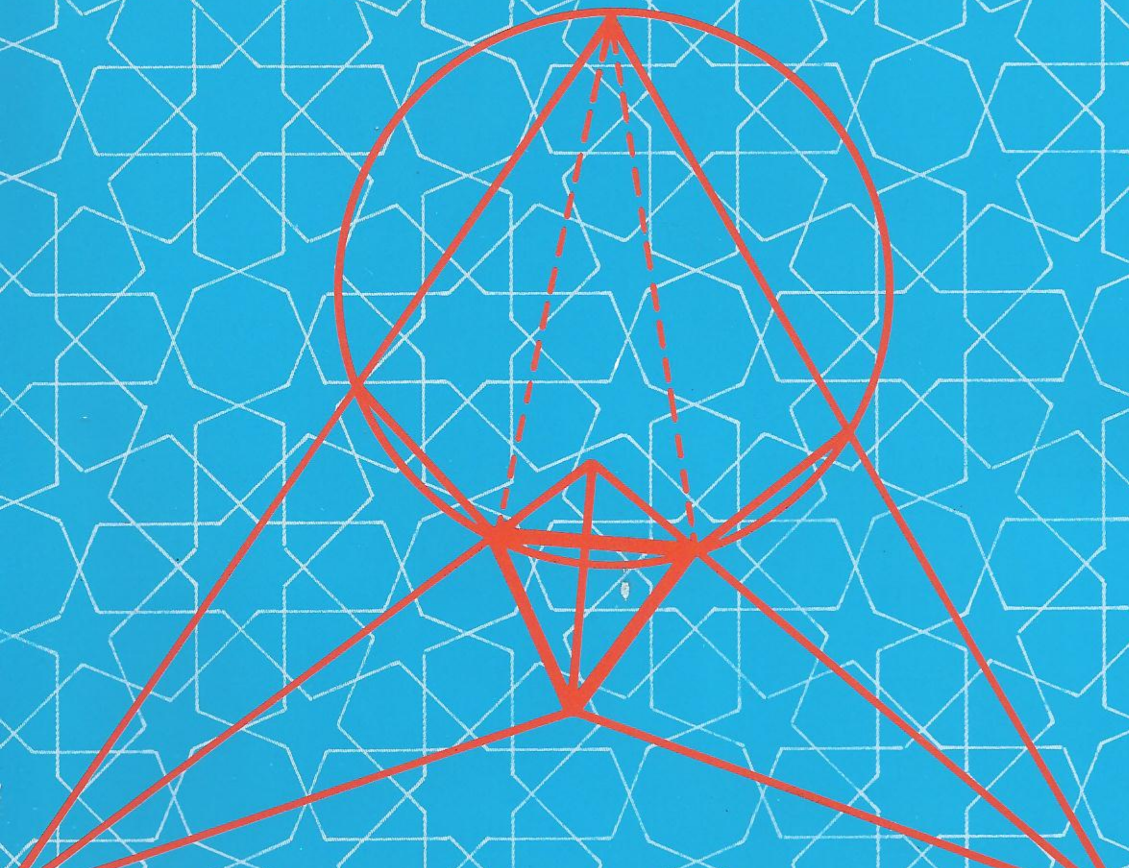
بازآموزی و بازشناخت هندسه

برای دانش آموزان و معلمان دبیرستان

مؤلفان: هـ. س. م. کوکستر - س. ل. گریتزر
ترجمه: عبدالحسین مصحفی



بازآموزی و بازشناخت هندسه

برای دانش‌آموزان و معلمان دبیرستان

مؤلفان

H. S. M. COXETER

دانشگاه Toronto

S. L. GREITZER

دانشگاه Rutgers

برگردان از انگلیسی به فرانسه توسط : R. MARCHAND

برگردان از فرانسه به‌فارسی توسط : عبدالحسین مصحفی

کوکسی تیر، هارولد اسکات مک دونالد، ۱۹۰۷ - Coxeter, Harold Scott Macdonald.
بازآموزی و بازشناخت هندسه : برای دانش‌آموزان و معلمان دبیرستان. مؤلفان [هارولد اسکات مک دونالد کوکسی تیر، ساموئل گریتزر] ؛ برگردان از فرانسه به فارسی توسط عبدالحسین مصحفی. - تهران : مدرسه، ۱۳۶۳.
۲۳۰ ص. : مصور.
I.S.B.N: 964-353-337-9.

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
عنوان اصلی : Geometry revisited.
چاپ سیزدهم : ۱۳۸۶.
۱. هندسه جدید. الف. گریتزر، ساموئل. Greitzer, Samuell. ب. مصحفی، عبدالحسین، مترجم. ج. مدرسه. د. عنوان.

QA ۴۷۳ /ک ۹ ب ۲ ۵۱۶/۰۴

خوانندهٔ محترم، با سلام و احترام؛ ضمن تشکر از شما، خواهشمند است هرگونه نظر، انتقاد و پیشنهاد خود را در مورد این کتاب یا دیگر کتاب های انتشارات مدرسه از طریق پیام‌نگار (ایمیل) madreseh@madresehpublications.com یا از طریق صندوق پستی ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹ ارائه فرمایید. همچنین می‌توانید کتاب های ما را از طریق پایگاه اینترنتی www.madresehpublications.com ثبت و سفارش دهید تا در کوتاه‌ترین زمان ممکن، پاسخ لازم یا کتاب مورد نظر خود را دریافت کنید.

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
وزارت آموزش و پرورش

بازآموزی و بازشناخت هندسه
برگردان از فرانسه به فارسی: عبدالحسین مصحفی
صفحه‌آرا: هوشنگ آشتیانی
رسام: اسفندیار حاج طاهری
چاپ اول: ۶۳/چاپ سیزدهم: ۱۳۸۶
تیراژ چاپ اول تا دوازدهم: ۶۶۰۰۰ / تیراژ چاپ سیزدهم: ۲۰۰۰ نسخه
لیتوگرافی، چاپ و صحافی از: چاپخانه مدرسه

شابک ۹-۳۳۷-۳۵۳-۹۶۴
ISBN 964-353-337-9

نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت طلب، شماره ۳۶
تلفن: ۹-۸۸۸۰۰۳۲۴ دورنویس (فاکس): ۸۸۹۰۳۸۰۹

به‌نام خدا

محدودیت‌زمانی تحصیلات رسمی و توسعهٔ روزافزون دامنهٔ علوم، مانع از آن است که برنامه‌ها و کتابهای درسی مربوط به هررشتهٔ علمی همهٔ پیشرفتهای آن رشته را در بر داشته باشند. رفع‌این کمبودها از راه تهیهٔ انتشارات دوره‌ای و کتابهای‌جنبی‌میسرمی باشد. آموزگاران ودبیران بیش از دانش‌آموزان به‌چنین نشریه‌هایی نیازدارند ، زیرا علاوه‌بر لزوم احاطهٔ آنان به‌آنچه که می‌آموزند لازم است که دیدی‌هرچه وسیعتردرآن زمینه داشته باشند. ازاینرو ، سازمان‌پژوهش وبرنامه‌ریزی آموزشی وزارت‌آموزش وپرورش ، تهیه وانتشارچنین نشریه‌ها وکتابهایی را ازجمله برنامه‌های کارخود قرارداده است.

آقای عبدالحسین مصحفی،کارشناس ریاضی پیشین برنامه‌ریزی وکتابهای درسی،با آگاهی براین برنامهٔ‌کارسازمان‌پژوهش، ترجمهٔ‌کتاب حاضررا برای انتشار دراختیاراین سازمان قرارداد.متن‌کتاب مروری است برقضیه‌های مهم واساسی هندسه که‌بسیاری ازآنها درکتابهای درسی‌گنجانیده نشده و مجموعـه‌ای است از مسئلدهایی که هرکدام از آنها مدتها وقت علاقه‌مندان به‌هندسه را به خود مشغول داشته است وکلاً برای ارتقاء سطح معلومات‌تخصصی‌دبیران‌مفیدمی باشد؛ باوجوداین برای‌آنکه‌کتاب‌کاملترارائه‌شودبرای‌بررسی در اختیارآقای حسین غیور قرارگرفت‌کـه تبحروکاردانی وی درهندسه مورد تأیید اهل فن‌است. آقای غیورپس ازبررسی دقیق متن‌ترجمه وافزودن نکاتی لازم برآن،که درجای خود در متن‌کتاب مشخص شده است ، ضمن اظهار خوشوقتی ازترجمه وانتشاراین‌کتاب چنین توضیح داده است:

«درکتـاب بازآموزی وبازشناخت‌هندسه بانکته‌های جالب‌ومفاهیم تازه‌ای برخورد می‌کنیم. از این قرار:

۱ــ دخالت‌دادن اعداد مثبت ومنفی‌درمساحت شکلها درهندسهٔ‌مسطحه، دنبالهٔ‌کارهایی کـه شال ریاضیدان نامی فرانسه دربارهٔ پاره‌خط وزاویه انجام داده است. این عمل حکمهای راجع‌به مساحتها راکلیت می‌دهد وازتأثیرشکل درآنها می‌کاهد. برای شال اگر

P نقطه‌ای ازصفحهٔ مثلث ABC باشد ، دربارهٔ مساحتهای علامت دارهمواره تساوی زیر برقراراست.

$$S(PAB)+S(PBC)+S(PCA)=S(ABC);$$

۲ــ جفتهای نقطه‌های جداساز؛

۳ــ انحراف انعکاسی؛

۴ــ تعریف مقاطع مخروطی به عنوان قطبی معکوس دایره‌که بدین وسیله می‌توان بعضی ازخواص مهم دایره را درمقطعهای مخروطی تعمیم داد.

اما باعث تعجب است‌که دراین‌کتاب نسبتهای همسازوناهمسازودستگاه‌آنها درمحاق فراموشی افتاده وفقط درفصل نقطه‌های جدا ساز به نسبت ناهمسازاشاره‌ای شده وتعریف آن برای چهار نقطه درصفحه تعمیم داده شده است. باتأثیرگسترده وجالبی‌که این‌نسبتها ودستگاه‌آنها درهندسه دارد ، حذف آنها موجب نقائصی است‌که فهرست واربه بعضی‌از آنها اشاره می‌شود:

۱ــ با اینکه درمتن‌کتاب‌گاه مسائلی‌پیش‌پاافتاده به عنوان قضیه‌مطرح‌شده اما بسیاری ازقضیه‌های معروف هندسه ازقلم افتاده است مانند خاصیت مهم چهارضلعی‌کامل‌که درآن هرقطربه وسیلهٔ دوقطردیگربه توافق تقسیم می‌شود.

۲ــ تبدیل تعریف قطبی نقطه نسبت به دایره به‌مبنای نسبت همساز ، که علاوه بر دایره شامل دوخط ومقطعهای مخروطی نیزمی‌شود به تعریفی به مبنای انعکاس‌که فقط برای دایره درست است.

۳ــ تبدیل برهانهای ساده وکوتاه با نسبت ناهمساز برای قضیه‌های پاپوس، پاسکال، بریانشن و ... به برهانهای مفصل و پیچیده‌که چند صفحهٔ کتاب به شرح آنها اختصاص‌داده شده است.

با اینهمه ، مطالعهٔ‌کتاب به وسعت دید خواننده درهندسه می‌افزاید وجالب توجه و حائز اهمیت است ، وکمبودهای یاد شده شاید به این جهت پیش‌آمده است‌که مؤلفان دانشمندکتاب فقط درنظرداشته‌اندکه هموطنان خود را به هندسه‌آشنا سازند».

بنا به یادداشت مترجم ، این‌کتاب به زبان انگلیسی زیرعنوان:

GEOMETRY REVISITED

تألیف شده ونخستین بارازطرف مؤسسهٔ:

Random House, Inc. New York

در سری‌کتابهای « کتابخانهٔ ریاضیات جدید » منتشر شده است. ترجمهٔ به فرانسهٔ کتاب به عنوان:

Redécouvrons la Géométrie

از طرف مؤسسهٔ انتشاراتی DUNOD درپاریس چاپ وپخش گردیده است.

بر گردان به‌فارسی کتاب ازروی‌ترجمهٔ فرانسهٔ آن انجام گرفته وترجمهٔ سه فصل اول آن ابتدا به صورت سلسله مقاله‌ها در مجلهٔ ریاضی «یکان» چاپ شده است.

امیدآنکه دبیران ریاضی‌ودانشجویان ودانش‌آموزان رشته‌های ریاضی‌وفنی ، وهمهٔ آنان‌که به تکمیل‌معلومات خود درهندسه شائقند ، درمطالعه واستفادهٔ ازاین‌کتاب رضایت خاطرداشته باشند.

دفترامور کمك آموزشی وکتابخانه‌ها

فهرست موضوعی

پیشگفتار

کسی که هندسهٔ اقلیدسی را تحقیر می‌کند همانند شخصی است که در برگشت از کشورهای دوردست میهن خویش را ناچیز می‌شمارد.

ه. گ. فوردر

در دورهٔ تحصیلات متوسطه (در ایالات متحدهٔ امریکا) فقط در سال دوم، درسی وجود دارد که شامل هندسهٔ مسطحه و احیاناً مقدماتی از هندسهٔ تحلیلی است. این درس «ریاضیات سال دوم» نام دارد. در طول تحصیلات متوسطه، این تنها موردی است که دانش‌آموز با درس هندسه سروکار دارد. درصورتی که برای دانش‌آموز با اندیشهٔ ریاضی این موقعیت وجود دارد که جبر مقدماتی، جبر معمولی وحتی جبر عالی را فراگیرد. ازاینرو وقتی بدون تعمق اظهار نظر می‌شود که جبر بر هندسه برتری دارد موضوعی غیرمنتظره نخواهد بود. وانگهی، اظهار نظرهای هیجان انگیز بدون قضاوت درست، برای دانش‌آموز این گمان را پیش می‌آورد که هندسه خارج از «ریاضیات روز» است و باید آن‌را با آنالیز یا نظریهٔ مجموعه‌ها جانشین کرد.

بی‌توجهی که در برنامه‌های درسی نسبت به هندسه بکاررفته است شاید ناشی از آن باشد که کارشناسان آموزشی آنگونه که لازم است ماهیت هندسه را نمی‌شناسند و به پیشرفتهایی که درجریان توسعهٔ آن تحقق یافته است وقوف کامل ندارند. چه بسیار پیامدهای درخشانی که ضمن این پیشرفتها نمایان گردیده است؛ از جمله قضیهٔ بریانشن (بند ۹.۳)، قضیهٔ فوئرباخ (بند ۶.۵)، قضیهٔ پترسن - اسکوت (بند ۸.۴) و قضیهٔ مورلی (بند ۹.۲).

از نظر تاریخی باید یادآوری کرد که اقلیدس کتاب هندسه را برای آن نگاشت تا اشخاصی که به فراگرفتن این دانش علاقه دارند از آن بهره برند. اما یکی از دلیلهای اساسی آموزش هندسه درقرن بیستم آن است که گمان می‌کنند روش اصولی آن بهترین وسیلهٔ آموزش استدلال منطقی است؛ و ازنظرانجام یك آموزش مؤثر روی این روش پافشاری می‌کنند. با وجود این، هندسه دانانی، از قدیم و جدید، که این موضوع را نیز قبول

داشته‌اند ، در بکار بردن روشهایی به عدول از روش اولیه تردید نکرده‌اند. چنانچه مثلثات، هندسهٔ تحلیلی یا روشهای برداری بتوانند کمکی باشند ، هندسه دان آنها را می‌پذیرد. وانگهی درخود هندسهٔ ناب نیز فنهایی جدید ، درعین حال زیبا وپربار ، وضع شده‌است: یکی از آنها مبتنی برتبدیلاتی ازقبیل دوران ، تقارن وتجانس می‌باشد که امکان سادگی اثبات برخی‌ازقضیه‌ها را فراهم‌می‌آورد وهمچنین ارتباطی‌را بین‌هندسه باکریستالوگرافی برقرارمی‌سازد. فصل چهارم به این حالت « تحرکی » هندسه اختصاص داده شده است. فن جدید دیگرازهندسه انعکاس نام داردکه موضوع آن نقطه‌ها و دایره‌ها است به قسمی که یك خط عبارت می‌شود از دایره‌ای‌که برنقطهٔ بینهایت می گذرد. در فصل ۵ از آن صحبت شده است. فن‌دیگر ، هندسهٔ تصویری است که‌صرف‌نظرازفاصله‌ها وزاویه‌ها وضع بین نقطه‌ها و خطها را مورد تجزیه وتحلیل قرارمی‌دهد (این‌مبحث بطورنامحدود گسترش یافته وبه پاره خطهای ساده محدود نمی‌باشد) ؛ دراین فن‌دونقطهٔ دلخواه با یك خط بهم وصل می‌شوند وهردوخط دلخواه دریك نقطه برخورد می‌کنند ، به علاوه ، دوخط موازی نیزدوخط متقاطع منظورمی‌شوندکه نقطهٔ تقاطع آنها روی خط بینهایت است. درفصل ۶ به این مبحث اشاره شده است.

امروزه ، هندسه همهٔ آن توانائیهایی‌راکه‌کارشناسان‌آموزشی‌ازآن توقع دارندبطور اعم دارا می‌باشد : همواره در طبیعت وجود دارد ، آمادگی دارد تاکشف شود وارزش خود رابنمایاند. هندسه ، به ویژه به علت ویژگیهای وضعیش ، همواره برای دانش‌آموز مدخلی به علم اصولی را پدید می‌آورد. آن جذابیت و زیبایی مطلق راکه هندسه داشته بازهم‌دارا است وقشنگی نتایج‌آن مخدوش‌نگشته است. همواره مسلم‌بوده است‌که هندسه برای‌دانشمندان و ریاضیدانان نه‌تنها سودمند بلکه بسیارلازم‌است. حتی برای تعیین شکل مسیرقمرهای‌مصنوعی، هندسهٔ چهاربعدی درپیوستهٔ فضا، زمان مورد نیازمی‌باشد.

هندسه درطی قرون توسعه یافته است. مفاهیم جدید وروشهای عملی تازه در آن سردرآورده‌اند که برای دانش‌آموزبا نوعی‌شگفتی‌ومبارز طلبی‌توأم بوده است. با بهترین وسایلی‌که مناسب باشد به اقلیدس برگردیم و بکوشیم تا خودمان برخی ازنتایج تازه را کشف کنیم. شاید به این ترتیب بتوانیم‌آن ارعابی راکه دراولین برخورد با هندسه درما برانگیخته شده است ازخود دورسازیم.

مؤلفان مخصوصاً به دکترآنهلی‌لاکس مدیون می‌باشندکه با شکیبائی‌ایشان را یاری داده وازبذل توصیه‌های مفید مضایقه نداشته است.

H. S. M. C.
S. L. G.

Toronto ، New York

۱

نقطه‌ها و خطهای وابسته به مثلث

منابع ومآخذ هندسه، که نه‌تنها ازکل منابع حساب وجبر، بلکه اقلاً از آنچه مربوط به آنالیز وحتی مربوط بـه هرشاخهٔ دیگرریاضی است ، گسترده‌ترمی‌باشد ، گنجی‌سرشارازاشیاء بسیار جالب نیمه فراموش شده‌ای است کـه یک نسل شتابزده فرصت استفاده ازآن‌را ندارد.

اریک تمپل بل **(E.T.Bell)**

هدف ازاین بخش عبارتست از: یادآوری برخی ازآنچه‌که دکتر بل آنهارا اشیاء نیمه فراموش شده نامیده است ، بیان اثبات چند قضیهٔ جدیدکه پس از اقلیدس بررسی گردیده و کاربردی‌که نتایج حاصل در حل‌مسائل جالب داشته است. بدین منظور مثلثی دلخواه ونقطه‌ها و خطهای مهم وابسته به‌آن را درنظر می‌گیریم : مرکز دایرهٔ محیطی ، میانه‌ها ، مرکزثقل ، نیمسازهای زاویه‌ها ، مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی وخارجی، ارتفاعها ، مرکزارتفاعی ، خط اولر ، مرکزدایرهٔ نه نقطه.

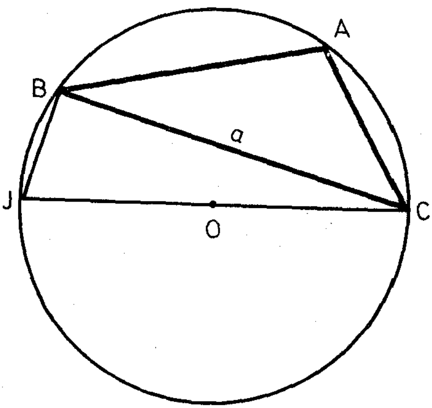
درمبحث نیمسازهای زاویه‌ها، طبیعتاً قضیهٔ اشتینر ـ لموس بدمیان می‌آیدکه اثبات آن در طـول یکصد سال بـه دشواری شهرت یافته بود ، اما امروزه آن را واقعاً ساده می‌یابیم.

بالاخره با دردست داشتن یك مثلث ویك نقطهٔ دلخواه P ، مثلث دیگری‌را مطرح می‌کنیم‌که رأسهایش عبارتند از پاهای عمودهایی که از P برضلعهای مثلث اول فرود می‌آیند. ازاین راه با مطالب‌آموزنده‌ای روبرومی‌شویم‌که برخی ازآنها را دربخش ۲ بیان خواهیم‌کرد.

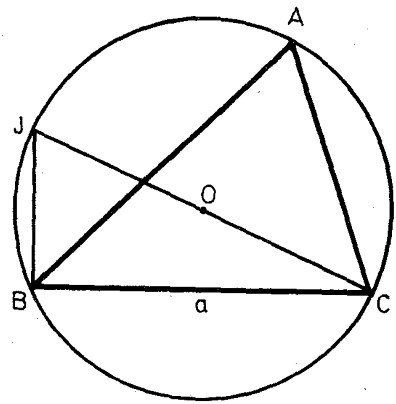
۱.۱ـ قانون سینوسها

قانون سینوسها یکی از قضیه‌های مثلثات است. اما در هندسه با آن سروکار زیاد داریم. جای تأسف است که در برخی از کتابها این قضیه را آنگونه که شایسته است مهم جلوه نمی‌دهند. در اینجا قانون سینوسها را به‌گونه‌ای که خواهد آمد شرح و بسط می‌دهیم.

مثلث ABC را درنظرمی‌گیریم که O مرکز دایرهٔ محیطی آن و R شعاع این دایره است. قطر CJ از دایرهٔ محیطی، سپس خط BJ را رسم می‌کنیم.



(شکل ۱.۱ ، ب)



(شکل ۱.۱ ، الف)

زاویهٔ A ازمثلث چه حاده وچه منفرجه باشد، زاویهٔ CBJ قائمه است و درهر دوحالت داریم:

$$\sin J = \frac{BC}{JC} = \frac{a}{۲R}$$

مطابق با شکل، اگرزاویهٔ A حاده باشد دوزاویهٔ A و J باهم برابرند، واگر زاویهٔ A منفرجه باشد دوزاویهٔ A و J مکمل یکدیگرند. درهردوحال داریم $\sin J = \sin A$ وبنابراین:

$$\frac{a}{\sin A} = ۲R$$

درحالتی‌که زاویهٔ A قائمه باشد $BC = ۲R$ است وبازهم رابطهٔ اخیرمحقق است.

