابر باشد و بنابراین به صورت زیر داده می‌شود

$$V(z, t) = V_0 \cos(\omega t - kz) \quad (121)$$



شکل ۱۱-۴ گسیل امواج پیشرونده بر روی خط انتقال نیرو.

می‌خواهیم رابطه بین $V(z, t)$ و $I(z, t)$ را پیدا کنیم. نتیجه خواهد شد که (برای یک موج پیشرونده) این کمیتها با یکدیگر متناسب هستند (و مثلاً $\pm 90^\circ$ درجه اختلاف فاز ندارد). نتیجه را با نوشتن رابطه زیر پیش‌بینی می‌کنیم

$$I(z, t) = I \cos(\omega t - kz) + J \sin(\omega t - kz) \quad (122)$$

که در آن، همان‌گونه که پیدا خواهیم کرد، مقدار ثابت J برابر صفر است.

اولین خازن شکل ۱۱-۴ را در نظر بگیرید. این خازن دارای بار $Q_1(t)$ است که مربوط به اختلاف پتانسیل $V_1(t)$ است، به طوری که

$$Q_1(t) = CV_1(t) = CV(z_1, t) \quad (123)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} C \frac{\partial V(z_1, t)}{\partial t} &= \frac{dQ_1}{dt} \\ &= I_1 - I_2 \\ &= -(I_2 - I_1) \\ &= -a \frac{\partial I(z_1, t)}{\partial z} \end{aligned}$$

که در آن، در آخرین تساوی تقریب پیوسته را به‌کار برده‌ایم. از این رو

$$\frac{\partial V(z_1, t)}{\partial t} = - \left(\frac{C}{a} \right)^{-1} \frac{\partial I(z_1, t)}{\partial z} \quad (124)$$

با وارد کردن معادلات (۱۲۱) و (۱۲۲) در معادله (۱۲۴)، می‌بینیم که ثابت J در معادله (۱۲۲) واقعاً باید صفر باشد. جمله‌های باقیمانده، رابطه‌ی زیر را به دست می‌دهند:

$$-\omega V_0 \sin(\omega t - kz) = -\left(\frac{C}{a}\right)^{-1} I_0 k \sin(\omega t - kz)$$

یعنی

$$V_0 = \frac{(C/a)^{-1}}{v_\varphi} I_0 \quad (125)$$

که بنابراین، طبق تعریف Z داریم،

$$V(z, t) = \frac{(C/a)^{-1}}{v_\varphi} I(z, t) \equiv Z I(z, t) \quad (126)$$

از این رو، سرعت فاز [معادله (۴۸) بخش ۴-۲] و امپدانس مشخصه (در حد طول موج بلند یا حد پیوسته یا حد "پارامتر-توزیع شده") به صورت زیر داده می‌شوند

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{(C/a)^{-1}}{(L/a)}} \quad (127)$$

$$Z = \frac{(C/a)^{-1}}{v_\varphi} = \sqrt{\left(\frac{L}{a}\right) \left(\frac{C}{a}\right)^{-1}} \quad (128)$$

توان خروجی لحظه‌ای فرستنده در نقطه $z = 0$ به صورت زیر داده می‌شود

$$P(t) = V(t)I(t) = V(0, t)I(0, t) = Z I^2(0, t) \quad (129)$$

به گونه‌ای دیگر، $P(t)$ با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$P(t) = V(0, t)I(0, t) = \frac{V^2(0, t)}{Z} \quad (130)$$

توجه کنید که ما به سادگی می‌توانستیم با جایگزین کردن C^{-1} به جای K و L به جای M در نتایج نوسانهای طولی جرم و فنر، Z را به دست آوریم. به سبب اهمیت این مثال، به جای این کار جزئیات را شرح دادیم. ■

مثال ۱۲: خط انتقال نیرو با صفحات موازی

این مثال ما را به نتایجی که عمومیت بسیار دارد، هدایت می‌کند. برطبق معادلات (۵۵) و (۵۹) بخش ۴-۲، ظرفیت بر واحد طول و القایدگی بر واحد طول یک خط انتقال با صفحات موازی

(اگر بین صفحات خلأ باشد) برابر هستند با

$$\frac{C}{a} = \frac{w}{4\pi g}, \quad \frac{L}{a} = \frac{4\pi}{wc^2} \quad (۱۳۱)$$

که در آن w پهنا و g فاصله شکاف است. بنابراین امپدانس مشخصه برابر است با [به معادله (۱۲۸) مراجعه کنید]

$$Z = \sqrt{\frac{L/a}{C/a}} = \frac{4\pi}{c} \frac{g}{w} \quad (۱۳۲)$$

(در اینجا واحد Z استات ولت بر استات آمپر یعنی استات اهم است.) توان تابش شده $P(t)$ که با معادله (۱۳۰) داده می شود برابر است با

$$P(t) = \frac{1}{Z} V^2(\circ, t) = \frac{c}{4\pi} \frac{w}{g} V^2(\circ, t) \quad (۱۳۳)$$

اکنون توان تابش شده را به جای آنکه برحسب اختلاف پتانسیل $V(\circ, t)$ که انتگرال میدان الکتریکی (یکنواخت) در طول شکاف g است بیان کنیم، آن را برحسب تنها مؤلفه غیر صفر میدان الکتریکی یعنی E_x که در هر نقطه بین صفحات تعریف می شود، بیان می کنیم:

$$V(\circ, t) = gE_x(\circ, t) \quad (۱۳۴)$$

بنابراین معادله (۱۳۳) به شکل زیر درمی آید

$$P(t) = \frac{c}{4\pi} (wg) E_x^2(\circ, t) \quad (۱۳۵)$$

توجه کنید که wg مساحت سطح مقطع انتهای خط انتقال نیروست. اگر توان تابش شده را به wg تقسیم کنیم، شدت تابش شده (برحسب $\text{erg/cm}^2\text{s}$) به دست می آید. ما نمی خواهیم این شدت را با I نشان دهیم، زیرا در حال حاضر حرف I برای شدت جریان، نگه داشته شده است. به جای آن، از نشانه ای که به طور متداول برای امواج الکترومغناطیسی به کار می رود یعنی S استفاده خواهیم کرد. از تجربه با تارها و امواج صوتی، می دانیم، که شدت موج را با قرار دادن $z = \circ$ به جای مکان کلی z به سادگی می توانیم بنویسیم. از این رو برای یک موج تخت الکترومغناطیسی پیشرونده که در جهت $z+$ در یک خط انتقال نیرو با صفحات موازی منتشر می شود، انرژی بر سانتیمتر مربع بر واحد زمان که از نقطه z می گذرد با شدت زیر داده می شود

$$S(z, t) = \frac{c}{4\pi} E_x^2(z, t) \quad (۱۳۶)$$

اکنون نسبت تنها مؤلفه غیرصفر میدان مغناطیسی یعنی $B_y(z, t)$ به مؤلفه میدان الکتریکی $E_x(z, t)$ را پیدا می‌کنیم. این نسبت را می‌توانیم پیدا کنیم، زیرا قبلاً پیدا کردیم که نسبت $V(z, t)$ به $E(z, t)$ مقدار ثابت Z است و همچنین می‌دانیم که چگونه V به E_x و I به B_y مربوط می‌شود. از این رو داریم

$$V = ZI$$

یعنی

$$gE_x = \frac{4\pi g}{c w} I \quad (۱۳۷)$$

اما برطبق معادله (۵۷) بخش ۲-۴ داریم

$$wB_y = \frac{4\pi}{c} I \quad (۱۳۸)$$

از مقایسه معادلات (۱۳۷) و (۱۳۸) معلوم می‌شود که برای یک موج تخت الکترومغناطیسی پیشرونده که در جهت $+z$ در یک خط انتقال نیرو با صفحات موازی منتشر می‌شود، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی به‌ازای هر مقدار z و t بر یکدیگر و بر جهت انتشار عمود هستند و اندازه آنها مساوی است و علامتهای جبری آنها به‌گونه‌ای است که حاصلضرب برداری $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ در جهت انتشار است. مختصرتر

$$\boxed{E_x(z, t) = B_y(z, t)} \quad (۱۳۹)$$

امواج تخت الکترومغناطیسی در محیطهای شفاف. تصور کنید که خط انتقال نیرو با ماده‌ای که ثابت دی‌الکتریک ϵ و تراوایی مغناطیسی μ دارد، پر شده است. ولتاژ اعمال شده برابر $V(t)$ است. بنابراین توان تابش شده را می‌توان به‌شکل زیر نوشت

$$P(t) = \frac{V^2}{Z}$$

که در آن

$$V = gE_x$$

$$Z = \sqrt{\frac{L/a}{C/a}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} Z_{\text{خلا}}$$

یعنی

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon} \frac{4\pi}{c} \frac{g}{w}} \quad (140)$$

 از این سه معادله شدت $S = P/gw$ به دست می آید:

$$S(z, t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu} \frac{c}{4\pi}} E_x^y(z, t) \quad (141)$$

اکنون همچنین نسبت B_y به E_x را پیدا می کنیم. برای جریان مفروض I ، نسبت به حالتی که ماده شفاف وجود ندارد، میدان مغناطیسی با ضریب μ بزرگتر است. بنابراین

$$wB_y = \mu \frac{4\pi}{c} I$$

اما

$$V = ZI$$

یعنی

$$gE_x = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon} \frac{4\pi}{c} \frac{g}{w}} I$$

 از مقایسه این روابط برای B_y و E_x نتیجه می شود

$$\frac{B_y}{E_x} = \sqrt{\varepsilon\mu}$$

بنابراین

$$B_y = \sqrt{\varepsilon\mu} E_x = n E_x \quad (142)$$

امواج تخت الکترومغناطیسی در خلأ غیرمحصور. نتایج داده شده برای خلأ با معادلات (۱۳۶) و (۱۳۹)

$$S(z, t) = \frac{c}{4\pi} E_z^y(z, t), \quad B_y(z, t) = E_x(z, t) \quad (143)$$

برای امواج الکترومغناطیسی (امواج حاصل از تغییر میدان الکتریکی و مغناطیسی) که از امواج جریان و پتانسیل بر روی یک خط انتقال نیروی مستقیم و موازی حاصل می شوند، به دست آمدند. یک خط انتقال نیرو با صفحات موازی نه تنها مستقیم و موازی است، بلکه (با فرض آنکه هیچ اثر لبه‌ای وجود ندارد)، یکنواخت نیز است. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی $E_x(z, t)$ و $B_y(z, t)$

نیز یکنواخت هستند؛ تا مادامی که بین صفحات هستیم و تا مادامی که پهنای w آن چنان بزرگ است که اثرهای لبه‌ای ناچیز هستند، به‌ازای تمام مکانهای x و y (برای یک مکان z و زمان t ثابت) E_x مقدار یکسان دارد؛ به‌همین ترتیب B_y مستقل از x و y است. چنین امواجی را امواج تخت می‌نامند. هر صفحه عمود بر محور z (محور انتشار امواج) صفحه‌ای با فاز ثابت، یعنی صفحه‌ای با مقدار ثابت $\omega t - kz$ است. این صفحات جبهه‌های موج نامیده می‌شوند.

برای به‌دست آوردن امواج تخت الکترومغناطیسی پیشرونده بیش از یک راه وجود دارد. یک راه همان روشی است که هم‌اکنون مطالعه کردیم، یعنی با استفاده از یک خط انتقال نیرو با صفحات موازی. روش دیگر به‌دست آوردن امواج پیشرونده که تقریباً امواج تخت باشند آن است که از "چشمه نقطه‌ای" امواج الکترومغناطیسی، مانند یک شمع یا چراغ خیابان و یا یک ستاره، بسیار دور شویم. (در یکی از فصلهای آینده خواهیم خواند که یک چشمه تا چه اندازه باید کوچک باشد تا با تقریب به‌اندازه کافی خوب بتوان آن را یک "نقطه" نامید.) در این حالت، موج در همسایگی مشاهده‌کننده، عملاً در یک جهت حرکت می‌کند، مادام که این ناحیه همسایگی خیلی در جهت عمود بر جهت (تقریبی) انتشار ادامه نیابد. (در آینده خواهیم آموخت که این ناحیه "همسایگی" تا چه اندازه می‌تواند بزرگ باشد. مطابق معمول، به نوع آزمایشی که در نظر دارید، بستگی دارد.) این چنین است که (همان‌گونه که اکنون باید به‌نظر شما معقول بیاید و ما نیز در یکی از فصلهای آینده با استفاده از معادلات ماکسول اثبات خواهیم کرد)، نتایج مندرج در معادله (۱۴۳) از ویژگیهای "موضعی" امواج تخت الکترومغناطیسی است و به شرایط مرزی یعنی به آرایش جریان و بار که امواج را تابش می‌کنند، بستگی ندارد. البته این نکته که \mathbf{E} در امتداد \hat{x} قرار گرفته است، به شرایط مرزی بستگی دارد، و این شرایط مرزی با انتخاب ترتیب قرارگرفتن خط انتقال نیرو با صفحات موازی مشخص شد. بنابراین باید این نتایج بسیار مهم و کلی را به‌شکی کلی‌تر از معادله (۱۴۳) بیان کنیم. اکنون چنین خواهیم کرد:

یک موج تخت الکترومغناطیسی پیشرونده که در خلأ در جهت z حرکت می‌کند ویژگیهای زیر را دارد (که البته تمام آنها از هم مستقل نیستند):

$$1. \quad \mathbf{E}(z, t) \text{ و } \mathbf{B}(z, t) \text{ بر } \hat{z} \text{ و بر یکدیگر عمود هستند.}$$

$$2. \quad \text{اندازه } \mathbf{E}(z, t) \text{ با اندازه } \mathbf{B}(z, t) \text{ مساوی است.}$$

$$3. \quad \text{جهتهای } \mathbf{E}(z, t) \text{ و } \mathbf{B}(z, t) \text{ به‌گونه‌ای است که } \mathbf{E}(z, t) \times \mathbf{B}(z, t) \text{ در امتداد } \hat{z} \text{ است.}$$

$$4. \quad \text{سه ویژگی نخست مستلزم آن است که } \mathbf{B}(z, t) = \hat{z} \times \mathbf{E}(z, t) \text{ باشد که با رابطه } B_x(z, t) = -E_y(z, t) \text{ و } B_y(z, t) = E_x(z, t) \text{ معادل است.}$$

۵. سرعت فاز برابر c است که مستقل از بسامد است، یعنی امواج الکترومغناطیسی در خلأ ناپاشنده هستند.

۶. شدت لحظه‌ای (برحسب $\text{erg/cm}^2\text{s}$) به صورت زیر داده می‌شود

$$S(z, t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}^2(z, t) = \frac{c}{4\pi} [E_x^2(z, t) + E_y^2(z, t)] \quad (144)$$

بعضی از واژه‌های متداول به کار رفته برای این کمیت، شدت، شار و شار انرژی هستند. روابط بالا بسیار مهم است و تا آنجا که می‌دانیم، کاملاً کلی است. این روابط برای تمام بسامدها (مثلاً ν مساوی ۱ دور بر هر 10^{10} سال (مربوط به طول موج 10^{10} سال نوری که در حدود قطر کهکشان ماست)، تا بسامدهای (مثلاً $3 \times 10^{25} \text{Hz}$) ν مربوط به طول موج c/ν برابر 10^{-15}cm یا "انرژی فوتون" $h\nu$ در حدود 10^6BeV (بیلیون الکترون‌ولت)، صادق است. (باید به این نکته عادت کنید که در گستره‌های مختلف بسامد، واحدهای مختلف به کار برده می‌شود.)

°کاربرد: یافتن ثابت خورشیدی

این مثال مثال عددی برای توضیح شار انرژی است. (این مثال ترکیبی از آزمایش خانگی و محاسبه است. امیدواریم که آزمایش را انجام دهید).

مسئله: ریشهٔ میانگین مربعی میدان الکتریکی در امواج پیشروندهٔ نور معمولی خورشید در سطح زمین را تعیین کنید.

حل: (از آنجا که این مثال یک آزمایش حقیقی است، همان‌طور که جلو می‌رویم تقریبها و فرضهای متعددی در نظر می‌گیریم. بنابراین پاسخ مانند بسیاری از نتایج تجربی، بسیار جفت شده به شرایط آزمایشی خواهد بود.) یک لامپ انتهایی 200 یا 300 واتی را که دارای جدار شیشه‌ای شفاف (نه مات) و رشته‌ای به طول 25 سانتیمتر یا کمتر است، اختیار کنید. لامپ را روشن کنید. چشمهایتان را ببندید. لامپ روشن را نزدیک صورت خود بیاورید. از چشمهایتان به عنوان یک آشکارساز و از پلکهای بسته به عنوان یک صافی استفاده کنید. پلکهای شما قسمتی از فروسخ غیرمرئی را آشکار می‌کند — پلکها گرم حس می‌شوند. چشمهای شما که به وسیلهٔ صافیهای پلکی پوشیده شده است، به خاطر نوری که به داخل نفوذ می‌کند یک "قرمزی" می‌بیند. اکنون چراغ را خاموش کنید (و با فرض آنکه یک روز آفتابی است) به محوطه خارج بروید. با چشمهای بسته به خورشید "نگاه کنید". احساس گرمی بر روی پلکهایتان و "قرمزی" که از میان پلکهایتان "دیده می‌شود" را به دست آورید. حال به چراغ الکتریکی برگردید. فاصلهٔ R از پلکهایتان تا رشتهٔ لامپ را، که شدت حاصل از آن، براساس قضاوت آشکارسازهای شما، با شدت حاصل از خورشید یکسان است، اندازه بگیرید.

آزمایش در اینجا تمام می‌شود و بقیه کار عمده‌تاً ریاضی است. با فرض آنکه رشته لامپ در تمام جهتها با شدت مساوی تابش می‌کند، از توان P مشخص شده لامپ و فاصله R استفاده و مقدار شار در پلکهایتان را محاسبه کنید. در این صورت جواب (برحسب واحدهای مخلوط) برای متوسط زمانی شدت در پلکهای شما چنین است

$$\langle S(z, t) \rangle \equiv S = \frac{P}{4\pi R^2} \quad (145)$$

بنابراین حداقل در دامنه‌ای از رنگها که می‌توانید تشخیص دهید (به انضمام قسمتی از مادون قرمز که به وسیله پلکهای شما آشکار می‌شود)، کمیت بالا همان متوسط زمانی شدت نور خورشید بر روی پلکهای شماست. با فرض آنکه "طیف" رنگهای حاصل از لامپ روشنایی و خورشید با یکدیگر زیاد تفاوت ندارند، می‌توانیم فرض کنیم که شار کلی خورشید، به انضمام ماوراء بنفشی که با این روش احتمالاً نمی‌توانیم تشخیص دهیم، با معادله (۱۴۵) داده می‌شود. S "ثابت خورشیدی" نامیده می‌شود و در کتاب راهنمای فیزیک و شیمی درج شده است. در این کتاب برای S مقداری مساوی با ۱۹۴ "کالری کوچک" بر سانتیمتر مربع در دقیقه نوشته شده است. برای تبدیل واحدها، از این رابطه که یک کالری کوچک برابر ۴۱۸ ژول و یک ژول بر ثانیه برابر یک وات است، استفاده می‌کنیم. برطبق کتاب راهنما، ثابت خورشیدی در بالای اتمسفر زمین برابر است با

$$S = \frac{(1.94)(4.18)J}{60s} = 135 \text{ mW/cm}^2 \quad (146)$$

با فرض مقدار کتاب راهنما، یعنی معادله (۱۴۶)، مقدار rms میدان الکتریکی برحسب ولت بر سانتیمتر چقدر است؟

$$S = 0.135 \times 10^7 \text{ erg/cm}^2 \text{ s} = \frac{c}{4\pi} \langle E^2 \rangle$$

$$\langle E^2 \rangle = \frac{(1.2957)(0.135 \times 10^7)}{3 \times 10^{10}} = 5.96 \times 10^{-4}$$

$$E_{\text{rms}} = \langle E^2 \rangle^{1/2} = 2.4 \times 10^{-2} \text{ esu} = 2.4 \times 10^{-2} \text{ statV/cm}$$

اما

$$1 \text{ statV} = 300 \text{ V}$$

از این رو

$$E_{\text{rms}} = 7.2 \text{ V/cm} \quad (147)$$

دقت کنید که چون تمام فرمولهای ما برحسب واحدهای esu و CGS هستند، اعداد را باید به CGS و esu تبدیل کرد و جواب را به دست آورد و سپس جواب را به واحدهای مناسب تبدیل کرد.

اندازه‌گیری شار انرژی تابش الکترومغناطیسی. در مثال بالا از چشمها و پلکهای شما برای تعیین ثابت خورشیدی در سطح زمین استفاده شد. چشمهای شما و عوامل حساس به گرما در پلکهای شما نمونه‌ای از آشکارسازهای تابشی با قانون مربعی هستند — آشکارسازهایی که به شدت تابش پاسخ می‌دهند اما نسبت به داده‌های فاز غیرحساس هستند. (چنین حالتی در آشکارسازی صوت به وسیله گوشهای شما، هم برقرار است.) بنابراین کمیت مناسب برای شرح دادن شار تابش، مقدار لحظه‌ای $S(z, t)$ نیست، بلکه مقدار متوسط زمانی آن است یعنی مقدار متوسط در یک دور نوسان

$$S \equiv \langle S(z, t) \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E}^2(z, t) \rangle \quad (148)$$

(برای موج تخت، این مقدار متوسط زمانی شدت، مستقل از مکان z است.)

نمونه‌ای از آشکارساز با قانون مربعی، از یک صافی نوارگذر (که برای عبور دادن تابش با بسامد دلخواه و حذف کردن سایر تابشهای "زمینه" به کار می‌رود)، تشکیل شده است که به دنبال آن یک "عنصر حساس" وجود دارد که تمام شار تابش را (به وسیله بازتاب) و بدون اتلاف جذب می‌کند و یک "سیگنال خروجی" متناسب با (یا حداقل جفت شده به) مقدار انرژی جذب شده می‌دهد. دسته بسیار بزرگی از این آشکارسازها از یک کالری سنج حساس به عنوان عنصر حساس جاذب انرژی استفاده می‌کنند. مقدار انرژی جذب شده در واحد زمان با اندازه‌گیری آهنگ افزایش دما در برخی از مواد جذب‌کننده تعیین می‌شود یا با اندازه‌گیری دمای تعادل جزء حساس نسبت به یک محیط استاندارد (که ممکن است محیطی بسیار سرد باشد که بتوان آن را دقیقاً بازسازی کرد مانند هلیوم مایع) که در آن حالت تعادل به وسیله نشت دائمی گرما بین عنصر حساس و محیط حفظ می‌شود. چنین آشکارسازی می‌تواند یک دستگاه درجه‌بندی درون خود داشته باشد که به وسیله آن (مثلاً) بتوان تابش خارجی را موقتاً حذف کرد و به جای آن جریانی از یک مقاومت استاندارد که در داخل جزء حساس قرار دارد، عبور داد. توان تلف شده به وسیله مقاومت، با اندازه‌گیری جریان و افت پتانسیل به آسانی اندازه‌گیری می‌شود و باید با توان جذب شده از تابشی که همان اضافه دما را می‌دهد، برابر باشد. اصلاحات زیرکانه متعددی از این روش، موجود است.

دسته دیگری از آشکارسازها شامل شمارنده‌های فوتونی است. یک لوله تکثیرکننده فوتونی یک شمارنده فوتون است. هنگامی که "گاتد" تکثیرکننده فوتونی، یک فوتون جذب می‌کند، یک "فتوالکترون" تولید می‌شود. این فوتون سپس به وسیله یک پتانسیل حدود 10^6 ولت به طرف یک "دینود چند برابرکننده" شتاب می‌گیرد که در آنجا هر یک فتوالکترون ۳ یا ۴ الکترون ثانویه به وجود می‌آورد. این الکترونها به سمت دینود دوم شتاب می‌گیرند که در آنجا هر کدام ۳ یا ۴ الکترون

بیشتر تولید می‌کنند و غیره. سرانجام پس از شاید 10^6 مرحله تقویت از این نوع یعنی 10^6 دینود، از هر فوتون تابش در حدود (3.5×10^6) الکترون حاصل می‌شود که بر روی یک "صفحه جمع‌کننده" یا "آند" جمع‌آوری می‌شوند. این الکترونها از میان یک مقاومت عبور می‌کنند و یک تپ ولتاژ به وجود می‌آورند. این تپها ثبت شده و می‌توانند شمرده شوند. هر تپ مربوط به جذب دقیقاً یک فوتون با انرژی الکترومغناطیس $h\nu$ است که در آن ν بسامد نوسان و h ثابت پلانک است. به ازای یک بسامد مفروض ν ، بازده آشکارسازی $e(\nu)$ را با استفاده از برخی از چشمه‌های استاندارد تابش، می‌توان تعیین کرد. در این صورت آهنگ متوسط شمارش R (برحسب شمارش برثانیه) که در فاصله زمانی t میانگین‌گیری شده است، از تقسیم عدده شمارشهای مشاهده شده N بر t به دست می‌آید:

$$R = \frac{N \pm \sqrt{N}}{t} \quad (149)$$

که در آن "انحراف معیار" عدده شمارش، که یک برآورد قراردادی از خطای آماری در اندازه‌گیری است، برابر با جذر تعداد شمارش اختیار شده است. از کمیت اندازه‌گیری شده R برای تعیین شار انرژی برحسب $\text{erg/cm}^2\text{s}$ توسط رابطه زیر استفاده می‌شود

$$R = \left(\frac{S}{h\nu} \right) Ae(\nu) = \frac{1}{h\nu} \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E}^2(z, t) \rangle Ae(\nu) \quad (150)$$

که در آن A مساحت فتوکاتد (برحسب cm^2)، S متوسط زمانی شدت یعنی شار انرژی (برحسب $\text{erg/cm}^2\text{s}$)، $S/h\nu$ متوسط زمانی شار فوتون برحسب cm^2s فوتون، و $e(\nu)$ بازده آشکارسازی است. بازده آشکارسازی عبارت است از احتمال آنکه فوتون فرودی بر روی فتوکاتد جذب شود و یک فتوالکترون به وجود آورد. بازده آشکارسازی تکثیرکننده فوتونی بین ۱ تا ۲۰ درصد تغییر می‌کند.

مثالی از یک آشکارساز که آشکارساز با قانون مربعی نیست عبارت است از مجموعه‌ای از آنتن دریافت‌کننده، یک مدار تشدید تنظیم شده که به وسیله ولتاژ القاشده در آنتن (که این ولتاژ، خود به وسیله امواج پیشرونده حاصل از یک فرستنده دور به وجود می‌آید) تحریک می‌شود، یک تقویت‌کننده و یک اسیلوسکوپ. سیگنال اسیلوسکوپ، فاز لحظه‌ای تابش فرودی به علاوه شدت آن را نشان می‌دهد یعنی سیگنالی می‌دهد که به جای آنکه با متوسط زمانی مربع میدان الکتریکی متناسب باشد، با میدان الکتریکی لحظه‌ای در آنتن متناسب است. اگر تعداد فوق‌العاده زیادی فوتون وجود داشته باشد به طوری که نتوانید تک تک شمارش فوتونها را تشخیص دهید، اندازه‌گیری فاز یک موج الکترومغناطیسی با دقت نامحدود ممکن است. در این صورت می‌توانید با جذب

عده زیادی از فوتونها در هر "لحظه"، از میدان الکتریکی برحسب زمان "نمونه برداری" کنید. ثابت فاز φ یک فوتون تنها در یک موج نور را که با رابطه $E_x = A \cos(\omega t - kz + \varphi)$ تعریف می شود، ممکن نیست بتوان تعیین کرد.

شدتهای استاندارد نور مرئی — توان شمع. در اداره استانداردها شمعى نگاهداری می شود که "شمع استاندارد" نام دارد. درخشندگی آن در حدود درخشندگی یک شمع معمولی است. بنا به تعریف یک شمع استاندارد دارای توان خروجی گسیل شده در تمام جهات در حدود 2.0×10^3 میلی وات است. این توان برای نور مرئی است (که در بسامدی که در بیشینه قدرت بینایی است یعنی حدود 5560 \AA اختیار می شود):

$$(151) \quad 2.0 \text{ میلی وات نور مرئی} \approx 1 \text{ شمع (cd)}$$

درخشندگی سطحی. هر جزء سطح تابشگر یک شعله شمع در تمام جهات نور تابش می کند. هنگامی که به یک شعله شمع نگاه می کنید، تمام سطح آن به طور یکنواخت درخشان به نظر می رسد. این شمع هنگامی که بدان نزدیک هستید، درست همانقدر درخشان به نظر می رسد که هنگامی که از آن دور هستید. این مطلب برای ماه یا یک قطعه کاغذ سفید نیز صادق است. این مطلب برای سطح یک حباب مات لامپ التهابی نیز تقریباً صادق است. درخشندگی سطحی به صورت انرژی خروجی (نور مرئی) بر واحد سطح در واحد زمان تعریف می شود. این مقدار برحسب وات از نور مرئی بر واحد سطح یا برحسب شمع بر واحد سطح اندازه گیری می شود. شعله یک شمع معمولی در حدود 2 سانتیمتر مربع است و توان کلی خروجی آن در حدود یک شمع است. بنابراین درخشندگی سطحی یک شمع با رابطه زیر داده می شود

$$(152) \quad \text{درخشندگی سطحی یک شمع} \approx \frac{1 \text{ cd}}{2 \text{ cm}^2} = 0.5 \text{ cd/cm}^2$$

یعنی در حدود 1.8 درصد از 40 وات "اتلاف I^2R " در رشته، به صورت نور مرئی ظاهر می شود. قسمت عمده بقیه به تابش نامرئی تبدیل می شود. (مقدار کمی نیز به وسیله رسانایی از طریق سیمهای ورودی متصل به رشته به پایه لامپ می رود و تلف می شود. قسمتی از فروسرخ در جدار شیشه ای جذب می شود و به این دلیل است که جدار شیشه ای — حتی یک جدار شیشه ای بی رنگ که برای تابش مرئی تقریباً به طور کامل شفاف است — خیلی داغ می شود.)

اکنون درخشندگی سطحی یک لامپ 40 واتى را برآورد می کنیم. (می توانیم نتیجه را با نتیجه ای که در کتب مرجع نوشته شده است یعنی 2.5 cd/cm^2 مقایسه کنیم.) قطر لامپ در حدود 6 سانتیمتر است. اگر لامپ را روشن و به آن نگاه کنیم می بینیم که برخلاف ماه، تمام سطح

روشن آن به طور یکنواخت درخشان نیست. مرکز لامپ به طور تقریباً یکنواخت درخشان است اما در شعاعی که به قطر در حدود ۲ سانتیمتر مربوط به "تمام پهنا در نیم‌بیشینه درخشندگی" است، کاهش ناگهانی در درخشندگی به وجود می‌آید، یعنی لامپ در ظاهر دارای سطح روشن‌شده‌ی کره‌ای به قطر ۲ سانتیمتر است که تقریباً به طور یکنواخت درخشان است. بنابراین لامپ را تقریباً می‌توانیم یک کره به طور یکنواخت درخشان به قطر ۲ سانتیمتر در نظر بگیریم. درخشندگی سطحی این کره "مؤثر" برابر با تقسیم توان مرئی بر مساحت سطح است. مساحت برابر است با $4\pi r^2 = 4\pi = 12.6 \text{ cm}^2$. توان مرئی برابر با حاصلضرب 40° وات در بازده است، یعنی 176° W . اگر بخواهیم پاسخ را بر حسب شمع بر سانتیمترمربع یعنی cd/cm^2 بیان کنیم که در آن 1 cd/cm^2 برابر 20 mW/cm^2 است، نتیجه می‌شود:

$$(153) \quad \text{درخشندگی سطحی لامپ } 40^\circ \text{ واتی} = \frac{(40)(176)}{(12.6)(20 \times 10^{-3})} = 288 \text{ cd/cm}^2$$

مقداری که در کتب مرجع داده شده است برابر 285 cd/cm^2 است.

"مات کردن" یک حباب لامپ مات معمولی (از همان نوعی که در بالا در نظر گرفته شد) با ناهموار کردن سطح داخلی انجام می‌شود. یک نوع متداول دیگر حباب "سفید ملایم" نام دارد. برخلاف یک حباب مات معمولی، یک لامپ "سفید ملایم" روشنایی با درخشندگی تقریباً یکنواخت می‌دهد. این لامپ مانند ماه است، اما درخشانتر.

چرا هنگامی که ماه نزدیکتر است درخشانتر به نظر نمی‌آید. اکنون می‌بینیم که چرا درخشندگی سطحی ظاهری شیئی که در تمام جهات نور می‌فرستد، مثل یک قطعه کاغذ سفید (یا ماه یا خورشید یا آسمان آبی) بستگی به آن ندارد که شما چقدر از سطح دور هستید. تصور کنید به دیواری که کاملاً با حبابهای لامپهای التهابی که جداره‌های "سفید ملایم" دارند پوشیده شده است، نگاه می‌کنید. فرض کنید چگالی سطحی حبابها که بر حسب تعداد حبابها بر واحد سطح دیوار اندازه‌گیری می‌شود، برابر D باشد. طبق تعریف، درخشندگی سطحی دیوار همان درخشندگی سطحی یک حباب به تنهایی است. احساس بصری درخشندگی به مقدار انرژی نورانی بستگی دارد که در داخل یک "مخروط استاندارد" که رأس آن در چشم است و روزنه زاویه‌ای معینی دارد، (از چشمه) وارد چشم می‌شود. بنابراین در هر مرتبه شما فقط به قسمت کوچکی از سطح درخشان "نگاه می‌کنید" و احساس درخشندگی شما بستگی به مقدار انرژی دارد که از قسمتی از سطح که به وسیله مخروط استاندارد قطع می‌شود، وارد چشم شما می‌شود. تصور کنید فاصله چشمهای شما تا دیوار برابر R است و تصور کنید که به سطح ΔA از دیوار "نگاه می‌کنید". زاویه

فضایی $\Delta\Omega$ که از چشمهای شما بر سطح ΔA مشرف است، به صورت زیر تعریف می شود

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{R^2} \quad (154)$$

که در آن مساحت ΔA عبارت است از مساحت تصویرشده عمود بر خط دید شما و در آن ΔA کوچک فرض می شود، به طوری که هر بعد ناحیه ΔA در مقایسه با R بسیار کوچک باشد. هر زاویه فضایی ثابت مفروض $\Delta\Omega$ ، مربوط به یک مخروط با زاویه رأس معینی است. احساس درخشندگی متناسب است با انرژی واردشده به چشم شما از آن زاویه فضایی ثابت کوچک (یعنی یک مخروط معین) که از چشم شما بر قسمتی از سطح مشرف است. تعداد حبابهای لامپ یعنی N در داخل مخروط زاویه فضایی ثابت $\Delta\Omega$ برابر است با حاصلضرب چگالی D در مساحت ΔA :

$$N = D\Delta A = D\Delta\Omega \times R^2 \quad (155)$$

حال تصور کنید که از دیوار حبابهای لامپ دورتر بروید. چون D و $\Delta\Omega$ ثابت هستند، تعداد حبابهای لامپ یعنی N که به آنها نگاه می کنید متناسب با R^2 اضافه می شود. اما شدت حاصل از یک حباب لامپ تنها در احساس درخشندگی شما، به صورت $1/R^2$ تنزل می کند زیرا توان P هر حباب (برحسب erg/s) در مساحت $4\pi R^2$ به طور یکنواخت توزیع شده است. این دو خاصیت یکدیگر را "خنتی" می کنند. حاصلضرب N ، یعنی تعداد تمام لامپها، در $1/R^2$ مقدار ثابتی است. بنابراین شدت نور S (برحسب erg/cm²s) که از یک مخروط با زاویه فضایی ثابت $\Delta\Omega$ به چشم شما می رسد، مقداری ثابت است:

$$S(\text{در چشم}) = \frac{NP}{4\pi R^2} = D \frac{\Delta\Omega}{4\pi} P \quad (156)$$

از این رو، دیوار حبابهای لامپ، خواه نزدیک آن باشید و خواه دور از آن، مانند یک قطعه کاغذ سفید، به طور یکسان "درخشان" به نظر می رسد.

در بحث بالا، فرض کردیم که خط دید شما بر دیوار حبابهای لامپ عمود است. فرض کنید که به جای آن، دیوار حبابها با زاویه نسبتاً بزرگی نسبت به خط دید شما متمایل شده باشد. بنابراین ممکن است تصور کنید که چون مخروط با زاویه فضایی ثابت تعداد بیشتری از حبابها را قطع می کند، اگر سطح متمایل شود، درخشانتر باید به نظر برسد. اما چنین نیست. حبابهای لامپ اشیای سه بعدی — کره — هستند. هنگامی که به دیوار متمایل شده نگاه می کنید، حبابها به طور جزئی یکدیگر را می پوشانند. اگر دو لامپ روشن شده مات (سفید ملایم) را بگیرید و به طور جزئی (یا کلی) یکی

را به وسیله دیگری بپوشانید، سهم نور از حباب پوشیده شده هیچ است. سطح روشن این دو "روی هم" از سطح روشن یک لامپ تنها، درخشانتر نیست.

هنگامی که یک برگ کاغذ سفید یا سطحی که بر روی آن نمک یا شکر پاشیده شده یا سطح ماه، با روشنایی حاصل از اتاق یا خورشید روشن شود، جسم تا عمق قابل ملاحظه‌ای روشن می‌شود. نوری که از سطح خارج می‌شود به دفعات متعدد پراکنده شده است. اثر نهایی این است که سطح نور را بازگسیل می‌کند، چیزی شبیه دیواری با چندین لایه از حبابهای لامپهای مات سفید ملایم. برای آنکه ببینید بیشتر نور خارج شده از عمق قابل ملاحظه‌ای بیرون می‌آید، می‌توانید یک تکه پارچه سفید در بالای یک سطح تاریک بگذارید. سپس تکه دوم و سوم و غیره را به آن اضافه کنید. هر چه لایه‌های بیشتری اضافه شود، پارچه "سفید و سفیدتر" به نظر می‌رسد.

روشنایی - فوت - شمع شدت کلی نور (برحسب $\text{erg/cm}^2\text{s}$) که به یک محل معین می‌رسد، گاهی روشنایی نامیده می‌شود. روشنایی متناسب است با درخشندگی سطحی چشمه و با زاویه فضایی کلی که از چشمه بر آن محل مشرف است. مثلاً اگر قطر ماه دو برابر بزرگتر هم می‌بود، درخشندگی سطحی آن تغییر نمی‌کرد (زیرا این درخشندگی در نتیجه روشنایی آن به وسیله خورشید است). اما زاویه فضایی آن چهار برابر زاویه فضایی (قبلی) می‌بود و شار نوری k در کره زمین چهار برابر بزرگتر می‌بود. روشنایی حاصل از یک شمع استاندارد در فاصله یک فوت، یک فوت - شمع نامیده می‌شود. از معادله (۱۵۱) به آسانی می‌توان نشان داد که

$$(157) \quad (\text{از نور مرئی}) \quad 1.8 \mu\text{W/cm}^2 \approx 1 \text{ فوت - شمع}$$

برطبق جدول ۳-۴ که نمونه‌هایی از مقادیر درخشندگی سطحی برخی از سطوح جالب توجه را به دست می‌دهد، یک شمع به روشنایی آسمان است. یعنی اگر شما شمعی را نگاه دارید و به آن و به آسمان به عنوان زمینه نگاه کنید، دیدن شعله شمع مشکل خواهد بود. البته رنگ آنها متفاوت است؛ شعله شمع زرد، آسمان آبی است.

کاربرد: مقایسه لامپ ۴۰ وات و ماه

این یک مثال عددی است: یک لامپ مات ۴۰ وات با پرتو "مؤثر" ۲ سانتیمتر در چه فاصله‌ای باید باشد تا بتواند همان روشنایی حاصل از ماه کامل را به وجود آورد؟ برطبق جدول ۳-۴ درخشندگی سطحی لامپ ۱۰ برابر ماه کامل است. برای به وجود آوردن همان مقدار روشنایی، زاویه فضایی لامپ باید $1/\sqrt{10} = 1/3.2$ برابر قطر زاویه‌ای معمولی ماه باشد. قطر زاویه‌ای ماه در فاصله ۵۰ سانتیمتری از چشم (به اندازه طول است)، حدود $1/2$ سانتیمتر است که برابر $1/100$ رادیان

جدول ۳-۴ درخشندگی سطحی

سطح	درخشندگی سطحی، شمع/cm ^۲
شمع	۰٫۵
لامپ مات ۴۰ واتی	۲٫۵
آسمان صاف	۰٫۴
ماه	۰٫۲۵
خورشید	۱۶۰۰۰۰
لامپ شفاف ۴۰ واتی (در رشته)	۲۰۰

منبع:

Handbook of Chemistry and Physics, 48th ed.
(The Chemical Rubber Co., Cleveland)

این کتاب سالانه چاپ می‌شود. برای یافتن این جدول به مدخل
"photometric quantities" (کمیت‌های نورسنجی) مراجعه
کنید.

می‌شود. بنابراین قطر زاویه‌ای لامپ باید $1/32^\circ$ رادیان باشد. از این رو $(1/32^\circ = 2\text{cm}/R)$ و $[R = 2(32^\circ) = 64^\circ\text{cm} = 64\text{m}]$ البته برای هر لامپ ۴۰ واتی خواه مات باشد، خواه نباشد، فاصله ۶۴ متری باید فاصله برای "مهتاب کامل" باشد. یک حباب غیرمات در خلأ درخشانتر به نظر می‌رسد اما همان مقدار روشنایی را به وجود می‌آورد.

کاربرد: آینه سفینه‌ای مانند ماه

تصور کنید که کشاورزان کانزاس و قسمتی از نبراسکا که در یک ناحیه کشاورزی دایره‌ای به قطر ۳۳۰ کیلومتر (یعنی طول شرقی غربی ایالت کانزاس) زندگی می‌کنند می‌خواهند در تمام طول ماه، شبها با استفاده از نور ماه کامل مزرعه‌هایشان را شخم بزنند. وزارت کشاورزی راه حلی پیدا می‌کند: استفاده از یک قمر مصنوعی که از یک کیسه پلاستیکی بادکرده به شکل یک قرص دایره‌ای که سطحی با قدرت بازتاب بسیار زیاد دارد، ساخته شده است. اگر کشاورزان نوری معادل با نور خورشید کامل بخواهند، کوچکترین آینه سفینه‌ای که این کار را می‌تواند انجام دهد یک آینه تخت به اندازه مساحت مزرعه در کانزاس و نبراسکا خواهد بود. با تکنولوژی فعلی قمرهای مصنوعی چنین کاری غیرممکن است. اما این کشاورزان فقط مهتاب کامل می‌خواهند. برطبق جدول ۳-۴ درخشندگی ماه ۶۴۰۰۰۰ مرتبه کمتر از درخشندگی خورشید است. زاویه فضایی ماه و خورشید

تقریباً یکسان است. از این رو شدتی که کشاورزان می‌خواهند $10^4 \times 64$ مرتبه کمتر از شدتی است که خورشید می‌دهد. بنابراین مساحت آینه سفینه‌ای می‌تواند $10^4 \times 64$ مرتبه کوچکتر از ناحیه کشاورزی باشد و باز هم به اندازه کافی نور خورشید را قطع کند به طوری که کشاورزان راضی باشند. (به جای یک آینه تخت، آینه باید اندکی مقعر باشد تا بتواند نور خورشید را برای تمام ناحیه کشاورزی پخش کند.) از این رو قطر آینه می‌تواند $10^2 \times 8$ مرتبه کوچکتر از قطر ناحیه باشد. بنابراین قطر آینه مورد نیاز $410 \text{ m} = 330 \text{ km}/800$ می‌شود. ساختن این آینه عملی است!

مسائل و آزمایشهای خانگی

۱-۴ انتهای ریسمانی در $z = 0$ به طور هماهنگ با بسامد 10 cps و دامنه 1 cm به حرکت درمی‌آید. انتهای ریسمان بینهایت دور است (یا ریسمان طوری "پایان یافته" است که هیچ بازتابی نباشد). سرعت فاز 5 m/s است. حرکت یک نقطه از ریسمان را که در 325 cm پایین پایانه تحریک قرار دارد (دقیقاً) توضیح دهید. حرکت نقطه دوم که در 350 cm پایین قرار دارد چگونه است؟

۲-۴ سرعت فاز v_p در توصیف امواج پیشرونده معرفی شد. این سرعت در فرمول $v_p = \lambda \nu$ صدق می‌کند. همچنین می‌دانیم که λ و ν برای امواج ساکن چه معنایی دارد؛ بنابراین می‌توانیم v_p را با مطالعه امواج ساکن به جای امواج پیشرونده پیدا کنیم.

(الف) سیم بیانونی به طول 1 m و بسامد 440 cps (440 cps) در پایینترین مد داریم، سرعت فاز را به دست آورید.

(ب) نشان دهید که برای یک سیم پیانو یا ویولون که در دو انتها ثابت است، تناوب T پایینترین مد با زمان "رفت و برگشتی" داده می‌شود که لازم است تا یک تپ از یک انتها به انتهای دیگر سیم برود. آنگاه به جای اول بازگردد و همیشه با سرعت فاز حرکت کند. تناوبهای مدهای بالاتر چقدر است؟

(ج) نتیجه قسمت (ب) را با ضربه چکش پیانو به نزدیک انتهای سیم و تولید یک "بسته موج" یا "تپ" که با سرعت فاز به طرف جلو و عقب انتشار می‌یابد توضیح دهید. در مورد آنالیز فوری و وابستگی زمان برای حرکت هر نقطه ثابت روی سیم فکر کنید. شما فقط به آنالیز فوری‌ای که در فصل ۲ خواندید احتیاج دارید.

(د) سیمی را در نظر بگیرید که در $z = 0$ ثابت و در $z = L$ آزاد است. نشان دهید که تناوب پایینترین مد برابر زمانی است که طول می‌کشد تا یک تپ رفت و برگشت کند و رفت و

برگشت کند یعنی با سرعت فاز دوبار رفت و برگشت کند. آیا می‌توانید راه ساده‌ای توصیف کنید که چرا این نتیجه کاملاً با نتیجه قسمت (ب) تفاوت دارد؟ چرا تپ مجبور است دو بار سفر کند؟ ۳-۴ فرض کنید که سیم پیانو قسمت (الف) مسئله ۲-۴ قطری برابر با ۱mm داشته باشد و از فولادی که چگالی حجمی آن 7.9 g/cm^3 است ساخته شده باشد. کشش سیم را برحسب دین و پوند به دست آورید. ($9.8 \times 10^8 \text{ dyn} = 1 \text{ g-W}$ ، 2.2 lb وزن دارد).

جواب: در حدود 110° lb .

۴-۴° سرعت فاز برای امواج فزاسلینکی. (الف) سرعت فاز را به روش توصیف شده در مسئله ۲-۴ یعنی با استفاده از امواج ساکن به دست آورید.

(ب) محاسبه: "به‌طور نظری" نشان دهید که سرعت فاز اسلینکی (شامل تعداد دورهای ثابت، یعنی مقدار ثابتی از ماده واقعی) با طول اسلینکی متناسب است. بنابراین اگر طول را با کشیدن آن به طرف دور دو برابر کنیم سرعت فاز با ضریب ۲ زیاد می‌شود.

(ج) این آزمایش را با استفاده از امواج ساکن قسمت (الف) تحقیق کنید.

(د) یک "تپ" کوتاه یا یک "بسته موج" در طول اسلینکی بفرستید. در همان موقع اسلینکی را از حالت سکون به شکلی رها کنید که نوسانی با پایبندترین مد عرضی داشته باشد. آیا زمان "رفت و برگشت" تپ برابر زمان تناوب پایبندترین مد است؟

۵-۴° میرایی در نوارهای لاستیکی. با به هم بستن چند نوار لاستیکی که طوری بریده شده‌اند که یک رشته منفرد به وجود آورده‌اند یک "طناب لاستیکی" دو یا سه فوتی بسازید. تحقیق کنید که سرعت فاز برای امواج طولی بزرگتر از (اگر باشد) سرعت فاز برای امواج عرضی است. مدهای طولی سریعاً میرا می‌شوند. یکی از نوارها را در مقابل لبهای مرطوب خود بگیرید. ناگهان آن را بکشید. کمی صبر کنید. ناگهان آزادش کنید. نتایج این آزمایش چه اطلاعاتی (اگر باشد) در مورد میرایی می‌گوید؟ چرا مدهای طولی میرا شده این قدر بیشتر از مدهای عرضی است. به عبارت دیگر چه طور می‌توانید نوسانات عرضی با این میرایی زیاد را پایین بیاورید؟

۶-۴° اندازه‌گیری سرعت صوت به وسیله بسته موج. در اینجا دو روش وجود دارد:

(الف) به دستیاران بگوئید یک ترقه را در نیم مایلی یا دورتر آتش بزند. وقتی نور انفجار را می‌بینید زمان سنج را روشن کنید. وقتی صدای آن را شنیدید آن را متوقف کنید. فاصله را اندازه بگیرید. این آزمایش را در دو فاصله متفاوت که با ضریب توان ۲ فرق می‌کنند انجام دهید. تأخیر زمان را برحسب فاصله برای این دو نقطه رسم کنید. آیا منحنی خط راست از تقاطع دو نقطه در مبدأ می‌گذرد؟ اگر نمی‌گذرد چرا؟ اگر نمی‌گذرد با وجود این می‌توانید سرعت را تعیین کنید؟ چگونه؟

(ب) حیاط مدرسه یا زمین بازی پیدا کنید که فضای تخت گسترده‌ای داشته باشد که یک طرف آن به وسیله ساختمان آن محصور شده باشد، بنابراین وقتی در فاصله 5° یاردی یا در همین حدود از دیوار دستهایمان را به هم می‌زنیم بازتاب واضحی را می‌شنویم. آنگاه زمان رفت و برگشت از مرتبه ۲ یا ۳ دهم ثانیه است. اندازه‌گیری دقیق مشکل است حتی با زمان‌سنج. در اینجا روشی ارائه می‌شود که فقط یک ساعت معمولی (که عقربه ثانیه‌شمار داشته باشد) احتیاج است. ساعت را روی زمین بگذارید به طوری که وقتی دست می‌زنید به آن نگاه کنید. دست‌زدن را به طور منظم شروع کنید. ابتدا آهسته دست بزنید. به صدای دست خود و بازتاب آن گوش دهید. وقتی بازتابها دقیقاً روی "زنش قطع" آمد ضرب دستان را زیاد کنید. می‌توانید این کار را با ضرب آسان مانند دو بار در ثانیه انجام دهید. این کار را ده ثانیه یا حدوداً ده ثانیه نگه دارید، به ساعت نگاه کنید. همزمان دست‌زدنها را بشمارید. (ممکن است این تمرین چند دقیقه طول بکشد.) به طرف دیوار تختی که عمل بازتاب انجام می‌شود قدم بردارید. بقیه بازتابها حسابی خواهد بود.

۷-۴ کابل انتقال نیرو. نشان دهید که ظرفیت در واحد طول، C/a ، برای خط انتقال نیروی کابلی با رساناهایی به شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2 که بین رساناهای استوانه‌ای داخلی و خارجی خلأ باشد با رابطه زیر داده می‌شود (برحسب esu یعنی cm ظرفیت بر cm طول در امتداد محور):

$$\frac{C}{a} = \frac{1}{2 \ln(r_2/r_1)}$$

نشان دهید که خودالقایی در واحد طول، L/a ، (برحسب esu) با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\frac{L}{a} = \frac{2}{c^2} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

برای به دست آوردن C/a از $Q = CV$ و قانون گاوس استفاده کنید. برای به دست آوردن L/a از $L = (\lambda/c)\Phi/I$ که در آن Φ شار مغناطیسی ایجاد شده توسط جریان I است استفاده کنید. ۸-۴ خط انتقال نیروی سیم-موازی. ابتدا مسئله ۷-۴ را که در آن می‌توانید از تقارن استفاده کنید حل کنید. این مسئله آن تقارن را ندارد اما به آسانی می‌توانید با استفاده از اصل برهم‌نهی آن را حل کنید: سهم میدان در یک سیم را حساب کنید؛ سپس آن را ۲ برابر کنید. نشان دهید که C/a و L/a با رابطه زیر به دست می‌آیند

$$\frac{C}{a} = \frac{1}{2 \ln[(r+D)/r]}$$

$$\frac{L}{a} = \frac{2}{c^2} \ln \frac{r+D}{r}$$

که در آن r شعاع هر سیم و $r + D$ فاصله از محور یک سیم تا سطح سیم دیگر است. توجه کنید که این محاسبه بسیار شبیه محاسبه مسئله ۴-۷ است بجز آنکه در آن ضریب ۲ پدید می‌آید. این ضریب را توضیح دهید.

۹-۴ نشان دهید (مثلاً با یک بحث ساده بر پایهٔ تقارن) که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، خارج از رسانای خارجی و داخل رسانای داخلی خط انتقال نیروی کابلی صفر است. نشان دهید که میدان الکتریکی و مغناطیسی خارج از ناحیهٔ بین صفحات خط انتقال نیرو صفحه موازی صفر است.

۱۰-۴ نشان دهید که خودالقایی خط انتقال نیروی صفحه موازی برای جریان متناوب مانند جریان مستقیم تا زمانی که طول موج بلند در مقایسه با ضخامت صفحه d قابل مقایسه باشد از معادله (۵۹) بخش ۴-۲ به دست می‌آید. بحث بخش ۴-۲ را که شامل معادله (۶۰) است بخوانید. از معادله (۶۰) شروع کنید.

۱۱-۴ بر طبق جدول، ثابت دی‌الکتریک هوا در STP، 1.00059 است. (فرض کنید تراوایی مغناطیسی آن واحد است.) بنابراین طبق معادله (۶۳) بخش ۴-۳، ضریب شکست هوا در STP باید $\sqrt{1.00059} = 1.00029$ باشد. این جواب کاملاً با مقدار تجربی که در جدول ۱-۴ بخش ۴-۳ آمده است توافقی دارد. برعکس ثابت دی‌الکتریک آب 80 است. ضریب شکست $\sqrt{80} \approx 9$ نیست بلکه در عوض در حدود 1.23 است. چرا این اختلاف بزرگ وجود دارد؟

۱۲-۴ منشور آبی - پاشندگی آب. یک منشور آبی به صورت زیر درست کنید. دو تیغهٔ میکروسکوپ را طوری به هم ببندید که شکل V داشته باشند. قسمت فرورفتگی آن را با بتونه کردن یا گل رس یا بستن با چیزی سفت کنید. قسمت فرورفتگی را با آب پر کنید. (حال جاهایی که نشئت می‌دهد پر کنید!) این منشور را نزدیک چشماتان بیاورید و از داخل آن به چیزها نگاه کنید. لبه‌های رنگی را که شما روی اجسام سفید می‌بینید "بیراهی رنگی" می‌نامند که روی عدسی به وجود می‌آیند - و بسیار ناخواسته‌اند - (بهترین چشمهٔ نقطه‌ای نور برای این مسئله و آزمایشهای خانگی دیگر یک چراغ قوه ساده است. "عدسی" شیشه‌ای را بردارید. بازتابگر آلومینیمی را با یک قطعه پارچهٔ سیاه (یا تیره) که سوراخی در داخل آن است تا بتوان نور لامپ را از داخل آن گذراند بپوشانید. البته، این کار را نمی‌توان با "باریکهٔ محدودشده" چراغ قوه انجام داد. بهترین چشمه خطی نور "لامپ نمایشی" با پوشش شیشهٔ تمیز و یک رشتهٔ مستقیم در حدود ۳ اینچ است که در تمام مغازه‌ها پیدا می‌شود.) حال صافی بنفش را از جعبهٔ وسایل اپتیکی خود بردارید و بین چشم خود و چشمهٔ نور قرار دهید. (صافی را خیس نکنید چون جنس آن از ژلاتین است و از بین می‌رود!) دو "چشمهٔ مجازی" می‌بینید، یکی قرمز و دیگری آبی. (برای درک صافی، با آن به چشمهٔ نور

سفید در داخل و خارج نگاه کنید، اما به جای منشور از توری پراش استفاده کنید. خواهید دید که رنگ سبز جذب می‌شود در حالی که رنگ قرمز و آبی عبور می‌کند. فرض کنید رنگ آبی که توسط صافی عبور می‌کند طول موج متوسطی در حدود 450 \AA دارد و طول موج متوسط نور قرمز 650 \AA است. (بعد از اینکه توریهای پراش را مطالعه کردید از شما خواسته می‌شود که این طول موجها را به دقت اندازه‌گیری کنید.) فاصله زاویه‌ای چشم خود را بین چشمه‌های مجازی نور قرمز و آبی اندازه بگیرید. روش آسان این است یک کاغذ که روی آن خطوطی کشیده شده است را بعد از چشمه نور قرار دهید. به طرف چشمه حرکت کنید. فاصله زاویه‌ای خطوط تغییر می‌کند و شما می‌توانید خطوط کشیده شده را با دو چشمه مجازی "منطبق کنید". سپس می‌توانید بگویید که چشمه‌های مجازی چند سانتیمتر از هم فاصله دارند. فاصله فضایی عبارت است از تقسیم این فاصله بر فاصله چشم شما تا چشمه. منشور را کج کنید تا بینید آیا فاصله زاویه‌ای چشمه‌های مجازی به طور حساس به زاویه فرود باریکه به تیغه اول بستگی دارد. فرمولی برای خم کردن باریکه نور به صورت تابعی از زاویه منشور و ضریب شکست به دست آورید. (راهنمایی: فرود بهنجار روی تیغه اول آسانترین راه برای به دست آوردن فرمول است. بنابراین آزمایش را به این طریق انجام دهید یا حداقل ببینید آیا این اتفاق می‌افتد یا نه.) زاویه منشور را به دست آورید. آیا تیغه‌های میکروسکوپ طرفین موازی در فاصله زاویه‌ای یا خمیدگی زاویه‌ای سهمیم است؟ چگونه این مسئله را به طور آزمایشی به دست می‌آورید؟ بالاخره آهنگ تغییر ضریب شکست آب در یکای هزار آنگستروم را تعیین کنید. آن را با شیشه چگونه مقایسه می‌کنید؟ (جدول ۲-۴ در بخش ۳-۴ را ببینید.) (باورکردنی است که گرچه آب ضریب شکست کمتری دارد ولی پاشندگی بیشتری از شیشه خواهد داشت. آیا این مورد است؟) اگر اتفاق غیرمنتظره جالبی را می‌خواهید تجربه کنید. آزمایش را با استفاده از روغن معدنی سنگین تکرار کنید. مایعات شفاف دیگر را امتحان کنید.

۱۳-۴ یک تار بینهایت با چگالی جرمی 1 g/cm و کشش 100 lb (354 g-W)؛ $1 \text{ lb} = 4.448 \text{ N}$ در $z = 0$ در حرکت هماهنگ با دامنه 1 cm و بسامد 100 cps به حرکت درمی‌آید. میانگین شار انرژی در طول زمان برحسب وات چیست؟

جواب: در حدود 40 وات. (جواب شما باید کمی دقیقتر از این باشد یعنی آیا 35 وات است؟ یا 44 وات؟)

۱۴-۴ یکی از بهترین نمایشهای موج ماشین موج پیچشی است. این ماشین شامل "ستون فقراتی" بلند در امتداد z است که "دنده‌های" موازی آن با فاصله 1 cm $a =$ از هم قرار دارند. ستون فقرات یک سیم فولادی است با سطح مقطع مربع که بعد عرضی آن در حدود $2 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$ است. هر دنده میله آهنی به قطر 5 cm و طول 3 cm است که از وسط به ستون فقرات

فولادی محکم شده‌اند. فرض کنید K ثابت فنر زاویه‌ای سیم باشد. یعنی گشتاور نیرو، K برابر زاویهٔ چرخش (برحسب رادیان) است. I را گشتاور لختی یک میله بگیرید.

(الف) فرمولی برای سرعت موج و امپدانس امواج پیچشی به دست آورید. (موجهای پیچشی سیم). امپدانس Z ، به صورت "گشتاور نیرو برابر با Z ضربدر سرعت زاویه‌ای" تعریف می‌شود. فرض کنید طول موج بلند با فضای a دنده‌ها قابل مقایسه باشد.

(ب) نشان دهید که قانون پاشندگی دقیق با فرمول $\omega^2 = 4\omega_1^2 \sin^2(\frac{1}{4}ka)$ به دست می‌آید و عبارتی برای ω_1 به دست آورید.

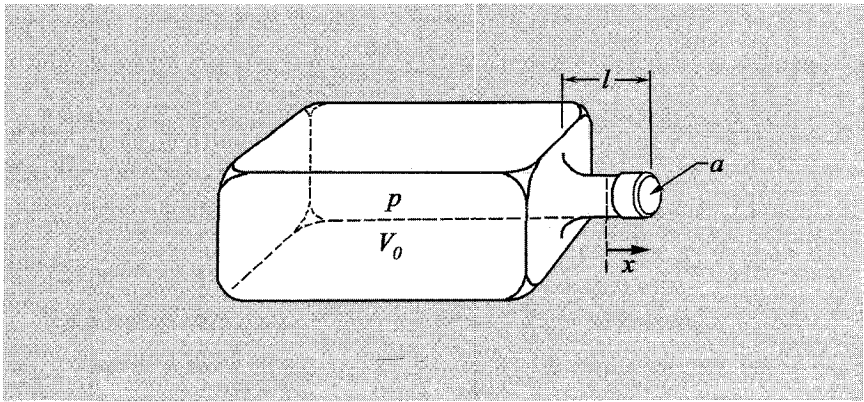
(ج) تا حالا ما از هر نیروی بازگردانندهٔ مربوط به گرانی صرف‌نظر کردیم. حالا فرض کنید که وقتی همهٔ میله‌ها با همدیگر نوسان می‌کنند (به طوری که سیم ستون فقرات هرگز پیچیده نمی‌شود) آنها با بسامد زاویه‌ای ω حول مکان تعادل افقی نوسان می‌کنند. قانون پاشندگی چیست؟

$40-15$ تشدیدکننده بطری مستطیل شکل (تشدیدکنندهٔ هلمهولتز). اگر در دهانه بطری یا تنگی فوت کنید، صدایی می‌شنوید، زیرا پایستریز مد را تحریک کرده‌اید. اگر بخواهید تخمین بزنید که چه بسامدی را انتظار دارید، فرض کنید که بطری مانند یک لولهٔ یکنواخت که از یک انتها بسته است عمل می‌کند به طوری که طول آن از قسمت پایین تا بالا $\lambda(1/4)$ است، تعجب خواهید کرد. صدا بسیار پایستریز از آنی است که شما حدس می‌زنید. اینجا مشتق تقریب هلمهولتز وجود دارد و نسبتاً نتایج خوبی می‌دهد. (من با استفاده از یک بطری خالی مستطیل شکل استفاده کنید، با بیانوی خود 110 cps پیش‌بینی کردم و 130 cps به دست آوردم). فرض کنید که هوا در حجم بزرگ V مانند یک فنر عمل می‌کند. این هوا به جرمی که هوای داخل گردن بطری دارد متصل است. این جرم $\rho \cdot al$ است که l طول گردن بطری، a مساحت آن، و ρ چگالی هواست. تقریب هلمهولتز فرض آن است که تمام حرکت در گردن بطری است و تمام نیروی بازگرداننده از تغییر فشار در V به وجود می‌آید. (الف) نشان دهید که اگر x جابه‌جایی به طرف خارج سیال در طول گردن باشد و اگر تمام نیروی بازگرداننده F_x مربوط به فشار جزئی $p - p_0$ باشد، که p فشار در V و p_0 فشار تعادل باشد، آنگاه

$$F_x = -\frac{\gamma p_0 a^2 x}{V}$$

که γ "آهنگ گرمای ویژه" برای هوا حدود 1.4 است.

۱. برای به دست آوردن جواب و بعضی نتایج تجربی به مقالهٔ زیر مراجعه کنید.



شکل م ۱۵-۴

(ب) نشان دهید که این، تک‌مد بسامد زاویه‌ای ω را با رابطه زیر می‌دهد

$$\omega^2 = v^2 \frac{a}{V_0 l}$$

که v سرعت صوت است. برای استفاده از این نتیجه باید l را با طول "مؤثر" گردن، که طول واقعی به‌علاوه $6r$ شعاع گردن در هر انتهایست عوض کنیم. اگر طول واقعی گردن صفر باشد، فرمول هنوز به‌خوبی صادق است (آنگاه طول l کاملاً مربوط به "تصحیح آخر" است). آن حالت متناظر با حالتی شبیه یکی از قوطیهای مکعب مستطیل رقیق‌کننده رنگ (تین) است.

اگر شما به شدت در دهانه بطری فوت کنید، می‌توانید مدهای بالاتر را تحریک کنید. یک‌بار که با فوت شدید بشنوید، می‌توانید معمولاً حضور ضعیف آنها را حتی وقتی آهسته فوت می‌کنید تا پایتترین مد اصلی را تحریک کنید، بشنوید. روش "یک‌بعدی" آسانی برای محاسبه بسامدهای تشدید بالاتر مورد انتظار وجود ندارد. خواهید فهمید که دو بطری با شکلهای متفاوت نسبت بسامد کاملاً متفاوت برای اولین و دومین و یا سومین مدها دارند، حتی اگرچه بتوانید بسامدهای پایتترین مد را حساب کنید و برای هر کدام نسبتاً از تقریب خوب هلمهولتز استفاده کنید.

۱۶-۴۰ سرعت صوت در هوا، هلیم، و گاز طبیعی. یک سوت تهیه کنید و در آن بدمید. گام آن را به‌خاطر بسپارید. حال سوت را به بطری هلیم (که در هر آزمایشگاه یا گروه فیزیک وجود دارد) وصل کنید و با استفاده از هلیم در سوت بدمید. حالا گام آن چیست؟ به‌طور آزمایشی نسبت گام هلیم را در مقایسه با هوا اندازه‌گیری کنید. آسانترین روش تشخیص گامها و آنگاه استفاده از جدول بسامد برحسب گام است (که در کتابهای مرجع فیزیک و شیمی پیدا می‌شود، آزمایش

خانگی ۲-۶ را ببینید). نشان دهید که به طور نظری نسبت گام مورد انتظار ۳ به ۱ است. به طور تجربی ممکن است فقط حدود ۲٫۵ به دست آورید. چرا چنین است؟ آیا می‌توانید آزمایش خود را گسترش دهید؟ چطور طول موج صوت در سوت را با دو گاز هلیوم و هوا مقایسه می‌کنید؟ به جای هلیوم یا هوا از گاز طبیعی استفاده کنید و سوت را با شلنگ به خروجی گاز اجاق گاز یا چراغ بنزن وصل کنید. نسبت گام چیست؟ چگونه می‌توانید خصوصیات مولکولی گاز را با اندازه‌گیری نسبت گام برای گاز و هوا به دست آورید؟

۴-۱۷ ریشه میانگین مربعی (rms) میدان الکتریکی را (میانگین‌گیری شده روی همه بسامدها) در یک نقطه در فضای ۱ متری از لامپ ۴۰ واتی پیدا کنید.

۴-۱۸ اندازه‌گیری ثابت خورشیدی در سطح زمین. این آزمایش در مثال ۱۷ بخش ۴-۴ توضیح داده شد. این آزمایش را انجام دهید و نتیجه را برحسب W/cm^2 حساب کنید. ممکن است از چندین لایه شیشه یا شاید از شیشه پنجره استفاده کنید تا "گرما"ی فروسرخ که به وسیله پلک شما از نور لامپ آشکارسازی می‌شود را کم کنید، با این فرض که جو زمین این کار را برای نور خورشید در گستره وسیعتر انجام داده است. آنگاه با محدود کردن آن به نور مرئی (همان‌طور که از پلکهای بسته دیده می‌شود)، شاید بتوانید به ثابت خورشیدی خارج جو زمین نزدیک شوید. دمای رشته تنگستن کمتر از مربوط به خورشید است و طول موج طیف بستگی به رنگ دارد. منحنی انرژی گسیل شده برحسب طول موج را برای دمای سطح خورشید که در حدود $5000 K$ است بکشید و همچنین این منحنی را برای دمای تنگستن که حدود $3000 K$ است رسم کنید. با برآورد تقریبی کسر شارک که برای هر کدام از آنها مرئی است ببینید آیا شارک خورشید را (که شامل نور نامرئی است) با مقایسه آن با نور لامپ فقط برای بسامدهای مرئی کمتر یا بیشتر برآورد کرده‌اید.

۴-۱۹ آهنگ شمارش تکثیرکننده فوتونی. فرض کنید تکثیرکننده فوتونی با خصوصیات زیر دارید: مساحت فوتوکاتد برابر $1 cm^2$ است؛ بازده فوتوکاتد برابر ۰٫۵٪ است که روی طیف مرئی متوسط گرفته شده است. فرض کنید شمعی دارید که توان نور مرئی آن ۱ شمع برآورد شده است. این شمع در چه فاصله‌ای از تکثیرکننده فوتونی باید باشد تا آهنگ شمارش خروجی پایینتر از 10^6 شمارش در ثانیه باشد؟ (ما می‌خواهیم کم باشد بنابراین می‌توانیم شمارشهای فردی را بشنوم). از طرفی اگر شمع در ۱ متری باشد بزرگی سوراخ حفاظ عبور نور روی تکثیرکننده فوتونی چقدر باشد تا نتیجه همان شود؟ یکاها: یک فوتون با یک الکترون ولت انرژی طول موجی حدود 12345 \AA دارد. (دو رقم آخر غلط است؛ اما این عدد مشهور را می‌توان به آسانی به خاطر سپرد). بنابراین اگر $2 eV$ باشد طول موج 6170 \AA است. همه فوتونها را سبز بگیرید یعنی 5500 \AA . همچنین $10^{-12} erg = 1.6 eV$.

۲۰-۴ نور شمع و داستان عاشقانه. اگر شمعی روشنایی ذاتی ماه را داشته باشد، همان تابندگی ماه را خواهد داشت وقتی که در فاصله‌ای قرار گیرد که زاویه فضایی اش نسبت به چشم شما مانند زاویه فضایی ماه باشد. طبق جدول ۳-۴ بخش ۴-۴ روشنایی شمع دو برابر ماه است. فرض کنید که نور ماه کامل "تابندگی ایده‌آل برای داستان عاشقانه" را تهیه می‌کند. ناحیه تصویرشده افقی تقریبی یک دسته شمع را اندازه بگیرید. حساب کنید شمع چقدر باید دور باشد تا "تابندگی ایده‌آل" را که تعریف شد تهیه کنید.

۲۱-۴ نور ماه. طبق مثالی که بعد از جدول ۳-۴ بخش ۴-۴ آمده است یک لامپ 40° وات با قطر مؤثر 2 cm همان تابندگی ماه را به وجود می‌آورد وقتی که لامپ در فاصله 6.4 متری قرار گیرد. محاسبه آن با سطح روشنایی همان‌طور که در جدول ۳-۴ داده شده است شروع می‌شود و قطر مؤثر مانند قبل حساب شده است. البته یک لامپ 40° وات با پوشش شیشه شفاف همان تابندگی را دارد. (روشنایی رشته تنگستن خیلی بزرگتر از سطح کدر است اما توان کل خروجی همان است.) از این واقعیتها برای محاسبه تابندگی نور ماه کامل بر واحد میکرووات نور مرئی بر سانتیمترمربع سطح روشن شده استفاده کنید. (بازده لامپ نور را به دست بیاورید.)

جواب: بین 1° و 2 mW/cm^2 . (جواب شما باید تا ۲ رقم معنی‌دار باشد، مثلاً 13° یا 18° یا مانند آن.)

۲۲-۴ نور خورشید. زاویه فضایی خورشید تقریباً برابر با زاویه فضایی ماه است. (اگر می‌خواهید از این موضوع مطمئن شوید می‌توانید یک خط‌کش به اندازه طول بازویتان بگیرید تا مطمئن شوید که از یک صافی مناسب استفاده کرده‌اید. پولا‌رویدهای تقریباً متقاطعی که در جعبه وسایل اپتیکی شما وجود دارد وسایل خوبی است.) از جدول ۳-۴ بخش ۴-۴ و نتایج مسئله ۲۱-۴ برای به دست آوردن تابندگی خورشید استفاده کنید.

جواب: حدود 90 mW/cm^2 نور مرئی.

۲۳-۴ بازده درخشایی خورشید. فرض کنید که همه نور مرئی خورشید جو زمین را با تضعیف صرف نظر کردنی سوراخ می‌کند. از نتایج مسئله ۲۲-۴ و مقادیر ثابت خورشیدی در خارج از جو زمین در کتاب مرجع استفاده کنید تا بازده درخشایی خورشید را حساب کنید. چطور آن را با بازده درخشایی لامپهای التهابی مقایسه می‌کنید؟ (طبق کتاب مرجع یک لامپ 5000 وات 115 ولتی بازده 47% درصد دارد.)

۲۴-۴ اندازه‌گیری توان شمع و بازده درخشایی لامپ التهابی. برای این آزمایش به یک لامپ التهابی (یا شفاف یا با پوشش مات)، یک شمع، دو ورقه واکس پارافین ("واکس معمولی" برای مهر کردن شیشه‌های ژله، مربا، و محافظت مواد غذایی استفاده می‌شود)، و یک قطعه آلومینیم

احتیاج دارید. استاندارد شما شمع است. فرض می‌کنیم که شمع شما نزدیک به شمع استاندارد است و بنابراین ۱ توان شمع حدود ۲۰ میلی‌وات تابش مرئی گسیل می‌کند. لامپ نامعلوم است. توان کل آن معلوم است. (روی لامپ نوشته شده است). خروجی مرئی آن را در مقایسه با شمع به صورت زیر اندازه‌گیری کنید. کاغذ آلومینیمی را بین دو ورقه پارافین ساندویچ کنید. ساندویچ پارافین را نزدیک شمع نگه دارید، به روشنایی ورقه پارافین نزدیکتر به شمع و تاریکی ورقه دورتر از شمع توجه کنید. حال آن را نزدیک لامپ بگیرید. حال (در شب، با فقط یک شمع و یک لامپ روشن) آشکارساز پارافین را بین لامپ و شمع که هر ورقه به طرف یکی از چشمه‌ها قرار دارد بگیرید. مکان آن را تا وقتی هر دو ورقه به طور مساوی روشن به نظر برسند تغییر دهید. فاصله‌ها را اندازه بگیرید. بقیه حسابی است. (از قانون عکس مجذوری استفاده کنید). خروجی مرئی لامپ را برحسب توان شمع و وات مرئی به دست آورید، فرض کنید شمع شما "استاندارد" است. بازده لامپ را به دست آورید.

با عملیات کمی پیچیده‌تر، می‌توانید روشنایی خورشید را برحسب وات مرئی بر سانتیمترمربع یا (با گرفتن $۱ \text{ cd/cm}^2 = ۲۰ \text{ mW/cm}^2$) شمع بر مجذور سانتیمتر به دست آورید. ممکن است با نور زمینه‌ای که از خورشید یا لامپ التهابی استاندارد می‌آید مشکل داشته باشید. این موضوع به شما کمک می‌کند که یک لامپ التهابی قوی، شاید ۲۰° وات داشته باشید. شاید احتیاج به یک موازی‌ساز لوله پستی یا یک کارتن مقوایی با سوراخهای مناسب روی آن، یا یک لباس تیره در جایی داشته باشید. نور لامپ التهابی را برحسب شمع همان‌طور که توضیح داده شد تنظیم کنید. فاصله لامپ از پارافین را که روشنایی مساوی با خورشید می‌دهد پیدا کنید. با استفاده از هندسه می‌توانید شار لامپ را برحسب cd/cm^2 حساب کنید و بنابراین روشنایی خورشید را برحسب cd/cm^2 حساب کنید.

۴۰-۲۵ لامپهای التهابی مات. یک لامپ معمولی مات (با هر وات) را بگیرید و همچنین یک لامپ "مات شیری" با همان وات و قطر بگیرید. آنها را روشن کنید و نگاه کنید. به "هسته روشن" نور تصویرشده لامپ مات توجه کنید. لامپ مات شیری یکنواخت‌تر است. بنابراین لامپ مات سطح "مؤثر" کوچکتری نسبت به لامپ مات شیری دارد. چون توان آنها یکسان است، احتمالاً خروجی کل نور یکسانی دارند. بنابراین لامپ مات باید روشنتر از سطح کوچکتر هسته روشن باشد. از داخل سوراخی بین انگشتهای جمع شده به ناحیه مرکزی هر لامپ روشن شده نگاه کنید، دست خود را در فاصله ثابتی از چشم خود نگاه دارد به طوری که ثابت زاویه فضایی پذیرفته شود. کدام لامپ روشنتر است (در مرکز)؟ قطر ناحیه تصویرشده هسته روشن لامپ مات را با نگاه داشتن یک خطکش جلوی آن اندازه بگیرید. (برای کاهش درخشندگی آن ممکن است از

داخل پولاروید تا اندازه‌ای متقاطع که در جعبه وسایل اپتیکی است نگاه کنید). نسبت پیش‌بینی شده سطح درخشندگی برای دو لامپ را حساب کنید، به‌عنوان مدل یک "کره مؤثر" را برای لامپ مات با قطری مساوی با قطر هسته روشن تصویر شده بگیرید. حال نسبت سطح درخشندگی را به‌صورت زیر اندازه‌گیری کنید. هر لامپ را پشت کارتن مقوایی (یا چیزی شبیه آن) قرار دهید که با یک سوراخ در آن فقط ناحیه مرکزی هر لامپ را نشان می‌دهد. دو سوراخ را هم‌اندازه بسازید. لامپها را طوری قرار دهید که چند فوت از هم فاصله داشته باشند و از داخل هر سوراخ به همدیگر بتابند. از روش ساندویچ پارافین که در آزمایش خانگی ۴-۲۴ توضیح داده شد استفاده کنید و نسبت سطح درخشندگی نواحی مرکزی دو لامپ را اندازه بگیرید. چطور نتیجه شما با محاسباتی که بر پایه مدل "کره مؤثر" است قابل مقایسه است؟

بالاخره لامپها را بشکنید تا ببینید مات بودنشان چقدر با هم فرق می‌کند. (لامپ را قبل از شکستن در حوله‌ای بپیچید!) اگر فکر می‌کنند با این کار لامپ و پولتان هدر می‌رود پس حرف ما را در مورد لامپ مات بپذیرید که لامپ مات شکسته سطح داخلش زبرتر است که آن را با اسیدکاری یا شن‌کاری درست می‌کنند. لامپ مات شیری با پودر سفید پوشیده شده است (بدون شک منیزیم اکسید). این پودر با انگشت پاک می‌شود و سطح تمیزی باقی می‌ماند. اگر لامپ را شکستید، قسمت نیمکره‌ای بزرگ آن را نگه دارید، این قسمت یک عدسی "یکسو کوژ" است وقتی قسمتی از آن با آب پر شده باشد. (برای اینکه یک قسمت بزرگ از لامپ را داشته باشید، لامپ را با زدن ضربه آهسته‌ای به گردن آن بشکنید.) می‌توانید از آن برای اندازه‌گیری ضریبهای شکست آب و روغن معدنی استفاده کنید.

۴۰-۲۶ امیدانس صوت. داخل لوله پستی مقوایی یک نت پایا بخوانید، لوله را چسبیده به دهان خود نگه دارید به طوری که هیچ هوایی از لبه‌های آن خارج نشود. گام را تغییر دهید تا تشدیدها را پیدا کنید. (آنها دقیقاً همان جایی نیستند که مدهای آزاد بودند وقتی لوله را آهسته به سر خود می‌زدید و گوش می‌کردید) یک نت پایا که در تشدید نیست بخوانید. ناگهان لوله را در حالی که به خواندن ادامه می‌دهید تکان دهید. تغییر امیدانس باید قابل ملاحظه باشد. حال در حال تشدید بخوانید. توجه کنید که احساس متفاوت مشخصی در گلو خود حس می‌کنید. بار در تشدید خالصاً بار مقاومتی نیست اما ترجیحاً بسیار واکنشی است. حال یک تنگ بزرگ یا گلدان یا سطل بزرگ پیدا کنید. (یک گلدان شیشه‌ای بزرگ یا تنگ پلاستیکی یا استیروفون بزرگ خوب است.) یک تشدید قوی با جستجوی آهنگ صدایتان پیدا کنید. تا جایی که می‌توانید بلند در تشدید بخوانید، دهان و گلو خود را کاملاً نزدیک به سیستم تشدیدکننده جفت کنید. اگر هیچ اتلاف تابشی یا اتلاف مقاومتی نباشد، بار روی دستگاه خواندن شما کاملاً بار واکنشی خواهد بود. یعنی همان مقدار

انرژی به داخل گلولی شما در هر دور که این کار را ترک می‌کنید برمی‌گردد (در طی زمان دیگر دور). همین‌طور احساسی که در گلولی خود دارید به‌طور مشخصی کاملاً متفاوت از آنی است که در محیط آزاد خواندید. خواهید دید که در کنترل گام مشکل خواهید داشت. گام "می‌لرزد" زیرا به بار مقاومتی عادت کرده بودید و حال نوع واکنشی آن را تجربه می‌کنید.

۲۷-۴ فرض کنید دو موج پیشرونده روی تار کشسان با $T = 1 \text{ dyn}$ ، $\rho = 1 \text{ g/cm}$ و $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$ با معادله زیر داده شده است

$$\psi_1 = A \cos(\omega t - kz + \pi)$$

$$\psi_2 = A \cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{4}\right)$$

شدت زمان متوسط برهم‌نهی ψ_1 و ψ_2 را پیدا کنید.
۲۸-۴ سه موج الکترومغناطیسی تخت با رابطه‌های زیر

$$E_{1x} = E_0 \cos(kz - \omega t - \delta_1) = B_{1y}$$

$$E_{2x} = E_0 \cos(kz - \omega t - \delta_2) = B_{2y}$$

و

$$E_{3x} = E_0 \cos(kz - \omega t - \delta_3) = B_{3y}$$

در همان فضا پیش می‌روند. دامنه‌های بیشینه و کمینه و شارهای انرژی که با تنظیم مقادیر ثابت δ_1 ، δ_2 و δ_3 به‌وجود می‌آیند چه هستند؟

۲۹-۴ "فشار پیمانه‌ای" برای امواج طولی فنر. معادله (۱۱۱) بخش ۴-۴ را که به‌صورت زیر است، به‌دست آورید.

$$F_z(\text{چ به } r) = F_0 - Ka \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z}$$

برای این کار از فنر مهره‌دار با پارامترهای متمرکز شروع کنید. در حالت تعادل هر فنر طوری فشرده شده است که نیروی F_0 را به‌کار می‌بندد. ثابت فنر K است. فاصله مهره‌ها a است. نیروی اعمال‌شده بر مهره معلوم در جهت $+z$ را که به‌وسیله فنر از طرف چپ به مهره وارد می‌شود حساب کنید. از حد پیوسته استفاده کنید و بنابراین رابطه موردنظر را به‌دست آورید. توجه کنید که در حد پیوسته حاصلضرب Ka خاصیت پیوستگی فنر است و مستقل از طول a است.

۳۰-۴ طناب لاستیکی و اسلینکیها. برای طناب لاستیکی (یا یک نوع فنر که برای بستن درها استفاده می‌شود) طول کشیده‌نشده در مقایسه با طول کشیده‌شده صرفنظرکردنی نیست. نشان

دهید که بنابراین سرعت فاز برای امواج عرضی کمتر از امواج طولی است، امواج طولی دو برابر سرعت امواج عرضی حرکت می‌کنند. برای فنر اسلینگی، طول کشیده نشده حدود ۳in است و طول کشیده شده می‌تواند ۱۵ft یا در همین حدود باشد. آهنگ سرعت در آن حالت چیست؟ ۳۱-۴ آیا امواج صوتی کاملاً غیر پاشنده‌اند. در بخش ۲-۴ فهمیدیم که سرعت فاز صوت ثابت و مستقل از بسامد است. قانون پاشندگی که این نتیجه را می‌داد به صورت زیر است

$$\omega^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} k^2$$

که شبیه قانون پاشندگی برای نوسانات طولی در فنر پیوسته است

$$\omega^2 = \frac{K}{M} k^2$$

برای فنر مهره‌دار یک‌جا جمع شده، قانون پاشندگی به صورت زیر است

$$\omega^2 = \frac{K}{M} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} ka}{(\frac{1}{2} a)^2}$$

که به قطع بسامد بالا می‌انجامد. به دلیل شباهت و تشدید فیزیکی، مقدار بسامد قطع بالا را برای صوت در هوا در STP (دما و فشار استاندارد) حدس بزنید. آیا انتظار دارید که بسامد امواج فراصوت $10^6 \text{ Mc} \approx \nu$ در سرعت صوت معمولی حرکت کند؟

جواب: انتظار دارید بسامد قطع بالا $10^{10} \text{ Hz} \approx \nu_0$ باشد.

۵

بازتاب

۱-۵ مقدمه

در این فصل برای آنکه بیابیم هنگامی که یک موج پیشرونده با یک ناپیوستگی در محیط مواجه می‌شود چه اتفاقی می‌افتد، از مفهوم امیدانس استفاده خواهیم کرد. در بخش ۲-۵ یک بار مقاومتی متمرکز شده را که با امیدانس مشخصه محیط موج "جور" است، در نظر خواهیم گرفت. این بخش ما را راهنمایی خواهد کرد تا دریابیم، چگونه می‌توان "پارچه فضایی" ساخت که بتواند به امواج الکترومغناطیسی پایان دهد، بدون آنکه بازتابی رخ دهد. در بخش ۳-۵ بازتابهای القاشده به وسیله امیدانسه‌های "ناجور" را در نظر خواهیم گرفت. با عمومیت دادن نتایج به دست آمده برای یک خط انتقال نیرو، فرا خواهیم گرفت که امواج نوری، چگونه در ناپیوستگی ضریب شکست بازتاب پیدا می‌کند. هنگام مطالعه بازتابهای چندگانه در بخش ۵-۵ فرا خواهیم گرفت که چگونه می‌توان از یک تیغه شیشه استفاده کرد تا اطلاعاتی درباره میانگین طول عمر فروافت اتمهای نئون واداشته، به دست آورد.

۲-۵ پایان دهی کامل

اگر فرستنده‌ای به یک محیط کاملاً باز جفت شود و محیط را با بسامدی که در گستره پاشندگی آن

است تحریک کند، فرستنده امواج پیشرونده گسیل می‌کند. پایانه خروجی فرستنده یک نیروی کششی صرفاً مقاومتی را حس می‌کند که با امپدانس مشخصه‌اش متناسب است. امپدانس مشخصه به محیط و همچنین به آرایش هندسی امواج بستگی دارد. (مثلاً، امپدانس یک خط انتقال نیرو با صفحات موازی با امپدانس یک خط انتقال نیرو با سیمهای موازی متفاوت است.)

تا آنجا که به فرستنده مربوط می‌شود، فرستنده نمی‌تواند بگوید که آیا واقعاً امواج پیشرونده را به داخل یک محیط باز تابش می‌کند، یا فقط یک بار مقاومتی متمرکز شده را تحریک می‌کند. اگر می‌شد که آنتن ایستگاه رادیوی محلی خود را قطع کنید و به جای آن مقاومت معادلی قرار دهید، از نظر نوسانگر تفاوتی نمی‌کرد. (این بیان اندکی بیش از حد ساده شده است، زیرا آنتن رادیو، دارای القایدگی و ظرفیت نیز هست. بنابراین برای "به اشتباه انداختن" نوسانگر محرک به‌طور کامل، باید به جای آنتن، یک مدار LRC مناسب قرار دهید. مقاومت R در این مدار "مقاومت تابشی" است و همان امپدانس مشخصه‌ای است که درباره آن صحبت می‌کنیم) اکنون با مثالی که از یک آنتن رادیو ساده‌تر است، شروع می‌کنیم.

مثال ۱: تار پیوسته

اگر به جای تار (که به وسیله پایانه خروجی در حال نوسان فرستنده‌ای تکان داده می‌شود) یک "ضربه‌گیر" مناسب قرار دهید، به فرستنده همان نیروی کششی وارد می‌شود که در هنگام گسیل داشتن امواج پیشرونده به تار بینهایت وارد می‌شود. منظور ما از ضربه‌گیر دستگاهی است (آن را با r حرف اول "راست" نشان می‌دهیم) که این ویژگی را داشته باشد: اگر پایانه ورودی آن مجبور شود که با سرعت $u(t)$ حرکت کند، ضربه‌گیر با واکنشی که شامل یک نیروی مخالف متناسب با سرعت است به نیروی محرک (که آن را با $ج$ حرف اول "چپ" نشان می‌دهیم)، پاسخ می‌دهد

$$F(\text{ج } r) = -Z_R u(t) \quad (۱)$$

که در آن Z_R ثابت مثبتی است که امپدانس ضربه‌گیر نامیده می‌شود. امپدانس ضربه‌گیر "صرفاً مقاوم" گفته می‌شود، زیرا $F(\text{ج } r)$ با سرعت متناسب است. (دستگاهی که شامل جرم لختی است با نیرویی متناسب با شتاب، و دستگاهی که شامل فنر است با نیرویی متناسب با جابه‌جایی، واکنش نشان می‌دهد.) در هر یک از این دو حالت چنین دستگاهی به جای یک بار مقاومتی یک بار "واکنشی" خواهد داشت. هنگامی که فرستنده به داخل یک فضای باز یا امپدانس مشخصه

Z امواج پیشرونده گسیل می‌کند، به پایانه خروجی فرستنده یک نیروی کششی وارد می‌شود:

$$F(\text{برج}) = -Z \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{z=0} \quad (2)$$

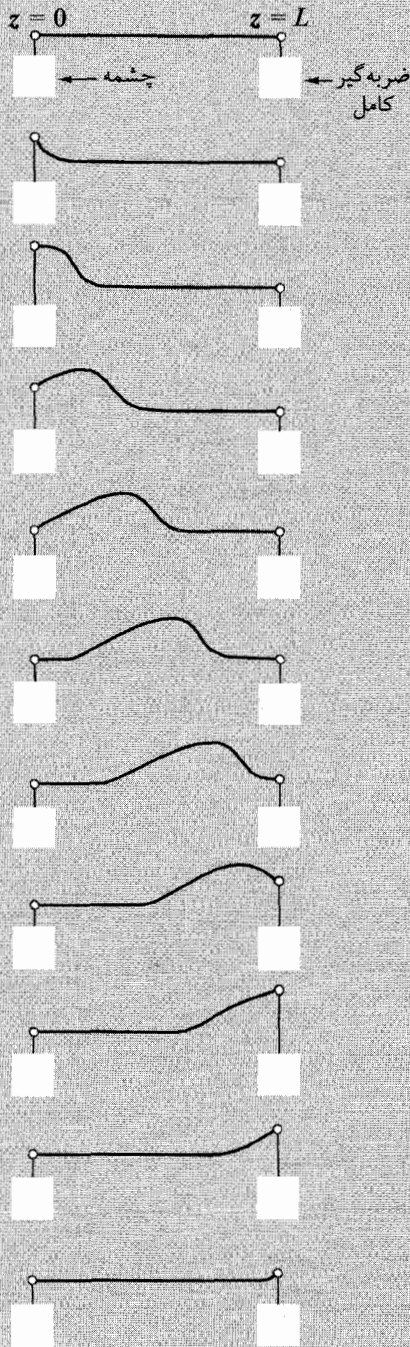
که در آن $\partial \psi / \partial t$ سرعت تار در نقطه $z = 0$ ، پس همچنین، در پایانه خروجی است. بنابراین می‌بینیم که اگر Z_R با Z برابر باشد، در این صورت فرستنده همان واکنش "صرفاً مقاومتی" در هنگام تحریک کردن پایانه ورودی ضربه‌گیر را دارد که در هنگامی که یک تار بینهایت بلند را تحریک می‌کند. یک مشخصه امواج پیشرونده این است که هر نقطه از محیط دارای همان "تجربه" پایانه خروجی فرستنده، اما در زمانی دیرتر، است. بنابراین برای هر نقطه محیط z ، از سیستمی که امواج پیشرونده حمل می‌کند، نقطه z درست در سمت چپ z نمی‌تواند بگوید که آیا نقطه z درست در سمت راست z اولین نقطه پیوسته شدن تار به بینهایت است یا نقطه پایانه ورودی یک ضربه‌گیر با امپدانس $Z_R = Z$ است. ■

جوړکردن امپدانس. بحث بالا نشان می‌دهد که روش فراهم کردن پایان‌دهی کامل در یک تار پیوسته، به طوری که امواج پیشرونده که بر روی پایانه می‌تابند، هیچ‌گونه بازتابی از آن نداشته باشند، این است که تار را به یک بار مقاومتی که شامل یک ضربه‌گیر کامل با امپدانس زیر است متصل کنیم

$$Z_R = Z = \sqrt{T_0 \rho_0} \quad (3)$$

هنگامی که معادله (۳) برقرار است، می‌گوییم که امپدانس بار با امپدانس مشخصه تار "جوړ" می‌شود. مثالی از پایان‌دهی کامل در شکل ۵-۱ نشان داده شده است.

بار توزیع شده. ضربه‌گیر یک بار مقاومتی "متمرکز شده" است یعنی در مقایسه با یک طول موج، ناحیه کوچکی را اشغال می‌کند. یک راه مؤثر برای فراهم کردن پایان‌دهی کامل بدون اینکه احتیاجی به برقراردن شرط دشوار جوړکردن امپدانسها باشد (معادله ۳)، این است که از یک بار بسیار دراز "توزیع شده" که نیروی کششی اندکی را به وجود می‌آورد، استفاده کرد. این بار باید از نقطه $z = L$ شروع شود، یعنی از آنجایی که می‌خواهید جذب شدن انرژی موج آغاز شود. این نیروی کششی سپس به طور پیوسته و به طور یکنواخت در طول تار و به ازای تمام مقادیر z بزرگتر از L ، اعمال می‌شود. اگر نیروی کششی فقط کسر کوچکی از انرژی موج در فاصله یک طول موج را جذب کند، در این صورت این نیرو بازتاب قابل توجهی را باعث نخواهد شد، و تمام انرژی موج را به تدریج جذب خواهد کرد.



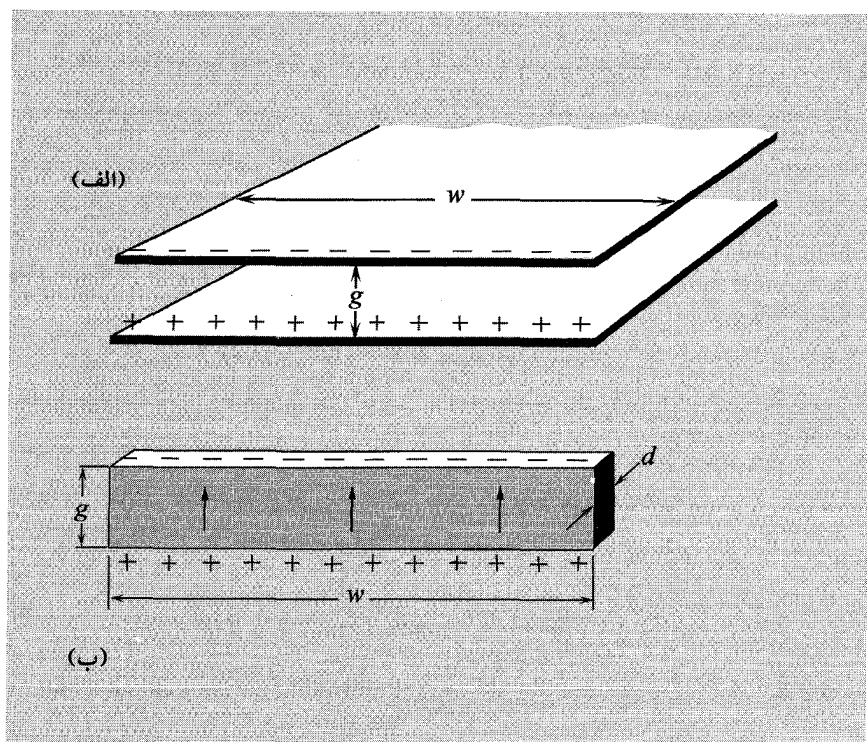
شکل ۱-۵ اگر تار به طور کامل پایان یافته باشد، چشمه طول تار را نمی تواند مشخص کند. تا آنجا که به چشمه مربوط می شود، چشمه ممکن است به یک تار بینهایت بلند متصل شده باشد. و یا ممکن است مستقیماً به پایانه ورودی ضربه گیر متصل شده باشد. در اینجا نشان داده شده که چشمه به یک تار محدودی که به طور کامل پایان یافته، متصل شده است.

مثال ۲: خط انتقال نیرو با صفحات موازی

این مثال به یک نتیجه بسیار کلی منجر می‌شود. انتهای ورودی در شکل ۲-۵ نشان داده شده است، به همراه تیغه‌ای از یک ماده مقاومتی که می‌توان آن را یا برای نشان دادن به جای خط انتقال نیرو به عنوان باری که خط بر روی فرستنده می‌گذارد، به کار برد، و یا برای پایان دادن به خط انتقال نیرو بدون ایجاد بازتاب. برای جهت جریانی که در شکل مشخص شده است، مقاومت تیغه برابر با حاصلضرب مقاومت ویژه ρ در طول تقسیم بر مساحت سطح مقطع است (جلد دوم، سری پرکلی، بخش ۴-۷):

$$R = \rho \times \frac{(\text{طول})}{(\text{مساحت})} = \frac{\rho g}{dw} \quad (4)$$

ما امیدانس مشخصه Z یک خط انتقال نیرو با صفحات موازی برابر است با [به معادله ۴-۱۳۲



شکل ۲-۵ پایان دادن به یک خط انتقال نیرو با صفحات موازی. (الف) خط انتقال نیرو. (ب) تیغه مقاومتی. هنگامی که اختلاف پتانسیل در دو طرف تیغه دارای علامتی است که به وسیله علامتهای مثبت و منفی مشخص شده است، شدت جریان در جهت پیکانها جریان دارد.

بخش ۴-۴ مراجعه کنید]

$$Z = \frac{4\pi g}{c w} \quad (5)$$

اگر R یک پایان‌دهی کامل باشد لازم است که $R = Z$ شود. با مساوی قرار دادن معادلات (۴) و (۵) نتیجه می‌شود

$$\frac{\rho}{d} = \frac{4\pi}{c} \quad (6)$$

که در آن ρ برحسب esu (ایستاهم - سانتیمتر) و d برحسب سانتیمتر است. نسبت ρ/d برحسب ایستاهم است. ■

مقاومت به‌ازای سطح مربعی. این تیغه را، به شرح زیر، به روش مفیدی می‌توان مشخص کرد که مستقل از ضخامت d باشد. فرض کنید از این ماده، ورقه‌ای مربعی به طول L و عرض L و ضخامت d ببریم. یک ولتاژ V بین دو انتهای متقابل مربع اعمال کنید. این ولتاژ جریانی که به موازات سطح ورقه عبور می‌کند، به‌وجود می‌آورد. مقاومت مربع برابر است با حاصلضرب مقاومت ویژه در امتداد طول جریان (یعنی L) تقسیم بر مساحتی که عمود بر جریان است (یعنی Ld). بنابراین مقاومت مربع برابر است با

$$R = \frac{\rho L}{Ld} = \frac{\rho}{d} \quad (7)$$

دقت کنید که این رابطه مستقل از طول ضلع L مربع است. در نتیجه، برای یک ورقه از ماده، ρ/d به‌عنوان مقاومت به‌ازای سطح مربعی (با هر اندازه) برای جریانی که از یک ضلع به ضلع مقابل مربع جریان دارد، می‌تواند علامت مشخصه‌ای باشد. بنابراین معادله (۶) بیان می‌کند که برای پایان‌دهی کامل در یک خط انتقال نیرو با صفحات موازی، مقاومت به‌ازای سطح مربعی باید برابر با $4\pi/c$ باشد، که برابر با حاصلضرب 4π در 30° اهم است (c^{-1} ایستاهم برابر 30° اهم است):

$$\text{مقاومت ورقه پایان‌دهی کامل برابر } 120^\circ\pi \text{ است} = 377 \text{ اهم بر مربع} \quad (8)$$

حال ببینیم که در عمل چگونه می‌توان پایان‌دهی کامل به‌دست آورد. اکنون یک تیغه پایان‌دهی برای یک خط انتقال نیرو با صفحات موازی طرح می‌کنیم. بدین منظور یک ورقه از ماده‌ای می‌خواهیم که مقاومت 377 اهم به‌ازای سطح مربعی داشته باشد، یعنی $\rho/d = 377\Omega$ به طوری که

$$d(\text{cm}) = \frac{\rho(\Omega\text{cm})}{377\Omega} \quad (9)$$

اگر یک ورقه مس را انتخاب کنیم، به چه ضخامت باید باشد؟ از کتب مرجع (در زیر فهرست "مقاومت ویژه فلزات") نتیجه می‌شود $\rho_{Cu} \approx 1.7 \times 10^{-6} \Omega \text{cm}$. بنابراین بر طبق معادله (۹)، ورقه‌ای احتیاج داریم به ضخامت $d_{Cu} \approx 1.7 \times 10^{-6} / 377 \approx 0.5 \times 10^{-8} \text{cm}$. این فاصله از قطر اتمی یک تک‌اتم مس کمتر است. به نظر می‌رسد با مشکلی مواجه هستیم. برگردیم به کتب مرجع! بالاخره کربن را پیدا می‌کنیم. مقاومت ویژه کربن در حدود $3500 \times 10^{-6} \Omega \text{cm}$ است. که از آن نتیجه می‌شود $d \approx 3500 \times 10^{-6} / 377 \approx 10^{-5} \text{cm}$. این یک ضخامت عملی و شدنی است. می‌توانیم (مثلاً) با یک قطعه کرباس که مقاومت ویژه به اندازه کافی بالا دارد شروع کنیم، به طوری که مقاومت به‌ازای سطح مربعی در مقایسه با ۳۷۷ اهم بسیار بزرگ باشد. اکنون "رنگ" نازکی از ذرات معلق دوده (پودر کربن) در آب یا مایع حامل دیگری درست می‌کنیم. این رنگ را بر روی کرباس اسپری می‌کنیم تا مقاومت که به‌وسیله یک اهم متر تعیین می‌شود برابر ۳۷۷ اهم بر مربع باشد.

پارچه فضایی. در اصطلاح میکروموج هر قطعه از ماده که دارای مقاومت ۳۷۷ اهم بر مربع باشد، پارچه فضایی نامیده می‌شود. یک موج الکترومغناطیسی پیشرونده تخت که بر صفحه ج در سمت چپ مکان z می‌تابد، نمی‌تواند بگوید که آیا صفحه ر درست در سمت راست z ، واقعاً جایی است که خط انتقال نیروی بینهایت طولانی شروع می‌شود، یا اینکه این صفحه فقط یک ورقه از پارچه فضایی است.

امواج مستقیم و موازی. امواج پیشرونده در یک خط انتقال نیرو با سیمهای هم‌محور یا یک خط انتقال نیرو با سیمهای موازی، امواج تخت نیستند، زیرا برطبق تعریف یک موج تخت از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی تشکیل شده است که مقادیر آنها در هر لحظه مفروض t به x و y بستگی ندارد بلکه فقط به z (جهت انتشار) بستگی دارد. این امواج به‌گروه عمومتری متعلق‌اند یعنی گروه امواج مستقیم و موازی که شامل امواج تخت نیز می‌شود. امواج مستقیم و موازی امواجی هستند که در آنها میدانهای E و B ممکن است به x و y بستگی داشته باشند اما در آنها بستگی x و y با z ، یعنی جهت انتشار، تغییر نمی‌کند. بنابراین امواج در خطوط انتقال نیروی مستقیم و موازی (یعنی آنهایی که می‌توانند از زوج سیمهای مشابه، مستقیم و موازی ساخته شوند) امواج مستقیم و موازی هستند.

یک ورقه پارچه فضایی به‌دلیل زیر، برای هر خط انتقال نیروی مستقیم و موازی، پایان‌دهی کاملی به‌وجود می‌آورد: نتیجه آنکه در هر همسایگی یک نقطه مفروضی که در جهت عرضی به اندازه کافی کوچک باشد، یک موج فرودی پیشرونده مستقیم و موازی از یک موج تخت، نمی‌تواند تشخیص داده شود. بدین معنی که در یک ناحیه با ابعاد به‌اندازه کافی کوچک x و y در امتداد عمود بر جهت

انتشار z ، میدانهای $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ و $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ را می‌توان ثابت و مستقل از x و y در نظر گرفت. به علاوه (با استفاده از معادلات ماکسول در یک نمایش کلی) می‌توان نشان داد که در یک نقطه مفروض x و y امواج مستقیم و موازی در روابطی شبیه به روابطی که برای امواج تخت در یک محیط شفاف در بخش ۴-۴ داده شده است، صدق می‌کنند. بنابراین برای امواج پیشرونده مستقیم و موازی در نقطه ثابت x و y ، $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ و $\mathbf{B}(s, y, z, t)$ بر یکدیگر و بر \hat{z} عمود هستند، اندازه‌های مساوی دارند و علامتهای آنها به‌گونه‌ای است که $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ در امتداد $\hat{z} +$ است یعنی $B = \hat{z} \times \mathbf{E}$. به علاوه، شار انرژی "موضعی" (در همسایگی $\Delta x \Delta y$) با رابطه‌ای داده می‌شود که مشابه رابطه‌ای است که برای امواج تخت صادق است. بنابراین برای امواج پیشرونده مستقیم و موازی در خلأ داریم

$$S(x, y, z, t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}^2(x, y, z, t) \quad (10)$$

که در آن S شدت برحسب $\text{erg/cm}^2\text{s}$ است. از آنجا که این رابطه بین شار انرژی و میدانها، از نظر موضعی همان رابطه برای امواج تخت است، "اتلاف $T^2 R$ " حاصل از جریانهای القا شده در پارچه فضایی به وسیله امواج مستقیم و موازی، همان‌گونه که در مورد امواج تخت وجود دارد، با شار انرژی فرودی دقیقاً برابر در خواهد آمد. بنابراین، مادام که پارچه فضایی دارای مقاومت 377 اهم بر مربع است، در هر همسایگی مفروض $\Delta x \Delta y$ ، پارچه فضایی تابش مستقیم و موازی فرودی را بدون بازتاب جذب خواهد کرد.

پایان دادن به یک موج تخت در فضای آزاد. پس از شرح بالا ممکن است بتوانید حدس بزنید که یک ورقه پارچه فضایی نه تنها برای امواج تخت در یک خط انتقال نیرو با صفحات موازی، بلکه برای امواج تخت در فضای آزاد نیز پایان‌دهی کاملی به وجود می‌آورد. این یک حدس منطقی است اما اشتباه است. برای یک موج تخت فرودی بر روی یک ورقه پارچه فضایی، امیدانسی که درست نصف مقدار پایان‌دهی کامل، یعنی 377 اهم بر مربع است، وجود دارد.

علت وجودی این ضریب یک‌دوم را با در نظر گرفتن خط انتقال نیرو با صفحات موازی به آسانی می‌توان دریافت. اگر خط انتقال نیرو با صفحات موازی داشته باشیم که از $z = -\infty$ تا $z = +\infty$ امتداد داشته باشد، با متصل کردن یک ورقه پارچه فضایی در مقطع خط انتقال نیرو در نقطه $z = 0$ ، می‌توانیم به یک موج فرودی از سمت چپ پایان دهیم، به شرطی که بقیه خط را که از $z = 0$ تا $z = +\infty$ امتداد دارد نیز قطع کنیم. اگر خط انتقال نیرو را در سمت راست $z = 0$ قطع نکنیم، در این صورت ولتاژ موج فرودی از نقطه $z = 0$ به دو امیدانس مساوی که به طور موازی متصل شده‌اند اعمال می‌شود: یکی از امیدانسه‌ها پارچه فضایی و دیگری خط انتقال نیروست که تا بینهایت امتداد دارد. بنابراین، موج امیدانس مؤثری را حس می‌کند که حاصل امیدانس دو مقاومت موازی

است، یعنی نصف هریک از مقاومتها. چنین حالتی هنگامی که موج تخت در یک فضای خالی بر روی یک ورقه از پارچه فضایی تابیده می‌شود، نیز روی می‌دهد. ولتاژی که به ورقه پارچه فضایی در هر لحظه اعمال می‌شود به امتداد تا بینهایت فضای خالی در سمت راست پارچه فضایی نیز اعمال می‌شود. امپدانس منتجه درست نصف امپدانس پارچه فضایی یا امپدانس فضایی خالی است. موج کاملاً جذب نمی‌شود، بلکه قسمتی بازتابیده می‌شود، قسمتی جذب شده و قسمتی عبور می‌کند. چگونه می‌توان فضای خالی در سمت راست یک ورقه پارچه فضایی را "قطع" کرد؟ در مورد خط انتقال نیرو این مطلب آسان است، خط انتقال نیرو را با یک اره می‌توانید ببرید. محل برش با اره، امپدانس بینهایتی به وجود می‌آورد که خط انتقال نیرو را از سمت راست برش جدا می‌کند. بدین ترتیب موج فرودی به پارچه فضایی که با امپدانس بینهایت موازی است، اعمال می‌شود. امپدانس منتجه همان امپدانس پارچه فضایی است. اما در مورد فضای خالی هیچ راهی وجود ندارد که برای به وجود آوردن امپدانس بینهایت یک "برش اره" به وجود آورد. با وجود این، برای موج هماهنگ با تنها یک طول موج معین، راه زیرکانه‌ای وجود دارد که به وسیله آن فضای سمت راست $z = \infty$ را به طور مؤثری می‌توان "قطع کرد". این راه برای فضای خالی و همچنین برای خط انتقال نیرو کاربرد دارد. خط انتقال نیرو را در نظر بگیرید: به جای آنکه سعی کنیم آن را در نقطه $z = \infty$ با یک "برش اره" قطع کنیم، می‌توانیم آن را به وسیله یک ورقه رسانای کامل که مقاومت مخصوص صفر دارد "اتصال کوتاه" کنیم. اتصال کوتاه نه در نقطه $z = \infty$ ، بلکه در $z = \frac{1}{\lambda}$ قرار گرفته است. بنابراین ولتاژ همیشه در نقطه $z = \frac{1}{\lambda}$ برابر صفر است. ولتاژ در سمت چپ اتصال کوتاه به شکل یک موج ساکن است. پس نتیجه می‌شود که در محلهایی جریان صفر می‌شود که به اندازه یک چهارم طول موج از محلهایی که در آنها ولتاژ برابر صفر است فاصله دارند. از این رو جریان همیشه در $z = \infty$ برابر صفر است. این عمل مانند آن است که در نقطه $z = \infty$ امپدانس بینهایتی در نتیجه یک برش اره داشته باشیم. (امپدانس بینهایت یعنی جریان برابر صفر است.) بنابراین خط انتقال نیرو در نقطه $z = \infty$ به وسیله اتصال کوتاه در $z = \frac{1}{\lambda}$ به طور مؤثر "قطع" شده است. همین نکته در مورد فضای خالی صادق است. یک موج تخت به وسیله یک ورقه پارچه فضایی در نقطه $z = \infty$ که به دنبال آن یک ورقه رسانای کامل (یک "آینه") در $z = \frac{1}{\lambda}$ قرار دارد، پایان می‌پذیرد. تمام انرژی موج در پارچه فضایی تلف می‌شود.

در مورد امواج بر روی یک تار، ورودی "ضربه گیر کامل" ما به تار متصل شده بود. جزء متحرک دیگر آن (که نسبت به ورودی حرکت می‌کند و میرایی ناشی از اصطکاک به وجود می‌آورد) به یک نگهدارنده بی حرکت محکم شده بود. این عمل مانند آن است که جزء متحرک به تار دیگری با چگالی جرمی بینهایت که از $z = \infty$ تا $z = +\infty$ امتداد یافته است، متصل شده باشد. چنین

تاری امیدانس بینهایت خواهد داشت. این حالت مشابه با برش اره در خط انتقال نیروست و به این دلیل است که ضربه‌گیر پایان‌دهی کامل به وجود می‌آورد. اگر به جای آن، جزء متحرک دیگر ضربه‌گیر به تاری با امیدانس Z_2 که از $z = 0$ تا $z = +\infty$ امتداد یافته است متصل شده بود، در این صورت به موج فرودی در $z = 0$ امیدانسی وارد می‌شد که با امیدانس ضربه‌گیر موازی با امیدانس Z_2 ادامه‌تار معادل می‌بود. درست همانند مسئله خط انتقال نیرو و یا مسئله فضای خالی، می‌توانیم بر روی یک تار پایان‌دهی کامل داشته باشیم، به شرطی که اتصال دوم ضربه‌گیر به یک نگهدارنده بی‌حرکت و یا قطعه تاری به طول ربع طول موج که با یک حلقه بدون اصطکاک بر روی میله‌ای می‌لغزد، متصل شده باشد، که بدین ترتیب اطمینان حاصل می‌شود که اتصال خروجی ضربه‌گیر حرکت نخواهد کرد. به مسئله ۵-۳۲ مراجعه کنید.

روشهای دیگر پایان‌دهی کامل. همیشه به آسانی نمی‌توان یک "پارچه فضایی کامل" به وجود آورد. اگر به این راضی باشید که تابش را با بار توزیع شده‌ای که فضای زیادی را دربر می‌گیرد جذب کنید، می‌توانید این کار را بدون جوړکردن امیدانس پایان‌دهی کامل متمرکز شده یعنی پارچه فضایی، انجام دهید و بازتاب قابل توجهی هم نداشته باشید. مثلاً اگر بخواهید یک باریکه نور چراغ قوه را جذب کنید به صورتی که بازتاب ناچیزی داشته باشید، باریکه را می‌توانید از سوراخی که در یک طرف یک جعبه بزرگ مقوایی ضد نور است، وارد آن کنید. داخل جعبه را با ماده سیاهی (یعنی جاذبی) بپوشانید. و موانعی ایجاد کنید به طوری که نور قبل از خارج شدن مجبور شود چندین مرتبه بازتاب پیدا کند. اگر در روشنایی روز به چنین سوراخی نگاه کنید، به مراتب سیاهتر از یک جسم سیاه معمولی مثل دوده شمع به نظر می‌رسد. چنین "سطح سیاهی" از یک پارچه فضایی کامل غیرقابل تشخیص است چون هیچ‌کدام از تابشهایی که وارد سوراخ می‌شود از آن خارج نمی‌شود، درست مانند آن است که محیط شفاف (هوا) تا بینهایت ادامه یافته است.

۳-۵ بازتاب و عبور

تار پیوسته. فرض کنید طنابی که از یک طرف تا بینهایت امتداد دارد با امیدانس مشخصه Z_1 داریم: طناب از $z = -\infty$ تا $z = 0$ ادامه یافته است. تار در نقطه $z = 0$ به باری متصل شده است که شامل پایانه ورودی ضربه‌گیری با امیدانس Z_2 است که با Z_1 برابر نیست. در نقطه $z = -\infty$ فرستنده‌ای وجود دارد که امواج پیشرونده در جهت $z +$ گسیل می‌کند، بنابراین یک موج پیشرونده فرودی وجود دارد که با رابطه زیر داده می‌شود

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz) \quad (11)$$

در نقطه $z = 0$ موج فرودی [با قرارداد $z = 0$ در معادله (۱۱)] به صورت زیر است:

$$\psi_{\text{فرودی}}(0, t) = A \cos \omega t \quad (12)$$

چگونه بار با امپدانس ناچور بازتاب تولید می‌کند. آخرین نقطه تار را z_1 (حرف اول "چپ") و پایانه ورودی ضربه‌گیر را z_0 (حرف اول "راست") می‌نامیم. اگر ضربه‌گیر امپدانس Z_1 می‌داشت، با امپدانس تار "چور" می‌شد و موج فرودی را بدون بازتاب پایان می‌داد. در این حالت "نیروی پایان‌دهی" که به وسیله ضربه‌گیر بر روی تار وارد می‌شود یعنی پایان‌دهی F با رابطه زیر داده می‌شود

$$F_{\text{پایان‌دهی}}(z_1) = -Z_1 \frac{\partial \psi_{\text{فرودی}}(0, t)}{\partial t} \quad (13)$$

نیروی واقعی (بر z_1) F را ممکن است به صورت برهم‌نهی این نیروی پایان‌دهی به علاوه یک اضافه‌نیرو اضافه F بالاتر (یا پایینتر) از آن در نظر گرفت که مسؤل جذب موج فرودی است. این نیروی اضافی یک موج پیشرونده تولید می‌کند که در جهت $-z$ حرکت می‌کند، درست مانند آنکه ر پایانه خروجی یک فرستنده می‌بود. این موج یک موج بازتابیده، یعنی $\psi(z, t)$ بازتاب ψ است. در نقطه $z = 0$ این موج، در رابطه‌ای صدق می‌کند که همیشه هنگامی که یک موج پیشرونده گسیل می‌شود برقرار است، یعنی رابطه‌ای که در آن نیروی محرک برابر است با حاصلضرب امپدانس در سرعت:

$$Z_1 \frac{\partial \psi_{\text{بازتاب}}(0, t)}{\partial t} = F_{\text{اضافی}}(z_1) \quad (14)$$

که در آن (بر z_1) اضافی F نیرویی است که انگار به وسیله یک فرستنده وارد می‌شود. نیروی کلی (بر z_1) F برابر با برهم‌نهی نیروی پایان‌دهی و اضافه‌نیروست که هرکدام "به طور مستقل" عمل می‌کنند:

$$F(z_1) = F_{\text{اضافی}}(z_1) + F_{\text{پایان‌دهی}}(z_1) \quad (15)$$

از ترکیب معادلات (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) نتیجه می‌شود

$$F(z_1) = -Z_1 \frac{\partial \psi_{\text{فرودی}}(0, t)}{\partial t} + Z_1 \frac{\partial \psi_{\text{بازتاب}}(0, t)}{\partial t} \quad (16)$$

بدین ترتیب نیروی کل (بر z_1) F که به وسیله نیروی کششی ضربه‌گیر به وجود می‌آید، با حاصلضرب $-Z_1$ در سرعت نقطه چ داده می‌شود. این سرعت برهم‌نهی مؤلفه‌های حاصل از امواج فرودی

و بازتابیده است:

$$\frac{\partial \psi(\circ, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_{\text{فردی}}(\circ, t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{\text{بازتاب}}(\circ, t)}{\partial t} \quad (۱۷)$$

از این رو (ر بر چ) F یعنی کششی که به وسیلهٔ ضربه‌گیر وارد می‌شود با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} F(\text{ر بر چ}) &= -Z_2 \frac{\partial \psi(\circ, t)}{\partial t} \\ &= -Z_2 \frac{\partial \psi_{\text{فردی}}(\circ, t)}{\partial t} - Z_2 \frac{\partial \psi_{\text{بازتاب}}(\circ, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (۱۸)$$

با مساوی قرار دادن سمت راست معادلات (۱۶) و (۱۸) نتیجه می‌شود (در نقطهٔ $z = \circ$)

$$-Z_1 \frac{\partial \psi_{\text{فردی}}}{\partial t} + Z_1 \frac{\partial \psi_{\text{بازتاب}}}{\partial t} = -Z_2 \frac{\partial \psi_{\text{فردی}}}{\partial t} - Z_2 \frac{\partial \psi_{\text{بازتاب}}}{\partial t}$$

یعنی

$$\frac{\partial \psi_{\text{بازتاب}}(\circ, t)}{\partial t} = \left[\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right] \frac{\partial \psi_{\text{فردی}}(\circ, t)}{\partial t} \quad (۱۹)$$

ضریب بازتاب. بدین ترتیب (با انتگرال‌گیری از هر دو طرف معادلهٔ (۱۹) و فرض آنکه هیچ ثابت انتگرال‌گیری وجود ندارد)

$$\psi_{\text{بازتاب}}(\circ, t) = R_{۱۲} \psi_{\text{فردی}}(\circ, t) = R_{۱۲} A \cos \omega t \quad (۲۰)$$

که در آن کمیت $R_{۱۲}$ ، که ضریب بازتاب برای جابه‌جایی ψ نام دارد و با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$R_{۱۲} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (۲۱)$$

از آنجا که موج بازتابیده یک موج سینوسی است که در جهت $-z$ حرکت می‌کند، شکل آن به‌ازای $z < \circ$ از شکل آن در نقطهٔ $z = \circ$ و با قراردادن متغیرهای $t + z/v_\phi$ و z به‌جای t ، $z = \circ$ به‌دست می‌آید، که در آن اندازه سرعت فاز است. بنابراین

$$\psi_{\text{بازتاب}}(z, t) = R_{۱۲} A \cos \left[\omega \left(t + \frac{z}{v_\phi} \right) \right] = R_{۱۲} A \cos(\omega t + kz) \quad (۲۲)$$

جابه‌جایی کل $\psi(z, t)$ به‌صورت برهم‌نهی زیر داده می‌شود

$$\psi(z, t) = \psi_{\text{فردی}}(z, t) + \psi_{\text{بازتاب}}(z, t)$$

یعنی

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz) + R_{۱۲} A \cos(\omega t + kz) \quad (۲۳)$$

نیروی بازگرداننده و جابه‌جایی با علامتهای مخالف بازتاب پیدا می‌کنند. کمیت‌های موجی جالب توجه فیزیکی برای امواج عرضی بر روی یک تار، تنها جابه‌جایی $\psi(z, t)$ نیست بلکه سرعت عرضی $\partial\psi(z, t)/\partial t$ و مؤلفه عرضی کشش یعنی $-T \cdot \partial\psi(z, t)/\partial z$ نیز هست که نیروی بازگرداننده را به دست می‌دهد که به وسیله تار در سمت چپ z بر تار در سمت راست z وارد می‌شود. از معادلات (۱۹) و (۲۰) دیده می‌شود که موج سرعتی $\partial\psi(z, t)/\partial t$ دارای همان ضریب بازتاب موج جابه‌جایی $\psi(z, t)$ است، اما موج "بازگرداننده" $-T \cdot \partial\psi(z, t)/\partial z$ ، دارای ضریب بازتابی است که به همان اندازه است ولی نسبت به ضریب بازتاب مربوط به $\partial\psi/\partial t$ علامت مخالف دارد. بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\psi_{\text{فرودی}} = A \cos(\omega t - kz), \quad \psi_{\text{بازتاب}} = R_{12} A \cos(\omega t + kz) \quad (24)$$

$$\frac{\partial\psi_{\text{فرودی}}}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kz), \quad \frac{\partial\psi_{\text{بازتاب}}}{\partial t} = R_{12} [-\omega A \sin(\omega t + kz)] \quad (25)$$

$$\frac{\partial\psi_{\text{فرودی}}}{\partial z} = k A \sin(\omega t - kz), \quad \frac{\partial\psi_{\text{بازتاب}}}{\partial z} = -R_{12} [k A \sin(\omega t + kz)] \quad (26)$$

از معادلات (۲۵) دیده می‌شود که در نقطه $z = 0$ ، آن قسمت از سرعت که ناشی از موج بازتاب است، با حاصلضرب R_{12} در مؤلفه سرعت ناشی از موج فرودی، برابر است. از معادلات (۲۶) دیده می‌شود که در نقطه $z = 0$ ، آن قسمت از نیروی بازگرداننده که ناشی از موج بازتابیده است، با حاصلضرب $-R_{12}$ در مؤلفه نیروی بازگرداننده ناشی از موج فرودی، برابر است. بنابراین با تعریف ضرایب بازتاب ψ ، $\partial\psi/\partial t$ و $\partial\psi/\partial z$ معادلات (۲۴)، (۲۵) و (۲۶) را می‌توانیم خلاصه کنیم:

$$R_{\psi} = R_{\partial\psi/\partial t} = R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (27)$$

$$R_{\partial\psi/\partial z} = -R_{12} \quad (28)$$

دقت کنید که R_{12} باید بین -1 و $+1$ باشد.

بازتاب در مرز بین محیط‌های پاشنده. تصور کنید تاری با امپدانس Z_1 که از $z = -\infty$ تا $z = 0$ ادامه یافته است، در این نقطه به تاری با امپدانس Z_2 که از $z = 0$ تا $z = +\infty$ ادامه دارد، متصل شده است. نقطه‌چ درست در سمت چپ $z = 0$ نمی‌تواند بگوید که آیا نقطه‌چ درست در سمت راست $z = 0$ ابتدای یک تار بینهایت با امپدانس Z_2 است یا فقط پایانه ورودی یک ضربه‌گیر با امپدانس Z_2 . بنابراین ضرایب بازتاب معادلات (۲۷) و (۲۸) باز هم موج بازتابیده در محیط ۱ را به دست می‌دهند. دقت کنید که $R_{21} = -R_{12}$ است. بنابراین اگر ویژگی‌های دو محیط با یکدیگر عوض بشوند، علامت ضریب بازتاب آنها معکوس می‌شود. مثلاً: R_{ψ} برای یک موج

فرودی از یک تار سبک به یک تار سنگین (با فرض آنکه کشش هر دو تار یکسان اختیار شود) منفی است ولی $R_1\psi$ برای یک موج فرودی از یک تار سنگین به یک تار سبک مثبت است. عبور در مرز بین محیطهای پاشنده. نقطه‌ای که در $z = 0$ است تحت نیروی محرک ترکیبی امواج فرودی و بازتاب در محیط ۱ نوسانهایی انجام می‌دهد. این نقطه سپس مانند یک چشمه امواج پیشرونده، که در جهت $z +$ در محیط ۲ حرکت می‌کند، عمل می‌کند. می‌خواهیم امواج عبوری جابه‌جایی ψ_2 ، سرعت عرضی $\partial\psi_2/\partial t$ و نیروی بازگرداننده $\partial\psi_2/\partial z$ را به دست آوریم، که در آن زیرنویس ۲ نشانگر موج عبوری در محیط ۲ است. بدین منظور از شرایط مرزی استفاده خواهیم کرد.

شرایط مرزی و پیوستگی. این شرایط مرزی عبارت از این است که مقدار $\psi(z, t)$ درست کمی در سمت چپ مرز همان مقدار درست در سمت راست مرز باشد، یعنی جابه‌جایی $\psi(z, t)$ پیوسته است. بنابراین، سرعت $\partial\psi(z, t)/\partial t$ پیوسته است. همچنین، نیروی بازگرداننده $-T \partial\psi(z, t)/\partial z$ پیوسته است. شرایط مرزی پیوستگی برای جابه‌جایی و سرعت هر نقطه بر روی تار بدیهی است و به توضیح احتیاج ندارد. شرط مرزی برای نیروی بازگرداننده آن‌چنان بدیهی نیست. (مثلاً ممکن است فکر کرده باشید که به جای حاصلضرب کشش در شیب، شیب، یعنی $\partial\psi(z, t)/\partial z$ پیوسته است. با وجود این اگر کشش در مرز تغییر کند تار در مرز یک "ناهمواری" نشان خواهد داد. بنابراین شیب پیوسته نخواهد بود ولی حاصلضرب کشش در شیب پیوسته است.) برای اینکه ببینید نیروی بازگرداننده پیوسته است، تصور کنید که یک جزء بینهایت کوچک جرم در نقطه $z = 0$ قرار دارد. به این جرم نیروی عرضی $-T_1 \partial\psi_1/\partial z$ به وسیله تار سمت چپ آن وارد می‌شود. این جرم دارای نیروی عرضی $T_2 \partial\psi_2/\partial z$ است که به وسیله تار سمت راست بر آن وارد می‌شود. از برهم‌نهی این دو نیرو حاصلضرب جرم جزء بینهایت کوچک در شتاب آن به دست می‌آید. اما جرم آن برابر صفر است. بنابراین برهم‌نهی برابر صفر می‌شود:

$$-T_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial z} + T_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{در } z = 0$$

که بدین معنی است که $\partial\psi/\partial z$ پیوسته است. (توجه: حرف T را برای نشان دادن کشش تعادل فنر در حالت کلی به کار می‌بریم و از حروف T_1 و T_2 برای نشان دادن کشش تعادل فنر در محیط ۱ و محیط ۲ استفاده می‌کنیم.)

ضریب عبور دامنه. فرض کنید $\varphi(z, t)$ نشانگر هریک از سه کمیت جابه‌جایی، سرعت یا نیروی بازگرداننده باشد. در محیط ۱ تابع موج $\varphi_1(z, t)$ به صورت برهم‌نهی زیر است.

$$\varphi_1(z, t) = \varphi \cdot \cos(\omega t - k_1 z) + R\varphi \cdot \cos(\omega t + k_1 z) \quad (29)$$

که در آن برطبق معادلات (۲۷) و (۲۸) اگر نشانگر جابه‌جایی با سرعت باشد در این صورت ضریب بازتاب R برابر است با $R_{۱۲} \equiv (Z_۱ - Z_۲)/(Z_۱ + Z_۲)$ و اگر $\varphi(z, t)$ نشانگر نیروی بازگرداننده باشد، این ضریب برابر $-R_{۱۲}$ است. در محیط ۲ همین کمیت موجی یک موج پیشرونده است که فقط در جهت $+z$ حرکت می‌کند. (زیرا، برطبق فرض، تنها نیروی محرک خارجی در $z = -\infty$ قرار گرفته است. این نیرو، موج فرودی را به‌وجود می‌آورد. ناپیوستگی، امواج بازتاب و عبوری را به‌وجود می‌آورد. بنابراین در محیط ۲ چیزی وجود ندارد که موجی به‌وجود آورد که در جهت $-z$ حرکت کند.) از این رو شکل $\varphi_۲(z, t)$ را می‌توان نوشت و در همان هنگام T ضریب عبور دامنه را تعریف کرد:

$$\varphi_۲(z, t) = T\varphi_۰ \cos(\omega t - k_۲z) \quad (۳۰)$$

از این شرط که $\varphi(z, t)$ در مرز، یعنی $z = ۰$ باید پیوسته باشد، رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\varphi_۲(۰, t) = \varphi_۱(۰, t)$$

یعنی

$$T\varphi_۰ \cos \omega t = \varphi_۰(۱ + R) \cos \omega t$$

یعنی

$$\boxed{T = ۱ + R} \quad (۳۱)$$

که در آن R برای ψ و $\partial\psi/\partial t$ برابر $R_{۱۲}$ و برای نیروی بازگرداننده یعنی $\partial\psi/\partial z$ برابر $-R_{۱۲}$ است. (توجه: از حرف T هم برای کشش تار و هم برای ضریب عبور استفاده می‌کنیم. این مطلب در مثالهای غیر از تار ابهامی به‌وجود نمی‌آورد.)

دقت کنید که چون R باید بین -۱ و $+۱$ باشد، T باید بین صفر و $+۲$ باشد. از این رو ضریب عبور همواره مثبت است.

در اینجا چند حالت حدی جالب توجه ذکر می‌شود:

حالت ۱: جور بودن کامل امپدانس

اگر $Z_۲ = Z_۱$ باشد موج بازتابیده وجود ندارد یعنی $R_{۱۲}$ برابر صفر است. ضریب عبور برابر واحد است. دقت کنید که شرط $Z_۲ = Z_۱$ الزاماً مستلزم آن نیست که دو محیط یکسان هستند. اگر چگالی و کشش تار، هر دو، در محل اتصال به‌گونه‌ای تغییر کنند که حاصلضرب آنها ثابت باقی

بماند، در این صورت امیدانسیها، $Z_1 = \sqrt{T_1 \rho_1}$ و $Z_2 = \sqrt{T_2 \rho_2}$ برابر خواهند بود. اما سرعتهای فاز $v_1 = \sqrt{T_1 / \rho_1}$ و $v_2 = \sqrt{T_2 / \rho_2}$ دیگر در دو محیط یکسان نخواهند بود.

حالت ۲: نیروی کشش بینهایت

اگر Z_2 / Z_1 "بینهایت" باشد، R_{12} برابر -1 است. در این صورت نقطه $z = 0$ بی حرکت باقی می ماند. ضرایب بازتاب جابه جایی و سرعت برابر -1 است، به طوری که امواج فرودی و بازتابیده در نقطه $z = 0$ برهم نهاده شده و جابه جایی و سرعت صفر به وجود می آورند. یک موج فرودی که یک تپ جابه جایی مثبت ("بالا") است، پس از بازتاب یک تپ منفی ("پایین") می شود. ضریب بازتاب نیروی عرضی برابر $+1$ است، به طوری که نیرویی که در $z = 0$ به تار وارد می شود، در همان جهتی است که اگر پایان دهی کامل می داشتیم (یعنی پایین)، اما از نظر اندازه دو برابر مقدار لازم برای به وجود آوردن پایان دهی کامل است. بنابراین نیروی اضافی به سمت پایین است و موج بازتابیده ای با دامنه منفی و با اندازه مساوی با اندازه موج فرودی، تولید می کند.

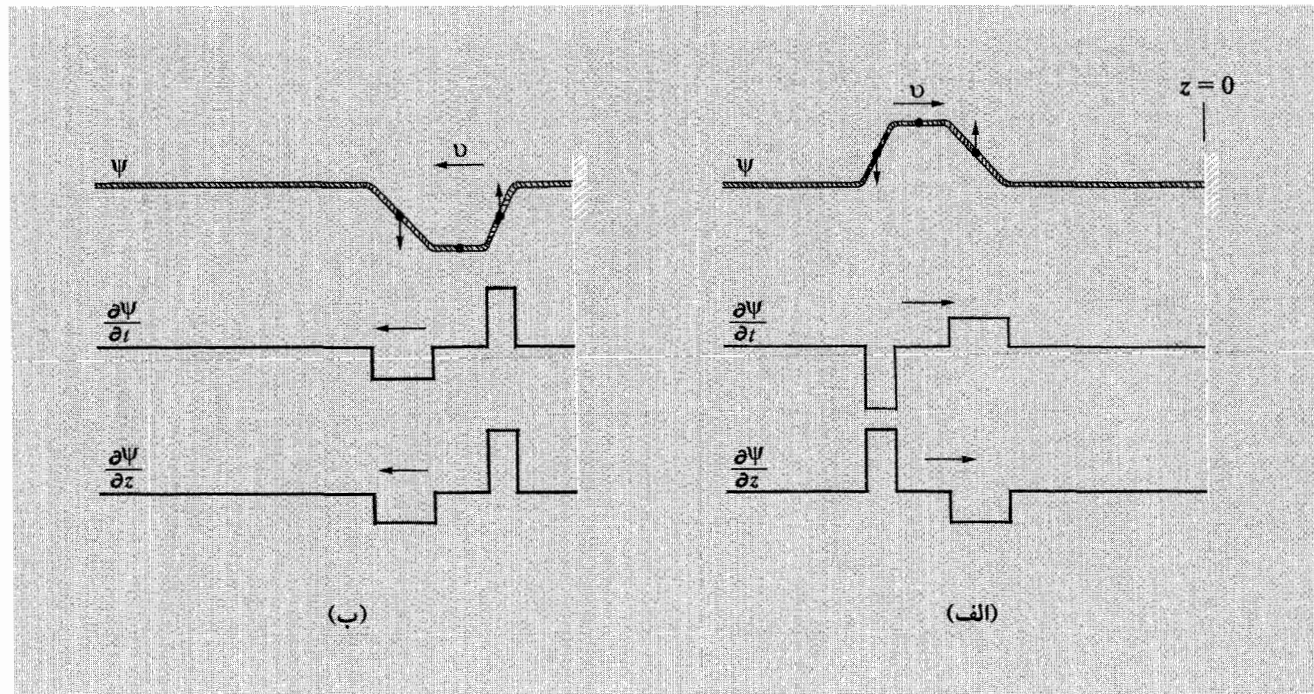
حالت ۳: کشش صفر

اگر Z_2 / Z_1 صفر باشد، انتهای تار $z = 0$ یک انتهای آزاد است. در این صورت شیب تار در آنجا صفر باقی می ماند. از این رو، ضریب بازتاب برای نیروی بازگرداننده برابر -1 است. یک موج فرودی که به صورت یک تپ مثبت نیروی بازگرداننده است، پس از بازتاب یک تپ منفی می شود. ضرایب بازتاب برای جابه جایی و سرعت برابر $+1$ هستند و تار در نقطه $z = 0$ دو برابر سرعتی را دارد که اگر امیدانسیها جور بودند می داشت. یک موج فرودی که یک تپ مثبت جابه جایی است پس از بازتاب هنوز هم یک تپ مثبت است. حالتی حدی که در آنها Z_2 / Z_1 بینهایت و صفر هستند در شکل های ۳-۵ و ۴-۵ نمایش داده شده اند.

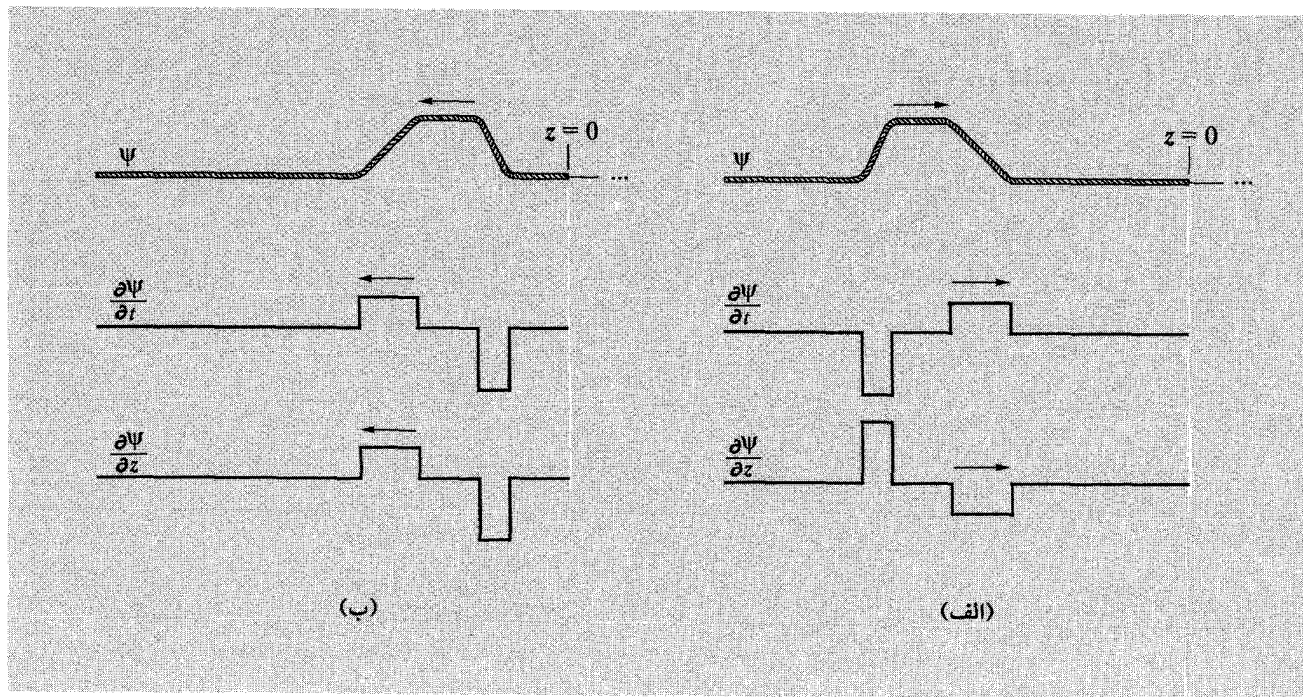
شکل کلی یک موج سینوسی. هنگامی که یک موج فرودی و یک بازتاب در محیط ۱ داریم رابطه زیر وجود دارد:

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz) + RA \cos(\omega t + kz) \quad (32)$$

که در آن R ضریب بازتاب است که بین -1 و $+1$ قرار دارد. هنگامی که R صفر است، پایان دهی کامل داریم. در این صورت $\psi(z, t)$ یک موج پیشرونده "خالص" است، یعنی موجی که فقط در جهت z حرکت می کند. هنگامی که R برابر -1 است $\psi(z, t)$ یک موج ساکن "خالص" یعنی موجی با گره های (صفرهای) دائمی است. در نقطه $z = 0$ یک گره وجود دارد. هنگامی که R برابر $+1$ است، $\psi(z, t)$ باز هم یک موج ساکن خالص است که در $z = 0$ همواره یک شکم



شکل ۳-۵ بازتاب یک تپ فرودی از یک انتهای ثابت تار: (الف) پیش از بازتاب. (ب) پس از بازتاب (تار در نقطه $z = 0$ به تاری با چگالی جرمی بینهایت متصل شده است). سه پیکان کوچک عمودی بر روی سه نقطه، سرعت لحظه‌ای تار در این نقاط را مشخص می‌کند. (نقطه میانی نشانگر پیکانی به طول صفر است).



شکل ۴-۵ بازتاب یک تپ از یک انتهای آزاد: (الف) پیش از بازتاب. (ب) پس از بازتاب. (تار در نقطه $z = 0$ به تازی با چگالی جرمی قابل صرف نظر کردن متصل است.)

(اندازه حداکثر) دارد، یعنی در فاصله یک چهارم طول موج از $z = 0$ ، همواره دارای یک گره است. هنگامی که R نه صفر است و نه ± 1 ، $\psi(z, t)$ نه یک موج ساکن خالص است، و نه یک موج پیشرونده خالص، بلکه یک موج سینوسی عمومتری است. عمومترین موج سینوسی (برای بسامد مفروض ω) می‌تواند یا به صورت برهم‌نهی امواج ساکن و یا برهم‌نهی امواج پیشرونده (و یا به صورت ترکیبی از هر دو) نوشته شود. از این رو هر موج سینوسی $\psi(z, t)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t + \alpha) \sin kz + B \cos(\omega t + \beta) \cos kz \quad (33)$$

که عبارت است از برهم‌نهی دو موج ساکن که در آن گره‌ها به اندازه یک ربع طول موج جابه‌جا شده‌اند و دامنه‌ها و ثابتهای فاز مختلف‌اند. به گونه‌ای دیگر، همان موج $\psi(z, t)$ به شکل زیر می‌تواند نوشته شود

$$\psi(z, t) = C \cos(\omega t - kz + \gamma) + D \cos(\omega t + kz + \delta) \quad (34)$$

که عبارت است که از برهم‌نهی دو موج پیشرونده در جهت‌های مخالف که دامنه‌ها و ثابتهای فاز مختلف دارند. مثلاً موجی که با معادله (۳۲) داده می‌شود به صورت برهم‌نهی در موج پیشرونده نوشته شده است. این معادله به صورت برهم‌نهی دو موج ساکن نیز می‌تواند نوشته شود. می‌گذاریم خودتان این کار را انجام دهید. (مسئله ۵-۲۰).

برخی از مثالهای فیزیکی بازتاب به شرح زیر است:

مثال ۳: بازتاب امواج صوتی

معادلات حرکت برای امواج صوتی مشابه معادلات حرکت برای امواج طولی بر روی یک فنر است. این معادلات به نوبه خود مشابه با معادلات امواج عرضی در یک تار پیوسته است. بدون تکرار عملیات، می‌توانیم از نتایجی که برای ضرایب بازتاب و عبور در مورد تار به دست آوردیم، استفاده کنیم. سرعت هوا با رابطه $\partial\psi/\partial t$ داده می‌شود. فشار پیمانه‌ای، $\partial\psi/\partial z$ ، مشابه با نیروی بازگرداننده $-T \cdot \partial\psi/\partial z$ در مورد تار است.

انتهای بسته. در انتهای بسته یک لوله، سرعت متوسط مولکولهای هوا در امتداد z (در امتداد لوله) به طور دائمی صفر است. (برای هر مولکولی که در امتداد z به طرف راست به سوی دیوار حرکت می‌کند، مولکول دیگری وجود دارد که از دیوار بازتاب پیدا کرده و به طرف چپ حرکت می‌کند.) از این رو موج سرعت $\partial\psi/\partial t$ در یک انتهای بسته بایستی ضریب بازتاب -1 داشته باشد، به طوری

که برهم‌نهی امواج سرعت فرودی و بازتاب برابر صفر است. موج فیزیکی جالب توجه دیگری موج "نیروی بازگرداننده" فشار پیمانه‌ای یعنی $\partial\psi/\partial z - \gamma p_0$ است. بر طبق محاسبات ریاضی که اکنون برای تار بیان کردیم، ضریب بازتاب فشار پیمانه‌ای باید هم‌اندازه اما با علامت مخالف در مقایسه با ضریب بازتاب موج سرعت باشد. بنابراین، فشار پیمانه‌ای در انتهای بسته باید با ضریب $+1$ بازتابیده شود. بنابراین فشار پیمانه‌ای در انتهای بسته دارای همان علامت یک موج صوتی به طور کامل پایان یافته است. اما اندازه آن دو برابر است. در مقیاس "میکروسکوپیکی" می‌توان دریافت که چرا فشار در انتهای بسته دو برابر هنگامی است که لوله امتداد می‌داشت: فشار برابر نیرو بر واحد سطح است. نیرو، انتقال تکانه بر واحد زمان است. مولکولی که به طور کشسان از دیوار بازتاب پیدا می‌کند، مؤلفه z تکانه آن معکوس می‌شود. (اگر دیوار ناهموار باشد، این عبارت برای هر برخورد مولکولی صادق نیست، بلکه به طور متوسط برقرار است؛ و از این بیشتر احتیاج نداریم.) از این رو، این مولکول دو برابر اندازه تکانه‌ای که اگر بدون بازتاب جذب می‌شد و یا فقط به سادگی به حرکت در داخل لوله ادامه می‌داد، منتقل می‌کند.

انتهای باز. در انتهای باز یک لوله، یک مشکل عملی داریم: نمی‌خواهیم بگذاریم هوا به داخل خلأ فرار کند. حال می‌پرسیم که اگر انتهای باز لوله به داخل یک اتاق بزرگ پر از هوا با همان فشار p_0 هوای داخل لوله ختم شود (همان‌گونه که در مورد آزمایش خانگی با لوله پستی انجام می‌شود)، چه اتفاقی می‌افتد. در انتهای باز لوله، هوا می‌تواند به آزادی به داخل و خارج جریان یابد. بنابراین موج سرعت مجبور نیست که در آنجا (آن طوری که در مورد انتهای بسته است) برابر صفر باشد. در محلهایی در داخل اتاق که به اندازه کافی از انتهای آزاد لوله دور هستند، فشار p با فشار تعادل p_0 همواره برابر است. درست در انتهای لوله، فشار دقیقاً برابر p_0 نیست، زیرا امواج فشار که در حال خارج شدن از لوله هستند، هنوز در مدخل لوله احساس می‌شوند. به محض آنکه (برای مثال) یک ناحیه تراکم به انتهای آزاد، لوله می‌رسد، هوا می‌تواند به اطراف پراکنده شود، در حالی که در داخل لوله، حرکت هوا در موج صوتی صرفاً در امتداد z است. از این رو با افزایش فاصله از انتهای لوله تراکم به سرعت "برطرف" می‌شود تا جایی که در فاصله مشخصی در داخل اتاق (که در حدود شعاع لوله از آب درمی‌آید) فشار اساساً با p_0 برابر است. بنابراین در انتهای باز یک لوله که به یک اتاق بزرگ منتهی می‌شود، فشار پیمانه‌ای در محلی درست خارج از لوله (تقریباً) به طور دائمی برابر صفر است. اکنون این محل (تقریبی) را انتهای باز "مؤثر" لوله می‌نامیم. از آنجا که فشار پیمانه‌ای در آنجا به طور دائمی صفر است، در یک انتهای باز ضریب بازتاب برای فشار پیمانه‌ای باید برابر -1 باشد. بنابراین ضریب بازتاب برای سرعت برابر $+1$ است. امپدانس Z_2 که به وسیله اتاق وارد می‌شود، به طور مؤثر برابر صفر است. (این نکته که هوا به طور آزاد به اطراف جریان پیدا می‌کند، سبب می‌شود که امپدانس صفر به دست آید. فرمول امپدانس $Z = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0}$ را نمی‌توان برای امپدانس اتاق به کار برد، زیرا این فرمول براساس فرض حرکت منحصراً طولی است.)

در اینجا یک تصویر "میکروسکوپیکی" از آنچه که در یک انتهای باز اتفاق می‌افتد بیان می‌شود. در نظر بگیرید هنگامی که تراکم به انتهای باز می‌رسد، چه اتفاقی می‌افتد. پیش از آنکه تراکم به انتهای باز برسد، تراکم با به پیش‌راندن هوای جلوتر از خود و انتقال دادن تکانه طولی به آن، و با پیش‌رانده شدن از طرف هوای عقبتر از خود و دریافت تکانه، انتشار می‌یابد. ناگهان تراکم به یک فضای باز می‌رسد. دیگر هیچ امیدانسی از طرف هوای جلوتر وجود ندارد. هوا بدون آنکه مجبور شود به هوای جلوتر تکانه‌ای منتقل کند به داخل اتاق جریان می‌یابد. این جریان به خارج "اضافی" هوا در انتهای باز یک کاستی فشار به وجود می‌آورد (هوا رقیقتر است). هوای پشت این کاستی فشار، اکنون امیدانسی کمتر از "معمول" حس می‌کند و برای پرکردن کاستی هجوم می‌آورد، این عمل مکان هوای رقیق را به جلوتر حرکت می‌دهد. مولکولهای پشت سر باز هجوم می‌آورند و غیره. دقت می‌کنیم که تراکمی که در جهت z حرکت می‌کند کاستی‌ای به وجود آورده است که در جهت z حرکت می‌کند. یک موج سرعت که شامل یک تپ با مؤلفه z مثبت است و در جهت z حرکت می‌کند، موج سرعتی تولید کرده است که در جهت z حرکت کرده و شامل یک مؤلفه z با همان علامت است (مولکولها همیشه در جهت z هجوم می‌آورند تا کاستی را پرکنند). از این رو می‌بینیم که در یک انتهای باز، ضریب بازتاب برای موج سرعت، مثبت و برای موج فشار، منفی است.

طول مؤثر لوله با انتهای باز. فاصله مؤثر پس از انتهای باز لوله که در آن فشار پیمانه‌ای صفر است را می‌توان به صورت تجربی به شرح زیر تعیین کرد. یک لوله پستی که از هر دو انتها باز است در نظر بگیرید. پایینترین مد نوسان آزاد نوسانی است که در آن طول مؤثر لوله برابر نصف طول موج است. (در هر لحظه مفروض هنگامی که هوا به سمت راست انتهای لوله رانده می‌شود، هوا از انتهای چپ به سمت چپ رانده می‌شود. در وسط لوله، سرعت هوا به طور دائمی صفر است یعنی در موج ساکن سرعت یک گره وجود دارد. در آنجا یک شکم موج ساکن فشار نیز وجود دارد.) برای پیدا کردن طول مؤثر لوله با شیئی آهسته به آن ضربه بزنید تا نت را بشنوید. (پایینترین مد به آسانی تحریک می‌شود، و آن چیزی است که شما می‌شنوید). ارتفاع نت را به گونه‌ای تعیین کنید. نیم طول موج صوت را در آن ارتفاع نت (بسامد) محاسبه کنید. این مقدار اندکی درازتر از لوله خواهد بود و به عنوان طول مؤثر لوله می‌تواند در نظر گرفته شود. روش آسانتر استفاده از یک بسامد محرک استاندارد است یعنی دیاپازون به کار ببرید. سپس طول لوله‌ای را که زیاد از حد دراز است، با بریدن قطعاتی از آن به تدریج کوتاه کنید، و یا از لوله‌ای دیگر استفاده کنید و با حرکت آن در درون لوله اول، طول آن را تنظیم کنید. طول لوله را برای تشدید میزان کنید. دقت کنید هنگامی که تشدید به دست می‌آورد (یعنی یک بیشینه در بلندی صدای در حال خروج از لوله هنگامی که

به وسیله دیپازون تحریک می شود، ارتفاع نتی که برای نوسانهای آزاد واداشته به وسیله ضربه زدن به لوله می شنوید، همان بسامد محرک، یعنی دیپازون است. به ازای طولهای "خارج از تشدید"، بسامد طبیعی با بسامد دیپازون یکسان نیست. (هنگامی که لوله "خارج از تشدید" را با دیپازون تحریک می کنید چه بسامدی می شنوید، بسامد نوسان طبیعی یا بسامد دیپازون؟ به آزمایشهای خانگی مراجعه کنید).

مثال ۴: بازتابها در خطوط انتقال

ولتاژ محرک $V(t)$ از یک فرستنده در انتهای چپ L یک خط انتقال نیرو بینهایت با امپدانس Z_1 ، (در تقریب پیوسته) یک موج جریانی پیشرونده $I(z, t)$ به وجود می آورد به طوری که در محل فرستنده (در نقطه $z = 0$) داریم

$$V \cdot \cos \omega t = V(t) = Z_1 I(0, t) \quad (35)$$

موج پیشرونده جریانی و ولتاژ به صورت زیر داده می شوند

$$V(z, t) = V \cdot \cos(\omega t - k_1 z), \quad I = I \cdot \cos(\omega t - k_1 z), \quad V = Z_1 I. \quad (36)$$

در مرزی که در آنجا امپدانس مشخصه به طور ناگهانی از Z_1 به Z_2 تغییر می کند، یک موج بازتابیده و یک موج عبور کرده تولید می شوند. احتیاجی نیست که مراحل را که برای تار به کار بردیم تکرار کنیم. شکل ضریبهای بازتاب و عبور مانند شکل ضرابی است که برای امواج روی یک تار و امواج صوتی برقرار است. پیش از نوشتن این فرمولها وضعیت فیزیکی در حالتهای حدی امپدانس Z_2 برابر صفر (مثال ۵) و امپدانس Z_2 برابر با بینهایت (مثال ۶) را در نظر می گیریم. ■

مثال ۵: مدار انتها اتصال کوتاه شده - امپدانس صفر

اگر انتهای راست خط به وسیله متصل شدن دو طرف آن به مقاومتی که مقاومت ناچیز دارد، اتصال کوتاه شود، ولتاژ دو طرف آن انتها به طور دائمی صفر است. بنابراین ضریب بازتاب ولتاژ در یک انتهای اتصال کوتاه شده برابر -1 است. از طرف دیگر، جریان، ضریب بازتاب $+1$ دارد و مقدار آن (در انتهای خط) دو برابر مقداری است که اگر خط به طور کامل پایان یافته بود، دارا بود. یک جبهه موج ولتاژ مثبت که در جهت $+z$ منتشر می شود وقتی بازتابیده می شود یک جبهه موج ولتاژ منفی است. یک موج جریانی مثبت پس از بازتاب یک موج جریانی مثبت است. ■

مثال ۶: مدار انتها باز — امیدانس بینهایت

اگر انتهای سمت راست به یک مقاومت بینهایت متصل شود (و یا بدون هیچ‌گونه مقاومتی "باز" گذاشته شود)، هیچ جریانی نمی‌تواند از یک رسانا به رسانای دیگر جریان پیدا کند. از این رو، جریان در یک مدار انتها باز به‌طور دائمی صفر است و ضریب بازتاب جریان باید برابر ۱- باشد. بنابراین ضریب بازتاب ولتاژ برابر ۱+ است.

از ملاحظات فیزیکی بالا می‌توانیم نتیجه بگیریم که ضریب بازتاب برای پتانسیل V و شدت جریان I بار رابطه زیر داده می‌شوند

$$R_V = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \equiv -R_{I2}, \quad R_I = -R_V \quad (37)$$

برای چک کردن دقت کنید که برای $Z_2 = 0$ (انتهای اتصال کوتاه شده) از رابطه ۳۷ نتیجه می‌شود که $R_V = -1$ ، همان‌طور که باید باشد و برای $Z_2 = \infty$ (انتهای باز)، $R_I = -1$. ■

خط انتقال نیرو با صفحات موازی. امیدانس (برحسب ایستاهم) به‌صورت زیر داده می‌شود. [معادله ۴-۱۴، بخش ۴-۴]

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{4\pi g}{c w} \quad (38)$$

بنابراین، اگر (مثلاً) هنگامی که از خط ۱ به خط ۲ می‌رویم فاصله g دوبرابر شود، امیدانس هم دوبرابر می‌شود.

ضرایب بازتاب در میدانها. به‌جای در نظر گرفتن پتانسیل و جریان، می‌توانیم توجه خود را به میدان الکتریکی E_x و میدان مغناطیسی B_y معطوف کنیم. در یک خط انتقال نیرو مفروض، میدان الکتریکی متناسب با V و میدان مغناطیسی متناسب با I است. بنابراین

$$gE_x = V \quad (39)$$

$$wB_y = \frac{4\pi}{c} I\mu$$

چون یک موج بازتابیده در خط ۱ در همان خط انتقال نیروست که موج فرودی داراست، یعنی با همان فاصله g ، پهنای w و تراوایی μ ، می‌بینیم که ضریب بازتاب E_x همان ضریب بازتاب V و ضریب بازتاب B_y همان ضریب بازتاب I است. (برای آنکه متقاعد شوید که هیچ علامت منفی "اضافی" مربوط به موج جریان بازتابیده و موج میدان مغناطیسی بازتابیده وجود ندارد، شکلی بکشید و قانون دست راست را به‌کار ببرید.) از طرف دیگر، می‌بینیم که ضریب عبور برای gE_x

همان ضریب برای V است. به همین ترتیب، ضریب عبور برای wB_y/μ با ضریب عبور I برابر است. ما فقط ضرایب بازتاب را در نظر خواهیم گرفت. در این صورت

$$R_E = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad \text{میدان الکتریکی:} \quad (40)$$

میدان مغناطیسی B_y ضریب بازتابی دارد که اندازه آن برابر با ضریب بازتاب میدان الکتریکی E_x است ولی با علامت مخالف. در مثال ۷ حالت ویژه مهمی را در نظر می‌گیریم.

مثال ۷: بازتاب در خط انتقالی که در ϵ ناپیوستگی دارد

فرض می‌کنیم که شکل سطح مقطع (یعنی پهنای w و فاصله g) در مرز و تراوایی مغناطیسی μ تغییر نکند. (بسیاری از محیطها مانند شیشه، آب، هوا و یون‌سپهر با دقت بسیار زیادی دارای $\mu = 1$ هستند.) بنابراین بر طبق معادله (۳۸) تنها کمیت در امپدانس Z که در مرز تغییر می‌کند، ثابت دی‌الکتریک ϵ است. بنابراین Z با $1/\sqrt{\epsilon}$ متناسب است که برابر با $1/n$ است که در آن $n = \sqrt{\epsilon}$ ضریب شکست (به‌ازای $\mu = 1$) است. از این رو (پس از قراردادن $1/n_1 = Z_1$ و $1/n_2 = Z_2$ در معادله (۴۰) و ضرب کردن در $n_1 n_2$ برای از بین بردن کسرها) نتیجه می‌شود

$$R_E = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (41)$$

اکنون کاربرد این نتیجه را تعمیم می‌دهیم. فرض کنید فاصله‌های خطوط انتقال نیرو به سمت بینهایت برود و پهنای متناسب با آن اضافه شود. ضرایب بازتاب برای میدانهای محلی نمی‌تواند به شرایط مرزی بستگی داشته باشد. بنابراین، اگر موج فرودی به وسیله یک لامپ خیابانی دور و یا یک آنتن تلویزیونی دورگسیل شود، معادله (۴۱) باید برقرار باشد. ضرایب بازتاب که با معادله (۴۱) داده می‌شوند برای هر موج الکترومغناطیسی مستقیم و موازی که به‌طور عمودی بر سطحی که در آنجا ضریب دی‌الکتریک به‌طور ناگهانی (در فاصله‌ای کمتر از یک طول موج) تغییر می‌کند، فرود می‌آید، برقرار است.

این نتیجه را مستقیماً می‌توانیم در حالت جالب توجه نور مرئی به‌کار ببندیم:

مثال ۸: بازتاب نور مرئی

ضریب بازتاب که با معادله (۴۱) داده می‌شود برای هر موج الکترومغناطیسی که به‌طور عمود بر مرز بین دو محیط شفاف (اگر هر دو دارای $\mu = 1$ باشند)، فرود می‌آید و بازتابیده می‌شود،

برقرار است. از این رو برای نور مرئی اگر ضریب شکست هوا 1.0 و اختیار شود و ضریب شکست شیشه 1.5 باشد، در عبور از هوا به شیشه داریم

$$R_E = \frac{1-n}{1+n} = \frac{1-1.5}{1+1.5} = -\frac{1}{5} \quad (42)$$

بنابراین، میدان الکتریکی تغییر علامت داده و اندازه آن با ضریب 5 کاهش پیدا می‌کند. هنگام عبور از شیشه به هوا، ضریب بازتاب علامت مخالف دارد و بنابراین $\frac{1}{5}+$ است. شار انرژی بازتابیده با مربع میدان الکتریکی متناسب است. بنابراین کسری از شدت نور که از تک‌سطح هوا-شیشه بازتابیده می‌شود برابر $\frac{1}{25}$ است، یعنی 4% درصد شدت نور تابیده در تابندگی عمودی بازتاب پیدا می‌کند. به آزمایش خانگی ۵-۱ مراجعه کنید. ■

۴-۵ جوگردن امیدانس دو محیط شفاف

فرض کنید می‌خواهیم امواج پیشرونده را از یک محیط به محیط دیگری بدون تولید موج بازتابیده انتقال دهیم. مثلاً می‌خواهیم انرژی صوتی را از هوای درون یک بلندگو به هوای داخل اتاق بدون ایجاد بازتاب، منتقل کنیم. (بازتابها ناخوشایند هستند زیرا باعث می‌شوند تا امیدانسی که سازوکار تحریک‌کننده حس می‌کند سهمی واکنشی داشته باشد و بدین ترتیب با بسامد تغییر کند و احتمالاً در برخی از بسامدها تشدیدهای ناخوشایند به وجود آورد.) به عنوان مثال دیگر، ممکن است بخواهیم امواج پیشرونده نور مرئی را از هوا به داخل یک عدسی یا تیغه شیشه‌ای بدون ایجاد بازتاب، عبور دهیم. (بازتاب ممکن است به دو علت ناخوشایند باشد. یکی به سبب اتلاف شدت نور از باریکه و دیگری به سبب آنکه نمی‌خواهیم نور بازتابیده به داخل اجزای دیگر دستگاه وارد شود.) در مثال دیگری ممکن است بخواهیم روشی ابداع کنیم که به وسیله آن دو غواصی که به دستگاههای تنفسی در زیر آب مجهز هستند، در حالی که زیر آب هستند بتوانند با یکدیگر صحبت کنند. هرکدام از شناگرها می‌تواند با صدای بلند در داخل ماسک صورت صحبت کند (همان ماسکی که دهان و به علاوه چشمها و بینی را می‌پوشاند)، اما چون ضریب عبور T_{12} بسیار کوچک است، مقدار بسیار کمی از موج صوتی از میان شیشه ماسک صورت به داخل آب عبور می‌کند. این عمل به خاطر آن است که امیدانس صوتی آب با امیدانس هوا اختلاف بسیار دارد.

حل مسئله انتقال امواج پیشرونده از یک محیط به محیط دیگر بدون بازتاب جوگردن امیدانسیها نامیده می‌شود. در زیر دو روش را بحث خواهیم کرد: یک روش شامل "لایه بدون بازتاب" و روش دیگر شامل "کاهش تدریجی" است. (نتیجه آنکه هیچ‌کدام از این دو روش برای مسئله ارتباط بین غواصها جوابی به دست نمی‌دهند. راه حل با تبدیل بسامدهای صوتی صدا به بسامدهای مافوق

صوت پیش از تابش آنها به داخل آب به دست می‌آید. جورکردن امپدانسها در این بسامدها آسانتر است. هر غواص با یک فرستنده و گیرندهٔ مافوق صوت و یک مبدل بسامد مجهز می‌شود.

لایهٔ غیر بازتابنده. فرض کنید محیط ۱ از $z = -\infty$ تا $z = 0$ ادامه دارد. یک سیستم جورکنندهٔ امپدانس (محیط ۲) از $z = 0$ تا $z = L$ ادامه دارد. محیط ۳ از $z = L$ تا $z = +\infty$ ادامه دارد. می‌خواهیم برای امواج با بسامد زاویه‌ای ω بین محیطهای ۱ و ۳ امپدانسها را جور کنیم. یعنی می‌خواهیم هنگامی که موجی از محیط ۱ تابیده می‌شود و در جهت $z +$ حرکت می‌کند، موج بازتابیده نداشته باشیم. اما هیچ راهی وجود ندارد که بازتابی را که در یک ناپیوستگی امپدانس تولید شده است بتوانیم "خاموش" کنیم. زیرکانه جورکردن امپدانس در استفاده کردن از دو موج بازتابیده‌ای است که می‌توانیم تولید کنیم، یکی به سبب ناپیوستگی در نقطهٔ $z = 0$ و دیگری در نتیجهٔ ناپیوستگی در نقطهٔ $z = L$. اگر با فکر باشیم، می‌توانیم تریبیی بدهیم که برهم نهد این دو موج، موج بازتابیده‌ای با دامنهٔ صفر را در محیط ۱ به وجود آورد.

فرض کنیم ناحیهٔ از $z = 0$ تا L را با محیط پاشنده‌ای که امپدانس مشخصهٔ Z_2 دارد پر کنیم. به نظر معقول می‌رسد که اگر مسئلهٔ جورکردن امپدانسها را حل کنیم، خواهیم دریافت که Z_2 بین Z_1 و Z_3 قرار دارد. حال فرض می‌کنیم که چنین حالتی برقرار است. برطبق فرمولهای ضرایب بازتاب داریم

$$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1 - (Z_2/Z_1)}{1 + (Z_2/Z_1)}, \quad R_{23} = \frac{Z_2 - Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{1 - (Z_3/Z_2)}{1 + (Z_3/Z_2)} \quad (43)$$

بنابراین (با فرض $Z_1 < Z_2 < Z_3$) دو ضریب بازتاب R_{12} و R_{23} هم علامت هستند. در ابتدا، هم علامت بودن این دو ناامیدکننده به نظر می‌آید. برای اینکه می‌خواهیم دو موج بازتابیده یکدیگر را حذف کرده صفر شوند؛ اما هنوز این نکته را در نظر نگرفته‌ایم که دو موج بازتابیده از دو محل مختلف یعنی $z = 0$ و $z = L$ تولید می‌شوند. اکنون یک قله موج فرودی مفروض را دنبال می‌کنیم: در نقطهٔ $z = 0$ موج فرودی بازتابیده می‌شود (با ضریب R_{12})، و با ضریب عبور T_{12} که همیشه مثبت است، عبور داده می‌شود. موج عبور کرده تا نقطهٔ $z = L$ منتشر می‌شود که در آنجا با ضریب R_{23} بازتابیده می‌شود و قسمتی عبور می‌کند. موج بازتابیده به نقطهٔ $z = 0$ برمی‌گردد که در آنجا با ضریب T_{21} عبور می‌کند. از این رو، این موج در نقطهٔ $z = 0$ وارد محیط ۱ می‌شود و در جهت $z -$ حرکت می‌کند که دامنهٔ آن به وسیلهٔ حاصلضرب دامنهٔ موج فرودی در $T_{12}R_{23}T_{21}$ داده می‌شود و دارای ثابت فازی است که با ثابت فاز موج بازتابیده در سطح نخست متفاوت است، به خاطر زمان تأخیری که طول می‌کشد تا موج کل مسافت $2L$ "رفت و برگشت" را

در محیط ۲ بپیماید. بنابراین در محیط ۱ داریم:

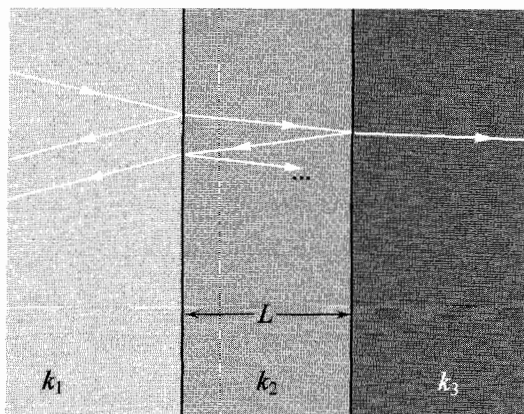
$$\psi_{\text{فرودی}} = A \cos(\omega t - k_1 z) \quad (44)$$

$$\psi(z = 0 \text{ در بازتابیده}) = R_{12} A \cos(\omega t + k_1 z) \quad (45)$$

$$\psi(z = L \text{ در بازتابیده}) = T_{12} R_{23} T_{21} A \cos(\omega t + k_1 z - 2k_2 L) \quad (46)$$

که در آن $-2k_2 L$ فاز (برحسب رادیان) مربوط به مسافت $2L$ رفت و برگشت با عدد موج زاویه‌ای k_2 است. (علامت منفی به سبب آن است که یک عقب‌ماندگی فاز یعنی تأخیر وجود دارد.) موج فرودی و دو موج بازتابیده که با معادلات (۴۵) و (۴۶) داده شده‌اند، در شکل ۵-۵ مشخص شده‌اند.

تقریب بازتاب کوچک. در شکل ۵-۵ علاوه بر دو موج بازتابیده نشان داده شده، تعداد بینهایت امواج بازتابیده اضافی وجود دارد که به وسیله پرتویی که با "و غیره" نشانه‌گذاری شده است، مشخص شده‌اند. در تمام کاربردهای موردنظر ما، Z_2 ، Z_1 ، Z_3 اختلاف زیادی با یکدیگر ندارند و بنابراین ضرایب بازتاب در مقایسه با واحد کوچک هستند. در این حالت نتیجه می‌شود که دو موج بازتابیده اولیه (یعنی آنهایی که نشان داده شده‌اند) غالب هستند و با تقریب خوبی می‌توانیم از مؤلفه‌های اضافی در نتیجه بازتابهای چندگانه داخلی صرفنظر کنیم. مثلاً دامنه پرتو بازتابیده بعدی که به دو پرتو نشان داده شده باید افزوده شود به اندازه ضریب $R_{21} R_{23}$ از پرتو بازتابیده دومی کوچکتر است. اگر مثلاً R_{23} و R_{21} در حدود ۰٫۱ باشند، از این ضریب در مقایسه با واحد می‌توانیم



شکل ۵-۵ موج فرودی و دو موج بازتابیده اولیه. پرتوها، برای اینکه روی هم نیفتند، در نمودار به صورت تابش غیرعمودی رسم شده‌اند.

صرفنظر کنیم. با همان درجه تقریب می‌توانیم در معادله (۴۶) به جای $T_{12}T_{21}$ واحد قرار دهیم:

$$T_{12}T_{21} = (1 + R_{12})(1 - R_{12}) = 1 - R_{12}^2 \approx 1 \quad (47)$$

بنابراین در این تقریب بازتاب کوچک، موج بازتابیده کل برابر است با مجموع دو بازتاب از $z = 0$ و $z = L$ که [با استفاده از معادله (۴۷) در معادله (۴۶)] به صورت زیر داده می‌شود

$$\psi_{\text{بازتاب}} \approx R_{12}A \cos(\omega t + k_1 z) + R_{22}A \cos(\omega t + k_1 z - 2k_2 L) \quad (48)$$

که در آن کمیت $2k_2 L$ اختلاف فاز به خاطر "رفت و برگشت" است.

حل برای لایه غیر بازتابنده. حل مسئله جورکردن امیدانها هم اکنون در دسترس است: ابتدا Z_2 را انتخاب کنید به طوری که $R_{12} = R_{22}$ باشد یعنی به طوری که [برطبق معادله (۴۳)]

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_2}{Z_3}, \quad Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3} \quad (49)$$

در این صورت معادله (۴۸) به صورت زیر درمی‌آید

$$\psi_{\text{بازتاب}} \approx R_{12}A [\cos(\omega t + k_1 z) + \cos(\omega t + k_1 z - 2k_2 L)] \quad (50)$$

اکنون طول L را به گونه‌ای انتخاب کنید که دو مؤلفه در این برهم‌نهی یکدیگر را خنثی کنند به طوری که "تداخل کاملاً مخرب" داشته باشیم. این حالت هنگامی روی می‌دهد که $2k_2 L$ برابر π یعنی فاصله رفت و برگشت $2L$ برابر با نصف طول موج در محیط ۲ باشد. اگر Z_2 برابر میانگین هندسی Z_1 و Z_3 باشد و اگر ضخامت L لایه غیر بازتابنده برابر یک ربع - طول موج از همان لایه باشد، موج بازتابیده کل برابر صفر است.

مثال ۹: جورکردن نوری امیدانس

هنگامی که یک باریکه نور مرئی از میان یک تیغه شیشه‌ای عبور می‌کند، از دو سطح می‌گذرد. در هر سطح شدت به خاطر بازتاب تضعیف می‌شود، این تضعیف با مربع دامنه ضریب بازتاب داده می‌شود (زیرا شدت با متوسط زمانی مربع میدان الکتریکی متناسب است). بنابراین، برطبق معادله (۴۲) بخش ۳-۵، در هر سطح یک اتلاف $\%4 = 1/25 = (1/5)^2$ وجود دارد. بنابراین برای عبور از دو سطح یک تیغه شیشه‌ای $\%8$ اتلاف وجود دارد. (از "تداخل" در نتیجه برهم‌نهی امواج بازتابیده از دو سطح صرفنظر می‌کنیم. برای نور "سفید" معمولی، هنگامی که در یک گستره وسیع از رنگها متوسط بگیریم، این اثرهای تداخلی صفر خواهند شد. با وجود این به آزمایش خانگی ۵-۱۰ مراجعه کنید.) این

اتلاف در یک دستگاه نوری که چندین فصل مشترک شیشه - هوا دارد، غیرقابل تحمل است. در نتیجه، متداول است که عدسیها را با یک لایه نابازتابنده "پوشانند". برطبق نتایج معادله (۴۹) امیدانس پوشش بایستی برابر با میانگین هندسی امیدانس هوا و شیشه باشد. از این رو، ضریب شکست پوشش برابر با حاصلضرب ریشه دوم ۱ در n باشد یعنی شیشه باید ضریب شکست $1.22 \approx \sqrt{1.5}$ داشته باشد. ضخامت شیشه همچنین باید $\frac{1}{4}\lambda_2$ باشد که در آن λ_2 طول موج نور در پوشش است. برای نور با طول موج در خلأ 5500 \AA ، طول موج در پوشش برابر 4500 \AA است. از این رو ضخامت پوشش باید برابر $1.12 \times 10^{-5} \text{ cm} = 1120 \text{ \AA} = 4500 \text{ \AA} / 4$ باشد. این عمل را با قراردادن قطعه شیشه‌ای که باید پوشش داده شود، مانند یک عدسی، در یک اتاق خلأ شامل یک بوته کوچک که در آن ماده پوشش‌دهنده گرم می‌شود تا بخار شود، می‌توان انجام داد. مولکولهای ماده بخار شده به خط مستقیم در تمام جهات حرکت می‌کنند و به‌طور یکنواخت آن طرف از عدسی را که رو به بوته است، پوشش می‌دهند.

در اینجا پرسش جالبی مطرح می‌شود: تصور کنید که عدسی شیشه‌ای با یک پوشش نابازتابنده که ضخامت آن برای نور سبز به طول موج 5500 \AA در خلأ برابر $\frac{1}{4}\lambda_2$ است پوشیده شده باشد. در این صورت بازتاب نور سبز صفر است. شدت نور بازتابیده برای سایر رنگها چقدر است؟ به مسئله ۲۱-۵ مراجعه کنید.

قسمت باریک‌شده. یکی از نکات احتمالاً مشکل‌ساز لایه غیر بازتابنده با مربع طول موج، این است که این لایه فقط در بعضی طول موجها خوب کار می‌کند. اگر به اندازه کافی فضا در دسترس باشد، به مراتب بهتر از آن می‌توانیم عمل کنیم. تصور کنید L در مقایسه با هر طول موجی که بدون بازتاب بخواهیم عبور دهیم بزرگتر باشد. فرض کنید که امیدانس در فاصله L به تدریج تغییر می‌کند. در هر ربع طول موج مفروض، امیدانس بسیار کم تغییر می‌کند. برای سادگی فرض می‌کنیم که امیدانس به صورت پله‌ای اضافه می‌شود؛ بعد از هر فاصله $\lambda/4$ یک پله جدید وجود دارد، و λ هم مقداری در گستره طول موجهایی که می‌خواهیم عبور دهیم اختیار می‌کنیم. اگر دامنه بازتابیده از یک پله کوچک در محل z با دامنه بازتابیده از پله کوچک بعدی که در فاصله $\Delta z = \frac{1}{4}\lambda$ قرار دارد، حذف شود، از مزاحمت تمام امواج بازتابیده راحت خواهیم شد. (از بازتابهای چندگانه صرف‌نظر می‌کنیم.) بازتاب در یک پله کوچک که در آن امیدانس از Z_1 به $Z_2 = Z_1 + \Delta Z$ تغییر می‌کند، با ضریب بازتاب بینهایت کوچک ΔR داده می‌شود که در آن

$$\Delta R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \approx \frac{-\Delta Z}{2Z} \approx \frac{-1}{2Z} \left[\frac{dZ(z)}{dz} \right] \left(\frac{1}{4}\lambda \right) \quad (51)$$

اگر بازتاب حاصل از یک پله کوچک با بازتاب حاصل از پله بعدی یک ربع طول موج آن طرفتر، حذف شود، ΔR باید ثابت و مستقل از z باشد. این ثابت را α می‌نامیم. بنابراین با قراردادن در معادله (۵۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{dZ}{Z} = -\frac{\lambda\alpha}{\lambda} dz \quad (52)$$

مثال ۱۰: بوق نمایی

به آسانی می‌توانید نشان دهید که اگر λ را ثابت و مستقل از z بگیریم مثلاً همان‌گونه که برای امواج صوتی در هوا در لوله‌ای که امیدانس آن به سبب تغییر قطر لوله تغییر می‌کند وجود دارد، در این صورت با انتگرال‌گیری از معادله (۵۲) یک بستگی نمایی Z با فاصله به دست می‌آید.

یک بوق نمایی که جورکننده امیدانس است معمولاً در بلندگوهای دستگاه‌های استریو به کار می‌رود به‌گونه‌ای که پیستون در حال ارتعاش به مساحت A_1 می‌تواند انرژی صوتی را بدون بازتاب به اتاق منتقل کند. در این صورت امیدانس وارد شده به سازوکاری که A_1 را تحریک می‌کند به‌گونه‌ای می‌تواند اختیار شود که با ویژگی‌های آن سازوکار مطابقت داشته باشد. اگر در عوض A_1 مساحت لوله استوانه‌ای بود که به وسیله سازوکار محرک بلندگو از یک انتها تحریک می‌شد، و اگر لوله بدون گشادشدن به‌طور ناگهانی به داخل اتاق منتهی می‌شد، در این صورت لوله به‌ازای هر طول موجی که برای آن انتهای باز، و انتهای واداشته ضد‌گره‌های سرعت می‌بودند، تشدید حاصل می‌شد. و این، موسیقی را خراب می‌کرد.

مثال ۱۱: ضریب شکست باریک‌شده

به همین ترتیب، جورکردن نوری امیدانس را به وسیله روش کم‌کم کاسته‌شدن ضریب شکست می‌توان انجام داد و این کار با پوشش دادن جزء نوری موردنظر با لایه‌های نازک متوالی از مخلوط متغیری از مواد که ضریب شکست آنها در گستره از n_1 تا n_2 قرار دارد، انجام می‌شود. بنابراین ضریب شکست را می‌توان به‌گونه‌ای تغییر داد که به تدریج از n_1 تا n_2 تغییر کند. این راه نسبت به پوشش با تک‌لایه نابازتابنده، روش بهتری است اما از نظر تکنیکی مشکلتر است. در این حالت بستگی z موردنظر به‌طور نمایی نیست. پس چگونه است؟ (مسئله ۵-۲۲)

۵-۵ بازتاب در لایه‌های نازک

فریزهای تداخل. هر جعبه شامل یک دوجین تیغه‌های میکروسکوپ معمولاً نمونه‌هایی دارد از دو تیغه که خیلی نزدیک به یکدیگر چسبیده‌اند و به طرز زیبایی "فریزهای تداخل" رنگی را نمایش

می‌دهند. به همین ترتیب، یک قطره روغن سبک ماشین که روی یک سطح داغ قرار داده شود پخش می‌شود و هنگامی که به اندازه کافی نازک شود، از همان نوع فریزهای تداخل رنگی نمایش خواهد داد. تصور کنید که مثلاً یک لایه نازک از هوا بین دو تیغه میکروسکوپ قرار دارد. البته در جایی که سطوح شیشه لایه هوا به ضخامت صفر را لمس می‌کنند، هیچ بازتابی وجود ندارد. "دلیل" آن را می‌توان چنین بیان کرد که چون $R_{21} = -R_{12}$ است، بازتاب از سطح اول با بازتاب از سطح دوم علامت مخالف دارد و بنابراین به وسیله "رفت و برگشت" در فاصله صفر هیچ تغییر فازی وارد نمی‌شود و دو مؤلفه یکدیگر را خنثی می‌کنند. (اگر چنین نمی‌شد تناقضی وجود داشت و تمام نظریه نور فرو می‌ریخت!) اکنون اگر فاصله از صفر تا $\frac{1}{4}\lambda$ افزوده شود، در این صورت فاصله "رفت و برگشت" برابر λ می‌شود. از این رو فاز نسبی دو مؤلفه به اندازه 2π اضافه می‌شود و بازهم بازتاب خالص برابر صفر است. درست بین این دو صفر متوالی بازتابیدگی، بازتاب خالص صفر است. بنابراین برای یک رنگ مفروض، بیشینه‌های بازتاب هنگامی روی می‌دهد که ضخامت برابر $\frac{1}{4}\lambda$ ، $\frac{3}{4}\lambda$ ، $\frac{5}{4}\lambda$ و ... باشد.

مثال ۱۲: چرا اولین فریز سفید است

دو تیغه تمیز میکروسکوپ اختیار کنید. با همزمان فشار دادن تیغه‌ها به یکدیگر و لغزاندن آنها یکی بر روی دیگری، می‌توانید تیغه‌ها را با تماس خیلی نزدیک به یکدیگر بچسبانید. (خیلی زیاد فشار ندهید — شیشه می‌شکند!) زوج تیغه‌ها را به گونه‌ای نگاه دارید که بتوانید بازتاب یک چشمه گسترده نور مثل آسمان یا لامپ‌التهابی با جدار شیشه‌ای مات را ببینید. یک پارچه یا چیز سیاهی در زیر تیغه‌ها بگذارید به طوری که نور زمینه کاهش پیدا کند. اکنون باید "منحنیهای" هم‌مرکز شامل فریزهای رنگی را ببینید. مرکز طرح "سیاه" است. این محل ناحیه‌ای بین ضخامت صفر و اولین بیشینه نور بازتابیده است. اولین "فریز" (یعنی بیشینه نور آسمان یا نور چراغ بازتابیده) عملاً به رنگ "سفید" است. حال ببینیم چرا چنین است. رنگ سبز در مرکز طیف مرئی است و مربوط به طول موج $5500 \text{ \AA} = 5.5 \times 10^{-5} \text{ cm}$ است. بنابراین در مرکز اولین فریز سبز، ضخامت لایه هوا بین تیغه‌ها در حدود $1.37 \times 10^{-5} \text{ cm} = \frac{1}{4}(5.5) \times 10^{-5}$ است. طول موج نور آبی $4500 \text{ \AA} = 4.5 \times 10^{-5} \text{ cm}$ است و بنابراین همین ضخامت برای λ نور آبی برابر است با $0.30\lambda = (1.37/4.5)\lambda$. به همین ترتیب برای نور قرمز، $(1.37/6.5)\lambda = 0.21\lambda$ است. از این رو در اولین فریز سبز، نور آبی و قرمز نیز در نزدیکی بیشینه بازتابیدگی خود (مربوط به $\frac{1}{4}\lambda$) است. به این دلیل اولین فریز سفید است. ■

زیباترین فریز. فریزهای متوالی بیشتر و بیشتر رنگ نشان می‌دهند. تقریباً تک‌ماترین فریز باید فریزی باشد که به ازای آن ضخامت با نور سبز، عدد فرد N از ربع طول موج $(N/4, \dots, 5/4, 3/4)$

و برای نور آبی در حدود $N + 1$ ربع طول موج و برای نور قرمز در حدود $N - 1$ ربع طول موج باشد. در این صورت نورهای آبی و قرمز در کمینه‌های بازتاب هستند و در این صورت فریز تا آنجا که امکان دارد سبزرنگ است. بنابراین عدد N برای زیباترین فریز یک ثابت طبیعت است که بد نیست آن را بدانیم. (به مسئله ۲۳-۵ مراجعه کنید.)

رابطه برای شدت فریز. برای شدت یک رنگ مفروض بازتابیده از یک لایه هوا بین دو تیغه شیشه (یا برای یک قطعه شیشه نازک در هوا)، می‌توانیم با به‌کار بستن نتایج قبلی در مورد بازتاب از دو ناپوستگی که محیطهای ۱، ۲، ۳ را جدا می‌کنند، رابطه‌ای به‌دست آوریم. در مثال حاضر، محیط ۳ از همان نوع محیط ۱ است. بنابراین $R_{۲۳} = R_{۲۱} = -R_{۱۲}$ است. بنابراین می‌توانید نشان دهید که متوسط زمانی شدت نسبی بازتابیده به‌صورت زیر داده می‌شود. (مسئله ۲۴-۵)

$$\frac{I_{\text{بازتاب}}}{I_0} = R_{۱۲}^2 \sin^2 k_2 L \quad (۵۳)$$

برای شیشه به هوا یا هوا به شیشه $\theta = 0^\circ$ است. بنابراین داریم

$$\frac{I_{\text{بازتاب}}}{I_0} \approx 0.16 \sin^2 k_2 L \quad (۵۴)$$

که به‌ازای $L = 0$ و $L = \frac{1}{4}\lambda_2$ صفر می‌شود و به‌ازای $L = \frac{1}{2}\lambda_2$ به اولین بیشینه خود می‌رسد. توجه کنید که بیشینه شدت نسبی بازتابیده‌شده از لایه هوا برابر 0.16 است که چهار برابر شدت نسبی است که از یک فصل مشترک هوا-شیشه بازتابیده می‌شود.

یک بعلاوه یک برابر چهار است؟ چگونه می‌توانیم شدت حاصل از یک سطح را با شدت مساوی از سطح دیگر جمع کنیم و شدت کلی چهار برابر به‌دست آوریم؟ با همان روش که می‌توانیم آنها را به یکدیگر اضافه کنیم و صفر به‌دست آوریم: $(1+1)^2 = 4$ ؛ $(1-1)^2 = 0$. برای به‌دست آوردن شدت، ابتدا امواج را برهم نهد، سپس مجذور کنید و متوسط زمانی بگیرید.

توجه کنید که اگر به‌دنبال فریزهای رنگی حاصل از لایه هوا بین دو تیغه میکروسکوپ هستید، بیشینه‌های رنگی دارای شدت نسبی 0.16 هستند. شدت نسبی حاصل از نور زمینه از سطح بیرونی تیغه بالایی و پایینی برابر 0.4 است [تداخل حاصل از سطوح بالا و پایین دو تیغه قابل توجه نیست زیرا این تداخل چنان مرتبه بالایی دارد (یعنی تداخل با تعداد بسیاری از ربع طول موجها انجام می‌شود) که رنگها کاملاً یکدیگر را می‌پوشانند]. از این رو، شدت فریزهای رنگی دو برابر نور زمینه است و به‌آسانی دیده می‌شوند (به‌ویژه اگر پارچه سیاهی در زیر تیغه‌ها بگذارید به‌طوری که هیچ‌گونه زمینه اضافی وجود نداشته باشد).

مثال ۱۳: فریزهای فابری - پرو در یک تیغه میکروسکوپ

اگر یک چشمه نور به اندازه کافی تکفام به کار ببرید، به آسانی می‌توانید فریزهای تداخل در نتیجه برهم‌نهی دامنه‌های نور بازتابیده شده از دو سطح یک تیغه میکروسکوپ معمولی یا یک شیشه پنجره را ببینید. شرح کامل این فریزها مستلزم محاسبه ضریب بازتاب برای تابش عمودی، و همچنین تابش غیرعمودی، است. این کار به آسانی انجام پذیر است اما آن را در اینجا انجام نخواهیم داد. ما در اینجا فقط فریز مرکزی را در نظر خواهیم گرفت، یعنی فریزی که مربوط به تابش عمودی است، و این پرسش را مطرح می‌کنیم "چشمه نور تا چه اندازه باید تکفام باشد؟" پاسخ را می‌توان از معادله (۵۳) به دست آورد. فرض کنید $L = 1\text{mm} = 0.1\text{cm}$ باشد. اگر تنها یک عدد موج k_{\perp} موجود باشد، در این صورت بسته به آنکه $\sin^2 k_{\perp} L$ برابر 10° یا 0° باشد، این فریز مرکزی یک بیشینه یا یک کمینه است. اگر یک نوار اعداد موج Δk_{\perp} موجود باشد، در این صورت اگر نوار خیلی وسیع باشد، برخی از اعداد موج مربوط به یک بیشینه و بعضی مربوط به یک کمینه خواهد شد و فریز "پاک" خواهد شد. برای به دست آوردن یک فریز مرکزی مرئی خوب نوار تا چه اندازه باید باریک باشد؟ (می‌توانیم فرض کنیم که اگر فریز مرکزی وجود داشت فریزهای مربوط به تابش غیرعمودی نیز به آسانی مرئی بودند). بیشینه‌های متوالی معادله (۵۴) با افزایش $k_{\perp} L$ به اندازه π از یکدیگر جدا شده‌اند. به عنوان یک معیار تقریبی، می‌توانیم بگوییم که اگر $(\Delta k_{\perp})L$ کمتر از π باشد، فریزهای خوبی باید به دست آوریم. می‌توانید نشان دهید (مسئله ۵-۲۵) که پهنای نوار مورد نیاز برابر است با

$$\Delta(\lambda^{-1}) \approx 3.3\text{cm}^{-1} \quad (55)$$

یعنی

$$\Delta\nu = c \Delta(\lambda^{-1}) \approx 10^{11}\text{Hz}$$

یعنی، اگر (برای نور سبز) $\lambda \approx 5000 \times 10^{-5}\text{cm}$ بگیریم،

$$\Delta\lambda \approx 10^{-6}\text{\AA}$$

از این رو پهنای نوار نور مورد نیاز باید کمتر از 3.3 معکوس سانتیمتر (واحدی که معمولاً در طیف‌نمایی به کار می‌رود) باشد. همان‌گونه که در فصل ۶ خواهیم آموخت پهنای نوار $\Delta\nu \approx 10^{11}\text{Hz}$ تقریباً "پهنای خط طبیعی" اتمی است که به طور آزاد در حال فروافت است. سخت بتوان از این بهتر عمل کرد (مگر با یک لیزر). بنابراین برای دیدن فریزهای تداخل در شیشه پنجره از یک چشمه

خوب نور حاصل از اتمهای به طور آزاد در حال فروافت می‌توانیم استفاده کنیم. برای این منظور یک چراغ نئون کاملاً مناسب است. (به آزمایش خانگی ۵-۱۰ مراجعه کنید). یک حلقه کاغذ توالت در حال سوختن نیز همین کار را می‌کند! (به آزمایش خانگی ۹-۲۷ مراجعه کنید). ■

مسائل و آزمایشهای خانگی

۱-۵° بازتاب از شیشه. یک قطعه شیشه تخت حدود ۸٪ از شدت نور فرودی برای فرود عمود، را از هر صفحه ۴٪ باز می‌تاباند. یک آینه نقره‌ای معمولی بیشتر از ۹۰٪ از نور مرئی را باز می‌تاباند. یک آینه و یک قطعه شیشه تمیز (مثلاً تیغه میکروسکوپ) را بردارید. بازتاب آن از آینه و تیغه را با دو قسمت به هم نزدیک شده مقایسه کنید، بنابراین می‌توانید فوراً هر دو بازتاب را ببینید. به بازتاب یک چشمه نور گسترده مانند لامپ التهابی، یا یک قطعه کاغذ سفید یا قسمتی از آسمان نگاه کنید. بازتابش تیغه و آینه را در فرود نزدیک به عمود مقایسه کنید. حال همین کار را در فرود نزدیک به مایل انجام دهید. در فرود نزدیک به مایل، چشمه، بازتاب آینه و بازتاب تیغه غیرقابل تشخیص‌اند یعنی تقریباً ۱۰٪ بازتاب را در فرود مایل نزدیک دارید. در فرود نزدیک به عمود شیشه به طوری قابل توجهی تیره‌تر از آینه است.

بعد چهار تیغه میکروسکوپ تمیز را بردارید. آنها را به شکل سری "پله‌ای" روی هم قرار دهید. یک تیغه اول "زمین"، تیغه دوم "پله" اول و دو تیغه باقیمانده دومین "پله" با ارتفاع دو برابر باشد. بنابراین می‌توانید در یک زمان بازتاب در فرود نزدیک به عمود را از یک تیغه، دو تیغه و چهار تیغه مقایسه کنید. به یک چشمه گسترده (مثلاً آسمان) که در فرود نزدیک به عمود باز می‌تابد نگاه کنید. از پیچیدگی بازتابهای داخلی چشمپوشی کنید، باید حدود ۹۲٪ از هر تیغه عبور کند. بنابراین چهار تیغه باید $۰.۷۲ = (۰.۹۲)^۴$ را عبور دهد و $۰.۲۸ \approx (۰.۹۲)^۴ - ۱$ را بازتاباند.

حال با ۱۲ تیغه تمیز یک قرص درست کنید؛ آنها باید $۰.۶۴ = (۰.۹۲)^۲ - ۱$ از نور را بازتابانند. با آینه مقایسه کنید. فرض کنید فرمول را هنوز می‌توان به‌کار برد (و تیغه‌ها تمیز هستند). چند تیغه برابر یک آینه خوب است اگر آینه ۹۳٪ از شدت را بازتاباند؟ امتحان کنید—کپه‌ای از تیغه‌ها را با فرود نزدیک به عمود مقایسه کنید. همچنین مستقیماً از داخل کپه به چشمه نگاه کنید تا نور عبوری را ببینید. (برطبق فرمول ۳۲ تیغه لازم است. احتیاجی به گفتن نیست که آنها باید از اثر انگشت پاک باشند.) (سه دوجین تیغه برای این آزمایش کافی است.)

۲-۵° تداخل در لایه نازک. (بخش ۵-۵ را ببینید.) یک ظرف را با آب داغ پر کنید. یک قطره روغن سبک نافذ روی آب بریزید و پخش شدن آن را نگاه کنید. (از روغن سبک استفاده کنید. مثلاً روغن سالاد بسیار سنگین است— و پخش نمی‌شود.) به آسمان (یا چشمه گسترده دیگر نور) که

در لایهٔ روغنی منعکس می‌شود در حالی که لایهٔ روغنی پخش می‌شود نگاه کنید. (یک دستمال یا کاغذ سیاه در ته ظرف با ایجاد زمینهٔ سیاه و حذف بازتابهای نامطلوب از ته ظرف به این کار کمک می‌کند.) توجه کنید که تا وقتی لایه در $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ یا همین حدود پخش شود هیچ فریز رنگی ظاهر نمی‌شود. چرا چنین است؟ فریزهای رنگی را همچنان که لایه به پخش شدن ادامه می‌دهد نگاه کنید. وقتی به اندازهٔ کافی نازک شود هیچ فریز بیشتری نخواهید داشت؛ و جایی که روغن نازکترین باشد "سیاه" خواهد بود. این ناحیه‌ای است که لایه به اندازهٔ کمتر از یک چهارم طول موج ضخامت داشته باشد. از این موضوع استفاده کنید تا طول موج نور مرئی را دقیقاً تخمین بزنید. ناحیهٔ "سیاه" را (برای تخمین دقیق) در حدود $1/8$ ضخامت طول موج بگیرید؛ مساحت لایه را تخمین بزنید و از آن و اندازهٔ اصلی قطره استفاده کنید تا ضخامت لایه را پیدا کنید که آنگاه طول موج را می‌دهد.

$5^\circ-3$ امواج ساکن گذرا روی فنر اسلینکی. سر یک فنر اسلینکی را به تیر چراغ یا چیزی شبیه آن وصل کنید. سر دیگر آن را بگیرید. فنر اسلینکی را تا 3 ft یا در همین حدود بکشید. انتهای اسلینکی را حدود ۳ یا ۴ دور با سرعت هر چه تمامتر تکان دهید. بنابراین یک "بسته‌موج" در پایین اسلینکی منتشر می‌شود. بعد از اینکه به اندازهٔ کافی از جلو و عقب رفتن لذت بردید کار جدیدی را امتحان کنید: این بار توجه خود را روی ناحیهٔ نزدیک انتهای ثابت شدهٔ اسلینکی متمرکز کنید. وقتی بسته‌موج می‌آید، باز می‌تابد و برمی‌گردد، شما باید امواج ساکن گذرا را در طول بازهٔ زمانی که در آن بسته‌موج فرودی و بازتابیده همپوشی می‌کنند ببینید. (این کار ممکن است به ثابت شدن دو انتهای اسلینکی کمک کند به طوری که بتوانید فرایند را در ناحیهٔ نزدیک انتهای اسلینکی ببینید؟ این کار شما را قانع می‌کند که موج ساکن همیشه به صورت برهم‌نهی دو موج پیشرونده در خلاف جهت یکدیگر در نظر گرفته می‌شوند.

$5^\circ-4$ بازتاب داخلی چندباره در یک تیغهٔ میکروسکوپ. طرح کلی بکشید که نشان دهد پرتوی از طرف چپ می‌آید و به تیغهٔ شیشه‌ای که زاویه‌ای دارد برخورد می‌کند. اولین پرتو عبوری، دومین (یعنی عبور بعد از دو بازتاب داخلی)، سومین و ... را نشان دهید. حال از یک چشمه خطی یا نقطه‌ای به تیغهٔ میکروسکوپ نگاه کنید. تیغه را نزدیک چشمستان بگیرید. از فرود عمودی شروع کنید و کم‌کم تیغه را کج کنید. دنبال "چشمهٔ مجازی" مربوط به بازتاب چندباره بگردید. (اثر آن در فرود تقریباً مایل بیشتر است.) همچنین دنبال نوری که ظاهر می‌شود بگردید، نه به وسیلهٔ انتقال خارج سطح تیغه بلکه از انتهای آن. این نور "به دام افتادهٔ داخلی" است که بالاخره وقتی به انتهای سطح در فرود نزدیک به عمود می‌رسد فرار می‌کند تا در فرود تقریباً مایل که لبه‌های تیغه به حساب می‌آیند.

۵-۵ بازتابها در خطوط انتقال نیرو. فرض کنید یک خط انتقال نیروی کابلی با امیدانس مشخصه $50\ \Omega$ به یک خط انتقال نیرو با امیدانس مشخصه $100\ \Omega$ وصل می‌شود.

(الف) یک تپ ولتاژ 10V + ولتی (مقدار بیشینه) از خط $50\ \Omega$ به خط $100\ \Omega$ فرود می‌آید. "ارتقاع" (برحسب ولت، شامل علامت) تپ بازتاب چقدر است؟ ارتقاع تپ عبوری چقدر است؟
 (ب) یک تپ $10\ \text{V}$ ولتی از خط $100\ \Omega$ به خط $50\ \Omega$ فرود می‌آید. ارتقاعهای تپ عبوری و بازتابی چقدرند؟

۶-۵ جورکردن امیدانس برگشت‌ناپذیر. خطوط انتقال نیروی مسئله ۵-۵ را در نظر بگیرید.

(الف) چطور می‌توانید یک مقاومت معمولی را وارد کنید به طوری که تپ فرودی پیشرونده از خط $50\ \Omega$ به $100\ \Omega$ بدون تولید تپ بازتابی منتقل شود؟ می‌خواهیم بدانیم مقاومت چند اهم است و یک طرح کلی می‌خواهیم که رسانای مرکزی و رسانای خارجی هر یک از خطوط را در محلی که به هم وصل می‌شوند نشان دهد و نشان دهد که مقاومت متصل شده است. (در مورد "توزیع" مقاومت نگران نباشید. اگر طول موجها در مقایسه با قطر کابل بلند باشد لازم نیست که مقاومت توزیع شود.)

(ب) اندازه تپ عبوری چقدر است؟ (فرض کنید تپ $10\ \text{V}$ ولتی فرود آید.)

(ج) حال فرض کنید تپ $10\ \text{V}$ ولتی در این خط در جهت "غلط" به طرف پایین فرستاده شود، یعنی از $100\ \Omega$ به $50\ \Omega$ پایین آید. چه اتفاقی می‌افتد؟ ارتقاعهای تپ عبوری و بازتابی را پیدا کنید؟

(د) بعد مسئله عبور تپ از خط $100\ \Omega$ به خط $50\ \Omega$ را بدون تولید بازتاب در نظر بگیرید. مقاومت چقدر باید باشد و چطور به محلی متصل می‌شود که خطوط به هم متصل‌اند؟ ارتقاع تپ عبوری چقدر است اگر $10\ \text{V}$ ولت فرود آید؟ حال اگر یک تپ $10\ \text{V}$ ولتی از خط $50\ \Omega$ به خط $100\ \Omega$ فرود آید، یعنی در جهت "عکس" چه اتفاقی می‌افتد؟

۷-۵ نوری با طول موج $\lambda = 5000\ \text{\AA}$ به‌طور عمود بر دو قرص پلاستیکی شفاف که به صورت سری‌اند و با فاصله زیاد قابل مقایسه با طول موج از هم جدا شده‌اند فرود می‌آید. اگر ضریب شکست قرصها $n = 1.5$ باشد چه کسری از نور عبور می‌کند؟ از جذب، بازتابهای چندباره داخلی، و اثرهای تداخل صرف نظر کنید.

جواب: $I_t/I_i = 0.85$

۸-۵ ضریبهای بازتاب دامنه و شدت نوری که عمود بر سطح آب صاف (با ضریب شکست $n = 1.33$) فرود می‌آید را برای دو مورد فرود از هوا به آب و از آب به هوا مقایسه کنید.

۹-۵ بازتابها در لایه نازک هوا. فرض کنید دو قطعه شیشه به طور ایتیکی تخت دارید که در یک لبه به هم وصل اند و در لبه دیگر به اندازه یک ورقه کاغذ فاصله دارند، که فاصله از لبه‌ای که به هم وصل اند L است. فرض کنید ورق کاغذ ضخامتی به اندازه ضخامت ورق این کتاب دارد. (چطور می‌توانید آن را بدون میکروسنج اندازه‌گیری کنید؟) فرض کنید فریزهای متوالی از نور سبز را می‌خواهید که 1mm از هم فاصله دارند به طوری که بتوانید آنها را به آسانی ببینید. طول L "گوه" هوا چقدر باید باشد؟

۵-۱۰ فریزهای فابری-پرو در جام پنجره. برای این آزمایش به یک چشمه نور تقریباً تکفام و گسترده احتیاج دارید - بهترین چشمه ارزان لامپ $\text{Ne-}\text{4}^\circ$ است. این لامپ از یک قرص دایره‌ای نئون سرخ‌شده به قطر حدود 2.5cm تشکیل شده است. (هر لامپ نئون به همین خوبی کار می‌کند، مثلاً یک "مدار امتحانگر پیوسته" در بیشتر مغازه‌هایی که سخت‌افزار می‌فروشند به دست می‌آید.) لامپ را روشن کنید و با توری پرآش به آن نگاه کنید (توری را بالا نزدیک چشمتان بگیرید). می‌توانید (در اولین مرتبه طیف، که در حدود 15° یا 20° درجه نور نارنجی مرکزی اتفاق می‌افتد) به وضوح حداقل سه چشمه مجازی را تعریف کنید. روشنترین این سه تا زرد، نارنجی، و قرمز است. (واقعاً حدود دوازده "خط" روشن در زرد، نارنجی و قرمز وجود دارد.) این حقیقت که چشمه نور مجازی به وضوح تعریف می‌شود و لکه دار نمی‌شود نشان می‌دهد که هر رنگ مجزا یک چشمه تکفام نور است (در حد تفکیک شما). هر کدام مربوط به گذاراتمی اتمهای برانگیخته نئون است. آزمایش چنین است: یک قطعه شیشه را بردارید. تیغه میکروسکوپ یا قطعه‌ای از شیشه پنجره یا جام پنجره اتاقتان مناسب است. لامپ نئون را نزدیک بینی‌تان بگیرید، از بالای لامپ نشانه بگیرید و به بازتاب لامپ در قطعه شیشه نگاه کنید. اگر دو بازتاب دیدید، یک قطعه شیشه دیگر بردارید. (جام پنجره بعد از چند سال که از شارش آهسته چسبندگی شیشه می‌گذرد گوه می‌شود.) دنبال فریزها بگردید یعنی "خطوط رنگی" محیطهای تاریک و روشن متناوب در تصویر لامپ. بعد از چند دقیقه جستجو آنها را خواهید دید. یک بار که آنها را پیدا کردید دیگر برای دیدن آسان‌اند. (شیشه باید تقریباً دو فوت از شما فاصله داشته باشد.) آنها مربوط به تداخل بین سطوح جلو و عقب شیشه‌اند. برای اثبات این موضوع یک نور شفاف را روی یک سطح بچسبانید و ابتدا شیشه را با این سطح نزدیک خودتان بگیرید و بعد دورتر از خودتان بگیرید. وقتی نور در ناحیه تصویر بازتابی است دنبال فریزها در تصویر بگردید. قسمت چسب دار نوار "از نظر ایتیکی ناصاف" است یعنی نامنظمی‌هایی کوچکتر از طول موج نور و ریزتر در مقیاس عرضی از فاصله فریزها وجود دارد. در بعضی نواحی ریز، نور از شیشه به طرف نوار بدون بازتاب می‌رود (ضریب شکست نوار نزدیک ضریب شکست شیشه است) و باز نمی‌تابد تا به سطح خارجی صاف نوار برسد. در نواحی ریز دیگر، سطح چسبناک

به شیشه برخورد ندارد و بازتاب در سطح مایل شیشه به هوا رخ می‌دهد (هوای بین شیشه و قسمت چسبناک نوار). حال می‌توانید از شکل فریزها به‌عنوان راهی برای پیدا کردن اینکه آیا یک تیغه پلاستیکی یا شیشه‌ای یا سلفونی در مقیاس عرضی مرتبه پهنای فریز "به‌طور اپتیکی صاف" است یا نه استفاده کنید؟ نوار شفاف مارک اسکاتلندی این‌طور نیست اما شیشه هست. قطعه‌های پولاروید و صفحه‌های نیم‌موج و ربع‌موج از جعبه وسایل اپتیکی خود را امتحان کنید. آیا آنهایی که کمتر از یک طول موج‌اند صاف‌اند؟ از یک صافی ژلاتینی قرمز استفاده کنید. آیا از نظر اپتیکی صاف است؟ (شاید پیدا کردن یک لکه تخت برای به‌دست آوردن تصویر بازتابی کم مشکل باشد). یک لامپ التهابی معمولی هم برای این آزمایش خوب است، البته نه به خوبی یک لامپ نئون، شاید به‌خاطر اینکه به‌سرعت قابل دسترس است. (مشهورترین "خط سبز جیوه" تقریباً نور تکفام است که فریزها را به‌وجود می‌آورد).

اکنون آزمایشی را می‌گوییم که با لامپ نئون انجام می‌شود (با لامپ التهابی انجام نشده است). به فریزهای نئون از داخل یک قطعه پولاروید نگاه کنید. یک قطعه پولاروید را جلوی چشمهای خودتان (یا عینکهای آفتابی پولاروید) بگیرید. هر دو جهت هدف پولاروید را امتحان کنید. حال پولاروید را به یک طرف برگردانید و آزمایش را تکرار کنید. بنابراین چهار جهت وجود دارد: محورهای پولاروید موازی و عمودند و پولاروید به یک طرف برمی‌گردد. به اندازه‌های فریزها توجه کنید. (فریزهای بهتر به معنی فیلم نازکتر است). پولاروید شامل ساندویچی از سه لایه است با دو لایه شفاف بیرونی ("نان") و لایه مرکزی جذب "ژامبون". حال این سؤال پیش می‌آید: آیا دو طرف "ژامبون" از نظر اپتیکی صاف است؟

آزمایش (یا نمایش) جالب دیگری را با فریزهای نئون فابری-پرو انجام می‌دهیم. شب، بدون هیچ نوری، صورت خود را با یک لامپ نئون روشن کنید. به تصویر خود در یک قطعه شیشه که به فاصله یک فوت یا دو فوت قرار دارد نگاه کنید. صورت شما اکنون یک "چشمه تکفام گسترده" نور است. دنبال فریزهای دایره‌ای هم‌مرکز که در وسط تصویر هر چشم قرار دارد بگردید. (فریزها فقط دایره‌اند اگر شیشه به‌طور مناسب تخت باشد). این اثر بسیار وحشتناک است.

۱۱-۵° استروبوکوپ نئون. اگر شما یک لامپ نئون $Ne-40$ که در آزمایش خانگی ۵-۱۰ توصیف شد داشته باشید می‌توانید با آن آزمایشهای جالب دیگری انجام دهید. لامپ را به فاصله یک فوت از چشم خود بگیرید، و در جهتی نگاه کنید که خط دیدتان زاویه 45° با خط چشمتان تا لامپ داشته باشد. به جرقه‌ای که روشن خاموش می‌شود توجه کنید. حال مستقیماً به لامپ نگاه کنید. جرقه ناپدید می‌شود. ظاهراً، این تحول تصویر جنبی ما را گسترش می‌دهد، به‌طوری که به تغییرات بسیار سریع شدت نور حساس می‌شود، که به‌نظر عاقلانه می‌آید. (شما می‌توانید این کار را

با تصویر تلویزیون امتحان کنید. نگاه مستقیم را با نگاه جنبی مقایسه کنید. هر صفحه Ne_{40} ، 60° دور در ثانیه خاموش و روشن می‌شود. اما 180° خارج از فاز هستند! وقتی یکی روشن است، دیگری خاموش است. بنابراین شما می‌توانید از این لامپ به‌عنوان استروبوسکوپ 60 cps یا 120 cps استفاده کنید، بستگی به این دارد که چطور از آن برای روشن کردن یک جسم استفاده کنید. می‌توانید ثابت کنید که دو صفحه خارج از فازند. لامپ را به طرف لامپی که خیلی سنگین نیست بچرخانید به طوری که بتوانید به‌آسانی آن را تکان دهید. لامپ را بچرخانید به طوری که دو صفحه از پهلو دیده شوند. حال لامپ را شدیداً از پهلو 4 دور در ثانیه (اگر می‌توانید تندتر) با دامنه‌ای به بزرگی که می‌توانید (مثلاً 10° یا 20 cm) تکان دهید. به خط نارنجی که صفحه می‌سازد نگاه کنید. آیا با هم اتفاق می‌افتند یا یکی یکی؟ شما می‌توانید همچنین این روش تکان دادن را به‌علاوه دید معمولی به‌کار ببرید و بسامد را تخمین بزنید. فرض کنید حرکت سینوسی است. بسامد و دامنه لازم برای به‌وجود آوردن دو خط قرمز که شبیه یک "موج مربعی متناوب" است را اندازه‌گیری کنید. از آنجایی که می‌دانید بسامد نور باید با 60 cps ضربدر عددی صحیح مرتبط باشد، می‌توانید به‌آسانی بسامد استروبوسکوپ را با اندازه‌گیری دقیق تعیین کنید.

توجه: به جای تکان دادن لامپ، آسانتر است که به بازتاب لامپ در آینه نگاه کنید و آینه را تکان دهید. به‌آسانی می‌توانید با این روش یک "موج مربعی متناوب" با لامپ نئون بسازید. همین روش برای امتحان ساختار زمانی درخشندگی لامپ تلویزیون به‌کار می‌رود. تلویزیون را طوری بپوشانید که فقط یک نوار عمودی دیده شود، آینه را در جهت محور عمودی تکان دهید. موج "دندان‌اره‌ای" که خواهید دید نشان می‌دهد که بعضی قسمتهای لامپ تلویزیون در هیچ لحظه‌ای نور ندارند. بنابراین برای داشتن یک استروبوسکوپ تلویزیونی باید از شیار افقی استفاده کنید.

۱۲-۵ پیوستگی موج در مرز. دیدیم که برای نور فرودی (یا تابش الکترومغناطیسی دیگر) از محیط ۱ به محیط ۲، تراوایی مغناطیسی محیط واحد است (یا درگسستگی تغییر نمی‌کند) و به شرط اینکه "هندسه" ثابت باشد (خط انتقال نیروی صفحه موازی شکلی با سطح مقطع ثابت یا تیغه جسمی در فضای آزاد)، آنگاه بازتاب و ضریب انتقال برای میدان الکتریکی E_x و میدان مغناطیسی B_y با روابط زیر داده می‌شود

$$R_E = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad T_E = 1 + R_E = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

$$R_B = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}, \quad T_B = 1 + R_B = \frac{2k_2}{k_2 + k_1}$$

E_x که $k = n\omega/c$ و n ضریب شکست است. نشان دهید که بازتاب و ضریب انتقال برای

دلالت دارد بر اینکه E_x و $\partial E_x / \partial z$ هر دو در گسستگی پیوسته‌اند یعنی هر دو مقادیر لحظه‌ای یکسانی در طرف دیگر گسستگی دارند. [با میدان سمت چپ (محیط ۱) البته منظورمان برهم‌کنش امواج فرودی و بازتابی است.] به همین ترتیب نشان دهید که بازتاب و ضرایب انتقال برای میدان مغناطیسی B_y دلالت دارد بر اینکه B_y در مرز پیوسته است اما $\partial B_y / \partial z$ پیوسته نیست. نشان دهید که $\partial B_y / \partial z$ با ضریب $(n_2/n_1)^2 = (k_2/k_1)^2$ در عبور از محیط ۱ و به محیط ۲ افزایش می‌یابد. توجه به این مسئله مهم است که منظور میدان کل است نه فقط قسمتی که در جهت خاصی منتشر می‌شود.

۱۳-۵ نشان دهید که شرایط مرزی برای امواج در یک تار، چگالی جرمی ثابت تار است مانند تراوی مغناطیسی ثابت برای نور (در گسستگی) نشان دهید که افزایش در ثابت دی‌الکتریک نور در مرز شبیه یک کاهش در کشش تار است. نشان دهید که سرعت تار عرضی شبیه میدان مغناطیسی در موج نور عمل می‌کند، به این معنی که پیوسته است اما مشتق z آن با ضریب $(k_2/k_1)^2$ در عبور از محیط ۱ به محیط ۲ افزایش پیدا می‌کند. نشان دهید که کشش عرضی $\partial \psi / \partial z - T$ مانند میدان الکتریکی عمل می‌کند که هم خودش و هم مشتقات z اش در مرز پیوسته‌اند. (در تمام حالات به میدان کل اشاره داریم نه به مؤلفه‌ای که در جهت خاصی منتشر می‌شود.)

۱۴-۵ فرض کنید یک کابل هم‌محور که بین رساناهایش خلأ است و (مثلاً) امیدانس مشخصه آن 50Ω است داریم. حال فرض کنید یک انتهای این کابل زیر یک قطعه جالباسی که مقاومت 377Ω اهم بر مربع دارد فشرده شده است. بنابراین رساناهای داخلی و خارجی کابل به وسیله جالباسی به هم وصل شده‌اند. در یک انتهای دیگر این کابل، مقاومت DC بین رساناهای داخلی و خارجی را با استفاده از اهم‌سنج معمولی اندازه بگیرید. از مقاومت خود رساناها (قطعه کابل به اندازه‌ای که دوست دارید کوتاه است) چشمپوشی کنید. مقاومت کاملاً مربوط به پایانه جالباسی است. اهم‌سنج چه چیزی را نشان می‌دهد؟ (الف) حدس بزنید. (ب) ثابت کنید.

۱۵-۵ طول مؤثر لوله دو سر باز برای امواج ساکن. از یک لوله مقوایی دستمال کاغذی رولی یا کاغذ موم (یا یک لوله پستی) استفاده کنید. از یک دیپازون $3 \text{C}523 \text{r}3$ به‌عنوان گام استاندارد استفاده کنید. لوله دو سر باز را به سر خود بزنید و گوش کنید. قسمتی از لوله را ببرید (اگر لازم بود) به طوری که گام به‌طور جزئی تیز شود (یعنی گام بالاتر از $3 \text{C}523 \text{r}3$). آنگاه قسمت کوچکتر را وارد انتهای لوله بکنید تا مانند جزء تنظیم "شیپور" عمل کند. (مثلاً لوله مقوایی از دستمال کاغذی رولی را مورد استفاده قرار دهید، ابتدا از طول لوله ببرید و سپس کمی از آن را قطع کنید تا بتوانید یک لوله کوچکتر بسازید. بعد درز را با نوار طوری ببندید که هیچ هوایی از قسمت داخلی

لوله به طرف بیرون خارج نشود.) مدی که می‌شنوید پایتترین مد لوله دو سر باز است. لوله شامل یک نیم‌موج نوسان است. سرعت صوت 332 m/s است. بنابراین طول لوله به صورت زیر می‌شود

$$L = \frac{1v}{2\nu} = \frac{1}{2} \frac{332 \times 10^4}{5233} = 317\text{ cm}$$

به جای آن طول واقعی L را کمتر از 317 cm با حدود قطر لوله 6 cm پیدا خواهید کرد. این موضوع به عنوان "اثر انتها" در حدود 6 cm شعاع لوله در هر انتها دخالت می‌کند. برای چک کردن اینکه این یک اثر انتهایی است و نه مقدار غلط برای سرعت صوت، لوله‌های چاق و لاغر را امتحان کنید. $5-16$ تشدید در لوله‌های مقوایی. لوله آزمایش خانگی $5-15$ را بردارید. دیاپازون مرتعش را نزدیک یک انتهای لوله نگاه دارید. اگر کشیدگی "شیبوری" لوله برای بسامد 5233 Hz (cps) تنظیم شده باشد، یک صدای بلند زیبا خواهید شنید. وگرنه، کشیدگی را تغییر دهید و برای تشدید تنظیم کنید. پرسش: وقتی گام ارتعاش طبیعی لوله از آنی که متعلق به دیاپازون است تفاوت می‌کند، وقتی شما لوله را با دیاپازون تحریک می‌کنید کدام گام را می‌شنوید؟ (ابتدا جواب را با اطلاعاتی که از نوسانات تحریکی می‌دانید حدس بزنید و سپس امتحان کنید).

حال روشی برای به دست آوردن تشدید تیز می‌گوییم. لوله را عمود بگیرید و انتهای پایینی آن را در یک ظرف حاوی آب که به اندازه کافی عمیق است فرو کنید. دیاپازون مرتعش را در انتهای باز بگیرید. لوله و دیاپازون را بلند و کوتاه کنید تا برای تشدید تنظیم شود. لوله به علاوه یک تصحیح آخر باید $\lambda/4$ باشد.

تشدید خوب دیگری را در اینجا توضیح می‌دهیم. $2/3$ یک بطری نوشابه را پر کنید به طوری که وقتی در آن می‌دمید یک نت کمی بالاتر از 5233 Hz به دست آورید. یک نی داخل بطری بگذارید. دیاپازون مرتعشی را در دهانه بطری بگیرید. با کشیدن آب به وسیله نی تشدید را تنظیم کنید.

می‌توانید در لوله پستی، پارچ، اتاقها و تونلها با خواندن یک "آزیر" صعودی تشدید را پیدا کنید، تشدید قوی را هم می‌شنوید و هم "حس" می‌کنید. تغییر امپدانس ممکن است واقعاً "شما را ساکت کند" یا سبب شود که شما به یک گام همسایه بروید.

$5-17$ آیا سیستم آشکارسازی صوت در انسان (پرده گوش، اعصاب، مغز) یک آشکارساز حساس به فاز است؟ بیایید بفهمیم! بعضی از مردم می‌گویند که جهت صوت با بسامد بالا را می‌توان با توجه به تأخیر زمان بین یک قله در یک گوش و یک قله در دیگری آشکارسازی کرد یعنی شما می‌توانید انتقال فاز را برای ارتعاش یک پرده گوش نسبت به دیگری آشکارسازی کنید. پرسش اینکه آیا این موضوع حقیقت دارد یا نه به اینجا می‌انجامد: آیا می‌توانید اختلاف بین "دو

پرده گوش داخل، دو پرده خارج، دو پرده داخل، دو پرده خارج، ... و ”پرده گوش چپ داخل وقتی پرده گوش راست خارج، پرده گوش چپ خارج در حالی که پرده گوش راست داخل است و غیره“ را بگویید؟

ابتدا یک لوله پستی دو سر باز را در نظر بگیرید (با ۵۲۳ Hz تنظیم کنید تا صداهای بلند زیبا به دست آورید). طول لوله $\lambda/2$ است. یعنی اینکه وقتی هوا به طرف راست در انتهای راستگرد یورش می‌برد، فوری به طرف چپ در انتهای چپگرد با عجله می‌رود یعنی وقتی لوله تشدید می‌شود سرعتها در دو انتها 180° درجه خارج فازند. برای اینکه فرق کند، هوا را از دو انتها به سرعت در یک زمان به خارج می‌فرستیم و در همان زمان به طرف داخل یورش می‌برند. حال دو دیپازون ۵۲۳ Hz را که به یک فاصله از انتهای شاخه باشند به هم دیگر بزنید و یک دیپازون را در هر انتهای لوله بگذارید به طوری که زنش داشته باشیم. وقتی شدت بیشینه باشد، هر دیپازون هوا را به طرف جایی که تشدید می‌شود هل می‌دهد، یعنی در یک لحظه وقتی دیپازون در یک انتها هوا را به داخل لوله هل می‌دهد، دیپازون در انتهای دیگر همین هوا را به طرف لوله هل می‌دهد. در نصف دور تند بعدی (در ۵۲۳ Hz) هر دیپازون هوای خارج انتهای لوله را به داخل می‌کشاند. بعد از نصف یک دور زنش بعدی شدت صدای خارج شده لوله کمینه می‌شود. (کمینه صفر است اگر دیپازونها را به فاصله مساوی از انتها به هم بزنید.) این به این علت است که یک دیپازون هوا را به یک انتها هل می‌دهد در حالی که دیگری هوا را از طرف دیگر بیرون می‌کشد، که مخالف آن چیزی است که برای به دست آوردن تشدید لازم است. این کار تشدید را از بین می‌برد. اگر به طور مخالف قرار دهیم، حرکت ایجاد شده به وسیله دو دیپازون از برهم‌نهی ارتعاش دو تشدید که 180° خارج از فازند تشکیل شده است که صفر می‌شود.

دلیل همه اینها این است که لوله می‌تواند نشان دهد که آیا دیپازونها ارتعاش می‌کنند ”هر دو به طرف داخل، هر دو به طرف خارج ...“ یا در عوض ”یکی داخل، دیگری خارج؛ یکی خارج، دیگری داخل؛ ... و غیره“. در یک حالت در زنش بیشینه داریم و در دیگری کمینه. پرسش در مورد دستگاه شنوایی شما این است: اگر شما یک دیپازون را جلوی یک گوشتان بگیرید و دیگری را جلوی گوش دیگر آیا زنشها را می‌شنوید؟ یا آیا چیزی ساختار ریاضی زنش را دارد؟ مثلاً سیستم شما نشان می‌دهد ”که صدا از طرف چپ اتاق می‌آید؛ از طرف راست اتاق می‌آید و غیره“ همین طور که پیش می‌روید چه چیزی به زنش بیشینه و کمینه مربوط است. یعنی اگر اشخاصی که می‌گویند جهت صدا به وسیله اختلاف فاز تعیین می‌شود حق دارند، مغز خواهد گفت اگر یک پرده گوش از دیگری با فاز 90° جلوتر باشد، آنگاه صدا از طرف پرده گوش که با 90° هدايت می‌شود می‌آید. این جهت در سامد زنش برعکس خواهد شد. برای پاسخ به پرسش آزمایش را انجام دهید.

روش دیگر برای طرح سؤال (با لوله مقوایی به عنوان مثال) این است: آیا شما سوراخی در سرتان است؟

۱۸-۵۰ اندازه‌گیری فاز نسبی در دو انتهای یک لوله باز. فرض کنید شخصی یک لوله شلنگ بلند در دست دارد، آن را در داخل یک جعبه بیچید و بگذارید انتهای باز آن عمود خارج از جعبه باشد و دیگری از سر دیگر آن بیرون باشد. نبینید که چه مقدار از لوله داخل جعبه پیچیده است. با اضافه کردن یک شیور کوچک به انتهای بالا آمده می‌فهمیم که تشدید در 523cps از دیپازون به وجود می‌آید. این به این معنی است که طول کل یا $1/2\lambda$ یا $3/2\lambda$ یا ... است. چطور خواهید فهمید که آیا لوله عدد فرد یا زوجی از نصف طول موج است؟ دو دیپازون مرتعش را در یک انتهای لوله نگه دارید و به زنشهای آنها گوش دهید. ریتم را طوری در حافظه نگه دارید که اگر یک دیپازون را در یک لحظه جابه‌جا کنید و سپس در همان جا بگذارید (بدون از بین بردن ارتعاشات ادامه‌یافته دیپازونها) بتوانید بگویید که زنش بیشینه "روی زنش" (در زبان تخصصی موسیقی) یعنی درست همان جایی که باید می‌نشیند. این تمرین را چندین مرتبه انجام دهید به طوری که بتوانید یک زنش را رد کنید، زنشها را در دهنتان بشمارید و وقتی دیپازون را دوباره قرار می‌دهید به همان مرحله برگردید. (می‌توانید یک بار نوار لاستیکی را برای به دست آوردن بسامد زنش مناسب تنظیم کنید. اگر همه این کارها دشوار بود می‌توانید از یک مترونوم استفاده کنید.) حال! این بار به جای جابه‌جا کردن (به سرعت) دیپازون در همان انتهای لوله، آن را به انتهای دیگر ببرید دوباره به زنشها گوش دهید. (هر دو دیپازون تمام مدت ارتعاش می‌کنند.) آیا آنها "روی زنش" برمی‌گردند یا "روی خارج زنش" برمی‌گردند؟ طبق نتیجه آزمایش خود، می‌توانید تصمیم بگیرید که آیا لوله عدد زوج یا فردی از نصف طول موج است یا نه؟ جواب را پیش‌بینی کنید، آنگاه آزمایش را با لوله نصف طول موج آزمایش کنید. (یک لوله دیگر به طول یک طول موج برای نتیجه معکوس بسازید.)

۱۹-۵۰ نت همساز در دیپازون. آیا دیپازون 523cps فقط صوت 523cps را حذف می‌کند؟ دیپازون را به جسم محکمی بزنید. علاوه بر یک نت قوی 523cps شما یک نت بلند ضعیف هم خواهید شنید. نت بلند در عرض ۲ یا ۳ ثانیه از بین می‌رود. این یک مد بالاتر دیپازون است و فوراً میرا می‌شود زیرا درگیر شاخه خمیده بزرگتر است. در مورد نت یک اکتاو بالاتر یعنی 1046cps چه می‌دانید؟ شنیدن این نت مشکل است به خاطر وجود نت پایه 523cps . برای پیداکردن آن باید از لوله تشدیدگر استفاده کنید. لوله را با ضربه زدن به سر خود و شنیدن اکتاو بالاتر از 523cps روی 1046cps تنظیم کنید. (یا به طور ساده با استفاده از "نظریه" آن را کوتاه کنید، 6° شعاع هر انتها را از $2/\lambda$ کم کنید تا طول را به دست آورید.) دیپازون 523cps را در انتهای لوله 1046cps بگیرید

و گوش کنید. (از یک لوله تنظیم شده در C۵۲۳ به عنوان کنترل استفاده کنید. دیاپازون را بین لوله C۵۲۳ و C۱۰۴۶ جلو و عقب ببرید.)

۲۰-۵ موج سینوسی کلی. موج پیشرونده $\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz)$ را به صورت برهم نهشی از دو موج ساکن بنویسید. موج ساکن $\psi(z, t) = A \cos \omega t \cos kz$ را به صورت برهم نهشی از دو موج پیشرونده در جهات مخالف بنویسید. برهم نهش امواج پیشرونده زیر را در نظر بگیرید

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz) + RA \cos(\omega t + kz)$$

نشان دهید که موج سینوسی را می توان به صورت برهم نهش امواج ساکن به صورت زیر نوشت

$$\psi(z, t) = A(1 + R) \cos \omega t \cos kz + A(1 - R) \sin \omega t \sin kz$$

بنابراین همان موج را می توان به صورت برهم نهش امواج ساکن یا امواج پیشرونده تصور کرد.

۲۱-۵ پوشش غیربازتابنده. عدسیهای شیشه‌ای با یک لایه غیربازتابنده پوشیده شده اند یعنی ضخامت یک چهارم طول موج در پوشش آن برای نور در خلأ با طول موج λ . ضریب شکست این لایه \sqrt{n} است، ولی ضریب شکست شیشه n است. ضریب شکست را، مستقل از بسامد و خارج از طیف بسامد مرئی ثابت بگیرید. بازتاب I شدت بازتابیده متوسط زمانی و I_0 شدت تابش برای نور در فرود عمودی را نشان می دهد. نشان دهید که شدت بازتابیده جزئی وابستگی زیر را به طول موج نور تابیده شده دارد

$$\frac{I_{\text{بازتاب}}}{I_0} = 4 \left[\frac{1 - \sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}} \right]^2 \sin^2 \frac{1}{4} \pi \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 \right)$$

که λ طول موج نور تابیده در خلأ است. n را مساوی ۱٫۵ برای شیشه بگیرید. فرض کنید $\lambda_0 = 5500 \text{ \AA}$ (نور سبز). آنگاه بازتاب I برای نور سبز صفر است. نسبت $I_{\text{بازتاب}}/I_0$ برای نور آبی در خلأ با طول موج 4500 \AA چند است؟ برای نور قرمز در خلأ با طول موج 6500 \AA چقدر است؟ جواب: شدت نسبی بازتابیده نور قرمز در حدود 2×10^{-2} است، شدت بازتابیده آبی در حدود دو برابر قرمز است. (جواب شما باید شامل ۲ رقم اعشار باشد.)

۲۲-۵ جورشدن امیدانس به وسیله ضریب شکست "کاهش یافته". فرض کنید می خواهید امیدانسهایی اپتیکی را بین ناحیه با ضریب شکست n_1 و n_2 جور کنید و می خواهید فاصله کل L را در ناحیه گذار جور امیدانس بسط دهید. بستگی بهینه z ضریب شکست n بین دو ناحیه چیست؟ آیا نمایی است؟ چرا نه؟

جواب: طول موج $\lambda = (c/v)/n$ به طور خطی با z تغییر می‌کند یعنی اگر ناحیه گذار از $z = 0$ تا $z = L$ گسترش یابد می‌خواهیم $\lambda(z) = \lambda_1 + (z/L)(\lambda_2 - \lambda_1)$ را به دست آوریم.

۲۳-۵ فریز زیباترین نور سفید. به فریزهای تداخلی هم محور دو تیغه میکروسکوپ که به یکدیگر پرس شده‌اند نگاه کنید. مرکز طرح سیاه است (یعنی هیچ بازتابی از آسمان نشان نمی‌دهد). اولین فریز سفید است. آنگاه فریزها رنگی می‌شوند. بعد از دوازده فریز آنها با هم مخلوط می‌شوند و روی هم می‌افتند و دوباره سفید می‌شوند. کدام فریز (دقیقاً) بیشترین رنگ را دارد؟ برای اینکه دقیق باشیم "زیباترین" فریز آنی است که "نه قرمز است و نه آبی" که قرمز طول موج $650 \mu\text{m}$ دارد (که μm برحسب میکرون است، یک میکرون برابر است با 10^{-6} متر) و آبی طول موج $450 \mu\text{m}$ دارد و "وجود ندارد" یعنی برای زیباترین فریز هم قرمز و هم آبی با تداخل غیرسازنده صرفند. عدد زیباترین فریز را به نزدیکترین عدد درست بگویید، طول موج برای تداخل در این فریز کاملاً سازنده و رنگ تقریبی است.

۲۴-۵ تداخل در فیلمهای نازک. نشان دهید که برای نور تکفام در فرود عمود، شدت بازتابیده از یک لایه هوا به ضخامت L بین دو تیغه شیشه‌ای میکروسکوپ با تقریب بازتاب کوچک به صورت زیر داده می‌شود

$$\frac{I_{\text{بازتاب}}}{I_0} \approx 4R_{12}^2 \sin^2 k_2 L$$

(از اثرات تداخل مربوط به دو سطح خارجی دو تیغه چشمپوشی کنید. آن فریزها با پخش رنگهای هرکدام اما خیلی تکفام از بین خواهد رفت، همان‌طور در آزمایش ۵-۱۰ "فریزهای فابری-پرو در شیشه پنجره" بحث شد.

۲۵-۵ فریزهای فابری-پرو در تیغه شیشه‌ای ۱ میلیمتری. این نتیجه را به دست آورید که برای نوری که فریزهای تداخلی فابری-پرو را در تیغه شیشه‌ای ۱ میلیمتری به وجود می‌آورد، "پهنای خط" (یعنی پهنای نوار) نور باید کمتر از حدود 3cm^{-1} باشد تا فریزها پاک نشوند.

۲۶-۵ بازتاب چندباره. برای نتایج به دست آمده در زیر باید از اعداد مختلط استفاده کنید. فرض کنید فرودی ψ قسمت حقیقی $Ae^{i(\omega t - kz)}$ است، که A حقیقی است. بنابراین $A \cos(\omega t - kz) = \psi$ فرودی در $z = 0$ امپدانس یک تغییر ناگهانی از Z_1 به Z_2 دارد. در $z = L$ امپدانس از Z_2 به Z_3 تغییر می‌کند. بگذارید $R_{12} = (Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1)$ ، $R_{23} = (Z_3 - Z_2)/(Z_3 + Z_2)$ ، $R = R_{12} R_{23}$ بگذارید R مختلط است و شاید به صورت $R = |R|e^{-i\theta}$ نوشته شود.

(الف) نشان دهید اگر از همه سهمها بجز بازتاب از $z = 0$ و اولین بازتاب از $z = L$ صرف نظر کنیم به دست می آوریم

$$R = R_{12} + T_{12}R_{23}T_{21}e^{-2ik_r L}$$

$$T_{21} = 1 + R_{21} = 1 - R_{12} \text{ و } T_{12} = 1 + R_{12} \text{ که}$$

(ب) با جمع صریح سریهای نامتناهی متناظر با عدد نامتناهی بازتاب چندباره نشان دهید که جواب دقیق R به صورت زیر است

$$R = R_{12} + \frac{(1 - R_{12}^2)R_{23}e^{-2ik_r L}}{1 - R_{23}R_{21}e^{-2ik_r L}}$$

که اولین جمله R_{12} مربوط به بازتاب در اولین ناپیوستگی در $z = 0$ است و بقیه مربوط به یک یا چند بازتاب در $z = L$ است. نشان دهید که در تقریب بازتاب کوچک این نتیجه به مقدار قسمت (الف) کاهش می یابد. نشان دهید که نتیجه دقیق به شکل زیر نوشته می شود

$$R = \frac{R_{12} + R_{23}e^{-2ik_r L}}{1 + R_{12}R_{23}e^{-2ik_r L}}$$

نشان دهید که این عبارت دقیق برای R برای ترکیبی از R_{23}/R_{12} و $k_r L$ به صفر میل می کند، همان طور که عبارت تقریبی ای برای R در "تقریب بازتاب کوچک" در بخش ۵-۵ به دست آمد. بنابراین این عبارت تقریبی صفرها را به طور دقیق به دست می دهد اما برای شدت در بیشینه دقیق نیست. ۲۷-۵ روش شرایط مرزی برای ضرایب بازتاب و عبور. موقعیت فیزیکی این مسئله دقیقاً مانند مسئله ۲۶-۵ است. روش حل کاملاً متفاوت است. به جای جمع روی سری نامتناهی پرتوهای بازتابی چندباره ما از روش زیر استفاده می کنیم: "هر پرتو" برهم نهشی از پرتوهای بازتابی چندباره پیوسته است. بنابراین خود برهم نهش پیوسته است. این اساس این روش است. بنابراین با جمع روی بازتابهای چندباره اذیت نمی شویم. در سه ناحیه ۱ ($z < 0$)، ۲ ($z = 0$ تا $z = L$)، و ۳ ($z > L$) به جای $\psi(z, t)$ قسمت حقیقی زیر را می نویسیم

$$\psi_1(z, t) = e^{i(\omega t - k_1 z)} + R e^{i(\omega t + k_1 z)}$$

$$\psi_2(z, t) = F e^{i(\omega t - k_r z)} + B e^{i(\omega t + k_r z)}$$

$$\psi_3(z, t) = T e^{i(\omega t - k_r(z-L))}$$

که R (بازتابیده)، F (جلو)، B (عقب)، و T (عبوری) اعداد مختلطی هستند که باید تعیین شوند. (برای سادگی دامنه موج فرودی را واحد در نظر می‌گیریم.) توجه کنید که جمله شامل دامنه مختلط F برهم‌نهی پرتوهای بازتابی چندباره بین $z = L$ و $z = 0$ هستند که در جهت جلو در زمان t حرکت می‌کنند. به همین ترتیب جمله شامل امپدانس مختلط B برهم‌نهی پرتوهای است که همگی به عقب برمی‌گردند. در دو ناپوستگی $z = L$ و $z = 0$ شما باید شرایط مرزی پیوستگی را اعمال کنید. فرض کنید $\psi(z, t)$ پیوسته است و فرض کنید $\partial\psi(z, t)/\partial z$ نیز پیوسته است. (این بدین معنی است که کشش نخ ثابت است اگر نخ داشته باشیم یا که فشار تعادل p در عامل γ ثابت است برای امواج صوتی یا اینکه تراوایی مغناطیسی μ ثابت است برای امواج الکترومغناطیسی.) این دو شرط مرزی در هر دو مکان چهار معادله خطی با چهار عدد مختلط R, B, F, T می‌دهد. کافی است R, B, F, T را به‌طور منحصر به فرد تعیین کنیم. این جمله را توجیه کنید. R, B, F, T را پیدا کنید. نشان دهید که نتیجه شما برای R مساوی با آن است که با روش بازتاب چندباره در مسئله ۵-۲۶ به دست می‌آید.

۵-۲۸ تشدید گذار. (الف) نشان دهید که برای بازتاب مربوط به دو ناپوستگی (مسئله ۵-۲۶ و ۵-۲۷) کسر میانگین زمانی شار انرژی که بازتابیده نمی‌شود (و بنابراین با بقای انرژی عبور داده می‌شود) از رابطه زیر به دست می‌آید

$$1 - |R|^2 = \frac{1 - R_{12}^2 - R_{23}^2 + R_{12}^2 R_{23}^2}{1 + 2R_{12} + R_{23} \cos 2k_2 L + R_{12}^2 R_{23}^2}$$

(ب) نشان دهید که اگر محیط ۳ همان امپدانس محیط ۱ را داشته باشد این رابطه تبدیل می‌شود به

$$1 - |R|^2 = \frac{(1 - R_{12}^2)^2}{1 - 2R_{12}^2 \cos 2k_2 L + R_{12}^4}$$

(ج) نشان دهید که در مقادیر معین $k_2 L$ ، کسر میانگین زمانی شار انرژی واحد نیست، یعنی برای این مقادیر تمام انرژی عبور داده می‌شود و هیچ بازتابیده نمی‌شود. هرکدام از "مقادیر تشدید" k_2 را k_0 بنامید. نشان دهید که مقادیر تشدید با مقادیر $k_0 L = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ داده می‌شود.

(د) نشان دهید که برای k_2 به اندازه کافی نزدیک مقدار تشدید k_0 شار انرژی عبوری (در میانگین زمانی) با رابطه زیر داده می‌شود

$$1 - |R|^2 \approx \frac{1 - (R_{12}^2)^2}{(1 - R_{12}^2)^2 + R_{12}^2 [2L(k_2 - k_0)]^2}$$

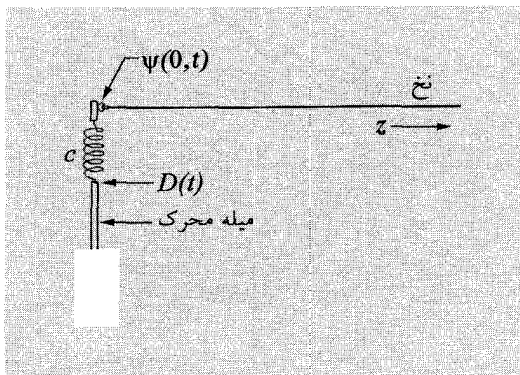
نشان دهید که این شکل معادله شکل تشدید برایت - ویگنر را دارد که در بخش ۳-۲ بحث شد و تمام پهنا در شدت عبوری نیم‌بیشینه Δk_2 با رابطه زیر داده می‌شود

$$(\Delta k_2)L \approx \frac{(1 - R_{12}^2)}{|R_{12}|}$$

و $|R_{12}|$ خیلی کمتر از واحد نیست. (نشان دهید که به ازای $1 \ll |R_{12}|$ تقریب برایت - ویگنر بی‌استفاده است، زیرا فقط در خیلی نزدیک k_0 عمل می‌کند یعنی حتی در نقاط "توان عبوری نیم‌بیشینه" عمل نمی‌کند. در این حالت باید از نتیجه دقیق استفاده کنیم.) نشان دهید که به ازای $1 \approx |R_{12}|$ وقتی شکل برایت - ویگنر برای بیشتر پهناهای تشدید دور از k_0 عمل می‌کند، تمام پهنا با رابطه زیر داده می‌شود

$$(\Delta k_2)L \approx 2(1 - |R_{12}|)$$

۲۹-۵ فرض کنید به جای بستن نخ نیم‌متناهی مستقیماً به خروجی سازوکار تحریک، آن را با یک فنر به فرستنده جفت کنیم.



شکل م ۲۹-۵

کشش نخ T ، چگالی جرمی نخ ρ ، و ثابت فنر K است. طول فنر طوری است که جابه‌جایی میله محرک $D(t)$ صفر است و فنر کشیده نیست، آنگاه $\psi(0, t)$ صفر است. حرکت میله با معادله $D(t) = A \cos \omega t$ داده می‌شود. فرض کنید موج پیشرونده‌ای با شکل $\psi(z, t) = B \cos(\omega t - kz + \varphi)$ داریم. مسئله این است که نشان دهیم "شرایط مرزی" در

$z = 0$ چیست و آنگاه از آن استفاده کنیم تا B/A و ϕ را به دست آوریم. (راهنمایی: حل جبری آن با استفاده از اعداد مختلط آسانتر است.)

جواب: $\tan \phi = -\omega(T\rho)^{1/2}/K$ و $B/A = [1 + \omega^2 T\rho/K^2]^{-1/2} = \cos \phi$

توجه کنید که برای K بزرگ $\psi(0, t) = D(t)$ است، همان طور که انتظار می رود. چرا؟

۳۰-۵ فرض کنید که نقطه a روی نخ در $z_a = 10 \text{ cm}$ در حرکت هماهنگ با بسامد 10 cps و دامنه 1 cm نوسان می کند. فاز آن طوری است که در $t = 0$ نقطه روی نخ از مکان تعادلش با سرعت به طرف بالا می رود (جابه جایی مثبت به طرف بالاست).

(الف) اندازه و جهت سرعت نقطه a در $t = 0.5 \text{ s}$ چقدر است؟ فرض کنید پارامترهای نخ (جرم در واحد طول و کشش) طوری اند که سرعت موج 100 cm/s است.

(ب) طول موج موج پیشرونده چیست؟ طول موج موج ساکن چیست؟

(ج) نقطه دیگر b در $z_b = 15 \text{ cm}$ با همان دامنه که در $z_a = 10 \text{ cm}$ نوسان می کرد نوسان می کند، اما با فاز نسبی 180° درجه نسبت به نوسان در z_a . آیا می توانید بگویید که اینجا یک موج پیشرونده خالص داریم یا یک موج ساکن خالص یا ترکیبی از هر دو؟

(د) همچنین نقطه c در 12.5 cm با دامنه مساوی همانی که در z_a بود اما 180° خارج فاز با نقطه a نوسان می کند. نقطه b مانند بالا نوسان می کند. حال بگویید آیا موج، موج پیشرونده یا ساکن (یا ترکیبی از هر دو) است یا نه؟

۳۱-۵ تشدید در بادکنکهای اسباب بازی. یک بادکنک پر شده از هلیوم را بگیرید. آن را نزدیک گویشتان بگیرید و به آن ضربه بزنید. داخل یک طرف آن بخوانید و دنبال گام تشدید بگردید. یک بادکنک دیگر را با همان قطر بادکنک هلیوم با هوا باد کنید. به آن ضربه بزنید. نسبت بسامدهای پایینترین مدهای (آنهايي که شما وقتی ضربه می زنید می شنوید) بادکنکهای هلیوم و هوا را تخمین بزنید. چه نسبت بسامدی پیش بینی می کنید: قدرت (بلندی صدا) تشدیدهایی که وقتی شما در یک طرف بادکنک هلیوم می خوانید به دست آورید و آن را با بادکنک هوا مقایسه کنید. چرا این قدر تفاوت است؟

۳۲-۵ پایان امواج روی یک نخ. (الف) فرض کنید یک ضربه گیر بی جرم دارید که دو قسمت متحرک ۱ و ۲ دارد و این دو قسمت نسبت به یکدیگر در جهت x حرکت می کنند و عمود بر جهت z نخ است. اصطکاک به وسیله مایعی که حرکت دو قسمت متحرک را کند می کند اعمال می شود. اصطکاک به گونه ای است که نیروی لازم برای حفظ سرعت نسبی $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$ بین دو قسمت متحرک $Z_d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ است و Z_d امپدانس ضربه گیر است. ورودی (قسمت ۱) به

انتهای نخ با امپدانس Z_1 که از $Z = -\infty$ تا $Z = 0$ کشیده شده است وصل است. خروجی (قسمت ۲) به نخ با امپدانس Z_2 که به $Z = +\infty$ گسترش دارد متصل است. نشان دهید که بر موج فرودی از چپ امپدانس در $Z = 0$ ، وارد می‌شود که مانند آن است که اگر به یک "بار" شامل نخ که از $Z = 0$ تا $Z = \infty$ کشیده شده بود وارد می‌شد و امپدانس Z_L زیر را دارد

$$\frac{1}{Z_L} = \frac{1}{Z_d} + \frac{1}{Z_2} \quad \text{یعنی} \quad Z_L = \frac{Z_d Z_2}{Z_d + Z_2}$$

بنابراین این مانند آن است که ضربه‌گیر و نخ ۲ امپدانسهایی هستند که "به‌طور موازی" وصل شده‌اند و با موج فرودی به حرکت درمی‌آیند.

(ب) نشان دهید که اگر نخ Z_2 فقط به $Z = (1/4)\lambda_2$ گسترش یابد، که λ_2 طول موج محیط ۲ است (با فرض اینکه موج هماهنگ تک‌بسامد داریم) و به‌وسیله یک ضربه‌گیر با امپدانس صفر (بی‌اصطکاک) پایان یابد، به موج فرودی در $Z = 0$ کاملاً پایان داده می‌شود. نشان دهید که خروجی اتصال ضربه‌گیر در $Z = 0$ نمی‌تواند بگوید آیا به نخ با امپدانس نامتناهی متصل است یا در عوض به یک نخ یک‌چهارم طول موج که با ضربه‌گیر بی‌اصطکاک در $Z = (1/4)\lambda_2$ "اتصال کوتاه" شده است. در هر مورد اتصال خروجی به حالت سکون باقی می‌ماند.

۳۳-۵ خصوصیات آکوستیکی اتاقها. خصوصیات آکوستیکی یک اتاق اساساً با "زمان پژواک" به‌صورت تابعی از بسامد تعیین می‌شود. فرض کنید اتاق در حالت پایا در بسامد معین تحریک شود. نگاه نیروی محرک (که ممکن است یک لوله ارگ الکتریکی محرک باشد) ناگهان خاموش می‌شود. انرژی صوت ذخیره‌شده تقریباً به‌طور نمایی با طول عمر τ که با رابطه زیر داده می‌شود افت می‌کند

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{E_{\text{ذخیره‌شده}}} \frac{dE_{\text{کم‌شده}}}{dt}$$

حداقل این تنها روشی است که یک نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی رفتار می‌کند و می‌توانیم حدس بزنیم که اتاق هم به همین صورت رفتار می‌کند. ρ_E چگالی انرژی صوت و V حجم اتاق را نشان می‌دهد. انرژی ذخیره‌شده چقدر است؟ برای یک موج پیشرونده تخت، شار انرژی (برحسب $\text{erg/cm}^2\text{s}$) برابر است با چگالی انرژی ضربدر سرعت صوت، $v = 332 \text{ m/s}$. امواج صوت در اتاق امواج پیشرونده نیستند اما می‌توانیم آنها را برهم‌نهدی از امواج پیشرونده که در تمام جهات حرکت می‌کنند در نظر بگیریم. تقریباً یک‌ششم انرژی می‌تواند به‌عنوان موج پیشرونده در هرکدام از شش جهت در نظر گرفته شود یعنی در امتداد مثبت و منفی محور x ، y ، و z .

شار انرژی در جهت $+x$ پیش می‌رود و در مواجهه با پنجره باز بیرون پنجره می‌رود و گم

جدول ۱-۵ ضرایب جذب، a_i ، به ازای $\nu = 512 \text{ cps}$

۱٫۰۰	پنجرهٔ باز
۰٫۲۰	قالیچه
۰٫۱۲	لینولیم
۰٫۷۸	نمد به ضخامت ۱ اینچ
۰٫۴۴	جمعیت برحسب نفر (هر نفر مساحتی مؤثر برابر 1 m^2)
	(دارد.)
۰٫۰۶۱	چوب
۰٫۰۳۳	گچ
۰٫۰۲۷	شیشه

منبع:

Wallace C. Sabine, *Collected Papers on Acoustics*, pp. 223f. (Dover Publications, New York, 1964). A classic work.

می‌شود. پنجرهٔ باز ضریب جذب $a = 1.0$ دارد. دیوارها (سقف و کف) مساحت کل A دارند که می‌توانند به صورت جمع مساحت‌های A_1, A_2 ، و غیره با ضرایب جذب a_1, a_2 ، و غیره به حساب آیند. این عبارت تقریبی را برای زمان فروافت میانگین به دست آورید:

$$\tau \sum (A_i a_i) \approx \frac{6V}{v}$$

که این جمع همهٔ سطوح اتاق را می‌پوشاند. جدول همراه ضرایب جذب (جدول ۱-۵) را ببینید. در سال ۱۸۹۵ از والاس سابین درخواست شد که دربارهٔ خصوصیات آکوستیکی ناهنجار اتاق کنفرانس در موزه هنر فاگ که جدیداً در دانشگاه هاروارد تأسیس شده بود، "کاری بکند". حال ما از شما می‌خواهیم تخمین بزنید که آن اتاق با اطلاعات زیر^۱ چقدر بد بوده است (یعنی مدت زمان صوت باقیمانده را تخمین بزنید)، $V = 274 \text{ m}^3$ ، شکل تقریباً مکعب، دیوارها و سقف گچی و کف چوبی. همچنین "مدت زمان قابل شنیدن" را ۴ برابر τ بگیرید. در آزمایشها سابین از شنونده‌های انسانی به عنوان آشکارساز استفاده کرد. نتیجهٔ آزمایش او برای مدت زمان قابل شنیدن ۵٫۶۱۶s بود (که او آن را به ۷٫۵۶s با اضافه کردن مواد جذبی مختلف کاهش داد).

1. W. C. Sabine, *Collected Papers on Acoustics*, p. 30. Dover, 1964.

مدولاسیون، تپ و بسته‌موج

۱-۶ مقدمه

تاکنون عمدتاً امواج و نوسان‌هایی را مطالعه کردیم که بستگی زمانی هماهنگی $\cos(\omega t + \varphi)$ دارند و در آنها تنها یک بسامد ω وجود دارد. تنها استثناء مطالعه زنشها در بخش ۱-۵ بود. در آنجا فراگرفتیم که برهم‌نهمش دونوسان هماهنگ با بسامد تقریباً، ولی نه کاملاً، مساوی به پدیده بسیار جالب زنش منتهی می‌شود. فصل ۶ ادامه مطالعه ما درباره زنشهاست. در این فصل زنشها را برحسب مکان و همچنین برحسب زمان و زنشهای حاصل از برهم‌نهمش تعداد زیادی مؤلفه و همچنین فقط دو مؤلفه بسامد را مطالعه خواهیم کرد. همچنین به بررسی اینکه چگونه زنشها (و یا کلیتر "مدولاسیون" در مورد بیش از دو مؤلفه بسامد) به صورت امواج پیشرونده منتشر می‌شوند، خواهیم پرداخت. از آنجا نتیجه می‌شود که مدولاسیونها که گروه‌های موج و یا بسته‌های موج نامیده می‌شوند، همان‌طور که منتشر می‌شوند و با سرعت گروه حرکت می‌کنند، انرژی حمل می‌کنند.

بهترین راه برای آنکه تجربه‌ای شخصی از بسته‌های موج به دست آورید آن است که ریگ‌هایی به داخل حوضی بیندازید و بسته‌های موج دایره‌ای در حال گسترده شدن را مشاهده کنید. (انداختن قطره‌های آب به داخل ظرف نیز به خوبی همین عمل را انجام می‌دهد.) آشکار است که این بسته‌های

موج دایره‌ای انرژی حمل می‌کنند زیرا هنگامی که به چوب‌پنبه‌ای که در آب شناور است می‌رسند، می‌توانند آن را بالا و پایین ببرند. اگر از نزدیک نگاه کنید، خواهید دید که موجک‌هایی که بسته‌موج را درست می‌کنند نسبت به بسته‌موج مکان ثابتی را نگاه نمی‌دارند. در مورد بسته‌های موج آب، که از موجک‌هایی با طول موج بیش از چند سانتیمتر تشکیل شده‌اند، موجکها تقریباً دو برابر تندتر از بسته‌موج حرکت می‌کنند. این موجکها در عقب بسته‌موج "متولد" می‌شوند به سمت جلو حرکت می‌کنند و آنگاه از بین می‌روند. موجکها با سرعت فاز حرکت می‌کنند. تمام بسته‌موج با سرعت گروه حرکت می‌کند.

ما خواننده را تشویق می‌کنیم که یک ظرف یا لوله را با آب پر کند و بسته‌های موج را درست کند. (در ابتدا، ممکن است قادر نباشید حرکت نسبی موجکها و بسته‌موج را ببینید. این حرکت را با پرتاب کردن ریگ یا قطره‌های آب در یک حوض بزرگ به آسانی می‌توان دید؛ در آنجا می‌توانید پیشرفت موج را برای چندین ثانیه دنبال کنید. در یک ظرف کوچک زمان بسیار کمی وجود دارد.)

۶-۲ سرعت گروه

در فصل ۴ مثالهای متعددی بیان کردیم که حاکی از آن بود که سرعت فاز یک موج پیشرونده سینوسی الزاماً سرعتی نیست که انرژی یا داده‌ها با آن منتقل می‌شود. مثلاً دریافتیم که سرعت فاز نور در یون‌سپهر از c بیشتر است. اگر سیگنالها می‌توانستند با سرعتی بیشتر از c منتشر شوند، در این صورت نظریه نسبیت نادرست می‌بود.

مدولاسیونها سیگنالها را حمل می‌کنند. با یک موج پیشرونده هماهنگ که شامل فقط یک بسامد تنهاست، پیغامی نمی‌توان فرستاد. این به خاطر آن است که یک موج پیشرونده هماهنگ برای همیشه ادامه دارد و هر دوره تناوب مانند دوره تناوب قبلی است. این موج هیچ‌گونه اطلاعاتی را منتقل نمی‌کند، صرف‌نظر از اینکه، بالاخره می‌توان گفت که موجی وجود دارد. اگر بخواهید پیغامی بفرستید باید موج را مدوله کنید بدین معنی که چیزی درباره آن را باید به‌گونه‌ای تغییر دهید که بتواند در یک "گیرنده" دور کشف رمز شود. ممکن است دامنه را تغییر دهید که مدولاسیون دامنه نامیده می‌شود. مثلاً ممکن است دامنه را مدوله کنید به طوری که بتوانید یک سری خط و نقطه را به شکل رمز مورس بفرستید که هر آرایه خط و نقطه نمایشگر یک حرف الفباست. و یا ممکن است بسامد یا ثابت فاز را به روشی تغییر دهید که بتواند کشف رمز شود. این روشها به ترتیب مدولاسیون بسامد و مدولاسیون فاز نامیده می‌شوند. در هر یک از این حالتها، نیروی محرک، یک نیروی هماهنگ ساده نیست.

برای آنکه کشف کنیم چگونه سیگنالها منتشر می‌شوند، باید امواج پیشرونده گسیل شده به داخل

یک محیط باز به وسیله فرستنده‌ای که در نقطه $z = 0$ قرار دارد، را مطالعه کنیم. جابه‌جایی $D(t)$ این امواج بستگی ساده‌ی زمانی هماهنگ $D(t) = A \cos \omega t$ را ندارند بلکه دارای بستگی پیچیده‌تر $D(t) = f(t)$ هستند. پس نتیجه می‌شود که گروه وسیعی از توابع $f(t)$ را می‌توان به صورت برهم‌نهمش (مجموع) خطی توابع هماهنگ به شکل $A(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$ بیان کرد که در آن دامنه $A(\omega)$ و ثابت فاز $\varphi(\omega)$ برای هر بسامد ω موجود متفاوت هستند و با تابع $f(t)$ که باید به وسیله برهم‌نهمش بیان شود، تعیین می‌شوند. در آینده مطالعه خواهیم کرد که دامنه‌های $A(\omega)$ و ثابتهای فاز $\varphi(\omega)$ را با روشهای آنالیز فوری چگونه تعیین کنیم. در حال حاضر، برهم‌نهمشی را که فقط شامل دو جمله است در نظر می‌گیریم. همین دو جمله کافی است که نتایج بسیار جالب توجهی به دست دهد که سرانجام به درک اینکه چگونه یک تپ یا بسته‌موج در یک محیط پاشنده (یعنی محیطی که در آن سرعت فاز به طول موج بستگی دارد) منتشر می‌شود.

برهم‌نهمش دو نوسان هماهنگ نوسانی با دامنه مدوله شده می‌دهد. فرض کنیم فرستنده‌ای که در $z = 0$ قرار دارد تاری را که از $z = 0$ تا $z = +\infty$ کشیده شده است، تحریک می‌کند. فرستنده با برهم‌نهمش دو حرکت هماهنگ با بسامدهای زاویه‌ای ω_1 و ω_2 نوسان می‌کند. اگر دامنه‌ها و ثابتهای فاز دو مؤلفه را یکسان اختیار کنیم، هیچ نتیجه جالب توجهی را از دست نخواهیم داد. بنابراین فرض می‌کنیم که موج خروجی از فرستنده به وسیله رابطه زیر داده شود

$$D(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t \quad (1)$$

از مطالعه قبلی زنشها [به بخش ۵-۱ از معادلات ۸۰-۱ تا ۸۵-۱ مراجعه کنید] می‌دانیم که برهم‌نهمش داده شده با معادله (۱) را، می‌توان به شکل نوسانی با دامنه مدوله شده نوشت

$$D(t) = A_{\text{mod}}(t) \cos \omega_{\text{av}} t \quad (2)$$

که در آن

$$A_{\text{mod}}(t) = 2A \cos \omega_{\text{mod}} t \quad (3)$$

با

$$\omega_{\text{mod}} = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$$

$$\omega_{\text{av}} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \quad (4)$$

اگر ω_1 و ω_2 از نظر اندازه قابل مقایسه باشند، بسامد مدولاسیون ω_{mod} در مقایسه با بسامد متوسط ω_{av} کوچک است. در این صورت شکل معادله (۲) را به صورت یک نوسان تقریباً هماهنگ با

بسامد ω_{av} و با دامنه‌ای که تقریباً، ولی نه کاملاً، ثابت است می‌توان تصور کرد. این یک نوسان هماهنگ با دامنه مدوله شده با بسامد مدولاسیون نسبتاً پایین ω_{mod} است.

در معادلات (۲) و (۳) ساده‌ترین نوع ممکن نوسان با دامنه مدوله شده را داریم، به این خاطر که فقط یک بسامد مدولاسیون، ω_{mod} ، وجود دارد. در حالت کلی‌تر یک نوسان با دامنه مدوله شده شکل معادله (۲) را خواهد داشت اما در آن $A_{mod}(t)$ به وسیله برهم‌نهی جملات مختلف متعددی به شکل معادله (۳) داده می‌شود و هر جمله دارای بسامد مدولاسیون خود و دامنه و ثابت فاز خودش است. مثلاً در رادیوی AM، ν_{va} ، "بسامد حامل" در حدود 1000 kc (کیلو دور بر ثانیه) است. بسامدهای مدولاسیون، بسامدهای قابل شنیدن در گستره 20 cps تا 20 kc است.

از برهم‌نهی دو موج پیشرونده سینوسی یک موج پیشرونده با دامنه مدوله شده حاصل می‌شود. اکنون امواج پیشرونده تابش شده به وسیله فرستنده‌ای را بررسی می‌کنیم که موج خروجی از آن با بستگی زمانی که با معادلات (۱) یا (۲) داده می‌شوند، نوسان می‌کند. محیط به گونه‌ای به فرستنده جفت شده است که در نقطه $z = 0$ ، $\psi(z, t)$ با رابطه زیر داده می‌شود

$$\psi(0, t) = D(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t \quad (5)$$

چون امواج حاصل در اصل برهم‌نهی صدق می‌کنند، دو مؤلفه جابه‌جایی فرستنده که از برهم‌نهی خطی مطابق معادله (۵) حاصل می‌شوند، دو موج پیشرونده "مستقل" به وجود می‌آورند. از این رو موج پیشرونده $\psi(z, t)$ برهم‌نهی دو موج پیشرونده سینوسی $\psi_1(z, t)$ و $\psi_2(z, t)$ خواهد بود که اگر هر کدام از نوسانهای فرستنده یعنی $A \cos \omega_1 t$ یا $A \cos \omega_2 t$ به تنهایی موجود بودند، وجود می‌داشتند. می‌دانیم که $\psi_1(z, t)$ با قرار دادن $\omega_1 t - k_1 z$ به جای $\omega_1 t$ در $\psi_1(z, t)$ به دست می‌آید. این رابطه این حقیقت را بیان می‌کند که سرعت فاز برابر ω_1/k_1 است. به همین ترتیب $\psi_2(z, t)$ با قرار دادن $\omega_2 t - k_2 z$ به جای $\omega_2 t$ به دست می‌آید. بنابراین با انجام این دو جانشانی در معادله (۵)، موج پیشرونده $\psi(z, t)$ به دست می‌آید:

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega_1 t - k_1 z) + A \cos(\omega_2 t - k_2 z) \quad (6)$$

البته با انجام دادن همین جایگزینیها یعنی $\omega_1 t - k_1 z$ به جای $\omega_1 t$ و $\omega_2 t - k_2 z$ به جای $\omega_2 t$ در معادلات (۲)، (۳) و (۴) شکل موج پیشرونده مشابه با نوسان تقریباً هماهنگ با دامنه مدوله شده که با معادلات (۲)، (۳) و (۴) داده شده است را می‌توانیم پیدا کنیم. با این روش موج پیشرونده تقریباً سینوسی با دامنه مدوله شده را به دست می‌آوریم

$$\psi(z, t) = A_{mod}(z, t) \cos(\omega_{av} t - k_{av} z) \quad (7)$$

که در آن (همان‌گونه که به‌آسانی می‌توانید نشان دهید)

$$A_{\text{mod}}(z, t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}}t - k_{\text{mod}}z) \quad (۸)$$

با

$$\omega_{\text{mod}} = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \quad (۹)$$

$$k_{\text{mod}} = \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$$

$$\omega_{\text{av}} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \quad (۱۰)$$

$$k_{\text{av}} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

دقت کنید در جایی که $\omega_{\text{av}}t$ داشتیم با قرار دادن $\omega_1 t - k_1 z$ به جای $\omega_1 t$ و با قرار دادن $\omega_2 t - k_2 z$ به جای $\omega_2 t$ عبارت $\omega_{\text{av}}t - k_{\text{av}}z$ به دست آمد. به همین ترتیب، در جایی که $\omega_{\text{mod}}t$ داشتیم با انجام دادن همین تعویضها، $\omega_{\text{mod}}t - k_{\text{mod}}z$ به دست آمد.

سرعت مدولاسیون. اکنون پرسش بسیار جالبی را مطرح می‌کنیم: مدولاسیونها با چه سرعتی منتشر می‌شوند؟ تصور کنید که ω_{mod} در مقایسه با ω_{av} کوچک است. در این صورت خروجی فرستنده در نقطه $z = 0$ به شکل نوسانهایی با دامنه مدوله شده است (که در شکل ۱-۱۳ بخش ۱-۵ نشان داده شده است). پرسش این است که یک قله مفروض موج مدولاسیون [یعنی محلی که در آنجا $A_{\text{mod}}(z, t) = +1$ است] با چه سرعتی منتشر می‌شود. پاسخ با معادله (۸) داده می‌شود یعنی می‌بینیم که برای دنبال کردن یک مقدار ثابت مفروض (مانند یک قله) از دامنه مدولاسیون $A_{\text{mod}}(z, t)$ ، لازم است که عبارت $\omega_{\text{mod}}t - k_{\text{mod}}z$ را ثابت نگاه داریم. از این رو هنگامی که t به اندازه dt اضافه می‌شود، مقدار z باید به اندازه dz اضافه شود به طوری که افزایش $\omega_{\text{mod}}dt - k_{\text{mod}}dz$ یعنی $\omega_{\text{mod}}dt - k_{\text{mod}}dz$ صفر باقی بماند:

$$\omega_{\text{mod}}dt - k_{\text{mod}}dz = 0 \quad (۱۱)$$

برای برقرار بودن این شرط، باید با سرعت مدولاسیون حرکت کنیم،

$$\frac{dz}{dt} = v_{\text{mod}} = \frac{\omega_{\text{mod}}}{k_{\text{mod}}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \quad (۱۲)$$

اما ω و k با یک رابطه پاشندگی به یکدیگر مربوط می‌شوند

$$\omega = \omega(k) \quad (۱۳)$$

از این رابطه پاشندگی، هنگامی که k_1 مشخص باشد، ω_1 به دست می آید و هنگامی که ω_2 مشخص شود، k_2 به دست می آید:

$$\omega_1 = \omega(k_1), \quad \omega_2 = \omega(k_2) \quad (14)$$

بنابراین این سرعت مدولاسیون که با معادله (۱۲) داده شده است را (با استفاده از بسط سری تیلور $\omega(k)$ به ازای $k = k_{av}$) به شکل زیر می توان بیان کرد

$$v_{mod} = \frac{\omega(k_1) - \omega(k_2)}{k_1 - k_2} = \frac{d\omega}{dk} + \dots \quad (15)$$

که در آن مشتقهای تابع $\omega(k)$ به ازای عدد موج متوسط k_{av} محاسبه شده اند.

سرعت گروه. در بسیاری از کاربردهای جالب معادله (۱۲) اختلاف ω_1 و ω_2 فقط کسر کوچکی از مقدار متوسط آنهاست. بنابراین در معادله (۱۵) از تمام جمله‌ها بجز اولین جمله می توانیم صرف نظر کنیم. کمیت $d\omega/dk$ که به ازای یک مقدار مناسب متوسط k برآورده می شود، سرعت گروه نام دارد:

$$\boxed{v_g \equiv \frac{d\omega}{dk}} \quad (16)$$

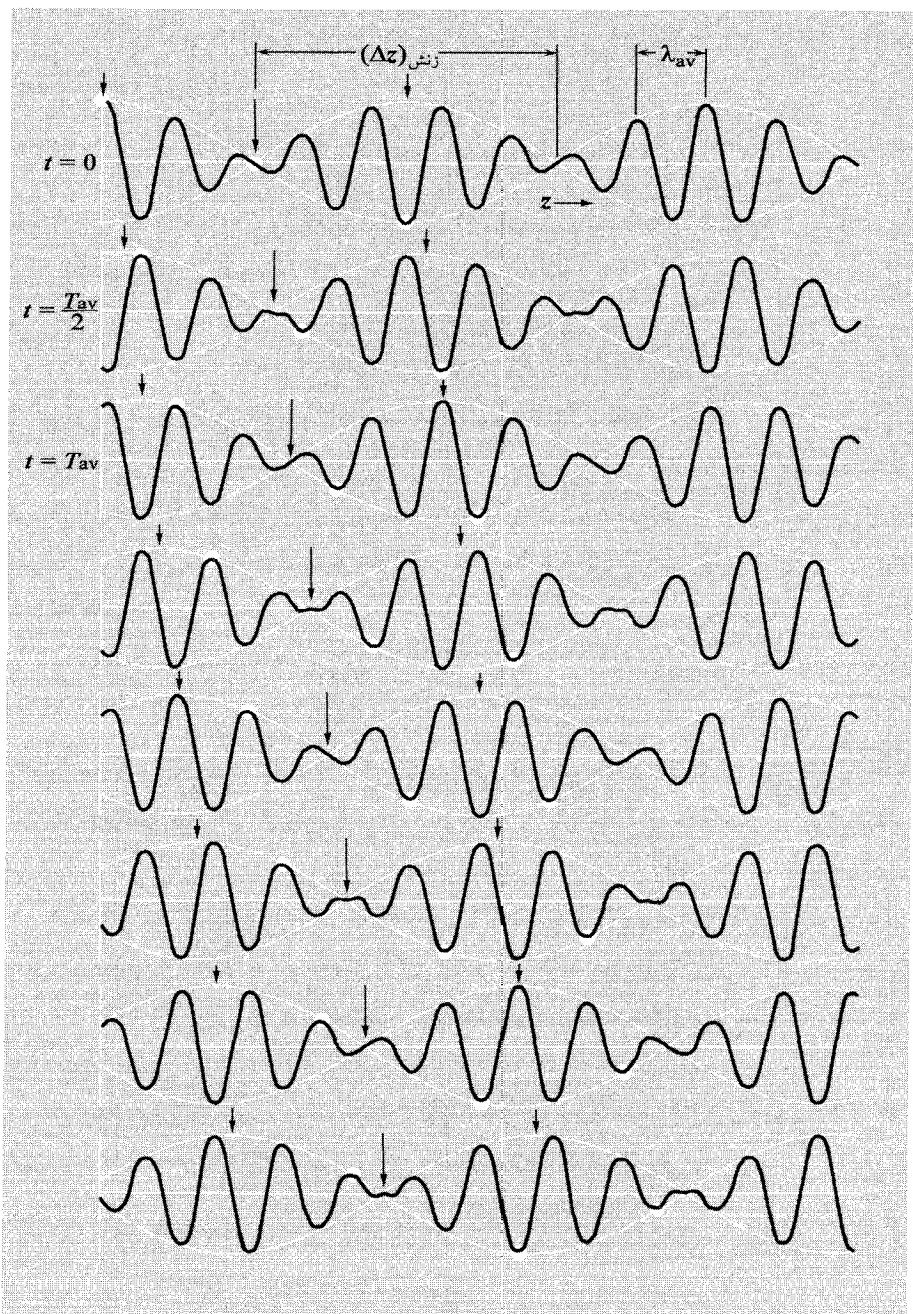
بنابراین می بینیم که یک "سیگنال" که شامل یک قله موج از دامنه مدولاسیون است نه با سرعت متوسط فاز یعنی $v_{av} = \omega_{av}/k_{av}$ بلکه با سرعت گروه $v_g = d\omega/dk$ منتشر می شود.

در شکل ۶-۱ انتشار موج پیشرونده $\psi(z, t)$ را که با معادله (۷) یا معادله (۹) داده شده است نشان می دهیم که ویژگیهای آن عبارت از این است که بسامد متوسط ۸ برابر بسامد مدولاسیون و سرعت گروه $d\omega/dk$ (که به ازای بسامد متوسط برآورد شده است) برابر با نصف سرعت فاز ω_{av}/k_{av} است.

در اینجا روش خلاصه تری برای به دست آوردن سرعت مدولاسیون ارائه می دهیم. اختلاف فاز بین امواج ۱ و ۲ در معادله برهم نهشی (۶) به صورت زیر داده می شود.

$$\begin{aligned} \varphi_1(z, t) - \varphi_2(z, t) &= (\omega_1 t - k_1 z + \varphi_1) - (\omega_2 t - k_2 z + \varphi_2) \\ &= (\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)z + (\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

به ازای مقادیر معینی از اختلاف فاز یعنی $\varphi_1(z, t) - \varphi_2(z, t)$ دو مؤلفه هم فاز هستند و تداخل سازنده و بیشترین مقدار دامنه مدولاسیون را به وجود می آورند. به ازای سایر مقادیر اختلاف فاز



شکل ۱-۶ سرعت گروه. بیکانها زنشها را که با سرعت گروه v_g حرکت می‌کنند، دنبال می‌کنند. دایره‌های سفید قله‌های موج را دنبال می‌کنند که با سرعت متوسط فاز v_{av} حرکت می‌کنند.

$\varphi_1(z, t) - \varphi_2(z, t)$ ، مؤلفه‌ها هم‌فاز نیستند و تداخل میرا و دامنه‌های مدولاسیون صفر به‌وجود می‌آورند. از این‌رو برای آنکه بتوان با سرعت مدولاسیون حرکت کرد باید با سرعتی که بتواند اختلاف فاز $\varphi_1(z, t) - \varphi_2(z, t)$ را ثابت نگاه دارد، حرکت کرد. بنابراین دیفرانسیل کامل رابطه بالا را می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$(\omega_1 - \omega_2)dt - (k_1 - k_2)dz = 0$$

از آنجا سرعت مدولاسیون برابر dz/dt یعنی همان معادله (۱۲) به‌دست می‌آید.

مثال ۱: امواج رادیویی AM

مثال ساده‌ای شامل یک موج پیشرونده است که می‌توان آن را یا به‌صورت یک موج پیشرونده تقریباً هماهنگ دامنه‌ی مدوله‌شده با دامنه‌ی $A_{\text{mod}}(z, t)$ که به آهستگی تغییر می‌کند و دارای بسامد هماهنگی زیاد ω_{av} است و یا به‌صورت برهم‌نهدی از دو موج پیشرونده دقیقاً هماهنگ با دو بسامد هماهنگ تند مختلف ω_1 و ω_2 در نظر گرفت. البته دامنه‌ی مدولاسیون $A_{\text{mod}}(z, t)$ فقط در مقیاس زمانی در حدود یک زمان تناوب نوسانهای تند با بسامد زاویه‌ای ω_{av} "تقریباً ثابت" است. در حقیقت $A_{\text{mod}}(z, t)$ (به‌ازای یک z مفروض) به‌طور سینوسی برحسب زمان با بسامد مدولاسیون ω_{mod} و همچنین (به‌ازای زمان ثابت) به‌طور سینوسی در فضا با عدد موج مدولاسیون k_{mod} تغییر می‌کند. در این مثال، ما با برهم‌نهدی از دو موج پیشرونده دقیقاً هماهنگ شروع کردیم و دریافتیم که موج حاصل با یک موج پیشرونده با دامنه‌ی مدوله‌شده که تنها یک بسامد مدولاسیون ω_{mod} دارد، معادل است. ما نیز می‌توانستیم با یک نوسان با دامنه‌ی مدوله‌شده که با معادله (۲) داده شده است شروع کنیم و دریابیم که برهم‌نهدی از دو نوسان کاملاً هماهنگ است. در شرح خروجی یک فرستنده رادیویی با دامنه‌ی مدوله‌شده (AM)، نه تنها یک بسامد مدولاسیون بلکه یک دامنه‌ی کامل از بسامدهای مدولاسیون را باید در نظر بگیریم. شدت جریان در آنتن با ولتاژی تحریک می‌شود که شامل یک نوسان تقریباً هماهنگ با بسامد متوسط ω_{av} است که بسامد حامل نامیده می‌شود. (در یک رادیوی تجاری AM، برای هر ایستگاه یک بسامد حامل بین ۵۰۰ و ۱۶۰۰ kc مشخص شده است.) دامنه‌ی ولتاژ محرک اعمال‌شده به آنتن فرستنده، ثابت نیست. این ولتاژ، دامنه‌ی مدوله‌شده‌ای دارد که می‌توان آن را برحسب سری فوریه به‌شکل زیر نوشت

$$A_{\text{mod}}(t) = A_0 + \sum_{\omega_{\text{mod}}} A(\omega_{\text{mod}}) \cos[\omega_{\text{mod}}t + \varphi(\omega_{\text{mod}})] \quad (17)$$

که در آن $A_{\text{mod}}(t) - A_0$ به‌گونه‌ای تنظیم می‌شود که با فشار پیمانه‌ای یک موج صوتی مفروض که

همان اطلاعاتی است که باید منتقل شود، متناسب باشد. (میکروفون فشار سنجنش لحظه‌ای در هوا را به ولتاژ الکتریکی تبدیل می‌کند.) ثابت A_0 در دامنه ولتاژ محرک، مؤلفه‌ای است که همواره وجود دارد، چه شخص در مقابل میکروفون صحبت کند یا نکند، آواز بخواند یا نخواند. بقیه جملات در نتیجه امواج صوتی است که به وسیله میکروفون گرفته می‌شوند. بنابراین بسامدهای مدولاسیون در معادله (۱۷) بسامدهای امواج صوتی هستند. این بسامدها در گستره‌ای که قابل شنیدن است، از 20000 cps تا 20 قرار دارند و بسامدهای "شنوایی" نامیده می‌شوند. بسامدهای شنوایی در مقایسه با بسامد حامل کوچک هستند. ولتاژ محرک $V(t)$ با یک نوسان تقریباً هماهنگ با بسامد ω_{av} داده می‌شود

$$V(t) = A_{\text{mod}}(t) \cos \omega_{av} t \\ = A_0 \cos \omega_{av} t + \sum_{\omega_{\text{mod}}} A(\omega_{\text{mod}}) \cos[\omega_{\text{mod}} t + \varphi(\omega_{\text{mod}})] \cos \omega_{av} t \quad (18)$$

این رابطه را می‌توان به صورت برهم‌نهدی از نوسانهای دقیقاً هماهنگ نوشت:

$$V(t) = A_0 \cos \omega_{av} t \\ + \sum \frac{1}{\sqrt{2}} A(\omega_{\text{mod}}) \cos[(\omega_{av} + \omega_{\text{mod}})t + \varphi(\omega_{\text{mod}})] \\ + \sum \frac{1}{\sqrt{2}} A(\omega_{\text{mod}}) \cos[(\omega_{av} - \omega_{\text{mod}})t - \varphi(\omega_{\text{mod}})] \quad (19)$$

نوارهای جانبی. بنابراین ولتاژ با دامنه مدوله شده $V(t)$ عبارت از برهم‌نهدی است از نوسانهای هماهنگ شامل یک جمله تنها با بسامد ω_{av} که نوسان حامل نامیده می‌شود، مجموع تعدادی نوسان هماهنگ با بسامدهای $\omega_{av} + \omega_{\text{mod}}$ که نوار بالایی نامیده می‌شود و مجموع تعدادی نوسان هماهنگ با بسامدهای $\omega_{av} - \omega_{\text{mod}}$ که نوار پایینی نامیده می‌شود. به منظور تابش امواج پیش‌رونده که تمام داده‌ها را به شکل امواج صوتی در دامنه بسامد شنوایی از صفر تا 20 kc حمل کنند، ولتاژ $V(t)$ باید شامل برهم‌نهدی مؤلفه‌های هماهنگ با بسامدهای زاویه‌ای ω در دامنه بسامد از پایتترین بسامد نوار پایینی تا بالاترین بسامد نوار بالایی باشد. بنابراین بسامدهای تابش شده که نوار بسامد را اشغال می‌کنند عبارت‌اند از:

$$\omega_{av} - \omega_{\text{mod}}(\text{max}) \leq \omega \leq \omega_{av} + \omega_{\text{mod}}(\text{max}) \quad (20)$$

یعنی

$$\nu_{av} - \nu_{\text{mod}}(\text{max}) \leq \nu \leq \nu_{av} + \nu_{\text{mod}}(\text{max}) \quad (21)$$

پهنای نوار. بسامد بیشینه منهای بسامد کمینه پهنای نوار نامیده می‌شود:

$$\text{پهنای نوار} \equiv \Delta\nu = \nu(\max) - \nu(\min) = 2\nu_{\text{mod}}(\max) \quad (22)$$

از این رو برای فرستادن حامل و دو نوار جانبی در نتیجهٔ مدولاسیون دامنه که تمام دامنهٔ بسامد شنوایی را اشغال کنند به پهنای نواری، دو برابر 20 kc یعنی 40 kc احتیاج است. (در حقیقت فرستنده‌های تجارتي رادیویی AM فقط مجاز هستند پهنای نوار 10 kc پخش کنند. بنابراین فقط می‌توانند داده‌های شنوایی در دامنهٔ صفر تا 5 kc را حمل کنند. این دامنه برای سخنرانی معمولی کاملاً کافی و برای موسیقی نسبتاً کافی است زیرا بسامد بالاترین نت پیانو در حدود 42 kc است).
 ”موسیقی“ با سرعت گروه حرکت می‌کند. نیروی محرک $V(t)$ که با معادلات (۱۸) یا (۱۹) داده می‌شود به تابش امواج پیشروندهٔ الکترومغناطیسی منجر می‌شود. این امواج را ممکن است به صورت برهم‌نهشی از مؤلفه‌های هماهنگ در نظر گرفت که یک پهنای بسامد مشخص $\Delta\omega$ به مرکز ω_{av} را اشغال کرده‌اند. به‌گونهٔ دیگر، این امواج را ممکن است به صورت تنها یک موج پیشروندهٔ تقریباً هماهنگ در نظر گرفت که دارای یک بسامد نوسان ”تند“ ω_{av} برابر با بسامد حامل و دارای دامنهٔ $A_{\text{mod}}(z, t)$ ”تقریباً ثابت“ با تغییرات آهسته است که شامل برهم‌نهشی است از جملات، مانند آنچه در معادلهٔ (۸) آمده است. (در آن مثال، که در آن فقط دو مؤلفهٔ هماهنگ وجود دارد، پهنای بالایی شامل تک بسامد $\omega_1 = \omega_{av} + \omega_{\text{mod}}$ و پهنای پایینی شامل تک بسامد $\omega_2 = \omega_{av} - \omega_{\text{mod}}$ است.) مدولاسیونها با سرعت مدولاسیون در محیط (هوا، یون‌سپهر، ...) منتشر می‌شوند. در مورد یک فرستندهٔ رادیویی AM با بسامد حامل (مثلاً) 1000 kc و پهنای نوار 10 kc ، نوار بسامد از 995 kc تا 1005 kc ادامه دارد. از آنجا که پهنای نوار در مقایسه با بسامد متوسط کوچک است، انتظار داریم که جمله‌های بالاتر صرف‌نظر شده در بسط تیلور [معادلهٔ (۱۵)] واقعاً قابل صرف‌نظر کردن باشند و بدین ترتیب سرعت گروه که با معادلهٔ (۱۶) داده شده است برای بیان انتشار مدولاسیونها کاملاً کافی است.

مدولاسیون بسامد، مدولاسیون فاز، و مباحث جفت‌شده در مسائل ۶-۲۷ تا ۶-۳۲ بحث می‌شوند. (تکنیک مدولاسیون مهم دیگری نیز وجود دارد که مدولاسیون تپ - کد نامیده می‌شود.)^۱ اکنون چند مثال فیزیکی از سرعت‌های گروه در نظر می‌گیریم. در این حالتها که شامل امواج پیشروندهٔ الکترومغناطیسی است، خود را به بسامد رادیویی AM ($10^3 \text{ cps} \sim \nu$) محدود خواهیم کرد بلکه نور مرئی ($10^{15} \text{ cps} \sim \nu$)، میکروموج ($10^{10} \text{ cps} \sim \nu$) و سایر بسامدها را نیز در نظر خواهیم گرفت.

مثال ۲: تابش الکترومغناطیسی در خلأ
رابطهٔ پاشندگی به صورت زیر داده می‌شود

$$\omega = ck \quad (23)$$

سرعت‌های فاز و دو گروه به صورت زیر داده می‌شوند

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \quad (24)$$

بنابراین در مورد نور (یا سایر تابش‌های الکترومغناطیسی) سرعت‌های فاز و گروه در خلأ هر دو برابر با c هستند. مدولاسیونها با سرعت c منتشر می‌شوند. ■

مثال ۳: سایر امواج غیرپاشنده

امواج نوری در خلأ غیرپاشنده هستند یعنی سرعت فاز به بسامد (یا به عدد موج) بستگی ندارد. هر موقع چنین حالتی برقرار باشد، سرعت گروه با سرعت فاز برابر است زیرا در حالت کلی داریم

$$\omega = v_\varphi k \quad (25)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_\varphi + k \frac{dv_\varphi}{dk} \quad (26)$$

از این رو اگر dv_φ/dk صفر باشد، سرعت‌های گروه و فاز برابر می‌شوند. مثالهای دیگر امواج غیرپاشنده امواج صوتی هستند که در آنها داریم

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} k \quad (27)$$

و امواج عرضی در یک تار پیوسته که برای آنها داریم

$$\omega = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} k \quad (28)$$

مثال ۴: امواج الکترومغناطیسی در یون‌سپهر

رابطهٔ پاشندگی برای امواج سینوسی عبارت است از

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad (29)$$

که برای بسامدهای بیش از بسامد قطع یعنی $\nu_p \approx 20 \text{ Mc}$ صادق است. از مشتق‌گیری از معادله (۲۹) نسبت به k نتیجه می‌شود

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} = 2c^2 k \quad (30)$$

یعنی

$$\left(\frac{\omega}{k}\right) \left(\frac{d\omega}{dk}\right) = v_\varphi v_g = c^2 \quad (31)$$

بنابراین سرعت فاز و سرعت گروه به صورت زیر داده می‌شوند

$$v_\varphi = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}} \geq c \quad (32)$$

$$v_g = c \left(\frac{c}{v_\varphi}\right) \leq c$$

می‌بینیم که اگر چه سرعت فاز همیشه بیشتر از c است، سرعت گروه همیشه از c کمتر است. از این رو سیگنال را نمی‌توان با سرعتی بیشتر از c فرستاد. ■

مثال ۵: امواج سطحی روی آب

سطح آب در حالت تعادل، مسطح و افقی است. هنگامی که موجی وجود دارد، دو نوع باز برگرداننده وجود دارند که می‌خواهند قله‌های موج را مسطح کنند و آن را به حالت تعادل برگردانند: یکی نیروی جاذبه و دیگری کشش سطحی است. در مورد طول موجهای میلیمتری نیروی عمده کشش سطحی است.

به سبب خاصیت بزرگ غیرقابل تراکم بودن آب، اضافه آبی که در یک قله موج ظاهر می‌شود باید به داخل ناحیه‌های دره موج مجاور جریان یابد. بنابراین هریک از قطرات آب در یک موج آب حرکتی انجام می‌دهد که ترکیبی از یک حرکت طولی (جلو و عقب) و حرکت عرضی (بالا و پایین) است. اگر طول موج نسبت به عمق آب در حالت تعادل کوچک باشد، امواجی داریم که امواج آب عمیق نامیده می‌شود. در این صورت هریک از موجکهای آب در یک موج پیشرونده به صورت دایره‌هایی حرکت می‌کنند. یک اردک شناور (یا یک موجک در سطح) حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد که شعاع آن برابر است با دامنه موج هماهنگ و زمان تناوب آن با زمان تناوب موج برابر است. بر روی قله یک موج پیشرونده، اردک بیشترین سرعت به طرف جلو خود را داراست و در یک دره موج، اردک بیشترین سرعت به عقب را دارد. موجکهای آب پایین سطح به صورت دایره‌های کوچکتر حرکت می‌کنند. این‌گونه است که شعاع ژیراسیون به طور نمایی با عمق

کم می‌شود. بنابراین چند طول موج پایتتر از سطح، حرکت آندر کم است که قابل صرفنظر کردن است. (این ویژگیهای امواج آبی در بخش ۷-۳ به دست می‌آیند).
رابطه پاشندگی برای امواج آب - عمیق به طور تقریبی با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\omega^2 = gk + \frac{T}{\rho}k^3 \quad (33)$$

که در آن برای آب $\rho \approx 1 \text{ g/cm}^3$ و $T \approx 72 \text{ dyn/cm}$ (کشش سطحی) است و $g = 980 \text{ cm/s}^2$.

نشان دهید هنگامی که g و $(T/\rho)k^3$ برابر هستند به طوری که سنگینی و کشش سطحی در نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم (یعنی ω^2) مؤلفه‌های مساوی دارند، در این صورت سرعتهای فاز و گروه برابر هستند. می‌توانید نشان دهید که این حالت به ازای طول موج $\lambda = 1.7 \text{ cm}$ روی می‌دهد. در این صورت سرعتهای فاز و گروه هر دو 23 cm/s است. برای طول موجهای خیلی کمتر از 1.7 cm ، کشش سطحی مهم است، در این صورت سرعت گروه 1.5 برابر سرعت فاز است. برای طول موجهای بسیار بزرگتر از 1.7 cm سنگینی مهم است، در این صورت سرعت گروه نصف سرعت فاز است. (به مسئله ۶-۱۹ مراجعه کنید).
در جدول ۶-۱ پارامترهای مربوط به طول موجهای در محدوده ۱ میلیمتر (که دبابازونی که لیوان پر از آب را تحریک می‌کند می‌تواند به وجود آورد) تا ۴۶ متر (امواج بسیار بلند اقیانوس) داده شده است.

کاربرد

در اینجا مثالی می‌آوریم که از جدول ۶-۱ استفاده می‌کنیم. تصور کنید که می‌خواهید به طور دسته‌جمعی در ساحل گردش کنید. یک نفر از شما درباره طول موج امواج در فاصله تقریباً 30 یا 50 کیلومتر دور از ساحل در اقیانوس سؤال می‌کند. از آنها بخواهید که یک دقیقه صبر کنند تا به آنها بگویند که طول موج چقدر است. ساعت خود را در آورید و زمانی را که امواج بر ساحل برخورد می‌کنند تعیین کنید. مقدار متوسط 12 موج در دقیقه یعنی یک موج بر هر پنج ثانیه به دست می‌آورد: $\nu = 2 \text{ cps}$. چون هوا برای چندین روز ثابت بوده است، می‌توانید فرض کنید که امواج در حالت پایدار هستند (بجز بادهای محلی که بر طغیانهای بزرگ اقیانوس تأثیری ندارند) از این رو بسامد در دریا و به علاوه در ساحل برابر 2 cps است. (البته طول موجها مختلف است چون امواجی که به ساحل برخورد می‌کنند امواج آب - عمیق نیستند. طول موج به عمق آب در ساحل محلی شما بستگی دارد. اما بسامد محرک در حالت پایدار به عمق بستگی ندارد). بر طبق جدول، طول موج امواج در اقیانوس باز باید در حدود 40 متر باشد.

جدول ۱-۶ امواج آب - عمیق

$\frac{v_g}{v_\phi}$	v_g , cm/s	v_ϕ , cm/s	ν , cps	λ , cm
۱٫۵°	۱۰٫۱۴	۶۷٫۵	۶۷۵	۰٫۱°
۱٫۴۸	۶۳٫۷	۴۳٫۰	۱۷۲	۰٫۲۵
۱٫۴۲	۴۴٫۴	۳۱٫۲	۶۲٫۵	۰٫۵°
۱٫۲۴	۳۰٫۷	۲۴٫۷	۲۴٫۷	۱°
۱٫۰°	۲۳٫۱	۲۳٫۱	۱۳٫۶	۱٫۷
۰٫۹۲	۲۱٫۴	۲۳٫۲	۱۱٫۶	۲
۰٫۶۵	۱۷٫۸	۲۷٫۲	۶٫۸۰	۴
۰٫۵۴	۱۹٫۶	۳۶٫۲	۴٫۵۲	۸
۰٫۵۱	۲۵٫۸	۵۰٫۳	۳٫۱۴	۱۶
۰٫۵°	۳۵٫۸	۷۱	۲٫۲۲	۳۲
۰٫۵°	۶۲٫۵	۱۲۵	۱٫۲۵	۱۰۰
۰٫۵°	۸۸٫۵	۱۷۷	۰٫۸۸۴	۲۰۰
۰٫۵°	۱۲۵	۲۵۰	۰٫۶۲۵	۴۰۰
۰٫۵°	۱۷۷	۳۵۴	۰٫۴۴۲	۸۰۰
۰٫۵°	۲۵۰	۵۰۰	۰٫۳۱۳	۱۶۰۰
۰٫۵°	۳۵۴	۷۰۸	۰٫۲۲۱	۳۲۰۰
۰٫۵°	۵۰۰	۱۰۰۰	۰٫۱۵۶	۶۴۰۰

قله‌های موجی که اکنون به ساحل شما برخورد می‌کنند چه مسافتی را در یک ساعت گذشته پیموده‌اند؟ اگر بیشترین مدت صرف پیمودن در آب عمیق شده باشد، در این صورت بر طبق جدول ۱-۶ سرعت فاز در حدود ۸ متر بر ثانیه یعنی در حدود ۲۹۰۰۰ متر بر ساعت بوده است. بنابراین امواج در یک ساعت گذشته در حدود ۳۰ کیلومتر پیموده‌اند و از آنجا که هوا برای چندین ساعت ثابت بوده است می‌توانید مطمئن باشید که برآورد شما از طول موج در اقیانوس باز، برآورد خوبی است.

اگر شما در ساحل نبوده بلکه پهلوئی یک دستگاه زلزله‌نگار به فاصله حدود ۲۰ یا ۳۰ کیلومتر از ساحل باشید، همان پرسش را می‌توانید پاسخ دهید.

۳-۶ تپها

اکنون حالتی را می‌خواهیم در نظر بگیریم که در آن فرستنده‌ای که در $z = 0$ قرار دارد حرکتی را توصیف می‌کند که برهم‌نش تعداد زیادی نوسان هماهنگ است که تمام آنها دامنه‌های مساوی و

بسامدهای کاملاً نزدیک هم دارند که در یک نوار باریک بین پایینترین بسامد ω_1 و بالاترین بسامد ω_2 قرار گرفته‌اند. ما قبلاً حالتی را که در آن فقط دو بسامد وجود داشت در نظر گرفتیم. در آن حالت مدولاسیون‌نهایی به‌دست می‌آید که با سرعت گروه منتشر می‌شوند.

نمودار بردار چرخان. در آغاز بررسی حالت پیچیده‌تر که شامل چندین مؤلفهٔ هماهنگ با بسامدهای نزدیک به هم است، حالت فقط دو بسامد را با استفاده از روش نمودار بردار چرخان دوباره مطالعه می‌کنیم. نوسان هماهنگ زیر:

$$\psi(t) = A \cos \omega t \quad (34)$$

جزء حقیقی نوسان هماهنگ مختلط به‌شکل زیر است

$$\psi_c(t) = Ae^{i\omega t} \quad (35)$$

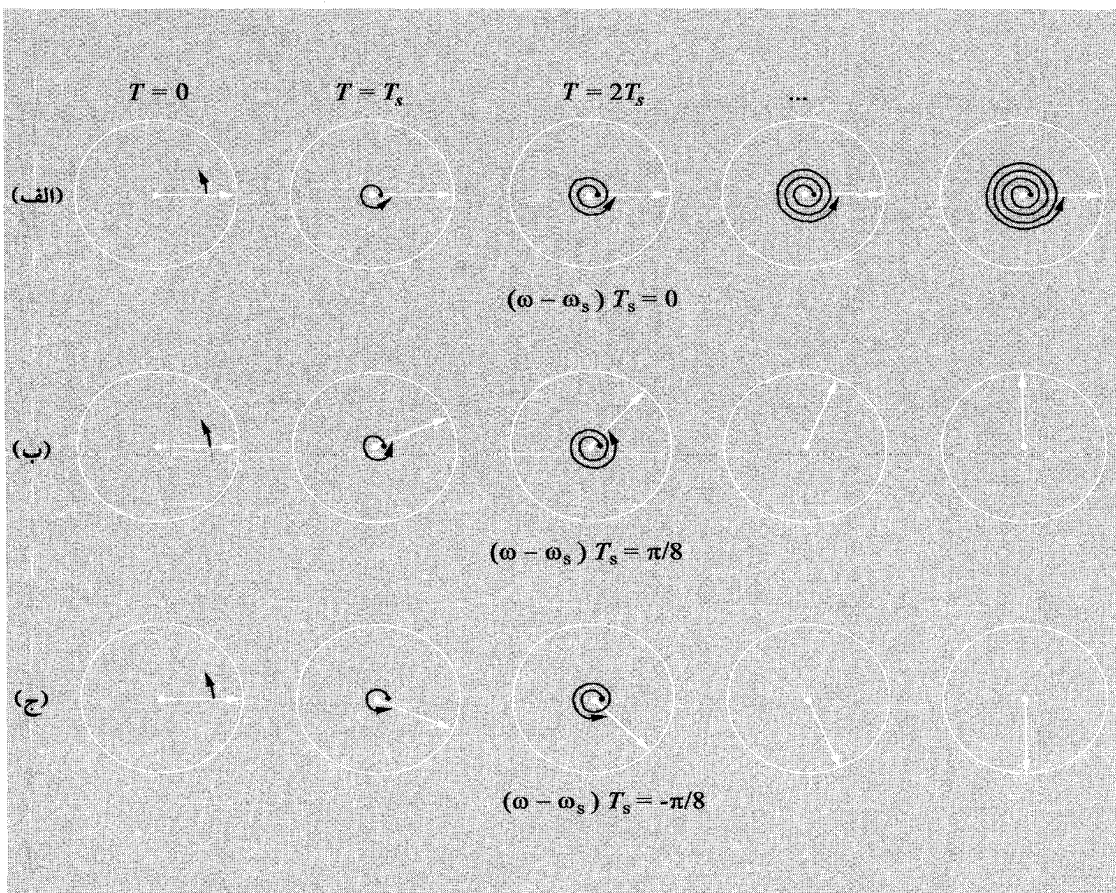
که در آن زیرنویس c حرف اول مختلط است. یک نمودار ترسیمی از $\psi_c(t)$ با برداری به‌طول A در صفحهٔ مختلط داده می‌شود که در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت با بسامد زاویه‌ای ω می‌چرخد. [تصویر این بردار چرخان بر روی محور افقی (یعنی محور حقیقی) حرکت هماهنگ با معادلهٔ (۳۴) را به‌دست می‌دهد.] به‌جای مشاهدهٔ این بردار چرخان در طول یک دور، می‌توانیم تصور کنیم که "عکسهای فوری استروبوسکوپی" می‌گیریم. در این صورت اگر استروبوسکوپ دارای همان بسامد بردار چرخان باشد، بردار ساکن به‌نظر خواهد رسید یعنی هر عکس، بردار را در همان یک محل نشان خواهد داد. [شکل ۶-۲ (الف) را ببینید.] اگر بسامد زاویه‌ای ω بردار چرخان اندکی بزرگتر از بسامد زاویه‌ای استروبوسکوپ یعنی ω_s باشد، چنین به‌نظر می‌رسد که بردار به‌آهستگی به‌جلو (در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) با بسامدی برابر با اختلاف بسامد زاویه‌ای $\omega - \omega_s$ می‌چرخد. اما اگر $\omega_s - \omega$ منفی باشد، چنین به‌نظر می‌رسد که بردار به‌آهستگی در جهت "قهقراپی" (جهت حرکت عقربه‌های ساعت) می‌چرخد. [شکل ۶-۲ (ج) را ببینید.] زیرنویس s حرف اول استروبوسکوپ است.

اکنون برهم‌نهمش دو موج هماهنگ را که دامنهٔ یکسان اما بسامدهای نزدیک به هم دارند در نظر می‌گیریم

$$\psi(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t \quad (36)$$

بردارهای در حال دوران $Ae^{i\omega_1 t}$ و $Ae^{i\omega_2 t}$ را با بسامد ω_{av} "استروبوسکوپی" می‌کنیم (یعنی از آنها عکسهای فوری استروبوسکوپی می‌گیریم):

$$\omega_s = \omega_{av} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \quad (37)$$



شکل ۶-۲ عکسهای فوری استروبوسکوپی از دوران بردار مختلط $e^{i\omega t}$. ماریچها برای آن هستند که بتوانید رد تعداد دورانه‌های بردار را مشخص

کنید. زمان T_s نشان می‌دهد که چقدر طول می‌کشد تا بردار یک دور کامل بچرخد. $T_s = 2\pi/\omega$ است.

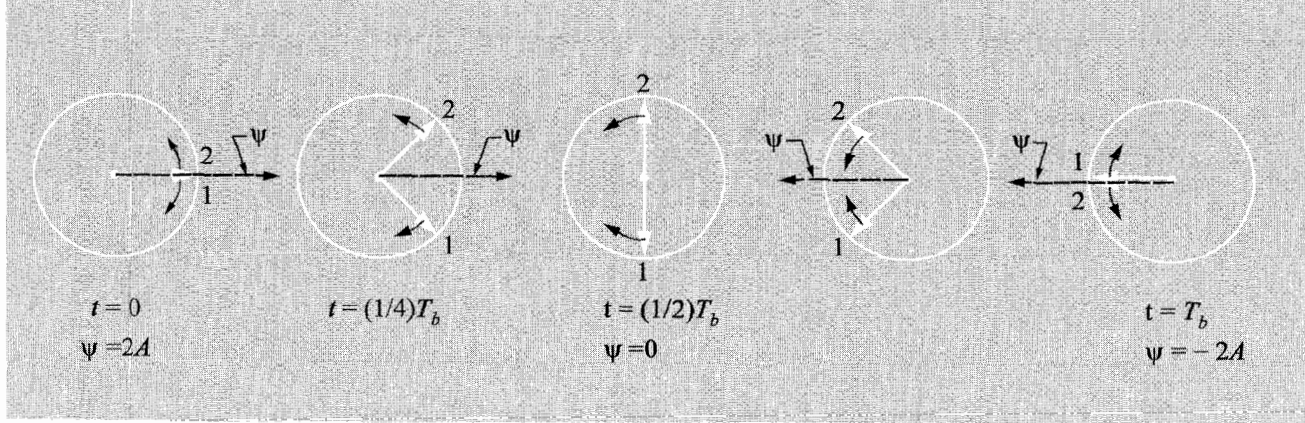
از این رو (اگر $\omega_1 - \omega_2$ مثبت اختیار شود) $\omega_2 - \omega_{av}$ مثبت است و $\omega_1 - \omega_{av}$ منفی است. مجدداً یادآور می‌شویم که $\psi(t)$ را ممکن است [مانند معادله (۲) بخش ۶-۲] به صورت حاصلضرب دامنه با تغییر آهسته $A(t)$ در یک نوسان تند با بسامد ω_{av} نوشت. بسامد ω_{av} استروپوسکوپ سبب می‌شود که نوسان تند "ساکن بماند" و فقط $A(t)$ بین عکسبردارها تغییر کند. از این رو عکسهایی را که در شکل ۶-۳ نشان داده شده است به دست می‌آوریم.

ساختن یک تپ. اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن $\psi(t)$ برهم‌نهی تعداد زیادی نوسان است که همگی دامنه مساوی A و ثابت فاز صفر دارند و در نوار بسامدی بین ω_1 و ω_2 به طور یکنواخت توزیع شده‌اند. از این رو پهنای نوار $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ است. نمودار برداری استروپوسکوپی مربوط به آن در شکل ۶-۴ نشان داده شده است.

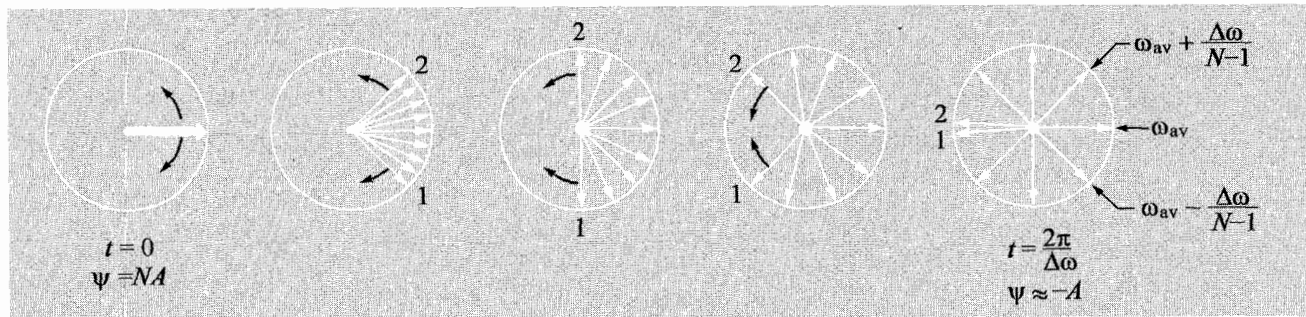
در زمان $t = 0$ برهم‌نهی ψ دارای دامنه $A(t)$ برابر NA است. در زمان t اندکی قبل از $\Delta\omega/2\pi$ ، که زمان تناوب یک زنش بین دو بسامد فرین ω_1 و ω_2 است، دامنه کلی $A(t)$ برابر صفر است زیرا سهم مؤلفه‌ها برحسب فاز به طور یکنواخت توزیع شده است (هنگامی که $N \rightarrow \infty$ اولین صفر دقیقاً به‌ازای $t = 2\pi/\Delta\omega$ روی می‌دهد). برای یک زمان طولانی پس از $t = 2\pi/\Delta\omega$ مؤلفه‌های برداری، اگرچه نه کاملاً یکنواخت، هنوز هم به طور وسیعی برحسب فاز توزیع خواهند شد، به طوری که دامنه کلی $A(t)$ برای یک زمان طولانی کوچک باقی می‌ماند. فقط هنگامی همه بردارها دوباره به یک فاز یکسان می‌رسند [و $A(t)$ به مقدار اولیه‌اش یعنی NA برمی‌گردد] که زنشهای بین مؤلفه‌هایی که در بسامد مجاور یکدیگرند مجدداً به مقادیر بیشینه‌شان برسند. از آنجا که جدایی بسامد در مؤلفه‌های مجاور برابر $(N-1)/\Delta\omega$ است، زمان تناوب زنشها بین بسامدهای مجاور برابر با حاصلضرب $(N-1)$ در زمان تناوب زنش مربوط به جدایی بسامد $\Delta\omega$ است. از این رو اگر $N \rightarrow \infty$ ، دامنه کلی $A(t)$ "برای همیشه" کوچک باقی می‌ماند و هرگز به مقدار اولیه‌اش بر نمی‌گردد. در این صورت چیزی وجود دارد که تپ نامیده می‌شود یعنی تابعی از زمان که فقط در یک فاصله زمانی محدود به طور قابل ملاحظه‌ای با صفر تفاوت دارد.

مدت زمان تپ. اکنون مدت تپ یعنی فاصله زمانی که در طول آن $\psi(t)$ "مقدار زیادی" است را با نماد Δt نشان می‌دهیم. این فاصله تقریباً با فاصله زمانی از $t = 0$ یعنی هنگامی که تمام مؤلفه‌های بسامد بین ω_1 و ω_2 هم‌فاز هستند تا زمان t_1 یعنی هنگامی که تمام مؤلفه‌های بسامد در کل فاصله فاز 2π رادیان برحسب فاز به طور یکنواخت توزیع شده‌اند، به صورت زیر داده می‌شود

$$\Delta t \approx t_1$$



شکل ۳-۶ زشها در برهم‌نیش $\psi(t) = Ae^{i\omega_1 t} + Be^{i\omega_2 t}$ ، عکسهای فوری استروبوسکوپی در حالت $\omega_s = \omega_{av}$ گرفته شده است و روی هم‌رفته یک زش با تناوب T_b را دقیقاً می‌پوشاند. [در این مثال بسامد زش $\frac{1}{T_b}$ بسامد متوسط است یعنی $\frac{1}{T_b} = \omega_2 - \omega_1$].



شکل ۴-۶ عکسهای فوری استروبوسکوپی از N نوسان (در اینجا $N = 9$) که به‌طور یکنواخت در داخل فاصله $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ توزیع شده‌اند. بسامد استروبوسکوپی برابر ω_{av} است. نوسانی که دارای $\omega = \omega_{av}$ است “ساکن” به‌نظر می‌رسد.

که در آن

$$(\omega_2 - \omega_1)t_1 = 2\pi \quad (39)$$

از این رو بین پهنای نوار $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ و فاصله زمانی Δt رابطه زیر برقرار است:

$$\Delta\omega\Delta t \approx 2\pi \quad (40)$$

یعنی

$$\boxed{\Delta\nu\Delta t \approx 1} \quad (41)$$

معادله (۴۱) مثال ویژه‌ای است از یک رابطه ریاضی بسیار کلی (و بسیار مهم) که بین مدت زمان Δt یک تپ $\psi(t)$ و پهنای نوار $\Delta\nu$ طیف بسامد مؤلفه‌های هماهنگ برهم‌نهاده شده که تپ را تشکیل می‌دهند، وجود دارد. در تمام فیزیک هر موقع که پدیده‌هایی به شکل یک تپ برحسب زمان یا برخی متغیرهای دیگر وجود دارند، این رابطه قابلیت کاربردی وسیعی دارد. مادامی که $\psi(t)$ دارای مشخصه‌ای است که یک تپ را تعریف می‌کند یعنی $\psi(t)$ فقط در طول تنها یک فاصله زمانی محدود از مدت Δt با صفر تفاوت زیادی دارد، رابطه کلی از جزئیات شکل ویژه $\psi(t)$ مستقل است.

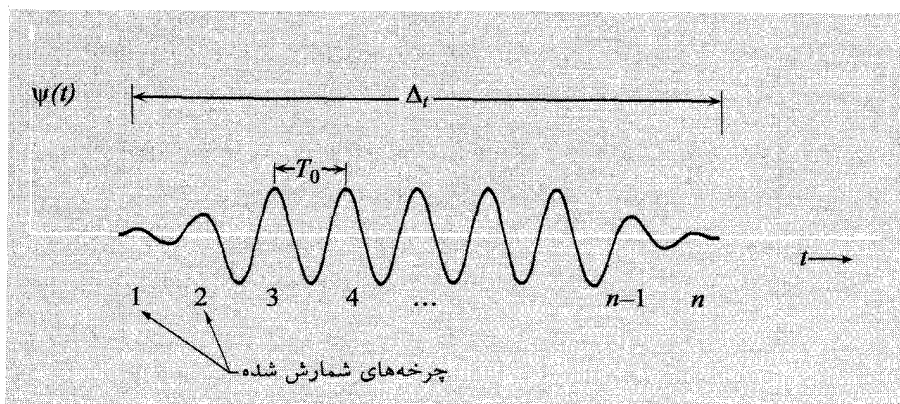
حاصلضرب پهنای نوار و فاصله زمانی. رابطه کلی که بین پهنای نوار بسامد $\Delta\nu$ و مدت زمان Δt که یک تپ را شرح می‌دهد، برقرار است، با رابطه زیر داده می‌شود

$$\boxed{\Delta\nu\Delta t \geq 1} \quad (42)$$

علامت نامساوی در معادله (۴۲) از آنجا نتیجه می‌شود که اگر ما تعداد نوسانهای هماهنگ را که یک نوار بسامد $\Delta\nu$ را اشغال می‌کنند، بر هم نهمیم، اگر ثابتهای فاز نسبی را به طور مناسب اختیار کنیم، فقط تپی به دست می‌آوریم که مدت آن به کوتاهی $1/\Delta\nu \approx \Delta t$ است. اگر ثابتهای فاز آنها همگی مساوی نباشند، در این صورت هیچ زمانی وجود نخواهد داشت که در آن تمام مؤلفه‌ها دقیقاً هم فاز باشد (همان‌طور که مثلاً در زمان $t = 0$ هستند) یعنی زمانی وجود نخواهد داشت که در آن برهم‌نهمش $\psi(t)$ هر قدر که ممکن است بزرگ باشد. در این صورت فاصله زمانی که در آن $\psi(t)$ به مقدار زیادی غیرصفر است (یعنی خیلی کوچکتر از مقدار بیشینه‌اش نیست) گستره زمانی وسیعتری را تشکیل می‌دهد. در حدی که فازها کاملاً اتفاقی انتخاب شده‌اند، مدت Δt به طور دلخواهی بزرگ می‌شود. در آن حالت فرین هیچ‌گونه تپ قابل تشخیصی وجود ندارد.

ضربه زدن به پیانو. فرض کنید روشی ابداع کنید که با آن به تمام دکمه‌های پیانو به طور همزمان ضربه بزنید. پهنای نوار صدای حاصل در حدود 4000 cps (دامنهٔ پیانو) است. از این رو اگر تمام تارها در زمان $t = 0$ دقیقاً هم فاز تحریک می‌شدند، بدین وسیله می‌توانستید صدایی به وجود آورید که در زمان $1/4000 \approx \Delta t$ یعنی 2.5 میلی‌ثانیه بسیار بلند باشد و پس از آن نسبتاً ضعیف شود. اگر روش ضربه زدن به تمام دکمه‌ها به طور همزمان صرفاً با استفاده از بازوهایتان یا یک چوب یا شیئی بلند باشد، در این صورت غیرممکن است که بتوانید همه تارها را در یک لحظه با دقتی در حد کسر کوچکی از زمان تناوبش یعنی کسر کوچکی در حدود 10^{-3} ثانیه، تحریک کنید. بلکه ثابتهای فاز به احتمال زیاد اساساً کاتوره‌ای‌اند. بنابراین صدای حاصل مشخصهٔ یک تپ را ندارد بلکه مانند یک سروصدای پایدار به‌گوش می‌رسد.

نوسانهای هماهنگ با مدت محدود. در اینجا توضیح دیگری از معادلهٔ (۴۱) داده می‌شود. تصور کنید نوسانگری روشن می‌شود، به سرعت (یعنی پس از چند دوره تناوب) به دامنهٔ ثابت A می‌رسد و برای n دوره تناوب بر طبق نوسان هماهنگ $A \cos \omega \cdot t$ نوسان می‌کند، سپس خاموش می‌شود و همان‌گونه که در شکل ۵-۶ نشان داده شده است، پس از چند دوره تناوب از بین می‌رود. از آنجا که نوسان برای همیشه ادامه ندارد، این یک نوسان هماهنگ خالص با بسامد ω نیست. مسلماً بسامد (زاویه‌ای) $\omega = \omega$ غالب است اما برطبق آنچه که گفته شد، تنها بسامد ω موجود نمی‌تواند باشد. می‌بایست نواری از بسامد به مرکز $\omega \approx \omega$ وجود داشته باشد. در اینجا روش بسیار ساده‌ای برای برآورد (تقریبی) پهنای نوار $\Delta\omega$ گفته می‌شود. با استفاده از تعریف بسامد که شمار دوره‌های تناوب بر ثانیه است، تعداد کل دوره‌های تناوب در فاصلهٔ زمانی Δt که در طول آن نوسانگر روشن بوده است را به سادگی می‌شماریم و بر Δt تقسیم می‌کنیم. از این رو با شمردن



شکل ۵-۶ نوسان هماهنگ با مدت محدود.

n دور نتیجه می شود

$$\nu(\text{عمده}) = \frac{n}{\Delta t} \quad (۴۳)$$

که برطبق شکل ۵-۶ لزوماً تقریباً برابر با $\nu_0 = T_0^{-1}$ است. با وجود این با مشاهده شکل ۵-۶ می بینیم که ممکن نیست n را دقیقاً مشخص کرد. هر انتهای تپ با عدم یقین در حدود $\pm 1/2$ دور توأم است یعنی باید تصمیم بگیریم که "آیا باید یک دوره تناوب بیشتر بشماریم یا شمارش تمام شده است؟" ممکن است خاطر نشان کنید که "خیلی مهم نیست مخصوصاً اگر n خیلی بزرگ باشد، خطا در مقایسه با n کوچک است." بلی، اما دقیقاً همین خطاست که به آن علاقه مند هستیم. بر طبق معادله (۴۳) پهنای نوار عدم یقین Δn با پهنای تقریباً ۱ در n دوره تناوب، به پهنای نوار بسامد کسری $\Delta \nu / \nu$ منجر می شود که با رابطه زیر داده می شود

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\Delta n}{n} \approx \frac{1}{n} \quad (۴۴)$$

از حاصلضرب معادلات (۴۳) و (۴۴) $\Delta \nu \approx 1/\Delta t$ نتیجه می شود.

مثال ۶: پهنای نوار در تلویزیون

تصویر روی صفحه تلویزیون شامل یک طرح مشبک مستطیلی از نقطه های سیاه و سفید است. یک نقطه مفروض "سفید" به نظر می رسد در صورتی که باریکه الکترونی تازه (در عرض تقریباً $1/50$ ثانیه) به آن نقطه از صفحه فسفرسانس تلویزیون برخورد کرده باشد. جدایی نقطه ها در حدود یک میلیمتر است. بنابراین یک صفحه معمولی تلویزیون $50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$ دارای 500 خط و 500 نقطه بر هر خط یا $10^4 \times 25$ نقطه است. هر نقطه در $1/30$ ثانیه تجدید می شود. (در هنگام هر بار عبور کردن عرضی باریکه الکترونی بر روی صفحه، خطوط افقی یک در میان رد می شوند. خطوط جاافتاده در عبور عرضی بعدی تجدید می شوند. از این رو در یک ناحیه مفروض از صفحه تلویزیون که شامل خطوط افقی بسیاری است، میزان سوسوزدن cps 60 است. این عدد میزان "استروبوسکویی" تلویزیون است). بنابراین میزانی که با آن دستورات عملیاتی "خاموش، روشن، ... " باید به پرتو الکترونی فرستاده شود در حدود $10^4 \times 25 \times 30$ یا 8×10^6 مرتبه در ثانیه است. بنابراین ولتاژهای آنتنهای فرستنده و گیرنده بایستی در حدود 10^7 دستور روشن - خاموش کردن ولتاژ در ثانیه داشته باشند. برای جلوگیری از یکدیگر را پوشاندن، هر دستور نمی تواند بیش از $10^{-7} \text{ s} \sim \Delta t$ طول بکشد. بنابراین پهنای نوار مورد نیاز $10 \text{ Mc} = 10^7 \text{ cps} \approx 1/\Delta t \approx \Delta \nu$ است. بسامدهای موج حامل مورد استفاده در تلویزیون از حدود 55 Mc تا 210 Mc تغییر می کند.

بر طبق شرحی که دربارهٔ رادیوی AM دیدیم، ممکن است تصور کنید که 10 Mc در داخل نوار جانبی بالا یا پایین "بسامدهای مدولاسیون" قرار خواهد گرفت. در حقیقت با یک تکنیک زیرکانه، موج حامل و یکی از نوارهای جانبی "حذف" می‌شوند. این امواج با صافیهای گرفته می‌شوند و هرگز به آنتن فرستنده اعمال نمی‌شوند. (اما از داده‌هایی که در تنها نوار جانبی که فرستاده می‌شود وجود دارد، در گیرنده دوباره تولید می‌شوند.) این تکنیک که عبور تک نوار جانبی نام دارد، پهنای نوار مورد نیاز را تا حدود 5 Mc نصف می‌کند. بنابراین بین 55 تا 210 Mc ، "فضای بسامدی" برای حدود 30 ایستگاه تلویزیونی وجود دارد که هر یک پهنای نوار در حدود 5 Mc به‌کار می‌برند. اگر تعداد ایستگاهها بیش از آن باشد، امکان ندارد که بتوان گیرنده را برای گرفتن یک ایستگاه تنها میزان کرد.

مثال ۷: پخش رادیویی با نور مرئی

لیزر دستگاهی است که امید بسیار می‌رود که بالاخره همان کنترلی را که اکنون در بسامدهای رادیویی و میکروموج موجود است، در تابش الکترومغناطیسی با نور مرئی به وجود آورد. افراد بسیاری برای توسعهٔ تکنیکهای مدوله کردن خروجی نور به گونه‌ای شبیه به روشی که یک فرستندهٔ رادیویی یا تلویزیونی موج حاملش را مدوله می‌کند، به شدت کار می‌کنند. فرض کنید که تکنیکهای مدولاسیون مناسبی برای بیشترین قسمت دامنهٔ نور مرئی توسعه پیدا کند. نور به‌عنوان موج حامل به‌کار برده می‌شود. پهنای نوار لازم 10 Mc بر هر کانال است. طول موجهای نور مرئی از حدود 6500 \AA (قرمز) تا 4500 \AA (آبی) است یعنی بسامدهای از $4.6 \times 10^8 \text{ Mc} = 4.6 \times 10^{14} \text{ Hz}$ تا $6.7 \times 10^8 \text{ Mc} = 6.7 \times 10^{14} \text{ Hz}$. از این رو، نوار کلی بسامد که می‌تواند قابل استفاده باشد برابر $4.6 \times 10^8 \text{ Mc}$ تا $6.7 \times 10^8 \text{ Mc}$ یعنی پهنای نوار برابر $2 \times 10^8 \text{ Mc}$ است. بدین ترتیب 2×10^7 کانال تلویزیونی که یکدیگر را نمی‌پوشانند و پهنای نوار هر کدام 10 Mc است ممکن است وجود داشته باشند. (در این صورت می‌توان درخواست کرد که حداقل یک در میلیون از این کانالها به تلویزیون آموزشی اختصاص داده شود.)

حل دقیق تپ $\psi(t)$ که با طیف بسامد "مربعی" تولید شده است. اکنون رابطهٔ صریحی برای تپ $\psi(t)$ به‌دست می‌آوریم که از برهم‌نهی N مؤلفهٔ هماهنگ مختلف تشکیل شده است که دامنه‌های مساوی A ، ثابتهای فاز مساوی (صفر) و بسامدهایی دارند که بین پایتترین بسامد ω_1 و بالاترین بسامد ω_2 به‌طور یکنواخت توزیع شده است. این همان برهم‌نهی است که در

”عکسهای فوری استروئوسکوپی“ شکل ۴-۶ نشان داده شده است. این برهم‌نهش به صورت زیر داده می‌شود

$$\psi(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos(\omega_1 + \delta\omega)t + A \cos(\omega_1 + 2\delta\omega)t + \dots + A \cos \omega_2 t \quad (45)$$

که در آن $\delta\omega$ جدایی بسامد بین مؤلفه‌های مجاور است، یعنی

$$\delta\omega \equiv \frac{\omega_2 - \omega_1}{N - 1} = \frac{\Delta\omega}{N - 1} \quad (46)$$

معادله (۴۵)، $\psi(t)$ را به صورت برهم‌نهشی خطی از چندین مؤلفه دقیقاً هماهنگ بیان می‌کند. اکنون می‌خواهیم برای $\psi(t)$ رابطه دیگری به شکل یک نوسان تقریباً هماهنگ با تنها یک بسامد نوسان ”تند“ ω_{av} پیدا کنیم که با رابطه زیر داده شود

$$\omega_{av} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \quad (47)$$

و دارای دامنه $A(t)$ که در مقیاس زمانی نوسانهای تند ”تقریباً“ ثابت است، باشد. یعنی از تجربه‌ای که از برهم‌نهش فقط دو نوسان هماهنگ به دست آوردیم (بخش ۵-۲). امیدواریم که رابطه‌ای به شکل زیر پیدا کنیم

$$\psi(t) = A(t) \cos \omega_{av} t \quad (48)$$

چنین رابطه‌ای را واقعاً پیدا خواهیم کرد. چنین خواهیم یافت که اگر $\Delta\omega$ در مقایسه با ω_{av} کوچک باشد، در آن صورت $A(t)$ در مقیاس زمانی نوسانهای تند به آهستگی تغییر می‌کند. (با وجود این، بدون توجه به این شرط پاسخ به دست آمده دقیق خواهد بود.) بنابراین $\psi(t)$ را به شکل یک نوسان تقریباً هماهنگ با دامنه مدوله شده خواهیم نوشت. همان‌گونه که قبلاً به طور کیفی در شرح شکل ۴-۶ نشان دادیم، خواهیم یافت که $\psi(t)$ شکل یک تپ را دارد. از روی رابطه دقیق، خواهیم فهمید که منظور از این عبارت که حاصلضرب پهنای نوار و مدت زمان تقریباً برابر با واحد است، چیست.

برای ساده‌تر کردن محاسبات جبری، اعداد مختلط را به کار می‌بریم. برهم‌نهش معادله (۴۵)

برابر است با حاصلضرب ثابت A در جزء حقیقی تابع مختلط $f(t)$

$$f(t) = e^{i\omega_1 t} + e^{i(\omega_1 + \delta\omega)t} + e^{i(\omega_1 + 2\delta\omega)t} + \dots + e^{i(\omega_1 + \Delta\omega)t} \quad (49)$$

$$\equiv e^{i\omega_1 t} S$$

که در آن [با قرار دادن $a = e^{i \delta \omega t}$ و استفاده از $\Delta \omega = (N - 1) \delta \omega$] حاصل جمع S ، سری هندسی زیر است

$$S = 1 + a + a^2 + \dots + a^{N-1}$$

بنابراین

$$aS = a + a^2 + \dots + a^{N-1} + a^N$$

$$(a - 1)S = a^N - 1$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{a^N - 1}{a - 1} = \frac{e^{iN \delta \omega t} - 1}{e^{i \delta \omega t} - 1} \\ &= \frac{e^{(1/2)(iN \delta \omega t)}}{e^{(1/2)(i \delta \omega t)}} \cdot \left[\frac{e^{(1/2)(iN \delta \omega t)} - e^{-(1/2)(iN \delta \omega t)}}{e^{(1/2)(i \delta \omega t)} - e^{-(1/2)(i \delta \omega t)}} \right] \\ &= e^{(1/2)i(N-1) \delta \omega t} \frac{\sin \frac{1}{2} N \delta \omega t}{\sin \frac{1}{2} \delta \omega t} \\ &= e^{(1/2)i \Delta \omega t} \frac{\sin \frac{1}{2} N \delta \omega t}{\sin \frac{1}{2} \delta \omega t} \end{aligned}$$

از این رو

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{i\omega_1 t} S = e^{i[\omega_1 + (1/2)\Delta\omega]t} \frac{\sin \frac{1}{2} N \delta \omega t}{\sin \frac{1}{2} \delta \omega t} \\ &= e^{i\omega_{av} t} \frac{\sin \frac{1}{2} N \delta \omega t}{\sin \frac{1}{2} \delta \omega t} \end{aligned}$$

سرانجام $\psi(t)$ برابر است با حاصلضرب ثابت A در جزء حقیقی $f(t)$:

$$\psi(t) = A \cos \omega_{av} t \frac{\sin \frac{1}{2} N \delta \omega t}{\sin \frac{1}{2} \delta \omega t}$$

یعنی

$$\psi(t) = A(t) \cos \omega_{av} t \quad (50)$$

که در آن

$$A(t) = A \frac{\sin \frac{1}{2} N \delta \omega t}{\sin \frac{1}{2} \delta \omega t} \quad (51)$$

معادله (51) دقیق است. حال ببینیم که آیا هنگامی که فقط دو جمله وجود دارد، رابطه بالا به شکل آشنایی که در مورد زنشها دیدیم تغییر می‌کند: با قراردادن $N = 2$ در معادله (51) و

استفاده از اتحاد $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ که در آن $x = \frac{1}{4} \delta \omega t$ است، رابطه زیر به دست می‌آید

$$N = 2: \quad \psi(t) = [2A \cos \frac{1}{4} \delta \omega t] \cos \omega_{av} t \\ = 2A \cos \frac{1}{4} (\omega_1 - \omega_2) t \cos \omega_{av} t$$

این همان رابطه‌ای است که در بخش ۵-۱ برای زنشها پیدا کردیم.

شکل راحت‌تر معادله (۵۱) از حذف ثابت A به نفع $A(\circ)$ یعنی مقدار $A(t)$ در زمان $t = \circ$ به دست می‌آید. بررسی معادله (۵۱) نشان می‌دهد که در محاسبه $A(t)$ به ازای $t = \circ$ باید دقت فراوان به کار ببریم زیرا هم صورت و هم مخرج معادله (۵۱) به ازای این مقدار صفر می‌شود. مسئله با بسط صورت و مخرج کسر برحسب سری تیلور به ازای $t = \circ$ به آسانی حل می‌شود. با قرار دادن $\theta \equiv \frac{1}{4} \delta \omega t$ داریم

$$\frac{\sin N\theta}{\sin \theta} = \frac{N\theta - \frac{1}{6}(N\theta)^3 + \dots}{\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots} \quad (52)$$

برای θ به اندازه کافی کوچک، می‌توانیم از تمام جملات بجز اولین جمله در صورت و اولین جمله در مخرج صرف‌نظر کنیم. بنابراین نتیجه می‌شود

$$\lim_{\theta \rightarrow \circ} \left\{ \frac{\sin N\theta}{\sin \theta} \right\} = N \quad (53)$$

بنابراین از معادله (۵۱) نتیجه می‌شود

$$A(\circ) = NA, \quad A = \frac{A(\circ)}{N} \quad (54)$$

یعنی

$$A(t) = A(\circ) \frac{\sin \frac{1}{4} N \delta \omega t}{N \sin \frac{1}{4} \delta \omega t} \quad (55)$$

اکنون به طرف حد جالبی که در آن N بسیار بزرگ است می‌رویم. هنگامی که N به اندازه کافی بزرگ شود، فاصله بسامد $\delta \omega$ بین مؤلفه‌های هماهنگ مجاور به اندازه کافی کوچک خواهد شد. به طوری که دو بسامد مجاور را با هیچ دستگاه تجربی که در ذهن داریم، نمی‌توان از یکدیگر تمیز داد. (این درس فیزیک است نه ریاضی، در نهایت باید در هر حال همیشه دستگاهی در ذهن داشته باشیم.) در این صورت می‌توانیم فکر کنیم که مؤلفه‌های بسامد اساساً به طور پیوسته

توزیع شده‌اند. به چنین مقدار به اندازه کافی بزرگ N اصطلاحاً "بینهایت" گفته می‌شود. برای مقدار بسیار بزرگ N می‌توانیم از اختلاف بین N و $N - 1$ صرف‌نظر کنیم. در این صورت

$$N = \text{بسیار بزرگ} : \quad N \delta\omega \approx (N - 1)\delta\omega = \Delta\omega \quad (56)$$

از این رو N را به سمت بینهایت و $\delta\omega$ را به سمت صفر میل می‌دهیم. حاصلضرب آنها همواره پهنای نوار $\Delta\omega$ است. در معادله (55) در جمله $\sin \frac{1}{N} \delta\omega t$ مخرج فرض می‌کنیم که $\delta\omega$ به سمت صفر می‌رود ولی t به سمت بینهایت نمی‌رود (زیرا آزمایش باید زمانی خاتمه پیدا کند). در این صورت در سری تیلور $\sin \frac{1}{N} \delta\omega t$ از تمام جمله‌ها جز اولین جمله می‌توانیم صرف‌نظر کنیم. بنابراین نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} A(t) &= A(\circ) \frac{\sin \frac{1}{N} N \delta\omega t}{N \sin \frac{1}{N} \delta\omega t} \\ &= A(\circ) \frac{\sin \frac{1}{N} \Delta\omega t}{N \cdot \frac{1}{N} \delta\omega t} \\ &= A(\circ) \frac{\sin \frac{1}{N} \Delta\omega t}{\frac{1}{N} \Delta\omega t} \end{aligned} \quad (57)$$

و

$$\psi(t) = A(t) \cos \omega_{av} t \quad (58)$$

اکنون به عبارت برهم‌نهشی $\psi(t)$ یعنی معادله (45)، برمی‌گردیم و آن را با روش مناسبی که مربوط به حد $\delta\omega \rightarrow 0$ است بیان می‌کنیم. با استفاده از معادلات (54) و (56) داریم

$$A = \frac{A(\circ)}{N} = \frac{A(\circ)}{\Delta\omega} \delta\omega \quad (59)$$

در این صورت معادله برهم‌نهشی (54) را به صورت زیر می‌توان بیان کرد،

$$\psi(t) = \frac{A(\circ)}{\Delta\omega} [\delta\omega \cos \omega_1 t + \delta\omega \cos(\omega_1 + \delta\omega)t + \dots + \delta\omega \cos \omega_2 t] \quad (60)$$

اما، در حد $\delta\omega \rightarrow 0$ ، عبارت داخل کروشه درست برابر با انتگرال حاصلضرب $\cos \omega t$ در $d\omega$ است (به جای حرف δ حرف d قرار می‌دهیم) که از $\omega_1 = \omega$ تا ω_2 انتگرال گرفته می‌شود. از این رو معادله (60) به صورت زیر در می‌آید

$$\psi(t) = \frac{A(\circ)}{\Delta\omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos \omega t \, d\omega \quad (61)$$

انتگرال فوریه. معادله (۶۱) مثالی از یک برهم‌نهمش پیوسته هماهنگ یا انتگرال فوریه است. چنین است که هر تابع غیرتناوبی (مناسب) مانند $\psi(t)$ را می‌توان به صورت برهم‌نهمش پیوسته فوریه شکل کلی زیر بیان کرد

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin \omega t \, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega t \, d\omega \quad (۶۲)$$

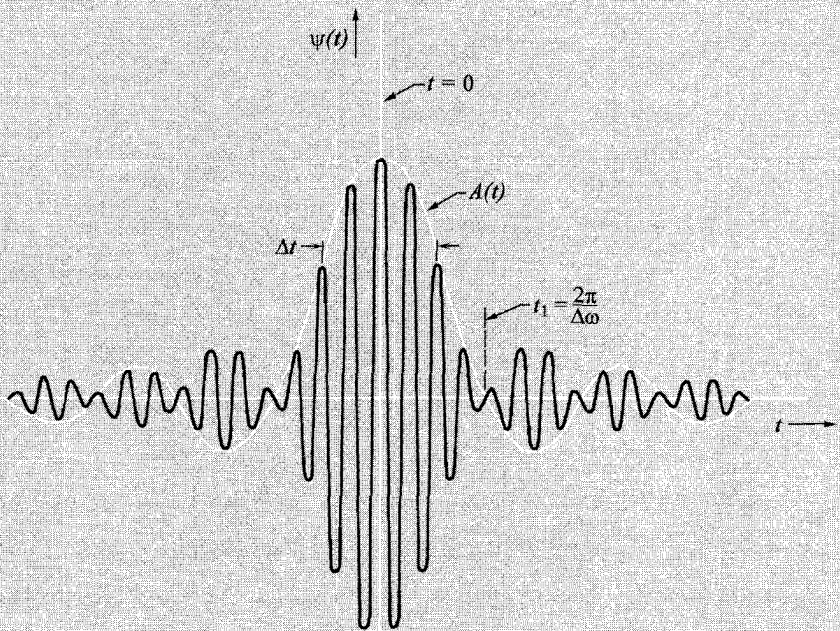
توابع پیوسته $A(\omega)$ و $B(\omega)$ به سبب تشابهی که با ثابتهای سری فوریه با بسامدهای مجزا دارند، با همان نام ضرایب فوریه $\psi(t)$ نامیده می‌شوند.

از مقایسه معادلات (۶۱) و (۶۲) می‌بینیم که تابع $\psi(t)$ که با معادلات (۵۷) و (۵۸) داده شده است، دارای ضرایب فوریه زیر است

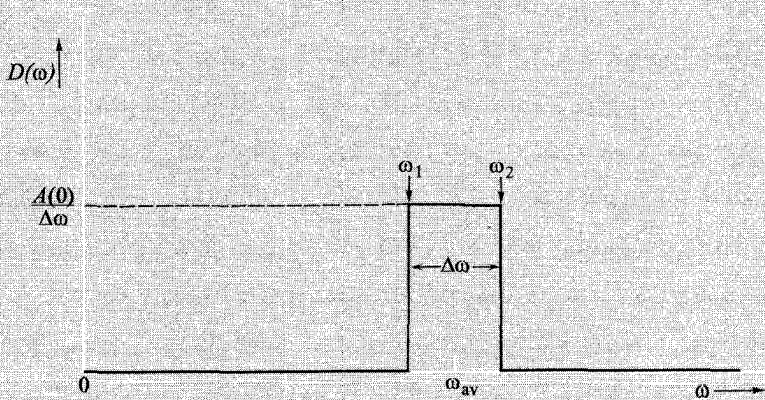
$$\begin{aligned} A(\omega) &= 0 && \text{برای تمام مقادیر } \omega \\ B(\omega) &= 0 && \text{برای مقادیر } \omega \text{ خارج از فاصله } \omega_1 \text{ و } \omega_2 \\ B(\omega) &= \frac{A(0)}{\Delta\omega} && \text{برای مقادیر } \omega \text{ بین } \omega_1 \text{ و } \omega_2 \end{aligned} \quad (۶۳)$$

طیف بسامدی فوریه. منحنی تغییرات ضرایب فوریه برحسب ω طیف بسامدی برهم‌نهمش پیوسته فوریه نامیده می‌شود. طیفی که با معادله (۶۳) داده شده است ساده‌ترین طیفی است که می‌تواند وجود داشته باشد. این طیف در داخل یک نوار بسامدی محدود و مشخص به پهنای $\Delta\omega$ "مسطح" است [یعنی $B(\omega)$ ثابت است] و در جای دیگر صفر است. به سبب شکل ظاهری منحنی تغییرات، چنین طیفی گاهی اوقات یک طیف "مربعی" نامیده می‌شود. [در حالت کلی، مجبور هستیم دو منحنی تغییرات یکی برای $A(\omega)$ و دیگری برای $B(\omega)$ رسم کنیم].

در شکل ۶-۶ منحنی تغییرات تپ $\psi(t)$ و ضریب فوریه $B(\omega)$ آن رسم شده است. توجه کنید که اولین مقدار صفر $A(t)$ (برای t مثبت) به ازای زمان t_1 است که در رابطه $t_1 = 2\pi/\Delta\omega$ صدق می‌کند. این مدت زمانی است که طول می‌کشد تا تمام مؤلفه‌های بسامد به طور یکنواخت برحسب فاز نسبی در یک فاصله 2π رادیان توزیع شوند یعنی همان نتیجه‌ای که از "عکسهای فوری استروپوسکوپی" شکل ۶-۴ قبلاً به دست آوردیم. برای مدت زمان Δt که در طول آن دامنه تابع $\psi(t)$ ، یعنی $A(t)$ ، نسبتاً بزرگ است، می‌توانیم فاصله بین دو صفر $A(t)$ به ازای $t = -t_1$ و $t = +t_1$ را اختیار کنیم. اما آن مقدار زیاد از حد بزرگ است. مناسبتر آن است که Δt را فاصله‌ای اختیار کنیم که در خارج از آن $\psi(t)$ (دامنه از دست‌رفته‌اش را) "هرگز باز نمی‌یابد." تعریف مفیدی از تمام پهنای Δt (برای این تپ بخصوص) آن است که نصف فاصله زمانی بین



(الف)



(ب)

شکل ۶-۶ آنالیز فوریه از یک تابع غیرتناوبی. (الف) تپ $\psi(t)$ مربوط به معادلات (۵۷) و (۵۸) است. (ب) طیف بسامد پیوسته از ضرایب فوریه که با معادله (۶۳) داده شده است. چون $\psi(t)$ یک تابع زوج از t است، ضریب فوریه $A(\omega)$ به ازای تمام مقادیر ω صفر است. این ضریب رسم نشده است.

دو صفر به‌ازای $t = \pm t_1$ را اختیار کنیم. از این‌رو می‌توانیم مدت این تپ را به شرح زیر تعریف کنیم

$$\Delta t = t_1 = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

$$\Delta\nu \Delta t = 1 \quad (64)$$

معادله (۶۴) به‌جای آنکه علامت "تقریباً برابر" داشته باشد علامت "برابر" دارد زیرا آنچه را که منظور ما از مدت Δt برای این تپ است، دقیقاً تعریف کردیم. برطبق تعریف، $A(t)$ در دو انتهای فاصله Δt به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$A\left(\frac{t_1}{2}\right) = A(0) \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} A(0) \quad (65)$$

از این‌رو در ابتدا و انتهای فاصله Δt ، دامنه $A(t)$ به‌اندازه ضریب $2/\pi$ از مقدار بیشینه آن کمتر است.

یک نوسانگر "تقریباً هماهنگ" با جابه‌جایی $\psi(t) = A(t) \cos \omega_{av} t$ دارای انرژی ذخیره‌شده‌ای متناسب با $A^2(t)$ است. بنابراین انرژی در مرکز تپ (به‌ازای $t = 0$) بیشینه است و در ابتدا و انتهای فاصله Δt به نسبت $0.406 = (2/\pi)^2$ مقدار بیشینه کاهش می‌یابد. بنابراین، تعریف ما از مدت زمان، Δt مدتی است که در طول آن نوسانگر حداقل ۴۰ درصد از بیشینه انرژی ذخیره‌شده‌اش را داراست.

در بخش ۴-۶ مثالهای بیشتری از تپها و برهم‌نهشهای پیوسته فوریه مربوط به آنها را مطالعه خواهیم کرد.

بسته‌موج پیش‌رونده. فرض کنید فرستنده‌ای که در $z = 0$ قرار دارد حرکتی را به‌شکل یک تپ مشابه با حرکت شکل ۶-۶، باعث می‌شود. از آنجا که فرستنده امواج را در مدت زمان محدودی به‌داخل محیط تابش می‌کند و از آنجا که امواج منتشر شده از فرستنده دور می‌شوند، تپی از امواج با گستره‌ای محدود در فضا تشکیل می‌دهند. چنین تپی بسته‌موج یا گروه موج نامیده می‌شود. بسته‌موج با سرعت گروه منتشر می‌شود. از آنجا که k و ω از طریق رابطه پاشندگی $k(\omega)$ به یکدیگر مربوط می‌شوند، وجود یک نوار Δk از بسامدهایی که به‌وسیله فرستنده تابش می‌شود مستلزم آن است که در بسته‌موج یک نوار Δk از اعداد موج (و طول موجهای مربوط به آنها) وجود داشته باشد. به بسامد اصلی ω ، عدد موج اصلی $k_0 = k(\omega_0)$ مربوط می‌شود [یعنی k_0 با جایگزین کردن $\omega = \omega_0$ در تابع $k(\omega)$ به‌دست می‌آید]. نوار Δk به مرکز k_0 است و با مشتق‌گیری از رابطه پاشندگی و قرار دادن $\omega = \omega_0$ به‌دست می‌آید:

$$\Delta k = \left(\frac{dk}{d\omega}\right) \Delta\omega = \frac{\Delta\omega}{v_g} \quad (66)$$

که در آن از $v_g = (d\omega/dk)$ استفاده کرده‌ایم. [زیرنویس صفر بدان معنی است که مشتق در مرکز نوار محاسبه می‌شود. بعلاوه، در بسط سری تیلور رابطه پاشندگی که در آن معادله (۶۶) را می‌توان به عنوان جمله اول در نظر گرفت، از جملات مراتب بالاتر صرف‌نظر می‌کنیم].

حاصلضرب طول در پهنای نوار عدد موج. یک بسته به طول Δz که با سرعت گروه v_g حرکت می‌کند و در فاصله زمانی Δt از یک نقطه ثابت مفروض z می‌گذرد، به صورت زیر داده می‌شود

$$\Delta z \approx v_g \Delta t \quad (67)$$

از حاصلضرب معادلات (۶۶) و (۶۷) رابطه زیر به دست می‌آید

$$\boxed{\Delta k \Delta z \approx \Delta \omega \Delta t} \quad (68)$$

بنابراین از آنجا که $\Delta \omega \Delta t \geq 2\pi$ است داریم $\Delta k \Delta z \geq 2\pi$ یعنی با استفاده از عدد موج $\sigma \equiv k/2\pi = \lambda^{-1}$ نتیجه می‌شود

$$\boxed{\Delta \sigma \Delta z \gtrsim 1} \quad (69)$$

این رابطه کاملاً مانند رابطه کلی $\Delta \nu \Delta t \gtrsim 1$ است اما به یک تپ برحسب فضا اطلاق می‌شود به جای آنکه برحسب زمان باشد.

روش ساده دیگری برای به دست آوردن معادله (۶۹) آن است که "عدم یقین در پهنای نوار" یعنی در تعداد دوره تناوبهای موجود در Δz را در نظر بگیریم. از این رو σ (برحسب دوره تناوب بر واحد طول) به صورت زیر داده می‌شود

$$\sigma \approx \frac{\pm \frac{1}{\Delta z} \text{ دوره تناوبها}}{\Delta z} \quad (70)$$

به طوری که پهنای نوار عدد موج $\Delta \sigma$ تقریباً برابر با $1/\Delta z$ است. این رابطه مشابه رابطه $\Delta \nu \Delta t \approx 1$ برحسب فضا است که به دنبال معادله (۴۴) به دست آوردیم.

پهن شدن بسته موج با زمان. سرانجام باید خاطر نشان کنیم که طول Δz یک بسته موج هنگامی که بسته موج در یک محیط پاشنده منتشر می‌شود، ثابت باقی نمی‌ماند، بلکه بسته موج همان گونه که منتشر می‌شود، پهنتر می‌شود. دلیل آن این است که سرعت گروه $v_g = d\omega/dk$ (یا ω)

بستگی دارد. بنابراین نوار Δk که شامل نواری از سرعت‌های گروه Δv_g است، به صورت تقریبی زیر داده می‌شود

$$\Delta v_g = \left(\frac{dv_g}{dk} \right) \Delta k = \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right) \Delta k \quad (۷۱)$$

بسته‌موجی که در زمان $t = 0$ با پهنای $(\Delta z)_0$ شروع می‌شود در زمان t پهنای $(\Delta z)_t$ را خواهد داشت که تقریباً برابر است با

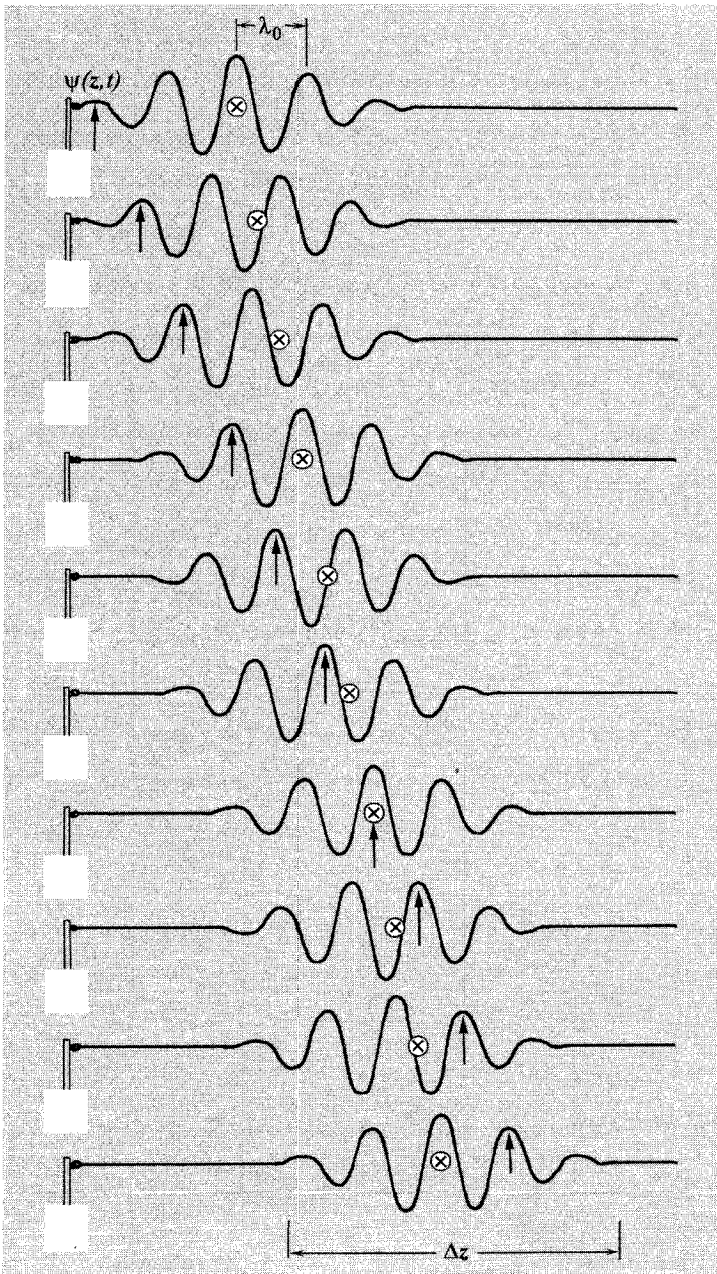
$$(\Delta z)_t \approx (\Delta z)_0 + (\Delta v_g)t \quad (۷۲)$$

به همین طریق زمان Δt که طول می‌کشد تا بسته‌موج از یک نقطه ثابت z بگذرد، افزایش پیدا می‌کند. [معادله (۶۸) به‌ازای تمام زمانها برقرار است و البته $\Delta\omega$ و Δk مقادیر ثابت هستند].

به سبب پهن شدن بسته‌موج، روابط $\Delta\sigma \Delta z \approx 1$ و $\Delta\nu \Delta t \approx 1$ بجز به‌ازای $t = 0$ نمی‌توانند برقرار باشند. برای آنکه خروجی فرستنده در رابطه $\Delta\nu \Delta t \approx 1$ صدق کند تمام مؤلفه‌های هماهنگ در زمان $t = 0$ را باید با فاز درست اختیار کنیم. با وجود این، هنگامی که بسته‌موج به فاصله کافی در محیط منتشر می‌شود، در یک نقطه پایین مسیر نمی‌توان تمام نوار Δk را هم‌فاز داشت، زیرا به سبب تغییرات در سرعت گروه، بعضی از اجزای گروه زودتر و برخی دیرتر به آن نقطه می‌رسند. از این‌رو برخلاف حالتی که در $t = 0$ وجود دارد، فازهای مؤلفه‌های مختلف بسامد موج در یک نقطه پایین مسیر با یکدیگر تفاوت دارند. در این صورت رابطه $\Delta\sigma \Delta z > 1$ به دست می‌آید.

البته اگر محیط "غیر پاشنده" باشد، در این صورت بسته‌موج پهن نمی‌شود و رابطه $\Delta\sigma \Delta z \approx 1$ برقرار خواهد ماند.

بسته‌های موج در آب. با پرتاب کردن یک سنگ‌ریزه به‌درون یک حوضچه می‌توانید یک بسته‌موج دایره‌ای منتشرشونده زیبا درست کنید. با مقداری تمرین می‌توانید یک بسته‌موج را با چشم‌هایتان دنبال کنید و تک‌تک موجک‌هایی را که در عقب به‌وجود می‌آیند و از میان بسته‌موج می‌گذرند و در جلو "ناپدید" می‌شوند، مشاهده کنید. (برای طول موجهای آب که بزرگتر از ۱٫۷ سانتیمتر، هستند سرعت فاز بزرگتر از سرعت گروه است؛ چنین حالتی معمولاً برای امواج حاصل از یک سنگ‌ریزه با اندازه متوسط روی می‌دهد. تصویر یک گروه موج که سرعت فاز آن دو برابر سرعت گروه است در شکل ۶-۷ نشان داده شده است.) به دانشجویان توصیه می‌کنیم که بسته‌های آب را در ظرفشویی آشپزخانه، وان حمام و حوضچه مطالعه کنند. چون امواج نسبتاً سریع حرکت می‌کنند (جدول ۵-۱ بخش ۵-۲ را ببینید)، به مقداری تمرین نیاز دارد اما این کوشش بی‌حاصل نیست. (به آزمایشهای خانگی مراجعه کنید.)



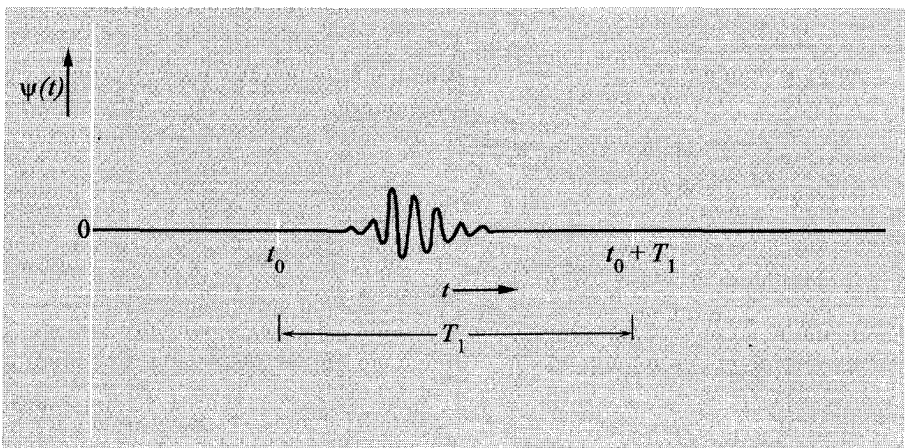
شکل ۶-۷ بسته موجی که سرعت فاز آن دو برابر سرعت گروه است. علامت پیکان با سرعت فاز حرکت می‌کند و نقطه‌ای با فاز ثابت از طول موج اصلی را دنبال می‌کند. علامت ضربدر با کل بسته موج با سرعت گروه حرکت می‌کند.

۴-۶ آنالیز فوریه تپها

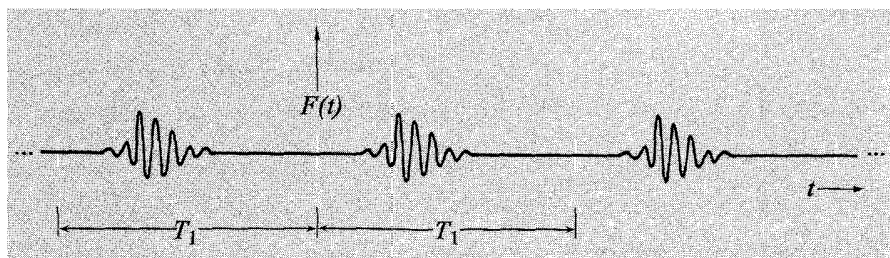
در بخش ۳-۶ اولین مثال از تابع زمانی $\psi(t)$ که به صورت برهم‌نهی پیوسته فوریه بسط داده شده بود (انتگرال فوریه) روبه‌رو شدیم. در این بخش نشان خواهیم داد که طیف پیوسته بسامد هر تپ (مناسب) را چگونه پیدا کنید و مثالهای متعددی ارائه خواهیم داد که در بسیاری از رشته‌های فیزیک به‌طور کلی کاربرد دارد.

تپ با مدت محدود. فرض کنید $\psi(t)$ همان‌گونه که در شکل ۸-۶ نشان داده شده است، به‌شکل یک تپ با مدت محدود است. فرض می‌کنیم که $\psi(t)$ در یک زمان t_0 به‌اندازه کافی زود، (و به‌ازای تمام زمانهای زودتر) برابر صفر است. همین‌طور فرض می‌کنیم که $\psi(t)$ در زمان به اندازه کافی دیر $t_0 + T_1$ (و به‌ازای تمام زمانهای دیرتر) برابر صفر است. بنابراین، همان‌گونه که در شکل ۸-۶ نشان داده شده است، فرض می‌کنیم که یک فاصله زمانی مشخص T_1 وجود دارد که در آن نوسانهای $\psi(t)$ روی می‌دهند. فاصله زمانی به مدت T_1 اختیاری است، فقط $\psi(t)$ به‌ازای تمام مقادیر خارج از این بازه زمانی باید صفر باشد. سرانجام T_1 را مقدار بسیار بزرگی (اما نه بینهایت) اختیار خواهیم کرد (در این صورت $\nu_1 \equiv 1/T_1$ "واحد بسامد" خواهد شد، واحدی که هر چقدر بخواهیم می‌توان کوچک اختیار کنیم).

در بخش ۳-۲ آموختیم که چگونه یک تابع تناوبی $F(t)$ را که به‌ازای تمام مقادیر t تعریف شده است و دوره تناوب T_1 دارد به‌طوری که $F(t + T_1) = F(t)$ است، آنالیز فوریه کنیم. همچنین فراگرفتم که تابعی را که فقط در یک فاصله محدود t تعریف شده است چگونه آنالیز فوریه کنیم.



شکل ۸-۶ تپ $\psi(t)$. برای زمانهای زودتر از t_0 یا دیرتر از $t_0 + T_1$ ، تابع $\psi(t)$ برابر صفر است.



شکل ۹-۶ تابع تناوبی $F(t)$ با زمان تناوب T_1 که به وسیله "تکرار" تپ در فاصله‌های زمانی متوالی T_1 ساخته شده است.

این تابع را با ساختن یک تابع تناوبی که به ازای تمام مقادیر t تعریف شده است و با تابع مورد نظر در گستره‌ای که تابع تعریف شده است، منطبق است، آنالیز فوریه کردیم. سپس توانستیم فرمولی را به کار ببریم که برای توابع تناوبی به دست آورده شده است. این دستورالعملی است که اکنون دنبال می‌کنیم. یک تابع تناوبی $F(t)$ با زمان تناوب T_1 می‌سازیم که در آن فاصله زمانی است که در شکل ۸-۶ نشان داده شده است و این عمل با "تکرار" تپ $\psi(t)$ در هر یک از فواصل مشابه به مدت T_1 به سادگی حاصل می‌شود. این تکرار در شکل ۹-۶ نشان داده شده است. سری فوریه تابع تناوبی $F(t)$ در معادلات ۴۹-۲ تا ۵۲-۲ بخش ۳-۲ داده شده است. در اینجا نتایجی را که به آنها نیاز داریم بازنویسی می‌کنیم:

$$F(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega_1 t \quad (۷۳)$$

که در آن

$$\omega_1 = 2\pi\nu_1 = \frac{2\pi}{T_1} \quad (۷۴)$$

بنابراین

$$B_0 = \frac{1}{T_1} \int_t^{t+T_1} F(t) dt \quad (۷۵)$$

$$B_n = \frac{2}{T_1} \int_t^{t+T_1} F(t) \cos n\omega_1 t dt \quad (۷۶)$$

$$A_n = \frac{2}{T_1} \int_t^{t+T_1} F(t) \sin n\omega_1 t dt \quad (۷۷)$$

که در آن

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

اکنون برای مسئله حاضر به معادلات (۷۳) تا (۷۷) تغییراتی می‌دهیم تا تپ $\psi(t)$ را برحسب برهم‌نهی نوسانهای هماهنگ بیان کنند.

ابتدا دقت می‌کنیم که جمله ثابت B که در معادله (۷۳) داده شده است نباید وجود داشته باشد (یعنی B صفر است). زیرا فرض کردیم که در زمانهای به‌اندازه کافی زود و به اندازه کافی دیر $\psi(t)$ برابر صفر است. یعنی در عبارت $\psi(t)$ ها هیچ‌گونه "جابه‌جایی ثابت" یا ولتاژ ثابت یا امثال آن وجود ندارد. (البته این بدان معنی نیست که اگر شما علاقه‌مند باشید نمی‌توانیم (مثلاً) ولتاژ DC را بر روی صفحات عمودی اسیلوسکوپ به شما نشان دهیم. این فقط بدان معنی است که ما به این مطلب علاقه‌مند نیستیم. قدرت عظیم اصل برهم‌نهی در این است که به ما اجازه می‌دهد اجزای "نه چندان مهم" برهم‌نهی را فعلاً کنار بگذاریم با این استدلال که "محتوای آنها را درک می‌کنیم و می‌توانیم آنها را بعداً اضافه کنیم.")

تبدیل کردن جمع فوریه به انتگرال فوریه. اکنون در باقیمانده سری بینهایت معادله (۷۳) چند جمله اول را در نظر می‌گیریم. این جمله‌ها شامل مؤلفه‌های $A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t$ و $A_2 \sin 2\omega_1 t + B_2 \cos 2\omega_1 t$ و غیره هستند. این چند جمله اول به‌طور قابل صرف‌نظر کردنی کوچک هستند. این مطلب از نمودار شکل ۸-۶ روشن است، می‌بینیم که هیچ مؤلفه‌ای از $\psi(t)$ وجود ندارد که به آهستگی نوسانی با زمان تناوب T_1 تغییر کند. تابع به‌طور مصنوعی بنا شده $F(t)$ به‌راستی دارای مؤلفه بسامدی با زمان تناوب T_1 است. اما از آنجا که T_1 اختیاری است (بجز برای ویژگیهایی که مشخص کرده‌ایم)، می‌توانیم آن را دو برابر کنیم یعنی به جای آن T_1 جدیدی که دو برابر باشد قرار دهیم. سپس آن را دو برابر کنیم و غیره و غیره. می‌بینیم که چون T_1 را هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم بزرگ اختیار کنیم، بسامد زاویه‌ای $\omega_1 = 2\pi/T_1$ را متقابلاً هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم کوچک اختیار کنیم. از این رو ثابتهای A_1 و B_1 که به‌طور مصنوعی وارد شده‌اند اگرچه کاملاً صفر نیستند، ولی (مانند B) اصلاً جالب توجه نیستند. ثابتهای A_2 و B_2 (به‌ازای T_1 به اندازه کافی بزرگ) اساساً صفر هستند. در حقیقت، می‌توانیم T_1 را آنقدر بزرگ بگیریم که تمام چند ثابت اولیه A_n و B_n قابل صرف‌نظر کردن باشند، که در آن منظور از "چند ثابت اولیه" می‌تواند مثلاً ده هزار ثابت اولیه باشد. اکنون n را آنقدر بزرگ در نظر می‌گیریم که A_n و B_n کاملاً قابل صرف‌نظر کردن نباشند. در معادله (۷۳) دو جمله متوالی که با n و $n+1$ مشخص شده‌اند در نظر بگیرید:

$$F(t) = \dots + A_n \sin n\omega_1 t + A_{n+1} \sin(n\omega_1 + \omega_1)t + \dots \quad (78)$$

اگر T_1 به‌اندازه کافی بزرگ باشد، می‌توانیم فرض کنیم که ω_1 آنقدر کوچک و n آنقدر بزرگ است (از چند n اولیه که ضرایب قابل صرف‌نظر کردن داشته‌اند رد شده‌ایم) که A_{n+1} فقط به‌طور بینهایت کوچک با n تفاوت دارد. در این صورت ممکن است $n\omega_1$ را به‌صورت یک متغیر پیوسته ω و A_n

را به صورت تابع پیوسته‌ای از ω در نظر بگیریم:

$$\omega = n\omega_1 \quad (۷۹)$$

هنگامی که n به اندازه δn افزایش می‌یابد و از n به $n + \delta n$ می‌رود، $\delta\omega$ را میزان تغییر ω در نظر می‌گیریم

$$\delta\omega = \omega_1 \delta n, \quad \delta n = \frac{\delta\omega}{\omega_1} \quad (۸۰)$$

اکنون δn را به اندازه کافی کوچک در نظر می‌گیریم به طوری که تمام ضرایب A_n در نوار از n به $n + \delta n$ اساساً با یکدیگر برابر باشند. در این صورت می‌توانیم تمام جملات معادله (۷۸) را که مربوط به نوار δn است در یک گروه قرار دهیم و برای همه آنها بسامد یکسان ω (مقدار متوسط ω در نوار $\delta\omega$) را در نظر بگیریم. از آنجا که (در یک نوار) تمام جمله‌ها مساوی هستند و از آنجا که δn جمله وجود دارد، [با استفاده از معادلات (۷۹) و (۸۰)] می‌توانیم سری بینهایت معادله (۷۸) را به شکل زیر بنویسیم

$$\begin{aligned} F(t) &= \dots + \delta n A_n \sin n\omega_1 t + \dots \\ &= \dots + \delta\omega \frac{A_n}{\omega_1} \sin \omega t + \dots \\ &\equiv \dots + \delta\omega A(\omega) \sin \omega t + \dots \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin \omega t d\omega + \dots \end{aligned} \quad (۸۱)$$

برای رسیدن به آخرین معادله، صرفاً به این نکته توجه کردیم که حاصل جمع نوارهای متوالی به پهنای $\delta\omega$ را می‌توان به صورت انتگرالی نوشت که در آن به جای $\delta\omega$ نشانه متداولتر $d\omega$ قرار داده شده است. نماد (...) نشاندهنده جمله‌های باقیمانده در معادله (۷۳) است که از حاصل جمع $\sum B_n \cos n\omega_1 t$ نتیجه می‌شود. این حاصل جمع نیز به یک انتگرال بدل می‌شود. از این رو رابطه کلی زیر به دست می‌آید

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin \omega t d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (۸۲)$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= A(n\omega_1) = \frac{A_n}{\omega_1} \\ B(\omega) &= B(n\omega_1) = \frac{B_n}{\omega_1} \end{aligned} \quad (۸۳)$$

توجه کنید که متغیر پیوسته ω از صفر شروع شده است. این کار را بدان سبب می‌توانیم انجام دهیم که می‌دانیم A_n و B_n در نزدیکی $\omega = 0$ برابر صفر هستند به طوری که $A(\omega)$ و $B(\omega)$ در نزدیکی $\omega = 0$ باید برابر صفر باشند.

بر طبق معادلات (۸۳) و (۷۷)، $A(\omega)$ با رابطه زیر داده می‌شود

$$A(\omega) = \frac{2}{\omega T_1} \int_t^{t+T_1} F(t) \sin \omega t dt$$

یعنی چون $\omega T_1 = 2\pi$ است

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \sin \omega t dt$$

که در آن از این نکته استفاده کرده‌ایم که انتگرال تابع تناوبی $F(t)$ که به طور مصنوعی ساخته شده است، بر روی یکی از زمانهای تناوبش، با انتگرال تپ غیرتناوبی $\psi(t)$ ، بر روی تمام زمانها، برابر است.

انتگرال فوریه. سرانجام تابع تناوبی $F(t)$ که در معادله (۸۲) داده شده است را می‌توانیم کنار بگذاریم و انتگرال فوریه را بنویسیم

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \sin \omega t d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (۸۴)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \sin \omega t dt \quad (۸۵)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \cos \omega t dt \quad (۸۶)$$

اکنون می‌توانیم این فرمولها را در مثالهای جالبی به کار ببریم.

کاربرد: طیف بسامد مربعی

فرض کنید که $A(\omega)$ برای تمام مقادیر ω برابر صفر است و $B(\omega)$ برای تمام مقادیر ω در فاصله از ω_1 تا ω_2 مقداری ثابت است و برای تمام مقادیر دیگر ω صفر است. مقدار ثابت B در این فاصله را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که "مساحت" منحنی نمایش $B(\omega)$ بر حسب ω برابر واحد باشد، یعنی

$$B(\omega) = \frac{1}{\Delta\omega} \quad \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega \quad (۸۷)$$

$$B(\omega) = 0 \quad \text{برای بقیه مقادیر } \omega$$

[توجه کنید که چون $B(\omega)$ به‌گونه‌ای انتخاب شده است که یکای معکوس بسامد داشته باشد، نتیجه می‌شود که $\psi(t)$ باید بدون بُعد باشد.] جواب $\psi(t)$ چنین است:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_0^{\infty} A(\omega) \sin \omega t \, d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t \, d\omega \\ &= 0 + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\Delta\omega} \cos \omega t \, d\omega = \frac{1}{\Delta\omega} \cdot \frac{\sin \omega t}{t} \Big|_{\omega=\omega_1}^{\omega=\omega_2} \\ \psi(t) &= \frac{\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t}{\Delta\omega t} = \frac{\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t}{(\omega_2 - \omega_1)t} \end{aligned} \quad (88)$$

صورت کسر معادله (۸۸) برهم‌نهشی است از نوعی که قبلاً دیده‌ایم که مدولاسیونها با بسامد $t = 0$ مدولاسیون $\frac{1}{t}(\omega_2 - \omega_1)$ را به دست می‌دهد. مخرج کسر شامل ضریب t است که به‌ارزی $t = 0$ مقدار $\psi(t)$ بزرگترین می‌شود.

اکنون معادله (۸۸) را به صورت یک نوسان تقریباً هماهنگ با بسامد متوسط ω_0 و با دامنه‌ای که به‌طور آهسته تغییر می‌کند می‌نویسیم:

$$\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1), \quad \frac{1}{2}\Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \quad (89)$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega, \quad \omega_1 = \omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega$$

$$\psi(t) = \frac{\sin(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega)t - \sin(\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega)t}{\Delta\omega t} = \left[\frac{\sin \frac{1}{2}\Delta\omega t}{\frac{1}{2}\Delta\omega t} \right] \cos \omega_0 t \quad (90)$$

از این رو $\psi(t)$ یک نوسان تند است، با دامنه $A(t)$ که آهسته تغییر می‌کند:

$$\psi(t) = A(t) \cos \omega_0 t$$

$$A(t) = \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta\omega t}{\frac{1}{2}\Delta\omega t} \quad (91)$$

نتیجه حاصل یعنی معادله (۹۱) مانند معادله‌ای است که در بخش ۳-۶ به دست آوردیم که در آنجا برهم‌نهش N نوسان هماهنگ را مطالعه کردیم که دارای N بسامد مختلف مجزا هستند که به‌طور یکنواخت بین ω_1 و ω_2 توزیع شده‌اند. هنگامی که حد $N \rightarrow \infty$ را اختیار کردیم، معادله (۹۱) را به دست آوردیم. [معادلات (۵۷) و (۵۸) بخش ۳-۶ را ببینید.] تپ $\psi(t)$ و ضریب فوریه $B(\omega)$ در شکل ۶-۶ رسم شده‌اند.

کاربرد: تپ مربعی برحسب زمان

فرض کنید که $\psi(t)$ در تمام زمانها بجز در فاصله‌ای به مدت Δt و به مرکز t_0 که از t_1 تا t_2 ادامه دارد، صفر است. در این فاصله مقدار $\psi(t)$ ثابت است. مقدار ثابت را به‌گونه‌ای اختیار می‌کنیم که انتگرال $\psi(t)$ در فاصله Δt برابر واحد باشد:

$$\psi(t) = \frac{1}{\Delta t}, \quad t_1 \leq t \leq t_2 = t_1 + \Delta t \quad (92)$$

اکنون ضرایب فوریه $A(\omega)$ و $B(\omega)$ را پیدا می‌کنیم.

توجه کنید اگر t_0 صفر باشد، در این صورت $\psi(t)$ یک تابع زوج از t است و از این رو $A(\omega)$ باید صفر باشد (زیرا $\sin \omega t$ یک تابع فرد است). به‌ازای یک t_0 اختیاری، به $A(\omega)$ و $B(\omega)$ هر دو نیاز داریم یعنی هم تابع فرد $\sin \omega t$ و هم تابع زوج $\cos \omega t$ را داریم. با رعایت یک نکته می‌توانیم در نیمی از کار صرفه‌جویی کنیم. در نتایج کلی به‌جای t کافی است $t - t_0$ قرار دهیم. بنابراین، چون $\psi(t)$ یک تابع زوج از $t - t_0$ است، داریم

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega(t - t_0) d\omega \quad (93)$$

که در آن

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \cos \omega(t - t_0) dt \quad (94)$$

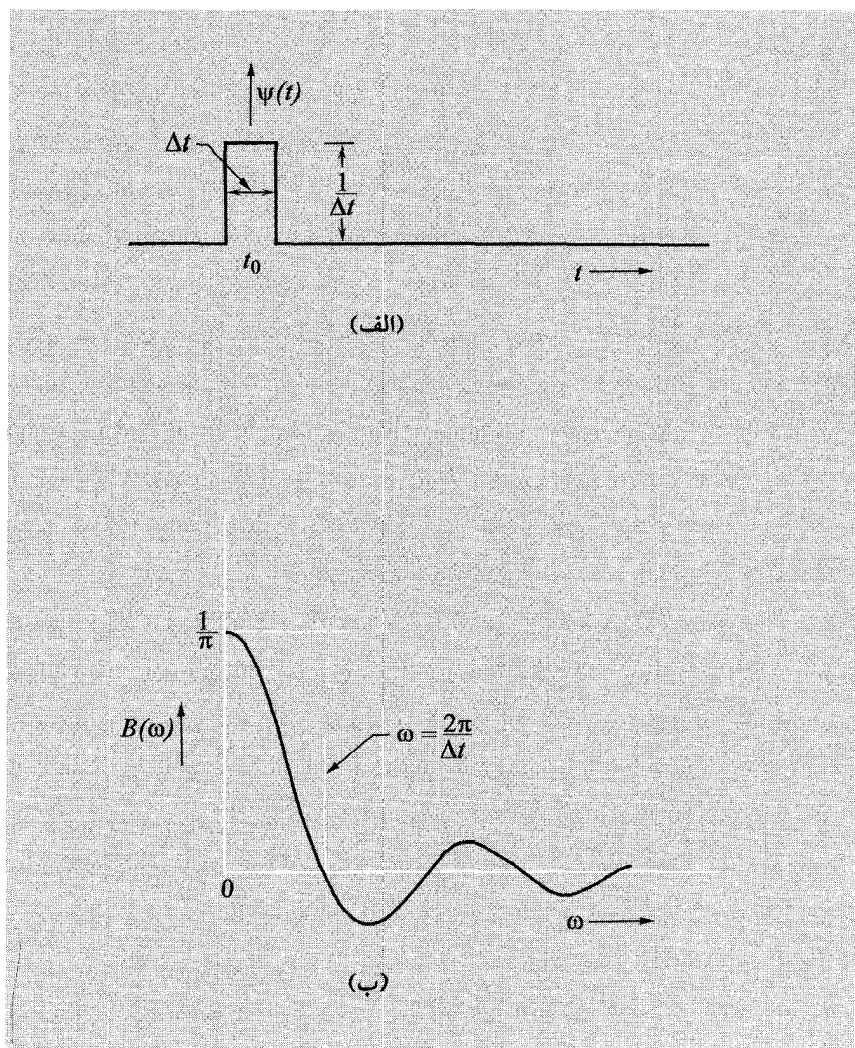
پس از انتگرال‌گیری ساده‌ای که انجام آن را به شما محول می‌کنیم (مسئله ۶-۲۰)، داریم

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta t \omega}{\frac{1}{2} \Delta t \omega} \quad (95)$$

تپ مربعی معادله (۹۲) و ضریب فوریه $B(\omega)$ آن در شکل ۶-۱۰ رسم شده‌اند. توجه کنید که اگر $\Delta \omega$ را فاصله‌ای از کمینه بسامد که صفر است، تا اولین صفر ضریب فوریه $B(\omega)$ تعریف کنیم، داریم

$$\Delta \omega \Delta t = 2\pi, \quad \Delta \nu \Delta t = 1 \quad (96)$$

استفاده از پیانو برای آنالیز فوریه کف‌زدن. در اینجا کاربردی از طیف فوریه را که در شکل ۶-۱۰ رسم شده است ذکر می‌کنیم. فرض کنید می‌خواهید مدت تقریبی صدای بلندی را بدانید که هنگام به‌هم زدن دستهایتان می‌شنوید. تصور کنید که اتفاقاً میکروفون، تقویت‌کننده صوتی و اسیلوسکوپ ندارید بلکه یک پیانو دارید. پدال میراگر پیانو را پایین نگاه دارید به طوری که تمام



شکل ۱۰-۶ تب مربعی $\psi(t)$ و ضریب فوریه $B(\omega)$ آن.

سیمها بتوانند ارتعاش کنند. آنگاه دستهایتان را نزدیک تخته صوتی نگاه دارید و کف بزنید. پیانو، کف زدن را آنالیز فوریه می‌کند، و آنالیز را بر روی سیمهای مرتعش شده حفظ می‌کند. اگر بتوانید بالاترین ارتفاع نتی را که در آن شدت صوت حاصل از سیمها زیاد است برآورد کنید، در این صورت آن بسامد باید تقریباً برابر با $\nu \approx 1/\Delta t$ باشد. این مثال فیزیکی، اطلاع بیشتری از مفهوم آنالیز فوریه به دست می‌دهد، که به شرح زیر است:

با تقریب مشخصی، تمام سیمها به وسیله موج فشار هوا که در مدت Δt دوام دارد به یک جهت فشار داده می‌شوند. در ابتدای نوسان گذرا، این سیمها با بسامد طبیعی‌شان شروع به نوسان می‌کنند. سیمهایی که بسامد آنها در مقایسه با $1/\Delta t$ کوچک است، پیش از آنکه نیرو پایان یابد، کسر قابل توجهی از یک دوره تناوب نوسان طبیعی را نمی‌پیمایند. این سیمها در تمام فاصله Δt شتاب می‌گیرند. سیمی که زمان تناوب آن دقیقاً Δt است، با موج فشاری در نیم‌تناوب اول به مدت $\frac{1}{2}\Delta t$ شتاب می‌گیرد و در نیم‌تناوب بعدی از شتاب می‌افتد. این سیم به همان اندازه که شتاب گرفته است، از شتاب می‌افتد و بنابراین پس از متوقف شدن نیرو ابدأ ارتعاش نمی‌کند. از این رو سیمهایی که دارای بسامد طبیعی از صفر تا اندکی کمتر از $1/\Delta t$ هستند، با دامنه مثبت تحریک می‌شوند. سیم با بسامد $1/\Delta t$ دامنه صفر دارد؛ این بسامد نیز بسامد اولین صفر ضریب فوریه $B(\omega)$ است که با معادله (۹۵) داده می‌شود. سیمهای با بسامد بین $1/\Delta t$ و $2/\Delta t$ در زمان Δt ، بین یک تا دو تناوب کامل می‌سازند. تناوب اول به این معنی که هیچ ضربه‌ای از تپ فشار نمی‌گیرد و، هدر می‌شود. سیم با بسامد $2/\Delta t$ دو تناوب کامل انجام می‌دهد و هیچ ضربه‌ای نمی‌گیرد. از این رو دومین صفر $B(\omega)$ به‌ازای بسامد $2/\Delta t$ است. سیم با بسامد $1.5/\Delta t$ نسبتاً خوب کار می‌کند یعنی اولین تناوب آن هدر می‌رود اما نیرو در نیمه اول تناوب دوم، در همان جهت فشار می‌دهد. سپس نیرو پایان می‌پذیرد. این سیم به اندازه $\frac{1}{2}$ "مقدار" خارج از تپ می‌شود زیرا سه نیم‌تناوب از نوسان طبیعی‌اش را انجام می‌دهد که دو نیم‌تناوب سهمهای خنثی‌کننده دارند. متقابلاً سیمی با بسامد $\frac{1}{3}(1/\Delta t)$ در مدت Δt یک نیم‌تناوب را طی می‌کند و دامنه آن سه‌برابر دامنه نهایی نوسان سیمی است که $\nu = (\frac{1}{3})(1/\Delta t)$ دارد. از معادله (۹۵) به‌روشنی می‌بینیم که مقدار $B(\omega)$ به‌ازای $\omega\Delta t = \pi$ سه‌برابر بزرگتر از مقدار آن به‌ازای $\omega\Delta t = 3\pi$ است.