روش بالا را برای دوزاویهٔ دیگرمثلث که بکارببریم بدست می‌آید:

$$\frac{b}{\sin B} = ۲R \quad ، \quad \frac{c}{\sin C} = ۲R$$

بنابراین می‌توانیم قانون سینوسها را به‌صورت قضیهٔ زیر بیان کنیم:

قضیهٔ ۱،۱.۱- در هر مثلث ABC به فرض آنکه R شعاع دایرهٔ محیطی و a و b و c به ترتیب اندازه‌های ضلعهای BC، CA و AB باشد داریم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

یادآوری - از این پس مساحت مثلث ABC را با $S(ABC)$ و مساحت یك چهارضلعی (یا چهارگوشهٔ) $PQRS$ را با $S(PQRS)$ نشان می‌دهیم.

تمرینها

۱- ثابت کنید درهرمثلث ABC اگرزاویه‌های B و C حاده باشند داریم:

$$a=b\cos C+c\cos B$$

بااستفاده ازاین رابطه وقانون سینوسها دستورزیررا بدست‌آورید:

$$\sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin C\cos B$$

۲- ثابت کنیدکه درهرمثلث ABC داریم:

$$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0$$

۳- رابطهٔ زیررا برای هرمثلث ثابت کنید:

$$S(ABC)=\frac{abc}{4R}$$

۴- دودایره به شعاعهای p و q برنقطهٔ A می‌گذرند و به‌ترتیب در B و C برخط BC مماسند. هرگاه R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد ثابت کنیدکه:

$$pq=R^2$$

۲.۱- قضیهٔ سوا

هرخط که یك رأس مثلث را به نقطه‌ای ازضلع روبروی‌آن وصل کند خط سوائی نامیده می‌شود. اگر X نقطه‌ای ازضلع BC (روی پاره خط BC یا درخارج‌آن)و Y نقطه‌ای ازضلع CA و Z نقطه‌ای ازضلع AB باشد، هریك ازخطهای AX، BY و CZ یك خط سوایی است. این نامگذاری ازآنجا ناشی می‌شودکه‌ژان دوسوا[1] ریاضیدان ایتالیایی برای نخستین بار در سال ۱۶۷۸ قضیهٔ بسیار سودمند زیر را بیان داشته است:

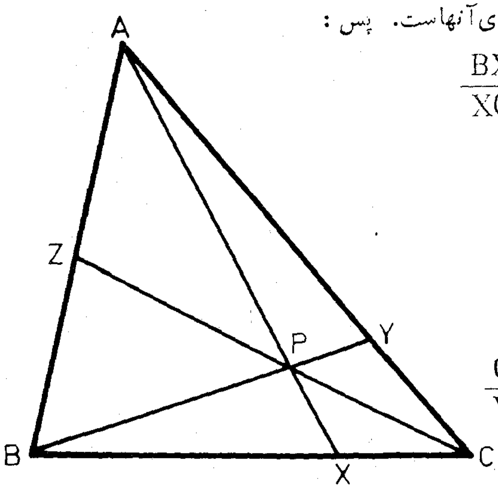
قضیهٔ ۱،۲.۱- اگر در مثلث ABC سه خط سوایی AX، BY و CZ در نقطهٔ

1- Jean de Céva.

P متقارب باشند داریم:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

برای اثبات قضیه قبلاً یادآوری می‌کنیم که اگر دو مثلث دارای ارتفاعهای برابر باشند، نسبت مساحتهای آنها برنسبت قاعده‌های آنهاست. پس:



(شکل ۲۰۱، الف)

$$\frac{BX}{XC} = \frac{S(ABX)}{S(AXC)} = \frac{S(PBX)}{S(PXC)}$$

$$= \frac{S(ABX) - S(PBX)}{S(AXC) - S(PXC)}$$

$$= \frac{S(ABP)}{S(CAP)}$$

همچنین خواهیم داشت:

$$\frac{CY}{YA} = \frac{S(BCP)}{S(ABP)}$$

و:

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{S(CAP)}{S(BCP)}$$

ازضرب نظیر به نظیر طرفهای رابطه‌های بالا بدست می‌آید:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{S(ABP)}{S(CAP)} \cdot \frac{S(BCP)}{S(ABP)} \cdot \frac{S(CAP)}{S(BCP)} = 1$$

عکس قضیهٔ سوا نیزصحیح است وچنین بیان می‌شود:

قضیهٔ ۲،۲،۱- اگر در مثلث ABC برای سه خط سوائی AX، BY و CZ داشته باشیم:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

در این صورت سه خط مزبور متقاربند.

برای اثبات فرض می‌کنیم که P نقطهٔ برخورد AX با BY باشد وخطی که از C به P وصل می‌شود با AB در Z' برخورد کند. در این صورت بنابه قضیهٔ سوا داریم:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = 1$$

ازمقایسهٔ این رابطه با رابطهٔ فرض بدست می‌آید:

$$\frac{AZ'}{Z'B}=\frac{AZ}{ZB}$$

دو نقطهٔ Z و Z' برهم منطبقند. پس خط CZ نیز از P می‌گذرد.

تمرینها

۱ـ ثابت کنید که درهرمثلث سه میانه متقاربند.

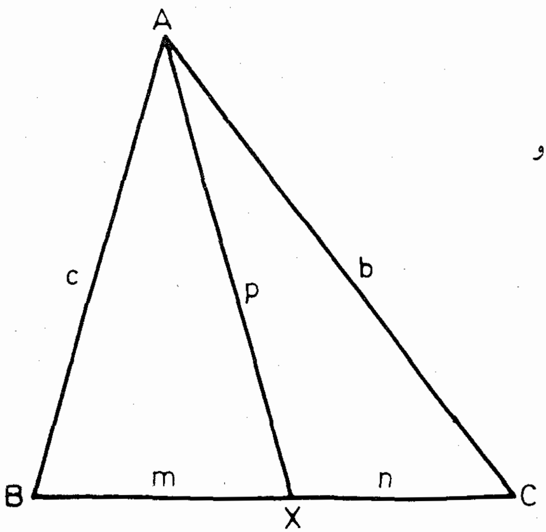
۲ـ ثابت کنید که سه ارتفاع هرمثلث متقاربند.

۳ـ دومثلث نابرابر ABC و $A'B'C'$ چنانندکه ضلعهای آنها نظیر به نظیر باهم موازیند. ثابت کنید که سه خط AA' و BB' و CC' متقاربند.

۴ـ هرگاه درمثلث ABC طول خط سوائی AX برابربا p وطولهای BXو XC به ترتیب برابر با m و n باشد، ثابت کنید که:

$$a(p^{2}+mn)=b^{2}m+c^{2}n$$

راهنمایی ـ دردومثلث ABXو AXC مقادیر کسینوسهای دوزاویهٔ مجاور به رأس X را برحسب ضلعها بنویسید و باهم جمع کنید. درنتیجهٔ آن رابطهٔ استوارت[1] حاصل می‌شود که این قضیه را استوارت در سال ۱۷۴۶ بیان داشته است. اما این قضیه احتمالاً نخستین بار توسط ارشمیدس در سال ۳۰۰ پیش از میلاد کشف و نخستین بار توسط سمسن در ۱۷۵۱ ثابت شده است[2].



(شکل ۲.۱ـ ب)

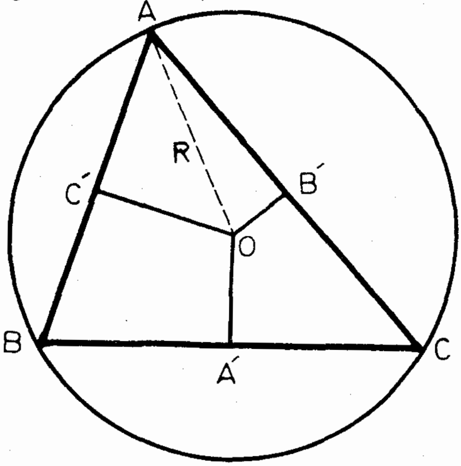
۳.۱ـ نقطه‌های مهم

برای هرمثلث تعداد زیادی نقطه وخط مهم وجود دارد، اما ناچاریم که به برخی از آنها اکتفا کنیم. یکی از نقطه‌های مهم مثلث مرکز دایرهٔ محیطی آن است که جای تقارب سه

۱ـ Stewart

۲ـ «قضیهٔ سوا ورابطهٔ استوارت وقتی کاربرد گسترده دارند که با اندازه‌های جبری بیان شوند» ح.غ.

عمود منصف ضلعهای مثلث می‌باشد. مطابق با شکل (۳.۱، الف)، O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است و OA'، OB'، OC' به ترتیب عمود منصفهای ضلعهای AB، BC و CA می‌باشند. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث با R نشان داده می‌شود.



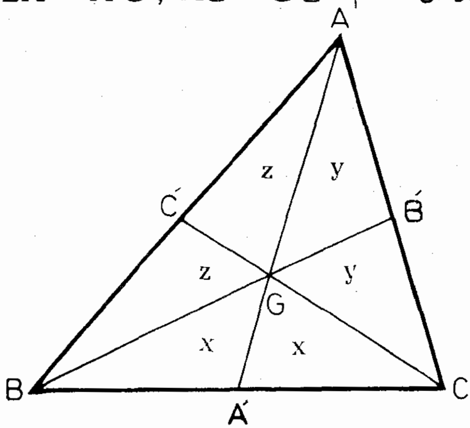
(شکل ۳.۱ ، الف)

میانهٔ مثلث خط سوائی است که رأس را به وسط ضلع روبرو وصل می‌کند . هرمثلث سه میانه دارد . در شکل (۳.۱ ، ب) خطهای سوایی AA'، BB' و CC' میانه‌های مثلث ABC می‌باشند. بنابراین داریم: $BA'=A'C$, $AC'=C'B$ و $CB'=B'A$.

ونتیجه می‌شود که :

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=۱$$

پس بنا به عکس قضیهٔ سوا ، سه میانهٔ مثلث متقارب می‌باشند.



(شکل ۳.۱ ، ب)

نقطهٔ تقارب سه میانهٔ مثلث مرکز ثقل آن است و معمولا با G نشان داده می‌شود؛ هرگاه از مقوای باضخامت یکنواخت مثلثی ببریم و G جای تقارب میانه‌های آن را بیابیم، آنگاه این مثلث مقوایی را درنقطهٔ G بر نوك سوزنی تکیه دهیم درحال تعادل باقی خواهد ماند.

شکل (۳.۱ ، ب) را بازدرنظر می‌گیریم . دومثلث GBA' و $GA'C$ معادلند ، زیرا قاعده‌های BA' و $A'C$ ازآنها باهم برابرند وارتفاع آنها مشترك است. مساحت هریك ازاین دومثلث را با x نشان می‌دهیم:

$$S(GBA')=S(GA'C)=x$$

همچنین داریم:

$$S(GCB')=S(GB'A)=y$$
$$S(GAC')=S(GC'B)=z$$

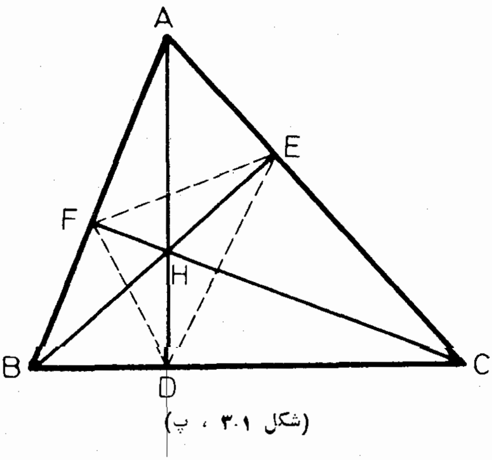
اما دومثلث CAC' و $CC'B$ نیزمعادلند ، پس : $2y+z=z+2x \implies x=y$ ازاینکه دومثلث ABA' و $AA'C$ نیزمعادلند نتیجه می‌شود $y=z$ و بنابراین داریم $x=y=z$ ودرنتیجه :

قضیهٔ ۱،۳،۱- سه میانهٔ مثلث آن را به شش مثلث معادل باهم تقسیم می‌کنند.

بررسی شکل (۳.۱ ، ب) را دنبال می‌کنیم ؛ بنابرآنچه گفتیم مساحت GAB دو برابر مساحت GBA' است. اما این دومثلث در ارتفاع نظیر رأس B مشترکند ، پس قاعده‌های آنها به نسبت ۲ بر ۱ است، یعنی : $AG=2GA'$ همچنین داریم: $BG=2GB'$ و $CG=2GC'$ ، بنابراین :

قضیهٔ ۲،۳،۱- هریك از میانه‌های مثلث توسط میانه‌های دیگر به نسبت ۲ بر ۱ تقسیم می‌شود . به عبارت دیگر نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث در دو سوم ابتدا از رأس هرکدام از آنها واقع است .

در مثلث ABC خطهای سوائی AD، BE و CF را که به ترتیب برضلعهای BC ، CA و AB عمود می‌باشند، ارتفاعهای مثلث می‌نامیم. مطابق باشکل (۳.۱ ، پ)داریم:



(شکل ۳.۱ ، پ)

$$BD=c\cdot\cos B\ ,\ DC=b.\cos C$$
$$CE=a\cdot\cos C\ ,\ EA=c\cdot\cos A$$
$$AF=b\cdot\cos A\ ,\ FB=a\cdot\cos B$$

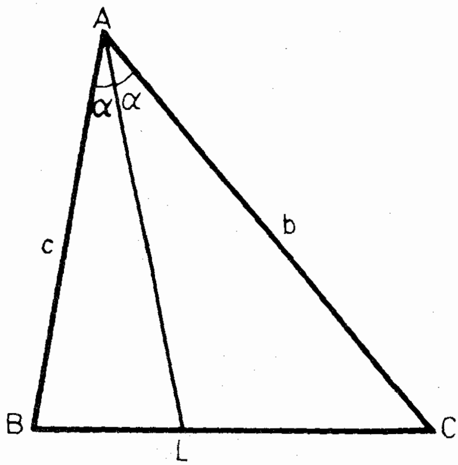
ازاین رابطه‌ها نتیجه می‌شود:

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

وبنا به عکس قضیهٔ سواسه‌خط ، AD ، BE و CF متقاربند. یعنی :

قضیهٔ ۳،۳،۱- سه ارتفاع هرمثلث متقاربند .

نقطهٔ تقارب ارتفاعهای مثلث مرکز ارتفاعی آن نامیده می‌شود و معمولاً آن را با H نشان می‌دهند. همچنین مثلث DEF را کـه رأسهایش پاهای ارتفاعهای مثلث می‌باشند ، مثلث ارتفاعی نظیرمثلث ABC می‌نامند، (شکل ۳.۱ ، پ).



(شکل ۳.۱ ، ت)

نیمسازهای زاویه‌های مثلث مجموعهٔ دیگری ازخطهای سوائی مهم‌مثلث‌را تشکیل‌می‌دهند. درشکل (۳.۱ ، ت)خط AL نیمساززاویهٔ A ازمثلث ABC است‌که زاویهٔ A را به‌دوزاویهٔ برابرباهم بخش کرده است. اندازهٔ هریك از این دوزاویه را α می‌نامیم. دوزاویه‌ای که AL باضلعBC می‌سازدمکمل یکدیگرند. پس‌سینوسهای‌آنها باهم برابرند. از اینرو بنا بـه قـانون سینوسها دردومثلث ABL و ALC داریم:

$$\frac{BL}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin L} \quad \text{و} \quad \frac{LC}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin L}$$

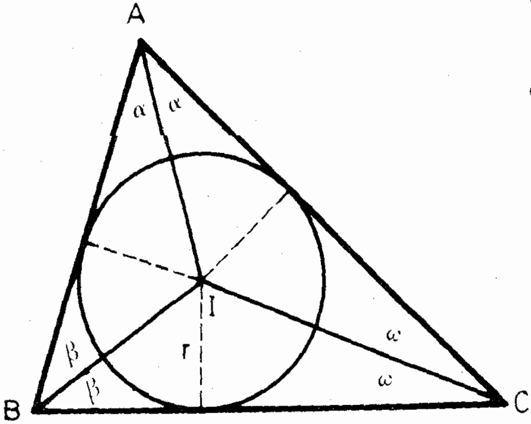
ازاین دورابطه نتیجه می‌شود:

$$\frac{BL}{LC}=\frac{c}{b}$$

برای نیمسازهای زاویه‌های B و C نیزبه همین روش رابطه‌های مشابه بدست می‌آید وازآنجا قضیهٔ زیررا خواهیم داشت:

قضیهٔ ۴،۳.۱- درهرمثلث،هرنیمساز زاویهٔ داخلی‌ضلع رو برو را به‌نسبت اندازه‌های دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند.

هرنقطهٔ ازنیمساززاویه از دوضلع زاویه به یك فاصله است وبرعکس؛ هرنقطه که ازدوضلع زاویه به یك فاصله باشد برنیمسازآن زاویه واقع است. در مثلث ABC نیمسازهای‌زاویه‌های داخلی A و B درنقطهٔ I برخورد می‌کنند. این نقطه ازدوضلعABو AC همچنین از دو ضلع BA و BC به یك فاصله است ، پس‌از دو ضلع CA و CB نیز بـه یك فاصله است و نتیجه می‌شود که I برنیمساززاویهٔ C نیزواقع است. بنا براین داریم:



(شکل ۳.۱ ، ث)

قضیهٔ ۵،۳.۱- نیمسازهای زاویه‌های داخلی هرمثلث متقاربند.

فاصلهٔ I تا هریك از سه ضلع مثلث را با r نشان می‌دهیم. دایرهٔ به مرکز I و به‌شعاع r برسه ضلع مثلث مماس است. این دایره را دایرهٔ محاطی مثلث می‌نامیم.

تمرینها

۱ـ ثابت کنید که اگر یك زاویه ازمثلثی منفرجه باشد، مرکزدایرهٔ محیطی وهمچنین مرکزارتفاعی این مثلث درخارج آن واقع است.

۲ـ دومثلث چنانند که ضلعهای یکی‌ازآنها به ترتیب با میانه‌های دیگری برابرند. نسبت مساحتهای این دومثلث را بدست‌آورید.

۳ـ ثابت کنید که اگردومیانه ازمثلثی باهم برابر باشندآن مثلث‌متساوی‌الساقین است.

۴ـ ثابت کنید که اگر دو ارتفاع ازمثلثی‌باهم برابر باشندآن مثلث متساوی‌الساقین است.

۵ـ بااستفاده از عکس قضیهٔ سوا و بااستفاده از قضیهٔ (۴،۳.۱) ثابت کنید که نیمسازهای زاویه‌های مثلث متقاربند.

۶ـ طول میانه‌های مثلث را برحسب a، b و c، اندازه‌های ضلعهای آن، بدست آورید.

راهنمایی: ازرابطهٔ استوارت (تمرین ۴ ازبند ۲.۱) استفاده کنید.

۷ـ ثابت کنید که مجذورطول AL، نیمساز زاویهٔ داخلی A ازمثلث ABC، برابراست با:

$$bc\left[۱-\left(\frac{a}{b+c}\right)^{۲}\right]$$

۸ـ درمثلثی ضلعها به اندازه‌های ۳و۴و۵ می‌باشند (این مثلث قائم‌الزاویه است). طول نیمساز زاویهٔ قائمه ازاین مثلث را حساب کنید.

۹ـ ثابت کنید که درهرمثلث حاصل‌ضرب دو ضلع برابر است با حاصل‌ضرب قطر دایرهٔ محیطی درطول ارتفاع نظیرضلع دیگر.

۴.۱ـ دایره‌های محاطی داخلی وخارجی مثلث

درشکل (۴.۱، الف)دایرهٔ محاطی داخلی‌مثلث ABC در نقطه‌های X و Y و Z برضلعهای BC، CA و AB مماس است. دو مماس که ازیك نقطه بردایره‌ای رسم شوند

دارای طولهای برابرند. پس :

$AY=AZ=x$

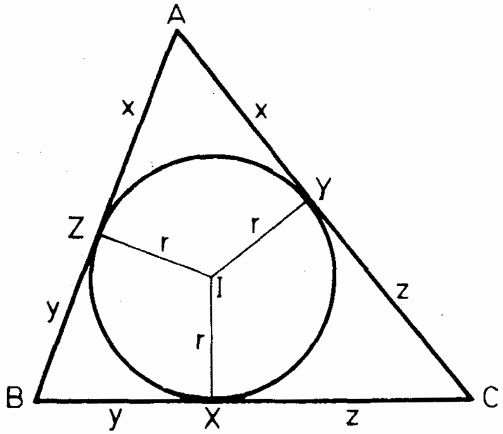
$BZ=BX=y$ و $cx=cy=z$

و چون داریم:

$y+z=a$ ، $z+x=b,$

$x+y=c$

که ازجمع نظیر به‌نظیر طرفهای این رابطه‌ها نتیجه می‌شود:



(شکل ۴.۱ ، الف)

$$۲x+۲y+۲z=a+b+c=۲s$$

$$x+y+z=s$$

وخواهیم داشت:

قضیهٔ ۱،۴.۱- در هر مثلث ، طول هرقطعه که توسط دایرهٔ محاطی داخلی روی یك ضلع جدا می‌شود برابر است با تفاضل نصف محیط مثلث براندازهٔ ضلع روبرو :

$x=s-a$ و $y=s-b$ و $z=s-c$

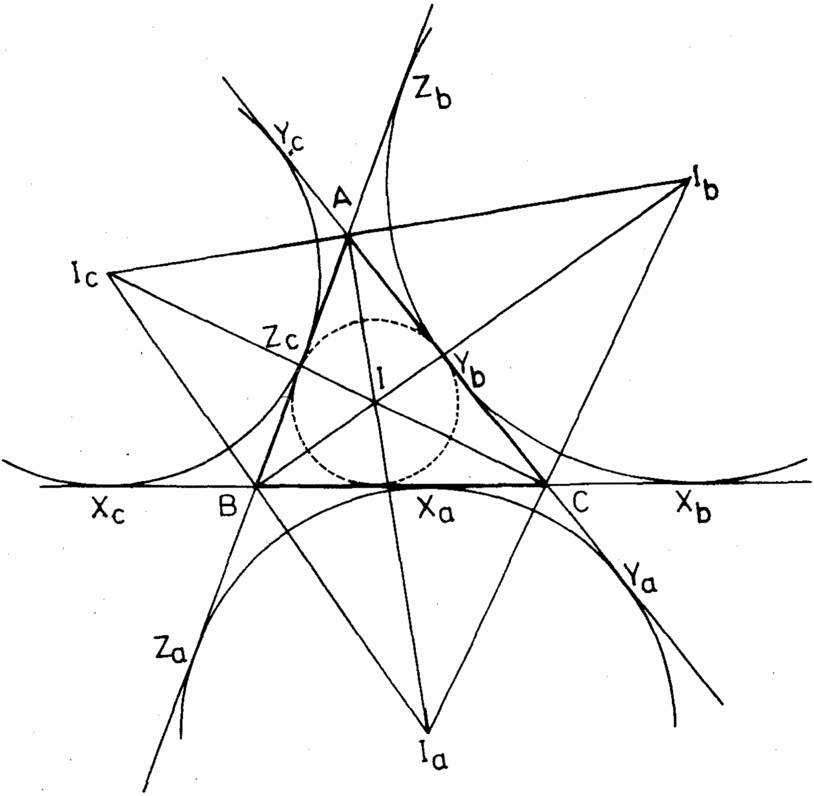
مساحت مثلث ABC برابراست بامجموع‌مساحتهای مثلثهای IBC و ICA و IAB که ارتفاع هریك از این مثلثها r است و قاعده‌های آنها به‌ترتیب a ، b و c است. بنابراین مساحت مثلث ABC برابرمی‌شود با،

$$\triangle=\frac{۱}{۲}(a+b+c)r=sr$$

به عبارت دیگر:

قضیهٔ ۲،۴.۱- مساحت هر مثلث برابر است با حاصلضرب نصف محیط در شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن.