این مثال نشان می‌دهد که چگونه یک پیانو یا دستگاه مشابه دیگری را می‌توان به عنوان وسیله‌ای برای آنالیز فوریه به‌کار برد. (از این نکته صرف‌نظر کرده‌ایم که ارتباط هوا و سیمها ممکن است به‌طور یکنواخت خوب نباشد.) توجه کنید که در یک پیانوی آنالیزکننده فوریه بسیار مشکل است که بتوان داده‌های فاز به‌دست آورد. اما گوش شما به فاز علاقه‌مند نیست. یعنی این یک حالت کلی است. ما اغلب به دانستن $A(\omega)$ و $B(\omega)$ به‌طور جداگانه علاقه‌مند نیستیم. بنابراین کافی است که شدت فوریه یعنی $I(\omega)$ را که با رابطه زیر تعریف می‌شود، بدانیم

$$I(\omega) = A^2(\omega) + B^2(\omega) \quad (97)$$

تابع دلتای زمان. اگر مدت تپ مربعی Δt بسیار کوتاهتر از زمان تناوب نوسانی با بالاترین بسامدی که می‌توانیم آشکار کنیم (یعنی کوتاهترین زمان تناوب) باشد، در این صورت ضریب فوریه

$B(\omega)$ در تمام طیف بسامد آشکار شده ثابت است. این مطلب از شکل ۶-۱۰ روشن است. اگر Δt به سمت صفر برود، در این صورت اولین صفر $B(\omega)$ به $+\infty$ حرکت می‌کند و به‌ازای هر بسامد متناهی $B(\omega) = 1/\pi$ ، که مستقل از بسامد است. هنگامی که Δt به اندازه کافی کوچک باشد، تپی که در معادله (۹۲) تعریف شده است تابع دلتای زمان نامیده می‌شود. مثلاً از آنجا که بالاترین نت پیانو $5000 \text{ cps} \approx \nu$ ، هر صدای کوتاهی که کوتاهتر از حدود یک میلی‌ثانیه باشد تمام سیمها را به‌طور تقریباً یکسان به‌خوبی تحریک می‌کند. پیانوی آنالیزکننده بین چنین صدایی و صدای دیگری با دامنه ده برابر بزرگتر و مدت ده برابر کوتاهتر تفاوتی نمی‌گذارد. در هر دو حالت سیمها حرکت نهایی یکسان خواهند داشت.

کاربرد: نوسانگر هماهنگ میرا—پهنای خط طبیعی

می‌خواهیم طیف بسامد، یعنی "شکل خط" نور مرئی را که به‌وسیله اتمی که میانگین طول عمر فروافت آن $\tau \approx 10^{-8} \text{ s}$ است پیدا کنیم. اگر صرفاً پهنای نوار را بخواهیم، در همین جا کار تمام شده است زیرا پهنای نوار $\Delta \nu$ می‌بایست در حدود 10^8 cps باشد، چون که مدت زمان تپ 10^{-8} ثانیه است. اما می‌خواهیم از آن بهتر کار را اراعه دهیم. می‌خواهیم جزئیات شکل طیف را به‌دست آوریم، با این فرض که فرایند فروافت بستگی زمانی نوسانگر هماهنگ میرا را دارد. بنابراین فرض می‌کنیم که $\psi(t)$ به‌ازای زمانهای کمتر از $t = 0$ صفر است، در $t = 0$ ناگهان تحریک می‌شود، و از آن پس حرکت نوسانی هماهنگ میرا را دارد

$$\psi(t) = e^{-(1/\tau)\Gamma t} \cos \omega_1 t \quad (98)$$

(برای صرفه‌جویی در نوشتن روابطی که به‌دنبال می‌آیند، ثابت دامنه را واحد اختیار می‌کنیم). ثابت میرایی برابر با عکس میانگین طول عمر فروافت است:

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} \quad (99)$$

ثابت فنر، با رابطه زیر به جرم M بسامد طبیعی غیرمیرا ω مربوط می‌شود. [به معادله ۳-۵ بخش ۲-۳ مراجعه کنید]

$$K = M\omega_0^2 \quad (100)$$

بسامد نوسان میرای تقریباً هماهنگ یعنی ω_1 با رابطه زیر به ω و Γ مربوط می‌شود

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2 \quad (101)$$

اکنون معادله (۹۸) را برحسب برهم نهش پیوسته فوریه بسط می دهیم:

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin \omega t \, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega t \, d\omega \quad (102)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} 2\pi A(\omega) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \sin \omega t \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2)\Gamma t} 2 \cos \omega_1 t \sin \omega t \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2)\Gamma t} [\sin(\omega + \omega_1)t + \sin(\omega - \omega_1)t] dt, \end{aligned} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} 2\pi B(\omega) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \cos \omega t \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2)\Gamma t} 2 \cos \omega_1 t \cos \omega t \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2)\Gamma t} [\cos(\omega + \omega_1)t + \cos(\omega - \omega_1)t] dt \end{aligned} \quad (104)$$

با استفاده از جدول انتگرالهای معین نتیجه می شود

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx &= \frac{b}{b^2 + a^2} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx &= \frac{a}{b^2 + a^2} \end{aligned} \quad (105)$$

بنابراین از معادلات (۱۰۳) و (۱۰۴) داریم

$$2\pi A(\omega) = \frac{(\omega + \omega_1)}{(\omega + \omega_1)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma)^2} + \frac{(\omega - \omega_1)}{(\omega - \omega_1)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma)^2} \quad (106)$$

$$2\pi B(\omega) = \frac{\frac{1}{2}\Gamma}{(\omega + \omega_1)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma)^2} + \frac{\frac{1}{2}\Gamma}{(\omega - \omega_1)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma)^2} \quad (107)$$

با استفاده از معادله (۱۰۱) می توانیم ω_1 را به نفع ω حذف کنیم. پس از محاسبات جبری به دست می آوریم

$$2\pi A(\omega) = \frac{2\omega(\omega^2 - \omega_1^2) + \omega\Gamma^2}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \quad (108)$$

$$2\pi B(\omega) = \frac{\Gamma(\omega^2 + \omega_1^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \quad (109)$$

$$I(\omega) \equiv [2\pi A(\omega)]^2 + [2\pi B(\omega)]^2 = \frac{4\omega^2 + \Gamma^2}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \quad (110)$$

مقایسه فروافت آزاد با نوسان واداشته. مقایسه مؤلفه‌های فوریه به‌دست آمده برای نوسانگر هماهنگ میرا که دامنه‌اش به‌تدریج از بین می‌رود با دامنه‌ها و شدت‌های به‌دست آمده هنگامی که همان سیستم در حالت پایای نوسانهای با بسامد ω است، جالب توجه است. در اینجا نتایج معادلات (۳-۱۷) و (۳-۳۲) تا (۳-۳۵) بخش ۲-۳ را مجدداً بازنویسی می‌کنیم:

$$A_{el}(\omega) = \frac{F_0}{M} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (111)$$

$$A_{ab}(\omega) = \frac{F_0}{M} \frac{\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (112)$$

$$|A|^2 \equiv [A_{el}(\omega)]^2 + [A_{ab}(\omega)]^2 = \frac{F_0^2}{M^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (113)$$

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{M} \frac{\Gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (114)$$

$$E(\omega) = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{M} \frac{\frac{1}{\gamma}(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (115)$$

می‌بینیم که دامنه فوریه $B(\omega)$ برای فروافت آزاد با انرژی ذخیره‌شده $E(\omega)$ در نوسان اجباری متناسب است. همین‌طور $A(\omega)$ در فروافت آزاد دارای مؤلفه‌ای متناسب با $A_{el}(\omega)$ برای نوسان اجباری و مؤلفه‌های دیگر متناسب با $A_{ab}(\omega)$ است. برای میرایی به‌طور مناسب ضعیف، مؤلفه متناسب با A_{ab} بجز هنگامی که ω خیلی نزدیک به بسامد تشدید ω است قابل صرفنظر کردن است. از این‌رو الزاماً با $A(\omega)$ متناسب است. شدت فوریه $I(\omega)$ دارای دو مؤلفه است: یکی مؤلفه متناسب با توان جذبی $P(\omega)$ در نوسان اجباری و مؤلفه دیگر که در میرایی به‌طور مناسب ضعیف یعنی برای $\omega^2 \ll \Gamma^2$ قابل صرفنظر کردن است. از این‌رو $I(\omega)$ در فروافت آزاد الزاماً با توان $P(\omega)$ در نوسان اجباری متناسب است.

شکل خط لورنتس - رابطه با منحنی تشدید. برای میرایی ضعیف و برای ω که خیلی دور از ω_0 نباشد، دامنه فوریه $B(\omega)$ و شدت فوریه $I(\omega)$ هرکدام با "منحنی شکل-خط لورنتس" یعنی $L(\omega)$ که با رابطه زیر داده می‌شود، متناسب هستند

$$L(\omega) = \frac{(\frac{1}{\gamma} \Gamma)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\frac{1}{\gamma} \Gamma)^2} \quad (116)$$

ثابت میرایی Γ که با تمام پهنای بسامد در نیم-بیشینه منحنی شکل خط لورنتس برابر است، پهنای خط $\Delta\omega$ طیف بسامد برهم‌نهی فوریه در حالت فروافت آزاد نامیده می‌شود:

$$(\Delta\omega)_{f.d.} = \Gamma \quad (117)$$

شکل خط لورنتس یعنی معادله (۱۱۶) دقیقاً به همان شکل منحنی پاسخ تشدید برای ت و یگنر $R(\omega)$ است که (برای میرایی ضعیف) بستگی بسامد $A_{ab}(\omega)$ ، $|A|^2$ ، $E(\omega)$ و $P(\omega)$ را در نوسانهای اجباری به دست می‌دهد. [به معادلات (۳۶-۳) بخش ۲-۳ مراجعه کنید]:

$$R(\omega) = \frac{\left(\frac{1}{\Gamma}\Gamma\right)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{1}{\Gamma}\Gamma\right)^2} \quad (118)$$

تمام پهنای تشدید در نیم - بیشینه با رابطه زیر داده می‌شود

$$(\Delta\omega)_{res} = \Gamma \quad (119)$$

بنابراین نتیجه قابل ملاحظه‌ای به دست می‌آوریم که برای یک نوسانگر هماهنگ به طور ضعیف میرا، طیف فوریه در فروافت آزاد دارای همان بستگی بسامدی است که پاسخ تشدید در نوسانهای اجباری دارد. نتیجه را با نوشتن تساویهای زیر می‌توان خلاصه کرد:

$$\boxed{(\Delta\omega)_{f.d.} = (\Delta\omega)_{res} = \frac{1}{\tau_{f.d.}}} \quad (120)$$

اندازه‌گیری بسامد طبیعی و پهنای بسامد. رابطه نزدیک بین مؤلفه‌های فوریه در فروافت آزاد و پاسخ تشدید در نوسانهای اجباری پایا نتایج تجربی مهمی در بردارد. فرض کنید می‌خواهیم (الف) پایستترین حد یک سیم پیانو و (ب) اولین حالت واداشته یک اتم را مطالعه کنیم. در اینجا سه روشی را که می‌توانیم به کار ببریم ذکر می‌کنیم:

۱. بستگی زمانی نوسان آزاد. سیستم را در لحظه $t = 0$ با استفاده از یک چکش یا برخورد با یک اتم دیگر به طور ناگهانی تحریک کنید. سپس عکسهایی با سرعت زیاد از حرکت نوسانگر میرا در حال فروافت بگیرید و جابه‌جایی را برحسب زمان رسم کنید. این کار را برای سیم پیانو می‌توان انجام داد. همان‌گونه که در جلد چهارم همین کتاب (فیزیک کوانتومی) فرا خواهید گرفت. این عمل را برای یک اتم اصولاً نمی‌توان انجام داد.

۲. پاسخ تشدید در نوسان واداشته. سیستم را با یک نیروی هماهنگ $F \cdot \cos \omega t$ در حالت پایا تحریک کنید. بسامد محرک را تغییر دهید. توان جذب شده $P(\omega)$ را برحسب تابعی از بسامد اندازه بگیرید. این کار را با سیم پیانو می‌توان انجام داد. این کار را همچنین با بعضی از حالت‌های واداشته آنها به وسیله تحریک کردن آنها با تابش الکترومغناطیسی در حالت پایا و مشاهده توان جذب شده P برحسب تابعی از ω می‌توان انجام داد و ω_0 و Γ را به دست آورد.

۳. آنالیز فوریة طیف گسیلی. سیستم را به طور ناگهانی تحریک کنید. تابشی را که سیستم گسیل می‌دارد آنالیز فوریة کنید. این کار با سیم پیانو می‌تواند انجام شود. این کار را نیز با بعضی از حالت‌های پایای آنها به وسیله نگاه کردن به طیف بسامد نور گسیل شده می‌توان انجام داد. ساده‌ترین کمیت برای اندازه‌گیری، شدت تابش گسیل شده برحسب تابعی از بسامد است. این شدت به نوبه خود با شدت فوریة $I(\omega)$ متناسب است. تعیین $I(\omega)$ بسامد مد ω و پهنای Γ را به دست می‌دهد. در شکل ۱۱-۶ یک نوسان هماهنگ میرا و ضرایب فوریة $A(\omega)$ و $B(\omega)$ را رسم کرده‌ایم. برای به دست آوردن رابطه $\Delta\omega \Delta t = 2\pi$ به صورت یک تساوی دقیق برای حاصلضرب فاصله زمانی و پهنای نوار، می‌توانیم مدت زمان Δt را برابر با حاصلضرب 2π در میانگین زمان فروافت τ تعریف کنیم. در این صورت از معادله (۱۲۰) نتیجه می‌شود $\Delta\omega \Delta t = 2\pi$.

۵-۶ آنالیز فوریة بسته موج متحرک پیشرونده

فرض کنید فرستنده‌ای در $z = 0$ ، یک سیستم باز یک بعدی همگن پیوسته را به گونه‌ای تحریک می‌کند که تابع موج $\psi(z, t)$ از امواج پیشرونده به ازای $z = 0$ دارای بستگی زمانی با تابع زمانی معلوم $f(t)$ است:

$$\psi(0, t) = f(t) \quad (121)$$

هر تابع معقول $f(t)$ را برحسب برهم‌نهی نوسانهای هماهنگ می‌توان بسط داد. اگر $f(t)$ یک تابع تناوبی برحسب زمان نباشد، برهم‌نهی (برحسب بسامد) پیوسته است و به صورت انتگرال فوریة داده می‌شود

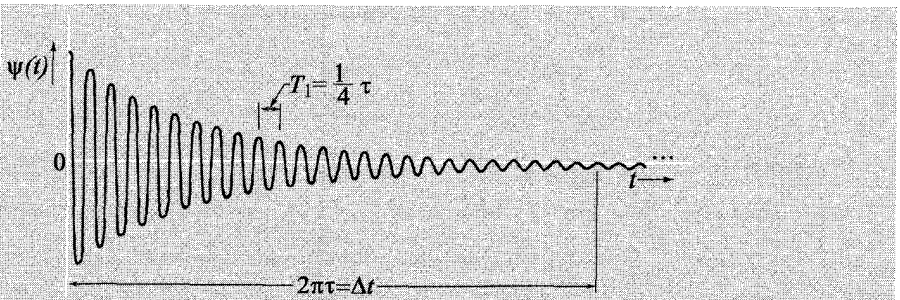
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) \sin \omega t + B(\omega) \cos \omega t] d\omega \quad (122)$$

امواج پیشرونده در محیط پاشنده همگن. هر مؤلفه هماهنگ از برهم‌نهی معادله (۱۲۲) باعث ایجاد موج پیشرونده هماهنگ مخصوص به خود می‌شود که در آن عدد موج زاویه‌ای k با رابطه پاشندگی داده می‌شود

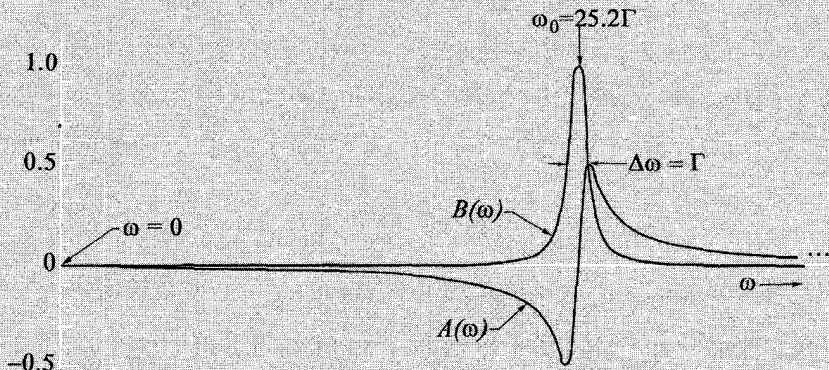
$$k = k(\omega) \quad (123)$$

هر مؤلفه بسامد موج پیشرونده هماهنگ با سرعت فاز مخصوص به خود حرکت می‌کند

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k(\omega)} \quad (124)$$



(الف)



(ب)

شکل ۱۱-۶ نوسانگر هماهنگ ضعیف میرا. (الف) تب $\psi(t) = e^{-(1/2)t/\tau} \cos \omega_1 t$ با انتخاب $\omega_1 = \gamma \pi \Gamma$ یعنی $\tau = 4T_1$. (ب) ضرایب فوریه در برهم نهش پیوسته جمله‌های هماهنگ $\int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) \sin \omega t + B(\omega) \cos \omega t] d\omega$.

موج پیشرونده کلی $\psi(z, t)$ همان برهم نهش تمام امواج پیشرونده هماهنگ است. یعنی با قراردادن $wt - kz = wt - k(\omega)z$ در هر یک از جملات هماهنگ رابطه برهم نهشی که با معادله (۱۲۲) داده شده است، $\psi(z, t)$ را از $\psi(\circ, t)$ به دست می‌آوریم:

$$\psi(\circ, t) = \int_{\omega=0}^{\infty} [A(\omega) \sin \omega t + B(\omega) \cos \omega t] d\omega \quad (125)$$

$$\psi(z, t) = \int_{\omega=0}^{\infty} \{A(\omega) \sin[\omega t - k(\omega)z] + B(\omega) \cos[\omega t - k(\omega)z]\} d\omega \quad (126)$$

در حالت کلی امواج پاشنده، سرعت فاز v_φ به بسامد ω بستگی دارد. بنابراین شکل $\psi(z, t)$ به ازای t ثابت، با زمان ثابت باقی نمی ماند.

امواج غیرپاشنده (حالت خاص). برای حالت خاصی که در آن سرعت فاز v_φ به بسامد بستگی ندارد، تابع موج $\psi(z, t)$ برای زمانهای ثابت t شکل یکسان دارد. این نتیجه را از رابطه کلی معادله (۱۲۶) به شرح زیر می توانیم به دست آوریم: فرض کنید v سرعت فاز مشترک در تمام امواج هماهنگ باشد:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{v} \quad \text{یعنی} \quad v = \frac{\omega}{k(\omega)} \quad (127)$$

در این صورت معادله (۱۲۶) به شکل زیر در می آید:

$$\psi(z, t) = \int_0^\infty \left[A(\omega) \sin \omega \left(t - \frac{z}{v} \right) + B(\omega) \cos \omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] d\omega \quad (128)$$

اما v (طبق فرض) ثابت و مستقل از بسامد ω است. می بینیم که هر یک از جملات معادله برهم نهشی (۱۲۸) از معادله برهم نهشی (۱۲۵) که نمایش دهنده $\psi(0, t)$ است با قرار دادن $t - (z/v)$ به جای $\psi(0, t)$ به سادگی به دست می آید. از این رو برای امواج غیرپاشنده داریم

$$\psi(z, t) = \psi(0, t'), \quad t' \equiv t - \frac{z}{v} \quad (129)$$

توجه کنید که برای امواج غیرپاشنده ای که نیاز داریم هرگز به نوشتن برهم نهش فوریه نیاز نداشتیم مگر آنکه مایل بودیم چنین کنیم. از آنجا که $\psi(0, t)$ داده شده است، می توانستیم بدون احتیاج به مراحل میانی آنالیز فوریه $\psi(z, t)$ را بی درنگ از معادله (۱۲۹) به دست آوریم. معادله (۱۲۹) نشان می دهد که موج پیشرونده در محیط غیرپاشنده، بدون تغییر شکل حرکت می کند. یعنی جابه جایی (یا میدان الکتریکی و یا هرچیز دیگر) در نقطه پایین مسیر z در زمان t همان مقداری را دارد که جابه جایی در نقطه $z = 0$ در زمان زودتر $t - (z/v)$ داراست.

در اینجا مثالی از یک موج غیرپاشنده ذکر می کنیم که در آن از آنالیز فوریه و یا توابع هماهنگ استفاده نمی کنیم. تصور کنید امواج غیرپاشنده (مثلاً امواج صوتی شنوایی یا امواج نور در خلأ) داریم. فرض کنید به ازای $z = 0$ جابه جایی در رابطه زیر صدق می کند

$$\psi(0, t) = A e^{-(1/2)t^2/\tau^2} \quad (130)$$

معادله (۱۳۰) یک تب گاوسی شکل است. این تب به ازای $t = 0$ بیشینه است و در زمانهای خیلی زودتر از $t = 0$ و یا خیلی دیرتر از $t = 0$ (برحسب واحد τ) بسیار کوچک است. معادله

(۱۳۰) را می‌توانیم آنالیز فوریه کنیم، اما از آنجا که محیط بنابر فرض غیرپاشنده است، به‌این کار احتیاجی نداریم. شکل موج پیشرونده را بی‌درنگ می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}\psi(z, t) &= \psi(z', t') = Ae^{-(1/2)(t')^2/\tau^2} \\ &= Ae^{-(1/2\tau^2)[t - (z/v)]^2}\end{aligned}\quad (131)$$

امواج غیرپاشنده و معادله کلاسیک موج. هر موج پیشرونده هماهنگ به‌شکل

$$\psi(z, t) = A \cos[\omega t - k(\omega)z] \quad (132)$$

در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند (به‌سادگی می‌توانید این مطلب را نشان دهید)

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} = v_\varphi^2(\omega) \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} \quad (133)$$

برای حالت خاص امواج غیرپاشنده، $v_\varphi = v$ است یعنی یک سرعت ثابت مستقل از ω وجود دارد. در این حالت، تمام جملات در برهم‌نهی امواج هماهنگ پیشرونده [مانند معادله (۱۲۸)] همگی در یک معادله دیفرانسیل، یعنی معادله زیر، صدق می‌کنند:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}} \quad (134)$$

در این معادله، $\psi(z, t)$ ممکن است نشان‌دهنده هر یک از امواج پیشرونده هماهنگ موجود در برهم‌نهی باشد. اما از آنجا که هر جمله در معادله (۱۳۴) صدق می‌کند تمام برهم‌نهی در آن صدق می‌کند، یعنی تابع موج کلی $\psi(z, t)$ در معادله (۱۳۴) صدق می‌کند. این معادله دیفرانسیل جزئی، معادله کلاسیک موج برای امواج غیرپاشنده یا به‌طور مختصر معادله کلاسیک موج نامیده می‌شود.

امواجی که شکل خود را حفظ می‌کنند در معادله کلاسیک موج صدق می‌کنند. برای به‌دست آوردن معادله (۱۳۴) از امواج پیشرونده هماهنگ معادله (۱۳۲) استفاده کردیم. این کار لازم نبود. هر موج پیشرونده که هنگام حرکت شکل خودش را حفظ می‌کند باید در معادله (۱۳۴) صدق کند. از این رو اگر $\psi(z', t') = f(t')$ داده شده باشد و اگر فرض کنیم که موج بدون تغییر شکل حرکت می‌کند یعنی

$$\psi(z, t) = f(t'), \quad t' \equiv t - \frac{z}{v} \quad (135)$$

به آسانی می‌توانید ببینید که $\psi(z, t)$ که با معادله (۱۳۵) داده شده است در معادله کلاسیک موج صدق می‌کند (مسئله ۶-۲۶). به همین ترتیب هر موج پیشرونده غیرپاشنده که در جهت z حرکت می‌کند نیز در معادله کلاسیک موج صدق می‌کند همان‌گونه که با قرار دادن v به جای v در رابطه‌ای که به دست می‌آورید می‌توانید ببینید. همچنین هر نوع برهم‌نهی امواج پیشرونده غیرپاشنده که در هر دو جهت حرکت می‌کنند در معادله کلاسیک موج صدق می‌کنند، زیرا تمام جملات برهم‌نهی در آن معادله صدق می‌کند.

به آسانی می‌توانید نشان دهید که هر موج ساکن به شکل

$$\psi(z, t) = A \cos k(z - z_0) \cos \omega(t - t_0)$$

در معادله (۱۳۳) صدق می‌کند. اگر محیط غیرپاشنده باشد، در این صورت، تمام امواج ساکن هماهنگ در معادله کلاسیک موج یعنی معادله (۱۳۴) صدق می‌کنند. این نتیجه با قراردادن $v_p = v$ به ازای تمام بسامدها از معادله (۱۳۵) نتیجه می‌شود. (در یک موج ساکن v_p به معنای ω/k است با وجودی که مفهوم سرعت فاز برای شرح امواج ساکن یک مفهوم طبیعی نیست.) این نتیجه همچنین از آنجا به دست می‌آید که یک موج ساکن را می‌توان به صورت برهم‌نهی از امواج پیشرونده انتقالی که در جهت‌های مخالف حرکت می‌کنند، در نظر گرفت. در حقیقت اولین باری که معادله کلاسیک موج را وارد کردیم در مطالعه امواج ساکن در یک تار پیوسته در بخش ۲-۲ بود.

مسائل و آزمایشهای خانگی

۱-۶ نشان دهید که جمع دو موج هماهنگ پیشرونده $A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1)$ و $A_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_2)$ که در جهت z حرکت می‌کنند و بسامد یکسان ω دارند خود یک موج هماهنگ پیشرونده از همان نوع است. یعنی مجموع آنها را می‌توان به شکل $A \cos(\omega t - kz + \varphi)$ نوشت. پیدا کنید چگونه A و φ به A_1 و A_2 ، φ_1 و φ_2 مرتبط است. (راهنمایی: استفاده از اعداد مختلط یا نمودار بردار چرخان بسیار کمک می‌کند.)

۲-۶ تابش الکترومغناطیسی را در یک محیط با ثابت دی‌الکتریک $\epsilon(\omega)$ در نظر بگیرید. فرض کنید تراوایی مغناطیسی μ برابر ۱ است. آنگاه $n(\omega) = [\epsilon(\omega)]^{1/2}$. طبق نظریه نسبیت هیچ سیگنالی تندتر از سرعت نور $c = 3 \times 10^{10}$ cm/s منتشر نمی‌شود. تا چه حدی امکان تغییر

$\epsilon(\omega)$ با ω وجود دارد. [فرض کنید $\epsilon(\omega)$ برای همه ω ها مثبت است.]

جواب: $(n - 1) \geq 0$ و $\omega (dn/d\omega) + (n - 1) \geq 0$

۳-۶ پهنای نواری را که از AM رادیوی خود می‌شنوید با چرخاندن پیچ تنظیم و فهمیدن اینکه برای دریافت ایستگاه معلوم فرینها چه هستند به طور تقریبی اندازه‌گیری کنید. (بالاترین درجه

روی صفحه AM معمولاً 130° است. این به معنای 130° است. نتیجه شما با نتیجه‌ای که شخص به $40 \text{ kc} = \Delta\nu$ احتیاج دارد تا دو نوارکناری برای تولید دوباره صدا را با دقت زیاد بپوشاند چگونه مقایسه می‌شود؟

۴-۶. توبا^۱ بسیار زیر نواخته می‌شود، مثلاً C_1 در 327 cps (پایینترین C در پیانو C_1 گفته می‌شود). فلوت بسیار بم نواخته می‌شود، بالاترین نت آنها C_7 در 2093 cps است (یک اکتاو زیر بالاترین نت پیانو). هر نت روی مقیاس معتدل با فاصله‌های مساوی از همسایه آن با ضریب در حدود 1.06 فرق می‌کند. فلوت خیلی تند نواخته می‌شود، اما توبا به این تندی نیست، آیا این اشکال نوازنده توبا است؟ یا خود توبا؟ آیا می‌توان توبا را طوری طراحی کرد که نوازنده توبا بتواند تندتر از نوازنده فلوت بنوازد؟ چه سرعت بالای مناسب برای نوازنده توبا در مقیاس نزدیک C_{327} حساب خواهید کرد؟ برای نوازنده فلوت که نزدیک C_{2093} می‌نوازد چه سرعتی حساب خواهید کرد؟ ابتدا باید روی معیار موسیقی مناسب تصمیم بگیرید، آنگاه فیزیک آن را انجام دهید. جواب: ۲ نت بر ثانیه برای توبا، 120 نت بر ثانیه برای فلوت (وای!).

۵-۶. مردی رادیوی AM خود را به تعمیرگاه رادیو برد و شکایت کرد که تنظیم آن به اندازه کافی دقیق نیست. او می‌خواست که ایستگاه مورد نظرش در صفحه بسیار دقیق باشد. بنابراین آنها بنابه درخواست او آن نقطه را ثابت کردند. آنگاه او رادیو را دوباره برگرداند. این دفعه از چه چیزی شکایت دارد؟

۶-۶. (الف) یک راه اندازه‌گیری سرعت صوت در هوا به هم زدن دستها و تعیین تأخیر زمان بین دست زدن و پژواک از یک بازتابگر معین است. راه دیگر، اندازه‌گیری طول لوله پستی است که در بسامد معینی تشدید می‌شود (برای اثرات انتهایی تصحیح کنید). آیا این روشها سرعت فاز را معین می‌کند؟ سرعت گروه را چطور؟

(ب) یک راه اندازه‌گیری سرعت نور فرستادن یک باریکه نور بریده شده داخل هوا از کوه ویلسون به کوه پالمراست، آن را به وسیله یک آینه باز می‌تابانیم و زمان مسافت را اندازه می‌گیریم. راه دیگر پیدا کردن طول کاوه تشدید است که در یک مد معین در بسامد معلوم نوسان می‌کند. آیا این روشها سرعت فاز را تعیین می‌کند؟ یا سرعت گروه را؟

۷-۶. نشان دهید که برای نور با ضریب شکست $n(\lambda)$ داریم

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{v_\phi} - \frac{1}{c} \lambda \frac{dn(\lambda)}{d\lambda}$$

که λ طول موج نور در خلأ است.

۸-۶ سرعت نور در خلأ در جدولها به صورت $c = ۲۹۹۷۹۲۵ \times ۱۰^{۱۰}$ cm/s ذکر شده است. که بسیار شناخته شده است. فرض کنید سرعت نور را با بازتاباندن باریکه نور بریده شده بین کوه ویلسون و پالمار و زمانگیری کل مسافت اندازه گیری کنید. فرض کنید ابتدا از اینکه راه در هواست نه در خلأ صرف نظر کنید. تصحیحی که باید به اندازه گیری شما اضافه یا کم شود تا سرعت در خلأ به دست آید را تخمین بزنید. فرض کنید که نور با سرعت فاز در هوا حرکت می کند. با این فرض که نور با سرعت گروه در هوا حرکت می کند، تخمین تصحیح خود را تکرار کنید. (برای ضریب شکست هوا از $n = ۱ + ۰.۳ \times ۱۰^{-۳}$ استفاده کنید.) به منظور تخمین تصحیح از سرعت گروه، از نتیجه مسئله ۷-۶ استفاده کنید. همچنین، فرض کنید که مولکول هوا از مولکول شیشه قابل تشخیص نباشد. بنابراین، اگر در واحد حجم در شرایط متعارفی به اندازه مولکولهای شیشه در شیشه، مولکولهای هوا باشد می توانید مستقیماً $dn/d\lambda$ را از جدول ۲-۴ بخش ۳-۴ به دست آورید. برای هوا، $N \approx ۲.۷ \times ۱۰^{۱۹}$ مولکول/cm^۳. برای شیشه $N \approx ۲.۶ \times ۱۰^{۲۲}$ مولکول/cm^۳. $dn/d\lambda$ را برای هوا (برای نور مرئی متوسط) با استفاده از جدول ۲-۴ و تصحیح مناسب برای چگالی عددی به دست آورید. در نهایت آیا مهم است که از چه تصحیحی استفاده می کنید (فرض کنید منظور شما نوع دقت ذکر شده در بالاست)؟ از چه تصحیحی باید استفاده کنید؟

۹-۶ نشان دهید که برای نوسانگر هماهنگ میرا طول عمر فروافت τ با رابطه زیر داده می شود

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{E_{\text{ذخیره شده}}} \frac{dE_{\text{تلف شده}}}{dt}$$

۱۰-۶ فرض کنید یک لوله پستی را روی سرتان بزنید. گام پایبندترین مد را برای زمان کوتاهی می شنوید. فرض کنید نوسان حرکت هماهنگ میرا دارد. بنابراین زمان فروافت τ معین وجود دارد. حال فرض کنید طول لوله را دو برابر کنیم؛ بسامد پایبندترین مد نصف می شود. اما فرض کنید طوری لوله را تحریک کنید که در بسامد اصلی اش ارتعاش کند (که اکنون مد دوم لوله بلندتر است). تحریک ناگهانی است و هوا آزادانه نوسان می کند و دستخوش نوسانات میرا می شود.

(الف) فرض کنید که تمام اتلاف انرژی مربوط به تابش انتهای لوله است. زمان فروافت جدید را با قدیمی مقایسه کنید.

(ب) فرض کنید که قطر لوله آنقدر کوچک است که اتلاف انرژی در انتهای لوله در مقایسه با اتلاف کسری در طول دیوارهای لوله و تابش خارج شده از کناره های لوله قابل مقایسه باشد. زمانهای فروافت جدید و قدیم را دوباره مقایسه کنید.

(ج) فرض کنید تمام پهناهای تشدید لوله های جدید و قدیم را با تحریک هر کدام از آنها با دیپازون یکسان (که در بسامد پایبندترین مد لوله کوتاه اصلی نوسان می کند) و تغییر طول لوله با

کاغذ "شیور" اندازه بگیرید. "طول تمام پهنای" ΔL را برای دو مورد ذکر شده در بالا مقایسه کنید. مراقب باشد ΔL به تمام پهنای بسامد مربوط است. از نتایج مسئله ۶-۹ استفاده کنید. ۶-۱۱ بسته‌موجهای آب. بهترین راه برای درک تفاوت میان سرعتهای فاز و گروه تشکیل بسته‌موجهای آب است. برای تشکیل بسته‌موجهای دایره‌ای گسترده که طول موج غالب آنها ۳ یا ۴ cm یا بیشتر است، یک سنگ بزرگ را در حوض یا استخر ببندازید. برای ایجاد امواج ساکن (امواج دوبعدی شبیه امواج سه‌بعدی تخت) با طول موجهای چند سانتیمتر، یک تکه چوب را در انتهای یک وان حمام یا ظرف بزرگ آب فرو ببرید. چوب را با دست دو تکان عمودی سریع بدهید. با چند بار تمرین خواهید دید که برای این بسته‌موجها سرعت فاز بزرگتر از سرعت گروه است. (جدول ۶-۱ بخش ۶-۲ را ببینید). موجکهای کوچکی از صفر در انتهای عقبی بسته‌موج ایجاد می‌شود، داخل بسته‌موج حرکت می‌کند و در جلو از بین می‌رود. (این کار تمرین می‌خواهد چون امواج تقریباً سریع حرکت می‌کنند). روش خوب دیگر این است که در انتهای وان یک تخته بگذارید و به تخته ضربه بزنید.

برای ایجاد امواج میلیمتری (امواج با کشش سطحی) از یک قطره‌چکان پر از آب استفاده کنید. یک قطره بچکانید و بگذارید روی ظرف بزرگ یا لوله آب بیفتد. ابتدا قطره را از ارتفاع چند میلیمتری بچکانید. این به شما طول موجهای غالب چند میلیمتری می‌دهد. برای اینکه بفهمیم این موجها واقعاً به کشش سطحی مربوطاند، کمی صابون به آب اضافه کنید و آزمایش را دوباره تکرار کنید. توجه کنید که وقتی صابون را اضافه می‌کنید سرعت گروه کم می‌شود. (برای اینکه ببینیم امواج با طول موج بلندتر به کشش سطحی مربوط نمی‌شوند، می‌توانید آزمایش را در طول موجهای بلند تکرار کنید). برای بلند شدن طول موج غالب گروه قطره آب را از ارتفاع بالاتری پرتاب کنید.

حال روشی بیان می‌کنیم که نشان می‌دهد (بدون اندازه‌گیری مشکل) امواج میلیمتری سرعت گروه تندتری از امواج سانتیمتری یا غیره دارند. یک بسته‌موج ایجاد کنید که هم امواج میلیمتری و هم امواج سانتیمتری داشته باشد. این کار را با انداختن قطره‌ای آب از ارتفاع یک فوت یا تقریباً یک فوت در یک ظرف دایره‌ای که در حال لبریز شدن است انجام دهید. (یک ظرف قهوه خوب است). یک قطره نزدیک مرکز ظرف دایره‌ای بچکانید. توجه کنید که بعد از بازتاب از کناره‌های آن گروه متمرکز می‌شود یعنی در یک نقطه که با نقطه‌ای که قطره برخورد می‌کند همیوخ است. منظور از دو نقطه همیوخ، نقاطی است که روی خطی که از مرکز دایره می‌گذرد قرار دارند و فاصله‌شان تا مرکز یکسان است. وقتی بسته‌موج از نقطه‌ای که با کانون همیوخ است عبور می‌کند، آنجا یک موج ساکن گذرا به وجود می‌آورد (شبیه موج ساکنی که در اثر تکان دادن بسته‌موج روی فنر اسلینکی بسته شده به دیواره به وجود می‌آید). با این کار می‌توانید در مورد زمان متوسط رسیدن بسته‌موج

قضاوت کنید، می‌بینید که تفاوتی در زمان رسیدن امواج کوتاه بسته‌موج در مقایسه با سهم امواج بلند وجود دارد. اندازه‌گیری آن مشکل است ولی می‌توانید اثر آن را به آسانی ببینید.

آزمایشی که من هنوز نتوانسته‌ام انجام دهم پیدا کردن یک جویبار روان با سرعت شاری تقریباً مساوی با سرعت گروه برای طول‌موجهای مناسب است. شخص باید بتواند بسته‌موجهایی که به طرف بالا حرکت می‌کنند با سرعتی در حدود سرعت شار ایجاد کند به طوری که بسته‌موج تقریباً به حالت ساکن در دستگاه مرجع شما باقی بماند (فرض کنید دارید از درون آب می‌گذرید نه در جهت جریان آب). مطمئناً روش خوشایندی برای مطالعه بسته‌های موج خواهد بود.

۶۰-۱۲ بسته‌موجهای آب کم‌عمق - امواج کِشندی. در مسئله ۲-۳۱ قانون پاشندگی را برای امواج ساکن دندان‌اره‌ای آب کم‌عمق به دست آوردیم، که نتیجه $v_g \approx 1.1\sqrt{gh}$ به دست آمد. برای امواج سینوسی آب کم‌عمق نتیجه به $v_g = \sqrt{gh}$ تبدیل می‌شود. بنابراین امواج آب کم‌عمق غیر پاشنده‌اند. (سرعت فاز بستگی به طول موج ندارد). به جای امواج ساکن حال بسته‌موجهای پیشرونده آب کم‌عمق را در نظر می‌گیریم. چون امواج غیر پاشنده‌اند یک تک "موج منزوی" یا "موج کِشندی" بدون تغییر شکل آن (تقریباً) منتشر می‌شود. چنین موجهایی را که تسونامی می‌نامند با زمین‌لرزه‌های داخل اقیانوس تحریک می‌شوند. عمق متوسط آب در اقیانوس عمیق در حدود ۵ km است: $h = 5 \times 10^5$ cm. بنابراین امواج کِشندی با طول افقی بیشتر از ۵ km امواج "آب کم‌عمق" هستند. امواج تسونامی در اقیانوس عمیق با سرعت زیر منتشر می‌شوند

$$v = \sqrt{gh} = \sqrt{(9.80)5 \times 10^5} = 2.2 \times 10^4 = 220 \text{ m/s}$$

$$= 495 \text{ mile/h}$$

که کمی کمتر از سرعت یک هواپیمای جت معمولی است. چه مدت طول می‌کشد تا یک موج کِشندی از آلاسکا تا هاوایی منتشر شود؟

در سال ۱۸۸۳ آتشفشان کراکاتوا منفجر شد و بزرگترین انفجار دنیا را به وجود آورد. (کراکاتوا در تنگه سوندا بین سوماترا و جاوا قرار دارد. گزارش این انفجار در هر فرهنگنامه‌ای پیدا می‌شود). امواج کِشندی بزرگ و امواج جوی به وجود آمد. اخیراً کشف شده است که امواج پیشرونده‌ای با سرعت حدود ۲۲۰ m/s وجود دارد. (لازم به ذکر است که سرعت معمولی صوت در 0°C ، ۳۳۲ m/s است. به طور متوسط هوا سردتر از آن است، بنابراین سرعت کمتر از آن است). وجود این امواج هوا احتمالاً مشخص می‌کند که چطور امواج کِشندی آب از کراکاتوا روی کناره‌های دور

جرمهای زمین ظاهر شد تا امواج آب را سد کند. ظاهراً با جفت شدن امواج کشندی به امواج هوا که همان سرعت (و همان زمان تحریک) را دارد.^۱

در آزمایش خود امواج کشندی آب کم‌عمق را به صورت زیر به وجود آورید: یک ظرف مربع به طول یک یا دو فوت بگیرید. آن را به عمق در حدود $1/2$ یا 1 cm پر از آب کنید. یک ضربه سریع به ظرف بزنید (یا یک انتهای آن را بالا ببرید و ناگهان آن را بیندازید). دو بسته‌موج پیشرونده به وجود خواهید آورد، یکی در نزدیکی انتها و یکی دور از انتها که هر دو در جهت مخالف حرکت می‌کنند. بسته‌موج بزرگتر را دنبال کنید. سرعت را با زمانگیری موج برای طولهای ظرفی که می‌توانید داشته باشید (احتمالاً حدود ۴) اندازه بگیرید. یک کرومومتر کمک می‌کند. یک راه دیگر این است که می‌توانید بلندی صدای برخورد بسته‌موج به دیوارها را بشمارید، "ضرب موسیقی" را به خاطر بسپارید و بالاخره ضرب را با ساعت معمولی اندازه بگیرید. چطور نتیجه شما به خوبی با $v = \sqrt{gh}$ توافقی دارد؟ هر چقدر عمق آب افزایش می‌یابد، بالاخره به نقطه‌ای می‌رسیم که امواج آب کم‌عمق نیستند. آنگاه رابطه پاشندگی کم‌کم بالاتر از رابطه پاشندگی موج گرانشی آب عمیق $\omega^2 = gk$ می‌رود، یعنی

$$v_{\varphi} = \lambda\nu = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

(این رابطه را در فصل ۷ به دست می‌آوریم). بنابراین بسته‌موج پخش خواهد شد و شکل آن باقی نخواهد ماند. برای آب به اندازه کافی کم‌عمق (تقریباً کمتر از ۱ cm) شکل آن منصفانه برای چند فوت باقی می‌ماند.

بالاخره، با فشار دادن ناگهانی کل انتهای لوله آب به وسیله یک تخته در وان حمام خود یک موج کشندی پیشرونده به وجود آورید. زمان رفت و برگشت را اندازه بگیرید و بنابراین سرعت را اندازه بگیرید. آیا سرعت \sqrt{gh} است؟ به موج شکنها توجه کنید!

۶۰-۱۳ آوای موسیقی و پهناهای باند. در این آزمایش به یک پیانو احتیاج داریم. دونت نزدیک به هم را بنوازید. ابتدا دونت نزدیک به بالای صفحه کلید را جدا کنید. به آرامی بنوازید، سپس با حداکثر سرعتی که می‌توانید بنوازید. بسامد نواختن را تخمین بزنید. آیا هنوز می‌توانید به آسانی دونت نواخته شده را به دست آورید؟ حال دونت نزدیک به پایین صفحه کلید را بنوازید، ابتدا بسیار آرام سپس کم‌کم به سرعت بنوازید. آیا سرعتی وجود دارد که دونت به حالت به هم ریخته مخلوط شود، مخلوط غیرقابل تشخیص بسامدی را که تنها به هم می‌ریزند تخمین بزنید، سپس عملیات

۱. مقاله زیر را ببینید:

ریاضی را انجام دهید و بگویید چقدر گوش و مغز باید خوب باشد تا بتوانید دو بیشینه مجزا در آنالیز فوریه را تشخیص بدهید حتی وقتی پهنای بسامد قله‌ها (در شدت نیم بیشینه) این قدر کوچک نیست که با بسامد فضای بین بیشینه‌ها مقایسه شود.

۱۴-۶ سرعت گروه در قطع. نشان دهید که برای یک سیستم آونگهای جفت شده سرعت گروه هم در بسامدهای قطع پایین و بالا (بسامدهای بیشینه و کمینه برای امواج سینوسی) صفر است. سرعت فاز در این دو بسامد چیست؟ طرح کلی از رابطه پاشندگی، یعنی نموداری از ω بر حسب k بکشید. نشان دهید که شخص با یک نگاه می‌تواند از روی نمودار سرعتهای فاز و گروه را بگوید.

۱۵-۶ آنالیز فوریه تابع نمایی. تابع $f(t)$ را در نظر بگیرید که برای t منفی صفر و برای $t \geq 0$ برابر $\exp(-t/2\tau)$ است. ضرایب فوریه $A(\omega)$ و $B(\omega)$ را در برهم‌نهمش پیوسته زیر پیدا کنید

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \sin \omega t + B(\omega) \cos \omega t] d\omega$$

۱۶-۶ موج سینوسی بریده‌شده با یک نوسان. فرض کنید $f(t)$ بجز در بازه $t = t_1$ تا $t = t_2$ زمان $\Delta t = t_2 - t_1$ صفر است و در $t_0 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ متمرکز شده است. فرض کنید که در این بازه $f(t)$ دقیقاً یک نوسان سینوسی در بسامد زاویه‌ای ω می‌کند، شروع و پایانش با مقدار صفر در t_1 و t_2 (یعنی $\Delta t = T_0 = 2\pi/\omega$) است. ضرایب فوریه $A(\omega)$ و $B(\omega)$ در برهم‌نهمش پیوسته زیر را پیدا کنید

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \sin \omega(t - t_0) + B(\omega) \cos \omega(t - t_0)] d\omega$$

یک طرح تقریبی از ضرایب فوریه بر حسب ω و طرح کلی $f(t)$ بکشید.

۱۷-۶ تار مه‌ره‌دار. عبارتی برای سرعت گروه موجهای پیشرونده در تار مه‌ره‌دار به دست آورید. طرح (تقریبی) از رابطه پاشندگی برای تار مه‌ره‌دار از $k = 0$ تا مقدار بیشینه بکشید. طرح (تقریبی) از سرعت گروه بر حسب k و سرعت فاز بر حسب k از $k = 0$ تا k_{\max} بکشید.

۱۸-۶ سرعتهای گروه و فاز برای نور در شیشه. فرض کنید قانون پاشندگی به وسیله یک تشدید داده می‌شود. از میرایی صرف‌نظر کنید یعنی فرض کنید

$$c^2 k^2 = \omega^2 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega^2} \right), \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}$$

که در آن N تعداد الکترونها در واحد حجم است.

(الف) طرح کلی از مربع ضریب شکست n^2 بر حسب ω برای $0 \leq \omega < \infty$ بکشید. کمیت‌های مهم، مقدار و شیب در $\omega = 0$ است، در ω کمی کمتر از $\omega_0 = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_p^2}$ و $\omega = \omega_p$ بکشید.

در بینهایت کمی بزرگتر از ω ، است. ناحیه‌ای که در آن n^2 منفی است را چگونه تفسیر می‌کنید؟ ناحیه نزدیک ω را چگونه؟

(ب) فرمول زیر را برای مربع سرعت گروه به دست آورید

$$\left(\frac{v_g}{c}\right)^2 = \frac{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_*^2 - \omega^2}}{\left[1 + \frac{\omega_p^2 \omega_*^2}{(\omega_*^2 - \omega^2)^2}\right]^2}$$

طرح کلی $(v_g/c)^2$ را بر حسب ω بکشید. نشان دهید که $(v_g/c)^2$ همیشه کمتر از واحد است همان طور که برای نظریه نسبیت لازم است. نشان دهید که v_g^2 در همان ناحیه بسامد که n^2 منفی است، منفی است. در چه بسامدی گروه بزرگترین است؟ سرعت گروه در آن بسامد چیست؟ ۱۹-۶ سرعت‌های گروه و فاز برای امواج آب عمیق. قانون پاشندگی برابر است با

$$\omega^2 = gk + \frac{Tk^3}{\rho}$$

در دستگاه یکای CGS. $\rho = 1.0$ و $T = 72$ ، $g = 980$ (در دستگاه یکای CGS). فرمولهایی برای سرعت گروه و سرعت فاز به دست آورید. نشان دهید که سرعت گروه برابر سرعت فاز است وقتی gk و Tk^3/ρ مساوی‌اند و این موضوع برای طول موج ۱.۷ cm و سرعت ۲۳.۱ cm/s رخ می‌دهد. نشان دهید که برای امواج کشش سطحی یعنی امواجی با طول موج خیلی کوتاه که قابل مقایسه با ۱.۷ cm/s است، سرعت گروه ۱.۵ برابر سرعت فاز است. نشان دهید که برای امواج گرانی یعنی امواجی با طول موج بلند که قابل مقایسه با ۱.۷ cm/s است، سرعت گروه نصف سرعت فاز می‌شود. جدول ۱-۶ بخش ۲-۶ را بسط دهید تا شامل طول موج ۱۲۸ m و ۲۵۶ m شود. سرعت‌های موج بر حسب km/h را به همان خوبی cm/s بدهید. (برای مشاهده بسامد کمتر از چهار یا پنج بر دقیقه، روزی به ساحل حفاظدار خلیج اقیانوس بروید وقتی که هیچ باد قوی از جانب ساحل نمی‌وزد. آنگاه آنها تنها امواجی هستند که از دور می‌آیند.)

۲۰-۶ آنالیز فوریه تپ مربع منفرد در زمان. یک تپ مربعی $\psi(t)$ در نظر بگیرید که برای تمام t ها بجز بازه t_1 تا t_2 صفر است. در آن بازه، $\psi(t)$ مقدار ثابت $1/\Delta t$ را دارد که $\Delta t = t_2 - t_1$. بگذارید t_0 زمان در مرکز بازه باشد. نشان دهید که آنالیز فوریه $\psi(t)$ به صورت زیر است:

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin \omega(t - t_0) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega(t - t_0) d\omega$$

با جواب زیر

$$A(\omega) = 0, \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta \omega t}{\frac{1}{2} \Delta \omega t}$$

طرح کلی $B(\omega)$ را برحسب ω رسم کنید. در حد وقتی Δt به سمت صفر میل می‌کند $\psi(t)$ را "تابع دلتا"ی زمان می‌نامیم و به شکل $\rho(t - t_0)$ می‌نویسیم. $B(\omega)$ برای این تابع دلتای زمان چیست؟

۶-۲۱ آنالیز فوریه نوسان هماهنگ بریده شده. فرض کنید $\psi(t)$ خارج از بازه t_1 تا t_2 که مدت زمان $\Delta t = t_2 - t_1$ و مقدار مرکزی $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ را دارد صفر است. فرض کنید $\psi(t)$ در آن بازه زمانی مساوی $\cos \omega_0(t - t_0)$ است.

(الف) نشان دهید که آنالیز فوریه $\psi(t)$ به صورت زیر است

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega(t - t_0) d\omega$$

$$\pi B(\omega) = \frac{\sin[(\omega_0 + \omega)\frac{1}{2}\Delta t]}{\omega_0 + \omega} + \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)\frac{1}{2}\Delta t]}{\omega_0 - \omega}$$

(ب) نشان دهید اگر Δt از تناوب هر بسامد که می‌توانیم اندازه‌گیری کنیم یا به آن علاقه‌مندیم خیلی کوتاهتر باشد، آنگاه $\pi B(\omega)$ مقدار ثابت Δt را دارد.

(ج) نشان دهید اگر Δt شامل نوسانات زیادی باشد یعنی اگر $\omega_0 \Delta t \gg 1$ آنگاه برای ω به اندازه کافی نزدیک ω_0 ، $B(\omega)$ اساساً تنها با جمله دوم به دست می‌آید:

$$\pi B(\omega) \approx \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)\frac{1}{2}\Delta t]}{\omega_0 - \omega}, \quad |\omega_0 - \omega| \ll |\omega_0 + \omega|$$

(د) طرح کلی $\psi(t)$ و $B(\omega)$ را برای قسمت (ج) بکشید.

این مسئله به ما کمک می‌کند تا پهن شدگی برخورد خطوط طیف را بفهمیم. یک اتم مختل نشده که تقریباً نور مرئی گسیل می‌کند زمان فروافت میانگینی در حدود 10^{-8} s دارد و بنابراین طیف فوریه تابش، پهنای باند $\Delta \nu$ در حدود 10^8 cps دارد. اگر اتمها در یک چشمه نور لامپ تخلیه گازی باشند آنگاه پهنای باند نورگسیل شده (که در اپتیک پهنای خط نامیده می‌شود) حدود 10^9 cps به جای 10^8 cps می‌شود. قسمتی از دلیل این "پهن شدگی خط" این نکته است که اتمها در یک روال مختل نشده و آزاد تابش نمی‌کنند؛ آنها برخورد می‌کنند. برخورد از یک تغییر ناگهانی در دامنه و ثابت فاز یا هر دو ناشی می‌شود. این شبیه به موقعیت تصویر شده به وسیله نوسانگر هماهنگ بریده شده است. اتم معین ممکن است بیشتر وقت خود را "برانگیخته نباشد". اتفاقاً به وسیله حرکت نوسانی الکترونهاي (ظرفیت) اپتیکی برانگیخته می‌شود (اینجا کلاسیکی صحبت می‌کنیم؛ تصویر بسیار دقیق بحث مکانیک کوانتومی لازم دارد). اتم شروع به نوسان می‌کند مانند یک نوسان هماهنگ میرا با زمان فروافت از مرتبه 10^{-8} s اما در زمان Δt حدود 10^{-9} s (در

یک چشمه نورگازی معمولی)، برخوردی دارد که نوسان را به یک روش کاتوره‌ای قطع می‌کند. اگر کسی نور را با چشمه‌های گوناگون اضافه کند، پهنای باند $\Delta\nu$ با 10^9 cps $\approx (\nu/\Delta t) \approx \Delta\nu$ داده می‌شود.

۲۲-۶ آنالیز فوریه تپ مربعی که تقریباً به صورت دوره‌ای تکرار می‌شود. یک تپ مربعی منفرد با مدت زمان Δt یک طیف بسامد پیوسته می‌دهد که مهمترین سهم را بین صفر و $\nu_{\max} = \Delta\nu$ که $\nu \approx 1/\Delta t$ دارد. (مسئله ۶-۲۰ را ببینید.) یک تپ مربعی به صورت دوره‌ای مکرر با مدت زمان Δt در بازه زمانی T_1 (وقتی $T_1 > \Delta t$) تکرار می‌شود و یک طیف بسامدی منقطع شامل هماهنگهای $\nu_1 = 1/T_1$ (چند باره‌های انتگرال) می‌دهد، مهمترین سهم از صفر تا $\nu_{\max} = \Delta\nu$ با $\nu \approx 1/\Delta t$ گسترش می‌یابد. (مسئله ۲-۳۰ را ببینید.) حال یک تپ مربعی مکرر "تقریباً دوره‌ای" با مدت زمان Δt در بازه زمانی T_1 ، برای زمان کل طولی T_1 که زمان طولی T_1 نسبت به تناوب T_1 قابل مقایسه است تکرار می‌شود. اگر طولی T_1 بینهایت باشد، یک موج مربعی به صورت دوره‌ای مکرر دقیق خواهیم داشت همان‌طور که در بالا خواستیم. در آن حالت هر هماهنگ منقطع باید "بینهایت باریک" باشد.

(الف) نشان دهید که برای یک مقدار متناهی طولی T_1 آنالیز فوریه این تپ مربعی به صورت دوره‌ای مکرر شامل برهم‌نهی از هماهنگهای تقریباً منقطع از بسامد اساسی $\nu_1 = 1/T_1$ است که هر هماهنگ واقعاً یک بسامد پیوسته گسترش یافته در نوار بسامد باریک با پهنای طولی $\delta\nu \approx 1/T_1$ است. مهمترین هماهنگها بین صفر و $\nu_{\max} \approx 1/\Delta t$ قرار دارد. لازم نیست انتگرالها را به‌کار برید. از بحثهای کیفی استفاده کنید.

(ب) طرح کلی کیفی شکلهای $\psi(t)$ و ضرایب فوریه $A(\omega)$ یا $B(\omega)$ را بکشید، بدون اینکه در مورد تمایز بین $A(\omega)$ و $B(\omega)$ نگران باشید.

۲۳-۶ قفل‌شدگی مد یک لیزر و روشی برای به‌دست آوردن تپ‌های باریک نور مرئی. (ابتدا روی مسئله ۶-۲۲ کار کنید.) یک لیزر شامل (اگر به صورت تقریبی بگوییم) یک ناحیه با طول L و آینه‌هایی در هر انتهای آن است تا نور را به جلو و عقب بازتاباند. تحت شرایط خاص، وقتی فضا با اتمهای برانگیخته‌شده مناسب پر شده باشد، تابش از هر اتم، اتمهای برانگیخته دیگر را با روابط فازی که در میان همه اتمهای تابشی تداخل سازنده دارد برای تابشی در طول لیزر (جلو و عقب بین آینه‌ها) تحریک می‌کند. آنگاه تمام اتمها در یک فاز نوسان می‌کنند و سیستم اتمها بعلاوه تابش در مد طبیعی نوسان می‌کند. بسامدهای مدهای طبیعی ممکن نوسان آزاد هماهنگهای با بسامد بنیادی ν_1 هستند. زمان تناوب $T_1 = 1/\nu_1$ زمان لازم "رفت و برگشت" برای نوری است که در بین آینه‌ها به جلو و عقب منتشر می‌شوند. بنابراین $T_1 = 2L/(c/n)$ که n ضریب شکست

است. بنابراین، $\nu_1 = 1/T_1$ و مدهای ممکن بسامدهای $\nu = m\nu_1$ دارد که $m = 1, 2, 3, \dots$ است. حال اگر هیچ آینه‌ای وجود نداشته باشد، اتمهای برانگیخته نور معمولیشان را مستقلاً تابش می‌کنند. برای لیزرگازی هلیوم-نئون، نور نئون قرمز با طول موج 6328 \AA است. زمان میرایی τ برای یک اتم منفرد در آن حالت در حدود 10^{-9} s است که پهنای نوار حدود 10^9 cps می‌دهد. وقتی به جای آن مد طبیعی تمام سیستم (از اتمها بعلاوه تابش) را داریم زمان میرایی برای مد تمام سیستم طولانیتر از زمان آزاد فروافت τ برای یک اتم منفرد است. مد میرا با نشت نور از انتهای آینه‌ها به وجود می‌آید، به طور ناقص نور موازی از کناره‌های آینه‌ها و عوامل دیگر "عبور می‌کند" زمان میرایی طولانی T صدها یا هزارها برابر زمان فروافت آزاد است. این به این معنی است که هر مد پهنای بسامد طولانی $\nu/T \approx \delta\nu$ دارد که صدها و هزارها برابر باریکتر از پهنای خط طبیعی $\Delta\nu$ است. اما پهنای خط طبیعی $\Delta\nu$ نقش مهمی بازی می‌کند. چون ابتدا اتمهای فروافت آزاد که تمام سیستم را به یک مد تحریک می‌کند به وجود می‌آید، تنها مدهایی محسوساً تحریک می‌شوند که برای آنها بسامد مد $m\nu_1$ در قسمتی از پهنای $\Delta\nu$ قرار می‌گیرد که اتمهای فروافت آزاد هستند. برای نور مرئی و با طول L با مرتبه ۱ متر آسان است که بینیم تعداد m هماهنگ یک عدد صحیح بزرگ است.

(الف) مرتبه بزرگی عدد صحیح m برای مد چیست؟

(ب) شکل طیف بسامد مهمترین مدهای لیزر را بکشید. به عبارت دیگر مطالبی را که تاکنون گفتیم به شکل گرافیکی بکشید. جذابی بسامد ν_1 بین بسامدهای مد "مجاور"، پهنای بسامد $\delta\nu$ هر مد، و پهنای بسامد $\Delta\nu$ بیشترین مدهایی که به آسانی تحریک می‌شوند را نشانه‌گذاری کنید. حال ادامه می‌دهیم: وقتی هر سیستم پیچیده تحریک شود و بعد نوسان کند، با برهم‌نهی کم و بیش پیچیده نوسان مدهای طبیعی‌اش نوسان می‌کند. اگر به طرز ناخوشایندی تحریک شود، مدهای بیشماری ممکن است وجود داشته باشد که رابطه فازی ساده مخصوصی بین مدهای مختلف ندارند. می‌توانستیم یک چنین برهم‌نهی را برهم‌نهی "ناهمدوس" مدها بنامیم. این حالتی است که اگر یک لیزر را به صورتی تحریک کنید که تعدادی از مدهای آن تحریک شود معمولاً به دست می‌آورد. مثلاً می‌توان لیزر را به طریقی تحریک کرد که عملاً تمام مدهایش در پهنای $\Delta\nu$ تحریک شود. رابطه فازی بین مدهای مختلف به صورت زیر "کاتوره‌ای" است. اگر به سیستم در یک زمان نگاه کنیم و فازهای نسبی مدها را تعیین کنیم و آنگاه در زمان بعدی نگاه کنیم، خیلی دیرتر از زمان فروافت طولانی T ، فازهای نسبی میان مدها به طور غیرقابل پیش‌بینی متفاوت خواهد بود. به این خاطر که در زمان مرتبه طولانی T انرژی از مد معین نشت می‌کند و در همان زمان با اتمهای واداشته جدید پر می‌شود، بنابراین مد به طور مؤثر حدود یک بازه زمانی طولانی T در میان

”دوباره روشن می‌شود.“ ”زمان شروع“ کاتوره‌ای است. بنابراین فاز به‌طور غیرقابل پیش‌بینی در زمانی با مرتبهٔ طولی T تغییر می‌کند. حال، طیف بسامد مدهای مهم را که در قسمت (ب) طرح کلی آن را کشیدید کاملاً شبیه طیف بسامد آنالیز فوریۀ یک تپ مربعی به‌طور دوره‌ای مکرر است که در مسئلهٔ ۶-۲۲ داده شد. گرچه یک تفاوت بسیار مهم وجود دارد. در آنالیز فوریه موج مربعی تقریباً دوره‌ای، یک رابطهٔ فازی کاملاً مشخص و معین بین هر مؤلفهٔ بسامد که برهم‌نهی را تشکیل می‌دهد وجود دارد. این موضوع در مورد مخلوط ناهمدوس مدهای لیزر نیست.

(ج) نشان دهید که برهم‌نهی مخلوط ناهمدوس مدهای لیزر، که هر کدام پهنای نوار طولی $\delta\nu \approx 1/T$ دارند و ناحیهٔ بسامدی کل با پهنای $\Delta\nu$ را اشغال می‌کنند وابستگی زمانی $\psi(t)$ دارند که تقریباً تابع تناوبی t با تناوب T_1 است. نشان دهید که این تابع تقریباً تناوبی تنها شباهت مشخصی با خودش در طی تناوبهای موفق T_1 دارد که شامل بازه‌های زمانی از مرتبهٔ طولی T است. نشان دهید که گرچه ممکن است به‌طور شانس‌ی اتفاق بیفتد، در طی بازهٔ زمانی از مرتبهٔ طولی T تابع تقریباً تناوبی $\psi(t)$ مانند یک موج مربعی به‌طور تناوبی مکرر با مدت زمان $\Delta t \approx 1/\Delta\nu$ است، این حالت فقط در یک تصادف نادر رخ خواهد داد. به‌طور معمول انتظار داریم که $\psi(t)$ به‌طور چشمگیری در طول زمان تناوب کامل T_1 متفاوت با صفر باشد. بنابراین خواهیم داشت $\Delta t \gg 1/\Delta\nu$. حال می‌خواهیم اثر اختراع زیبایی ”فعل‌شدگی مد“ را بفهمیم. فرض کنید که به طریقی تمام مدهای مهم لیزر را که در فاز با یکدیگر ”فعل شده‌اند“ به‌دست آوریم. هنوز مهم نیست چگونه. سپس این برهم‌نهی همدوس مدها، همه با فاز یکسان، تابع تقریباً تناوبی $\psi(t)$ را که شامل پهنای مکرر در مدت زمان $\Delta\nu \approx 1/\Delta\nu$ است و در بازهٔ T_1 تکرار می‌شود را با شکل تپی که به سختی در مدت زمان از مرتبهٔ طولی T ثابت باقی می‌ماند می‌دهد. به‌طور تجربی متوجه این موضوع شده‌اند. یک حقهٔ فعل‌شدگی مد را اینجا به‌طور ساده می‌خوانیم. لیزر را روشن کنید. مدی نزدیک مرکز پهنای $\Delta\nu$ معمولاً اولین شروع نوسان خواهد بود. این مد را ν بنامید. حال طوری ترتیب دهید که (مثلاً) شفافیت محیط، (یا آینه‌ها، یا شیئی که نور از آن باید عبور کند) فرق کند یا به‌طور سینوسی با مقدار متوسطی مدوله شود، بسامد مدولاسیون مساوی بسامد بنیادی $\nu_1 = 1/T_1$ انتخاب می‌شود که مربوط به زمان T_1 ”بالا“ و ”پایین“ رفتن است. آنگاه اولین مد نوسان دامنه‌ای خواهد داشت که ثابت نیست اما با بسامد مدولاسیون ν_1 مدوله می‌شود:

$$\psi_{\text{مد}} = [A_0 + A_{\text{مدوله}} \cos \omega_1 t] \cos \omega_c t$$

که دامنهٔ مدوله شده $A_0 + A_{\text{مدوله}} \cos \omega_1 t$ است. این نوسان ”تقریباً هماهنگ“ به عنوان برهم‌نهی

از نوسانات هماهنگ دقیق در بسامدهای $\omega_0 + \omega_1$ ، ω_0 و $\omega_0 - \omega_1$ است:

$$\psi_{\text{مد}} = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{4} A_{\text{مدوله}} \cos(\omega_0 + \omega_1)t + \frac{1}{4} A_{\text{مدوله}} \cos(\omega_0 - \omega_1)t$$

جمله‌های $\cos(\omega_0 + \omega_1)t$ و $\cos(\omega_0 - \omega_1)t$ اکنون مانند لیزری محرک عمل می‌کند. آنها به تشکیل مدهای $\omega_0 + \omega_1$ و $\omega_0 - \omega_1$ کمک می‌کنند. بنابراین این مدها به‌طور کاتوره‌ای تشکیل نمی‌شوند اما به نوسان تحریک می‌شوند. بنابراین آنها یک رابطه فازی معین (که بالا داده شد) در مد مرکز ω_0 دارند. وقتی مدهای $\omega_0 + \omega_1$ و $\omega_0 - \omega_1$ تشکیل می‌شوند، دامنه آنها با همان اثر فیزیکی که ω_0 را مدوله می‌کند و با فاز یکسان مدوله می‌شود. بنابراین این مدها به نوبت شامل مؤلفه‌هایی است که به صورت نیروی محرک برای تشکیل همسایه‌های آنها (یکی از آنها معمولاً روشن و دیگری نیست) عمل می‌کند. در این روش مدهای $\omega_0 + 2\omega_1$ و $\omega_0 - 2\omega_1$ تشکیل می‌شوند. وقتی مدهایی با بسامدهای دور و دورتر از ω_0 تشکیل می‌شود، با رابطه فازی معین شروع می‌شوند. این‌گونه است که کار می‌کند.

برای لیزر گازی، زمان فروافت طبیعی τ از مرتبه 10^{-9} s است، بنابراین پهنای خط $\Delta\nu$ از مرتبه 10^9 Hz است. از این رو شخص می‌تواند با یک لیزر گازی قفل‌شده مد تپهایی با پهنای $\Delta\nu \approx 10^{-9}$ s تولید کند. برای یک لیزر جامد مثلاً لیزری که از یاقوت براق ساخته شده است، زمان میرایی طبیعی برای اتمهای منفرد از مرتبه 10^{-11} s یا 10^{-12} s است. (نوسانهای اتمی به خاطر برخوردهایی با اتمهای همسایه در جامد به سرعت میرا می‌شوند). بنابراین پهنای نوار تابش از اتمهایی که نور یاقوت قرمزگسیل می‌کند در حدود 10^{12} s⁻¹ است. این، همچنین پهنای نوار مدهای لیزر به‌آسانی برانگیخته است. بنابراین با استفاده از لیزر حالت جامد شخص می‌تواند تپهای نور فوق‌العاده کوتاه با مدت زمان $\Delta t \approx 1/\Delta\nu \approx 10^{-11}$ s یا $\Delta t \approx 1/\Delta\nu \approx 10^{-12}$ s تولید کند. البته این صرفاً مدت زمان تپ نوری از یک تک اتم است که در حالت جامد فرو می‌افتد، برطبق مکانیک کلاسیک. پس چرا باید این قدر به این نتیجه علاقه نشان دهیم؟ یک دلیل آن است که، یک تک اتم نور زیادی نمی‌دهد، در حالی که ما تعداد زیادی اتم داریم که همه در یک زمان گسیل می‌شوند به طوری که تپ نور بینهایت قوی با مدت زمان کوتاه می‌دهد. حتی مهمتر از این، این واقعیت است که طبق مکانیک کوانتومی (و تجربه) یک تک اتم نوری در جریان پیوسته که با مدل کلاسیکی توصیف شد گسیل نمی‌کند. در عوض "فوتون" نور در یک "دسته" منقطع بیرون می‌آید. برای یک تک اتم راهی برای گفتن اینکه درست کی این دسته انرژی گسیل می‌شود وجود ندارد. تنها احتمال برحسب زمان معلوم است. بنابراین شخص نمی‌تواند واقعاً تپهای نور کوتاه همزمان را با استفاده از تک اتمها به دست آورد.

از این تپهای نور فوق‌العاده کوتاه در بسیاری از آزمایشهای جالب استفاده می‌شود.^۱
 ۲۴-۶ بسامد تابع دلتا. در بخش ۴-۶ برهم‌نهمش زیر را در نظر گرفتیم

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t \, d\omega$$

این برهم‌نهمش طیف بسامد "مربعی" است که با قرار دادن $B(\omega) = 1/\Delta\omega$ برای ω در بازه‌ای از ω_1 تا $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ و قرار دادن $B(\omega) = 0$ در هر جا به دست می‌آید. برهم‌نهمش را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\psi(t) = \left[\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta\omega t}{\frac{1}{2} \Delta\omega t} \right] \cos \omega_0 t$$

که ω بسامد مرکز نوار $\Delta\omega$ است. زمان t_{\max} را طولانی‌تر از مدت زمانی که آزمایش در ذهنتان طول می‌کشد در نظر بگیرید. نشان دهید اگر $\Delta\omega$ به اندازه کافی کوچک باشد به طوری که $\Delta\omega t_{\max} \ll 1$ ، آنگاه تا آنجا که می‌توان گفت (در آزمایش خودتان در زمان t_{\max})، $\psi(t)$ دقیقاً نوسان هماهنگی از دامنه یکسان و فاز یکسان است. آنگاه ضریب فوری $B(\omega)$ را "تابع دلتای بسامد" می‌نامند. تابع دلتای بسامد خصوصیتی دارد که همه جا صفر است جز در ناحیه باریکی، $\Delta\omega$ ، و انتگرال آن حول ω یک می‌شود. نشان دهید که $B(\omega)$ که در بالا آمده است در حد $\Delta\omega \ll 1/t_{\max}$ این خاصیت را دارد و بنابراین مثالی است از تابع دلتای بسامد.

۲۵-۶ تشدید در امواج کشندی. فرض کنید اقیانوسی عمق یکنواخت ۵ کیلومتر داشته باشد. (این عمق، حدوداً عمق متوسط است.) نشان دهید که امواج کشندی به وسیله (مثلاً) زلزله‌ای که در حدود 220 m/s حرکت می‌کند تولید می‌شود. فرض کنید قاره‌ای وجود ندارد. فرض کنید که آب در "کانالهایی" که در طول خطوطی با عرض ثابت قرار دارند محدود شده باشد، به طوری که آب نمی‌تواند به طرف شمال و جنوب حرکت کند بلکه فقط به طرف شرق و غرب می‌تواند حرکت کند. موج کشندی پیشرونده (که بر اثر زلزله به وجود می‌آید) چه عرض جغرافیایی در ۲۵ ساعت دور کره زمین خواهد داشت؟ این عرض جغرافیایی را θ بنامید. (در استوا، θ صفر است. در قطبین 90° است.)

خورشید و ماه نیروهای محرک گرانشی‌ای تولید می‌کنند که باعث جذر و مد می‌شود. ماه را در نظر بگیرید. (خورشید نصف نیروی محرکی را که ماه به وجود می‌آید تولید می‌کند.) یک "روز" مهتابی (زمان بین گذرهای متوالی ماه) در حدود ۲۵ ساعت طول می‌کشد. نتیجه می‌گیریم که اگر

1. A. de Maria, D. Stetser, and W. Glenn, Jr., "Ultrashort Light Pulses", *Science*, **156**, 1557 (June 23, 1967).

زمین حول محور خود نچرخد برجستگی کشندی مد مربوط به ماه مستقیماً زیر ماه خواهد بود و همچنین کاملاً در نقطه مخالف. در ماه نو و بدر، خورشید و ماه برای تشکیل یک جذر و مد بلند سهیم‌اند. بنابراین در این زمانهای ماه شما انتظار مد خواهید داشت که دقیقاً در ظهر و نیمه‌شب به‌وجود می‌آید، و جزر در طلوع و غروب خورشید (طبق "مدل استاتیکی" زمین ناچرخان). حداقل این است که شما در جزیره‌ای در اقیانوس چه انتظاری دارید (در لنگرگاه باید منتظر آبی باشد که به طرف داخل و خارج جریان پیدا می‌کند). حال "مدل کانالی" و یک زمین چرخان را در نظر بگیرید. در ماه نو و بدر چه موقع انتظار وقوع مد در کانال در استوا خواهید داشت؟ چه موقع انتظار دارید که برای کانالی در عرض جغرافیایی بزرگتر از θ اتفاق بیفتد؟ (راهنمایی: یک نوسانگر واداشته را در نظر بگیرید).^۱

۶-۲۶ امواج غیر پاشنده. نشان دهید که هر تابع دیفرانسیلی $f(t')$ با $t' = t(z/v)$ در معادله موج کلاسیکی صادق است، یعنی نشان دهید

$$\frac{\partial^2 f(t')}{\partial t'^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(t')}{\partial z^2}$$

همچنین نشان دهید که هر تابع دیفرانسیلی $g(t'')$ با $t'' = t + (z/v)$ در معادله موج کلاسیکی صدق می‌کند. مثالی از تابع $f(t')$ بسازید و آشکارا نشان دهید که در موج کلاسیکی صدق می‌کند. ۶-۲۷ مدولاسیون دامنه و غیرخطی بودن. (الف) یک راه ایجاد دامنه مدوله شده موج حامل این است که یک جریان $I = I_0 \cos \omega_0 t$ را عبور دهد که در بسامد حامل ω_0 در مقاومت R که ثابت نیست اما مؤلفه‌ای دارد که با بسامد مدولاسیون ω_{mod} یعنی $R = R_0(1 + a_m \cos \omega_{\text{mod}} t)$ تغییر می‌کند، نوسان کند. (در یک میکروفون "دانه کربنی"، مقاومت با حرکت یک دیافراگم مدوله می‌شود که دانه‌های کربن را که باعث ایجاد مقاومت می‌شود فشرده می‌کند). ولتاژ $V = IR$ که از مقاومت می‌گذرد موج حامل با دامنه مدوله شده است. عبارتی برای V برحسب برهم‌نهی حامل (بسامد ω)، نوارکناری بالا (بسامد $\omega + \omega_{\text{mod}}$) و نوارکناری پایین (بسامد $\omega - \omega_{\text{mod}}$) به‌دست آورید.

(ب) از طرف دیگر، فرض کنید با دو ولتاژ شروع می‌کنیم یکی در بسامد حامل نوسان می‌کند و دیگری در بسامد مدولاسیون. مسئله این است چگونه این دو ولتاژ یعنی $V = A \cos \omega_0 t$

۱. برای مطالعه بیشتر امواج کشندی، نوسانات در دریاچه ژنوا، تحول ممکن سیستم مام-زمین، و دیگر موضوعات جالب به کتاب مشهور کلاسیک جذر و مدها مراجعه کنید.

George H. Darwin (Charles Darwin's son), written in 1898, available From W. H. Freeman and Company. San Francisco (1962), paperback \$, 2. 75.

در آن روزها آنالیزهای فوریه تازه استفاده می‌شد و داروین در میان دیگر کارها بعضی روشهای آنالیز فوریه ساده را استادانه توصیف کرده بود.

و $V_m = A_m \cos \omega_{\text{mod}} t$ را ترکیب می‌کنیم تا موج حامل با دامنه مدوله شده به دست آید؟ ابتدا فرض کنید اساساً دو ولتاژ را روی هم منطبق کردیم، یعنی هر دو را روی آنتن پخش گذاشته‌ایم. آیا کار خواهد کرد؟

(ج) سپس فرض کنید که ولتاژ در قسمت (ب) بعد از منطبق شدن به ورودی یک ولتاژ تقویت‌کننده فرستاده شود. (مثلاً ممکن است بین شبکه کنترل و کاتد لامپ یک رادیو به کار رود.) فرض کنید که تقویت‌کننده یک تقویت‌کننده خطی است، یعنی خروجی آن (مثلاً ولتاژ صفحه به کاتد لامپ) متناسب با ورودی است. آیا این جوری کار می‌کند؟

(د) بالاخره، فرض کنید که خروجی تقویت‌کننده هم مؤلفه درجه دوم دارد و هم مؤلفه خطی مانند زیر

$$V_{\text{out}} = A_1 V_{\text{in}} + A_2 (V_{\text{in}})^2$$

$V_{\text{in}} = V_0 + V_m$ را همانی که در قسمت (ب) تعریف شده بگیریم. نشان دهید که به خاطر جمله $A_2 (V_{\text{in}})^2$ درجه دوم غیرخطی، خروجی تقویت‌کننده در میان دیگر چیزها شامل موج حامل با دامنه مدوله شده است که دامنه مدولاسیون متناسب با A_m است.

(ه) موج حامل با دامنه مدوله شده در (د) با مؤلفه‌های فوریه با بسامدهای $\omega_0 + \omega_{\text{mod}}$ و $\omega_0 - \omega_{\text{mod}}$ سهیم است. چه مؤلفه‌های بسامد دیگری در V_{out} وجود دارد؟ نموداری رسم کنید که طیف بسامد کامل خروجی تقویت‌کننده را نشان دهد. توضیح دهید که چطور می‌توانید از دیگر مؤلفه‌های (ناخواسته) با استفاده از صافیهای کنارگذار خلاص شوید؟ فرض کنید که ω_{mod} در مقایسه با ω_0 کوچک است. صافیهای انتخابی چگونه باید باشند؟

۲۸-۶ و امولاسیون دامنه و غیرخطی بودن. فرض کنید که آنتن گیرنده شما یک موج حامل با دامنه مدوله شده و ولتاژ زیر باشد:

$$V = V_0 (\cos \omega_0 t) (1 + a_m \cos \omega_{\text{mod}} t)$$

چگونه ولتاژ مدولاسیون $a_m \cos \omega_{\text{mod}} t$ را به دست می‌آورید؟ فرض کنید صافیهای نوارگذری که در نظرتان است دارید و همچنین یک تقویت‌کننده غیرخطی از نوع تعریف شده در مسئله ۲۷-۶ در دسترس دارید به طوری که

$$V_{\text{out}} = A_1 V_{\text{in}} + A_2 (V_{\text{in}})^2$$

(راهنمایی: موج حامل با دامنه مدوله شده را به عنوان یک برهم‌نهی بیان کنید، آن را از تقویت‌کننده غیرخطی عبور دهید و سپس آن را صاف کنید.)

۲۹-۶ مدولاسیون بسامد (FM). یک ولتاژ با بسامد مدوله شده می تواند به صورت زیر (مثلاً) نوشته شود

$$V = V_0 \cos[\omega_0 (\lambda + a_m \cos \omega_{\text{mod}} t) t] = V_0 \cos \omega t$$

با

$$\omega = \omega_0 + \omega_0 a_m \cos \omega_{\text{mod}} t$$

یک راه ایجاد موج حامل با بسامد مدوله شده برای عبور موسیقی استفاده از "میکروفون خازنی" است. موجهای صوتی یک دیافراگم را حرکت می دهند که یک صفحه خازن را به حرکت در می آورد. خازن سپس ظرفیت (مثلاً) زیر را دارد:

$$C = C_0 (\lambda + c_m \cos \omega_{\text{mod}} t)$$

فرض کنید این ظرفیت قسمتی از یک مدار LC با بسامد نوسان طبیعی $\omega = \sqrt{1/LC}$ است. ولتاژ در طول خازن، مثلاً $V = V_0 \cos \omega t$ است. نشان دهید که برای c_m که اندازه آن در مقایسه با واحد بسیار کوچک است، می توان ولتاژ بسامد مدوله شده را با دامنه a_m متناسب با c_m به دست آورد. ثابت تناسب بین c_m و a_m را به دست آورید.

۳۰-۶ مدولاسیون فاز (PM). ولتاژ با فاز مدوله شده شکل زیر (مثلاً) را دارد

$$V = V_0 \cos(\omega_0 t + a_m \sin \omega_{\text{mod}} t) = V_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

با

$$\varphi = a_m \sin \omega_{\text{mod}} t$$

"بسامد لحظه ای" با دیفرانسیل گیری کمیت داخل پرانتز با توجه به زمان به دست می آید

$$\omega = \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + a_m \omega_{\text{mod}} \cos \omega_{\text{mod}} t$$

با مقایسه با مسئله ۲۹-۶ می بینیم که مدولاسیون فاز و بسامد بسیار بهم مربوط اند. (بعضی وقتها هر دو را با بی دقتی FM می نامند.)

(الف) نشان دهید که ولتاژ فاز مدوله شده را می توان برهم نهشی از نوسانهای هماهنگ با بسامدهای ω_0 ، $\omega_0 \pm \omega_{\text{mod}}$ ، $\omega_0 \pm 2\omega_{\text{mod}}$ ، $\omega_0 \pm 3\omega_{\text{mod}}$ ، و غیره نوشت. [راهنمایی: ابتدا $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ را بسط دهید. سپس $\sin \varphi$ و $\cos \varphi$ را در سریهای تیلور نامتناهی آنها بسط دهید. آنگاه از روابط مثلثاتی مسئله ۱-۱۳ استفاده کنید.]

(ب) نشان دهید که اگر دامنه مدولاسیون a_m در مقایسه با واحد کوچک باشد می‌توانیم به طوری منطقی از تمام جملات در برهم‌نهی بجز آنهایی که بسامد ω و $\omega \pm \omega_{\text{mod}}$ دارند صرف‌نظر کنیم. بنابراین می‌بینیم که برای دامنه مدولاسیون فاز کوچک فقط موج حامل و اساساً فقط یک نوار کناری بالا و پایین را داریم. از این رو برای a_m کوچک پهنای نوار لازم مانند تراگسیل AM (دامنه مدوله شده) است. برای a_m بزرگ پهنای نوار لازم بزرگتر است به خاطر نوار کناری اضافی در $\omega \pm 2\omega_{\text{mod}}$ و غیره.

(ج) فاز نسبی حامل و دو نوار کناری همسایه در PM (مدولاسیون فاز) را با فاز نسبی حامل و دو نوار کناری برای AM که در مسئله ۶-۲۷ بود مقایسه کنید.

(د) فرض کنید می‌خواهید ولتاژ AM را به ولتاژ PM برگردانید. به شما صافیهای نوارگذری که می‌خواهید داده‌اند و همچنین مداری دارید که انتقال فاز دلخواه شما را انجام می‌دهد. بعد از اینکه یک روشی اختراع کردید مسئله ۹-۵۸ را برای راهنمایی بخوانید. [این مسئله در فصل ۹ آمده است زیرا شباهت زیبایی با میکروسکوپ تمایز فاز دارد (مسئله ۹-۵۹).]

۶-۳۱ تراگسیل یکی از دو نوار کناری. اگر اطلاعاتی که باید عبور داده شود نواری از بسامدهای مدولاسیون را از $\omega_{\text{mod}}(\text{min})$ تا $\omega_{\text{mod}}(\text{max})$ اشغال کند، آنگاه نوار پخش AM یا FM از $\omega - \omega_{\text{mod}}(\text{max})$ به $\omega + \omega_{\text{mod}}(\text{max})$ گسترش می‌یابد که ω بسامد حامل است. پهنای نوار بنابراین $2\omega_{\text{mod}}(\text{max})$ است. پهنای نوار دقیق است زیرا هر ایستگاه در یک ناحیه باید نوار مختلفی اشغال کند تا از همپوشی دوگانه و تداخل سیگنالها جلوگیری شود.

(الف) فرض کنید امواج رادیویی AM پخش می‌کنید، و از یک صافی نوارگذر برای جدا کردن موج حامل و نوار کناری بالایی استفاده می‌کنید، نوار کناری پایینی را کنار بگذارید. شما درست موج حامل و نوار کناری بالایی را پخش می‌کنید. راهی اختراع کنید که دوباره نوار کناری پایینی را در یک فرستنده با گذاشتن سیگنال دریافت شده (حامل و نوار کناری بالایی) در یک تقویت‌کننده‌ای که در مسائل ۶-۲۷ و ۶-۲۸ توصیف شد، ایجاد کنید. در مورد دامنه لازم و روابط فاز طوری بحث کنید که با یک سیگنال متناسب با سیگنال AM اصلی تمام شود.

(ب) شما می‌توانید پهنای نوار تراگسیلی را کاهش دهید حتی اگر نه تنها نوار کناری پایینی را بلکه موج حامل را نیز متوقف کنید. فرض کنید تنها نوار کناری بالایی را عبور می‌دهید. فرض کنید که گیرنده "نوسانگر محلی" خودش را دارد که سیگنال $V = A \cos \omega' t$ را که ω تا حد ممکن نزدیک به ω است می‌فرستد. (البته هیچ وقت به خاطر سوپهای غیر اجتناب‌پذیر مربوط به دلایل مختلف دقیقاً برابر ω نمی‌شود.) روشی اختراع کنید که با آن بتوانید سیگنال نوسانگر محلی را با آنی که در فرستنده دریافت می‌شود (از نوار کناری بالایی) ترکیب کنید به طوری که نوار

کناری پایینی دوباره ایجاد شود. از تقویت‌کننده‌های غیرخطی صافها، انتقال‌دهنده‌های فاز هر چه که نیاز دارید استفاده کنید.

(ج) فرض کنید که بسامد موج حامل $\omega_c = 10^6 \text{ Mc}$ (۱ Mc برابر 10^6 cps است) و بسامد نوسانگر محلی ω_l که برای تراگسیل نوار کناری منفرد استفاده می‌شود (و همچنین با حامل متوقف می‌شود). ω را با 30 cps افزایش می‌دهد. خطای آن فقط یک قسمت در ۳ میلیون است. فرض کنید که موسیقی شامل فلوتی است که نت $A440$ را می‌نوازند (در 440 cps). چه نتی از بلندگوی شما بیرون خواهد آمد بعد از اینکه شما بالاخره نوار کناریها و امدوله‌شده‌ها را دوباره ایجاد کردید؟ نتیجه آن به شما می‌گوید چرا در حال حاضر (۱۹۶۸) تراگسیل نوار کناری منفرد شامل موج حامل است به‌خوبی یک نوار کناری برای تلویزیون تجارتي. برای ارتباطات صدا موج حامل می‌تواند متوقف شود چون هیچ‌کس اهمیت نمی‌دهد اگر گام صدای شما دقیقاً دوباره ایجاد نشود.

۳۲-۶ چندتافتگی بسامدی. اغلب اتفاق می‌افتد که می‌خواهیم ۲ یا چند "کانال" کاملاً مستقل اطلاعات را با استفاده از همان بسامد حامل ω عبور دهیم. این کانالها ممکن است اطلاعات را به‌شکل نوارهای بسامدهای مدولاسیون $\omega_{\text{mod}}(1)$ ، $\omega_{\text{mod}}(2)$ ، و غیره برای کانالهای ۱، ۲، و غیره حمل کنند. اگر نوارهای بسامد مدولاسیون همپوشی نکنند، شخص می‌تواند به‌سادگی موج حامل را با تمام کانالهای مدولاسیون یک‌باره مدوله کند. مثلاً شما می‌توانید موج حامل و ولتاژهای مدولاسیون از همه کانالهای ورودی به تقویت‌کننده غیرخطی را منطبق کنید، همان‌گونه که با ولتاژ مدولاسیون منفرد (کانال منفرد) در مسئله ۶-۲۷ انجام دادید. آنگاه خروجی تقویت‌کننده شامل یک موج حامل با دامنه مدوله‌شده (در میان چیزهای دیگر) است که معادل برهم‌نهی از بسامدهای ω ، $\omega_{\text{mod}}(1) \pm \omega$ ، $\omega_{\text{mod}}(2) \pm \omega$ ، و غیره ... است.

(الف) جمله قبل را تأیید کنید.

در گیرنده باید امدوله کنید، مثلاً مانند مسئله ۶-۲۸، برای پوشاندن نوارهای مدولاسیون $\omega_{\text{mod}}(1)$ ، $\omega_{\text{mod}}(2)$ ، و غیره. این نوارها می‌توانند با صافیهای نوارگذار جدا شوند، به شرط اینکه نوارهای بسامد مدولاسیون همپوشی نداشته باشند. بالاخره باید اطلاعات خروجی کانالهای ۱، ۲، و غیره را جدا کنیم بدون "گفت و شنود" یا "همپوشی" یعنی بدون اینکه خروجی کانال ۱ سیگنالهای اشتباهی که از کانال ۲ یا غیره می‌آید به ما بدهد.

از آنجایی که در بیشتر موارد مورد نظر، بسامدهای مدولاسیون حمل‌شده توسط کانالهای جدا نوارهای بسامد همپوشی را اشغال می‌کنند، روش بالا صادق نیست. مثلاً در پخش استریوی FM دو کانال وجود دارد یکی باید (عاقبت) خروجی بلندگو را که تماماً از یک ورودی میکروفون

(نزدیک "سازهای بادی چوبی") به دست می‌آید بدهد، و دیگری باید یک خروجی از ورودی دیگر میکروفون (نزدیک "وسایل موسیقی برنجی") بدهد. بسامدهای مدولاسیون برای دو کانال مربوط به موسیقی هستند و همپوشی دارند.

یک مثال دیگر، استفاده از تک‌سیم در تراکسیل تلفن در فاصله طولانی است یا یک بسامد حامل منفرد برای تراکسیل رادیو، کانالهای مختلف شامل مکالمات تلفنی همزمان مختلف است. بسامدهای مدولاسیون همانهایی هستند که متعلق به صدای انسان است. به همین ترتیب در "مسافت‌سنج" وسایل خواندن در یک ماهواره زمینی که به طرف ایستگاه زمینی بر نمی‌گردد، هر وسیله کانال جداگانه‌ای دارد. بسامدهای مدولاسیون بستگی به آن دارد که چطور وسایل طراحی می‌شوند. (مثلاً یک دماسنج ممکن است شامل یک خازن باشد که تغییر ظرفیت آن با دماست. این ظرفیت ممکن است بسامد ω_{mod} را در یک مدار LC نوسانگر معین کند.) بسامدهای مدولاسیون به‌طور زیادی همپوشی دارند.

آنگاه لازم است تا هر کانال را "برچسب" بگذاریم به طوری که کانال را جدا نگه داریم. یک روش استفاده از بسامد حامل متفاوت برای هر کانال است. این کاری است که باید با ایستگاههای TV یا رادیو به‌طور جداگانه انجام داد. اما یک روش مناسبتر به نام "چندتافتگی بسامدی" وجود دارد. در چندتافتگی بسامدی هر کانال با بسامد "زیرحامل" خود مانند زیر "برچسب زده می‌شود". بسامدهای زیرحامل ω_1 ، ω_2 ، و غیره را برای کانالهای ۱، ۲، غیره بنامید. (بسامدهای زیرحامل نسبت به بسامدهای مدولاسیون بزرگ‌اند. بسامد حامل اصلی ω_c به نوبه خود در مقایسه با هر زیرحامل بزرگ است.) زیرحامل ω_1 مدوله‌شده دامنه (یا بسامد مدوله‌شده) در بسامد مدولاسیون $\omega_{\text{mod}}(1)$ به وسیله کانال ۱ است. این خروجی دامنه مدوله‌شده کانال ۱ را می‌دهد که شامل یک برهم‌نهی با بسامدهای ω_1 ، $\omega_1 + \omega_{\text{mod}}(1)$ ، و $\omega_1 - \omega_{\text{mod}}(1)$ است. به همین ترتیب کانال ۲ یک خروجی با بسامدهای ω_2 ، $\omega_2 + \omega_{\text{mod}}(2)$ ، و $\omega_2 - \omega_{\text{mod}}(2)$ دارد. بسامدهای زیرحامل ω_1 و ω_2 به اندازه کافی دور از هم انتخاب می‌شوند به طوری که هیچ همپوشی در ۲ نواری که دو حامل را احاطه کرده ندارد یعنی ω_1 را کمتر از ω_2 بگیریم، بالاترین بسامد در نوار کناری بالایی $\omega_1 + \omega_{\text{mod}}(1)$ کمتر از کمترین بسامد در نوار کناری پایینی $\omega_2 - \omega_{\text{mod}}(2)$ است. مثلاً برای پخش استریوی FM بسامدهای زیرحامل نمونه $\nu_1 = 20 \text{ kc}$ و $\nu_2 = 40 \text{ kc}$ است. اگر بسامدهای مدولاسیون (موسیقی) از صفر تا 10 kc گسترش یابد آنگاه کانال ۱ شامل نوار از 10 kc تا 30 kc است و کانال ۲ شامل یک نوار از 30 kc تا 50 kc است. تا حالا به نظر می‌آمد که دو موج حامل داریم (برای دو کانال). اما هنوز به خروجی آنتن نداده‌ایم. حال فرض کنید خروجیهای همه کانالها را روی هم برهم می‌نهمیم و به این برهم‌نهی چند نواره چند کانالی به عنوان یک نوار بزرگ

از بسامدهای مدولاسیون که از انتهای پایینی نوار کناری پایینی کانال ۱ تا انتهای بالایی نوار کناری بالایی بالاترین کانال کشیده شده است توجه می‌کنیم. از این نوار کامل برای مدوله کردن موج حامل ω اصلی به وسیلهٔ (مثلاً) برهم نهادن این نوار چندکاناله روی ولتاژ حامل استفاده می‌کنیم و نتیجه را روی ورودی تقویت‌کنندهٔ غیرخطی مانند مسئلهٔ ۶-۲۷ به کار می‌بندیم.

(ب) اگر از تقویت‌کنندهٔ غیرخطی مسئلهٔ ۶-۲۷ استفاده کنید خروجی تقویت‌کننده شامل چه چیزهایی خواهد بود؟ به جای آن از فرمولهایی استفاده کنید که با آنها می‌توانید طرح کلی کیفی از شدت بر حسب بسامد بکشید. نوارهای بسامد نزدیک ω (حامل اصلی) را که برای آنتن عبور به کار می‌برید نشان دهید. همچنین بسامدهای دیگری که از تقویت‌کننده‌ای بیرون می‌آید که از صافی رد می‌کنید و کنار می‌گذارید را نشان دهید.

(ج) در گیرنده شما می‌توانید به صورت زیر بسامدها را از هم جدا کنید: سیگنالی شامل موج حامل ω و نوار کناریهای بالایی و پایینی چند نواری را به ورودی تقویت‌کنندهٔ غیرخطی وارد کنید مانند مسئلهٔ ۶-۲۸. خروجی تقویت‌کننده در میان دیگر چیزها شامل زیرحامل ω_1 و نوار کناریهای $(1) \pm \omega_{\text{mod}}$ است و به همین ترتیب برای کانالهای دیگر. آن جمله را توجه کنید. زیرحاملهای مختلف و نوار کناریهای آن همپوشی ندارند و اکنون می‌توانند با صافیهای نوارگذر جدا شوند. سپس هر کانال، خروجی خود را بدون هیچ گفت‌وشنودی تأمین می‌کند.

۶-۳۳ طیف‌نمایی فوریه با تداخل‌سنجی چندتافته (MIFS). در سال ۱۹۶۷ روش اخترشناسی فرسوخ توسط یک روش جدید به نام طیف‌نمایی فوریهٔ تداخل‌سنجی چندتافته یا به صورت کوتاه MIFS دوباره تحول یافت. این روش جدید با یک عامل 10^6 ، پیشرفتی در تفکیک بسامد نسبت به تمام روشها دارد و با یک عامل 600000 کاهشی در صرف زمان برای جمع‌کردن نور به منظور مشخص‌کردن طیف بسامد دارد. روش MIFS کاربرد جدی در مفهوم چندتافتگی بسامدی در مسئلهٔ ۶-۳۲ دارد.

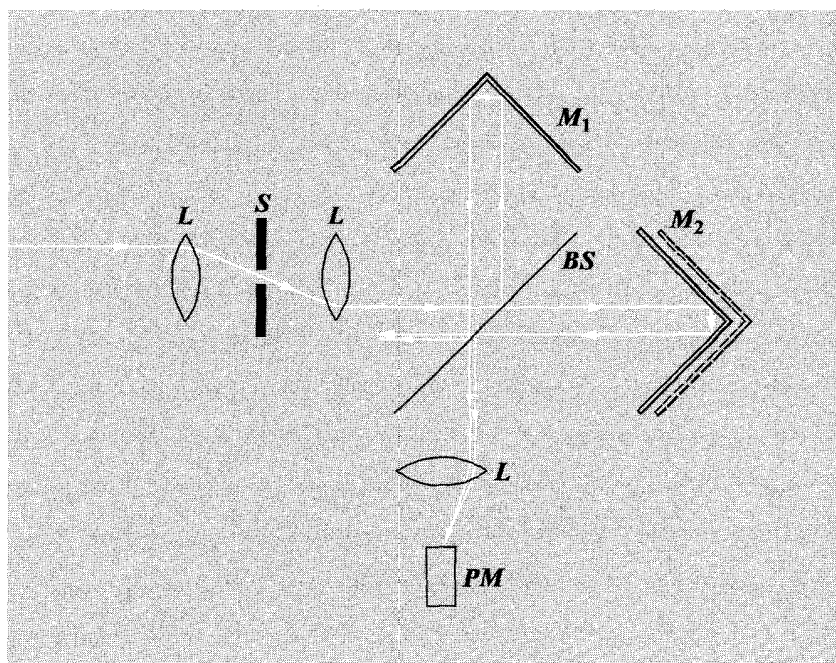
طیف بسامد یک ستاره که نور مرئی گسیل می‌کند با توری پراشی به دست می‌آید که با یک امولاسیون عکاسی در فاصلهٔ مناسبی از مسیر قرار گرفته است. طیف کامل یک‌باره به دست می‌آید زیرا طول موجهای مختلف در جهتهای مختلف و بنابراین به قسمتهای مختلف فیلم پراشیده می‌شوند. سیاهی فیلم در زاویهٔ پراش معین شدت مؤلفهٔ طول موج را به دست می‌دهد.

برای نور فرسوخ (یعنی طول موجهای در مرتبهٔ 10^{-4} cm) هیچ فیلم عکاسی وجود ندارد که مناسب باشد. توری پراش هنوز کار می‌کند و می‌توان از آن استفاده کرد. به جای فیلم می‌توان از یک لوله تکثیرکنندهٔ فوتونی با شکاف متحرک استفاده کرد. محل شکاف زاویهٔ پراش و از این رو طول موج را به دست می‌دهد. جریان تکثیرکنندهٔ فوتونی شدت را می‌دهد. اگر تفکیک باریکی

می‌خواهید (در بسامد یا طول موج)، باید از یک شکاف باریک استفاده کنید، به طوری که تفکیک زاویه‌ای باریکی داشته باشید. اگر طیف بسامد کامل می‌خواهید باید برای زمان کافی در محل شکاف شمارش کنید تا شدت در طول موج مربوط را اندازه‌گیری کنید، سپس شکاف را با پهنای یک شکاف حرکت دهید و در مدت زمان کافی در محل جدید شمارش کنید و غیره. برای به دست آوردن طیف کامل در برد بسامد ν_1 تا ν_2 هر قسمت از برد که با پهنای باند $\Delta\nu$ اندازه‌گیری می‌شود $(\nu_2 - \nu_1)/\Delta\nu$ جدایی در اندازه‌گیری شدت داریم. برای یک برد طول موج از ۱ تا ۳ میکرون (یک میکرون برابر است با 10^{-4} سانتیمتر) برد طول موجی از ۱ تا $1/3$ برابر 10^{-4} cm^{-1} (عکس سانتیمتر) خواهیم داشت، یعنی $(2/3) \times 10^4 \text{ cm}^{-1} = \lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}$. برای یک قدرت تفکیک خوب معمولی 1 cm^{-1} $\Delta(\lambda^{-1}) = \Delta(\nu/c) \approx 10^4 \text{ cm}^{-1}$ ، اندازه‌گیریهای با جدایی حدود $60000 \approx (2/3) \times 10^5$ لازم است تا طیف کامل را پوشاند. از آنجایی که هر اندازه‌گیری یک شب طول می‌کشد، چند صدسال طول خواهد کشید.

البته اگر شما ۶۰۰۰۰ تکثیرکننده فوتونی داشته باشید می‌توانید تمام طیف را یک‌باره اندازه‌گیری کنید اما روشن است که غیرعملی است. اگر یک تکثیرکننده فوتونی روی نقش تمام پراش از توری پراش گسترده شود تمام طول موجها را یک‌باره اندازه‌گیری خواهید کرد. خروجی تکثیرکننده فوتونی متناسب با شدت کل است که روی کل طیف متوسط گرفته می‌شود، اما نمی‌توانید هرگز بگویید کدام قسمت از کدام طول موج آمده است. مانند این است که همه مکالمات تلفنی از سان‌فرانسیسکو تا نیویورک را روی یک خط داشته باشیم بدون اینکه راهی برای جدا کردن آنها باشد. مسئله فرستادن مکالمات تلفنی جدا روی یک خط به این صورت حل شده است که هر مکالمه با "زیرحامل" مربوط به خودش "برجسب‌گذاری" می‌شود و آنگاه همه زیرحاملها با همدیگر "چندتافته" می‌شود همان‌طور که در مسئله ۶-۳۲ بحث شد. اگر فقط یک راه برای برجسب‌زدن هر طول موج فروسرخ جدا باشد به نحوی که با یک بسامد "زیرحامل" طول موج را مشخص کند! آنگاه تمام نور فروسرخ در همان زمان روی یک تکثیرکننده فوتونی کانونی می‌شود. خروجی تکثیرکننده فوتونی می‌تواند آنالیز فوریه شود به طوری که آن را به نوارهای زیرحامل جدا تجزیه کند. آنگاه شدت هر زیرحامل، شدت مربوط به طول موج فروسرخ را خواهد داد.

(الف) راهی اختراع کنید تا هر طول موج را با یک زیرحامل برجسب‌گذاری کنیم با استفاده از یک "موتور" مکانیکی شامل چرخ چرخنده با سوراخها یا شکافهایی که نور فرودی از یک شکاف عبور می‌کند و در دیگری می‌ایستد. مسئله اصلی این است که راهی اختراع کنید تا بسامد قطع بستگی به طول موج فروسرخ داشته باشد.



شکل م-۳۳

فن ظریفی که در روش MIFS به کار می رود به صورت زیر است. از هیچ توری پراش یا موتور مکانیکی استفاده نمی شود، به جای آن از تداخل سنج مایکلسون با یک آینه متحرک استفاده می شود. (این نوع تداخل سنج که در آزمایش مایکلسون-مورلی استفاده می شود در طرح کلی شکل بالا نشان داده شده است). نور از ستاره (مثلاً) در جهت x روی آینه نیمه نقره‌اند و "شکافنده باریکه" که با زاویه 45° نسبت به باریکه فرودی است فرود می آید. شکافنده باریکه نیمی از نور را در جهت y باز می تاباند و نیمی دیگر در جهت x عبور می کند. آینه‌ها سپس دوباره دو باریکه را به طرف شکافنده باریکه هدایت می کنند به طوری که نیمی از نور دوباره ترکیب شده در جهت $-y$ به تکثیرکننده باز می تابد. (نیم دیگر در جهت $-x$ به طرف ستاره برمی گردد و دیگر در دسترس نیست). برای یک طول موج λ جریان تکثیرکننده فوتونی یا بیشینه است یا کمینه بستگی به آن دارد که آیا دو باریکه دوباره در یک فاز یا 180° درجه خارج فاز باشند. خود این مطلب به نوبه خود بستگی به این دارد که آیا اختلاف طولهای مسیر (از شکافنده باریکه به آینه تا شکافنده باریکه به تکثیرکننده فوتونی) تعداد زوجی از طول موج است (که فاز نسبی صفر را می دهد) یا تعداد فردی از طول موج است (که فاز نسبی 180° می دهد).

(ب) حال فرض کنید که یکی از آینه‌ها با سرعت یکنواخت کاملاً معلوم حرکت می‌کند. نشان دهید که نور فرسرخ با بسامد ν یک خروجی تکثیرکننده فوتونی می‌دهد که مستقل از زمان است و شامل مؤلفه‌ای است که به‌طور هماهنگ مانند $\cos \omega_{\text{mod}} t$ با بسامد مدولاسیون $\nu_{\text{mod}} = 2(\nu/c)\nu$ نوسان می‌کند. از طرف دیگر نشان دهید اگر محل آینه به‌طور اختیاری تغییر کند (اگر به وابستگی زمان مربوط باشد) و خروجی تکثیرکننده فوتونی به‌صورت تابعی از x اندازه‌گیری شود، آنگاه خروجی تکثیرکننده فوتونی یک وابستگی x دارد که شامل مؤلفه‌ای است که با $\cos k_{\text{mod}} x$ و عدد موج مدولاسیون که با $k_{\text{mod}} = 4\pi/\lambda$ داده می‌شود تغییر می‌کند. اگر تعداد زیادی طول موج وجود داشته باشد، آنگاه خروجی تکثیرکننده فوتونی برهم‌نهی است شامل یک ثابت (میانگین‌گیری روی طیف کامل) بعلاوه یک مؤلفه فوریه برای هر عدد موج مدولاسیون k_{mod} . بنابراین اگر خروجی را آنالیز فوریه کنیم، شدت در هر عدد موج مدولاسیون k_{mod} شدتی را به ما می‌دهد که مربوط به طول موج فرسرخ λ است. مطلب مهم این است که وقتی داده گرفته می‌شود (ضبط خروجی تکثیرکننده فوتونی برحسب x)، تمام طول موجهای فرسرخ در یک زمان اندازه‌گیری می‌شوند. هر طول موج با بسامد مدولاسیون (عدد موج) “برچسب‌گذاری” می‌شود که در خروجی تکثیرکننده فوتونی به وجود می‌آید. بنابراین بسامد مدولاسیون مانند یک “زیرحامل” عمل می‌کند تا بتواند طول‌موجهای همزمان ضبط شده مختلف به وسیله آنالیز فوریه خروجی تکثیرکننده فوتونی را جدا کند.

این روش بهترین راه آشکارسازی زندگی روی مریخ بدون رفتن به آنجاست. تحلیل طیف فرسرخ جو مریخ ترکیب خود را نشان می‌دهد و تحقیق روی مؤلفه‌ها فرایند زندگی را نشان می‌دهد. روش MIFS این‌قدر حساس است که با تلسکوپهایی که اکنون ساخته شده‌اند نه تنها مؤلفه مهم آن بلکه رد مؤلفه‌های گازها تا شاید یک قسمت در 10^9 معین می‌شود.^۱

۱. این چشم‌انداز، به‌همراه توصیف جزئیات بیشتر MIFS در پنج مقاله مربوط در مجله انگلیسی زیر آمده است. J. Love lock, D. Hitchcock, P. Fellgett, J. and P. Connes, L. Kaplan, and J. Ring, “Detecting Planetary Life from Earth,” *Science Journal*, April 1967.

Reinhard Beer, “Remote Sensing of Planetary Atmospheres by Fourier Spectroscopy,” *The Physics Teacher* April 1968, p. 151.



امواج دوبعدی و سه‌بعدی

۱-۷ مقدمه

تمام امواجی که تاکنون در نظر گرفته‌ایم عملاً امواج "یک‌بعدی" بوده‌اند یعنی امواجی بودند که در امتداد یک خط مستقیم که معمولاً محور z می‌نامیم منتشر می‌شدند. در بخش ۲-۷ امواج سه‌بعدی را به وسیله دوران سیستم مختصاتی که برای تشریح یک پیشرونده تخت یک‌بعدی به کار می‌رود معرفی خواهیم کرد. بدین ترتیب شکل سه‌بعدی امواج پیشرونده هماهنگ تخت را به دست می‌آوریم.

خواهیم دید که داشتن بعدهای اضافی بیش از صرفاً یک تغییر ساده در تعداد متغیرهاست. چون بعدهای اضافی درجه‌های آزادی جدیدی به وجود می‌آورند، از نظر کیفی نیز طرحهای جدیدی به وجود می‌آید. مثلاً در حالت سه‌بعدی و در خلا یک موج الکترومغناطیسی می‌توان داشت که شامل یک موج پیشرونده خالص در یک راستا، یک موج ایستاده خالص در راستای دیگر و یک موج نمایی در راستای سوم باشد! در حالت یک‌بعدی در خلا نمی‌توانیم امواج الکترومغناطیسی نمایی داشته باشیم زیرا رابطه پاشندگی $\omega^2 = c^2 k^2$ برای هیچ‌یک از گستره‌های بسامدی نمی‌تواند به صورت $\omega^2 = -c^2 k^2$ درآید. برای آنکه امواج نمایی در یک بعد داشته باشیم لازم است یک

بسامد قطع وجود داشته باشد یعنی رابطه پاشندگی باید مانند رابطه پاشندگی در یون سپهر یعنی $\omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2$ باشد که به‌ازای بسامد به اندازه کافی پایین بتواند به صورت $\omega^2 = \omega_0^2 - c^2 k^2$ درآید. در حالت سه‌بعدی خواهیم دید که k اندازه برداری است که بردار انتشار نامیده می‌شود. بنابراین رابطه پاشندگی برای امواج الکترومغناطیسی در خلأ به صورت $\omega^2 = c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$ در می‌آید. تحت شرایط معینی به‌جای یک یا دو مؤلفه k_x^2 و غیره می‌توان مؤلفه $k_x^2 -$ و غیره قرار داد و با وجود این نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد لختی یعنی ω^2 مثبت بشود، همان‌طور که باید باشد. به‌عنوان مثال امواج الکترومغناطیسی در موجبرها و بازتاب کلی نور را مطالعه خواهیم کرد. در بخش ۷-۳ امواج در آب (در مورد آب ایده‌آل) را بررسی خواهیم کرد و بستگی فضایی آنها و قانون پاشندگی را به‌دست خواهیم آورد. (تعداد زیادی آزمایش خانگی وجود دارد که با آنها به آسانی می‌توانید قانون پاشندگی برای امواج در آب را تحقیق کنید.) بخش ۷-۴ از طریق معادلات ماکسول به نمایش مطالبی اختصاص داده شده است که در فصل ۴ هنگامی که امواج در خطوط انتقال نیرو با صفحات موازی را مطالعه می‌کردیم، فرا گرفتیم. در بخش ۷-۵ رابطه‌ای برای تابش حاصل از یک بار نقطه‌ای در حال نوسان به‌دست خواهیم آورد. از این رابطه برای پیدا کردن "پهنای خط طبیعی" نور مرئی و علت آبی بودن آسمان استفاده خواهیم کرد.

۷-۲ امواج تخت هماهنگ و بردار انتشار

فرض کنید که یک موج تخت پیشرونده هماهنگ داریم که در یک محیط پاشنده همگن، در راستای بردار یکه \hat{z} در امتداد محور z' منتشر می‌شود. فرض کنید که در صفحه $z' = 0$ بستگی زمانی تابع موج به صورت زیر است

$$\psi(z', t) = A \cos \omega t \quad (1)$$

بنابراین در صفحه مفروض با یک مقدار مشخص z' تابع موج به صورت زیر داده می‌شود

$$\psi(z', t) = A \cos(\omega t - kz') \quad (2)$$

می‌خواهیم این تابع موج را به‌جای مختصه z' در امتداد راستای انتشار، برحسب سیستم کلی مختصات دکارتی x, y, z و z بیان کنیم. مبدأ سیستم x, y, z را در صفحه $z' = 0$ اختیار می‌کنیم. فاصله یک نقطه غیر مشخص در فضا از مبدأ سیستم x, y, z $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ می‌گیریم. صفحه $z' = \text{const.}$ در سیستم x, y, z و به صورت صفحه $z' = \mathbf{r} \cdot \hat{z}' = \text{const.}$

بیان می‌شود. از این رو کمیت kz' در معادله (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$kz' = k(\hat{z}' \cdot \mathbf{r}) = (k\hat{z}') \cdot \mathbf{r} \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (۳)$$

بردار انتشار. کمیت $k\hat{z}'$ بردار انتشار \mathbf{k} نامیده می‌شود:

$$\mathbf{k} \equiv k\hat{z}' \quad (۴)$$

اندازه k برابر k است و راستای k راستای \hat{z}' در امتداد راستای انتشار موج است. معادله (۳) به صورت زیر در می‌آید

$$kz' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z \quad (۵)$$

معنی فیزیکی عدد موج k عبارت است از تعداد رادیانهای فاز بر واحد جابه‌جایی در امتداد راستای انتشار \hat{z}' به طوری که kz' فازی است که در مسافت z' انباشته شده است. (اکنون قرارداد معمول علامت برای فاز را موقتاً معکوس می‌کنیم. براساس این قرارداد هنگامی که به ازای z' مشخص wt افزایش پیدا کند فاز به طور مثبت اضافه می‌شود.) معنی k_x عبارت است از تعداد رادیانهای فاز بر واحد جابه‌جایی در امتداد محور $+x$ ، یعنی \hat{x} و همین معانی برای k_y و k_z نیز وجود دارد. مثلاً فرض کنید \hat{x} با \hat{z}' زاویه θ می‌سازد و فرض کنید که طول موج برابر λ است. بنابراین اگر در امتداد راستای \hat{z}' به اندازه مسافت λ (در زمان ثابت) جلو برویم فاز به اندازه 2π اضافه می‌شود. اما اگر در امتداد \hat{x} جلو برویم برای آنکه z' به اندازه یک طول موج اضافه شود باید مسافت $\lambda / \cos \theta$ را طی کنیم. بنابراین در امتداد \hat{x} در مسافتی که با ضریب $(\cos \theta)^{-1}$ از λ بزرگتر است فاز به اندازه 2π افزایش پیدا کرده است یعنی افزایش فاز بر واحد مسافت در امتداد \hat{x} به اندازه ضریب $\cos \theta$ از k کوچکتر است. این همان خاصیتی است که یک بردار دارد: اگر تصویر $\mathbf{k} \cdot \hat{x} = k_x$ بردار را در امتداد راستای \hat{x} بگیریم، عددی به دست می‌آوریم که به اندازه ضریبی که برابر با کسینوس زاویه مربوطه است، کوچکتر از اندازه بردار است. این شرط مطمئن می‌سازد که حاصل جمع مربع مؤلفه‌ها با مربع اندازه بردار برابر است. بنابراین می‌بینیم که k_x که مؤلفه x بردار است و اندازه آن برابر k است دارای رابطه مستقیم با k است.

چرا بردار طول موج وجود ندارد؟ این جمله آنقدر بدیهی است که احتیاجی به ذکر آن نیست. در اینجا مثال متضادی داریم که نشان می‌دهد بررسی این سؤال ارزشمند است. عبارت محتمل (ولی اشتباه) زیر را در نظر بگیرید: سرعت فاز یک موج پیشرونده با رابطه $v_{ph} = \lambda v$ داده می‌شود.

هنگامی که بخواهیم موجی را شرح بدهیم که در سه بعد و در راستای \hat{z}' منتشر می‌شود بهتر است که "بردار طول موج" λ را به شرح زیر تعریف کنیم:

$$v_\varphi = \lambda v \hat{z}' = (\lambda \hat{z}') v = \lambda v?$$

طول موج λ به صورت مسافت بین قله‌های موج برای جابه‌جایی در امتداد z' تعریف می‌شود و طبیعتاً به اندازه "بردار" λ است. همین‌طور λ_x مسافت بین قله‌های موج برای جابه‌جایی در امتداد x است. اما به خاصیت وحشتناک λ_x توجه کنید: این کمیت از λ بزرگتر است. بنابراین اگر \hat{x} بر \hat{z}' عمود باشد، کمیت λ_x بینهایت می‌شود، در حالی که اگر مؤلفه x یک بردار معمولی راستا شده در امتداد \hat{z}' می‌بود، برابر صفر می‌شد. نتیجه این است که چنین بردار λ وجود ندارد که بتوان آن را به صورتی بامعنی تعریف کرد زیرا هیچ کمیتی که "مؤلفه‌های" آن بزرگتر از اندازه بردار باشد را نمی‌توان بردار نامید.

صفحه فاز ثابت. موج پیشرونده که با معادله (۲) داده شده است را اکنون به شکلهای زیر می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z, t) &= A \cos(\omega t - k z') \\ &= A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) \\ &= A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (۶)$$

آرگومان تابع موج سینوسی فاز $\varphi(x, y, z, t)$ نامیده می‌شود

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) &= \omega t - k z' \\ &= \omega t - k_x x - k_y y - k_z z \\ &= \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \end{aligned} \quad (۷)$$

در زمان ثابت t ، مکانهای با فاز مساوی φ صفحه‌ای را مشخص می‌کنند که جبهه موج نامیده می‌شود

$$\begin{aligned} d\varphi &= \omega dt - \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} \\ &= 0 - \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{در زمان ثابت} \\ &= 0 \quad \text{فقط اگر } d\mathbf{r} \text{ بر } \mathbf{k} \text{ عمود باشد} \end{aligned} \quad (۸)$$

بنابراین در زمان ثابت t در تمام مکانهایی که بردارهای $d\mathbf{r}$ که بر راستای انتشار $\hat{\mathbf{k}}$ عمود هستند به آنها می‌رسند، مقدار فاز یکسان است یعنی از یک چنین مکانی به مکان دیگر $d\varphi = 0$ است که به معنی قرار داشتن روی یک صفحه است. بدین سبب است که چنین موجی را یک موج تخت می‌نامیم.

سرعت فاز. سرعت فاز به ازای φ ثابت برابر dz'/dt است:

$$d\varphi = \omega dt - k dz' = 0,$$

$$v_\varphi = \frac{dz'}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (9)$$

روابط پاشندگی سه بعدی. در اینجا شکل‌های سه بعدی بعضی از روابط پاشندگی که با آنها آشنا شدید ذکر می‌شود:

حالت ۱: امواج الکترومغناطیسی در خلأ

$$\omega^2 = c^2 k^2 = c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (10)$$

حالت ۲: امواج الکترومغناطیسی در یک محیط پاشنده

$$\omega^2 = \frac{c^2}{n^2} k^2 = \frac{c^2}{n^2} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (11)$$

حالت ۳: امواج الکترومغناطیسی در یون سپهر

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 = \omega_p^2 + c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (12)$$

روابط پاشندگی همیشه از شرایط مرزی مستقل‌اند. البته شرایط مرزی عامل تعیین‌کننده‌ای است برای آنکه بفهمیم آیا (مثلاً) امواج ساکن داریم و یا امواج پیشرونده و یا (همان‌گونه که خواهیم دید) مخلوطی از هر دو موج.

امواج ساکن. دو موج تخت پیشرونده که در دو راستای مخالف حرکت می‌کنند و دامنه (و فاز) مساوی دارند را می‌توان بر هم نهاد تا یک موج تخت ساکن به شکل زیر تشکیل شود

$$\psi(x, y, z, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha) \quad (13)$$

با نوشتن $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ و استفاده از اتحادهای مثلثاتی این موج ساکن را به صورت برهم نهش جملاتی می توان نوشت که هرکدام از آنها به شکل کلی زیر هستند

$$\psi(x, y, z, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(k_x x + \alpha_1) \cos(k_y y + \alpha_2) \cos(k_z z + \alpha_3) \quad (14)$$

هنگامی که یک موج هماهنگ را برحسب امواج ساکن به شکل معادله (۱۴) بیان می کنیم، k_x ، k_y و k_z را می توانیم کمیت های مثبت تعریف کنیم. دلیل فیزیکی آن این است که در یک موج ساکن، برخلاف موج پیشرونده، امواج در یک راستای معین منتشر نمی شوند، بلکه "به طور همزمان در هر دو راستا حرکت می کنند." به طور جبری می بینیم که اگر (مثلاً) در معادله (۱۴) k_x منفی باشد به جای k_x می توانیم $-k_x$ بگذاریم و به جای α_1 کمیت $-\alpha_1$ قرار دهیم بدون آنکه در $\psi(x, y, z, t)$ تأثیری داشته باشد. بنابراین هر سه کمیت k_x ، k_y و k_z را می توانیم مثبت اختیار کنیم و تغییرات جبرانی را (در صورت لزوم) در ثابت های فاز α_1 ، α_2 و α_3 منظور کنیم.

مخلوط موج ساکن و موج پیشرونده. در یک بعد (مثلاً بعد z') یک موج پیشرونده خالص را به صورت برهم نهش دو موج ساکن می توان نوشت. به همین ترتیب یک موج ساکن خالص را می توان به صورت برهم نهش امواج پیشرونده نوشت. به گونه دیگر، می توانیم موجی داشته باشیم که برهم نهش کلیتری از امواج یعنی نه فقط از امواج پیشرونده خالص و نه فقط از امواج ساکن خالص باشد. همین وضعیت در سه بعد برقرار است اما با این آزادی بیشتر که هرکدام از سه بعد "مستقل" است بدین معنی که می توانیم موجی داشته باشیم که (مثلاً) در امتداد x ثابت، در امتداد y یک موج ساکن خالص و در امتداد z یک موج پیشرونده خالص باشد:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(y, z, t) = A \sin(k_y y) \cos(k_z z - \omega t) \quad (15)$$

بعداً مثالهای متعددی از مخلوط انواع امواج مشابه با معادله (۱۵) را مطالعه خواهیم کرد. معادلات موج سه بعدی و معادله کلاسیک موج. (به آسانی می توانید نشان دهید که) هر موج هماهنگ سینوسی سه بعدی، خواه یک موج ساکن، یک موج پیشرونده یا مخلوطی از آنها در روابط زیر صدق می کند:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi(x, y, z, t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k_x^2 \psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -k_y^2 \psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -k_z^2 \psi \quad (16)$$

بنابراین معادلات موجی را که به ترتیب مربوط به روابط پاشندگی معادلات (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) هستند، در زیر به دست می آوریم:

حالت ۱: امواج الکترومغناطیسی در خلأ

با استفاده از معادلات (۱۶) و (۱۰) نتیجه می‌شود که برای یک مؤلفه هماهنگ تنها که دارای بسامد ω و عدد موج k است، تابع موج در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\} \quad (17)$$

از آنجا که c مستقل از بسامد است، هر مؤلفه هماهنگ، و از این رو هر برهم‌نهمش اختیاری امواج الکترومغناطیسی ساکن و پیشرونده در خلأ در معادله موج (۱۷) صدق می‌کند. معادله (۱۷) شکل سه‌بعدی معادله کلاسیک موج برای امواج غیر پاشنده است. برای هر موج غیر پاشنده سه‌بعدی دیگر مثلاً امواج صوتی معمولی، در هوا، معادله مشابهی وجود دارد. در نمایش برداری، طرف راست معادله (۱۸) حاصلضرب c^2 در دیورژانس گرادین ψ است که به صورت $\text{div grad } \psi$ یا $\nabla \cdot \nabla \psi$ نوشته و گاهی $\nabla^2 \psi$ نامیده می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \psi \quad (18)$$

حالت ۲: امواج الکترومغناطیسی در یک محیط پاشنده همگن

رابطه پاشندگی معادله (۱۱) برای یک موج هماهنگ با بسامد ω معادله موج زیر را به دست می‌دهد

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{n^2(\omega)} \nabla^2 \psi \quad (19)$$

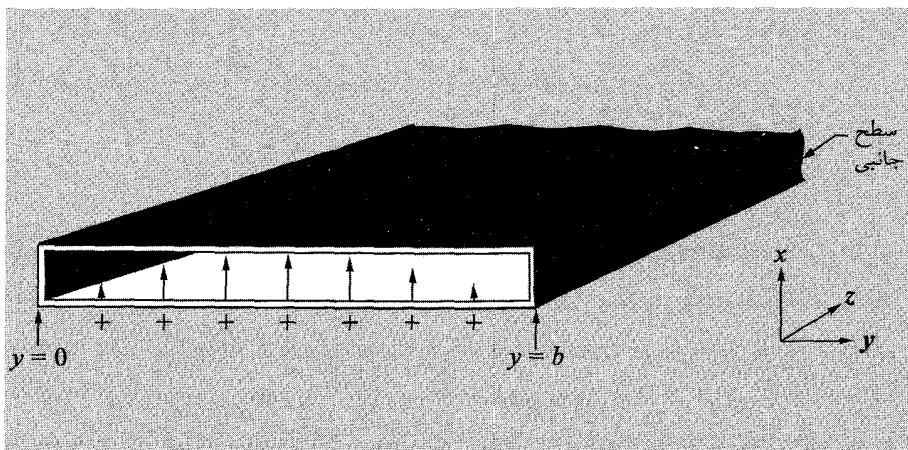
از آنجا که n به بسامد ω بستگی دارد از نوشتن این معادله موج بهره زیادی حاصل نمی‌شود. برای حل آن، غالباً احتیاج داریم که به برهم‌نهمهای فوریه مراجعه کنیم و بسامد را یکی یکی در نظر بگیریم و علاوه از رابطه پاشندگی هم ممکن است استفاده کنیم. معادله کلاسیک موج (۱۸) از این نظر متفاوت است یعنی ممکن است با تپها یا سایر امواج غیر هماهنگ کارکرد ولی آنالیز فوریه را هرگز به کار نبرد.

حالت ۳: امواج الکترومغناطیسی در یون‌سپهر

با استفاده از رابطه پاشندگی معادله (۱۲) و استفاده از معادله (۱۶) معادله موج سه‌بعدی کلاین-گوردون به دست می‌آید

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega_p^2 \psi + c^2 \nabla^2 \psi \quad (20)$$

برخی از مثالهای فیزیکی از امواج هماهنگ سینوسی دوبعدی به شرح زیر است:



شکل ۱-۷ موجبر مستطیل شکل که با اتصال کوتاه یک خط انتقال نیرو با صفحات موازی به وسیله اضافه کردن صفحات رسانا در $y = b$ و $y = 0$ ساخته شده است. فلشها نمایشگر میدان الکتریکی لحظه‌ای در انتهای ورودی موجبر هستند.

مثال ۱: امواج الکترومغناطیسی در یک موجبر مستطیل شکل
 یک موجبر مستطیل شکل را، همان‌گونه که در شکل ۱-۷ نشان داده شده است، با اضافه کردن صفحات کناری رسانا به یک خط انتقال نیرو با صفحات موازی می‌توان درست کرد. فضای داخل موجبر خلأ است. ما فقط مدهای موجی را در نظر می‌گیریم که در آنها میدانهای الکتریکی و مغناطیسی هر دو (به‌ازای y و z ثابت و برای x در داخل موجبر) مستقل از x هستند. معادله موج مناسب، حالت دوبعدی معادله کلاسیک موج یعنی معادله (۱۷) است. اگر میدان الکتریکی E_x را با ψ نشان دهیم نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (21)$$

یک بسامد مشخص ω اختیار می‌کنیم به طوری که معادله (۲۱) به شکل زیر درآید

$$-\omega^2 \psi = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (22)$$

به‌خاطر صفحات کناری رسانا میدان الکتریکی E_x در $y = b$ و $y = 0$ لزوماً برابر صفر است. بنابراین $\psi(y, z, t)$ نسبت به راستای y باید یک موج ساکن با گره‌های همیشگی در $y = 0$ و $y = b$ باشد. فرض می‌کنیم که یک ولتاژ محرک در $z = 0$ وجود دارد. بنابراین امواج

الکترومغناطیسی در راستای z در موجبر منتشر می‌شوند. بنابراین امواج نسبت به راستای z باید امواج پیشرونده باشند. موج مخلوط‌شده ساکن و پیشرونده

$$\psi(y, z, t) = A \sin k_y y \cos(k_z z - \omega t) \quad (23)$$

در معادله (۲۲) صدق می‌کند به شرطی که رابطه پاشندگی زیر وجود داشته باشد

$$\omega^2 = c^2 k_y^2 + c^2 k_z^2 \quad (24)$$

با انتخاب $\sin k_y y$ شرط $E_x = 0$ به‌ازای $y = 0$ را برقرار کردیم. علاوه بر این لازم است که $\sin k_y y$ به‌ازای $y = b$ نیز برابر صفر باشد

$$k_y b = \pi, 2\pi, \dots, m\pi, \dots \quad (25)$$

این امواج مدهای TE (مدهای میدان الکتریکی عرضی) نامیده می‌شوند. مطالعه میدان مغناطیسی به‌طور جداگانه لزومی ندارد، زیرا این میدان به‌وسیله میدان الکتریکی تعیین می‌شود. ■

بسامد قطع بسامد-پایین. پایینترین مد یعنی مدی که در معادله (۲۵) دارای $m = 1$ است در نظر می‌گیریم. این مدی است که در شکل ۷-۱ نشان داده شده است. زیرا این شکل یک نیم-طول موج از $y = 0$ تا $y = b$ را نشان می‌دهد. با وارد کردن معادله (۲۵) در معادله (۲۴) به‌ازای $m = 1$ نتیجه می‌شود

$$\omega^2 = \frac{c^2 \pi^2}{b^2} + c^2 k_z^2 \quad (26)$$

از این رو شکل ظاهری رابطه پاشندگی بین ω و k_z (برای این مد با $k_y b = \pi$) مشابه با رابطه پاشندگی برای امواج تختی است که در یون‌سپهر در راستای z حرکت می‌کنند یعنی

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad (27)$$

یا رابطه پاشندگی برای آونگهای جفت‌شده (در حد طول موج - بلند) یعنی

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{K a^2}{M} k^2 \quad (28)$$

بنابراین انتظار داریم که کمیت $c^2 \pi^2 / b^2$ به‌صورت (توان دوم) یک بسامد قطع پایین عمل کند و به‌ازای بسامد محرک ω پایینتر از این بسامد قطع، رابطه پاشندگی معادله (۲۶) به‌صورت رابطه پاشندگی زیر درآید

$$\omega^2 = \frac{c^2 \pi^2}{b^2} - c^2 k_z^2 \quad (29)$$

این حدس درست است. به‌ازای بسامد $\omega < \pi c/b$ حل معادله موج یعنی معادله (۲۱) به شکل زیر است

$$\psi(y, z, t) = A \sin k_y y \cos \omega t e^{-\kappa_z z} \quad (30)$$

به شرطی که ω ، k_y و κ_z با رابطه زیر داده شوند

$$\omega^2 = c^2 k_y^2 - c^2 \kappa_z^2 \quad (31)$$

و به شرطی که معادله (۲۵) برقرار باشد و به شرطی که (با فرض $m = 1$) ω^2 کوچکتر از $c^2 \pi^2 / b^2$ باشد، به‌طوری که مثبت بودن κ_z^2 معادله (۲۹) برقرار شود. [دقت کنید که در معادله (۳۰) می‌توانستیم جمله‌ای با $\exp(+\kappa_z z)$ اضافه کنیم. اما شرط مرزی که موجبر تا $z = +\infty$ امتداد یافته است ایجاب می‌کند که ضریب چنین جمله‌ای برابر صفر باشد.]

منشأ فیزیکی بسامد قطع در موجبر. اکنون بسامد را ثابت و پهنای b را متغیر اختیار می‌کنیم. بر طبق معادله (۲۶)، اگر b بینهایت بزرگ باشد، رابطه پاشندگی همان رابطه پاشندگی برای امواج تخت الکترومغناطیسی در خلأ است که در امتداد راستای z منتشر می‌شوند؛ امواج تصور می‌کنند که در یک خط انتقال نیرو با صفحات موازی هستند. به‌ازای b محدود، k_y (که برابر π/b است) صفر نیست. بنابراین اگر بخواهیم تابع موج به‌صورت برهم‌نهی امواج پیشرونده تخت باشد (که همیشه آزاد هستیم چنین خواسته‌ای داشته باشیم حتی هنگامی که یک موج ساکن خالص داریم)، می‌بینیم که کاهش b از بینهایت به یک مقدار متناهی، موج را از یک موج پیشرونده خالص که در امتداد z حرکت می‌کند به یک برهم‌نهی که مؤلفه بردار انتشار در امتداد z غیرصفر دارد، تغییر می‌دهد. در حقیقت برای به‌دست آوردن یک موج ساکن در امتداد z بایستی امواج پیشرونده داشته باشیم که همزمان در راستای y و $-y$ حرکت می‌کنند و برهم نهاده می‌شوند. مؤلفه‌های k در امتداد z مثبت و منفی ضروری هستند تا شرط مرزی که به‌وسیله صفحات کناری رسانا وارد شده است برقرار شود. اندازه k همیشه با رابطه پاشندگی در خلأ داده می‌شود

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_z^2 + k_y^2 \quad (32)$$

بنابراین افزایش مؤلفه‌های y از صفر به یک مقدار محدود الزاماً به کاهش مؤلفه z بردار k منجر می‌شود. از این رو همان‌طور که b کاهش می‌یابد، مؤلفه‌های y بیشتر افزایش پیدا می‌کنند و مؤلفه z کاهش می‌یابد. به‌ازای هر مقدار ثابت b ، تابع موج را به‌صورت برهم‌نهی امواج تختی می‌توان در نظر گرفت که به‌طور ضربدری در امتداد موجبر ادامه دارند و برهم نهاده می‌شوند به‌طوری

که شرط مرزی در صفحات کناری را برقرار می‌کنند. (از نظر فیزیکی می‌توانیم بگوییم که شدت جریانی که به وسیلهٔ یک موج تخت "ضربدری" فرودی در یک صفحهٔ کناری تولید می‌شود یک موج بازتابیده آینه‌ای به وجود می‌آورد که در راستای مخالف y "ضربدری" است.) بدین ترتیب می‌بینیم هنگامی که b به اندازهٔ کافی کوچک می‌شود مؤلفهٔ z بردار \mathbf{k} صفر خواهد شد. در این صورت موج بین صفحات کناری به جلو و عقب بازتاب پیدا می‌کند و جریان امواج به طرف انتهایی لوله وجود ندارد. از اینجا نتیجه می‌شود که زمان تناوب قطع یعنی $T_{c.o.}$ بایستی برابر با زمانی باشد که یک موج تخت در خلا از یک طرف موجبر به طرف دیگر با سرعت c برود و برگردد:

$$T_{c.o.} = \frac{2b}{c}$$

بنابراین

$$\omega_{c.o.} = 2\pi\nu_{c.o.} = \frac{2\pi}{T_{c.o.}} = \frac{2\pi}{2b/c} = \frac{c\pi}{b} \quad (33)$$

با مقایسهٔ معادلات (۳۳) و (۲۶) می‌بینیم که معادلهٔ (۳۳) در حقیقت بسامد قطع را به دست می‌دهد.

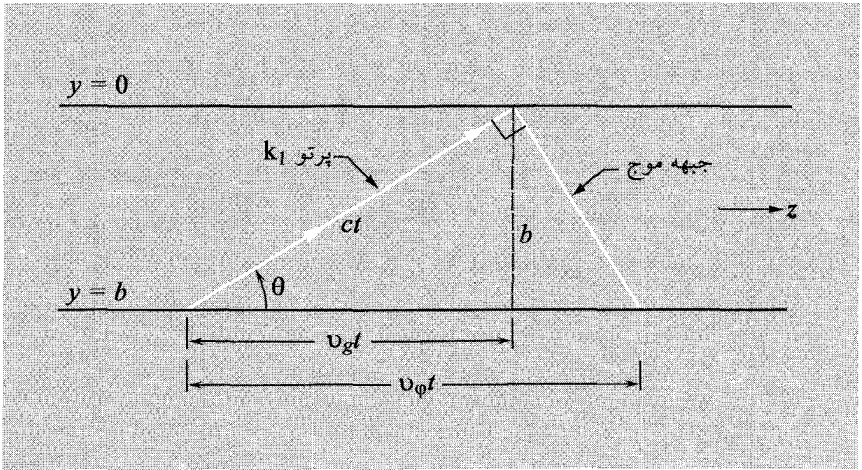
به ازای بسامدی پایینتر از بسامد قطع، با افزایش z دامنهٔ موج به طور نمایی کاهش پیدا می‌کند حتی اگر امواج در خلا باشند. دلیل فیزیکی کاهش میدان الکتریکی از این قرار است: با گذاشتن صفحات کناری رسانا، بارهای الکتریکی صفحات بالایی و پایینی از طریق صفحات کناری می‌توانند جریان پیدا و یکدیگر را خنثی کنند. در ناحیهٔ $z = 0$ چشمهٔ محرک ولتاژ بارهای جدید فراهم می‌کند و میدان الکتریکی را برقرار نگه می‌دارد. در تور در پایین مسیر، نیروی محرک تأثیر کمتری دارد و هنگامی که بسامد خیلی کند است، بارها وقت کافی برای خنثی کردن یکدیگر را دارند.

امواج پیشروندهٔ ضربدری. موج ساکن و موج پیشروندهٔ مخلوط شده در معادلهٔ (۲۳) معادل است با برهم‌نهی امواج تخت پیشرونده که به طور ضربدری به انتهایی موجبر می‌روند. این مطلب را به طور جبری با نشان دادن اتحاد زیر (مسئلهٔ ۷-۱) می‌توانید ببینید

$$\begin{aligned} \psi &= A \sin k_y y \cos(k_z z - \omega t) \\ &= \frac{1}{2} A \sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t) - \frac{1}{2} A \sin(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t) \end{aligned} \quad (34)$$

که در آن

$$\mathbf{k}_1 = \hat{z}k_z + \hat{y}k_y, \quad \mathbf{k}_2 = \hat{z}k_z - \hat{y}k_y$$



شکل ۲-۷ یکی از امواج ضربدری در یک موجبر.

حرکت ضربدری ناشی از این نکته است که مؤلفه‌های y بردارهای k_1 و k_2 دو جهت مخالف دارند.

سرعت فاز، سرعت گروه و c . تصویر موج پیشرونده - ضربدری روش بسیار ساده‌ای برای فهمیدن روابط بین سرعت‌های فاز و گروه به دست می‌دهد. فقط یکی از دو موج پیشرونده برهم‌نهاده شده در سرعت معادله (۳۴) را همان‌گونه که در شکل ۲-۷ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. قطعه کوچکی از جبهه موج را در نظر بگیرید (که در اپتیک یک "پرتو" نامیده می‌شود) که به طور قطری در طول موجبر مسافت ct را در زمان t طی کند، همان‌گونه که با نشانه "پرتو k_1 " در شکل ۲-۷ نشان داده شده است. ما به سرعت فاز و سرعت گروه در راستای z علاقه‌مندیم. (می‌دانیم که فقط در آن راستای یک موج پیشرونده وجود دارد. بردار k_2 همراه k_1 در موج نشان داده شده است، جزء y از موج پیشرونده k_1 را حذف می‌کند اما دارای همان جزء z است.) در حالی که پرتو مسافت ct را طی می‌کند، محل تقاطع جبهه موج با هر مقدار ثابت y (مثلاً $y = b$) مسافتی را طی می‌کند که با $v_\phi t$ در شکل نشانه‌گذاری شده است. این مقدار سرعت فاز در امتداد z را به دست می‌دهد. یعنی سرعتی که با آن سرعت یک قله موج در امتداد z حرکت می‌کند. دقت کنید هنگامی که زاویه θ (که در شکل ۲-۷ نشانه‌گذاری شده است) 90° درجه می‌شود، سرعت فاز به سمت بینهایت میل می‌کند. در حالت کلی از شکل می‌بینیم که

$$v_\phi = \frac{c}{\cos \theta} \quad (35)$$

سرعت گروه سرعتی است که انرژی با آن سرعت در راستای z حرکت می‌کند. اگر موج را

”قطع“ کنیم، تپ با سرعت گروه منتشر می‌شود. شعاعی که با k_1 نشانه‌گذاری شده است تپ را با سرعت c به‌طور قطری در امتداد موجبر حمل می‌کند. موج k_2 تپ به‌وجود می‌آورد که جزء y از موج k_1 را حذف می‌کند. هر دو تپ k_1 و k_2 مسافت $v_\phi t$ در امتداد z را در زمان t طی می‌کنند که مربوط به مسافت نشانه‌گذاری شده در شکل ۲-۷ است. بنابراین داریم

$$v_g = c \cos \theta \quad (۳۶)$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ پاشندگی می‌توانیم تحقیق کنیم که v_g و v_ϕ که با معادلات (۳۵) و (۳۶) داده شده‌اند درست هستند. اما در عوض مسئله را معکوس می‌کنیم و با مفروض بودن معادلات (۳۵) و (۳۶) رابطهٔ پاشندگی را به‌دست می‌آوریم

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\cos \theta}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = c \cos \theta$$

بنابراین

$$v_\phi v_g = \frac{\omega}{k_z} \frac{d\omega}{dk_z} = c^2 \quad (۳۷)$$

یعنی

$$\frac{d(\omega^2)}{d(k_z^2)} = c^2$$

یعنی

$$d(\omega^2) = c^2 d(k_z^2)$$

با انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود

$$\omega^2 = c^2 k_z^2 + \text{یک عدد ثابت} \quad (۳۸)$$

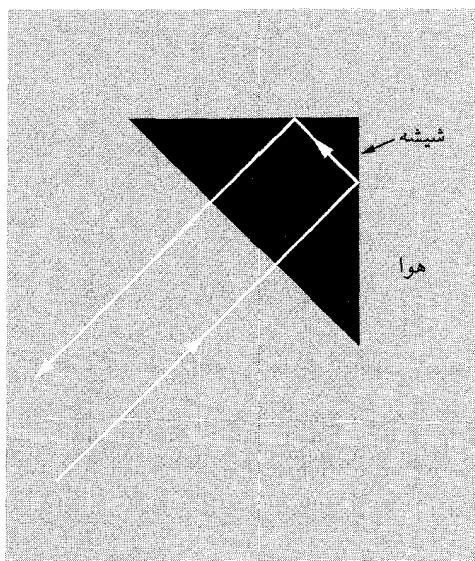
مقدار ثابت را با قرار دادن $k_z = 0$ به‌طوری که $\omega = \omega_{c.o.}$ باشد و لزوم آنکه زمان ”رفت و برگشت“ $T_{c.o.}$ باید $2b/c$ بشود، می‌توان تعیین کرد. از این رو قانون پاشندگی یعنی معادلهٔ (۲۶) به‌دست می‌آید. مدهای بالاتر با قرار دادن بسامد قطع به‌عنوان یک هماهنگ پایبست‌ترین بسامد قطع ممکن، به‌دست می‌آیند. در این صورت حالت کلی‌تری [معادلات (۲۴) و (۲۵)] به‌دست می‌آید.

$$\omega^2 = c^2 k_z^2 + \frac{c^2 \pi^2 m^2}{b^2} \quad (۳۹)$$

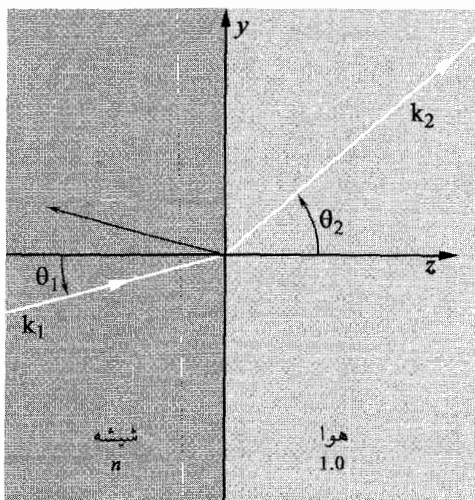
مثال ۲: بازتاب و عبور نور فرودی از شیشه به هوا

این مسئله مثال دیگری از موج دوبعدی است. تصویر کنید از $z = -\infty$ تا $z = 0$ شیشه است. در صفحه $z = 0$ شیشه تمام و خلاً شروع می‌شود و تا $z = +\infty$ ادامه دارد. می‌توانید تصور کنید که خلاً همواره مانند یک محیط پاشنده عمل می‌کند همان‌گونه که در مورد امواج تخت عمل می‌کند. اما همان‌طور که در مثال ۱ (موجبر مستطیل شکل) دیدید، هنگامی که امواج تخت وجود ندارد (یعنی هنگامی که E_x هم در امتداد محور y و هم در امتداد z یعنی محور انتشار تغییر می‌کند) موجبر تحت شرایط خاصی (مانند پهنای بسیار باریک یا معادل با آن، بسامد بسیار پایین) واکنشی می‌شود اگرچه چیزی بجز خلاً در آن نیست. برای نور فرودی از شیشه به هوا اگر زاویه تابش بسیار بزرگ بشود یعنی نور بسیار نزدیک به تابش مماسی باشد، حالت مشابهی روی می‌دهد. این پدیده اهمیت عملی زیادی در طرح بسیاری از دستگاه‌های اپتیکی دارد که در آنها به منظور به دست آوردن بازتاب 100° درصد، از بازتاب داخلی کلی استفاده می‌کنند. مثالی در این باره در شکل ۳-۷ نشان داده شده است.

اکنون ببینیم این سیستم چگونه کار می‌کند. امواج نوری در هریک از دو محیط شیشه و خلاً در معادله موج صدق می‌کند. (فقط یک بسامد ω را در نظر می‌گیریم). مرز بین شیشه و خلاً در صفحه $z = 0$ است. بردار انتشار k_x موج فرودی دارای مؤلفه k_z در امتداد z و مؤلفه k_y در



شکل ۳-۷ منشور برگرداننده که برای خم کردن نور به اندازه 180° درجه بدون اتلاف شدت به کار می‌رود.



شکل ۴-۷ بازتاب و عبور پرتو فرودی از شیشه به خلا.

امتداد \hat{y} است. بنابراین یک مسئلهٔ دوبعدی داریم (تقریباً مانند حالتی که در مورد موجبر در مد TE داشتیم). شکل هندسی آن در شکل ۴-۷ نشان داده شده است. در شیشه، اندازهٔ بردار انتشار k_1 برابر است با حاصلضرب ضریب شکست n در اندازهٔ بردار انتشار در خلا یعنی ω/c . اندازهٔ k_2 بردار k_2 همان ω/c است:

$$k_2 = \frac{\omega}{c}, \quad k_1 = n \frac{\omega}{c} \quad (40)$$

از این رو رابطهٔ پاشندگی در محیط ۲ (یعنی خلا سمت راست $z = 0$) برابر است با:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_2^2 = k_{2y}^2 + k_{2z}^2 \quad (41)$$

اکنون ادعا می‌کنیم که k_{2y} باید با k_{1y} مساوی باشد. زیرا معنی k_{1y} عبارت از حاصلضرب 2π در تعداد قله‌های موج بر واحد طول در امتداد \hat{y} در محیط ۱ است. اما هنگامی که در امتداد محور y حرکت می‌کنید در نقطهٔ $z = 0$ تعداد قله‌هایی که درست در داخل شیشه هستند باید با تعدادی که درست در خارج از شیشه و در خلا هستند برابر باشند. یعنی هنگامی که از شیشه به خلا می‌روید نمی‌توانید هیچ قله‌ای بر واحد طول در امتداد \hat{y} را "از دست بدهید". از این رو

$$\begin{aligned} k_{2y} &= k_{1y} \\ &= k_1 \sin \theta_1 \\ &= n \frac{\omega}{c} \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (42)$$

که در آن دومین تساوی معادله (۴۲) از شکل ۴-۷ بدیهي است و در سومین تساوی از معادله (۴۰) استفاده می‌شود. با وارد کردن معادله (۴۲) در معادله (۴۱) داریم

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \sin^2 \theta_1 + k_{rz}^2 \quad (43)$$

یعنی رابطه پاشندگی زیر به دست می‌آید

$$k_{rz}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - n^2 \sin^2 \theta_1) \quad (44)$$

زاویه بحرانی برای بازتاب داخلی کلی. اگر زاویه تابندگی θ_1 را افزایش دهیم، مؤلفه z بردار انتشار k_{rz} کوچک و کوچکتر می‌شود. سرانجام به زاویه تابشی می‌رسیم که به ازای آن k_{rz} برابر صفر می‌شود. (فرض می‌کنیم که n بزرگتر از واحد است همان‌طور که مثلاً برای نور مرئی در شیشه یا هوا وجود دارد). بدین ترتیب زاویه قطع به دست می‌آید که زاویه بحرانی تابش برای بازتاب داخلی کلی و یا به‌طور ساده، زاویه بحرانی نامیده می‌شود. برطبق معادله (۴۴) زاویه بحرانی با رابطه زیر داده می‌شود

$$\boxed{n \sin \theta_{\text{بحرانی}} = 1} \quad (45)$$

(برای شیشه با ضریب $n = 1.52$ از این رابطه نتیجه می‌شود که 2° یا 41° بحرانی θ). در زاویه تابش بحرانی باریکه نوری که به خلأ وارد می‌شود با سطح شیشه مماس است.

قانون اسنل. برای زوایای θ_1 بین صفر و بحرانی θ جزئی از باریکه نور بازتابیده و جزئی به داخل خلأ شکسته می‌شود. در این صورت زاویه‌ای مانند θ_2 که در شکل ۴-۷ رسم شده است وجود دارد و رابطه $k_{ry} = k_{1y}$ معادل با قانون اسنل است (که در بخش ۴-۳ با روش دیگری به دست آمد):

$$k_{ry} = k_2 \sin \theta_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \theta_2$$

$$k_{1y} = k_1 \sin \theta_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \theta_1$$

بنابراین از $k_{ry} = k_{1y}$ نتیجه می‌شود

$$\boxed{n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2} \quad (46)$$

بازتاب داخلی کلی. برای زوایای تابش بزرگتر از زاویه بحرانی، رابطه پاشندگی با قرار دادن $-k_{rz}^2 \equiv -\kappa^2$ به جای k_{rz}^2 در معادله (۴۴) به دست می‌آید:

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} [n^2 \sin^2 \theta_1 - 1] \quad (47)$$

$$n \sin \theta_1 > 1$$

بنابراین تابع موج (میدان الکتریکی یا میدان مغناطیسی) در محیط ۲ (خلاً) به‌وسیله موجی داده می‌شود که در امتداد y یک موج پیشرونده اما در امتداد z یک موج نمایی است:

$$\psi(y, z, t) = A \cos(\omega t - k_y y) e^{-\kappa z} \quad (48)$$

که در آن κ با معادله (۴۷) داده می‌شود و k_y برابر با $k_1 \sin \theta_1 = n(\omega/c) \sin \theta_1$ است. متوسط زمانی چگالی انرژی با متوسط زمانی مجذور $\psi(y, z, t)$ متناسب است، یعنی

$$\propto e^{-2\kappa z} \quad (49)$$

به‌عنوان کاربرد معادله (۴۷)، منشور برگرداننده را که در شکل ۳-۷ نشان داده شده است در نظر بگیرید. در داخل منشور نور تحت زاویه تابش $\theta_1 = 45^\circ$ از شیشه به هوا تابیده می‌شود. این زاویه (برای شیشه با ضریب $n = 1.52$) از زاویه بحرانی $\theta_{crit} = 41.2^\circ$ بزرگتر است. بنابراین پرتو به‌طور کلی بازتابیده می‌شود. میانگین مسافت فروافت نمایی (برای میدانهایی که به داخل خلاً نفوذ می‌کنند) با رابطه زیر داده می‌شود (به ازای $\theta_1 = 45^\circ$)

$$\begin{aligned} \delta = \kappa^{-1} &= \frac{c}{\omega} [n^2 \sin^2 \theta_1 - 1]^{-1/2} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} \left[\frac{(1.52)^2}{2} - 1 \right]^{-1/2} = 0.4\lambda \end{aligned}$$

از این رو پس از مسافت چندین طول موج در داخل ناحیه "ممنوع" (یعنی خلاً) میدانها قابل صرفنظر کردن هستند.

یک نمایش زیبا از بازتاب داخلی کلی هنگامی حاصل می‌شود که با یک ماسک صورت شنا کنید (به‌طوری که چشمهایتان در زیر آب به‌خوبی بتواند ببیند). هنگامی که چشمهایتان چندین سانتیمتر در زیر سطح آب است به بالا و به "سطح زیرین" آب نگاه کنید. این سطح مانند جیوه مایع "درخشان" به‌نظر می‌رسد. زیرا زاویه خط دید شما از زاویه بحرانی بیشتر است. در این صورت سطح آب برای نور بازتابیده به‌داخل چشمهای شما مانند یک آینه کامل عمل می‌کند.

روش آسانتر برای مشاهده بازتاب داخلی کلی از سطح زیرین یک سطح آب آن است که از میان جدار عمودی و مسطح یک ظرف شیشه‌ای یا پلاستیکی شفاف به سطح زیرین سطح آب نگاه کنید.

نفوذ نور در سد. اگر خلأ تا بینهایت امتداد نداشته باشد بلکه به وسیله تیغه‌ای از شیشه پایان پذیرد، در این صورت باید جمله دومی که شامل یک عبارت نمایی مثبت یعنی $\exp(+kz)$ باشد به معادله (۴۸) اضافه کنیم. بنابراین نمونه مسئله نفوذ در سد را داریم.

یک دانشجوی دانشگاه پرینستون به نام د. د. کون^۱ آزمایش زیبا و زیرکانه‌ای انجام داده است که تضعیف نمایی چگالی انرژی را نشان می‌دهد. با وجودی که آزمایش وی ذاتاً مکانیک کوانتومی است، اما این نتیجه‌ای از اپتیک کلاسیک را نشان می‌دهد. این نتیجه یکی از نتایج متعدد اپتیک کلاسیک است که در مکانیک کوانتومی نگاه داشته شده‌اند. (اپتیک کلاسیک اپتیکی است که در آن امواج الکترومغناطیسی مورد مطالعه دارای طول موجی هستند که آنها را "نور" نامیده‌ایم و نه مثلاً "ریزموج".) کون دو منشور با فاصله‌ی هوایی متغیر تهیه کرد به طوری که نور (خط سبز جیوه) از درون یک منشور بر روی فاصله‌ی هوا با زاویه‌ای بیشتر از زاویه بحرانی تابیده می‌شود. انرژی نورانی عبور کرده از میان فاصله‌ی هوا به داخل منشور دوم با چگالی انرژی در سطح منشور دوم متناسب است. براساس مکانیک کوانتومی، نور با بسامد ω به صورت واحدهای تجزیه‌ناپذیر که فوتون نامیده می‌شود حرکت می‌کند که انرژی هر کدام دقیقاً $\hbar\omega$ است. از این رو برای یک ω مفروض، چگالی انرژی با تعداد فوتونها متناسب است. کون چگالی انرژی را با شمردن تعداد فوتون عبور کرده برحسب تابعی از فاصله‌ی هوا اندازه‌گیری کرد و بستگی نمایی پیش‌بینی شده با معادله (۴۹) داده شده است را تحقیق کرد. این آزمایش اولین آزمایشی بود که این معادله را برای طول موجهای کمتر از یک سانتیمتر تحقیق می‌کرد، به علاوه، هیچ آزمایشی قبل از آن، این معادله را به‌ازای هیچ طول موجی با آشکارسازی تک‌تک فوتونها تحقیق نکرده بود.

یک نمایش کیفی از نفوذ در سد و کاهش سریع میدانها برحسب مسافت در یک موج نوری از شیشه به داخل ناحیه "ممنوع" یعنی خلأ (هوا) با یک منشور یا مکعب شیشه‌ای به آسانی انجام می‌شود. در حالی که به نقطه‌ای از سطح شیشه که در امتداد خط دید شما به طور کامل بازتاب کننده است نگاه می‌کنید، با یک انگشت آن نقطه را از سمت دیگر سطح به آهستگی لمس کنید. در این صورت انگشت نامرئی می‌شود. زیرا در ناحیه "ممنوع" قرار گرفته است. اکنون انگشت را محکم بر سطح فشار دهید. در این صورت "اثر انگشت" خود را خواهید دید. بلندیهای اثر انگشت شما با سطح شیشه بازتاب‌کننده کلی تماس نزدیک برقرار کرده و بازتاب کلی را خراب می‌کند. پستیهای اثر انگشت کاملاً با شیشه تماس حاصل نمی‌کنند. بنابراین بازتاب کلی را خراب نمی‌کنند. این پستیها مانند پیچ و خمهای نقره فامی به نظر می‌رسند که بلندیها را جدا کرده‌اند. عمق این پستیها باید در حدود چندین طول موج یعنی چندین برابر میانگین عمق نفوذ یعنی $\delta = k^{-1}$ باشد. اگر پستیها

کم عمقتر از δ باشند، میدانها به طور قابل ملاحظه‌ای در "سد" میان شیشه و پوست نفوذ می‌کنند و بنابراین با پوست برهم‌کنش می‌کنند به طوری که بازتاب کلی خراب می‌شود. نمایش نفوذ در سد که در بالا ذکر شد را با استفاده از یک ظرف مستطیلی شفاف پر از آب به جای منشور یا مکعب شیشه‌ای نیز می‌توان انجام داد.

۷-۳ امواج آب

امواج آب به آسانی مشاهده می‌شوند. در کودکی حتماً این امواج را در وان حمام، دریاچه یا دریا دیده‌اید. بدون شک از مشاهده این امواج با تمام پیچیدگی و زیبایی که دارند، لذت بصری زیادی برده‌اید. اکنون می‌خواهیم با فهمیدن آنها لذت معنوی نیز ببرید. این فهمیدن به سادگی احتیاج دارد. بنابراین از برخی خصوصیات آب حقیقی صرف‌نظر می‌کنیم. مثلاً از خاصیت چسبندگی که در نتیجه اصطکاک درونی است صرف‌نظر می‌کنیم. (پرفسور ریچارد پی فاینمن به چنین آب ایده‌آلی اسم شگفت‌آور "آب خشک" داده است.) همچنین خود را به امواج آرام با دامنه کوچک محدود خواهیم کرد. به موج شکن احتیاجی نیست!

علی‌رغم ساده‌سازیها، ساختار هندسی و رابطه پاشندگی $\omega(k)$ را برای امواج آرام فرا خواهیم گرفت. تمام نتایج را با آزمایشهای ساده خانگی و با استفاده از یک جعبه کفش یا تنگ ماهی می‌توانید تحقیق کنید. (به آزمایش خانگی ۷-۱۱ مراجعه کنید.)

در حالت تعادل (یعنی هنگامی که هیچ موجی وجود ندارد) سطح یک قطعه آب مسطح و افقی است. هنگامی که موجی هست دو نیروی برگرداننده وجود دارد که می‌خواهند قله‌های موج را مسطح کنند: گرانی و کشش سطحی.

به سبب غیر قابل تراکم بودن آب، آب اضافی که در یک قله موج ظاهر می‌شود بایستی از نواحی دره‌های مجاور تأمین شود. بنابراین تک‌تک قطره‌های آب در یک موج آب حرکتی انجام می‌دهند که ترکیبی از حرکت طولی (در امتداد راستای انتشار موج) و حرکت عرضی (بالا و پایین) است. اگر عمق آب در حالت تعادل در مقایسه با طول موج (امواج هماهنگ) کوچک باشد، امواج را امواج آب‌کم عمق یا امواج جزرومدی نامند. محاسبات نشان می‌دهد که این امواج دارای سرعت انتشاری هستند که از طول موج مستقل است اما به عمق بستگی دارد.

اگر طول موج در مقایسه با عمق آب در حالت تعادل کوچک باشد، امواجی داریم که آنها را امواج آب-عمیق می‌نامند. تک‌تک قطره‌ریزه‌های آب در یک موج آب عمیق هماهنگ پیشرونده هیچ‌گونه حرکت متوسطی ندارند. این قطره‌ریزه‌ها به شکل دایره حرکت می‌کنند. مثلاً یک چوب‌پنبه شناور (یا یک قطره‌ریزه آب در سطح) یک حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد که شعاع آن

برابر با دامنه موج هماهنگ و زمان تناوب آن برابر با زمان تناوب موج است. در یک ذره موج چوب‌پنبه بیشینه سرعت معکوسش را دارد ولی بر روی یک قله موج دارای سرعتی به همان اندازه بزرگ اما در جهت مستقیم (نسبت به راستای انتشار موج) است. قطره‌ریزه‌های آب در زیر سطح در دایره‌های کوچکتری حرکت می‌کنند و شعاع دایره‌ای با افزایش عمق به‌طور نمایی کاهش می‌یابد و در فاصله چند طول موج پایینتر از سطح به‌طور قابل صرف‌نظر کردنی کوچک می‌شود.

امواج مستقیم. اکنون امواج آبی را در نظر می‌گیریم که دارای فقط یک طول موج λ و دارای قله‌ها و دره‌های موازی و مستقیم و بلند هستند. چنین امواجی امواج مستقیم نامیده می‌شوند. این امواج، مشابه دوبعدی امواج سه‌بعدی تخت هستند.

تصور کنید یک دریاچه بینهایت با عمق یکنواخت در حالت تعادل h داریم. هنگامی که امواج وجود ندارند، سطح آب تخت است که آن را صفحه $y = 0$ می‌نامیم. مقدار مثبت y در امتداد عمود به سمت بالا اندازه‌گیری می‌شود. راستای انتشار موج را در امتداد راستای افقی \hat{x} در نظر می‌گیریم. از این رو قله‌ها و دره‌های موج در امتداد خطوط عمود بر \hat{x} هستند.

فرض می‌کنیم x و y مشخص‌کننده مکان تعادل یک قطره مفروض از آب باشند (مهم نیست که در حرکت موج این قطره به کجا می‌رود، چون مکان تعادل همواره x و y است. مکان تعادل برای نامیدن یک قطره مفروض است و هنگامی که یک موج وجود دارد مکان قطره را نشان نمی‌دهد). متغیر x از $x = -\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند، متغیر y از $y = -h$ (کف دریاچه) تا $y = 0$ (سطح دریاچه) تغییر می‌کند.

هنگامی که یک موج وجود دارد، یک قطره مفروض حرکتی انجام می‌دهد که ترکیبی از یک حرکت بالا و پایین (در امتداد y) و یک حرکت جلو و عقب (در امتداد x) است. فرض می‌کنیم برای قطره آبی که در مکان تعادل y و x است $\psi(x, y, t)$ نمایش دهنده بردار جابه‌جایی لحظه‌ای از مکان تعادلش باشد. این بردار جابه‌جایی در یک موج مستقیم آب فقط یک مؤلفه x و یک مؤلفه y دارد:

$$\psi(x, y, t) = \hat{x}\psi_x(x, y, t) + \hat{y}\psi_y(x, y, t) \quad (50)$$

سرعت لحظه‌ای v قطره‌ریزه آب در مختصات تعادل x و y عبارت است از مشتق نسبی ψ نسبت به t :

$$v(x, y, t) = \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial t} = \hat{x} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} + \hat{y} \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \quad (51)$$

ویژگیهای آب ایده‌آل. در پاراگرافهای زیر برخی از ویژگیهای آب ایده‌آل را مطالعه خواهیم کرد.

۱. بقای جرم. هنگامی که شدت جریانهای الکتریکی (بخش ۴-۲ جلد دوم همین کتاب) را مطالعه می‌کردیم رابطه بقای بار الکتریکی که با معادله پیوستگی بیان می‌شد را به دست آوردید:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (52)$$

معادله (۵۲) فقط می‌گوید دلیل اینکه چگالی بار یعنی ρ در یک حجم بینهایت کوچک با زمان تغییر می‌کند این است که شدت جریان $\rho \mathbf{v}$ از سطح آن حجم به خارج جریان می‌یابد. در حالت بالا اگر فرض کنیم که ρ نشاندهنده چگالی جرمی آب باشد در این صورت معادله (۵۲) بقای جرم را بیان می‌کند. اما با تقریب خوبی، آب غیرقابل تراکم است. بنابراین چگالی جرمی ρ مقداری ثابت و مستقل از زمان و مکان است و در نتیجه سمت راست معادله (۵۲) صفر است. همچنین می‌توانیم ρ را از سمت چپ معادله (۵۲) فاکتور گرفته و آن را در نظر نگیریم. بنابراین برای بیان $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ از معادله (۵۱) استفاده می‌کنیم:

$$0 = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

یعنی

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \psi)$$

یعنی

$$\nabla \cdot \psi = \text{const.} \quad (53)$$

۲. نبودن حباب. مقدار ثابت معادله (۵۳) فقط می‌تواند برابر صفر باشد. در غیر این صورت بر طبق نظریه گاوس، انتگرال سطحی ψ بر روی سطح یک کره کوچک برابر صفر نخواهد بود که معنی آن فقط این است که حبابهایی وجود دارند. اما فرض می‌کنیم که هیچ‌گونه حبابی وجود ندارد. بنابراین نتیجه می‌شود که آب بدون حباب، غیر قابل تراکم و با بقای جرم در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\nabla \cdot \psi = \frac{\partial \psi_x(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y(x, y, t)}{\partial y} = 0 \quad (54)$$

۳. نبودن گرداب. در یک گرداب، انتگرال خطی سرعت \mathbf{v} در اطراف یک مسیر دایره‌ای که گرداب را در میان می‌گیرد برابر صفر نیست. در یک مقیاس بینهایت کوچک، وجود گردابهای کوچک مستلزم آن است که (بر طبق قانون گاوس) تاو بردار \mathbf{v} برابر صفر نباشد. (برای مرور مفهوم

تاویک بردار به بخشهای ۱۵-۲ تا ۱۸-۲ جلد دوم همین کتاب مراجعه کنید.) اما فرض می‌کنیم که هیچ‌گونه گردابی وجود ندارد. بنابراین فرض می‌کنیم که

$$\begin{aligned} \circ &= \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \psi) \end{aligned}$$

یعنی

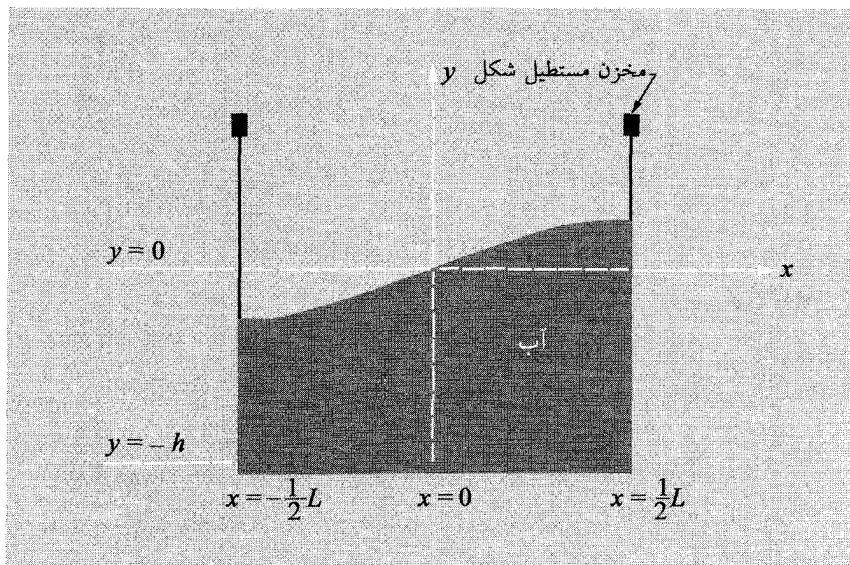
$$\nabla \times \psi = \hat{z} \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi_y - \frac{\partial}{\partial y} \psi_x \right) = \circ \quad (55)$$

امواج ساکن در آب. اکنون می‌خواهیم خلاقیت خود را به‌کار ببریم و شکل امواج آب را بدون محاسبات جبری زیاد پیدا کنیم. برای این منظور باید یک آکواریوم مستطیلی یا ظرفی مانند آن به‌دست آورید. (برای آزمایش یک کارتن مقوایی معمولی که از داخل با یک کیسه پلاستیکی از همان نوعی که برای کیسه‌های زباله به‌کار می‌رود، پوشیده شده مناسب است. در این آزمایش هر کارتن مقوایی پیش از آنکه شکسته شود در حدود چند دقیقه کار می‌کند. اگر قسمت داخل کارتن رنگ شود، به‌طور نامحدود دوام خواهد داشت.) کارتن را با ۱۵ تا ۲۰ سانتیمتر آب پر کنید. کارتن را به آرامی در امتداد x تکان دهید و سعی کنید مدهای به‌ظاهر سینوسی را پیدا کنید. در این صورت پایتترین مد را که مانند شکل ۵-۷ به‌نظر می‌رسد پیدا خواهید کرد.

اگر کمی قهوه آسیاب‌شده به داخل آب بریزید، حرکت آب را می‌توانید ببینید. متوجه خواهید شد که تمام دانه‌های ریز قهوه به‌طور هم‌زمان بدون حرکت هستند و جابه‌جاییهای x و y در یک زمان صفر می‌شوند. این همان چیزی است که از یک مد طبیعی انتظار داریم یعنی در یک موج ساکن: تمام درجه‌های آزادی ("اجزای متحرک") به‌طور هم‌فاز نوسان می‌کنند. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که برای نوسانهای به‌اندازه کافی کوچک، بستگی زمانی برای هر دو ψ_x و ψ_y با یک نوسان هماهنگ و با ثابت فاز یکسان داده می‌شود یعنی بستگی زمانی با ضریب مشترک $\cos \omega t$ داده می‌شود. در مرحله بعد فرض می‌کنیم که بستگی x در جابه‌جایی عمودی ψ_y به شکل یک موج ساکن سینوسی است. اگر مد شبیه آنچه در شکل ۵-۷ نشان داده شده است به‌نظر آید، در این صورت ψ_y در نقطه $x = 0$ دارای یک گره است. بنابراین ψ_y (به‌جای ضریب $\cos kx$) دارای ضریب $\sin kx$ است. از این رو می‌توانیم بنویسیم

$$\psi_y(x, y, t) = \cos \omega t \sin kx f(y) \quad (56)$$

که در آن $f(y)$ تابع تا اینجا نامعلومی از y است.



شکل ۵۷- پایینترین مد سینوسی در یک مخزن مستطیل شکل.

شرایط مرزی در دیواره‌ها. بستگی x تابع ψ_x چیست؟ در انتهای مخزن، یک قطره‌ریزه آب فقط می‌تواند بالا و پایین برود. این قطره‌ریزه نمی‌تواند از دیواره‌ها جدا شود. از این رو محلهایی که در آنجا ψ_y بیشینه‌هایش را (بر روی دیواره‌ها) دارد محلهایی هستند که در آنجا ψ_x دارای گره است. از این رو در جایی که برای ψ_y جمله $\sin kx$ داشتیم باید برای ψ_x جمله $\cos kx$ داشته باشیم:

$$\psi_x(x, y, t) = \cos \omega t \cos kx g(y) \quad (57)$$

که در آن $g(y)$ تابع تا اینجا نامعلومی از y است. رابطه بین حرکات افقی و عمودی. اکنون از این حقیقت که دیورژانس و تاوردار ψ صفر هستند استفاده می‌کنیم. بنابراین به آسانی می‌توانید نشان دهید که از معادلات (۵۶) و (۵۷) نتیجه می‌شود

$$\nabla \cdot \psi = 0 : \quad -kg(y) + \frac{df(y)}{dy} = 0 \quad (58)$$

$$\nabla \times \psi = 0 : \quad \frac{dg(y)}{dy} - kf(y) = 0 \quad (59)$$

با مشتق‌گیری از معادله (۵۸) نسبت به y و سپس با استفاده از معادله (۵۹) برای حذف کردن

dg/dy می‌توانیم $g(y)$ را از معادلات (۵۸) و (۵۹) حذف کنیم. نتیجهٔ زیر به دست می‌آید

$$\frac{d^2 f}{dy^2} = k^2 f \quad (60)$$

که دارای حل عمومی زیر است

$$f(y) = Ae^{ky} + Be^{-ky} \quad (61)$$

بدین ترتیب $g(y)$ را از معادلهٔ (۵۸) به دست می‌آوریم

$$g(y) = Ae^{ky} - Be^{-ky} \quad (62)$$

شرط مرزی در کف. سرانجام این شرط مرزی را وارد می‌کنیم که قطره‌ریزه‌های آب در کف دریاچه هیچ حرکت عمودی ندارند یعنی از کف جدا نمی‌شوند. شرط $\psi_y = 0$ به‌ازای $y = -h$ با شرط $f(y) = 0$ به‌ازای $y = -h$ معادل است. بنابراین از معادلهٔ (۶۱) رابطهٔ $B = -Ae^{-2kh}$ به دست می‌آید.

بنابراین نتیجهٔ نهایی برای یک موج سینوسی ساکن در آب یک دریاچهٔ عمیق با عمق در حالت تعادل h برابر است با

$$\psi_y = A \cos \omega t \sin kx (e^{ky} - e^{-2kh} e^{-ky}) \quad (63)$$

$$\psi_x = A \cos \omega t \cos kx (e^{ky} + e^{-2kh} e^{-ky}) \quad (64)$$

معادلات (۶۳) و (۶۴) جابه‌جایی لحظه‌ای یک قطره‌ریزه آب در مکان تعادل x و y را نشان می‌دهد. از این معادلات به آسانی می‌توانید نشان دهید که حرکت یک قطره‌ریزهٔ مفروض (یا دانه‌های ریز قهوه) در یک موج ساکن در آب از یک نوسان هماهنگ در امتداد یک خط مستقیم در صفحهٔ xy تشکیل شده است. این مطلب را با مشاهده دانه‌های ریز قهوه در مخزن آب نیز می‌توانید ببینید.

امواج در آب عمیق. اگر عمق h نسبت به طول موج بسیار بزرگ باشد، در این صورت ضریب e^{-2kh} الزاماً صفر است و از جمله‌های مرتبهٔ دوم y در توابع $f(y)$ و $g(y)$ می‌توانیم صرفنظر کنیم. در این صورت معادلات (۶۳) و (۶۴) به شکل زیر در می‌آیند

$$\psi_y = A \cos \omega t \sin kx e^{ky} \quad (65)$$

$$\psi_x = A \cos \omega t \cos kx e^{ky} \quad (66)$$

می‌بینیم که امواج در راستای x سینوسی و در راستای y نمایی هستند. طول تضعیف دامنه یعنی δ برابر $1/k$ است که مساوی با $\lambda/2\pi$ است. کمیت $\lambda/2\pi$ که طول موج کاهش‌یافته نام دارد با نشانه λ (که "لاندا بار" تلفظ می‌شود) مشخص می‌شود. از این رو برای امواج در آب عمیق داریم

$$f(y) = e^{ky} = e^{-k|y|} = e^{-|y|/\lambda} \quad (۶۷)$$

یعنی طول تضعیف دامنه برای امواج در آب عمیق با طول موج کاهش‌یافته برابر است. بنابراین دامنه نوسان یک قطره آب که مکان تعادل آن یک طول موج در زیر سطح آب است از دامنه نوسان قطره‌ای که در سطح است به اندازه ضریب $1/500 \approx e^{-2\pi}$ کمتر است. می‌بینیم برای آنکه حرکت موج در کف الزاماً قابل صرف‌نظر کردن باشد لازم است که عمق آن در حالت تعادل فقط حدود یک طول موج باشد. از این رو تقریب "موج در آب عمیق" یک تقریب عالی است. امواج در آب کم‌عمق. منظور از موج در آب کم‌عمق موجی است که برای آن عمق در حالت تعادل h در مقایسه با عمق تضعیف λ کوچک باشد. در این حالت، به‌طور تقریبی می‌توانیم بستگی y توابع ψ_x و ψ_y را با نگاه داشتن فقط اولین جمله‌های مهم بسط سری تایلور $f(y)$ و $g(y)$ در نظر بگیریم. از این رو به آسانی می‌توانیم نشان دهیم که برای $h \ll \lambda$ معادلات (۶۳) و (۶۴) به صورت زیر در می‌آیند

$$\psi_y = 2A \cos \omega t \sin kx [k(y + h)] \quad (۶۸)$$

$$\psi_x = 2A \cos \omega t \cos kx \quad (۶۹)$$

می‌بینیم که برای یک موج در آب کم‌عمق حرکت افقی ψ_x از مکان عمود؛ در حالت تعادل قطره آب یعنی y مستقل است. حرکت عمودی ψ_y با عمق قطره‌ریزه به‌طور خطی تغییر می‌کند و در کف صفر و در سطح آب بیشینه است. در سطح آب بیشینه حرکت عمودی به اندازه ضریب $1 \ll (h/\lambda)$ از بیشینه حرکت افقی کوچکتر است.

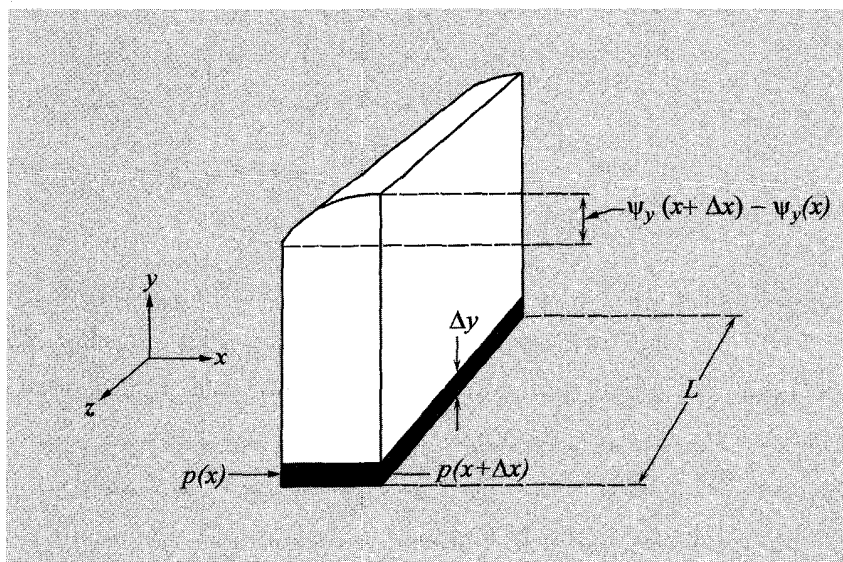
در مدل "آب ایده‌آل" از اصطکاک آب که در اثر مالیده شدن آن به کف ناهموار ایجاد می‌شود صرف‌نظر کرده‌ایم. برای امواج در آب عمیق این حذف اهمیتی ندارد. برای امواج در آب کم‌عمق این اصطکاک مهم است زیرا اگر امواج ساکن در آب کم‌عمق در یک ظرف مستطیل شکل را تحریک کنید (همانند آزمایش خانگی مسئله ۷-۱۱) به آسانی می‌توانید آن را ببینید. در آنجا مشاهده خواهید کرد که دانه‌های ریز قهوه از نواحی بیشینه سرعت افقی دور می‌شوند و در ناحیه‌هایی که در آنجا سرعت افقی همواره صفر است یعنی در بیشینه‌های حرکت عمودی جمع می‌شوند. تقریب

دیگر صرف نظر کردن از اصطکاک "داخلی" یعنی چسبندگی بود. اگر می‌خواهید اثر چسبندگی را ببینید، آزمایش خانگی را تکرار و به جای آب در آن از روغن معدنی استفاده کنید.

رابطه پاشندگی برای امواج آب گرانشی. تا اینجا ساختار هندسی امواج در آب (ایده‌آل) را فرا گرفتیم. اما هنوز چیزی دربارهٔ رابطهٔ بین "شکل" (طول موج و عمق) بسامد را نمی‌دانیم. زیرا دربارهٔ این نیروهای بازگرداننده که در امواج بر روی آب اثر می‌کنند تاکنون چیزی نگفته‌ایم. (یادآوری می‌کنیم که نیروی بازگرداننده بر واحد جابه‌جایی بر واحد جرم ω^2 است. این یک نتیجهٔ بسیار کلی است و برای امواج هماهنگ در آب و همچنین هر موج هماهنگ دیگر برقرار است.) در مطالعهٔ مدها در فصل ۱ فرا گرفتیم که از آنجا که در یک مد تمام اجزای متحرک مقدار مساوی ω^2 دارند، هنگامی که شکل مد معلوم باشد رابطهٔ بین بسامد مد و شکل مد را با در نظر گرفتن حرکت تنها یک درجهٔ آزادی از یک جزء متحرک می‌توانیم پیدا کنیم. در مسئلهٔ حاضر این شکل با معادلات (۶۳) و (۶۴) داده می‌شود. بنابراین لازم است فقط حرکت x (یا y) تنها یک قطره آب را در نظر بگیریم. بدین جهت حرکت یک حجم بینهایت کوچک آب را که بسیار نزدیک به سطح قرار دارد انتخاب می‌کنیم و در نظر می‌گیریم.

یک حجم بسیار کوچک را در نظر بگیرید که در حالت تعادل به‌اندازهٔ فاصلهٔ کوچک Δx و در امتداد راستای انتشار x ، به‌اندازهٔ فاصلهٔ L در امتداد راستای "نه‌چندان مهم" z و به‌اندازهٔ فاصلهٔ عمودی کوچک Δy امتداد یافته است. هر دو جمله Δx و Δy در مقایسه با طول موج بسیار کوچک اختیار می‌شوند. نیروی بازگرداننده در امتداد x بر روی این حجم برابر است با حاصلضرب مساحت $L\Delta y$ از سطح جانبی این حجم در اختلاف فشار بین دو وجه که (در حالت تعادل) در x و $x + \Delta x$ قرار گرفته است. این اختلاف فشار به‌صورت حاصلضرب ρg (چگالی جرمی ضربدر شتاب گرانشی) در اختلاف ارتفاع آب در دو وجه داده می‌شود یعنی اختلاف در مقدار ψ_y در دو وجه، همان‌گونه که در شکل ۷-۶ نشان داده شده است. این اختلاف در مقدار ψ_y به نوبهٔ خود الزاماً به‌وسیلهٔ حاصلضرب مشتق x تابع ψ_y در مقدار جدایی بین دو وجه در حالت تعادل یعنی Δx داده می‌شود. بنابراین نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} F_x &= -L \Delta y [p(x + \Delta x) - p(x)] \\ &= -L \Delta y \rho g [\psi_y(x + \Delta x) - \psi_y(x)] \\ &= -L \Delta y \Delta x \rho g \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \\ &= -(\Delta M) g \left[\frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right]_{y=0}. \end{aligned} \quad (70)$$



شکل ۶-۷ نیروی بازگرداننده گرانشی در امتداد x بر روی یک جزء حجم از آب. به حجم سایه دار نیرویی وارد می شود که با اختلاف فشار $p(x + \Delta x) - p(x)$ متناسب است. این اختلاف فشار با اختلاف ارتفاع آب یعنی $\psi_y(x + \Delta x) - \psi_y(x)$ متناسب است.

که در آن $\Delta M \equiv \rho L \Delta y \Delta x$ جرم آب در جزء حجم است. این نیرو شتابی در امتداد x به وجود می آورد. شتاب در امتداد x برابر $\partial^2 \psi_x / \partial t^2$ است و چون حرکت هماهنگ داریم این شتاب برابر $-\omega^2 \psi_x$ است. بنابراین قانون دوم نیوتون برای شتاب جرم ΔM عبارت است از

$$F_x = (\Delta M) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}$$

که [با استفاده از معادله (۷۰) برای F_x] رابطه زیر را به دست می دهد

$$(\Delta M)g \left[\frac{\partial \psi_u}{\partial x} \right]_{y=0} = (\Delta M)\omega^2 [\psi_x]_{y=0} \quad (71)$$

اکنون از مقادیر ψ_x و ψ_y که با معادلات (۶۳) و (۶۴) داده شده است استفاده می کنیم. در این صورت از معادله (۷۱) نتیجه می شود

$$\omega^2 = gk \frac{(1 - e^{-2kh})}{(1 + e^{-2kh})} \quad (72)$$

معادله (۷۲) رابطه پاشندگی موردنظر است. در حالت‌های حدی جالب توجه یعنی امواج در آب عمیق و امواج گرانشی در آب کم‌عمق، رابطه پاشندگی و سرعت‌های فاز مربوط به آن از معادله (۷۲) به آسانی به دست می‌آیند. این کمیتها عبارت‌اند از

$$\omega^2 = gk \quad v_\phi = \sqrt{g\lambda} \quad \text{آب عمیق:} \quad (۷۳)$$

$$\omega^2 = gk \left(\frac{h}{\lambda} \right) \quad v_\phi = \sqrt{gh} \quad \text{آب کم‌عمق:} \quad (۷۴)$$

بنابراین امواج گرانشی در آب کم عمق غیر پاشنده هستند. امواج گرانشی در آب عمیق پاشنده هستند. هنگامی که طول موج چهار برابر شود، سرعت فاز دو برابر می‌شود.

امواج حاصل از کشش سطحی. در به دست آوردن قانون پاشندگی یعنی معادله (۷۲) از مؤلفه نیروی بازگرداننده مربوط به کشش سطحی صرف‌نظر کردیم. برای یک جزء حجم مفروض در آب جابه‌جا شده سهم کشش سطحی در نیروی بازگرداننده با حاصلضرب T (ثابت کشش سطحی) در خمیدگی سطح متناسب است. خمیدگی با k^2 متناسب است. بنابراین سهم کشش سطحی با Tk^2 متناسب است. سهم گرانشی با وزن Mg یعنی ρg متناسب است. بنابراین می‌توان حدس زد که سهم نسبی ω^2 از کشش سطحی و گرانی با نسبت بدون بعد $Tk^2/\rho g$ متناسب است. این حدس درست است. (مسئله ۷-۳۳ را ببینید).

امواج پیشرونده در آب. به سادگی می‌توانید نشان دهید (مسئله ۷-۳۱) که امواج پیشرونده در آب به شکل زیر است

$$\psi_y = A \cos(\omega t - kx)(e^{ky} - e^{-2kh}e^{-ky}) \quad (۷۵)$$

$$\psi_x = A \sin(\omega t - kx)(e^{ky} + e^{-2kh}e^{-ky}) \quad (۷۶)$$

از معادلات (۷۵) و (۷۶) به آسانی می‌توانید نشان دهید که برای امواج پیشرونده در آب عمیق یک قطره‌ریزه مفروض از آب در صفحه xy در یک دایره حرکت می‌کند یعنی بر روی یک قله موج به سمت جلو و در یک دره موج به سمت عقب حرکت می‌کند. در حالت کلی و برای عمق آب h ، قطره‌ریزه آب بر روی یک بیضی حرکت می‌کند. این حرکت بیضوی مشابه با حرکت دایره‌ای است که در یک موج پیشرونده در آب عمیق پیدا کردیم بجز آنکه دایره بین سطح بالا و کف ظرف (یا دریاچه یا اقیانوس) ”پخ و مسطح“ می‌شود. این حالت حداقل در هنگامی است که اصطکاک در کف قابل صرف‌نظر کردن باشد. اگر اصطکاک قابل صرف‌نظر کردن نباشد، در این صورت آب (روی قله‌های موج) نسبتاً آسان به طرف جلو حرکت می‌کند. اما هنگامی که می‌خواهد در دره‌های موج به طرف عقب برگردد بر روی کف ظرف مالیده می‌شود. نتیجه این است که آب بر روی قله‌های موج

بیشتر به طرف جلو حرکت می‌کند تا در دره‌های موج به طرف عقب و بنابراین آب منتقل می‌شود. هنگامی که چنین حالتی روی می‌دهد، امواج نزدیک به (و یا در حال) "شکسته شدن" هستند. بنابراین موج شکنها در ساحل با خود آب حمل می‌کنند (جریان برگشتی "کشیده شدن از زیر" نام دارد). غواصی که در فاصله‌ای که به نظر او یک فاصله ایمن دور از ساحل صخره‌ای است (یعنی ساحلی که مایل نیست به آن برخورد کند) شنا می‌کند، هنگامی که یک موج با طول موج به‌طور استثنایی بلند می‌آید، ممکن است دچار مشکل شود (لااقل این اتفاق برای من افتاد).

۴-۷ امواج الکترومغناطیسی

در این بخش معادلات ماکسول را به‌کار می‌بریم و اثبات کلی بسیاری از روابطی را که از مطالعه خطوط انتقال نیرو با صفحات موازی می‌دانیم به‌دست می‌آوریم. بدین ترتیب "پایه‌های دانش خود را تقویت" خواهیم کرد و برای بهتر فهمیدن امواج الکترومغناطیسی در فضای سه‌بعدی آماده خواهیم شد.

معادلات ماکسول در خلا. این معادلات با روابط زیر داده می‌شوند (به جلد دوم همین کتاب صفحه ۲۶۴ مراجعه کنید)

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \nabla \times \mathbf{B} \quad (۷۷ \text{ الف})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E} \quad (۷۷ \text{ ب})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (۷۷ \text{ ج})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۷۷ \text{ د})$$

معادله کلاسیک موج برای امواج الکترومغناطیسی در خلا. با حذف \mathbf{B} از معادلات (۷۷ الف) تا (۷۷ د) یک معادله دیفرانسیل جزئی برای \mathbf{E} پیدا خواهیم کرد. با مشتق‌گیری از معادله (۷۷ الف) نسبت به t شروع می‌کنیم. سپس معادله (۷۷ ب) را به‌کار می‌بریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= c \nabla \times \mathbf{B} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= c \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= c \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= c \nabla \times (-c \nabla \times \mathbf{E}) \\ &= -c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (۷۷ \text{ هـ}) \end{aligned}$$

می‌توان نشان داد [معادله (۳۹)] پیوست را ببینید] که به‌ازای هر بردار \mathbf{C}

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{C}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{C}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{C} \quad (۷۸)$$

با جایگزین کردن \mathbf{E} به‌جای \mathbf{C} در معادله (۷۸) و استفاده از رابطه $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ [معادله (۷۷) ج] از معادله (۷۷) نتیجه زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(x, y, z, t)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{E}(x, y, z, t) \quad (۷۹ \text{ الف})$$

این معادله برداری از سه معادله دیفرانسیل جزئی جداگانه تشکیل شده است:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 E_x; \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 E_y; \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 E_z \quad (۷۹ \text{ ب})$$

بنابراین هر یک از کمیت‌های E_x ، E_y و E_z برای امواج غیرپاشنده در معادله کلاسیک موج صدق می‌کنند [به معادله (۱۸) بخش ۷-۲ مراجعه کنید]. به‌طور مشابه \mathbf{E} را از معادلات ماکسول می‌توان حذف کرد و معادله کلاسیک موج را برای سه مؤلفه \mathbf{B} به‌دست آورد (مسئله ۷-۱۲).

امواج تخت الکترومغناطیسی در خلاً یک موج تخت الکترومغناطیسی از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی جفت‌شده به زمان و مکان $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ و $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ که دارای ویژگیهای زیر هستند تشکیل شده است:

۱. یک راستای انتشار منحصر به‌فرد وجود دارد که آن را در امتداد $\hat{\mathbf{z}}$ اختیار می‌کنیم (امواج می‌توانند هرگونه ترکیبی از امواج پیشرونده و ساکن باشند).

۲. هیچ‌کدام از مؤلفه‌های \mathbf{E} یا \mathbf{B} به‌هیچ‌یک از مختصات عرض x و y بستگی ندارند. بنابراین داریم:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}E_x(z, t) + \hat{\mathbf{y}}E_y(z, t) + \hat{\mathbf{z}}E_z(z, t) \quad (۸۰)$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}B_x(z, t) + \hat{\mathbf{y}}B_y(z, t) + \hat{\mathbf{z}}B_z(z, t) \quad (۸۱)$$

البته داشتن امواج تخت [یعنی امواجی به شکل معادلات (۸۰) و (۸۱)] مربوط به این است که امواج از کجا آمده‌اند، چگونه تولید شده‌اند و غیره. در اینجا به چشمه‌های امواج علاقه‌مند نیستیم. بلکه فقط فرض می‌کنیم که امواج بالاخره از جایی می‌آیند و به شکل معادلات (۸۰) و (۸۱) هستند.

امواج تخت الکترومغناطیسی امواج عرضی هستند. اکنون معادلات ماکسول را در معادلات (۸۰) و (۸۱) اعمال می‌کنیم. ابتدا قانون گاوس را به کار می‌بریم که براساس آن $\text{div} \mathbf{E}$ برابر $4\pi\rho$ است. کمیت ρ در خلأ برابر صفر است. همچنین وقتی برای هیچ‌کدام از مؤلفه‌ها هیچ‌یک از بستگیهای x یا y وجود نداشته باشد، مشتقهای نسبی نسبت به x یا y صفر می‌شوند. از این رو نتیجه می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_z(z, t)}{\partial z} = 0 \quad (82)$$

که براساس آن E_z مستقل از z است. همچنین با در نظر گرفتن معادله ماکسول درباره "شدت جریان جابه‌جایی" می‌توان مشاهده کرد که E_z مستقل از t است

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \nabla \times \mathbf{B} \quad (83)$$

مؤلفه z معادله (۸۳) را در نظر بگیرید. در سمت راست معادله کمیت‌های $\partial B_x / \partial y$ و $\partial B_y / \partial x$ وجود دارند که هر دو صفر هستند. از این رو $\partial E_z / \partial t$ صفر است. پس نتیجه می‌شود که E_z مقدار ثابتی است. برای سادگی مقدار ثابت را صفر اختیار کنیم (بنابراین بدین وسیله کلیت را از دست نمی‌دهیم بلکه صرفاً برای "حذف کردن" هر میدان ثابتی که دیگر آن را فهمیده‌ایم از اصل برهم‌نهی استفاده می‌کنیم. اگر موقعیت ایجاد کند همیشه می‌توان آن را مجدداً اضافه کرد). به همین ترتیب، این حقیقت که $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ است می‌گوید که $B_z(z, t)$ هیچ‌گونه بستگی با z ندارد. با در نظر گرفتن مؤلفه z قانون فاراده یعنی

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E} \quad (84)$$

دیده می‌شود که $B_z(z, t)$ بستگی زمانی نیز ندارد یعنی $\partial B_z / \partial t$ صفر است. بنابراین با وجودی که ممکن است در محلی در نتیجه شدت جریانهای بسیار زیاد و پایدار، میدانهای مغناطیسی پایدار وجود داشته باشند، این میدانها بستگی زمانی و فضایی ندارند و در حال حاضر مورد نظر ما نیستند. بنابراین مجدداً با استفاده از اصل برهم‌نهی B_z را برابر صفر می‌گیریم.

بنابراین تاکنون نتیجه گرفتیم که (جدا از میدانهای ثابت غیر موج مانند) امواج تخت الکترومغناطیسی امواج عرضی هستند. یعنی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بر راستای انتشار \hat{z} عمود هستند.

جفت شدگی E_x و B_y . در اینجا کمیت‌های E_x, E_y, B_x و B_y و همچنین مؤلفه‌های تاکنون به‌کار نرفته x و y از معادلات (۸۳) و (۸۴) را در اختیار داریم. از مؤلفه x معادله (۸۳) و مؤلفه y معادله (۸۴) نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (۸۵)$$

به همین ترتیب از مؤلفه y معادله (۸۳) و مؤلفه x معادله (۸۴) نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial z}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (۸۶)$$

برطبق معادلات (۸۵)، E_x و B_y مستقل نیستند. این دو کمیت با دو معادله دیفرانسیل جزئی خطی درجه اول یعنی معادلات (۸۵) به یکدیگر "جفت" شده‌اند. بنابراین اگر مثلاً E_x برحسب زمان و مکان ثابت باشد در این صورت B_y نیز ثابت است. از طرف دیگر اگر E_x برحسب تابعی از z و t کاملاً معلوم باشد، در این صورت، همان‌گونه که نشان خواهیم داد B_y نیز کاملاً مشخص است (بجز در میدانهای ثابت که مورد نظر ما نیستند). به همین ترتیب، برطبق معادلات (۸۶)، E_y و B_x پیوسته هستند. اگر E_y معلوم باشد، در این صورت B_x مشخص می‌شود: اگر E_y صفر باشد، B_x نیز صفر (یا ثابت) است.

قطبیدگی خطی و بیضوی. میدانهای E_x و E_y (برای امواج تختی که ما در نظر می‌گیریم) با معادلات ماکسول به یکدیگر پیوسته نیستند. این میدانها "مستقل" هستند. بنابراین امکان دارد (با یک چشمه تابشگر مناسب) امواج تخت الکترومغناطیسی تولید کرد که به‌ازای جمیع مقادیر z و t ، E_x مخالف صفر ولی E_y برابر صفر دارند. در این حالت می‌گویند امواج در امتداد \hat{x} به‌طور خطی قطبیده هستند. در این صورت میدان الکتریکی E_x و میدان مغناطیسی B_y تنها میدانهای غیر صفر (یا بهتر بگوییم غیر ثابت) هستند. همین‌طور می‌توانیم امواج الکترومغناطیسی داشته باشیم که در امتداد \hat{y} به‌طور خطی قطبیده باشند که در آنجا E_y و B_x تنها میدانهای غیر صفر هستند. همچنین می‌توانیم هر ترکیبی از E_x و E_y (در حالت یک بسامد تنها) با هر فاز نسبی اختیاری بین E_x و E_y داشته باشیم. بنابراین یک حالت کلی از قطبش وجود دارد که قطبیدگی بیضوی نامیده می‌شود. مبحث قطبیدگی را در فصل ۸ مطالعه خواهیم کرد.

ممکن است متوجه شده باشید که معادلات (۸۶) کمیت‌های E_y و B_x را به همان طریقی به یکدیگر مربوط می‌کند که معادلات (۸۵) کمیت‌های E_x و B_y را به یکدیگر مربوط می‌کند. در ابتدا علامت منها ممکن است گنگ به نظر برسد. اما به آسانی می‌توانید نشان دهید که اگر امواج قطبیده خطی با E_x و E_y (در یک لحظه مفروض) هر دو مثبت داشته باشید و اگر محورهای

مختصات را به اندازه 90° درجه بچرخانید به طوری که محور y جدید در امتداد میدان الکتریکی قرار گیرد، در این صورت محور x جدید در امتداد میدان الکتریکی منفی خواهد بود. (مسئله ۷-۳۴ را ببینید). بنابراین از نظر فیزیکی معادلات (۸۶) با معادلات (۸۵) معادل هستند. پس معلوم می‌شود که اگر به مطالعه نتایج معادلات (۸۵) اکتفا کنیم نکته‌ای را از دست نخواهیم داد. از این پس فرض خواهیم کرد که فقط یک حالت قطبیدگی خطی مربوط به کمیت‌های غیرصفر E_x و B_y یعنی مربوط به معادلات (۸۵) وجود دارد. اگر ابتدا یک موج پیشرونده هماهنگ خالصی که در راستای z منتشر می‌شود در نظر بگیریم ساده‌ترین حالت خواهد بود. در این صورت به سرعت خواهیم دید که چگونه برای یک موج هماهنگ خالص که در راستای z منتشر می‌شود نتیجه معادلی به دست می‌آید. بنابراین از برهم‌نهی این امواج با دامنه ثابت‌های فاز دلخواه کلی‌ترین جواب برای یک بسامد مفروض به دست می‌آید که در حالت خاص شامل امواج ساکن خالص است.

امواج پیشرونده هماهنگ. فرض کنید که E_x با رابطه زیر داده می‌شود

$$E_x = A \cos(\omega t - kz) \quad (87)$$

در این صورت از معادلات (۸۵) و رابطه $\omega = ck$ نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\omega}{c} A \sin(\omega t - kz) = \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (88)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -c \frac{\partial E_x}{\partial z} = -ckA \sin(\omega t - kz) = \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (89)$$

برطبق معادلات (۸۸) و (۸۹) تغییر B_y نسبت به z و t همانند تغییر E_x است. از این رو می‌بینیم که در یک موج تخت پیشرونده هماهنگ که در راستای z منتشر می‌شود، E_x و B_y مساوی هستند بجز در مقادیر ثابت اضافی و قابل توجه که آنها را "برهم نهاده و صفر" قرار می‌دهیم. اگر یک موج پیشرونده هماهنگ را که در راستای z منتشر می‌شود در نظر بگیریم نتیجه می‌گیریم که B_y مقدار منفی E_x است همان‌طور که با قرار دادن $-k$ به جای k در معادلات بالا به آسانی می‌توانید ببینید. در عبارتهای مختصرشده زیر هر دو راستای انتشار در نظر گرفته شده‌اند.

$$\text{امواج پیشرونده} : \begin{cases} |\mathbf{E}(z, t)| = |\mathbf{B}(z, t)| \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{v}} \end{cases} \quad (90)$$

امواج ساکن هماهنگ. فرض کنید که E_x با رابطه زیر داده می‌شود

$$E_x(z, t) = A \cos \omega t \cos kz \quad (91)$$

در این صورت می‌توانید نشان دهید که (مسئله ۷-۳۶ را ببینید)

$$B_y(z, t) = A \sin \omega t \sin kz = E_x \left(z - \frac{1}{4} \lambda, t - \frac{1}{4} T \right) \quad (92)$$

از معادلات (۹۱) و (۹۲) می‌بینیم که در یک موج تخت ساکن الکترومغناطیسی در خلا \mathbf{E} و \mathbf{B} بر یکدیگر و بر \hat{z} عمودند، دامنه‌های مساوی دارند و برحسب زمان و مکان 90° درجه اختلاف فاز دارند. (این رفتار مشابه رفتار فشار و سرعت در یک موج صوتی ساکن است و یا مشابه با کشش عرضی و سرعت در یک موج ساکن بر روی تار است.)

شار انرژی در یک موج تخت. چگالی انرژی میدانهای الکترومغناطیسی در خلا با رابطه زیر داده می‌شود

$$\text{چگالی انرژی} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad (93)$$

(این رابطه برای میدانهای استاتیک در جلد دوم همین کتاب صفحات ۱۰۲ تا ۲۵۶ داده شده است و می‌توان نشان داد که در حالت کلی برقرار است.) ما به مقدار انرژی در هر ترکیب خطی از امواج تخت پیشرونده و ساکن علاقه‌مندیم، مخصوصاً به جریان انرژی. بنابراین رابطه‌ای برای مقدار انرژی در یک جزء حجم بینهایت کوچک به دست می‌آوریم که دارای سطح A عمود بر محور z و ضخامت بینهایت کوچک Δz در امتداد محور z است. (سپس میزان تغییر این انرژی برحسب زمان را بررسی خواهیم کرد.) انرژی $W(z, t)$ در این جزء حجم برابر است با حاصلضرب چگالی انرژی در حجم $A \Delta z$:

$$W(z, t) = \frac{A \Delta z}{8\pi} (E_x^2 + B_y^2) \quad (94)$$

با مشتق‌گیری از انرژی $W(z, t)$ نسبت به زمان نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial W(z, t)}{\partial t} = \frac{A \Delta z}{4\pi} \left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial t} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial t} \right) \quad (95)$$

اکنون معادلات ماکسول یعنی معادلات (۸۵) را برای حذف کردن $\partial E_x / \partial t$ و $\partial B_y / \partial t$

به کار می‌بریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(z, t)}{\partial t} &= -\frac{Ac \Delta z}{4\pi} \left(E_x \frac{\partial B_y}{\partial z} + B_y \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{Ac \Delta z}{4\pi} \frac{\partial (E_x B_y)}{\partial z} \\ &= -\frac{Ac \Delta z}{4\pi} \left[\frac{(E_x B_y)_{z+\Delta z} - (E_x B_y)_z}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (96)$$

در حالت حدی جزء بینهایت کوچک Δz ، آخرین گام بالا مربوط می‌شود به تعریف مشتق جزئی $E_x B_y$ نسبت به z (به‌ازای زمان ثابت)؛ یعنی کمیت $E_x B_y$ را در مکانهای z و $z + \Delta z$ برآورد می‌کنیم، یک نتیجه را از نتیجه دیگر کم، و بر Δz تقسیم می‌کنیم و سپس حد آن را هنگامی که Δz به سمت صفر میل می‌کند پیدا می‌کنیم. بدین ترتیب معلوم می‌شود که میزان تغییر انرژی در حجم $A \Delta z$ به‌صورت زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{\partial W(z, t)}{\partial t} &= \frac{c}{4\pi} E_x(z, t) B_y(z, t) - \frac{c}{4\pi} E_x(z + \Delta z, t) B_y(z + \Delta z, t) \\ &= S_z(z, t) - S_z(z + \Delta z, t) \end{aligned} \quad (97)$$

که در آن

$$\begin{aligned} S_x(z, t) &\equiv \frac{c}{4\pi} E_x(z, t) B_y(z, t) \\ &= \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_z \end{aligned} \quad (98)$$

بنابراین میزان تغییر انرژی در جزء حجم $A \Delta z$ برابر است با مقدار کمیت $AS_z(z, t)$ که در نقطه z یعنی لبه چپ فاصله Δz برآورد شده منهای مقدار همین کمیت نقطه $z + \Delta z$ یعنی در لبه راست فاصله Δz . بنابراین کمیت $S_z(z, t)$ باید آهنگ لحظه‌ای جریان انرژی بر واحد سطح در راستای z در نقطه z باشد. افزایش انرژی در جزء حجم (اگر افزایشی وجود داشته باشد) از اختلاف جریان به داخل (از سمت چپ) منهای جریان به خارج (به طرف راست) نتیجه می‌شود. مؤلفه z بردار شار \mathbf{S} یعنی کمیت $S_z(z, t)$ به‌عنوان آهنگ جریان انرژی در راستای z بر واحد سطح (برحسب $\text{erg/cm}^2\text{s}$) در نقطه z, t تعریف می‌شود. (البته چون ما \hat{z} را راستای انتشار انتخاب کردیم، در مسئله ما z تنها راستای موجود شار انرژی است.)

بردار پوئین‌تینگ. شکل کلی بردار شار چنین است

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (99)$$

 که مستقل از دستگاه مختصات است. بردار شار \mathbf{S} را بردار پوئین‌تینگ می‌نامند.

چگالی انرژی و شار در موج پیشرونده. برای موج خطی قطبیده که در جهت z حرکت می‌کند می‌توان $\mathbf{E} = \hat{x}E_x$ و $\mathbf{B} = \hat{y}B_y$ اختیار کرد، که به‌ازای هر z و t داریم $B_y = E_x$. بنابراین (با E_0 برحسب ایستولت بر سانتیمتر)

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - kz) \quad (100)$$

$$B_y = E_0 \cos(\omega t - kz)$$

$$\text{چگالی انرژی} = \frac{1}{8\pi} (E_x^2 + B_y^2) = \frac{1}{4\pi} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \quad (101)$$

$$\text{شار انرژی} = S_z = \frac{c}{4\pi} E_x B_y = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \quad (102)$$

توجه کنید که شار انرژی S_z (با یکای $\text{erg/cm}^2\text{s}$) برای موج پیشرونده، صرفاً برابر است با چگالی انرژی (برحسب erg/cm^3) ضرب در سرعت نور (برحسب cm/s). میانگین زمانی شار انرژی (در z ثابت) برابر است با میانگین فضایی شار انرژی (در t ثابت). هر دو مستقل از z و t هستند و با نشان دادن میانگین $\cos^2(\omega t - kz)$ ، یعنی $1/2$ ، به‌جای آن، در رابطه (۱۰۲) به‌دست می‌آیند.

چگالی انرژی و شار در موج ساکن. برای موج ساکن داریم

$$E_x = E_0 \cos \omega t \cos kz$$

$$B_y = E_0 \sin \omega t \sin kz \quad (103)$$

بیشینه چگالی انرژی الکتریکی و چگالی انرژی مغناطیسی در زمانهایی که $1/4$ تناوب با هم فاصله دارند و مکانهایی که $1/4$ طول موج با هم فاصله دارند رخ می‌دهد. به‌عهده شما می‌گذاریم (مسئله ۷-۳۶ را ببینید) تا نشان دهید که در هر گستره‌ای به طول $\lambda/4$ کل انرژی ثابت است. انرژی در میدان الکتریکی، به‌طور هماهنگ با بسامد 2ω حول مقدار میانگینش، بین مقادیر فرین صفر و دو برابر میانگین نوسان می‌کند. انرژی در میدان مغناطیسی هم همین‌طور است. بنابراین انرژی بین حالتی که کاملاً الکتریکی است، با بیشینه چگالی انرژی در یک مکان، و حالتی که کاملاً مغناطیسی است و با بیشینه چگالی انرژی در مکانی دیگر به فاصله $\lambda/4$ اتفاق می‌افتد، در نوسان است. این رفتار تا حدی شبیه رفتار نوسانگر هماهنگ است: انرژی کل نوسانگر ثابت است، اما انرژی بین حالتی که کاملاً به‌صورت انرژی پتانسیل است و جرم در مکانی قرار دارد و حالتی که کاملاً به‌صورت انرژی جنبشی است و جرم در مکان دیگری قرار دارد، نوسان می‌کند. انرژیهای پتانسیل و جنبشی هر یک با بسامد 2ω حول مقدار میانگینشان نوسان می‌کنند، که در آن ضریب ۲

از آنجا ناشی می‌شود که انرژی پتانسیل در هر تناوب دوبار بزرگ و مثبت است (همچنان‌که برای انرژی جنبشی است). میدان الکتریکی E_x در موج ساکن تا حدی شبیه جابه‌جایی از حالت تعادل جرم نوسانگر هماهنگ است، در حالی که میدان مغناطیسی B_y تا حدی شبیه سرعت جرم است. شار تکانه خطی در موج تخت پیشرونده — فشار تابشی. اگر باریکه‌ای از تابش الکترومغناطیسی بدون بازتاب جذب شود (مثلاً توسط پایانه کامل)، و بدین ترتیب انرژی W را به جاذب دهد، به همراه آن تکانه (در جهت انتشار) نیز به جاذب می‌دهد، چنانکه نشان خواهیم داد. مقدار تکانه W/c از آب در می‌آید. اگر باریکه توسط آینه‌ای، ۱۸۰° درجه منعکس شود (بدون اینکه جذب شود)، در این صورت دو برابر این مقدار به آینه تکانه می‌دهد؛ یعنی اگر مقدار انرژی W بدون اینکه جذب شود منعکس شود، آینه به میزان $2W/c$ در جهت انتشار تکانه دریافت می‌کند. بنابراین تابش الکترومغناطیسی بر روی آنچه آن را جذب یا منعکس می‌کند، فشار می‌دهد. این فشار را فشار تابشی می‌نامند. هر میزان انرژی W در موج تخت الکترومغناطیسی پیشرونده، دارای میزانی از تکانه P است که با رابطه

$$\mathbf{P} = \frac{W}{c} \hat{\mathbf{z}} \quad (۱۰۴)$$

داده می‌شود، که در آن $\hat{\mathbf{z}}$ در امتداد جهت انتشار است.

روش ساده به‌دست آوردن رابطه (۱۰۴) استفاده از این ایده است که نور در موج پیشرونده از بسته‌های انرژی به‌نام فوتون تشکیل شده است. فوتون شبیه “ذره‌ای” است که جرم سکون آن صفر است. ذره نسبیتی با جرم سکون M و تکانه P دارای انرژی W است

$$W = [(cP)^2 + (Mc^2)^2]^{1/2} \quad (۱۰۵)$$

اگر M صفر باشد، معادله (۱۰۴) به‌دست می‌آید.

روش بالا در به‌دست آوردن معادله (۱۰۴) کوتاه و شاید گمراه‌کننده است. این نکته که تابش الکترومغناطیسی “کوانتیده” است، به این معنی که فقط در “اجزای” کوانتیده‌ای به میزان $\hbar\omega$ می‌تواند انرژی را حمل کند، در واقع هیچ ربطی به فشار تابشی ندارد، یعنی هیچ‌گونه ارتباطی با (۱۰۴) ندارد. بنابراین، باید بتوانیم از روشی کاملاً کلاسیک، بدون اینکه از ایده فوتون یا “ذره” استفاده کنیم، رابطه (۱۰۴) را به‌دست آوریم، کاری که اینک به آن می‌پردازیم. (خصوصیات کوانتومی نور را در جلد ششم همین کتاب خواهید آموخت.)

ذره‌ای با بار q را در نظر بگیرید که موج پیشرونده تخت بر آن اثر می‌کند. فرض کنید بار q مثبت باشد و ذره از حالت سکون در زمان $t = 0$ رها شده باشد. نیروی \mathbf{F} بر روی ذره با نیروی

لورتنس داده می‌شود

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \quad (106)$$

در ابتدا (مثلاً در طول چند نوسان اول)، اندازه سرعت \mathbf{v} کوچک است. بنابراین، حرکت بار عمدتاً ناشی از \mathbf{E} است. بنابراین \mathbf{v} در امتداد \mathbf{E} است و جهت خود را با همان آهنگ که \mathbf{E} جهتش را عوض می‌کند، تغییر می‌دهد. اما \mathbf{B} هر وقت که \mathbf{E} تغییر جهت دهد، تغییر جهت می‌دهد. بنابراین، $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ همواره یک علامت دارد. نیرویی که به خاطر \mathbf{B} بر روی q وارد می‌آید، بدین ترتیب، همیشه در جهت انتشار است، یعنی جهت $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. بنابراین، بار q دستخوش حرکتی می‌شود که برهم‌نهی نوسان عرضی با بسامد میدانهاست به علاوه سرعتی که به آرامی افزایش می‌یابد و در جهت انتشار است. اینک نشان می‌دهیم که میانگین زمانی آهنگی که با آن بار در امتداد z تکانه کسب می‌کند، $1/c$ ضرب در میانگین زمانی آهنگی است که با آن بار از موج پیشرونده انرژی جذب می‌کند. (بار انرژی‌ای را که جذب می‌کند، نگه نمی‌دارد. اگر باری است در تکه‌ای از پارچه فضایی که پایانه‌ای کامل تشکیل داده است، در آن صورت مدام از طریق نیروی مقاومی که بر روی بار وارد می‌آید، به پارچه فضایی انرژی می‌دهد. اگر باری است در فضای آزاد، آن وقت مدام در تمام جهات انرژی تابش می‌کند. میزان انرژی‌ای که در جهت موج پیشرونده فرودی تابش می‌شود ناچیز است، چنانکه مقدار ناچیزی از انرژی جذب‌شده به موج پیشرونده باز می‌گردد.)

روش کلاسیک چنین است. در "موج پیشرونده استاندارد"، $\mathbf{E} = \hat{x}E_x$ ، $\mathbf{B} = \hat{y}B_y$ و $E_x = B_y$. سرعت \mathbf{v} ذره باردار طبق $\mathbf{v} = \hat{x}\dot{x} + \hat{y}\dot{y} + \hat{z}\dot{z}$ داده می‌شود. با قرار دادن در رابطه (106) و به‌کارگیری $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ و $\hat{y} \times \hat{y} = 0$ و $\hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$ داریم

$$\mathbf{F} = \hat{x}qE_x + \frac{q}{c}\dot{x}B_y\hat{z} - \frac{q}{c}\dot{z}B_y\hat{x} \quad (107)$$

حال، میانگین زمانی رابطه (107) را برای یک تناوب حساب می‌کنیم. جمله اول $\hat{x}qE_x$ دارای میانگین صفر است. همین‌طور، جمله آخر که شامل $\dot{z}B_y$ است. دلیلش آن است که می‌توان فرض کرد که تغییر سرعت در امتداد z در طول یک تناوب ناچیز است، به عبارت دیگر، می‌توان فرض کرد که سرعت \dot{z} که به آهستگی افزایش می‌یابد، در طول یک تناوب ثابت است. در این صورت میدان B_y دارای میانگین صفر در طول یک تناوب می‌شود. جمله باقیمانده، $q/c\dot{x}B_y\hat{z}$ ، میانگینی غیرصفر دارد، زیرا سرعت عرضی \dot{x} با همان آهنگ B_y نوسان می‌کند. بنابراین برای میانگین زمانی (که با $\langle \rangle$ نشان داده شده‌اند) داریم (با یادآوری این نکته که نیرو، آهنگ تغییرات تکانه است)

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right\rangle = \hat{z}\frac{q}{c}\langle \dot{x}B_y \rangle \quad (108)$$

حال، آهنگی را که با آن، موج پیشرونده بر روی بار کار انجام می‌دهد، در نظر می‌گیریم. آهنگ لحظه‌ای انجام کار بر روی q طبق رابطه زیر است

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{v} \cdot \left(q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \\ &= q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + 0 \\ &= q\dot{x}E_x \end{aligned}$$

با میانگین‌گیری بر روی یک تناوب داریم

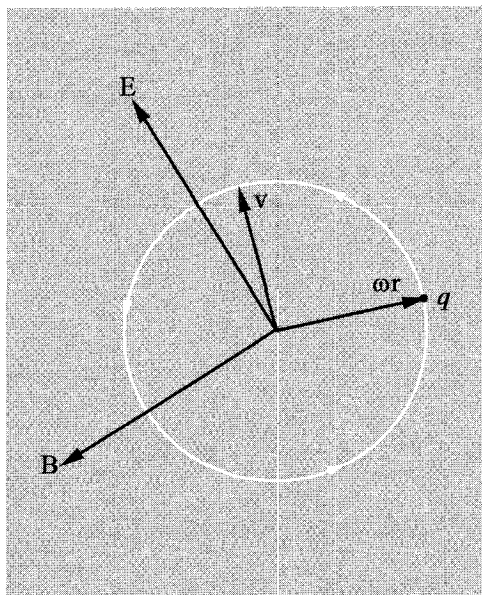
$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = q\langle \dot{x}E_x \rangle \quad (109)$$

از مقایسه روابط (۱۰۸) و (۱۰۹) و استفاده از این نکته که (برای موج تخت)، $B_y = E_x$ مشاهده می‌کنیم که

$$\left\langle \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right\rangle = \hat{\mathbf{z}} \frac{1}{c} \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle \quad (110)$$

بدین ترتیب، در طول مدتی که الکترون انرژی W را از موج پیشرونده می‌گیرد، تکانه $\hat{\mathbf{z}}(W/c)$ را نیز از موج دریافت می‌کند. ممکن نیست که انرژی W بدون جذب تکانه $\hat{\mathbf{z}}(W/c)$ جذب شود. این همان معنی را دارد که بگوییم تابش دارای تکانه‌ای است که با رابطه (۱۰۴) داده می‌شود. فشار تابشی خورشید در مسائلی ۱۳-۷، ۱۴-۷ و ۱۵-۷ مطرح شده است.

تکانه زاویه‌ای در موج تخت پیشرونده. نشان خواهیم داد که موج تخت پیشرونده، نه تنها انرژی و تکانه خطی، بلکه تکانه زاویه‌ای نیز می‌تواند به بار q منتقل کند. به این منظور، می‌باید بار را به حرکت دایره‌ای وادارد. واضح است، که چنین چیزی در مورد میدان "قطبیده خطی" که تاکنون در نظر گرفته‌ایم، رخ نخواهد داد. موج پیشرونده‌ای را در نظر بگیرید که در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ منتشر می‌شود و دارای میدان الکتریکی \mathbf{E} است که اندازه ثابتی دارد و (در z ثابت) با بسامد زاویه‌ای ω به حول محور z می‌چرخد، و جهت چرخش طبق قاعده دست راست، در راستای $\hat{\mathbf{z}}$ است. بنابراین، E_x و E_y توابع هم‌هنگ زمان (در z ثابت) هستند، و از نظر فاز E_x به اندازه 90° درجه، جلوتر از E_y است. میدان مغناطیسی \mathbf{B} (طبق معمول موج پیشرونده) با $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}$ داده می‌شود. از آنجا که، میدان الکتریکی، بار q را می‌راند (و میدان مغناطیسی جهت حرکت آن را تغییر می‌دهد)، می‌توانیم فرض کنیم که در حالت پایا، q در مسیر دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ω و با همان جهتی که میدانها می‌چرخند، حرکت می‌کند. (بار q همچنین به آرامی در جهت



شکل ۷-۷ نور دایره‌ای قطبیده بار q را در مسیر دایره‌ای می‌راند. \hat{z} عمود بر صفحه کاغذ است.

\hat{z} + سوق می‌خورد، زیرا موج پیشرونده، بر آن فشار تابشی وارد می‌کند. از این صرف‌نظر می‌کنیم. بدین ترتیب، آرایه میدانها، مکان r و سرعت v بار، طبق شکل ۷-۷ است. دقت کنید که ωr همان اندازه v را دارد و جهت نسبی ωr و v همان‌طور است که نشان داده شده است. گشتاور نیروی τ بر روی بار برابر است با $r \times F$. بنابراین (وقتی در ω ضرب کنیم) می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\omega \tau &= \omega r \times F \\ &= \omega r \times qE + \omega r \times \frac{q}{c}(v \times B)\end{aligned}\quad (111)$$

این گشتاور را در یک متر تناوب میانگین می‌گیریم. از شکل ۷-۷ می‌بینیم که $v \times R$ در امتداد \hat{z} است و بنابراین $r \times (v \times B)$ در امتداد $-v$ است. چون هر مؤلفه v در یک تناوب میانگینش صفر می‌شود، میدان مغناطیسی هیچ سهمی در گشتاور میانگین زمانی ندارد. همچنین از روی شکل ۷-۷ می‌بینیم که $\omega r \times E$ در امتداد \hat{z} است و اندازه جبری آن برابر $v \cdot E$ است. بنابراین چنین داده می‌شود

$$\omega r \times E = \hat{z} v \cdot E \quad (112)$$

بدین ترتیب، میانگین زمانی گشتاور نیرو بر روی q طبق رابطه (۱۱۱) چنین است

$$\langle \tau \rangle = \left\langle \frac{dJ}{dt} \right\rangle = \frac{\hat{z}}{\omega} \langle qv \cdot E \rangle = \frac{\hat{z}}{\omega} \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle \quad (113)$$

که در نوشتن آن از این نکته استفاده کرده‌ایم که گشتاور نیرو، آهنگ تغییرات زمانی تکانه زاویه‌ای \mathbf{J} است و اینکه $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ آهنگ انجام کار روی q است. برطبق رابطه (۱۱۳)، بار q که مقدار انرژی W را از موج تخت پیشرونده دایره‌ای قطبیده که جهت چرخش $\hat{\mathbf{z}}$ است، جذب می‌کند، تکانه میانگین این گشتاور نیرو را در یک تناوب می‌گیریم. از شکل γ - γ می‌بینیم که $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ در امتداد $\hat{\mathbf{z}}$ است و بنابراین $\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ در امتداد $-\mathbf{v}$ است. چون، میانگین هر مؤلفه \mathbf{v} بر روی یک تناوب، صفر است، مشاهده می‌کنیم که میدان مغناطیسی به‌طور خالص سهمی در میانگین زمانی گشتاور نیرو ندارد. از شکل γ - γ ، همچنین، مشاهده می‌کنیم که تکانه زاویه‌ای \mathbf{J} را که طبق رابطه

$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{z}} \frac{W}{\omega}$$

داده می‌شود، نیز جذب می‌کند. راه بهتری برای بیان این نتیجه، به‌کارگیری برداریکه $\hat{\omega}$ برای جهت چرخش است، که ممکن است در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ یا $-\hat{\mathbf{z}}$ باشد. بنابراین، نتیجه چنین است که موج تخت پیشرونده دایره‌ای قطبیده تکانه زاویه‌ای

$$\boxed{\mathbf{J} = \hat{\omega} \frac{W}{\omega}} \quad (114)$$

را حمل می‌کند، که در آن $\hat{\omega}$ یا در جهت انتشار و یا در جهت خلاف آن است.

همان‌طور که در فصل ۸ خواهیم آموخت، موج تخت پیشرونده خطی قطبیده با دامنه A می‌توان به صورت برهم‌نهی از دو موج تخت پیشرونده دایره‌ای قطبیده، که هریک دامنه $1/2 A$ دارد ولی جهت چرخش آنها متقابل یکدیگر است، تلقی کرد. بنابراین، تکانه زاویه‌ای آن صفر است. همان‌طور که در جلد ۴ همین کتاب خواهید آموخت، امواج پیشرونده تخت الکترومغناطیسی، انرژی را فقط در اجزای "کوانتیده" با انرژی $\Delta W = \hbar\omega$ انتقال می‌دهند. طبق رابطه (۱۱۴) چنین موجی می‌باید تکانه زاویه‌ای کوانتیده متناظر با آن را به میزان $\Delta \mathbf{J} = \hbar\omega$ ، به هنگام جذب (یا گسیل) انتقال دهد. مهم است که دریابید رابطه (۱۱۴) فقط برای امواج پیشرونده تخت صادق است. بنابراین، در فواصل به‌قدر کافی دور از "چشمه نقطه‌ای" صادق است.

چنین است که اگر نور دایره‌ای قطبیده "راستگرد" را به درون "تیغه تأخیری نیم-موج" بفرستید، نور "چپگرد" به دست خواهد آمد. این، گشتاور نیروی پس‌زننده‌ای به تیغه وارد می‌کند، زیرا تیغه (از طریق پس‌زدن) می‌باید دو برابر تکانه زاویه‌ای رابطه (۱۱۴) را فراهم آورد. این مطلب در مسئله ۸-۱۹ مورد بحث قرار می‌گیرد.

امواج الکترومغناطیسی در محیط همگن. از معادلات ماکسول برای مطالعه امواج تخت در خلا استفاده کرده‌ایم. در مبحث تکمیلی ۹ از معادلات ماکسول برای مطالعه امواج الکترومغناطیسی

در محیط همگنی که خلأ نیست، استفاده می‌کنیم. نتیجهٔ زیر به دست می‌آید

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \quad (115)$$

که در آن ε ثابت دی‌الکتریک و μ تراوایی مغناطیسی است. این مانند همان نتیجه‌ای است که در بخش ۳-۴، با بررسی موج الکترومغناطیسی در خط انتقال نیروی صفحه‌موازی به دست آوردیم [رابطه (۴-۶۶)]

۵-۷ تابش از بار نقطه‌ای

در این بخش میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را در موج پیشروندهٔ کروی که بار نقطه‌ای نوسان‌کننده گسیل می‌کند پیدا می‌کنیم. نتایج حاصل به درک خواص الکترومغناطیسی تابشی که از آنها، ایستگاههای رادیویی و ستاره‌ها گسیل می‌شود کمک می‌کند و همچنین به این سؤال که چرا آسمان آبی است پاسخ می‌دهد.

معادلات ماکسول با جملات چشمه. باید از معادلات کامل ماکسول شامل "جملات چشمه" که سهم بارها و جریانها را منظور می‌کنند استفاده کنیم:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (116)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (117)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (118)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (119)$$

تا اینجا از هر چهار معادله برای خلأ (که ρ و \mathbf{J} صفر دارد) استفاده کرده‌ایم. بدین ترتیب یافتیم (بخش ۴-۷) که \mathbf{E} و \mathbf{B} از معادلهٔ موج کلاسیک برای امواج غیرپاشنده که با سرعت c منتشر می‌شوند پیروی می‌کنند. به‌علاوه، روابطی بین \mathbf{E} و \mathbf{B} را که در فواصل زیاد از چشمه برقرار است، پیدا کردیم، زیرا می‌توان فرض کرد که در نواحی به قدر کافی دور از چشمه، امواج را نمی‌توان از امواج تخت تمیز داد. (اگر سعی نکنیم میدانها را در یک مکان به میدانهای مکانی خیلی دورتر مربوط کنیم). صرفاً این نکته باقی ماند که از جملات چشمه در معادلات ماکسول استفاده کنیم تا چگونگی وابستگی امواج تابشی را به حرکت چشمه بیابیم. اما، دو "چشمه" در معادلات ماکسول وجود دارد. یکی از آنها چگالی بار ρ است و دیگری چگالی جریان \mathbf{J} . این دو چشمه مستقل از

یکدیگر نیستند؛ پایستگی بار آنها را به هم مربوط می‌کند:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (۱۲۰)$$

[رابطه (۱۲۰) را می‌توانید با استفاده از (۱۱۶) و (۱۱۹) و اینکه $\nabla \cdot \nabla \times \nabla = 0$ ، به آسانی تحقیق کنید. معادله (۴-۹) در جلد دوم همین کتاب را ببینید.] بنابراین لزومی ندارد که \mathbf{J} را صریحاً به کار ببریم، زیرا همین‌طور که حرکت بار نقطه‌ای q را دنبال می‌کنیم، خود به خود پایستگی بار را نیز اعمال می‌کنیم. در این صورت، جریان به‌طور ضمنی حضور دارد اما لزومی نیست به آن پردازیم. می‌توانیم به اثر بار که با معادله (۱۱۶) داده شده است، توجه کنیم.

قانون گاوس و پایستگی شار E . معادله (۱۱۶) معادل با قانون گاوس است. (جلد ۲ همین کتاب، بخش‌های ۱-۱۰ و ۲-۱۰). در مورد بار نقطه‌ای ساکن، قانون گاوس [یا معادله (۱۱۶)] میدان آشنای متناسب با عکس مربع فاصله را به دست می‌دهد. (جلد ۲ همین کتاب، بخش ۱-۱۱)

$$\mathbf{E} = q \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (۱۲۱)$$

که در آن $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ بردار مکان نقطه مشاهده نسبت به بار q است. برای بار متحرک، از مفهوم خطوط نیرو و پایستگی شار \mathbf{E} (که معادل با پایستگی بار است) استفاده می‌کنیم. [جلد ۲ همین کتاب، بخش‌های ۵-۳ و ۵-۴.]

حرکت بار. اینک از قانون گاوس استفاده می‌کنیم تا میدان تابشی گسیل شده از بار نقطه‌ای را که به شکل زیر حرکت می‌کند به دست آوریم: بار مثبت q در مبدأ مختصات لختی از زمان $t = -\infty$ تا $t = 0$ ساکن است. در $t = 0$ ، در جهت $+x$ شتاب ثابت a را برای مدت کوتاه Δt تحمل می‌کند. پس از آن با سرعت ثابت $v = a\Delta t$ به حرکت خود ادامه می‌دهد. قبل از $t = 0$ ، میدان الکتریکی در همه نقاط مختصات لختی با رابطه (۱۲۱) داده می‌شود؛ میدان مغناطیسی صفر است. خطوط نیروی مربوط به \mathbf{E} در تمام آن مدت، از مکان بار q بیرون زده‌اند. شتاب ناگهانی در $t = 0$ ، خطوط نیروی مربوط به \mathbf{E} را "مجعد" می‌کند و خطوط \mathbf{B} را به وجود می‌آورد. اینها به سوی بیرون از چشمه با سرعت c منتشر می‌شوند. (در این جمله از همه معادلات ماکسول استفاده کردیم!) فقط میدانها را در فواصل بزرگ خواهیم یافت؛ بنابراین فقط لازم است \mathbf{E} را بیابیم. (نتایج موجود برای امواج تخت، \mathbf{B} را به دست خواهند داد.)

زمان t را در نظر بگیرید که در مقایسه با Δt بزرگ باشد. در مکانهایی که فاصله r از مبدأ بزرگتر از ct باشد، "اخبار" شتاب هنوز نرسیده است (یعنی، مجعشدگی هنوز نرسیده است). در مکانهایی با r کوچکتر از $ct - \Delta t$ ، مجعشدگی عبور کرده است و میدان الکتریکی ناشی از

بار متحرک با سرعت یکنواخت v است. این میدان دارای جهتی است که از "مکان فعلی" بار q بیرون می‌زند. میدان الکتریکی در نقطه ثابت مشاهده که در فاصله r' از مکان لحظه‌ای بار q که با سرعت یکنواخت v حرکت می‌کند قرار دارد، در بخش ۵-۶ جلد دوم همین کتاب به دست آمده است. جهت این میدان در نقطه مشاهده، در امتداد خطی است که از مکان لحظه‌ای بار به مکان مشاهده کشیده شده است. اندازه این میدان الکتریکی با رابطه زیر داده می‌شود

$$E = \frac{q}{r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (122)$$

که در آن $\beta = v/c$ و θ زاویه بین جهت سرعت v و جهتی است که از مکان لحظه‌ای بار q به نقطه ثابت مشاهده کشیده می‌شود. فقط به شرایطی می‌پردازیم که در آن v در مقایسه با c بسیار کوچک است. (چنین وضعیتی در گسیل نور مرئی توسط اتمها موجود است، در آنجا v/c در حدود $1/137$ است.) بدین ترتیب، با تقریب بسیار خوبی می‌توانیم از $\beta = 0$ در رابطه (۱۲۲) استفاده کنیم. بنابراین نتیجه ساده‌ای داریم مبنی بر اینکه، برای باری که با حرکت یکنواخت $c \ll v$ حرکت می‌کند، میدان الکتریکی در نقطه مشاهده دور دست چنین است

$$\mathbf{E}' = q \frac{\hat{\mathbf{r}}'}{r'^2} \quad (123)$$

که در آن $\mathbf{r}' = r' \hat{\mathbf{r}}'$ بردار مکان، از محل لحظه‌ای q تا نقطه ثابت مشاهده است.

در پی میدان الکتریکی در ناحیه مجعده شده هستیم که با سرعت نور دور می‌شود. برای این کار می‌توانیم از قانون گاوس استفاده کنیم تا در یک لحظه میدانی را که درست بعد از این ناحیه قرار دارد [و با (۱۲۱) داده می‌شود] طوری به میدانی که درست قبل از ناحیه مجعده شده قرار دارد [و با (۱۲۳) داده می‌شود] متصل کنیم که شار \mathbf{E} (یعنی انتگرال سطحی \mathbf{E}) پایسته باشد. (جلد دوم، بخش ۵-۷ را ببینید.)

اینک زمان t را که در مقایسه با زمانی که شتاب موجود است، Δt ، بزرگ است، در نظر می‌گیریم. در این صورت می‌توان از فاصله $(1/2)a(\Delta t)^2$ که بار در زمان Δt پیموده است در مقایسه با مسافت بسیار بزرگتر vt که با سرعت ثابت پیموده است صرف‌نظر کرد. نقطه مشاهده‌ای در نظر می‌گیریم که بردار مکان آن \mathbf{r} نسبت به مبدأ، با سرعت v زاویه θ می‌سازد. زمان t را چنان انتخاب می‌کنیم که مصادف با عبور ناحیه مجعده از نقطه مشاهده باشد. بنابراین $r = ct$. حال، \mathbf{r}' را پشت سر ناحیه مجعده در نظر بگیریم. چون $v \ll c$ ، بار مسافت vt را که خیلی

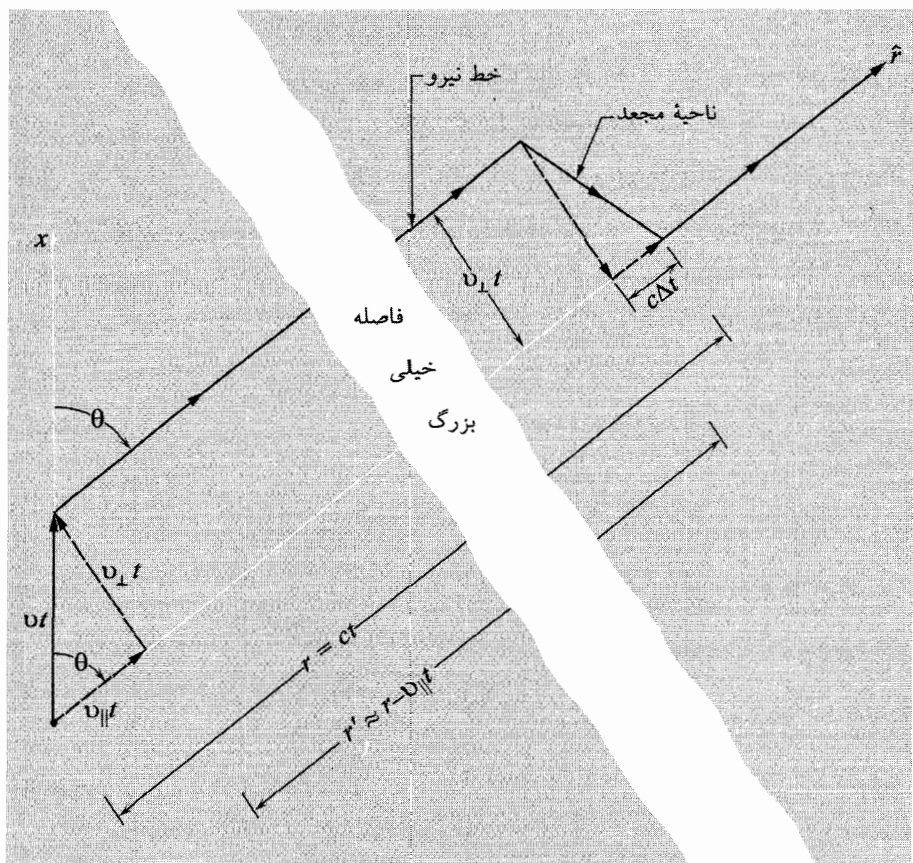
۱. حالت کلی برای v دلخواه ($v \leq c$) در مقاله زیر آمده است:

کوچکتر از $r = ct$ است پیموده است. بنابراین جهت \hat{r}' اساساً موازی با جهت \hat{r} است. فاصله \hat{r}' بدین ترتیب اساساً طبق رابطه زیر داده می‌شود

$$r' = r - vt \cos \theta = r \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right) \approx r \quad \frac{v}{c} \ll 1 \quad (124)$$

در شکل ۷-۸ وضعیت مسئله در زمانهای مربوط نشان داده شده است.

فرض کنید که E_{\parallel} و E_{\perp} به ترتیب اندازه مؤلفه \mathbf{E} عمود بر جهت انتشار، \hat{r} ، و موازی با آن را نشان می‌دهند، و \mathbf{E} میدان الکتریکی در فضایی است که ناحیه مجعد اشغال کرده است. پایستگی شار الکتریکی پیوستگی خطوط نیرو را باعث می‌شود. بدین ترتیب، نسبت مؤلفه عرضی



شکل ۷-۸ تابش حاصل از بار نقطه‌ای شتابدار. ناحیه مجعد در خط نیروی \mathbf{E} با سرعت c منتشر می‌شود. شکل برای حالت $\Delta t \ll t \ll c$ و $v (= a \Delta t) \ll c$ رسم شده است. مؤلفه‌های v عمود بر و موازی با جهت \hat{r} از q تا نقطه مشاهده به ترتیب با v_{\parallel} و v_{\perp} نشان داده شده‌اند.

(عمودی) E_{\perp} به مؤلفه طولی (موازی) E_{\parallel} ، به سادگی از بررسی شکل ۷-۸ به دست می‌آید. مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وترش خط نیروی \mathbf{E} در ناحیه مجعد است و اضلاعش E_{\parallel} و E_{\perp} هستند، متشابه با مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع $v_{\perp}t$ و $c\Delta t$ است. بنابراین، دقت در شکل ۷-۸ به رابطه زیر می‌انجامد

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{v_{\perp}t}{c\Delta t} \quad (125)$$

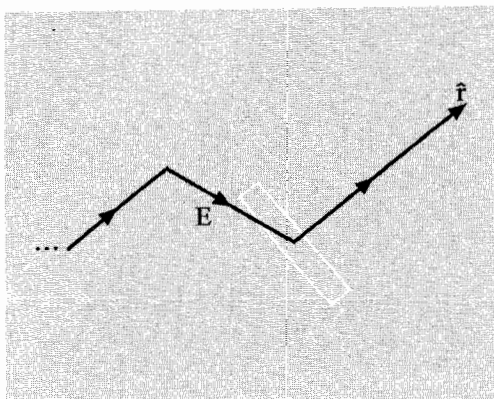
و یا چون v_{\perp} برابر است با $a_{\perp}\Delta t$ و t مساوی با r/c است

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{(a_{\perp}\Delta t)(r/c)}{c\Delta t} = a_{\perp} \frac{r}{c^2} \quad (126)$$

که در آن، a_{\perp} اندازه مؤلفه عرضی شتاب a است.

هنوز هم به E_{\parallel} ، مؤلفه طولی \mathbf{E} در ناحیه مجعد نیاز داریم. با به کار بستن قانون گاوس به حجم استوانه‌ای شکل کوچکی که در شکل ۷-۹ نشان داده شده است، آن را پیدا می‌کنیم. در درون این "قوطی" باری موجود نیست، پس شار الکتریکی ورودی باید با شار الکتریکی خروجی برابر باشد. قوطی را چنان انتخاب کرده‌ایم که شار ورودی آن برابر است با E_{\parallel} ضرب در مساحت سطح ورودی و شار خروجی برابر است با میدان شعاعی E_r درست جلوی ناحیه مجعد ضرب در مساحتی مشابه. از شکل ۷-۹ نتیجه می‌گیریم که E_{\parallel} و E_r برابرند. اما E_r به وسیله میدان عکس مربعی رابطه (۱۲۱) داده می‌شود. بنابراین داریم

$$E_{\parallel} = E_r = \frac{q}{r^2} \quad (127)$$



شکل ۷-۹ میدان الکتریکی \mathbf{E} در ناحیه مجعد. خطوط خط‌چین سطحی فرضی را نشان می‌دهد که برای به کار بستن قانون گاوس از آن استفاده می‌شود.

اگر این استدلال را به کمک قوطی در پشت ناحیهٔ مجعد انجام دهیم، به این نتیجه می‌رسیم که E_{\parallel} باید با E'_r که در رابطه (۱۲۳) داده شده است مساوی باشد. اما E'_r برابر با E_r است زیرا r و r اساساً مساوی هستند، همان‌طور که در معادله (۱۲۴) نشان دادیم. بدین ترتیب رابطه (۱۲۷) را به دست می‌آوریم. چنین استدلالی که از قوطی استفاده می‌کند به معادله (۱۲۵) نیز می‌انجامد. روش ساده‌تری که اتخاذ شد، یعنی ”معاینه“ جهت \mathbf{E} در ناحیهٔ مجعد معادل با استدلالی است که از قوطی استفاده می‌کند، مسئلهٔ ۷-۱۶ این فرصت را به شما می‌دهد تا این نکته را نشان دهید. میدان تابشی. از ترکیب روابط (۱۲۶) و (۱۲۷)، اندازهٔ میدان عرضی را در ناحیهٔ مجعد چنین به دست می‌آوریم:

$$E_{\perp} = \left(a_{\perp} \frac{r}{c^2} \right) E_{\parallel} = a_{\perp} \frac{r}{c^2} \frac{q}{r^2} = \frac{q a_{\perp}}{r c^2} \quad (128)$$

اکنون جهت \mathbf{E}_{\perp} را نیز منظور می‌کنیم، به این صورت که از شکل ۷-۸ متوجه می‌شویم که \mathbf{E}_{\perp} در نقطهٔ \mathbf{r} در زمان t در جهت منفی جهت \mathbf{a}_{\perp} در زمان t' است، که $t' = t - (r/c)$. همچنین با نامگذاری \mathbf{E}_{\perp} ، به نام میدان تابشی، \mathbf{E}_{rad} ، آن را ارج می‌گذاریم:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{q \mathbf{a}_{\perp}(t')}{r c^2} \\ t' &= t - \frac{r}{c} \end{aligned}} \quad (129)$$

دقت کنید که از آنجایی که مؤلفهٔ شعاعی \mathbf{E} در ناحیهٔ مجعد، همان میدان شعاعی در جلو و پشت ناحیهٔ مجعد است، حامل هیچ ”خبری“ نیست؛ ”تابش“ نیست؛ سهمی از موج پیشرونده نیست. آشکارسازی که فقط قادر به آشکار ساختن میدان الکتریکی شعاعی است به هیچ‌وجه متوجه ناحیهٔ مجعد نمی‌شود. به همین دلیل است که فقط میدان عرضی ناحیهٔ مجعد را ”میدان تابشی“ می‌نامیم. این نتیجه، از نتایجی که برای امواج تخت در بخش ۷-۴ به دست آوردیم، انتظار می‌رود؛ در آنجا آموختیم که مؤلفه‌های طولی \mathbf{E} و \mathbf{B} ، در مورد موج تخت، در فضا و زمان ثابت هستند و بدین ترتیب نباید آنها را قسمتی از موج خواند. (در مثال کنونی تابش از بار نقطه‌ای، انتظار می‌رود که میدانها در نقطهٔ دور \mathbf{r} با میدانهای موج تخت در ناحیهٔ محدودی که عمود بر $\hat{\mathbf{r}}$ است مشابه باشد.) با کمال شجاعت فرض می‌کنیم که نتایج دیگری که دربارهٔ امواج پیشرونده تخت به دست آمد، یعنی اینکه \mathbf{B} و \mathbf{E} بر هم و بر جهت انتشار عمودند و اینکه اندازهٔ \mathbf{B} و \mathbf{E} در هر لحظه و مکان با هم برابر است، را نیز می‌توانیم صادق بدانیم.

تعمیم به بار نقطه‌ای (غیر نسبیتی) دلخواه. فرض کنید بار نقطه‌ای q در دست است که دستخوش حرکتی پیچیده و سه بعدی است. این را حرکت "دلخواه" می‌نامیم، منتهی منظور این است که همیشه فرض $v \ll c$ برقرار می‌ماند. به علاوه، برای سهولت فرض می‌کنیم که q همواره در همسایگی مبدأ مختصات باقی می‌ماند. بنابراین q ممکن است یکی از الکترونهای آنتن رادیویی دور و یا اتمی دور باشد. منظور از "همسایگی" و "دور" این است که بردار جابه‌جایی \mathbf{r} از مکان لحظه‌ای q به مکان مشاهده، که ساکن است، دارای جهت و طولی عملاً ثابت است. بدین ترتیب اتم "دور" ممکن است در فاصله 10^{-5} سانتیمتری نقطه مشاهده باشد، زیرا "همسایگی" که اتم آن را اشغال می‌کند، حدود 10^{-8} سانتیمتر شعاع دارد. در مورد آنتن رادیویی‌ای که 10^6 متر طول آن باشد، برای اینکه به همان نسبت "دور" باشیم، باید حدود 10^{10} متر دورتر رویم.

شکل میدان تابشی این بار که حرکتی "دلخواه" دارد، در نقطه مشاهده دور چگونه است؟ معادله (۱۲۹) برای حرکتی ساده و خالص به دست آمد که در آن حرکت با شتاب ثابت برای زمان Δt بود و به دنبالش حرکت با سرعت یکتواخت ادامه پیدا کرد. چنین یافتیم که میدان تابشی حاصل در نقطه مشاهده در زمان t کاملاً ناشی از شتاب عرضی $\mathbf{a}_\perp(t')$ در زمان زودتر یا "زمان عقبتر" $t' = t - (r/c)$ است. حال، برای حرکت دلخواهی که در آن $\mathbf{a}(t')$ کمیتی است که مدام (ولی به طور هموار) تغییر می‌کند، می‌توانیم $\mathbf{a}(t')$ را در فاصله کوتاه زمانی $\Delta t'$ دارای جهت و اندازه‌ای ثابت در نظر بگیریم. بدین ترتیب، شتاب $\mathbf{a}(t')$ در طول زمان $\Delta t'$ میدان تابشی را در نقطه مشاهده چنان ایجاد می‌کند که طبق معادله (۱۲۹) داده می‌شود و در زمان Δt از نقطه مشاهده می‌گذرد. اینک، به یک پیچیدگی می‌رسیم. زمان عقبتر t' که در آن شتاب رخ می‌دهد طبق رابطه

$$t' = t - \frac{r'}{c} \quad (130)$$

داده می‌شود. تابشی که q در بازه زمانی $\Delta t'$ گسیل می‌کند، در زمان Δt از نقطه مشاهده گذر می‌کند، این بازه زمانی طبق رابطه زیر داده می‌شود

$$\Delta t = \Delta \left(t' + \frac{r'}{c} \right) = \Delta t' + \frac{\Delta r'}{c} \quad (131)$$

که در آن $\Delta r'$ تغییر در فاصله بین بار q و نقطه مشاهده در بازه زمانی $\Delta t'$ است. مشاهده می‌کنیم که در حالت کلی Δt مساوی $\Delta t'$ نیست. بنابراین، در لحظه t در نقطه مشاهده، میان سهمهای میدان تابشی که در زمانهای متفاوت عقبتر t' گسیل شده‌اند، "همپوشی" وجود دارد.

پرهیز از "همپوشی". بررسی این حالت کلی مورد نظر نیست. توجه کنید که $\Delta r'$ مساوی با مؤلفه طولی سرعت ضربدر $\Delta t'$ است. بنابراین، به‌ازای $v \ll c$ ، با تقریب خوبی می‌توان $\Delta r'$ را در رابطه (۱۳۱) نادیده گرفت:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \Delta t' + \frac{(\Delta r')}{c} \\ &= \Delta t' + \frac{(v_{\parallel} \Delta t')}{c} \\ &\approx \Delta t' \quad \frac{v_{\parallel}}{c} \ll 1 \quad \text{به‌ازای}\end{aligned}\quad (132)$$

بنابراین، برای $v \ll c$ ، همپوشی Δt و $\Delta t'$ ناچیز است. بدین ترتیب، تناظر یک به یک بین تابش آشکار شده در زمان t و شتاب عرضی در فقط یک زمان عقبتر t' موجود است. در آن صورت، میدان تابشی $\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)$ به‌ازای تمام زمانها طبق رابطه (۱۲۹) داده می‌شود. وقتی \mathbf{E} معلوم شد، \mathbf{B} هم معلوم است. از این به بعد فرض می‌کنیم که معادله (۱۲۹) برای نقطه مشاهده دور، با \mathbf{r} اساساً ثابت، صادق است. همچنین فرض می‌کنیم که \mathbf{B}_{rad} با رابطه‌ای که برای موج تخت صادق است داده می‌شود. بنابراین (با حذف شاخص "rad" از میدانهای تابشی) داریم

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (133)$$

انرژی تابشی بار نقطه‌ای. برای نقطه مشاهده دور، برداز شار انرژی $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ چنین است

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \\ &= \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]^2 \hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{c}{4\pi} \left[\frac{-q\mathbf{a}_{\perp}(t')}{rc^2} \right]^2 \hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{q^2}{c^3} [\mathbf{a}_{\perp}(t')]^2 \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}\end{aligned}\quad (134)$$

که در آن یکای \mathbf{S} عبارت است از ارگ بر سانتیمتر مربع بر ثانیه. شار انرژی برحسب ارگ بر ثانیه که از مساحت بسیار کوچک dA که در مکان نقطه مشاهده \mathbf{r} واقع است (و عمود بر \mathbf{r} است) می‌گذرد، با حاصلضرب اندازه بردار شار \mathbf{S} و مساحت dA داده می‌شود. این شار انرژی را dP می‌نامیم (P نشان‌دهنده توان برحسب ارگ بر ثانیه است، d نشان می‌دهد که توان بسیار کوچکی

را که از مساحت dA عبور می‌کند در نظر می‌گیریم):

$$\begin{aligned} dP(\mathbf{r}, t) &= |\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)| dA \\ &= \frac{q^2}{c^3} \mathbf{a}_{\perp}^{\prime}(t') \frac{dA}{4\pi r^2} \end{aligned} \quad (135)$$

زاویه‌ای که شتاب تأخیری لحظه‌ای $\mathbf{a}(t')$ با جهت ثابت \mathbf{r} ، که از همسایگی q به نقطه مشاهده است، می‌سازد را $\theta(t')$ می‌گیریم. بدین ترتیب، مطابق شکل ۷-۸ مشاهده می‌کنیم که

$$\mathbf{a}_{\perp}^{\prime}(t') = \mathbf{a}^{\prime}(t') \sin^2 \theta(t') \quad (136)$$

بنابراین معادله (۱۳۵) را می‌توان چنین نوشت

$$dP(\mathbf{r}, t) = \frac{q^2}{c^3} \mathbf{a}^{\prime}(t') \sin^2 \theta(t') \frac{dA}{4\pi r^2} \quad (137)$$

توان لحظه‌ای تابشی کل در تمام جهات. هم t' و هم r را ثابت می‌گیریم و از dP روی تمام جهات $\hat{\mathbf{r}}$ (یعنی روی سطح کره‌ای به شعاع r)، انتگرال می‌گیریم. اگر به خاطر ضریب $\sin^2 \theta(t')$ نبود، می‌توانستیم انتگرال‌گیری را خیلی ساده با نشان دادن $4\pi r^2$ که مساحت کل کره است، به جای dA انجام دهیم. اما اکنون می‌باید تغییرات $\sin^2 \theta(t')$ را بر روی مساحت‌های بسیار کوچک dA در مکان‌های گوناگون نقطه مشاهده که بر روی سطح کره توزیع شده است، به هنگام انتگرال‌گیری، به حساب آوریم. بنابراین می‌نویسیم

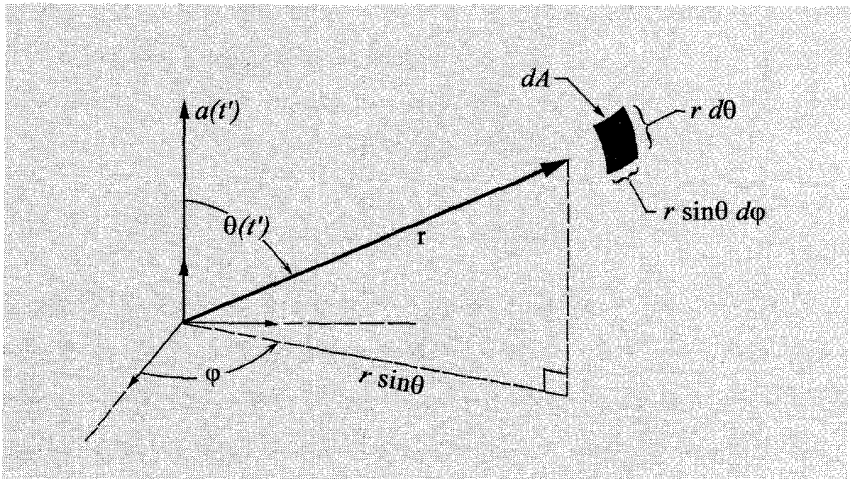
$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{q^2}{c^3} \mathbf{a}^{\prime}(t') \overline{\sin^2 \theta(t')} \\ t' &= t - \frac{r}{c} \end{aligned} \quad (138)$$

که در آن

$$\overline{\sin^2 \theta(t')} \equiv \int \sin^2 \theta(t') \frac{dA}{4\pi r^2} \quad (139)$$

برای محاسبه این انتگرال می‌توان مطابق با شکل ۷-۱۰ از مختصات قطبی کروی استفاده کرد. مساحت بسیار کوچک dA مساحت مستطیل کوچکی است که طول اضلاعش $r d\theta$ و $r \sin \theta d\varphi$ است. بنابراین

$$\frac{dA}{r^2} = \frac{(r d\theta)(r \sin \theta d\varphi)}{r^2} = d\theta \sin \theta d\varphi \quad (140)$$



شکل ۷-۱۰ مختصات قطبی کروی. مساحت بسیار کوچک dA در انتهای بردار شعاعی r و در راستای عمود بر این بردار r دارای اندازه $r^2 d\phi \sin \theta d\theta$ است.

بدین ترتیب به راحتی می‌توانید نشان دهید که (مسئله ۷-۴۰ را ببینید)

$$\overline{\sin^2 \theta(t')} = \frac{2}{3} \quad (۱۴۱)$$

در اینجا روش کوتاهی برای به دست آوردن رابطه (۱۴۱) ارائه می‌دهیم. بردار r دارای مؤلفه $r \cos \theta$ در امتداد محور قطبی است. این محور را محور z می‌نامیم. بنابراین $z = r \cos \theta$. وقتی میانگین z^2 را بر روی تمام جهات θ (با ثابت نگه داشتن r یعنی حرکت آن روی کره) به دست می‌آوریم، باید همان جوابی را بگیریم که برای میانگین x^2 یا y^2 به دست می‌آید. اما برای هر نقطه داریم $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} r^2 &= \overline{r^2} = \overline{x^2 + y^2 + z^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} + \overline{z^2} \\ &= 3\overline{z^2} = 3\overline{r^2 \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \overline{\cos^2 \theta} &= \frac{r^2}{3r^2} = \frac{1}{3}; \\ \overline{\sin^2 \theta} &= \overline{1 - \cos^2 \theta} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (۱۴۲)$$

فرمول معروفی برای توان تابشی. حال که $\sin^2 \theta(t')$ را محاسبه کردیم، آن را در رابطه (۱۳۸) قرار می‌دهیم و چنین به دست می‌آوریم

$$P(t) = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \mathbf{a}^2(t')$$

$$t' = t - \frac{r}{c} \quad (۱۴۳)$$

طبق رابطه (۱۴۳)، توان تابشی که از کره‌ای به شعاع r_1 در زمان t_1 می‌گذرد همان مقداری را دارد که از هر کرهٔ دیگر به شعاع r_2 و در زمان t_2 که به همان زمان تأخیری t' مربوط است می‌گذرد. این صرفاً به آن معنی است که انرژی پایسته است و اینکه انرژی با سرعت نور به بیرون منتشر می‌شود. دقت کنید که این نتیجه برای نکته متکی است که میدان تابشی با عکس r متناسب است. بنابراین شار انرژی خروجی $|S|$ بر حسب $\text{erg/cm}^2\text{s}$ با عکس مربع r تغییر می‌کند. انرژی بر روی سطح کره که متناسب با r^2 است توزیع شده است. این دو ضرب، r^{-2} ضربدر r^2 ، یکدیگر را خنثی می‌کنند، چنانکه انرژی کل خروجی در واحد زمان بر روی کره‌ای که شعاعش با سرعت نور افزایش می‌یابد ثابت باقی می‌ماند. تابش و میدانهای "ناحیهٔ نزدیک". محاسبه نشان می‌دهد که جواب دقیق برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی جفت شده به زمان که به وسیلهٔ بار متحرک ایجاد می‌شود، جملات متناسب با r^{-2} و r^{-3} هم علاوه بر میدانهای "تابشی" که متناسب با r^{-1} تغییر می‌کنند، دارند. در فواصلی که به قدر کافی نزدیک باشند، این جملات عکس مربعی و عکس مکعبی میدان غالب هستند. گاهی اینها را میدانهای "ناحیهٔ نزدیک" می‌نامند. اگر در "ناحیهٔ نزدیک" آنتن رادیو یا یک اتم باشیم، این میدانها مهم هستند. در فواصلی که به قدر کافی بزرگ باشند، این میدانها در مقایسه با میدان عکس توان اول فاصله، یعنی میدان تابشی، ناچیز می‌شوند. بدین ترتیب، مثلاً سهم آنها در شار انرژی که به طور خالص به بیرون می‌رود، در فواصل زیاد، صفر است. در ناحیهٔ نزدیک آنها مسلماً در بردار شار انرژی $S(r, t)$ سهم آنها شار انرژی‌ای به دست می‌دهد که گاه به بیرون و گاه به درون حرکت می‌کند، چیزی شبیه موج ساکن. بدین ترتیب بار نقطه‌ای نوسان کننده موج پیشروندهٔ کروی که به طور "خالص" به بیرون انتشار می‌یابد. ایجاد نمی‌کند، بلکه ترکیبی از امواج پیشرونده و ساکن تولید می‌کند به طوری که امواج ساکن در فواصل کم غالب‌اند و امواج پیشرونده در فواصل زیاد. آشکارسازی که در دوردست واقع است فقط اثر امواج پیشرونده را حس می‌کند. آشکارساز نزدیک هم اثر امواج ساکن و هم اثر امواج پیشرونده را حس می‌کند. تعریف زاویهٔ فضایی. dA را مساحت بسیار کوچکی بگیرد که در نقطهٔ مشاهده r واقع است و راستای عمود بر r است. زاویهٔ فضایی دیفرانسیلی $d\Omega$ که نسبت به مبدأ به وسیلهٔ dA

در بر گرفته می‌شود طبق رابطه زیر تعریف می‌شود

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} \quad (144)$$

این کمیت با یکای بدون بعد استرادیان، و مخفف استر، شناخته می‌شود. اینک کره‌ای به شعاع r و به مرکز مبدأ در نظر بگیرد. سطح این کره از تعداد زیادی از مساحت‌های بسیار کوچک dA تشکیل شده است که هریک عمود بر بردار شعاعی که آن را به مبدأ متصل می‌کند قرار دارد. بدین ترتیب عنصری دیفرانسیلی از زاویه فضایی را می‌توان به هریک از مساحت‌های بسیار کوچک نسبت داد. زاویه فضایی کل که کره آن را در بر می‌گیرد با جمع تمام زوایای فضایی بسیار کوچک و بنابراین با مساحت کل کره تقسیم بر r^2 داده می‌شود:

$$\Omega = \int d\Omega = \int \frac{dA}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ sr} \quad (145)$$

در اینجا روش دیگری برای به دست آوردن رابطه (۱۴۵) ارائه می‌دهیم. طبق رابطه (۱۴۰) زاویه فضایی دیفرانسیلی $d\Omega$ در مختصات قطبی کروی طبق رابطه زیر داده می‌شود

$$d\Omega = d\varphi \sin \theta \, d\theta \quad (146)$$

که در آن $d\varphi$ و $d\theta$ مثبت هستند، و یا با رابطه زیر داده می‌شود

$$d\Omega = d\varphi \, d(\cos \theta) \quad (147)$$

که در آن $d\varphi$ و $d(\cos \theta)$ مثبت هستند. متغیر φ از صفر تا 2π تغییر می‌کند. متغیر θ از صفر تا π تغییر می‌کند. متغیر $\cos \theta$ از -1 تا $+1$ تغییر می‌کند. زاویه فضایی کل که به وسیله هر سطح بسته‌ای که مبدأ در درونش است، در بر گرفته می‌شود چنین است

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) = (2\pi) \cdot 2 = 4\pi \text{ sr} \quad (148)$$

توان تابشی به درون عنصر زاویه فضایی $d\Omega$. با استفاده از تعریف زاویه فضایی رابطه (۱۳۷) را به شکل ساده‌تر زیر می‌نویسیم

$$dP(\mathbf{r}, t) = \frac{q^2}{c^3} \mathbf{a}^2(t') \sin^2 \theta(t') \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (149)$$

تابش دوقطبی الکتریکی. اگر حرکت q حرکتی هماهنگ در امتداد جهت ثابت \hat{x} باشد، تابش حاصل تابش دوقطبی الکتریکی نام دارد. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}x(t') &= x_0 \cos \omega t' \\ \mathbf{a}(t') &= \hat{x} \ddot{x}(t') = -\omega^2 \hat{x} x(t')\end{aligned}\quad (150)$$

توان تابشی به درون زاویه فضایی $d\Omega$ که میانگین آن روی یک تناوب نوسان گرفته شده باشد عبارت است از

$$\begin{aligned}dP(r) &= \frac{q^2}{c^3} \langle \mathbf{a}^2(t') \rangle \sin^2 \theta \frac{d\Omega}{4\pi} \\ &= \frac{q^2}{c^3} \omega^4 \langle x^2(t') \rangle \sin^2 \theta \frac{d\Omega}{4\pi}\end{aligned}\quad (151)$$

توان تابشی کلی بر روی تمام جهات که میانگین زمانی اش گرفته شده باشد از طریق انتگرال‌گیری بر روی زاویه فضایی کل به دست می‌آید. بدین ترتیب، به جای $d\Omega$ ، $\Omega = 4\pi$ را می‌گذاریم و به جای $\sin^2 \theta$ میانگین آن، $2/3$ ، را در رابطه (۱۵۱) قرار می‌دهیم:

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \omega^4 \langle x^2(t') \rangle \quad (152)$$

پهنای خط طبیعی برای اتمی که نور گسیل می‌کند. با استفاده از رابطه (۱۵۲) می‌توانیم تقریب کلاسیکی ساده‌ای برای طول عمر فروافت آزاد اتم برانگیخته‌ای که در نتیجه آن تابش دوقطبی الکتریکی گسیل می‌کند، به دست آوریم. اینکه نتیجه حاصل با مقادیر مشاهده‌شده آزمایشی تطابق دارد، و آن هم بدون اینکه صریحاً از نظریه کوانتومی استفاده کرده باشیم، بسیار قابل ملاحظه است. مدل کلاسیکی ساده‌ای از اتم را در نظر می‌گیریم، اتم شامل یک «الکترون» با بار $q = -e$ و جرم m است که به وسیله فیزی با ثابت فزر $m\omega^2$ به «هسته» سنگینی متصل است. اگر در زمان صفر انرژی برانگیختگی E_0 به اتم داده شود، با حرکت هماهنگ میرا و بسامد ω نوسان می‌کند. (از تغییر اندک بسامد ω که به خاطر میرایی به وجود می‌آید صرف‌نظر می‌کنیم، یعنی از $(1/4)\Gamma^2 - \omega_0^2 = \omega^2$ به جای ω_0^2 استفاده نمی‌کنیم.) انرژی اتم طبق رابطه زیر داده می‌شود

$$E(t) = E_0 e^{-t/\tau} \quad (153)$$

عکس طول عمر میانگین، $1/\tau$ ، مساوی است با کاهش نسبی انرژی در واحد زمان:

$$\frac{1}{E} \left[-\frac{dE}{dt} \right] = \frac{1}{\tau} \quad (154)$$

انرژی $E(t)$ طبق رابطه زیر داده می‌شود

$$E(t) = \frac{1}{4} m \omega_0^2 x^2(t) + \frac{1}{4} m \dot{x}^2(t) \quad (155)$$

از تغییر $E(t)$ در طول یک تناوب می‌توان صرف‌نظر کرد و به‌جای کمیت‌های لحظه‌ای در طرف راست رابطه (۱۵۵)، مقادیر میانگین‌گیری شده‌ی زمانی آنها را قرار داد:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{4} m \omega_0^2 \langle x^2(t) \rangle + \frac{1}{4} m \langle \dot{x}^2(t) \rangle \\ &= \frac{1}{4} m \omega_0^2 \langle x^2 \rangle + \frac{1}{4} m \omega_0^2 \langle x^2 \rangle \end{aligned}$$

یعنی،

$$E(t) = m \omega_0^2 \langle x^2 \rangle \quad (156)$$

اینک، فرض می‌کنیم که میرایی کاملاً به خاطر اتلاف انرژی از طریق تابش امواج الکترومغناطیسی است. تابش از نوع تابش دوقطبی الکتریکی است و توان تابشی آن به‌وسیله‌ی رابطه (۱۵۲) داده می‌شود:

$$-\frac{dE}{dt} = P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega_0^4 \langle x^2 \rangle \quad (157)$$

از ترکیب روابط (۱۵۴)، (۱۵۶) و (۱۵۷) پهنای خط طبیعی اتمی که نورگسیل می‌کند را به‌دست می‌آوریم

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau} = \frac{P}{E} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{\omega_0^4}{m} \quad (158)$$

که در آن از این نکته استفاده کرده‌ایم که برای نوسانگر میرا تمام پهنای بسامد در نیم‌بیشینه‌ی توان (در طیف فوریه‌ی تابش) با عکس طول عمر میانگین مساوی است. رابطه (۱۵۸) در مورد هر تابش دوقطبی الکتریکی میرا که میرایی آن تماماً به خاطر تابش است، صادق است. برای اتمی که نور مرئی گسیل می‌کند، فرض می‌کنیم $\lambda_0 = 5000 \text{ \AA} = 5 \times 10^{-5} \text{ cm}$ $\nu_0 = (c/\lambda_0) = (3 \times 10^{10} / 5 \times 10^{-5}) = 6 \times 10^{14} \text{ Hz}$ $e = 4.8 \times 10^{-10} \text{ esu}$ و جرم، $m = 9.1 \times 10^{-27} \text{ g}$. بنابراین چنین به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{3}{2} \frac{c^3 m}{e^2 \omega_0^4} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right) \frac{(3 \times 10^{10})^3}{(4.8 \times 10^{-10})^2 (2\pi)^2 (6 \times 10^{14})^4} \approx 4.5 \times 10^{-8} \text{ s} \quad (159) \end{aligned}$$

مهم است به یاد داشته باشید که برای اتمهایی که آزادانه از حالت برانگیخته فرو می‌افتند و نور مرئی گسیل می‌کنند، $\tau \sim 10^{-8} \text{ s}$.

نتایج خود را در مورد تابش دوقطبی برای پاسخ‌گویی به سؤال زیر به‌کار می‌بندیم:
چرا آسمان آبی است؟ در اینجا وابستگی بسامدی پراکندگی نور خورشید از یک اتم هوا را به درون چشم خود بررسی می‌کنیم. نتیجه خواهیم گرفت که نور آبی بیشتر پراکنده می‌شود تا نور قرمز. پس آسمانی آبی است. (هنگام غروب آسمان قرمز است، زیرا تقریباً همه آبی جذب شده است و قرمز باقی مانده است.) با آزمایشی می‌توانید این اثر رنگی را برای خود به نمایش بگذارید. تنگ یا ظرف شیشه‌ای پر از آبی به همراه یک چراغ‌قوه فراهم کنید. چند قطره شیر به آب اضافه کنید و آن را به هم زنید. نور چراغ‌قوه را به آب بتابانید چنانکه بتوانید از پهلو نور چراغ‌قوه را که از مولکولهای معلق شیر پراکنده می‌شود ببینید و یا از درون آب مستقیماً به لامپ چراغ‌قوه نگاه کنید. دقت کنید که نور پراکنده شده به آبی می‌رود (این همان آسمان آبی است). دقت کنید که وقتی از درون آب مستقیماً به چراغ نگاه می‌کنید، این نور مستقیماً به قرمز می‌رود (این غروب است). اگر تدریجاً، هر دفعه چند قطره، شیر اضافه کنید، اثر افزایش تدریجی گرد و غبار و دود را شبیه‌سازی کرده‌اید.

الکترونی را در "مولکول کلاسیک شیر" که توسط میدان الکتریکی موج الکترومغناطیسی حاصل از چراغ‌قوه در حالت مانا تحریک می‌شود، در نظر بگیرید. اگر نور چراغ در جهت \hat{z} باشد، میدان الکتریکی موج پیشرونده فقط مؤلفه‌های x و y دارد. فقط مؤلفه x میدان الکتریکی را در نظر می‌گیریم. (مؤلفه y نتایج مشابهی می‌دهد.) به علاوه، فقط یک رنگ را در نظر می‌گیریم، یعنی فقط یک مؤلفه فوریه نور "سفید" را (که شامل بسامدهای نور مرئی و دیگر بسامدهایی است که چشم ما قادر به تشخیص آنها نیست)، در نظر می‌گیریم. در این صورت، میدان الکتریکی $E_x(t)$ در مکان مولکول شیر طبق رابطه زیر داده می‌شود

$$E_x = E \cdot \cos \omega t \quad (160)$$

فرض کنید که "الکترون" مولکول شیر به هسته مولکول شیر توسط فنری با ثابت فنر $m\omega^2$ متصل است. از میرایی صرف نظر می‌کنیم (یعنی، فرض می‌کنیم ω نزدیک بسامد شدید ω قرار ندارد). بنابراین معادله حرکت الکترون چنین است

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x + qE_x \quad (161)$$

در حالت مانا، $x(t)$ نوسانی هماهنگ با بسامد ω است. پس $\ddot{x}(t)$ برابر است با $-\omega^2 x(t)$. بدین

ترتیب از معادله (۱۶۱) داریم

$$-m\omega^2 x(t) = -m\omega^2 x(t) + qE_x$$

$$x(t) = \frac{qE_x(t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (162)$$

نوسان هماهنگ $x(t)$ تابش دوقطبی گسیل می‌کند. توان تابشی کل با رابطه (۱۵۲) داده می‌شود:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega^4 \langle x^2 \rangle$$

$$= \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega^4 \left[\frac{-e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]^2 \langle E_x^2(t) \rangle \quad (163)$$

حال، از بررسی ضریب شکست مولکول کلاسیکی شیشه (بخش ۴-۳)، دریافته‌ایم که بسامد زاویه‌ای مؤثر ω در مقایسه با ω_0 به‌ازای ω نور مرئی، بزرگ است. بنابراین، می‌توانیم از $\omega \gg \omega_0$ در رابطه (۱۶۳) استفاده کنیم. به این ترتیب مشاهده می‌کنیم که توان پراکنده شده با توان چهارم بسامد محرک، ω ، متناسب است، به عبارت دیگر با عکس توان چهارم طول موج متناسب است:

$$P \propto \omega^4 \propto \frac{1}{\lambda^4} \quad (164)$$

قانون آسمان آبی. رابطه (۱۶۴) را "قانون آسمان آبی لرد ریلی" می‌نامند. نسبت طول موج نور قرمز با طول موج 6500 \AA به طول موج نور آبی 4500 \AA برابر است با $1.44 = (65/45)$. توان چهارم 1.44 برابر است با 4.3 . بنابراین، طبق رابطه (۱۶۴) نور آبی تقریباً چهار برابر نور قرمز پراکنده می‌شود. پس آسمان آبی است. چرا آسمان این قدر روشن است؟ مبحث تکمیلی ۸ را ببینید.

سطح مقطع کل برای پراکندگی. فرض کنید توپ بیلیاردی به شعاع R در مسیر باریکه پهن یکنواختی از توپهای آهنی بیلیارد که با سرعت v در جهت \hat{z} حرکت می‌کنند قرار داشته باشد. توپهای بیلیاردی که به این توپ برخورد می‌کنند پراکنده شده و از باریکه خارج می‌شوند. انرژی‌ای که حمل می‌کنند نیز از باریکه خارج شده و در جهات دیگر فرستاده می‌شود. تعداد کل توپهای بیلیاردی که در واحد زمان پراکنده می‌شوند، حاصلضرب شار عددی، برحسب توپهای بیلیارد در سانتیمتر مربع در ثانیه، و سطح مقطع کل توپ $\sigma = \pi R^2$ است:

$$(165) \quad \text{شار فرودی توپهای بیلیارد} \times \sigma = \text{پراکندگی توپهای بیلیارد در ثانیه}$$

چون فرض کرده‌ایم که پراکندگی توپهای بیلارد کُشسان بوده است، هر توپ بیلارد پراکنده شده همان انرژی هر توپ بیلارد فرودی را داراست. بدین ترتیب دو طرف رابطه (۱۶۵) را می‌توان در انرژی یک توپ بیلارد ضرب کرد. بنابراین رابطه (۱۶۵) به صورت زیر در می‌آید

$$(۱۶۶) \quad (\text{شار انرژی فرودی}) = \sigma \times (\text{انرژی پراکنده شده در ثانیه})$$

اینک می‌توانیم با تعبیر مناسبی از رابطه (۱۶۶) سطح مقطع کل برای پراکندگی کُشسان نور از مولکول کلاسیک شیر را تعریف کنیم: انرژی "پراکنده شده" در واحد زمان به صورت توان تابشی الکترون واداشته، P ، تعریف می‌شود، و شار انرژی فرودی شار انرژی الکترومغناطیسی S_z است. بنابراین، مانند رابطه (۱۶۶)، σ_{sc} را چنین تعریف می‌کنیم

$$(۱۶۷) \quad P = \sigma_{sc} \cdot \frac{c}{4\pi} \langle E_x^2(t) \rangle$$

از مقایسه رابطه (۱۶۷) با (۱۶۳) چنین به دست می‌آید که:

$$(۱۶۸) \quad \sigma_{sc} = \frac{4\pi}{c} \frac{P}{\langle E_z^2 \rangle} = \frac{8}{3} \pi \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_s^2 - \omega^2)^2}$$

بنابراین، نتیجه‌ای که در قالب رابطه (۱۶۴) آمد، و بیان‌کننده آن است که به ازای $\omega \gg \omega_s$ ، شدت پراکندگی متناسب با ω^4 است، اینک به شکل دقیقتری با رابطه (۱۶۸) داده شده است. این رابطه وابستگی بسامدی سطح مقطع کل برای پراکندگی کُشسان نور از یک اتم را (برای این مدل کلاسیک) به دست می‌دهد. کمیت e^2/mc^2 ابعاد طول را داراست. (باید هم این‌طور باشد، زیرا σ دارای ابعاد مجذور طول است و قسمتی که حاوی وابستگی بسامدی است به صورت کسری بدون بعد ظاهر می‌شود.) به دلایل تاریخی به این کمیت شعاع کلاسیک الکترون، r_e ، یا شعاع لورنتس الکترون گویند:

$$(۱۶۹) \quad r_e \equiv \frac{e^2}{mc^2} = \frac{(4.78 \times 10^{-10})^2}{(0.91 \times 10^{-27})(3 \times 10^{10})^2} = 2.82 \times 10^{-13} \text{ cm}$$

سطح مقطع پراکندگی کلاسیک تامسون. اگر الکترون به وسیله فزنی با ثابت فر صفر به هسته متصل باشد، چنین الکترونی اصلاً مقید نیست، بلکه آزاد است. اگر ثابت فر صفر باشد، $\omega_s = 0$ ، بنابراین سطح مقطع پراکندگی کُشسان برای پراکندگی نور از الکترون آزاد، که به سطح مقطع پراکندگی کلاسیک تامسون هم معروف است، با نشاندن $\omega_s = 0$ در رابطه (۱۶۸) به دست می‌آید:

$$(۱۷۰) \quad \sigma_{\text{تامسون}} = \frac{8}{3} \pi r_e^2 = \frac{8}{3} \pi (2.82 \times 10^{-13})^2 = 0.67 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$$

البته، سطح مقطع 10^{-24} سانتیمتر مربعی ممکن است در نظر شما بزرگ نیاید، اما در برخی شاخه‌های فیزیک (یعنی فیزیک هسته‌ای) و در زمان خاصی از تاریخ، به بزرگی محل نگهداری دام و علوفه می‌آید. از این جهت آن را یک بارن (barn) نامیدند:

$$1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad (171)$$

(سطح مقطعی هسته‌ای معمولاً برحسب میلی بارن، با نماد mb، بیان می‌شوند). بنابراین، سطح مقطع تامسون را که با رابطه (۱۷۰) داده می‌شود، به راحتی می‌توان به خاطر سپرد: سطح مقطع تامسون بسیار بزرگ است؛ دو سوم یک بارن است.

مسائل و آزمایشهای خانگی

۱-۷ نشان دهید که تساوی داده‌شده در معادله (۳۴) بخش ۲-۷ معتبر است. این تساوی اساس توصیف "موج پیشرونده ضربدری" در یک موجبر است. این تصویری از این واقعیت است که امواج هماهنگ پیشرونده سه‌بعدی "سری کامل" تابعی را برای توصیف امواج سه‌بعدی تشکیل می‌دهد. البته امواج ساکن سه‌بعدی نیز یک سری کامل به وجود می‌آورد.

۲-۷ (الف) نشان دهید که برای شیشه با ضریب شکست 1.52 زاویه بحرانی بازتاب داخلی در حدود 41.2° درجه است.

(ب) زاویه بحرانی برای آب با ضریب شکست 1.33 چقدر است؟ آیا منشور آبی به شکل یک مثلث متساوی‌الساقین (همان‌طور که در شکل ۳-۷ نشان داده شده است) نور را در جهت عکس بدون هیچ اتلافی (با شکست در هوا) می‌دهد. ابتدا فرض کنید که آب مستقیم به طرف بالا در هوا گسترش می‌یابد. آنگاه نگران تیغه‌های میکروسکوپ شیشه‌ای باشید که کناره‌های منشور آبی شما را تشکیل می‌دهد.

۳-۷ منشور آبی معکوس. یک منشور آبی با دو تیغه میکروسکوپ و مقداری بتونه و نوار بسازید. نتایج مسئله ۲-۷ (ب) را با تاباندن باریکه چراغ‌قوه به سطح پایین آب بررسی کنید.

۴-۷ نشان دهید که منشور آبی معکوس شکل ۳-۷ تحت زاویه‌های دیگر فرود نسبت به فرود عمود نشان داده شده در شکل کار می‌کند به این مفهوم که نور را در جهت عکس جهت فرود هدایت می‌کند.

۵-۷ فاصله نفوذ میانگین (فاصله دامنه تضعیف میانگین $\delta = \kappa^{-1}$) را برای نور مرئی با طول موج 5500 \AA که با منشور شیشه‌ای شکل ۳-۷ معکوس شده است حساب کنید. (منظورمان فاصله عمود به پشت سطح شیشه به هواست.) فرض کنید باریکه نور فرودی در فرود عمودی است

همان طور که در شکل نشان داده شده است. ضریب شکست را ۱.۵۲ بگیرید.

جواب: $\delta = ۲.۲ \times ۱۰^{-۵} \text{cm}$

۶-۷ نور در خلأ. برای نور (یا میکروموجها) در یک موجبر به دست آوریم که اگر بسامد زیر بسامد قطع باشد جهت z (در طول موجبر) "واکنشی" است. دو جهت دیگر واکنشی نیستند. آیا اصولاً امکان دارد که با یک روش ابتکاری یک "موجبر کلی" بسازید که در آن موجها در سه جهت x ، y و z واکنشی باشند؟

۷-۷ تار نوری. امکان دارد نور را از طریق یک لوله به موجبرهایی که از تار شیشه‌ای درست شده‌اند بفرستیم. نور در شیشه باقی می‌ماند زیرا برخوردی درخشانی در سطح شیشه به هوا ایجاد می‌کند و بنابراین در زاویه‌های بزرگتر از زاویه بحرانی فرود می‌آید. اما اگر قطر تار بسیار کوچک باشد، تار موجبری می‌شود که در آن بسامد نور زیر بسامد قطع است. فرض کنید تارها سطح مقطع مربعی دارند (مانند یک موجبر مستطیلی). اگر تار پاشنده باشد یعنی امواج نور مرئی پیشرونده را حمل کند کمیته طول لبه تار را تخمین بزنید.

جواب: لبه $< ۱.۷ \times ۱۰^{-۵} \text{cm}$ برای $\lambda = ۵۰۰ \text{\AA}$

۸-۷ زاویه بحرانی برای بازتاب از یون‌سپهر. به جای خلأ در طرف چپ $z = ۰$ شکل ۴-۷ شیشه قرار دهید. به جای هوا در طرف راست $z = ۰$ پلاسما قرار دهید که این پلاسما یون‌سپهری است که با مرزهای مشخص (و یک ترکیب یکنواخت) ایده‌آل‌سازی شده است. نشان دهید که برای هر زاویه فرود θ_1 یک بسامد قطع $\omega_{c.o.}$ وجود دارد که به θ_1 بستگی دارد و اینکه در فرود عمودی این بسامد قطع، بسامد نوسان پلاسما ω_p است. نشان دهید که برای هر بسامد بالای بسامد نوسان پلاسما ω_p یک زاویه بحرانی برای بازتاب کلی وجود دارد به طوری که برای زاویه‌های فرود بزرگتر از زاویه بحرانی موج در یون‌سپهر نمای است. به طور مثال، بسامد نوسان پلاسما را $\nu_p = ۲۵ \text{MHz}$ بگیرید و زاویه بحرانی برای میکروموجهای با بسامد $\nu = ۱۰^۰ \text{MHz}$ را به دست آورید.

جواب: برای θ_1 ثابت، $\omega_{c.o.} = \omega_p / \cos \theta_1$. برای بسامد ثابت ω بالای ω_p

$$\cos \theta_1 = \omega_p / \omega$$

۹-۷ دید ماهی از دنیای بالای آب. برای این آزمایش شما به یک استخر آرام در جایی یا خانه‌ای که استخر شنا داشته باشد احتیاج دارید. وگرنه (در یک استخر عمومی)، شما باید اولین نفر در استخر باشید به طوری که سطح آب هنوز صاف باشد. از یک ماسک غواصی استفاده کنید. به طرف پایین شنا کنید، به پشت خود برگردید و بالا را نگاه کنید. به عنوان مسئله، (حالا) پیش‌بینی کنید که چه چیزی می‌بینید.

۷-۱۰ سرعت فاز امواج آب نسبت به عمق آب. فرض کنید یک آکواریوم مستطیل (یک کارتون مقوایی که داخل آن رنگ زده شده است یا چیزی شبیه آن) با طول ۲۵cm در امتداد x دارید. آن را تا ارتفاع تعادل پر کنید و پایتترین مد سینوسی آن را تحریک کنید (این حالت در شکل ۷-۵ نشان داده شده است).

(الف) سرعت فاز (برحسب cm/s) برای امواج آب عمیق چقدر است؟ (به خاطر آورید که می‌توانید سرعت فاز را حتی برای امواج ساکن تعریف کنید).

(ب) نموداری از سرعت فاز (با یکای cm/s) برحسب عمق آب h ، (با یکای cm) برای این مد و این آکواریوم بکشید، از رابطه پاشندگی دقیق (برای امواج با دامنه کوچک) که با معادله (۷۲) در بخش ۷-۳ آمده است استفاده کنید. روی نمودار "حد آب عمیق" را به دست آورید. همچنین نموداری برای عبارت سرعت فاز آب کم عمق روی همان نمودار را حتی اگر، تمام h ها مستقل از طول موج باشند بکشید. بنابراین نمودار دقیق شما باید "گذر" بین سرعت فازهای بین آب عمیق و آب کم عمق را نشان دهد.

۷-۱۱ قانون پاشندگی برای امواج آب. یک منبع مستطیلی که طول آن یک فوت در امتداد x است بگیرید. [هر چیز از $1/2$ ft تا ۲ft کارساز است.] باید حداقل عمق آن $2/3$ طول آن باشد (به طوری که می‌توانید به حد آب عمیق برسید). بهترین منبع یک آکواریوم است. ارزانترین منبع کارتن مقوایی است (مثلاً یک جعبه کفش، جعبه کلاه، یا کارتن مواد غذایی). اگر رنگ ضدآب را داخل کارتن بپاشید، دوام آن طولانیتر می‌شود و خیس نمی‌شود. میرایی که در اثر خم شدن کارتن مقوایی به وجود می‌آید طول عمر مدها را کاهش می‌دهد و باعث می‌شود که کارتن مقوایی نسبت به منبع شیشه‌ای (یا پلاستیک سخت) نامطلوب شود. همچنین زیباست که بتوانیم داخل منبع شیشه‌ای را از کناره‌های آن ببینیم. اما کارتن مقوایی مناسب است.

(الف) پایتترین مد. این مد در شکل ۷-۵ نشان داده شده است. λ را برای منبع خودتان با این مد حساب کنید. σ را برای منبع خودتان با این مد حساب کنید. نمودار عبارت نظری را برای سرعت فاز $v_p = \lambda v$ برای منبع خودتان با این مد برحسب عمق آب h همان طور که در مسئله ۷-۱۰ بحث شد بکشید. [از رابطه پاشندگی "دقیق" معادله (۷۲) بخش ۷-۳ استفاده کنید.] حال منبع را با ارتفاع دلخواه h پر کنید. مقداری دانه قهوه داخل آن حل کنید به طوری که بتوانید حرکت آب را داخل آن ببینید. پایتترین مد را با تکان دادن آرام منبع به جلو و عقب تحریک کنید. وقتی مد را دیدید، بسامد را اندازه بگیرید. (یک ساعت معمولی مناسب است). نتایج تجربی خود را برای v_p حساب کنید و یک نقطه تجربی روی منحنی عبارت نظری برای سرعت فاز بگذارید. آزمایش را دوباره برای مقادیر مختلف h تکرار کنید. باید حداقل یک نقطه تجربی آب

کم عمق، حداقل یک نقطه برای آب عمیق و حداقل یک ناحیه گذر $\sigma \approx h$ داشته باشید. (ب) بالاترین مد بعدی. اگر یک منبع مقوایی دارید، می‌توانید مدی را تحریک کنید که مرکز منبع در $x = 0$ (شکل ۵-۷) در یک ضد گره در ψ_y و طول منبع به اندازه یک طول موج باشد. چطور می‌توانید آن مد را تحریک کنید؟ اگر منبع شما محکم باشد نمی‌توانید آن مد را (حداقل نه به آسانی) تحریک کنید. چرا نه؟ در آن حالت مد به آسانی واداشته بعدی دارای L ای برابر با سه نیم طول موج است و یک گره در ψ_y در $x = 0$ (شکل ۵-۷) دارد. σ را برای این منبع و این مد به دست آورید. بسامد مورد انتظار را حساب کنید. حالا سعی کنید منبع را در آن بسامد تکان دهید تا مد را تحریک کنید. بسامد نوسانات آزاد در این مد را اندازه بگیرید، یک بار یاد گرفتید که چطور آن را تحریک کنید.

(ج) زندهای گذرا. در این آزمایش شما به یک مترونوم احتیاج دارید. یک مترونوم قرض کنید یا یک مترونوم بسازید به این طریق که یک قوطی کنسرو یا چیز دیگر را با یک نخ به طول متغیر آویزان کنید به طوری که یک تکه کاغذ که با پایین و بالا رفتن و برخورد صدا تولید می‌کند. با تیک‌تیک کردن مترونوم، به آرامی و یکنواخت منبع را در شتاب مترونوم تکان دهید. طول نخ (یا بسامد مترونوم) را با گام‌های کوتاه تغییر دهید به طوری که بسامد تشدید برای مد دوم توصیف شده در قسمت (ب) جاروب شود. باید به زندهای گذرا در بسامد زنش بین نیروی محرک و بسامد نوسان طبیعی توجه کنید. روشن است که وقتی به بسامد تشدید می‌رسید (همچنین در این آزمایشها به چیزهای زیادی که در نظریه نوسانات کوچک به شمار نمی‌آیند توجه خواهید کرد) می‌توانید تا پهنای $\Delta\omega$ تشدید را تخمین بزنید. (کاری که من نکردم). در هر حال پهنای تشدید را با اندازه‌گیری (دقیق) زمان فروافت متوسط مد حساب کنید و سپس از رابطه مشهور بین پهنای نوار و زمان فروافت مد میرا $\Delta\nu \Delta t \approx 1$ استفاده کنید.

۷-۱۲ معادله موج کلاسیکی برای **B** را همان‌طور که در معادله (۷۹ ب) بخش ۷-۴ پیشنهاد شده است به دست آورید.

۷-۱۳ فشار تابش خورشید. اگر ثابت خورشیدی (خارج از جو زمین) 1.94 کالری کوچک در سانتیمتر مربع در دقیقه باشد (که $10^6 \text{ erg/cm}^2\text{s} \times 1.35$ است)، فشار تابش روی زمین را (در فرود عمودی) تحت دو فرض (الف) و (ب) برحسب dyn/cm^2 حساب کنید. سپس نتیجه را با فشار جو هوا در سطح دریا مقایسه کنید.

(الف) زمین "تیره" است و همه نور را جذب می‌کند.

(ب) زمین یک آینه کامل است و همه نور را باز می‌تاباند.

جواب: (الف) در حدود $10^{-11} \text{ atm} \times 5 \times 10^6 \text{ dyn/cm}^2 \approx 1 \text{ atm}$.

۱۴-۷ فشار تابش. (ابتدا مسئله ۷-۱۳ را حل کنید.) فشار تابش خورشید روی زمین نیروی دافعه مؤثر بین خورشید و زمین را می‌دهد.

(الف) نشان دهید که این نیروی دافعه مؤثر از قانون عکس مجذوری پیروی می‌کند. بنابراین اگر زمین دو برابر دورتر بود، نیروی خالص روی زمین ۴ مرتبه کوچکتر می‌بود همین‌طور نیروی گرانشی.

(ب) مرور قانون کپلر. نشان دهید که این قانون را می‌توان (برای مدارهای دایره‌ای) به صورت $\omega^2 R^3 = MG$ نوشت، که ω بسامد زاویه‌ای سیاره‌ای است که حول خورشید می‌چرخد، R فاصله خورشید از سیاره، M جرم خورشید، و G ثابت گرانشی است.

(ج) نشان دهید که برای یک جسم "سیاه" کروی با چگالی جرمی ρ و شعاع r که در یک مدار دایره‌ای تعادلی حول خورشید حرکت می‌کند، قانون کپلر باید به صورت $\omega^2 R^3 = MG - (P/4\pi c)(3/4\rho r)$ "تصحیح" شود، که P توان خروجی الکترومغناطیسی کل خورشید است.

(د) با دانستن ثابت خورشیدی (مسئله ۷-۱۳) و اینکه فاصله خورشید تا زمین ۹۳ میلیون مایل است، P را برحسب erg/s حساب کنید.

(ه) فرض کنید یک "ذره غبار" دارید که در مدار دایره‌ای حول خورشید می‌چرخد. چگالی جرمی را برابر چگالی جرمی آب (1 g/cm^3) بگیرید. شعاع ذره r چقدر باشد تا فشار تابش خروجی مساوی جذب گرانشی ورودی باشد؟ چه اتفاقی برای ذرات غبار (و ذرات کوچکتر از آن) می‌افتد؟

(و) فرض کنید یک "ستاره دنباله‌دار" دارید که شامل ذرات کوچک غبار یا یخ یا چیزهایی شبیه به اینهاست و چگالی جرمی و شعاعهایشان یکسان است. آیا یک چنین "ستاره دنباله‌داری" وقتی از خورشید عبور می‌کند تغییر "شکل" می‌دهد؟ (ما بیش از این درباره مدارهای دایره‌ای صحبت نمی‌کنیم، در مورد مدارهای بیضوی حرف می‌زنیم. اما شما باید بتوانید جواب را حدس بزنید.)

(ز) گفته می‌شود که دم دراز یک ستاره دنباله‌دار (که از خورشید کشیده شده است) مربوط به فشار تابش است. فرض کنید ستاره دنباله‌داری دارید (یک ابر ذرات غبار) که در مدار دایره‌ای تعادلی قرار دارد. ستاره یک بسامد زاویه‌ای دارد که مشترک بین همه ذرات است. اما ذرات، شعاع تعادلی یکسان ندارند. ستاره دنباله‌دار از R_1 تا R_2 کشیده شده است که R_1 به خورشید نزدیکترین است و R_2 از خورشید دورترین است. فرض کنید می‌توانید R_1 و R_2 را اندازه‌گیری کنید (فقط با نگاه کردن به اندازه کشیده شده دنباله‌دار با تلسکوپ) نشان دهید که چطور می‌توانید

از آن اطلاعات و دیگر اطلاعات به دست آمده برای کشف توزیع (با حدود توزیع) اندازه‌های شعاع r استفاده کنید. فرض کنید همه ذرات "سیاه" هستند و چگالی آب را دارند. البته همه اینها ثابت نمی‌کند که فشار تابش از مثلاً "باد خورشیدی" پروتون که از خورشید برای تعیین فشار خروجی روی ذرات غبار و دم دنباله‌دار گسیل می‌شود مهمتر است.

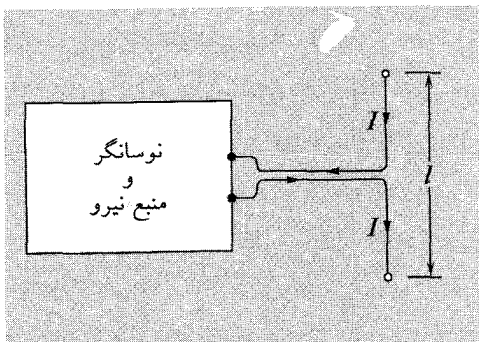
۱۵-۷ در یانوردی با نور خورشید. فرض کنید دوست دارید یک کشتی خورشیدی طراحی کنید که می‌تواند در فضا "بال بزند"، کشش گرانشی خورشید دقیقاً با فشار تابش خنثی می‌شود، فرض کنید کشتی از پلاستیک پوشیده شده با آلومینیم ساخته شده است. چگالی جرم کشتی را $2 \times 10^3 \text{ kg/cm}^3$ (چگالی آلومینیم 2.7 g/cm^3 است؛ چگالی پلاستیک ۱ است). فرض کنید هیچ "بار اضافی" نداشته باشد، بنابراین کشتی فقط وزن خودش را حمل می‌کند. فرض کنید نور خورشید کاملاً باز می‌تابد. نشان دهید برای اینکه کشتی در حالت سکون باقی بماند (در چارچوب لخت) ضخامت d باید با رابطه زیر داده شود

$$\rho d = \frac{2P/4\pi c}{MG}$$

که این نمادها در مسئله ۱۴-۷ تعریف شده‌اند. نشان دهید (از مسئله ۷-۱۳) که $R = 149 \text{ mm}$ (با استفاده از قانون کپلر برای زمین، با $P = 3.8 \times 10^{23} \text{ erg/s}$ و ν مساوی با یک بار در سال) که $MG = 1.3 \times 10^{26} \text{ cm}^2/\text{s}^2$. نشان دهید که برای $\rho = 2$ ضخامت d لازم در حدود 10^{-4} cm است (مگر اینکه من اشتباه کرده باشم). این برابر ۱ میکرون است و با ضریب 10^6 یا 10^7 برابر نازکتر از آنچه ما دوست داریم است. به نظر می‌آید که به حرکت مداری احتیاج داریم تا از افتادن به خورشید جلوگیری کند. نشان دهید که نتیجه این مسئله اندازه "ذره غبار مکعبی درخشان" با چگالی 2×10^3 را می‌دهد که اگر از یک طرف رو به خورشید جهت‌گیری شده باشد حول خورشید می‌ماند.

۱۶-۷ تابش از بار نقطه‌ای. از "انتگرال‌گیری شیشه قرص" برای به دست آوردن معادله (۱۲۵) بخش ۵-۷ استفاده می‌کنیم که نشان می‌دهد $E_{\perp}/E_{\parallel} = v_{\perp}t/c\Delta t$. بحث بعد از معادله (۱۲۷) بخش ۵-۷ را بخوانید.

۱۷-۷ تابش دوقطبی الکتریکی از آنتن رادیویی "دوقطبی دوگانه". فرستنده رادیویی و آنتن نشان داده شده در نمودار را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم جریان I روی تمام طول l آنتن یکسواخت باشد. سیمهای رابط از نوسانگر به آنتن بسیار به هم نزدیک‌اند و حول یکدیگر پیچیده شده‌اند. بنابراین جریان خالص در سیمهای رابط بیرون‌رونده و نزدیک‌شونده به طور مؤثر صفر است، و سیمهای رابط به طور محسوس در مقایسه با آنتن تابش نمی‌کنند. توپهای کوچک در انتهای آنتن خازنهایی



شکل م-۱۷

هستند که بار جمع شده را از جریان I جمع آوری می‌کند. این تویپها لازم نیستند — بارها در انتهای رساناها جمع می‌شوند و می‌خواهند که جریان کاملاً یکنواخت نباشد، اما می‌توان آنها را حذف کرد. طول آنتن l در مقایسه با طول موج λ تابش الکترومغناطیسی کوچک است.

(الف) نشان دهید که در فاصله نقطه مشاهده r میدان الکتریکی تابش شده E با معادله زیر

داده می‌شود

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{l\ddot{\mathbf{I}}_{\perp}(t')}{rc^2}, \quad t' = t - \frac{r}{c}$$

که برداری است که جهت و اندازه آن جهت و اندازه آنتن است و \mathbf{I}_{\perp} تصویر \mathbf{I} عمود بر خط دید $\hat{\mathbf{r}}$ از آنتن تا فاصله نقطه مشاهده است. [راهنمایی: این فرمول را با ایجاد یک "بار نقطه‌ای معادل که با سرعت معادل $\mathbf{v}(t')$ حرکت می‌کند" به دست آورید که نتایج غیرقابل تشخیص از نتایج \mathbf{I} می‌دهد].

(ب) نشان دهید که امپدانس مشخصه Z برای عدد موج k که با نوسانگر آزمایش شده بود

(یعنی بار مقاومتی فکر می‌کند که معلق است) با معادله زیر داده می‌شود

$$Z = (kl)^2 \times 20\Omega$$

که $c^{-1}\text{stat}\Omega = 30\Omega$ است.

۱۸-۷° پراکندگی نور با مولکولهای شیر. یک تنگ شیشه‌ای را از آب پر کنید. یک باریکه نور چراغ‌قوه از کنار به آب بتاباند. از زاویه‌ای در حدود ۹۰ درجه به نور پراکنده شده نگاه کنید و همچنین به لامپ چراغ‌قوه از داخل آب نگاه کنید. چند قطره شیر به آب اضافه کنید و آن را هم بزنید. همین‌طور نگاه کنید و شیر بیشتری اضافه کنید. به ته رنگ مایل به آبی نور پراکنده شده و

ته رنگ مایل زرد و قرمز نور عبور کرده باقی‌مانده توجه کنید. این موضوع را توضیح دهید. توجه کنید که وقتی به‌اندازه کافی (یا بسیار بیشتر) شیر به آب اضافه کردید نور پراکنده شده دیگر مایل به آبی به نظر نمی‌آید. بلکه مایل به سفید است، مانند مه یا دود. اما "غروب خورشید" بیشتر و بیشتر به سمت قرمز می‌رود. این موضوع را توضیح دهید. بالاخره این قدر کلفت می‌شود که شما نمی‌توانید لامپ چراغ‌قوه را به هیج وجه ببینید و نور پراکنده شده سفید می‌شود. همچنین نمی‌توانید "باریکه" چراغ‌قوه را در مایع "ببینید". "هوا" تبدیل به "ابر سفیدی" می‌شود. این امر را توضیح دهید. به نور پراکنده شده با پولاروید نگاه کنید (ما این موضوع را در فصل ۸ توضیح می‌دهیم!) ۱۹-۷ تابش به‌وسیله ورقه نازک بار. فرض کنید صفحه xy در $z = 0$ با یک ورقه نازک بار مثبت با چگالی بار یکنواخت σ پر شده است. تمام بارها در جهت x با همان دامنه و بسامد نوسان می‌کنند.

(الف) نشان دهید که طبق قانون گاوس برای z مثبت $E_z(z, t) = 2\pi\sigma$ ، چه بارها در حال نوسان باشند و یا همه در حال سکون باشند. (این شبیه فنز کشیده شده در تقریب اسلینکی است که مؤلفه z تنش ثابت است و مستقل از حرکت است).

(ب) با کشیدن یک طرح کلی از یک خط نیرو نشان دهید که میدان تابش با معادله زیر داده می‌شود

$$\frac{E_x(z, t)}{E_z(z, t)} = -\frac{\dot{x}(t')}{c}$$

که $x(t')$ سرعت هر کدام از بارها در زمان تأخیر $t' = t - (z/c)$ است. بنابراین میدان تابش در z مثبت برابر است با

$$E_x(z, t) = -2\pi\sigma \frac{\dot{x}(t')}{c}$$

(به‌جای طرح کلی می‌توانید از بحث جعبه قرص گاوسی استفاده کنید.) به این واقعیت خاص توجه کنید که در مقایسه با حالت تابش بار نقطه‌ای منفرد که شتابی (تأخیری) است متناسب با میدان تابش، اینجا سرعت (تأخیری) جلوتر است که متناسب با میدان تابش است. آیا می‌توانید توصیف کیفی برای "اتفاقی که خواهد افتاد" بدهید؟ (راهنمایی: سهمهای بارهای نقطه‌ای مختلف را که روی صفحه توزیع شده است در نظر بگیرید.)

۲۰-۷ تابش از ورقه نازک بار. نتیجه مسئله ۱۹-۷ را با جمع (انتگرال‌گیری) همه سهمهای بار نقطه‌ای از صفحه به‌دست آورید. به منظور همگرایی انتگرالتان، فرض کنید که ضخامت ورقه دقیقاً صفر نیست بلکه ضخامت d دارد (که d در مقایسه با طول موج λ بسیار کوچک است). فرض کنید این ورقه (همان‌طور که باید) تابش را جذب یا پراکنده می‌کند و ثابت تضعیف دامنه میانگین

κ است. نشان دهید که این عامل تضعیف نمایی را می‌دهد (e.a.f)

$$\text{e.a.f} = e^{-\alpha r}, \quad \alpha \equiv \frac{\kappa d}{z}$$

که k عدد موج و r فاصله سهم بار نقطه‌ای تا نقطه مشاهده است که در فاصله عمودی z از ورقه قرار دارد. φ را مساوی $kr - kz$ تعریف کنید. توجه کنید که برای بار نقطه‌ای در $x = y = z = 0$ ، $\varphi = 0$ است، که نزدیکترین بار نقطه‌ای به نقطه مشاهده در $x = y = 0$ ، $z = z$ است. نشان دهید که اگر $x(t')$ با قسمت حقیقی

$$x(t') = x_0 e^{i\omega t'}$$

داده شود، آنگاه سهم E_x از حلقه حلقوی در صفحه‌ای با شعاع ρ و ضخامت شعاعی $d\rho$ می‌تواند دستکاری شود تا به شکل زیر درآید

$$dE_x = 2\pi k x_0 e^{i(\omega t - kz)} e^{-i\varphi} e^{-\beta\varphi} d\varphi$$

که در آن

$$\beta \equiv \frac{\alpha}{k} = \frac{\kappa d}{kz}$$

و این واقعیت که تصویر شتاب عمود بر خط دید مورد استفاده باید نادیده گرفته شود. (این بر پایه این فرضیه است که چون عامل این تصویر برای φ کوچک ۱ است، می‌توانیم فرض کنیم که با افزایش φ کم‌کم کاهش پیدا می‌کند و به عامل تضعیف "نمایی" $e^{-\beta\varphi}$ تن در می‌دهد. همه اینها به خاطر این واقعیت حیرت‌انگیز امکان‌پذیر است که وقتی آزمایش را انجام می‌دهیم می‌توانیم β را مساوی صفر بگیریم و جوابی پیدا کنیم که مستقل از β باشد. عامل $e^{-\beta\varphi}$ را عامل همگرایی گویند. این عامل برای پیدا کردن جواب ضروری است، اما هیچ اهمیتی ندارد چه مقداری برای β در مقایسه با واحد در مدت زمانی که β کوچک است استفاده می‌کنید.) بعد نشان دهید که E_x قسمت حقیقی انتگرال dE_x از $\varphi = 0$ تا $\varphi = \infty$ است. نشان دهید که

$$\int_0^\infty e^{-i\varphi} e^{-\beta\varphi} d\varphi = \frac{1}{i + \beta} \approx -i \quad \beta \ll 1 \quad \text{به ازای}$$

بالاخره قسمت حقیقی را در نظر بگیرید و نشان دهید که همان نتیجه یکسان مسئله ۷-۱۹ را به دست خواهید آورد. بنابراین می‌توان اکنون منشأ فیزیکی "انتقال فاز ۹۰ درجه موثر" را توصیف کنید. این موضوع باعث می‌شود که میدان کل در مقایسه با سهم نزدیکترین بار یعنی باری که

در $x = y = z = 0$ قرار دارد ۹۰ درجه تأخیر فاز داشته باشد. بار "متوسط" به‌طور موثر یک چهارم طول موج دورتر از نزدیکترین بار است.

۲۱-۷ عبارت تقریبی برای ضریب شکست. یک موج تخت فرودی روی ورقه نازک بار در نظر بگیرید. بارها روی یک صفحه نازک‌اند، صفحه xy در $z = 0$. ضخامت صفحه Δz است. عدد چگالی بارها N است (برحسب یکای ذرات در cm^3). هر بار بار یکسان q و جرم m دارد و هر کدام با یک فنر با ثابت فنر $m\omega_0^2$ بسته شده است. فرض کنید که به هر بار، نیروهایی مربوط به فنرش و موج تخت فرودی تحریک‌شده‌اش وارد می‌شود. از سهم بارهای دیگر صرف‌نظر کنید (یعنی از سهم قطبش میدان صرف‌نظر کنید). میدان الکتریکی فرودی (در $z = 0$) را قسمت حقیقی $E_0 e^{i\omega t}$ بگیرید. میدان تابش‌شده در جهت جلو را پیدا کنید. آن را با میدان فرودی برهم نهید. نشان دهید که میدان کل در $z = 0$ (برای این تقریبه‌ها) با قسمت حقیقی زیر داده می‌شود

$$E_{\text{کل}} = E_0 e^{i\omega t} \left\{ 1 - \frac{i\omega^2 \pi N q^2 \Delta z}{mc(\omega_0^2 - \omega^2)} \right\}$$

نشان دهید که اگر در مورد تیغه‌ای از بار مانند یک تیغه با ضخامت Δz و ضریب شکست n فکر کنید، آنگاه فرو کردن تیغه یک انتقال فازی متناظر زمان تأخیر t_0 می‌دهد یعنی به جای $E_0 e^{i\omega t}$ در عقب تیغه (در $z = 0$) میدانی برابر $E_0 e^{i\omega(t-t_0)}$ وجود دارد که

$$\omega t_0 = \frac{\Delta z}{\lambda} 2\pi(n-1) = k \Delta z(n-1)$$

نشان دهید که برای $\omega t_0 \ll 1$ این فرمول تبدیل می‌شود به

$$n-1 = \frac{2\pi N q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

نشان دهید که این نتیجه‌ای است که به‌دست می‌آید. (نتیجه دقیقتر تقریباً برای n نزدیک واحد در بخش ۳-۴ به‌دست آمد).

۲۲-۷ تکانه زاویه‌ای موج پیشرونده تخت قطبیده دایره‌ای. به‌سادگی نتیجه معروف $J = W/\omega$ را به‌صورت زیر به‌دست آورید: فرض کنید موج تخت با یک ورقه باردار که همه بارها در دایره‌های یکسان حرکت می‌کنند به‌وجود بیاید. هر بار مجبور است که در یک مسیر دایره با شعاع ثابت r به‌وسیله یک لوله بی‌اصطکاک حرکت کند. وقتی انرژی بارها کم می‌شود سرعت آنها نیز کم می‌شود. بنابراین سرعت زاویه‌ای ω کم می‌شود، انرژی آنها کاهش پیدا می‌کند و تکانه زاویه‌ای کم می‌شود، که همه به خاطر اتلاف تابش است. (اما آنها همیشه سرعتی برابر $c \ll v$ دارند.) نشان دهید که اتلاف تکانه زاویه‌ای بارهایی که در مسیر دایره‌ها حرکت می‌کنند ω^{-1} برابر اتلاف انرژی است. Q.E.D.

۲۳-۷ زمان متوسط شار انرژی، چگالی انرژی، و تکانه خطی در واحد حجم در یک باریکه نور تکفام یکنواخت با شدت 10^{10} W/cm^2 چقدر است؟

۲۴-۷ یک الکترون به طور هماهنگ با دامنه 10^{-8} cm و بسامد 10^{14} Hz نوسان می‌کند؛ توان تابشی متوسط کل چقدر است؟

جواب: تقریباً 10^{-10} erg/s $\times \frac{1}{3}$.

۲۵-۷ چطور یک شیء می‌تواند انرژی نور را بدون جذب تکانه خطی جذب کند؟ چطور می‌تواند تکانه خطی را با جذب ناچیز انرژی جذب کند؟ چطور می‌تواند تکانه زاویه‌ای را با جذب ناچیز انرژی جذب کند؟

۲۶-۷ فرض کنید یک نوسانگر ابرسانا دارید و آنتن آن تابش میکروموجی با طول موج 10^6 cm گسیل می‌کند. در $t = 0$ چشمه توان را که اتلاف انرژی‌اش را توسط تابش پر می‌کند دور کنید. در هیچ جای مدار مقاومت معمولی وجود ندارد. زمان فروافت متوسط نوسانات هماهنگ میرای الکترونهاى آنتن را به دست آورید. از نتایج مسئله ۷-۱۷ استفاده کنید.

جواب: L را القايدگى مدار LC نوسانى بگيريد که بسامد نوسان را می‌دهد. l طول آنتن است ($l \ll \lambda$). آنگاه

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3} \frac{l^2 \omega^2}{L c^3}$$

این فرمول با عبارتی که برای عکس طول عمر فروافت بار منفرد e که جرم m دارد و در زیر می‌آید قابل مقایسه است:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{m c^3}$$

۲۷-۷ یک ایستگاه رادیویی در فاصله 10^6 مایلی، 50° وات موج رادیویی قطبیده عمودی تابش می‌کند. ولتاژ لحظه‌ای بیشینه که الکترونها را در آنتن گیرنده شما تحریک می‌کند چقدر است، اگر طول آنتن 20 cm و در جهت عمودی جهت‌گیری شده باشد؟ از بازتابهای امواج زمین و ساختمانها، و غیره صرف‌نظر کنید.

۲۸-۷ چشمه نور اسمیت-پورسل. یک باریکه نازک الکترونهاى با انرژی جنبشی 30 keV در فرود مایل موازی با سطح یک توری پراش فلزی که فاصله خطوط $d = 1.67 \mu$ است حرکت می‌کند. باریکه عمود بر خطوط پیش می‌رود. "تصویر آینه‌ای" باری تولید می‌کند که با الکترون داده شده پیش می‌رود و در مواجه با یک خط متحمل یک انحراف ناگهانی می‌شود چون بار تولید شده باید از سطح بگذرد. بنابراین "پیچ تابش" از هر خط منتشر می‌شود وقتی الکترون از آن عبور می‌کند. فرض کنید ناظر نسبت به باریکه الکترون زاویه θ داشته باشد، که θ در امتداد باریکه صفر است.

(الف) نشان دهید که ناظر تپهای تابش با زمان تناوب T بین تپها را دریافت می‌کند که $T = (d/v) - (d \cos \theta)/c$ ؛ نشان دهید که آنگاه طول موج برابر $d(\beta^{-1} - \cos \theta)$ است.

(ب) آیا این تنها طول موجی است که با Q معلوم مشاهده می‌شود؟ (در مورد آنالیز فوریه ضربه‌های تابش وابسته به زمان که در بازه‌های زمانی T می‌رسد فکر کنید).

(ج) تعداد الکترونها 30°keV را که در $\theta = 15^\circ$ مشاهده می‌شود حساب کنید. انتظار دیدن چه رنگهایی را دارید؟

(د) آیا انتظار دارید نور قطبیده شود؟^۱

۲۹-۷ شکل امواج ساکن آب. در متن کتاب از بحث شهودی استفاده کردیم تا نشان دهیم اگر جابه‌جایی عمودی در امواج ساکن وابستگی x در $\sin kx$ داشته باشد آنگاه جابه‌جایی افقی باید وابستگی $\cos kx$ داشته باشد.

(الف) این نتیجه جبری مشابه را به دست آورید. فرض کنید

$$\psi_y = \cos \omega t \sin kx f(y)$$

$$\psi_x = \cos \omega t [\cos kx g(y) + \sin kx h(y)]$$

سپس نشان دهید که $h(y)$ باید صفر باشد.

(ب) نشان دهید که نتایج به دست آمده برای حرکت قطره آب در امواج ساکن مربوط به نوسان هماهنگ جلو و عقب در امتداد خط مستقیم است.

۳۰-۷ فرض کنید که در سطح اقیانوس امواج پیشرونده‌ای با دامنه $1^\circ f$ و طول موج $3^\circ f$ وجود دارد. اگر شما یک ماهی (یا یک غواص) باشید، چقدر پایینتر از سطح آب باید شنا کنید اگر بخواهید دامنه حرکتتان $(1/2)f$ باشد؟

جواب: در حدود $1.5f$.

۳۱-۷ شکل امواج آب پیشرونده. فرض کنید ψ_y شکل زیر را داشته باشد

$$\psi_y = A \cos(\omega t - kx) f(y)$$

که $f(y)$ تابع نامعلومی از y است. اکنون فرض کنید آبی که ذخیره شده است، تراکم‌ناپذیر است و هیچ حبابی ندارد که نشان دهید ψ_y و ψ_z با معادله‌های (۷۵) و (۷۶) بخش ۳-۷ نشان داده می‌شود.

۱. اکنون آزمایش جالب زیر را بخوانید:

۳۲-۷ قانون پاشندگی برای امواج آب یعنی معادله (۷۲) بخش ۷-۳ وقتی به دست می آید که ما امواج ساکن را در نظر می گیریم. قانون پاشندگی برای امواج پیشرونده چیست؟

۳۳-۷ قانون پاشندگی برای کشش سطحی امواج. سطح آب مانند یک پرده خراشیده عمل می کند. در حالت تعادل کشش در امتداد x برابر است با ثابت کشش سطحی، $T = ۷۲ \text{ dyn/cm}$ ضربدر طول L در امتداد جهت z "نامطلوب". اگر سطح آب انحنای کوژ داشته باشد، کشش سطحی یک فشار به طرف پایین وارد می کند. نشان دهید برای یک موج سینوسی فشار به طرف پایین با معادله زیر داده می شود

$$p = Tk^2 \psi_y$$

نشان دهید که وزن گرانشی آب فشاری می دهد که برابر است با یک ثابت (مقدار آن در حالت تعادل) بعلاوه مقدار زیر

$$p = \rho g \psi_y$$

نشان دهید که سهم نیروی بازگرداننده بر واحد جرم بر واحد جابه جایی ω^2 مربوط به کشش سطحی از نتیجه نیروی بازگرداننده گرانشی با جایگزازی ρg به جای Tk^2 به دست می آید. بنابراین نشان دهید که قانون پاشندگی کامل با معادله زیر داده می شود

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{T}{\rho} k^3 \right) \left[\frac{1 - e^{-2kh}}{1 + e^{-2kh}} \right]$$

۳۴-۷ امواج الکترومغناطیسی تخت. نشان دهید که برای امواج تخت الکترومغناطیسی در خلأ، معادلات ماکسولی که رابطه بین E_y و B_x را می دهند "معادل" معادلات ماکسولی هستند که E_x و B_y را به هم مربوط می کنند از این نظر که یک سری معادلات از معادلات دیگر با چرخاندن سیستم دکارتی به اندازه 90° حول محور z (که محور انتشار است) به دست می آید. طرحی بکشید که جهتهای \mathbf{E} و \mathbf{B} و محورهای x و y را نشان دهد.

۳۵-۷ امواج الکترومغناطیسی ساکن در خلأ. نشان دهید که اگر $E_x(z, t)$ موج ساکن $E_x = A \cos \omega t \cos kz$ باشد آنگاه $B_y(z, t)$ موج ساکن $A \sin \omega t \sin kz$ است.

۳۶-۷ روابط انرژی در امواج الکترومغناطیسی ساکن. فرض کنید یک موج ساکن به شکل آنچه در مسئله ۳۵-۷ داده شده است داریم. چگالیهای انرژی مغناطیسی و الکتریکی و بردار پوینتینگ را تابعی از فضا و زمان پیدا کنید. یک ناحیه به طول $(1/4)\lambda$ را که از گره در E_x تا یک پادگره در E_x گسترش دارد در نظر بگیرید. یک نمودار کلی از E_x و B_y برحسب z روی آن ناحیه در زمانهای $t = 0$ و $T/8$ و $T/4$ بکشید. نموداری کلی از چگالی انرژی الکتریکی، انرژی

مغناطیسی و انرژی کل روی آن ناحیه در زمانهای مساوی بکشید. جهت و اندازه بردار پوئین‌تینگ S_z را برای آن زمانهای مساوی به‌دست آورید.

۳۷-۷ معادلات دیفرانسیلی خطی جفت‌شده از مرتبه اول برای امواج در یک تار. یک تار همگن پیوسته با چگالی جرمی خطی ρ و کشش تعادلی T را در نظر بگیرید. همان‌طور که می‌دانید چنین تاری می‌تواند امواج غیر پاشنده با سرعت $v = \sqrt{T/\rho}$ را حمل کند. معادلات موج $F_1(z, t)$ و $F_2(z, t)$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$F_1(z, t) \equiv -\frac{T}{v} \frac{\partial \psi_x}{\partial z}, \quad F_2(z, t) \equiv \rho \frac{\partial \psi_x}{\partial t}$$

بنابراین F_1 برابر $1/v$ ضربدر نیروی بازگرداننده عرضی است که قسمتی از تار در طرف راست z به طرف چپ وارد می‌کند و F_2 تکانه عرضی بر واحد طول است. نشان دهید که F_1 و F_2 در معادلات جفت‌شده از مرتبه اول صدق می‌کنند

$$\frac{1}{v} \frac{\partial F_1}{\partial t} = -\frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{1}{v} \frac{\partial F_2}{\partial t} = -\frac{\partial F_1}{\partial z}$$

نشان دهید که این معادلات “معمولی” اند یعنی اساساً تساوی‌اند. نشان دهید که دیگری معادل قانون دوم نیوتون است. توجه کنید که این معادلات شبیه به شکل دو معادلهٔ ماکسول است که به E_x و E_y مربوط است با E_x مشابه F_1 و E_y مشابه F_2 . به همین ترتیب یکی از دو معادلهٔ ماکسول می‌تواند به‌عنوان “تساوی معمولی” در نظر گرفته شود اگر کسی نظریهٔ نسبیت خاص را بداند.

۳۸-۷ معادلات موج مناسب $F_1(z, t)$ و $F_2(z, t)$ را برای امواج طولی روی تار مهره‌دار به‌دست آورید به‌طوری که F_1 و F_2 معادلات جفت‌شده از مرتبه اول با شکلی که در مسئلهٔ ۳۷-۷ بود باشند، همین کار را برای امواج صوتی انجام دهید. همین کار را برای امواج الکترومغناطیسی در خط انتقال نیرو انجام دهید. (در حالت آخر، معادلات جفت‌شده صرفاً “شبیه شکل” معادلات ماکسول هستند؛ آنها معادلات ماکسول هستند، که برحسب جریان و ولتاژ به‌جای میدانهای E_x و B_y بیان می‌شوند.

۳۹-۷ با استفاده از انتگرال‌گیری نشان دهید که مقدار متوسط $\theta \sin^2$ که روی همهٔ جهات میانگین گرفته شده است برابر $2/3$ است که θ زاویهٔ بین جهت معلوم و محور ثابت است، یعنی محور “قطبی” و هر زاویهٔ فضایی غیرمتماهی کوچک “وزنی” (در میانگین‌گیری) متناسب با زاویهٔ فضایی دارد. از دستگاه مختصات قطبی برای انجام انتگرال استفاده کنید.

۴۰-۷ سرابها در بزرگراهها. وقتی در یک روز گرم تابستانی رانندگی می‌کنید اغلب جلوی خود در فاصله دور چیزی می‌بینید که شبیه استخرهای آب است که به طرف آسمان یا چراغهای بالای ماشینی که به طرف آن می‌رود باز می‌تابد. هرچه نزدیکتر بروید، وقتی زاویه بازتاب (که از سطح بزرگراه اندازه‌گیری می‌شود) بزرگتر از زاویه بحرانی معین شود، بازتابها ناگهان از بین می‌رود. این بازتابها یا "سرابها" مربوط به بازتاب داخلی کلی نور فرودی از هوای سردتر (محیط چگالتر) به هوای گرمتر نزدیک به پیاده‌روست. هوای گرمتر چگالی کمتر و ضریب شکست کوچک دارد. (آن را $n^2 - 1$ بنامید که متناسب با چگالی هواست.) فرض کنید هوای نزدیک پیاده‌رو به مقدار ΔT گرمتر از هوای چند اینچ بالای پیاده‌روست. فرض کنید تقریباً دما ناگهان تغییر کند. دمای هوای سرد را $T = 30^\circ\text{K}$ (درجه کلوین) بگیرید، و افزایش دمای ΔT نزدیک پیاده‌رو 1°C می‌شود. ضریب شکست n هوا در حدود 1.0003 است. φ را زاویه فرود پرتو در زاویه بحرانی برای بازتاب داخلی کلی بگیرید، φ را از پیاده‌رو اندازه بگیرید یعنی $\varphi = 90^\circ$ منهای زاویه فرودی است که عمود بر پیاده‌رو اندازه‌گیری می‌شود. فرض کنید $1 \ll n - 1$ فرمول $\varphi \approx [2(n-1)\Delta T/T]^{1/2}$ را به‌ازای $1 \ll \varphi$ به‌دست آورید. اگر چشماتان $4f$ از پیاده‌رو فاصله داشته باشد چقدر جلوتر از خودتان لبه نزدیک "استخر آب" ظاهری را خواهید دید؟

۴۱-۷ موجبر. یک موجبر مستطیلی ابعاد عرضی داخلی $5 \times 1\text{cm}$ دارد.

(الف) پایینترین بسامد موج الکترومغناطیسی که از پایین موجبر بدون تضعیف می‌گذرد را برحسب مگادور بر ثانیه به‌دست آورید؟

(ب) با یک نمای کلی جهت و تغییر مکان میدان الکتریکی این موج را نشان دهید.

(ج) سرعت فاز و گروه (که با ضریبی از c بیان می‌شود) موجی با بسامد مساوی $5/4$ پایینترین بسامد که بدون تضعیف عبور می‌کند را پیدا کنید.

(د) طول تضعیف متوسط موجی با بسامد $5/4$ پایینترین بسامد بدون تضعیف را به‌دست آورید.

۴۲-۷ ضریب بازتاب برای میدان الکتریکی. با مقایسه نشان دهید که القاییدگی بر واحد طول در خط انتقال نیرو معادل جرم بر واحد طول برای یک تار کشیده است، و عکس ظرفیت بر واحد طول شبیه کشش تار است و $C = \epsilon C_{\text{خا}}$ و $L = \mu L_{\text{خا}}$ و اینکه سرعت فاز در خلا c است.

(الف) با مقایسه با تار نشان دهید که ضریب شکست n مساوی $(\epsilon\mu)^{1/2}$ است و اینکه امپدانس مشخصه Z مساوی $(\mu/\epsilon)^{1/2}$ برابر مقدار آن در خلا در خط انتقال نیروست. سپس نشان دهید که

ضریب بازتاب میدان الکتریکی در گذشتن از خلأ به محیط برابر $R = [1 - (n/\mu)]/[1 + (n/\mu)]$ است. این همچنین ضریب شکست میدان الکتریکی امواج تخت است که به‌طور عمود از خلأ بر سطحی که محیط شروع می‌شود فرود می‌آید.

(ب) حال به شما می‌گوییم (یا از شما می‌خواهیم) که اشتقاق دقیقتر ضریب شکست با استفاده از معادلات ماکسول چگونه است. با استفاده از معادلات ماکسول و انتگرال‌گیری خطی مناسب نشان دهید که تانژانت میدان الکتریکی در مرز پیوسته است و $\partial \mathbf{B} / \partial t$ در مرز بینهایت نیست. (و نیست). بنابراین فرض کنید موج الکترومغناطیسی فرودی به‌طور خطی با میدان الکتریکی در

$$E_x(\text{فرودی}) + E_x(\text{بازتابیده}) = E_x(\text{منتقل‌شده})$$

(ج) از معادلات ماکسول برای محیطی مانند آنچه در بحث تکمیلی ۹ داده شده است استفاده کنید. میدان $\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$ را در نظر بگیرید. این میدان با تعریف μ مساوی \mathbf{B}/μ است و همچنین با \mathbf{H} خوانده می‌شود. نشان دهید که مؤلفه مماسی \mathbf{H} پیوسته است و نشان می‌دهید که مشتق زمان جزئی $\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ بینهایت نیست. (و نیست). سپس نشان دهید که برای یک موج فرودی از خلأ $(\text{منتقل‌شده}) B_\mu = (1/\mu) B_y(\text{فرودی}) + B_y(\text{بازتابیده})$. حال از این واقعیت استفاده کنید که در محیط B_y ، n برابر E_x است و از رابطه بین B_y و E_x در امواج فرودی و بازتابیده استفاده کنید تا ضریب شکست $R = R_x(\text{بازتابنده})/E_x(\text{فرودی})$ را به‌دست آورید. نشان دهید که

$$R = [1 - (n/\mu)]/[1 + (n/\mu)]$$



قطبیدگی

۱-۸ مقدمه

در فصل ۷ آموختیم که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی موج تخت الکترومغناطیسی بر راستای انتشار موج \hat{z} عمودند. دو راستای عمود \hat{x} و \hat{y} موجود است، و میدانهایی که جهت خاصی نسبت به \hat{x} و \hat{y} دارند مستقل از میدانهایی هستند که جهتی 90° درجه متفاوت با آنها دارند. پس ممکن است که مقادیر (دامنه‌های) مختلفی از میدان در هر یک از دو جهت عمود وجود داشته باشد و رابطه فازی این میدانها نیز گوناگون باشد. رابطه خاص میان دامنه‌ها و فازهای دو میدان عمود مستقل را حالت قطبیدگی می‌نامند.

هنگامی که امواج الکترومغناطیسی بر مواد تابیده می‌شوند (و با آنها برهم‌کنش انجام می‌دهند)، حالت‌های قطبیده مختلف موج فرودی غالباً به‌طور یکسان با ماده برهم‌کنش انجام نمی‌دهند. به‌عنوان مثال، ممکن است ماده‌ای بیابیم که در آن ذرات باردار می‌توانند آزادانه در جهت \hat{x} حرکت کنند، اما حرکت این ذرات در جهت \hat{y} به‌هیچ‌وجه امکانپذیر نباشد. در این صورت E_x می‌تواند بر روی ذرات باردار کار انجام دهد، اما E_y نمی‌تواند. بنابراین آن قسمت از انرژی تابش الکترومغناطیسی که با دامنه E_x مربوط است، به انرژی جنبشی ذرات باردار کاهش یافته و سپس بر اثر برخورد این

ذرات با یکدیگر به گرما تبدیل می‌شود، در صورتی که E_{ij} بدون تغییر باقی می‌ماند. یا ممکن است چنین باشد که فاز E_x نسبت به فاز E_{ij} تغییر کند، بدون اینکه کاهش در انرژی پدید آید (یعنی بدون کم شدن دامنه E_x). در همه این برهم‌کنشهای متقارن، بر اثر برهم‌کنش، حالت قطبیدگی تابش الکترومغناطیس، کمی یا کاملاً تغییر می‌کند. این امر پیامدهای مهمی را در بر دارد. با بررسی اثر مواد کاملاً شناخته شده بر روی موج فرودویی که حالت قطبیدگی آن مجهول است، حالت قطبیدگی را می‌توان مشخص کرد. بالعکس، با اندازه‌گیری تغییراتی که ماده در حالت قطبیدگی مشخصی به وجود می‌آورد، می‌توان به برخی از خواص ماده پی برد. مثلاً نقشه برداری از جهت میدان مغناطیسی، در بازوی ماریچی "متعلق به ما" در کهکشانمان، با اندازه‌گیری جهت قطبیدگی امواج رادیویی ناشی از منابع فراکهکشانی به صورت تابعی از جهت چشمه و طول موج تابش، هم‌اکنون در حال تعیین است.^۱ مهم است در نظر داشته باشیم که مفهوم قطبیدگی فقط به امواجی که حداقل دو "جهت قطبیدگی" مستقل دارند، اطلاق می‌شود. مثلاً موج صوتی‌ای را که در هوا در جهت \hat{z} انتشار می‌یابد، در نظر بگیرید. با دانستن بسامد، دامنه و فاز چنین موجی، دیگر مجهولی باقی نمی‌ماند. می‌دانیم که جابه‌جایی هوا در موج صوتی در امتداد جهت انتشار موج است — امواج از نوع امواج طولی هستند. با این حال، در حالت عادی نمی‌گوییم که این امواج "قطبیده طولی" هستند؛ چنین عبارتی از مفهومی غنی برخوردار نیست. عبارت حالت قطبیدگی را به توصیف امواجی که حداقل دارای دو جهت مختلف قطبیدگی باشند، اختصاص می‌دهیم. در مورد امواج صوتی در جسم جامد و یا امواج اسلینکی، سه حالت قطبیدگی ممکن است — یک جهت قطبیدگی طولی و دو جهت قطبیدگی عرضی. در چنین حالتی، امواج قطبیده طولی و یا دو موج مختلف قطبیده عرضی (و یا برهم‌نهی از هر سه قطبیدگی)، می‌تواند وجود داشته باشد.

۸-۲ توصیف حالت‌های قطبیدگی

تمام امواجی که ما مطالعه می‌کنیم از کمیتی فیزیکی تشکیل شده‌اند که جابه‌جایی‌اش از مقداری که در تعادل داراست، با زمان و مکان تغییر می‌کند. این جابه‌جایی را می‌توان با بردار $\psi(x, y, z, t)$ توصیف کرد. معمولاً امواج تخت را بررسی می‌کنیم که برای آنها ψ صورت $\psi(z, t)$ را داراست و z در امتداد جهت انتشار موج اندازه‌گیری می‌شود. (در اینجا هم امواج ساکن و هم امواج پیشرونده را در نظر می‌گیریم). کمیتهای $\partial\psi(z, t)/\partial z$ و $\partial\psi(z, t)/\partial t$ اغلب کمیتهایی هستند که جالب توجه‌ترین خواص فیزیکی را دارند. این مطلب را در مورد امواج روی تار و امواج صوتی، که در هر یک $\psi(z, t)$ نشان‌دهنده جابه‌جایی ذرات محیط نسبت به وضعیت تعادلی است، مشاهده کرده‌ایم.

1. G.L.Berge and G.A.Seielstad, *Scientific American*, p46(June1965).

برای امواج تخت که در امتداد \hat{z} انتشار می‌یابند، می‌توان جابه‌جایی را به صورت

$$\psi(z, t) = \hat{x}\psi_x(z, t) + \hat{y}\psi_y(z, t) + \hat{z}\psi_z(z, t) \quad (۱)$$

نوشت. در مورد امواج عرضی روی تار، ψ فقط مؤلفه‌های x و y دارد. این چنین امواجی را امواج با قطبیدگی عرضی می‌نامند. (درواقع، امواج طولی بر روی تار هم می‌تواند وجود داشته باشد، این امواج حاصل تغییرات کشش و تغییرات سرعت طولی ذرات تار هستند.) برای امواج صوتی در هوا، جابه‌جایی ψ در امتداد جهت انتشار \hat{z} است. اینها را امواج طولی می‌نامند، اما معمولاً عبارت قطبیده طولی به آنها اطلاق نمی‌شود. (درواقع، می‌توان امواج عرضی صوتی را در یک لوله به وجود آورد. این امواج عرضی مانند امواج طولی مستقیماً در امتداد لوله منتشر نمی‌شوند، بلکه در حین انتشار به دیواره‌های لوله نیز برخورد می‌کنند. در نهایت جهت انتشار همان امتداد لوله است، اما نوسانهای هوا علاوه بر مؤلفه‌های طولی مؤلفه‌های عرضی نیز دارد.) در مورد امواج الکترومغناطیسی تخت، جابه‌جایی ψ عمود بر جهت \hat{z} است، همان‌طور که در بخش ۷-۵ دیدیم. در آنجا یافتیم که برای امواج تخت در خلأ، \mathbf{E} و \mathbf{B} همواره عمود بر جهت \hat{z} هستند. (وجود مؤلفه‌های طولی \mathbf{E} و \mathbf{B} امکانپذیر است، اگر برای مثال، این امواج در یک موجبر یا کاواک حبس شوند.)

قطبیدگی امواج عرضی. از حالا به بعد فقط آن دسته از امواج عرضی را که به صورت

$$\psi(z, t) = \hat{x}\psi_x(z, t) + \hat{y}\psi_y(z, t) \quad (۲)$$

هستند، در نظر می‌گیریم. در بحثی که در ادامه می‌آید، دو مثال فیزیکی را مدنظر داریم: یکی امواج عرضی بر روی تار کشیده شده یا اسلینکی است، و دیگری امواج تخت الکترومغناطیسی در خلأ. برای امواج روی تار، $\psi(z, t)$ نشان‌دهنده جابه‌جایی عرضی تار در هر لحظه، نسبت به مکان تعادلی‌اش است. کمیتهای دیگری که از نظر فیزیکی جالب توجه هستند، یکی سرعت عرضی $\partial\psi/\partial t$ و دیگری نیروی عرضی $-T \cdot \partial\psi/\partial z$ است که به وسیله تار در طرف چپ یک نقطه مفروض سیم z بر تار در طرف راست z وارد می‌آید. اگر $\psi(z, t)$ معلوم باشد، این کمیتهای را نیز می‌دانیم. برای امواج تخت الکترومغناطیسی $\psi(z, t)$ نشان‌دهنده میدان الکتریکی عرضی $\mathbf{E}(z, t)$ است. کمیت فیزیکی جالب توجه دیگر، میدان مغناطیسی عرضی $\mathbf{B}(z, t)$ است، که با دانستن $\mathbf{E}(z, t)$ آن را نیز می‌دانیم. مثلاً همواره می‌توان هر $\mathbf{E}(z, t)$ را برهم‌نهدی از امواج پیشرونده در دو جهت $+z$ و $-z$ تجزیه کرد. اگر \mathbf{E}^+ آن قسمت از \mathbf{E} باشد که موج پیشرونده در جهت $+z$ را تشکیل

می‌دهد و \mathbf{E}^- آن قسمت که موج پیشرونده در جهت z - را تشکیل می‌دهد، می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}^+(z, t) + \mathbf{E}^-(z, t) \quad (۳)$$

از مطالعه امواج پیشرونده (بخش ۴-۷) می‌دانیم که میدان مغناطیسی \mathbf{B}^+ مربوط به \mathbf{E}^+ برابر است با $\hat{z} \times \mathbf{E}^+$ ، و میدان مغناطیسی \mathbf{B}^- مربوط به \mathbf{E}^- برابر است با $-\hat{z} \times \mathbf{E}^-$. بنابراین میدان مغناطیسی مربوط به برهم‌نهی میدانهای الکتریکی، معادله (۳) برابر است با

$$\mathbf{B}(z, t) = \hat{z} \times [\mathbf{E}^+(z, t) - \mathbf{E}^-(z, t)] \quad (۴)$$

از معادله (۴) استفاده مستقیمی نخواهیم کرد. فقط خواستیم به شما نشان دهیم (یا به شما یادآوری کنیم) که با داشتن \mathbf{E} (و فرض اینکه می‌دانیم با امواج تخت در خلأ سروکار داریم)، \mathbf{B} "خود به خود" معلوم است (به همان معنی که معادلات ماکسول "خود به خود" وجود دارند).

بار نقطه‌ای مؤثر. تصویر فیزیکی دیگری که در مورد امواج تخت الکترومغناطیس بسیار مفید است، آن است که فکر می‌کنیم امواج تخت از بار نقطه‌ای با نوسانهای هماهنگ که در مبدأ دستگاه مختصات قرار دارد گسیل می‌شود. مکان این بار نقطه‌ای باید آنقدر دور باشد که امواج تابش شده تقریب خوبی از امواج تخت باشند. اگر جابه‌جایی عرضی لحظه‌ای بار q با

$$\psi(t) = \hat{x}x(t) + \hat{y}y(t) = \hat{x}x \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{y}y \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (۵)$$

نشان داده شود، از مبحث تابش بار نقطه‌ای (بخش ۷-۵) می‌دانیم که میدان الکتریکی $\mathbf{E}(z, t)$ با روابط زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= -\frac{q\mathbf{a}_\perp(t')}{rc^2} \\ &= -\frac{q\ddot{\psi}(t')}{zc^2} \end{aligned}$$

بنابراین، از آنجایی که $\ddot{\psi} = -\omega^2 \psi$ داریم

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{q\omega^2 \psi(t')}{zc^2} = \frac{q\omega^2 \psi\left(t - \frac{z}{c}\right)}{zc^2} \quad (۶)$$

پس، هنگامی که امواج پیشرونده تخت الکترومغناطیسی را در نظر داریم، می‌توانیم $\psi(z, t)$ را به منزله میدان الکتریکی $\mathbf{E}(z, t)$ بگیریم؛ و یا می‌توانیم به آن به‌عنوان جابه‌جایی بار مثبت q در

زمان پیشتر $t' = t - z/c$ ، فکر کنیم (صرفنظر از ضریب ثابت، qw^2/zc^2). حتی اگر $E(z, t)$ واقعاً به وسیله یک بار q به وجود نیامده باشد، می‌توانیم بار q را مطابق با معادله (۶) "اختراع کنیم". (وقتی که اطلاعات مشخصی از چشمه تابش‌کننده نداشته باشیم، نمی‌توانیم بگوییم که پرتو تابیده شده، به وسیله بار نقطه‌ای مؤثر q ، تولید نمی‌شود.)

قطبیدگی خطی. در مورد امواج عرضی (امواج تخت الکترومغناطیسی و امواج عرضی روی تار)، اگر جابه‌جایی به صورت نوسانی به جلو و عقب در امتداد خط ثابتی عمود بر \hat{z} باشد، امواج را قطبیده خطی می‌نامیم. دو جهت مستقل عرضی وجود دارد. آنها را می‌توان \hat{x} و \hat{y} گرفت. مقدار ثابتی از z را در نظر بگیرید. بدین ترتیب دیگر لزومی ندارد که مشخص کنیم آیا با امواج ساکن سروکار داریم یا پیشرونده یا هر دو؛ یعنی دیگر نیازی به مشخص کردن رابطه‌ای که نوسانهای نقاط مختلف z از نظر فاز با یکدیگر دارند، نیست زیرا فقط یک مقدار z را در نظر گرفته‌ایم. بدین ترتیب نوسانهای مربوط به موج تخت قطبیده خطی یکی از دو صورت زیر را دارد

$$\psi(t) = \hat{x}A_1 \cos \omega t \quad (۷)$$

$$\psi(t) = \hat{y}A_2 \cos \omega t \quad (۸)$$

در اینجا از ذکر z صرفنظر کرده‌ایم و ثابت فاز را برابر صفر گرفته‌ایم. در حالت کلی‌تر، می‌توان نوسانی با قطبیدگی خطی داشت که نه در امتداد \hat{x} است و نه در امتداد \hat{y} . چنین نوسانی را همواره می‌توان به صورت برهم‌نهی از دو نوسان قطبیده خطی مستقل، که با معادلات (۷) و (۸) داده شده‌اند، نوشت؛ مؤلفه‌های x و y در این برهم‌نهی می‌باید دارای ثابت فاز یکسان باشند (و یا ثابتهای فازی که به میزان π با یکدیگر متفاوت‌اند)

$$\psi(t) = \hat{x}A_1 \cos \omega t + \hat{y}A_2 \cos \omega t \quad (۹)$$

به عبارتی دیگر

$$\psi(t) = (\hat{x}A_1 + \hat{y}A_2) \cos \omega t \quad (۱۰)$$

بردار $\hat{x}A_1 + \hat{y}A_2$ دارای مقدار و جهتی است که مستقل از زمان هستند. بنابراین $\psi(t)$ که با معادله (۱۰) داده شده است، نوسانی در امتداد یک خط ثابت را تشکیل می‌دهد. دامنه A این نوسان با رابطه

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad (۱۱)$$

داده می‌شود. امتداد $\psi(t)$ (برای قطبیدگی خطی) همواره یا در جهت $\hat{e} + \text{ویا}$ (پس از گذشت نصف دوره تناوب) در جهت $-\hat{e}$ است، \hat{e} بردار بیکه

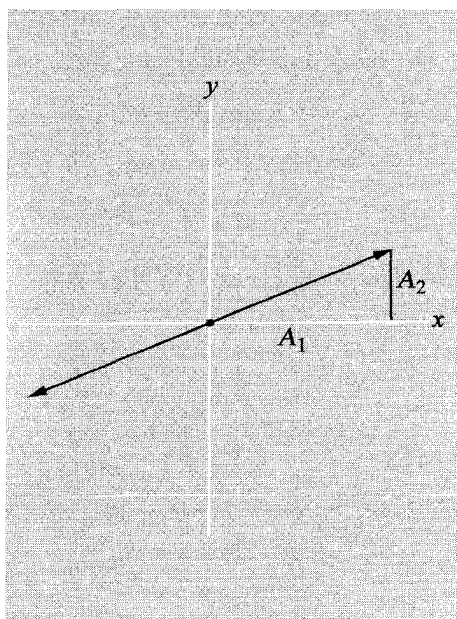
$$\hat{e} = \frac{A_1}{A} \hat{x} + \frac{A_2}{A} \hat{y} \quad (12)$$

است. می‌توان دید که \hat{e} بردار بیکه است

$$\begin{aligned} \hat{e} \cdot \hat{e} &= \frac{(A_1 \hat{x} + A_2 \hat{y})^2}{A^2} \\ &= \frac{A_1^2 \hat{x} \cdot \hat{x} + A_2^2 \hat{y} \cdot \hat{y} + 2A_1 A_2 \hat{x} \cdot \hat{y}}{A^2} \\ &= \frac{A_1^2 + A_2^2}{A^2} = 1 \end{aligned} \quad (13)$$

جابه‌جایی $\psi(t)$ در مورد موج قطبیده خطی (به‌ازای z ثابت) در شکل ۱-۸ نشان داده شده است.

موج ساکن با قطبیدگی خطی. فرض کنید می‌خواهیم موج "کاملاً" ساکنی با قطبیدگی خطی را که برای آن ψ (مثلاً) در نقطه $z = 0$ دارای گره است، توصیف کنیم. در این صورت



شکل ۱-۸ قطبیدگی خطی. جابه‌جایی $\psi(t)$ به‌ازای مقدار ثابت z ، همان‌طور که در معادلات (۹) و (۱۰) آمده است، نوسانی هماهنگ دارد. در شکل این نوسان در امتداد پیکان دوسر است.

کافی است جابه‌جایی به‌ازای z ثابت را برای قطبیدگی خطی [که با معادله (۱۰) داده شده است] در $\sin kz$ ضرب کنیم:

$$\psi(z, t) = (\hat{x}A_1 + \hat{y}A_2) \sin kz \cos \omega t \quad (14)$$

موج پیشرونده با قطبیدگی خطی. به منظور توصیف موج پیشرونده‌ای که (برای مثال) در جهت z انتشار می‌یابد، کافی است در عبارت جابه‌جایی به‌ازای z ثابت برای قطبیدگی خطی، $\omega t - kz$ را به جای ωt بنشانیم:

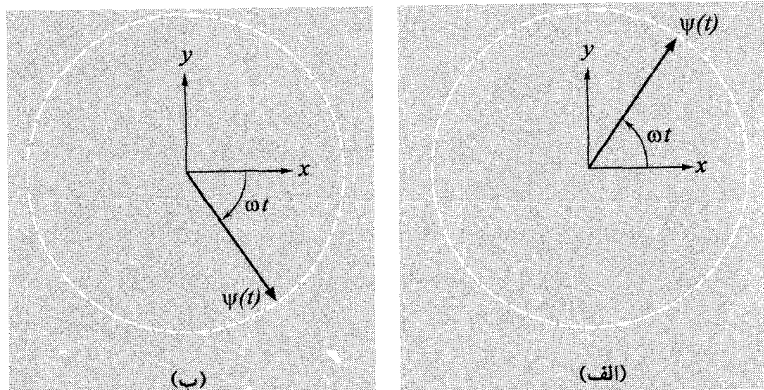
$$\psi(z, t) = (\hat{x}A_1 + \hat{y}A_2) \cos(\omega t - kz) \quad (15)$$

قطبیدگی دایره‌ای. اگر جابه‌جایی در مورد موج عرضی، از حرکتی بر روی دایره تشکیل شود، امواج را قطبیده دایره‌ای می‌گویند. در ابتدا مقدار ثابتی از z را در نظر می‌گیریم. (هنوز) مشخص نمی‌کنیم که امواج در جهت $+\hat{z}$ منتشر می‌شوند و یا $-\hat{z}$ (و حتی اینکه آنها اصلاً امواج پیشرونده هستند). اگر درحالی که انگشتان دست راست در جهت چرخش خم شده‌اند، انگشت شست در جهت $+\hat{z}$ قرار گیرد، نوسان را قطبیده دایره‌ای در جهت $+\hat{z}$ می‌نامند. (به همین ترتیب، از این قاعده دست راست برای تعریف قطبیدگی دایره‌ای در جهت $-\hat{z}$ استفاده می‌کنیم.) نوسانی را که قطبیده دایره‌ای در جهت $+\hat{z}$ است، می‌توان به صورت برهم‌نهشی از نوسان قطبیده خطی در امتداد \hat{x} و نوسان قطبیده خطی در امتداد \hat{y} که هر دو دامنه‌ای یکسان داشته باشند، نوشت. با در نظر گرفتن محورهای x ، y و z به شکلی که (طبق معمول) یک دستگاه راستگرد مختصاتی را بسازد، یعنی $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ می‌بینیم که در مورد قطبیدگی دایره‌ای در جهت $+\hat{z}$ ، نوسان در امتداد \hat{x} به اندازه 90° درجه از نوسان در امتداد \hat{y} ، جلوتر است:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \hat{x}A \cos \omega t + \hat{y}A \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \hat{x}A \cos \omega t + \hat{y}A \sin \omega t \end{aligned} \quad (16)$$

به همین ترتیب، برای قطبیدگی دایره‌ای در جهت $-\hat{z}$ ، نوسان در امتداد \hat{x} به اندازه 90° درجه از نوسان در امتداد \hat{y} عقب است:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \hat{x}A \cos \omega t + \hat{y}A \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \hat{x}A \cos \omega t - \hat{y}A \sin \omega t \end{aligned} \quad (17)$$



شکل ۲-۸ قطبیدگی دایره‌ای. (الف) قطبیدگی دایره‌ای و تکانه زاویه‌ای در جهت $\hat{z}+$ ، که در فضا ثابت است و به جهت انتشار موج وابسته نیست. (ب) قطبیدگی دایره‌ای و تکانه زاویه‌ای در جهت $\hat{z}-$.

برطبق مبحث امواج تخت الکترومغناطیس (بخش ۷-۴)، امواج تخت قطبیده دایره‌ای، حامل تکانه زاویه‌ای $\mathbf{J} = \pm(W/\omega)\hat{z}$ هستند، که در آن انرژی W و بسامد زاویه‌ای ω است. علامت تکانه زاویه‌ای همان علامتی است که جهت چرخش میدانها دارد. بنابراین تکانه زاویه‌ای برای قطبیدگی دایره‌ای در جهت $\hat{z}+$ و برای قطبیدگی دایره‌ای در جهت $\hat{z}-$ ، در جهت $\hat{z}-$ است. (تاکنون در بحث خود، \hat{z} را جهتی ثابت در فضا گرفته‌ایم. بحث فوق برای هر دو جهت انتشار امواج پیشرونده صادق است؛ همچنین برای امواج ساکن نیز صادق است.) امواج قطبیده دایره‌ای بر روی تار یا اسلینکی هم، البته حامل تکانه زاویه‌ای هستند.

در شکل ۲-۸، جابه‌جایی $\psi(t)$ برای نوسان قطبیده دایره‌ای به‌ازای z ثابت، نشان داده شده است.

موج ساکن با قطبیدگی دایره‌ای. موج ساکن قطبیده دایره‌ای با قطبیدگی (و تکانه زاویه‌ای) در جهت $\hat{z}+$ با ضرب‌کردن نوسان قطبیده دایره‌ای موردنظر به‌ازای z ثابت [که با معادله (۱۶) داده شده است] در تابعی سینوسی از z ، حاصل می‌شود. بنابراین، برای موج ساکنی که (مثلاً) در $z = 0$ گره دارد و قطبیده دایره‌ای در جهت $\hat{z}+$ است، داریم

$$\psi(z, t) = \left[\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) \right] A \sin kz \quad (18)$$

موج پیشرونده با قطبیدگی دایره‌ای. موج پیشرونده قطبیده دایره‌ای با قطبیدگی دایره‌ای (و تکانه زاویه‌ای) در جهت $\hat{z}+$ ، به ساده‌ترین نحو، از نشاندن $\omega t - kz$ (وقتی انتشار در جهت

\hat{z} است) به جای wt ، در عبارت نوسان قطبیده دایره‌ای، معادله (۱۶)، حاصل می‌شود:

$$\psi(z, t) = A \left\{ \hat{x} \cos[\omega t - kz] + \hat{y} \cos \left[\left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) - kz \right] \right\} \quad (19)$$

به همین ترتیب، اگر بخواهیم موج در جهت $-\hat{z}$ منتشر شود، wt را با $wt + kz$ عوض می‌کنیم؛ اگر موجی بخواهیم که تکانه زاویه‌ای آن در جهت $-\hat{z}$ باشد، با نوسان قطبیده دایره‌ای که با معادله (۱۷) داده شده است شروع می‌کنیم و به‌طور مشابه $wt - kz$ و یا $wt + kz$ را به جای wt می‌نشانیم.

قواعد دستوارگی برای امواج پیشرونده با قطبیدگی دایره‌ای. فرض کنید که موج پیشرونده‌ای داریم که قطبیدگی دایره‌ای دارد و در جهت \hat{z} انتشار می‌یابد. فرض کنید تکانه زاویه‌ای آن نیز در جهت \hat{z} است، و بدین ترتیب جهت چرخش میدانها (در مورد امواج الکترومغناطیسی) و یا جابه‌جایی (در مورد امواج روی اسلینکی) برطبق قاعده دست راست در جهت \hat{z} است. طبیعی است که چنین قطبیدگی را ”راستگرد“ بنامیم؛ این قاعده را قاعده تکانه زاویه‌ای می‌نامیم. براساس قاعده تکانه زاویه‌ای، موج پیشرونده قطبیده دایره‌ای راستگرد نامیده می‌شود، اگر تکانه زاویه‌ای آن هم جهت با جهت انتشار باشد و چپگرد نامیده می‌شود اگر تکانه زاویه‌ای آن درخلاف جهت انتشار باشد. اما این قاعده، عکس قاعده‌ای است که در اپتیک مرسوم است. مثلاً این قاعده، عکس قاعده‌ای است که برطبق آن قطبشگر دایره‌ای موجود در جعبه ابزار اپتیک شما به‌عنوان یک قطبشگر دایره‌ای ”چپگرد“ مشخص شده است. قاعده اپتیکی را می‌توان ”قاعده پیچی شکل“ و یا به‌طور خلاصه قاعده پیچی نامید. توجه این اسم، با در نظر گرفتن گسیل موج پیشرونده با قطبیدگی دایره‌ای بر روی اسلینکی که تکان داده می‌شود، به‌دست می‌آید. فرض کنید که یک سر اسلینکی را به سرعت با حرکت دایره‌ای که از دید شما در جهت عقربه‌های ساعت است تکان می‌دهید. بسته‌موجی که قطبیدگی دایره‌ای دارد بر روی اسلینکی به حرکت درمی‌آید و از شما دور می‌شود. جهت چرخش آن، جهت چرخش عقربه‌های ساعت است؛ تکانه زاویه‌ای آن در جهت انتشار موج است. موج برطبق قاعده تکانه زاویه‌ای راستگرد است. حال در ذهن خود در یک لحظه ”حرکت را متوقف کنید“، و به شکل اسلینکی در آن لحظه بنگرید. آیا مانند پیچی راستگرد است یا چپگرد؟ قاعده اپتیکی از دستوارگی پیچ استفاده می‌کند تا دستوارگی قطبیدگی را نام نهد. متأسفانه دستوارگی‌اش، دستوارگی یک پیچ چپگرد است! (برای درک این نکته، به حرکت دست خود و حرکت اسلینکی درحین گسیل موج فکر کنید. تصویر حالت اسلینکی را نزدیک دست خود به ذهن آورید. در این زمان مکان زاویه‌ای اسلینکی در فاصله‌ای کمی دورتر از دست شما به مکان زاویه‌ای دست شما در زمانی بیشتر مربوط می‌شود — مکان

اسلینکی در فاصله‌ای کمی دورتر از دست شما، از مکان فعلی دست شما عقب است. قسمتی از اسلینکی که نسبت به دست شما باز هم دورتر است حتی از این هم عقبتر است زیرا موج مربوط به آن حتی از این هم زودتر گسیل شده است. در یک زمان ثابت همین‌طور که در امتداد اسلینکی به جلو می‌روید، یک پیچ چپگرد را می‌پیمایید. بنابراین نامگذاری برطبق قاعدهٔ پیچی عکس نامگذاری برطبق قاعدهٔ تکانهٔ زاویه‌ای است. درک قاعدهٔ تکانهٔ زاویه‌ای راحت‌تر است. ساده‌ترین راه برای تداعی قاعدهٔ اپتیکی (قاعدهٔ پیچی)، این است که به‌خاطر آوریم که پیچیده است.

آموخته است که با بازی کردن با اسلینکی، قطبیدگیهای عرضی مختلف را تجربه کنیم. برای به‌دست آوردن امواج ساکن، یک سر اسلینکی را به دستگیره در بندید و سر دیگر را تکان دهید. برای شبیه‌سازی یک سر "آزاد"، یک سر اسلینکی را به نخ به طول 10° متر وصل کنید و سر دیگر نخ را به دستگیره در بندید. امواج ساکن قطبیدهٔ خطی یا قطبیدهٔ دایره‌ای را به آسانی می‌توان به‌وجود آورد. به‌وجود آوردن امواج هماهنگ پیشرونده دشوار است، زیرا به‌پایان رساندن اسلینکی توسط بار مقاومتی جور شده با امپدانس آن، کار ساده‌ای نیست. [احتمال می‌دهم که ترکیبی از نخ بلند (که سر را "آزاد" کند) و پیستونها یا پروانه‌هایی از جنس استیروفوم ("بی‌جرم") که در آب غوطه‌ور شده‌اند و آب را به هم می‌زنند، می‌تواند کارساز باشد.] با این وجود، به‌سادگی می‌توان تپ یا بستهٔ موجی را بر روی اسلینکی فرستاد و بازتاب آن را از سر ثابت شده و یا آزاد مشاهده کرد.

خواص حالت‌های قطبیدهٔ عرضی. با بازی کردن با اسلینکی و یا با مطالعهٔ معادلات فوق، می‌توانید خواص حالت‌های قطبیدهٔ عرضی را که در زیر می‌آیند تصدیق کنید (این خواص برای امواج الکترومغناطیسی هم صادق‌اند):

۱. در موج قطبیدهٔ خطی، جابه‌جایی در z ثابت، دوبار در یک دورهٔ تناوب از صفر عبور می‌کند.

در موج ساکن، همهٔ نقاط در یک زمان از صفر می‌گذرند.

در موج پیشرونده، تمام نقاط حرکت یکسان دارند اما با اختلافی فازی که ناشی از زمان انتشار موج بین نقاط است.

۲. در موج ساکن یا پیشروندهٔ قطبیدهٔ دایره‌ای، جابه‌جایی در z ثابت مقداری ثابت دارد. اگر اسلینکی حامل موج پیشروندهٔ قطبیدهٔ دایره‌ای باشد، تصویر اسلینکی در یک لحظهٔ زمانی t ، پیچی شکل است.

اگر در عرض حامل موج ساکن قطبیدهٔ دایره‌ای باشد، اسلینکی همواره کاملاً در یک صفحه

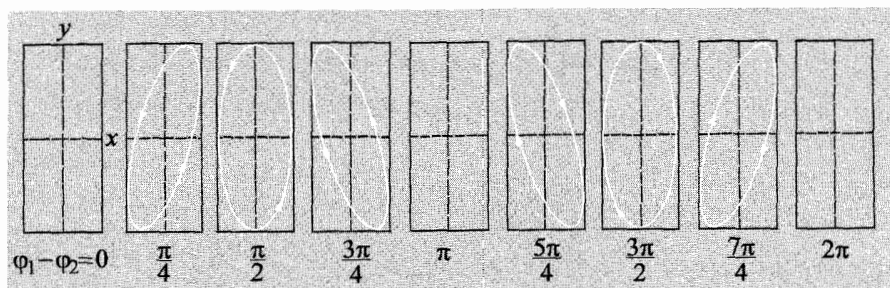
قرار می‌گیرد. به وسیلهٔ تصویر اسلینکی در یک لحظه نمی‌توان این شکل را از شکل لحظه‌ای اسلینکی مربوط به موج ساکن قطبیدهٔ خطی یا موج پیشروندهٔ قطبیدهٔ خطی تمیز داد. (تصویر اسلینکی لحظه‌ای بعد، به همراه تصویر اول مشخص می‌کند که کدام یک از این سه حالت در واقع وجود دارد.)

۳. بسته‌موج پیشرونده بر روی اسلینکی که قطبیدهٔ دایره‌ای در جهت \hat{z} است (جهتی که در فضا ثابت است)، در بازتاب از انتهای اسلینکی موجی است که دارای قطبیدگی دایره‌ای در همان جهت است. این مطلب برای بازتاب از سر آزاد و یا ثابت‌شدهٔ اسلینکی (و یا هر نوع بار مقاومتی دیگر که اسلینکی به آن منتهی شود) صادق است. بنابراین، در بازتاب جهت چرخش نسبت به جهت ثابت \hat{z} بی‌تغییر باقی می‌ماند. این نتیجهٔ مستقیم پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای است. انتهای آزاد یا ثابت‌شدهٔ اسلینکی نمی‌تواند گشتاور نیروی وارد کند، بنابراین برای بازتاب تکانه نسبت به جهت ثابت \hat{z} بی‌تغییر باقی می‌ماند. البته، دستاوردی معکوس می‌شود زیرا جهت انتشار پس از بازتاب عکس جهت انتشار موج اولیه است. تابش الکترومغناطیسی هم رفتاری مشابه با اسلینکی دارد. منظور از این جمله این است که جهت چرخش نسبت به جهت ثابت \hat{z} برای نور، میکروموج، و یا هر نوع تابش الکترومغناطیسی دیگر که قطبیدهٔ دایره‌ای باشد، در یک بازتاب 180° درجه تغییر نمی‌کند، اما دستاوردی، یعنی جهت چرخش نسبت به جهت انتشار موج، معکوس می‌شود. این مطلب که دستاوردی نور بر اثر بازتاب معکوس می‌شود برای شما تازه نیست. شما می‌دانید که اگر به دست راست خود در آینه نگاه کنید، شبیه دست چپ است. ممکن است این موضوع آنقدرها با پایستگی جهت چرخش نور قطبیدهٔ دایره‌ای نسبت به جهت ثابت \hat{z} (در بازتاب از یک آینه) مرتبط به نظر نیاید، اما در واقع آنها با یکدیگر ارتباط دارند. هر دو را می‌توان نتیجهٔ پایستگی تکانه عمود بر \hat{z} ، در برهم‌کنش موج با محیط بازتابنده دانست، محیط بازتابنده در مورد اسلینکی همان دیوار، و در مورد تابش الکترومغناطیسی الکترونهای آینه است. (با وجود این، آزمایش خانگی ۸-۲۷ را ببینید.)

حالت کلی قطبیدگی عرضی - قطبیدگی بیضوی. در z ثابت، نوسانی که حالت کلی قطبیدگی عرضی را داراست به شکل

$$\psi(t) = \hat{x}A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{y}A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (20)$$

است. اگر φ_2 مساوی φ_1 یا $\varphi_1 \pm \pi$ باشد، قطبیدگی خطی داریم. اگر φ_2 برابر با $\varphi_1 - \pi/2$ و A_2 برابر A_1 باشد، قطبیدگی دایره‌ای در جهت $+\hat{z}$ داریم. اگر φ_2 برابر با $\varphi_1 + \pi/2$ و A_2 برابر A_1 باشد، قطبیدگی خطی در جهت $-\hat{z}$ داریم. برای حالت کلی که A_1 و A_2 برابر



شکل ۳-۸ قطبیدگی در حالت کلی. دامنه حرکت در امتداد y دو برابر دامنه حرکت در امتداد x فرض شده است. حرکت در امتداد y از حرکت در امتداد x به اندازه فاز نشان داده شده، یعنی $\varphi_1 - \varphi_2$ عقب است.

نیستند و φ_1 و φ_2 دلخواه هستند، جابه جایی ψ مسیری بیضوی دارد. این نکته را می توان به این صورت دریافت: ψ_x را x و ψ_y را y بنامید. بدین ترتیب x برابر با $A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ و y برابر با $A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ است. هر دو عبارت را بسط دهید، به گونه ای که x ترکیب خطی $\cos \omega t$ و $\sin \omega t$ و y ترکیب خطی دیگری از $\cos \omega t$ و $\sin \omega t$ باشد. حال از این دو معادله $\sin \omega t$ و $\cos \omega t$ را به دست آورید. بدین ترتیب می یابید که $\sin \omega t$ و $\cos \omega t$ ، هر یک ترکیب خطی بخصوصی از x و y است. حال مربع $\sin \omega t$ و مربع $\cos \omega t$ را با هم جمع کنید. نتیجه (که برابر با ۱ است)، عبارتی است که جملات x^2 ، y^2 و xy را در بر دارد. چنین عبارتی برش مخروطی نام دارد. اگر مقادیر ممکن x و y اندازه ای محدود داشته باشند (همچنانکه در اینجا دارند)، برش مخروطی یک بیضی است. (مسئله ۱-۸ را ببینید.) در شکل ۳-۸ اثری که تغییرات فاز نسبی $\varphi_1 - \varphi_2$ در معادله (۲۰) می گذارد نشان داده شده است. [اثر فاز نسبی بر روی قطبیدگی را می توانید با استفاده از نوار سلوفون نشان دهید. آزمایش خانگی ۱۶-۸ را ببینید.]

نمادگذاری مختلط. هنگامی که ثابتهای فاز مختلفی در برهم نهش امواج موجود است، گاهی اوقات راحت تر است که از اعداد مختلط استفاده کنیم. برای نشان دادن این نکته، موج الکترومغناطیسی هماهنگ پیشرونده ای را که در جهت \hat{z} انتشار می یابد در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= \hat{x}E_x(z, t) + \hat{y}E_y(z, t) \\ &= \hat{x}E_1 \cos(kz - \omega t - \varphi_1) + \hat{y}E_2 \cos(kz - \omega t - \varphi_2) \end{aligned} \quad (21)$$

به سادگی می توان مشاهده کرد که میدان الکتریکی معادله (۲۱) قسمت حقیقی تابع موج مختلط

زیر است:

$$\mathbf{E}_c(z, t) = e^{i(kz - \omega t)} (\hat{x} E_1 e^{-i\varphi_1} + \hat{y} E_2 e^{-i\varphi_2}) \quad (22)$$

اینکه می‌توان جمله $e^{i(kz - \omega t)}$ را در عبارت \mathbf{E}_c به صورت یک ضریب نوشت، گاهی به محاسبه عباراتی که شامل چند موج متفاوت هستند کمک می‌کند. پیش از اینکه نتیجه را در موردی فیزیکی به کار بندیم، همواره باید به میدانهای حقیقی \mathbf{E} بازگردیم. (چیزی به نام $\sqrt{-1}$ در معادلات ماکسول موجود نیست؛ چیزی به اسم میدان الکتریکی با شدت $\sqrt{-1}$ ولت بر سانتیمتر هم وجود ندارد).

تابع موجها و دامنه‌های مختلط. کمیت مختلط \mathbf{E}_c را که قسمت حقیقی آن میدان الکتریکی \mathbf{E} است، می‌توان به صورت برهم‌نهشی در نظر گرفت

$$\mathbf{E}_c(z, t) = A_1 \psi_1(z, t) + A_2 \psi_2(z, t) \quad (23)$$

که در آن

$$\psi_1(z, t) = \hat{x} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\psi_2(z, t) = \hat{y} e^{i(kz - \omega t)} \quad (24)$$

$$A_1 = E_1 e^{-i\varphi_1}, \quad A_2 = E_2 e^{-i\varphi_2} \quad (25)$$

توابع متعامد بهنجار. توابع ψ_1 و ψ_2 یک مجموعه کامل تابع موجهای متعامد بهنجار را تشکیل می‌دهند. صفت "کامل" به این معناست که هر موج پیشرونده هماهنگ را می‌توان به صورت برهم‌نهشی از ψ_1 و ψ_2 با ضرایب مختلط ثابت A_1 و A_2 بسط داد. صفت "متعامد بهنجار" به این معناست که

$$\psi_1^* \cdot \psi_1 = \psi_2^* \cdot \psi_2 = 1 \quad \psi_1^* \cdot \psi_2 = \psi_2^* \cdot \psi_1 = 0 \quad (26)$$

که در آن ستاره نشان‌دهنده عمل مزدوج‌گیری است (یعنی نشان دادن $-i$ به جای i). بنابراین داریم

$$\psi_1^* \cdot \psi_1 = [\hat{x} e^{-i(kz - \omega t)}] \cdot [\hat{x} e^{i(kz - \omega t)}] = \hat{x} \cdot \hat{x} = 1$$

$$\psi_1^* \cdot \psi_2 = [\hat{x} e^{-i(kz - \omega t)}] \cdot [\hat{y} e^{i(kz - \omega t)}] = \hat{x} \cdot \hat{y} = 0$$

به خاطر شرایطی که تعامد بهنجار را تعریف می‌کند، معادلات (۲۶)، مربع اندازه بردار مختلط \mathbf{E}_c

عبارتی بسیار ساده دارد:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{E}_c|^2 &\equiv (\mathbf{E}_c^*) \cdot (\mathbf{E}_c) \\
 &= (A_1^* \psi_1^* + A_2^* \psi_2^*) \cdot (A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2) \\
 &= |A_1|^2 + |A_2|^2 \\
 &= E_1^2 + E_2^2 \quad (27)
 \end{aligned}$$

میانگین زمانی شار انرژی در نمادگذاری مختلط. آهنگ شمارش در آشکارساز تکثیرکننده فوتونی که در باریکه‌ای از موج الکترومغناطیسی پیشرونده قرار دارد متناسب با میانگین زمانی شار انرژی باریکه است. دقیقتر بگوییم، برای بسامد زاویه‌ای ω ، آشکارسازی که مساحت A دارد و بازدهی تبدیل فوتوکاتد آن ϵ است، آهنگ متوسط شمارش R (با یکای شمارش بر ثانیه) با رابطه زیر داده می‌شود

$$R = \frac{\langle S \rangle}{\hbar \omega} \cdot A \cdot \epsilon \quad (28)$$

که در آن میانگین شار انرژی (برحسب $\text{erg/cm}^2\text{s}$) چنین است

$$\langle S \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E}^2 \rangle \quad (29)$$

و

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{E}^2 \rangle &= \langle (\hat{x}E_x + \hat{y}E_y)^2 \rangle \\
 &= \langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle \\
 &= \frac{1}{2} E_1^2 + \frac{1}{2} E_2^2 \quad (30)
 \end{aligned}$$

ضریب $1/2$ در آخرین خط معادله (۳۰) ناشی از میانگین زمانی مربع نوسانهای هماهنگی است که با معادله (۲۱) داده شده‌اند.

مقایسه معادلات (۲۷) و (۳۰) نشان می‌دهد که اگر بخواهیم با کمیت مختلط \mathbf{E}_c که قسمت حقیقی آن میدان الکتریکی \mathbf{E} است کارکنیم، می‌توانیم عبارت صحیح میانگین زمانی شار انرژی را با استفاده از نصف مربع اندازه \mathbf{E}_c به جای میانگین زمانی مربع \mathbf{E} به دست آوریم:

$$\mathbf{E} = \text{Re } \mathbf{E}_c \equiv \mathbf{E}_c \text{ قسمت حقیقی} \quad (31)$$

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} |\mathbf{E}_c|^2 \quad (32)$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{E}' \rangle &= \langle E'_x \rangle + \langle E'_y \rangle \\ |\mathbf{E}_c|^2 &= |E_{xc}|^2 + |E_{yc}|^2\end{aligned}\quad (۳۳)$$

نمایش‌های کامل دیگر نور قطبیده. کلی‌ترین حالت قطبیدگی را می‌توان به صورت برهم‌نهی مواجی که قطبیدگی خطی در امتداد \hat{x} و \hat{y} دارند نمایش داد. البته بین‌هایت جهت (که نسبت به دستگاه لختی ثابت هستند) وجود دارد که می‌توانستیم به جای \hat{x} انتخاب کنیم. بنابراین تعداد بیشماری از نمایش‌های قطبیدگی خطی وجود دارد که می‌توان به کار برد. در نمادگذاری مختلط، می‌توانیم (به زبان فصیح ریاضی) این‌طور بگوییم که تعداد بیشماری از مجموعه‌های کامل تابع‌موجهای متعامد بهنجار ψ_1 و ψ_2 وجود دارد که می‌تواند به‌عنوان پایه در برهم‌نهی (با ضرایب مختلط) که \mathbf{E}_c را به دست می‌دهد، به کار برده شود. مثلاً فرض کنید بردارهای یک‌گانه \hat{e}_1 و \hat{e}_2 از چرخش بردارهای یک‌گانه اولیه \hat{x} و \hat{y} به میزان φ (در جهت چرخش \hat{x} به \hat{y}) حاصل شوند. بدین صورت می‌توانید به سادگی نشان دهید که

$$\hat{e}_1 = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi, \quad \hat{e}_2 = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi \quad (۳۴)$$

مجموعه کامل تابع‌موجهای متعامد بهنجار در نمایش قطبیدگی خطی هنگامی که قطبیدگی در امتداد \hat{e}_1 و \hat{e}_2 است با روابط زیر داده می‌شود

$$\psi_1 = \hat{e}_1 e^{i(kz - \omega t)}, \quad \psi_2 = \hat{e}_2 e^{i(kz - \omega t)} \quad (۳۵)$$

به سادگی می‌توانید ببینید که ψ_1 و ψ_2 در شرایط تعامد بهنجار، معادلات (۲۶)، صدق می‌کنند. نمایش قطبیدگی دایره‌ای. قطبیدگی موج هماهنگ پیش‌رونده را در حالت کلی همچنین می‌توان به صورت برهم‌نهی از مؤلفه‌های قطبیده دایره‌ای راست‌گرد و چپ‌گرد با دامنه‌ها و ثابت‌های فاز مناسب نمایش داد. مثلاً موجی را که در امتداد \hat{x} قطبیده خطی باشد می‌توان به یکی از صورتهای معادل زیر نوشت

$$\mathbf{E} = \hat{x} A \cos(kz - \omega t) \quad (۳۶)$$

یا

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{A}{\sqrt{2}} \left\{ \hat{x} \cos[\omega t - kz] + \hat{y} \cos \left[\left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) - kz \right] \right\} \\ &+ \frac{A}{\sqrt{2}} \left\{ \hat{x} \cos[\omega t - kz] + \hat{y} \cos \left[\left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) - kz \right] \right\}\end{aligned}\quad (۳۷)$$

(جملاتی که شامل \hat{y} هستند، دامنه‌های یکسان و اختلاف فاز ۱۸° دارند؛ مجموع آنها صفر است.) نمایش \mathbf{E} به صورت معادله (۳۶) نمایش قطبیدگی خطی است که دامنه A دارد. نمایش \mathbf{E} به صورت معادله (۳۷)، برهم‌نهی مؤلفه‌های قطبیده دایره‌ای است که تکانه زاویه‌ای در جهت $+\hat{z}$ و $-\hat{z}$ دارند و دامنه هر یک $A(1/2)$ است. عبارتهای مختلط مشابه با معادلات (۳۶) و (۳۷) چنین هستند:

$$\mathbf{E}_c = A\hat{x}e^{i(kz-\omega t)} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_c = \frac{1}{\sqrt{2}}A[\hat{x}e^{i(kz-\omega t)} + \hat{y}e^{i\{kz-[\omega t-(\frac{\pi}{2})]\}}] \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}A[\hat{x}e^{i(kz-\omega t)} + \hat{y}e^{i\{kz-[\omega t+(\frac{\pi}{2})]\}}] \end{aligned} \quad (39)$$

حال با استفاده از روابط شناخته‌شده

$$\begin{aligned} e^{i(\frac{\pi}{2})} &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \\ e^{-i(\frac{\pi}{2})} &= \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = -i \end{aligned} \quad (40)$$

می‌توان معادله (۳۹) را به صورت مختصرتری نوشت

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{\sqrt{2}}A[(\hat{x} + i\hat{y})e^{i(kz-\omega t)}] + \frac{1}{\sqrt{2}}A[(\hat{x} - i\hat{y})e^{i(kz-\omega t)}] \quad (41)$$

حال می‌توانیم مجموعه کامل تابع‌موجهای قطبیده دایره‌ای متعامد بهنجار را چنین تعریف کنیم

$$\begin{aligned} \psi_+ &= \left(\frac{\hat{x} + i\hat{y}}{\sqrt{2}} \right) e^{i(kz-\omega t)} \\ \psi_- &= \left(\frac{\hat{x} - i\hat{y}}{\sqrt{2}} \right) e^{i(kz-\omega t)} \end{aligned} \quad (42)$$

می‌توانید به‌سادگی تحقیق کنید که ψ_+ و ψ_- متعامد بهنجار هستند، یعنی

$$\psi_+^* \cdot \psi_+ = \psi_-^* \cdot \psi_- = 1; \quad \psi_+^* \cdot \psi_- = \psi_-^* \cdot \psi_+ = 0 \quad (43)$$

بدین ترتیب کلی‌ترین حالت قطبیدگی برای موج هماهنگ پیشرونده را می‌توان به صورت

$$\mathbf{E}_c(z, t) = A_+\psi_+ + A_-\psi_- \quad (44)$$

که در آن A_+ و A_- اعداد مختلط ثابتی هستند، نوشت. برای حالت خاص قطبیدگی خطی در معادله (۳۸)، می‌بینیم که A_+ و A_- چنین هستند

$$A_+ = A_- = \frac{1}{\sqrt{2}} A \quad (۴۵)$$

میانگین زمانی آهنگ شمارش R را در تکثیرکننده فوتونی که در باریکه‌ای از موج هماهنگ پیشرونده قرار دارد، می‌توان برحسب ضرایب مختلط هر مجموعه کاملی از تابع موجها بیان کرد. بنابراین به جای به‌کار بردن نمایش قطبیده خطی \hat{x} ، \hat{y} [معادلات (۲۸) تا (۳۳)]، می‌توانیم از نمایش تکانه زاویه‌ای $+\hat{z}$ ، $-\hat{z}$ استفاده کنیم:

$$R = \frac{\langle S \rangle}{\hbar \omega} A \cdot \varepsilon \quad (۴۶)$$

که در آن A مساحت (و نه دامنه!) و ε بازدهی است، همچنین داریم

$$\langle S \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E}^2 \rangle \quad (۴۷)$$

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} |\mathbf{E}_c|^2 \quad (۴۸)$$

$$|\mathbf{E}_c|^2 = |A_+ \psi_+ + A_- \psi_-|^2 = |A_+|^2 + |A_-|^2$$

بندرت از تابع موجهای مختلط استفاده خواهیم کرد. هدف اصلی ما از معرفی آنها در اینجا این است که به هنگام مطالعه فیزیک کوانتومی در جلد ۴ همین کتاب که به این نوع توابع نیاز دارید، تطبیق ذهنی شما با آنها ساده‌تر انجام گیرد. (تابع موجهایی که در فیزیک کوانتومی به‌کار می‌روند تقریباً همیشه مختلط هستند. جذر ۱- صریحاً در معادلات موج مکانیک کوانتومی ظاهر می‌شود.)