نیمسازهای زاویه‌های خارجی A و B و C از مثلث ABC، مثلث $I_aI_bI_c$ را تشکیل می‌دهند (شکل ۴.۱ ، ب). نقطهٔ I_a چون برنیمساز زاویهٔ B واقع است از دو ضلع BC و BA به یك فاصله است ، وچون برنیمساز زاویهٔ C واقع است ازدوضلع CB و CA به یك فاصله است. پس I_a ازدوضلع AB و AC به یك فاصله است و برنیمساز زاویهٔ A قرار دارد . برای نقطه‌های I_b و I_c نیزحکم مشابه صادق است و می‌توان گفت:



(شکل ۴.۱ ، ب)

قضیهٔ ۳،۴.۱- در هر مثلث نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی با نیمساز زاویهٔ داخلی دیگر متقاربند.

فاصلهٔ I_a را ازسه ضلع‌مثلث با r_a نشان می‌دهیم. دایرهٔ به‌مرکز I_a و به‌شعاع r_a برضلع BC و برامتدادهای دوضلع AB و AC مماس است. این دایره را دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع a از مثلث ABCمی‌نـامیم . مثلث ABC رویهم سه دایرهٔ محاطی خارجی داردکه مرکزهای‌آنها I_a و I_b و I_c و شعاعهای‌آنها به ترتیب با r_a و r_b و r_c نشان داده می‌شود. دایرهٔ محاطی داخلی و سه دایرهٔ محاطی خارجی را رویهم دایره‌های محاطی مثلث می‌نامند.

مطابق با شکل (۴.۱ ، ب)وباتوجه به‌اینکه دومماس BX_b و BZ_b باهم برابرند می‌توانیم بنویسیم:

$$BX_b+BZ_b=BC+CX_b+Z_bA+AB$$
$$=BC+CY_b+Y_bA+AB=a+b+c=۲s$$

ازاین رابطه وبا توجه به رابطه‌های مشابه دیگرکه برای رأسهای C و A وجود دارد نتیجه می‌شود:

$$AY_a=AZ_a=BZ_b=BX_b=CX_c=CY_c=s$$

وچون داریم:

$$CX_b=BX_b-BC=s-a$$

وبا توجه به رابطه‌های مشابه مربوط به رأسهای A و B خواهیم داشت:

$$BX_c=BZ_c=CX_b=CY_b=s-a$$

$$CY_a=CX_a=AY_c=AZ_c=s-b$$

$$AZ_b=AY_b=BZ_a=BX_a=s-c$$

تمرینها

۱ـ درمثلث ABC، به مرکزهای A و B و C سه دایره چنان رسم شده‌اندکه دوبه‌دو بریکدیگرمماس خارجند. ثابت‌کنید شعاعهای این‌دایره‌ها برابرند با:

$s-a$ و $s-b$ و $s-c$

۲ـ ثابت‌کنیدکه درهرمثلث داریم:

$$abc=4srR$$

۳ـ ثابت‌کنید سه خط AX و BY و CZ درشکل (۴.۱ ، الف) باهم متقاربند. این نقطهٔ تقارب به نام نقطهٔ ژرگون[1] معروف است[2].

۴ـ ثابت‌کنیدکه مثلث ABC مثلث ارتفاعی مثلث $I_aI_bI_c$ می‌باشد.

۵ـ ثابت‌کنیدکه درهرمثلث داریم:

$$S(ABC)=(s-a)r_a=(s-b)r_b=(s-c)r_c$$

۶ـ ثابت‌کنیدکه درهرمثلث:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

۵.۱ـ قضیهٔ اشتینر ـ لموس

دشواری ویژه‌ای‌که درحل برخی ازمسئله‌های هندسه یافت می‌شود، خود موجب

۱ـ Gergonne

۲ـ یادداشت مترجم: اگر در مثلث ABC سه خط سوایی AX ، BY ، CZ در P متقارب باشند، رابطهٔ زیربرقراراست:

رابطهٔ ژرگون: $$\frac{PX}{AX}+\frac{PY}{BY}+\frac{PZ}{CZ}=1$$

پدیدآمدن کششی دراشخاص برای حل این مسئله‌ها است. در سده‌های گذشته وجود این چنین کششی ازامتیازهای ویژهٔ هندسه بوده است. برای نمونه از سه مسئلهٔ بسیار مشهور قدیمی می‌توان نام برد: تضعیف مکعب[۱] ، تثلیث زاویه[۲] ، تربیع دایره[۳] . کوششهایی که برای حل این مسئله‌ها انجام گرفته خود شاخه‌های تازه‌ای را درریاضیات پدیدآورده است. حتی اکنون هم کسانی که به دنبال نام‌آوری در ریاضیات می‌باشند روشهای تازه‌ای در حل این مسئله‌ها ارائه می‌دهند و رقیبان را در پیدا کردن اشتباههای موجود در آنها به مبارزه می‌خوانند.

یکی از مسئله‌هایی که به‌ویژه همواره انگیزه‌ای برای نام‌آوری بوده است ، در اینجا به‌صورت قضیهٔ زیر بیان می‌شود:

قضیهٔ ۱،۵،۱- اگر نیمسازهای دو زاویهٔ داخلی مثلثی باهم برابر باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است.

این مسئله درسال ۱۸۴۰ از طرف لموس[۴] ،که اگر غیرازاین بود نامش فراموش شده بود، برای ریاضیدان بزرگ سوئیسی اشتینر[۵] فرستاده شده وحل هندسی‌آن از وی درخواست شده بود. اشتینرحلی بسیارپیچیده برای‌آن ارائه داد واین خود موجب‌شدکه بسیاری دیگر از ریاضیدانان در جستجوی حل سادهٔ مسئله برآیند. در سالهای ۱۸۴۲ ، ۱۸۴۴ ، ۱۸۴۸ وهمچنین درهمهٔ سالهای از ۱۸۵۴ تا ۱۸۶۴ ، و بالاخره بطورمنظم در صدسال‌اخیر، این مسئله زیرعنوان (قضیهٔ اشتینر- لموس) در مجله‌های ریاضی مورد بحث بوده است.

یکی ازروشهای سادهٔ حل این مسئله برمبنای دو لم زیربیان می‌شود.

لم ۱،۱،۵،۱- اگر دریك دایره دو وتر روبرو به دوزاویهٔ حادهٔ محاطی نا برابر باشند، آن وتر که بزرگتر است روبرو به‌زاویهٔ بزرگتر است.

ازدو وترنابرابرآنکه بزرگتراست به مرکزنزدیکتر است ودرنتیجه زاویهٔ مرکزی روبروبه‌آن بزرگتراست. هرزاویهٔ محاطی نیمهٔ زاویهٔ مرکزی‌است که باآن روبرو به‌یك وتر واقع است. بنابراین زاویهٔ محاطی روبرو به‌وتربزرگترازاویهٔ محاطی روبرو به وتر کوچکتر بزرگتراست.

لم ۲،۱،۵،۱- اگر دو زاویه از مثلثی نا برابر باشند ، نیمساز زاویهٔ کوچکتر از

۱- ترسیم مکعبی که حجمش دوبرابرحجم مکعب مفروض باشد.

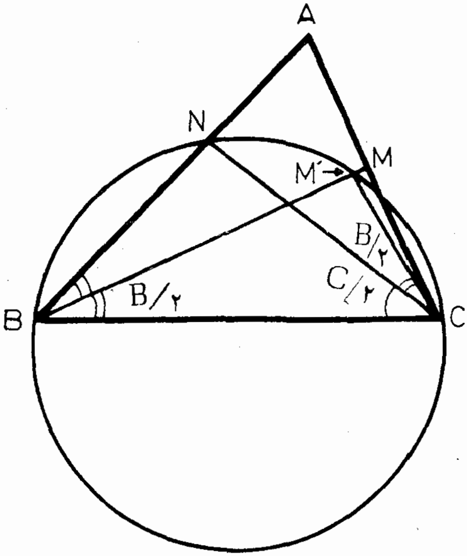
۲- تقسیم زاویهٔ مفروض به سه زاویهٔ برابر(ازراه ترسیم).

۳- ترسیم مربع معادل بادایرهٔ مفروض.

۴- C.L.Lehmus

۵- Jacob Steiner

نیمساز زاویهٔ دیگر بزرگتر است.



(شکل ۵.۱ ، الف)

در مثلث ABC زاویهٔ B از زاویهٔ C کوچکتر است و BM و CN نیمسازهای زاویه‌های B و C می‌باشند. بر BM نقطهٔ M′ را چنان می‌یابیم که زاویهٔ NCM′ با نیمهٔ زاویهٔ B برابر باشد. از برابری دو زاویهٔ NBM′ و NCM′ برمی‌آید که چهارگوشهٔ BNM′C محاطی است. اما داریم:

$$B < \frac{۱}{۲}(B+C) < \frac{۱}{۲}(A+B+C)$$

$$\widehat{CBN} < \widehat{M'CB} < ۹۰^\circ$$

بنابه لم قبلی داریم $CN < BM'$ ونتیجه می‌شود:

$$BM > BM' > CN$$

اثبات قضیه - روش برهان خلف را بکارمی‌بریم: اگر $B \neq C$ باشد، بنابه لم بالا نتیجه می‌شود $BM \neq CN$، اما داریم $BM = CN$ بنابراین گزارهٔ $B \neq C$ غلط است، یعنی $B = C$.

سرگذشت راه حل بالا نیز جالب است، این راه حل به نام دو مهندس انگلیسی G.Gilbert و D.Mac Donnell در شمارهٔ ۷، سال ۱۹۶۳ مجلهٔ «ماهنامهٔ ریاضی امریکا» چاپ شده و ازطرف سردبیرمجله یادداشت زیربه آن اضافه شده است:

«مارتین‌گاردنر نویسندهٔ معروف مقاله‌های بازیهای ریاضی درمجلهٔ (Scientific American) درشمارهٔ ۲۰۴، سال ۱۹۶۱ این مجله، مسئله را به‌گونه‌ای بسیارجالب عرضه کرده وصدها نفر ازخوانندگان مجله‌راه‌حلهایی برای آن مجله فرستاده‌اند. گاردنر این تودهٔ‌پاسخها را باتلاش زیاد غربال‌کرده ودرآخرراه حل بالا را به‌عنوان بهترین آنها برگزیده‌است.»

شاید برخی ازخوانندگان، وافرادی دیگر، ایراد بگیرندکه راه حل بالا باروش غیر مستقیم انجام گرفته است. به‌جای‌آنکه قضیه را ثابت‌کنند خلاف‌آن را ردکرده‌اند.

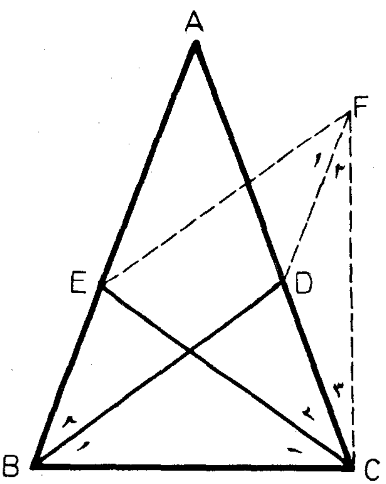
درپاسخ باید گفت ممکن است که راه‌حلهایی به‌ظاهرمستقیم برای مسئله بیان شده باشد، اما درحقیقت هرکدام ازآنها روش برهان غیرمستقیم را درخود پنهان داشته است. باید دانست که تنها قضیه‌های بسیارساده بطورکاملا مستقل اثبات شده‌اند، سایر قضیه‌ها بااستفاده از قضیه‌هایی ثابت شده‌اندکه این قضیه‌ها قبلاً به اثبات رسیده و رشته‌ای منطقی مبتنی براصلهای موضوع تشکیل داده‌اند. هرگاه یکی از قضیه‌های این رشته با روش برهان غیرمستقیم ثابت شده باشد، دراثبات قضیه‌های بعدی این روش برهان غیرمستقیم دخالت داشته است. وانگهی برخی ازقضیه‌های بسیارساده واساسی نیزبا برهان غیرمستقیم ثابت شده‌اند. هرگاه خود را مقید کنیم که برهان به غیراز مستقیم را نپذیریم در این صورت مجموعهٔ قضیه‌های ما فقط به چند قضیهٔ ساده محدود خواهد شد. شاید آگاهی براین موضوع برای ماناخوشایند باشد، اما ریاضیدان بزرگ انگلیسی هاردی (G.H.Hardy) دراین باره گفته است: «برهان خلف، این عزیز دردانهٔ اقلیدس، یکی از برنده‌ترین سلاحهای ریاضیدانان است. دریك بازی شطرنج، حرکتی که انجام گیرد دیری نمی‌پاید که ارزش آن معین می گردد؛ یك بازیکن ممکن است خطر از دست دادن یك پیاده یا مهرهٔ دیگررا بپذیرد. اماآنچه مطرح می‌باشدکل بازی است».

[**یادداشت مترجم:** راه‌حلی که درزیرارائه می‌شود، واولین بار درسال ۱۸۸۰ توسط مهندس دسکوب فرانسوی بیان شده است، علاوه برآنکه از راه حل بالا ساده‌تر است ازاین‌نظر که فقط از مقالهٔ اول هندسه استفاده می‌کند نیزبرآن ترجیح دارد.

درمثلث ABC نیمساز زاویهٔ داخلی B با ضلع AC در D برخورد می‌کند و نیمساز زاویهٔ داخلی C ضلع AB را در E قطع می‌کند. هرگاه $BD=CE$ باشد می‌خواهیم ثابت کنیم که‌مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

هرگاه دو زاویهٔ B و C با هم برابر باشند مثلث متساوی‌الساقین خواهد بود. فرض کنیم که این دوزاویه نابرابر باشند و مثلاً $\hat{B} > \hat{C}$ در این صورت داریم:

$$\hat{B}_1=\hat{B}_2>\hat{C}_1=\hat{C}_2$$



(شکل ۵.۱ ، ب)

EF را موازی ومساوی با BD رسم کرده و از F به C و به D وصل می‌کنیم. درمتوازی‌الاضلاع BEFD داریم:

$$BE=DF \text{ و } \hat{B}_۲=\hat{F}_۱$$

ودرمثلث متساوی‌الساقین ECF داریم:

$$\hat{F}_۱+\hat{F}_۲=\hat{C}_۲+\hat{C}_۳ \quad .$$

وچون $\hat{B}_۲>\hat{C}_۲$ و $\hat{F}_۱=\hat{B}_۲$ پس نتیجه می‌شودکه $\hat{F}_۲<\hat{C}_۳$ وازآنجا لازم می‌آید که $CD<DF$ و در نتیجه $CD<BE$. در دومثلث BCD و BCE ضلع BC مشترك است ودوضلع BD و CE باهم برابرند اما $CD<BE$ بنابراین $\hat{B}_۱<\hat{C}_۱$ ودرنتیجه $\hat{B}<\hat{C}$ می‌باشد کــه خلاف فرض است. بنابراین با فرض $BD=CE$ زاویهٔ B نمی‌تواند از زاویهٔ C بزرگتر باشد. اگرفرض‌کنیم $\hat{B}<\hat{C}$ باز به روش مشابه نقیض آن نتیجه می‌شود. بنابراین با فرض $BD=CE$ فقط تساوی دو زاویهٔ B و C امکان دارد، یعنی مثلث متساوی‌الساقین است.]

تمرینها

۱ـ درمثلث ABC زاویهٔ B به‌اندازهٔ ۱۲ وزاویهٔ C به‌اندازهٔ °۱۳۲ است. بدون استفاده ازرابطه‌های مثلثاتی طولهای BM و CN نیمسازهای زاویه‌های خارجی B و C را باهم مقایسه‌کنید.

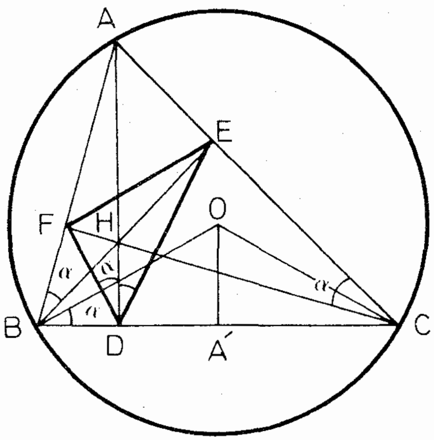
[این مسئله از O.Bottema است وازآن این‌نتیجه بدست‌می‌آیدکه ممکن است دو نیمساززاویهٔ خارجی ازمثلثی باهم برابرباشند اما آن مثلث متساوی‌الساقین نباشد.]

۲ـ اگرخواسته باشیم قضیهٔ (۱،۵.۱) را روی مثلث بــوتما (مثلث تمرین قبل) ثابت‌کنیم، برهانی‌که ارائه شده ازچه مرحله‌هایی اشتباه می‌شود؟

۳ـ بااستفاده از فرمولی‌که در تمرین ۷ از بند ۳.۱ آمده است، برهانی مستقیم برای قضیهٔ اشتینر ــ لموس بدست‌آورید.

۶.۱ـ مثلث ارتفاعی

درشکل (۶.۱، الف) مثلث ABC بازاویه‌های حاده نمایانده شده است‌که‌درآن O مرکزدایرهٔ محیطی، H مرکز ارتفاعی و DEF مثلث ارتفاعی است‌که رأسهایش پاهای ارتفاعها می‌باشند. برای بررسی این شکل، که بدون سود نخواهد بود، نخست معلوم می‌کنیم کــه کدام زاویه‌های‌شکــل به اندازه $\alpha=۹۰^\circ-A$ می‌باشند. دو زاویهٔ $A'OC$ و A با هم برابرنــد، زیرا اولی مرکزی و دومی محاطی است و هردو نظیر



(شکل ۶.۱ ، الف)

یك کمان می‌باشند. بنابراین هریك از دو زاویهٔ OBC و OCB به اندازهٔ α است. همچنین از دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABE و ACF بر می‌آید که هر یك از دو زاویهٔ ABE و ACF به‌اندازهٔ α است. هر یك از چهارگوشه‌های BCEF و BDHF و CEHD محاطی است. پس:

$$\widehat{HDF}=\widehat{HBF}=\widehat{EBF}=\widehat{ECF}=\widehat{ECH}=\widehat{EDH}$$

بنابراین خط HD نیمساززاویهٔ EDF است.

به‌روش همانند ثابت می‌شود که HE نیمساز زاویهٔ DEF و HF نیمساززاویهٔ EFD است. پس‌درنخستین بررسی‌ازشکل این‌نتیجه بدست آمد که درهرمثلث بازاویه‌های حاده ، ارتفاعها عبارتند از نیمسازهای زاویه‌های مثلث ارتفاعی. به عبارت دیگر:

قضیهٔ ۱،۶.۱ – در هر مثلث با زاویه‌های حاده ، مرکز ارتفاعی برمرکزدایرهٔ محاطی داخلی مثلث ارتفاعی منطبق است.

ازبررسی شکل و ازبرابری زاویه‌های HDF و DBO نتیجه می‌شود که FD بر OB وهمچنین DE بر OC وبالاخره EF بر OA عمود است.

تمرینها

۱– درشکل (۶.۱ ، الف) ثابت کنید که مثلثهای AEF ، BDF ، DEC و ABC باهم متشابهند.

۲– مثلثی با یك زاویهٔ منفرجه درنظر گرفته وخطهای نظیرشکل (۶.۱ ، الف) را روی‌آن رسم کنید. با بررسی شکل حاصل معلوم کنید که‌کدام یك ازخاصیتهایی که قبلاً بدست‌آمد بازهم صادق است.

۳– ثابت کنید که اگریك زاویه ازمثلثی منفرجه باشد ، مرکزارتفاعی‌آن برمرکز یکی ازدایره‌های محاطی خارجی مثلث ارتفاعی منطبق است.

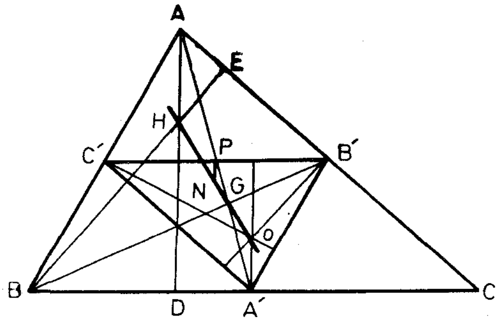
۴– ثابت کنید که :

$$\widehat{HAO}=|B-C|$$

۷.۱ـ مثلث میانه‌ای و خط اولر

مثلثی را که رأسهایش وسطهای ضلعهای مثلث، یعنی پاهای میانه‌های مثلث، می‌باشند مثلث میانه‌ای آن مثلث می‌نامیم. درشکل (۷.۱ ، الف) که A' وسط BC و B' وسط CA و C' وسط AB است، مثلث $A'B'C'$ مثلث میانـه‌ای مثلث ABC است.

مرکز ثقل مثلث ABC ، یعنی نقطهٔ تلاقی میانه‌های AA'وBB' را با G و مرکزارتفاعی‌آن را با H ومرکزارتفاعی مثلث $A'B'C'$ را با O نشان می‌دهیم.



(شکل ۷.۱ ، الف)

ازبررسی شکل برمی‌آیدکه ضلعهای مثلث میانه‌ای بـه ترتیب با ضلعهای مثلث موازیند و طول هرضلع از مثلث میانه‌ای نصف طول ضلع نظیرازمثلث است.

پاره خطهای $B'C'$ ، $C'A'$ و $A'B'$، مثلث ABC را به‌چهار مثلث متساوی تقسیم می‌کنند. چهارگوشهٔ $AC'A'B'$ متوازی‌الاضلاع است ودوقطر AA' و $B'C'$ از آن منصف یکدیگرند. از اینرو میانه‌های مثلث ABC در عین‌حال میانه‌های مثلث $A'B'C'$ بوده و G مرکزثقل هریك ازدومثلث ABC و $A'B'C'$ می‌باشد.