۳-۸ تولید امواج عرضی قطبیده

در این قسمت روشهای مختلف تولید یک حالت قطبیدگی مطلوب را بررسی می‌کنیم. ساده‌ترین راه کنترل کردن قطبیدگی هنگامی است که فرایند تابش را کنترل می‌کنید، مثل هنگامی که یک اسلینکی را تکان می‌دهید و یا امواج الکترومغناطیسی را به وسیله آنتنی که خود طراحی کرده‌اید پخش می‌کنید. اما ممکن است هیچ کنترلی در فرایند تابش نداشته باشید. در این صورت، چه با نور چراغ شروع کنید و چه با نور خورشید، مسئله این است که چگونه از میان برهم‌نهی پیچیده‌ای از حالت‌های قطبیدگی مختلف، حالت قطبیدگی مطلوب را انتخاب کنید. شاید بتوان مؤلفه‌های

نامطلوب قطبیدگی را به وسیلهٔ صفحهٔ پلاروید جذب کرد. یا شاید بتوانید ترتیبی بدهید که نور چنان منعکس شود که در بازتاب مقدار ناچیزی از مؤلفه‌های نامطلوب قطبیدگی را به همراه داشته باشد و سپس فقط با نور بازتابیده کار کنید. این نوع بازتاب منتخب عامل قطبیده‌بودن آسمان آبی است و همچنین باعث می‌شود تا نور بازتابیده از آب، شیشه، بتون و یا زانو قطبیده باشد.

قطبیدگی در اثر گسیل منتخب. هنگامی که یک اسلینکی را تکان می‌دهید، حالت قطبیدگی امواج را به وسیلهٔ کنترل کردن جهت تکان دادن اسلینکی، کنترل می‌کنید. به همین شکل، امواج رادیویی و یا میکروموجها که از یک آنتن گسیل می‌شوند قطبیدگی دارند که وابسته به حرکت الکترونها در آنتن است. اگر آنتن یک سیم راست عمود بر \hat{z} باشد، الکترونهايي که در امتداد سیم نوسان می‌کنند، خطوط نیروی الکتریکی را در آن جهت تکان می‌دهند، و امواج الکترومغناطیسی که در امتداد \hat{z} انتشار می‌یابند میدان الکتریکی‌ای به موازات آنتن دارند و قطبیدهٔ خطی هستند. آن دسته از امواج الکترومغناطیسی که در جهات دیگر منتشر می‌شوند در امتداد مؤلفه‌ای از جهت آنتن که عمود بر جهت انتشار است، قطبیدهٔ خطی هستند. اگر یک آنتن راست در امتداد \hat{x} و دیگری در امتداد \hat{y} باشد، و اگر آنها به وسیلهٔ جریانهای مساوی همفاز تحریک شوند، تابش منتشرشده در امتداد $\pm\hat{z}$ ، در امتداد جهت 45° مابین \hat{x} و \hat{y} قطبیدهٔ خطی خواهد بود. اگر جریان x در اندازهٔ مساوی جریان y باشد اما از نظر فاز 90° از آن جلوتر باشد، تابش الکترومغناطیسی در جهت \hat{z} یا $-\hat{z}$ ، قطبیدهٔ دایره‌ای با تکانهٔ زاویه‌ای در جهت \hat{z} خواهد بود. تابش گسیل‌شده در جهت \hat{z} + (برطبق قاعدهٔ تکانهٔ زاویه‌ای) راستگرد خواهد بود؛ تابش گسیل‌شده در جهت $-\hat{z}$ چپگرد خواهد بود. این تابش (در فاصله‌ای که به قدر کافی دور باشد) از تابشی که "بار نقطه‌ای معادل" q هنگام نوسان دایره‌ای

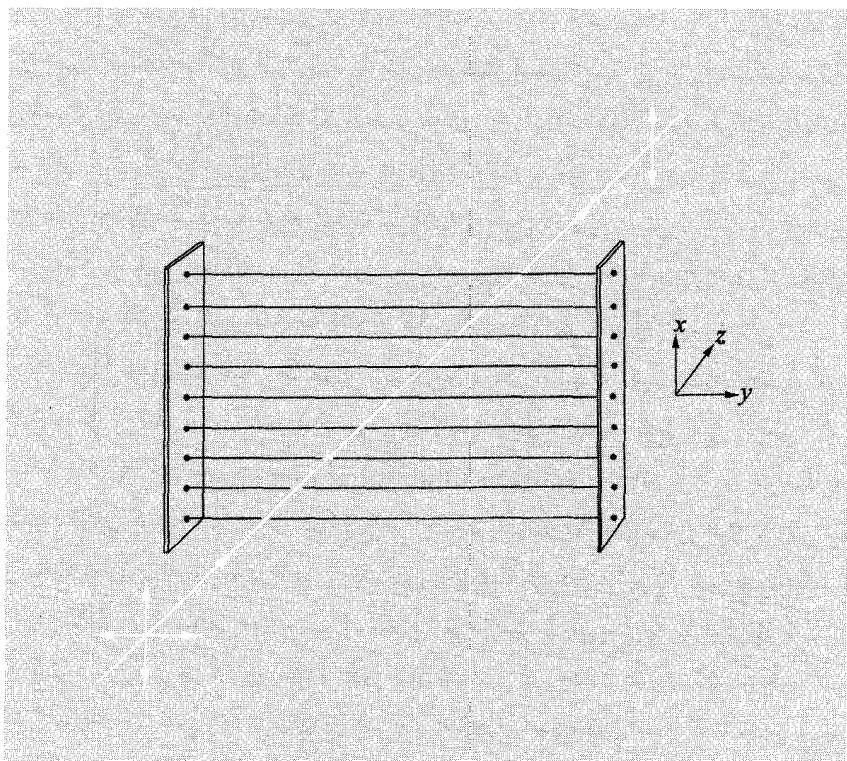
$$\psi = A[\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t] \quad (49)$$

از خود گسیل می‌کند تمیزناپذیر خواهد بود. در معادلهٔ (۴۹)، A دامنهٔ حرکت دایره‌ای q است و (به همراه ثابت فاز این حرکت) از طریق معادلهٔ (۶) بخش ۸-۲ با میدان الکتریکی قطبیدهٔ دایره‌ای مرتبط است. قطبیدگی تابشی که در هر جهت از این دستگاه دو آنتنی گسیل می‌شود، همان است که از حرکت بار نقطه‌ای معادل، چنان که با معادلهٔ (۴۹) داده شده است، به دست می‌آید. از یک نقطهٔ مشاهده در حالت کلی تصویر حرکت دایره‌ای بار معادل بر صفحهٔ عمود بر راستای مشاهده، این‌طور به نظر می‌رسد (و در واقع هم چنین است) که حرکتی بیضوی است. بنابراین قطبیدگی برای یک جهت کلی گسیل، بیضوی است. مثلاً، برای گسیل در جهت عمود بر \hat{z} ، قطبیدگی، خطی است (یک حالت خاص از "بیضی واگن"). همهٔ این نتایج مستقیماً از مبحث تابش بار نقطه‌ای

(قسمت ۵-۷) حاصل می‌شود، اما دو شرط را باید قید کرد: (الف) باید آنقدر از آنتن دور باشیم که بتوانیم از میدانهای "ناحیه نزدیک" به آنتن صرفنظر کنیم و (ب) آنتن در مقایسه با طول موج می‌بایست کوتاه باشد، چنان‌که فقط با یک بار معادل بتوان حرکت همه الکترونها را در آنتن نمایش داد. (برای آنتنی که چندین طول موج درازا دارد، الکترونهايي که در قسمتهای مختلف آنتن هستند، با فازهای مختلف در گسیل موج شرکت می‌کنند؛ و بدین ترتیب به بیش از یک بار معادل نیاز است و آنچه تابش "چندقطبی" نام دارد به‌وقوع می‌پیوندد؛ این در مقایسه با تابش "دوقطبی" است که از حرکت نوسانی هماهنگ یک بار الکتريکی به‌تنهایی حاصل می‌شود.)

قطبیدگی به‌وسیله جذب منتخب. اگر از حالت کلی قطبیدگی شروع کنید، یک راه به‌وجود آوردن قطبیدگی مطلوب این است که ترتیبی دهید تا مؤلفه‌های نامطلوب موج بر روی برخی "اجزای متحرک" کار انجام دهند، در حالی که مؤلفه مطلوب کاری انجام ندهد، و در نتیجه مؤلفه‌های نامطلوب از بین بروند. مثلاً امواج ساکن را در اسلینکی در نظر بگیرید. فرض کنید \hat{x} افقی است (در امتداد اسلینکی)، \hat{y} عمودی است و \hat{z} افقی. یک میله عمودی بی‌جرم (استیروفوم) به پیستون بی‌جرمی که آب یک سطل را به هم می‌زند متصل شده است. این پیستون به‌وسیله مؤلفه \hat{y} نوسانها به حرکت درمی‌آید. اگر با موج ساکنی که دامنه نوسانش در جهات x و y یکسان باشد شروع کنیم، نوسانهای y خیلی زود از بین می‌روند، زیرا انرژی آنها در سطل آب به گرما تبدیل می‌شود (البته اگر با تکان دادن تمتد اسلینکی آنها را دوباره به‌وجود نیاوریم).

دسته‌سیمهای موازی. در مورد میکروموجها، دستیابی به جذب منتخب با استفاده از یک دسته‌سیمهای هادی که به موازات هم در امتداد \hat{z} کشیده شده‌اند امکانپذیر می‌شود، شکل ۸-۴. فرض کنید میدان الکتريکی در تابش فرودی الکترومغناطیس (در ناحیه میکروموج)، هم مؤلفه x و هم مؤلفه y دارد. می‌توانیم اثر سیمها را بر روی این دو مؤلفه جداگانه در نظر بگیریم. ابتدا مؤلفه y را در امتداد سیمها در نظر بگیرید. میدان الکتريکی تابش فرودی الکترونها را در امتداد سیم به حرکت درمی‌آورد. سیم (اگر از جنس مس یا نقره و یا هر رسانای فلزی خوب باشد) به‌صورت بار مقاومتی عمل می‌کند. الکترونهاي رسانش در زمانی که در مقایسه با دوره تناوب میکروموجها کوتاه است، به سرعت نهایی می‌رسند (می‌توان بسامد میکروموجها را، مثلاً 1000 Mc گرفت). میدان الکتريکی بر روی الکترونها کار انجام می‌دهد؛ الکترونها مقداری از انرژی خود را از راه برخورد با شبکه بلوری مس به شبکه می‌دهند. الکترونها، همچنین تابش می‌کنند. چنین است که تابش آنها در جهت رو به جلو، یعنی $+\hat{z}$ ، با تابش فرودی تداخل میرا انجام می‌دهد و آن را تقریباً به‌کلی از بین می‌برد. در جهت رو به عقب، تابش ناشی از حرکت الکترونها در امتداد \hat{z} ، موج



شکل ۴-۸ دسته‌سیمهایی که میکروموجهای با \mathbf{E} در جهت \hat{y} را جذب می‌کنند.

بازتاب را حاصل می‌کند. (در واقع فقط قسمت کمی از انرژی تابش فرودی که \mathbf{E} در امتداد \hat{y} دارد، در سیمها به گرما تبدیل می‌شود. بیشتر آن در جهت رو به عقب، $-\hat{z}$ ، بازتابیده می‌شود.) بنابراین دسته‌سیمها مؤلفه y را حذف می‌کند.

حال ببینیم در امتداد \hat{x} چه اتفاق می‌افتد. در امتداد \hat{x} الکترونها نمی‌توانند آزادانه حرکت کنند، زیرا نمی‌توانند از سیم خارج شوند. به‌جای اینکه الکترونها (همانند حرکت در امتداد \hat{y}) به سرعت نهایی یکنواخت برسند، در امتداد کناره‌های $+x$ و $-y$ سیم، بار سطحی به‌وجود می‌آورند. هنگامی که میدان ناشی از بار سطحی به حدی می‌رسد که میدان فرودی (در داخل سیم) را خنثی می‌کند، الکترونها از حرکت باز می‌ایستند. در فاصله زمانی کوتاهی در مقایسه با تناوب میکروموج، این اتفاق می‌افتد. بنابراین الکترونها همیشه در یک حالت تعادل استاتیک (یا تقریباً در چنین حالتی) به‌سر می‌برند و سرعت یا شتاب ندارند. آنها انرژی جذب و تابش گسیل نمی‌کنند. در نتیجه مؤلفه x تابش تحت تأثیر قرار نگرفته است.

شاید به ذهن شما خطور کرده باشد که بار سطحی در انتهای z سیمها نیز به وجود می‌آید. اما می‌توان با درازتر گرفتن طول سیمها در جهت z ، میدان ناشی از این بارها را (که تمایل به خنثی کردن میدان فرودی در امتداد z در داخل سیم دارد) تا حد دلخواهی در ناحیه مورد نظر (نزدیک مرکز دسته سیمها) تقلیل داد.

برای نور مرئی با طول موج $10^{-5} \text{ cm} \sim \lambda$ ، به سادگی نمی‌توان "سیمهای" رسانای موازی را در فواصل کمتر از λ قرار داد. با این وجود، این کار انجام پذیرفته است!

پولاروید. در سال ۱۹۳۸، ادوین. ه. لند پولاروید را که رفتاری مشابه با دسته سیمهای موازی دارد، اختراع کرد. در فرایند ساخت، صفحه‌ای پلاستیکی که دارای زنجیرهای دراز هیدروکربن است از یک جهت تا حد بسیار زیادی کشیده می‌شود. بدین ترتیب مولکولها مرتب قرار می‌گیرند. سپس این صفحه در داخل محلولی که شامل ید است فرو می‌رود. ید به زنجیرهای دراز هیدروکربن می‌چسبد و الکترونهاى رسانش را که می‌توانند در امتداد زنجیرها ولی نه عمود بر آنها، حرکت کنند، فراهم می‌آورد. بدین ترتیب، به‌طور مؤثر "سیمهایی" در امتداد زنجیرها به وجود می‌آید. مؤلفه میدان الکتریکی که در امتداد سیمهاست جذب می‌شود؛ مؤلفه‌ای که عمود بر سیمهاست با کاهش ناچیزی انتقال پیدا می‌کند. [برای به‌خاطر سپردن عمل دسته سیمهای موازی بر روی امواج الکترومغناطیسی، گاهی از مثال ساده‌ای که شامل یک طناب و نرده دور باغچه است، استفاده می‌کنند. طناب از میان فواصل بین ردیفهای چوبی نرده می‌گذرد. در صورتی که سرعت عرضی امواج روی طناب عمود بر جهت ردیفهای چوبی باشد، امواج جذب می‌شوند. سرعت عرضی امواج روی طناب متناظر با میدان مغناطیسی امواج الکترومغناطیسی است. بنابراین بهترین کار برای به‌یاد سپردن آن است که میدان مغناطیسی عمود بر سیمها جذب می‌شود؛ به عبارت دیگر، میدان الکتریکی موازی با سیمها جذب می‌شود. این علامت چندان خوبی هم نیست، برای اینکه باید به‌خاطر داشت که سرعت عرضی (و نه مؤلفه عرضی کشش طناب) است که باعث برخورد طناب با ردیفهای چوبی می‌شود، و همین‌طور باید به‌خاطر داشت که نظیر سرعت طناب، میدان مغناطیسی است نه میدان الکتریکی (که متناظر با کشش عرضی است). این یادسپار نیازمند به‌خاطر سپردن چیزهایی بیشتر از بیان ساده صحیح است.]

بنابراین، یک صفحه پولاروید محوری دارد (واقع در صفحه) که آن را محور عبور آسان می‌نامند. اگر E در امتداد این محور باشد، نور با جذب بسیار کمی عبور می‌کند. اگر E عمود

1. G. R. Bird and M. Parrish, Jr. *J. Opt. Soc. Am.*, **50**, 886 (1960),

این دو دانشمند بخار طلا را در زاویه مناسبی بر روی توری پلاستیکی دارای 50000 خط (خراش) موازی بر اینچ، نشان دادند. طلائی که بر روی طرف خراش که مقابل جریان بخار طلا قرار داشت نشست، "سیمهای" رسانای موازی را به وجود آورد.

بر محور عبور آسان باشد، تقریباً همه نور جذب می‌شود. محور عبور آسان عمود بر جهت کشیده شدن صفحه پلاستیک است، به عبارت دیگر، این محور عمود بر "سیمها" است.

وقتی از پشت یک صفحه پولاروید به صفحه سفید کاغذ نگاه می‌کنید، کاغذ به نظر خاکستری می‌آید. دلیل آن است که نیمی از نوری که از کاغذ می‌آید به وسیله پولاروید جذب می‌شود، بنابراین کاغذ طبعاً تیره‌تر به نظر می‌آید. از طرف دیگر، یک تکه سلوفون شفاف (یا هر پلاستیک شفاف دیگر)، تقریباً تمام نوری را که بر آن می‌افتد عبور می‌دهد.

جعبه وسایل اپتیکی شما، پنج تکه پلاستیک خاکستری‌رنگ دارد. آنها را درآورید و به آنها نگاه کنید. یکی از آنها یک قطبشگر دایره‌ای است (که بعداً راجع به آن صحبت می‌کنیم). چهارتای دیگر قطبشگرهای خطی از نوع پولاروید HN-۳۲ هستند (که اکنون راجع به آنها صحبت می‌کنیم) و برای سادگی آنها را پولاروید می‌نامیم. برای تشخیص قطبشگر دایره‌ای بدین ترتیب عمل کنید: یک سکه ده‌تومانی (یا هر تکه فلز براق دیگر) را روی میز بگذارید. یکی از قطعه‌های پلاستیک خاکستری را روی سکه قرار دهید. از پشت این قطعه به سکه نگاه کنید. حال قطعه پلاستیک را برگردانید و دوباره از پشت قطعه پلاستیک به سکه نگاه کنید. آیا سکه مانند قبل به نظر می‌رسد؟ اگر چنین است، قطعه پلاستیک، قطبشگر دایره‌ای نیست. (این نامتقارنی شگفت‌انگیز که قطبشگر دایره‌ای از خود نشان می‌دهد، بعداً مورد بحث قرار خواهد گرفت.) از پشت دو قطعه پولاروید که بر روی هم قرار داده‌اید و در فاصله نزدیکی در جلوی چشم خود نگه داشته‌اید، به نور یک لامپ التهابی نگاه کنید. یکی از پولارویدها را نسبت به دیگری بچرخانید. هنگامی که دیگر نوری به چشم نمی‌رسد، در اصطلاح پولارویدها را "متعامد" می‌گویند. محورهای عبور آسان آنها زاویه 90° نسبت به یکدیگر می‌سازد. وقتی محورهای آسان موازی هستند، بیشتر نوری که از پولاروید اول عبور می‌کند، از پولاروید دوم هم می‌گذرد. در حالت ایده‌آل نتایج زیر به دست می‌آید: نوری که از لامپ می‌آید "ناقطبیده" است — این به آن معنی است که شدت نور با قطبیدگی خطی در جهت عرضی \propto درست به همان میزان شدت نور با قطبیدگی خطی در جهت عمود بر آن، \propto است (در اینجا \propto هر جهت عرضی دلخواه است — هر \propto و \propto نمایش کاملی را برای توصیف نور قطبیده تشکیل می‌دهند). اگر پولاروید اول دارای لایه نانعکاسی مقاومتی جورشده کاملی بر هر دو سطح خود می‌بود، و اگر تمام زنجیرهای هیدروکربنی کاملاً موازی می‌بودند و اگر ضخامت آن به قدر کافی بود تا کاملاً مؤلفه قطبیدگی نامطلوب را جذب کند، آن وقت 50% درصد شدت نور لامپ عبور می‌کرد. اما لایه‌های نانعکاسی بر روی پولارویدها وجود ندارد. بنابراین تقریباً 4% درصد شدت نور در عبور از هر سطح از بین می‌رود. [ضریب شکست پلاستیک تقریباً برابر با ضریب شکست شیشه است، یعنی در حدود 1.5].

بنابراین شدت نور بازتاب یافته ≈ 0.4 (۱ + ۱/n - n) از هر سطح است. از اثرهای تداخلی بین دو سطح، هنگامی که بر روی گستره قابل قبولی از رنگها میانگین بگیریم، می توانیم صرفنظر کنیم. پس کلاً ۸ درصد نور از دست می رود. اگر زنجیرهای هیدروکربن کاملاً به موازات یکدیگر بودند، کاهش بیشتری در شدت نور پدید نمی آمد. چنین پولارویدی بر حسب HN-۴۶ می خورد، بدین معنی که ۴۶ درصد نور ناقطبیده تأیید بر آن را عبور می دهد. پولاروید شما HN-۳۲ است، یعنی تقریباً ۳۲ درصد شدت ۱۰۰ درصد اولیه از پولاروید اول عبور می کند. بنابراین در حدود ۶۴ درصد از مؤلفه مطلوب نور ناقطبیده لامپ عبور می کند. (برای تقریباً همه رنگهای طیف، کمتر از ۱۰ درصد شدت مؤلفه دیگر عبور می کند.) اگر پولاروید دوم موازی با پولاروید اول باشد، تقریباً ۶۴ درصد شدت نور تأیید بر خود را عبور می دهد، زیرا همه نور دارای قطبیدگی صحیح برای عبور است. پس شدت نور عبور کرده از دو قطبشگر خطی HN-۳۲ موازی در حدود

$$I_{\text{ورودی}} = I_{\text{ورودی}} \times 0.32 \times 0.64 = 0.21 I_{\text{ورودی}} \quad (50)$$

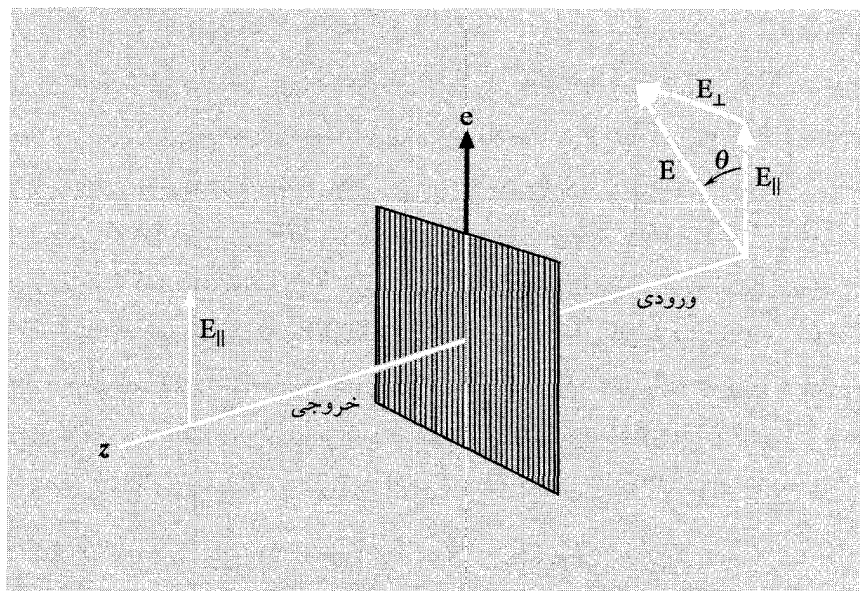
است، اگر $I_{\text{ورودی}}$ شدت نور ناقطبیده تأیید شده باشد.

قطبشگر کامل - قانون مالوس. منظور از قطبشگر کامل پولاروید "HN-۵۰" است. (این قطبشگر وجود خارجی ندارد، اما برای بحث ساده تر از قطبشگر واقعی است.) از کاهش شدت نور به خاطر بازتاب از سطوح صرفنظر می کنیم. فرض می کنیم که مؤلفه نامطلوب کاملاً جذب می شود و مؤلفه مطلوب (با \hat{E} به موازات محور آسان، یعنی عمود بر زنجیرهای هیدروکربن) کاملاً عبور می کند. اگر نور قطبیده خطی به طور عمود، در امتداد \hat{z} ، فرود آید و دامنه میدان الکتریکی عرضی آن \hat{E} باشد و اگر \hat{e} جهت محور عبور آسان قطبشگر کامل باشد، فقط دامنه مؤلفه $\hat{E} \cdot \hat{e}$ عبور می کند. شار انرژی عبوری خروجی I با ضریب $|\hat{E}|^2 / (\hat{E} \cdot \hat{e})^2$ از شار فرودی $I_{\text{ورودی}}$ کمتر است:

$$I_{\text{خروجی}} = I_{\text{ورودی}} \cos^2 \theta \equiv I_{\text{ورودی}} (\hat{E} \cdot \hat{e})^2 \quad (51)$$

در اینجا $\hat{E} \equiv \hat{E} / |\hat{E}|$ بردار یکه در جهت \hat{E} است. معادله (۵۱)، اغلب به نام قانون مالوس خوانده می شود. شکل ۵-۸ را ببینید.

دو پولاروید متوالی با شماره های ۱ و ۲ و با محورهای آسان \hat{e}_1 و \hat{e}_2 که نسبت به هم زاویه 90° می سازند، پولارویدهای "متعامد" نامیده می شوند. پولاروید اول \hat{E} را در امتداد \hat{e} عبور می دهد و پولاروید دوم این میدان را کاملاً جذب می کند. هیچ نوری از پولاروید دوم عبور نمی کند. اما اگر پولاروید سومی در میان پولارویدهای متعامد قرار داده شود، میدان عبوری دیگر صفر نخواهد بود؛ البته به شرطی که \hat{e}_2 نه در امتداد \hat{e}_1 باشد و نه در امتداد \hat{e}_2 . مسئله ۳-۸ را ببینید.

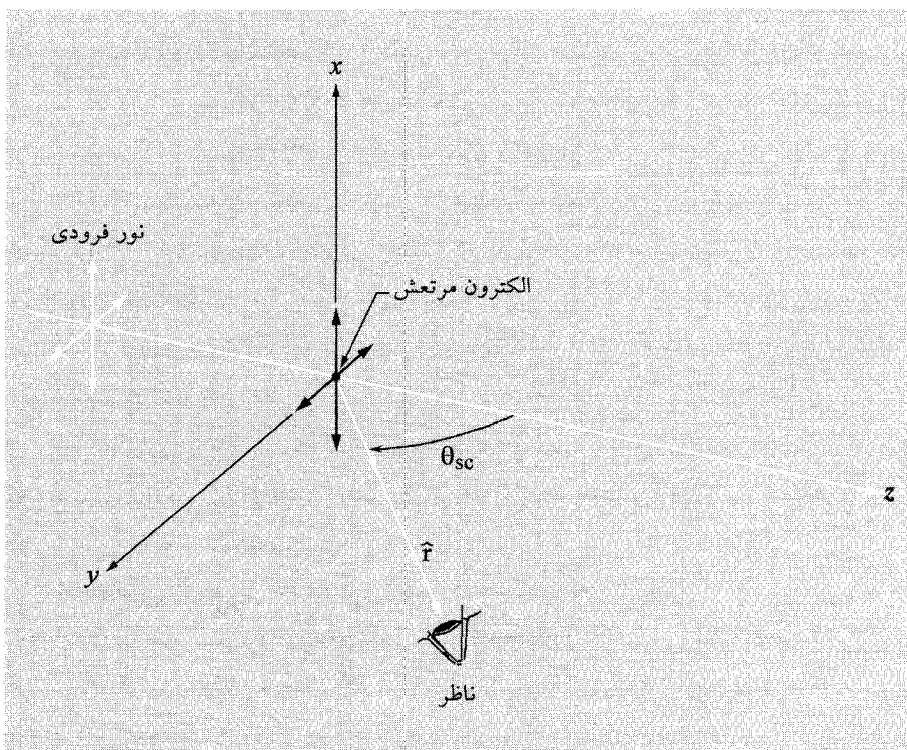


شکل ۵-۸ قطبشگر کامل. محور عبور آسان برای \mathbf{E} در امتداد \hat{e} است. $\mathbf{E}_{||}$ ، مؤلفه \hat{E} که موازی با \hat{e} است، عبور می‌کند. مؤلفه دیگر، \mathbf{E}_{\perp} ، کاملاً جذب می‌شود.

همچنین می‌توانید این مطلب را با استفاده از قطعه‌های پولاروید موجود در وسایل اپتیکی خود، ثابت کنید.

قطبیدگی به وسیله پراکندگی یکباره. در یک روز آفتابی از پشت یک قطعه پولاروید به آسمان آبی نگاه کنید؛ پولاروید را نزدیک چشم خود نگه دارید تا ناحیه وسیعی از آسمان را ببینید. پولاروید را بچرخانید و به دنبال حداقل تابشی باشید که مانند رد تاریکی در پهنه آسمان وجود دارد. نوری که از آن قسمت از آسمان می‌آید تا حد زیادی قطبیده است. زاویه بین خطی که سر شما و خورشید را متصل می‌کند و خطی که سر شما و ناحیه بیشترین قطبش آسمان آبی را متصل می‌کند، را (به طور تقریبی) اندازه بگیرید. (می‌بینید که تقریباً 90° است.) جهت قطبیدگی را اندازه بگیرید. (محور عبور آسان پولاروید را با نگاه کردن به منبعی که قطبیدگی مشخصی دارد می‌توانید پیدا کنید. مثلاً به نور منعکس شده از پنجره یا از کف اتاق که کف پوش پلاستیکی یا چوبی دارد، نگاه کنید. همان طور که بعداً در این بخش نشان می‌دهیم، نور منعکس شده، قطبیده خطی به موازات سطح صاف، مثلاً کف اتاق، است.)

علت قطبیده بودن نور آسمان آبی بدین قرار است؛ فرض کنید \hat{z} جهت انتشار نور از خورشید به یک مولکول هوا باشد (شکل ۶-۸). در نور خورشید، میدان الکتریکی ناقطبیده است. (برای



شکل ۸-۶ قطبیدگی به وسیلهٔ پراکندگی یکباره. محور \hat{y} چنان انتخاب شده است که در صفحهٔ \hat{x} و \hat{y} قرار داشته باشد. مشاهده‌کننده همهٔ تصویر حرکت الکترون در امتداد \hat{x} را می‌بیند، اما فقط کسری از تصویر دامنهٔ حرکت در امتداد \hat{y} را می‌بیند، این نسبت برابر با پراکندگی $\cos \theta$ است. وقتی $\theta = 90^\circ$ پراکندگی، تابش پراکنده شده، ۱۰ درصد در امتداد \hat{x} قطبیده است.

تأیید این مطلب، یک تکه مقوا را سوراخ کنید، سپس آن را جلوی خورشید بگیرید تا نقطهٔ روشنی از نور روی کف اتاق به وجود آید. حال قطعهٔ پولاروید را جلوی سوراخ قرار دهید و با چرخاندن آن در پی تغییرات شدت نور نقطهٔ روشن باشید. هرگز به خورشید نگاه نکنید! الکترونها یک مولکول هوا مشابه با نوسانگرهایی هستند که به وسیلهٔ نور تابیده به آنها تحریک شده‌اند. بنابراین حرکت آنها برهم‌نهی از حرکت در امتداد \hat{x} و \hat{y} (جهتهای عمود بر \hat{z}) است. الکترونها نوسان‌کننده در همهٔ جهات تابش می‌کنند، اما در همهٔ جهات یکسان تابش نمی‌کنند. از بحث قبلی خود در بخش ۷-۵، می‌دانیم که دامنه و قطبیدگی میدان الکتریکی تابش شده از یک بار نقطه‌ای نوسان‌کننده، متناسب با "تصویر" دامنهٔ حرکت بار نوسان‌کننده چنانکه مشاهده‌کننده‌ای که به طرف بار نوسان‌کننده تابش‌کننده می‌نگرد، است. منظور از تصویر دامنهٔ حرکت، دامنهٔ مؤلفه‌ای از بردار

حرکت الکترون است که بر جهت انتشار \hat{x} که از بار نوسان‌کننده به مشاهده‌کننده است، عمود است. اگر \hat{x} در امتداد \hat{y} باشد، مشاهده‌کننده فقط مؤلفه حرکت الکترون را می‌بیند. بنابراین او تابشی را می‌بیند که 10° درصد در امتداد \hat{x} قطبیده خطی است. شدت نور فقط نصف حالتی است که او در جهت \hat{z} به عقب نگاه کند و حرکت الکترون را هم در امتداد \hat{x} و هم در امتداد \hat{y} ببیند. [در مثال ما مشکل بتوان مستقیماً به عقب در جهت \hat{z} نگاه کرد، زیرا خورشید ما را کور می‌کند. اما می‌توان در جهات مختلف نگاه کرد و دقت کرد که هنگامی که به آسمان نزدیک خورشید نگاه می‌کنیم، آسمان ناقطبیده به نظر می‌آید. این مطلب در مورد نوری که با زاویه پراکندگی زیاد به چشم می‌رسد نیز صادق است (هر چه زاویه به 18° نزدیکتر باشد بهتر است).] شکل ۸-۶ این فرایند قطبیده‌شدن را نشان می‌دهد.

زنبورها نیازی به پولاروید ندارند تا قطبیدگی آسمان آبی را تشخیص دهند؛ آنها با استفاده از این قطبیدگی راه خود را می‌یابند.^۱ بعضی از ما هم (ولی نه خود من) می‌توانیم قطبیدگی آسمان آبی را بدون پولاروید تشخیص دهیم.^۲

واقطبیدگی از طریق پراکندگی چندباره. هنگامی که "از پهلو" به نور نورافکنی که در هوای عادی (یعنی غبارآلود) روشن شده است نگاه می‌کنیم بازتاب آبی‌رنگی از نور را می‌بینیم؛ این بازتاب به وسیله همان سازوکاری که آسمان آبی را قطبیده می‌کند، قطبیده شده است. اگر هوا مه‌آلود باشد، نورافکن به جای آبی‌رنگ، سفید به نظر می‌آید؛ در این صورت نور آن قطبیده نیست. همچنین بازتاب نور آفتاب از ابرها، شکر و یا یک تکه کاغذ سفید، قطبیده نیست. اگر یک بار پراکندگی در یک زاویه بخصوص ممکن است قطبیدگی شدیدی را باعث شود، این بدان معنی نیست که چندین پراکندگی بهتر است! اگر در زاویه بخصوصی بازتاب از یک تکه شیشه را به وجود آورید، حاصل نوری است که 100% درصد قطبیده خطی است. (درباره این مطلب در پاراگراف بعدی بحث خواهد شد.) اما اگر شیشه را به صورت پودر درآورید، نوری که از یک قسمت پودر به چشم شما می‌رسد، پس از چندین بازتاب و نفوذ تا عمق قابل ملاحظه‌ای در پودر شیشه به چشم شما رسیده است. در نتیجه آن، شما به الکترونیایی که در تمام جهات (عمود بر خط دید شما) ارتعاش می‌کنند، نگاه می‌کنید، زیرا آنها به وسیله تابشی که از جهات مختلف، علاوه بر جهت اولیه چشمه نور، بر آنها تابیده است تحریک شده‌اند. آنها حتی به وسیله نوری که کمی نفوذ کرده است، چندین بار بازتاب یافته و در راه بیرون آمدن از توده پودر است، هم تحریک می‌شوند. نمایش

1. Karl von Frisch, *Bees, Their Vision, Chemical Sense, and Language* (Cornell University Press, Ithaca, N. Y., 1950).

2. M. Minnaert, *Light and Colour* (Dover Publication, Inc., New York, 1945).

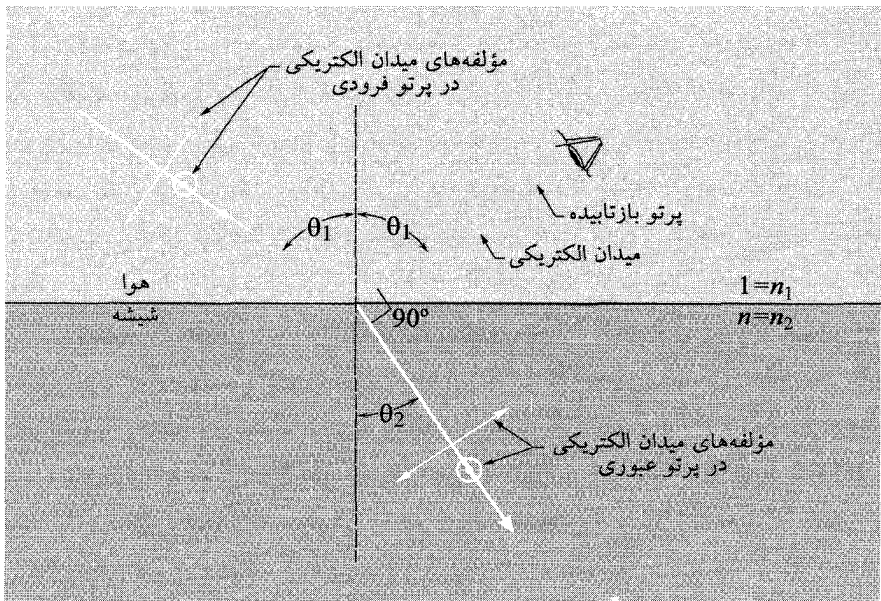
خوبی از اثر واقطیبیدگی پراکندگی چندباره را می‌توانید با قراردادن تکه‌ای کاغذ مومی نیمه‌شفاف بین دو پولاروید عمود، به دست آورید. کاغذ مومی نور قطبیده حاصل از پولاروید اول را، تقریباً کاملاً واقطبیده می‌کند. اینکه کاغذ مومی نور را چندین بار پراکنده می‌کند را می‌توان با آزمایش ساده قراردادن کاغذ مومی بر روی یک صفحه نوشته‌شده، نشان داد. اگر کاغذ مومی به صفحه نوشته‌شده خیلی نزدیک باشد، به راحتی می‌توانید حروف سیاه را ببینید. اگر صفحه مومی در دو سه سانتیمتری بالای نوشته‌ها قرار گیرد، حروف چنان تار به نظر می‌آیند که قابل تمیز از یکدیگر نیستند. برای فهمیدن این مطلب، ”نور سیاهی“ را که از یک حرف روی صفحه به چشم شما می‌رسد، به منزله باریکه نور یک چراغ‌قوه کوچک بگیرید — کاغذ مومی، این نور را پخش می‌کند. آزمایش خوب دیگر آن است که نور چراغ‌قوه‌ای را از پشت کاغذ مومی به جسمی بتابید. همین‌طور که چراغ‌قوه را از کاغذ مومی دورتر می‌برید به لکه نور عبوری نگاه کنید. یک تکه شیشه یا پلاستیک شفاف، برای نور تابیده بر آن پراکندگی چندباره به وجود نمی‌آورد (می‌توان از پشت آن نوشته‌ها را خواند، چه نزدیک نوشته‌ها باشد چه دور) و نور را واقطبیده نمی‌کند.

قطبیدگی از راه بازتاب آینه‌ای — زاویه بروستر. به بازتاب جسمی در شیشه معمولی پنجره و یا در سطح آرام آب بنگرید. با استفاده از یک قطعه پولاروید قطبیدگی نور بازتابیده را امتحان کنید. آزمایش شما نشان خواهد داد که برای شیشه با ضریب شکست $n = ۱.۵$ در زاویه فرودی تقریباً ۵۶° (که نسبت به عمود بر سطح شیشه اندازه‌گیری می‌شود)، نور بازتابیده صددرصد قطبیده خطی به موازات سطح شیشه است؛ برای آب ($n \sim ۱.۳۳$) این زاویه تقریباً ۵۳° است. این زاویه فرودی بخصوص را زاویه بروستر می‌نامند. اگر نور با زاویه بروستر تابیده شود، با چرخاندن پولاروید به وضعیت مناسب، می‌توانید بازتاب را کاملاً از بین ببرید. (اگر پولاروید را با زاویه مناسب و خیلی نزدیک به چشم خود نگه دارید تا بتوانید گستره وسیعی از زاویه‌ها را ببینید، به مرکز زاویه بروستر نوار تاریکی را مشاهده خواهید کرد.)

برای هر زاویه فرودی، زاویه‌های فرودی و شکست نور، یعنی θ_1 و θ_2 ، به وسیله قانون اسنل به یکدیگر مرتبط‌اند

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (۵۲)$$

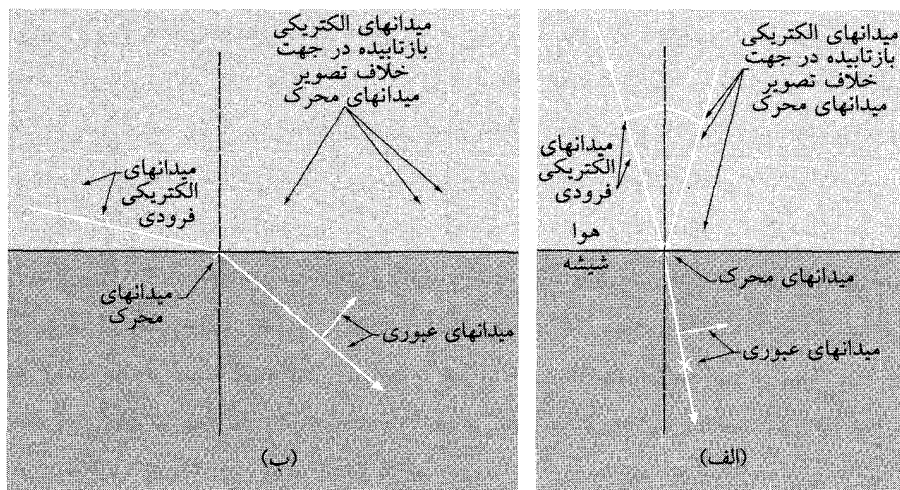
نور فرودی و بازتاب نسبت به خط عمود بر سطح زاویه‌های مساوی می‌سازند. (این را قانون بازتاب آینه‌ای می‌نامند.) بنابراین به ازای زاویه فرودی بخصوص θ_1 که $\theta_1 + \theta_2 = ۹۰^\circ$ است، نور بازتابیده با نور شکسته‌شده (یعنی عبورکرده) زاویه ۹۰° درجه می‌سازد، همان‌طور که در شکل ۸-۷ نشان داده شده است. جهت نوسان الکترونها در شیشه عمود بر جهت نور عبوری است (زیرا آن جهت نیروی



شکل ۷-۸ زاویهٔ بروستر. زاویه‌ها دقیقاً برای شیشه ($n = ۱.۵$) رسم شده‌اند. نور بازتابیده در راستای عمود بر صفحهٔ فرودی، یعنی صفحه‌ای که نور فرودی و خط عمود بر سطح می‌سازند، ۱۰۰ درصد قطبیده است. (نقطه‌ای که به دورش دایره‌ای رسم شده است، قطبیدگی میدان الکتریکی را به داخل یا خارج از صفحهٔ کاغذ نشان می‌دهد.)

محرک آنهاست.) مؤلفهٔ حرکت الکترون عمود بر صفحهٔ فرودی (یعنی عمود بر صفحهٔ کاغذ در شکل ۷-۸)، در هر زاویهٔ فرودی، برای ناظری که به نور بازتابیده (یعنی نور تابیده به وسیلهٔ الکترونها و داشته در شیشه) می‌نگرد، کاملاً قابل "رویت" است، زیرا این مؤلفهٔ حرکت بر راستای انتشار از الکترون به ناظر (یعنی راستای نور بازتابیده) عمود است. اما، مؤلفهٔ حرکت الکترون که در صفحهٔ فرودی قرار دارد بر راستای بازتاب عمود نیست. فقط مؤلفهٔ حرکت که بر راستای بازتاب عمود باشد، در نور بازتاب سهمیم است. وقتی زاویهٔ فرودی، زاویهٔ بروستر است، مؤلفهٔ حرکت الکترون در صفحهٔ فرودی درست در امتداد خطی است که الکترون را به ناظر متصل می‌کند، این مؤلفه هیچ نور بازتابی را باعث نمی‌شود. بنابراین نور بازتابیده در امتداد عمود بر صفحهٔ فرودی کاملاً قطبیده است. از شکل ۷-۸ می‌بینیم که این وضعیت هنگامی که $\theta_1 + \theta_2 = ۹۰^\circ$ درجه باشد رخ می‌دهد. بنابراین معادلهٔ (۴) [با استفاده از $n_2 = n$ ، $n_1 = ۱$ و $\sin \theta_2 = n \sin \theta_1$ ، که همان $\cos \theta_1$ است] می‌دهد

$$\tan \theta_1 = n, \quad \theta = \text{زاویهٔ بروستر} \quad (۵۳)$$



شکل ۸-۸ روابط میان فازها در نوری که از شیشه بازمی‌تابد. (الف) θ_1 کمتر از زاویهٔ بروستر. (ب) θ_1 بیشتر از زاویهٔ بروستر. (نقطهٔ نشان‌دهندهٔ جهت E خارج از صفحهٔ کاغذ است و ضربدر نشان می‌دهد که جهت E به داخل صفحه است، پیکان رسم‌شده در صفحهٔ کاغذ، جهت E را در صفحه نشان می‌دهد.)

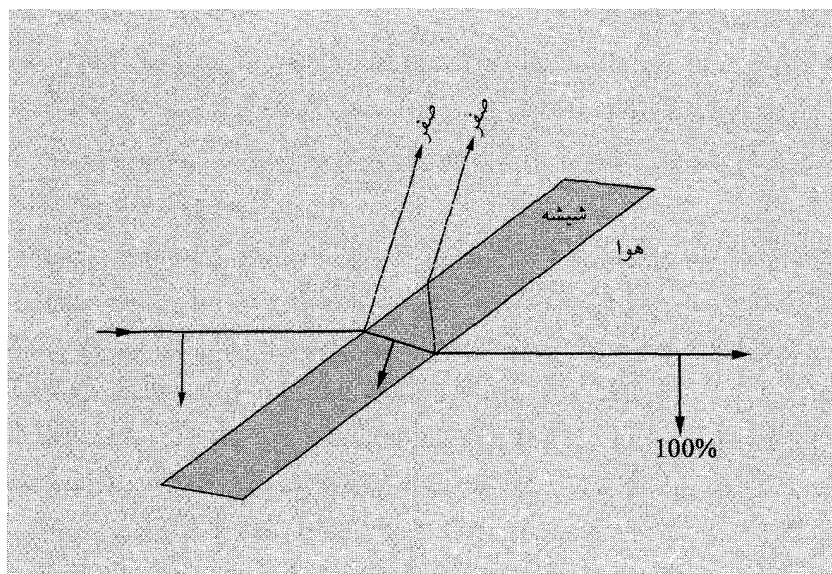
رابطهٔ میان فازها در نور بازتابیدهٔ آینه‌ای. روابط میان فازهای نور فرودی، عبوری و بازتاب جالب است. آنها در شکل ۸-۸ نشان داده شده‌اند. این روابط میان فازها را بدین ترتیب می‌توان فهمید. فاز موج عبوری همواره همان فاز موج فرودی است. از روی تشابهی که با موجهای بازتاب و عبوری روی تار، وجود دارد می‌توان این مطلب را فهمید. موج فرودی نیروی محرک را تأمین می‌کند و موج عبوری را با ضرب عبور مثبت باعث می‌شود، زیرا نیروی محرکی که موج فرودی به‌وجود می‌آورد مشابه نیروی محرکی است که در وهلهٔ اول موج فرودی را به‌وجود آورده بود. (برای بخشی از بازتاب و عبور قائم، یعنی در زاویهٔ فرودی صفر درجه، که بیشتر جنبهٔ کمی داشته باشد، بخش ۳-۵ را ببینید.) قسمت اعظم موج عبوری، حاصل چشمهٔ اصلی نور است، اما کمی هم از تابش الکترونیهای تحریک‌شده در شیشه بهره می‌برد. موج بازتاب تماماً ناشی از تابش الکترونیهای واداشته است. می‌دانیم که برای فرود قائم، یعنی زاویهٔ فرودی صفر درجه، (از هوا به شیشه) ضریب بازتاب میدان الکتریکی منفی است (بخش ۳-۵). همچنین می‌دانیم که میدان الکتریکی بازتاب می‌باید متشکل از برهم‌نهدنی از مؤلفه‌هایی متناسب با تصویر حرکت الکترون چنانکه ناظری که به نور بازتاب می‌نگرد می‌بیند، باشد. حرکت الکترونها متناسب با میدان الکتریکی عبوری است. بنابراین در صورتی که بگوییم برای نور فرودی از هوا به شیشه، ناظری که به بازتاب می‌نگرد، دامنه‌ای را می‌بیند که منهای دامنه‌ای از میدان عبوری است که بر عمود بر خط دید ناظر تصویر شده است،

همه روابط فازی برای فرود قائم را به درستی به دست می‌آوریم. این گفته نه تنها برای فرود قائم بلکه برای هر زاویه فرودی صادق است. از روی آن می‌توان به درستی زاویه بروستر را به دست آورد، این گفته همچنین روابط میان فازها را برای هر زاویه فرودی به دست می‌دهد. (شدتها را فقط به طور تقریبی می‌دهد.) روابط میان فازها را که در شکل ۸-۸ آمده است، با استفاده از دو قطعه پولاوید و یک اسلاید میکروسکوپ، به سادگی می‌توانید تصدیق کنید. (آزمایش خانگی ۸-۲۶ را ببینید.)

شدت نور بازتابیده آینه‌ای. رابطه‌هایی که شدت نور بازتابیده آینه‌ای را می‌دهند، به دست نخواهیم آورد.^۱ با استفاده از قطعه‌های پولاوید و یک اسلاید میکروسکوپ به سادگی تصدیق کنید که مؤلفه قطبیدگی خطی عمود بر صفحه فرود با شدتی که زاویه فرودی از صفر درجه (فرود قائم) به ۹۰ درجه (فرود مماس) افزایش می‌یابد، به تدریج به نسبت بیشتری منعکس می‌شود. در فرود قائم تقریباً ۴٪ شدت اولیه از روی سطح بازتابیده می‌شود؛ تقریباً دو برابر این مقدار برای یک اسلاید میکروسکوپ که دارای دو سطح است بازتابیده می‌شود. در فرود مماس، تقریباً همه نور بازتابیده می‌شود. برای مؤلفه‌ای که در صفحه فرود قطبیده است، شدت نور بازتابیده از دو سطح اسلاید از ۸٪ در فرود قائم به صفر در فرود با زاویه بروستر (۵۶ درجه) تقلیل پیدا می‌کند و سپس به تدریج افزایش می‌یابد تا اینکه در فرود مماس تقریباً همه نور بازتابیده می‌شود. (آزمایش خانگی ۸-۲۶ را ببینید.)

پنجره بروستر برای لیزر. کاربرد جالبی از زاویه بروستر در طراحی پنجره‌ای شیشه‌ای است که ضریب عبور ۱۰۰٪ دارد؛ این پنجره را پنجره بروستر می‌نامند. فرض کنید ابزاری دارید که در آن عبور باریکه‌ای از نور از یک پنجره شیشه‌ای لازم یا مفید است. در فرود قائم فقط در حدود ۹۲٪ شدت نور فرودی از پنجره شیشه‌ای عبور می‌کند. (تقریباً ۴٪ در هر سطح از دست می‌رود.) ممکن است در برخی مواقع این وضعیت را بتوان تحمل کرد، اما برای لیزرگازی که آینه‌هایش بیرون از پنجره‌ها قرار دارند و شاید در رفت و برگشت به ۱۰۰ عبور نیاز باشد، نمی‌توان زیرا توان صدم، ۹۲٪ فقط حدود ۰۰۰۳٪ است. راه‌حل بکری وجود دارد و آن این است که پنجره را مایل قرار دهیم به شکلی که باریکه نور با زاویه فرودی بروستر به آن بتابد. قسمتی از مؤلفه قطبیدگی عمود بر صفحه فرودی بازتابیده می‌شود، و قسمتی عبور می‌کند. پس از اینکه به دفعات از پنجره عبور کرد، بازتاب باعث می‌شود تا باریکه نور از این مؤلفه خالی شود. از طرف دیگر، مؤلفه قطبیدگی موازی با صفحه فرودی کاملاً عبور می‌کند — ضریب بازتاب در زاویه بروستر صفر است. بنابراین

۱. ریچارد فانیمن روش زیبایی برای به دست آوردن این رابطه‌ها که به فرمولهای فرنل معروف‌اند، ارائه می‌دهد



شکل ۸-۹ پنجره بروستر. شکل برای $n = ۱.۵$ رسم شده است.

حتی پس از رفت و برگشت‌های متعدد از درون پنجره، این مؤلفه تقریباً به مانند اول باقی می‌ماند. نتیجه خالص اینکه، تقریباً نیمی از نور به تمامی به دور ریخته می‌شود و تقریباً نیمی از نور به تمامی نگه داشته می‌شود و نوری که از لیزر گسیل می‌شود ۱۰۰% قطبیده خطی است. لیزرهای گازی نسبتاً ارزان قیمت که در هر دانشکده فیزیک یافت می‌شود، معمولاً پنجره‌های بروستر دارند. چنین لیزری را پیدا کنید. با استفاده از قطعه‌ای پلاروید قطبیدگی نور خروجی را امتحان کنید. لیزر را خاموش کنید و در آن را بردارید تا پنجره‌های بروستر را ببینید. (بعضی لیزرها از پنجره‌های بروستر استفاده نمی‌کنند - نور خروجی آنها قطبیده خطی نیست). در شکل ۸-۹، عملکرد پنجره بروستر نشان داده شده است.

قطبیدگی رنگین کمان. قطبیدگی رنگین کمان حتی از قطبیدگی آسمان آبی هم جالب توجه‌تر است. تمرینهای جالبی وجود دارد که بتوانید پیش‌بینی کنید قطبیدگی (نسبت به کمان) شعاعی است یا مماسی. اگر نمی‌توانید منتظر باران بمانید تا پیش‌بینی خود را به بوته آزمایش بگذارید، شلنگ باغچه را بگیرید و منتظر آفتاب بمانید (با اگر شب است، از یک چشمه نور استفاده کنید).^۱

۱. برای توصیف سازوکار رنگین کمان به کتاب زیر مراجعه کنید:

۴-۸ شکست دوگانه

در بخش ۳-۸، یاد گرفتیم که چگونه حالت قطبیدگی باریکه موج الکترومغناطیسی را از طریق جذب یا بازتاب منتخب تغییر دهیم (منتخب به این معنی که یک مؤلفه قطبیدگی بیشتر از مؤلفه دیگر جذب و یا منعکس می‌شود). در این بخش یاد می‌گیریم که حالت قطبیدگی را با تغییر دادن فاز نسبی دو مؤلفه تغییر دهیم.

سلوفون. دو قطعه پولاروید را به صورت متعامد قرار دهید تا نوری از آنها عبور نکند. حال، یک تکه سلوفون معمولی را بین پولارویدهای متعامد رد کنید (تکه سلوفون را می‌توانید از پلاستیک دور شکلات یا نان تهیه کنید — تقریباً هر نوع پلاستیک شفاف برای این کار خوب است). اکنون نور عبور می‌کند! از آنجایی که سلوفون کاملاً شفاف است، و ظاهرش مانند پولاروید آن “تیرگی” را ندارد، می‌دانیم که سلوفون نمی‌تواند نور را جذب کند. تنها راهی که با آن سلوفون می‌تواند قطبیدگی نور را تغییر دهد، تغییر دادن فاز نسبی مؤلفه‌های مختلف قطبیدگی است. (در این صورت، همان‌طور که می‌توانید به‌سادگی نشان دهید، از شدت نور کاسته نخواهد شد.)

حال همین‌طور که پولارویدها را متعامد نگه داشته‌اید، تکه سلوفون را در بین دو پولاروید بچرخانید. دو جهت متعامد خواهید یافت (وقتی 90° سلوفون را چرخانده‌اید) که اثر سلوفون در آن جهات حداکثر است و دو جهت متعامد دیگر که در آنها سلوفون هیچ اثری ندارد. پس سلوفون دارای دو جهت بخصوص است که بر هم عمودند و در صفحه سلوفون قرار دارند؛ این دو جهت به خاصیت سلوفون در تغییر فاز نسبی مؤلفه‌های مختلف قطبیدگی نور مربوط هستند.

برای اینکه نشان دهید هر پلاستیک شفاف دارای این خاصیت عجیب نیست، یک تکه پلاستیک مخصوص فریزر یا تکه‌ای از پلی‌اتیلن کشی که خشک‌شویها برای حفاظت لباسها روی آنها می‌کشند، پیدا کنید. اثر آن را در بین دو پولاروید متعامد امتحان کنید. نور زیادی عبور نمی‌کند. (اثر مشابهی مشاهده می‌شود، اما بسیار کمتر از آنچه برای سلوفون مشاهده شد.) حال که (یا اگر) تکه پلاستیکی یافته‌اید که هیچ “محور اپتیکی” ندارد، یعنی دارای جهات بخصوصی در صفحه پلاستیک نیست، سعی کنید یک جهت بخصوص به‌وجود آورید. یک تکه از این پلاستیک قابل کش‌آمدن بگیرید و آن را بکشید. تکه پلاستیک را طوری در بین پولارویدهای متعامد بگذارید که جهت کش‌آمده با محورهای متعامد پولارویدها زاویه 45° درجه بسازد. حال باید اثر بسیار قابل ملاحظه‌ای را مشاهده کنید.

اکنون به ارائه دلیل رفتار پلاستیک فریزرکش‌آمده می‌پردازیم. قبل از کشیدن، مولکولهای آلی بلند پلاستیک مثل اسپاگتی لوله‌شده بودند و در تمام جهات قرار داشتند. اما بر اثر کشیدن پلاستیک مولکولها تا حدی راست شدند و هم سر قرار گرفتند. الکترونهای یک مولکول آلی بلند زنجیرمانند دارای “سختی فشر مؤثری” هستند که برای ارتعاشات در امتداد زنجیر

هیدروکربن متفاوت از ارتعاشات در دو جهت عمود بر آن است. بنابراین قابلیت قطبیدگی مولکولها برای جابه‌جایی در امتداد زنجیر هیدروکربن متفاوت با قابلیت قطبیدگی آنها برای جابه‌جایی عمود بر زنجیر هیدروکربن است. پس از کشیدن پلاستیک، جهت درازای مولکولها کم و بیش در امتداد جهت کشیدگی قرار می‌گیرد. یکی از جهات عمود بر جهت کشیدگی را می‌توان در صفحه پلاستیک اختیار کرد. (جهت دیگر عمود بر صفحه پلاستیک است و کاری با آن نداریم). بدین ترتیب، پذیرفتاری الکتریکی (قطبیدگی القاشده بر واحد حجم بر واحد میدان الکتریکی فرودی) برای میدانهای الکتریکی در امتداد جهت کشیدگی متفاوت با پذیرفتاری الکتریکی عمود بر جهت کشیدگی خواهد بود. بنابراین ثابت دی‌الکتریک برای این دو جهت متفاوت خواهد بود، پس این دو جهت ضریب شکست متفاوتی خواهند داشت.

محورهای کند و تند تیغه تأخیری. این دو جهت، جهت کشیدگی و جهت عمود بر آن (که در صفحه پلاستیک قرار دارد)، محورهای اپتیکی نام دارند. محورهای اپتیکی که ضریب شکست بیشتر را (برای میدان الکتریکی E در امتداد آن) حاصل می‌کند، محور کند نامیده می‌شود. (ضریب شکست بیشتر یعنی سرعت فاز کمتر). محور اپتیکی دیگر محور تند نامیده می‌شود. این دو ضریب شکست را n_o و n_e می‌نامیم، $n_o > n_e$. یک ورق سلوفون یا پلاستیک یا ماده دیگری که چنین خصوصیتی را داشته باشد، تیغه تأخیری می‌نامند.

حال بیاید اثر تیغه تأخیری را بر روی موج تخت الکترومغناطیسی فرودی بررسی کنیم. ابتدا میدان الکتریکی فرودی را به مؤلفه‌هایش در امتداد محور کند $\hat{x} \equiv \hat{e}_x$ و محور تند $\hat{y} \equiv \hat{e}_y$ تجزیه می‌کنیم. فرض کنید برای $z < 0$ خلاً موجود است و تیغه تأخیری از $z = 0$ شروع می‌شود و تا $z = \Delta z$ ادامه می‌یابد و پس از آن دوباره خلاً داریم. فرض کنید نوسانهای میدان الکتریکی موج فرودی در $z = 0$ با قسمت حقیقی کمیت مختلط

$$\mathbf{E}_c(0, t) = e^{i\omega t} [\hat{x} A_x e^{i\varphi_x} + \hat{y} A_y e^{i\varphi_y}] \quad (54)$$

داده می‌شود. دامنه‌های A_x و A_y و ثابتهای فاز φ_x و φ_y را با تجزیه میدان الکتریکی فرودی به مؤلفه‌های قطبیده خطی در امتداد \hat{x} و \hat{y} به دست می‌آوریم. (از آنجایی که این دامنه‌ها و ثابتهای فاز دلخواه هستند، معادله (54) نشان‌دهنده قطبیدگی در حالت کلی است.) حال موج عبوری را در درون تیغه تأخیری بین $z = 0$ و $z = \Delta z$ در نظر بگیرید. از هرگونه کاستی به خاطر بازتاب از سطح اول صرف‌نظر می‌کنیم و در معادله (54) فقط ωt را با $\omega t - kz$ عوض می‌کنیم. اما باید به خاطر داشته باشیم که k برای \mathbf{E} در امتداد \hat{e}_x با k برای \mathbf{E} در امتداد \hat{e}_y متفاوت است. پس با

به یاد آوردن اینکه k متناسب با ضریب شکست است و برابر با $n\omega/c$ ، در درون تیغه تأخیری داریم

$$E_c(z, t) = e^{i\omega t} [\hat{x}A_{\text{ع}} e^{i\varphi_{\text{ع}}} e^{-in_{\text{ع}}\omega z/c} + \hat{y}A_{\text{ع}} e^{i\varphi_{\text{ع}}} e^{-in_{\text{ع}}\omega z/c}] \quad (55)$$

تأخیر فاز نسبی. تا زمانی که موج به انتهای تیغه در $z = \Delta z$ برسد، هریک از مؤلفه‌ها دستخوش تأخیری در فاز نسبت به فاز در عبور از خلاً ($n = 1$) می‌شود. برای مؤلفه‌ کند این تأخیر با $(n_{\text{ع}} - 1)\omega\Delta z/c$ داده می‌شود:

$$\text{تأخیر فاز ی} E_{\text{ع}} = (n_{\text{ع}} - 1) \frac{\omega\Delta z}{c} \quad (56)$$

به همین ترتیب داریم

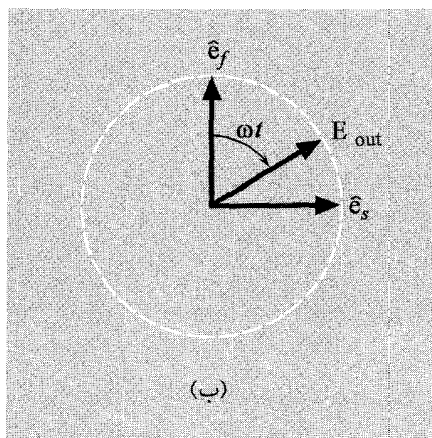
$$\text{تأخیر فاز ت} E_{\text{ت}} = (n_{\text{ت}} - 1) \frac{\omega\Delta z}{c} \quad (57)$$

با کم کردن معادله (57) از معادله (56) تأخیر در فاز ی $E_{\text{ع}}$ را نسبت به تأخیر در فاز ت $E_{\text{ت}}$ پیدا می‌کنیم:

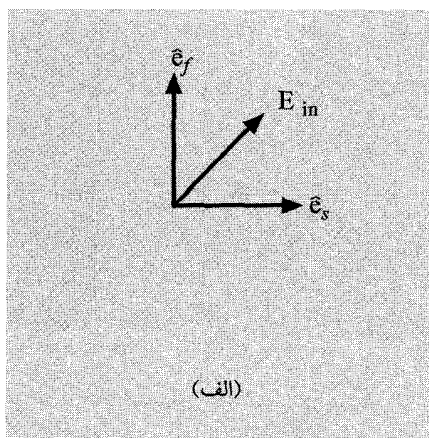
$$\begin{aligned} \text{تأخیر فاز ی} E_{\text{ع}} \text{ نسبت به } E_{\text{ت}} &= (n_{\text{ع}} - n_{\text{ت}}) \frac{\omega\Delta z}{c} \\ &= (n_{\text{ع}} - n_{\text{ت}}) 2\pi \frac{\Delta z}{\lambda_{\text{ع}}} \end{aligned} \quad (58)$$

که در اینجا $\lambda_{\text{ع}}$ طول موج در خلاً است.

تیغه ربع - موج. مثال زیر را که به شما کمک می‌کند تا علامتهای بعلاوه و منها را اشتباه نگذارید، در نظر بگیرید. فرض کنید میدان الکتریکی نور قطبیده خطی فرودی در امتداد خط 45° درجه بین \hat{e}_y و \hat{e}_x باشد. بدین ترتیب $A_{\text{ع}}$ و $A_{\text{ت}}$ با هم برابرند و $\varphi_{\text{ع}}$ و $\varphi_{\text{ت}}$ با هم. فرض کنید ضخامت تیغه چنان باشد که مؤلفه کند نسبت به مؤلفه تند تأخیر $1/4$ دور داشته باشد، یعنی دستخوش تأخیر فاز به میزان $\pi/2$ نسبت به مؤلفه تند شود. چنین تیغه تأخیری را تیغه ربع - موج نامند. موجی که از پشت این صفحه بیرون می‌آید دارای مؤلفه‌های کند و تند هم دامنه است، و فاز مؤلفه تند 90° درجه جلوتر از فاز مؤلفه کند است. این بدان معنی است که نور قطبیده دایره‌ای داریم که جهت چرخش آن از \hat{e}_x به \hat{e}_y است. این نتایج از معادله (55) به دست می‌آیند. شکل ۸-۱۰ این نتایج را نشان می‌دهد. برای فهمیدن تیغه‌های تأخیری، مهم است که علامتها را اشتباه نگذارید. طرز کار تیغه ربع موج را در اینجا به نحو دیگری بیان می‌کنیم تا به شما کمک کند قانع شوید که جهت چرخش چنان است که در شکل ۸-۱۰ نشان داده شده است. اگر دو مؤلفه قطبیدگی در خلاً پیش روند، در هر مکان z و لحظه t ، نوسان در امتداد \hat{x} و نوسان در امتداد \hat{y} هر دو به یک زمان تأخیری زودتر که به زمان گسیل نور از چشمه



(ب)

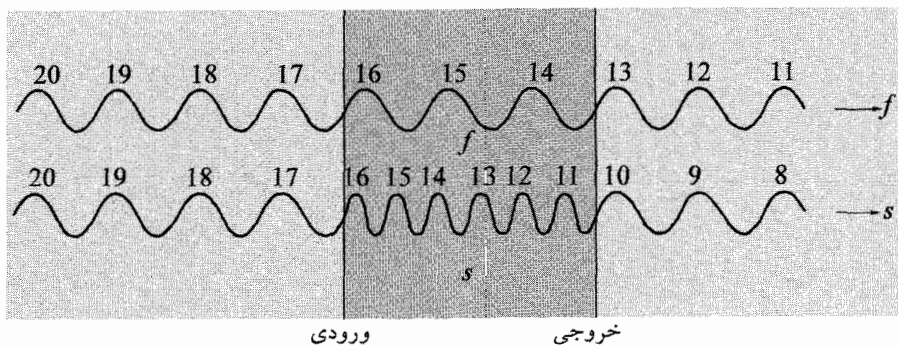


(الف)

شکل ۸-۱۰ تیغه ربع موج. نور قطبیده خطی فرودی که میدان E با هریک از محورهای اپتیکی زاویه ۴۵ درجه می‌سازد (الف) ورودی. (ب) خروجی. چه جهت انتشار به داخل صفحه کاغذ باشد و چه به خارج، این نتیجه حاصل می‌شود.

برمی‌گردد، مربوط هستند. این دو مؤلفه قطبیدگی، حال از درون تیغه‌ای با n بزرگتر از n می‌گذرد. در یک نقطه در خروجی (بشت) تیغه، اگر مقدار لحظه‌ای E را با مقدار E در همان لحظه مقایسه کنیم، مقدار لحظه‌ای E می‌بایست در زمان تأخیری زودتر نسبت به مقدار E گسیل شده بوده باشد. این به آن دلیل است که موج پیشرونده‌ای که E را حمل می‌کند همان مسافتی را که موج E پیموده است می‌پیماید، اما با سرعت فاز کمتری؛ بنابراین حتماً زودتر شروع به حرکت کرده است. بنابراین E نسبت به E به زمان گسیلی در گذشته نزدیکتر مربوط می‌شود و بدین ترتیب فاز نوسان زمان بیشتر جلو رفته است، پس E جلوتر از E است. این روابط فازی در شکل ۸-۱۱ نشان داده شده‌اند. خواص تیغه‌های تأخیری. شما باید از صحت جملات و "قاعده‌های" شماره‌گذاری شده زیر خود را قانع کنید. (نباید آنها را حفظ کنید. باید آنقدر خوب آنها را درک کنید که با فراموش کردن جوابها هروقت خواستید خود بتوانید آنها را به دست آورید.)

۱. تیغه نیم موج (که دو برابر ضخامت صفحه ربع موج را دارد) نور قطبیده خطی را به نور قطبیده خطی تبدیل می‌کند؛ جهت قطبیدگی نور خروجی را می‌توان با تصویر کردن جهت قطبیدگی نور ورودی در یکی از محورهای اپتیکی به دست آورد. (تقریباً هرگز به اینکه از کدام محور اپتیکی برای تصویر کردن استفاده کردیم، کاری نداریم، یعنی به مقدار مطلق فاز کاری نداریم. وجود علامت منفی در راستای دامنه اهمیتی برابمان ندارد.) بدین ترتیب، یک تیغه نیم موج علامت نسبی مؤلفه‌های خطی دامنه فرودی را معکوس می‌کند.



شکل ۱۱.۸ تأخیر فاز نسبی مؤلفه‌های قطبیدگی کند و تند. اعداد صحیح زمان گسیل از چشمه نور را نشان می‌دهند. همان‌طور که نشان داده شده است، در ورودی تیغه تأخیری، دو مؤلفه قطبیدگی به یک زمان گسیل مربوط می‌شوند. در خروجی، مؤلفه کند که در دور 10° گسیل شده بود با مؤلفه تند که در دور 13° گسیل شده، همزمان وجود دارند. مؤلفه تند به اندازه سه دور تمام از مؤلفه کند جلوتر است.

۲. تیغه نیم‌موج نور قطبیده دایره‌ای راستگرد را به نور قطبیده دایره‌ای چپگرد تبدیل می‌کند، و برعکس.

۳. تیغه ربع موج نور قطبیده خطی با قطبیدگی در راستایی بین \hat{e}_+ و \hat{e}_- را به نور قطبیده بیضوی با جهت چرخش از \hat{e}_- به \hat{e}_+ تبدیل می‌کند. اگر قطبیدگی نور فرودی با \hat{e}_+ و \hat{e}_- زاویه 45° درجه بسازد، قطبیدگی نور خروجی دایره‌ای است. (توجه: این بدان معنی است که اگر قطبیدگی خطی ورودی \mathbf{E} در شکل ۸-۱۰ را 90° درجه بچرخانیم، خروجی با بسامد ω در جهت عکس آنچه در شکل ۸-۱۰ نشان داده شده است، می‌چرخد. برای به‌کار بستن "قاعده" این نکته، فقط جهت قراردادی شکل ۸-۱۰ را برای \hat{e}_- یا \hat{e}_+ ، ولی نه هر دو، معکوس کنید، تا ورودی \mathbf{E} باز هم بین بردارهای یکه \hat{e}_+ و \hat{e}_- قرار گیرد. بر طبق این قاعده چرخش خروجی از \hat{e}_- به \hat{e}_+ است.)

۴. تیغه ربع موج نور قطبیده دایره‌ای را به نور قطبیده خطی تبدیل می‌کند. برای به‌دست آوردن قاعده‌ای ساده، محورهای تند و کند را در نور قطبیده دایره‌ای فرودی چنان انتخاب کنید که جهت چرخش از محور تند به محور کند باشد. بدین ترتیب تیغه ربع موج نور قطبیده دایره‌ای را به نور قطبیده خطی تبدیل می‌کند؛ راستای قطبیدگی چنان است که با \hat{e}_+ و \hat{e}_- زوایای مساوی می‌سازد. (در وهله اول هم نوسان تند به اندازه $1/4$ دور از نوسان کند جلوتر بود. پس از عبور از تیغه ربع موج، به اندازه $1/2$ دور جلوتر است.)

۵. تیغه تأخیری بر حالت قطبیدگی نور فرودی قطبیده خطی که میدان \mathbf{E} در امتداد \hat{e}_+ یا \hat{e}_- داشته باشد، تأثیری نمی‌گذارد.

۶. صفحه تأخیری نور "ناقطبیده" (نوری که مستقیماً از یک لامپ یا خورشید دریافت می‌کنید) را نمی‌تواند به نور قطبیده تبدیل کند. نور ناقطبیده را در بخش ۸-۵ بررسی خواهیم کرد. فعلاً فقط سر بسته می‌گوییم که در نور ناقطبیده هنگامی که بر روی زمان مشاهده میانگین بگیرید، رابطه فازی "کاتوره‌ای" مابین مؤلفه‌های x و y موجود است. تغییر فاز نسبی که تیغه تأخیری به وجود می‌آورد، رابطه بین فازهای x و y را مانند قبل کاتوره‌ای باقی می‌گذارد، یعنی، اگر φ_x و φ_y به طور کاتوره‌ای مرتبطاند، φ_x و $\varphi_y + \Delta\varphi$ هم به طور کاتوره‌ای با یکدیگر ارتباط دارند.

۷. اگر با چسباندن (روبه‌روی) یک قطعه پولاروید و یک تیغه ربع موج به شکلی که محورهای اپتیکی آن با جهت آسان عبور پولاروید زاویه ۴۵ درجه بسازد، "ساندویچی" درست کنیم، قطبشگری دایره‌ای خواهیم داشت. نور ناقطبیده باید بر روی پولاروید ساندویچ فرود آید.

۸. قطبشگر دایره‌ای که نور قطبیده دایره‌ای راستگرد را به دست می‌دهد، نور قطبیده دایره‌ای راستگرد که در جهت عکس پیش می‌رود (یعنی نوری که به روی تیغه ربع موج ساندویچ تابیده می‌شود) را با ۱۰۰ درصد بازدهی عبور می‌دهد (صرفنظر از قسمت ناچیزی که بر اثر بازتاب از میان برداشته می‌شود). این قطبشگر دایره‌ای نور قطبیده دایره‌ای چپگرد را که بر روی تیغه ربع موج آن تابیده می‌شود، کاملاً جذب می‌کند. (این نکته را با تشابه با پیچ و حدیده به سادگی می‌توان به خاطر سپرد. حدیده‌ای که میله "ناقطبیده" استوانه‌ای را به پیچ راستگرد تبدیل می‌کند، یک پیچ چپگرد را در جهت عکس "عبور" می‌دهد، اما پیچ چپ‌دستی را که در جهت عکس پیش می‌رود، کاملاً از بین می‌برد.) این نکته پیامدهای جالبی دربر دارد. آزمایش خانگی ۸-۱۸ را ببینید.

تیغه‌های تأخیری که تا به حال در نظر گرفتیم، با کشیدن صفحه پلاستیک در یک جهت درست شده بود. این آن چیزی است که (امیدواریم) شما با یک تکه پلاستیک فریزر انجام دادید. این، روشی است که به وسیله آن شرکت پولاروید تیغه ربع موج و نیم‌موج را که در جعبه وسایل اپتیک شما قرار دارد می‌سازد. با این روش است که سلوفون خواص خود را به دست می‌آورد (سلوفون از بین دو غلتک که آن را فشار می‌دهند و مولکولها را به خط می‌کنند بیرون می‌آید). یک قطعه معمولی شیشه پنجره همسانگرد است و شکست دوگانه از خود نشان نمی‌دهد (یعنی محور اپتیکی ندارد). اما اگر به تیغه شیشه‌ای تحت تنش ساخته‌شده که بین دو پولاروید متعامد قرار دارد نگاه کنید، نور عبوری را در برخی نقاط مشاهده خواهید کرد. عینکهای ایمنی تحت تنش زیاد ساخته می‌شوند و طرحهای جالبی از شکست دوگانه را بروز می‌دهند. گونیاهای پلاستیکی شفاف و ظروف پلاستیکی شفاف هم وقتی در بین دو پولاروید متعامد قرار گیرند، طرحهای

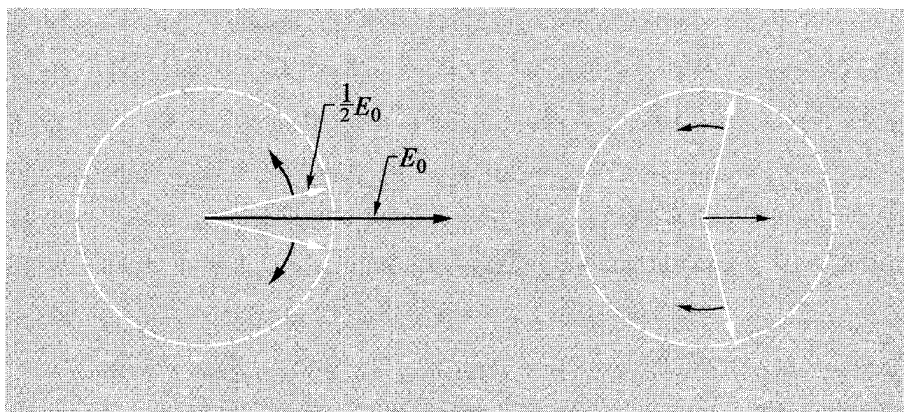
جدول ۱-۸ بعضی بلورهای تک محوری

ماده	n_z	n_e	محور e
کوارتز	۱٫۵۵۳	۱٫۵۴۴	کند
کلسیت	۱٫۴۸۶	۱٫۶۵۸	تند
یخ	۱٫۳۰۷	۱٫۳۰۶	کند

تنشی رنگی زیبایی را بروز می‌دهند. رنگی بودن این طرحها تا حدی به دلیل وابستگی ضریب شکست به رنگ (یعنی طول موج) است، اما بیشتر به دلیل وابستگی تغییر فاز به طول موج است.

بیشتر مواد بلوری شکست دوگانه بروز می‌دهند، اگر (به مانند پلاستیک کشیده شده) فقط دارای یک جهت ناهمسانگردی باشند، تک محوری خوانده می‌شوند. جهتی که در امتداد محور ناهمسانگردی است، جهت "فوق العاده" نامیده می‌شود. دو جهت دیگر که عمود بر محور ناهمسانگردی هستند، جهات "عادی" نامیده می‌شوند. ضریب شکست برای میدان الکتریکی در راستای جهت فوق العاده، n_z و در جهت عادی، n_e خوانده می‌شود. بسته به ساختار بلور، محور ناهمسانگردی ممکن است محور تند یا محور کند باشد. جدول ۱-۸ چند مثال را نشان می‌دهد؛ ضرایب شکست درج شده برای نور با طول موج 5890 \AA است (این طول موج نور زرد گسیل شده از اتمهای برانگیخته سدیم است).

°فعالیت اپتیکی. آزمایش اپتیکی جالبی را بررسی می‌کنیم. ظرفی که ته آن شیشه‌ای باشد یا یک لیوان (شیشه‌ای) را به اندازه پنج سانتیمتر از شربت پر کنید. چراغی در زیر ظرف قرار دهید، یک قطعه پولاروید را زیر ظرف و قطعه‌ای دیگر را بالای آن بگذارید. حال به درون آن نگاه کنید. پدیده‌های رنگی زیبایی را مشاهده خواهید کرد. حال به بررسی کمی پردازید: به منظور کار با گستره نسبتاً کوچکی از طول موج، از فیلتر ژلاتینی قرمز یا سبزی که در جعبه وسایل اپتیکی خود دارید استفاده کنید. (می‌توانید با استفاده از توری پراش ادموند که در جعبه وسایل اپتیکی خود دارید، و با قراردادن فیلتر یا برداشتن آن، به لامپ نگاه کنید تا از گستره رنگهایی که به‌کار می‌برید آگاه شوید.) ارتفاع را در ظرف تغییر دهید. باید دریابید که نور قطبیده خطی، قطبیده خطی باقی می‌ماند، اما جهت قطبیدگی آن به‌ازای هر ۲٫۵ سانتیمتر به اندازه 30° در جهت عقربه‌های ساعت جابه‌جا می‌شود (این جهت نسبت به حالتی است که چشمه نور مستقیماً در جلوی شما باشد). این پدیده را فعالیت اپتیکی می‌گویند.



شکل ۸-۱۲ نوسان قطبیده خطی با دامنه E_0 برهم‌نهمش نوسانهای قطبیده دایره‌ای راستگرد و چپگرد است که هر یک دامنه $\frac{1}{2}E_0$ دارد. جهت این برهم‌نهمش قطبیده خطی به فاز نسبی مؤلفه‌های دایره‌ای بستگی دارد.

دلیل آن بدین قرار است. نور قطبیده خطی که به وسیله پلاروید اول به وجود می‌آید، برهم‌نهمی است که از نور قطبیده دایره‌ای راستگرد و چپگرد به طور مساوی بهره می‌برد (شکل ۸-۱۲):

$$E_c = E_0 \hat{x} e^{i\omega t} = \frac{E_0}{2} [\hat{x} e^{i\omega t} + \hat{y} e^{i[\omega t - (\frac{1}{2})\pi]}] + \frac{E_0}{2} [\hat{x} e^{i\omega t} + \hat{y} e^{i[\omega t + (\frac{1}{2})\pi]}] \quad (59)$$

مولکولهای شکر ساختار مارپیچی دارند. همه مولکولهای شکری که از ذرت گرفته می‌شوند دارای دستوارگی یکسان هستند. دستوارگی یک مارپیچ یکسان است، چه از این سر مارپیچ به آن نگاه کنید، چه از سر دیگر. بنابراین محلولی از مولکولهای شکر که به طور کاتوره‌ای جهت گرفته‌اند، به طور خالص دارای همان دستوارگی یک مولکول شکر به تنهایی است. به خاطر ساختار مارپیچی مولکولها، محلول شکر برای امواج پیشرونده که قطبیدگی دایره‌ای راستگرد و چپگرد دارند، ضرایب شکست متفاوتی دارد. با پیشروی نور قطبیده خطی در محلول شکر، فاز یکی از مؤلفه‌های دایره‌ای از فاز مؤلفه دیگر جلو می‌افتد. کمی تفکر به همراه یک شکل باید شما را قانع کند که جهت جابه‌جاشدن قطبیدگی خطی همان جهت چرخش مؤلفه دایره‌ای تند است (مؤلفه دایره‌ای تند همان است که ضریب شکست کوچکتر را داراست). این هم مایه‌ای برای فکرکردن: چه اتفاقی می‌افتد، اگر نور را به درون محلول شکر بفرستیم، آن را از آینه‌ای بازتابیم و دوباره در جهت مخالف به درون محلول بفرستیم؟ آیا جابه‌جایی دوبرابر می‌شود؟ یا دوباره به صفر باز می‌گردد؟

اولین کشف بزرگ پاستور. اولین کشف بزرگی لویی پاستور این بود که اسید راسمیک، صورت غیرفعال اِپتیکی اسید تارتاریک، مخلوطی مساوی از اسید تارتاریک راستگرد و اسید تارتاریک چپگرد است. او موفق شد بلورهای راستگرد و چپگرد مخلوط راسمیک را در زیر میکروسکوپ تشخیص دهد و آنها را به وسیله انبرک ظریفی به دو دسته جدا از هم تبدیل کند. وقتی در آب حل شدند، یک دسته صفحه نور قطبیده را در همان جهتی چرخاند که اسید تارتاریک طبیعی گرفته شده از انگور آن را می چرخاند. دسته دیگر قطبیدگی را به همان اندازه اما در جهت مخالف چرخاند. این نوع اسید تارتاریک قبل از آن هرگز در دنیا مشاهده نشده بود!^۱

مشاهده تک دستواری مولکولهای آلی ماریچی که موجودات زنده کنونی می سازند، بدون شک سرنخی بنیادی برای گشودن معمای تاریخ تحول زندگی بر روی سیاره است. تمام مولکولهای DNA موجود (خمیرمایه زندگی)، ماریچی راستگرد هستند! چرا؟ به خاطر شانس اولیه؟ آیا اقیانوسها زمانی مقادیری مساوی از مولکولهای ابتدایی DNA راستگرد و چپگرد را دارا بودند؟ آیا مولکولهای راستگرد DNA یاد گرفتند نوع چپگرد را بخورند و تماماً از بین ببرند؟ هنوز کسی نمی داند.^۲

بازتاب فلزی. پس از اینکه قطبیدگی شدید حاصل بازتاب آینه‌ای از اجسام دی‌الکتریک مانند شیشه یا آب را مشاهده کردیم (که در زاویه بروستر به ۱۰۰° درصد می رسد)، تا حد زیادی غیرمنتظره است که در نور بازتابیده از آینه‌های نقره‌اندود یا آلومینیم‌اندود (یا هر جسم نقره‌فام دیگر، مثل قطعات کروم ماشین یا چاقوی آشپزخانه) به دنبال قطبیدگی بگردیم و دریابیم که تقریباً هیچ قطبیدگی وجود ندارد. علت آن است که فلز نقره‌فام تقریباً هر دو قطبیدگی را به تمامی باز می تابد. به همین دلیل است که نقره‌فام است؛ اگر نور دارای تک‌قطبیدگی را کمتر از نور دارای قطبیدگی دیگر باز می تاباند، تیره تر به نظر می آید. (برای مشاهده این نکته، یک آینه نقره‌اندود را پهلوئی یک قطعه شیشه قرار دهید و به هر دو در نزدیکی زاویه بروستر شیشه نگاه کنید. یک شیء تیره زیر شیشه بگذارد.)

اینکه قطعه فلز براق از نور ناقطبیده نور قطبیده نمی سازد نباید باعث شود تا عجلانه قبول

۱. برای وصف این آزمایش و آزمایشهای بزرگ دیگر پاستور به کتاب زیر مراجعه کنید:

Rene Dubos, *Pasteur and Modern Science* (Anchor Books, Doubleday & Company, Inc., Garden City, N. Y., 1960).

۲. برای وصف زیبایی از نقش دستواری در موجودات زنده و در برهم‌کنشهای فروافت ضعیف در ذرات بنیادی به کتاب زیر مراجعه کنید:

Martin Gardner, *The Ambidextrous Universe* (Basic Books, Inc., Publishers, New York, 1964).

کنیم که بر روی نور قطبیده هم اثری ندارد. هرچه باشد، یک قطعه سلوفون هم از نور ناقطبیده، نور قطبیده نمی‌سازد، اما می‌تواند حالت قطبیدگی نور قطبیدهٔ فرودی را تغییر دهد. این دقیقاً همان کاری است که یک قطعه فلز براق انجام می‌دهد. با استفاده از یک آزمایش خانگی ساده که در آن نور قطبیدهٔ خطی را توسط بازتاب فلزی به نور قطبیدهٔ دایره‌ای تبدیل می‌کنید، می‌توانید این مطلب را تصدیق کنید. آزمایش خانگی ۸-۲۸ را ببینید.

۵-۸ پهنای نوار، زمان همدوسی و قطبیدگی

در این بخش به بحث دربارهٔ قطبیدگی نور گسیل‌شده از اتمها می‌پردازیم. از تصویر کلاسیکی الکترونی که به یک هستهٔ سنگین مقید است استفاده می‌کنیم. در این تصویر، الکترون نوسان و امواج الکترومغناطیسی کلاسیک را گسیل می‌کند، انگار که اتم یک آنتن رادیویی کوچک است. این تصویر کلاسیک ”ذره‌ای“ بودن گسیل نور را دربر ندارد، یعنی این نکته را دربر نمی‌گیرد که نور به شکل ”بسته‌هایی“ به نام فوتون گسیل و جذب می‌شود. صرف‌نظر از آن، تصویر کلاسیکی بسیاری از همان نتایجی را که نظریهٔ پیچیدهٔ کوانتومی دربر دارد، به دست می‌دهد. تفاوت اصلی در آن است که در نظریهٔ کلاسیک، امواج الکترومغناطیسی را به‌عنوان حامل شار انرژی به‌طور پیوسته می‌پنداریم، در صورتی که در نظریهٔ کوانتومی در می‌یابیم که شار انرژی پیوسته نیست. با این حال، معادلات ماکسول (معادلات نظریهٔ الکترومغناطیس کلاسیک)، میانگین شار انرژی را کاملاً صحیح به دست می‌دهند. از نقطه‌نظر کلاسیکی، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی تابش الکترومغناطیسی کاملاً ”ملموس“ هستند، و مربع آنها چگالی ”واقعی“ انرژی موجود در موج را می‌دهند. نظریهٔ کوانتومی تعبیر دیگری از چگالی انرژی کلاسیکی دارد؛ از نقطه‌نظر کوانتومی، چگالی انرژی میانگین عدهٔ فوتونها ضربدر انرژی یک فوتون است. (هنگامی که میانگین عدهٔ فوتونها در یک حجم مشخص از یک کمتر است، آن را احتمال یافتن یک فوتون می‌نامند.) نظریهٔ کوانتومی را در جلد چهارم همین کتاب مطالعه خواهید کرد. با ذکر این عبارات فقط می‌خواهیم به شما اطمینان دهیم که نتایجی که با استفاده از تصویر کلاسیکی به دست می‌آوریم، پس از تعبیر مناسبی از شار انرژی به‌عنوان مثال شار احتمالی ضربدر انرژی فوتون، در نظریهٔ کوانتومی هم صادق هستند.

اتم کلاسیک در حال گسیل تابش قطبیده. فرض کنید یک اتم کلاسیک در نقطهٔ $x = y = z = 0$ واقع است. الکترون ممکن است در برهم‌نهمی از حرکات در راستاهای \hat{x} ، \hat{y} و \hat{z} در حال نوسان باشد. مشاهده‌کنندهٔ نورگسیل‌شده در مکانی بسیار دور بر روی محور مثبت z قرار دارد. تنها مؤلفه‌های x و y حرکت الکترون در امواج الکترومغناطیسی (نور) مشاهده‌شده شرکت می‌کنند.

فرض کنید در $t = 0$ الکترون، شاید بر اثر برخورد، به ارتعاش واداشته شود. پس از $t = 0$ الکترون آزادانه با بسامد طبیعی ω نوسان می‌کند. حالت قطبیدگی تابش گسیل شده، به دامنه‌های مؤلفه‌های x و y و همچنین به فاز نسبی حرکات x و y بستگی دارد. الکترون تا ابد نوسان نمی‌کند. الکترون از طریق تابش انرژی از دست می‌دهد؛ زمان فروافت میانگین را τ می‌گیریم (این زمانی است که در آن انرژی به نسبت e کاهش پیدا می‌کند، به آن عمر میانگین نیز می‌گویند). پس از چندین عمر میانگین، الکترون بیشتر انرژی خود را از دست داده است، و تابش آن از این پس ناچیز است. در طول زمان (از مرتبه τ) که تابش می‌کند، حرکات x و y آن فاز نسبی ثابتی را (نسبت به هم) نگه می‌دارند. (هر دو با یک بسامد نوسان می‌کنند، و فرض می‌کنیم که در طول این زمان، اختلالی در اتم پدید نیاید). بنابراین قطبیدگی تابش گسیل شده در طول این زمان ثابت است.

در یک زمان بعدی اتم ممکن است دستخوش برخورد دیگری شود، که دوباره اتم را به حرکت در برهم‌نهدی از نوسانهای در امتداد x ، y ، z که همگی یک بسامد طبیعی ω دارند و دامنه‌ها و ثابت فازهای آنها به شرایط برخورد بستگی دارد، وادارد. اگر اتم در یک گاز است و از همه طرف به‌طور یکنواخت بمباران می‌شود، می‌توانیم فرض کنیم که در برانگیختگیهای متوالی عملاً هیچ‌گونه همبستگی مابین مؤلفه‌ها و فازهای x و y وجود ندارد. بدین ترتیب حالت قطبیدگی تابش گسیل شده در طول فاصله زمانی دوم (از مرتبه τ) پس از برانگیختگی دوم، با حالت قطبیدگی تابش گسیل شده در طول فاصله زمانی اول (از مرتبه τ) پس از برانگیختگی اول، هیچ‌گونه ارتباطی ندارد.

مدت دوام حالت قطبیدگی. حال فرض کنید که به‌جای یک اتم، در هر لحظه چندین اتم برانگیخته می‌شوند. همه آنها در ناحیه کوچکی نزدیک $x = y = z = 0$ مستقر هستند و مشاهده‌کننده که در دور دست بر محور z قرار دارد، موج الکترومغناطیسی را مشاهده می‌کند که برهم‌نهدی از امواج گسیل شده از تک‌تک اتمهاست. بگذارید "لحظه" را یک فاصله زمانی بخوانیم که در مقایسه با زمان فروافت میانگین τ کوتاه است اما با این وجود شامل چندین نوسان با بسامد ω می‌شود. فرض کنید که مشاهده‌کننده تابش را برحسب دامنه‌های E_x و E_y و فاز نسبی مابین E_x و E_y توصیف کند. در هر "لحظه"، E_x برهم‌نهدی از تابش همه اتمهاست که در آن لحظه تابش می‌کنند. این مطلب برای E_y هم صادق است. همه اتمها با همان بسامد اصلی ω نوسان می‌کنند، اما دامنه‌ها و ثابتهای فاز متفاوت دارند. بنابراین برهم‌نهدی که E_x را می‌سازد دارای بسامد اصلی ω است و دامنه و ثابت فازی دارد که به دامنه‌ها و ثابتهای فاز همه اتمهای تابش‌کننده جفت شده است. (همین عبارت برای E_y هم صادق است.) در طول هر

فاصله زمانی که در مقایسه با τ کوتاه است، تمام اتمهایی که ارتعاش می‌کنند فقط کسر کوچکی از انرژی خود را از دست می‌دهند، و همان ثابتهای فاز را حفظ می‌کنند. بنابراین دامنه و ثابت فاز برهم‌نهی که E_x (یا E_y) را به دست می‌دهد، در طول زمانی که در مقایسه با τ کوتاه است، تغییر قابل ملاحظه‌ای نمی‌کند. حالت قطبیدگی کل موج الکترومغناطیسی در طول زمانی که در مقایسه با τ کوتاه است، ثابت باقی می‌ماند. علی‌الخصوص، فاز نسبی E_x و E_y ثابت باقی می‌ماند. حال فرض کنید چندین عمر میانگین τ صبر می‌کنیم و سپس حالت قطبیدگی کل موج را دوباره بررسی می‌کنیم. پس از گذشت زمان طولانی چندین عمر میانگین، اتمهایی که (در ابتدای این زمان) تابش می‌کردند به صفر فرو افتاده‌اند و اتمهای جدیدی جای آنها را گرفته‌اند. (مهم نیست چه کسری از اتمهای "جدید" همان اتمهای قدیمی هستند که دوباره برانگیخته شده‌اند.) حرکت اتمهای جدید هیچ همبستگی با حرکت اتمهای قدیمی ندارد، فقط ممکن است برای سادگی کار این فرض را قرار دهیم که میانگین انرژی برانگیزش برای اتمهای جدید و قدیمی تقریباً یکسان است. وقتی مؤلفه x تابش از همه اتمها را جمع کنیم، مؤلفه x کل موج، یعنی E_x ، را به دست می‌آوریم. باید تقریباً همان دامنه E_x را که مجموعه قدیمی اتمها به دست دادند، داشته باشد. اما ثابت فاز E_x جدید از روی ثابت فاز E_x قدیم کاملاً غیرقابل پیش‌بینی است. همین مطلب برای E_x صادق است. از این گذشته، از آنجایی که فاز نسبی حرکت‌های x و y مجموعه جدید اتمها هیچ‌گونه همبستگی با فاز نسبی حرکات x و y مجموعه قدیمی اتمها ندارد، فاز نسبی E_x و E_y ، در فواصل زمانی بلند در مقایسه با τ ، به‌طور "کاتوره‌ای" و کاملاً غیر قابل پیش‌بینی "سوق می‌خورد".

فرض ما بر این بوده است که الکترون اتم آزادانه در زمان فروافت τ نوسان می‌کند. همچنین فرض کرده‌ایم که اتم در حال سکون است. بدین ترتیب طیف فوریه تابش گسیل شده از یک اتم دارای پهنای نوار $\Delta\omega$ حدوداً برابر τ^{-1} است. (برای اتمهایی که نور مرئی گسیل می‌کنند، به‌طور معمول زمان فروافت میانگین در حدود 10^{-8} ثانیه است که پهنای نواری در حدود 10^8 rad/s را نتیجه می‌دهد.) در یک لامپ تخلیه گازی، اتمها در حال سکون نیستند بلکه با سرعت‌هایی از مرتبه 10^5 cm/s حرکت می‌کنند. این سرعت جابه‌جایی دوپلری را باعث می‌شود که علامتش بستگی به این دارد که اتم به طرف مشاهده‌کننده حرکت می‌کند و یا از مشاهده‌کننده دور می‌شود. "پهن‌شدگی" دوپلر، پهنای نواری را نتیجه می‌دهد که با ضریب از مرتبه 10^3 از پهنای "طبیعی" τ^{-1} بزرگتر است. بعلاوه، اتم اغلب قبل از اینکه فرصتی برای فروافت داشته باشد با اتمهای دیگر برخورد می‌کند و این امر فرایند تابش را کوتاه می‌کند. در این صورت پهنای نوار به دلیل "پهن‌شدگی برخوردی" باز هم بزرگتر می‌شود.

زمان همدوسی. بعد از اینکه همه عوامل "پهن‌شدگی بسامدی" در نظر گرفته شدند، بالاخره به پهنای نوار $\Delta\omega$ می‌رسیم که ممکن است از τ^{-1} بسیار بزرگتر باشد. در این صورت زمانی که در طول آن حالت قطبیدگی را می‌توان تقریباً ثابت فرض کرد، زمان فروافت طبیعی τ نیست بلکه زمانی است که آن را زمان همدوسی t می‌خوانیم؛ زمان همدوسی با رابطه زیر داده می‌شود

$$t_{\text{همدوسی}} \approx \frac{1}{\Delta\nu} \quad (60)$$

معادله (60) را می‌توان بدین صورت دریافت. تا زمانی که فاز نسبی E_x و E_y به‌میزانی که در مقایسه با 2π کوچک است سوق بخورد، حالت قطبیدگی اساساً بدون تغییر باقی می‌ماند. بنابراین زمانی همدوسی t تقریباً با زمانی که طول می‌کشد تا حداکثر و حداقل بسامد نوار اختلاف فاز 2π پیدا کنند، داده می‌شود:

$$\Delta\omega t_{\text{همدوسی}} \approx 2\pi \quad (61)$$

که همان معادله (60) است.

اینکه پهنای نوار $\Delta\omega$ ، متناهی است، لزوماً بدان معنی نیست که قطبیدگی در زمانی از مرتبه $(\Delta\nu)^{-1}$ تغییر خواهد کرد. مثلاً ممکن است مابین اتمهای تابش‌کننده و مشاهده‌کننده، یک قطعه پولاوید وجود داشته باشد. در آن صورت، اگرچه پهنای نوار هنوز $\Delta\nu$ است، مؤلفه‌های x و y تابشی که مشاهده‌کننده می‌بیند رابطه فازی ثابتی را حفظ می‌کنند. علت آن است که مؤلفه‌های x و y دیگر "مستقل" نیستند. می‌توان این‌طور گفت که پولاوید مؤلفه‌های x و y تابش فرودی را "معاینه" کرده است و در هر لحظه فقط قسمتهایی از مؤلفه‌های فرودی x و y را "برای عبور انتخاب کرده است" که با رابطه فازی مناسب برهم‌نهدی را به دست می‌دهند که الکترونها پولاوید را در امتداد جهت آسان، عمود بر "سیمها" می‌رانند. آن قسمتهایی از تابش x و y فرودی که فاز نسبی آنها الکترونها را "در امتداد سیمها" می‌رانند جذب شدند.

این هم مثالی دیگر. فرض کنید دو چشمه نور تخلیه گازی داریم که نور با بسامد اصلی ω می‌دهند و همچنین پهنای نوار و شدت میانگین یکسان دارند. با تیغه شیشه‌ای مناسبی یا یک آینه "نیم نقره‌اندود"، می‌توانیم ترتیبی دهیم که دو چشمه نور از دید مشاهده‌کننده منطبق برهم به نظر آیند (یعنی تصاویر آنها بر یکدیگر منطبق باشد). در نتیجه، نور هر یک از دو چشمه نور در امتداد z به مشاهده‌کننده می‌رسد. حال بر روی هر چشمه یک قطعه پولاوید می‌گذاریم، چنانکه یک چشمه تابش قطبیده خطی در امتداد \hat{x} دهد و دیگری تابش قطبیده خطی در امتداد \hat{y} (این پس از آن است که باریکه‌های نور بالاخره در جهت z در حال حرکت هستند). اگر

مشاهده‌کننده در طول زمانی که در مقایسه با زمان همدوسی $(\Delta\nu)^{-1}$ کوتاه است قطبیدگی را اندازه بگیرد، حالت قطبیدگی مشخصی را خواهد یافت. اگر او برای مدت زمانی که در مقایسه با $(\Delta\nu)^{-1}$ طولانی است صبر کند و دوباره قطبیدگی را اندازه بگیرد، حالت قطبیدگی خواهد یافت که هیچ‌گونه همبستگی با اندازه‌گیری قبلی ندارد. در واقع برای مشاهده‌کننده اساساً غیرممکن است که این تابش را از آنچه او با برداشتن یکی از چشمه‌های نور و همزمان با آن برداشتن قطعه پولاوید از چشمه باقی‌مانده دریافت می‌کرد، تمیز دهد.

تعریف تابش ناقطبیده. حالا وقت آن است که منظور از نور "ناقطبیده" را توضیح دهیم. نور ناقطبیده نوری است که دو مؤلفه قطبیدگی آن (x و y ، یا راستگرد و چپگرد) به‌طور "مستقل" گسیل می‌شوند (یعنی فاز آنها به هم قفل نشده است، چنانکه یک قطعه پولاوید این کار را انجام می‌دهد) و دامنه‌ها و فاز نسبی دو مؤلفه قطبیدگی آنها با روشی که بر روی زمانی طولانی مقایسه با زمان همدوسی $(\Delta\nu)^{-1}$ میانگین می‌گیرد، اندازه‌گیری می‌شوند. چیزی به‌نام نور ناقطبیده "ذاتی" وجود ندارد. تنها کاری که لازم است انجام دهید تا نور "ناقطبیده" را به نور "کاملاً قطبیده" تبدیل کنید، این است که روشی اختراع کنید تا بتوانید قطبیدگی را قبل از اینکه فازها شانس سوق خوردن را داشته باشند اندازه بگیرید.

اندازه‌گیری قطبیدگی. توصیفی کیفی از "میزان قطبیدگی" یعنی میزان همبستگی بین فازها و دامنه‌ها که در ضمن اندازه‌گیری حفظ می‌شود را می‌توان این‌گونه به دست آورد: فرض کنید حالت لحظه‌ای قطبیدگی را با E_1, E_2, φ_1 و φ_2 در نمایش قطبیدگی خطی، نمایش دهیم؛ که در آن \mathbf{E} قسمت حقیقی

$$\mathbf{E}_c = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} (\hat{x} E_1 e^{i\varphi_1} + \hat{y} E_2 e^{i\varphi_2}) \quad (62)$$

است. می‌توانستیم این رابطه را به‌صورت برهم‌نهمش فوریه پیوسته‌ای از امواج دقیقاً هماهنگی که نوار باریکی از بسامدها را اشغال می‌کردند بنویسیم، اما معادل با آن می‌توانیم به معادله (۶۲) به‌عنوان موج تقریباً هماهنگی فکر کنیم که بسامد اصلی اش ω_0 و دامنه‌ها و ثابتهای فازش E_1, E_2, φ_1 و φ_2 در زمان، کاملاً ثابت نیستند بلکه به آهستگی (به صورتی غیرقابل پیش‌بینی) تغییر می‌کنند.

حال بیایید ببینیم چگونه می‌توان E_1, E_2, φ_1 و φ_2 را فقط برحسب اندازه‌گیربهای شدت بیان کرد. (لغت شدت را مترادف با شار انرژی استفاده می‌کنیم.) این ساده‌ترین نوع اندازه‌گیری است که می‌توان انجام داد. فرض می‌کنیم که قطعات پولاوید و تیغه‌های ربع موج داریم و همچنین یک تکثیرکننده فوتونی که با آن می‌توانیم برای هر ترکیبی از ابزار آزمایش،

شار فوتونها (یعنی عدۀ فوتونها بر واحد سطح بر واحد زمان) را اندازه بگیریم. میانگین شار فوتونی متناسب با میانگین شار انرژی کلاسیکی است. میانگین شار انرژی کلاسیکی متناسب با میانگین مربع میدان الکتریکی در یک دورۀ تناوب است. فرض می‌کنیم تکثیرکنندۀ فوتونی و فوتوکاتدی با مساحت معلوم و بازدهی آشکارسازی معلوم داریم و بدین ترتیب میانگین زمانی مربع میدان الکتریکی را در نوری که به فوتوکاتد می‌تابد، می‌توانیم مشخص کنیم.

زمان اندازه‌گیری. فرض کنید T کل فاصلۀ زمانی اندازه‌گیریایی که می‌خواهیم شرح دهیم باشد؛ آن را زمان اندازه‌گیری می‌نامیم. این زمانی است که در طول آن تمام ثابتهای جالب E_1, E_2, \dots, E_N را مشخص خواهیم کرد. می‌خواهیم قبل از اینکه حالت قطبیدگی فرصت تغییرکردن را داشته باشد، آزمایش را تکمیل کنیم. بنابراین فرض می‌کنیم که زمان اندازه‌گیری T در مقایسه با زمان همدوسی $(\Delta\nu)^{-1}$ ، کوتاه است. به نظر می‌رسد که توصیف ما از آزمایشی است که کم و بیش سر فرصت انجام می‌گیرد و "تمام روز" طول می‌کشد؛ لزوماً چنین نیست. ما باید (با به کار بستن نبوغ کافی) بتوانیم ترتیبی دهیم که همه چیز را همزمان اندازه بگیریم. در آن صورت، محدودیت اساسی در زمان اندازه‌گیری T می‌باید زمان تفکیک ابزارآلات باشد. اگر ابزار یک تکثیرکنندۀ فوتونی معمولی باشد، زمان تفکیک در حدود 10^{-9} ثانیه است. بنابراین باید بتوانیم حالت قطبیدگی "لحظه‌ای" تابشی را که زمان همدوسی طولانیتری، مثلاً 10^{-8} ثانیه، دارد اندازه بگیریم.

اندازه‌گیری چهار ثابت. کاری هم باید بگذاریم تا آزمایشگر انجام دهد. بنابراین دقیقاً نمی‌گوییم که او چگونه موفق خواهد شد اندازه‌گیریایی را (که هم‌اکنون می‌خواهیم توضیح دهیم) در زمان T از مرتبۀ 10^{-8} ثانیه انجام دهد. بنابراین در اینجا روش (قابل انعطافی) برای یافتن چهار ثابتی که باریکۀ نور را توصیف می‌کنند، با فرض داشتن بسامد و جهت، ارائه می‌دهیم. فرض می‌کنیم علاوه بر تکثیرکنندۀ فوتونی مدرج، پولاوید کامل (یا مدرج) و تیغۀ ربع موج نیز داریم. روش کار بدین قرار است:

۱. پولاوید را در مقابل تکثیرکنندۀ فوتونی قرار دهید. محورهای عرضی \hat{x} و \hat{y} را به دلخواه انتخاب کنید. محور آسان عبور را در امتداد \hat{x} قرار دهید. میانگین زمانی آهنگ شمارش فوتونها را اندازه بگیرید. از آن خواهیم داشت

$$\langle E_x^2 \rangle = \frac{1}{4} E_0^2 \quad (۶۳)$$

۲. پولاوید را بچرخانید تا محور آسان عبور در امتداد \hat{y} قرار گیرد، آهنگ شمارش را اندازه

بگیرید. از آن خواهیم داشت

$$\langle E_y \rangle = \frac{1}{2} E_1^2 \quad (64)$$

۳. پولا روید را به زاویه ۴۵ درجه بین \hat{x} و \hat{y} بچرخانید. این جهت را \hat{e} بنامید. بدین ترتیب بردار یکۀ \hat{e} با رابطه زیر داده می‌شود

$$\hat{e} = \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}} \quad (65)$$

مؤلفه‌ای از میدان الکتریکی که پولا روید عبور می‌دهد، ضرب نقطه‌ای \hat{e} در میدان فرودی \hat{E} است. با استفاده از میدان مختلط E_c ، از معادلات (۶۵) و (۶۲) داریم

$$\hat{e} \cdot \hat{E}_c(z, t) = e^{i(\omega \cdot t - k \cdot z)} \left(\frac{E_1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi_1} + \frac{E_2}{\sqrt{2}} e^{i\varphi_2} \right) \quad (66)$$

حال، شار عبوری فوتونها، اندازه‌گیری

$$\langle (\hat{e} \cdot \mathbf{E})^2 \rangle = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} E_1^2 + \frac{1}{2} E_2^2 + E_1 E_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \quad (67)$$

را به دست می‌دهد. از آنجایی که تاکنون E_1^2 و E_2^2 را با استفاده از معادلات (۶۳) و (۶۴) مشخص کرده‌ایم (E_1 و E_2 اعداد حقیقی مثبت هستند)، می‌بینیم که معادله (۶۷)، مقدار $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ را به دست می‌دهد.

برای مشخص کردن فاز نسبی هنوز به $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ نیاز داریم. (معمولاً به مقدار مطلق فازها علاقه‌ای نداریم). برای به دست آوردن آن از تیغه ربع موج استفاده می‌کنیم:

۴. پولا روید را کماکان در امتداد \hat{e} که با \hat{x} و \hat{y} زاویه ۴۵ درجه می‌سازد نگه دارید. بدین ترتیب معادله (۶۶)، میدان عبوری را به دست می‌دهد. حال تیغه ربع موج را جلوتر از پولا روید قرار دهید به شکلی که محور کند آن در امتداد \hat{x} یا \hat{y} باشد. برای اینکه مشخص باشد فرض کنید محور کند در امتداد \hat{y} است. بنابراین در معادله (۶۲) که E_c را به دست می‌دهد، به جای φ_2 باید $\frac{1}{2}\pi - \varphi_2$ را قرار داد. (همچنین به هر دوی φ_1 و φ_2 ثابت بی‌خاصیتی اضافه می‌شود که آن را از قلم انداخته‌ایم). در نتیجه، $\hat{e} \cdot \mathbf{E}_c$ که با معادله (۶۶) داده می‌شود، به جای $\frac{1}{2}\pi - \varphi_2$ قرار می‌دهیم. حال، شار فوتونی را در پشت سیستم تیغه ربع موج بعلاوه پولا روید،

اندازه‌گیری کنید. شار با عبارتی مانند معادله (۶۷) داده می‌شود که به جای φ_2 ، $\frac{1}{4}\pi - \varphi_2$ دارد. بنابراین

$$\langle (\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{E})^2 \rangle = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} E_1^2 + \frac{1}{4} E_2^2 - E_1 E_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \quad (68)$$

را مشخص کردیم.

بدین ترتیب، با اندازه‌گیری‌هایی که با معادلات (۶۳)، (۶۴)، (۶۷) و (۶۸) نشان داده شده‌اند، E_1 ، E_2 و $\varphi_1 - \varphi_2$ را کاملاً مشخص کردیم. اینها نتایجی هستند که اگر زمان اندازه‌گیری T در مقایسه با زمان همدوسی کوتاه باشد، به دست می‌آید.

همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، اگر باریکه نور قبل از اینکه به آشکارساز برسد، از قطبشگری (مانند یک قطعه پولاروید یا یک قطبشگر دایره‌ای) عبور کند، زمان همدوسی قطبیدگی دیگر به کوتاهی Δt^{-1} نخواهد بود. در عوض، زمان همدوسی قطبیدگی (در صورتی که کسی قطعه پولاروید را بر ندارد) بینهایت خواهد بود. بدین ترتیب می‌توانید آزمایش را سر فرصت، همان‌طور که در بالا توضیح داده شد، انجام دهید؛ به جای تکثیرکننده فوتونی از چشم خود هم می‌توانید استفاده کنید. بهتر است با استفاده از جعبه وسایل اپتیک خود، مشخص کردن حالت قطبیدگی یک چشمه نور را که قطبیدگی آن معلوم نیست تمرین کنید. اگر چشمه نور قطبیده خطی، قطبیده دایره‌ای و یا قطبیده بیضوی است و زمان همدوسی آن طولانیتر از چند دقیقه‌ای است که برای انجام آزمایش لازم است، با استفاده از چشم خود، یک پولاروید و یک تیغه ربع موج، حالت قطبیدگی چشمه نور را می‌توانید کاملاً مشخص کنید. (از قطبشگر دایره‌ای و تیغه ربع موج هم می‌توانید استفاده کنید.) توصیفی که از اندازه‌گیری قطبیدگی در حالت کلی کردیم، کلی‌تر از آن بود که در عمل در بسیاری از موارد، بدان نیاز است. مثلاً، اگر نور در امتداد یک جهت مشخص عرضی قطبیده خطی باشد، دیگر استفاده از جهات کلی دکارتی \hat{x} و \hat{y} عاقلانه نیست. به محض اینکه دریافتید نور قطبیده خطی است، طبعاً در ذهن خود \hat{x} را در امتداد جهت قطبیدگی می‌گیرید. در آن صورت، فاز نسبی $\varphi_1 - \varphi_2$ به درد نمی‌خورد زیرا دامنه در امتداد \hat{y} صفر است. به همین ترتیب، اگر مثلاً یافتید که نور قطبیده دایره‌ای و راستگرد است، دیگر عاقلانه نیست که از نمایش قطبیدگی خطی (که در توصیف کلی فوق از آن استفاده شد)، برای توصیف نور استفاده کنیم.

قطبشگر دایره‌ای. قطبشگر دایره‌ای که در جعبه وسایل اپتیک خود دارید، ساندویچی است متشکل از یک قطعه پولاروید خطی که به یک تیغه ربع موج چسبیده شده است. محور آسان پولاروید نسبت به محورهای اپتیکی تیغه ربع موج، زاویه ۴۵ درجه می‌سازد. آن روی ساندویچ که قطبشگر خطی قرار دارد، طرف "ورودی" است. خروجی، تیغه ربع موج است. اگر نور ناقطبیده

یک لامپ را به ورودی بتابانید، حاصل، نور چپگرد است (اگر از قاعدهٔ اپتیکی پیچی استفاده کنیم). بنابراین، قطبشگر غیر از قسمتی از نور بقیه را جذب کرده است. این قسمت جذب نشده به حرکت الکترونهاپی مربوط می‌شود که (اگر می‌توانستید آنها را ببینید) هنگام نگاه کردن به لامپ، حرکت دایره‌ای آنها را در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌دیدید. اگر تیغهٔ نیم‌موج را به پشت طرف خروجی اضافه کنید، این نور (پیچی) چپگرد را به نور راستگرد تبدیل خواهید کرد. اگر، در عوض، بگذارید تا نور چپگرد با زاویهٔ تقریباً قائم از آینه‌ای بازتابد، آن را به نور راستگرد تبدیل خواهید کرد. استفاده از قطبشگر دایره‌ای به عنوان تحلیلگر، به‌طور "برعکس" هم امکانپذیر است. در آن صورت نور دارای همان دستواریگی را "می‌گذرانند" که (در حالت استفادهٔ "عادی") تولید می‌کند؛ نوری را که دستواریگی مخالف دارد جذب می‌کند. این مطلب را به این صورت متوجه می‌شویم. تأخیر فاز مؤلفهٔ کند قطبیدگی خطی نسبت به مؤلفهٔ تند به جهت عبور از تیغهٔ ربع موج بستگی ندارد. وقتی که به‌طور عادی از قطبشگر دایره‌ای استفاده می‌کنیم، قطبشگر خطی و به دنبالش تیغهٔ ربع موج، قطبیدگی دایره‌ای را که در آن E از θ به $\theta + \pi/2$ می‌چرخد، می‌سازد. اگر این نور از آینه‌ای بازتابد، نسبت به محوری که در فضا ثابت است، به چرخش در همان جهت ادامه می‌دهد (به خاطر یابستگی تکانهٔ زاویه‌ای). هنگامی که در راه بازگشت از تیغهٔ ربع موج می‌گذرد، تأخیر فازی مانند قبل ادامه می‌یابد و تا هنگامی که نور دوباره به قطبشگر خطی می‌رسد، 90° درجهٔ دیگر در فاز عقب افتاده است. این بدان معنی است که نور در امتداد خطی که با جهت اولیهٔ قطبیدگی‌اش، یعنی محور آسان قطبشگر خطی، زاویهٔ 90° درجه می‌سازد، قطبیدهٔ خطی است؛ به این دلیل که یک مؤلفهٔ خطی نسبت به مؤلفهٔ دیگر دستخوش تغییر علامت شده است. بنابراین نور جذب می‌شود. وقتی قطبشگر دایره‌ای را روی آینه یا قطعه‌ای فلز براق قرار می‌دهید به‌طوری که طرف ورودی آن به بالا باشد، آینه یا فلز براق "تیره" به نظر می‌رسد (در واقع آبی تیره است)، علت همان است. آینه دستواریگی را معکوس می‌کند. به همین ترتیب، هر نور (پیچی) راستگرد وقتی که به خروجی قطبشگر تابیده شود، به وسیلهٔ آن [که نور (پیچی) چپگرد تولید می‌کند] جذب می‌شود. از طرف دیگر، اگر نور (پیچی) چپگرد به طرف خروجی قطبشگر چپگرد تابیده شود، مؤلفهٔ خطی در امتداد محور θ تیغهٔ ربع موج از مؤلفهٔ $\theta + \pi/2$ جلوتر است. تیغهٔ ربع‌موج این میزان جلوتر بودن را به صفر تقلیل می‌دهد. بنابراین، هنگامی که نور به قطبشگر خطی می‌رسد، مؤلفه‌های خطی θ و $\theta + \pi/2$ هم‌فاز هستند، و نور کاملاً از قطبشگر خطی عبور می‌کند. نور حاصل قطبیدهٔ خطی است و تمام شدت خود را دارد (صرفنظر از آنچه معمولاً از آن چشمپوشی می‌کنیم).

این هم یک مثال: فرض کنید از پشت یک قطبشگر به چشمه نوری نگاه می‌کنید؛ چرخش پولاروید به حول خط دید، تغییری در شدت ایجاد نمی‌کند. حال فرض کنید، از پشت قطبشگر

چپگرد (که در حالت برعکس از آن استفاده می‌کنید) به چشمه نور نگاه می‌کنید؛ شدت نور مانند قبل است. (تا اینجا چه نتیجه‌ای می‌توانید بگیرید؟) سپس تیغه نیم‌موج را بین چشمه نور و قطبشگر چپگرد قرار دهید و آزمایش قبل را تکرار کنید؛ نور کاملاً جذب می‌شود. نتیجه: نور، قطبیده دایره‌ای چپگرد است.

تیغه ربع موج و تیغه نیم‌موج. یکی از دو قطعه پلاستیک شفاف را از درون جعبه وسایل اپتیکی خود بیرون آورید. آن را چسبیده به قطعه پولاروید چنان نگه دارید که لبه‌های آنها با هم زاویه ۴۵ درجه بسازد. حال از پشت آنها به چشمه نور یا آسمان نگاه کنید؛ پولاروید باید در طرفی باشد که چشمه نور قرار دارد. پولاروید دومی را چسبیده به پلاستیک شفاف نگه دارید. پولاروید دوم را بچرخانید. حال آزمایش را با قطعه دیگر پلاستیک شفاف تکرار کنید. کدام یک تیغه ربع موج است و کدام تیغه نیم‌موج؟ آزمایش را در حالی که لبه پلاستیک شفاف با لبه پولارویدها موازی است، انجام دهید.

روی برجسب تیغه تأخیری ربع موج که قطعه‌ای بریده‌شده از آن در جعبه وسایل اپتیکی شما موجود است، "تأخیردهنده ربع موج" نوشته نشده است؛ در عوض روی آن نوشته شده است "میزان تأخیر برابر با $20 \pm 140 \text{ m}\mu$ است". یک $\text{m}\mu$ برابر با یک میلی‌میکرون است یعنی برابر $10^{-6} \times 10^{-3} = 10^{-9}$ متر یا 10^{-7} سانتیمتر یا 10 \AA . بنابراین میزان تأخیر 1400 \AA است. اگر طول موج $5600 \text{ \AA} = 1400 \times 4$ (که طول موج نور سبز است) باشد، این مقدار به اندازه ربع طول موج است. اگر طول موج غیر از 5600 \AA باشد، این مقدار کسر متفاوتی از طول موج است. بیایید سعی کنیم تا معنای برجسب را بفهمیم. فاز تأخیری نسبی $\Delta\varphi$ بین مؤلفه‌های k و t از تیغه تأخیری به ضخامت Δz و با ضرایب شکست n_t و n_s عبور می‌کند برابر است با

$$\Delta\varphi = 2\pi(n_s - n_t)\frac{\Delta z}{\lambda} \quad (69)$$

برای تیغه ربع موج فاز تأخیری به $1/4$ دوره تناوب مربوط می‌شود، یعنی $\pi/2$ رادیان. پس، برای تیغه ربع موج، رابطه زیر باید برقرار باشد

$$(n_s - n_t)\Delta z = \frac{1}{4}\lambda \quad (70)$$

برجسب نشان‌دهنده این است که $(n_s - n_t)$ برابر با $(1/4)\lambda$ است، که در آن λ برابر با 5600 \AA است. این "تأخیر فضایی" است، که (در بیشتر گستره مرئی) مستقل از λ است. این

صرفاً بدان معنی است که با تقریب خوبی، $n_2 - n_1$ مستقل از طول موج است. پس، برای طول موج (مرئی) دلخواه، داریم

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{\lambda} \frac{5600 \text{ \AA}}{2} \quad (71)$$

به همین صورت، تیغه نیم موج دارای میزان تأخیر $20 \pm 280 \text{ m}\mu$ است.

نور ناقطیبیده. اگر از جعبه وسایل اپتیکی خود برای تعیین قطبیدگی نوری که از یک لامپ می آید، استفاده کنید، خواهید یافت که قطبشگر خطی به ازای هر زاویه ای به حول خط دید، تغییری در شدت نور ایجاد نمی کند؛ همچنین وقتی که تیغه ربع موج بین چشمه نور و قطبشگر قرار داده می شود، تغییری در شدت حاصل نمی شود. برحسب x, y مربوط به نمایش قطبیدگی خطی در معادلات (۶۳)، (۶۴)، (۶۷) و (۶۸)، این مشاهدات به منزله آن است که،

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \overline{E_1^2} &= \frac{1}{4} \overline{E_2^2} \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \overline{E_1^2} + \frac{1}{4} \overline{E_2^2} + \overline{E_1 E_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \overline{E_1^2} + \frac{1}{4} \overline{E_2^2} - \overline{E_1 E_2 \sin(\varphi_1 \varphi_2)} \right] \end{aligned} \quad (72)$$

برای اینکه به خاطر داشته باشیم که اندازه گیریها در "طول زمان اندازه گیری" T انجام می شوند، از "خط تیره" بر روی کمیت های اندازه گیری شده استفاده می کنیم. به عبارت دیگر، به ازای هر محور x, y دلخواه، میانگین زمانی E_x^2 و میانگین زمانی E_y^2 برابرند، و میانگین زمانی $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ و میانگین زمانی $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ صفر است. البته زاویه ای وجود ندارد که سینوس و کسینوس آن هر دو صفر باشند؛ نکته اساسی معادله (۷۲) همان خط تیره است که حاکی از میانگین زمانی بر روی فاصله زمانی T است. دلیل اینکه فاز نسبی چنان است که میانگین زمانی کسینوس صفر است و میانگین زمانی سینوس صفر است، آن است که فاز نسبی در زمان طولانی T که مشغول انجام آزمایش بوده ایم، به طور کاتوره ای سرگردان بوده است. تمام مقادیر بین $-\pi$ و $+\pi$ را اختیار کرده است (فاز نسبی فقط بر روی گستره 2π تعریف می شود). هم سینوس و هم کسینوس، همانقدر که مثبت بوده اند، منفی هم بوده اند و میانگینی برابر صفر به دست داده اند.

اگر می توانستیم آزمایش را در کمتر از 10^{-10} ثانیه به انجام رسانیم (برای چشمه تخلیه گازی با پهن شدگی دوپلر)، نتیجه بسیار متفاوتی به دست می آوردیم. آنگاه درمی یافتم که نور در هر "لحظه" کاملاً قطبیده است؛ لحظه شامل چندین نوسان می شود اما در مقایسه با عکس بهنای نوار (زمان همدوسی) بسیار کوتاه است.

با یک اسلینکی می‌توان نور ناقطبیده را شبیه‌سازی کرد. برای مدتی آن را در یک جهت تکان دهید، و مدتی در جهت دیگر. در طول زمان T مدام از اسلینکی عکس بگیرید. اگر T در مقایسه با زمانی که اسلینکی در یک جهت مشخص تکان داده می‌شود کوتاه باشد، عکسها نشان‌دهنده قطبیدگی کامل خواهند بود. اگر T طولانی باشد، هر کس که به عکسها نگاه کند می‌گوید "اسلینکی ناقطبیده است" — این صرفاً یعنی T بیش از حد طولانی بوده است.

قطبیدگی نسبی. اگر T در مقایسه با زمان همدوسی نه کوتاه باشد و نه بلند، تابش را قطبیده نسبی نامند. در آن صورت، میان نتایج چهار آزمایش اندازه‌گیری شدت، که حاصل آنها $\overline{E_x^2}$ ، $\overline{E_y^2}$ ، $\overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ و $\overline{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}$ است، تفاوت‌های قابل تمیزی موجود است. راه‌های مختلفی برای بیان اینکه قطبیدگی در طول زمان اندازه‌گیری T ، "گمرنگ" شده است، وجود دارد. مثلاً می‌توانیم کمیتی به نام "قطبیدگی نسبی P " را با استفاده از عبارت

$$P^2 \equiv [\overline{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}]^2 + [\overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}]^2 \quad (۷۳)$$

تعریف کنیم، که در آن $\overline{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}$ و $\overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ به وسیله اندازه‌گیریهای شدت که نتایج معادله‌های (۶۳)، (۶۴)، (۶۷) و (۶۸) را به دست می‌دهند، تعریف می‌شوند. اگر T در مقایسه با زمان همدوسی کوچک باشد، P برابر ۱ است. اگر T در مقایسه با زمان همدوسی بزرگ باشد، P صفر است. برای مقادیر T بین این دو، P بین ۰ و ۱ قرار دارد. البته، P تمام داستان نیست؛ تمام داستان نیازمند هر چهار اندازه‌گیری است.

مسائل و آزمایشهای خانگی

۱-۸ صریحاً مراحل به دست آوردن معادله (۲۰) بخش ۸-۲ را به دست آورید تا نشان دهید معادله (۲۰) جابه‌جایی $\psi(t)$ را نشان می‌دهد که یک مسیر بیضوی است.

۲-۸ نور ناقطبیده یک لامپ تخلیه جیوه از یک صافی ژلاتینی سبز که خط سبز را جدا می‌کند عبور می‌کند. شکافها و عدسیها یک باریکه موازی تشکیل می‌دهند که در جهت z منتشر می‌شود. باریکه در $z = 0$ به خوبی تعریف شده است. در $z = 10^\circ$ یک تکثیرکننده فوتونی فوتونهای باریکه را می‌شمارد. آهنگ شمارش متوسط ۶۴ شمارش در دقیقه است: $R = 64$.

(الف) یک تیغه ربع موج با محور تند را در امتداد \hat{x} در $z = 10^\circ$ وارد کنید. حال R چقدر است؟ (از اتلافهای مربوط به بازتاب و غیره صرف‌نظر کنید).

(ب) یک قطبشگر خطی با محور انتقال آسان در امتداد $(\hat{x} + \hat{y})/\sqrt{2}$ در $z = 20^\circ$ وارد کنید. حال R چقدر می‌شود؟ (نکته: توجه کنید همان طور که چیزهایی در این مسئله وارد می‌کنیم چیزهای

دیگر را در همان محل نگاه می‌داریم. موضعهای z فقط برای این است که نظم آن برقرار باشد. (ج) یک تیغه نیم‌موج با محور تند در امتداد \hat{x} در $z = 3^\circ$ اضافه می‌کنیم. R چقدر است؟ (د) حال یک قطبشگر خطی با محور آسان در امتداد \hat{x} در $z = 4^\circ$ اضافه می‌کنیم. R چقدر است؟

(ه) حال یک قطبشگر دایره‌ای چپگرد در $z = 5^\circ$ اضافه می‌کنیم. آهنگ شمارش بیشینه ممکن (که قطبشگر به طرف جلو حرکت می‌کند) چقدر است؟ آهنگ ممکن کمینه چقدر است؟

(و) با قطبشگر چپگرد قسمت (ه) که روی آهنگ شمارش بیشینه تنظیم شده است، یک تیغه نیم‌موج با محور تند در امتداد $(\hat{x} + \hat{y})/\sqrt{2}$ در $z = 6^\circ$ وارد کنید که با یک قطبشگر خطی در $z = 7^\circ$ با محور انتقال آسان در امتداد \hat{y} دنبال می‌شود، R چقدر است؟ ۳-۸ نور قطبیده دایره‌ای با شدت I_0 (شدت منظور شار انرژی بر واحد سطح بر واحد زمان است) این متناسب با یک جریان خروجی تکثیرکننده فوتونی برای نور با بسامد معین است) روی یک پولاروید منفرد فرود می‌آید. نشان دهید که شدت خروجی (شدت نوری که از عقب پولاروید خارج می‌شود) برابر $\frac{1}{4}I_0$ است.

۴-۸ نور قطبیده خطی با جهت قطبش در زاویه θ از \hat{x} روی پولارویدی با محور آسان در امتداد \hat{x} فرود می‌آید. پولاروید اول با یک پولاروید دوم که محور آسانش در امتداد جهت قطبش نور فرودی اصلی است دنبال می‌شود. نشان دهید که اگر شدت ورودی I_0 باشد شدت خروجی $I_0 \cos^2 \theta$ است. ۵-۸ نور قطبیده دایره‌ای با شدت I_0 روی ساندویچی از سه پولاروید فرود می‌آید. اولین و سومین پولاروید همدیگر را قطع می‌کنند یعنی محورهای آسان نسبت به یکدیگر زاویه 90° دارند. پولاروید وسطی با محور اولین پولاروید زاویه θ می‌سازد. نشان دهید که شدت خروجی برابر $\frac{1}{4}I_0 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$ است.

۶-۸ تعداد بسیار زیاد $N + 1$ پولاروید در یک ساندویچ تهیه می‌شود. زاویه محور آسان هر پولاروید زاویه ثابت α است که بزرگتر از زاویه قبلی در ساندویچ است، بنابراین آخرین پولاروید زاویه $\theta = N\alpha$ با اولین پولاروید دارد. از اتلافهای مربوط به بازتاب در سطوح زیاد صرف‌نظر کنید و فرض کنید که نور قطبیده خطی با شدت I_0 روی اولین پولاروید با قطبش در امتداد محور آسان پولاروید اول فرود می‌آید، شدت خروجی را به دست آورید. N را بسیار بزرگ بگیرید و فقط جملات جالب اول را در یک سری توانی مناسب نگه دارید (بسط تایلور).

جواب: (جملات مرتبه بالاتر $\frac{\theta^2}{N}$ $I_0 = I_0 (1 - \frac{\theta^2}{N} + \dots$)

این یعنی حتی اگر θ برابر 90° درجه باشد، به طوری که اولین و آخرین پولارویدها همدیگر را قطع

کنند، شدت خروجی اگر به اندازه کافی پولاوید میانی داشته باشیم برابر شدت ورودی است. می‌توانیم به آرامی صفحه قطبش را بچرخانیم و چیزی از دست ندهیم. بنابراین اگر تعداد زیادی پولاوید را به هم بچسبانیم (از چسب تمیزی با همان ضریب پولاوید استفاده کنید به طوری که بازتابها کمینه شود)، چیزی خواهیم داشت مانند مولکول بزرگ شکر که صفحه قطبش را بدون جذب هیچ انرژی می‌چرخاند.

راه دیگر برای به دست آوردن "فعالیت اپتیکی ماکروسکوپیکی" پیچاندن یک تکه قلع در یک دربارزن (همه با دستاوردگی یکسان) است که آنها را در پلی‌استیرن می‌نشانیم (یک تقریب خوب از محیط عاری از بار اضافی الکترون، سخت و بی‌جرم) و میکروموجهای قطبیده خطی از داخل اشیاء رد می‌کنیم. صفحه قطبش میکروموجها باید چرخانده شود.

۸-۷ فرض کنید نور فرودی قطبیده خطی با قطبیدگی در امتداد \hat{x} داریم. اگر می‌خواهید نور قطبیده خطی با قطبیدگی در 30° محور \hat{x} داشته باشید، یعنی در امتداد

$$\hat{e} = \hat{x} \cos 30^\circ + \hat{y} \sin 30^\circ$$

چطور می‌توانید میدان عبوری را به دست آورید (الف) در قبال از دست دادن کمی شدت؛ (ب) بدون اتلاف شدت و بدون استفاده از هیچ پولاویدی؟

۸-۸ شدت عبوری نور ناقطبیده با شدت I_0 چقدر است اگر روی پولاویدهای ضربدری که تیغه نیم‌موج بین آنهاست فرود آید، (الف) وقتی محور اپتیکی تیغه تأخیری (محور کند) موازی محور آسان یکی از پولاویدها باشد، (ب) وقتی محور اپتیکی تیغه موج زاویه 45° با یکی از محورهای آسان بسازد؟

۸-۹ جواب همین سؤال مسئله ۸-۸ را برای تیغه ربع موج به دست آورید؟

۸-۱۰ شکست دوگانه را با چرخاندن ورقه‌های مختلف پلاستیک (مانند سازه‌های زهی، سلوفون، نوار سلوفون اسکاتلندی، و غیره) بین پولاویدهای متقاطع آزمایش کنید. چطور می‌توانید بگویید آیا به اندازه کافی برای به دست آوردن تیغه ربع موج یا نیم‌موج خوش‌شانس هستید؟ آزمایش کشیدگی نایلون را برای شکست دوگانه آن انجام دهید.

۸-۱۱ تیغه ربع موج نایلونی. یک رول پوشش محافظ غذا (نایلون کشیده نازک که برای پیچیدن دور ساندویچها استفاده می‌شود) از مغازه تهیه کنید. با شش یا هفت لایه موازی یک تیغه نیم‌موج خیلی خوب بسازید. می‌توانیم آن را برای رنگهای مختلف با اضافه کردن یا کم کردن یک لایه تنظیم کنیم. مثلاً، اگر هفت لایه یک تیغه ربع موج کامل باشد برای طول موج 5600 \AA (سبز)، آنگاه هشت لایه برای طول موج (قرمز) $6400 \text{ \AA} = (8/7)(5600)$ کامل خواهد بود. برای اجتناب از

مقداری چین و چروک می‌توانید آن را با ماده‌ای روی یک طرف کارتون مقوایی ببندید به طوری که یک سوراخ در کارتون باشد.

۸-۱۲ وابستگی تیغه‌های تأخیری به رنگ. یک "تیغه نیم‌موج" واقعاً یک تیغه نیم‌موج فقط در یک طول موج بخصوص است. تیغه نیم‌موج در وسایل اپتیکی شما یک تیغه نیم‌موج برای طول موج 560 \AA است. یک چشمه نور خطی سفید بگیرید. (هر لامپ التهابی با پوشش شیشه شفاف مناسب است، مثلاً یک لامپ 15° وات که با رشته مستقیمی به طول ۱ اینچ و قطر ۱ میلیمتر پیچیده شده باشد.) به چشمه سفید با توری پراش نگاه کنید، (برای به دست آوردن تفکیک بهتر، رنگها را عمود بر خط چشمه پهن کنید.) حال دو پولاروید موازی بگیرید. یک تیغه نیم‌موج بین پولارویدها در زاویه 45° قرار دهید. آنگاه رنگی که با آن تیغه نیم‌موج یک تیغه نیم‌موج است قطبیدگی خطی خودش را خواهد داشت که با زاویه 90° چرخانده می‌شود و جذب می‌شود. با استفاده از توری پراش داخل ساندویچ را نگاه کنید. (هر چیز را نزدیک به یک چشم خود نگه دارید.) آیا نوار تاریکی در نور سبز دیده می‌شود؟ آن، رنگ با طول موج 560 \AA است! (نکته: آخرین پولاروید را به طور جزئی بچرخانید تا تاریکی بیشینه در نوار جذب تنظیم شود.)

۸-۱۳ تیغه نیم‌موج نایلونی. یک تیغه نیم‌موج با روش توصیف شده در آزمایش خانگی ۸-۱۱ بسازید. باید حدوداً ۱۲ تا ۱۵ لایه بگیرید (اگر پوشش محافظ غذای شما مانند پوشش محافظ غذای من باشد). شاید بتوانید از روش آزمایش خانگی ۸-۱۲ برای "تنظیم" تیغه استفاده کنید، با اضافه کردن لایه‌ها تا نوار جذب در 560 \AA شود (همان‌طور که در مقایسه با تیغه نیم‌موج در جعبه وسایل خود معین شد). آن تیغه مقدار $\Delta z = (n_s - n_c)$ را برای یک لایه نسبتاً دقیق خواهد گفت. ۸-۱۴ قطبیدگی اسلینکی. یک فنر اسلینکی و یک همکار پیدا کنید، خودتان و همکارتان دو طرف فنر اسلینکی را در دست بگیرید.

(الف) هر کدام فنر را در جهت چرخش دایره‌ای ساعتگرد (از نقطه نظر خودتان) تکان دهید. اگر این موضوع شما را قانع نمی‌کند که قطبیدگی خطی برهم‌نهشی از قطبیدگیهای دایره‌ای مخالف‌اند، هیچ چیز دیگر هم شما را قانع نخواهد کرد.

(ب) هر نفر با استفاده از یک کتاب به منزله خط‌کشی که دستش را هدایت می‌کند، این امکان را فراهم می‌آورد که یکی از همکاران قطبیدگی خطی را به اندازه 45° نسبت به افق تغییر دهد، و دیگری قطبیدگی خطی را نسبت به اولی 90° تغییر دهد. (زاویه 45° طوری است که از گرانی برای ایجاد یک تقارن بزرگ جلوگیری می‌کند.) یکی بلند بخواند "۱، ۲، ۳، ۴، ۱، ۲، ۳، ۴، ..." (چهار زنش در یک دوره یا شاید چهار زنش در یک نیم دوره)، با آمدن "یکی" با همان فازی که

حرکت دست تولید می‌کند. دیگری در فاز یا 180° خارج فاز یا 90° خارج فاز تکان می‌خورد. این مقداری تمرکز می‌خواهد تا از آنچه می‌بینید پریشان نشوید.

(ج) اگر انتهای آن را به چیزی محکم کنید (همکارتان اکنون می‌تواند به منزل خود برود) با تکان دادن یک بسته موج دایره‌ای قطبیده با یک یا دو دور ایجاد کنید. تحقیق کنید که تکانه زاویه‌ای مربوط به بازتاب پایسته می‌شود. تحقیق کنید که اگر تکانه زاویه‌ای در امتداد جهت انتشار باشد، شکل آن مانند پیچ چپگرد است و دستوارگی مربوط به بازتاب معکوس می‌شود.

$15-8^\circ$ تیغه نیم‌موج نوار سلوفون شفاف. یک لایه نوار سلوفون شفاف را روی یک تیغه میکروسکوپ بچسبانید (تیغه برای مصارف مکانیکی است). آن را برای اثبات تیغه نیم‌موج با استفاده از روش آزمایش خانگی ۸-۱۲ امتحان کنید. Δz (ن-۱) را تخمین بزنید.

$16-8^\circ$ قطبیدگی کلی با نوار سلوفون شفاف. ۱۶ لایه نوار سلوفون شفاف اسکاتلندی را روی تیغه میکروسکوپ بچسبانید. احتمالاً حبابهایی خواهد داشت و به همین دلیل داخل آن به سختی دیده می‌شود. یک روش پیشرفته این است که یک تیغه تمیز میکروسکوپ روی میز بگذارید. یک "قطره" روغن (به نسبت ۱ به ۳ روغن یا روغن معدنی یا چیز دیگر) روی مرکز تیغه بریزید. یک تکه نوار به اندازه ۲ یا ۳ اینچ بیشتر از هر انتها بگیرید. نوار را روی تیغه بچسبانید، یک تماس اپتیکی خوب با پخش کردن روغن بسازید، نوار را روی میزی که کار می‌کنید بچسبانید. یک قطره روغن در مرکز ناحیه نوار بریزید. (حال یک لایه دیگر نوار اضافه کنید). (نوار به خودش نزدیک انتهاها که روغنی وجود ندارد می‌چسبد). روغن، نوار، روغن، نوار، ... روی ۱۶ امین لایه نوار، یک قطره روغن بیشتر بریزید، آنگاه تیغه آخری میکروسکوپ را قرار دهید. یک نوار بیشتر برای اینکه تیغه را نگه دارد اضافه کنید—اما ناحیه حساس شفاف را تیره نکنید. حال شما یک بسته‌ای با سطوح خارجی شیشه‌ای تخت و با ۱۶ لایه نوار دارید. به همین دلیل واضح و قابل دیدن است.

آزمایش به این طریق است: یک پولاروید به یک طرف جعبه ببندید که محور پولاروید با محور نوار زاویه 45° بسازد. یک توری پراش هم ببندید. این جعبه را طوری بگیرید که بتوانید چشمه خطی سفید روشن خودتان را ببینید. با دست دیگرتان یک قطبشگر خطی (پولاروید) در انتهای خارجی جعبه نگه دارید و موازی با اولین پولاروید بگیرید.

(الف) به نوارهای تاریک متعدد توجه کنید! همه این نوارهای تاریک قطبیدگی خطی دارند که با قطبشگر خطی جذب می‌شوند، آنها با فاز نسبی 2π (با مؤلفه‌های قطبیدگی خطی در امتداد محور نوار اسکاتلندی کند و تند) جدا می‌شوند. ناحیه "روشن" بین دو نوار تاریک موفق فاز نسبی دارند که از صفر تا 2π تغییر می‌کند و بنابراین در همه تغییرات قطبیدگی نشان داده شده در شکل ۸-۳ بخش ۸-۲ جاروب می‌شود.

(ب) پولاروید "تحلیلی" عقبی را تحت زاویه 90° بچرخانید. ناحیه‌های تاریک روشن می‌شود و ناحیه‌های روشن تاریک می‌شود! چرا؟

(ج) پولاروید را با قطبشگر دایره‌ای که در جهت عکس به‌عنوان تحلیلگر عمل می‌کند عوض کنید یعنی با انتهای خروجی به‌طرف چشمه. (وقتی آن را روی یک سکه می‌گذارید و آن سکه آبی تیره می‌شود، آنگاه انتهای ورودی به‌طرف بالاست).

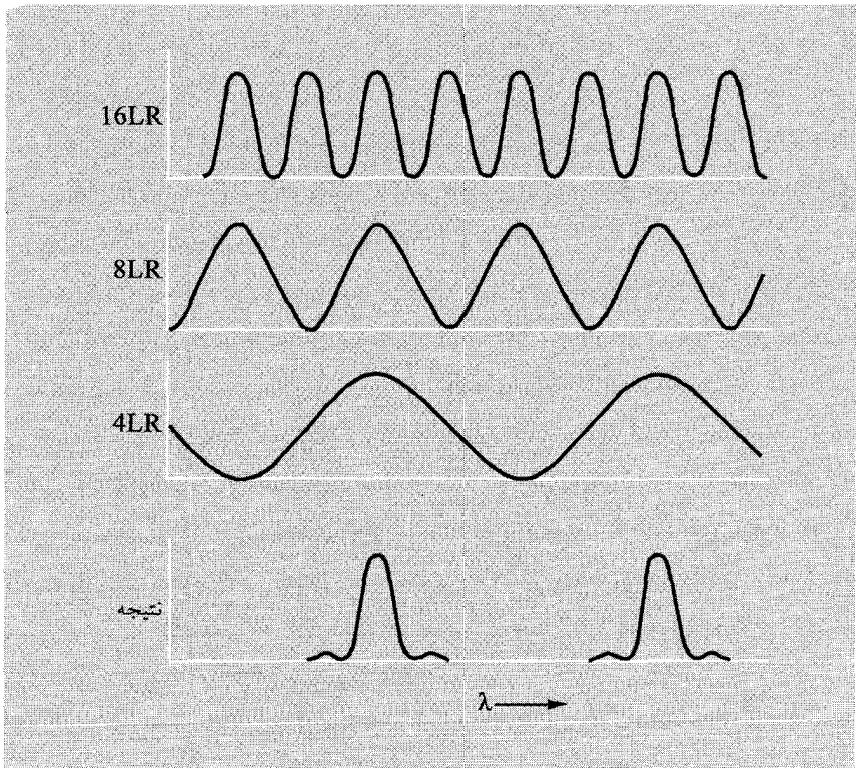
(د) هر دو قطبشگر خطی و دایره‌ای را در جای خود قرار دهید، میدان دید بین آن دو را جدا کنید. آنها باید با اولین قطبشگر موازی باشند (با زاویه 45° با تیغه). این جعبه را طوری حرکت دهید که اول تحلیلگر دایره‌ای و بعد خطی را ببینید. نوارها به‌اندازه $1/2$ فاصله بین نوارهای تاریک (یعنی $\pi/2$ رادیان فاز) حرکت می‌کنند. حال قطبشگر خطی را بچرخانید و تکرار کنید. جهت جابه‌جایی نوارها از دایره‌ای به خطی باید معکوس شود. با چنین روشهایی می‌توانید که خودتان را قانع کنید که قطبیدگی از (مثلاً) خطی بالایی راست به دایره‌ای راستگرد به خطی بالای چپ به دایره‌ای چپگرد به خطی بالایی راست وقتی به‌طرف 2π می‌روید تغییر می‌کند. یک نمودار کلی قطبیدگی برحسب رنگ (طول موج) بکشید که قطبیدگی خطی را با پیکانهای دوطرف نشاندار و قطبیدگی دایره‌ای را با "پیکانهای دایره‌ای" نشان می‌دهد.

$8^\circ-17^\circ$ نوار سلوفون شفاف - صافی پولاروید لیوت. (این آزمایش ۴ قطعه پولاروید نیاز دارد). یک کندساز نوار اسکاتلندی ۱۶ لایه‌ای که باعث تأخیر می‌شود مانند آزمایش خانگی ۸-۱۶ بسازید. یک کندساز ۸ لایه‌ای به همان روش بسازید. و همچنین یک کندساز ۴ لایه‌ای بسازید. این بسته‌ها را با نامهای ۱۶LR (کندکننده ۱۶ لایه‌ای)، ۸LR و ۴LR بنامید. همچنین قطبشگر خطی پولاروید را با نام P بنامید و $P(45^\circ)$ یعنی اینکه محور آسان P زاویه 45° با محور نوار می‌سازد. این توری پراش را DG بنامید. حال آزمایش زیر را انجام دهید:

(الف) یک ساندویچ شامل $P(45^\circ) : 16LR : P(45^\circ) : DG$ بسازید. به چشمه خطی سفید خود نگاه کنید. این همان آزمایش خانگی ۸-۱۶ است. حال این آزمایش را با استفاده از ۸LR به جای ۱۶LR تکرار کنید.

(ب) ۸LR را اضافه کنید و P دیگری در انتهای خروجی بسته ۱۶LR قرار دهید به‌طوری که بسته $P(45^\circ) : 8LR : P(45^\circ) : 16LR : P(45^\circ) : DG$ داشته باشیم. به چشمه خطی نگاه کنید.

(ج) حال $P(45^\circ) : 4LR$ را به خروجی بسته قسمت (ب) اضافه کنید و دوباره نگاه کنید. توجه کنید که با صافیهای مناسب "نوارهای کناری" را تمیز می‌کنید. بالاخره با یک صافی نوارگذر تمامش می‌کنید. (اگر می‌خواهید می‌توانید چیزها را با صافی ژلاتینی پاک کنید). پهنای



شکل ۸-۱۷ صافی لایوت. منحنی ۱۶LR شدت عبوری صافی که از بسته $P(45^\circ)$: ۱۶LR ساخته شده است را می‌دهد. منحنیهای ۸LR و ۴LR منحنیهای مربوط به صافیهای فردی با استفاده از ۸LR یا ۴LR به جای ۱۶LR است. وقتی تمام بسته استفاده شد منحنی عبوری حاصل سه منحنی منفرد است همان‌طور که نشان داده می‌شود.

نوار با بسته ۱۶LR داده می‌شود. اگر می‌خواهید پهنای نوار را نصف کنید به یک ۳۲LR احتیاج دارید. (حتی با روغن معدنی و مراقبت، داخل بسته‌ای که من ساختم به سختی دیده می‌شد.) این نوع صافی توسط بی اف لایوت در سال ۱۹۳۲ اختراع شد. فضانوردان از یک صافی لایوت با تیغه‌های تأخیری کوارتز به جای تیغه‌های تأخیری نوار اسکاتلندی استفاده می‌کنند. آنها به‌طور نمونه یک پهنای باند 1Å به دست می‌آورند که (مثلاً) در مرکز خط طیف $H\alpha$ سری بالمر هیدروژن با طول موج 6563Å قرار می‌گیرد که از آن برای عکسبرداری از خورشید استفاده می‌شود. شدت صاف‌شده عبوری کل حاصلضرب منحنیهای شدت عبوری صافیهای ۱۶LR، ۸LR و ۴LR منفرد است. (ترتیبش فرقی نمی‌کند، می‌توانید صافی را در جلو یا عقب به‌کار ببرید.) این موضوع در شکل نشان داده شده است.

پرسش: بگویید چرا شدت عبوری کل از ضرب منحنیهای عبوری شدت صافیهای منفرد به دست می‌آید. چرا نباید (مثلاً) سه دامنه سه صافی را جمع کنیم (وقتی فقط یک دامنه وجود دارد)، آنگاه مربع کنیم، سپس متوسط زمان بگیریم؟

۱۸-۸° قطبشگر دایره‌ای. (الف) قطبشگر دایره‌ای خود را روی یک قطعه کاغذ آلومینیمی (که در هر خواربارفروشی وجود دارد) یا یک آینه معمولی یا چاقوی براق قرار دهید. آن را طوری بچرخانید که کاغذ آلومینیمی "سیاه" (یا آبی تیره) به نظر آید. آن را برگردانید و نگاه کنید. (همین کار را با قطعه پولاوید انجام دهید.) آن را به طرف عقب در حالت "سیاه" برگردانید و حال قطبشگر را کمی از روی فلز بلند کنید به طوری که نور به فلز برسد بدون اینکه از قطبشگر عبور کند. به "سایه" یا "تصویر" قطبشگر وقتی به آرامی آن را از فلز بلند می‌کنید و دوباره می‌گذارید نگاه کنید. آنچه را می‌بینید توضیح دهید. (ب) کاغذ آلومینیمی را بگیرید و آن را به شکل V چروکش دهید. از روشنایی استفاده کنید به طوری که بیشتر نور از جهت معین (یک لامپ یا یک پنجره) بیرون بیاید. قطبشگر دایره‌ای را روی کاغذ آلومینیمی قرار دهید، قسمتی چروک را می‌پوشاند و قسمتی قسمت چروک نشده را می‌پوشاند، توجه کنید که حال قسمت چروک روشن دیده می‌شود، درحالی که بقیه کاغذ آلومینیمی هنوز تاریک است. توضیح دهید! (راهنمایی: وقتی که شما به دست راست خود در آینه نگاه می‌کنید دست چپ به نظر می‌آید. در "آینه دوتایی" که از وصل کردن دو آینه با زاویه‌های قائم به دست می‌آید و یک آینه مانند دره تشکیل می‌دهد شبیه چه می‌شود.)

(ج) حال کاغذ آلومینیمی را بردارید و آن را به صورت به هم ریخته چروک کنید تا یک سطح "ناصاف" بسازید. یک قطبشگر دایره‌ای روی آن قرار دهید. از فاصله خیلی نزدیک به آن نگاه کنید. این جمله را توضیح دهید "این در مقیاس بزرگ واقعبینانه شده است اما در مقیاس کوچک کاملاً قطبیده است." این جمله را توضیح دهید، "این شبیه واقعبینانه‌گی نور روی مقیاس زمان بزرگ و کاملاً قطبیدگی نور در مقیاس زمان به اندازه کافی کوچک است."

(د) قطبشگر را روی یک قطعه کاغذ سفید معمولی قرار دهید. آیا می‌توانید قطبشگر دایره‌ای از یک قطعه پولاوید را به این روش بگویید؟ توضیح دهید.

(ه) قطبشگر دایره‌ای را روی یک سطح فلز صاف دوباره قرار دهید. تیغه نیم موج را بین فلز و قطبشگر فرو کنید. ابتدا بیش‌بینی کنید که چه خواهید دید. آنگاه آزمایش را انجام دهید. با استفاده از کندساز ربع موج این عمل را تکرار کنید. (نکته: هر رنگ با مقدار مختلف همان‌طور که خوانده‌اید تأخیر پیدا می‌کند. اثرهای آن با استفاده از صافی ژلاتینی سبز افزایش می‌یابد. این واقعاً لازم نیست درحالی که شما می‌فهمید که "سیاه" توصیفی تقریبی است.)

۱۹-۸ تکانه زاویه‌ای نور. نور قطبیده دایره‌ای راستگردی را فرض کنید (با قرارداد تکانه زاویه‌ای)

که روی یک تیغه جذب فرود می‌آید. تیغه را یک نخ عمودی نگه داشته است. نور در جهت بالاست و به قسمت پایینی تیغه می‌خورد.

(الف) اگر یک باریکه نور قطبیده دایره‌ای ۱ وات نور مرئی با طول موج 5500 \AA داشته باشد و اگر همه این نور توسط تیغه جذب شود، گشتاور نیروی وارد شده بر تیغه چقدر می‌شود؟ (جواب را بر حسب دین - سانتیمتر پیدا کنید). به خاطر داشته باشید که گشتاور نیرو آهنگ تغییر تکانه زاویه‌ای است و تیغه البته تکانه زاویه‌ای تابش را جذب می‌کند.

(ب) فرض کنید که به جای تیغه جذب‌کننده از یک سطح آینه نقره‌ای معمولی استفاده کنید، به طوری که نور در زاویه 18° در امتداد اصلی به طرف عقب بازتابیده شود. حالا گشتاور نیرو چقدر است؟

(ج) فرض کنید که تیغه یک تیغه نیم‌موج شفاف است. نور از داخل تیغه عبور می‌کند و به هیچ چیز دیگر برخورد نمی‌کند. گشتاور نیرو چقدر است؟ (از بازتابها در سطح تیغه صرف‌نظر کنید).
(د) فرض کنید که تیغه یک تیغه نیم‌موج شفاف است که قسمت بالای سطح آن نقره‌اندود شده است به طوری که نور از تیغه نیم‌موج می‌گذرد، از آینه باز می‌تابد و از تیغه برمی‌گردد. گشتاور نیرو چیست؟

(ه) تیغه یک تیغه نیم‌موج شفاف است. بالای تیغه یک تیغه ربع موج نقره‌اندود ثابت روی بالای سطح است (یعنی به تیغه وصل نیست) به طوری که نور از داخل تیغه به طرف عقب باز می‌تابد. گشتاور نیروی اعمال‌شده روی تیغه چقدر است؟

(و) چطور می‌توانید بزرگترین گشتاور نیرو را به دست آورید؟

(ز) فرض کنید نخ که تیغه روی آن سوار است، با خود تیغه دارای زمان تناوب طبیعی نوسانات چرخشی 10° دقیقه است. چطور یک آزمایش طراحی می‌کنید که اثر گشتاور نیرو را "بزرگ" کنید به طوری که بالاخره یک اندازه معقول به دست آورید؟ (ما فقط یک نظر ابتکاری می‌خواهیم نه جزئیات مهندسی).^۱

$8^\circ - 20^\circ$ قطبیدگی توسط پراکندگی. (الف) چند قطره شیر در یک پارچ شیشه‌ای آب بریزید. یک باریکه چراغ‌قوه داخل مایع بتابانید. به نور تهرنگ آبی پراکنده شده از "مولکولهای شیر" نگاه کنید. با قطبشگر خطی خودتان قطبیدگی را آزمایش کنید. این کار را برای پراکندگی 90° (پراکندگی در زاویه انحراف 90°) انجام دهید و برای پراکندگی در زاویه‌های کوچک (نزدیک صفر درجه) و زاویه‌های بزرگ (نزدیک 180° درجه) انجام دهید. نکته: باید یک قطعه کوچک نوار یا چیزی

۱. می‌توانید در مقاله زیر بخوانید که چطور این آزمایش واقعاً انجام شده است:

شبهه آن روی قطبشگر خطی خودتان بگذارید تا محور عبور آسان را نشانه‌گذاری کنید. این محور با نگاه کردن به نور بازتابیده آینه‌ای از شیشه یا چوب یا کف پلاستیکی یا هر سطح رنگ شده با زاویه فرود نزدیک 45° (که به اندازه کافی به زاویه بروستر نزدیک است) به دست می‌آید.

(ب) باریکه چراغ قوه را به طور خطی قطبیده کنید (با یک قطعه مقوا موازی سازی کنید، بنابراین باریکه، کوچکتر از پولاروید می‌شود) و به نور پراکنده شده در صفحه‌ای که با باریکه زاویه 90° می‌سازد (یا پولاروید را در چراغ قوه بچرخانید) از جهات مختلف نگاه کنید.

(ج) شکل ۸-۶ و زیر تصویر آن را مطالعه کنید. قطبیدگی جزئی P را به صورت زیر تعریف کنید.

$$P = \frac{I(\hat{x}) - I(\hat{y})}{I(\hat{x}) + I(\hat{y})}$$

که $I(\hat{x})$ شدت نور قطبیده پراکنده شده در امتداد \hat{x} است و $I(\hat{y})$ شدت نور قطبیده پراکنده شده در جهت تصویر \hat{y} است که توسط ناظر دیده می‌شود. نشان دهید که وابستگی P به زاویه پراکندگی θ_{sc} شکل ۸-۶ به صورت زیر داده می‌شود

$$P = \frac{1 - \cos^2 \theta_{sc}}{1 + \cos^2 \theta_{sc}}$$

توجه کنید که P در زاویه پراکندگی 0° یا 180° درجه صفر است و در زاویه 90° درجه ۱ است. (د) کمی شیر اضافه کنید، باریکه مایل به سفید می‌شود. به قطبیدگی که در 90° بیشینه است نگاه کنید. شیر بیشتری اضافه کنید. توضیح دهید چه اتفاقی می‌افتد. آیا انتظار دارید نور خورشید پراکنده شده از ابر سفید قطبیده شود؟ این آزمایش را امتحان کنید و ببینید چه می‌شود؟ $21-8^\circ$ قطبیدگی رنگین کمان. آیا رنگین کمان قطبیده است؟ می‌توانید از قطره‌های ریز آب که از شیلنگ باغ می‌ریزد به جای باران استفاده کنید.

$22-8^\circ$ نور ماه و نور زمین. وقتی ماه نیمه می‌شود قسمت درخشان، نور خورشید را در زاویه 90° با چشم‌تان پراکنده می‌کند. می‌دانیم که برای پراکندگی 90° آسمان آبی تقریباً به طور کامل قطبیده خطی است. آیا پیش‌بینی می‌کنید که نور ماه نیمه قطبیده باشد؟ آزمایش را انجام دهید. حال فکر کنید زمین از دید ماه که در نیمه زمین قرار دارد چطور به نظر می‌آید. آیا نور زمین قطبیده است؟ (شما می‌توانید ۲۴ ساعت درحالی که زمین می‌چرخد نگاه کنید).

جواب: بعضی وقتها به زمان و هوا بستگی دارد. چرا؟

$23-8^\circ$ فرض کنید که یک باریکه قطبیده خطی روی تیغه نیم موج فرود می‌آید که حول محور باریکه با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. نشان دهید که نور خروجی با جهت قطبیدگی چرخان در 2ω به طور خطی قطبیده است.

۲۴-۸° به یک لامپ التهایبی از داخل یک قطعه پولا‌روید نگاه کنید. آیا نور قطبیده است؟ حال یک قطعه سلوفون (یا تیغه نیم‌موج یا ربع‌موج) بین لامپ التهایبی و پولا‌روید فرو کنید. حال آیا نور قطبیده است؟ نور را از فلز نقره‌ای مانند کارد غذاخوری بازتابانید. آیا نور بازتابیده قطبیده است؟ ۲۵-۸° اندازه‌گیری ضریب شکست با پیدا کردن زاویه بروستر. یک لامپ التهایبی (که شاید با یک قطعه مقوا پوشیده شده و یک سوراخ در آن وجود دارد تا چشمه کوچک مناسبی ایجاد شود)، یک قطعه شیشه، یک میز، یک جعبه مقوایی یا چیز دیگری که یک مکان قابل اندازه‌گیری برای چشم شما باشد و یک قطعه پولا‌روید لازم دارید. قطعه شیشه را روی میز بخواه‌بایند و به بازتاب لامپ نگاه کنید. (دو نوع بازتاب خواهید دید، یک بازتاب از جلو و یک بازتاب از سطح عقب. اگر می‌خواهید می‌توانید آنکه از عقب می‌آید با اسپری کردن رنگ سیاه به سطح پشت روشن کنید.) زاویه‌ها را تغییر دهید تا پولا‌روید نشان دهد که نور بازتابیده کاملاً قطبیده است. فاصله‌های مناسب را اندازه‌گیری کنید و ضریب شکست را با فرمول زاویه بروستر، $\tan \theta_B = n$ ، به دست آورید. با این اقدام ساده نمی‌توانید تا دقت بیش از چند درجه اندازه‌گیری کنید، به طوری که احتمالاً نمی‌توانید زاویه بروستر شیشه را از زاویه بروستر سطح صاف آب تشخیص دهید.

۲۶-۸° روابط فاز در بازتاب آینه‌ای نور از شیشه. می‌خواهیم روابط نشان داده شده در شکل ۸-۸ را تحقیق کنیم مراحل آزمایش مانند آن است که در آزمایش خانگی ۸-۲۵ گفته شد، بجز اینکه بین قطعه شیشه روی میز و نور یک قطعه پولا‌روید با محور آسانی که ۴۵ درجه به طرف افق چرخیده است قرار می‌دهیم. (پیشنهاد: برای نصب مناسب، یک ماده نرم بتونه یا ترکیب چسب‌دار روی تیغه میکروسکوپ قرار دهید و گوشه پولا‌روید را به این بتونه بچسبانید. تیغه میکروسکوپ می‌تواند به عنوان سطح شیشه که نور را باز می‌تاباند استفاده شود.)

فرض کنید وقتی چشم شما روی تیغه میکروسکوپ است و شما از پشت لامپ التهایبی به اولین پولا‌روید نگاه می‌کنید جهت آسان پولا‌روید "بالای قسمت راست به طرف پایین قسمت چپ" است. تحلیل قطبیدگی نور بازتابیده را ادامه دهید در حالی که زاویه فرود را با تغییر مکان تیغه یا لامپ التهایبی تغییر می‌دهید. با این کار می‌فهمید که فرود نزدیک به عمود قطبیدگی نور بازتابیده در جهت "بالای چپ به پایین راست" است. وقتی تیغه را تغییر می‌دهید و به زاویه بروستر نزدیک می‌شوید، قطبیدگی خطی باقی می‌ماند، اما به طرف افق می‌چرخد. در زاویه بروستر افقی می‌شود به طرف فرود افقی یعنی "پایین چپ به طرف بالای راست" در می‌آید. بنابراین از فرود عمود به فرود افقی، قطبیدگی با زاویه ۹۰ درجه می‌چرخد، همان‌طور که در شکل ۸-۸ پیش‌بینی شد. (در فرود عمودی، هر دو مؤلفه به خوبی به‌طور مساوی باز می‌تابند، همان‌طور که باید باشند چون نمی‌دانند کدام به کدام است. بنابراین قطبیدگی در زاویه ۴۵ درجه است. در فرود افقی هر دو مؤلفه تقریباً

به طور کامل باز می‌تابد، بنابراین آنها به خوبی به طور مساوی باز می‌تابند. بنابراین قطبیدگی در زاویه 45° است). جالب است توجه کنیم که قطبیدگی در طول آزمایش خطی باقی می‌ماند. این به این معنی است که انتقال فازی وجود ندارد بجز در 0° یا 180° که بین این مؤلفه‌ها در صفحه فرود و عمود بر آن معرفی شد. بنابراین موجهای فرودی همیشه یک بار مقاومتی خالص را وقتی باز می‌تابند تجربه می‌کنند. آن چیزی است که ما برای بازتاب از محیط شفاف انتظار داریم.

$27-8^\circ$ پایستگی تکانه زاویه‌ای. بازتاب در فرود عمودی نور قطبیده دایره‌ای راستگرد را به طرف نور چپگرد تغییر می‌دهد، (وقتی شما به دست راست خود در یک آینه نگاه می‌کنید به نظر می‌رسد که دست چپ خود را می‌بینید.) در مورد فرود افقی چه می‌دانید؟ آیا دستوارگی بعد از بازتاب همان است یا معکوس است؟ با استفاده از شکل ۸-۸ جواب را حدس بزنید.

(الف) حال آزمایش را انجام دهید. (از تیغه ربع موج و یک قطبشگر که به هم بسته شده‌اند تا یک قطبشگر دایره‌ای درست شود، استفاده کنید. قطبشگر دایره‌ای خود را به طرف عقب مانند یک تحلیدر بکشید. اطمینان پیدا کنید که دستوارگی قطبشگر دایره‌ای را که ساخته‌اید نسبت به آنکه در جعبه وسایل دارید می‌دانید.) دست شما در فرود افقی چگونه به نظر می‌آید؟ این جمله "فلسوفانه" چه معنی می‌دهد: "شما باید نسبت به استفاده از اندازه‌گیرهای شدت برای پیش‌بینی‌هایی که به علامت مربوط می‌شود یعنی فازها شکاک باشید؟" این جمله چه ربطی به روشی که شما دستهای خود را در آینه می‌بینید دارد؟

(ب) آزمایش مشابهی با قطبیدگی خطی انجام دهید. با یک پولاروید نور قطبیده خطی "راست بالا" بسازید. به بازتابهای آن در فرود افقی نگاه کنید. آیا نور بازتابیده "راست بالاست" یا "راست پایین"؟ اگر به تصویر یک مداد آویزان که در امتداد "راست بالا" جهت‌گیری شده نگاه کنید، تصویر آن شبیه "راست بالا" یا "راست پایین" است؟ گزاره فلسفی بالا چه ربطی با این مسئله دارد؟

$28-8^\circ$ تغییرهای فاز در بازتاب فلزی. مراحل آزمایش مانند آزمایش خانگی ۸-۲۶ است. اما به جای قطعه شیشه، از یک تکه فلز براق استفاده کنید، مثلاً تیغ ضدزنگ فولادی کارد آشپزخانه یا غذاخوری، یا هر جسم تیغه‌مانند نقره‌ای یا کرمی. (از آینه معمولی استفاده نکنید یعنی از یک قطعه شیشه که پشت آن اندوده شده چون کار نمی‌کند.) شما به دو پولاروید و یک تیغه ربع موج احتیاج دارید. ابتدا تحقیق کنید که قطبیدگی نور قطبیده خطی \parallel (موازی) یا \perp (عمود) (یعنی نسبت به صفحه فرود موازی یا عمود است) نسبت به بازتاب باقی می‌ماند. (این شبیه به عمل تیغه تأخیری روی نور قطبیده خطی است که به طور موازی یا عمود به محور اپتیکی قطبیده شده است؛ هیچ اتفاقی برای قطبیدگی نمی‌افتد.) بعد به طور خطی نور فرودی که با زاویه 45° به صفحه

فرود وارد می‌آید را قطبیده کنید. زاویه فرود را طوری تنظیم کنید که اگر نور لامپ ۱ فوت بالای میز باشد، چاقو در حدود ۳ فوت از نور لامپ فاصله داشته باشد. حال نور بازتابیده را تحلیل کنید، از پولاروید یا تیغه ربع موج استفاده کنید (یا قطبشگر دایره‌ای خود را با یا بدون تیغه نیم‌موج به طرف عقب به صورت یک تحلیلگر بچرخانید). خواهید دید که قطبیدگی بیضوی است. با تغییر زاویه فرود، می‌توانید نقطه‌ای را که قطبیدگی نور بازتابیده تقریباً کاملاً دایره‌ای می‌شود به دست آورید. حال اگر پولاروید قطبیده را پنج یا ده درجه نسبت به زاویه 45° کج کنید، محور آسان را به طرف عمود کج کنید به طوری که مؤلفه \parallel به طور جزئی افزایش پیدا کند می‌توانید کاملاً نور بازتابیده قطبیده دایره‌ای را به دست آورید. (این کج کردن جزئی برای جبران این حقیقت که مؤلفه \parallel کاملاً مانند مؤلفه \perp بازتابیده نمی‌شود لازم است.)

چرخاندن پولاروید قطبیده از "راست بالا" به طرف "چپ بالا" محور عبور آسان، دستاوری نور بازتابیده را معکوس می‌کند.

حال توضیح کیفی این اتفاق را می‌خوانیم. فلز یک محیط واکنشی است. هر دو مؤلفه قطبیدگی نور فرودی تقریباً به طور کامل بازتابیده می‌شوند. یک تغییر فاز مربوط به زمان برای میدانها لازم است تا به اندازه حدود یک فاصله تضعیف نمایی (به طور متوسط) به داخل محیط واکنشی نفوذ کند و آنگاه بچرخند و به طرف بیرون برگردند. مؤلفه‌های \parallel و \perp همان تغییر فاز را به دلیل زیر ندارند. مؤلفه \perp موازی سطح است؛ الکترونها برای حرکت موازی با سطح آزادند و طوری حرکت می‌کنند که تابش فرودی را خنثی می‌کنند. تأخیر زمان و تغییر فاز مربوط به لختی الکترونهاست. بنابراین مؤلفه \perp تأخیر فاز معینی دارد که مربوط به تأخیر زمان است. حال مؤلفه موازی را در نظر بگیرید. نزدیک فرود عمود، مؤلفه \parallel تقریباً نزدیک سطح است و بنابراین مانند مؤلفه \perp عمل می‌کند. بنابراین تأخیر فاز مانند مؤلفه \perp است. هر دو مؤلفه از بازتاب علامت منفی دریافت می‌کنند بعلاوه تغییر فازی که مربوط به جبران است. بنابراین قطبیدگی فرودی "راست بالا" (همان طور که در برگشت نور از بازتابگر فلزی دیده شد) بعد از بازتاب "چپ بالا" می‌شود. اما فرض کنید نزدیک فرود عمود نیستیم، آنگاه مؤلفه موازی \parallel میدان الکتریکی موازی سطح نیست. می‌توانیم آن را به دو مؤلفه موازی و عمود بر سطح تجزیه کنیم. مؤلفه موازی با سطح به روش معمولی خود ادامه می‌دهد و تحت تأخیر فاز مانند قبل قرار می‌گیرد. اما مؤلفه عمود بر سطح به یک روش کاملاً متفاوت عمل می‌کند؛ بارها برای حرکت عمود بر سطح آزاد نیستند. سطح یک بار سطحی به دست می‌آورد و بارها به سرعت به حالت سکون درمی‌آیند. تأخیر زمان مربوط به لختی الکترونهاست که موازی سطح حرکت می‌کنند برای حرکت عمود بر سطح وجود ندارد زیرا حرکت بسیار کوچک است. بنابراین قسمت مؤلفه موازی با تأخیر زمان ناچیزی باز می‌تابد.

به منظور کامل کردن توضیحات باید بتوانیم که فاز تأخیری هر مؤلفه را حساب کنیم و ببینیم چطور این موضوع به زاویه فرود بستگی دارد که بسیار مشکل است.

۲۹-۸ فعالیت نوری. فرض کنید نور قطبیده خطی را از شیشه شربت به طول L عبور دهیم و به دست بیآوریم که برای $L = 5\text{cm}$ نور قرمز با زاویه 45° می چرخد. حال نوری که از شربت عبور می کند از آینه بازتابانید تا از همان شربت برگردد، یعنی طول کل 1cm شود، (اگر این آزمایش را انجام دهید و زاویه بازتاب را دقیقاً 18° درجه نگیرید آنگاه به "تصویر لامپ التهابی" از داخل هم "شربت واقعی" و هم "شربت تصویری" نگاه کنید. به عنوان آزمایش کنترلی می توانید به داخل "شربت تصویری" فقط با حرکت سرتان نگاه کنید.) سؤال: بعد از دو عبور آیا قطبیدگی خطی در زاویه 90° یا 0° با جهت اصلی است؟

۳۰-۸ پیدا کردن محور تند تیغه ربع موج خودتان. فرض کنید قطبشگر دایره ای خودتان نور چپگرد می سازد (با قراردادهای اپتیکی پیچی — یا نور راستگرد با قراردادهای تکانه زاویه). محور تند تیغه ربع موج خودتان را پیدا کنید (یک بار که پیدا کردید یک شکاف یا نوار یا چیزی روی آن بگذارید.)

۳۱-۸ ثابتهای فنر مؤثر برای مولکولهای پوشش محافظ غذا. یک قطعه از نایلون پوشش محافظ غذا را بکشید و آن را پشت یک پولاروید که با محور آسان پولاروید زاویه 45° می سازد بگذارید. خیلی محکم نکشید — نمی خواهیم فراتر از تغییر فاز نسبی $\pi/2$ برویم. حال دستوارگی نور قطبیده بیضوی را تعیین کنید. شما می توانید این کار را با قطبشگر دایره ای و تیغه ربع موج خودتان انجام دهید. وقتی شما دستوارگی را بدانید، می دانید آیا محور کشیده محور کند است یا تند. حال فرض کنید که کشیدگی مولکولها را به خط می کند و بعد طولانی آنها در امتداد جهت کشیدگی است. حال می توانید بفهمید که آیا ضریب شکست در امتداد جهت طولانی مولکول بزرگتر یا کوچکتر است. ضریب شکست بزرگ یعنی ثابت دی الکتریک بزرگ، که یعنی قطبش پذیری مولکولی بزرگ، که آن هم یعنی ثابت فنر مؤثر ضعیف (تا زمانی که بسامد نور کمتر از بسامد ارتعاش طبیعی مؤثر الکترونها در مولکول است. این موردی است برای نور مرئی در شیشه. می توانیم فرض کنیم این همین حالتی است که داریم.) بنابراین اگر (مثلاً) محور کشیدگی تبدیل به محور آسان شود، یعنی اینکه ثابت فنر مؤثر برای ارتعاش در طول مولکول کمتر از آنی است که برای ارتعاش عمود بر آن است. نتیجه آزمایش چیست؟

۳۲-۸ سنگ آهک ایسلند (بلور کلسیت). یک بلور سنگ آهک ایسلند بزرگ و زیبا (یک اینچ یا به همین کلفتی) بگیرید. یک علامت سیاه با مداد روی یک قطعه کاغذ بکشید، بلور را روی کاغذ قرار دهید و از توی بلور به نقطه نگاه کنید؛ دو نقطه خواهید دید. حال به این دو نقطه با یک

قطبشگر خطی نگاه کنید. آنها هرکدام 10° ٪ قطبیده‌اند. بلور را حول محور عمود همان طور که به لکه‌ها نگاه می‌کنید بچرخانید. یکی می‌چرخد و دیگری نمی‌چرخد! لکه‌ی اضافی بردار E خودش را در امتداد محور اپتیکی دارد. این همانی است که حرکت می‌کند. حال از دو چشم خود و درک عمیق خود استفاده کنید تا تصمیم بگیرید کدام یک از دو لکه به چشم شما نزدیکتر است. خودتان را با یک قطعه شیشه یا با یک طرح کلی متقاعد کنید (یا یک قالب آب، مانند آکواریوم ماهی) که وقتی شما داخل ماده‌ای با ضریب شکست n بزرگتر از ۱ نگاه می‌کنید چیزها نزدیکتر به نظر می‌آیند. آیا لکه‌ی معمولی یا اضافی نزدیکتر است و بنابراین ضریب بزرگتر دارد؟ آیا نتیجه‌ی آزمایش شما با ضرایبی که در جدول ۸-۱ بخش ۸-۴ آمده است توافق دارد؟ با استفاده از یک مداد به عنوان علامت زن در فضا و نگاه کردن به فرود عمود نشان دهید که لکه‌ی معمولی هیچ جابه‌جایی جانبی ندارد؟ بنابراین پرتویی که به طور عمود وارد سطح می‌شود و همچنان عمود باقی می‌ماند و به طور عمود بر صفحه خارج می‌شود پرتوی معمولی است. پرتوی اضافی به طور عمود بر صفحه سفر نمی‌کند! با یک بحث معکوس زمان نشان دهید که پرتو اضافی که لکه‌ی واقعی را ترک می‌کند و به طور عمود بر سطح فرود می‌آید باید به طور عمودی از سطح خارج شود، حتی اگر داخل بلور به طور کج عبور کند (سطوح بالا و پایین برای هر جهت‌گیری بلور روی ورقه‌ی کاغذ موازی‌اند). آیا پرتوی اضافی با کوشش خم می‌شود تا با محور اپتیکی بیشتر موازی شود، یا به جای آن آیا سعی می‌شود که بیشتر عمود شود؟ (در مورد ضریبهای شکست فکر کنید.) توصیف فیزیکی انحراف پرتو اضافی به صورت زیر است: E پرتوی اضافی فرودی را به یک مؤلفه‌ی در امتداد محور اپتیکی و یک مؤلفه‌ی عمود بر آن تجزیه کنید. ضرایب برای E در امتداد این دو جهات مختلف است، به طوری که قطبیدگی متفاوت است. بنابراین دامنه‌ی نوسان الکترونیهای محرک متفاوت است، بنابراین آنها همان مقدار را تابش نمی‌کنند (یا یک مؤلفه‌ی حرکت به اندازه‌ی دیگران تابش نمی‌کنند). وقتی شما میدانهای تابشی مربوط به این دو مؤلفه‌ی حرکت الکترون را بر هم می‌گذارید، آنها یک موج پیشرونده در جهت "مایل" می‌دهند. کاری که باید الان شما انجام دهید مستقیم کردن آن است به روشی که پرتو مایل شده است. آیا نتیجه‌ی شما با مشاهدات آزمایشی شما توافق دارد؟

۳۳-۸ جهت‌یابی توسط وایکینگها. در عرض جغرافیایی زیاد (مثلاً بالای مدار شمالگان) قطب‌نمای مغناطیسی غیرقابل اطمینان است. خورشید هم برای استفاده در جهت‌یابی چندان کارساز نیست، زیرا ممکن است حتی در ظهر هم زیر افق باشد. آنگاه جهت‌یابهای خط هوایی بعضی وقتها از "قطب‌نمای تاریک و روشن" استفاده می‌کنند که مکان خورشید را به وسیله‌ی تغییر با جهت قطبیدگی آسمان آبی زیر افق قرار می‌دهد. قطب‌نما شامل یک قطعه پولاروید است. بعضی بلورهای طبیعی خصوصیات مشابهی با پولاروید دارند — یکی از این مواد تورمالین است و

دیگری کوردیریت. وقتی نور قطبیده خطی از داخل یک بلور کوردیریت دیده می‌شود، بلور شفاف است (با یک تهرنگ زرد) وقتی قطبیدگی در امتداد محور آسان است، و بلور آبی تیره است وقتی قطبیدگی با این محور زاویه 90° می‌سازد. به این مواد "دو رنگ" گفته می‌شود.

دریانوردهای وایکینگ قرن نهم کشتیهای خود را بدون سودجستن از قطب‌نمای مغناطیسی یا پولاروید هدایت می‌کردند. آنها شبها از ستاره‌ها کمک می‌گرفتند. روزها وقتی آسمان از ابر پوشیده نبود، از خورشید استفاده می‌کردند. طبق افسانه‌های قدیمی اسکاندیناوی دریانوردهای وایکینگ می‌توانستند همیشه جای خورشید را حتی وقتی که پشت ابر است تعیین کنند و آن به وسیله "سنگهای خورشیدی" جادویی بود. مدت طولانی این "سنگهای خورشیدی" مرموز بودند. مرموز بودن آن به وسیله یک باستان‌شناس دانمارکی که در مورد وایکینگها می‌دانست و یک پسر ده‌ساله که در مورد قطب‌نمای تاریک و روشن می‌دانست (زیرا پدرش رئیس مهندسين جهت‌یاب پرواز اسکاندیناوی بود) حل شد. باستان‌شناس تورکیلد رامسکو در یک مجله باستان‌شناسی نوشته است، "... اما به نظر می‌رسد که ممکن است دستگاهی باشد که مکان خورشید را در هوای ابری هم تعیین کند." آن پسر این را خواند؛ و به نظر آمد که شبیه قطب‌نمای تاریک و روشن است. پدر آن پسر جورجین چنین این مشاهدات را برای رامسکو نوشت. رامسکو و جواهرشناس قصر سلطنتی دانمارک بلورهای دو رنگی متفاوتی را در اسکاندیناوی جمع و امتحان کردند. بهترین "سنگ خورشیدی" کوردیریت بود. رامسکو فهمید که او می‌تواند مکان خورشید را تا $\pm 2\frac{1}{4}$ درجه تعیین کند و تا 7 درجه زیر افق رد آن را پیدا کند.

حال این پرسش مطرح است: طبق نوشته مجله "تایم" سال ۱۹۶۷، افسانه‌های قدیمی اسکاندیناوی می‌گوید که مکان خورشید را می‌توانستند همیشه به وسیله "سنگ خورشیدی" جادویی تعیین کنند، هیچ مهم نبود چه هوایی باشد. آیا شما این مسئله را باور می‌کنید؟ توضیح دهید.

۳۴-۸ قطبیدگی "عملگر تصویری". اگر یک قطعه پولاروید خطی با محور آسان در امتداد \hat{x} روی یک باریکه نور شامل مخلوطی از انواع قطبیدگی قرار گیرد، پولاروید همه نورهایی را که قطبیدگی خطی در امتداد \hat{x} ندارند جذب می‌کند. این یک "خروجی" در پشت قطبشگر شامل نور قطبیده خطی در امتداد \hat{x} دارد. ما این قطعه پولاروید را "عملگر تصویری" می‌نامیم. این پولاروید قطبیدگی \hat{x} را بدون اتلاف "به طرف خارج تصویر" می‌کند (با صرف‌نظر از بازتابها) و در انتهای خروجی پس می‌گیرد. توجه کنید که این "عملگر تصویری" هم می‌تواند به طرف جلو و هم عقب حرکت کند؛ یعنی روی دیگر پولاروید می‌تواند به عنوان انتهای ورودی استفاده شود. حال یک قطعه قطبشگر دایره‌ای شامل یک قطعه قطبشگر خطی (انتهای ورودی) در نظر بگیرید که به

یک تیغه (مثلاً) ربع موج با محور اپتیکی که زاویه 45° با محور آسان پولاروید می‌سازد چسبیده باشد. این قطبشگر نور راستگرد را (مثلاً) به خارج می‌فرستد. اما نصف هر نور راستگرد فرودی را جذب می‌کند. اگر به عقب برگردد، نور راستگرد فرودی عبور می‌کند و نور چپگرد جذب می‌شود. اما بنابراین وقتی نور راستگرد فرودی روی جلوی تیغه ربع موج فرود می‌آید، از جلوی پولاروید به‌عنوان نور قطبیده خطی خارج می‌شود. بنابراین این چیزی نیست که ما به آن عملگر تصویری قطبیدگی می‌گوییم. مسئله این است: قطبیدگی دایره‌ای عملگرهای تصویری اختراع کنید، یکی برای نور چپگرد و یکی برای نور راستگرد. عملگر تصویری راستگرد باید نور چپگرد فرودی را با هیچ اتلافی عبور دهد (با چشمپوشی از بازتابهای کوچک) و باید به‌عنوان نور راستگرد آن را دریافت کند. نور چپگرد باید جذب شود. پرسش: آیا قطبیدگی دایره‌ای عملگر تصویری شما برگشت‌پذیر است؟ آیا می‌توانید از هر دو طرف برای انتهای ورودی استفاده کنید.

$35-8^\circ$ حذف درخشش. فرض کنید می‌خواهید نور چراغ‌قوه خود را از شیشه پنجره عبور دهید تا چیزی را که آن طرف پنجره در دوردست قرار دارد روشن کنید. چگونه می‌توانید از درخشش مزاحمی که نور بازتابیده از شیشه به‌وجود می‌آورد خلاص شوید. فرض کنید به‌جای آنکه سعی کنید در باران به چیزی نگاه کنید، در شب از باریکه نور یک چراغ‌قوه برای روشنایی استفاده کنید. آیا با این حقه برای حذف درخشش پنجره از نور بازتابیده از قطرات باران خلاص می‌شوید. فرض کنید به‌جای نور مرئی از میکروموج 1° سانتیمتری برای حذف و دریافت به‌وسیله همان سیستم آنتن، یعنی رادار استفاده کنید. چطور می‌توانید رابطه‌های فازی را در دو آنتن که در جهت x و y برای حذف درخشش قطرات باران جهت‌گیری شده است بنویسید؟

$36-8^\circ$ رنگها در پلاستیکهای شفاف. یک تکه پلاستیک شفاف بگیرید که دو طرف آن با ماده براق‌کننده درخشنده شده باشد — مثلاً یک ظرف بستنی پلاستیکی یا ظرف دیگر. به بازتاب آینه‌ای آسمان با زاویه فرود 45° یا غیره نگاه کنید. آیا رنگها را می‌بینید؟ (یک پارچه یا صفحه سیاه زیر آن قرار دهید تا زمینه را کاهش دهید.) برای افزایش اثر، یک قطعه پولاروید در جلوی چشم خود بگیرید. منشأ رنگها را توضیح دهید.

تداخل و پراش

۱-۹ مقدمه

تاکنون بیشتر مطالعات ما اساساً یک‌بعدی بوده‌اند. به این معنی که موج گسیل شده از یک نقطه، فقط از طریق یک مسیر ممکن بود به نقطه دیگری برود. اینک مواردی را در نظر می‌گیریم که در آنها مسیرهای مختلفی از گسیل‌کننده به آشکارساز ممکن است. اینها به آنچه موسوم به پدیده تداخل یا پراش است می‌انجامد. این پدیده‌ها نتیجه برهم‌نهی سازنده یا میرای امواجی است که بر حسب مسیری که می‌پیمایند اختلاف فازهای متفاوتی دارند.

در بخش ۲-۹ برهم‌نهی امواجی را در محل آشکارساز در نظر می‌گیریم که از دو چشمه نقطه‌ای گسیل می‌شوند و دارای بسامدهای یکسان و اختلاف فاز ثابتی هستند. مثلاً امواج آب که از دو ارتعاش‌کننده که سطح آب ظرفی را می‌لرزاند گسیل می‌شوند و یا نوری که از جریانهای موجود در لبه‌های دو شکاف که در پرتو چشمه نقطه‌ای یا خطی قرار داده شده‌اند گسیل می‌شود (آزمایش خانگی ۹-۱۸ را ببینید)، یا امواج صوتی که از دو بلندگو که به وسیله یک نوسانگر رادیویی تحریک می‌شوند گسیل می‌شوند.

در بخش ۳-۹ تداخل بین دو چشمه "مستقل" را در نظر خواهیم گرفت، مستقل به این معنی

که فاز آنها مقید به حفظ رابطه خاصی نیست. چنین می‌یابیم که طرح تداخلی فقط برای فواصل زمانی از مرتبه $(\Delta t)^{-1}$ ، که در آن Δt پهنای بسامد چشمه‌هاست، ثابت باقی می‌ماند. با این وجود، با اندازه‌گیری که به قدر کافی سریع باشد، می‌توان طرح تداخلی را مشخص کرد.

در بخش ۹-۴ می‌یابیم که یک چشمه چقدر ممکن است بزرگ باشد و هنوز به مانند یک چشمه نقطه‌ای رفتار کند؛ این مطلب را برای چشمه‌ای که متشکل از قسمتهای تابش‌کننده مستقل است و آشکارسازی که بر روی فواصل زمانی بلند [در مقایسه با $(\Delta t)^{-1}$] میانگین می‌گیرد، بررسی خواهیم کرد. نتایج را می‌توان با آزمایش خانگی ساده‌ای (آزمایش خانگی ۹-۲۰)، تصدیق کرد. آزمایش خانگی دیگری (آزمایش خانگی ۹-۲۱) همدوسی آینه لئود را نشان می‌دهد.

در بخش ۹-۵ اثباتی نه خیلی دقیق ارائه می‌دهیم، از این نتیجه که باریکه‌ای با پهنای فضای D ، واگرایی زاویه‌ای ("پهنای") از مرتبه (λ/D) $\approx \theta$ را حول جهت اصلی انتشارش دارد. این نکته از راه ریاضی (با استفاده از نظریهٔ آنالیز فوریه) با این نکته که یک تپ با پهنای زمانی Δt دارای پهنای بسامد از مرتبه $(\Delta t)^{-1}$ است پیوند دارد.

در بخش ۹-۶ از روش ساخت هویگنس برای یافتن طرحهای تداخلی تک‌شکافی و چندشکافی استفاده خواهیم کرد. تأکید بر روی پدیده‌های اپتیکی و الکترومغناطیسی است. آزمایشهای خانگی متعددی که شامل توریهای پراش و طرحهای پراش گوناگون می‌شود، ارائه خواهد شد. برای این آزمایشها به دانشجو جداً توصیه می‌کنیم که یک "لامپ ویترون" تهیه کند - این لامپ دارای حباب شیشه‌ای شفاف و رشته‌ای مستقیم به درازای حدود ۷٫۶ سانتیمتر است (و به قیمتی نازل در بیشتر بقالیها و مغازه‌های ابزار و آلات فروشی یافت می‌شود). در بیشتر آزمایشها، از یک چنین لامپی به عنوان چشمه خطی استفاده می‌شود.

در بخش ۹-۷ آنچه را که به اپتیک "هندسی" موسوم است مطالعه خواهیم کرد. ابتدا قانون بازتاب آینه‌ای و قانون شکست نور اسنل را با استفاده از خواص موجی نور به دست می‌آوریم. سپس انواع مختلف آینه‌ها، منشورها و عدسیهای نازک را در نظر خواهیم گرفت.

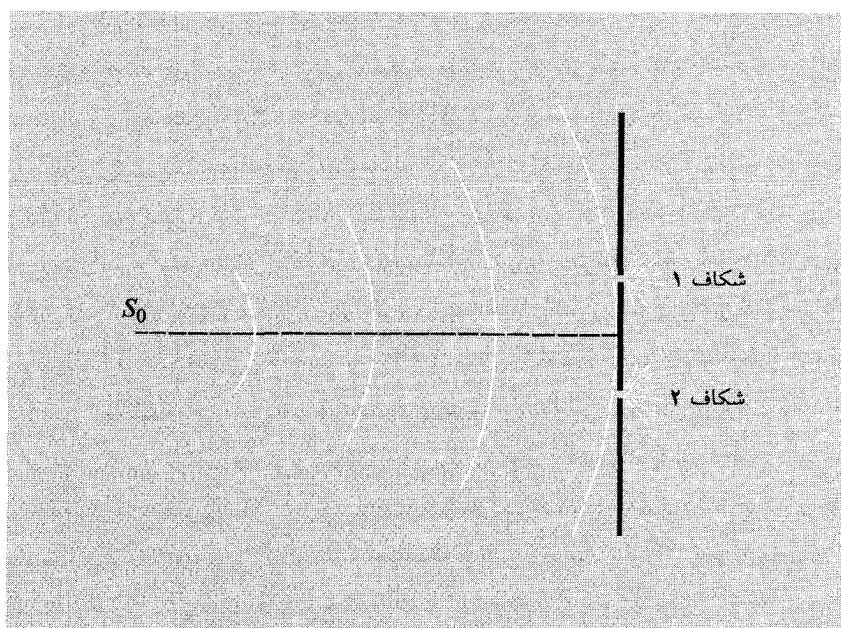
۹-۲ تداخل بین دو چشمه نقطه‌ای همدوس

چشمه‌های همدوس. ساده‌ترین وضعیتی که تداخل را دربر دارد حالتی است که دو چشمه نقطه‌ای یکسانی در دو مکان متفاوت امواج پیشروندهٔ هماهنگ را با بسامدهای یکسان به درون محیطی باز و همگن گسیل می‌کنند. اگر هر چشمه بسامدی کاملاً مشخص داشته باشد (به جای آنکه یک بسامد غالب و پهنای نوار بسامدی محدودی را دارا باشد)، در آن صورت فاز نسبی دو چشمه (یعنی اختلاف بین ثابتهای فاز آنها) با زمان تغییر نمی‌کند و دو چشمه نسبت به هم همدوس خوانده

می‌شوند، یا به‌طور ساده‌تر می‌گوییم دو چشمه همدوس هستند. (حتی اگر دو چشمه بسامدهای متفاوت داشته باشند هنوز هم "همدوس" هستند به‌شرطی که هر یک تکفام باشد، زیرا در این صورت فاز نسبی آنها همواره کاملاً مشخص است.) اگر هر دو چشمه دارای یک بسامد غالب باشند و هر کدام دارای پهنای بسامدی محدود $\Delta\nu$ باشد، آنگاه اگر دو چشمه "مستقل" باشند، فاز نسبی دو چشمه فقط در زمانی از مرتبه $^{-1}(\Delta\nu)$ ثابت باقی خواهد ماند. از طرف دیگر، این امکان وجود دارد که فازهای دو چشمه به‌خاطر اینکه هر دو به‌وسیله یک نیروی محرک مشترک تحریک می‌شوند، به یکدیگر "قفل" شده باشند. در این حالت، اگرچه ثابت فاز هر چشمه به طریقی غیر قابل کنترل در زمانی از مرتبه $^{-1}(\Delta\nu)$ به‌اندازه 2π تغییر می‌کند ($\Delta\nu$ پهنای بسامدی نیروی محرک مشترک است)، اما فاز نسبی آنها ثابت باقی می‌ماند. دو چشمه همدوس خوانده می‌شوند اگرچه تکفام نیستند. به‌عنوان مثالی از دو چشمه موج همدوس، دو میله را در نظر بگیرید که با سطح آبی در تماس هستند. اگر میله‌ها به‌طور یکسان در جهت قائم به نوسان درآیند، امواج کشش سطحی را بر روی آب به‌وجود می‌آورند. فاز نسبی میله‌ها به‌خاطر اینکه به‌وسیله چشمه مشترکی تحریک می‌شوند، ثابت است. به‌عنوان مثال دیگری از دو چشمه همدوس، دو آنتن رادیویی یکسان را که با فاز نسبی ثابت به‌وسیله یک نوسانگر تحریک می‌شوند، در نظر بگیرید. حتی اگر نوسانگر کاملاً تکفام نباشد، فاز نسبی جریانهای دو آنتن ثابت باقی می‌ماند. به‌عنوان مثالی از دو چشمه همدوس نور مرئی، دو روزنه کوچک یا دو شکاف موازی را در صفحه‌ای کدر که یک طرف آن در پرتو چشمه "نقطه‌ای" نور که از دور دست می‌آید قرار دارد، در نظر بگیرید. جریانهایی به‌وسیله میدان الکتریکی تابش الکترومغناطیسی (نور) گسیل شده از چشمه نقطه‌ای، در لبه‌های شکافها القا می‌شود. دو شکاف را در این حالت چشمه‌های همدوس نور می‌خوانیم. شکل ۹-۱ را ببینید.

در تمام این مثالها به "آشکارسازی" نیاز داریم که نسبت به امواج حساس باشند. در مورد امواج کشش سطحی در آب، می‌توانیم از قطعه کوچکی چوب‌پنبه که روی سطح آب شناور است و جابه‌جایی قائم آن قابل اندازه‌گیری است، استفاده کنیم. در مورد امواج رادیویی، می‌توانیم از آشکارسازی که شامل آنتن گیرنده، مدار الکتریکی با بسامد تشدید قابل تنظیم، و یک اسیلوسکوپ است استفاده کنیم. در مورد نور مرئی، می‌توانیم از چشمان خود یا صفحه عکاسی حساس، یا تکثیرکننده فوتونی که جریان خروجی‌اش را می‌توانیم اندازه بگیریم، استفاده کنیم. در هر صورت، آشکارساز موج کلی را که از برهم‌نهی دو موجی که هر کدام از یک چشمه می‌آید تشکیل شده است، دریافت می‌کند.

تداخل سازنده و میرا. در برخی مکانها که آشکارساز را قرار می‌دهیم، رسیدن قله موجی (یا دره موجی) که از یک چشمه به آنجا می‌رسد همیشه همزمان است با رسیدن قله موجی (یا



شکل ۹-۱ دو چشمه همدوس نور. جریانها در لبه‌های شکافهای ۱ و ۲ به وسیلهٔ امواجی که از چشمه نقطه‌ای S_0 گسیل می‌شوند تحریک می‌شوند. ثابت فاز S_0 ممکن است به تدریج یا ناگهانی تغییر کند، اما فاز نسبی جریانهای شکافها ثابت باقی می‌ماند.

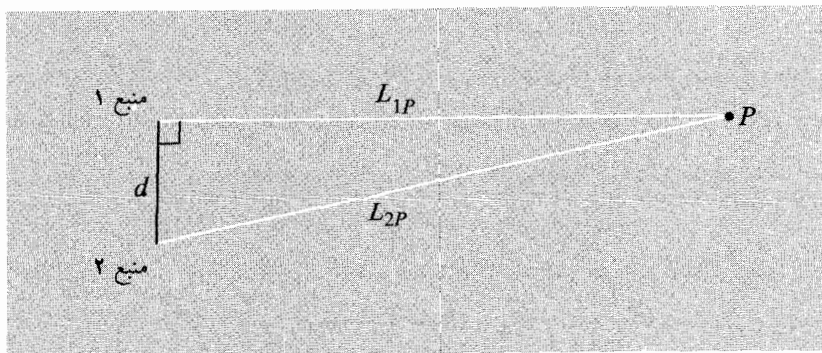
درهٔ موجی) که از چشمهٔ دیگر به آنجا می‌رسد. چنین مکانی ناحیهٔ تداخل سازنده یا یک بیشینهٔ تداخلی نامیده می‌شود. در مکانهای دیگری رسیدن قلهٔ موج از یک چشمه همیشه همزمان با رسیدن درهٔ موج از چشمهٔ دیگر است، و در این صورت ناحیهٔ تداخل میرا یا یک کمینهٔ تداخلی را داریم. از آنجایی که (طبق فرض اولیه) دو چشمه فاز نسبی ثابتی را حفظ می‌کنند، ناحیه‌ای که در یک زمان مشخص ناحیهٔ تداخل سازنده است، همیشه ناحیهٔ تداخل سازنده خواهد بود، به همین ترتیب ناحیهٔ تداخل میرا در یک زمان مشخص همیشه ناحیهٔ تداخل میرا باقی خواهد ماند.

طرح تداخلی. طرحی را که از نواحی مختلف بیشینه‌ها و کمینه‌های تداخلی حاصل می‌شود، یک طرح تداخلی نامند. اگرچه امواج، امواج پیشرونده هستند، طرح تداخلی به همان معنایی که در بالا ذکر شد، ساکن است. توجه داشته باشید که حتی اگر نوسانگری که دو آنتن را تحریک می‌کند خاموش شود و دوباره با ثابت فاز تازه‌ای روشن شود، فاز نسبی جریانهای آنتن بدون تغییر باقی خواهد ماند. به همین ترتیب اگر چشمه محرک نقطه‌ای دو شکاف، خاموش و روشن شود، جریانهای شکافها فاز نسبی ثابتی را حفظ خواهند کرد. بنابراین طرح تداخلی بدون تغییر می‌ماند.

از طرف دیگر، اگر مکان آشکارساز چنان تغییر کند که فاصله‌اش را از یک شکاف به میزانی متفاوت با تغییر فاصله‌اش از شکاف دیگر تغییر دهد، فاز نسبی جریانهای القاشده تغییر می‌کند و مکانهای بیشینه تداخلی و کمینه تداخلی تغییر خواهد کرد، به عبارت دیگر طرح تداخلی تغییر خواهد کرد. به همین ترتیب اگر مابین نوسانگر رادیویی و یکی از آنتنها، یک سیم تأخیری قرار دهیم که فاز نسبی جریانهای آنتن را تغییر دهد، در آن صورت طرح تداخلی تغییر خواهد کرد.

میدان نزدیک و میدان دور. در بیشتر مواردی که در نظر خواهیم گرفت، آشکارساز در فاصله‌ای از دو چشمه قرار دارد که در مقایسه با فاصله بین دو چشمه بزرگ است. در این صورت گفته می‌شود که آشکارساز در میدان دور چشمه‌ها قرار دارد. معمولاً میدان دور را در نظر می‌گیریم برای اینکه می‌توانیم تقریبهای هندسی را که کار را ساده می‌کنند به کار ببندیم. در این صورت، تا آنجایی که به اثر فاصله بر روی دامنه موج مربوط می‌شود، می‌توانیم دو چشمه یکسان را اساساً هم‌فاصله با آشکارساز بدانیم. در این حالت، هر چشمه، موج پیشرونده‌ای را که اساساً دارای همان دامنه موج چشمه دیگر است در تداخل شرکت می‌دهد (این به شرطی است که دو چشمه یکسان باشند).

در مکان مشخصی که آشکارساز واقع است (که اغلب آن را نقطه P میدان می‌نامند)، بستگی زمانی تابع موج کلی به وسیله برهم‌نهمش دو نوسان هماهنگی که دارای بسامدهای یکسان و دامنه‌های یکسان هستند، اما (در حالت کلی) ثابتهای فاز متفاوت دارند داده می‌شود. دو ثابت فاز (در یک نقطه مشخص میدان) به ثابتهای فاز دو چشمه نوسانی و به عده طول موجهایی که بین هر چشمه و نقطه میدان وجود دارد، جفت شده است. اگر فاصله نقطه میدان P به یکی از چشمه‌ها برابر با فاصله نقطه میدان تا چشمه دیگر باشد و یا اگر این دو فاصله به میزان ضریب صحیحی از طول موج اختلاف داشته باشند و اگر دو چشمه هم‌فاز نوسان کنند، آنگاه P در یک بیشینه تداخلی واقع است و دامنه نوسان هماهنگ آن دو برابر دامنه‌ای است که اگر یکی از دو چشمه به تنهایی وجود می‌داشت. (اگر دو چشمه با اختلاف فاز 180° نوسان کنند، P در گره تداخلی واقع است و دامنه‌اش صفر است.) اگر فاصله نقطه میدان P به یکی از چشمه‌ها به اندازه $\frac{1}{2}\lambda$ (به علاوه ضریب صحیحی از طول موج) بیشتر از فاصله چشمه دیگر تا نقطه میدان P باشد و اگر دو چشمه هم‌فاز نوسان کنند، آنگاه P در یک گره تداخلی واقع است و دامنه‌اش صفر است. تقریبی که می‌زنیم در این است که دامنه‌های امواجی که از دو چشمه می‌آیند را دقیقاً برابر در نظر می‌گیریم، با وجود اینکه در واقع دو چشمه دقیقاً در یک فاصله از نقطه میدان P نیستند و دامنه‌ها با فاصله افت می‌کند. بنابراین دامنه در کمینه تداخلی در حالت کلی دقیقاً صفر نیست. تقریب مهم ساده‌کننده دیگری که در میدان دور می‌توانیم به کار بندیم این است که جهت



شکل ۹-۲ میدان دور آشکارساز در نقطه P در میدان دور دو چشمه است به شرط آنکه L_{2P} به میزانی بسیار کمتر از یک طول موج، برای آرایه‌ای که نشان داده شده است، بیشتر از L_{1P} باشد.

چشمه ۱ تا نقطه میدان P را موازی با جهت چشمه ۲ تا نقطه میدان P در نظر می‌گیریم. از این تقریب هنگامی که طرح تداخلی دو چشمه نقطه‌ای را (در ذیل) حساب می‌کنیم استفاده خواهیم کرد. اینک قاعده تقریبی را ارائه می‌دهیم که در تصمیم‌گیری درباره اینکه آیا استفاده از تقریب میدان دور در یک حالت داده‌شده موجه است یا نه، سودمند است. نقطه میدان P را چنان در نظر می‌گیریم که جهت چشمه ۱ تا P عمود بر خطی که چشمه ۱ و چشمه ۲ را متصل کند باشد. (شکل ۹-۲ را ببینید). تقریب میدان دور موجه است به شرط آنکه بتوانیم جهت چشمه ۲ تا P را موازی با جهت چشمه ۱ تا P بگیریم. در این صورت می‌توان فرض کرد که فاز نسبی دو موجی که در P تداخل می‌کنند، اساساً همان فاز نسبی دو چشمه است (که در آرایه شکل ۹-۲ نشان داده شده‌اند). این تقریب اگر فاصله L_{2P} از چشمه ۲ تا P ، از فاصله L_{1P} به اندازه نصف طول موج (یا بیشتر) تجاوز کند، کاملاً از اعتبار می‌افتند، زیرا در آن صورت دو موجی که در P تداخل می‌کنند، هنگامی که دو چشمه هم‌فاز باشند، اختلاف فاز 180° درجه (یا بیشتر) دارند.

”مرز“ بین نزدیک و دور. بیایید یک جور ”فاصله مرزی“ نه‌چندان دقیق L_c را بین چشمه‌ها و نقطه میدان چنان تعریف کنیم که وقتی L_{1P} و L_{2P} در مقایسه با L_c بسیار بزرگ هستند، تقریب میدان دور معتبر باشد. بدین ترتیب L_c مرز تقریبی بین ناحیه میدان دور و ناحیه میدان نزدیک است. این فاصله مرزی L_c را طبعاً به اندازه L_{1P} چنان‌که L_{2P} از L_{1P} دقیقاً به اندازه نصف طول موج بیشتر باشد، انتخاب می‌کنیم. عبارتی تقریبی برای این مرز تقریبی به قرار زیر به دست می‌آوریم: برطبق شکل ۹-۲، (دقیقاً) داریم

$$L_{2P}^2 = L_{1P}^2 + d^2$$

$$L_{2P2} - L_{1P2} = (L_{2P} - L_{1P})(L_{2P} + L_{1P}) = d^2$$

اما برای حالتی که به آن علاقه‌مندیم، L_{1P} و L_{2P} تقریباً با یکدیگر برابرند و هر دو اساساً مساوی با L_0 هستند، چون L_{2P} به اندازه $\frac{1}{4}\lambda$ از L_{1P} بیشتر است:

$$d^2 = (L_{2P} - L_{1P})(L_{2P} + L_{1P}) \approx \left(\frac{1}{4}\lambda\right)(L_0 + L_0)$$

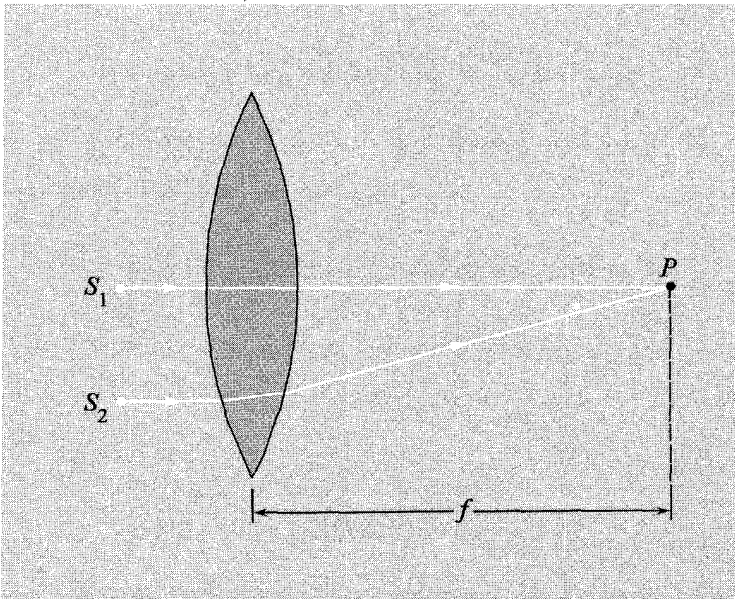
بنابراین به‌عنوان معیار تقریبی می‌توانیم بگوییم که تقریبهای میدان دور برای نقاط میدان P که فاصله‌ای بسیار زیادتر از L_0 تا چشمه‌ها دارند معتبر است، و L_0 چنان است که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\boxed{L_0 \lambda \approx d^2} \quad (1)$$

استفاده از یک عدسی همگرا برای به‌دست آوردن طرح تداخلی میدان دور. طرح تداخلی دوشکافی را برای نور مرئی به‌طور تجربی مطالعه خواهید کرد. (آزمایش خانگی ۹-۱۸ را ببینید.) دو چشمه هم‌دوس را برطبق شکل ۹-۱ به‌دست می‌آوریم. فاصله دوشکاف به‌طور معمول ۵ درجه میلی‌متر است. بیایید محاسبه کنیم که نقطهٔ میدان چقدر باید از شکافها دور باشد تا در میدان دور دوشکافی قرار گیرد. با استفاده از معادلهٔ (۱) با $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ و $d = \frac{1}{4} \text{ mm}$ ، L_0 را چنین به‌دست می‌آوریم

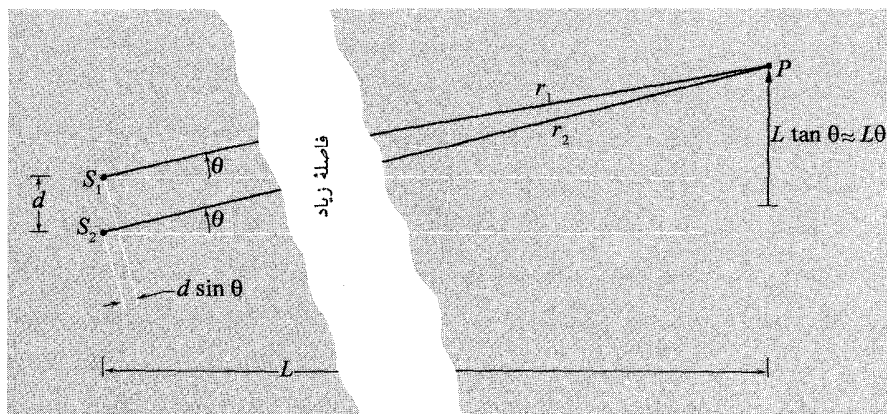
$$L_0 \approx \frac{d^2}{\lambda} = \frac{(0.5 \times 10^{-1} \text{ cm})^2}{5000 \times 10^{-8} \text{ cm}} = 50 \text{ cm}$$

بنابراین احتمالاً اگر در فاصلهٔ ۵ متری، $L_0 \approx 50 \text{ m}$ ، از شکافها باشیم در میدان دور قرار می‌گیریم. اینکه برای انجام آزمایش ۵ متر از دوشکافی فاصله بگیریم آسان نیست و لزومی هم ندارد؛ در اینجا روشی ارائه می‌دهیم که طرح میدان دور را با قراردادن دوشکافی درست در مقابل آشکارساز می‌توانیم به‌دست آوریم: آشکارساز چشم شماست، که اساساً از سطحی حساس به نور (شبکه) و یک عدسی تشکیل شده است. (عدسیها را در بخش ۹-۷ مطالعه خواهیم کرد.) فاصلهٔ کانونی عدسی چشم قابل تغییر است؛ این تغییر با تغییرات کشش ماهیچه‌هایی که آن را نگه می‌دارند انجام می‌پذیرد. هنگامی که به شیئی در دور دست نگاه می‌کنید، این ماهیچه‌ها طول طبیعی خود را (برای چشم کاملاً سالم) دارا هستند؛ شکل عدسی در این صورت چنان است که پرتوهایی که از چشمه نقطه‌ای واقع در دور دست به قسمتهای مختلف سطح عدسی برخورد می‌کنند بر روی شبکه



شکل ۳-۹ عدسی همگرا. پرتوهای موازی از دو چشمه ۱ و ۲، اگر این دو چشمه با ثابت فاز یکسان نوسان کنند، در نقطه P متمرکز خواهند شد. فاصله بین مرکز عدسی و نقطه تمرکز P را فاصله کانونی، f ، نامند. فرض آن است که ضخامت عدسی در مقایسه با f کوچک است.

”متمرکز“ می‌شوند. (اگر قدرت عدسی در شکست نور زیادتر از حد معمول یا کمتر از حد معمول باشد، پرتوها بر روی شبکه متمرکز نخواهند شد و جسم تار به نظر خواهد آمد.) از آنجایی که چشمه در دوردست واقع است، این پرتوها تقریباً موازی هستند. اما همین عدسی (به علاوه ماهیچه‌های نگه‌دارنده‌اش در حالت طبیعی) هر دسته پرتوهای موازی را بر روی شبکه متمرکز خواهد کرد، چه منشأ این پرتوها ”چشمه نقطه‌ای دوردست“ باشد، چه نباشد. عمل متمرکزکنندگی عدسی در شکل ۳-۹ نشان داده شده است. همان‌طور که در بخش ۷-۹ نشان خواهیم داد، اگرچه فاصله حقیقی چشمه ۱ تا P (در شکل ۳-۹) کمتر از فاصله چشمه ۲ تا P است، تعداد طول موجها یکسان است. این ممکن است زیرا مسیر S_1 تا P قسمت بیشتری را در عدسی دارد و طول موج در داخل عدسی کوتاه‌تر از طول موج در هواست. نقطه P ”به‌طور مؤثر“ بینهایت دور است، به این معنی که پرتوهای موازی نشان داده شده که از چشمه‌های ۱ و ۲ می‌آیند، پس از پیمودن تعداد طول موجهای یکسان، به نقطه P که آشکارساز در آن واقع است می‌رسند. بنابراین نقطه P در یک بیشینه تداخلی قرار دارد (با این فرض که دو چشمه ۱ و ۲ هم‌فاز نوسان می‌کنند)، درست همان‌طور که اگر تمام فضا دارای ضریب شکست یکسان می‌بود و P بینهایت دور در طرف راست واقع بود می‌داشتیم.



شکل ۹-۴ دو چشمه نقطه‌ای که امواجی گسیل می‌کنند که در نقطه میدان P که در دوردست واقع است، به آشکارساز می‌رسند.

از حالا به بعد فرض می‌کنیم که P در میدان دور دو چشمه ۱ و ۲ واقع است، یا به این دلیل که P در واقع بسیار دور از دو چشمه است و یا چون از یک عدسی استفاده کرده‌ایم و P "به‌طور مؤثر" بسیار دور از چشمه‌ها قرار دارد.

طرح تداخلی میدان دور. در شکل ۹-۴ دو چشمه نقطه‌ای را نشان داده‌ایم که امواج الکترومغناطیسی گسیل می‌کنند و این امواج در نقطه میدان P که در دوردست واقع است به آشکارساز می‌رسند. طرح تداخلی را فقط در صفحه‌ای که دو چشمه و نقطه میدان P را در بر دارد در نظر می‌گیریم. نتایج را در حالتی که دو چشمه "خطی" (که در مورد نور، از شکاف تشکیل می‌شوند)، و یا دو آنتن رادیو و یا امواج سطح آب نیز می‌توان به‌کار بست.

بیشینه اصلی. هنگامی که فواصل r_1 و r_2 از دو چشمه ۱ و ۲ تا نقطه میدان P در مقایسه با فاصله دو چشمه d بسیار زیاد است، پرتوها از دو چشمه به نقطه P تقریباً موازی هستند و نسبت به محور z که در شکل نشان داده شده است، هر دو پرتو اساساً زاویه θ را می‌سازند. در آن صورت، اختلاف مسیر $r_2 - r_1$ اساساً برابر با $d \sin \theta$ است. بنابراین، اگر دو چشمه هم‌فاز نوسان کنند، هنگامی که $d \sin \theta = 0, \pm \lambda, \pm 2\lambda, \dots$ در ناحیه تداخل سازنده قرار می‌گیرد. بیشینه تداخلی در $\theta = 0$ ، بیشینه اصلی یا بیشینه مرتبه صفر نامیده می‌شود. اولین بیشینه در طرفین بیشینه اصلی، جایی که $d \sin \theta = \pm \lambda$ ، بیشینه مرتبه اول خوانده می‌شود، و به همین ترتیب برای بقیه. نواحی تداخل میرا جایی که کل موج همیشه صفر است، گره نامیده

می‌شوند. این نواحی در زوایایی واقع‌اند که اختلاف مسیر $d \sin \theta$ برابر با $\pm \frac{1}{2} \lambda$ ، $\pm \frac{3}{2} \lambda$ و غیره باشد.

اینک عبارتی برای میدان الکتریکی کل در نقطه P به دست می‌آوریم، فرض بر آن است که هر دو چشمه "حرکت" هماهنگ یکسانی دارند، فقط ممکن است ثابتهای فاز یکسان نداشته باشند. از دوبار نقطه‌ای نوسان‌کننده به عنوان تصویر ذهنی دو چشمه، استفاده خواهیم کرد. یک مؤلفه قطبیدگی را فقط در نظر می‌گیریم، این مؤلفه را می‌توانیم در یکی از دو جهت مستقل عمود بر خطی که دو چشمه را به P متصل می‌کند فرض کنیم. لزومی ندارد که قطبیدگی را مشخص کنیم زیرا نتایجی که به دست می‌آیند مستقل از هر کدام از قطبیدگیها هستند (این نتایج مستقل از هر قطبیدگی دیگر نیز هستند، مثلاً قطبیدگی دایره‌ای چپگرد یا راستگرد). با این حال، برای اینکه صحبت مشخصی داشته باشیم، قطبیدگی خطی را با مؤلفه‌اش در امتداد \hat{y} در نظر می‌گیریم؛ \hat{y} عمود بر صفحه شکل ۹-۴ است. بدین ترتیب، حرکت بارهای نقطه‌ای ۱ و ۲ دارای مؤلفه‌های y هستند

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y_2(t) &= y_0 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (2)$$

نقطه میدان P در زاویه θ که در شکل ۹-۴ نشان داده شده است و در فاصله r واقع است؛ r را میانگین r_1 و r_2 می‌گیریم (یعنی مبدأ مختصات را وسط خطی که دو چشمه را به هم متصل می‌کند می‌گیریم). میدان تابشی $E_1(t)$ در نقطه میدان P که ناشی از حرکت تأخیری در زمانی زودتر، $y_1(t_1)$ ، است با رابطه زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} E_1(t) &= -\frac{q\ddot{y}_1(t_1)}{r_1 c^2} \\ &= \frac{\omega^2 q y_0 \cos(\omega t_1' + \varphi_1)}{r_1 c^2} \end{aligned} \quad (3)$$

میدان تابشی $E_2(t)$ ناشی از $y_2(t_2')$ با عبارت مشابهی داده می‌شود. در تقریب میدان دور، هر دوی r_1 و r_2 اساساً برابر با میانگین فاصله، r ، هستند:

$$r \equiv \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \quad (4)$$

$$E_1(t) = A(r) \cos(\omega t_1' + \varphi_1) \quad (5)$$

$$E_2(t) = A(r) \cos(\omega t_2' + \varphi_2)$$

$$A(r) \equiv \frac{\omega^2 q y_0}{r c^2} \quad (6)$$

تابشی را در نظر بگیرید که در زمانهای t'_1 و t'_2 گسیل می‌شود و در زمان بعدی t به آشکارساز می‌رسد؛ t'_1 و t'_2 از روابط زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} \omega t'_1 &= \omega \left(t - \frac{r_1}{c} \right) = \omega t - k r_1 \\ \omega t'_2 &= \omega \left(t - \frac{r_2}{c} \right) = \omega t - k r_2 \end{aligned} \quad (7)$$

فاز نسبی ناشی از اختلاف مسیر. از آنجایی که اختلاف مسیر $r_2 - r_1$ به زاویه θ بستگی دارد، فاز نسبی دو موج در P به θ جفت شده است. درست همین تغییر فاز نسبی با زاویه است که به طرح تداخلی منتج می‌شود. این فاز نسبی ناشی از اختلاف مسیر مهم است، به همین خاطر آن را $\Delta\varphi$ می‌نامیم

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \omega t'_1 - \omega t'_2 \\ &= k(r_2 - r_1) \\ &= k(d \sin \theta) \\ &= 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda} \end{aligned} \quad (8)$$

در عبارات فوق $d \sin \theta$ اختلاف مسیر مطابق با شکل ۹-۴ است. همه سطرهای معادله (۸) از نظر ریاضی با یکدیگر معادل هستند، اما به تصاویر ذهنی متفاوتی مربوط می‌شوند، هر یک از این تصاویر ذهنی را باید جداگانه آموخت. بدین ترتیب، در سطر اول، زمانهای گسیل متفاوت را در نظر داریم؛ در سطر آخر این موضوع را در خاطر داریم که اختلاف فاز برابر با 2π ضربدر تعداد طول موجهای موجود در اختلاف مسیر است؛ در سطرهای دوم و سوم تعداد رادیانهای فاز بر واحد طول (عدد موج k) ضربدر اختلاف مسیر مدنظر هستند. البته، علاوه بر $\Delta\varphi$ که با معادله (۸) داده می‌شود، اختلاف فاز نوسانهای دو چشمه، $\varphi_1 - \varphi_2$ ، را نیز داریم.

میدان کل E در P برهم‌نهی E_1 و E_2 است:

$$\begin{aligned} E(r, \theta, t) &= E_1 + E_2 \\ &= A(r) \cos(\omega t'_1 + \varphi_1) + A(r) \cos(\omega t'_2 + \varphi_2) \\ &= A(r) \cos(\omega t + \varphi_1 - k r_1) + A(r) \cos(\omega t + \varphi_2 - k r_2) \end{aligned} \quad (9)$$

موج پیشرونده "میانگین". به جای اینکه E را به صورت برهم‌نهی دو موج پیشرونده کروی که از چشمه‌های ۱ و ۲ خارج می‌شوند، در نظر بگیریم، می‌توانیم آن را به صورت یک موج کروی "میانگین" که دامنه‌اش با تابعی جفت شده به جهت انتشار θ مدوله می‌شود و با ثابت فازی که میانگین ثابتهای فاز دو چشمه، φ_1 و φ_2 است، در نظر بگیریم. برای نشان دادن این مطلب از اتحادهای مثلثاتی استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned}\cos a + \cos b &= \cos \left[\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b) \right] + \cos \left[\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b) \right] \\ &= 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)\end{aligned}$$

که در آن

$$a = \omega t + \varphi_1 - kr_1$$

$$b = \omega t + \varphi_2 - kr_2$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a+b) &= \omega t + \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) - k \cdot \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \\ &= \omega t + \varphi_{\text{میانگین}} - kr\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a-b) &= \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{1}{2}k(r_1 - r_2) \\ &= \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi\end{aligned}\quad (11)$$

بدین ترتیب، معادله (۹) به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned}E(r, \theta, t) &= \left\{ 2A(r) \cos \left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi \right] \right\} \cos(\omega t + \varphi_{\text{میانگین}} - kr) \\ &= A(r, \theta) \cos(\omega t + \varphi t + \varphi_{\text{میانگین}} - kr)\end{aligned}\quad (12)$$

که در آن، دامنه $A(r, \theta)$ بدین قرار است

$$\begin{aligned}A(r, \theta) &= 2A(r) \cos \left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi \right] \\ \Delta\varphi &= k(r_2 - r_1) = 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda}\end{aligned}\quad (13)$$

شار فوتونی. شار فوتونی در نقطهٔ میدان P متناسب با میانگین زمانی شار انرژی، $\langle S \rangle$ ، است. اگر فقط یک مؤلفهٔ قطبیدگی، آن هم مانند قبل در امتداد \hat{y} ، داشته باشیم، شار انرژی چنین داده می‌شود

$$\langle S \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E}^2 \rangle \quad (14)$$

که در آن

$$\mathbf{E} = \hat{y}E(r, \theta, t) \quad (15)$$

بدین ترتیب

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}^2 \rangle &= \langle [A(r, \theta) \cos(\omega t + \varphi_{\text{میانگین}} - kr)]^2 \rangle \\ &= \frac{1}{T} A^2(r, \theta) \end{aligned} \quad (16)$$

که در آن

$$A^2(r, \theta) = \left\{ 2A(r) \cos \left[\frac{1}{r}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{r}\Delta\varphi \right] \right\}^2 \quad (17)$$

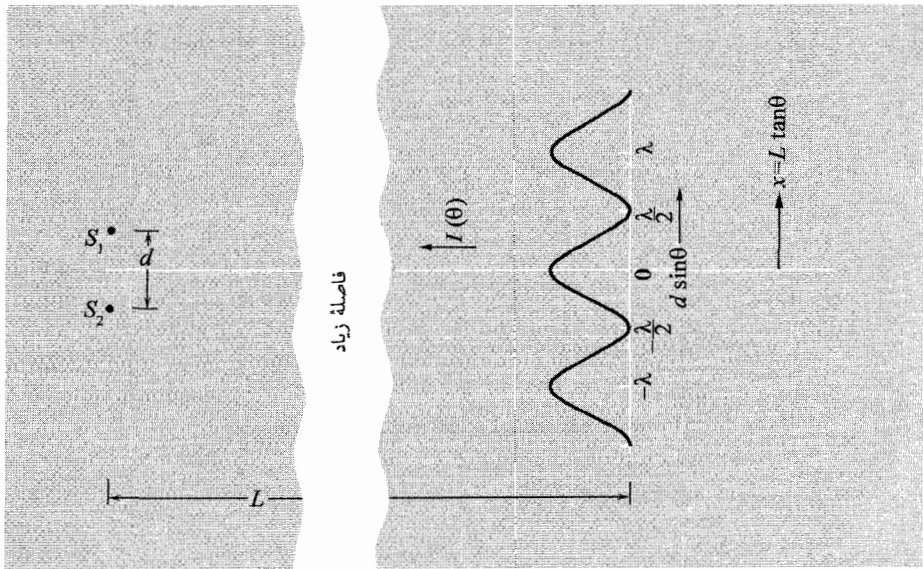
طرح تداخلی دوشکافی. بیایید r را ثابت نگه داریم و به تغییرات شار فوتونی با زاویهٔ θ نگاه کنیم. برطبق معادلات (۱۴) تا (۱۷)، داریم [شار فوتونی را $I(\theta)$ می‌نامیم]

$$I(\theta) = I_{\text{بیشینه}} \cos^2 \left[\frac{1}{r}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{r}\Delta\varphi \right] \quad (18)$$

برطبق معادلهٔ (۱۸)، شدت با مربع کسینوس نصف فاز نسبی تغییر می‌کند، و فاز نسبی هم ناشی از چشمه‌های نوسانی و هم به خاطر بستگی اختلاف مسیر به زاویه است. دو چشمه که هم‌فاز نوسان می‌کنند. اگر φ_1 و φ_2 برابر باشند، بستگی زاویه‌ای طرح دوشکافی (یا دو چشمه نقطه‌ای) چنین است

$$\begin{aligned} I(\theta) &= I_{\text{بیشینه}} \cos^2 \frac{1}{r} \Delta\varphi \\ &= I_{\text{بیشینه}} \cos^2 \left[\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

در شکل ۵-۹ این توزیع زاویه‌ای را در ناحیهٔ نزدیک $\theta = 0^\circ$ ، با این فرض که فاصلهٔ دو چشمه از یکدیگر چندین طول موج است ($d \gg \lambda$)، رسم کرده‌ایم. با این فرض درحالی‌که θ هنوز نسبتاً



شکل ۵-۹ شدت برهم‌نهی از دو چشمه که هم‌فاز نوسان می‌کنند. فاصله d نسبت به λ بزرگ است.

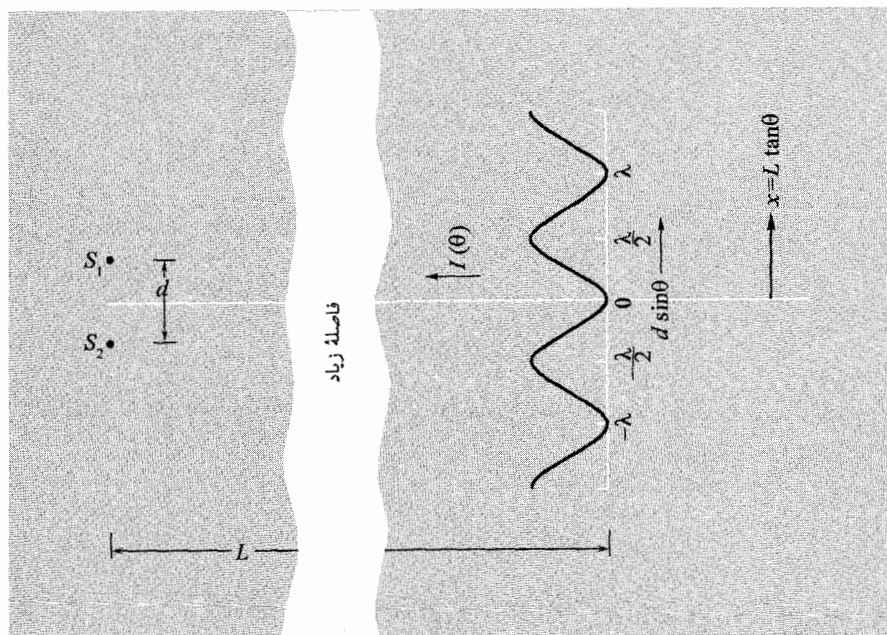
کوچک است، $I(\theta)$ چندین بیشینه و کمینه را می‌گذراند. این مشاهده باعث می‌شود تا بتوانیم شکلی رسم کنیم که در آن، در همان ناحیه کوچک (نزدیک $\theta = 0^\circ$)، چندین بیشینه و کمینه نشان داده شوند.

دو چشمه که خارج از فاز نوسان می‌کنند. اگر φ_1 و φ_2 دارای اختلاف فاز $\pm\pi$ باشند، نصف اختلاف فاز آنها $\pm\frac{1}{2}\pi$ است و معادله (۱۸) چنین نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} I(\theta) &= I_{\text{بیشینه}} \sin^2 \frac{1}{2} \Delta\varphi \\ &= I_{\text{بیشینه}} \sin^2 \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \end{aligned} \quad (20)$$

در شکل ۶-۹ معادله (۲۰) را نزدیک $\theta = 0^\circ$ برای حالتی که در آن d برابر با چندین طول موج است رسم کرده‌ایم، تا چندین بیشینه $I(\theta)$ نزدیک $\theta = 0^\circ$ رخ دهند.

طرح تداخلی نزدیک $\theta = 0^\circ$. هنگامی که با یک دوشکافی به یک چشمه خطی نور نگاه می‌کنید، معمولاً نمی‌توانید مکان دقیق $\theta = 0^\circ$ را تمیز دهید. بنابراین شکل‌های ۵-۹ و ۶-۹ بیشتر از آنچه معمولاً در دسترس است (لااقل در آزمایش‌های خانگی)، اطلاعات در بر دارند. آنچه مهم است فاصله زاویه‌ای بین بیشینه‌های متوالی و یا فاصله طولی مربوط به آن بر روی صفحه



شکل ۹-۶ شدت برهم‌نهی از دو چشمه که 18° درجه خارج از فاز نوسان می‌کنند.

آشکارساز (که مثلاً ممکن است شبکیه چشم شما باشد) است. بیشینه‌های متوالی در شکل‌های ۹-۵ و ۹-۶ به افزایش اختلاف مسیر به میزان یک طول موج مربوط می‌شوند، یعنی به افزایش $d \sin \theta$ به اندازه λ . وقتی θ نزدیک 0° درجه است، از تقریب زاویه کوچک، $\sin \theta \approx \theta$ می‌توانیم استفاده کنیم. بدین ترتیب، فاصله زاویه‌ای بین بیشینه‌های متوالی λ/d رادیان است. این فاصله زاویه‌ای را θ_0 می‌نامیم:

$$\theta_0 \approx \frac{\lambda}{d} \quad (21)$$

فاصله طولی بین بیشینه‌های متوالی را x_0 نام می‌گذاریم. برطبق شکل ۹-۵ یا ۹-۶، وقتی θ نزدیک صفر درجه است، x_0 برابر با فاصله L ضربدر θ_0 است:

$$x_0 \approx L\theta_0 \approx \frac{L\lambda}{d} \quad (22)$$

پایستگی انرژی. اگر چشمه ۲ خاموش شود، میدان الکتریکی در P فقط به وسیله چشمه ۱ ایجاد می‌شود:

$$E = E_1 = A(r) \cos(\omega t + \varphi_1 - kr_1) \quad (23)$$

بنابراین شار فوتونی متناسب با

$$\begin{aligned}\langle E_1^2 \rangle &= A^2(r) \langle \cos^2(\omega t + \varphi_1 - kr_1) \rangle \\ &= \frac{1}{2} A^2(r)\end{aligned}\quad (24)$$

می‌شود، که مستقل از θ است. به همین صورت، اگر فقط چشمه ۲ روشن شود، شار فوتونی متناسب با عبارت زیر است

$$\langle E_2^2 \rangle = \frac{1}{2} A^2(r) \quad (25)$$

هنگامی که هر دو چشمه روشن هستند، شار فوتونی (با همان ضریب تناسب قبلی) متناسب با

$$\begin{aligned}\langle E^2 \rangle &= \langle (E_1 + E_2)^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} A^2(r, \theta) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ 2A(r) \cos \left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi \right] \right\}^2 \\ &= A^2(r) \cdot 2 \cos^2 \left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi \right]\end{aligned}$$

است. با استفاده از معادلات (۲۴) و (۲۵)، عبارت فوق را چنین می‌نویسیم

$$\langle E^2 \rangle = [\langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle] 2 \cos^2 \left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi \right] \quad (26)$$

که در آن

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda} \quad (27)$$

بنابراین شار انرژی هنگامی که هر دو چشمه روشن هستند از حاصلضرب عبارتی که مدوله‌شدن زاویه‌ای دربر دارد، $2 \cos^2 \left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\Delta\varphi \right]$ ، و مجموع شارهایی که هریک مربوط به حالتی است که فقط یکی از دو چشمه به تنهایی روشن است، به دست می‌آید. اگر چندین بیشینه و کمینه بین $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 360^\circ$ موجود باشد، عبارت مدوله‌شدن زاویه‌ای به همان اندازه که مقدار صفر را اختیار می‌کند مقدار $2r^\circ$ را نیز اختیار می‌کند؛ میانگین این عبارت یک می‌شود. برای ایجاد چندین بیشینه و کمینه، دو چشمه می‌باید چندین طول موج از یکدیگر فاصله داشته باشند. پس می‌بینیم که کل انرژی گسیل شده (در صفحه‌ی شکلهایی که نشان داده‌ایم) صرفاً مجموع سهم چشمه‌هاست اگر هریک به تنهایی کار می‌کرده است، به شرط آنکه دو چشمه چندین طول موج از هم فاصله داشته باشند. این به نظر معقول می‌آید.

یک به علاوه یک مساوی با چهار است. اما، حالتی را در نظر بگیرید که دو چشمه خیلی به یکدیگر نزدیک هستند. فرض کنید آنها در فاصله d از یکدیگر هستند و d بسیار کوچکتر از یک طول موج است. اگر دو چشمه همفاز باشند، معادله‌های (۲۶) و (۲۷) به معادله زیر می‌انجامند

$$\langle E^2 \rangle \approx 2[\langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle] \quad (28)$$

بنابراین، به جای آنکه مقدار انرژی برابر با مجموع سهم چشمه‌ها اگر هریک به تنهایی کار کند، باشد، دو برابر مقدار را به دست می‌آوریم. این ممکن است عجیب به نظر آید. آیا این قانون پایستگی انرژی را نقض نمی‌کند؟ خیر. نتیجه‌ای که غیرمستقیم گرفته می‌شود این است که در مقایسه با هنگامی که هر چشمه به تنهایی روشن است، وقتی دو چشمه بر روی هم قرار دارند (و همفاز نوسان می‌کنند) انرژی گسیل شده توسط هریک دو برابر است. چطور چنین چیزی امکان دارد؟ معادله (۲)، دستورالعملی است که حرکت (نوسانی) هر چشمه را مستقل از فاصله دو چشمه، d ، به دست می‌دهد. دو برابر شدن انرژی خروجی نه به این خاطر است که حرکت هر چشمه تغییر می‌کند، بلکه از آنجاست که امیدانسی که هر چشمه با آن مواجه می‌شود دو برابر شده است! چرا چنین است؟ به این دلیل که نیروی مقاوم بازدارنده‌ای که توسط میدان تابشی (مثلاً در آنتن رادیو) بر روی الکترونهای یک آنتن وارد می‌شود، فقط ناشی از میدانی که آن آنتن گسیل می‌کند نیست؛ بلکه از این نیرو به علاوه نیروی ناشی از میدانی که آنتن دیگر گسیل می‌کند، تشکیل می‌شود. چون که (طبق فرض) جریانها همفاز هستند، و از آنجایی که آنتنها خیلی به هم نزدیک هستند، برآیند نیروی مقاوم بازدارنده‌ای که بر روی الکترونهای یک آنتن وارد می‌آید دو برابر هنگامی است که آنتن دیگر خاموش است. بنابراین چشمه نیرو برای حفظ سرعت پیش‌بینی شده می‌باید دو برابر کار کند. از آنجایی که این مطلب برای هریک از آنتنها صدق می‌کند، دلیل اینکه انرژی کل گسیل شده دو برابر می‌شود را به دست آوردیم.

یک به علاوه یک مساوی با صفر است. اگر دو چشمه 180° درجه خارج از فاز نوسان کنند و اگر یکی از آنتنها را تقریباً بر روی آنتن دیگر قرار دهید، دامنه موج کل تقریباً صفر خواهد بود. برطبق معادله (۲۰)، در حالت حدی که آنتنها بر روی یکدیگر قرار دارند، خروجی برابر صفر است. چشمه نیرو کاری انجام نمی‌دهد و انرژی تابش نمی‌شود. میدان گسیل شده از یک آنتن چنان بر روی الکترونهای آنتن دیگر کار انجام می‌دهد که به نوسانگر کمک می‌کند. در حالت حدی که فاصله دو آنتن صفر است، الکترونهای دو آنتن بدون اینکه کمکی از نوسانگر بگیرند، یکدیگر را تحریک می‌کنند. بنابراین سیستمی "بسته" داریم و انرژی از یک آنتن به آنتن

دیگر می‌رود و دوباره به آن باز می‌گردد. بدین ترتیب آنتنها قسمتی از مدار تشدید نوسانگر را تشکیل می‌دهند، و چشمه نیرو فقط لازم است تا انرژی از دست رفته به خاطر مقاومت آنتنها را جبران کند. مقاومت تابشی — که امیدانس مشخصه را تشکیل می‌دهد — به صفر میل کرده است.

۳-۹ تداخل بین دو چشمه مستقل

چشمه‌های مستقل و زمان همدوسی. فرض کنید که بسامد زاویه‌ای اصلی هریک از دو چشمه ω باشد و پهنای نوار بسامدی هر چشمه $\Delta\omega$ باشد. به علاوه، فرض کنید که دو چشمه مستقل باشند. به عبارت دیگر، دو چشمه به وسیله یک نیروی محرک مشترک تحریک نشده باشند. در این صورت، هیچ چیز نیست که آنها را دقیقاً همفاز نگه دارد. در مورد دو آنتن رادیو، این به آن معنی است که هر آنتن به وسیله نوسانگر و چشمه نیروی جداگانه تحریک می‌شود. در مورد چشمه‌های نور مرئی، این به آن معنی است که چشمه‌های مستقلی داریم و اتمهایی که در یکی سهم دارند از اتمهای دیگری جدا هستند. مثلاً یک لامپ بخار جیوه که از تخلیه الکتریکی در درون لوله‌ای شیشه‌ای تشکیل می‌شود را که دارای روکش تیره با دو روزنه یا شکاف کوچک است، در نظر بگیرید. هر روزنه به طور جداگانه در معرض تابش اتمهای متفاوت گاز است. و یا می‌توانیم دو روزنه یا شکاف در تکه‌ای جسم کدر که در مقابل لامپ معمولی قرار گرفته است، داشته باشیم. (برای اینکه پهنای نوار بسامدی را به طور قابل قبولی کوچک کنیم، می‌توانیم صافی قرمز ژلاتینی بر روی شکافها قرار دهیم.)

فرض می‌کنیم که پهنای نوار بسامدی $\Delta\nu$ در مقایسه با بسامد اصلی ν کوچک باشد. پس نوسانهای متعددی با بسامد ν در فاصله زمانی $(\Delta\nu)^{-1}$ رخ می‌دهد. فاصله زمانی $(\Delta\nu)^{-1}$ ، زمان همدوسی، $t_{\text{همدوسی}}$ است؛ این زمانی است که لازم است تا بسامدهای فرین پهنای نوار بسامدی اختلاف فاز تقریباً 2π با یکدیگر پیدا کنند. بنابراین اگر $t_{\text{همدوسی}}$ را با رابطه

$$\Delta\omega t_{\text{همدوسی}} \approx 2\pi \quad (29)$$

تعریف کنیم، می‌بینیم که $t_{\text{همدوسی}}$ برابر با $2\pi/\Delta\omega$ است؛ یعنی $t_{\text{همدوسی}}$ مساوی با $(\Delta\nu)^{-1}$ است. برای فواصل زمانی کوتاهتر از $(\Delta\nu)^{-1}$ ، فاز نسبی دو چشمه را می‌توان اساساً ثابت اختیار کرد. (در این فاصله زمانی، ممکن است نوسانهای متعددی رخ دهد، زیرا $(\Delta\nu)^{-1}$ ، ν بزرگ فرض شده است.)

“ناهمدوسی” و تداخل. بیایید فقط حالتی را در نظر بگیریم که جدایی d بین دو چشمه در مقایسه با طول موج λ بزرگ باشد. در این صورت، طرح تداخلی در زمانهایی که فاز نسبی دو چشمه از فضا صفر است، طرح تداخلی به مانند شکل ۵-۹ است. در زمانهایی که فاز نسبی 180° درجه است، به مانند شکل ۶-۹ است. برای فاز نسبی که بین صفر و 180° درجه است، طرح تداخلی مابین دو طرح تداخلی شکلهای ۵-۹ و ۶-۹ قرار می‌گیرد.

اگر آشکارساز چنان باشد که به زمان زیادی برای ثبت شدت در یک نقطه مشخص نیازمند باشد، مثلاً چشم (که تفکیک‌پذیری زمانی‌اش در حدود $1/20$ ثانیه است)، در آن صورت نمودار میانگین زمانی شدت برحسب θ ، هیچ‌گونه بستگی به θ را نشان نمی‌دهد، زیرا در طول زمانی که در مقایسه با $(\Delta\nu)^{-1}$ زیاد است، طرح تداخلی تمام حالات مابین دو حالت فرین شکلهای ۵-۹ و ۶-۹ را اختیار می‌کند و هر مقدار $d \sin \theta$ همان میانگین زمانی شدت را دارا خواهد شد. در این صورت دو چشمه نقطه‌ای “ناهمدوس” خوانده می‌شوند. میانگین زمانی شار انرژی (شار فوتونی)، بدین ترتیب، برابر با مجموع شارهای انرژی است که هر چشمه به تنهایی از خود نشان می‌دهد. طرح تداخلی “گمرنگ” می‌شود. زیرا زمانی که در حین اندازه‌گیری بر روی آن میانگین گرفته می‌شود بیش از حد زیاد است. این نکته را با رابطه جبری می‌توان چنین بیان کرد. توجه کنید که از معادله (۲۶) بخش ۲-۹ داریم $\langle E^2 \rangle \approx \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle$ که مستقل از θ است، به شرطی که فاز نسبی $\varphi_1 - \varphi_2$ تمام مقادیر ممکن از صفر تا 2π را اختیار کند و در هر فاصله کوچک فاز نسبی، تقریباً زمان یکسانی را به‌سربرد. مستقل بودن θ از رابطه زیر حاصل می‌شود

$$\langle \cos^2 \left[\frac{1}{4} (\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{4} \Delta\varphi \right] \rangle = \frac{1}{4} \quad (30)$$

که در آن $\Delta\varphi$ ثابت است و $\varphi_1 - \varphi_2$ به‌طور یکنواخت از صفر تا 2π توزیع شده است. واضح است که چشمه‌هایی که به‌طور “ذاتی” ناهمدوس باشند وجود ندارند. “ناهمدوسی” صرفاً نتیجه فرایند اندازه‌گیری است که اطلاعاتی را که در طرح تداخلی وجود دارد به دور می‌ریزد، مگر آنکه این فن‌آوری موجود باشد تا در زمانی قابل مقایسه با و یا کوتاهتر از $(\Delta\nu)^{-1}$ به طرح تداخلی نگاه کرد. برای نور مرئی، زمانهای همدوسی از مرتبه 10^{-9} تا 10^{-8} ثانیه است (این برای چشمه‌ای است که از اتمهای مستقل تابنده که در لامپ تخلیه الکتریکی قرار دارند، تشکیل شده باشد). بدین ترتیب اندازه‌گیری طرح تداخلی برای نور مرئی قبل از آنکه طرح تداخلی تغییر کند، مستلزم آزمایشی پرنبوغ

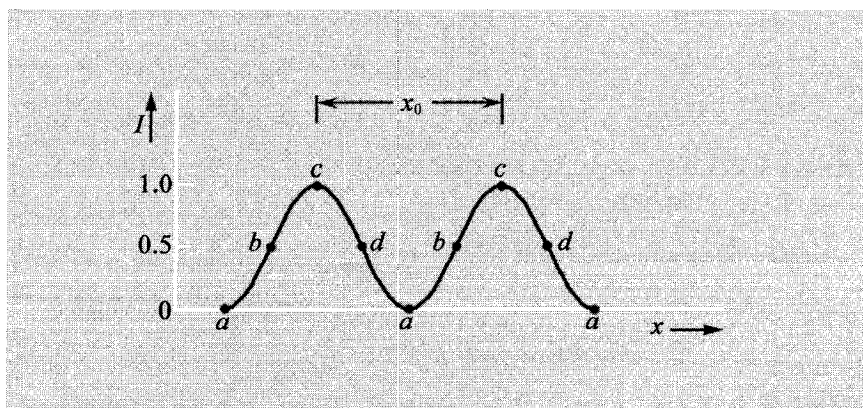
است. با این وجود، این کار در آزمایش بسیار زیبایی توسط ر. براون و ر. توییس انجام گرفته است.^۱ آزمایش براون و توییس. روشی که توسط آن براون و توییس در زمانی کمتر از 10^{-8} ثانیه به طور مؤثر طرح تداخلی را "خواندند"، بدین قرار است: از دو تکثیرکننده فوتونی در مقادیر مختلف x (طبق تعریف شکل‌های ۵-۹ و ۶-۹) و با فاصله متغیر بین این دو $x_1 - x_2$ ، استفاده می‌شود. جریان خروجی یکی از تکثیرکننده‌ها I_1 ، در جریان خروجی تکثیرکننده دیگر، I_2 ، ضرب می‌شود؛ این کار در یک مدار الکتریکی سریع که می‌تواند افت و خیزهای جریانی را که در زمانی از مرتبه 10^{-8} ثانیه رخ می‌دهند، انجام می‌شود. (به عبارت دیگر، مدار الکتریکی سریع دارای پهنای نوار بسامدی 10^8 MHz است.) حاصلضرب، $I_1 I_2$ ، "آنی" مشخص می‌شود، یعنی در فاصله زمانی از مرتبه 10^{-8} ثانیه، اما بعد از آن، میانگین این حاصلضرب، $I_1 I_2$ ، بر روی فاصله زمانی بلندی، حدود چند دقیقه، گرفته می‌شود. فاصله $x_1 - x_2$ دو تکثیرکننده فوتونی تغییر داده می‌شود و میانگین زمانی حاصلضرب جریانه‌ها در هر یک از این وضعیتهای گرفته می‌شود. دست آخر، نمودار میانگین زمانی این حاصلضرب برحسب $x_1 - x_2$ رسم می‌شود. البته، جریان لحظه‌ای در هر تکثیرکننده فوتونی با شار انرژی نور، یعنی $I(\theta)$ در مکان آن تکثیرکننده فوتونی متناسب است. ابتدا حالتی را در نظر بگیریم که فاصله $x_1 - x_2$ صفر باشد تا تکثیرکننده‌های فوتونی در معرض شار نوری لحظه‌ای یکسانی باشند. فرض بگیریم که $I(\theta)$ فقط چهار مقداری را که در شکل ۷-۹ با a, b, c, d نشان داده شده‌اند اختیار کند. جریانه‌های مربوط به این چهار مقدار را با نامهای a, b, c, d می‌خوانیم و به آنها یکای می‌دهیم که برحسب آن $a = 0, b = \frac{1}{4}, c = 1, d = \frac{1}{4}$ باشد. به ازای یک چهارم "لحظه‌ها" (که حدود 10^{-8} ثانیه طول می‌کشد)، تکثیرکننده فوتونی ۱ جریان I_1 را که تقریباً برابر a است داراست. همزمان با آن، I_2 نیز برابر a است، زیرا تکثیرکننده فوتونی ۲ در همان مکان تکثیرکننده فوتونی است. همین‌طور که طرح تداخلی جابه‌جا می‌شود، یک چهارم اوقات هر تکثیرکننده فوتونی دارای جریان a ، یک چهارم اوقات جریان b ، یک چهارم اوقات جریان c و یک چهارم اوقات جریان d را دارد. بنابراین میانگین زمانی حاصلضرب دو جریان هنگامی که $x_1 = x_2$ (در این تقریب ساده‌ای که به‌کار برده‌ایم) با رابطه زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} (I_1 I_2)_{\text{میانگین زمانی}} &= \frac{1}{4}(aa + bb + cc + dd) \\ &= \frac{1}{4} \left(0 \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + 1 \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8} \quad (31) \end{aligned}$$

1. R. Hanbury Brown and R. O. Twiss, "The Question of Correlation between Photons in Coherent Light Rays," *Nature*. **178**, 1447 (1956).

برای آزمایش‌های بیشتری که اخیراً با استفاده از لیزر انجام شده است به معادله زیر مراجعه کنید.

R. Pflieger and L. Mandel, "Interference of Independent Photon Beams," *Phys. Rev.* **159**, 1084 (1967).



شکل ۷-۹ شدت برحسب x در یک "لحظه" مشخص که کمتر از $(\Delta\nu)^{-1}$ به طول می‌انجامد.

اینک میانگین $I_1 I_2$ را هنگامی که فاصله $x_2 - x_1$ برابر با فاصله میان یک بیشینه "لحظه‌ای" تداخلی و کمینه مجاورش باشد، پیدا می‌کنیم؛ به عبارت دیگر، هنگامی که $x_2 - x_1$ نصف x_0 باشد، x_0 هم (همان‌طور که در شکل ۷-۹ نشان داده شده است) فاصله بین دو بیشینه لحظه‌ای طرح تداخلی دوشکافی است. [x_0 به وسیله معادله (۲۲) بخش ۲-۹ داده می‌شود]. اگر $x_2 - x_1 = \frac{1}{4}x_0$ ، در آن صورت در لحظه‌ای که تکثیرکننده فوتونی ۱، از قضا، جریان a را دارد، تکثیرکننده فوتونی ۲ (بر طبق شکل ۷-۹) جریان c را داراست. هنگامی که تکثیرکننده فوتونی ۱ جریان b را دارد، تکثیرکننده فوتونی ۲ جریان d را دارد و غیره. بنابراین، برای میانگین زمانی بر روی چهار جریان نمونه a, b, c, d ، در مورد تکثیرکننده فوتونی ۱ داریم

$$\begin{aligned} (I_1 I_2)_{\text{میانگین}} &= \frac{1}{4}(ac + bd + ca + db) \\ &= \frac{1}{4} \left(0 \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + 1 \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned} \quad (32)$$

می‌بینیم که میانگین $(I_1 I_2)$ هنگامی که $x_2 - x_1$ صفر است، سه‌برابر بزرگتر از وقتی است که این فاصله نصف فاصله بین بیشینه‌های متوالی طرح تداخلی لحظه‌ای است. بنابراین می‌بینیم که نمودار میانگین $(I_1 I_2)$ برحسب $x_2 - x_1$ ، فاز نسبی $\Delta\varphi = 2\pi d \sin\theta / \lambda$ را مشخص می‌کند.

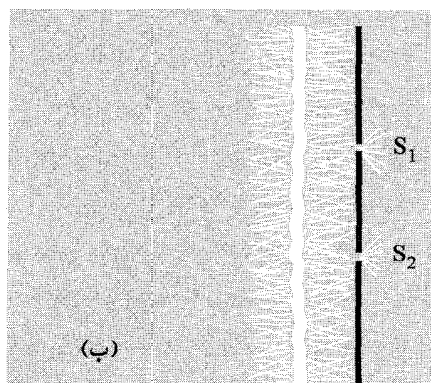
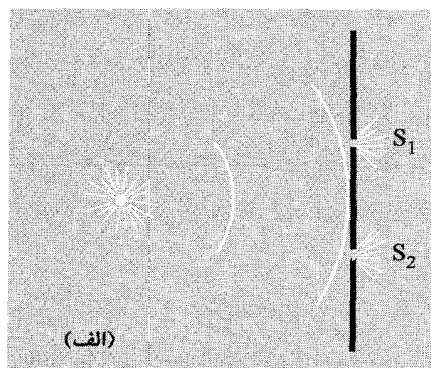
نکته اصلی تکنیک براون و توپیس این است که در حاضرب $I_1 I_2$ هر جریان صرفاً بر روی

زمانهایی از مرتبه 10^{-8} تا 10^{-6} ثانیه میانگین گرفته می‌شود، و در طول این زمان جریانها اساساً ثابت هستند. میانگین $\langle I_1 I_2 \rangle$ بر روی فاصله زمانی حدود چند دقیقه همان نتیجه‌ای است که آنها با میانگین‌گیری بر روی چند دوجین زمان همدوسی، فرض 10^{-6} ثانیه، به دست می‌آورند. (در عمل آنها بر روی زمانهای بسیار طولانیتری میانگین می‌گیرند تا نوفه تکثیرکننده فوتونی را حذف کنند و همچنین به خاطر برخی دلایل آزمایشی دیگر.) اما حاصلضرب $\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle$ مستقل از $x_1 - x_2$ است، زیرا هر تکثیرکننده فوتونی در طول زمان میانگین‌گیری از تمام طرح تداخلی نمونه برداشته است. مطلب اساسی این است که ببینیم کدام فواصل $x_1 - x_2$ مربوط به حالتی می‌شود که هنگامی که I_2 بزرگ است I_1 هم بزرگ است و هنگامی که I_2 کوچک است I_1 هم کوچک است (مثل وقتی که $x_1 - x_2$ برابر صفر است) و کدام فواصل مربوط به حالتی است که هنگامی که I_2 بزرگ است I_1 کوچک است و برعکس.

اگر فوتونها را مورد مثال قرار دهیم، چنین مشاهده می‌شود که احتمال ثبت یک فوتون در تکثیرکننده فوتونی ۲، هنگامی که تکثیرکننده فوتونی ۱ "اخیراً" (در زمان 10^{-8} ثانیه) فوتونی ثبت کرده باشد، بیشتر از حد میانگین است؛ این به شرطی است که $x_1 = x_2$ باشد. این احتمال اگر $x_1 - x_2 = \frac{1}{4} \lambda$ باشد کمتر از حد میانگین است. به طریقی نه خیلی دقیق و به طور "نیمه کلاسیک"، می‌توان این‌طور بیان کرد که اگر (مثلاً) موجی که شدتش معادل با 10^6 فوتون است با موج دیگری که شدت آن هم معادل با 10^6 فوتون است تداخل کند، در آن صورت اگر این دو قطارموج در فضا بر روی هم قرار گیرند، برهم‌نهی آنها ممکن است شدتی معادل با 4×10^6 فوتون را نتیجه دهد (تداخل سازنده کامل) و یا شدت صفر داشته باشد (تداخل میرای کامل). این وضعیت را می‌توان (به وسیله تکنیک براون و توییس) از وضعیتی که دو موج هرگز همپوشی ندارند و بنابراین همواره تقریباً $2 \times 10^6 \approx 10^6 + 10^6$ فوتون موجود است، تمیز داد. از این نحوه بیان واضح است که برای انجام آزمایش بهتر است از چشمه نور شدیدی استفاده شود (تا احتمال همپوشی قطارهای موج دو فوتون افزایش یابد)، همچنین بهتر است فوتونهایی با پهنای نوار بسامدی باریک داشته باشیم [زیرا طول قطار موج اساساً برابر با c ضربدر زمان افت میانگین τ است (یعنی $c/\Delta\nu$)، و قطار موج بلند یعنی احتمال بیشتر برای همپوشی].

۹-۴ چشمه "نقطه‌ای" نور چقدر می‌تواند بزرگ باشد؟

در شکل ۹-۱ نشان دادیم که چگونه می‌توان با تاباندن نوری که از یک چشمه "نقطه‌ای" می‌آید بر دو شکاف موجود در صفحه‌ای کدر، دو چشمه همدوس نور تولید کرد (دو چشمه همدوس دارای فاز نسبی ثابتی هستند). اما اگر چشمه آنقدر گسترده باشد که یکی از شکافها بیشتر در معرض



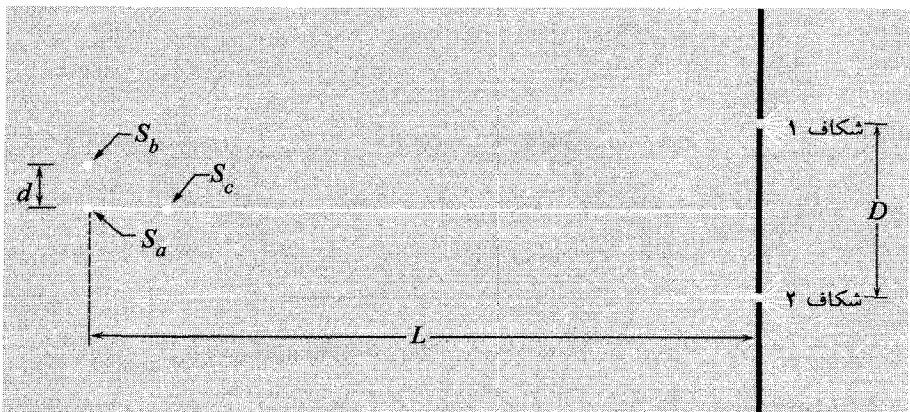
شکل ۸-۹ (الف) چشمه‌های ۱ و ۲ توسط یک چشمه نقطه‌ای واحد تحریک می‌شوند و فاز نسبی ثابتی را حفظ می‌کنند. آنها همدوس هستند. (ب) چشمه‌های ۱ و ۲ توسط دو دسته متفاوت از آنها که به طور مستقل از یکدیگر تابش می‌کنند، تحریک می‌شوند. برای زمانهای اندازه‌گیری که در مقایسه با $(\Delta\nu)^{-1}$ زیاد است، آنها ناهمدوس هستند.

تابش یک دسته از آنها باشد، و شکاف دیگر در معرض تابش دسته مستقلی از آنها باشد، در آن صورت دو شکاف کاملاً ناهمدوس خواهند بود، یعنی فازهای آنها [برای زمانهای اندازه‌گیری که در مقایسه با $(\Delta\nu)^{-1}$ طولانی باشد] همبستگی ندارند. این دو حالت حدی را در شکل ۸-۹ نشان داده‌ایم.

چشمه‌های نقطه‌ای کلاسیک. نزدیکترین چیز به چشمه نقطه‌ای، یک اتم تنهاست. برطبق تصویر کلاسیکی، این اتم در تمام جهات امواج الکترومغناطیسی گسیل می‌کند و جریانهای شکافها را در شکل ۸-۹ (الف) با فازهای یکسان تحریک می‌کند. (نظریه کوانتومی به‌طور مؤثر همین نتیجه را می‌دهد). عملاً یک چشمه نور تعداد زیادی اتمهای تابش‌کننده

دارد. اگر همه آنها دقیقاً در یک نقطه می‌بودند، یک چشمه نقطه‌ای می‌داشتیم. (آن وقت حتی از یک اتم واقعی هم به چشمه نقطه‌ای کلاسیکی نزدیکتر می‌بود.) اما در هر چشمه نور که عملاً وجود دارد اتمها در ناحیه‌ای با ابعاد متناهی قرار دارند. چشمه نور چقدر می‌تواند بزرگ باشد و هنوز هم "به‌طور مؤثر" چشمه نقطه‌ای باشد (به این معنی که جریانه‌های شکافها در دوشکافی در معرض چشمه "نقطه‌ای" قرار گرفته شده فاز نسبی ثابتی را حفظ کنند)؟

چشمه گسترده ساده. حال بیایید چشمه بسیار ساده‌ای را در نظر بگیریم که یک چشمه نقطه‌ای نیست. این چشمه از سه چشمه نقطه‌ای مستقل a ، b و c تشکیل شده است که هر سه دارای بسامد اصلی یکسان، پهنه نوار بسامدی یکسان و شدت میانگین یکسان هستند و در آرایه‌ای که در شکل ۹-۹ نشان داده شده است قرار دارند. فرض کنید در ابتدا فقط چشمه a روشن باشد. شکافهای ۱ و ۲ با فاز نسبی ثابت (که برای شکل ۹-۹ صفر است) تحریک می‌شوند و در طول هر فاصله زمانی همدوس هستند. حال فرض کنید دو چشمه a و c روشن باشند. چشمه c ، یک چشمه نوری است با همان بسامد و پهنای نوار بسامدی که چشمه a دارد و اما از نظر فاز با چشمه a همبستگی ندارد. بنابراین c و a در فواصل زمانی طولانی در مقایسه با $(\Delta\nu)^{-1}$ فاز نسبی ثابتی را حفظ نمی‌کنند. با این وجود، فاز نسبی شکافهای ۱ و ۲ همواره صفر باقی می‌ماند، زیرا چشمه c جریانه‌های شکافها را با فاز نسبی صفر تحریک می‌کند همان‌طور که چشمه a چنین می‌کند. جریان شکافها را می‌توان به‌صورت برهم‌نهی جریانه‌هایی که هر چشمه القا می‌کند دانست، و اگر هر چشمه فاز نسبی صفر را بین جریانه‌های شکافها باعث می‌شود،



شکل ۹-۹ همدوسی. شکافهای ۱ و ۲ به‌وسیله سه چشمه مستقل a ، b و c تحریک می‌شوند. آیا برای اینکه شکافهای ۱ و ۲ همدوس باشند لازم است این سه چشمه در یک نقطه واحد قرار گیرند؟

برهم‌نهِش آنها نیز همین اثر را دارد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که چشمه نقطه‌ای را که می‌توان در امتداد خطی که a و c را متصل می‌کند گسترده کرد بدون اینکه همدوسی شکافهای ۱ و ۲ از بین رود.

حال وضعیتی را در نظر بگیرید. که هر دو چشمه a و b روشن هستند (و چشمه c خاموش است). چشمه‌های a و b چشمه‌های مستقلی هستند که بسامد اصلی یکسان و پهنای نوار بسامدی یکسان و شدت میانگین یکسان دارند. در طول هر فاصلهٔ زمانی که در مقایسه با $(\Delta\nu)^{-1}$ کوتاه باشد، دامنه و ثابت فاز هر چشمه ثابت باقی می‌ماند. فرض کنید که در یک لحظهٔ بخصوص، از قضا، دامنهٔ b در مقایسه با دامنهٔ a ، بسیار کوچک باشد [یک لحظه یعنی فاصله زمانی که در مقایسه با زمان همدوسی $(\Delta\nu)^{-1}$ کوتاه باشد، اما به قدر کافی بلند باشد که حداقل یک نوسان سریع کامل رخ می‌دهد، تا بتوانیم بگوییم دامنه‌ها و فازها چه هستند]. در این صورت با تقریب خوبی، دو شکاف فقط در معرض تابش چشمهٔ a قرار دارند و بنابراین، فاز نسبی جریانه‌های شکافها صفر است. حال بیایید زمانی طولانی در مقایسه با زمان همدوسی چشمه‌های a و b صبر کنیم، و دوباره نگاه کنیم.

فرض کنید که این دفعه، از قضا، دامنه‌های نوسانی a و b عملاً مساوی باشند. در این حالت، صفحهٔ کدر و دو شکاف آن در معرض تابش طرح تداخلی دو چشمه که در شکلهای ۵-۹، ۶-۹ و ۷-۹ دیدیم قرار دارند. مکانهای بیشینه‌ها و کمینه‌ها به فاز نسبی چشمه‌های a و b بستگی دارد. سؤال مورد توجه این است که آیا دو شکاف ۱ و ۲ هنوز با فاز نسبی صفر تحریک می‌شوند یا خیر؟ می‌دانیم که دامنهٔ طرح تداخلی هنگامی که از یک بیشینهٔ تداخلی به بیشینهٔ مجاور می‌رویم، تغییر علامت می‌دهد. [طبق معادلهٔ (۱۳) بخش ۲-۹، دامنهٔ $A(r, \theta)$ با کسینوس $(\pi d \sin \theta / \lambda) + \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$ متناسب است. بنابراین با افزایش $d \sin \theta$ به میزان λ تغییر علامت می‌دهد؛ مانند فاصلهٔ بین بیشینه‌های مجاور در طرح تداخلی]. می‌بینیم که هر دو شکاف بیشتر اوقات با فاز نسبی صفر تحریک می‌شوند اگر فاصلهٔ آنها بسیار کمتر از فاصلهٔ x بین بیشینه‌های مجاور در طرح تداخلی دو چشمه باشد. حتی هنگامی که شکافها فاصلهٔ نزدیکی با هم دارند، ممکن است یکی از صفرهای طرح تداخلی دو چشمه، بین دو شکاف بیفتد که در این صورت دو شکاف با 180° درجه اختلاف فاز تحریک می‌شوند. اما، با نزدیک‌تر شدن شکافها به یکدیگر این اتفاق کمتر و کمتر رخ می‌دهد. [بنابراین لازم است

که در آن x_0 فاصله مکانی بین بیشینه‌های متوالی است و برطبق معادله (۲۲) بخش ۹-۲ با رابطه زیر داده می‌شود

$$x_0 = L \frac{\lambda}{d} \quad (۳۴)$$

شرط همدوسی. بدین ترتیب "چشمه گسترده" متشکل از نقاط a ، b و c به مانند چشمه نقطه‌ای مؤثر عمل می‌کند، اگر در شرط همدوسی صدق کند،

$$D \ll \frac{L\lambda}{d} \quad (۳۵)$$

یعنی

$$d \ll \frac{L\lambda}{D} \quad (۳۶)$$

یعنی

$$L \gg \frac{dD}{\lambda} \quad (۳۷)$$

و بسته به اینکه در آزمایش چه پارامترهایی قابل تغییر هستند، یکی از روابط فوق ممکن است مفیدترین باشد. [در یک آزمایش خانگی ساده (آزمایش خانگی ۹-۲۰ را ببینید) می‌توانید معادله (۳۷) را تصدیق کنید. در آن آزمایش L متغیر است.] ساده‌ترین راه برای به خاطر سپردن شرط همدوسی، صورت زیر است

$$\boxed{dD \ll L\lambda} \quad (۳۸)$$

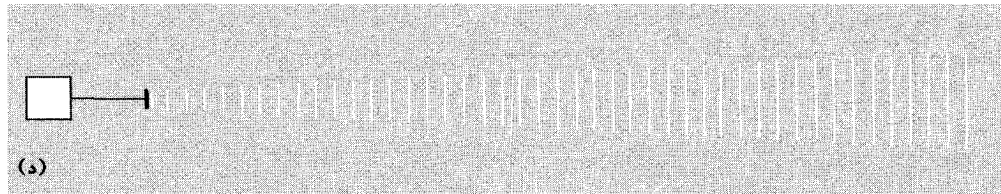
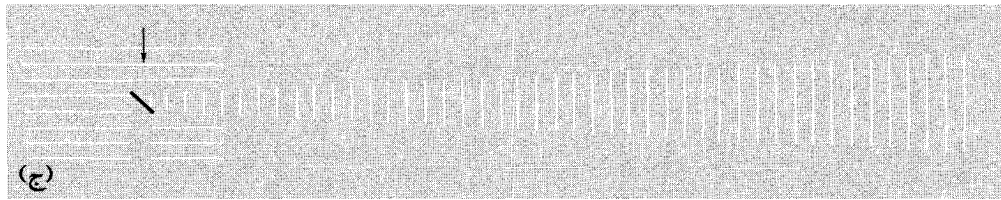
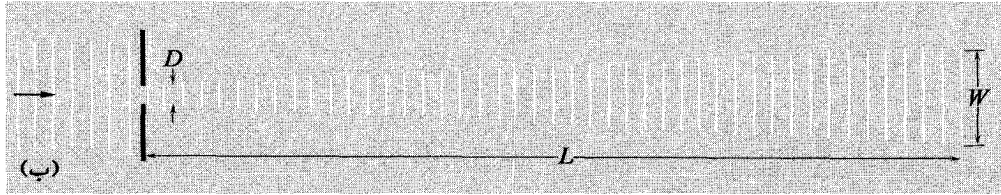
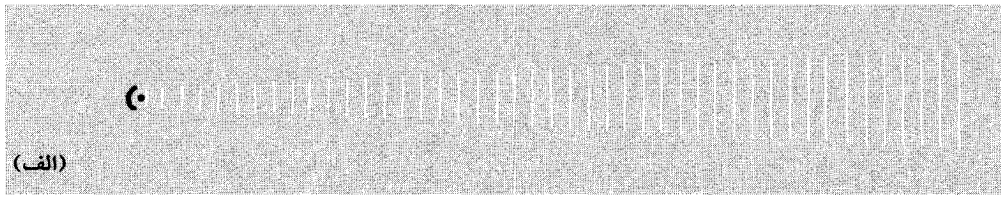
که بیان می‌کند حاصلضرب دو پهنای عرضی d و D باید در مقایسه با حاصلضرب دو فاصله طولی L و λ کوچک باشد.

اگر چشمه متشکل از تعداد بسیار زیادی نقطه بین a و b باشد، چنانکه چشمه پهنای d داشته باشد، معادله (۳۸) اگر برای نقاط مرزی a و b صادق باشد، برای تمام چشمه نیز صادق است (یعنی، چشمه‌های نقطه‌ای که از d به هم نزدیک‌ترند همدوس هستند اگر آنها که به فاصله d هستند همدوس باشند). به همین ترتیب، هنگامی که (بعداً) به جای فقط دو شکاف، عدّه معدود و یا زیادی از شکافها را در صفحه کدر در نظر می‌گیریم، شرط همدوسی معادله (۳۸) را می‌توان برای تمام آرایه شکافها به کار بست؛ آن وقت D به عنوان فاصله بین دو شکاف در دو سر آرایه خواهد بود.

۵-۹ پهنای زاویه‌ای "باریکه" امواج پیشرونده

"باریکه‌ای" از امواج پیشرونده، یک دسته از امواج است که در جهت بخصوصی پیش می‌روند و دارای پهنای عرضی محدودی هستند. باریکه‌ای از نور مرئی یک چراغ و یا باریکه‌ای از میکروموجهای یک رادار را می‌توان با قراردادن چشمه کوچکی از تابش الکترومغناطیسی در کانون بازتابنده سهموی به وجود آورد. چشمه کوچک قادر است الکترونهاى موجود در سطح فلزی بازتابنده را با فاز مناسب تحریک کند چنانکه تابش بازتاب شده از تمام نقاط سطح در جهت باریکه تداخل سازنده داشته باشند. روش دیگر به دست آوردن یک باریکه این است که نوری را که از چشمه‌ای کوچک و یا از چشمه‌ای که در دور دست واقع است (مثل خورشید)، از آینه تخت کوچکی بازتابانیم و یا می‌توان به جای آینه از روزنه‌ای در یک پرده کدر استفاده کرد. اگر چشمه به قدر کافی دور باشد و به اندازه کافی کوچک باشد، تابشی که بر روی آینه (یا روزنه) می‌افتد را می‌توان تقریباً موج تخت دانست - یعنی موجی که در آن همه تابش دقیقاً در یک جهت انتشار می‌یابد. بدین ترتیب، آینه "بخشی از موج تخت" را باز می‌تابد. به همین صورت، در مورد چشمه کوچک واقع در کانون آینه سهموی، اگر چشمه به قدر کافی کوچک باشد و آینه هم دقیقاً سهموی باشد، باریکه (تا مرتبه‌ای از تقریب) شبیه "قسمتی از یک موج تخت" است که از تابشی که در یک جهت انتشار می‌یابد تشکیل می‌شود. تمام این مطالب برای امواج صوتی یا امواج آب نیز صادق است.

پهنای زاویه‌ای باریکه محدودیت پراشی دارد. اینک به سؤالی جالب و بسیار مهم می‌رسیم: آیا می‌توان با روشی زیرکانه باریکه‌ای از امواج را که درست مانند "قسمتی از سطح مقطع" یک موج تخت است، به وجود آورد به این معنی که تمام موجها دقیقاً در یک جهت حرکت کنند، چنانکه باریکه‌ای موازی که همواره دارای یک پهنای ثابت است به وجود آید؟ خیر. هر چقدر هم که چشمه نقطه‌ای واقع در کانون سهمی کوچک باشد، تابش موجود در باریکه دقیقاً موازی نخواهد بود. اگر جهت "اصلی" در امتداد z باشد و پهنای فضایی باریکه (به‌زای مقدار مشخص z ، مثلاً در سطح بازتابنده) D باشد، در آن صورت، یک توزیع زاویه‌ای از جهت‌های انتشار وجود خواهد داشت که "تمام پهنایش در نصف حداکثر شدت" در حدود λ/D است. (این مطلب را در زیر نشان خواهیم داد.) به همین صورت، اگر موج تختی داشته باشیم که از چشمه نقطه‌ای واقع در دور دست بر روی روزنه‌ای به پهنای D (یا آینه‌ای به پهنای D)، می‌افتد، پهنای زاویه‌ای باریکه عبوری در حدود λ/D است. فقط در صورتی که D بینهایت باشد (و یا λ صفر باشد)، پهنای زاویه‌ای صفر است. می‌گوییم پهنای زاویه‌ای باریکه دارای محدودیت پراشی است. در شکل ۹-۱۰ مثالهایی از باریکه‌ها نشان داده



شکل ۹-۱۰ پراش. باریکه‌ای به پهنای D دارای پهنای زاویه‌ای تقریباً λ/D است و پس از پیمودن فاصله L به اندازه $L(\lambda/D) \approx W$ پهن می‌شود. (الف) باریکه‌ای که توسط چشمه نقطه‌ای و آینه سهموی به وجود آمده است. (ب) باریکه‌ای که توسط موج تخت فرودی بر روزنه‌ای در پرده کدر به وجود آمده است. (ج) باریکه‌ای که با موج

شده است. توجه کنید که اگر پهنای باریکه در وهله اول D باشد و اگر تمام کوشش خود را به‌کار بریم تا باریکه تا حد ممکن موازی باشد، پهنای باریکه، W ، پس از آنکه باریکه مسافت زیاد L را پیموده است، تقریباً برابر است با عرض اولیه D به‌علاوه L ضربدر تمام پهنای زاویه‌ای λ/D . هنگامی که L به‌قدر کافی بزرگ باشد، از عرض اولیه D می‌توان صرف‌نظر کرد.

بنابراین

$$\text{تمام پهنای زاویه‌ای: } \Delta\theta \approx \frac{\lambda}{D} \quad (39)$$

$$\text{پهنای باریکه: } W \approx L \frac{\lambda}{D} \quad (40)$$

هریک از چهار شکل موجود در شکل ۹-۱۰ را می‌توان به منزله امواج آب، امواج صوتی، یا امواج الکترومغناطیسی (مثلاً نور مرئی با طول موج $5 \times 10^{-5} \text{ cm}$ و یا میکروموج با طول موج 10 cm) گرفت.

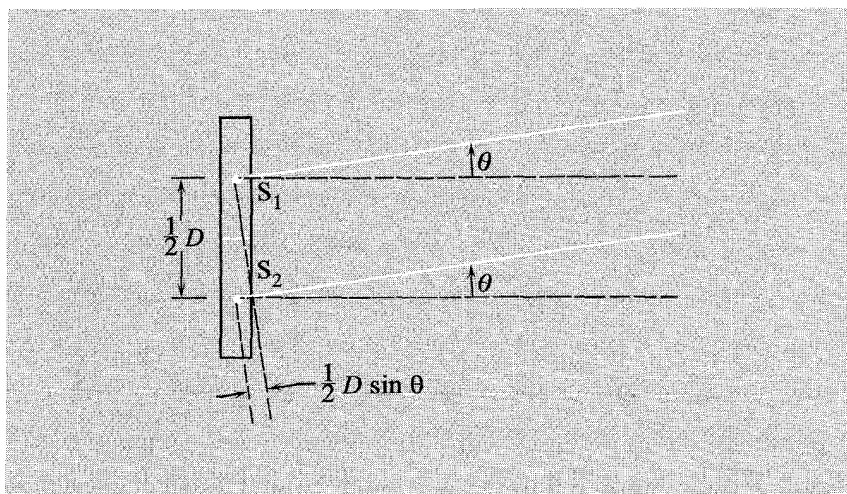
باریکه یک بیشینه تداخلی است. در اینجا روشی نه‌چندان دقیق برای به‌دست آوردن معادله (۳۹) ارائه می‌دهیم. (در بخش ۹-۶ روش دقیق آن را ارائه خواهیم کرد.) نتیجه، مستقل از نوع موج و چگونگی به‌وجود آوردن آن است. چه بهتر که ساده‌ترین چشمه که احتمالاً همان تابشگر امواج تخت شکل ۹-۱۰ (د) است، را در نظر بگیریم. برای امواج صوتی، این تابشگر ممکن است پیستونی نوسانگر در هوای آزاد باشد. برای امواج الکترومغناطیسی، ممکن است صفحه‌ای متناهی از بار الکتریکی باشد که نوسان می‌کند، مثلاً یک آنتن تخت. به‌هرحال تمامی تابشگر همدوس است. یعنی تمام "قسمتهای متحرک" همفاز با یکدیگر حرکت می‌کنند. (اگر چنین نباشد، پهن‌شدگی زاویه‌ای بزرگتر از آن است که با معادله (۳۹) داده شده است. در حدى که تابشگر ناهمدوس باشد، باریکه‌ای وجود نخواهد داشت.) در جهت اصلی باریکه، نقطه‌ای از میدان که به‌قدر کافی از تابشگر دور است، اساساً با تمام قسمتهای تابشگر یک فاصله را دارد. بنابراین امواجی که از قسمتهای مختلف تابشگر می‌آیند با فاز نسبی یکسان با یکدیگر جمع می‌شوند و بیشینه تداخلی خواهیم داشت. این تعریفی است که جهت اصلی باریکه را مشخص می‌کند. (اگر فاز نسبی را بر روی سطح تابشگر تغییر دهیم، می‌توان باریکه را در جهتی که عمود بر سطح تابشگر نیست "نشاند" این دقیقاً همان وضعیتی است که در شکل ۹-۱۰ (ج) اتفاق می‌افتد. در این شکل موج فرودی قسمتهای مختلف آینه را، که در زاویه ۴۵ درجه نسبت به موج تخت فرودی متمایل شده است، با فازهای مختلف تحریک می‌کند چنانکه ناحیه‌ای که بیشینه تداخلی را در برمی‌گیرد— یعنی جهت باریکه بازتابنده— بر سطح آینه عمود نیست بلکه از قانون "بازتاب آینه‌ای" پیروی می‌کند.)

پهنای زاویه‌ای باریکه. در نقطه‌ای از میدان که کاملاً در جهت باریکه نیست، بیشینه تداخلی نیز کاملاً وجود ندارد. برای اینکه بینیم اولین صفر طرح تداخلی در کجا واقع است، تابشگر را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم، قسمت بالایی و قسمت پایینی. سپس تابشگر را به دو چشمه نقطه‌ای (یا خطی) همدوس تقریب می‌زنیم، یکی در وسط نیمه بالایی و دیگری در وسط نیمه پایینی. این چشمه‌ها به فاصله عرضی $\frac{1}{2}D$ از یکدیگر قرار دارند. اولین صفر تداخلی آنها (اولین صفر در هریک از دو طرف جهت بیشینه اصلی که همان جهت باریکه است) به‌ازای اختلاف مسیر برابر با نصف طول موج اتفاق می‌افتد، یعنی هنگامی که $\frac{1}{2}D \sin \theta$ برابر با $\frac{1}{2}\lambda$ باشد. برای زاویه‌های کوچک فرض می‌کنیم $\sin \theta = \theta$ و بدین ترتیب داریم

$$\boxed{\text{نیم پهنای زاویه‌ای تا اولین صفر} = \frac{\lambda}{D}} \quad (41)$$

این موضوع در شکل ۱۱-۹ نشان داده شده است.

بیشینه بعدی کجا قرار می‌گیرد؟ اگر نقاط ۱ و ۲ در شکل ۱۱-۹ واقعاً چشمه‌های نقطه‌ای (یا خطی) می‌بودند، بیشینه بعدی جایی قرار می‌گرفت که طول مسیر از چشمه ۲ به نقطه میدان به‌اندازه یک طول موج از طول مسیر از چشمه ۱ به نقطه میدان تجاوز می‌کرد. در واقع، در چنین وضعی نیمه بالایی و نیمه پایینی هم‌فاز هستند، اما سهم هریک صفر است! دلیل آن است که



شکل ۱۱-۹ تابشگر تخت. چشمه ۱ نشان‌دهنده سهم نیمه بالایی است و چشمه ۲ سهم نیمه پایینی را نشان می‌دهد.

اگر نیمه‌های بالایی و پایینی را هریک به دو نیم تقسیم کنیم، چنانکه همه تابشگر به چهار ربع تقسیم شده باشد، در آن به صورت سهم ربع اول ۱۸° درجه با سهم ربع دوم خارج از فاز است و آنرا خنثی می‌کند؛ سهم ربع سوم هم ۱۸° درجه با سهم ربع چهارم خارج از فاز است و آنرا خنثی می‌کند. بنابراین اولین بیشینه غیر اصلی آن وقت نیست که دو نیمه داریم با سهمهایی که ۲π خارج از فازند (زیرا در آن صورت چهار ربع وجود خواهد داشت که سهمهای ربعهای متوالی به میزان π خارج از فاز با یکدیگر است) بلکه هنگامی که تابشگر به سه ثلث تقسیم شده است و ثلثهای متوالی به میزان π با یکدیگر خارج از فاز هستند. دو تا از ثلثها همدیگر را خنثی می‌کنند، اما ثلث سوم باقی می‌ماند. بنابراین دامنه اولین بیشینه غیر اصلی حداقل با ضریب $۱/۳$ کمتر از دامنه بیشینه اصلی است (در واقع بیشتر از این مقدار کمتر است زیرا اختلافهای فاز موجود در سهم ناشی از ثلث باقیمانده را در نظر نگرفته‌ایم). مشاهده می‌کنیم که بیشینه‌های غیر اصلی در مقایسه با بیشینه مرکزی که جهت "باریکه" را مشخص می‌کند، دارای دامنه‌های کوچکتری هستند. وقتی به مطالعه طرح دقیق تداخلی پردازیم، خواهیم یافت که نیم پهنای زاویه‌ای تا اولین صفر با تمام پهنای زاویه‌ای در جایی که شدت بیشینه تقریباً نصف است برابر است و این همان‌گونه است که پهنای زاویه‌ای باریکه را در معادله (۳۹) تعریف کردیم. بنابراین به‌طور نه خیلی دقیق، معادله (۳۹) را به دست آورده‌ایم. (نتیجه دقیق در شکل ۹-۱۴ از بخش ۹-۶ داده شده است.)

کاربرد: باریکه لیزر در مقایسه با باریکه‌ای از نور چراغ

فرض کنید باریکه‌ای از نور لیزر دارید که برطبق محدودیت پراشی دارای عرض $D = ۲ \text{ mm}$ با طول موج ۶۰۰۰ \AA است. عرض این باریکه در طی مسافت ۵۰ ft چقدر افزایش پیدا می‌کند؟ گستره زاویه‌ای باریکه چنین است

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{D} \approx \frac{۶ \times ۱۰^{-۵} \text{ cm}}{۰.۲} \approx ۳ \times ۱۰^{-۴} \text{ rad}$$

گستره زاویه‌ای ضربدر فاصله $L = ۵۰ \text{ ft} \approx ۱۵۰۰ \text{ cm}$ پهنای فضای

$$W \approx (۱۵۰۰)(۳ \times ۱۰^{-۴}) \approx ۰.۵ \text{ cm} = ۵ \text{ mm}$$

را به دست می‌دهد. (با استفاده از یک لیزر می‌توان به خوبی این پدیده را در کلاس به نمایش گذاشت.) اگر یک چراغ‌قوه از نوع "قلمی" در اختیار داشته باشید که باریکه‌اش به عرض ۲ mm توسط رشته "نقطه‌ای" واقع در کانون یک عدسی حاصل می‌شود، رشته این چراغ چقدر باید

کوچک باشد تا باریکه‌اش از محدودیت پراشی تبعیت کند؟ اگر رشته، یک نقطه نباشد در آن صورت قسمتهای مختلف رشته باریکه‌های "مستقل" به وجود می‌آورند. نتیجه می‌شود که گستره زاویه‌ای ناشی از اندازه رشته تقریباً با پهنای رشته تقسیم بر فاصله کانونی f برابر می‌شود:

$$\Delta\theta \approx \frac{\Delta x}{f}$$

اگر بخواهیم باریکه چراغ‌قوه که در ابتدا عرض ۲mm دارد از محدودیت پراش پیروی کند (به جای اینکه اندازه رشته محدوده گستره زاویه‌ای آن را تعیین کند)، در آن صورت $\Delta\theta$ ناشی از رشته باید کمتر از پهنای پراش باشد، یعنی برطبق محاسبات فوق کمتر از 3×10^{-4} rad باشد. برای یک چراغ‌قوه قلمی معمولی، رشته حدود ۰.۵cm از عدسی فاصله دارد؛ یعنی $f \approx 5$ cm. بنابراین رشته باید دارای اندازه عرضی Δx مطابق با

$$\Delta x < (f\Delta\theta \approx (5)(3 \times 10^{-4})) \approx 1.5 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

باشد. چنین رشته کوچکی را به سختی می‌توان ساخت.

۹-۶ پراش و اصل هویگنس

تفاوت میان تداخل و پراش. در بخش ۹-۵ پهنای زاویه‌ای باریکه‌ای با محدودیت پراشی را بررسی کردیم. اثباتی نه خیلی دقیق از طرح پراش حاصل، هنگامی که موج تخت بینهایت بزرگی به روزنه‌ای در پرده‌ای کدر برخورد می‌کند [شکل ۹-۱۰ (ب)] یا به آینه‌ای برخورد می‌کند [شکل ۹-۱۰ (ج)] و یا به وسیله تابشگر امواج تخت گسیل می‌شود [شکل ۹-۱۰ (د)] را ارائه کردیم. در بخشهای قبلی طرح تداخل حاصل از دو چشمه نقطه‌ای یا خطی را بررسی کردیم. تفاوت مابین طرح تداخلی و طرح پراش چیست؟ در واقع، هیچ به دلایل تاریخی، طرح شدت یا دامنه حاصل از برهم‌نهی سهمهای تعدادی متناهی از چشمه‌های گسسته همدوس را معمولاً طرح تداخلی نامند. طرح دامنه یا شدت حاصل از برهم‌نهی سهمهای توزیع "پیوسته‌ای" از چشمه‌های همدوس را معمولاً طرح "پراش" نامند. بدین ترتیب یا از طرح تداخلی حاصل از دو شکاف باریک سخن به میان می‌آوریم و یا از طرح پراش ناشی از یک شکاف پهن و یا از طرح مرکب تداخلی و پراش حاصل از دو شکاف پهن.

در بخش ۹-۵ فرض کردیم که باریکه با محدودیت پراشی حاصل از موج تخت فرودی بر روزنه‌ای در پرده [شکل ۹-۱۰ (ب)] معادل است با باریکه مشابهی که از تابشگر امواج تخت

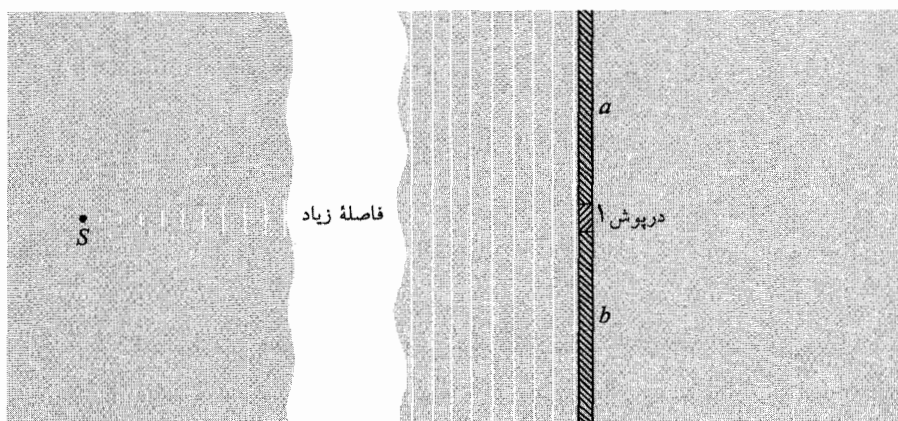
که دارای اندازهٔ روزنه است و همهٔ قسمتهای آن همفاز و با یک دامنهٔ مشترک نوسان می‌کنند [شکل ۹-۱۰ (د)]. در این بخش، فرض معادل بودن این دو را توجیه می‌کنیم. در ضمن آن، در می‌یابیم که این فرض دقیق نیست؛ بلکه تخمینی سودمند است که محاسبهٔ طرحهای پراش را بسیار ساده می‌کند. این فرض فقط هنگامی معتبر است که پهنای روزنه در مقایسه با طول موج بزرگ باشد. در آن صورت، برای محاسبهٔ تابش گسیل شده در زاویه‌های نه خیلی بزرگ از جهت باریکه و بنابراین محاسبهٔ شدت و دامنه، هنگامی که به قدر کافی از روزنه یا تابشگر معادل با آن دور هستیم، این فرض بسیار خوب کار می‌کند. اگر در پی اندازهٔ میدان در داخل خود روزنه باشید، این فرض به درد نمی‌خورد. تکنیک محاسبه‌ای که از این فرض تعادل بهره می‌برد موسوم به سازهٔ هویگنس است. از این فرض برای محاسبهٔ طرح پراش حاصل از برخورد موج تخت با روزنه‌ای در پردهٔ کدر استفاده می‌کنیم (این موج تخت مثلاً ممکن است از چشمه نقطه‌ای واقع در دوردست به دست آید). چگونگی کار پردهٔ کدر. هر نوع تابش الکترومغناطیسی در نهایت حاصل نوسان ذرات باردار است. میدان الکتریکی (و مغناطیسی) کل در هر نقطه، برهم‌نهی امواج حاصل از تمام چشمه‌هاست، یعنی تمام بارهای نوسان‌کننده. در مسئلهٔ حاضر یکی از چشمه‌ها، چشمه نقطه‌ای واقع در دوردست است که موج تخت فرودی بر پرده را به وجود می‌آورد. این چشمه را S می‌نامیم. پشت پردهٔ کدر دامنهٔ کل موج صفر است (طبق فرض — منظور ما از کدر بودن پرده همین است). این موج کل برهم‌نهی موج حاصل از S و امواج گسیل شده به وسیلهٔ الکترونها نوسان‌کننده در جسم پرده است. یعنی، پرده صرفاً موج فرودی گسیل شده از S را نمی‌بلعد. الکترونها پرده به وسیلهٔ تابش فرودی تحریک می‌شوند (و همین‌طور به وسیلهٔ تابش گسیل شده از الکترونها دیگر پرده)، و برهم‌نهی همهٔ امواج، یعنی از S و از همهٔ الکترونها، در پشت پرده صفر است. اگر این مطلب به نظر شما عجیب می‌آید، به یاد آورید که چگونه میدان الکتریکی ساکن در داخل رسانای فلزی خوب صفر می‌شود. رسانا میدان الکتریکی خارجی را نمی‌خورد. آن میدان هنوز در داخل رسانا موجود است، اما بارهای الکتریکی در داخل رسانا به حرکت در می‌آیند (پیش از آنکه تعادل استاتیکی حاصل شود) و بر روی سطح می‌ایستند تا اینکه بالاخره برهم‌نهی میدان حاصل از بارهای سطحی و میدان فرودی، میدان کل برابر صفر را در داخل رسانا نتیجه می‌دهد. همهٔ میدانهای الکترومغناطیسی از ذرات باردار نتیجه می‌شوند و چنین میدان “صفری” به مانند میدان پشت پردهٔ کدر در نتیجهٔ یک برهم‌نهی است.

اگر تصویر خطوط نیروی الکتریکی ذرهٔ باردار را به صورت جریان کوچکی از فشنگ که ذرهٔ باردار با سرعت نور آنها را می‌فرستد، در ذهن دارید به دردمر می‌افتید. این فشنگهای کوچک از

اصل برهم‌نهمش پیروی نمی‌کنند. آنها بدون اینکه بر همدیگر اثر بگذارند از میان یکدیگر نمی‌گذرند. دو فشنگ نمی‌توانند با برهم‌نهمش صفر فشنگ را نتیجه دهند. با این تصویر ذهنی گمراه‌کننده، احتمالاً به اثر رسانای فلزی بر روی میدان الکتروستاتیک به صورت "متوقف‌کننده فشنگها"، مثل نوعی زره می‌نگرید. همین‌طور ممکن است به غلط دربارهٔ پرده‌ای که در مقابل نور فرودی کدر است به‌عنوان زرهی که نور را متوقف می‌کند فکر کنید که آن را می‌گیرد و به گرما بدل می‌کند (اگر پرده سیاه باشد)، و یا فشنگها را به عقب منعکس می‌کند (اگر پرده یک صفحهٔ نازک و براق فلزی باشد). این تصویر بدی است. اگر شما هم آن را در ذهن دارید، اولین نفری نیستید که چنین تصویری در ذهن دارد—اما این تصویر غلط است. آن را دور بریزید.

پرده‌های کدر سیاه و پرده‌های کدر براق. دو حالت فرین برای انواع پرده‌های کدر وجود دارد. در یک سو ممکن است پرده‌ای کدر و براق باشد (مثل قطعه‌ای از صفحهٔ نازک و کدر آلومینیم). الکترونهای درون فلز به‌وسیلهٔ میدان الکتریکی موضعی تحریک می‌شوند؛ در نتیجه آنها امواج الکترومغناطیسی گسیل می‌کنند. در جهت رو به جلو (یعنی تابش فرودی)، چنین است که برهم‌نهمش موج فرودی و امواج ناشی از الکترونها صفر می‌شود. در جهت رو به عقب، موجی بازتابیده حاصل می‌شود. هنگامی که از تشدیدها به دور باشیم، حرکت یک الکترون بخصوص کاملاً به‌وسیلهٔ دامنهٔ کشسانی مشخص می‌شود و بدین ترتیب سرعت 90° درجه با میدان الکتریکی کل در محل الکترون خارج از فاز است؛ بنابراین در طول هر دورهٔ تناوب کامل هیچ کاری بر روی الکترون انجام نمی‌شود. (الکترون انرژی تابشی را "باز می‌گرداند" بدون آنکه ذره‌ای از آن انرژی را جذب کند و نگه دارد.)

حالت فرین دیگر این است که پرده‌ای کدر و سیاه داشته باشیم (مثل مقوای سیاه و یا تیغهٔ میکروسکوپ که با لایه‌ای از ذرات ریز دوده معلق در آب پوشانده شده باشد). اینجا هم الکترونها به‌وسیلهٔ تابش فرودی تحریک می‌شوند. آنها همچنین نیروی مقاومت‌کننده‌ای از محیط دریافت می‌کنند و همواره در سرعت حدی خود به‌سر می‌برد. تابش آنها در جهت رو به جلو 180° درجه با تابش فرودی خارج از فاز است و برهم‌نهمش این دو صفر می‌شود (پس از ضخامتی کافی از پرده). سرعت هر الکترون همواره با میدان الکتریکی کل در مکان الکترون هم‌فاز است و بنابراین کار بر روی الکترون انجام می‌شود. کاری که بر روی الکترون انجام می‌شود به محیط انتقال می‌یابد و محیط گرمتر می‌شود. به‌طور خالص موج بازتابی وجود ندارد—برهم‌نهمش سهمهای حاصل از لایه‌های مختلف پرده در جهت رو به عقب صفر می‌شود.



شکل ۹-۱۲ امواج تخت حاصل از چشمه نقطه‌ای S واقع در دوردست بر روی پرده کدر می‌افتند. برهم‌نهی میدانهای ناشی از ذرات باردار در S ، a ، b و درپوش ۱، در پشت پرده، صفر می‌شود.

اثر وجود یک روزنه در پرده کدر. حال بیایید تا روزنه‌ای (یا شکاف باریکی) در پرده کدر به وجود بیاوریم. ابتدا قطعه جداشده را نامگذاری می‌کنیم. شکاف را با شماره ۱ مشخص می‌کنیم، بنابراین قطعه جداشده را درپوش ۱ می‌نامیم. قسمتهای بالا و پایین درپوش را با a (بالا) و b (پایین) مشخص می‌کنیم. میدان کل در پشت پرده، که صفر است، برهم‌نهی میدان گسیل شده از چشمه S و میدانهای حاصل از قسمتهای a ، b و درپوش ۱ است. بنابراین، قبل از برداشتن درپوش ۱، داریم

$$E = 0 = E_S + E_a + E_b + E_1 \quad (42)$$

این وضعیت در شکل ۹-۱۲ نشان داده شده است.

حال، درپوش را که شکاف ۱ پوشانده است برمی‌داریم. فرض کنید که حرکت الکترونها در ناحیه‌های a و b با برداشتن درپوش تغییر نمی‌کند. (این یک تقریب است، زیرا الکترونها ناحیه‌های a و b توسط میدان کل موجود در محل آنها تحریک می‌شوند و این میدان شامل میدانهای تابشی ناشی از الکترونها درپوش نیز می‌شود. الکترونهايي از a و b که در فاصله چند طول موج از لبه‌های شکاف قرار دارند از همه بیشتر به خاطر برداشتن درپوش تأثیر می‌پذیرند، زیرا تابش حاصل از هر الکترون با افزایش فاصله از الکترون افت می‌کند، بنابراین نزدیکترین همسایه‌ها از همه مهمترند.) با این فرض، میدان کل پشت پرده دیگر برهم‌نهی که با معادله (۴۲) داده شده

است نیست، که صفر می‌شود. در عوض، برهم‌نهشی است منهای سهم درپوش ۱:

$$\begin{aligned} E &= E_S + E_a + E_b \\ &= (E_S + E_a + E_b + E_1) - E_1 \\ &\approx 0 - E_1 \\ &\approx -E_1 \end{aligned} \quad (۴۳)$$

مشاهده می‌کنیم که میدان باقیمانده، که حاصل برهم‌نهش سهم میدان S و قسمت‌های باقیمانده پرده، یعنی a و b ، است، همان میدانی است که از درپوش گسیل می‌شد اگر هنوز سر جایش قرار داشت (فقط علامت منفی را نیز باید در نظر گرفت). بنابراین میدان پشت پرده را می‌توانیم به‌دست آوریم اگر تصور کنیم که به‌جای چشمه و پردهٔ حاوی شکاف، سیستمی ساده‌تر که فقط شامل درپوش می‌شود جایگزین شده است؛ دیگر احتیاجی به چشمهٔ S و قسمت‌های دیگر پرده نیست و باید فرض کنیم که الکترونیهای درپوش همگی با یک فاز و دامنه نوسان می‌کنند، که البته هنگامی که درپوش در جایش قرار داشت هم در واقع چنین بود. این روشی آسان را برای محاسبهٔ طرح‌های تداخلی ناشی از شکافها در پردهٔ کدر به‌دست می‌دهد. این روش ساده است، چون برای دانستن تغییرات دامنه و ثابت فاز الکترونیهای نوسان‌کننده در درپوش برحسب مکان در امتداد جهت باریکه، تلاشی نمی‌کنیم. (البته، پرده ضخامت متناهی دارد.) اگر آن را می‌دانستیم، می‌توانستیم دربارهٔ تابش ناشی از درپوش در جهت ”رو به عقب“ سخن به میان آوریم؛ یعنی، می‌توانستیم پردهٔ کدر سیاه و پردهٔ کدر براق را از یکدیگر تمیز دهیم. در عوض، صرفاً فرض می‌کنیم که میدان E_1 ناشی از درپوش حاصل لایهٔ نازکی از بارهای نوسان‌کننده است، که همگی با یک فاز و یک دامنه نوسان می‌کنند.

اصل هویگنس. این ابزار محاسبی، اصل هویگنس نام دارد. می‌توان آن را برای هر تعداد شکاف و یا یک شکاف پهن به کار برد. اساس آن معادلات (۴۲) و (۴۳) است. توجه کنید که ”درپوش تابشگر“ که آن را به‌طور ذهنی جایگزین کردیم، جواب درست را برای طرح تداخلی، فقط در پشت پرده می‌دهد. یک ”درپوش تابشگر“ واقعی، یعنی یک آنتن ”ورقه‌ای“، در تمام جهات تابش می‌کند. یک صفحهٔ تار واقعی حاوی یک روزنه، بسته به اینکه براق یا سیاه، دارای تابش رو به عقب (بازتابیده) بسیار یا اندک است. درپوش هویگنس را نمی‌توان برای محاسبهٔ میدان در طرف چپ پرده به‌کار بست (جهت تابش فرودی را مطابق با شکل از چپ به راست می‌گیریم)، علت آن است که از تغییرات فاز و دامنه که مابین سطوح جلو و

عقب درپوش وجود دارد صرفنظر کردیم. این تغییرات بسته به آن است که پرده سیاه است یا براق.

مطلب دیگری که باید به آن توجه داشت این است که در نوشتن معادله (۴۳)، فرض کردیم که مقادیر E_a و E_b مستقل از آن هستند که درپوش سرچایش باشد یا نباشد. این موضوع فقط به طور تقریبی درست است، همان طور که در بالا به آن اشاره شد. اگر برای مثال، با یک شکاف پهن سروکار داشته باشیم و از سازه هویگنس برای محاسبه میدانهای موجود در طرف راست پرده و در خود شکاف استفاده کنیم، این نتایج را به دست خواهیم آورد: اگر به قدر کافی در طرف راست پرده از آن دور باشیم و در عین حال به قدر کافی به جهت جلو نزدیک باشیم، و اگر پرده چندین طول موج پهن داشته باشد، آن وقت سازه هویگنس تقریباً بسیار خوبی را از جواب درست (که به وسیله آزمایش داده می شود) به دست می دهد. اگر در جوار خود شکاف باشید، سازه هویگنس تقریباً بدی از جواب درست را به دست می دهد. اگر در داخل شکاف باشید، مهمترین بارهای متحرک در قسمتهای دیگر پرده، آنهایی هستند که همسایگی لبه شکاف قرار دارند، برای اینکه آنها نزدیکترینند. اما این ذرات همانهایی هستند که از همه بیشتر به خاطر برداشتن درپوش تأثیر می پذیرند. طرح میدان در داخل شکاف ممکن است بسیار پیچیده باشد، مخصوصاً در نزدیکی لبه های شکاف جایی که اثر نزدیکترین بارهای نوسان کننده غالب است. شاید بپرسید، "چرا مسئله را دقیقاً حل نمی کنیم؟" برای اینکه بسیار دشوار است. باید از معادلات ماکسول در همه نواحی، خلاصاً و داخل ماده پرده استفاده کرد، مشخصات ماده پرده باید دقیقاً معلوم باشد و جوابها می باید شرایط مرزی را رعایت کنند. به طور کلی، روشی برای یافتن حل موجود نیست و مسائل معدودی دقیقاً حل شده اند.

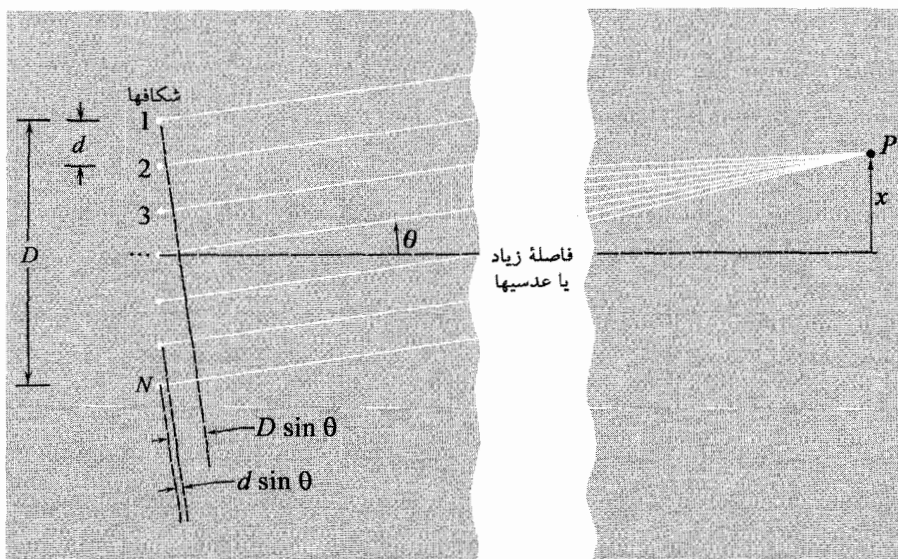
محاسبه طرح پراش تک شکافی با استفاده از سازه هویگنس. می خواهیم طرح پراش حاصل از موج تختی را (که مثلاً از چشمه نقطه ای واقع در دوردست گسیل می شود) و بر روی یک شکاف می افتد محاسبه کنیم. با استفاده از سازه هویگنس، موج تخت فرودی (یا چشمه نقطه ای واقع در دوردست) و ماده پرده را در ذهن خود با تیغه ای از جسم تابشگر - یعنی همان درپوش هویگنس، جانشین می کنیم. از آنجایی که توزیع پیوسته ای از بارهای نوسان کننده در تیغه داریم، می توانیم انتگرالی (برهم نهشی) روی سهم عناصر بینهایت کوچک تیغه انجام دهیم. به جای اینکه انتگرالی روی توزیع پیوسته انجام دهیم می توانیم یک جمع گسسته بر روی سهمهای N "آنتن" مشابه که در فواصل یکسان از یکدیگر قرار دارند را در نظر بگیریم (و چنین هم خواهیم کرد). در حالت حدی که N به

سمت بینهایت میل می‌کند، توزیع پیوسته‌ای از چشمه‌های تابشی خواهیم داشت. (مزیت استفاده از N چشمه گسسته به جای توزیع پیوسته این است که در عین حال برای طرح تابشی حاصل از N آنتن و یا N شکاف باریک به ازای $N = 2$ تا بینهایت، نیز جواب را به دست می‌آوریم.)

فرض کنید که عرض شکاف بهن D باشد. بدین ترتیب D عرض ناحیه‌ای است که شامل آرایه خطی N "آنتن هویگنس" می‌شود. فرض کنید فاصله مابین آنتنهای متوالی d باشد. بنابراین داریم $D = (N - 1)d$. فرض کنید موج تخت فرودی در جهت z است و N شکاف در امتداد x قرار دارند، همان‌طور که در شکل ۹-۱۳ نشان داده شده است.

در نقطه میدان P واقع در دوردست، همه آنتنهای تابشی با دامنه یکسان $A(r)$ دارند (زیرا P آنقدر دور است که در وابستگی دامنه به فاصله می‌توانیم فرض کنیم که فاصله برای تمام آنتنهای تقریباً یکی است). همه آنتنهای (طبق فرض) همفاز نوسان می‌کنند. بنابراین میدان الکتریکی E در نقطه P با برهم‌نهی زیر داده می‌شود

$$E = A(r) \cos(kr_1 - \omega t) + A(r) \cos(kr_2 - \omega t) + \dots + A(r) \cos(kr_N - \omega t) \quad (44)$$



شکل ۹-۱۳ N آنتن، یا N شکاف باریک با بارهایی که همه همفاز نوسان می‌کنند.

می‌خواهیم این برهم‌نهد N موج پیشرونده را که از شکاف دور می‌شوند به صورت یک موج پیشرونده بیان کنیم که از میانگین مکانی آرایه به بیرون انتشار پیدا می‌کند و دارای دامنه‌ای است که با تابعی از زاویه گسیل مدوله می‌شود. (این همان کاری است که در بخش ۹-۲ هنگامی که طرح تداخلی دو چشمه نقطه‌ای را در نظر گرفتیم انجام داده‌ایم. به ازای $N = 2$ روش اثباتی که در اینجا اعمال می‌کنیم می‌باید همان نتایج را در برگیرد.) با استفاده از اعداد مختلط می‌توانیم کار محاسبه را ساده کنیم. میدان E قسمت حقیقی کمیت مختلط E_c است،

$$E_c = A(r)e^{-i\omega t}(e^{ikr_1} + e^{ikr_2} + \dots + e^{ikr_N}) \quad (45)$$

اما برطبق شکل ۹-۱۳ داریم

$$r_2 = r_1 + d \sin \theta$$

$$r_3 = r_1 + 2d \sin \theta$$

.....

$$r_N = r_1 + (N - 1)d \sin \theta \quad (46)$$

بنابراین معادله (۴۵) چنین خواهد شد

$$\begin{aligned} E_c &= A(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1}(1 + e^{ik(r_2-r_1)} + e^{ik(r_3-r_1)} + \dots) \quad (47) \\ &= A(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1}S \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} S &\equiv 1 + e^{ik(r_2-r_1)} + e^{ik(r_3-r_1)} + \dots \\ &= 1 + a + a^2 + \dots + a^{N-1} \quad (48) \end{aligned}$$

و

$$a \equiv e^{ik(r_2-r_1)} = e^{ik(d \sin \theta)} = e^{i\Delta\varphi} \quad (49)$$

که در آن

$$\Delta\varphi = kd \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \quad (50)$$

فاز نسبی موجها (در P) از آنتهای متوالی است. سری هندسی S که با معادله (۴۸) داده می شود، در رابطه زیر صدق می کند

$$\begin{aligned}
 aS - S &= a^N - 1 \\
 S &= \frac{a^N - 1}{a - 1} \\
 &= \frac{e^{iN\Delta\varphi} - 1}{e^{i\Delta\varphi} - 1} \\
 &= \frac{e^{i(1/2)N\Delta\varphi} [e^{i(1/2)N\Delta\varphi} - e^{-i(1/2)N\Delta\varphi}]}{e^{i(1/2)\Delta\varphi} [e^{i(1/2)\Delta\varphi} - e^{-i(1/2)\Delta\varphi}]} \\
 &= e^{i(1/2)(N-1)\Delta\varphi} \frac{\sin \frac{1}{2}N\Delta\varphi}{\sin \frac{1}{2}\Delta\varphi} \quad (51)
 \end{aligned}$$

بدین ترتیب معادله (۴۷) چنین می شود

$$\begin{aligned}
 E_c &= A(r)e^{-i\omega t} e^{ik[r_1 + (1/2)(N-1)d\sin\theta]} \frac{\sin \frac{1}{2}N\Delta\varphi}{\sin \frac{1}{2}\Delta\varphi} \\
 &= A(r)e^{-i\omega t} e^{ikr} \frac{\sin \frac{1}{2}N\Delta\varphi}{\sin \frac{1}{2}\Delta\varphi} \quad (52)
 \end{aligned}$$

که در آن کمیت

$$\begin{aligned}
 r &\equiv r_1 + \frac{1}{2}(N-1)d\sin\theta \\
 &= r_1 + \frac{1}{2}D\sin\theta \quad (53)
 \end{aligned}$$

فاصله P تا مرکز آرایه را به دست می دهد. با در نظر گرفتن قسمت حقیقی معادله (۵۲)، میدان را در P به دست می آوریم

$$\begin{aligned}
 E(r, \theta, t) &= \left[\frac{A(r) \sin \frac{1}{2}N\Delta\varphi}{\sin \frac{1}{2}\Delta\varphi} \right] \cos(kr - \omega t) \\
 &\equiv A(r, \theta) \cos(kr - \omega t) \quad (54)
 \end{aligned}$$

بیاید با استفاده از اتحاد $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ که در آن $x = \frac{1}{2}\Delta\varphi$ بیسیم آیا معادله (۵۴)

همان نتایج قبلی معادله های (۱۲) و (۱۳) از بخش ۹-۲ را برای $N = 2$ به دست می دهد:

$$\begin{aligned}
 E(r, \theta, t) &= A(r) \frac{2 \sin \frac{1}{2}\Delta\varphi \cos \frac{1}{2}\Delta\varphi}{\sin \frac{1}{2}\Delta\varphi} \cos(kr - \omega t) \\
 &= \left[2A \cos \frac{1}{2}\Delta\varphi \right] \cos(kr - \omega t)
 \end{aligned}$$

این نتیجه با نتایج قبلی همخوانی دارد.

طرح پراش تک‌شکافی. N را به سمت بینهایت میل می‌دهیم. D را ثابت نگه می‌داریم. فاصله d به سمت صفر میل می‌کند. تغییر فاز نسبی $\Delta\varphi$ مابین امواجی که از آنتهای متوالی ناشی می‌شوند به سمت صفر میل می‌کند. تغییر فاز کلی Φ در نقطه P مابین امواجی که از اولین و N امین آنتن ناشی می‌شوند دقیقاً برابر است با $(N-1)\Delta\varphi$. به‌ازای N بسیار بزرگ این مقدار تقریباً برابر با $N\Delta\varphi$ است:

$$\Phi = (N-1)\Delta\varphi = kD \sin \theta \quad (55)$$

$$\Phi \approx N\Delta\varphi, \quad N \gg 1 \quad (56)$$

بنابراین دامنه مدوله‌شده در معادله (۵۴) چنین می‌شود

$$A(r, \theta) = A(r) \frac{\sin \frac{1}{2} N \Delta\varphi}{\sin \frac{1}{2} \Delta\varphi} \approx A(r) \frac{\sin \frac{1}{2} \Phi}{\sin \left[\frac{1}{2} \frac{\Phi}{N} \right]} \quad (57)$$

در حدی که N به قدر کافی بزرگ باشد می‌توان در معادله (۵۷) از بسط تیلور برای $|\sin \frac{1}{2}(\Phi/N)|$ استفاده کرد و از تمام جملات بسط غیر از جمله اول صرف‌نظر کرد:

$$\sin \frac{1}{2} \frac{\Phi}{N} \approx \frac{1}{2} \frac{\Phi}{N} \quad (58)$$

$$A(r, \theta) = NA(r) \frac{\sin \frac{1}{2} \Phi}{\frac{1}{2} \Phi} \quad (59)$$

معادله را می‌توان از این هم ساده‌تر کرد. هنگامی که N به سمت بینهایت میل می‌کند، $A(r)$ باید چنان به سمت صفر میل کند که $NA(r)$ ثابت باقی بماند، زیرا می‌خواهیم مستقل از اینکه آرایه پیوسته شامل چند آنتن باشد، عناصر جزئی dx آرایه همگی دارای سهم یکسان باشند. (به یاد آورید که این آنتنها همان آنتهای سازه هویگنس هستند.) می‌توان از اشاره صریح به N و $A(r)$ در معادله (۵۹) پرهیز کرد؛ باید توجه کنیم که وقتی θ به سمت صفر میل می‌کند، Φ به سمت صفر میل می‌کند و نسبت $\sin \frac{1}{2} \Phi / \frac{1}{2} \Phi$ به سمت واحد میل می‌کند:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \dots}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \dots \\ &= 1 \quad x = 0 \end{aligned}$$

به‌ازای $x = 0$

بنابراین برطبق معادله (۵۹) $A(r, 0)$ مساوی است با $NA(r)$ ضربدر یک. بالاخره داریم

$$E(r, \theta, t) = A(r, 0) \left[\frac{\sin \frac{1}{2} \Phi}{\frac{1}{2} \Phi} \right] \cos(kr - \omega t) \quad (60)$$

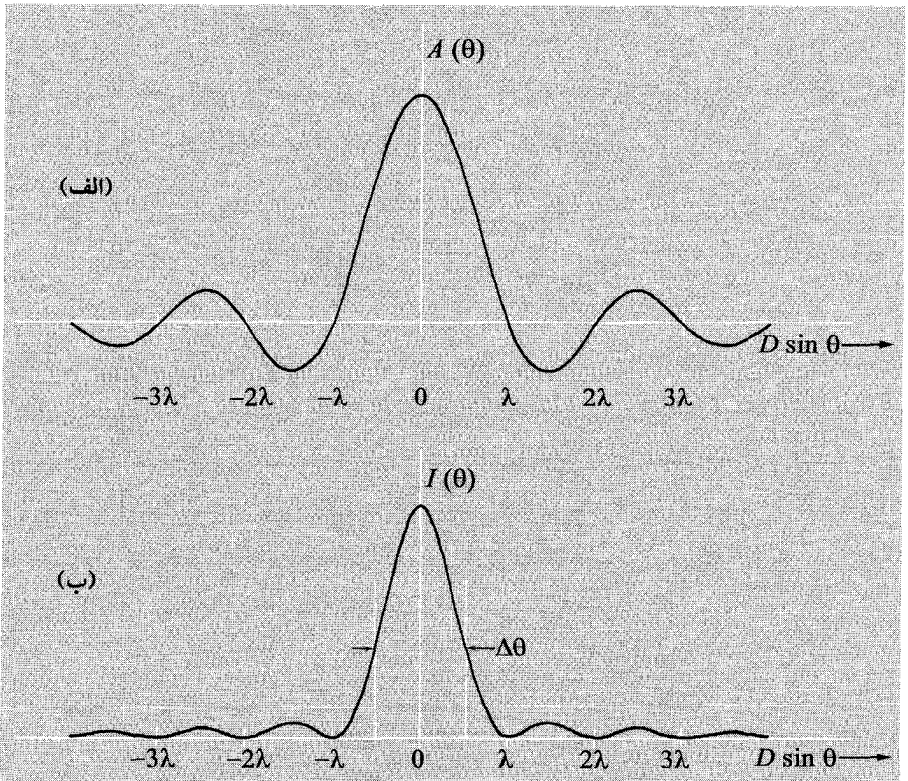
با

$$\Phi = 2\pi \frac{D \sin \theta}{\lambda} \quad (۶۱)$$

میانگین زمانی شار انرژی (به‌ازای مقدار بخصوص r) دارای وابستگی زاویه‌ای برطبق معادلهٔ زیر است

$$I(r, \theta) = I_{\max} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \Phi}{(\frac{1}{2} \Phi)^2} \quad (۶۲)$$

این نتیجه را می‌توان به‌آسانی از معادلهٔ (۶۰) به‌دست آورد. طرح دامنه و شدت، که با معادله‌های (۶۰) و (۶۲) داده می‌شوند در شکل ۹-۱۴ آمده است.



شکل ۹-۱۴ طرح پراش تک‌شکافی. (الف) دامنه. (ب) شدت. گسترهٔ زاویه‌ای $\Delta\theta$ که از λ/D تا $+\lambda/D$ ادامه دارد (برای زاویه‌های کوچک) تقریباً معادل با "تمام پهنا در نصف شدت" است. شدت در واقع به میزان $41^\circ = (2/\pi)^2$ شدت بیشینه است و نه نصف آن.

پهنای زاویه‌ای باریکهٔ محدودشده با پراش. اینک نتیجهٔ بخش ۹-۵ مبنی بر اینکه "باریکه‌ای" با پهنای D دارای تمام پهنای زاویه‌ای $\Delta\theta$ تقریباً برابر با λ/D است، را ثابت کرده‌ایم. شکل دقیق دامنه و شدت برحسب θ در شکل ۹-۱۴ داده شده است. نکتهٔ قابل توجه در شکل شدت، این است که فقط در گسترهٔ زاویه‌ای که تقریباً بین $\theta = -\frac{1}{2}\lambda/D$ و $\theta = +\frac{1}{2}\lambda$ قرار دارد، شدت زیاد است:

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{D} \quad (۶۳)$$

آسانترین راه برای مشاهدهٔ طرح پراش تک‌شکافی به قرار زیر است: دو تکهٔ کوچک کاغذ که هریک دارای لبه‌ای راست باشد تهیه کنید. هریک را در یک دست بگیرید و دو قطعه را چنان کنار هم نگه دارید که لبه‌های راست موازی با یکدیگر قرار گیرند تا شکافی با پهنای متغیر به وجود آید. به یک چشمهٔ خطی یا چشمهٔ نقطه‌ای نگاه کنید؛ شکاف را موازی با چشمهٔ خطی نگه دارید. شکاف را نزدیک چشم خود نگه دارید؛ از دو دست خود برای محکم نگه داشتن کاغذ استفاده کنید تا پهنای شکاف ثابت باقی بماند. پهنای شکاف را از "صفر" تا "بینهایت" تغییر دهید؛ در اینجا منظور از "صفر" همان صفر است و "بینهایت" یعنی تقریباً ۱ mm. با نگاه کردن از لابه‌لای شاخه‌های چنگال غذاخوری می‌توان به تک‌شکافی بهتری دست یافت. چنگال را نزدیک، جلوی چشم خود نگه دارید. فاصلهٔ میان شاخه‌ها زیادی بزرگ است، پس مجبورید چنگال را بچرخانید تا اینکه پهنای تصویرشدهٔ شکاف به اندازهٔ کافی کوچک باشد. سپس می‌توانید پهنای تصویرشده را تغییر دهید و مشاهده کنید که طرح چگونه تغییر می‌کند. با یک اندازه‌گیری سریع (و نه خیلی دقیق)، می‌توانید صحت معادلهٔ (۶۳) را تحقیق کنید. آزمایش خانگی ۹-۱۷ را ببینید.

تفکیک زاویه‌ای چشم انسان. یک خط‌کش میلیمتری تهیه کنید، یا روی کاغذ خطوطی رسم کنید (یا به نوشته‌ای نگاه کنید) و فاصله‌ای را که در آن خطوط تار می‌شوند و بدین ترتیب دیگر از یکدیگر جدا به نظر نمی‌آیند بیابید (یا فاصله‌ای را بیابید که در آن نوشته را دیگر نمی‌توانید بخوانید). به طور معمول می‌باید که دو خط به فاصلهٔ یک میلیمتر را به زحمت می‌توان از فاصلهٔ ۲ متری از یکدیگر تمیز داد و در فاصلهٔ ۴ متری تفکیک آنها به هیچ‌وجه امکان‌پذیر نیست. بنابراین، برای چشم انسان، در قسمت مرکزی ناحیهٔ دید (یعنی، وقتی مستقیماً به خطوط نگاه می‌کنید) حد تفکیک زاویه‌ای را $1/2000 = 1 \text{ mm}/2 \text{ m} \approx \Delta\theta$ پیدا می‌کنیم. حال در آینه نگاه کنید و قطر، D ، مردمک چشم خود را با استفاده از خط‌کشی که نزدیک چشم خود نگه داشته‌اید، اندازه بگیرید. به طور معمول $D \approx 2 \text{ mm}$. حد تفکیک زاویه‌ای چشم شما به خاطر پراش، با اندازهٔ زاویه‌ای تصویری که از امواج تخت گسیل‌شده توسط چشمه نقطه‌ای واقع در دوردست بر روی

شبکیه تشکیل می‌شود، داده می‌شود. بدین ترتیب، تمام پهنای زاویه‌ای، $\Delta\theta$ ، تصویر نقطهٔ دور دست چنین است

$$\Delta\theta \text{ (حد پراش)} \approx \frac{\lambda}{D} \approx \frac{5.5 \times 10^{-5} \text{ cm}}{0.2 \text{ cm}} \approx \frac{1}{4000}$$

بنابراین مغز (یا لاقط مغز من) می‌خواهد که نقاط با فاصلهٔ زاویه‌ای تقریباً دو برابر پهنای پراشی از یکدیگر قرار داشته باشند تا بتواند آنها را از هم تفکیک کند.

به‌منظور تحقیق اینکه تطابق (تقریبی) مابین قدرت تفکیک چشم و پهنای پراش اتفاقی نیست، آزمایش فوق را با نگاه کردن از درون روزنه‌ای در یک تکه کاغذ (یا نوار یا صفحهٔ نازک کدر یا چیزی دیگر) تکرار کنید. قطر روزنه می‌بایست در حدود ۱ mm باشد (با فرض اینکه قطر مردمک چشم شما در حدود ۲ mm است). آیا قدرت تفکیک چشم شما بدتر می‌شود؟ با ضریب ۲؟

معیار ریلی. اگر فاصلهٔ زاویه‌ای دو نقطه به‌اندازهٔ یک پهنای پراش λ/D باشد، در آن صورت برطبق شکل ۹-۱۴ (ب)، بیشینهٔ شدت از یک نقطه، بر روی کمینهٔ اول طرح شدت نقطهٔ دیگر می‌افتد. در آن صورت دو نقطه را درست در حد تفکیک‌پذیری بر طبق معیار ریلی گویند.

پهنای عرضی واقعی تصویر نقطهٔ دور دست بر روی شبکیه تقریباً با فاصلهٔ کانونی عدسی چشم ضربدر پهنای زاویه‌ای تصویر داده می‌شود. فاصلهٔ کانونی، f ، قطر درونی چشم در حدود ۳ cm است (هنگامی که به شیء در دور دست نگاه می‌کنید). بنابراین پهنای عرضی تصویر نقطهٔ دور دست تقریباً $8 \mu = 0.2/5 \times 10^{-5} = 3 \times 5 \times 10^{-5}$ است. اینکه قدرت تفکیک چشم شما به خوبی حد پراش است از آن روست که گیرنده‌های نوری در مرکز شبکیه (به اصطلاح گیرنده‌های مخروطی) به فاصله‌ای حداکثر حدود ۸ میکرون از یکدیگر قرار دارند.

زمانی، فضانوردی که در مداری به ارتفاع ۲۴۰ کیلومتر به دور زمین می‌گشت، گفت که می‌توانست تک‌تک خانه‌های دهکده‌ای را همین‌طور که از زیر او می‌گذشتند ببیند. آیا حرف او را باور می‌کنید؟

نامگذاری: پراش فرانوفر و پراش فرنل. در بررسی طرح پراش حاصل از تک‌شکافی یا یک روزنه، فرض ما بر این بود که موج تخت فرودی (از چشمه نقطه‌ای S واقع در دور دست) در کار است. همچنین فرض کردیم که تابش گسیل‌شده از شکاف را در یک زاویهٔ بخصوص آشکارسازی کردیم. این بدان معنی است که برهم‌نهی امواجی را در نظر گرفتیم که به‌طور موازی با یکدیگر به‌سوی نقطهٔ آشکارسازی P انتشار می‌یابند و نقطهٔ P یا خیلی از شکاف دور است و یا از یک عدسی (مثلاً عدسی چشم خود) استفاده کردیم تا امواج را در نقطهٔ P (که مثلاً روی شبکیه قرار

دارد) متمرکز کنیم. پراشی را که تحت این دو شرط مشاهده می‌شود — موج فرودی تخت و موج پراشیده گسیل شده در یک جهت بخصوص — پراش فرانهورف نام دارد. اگر از عدسی استفاده نشود، چشمه نقطه‌ای S و آشکارساز P می‌بایست در "ناحیه دور" از شکاف باشند. برای تعیین اینکه S (مثلاً) در ناحیه دور قرار دارد یا نه، تصور کنید که صفحه‌ای از درون شکاف می‌گذرد چنانکه صفحه عمود بر خط دید، از S به مرکز شکاف، قرار دارد. حجم مخروطی حاصل از تمام خطوطی که از S و تمام نقاط سطح شکاف می‌گذرند را در نظر بگیرید. اگر این خطوط، صفحه نام‌برده را "عملاً در یک" فاصله از S قطع کنند، S در ناحیه دور از شکاف واقع است. "عملاً در یک" فاصله یعنی با اختلافی بسیار کمتر از نصف طول موج. در آن صورت تابش گسیل شده از S عملاً از یک موج تخت تمیز داده نمی‌شود. معیار مشابهی برای نقطه P که در آن آشکارسازی می‌شود صادق است.

به آسانی می‌توان نشان داد که برای یک شکاف به پهنای D ، نقطه‌ای در فاصله L در ناحیه دور واقع است به شرطی که

$$L\lambda \gg \left(\frac{1}{4} D \cos \theta \right)^2$$

که در آن $\frac{1}{4} D \cos \theta$ نیم‌پهنای تصویر شده شکاف است، که عمود بر خط دید از شکاف به نقطه تصویر شده است. اگر یکی از این دو شرط برقرار نباشد، یعنی اگر چشمه نقطه‌ای S و یا نقطه آشکارسازی P در ناحیه دور از شکاف نباشد، در آن صورت آنچه موسوم به پراش فرنل است را داریم. (وارد جزئیات این نوع پراش نخواهیم شد.)

آنالیز فضایی فوریه یک چشمه همدوس در جهت عرضی. نتیجه معادله (۶۳) را می‌توان به صورت جالب متفاوتی بیان کرد. تک مؤلفه‌ای از بسامد یک موج پیشرونده را در نظر بگیرید. می‌توانیم این مؤلفه را دقیقاً تکفام در نظر بگیریم. در آن صورت پهنای نوار $\Delta\omega$ صفر است. بردار انتشار چگونه است؟ مربع بردار انتشار، k^2 ، برابر با ω^2/c^2 است (این برای نور در خلأ است). بنابراین k^2 باید مقداری کاملاً مشخص داشته باشد، درحالی‌که ω دارای مقدار کاملاً مشخصی است. اما این بدان معنی نیست که هر مؤلفه k باید مقداری مشخص داشته باشد! می‌دانیم که k^2 مجموع مربعات مؤلفه‌هایش است:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (64)$$

که در آن k_x تعداد رادیانهای فاز بر واحد طول در امتداد \hat{x} ، k_y تعداد رادیانهای فاز بر واحد طول در امتداد \hat{y} و k_z تعداد رادیانهای فاز بر واحد طول در امتداد \hat{z} را نشان می‌دهد. اگر باریکه در

واقع موج تختی بود که در امتداد z انتشار داشت به جای اینکه باریکه‌ای با حد پراش باشد، آن وقت k_x و k_y صفر می‌بودند. برای مؤلفه فوریه باریکه‌ای با حد پراش که بردار انتشارش در صفحه xz قرار دارد و زاویه کوچک θ را با محور z می‌سازد، داریم $k_x = k \sin \theta$ ، $k_y = 0$ و $k_z = k \cos \theta$. به ازای زاویه‌های کوچک θ ، $\sin \theta$ را با θ و $\cos \theta$ را با یک تقریب می‌زنیم. بدین ترتیب برای مؤلفه x داریم

$$k_x \approx k \theta \quad (65)$$

اما همچنین می‌دانیم که باریکه دارای گستردگی زاویه‌ای حول جهت اصلی z است که با رابطه زیر داده می‌شود

$$\Delta \theta \approx \frac{\lambda}{D} \quad (66)$$

بدین ترتیب گستردگی در k_x [از ترکیب معادلات (65) و (66)] با رابطه

$$\Delta k_x \approx k \Delta \theta \approx k \frac{\lambda}{D} = \frac{2\pi}{D}$$

داده می‌شود، و یا اگر به جای تمام پهنای D باریکه در جهت x ، Δx بنویسیم داریم

$$\Delta k_x \Delta x \geq 2\pi \quad (67)$$

(علامت تساوی یادآور این نکته است که حد پراش فقط در صورتی دست‌یافتنی است که چشمه‌ها همدوس و همگی هم‌فاز باشند.)

درواقع خیلی دقیقتر از این می‌توان سخن گفت. برطبق سازه هویگنس، تیغه تابشگری داریم که از چشمه‌هایی تشکیل شده است که به‌طور یکنواخت در امتداد x (مثلاً) از $x = -\frac{1}{2}D$ تا $x = +\frac{1}{2}D$ توزیع شده‌اند. همه این چشمه‌ها دارای دامنه یکسان و ثابت فاز یکسان هستند. نمودار دامنه چشمه $f(x)$ برحسب x از $x = -\infty$ تا $x = +\infty$ به غیر از ناحیه‌ای به پهنای D به مرکز مبدأ، صفر است. بنابراین برحسب x ، یک "موج مربعی" است. باید بتوانیم آن را برحسب برهم‌نهی از توابع وابسته به مکان سینوسی، $\sin k_x x$ و $\cos k_x x$ آنالیز فوریه کنیم، درست همان‌طور که یک تپ مربعی را برحسب $\sin \omega t$ و $\cos \omega t$ آنالیز فوریه کردیم. برطبق معادله (۹۵-۶) بخش ۶-۴ می‌دانیم که تبدیل فوریه یک موج مربعی در زمان، $f(t)$ ، با ارتفاع $1/\Delta t$ و پهنای Δt با رابطه زیر داده می‌شود

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{1}{2}\omega \Delta t}{\frac{1}{2}\omega \Delta t} \quad (68)$$

از روی تشابه، تپ مربعی $f(x)$ بر حسب x که دارای عرض D و ارتفاع $1/D$ است باید تبدیل فوریه‌ای مطابق با

$$B(k_x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{1}{2} k_x D}{\frac{1}{2} k_x D} \quad (69)$$

داشته باشد. اما

$$k_x D = kD \sin \theta = \Phi \quad (70)$$

بنابراین

$$B(k_x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{1}{2} \Phi}{\frac{1}{2} \Phi} \quad (71)$$

با مقایسه معادلات (۷۱) و (۶۰) مشاهده می‌کنیم که دامنه میدان که در زاویه θ آشکارسازی می‌شود (این زاویه را k_x مشخص می‌کند)، صرفنظر از ضریبهای تناسب، برابر با تبدیل فوریه دامنه چشمه در مکان شکاف (و یا تبدیل فوریه موج مربعی) است. در شکاف، دامنه نوسانی $f(x) \cos \omega t$ است، که در آن $f(x)$ دامنه چشمه است (که در اینجا مقداری ثابت در تمام عرض شکاف دارد). در فاصله r و جهت θ ، موج پیشرونده با نشانند $\cos(\omega t - kr)$ به جای $\cos \omega t$ و نشانند تبدیل فوریه $f(x)$ یعنی $B(k_x)$ به جای $f(x)$ ، حاصل می‌شود. بعد عرضی دیگر باریکه، y ، در رابطه‌ای مشابه با معادله (۶۷) صدق می‌کند، منتهی به جای x باید y را قرار داد. نتایج مهم آنالیز فوریه. با یادآوری نتایج قبلی برای آنالیز فوریه بر حسب مؤلفه طولی بردار موج، k_z ، و آنالیز فوریه بر حسب بسامد، می‌توانیم همه نتایج آنالیز فوریه را این طور خلاصه کنیم:

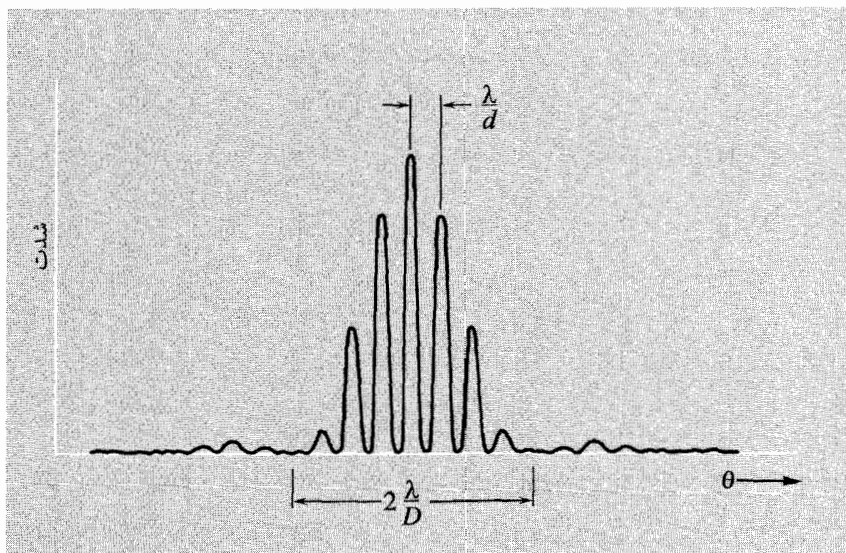
$$\begin{aligned} \Delta k_x \Delta x &\geq 2\pi \\ \Delta k_y \Delta y &\geq 2\pi \\ \Delta k_z \Delta z &\geq 2\pi \\ \Delta \omega \Delta t &\geq 2\pi \end{aligned} \quad (72)$$

آنالیز فوریه تکنیکی توانمند برای محاسبه طرحهای پراش است. اما، در اینجا این مبحث را دنبال نخواهیم کرد (مسئله ۹-۵۹ را ببینید).

طرح پراش برای دو شکاف پهن. یک دوشکافی بسازید. (یک روش خوب این است که قطعه‌ای از ورق آلومینیم آشپزخانه را بر روی یک تیغه میکروسکوپ بکشید تا محکم روی تیغه قرار گیرد. با استفاده از تیغ و لبه خط‌کش برای هدایت آن، شکافی در ورق آلومینیم به وجود

آورید. شکاف دوم باید تا آنجا که می‌توانید به شکاف اول نزدیک باشد بدون اینکه آنرا خراب کند. فاصله کمتر از $\frac{1}{4} \text{mm}$ به آسانی می‌توانیم ایجاد کنیم. شکاف را نزدیک جلوی چشم خود بگیرید و یک‌بار با وجود صافی ژلاتینی قرمز و یک‌بار بدون وجود آن به چشمه خطی خود نگاه کنید. "فریزهای تداخلی" که در فاصله‌های کم از یکدیگر قرار دارند به طرح تداخلی حاصل از دوشکافی مربوط هستند. بنابراین دارای جدایی زاویه‌ای λ/d رادیان هستند (با تقریب زاویه کوچک که $\sin \theta$ را با θ برابر می‌کند). بر روی همان تیغه یک تک‌شکافی به همان عرض شکافهای دوشکافی، به‌وجود آورید (یعنی، از همان تیغ و همان فشار دست استفاده کنید و یا یکی از شکافهای دوشکافی را درازتر از دیگری کنید). طرحهای تک‌شکافی و دوشکافی را با هم مقایسه کنید. توجه کنید که طرح دوشکافی با طرح تک‌شکافی مدوله شده است. (شکل ۹-۱۵) در واقع، معمولاً مشاهده طرح دوشکافی نسبتاً دشوار است مگر در داخل بیشینه مرکزی مدولاسیون ناشی از تک‌شکافی. (اگر از صافی قرمز استفاده کنید و دوشکافی خوبی داشته باشید، ممکن است موفق شوید).

در اینجا به بیان دلیل ظهور این طرح می‌پردازیم. هریک از شکافها در محل آشکارساز (شبکیه چشم شما) میدانی الکتریکی به‌وجود می‌آورد که دارای دامنه و ثابت فاز بخصوصی است. ثابت



شکل ۹-۱۵ طرح دوشکافی. فاصله d شکافها چهار برابر عرض D هریک از شکافها در این مثال است. عبارتهای فاصله زاویه‌ای، λ/d ، و تمام پهنای مابین صفرهای مدولاسیون، $2\lambda/D$ ، از تقریب زاویه کوچک $\sin \theta = \theta$ بهره می‌برند.

فاز سهم ناشی از تمام شکاف، همان ثابت فاز حاصل از سهم جزئی (یعنی همان "آنتن" واقع در مرکز شکاف است. این نتیجه از آنجا می‌آید که موج دارای ضریب $\cos(kr - \omega t)$ است، که در آن r فاصله از مرکز شکاف تا آشکارساز است. [معادلات (۶۰) و (۵۳) بخش ۹-۶]. دامنه متناسب با $(\sin \frac{1}{2}\Phi) / (\frac{1}{2}\Phi)$ است، که در آن Φ اختلاف فاز سهمهای ناشی از دو لبه متقابل شکاف است. هنگامی که دو شکاف با فاصله d از یکدیگر قرار دارند. هر شکاف سهمی دارد که تا آنجایی که به فاز مربوط می‌شود، همان سهمی است که از وجود یک شکاف باریک واقع در مرکز شکاف موجود حاصل می‌شود. تا آنجایی که به دامنه مربوط می‌شود، ضریب $\sin \frac{1}{2}\Phi / \frac{1}{2}\Phi$ وجود دارد. بنابراین طرح حاصل همان طرح دو شکافی است که قبلاً به دست آوردیم، با این تفاوت که دامنه ثابت $A(r)$ که از هر یک از شکافها به دست می‌آید، حال، با ثابتی ضربدر $\sin \frac{1}{2}\Phi / \frac{1}{2}\Phi$ جانشین شده است. به عبارت دیگر، طرح دو شکاف که از دو شکاف بینهایت باریک به دست می‌آید، حال با ضرب شدن در $\sin \frac{1}{2}\Phi / \frac{1}{2}\Phi$ مدوله شده است. از ترکیب نتایج قبلی برای طرح دو شکافی [معادله (۱۳) بخش ۹-۲] با ضریب مدولاسیون، می‌یابیم که اگر دو شکاف با فاز یکسان تحریک شده باشند، طرح تابشی با روابط زیر داده می‌شود

$$E(\theta, t) = A(\theta) \cos(kr - \omega t) \quad (73)$$

$$A(\theta) = A(\circ) \cdot \left[\frac{\sin \frac{1}{2}\Phi}{\frac{1}{2}\Phi} \right] \cos \frac{1}{2}\Delta\varphi \quad (74)$$

$$\Phi = kD \sin \theta = 2\pi \frac{D \sin \theta}{\lambda} \quad (75)$$

$$\Delta\varphi = kd \sin \theta = 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda} \quad (76)$$

که در اینجا D پهنای شکاف هر یک از شکافهاست، d فاصله بین دو شکاف است (مرکز تا مرکز) و r فاصله نقطه مشاهده P تا نقطه وسط فاصله مرکزهای دو شکاف است. اگر D به صفر میل کند، آن وقت بیشینه مرکزی "تمام میدان دید را می‌پوشاند"، و نتیجه بخش ۹-۲ برای دو شکاف باریک به دست می‌آوریم.

طرح شدت $I(\theta)$ متناسب با میانگین زمانی مربع میدان الکتریکی است؛ یعنی مطابق با معادلات (۷۳) و (۷۴)،

$$I(\theta) = I(\circ) \left[\frac{\sin \frac{1}{2}\Phi}{\frac{1}{2}\Phi} \right]^2 \left(\cos^2 \frac{1}{2}\Delta\varphi \right) \quad (77)$$

ضریب $\cos^2 \frac{1}{2}\Delta\varphi$ ، تغییرات زاویه‌ای سریع را که مشخصه طرح دو شکافی است به دست می‌دهد، که در آن بیشینه‌ها به فاصله زاویه‌ای λ/d از یکدیگر قرار دارند. ضریب $(\sin \frac{1}{2}\Phi / \frac{1}{2}\Phi)^2$ مدولاسیون

تک شکافی را به دست می دهد، که در آن تمام پهنای زاویه ای در تقریباً نصف شدت برابر با λ/D است و یا تمام پهنای زاویه ای بین صفرهای واقع در دو طرف بیشینه مرکزی برابر با $2\lambda/D$ است. با شمردن تعداد فریزهای "دو شکافی" در بیشینه مرکزی "مدولاسیون تک شکافی"، می توانید نسبت d/D را برای دو شکافی خود تخمین زنید. طرح شدت مربوط به معادله (۷۷) در شکل ۹-۱۵ رسم شده است. طرح پراش تعداد کثیری از شکافهای پهن یکسان. از بررسی حالت دو شکاف پهن، واضح است که طرح حاصل از تعداد کثیری از شکافهای پهن یکسان را می توان به راحتی به دست آورد: ابتدا فرض می کنیم که شکافها همگی باریک هستند و سپس نتیجه را در ضرب مدولاسیون دامنه تک شکافی، $\sin \frac{1}{2}\Phi / \frac{1}{2}\Phi$ ، ضرب می کنیم.

طرح تداخلی چندشکافی. در نظر بگیرید که چگونه طرح تداخلی N آنتن شکل ۹-۱۳ به N وابسته است. (می توانیم به جای N آنتن، N شکاف باریک را در نظر بگیریم.) دامنه N شکاف باریک با استفاده از معادله (۵۴)، که در اینجا بازنویسی می کنیم، به دست می آید

$$E(r, \theta, t) = A(r, \theta) \cos(kr - \omega t) \quad (۷۸)$$

$$A(r, \theta) = A(r) \frac{\sin \frac{1}{2} N \Delta \varphi}{\sin \frac{1}{2} \Delta \varphi} \quad (۷۹)$$

$$\Delta \varphi = 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda} \quad (۸۰)$$

بیشینه اصلی، بیشینه مرکزی، چشمه نور سفید. زوایایی که در آنها مخرج (و صورت) معادله (۷۹) صفر می شود با $\frac{1}{2} \Delta \varphi = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$ و غیره داده می شوند. اینها زوایایی هستند که برایشان طول مسیر $d \sin \theta$ صفر، $\pm\lambda$ و غیره است، و به تداخل کاملاً سازنده همه N آنتن مربوط می شوند. اینها را بیشینه های اصلی نامند:

$$d \sin \theta = 0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots, m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۸۱)$$

بیشینه واقع در $\theta = 0$ را بیشینه مرکزی یا بیشینه مرتبه صفرم می نامند. آنهایی که $m = \pm 1$ دارند، بیشینه های مرتبه اول نام دارند والی آخر. بیشینه مرکزی از یک جهت مهم با تمام بیشینه های اصلی دیگر متفاوت است، و آن این است که سهم تمام شکافها مستقل از طول موج همفاز است. بنابراین برای یک چشمه سفید بیشینه مرکزی سفید است. برای بیشینه های اصلی دیگر غیر از آنکه در مرکز است، زاویه بیشینه به طول موج، یعنی رنگ، بستگی دارد.

در یک بیشینه مرکزی، دامنه برهم نهش صرفاً N برابر دامنه ناشی از هریک از شکافهاست. از نظر فیزیکی این واضح است. همچنین از معادله (۷۹) نتیجه می شود: برای بیشینه مرکزی داریم

$\Delta\varphi = 0$. سپس (به ازای $x = \frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi$) از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$\frac{\sin Nx}{\sin x} = \frac{Nx - \frac{1}{\varepsilon}(Nx)^2 + \dots}{x - \frac{1}{\varepsilon}x^2 + \dots} = N \frac{[1 - \frac{1}{\varepsilon}(Nx)^2 + \dots]}{[1 - \frac{1}{\varepsilon}x^2 + \dots]}$$

$$= N \quad x \rightarrow 0 \quad \text{وقتی} \quad (۸۲)$$

برای بیشینه مرتبه اول با $m = +1$ ، به طریق مشابهی می‌توانیم نشان دهیم که حد $\sin Nx / \sin x$ هنگامی که x به سمت π میل می‌کند برابر با $\pm N$ است. برای این کار، برحسب زاویه کوچک ε که اختلاف x و π است، بسط می‌دهیم:

$$x = \pi - \varepsilon$$

$$\frac{\sin Nx}{\sin x} = \frac{\sin(N\pi - N\varepsilon)}{\sin(\pi - \varepsilon)} = (-1)^{N+1} \frac{\sin N\varepsilon}{\sin \varepsilon} \quad (۸۳)$$

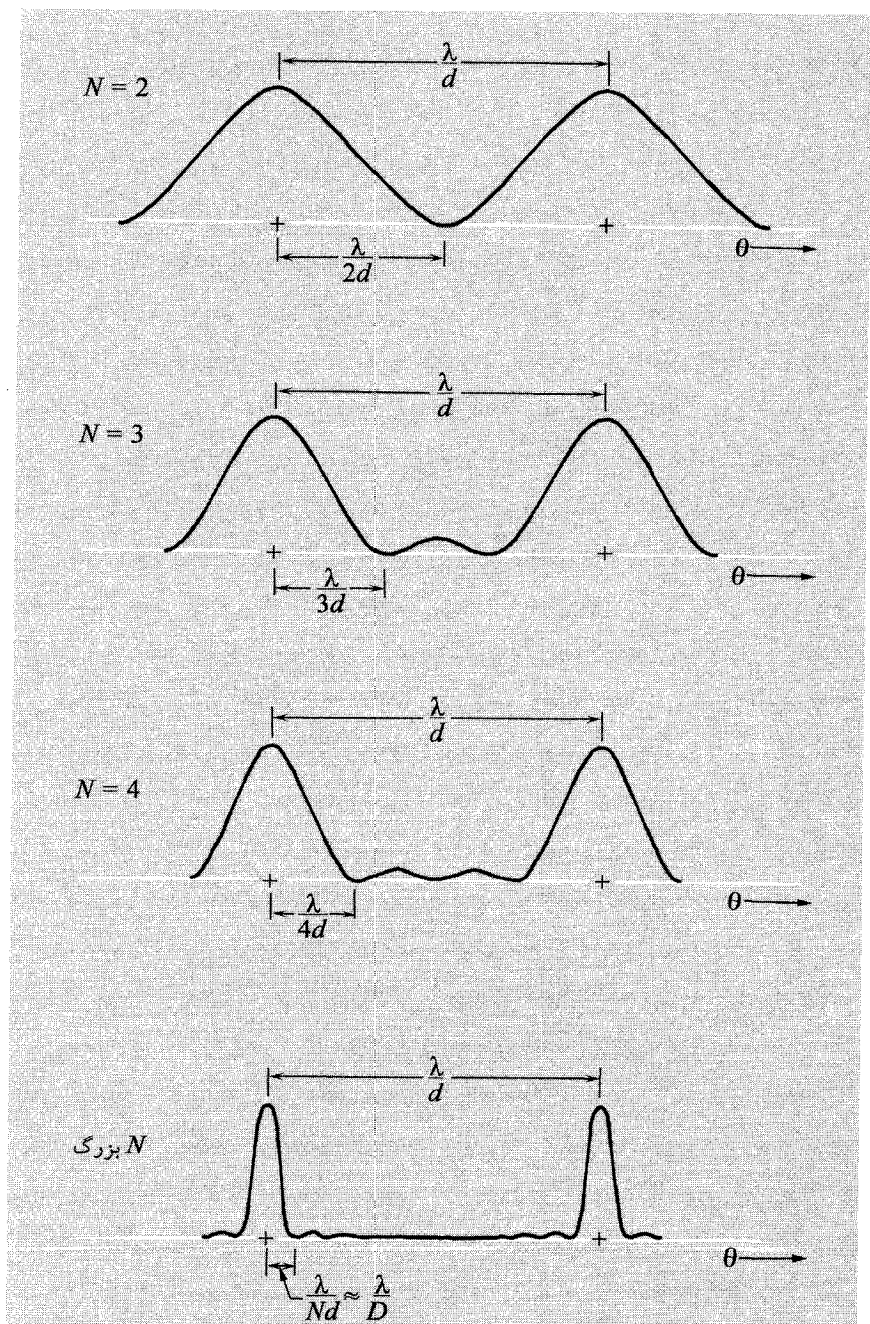
هنگامی که x به صفر میل می‌کند، حد این کسر را $\pm N = (-1)^{N+1} N$ به دست می‌آوریم. پهنای زاویه‌ای یک بیشینه اصلی. با افزایش N ، پهنای زاویه‌ای بیشینه‌های اصلی کاهش می‌یابد. بررسی معادله (۷۹) نیم‌پهنای زاویه‌ای از یک بیشینه اصلی به اولین صفر در هریک از طرفین بیشینه را به دست می‌دهد. در یک بیشینه اصلی، هم صورت و هم مخرج کسر صفر هستند. هنگامی که جمله $\frac{1}{\varepsilon} N \Delta\varphi$ در تابع سینوسی، در صورت معادله (۷۹)، به اندازه π افزایش می‌یابد، صورت کسر دوباره صفر می‌شود. (در این هنگام مخرج کسر، دیگر صفر نیست.) بنابراین با حرکت از یک بیشینه اصلی به اولین مکانی در طرفین بیشینه، که دامنه صفر است، بازه فازی $\Delta\varphi$ به میزان $2\pi/N$ افزایش پیدا می‌کند. یعنی اختلاف مسیر $d \sin \theta$ ، با حرکت از یک بیشینه اصلی به اولین مکانی در طرفین بیشینه، که دامنه صفر است، به اندازه λ/N زیاد می‌شود. از طرفی می‌دانیم که اختلاف مسیر بین دو بیشینه اصلی مجاور λ است. بنابراین مشاهده می‌کنیم که در فاصله‌ای برحسب $\sin \theta$ که N بار باریکتر است از فاصله λ/d برحسب $\sin \theta$ که مابین دو بیشینه اصلی موجود است، دامنه از بیشینه خود به صفر تقلیل می‌یابد.

به ازای N بزرگ و یا N زوج (خواه بزرگ یا کوچک)، به سادگی می‌توان مشاهده کرد که چرا اولین صفر (پهلوی یک بیشینه اصلی) جایی است که اختلاف مسیر $d \sin \theta$ به میزان λ/N است. فرض کنید شش آنتن وجود دارد. اولین صفر جایی است که بتوان سه آنتن اول را با سه آنتن آخر به صورت "خنثی‌کننده" جفت کرد، به شکلی که ۱ به وسیله ۴، ۲ به وسیله ۵ و ۳ به وسیله ۶ خنثی شود. این اثر خنثی‌کنندگی هنگامی است که اختلاف مسیر مابین آنتنهای ۱ و ۴، ۲ و ۵، ۳ و ۶ است (و به همین شکل برای جفتهای دیگر). بدین ترتیب ۱ و ۲ دارای اختلاف

مسیر $\lambda/6$ هستند که همان λ/N است. وقتی N فرد باشد، این استدلال کاربردی ندارد، زیرا آنتنها را نمی‌توان، به صورت خشی‌کننده، جفت جفت در نظر گرفت. در این مورد، ساده‌ترین روش برای به دست آوردن این نتیجه از راه “بصری”، به جای جبری، آن است که نمودار برداری دامنه‌ها را در صفحه مختلط رسم کنیم. آن وقت به سادگی مشخص می‌شود که N دامنه مختلط به یکدیگر متصل می‌شوند تا یک چندضلعی بسته را بسازند و بدین ترتیب هنگامی که $\Delta\varphi$ برابر با $2\pi/N$ است، دامنه کل برابر صفر است. (مسئله ۹-۵۲ را ببینید.) در شکل ۹-۱۶ نشان می‌دهیم که چگونه طرح تداخلی، هنگامی که فاصله شکافها، d ، ثابت نگه داشته می‌شود، به N وابسته است.

باریک‌شدگی بیشینه اصلی را هنگامی که N از ۲ به ۳ افزایش می‌یابد، می‌توانید با آزمایش زیر نشان دهید: یا تیغ، سه شکاف در ورقه‌ای آلومینیومی که به یک تیغه چسبانده شده است، به وجود آورید. دو تا از شکافها را بلندتر از سومی بسازید تا بتوانید با کمی جابه‌جا کردن تیغه در مقابل یک چشم، از دوشکافی به سه شکافی بروید. پس از کمی سعی می‌توانید (من توانستم) سه شکاف خوب بسازید که با فاصله‌های یکسان d کمتر از ۵ mm، از یکدیگر قرار دارند. (هر دفعه که شکافها را به وجود می‌آورید، تیغه را در مقابل نور قرار دهید و آن را با زرسی کنید. استفاده از ذره‌بین معمولی ارزان که بزرگنمایی $2\times$ یا $3\times$ دارد ممکن است سودمند باشد.) هنگامی که به چشمه خطی از پشت دوشکافی نگاه می‌کنید، نواحی روشن کمی بهتر از نواحی “سیاه” که آنها را از هم جدا می‌کند، به نظر می‌رسد. وقتی از پشت سه شکافی نگاه می‌کنید، نواحی روشن باریکتر از نواحی سیاه مابین به نظر می‌آیند. البته، اگر شکافهای یکنواخت و با فواصل تقریباً یکسان از هم نداشته باشید، طرحهایی را مشاهده می‌کنید که با آنچه بیان کردیم متفاوت هستند.

توری پراش از نوع عبوری. به جای N آنتن یا N شکاف در پرده کدر، ممکن است N خراش موازی روی تکه‌ای شیشه یا پلاستیک هموار به پهنای D داشته باشیم. اگر خراشی وجود نداشت، نور، باعث پیدایش طرح تداخلی مربوط به یک تک‌شکافی پهن به پهنای D می‌شد. خراشها به مانند، “آنتن”هایی عمل می‌کنند. آنها طرح تداخلی N “خراشی” را به دست می‌دهند، که به استثنای یک نکته، همان طرحی است که برای N شکاف به دست آوردیم. در بیشینه مرکزی (در صفر درجه)، نه تنها سهم خراشها را داریم بلکه تمام قسمتهای شفاف میان خراشها نیز سهم می‌شوند. بنابراین انتظار داریم که بیشینه مرکزی به مراتب روشنتر از بیشینه‌های اصلی دیگر باشد. یک چشمه خطی نور تکفام از پشت توری پراش، در هر بیشینه اصلی دارای طرح شدتی (یعنی نمودار شدت برحسب زاویه) همانند طرح شدت بیشینه‌های اصلی تک شکافی شکل ۹-۱۴ (ب) است.



شکل ۹-۱۶ طرح تداخلی چندشکافی. دو تا از بیشینه‌های اصلی نشان داده شده‌اند. زاویه‌ها کوچک فرض شده‌اند تا $\theta = \sin \theta$ باشد. برای N بزرگ، هر بیشینه اصلی به شکل طرح پراش تک‌شکافی است که در شکل ۹-۱۴ (ب) نشان داده شده است.

توری پراش موجود در جعبه وسایل اپتیک شما دقیقاً همین ساختار را دارد — این توری پراش دارای 1340° خراش در هر اینچ است، یعنی $d = 190 \times 10^{-2} \text{ cm}$ یا 19μ . برای نور سبز با طول موج 550° \AA ، یعنی 55μ ، انتظار دارید چند بیشینه اصلی بیابید؟ برطبق معادله (۸۱)، بیشینه‌های اصلی به‌ازای مقادیر $\sin \theta$ برابر با صفر، λ/d و غیره رخ می‌دهند. البته $\sin \theta$ ممکن نیست بزرگتر از ۱ شود. برای توری پراش ما، به‌ازای 55μ ، $\lambda = 55 \mu$ داریم $d \approx 358 \mu$. بنابراین اگر $\sin \theta = (m\lambda/d)$ ، می‌توانیم m برابر با صفر، ± 1 ، ± 2 و ± 3 داشته باشیم، اما ± 4 ممکن نیست. حال از پشت توری پراش به یک لامپ نگاه کنید. لامپ که “درست در مقابل” قرار دارد، بیشینه مرکزی است. در $\theta = 0^\circ$ تمام رنگها روی هم قرار دارند. رگه‌های رنگی در اطراف، تصاویر رنگی لامپ در زوایای $d \sin \theta$ برابر λ برای مرتبه اول، برابر 2λ برای مرتبه دوم و غیره هستند. آیا هر سه مرتبه را مشاهده می‌کنید؟ (اگر مرتبه چهارم را هم می‌بینید، یک جای کار اشکال دارد.) اگر می‌خواهید رنگهای لامپ التهابی را، آن‌گونه که واقعاً هستند، ببینید، نباید از یک لامپ بزرگ استفاده کنید، به‌خاطر اینکه اندازه لامپ باعث می‌شود تا همپوشی “لامپهای رنگین” مختلف حاصل شود. یا شکافی عمودی و باریک در مقابل لامپ قرار دهید (و توری را چنان نگاه دارید تا رنگها را به‌طور افقی پراکنده کند) و یا از آن بهتر، یک لامپ ویترون تهیه کنید. (این لامپها، حبابی شفاف دارند و رشته آنها مستقیم است و حدود هفت سانتیمتر طول دارد.)

اگر (مثلاً) طول موج نور سبز را بدانید، 550° \AA ، به سادگی می‌توانید d را برای توری خود اندازه بگیرید. فقط کافی است به لامپ نگاه کنید و زاویه (یا سینوس و یا تانژانت زاویه) بین بیشینه مرکزی و “سبز” را اندازه بگیرید. این کار را می‌توانید به کمک دست و بازوی خود و یا خط‌کشی که در فاصله دست درازشده شما قرار دارد، درحالی‌که توری درست جلوی یکی از چشمان شماست، انجام دهید. سپس از معادله (۸۱) استفاده کنید. آیا رابطه $d \approx 358 \mu$ را به دست می‌آورید؟ برای تحقیق و بررسی بیشتر ویژگیهای توری خود، به آزمایشهای خانگی رجوع کنید.

پراش توسط مانعی کدر. در شکل ۹-۱۲ چشمه نقطه‌ای، S را به همراه پرده‌ای کدر که از قسمتهای a ، b و 1 تشکیل می‌شد نشان دادیم. میدان (صفر) پشت پرده به‌صورت برهم‌نهی آنها در نظر گرفته شد: $E_S + E_a + E_b + E_1 = 0$. هنگامی که درپوش 1 برداشته شد، میدان مساوی با $E_S + E_a + E_b$ به مانند هنگامی که درپوش در جای خود قرار داشت، در نظر گرفته شد، یعنی $E_1 -$ (قبل از برداشتن درپوش). بدین ترتیب، روش هویگنس برای یافتن طرح پراش از پرده‌ای که دارای روزنه‌ای به شکل درپوش است (یعنی هنگامی که درپوش برداشته شده است) به دست آمد. حال می‌خواهیم ببینیم اگر درپوش را در جای خود قرار دهیم و بقیه پرده را برداریم چه می‌شود. در این صورت طرح تداخلی مانعی کدر را خواهیم داشت.

قبل از اینکه چیزی از جایش برداشته شود داریم $E_S + E_a + E_b + E_1 = 0$. حال a و b را بردارید و فرض کنید که حرکت الکترونها در درپوش ۱ (یعنی مانع کدر) بدون تغییر باقی بماند. (این یک تقریب است، چون این الکترونها هم توسط امواج ناشی از الکترونها موجود در a و b و هم توسط امواج ناشی از S ، تحریک می‌شوند.) میدان پشت درپوش، در این صورت، $E_S + E_1$ است. در ناحیهٔ نزدیک پشت درپوش (“نزدیک” را به زودی تعریف خواهیم کرد)، میدان باید اساساً چنان باشد که به هنگام وجود تمام پرده بود. این به خاطر آن است که، نواحی a و b ، حتی آن وقت هم به نسبت دور بودند (در مقایسه با درپوش ۱) و در مقایسه با $E_S + E_1$ ، سهم کوچکی داشتند. بنابراین میدان الکتریکی موجود در ناحیهٔ نزدیک پشت درپوش باید اساساً صفر باشد. این “سایه” درپوش است. عامل آن چنین است که در نقطه‌ای که در ناحیهٔ نزدیک پشت پرده قرار دارد، میدان (که صفر است)، اساساً به خاطر وجود S و ذرات باردار در آن نزدیکی است، که در حالت موردنظر در درپوش ۱ وجود دارند. بنابراین در ناحیهٔ نزدیک پشت پرده E_1 با E_S برهم‌نهدی معادل با صفر دارد. بنابراین درپوش ۱، “قسمتی از یک موج تخت” را گسیل می‌کند که هم جهت است با موج تخت فرودی از چشمهٔ S ، که در دوردست واقع است، با دامنه‌ای یکسان با دامنهٔ موج تخت حاصل از S و با فازی که 180° درجه با موج تخت S اختلاف دارد، تا نتیجهٔ برهم‌نهدی $E_S + E_1$ صفر شود. سایه، بدین طریق به وجود می‌آید. مانع کدر نور فرودی را “نمی‌خورد”؛ بلکه در جهت روبه‌جلو باریکه‌ای با “دامنهٔ منفی” (یعنی، نسبت به نور فرودی، منفی) گسیل می‌کند که با موج فرودی ترکیب می‌شود و حاصل آن است که میدان در ناحیهٔ نزدیک پشت مانع صفر می‌شود.

سایه، تا چه حد در پشت پرده ادامه دارد؟ البته، درپوش یک موج تخت تمام و کمال گسیل نمی‌کند که “دامنه‌ای منفی” داشته باشد، زیرا عرض (یا قطر) درپوش، D ، مقداری متناهی است. در عوض باریکه‌ای گسیل می‌کند که جهت آن مانند جهت موج تخت E_S است، اما با پهنای زاویه‌ای پاشندگی — محدودشده‌ای که در جهت موج دارای تمام پهنای زاویه‌ای $\Delta\theta \approx \lambda/D$ است. هنگامی که این باریکه به اندازهٔ L از پرده (یا درپوش) دور شده است، درجهت عرضی (عمود بر جهت انتشار)، به میزان W گسترده شده است، $W \approx L\Delta\theta \approx L(\lambda/D)$. با گسترده شدن باریکه، دامنه‌اش طبیعتاً کم می‌شود. (هر بار نقطه‌ای موجود در درپوش سهمی دارد که متناسب با عکس فاصله کم می‌شود. همچنین، فرض کنید که درپوش به تنهایی تابش می‌کند؛ همین‌طور که انرژی تابشی از فضای بزرگتری پخش می‌شود، دامنه‌اش در هر نقطه باید کاهش یابد.) فقط هنگامی که دامنهٔ میدان الکتریکی آن مساوی (و مخالف در علامت) با دامنهٔ موج تخت E_S باشد، می‌تواند E_S را خنثی کند و نتیجهٔ صفر به دست دهد. بنابراین پس از طی مسافتی کافی

”روبه جلو“، سایه بالاخره ناپدید می شود. به طور تقریبی، می توانیم بگوییم که ”دامنه منفی“ نوری که از دیووش واداشته گسیل می شود، هنگامی که عرض گستردگی پراش باریکه دو برابر شده است، به میزان قابل توجهی ضعیف می شود. بدین ترتیب ”فاصله مرزی“ تقریبی L به دست می آید که در آنجا $D \approx W$. اما چون $L \approx (\lambda/D)W$ ، داریم

$$L \cdot \lambda \approx D^2 \quad (۸۴)$$

بنابراین به ازای $L \ll L$ ، انتظار داریم که سایه‌ای خوب و تاریک پشت مانع وجود داشته باشد، مگر در نزدیکی لبه‌هایش (که در آنجا فرض اینکه E_1 با برداشتن a و b بدون تغییر باقی می ماند، اصلاً معتبر نیست). به ازای $L \gg L$ ، انتظار می رود که مشکل بتوان اثر مانع را مشاهده کرد، زیرا سهم میدان الکتریکی آن در مقایسه با سهم موج تخت E_S ، کوچک است. برای آشکارسازی آسان آن می توان از اطلاعات مستقیم مثلاً یک عدسی سود جست. موج تخت E_S به صورت لکه کوچکی بر روی صفحه کانونی، متمرکز می شود، اندازه این لکه با عبارت عدسی $f\lambda/D$ داده می شود، که در آن عدسی D ، قطر عدسی و f فاصله کانونی عدسی است. نور دامنه - منفی که از مانع می آید تصویری به عرض $f\lambda/D$ می دهد. اگر عدسی D از اندازه مانع، D ، بسیار بزرگتر باشد، لکه روشن حاصل از موج تخت فقط ناحیه کوچکی از مرکز تصویر را می پوشاند.

برای بررسی طرحهای پراش مانعها می توانید از یک چراغ قوه به عنوان چشمه نقطه‌ای استفاده کنید (عدسی چراغ قوه را بردارید و سطوح بازتابی را ببوشانید)، و به عنوان مانع، از سنجاق و مو استفاده کنید. یکی از شگفت‌انگیزترین نتایج، ”لکه روشنی“ است که در مرکز سایه مشاهده می کنید، هنگامی که در حد مسافتهای $L \gg L$ هستید. به آزمایش خانگی ۹-۳۴ رجوع کنید. معادله (۸۴) را با امواجی غیر از امواج نور هم می توان به بوتۀ آزمایش گذاشت. می توانید این کار را با قراردادن مانعی در مسیر باریکه‌ای از موج انتشاری سطح آب، در ظرف مولد موج و یا وان حمام، انجام دهید. ”سایه“ به ازای $L \ll L$ کاملاً مشخص است و به ازای $L \gg L$ ناپدید می شود. به آزمایش خانگی ۹-۲۹ رجوع کنید.

۹-۷ اپتیک هندسی

”اپتیک هندسی“ به مبحثی گفته می شود که به بررسی چگونگی رفتار باریکه‌های نور در دستگاههای اپتیکی (که شامل سطوح مختلف بازتابی و شکنده می شوند) می پردازد و در تقریبی که استفاده می کند، فقط جهت اصلی باریکه‌ها را در نظر می گیرد و از پاشیدگی باریکه‌ها به خاطر پراش صرف نظر می کند. (”اپتیک فیزیکی“ نامی است که گاهی به مبحثی گفته می شود که ماهیت موجی

نور را مطالعه می‌کند و بنابراین شامل تداخل و پراش هم می‌شود. "قوانین" اولیه اپتیک هندسی عبارت‌اند از قانون بازتاب آینه‌ای و قانون شکست اسنل. البته هر دو اینها در واقع از ماهیت موجی نور ناشی می‌شوند؛ هر یک حاصل تداخل سازنده خاصی است.

بازتاب آینه‌ای. هر وقت یک موج تخت بر روی سطح صاف و هموار جسمی فرود آید، بازتاب آینه‌ای رخ می‌دهد؛ به این معنی که (الف) پرتو بازتابی وجود دارد و در صفحه فرودی واقع است (صفحه فرودی به وسیله پرتوی فرودی و عمود بر سطح تشکیل می‌شود)، و (ب) زاویه بازتاب با زاویه فرود برابر است (هر دو زاویه نسبت به خط عمود بر سطح اندازه‌گیری می‌شوند).

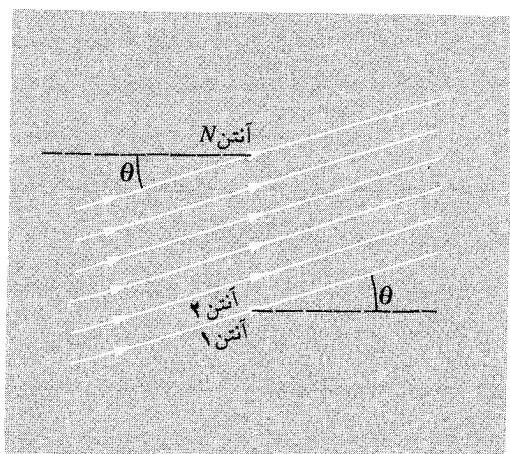
بازتاب آینه‌ای ناشی از تداخل سازنده است. الکترونهاي جسم به وسیله موج فرودی تحریک می‌شوند. آنها بازتابش انجام می‌دهند. پرتوی بازتابی در حالت بازتاب آینه‌ای یکی از دو جهت پیشینه تداخل سازنده است.

ساده‌ترین راه درک این مطلب در نظر گرفتن آرایه خطی آنتنهاست، که با آنها آشنایی کامل داریم. ابتدا پیشینه مرکزی تداخلی را در نظر بگیرید. به سادگی دیده می‌شود که این پیشینه در جهت انتشار باریکه فرودی قرار دارد؛ آنتن ۱ (برحسب فاز) جلوتر از آنتن ۲ تحریک می‌شود و بنابراین نسبت به آنتن ۲ به همان میزان جلوتر تابش می‌کند. در نقطه‌ای واقع در دوردست، P ، اگر جهت تابش آنتنها همان جهت انتشار موج فرودی باشد، تابش آنتهای ۱ تا N کاملاً همفاز خواهند بود؛ یک قله موج آنتن ۱ باید نسبت به قله موج آنتن N مسافت بیشتری را طی کند، اما دقیقاً به همان میزان هم زودتر حرکت کرده است.

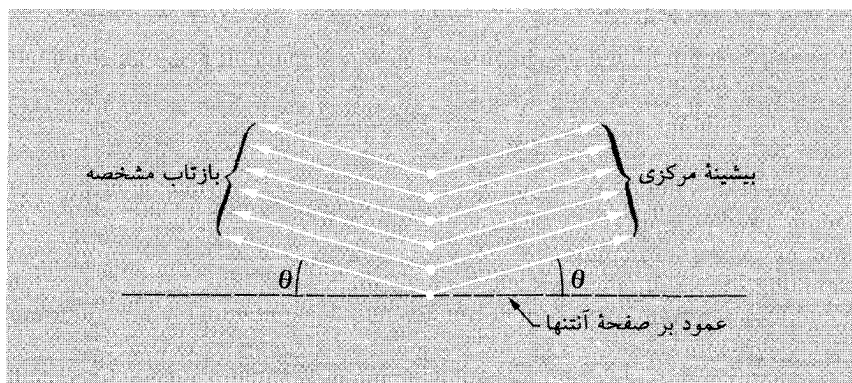
از تقارن آرایه آنتنها، واضح است که آنتهایی که به مانند شکل ۹-۱۷ تحریک می‌شوند نه تنها پیشینه‌ای مرکزی "در طرف راست" (شکل) به وجود می‌آورند، بلکه پیشینه مرکزی متناظری "در طرف چپ" نیز دارند. این پیشینه سمت چپ که "تصویر" پیشینه سمت راست است همان تابش بازتاب آینه‌ای است. از شکل ۹-۱۸ می‌بینیم که زاویه بازتاب با زاویه فرودی برابر است.

بازتاب آینه‌ای از هر سطح صاف و هموار، حاصل تداخل سازنده به طریقی کاملاً مشابه با آنچه در مورد آنتهای نزدیک به هم رخ می‌دهد، است.

بازتاب غیر آینه‌ای از آرایه منظم. پیشینه مرکزی و پیشینه بازتاب آینه‌ای تنها پیشینه‌های تداخلی که توسط آرایه آنتهای شکل ۹-۱۷ و ۹-۱۸ به وجود می‌آیند، نیستند. علاوه بر این پیشینه‌های از مرتبه "صفرم" برای عبور و بازتاب، برای جهاتی که اختلاف مسیر آنها، تا آشکارساز، نسبت به آنتهای مجاور به اندازه مضرب صحیحی از طول موج بیشتر (یا کمتر) از اختلاف مسیر برای پیشینه مرتبه صفرم است هم پیشینه‌هایی وجود دارد. طرح تداخلی امواج عبوری (که در



شکل ۹-۱۷ آرایه‌ای از آنتن‌ها که توسط موج تخت با زاویه فرودی غیر 90° درجه تحریک می‌شود. خط چین عمود بر صفحه آنتن‌ها را مشخص می‌کند. پیکان‌ها جهت انتشار را مشخص می‌کنند. زاویه فرودی θ است.

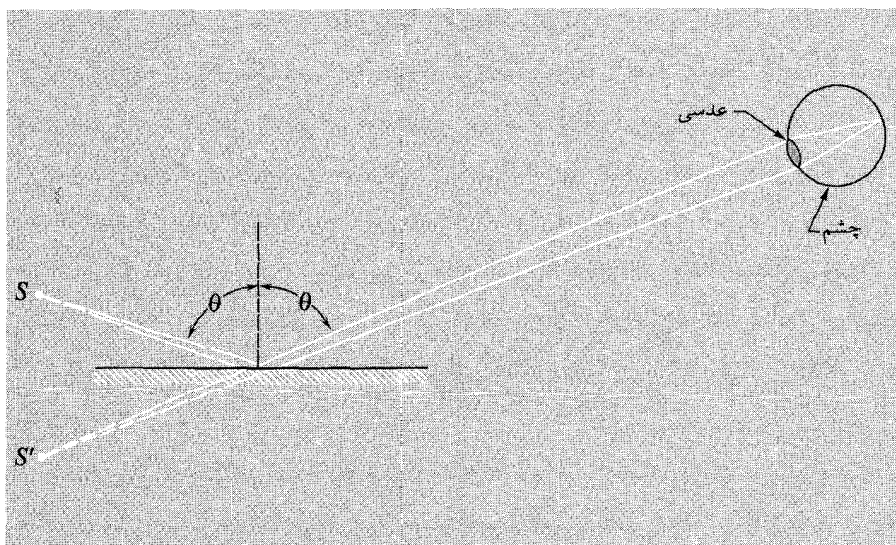


شکل ۹-۱۸ جهت‌های بیشینه‌های تداخلی آنتنهایی که با روابط فازی شکل ۹-۱۷ تحریک شده‌اند.

شکل ۹-۱۸ به سمت راست حرکت می‌کنند، همان طرح تداخلی توری پراش عبوری N شکافی است که نور فرودی بر آن عمود نیست. البته، طرح تداخلی امواج بازتابیده به مانند طرح تداخلی امواج عبوری است، به استثنای این نکته که مرتبه صفرم موج بازتابیده (بازتاب آینه‌ای) به روشنی مرتبه صفرم موج عبوری (بیشینه مرکزی) نخواهد بود. وجود طرح تداخلی برای نور بازتابیده از آرایه منظم را می‌توانید تحقیق کنید؛ از توری پراش عبوری موجود در جعبه وسایل اپتیکی خود به عنوان توری بازتابی استفاده کنید، به این معنی که آن را نزدیک یک چشم نگه دارید و از پشت آن به

بازتاب چشمه‌ای نقطه‌ای بنگرید. بازتاب (آینه‌ای) مرتبهٔ صفرم را به سادگی می‌توان تشخیص داد، زیرا "سفید" است. بیشینه‌های بازتابی از مرتبهٔ غیر صفرم به مانند بیشینه‌های عبوری، در همان زاویه‌های فرودی غیر عمود هستند.

اگر فاصلهٔ مابین آنتنهای مجاور کمتر از یک طول موج باشد، تنها جهات مربوط به تداخل کاملاً سازنده، جهات بیشینه‌های مرتبهٔ صفرم است، یعنی جهت بیشینهٔ مرکزی و جهت بازتاب آینه‌ای. در مبحث اپتیک هندسی و ابزارهای اپتیکی، معمولاً نور مرئی تابیده شده بر روی شیشه یا سطوح فلزی مورد نظر است. آن وقت، "آنتنهای تحریک شده" آتمهای سطح هستند که به فاصلهٔ 10^{-8} سانتیمتر از هم قرار دارند. بنابراین، برای نور مرئی با طول موج 5×10^{-5} cm، فقط بیشینهٔ مرتبهٔ صفرم حاصل می‌شود. (برای پرتو x با طول موج کمتر از 10^{-8} cm که از سطح تک‌بلور بازتاب می‌شود، بیشینه‌های مرتبه‌های بالاتر نیز مشاهده می‌شوند.) از آنجایی که فقط با ابزارهای اپتیکی که از نور مرئی استفاده می‌کنند، سروکار خواهیم داشت، از این پس فرض می‌کنیم که فقط بازتاب آینه‌ای موجود است. تصویر چشمهٔ نقطه‌ای در آینه — چشمهٔ مجازی و چشمهٔ حقیقی. سطوح همفاز در تابش ناشی از چشمهٔ نقطه‌ای کروی هستند. ناحیه‌ای بر روی یکی از این سطوح کروی که به قدر کافی کوچک باشد را می‌توان تقریباً مسطح گرفت و می‌توانیم موج (تقریباً) تخت تابشی را که از این ناحیهٔ کوچک می‌گذرد، پرتو بنامیم. در شکل ۹-۱۹، چشمهٔ نقطه‌ای S نشان داده شده است که



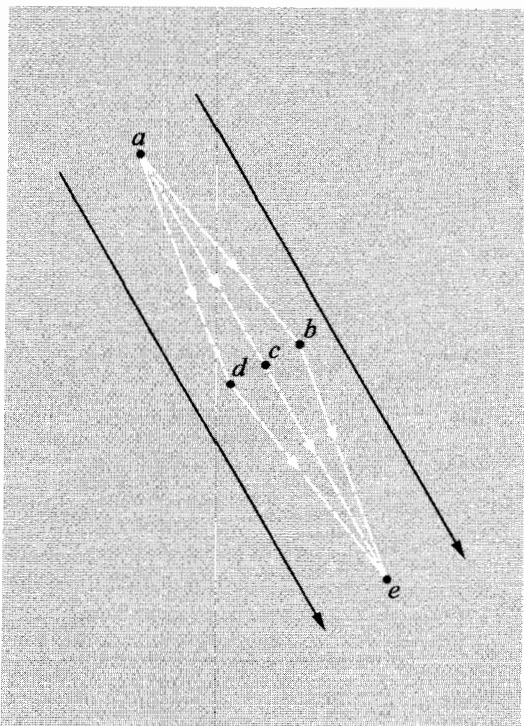
شکل ۹-۱۹ تصویر مجازی نقطه‌ای S' از چشمهٔ نقطه‌ای حقیقی S در آینهٔ تخت.