ارتفاعهای مثلث $A'B'C'$ عمودمنصفهای ضلعهای مثلث ABC می‌باشند. ازاینرو O که مرکزارتفاعی مثلث $A'B'C'$ است مرکزدایرهٔ محیطی مثلث ABC است.

دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به نسبت ۲ متشابهند و نتیجه مـی‌شود کـه $AH=۲OA'$ و چون $AG=۲GA'$ پس دو مثلث AHG و $GA'O$ به نسبت ۲ متشابهند ونتیجه می‌شودکه‌سه نقطهٔ O و G و H بریك‌خط راست‌واقعندو $HG=۲GO$.

بنابراین:

قضیهٔ ۱،۷.۱ـ درهرمثلث ، مرکز ارتفاعی ، مرکز ثقل و مرکز دایرهٔ محیطی بریك‌خط راست واقعند و پاره خط بین مـرکـز ارتفاعی و مـرکـز دایرهٔ محیطی توسط مرکز ثقل به نسبت ۲ بر ۱ تقسیم می‌شود.

خطی‌که برمرکزهای ارتفاعی ، ثقل ودایرهٔ محیطی می گذرد خط اولر نام دارد.

از P وسط $B'C'$ عمودی براین خط رسم می‌کنیم‌که HO را در N قطع

می‌کند. سه خط AH و PN و A′O که بر B′C′ عمودند متوازیند ونتیجه می‌شود که N وسط HO است. به روش مشابه ثابت می‌شود که عمود منصفهای ضلعهای C′A′ و A′B′ نیزاز N می‌گذرند. پس N مرکز دایرهٔ محیطی مثلث A′B′C′ است.

خلاصه آنکه، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث میانه‌ای هرمثلث در وسط HO از خط اولرمثلث اصلی واقع است. همچنین هرمثلث با مثلث میانه‌ای خود به نسبت ۲ بر ۱ متشابه است و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث میانه‌ای نصف شعاع دایرهٔ محیطی مثلث اصلی است.

اکنون که نام اولر پیش آمد بدنیست که کمی دربارهٔ وی صحبت شود، به‌ویژه آنکه درهمهٔ شاخه‌های ریاضی ودر بسیاری ازموردها نام او به میان می‌آید. لئونارد اولر[1] به سال ۱۷۰۷ در بال به دنیا آمد. در سال ۱۷۲۷ در آکادمی سن پترزبورك پذیرفته شد. درسال ۱۷۴۱ عازم برلین شد تا کرسی‌ریاضیات آکادمی پروس را به عهده گیرد. درسال ۱۷۶۶ به سن پترزبورك بازگشت و تا سال مرگش، ۱۷۸۳، در آنجا مقیم بود. اولر به طور خستگی ناپذیر کار می‌کرد. درپرتو کوششهای او ریاضیات در همهٔ زمینه‌ها توسعه یافت. درهرشاخه‌ای از ریاضیات، یا فرمولی، یا قضیه‌ای، یا اینکه روشی به‌نام اولر وجود دارد. تعداد یادداشتهایی از وی که در زمان حیاتش چاپ شد ۴۷۳ بود و کمی بعداز مرگش ۲۰۰ یادداشت وبالاخره کمی دیرتر از آن ۶۱ یادداشت از وی چاپ شد. اما همهٔ کارهای او در شرایطی دشوار انجام می‌گرفت، زیرا در سال ۱۷۳۵ بینائی یك چشمش را ازدست داد ودرسال ۱۷۶۶ بطور کلی کور شد.

مهارت اولر درمحاسبه‌ها شگفت‌انگیزودرك شهودیش در ریاضیات معجزه‌آسا بود. دراین کتاب بارهای دیگر با نام اولر روبرو خواهیم شد.

تمرینها

۱ــ ثابت کنید که قضیهٔ (۱،۷.۱) برای مثلث با زاویهٔ منفرجه نیزصادق است.

۲ــ درمثلث ABC (شکل ۷.۱، الف) ثابت کنید که:

$$\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

۳ــ همچنین ثابت کنید که:

$$DA' = \frac{|b^2 - c^2|}{2a}$$

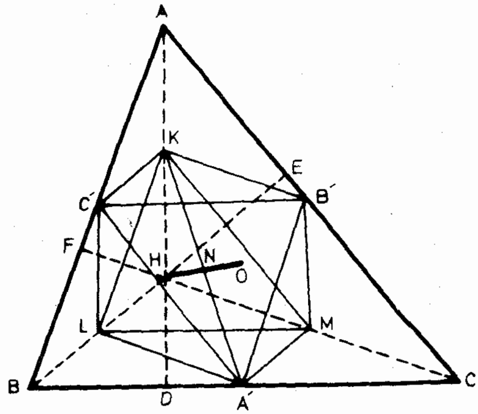
1- Léonard Euler

۴ـ ثابت کنید که اگر در مثلثی خط اولر با BC موازی باشد خواهیم داشت:

$$tgB\,tgC = ۳$$

۸.۱ـ دایرهٔ نه نقطه

برای پرهیز از درهمی شکل بعضی از خطهای شکل (۷.۱ ، الف) را حذف کرده و خطهای تازه‌ای به آن اضافه می‌کنیم تا شکل (۸.۱ ، الف) بدست آید. در این شکل K و L و M به ترتیب وسطهای پاره ارتفاعهای AH و BH و CH می‌باشند. مثلثهای ABC و HBC در ضلع BC مشترکند از اینرو پاره خطهای $B'C'$ و LM باهم برابر و موازیند ؛ زیرا هرکدام از



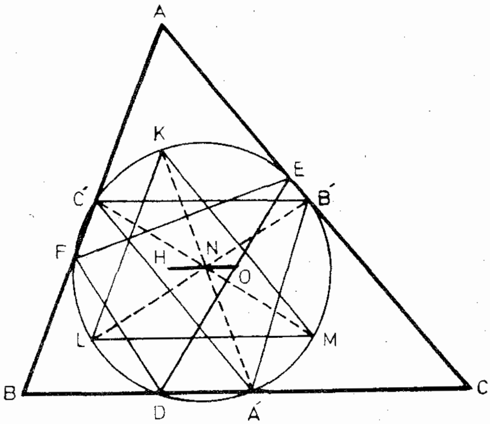
(شکل ۸.۱ ، الف)

آنها با BC موازی است و با نصف BC برابر می‌باشد. پس چهارگوشهٔ $B'C'LM$ متوازی‌الاضلاع است و چون AH بر BC عمود است و LC' و MB' با AH موازیند (درمثلثهای CAH و BAH) ، پس LC' و MB' بر BC و درنتیجه بر $B'C'$ و LM عمودند. بنابراین چهار گوشهٔ $B'C'LM$ مستطیل است. به روش مشابه ثابت می‌شود که هریك ازچهارگوشه‌های $A'B'KL$ و $C'A'MK$ نیزمستطیل است. ازاینرو پاره خطهای $A'K$ و $B'L$ و $C'M$ قطرهایی از دایره‌ای هستند که بررأسهای این مستطیلها می‌گذرد. اما زاویهٔ $A'DK$ قائمه است ودایرهٔ به قطر $A'K$ بر D می‌گذرد. همچنین دایرهٔ به قطر $B'L$ بر E ودایرهٔ به قطر $C'M$ بر F می‌گذرد (شکل ۸.۱ ، ب). بنابراین قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۱،۸.۱ـ درهرمثلث ، وسطهای سه ضلع ، پاهای ارتفاعها ، وسطهای پاره خطهایی که رأسها را به مرکز ارتفاعی وصل می‌کنند ، نه‌نقطه‌اند واقع بریك دایره که شعاع این دایره ، که همان شعاع دایرهٔ محیطی مثلث میانه‌ای است ، نصف شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ، یعنی برابر با $\frac{R}{۲}$ است.

ژان ویکتور پونسله[1] این‌دایره را دایرهٔ نه نقطه نامیده‌است که اکنون نیز به همین

1- Jean - Victor Poncelet



(شکل ۸۰۱ ، ب)

نام معروف است. اما آن‌را دایرهٔ اولر نیز می‌نامند.

در دایرهٔ نه نقطه سه نقطهٔ K،L و M به ترتیب با سه نقطهٔ A′ و B′ و C′ در دو سر یك قطر واقعند، به‌قسمی که‌مثلثهای KLM و A′B′C′ از روی یکدیگر با دوران حول مرکز دایره به زاویهٔ °۱۸۰ بدست‌می‌آیند. دراین تبدیل دو مثلث ، مرکزهای ارتفاعی آنها یعنی H و O بایکدیگرجابجا می‌شوند. بنابراین مرکز دایرهٔ نه نقطه دروسط پاره‌خط OH واقع است که آن را N می‌نامیم. پس می‌توان گفت:

قضیهٔ ۲،۸۰۱- درهر مثلث ، مرکز دایرهٔ نه‌نقطه روی خط اولر واقع است و از مرکز ارتفاعی و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث به یك فاصله است.

سرگذشت دوقضیهٔ بالا به‌درستی روشن نیست. با توجه به مسئله‌ای که از طرف ب . بوان[1] به سال ۱۸۰۴ در مجله‌ای انگلیسی چاپ شده است بنظر می‌رسد که این قضیه‌ها درآن عصرشناخته شده بوده‌اند. اینکه‌آنها را به‌ناروا به اولر نسبت می‌دهند به این جهت است‌که وی برای نخستین باردر ۱۷۶۵ ثابت‌کرده است‌که دایرهٔ محیطی مثلث ارتفاعی بردایرهٔ محیطی مثلث میانه‌ای منطبق است. درحقیقت‌اغلب ازنویسندگان‌اروپائی از «دایرهٔ اولر» نام می‌برند. ظاهراً اثبات کامل قضیه برای نخستین بار در سال ۱۸۲۱ توسط پونسله منتشرشده است. خیلی دیرترازآن ، فوئرباخ[2] همان استنباط جزئی‌اولررا از نو بدست آورد وعلاوه برآن خاصیت مهم وجالب جدیدی را نیز دریافت. از اینرو بسیاری از نویسندگان دایرهٔ نه نقطه را «دایرهٔ فوئرباخ» می‌نامند. بنا به قضیهٔ فوئرباخ در بخش پنجم بیان خواهیم کرد که دایرهٔ نه‌نقطه بردایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث مماس است.

تمرینها

۱ــ بنا به شکل(۸۰۱ ، الف) ثابت‌کنید‌که چهارگوشهٔ AKA′O متوازی‌الاضلاع است.

۲ــ ثابت‌کنید‌که روی دایرهٔ نه‌نقطه، سه نقطهٔ K و L و M به ترتیب دروسطهای

1- B.Bevan
2- K.Feuerbach

کمانهای EF و FD و DE واقعند.

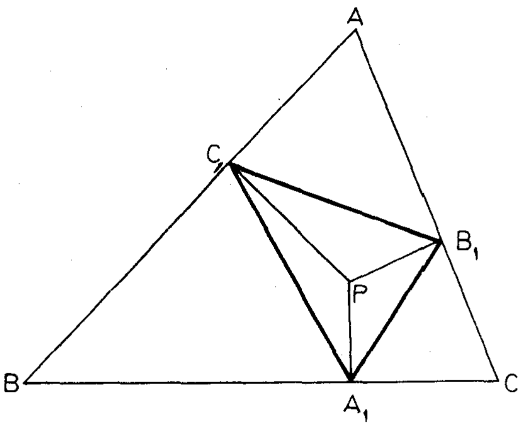
۳ـ هرگاه I_a ، I_b و I_c مرکزهـای دایره‌های محاطی خارجـی مثلث ABC باشد، ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مثلث ABC همان دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث $I_aI_bI_c$ است.

۴ـ سه دایره باهم برابرودرنقطهٔ P مشترکند و دوبه‌دو در سه نقطهٔ A و B و C باهم برخورد دارند. ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مثلث ABC بااین دایره‌ها برابراست و P مرکزارتفاعی این مثلث است.

۵ـ ثابت کنید که دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث، ضلعهای آن را تحت زاویه‌های $|B-C|$ ، $|C-A|$ و $|A-B|$ قطع می‌کند.

۹.۱ـ مثلثهای عمودی (=مثلثهای پودر Podaire)

دیدیم که مثلث ارتفاعی یك مثلث یعنی مثلثی که رأسهایش پاهای ارتفاعهای آن مثلث می‌باشد، مثلث میانه‌ای یعنی مثلثی که رأسهایش پاهای میانه‌های آن مثلث‌می‌باشد. اکنون مثلثی را در یك مثلث مفروض در نظر می‌گیریم کـه رأسهایش پاهای عمودهایی هستند که ازیك نقطهٔ داخلی برسه ضلع مثلث رسم شده‌اند. این‌مثلث رامثلث عمودی، یامثلث پودر، نظیر آن نقطه نسبت به مثلث مفروض می‌نامیم.



(شکل ۹.۱ ، الف)

درشکل (۹.۱ ، الف) نقطهٔ P دردرون مثلث ABC اختیار شده و عمودهای PA_1 ، PB_1 و PC_1 به ترتیب برضلعهای BC ، CA و AB رسم شده‌اند. مثلث $A_1B_1C_1$ مثلث عمودی نقطهٔ P نسبت به مثلث ABC می‌باشد. مـی‌توان قید بـودن نقطهٔ P در درون مثلث راکنار گذاشت به‌شرط آنکه P روی دایرهٔ محیطی مثلث نباشد (دراین باره دربند ۵.۲ بحث خواهد شد). اگر P برمرکزارتفاعی یا برمرکزدایرهٔ محیطی مثلث واقع باشد، مثلثهای عمودی نظیر آن به ترتیب مثلث ارتفاعی ومثلث میانه‌ای خواهد بود.

اکنون به بررسی شکل بپردازیم. چهارگوشهٔ AB_1PC_1 در دایرهٔ به قطر AP محاط است، پس P بردایرهٔ محیطی مثلث AB_1C_1 واقع است. بنابه قانون سینوسها دردو مثلث ABC و AB_1C_1 داریم:

$$\frac{B_1C_1}{\sin A}=AP \quad و \quad \frac{a}{\sin A}=2R$$

ازاین دورابطه نتیجه می‌شود:

$$B_1C_1=\frac{a\cdot AP}{2R}$$

همچنین خواهیم داشت:

$$C_1A_1=\frac{b.BP}{2R} \quad و \quad A_1B_1=\frac{c.CP}{2R}$$

این نتیجه‌ها را می‌توانیم به‌صورت قضیهٔ زیر بیان کنیم:

قضیهٔ ۱،۹۰۱- هرگاه نقطهٔ P به‌فاصله‌های x و y و z ازسه رأس مثلث ABC واقع باشد، اندازه‌های ضلعهای مثلث عمودی نقطهٔ P نسبت به مثلث ABC برابرند با:

$$\frac{ax}{2R}\ ،\ \frac{by}{2R}\ ،\ \frac{cz}{2R}$$

حالت خاص $x=y=z=R$ را خوب می‌شناسیم.

در نظر گرفتن مثلثهای عمودی متوالی نظیر یك نقطه برای یك مثلث مفروض، علاوه برآنکه تمرینی جالب است مثالی دلفریب ازتصوردرهندسه است. بنظرمی‌آیدکه این موضوع جالب برای نخستین بار توسط نیوبرگ[1] به عنوان ضمیمه‌ای برچاپ ششم کتاب «دنباله‌ای برشش مقالهٔ اول تحریرات اقلیدس» تألیف جان کازی[2] مطرح شده است. در شکل (۹۰۱، ب) نسبت به مثلث ABC و نظیر نقطهٔ P مثلث $A_1B_1C_1$ عمودی اول، مثلث $A_2B_2C_2$ عمودی دوم‌ومثلث $A_3B_3C_3$ عمودی سوم می‌باشد. برای مثلث عمودی سوم خاصیت زیر بیان شده است:

قضیهٔ ۲،۹۰۱- مثلث عمودی سوم با مثلث مفروض متشابه است:

$$\triangle ABC \sim \triangle A_3B_3C_3$$

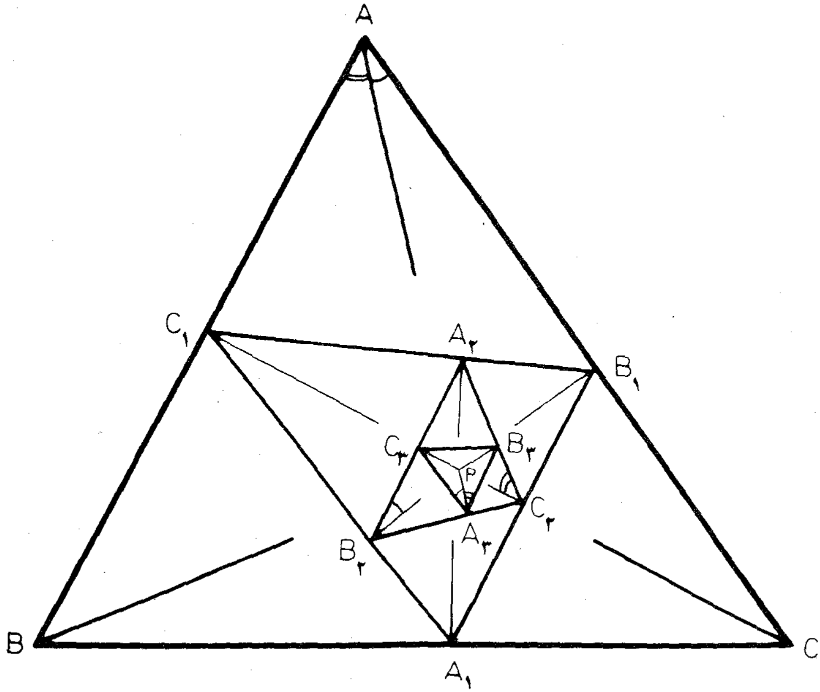
اثبات این قضیه ازسادگی شگفت‌انگیزی برخورداراست؛ چون P بردایره‌های محیطی مثلثهای AB_1C_1 . $A_2B_1C_2$ ، $A_3B_3C_2$ ، $A_2B_2C_1$ و $A_3B_2C_3$ واقع‌است. پس:

$$\widehat{C_1AP}=\widehat{C_1B_1P}=\widehat{A_2B_1P}=\widehat{A_2C_2P}=\widehat{B_3C_2P}=\widehat{B_3A_3P}$$

$$\widehat{PAB_1}=\widehat{PC_1B_1}=\widehat{PC_1A_2}=\widehat{PB_2A_2}=\widehat{PB_2C_3}=\widehat{PA_3C_3}$$

نتیجه می‌شود دوجزئی که اززاویهٔ A پدیدآمده است با دوجزئی که اززاویهٔ A_3 پدید

1- J.Neuberg ۲- John Casey



(شکل ۹.۱ ، ب)

آمده است باهم برابرند ، پس دوزاویهٔ A و A_3 باهم برابرند. همچنین ثابت می‌شود که $\hat{B}$ با $\hat{B}_3$ و $\hat{C}$ با $\hat{C}_3$ برابراست ، بنابراین دومثلث ABC و $A_3B_3C_3$ متشابهند.

اثبات تساوی دوزاویهٔ A و A_3 ازراه تساوی اجزاء A با جزءهائی از B_1 و C_1 ، سپس با جزءهایی از C_2 و B_2 انجام گرفت . این جزءهای متساوی در روی شکل با کمانکها نموده شده‌اند. تعقیب رشتهٔ این برابریها در روی شکل و چگونگی رسیدن از A به A_3 بسیار جالب است و همانند حرکت بالهٔ یك دستهٔ به هم پیوسته بنظر می‌آید

دکتر اوپن هیم[1] معاون دانشگاه مالزی در سنگاپور، خاصیت بالا را برای مثلثهای عمودی متوالی تعمیم داده است. وی به جای مثلث یك n ضلعی درنظر گرفته و به این نتیجه رسیده است کــه n ضلعی عمودی مرتبهٔ nام با آن متشابــه است. اثبات این خاصیت درحالت $n=4$ بسیارجالب است[2].

۱- A.Oppenheim

۲- یادداشت از ح. غیور : یکـــی از خواص مهم و معروف مثلث عمودی نقطهٔ P نسبت به مثلث مفروض ، رابطه‌ای است که‌بین‌مساحت‌مثلث عمودی و قوت نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ

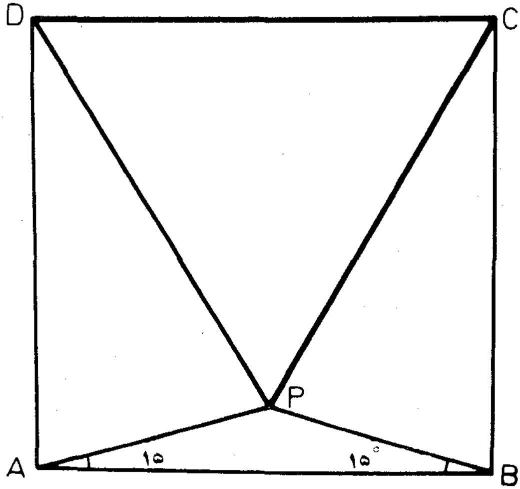
←

دراینجا بخش نخست کتاب پایان می‌یابد. دراین‌بخش با شروع ازبرخی چیزهای شناخته شده به نتیجه‌هایی ساده اما مهم دست یافتیم. مسئله‌های بسیاری یافت می‌شود که حل آنها با روش بالا انجام می‌گیرد، وانگهی برخی از آنها معماهایی می‌باشند که شاید عده‌ای ازخوانندگان باآنها آشنایی داشته باشند. درزیرپنج نوع ازاین مسئله‌ها به عنوان تمرین آورده شده است.

تمرینها

۱ــ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است. خطی از A می‌گذرد و با ضلع BC در Q و با دایرهٔ محیطی‌مثلث در P برخورد می‌کند. ثابت کنید که:

$$\frac{۱}{PB}+\frac{۱}{PC}=\frac{۱}{PQ}$$



(شکل ۹.۱ ، پ)

۲ــ درداخل مربع $ABCD$ از A و B دوخط رسم می‌کنیم که با ضلع AB زاویهٔ ۱۵ درجه بسازند. این‌دوخط در P برخورد می‌کنند. ثابت کنید که P و C و D سه رأس یك مثلث متساوی‌الاضلاعند.

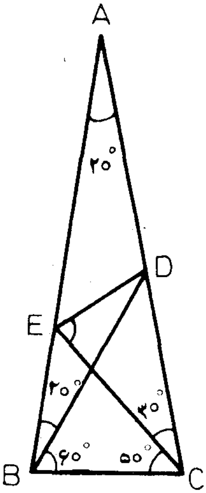
۳ــ نقطهٔ P در خارج متوازی‌الاضلاع $ABCD$ واقع شده است به قسمی که دو زاویهٔ PBC و PDC باهم برابرند. ثابت کنید که دو زاویهٔ APD و BPC باهم برابرند (شکل ۹.۱ ، ت).