از طریق آینه‌ای آن را مشاهده می‌کنیم. تابشی که به دریچه عدسی (مردمک) چشم وارد می‌شود را به عنوان "دسته‌ای از پرتوها" قلمداد می‌کنیم. دو تا از این پرتوها در شکل ۹-۱۹ نشان داده شده‌اند. هر پرتو شرایط بازتاب آینه‌ای را دارد. نوری که به درون چشم وارد می‌شود، در ظاهر، از چشمه نقطه‌ای S' که پشت آینه قرار دارد می‌آید. چشمه نقطه‌ای S' چشمه مجازی نامیده می‌شود، زیرا چشمه واقعی تابشی در نقطه S' وجود ندارد. (چشمه S ، چشمه حقیقی نامیده می‌شود.)

شکست - قانون اسنل - اصل فرما. تاکنون از دو راه قانون اسنل را به دست آورده‌ایم. یکی از این راهها از روش ساده هندسی سود جست (بخش ۴-۳). راه دیگر از این نکته استفاده کرد که تعداد قله‌های موج در واحد طول در امتداد مرز دو ناحیه در دو طرف مرز یکسان است. (بخش ۷-۲). هر دو راه از امواج تخت استفاده کردند. از آنجایی که در اپتیک هندسی همواره از پرتوها استفاده می‌شود، یعنی از باریکه‌های نور به جای امواج تخت، اینک راه سوم را ارائه می‌دهیم که از باریکه پراشی محدود شده به جای موج تخت استفاده می‌کند. پخش شدگی باریکه ناشی از پراش برای ما مهم نیست و آن را نشان نخواهیم داد.

ابتدا، باریکه‌ای را در نظر بگیرید که در تکه‌ای از شیشه همگن با ضریب شکست n ، همان‌طور که در شکل ۹-۲ نشان داده شده است، انتشار می‌یابد. اتم a را وسط باریکه در نظر بگیرید. باریکه آن را تحریک می‌کند. این اتم در تمام جهات تابش می‌کند. تابش آن به تحریک شدن اتمهای b ، c و d کمک می‌کند. تابش آنها برهم نهاده می‌شود، تا به تحریک اتم e (که آن هم در مرکز باریکه است) کمک کند. همان‌طور که می‌دانیم، باریکه حاصل تداخل سازنده است. این بدان معنی است که برای b و d که به قدر کافی نزدیک به c در طرفین آن قرار دارند، هر سه اتم b ، c و d با فاز تقریباً یکسان در e نقش بازی می‌کنند، زیرا همگی توسط a تحریک شده‌اند. به عبارت دیگر، زمان انتشار امواج با سرعت فاز c/n از a تا b تا e ، a تا c تا e و a تا d تا e می‌بایست همگی تقریباً برابر باشد، با این شرط که a ، c و e همگی در امتداد مسیر پرتو قرار داشته باشند و اینکه b و d به قدر کافی به c نزدیک باشند. در غیر این صورت، تابش ناشی از اتمهای تحریک شده متفاوت برهم‌نهدی را باعث نمی‌شود که باریکه را در اثر تداخلی سازنده باقی نگه دارد.

همان‌طور که از شکل ۹-۲۰ معلوم است، اگر a ، c و e در امتداد پرتو باشند، طول مسیرهای همسایه، یعنی abe و ade اندکی از طول مسیر c بیشتر است. با ذکر اینکه آنها تقریباً برابر با ace هستند، آنچه در نظر داریم این است که اگر (برای مثال) b به میزان اندک x در جهت عرضی

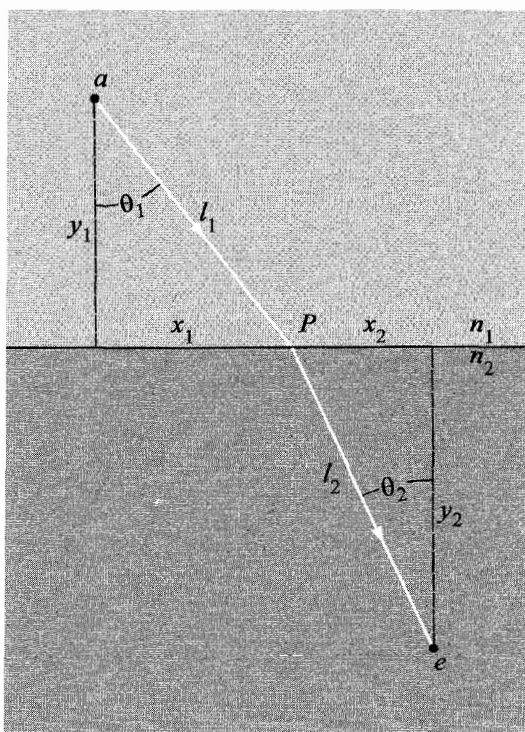


شکل ۹-۲۰ باریکه نور که در شیشه انتشار دارد. یکانها در امتداد جهت انتشار هستند و عرض باریکه را مشخص می‌کنند. نقاط a, b, c, d و e اتمهای شیشه هستند.

نسبت به c فاصله داشته باشد، در آن صورت مسیر abe از مسیر ace به اندازه‌ای که متناسب با مربع کمیت کوچک x است، طولانیتر است و نه به اندازه‌ای متناسب با توان اول x . بنابراین، در بسط تیلور طول مسیر برحسب پارامتر x ، مشتق اول صفر است (این همان جمله‌ای است که اثر x را به طور خطی وارد می‌کند).

در واقع این زمان انتشار است که مهم است و نه اختلاف مسیر. بنابراین اصل مطرح این است که باریکه نور در امتداد مسیری انتشار می‌یابد که مشتق زمان انتشار نسبت به x صفر باشد؛ در اینجا x پارامتری است که برای مسیر باریکه (مثل \overline{ace}) صفر است و برای مسیرهای مجاور (مثل \overline{abe} یا \overline{ade}) صفر نیست. این شرط بیان‌کننده آن است که زمان انتشار در امتداد باریکه فرین است. این را اصل حداقل زمانی فرما، و یا به طور خلاصه اصل فرما گویند.

اینک با استفاده از اصل فرما قانون اسنل را به دست می‌آوریم. در شکل ۹-۲۱ اتم a در محیط ۱ و اتم e در محیط ۲ نشان داده شده‌اند (آنها مشابه با اتمهای a و e در شکل ۹-۲۰



شکل ۹-۲۱ شکست. طول مسیر نوری $n_1 l_1 + n_2 l_2$ ، به مکان نقطه P جفت شده است و با تغییر آن، تغییر می‌کند. با تغییر مکان P به شکلی که مطابق با اصل فرما طول مسیر نوری را کمینه کند، مسیر اصلی پرتو نور را از a تا e می‌توان به دست آورد. در آن صورت aPe در امتداد بیشینه تداخلی است و مشابه با شکل ۹-۲۰ است.

هستند). نقطه تلاقی باریکه با سطح مشترک دو محیط با علامت P نشان داده شده است، و متغیر است. مسیر aPe دارای قسمت aP است که زمان انتشار در طول آن $t_1 = l_1 n_1 / c$ است و قسمت Pe که زمان انتشار در طول آن $t_2 = l_2 n_2 / c$ است. مسافت‌های ct_1 و ct_2 ، مسیرهای اپتیکی با طول‌های $n_1 l_1$ و $n_2 l_2$ نامیده می‌شوند. کل طول مسیر اپتیکی کمینه است اگر کل زمان سپری شده کمینه باشد. بنابراین می‌خواهیم مکان نقطه P را چنان بیابیم که

$$\text{کمینه} \equiv n_1 l_1 + n_2 l_2 = \text{طول مسیر اپتیکی} \quad (۸۵)$$

از شکل ۹-۲۱ داریم

$$\text{طول مسیر اپتیکی} = n_1 (y_1^2 + x_1^2)^{1/2} + n_2 (y_2^2 + x_2^2)^{1/2} \quad (۸۶)$$

حال فرض کنید P نسبت به وضعیتِ (فعلاً ناشناخته) خود که طول مسیر اپتیکی را کمینه می‌کند، به اندازه بسیار ناچیزی جابه‌جا شود. فرض کنید (طول مسیر اپتیکی) d تغییر در طول مسیر اپتیکی به خاطر این جابه‌جایی باشد. برای یافتن (طول مسیر اپتیکی) d از معادله (۸۶) مشتق می‌گیریم. تنها متغیرها x_1 و x_2 هستند، زیرا P بر روی سطح مشترک در محیط باقی می‌ماند. البته، مجموع x_1 و x_2 ثابت است. (زیرا اتمهای a و e ثابت هستند)، بنابراین به هنگام جابه‌جایی P ، dx_2 منهای dx_1 است. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} d(\text{طول مسیر اپتیکی}) &= n_1 dl_1 + n_2 dl_2 \\ &= n_1 d(y_1^2 + x_1^2)^{1/2} + n_2 d(y_2^2 + x_2^2)^{1/2} \\ &= \frac{n_1 x_1 dx_1}{(y_1^2 + x_1^2)^{1/2}} + \frac{n_2 x_2 dx_2}{(y_2^2 + x_2^2)^{1/2}} \\ &= \frac{n_1 x_1}{l_1} dx_1 + \frac{n_2 x_2}{l_2} (-dx_1) \end{aligned} \quad (87)$$

در نوشتن معادله (۸۷) از جملات مرتبه بالاتر شامل dx_1^2 ، dx_2^2 ، و غیره صرف‌نظر کرده‌ایم. حال فرض می‌کنیم P چنان قرار دارد که \overline{aPe} در امتداد باریکه است، در این صورت مرتبه اول تغییرات طول مسیر اپتیکی نسبت به x_1 ، برطبق اصل فرما، صفر است. پس، معادله (۸۷) چنین نتیجه می‌دهد که

$$d(\text{طول مسیر اپتیکی}) = 0 = \left[\frac{n_1 x_1}{l_1} - \frac{n_2 x_2}{l_2} \right] dx_1$$

یعنی

$$n_1 \frac{x_1}{l_1} = n_2 \frac{x_2}{l_2}$$

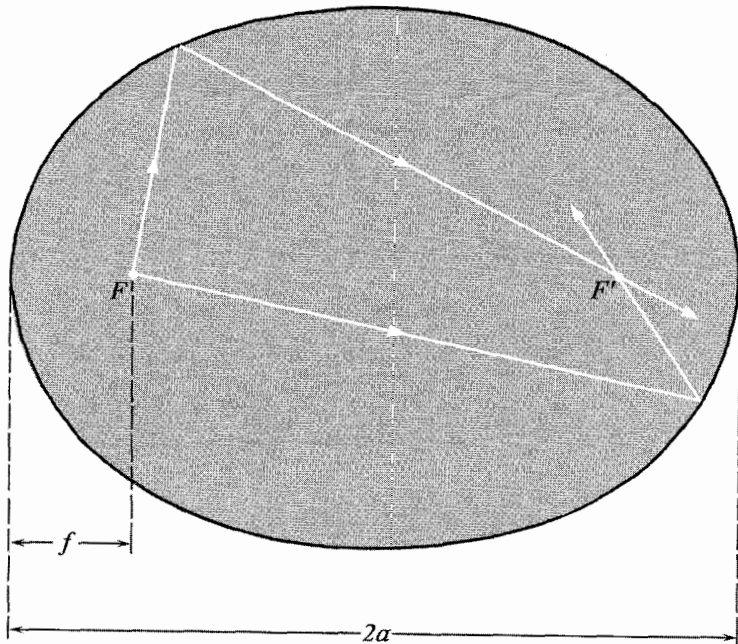
و یا

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (88)$$

که همان قانون اسنل است.

اینک، چند ابزار اپتیکی بنیادی را در نظر می‌گیریم.

آینه بیضوی. در شکل ۹-۲۲، حجم توخالی بیضوی را می‌بینیم که از دوران یک بیضی به حول محور FF' (که نقاط کانونی را به هم متصل می‌کند) حاصل شده است. سطح داخلی این حجم بیضوی آینه را تشکیل می‌دهد؛ یک چشمه نقطه‌ای در F ، یکی از دو کانون اصلی، قرار دارد. برطبق تعریف بیضی، فاصله F تا F' برای تمام مسیرها (غیر از مسیر مستقیم که بازتابی از

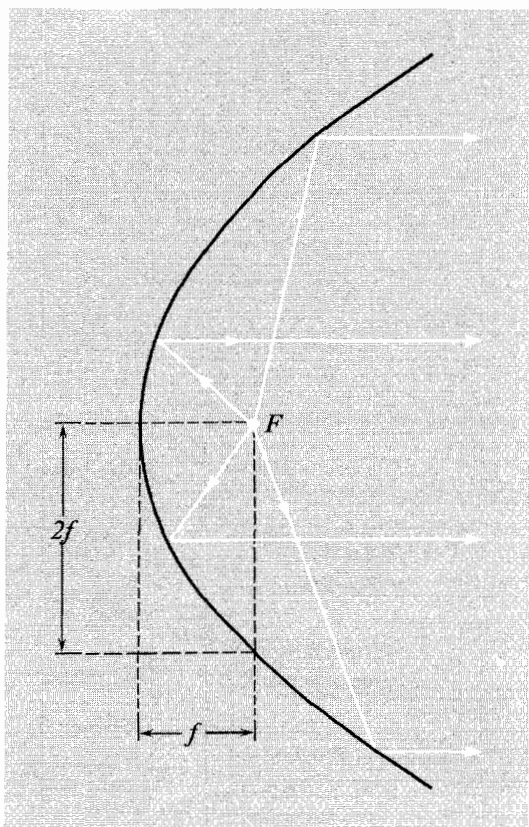


شکل ۹-۲۲ آینه بیضوی.

سطح آینه را مشخص نمی‌کند) مقداری ثابت است. بنابراین کانون F' ناحیه تداخل کاملاً سازنده تابشی است از الکترونهاى سطح آینه که به وسیله تابش حاصل از F' تحریک شده‌اند. می‌گوییم که چشمه واقع در F' ، در نقطه F'' تصویر شده است.

تصویر در نقطه F'' یک نقطه نیست، فاز میدان حاصل در نقطه‌ای داخل کره‌ای به شعاع تقریباً $\lambda/4$ به مرکز F'' در حدود $\pm\pi$ با فاز میدان در F' متفاوت است. بنابراین، اندازه تخمینی تصویر در F'' ، اندازه همین کره است.

آینه سهموی مقعر. فرض کنید، کانون F و فاصله کانونی f برای آینه بیضوی شکل ۹-۲۲ ثابت نگه داشته شوند، اما نقطه کانونی F' به سمت راست حرکت داده شود؛ بیضی "کش می‌آید". اگر F' به میزان بینهایت زیادی به سمت راست حرکت داده شود، بیضی به سهمی مبدل می‌شود. در این صورت، پرتوهای گسیل شده از F' باریکه‌ای متشکل از پرتوهای موازی را می‌سازند (برای اینکه هنوز هم در F'' جمع می‌شوند، منتهی F'' بینهایت دور است). این وضعیت در شکل ۹-۲۳ نشان داده شده است. اگر آینه سهموی دارای قطر D باشد، چشمه نقطه‌ای واقع در F' دیگر باریکه‌ای متشکل از



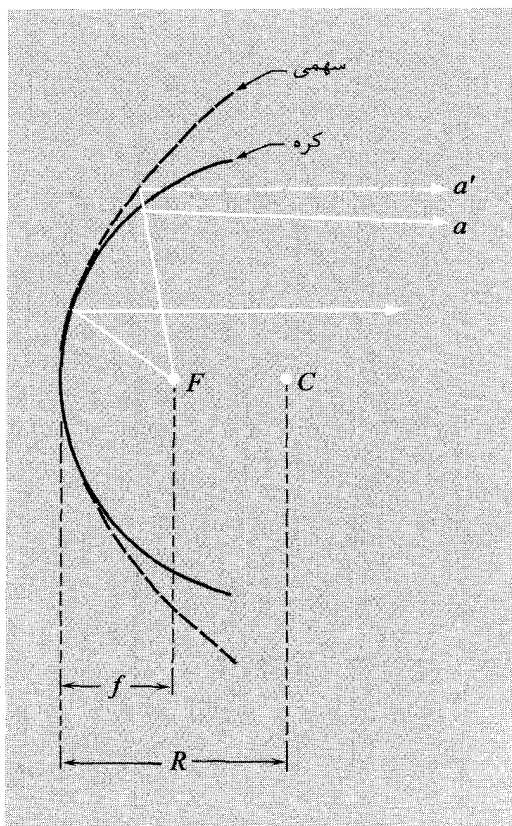
شکل ۹-۲۳ آینه سهموی مقعر.

پرتوهای کاملاً موازی را نمی‌سازد. پهنای زاویه‌ای بیشینه تداخلی $\Delta\theta \approx \lambda/D$ است. اگر D “بینهایت” باشد، موج تخت کاملی از چشمه نقطه‌ای حاصل می‌شود.

بالعکس، موج تخت فرودی (با زاویه فرود کاملاً مشخص) در صورتی تصویر نقطه‌ای در F تشکیل می‌دهد که D بینهایت باشد. تصویر دارای پهنای $f\lambda/D \approx f\Delta\theta \approx \Delta x$ است.

آینه کروی مقعر. اگر کره‌ای در رأس سهموی قرار داده شود، به گونه‌ای که در آن نقطه مماس با سطح سهموی باشد و دارای شعاع انحناى سطح سهموی در آن نقطه باشد، کره را “نشانه” در رأس سطح سهموی نامند. به دست آوردن این نتیجه که شعاع چنین کره‌ای $2f$ است، کار دشواری نیست. شکل ۹-۲۴ را ببینید.

ابیراهی کروی. اگر کره نشانه شده (به معنای فوق) در رأس سطح سهموی را در نظر بگیریم و دریچه‌ای به قطر $2f \ll D$ را در رأس سطح سهموی فرض کنیم، آینه کروی



شکل ۹-۲۴ آینه کروی مقعر ("در تماس" با آینه سهمی مفروض که نسبت به آن نشانده شده است). مرکز کره در C قرار دارد، شعاع کره $۲f$ است. پرتوی a بازتابیده از کره موازی با محور نیست؛ پرتوی a' بازتابیده از سطح سهمی به موازات محور است. این نمایشی از ابیراهی کروی است.

را در داخل این دریچه اساساً "در تماس" با سطح سهمی می‌یابیم. بدین ترتیب چشمه نقطه‌ای واقع در F باریکه‌ای تقریباً موازی به وجود می‌آورد. برای دریچه‌های بزرگتر، انحراف سطح کروی از سطح سهمی باعث پیدایش "ابیراهی کروی" می‌شود. شکل ۹-۲۴ را ببینید.

برای کسب تجربه با آینه‌های مقعر می‌توانید یک آینه ارزان قیمت مخصوص اصلاح صورت بخرید و تصویر (مثلاً) شعله شمع یا صورت خود را ببینید.^۱ (قاشق تمیز و براق هم می‌تواند همین

۱. بخشی پیرامون تشکیل شدن تصویر توسط آینه‌های مقعر را در کتاب زیر می‌خوانید:

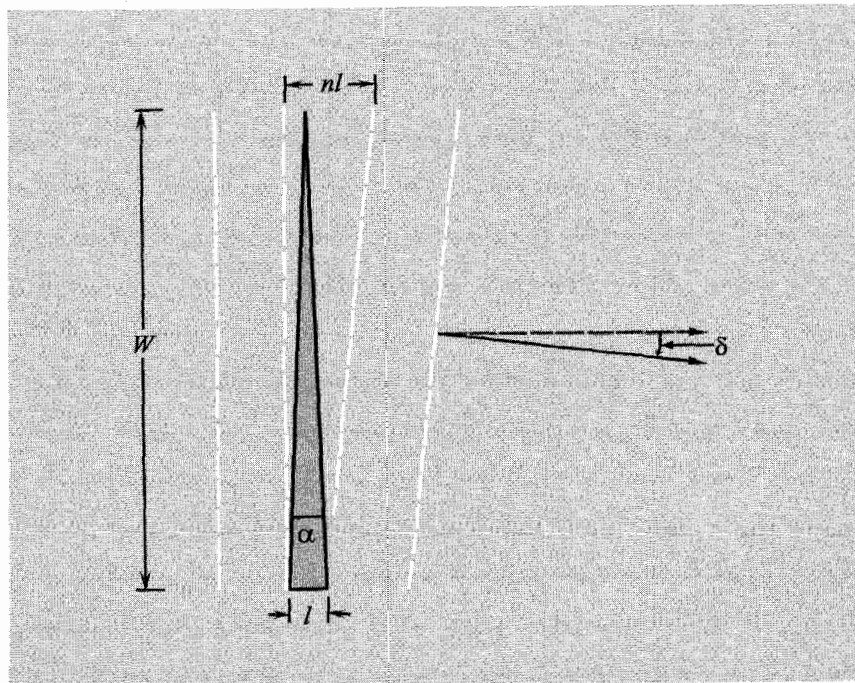
PSSC, *Physics*, 2nd ed. Chap. 12 (D. C. Heath and Company, Boston, 1965).

این کتاب از مجموعه کتابهای کمیته بررسی تدریس علوم طبیعی است.

منظور را فراهم کند.) برای کسب تجربه با آینه‌های محدّب پیشنهاد می‌کنیم از گویهای نقره‌فام که برای تزئین درخت کریسمس به کار می‌روند استفاده کنید. (و یا به پشت قاشق نگاه کنید.) انحراف پرتو نوری که در زاویه فرودی نزدیک قائم بر روی منشور شیشه‌ای نازک می‌تابد. منشور "نازک" منشوری است که زاویه گوه آن، α ، آنقدر کوچک است که می‌توان از تقریب زاویه کوچک $\sin \alpha \approx \alpha$ و $\cos \alpha \approx 1$ استفاده کرد. وقتی زاویه فرودی نزدیک قائم است، می‌توانیم برای زاویه فرود هم از تقریب زاویه کوچک استفاده کنیم. بدین ترتیب موج تخت تکفام که با زاویه نزدیک قائم فرود می‌آید با زاویه δ

$$\delta = (n - 1)\alpha \quad (۸۹)$$

"به طرف قاعده منشور" منحرف می‌شود. زاویه انحراف δ مقدار ثابتی است که تا وقتی که زاویه فرود نزدیک قائم بماند، مستقل از زاویه فرود است. معادله (۸۹) را می‌توان به سادگی به دست آورد (شکل ۹-۲۵ را ببینید): در قاعده منشور، جبهه‌های موج مسافت l را با سرعت c/n



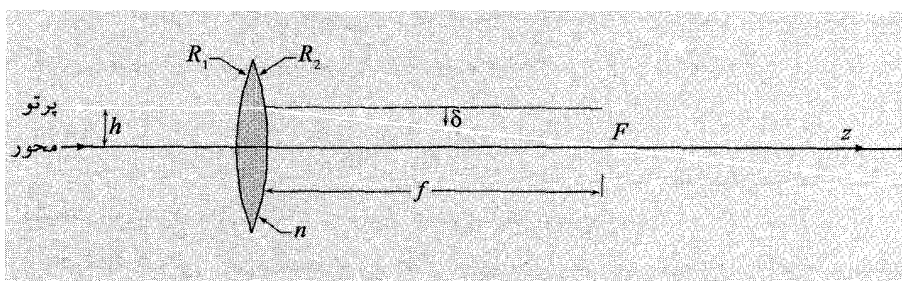
شکل ۹-۲۵ انحراف از یک منشور نازک.

می‌پیمایند. در رأس، سرعت n برابر بیشتر است (چون که ضخامت منشور در آنجا صفر است)، و بدین ترتیب همان جبهه‌های موج در همان زمان مسافت nl را طی می‌کنند. بنابراین جبهه موج در سمت رأس منشور به میزان $l(n-1)$ جلوتر است. این فاصله تقسیم بر عرض منشور W (به‌ازای زاویه‌های کوچک)، زاویه انحراف δ را که با معادله (۸۹) داده می‌شود، به‌دست می‌دهد،

$$\delta = (n-1)(l/W) = (n-1)\alpha$$

پاشندگی رنگها در منشور. به‌عنوان مثالی از منشور نازک، فرض کنید $n = ۱.۵$ و $\alpha = ۳^\circ$ درجه باشد (در این زاویه هم، هنوز تقریب زاویه کوچک برای مقاصد ما خیلی بد نیست). در این صورت برطبق معادله (۸۹) زاویه انحراف ۱۵ درجه است. این زاویه در واقع، زاویه انحراف میانگین است، زیرا در شیشه معمولی با ضریب شکست میانگین ۱.۵ ، نور آبی با طول موج ۴۵۰μ ضریب شکستی دارد که به‌اندازه ۱.۰۱ از ضریب شکست نور قرمز با طول موج ۶۵۰μ بیشتر است. بنابراین نور آبی به میزان تقریباً ۱α درجه بیشتر از نور قرمز منحرف می‌شود. برای $\alpha = ۳^\circ$ ، آبی تقریباً ۳ درجه بیشتر از قرمز منحرف می‌شود. برحسب رادیان، از آنجایی که ۳° درجه تقریباً نیم‌رادیان است (۱ رادیان $= ۵۷.۳^\circ$)، انحراف آبی تقریباً $\frac{1}{19}$ رادیان بیشتر از انحراف قرمز است. بر روی پرده‌ای که یک متر پشت منشور ۳° درجه قرار دارد، آبی به‌اندازه ۵ سانتیمتر از قرمز جدا شده است. طیف‌سنج منشوری از همین خاصیت پاشندگی شیشه منشور برای تجزیه و تحلیل طیفها استفاده می‌کند. در ابزارهای اپتیکی که از عدسیهای شیشه‌ای استفاده می‌کنند، پاشندگی منجر به ابیراهی رنگی — یعنی پرتوهای نور با رنگهای متفاوت در یک مکان متمرکز نمی‌شوند. در تلسکوپ، می‌توان با استفاده از آینه سهموی، به‌جای عدسی، نور را متمرکز کرد و از ابیراهی رنگی پرهیز کرد. (قانون بازتاب آینه‌ای برای همه رنگها صادق است.) همچنین می‌توان ابیراهی رنگی را با استفاده از دو نوع شیشه با خاصیت‌های پاشندگی متفاوت، از بین برد. مسئله ۹-۵۳ را ببینید.

متمرکز کردن پرتوهای نوری نزدیک محور با عدسی نازک. فرض کنید یک عدسی شیشه‌ای در هوا داریم که دو سطح کروی محدب آن عمود بر محور تقارن آنها z است. پرتو نور که از طرف چپ به عدسی می‌خورد، به موازات محور تقارن و در فاصله $h = y$ از آن حرکت می‌کند. اگر عدسی نازک باشد، (طبق تعریف) از تغییرات y که به هنگام عبور پرتو نور از عدسی رخ می‌دهد صرف‌نظر می‌کنیم. همچنین از ضخامت عدسی در مقایسه با فاصله کانونی آن صرف‌نظر می‌کنیم. در نظر گرفتن پرتوهای نوری "نزدیک محوری" به این معنی است که h در مقایسه با شعاع انحنای دو سطح کوچک انتخاب می‌شود، تا بتوان از تقریب زاویه کوچک برای زاویه‌های مورد نظر استفاده کرد.



شکل ۹-۲۶ عدسی نازک. پرتو فرودی موازی با محور.

ابتدا نقطه کانونی، F ، را می‌یابیم، یعنی مکانی که پرتو نور فرودی به موازات محور تقارن پس از منحرف شدن به وسیله عدسی محور تقارن را قطع می‌کند، همان‌طور که در شکل ۹-۲۶ داده شده است. مشاهده می‌کنیم که اگر پرتو فرودی در نقطه F متمرکز شود، می‌باید با زاویه کوچک

$$\delta = \frac{h}{f} \quad (90)$$

منحرف شده باشد.

شرط لازم برای وجود نقطه کانونی. بنابراین شرط لازم برای وجود نقطه کانونی مشترک برای همه پرتوهای موازی نزدیک محوری، آن است که انحراف با فاصله h پرتو نوری از محور بستگی خطی داشته باشد. بنابراین اگر معادله (90) به ازای هر h (با فرض انحراف زاویه کوچک) برقرار باشد، همه پرتوهای موازی در فاصله f پشت عدسی متمرکز یا کانونی می‌شوند. این شرایط برای هر مسئله کانونی کردن مشابهی هم صادق است، مثلاً برای کانونی کردن باریکه‌ای از ذرات باردار توسط عدسیهای مغناطیسی. حال باید ببینیم آیا برای عدسی نازک، معادله (90) با f مستقل از h برقرار است یا خیر. به طریق ذیل این مطلب را روشن می‌کنیم: تا آنجایی که به پرتو نوری شکل ۹-۲۶ مربوط می‌شود، این پرتو ممکن بود توسط منشور نازکی هم منحرف شود. سطح اول نسبت به قائم در زاویه h/R_1 قرار دارد (و پرتو نور به این سطح که با چنین زاویه‌ای مایل شده است برخورد می‌کند). سطح دوم نسبت به قائم در زاویه h/R_2 قرار گرفته است منتهی در جهت عکس (یعنی سطح اول به جلو متمایل است و سطح دوم به عقب). بنابراین به طور معادل زاویه منشور $hR_1^{-1} + hR_2^{-1}$ است. به همین شکل زاویه انحراف معادل، δ ، برای منشور نازک $(n-1)\alpha$ است و داریم

$$\delta = (n-1)h(R_1^{-1} + R_2^{-1}) \quad (91)$$

رابطه موسوم به فرمول عدسی سازها. مشاهده می‌کنیم که معادله (۹۱) شرط وجود نقطه کانونی را داراست. یعنی δ متناسب با h است. فاصله کانونی، f ، با (معادله ۹۰)

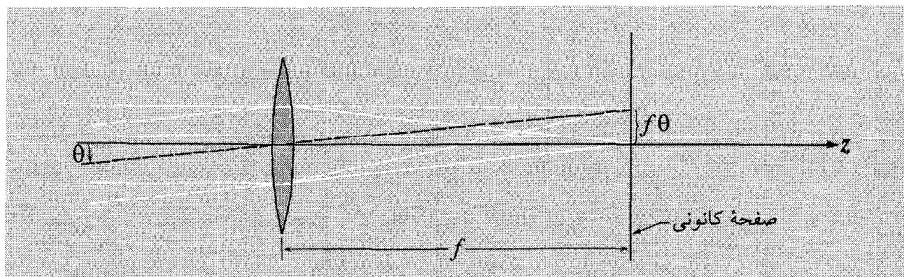
$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (92)$$

مشخص می‌شود. معادله (۹۲) به فرمول عدسی سازها موسوم است.

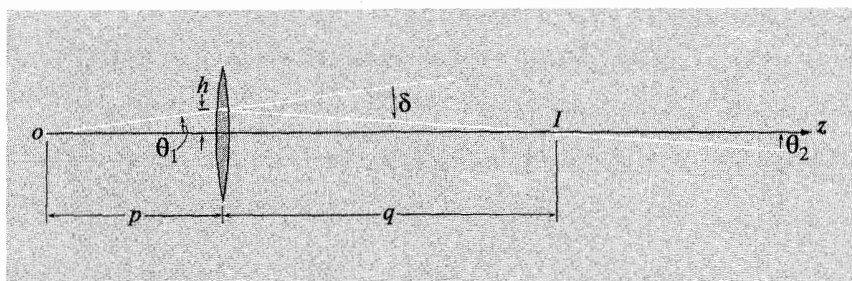
صفحه کانونی. حال دسته‌ای از پرتوهای موازی را در نظر بگیرید که به جای اینکه به موازات محور تقارن باشند، زاویه θ با محور می‌سازند. انحراف ناشی از وجود منشور نازک (به ازای زاویه‌های کوچک) مستقل از زاویه فرود است. بنابراین پرتوی از نور که در فاصله h از مرکز عدسی به عدسی برخورد می‌کند به میزان $\delta = h/f$ منحرف می‌شود، و این مستقل از زاویه فرود است. این به آن معنی است که هر دسته موازی در نقطه‌ای به فاصله $f\theta$ از محور عدسی، بر روی صفحه‌ای، به نام صفحه کانونی، که در فاصله f پشت عدسی قرار دارد، کانونی می‌شود. صفحه کانونی و جابه‌جایی عرضی $f\theta$ بر روی آن، در شکل ۹-۲۷ نشان داده شده‌اند.

تصویر حقیقی نقطه‌ای یک جسم نقطه‌ای. تصویر نقطه‌ای باریکه موازی را به دست آوردیم، یعنی، باریکه‌ای از جسم (یا چشمه) نقطه‌ای که در فاصله بینهایت زیاد در طرف چپ عدسی قرار دارد. اکنون جسم نقطه‌ای o را در فاصله p در طرف چپ عدسی همگرا در نظر می‌گیریم و تصویر آن I را در فاصله q در طرف راست می‌یابیم. فرض می‌کنیم o بر روی محور تقارن باشد، در این صورت I بر روی محور خواهد بود. حال شکل ۹-۲۸ را در نظر بگیرید. از روی شکل واضح است که اگر از برداری که ابتدای آن o است و در جهت \vec{z} قرار دارد شروع کنیم و دورانهای $+\theta_1$ ، $-\delta$ و $+\theta_2$ را انجام دهیم، به محور \vec{z} باز می‌گردیم:

$$\theta_1 - \delta + \theta_2 = 0 \quad (93)$$



شکل ۹-۲۷ صفحه کانونی.



شکل ۹-۲۸ تصویر حقیقی نقطه‌ای یک جسم نقطه‌ای.

فرمول عدسی نازک. اما

$$\delta = \frac{h}{f} \text{ و } \theta_2 = \frac{h}{q}, \theta_1 = \frac{h}{p}$$

 (انحراف همواره h/f است، مستقل از زاویه فرود.) بنابراین معادله (۹۳) چنین نتیجه

می‌دهد که

$$\frac{h}{f} = \frac{h}{p} + \frac{h}{q}$$

به عبارت دیگر،

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}}$$

(۹۴)

معادله (۹۴) را فرمول عدسی نازک نامند.

بزرگنمایی عرضی. زوایای انحراف پرتوها به خاطر وجود عدسی نازک، با چرخش کوچک عدسی به حول محوری که از مرکز عدسی می‌گذرد و بر صفحه شکل ۹-۲۸ عمود است، بدون تغییر باقی می‌مانند. بنابراین پرتو نوری که از جسم نقطه‌ای می‌آید و از مرکز عدسی می‌گذرد همچنان بدون انحراف باقی می‌ماند و پرتو نوری که در فاصله h از مرکز عدسی به آن برخورد می‌کند به میزان h/f منحرف می‌شود. بنابراین نقاطی که جسم و تصویر آن را در شکل ۹-۲۸ مشخص می‌کنند با چرخش جزئی عدسی به حول مرکزش، بدون تغییر باقی می‌مانند. (اما اگر عدسی دستخوش انتقال جزئی عمود بر محورش شود، آنگاه نقطه‌ای که تصویر را مشخص می‌کند انتقال خواهد یافت. مکان جدید آن با استفاده از این مشاهده به دست می‌آید که پرتو که از مرکز عدسی می‌گذرد منحرف نمی‌شود.) به جای اینکه به عدسی دورانی جزئی به حول مرکزش دهیم، فرض کنید که عدسی را ثابت نگه می‌داریم و جسم نقطه‌ای را به طرف بالا عمود بر محور عدسی، کمی انتقال

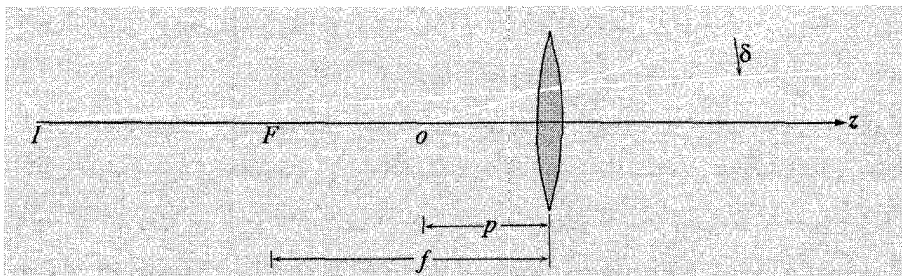
می‌دهیم. در این صورت، تمام نمودار حاوی پرتوهای نوری را می‌توان حول مرکز عدسی دوران داد (زیرا به‌ازای زاویهٔ فرودی نزدیک قائم، انحرافها به زاویهٔ فرود بستگی ندارند). پس مشاهده می‌کنیم که اگر جسم نقطه‌ای به میزان y به طرف بالا انتقال داده شود، تصویر نقطه‌ای آن به اندازه‌ای به طرف پایین منتقل می‌شود که به میزان نسبت "بازوهای اهرم" q و p ، از آن بزرگتر است. این مطلب را با این بیان که بزرگنمایی عرضی $-q/p$ است، ارائه می‌دهند:

$$\text{بزرگنمایی عرضی} = -\frac{q}{p} \quad (۹۵)$$

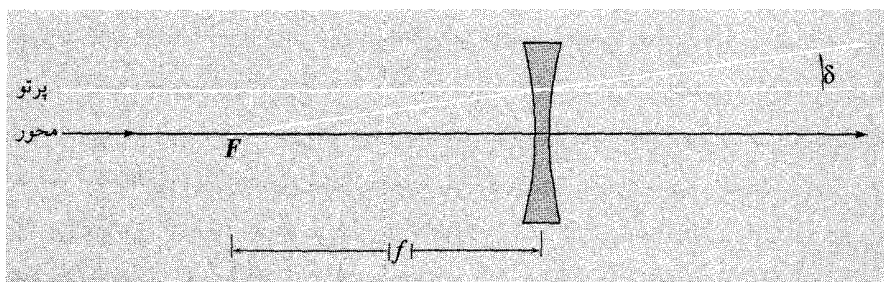
علامت منفی نشانهٔ آن است که اگر جسم نقطه‌ای به سمت بالا رود، تصویر نقطه‌ای آن به سمت پایین می‌رود. اگر جسم متشکل از یک نقطه نباشد، بلکه مثلاً پیکان کوچکی با سر و دم باشد، در آن صورت تصویر جسم را معکوس خواهیم یافت.

عدسی همگرا. عدسی شکل ۹-۲۸ یک عدسی همگراست. جسمی که در فاصله‌ای بیش از فاصلهٔ کانونی f از عدسی همگرا قرار دارد دارای تصویری حقیقی و معکوس است. صفت "حقیقی" به این معنی است که در مکان تصویر واقعاً نور وجود دارد. در مقایسه با آن، تصویر در آینهٔ تخت معمولی "مجازی" است — هیچ نوری آن طرف سطح آینه وجود ندارد.

تصویر مجازی. اگر جسم نقطه‌ای شکل ۹-۲۸ در فاصلهٔ f در طرف چپ عدسی همگرا باشد، انحراف h/f پرتو، نور در فاصلهٔ h از مرکز عدسی دقیقاً چنان است که باریکه‌ای موازی در طرف راست عدسی تشکیل دهد. اگر فاصلهٔ جسم نقطه‌ای تا عدسی کمتر از f باشد، انحراف h/f برای برگرداندن پرتو نور به سمت محور کافی نخواهد بود. بنابراین پرتو نور هرگز محور را قطع نخواهد کرد. بدین ترتیب تصویر حقیقی وجود نخواهد داشت. چنین به نظر می‌رسد که این پرتو نور از نقطه‌ای "مجازی" در طرف چپ عدسی گسیل شده است. به این نقطه تصویر مجازی گفته می‌شود. شکل ۹-۲۹ را ببینید. به‌سادگی می‌توان نشان داد



شکل ۹-۲۹ تصویر مجازی نقطه‌ای جسم نقطه‌ای. فاصلهٔ جسم p کمتر از فاصلهٔ کانونی f است.



شکل ۳۰-۹ عدسیهای واگرا.

(این کار را به شما محول می‌کنیم) که مکان تصویر مجازی هم به وسیله فرمول عدسی نازک، معادله (۹۴)، داده می‌شود، فقط باید مقدار منفی q را به منزله فاصله‌ای به طرف چپ عدسی تلقی کنیم.

عدسی واگرا. اگر قسمت وسط یک عدسی از دو سر عدسی باریکتر باشد، عدسی واگراست (با این فرض که از عدسی شیشه‌ای در هوا صحبت می‌کنیم). اگر به عدسی به عنوان مجموعه‌ای از منشورهای نازک بنگریم (چنانکه در مورد عدسی همگرا انجام دادیم)، آنگاه رأس هر منشور از قاعده‌اش به محور نزدیکتر است. پرتوهای نور چنان منحرف می‌شوند که از محور عدسی دور می‌شوند (برعکس عدسی همگرا پرتوهای نور را به سمت محور منحرف می‌کند). باریکه‌ای موازی که از طرف چپ بر عدسی واگرا فرود می‌آید، به باریکه‌ای واگرا تبدیل می‌شود که ظاهراً از کانون مجازی که در طرف چپ عدسی قرار دارد واگرا می‌شود، چنانکه در شکل ۳۰-۹ نشان داده شده است. به سادگی می‌توان نشان داد (آن را به شما محول می‌کنیم) که همه روابطی که برای عدسیهای همگرا به دست آوردیم را برای عدسیهای واگرا نیز می‌توان به کار بست، فقط می‌بایست تعبیر مناسبی از کمیت‌های منفی به دست داد. بدین ترتیب اگر بگوییم که فاصله کانونی عدسی واگرا منفی است، $f = -|f|$ می‌توانیم از فرمول عدسی نازک استفاده کنیم و رابطه بین فاصله جسم و فاصله تصویر را ارائه دهیم. برای مثال، شکل ۳۰-۹ متناظر است با $p = +\infty$ و $q = -|f|$ در فرمول

$$p^{-1} + q^{-1} = f^{-1}$$

توان عدسی برحسب دیوپتر. عکس فاصله کانونی با یکای عکس متر، توان عدسی برحسب دیوپتر نام دارد. بنابراین توان عدسی همگرا با فاصله کانونی 50 cm ، $+2$ دیوپتر ($+2\text{D}$) است. توان عدسی واگرا با فاصله کانونی 50 cm ، -2D است. عکس فاصله کانونی (یعنی، توان) از خاصیت جالبی برخوردار است، به خاطر اینکه به این معنی خطی است که: اگر بلافاصله پس از یک عدسی

نازک، عدسی نازک دیگری قرار گیرد، توان کل دو عدسی نازک که با هم در تماس هستند برابر با مجموع توانهای آنهاست. به طریق زیر می‌توان به سادگی این مطلب را فهمید. عدسی اول پرتو نور را به میزان h/f_1 به طرف محور منحرف می‌کند، برای عدسی همگرا مثبت و برای عدسی واگرا منفی است. اگر عدسی دوم درست پشت سر عدسی اول چسبیده به آن قرار داشته باشد، پرتو نور نمی‌تواند فاصله عرضی خود h را نسبت به محور مشترک دو عدسی تغییر دهد. بنابراین، با همان فاصله h که بر روی عدسی اول فرود آمده بود، به عدسی دوم هم برخورد می‌کند. بنابراین انحراف ناشی از وجود عدسی دوم h/f_2 است. انحراف کل ناشی از وجود دو عدسی $h/f_1 + h/f_2$ است. این انحرافی است که عدسی معادل آنها با فاصله کانونی f چنانکه $1/f = 1/f_1 + 1/f_2$ باشد، به وجود می‌آورد. بنابراین توان کل و یا کل عکس فاصله کانونی معادل، مجموع توانهای عدسیهاست. البته، اگر بین دو عدسی فاصله‌ای وجود داشته باشد، پرتو نور دیگر در همان فاصله h از محور که به عدسی اول برخورد کرده است، به عدسی دوم برخورد نمی‌کند. بنابراین، توان عدسیهایی که به صورت سری قرار گرفته‌اند فقط وقتی به طور خطی جمع‌پذیر است که بتوان از فاصله بین عدسیهای مجاور صرف‌نظر کرد.

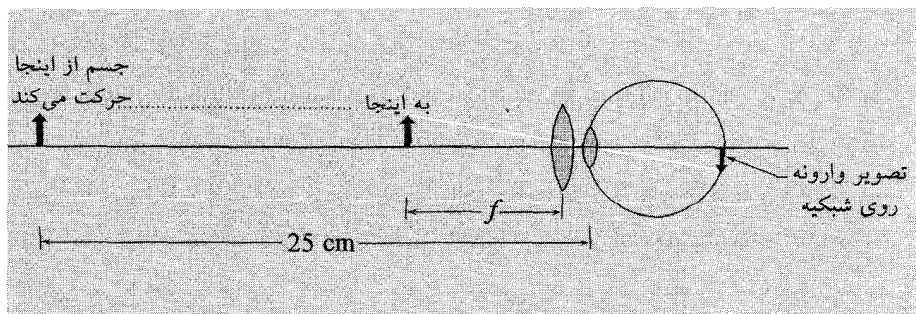
اگر عینک می‌زنید، بهتر است عینک خود را بردارید و توان (تقریبی) هر یک از عدسیها را در هر دو صفحه افقی و عمودی اندازه بگیرید. از چشمه نقطه‌ای خیلی دور (و یا خورشید) استفاده کنید. اگر عدسی، عدسی مثبت باشد، تصویر چشمه را بر روی دیوار یا صفحه کاغذی می‌توانید به دست آورید. آیا فاصله کانونی هر یک از عدسیها در هر دو صفحه یکسان است؟ (اگر آنها متفاوت هستند، عدسی را "آستیگماتیک" می‌نامند، و می‌گویند که چشم شما که با حالت معمول تفاوت دارد، آستیگماتیسیم است.)

فاصله q از عدسی چشم تا شبکیه در حدود 3cm است. برحسب عکس متر (m^{-1})، این مقدار عبارت است از $33m^{-1} = (3m)^{-1} = q^{-1}$ ، یعنی، q^{-1} در حدود 33 عکس متر است. چشمی که به جسمی واقع در دور دست، $p = +\infty$ ، می‌نگرد دارای توان f^{-1} است که با رابطه $33D = 33m^{-1} = q^{-1} + p^{-1} = 0 + 33m^{-1} = f^{-1}$ داده می‌شود. برای اینکه جسمی را که در فاصله $p = 25\text{cm}$ از چشم شما قرار دارد واضح ببینید، ماهیچه‌های متصل به عدسی باید توان عدسی چشم را به اندازه $4D = 4m^{-1} = (25\text{cm})^{-1} = p^{-1}$ بالا برند تا توان عدسی به $37D$ برسد. اگر ماهیچه‌های عدسی چشم شما خوب کار کند، توان عدسی چشم را تا حد تقریباً $10D$ هم می‌توانید افزایش دهید و بدین ترتیب جسمی را که در فاصله چشم را تا حد تقریباً $10\text{cm} = 10D = (10\text{cm})^{-1} = p^{-1}$ قرار دارد هم می‌توانید به وضوح ببینید. در این حالت جسم بزرگتر به نظر می‌آید و جزئیات آن را بهتر می‌توانید ببینید. اگر می‌توانستید جسم را تا 1cm به چشم خود نزدیک کنید و هنوز هم تصویرش را بر روی شبکیه کانونی کنید، جسم 25 برابر بزرگتر از

وقتی که در فاصله ۲۵ سانتیمتری قرار داشت به نظر می‌رسید، و به این ترتیب جزئیاتی از آن را که ۲۵ بار کوچکتر هستند نیز می‌توانستید تمیز دهید. هیچ‌کس چنین توانایی را ندارد.

ذره‌بین ساده. اگر قدرت دید شما در حد معمول باشد، می‌توانید بدون استفاده از عینک و بدون خستگی چشم، جسمی را که در ۲۵ سانتیمتری جلوی چشمان خود نگه داشته‌اید، با دقت ببینید. اگر ارتفاع جسم h سانتیمتر باشد، زاویه $h/25$ رادیان را نسبت به چشم شما دربر می‌گیرد، این به نوبه خود اندازه تصویر را بر روی شبکه مشخص می‌کند. اگر بتوانید جسم را نزدیکتر بباورید، تصویر بزرگتری بر روی شبکه تشکیل خواهد شد. برای حفظ تصویر واضح (یعنی کانونی شده)، ماهیچه‌های متصل به عدسی می‌بایست توان عدسی را افزایش دهند. این کار دشوار است و خستگی چشم را به همراه دارد. اینک از یک عدسی به فاصله کانونی f سانتیمتر استفاده کنید. عدسی را درست در جلوی چشم خود نگه دارید. جسم را نزدیکتر آورید. هنگامی که جسم در صفحه کانونی عدسی قرار دارد، از هر نقطه از جسم پرتوهای نور به عدسی می‌رسد و پس از خارج شدن از عدسی به صورت دسته‌ای موازی از پرتوهای نور وارد چشم شما می‌شوند. در این حالت، چشم شما به سادگی تصویر را کانونی می‌کند — ماهیچه‌های متصل به عدسی کاری انجام نمی‌دهند. این را به عهده شما می‌گذاریم که نشان دهید اندازه زاویه‌ای جسم با ضریب $25/f$ افزایش می‌یابد. (با این فرض که زوایا کوچک هستند تا بتوانید از تقریب زاویه کوچک استفاده کنید). شکل ۹-۳۱ را ببینید. اگر یک عدسی با فاصله کانونی ۲ یا ۳ سانتیمتر را با نوار چسب به تیغه میکروسکوپ بچسبانید، ذره‌بین ارزان‌قیمتی خواهید داشت. (یا یک ذره‌بین ارزان‌قیمت بخرید).

ذره‌بین روزنه‌ای. یک ورق آلومینیم (که در آشپزخانه مصرف دارد) را بردارید و روزنه‌ای به قطر ۵ mm یا کمتر در آن به‌وجود آورید. آن را درست جلوی چشم خود، نزدیک به چشمتان نگه



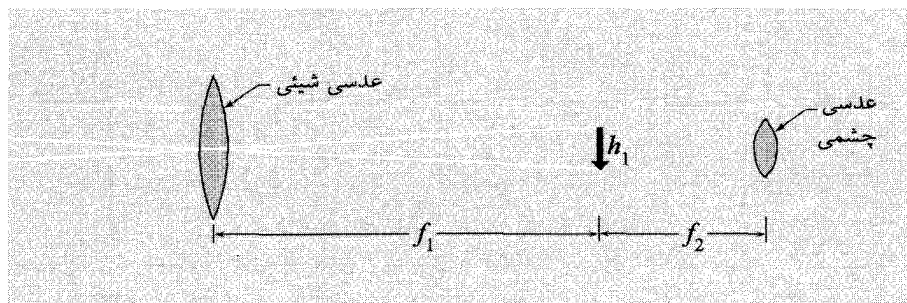
شکل ۹-۳۱ ذره‌بین ساده. توان عدسی چشم به وسیله توان ذره‌بین تکمیل می‌شود. جسم را می‌توان به چشم نزدیکتر کرد و در نتیجه تصویر بزرگتری حاصل می‌شود.

دارید. به یک چشمه نور نگاه کنید. چیزهای "شناوری" که می بینید، طرحهای پیراش زنجیره‌های سلولی در چشم شما هستند. (آنها بر روی سطح نیستند، این موضوع را می‌توانید وقتی با پلک زدن آنها را از بین می‌برید ببینید.) حال از پشت روزنه به نوشته‌های صفحه کاغذی که در نور کافی قرار دارد نگاه کنید. (اگر عینک می‌زنید، آن را بردارید. به عینک احتیاجی ندارد و کمکی هم نمی‌کند.) صفحه کاغذ را بیشتر و بیشتر به چشم خود نزدیک کنید. دقت کنید که کلمه‌ای که به آن نگاه می‌کنید "کانونی" باقی می‌ماند و با نزدیک‌تر شدن به چشم شما بزرگتر می‌شود! (بالاخره تصویر تار می‌شود، برای اینکه روزنه شما به اندازه کافی کوچک نیست.) بزرگنمایی با استفاده از شکلی مانند شکل ۹-۳۱، فقط با نشان دادن روزنه به جای عدسی، به راحتی قابل محاسبه است.

آیا واقعاً اشیاء را سر و ته می‌بینید؟ اینجا روشی را ارائه می‌دهیم تا قانع شوید که تصویر روی شبکه معکوس است. از پشت روزنه خود به چشمه نور گسترده‌ای نگاه کنید. نوک مدادی را جلوی روزنه نگه دارید و به سایه‌اش بر روی شبکه چشمتان نگاه کنید. همه چیز همان‌طور که انتظار می‌رود است. حال ترتیب قرار گرفتن آنها را عوض کنید و نوک مداد را مابین روزنه و چشم خود قرار دهید. مداد را حرکت دهید و به جهت حرکت سایه‌اش توجه کنید! حال شکلی رسم کنید و آنچه رخ داده است را توضیح دهید.

تمرین دادن مردمک چشمها. هنگامی که از پشت روزنه به چشمه گسترده‌ای (مثل آسمان) نگاه می‌کنید، دایره‌ای روشن می‌بینید. این دایره تصویر مردمک چشم شما بر روی شبکه است. برای مطالعه باز و بسته شدن مردمک چشمتان می‌توانید چشم دیگر را، یعنی چشمی را که از پشت روزنه نگاه نمی‌کند، به وسیله شیئی بپوشانید و سپس شیئی را بردارید! هنگامی که شیء را برمی‌دارید تا نور وارد چشم شود، مردمک آن کوچک می‌شود. همین امر برای مردمک چشمی که از پشت روزنه نگاه می‌کند نیز اتفاق می‌افتد! به راحتی می‌توانید این "همداستانی" را در کوچک شدن مردمکها ببینید. توجه کنید که زمانی در حدود ۵ ثانیه لازم است تا به هنگام تغییر ناگهانی شدت نور مردمک بسته یا باز شود.

تلسکوپ. تلسکوپ از دو عدسی تشکیل شده است. عدسی اول، عدسی "شیئی" است، که تصویر حقیقی جسم واقع در دوردست را به وجود می‌آورد. تصویر، با تقریب خوبی، در صفحه کانونی عدسی شیئی قرار دارد. اگر θ اندازه زاویه‌ای جسم دور، و f_1 فاصله کانونی عدسی شیئی باشد، ارتفاع، h_1 ، تصویری که به وسیله عدسی شیئی به وجود می‌آید چنین است، $h_1 = f_1 \theta$. عدسی دوم تلسکوپ، عدسی چشمی نام دارد. عدسی چشمی علی‌الاصول یک ذره بین ساده است که برای مطالعه تصویر حقیقی جسم که به وسیله عدسی شیئی به وجود آمده است، استفاده می‌شود. اگر عدسی چشمی چنان تنظیم شود که تصویری که عدسی شیئی به وجود می‌آورد در

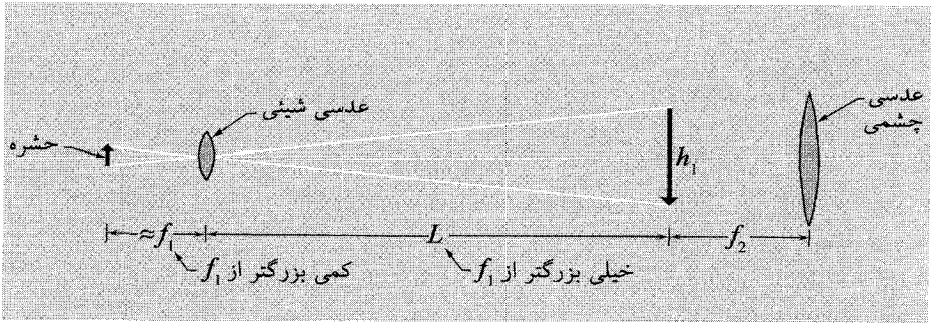


شکل ۹-۳۲ تلسکوپ.

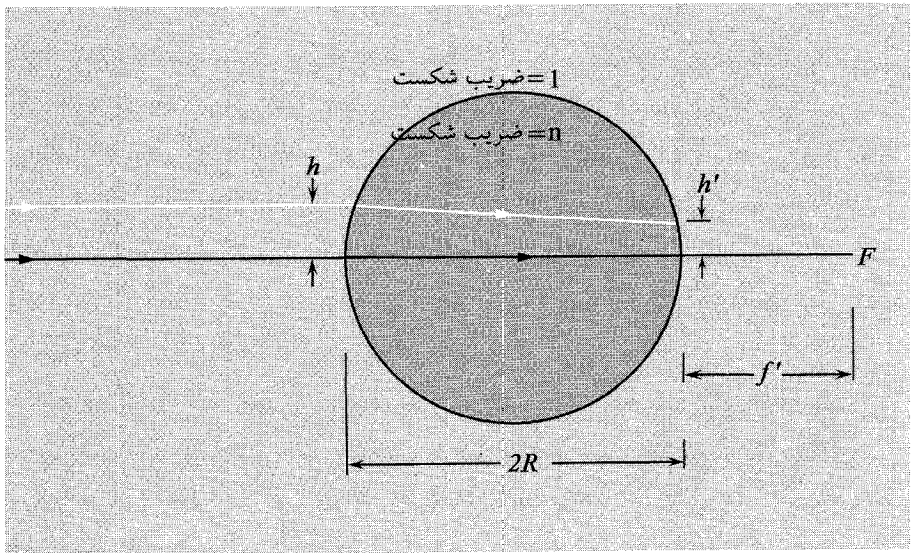
صفحه کانونی عدسی چشمی قرار گیرد، یک نقطه از تصویر باریکه‌ای موازی ایجاد می‌کند که به درون چشم می‌رود. در این صورت ماهیچه‌های متصل به عدسی چشم بی‌کار هستند و چشم در حالت آسوده‌ای است، انگار که، بدون وجود تلسکوپ، به جسمی در دوردست می‌نگرد. اندازه زاویه‌ای تصویر که در مکان عدسی چشمی تصویر را در بر می‌گیرد، در صورتی که ارتفاع آن h_1 باشد، h_1/f_2 است، که در این کسر فاصله کانونی عدسی چشمی است. این مقدار به نسبت $(h_1/f_2) \setminus \theta_0 = (f_1 \theta_0 / f_2) \setminus \theta_0 = f_1/f_2$ از اندازه زاویه‌ای θ_0 بزرگتر است. بدین ترتیب بزرگنمایی زاویه‌ای f_1/f_2 است. شکل ۹-۳۲ را ببینید.

میکروسکوپ. میکروسکوپ هم مانند تلسکوپ است، از این نظر که میکروسکوپ هم دارای عدسی شیئی است که تصویر حقیقی جسم را تشکیل دهد و عدسی چشمی که به وسیله آن، این تصویر را می‌توان مطالعه کرد. حشره‌ای که قرار است مطالعه شود تقریباً (ولی نه دقیقاً) در صفحه کانونی شیئی قرار دارد. تصویر در فاصله زیادی نسبت به شیئی تشکیل می‌شود. برفرض $L \approx 20 \text{ cm}$ این فاصله کم و بیش طول استوانه میکروسکوپ است. حشره‌ای به پهنای x که در فاصله تقریباً f_1 از عدسی شیئی قرار می‌گیرد، تصویری حقیقی به پهنای $h_1 = (L/f_1)x$ به دست می‌دهد. این تصویر در فاصله f_2 از چشمی قرار دارد و نسبت به عدسی چشمی زاویه h_1/f_2 را در بر می‌گیرد. اگر حشره در فاصله ۲۵ سانتیمتری با چشم غیر مسلح مطالعه می‌شد، زاویه $x/25$ را در بر می‌گرفت (x برحسب سانتیمتر). بدین ترتیب بزرگنمایی چنین است $(h_1/f_2) \setminus (x/25) = (25L/f_1 f_2)$. شکل ۹-۳۳ را ببینید.

عدسی ضخیم گروهی یا استوانه‌ای. شیشه شیر بچه نمونه خوبی از عدسی استوانه‌ای است. (شیشه مرتباً را هم توصیه می‌کنیم. مرتباً را بخورید، برحسب شیشه را بکنید و شیشه را از آب یا هر



شکل ۹-۳۳ میکروسکوپ.



شکل ۹-۳۴ مثالی از عدسی "ضخیم". نقطه کانونی F در فاصله f' پشت سطح دوم قرار دارد. ضرایب شکست چنین هستند: هوا = ۱، عدسی = n .

مایع شفاف دیگر پُر کنید. در شکل ۹-۳۴ تشکیل تصویر باریکه موازی نور را در چنین عدسی نشان داده‌ایم.

انحراف ناشی از یک سطح کروی. بیایید پرتوهای موازی نور را که به این عدسی وارد می‌شود، دنبال کنیم. پرتوی از نور که از مرکز کره و یا دایره می‌گذرد دستخوش انحراف نمی‌شود. پرتوی که با فاصله عرضی h از خط مرکزی قرار دارد، به‌ازای $h/R \ll 1$ با زاویه فرودی $\theta_i = h/R$ به سطح کروی برخورد می‌کند. انحراف، δ ، این پرتو پس از عبور از سطح اول برابر است با زاویه فرودی

θ_i منهای زاویه شکست θ_r . به ازای زاویه‌های کوچک قانون اسنل $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ به $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$ تبدیل می‌شود. بدین ترتیب انحراف به سمت قائم در عبور از یک سطح چنین است

$$\begin{aligned} \delta &= \theta_1 - \theta_2 \\ &= \theta_1 \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} \right) \\ &= \theta_1 \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right) \end{aligned} \quad (96)$$

معادله (۹۶) کلی است (به ازای زاویه‌های کوچک) و برای دنبال کردن پرتوهای نور از درون سیستمهای پیچیده مفید است. در مثال حاضر، انحراف در عبور از سطح اول را

$$\delta = \frac{h}{R} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \quad (97)$$

می‌یابیم. اینک پرتو نور را به سوی سطح دوم دنبال می‌کنیم. این پرتو نور به اندازه $2R$ ضربدر انحراف δ به محور نزدیکتر می‌شود. بدین ترتیب وقتی به سطح دوم می‌رسد در فاصله h' از محور قرار دارد

$$h' = h - 2R\delta = h - 2h \left(1 - \frac{1}{n} \right) = n \left(\frac{2}{n} - 1 \right) \quad (98)$$

در عبور از سطح دوم، پرتو نور دوباره به سمت محور منحرف می‌شود. از روی تقارن دایره نسبت به قطاع، انحراف به هنگام عبور از سطح اول با انحراف به هنگام عبور از سطح دوم برابر است. بنابراین، پرتو نور با زاویه 2δ نسبت به محور و با فاصله عرضی h' از سطح دوم عبور می‌کند. این پرتو، در نتیجه، در فاصله f' پشت سطح دوم محور را قطع می‌کند، چنانکه

$$2\delta = \frac{h'}{f'} \quad (99)$$

حاصل معادلات (۹۷)، (۹۸) و (۹۹) چنین است

$$f' = \frac{h'}{2\delta} = \frac{h \left(\frac{2}{n} - 1 \right)}{\frac{2h}{R} \left(1 - \frac{1}{n} \right)} = \frac{R(2-n)}{2(n-1)} \quad (100)$$

با استفاده از معادله (۱۰۰) و یک شیشه مربعی می‌توانید ضریب شکست آب یا (مثلاً) روغن معدنی را به دست آورید. [معادله (۱۰۰) هم برای استوانه و هم برای کره صادق است]. آزمایش خانگی ۹-۴۲ را ببینید.

میکروسکوپ لیوونهوک. اولین میکروسکوپ در جهان یک شیشه کروی کوچک و ساده بود. شما هم می‌توانید یکی بسازید. (هرجا که ابزار و ادوات آزمایشگاههای شیمی به فروش برسد از این شیشه‌های کروی کوچک شفاف بسیار یافت می‌شود. فقط دقت کنید که شفاف باشند نه نیمه شفاف.) طرز کار آن چنین است. کره را درست جلوی چشم خود قرار دهید. حشره‌ای (را که می‌خواهید به آن نگاه کنید) در فاصله کانونی F که در شکل ۹-۳۴ نشان داده شده است، قرار دهید. هر نقطه از حشره باریکه‌ای موازی از نور به درون چشم می‌فرستد. از آنجایی که باریکه موازی است، می‌توانید ماهیچه‌های متصل به عدسی را به حال آسوده خود بگذارید و در عین حال باریکه را در نقطه‌ای بر روی شبکه کانونی کنید. نقطه دیگری از حشره بر روی نقطه دیگری از شبکه کانونی می‌شود. اینک، بزرگنمایی این عدسی را محاسبه کنیم. فرض کنید پهنای حشره حشره x باشد. پرتوهایی که از دو انتهای حشره می‌آیند و از مرکز کره می‌گذرند، منحرف نمی‌شوند. یعنی، اندازه زاویه‌ای حشره، حشره θ ، برابر است با حشره x تقسیم بر فاصله F تا مرکز کره:

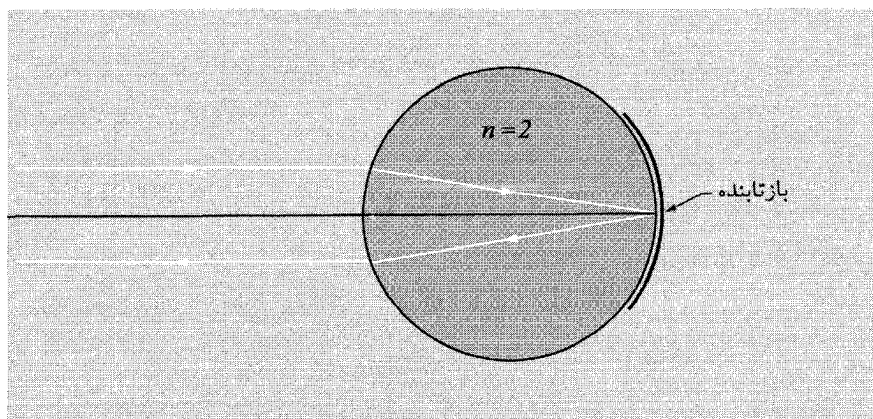
$$\theta_{\text{حشره}} = \frac{x_{\text{حشره}}}{R + f'} \quad (101)$$

این زاویه بین باریکه‌های موازی است که به تصویرهای دو انتهای حشره بر روی شبکه مربوط می‌شود و بدین ترتیب اندازه زاویه‌ای حشره است که با استفاده از میکروسکوپ "می‌بینید". هنگامی که بدون وجود میکروسکوپ به حشره نگاه می‌کنید، باید آن را تقریباً در فاصله ۲۵ سانتیمتری نگه دارید تا به راحتی بتوانید تصویر حشره را بر روی شبکه کانونی کنید. در این حالت اندازه زاویه‌ای حشره $25/x_{\text{حشره}}$ است (x برحسب سانتیمتر). بزرگنمایی زاویه‌ای، M ، در این حالت چنین است

$$M = \frac{25}{R + f'} = \frac{25}{R \left[1 + \frac{1}{f} \left(\frac{f - n}{n - 1} \right) \right]} = \frac{5^\circ \text{ cm}}{R} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \quad (102)$$

بنابراین، مثلاً اگر $R = 1 \text{ mm}$ و $R = 3/2$ (شیشه) $m = 167$ است.

بازتاب‌کننده رو به عقب از جنس اسکاج لایت. اگر $m = 2$ ، برطبق معادله (۹۸)، پرتو نور نزدیک محوری که با فاصله عرضی h به سطح اول می‌خورد و از آن عبور می‌کند، در فاصله $h' = 0$ به سطح دوم شکل ۹-۳۲ برخورد می‌کند. بدین ترتیب، باریکه موازی دقیقاً بر روی سطح دوم کانونی می‌شود. قسمتی از باریکه از سطح دوم عبور می‌کند و قسمتی از آن نیز بازتابیده می‌شود. قسمتی که بازتابیده می‌شود بالاخره با زاویه 180° نسبت به پرتو نوری که به سطح اول وارد شده است، از سطح اول خارج می‌شود، همان‌طور که مطالعه شکل ۹-۳۵ معلوم می‌کند. اگر سطح دوم را با بازتاب‌کننده‌ای نقره‌فام بیوشانیم، قسمت عبوری پرتو نور (از سطح دوم) را می‌توان تا حد زیادی دوباره به داخل شیشه هدایت کرد.



شکل ۳۵-۹ بازگشت رو به عقب نور به وسیله بازتاب کننده اسکاچ لایت در شرایط ایده آل و با ضریب شکست $n = 2$.

بازتاب کننده ای به نام اسکاچ لایت وجود دارد که می توانید از برخی مغازه ها آن را تهیه کنید. از جمله کاربردهایش، در ساخت علامتهای براقی است که در جاده ها می بینید. با یک ذره بین آن را مطالعه کنید. مشاهده کنید که از عده زیادی کره شیشه ای بسیار کوچک که بر روی سطح چسبناک نقره فامی قرار داده شده اند و با رنگ قرمز شفاف (اگر اسکاچ لایت قرمز باشد) و یا چیز دیگری به منظوری دیگر، پوشانده شده است، تشکیل شده است. چنین است که بزرگترین ضریب شکست که به راحتی در شیشه قابل دستیابی است در حدود $n = 1.9$ است. این به قدر کافی به ۲ نزدیک است که حاصل کار خوب باشد.

”نسل بعدی“ بزرگترین اتاقکهای حبابی هیدروژن مایع در جهان، که هم اکنون (۱۳۴۶/۱۹۶۸) طراحی می شوند، (یا حداقل برخی از آنها)، از اسکاچ لایت استفاده می کنند. اسکاچ لایت بر روی سطح تحتانی اتاقک قرار داده می شود تا پرتوهای نور را به سمت عقب، به طرف چشمه پرتوهای نور بازگرداند. خواص بازگرداندندگی اسکاچ لایت را به سادگی می توانید اندازه بگیرید. آزمایش خانگی ۳۵-۹ را ببینید.

مسائل و آزمایشهای خانگی

۱-۹ میدان نزدیک و میدان دور. چقدر باید از شکاف دوگانه ای با فاصله 1.0 میلی متر که با نور مرئی روشن شده است دور باشید تا بتوانید از تقریب میدان دور بدون استفاده از عدسی استفاده کنید؟ چقدر باید از دو آنتن میکرو موج با فاصله 1.0 سانتی متر که میکرو موجهای 3 سانتی متری گسیل می کنند دور باشید تا از تقریب میدان دور استفاده کنید؟

۹-۲ یک شکاف دوگانه با فاصله شکاف ۵ر۰ میلیمتر با یک باریکه موازی که از لیزر هلیوم-نئون می‌تابد روشن می‌شود که این لیزر نور تکفام با طول موج 6328 \AA گسیل می‌کند. فاصله فریزهای تداخلی روی پرده چقدر است؟

۹-۳ "طول متوسط" قطار موج (بسته‌موج) کلاسیکی مربوط به نور گسیل شده از یک اتم با زمان فروافت میانگین 10^{-8} چقدر است؟ در یک چشمه تخلیه گاز معمولی آنها آزادانه فرو نمی‌افتند اما در عوض زمان همدوسی مؤثری در حدود 10^{-8} دارند که مربوط به پهن‌شدگی دوپلر و پهن‌شدگی برخورد است. طول قطار موج کلاسیکی متناظر چقدر است؟

۹-۴ اگر یک چشمه "خطی" از نور مرئی واقعاً یک خط نباشد اما پهنای 1 mm داشته باشد چقدر باید از شکاف دوگانه دور باشید تا نوری که از دو شکاف می‌تابد به‌طور منطقی همدوس باشد؟ فرض کنید فاصله شکافها $1/2 \text{ mm}$ باشد.

۹-۵ چقدر یک اتومبیل از شما دور است وقتی به سختی می‌توانید چراغهای بالای آن را با چشمه‌ایتان تشخیص دهید؟

۹-۶ قطر سیاره زهره حدود 8000 مایل است. وقتی به‌عنوان یک "ستاره صبح" (یا "ستاره شب") قابل دیدن است، در همان فاصله‌ای که خورشید است قرار دارد یعنی در فاصله حدود 93 میلیون مایل. با چشم غیر مسلح ما "بزرگتر از یک نقطه" به‌نظر می‌آید. آیا اندازه واقعی زهره را می‌بینید؟

۹-۷ قدرت تفکیک چشم. دو لامپ با توان مساوی (مثلاً 150 وات) بگیرید که یکی از آنها شیشه شفاف با رشته کوچک مناسب (تقریباً $1/8 \text{ in} \times 1 \text{ in}$) داشته باشد و دیگری حباب مات که قطرش تقریباً 3 in باشد. با آزمایش ببینید که چقدر باید قدم بزنید قبل از اینکه دو نور اندازه ظاهری یکسانی داشته باشد. (حدود یک یا دو ایستگاه اتوبوس باید باشد.) در این فاصله بزرگ یکسان، اندازه ظاهری دو لامپ مات را که اندازه واقعی یکسان دارند اما توان آنها با ضریب دو یا سه فرق می‌کند مقایسه کنید. نتیجه را چگونه توضیح می‌دهید؟ چرا زهره بزرگتر از یک نقطه به‌نظر می‌آید؟ (مسئله ۹-۶ را ببینید.)

۹-۸ توری پراش با طرح موجدار. به یک چشمه خطی سفید و دو توری یکسان احتیاج دارید. بهترین چشمه خطی (که برای اکثر این آزمایشها احتیاج دارید) یک "لامپ نمایش" است. مثلاً یکی با توان 40 وات و طول 3 in رشته مستقیم که در یک شیشه شفاف که در همه خواربارفروشها در دسترس است. جعبه وسایل اپتیکی شما ممکن است تنها یک توری داشته باشد. بیشتر از آن را می‌توانید تهیه کنید. با یک چشمه خطی که به‌طور عمودی جهت‌گیری شده است به داخل یک توری نگاه کنید (آن را نزدیک به یک چشم خود بگیرید) و توری را طوری جهت‌گیری کنید که رنگها

به طور افقی تقسیم شوند. حال توری دوم را روی توری اول بگذارید. با دقت آن را طوری بچرخانید که دقیقاً تصاویر مرتبه اول از دو توری روی هم نهاده شوند. با دقت موفق به تولید "نوارهای سیاه" متقاطع با تصویر مرتبه اول رنگ دار می شوید. در اینجا قسمتی از آن را توضیح می دهیم. فاصله خطوط روی توری d است. فرض کنید فاصله بین صفحات دو توری s است. آنها را مانند دو تیرک حصار که روی هم نهاده شده است تصور کنید که فاصله کوچکی بین آنها وجود دارد یا مانند دو پرده یکسان موازی با هم در نظر بگیرید. در بعضی زوایا خراشیدگی توری پشت دیگری قرار می گیرد. در زوایای دیگر خراشهای یک توری در نصف راه بین خراشهای دیگر (در تصویر) قرار می گیرد. در این زوایا عدد مؤثر خراشها در واحد طول (یعنی d^{-1}) دو برابر می شود. حالا فیزیک به میان می آید: چرا شما نوارهای سیاه به دست می آورید؟ آیا مربوط به زوایایی اند که عدد مؤثر خطوط "تک" است یا "دوگانه"؟ با معلوم بودن تعداد خطوط در واحد cm ، d^{-1} ، برای هر توری فضای s را چگونه تعیین می کنید؟ با معلوم بودن s ، d را چگونه تعیین می کنید؟

۹-۹۰ نقش پراش جوراب ابریشمی. به یک جوراب ابریشمی (یا نایلونی) نازک و یک چشمه نقطه ای نور سفید احتیاج دارید. گرچه نور ضعیف مناسب کوچه احتمالاً کار چشمه نقطه ای را می تواند انجام دهد، اما بهترین چشمه نقطه ای برای این آزمایش و آزمایشهای دیگر یک چراغ قوه ۶ ولتی است، مثلاً یک چراغ قوه "پیک نیک" است با یک حباب که یک رشته به طول $1/2 \text{ mm}$ دارد. برای به دست آوردن یک چشمه نقطه ای خوب، عدسیهای شیشه ای را عوض کنید و بازتابگر سهموی را با یک تکه پارچه یا کاغذ تیره (که یک سوراخ برای حباب دارد) بپوشانید. یا به سادگی از کنار به حبابی خارج از باریکه بازتابگر نگاه کنید (توجه: "باریکه نشاندار" چراغ قوه کار نمی کند!) از داخل جوراب به چشمه نقطه ای نگاه کنید. از داخل نقش که نگاه می کنید می توانید فاصله متوسط نخها و تعداد نخها در زوایای مختلف را تعیین کنید. چند دفعه آن را دولا کنید و سپس به چشمه نگاه کنید. نقش دایره های هم مرکزی که می بینید شبیه "نقش پراش پودری" پرتو x است. ۹-۱۰ توری پراش صفحه ۳۳ دور. به چشمه نقطه ای سفید که در فرود نزدیک درخشان روی یک صفحه ۳۳rpm باز می تابد نگاه کنید. شیارهای صفحه توری بازتاب خوبی را به وجود می آورد. به طور ساده طول موج نور قرمز و سبز استفاده شده در صفحه را اندازه بگیرید. روش خود را توصیف کنید. چطور می توانید به آسانی محل بیشینه مرتبه صفر "آینه ای" را تعیین کنید؟

۹-۱۱ کدام طرف خراش دارد؟ یک طرف توری پراش پلاستیکی صاف است، طرف دیگر خراشهایی دارد. با نگاه کردن به داخل آن از یک چشمه سفید بعد از مالش یک طرف توری به انگشت روغنی خود می توانید بفهمید که کدام طرف خراشهایی دارد، سپس آن را تمیز کنید و طرف دیگر را امتحان کنید. توضیح شما چیست؟

۹-۱۲ آینه‌های سهموی و کروی کشیده شده را همان طور که در شکل ۹-۲۴ نشان داده شده است در نظر بگیرید. جهت $\hat{z}+$ را به طرف راست (در امتداد محور تقارن) و x را متقاطع با z بگیرید و $x = z = 0$ را در رأس آینه‌ها قرار دهید.

(الف) نشان دهید که سطح سهموی با فرمول زیر داده می‌شود

$$z = \frac{x^2}{4f}$$

(ب) نشان دهید که سطح کروی (به ازای $f \ll x$) با فرمول زیر داده می‌شود

$$z = \frac{x^2}{4f} + \frac{x^4}{64f^3} + \dots$$

(ج) آینه کروی را با دریچه‌ای به قطر D و فاصله کانونی f با آینه سهموی را با همان D و f مقایسه کنید. در آینه کروی زاویه انحراف $\delta\theta$ "بدترین" پرتوها (نزدیک لبه دریچه) را مربوط به ابیراهی کروی در نظر بگیرید. ($\delta\theta$ انحراف در جهت \hat{z} برای پرتوهای چشمه نقطه‌ای اند). نشان دهید که $\delta\theta$ کمتر از پراش زاویه‌ای با پهنای $\Delta\theta \approx \lambda/D$ است که با فرمول زیر داده می‌شود

$$D < 4f \left(\frac{\lambda}{4f} \right)^{1/2}$$

بنابراین (مثلاً) برای نور مرئی و طول کانونی $\text{in } 50 \approx f$ ، یک آینه کروی تقریباً به خوبی آینه سهموی است که قطر آینه، D ، کمتر از تقریباً $\text{in } 3.5$ است.

۹-۱۳ یک تیغه تخت شیشه‌ای با ضخامت t و ضریب شکست n بین چشم ناظر و یک چشمه نقطه‌ای وارد می‌شود. نشان دهید که چشمه نقطه‌ای ظاهراً در نقطه‌ای نزدیکتر به ناظر با فرمول تقریباً $t(n-1)/n$ جابه‌جا می‌شود. از تقریب زاویه کوچک استفاده کنید.

۹-۱۴ یک "بازتابگر گوشه‌ای" از سه آینه تخت متصل به هم تشکیل شده است به طوری که یک جعبه مکعب مستطیلی با گوشه داخلی به وجود می‌آید. نشان دهید که باریکه نور که به بازتابگر گوشه‌ای برخورد می‌کند با زاویه 180° نسبت به جهت اصلی برمی‌گردد، و در طول زمانی که به سطح برخورد می‌کند مستقل از زاویه فرود است.

۹-۱۵ نشان دهید که موج تخت که به طور عمود بر یک رخ منشور گوه مانند با زاویه A فرود می‌آید با مقدار θ_{dev} که در زیر آمده است منحرف می‌شود

$$n \sin A = \sin(A + \theta_{\text{dev}})$$

۹-۱۶. باریکه لیزر با پراش محدود و با قطر ۱ cm به طرف ماه نشانه رفته است. قطر ناحیه‌ای که روی ماه روشن می‌شود چقدر است؟ (ماه ۲۴۰۰۰۰ مایل دور است). طول موج نور را 6328 \AA بگیرید. از پراکندگی جو زمین صرف‌نظر کنید.

۹-۱۷. طرح پراش تک‌شکافی. یک تکه کاغذ آلومینیمی را با نوار به لبه یک تیغه میکروسکوپ ببندید. (بهترین نوار "نوارچسب جادویی" شفاف اسکاتلندی است.) یک شکاف با تیغ ریش تراشی یا چاقوی تیز ایجاد کنید. شکاف را نزدیک یکی از چشمهایتان بگیرید و به چشمه خطی سفید نگاه کنید. تمام پهنای زاویه‌ای بیشینه مرکز را با (مثلاً) گذاشتن علامتهایی روی یک تکه کاغذ که پشت چشمه خطی قرار دارد و مقیاسی به ما می‌دهد تخمین بزنید. نسبت طول موج نور قرمز به نور سبز را که این رنگها با صافیهای ژلاتینی می‌دهند تخمین بزنید. از صافی قرمز استفاده کنید و پهنای تیغ را یعنی پهنای شکاف را با استفاده از پهنای زاویه‌ای اندازه‌گیری شده نقش پراش و فرض $6500 \text{ \AA} \sim \lambda$ تخمین بزنید. اگر ذره‌بین دارید می‌توانید شکاف خود را روی مقیاس میلیمتری قرار دهید و پهنای شکاف را مستقیماً تخمین بزنید. چطور این دو نتایج پهنای با هم مقایسه می‌کنید؟

۹-۱۸. پراش دوشکافی و نقش تداخل. دو شکاف موازی هم به فاصله $1/2 \text{ mm}$ یا کمتر از یکدیگر با استفاده از روش آزمایش خانگی ۹-۱۷ ایجاد کنید. یکی از شکافها را $1/2 \text{ mm}$ بلندتر از دیگری بگیرید به طوری که بتوانید به سرعت با جابه‌جایی جزئی شکافها از طرح دوشکافی به طرح تک‌شکافی بروید. بنابراین می‌توانید ببینید کدام قسمت از طرح دوشکافی "مدولاسیون تک‌شکافی" مربوط به پهنای غیر صفر تک‌شکاف است. برای دیدن اثر شکاف متغیر با فاصله d به آسانی یک شکاف که با آن یکی زاویه جزئی می‌سازد ببرید به طوری که آنها همدیگر را به شکل γ قطع کنند. می‌توانید شکافهای زیادی ایجاد کنید (برای ایجاد هر جفت شکاف 10° طول می‌کشد - $1/10$ این زمان این کار را انجام می‌دهید)؛ بعضیها بهتر از بقیه می‌شود. (شکاف را بالای نور بگیرید و ببینید کدام یک بد است).

۹-۱۹. طرح سه‌شکافی. این آزمایش را هنگامی که چند مرتبه دوشکافی خوب با روش آزمایش خانگی ۹-۱۷ و ۹-۱۸ ساختید انجام دهید. یک شکاف سوم موازی با دو شکاف اول ببرید. شکاف سوم را خیلی دور به دوتای اول نسازید به طوری که بتوانید با انتقال جزئی از دو به سه‌شکافی برویم. مسئله مهم، مشاهده باریک کردن شدت بیشینه است وقتی سومین شکاف اضافه می‌شود. [شما می‌توانید یک سری زیبا از تک‌شکافی، دوشکافی، سه‌شکافی و چهارشکافی به وجود آورید با شکافهایی با پهنای متغیر و آرایه‌ای تا 80° شکاف، همه روی تک تیغه مناسب سوار شده‌اند که به آن کرنل سلیت فیلم دمنستر تور^۱ می‌گویند].

۹۰-۲۰ همدوسی - اندازه چشمه "نقطه‌ای" یا چشمه خطی. از یک تک‌شکاف با پهنای معلوم استفاده کنید. یک صافی ژلاتینی روی چشمه بگذارید. دور از چشمه بایستید به طوری که یک نقش تک‌شکاف تیز به دست آورید. حال به طرف چشمه حرکت کنید. فاصله L را که در آن نقش تک‌شکاف "از بین می‌رود" پیدا کنید. [این نقش در فاصله‌ای از بین می‌رود که قسمتهای مختلف رشته لامپ چراغ‌قوه (اگر چشمه نقطه‌ای باشد) مستقل از چشمه‌های نور باشد و بنابراین برای زمان تفکیک چشم شما هم‌دوس‌اند، همان‌طور که در بخش ۹-۴ بحث شد.] از تخمینهای اندازه چشمه و شکاف و اندازه‌گیری فاصله L که در آن نقش از بین می‌رود استفاده کنید تا طول موج نور را تخمین بزنند، با استفاده از رابطه به دست آمده در بخش ۹-۴، $L\lambda \approx D(\text{شکاف}) \cdot d(\text{چشمه})$.

۹۰-۲۱ همدوسی - آینه لوید، "دوشکافی هم‌دوس تضمین‌شده". اگر یک دوشکافی معمولی را جلوی یکی از چشمان خود بگیرید و به یک چشمه پهن مانند آسمان یا لامپ نور مات نگاه کنید هیچ نقش تداخلی نخواهید دید، چرا این‌طور است؟ حال یک طرح دوشکافی طراحی می‌کنیم که نقش تداخلی دوشکافی را حتی وقتی به نور یک لامپ مات نگاه می‌کنید می‌دهد. ابتدا یک تک‌شکاف با روش آزمایش خانگی ۹-۱۷ بسازید. حال یک تیغه دوم میکروسکوپ را بگیرید و در لبه تیغه اول قرار دهید (آنی که یک شکاف دارد) و موازی با شکاف باشد به طوری که تصویر آینه‌ای شکاف در تیغه دوم موازی با اولین شکاف باشد. تیغه دوم را با یک گلوله بزرگ بتونه یا سفال مخصوص مدل (بتونه غیر خشک یعنی، ترکیب لعاب - Nu لعابکاری برای این کار مناسب است) به تیغه اول بچسبانید، به طوری که بتوانید به آسانی تیغه دوم را برای تنظیم تکان بدهید، اما مادامی که آن را حرکت ندادید روی آن محل باقی بماند. آینه را تنظیم کنید (تیغه دوم) به طوری که یک فضای باریک بین شکاف و "تصویر شکاف" آن‌گونه که تنظیم می‌کنید - مثلاً $1/2 \text{ mm}$ به دست آید. این کار را با گرفتن مجموعه در فاصله یک فوت یا حدود آن از سر خود انجام دهید به طوری که بتوانید به آسانی چشمان خود را روی شکاف "دوتایی" وقتی آن را جلوی یک زمینه روشن گرفته‌اید کانونی کنید و آینه را تنظیم کنید. وقتی شما یک دوشکافی خوب دارید این مجموعه را به یکی از چشمان خود نزدیک کنید و چشم خود را در فاصله زیاد کانونی کنید (یعنی روی چشمه نور). دنبال سه یا چهار "رگه سیاه" موازی با "دوشکافی هم‌دوس" بگیرید. اینها تداخلهای صفر مربوط به تداخل مخرب بین نور که از شکاف حقیقی و آنی که از تصویر شکاف می‌آید است. تصویر شکاف البته کاملاً با شکاف حقیقی هم‌دوس است. (چرا؟) به خاطر فاز معکوس در بازتاب، جریانهای شکاف و "جریانهای شکاف تصویری" 180° خارج از فازند. بنابراین فریز در صفحه آینه "سیاه" است - تداخل صفر. حال سؤالی است که هم با آزمایش و "نظریه" جواب داده می‌شود: آیا خطوط "روشن" بین خطوط "سیاه" دقیقاً به روشنی زمینه روشن است که در تک‌شکافی می‌بینید؟ روشنتر است؟ یا تیره‌تر است؟

۹۰-۲۲ گیره کاغذ آینه لوید. (آزمایش خانگی ۹-۲۱ را ببینید.) یک گیره کاغذ با نور یک لامپ با یک چشمه خطی باریک درخشان روشن می شود. این گیره را لبه (و موازی با) تیغه میکروسکوپ که به عنوان آینه به کار می رود بگیرید. وقتی یک نگاه خوب "دوشکافی همدوس" که فضای بین آنها کمتر از $1/2\text{mm}$ است به دست می آورید، آن را بالا بیاورید به یکی از چشمان خود نزدیک کنید و دنبال نوارهای تداخلی تاریک بحث شده در آزمایش خانگی ۹-۲۱ بگردید. کمی بیشتر از روش آزمایش خانگی ۹-۲۱ تمرین می خواهد. نور باید فرود تقریباً مایل روی آینه داشته باشد. همچنین روشنایی باید طوری ترتیب یابد که چشمه نور شما را کور نکند.

۹۰-۲۳ نقشهای پراش دوبعدی. (الف) به نور چراغ دوردست کوچه از داخل یک قطعه پرده پنجره معمولی نگاه کنید. پرده را به پهلو بچرخانید به طوری که فاصله تارهای تصویر شده به کوچکی که دوست دارید باشد. مسئله: به چه فاصله ای باید نور چراغ کوچه با قطر 2cm (لامپ مات) باشد تا روشنایی همدوسی روی تارهای مجاور پرده بدهد؟

(ب) به نور چراغ کوچه یا چشمه نقطه ای چراغ قوه از داخل انواع مختلف پارچه دستمال ابریشمی، پارچه های نایلونی، یک چتر یا غیره نگاه کنید.

(ج) به چشمه نقطه ای از داخل دو توری پراش از نوع داخل جعبه وسایل ایتیکی خود نگاه کنید. یک توری را طوری بچرخانید که خطوط آن عمود بر خطوط توری اولی باشد. توجه کنید که یکی تعدادی (بسیار کم) نقاط روشن در زاویه 45° درجه با دو ردیف خطوط داشته باشد. این نقاط چیزهای جدیدی اند، که با برهم نهش شدتهای دو توری به دست نیامدند. البته آنها باید مربوط به برهم نهش دامنه های دو مجموعه خطوط باشند. یک کشیدگی ایجاد کنید و منشأ این "نقاط اضافی" را توضیح دهید. نقش پراش ایجاد شده به وسیله دو توری متقاطع شبیه به نقش ایجاد شده به وسیله پراش از تک بلور است. ممکن است فیلمی که برای مرکز پیشرفتهای تحصیلی^۱ ساخته شده است را دیده باشید که پراش باریکه الکترون تک انرژی که از سطح یک تک بلور باز می تابد را نشان می دهد. (این روش برای امواج بازتابیده آسانتر است تا امواج عبوری، در صورتی که شخص بخواهد به تک بلور نگاه کند. همین طور می توانید توریهای بازتاب را از شرکت فنی ادموند بگیرید. آنها شبیه توری عبوری خودتان هستند بجز اینکه سطح آنها به طور جزئی نقره اندود است تا بازتاب را افزایش دهد.)

۹۰-۲۴ توری پراش - نوارهای گذر صافی ژلاتینی. از توری پراش خودتان به صورت زیر برای اندازه گیری طول موجهای نور قرمز و سبز عبوری با استفاده از صافیهاتان به کار برید: یک چشمه

خطی (یا نقطه‌ای) درست کنار دیوار یا در بگذارید. یک علامت روی دیوار در حدود یک فوت کنار چشمه بگذارید. به چشمه از داخل توری که صافی را روی توری گرفته‌اید (یا صافی را روی چشمه گذاشته‌اید - اما آن را ذوب نکنید!) نگاه کنید. نزدیکتر و دورتر از چشمه حرکت کنید تا رنگ مورد دلخواه به وجود آید و با علامتی که روی دیوار گذاشته‌اید بر هم نهاده شود. فواصل مناسب را اندازه بگیرید و λ را حساب کنید. بنابراین طول موجهای عبوری از صافیهای قرمز، سبز و بنفش را درجه‌بندی کنید. نتایج را به خاطر بسپارید. (آنگاه می‌توانید از صافیها و توریهای خودتان استفاده کنید تا طول موجهای رنگهای دیگر را بدون تکرار اندازه‌گیری هندسی این آزمایش پیدا کنید.)

۲۵-۹۰ خطوط طیفی. مقداری نمک روی چاقوی خیس یا قاشق خیس (هرکدام که فکر می‌کنید خراب نمی‌شود) بریزید. چاقو را روی شعله اجاق بگیرید. به شعله زرد از داخل توری پراش نگاه کنید (این کار در شب و در اتاق تاریک آسانتر است). توجه کنید که تصاویر مرتبه اول (یا بالاتر) شعله سدیم زرد به اندازه تصویر "مستقیم" مرتبه صفر تیز و واضح‌اند. این به این دلیل است که نور زرد "خط طیفی" است که پهنای باند باریکی دارد. (واقعاً نور زرد سدیم "دوتایی" از دو خط با طول موجهای 5890\AA و 5896\AA تشکیل شده است.) حال به یک شمع نگاه کنید. در مرتبه صفر خیلی با شعله سدیم فرقی نمی‌کند، هر دو زردند. اما در اولین مرتبه پراش، رنگ شمع بسیار پهن می‌شود در حالی که سدیم همچنان نیز باقی می‌ماند. رنگ "زرد" شمع که مربوط به ذرات کربن گرم است، طیف طول موجی دارد که روی (و آن سوی) برد مرئی کامل گسترده می‌شود.

در اینجا چشمه‌های مناسب دیگر با خطوط طیفی تیز ارائه می‌دهیم؛ به هرکدام از آنها از داخل توری تان نگاه کنید.

بخار جیوه: لامپهای فلوروسان، لامپهای بخار جیوه خیابان، لامپهای خورشیدی (یک لامپ خورشیدی مناسب است زیرا مستقیماً در سر پیچ AC 110° ولتی می‌پیچد. این ارزانترین چشمه بخار جیوه خطوط طیفی است.)

نئون: بیشتر علائم تبلیغاتی. نئون خطوط بسیاری دارد، شما "علامتهای زیادی" می‌بینید. یک چشمه تکفام گسترده ارزان لامپ GE، NE-34 است که مستقیماً حول سر پیچ AC 110° ولتی می‌پیچد. نوع دیگری "آزمون کننده مدار پیوسته" است که دو شاخه آن در هر پریز دیواری می‌رود، و یک "لامپ شب" نئونی.

استرانسیم: نمک استرانسیم کلرید؛ مقدار کمی از آن در چند قطره آب حل کنید و آن را در شعله گاز روی قاشق خراب بگذارید. طول موج خط قرمز یک طول استاندارد مشهور است.

مس: مس سولفات؛ دسترسی به آن و فن آوری آن مانند استرانسیم کلرید است. مس یک رنگ سبز قشنگ می‌دهد.

هیدروکربن: به شعله گاز خود در اولین مرتبه طیف نگاه کنید. یک تصویر آبی روشن و تیز و یک تصویر سبز روشن و تیز وجود دارد. بنابراین رنگ "آبی" شعله مربوط به یک یا چند خط طیفی تقریباً تکفام است.

۲۶-۹۰ کاغذ توالی تکفام. یک تکه کاغذ توالی را بسوزانید و از داخل توری پراش خودتان به آن نگاه کنید (مثل همیشه نزدیک به چشمتان بگیرید). به رنگ واضح و زیبایی "شعله اولین مرتبه" توجه کنید. این نشان می‌دهد که نور زرد ملایم با کمی طیف رنگ "نور سفید" که مربوط به کربن داغ است تقریباً تکفام است. زردی که می‌بینید دو موج سدیم آشنا (امیدواریم) با طول موجهای ۵۸۹۰ و ۵۸۹۶ Å است.

حال که نور "زرد سدیم" را شناختید، یک کاغذ معمولی را بسوزانید و از داخل توری به آن نگاه کنید. بیشتر این نور "زرد کربن داغ" است، که واقعاً زرد نیست اما طیف رنگ کامل "سفید" است. اما نزدیکتر نگاه کنید! در قسمت زرد طیف کربن داغ، پایین نزدیک مقوا که شعله "آبی" به نظر می‌آید - پایین طیف کربن داغ روشن خیره‌کننده - آیا نور سرد و روشن شعله تکفام کبریت را می‌بینید؟ اگر نمی‌بینید دوباره سعی کنید! حال چیزهای دیگر را بسوزانید و نگاه کنید. ممکن است به خوبی نتیجه بگیرید که هر چیزی از نمک یا حداقل آلوده به آن ساخته شده است.

۲۷-۹۰ فریزهای سدیم فابری - پرو. ارزاترین چشمه نور تقریباً تکفام پهن از سوزاندن گلوله‌ای کاغذ توالی به دست می‌آید. شما می‌توانید از این چشمه برای دیدن فریزهای فابری - پرو استفاده کنید. کاغذ را بسوزانید. (اتاق باید تاریک باشد - همچنین شاید باید مقداری آب در دسترس داشته باشید!) از داخل شعله - تصویر شعله نزدیک فرود عمود به یک قطعه شیشه - یک تیغه میکروسکوپ یا عکس شعله شیشه نگاه کنید. شما اثر انگشت را مانند فریزها می‌بینید. اگر شیشه از نظر اپتیکی پهن باشد فریزها دایره‌هایی‌اند که روی تخم چشم شما متمرکز شده‌اند؛ در هر مورد به آسانی می‌توانید آنها را ببینید. اگر یک اجاق گاز یا چراغ خوراک‌پزی بنزن داشته باشید، با مقدار کمی نمک روی چاقوی خیس و فروکردن آن در شعله می‌توانید چشمه سدیم تکفام روشنتر به دست آورید. سپس می‌توانید فریزهای فابری - پرو را حتی در روز هم ببینید. برای یک چشمه تکفام، پهن، پایا و قشنگ که با آن به فریزها نگاه کنید از یک لامپ نئون GE، NE۳۴ استفاده کنید.

۲۸-۹۰ طیف‌نگار لوله پستی - خطوط فرانوفر. از یک لوله پستی به طول $1\frac{1}{4}$ تا ۲ft استفاده کنید. توری پراش را روی یک انتهای آن بگذارید. یک تک‌شمار روی انتهای دیگر ایجاد کنید. بهترین شکاف با دو لبه تیغه‌های تیغ ریش‌تراشی به وجود می‌آید. یک تیغ دائمی روی محل بندید یا بچسبانید؛ دیگری را با بتونه سفت‌نشده (ترکیب درخشان، که در خواربارفروشی به دست

می‌آید) بچسبانید، به طوری که بتوانید به آسانی آن را تنظیم کنید (برای تفکیک بهتر است باریکتر باشد و برای سبکتر بودن بهتر باشد). به طیف ذکر شده در آزمایش خانگی ۹-۲۵ نگاه کنید.

مسئله: آیا می‌توانید سدیم دوگانه را (با طول موجهای ۵۸۹۰ Å و ۵۸۹۶ Å) با این طیف‌نگار تجزیه کنید؟

جواب: نه — فاصله خطوط که با این توری داده می‌شود درست تقریباً مساوی پهنای تصویر مربوط به پراش در مردمک چشمتان است.

آیا می‌توانید آن را با استفاده از لوله پستی بلندتر تجزیه کنید؟

جواب: نه. دو روش برای بهتر کردن تفکیک وجود دارد. یک راه به دست آوردن توری با فاصله خطوط کوچکتر d است. راه دیگر افزایش تعداد خطوطی است که استفاده می‌شود یعنی افزایش پهنای D توری مورد استفاده است. با طرح بالا D پهنای مردمک چشم در حدود ۲mm است. اگر یک تلسکوپ با عدسیهای شیئی به قطر ۲cm اضافه کنید و اگر همه پرتوها که وارد عدسیهای شیئی می‌شوند از داخل مردمک چشم شما بگذرد، آنگاه با توری پراش در عدسیهای شیئی تفکیک زاویه‌ای λ/D ده برابر بهتر می‌شود.

با این طیف‌نگار ساده می‌توانید خطوط فرانهور در طیف خورشید را ببینید. یک روز آفتابی بیرون بروید. یک دسته ۶ تایی ورق کاغذ سفید (بیشتر از یک عدد به طوری که تا "حد امکان سفید" باشد) را روی زمین بگذارید. به نور کاغذ که از آفتاب روشن شده است با طیف‌نگارتان نگاه کنید. با استفاده از یک کت یا پتو سرتان را بپوشانید تا از نورهای منحرف جلوگیری کنید؛ در غیر این صورت برای دیدن طیف اولین مرتبه مشکل خواهید داشت. همچنین از لبه لوله برای "پنهان کردن" نور مرتبه صفر روش خیره‌کننده استفاده می‌شود. شکاف را در حدود ۱/۲mm تنظیم کنید. دنبال سه یا چهار یا پنج خط تاریک که طیف پیوسته خورشید را قطع می‌کند بگردید. اگر چیزی ندیدید، این کار را تکرار کنید — پهنای شکاف را برای شدت مناسب تنظیم کنید. روش دیگر پوشاندن شکاف با لایه‌های مختلف کاغذ مومی است، از یک شکاف باریک استفاده کنید و به آسمان نزدیک خورشید نگاه کنید، شدت را با نزدیک کردن طیف‌نگار به خورشید تغییر دهید.

خطوط فرانهور تاریکی که شما می‌بینید خطوط جذب هستند. آنها در گاز تقریباً سرد خروجی پوشش خورشید به وسیله طیف پیوسته گسیل شده از خورشید داغ تحریک می‌شوند. بسامدهایی که مربوط به تشدیدهای طبیعی آنهاست آنها را تحریک می‌کند و از طیف پیوسته در بسامد تشدید انرژی خارج می‌کند. گاز خروجی واقعاً در آن بسامدها

تار است، به طوری که طیف "خطوط تاریک" متناظر در رنگهایی است که نور خورشید کاملاً آنها را جذب می‌کند. خطوطی که به آسانی دیده می‌شوند خطوط فضایی نزدیک به زرد - سبز مربوط به آهن، کلسیم و منگنز هستند؛ خط H در رنگ آبی - سبز مربوط به هیدروژن و چند خط فضایی نزدیک به آبی مربوط به هیدروکربنها هستند - شبیه به گسیل خطهایی است که شما با شعله گاز می‌بینید. خط D سدیم همچنین وجود دارد اما به سختی دیده می‌شوند (حداقل برای من) برای اینکه ببینیم کجا دنبالشان بگردیم، به خط گسیل سدیم با انداختن نمک در شعله گاز نگاه کنید. این رنگی است که طیف فرانوفر "نشان نمی‌دهد".

۹۰-۲۹ پراش امواج آب. وان حمامی را از بالا با لامپ‌التهایی که رشته کوچکی در پوشش دارد روشن کنید به طوری که سایه‌های تیزی به دست دهد. امواج پیشرونده‌ای تولید کنید که "امواج مستقیمی" باشند - شبیه امواج تخت دوبعدی - این کار را با تکان دادن چوب یا تخته‌ای شناور که در انتهای وان قرار دارد انجام دهید. یک فنجان قهوه را به عنوان مانع کدر شناور کنید. فاصله مسیر آب را که در آن "سایه" فنجان "واضح می‌شود" تخمین بزنید. فرض کنید که قطر فنجان را نمی‌دانید. این قطر را به طور تجربی (تقریبی) با ضرب "طول واضح شدن سایه" L در طول موج امواج آب λ ، و گرفتن ریشه دوم تعیین کنید. (فرض کنیم شما می‌دانید که این فرمول از کجا آمده است. بخش ۹-۶ را ببینید.) این یک راه فهمیدن قطر هسته است - با اندازه‌گیری "سطح مقطع" پراش. (نکته: تقریباً مشکل است که طول موج امواج آب را با روش غیر دقیق که پیشنهاد می‌کنیم اندازه بگیریم. آسانتر است که یک چوب را در یک ضرب تکرارپذیر (هر چقدر تند که می‌توانید) تکان دهید و سپس بسامد را اندازه بگیرید. طول موج را می‌توان از رابطه پاشندگی امواج آب که در بخش ۴-۲ جدول بندی شده است) به دست آورد. چگونه اندازه‌گیری سطح مقطع قطر فنجان را با اندازه‌گیری مستقیم آن مقایسه می‌کنید؟

۹-۳۰ چقدر یک "موج تخت" حاصل از چشمه نقطه‌ای دور پهن است؟ اغلب گفته‌ایم که موج پیشرونده از چشمه نقطه‌ای دور "شبیه" یک موج تخت روی "ناحیه محدود" عمود بر خط دید از چشمه نقطه‌ای بر نقطه میدان است. "ناحیه محدود" چقدر محدود است؟ فرض کنید چشمه در فاصله L است و می‌خواهیم که یک ناحیه تخت دایره‌ای با شعاع R عمود بر خط دید از چشمه در نظر بگیریم. چه مقدار R باید بزرگ باشد به طوری که فاز در مرکز دایره و در لبه دایره کمتر از $\Delta\varphi$ رادیان فرق کند.

جواب: فاز در مرکز دایره به اندازه $\Delta\varphi = \pi R^2 / L\lambda$ جلوتر از آنی است که در لبه است

(مرکز نزدیکتر به چشمه است). بنابراین فاز در تمام صفحه دایره در گستره‌ای که سطح دایره در مقایسه با $L\lambda$ کوچک است "یکسان" است.

۳۱-۹ بزرگترین آنتن رادیوی سهموی در حال حاضر در رصدخانه رادیویی بین‌المللی، گرین بنک در ویرجینیای غربی است که قطر صفحه سهموی آن 300 ft است. تفکیک زاویه‌ای برحسب رادیان و دقیقه قوس (یکایی که فضانوردان استفاده می‌کنند) برای 21 cm تابش مشهور هیدروژن چیست؟
جواب: چشمه نقطه‌ای شبیه به توپ والیبال در فاصله 300 فوتی است.

۳۲-۹ تلسکوپ "مردمک خروجی". فرض کنید یک تلسکوپ ساده با عدسیهای شیئی و چشمی دارید. بزرگنمایی زاویه‌ای f_1/f_2 است که f_1 و f_2 به ترتیب فاصله کانونی عدسیهای شیئی و چشمی است. نشان دهید که همه پرتوهایی که از شیء می‌آید و به عدسی شیئی با قطر بزرگ برخورد می‌کند به چشم شما نمی‌رسد و اینکه "قطر مفید" عدسیهای شیئی در حدود f_1/f_2 برابر قطر مردمک چشم شماست. بنابراین در یک تلسکوپ با قدرت ۸ اگر باریکه خروجی موازی باریکه‌ای با پهنای 4 mm باشد (دو برابر پهنای مردمک چشم شما، به طوری که چشم شما لازم نیست کاملاً باز باشد و همچنین به طوری که نقاط محور خارجی در میدان دید تمام نور آنها را دریافت کند)، عدسیهای شیئی باید 32 mm قطر داشته باشند. کارایی، عدسیهای شیئی با قطر بزرگتر کم می‌شود.

۳۳-۹ اندازه مردمک چشم و فعالیت فیزیکی. اگر شخصی تصویر زیبایی را به شما نشان دهد قطر مردمک چشم شما ممکن است به اندازه 30% افزایش یابد. این تغییر بزرگ در مردمک شما با استفاده از یک سوراخ در قطعه‌ای کاغذ آلومینیمی که چشم شما را می‌پوشاند و با یک چشمه روشن که این سوراخ را روشن می‌کند بسیار آسان آشکار می‌شود همان‌طور که در بخش ۷-۹ بحث شد. شاید فقط با فکر کردن، بتوانید اندازه مردمک چشمتان را تغییر دهید، بستگی دارد که راجع به چه چیزی فکر کنید. از شخصی بخواهید برای شما مطلبی بخواند. (روی گوش دادن تمرکز کنید نه روی اندازه مردمک.)

۳۴-۹ پراش به وسیله یک مانع کدر. این آزمایش با یک چشمه نقطه‌ای شامل چراغ قوه ۶ ولتی "پیک‌نیک" با عدسیهایی که برداشته شده است و بازتابگری که با پارچه تیره پوشانده شده است خوب انجام می‌شود. (اندازه رشته در حدود $1/2\text{ mm}$ است.) چشمه حداقل باید سه متر از مانع فاصله داشته باشد، به طوری که یک "موج تخت همدوس" خوب روی مانعی به اندازه یک سوزن تشکیل شود. "برده" آشکارساز یک تیغه میکروسکوپ است که روی آن یک لایه نوار رفو جادویی نیمه شفاف اسکاتلندی چسبیده شده است. سایه جسم را روی پرده‌ای در فاصله یک فوت جلوی

صورتتان (یا هر فاصله‌ای که برای دیدن روی پرده مناسب است) ببندازید. چشم شما باید تقریباً در خط چشمه نور باشد و تصویر روی پرده باید طوری باشد که امتیاز شدت بالا را در پراکندگی در زوایای کوچک (در جهت جلو) از پرده نیمه شفاف داشته باشد. بجز نگاه کردن به فریزهای زیبا، قصد دیگر از این آزمایش این است که دنبال (نه دقیقاً) مفهوم "طول سایه" L_0 بگردیم که با رابطه $L_0 \lambda \approx D^2$ مشخص می‌شود که D پهنای مانع است. در میان چیزهای دیگر به یک سوزن (اگر پهنای سوزن $1/2\text{mm}$ باشد، آنگاه برای نور مرئی $L_0 = 5\text{cm}$ خواهد بود.) و یک موی انسان (مثلاً خودتان) نگاه کنید. [پهنای موی من $1/2\text{mm}$ است برای این مو $L_0 = 1/2\text{cm}$ خواهد بود.]

ابتدا سوزن را در نظر بگیرید. پرده را ۵ یا ۶ متر پایینتر از سوزن قرار دهید. تصویر پراش آنگاه باید به اندازه کافی بزرگ باشد که احتیاجی به ذره‌بین نداشته باشید. ممکن است تکان دادن پرده کمکتان کند به طوری که اثرهای بی‌نظمی نوار رفو جادویی را از بین ببرد. به نقطه روشن مشهور در مرکز "سایه" نوک سوزن و خط روشن در مرکز محور سوزن توجه کنید. آیا نقطه یا خط روشن روشنتر یا تاریکتر از خود پرده روشن (در یک نقطه درست خارج از تصویر) است. سپس تصویر سوزن روی پرده‌ای در فاصله تقریباً 5cm از سوزن را آزمایش کنید (شما احتیاج به یک ذره‌بین دارید مگر چشمان خیلی قوی داشته باشید.) توجه کنید که سایه، یک جامد سیاه با هیچ نقطه روشن در مرکز است. این به این خاطر است که شما خیلی نزدیکتر از L_0 هستید. در لبه‌ها فریزها را می‌بینید، همان‌طور که از بحث ۹-۶ انتظار داشتیم.

سپس موی انسان را در نظر بگیرید. پرده را بلافاصله پشت مو بگذارید (یعنی حدود 1mm در امتداد پایین). به سایه با ذره‌بین نگاه کنید. باید قشنگ و سیاه باشد، چون L در مقایسه با L_0 کوچک است. حال به فاصله‌ای در حدود چند سانتیمتر بروید. فریزهای قشنگی خواهید دید. ۵ یا ۶ متر به طرف پایین بروید. این چندصد برابر L_0 است. طبق بحث ما سایه باید عملاً "پنهان شود" و مشکل است تصویر مو را در برابر زمینه نور چشمه دید. چشمان شما آشکار سازهای حساسی برای مقایسه هستند و شما چیزی خواهید دید. به چیزهای دیگر، لبه‌های چاقو، سوراخها در کاغذ آلومینیمی و غیره نگاه کنید.

$90^\circ-35^\circ$ اسکاتلند. یک قطعه نوار چسبنده اسکاتلندی قرمز تهیه کنید. آن را برای تزئین، بازتابگرهای ایمن، اتاقهای حباب و غیره به کار می‌برند. آن را با ذره‌بین ببینید. یک قطعه از آن را روی دیوار بچسبانید و با باریکه چراغ‌قوه روشن کنید، با گرفتن چراغ‌قوه درست در جلوی بینی‌تان فوری خواهید دید که 180° درجه تأخیر فاز دارد. حال تدریجاً چراغ‌قوه را کنار ببرید درحالی‌که هنوز باریکه را روی نوار می‌تابانیم. به این روش می‌توانید پهنای زاویه‌ای باریکه تأخیری را تخمین بزنید. چرا شما انتظار پهنای زاویه‌ای دارید. یعنی چرا یک تأخیر جهت کامل نمی‌دهد؟

۹-۳۶ همدوسی و قطبیدگی. نور از یک چشمه نقطه‌ای غیرقطبیده گسیل می‌شود. ابتدا از قطبشگر خطی با محور عبور آسان و زاویه 45° نسبت به محورهای x و y عبور می‌کند. سپس روی دوشکافی فرود می‌آید. هر شکاف با یک قطبشگر خطی پوشیده شده است، یک شکاف محور قطبیدگی در امتداد \hat{x} دارد و دیگری در امتداد \hat{y} .

(الف) فرض کنید با چشم غیر مسلح به نقش تداخل نگاه می‌کنید. آیا انتظار دارید که نقش تداخلی دوشکافی معمولی را ببینید؟ چه چیزی انتظار دارید؟

(ب) سپس فرض کنید درحالی‌که یک قطبشگر پولاروید خطی در جلوی یکی از چشماتتان گرفته‌اید به نقش تداخلی نگاه می‌کنید. انتظار دیدن چه چیزی را دارید؟ اگر پولاروید را جلوی چشم خودتان بچرخانید چه اتفاقی می‌افتد؟

(ج) حال فرض کنید شما به نقش تداخلی از داخل یک قطبشگر دایره‌ای که در جهت عکس به‌عنوان یک تحلیلگر است نگاه می‌کنید. چه نقشی می‌بینید؟

موارد زیبایی زیادی می‌توانید با این آزمایش درست کنید: (۱) یک قطبشگر دایره‌ای راستگرد روی یک شکاف و یک قطبشگر دایره‌ای چپگرد روی شکاف دیگر بگذارید و تمام مشاهدات را تکرار کنید. (۲) یک تیغه نیم‌موج یا ربع موج درست پشت شکافها بگذارید و غیره ...

۹-۳۷ تداخل‌سنج دوشکافی. فرض کنید یکی از دو شکاف را با تیغه میکروسکوپ بپوشانید و دیگری را نپوشانید. اگر ضخامت تیغه 1mm باشد نشان دهید که نور تکفام با طول موج 5000\AA تأخیری در یک شکاف به‌وجود می‌آورد که نسبت به شکاف دیگر در حدود 1000 طول موج است. اگر طرح دوشکافی از بین نرود، نور باید نسبتاً تکفام باشد. پهنای طول موج باید چقدر باریک (برحسب آنگستروم) باشد به‌طوری‌که تغییر فاز نسبی دو شکاف از یک لبه پهنای طول‌موج تا لبه دیگر کمتر از 180° تغییر کند؟ چطور می‌توانید از این موضوع برای اندازه‌گیری پهنای نوار خط طیفی استفاده کنید؟ (چه چیزی را اندازه می‌گیرید و نمودار را نسبت به چه چیزی می‌کشید و چطور پهنای نوار را از روی نمودار به‌دست می‌آورید؟)

۹-۳۸ ذره‌بین روزنه‌ای. فرمولی برای بزرگنمایی ذره‌بین روزنه‌ای به‌دست آورید. فرمول را به این طریق امتحان کنید: دو علامت به فاصله 2cm از هم روی یک قطعه کاغذ بگذارید؛ دو علامت به فاصله 2mm روی یک کاغذ دیگر بگذارید. روزنه‌ای را روی یک چشم خود قرار دهید و روی چشم دیگر چیزی نگذارید. هر دو کاغذ را از پشت روشن کنید حداقل از پشت، چون راحت‌ترین راه دیدن است.) وقتی دو چشم‌تان باز است با یک چشم به داخل روزنه به علامتهای 2 میلیمتری نگاه کنید و با چشم دیگر به علامتهای دو سانتیمتری نگاه کنید. علامتهای 2 میلیمتری را نزدیکتر

بیاورید تا دو دسته از علامتها را با دو چشمتان روی هم قرار دهید. فاصله‌های مناسب را اندازه‌گیری کنید.

۹۰-۳۹ شناورها در چشم. روزنه‌ای در یک قطعه کاغذ آلومینیم را با چشمه گسترده برای مطالعه شناورها روشن کنید. وقتی با یک چشم نگاه می‌کنید سعی کنید با چشم‌زدن آن را پاک کنید. آیا می‌توانید پاک کنید؟ چشم خودتان را یک‌بار یا دوبار "بجرخاند" و سپس نگاه کنید که شناورها می‌چرخند. حال امتحان کنید تا بفهمید آیا آنها به مردمک چشم شما نزدیکترند یا به شبکیه؛ فاصله روزنه را از چشمتان تغییر دهید. اندازه دایره نور تغییر می‌کند. (برای کمک به توضیح علت این موضوع یک کشیدگی در آن ایجاد کنید.) هر جسمی در همان مکان اندازه ظاهری مردمک چشم را با همان نسبت تغییر می‌دهد که تصویر شبکیه تغییر می‌کند. (چرا؟) هر چیزی در شبکیه (یا نزدیک آن) به‌طور کلی اندازه ظاهری را تغییر نمی‌دهد. (چرا؟) شناورها چه کار می‌کنند؟ آیا آنها به شبکیه نزدیکترند یا به مردمک چشم؟ حال سعی کنید طول و قطر آنها را تخمین بزنید. برای تخمین زدن قطر، آنها را با یک موی انسان (موی خودتان) که جلوی مردمک چشمتان بین روزنه و مردمک نگه داشته‌اید مقایسه کنید. برای این مقصود یک روزنه کوچک، کوچکتر از آنچه می‌توانید با یک سوزن ایجاد کنید. یک قطعه کاغذ آلومینیمی را چروک کنید، بعد آن را صاف کنید. به یک روزنه کوچک که اتفاقی ایجاد می‌شود نگاه کنید. (آیا می‌توانید بگویید آیا کوچک است — شدت خیلی کمی از داخل آن عبور می‌کند.) حال به یک تار مو نگاه کنید. باید به سایه آن نگاه کنید و فریزهای پراش زیبایی را در لبه‌های آن ببینید. اندازه آن را با فریزهای ایجادشده از شناور مقایسه کنید. آیا آنها ظریفتر از مو هستند؟ (توجه: یک تار موی انسان قطرش در حدود $1/20$ mm است یعنی 50μ . یک گلبول قرمز خون قطری در حدود 5μ یا 6μ دارد.)

۹۰-۴۰ تپله‌ها. مقداری تپله شیشه‌ای صاف از یک مغازه اسباب‌بازی فروشی تهیه کنید. یکی از آنها می‌تواند به‌عنوان ذره‌بین لوئن هوک استفاده شود. یک چشمه نور نقطه‌ای را در فاصله یک متر یا در حدود آن قرار دهید و آن را با یک تپله روی "نقطه‌ای" کانونی کنید. نقطه کانونی در چه فاصله‌ای دور از آن تشکیل می‌شود؟ ضریب شکست شیشه چقدر است؟ (اگر آن را جور دیگری قرار دهیم، آیا مکان نقطه کانونی با نتیجه‌ای که از بخش ۹-۷ به‌دست آمده توافق دارد اگر n را 1.5 بگیریم؟) به جسمی کوچک نگاه کنید. بزرگنمایی مورد استفاده در روش آزمایش خانگی ۹-۳۸ را اندازه بگیرید.

۹-۴۱ عدسی یکسوکوژ. یک طرف یک عدسی یکسوکوژ تخت و طرف دیگر آن سطح کروی (یا استوانه‌ای) دارد. فرمولی برای محل نقطه کانونی تور فرودی که روی طرف تخت آن می‌تابد به‌دست آورید.

۹۰-۴۲ اندازه‌گیری ضریب شکست مایعات. از یک تنگ شیشه‌ای خالی استفاده کنید، مثلاً یک شیشه شیر بچه. (همچنین می‌توانید از یک لفاف شیشه‌ای روشن که از لامپ نور شکسته به‌دست آمده استفاده کنید.) اگر تنگ پر از مایع شفاف، به‌طرف بالا و از کنار روشن شده باشد یک عدسی استوانه‌ای که در بخش ۹-۷ بحث شد داریم. اگر تنگ به یک طرف خوابیده باشد و نصف آن پر باشد، یک عدسی یکسکوژ به‌دست می‌آید، قسمت تخت آن سطح مایع است. آن را از قسمت بالا با یک چشمه خطی یا نقطه‌ای روشن کنید. محل نقطه کانونی را اندازه بگیرید. از فرمول مناسب برای پیدا کردن ضریب شکست استفاده کنید. آب، الکل، روغن معدنی را امتحان کنید.

۹-۴۳ دوربینهای ماهواره‌ای. طبق نوشته‌های روزنامه، هم‌اکنون ماهواره‌هایی داریم که دوربینهای حمل می‌کنند که می‌تواند اشیایی با قطر یک فوت را تفکیک کنند. قطر عدسی چقدر باید باشد وقتی ماهواره در ارتفاع ۱۵۰ مایلی است؟

۹۰-۴۴ عدسی پشت و رو. یک شیشه شیر بچه پر از هوا و غوطه‌ور در آب یک عدسی واگراست. از یک ظرف ماهی با کناره‌های شیشه‌ای یا یک ظرف معمولی با یک آینه برای تغییر باریکه چراغ‌قوه که به‌طور عمود به طرف پایین با باریکه افقی می‌تابد استفاده کنید. مقدار کمی شیر در آب بریزید به طوری که باریکه را ببینید. یک باریکه خوب به‌اندازه مداد با یک چراغ‌قوه‌ای پوشیده شده با یک قطعه مقوای کدر که یک سوراخ در مرکز دارند به‌دست می‌آید. (سر لامپ چراغ‌قوه معمولاً نامنظم است. همچنین شما نور مستقیم لامپ را که با عکس مربع فاصله کم می‌شود نمی‌خواهید اما باریکه‌ای موازی از بازتابگر سهموی را می‌خواهید.) شما می‌توانید عدسیهای هوا و روغن معدنی و شیشه را با استفاده از تعلیق شیر در آب برای دیدن باریکه مطالعه کنید.

۹۰-۴۵ ترکیب رنگ. چشم و مغز شما نور را آنالیز فوریه نمی‌کند (مانند روشی که گوش شما صوت را آنالیز فوریه می‌کند). کمی تمرین می‌خواهد، اما می‌توانید تفاوت بین یک رنگ مربوط به نور تکفام و یک رنگ مربوط به مخلوط طول موجها را تشخیص دهید. از لحاظ روانی، "سفید" یک "رنگ" است. اما توری پراش شما می‌گوید که آن تمام طول موجهای طیف مرئی است. (الف) به اشیاء از داخل صافی بنفش خود که قرمز و آبی را عبور می‌دهد اما سبز را جذب می‌کند نگاه کنید.

(ب) به دو چشمه نور سفید مجزا — چشمه‌های خطی یا لامپهای التهابی — از داخل توری پراشتان نگاه کنید. فاصله خود را از دو چشمه تا جایی تغییر دهید که طیف مرتبه اول چپگرد لامپ راستگرد بتواند روی طیف مرتبه اول راستگرد لامپ چپگرد منطبق شود. آنگاه می‌توانید هر دو طول موج را برهم نهید و ببینید که رنگ "روانشناختی" چه خواهد بود. به منظور برهم‌نهش دو طول

موج "خالص" باید از دو چشمه خطی استفاده کنید (یعنی لامپهای نمایش). می‌توانید رنگهای قشنگی به دست آورید. آن را امتحان کنید! (جوزف دوپل این آزمایش را پیشنهاد کرد.)

۹-۴۶ یک جسم نقطه‌ای به فاصله ۲ متر از عدسی مثبت با توان ۱ دیوپتر قرار دارد. تصویر در کجا تشکیل می‌شود؟ (جسم در روی محور عدسی است.)

۹-۴۷ از یک عدسی نازک به عنوان ذره بین با بزرگنمایی ۵ استفاده کنید. عدسی نازک دوم بزرگنمایی ۷ دارد. وقتی از دو عدسی استفاده می‌شود (یک عدسی بلافاصله بعد از دیگری قرار گیرد)، بزرگنمایی ذره بین چقدر است؟ آیا ۳۵ است؟ یا ۱۲؟ یا ۲؟

۹-۴۸ بزرگنمایی طولی. نشان دهید که اگر یک جسم نقطه‌ای روی محور یک عدسی مثبت نازک در فاصله dp در امتداد محور حرکت کند، آنگاه تصویر در همان جهت با مقدار dq که برابر q^2/p^2 ضربدر dp است حرکت می‌کند.

۹-۴۹ عمق کانون. یک جسم نقطه‌ای در فاصله p روی تصویر نقطه‌ای یک فیلم دوربین که در فاصله q پشت عدسی نازک با قطر D قرار دارد کانونی می‌شود. جسم نقطه‌ای دیگر در فاصله $p + \Delta p$ روی فیلم کانونی نمی‌شود. این جسم قبل (یا بعد) از رسیدن به فیلم از نقطه کانونی عبور می‌کند و یک "اختلال دایره‌ای" روی فیلم ایجاد می‌کند.

(الف) نشان دهید که قطر d دایره اختلال روی فیلم در یک نقطه خارج از کانون با رابطه $d \approx D(q/p^2)\Delta p$ داده می‌شود. بنابراین برای یک دایره اختلال "نسبتاً خوب" یعنی برای یک مقدار معین d ، p و q معلوم، "عمق کانون" Δp به طور معکوس با قطر D متناسب است. D کوچک عمق کانون بزرگ می‌دهد. فاصله کانونی تقسیم بر قطر را "عدد f " می‌نامیم. بنابراین عدد f بزرگ یعنی قطر کوچک گشودگی "ایست" روی عدسی و عمق کانون بزرگ می‌دهد. برای D برابر با صفر یک "دوربین روزنه‌ای" داریم؛ آنگاه این فرمول نشان می‌دهد که عمق کانون بینهایت است. اثبات کنید که در گستره‌ای وقتی از ذره بین روزنه‌ای خودتان استفاده می‌کنید هر چیزی از $p \approx 1$ تا بینهایت "در کانون" باقی می‌ماند، بدون اینکه سعی کنید با ماهیچه‌های کمکی کانونی کنید.

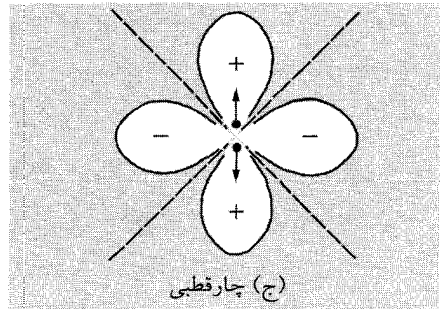
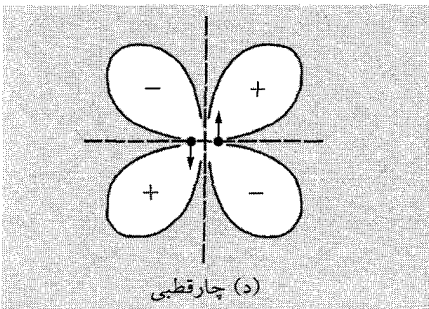
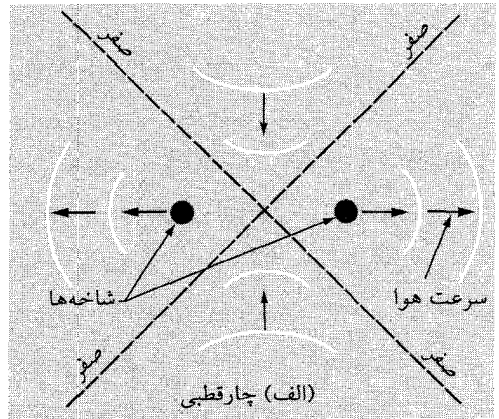
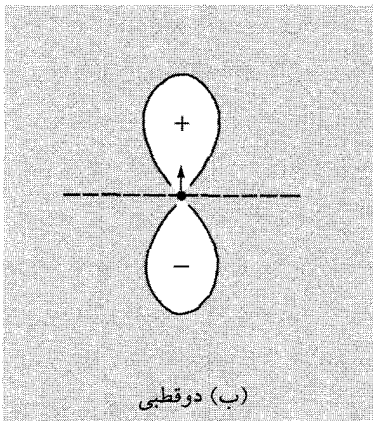
(ب) اگر D بسیار کوچک شود، نمی‌توانیم از پراش صرف نظر کنیم. نشان دهید که پراش یک دایره اختلال $d \approx q\lambda/D$ می‌دهد. حال فرض کنید که با "چگالی دانه‌های" فیلمهای عکاسی یا هر چیز دیگری در مورد فیلم محدود نشده‌اید. همچنین، فرض کنید با شدت (که ممکن است برای D بزرگ لازم باشد) محدود نشده باشید. d_{av}^2 به عنوان مجموع مربعات دو سهم d تعریف می‌شود، یکی سهمی که از عمق کانون ناشی می‌شود و دیگر از پراش. d_{av}^2 را با تابعی از قطر D عدسی کمینه کنید و چیزهای دیگر را ثابت بگیرید. نشان دهید که برای λ و p معلوم کمترین تصویر مبهم با D ای که $D^2 = \lambda p^2 / \Delta p$ به دست می‌آید.

(ج) پراش را فراموش کنید. فرض کنید از دو نفر در آن واحد عکس بگیرید؛ یکی در ۱۵ فوتی و دیگری در ۲۵ فوتی قرار می‌گیرد. فاصله کانونی عدسی 10 cm است. می‌خواهید دایره اختلال روی هر دو شخص کمتر از 1 mm در قطر "در فضای جسم" باشد یعنی 1 mm "روی هر شخص". عدد f لازم را پیدا کنید. (از تقریبهای غیردقیق استفاده کنید؛ مثلاً $20\text{ ft} \approx p$ را به عنوان میانگین بگیرید.)

(د) آیا پراش، تصویر را به اندازه قابل توجه‌ای در هندسه قسمت (ج) خراب می‌کند؟

جواب: عدد f تقریباً مساوی 5° است. پراش در حدود عمق کانون ابهام سهم دارد.

5° - 9° طرح تابش دیپازون - تابش چارقطبی. یک دیپازون مرتعش نزدیک گوش خود بگیرید. آن را حول محور خودش بچرخانید (محور دسته) و به شدت بیشینه و کمینه گوش دهید. دیپازون را در یک انتهای لوله که برای تشدید با دیپازون تنظیم شده است نگه دارید. دیپازون را به آهستگی حول محورش بچرخانید. در چرخش 36° درجه، چهار زاویه با شدت صفر و چهار زاویه با شدت بیشینه پیدا



شکل ۹-۵ طرحهای تابش دیپازون. (الف) چارقطبی. (ب) دوقطبی. (ج) چارقطبی. (د) چارقطبی.

خواهید کرد. دیپازون را طوری نگه دارید که در شدتِ صفر باشید. بدون اینکه مکانِ نسبی دیپازون و لوله را تغییر دهید، یک قطعه مقوا که نصف انتهای لوله را می‌بندد وارد کنید و یک شاخهٔ دیپازون مسیر بازپایین لوله را می‌دهد اما دیگری را می‌بندد. چه اتفاقی می‌افتد؟ چرا؟ دو دیپازون را مقابل یکدیگر بزنید، هرکدام را انتهای لوله بگیرید و به زنشها گوش دهید. وقتی ریتم آن را به وجود آورید، یک دیپازون را 90° حول محور بلندش بچرخانید، به طوری که از یک زاویه با شدت بیشینه به دیگری برود. زنشها "روی زنش" ادامه پیدا نمی‌کند. درست بعد از چرخش، وقتی باید یک زنش باشد دوزنش وجود دارد و سپس زنشها در خارج زنشهای ریتم اصلی ادامه می‌یابند. گرچه یک گوش خوب برای زنش پایدار دارید، ممکن است برای اثبات اینکه زنشهای جدید خارج از زنش قدیمی باشد مشکل داشته باشید، اما مشکلی در شنیدن زنش "اضافه" که وقتی دیپازون را می‌چرخانید به وجود می‌آید نخواهید داشت. (اگر بشمارید "۱ و ۲ و ۳ و ..."، با شماره‌های زنش بیشینه و "وها" روی صفر کمک خواهید شد، سپس نگذارید شمارش شما وقتی دیپازون را می‌چرخانید تحت تأثیر چیزهایی که می‌شنوید قرار گیرد.) توضیح شما چیست؟ راجع به اینکه چطور دیپازونها روی هوای اطرافشان عمل می‌کنند فکر کنید. وقتی شاخه‌ها جدا هستند، هوا را به خارج شاخه‌ها فشار می‌دهند، و به هوای فشرده یک سرعت خارجی می‌دهند. در همین حال ناحیهٔ بین شاخه‌ها کسر کوچکی از هوا را گسترش می‌دهد زیرا شاخه‌ها هنگامی که بسط می‌یابند فضای بیشتری بین آنها باقی می‌ماند. هوا از کناره‌ها برای پرکردن کسری وارد می‌شود. بنابراین سرعت هوای تولیدشده خارج هوایی است که در صفحهٔ دو شاخه قرار دارد و داخل هوایی است که در صفحه‌ای که بین دو شاخه عبور می‌کند قرار دارد. در نصف دور بعدی شاخه‌ها به همدیگر نزدیک می‌شوند؛ هوا به طرف داخل صفحهٔ شاخه‌ها مکیده می‌شود و به خارج صفحهٔ شاخه‌ها چلانده می‌شود. جایی بین این جهت‌ها، باید جهتی وجود داشته باشد که سرعت ایجادشده صفر باشد یعنی سرعت طرح یک گره داشته باشد. این توصیفی است برای چهار بیشینه و چهار کمینه وقتی دیپازون را می‌چرخانید. در قسمت (الف) شکل طرح تابش را در زمانی نشان می‌دهد که شاخه‌ها به طرف خارج حرکت می‌کنند. طرح تابشی به این شکل را طرح تابش چارقطبی می‌نامند. اگر به جای دو شاخه یک شاخه داشته باشیم، طرح تابش کمینه و بیشینه و فازهای نسبی باید آنهایی باشند که مربوط به طرح تابش دوقطبی‌اند. اگر یک دوقطبی نوسانگر را بگیرید (در اینجا یک موج دوقطبی صدا، اما این نظر در مورد امواج رادیویی یا هر موج دیگر هم اعمال می‌شود) و تابش آن را روی تابش یک دوقطبی همسان که به طور جزئی در مکان خود جابه‌جا شده است و 180° خارج از فاز نسبت به اولی نوسان می‌کند برهم‌نهم، تابش چارقطبی به دست می‌آید. طبق جهت جابه‌جایی نسبت به طرح امواج یک دوقطبی، می‌توانید طرحهای چارقطبی مختلفی به دست آورید. اما همهٔ آنها این شکلهای معمول را دارند:

چهار "قطعه برآمده" با شدت قوی وجود دارد که شخص تداخل سازنده‌ای بین سهمهای دوقطبی به دست می‌آورد. فازهای در همسایگی قطعه‌ها 180° درجه با هم فرق می‌کنند. گره‌هایی بین قطعه‌ها وجود دارد (طرح دوقطبی تنها دو قطعه و دو گره دارد). شکل یک طرح دوقطبی و دو طرح چارقطبی نشان می‌دهد: طرح (ب) یک نمودار قطبی از تابع موج تابش دوقطبی در زمان معلوم است. طرح (ج) از برهم‌نهی دو دوقطبی که به‌طور جزئی نسبت به یکدیگر در طول جهت قطعه‌های دوقطبی منتقل می‌شوند و 180° خارج از فاز نوسان می‌کنند به دست می‌آید. این طرح یک دیپازون است. طرح (د) با برهم‌نهی دو دوقطبی که به‌طور جزئی نسبت به یکدیگر در امتداد جهت گره‌های دوقطبی منتقل می‌شوند و 180° خارج از فاز نوسان می‌کنند به دست می‌آید.

۵۱-۹ فرض کنید یک باریکهٔ رادیویی ایجاد می‌کنید که مساحت آنتن فرستندهٔ آن A_T است. این باریکه به‌وسیلهٔ یک آنتن با مساحت A_R که در فاصلهٔ زیادی از فرستندهٔ D قرار دارد دریافت می‌شود. نشان دهید که توان فرستنده P_T و توان گیرنده P_R به‌طور تقریبی با رابطهٔ زیر مربوط می‌شوند

$$\frac{P_R}{P_T} = \frac{A_R A_T}{\lambda^2 D^2}$$

فرض کنید آنتنهای فرستنده و گیرنده هرکدام شامل یک "شیپور" میکروموج باریک شده است با یک گشودگی ورودی به شکل یک مربع با طول لبهٔ ۳ متر. فرض کنید بسامد میکروموج 1000 Mc است و فاصلهٔ بین فرستنده و گیرنده 10° مایل است. آهنگ توان عبوری و دریافتی چقدر است؟

۵۲-۹ طرح تداخلی N شکاف مساوی. دامنه با معادلهٔ (۵۴) بخش ۹-۶ داده می‌شود. یک نمایش گرافیکی از جمع دامنه‌های مختلط با مقدار "اختیاری" $\Delta\varphi$ (فاز نسبی بین سهمهای شکافهای همسایه) بکشید. نمایش گرافیکی برای اولین صفر همسایه یک بیشینهٔ اصلی بکشید؛ بنابراین به‌طور گرافیکی به دست بیاورید که برای این صفر $\Delta\varphi = 2\pi/N$. با نمایش گرافیکی نشان دهید که ثابت فاز برای برهم‌نهی، متوسط ثابتهای فاز اولین و آخرین سهمهاست.

۵۳-۹ تصحیح ابیراهی رنگی. با استفاده از دو نوع شیشهٔ مختلف در یک عدسی "مرکب" می‌توانید از ابیراهی رنگی خلاص شوید. به‌جای یک عدسی یک منشور نازک در نظر بگیرید. یک منشور مرکب نازک از گوه‌های ساده با زاویه‌های α_1 و α_2 طراحی کنید که انحراف از معیار دلخواه معین θ را در طول موج $\lambda_0 = 5500\text{ \AA}$ بدهد و آهنگ تغییر انحراف از معیار صفر با طول موج داشته باشد و نشان دهد که دو نوع شیشه ضریب شکستهای $n_1(\lambda)$ و $n_2(\lambda)$ دارند که تابعهای $n_1(\lambda)$ و $n_2(\lambda)$ معلوم‌اند.

جواب: $\alpha_1 dn_1/d\lambda = \alpha_2 dn_2/d\lambda$

حال انحراف از معیار θ منشور را برای طول موج λ برحسب سری تایلور در کمتهای $\lambda - \lambda_0$ بیان کنید. سربها را فقط در $(\lambda - \lambda_0)^2$ بسط دهید. چطور می‌توانید ابیراهی رنگی را (که هر وقت احتیاج دارید معلوم است) بیش از این کاهش دهید.

۵۴-۹۰ دیدن زیر آب. اشیاء را با ماسک غواصی در زیر آب نگاه کنید. این واقعیت را به دست آورید که اشیاء $3/4$ فاصله دورتر از آنچه هستند ظاهر می‌شوند. به ویژه نمایش واضح آن دیدن شخصی در استخر شناست که سرش بالای آب باشد و تنش زیر سطح آب. ماسک صورت خودتان را تا نیمه پایین ببرید به طوری که سطح آب در سطح چشمتان باشد. سپس می‌توانید به سر شخص از بالای آب یعنی هوا نگاه کنید و با چشمک زدن می‌توانید به بدن شخص که در آب است نگاه کنید.

۵۵-۹۰ عینکهای زیرآبی. وقتی صورت خود را زیر آب می‌برید و سعی می‌کنید بدون ماسک غواصی ببینید، همه چیز تار دیده می‌شود، زیرا تغییر ضریب شکست از رفتن آب به چشم زیاد بزرگ نیست. برای سادگی، فرض کنید هیچ تغییری در ضریب شکست به وجود نمی‌آید. همچنین فرض کنید عدسی چشم شما اثر خیلی کمی دارد، حتی اگر همه کانونی کردن در اولین مرز بین هوا به چشم انجام شود. فرض کنید فاصله کانونی اولین سطح 3cm باشد و باریکه موازی نور در هوا در شبکه کانونی شود. عینکهایی طراحی کنید که بتواند زیر آب دوام داشته باشد تا بتوانید واضح ببینید. از شیشه‌ای با ضریب شکست 1.5 استفاده کنید. نشان دهید که اگر فاصله کانونی شیشه وقتی زیر آب از آن استفاده می‌کنیم 3cm باشد آنگاه فاصله کانونی وقتی در هوا استفاده می‌شود 1cm است. اگر یکی از عدسیهای شیشه‌ای به عنوان ذره بین معمولی استفاده شود بزرگنمایی چقدر است؟ فرض کنید از یک شیشه معمولی سنگ مرمر برای عدسی استفاده کنیم. می‌خواهید تصویری (از باریکه موازی در آب) تشکیل دهید که 3cm پشت سطح سخت مرمر باشد. قطر سنگ مرمر چقدر باید باشد؟

جواب: حدود 1.7cm . حال یک شیشه مرمر شفاف بگیرد امتحان کنید: (مرمر را نزدیک یکی از چشمتان بگیرید.)

۵۶-۹۰ تداخل در نور پراکنده شده. اکنون راه بسیار ساده‌ای برای به دست آوردن فریزهای تداخلی رنگی ارائه می‌شود. کمی پودر تالک معمولی روی یک آینه معمولی بمالید. (همچنین می‌توانید از آرد، یا گرد و غبار استفاده کنید یا به سادگی می‌توانید روی آینه نفس بکشید و بخار آب چگالیده روی آن ایجاد کنید.) چند قدم دورتر از آینه بایستید. نور یک چراغ قوه "قلمی" کوچک را روی آینه بتابانید و بازتاب نور لامپ را ببینید. (یا از هر چراغ قوه‌ای استفاده کنید، بیشتر قسمت بازتابگر را با دست بپوشانید تا یک چشمه کوچکتر از 1cm یا در همین حدود داشته باشید یا از یک شمع در

شب استفاده کنید.) به فریزها توجه کنید! مکانهای مختلف چشمه نور را امتحان کنید، چشمه را به آینه نزدیکتر حرکت دهید تا چشمتان و دور شوید. فریزها به وسیله تداخل بین این دو نوع پرتو ایجاد می شوند: نوع اول پرتوی است که از داخل دانه های پودر تالک عبور می کند پراکنده می شود، به طور آینه ای از آینه بازمی تابد و در مسیر برگشت به پودر پراکنده نمی شود. نوع دوم پرتوی است که از داخل پودر عبور می کند و بدون اینکه پراکنده شود و به طرف چشم شما از همان دانه پودر پراکنده می شود. دانه های پودر شفاف اند. (آنها به همان دلیل سفید به نظر می آیند که شیشه مشجر سفید به نظر می آید.) پراکندگی برای هر دو پرتو تقریباً در جهت جلوست. بنابراین هرکدام از دو پرتوی تداخل از داخل دانه معلومی با ضخامت یکسانی از ماده شفاف می گذرد. نتیجه مشاهده شده را به دست آورید که فریز مرکزی یعنی آنکه ظاهراً از داخل تصویر چشمه نقطه ای می گذرد همیشه یک تداخل بیشینه است. برای نور سفید آن هم سفید است. فریزها فقط در ورای فاصله چند فریز روی لبه های فریزهای مرکزی رنگی است. ظاهر هندسی فریزها به آسانی محاسبه نمی شوند.^۱

۹-۵۷ تداخل سنجهای ستاره ای. (الف) یک دو شکافی ایجاد شده به وسیله یک عدسی و یک فیلم عکاسی می تواند تفکیک زاویه ای برابر $\lambda/d \approx \delta\theta$ بدهد که در آن λ طول موج نور و d جدایی شکافهاست. بنابراین شخص می تواند ساختار نجومی اجسامی را که نور مرئی گسیل می کنند و زاویه λ/d یا بیشتر را فرا گرفته اند آشکار سازی کند. نکته های زیر را تحقیق کنید.

(ب) وقتی d حدود 3°cm یا همین حدود شود، آنگاه وجود "حبابهای" آشفته هوا در جو زمین با ضریب شکستهای متفاوت از هوای اطرافمان کافی است تا تغییر فاز نسبی را با مرتبه π برای دو مسیر هوا از اجسام نجومی به طرف دو شکاف بدهد. (مسیرهای هوا در تمام مسیر در جو ۱ فوت از یکدیگر فاصله دارند.) نشان دهید که نتیجه حدی تفکیک زاویه ای برای نور مرئی در سطح زمین حدود ۲ میکرورادیان است.

(ج) حال بیابید دو شکاف اپتیکی را با دو آنتن رادیویی که طول موجهای 3° سانتیمتری را آشکار می سازند جابه جا کنیم. به جای عدسی که امواج نور دو شکاف را به منظور تشکیل برهم نهش تداخلی در یک مکان قرار می دهد، بیابید یا از کابلهای دو محوری یا چیز دیگر برای دوباره پخش کردن (یا دوباره مستقیم کردن) سیگنال از هر آنتن از داخل هوا به یک ایستگاه گیرنده مرکزی استفاده کنیم. این ایستگاه جای امولسیون عکاسی را می گیرد. نشان دهید که به منظور به دست آوردن همان تفکیک برای نور مرئی با فاصله شکاف 3°cm ، انتهای رادیو باید فاصله ای حدود 18°km داشته باشند.

1. A. J. de Witte, "Interference in Scattered Light" *Am. Jour Phys.* **35**. 301 (April, 1967).

(د) حال اندازه جابجایی‌های هوای آشفته چند فوت است. وقتی مسیره‌های هوا به اندازه چند فوت جدا شدند، تغییرهای فاز کاتوره‌ای برای دو مسیر هوا در عبور از داخل جو اساساً مستقل از فاصله مسیر حساب می‌شوند. بنابراین اولین حدس این است که شما ممکن است فرض کنید که اثر جو روی دو آنتن رادیو با فاصله 18°km اندازه همانی خواهد بود که روی دو شکاف نور مرئی با فاصله چند فوت است و بنابراین شخص ممکن است حدس بزند که تغییرات جوی ضریب شکست، تفکیک زاویه‌ای دو آنتن رادیویی را از بین می‌برد. واقعاً درست است که ضریب شکست هوا برای امواج رادیویی از ضریب شکست نور خیلی تفاوت ندارد. اما تغییر فاز نسبی مربوطه برای امواج 3°cm هزاران مرتبه کوچکتر از امواج نوری است. چرا در این مورد چنین است؟

(ه) تداخل سنج رادیویی از تغییرات جوی ضریب شکست لطمه‌ای نمی‌بینند و می‌توانیم فضای بین آنتنها را خیلی بیشتر از 18°km افزایش دهیم، بنابراین تفکیک بهتری از آنی که با تداخل سنج نور مرئی به دست می‌آید داریم. (البته، جسم نجومی باید امواجی 3° سانتیمتری به خوبی امواج نوری گسیل کند، اگر با دو روش آنها را آشکار کنیم.) بنابراین می‌توانیم در مورد تداخلی سنج رادیویی فکر کنیم که مثلاً یک آنتنش در نیویورک و دیگری در کالیفرنیاست و خط اصلی (فاصله آنتنها) حدود 3000km را می‌دهد و تفکیک زاویه‌ای مربوط به آن 10^{-7}rad است. متأسفانه مشکل جدیدی به وجود می‌آید که تغییر فاز متغیر امواج رادیو که به وسیله کابل (مربوط به دمای متغیر) فرستاده می‌شود یا با پخش از دو آنتن ایستگاه اصلی که سیگنالها برای دادن تداخل برهم‌نهاد می‌شود چیست؟ مقدار هوای بالای سرمان معادل لایه یکنواختی در حدود 8km ضخامت با چگالی یکسانی در سطح دریاست. مقدار هوای موجود میان نیویورک یا کالیفرنیا و یک ایستگاه مرکزی در خاورمیانه چندصد مرتبه بیشتر از آن است و کار نمی‌کند. چه کار باید بکنیم؟ در زیر حل ابتکاری آن را می‌نویسیم: ^۱ در هر ایستگاه ساعت اتمی وجود دارد، مثلاً یک نوسانگر میز هیدروژن که در 1000MHz (که 10^9cps است) کار می‌کند. چنین ساعتی پایداری 1 قسمت در 10^{14} دارد، که به این معنی است که به طور کاتوره‌ای در فاز به وسیله تنها یک دور خارج از 10^{14} دور رانده می‌شود. نشان دهید که چنین ساعتی (به وسیله کمتر از یک دور رانده می‌شود) با نظم یک روز پایدار است. (و) فرض کنید می‌خواهیم امواج رادیویی ستاره را در بسامد مرکزی 1000MHz ν (مربوط به امواج رادیویی 3°cm) با پهنای نوار $\Delta\nu = 1\text{MHz}$ اندازه‌گیری کنیم. آنگاه نوسانگر محلی در هر ایستگاه در بسامد 1000MHz ν راه می‌افتد. در هر ایستگاه سیگنال نوسانگر محلی با سیگنال آنتن برهم‌نهاد می‌شود. اگر نوسانگر محلی جریان $\cos \omega \cdot t$ به وجود آورد و اگر

1. N. Broten, et al., "Long Base - Line Interferometry Using Atomic Clocks and Tape Recorders," *Science*, **156**, 1592, (June 23, 1967).

آنتن یک جریان $A \cos(\omega t + \varphi)$ ایجاد کند، آنگاه برهم‌نهی دو جریان مربع شود و روی اولین دور سریع (در 100.0 MHz) متوسط گرفته شود، توان $P = I^2 R$ را با وابستگی زمانی زیر ضربدر یک ثابت خواهد داد.

$$P = \bar{I} + A^2 + 2A \cos[(\omega_0 - \omega)t - \varphi]$$

این فرمول را تحقیق کنید.

(ز) اگر $\nu \cdot t$ بهتر از λd برای $t = \lambda d$ معلوم باشد، آنگاه P بهتر از یک دور در بسامد "زنش" کندتر $\nu_0 - \nu$ برای $t = \lambda d$ معلوم خواهد بود. متوسط $\nu - \nu_0$ در داخل نوار سیگنالهای آشکارشده صفر است. پهنای نوار $\Delta \nu$ حدود 1 MHz است. این سیگنال، P ، با بسامدهایی که از صفر تا حدود 1 MHz گسترده می‌شود در هر ایستگاه روی ضبط‌صوت ضبط می‌شود. (دستگاه ضبط ویدئو که در تلویزیون استفاده می‌شود پهنای نوار مناسبی برای این کار دارد.) بعد از اینکه هر ایستگاه برای مدت زمانی (کمتر از یک روز ضبط کرد) ضبط‌صوتها ممکن است با هوائیما مثلاً از دو آنتن اداره فیزیکدانها حمل می‌شود. آنگاه هر دو دستگاه ضبط‌صوت هم‌زمان و به‌طرف عقب برگردانده می‌شوند به‌طوری که سیگنالهای روی هم برهم نهاده شوند. به‌منظور اینکه اطلاعات فازگم نشود، لازم است که نه ضبط‌صوت یک دور از دست بدهد یا به‌اندازه یک دور از مراحل عمل خارج شود (یک دور در بسامد نوسان سیگنال P روی هر ضبط‌صوت). این سیگنال مؤلفه‌های بسامدی از صفر تا حدود 1 MHz دارد چون پهنای نوار اصلی است. بنابراین دو نوار باید با دقتی بهتر از 1 میکروثانیه هم‌زمان شوند. همچنین وقتی نوارها در آنتنهای مربوطه گذاشته می‌شوند، مجبورند علامت‌زنهای زمان روی آن نصب کنند به‌طوری که فیزیکدانها بدانند در چه زمانی سیگنالهای رسیده هم‌زمان‌اند. علامت‌زن زمان روی نوار مغناطیسی باید با دقت بهتر از 1 میکروثانیه تنظیم شود. هم‌زمانی و علامت‌زنی زمان یک دستگاه ضبط ویدئوی معمولی که در تلویزیون استفاده می‌شود با دقت بهتر از $1 \mu\text{s}$ یک تمرین استاندارد آسان است! بنابراین ممکن است یک تداخل‌سنج ستاره‌ای را تماشا کنید که شامل یک آنتن رادیو در نیویورک باشد که با یک سیگنال میزر هیدروژن محلی مخلوط شده باشد و روی نوار مغناطیسی ضبط شود و یک ایستگاه مشابه در کالیفرنیا باشد. تداخل‌سنج درحالی‌که زمین می‌چرخد طول آسمان را جاروب می‌کند "ثابت" فاز φ در جریان هر آنتن درست کمیت kr است که r اساساً فاصله آنتن از ستاره است. بنابراین آنتن 1 در نیویورک جریان $A_1 \cos(\omega t + kr_1)$ مربوط به ستاره مشخص دارد و آنتن 2 در کالیفرنیا جریان $A_2 \cos(\omega t + kr_2)$ مربوط به همان ستاره برای همان مؤلفه بسامد سیگنال دارد. برای سادگی فرض کنید که آنتنها ساختار یکسانی دارند و دامنه‌های دریافتی مساوی‌اند:

$A_1 = A_2 = A$. نشان دهید که وقتی جریانهای خروجی نوار ضبط صوت P_1 و P_2 برهم نهاده شوند، جریان منتج $P_1 + P_2$ متناسب با $\frac{1}{2}k(r_1 - r_2)t \cos \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)$ با $1 + A^2 + 2A \cos \frac{1}{2}k(r_1 - r_2)$ است. حال این جریان را مربع و روی یک دور $\nu - \nu_0$ متوسط بگیرید. نشان دهید که زمان منتج توان متوسط متناسب با $[(1 + \cos k(r_1 - r_2)) + A^2(1 + A^2)]$ است. جمله $\cos k(r_1 - r_2)$ در هر زمان که وارد یک دور می شود کالیفرنیا ۱۵cm به ستاره نقطه‌ای نزدیکتر می شود در حالی که نیویورک ۱۵cm دورتر از آن می شود (فرض کنید λ برابر 3° سانتیمتر است). اگر یک ستاره دوم وجود داشته باشد (یا یک ساختار داخلی) آن با مقدار $k(r_1 - r_2)$ که از ستاره اول به دست می آید مثلاً π متفاوت است حل خواهد شد، یعنی فاصله زاویه‌ای از ستاره اول از مرتبه λ/d است.

(ح) مسائل تکنیکی دیگری وجود دارند که ما آنها را نگفته‌ایم. مثلاً چون تعداد زیادی ستاره‌های رادیویی وجود دارد، می‌خواهیم هر تلسکوپ تنها روی ناحیه کوچکی از آسمان نشانه رود به طوری که تنها یک ستاره باشد که نگران آن باشیم. چطور می‌توانیم آن را ترتیب دهیم؟ (فرض کنید قطر هر تلسکوپ 5° متر باشد).

(ط) مسئله دیگری را توضیح می‌دهیم. می‌خواهیم فریز مرکزی در طرح تداخل را تشخیص دهیم، به طوری که جهت درست ستاره را بدانیم. (راهنمایی: وقتی به یک چشمه نقطه‌ای با یک (مثلاً) نور سبز با یک دوشکافی نگاه می‌کنیم، آسان نیست که فریز تداخل مرکزی را جدا کنیم. همین مسئله وجود دارد در صورتی که از نور قرمز استفاده کنیم. اما اگر از نور سفید استفاده کنید، که شامل هر دو رنگ قرمز و سبز است، جدا کردن فریز مرکزی آسان است.) چرا چنین است؟ نشان دهید چطور می‌توانید در هر آنتن از دو نوار بسامد آشکار شده استفاده کنید (این شبیه استفاده از نور قرمز و سبز است)، که هر کدام با سیگنال نوسانگر محلی مشابه که مربوط به نوارهای مغناطیسی برای هر نوار بسامد جداست، مخلوط شده است، و بالاخره با نوار منتج سیگنال خروجی از دو نوار بسامد مخلوط شده است.

این نوع تداخل سنج رادیو-ستاره که اکنون بحث شد روزی ممکن است برای به دست دادن اندازه‌گیری دقیق افت‌وخیزهای دوره تناوب چرخشی زمین استفاده شود.^۱
 ۵۸-۹ تبدیل مدولاسیون دامنه به مدولاسیون فاز در پخش FM رادیو. (این مسئله دقیقاً به مسئله ۵۹-۹ مربوط است.)

(الف) یک ولتاژ با دامنه مدوله شده شکل زیر را دارد

$$V(t) = V_0[1 + a(t)] \cos \omega_0 t$$

که ω بسامد حامل و $a(t)$ دامنه مدولاسیون جزئی است. ولتاژ با فاز مدوله شده شکل زیر را دارد

$$V(t) = V_c \cos[\omega_c t + \varphi(t)]$$

که $\varphi(t)$ "ثابت" فاز مدوله شده (یعنی مستقل از زمان) است. نشان دهید که بسامد زاویه‌ای لحظه‌ای در موج با فاز مدوله شده با رابطه $\omega(t) = \omega_c + d\varphi(t)/dt$ داده می‌شود. بنابراین می‌توانستیم آن را بسامد مدوله شده (FM) ولتاژ بنامیم به جای فاز مدوله شده ولتاژ.

(ب) دامنه مدولاسیون جزئی $a(t)$ یا فاز مدوله شده $\varphi(t)$ شامل اطلاعاتی است که مثل موسیقی منتقل می‌شود. بیایید موسیقی را آنالیز فوریه کنیم و یک مؤلفه بسامد فوریه بسامد ω_m را که شاخص m به جای مدولاسیون است در نظر بگیریم. آنگاه $a(t)$ را با $a_m \cos \omega_m t$ جابه‌جا کنید. (همچنین باید یک جمله شامل $\sin \omega_m t$ در نظر بگیریم اما چنین کاری نمی‌کنیم. ولتاژ با دامنه مدوله شده به صورت زیر خواهد شد

$$V(t) = V_c [1 + a_m \cos \omega_m t] \cos \omega_c t = V_c \cos \omega_c t + V_c a_m \cos \omega_m t \cos \omega_c t$$

این ولتاژ با دامنه مدوله شده معادل صرفاً برهم‌نهی نوسانهای هماهنگ در بسامد حامل ω_c ، بسامد نوارگذر بالایی $\omega_c + \omega_m$ و بسامد نوارگذر پایینی $\omega_c - \omega_m$ است. با نوشتن صریح $V(t)$ برحسب این برهم‌نهی نکات قبل را تحقیق کنید.

در AM رادیو این بسامدها پخش می‌شوند و آنتن رادیوی شما آنها را می‌گیرد. برق و ریش تراشهای برقی همچنین همان برد بسامد را دارند و در مدولاسیون دامنه به وسیله افزایش یا کاهش دامنه در بسامد معین سهیم‌اند. این باعث می‌شود که موسیقی به هم بریزد و "ایستا" شود. اگر دامنه مدوله شده ولتاژ را به فاز مدوله شده ولتاژ تبدیل کنیم این ایستایی به مقدار زیادی حذف می‌شود زیرا برق باعث اشتباه در تغییر دامنه می‌شود و گیرنده FM می‌داند که این قسمتی از موسیقی نیست چون موسیقی در دامنه یکسان پخش می‌شود، بنابراین گیرنده FM می‌تواند ترتیبی دهد که تغییرات در دامنه ناگهان از بین برود یعنی ایستا شود.

حال اینکه چطور ولتاژ AM به ولتاژ (با فاز مدوله شده) FM تبدیل می‌شود را می‌خوانیم: ولتاژ AM به ورودی صافی نوارگذر اعمال می‌شود که از یک نوار باریک شامل حامل ω_c عبور می‌کند اما مانع ورود دو نوارگذر $\omega_c \pm \omega_m$ می‌شود. بنابراین وقتی حامل از دو نوارگذر جدا می‌شود یک تأخیر (یا تعجیل) زمانی $1/4$ دور در بسامد حامل ایجاد می‌کند یعنی فاز به اندازه 90° تغییر می‌کند. آنگاه یک بار دیگر با دو نوارگذر برهم‌نهی می‌کند که بدون تغییر باقی مانده‌اند. (همچنین اگر بخواهیم می‌توانیم دامنه ولتاژ حامل را کم یا زیاد کنیم اما نباید آن را حذف کنیم.) بنابراین

می‌توانیم مثلاً به جای $\sin \omega \cdot t$, $\cos \omega \cdot t$ را در ولتاژ حامل $V \cdot \cos \omega \cdot t$ قرار دهیم. بعد از تغییر فاز و دوباره ترکیب شدن به دست می‌آوریم

$$V'(t) = V \cdot \sin \omega \cdot t + V \cdot a_m \cos \omega_m t \cos \omega \cdot t$$

حال بگذارید $a_m \cos \omega_m t$ را $\varphi(t)$ بنامیم که همچنین $a(t)$ اصلی ما برای مدوله‌سازی بسامد است. برای سادگی فرض می‌کنیم اندازه $a(t)$ یعنی $\varphi(t)$ در مقایسه با واحد کوچک است. آنگاه داریم: $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi(t) \approx \varphi(t)$.

(ج) نشان دهید که ولتاژ بالا به شکل زیر نوشته می‌شود

$$V'(t)V \cdot \sin[\omega \cdot t + \varphi(t)], \quad \varphi(t) = a_m \cos \omega_m t$$

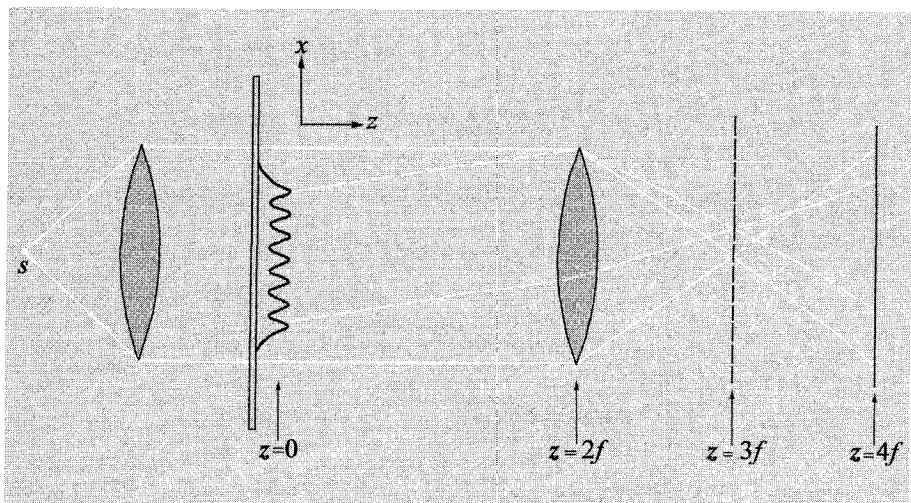
بنابراین حقه تبدیل AM به FM (یا برعکس را) پیدا کردیم: تبدیل فاز موج حامل تحت زاویه 90° نسبت به دو نوارگذر. این اختراع زیبای ای. ایچ. آرمسترانگ در سال ۱۹۳۶ امکان ساخته شدن رادیوی FM تجارتي را دارد.

(د) نشان دهید که راه دیگر تبدیل AM به FM (یا برعکس) انتقال هرکدام از نوارگذرها تحت زاویه 180° است و موج حامل و نوارگذر دیگر را بدون تغییر باقی بگذارید.

۵۹-۹ تبدیل فاز مدوله شده نور به دامنه مدوله شده نور در میکروسکوپ تمایز فاز. (الف) ابتدا یک میکروسکوپ معمولی را در نظر بگیرید. در درجه اول به بزرگنمایی آن توجه نداریم. بنابراین بزرگنمایی را به صورت زیر واحد می‌گیریم. تیغه شیشه‌ای میکروسکوپ را در $z = 0$ قرار می‌دهیم و این کار را با قرار دادن تیغه روی صفحه xy به دست می‌آوریم. یک عدسی ساده در $z = 2f$ قرار می‌دهیم که f فاصله کانونی عدسی است. یک پرده یا صفحه عکاسی در $z = 4f$ می‌گذاریم. آنگاه تیغه میکروسکوپ روی پرده تصویر می‌شود و بزرگنمایی واحد است. این عبارت آخر را تحقیق کنید.

(ب) حال یک آمیب در یک قطره آب را روی تیغه میکروسکوپ قرار دهید و تصویر آن را روی پرده به وجود آورید. متأسفانه نمی‌توانیم آمیب را ببینیم زیرا شفاف است و ضریب شکست آن تفاوت چندانی با ضریب شکست آب ندارد. بنابراین آن را با رنگ رنگی می‌کنیم. حال می‌توانیم آن را ببینیم اما رنگ آن را کشته است وگرنه فرایند زندگی اش را مطالعه می‌کردیم.

نقش رنگ این بود که دامنه نور گسیل شده از انتهای آمیب در $z +$ مدوله می‌شود یعنی آن را نسبت به دامنه نوری که از تیغه میکروسکوپ می‌آید و آمیبی ندارد مدوله می‌کند. وقتی رنگی وجود ندارد، دامنه در $z +$ انتهای آمیب و در مکان عرضی x همان است که اگر آمیبی وجود نداشت بود. اما فاز متفاوت است زیرا نوری که از مقادیر مختلف آمیب می‌گذرد به x بستگی



شکل ۹-۵۹ میکروسکوپ تمایز فاز. در این مثال بزرگنمایی را یک می‌گیریم. صفحه شیء در $z = 0$ است. صفحه تصویر در $z = 4f$ است. صفحه کانونی عدسیهای شیئی در $z = 3f$ است.

دارد و ضریب شکست آمیب از ضریب شکست آب متفاوت است. بنابراین فرض کنید تیغه میکروسکوپ با یک موج تخت نور تکفام که در جهت z پیش می‌رود روشن می‌شود. نور از یک چشمه نقطه‌ای S که در نقطه کانونی عدسی قرار دارد ساطع می‌شود که بعد یک باریکه موازی تشکیل می‌دهد. (شکل را ببینید). فرض کنید در $z = 0$ درست در قسمت پایین آمیب میدان الکتریکی وقتی آمیبی وجود ندارد برای همه x ها با رابطه زیر داده می‌شود

$$E(x, z, t) = E \cdot \sin \omega t$$

وقتی آمیب باشد یک تغییر فاز $\varphi(t)$ وجود دارد که بستگی به x دارد. در این صورت میدان الکتریکی نور در $z = 0$ با رابطه زیر داده می‌شود

$$E(x, z, t) = E \cdot \sin[\omega t + \varphi(x)]$$

بنابراین آمیب رنگ‌نشده نور با فاز مدوله شده تولید می‌کند. عدسی در $z = 2f$ تصویری از آمیب روی پرده در $z = 4f$ تشکیل می‌دهد. میدان الکتریکی در پرده با همان عبارت در $z = 0$ به دست می‌آید (از اتلافهای کوچک چشمپوشی کنید و نگران تبدیل تصویر نباشید یعنی جابه‌جایی به x به $-x$). مربع زمان متوسط میدان الکتریکی آنگاه E^2 است که مستقل از x است و بنابراین تصویری نمی‌توانیم ببینیم. دو قسمت جملات بالا را ثابت کنید.

(ج) رنگ دامنه E را مدوله می‌کند اما آمیب را می‌کشد. به جای آن فاز مدوله شده نور را به دامنه مدوله شده نور تبدیل می‌کنیم. چطور این کار انجام می‌شود؟ بیایید از تشابه تبدیل ولتاژ AM به ولتاژ FM که در مسئله ۹-۵۸ بحث شد کمک بگیریم. می‌خواهیم آن مسئله را از اول کار کنیم یا به عبارت دیگر نور FM را به نور AM تبدیل کنیم. (اما باید به مسئله خاصی توجه کنیم که اینجا با مدولاسیون فاز در فضای $\varphi(x)$ به جای زمان $\varphi(t)$ کار می‌کنیم. بیایید در مورد آن هنوز نگران نباشیم!) با توجه به آخر مسئله ۹-۵۸ می‌بینیم که آن را با مدولاسیون فاز $\varphi(t) = a_m \cos \omega_m t$ تمام کردیم زیرا با یک مدولاسیون دامنه $a(t) = a_m \cos \omega_m t$ شروع کردیم. حال با یک مدولاسیون فاز $\varphi(x)$ شروع می‌کنیم. فرض کنید اندازه $\varphi(x)$ در مقایسه با ۱ رادیان برای همه x ها کوچک باشد یعنی آمیب ضریب شکست نزدیک به ضریب شکست آب داشته باشد. نشان دهید که فاز مدوله شده نور در $z = 0$ یا در $z = 4f$ با رابطه زیر داده می‌شود (به ازای $1 \ll \varphi$)

$$E(x, z, t) = E \cdot \sin \omega t + E \cdot \varphi(x) \cos \omega t$$

حال وابستگی x تابع $\varphi(x)$ را آنالیز فوریه می‌کنیم و یک مؤلفه فوریه عدد موج k_m را در نظر می‌گیریم. بنابراین $\varphi(x) = a_m \cos k_m x$ را در نظر می‌گیریم. آنگاه فاز مدوله شده نور در $z = 0$ یا $z = 4f$ به صورت زیر است

$$E(x, z, t) = E \cdot \sin \omega t + E \cdot a_m \cos k_m x \cos \omega t$$

این هنوز فاز مدوله شده نور است که با آن شروع کردیم و هنوز یک تصویر "غیر مرئی" در $z = 4f$ می‌دهد. حال یک بار دیگر به مسئله ۹-۵۸ نگاه می‌کنیم. به همین ترتیب سهم $E \cdot \sin \omega t$ را "موج حامل نور" می‌نامیم. آنگاه می‌بینیم که اگر بتوانیم فاز موج حامل نور را 90° نسبت به نور مدوله شده (نور با دامنه a_m) انتقال دهیم، نور AM به وجود آورده‌ایم. هنوز بدون نگرانی اینکه این کار در جهان چگونه امکان پذیر است بیایید به سادگی $\sin \omega t$ را با $\cos \omega t$ در نور حامل عبارت بالا عوض کنیم. آنگاه برای نور پرده در $z = 4f$ داریم

$$\begin{aligned} E'(x, z, t) &= E \cdot \cos \omega t + E \cdot a_m \cos k_m x \cos \omega t \\ &= E \cdot [1 + a_m \cos k_m x] \cos \omega t \\ &= E \cdot [1 + a(x)] \cos \omega t \end{aligned}$$

این دامنه مدوله شده نور شدتی متناسب با مربع زمان متوسط میدان الکتریکی می‌دهد یعنی $\frac{1}{4} E^2 [1 + a(x)]^2$ که بستگی به x دارد و بنابراین به ما نشان می‌دهد چطور ضخامت آمیب و ضریب شکست داخلی آن به x بستگی دارد. بنابراین می‌توانیم آمیب را ببینیم.

(د) فقط یک مشکل "کوچک" باقی مانده است: چطور می‌توانیم موج نور حامل را از بقیه نور جدا کنیم، فاز آن را 90° نسبت به بقیه موج نور انتقال دهیم، و آنگاه دوباره آن را با بقیه نور پرده ترکیب کنیم (یا برهم نهمیم) — همه این کارها بین $z = 0$ و $z = 4f$ انجام می‌شود؟ در مورد تبدیل ولتاژ AM به ولتاژ FM حقه ما این بود که از بسامد صافی نوارگذر برای جداسازی بسامد حامل $\omega = \omega_0 \pm \omega_m$ استفاده کنیم. بنابراین به طور مشابه باید دنبال صافی نوارگذر عدد موج بگردیم که عدد موج حامل $k_x = k_0 = 0$ را از نوارهای گذر $k_x = k_0 \pm k_m$ جدا کند. این جمله آخر را بهتر می‌فهمیم اگر فاز مدوله شده میدان الکتریکی در $z = 0$ را به شکل زیر بنویسیم

$$E(x, z, t) = E_0 \sin[\omega t - k_0 x] + \frac{1}{2} E_0 a_m \cos[\omega t - (k_0 + k_m)x] + \frac{1}{2} E_0 a_m \cos[\omega t - (k_0 - k_m)x]$$

که $k_0 = 0$ و ما موج ساکن $\cos k_m x \cos \omega t$ را به صورت برهم‌نهمش دو موج پیشرونده با $k_x = -k_m$ و $k_x = +k_m$ نوشتیم. آخرین فرمول را اثبات کنید. بنابراین می‌بینیم که نوسان فاز مدوله شده در $z = 0$ سه موج پیشرونده به وجود می‌آورد. موج حامل $k_x = 0$ دارد؛ مدولاسیونها یک موج با $k_x = +k_m$ و یک موج با $k_x = -k_m$ می‌دهد. هر سه موج پیشرونده اساساً مقداری مساوی برای k_z دارند، این مقدار اصولاً ω/c است زیرا فرض می‌کنیم که k_x در مقایسه با k_z کوچک باشد یعنی همه موجها در جهت z پیش می‌روند و بنابراین مقدار $\omega/c = \sqrt{k_z^2 + k_x^2}$ بردار انتشار الزاماً برابر k_z برای سه موج است. (در این بحث k_y را حذف کردیم.)

(ه) در شکل یک تیغه شیشه‌ای میکروسکوپ بعلاوه مؤلفه فوریه k_m وابسته به x ضخامت آمیب نشان داده شده است. موج حامل توسط چشمه نقطه‌ای S ایجاد می‌شود. پرتوهای دورتر با خطوط پرکشیده شده‌اند. نوارگذر بالایی با $k_x = +k_m$ با خط چین کشیده شده است. (نوارگذر پایین با $k_x = -k_m$ نشان داده نشده است.) عدسی این سه موج پیشرونده را کانونی می‌کند که هرکدام تقریباً یک موج تخت می‌شوند که تصاویر تقریباً نقطه‌ای در صفحه کانونی عدسی در $z = 3f$ را جدا می‌کنند. پرتوها روی پرده در $z = 4f$ ادامه دارند که دوباره همپوشی می‌کنند. توجه کنید که در صفحه کانونی عدسی (در $z = 3f$) سه موج کاملاً در فضا جدا می‌شوند. آنجا جایی است که می‌توانیم روی حامل بدون این‌که نوارهای کناری را برهم زنیم، کار کنیم! بنابراین صافی فضایی داریم که k_x معلوم را مجزا می‌کند، مانند صافی زمان (مدار آنالیز فوریه) که برای جداکردن ω معلوم استفاده شد. حال که موج حامل به طور فضایی مجزا از نوارهای کناری در $z = 3f$ را داریم، تغییر فاز تحت زاویه 90° بدون مزاحمت نوارهای کناری آسان است. اف. رزینک در سال ۱۹۳۴ میکروسکوپ تمایز فاز را اختراع کرد.

عملیاتی که اکنون گفتیم را می‌توان خلاصه‌تر (و بنابراین کلی‌تر) به صورت زیر بگوییم: در $z = 0$ بستگی تابعی x به دامنه و ثابت فاز یک نوسان به صورت $A(x) \cos[\omega t + \varphi(x)]$ معلوم است. [در مثال کنونی مدوله‌سازی دامنه در $z = 0$ وجود ندارد که $A(x)$ ثابت باشد. در مثالهای دیگر که با نقشهای پراش درگیر است ما $\varphi(x)$ را به جای آن ثابت می‌گیریم.] این بستگی x را آنالیز فوریه می‌کنیم تا موج ساکن در $z = 0$ به دست آید. اینها به صورت چشمه موج پیشرونده با مقادیر معلوم k_x و k_z عمل می‌کنند. سپس از یک عدسی برای تبدیل بستگی k_x (در $z = 0$) به بستگی x (در صفحه کانونی عدسی، فاصله f پشت عدسی) با k_x متفاوت در x مختلف استفاده می‌شود. بنابراین بستگی x در این صفحه کانونی هم‌ارز بستگی k_x با تناظر یک به یک بین k_x و x است. بنابراین بستگی x در این صفحه کانونی برابر یک ثابت ضربدر تبدیل فوریه بستگی x در صفحه شیئی در $z = 0$ است. مقدار z دیگری برای آن که واقعی است وجود ندارد. بالاخره وقتی موجها به پرده می‌رسند (صفحه تصویر)، دوباره همان بستگی x را دارند که در صفحه شیئی داشتند (از جابه‌جایی x با $-x$ و از این واقعیت که بزرگنمایی ممکن است متفاوت با یک باشد صرف‌نظر کنید). بنابراین در رفتن از صفحه شیئی به صفحه کانونی پشت عدسی و سپس به پرده، بستگی x از بستگی x صفحه شیئی به بستگی k_x صفحه شیئی و سپس به بستگی x در صفحه شیئی می‌رود. در رفتن از بستگی k_x در صفحه شیئی به بستگی x در صفحه شیئی، باید از تبدیل فوریه معکوس عبور کنیم. بنابراین ممکن است بگوییم که در میکروسکوپ تمایز فاز با بستگی x معلوم شروع می‌کنیم، آن را تبدیل فوریه می‌کنیم، روی آن کار می‌کنیم (فاز قسمت تبدیل فوریه را تغییر می‌دهیم، شاید دامنه آن را تقویت یا تضعیف کنیم)، و سپس تبدیل فوریه معکوس را انجام می‌دهیم. (اگر تبدیل فوریه را دست‌نزنیم یعنی هیچ انتقالگر فاز در صفحه کانونی قرار ندهیم، آنگاه نتیجه آخر همان نتیجه بستگی x اصلی است.) اثرهای قابل توجه زیادی از این راه به دست می‌آید، که بعضی وقتها "طیف‌نمایی تبدیل فوریه" یا طیف‌نمایی صفحه کانونی a نامیده می‌شود.

(و) تبدیل ولتاژ AM به ولتاژ FM را به صورت جملات کلی که الان برای میکروسکوپ تمایز فاز گفتیم توصیف کنید.

(ز) در این بحث پهنای کل آمیب (در جهت x) و موج حامل را به حساب نیاوردیم. فرض کنید پهنای باریکه موج حامل W است و پهنای کل آمیب w است. اثراتی که این پهنای روی تغییرات شدت x در صفحه کانونی در $z = 3f$ می‌گذارند چیست یعنی چطور نتایج قبلی ما تبیین می‌شود در صورتی که چنین نتیجه‌ای باشد؟

(ج) فرض کنید که به جای تغییر فاز موج حامل تحت زاویه 90° در صفحه کانونی، حامل

را کاملاً با یک مانع کدر در صفحه کانونی پاک کنیم. بستگی x شدت تصویر در این حالت چه می‌شود؟

۹-۶۰ دو عدسی نازک به صورت سری. دو عدسی نازک با توان f_1^{-1} و f_2^{-1} به صورت سری در امتداد محور مشترک داده شده است که فاصله بین عدسیها s است. فرض کنید عدسیها هر دو مثبت‌اند. (نتایج با تعبیر مناسب علامتها کلی‌اند.) یک پرتو موازی با محور در فاصله h از محور در نظر بگیرید که روی عدسی اول فرود می‌آید. فرض کنید پرتو از طرف چپ فرود می‌آید، و عدسیها به ترتیب ۱ و ۲ از طرف چپ‌اند. عدسی اول پرتو را به طرف محور منحرف می‌کند. فرض کنید پرتو قبل از برخورد به محور به عدسی دوم برخورد کند. نقطه کانونی F را که پرتو قبل از ترک عدسی دوم محور را قطع می‌کند پیدا کنید. نشان دهید مکان F مستقل از h (برای تقریب زاویه کوچک) است. حال مکان P را (که برای "صفحه اصلی" است) به صورت زیر تعریف کنید. نتیجه بگیرید که پرتو فرودی به طرف جلو (راست) و پرتو خروجی (آنی که از F می‌گذرد) به طرف عقب می‌روند تا همدیگر را قطع کنند. آنها در صفحه اصلی P همدیگر را قطع می‌کنند. x را فاصله F تا سمت راست عدسی دوم بگیرید. y را فاصله P تا چپ عدسی دوم بگیرید. سپس $a + y$ فاصله صفحه کانونی F تا راست صفحه اصلی P است. این فاصله فاصله کانونی f ترکیب دو عدسی نامیده می‌شود، با در نظر گرفتن اینکه عدسی نازک منفرد در صفحه اصلی P قرار می‌گیرد. x ، y و f را برحسب f_1 ، f_2 و s به دست آورید. اگر f و P را برای پرتوهایی که از طرف چپ به طرف راست می‌آیند پیدا کردید، همین کار را برای پرتوهایی که از طرف راست به طرف چپ می‌روند انجام دهید. آیا فاصله‌های کانونی یکسان‌اند؟ آیا صفحات اصلی در همان مکان قرار دارند؟

جواب: برای پرتوهای فرودی از طرف چپ داریم

$$f^{-1} = f_1^{-1} + f_2^{-1} - sf_1^{-1}f_2^{-1};$$

$$x = (1 - sf_1^{-1})f;$$

$$y = sf_1^{-1}f$$

۹-۶۱ دو عدسی با $f_1 = 20 \text{ cm}$ و $f_2 = 30 \text{ cm}$ به فاصله 10 cm از هم قرار دارند. اگر شیئی در ارتفاع 5 cm و 30 cm جلوی عدسی اول قرار گیرد، پیدا کنید (الف) مکان آن را، (ب) جهت آن را، و (ج) اندازه تصویر نهایی آن را. با روش ردیابی پرتو مکان تصویر را روی نمودار نشان دهید. ۹-۶۲ از یک شیء سبز در فاصله دور با یک دریچه دوربین عکاسی عکس گرفته می‌شود که در آن فاصله دریچه دوربین تا فیلم D است. قطر تقریبی دریچه چقدر خواهد بود اگر عکس، بیشینه تیزی را داشته باشد؟

مباحث کمکی

۱. مثالی "میکروسکوپیک" از نوسانگرهای یکسانی که به طور ضعیف به هم جفت شده اند

ابتدا بخش ۱-۵ را دربارهٔ آونگهای یکسانی که به طور ضعیف به یکدیگر جفت شده اند مطالعه کنید؛ پاراگراف آخر این بخش، مثالهای خاص، را که موضوع مبحث کنونی است نیز بخوانید.

حال مثالهایی از نوسانگرهای ضعیف جفت شده را که از فیزیک اتمی و فیزیک ذرات بنیادی برگرفته شده اند، می آوریم. در هر مورد، "دو درجهٔ آزادی یکسان" موجود است که "ضعیف جفت شده اند"، چنانکه دو "مد طبیعی" با بسامدهای ω_1 و ω_2 وجود دارد. اما، در اینجا با سیستمهای مکانیکی ماکروسکوپیک سروکار نداریم. قوانین نیوتون کافی نیست. درک چنین سیستمهای "میکروسکوپیک" نیازمند مکانیک کوانتومی است. با این وجود، در رفتار سیستمهای میکروسکوپیکی که توصیف خواهیم کرد، از نظر ریاضی، شباهت زیادی با دو آونگ ضعیف جفت شده وجود دارد. البته، تعبیر فیزیکی بسیار متفاوت است. در مورد آونگهای جفت شده، مربع دامنهٔ هر آونگ، با انرژی (جنبشی به علاوهٔ پتانسیل) آن آونگ متناسب است. انرژی، با بسامد زنش مانند "جریانی" بین دو آونگ ردوبدل می شود. در سیستمی که به وسیلهٔ مکانیک کوانتومی توصیف می شود، مربع دامنه برای یک درجهٔ آزادی بخصوص (در واقع مربع مقداری — چون دامنه ها در مکانیک کوانتومی همواره مختلط اند) احتمال اینکه آن درجهٔ آزادی "برانگیخته" (یعنی دارای تمام انرژی) باشد را به دست می دهد. این احتمال، در بسامد زنش، $\nu_1 - \nu_2$ مانند "جریانی" بین دو درجهٔ آزادی ردوبدل می شود. خود انرژی "کوانتیده" است و نمی تواند قسمت شود تا "جریان"

داشته باشد. در مورد دو آونگ، انرژی کل ثابت است. متناظر با آن، در سیستمهای میکروسکوپی، کل احتمالی که هر یک از درجه‌های آزادی برای برانگیخته شدن دارند، ثابت است. (کل احتمال برابر با واحد است، تا جایی که سیستم به طریقی انرژی برانگیختگی را از دست ندهد.) دو مثال زیر معروف‌اند؛ به هنگام مطالعه مکانیک کوانتومی باز هم به آنها بر می‌خورید.

مولکول آمونیم. مولکول آمونیم، NH_3 ، از یک اتم نیتروژن و سه اتم هیدروژن تشکیل شده است. سه اتم هیدروژن یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازند. صفحه این مثلث را صفحه H_3 بنامید. اتم N در دو مکان، ممکن است نوسان کند؛ این متناظر با دو آونگ a و b است. یکی از آنها (مکان a) در یک طرف صفحه H_3 و دیگری (مکان b) در طرف دیگر این صفحه است. اتم N نمی‌تواند به آسانی از a به b یا برعکس برود زیرا یک “تپه” یا مانع انرژی-پتانسیلی بین a و b قرار دارد. در مکانیک کلاسیک (یعنی مطابق با مکانیک نیوتونی، بدون مکانیک کوانتومی)، a و b مکانهای تعادل پایدارند و اتم N که در مکان a نوسان می‌کند هرگز نمی‌تواند به مکان b برسد. (مشابه آونگی این نکته آن است که فزری را که دو آونگ را به هم جفت می‌کند، از میان برداریم. در این صورت اگر آونگ a نوسان می‌کند و آونگ b ساکن است، این وضعیت برای همیشه حفظ خواهد شد، به شرطی که از اصطکاک صرف‌نظر کنیم.) اما، مکانیک کوانتومی بین a و b “جفت‌دگی” ایجاد می‌کند، بدین معنی که “نفوذ از مانع پتانسیل” را ممکن می‌کند. فرض کنید، در زمان $t = 0$ ، مولکول از حالت کوانتومی‌ای شروع می‌کند که در آن N حتماً در مکان a است. در این صورت احتمالهای اولیه با $|\psi_a|^2 = 1$ و $|\psi_b|^2 = 0$ بیان می‌شوند (یعنی احتمال اینکه N در مکان a نوسان کند واحد است و احتمال اینکه در مکان b نوسان کند صفر است). اما این وضعیت باقی نمی‌ماند. در واقع، (با حل معادله شرودینگر) به دست می‌آید که برای چنین شرط اولیه‌ای، احتمال یافتن N در a ، یعنی $|\psi_a|^2$ ، و احتمال یافتن N در b ، یعنی $|\psi_b|^2$ با روابط زیر داده می‌شوند

$$|\psi_a|^2 = \frac{1}{2} [1 + \cos(\omega_1 - \omega_2)t], \quad (1 \text{ الف})$$

$$|\psi_b|^2 = \frac{1}{2} [1 - \cos(\omega_1 - \omega_2)t] \quad (1 \text{ ب})$$

که در آنها ω_1 و ω_2 بسامدهای طبیعی هستند. معادلات (۱) به‌طور قابل توجهی مشابه با معادلات (۹۹-۱) بخش ۵-۱ هستند. کل احتمالی که N در یک مکان یا مکان دیگر باشد، البته برابر واحد است، چنانکه با جمع معادلات (۱ الف) و (۱ ب) به دست می‌آید.

درست مانند آونگهای جفت‌شده، مولکول آمونیم ممکن است چنان “به حرکت در آورده شود” که در ابتدا در یکی از مدهای طبیعی باشد. چنین است که اگر مولکول در مدی که اندکی بسامد

بیشتری دارد باشد (این مد را با شماره ۲ مشخص می‌کنیم، $\omega_2 > \omega_1$)، آن وقت ناپایدار است و تمایل دارد تابش الکترومغناطیسی گسیل کند. در این صورت از مد ۲، که "حالت برانگیخته" نامیده می‌شود، به مد ۱، که "حالت پایه" نام دارد، تغییر می‌کند. این تابش قابل آشکارسازی است. بسامد آن، بسامد زنش $\nu_2 - \nu_1$ است که برابر است با

$$\nu_{\text{زنش}} = \nu_2 - \nu_1 \approx 2 \times 10^{11} \text{ cps}$$

این بسامد، با طول موج حدود ۱٫۵cm متناظر است ($\lambda = c/\nu_{\text{زنش}}$)، که در ناحیه معمول "رادار" یا میکروموج است. اگر باریکه موج میکروموج با بسامد $2 \times 10^{11} \text{ cps}$ را از گاز آمونیم عبور دهیم، برخی از فوتونهای میکروموج گذار از حالت پایه (مد ۱) به حالت برانگیخته (مد ۲) را باعث می‌شوند. انرژی از طریق برانگیختن مولکولها از باریکه میکروموج به مولکولها منتقل می‌شود. به همین ترتیب، یک مولکول برانگیخته ممکن است به حالت پایه "فروافتد"، و بدین ترتیب یک فوتون به باریکه میکروموج بیفزاید. این رد و بدل شدن انرژی بین باریکه میکروموج و گاز آمونیم، اساس کار "ساعت آمونیم" است. جذب انرژی از باریکه میکروموج ساعت را "کوک می‌کند". "جریان احتمال" از حالت a به b و برعکس، در بسامد زنش، ساختار "چرخ‌دنگ" ساعت را فراهم می‌کند. ساعت آمونیم و اخلاف آن دقیقترین اندازه‌گیرهای زمان را در دنیا میسر کرده‌اند.