۴ــ درمثلث متساوی‌الساقین ABC اندازهٔ هریك اززاویه‌های B و C برابر ۸۰ درجه است. از B خطی رسم می‌کنیم که با AC در D برخورد کند و زاویهٔ DBC به اندازهٔ ۶۰ درجه باشد. همچنین از C خطی رسم می‌کنیم که با AB در E برخورد

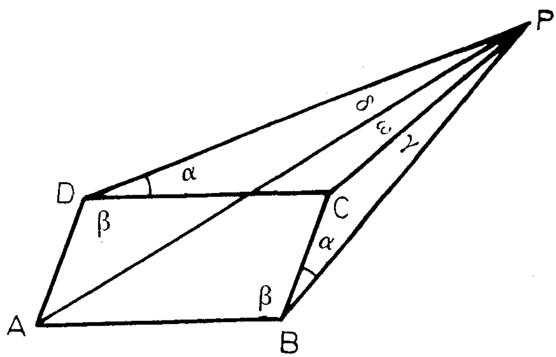
محیطی مثلث‌مفروض وجود دارد: اگر $S_۱$ مساحت مثلث عمودی نظیرنقطهٔ P و S و R به‌ترتیب مساحت وشعاع دایرهٔ محیطی‌مثلث مفروض و p قوت نقطهٔ P نسبت به این‌دایره باشد ، داریم:

$$S_۱=\frac{S}{۴R^۲}p$$

کند وزاویهٔ ECB به اندازهٔ ۵۰ درجه باشد. اندازهٔ زاویهٔ DEC را بدست آورید (شکل ۹.۱ ، ث).



(شکل ۹.۱ ، ث)



(شکل ۹.۱ ، ت)

۵ـ مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. به قطر AC دربیرون مثلث‌نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم . از رأس B دو خط چنان رسم می‌کنیم که این نیمدایره را به سه‌کمان برابرباهم بخش‌کنند. ثابت‌کنیدکه این دو خط پاره خط AC را نیز به سه پارهٔ برابر باهم بخش می‌کنند.

۲

برخی ویژگیهای دایره

هرچند مطالعات یونانیها در هندسه و همچنین در سایر زمینه‌های گوناگون ریاضی، عمیقانه بوده‌است، اما امروزه در همهٔ مراحل، حتی درهندسه، برآنان پیشی گرفته‌ایم.

ف. کلین

درطول سده‌ها، دایره به‌بهترین وجه مورد توجه بوده است. به‌ویژه‌که به‌عنوان یك‌شکل کامل برمنجمان، وبیشتر ازآن برفیلسوفان، اثرداشته است. پیش ازآنکه قانونهای کپلر بیان شود برای انسان باورکردنی نبودکه مسیر حرکت سیاره‌ها غیر ازدایره باشد. اگرامروزه درمعنی لفظهایی مانند «مربع»، «خط» وازاین‌قبیل، گاهی‌تردید پیش می‌آید، اما دایره هیچگاه چنین نبوده است، زیرا مفهوم‌آن فارغ از وسواسهای مجرد وشبه‌علمی ودر خور اعتباری‌که لازمهٔ آن بوده همواره ثابت ومشخص بوده است.

از اقلیدس به‌بعد خاصیتهای جالب بسیاری مربوط به‌دایره، ومثلثها وچندضلعیهای وابسته به‌آن، کشف و بیان شده است، اما دراینجا به‌علت تنگی جا ذکر همهٔ آنها ممکن نیست.

۲. ۱ـ قوت نقطه نسبت به‌دایره

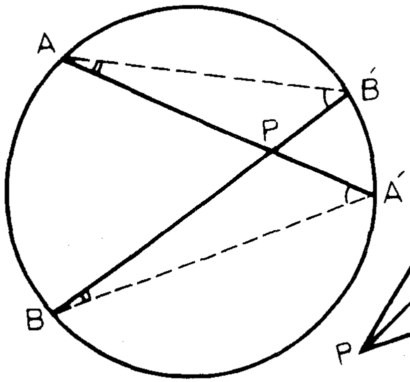
نخست باید دو قضیه از هندسهٔ اقلیدسی را یادآوری کنیم. یکی از این قضیه‌ها مربوط است به‌حاصل ضرب دوقطعه‌ای که دووتر از دایره در یکدیگر بوجود می‌آورند (اگردووتر AB و CD ازدایره‌ای در P متقاطع باشند داریم $PA.PB=PC.PD$).
قضیهٔ دیگرمربوط است به‌حاصل ضرب دوقطعهٔ قاطعی‌که از نقطهٔ خارج دایره برآن‌رسم می‌شود ومجذورطول مماس مرسوم ازاین‌نقطه بردایره (هرگاه ازنقطهٔ P واقع درخارج

دایره، مماس PT را بردایره رسم کنیم و نیز قاطعی رسم کنیم که با دایره در A و A' برخورد کنند. داریم $\overline{PT}^2 = PA \cdot PA'$.

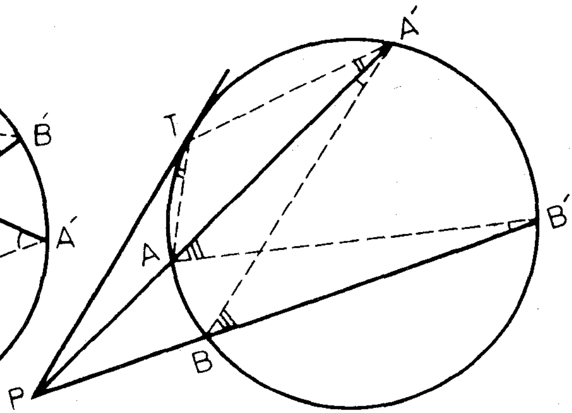
با توجه به اینکه مماس بردایره را می‌توان حدقاطع برآن دانست، همهٔ ویژگیهای بالا را می‌توان زیر عنوان یك قضیه به‌شرح زیر بیان کرد:

قضیهٔ ۱،۱۰۲- هرگاه ازنقطهٔ P دوخط بگذردکه اولی دایرهٔ مفروض را در A و A' (ممکن است این دونقطه منطبق باشند) ودومی آن دایره را در B و B' (ممکن است این‌دونقطه منطبق باشند) قطع‌کند، داریم:

$$PA.PA' = PB.PB'$$



(شکل ۱۰۲، الف)



(شکل ۱۰۲ ، ب)

برای اثبات، کافی است توجه کنیم که دومثلث PBA' و PAB' متشابهند ودر نتیجه:

$$\frac{PA}{PB'} = \frac{PB}{PA'}$$

درحالتی که یکی از دو خط بردایره مماس باشد، غیر از آنکه می‌توان مماس را حد قاطع دانست، می‌توان از تشابه دومثلث PAT و $PA'T$ نیز نتیجه گرفت که :

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PA'}$$

درهرصورت خواهیم داشت:

$$PA.PA' = \overline{PT}^2 = PB.PB'$$

هرگاه شعاع دایره با R و فاصلهٔ نقطهٔ P تا مرکز دایره بـا d نموده شود، می‌توان BB' را چنان‌اختیارکرد که قطر دایره باشد. دراین‌صورت اگر P خارج دایره باشد داریم:

$$\overline{PT}^2 = PA.PA' = PB.PB' = (d+R)(d-R) = d^2 - R^2$$

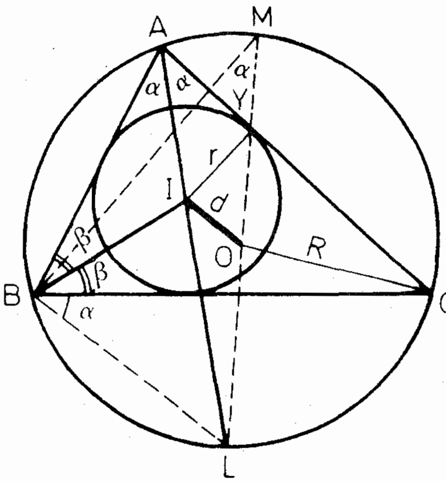
و اگر P داخل دایره باشد:

$$PA.PA' = PB.PB' = (R+d)(R-d) = R^2 - d^2$$

با استفاده از رابطهٔ بالا به‌بیان و اثبات قضیهٔ اولر می‌پردازیم و آنگاه قوت نقطه نسبت به‌دایره را تعریف می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۲، ۲ - هرگاه O مرکز دایرهٔ محیطی، I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC، d فاصلهٔ این دو مرکز و R و r به‌ترتیب شعاعهای دایره‌های مزبور باشد، داریم:

رابطهٔ اولر: $d^2 = R^2 - 2rR$



(شکل ۱.۲ ، پ)

برای اثبات، هرگاه AI نیمساز زاویهٔ A را امتداد دهیم تا بادایرهٔ محیطی مثلث در L برخورد کند و قطر LM از این دایـره را رسم کنیـم ، چـون L وسط کمان BC است پس قطر LM عمودمنصف BC می‌باشد. نصف زاویهٔ A را با α ونصف زاویـهٔ B را با β نشان می‌دهیم. ازروی شکل ملاحظه می‌شود که:

$$\widehat{BML} = \widehat{BAL} = \alpha$$

و

$$\widehat{LBC} = \widehat{LAC} = \alpha$$

زاویهٔ BIL زاویهٔ خارجی مثلث ABI است، پس،

$$\widehat{BIL} = \alpha + \beta = \widehat{LBI}$$

بنابرایـن مثلث LBI متساوی‌الساقین است و LB=LI و نسبت بـه دایـرهٔ محیطی مثلث داریم:

$$R^2 - d^2 = LI.IA = LB.IA = LM\left(\frac{LB}{LM}\right) : \left(\frac{IY}{IA}\right) IY$$

$$= (LM.\sin\alpha) : \left(\frac{\sin\alpha}{IY}\right) = LM.IY = 2Rr$$

$$d^2 = R^2 - 2rR$$

تعریف ـ هرگاه نقطهٔ P بهفاصلهٔ d از مرکز دایرهٔ بهشعاع R واقع باشد، مقدار $d^۲-R^۲$ را قوت نقطهٔ P نسبت بهدایره می‌نامند.

اگر P درخارج دایره باشد قوت آن نسبت بهدایره مثبت است؛ اگر P روی دایره باشد قوت آن نسبت بهدایره صفر است؛ اگر P داخل دایره باشد قوت آن نسبت بهدایره منفی است.

هرگاه خطی بر P بگذرد و با دایره در A و A' برخورد کند واین خط را طبق روش نیوتن جهت‌دار بگیریم بهقسمی که $\overline{PA}=-\overline{AP}$ ، در این صورت نقطهٔ P نسبت بهدایره درهروضعی که باشد داریم:

$$\overline{PA}.\overline{PA'}=d^۲-R^۲$$

پس قوت نقطهٔ P نسبت بهدایره برابر است با: $\overline{PA}.\overline{PA'}$

دراینجا یادآوری می‌شود که اصطلاح قوت نقطه نسبت بهدایره نخستین‌بار توسط اشتینر بکاررفته است.

تمرینها

۱ـ کمترین مقدار جبری قوت نقطه نسبت بهدایره چقدر است؟ نقطهٔ نظیر این کمترین مقدارکدام است؟

۲ـ مکان هندسی نقطه‌هایی که قوت آنها نسبت به دایرهٔ ثابت مقدار ثابت بزرگتر از $R^۲$ است چیست؟

۳ـ اگر قدر مطلق قوت نقطه نسبت بهدایره برابر $t^۲$ باشد. تعبیر هندسی طول t چیست؟

۴ـ دو دایرهٔ هم‌مرکز داده شده‌است. ازنقطهٔ P مماس PU را بردایرهٔ بیرونی و مماس PT را بردایرهٔ درونی رسم می‌کنیم . خط PT با دایرهٔ بیرونی در Q برخورد می‌کند. ثابت‌کنیدکه:

$$\overline{PT}^۲-\overline{PU}^۲=\overline{QT}^۲$$

۵ـ ثابت‌کنید که در هر مثلث شعاع دایرهٔ محیطی ازدو برابر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی بزرگتر یا اقلاً باآن برابر است.

۶ـ قوت مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث را نسبت بهدایرهٔ محیطی آن برحسب r و R بدست‌آورید.

۷ـ با در نظر گرفتن خطهای جهت‌دار، قضیهٔ استوارت را به شرح زیر ثابت کنید (قبلا در تمرین ۴ از بند ۲.۱ نیز بیـان شده است) : اگر A و B و C سه‌نقطهٔ واقع

بر یك خط راست و P نقطهٔ دلخواه باشد، داریم:

$$\overline{PA}^{2}.\overline{BC}+\overline{PB}^{2}.\overline{CA}+\overline{PC}^{2}.\overline{AB}+\overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}=0$$

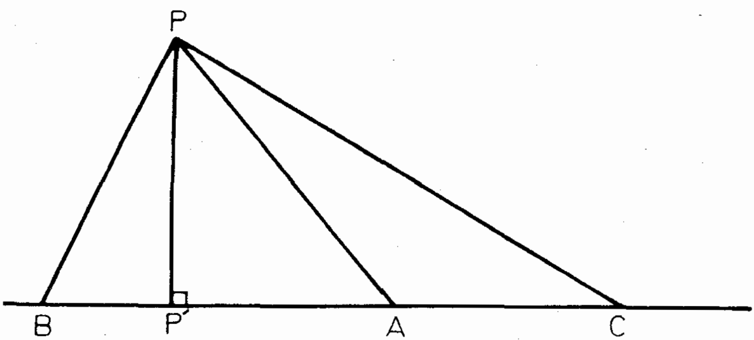
[یادداشت از ح. غیور: این مسئله صورت کامل قضیهٔ استوارت است که با تغییر مختصر یعنی تقسیم دوطرف رابطه بر $\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA}$ به صورت زیر درمی‌آید که از انسجام بیشتری برخوردار است و بهتر در حافظه می‌ماند:

$$\frac{\overline{PA}^{2}}{\overline{AB}.\overline{AC}}+\frac{\overline{PB}^{2}}{\overline{BA}.\overline{BC}}+\frac{\overline{PC}^{2}}{\overline{CA}.\overline{CB}}=1$$

این قضیه به این شکل موارد استعمال گسترده‌ای درهندسه‌دارد ویکی ازاساسی‌ترین قضیه‌های هندسهٔ اقلیدسی است.

برای این‌قضیه علاوه برراه حلی که به‌وسیلهٔ مؤلفان در آخرکتاب ارائه شده است با روش زیر بـه‌کمك دوقضیهٔ اساسی هندسه، یعنی قضیه‌های فیثاغورس و شال (در بارهٔ پاره‌خطهای جهت‌دار روی محور) ثابت می‌شود: از P عمود PP' را براستای AB فرود می‌آوریم ورابطهٔ استوارت را برای P' می‌نویسیم:

$$\frac{\overline{P'A}^{2}}{\overline{AB}.\overline{AC}}+\frac{\overline{P'B}^{2}}{\overline{BA}.\overline{BC}}+\frac{\overline{P'C}^{2}}{\overline{CA}.\overline{CB}}=1$$



هرگاه اندازه‌های $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ و $\overline{CA}$ را نسبت به مبدأ P' بنویسیم، این رابطه به‌یك اتحاد سادهٔ جبری بدل می‌شود.

برای اثبات حکم درحالت‌کلی می‌توان بااستفاده ازقضیهٔ فیثاغورس رابطهٔ بالا را به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{\overline{PA}^{2}-\overline{PP'}^{2}}{\overline{AB}\ \overline{AC}}+\frac{\overline{PB}^{2}-\overline{PP'}^{2}}{\overline{BA}.\overline{BC}}+\frac{\overline{PC}^{2}-\overline{PP'}^{2}}{\overline{CA}.\overline{CB}}=1$$

چون هریك از سه‌کسر را بـه دو کسر تفکیك‌کنیم و سه‌کسری راکه صورت آنها

$\overline{PP'}^2$ است به‌طرف راست ببریم ، با استفاده از رابطهٔ شال رابطهٔ استوارت بدست می‌آید.]

۸ـ خطی بر G مرکز ثقل مثلث ABC می‌گذرد و ضلعهای این مثلث را در X ، Y ، Z قطع می‌کند. ثابت کنید که:

$$\frac{1}{\overline{GX}}+\frac{1}{\overline{GY}}+\frac{1}{\overline{GZ}}=0$$

۹ـ ارتفاع کوهی از سطح زمین ۱۶۰۹ متر است. قطر کرهٔ زمین را ۱۲۷۴۳/۳ کیلومتر می گیریم. اگر در قلهٔ این‌کوه باشیم افق را به‌چه شعاع می بینیم؟

۲.۲ـ محور اصلی دودایره

اریک تمپل بل[1] دریکی‌ازکتابهایش به‌نام«مردان ریاضیات»[2] چنین نقل‌کرده است: شاهزاده‌خانم الیزابت به هنگام اقامتش در خارج از بوهم موفق شدکه با استفاده از مختصات، مسئله‌ای از هندسهٔ مقدماتی را حل کند. در صورتی که رنه‌دکارت[3] فیلسوف و ریاضیدان معروف‌که معلم این شاهزاده خانم بوده اظهار داشته است‌که خودش برای حل آن مسئله یك ماه تلاش‌کرده و توفیقی نیافته است. بل می گویدکه «این نمونه‌ای خوب ازآن مسئله‌ها است که درحل آنها به‌صورت غیرمستقیم از هندسهٔ مختصاتی استفاده می‌شود» .

[یادآوری این نکته لازم است که دکارت را واضع هندسهٔ تحلیلی می‌شناسند. اما به گمانی پیرفرما[4] واضع هندسهٔ تحلیلی بوده و در نامه‌ای برای دکارت اصول آنرا شرح داده است.]

ممکن است‌که حل یك‌مسئله با روش معین بهترین یا سریعترین راه حل آن نباشد. قضیه‌ای که در زیر بیان می‌شود از هردوراه هندسهٔ ناب وهندسهٔ تحلیلی اثبات می‌شود که هیچکدام مشکلتر از دیگری نیست. اما با استفاده ازروش تحلیلی برخی نتیجه‌های جالب ازآن بدست می‌آید.

قضیهٔ ۱،۲.۲ـ مکان هندسی نقطه‌هایی که نسبت به‌دو دایرهٔ با مرکزهای متفاوت قوتهای برابر دارند، خطی است راست عمود برخط‌المرکزین‌آن دو دایره.

روش مختصاتی را بکار می‌بریم . اگر d فاصلهٔ دو نقطهٔ (x و y) و (a و b)

1- Eric Templ Bell

۲- این‌کتاب توسط دکتر حسن صفاری زیر عنوان «ریاضیدانان نامی» به‌فارسی ترجمه و از طرف مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر چاپ و پخش شده است.

3- René Descartes. 4- Pierre Fermat.

باشدداریم:

$$d^2=(x-a)^2+(y-b)^2$$

بنا براین قوت نقطهٔ $(x \text{ و } y)$ نسبت به‌دایرهٔ بـه مرکز $(a \text{ و } b)$ و به‌شعاع r می‌شود:

$$d^2-r^2=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2$$

که با فرض $a^2+b^2-r^2=c$ این‌مقدار برابر می‌شود با:

$$x^2+y^2-2ax-2by+c \qquad (1)$$

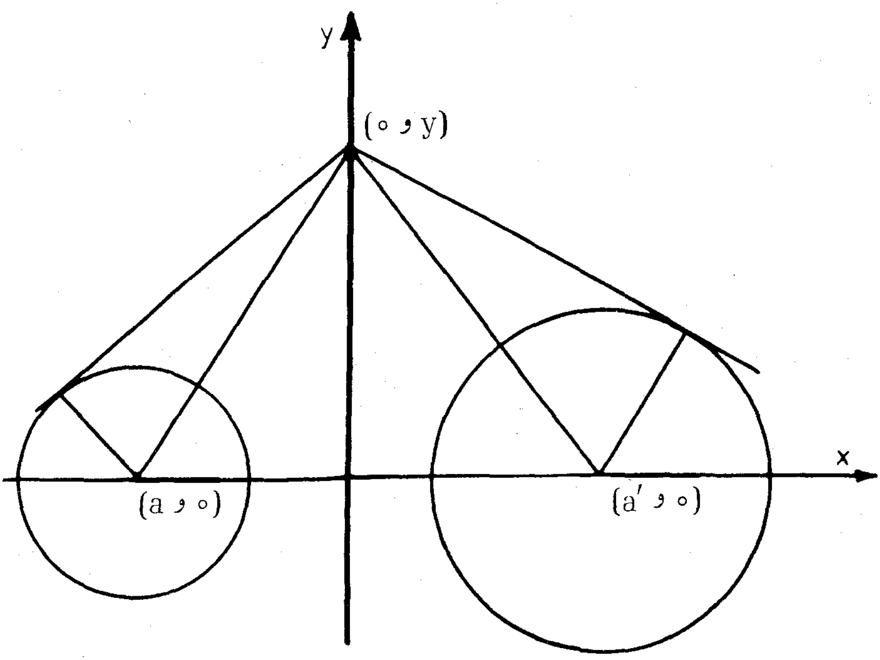
قوت نقطهٔ $(x \text{ و } y)$ نسبت به‌دایرهٔ دیگربه‌مرکز $(a' \text{ و } b')$ وبه‌شعاع r' می‌شود:

$$x^2+y^2-2a'x-2b'y+c' \qquad (2)$$

از برابری مقادیر (۱) و (۲) معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ $(x \text{ و } y)$ به‌صورت زیر بدست می‌آیدکه معادلهٔ یك خط راست است:

$$(a'-a)x+(b'-b)y=\frac{1}{2}(c'-c)$$

هرگاه دستگاه مختصات‌را به‌گونه‌ای انتخاب‌کنیم‌که محور x ها برخط‌المرکزین دو دایـره واقع باشد، در این صورت بـا فرض آنکه $(o \text{ و } a)$ و $(o \text{ و } a')$ مختصات



(شکل ۲.۲ ، الف)

مرکزهای دودایره باشد به‌شرط $a \neq a'$ معادلهٔ مکان می‌شود: $x = \frac{c' - c}{2(a' - a)}$

که خطی است عمود برمحور x ها ، یعنی عمود برخط‌المرکزین دودایره.

درحالت خاص‌که محور x هـا منطبق برخط‌المرکزین و محور y ها منطبق بر مکان مزبورانتخاب‌شود (شکل ۲.۲، الف)، معادلهٔ مکان $x = 0$ خواهد بود. دراین‌حالت هرنقطهٔ به‌مختصات (y و 0) نسبت به‌هریك از دودایره دارای قوت $y^2 + c$ می‌باشد.

مکان هندسی نقطه‌هایی که نسبت به دودایرهٔ بامرکزهای متفاوت‌قوتهای برابردارند، محور اصلی آن دودایره نام دارد.

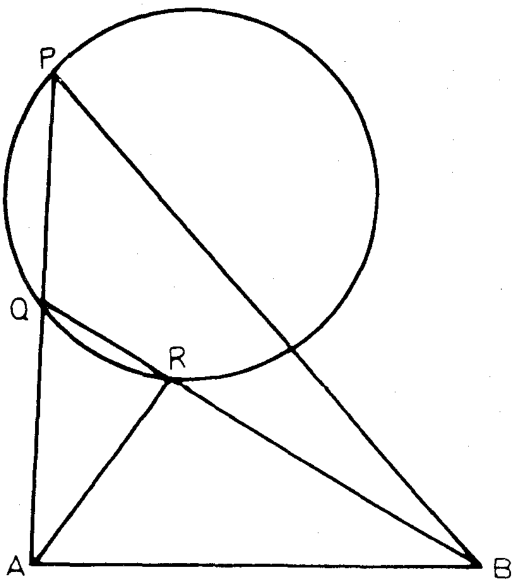
اگردودایره متقاطع باشند محوراصلی‌آنها برنقطه‌های تقاطع‌آنها می‌گذرد ، زیرا هریك ازاین نقطه‌ها نسبت به هریك ازدودایره قوت برابرصفردارد. اگر دودایره برهم مماس باشند،محوراصلی‌آنها آن مماس مشترکی‌ازآنهاست‌که برنقطهٔ تماس‌آنها می‌گذرد.

تمرینها

۱ــ مکان هندسی نقطه‌هایی را بیابیدکه ازآنها دومماس برابر بردو دایرهٔ داده شده رسم می‌شود.

۲ــ دو دایرهٔ متخارج چهار مماس مشترك دارند. ثابت‌کنیدکه وسطهای این چهار مماس بریك خط راست واقعند.

۳ــ شش مثلث PAB ، QAB ، RAB ، $P'AB$ ، $Q'AB$ و $R'AB$ با هم متشابهند و همه در ضلع AB مشترکند. در شکل (۲.۲ ، ب) فقط سه تا ازاین مثلثها رسم شده است‌که سه‌تای دیگر از تقارن نسبت به عمود منصف AB بدست می‌آیند. ثابت‌کنیدکه رأسهای این مثلثهاکه روی AB نیستند ، یعنی نقطه‌های P ، Q ، R ، P' ، Q' و R'، روی یك دایره واقعند.



(شکل ۲.۲ ، ب)

۴ــ هرگاه a و b دومقدار معلوم باشند ، معادلهٔ:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

به ازای چه مقادیر از c یك دایره را مشخص می‌کند.

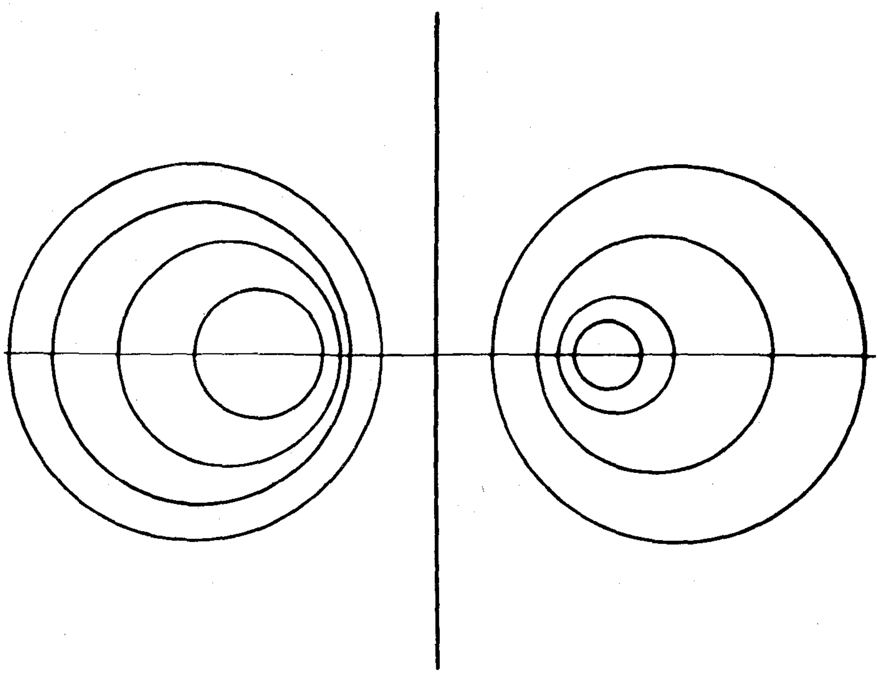
۵ـ دودایرهٔ با مرکزهای متفاوت داده شده است. برای ترسیم محور اصلی آنها روشی بیابیدکه دودایره درهروضعی نسبت به‌هم باشندآن روش قابل اعمال باشد.

۳.۲ـ دستهٔ دایره‌ها

اگر c مقدارثابت و a متغیرباشدکه‌همهٔ مقادیرحقیقی، به‌استثنای مقادیر محصور بین $\pm\sqrt{c}$ به شرط $c > 0$، را بتواند قبول کند، معادلهٔ:

$$x^{2}+y^{2}-2ax+c=0$$

دایره‌های بیشماری را تعیین می‌کندکه مرکزهای همهٔ آنها بریك خط راست واقعند و محور اصلی دو به دو از آنها خط ثابت است. این دایره‌های بااین ویژگیها را «دستهٔ دایره‌ها» می‌نامند. اگر c منفی‌باشد همهٔ دایره‌های دسته محور yها را در دو نقطهٔ به عرضهای $\pm\sqrt{-c}$ قطع می‌کنند. دراین حالت هردایره‌که براین‌دونقطه بگذرد جزء دستهٔ‌آن دایره‌ها است. اگر $c=0$ باشد دستهٔ دایره‌ها شامل همهٔ دایره‌هایی است که درمبدأ مختصات برمحور yها مماسند. در حالتی‌که $c > 0$ باشد دستهٔ دایره‌ها مطابق با شکل (۳.۲ ، الف) می‌باشد.



(شکل ۳.۲ ، الف)

اگر سه دایره چنان باشندکه هرسه به یك دستهٔ دایره‌ها متعلق نباشند و دو به دو با مرکزهای متفاوت باشند، دوبه دو دارای یك محوراصلی می‌باشند که‌رویهم سه‌محوراصلی برای‌آنها وجود دارد. اگر دوتا ازاین سه محوراصلی متقاطع باشند محوراصلی سومی نیز برنقطهٔ تقاطع‌آنها می‌گذرد ،زیرا این نقطه نسبت به‌هرسه دایره دارای یك قوت است. هرگاه دوتا ازمحورهای‌اصلی باهم موازی باشند، سومی نیز باآنها موازی است. بنابراین:

قضیهٔ ۱،۳۰۲- اگر مرکزهای سه دایره رأسهای مثلثی باشند ، فقط یك نقطه وجود داردکه نسبت به هرسه دایره دارای یك قوت است. این نقطه همان نقطهٔ تقارب سه محور اصلی دوبه‌دوی دایره‌ها است و مرکز اصلی سه دایره نام دارد.

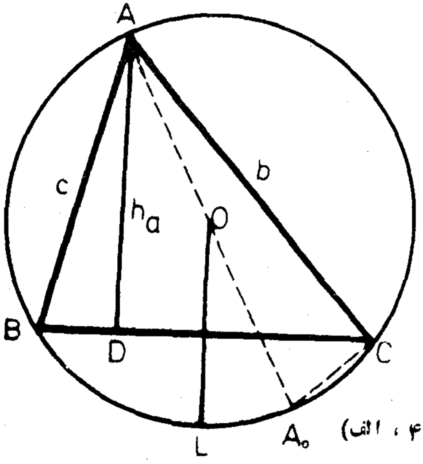
تمرینها

۱ــ دودایره در T مماس داخلند. AB وتری‌ازدایرهٔ بزرگتر است‌که بردایرهٔ کوچکتردر P مماس است. ثابت‌کنیدکه TP نیمساززاویهٔ ATB است.

۲ــ سه دایره دوبه‌دو متخارجند و O مرکزاصلی آنها است. از O شش مماس براین دایره‌ها رسم می‌شود. ثابت‌کنیدکه شش نقطهٔ تماس بریك دایره واقعند.

۴.۲ــ تتمه دربارهٔ ارتفاعها ومرکزارتفاعی مثلث

در بخشهای گذشته دربارهٔ دایرهٔ محیطی مثلث گفته‌هایی داشتیم ، اما اهمیت این دایره به اندازه‌ای است که گفتگوی دوباره ازآن ارزش خواهد داشت . مطابق با شکل (۴.۲ ، الف) نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است‌که $AA_\circ$ قطراین دایره و $OL=R$ شعاعی ازآن است که‌بر BC عمود می‌باشد و $AD=h_a$ ارتفاع وارد بر BC است . دوزاویهٔ ABC و $AA_\circ C$ باهم برابرند ودر نتیجه دو مثلث ABD و $AA_\circ C$ متشابهند و داریم:



(شکل ۴.۲ ، الف)

$$\frac{h_a}{b}=\frac{c}{۲R} \implies h_a=\frac{bc}{۲R} \qquad (۱،۴.۲)$$

اکنون اگردوزاویهٔ متساوی:

$$\widehat{A_\circ AC}=\widehat{BAD}=\frac{\pi}{۲}-B$$

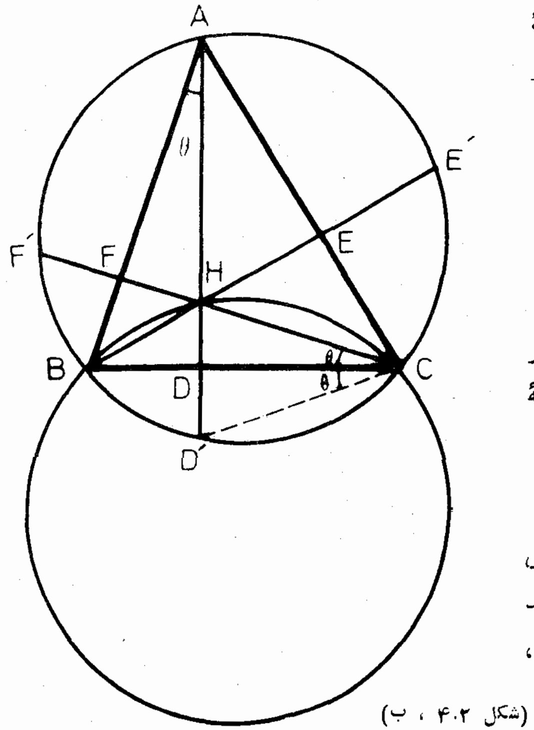
را از زاویهٔ BAC کم کنیم نتیجه می‌شود:

$$\widehat{DAA_\circ}=A-۲\left(\frac{\pi}{۲}-B\right)=A+۲B-(A+B+C)=B-C$$

این رابطه را مطابق با شکل بالا به فرض $C > B$ بدست آوردیم. هرگاه $B < C$ باشد دوزاویهٔ متساوی $A_\circ AC$ و BAD جزء مشترك دارند ودراین حالت مقدار زاویهٔ DAO برابر با $C-B$ بدست می‌آید. بنابراین درحالت کلی داریم:

$$\widehat{DAO}=|B-C| \qquad (۲،۴.۲)$$

درشکل (۴.۲ ، ب) سه ارتفاع AD ، BE و CF ازمثلث ABC را امتداد داده‌ایم تا با دایرهٔ محیطی مثلث به ترتیب‌در D' ، E' و F' برخورد کرده‌اند و H مرکزارتفاعی مثلث می‌باشد. دوزاویهٔ DAB و FCB برابرند زیرا هرکدام متمم زاویهٔ B می‌باشند. زاویهٔ BCD' نیز با این زاویه‌ها برابراست ، زیرا متمم زاویهٔ D' است و D' با B برابراست. پس دومثلث قائم‌الزاویهٔ CDH و CDD' باهم برابرند و ازآن نتیجه می‌شود:



(شکل ۴.۲ ، ب)

$$HD=DD' \qquad (۳،۴.۲)$$

به روش مشابه نتیجه خواهد شد:

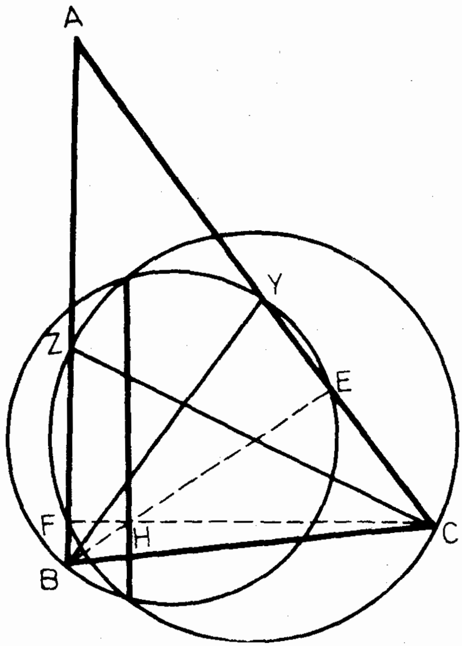
$$HE=EE' \quad \text{و} \quad HF=FF'$$

چهارگوشهٔ ABDE دردایرهٔ به‌قطر AB محاط است پس بنابه قضیهٔ (۱،۱.۲) داریم:

$$HA\times HD=HB\times HE$$

با توجه به اینکه چهار گوشه‌های BCEF و CAFD نیز محاطی‌اند وبا بدست‌آوردن رابطه‌های مشابه ، کلاً خواهیم داشت:

$$HA\times HD=HB\times HE=HC\times HF \qquad (۴،۴.۲)$$



اکنون نقطه‌های X ، Y و Z را به ترتیب روی ضلعهای BC ، CA و AB درنظرمی گیریم (روی شکل ۴.۲ ، پ فقط دونقطهٔ Y و Z نموده شده است) . هرگاه خطهای سوائی AX ، BY و CZ را قطر قراردهیم‌ودایره‌هایی رسم کنیم ، این دایره‌ها به ترتیب بر D ، E و F پاهای ارتفاعهای مثلث می گذرند. پس سه حاصل‌ضرب رابطهٔ(۴،۴.۲) به‌ترتیب قوتهای نقطهٔ H نسبت به این دایره‌ها می‌باشند. چون این سه حاصل‌ضرب باهم برابرند پس H نسبت به سه دایرهٔ مزبور یك قوت دارد وبنابراین مرکزاصلی سه دایرهٔ مزبورمی‌باشد. (شکل ۴.۲ ، پ)

ازآنچه گفته‌شد دوقضیهٔ‌زیرنتیجه می‌شودکه دردورانهای مختلف به‌صورت مسئله‌هایی بیان می‌شده‌اند:

قضیهٔ ۵،۴.۲-هرگاه دوخط سوائی ازمثلثی را قطر قرار دهیم ودایره‌هایی رسم‌کنیم، محور اصلی دودایرهٔ مرسوم بر H مرکز ارتفاعی مثلث می‌گذرد.

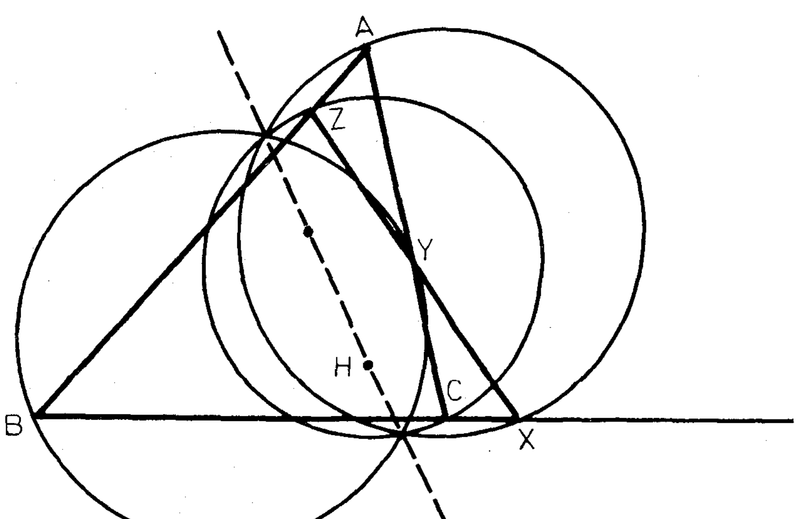
قضیهٔ ۶،۴.۲- هرگاه سه‌خط‌سوائی ازمثلثی را قطر قرار دهیم ودایره‌هایی رسم‌کنیم، که به یك دسته دایره‌ها متعلق نباشند ، مرکز اصلی این سه دایره همان مرکز ارتفاعی مثلث است.

می‌توانیم نتایج بالارا ازراه بیان سادهٔ زیربدست‌آوریم: اگر AD ارتفاع وارد از رأس A در مثلث ABC باشد، هردو دایره‌ای که قطرهایشان دوخط سوائی وارد ازرأس A باشد بر A و D می‌گذرند، حالت‌خاص‌دایره‌های‌به‌قطرهای AB و AC، پس این‌دایره‌ها دسته‌ای تشکیل می‌دهندکه AD محور اصلی مشترك‌آنها است. همچنین ارتفاع وارد از رأس B محور اصلی دسته دایره‌هایی است که قطرهای آنها خطهای سوائی وارد از رأس B می‌باشند . بالاخره ، ارتفاع وارد از رأس C محور اصلی دایره‌هایی است‌که قطرهای‌آنها خطهای سوائی وارد از رأس C می‌باشند. بنابراین سه ارتفاع مثلث در نقطه‌ای متقاربند که مرکز اصلی دایره‌های به قطرهای خطهای سوائی مثلث می‌باشد.

در بیان قضیهٔ(۶،۴.۲) به این نکته اشاره شد که «سه دایره به یک دسته دایره‌ها متعلق نباشند». این موضوع ایجاب می کند که خطهای سوائی قطرهای سه دایره هرسه از یک رأس رسم نشده باشند. اما این موضوعی است کــه باید دنبال شود و قضیهٔ آینده نیز به همین منظور است.

هرگاه قضیهٔ (۶،۴.۲) را درمورد سه خط سوائی AX ، BY و CZ بکار برده و عاملهای دیگری را دخالت دهیم، مسئله‌های جـالبی را نتیجه خواهیم گرفت. هرچند که لازم نیست این سه خط سوایی متقارب باشند اما وقتی چنین باشد موضوع پیچیده‌تر خواهد بود. هرگاه دایره‌ها را به قطرهای میانه‌های مثلث، ارتفاعها یا نیمسازهای زاویه‌های آن در نظر بگیریم، در این حال مثلا می‌توانیم ثابت کنیم که مرکز اصلی آنها مرکز ارتفاعی مثلث است.

حالت بسیار جالب وقتی است که سه خط سوائی AX،BY و CZ متقارب نباشند اما سه نقطهٔ X ، Y و Z بر یک استقامت واقع باشند که در این صـورت، مانند شکل (۴.۲، ت)، حداقل یکی از سه نقطهٔ مزبور بـر امتداد ضلع مثلث قرار خواهد داشت. می توان مثلث AYZ را درنظر گرفت که برای آن سه نقطهٔ B و C و X بر یک استقامتند، یـا اینکه مثلث BZX را با سه نقطهٔ A و C و Y، یا اینکه مثلث CXY را با سه نقطهٔ A و B و Z . به‌هرحال نتیجه می‌شود کــه دایره‌های به‌قطرهای AX ، BY و CZ چنانند که محورهای اصلی دو به‌دو از آنها بر H مرکز ارتفاعی مثلث ABC و



(شکل ۴.۲ ، ت)

همچنین برمرکزهای ارتفاعی سه‌مثلث دیگر می‌گذرد. چون این‌چهار مرکز ارتفاعی متمایزند، پس محورهای اصلی دوبه‌دوی دایره‌ها برهم منطبقند وبنابراین:

قضیهٔ ۷،۴.۳- هرگاه چهار خط درشش نقطهٔ A، B، C، X، Y و Z متقاطع باشند به‌گونه‌ای که مجموعه‌های نقطه‌های به صورت سه‌تائیهای XBC، YCA، ZAB، XYZ بریك استقامت باشند، دایره‌های به‌قطرهای AX، BY و CZ به‌یك دسته دایره‌ها تعلق دارند وچهار مرکز ارتفاعی مثلثهای AYZ، BZX و CXY و ABC بریك خط راست واقعند[1].

درشکل (۳.۱،پ) مشاهده می‌شود که H مرکز ارتفاعی مثلثABCاست. همچنین مشاهده خواهد شد که A مرکز ارتفاعی مثلث HBC، B مرکز ارتفاعی مثلث HCA و C مرکز ارتفاعی مثلث HAB است. شکل ABCH چهارگوشهٔ ارتفاعی نام دارد. در این شکل با در نظر گرفتن هر سه تائی از چهار نقطهٔ مفروض، چهار مثلث وجود دارد که دایره‌های محیطی‌آنها شعاعهای برابر دارند. برای اثبات این حکم می‌توان رابطهٔ (۳.۴.۲) را روی شکل (۴.۲،ب) اعمال کرد و از برابری دو مثلث HBC و D′BC نتیجه گرفت که دایره‌های محیطی دومثلث ABC و HBC نسبت به BC قرینه‌اند و با هم برابرند. به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که دایره‌های محیطی مثلثهای HCA و HAB نیز با دایره‌های محیطی مثلث ABC برابرند.

تمرینها

۱ــ ارتفاعهای مثلث را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی‌آن را قطع کنند. سه‌نقطهٔ تلاقی مثلثی‌تشکیل‌می‌دهند. ثابت کنید که‌این‌مثلث بامثلث‌ارتفاعی مثلث مفروض‌متشابه است.

۲ــ نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC را امتداد می‌دهیم تادایرهٔ محیطی مثلث را در L، M و N قطع کنند. اندازه‌های زاویه‌های مثلث LMN را برحسب

۱- [یادداشت از ح. غیور: این‌قضیه درچهار ضلعی‌کامل به‌صورت زیر درمی‌آید:

در چهار ضلعی‌کامل، سه‌دایرهٔ متمایزکه به‌قطر هریك ازسه قطر چهارضلعی رسم شوند جزء دسته دایره‌ای هستند که محور آن از مرکزهای ارتفاعی چهار مثلث‌که با ضلعهای چهارضلعی پدید می‌آیند می‌گذرد.

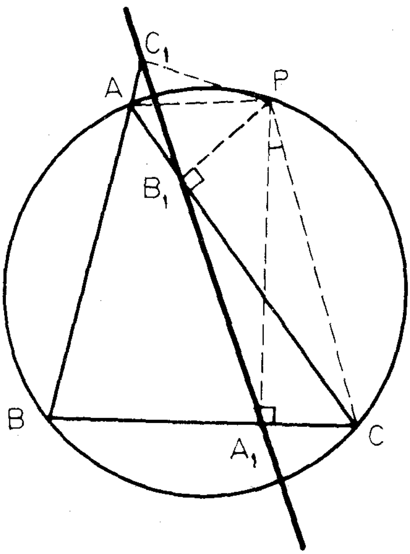
از این قضیه بلافاصله به‌این قضیهٔ مهم می‌رسیم‌که در چهارضلعی‌کامل وسطهای سه‌قطر بریك استقامتند.

طریقهٔ اثبات معروف وکلاسیك آن بطور مستقیم این است‌که سه‌ارتفاع یکی از چهار مثلث را رسم می‌کنیم و به‌موجب رابطهٔ (۴.۴.۲) ثابت می‌کنیم‌که قوت مرکز ارتفاعی این مثلث نسبت به‌سه‌دایره یکسان است.]