مزونهای خنثای K . سیستم شیفته‌کننده دیگری که رفتاری مشابه با آونگهای ضعیف جفت‌شده دارد، مزونهای خنثای K است، که "ذرات عجیب" نام گرفته‌اند. آنها به‌راستی خیلی عجیب‌اند و هنوز کاملاً شناخته‌شده نیستند. این سیستم، مشابه با دو آونگ، دارای دو درجه آزادی است، که مزون K^0 و مزون \bar{K}^0 نام دارند. این دو به هم "جفت شده‌اند" زیرا هر یک از آنها ممکن است از طریق "برهم‌کنش ضعیف" با دو مزون پی (از جمله چیزهای دیگر)، برهم‌کنش داشته باشد. مزونهای پی (یا به‌طور مختصر، پیونها) کار فنر را انجام می‌دهند. بنابراین دو مد طبیعی وجود دارد که مزون K^0 و K^0 نامیده می‌شوند. برعکس مدهایی که قبلاً بررسی کردیم، یکی از این دو مد (مد K^0) به شدت میراست. مد دیگر اندکی میراست. (سیستمهای میرا در فصل ۳ بررسی شده‌اند.) اگر سیستم در زمان $t = 0$ با احتمال واحد در مد K^0 باشد، احتمال به‌صورت نمایی با زمان کاهش می‌یابد و با e^{-t/τ_1} داده می‌شود. میرایی مشابه (اما به‌مراتب کوچکتری) برای مد K^0 وجود دارد. "از بین رفتن احتمال" که به میرایی مربوط است، حاصل واپاشی پرتوزای مدها به ذرات دیگر است. مثلاً، K^0 بیشتر به دو پیون تبدیل می‌شود و τ_1 زمان میانگین واپاشی برای K^0 است. اگر سیستم در زمان $t = 0$ با احتمال واحد در حالت K^0 باشد (که آن‌را حالت a می‌نامیم)، و اگر میرایی وجود نداشته باشد، در آن صورت احتمال اینکه برای زمانهای بعد، سیستم در همان

حالت K° باشد با رابطه (۱ الف) داده می‌شود. همین‌طور، احتمال یافتن سیستم در حالت b (\bar{K}°)، با رابطه (۱ ب) داده می‌شود. به‌خاطر وجود میرایی، این رابطه‌ها باید به روابط زیر تغییر داده شوند

$$|\psi(K^\circ)|^2 = \frac{1}{4} [e^{-t/\tau_1} + e^{-t/\tau_2} + 2e^{-(1/2)(t/\tau_1 + t/\tau_2)} \cos(\omega_1 - \omega_2)t] \quad (2 \text{ الف})$$

$$|\psi(\bar{K}^\circ)|^2 = \frac{1}{4} [e^{-t/\tau_1} + e^{-t/\tau_2} - 2e^{-(1/2)(t/\tau_1 + t/\tau_2)} \cos(\omega_1 - \omega_2)t] \quad (2 \text{ ب})$$

توجه کنید که هنگامی که $\tau_1 = \tau_2 = \infty$ (یعنی وقتی میرایی وجود ندارد)، معادلات (۲) همان معادلات (۱) هستند.

تمرین جالبی است که برای آونگهای ضعیف جفت‌شده، سازوکاری برای میرایی طراحی شود که فقط مد ۱ را میرا کند و همین‌طور سازوکاری که فقط به میرایی مد ۲ بینجامد. در آن صورت معادلات انرژی آونگها مانند معادله‌های (۲) خواهد بود، نه معادله‌های (۱).

۲. رابطه پاشندگی برای امواج دوبروی

موج دوبرویی که ذره‌ای با انرژی مشخص را توصیف می‌کند به‌صورت زیر است

$$\psi(z, t) = A f(z) e^{-i\omega t} \quad (1)$$

احتمال یافتن ذره در گستره dz در مکان z برابر است با $|\psi(z, t)|^2 dz$ ، که مستقل از زمان است. اگر انرژی پتانسیل ذره ثابت باشد، "محیطی همگن" داریم و $f(z)$ تابعی سینوسی از kz است

$$\psi(z, t) = [A \sin kz + B \cos kz] e^{-i\omega t} \quad (2)$$

رابطه پاشندگی برای ذره‌ای در ناحیه انرژی پتانسیل ثابت V ، با جانشانی $E = \hbar\omega$ و $p = \hbar k$ (رابطه بسامدی بور و رابطه عدد موجی دوبروی) در رابطه کلاسیک انرژی به‌دست می‌آید. مثلاً، در مورد الکترونهای غیرنسبیتی با جرم m ، رابطه کلاسیک میان انرژی E ، تکانه p و پتانسیل V چنین است

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \quad (3)$$

که رابطه پاشندگی امواج دوبروی را به‌صورت زیر به‌دست می‌دهد

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V \quad (4)$$

الکترونها در جعبه. به عنوان مثال، یک الکترون را در نظر بگیرید که در "جعبه‌ای" یک بعدی که از $t = 0$ تا $z = L$ کشیده شده است، قرار دارد. درون جعبه، $V = V_1$ ، و V_1 عدد ثابت است. به ازای z کمتر از صفر یا بزرگتر از L ، $V(z) = +\infty$ می‌گیریم. بدین ترتیب، الکترون در جعبه محبوس است. اگر این "الکترون مقید" مثل ذره‌ای کلاسیک رفتار می‌کرد، ممکن بود هر مقدار انرژی جنبشی را که با رابطه زیر داده می‌شود، اختیار کند

$$\frac{p^2}{2m} = E - V_1 \quad (5)$$

اما الکترون واقعی، ذره‌ای کلاسیک نیست. حالت‌های مقید ممکن برای الکترون واقعی در "چاه پتانسیل بینهایت" فوق، همان مدهای طبیعی امواج دوبروی الکترون هستند؛ یعنی امواج ساکن با بسامد و طول موجی که طبق رابطه (۴) به یکدیگر مربوط‌اند.

امواج ساکن به شکل امواج ساکن سیم و یولون. ترتیب عدد موجهای k برای امواج ساکن کدام است؟ احتمال یافتن الکترون بیرون از گستره $0 \leq z \leq L$ صفر است. بنابراین $|\psi(z, t)|^2$ درست خارج از چاه صفر است. اما $\psi(z, t)$ تابعی پیوسته از z است. بنابراین ψ باید در $z = 0$ و $z = L$ صفر باشد. (اینها همان شرایط مرزی‌ای هستند که برای سیم همگن و یولون که در $z = 0$ و $z = L$ ثابت شده باشد، داریم. بنابراین، امواج ساکن دوبروی دقیقاً همان ترتیب اشکال را دارند که سیم ایده‌آل و یولون داراست.) بدین ترتیب، شرایط مرزی در $z = 0$ ایجاب می‌کند که در رابطه (۲) داشته باشیم $B = 0$ ، در نتیجه

$$\psi(z, t) = e^{-i\omega t} A \sin kz \quad (6)$$

شرایط مرزی در $z = L$ ایجاب می‌کند که $\sin kL = 0$. بنابراین، امواج ساکن ممکن چنین‌اند:

$$k_1 L = \pi, \quad k_2 L = 2\pi, \quad \dots, \quad k_n L = n\pi, \quad \dots \quad (7)$$

اگر الکترون فقط در یک مد باشد، احتمال بر واحد طول (که در این صورت دیگر نیازی به dz نداریم) یافتن ذره در مکان z در زمان t چنین است

$$|\psi(z, t)|^2 = |e^{-i\omega t} A \sin kz|^2 = |A|^2 \sin^2 kz \quad (8)$$

این احتمال مستقل از زمان است و چنین گفته می‌شود که الکترون در "حالت مانا" قرار دارد. احتمال اینکه الکترون در مکانی مابین $z = 0$ و $z = L$ باشد، برابر با واحد است. این نکته،

”شرط بهنجارش“ را برای $|A|^2$ تعیین می‌کند:

$$1 = \int_0^L |\psi|^2 dz = |A|^2 \int_0^L \sin^2 kz dz = \frac{1}{2} |A|^2 L \quad (9)$$

که از آن $|A|$ به دست می‌آید. بنابراین اگر

$$A = |A| e^{i\alpha} = \sqrt{\frac{2}{L}} e^{i\alpha}$$

آن وقت

$$\psi(z, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} e^{-i(\omega t - \alpha)} \sin kz \quad (10)$$

که در آن α ثابت فاز تعیین نشده‌ای است.

بسامدهای امواج ساکن طبق رابطه پاشندگی، معادله (۴) داده می‌شود

$$\omega_n = \omega_0 + \frac{\hbar k_n^2}{2m}, \quad \omega_0 \equiv \frac{V_1}{\hbar} \quad (11)$$

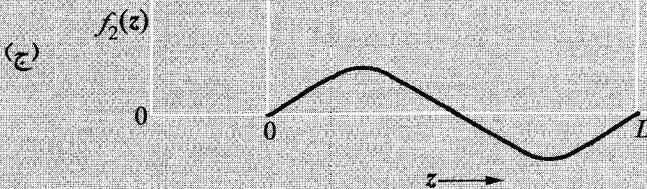
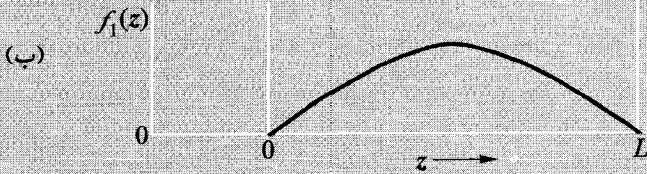
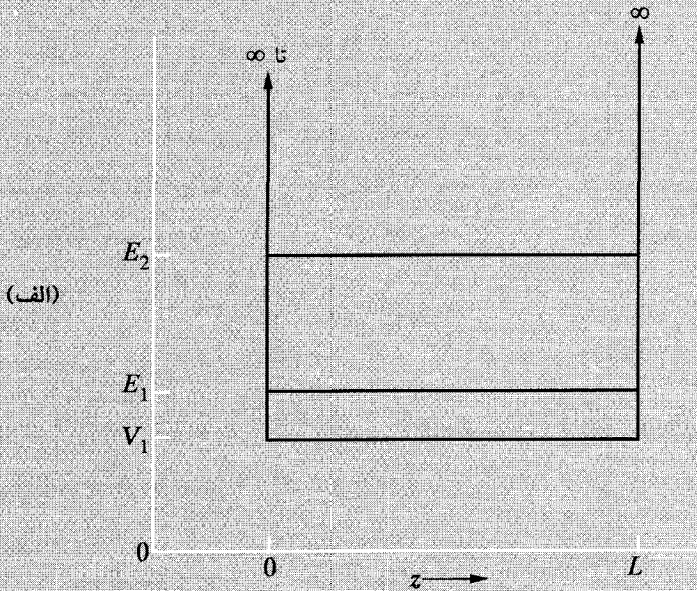
بنابراین، انرژی الکترون، E ، با رابطه زیر داده می‌شود

$$E_n = V_1 + \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = V_1 + \frac{\hbar^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}{2m} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{به‌ازای} \quad (12)$$

امواج ساکن با بسامدهایی که مشابه آنچه برای سیم ویولون دیدیم نیست. بنابراین اگرچه شکل امواج ساکن همانند امواج ساکن سیم ویولون است، بسامد آنها ”هماهنگهای“ کمترین بسامد نیستند، چنانکه برای سیم ویولون این‌گونه بود. دلیلش آن است که رابطه پاشندگی برای امواج دوبروی بسیار متفاوت از رابطه پاشندگی برای امواج سیم ویولون است.

در شکل ۱، نمودار پایینترین مد (که ”حالت پایه“ نام دارد) و مد دوم (که ”حالت برانگیخته اول“ نام دارد) را رسم کرده‌ایم.

محیط غیرهمگن. اگر تابع پتانسیل $V(z)$ ثابت نباشد، یعنی مستقل از z نباشد، در آن صورت، امواج ساکن دوبروی که مدها را مشخص می‌کنند (یعنی حالت‌هایی که بسامد یا انرژی مشخصی دارند)، دارای شکل سینوسی در فضا نیستند. بدین ترتیب، ”رابطه پاشندگی“ که ω را برحسب k می‌دهد، دیگر وجود ندارد، زیرا بستگی مکانی مانند رابطه (۲) نیست و به‌ازای بسامد ω ، فقط یک عدد موج k وجود ندارد. در عوض، می‌باید معادله دیفرانسیل شرودینگر برای تابع موج را حل کرد تا $f(z)$ را به دست آورد. این تا حدی مشابه مسئله سیم پیوسته است که در بخش ۲-۳ بررسی شد. در



شکل ۱. الکترونی که در چاه پتانسیل بینهایت مقید است. (الف) نمودار $V(z)$ ، به همراه خطوط موازی E_1 و E_2 که انرژی اولین و دومین مد (یعنی حالت پایه و اولین حالت برانگیخته) را نشان می‌دهد. انرژی جنبشی $E_n - V_1$ متناسب با n^2 است، به همین دلیل، $E_2 - V_1$ را چهار برابر $E_1 - V_1$ نشان داده‌ایم. (ب) بستگی مکانی تابع موج حالت پایه. (ج) بستگی مکانی تابع موج اولین حالت برانگیخته.

آنجا یافتیم که مدها فقط هنگامی که محیط همگن باشد دارای بستگی مکانی سینوسی هستند. در مورد سیم غیرهمگن، بستگی مکانی امواج ساکن با حل کردن معادله دیفرانسیل زیر به دست می‌آید

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = -\frac{\omega^2 \rho_0(z)}{T} f(z) \quad (13)$$

که همان معادله (۵۹-۲) بخش ۳-۲ است با $T_0(z) = T_0 = \text{const.}$

به همین ترتیب، برای پتانسیل غیرهمگن $V(z)$ ، بستگی مکانی امواج ساکن دوبروی با حل

معادله شرودینگر به دست می‌آید، که برای مثال فعلی چنین است

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = \frac{2m}{\hbar^2} [V(z) - \hbar\omega] f(z) \quad (14)$$

۳. نفوذ "ذره" در ناحیه فضایی "ممنوع‌الورود کلاسیکی"

مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل ذره کلاسیک (که نسبتی نباشد) را می‌توان چنین نوشت

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \quad (1)$$

که در آن $p^2/2m$ انرژی جنبشی و V انرژی پتانسیل است. فرض کنید که بین $z = L$ و $z = 0$ ، V_1 را بگیریم و از $z = L$ تا $z = +\infty$ و همین‌طور از $z = 0$ تا $z = -\infty$ ، آن را V_2 فرض می‌کنیم ($V_2 > V_1$). فرض کنید ذره کلاسیک در "چاه پتانسیل" مقید باشد، همان‌طور که در بخش ۲ مباحث کمکی آمد. این حالت وقتی ممکن است رخ دهد که انرژی E ذره، بین V_1 و V_2 باشد؛ در آن صورت اگر ذره کلاسیک به نحوی در فاصله $z = 0$ تا $z = L$ قرار گیرد، هرگز نمی‌تواند بیرون آید. این ذره مدام به دو دیوار چاه برخورد می‌کند و تکانه‌اش $p_z = \pm \sqrt{2m(E - V_1)}$ هر بار که به دیوار برخورد می‌کند تغییر علامت می‌دهد. این ذره نمی‌تواند به ناحیه‌ای که پتانسیل در آنجا V_2 است وارد شود، زیرا در این نواحی انرژی جنبشی منفی خواهد بود:

$$\frac{p^2}{2m} = E - V = E - V_2 = -(V_2 - E) \quad E < V_2 \quad \text{به‌ازای} \quad (2)$$

البته، ذره کلاسیک با انرژی جنبشی منفی بی‌معنی است.

ذرات واقعی کلاسیک نیستند. آنها هم خواص موجی و هم خواص "ذره‌ای" دارند. روابط

دوبروی $p = \hbar k$ و $E = \hbar\omega$ ، رابطه پاشندگی زیر را به دست می‌دهند

$$\omega = \omega_0(z) + \frac{\hbar k^2}{2m} \quad \omega > \omega_0 \quad \text{به‌ازای} \quad (3)$$

$$\omega_0(z) \equiv \frac{V(z)}{\hbar}$$

تشابه با آونگهای جفت شده. می توان این رابطه را با رابطه پاشندگی آونگهای جفت شده (در تقریب پیوسته - بخش ۳-۵) مقایسه کرد

$$\omega^2 = \omega_0^2(z) + \frac{K^2 a^2}{M} k^2, \quad \omega^2 > \omega_0^2 \quad \text{به ازای} \quad (4)$$

به همراه

$$\omega_0^2(z) \equiv \frac{g}{l} \quad (5)$$

در مورد آونگهای جفت شده، هنگامی که ω کمتر از ω_0 است، امواج سینوسی نیستند، بلکه نمایی هستند. محیط را واکنشی نامند. رابطه پاشندگی به صورت زیر در می آید

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{K^2 a^2}{M} \kappa^2, \quad \omega^2 < \omega_0^2 \quad (6)$$

که در آن κ ثابت تضعیف و $\delta = 1/\kappa$ طول تضعیف است. همین طور برای امواج دوبروی هنگامی که ω کمتر از ω_0 است، رابطه پاشندگی چنین است

$$\omega = \omega_0(z) - \frac{\hbar \kappa^2}{2m}, \quad \omega < \omega_0. \quad (7)$$

بنابراین انرژی جنبشی، $E - V$ ، در حال حاضر، با روابط زیر داده می شود

$$E - V_1 = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m}, \quad 0 \leq z \leq L \quad (8)$$

و

$$E - V_2 = -\frac{\hbar^2 \kappa_2^2}{2m}, \quad \text{جاهای دیگر} \quad (9)$$

در نتیجه، هنگامی که انرژی جنبشی ذره مثبت است، امواج دوبروی مربوط به آن (برای محیط همگن) سینوسی هستند و عدد موج k_1 دارند، در حالی که انرژی جنبشی منفی باشد، امواج دوبروی امواجی نمایی هستند و ثابت تضعیف آنها κ_2 است. شکل تابع موجهای حالتی ممکن الکترون مقید در این "چاه پتانسیل متناهی" خیلی شبیه شکل "مدهای مقید" آونگهای جفت شده است که در بخش ۳-۵ بررسی شدند. بنابراین تابع موج حالت پایه $f(z)$ در ناحیه "انرژی جنبشی

مثبت“ سینوسی است (به این ناحیه، ناحیهٔ پاشنده گویند)، و عدد موج چنان است که kL اندکی کوچکتر از π باشد. در $z = L$ و $z = 0$ این تابع موج سینوسی به صورت هموار به تابع نمایی می پیوندد که در فاصلهٔ بینهایت از ناحیهٔ پاشنده به صفر فرو می افتد. (پایینترین دو حالت مانا در شکل ۲ نشان داده شده اند.)

از روی نمودار مشاهده می کنیم که احتمال یافتن ذره در ناحیهٔ “ممنوع الورد کلاسیکی” صفر نیست. به ازای z کمتر از صفر این احتمال متناسب است با $|e^{-\kappa_2(-z)}|^2$ ؛ به ازای z بزرگتر از L ، این احتمال متناسب است با $|e^{-\kappa_2(x, \ell)}|^2$.

توجه کنید که اگر V_2 به $+\infty$ میل کند، مطابق با معادله (۹)، κ_2 بینهایت می شود و طول تضعیف δ_2 به صفر می گراید. این حالتی است که در مبحث کمکی ۲ بررسی شد. در آن حالت، توانستیم عدد موجهای مجاز را بی درنگ بنویسیم و سپس از روی رابطهٔ پاشندگی انرژیهای متناظر با آنها را به دست آوریم. در مثال کنونی که چاه پتانسیل متناهی است، کار بیشتری برای یافتن مقادیر مجاز k (در داخل چاه) و κ (خارج از چاه) لازم است.

۴. سرعت فاز و سرعت گروه برای امواج دو بروی

برای الکترون غیرنسبیتی با انرژی E در پتانسیل ثابت V ، رابطهٔ پاشندگی چنین است (بخش ۲ مبحث کمکی)

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} + \frac{V}{\hbar} \quad (1)$$

سرعت فاز با رابطهٔ زیر داده می شود

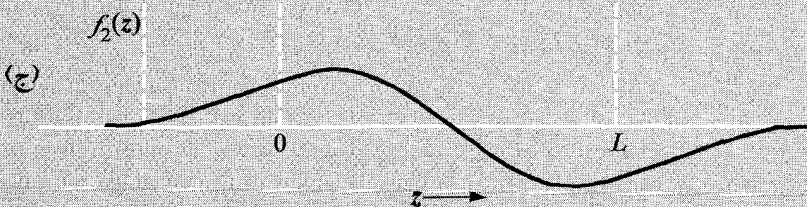
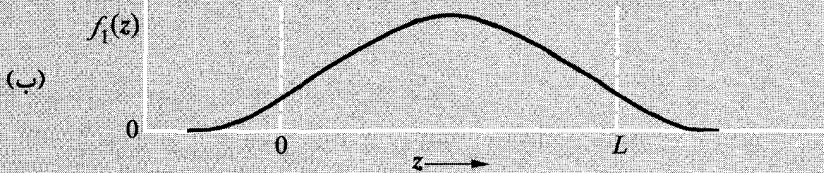
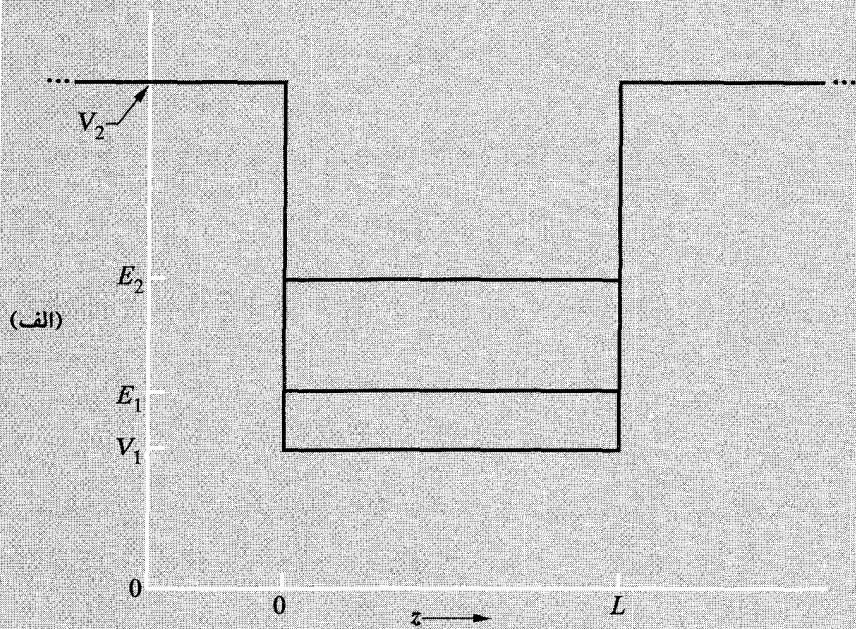
$$v_\varphi(k) = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} + \frac{V}{\hbar k} \quad (2)$$

سرعت ذرهٔ کلاسیک p/m است، یعنی $\hbar k/m$. بنابراین، معادله به این معنی است که

$$v_\varphi(k) = \frac{1}{2}v \text{ (ذره)} + \frac{V}{p \text{ (ذره)}} \quad (3)$$

که رابطهٔ غریبی است. خوشبختانه، $v_\varphi(k)$ مستقیماً قابل مشاهده نیست. سرعت یک ذرهٔ کوانتوم مکانیکی، در عوض، سرعت یک “بستهٔ موج” است که از چندین مقدار k نزدیک به هم، و نه فقط یک مقدار k ، تشکیل شده است. سرعت انتشار بستهٔ موج با سرعت گروه داده می شود. بنابراین با استفاده از معادله (۱)، داریم

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right) = \left(\frac{\hbar k}{m} \right). \quad (4)$$



شکل ۲. الکترونی که در چاه پتانسیل متناهی مقید است. (الف) نمودار $V(z)$ به همراه خطوط افقی E_1 و E_2 که انرژی حالت پایه و اولین حالت برانگیخته را نشان می‌دهند. (ب) بستگی مکانی حالت پایه. (ج) بستگی مکانی اولین حالت برانگیخته.

و شاخص صفر یعنی مقدار مشتق باید به‌ازای مقدار k مشخص‌کننده مرکز نوار Δk که بسته را می‌سازد، محاسبه شود. بنابراین، مشاهده می‌کنیم که اگر تکانه ذره را $(\hbar k)$ که مربوط به مرکز بسته است؛ بگیریم، (ذره) $v_g = v$.

برای ذره آزاد نسبیتی، ارتباط میان انرژی، تکانه و جرم سکون m ، چنین است

$$E^2 = (mc^2)^2 + (cp)^2 \quad (5)$$

که (با استفاده از $E = \hbar\omega$ و $p = \hbar k$ که از نظر نسبیتی صحیح هستند)، رابطه پاشندگی زیر را به‌دست می‌دهد

$$\hbar^2 \omega^2 = (mc^2)^2 + (\hbar ck)^2 \quad (6)$$

سرعت فاز $v_\phi = \omega/k = E/p$ مقدار $v_\phi = \omega/k = E/p$ را داراست که همان c^2/v (ذره) است و بنابراین بزرگتر از c است. سرعت گروه چنین است

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2 p}{E} = v \quad (\text{ذره}) \quad (7)$$

رابطه میان سرعت فاز، سرعت گروه و سرعت نور همان رابطه‌ای است که برای امواج رادیویی یون‌سپهر وجود دارد، یعنی $v_\phi v_g = c^2$. دلیلش این است که روابط پاشندگی مشابهند.

۵. معادلات موج برای امواج دوبروی

یک موج هماهنگ دوبروی (یعنی یک حالت مانا) در ناحیه‌ای که پتانسیل ثابت دارد، به شکل زیر است

$$\psi(z, t) = e^{-i\omega t} (Ae^{ikz} + Be^{-ikz}) \quad (1)$$

بنابراین

$$\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} = -i\omega \psi(z, t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi(z, t) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} = e^{-i\omega t} (ikAe^{ikz} - ikBe^{-ikz}) \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = -k^2 \psi(z, t) \quad (5)$$

برای ذرات غیرنسبیتی، رابطه پاشندگی چنین است (بخش ۲ مبحث کمکی)

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V \quad (۶)$$

با ضرب کردن معادله (۲) در $i\hbar$ و با استفاده از معادلات (۵) و (۶) داریم

$$\frac{i\hbar\partial\psi(z,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial z^2} + V\psi(z,t) \quad (۷)$$

معادله (۷) با استفاده از امواج هماهنگ و برای پتانسیل یکنواخت، که بستگی مکانی سینوسی برحسب kz را می‌دهد، به دست آمد. دلیلی ندارد که بخواهیم معادله (۷) برای حالتی که $V = V(z)$ است، یعنی وقتی V تابعی از مکان است، صحت داشته باشد، اما می‌توان امیدوار بود. و این همان‌گونه است که شرودینگر بود. شرودینگر حدس زد که شاید معادله (۷) حتی برای $V(z)$ که ثابت نیست هم صادق باشد. معادله (۷) با $V = V(z)$ معادله شرودینگر نام دارد (به‌طور دقیقتر، معادله جفت‌شده به زمان یک‌بعدی شرودینگر). این معادله در فیزیک اتمی کاربرد دارد.

هنگامی که از اثرات غیرنسبیتی نمی‌توان صرف‌نظر کرد، نمی‌توانیم از معادله (۶) یا (۷) استفاده کنیم. برای ذرات نسبیتی آزاد، رابطه پاشندگی نسبیتی چنین است

$$\hbar^2\omega^2 = \hbar^2c^2k^2 + (mc^2)^2 \quad (۸)$$

اگر معادله (۸) را در $-\hbar^{-2}\psi(z,t)$ ضرب کنیم و از معادلات (۳) و (۵) استفاده کنیم، داریم

$$\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial z^2} - \frac{(mc^2)^2}{\hbar^2}\psi(z,t) \quad (۹)$$

معادله (۹)، معادله کلاین-گوردن نام دارد. توجه کنید که اگر $m = 0$ ، معادله موج کلاسیک برای امواج غیر پاشنده با سرعت c حاصل می‌شود. این مطابق با صفر بودن جرم سکون فوتون است.

۶. تابش الکترومغناطیسی از "اتم" یک‌بعدی

ابتدا بخش ۲ مبحث کمکی را مرور کنید. حالت‌های مانای الکترونی را در نظر بگیرید که در چاه پتانسیلی با "دیواره‌های" بینهایت در $z = -L/2$ و $z = L/2$ مقید است. حال فرض کنید که

این الکترون مقید به نحوی در برهم نهشی از حالت پایه و اولین حالت برانگیخته است

$$\psi(z, t) = \psi_1(z, t) + \psi_2(z, t) \quad (۱)$$

$$\psi_1(z, t) = A_1 e^{-i\omega_1 t} \cos k_1 z, \quad k_1 L = \pi \quad (۲)$$

$$\psi_2(z, t) = A_2 e^{-i\omega_2 t} \sin k_2 z, \quad k_2 L = 2\pi \quad (۳)$$

احتمال (در واحد طول) یافتن الکترون در مکان z در زمان t چنین است

$$\begin{aligned} |\psi(z, t)|^2 &= |A_1 e^{-i\omega_1 t} \cos k_1 z + A_2 e^{-i\omega_2 t} \sin k_2 z|^2 \\ &= A_1^2 \cos^2 k_1 z + A_2^2 \sin^2 k_2 z \\ &\quad + 2A_1 A_2 \cos k_1 z \sin k_2 z \cos(\omega_2 - \omega_1)t \end{aligned} \quad (۴)$$

مشاهده می‌کنیم که این احتمال شامل جمله‌ای است که به صورت هماهنگ با بسامد زنش دو بسامد دوبروی ω_1 و ω_2 نوسان می‌کند. در واقع، چنان دشوار نیست که انتگرالهای زیر را حساب کنیم و میانگین فضایی مقدار z یعنی \bar{z} را به دست آوریم

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} |\psi|^2 dz &= (A_1^2 + A_2^2) \frac{L}{2}, \\ \int_{-L/2}^{L/2} z |\psi|^2 dz &= \frac{16L^2}{9\pi^2} A_1 A_2 \cos(\omega_2' - \omega_1)t, \\ \bar{z} = \frac{\int z |\psi|^2 dz}{\int |\psi|^2 dz} &= \frac{32L}{9\pi^2} \frac{A_1 A_2}{A_1^2 + A_2^2} \cos(\omega_2 - \omega_1)t \end{aligned}$$

یعنی

$$\bar{z} = (0,36L) \frac{A_1 A_2}{A_1^2 + A_2^2} \cos(\omega_2 - \omega_1)t \quad (۵)$$

علت اینکه بسامد تابش همان بسامد زنش است. اگر بار الکترون $g = -e$ باشد، الکترون با بسامدی که نوسان می‌کند تابش الکترومغناطیسی تابش می‌کند. از معادله (۵) مشاهده می‌کنیم که میانگین مکان بار با بسامد زنش $\omega_2 - \omega_1$ نوسان می‌کند. بنابراین تابش الکترومغناطیسی دارای بسامدی است که همان بسامد زنش بین دو حالت ماناست که در "گذار" شرکت دارند

$$\omega_{\text{تابش}} = \omega_2 - \omega_1 \quad (۶)$$

۷. همدوسی زمانی و زنش اپتیکی

تداخل امواجی که بسامدشان متفاوت است امکانپذیر است. این نکته هم برای پدیده‌های اپتیکی صحت دارد و هم پدیده‌های دیگر. فرض کنید که دو موج نوری ۱ و ۲ داریم که میدانهای الکتریکی E_1 و E_2 را به وجود می‌آورند که هر دو (مثلاً) در امتداد \hat{x} قطبیده‌اند. (بنابراین می‌توانیم علامت بردار را برداریم.) میدان کل در نقطه ثابت z ، برهم‌نهی E_1 و E_2 است. با استفاده از میدان مختلط $E_c(t)$ داریم

$$E_c(t) = E_1 e^{i\omega_1 t} e^{i\varphi_1} + E_2 e^{i\omega_2 t} e^{i\varphi_2} \quad (۱)$$

شار انرژی، که توسط تکثیرکننده فوتونی (که جریان خروجی آن متناسب با شار انرژی ورودی است) قابل اندازه‌گیری است، متناسب است با میانگین $E^2(t)$ در یک دوره تناوب T از نوسانهای "تند" در بسامد میانگین:

$$\begin{aligned} \langle E^2(T) \rangle &= \frac{1}{T} |E_c(t)|^2 \\ &= \frac{1}{T} \{ E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)] \} \end{aligned} \quad (۲)$$

بدین ترتیب، می‌توان امیدوار بود که جریان تکثیرکننده فوتونی را که با بسامد نسبتاً کند $\omega_1 - \omega_2$ تغییر می‌کند، بشود اندازه گرفت. چه شرایطی باید برای پهنای نوار داشته باشیم؟ به یاد داشته باشید که در دیدگاه ساده‌ما، دامنه‌ها و فازها به آرامی و به طور غیرقابل پیش‌بینی تغییر می‌کنند، مثلاً φ_1 به میزانی از مرتبه 2π در فاصله زمان همدوسی که عکس پهنای نوار نوسان ۱ است تغییر می‌کند:

$$t_1(\text{همدوسی}) \approx (\Delta\nu_1)^{-1} \quad (۳)$$

$$t_2(\text{همدوسی}) \approx (\Delta\nu_2)^{-1} \quad (۴)$$

روشن است که اگر قرار باشد زنشها را مشاهده کنیم، هر یک از مؤلفه‌ها می‌باید فاز خود را در مدت زمانی مساوی با تناوب زنش تقریباً ثابت نگه دارند. بنابراین، برای مشاهده زنش، این شرط را قرار می‌دهیم که هر دو زمان همدوسی در مقایسه با تناوب زنش طولانی باشند، یعنی، هر دو پهنای نوار در مقایسه با بسامد زنش کوچک باشد:

$$\begin{aligned} \Delta\nu_1 &< |\nu_1 - \nu_2| \\ \Delta\nu_2 &< |\nu_1 - \nu_2| \end{aligned} \quad (\text{برای زنشهای قابل مشاهده}) \quad (۵)$$

به علاوه، می‌باید قادر باشیم تغییرات جریان تکثیرکننده فوتونی را در بسامد زنش آشکارسازی کنیم. کمی نبوغ هم لازم است. این آزمایش انجام شده است و محشر است.^۱

۸. چرا آسمان روشن است؟

در بخش ۷-۵، هنگامی که بستگی پراکندگی نور از تک مولکولهای هوا را به رنگ نور بررسی می‌کردیم، دریافتیم که چرا آسمان آبی است. اینک استدلالی ارائه می‌دهیم که ظاهراً نشان می‌دهد که آسمان می‌باید نامرئی باشد: مؤلفه‌ای تکفام از نور خورشید را در نظر بگیرید. میدان الکتریکی یکی از مولکولهای هوا را تحریک می‌کند. هر الکترون نوسان‌کننده مولکول هوا در تمام جهات امواجی تابش می‌کند، که برخی از آنها به چشم ناظر می‌رسد. اما برای یک مولکول مشخص (اسمش را مولکول ۱ می‌گذاریم)، مولکول دیگری (شماره ۲) وجود دارد که نیم طول موج از ناظر دورتر است. اگر هر دو مولکول با یک دامنه و ثابت فاز تحریک شوند، امواج آنها می‌باید پس از برهم‌نهی در مکان ناظر به صفر بینجامد. برای پراکندگی نزدیک ۹۰ درجه، واضح است که این شرایط فاز دامنه را می‌توان برقرار کرد. اگر تعداد مولکولهای هوا در واحد حجم آنقدر زیاد باشد که تقریباً همیشه به‌ازای هر مولکول "شماره ۱"، مولکول "شماره ۲" موجود باشد. (در مورد پراکندگی نزدیک سفر درجه، مولکولهایی که نیم طول موج دورتر هستند، به اندازه نصف زمان تناوب زودتر برانگیخته می‌شوند و بدین ترتیب تداخل میرا حاصل نمی‌شود.) هوا در شرایط STP دارای چگالی عددی $3 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ است. بنابراین مکعبی به ضلع $5 \times 10^{-5} \text{ cm}$ (طول موج نور آبی)، دارای 4×10^6 مولکول است، یعنی حدود ۱۰۰ مولکول در امتداد هر یک از اضلاع مکعبی که طول ضلعش برابر با طول موج نور آبی است. به نظر می‌آید که این تعداد از حد کافی هم بیشتر باشد تا تقریباً تداخل کاملاً میرا داشته باشیم، حتی اگر این نکته را هم در نظر بگیریم که چگالی هوا به‌طور نمایی با زیاد شدن ارتفاع از سطح زمین کم می‌شود. بنابراین، به این پیش‌بینی می‌رسیم که آن قسمت از آسمان که به پراکندگی حدود ۹۰ درجه مربوط می‌شود، باید "سیاه" باشد و نه آبی روشن! واضح است که این پیش‌بینی کاملاً با تجربه متناقض است. در واقع، شدت مشاهده‌شده تا تقریب بسیار خوبی، همان شدتی است که براساس پراکندگی از تک تک مولکولهای هوا پیش‌بینی می‌شود، که در آن چگالی عددی مولکولها در نظر گرفته شده است و شدتهای مربوط به مولکولهای مستقل با هم جمع شده است. به‌دلیلی، تداخل میرایی که پیش‌بینی شد رخ نمی‌دهد. چرا؟ این هم نکته‌ای دیگر که به مسئله مربوط است: اگر به‌جای هوا، از شیشه یا آب تمیز استفاده

1. A. T. Forrester, R. A. Gudmundsen, and P. O. Johnson, "Photoelectric Mixing of Incoherent Light," *Phys. Rev.*, **99**, 169 (1955).

کنیم، تداخل میرای پیش‌بینی شده برای پراکندگی 90° درجه در واقع رخ می‌دهد. برای همین، نور چراغ‌قوه‌ای که به آب تمیز می‌تابد با کاهش ناچیزی در شدتش عبور می‌کند (به غیر از پهن شدن باریکه نور به دلیل پراش). مقدار هوای بالای سطح زمین از نظر وزن و (تقریباً) از نظر تعداد مولکولها، معادل است با حدود 10^6 متر آب. با این وجود، میزان پراکندگی 90° درجه برای نور چراغ‌قوه که ده متر از درون آب تمیز عبور می‌کند بسیار کمتر از آن است که نصیب نور خورشید در عبور از جو می‌شود. در مورد آب، دامنه‌ها را برای پراکندگی 90° درجه جمع می‌کنیم و تداخل میرای پیش‌بینی شده به دست می‌آید. در مورد هوا، این ظاهراً شدت‌ها هستند که با هم جمع می‌شوند. چرا؟ جواب، در یکنواختی فاصله مولکولهای آب از هم نسبت به فاصله مولکولهای هوا از یکدیگر، نهفته است. (تفاوت بین مولکول هوا و مولکول آب نقش بازی نمی‌کند: بخار آب مثل گاز هواست؛ از این نظر رفتار هوای مایع مانند آب مایع است.) مولکولهای آب "در تماس‌اند" و فاصله آنها از یکدیگر بسیار یکنواخت است. همواره "تضمین شده است" که مولکول "شماره ۲" وجود داشته باشد تا اثر مولکول "شماره ۱" را (در برهم‌نهی میدانهای تابشی آنها در مکان ناظر) خنثی کند. در مورد هوا، فقط به‌طور میانگین است که برای هر مولکول "شماره ۱" مولکول "شماره ۲" وجود دارد؛ گاهی چنین است و گاهی این‌طور نیست. افت و خیز (در یکنواختی چگالی عددی مولکولهای هوا) همدوسی را از بین می‌برد. تداخل میرایی که برای دامنه‌های پراکندگی 90° درجه "انتظار می‌رود" رخ نمی‌دهد. در عوض (چنانکه همواره برای چشمه‌های غیرهمدوس صادق است) شدت کل حاصل جمع شدت‌های چشمه‌های موجود است.

به طریقی ساده می‌توان نتیجه فوق را به دست آورد: ناحیه کوچکی در فضا را در نظر بگیرید، به نام ناحیه ۱. حال، ناحیه دیگری (به نام ۲) به همان اندازه انتخاب کنید، چنانکه فاصله‌اش از خورشید همان فاصله ناحیه ۱ باشد و نسبت به ناظر به میزان نیم طول موج دورتر از ناحیه ۱ باشد. (مؤلفه تکفامی از نور خورشید مد نظر است.) فرض کنید که این ناحیه‌ها در مقایسه با طول موج کوچک هستند. بدین ترتیب، تمام مولکولهای ناحیه ۱، همفاز تحریک می‌شوند. هر یک میدان E_1 را در مکان ناظر به وجود می‌آورد. اگر در یک زمان بخصوص n_1 مولکول در ناحیه ۱ باشند، میدان حاصل در مکان ناظر که این مولکولها حاصل می‌شود $n_1 E_1$ است. به همین صورت، میدان ناشی از مولکولهای ناحیه ۲ برابر است با $n_2 E_2$. میدان کل حاصل از این دو ناحیه، برهم‌نهی این میدانهاست $E = n_1 E_1 + n_2 E_2$. به دلیل اینکه این دو ناحیه همفاز تحریک می‌شوند و نیم طول موج در راستای ناظر از یکدیگر فاصله دارند، داریم $E_2 = -E_1$. بنابراین در هر زمان داریم

$$E = n_1 E_1 + n_2 E_2 = (n_1 - n_2) E_1 \quad (1)$$

میدان E_1 میدانی است که به وسیلهٔ یک مولکول واداشتهٔ هوا تابش می‌شود. برای این میدان می‌توان نوشت (علامت بردار را برمی‌داریم، زیرا به قطبیدگی نور کاری نداریم)

$$E_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

بنابراین میدان حاصل از دو ناحیهٔ ۱ و ۲ چنین داده می‌شود

$$E = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

که در آن

$$A = (n_1 - n_2)A_1 \quad (4)$$

میانگین و یا مقدار "انتظاری" دامنهٔ A چیست؟ گاهی n_1 بزرگتر از n_2 است و گاهی کوچکتر. به‌طور میانگین، n_1 و n_2 مساوی هستند، بنابراین به‌طور میانگین، A صفر است. اگر n_1 و n_2 در مقدار میانگینشان ثابت باقی می‌مانند، E همواره صفر می‌بود و هیچ‌گونه پراکندگی 90° درجه نمی‌داشتیم. اما همان‌طور که خواهیم دید، چنین نیست.

حال بیایید شدت تابش پراکنده‌شده را در نظر بگیریم. شدت تابش متناسب است با مربع میدان الکتریکی تابشی. بر روی یک دورهٔ تناوب میانگین می‌گیریم. (دورهٔ تناوب در حدود 10^{-15} ثانیه است؛ n_1 و n_2 در این زمان کوتاه تغییر نمی‌کنند.) در این صورت شدت پراکندگی متناسب است با مربع دامنهٔ A . صرفنظر از چند ضریب ثابت، داریم

$$\text{شدت} = A^2 = (n_1 - n_2)^2 A_1^2 \quad (5)$$

اینک اثر افت و خیزهای $n_1 - n_2$ را در نظر می‌گیریم. اگر روی زمانی که به‌اندازهٔ کافی طولانی است میانگین‌گیری کنیم، چنانکه ناحیه‌های ۱ و ۲ فرصت کافی را برای "نمونه‌برداری" از چگالی عددی که مدام در حال تغییر است، داشته باشند، مشاهده می‌کنیم که میانگین زمانی شدت حاصل از دو ناحیه، همان میانگین $(n_1 - n_2)^2$ ضرب در شدتی است که از یک مولکول که فقط در ناحیهٔ ۱ باقی می‌ماند حاصل می‌شود. با استفاده از نماد I برای میانگین زمانی شدت حاصل از دو ناحیه داریم،

$$I = \overline{(n_1 - n_2)^2} I_1 \quad (6)$$

که در آن I_1 شدت حاصل از فقط یک مولکول (که در ناحیه ۱ باقی می ماند) است و خط افقی میانگین گیری زمانی را نشان می دهد. اما میانگین n_1 ، یعنی \bar{n}_1 ، با میانگین n_2 ، یعنی \bar{n}_2 برابر است. بنابراین می توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}(n_1 - n_2)^2 &= [(n_1 - \bar{n}_1) - (n_2 - \bar{n}_2)]^2 \\ &= (n_1 - \bar{n}_1)^2 + (n_2 - \bar{n}_2)^2 - 2(n_1 - \bar{n}_1)(n_2 - \bar{n}_2) \quad (7)\end{aligned}$$

با میانگین گیری داریم

$$\begin{aligned}\overline{(n_1 - n_2)^2} &= \overline{(n_1 - \bar{n}_1)^2} + \overline{(n_2 - \bar{n}_2)^2} \\ &\quad - 2\overline{(n_1 - \bar{n}_1)(n_2 - \bar{n}_2)} \quad (8)\end{aligned}$$

هر چه تا اینجا نوشته ایم هم در مورد هوا صادق است و هم برای آب. اینک به تفاوت اساسی می رسیم. در مورد هوا دو ناحیه ۱ و ۲ کاملاً از یکدیگر "مستقل اند" به این معنی که (در هر لحظه) افت و خیزهای n_1 مستقل از افت و خیزهای n_2 است. (برای آب، چنین نیست. تمام مولکولها در تماس با یکدیگرند. اگر بخواهید مولکولی را به یک طرف از ناحیه ۱ هل دهید، می باید با خارج کردن مولکولی از طرف دیگر برایش جا باز کنید. وقتی این کار را می کنید، حتی مولکولهایی را به ناحیه ۲ می برید.) بنابراین در مورد هوا میانگین حاصل ضرب $(n_1 - \bar{n}_1)$ و $(n_2 - \bar{n}_2)$ حاصل ضرب میانگینهای مستقل است:

$$\overline{(n_1 - \bar{n}_1)(n_2 - \bar{n}_2)} = \overline{(n_1 - \bar{n}_1)} \cdot \overline{(n_2 - \bar{n}_2)} = (\bar{n}_1 - \bar{n}_1) \cdot (\bar{n}_2 - \bar{n}_2) = 0 \quad (9)$$

گام اساسی در آن بود که تشخیص دهیم که در مورد هوا افت و خیزهای n_1 مستقل از افت و خیزهای n_2 است. سپس میانگین مربعی افت و خیزهای n_1 و n_2 را نسبت به مقادیر میانگین آنها محاسبه می کنیم. در مورد هوا، در ناحیه ۱ "جا زیاد است" (همین طور در ناحیه ۲)؛ ازدحام مولکولها موجود نیست. اینکه در یک لحظه ممکن است مولکولهای بیشتری در ناحیه ۱ موجود باشند تأثیری در آن ندارد که مولکول دیگری بتواند یا نتواند به ناحیه وارد شود. در این صورت محاسبه نشان می دهد (همان طور که در مجلد پنجم همین کتاب خواهیم خواند)، که تعداد مولکولها در ناحیه ۱ (یا ناحیه ۲) از یک تابع توزیع احتمال تبعیت می کند (به نام "توزیع پواسون") که برای آن انحراف معیار n_1 از مقدار میانگینش مساوی با خود میانگین است:

$$\overline{(n_1 - \bar{n}_1)^2} = \bar{n}_1, \quad \overline{(n_2 - \bar{n}_2)^2} = \bar{n}_2 \quad (10)$$

این رابطه برای مولکولهای هوا صادق است. اما برای مولکولهای آب صادق نیست، زیرا حضور اندکی مولکولهای اضافی، به شدت ورود مولکولهای اضافی بیشتر را دشوار می‌کند. در عوض، برای آب این روابط صادق است

$$\overline{(n_1 - \bar{n}_1)^2} \ll \bar{n}_1, \quad \overline{(n_2 - \bar{n}_2)^2} \ll \bar{n}_2 \quad (11)$$

بنابراین، میانگین زمانی شدت حاصل از دو ناحیه برای هوا چنین است

$$\begin{aligned} I &= \overline{(n_1 - n_2)^2} I_1 \\ &= \overline{(n_1 - \bar{n}_1)^2} I_1 + \overline{(n_2 - \bar{n}_2)^2} I_1 + 0 \\ &= \bar{n}_1 I_1 + \bar{n}_2 I_1 \\ &= \bar{n}_1 I_1 + \bar{n}_2 I_2 \end{aligned} \quad (12)$$

این شدت همان مجموع شدتهایی است که مولکولهای هوا در ناحیه ۱ به علاوه مولکولهای هوا در ناحیه ۲ به دست می‌دهند. برای آب، در عوض داریم

$$I = \overline{(n_1 - n_2)^2} I_1 \ll \bar{n}_1 I_1 + \bar{n}_2 I_2 \quad (13)$$

اگر n_1 و n_2 همواره دقیقاً مساوی بودند، در آن صورت "آب کاملاً یکنواخت و صلبی" می‌داشتیم که در نتیجه شدت صفر حاصل می‌شد.

از طریق آزمایشی بسیار ساده و زیرکانه، ر. دلبیو. وود نشان داده است که شدت نور پراکنده شده از هوا در زاویه ۹۰ درجه متناسب با تعداد مولکولهای موجود است، چنانکه معادله (۱۲) پیش‌بینی می‌کند. به راحتی می‌توانید این آزمایش را تکرار کنید.^۱

۹. امواج الکترومغناطیسی در اجسام

بحث ما، از آنچه در متن اصلی کتاب آمده است کلیتر خواهد بود. از در نظر گرفتن قسمت جذبی ثابت دی‌الکتریک پرهیز نخواهیم کرد، همین‌طور از به کار بردن اعداد مختلط پرهیز نمی‌کنیم.

۱. برای نمونه به توصیفی که در کتاب زیر آمده است رجوع کنید.

معادلات ماکسول. با نوشتن صورت کلی معادله‌های ماکسول (در واحدهای الکتروستاتیک esu) آغاز می‌کنیم

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_{\text{کل}} = 4\pi\rho_{\text{درا}} - 4\pi\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{کل}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{درا}} + \left(4\pi\nabla \times \mathbf{M} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4)$$

جور دیگری که معادلات (۱) تا (۴) را می‌توان نوشت چنین است

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \{\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}\} = 4\pi\rho_{\text{درا}} \quad (6)$$

$$\nabla \times \{\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}\} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \{\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}\} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{درا}} \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (8)$$

ترکیب $\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ به نام \mathbf{D} شناخته می‌شود. ترکیب $\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ را \mathbf{H} می‌نامند:

$$\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \equiv \mathbf{D}, \quad \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \equiv \mathbf{H} \quad (9)$$

با این حال، از نمادهای \mathbf{D} و \mathbf{H} استفاده نخواهیم کرد.

محیط خطی همسانگرد. نیرویی که بر بار نقطه‌ای q واقع در نقطه x, y, z در زمان t وارد می‌شود با رابطه زیر داده می‌شود

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{B} \quad (10)$$

که در آن \mathbf{E} و \mathbf{B} میدانهای لحظه‌ای در مکان مورد نظرند. در مبحث محیطهای "پیوسته" از میانگین نیرو بر واحد بار که روی ناحیه‌ای کوچک از حجم میانگین‌گیری می‌شود، برای تعریف مقادیر میانگین‌گیری شده مکانی \mathbf{E} و \mathbf{B} استفاده می‌کنیم. تفرک این است که این میدانها روی بار "میانگینی" عمل می‌کنند که میزان بار و سرعت آن روی عنصر حجم میانگین‌گیری شده است، و متناظر با چگالی بار و چگالی جریان در عنصر حجم است.

نیروهای وارد بر بارها و جریانها در محیط ناشی از میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} در محیط هستند. این نیروها تغییراتی در توزیع بار و توزیع جریان به وجود می آورند و در ایجاد \mathbf{P} و \mathbf{M} نقش دارند. محیط را همسانگرد نامند اگر قطبش \mathbf{P} در امتداد $\pm \mathbf{E}$ باشد و مغناطش \mathbf{M} در امتداد $\pm \mathbf{B}$ باشد. نتیجه ضمنی این است که هرگاه \mathbf{E} صفر باشد \mathbf{P} صفر است و هرگاه \mathbf{B} صفر باشد \mathbf{M} صفر است. نتیجه ضمنی دیگر این است که (مثلاً) فقط به E_x بستگی دارد و نه به E_y یا E_z . (در برخی از بلورها، اگر نیرویی متناسب با \mathbf{E} بر الکترونها وارد آید، جابه جایی آنها چشمه \mathbf{P} است، در امتداد \mathbf{E} نیست، زیرا نیروهای درونی بلور چنان است که حرکت الکترونها در برخی جهات ساده تر از حرکت آنها در جهات دیگر است.) بنابراین برای محیط همسانگرد، برای مثال، داریم

$$P_x = \chi E_x + \alpha E_x^2 + \beta E_x^3 + \dots \quad (11)$$

اگر میدان به قدر کافی ضعیف باشد، جملات درجه دو و بالاتر در رابطه (۱۱) ناچیز می شوند. برای شدتهای معمولی میدانهای الکترومغناطیسی در مواد معمولی این مطلب صادق است. (برای میدانهای قوی مثل آنچه با لیزر یا قوتی تپی می توان به وجود آورد، سهم غیرخطی \mathbf{P} را می توان آشکارسازی و مطالعه کرد.) محیط را خطی گویند اگر بتوان از جملات αE_x^2 ، βE_x^3 و غیره در رابطه (۱۱) صرف نظر کرد. می بینیم که "خطی بودن" نه فقط خاصیتی از محیط بلکه خاصیتی از شدت میدانهای موجود نیز هست.

تعریف χ ، χ_m ، ε و μ برای میدانهای استاتیکی. در مورد محیط خطی همسانگرد، پذیرفتاری الکتریکی χ و پذیرفتاری مغناطیسی χ_m برای میدانهای مستقل از زمان چنین تعریف می شود:

$$P_x(x, y, z) = \chi(x, y, z) E_x(x, y, z) \quad (12)$$

$$M_x(x, y, z) = \frac{\chi_m}{\mu} B_x(x, y, z) \quad (13)$$

ثابت دی الکتریک ε و تراوایی مغناطیسی μ چنین تعریف می شود:

$$E_x + 4\pi P_x = \varepsilon E_x \quad (14)$$

$$B_x - 4\pi M_x = \frac{1}{\mu} B_x \quad (15)$$

از ترکیب این تعریفها داریم

$$1 + 4\pi P\chi = \varepsilon \quad (16)$$

$$1 - 4\pi \frac{\chi_m}{\mu} = \frac{1}{\mu} \quad (17)$$

پذیرفتاری در حضور میدانهای وابسته به زمان. درصدد هستیم که این روابط خطی را بسط دهیم تا برای میدانهای جفت شده به زمان در محیط خطی همسانگرد نیز صادق باشند. ممکن است امیدوار باشیم که با اندازه گیری (مثلاً) χ برای میدانهای الکتریکی استاتیک، به سادگی می توانیم معادله (۱۲) را تعمیم بخشیم و بنویسیم $P_x(x, y, z, t) = \chi E_x(x, y, z, t)$ که در اینجا χ مقداری است که برای میدانهای استاتیک اندازه گیری کرده ایم. همان طور که خواهیم دید، این امیدی واهی است. به طور کلی لازم است که میدانها را از طریق آنالیز فوری به مؤلفه های بسامدیشان تجزیه کرد. پذیرفتاری الکتریکی و پذیرفتاری مغناطیسی به بسامد وابسته اند. بدین ترتیب یک χ "همگانی" وجود ندارد که بتوان آن را به صورت ضربی از مجموع سهمهای بسامدهای مختلف در P جدا کرد. حال که می دانیم پذیرفتاریها به بسامد وابسته اند، انتظار می رود بتوانیم معادله (۱۲) را به صورت زیر تعمیم دهیم

$$P_x(x, y, z, \omega t) = \chi(x, y, z, \omega) E_x(x, y, z, \omega t) \quad (18)$$

و به همین ترتیب برای عبارت M_x . اما، خواهیم دید که حتی معادله (۱۸) هم شامل یک ساده سازی است، زیرا طبق آن چنین برمی آید که در هر لحظه P_x متناسب با E_x است، یعنی P_x (به غیر از یک علامت منفی احتمالی) همفاز با E_x است. به طور کلیتر، می باید احتمال وجود قسمتی از P_x را که $\pm 90^\circ$ درجه با E_x اختلاف فاز دارد منظور کنیم. خواهیم دید که آن قسمت از P_x که همفاز با E_x است به جذب انرژی الکترومغناطیسی توسط محیط نمی انجامد. بنابراین، قسمت همفاز P_x را قسمت «کشسان» یا «پاشنده» می نامیم. آن قسمت از P_x که $\pm 90^\circ$ اختلاف فاز با E_x دارد به جذب انرژی می انجامد و قسمت «جذبی» P_x نامیده می شود. می توان $P_x(x, y, z, \omega t)$ را به صورت مجموع یک قسمت کشسان و یک قسمت جذبی نوشت. برای محیط خطی همسانگرد، قسمت کشسان متناسب با $E_x(x, y, z, \omega t)$ است و ثابت تناسب $\chi_{et}(x, y, z, \omega)$ است. قسمت جذبی را می توان متناسب با $E_x(x, y, z, \omega t - (\pi/2))$ گرفت، با ثابت تناسب $\chi_{ab}(x, y, z, \omega)$:

$$P_x(x, y, z, \omega t) = \chi_{el}(x, y, z, \omega) E_x(x, y, z, \omega t) + \chi_{ab}(x, y, z, \omega) E_x \left(x, y, z, \omega t - \frac{1}{2}\pi \right) \quad (19)$$

یک مکان داده شده را فرض می‌کنیم و x, y, z را دیگر نمی‌نویسیم. فرض کنید در آن نقطه داده شده داشته باشیم

$$E_x(\omega t) = E_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (20)$$

بدین ترتیب معادله (۱۹) چنین می‌شود

$$P_x(\omega t) = \chi_{el} E_x(\omega t) + \chi_{ab} E_x \left(\omega t - \frac{1}{4} \pi \right) \quad (21)$$

یعنی

$$P_x(\omega t) = \chi_{el} E_0 \cos(\omega t - \varphi) + \chi_{ab} E_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad (22)$$

مدل ساده‌ای برای محیط خطی همسانگرد. فرض کنید که در همسایگی نزدیک یک نقطه ثابت، محیط متشکل از N «اتم» خنثی در واحد حجم باشد. هر اتم از ذره‌ای («الکترونی») تشکیل شده است که دارای جرم M و بار q است (q جبری است، یعنی ممکن است مثبت یا منفی باشد)، که به وسیله فیزی با ثابت فنر $M\omega^2$ به «هسته» به مراتب سنگینتری که بارش از نظر اندازه مساوی اما از نظر علامت مخالف بار ذره است، مقید شده است. (حالتی را که ω صفر است نیز در نظر خواهیم گرفت. در آن صورت با «پلاسمای» خنثی سروکار داریم.) از حرکت نسبتاً کوچک هسته و بدین ترتیب از سهم این حرکت در \bar{P} صرف نظر می‌کنیم. اتم دارای گشتاور مغناطیسی نیست و میدانهای مغناطیسی گشتاور مغناطیسی القا نمی‌کنند. بنابراین مغناطش صفر است. از افت و خیزها و بی‌نظمی در حرکت تک‌تک ذرات چشمپوشی می‌کنیم و هر ذره را به صورت ذره‌ای در نظر می‌گیریم که «به‌طور میانگین» مانند آن عمل می‌کند. فرض بر این است که ذره M تحت تأثیر فنر، نیروی الکتریکی $E_x(\omega t)$ در مکان ذره و «نیروی میراکننده» قرار دارد. نیروی میراکننده، از دست رفتن انرژی ذره را به همسایه‌هایش، از طریق برخورد (یا تابش) منظور می‌کند. از نیروی $q(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$ روی ذره M در مقایسه با نیروی qE صرف نظر می‌کنیم. علت آن است که فرض می‌کنیم میدان مغناطیسی استاتیکی وجود ندارد و همچنین فرض می‌کنیم v/c همواره کوچک است. (این مطلب حتی در مورد میدانهای الکتریکی شدیدی که لیزر یا قوتی تپی درست می‌کند نیز صادق است.) بنابراین برای مؤلفه x حرکت q داریم

$$M\ddot{x} = -M\omega^2 x - M\Gamma\dot{x} + qE_x \quad (23)$$

$$E_x(\omega t) = E \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad (24)$$

نیروی میراکننده $-M\ddot{x}$ نشاندهنده انتقال انرژی از بار نوسان‌کننده به محیط است. این انرژی دیگر نه در مؤلفه‌های میدان الکترومغناطیسی با بسامد ω است و نه در انرژی نوسانی M با بسامد ω ، بلکه به صورت انرژی انتقالی و چرخشی اتمهاست و همچنین در لرزشهای "کاتوره‌ای" در بسامدهای دیگر موجود است. این انرژی، گرما نام دارد.

به هنگام نوشتن معادله (۲۴) فرض بر آن است که دامنه E و ثابت فاز φ فقط به مکان تعادلی بار q بستگی دارد و نه به جابه‌جایی لحظه‌ای $x(t)$ از مکان تعادلی‌اش. بدین ترتیب فرض کرده‌ایم که دامنه نوسانهای q در مقایسه با طول موج امواج الکترومغناطیسی که وابستگی زمانی و مکانی E_x را می‌دهند، بسیار کوچک است. در غیر این صورت مجبور می‌شدیم بستگی E و φ را به x نیز منظور کنیم.

فرض می‌کنیم که "میدان محلی" E_x که در معادله (۲۳) برای حرکت بار "میانگین" q وجود دارد، همان میدان میانگین مکانی گرفته شده E_x است که در معادله (۲۱) آمده است. این مطلب تا حد خوبی برای گازها و برخی بلورها صادق است. (در بسیاری از بلورها قسمت اعظم میدان الکتریکی‌ای که یک بار بخصوص حس می‌کند از یک همسایه نزدیک ناشی می‌شود. به طور کلی میانگین میدان محلی با میدانی که از میانگین فضایی حاصل می‌شود یکی نیست.) مطابق با بخش ۲-۳، حل حالت پایای معادله (۲۳) صورت زیر را دارد

$$x(t) = A_{el} \cos(\omega t - \varphi) + A_{ab} \sin(\omega t - \varphi)$$

که در آن $A_{el} \cos(\omega t - \varphi)$ مؤلفه کشسان جابه‌جایی x است، یعنی قسمتی که با نیروی محرک همفاز است، و $A_{ab} \sin(\omega t - \varphi)$ قسمت جذبی جابه‌جایی است، یعنی قسمتی که با نیروی محرک $\pm 90^\circ$ درجه اختلاف فاز دارد. دامنه‌های جذبی و کشسانی با روابط زیر داده می‌شوند

$$A_{el} = \frac{qE}{M} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (25)$$

$$A_{ab} = \frac{qE}{M} \frac{\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (26)$$

قطبش P_x عبارت است از چگالی عددی N ضربدر گشتاور دوقطبی qx مربوط به

جابه‌جایی x بار q از حالت تعادلی‌اش. بنابراین داریم

$$P_x(t) = Nqx(t) \quad (۲۷)$$

یعنی

$$P_x(t) = NqA_{el} \cos(\omega t - \varphi) + NqA_{ab} \sin(\omega t - \varphi) \quad (۲۸)$$

یعنی

$$P_x(\omega t) = \frac{NqA_{el}}{E_s} E_x(\omega t) + \frac{NqA_{ab}}{E_s} E_x\left(\omega t - \frac{1}{2}\pi\right) \quad (۲۹)$$

از مقایسه معادله (۲۹) با معادله (۲۱) داریم

$$\chi_{el} = \frac{NqA_{el}}{E_s} = \frac{Nq^2}{M} \frac{(\omega_s^2 - \omega^2)}{(\omega_s^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \quad (۳۰)$$

$$\chi_{ab} = \frac{NqA_{ab}}{E_s} = \frac{Nq^2}{M} \frac{\Gamma\omega}{(\omega_s^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \quad (۳۱)$$

استفاده از کمیت‌های مختلط در معادلات ماکسول. جذر ۱- در معادلات ماکسول وجود ندارد. در کمیت‌های مشاهده‌پذیری مانند \mathbf{E} یا \mathbf{B} یا \mathbf{P} یا \mathbf{M} هم جذر ۱- وجود ندارد. اما، در توصیف امواج الکترومغناطیسی در محیط‌هایی که در آنها جذب وجود دارد، با استفاده از اعداد مختلط می‌توان عملیات جبری را بسیار ساده کرد.

وقتی بتوان از جذب چشمپوشی کرد، معادله (۲۱) به صورت ساده‌تر $P_x(\omega t) = \chi(\omega) E_x(\omega t)$ تقلیل می‌یابد، که در آن $\chi(\omega)$ همان χ_{el} است. این صورت معادله (۱۸) است که به نوبه خود مانند نسبت خطی‌ای است که در مورد میدان‌های استاتیکی، معادله (۱۲) صادق است. در این حالت، تعاریف ثابت دی‌الکتریک و تراوایی مغناطیسی که به وسیله معادله‌های (۱۲) تا (۱۷) داده می‌شوند، برای میدان‌های جفت‌شده به زمان به‌کار می‌رود.

وقتی از جذب نتوان صرف‌نظر کرد، به جای معادله (۱۸) می‌باید از عبارت پیچیده‌تری که در معادله (۲۱) آمده است استفاده کرد. برای اینکه، وقتی نتوان از جذب چشمپوشی کرد، علاوه بر مؤلفه‌های "همفاز" \mathbf{P} (و همین‌طور \mathbf{M})، مؤلفه‌های "خارج از فاز" (یعنی $\pm 90^\circ$ درجه خارج از فاز) را هم باید منظور کرد. در آن صورت، باید به‌طور جداگانه، $\mathbf{E}(\omega t)$ ، $\mathbf{E}(\omega t - \frac{1}{4}\pi)$ و $\mathbf{B}(\omega t - \frac{1}{4}\pi)$ را حساب کنیم، به‌علاوه قطبشها و مغناطشهای متناظر را که همفاز یا خارج از فاز با $\mathbf{E}(\omega t)$ و $\mathbf{B}(\omega t)$ هستند.

یک راه بسیار خوب که این "حسابها را نگه می‌دارد"، استفاده از کمیت‌های مختلط است که آنها را \mathbf{E} ، \mathbf{B} ، \mathbf{P} و \mathbf{M} می‌نامیم با این درک که میدان‌های فیزیکی واقعی قسمتهای حقیقی

این "میدانهای مختلط" هستند. بستگی زمانی هریک از میدانهای مختلط را به صورت $e^{-i\omega t}$ می‌گیریم، که در آن علامت منفی قراردادی است که در اپتیک به کار می‌رود. [در مهندسی برق قرارداد معمول $e^{+i\omega t}$ است. در مکانیک کوانتومی قرارداد همیشگی $e^{-i\omega t}$ است.] بدین ترتیب کمیت مختلط E_x را (در یک نقطه) به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$E_x(\omega t) = E_0 e^{-i\varphi} e^{-i\omega t} = E_0 \cos(\omega t - \varphi) - iE_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad (۳۲)$$

میدان فیزیکی متناظر با میدان مختلط E_x ، قسمت حقیقی E_x است و بنابراین طبق معادله (۳۲) برابر است با $E_0 \cos(\omega t - \varphi)$.

سادگی حاصل در عملیات به خاطر استفاده از بستگی زمانی مختلط $e^{-i\omega t}$ از آنجا به دست می‌آید که 90° درجه تغییر فاز صرفاً معادل است با ضریب i :

$$e^{-i[\omega t - (\frac{1}{2})\pi]} = e^{i(\frac{1}{2})\pi} e^{-i\omega t} = i e^{-i\omega t}$$

بنابراین

$$E_x\left(\omega t - \frac{1}{4}\pi\right) = iE_x(\omega t) \quad (۳۳)$$

پذیرفتاری مختلط. مستقل از اینکه میدانهای مختلط به کار ببریم، قطبیدگی فیزیکی طبق رابطه خطی زیر (برای محیط خطی همسانگرد) به میدان الکتریکی فیزیکی مرتبط است

$$P_x(\omega t) = \chi_{el} E_x(\omega t) + \chi_{ab} E_x\left(\omega t - \frac{1}{4}\pi\right) \quad (۳۴)$$

که در آن تمام کمیتها حقیقی و بنابراین فیزیکی‌اند. اینک از $E_x(\omega t)$ مختلط استفاده می‌کنیم که طبق معادله (۳۲) داده می‌شود و (۳۴) را با P_x و E_x مختلط دوباره تعبیر می‌کنیم χ_{ab} و χ_{el} هنوز حقیقی‌اند)

$$\begin{aligned} P_x(\omega t) &= \chi_{el} E_x(\omega t) + \chi_{ab} E_x\left(\omega t - \frac{1}{4}\pi\right) \\ &= \chi_{el} E_x(\omega t) + i\chi_{ab} E_x(\omega t) \end{aligned}$$

یعنی

$$P_x(\omega t) = \chi(\omega) E_x(\omega t) \quad (۳۵)$$

که در آن

$$\chi(\omega) = \chi_{el} + i\chi_{ab} \quad (۳۶)$$

قطبیدگی فیزیکی در امتداد x قسمت حقیقی کمیت مختلط P_x در معادله (۳۵) است. این کمیت هم قسمت حقیقی χ_{el} و هم قسمت موهومی χ_{ab} پذیرفتاری مختلط $\chi_{el} + i\chi_{ab}$ را داراست. (البته، χ_{ab} و χ_{el} هر دو حقیقی‌اند.) به‌عنوان مثال [با فرض $\varphi = 0$ در معادله (۳۲)] داریم

$$E_x = E_0 e^{-i\omega t} = E_0 \cos \omega t - i E_0 \sin \omega t \quad (37)$$

$$\begin{aligned} P_x &= \chi E_x = (\chi_{el} + i\chi_{ab})(E_0 \cos \omega t - i E_0 \sin \omega t) \\ &= \chi_{el} E_0 \cos \omega t + \chi_{ab} E_0 \sin \omega t + i \cdot (\text{قسمت موهومی}) \end{aligned} \quad (38)$$

قسمت حقیقی P_x که از معادله (۳۸) به‌دست می‌آید، قسمت حقیقی E_x که از معادله (۳۷) به‌دست می‌آید و کمیت‌های حقیقی χ_{ab} و χ_{el} در معادله (۳۴) که برای میدانهای فیزیکی (و بنابراین حقیقی) برقرار است، صدق می‌کنند.

ثابت دی‌الکتریک مختلط. از آنجایی که میدانهای مختلط E_x و P_x را تعریف کردیم، به‌جای عبارت پیچیده معادله (۳۴) به‌عبارت بسیار ساده $P_x = \chi E_x$ رسیدیم که با معادله (۳۵) داده شد. در ازای آن، باید با پذیرفتاری مختلط $\chi(\omega)$ که با معادله (۳۶) داده می‌شود، کار کنیم. چون معادله (۳۵) صورتی مشابه با معادله (۱۲) دارد (که برای میدانهای استاتیک صادق است)، می‌توان تعاریف مطابق با معادله (۱۲) تا (۱۷) را بسط داد چنانکه برای میدانهای جفت‌شده به زمان نیز صادق باشند. این بدان معنی است که اگر بخواهیم معادلات (۱۲) تا (۱۷) برقرار باشند، هنگامی که جذب قابل صرفنظر کردن نیست، می‌باید از ثابت دی‌الکتریک مختلط و تراوایی مغناطیسی مختلط استفاده کنیم. بنابراین مطابق با روابط (۱۶) و (۳۶) داریم

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + 4\pi\chi_{el} + i4\pi\chi_{ab} \quad (39)$$

بنابراین

$$\varepsilon = \text{Re } \varepsilon + i \text{Im } \varepsilon$$

که در آن

$$\text{Re } \varepsilon = \varepsilon \text{ حقیقی} = 1 + 4\pi\chi_{el} \quad (40)$$

$$\text{Im } \varepsilon = \varepsilon \text{ قسمت موهومی} = 4\pi\chi_{ab} \quad (41)$$

به‌ازای $\omega = 0$ تمام کمیتها به مقادیر استاتیک فرد تبدیل می‌شوند.

ثابت دی‌الکتریک مختلط برای مدل ساده محیط خطی همسانگرد. برای مدل ساده خود داریم $M = 0$. بنابراین $\chi_m = 0$ و $\mu = 1$ ، طبق معادلات (۱۳)، (۱۵) و (۱۷). پذیرفتاری

الکتریکی قسمت حقیقی (یعنی کسسان) و موهومی (یعنی جذبی) دارد که طبق معادلات (۳۰) و (۳۱) داده می‌شود. بنابراین، از معادله (۳۹) داریم

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi Nq^2}{M} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} + i \frac{4\pi Nq^2}{M} \cdot \frac{\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (42)$$

خاطر نشان می‌کنیم که با استفاده از اعداد مختلط، حل معادله حرکت q ، معادله (۲۳) بسیار ساده می‌شود

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{q}{M} E_x = \frac{q}{M} E_0 e^{-i\omega t} \quad (43)$$

که در آن E_0 مختلط است. فرض کنید $x = x_0 e^{-i\omega t}$ ، بنابراین، $\dot{x} = -i\omega x$ و $\ddot{x} = -\omega^2 x$ با جانشانی در معادله (۴۳) داریم

$$(-\omega^2 - i\omega\Gamma + \omega_0^2)x = \frac{q}{M} E_x$$

یعنی

$$x(\omega t) = \frac{q}{M} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\Gamma} E_x(\omega t) \quad (44)$$

بنابراین پذیرفتاری مختلط طبق رابطه زیر داده می‌شود

$$\chi(\omega) = \frac{P_x}{E_x} = \frac{Nq^2 x}{E_x} = \frac{Nq^2}{M} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\Gamma} \quad (45)$$

ثابت دی‌الکتریک مختلط ε با رابطه زیر داده می‌شود

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + \frac{4\pi Nq^2}{M} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\Gamma} \quad (46)$$

به راحتی می‌توانید نشان دهید که معادله‌های (۴۶) و (۴۲) هم‌ارزند: صورت و مخرج $\varepsilon - 1$ [در معادله (۴۶)] را در $(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\Gamma$ ضرب کنید تا بتوانید ε را به صورت $\text{Re } \varepsilon + i \text{Im } \varepsilon$ بنویسید. گاهی ساده‌تر است که ε را به صورت معادله (۴۶) باقی گذاشت.

معادلات ماکسول برای محیط خطی همسانگرد. با معادلات کلی ماکسول که طبق روابط (۵) تا (۸) داده شده‌اند آغاز می‌کنیم. سپس روابط خطی بین P_x و E_x و بین M_x و B_x را که در روابط (۱۲) تا (۱۷) آمده‌اند فرض می‌کنیم. این روابط فقط وقتی برای کمیت‌های حقیقی صادق‌اند که $\omega = 0$. همان‌طور که دیدیم، این روابط اگر کمیتها را همگی مختلط بگیریم به‌ازای

هر بسامد ω برقرار است. بدین ترتیب معادله‌های ماکسول را که میدانهای مختلط \mathbf{B} و \mathbf{E} را (که) قسمتهای حقیقی‌شان میدانهای فیزیکی را می‌دهند، به هم مربوط می‌کنند، به دست می‌آوریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (47)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi \rho_{\text{آزاد}} \quad (48)$$

$$\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) = \frac{1}{c} \frac{\partial (\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{آزاد}} \quad (49)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (50)$$

در حالت کلی که ε و μ به بسامد بستگی دارند، این معادله‌ها همگی به بسامد مشخص ω اطلاق می‌شوند. چونکه $\rho_{\text{آزاد}}$ و $\mathbf{J}_{\text{آزاد}}$ فیزیکی ممکن است از قسمتهایی تشکیل شده باشند که متناسب با $\cos \omega t$ و هم $\sin \omega t$ باشد، این دو کمیت در حالت کلی قسمتهای حقیقی کمیتهای مختلطی هستند که در معادلات بالا آمده است. البته در حالت خاصی که محیط چنان باشد که ε و μ به بسامد بستگی ندارند، تمام کمیتهای حقیقی‌اند.

معادله‌های ماکسول برای محیط خطی همسانگرد همگن خنثی. در معادلات (۴۸) و (۴۹) ثابت دی‌الکتریک و تراوایی مغناطیسی توابع مختلط بسامد و همچنین توابعی از x ، y ، z هستند، زیرا فرض نکردیم که تمام نقاط محیط دارای خواص مشابهی هستند. برای مثال، در مدل ساده خود، می‌توانیم چگالی عددی را تابع مکان بگیریم، $N = N(x, y, z)$. اینک، حالت خاص ساده و مهمی را در نظر می‌گیریم که در آن محیط همگن است، یعنی اینکه μ و ε به x ، y ، z بستگی ندارند. با این مفروضات، ε و μ در معادلات (۴۸) و (۴۹) ثابت هستند. همچنین فرض می‌کنیم که محیط خنثی است، یعنی اینکه $\rho_{\text{آزاد}}$ و $\mathbf{J}_{\text{آزاد}}$ هر دو صفر است. (مدل ساده‌ما از یک گاز خنثی یا جسم جامد آمورف و یا پلاسما تشکیل شده است.) در این صورت معادلات ماکسول (۴۷) تا (۵۰) به این صورت در می‌آید

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (51)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (52)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu \varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (53)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (54)$$

دقت کنید که اگر $\mu = 1$ و $\varepsilon = 1$ ، آنگاه معادلات ماکسول را برای خلا به دست می‌آوریم. برای مواردی که به آنها توجه داریم، μ و ε در حالت کلی مختلط هستند، بنابراین \mathbf{B} و \mathbf{E} هم مختلط‌اند.

مثلاً برای مدل ساده ما، $\mu = 1$ و ϵ مختلط است. در این صورت \mathbf{E} و \mathbf{B} هر دو مختلط اند، و قسمت حقیقی آنها میدانهای فیزیکی را به دست می دهد.

معادله موج. معادلات (۵۱) تا (۵۴) معادلات دیفرانسیل خطی درجه اول هستند. معادلات (۵۳) و (۵۴) معادلاتی "جفت شده اند" که \mathbf{E} و \mathbf{B} را به یکدیگر مرتبط می کنند. به طریق زیر می توانیم معادلات جفت نشده درجه دوم به دست آوریم. تاو معادله (۵۳) را حساب کنید و سپس معادله (۵۴) را به کار برید:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (55)$$

به طریقی مشابه، تاو معادله (۵۴) را حساب کنید و سپس معادله (۵۳) را به کار ببرید:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (56)$$

اینک از اتحاد برداری زیر [معادله (۳۹) پیوست] استفاده کنید

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{C}) \equiv \nabla (\nabla \cdot \mathbf{C}) - \nabla^2 \mathbf{C} \quad (57)$$

و آن را در طرف چپ معادله (۵۵) و همین طور معادله (۵۶) به کار بندید و از این نکته استفاده کنید که $\nabla \cdot \mathbf{B}$ و $\nabla \cdot \mathbf{E}$ هر دو صفر هستند. در این صورت داریم

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (58)$$

معادلات (۵۸) از شش معادله مجزا تشکیل شده اند که هر یک صورت کلی زیر را دارا هستند

$$\nabla^2 \psi(x, y, z, t) - \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (59)$$

که در آن $\psi(x, y, z, t)$ معرف هر یک از شش کمیت $B_z, B_y, B_x, E_z, E_y, E_x$ است.

برای حالت خاصی که ϵ و μ حقیقی و مثبت اند و به بسامد بستگی ندارند، معادله (۵۹)

معادله موج کلاسیک برای محیطهای غیرپاشنده است. چنین شرایطی برای خلأ وجود دارد که برای آن داریم $\mu = \epsilon = 1$. توجه ما به حالت کلی محیط خطی، همسانگرد و خنثی است که برای آن

ϵ و μ مختلط اند و به بسامد بستگی دارند. در آن صورت \mathbf{E} و \mathbf{B} را کمیتهای مختلط با بستگی

زمانی $e^{-i\omega t}$ می گیریم. بنابراین برای هر شش کمیت که با (x, y, z, t) نشان داده شدند، داریم

$$\psi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (60)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi \quad (61)$$

با جانشانی معادله (۶۱) در معادله (۵۹) و حذف $e^{-i\omega t}$ به معادله دیفرانسیلی می‌رسیم که برای قسمت مکانی یعنی $\varphi(x, y, z)$ صادق است:

$$\nabla^2 \varphi(x, y, z) + k^2 \varphi(x, y, z) = 0 \quad (۶۲)$$

که در آن کمیت مختلط k^2 چنین تعریف می‌شود

$$k^2 = \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \quad (۶۳)$$

ضریب شکست مختلط. کمیت مختلط n^2 را که مربع ضریب شکست مختلط است،

چنین تعریف می‌کنیم

$$n^2 = \mu \varepsilon \quad (۶۴)$$

بنابراین

$$k^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} = \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \quad (۶۵)$$

ملاحظه کنید که چون μ و ε مختلط‌اند، k^2 و n^2 هم مختلط‌اند. می‌توانیم جذر k^2 یا n^2 را محاسبه کنیم. جذر یک کمیت مختلط، کمیتی مختلط است. بنابراین، کمیت مختلط k و ضریب شکست مختلط به دست می‌آید.

جوابهایی از نوع امواج تخت. حل کلی معادله (۶۲) را می‌توان به صورت برهم‌نهی از توابع

زیر نوشت

$$\varphi(x, y, z) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \exp i(k_x x + k_y y + k_z z) \quad (۶۶)$$

که در آن

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} = \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \quad (۶۷)$$

بنابراین جواب کلی معادله (۵۹) را می‌توان به صورت برهم‌نهی از امواج تخت انتشاری نوشت،

که هر یک به این صورت است

$$\psi(x, y, z, t) = e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \quad (۶۸)$$

و k^2 کمیتی مختلط است.

امواج تختی که در جهت z انتشار پیدا می‌کند. به عنوان یک حالت خاص، وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن فقط k_z صفر نیست. در این صورت، جواب کلی دارای موجی است که در جهت z منتشر می‌شود و موجی که در جهت $-z$ منتشر می‌شود:

$$\psi(z, t) = [A^+ e^{+ikz} + A^- e^{-kz}] e^{-i\omega t} \quad (۶۹)$$

که در آن $+k$ و $-k$ همان دو ریشه k^2 هستند و A^+ و A^- ثابتهای مختلطاند. از آنجایی که می‌خواهیم $e^{i(kz-\omega t)}$ موجی باشد که در جهت z منتشر شود، k را آن ریشه از k^2 قرار می‌دهیم که دارای قسمت حقیقی مثبت است، با این فرض که k دارای قسمت حقیقی است. اگر k کاملاً موهومی باشد، k را آن ریشه از k^2 قرار می‌دهیم که مساوی $+i|k|$ باشد.

رابطه بین \mathbf{E} و \mathbf{B} برای موج تخت. معادله (۶۹) می‌باید برای هر یک از شش کمیت $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ صادق باشد، زیرا همه این کمیتها در معادله موج (۵۹) صدق می‌کنند. در راه به دست آوردن این معادله موج درجه دوم، برخی اطلاعات موجود در معادله‌های درجه اول ماکسول را دور انداخته‌ایم. اینک به معادلات ماکسول برمی‌گردیم و همه آن اطلاعات را داخل می‌کنیم. از $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ و $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ نتیجه می‌گیریم که B_z و E_z (برای k در امتداد محور z) ثابت هستند. چون حالت خاص بسامد صفر را در نظر نداریم، این ثابت صفر است. بنابراین فقط E_x, E_y, B_x و B_y را باید در نظر بگیریم. برای سادگی کار، فقط حالت قطبش خطی را در نظر می‌گیریم چنانکه E_x صفر نباشد و E_y صفر باشد. بنابراین مطابق با معادله (۶۹) داریم

$$E_x(z, t) = (E^+ e^{ikz} + E^- e^{-ikz}) e^{-i\omega t} \quad (۷۰)$$

که در آن E^+ و E^- ثابتهای مختلطی هستند. آنگاه از معادلات ماکسول (۵۳) و (۵۴) نتیجه می‌گیریم که B_x صفر است و B_y و E_y طبق روابط زیر به یکدیگر مربوط‌اند

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_y}{\partial z} &= -\frac{\mu \varepsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} &= -c \frac{\partial E_x}{\partial z} \end{aligned} \quad (۷۱)$$

با استفاده از این نکته که B_y به صورتی است که در معادله (۶۹) آمده است و با استفاده از معادله‌های (۷۱) داریم

$$B_y(z, t) = n(E^+ e^{ikz} - E^- e^{-ikz}) e^{-i\omega t} \quad (۷۲)$$

بنابراین اگر E_x را داشته باشیم [معادله (۷۰)]، آنگاه B_y کاملاً مشخص است [از طریق معادله (۷۲)]. اگر فرض کنیم E_y صفر نباشد، نتایج مشابهی به دست می آید. نتایج کلی چنین است که برای مؤلفه‌هایی که در جهتهای $+\hat{z}$ منتشر می‌شوند، \mathbf{B} و \mathbf{E} طبق روابط زیر به یکدیگر مربوط‌اند

$$\mathbf{B}^+ = \hat{z} \times (n\mathbf{E}^+), \quad \mathbf{B}^- = -\hat{z} \times (n\mathbf{E}^-) \quad (۷۳)$$

که در آن $+$ و $-$ به انتشار در جهت $+\hat{z}$ و $-\hat{z}$ اشاره دارند. به‌طورکلی در تمام این رابطه‌ها n و k مختلط‌اند.

مثال عددی ضریب شکست مختلط. فرض کنید محیطی داریم که در بسامد ω دارای $\mu = ۱$ و $\varepsilon = ۱ + i\sqrt{3}$ است. در این صورت

$$n^2 = ۱ + i\sqrt{3} = ۲ \exp\left(i\frac{1}{3}\pi\right) \quad (۷۴)$$

$$n = \sqrt{2} \exp i\frac{\pi}{6} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \right) = ۱٫۲۲۵ + ۰٫۷۰۷i$$

$$k = n\frac{\omega}{c} = ۱٫۲۲۵\frac{\omega}{c} + ۰٫۷۰۷i\frac{\omega}{c}$$

فرض کنید که موج قطبیده خطی در جهت x است و در جهت z منتشر می‌شود. در این صورت $E^- = 0$. فرض می‌کنیم $E^+ = E_0$ که در آن E_0 حقیقی است. بنابراین

$$E_x = E_0 e^{i(kz - \omega t)} = E_0 e^{-0٫۷۰۷(\omega/c)z} e^{i\omega[(1٫۲۲۵z/c) - t]}$$

$$B_y = nE_x = \sqrt{2}E_0 \exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)$$

در این مثال، موج در جهت z منتشر می‌شود. طول موج آن (یعنی مسافتی که در آن فاز موج به اندازه 2π در زمان مشخص t افزایش می‌یابد.) برابر است با $(۱٫۲۲۵)^{-1}$ ضربدر طول موجش در خلأ. دامنه موج به صورت نمایی با فاصله افت می‌کند. اندازه میدان مغناطیسی $\sqrt{2}$ برابر اندازه میدان الکتریکی است و از نظر فاز به میزان 60° درجه از میدان الکتریکی عقبتر است.

بازتاب و عبور امواج تخت. فرض کنید محیط ۱ و ۲ محیطهای همگن متفاوتی هستند که در صفحه $z = 0$ مشترک‌اند. محیط ۱ تمام فضا را که دارای z منفی است اشغال می‌کند و محیط ۲ آن قسمت از فضا را که z مثبت دارد اشغال می‌کند. یک موج تخت از چشمه‌ای در $z = -\infty$ تولید می‌شود. به این ترتیب موج فرودی در جهت z در محیط ۱ منتشر می‌شود. ناپیوستگی باعث می‌شود تا یک موج بازتابی و یک موج عبوری به وجود آید. برای سادگی کار فقط فرود قائم را در نظر می‌گیریم. فرض کنید که موج فرودی قطبیده خطی در امتداد x باشد و اندازه

(یا دامنه) کمیت مختلط E_x ، واحد باشد. فرض کنید R_{12} و T_{12} دامنه‌های قسمتهای بازتابی و عبوری E_x باشند. در این صورت داریم

$$E_x(1) = 1 \cdot e^{i(k_1 z - \omega t)} + R_{12} e^{-i(k_1 z + \omega t)} \quad (75)$$

$$E_x(2) = T_{12} e^{i(k_2 z - \omega t)} \quad (76)$$

که در آن $E_x(1)$ میدان کل E_x در محیط ۱ است (یعنی میدان فرودی به علاوه میدان بازتابی)، $E_x(2)$ میدان کل E_x در محیط ۲ است (یعنی میدان عبوری)، و R_{12} و T_{12} ثابتهای مختلطی هستند که می‌باید مشخص شوند.

اگر E_x معلوم باشد، می‌توانیم معادله (۷۲) را به‌کار ببریم تا B_y را در هر دو محیط به‌دست آوریم

$$B_y(1) = n_1 e^{i(k_1 z - \omega t)} - n_1 R_{12} e^{-i(k_1 z - \omega t)} \quad (77)$$

$$B_y(2) = n_2 T_{12} e^{i(k_2 z - \omega t)} \quad (78)$$

شرایط مرزی در $z = 0$. چون در $z = 0$ ناپیوستگی وجود دارد، برای ناحیه‌ای که درست در جوار صفحه $z = 0$ است نباید معادلات ماکسول مخصوص محیط همگن به‌کار ببریم. در عوض از معادلات ماکسول (۴۷) تا (۵۰) که مخصوص محیط خطی همسانگرد است استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که هر دو محیط خنثی باشد و جریان سطحی یا بار سطحی بر روی سطح ناپیوستگی وجود نداشته باشد. دو معادله ماکسول موردنظر آنهاپی هستند که شامل تاو هستند

$$\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) = \frac{1}{c} \frac{\partial(\epsilon \mathbf{E})}{\partial t} = -i \frac{\omega}{c} \epsilon \mathbf{E} \quad (79)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{B} \quad (80)$$

که در آن $\mathbf{E} = \hat{x} E_x$ و $\mathbf{B} = \hat{y} B_y$ برای مسئله فعلی. مطابق قضیه استوکس هر بردار \mathbf{C} رابطه زیر صدق می‌کند

$$\int (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot d\mathbf{A} = \oint \mathbf{C} \cdot d\mathbf{l} \quad (81)$$

که در آن $d\mathbf{A}$ عنصری از سطح و $d\mathbf{l}$ عنصری خطی است که در امتداد منحنی‌ای است که مساحت را دربرمی‌گیرد. معادله (۸۱) را برای $\mathbf{C} \equiv \hat{y} (B_y/\mu)$ به‌کار می‌بندیم و از منحنی‌ای استفاده می‌کنیم که در یک طرف صفحه $z = 0$ در جهت y است و در طرف

دیگر در جهت $-y$ و فاصله کوچک Δz این دو مسیر منحنی را از یکدیگر جدا می‌کند. در حدی که Δz به سمت صفر میل می‌کند، مساحتی که منحنی در برمی‌گیرد نیز به صفر می‌گراید. بنابراین انتگرال سطحی در طرف چپ معادله (۸۱) به صفر میل می‌کند، به شرطی که $\nabla \times \mathbf{C}$ بینهایت نباشد. (که نیست). بنابراین انتگرال خطی طرف راست معادله (۸۱) صفر است. بنابراین مؤلفه \mathbf{C} که مماس بر مرز است، در دو طرف مرز مشترک دو محیط یکی است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که مؤلفه مماسی \mathbf{B}/μ در دو طرف فصل مشترک یکی است، یعنی در $z = 0$ ، "پیوسته" است. به همین ترتیب مؤلفه مماسی \mathbf{E} هم در $z = 0$ پیوسته است.

پیوستگی E_x در $z = 0$ چنین نتیجه می‌دهد که [با استفاده از معادله‌های (۷۵) و (۷۶)]

$$1 + R_{12} = T_{12} \quad (82)$$

پیوستگی $H_y = B_y/\mu$ در $z = 0$ [با استفاده از معادله‌های (۷۷) و (۷۸)] نتیجه می‌دهد که

$$\frac{n_1}{\mu_1}(1 - R_{12}) = \frac{n_2}{\mu_2}T_{12} \quad (83)$$

امپدانس مشخصه را (صرفنظر از یک ضریب) به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Z = \frac{\mu}{n} = \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (84)$$

و با حل کردن معادلات (۸۲) و (۸۳) داریم

$$R_{12} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad T_{12} = 1 + R_{12} \quad (85)$$

برای حالت خاصی که تراوایی مغناطیسی μ واحد است، داریم $Z = n^{-1}$. در این صورت معادله (۸۵) به این شکل در می‌آید

$$R_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad T_{12} = 1 + R_{12} \quad (86)$$

برای حالت خاصی که در آن محیط ۱ خلأ است، یعنی $n_1 = 1$ و محیط ۲ محیطی است با ضریب مختلط $n = n_k + in_I$ ، از معادله (۸۶) چنین حاصل می‌شود:

$$R_{12} = \frac{1 - n}{1 + n} = \frac{(1 - n_R) - in_I}{(1 - n_R) + in_I} \equiv |R| \exp i\varphi \quad (87)$$

دامنه موج بازتابی $|R|$ برابر دامنه موج فرودی است. بستگی زمانی $e^{-i\omega t}$ که موج فرودی دارد، برای موج بازتابی به صورت $e^{-i\omega t + i\varphi}$ در می‌آید، چنانکه φ میزان فازی است که به خاطر بازتاب به وجود می‌آید و نشان می‌دهد که موج بازتابی با چه میزان فاز عقب است. شدت نسبی $|R_{12}|^2$ است، که مطابق با معادله (۸۷) به صورت زیر است

$$|R_{12}|^2 = \frac{(\lambda - n_R)^2 + n_1^2}{(\lambda + n_R)^2 + n_1^2} \quad (88)$$

مثال: مدل ساده رابطه پاشندگی جسم رسانا

فرض می‌کنیم مدل ساده خود را بتوانیم به کار بندیم. ثابت فزر $M\omega^2$ را صفر می‌گیریم. این بدان معنی است که "بارهای میانگین" از معادله حرکت زیر پیروی می‌کنند

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} = \frac{q}{M} E_x \quad (89)$$

ابتدا میدان الکتریکی پایا را در نظر می‌گیریم که ناگهان در زمان $t = 0$ روشن شده است. سرعت، \dot{x} ، به صورت نمایی با زمان زیاد می‌شود تا اینکه به "سرعت حدی" می‌رسد، که می‌توان آن را با قراردادن $\ddot{x} = 0$ در معادله (۸۹) به دست آورد. به ازای میدان "DC" (ثابت)، E_x که در زمان $t = 0$ روشن شده است، حل معادله (۸۹) چنین است

$$\dot{x} = \frac{qE_x}{\Gamma M} (1 - e^{-\Gamma t}), \quad \dot{x} = \frac{qE_x}{\Gamma M} \quad t \gg \Gamma^{-1} \quad (90)$$

به این ترتیب، Γ ، که دارای یکای بسامد است، "آهنگ رسیدن به سرعت حدی" را به دست می‌دهد. به عبارت دیگر، Γ^{-1} میانگین زمان واهلش جریانهای "گذرا" است، وقتی که میدان الکتریکی ناگهان به مقدار جدید ثابتی تغییر می‌کند.

ناحیه بسامدی "کاملاً مقاومتی". به ازای ω "کوچک" (به این معنی که ω در مقایسه با Γ کوچک باشد)، بارها همیشه عملاً در سرعت حدی متناظر با میدان لحظه‌ای E_x قرار دارند. در آن صورت رابطه فازهای \dot{x} و E_x عملاً همان رابطه‌ای است که در بسامد صفر (یعنی برای DC) وجود دارد. در این شرایط محیط را کاملاً مقاومتی نامند. معادله (۹۰) در این حالت نتیجه زیر را می‌دهد

$$\dot{x}(t) = \frac{qE_x(t)}{\Gamma M}, \quad \omega \ll \Gamma \quad (91)$$

چگالی جریان \mathbf{J}_x در این حالت متناسب با E_x است. (این همان قانون اهم است.) رسانندگی

‘کاملاً مقاومتی’ σ_{DC} از طریق رابطهٔ زیر به Γ مربوط است:

$$\mathbf{J}_x = Nq\dot{x} = Nq \left(\frac{qE_x}{\Gamma M} \right) \equiv \sigma_{DC} E_x \quad (۹۲)$$

یعنی

$$\sigma_{DC} = \frac{Nq^2}{\Gamma M}, \quad \omega \ll \Gamma \quad (۹۳)$$

در حالت کلی به‌ازای بسامد دلخواه، سرعت \dot{x} نه تنها دارای مؤلفه‌ای خواهد بود که همفاز با E_x است، مثل حالت DC، بلکه مؤلفه‌ای نیز دارد که ۹۰° درجه با E_x اختلاف فاز دارد. در این صورت از کمیت‌های مختلط استفاده می‌کنیم که همگی دارای بستگی زمانی $e^{-i\omega t}$ هستند. جواب حالت پایای معادلهٔ (۸۹) به‌سادگی به‌دست می‌آید. [در معادلهٔ (۴۴)، قرار دهید $\omega = 0$]. رسانندگی مختلط $\sigma(\omega)$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\mathbf{J}_x = Nq\dot{x} = Nq(-i\omega x) = -i\omega P_x = -i\omega\chi E_x \equiv \sigma(\omega) E_x \quad (۹۴)$$

بنابراین

$$\sigma(\omega) = -i\omega\chi = -i\omega(\chi_{el} + i\chi_{ab}) = \omega\chi_{ab} - i\omega\chi_{el} \quad (۹۵)$$

مشاهده می‌کنیم که اگر $\sigma(\omega)$ حقیقی باشد، \dot{x} با E_x همفاز است و σ با پذیرفتاری جذبی الکتریکی متناسب است.

به‌جای اینکه $\chi(\omega)$ یا $\sigma(\omega)$ را به‌صورت مجموع قسمت‌های حقیقی و مجازی بنویسیم، ساده‌تر است که آنها را با مخرج‌های مختلط مانند معادلهٔ (۴۵) بنویسیم، بنابراین داریم [با قراردادن $\omega = 0$ در معادلهٔ (۴۵)]

$$\chi(\omega) = \frac{Nq^2}{M} \cdot \frac{1}{-\omega^2 - i\omega\Gamma} \quad (۹۶)$$

$$\sigma(\omega) = -i\omega\chi(\omega) = \frac{Nq^2}{M} \cdot \frac{i\omega}{\omega^2 + i\omega\Gamma} \quad (۹۷)$$

در حد $\omega \ll \Gamma$ می‌توان از ω^2 در مقایسه با $\omega\Gamma$ صرف‌نظر کرد، که در این صورت در حد کاملاً مقاومتی یا DC داریم

$$\chi(\omega) = i \frac{Nq^2}{M} \frac{1}{\omega\Gamma}, \quad \omega \ll \Gamma \quad (۹۸)$$

و

$$\sigma(\omega) = \frac{Nq^2}{M\Gamma} = \sigma(0) = \sigma_{DC}, \quad \omega \ll \Gamma \quad (۹۹)$$

مشاهده می‌کنیم که برای ناحیهٔ بسامدی کاملاً مقاومتی $\omega \ll \Gamma$ ، رسانندگی $\sigma(\omega)$ حقیقی است و برابر است با مقدار DC (بسامد صفر) آن یعنی $\sigma(0)$. در این صورت، سرعت، \dot{x} ، با E_x همفاز است. پذیرفتاری الکتریکی مختلط $\chi(\omega)$ به‌ازای $\omega \ll \Gamma$ ، طبق معادلهٔ (۹۸)، کاملاً مجازی است.

مربع مختلط ضریب شکست n^2 ، به‌ازای $\omega \ll \Gamma$ ، در این صورت چنین خواهد شد

$$n^2 = 1 + 4\pi\chi = 1 + i \frac{4\pi Nq^2}{M} \frac{1}{\omega\Gamma} = 1 + i \frac{\omega_p^2}{\omega\Gamma} \quad (100)$$

که در آن

$$\omega_p^2 \equiv \frac{4\pi Nq^2}{M} \quad (101)$$

دو حالت حدی برای "محیط کاملاً مقاومتی" وجود دارد که مشخصات فیزیکی آنها از نظر کیفی متفاوت است.

حالت ۱: "محیط مقاومتی رقیق"

در این حالت ω ، Γ و ω_p در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند

$$\omega_p \ll \Gamma, \quad \frac{\omega_p^2}{\Gamma} \ll \omega \ll \Gamma \quad (102)$$

بنابراین طبق معادلهٔ (۱۰۰) داریم

$$n = \left[1 + i \frac{\omega_p^2}{\omega\Gamma} \right]^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} i \frac{\omega_p^2}{\omega\Gamma} \quad (103)$$

که در آن از جملات مرتبهٔ بالاتر صرف‌نظر کرده‌ایم. به این ترتیب

$$k = n \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c} + i \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{c\Gamma} = \frac{\omega}{c} + \frac{2\pi i}{c} \sigma_{DC} \quad (104)$$

که در تساوی آخر از معادلات (۱۰۱) و (۱۰۳) استفاده کردیم. قسمت حقیقی k ، مانند حالت خلأ برابر با ω/c است. قسمت مجازی بسیار کوچکتر از قسمت حقیقی است. قسمت مجازی k ، افت نمایی موج تخت منتشرشونده را باعث می‌شود. میانگین طول تضعیف در مقایسه با یک طول موج زیاد است. شدت موج تخت متناسب با مربع اندازهٔ دامنهٔ مختلط است. بنابراین، برحسب فاصله با ضریب $d \equiv (2k_I)^{-1}$ تضعیف (نمایی) می‌شود، که در آن k_I قسمت مجازی k است. فاصلهٔ k است. $e^{-2k_I z}$ در آن شدت با ضریب e^{-1} تضعیف شده است از معادلهٔ (۱۰۴) چنین به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{d} \equiv 2k_I = \frac{4\pi}{c} \sigma_{DC}, \quad \text{یعنی, } \frac{\rho_{DC}}{d} = \frac{4\pi}{c} \quad (105)$$

”مقاومت واحد سطحی“ تیغه‌ای مربعی شکل از محیط مقاومتی رقیق که دارای ضخامت d و طول ضلع L است، برابر است با مقاومت DC تقسیم بر d . طبق معادله (۱۰۵) این مقدار برابر است با $377 = 4\pi/c$ اهم بر واحد سطح. احتمالاً به خاطر دارید که ۳۷۷ اهم بر واحد سطح امپدانس مشخصه ”پایانه کامل“ امواج تخت الکترومغناطیسی است. (فصل ۵) البته موج فقط در یک طول افت شدت، d ، جذب نمی‌شود. اما عملاً هیچ جزئی از موج بازتاب نمی‌کند و بالاخره همه آن جذب می‌شود.

به طور دقیقتر، از آنجایی که قسمت حقیقی n عملاً یک است و قسمت مجازی در مقایسه با یک بسیار کوچک است، شدت سهم بازتاب شده موج تختی که با زاویه فرود 90° درجه از خلأ می‌رسد با رابطه زیر داده می‌شود

$$|R|^2 = \frac{(n_R - 1)^2 + n_I^2}{(n_R + 1)^2 + n_I^2} \approx \frac{0 + n_I^2}{2^2 + n_I^2} \approx \frac{n_I^2}{4} \ll 1 \quad (106)$$

با استفاده از معادلات (۱۰۳) و (۱۰۵) این رابطه چنین می‌شود

$$|R|^2 \approx \frac{1}{16} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega\Gamma} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{4d} \right)^2 \ll 1 \quad (107)$$

که در آن $\lambda \equiv c/\omega$ طول موج ”کاهش یافته“ در خلأ است.

حالت ۲: ”محیط مقاومتی غلیظ“

در این حالت داریم

$$\omega \ll \Gamma, \quad \omega \ll \omega_p, \quad \omega\Gamma \ll \omega_p^2 \quad (108)$$

بدین ترتیب، طبق معادله (۱۰۰) n^2 عملاً کاملاً مجازی است. برای محاسبه جذر n^2 ، از این نکته استفاده می‌کنیم که جذر i برابر است با $e^{i\pi/4} = (e^{i\pi/2})^{1/2}$ ، که برابر است با $i/\sqrt{2}(1+i)$. داریم

$$n = \left[i \frac{\omega_p^2}{\omega\Gamma} \right]^{1/2} = \left(\frac{\omega_p^2}{2\omega\Gamma} \right)^{1/2} (i+1) = |n| \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \quad (109)$$

آنگاه

$$\begin{aligned} k &= n \frac{\omega}{c} = \sqrt{\frac{\omega}{c}} \left(\frac{\omega_p^2}{2c\Gamma} \right)^{1/2} (1+i) \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{c}} \left(\frac{2\pi\sigma_{DC}}{c} \right)^{1/2} (1+i) \end{aligned} \quad (110)$$

بنابراین، قسمتهای حقیقی و مجازی k با یکدیگر مساوی‌اند. هر کدام در مقایسه با مقدار k در خلأ (یعنی ω/c) بزرگ است. میانگین عمق نفوذ که برای دامنه با k_I^{-1} تعریف می‌شود، در مقایسه با طول موج در خلأ کوچک است. از اینجا چنین به دست می‌آید که موج تختی که از خلأ بر محیط غلیظ مقاومتی فرود می‌آید، عملاً با هیچ‌گونه جذبی بازتابیده می‌شود. دلیل آن است که عمق نفوذ چنان کوچک است که نسبتاً تعداد اندکی بار وجود میدان الکتریکی را حس می‌کنند. آنها که میدان را حس می‌کنند، دارای سرعت حدی هستند و با E_{∞} همفازند و بنابراین انرژی جذب می‌کنند. اما تعدادشان آنقدر کم است که موج با کاهش اندکی در شدتش "می‌گریزد".

به طور دقیقتر، شدت سهم بازتابیده با رابطه زیر داده می‌شود

$$|R|^2 = \frac{(n_R - 1)^2 + n_I^2}{(n_R + 1)^2 + n_I^2} \approx \frac{|n|^2 + 2n_R}{|n|^2 + 2n_R} = \frac{|n|^2 - \sqrt{2}|n|}{|n|^2 + \sqrt{2}|n|}$$

$$\approx 1 - \frac{2\sqrt{2}}{|n|} = 1 - 2\sqrt{2} \left(\frac{\omega\Gamma}{\omega_p^2} \right)^{1/2} \quad (111)$$

بنابراین $|R|^2 \approx 1$ چون که $\omega\Gamma \ll \omega_p^2$.

طول تضعیف e -تایی برای شدت که با $d \equiv (2k_I)^{-1}$ تعریف می‌شود، طبق رابطه زیر است

$$d = \lambda \sqrt{\frac{\omega\Gamma}{2\omega_p^2}} \ll \lambda$$

اگرچه این d در مقایسه با طول موج کوچک است، با ضریب $(\lambda/2d)$ از ضخامتی که ۳۷۷ اهم بر واحد سطح را برای DC به دست می‌دهد بزرگتر است. بنابراین، امپدانس در مقایسه با مقاومت پایانه کامل کوچک است. به همین دلیل علامت E_{∞} به هنگام بازتاب عوض می‌شود.

مشاهده می‌کنیم که تفاوت کیفی مهمی بین محیط مقاومتی رقیق و محیط مقاومتی غلیظ وجود دارد. محیط مقاومتی رقیق عملاً "سیاه" است. این محیط تقریباً به طور کامل جذب‌کننده است. در عوض، محیط مقاومتی غلیظ به مانند امپدانس "توده‌ای" عمل می‌کند که بسیار کوچک است. چنین محیطی بازتاب تقریباً کاملی را باعث می‌شود.

دست آخر، باید به یاد داشته باشیم که توصیفهای ما صرفاً عباراتی هستند که شرایطی را که به وسیله نامساویهای (۱۰۲) و (۱۰۸) داده شده بیان می‌کنند. چنین عباراتی این نکته مهم را حذف می‌کنند که یک رسانا در بسامدهای مختلف خواص متفاوتی از خود نشان می‌دهد. مثلاً طبق معادله (۱۰۸) چنانکه ω به قدر کافی کوچک باشد هر رسانایی به مانند یک محیط مقاومتی غلیظ عمل می‌کند. از طرف دیگر، یک رسانا در هیچ بسامدی نمی‌تواند یک محیط مقاومتی

“رقیق” باشد، مگر اینکه شرط $\Gamma \gg \omega_p$ را دارا باشد. اگر این شرط برقرار باشد، فقط در ناحیه بسامدی مطابق رابطه (۱۰۲) یک محیط مقاومتی رقیق است.

ناحیه بسامدی کاملاً کشسان. معادله حرکت برای فقط یک بار میانگین با معادله (۸۹) داده می‌شود. برای بستگی زمانی مختلط $\exp(-i\omega t)$ این معادله را می‌توان چنین نوشت

$$-i\omega \dot{x} + \Gamma \dot{x} = \frac{q}{M} E_x \quad (112)$$

ناحیه بسامدی کاملاً مقاومتی را که در بخش قبل در نظر گرفتیم حالتی بود که در آن می‌توانستیم از ω در مقابل Γ صرف‌نظر کنیم. ناحیه کاملاً کشسان حالتی است که در آن ω در مقایسه با Γ بسیار بزرگ است. بدین ترتیب در ناحیه بسامدی کاملاً کشسان داریم

$$\dot{x} = \frac{iq}{\omega M} E_x, \quad \omega \gg \Gamma \quad (113)$$

در این صورت، سرعت و نیرو دارای اختلاف فاز 90° درجه هستند و در یک دوره تناوب کاری بر روی بار انجام نمی‌شود. جذب وجود ندارد. رسانندگی مختلط کمی کاملاً مجازی است و [با استفاده از معادله (۱۱۳)] چنین داده می‌شود

$$J_x = Nq\dot{x} = i \frac{Nq^2}{\omega M} E_x \equiv \sigma(\omega) E_x$$

یعنی

$$\sigma(\omega) = i \frac{Nq^2}{\omega M}, \quad \omega \gg \Gamma \quad (114)$$

[همچنین معادله (۹۷) را ببینید، که در آن باید از $\omega\Gamma$ در مقابل ω^2 صرف‌نظر کرد.] مربع ضریب شکست مختلط، n^2 ، طبق رابطه زیر داده می‌شود

$$n^2 = 1 + 4\pi\chi = 1 - \frac{4\pi Nq^2}{M\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega \gg \Gamma \quad (115)$$

دو ناحیه بسامدی کاملاً کشسان که دارای خواص کیفی متفاوتی هستند وجود دارد.

حالت ۱: ناحیه بسامدی پاشنده
در این حالت داریم

$$\Gamma \ll \omega_p \leq \omega \quad (116)$$

بدین ترتیب مطابق با رابطه (۱۱۵) داریم

$$0 \leq n^2 < 1 \quad (117)$$

یعنی

$$0 \leq n \leq 1 \quad (118)$$

بنابراین برای یک رسانا در ناحیهٔ بسامدی پاشنده، ضریب n حقیقی است و بین صفر و یک قرار دارد. محیط شفاف است. جذب وجود ندارد. سرعت فاز بزرگتر از c است. شدت سهم بازتابیده چنین است $(n-1)^2/(n+1)^2$.

حالت ۲: ناحیهٔ بسامدی واکنشی

در این حالت داریم

$$\Gamma \ll \omega \leq \omega_p \quad (119)$$

بدین ترتیب از معادله (۱۱۵) داریم

$$-\frac{\omega_p^2}{\Gamma^2} \ll n^2 \leq 0 \quad (120)$$

بنابراین n^2 منفی است و n کمیتی مختلط است که فقط قسمت مجازی دارد:

$$n = i|n| = i \left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right]^{1/2}$$

و

$$k = n \frac{\omega}{c} = i \frac{\omega}{c} |n| = i|k|$$

یک موج تخت در محیط واکنشی، دارای صورت کلی زیر است

$$E_x = [A^+ e^{-|k|z} + A^- e^{+|k|z}] e^{-i\omega t}$$

اگر محیط تا $z = +\infty$ گسترده باشد، A^- صفر است. بنابراین یک موج تخت که از خلأ بر چنین محیطی فرود می‌آید، می‌باید بدون جذب کاملاً بازتابیده شود. به‌طور دقیقتر، شدت سهم بازتاب با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$|R|^2 = \frac{(n_R - 1)^2 + n_I^2}{(n_R + 1)^2 + n_I^2} \approx \frac{1 + n_I^2}{1 + n_I^2} = 1$$

در متن کتاب، با پرهیز از بحث درباره محیطهای جذبکننده، از بحث درباره ضریب شکست مختلط و عدد موج مختلط k پرهیز کردیم. برای ناحیه بسامدی واکنشی، از نماد k به جای آنچه که اکنون اندازه کمیت مختلط k ، $|k|$ ، برای ناحیه واکنشی، می‌نامیم، استفاده کردیم. برای ناحیه پاشنده، از k استفاده کردیم که متناظر با k مختلطی است که در اینجا به کار بردیم، وقتی که حقیقی باشد. خلاصه خواص رساناها. اینک می‌توانیم خلاصه‌ای از خواص هر رسانایی را ارائه دهیم (تا آنجا که مدل ساده‌ما اجازه دهد):

(الف) در بسامدهایی که به قدر کافی کم باشند. هر رسانایی محیطی مقاومتی غلیظ است. به این ترتیب با جذب اندک، عملاً بازتاب کامل وجود دارد.

(ب) به‌ازای بسامدهای به قدر کافی زیاد، هر رسانایی محیطی پاشنده است. بنابراین شفاف است. رساناها را می‌توان به‌طور تقریبی به سه دسته تقسیم کرد که مطابق با میزان نسبی آهنگ دستیابی به سرعت حدی، Γ ، و بسامد نوسان پلاسما، ω_p است.

(الف) رسانایی با $\Gamma \gg \omega_p$ دارای ناحیه بسامدی است که در آن محیطی مقاومتی رقیق است. در این ناحیه، می‌تواند موج را بدون بازتاب جذب کند. چنین رسانایی دارای ناحیه بسامدی کاملاً واکنشی نیست. بدین ترتیب، چنین رسانایی در هیچ بسامدی بازتاب کامل نمی‌دهد.

(ب) رسانایی با $\Gamma \ll \omega_p$ دارای ناحیه بسامدی‌ای است که در آن محیطی کاملاً واکنشی است. در این ناحیه قادر است بدون جذب بازتاب کلی دهد. این رسانا دارای ناحیه‌ای بسامدی‌ای نیست که در آن محیط مقاومتی رقیق باشد. بنابراین هرگز قادر نیست یک موج تخت را بدون بازتاب جذب کند.

(ج) رسانایی با $\Gamma \approx \omega_p$ دارای ناحیه بسامدی‌ای نیست که در آن یک محیط مقاومتی رقیق باشد. همچنین ناحیه بسامدی‌ای نیست که در آن محیطی کاملاً واکنشی باشد. البته، هنوز دارای این خاصیت کلی هست که به‌ازای بسامدهای به قدر کافی کم، محیط مقاومتی غلیظ است و برای بسامدهای به قدر کافی زیاد شفاف است.

کاربرد: نقره جامد

فرض کنید که نقره جامد را بتوان با مدل ساده‌ما تقریب زد. بارهای متحرک "الکترونهاى رسانش" هستند که به‌وسیله "الکترونهاى ظرفیت" اتمهای نقره فراهم می‌آیند. ظرفیت نقره یک است. وزن اتمی آن 107.9 g/mole است. چگالی جرمی نقره 10.5 g/cm^3 است. عدد آووگادرو برابر است با 6×10^{23} . در این صورت N برابر است با $5.8 \times 10^{22} = (107.9)/(10.5) \times (6 \times 10^{23})$. فرض کنید M و q جرم و بار یک الکترون

آزاد باشد، داریم

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{M}} = 1.36 \times 10^{16} \text{ rad/s}$$

مقاومت ویژه ρ_{DC} برابر است با $1.59 \times 10^{-6} \Omega \text{ cm/s}$. اما 3.0 اهم برابر است با c^{-1} ایستا اهم، که در آن $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm/s}$. بنابراین مقاومت ویژه برابر است با $1.81 \times 10^{-18} \text{ stat}\Omega \text{ cm}$. بدین ترتیب آهنگ رسیدن به سرعت حدی، Γ ، چنین است

$$\Gamma = \frac{N e^2}{M \sigma_{DC}} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \sigma_{DC} = 2.7 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$$

مشاهده می‌کنیم که برای نقره جامد، $\Gamma \ll \omega_p$. برای $2.7 \times 10^{12} \text{ rad/s} \ll \omega$ نقره محیطی مقاومتی غلیظ است، چنانکه مدل ما پیش‌بینی می‌کند. (برای مثال، میکروموجها در این ناحیه قرار می‌گیرند). برای $2.7 \times 10^{12} \text{ rad/s} \gg \omega$ نقره کاملاً کُشسان است. در ناحیه‌ای از رفتار کاملاً کُشسانی که در آن $1.36 \times 10^{16} \text{ rad/s} < \omega$ باشد، کاملاً واکنشی است. (این ناحیه شامل نور مرئی است). برای ناحیه کاملاً کُشسان که در آن $1.36 \times 10^{16} \text{ rad/s} > \omega$ باشد، شفاف است. (این ناحیه، مافوق بنفش دور و پرتو x را در برمی‌گیرد). البته، نقره در اصل کاملاً از این مدل پیروی نمی‌کند. (برای نمونه، از سهم الکترونهاي "مقید" صرف‌نظر کرده‌ایم.)

کاربرد: گرافیت

فرض می‌کنیم که ظرفیت ۴، چگالی 2×10^{23} و وزن اتمی ۱۲ است. به این ترتیب، مطابق با مدل ساده‌ای

$$\omega_p = 0.36 \times 10^{17} \text{ rad/s}$$

مقاومت ویژه، ρ_{DC} ، برابر است با $1.57 \times 10^{-15} \text{ stat}\Omega \text{ cm}$. از اینجا داریم

$$\Gamma = 1.6 \times 10^{17} \text{ s}^{-1}$$

طبق این مدل به‌ازای $1.6 \times 10^{17} \text{ rad/s} \ll \omega$ گرافیت کاملاً مقاومتی است. برای $8 \times 10^{15} \text{ rad/s} \ll \omega$ محیط مقاومتی غلیظ است. به‌ازای $1.6 \times 10^{17} \text{ rad/s} \ll \omega \ll 8 \times 10^{15} \text{ rad/s}$ یک محیط مقاومتی رقیق است. از آنجایی که این گستره بسامدی را فقط با ضریب ۲۰ در بسامد می‌توان طی کرد، هر دو نامساوی را نمی‌توان به‌سادگی برقرار کرد، بنابراین گرافیت در هیچ بسامدی خیلی رقیق نیست، و

در نتیجه در هیچ بسامدی "کاملاً سیاه" نیست. گرافیت دارای ناحیهٔ بسامدی واکنشی نیست. مطابق با مدل، به ازای $\omega \gg 1.6 \times 10^{17} \text{ rad/s}$ شفاف است.

اینک، ضریب انعکاس، $|R|^2$ ، را برای نور مرئی از گرافیت ایده‌آل محاسبه می‌کنیم. برای نور سبز که طول موجش در خلأ 5500 \AA است، داریم

$$\omega = 2(3.14)(3 \times 10^{10}) / (5.5 \times 10^{-8}) = 3.42 \times 10^{18} \text{ rad/s}$$

این بسامد، در ناحیهٔ بسامدی "محیط مقاومتی غلیظ" که با رابطهٔ $\omega \ll 8 \times 10^{15} \text{ rad/s}$ داده می‌شود، نیست. بنابراین، انتظار نداریم که بازتاب تقریباً صددرصد وجود داشته باشد. بازتاب خیلی کم را هم انتظار نداریم. داریم

$$n^2 = \varepsilon = \varepsilon_R + i\varepsilon_I,$$

$$\varepsilon_R = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_p^2 - \omega^2)}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \Gamma^2}$$

$$= 1 - \frac{(36)^2}{(3.42)^2 + (160)^2} = 0.951$$

$$\varepsilon_I = \frac{\omega_p^2\Gamma\omega}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} = \frac{\omega_p^2(\Gamma/\omega)}{\omega^2 + \Gamma^2}$$

$$= \frac{160}{3.42(3.42)^2 + (160)^2} = 2.36$$

$$n^2 = 0.951 + 2.36i = 2.55 \exp i\varphi$$

که در آن

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2.36}{0.951} \approx 68 \text{ deg}$$

بنابراین

$$n = \sqrt{2.55} \exp\left(i\frac{1}{2}\varphi\right) = 1.60(\cos 34^\circ + i \sin 34^\circ) = 1.33 + i0.90$$

در این صورت

$$|R|^2 = \frac{(n_R - 1) + n_I^2}{(n_R + 1)^2 + n_I^2} = \frac{(0.33)^2 + (0.90)^2}{(2.33)^2 + (0.90)^2} = 0.15$$

بنابراین، برطبق این مدل، یک صفحهٔ صیقلی گرافیت تقریباً ۱۵ درصد شدت نور سبز را که به‌طور عمود بر آن فرود می‌آید باز می‌تاباند.

پیوست

پ-۱ سریهای تیلور

فرض می‌کنیم $f(x)$ بر حسب سری نامتناهی زیر نوشته شود

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \dots \quad (1)$$

که در آن c ها ثابت‌اند. سپس می‌گوییم $f(x)$ "در نقطه x_0 بسط" داده شده است. برای به دست آوردن c_0 قرار می‌دهیم $x = x_0$; آنگاه همه جمله‌های سمت راست بجز اولی از بین می‌روند. بنابراین داریم $c_0 = f(x_0)$. برای به دست آوردن c_1 معادله (۱) را نسبت به x مشتق می‌گیریم و سپس قرار می‌دهیم $x = x_0$. تمام جمله‌ها بجز جمله c_1 حذف می‌شوند؛ بنابراین $c_1 = (df/dx)_0$. به دست می‌آید، که شاخص صفر یعنی df/dx در $x = x_0$ ارزشیابی می‌شود. به همین ترتیب داریم

$$(d^m f/dx^m)_0 = m! c_m \quad (2)$$

و معادله (۱) به صورت زیر در می‌آید

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{df}{dx} \right)_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_0 + \frac{(x - x_0)^3}{3!} \left(\frac{d^3 f}{dx^3} \right)_0 + \dots \quad (3)$$

پ-۲ سریهای معمولی استفاده شده

$\sin x$ و $\cos x$. در معادله (۳) از $d(\cos x)/dx = -\sin x$ و $d(\sin x)/dx = \cos x$

$\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$ و $x = 0$ استفاده می‌کنیم تا معادله زیر را به دست آوریم

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad (4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (5)$$

تابع نمایی e^{ax} . از $d(e^{ax})/dx = ae^{ax}$ و $e^0 = 1$ و $x = 0$ در معادله (۳) استفاده

می‌کنیم تا معادله زیر به دست آید

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2 x^2}{2!} + \frac{a^3 x^3}{3!} + \frac{a^4 x^4}{4!} + \dots \quad (6)$$

$\sinh x$ و $\cosh x$. این تابعها ممکن است با $d(\sinh x)/dx = \cosh x$

$d(\cosh x)/dx = \sinh x$ و $\sinh(0) = 0$, $\cosh(0) = 1$ و با قراردادن $x = 0$ در

معادله (۳) تعریف شوند تا معادلات زیر به دست آید

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (7)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (8)$$

روابط درگیر با تابع نمایی. اگر در معادله (۶) قرار دهیم $a = +1$ و آنرا با معادلات (۷)

و (۸) مقایسه کنیم و اگر همین کار را برای $a = -1$ انجام دهیم به دست می‌آوریم

$$e^x = \cosh x + \sinh x, \quad (9)$$

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x \quad (10)$$

که ممکن است بعد از حل شدن به دست دهد

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (11)$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (12)$$

اگر در معادله (۶) قرار دهیم $a = +i \equiv +\sqrt{-1}$ به دست می‌آوریم

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (13)$$

به همین ترتیب اگر در معادله (۶) قرار دهیم $a = -i$ خواهیم داشت:

$$e^{-ix} = 1 - ix - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (14)$$

با اضافه کردن و کم کردن معادله (۱۳) و (۱۴) و مقایسه نتایج با معادلات (۴) و (۵) خواهیم داشت:

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x \quad (15)$$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x \quad (16)$$

که ممکن است بعد از حل شدن معادلات زیر را به دست دهد

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (17)$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (18)$$

$\tan x$ از $d(\sin x)/dx = \cos x$, $\tan x \equiv \sin x / \cos x$ و

$$d(\cos x)/dx = -\sin x$$

استفاده می‌کنیم تا $d(\tan x)/dx = (\cos x)^{-2}$ استفاده می‌کنیم تا $d^2(\tan x)/dx^2 = 2 \sin x (\cos x)^{-3}$

از $x = 0$ در معادله (۳) استفاده می‌کنیم و به دست می‌آوریم. آنگاه

از $x = 0$ در معادله (۳) استفاده می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad (19)$$

سریهای دو جمله‌ای $(1+x)^n$. از $d(1+x)^n/dx = n(1+x)^{n-1}$

$$d^2(1+x)^n/dx^2 = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

$$d^3(1+x)^n/dx^3 = n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}$$

و غیره و از قرار دادن $x = 0$ در معادله (۳) استفاده می‌کنیم تا معادله زیر را به دست آوریم

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \dots \quad (20)$$

معادله (۲۰) برای هر n چه مثبت باشد چه منفی و برای هر x چه مثبت چه منفی تا جایی که

در رابطه $x^2 < 1$ برقرار باشد صادق است.

پ-۳ برهم‌نهی تابعهای هماهنگ

برهم‌نهی N تابع هماهنگ زیر در پدیده‌های موجی درگیرند:

$$u(t) = \cos \omega_1 t + \cos(\omega_1 + \alpha)t + \cos(\omega_1 + 2\alpha)t + \dots + \cos[\omega_1 + (N-1)\alpha]t \quad (21)$$

$$u(z) = \cos kz + \cos(kz + \beta) + \cos(kz + 2\beta) + \dots + \cos[kz + (N-1)\beta] \quad (22)$$

اینها هر دو به شکل زیرند

$$u = \cos \theta_1 + \cos(\theta_1 + \gamma) + \cos(\theta_1 + 2\gamma) + \dots + \cos[\theta_1 + (N-1)\gamma] \quad (23)$$

می‌خواهیم یک عبارت مناسب برای معادله (۲۳) پیدا کنیم. تذکر می‌دهیم که u را می‌توان برحسب قسمت حقیقی v نوشت که

$$v = e^{i\theta_1} + e^{i(\theta_1+\gamma)} + e^{i(\theta_1+2\gamma)} + \dots + e^{i[\theta_1+(N-1)\gamma]} = e^{i\theta_1} S \quad (24)$$

که در آن S سری هندسی N جمله است که با رابطه زیر داده می‌شود

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{N-1}, \quad a = e^{i\gamma} \quad (25)$$

S را در a ضرب می‌کنیم. سپس aS را از aS جمله به جمله کم می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$aS - S = a^N - 1 \quad (26)$$

یعنی

$$\begin{aligned} S &= \frac{a^N - 1}{a - 1} = \frac{e^{iN\gamma} - 1}{e^{i\gamma} - 1} = \frac{e^{(1/2)iN\gamma} (e^{(1/2)iN\gamma} - e^{-(1/2)iN\gamma})}{e^{(1/2)i\gamma} (e^{(1/2)i\gamma} - e^{-(1/2)i\gamma})} \\ &= e^{(1/2)i(N-1)\gamma} \frac{\sin \frac{1}{2}N\gamma}{\sin \frac{1}{2}\gamma} \end{aligned} \quad (27)$$

که از معادله (۱۶) پیوست در مرحله آخر استفاده کردیم. با قرار دادن معادله (۲۷) در معادله (۲۴) به دست می‌آوریم

$$v = e^{i[\theta_1 + (1/2)(N-1)\gamma]} \frac{\sin \frac{1}{2}N\gamma}{\sin \frac{1}{2}\gamma} \quad (28)$$

با در نظر گرفتن قسمت حقیقی نتیجه مطلوب را به دست می آوریم

$$u = \cos[\theta_1 + \frac{1}{\gamma}(N-1)\gamma] \frac{\sin \frac{1}{\gamma} N \gamma}{\sin \frac{1}{\gamma} \gamma} \quad (29)$$

نتیجه یعنی معادله (۲۹) را می توان به شکل مفید دیگری قرار داد. در معادله (۲۳)، θ_1 استدلال جمله اول و استدلال جمله دوم را که θ_2 می نامیم با رابطه زیر داده می شود

$$\theta_2 \equiv \theta - 1 + (N-1)\gamma \quad (30)$$

پس میانگین استدلالهای اول و آخر θ_1 و θ_2 به صورت زیر خواهد بود

$$\theta_{av} \equiv \frac{1}{\gamma}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{1}{\gamma}\theta_1 + \frac{1}{\gamma}\theta_1 + \frac{1}{\gamma}(N-1)\gamma \quad (31)$$

بنابراین اولین عامل معادله (۲۹) دقیقاً $\cos \theta_{av}$ است. با استفاده از این واقعیت که γ برابر $(\theta_2 - \theta_1)/(N-1)$ است [طبق معادله (۳۰)]، معادله (۲۹) را به شکل زیر می نویسیم

$$u = \cos \theta_{av} \frac{\sin[\frac{1}{\gamma} N (\theta_2 - \theta_1)/(N-1)]}{\sin[\frac{1}{\gamma} (\theta_2 - \theta_1)/(N-1)]} \quad (32)$$

معادله (۲۹) روی افزایش γ بین استدلالهای جمله های موفق در جمع معادله (۲۳) تأکید دارد. معادله (۳۲) معادل معادله (۲۹) است اما روی اولین و آخرین سهمهای θ_1 و θ_2 و میانگین آنها تأکید دارد. توجه کنید که $\cos \theta_{av}$ نوسان هماهنگ همان شکل هر کدام از جمله های برهم نهش معادله (۲۳) است؛ اما به جای دامنه واحد، دارای دامنه $A(\theta_1, \theta_2, N)$ است که با رابطه زیر داده می شود

$$A(\theta_1, \theta_2, N) = \frac{\sin[\frac{1}{\gamma} N (\theta_2 - \theta_1)/(N-1)]}{\sin[\frac{1}{\gamma} (\theta_2 - \theta_1)/(N-1)]} \quad (33)$$

عبارت فشرده نتیجه ما به صورت زیر است

$$u = A(\theta_1, \theta_2, N) \cos \theta_{av} \quad (34)$$

مورد $N = 2$ مربوط به نوسانات دو زمان [معادله (۲۱)] پدیده "زنش" و برای نوسانات در فضای [معادله (۲۲)] طرح تداخلی دوشکافی است. برای نوسانات در زمان، N بزرگتر "مدولاسیونهای" می دهد که یک رفتار "تپی" در $u(t)$ ایجاد می کند وقتی در حد $N \rightarrow \infty$ میل می کند. برای نوسانات در فضا، N بزرگتر طرح تداخلی چندشکافی را می دهد و در حد وقتی $N \rightarrow \infty$ میل می کند طرح پراش تک شکافی را می دهد که مربوط به تک شکافی است که چند طول موج پهن دارد.

پ-۴ تساویهای برداری

از A, B, C به جای تابعهای اسکالر x, y, z و z استفاده می‌کنیم که عبارت‌اند از $A(x, y, z)$ ، $B(x, y, z)$ و $C(x, y, z)$. به همین ترتیب \mathbf{A}, \mathbf{B} و \mathbf{C} به جای تابعهای برداری x, y, z و z هستند. بنابراین \mathbf{A} یعنی $\hat{x}A_x(x, y, z) + \hat{y}A_y(x, y, z) + \hat{z}A_z(x, y, z)$ که \hat{x}, \hat{y} و \hat{z} بردارهای یک‌اند که، می‌خواهیم چگونگی کار با عامل ∇ (که "دل" نامیده می‌شود) را بیاموزیم که هم بردار است و هم عملگر "مشتق". حقیقتاً ما این است که معادله‌های درگیر با دل را می‌نویسیم به طوری که هم جنبه برداری و هم "جنبه مشتق‌گیری" را داشته باشد. مثلاً در رابطه زیر

$$\nabla(AB)(\nabla A)B + A(\nabla B) = B\nabla A + A\nabla B \quad (۳۵)$$

اولین کمیت از قاعده مشتق‌گیری در ضرب به دست می‌آید. ابتدا B ثابت در نظر گرفته می‌شود، سپس A . چون طبق قرارداد دل فقط از آنچه سمت راست آن قرار دارد مشتق می‌گیرد، دومین کمیت از پرانتز خارج می‌شود. می‌توانیم به طور موقتی این را با نوشتن ∇_a نمادگذاری کنیم وقتی فقط روی \mathbf{A} (یا A) عمل می‌کند و ∇_b وقتی است که روی \mathbf{B} (یا B) عمل می‌کند. به این شکل از ضرب قانون دیفرانسیلی با اضافه کردن شاخصها محافظت می‌شود. سپس عملگرها و بردارها را طوری حرکت دهیم که کمیت‌هایی که مشتق گرفته نمی‌شوند به طور "امن" در پشت علامت ∇ قرار دارند، و اطمینان حاصل کنید که قوانین بردارها با این کار صادق است. سرانجام a و b را پاک خواهیم کرد.

$$\nabla(AB) = \nabla_a(AB) + \nabla_b(AB) = B\nabla_a A + A\nabla_b B = B\nabla A + A\nabla B \quad (۳۶)$$

به همین ترتیب داریم

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{A}B) &= \nabla_a \times (\mathbf{A}B) + \nabla_b \times (\mathbf{A}B) = B\nabla_a \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla_b B \\ &= B\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla B \end{aligned} \quad (۳۷)$$

بعد از کمی تمرین لازم است که عملیات واسطه را انجام دهید.

حال می‌خواهیم یک تساوی برای $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{C})$ به دست آوریم. فرض می‌کنیم این تساوی

را می‌دانیم

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (۳۸ \text{ الف})$$

$$= \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (۳۸ \text{ ب})$$

می‌توانیم از این قاعده (۳۸ الف) با جابه‌جایی دل برای A و دل برای B استفاده کنیم. باید مراقب نگه‌داشتن هر دو دل روی سمت چپ C باشیم زیرا هر دو دل بر هم نهاده می‌شوند تا از C دیفرانسیل بگیرند. بنابراین نمی‌توانیم از معادله (۳۸ الف) استفاده کنیم؛ باید معادله (۳۸ ب) را به‌کار ببریم. آنگاه داریم

$$\nabla \times (\nabla \times C) = \nabla (\nabla \cdot C) - (\nabla \cdot \nabla) C \quad (39)$$

برحسب مؤلفه‌های x, y, z ، معادله (۳۹) یعنی

$$[\nabla \times (\nabla \times C)]_x = \frac{\partial (\nabla \cdot C)}{\partial x} - \nabla^2 C_x \quad (40)$$

با عبارتهای مشابه برای y و z ، که خواهیم داشت

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (41)$$

مراجع برای مطالعه بیشتر

مراجع عمومی

(The parenthetical cross reference at the end of an entry refers to a chapter or problem in Vol. III of the Berkeley Physics Series.)

- American Institute of Physics, Selected Reprints, *Polarized Light* (American Institute of Physics, New York, 1963). Reprints of 18 articles chosen for their interest and importance.
- American Institute of Physics, Selected Reprints, *Quantum and Statistical Aspects of Light* (American Institute of Physics, New York, 1963). Includes the Brown and Twiss experiment mentioned in the text.
- Arthur H. Benade, *Horns, Strings and Harmony* (Anchor Books, Science Study Series S 11, Doubleday & Company, Inc., Garden City, N.Y., 1960). A delightful book by a flute-playing physicist.
- George H. Darwin, *The Tides, and Kindred Phenomena in the Solar System* (W. H. Freeman & Company, San Francisco, 1962). This popular classic, written in 1898, has fascinating descriptions of seiches in Lake Geneva, tidal "bores," the past and future history of the earth and moon as deciphered from the tides, etc.
- Donald G. Fink and David M. Lutyens, *The Physics of Television* (Anchor Books, Science Study Series S 8, Doubleday & Company, Inc., Garden City, N.Y., 1960).
- Winston Kock, *Sound Waves and Light Waves* (Anchor Books, Science Study Series S 40, Doubleday & Company, Inc., Garden City, N.Y., 1965).
- E. H. Land, "Some Aspects of the Development of Sheet Polarizers," *J. Opt. Soc. Am.* 41, 957 (1951).
- M. Minnaert, *Light and Colour in the Open Air* (Dover Publications, Inc., New York, 1954). A classic full of "outdoor home experiments." (A general reference, but see also Chap. 8 and Supplementary Topic 8.)
- Physical Science Study Committee, *Physics*, 2nd ed. (D. C. Heath & Company, Boston, Mass., 1965).
- John R. Pierce, *Electrons and Waves* (Anchor Books, Science Study Series S 38, Doubleday & Company, Inc., Garden City, N.Y., 1964). A fine introduction to electronics and communication by a physicist who has made notable contributions to both of these arts.
- William A. Shurcliff and Stanley S. Ballard, *Polarized Light* (Momentum Book 7, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1964). Fascinating and dramatic examples of the production and use of polarized light in many branches of physics.
- Ivan Simon, *Infrared Radiation* (Momentum Book 12, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1966).
- Alex G. Smith and Thomas D. Carr, *Radio Exploration of the Planetary System* (Momentum Book 2, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1964).
- Elizabeth A. Wood, *Crystals and Light, An Introduction to Optical Crystallography* (Momentum Book 5, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1964). Paperback; this is a beautiful little book describing the study of crystals, use of polarization microscopes, etc. The piece of Polaroid pasted inside the book for home experiments actually started me on my binge of inventing home experiments for Vol. III of the Berkeley Physics Series.

- Reinhard Beer, "Remote Sensing of Planetary Atmospheres by Fourier Spectroscopy," *The Physics Teacher*, p. 151 (April 1968). (See Prob. 6.33.)
- G. L. Berge and G. A. Seielstad, "The Magnetic Field of the Galaxy," *Scientific American*, p. 46 (June 1965). (See Chap. 8.)
- G. R. Bird and M. Parrish, Jr., *J. Opt. Soc. Am.* 50, 886 (1960). Evaporation of gold onto a plastic diffraction grating. (See Chap. 8.)
- N. Broten, et al., "Long Base-line Interferometry Using Atomic Clocks and Tape Recorders," *Science* 156, 1592 (June 23, 1967). (See Prob. 9.57.)
- R. Hanbury Brown and R. O. Twiss, "The Question of Correlation between Photons in Coherent Light Rays," *Nature* 178, 1447 (1956). (See Chap. 9.)
- B. A. Burgel, "Dispersion, Reflection, and Eigenfrequencies on the Wave Machine," *Am. J. Phys.* 35, 913 (1967). (See Prob. 4.14.)
- W. Calvert, R. Knecht, and T. Van Zandt, "Ionosphere Explorer I Satellite: First Observations from the Fixed-Frequency Topside Sounder," *Science* 146, 391 (Oct. 16, 1964). (See Chap. 4.)
- D. D. Coon, *Am. J. Phys.* 34, 240 (1966). (See Chap. 7.)
- A. de Maria, D. Stetser, and W. Glenn, Jr., "Ultrashort Light Pulses," *Science* 156, 1557 (June 23, 1967). (See Prob. 6.23.)
- A. J. de Witte, "Interference in Scattered Light," *Am. J. Phys.* 35, 301 (April 1967). (See Prob. 9.56.)
- Rene Dubos, *Pasteur and Modern Science* (Anchor Books, Doubleday & Company, Inc., Garden City, N.Y., 1960). (See Chap. 8.)
- R. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, chap. 33 (Addison Wesley, Reading, Mass., 1963). (See Chap. 8.)
- A. T. Forrester, R. A. Gudmundsen, and P. O. Johnson, "Photoelectric Mixing of Incoherent Light," *Phys. Rev.* 99, 1691 (1955). (See Chap. 1 and Supplementary Topic 7.)
- J. M. Fowler, J. T. Brooks, and E. D. Lambe, "One-dimensional Wave Demonstration," *Am. J. Phys.* 35, 1065 (1967). (See Chap. 4.)
- Martin Gardner, *The Ambidextrous Universe* (Basic Books, Inc., Publishers, New York, 1964.) An account of handedness in living organisms and in the weak decay interactions of elementary particles. (See Chap. 8.)
- J. A. Giordmaine, "The Interaction of Light with Light," *Scientific American*, p. 38 (April 1964). (See Prob. 1.13.)
- T. Gold, "Radio Method for the Precise Measurement of the Rotation Period of the Earth," *Science* 157, 302 (July 21, 1967). (See Prob. 9.57.)
- Eckhard H. Hess, "Attitude and Pupil Size," *Scientific American*, p. 46 (April 1965). (See Prob. 9.33.)
- J. Lovelock, D. Hitchcock, P. Fellgett, J. and P. Connes, L. Kaplan, and J. Ring, "Detecting Planetary Life from Earth," *Science Journal*, p. 56 (April 1967). (See Prob. 6.33.)
- G. J. F. MacDonald, "Implications for Geophysics of the Precise Measurement of the Earth's Rotation," *Science* 157, 304 (July 21, 1967). (See Prob. 9.57.)
- J. S. Mayo, "Pulse-Code Modulation," *Scientific American*, p. 102 (March 1968). (See 6.2.)
- R. Pfeegor and L. Mandel, "Interference of Independent Photon Beams," *Phys. Rev.* 159, 1084 (1967). (See Chap. 9.)
- F. Press and D. Hartrider, "Air-Sea Waves from the Explosion of Krakatoa," *Science* 154, 1325 (Dec. 9, 1966). (See Prob. 6.12.)
- S. J. Smith and E. M. Purcell, "Visible Light from Localized Surface Charges Moving across a Grating," *Phys. Rev.* 92, 1069 (1953). (See Prob. 7.28.)
- J. R. Tessman and J. T. Finnell, Jr., *Am. J. Phys.* 35, 523 (1967). (See Chap. 7.)
- Karl von Frisch, *Bees, Their Vision, Chemical Sense, and Language* (Cornell University Press, Ithaca, N.Y., 1950). (See Chap. 8.)

نمایه

- آزمایش براون و تویس ۵۵۶
 آشکارساز
 ~ تابشی ۲۵۱
 ~ قانون مربعی ۴۱
 اثر فوتوالکتریک در ~ ۴۲
 ~ گوش ۴۱، ۸۶
 ~ نور ۲۵۱
 آکوستیک اتاقها ۳۲۰
 آنالیز فوریه ۷۶
 ~ بسته موج ۳۶۷-۳۶۹
 ~ تابع تناوبی $F(t)$ ۸۱
 ~ تابع تناوبی $f(z)$ ۷۶
 ~ تابع دلتا ۳۶۲
 ~ تپ مربعی که به طور تناوبی تکرار می شود ۱۲۲
 ~ تپها ۳۶۸-۳۵۴
 ~ توسط پیانو ۱۱۴
 ~ توسط گوش ۸۴
 ~ چشمه همدوس ۵۸۱-۵۸۲
 ~ دنداناره ای ۱۲۵
 ~ موج مربعی ۸۱، ۳۶۰
 ~ تقریباً دوره ای ۳۸۰
 ~ که به طور تناوبی تکرار می شود ۱۲۲
 ~ منفرد ۳۶۰، ۳۷۸
 ~ میرا ۳۶۳
 ~ و تار پیوسته ۷۶
 ~ و شرایط مرزی ۱۲۲
 آونگ
 ~ ساده ۹، ۴۸
 ~ کروی ۲۲، ۲۵
 آونگ (های) جفت شده ۴۳
 ~ در سیستم قوطیهای کنسرو جفت شده ۱۷۹
 ~ در نقش صافی بالاگذر ۱۶۶
 ~ در نقش صافی مکانیکی ۱۵۲، ۱۵۵، ۱۸۴
 حل دقیق نوسانهای واداشته سیستم ~ ۱۷۴
 رابطه پاشندگی برای ~ ۱۰۷، ۱۶۹
 ~ ساده ۹، ۴۸

- سیستم ~ ۱۰۶، ۱۲۰
 قانون کامل پاشندگی ~ ۱۷۵، ۱۹۵
 مدهای دو ~ ۱۰۶، ۱۴۷
 معادله موج برای ~ ۱۲۰، ۱۶۴
 نوسانهای واداشته دو ~ ۱۴۶
 آهنگ (های)
 ~ اصلی ۷۲، ۹۹
 ~ ترکیبی از پدیده‌های غیرخطی در گوش ۵۳
 ~ ترکیبی از غیرخطی بودن نوری ۵۷
 آینه
 ~ بیضوی ۵۹۹
 ~ تخت ۵۹۳
 ~ کروی ۶۰۱
 ~ لوید ۶۲۲
 ابراهای رنگی ۶۰۴
 ابراهای کروی ۶۰۱
 اپتیک هندسی ۶۱۷-۵۹۲
 اختلاف مسیر ۵۴۷
 استروپوسکوپ ۴۸، ۳۰۸، ۳۳۷
 اسکاج لایت ۶۱۶
 اسلینکی ۱۴، ۱۰۳
 بستگی بسامد به طول ~ ۱۱۳
 تشدید در ~ ۱۷۹
 سرعت فاز ~ ۲۵۹، ۲۷۰
 ~ در سیستم پیوسته ۱۱۳
 قطبیدگی ~ ۴۷۷
 قوطی کنسرو جفت‌شده با ~ ۱۵۵
 کیفیت صدای ~ ۱۱۴
 اشتباه نیوتون ۲۰۲
 اصل برهم‌نهش
 ~ در معادله دیفرانسیل غیرهمگن ۲۱، ۱۳۱
- ~ در معادله دیفرانسیل همگن ۲۰
 ~ و خطی بودن ۱۹، ۲۰
 اصل فرما ۵۹۶
 القابیدگی در واحد طول خط انتقال سیمهای
 موازی ۲۰۸
 القابیدگی در واحد طول خط انتقال صفحه
 موازی ۲۱۰
 امیدانس ۲۵۷-۲۳۱
 ~ آنتنهای همسایه ۵۵۳
 ~ امواج صوتی ۲۴۰
 ~ امواج طولی روی تار ۲۳۷-۲۳۶
 ~ امواج عرضی در تار ۲۲۴-۲۲۲
 جور کردن ~ ۲۷۳، ۲۹۵، ۳۰۶
 ~ خط انتقال نیرو با صفحات موازی ۲۴۴
 ~ خط انتقال نیرو پایین‌گذر ۲۴۲
 ~ صوت ۲۳۸-۲۳۷، ۲۶۸
 ~ ضربه‌گیر ۲۷۳
 ~ و سرعت فاز ۲۳۱
 امواج
 ~ آب ۳۳۳-۳۳۵، ۴۲۳-۴۱۳
 ~ از نوع مخلوط ۴۰۰
 ~ الکترومغناطیسی غیرپاشنده ۳۲۲
 ~ تخت ۲۴۹-۲۴۶، ۳۹۹-۳۹۶
 ۴۳۶-۴۲۴
 ~ الکترومغناطیسی ۴۳۶-۴۲۴
 ~ حاصل از کشش سطحی ۴۲۲، ۴۶۵
 ~ دندان‌اره‌ای در آبهای کم عمق ۱۲۴، ۱۸۶
 ~ دوبروی ۶۶۱-۶۵۲
 ~ رادیویی AM ۳۲۹
 ~ روی آب در دریاچه ژنو ۶۱
 ~ روی آب در ظرف آب ۶۰
 شکل ~ آب عمیق ۴۱۸

- اندازه‌گیری قطبیدگی خطی ۵۱۳-۵۱۵
اندازه‌گیریهای صفر ۱۱۴
- بار توزیع شده ۲۷۳
بار نقطه‌ای مؤثر ۴۷۲
باریکهٔ امواج پیشرونده ۵۶۳-۵۶۷
باریکهٔ محدودشده با پراش ۵۷۹، ۵۶۳-۵۷
بازتاب ۲۷۱-۳۲۲
- ~ آینه‌ای باریکه امواج ۵۹۳
~ امواج صوتی ۲۸۹-۲۹۲
~ چندباره ۳۱۵
~ داخلی کلی در شیشه ۴۰۸-۴۱۱
~ در خط انتقال نیرو ۲۹۲-۲۹۴
~ در لایه‌های نازک ۳۰۰
~ فلزی ۵۳۱، ۵۰۸
~ کلی امواج رادیویی از یون سپهر ۱۷۱
~ کلی نور مرئی از آینهٔ نقره‌اندود ۱۸۵
~ کلی نور در شیشه ۴۰۸-۴۱۱
~ نور از شیشه ۴۶۸، ۳۰۴، ۲۹۴
بازتاب‌کننده رو به عقب
- ~ نور توسط اسکاچ لایت ۶۱۶
~ نور توسط بازتابگر گوشه‌ای ۶۲۰
~ نور توسط منشور ۴۱۰، ۴۰۸
بردار انتشار ۳۹۷
بردار پوئین‌تینگ ۴۲۹
برهم‌نهمش
- ~ امواج پیشرونده ۲۸۹
~ امواج ساکن ۲۸۹
~ شرایط اولیه ۵۷، ۲۵
~ مدهای محرک ۱۴۸
~ مدهای واداشته دو حرکت مستقل ۲۴، ۲۵
~ مدهای واداشته دو مد ۲۵
- شکل ~ آب کم عمق ۴۱۹
~ غیرپاشنده ۷۲
محیط ~ ۹۱
~ کشندی ۳۸۴، ۳۷۵
محیط ~ پاشنده ۹۱
~ مستقیم ۴۱۴
~ و موازی ۲۷۷
~ نمایی ۲۲۵، ۲۲۲، ۱۶۹، ۱۶۵-۱۶۶
امواج پیشرونده ۱۸۹
~ در آب ۴۲۲
~ روی خط انتقال نیرو با صفحات موازی ۲۴۴
~ ساکن ۱۸۹
~ سینوسی ۱۹۵
~ طولی در یک فنر مهره‌دار ۱۹۹، ۲۳۶-۲۳۷
~ عرضی در تار مهره‌دار ۱۹۸
~ نمایی زیگزاگ ۱۹۷
~ هماهنگ ۱۹۰
امواج ساکن ۶۳
~ تار پیوسته ۶۹
~ در آب ۴۱۶-۴۱۸
~ دندان‌اره‌ای در آبهای کم عمق ۱۲۴، ۱۸۶
~ روی سطح آب ۴۱۶، ۱۸۸، ۱۸۷
~ سه‌بعدی ۳۹۹
~ سینوسی و همگن ۸۹
~ نمایی ۱۹۷
انتگرال فوریه ۳۵۸، ۳۴۸
انحراف
- ~ از سطح کروی ۶۱۴
~ از منشور ۶۲۰
~ پرتو از منشور نازک ۶۰۳

- ~ متوسط ۱۳۵،۳۸
 ~ مشخصهٔ مدها ۷۲،۲۸،۲۴
 نوار ~ ۴۰
 ~ هماهنگ ۷۵،۷۲
 ~ یک مد ۹۰،۷۲،۲۴
 بسته شدن مردمک چشم ۶۱۲
 بسته موج ۲۵۲-۳۵۰
 بوق نمایی ۳۰۰
 پیشینهٔ اصلی ۵۸۵،۵۴۵
 پارامترهای توزیع شده اسلینکی ۱۰۳
 پارامترهای توزیع شده و پارامترهای متمرکز شده
 ۱۰۱
 پارچهٔ فضایی ۲۷۷
 پاشندگی ۱۹۷،۹۱،۷۵
 ~ بهنجار ۲۲۱
 ~ به وسیلهٔ مشور ۶۰۴،۲۱۴
 ~ بی هنجار ۲۲۱
 ~ شیشه ۲۱۴
 پایان دهی کامل ۲۷۱
 ~ باریکهٔ چراغ قوه ۲۸۰
 ~ تار ۲۸۶،۲۷۱
 ~ خط انتقال نیرو ۲۷۵
 ~ موج تخت ۲۷۸
 پرش
 ~ با استفاده از سازه هویگنس ۵۷۳
 ~ بر حسب تداخل ۵۶۸
 ~ توسط مانعی کدر ۵۹۰
 ~ فرانهورفر ۵۸۰
 ~ فرنل ۵۸۰
 پراکندگی تامسون ۴۵۲
 پرتو ۵۹۶
 ~ نزدیک محوری ۶۰۴
 ~ تلسکوپ ۶۱۲
 ~ زاویه ای میکروسکوپ لوونهوک ۶۱۶
 ~ طولی ۶۳۳
 ~ عرضی ۶۰۷
 ~ میکروسکوپ ۶۱۳
 بسامد (v) ۸
 ~ استروپوسکوپ تلویزیون ۴۶
 ~ اصلی ۹۹،۷۲
 پهنای ~ تشدید ۱۳۵
 ~ لولهٔ پستی ۱۸۳
 پهنای نوار ~ ۱۲۰،۴۰
 ~ تابع دلتا ۳۸۴
 ~ تشدید یا مد ۱۴۶
 چندتاقتگی ~ ۳۸۹-۳۹۰
 ~ حامل ۳۲۹
 ~ تلویزیون ۳۴۲
 دامنهٔ ~ صداهای قابل شنیدن ۸۵
 ~ زاویه ای (w) ۸
 ~ برای سیم پیانو ۹۹
 تعریف ~ ۸
 مفهوم ~ برای سیستمی با یک درجهٔ
 آزادی ۹
 مقادیر قطع ~ ۱۵۲-۱۵۴
 ~ یک مد ۳۱
 ~ شنوایی ۳۳۰، ۸۵
 ~ قطع بالا ۱۵۲
 ~ قطع پایین ۱۶۹، ۱۶۶، ۱۵۳
 ~ برای سیستم آونگهای جفت شده
 ۱۶۶-۱۶۸
 ~ برای نور در محیط پاشنده ۲۲۶
 ~ موجبر ۴۰۴-۴۱۲
 ~ یون سپهر ۱۷۰، ۱۰۹

- ۴۳۶-۴۵۳ ~ از بار نقطه‌ای
 ۴۶۰ ~ از ورقهٔ بار
 ۲۳۴ ~ امواج روی یک تار
 ۶۳۴ ~ چارقبطی
 ۴۵۸، ۴۴۸ ~ دوقبیطی
 ۴۵۸، ۴۴۸ ~ الکتريکی

تابع

- ۷۸ ~ تناوبی از فاصله (z)
 ۳۶۲ ~ دلتای زمان
 ۱۹۳ ~ فاز $\phi(z, t)$
 ۱۶۶ ~ نمایی

تابع موج

- ۴۸۱ ~ متعامد بهنجار
 ۴۸۲ ~ مختلط و شارانرژی
 ۴۸ ~ مختلط و قطبیدگی
 ۶۷۴-۶۸۱ ~ مختلط و معادلات ماکسول
 تار پیوسته

- ۱۹۸ ~ امواج پیشروندهٔ عرضی در
 ۶۵ ~ مدهای عرضی
 ۷۶ ~ و آنالیز فوریه
 تار مهره‌دار

- ۱۹۹ ~ امواج پیشرونده طولی در
 ۱۹۸ ~ امواج پیشرونده عرضی در
 ۹۱، ۶۴ ~ مدهای عرضی
 ۴۵۴ ~ تار نوری
 ۳۳۵-۳۶۶ ~ تپ
 ۳۳۸ ~ ساختن
 ۳۳۸ ~ مدت زمان
 تداخل

- ۵۶۸ ~ برحسب پراش
 ۶۶۳ ~ بین امواج با بسامد مختلف
 ۳۰۴، ۳۰۰ ~ در لایه‌های نازک
 ۵۳۹ ~ سازندهٔ میرا

- بردهٔ کدر ۵۶۹
 پدیدهٔ غیرخطی در غشای حلزونی ۵۶
 پذیرفتاری الکتريکی ۶۷۶-۶۷۰
 پذیرفتاری مغناطیسی ۶۷۰
 پنجرهٔ بروستر ۴۹۸
 پولاروید ۴۹۱-۴۸۹
 ~ متعامد ۴۹۱، ۵۰۰

- پهنای خط ۴۴۸
 ~ طبیعی ۴۴۸
 پهنای زاویه‌ای
 ~ باریکه ۵۶۷-۵۶۳، ۵۷۹
 ~ با طرح تک‌شکافی ۵۷۹
 ~ بیشینهٔ اصلی ۵۸۷
 پهنای نوار ۴۰

- ~ امواج رادیویی AM ۳۳۱
 ~ تپ مربعی تکرارشونده ۱۲۳
 ~ در تابش سینکروترون ۱۲۳
 ~ در تلویزیون ۳۴۲
 ~ و همدوسی ۵۱۲-۵۱۱، ۵۳۹
 پهن‌شدگی دوپلر ۵۱۱
 پیلانو

- اندازه‌گیری بسامد ~ ۴۹
 ~ به عنوان ماشین تحلیلگر فوریه ۱۱۵، ۳۶۰
 صداهای فرعی در ~ ۱۱۷
 صدای همزمان ~ ۸۴
 مقیاس اعتدال مساوی در ~ ۱۱۵
 پیوستگی ۲۸۴
 ~ سرعت ۲۸۴
 معادلهٔ ~ ۴۳۷، ۴۱۵
 ~ نیروی بازگرداننده ۲۸۴

تابش

- ~ از اتمهای یک‌بعدی ۶۶۱

- تلسکوپ ۶۱۲
 تلویزیون به عنوان استوبوسکوپ ۴۸
 توان
- ~ تلف شده به سبب اصطکاک ۱۳۳
 ~ تابش شده روی تار ۲۳۴
 ~ خط انتقال نیرو با صفحات موازی ۲۴۴
 ~ شمع ۲۶۶، ۲۵۳
 ~ عدسی ۶۱۸
- ~ منتقل شده توسط امواج پیشرونده روی
 خط انتقال پایین‌گذر ۲۴۴-۲۴۲
 ~ منتقل شده توسط موج پیشرونده روی تار
 ۲۳۷
 ~ منتقل شده توسط موج پیشرونده روی فنر
 ۲۳۷
- ~ ورودی لحظه‌ای نوسانگر واداشته ۱۳۲
 ~ ورودی متوسط زمانی نوسانگر واداشته
 ۱۳۳
 توری بازتاب ۵۹۴
 توری پراش ۵۸۸
- ~ از جعبه وسایل اپتیکی ۵۹۰
 ~ از نوع عبوری ۵۸۹
 توزیع پواسون ۶۶۷
 تیغه(های)
- ~ تأخیری ۵۰۱
 خواص ~ ۵۲۳، ۵۱۸، ۵۰۳
 ~ ضخیم سلوفون ۵۲۴
 ~ ربع موج ۵۲۲، ۵۱۸، ۵۰۳
 ~ نیم‌موج ۵۱۸
- ثابت
- ~ تضعیف (K) ۱۶۸
 ~ خورشیدی ۲۶۵، ۲۴۹
- ~ سنج ستاره‌ای ۶۳۸
 تراوایی مغناطیسی (μ) ۲۱۲، ۶۷۶-۶۷۰
 ترتیب بسامد هماهنگ ۷۵، ۷۲
 ~ استفاده شده در مقیاس علمی ۱۱۵
 توصیف کیفی ~ ۱۱۸
 تساویهای برداری ۷۰۱-۷۰۰
 تسونامی ۳۷۵
 تشدید
- پهنای بسامد ~ ۱۳۵
 ~ در بادکنکهای بازی ۳۱۹
 ~ در لوله پستی ۳۱۱
 ~ در سیستم آونگهای جفت شده ۱۷۴،
 ۱۸۴
 ~ در سیستم با دو درجه آزادی ۱۴۵
 ~ رابطه ~ در زمان فروافت ۱۳۶
 سهم ~ در حرکت حالت پایا ۱۴۸
 ~ کننده بطری مستطیل شکل ۲۶۳
 ~ گذار ۲۱۷
 ~ مخرج ~ ۱۳۹
 ~ نوسانگر واداشته ۱۳۵
 تصویر
- ~ چشم روی شبکه ۶۱۲
 ~ حقیقی ۶۰۶
 ~ مجازی ۶۰۸
 تفکیک زاویه‌ای چشم ۵۷۶
 تقریب
- ~ اسلینکی ۹۲، ۶۷، ۳۵، ۱۴
 ~ بازتاب کوچک ۲۹۷
 ~ زاویه کوچک ۶۰۳
 ~ نوسانهای کوچک ۹۲، ۶۷، ۳۵، ۱۳
 تکانه خطی در موج تخت ۴۳۱
 تکانه زاویه‌ای ۴۳۶-۴۳۳، ۵۲۷، ۵۳۱
 تکثیرکننده فوتونی ۲۶۵، ۲۵۱

- ~ دی الکتریک (ϵ) ۲۱۸، ۲۱۲
 ~ همدوس ۵۳۸
 چگالی انرژی ۴۲۸
 انتقال ~ بین آونگهای جفت شده متشابه
 ۴۵، ۵۰
 ~ تابش شده توسط بار نقطه‌ای ۴۴۳-۴۴۸
 ~ تابش شده توسط دو بار همدوس
 ۵۵۲-۵۵۳
 ~ تابش شده توسط فرستنده ۲۳۴
 ~ تلف شده به سبب اصطکاک ۱۳۳
 ~ ذخیره شده در نوسانگر واداشته ۱۳۳
 ~ منتقل شده توسط امواج پیشرونده
 ۲۴۵-۲۴۹، ۴۳۱-۴۲۸
 ~ منتقل شده توسط امواج پیشرونده در موج
 صوتی ۲۴۱-۲۳۷
 ~ منتقل شده توسط موج پیشرونده روی تار
 ۲۳۴
 ~ منتقل شده توسط موج پیشرونده روی خط
 انتقال نیرو ۲۴۵-۲۴۲
 ~ نوسانگر میرای ضعیف ۱۲۹
 چگالی عددی (N) الکترون در یون سپهر کره
 زمین ۱۱۱-۱۱۰
 چندتافتگی ۳۸۹، ۳۹۰
 حاصلضرب پهنای نوار و فاصله زمانی ۳۴۰
 حد پیوسته ۹۸
 ~ برای آونگهای جفت شده ۱۶۳
 ~ برای نوسانات طولی ۱۰۳
 حد طول موج بلند ۹۸
 حذف درخشش ۵۳۶
 حساسیت گوش به فاز ثابت ۸۵، ۱۱۴، ۳۱۱
 حازون گوش ۸۵
 ~ دی الکتریک (ϵ) ۲۱۸، ۲۱۲
 ۶۷۰-۶۷۶
 ~ دی الکتریک مختلط ۶۷۶
 ~ فاز ۸
 ~ فنر (K) ۱۱
 ~ فنرهای به طور سری قلاب شده ۱۰۲،
 ۱۰۳
 ثابت فاز
 ~ اجزای متحرک در نوسان واداشته ۱۶۲
 ~ در آشکارساز قانون مربعی ۴۱، ۴۳، ۸۶
 ~ در امواج پیشرونده ۱۹۱
 ~ در امواج ساکن ۶۹، ۳۱۱
 ~ نسبی و ضریب شکست ۲۳۰-۲۲۷
 ~ یک مد ۲۴، ۹۰
 ثابت میرایی ۱۲۸، ۱۴۶
 ~ بحرانی ۱۲۹، ۱۸۳
 ~ ضعیف ۱۲۹
 ~ فوق میرا ۱۲۹
 ~ کند میرا ۱۳۰
 ~ مدها ۵۱
 ~ نوسانها ۹، ۱۲۸
 جعبه وسایل اپتیک ۴۹۰، ۵۱۸، ۵۲۳، ۵۳۳
 جفت شدگی E و B ۴۲۶
 جهت یابی توسط وایکینگها ۵۳۴
 چشمه (های)
 ~ حقیقی ۵۹۵
 ~ خطی ۵۳۷
 ~ گسترده ساده ۵۶۰
 ~ مجازی ۵۹۵
 ~ مستقل ۵۵۴
 ~ نقطه‌ای ۵۵۸
 ~ نور اسمیت - پورسل ۴۶۳

خط انتقال نیرو

رابطه پاشندگی $\omega(c)$ ۹۱،۷۵

~ آونگهای جفت شده ۱۷۵، ۱۹۵

~ برای امواج آب ۱۲۵، ۴۲۲-۴۲۰

~ برای امواج دوبروی ۶۵۲

~ برای امواج پیشرونده ۱۹۱، ۱۹۵

~ برای تار مهره دار ۹۵

~ برای پیانو ۷۵، ۹۹

~ برای سیستم آونگهای جفت شده

۱۰۵، ۱۰۷، ۱۶۹

~ برای سیم حقیقی پیانو ۷۵، ۹۱

~ برای فتراسلینکی ۱۰۳

~ برای شبکه LC ۱۰۴

~ برای نوسانات طولی تار مهره دار ۱۰۱

~ برای نوسانات عرضی تار مهره دار ۹۵

~ برای یون سیهر ۱۷۰، ۲۲۳

~ تار پیوسته ۷۵

~ جسم رسانا ۶۸۵

~ سه بعدی ۳۹۹

~ موج پیشرونده ۱۹۵

~ نوسانات پلازما ۱۱۰، ۲۲۵-۲۲۳

~ (w) و شرایط مرزی ۲۱۳

رابطه میان فازها در نور بازتابیده آینه ای ۴۹۷

رفتار نوسانی ۸

روزنه ای در پرده کدر ۵۶۹

روشنایی ۲۵۶

~ آسمان آبی ۶۶۴

زاویه

~ بحرانی ۴۱۰، ۴۵۴

~ بروستر ۴۹۵، ۵۳۰

~ شکست ۲۱۴

~ فرود ۲۱۴

~ فضایی ۲۵۴، ۴۴۶

~ پایین گذر ۲۰۶

~ با صفحات موازی ۲۱۰-۲۰۸

سرعت فاز ~ ۲۰۹

شار انرژی ~ ۲۴۹

~ سیم موازی ۲۰۹-۲۰۸

~ مستقیم و موازی ۲۰۸

خطوط طیفی ۶۲۴

خطوط فرانوفر ۶۲۵

دامنه

~ امواج ساکن ۷۰

~ تضعیف با فاصله در صافی ۱۵۱، ۱۶۸

~ جذبی ۱۳۱، ۱۴۶، ۱۴۸

~ صوت بلند دردناک ۲۴۱

~ صوتی که به زحمت می توان شنید

۲۴۱

~ موج پیشرونده ۱۸۹، ۱۹۰

~ نوسانهای هماهنگ ۸

~ کشسان ۱۳۱، ۱۳۷، ۱۴۶، ۱۴۸، ۲۱۹

دترمینان ضرایب معادلات همگن خطی عادی

۲۹

درجه های آزادی ۶

درخشندگی

~ سطحی ۲۵۳

جدول ~ ۲۵۷

~ ماه ۲۵۴، ۲۵۶، ۲۶۶

دسته سیمهای موازی ۴۸۷

دو درجه آزادی ۲۳، ۱۴۵

ذره بین

~ روزنه ای ۶۱۱

~ ساده ۶۱۱

بزرگنمایی ~ ۶۱۱

سرعت فاز	زمان
~ امواج الکترومغناطیسی در یون سپهر	~ اندازه‌گیری ۵۱۴
۲۰۵	~ تناوب ۸
~ امواج تاریبوسته ۷۱	~ تابع تناوبی فاصله (λ_1) ۷۹
~ امواج دوبروی ۶۵۸	~ نوسانگر هماهنگ ۸
~ امواج پیشرونده هماهنگ ۱۹۱-۱۹۵	~ عقبتر (t) ۴۴۲
~ بزرگتر از c ۲۰۸-۲۰۵، ۲۲۱	~ فروافت لوله پستی ۱۳۶
~ خط انتقال پایین‌گذر ۲۰۶-۲۰۸	~ فروافت نوسان هماهنگ میرا ۱۲۹، ۹
~ خط انتقال مستقیم و موازی ۲۰۸	~ همدوسی ۵۱۱-۵۱۲
~ صوت ۱۹۹-۲۰۲	~ و چشمه مستقل ۵۵۴
~ موجبر ۴۰۶-۴۰۸	~ و زنشهای اپتیکی ۶۶۳
~ موج تخت ۳۹۹	~ زنش(های) ۳۳۹، ۲۸
~ امیدانس ۲۳۱	~ اپتیکی ۶۶۳
~ سرعت گروه ۳۲۲-۳۳۴	~ بین دو چشمه نور ۴۲
~ امواج دوبروی ۶۵۸	~ بین دو دیپازون ۵۳، ۴۰
~ در قطع ۳۷۷	~ بین دو مد یهنجار ۴۳
~ موجبر ۴۰۶-۴۰۸	~ بین نوسانهای جفت‌شده ناهمسان ۵۸
~ سربهای معمولی استفاده‌شده ۶۹۶	~ تمام‌نشندی ۱۴۱
~ سطح مقطع ۴۵۱	~ گذرا ۱۸۲، ۱۷۸، ۱۴۲
~ پراکندگی ۴۵۱-۴۵۳	~ زیر هماهنگ ۱۱۵
~ از شیر ۴۵۹	~ و جفت‌شدگی متقارن ۱۸۷
~ تامسون ۴۵۲	~ ساختار تابع تناوبی از فاصله ۷۹
~ سلوفون ۵۰۰	~ سازه هویگنس ۵۶۸-۵۷۴
~ تیغه نیم‌موج ~ ۵۲۴	~ در آنتن ۵۷۳
~ سنگ آهک ایسلند ۵۳۳	~ ساعت آمونیم ۶۵۰
~ سیستم پیوسته ۶۳	~ سایه ۵۹۱
~ و امواج ۶۳	~ سربها ۴۶۷
~ سیستمهای باز ۱۸۹	سرعت
~ شار فوتونی ۵۴۹، ۵۰۹، ۲۵۱	~ امواج آب (جدول) ۳۳۵
~ شدت صوت استاندارد ۲۳۹	~ صوت ۲۶۴، ۲۵۹، ۱۹۹-۲۰۵
~ شدتهای استاندارد نور ۲۵۳-۲۵۶	~ موج تاریبوسته ۷۱

- شرایط اولیه ۱۱
 ~ آونگهای جفت شده ۴۵
 برهم نهش ~ ۵۷، ۲۱
 ~ تار پیوسته ۷۶
 شرایط بهنجار برای نوسانهای طولی ۳۲
 شرایط مرزی
 ~ برای انتهای آزاد تار ۱۱۸، ۸۶
 ~ برای انتهای ثابت تار ۷۱
 ~ برای تار مهره دار ۹۵
 ~ در بی نهایت ۱۸۴، ۱۶۶
 ~ در ناپیوستگی ۶۸۳، ۳۱۶، ۲۸۴
 ~ و طول موج مجاز ۷۲
 شرط کانونی ۶۰۵
 شرط همدوسی ۵۶۲
 شعاع لورنتس الکترونی ۴۵۲
 شکست ۵۹۶، ۲۱۴، ۲۱۵
 ~ دوگانه ۵۰۷-۵۰۰
 ~ توسط سلوفون ۵۰۰
 شکل خط ۱۳۹
 ~ لورنتس ۳۶۵، ۱۳۹
 شکلهای تشدید ۱۴۳-۱۴۴، ۱۳۸
 شمارنده های فوتونی ۲۵۱
 شناورها در چشم ۶۳۱، ۶۱۲
 صافی (ها) ۱۵۱-۱۶۱
 ~ الکتريکی ۱۵۸-۱۶۱
 ~ برای یک منبع تغذیه DC ۱۶۰
 ~ پایین گذر ۱۵۹
 ~ نوار گذر ۱۵۸
 ~ بالاگذر ۱۶۶، ۱۵۵
 ~ پایین گذر ۱۵۶، ۱۵۵
 ~ لیوت ۵۲۵
 ~ مکانیکی ۱۵۸-۱۵۲، ۱۸۰
 ~ بالاگذر ۱۵۵، ۱۵۸
 ~ پایین گذر ۱۵۶، ۱۵۷
 ~ نوار گذر ۱۵۵
 ~ نوار گذر ۱۶۷، ۱۵۵
 صدای فرعی سیم پیانوی حقیقی ۱۱۷
 صفحه کانونی ۶۰۶
 صوت
 بازتاب ~ ۲۸۹
 پاشندگی ~ ۲۷۰
 ~ دردناک ۲۴۰
 ~ی که به زحمت می توان شنید ۲۴۱
 ضرایب فوریه برای تابع تناوبی ۸۱، ۷۹
 ضربه گیر ۲۷۲، ۲۸۰، ۳۲۰
 ضریب
 ~ بازتاب ۲۸۲
 ~ در انتهای آزاد ۲۸۶
 ~ در انتهای ثابت ۲۸۶
 ~ شکست (n) ۲۳۰-۲۱۲
 بستگی بسامدی ~ ۲۱۷-۲۱۹
 توضیح کیفی ~ ۲۲۷
 ~ شیشه ۲۱۴
 عبارتهای تقریبی برای ~ ۴۶۲
 ~ مواد معمولی ۲۱۴
 ~ مختلط ۶۸۲-۶۸۰
 ~ عبور ۲۸۴
 طرح تداخلی ۵۴۰
 ~ باریکه ۵۶۵
 ~ چند شکاف نازک ۵۸۸-۵۸۶
 ~ چندشکافی ۵۸۸-۵۸۶
 ~ دو چشمه مستقل ۵۵۸-۵۵۴

- ~ دو چشمه همدوس ۵۴۳-۵۵۰
 طرح پراش
 ~ تک‌شکافی ۵۷۳-۵۷۹
 ~ چندشکافی ۵۸۶
 ~ دو شکافی ۵۸۳-۵۸۶
 طناب لاستیکی ۲۶۹
 طول تضعیف (δ) ۱۶۸
 طول سایه ۵۹۱
 طول موج ۷۰
 ~ تعریف شده ۷۰
 عکس ~ ۷۳
 ~ مجاز توسط شرایط مرزی ۷۲
 طیف
 ~ فوریه ۳۶۸
 ~ نمایی ۳۹۱-۳۹۴
 ~ با تداخل سنجی چندتافته ۳۹۱-۳۹۴
 ظرفیت در واحد طول خط انتقال نیرو سیمهای موازی ۲۰۸
 ظرفیت در واحد طول خط انتقال نیرو با صفحات موازی ۲۰۹
 عدد چگالی (N) الکترون در نقره جامد ۱۸۵
 عدد موج $(\lambda^{-1} \equiv \sigma)$ ۷۳
 پهنای نوار ~ ۳۵۱
 ~ زاویه‌ای ۳۹۷، ۷۳
 ~ مدولاسیون ۳۲۶
 عدسی
 ~ چشمی ۶۱۲
 ~ شیئی ۶۱۲
 ~ ضخیم ۶۱۳
 ~ نازک ۶۰۴
 ~ واگرا ۶۰۹
 ~ همگرا ۵۴۳
 عمق کانون ۶۳۳
 عملگر تصویری ۵۳۵
 غشای حلزونی
 حساسیت فاز در ~ ۸۵
 ~ گوش ۵۷
 غیرخطی بودن ۲۰
 پدیده‌های ~ در گوش ۵۳
 ~ و مدولاسیون ۳۸۵
 فرمول عدسی‌سازها ۶۰۶
 فرمول عدسی نازک ۶۰۷
 فریزها (ی)
 ~ تداخل ۳۰۴-۳۰۰
 ~ فابرو- پرو ۳۰۳
 ~ فابری- پرو ۳۰۳، ۳۰۷، ۳۲۵
 فشار پیمانه‌ای ۲۶۹، ۸۴، ۴۰
 ~ برای شدت صوت دردناک ۲۴۰
 ~ در امواج صوتی ۲۳۹، ۲۸۹
 فشار تابشی ۴۳۱، ۴۵۷
 فعالیت اپتیکی ۵۰۷-۵۰۶
 ~ شکر ۵۰۷-۵۰۶
 قانون
 ~ آسمان آبی ریلی ۴۵۱
 ~ اسنل ۲۱۶-۲۱۴، ۴۱۰، ۵۹۸-۵۹۶
 ~ بویل ۲۰۱
 ~ بی‌درروی گاز ۲۰۳
 ~ پاشندگی امواج آب عمیق ۱۲۵
 ~ گاوس ۴۳۷
 ~ مالوس ۴۹۱
 قسمت باریک‌شده ۲۹۹، ۳۰۰

- قطبیدگی
 ~ آسمان آبی ۴۹۴
 ~ الکتريکی در واحد حجم ۲۲۳، ۲۱۸
 ~ بیضوی ۴۷۹، ۴۲۶
 قطبیدگی خطی ۴۷۳، ۴۲۶، ۶۶
 ~ اسلینکی ۵۲۳، ۵۱۹
 ~ امواج عرضی ۴۷۳
 ~ به وسیله بازتاب آینه‌ای ۴۹۵
 ~ به وسیله پراکندگی یکباره ۵۲۸، ۴۹۳
 تولید ~ ۴۹۷، ۴۸۵
 خواص ~ ۴۷۸-۴۸۴
 ~ رنگین‌کمان ۴۹۹
 ~ نسبی ۵۲۰
 ~ نور ماه ۵۲۹
 قطبیدگی دایره‌ای ۴۵۷
 ~ نور زمین ۵۳۰
 قواعد دستوارگی ~ ۴۷۷
 نمایشهای ~ ۴۸۳
 قطبشگر دایره‌ای ۵۱۷-۵۱۶، ۵۲۷
 قواعد اپتیکی پیچی شکل ۴۷۷
 قواعد تکانه زاویه‌ای ۴۷۷
 قوانین اپتیک هندسی ۵۹۲
 کیفیت صدای اسلینکی ۱۱۴
 کیفیت صدای سیم پیانو ۸۷
 گره ۶۵
 ~ مدهای تار ناهمگن ۸۸
 گستره بسامدی ناحیه پاشنده ۱۷۵
 گشتاور دو قطبی در واحد حجم (D) ۲۲۲، ۲۱۸
 لامپ ویتربین ۵۳۸
 لایه نابازتابنده ۲۹۸-۲۹۶، ۳۱۴
 لیزر ۲۲۳، ۳۸۰، ۴۹۸، ۵۶۷
 مجموعه کامل توابع ۸۸
 ~ برای حالت‌های قطبیدگی ۴۸۱-۴۸۲
 محور
 ~ اپتیکی ۵۲۱-۵۰۰
 ~ عادی و فوق‌العاده ۵۰۶
 ~ کند و تند ۵۰۱
 ~ تند ۵۰۱
 ~ عبور آسمان ۴۸۹
 ~ کند ۵۰۱
 محیط خطی همسانگرد ۶۶۹
 محیط واکنشی ۱۷۴-۱۷۰، ۱۹۷
 گستره بسامد در ~ برای آونگهای جفت شده
 ۱۷۵
 مختصات بهنجار ۲۸
 مختصات قطبی کروی ۴۴۵-۴۴۴
 مدار LC ۱۷
 ~ جفت شده ۳۶
 شبکه ~ ۱۰۴
 رابطه پاشندگی برای ~ ۱۰۴
 جواب عمومی ~ ۱۰۵
 مفهوم ~ ka ~ ۱۰۵
 مدل ساده مولکول شیشه ۲۱۹
 مد زیگزاگ تار پیوسته ۶۵، ۶۶، ۹۱، ۹۶
 مد لب‌ریز
 ~ در دریاچه ژنو ۶۱
 ~ در ظرف آب ۱۸۶، ۶۱
 ~ یون سپهر ۲۲۳
 مدولاسیون ۳۹، ۲۲۳
 ~ بسامد ۳۸۷، ۶۴۱
 دامنه ~ ۳۹، ۲۲۳
 سرعت ~ ۳۲۶

- ~ دیفرانسیل غیرهمگن ۲۱
 اصل برهم‌نهش در ~ ۲۱
 ~ خطی ۲۱
 ~ نوسانگر هماهنگ واداشته ۱۳۱
 ~ دیفرانسیل همگن ۲۰
 اصل برهم‌نهش در ~ ۲۰
 ~ خطی ۲۰
 ~ کلاسیک موج ۶۹، ۱۲۰، ۳۷۰
 ~ سه‌بعدی ۴۰۰، ۴۲۳
 ~ موج کلاین-گوردون ۱۶۲، ۴۰۱، ۶۶۱
 جواب امواج سینوسی ~ ۱۶۵
 جواب موج نمایی ~ ۱۶۵
 ~ کلی ماکسول ۴۳۶، ۶۶۹
 ~ برای محیط خطی همسانگر ۶۷۷
 ~ در خلا ۴۲۳
 ~ موج شرودینگر ۶۵۴
 ~ همگن ۲۰
 ~ عادی ۲۸
 ~ نوسانگر میرای فروافت آزاد ۱۲۹
 معیار ریلی ۵۱۰
 منحنیهای تشدید ۱۳۸
 مشهور
 ~ آبی ۲۶۱
 ~ برگرداننده ۴۱۱
 ~ نازک ۶۰۳
 ~ وپاشندگی ۲۱۴، ۶۰۴
 موجبر ۴۰۸-۴۰۲
 سرعتهای فاز وگروه ~ ۴۰۸-۴۰۶
 ~ مستطیل شکل ۴۰۸-۴۰۲
 موج
 ~ تخت الکترومغناطیسی تابش شده توسط
 بار نقطه‌ای ۴۵۲-۴۳۶
 ~ فاز ۳۸۶، ۶۴۱
 مدها ۲۴
 ~ برای n درجه آزادی ۵۸
 پیکربندی مشخصه ~ ۲۴
 ~ تار مهره‌دار ۶۴، ۹۳
 ~ تار ناهمگن ۸۹
 معادله موج ~ ۸۹
 ~ و مدهای غیرسینوسی ۸۹
 ~ و معادله شرودینگر ۶۵۴
 ~ تار همگن مجموعه کامل توابع ۸۸
 جواب کلی مدها ۲۹
 ~ دو آونگ جفت شده ۱۰۶، ۱۴۷
 حل سیستماتیک ~ ۲۸
 ~ سیستم پیوسته ۶۳
 ~ سیستم ناپیوسته ۹۱
 مختصات بهنجار برای ~ ۲۸
 ~ مقید آونگهای جفت شده ۱۷۴، ۶۵۷
 ~ میدان الکتریکی عرضی ۴۰۳
 ویژگیهای ~ ۲۴
 ~ TE ۴۰۳
 مردمک خروجی ۶۲۸
 مزون K ۶۵۱
 معیار ریلی در تفکیک زاویه‌ای ۵۸۰
 مقاومت ۲۷۶
 ~ به ازای سطح مربعی ۲۷۶
 مقیاس اعتدال مساوی ۱۱۷-۱۱۵
 ~ موسیقی ۱۱۷-۱۱۵
 بازه ~ ۱۱۵
 مقیاس علمی (درست) ۱۱۷-۱۱۵
 ~ موسیقی ۱۱۷-۱۱۵
 معادلات جفت شده ۲۸، ۲۹، ۳۲، ۴۲۶، ۴۶۶
 معادله
 ~ پیوستگی ۴۱۵

- ۵۲۴، ۵۲۳، ۵۰۰ نایلون پوشش محافظ غذا
 ۵۳۳
 ۳۱۳ نت همساز در دیپازون
 ۲۰۳ نسبت گرمای ویژه
 نسبت محیط امواج پاشنده به محیط واکنشی
 ۱۶۹
 ۱۸۲، ۱۷۱ نفوذ موج به داخل ناحیه واکنشی
 ۶۵۶
 ۴۱۲ نفوذ نور در سد
 ۱۳۶، ۱۳۴ نقاط نیم‌توان
 ۶۰۴ نقطه کانونی
 ۳۳۶ نمودار برداری
 ۱۵۵ نوارگذر
 ۳۳۰ نوارهای جانبی
 نور
 ۲۶۵، ۲۴۹ ~ خورشید
 ۳۰۱، ۲۱۴ ~ سفید
 ۵۸۶ ~ و بیشینه اصلی
 ۵۰۶ جدول ~ فرابنفش
 ۵۰۶ ~ فرابنفش در مواد تک‌محوری
 ۲۴۹ ~ فرورسرخ
 ۵۱۸، ۵۱۳-۵۱۴ ~ ناقطیبه
 نوسانگر
 ۶۵۰، ۴۰۳ ~ جفت‌شده ضعیف
 ۱۲۸ ~ میرا
 ۱۲۸ فروافت گذرای نوسانات آزاد ~
 ۱۲۸ ~ واداشته میرا
 نوسان (های)
 ~ در حالت پایا تحت نیروی محرک
 ۱۳۰-۱۳۱ هماهنگ
 ۳۴۴، ۳۲۴، ۱۴۱، ۳۹ ~ تقریباً هماهنگ
 ~ و زنشهای تمام‌شدنی ۱۴۲
 نوسانات آزاد ۶
 ۵۴۸ ~ تقریباً کروی
 ۷۵ ~ پاشنده
 ~ و ناپاشنده ۱۹۷، ۷۵
 ۳۲۷، ۳۲۵ ~ پیشرونده تقریباً سینوسی
 ۲۳۱ ~ پیشرونده روی تار پیوسته
 ~ پیشرونده روی خط انتقال نیروی پایین‌گذر
 ۲۴۲-۲۴۴
 ۲۶۲ ~ پیچشی
 ۱۷۶ ~ ساکن‌نمایی زیگزاگ
 ۲۸۶، ۱۶۵ ~ سینوسی
 ۷۵ ~ غیر پاشنده
 ۳۶۹-۳۷۱ ~ کلی
 ۴۲۰، ۱۲۵ ~ در آب کم‌عمق
 ۴۱۱، ۲۲۶، ۱۸۲، ۱۷۱ نفوذ ~ نمایی
 ۱۷۶ ~ نمایی زیگزاگ
 ۶۳ ~ و سیستم پیوسته
 مولکول
 ۶۵ ~ آمونیم
 ۵۰۸ ~ راستگرد DNA
 ۵۰۷ ~ شکر راستگرد
 میدان
 ۵۴۱-۵۴۵ ~ دور
 ۵۴۱ ~ نزدیک
 میرایی
 ۱۸۳، ۱۲۹ ~ بحرانی
 ۲۷۲، ۲۳۴ نیروی ~ روی فرستنده تابشی
 ۶۱۳ میکروسکوپ
 ۶۴۳ ~ تمایز فاز
 ۶۱۶ ~ لیوونهوک
 ۴۴۶ ناحیه نزدیک بار نوسانی
 ۵۵۴ ناهمدوسی

- ~ الکترونها در یون سپهر ۲۲۳
 ~ با دو درجه آزادی ۲۳
 ~ با یک درجه آزادی ۶
 ~ سیستمهای با چند درجه آزادی ۶۲
 ~ طولی جرم و فنر ۱۱
 ~ عرضی جرم و فنر ۱۳
 ~ گذار ۱۲۸
 نوسانات پلاسما ۱۰۹
 بسامد نوسان ~ ۱۰۹، ۱۱۰، ۲۲۳
 نوسانات طولی
 ~ تار پیوسته ۶۵
 ~ جرم و فنر ۱۱
 ~ در امواج پیشرونده روی فنر مهره‌دار ۲۳۶
 ~ در امواج صوتی پیشرونده ۲۴۱-۲۳۷
 ~ دو جرم جفت‌شده ۳۰
 ~ سیستم فنر و جرم ۱۰۰
 نوسانات عرضی
 ~ تار پیوسته ۶۵، ۶۶
 ~ تار مهره‌دار ۹۳-۹۱
 ~ جرم و فنر ۱۳
 ~ دو جرم جفت‌شده ۳۳
 نوسانات واداشته
 ~ چند آونگ جفت‌شده ۱۵۰، ۱۶۲
 حالت گذرا در ~ ۱۴۴-۱۴۰
 حل دقیق ~ ۱۷۴
 ~ در حالت پایا ۱۳۰-۱۲۰
 ~ دو آونگ جفت‌شده ۱۴۶
 ~ گذرا ۱۴۴-۱۴۰
 ~ نوسانگر غیرمیرا ۲۱، ۱۴۱
 نوسانات هماهنگ ۷، ۱۰
- ~ حرکت دایره‌ای یکنواخت ۴۸
 ~ دوبعدی ۲۵
 نیروی بازگرداننده
 ~ بر واحد جرم بر واحد جابه‌جایی ۳، ۹
 ۴۲۰، ۳۹۶، ۱۶۲، ۱۵۲، ۶۴
 ~ ولختی ۲۲۸، ۹
 نیروی پایان‌دهی ۲۸
 رابستگی فضایی سینوسی موج و همگنی برای
 $\omega^2 > \omega^2$ ۱۶۸، ۱۶۵
 واقطبی‌دگی ۴۹۴
 واگنی ۳۶، ۲۵
 ویژگیهای آب ایده‌آل ۴۱۵-۴۱۴
 ویژه‌تابعها (ی) ۹۱
 ~ امواج دو بروی ۹۱
 ~ تار ناهمگن ۹۰
 همدوسی و آسمان آبی ۶۶۴
 همفاز ۶۷۱
 همگنی تار و توابع سینوسی ۸۸
 یون‌سپهر ۱۰۹
 بسامد قطع ~ ۱۷۱
 بسامد نوسان پلاسمای ~ ۱۱۱-۱۰۹
 ~ به حرکت درآمده در بسامدهای پایینتر از
 بسامد قطع ۱۷۰
 پاشندگی ~ ۲۲۳
 دقیق نبودن مدل ~ ۲۲۴
 سرعت فاز در ~ ۲۰۵
 سرعت گروه در ~ ۳۳۲
 طول تضعیف دامنه در ~ ۱۸۱