اندازه‌های زاویه‌های مثلث ABC بدست آورید.

۵.۲ـ خط سمسن (= سِمْسن)

اگر از نقطهٔ دلخواه P واقع در صفحهٔ مثلث ABC عمودهای PA_1، PB_1 و PC_1 را به‌ترتیب برضلعهای BC، CA و AB رسم کنیم، سه نقطهٔ A_1، B_1 و C_1 معمولاً مثلثی تشکیل می‌دهند. درپیش در بند ۹.۱ گفتیم که این مثلث را مثلث عمودی نقطهٔ P می‌نامیم و ویژگیهای آن‌را بررسی کردیم. اکنون حالتی را درنظر می‌گیریم که P بردایرهٔ محیطی مثلث واقع باشد.



(شکل ۵.۲.۱ الف)

برای پرهیز از درهمی شکل، P را برکمان CA و نزدیکتر به A اختیار کرده‌ایم. در حالتهای دیگر می‌توانیم باتبدیل دوری نقطه‌های A، B و C نتیجهٔ یکسان بدست آوریم. با توجه به‌ویژگی چهارگوشهٔ محاطی داریم:

$$\widehat{APC} = \pi - B = \widehat{C_1PA_1}$$

اگرازاین دوزاویهٔ متساوی زاویهٔ APA_1 را کنار بگذاریم نتیجه می‌شود که دو زاویهٔ A_1PC و C_1PA با هم برابرند. اما در چهارگوشهٔ محاطی A_1CPB_1 دو زاویهٔ A_1PC و A_1B_1C با هم برابرند. همچنین در چهارگوشهٔ محاطی AB_1PC_1 دو زاویهٔ C_1PA و C_1B_1A با هم برابرند. بنابراین دوزاویهٔ AB_1C_1 و A_1B_1C باهم برابرند ودرنتیجه سه‌نقطهٔ C_1، B_1 و A_1 بریك خط راست واقعند. دراین‌حالت، مثلث عمودی نظیر نقطهٔ P به‌صورت خط مستقیم درآمده‌است.

برعکس، اگر نقطهٔ P چنان باشدکه مثلث عمودی نظیرآن نسبت به‌مثلث ABC به‌وضع خط راست باشد، بدیهی است که P داخل یکی از زاویه‌های مثلث ABC و درآن‌سوی ضلع مقابل بدآن زاویه قراردارد. در این صورت با استدلال درجهت عکس استدلال بالا نتیجه خواهد شد که P بردایرهٔ محیطی مثلث واقع است. بنابراین می‌توان گفت:

قضیهٔ ۱،۵.۲- برای آنکه پاهای عمودهای وارد از یك نقطه بر سه ضلع مثلث بر یك خط راست واقع باشند لازم و کافی است که آن نقطه بر دایرهٔ محیطی مثلث قرار داشته باشد.

خطی که این سه پای عمود بر آن واقعند خط سمسن نقطهٔ مزبور نسبت به آن مثلث نام دارد. رابرت سمسن[1] (۱۷۶۸ - ۱۶۸۷) نه تنها در هندسه بلکه در حساب کارهای گوناگون انجام داده است. به عنوان نمونه، ثابت کرده است که اگر f_n جملهٔ n ام رشتهٔ فیبوناچی[2] باشد:

$$۱،۱،۲،۳،۵،۸،۱۳،۲۱،۳۴،۵۵،\cdots،f_n،\cdots$$

خواهیم داشت:

$$f_{n-1}\cdot f_{n+1}-f_n^2=(-1)^n$$

خط سمسن از این جهت به او منسوب است که با ادراکات هندسی وی جور می‌آید، اما جستجوی آن در آثار وی کار بیهوده‌ای است. درحقیقت کشف این خاصیت در ۱۷۹۷ توسط ویلیام والاس[3] انجام گرفته است.

تمرینها

۱ـ اگر مثلثی در یك زاویه منفرجه باشد، آیا اثباتی که برای قضیهٔ (۱،۵.۲) بکار رفت دربارهٔ آن نیز صادق است؟

۲ـ کدام نقطه از دایرهٔ محیطی مثلث انتخاب شود تا خط سمسن نظیر آن بر CA واقع باشد؟

۳ـ آیا ممکن است که نقطه‌ای برخط سمسن نظیر خود واقع باشد؟ دراین‌صورت این خط کدام است؟

۴ـ از نقطهٔ A مماسهای AB و AC بردایره‌ای رسم شده است و از نقطهٔ P واقع بردایره عمودهای PA_1 ، PB_1 و PC_1 برخطهای BC، CA و AB رسم شده است. ثابت کنید که:

$$\overline{PA_1}^2=PB_1.PC_1$$

۶.۲ـ قضیهٔ بطلمیوس[4] و تعمیم آن

با استفاده از خواص خط سمسن می‌توان قضیه‌ای بسیارمهم به شرح زیر نتیجه گرفت.

1- Robert Simson.
2- Fibonacci.
3- William Wallace.
4- Ptolémée

دراین باره همان‌شکل(۵.۲ ، الف)را درنظرمی گیریم. هرچندکه مثلث عمودی $A_1B_1C_1$ نظیر نقطهٔ P به وضع خاص به صورت خط راست در آمده است ، اما بازهم قضیهٔ (۱،۹.۱) دربارهٔ اندازه‌های ضلعهای‌آن صادق است. بنابراین داریم:

$$B_1C_1=\frac{a\cdot AP}{۲R} ، A_1C_1=\frac{b\cdot BP}{۲R} ، A_1B_1=\frac{c\cdot CP}{۲R}$$

وچون $A_1B_1+B_1C_1=A_1C_1$ می‌باشد. پس:

$$c\cdot CP+a\cdot AP=b\cdot BP$$

به عبارت دیگر:

$$AB\cdot CP+BC\cdot AP=AC\cdot BP$$

چهارضلعی ABCP محاطی‌است، بنابراین،قضیهٔ زیرکه به قضیهٔ بطلمیوس معروف است، محقق می‌باشد:

قضیهٔ ۱،۶.۲- در هر چهارضلعی محاطی، مجموع حاصل ضربهای ضلعهای روبرو برابراست باحاصلضرب دوقطر.

عکس قضیهٔ بطلمیوس درحالت‌کلی صادق است ، اما باید دربیان‌آن به نکتهٔ دقیق زیر توجه داشت : هرگاه نقطهٔ B_1 روی پاره خط A_1C_1 نباشد ، برای هروضع آن باید تساوی $A_1B_1+B_1C_1=A_1C_1$ را با نامساوی $A_1B_1+B_1C_1>A_1C_1$ جانشین ساخت. دراین صورت خواهیم داشت:

$$AB\cdot CP+BC\cdot AP>AC\cdot BP$$

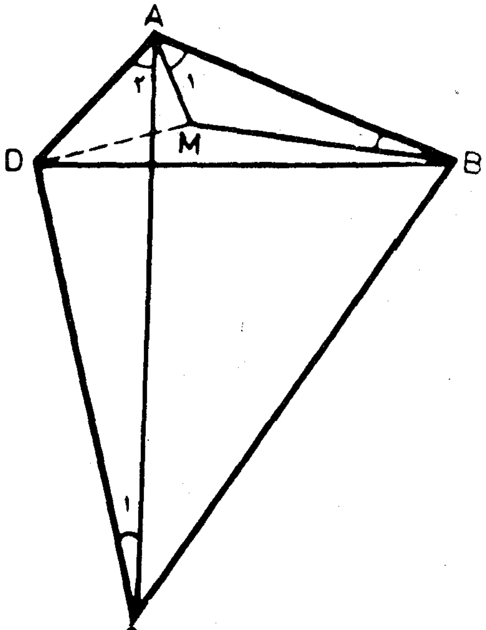
بنابراین:

قضیهٔ ۲،۶.۲- هرگاه P نقطه‌ای غیرواقع برکمان CA از دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد داریم:

$$AB\cdot CP+BC\cdot AP>AC\cdot BP$$

[**یادداشت ازح. غیور:** گویا مؤلفان محترم‌که اثبات قضیهٔ بطلمیوس‌را ازخط‌سنسن و خاصیت مثلث عمودی نتیجه گرفته‌اند برای اثبات تعمیم قضیه و بویژه عکس آن بوده است.با برهان مقدماتی قضیهٔ بطلمیوس (بااستفاده ازتشابه) ، بلافاصله عکس وتعمیم‌آن نتیجه می‌شود:

در چهـار ضـلعی ABCD چنانکه در شکل (۶.۲ ، الف) دیده می‌شود . زاویهٔ A_1 برابر بازاویهٔ A_2 و زاویهٔ B_1 برابر با زاویهٔ C_1 جدا شده است که از برخورد ضلعهای غیرمشترك این دو زاویه نقطهٔ M بدست آمده است. از تشابه دومثلث AMB و ADC نتیجه می‌شود:



(شکل ۶.۲ ، الف)

$$\frac{BM}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{AM}{AD} \qquad (۱)$$

$$AB\cdot DC=AC\cdot BM \qquad (۲)$$

دومثلث AMD و ABC درحالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویهٔ بین آن دو ضلع متشابهند و خواهیم داشت:

$$BC\cdot AD=AC\cdot MD \qquad (۳)$$

از جمع دوطرف تساویهای (۲) و (۳) بدست می‌آید:

$$AB\cdot DC+BC\cdot AD=AC(MB+MD) \qquad (۴)$$

اگر چهارضلعی محاطی باشد زاویهٔ ABD با زاویهٔ C_1 برابر بوده و M روی DB واقع می‌شود ورابطهٔ (۴) چنین می‌شود:

$$AB\cdot DC+BC\cdot AD=AC\cdot BD \qquad (۵)$$

اگرچهارضلعی محاطی نباشد $MB+MD>DB$ وازرابطهٔ (۴) نتیجه می‌شود:

$$AB\cdot DC+BC\cdot AD>AC\cdot BD \qquad (۶)$$

ازرابطه‌های (۵) و (۶) تعمیم قضیهٔ بطلمیوس به شرح زیربدست می‌آید:

درهرچهارضلعی، مجموع حاصل‌ضربهای‌دوضلع‌روبرو بزرگتریا برابرباحاصل‌ضرب دوقطر آن است:

$$AB\cdot DC+BC\cdot AD\geqslant AC\cdot BD$$

عکس قضیهٔ بطلمیوس - هرگاه درچهارضلعی ABCD رابطهٔ (۵) برقرارباشد چهارضلعی محاطی است، زیرا اگرچهارضلعی محاطی نباشد رابطهٔ (۶) برقرارخواهد بودکه خلاف فرض است.

بعد ازاین روش مقدماتی، بهترین روش اثبات قضیهٔ بطلمیوس وعکس وتعمیم آن با انعکاس انجام می‌گیرد.]

تمرینها

۱ــ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ونقطهٔ P واقع در صفحهٔ آن داده شده است،

برحسب آنکه P برکمان CA ازدایرهٔ محیطی مثلث واقع باشد یا نباشد، ثابت کنید که داریم:

$$PC+PA=PB \quad \text{یا} \quad PC+PA>PB$$

۲ــ هرگاه P روی کمان CD از دایرهٔ محیطی مربع $ABCD$ واقع باشد. ثابت کنید که:

$$PA(PA+PC)=PB(PB+PD)$$

۳ــ متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داده شده است. دایره‌ای بر A می‌گذرد و با ضلعهای AB و AD و قطر AC به ترتیب در P، R و Q برخورد می‌کند. ثابت کنید که:

$$AP \cdot AB+AQ \cdot AD=AR \cdot AC$$

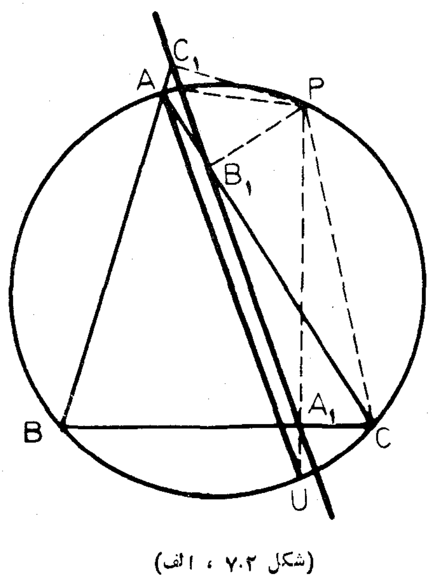
راهنمایی: قضیهٔ بطلمیوس را درچهارضلعی $APQR$ بکاربرده وازتشابه دومثلث PQR و ABC استفاده کنید.

۷.۲ــ تتمه دربارهٔ خط سمسن

خط سمسن خاصیتهای جالب بسیار دارد که برخی از آنها شایستهٔ بررسی است. مطابق با شکل (۷.۲، الف)، که همان شکل (۵.۲، الف) است که در آن عمود PA_1 را امتداد داده‌ایم تا با دایرهٔ محیطی مثلث در U برخورد کرده است و AU را رسم کرده‌ایم. در چهار ضلعیهای محاطی $PAUC$ و PB_1A_1C داریم:

$$\widehat{PUA}=\widehat{PCA}$$

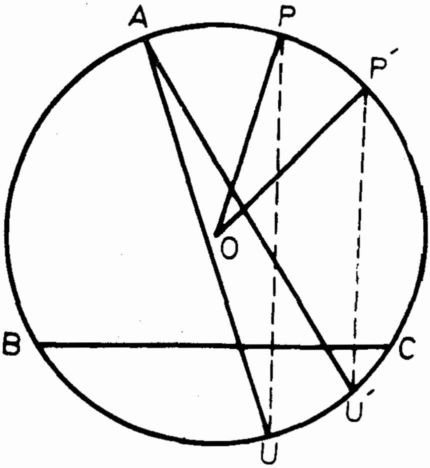
$$=\widehat{PCB_1}=\widehat{PA_1B_1}$$



(شکل ۷.۲، الف)

بنابراین خط AU با خط سمسن $A_1B_1C_1$ موازی است.

اکنون علاوه برنقطهٔ P، نقطهٔ دیگر P' ازدایرهٔ محیطی مثلث ABC را درنظر



(شکل ۷.۲ ، ب)

می گیریم وخطهای سمسن نظیر آنهارا باهم مقایسه می‌کنیم . با توجه به اینکه خطهای سمسن نظیر نقطه‌های P و P′ به ترتیب با خطهای AU و AU′ موازیند. پس زاویهٔ بین این خطهای سمسن با زاویهٔ UAU′ برابر است . اما کمان UU′ با کمان PP′ برابراست زیرا دو وتر PU و P′U′ باهم موازیند ، شکل (۷.۲ ، ب). بنابراین:

$$\widehat{UAU'}=\frac{۱}{۲}\widehat{UU'}=\frac{۱}{۲}\widehat{PP'}=\frac{۱}{۲}\widehat{POP'}$$

وهرگاه صفحه را جهت‌دار گرفته واندازهٔ جبری زاویه‌ها را بکار ببریم:

$$\widehat{UAU'}=\frac{۱}{۲}\widehat{UU'}=-\frac{۱}{۲}\widehat{PP'}=-\frac{۱}{۲}\widehat{POP'}$$

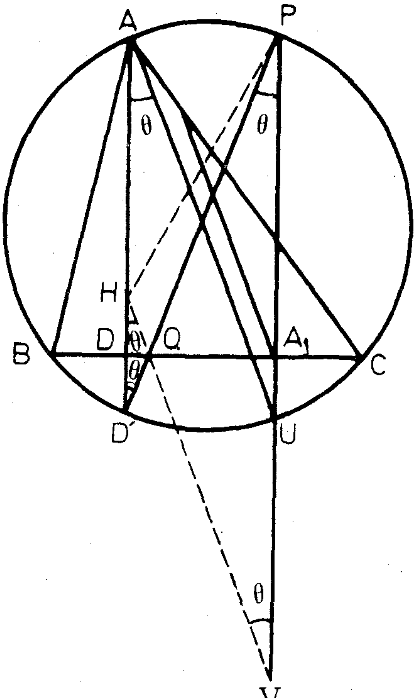
بنابراین قضیهٔ زیرثابت شده است:

قضیهٔ **۱،۷.۲-** نسبت بـه مثلث ABC خطهای سمسن نظیر دو نقطهٔ P و P' زاویه‌ای می‌سازند که اندازهٔ آن نصف اندازهٔ کمان PP' است.

هرگاه P دایرهٔ محیطی مثلث را با سرعتی ثابت بپیماید ، در این صورت خط AU حول نقطهٔ A با سرعت زاویه‌ای‌ثابت می‌چرخد به‌قسمی‌که U دایره را درجهت عکس حرکت P می‌پیماید ، و وقتی‌که P یك دور کامل محیط دایره را بپیماید خط AU درامتداد نخستین خود اما درجهت عکس قرار خواهد گرفت . دراین ضمن خط سمسن نیزحول مرکزی متغیردوران می‌کند و پوش آن منحنی متقارنی است‌که دلتوئید یا هیپوسیکلوئید اشتینر نام دارد. به سادگی و به گونهٔ نقاشیهای متحرك‌که به فیلم تبدیل می‌شوند می‌توان این تغییرمکانها را دنبال کرد.

اکنون شکل (۷.۲ ، پ) را در نظر می گیریم کـه ترکیبی کامل شده از شکلهای (۴.۲ ، ت) و (۷.۲ ، الف)می‌باشد. در این شکـل از P به H مرکز ارتفاعی مثلث وصل شده و PD′ رسم شده است که با BC در Q برخوردکرده است. همچنین HQ رسم شده است‌که امتداد PU را در V قطع کرده است. خطهای PV و HD′ بر

BC عمودند و D' قرینهٔ H نسبت به BC است. پس مثلثهای QHD' و QPV متساوی‌الساقین می‌باشند و درنتیجه HV قرینهٔ $D'P$ نسبت به BC است وچون:



(شکل ۷.۲ ، ب)

$$\widehat{D'HV} = \widehat{PVH}$$
$$= \widehat{D'PU} = \widehat{D'AU}$$

پس HV با AU ودرنتیجه با خط سمسن نظیرنقطهٔ P موازی است. این خط سمسن، یعنی A_1B_1 ، که با ضلع HV ازمثلث PVH موازی است و ضلع PV از آن را نصف کرده است ، ضلع PH را نیز نصف می‌کند پس:

قضیهٔ ۲،۷.۲- خط سمسن نظیر هرنقطه‌ازدایرهٔ محیطی‌مثلث، منصف پاره‌خطی است که این نقطه را به مرکز ارتفاعی مثلث وصل می‌کند.

آنچه گفته شد درحقیقت مقدمه‌ای است برآنچه که دربارهٔ خط سمسن می‌توان بیان کرد. برای خط سمسن ویژگیهای بسیاروجود داردکه به‌خاطر پرهیز از درازی مطلب ، ناچاریم که خواننده را برای آگاهی برآنها به سایرکتابها حواله دهیم.

تمرینها

۱ـ روی دایرهٔ محیطی مثلث ، دو نقطهٔ واقع بردوسریك قطررا در نظر می‌گیریم. ثابت کنیدکه خطهای سمسن نظیراین دونقطه برهم عمودند ویکدیگررا روی دایرهٔ نه‌نقطهٔ مثلث تلاقی می‌کنند.

۲ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC دردایرهٔ به مرکز O محاط است و P نقطه‌ای ازاین دایره است. ثابت‌کنیدکه خط سمسن نظیر P ازوسط شعاع OP می‌گذرد.

۸.۲ـ قضیهٔ پروانه

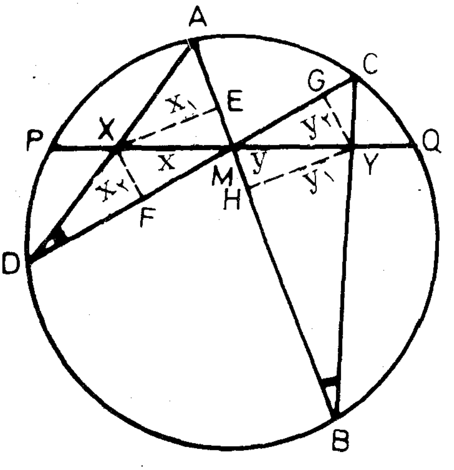
مدتهای مدید است که قضیهٔ پروانه ، به‌عنوان قضیه یا مسئله ، اینجا وآنجا مطرح

شده است. این قضیه را به صورت زیربیان می‌کنیم:

قضیهٔ ۱،۸۰۲- در دایرهٔ مفروض، از نقطهٔ M وسط وتر PQ دو وتر AB و CD را رسم می‌کنیم. وترهای AD و BC باوتر PQ به‌ترتیب در X و Y برخورد می‌کنند. ثابت‌کنید که M وسط XY است.

برای این قضیه برهانهایی کما بیش طولانی وپیچیده ارائه شده است. یك برهان آن که در سال ۱۸۱۵ توسط هورنر[1] بیان شده است به محاسبهٔ مقادیرتقریبی ریشه‌های یك چند جمله‌ای مربوط می‌شود (به عقیده‌ای، یك چینی دراین مورد مقدم برهورنر بوده است). کوتاهترین برهان قضیه ازراه هندسهٔ تصویری انجام می‌گیرد[2].

برهانی که درزیرآورده می‌شود هرچندکوتاه نیست اما ازنظربخاطرسپردن ساده و آسان است.



(شکل ۸۰۲)

مطابق با شکل (۸۰۲).
عمودهای $XE=x_1$ و $YH=y_1$ را بر AB وعمودهای $XF=x_2$ و $YG=y_2$ را بر CD رسم می‌کنیم. ازتشابه مثلثهای MXE با MYH و MFX با MYG و AXE با CYG و DXF با BYH و به فرض $PM=MQ=a$ و $XM=x$ و $MY=y$ داریم:

$$\frac{x}{y}=\frac{x_1}{y_1} \quad و \quad \frac{x}{y}=\frac{x_2}{y_2}$$

$$\frac{x_1}{y_2}=\frac{AX}{CY} \quad و \quad \frac{x_2}{y_1}=\frac{XD}{YB}$$

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{x_1}{y_1}\cdot\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_2}{y_1}\cdot\frac{x_1}{y_2}=\frac{AX\cdot XD}{CY\cdot YB}=\frac{PX\cdot XQ}{PY\cdot YQ}$$

$$=\frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)}=\frac{a^2-x^2}{a^2-y^2}=\frac{a^2}{a^2}=1$$

بنابراین $x=y$ یعنی M وسط XY است.

1- W.G.Horner

۲- یك برهان کاملا سادهٔ قضیه ، یا مسئلهٔ ، پروانه که بااستفاده از مقالهٔ اول هندسه انجام گرفته در«مجموعهٔ علمی‌یکان» چاپ فروردین ۱۳۴۴ درج شده‌است. همچنین چند برهان دیگرآن درشماره‌های مختلف مجلهٔ ریاضی یکان چاپ شده است، مترجم.

تمرینها

۱ـ در شکل (۸.۲) خطهای AC و BD را رسم می‌کنیم تاامتداد PQ را در U و V قطع کنند. ثابت کنید که M وسط UV است.

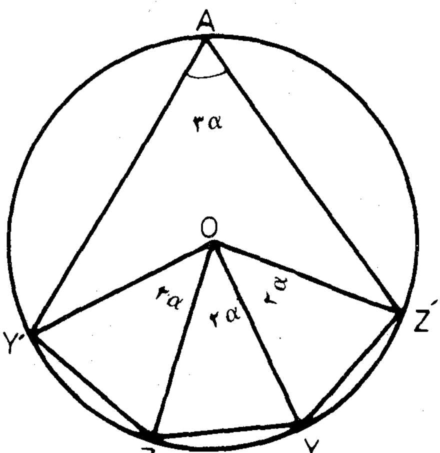
۲ـ از نقطهٔ P خارج دایره‌ای دومماس PB وPT را بر آن دایره رسم می‌کنیم. قطر AB از دایره وعمود TH را بر این قطر نیز رسم می‌کنیم. ثابت کنید که AP ازوسط TH می‌گذرد.

۳ـ هرگاه I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC و X نقطهٔ تماس BC با این دایره و A' وسط BC باشد، ثابت کنید که خط $A'I$ ازوسط AX می‌گذرد.

۹.۲ـ قضیهٔ مورلی

یکی ازقضیه‌های کاملاً فوق العادهٔ هندسهٔ مقدماتی در حدود سال ۱۹۰۴ توسط فرانك مورلی[۱] ثابت شد. وی ابتدا این قضیه‌را برای دوستان انگلیسی خود درکامبریج شرح داد، وبیست سال پس‌ازآن، آن‌را در ژاپن منتشرساخت. دراین مدت این قضیه مجدداً کشف‌شده ودر مجلهٔ تربیتی تایمز زیرعنوان مسئله درج شده بود که دو راه‌حل برای آن واصل گردیده بود. یکی از این دو راه‌حل از طرف م.ت. نارانینگار[۲] فرستاده شده بود که بیش‌از همهٔ راه حلهایی که پس‌ازآن و به تدریج برای مسئله ارائه شد زیبا می‌باشد. در زیر نخست خود قضیه وآنگاه راه‌حل مزبور بیان می‌شود.

قضیهٔ ۱،۹.۲ـ هرگاه در داخل مثلث از هررأس دو نیم خط رسم کنیم که زاویهٔ آن رأس را به سه قسمت برابر تقسیم‌کند، نقطه‌هایی کـه از برخورد هردو نیم خط مجاور به هرضلع پدید می‌آید مثلثی متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند (شکل۹.۲، ب).



(شکل ۹.۲ ، الف)

قبل‌از بیان برهان نارانینگار لازم است‌که لم زیرثابت شود:

لم ـ چهارنقطهٔ Y'، Z، Y و Z' که درشرطهای:

$$Y'Z = ZY = YZ'$$

$$\widehat{YZY'} = \widehat{Z'YZ}$$

$$= \pi - 2\alpha > \frac{\pi}{3}$$

صدق کنند بریك دایـره واقعند. عـلاوه بـرآن، نقطهٔ A کـه بـا

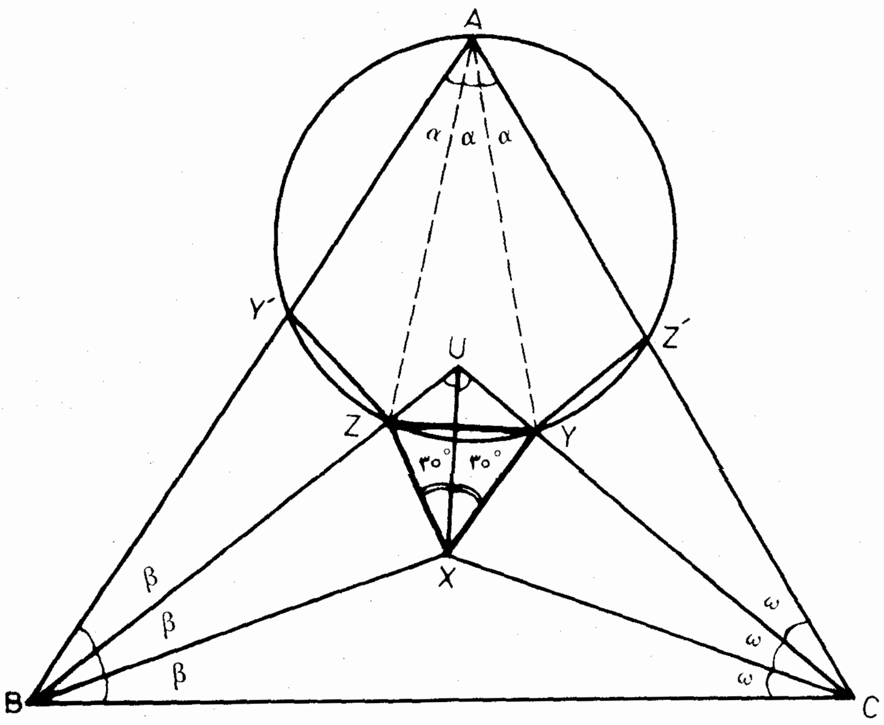
۱- Frank Morley ۲- M.T.Naraniengar

Y دریك طرف خط $Y'Z'$ واقع نباشد و $\widehat{Y'AZ'}=۳\alpha$ باشد نیز برهمان دایره واقع است.

مطابق با شکل (۹.۲ ، الف) ، نیمسازهای دو زاویهٔ متساوی YZY' و $Z'YZ$ در O برخورد می‌کنند. مثلثهای $OY'Z$ ، OZY و OYZ' باهم برابرند و متساوی‌الساقین می‌باشند و اندازهٔ هریك اززاویه‌های مجاور به‌قاعدهٔ آنها $\frac{\pi}{۲}-\alpha$ است.

بنابراین چهار نقطهٔ Z' ، Y ، Z و Y' بردایرهٔ به مرکز O واقعند. در این دایره هریك‌ازکمانهای $Y'Z$ ، ZY و YZ' روبرو به زاویهٔ مرکزی ۲α است، پس‌کمان $Y'Z'$ که شامل نقطهٔ Y نیست‌کمان درخور زاویهٔ ۳α است. بنابراین نقطهٔ A با شرطهای گفته شده براین‌کمان قراردارد.

اکنون بااستفاده ازاین لم به اثبات قضیه می‌پردازیم: مطابق باشکل (۹.۲، ب)، نیم خطهایی‌که زاویه‌های B و C را به سه پارهٔ برابرتقسیم کرده‌اند در U و X برخورد می‌کنند. درمثلث BCU نقطهٔ X محل برخورد نیمسازهای دوزاویهٔ داخلی است. پس



(شکل ۹.۲ ، ب)

XU نیز نیمساز زاویهٔ U است. روی خطهای CU و BU نقطه‌های Y و Z را چنان برمی‌گزینیم که XY و YZ' با XU و درطرفین‌آن زاویه‌های به اندازهٔ ۳۰° بسازند. مثلثهای UXY و UXZ باهم برابرند و $XY=XZ$ وچون زاویهٔ YXZ به‌اندازهٔ ۶۰° است پس مثلث XYZ متساوی‌الاضلاع است. علاوه برآن مثلث UZY متساوی‌الساقین است و چون اندازه‌های دوزاویه از مثلث UBC برابر با ۲γ و ۲β است پس اندازهٔ هریك اززاویه‌های Y و Z ازمثلث UYZ برابربا $\gamma+\beta$ است.

با فرض $\hat{A}=۳\alpha$ وبا توجه به‌اینکه $A+B+C=\pi$ نتیجه می‌شود:

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{۳} \implies \beta+\gamma=\frac{\pi}{۳}-\alpha$$

$$\widehat{YZU}=\frac{\pi}{۳}-\alpha \quad \text{و} \quad \widehat{XZU}=\frac{۲\pi}{۳}-\alpha$$

روی BA و CA به ترتیب Y' و Z' را برمی‌گزینیم که $BY'=BX$ و $CZ'=CX$ باشد. مثلثهای BZX و BZY' همچنین مثلثهای CYX و CYZ' متساویند، پس:

$$Y'Z=ZX=ZY=YX=YZ'$$

زاویه‌های BZY' و BZX باهم برابرند. پس مکملهای آنها نیز باهم برابرند و بنا براین:

$$\widehat{UZY'}=\widehat{XZU}=\frac{۲\pi}{۳}-\alpha$$

$$\widehat{YZY'}=\widehat{YZU}+UZY'=\left(\frac{\pi}{۳}-\alpha\right)+\left(\frac{۲\pi}{۳}-\alpha\right)=\pi-۲\alpha$$

همچنین اندازهٔ زاویهٔ $Z'YZ$ برابربا $\pi-۲\alpha$ است و $\alpha=\frac{A}{۳}<\frac{\pi}{۳}$

بنا براین با توجه به لم که قبلا ثابت شد نتیجه می‌شود که پنج نقطهٔ Y'، Z، Y، Z' و A بریك دایره واقعند. وترهای متساوی $Y'Z$ ، ZY و YZ' روبروبه زاویه‌های به اندازهٔ α وبه رأس A می‌باشند ونیم خطهای AZ و AY زاویهٔ A را به‌سه‌قسمت برابرباهم تقسیم کرده‌اند. به عبارت دیگر، سه نقطهٔ X و Y و Z راکه‌آنچنان تعیین کردیم که‌رأسهای یك مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشند درواقع نقطه‌های تلاقی نیم‌خطهایی می‌باشندکه هریك اززاویه‌های مثلث را به سه قسمت برابر تقسیم کرده‌اند.

تمرینها

۱ــ درشکل (۹.۲ ، ب)خطهای AZ و CX را امتداد می‌دهیم تادر V برخورد کنند . همچنین خطهای BX و AY را امتداد می‌دهیم تا در W برخورد کنند.

ثابت کنید که سه خط UX و VY و WZ متقاربند (ازنظر هندسهٔ تصویری، مثلثهای UVW و XYZ همسانند. اما درحالت کلی، مثلث UVW متساوی‌الاضلاع نمی‌باشد).

۲ــ مثلث ABC چه نوع باشد تا اینکه پنج ضلعی $AY'ZYZ'$ منتظم باشد؟

۳ــ هرگاه مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد ثابت کنید که نقطه‌های Y'،Z،Y و Z' چهاررأس ازیك چند ضلعی منتظم می‌باشند ونقطهٔ A رأس دیگری ازاین چندضلعی وروبرو به ضلع AY است.

۴ــ هرگاه 3α و 3β و 3γ اندازه‌های زاویه‌هـا و R شعاع دایرهٔ محیطی یك مثلث باشد،ثابت کنید که طول ضلع مثلث مورلی نظیرآن برابراست با: $R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

۵ــ در مستطیل $BCZ'Y'$ ضلع $Z'Y'$ را به‌وسیلهٔ نقطه‌های Y و Z به سه پارهٔ برابر تقسیم می‌کنیم به گونه‌ای که $Z'Y=YZ=ZY'$. هرگاه X مرکزمستطیل با Y و Z مثلثی متساوی‌الاضلاع تشکیل دهد، ثابت کنید کـه خطهای BX و BZ زاویهٔ B ازمستطیل را به سه زاویهٔ برابرباهم تقسیم می‌کنند.

۳

نقطه‌های بریك استقامت
خطهای متقارب

آنگاه پرگارهایی همگی بزرگ را بگشود، آنها را بکارانداخت وآسه‌ها و پهلوها را بکشید؛ تاآنکه آنچه مربع و مستطیل می‌نمود، همچون شکلی پیچیده درآمد.

C.L.Dodgson داگسن (ازکتاب دوم اقلیدس)

پس‌ازبررسی ویژگیهای دیگری ازمثلثها وچهارگوشه‌ها، دامنهٔ هندسهٔ تصویری‌را درروبروخواهیم داشت، حتی ازآنهم کمی فراتر خواهیم رفت. هرچند بیان منظم این موضوع خودکتابی جداگانه باید باشد؛ اما یادآوری چهارقضیهٔ اساسی‌آن دراینجا به مورد می‌باشد، زیرا می‌توان‌آنها را با روشهای اقلیدسی ثابت کرد. درحقیقت، سه‌عدد ازاین قضیه‌ها آنقدرقدیمی هستندکه درزمان کشف آنها روشی دیگررانمی‌شناختند. درهمهٔ این‌قضیه‌های مورد بحث، یاموضوع‌خطهای‌متقارب ویاموضوع نقطه‌های بریك‌استقامت به میان می‌آید. ناگفته نبایدگذاشت‌که فکرهندسهٔ تصویری ازآنجا ناشی شدکه دربسیاری ازحالتها می‌توان خطهای متوازی را همچون خطهای متقارب درنظرگرفت.

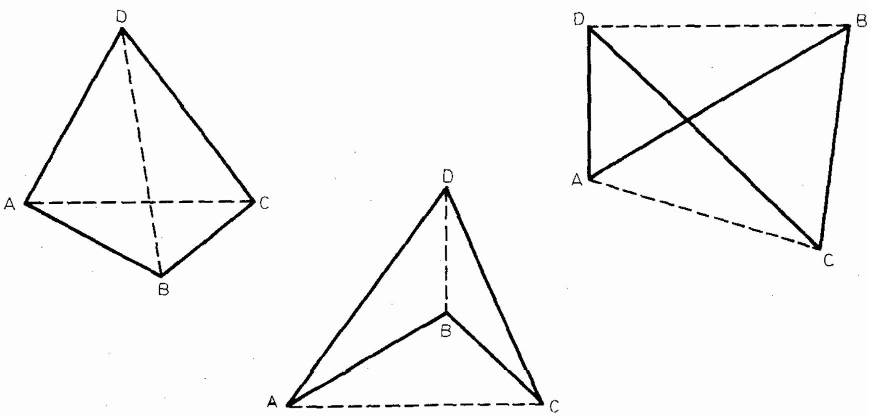
۱.۳- چهارگوشه‌ها؛ قضیهٔ وارینیون

می‌توان‌گفت‌که چند ضلعی‌شکلی است شامل تعدادی نقطهٔ موسوم به رأس‌وتعدادی پاره خط موسوم به ضلع. نقطه‌ها به یك صفحه متعلقند و مجموعهٔ مرتب متناوبی تشکیل می‌دهند، وضلعها رأسهای مجاوررا به یکدیگروصل می‌کنند؛ بالاخره هر سه رأس مجاور نمی‌توانند بریك‌استقامت باشند. به‌عبارت دیگر، چند ضلعی خط شکستهٔ بسته‌ای واقع‌دریك

صفحه است. برای مثال پنج ضلعی دارای پنج ضلع و پنج رأس است وشش‌ضلعی ازهر کدام شش‌عدد دارد وغیره. اما این‌نامگذاری که ازیونانیان‌است (ونام چندضلعی تعداد ضلعها و رأسهایش را می‌نمایاند) برای سه ضلعی معمول نیست؛ چنانکه آن را مثلث می‌نامیم. درزبانهای انگلیسی وفرانسه برای مثلث اصطلاح (Triangle) بکارمی‌رود که به‌معنی «سه زاویه‌ای = سه‌گوشه» می‌باشد. برای چهار ضلعی هم عنوان چهار گوشه (= چهار زاویه‌ای) بکارمی‌رود[1]. دراین کتاب نیزاصطلاح چهار گوشه بکارخواهد رفت؛ درهندسهٔ تصویری که ضلعها دیگر پاره خطهای ساده نیستند. بلکه خطهای نـامعین می‌باشند، لازم است که دواصطلاح چهارضلعی وچهارگوشه با دومعنی متفاوت بکاررود.

درچهار گوشه، دوضلع را مجاوریا مقابل می‌نامیم برحسب آنکه دریك رأس‌مشترك باشند یا نباشند. همچنین دورأس را مجاوریا مقابل می‌نامیم برحسب آنکه‌روی یك ضلع واقع باشند یا نباشند. خطهایی که دو رأس مقابل را به‌هم وصل می‌کنند قطرهای چهار گوشه نام دارند؛ در چهار گوشهٔ ABCD ضلعها عبارتند از: AB، BC، CD و DA که مثلاً AB با BC وهمچنین با DA مجاور وبا CD مقابل است. قطرهای این چهارگوشه AC و BD می‌باشند.

در شکل (۱.۳، الف) سه‌گـونه چهارگوشهٔ با ظاهرهای کاملاً متفاوت مشاهده



(شکل ۱.۳، الف)

۱ـ بنابه تعریفی که توسط R.Deltheil و D.Caire بیان شده است؛ چهار گوشه شکلی است که ازچهار نقطهٔ واقع‌درصفحه تشکیل‌می‌شود، درصورتی که ازاصطلاح‌چهارضلعی برمی‌آید که شکلی‌حاصل از چهار خط‌است.اما چهارخط واقع در صفحه شکل‌شامل شش رأس‌رابوجود می‌آورند که چهارضلعی‌کامل نام دارد.

می‌شود: اولی، ازچپ، کوژ (= محدب) است و دو قطرآن درددرون پیرامون آن قرار دارند؛ دومی کاو (= مقعر) است یك قطرش درددرون وقطر دیگرش در بیرون پیرامون آن واقع است، سومی پنجره‌ای است، هردوقطرش دربیرون پیرامون آن واقعند.

چنانکه مشاهده می‌شود مساحت چهارگوشهٔ کوژ برابراست با مجموع مساحتهای دو مثلث که بوسیلهٔ قطرآن پدید می‌آید:

$$S(ABCD)=S(ABC)+S(CDA)=S(BCD)+S(DAB)$$

برای آنکه این دستور برای چهارگوشهٔ کاونیز صادق باشد، مساحت مثلث‌را طبق تعریف زیر عدد جبری، مثبت یامنفی، می‌گیریم: مساحت مثلث ABC راکه به‌صورت $S(ABC)$ نوشته می‌شود مثبت می‌گیریم هرگاه جهت گذاردن حرفهای A و B و C در جهت مستقیم، یعنی درخلاف جهت‌حرکت عقربه‌های ساعت، باشد وآن را منفی می‌گیریم هرگاه جهت گذاردن حرفهای مزبور در جهت معکوس باشد. بنابراین:

$$S(ABC)=S(BCA)=S(CAB)=-S(CBA)=$$
$$-S(ACB)=-S(BAC)$$

با این‌تعریف برای چهارگوشهٔ کاو واقع در وسط شکل (۱۰۳، الف) داریم:

$$S(ABCD)=S(BCD)+S(DAB)=S(CDA)-S(CBA)$$
$$=S(CDA)+S(ABC)$$

با بکاربردن دستور بالا نتیجه خواهد شد کـه مساحت چهارگوشهٔ پنجره‌ای برابر است با تفاضل مساحتهای دومثلثی که از برخورد ضلعهای آن پدید می‌آید[۱].

هرگاه قرارداد مربوط به‌جهت‌دار بودن مساحت را توأم با قرارداد مربوط به‌خط و پاره‌خطهای جهت‌دار درنظر بگیریم، می‌توانیم اثباتی‌راکه قبلادر (۱،۲۰۱) و (۲،۲۰۱) برای قضیهٔ سوا وعکس آن بیان‌کردیم برای حالتی‌که نقطه‌های X و Y و Z در امتداد ضلعها واقع باشند نیز تعمیم دهیم.

قضیهٔ زیرکه منسوب به پیروادینیون[۲] (۱۷۲۲-۱۶۵۴) است آنقدر ساده می‌باشدکه تعجب‌آور است چرا انتشارآن تا ۱۷۳۱ به‌تأخیر افتاد.

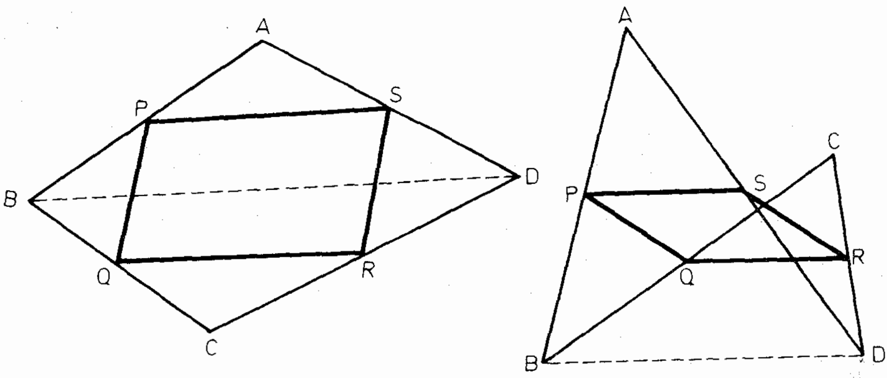
قضیهٔ ۱،۱۰۳- هرگاه وسطهای ضلعهای یك‌چهارگوشه را متوالیاً به‌هم وصل‌کنیم، یك‌متوازی‌الاضلاع پدید می‌آیدکه مساحت‌آن نصف مساحت چهارگوشه است.

۱- یادداشت از ح. غیور: مساحت هرچهارضلعی (کوژ، کاو، پنجره‌ای) برابراست با تفاضل مساحتهای دومثلثی که ازتقاطع دوضلع روبرو پدید می‌آید: اگر E نقطهٔ برخورد AB و CD باشد،

$$S(ABCD)=S(EDA)-S(ECB)$$

۲- Pierre Varignon

برای اثبات این‌قضیه قبلا باید بدانیم که پاره خطی که وسطهای دوضلع مثلث را به‌هم وصل‌می‌کنند با ضلع‌سوم موازی است وطولش نصف‌طول آن ضلع است.



(شکل ۳.۱، ب)

مطابق با شکل (۳.۱، ب) هرگاه P، Q، R و S به‌ترتیب وسطهای ضلعهای AB، BC، CD و DA از چهارگوشهٔ ABCD باشد. درمثلثهای ABD و CBD پاره‌خطهای PS و QR که وسطهای دوضلع را به‌هم وصل کرده‌اند باضلع سوم یعنی با قطر BD ازچهارگوشه موازیند وبا نصف آن برابرند. بنابراین دوپاره خط PS و QR باهم برابر وباهم‌موازیند. پس PQRS متوازی‌الاضلاع است که به‌متوازی‌الاضلاع وارینیون نظیر چهارگوشهٔ ABCD موسوم است[1].

در بارهٔ مساحت این متوازی‌الاضلاع، قبلاً یادآوری می‌شود که هرگاه P وسط AB و Q وسط BC از مثلث ABC باشد چون PQ نصف AC و ارتفاع مثلث CAB نصف ارتفاع مثلث ABC است پس مساحت مثلث BPQ یك چهارم مساحت مثلث BPQ است .

بنابراین:

$$S(PQRS)=S(ABCD)-S(PBQ)-S(RDS)-S(QCR)-S(SAP)$$

$$=S(ABCD)-\frac{1}{4}S(ABC)-\frac{1}{4}S(CDA)-\frac{1}{4}S(BCD)$$

$$-\frac{1}{4}S(DAB)$$

۱ـ هرگاه ABCD یك چهارگوشهٔ چپ باشد، یعنی چهاررأسش در یك صفحه نباشد، بازهم PQRS یك‌متوازی‌الاضلاع است.

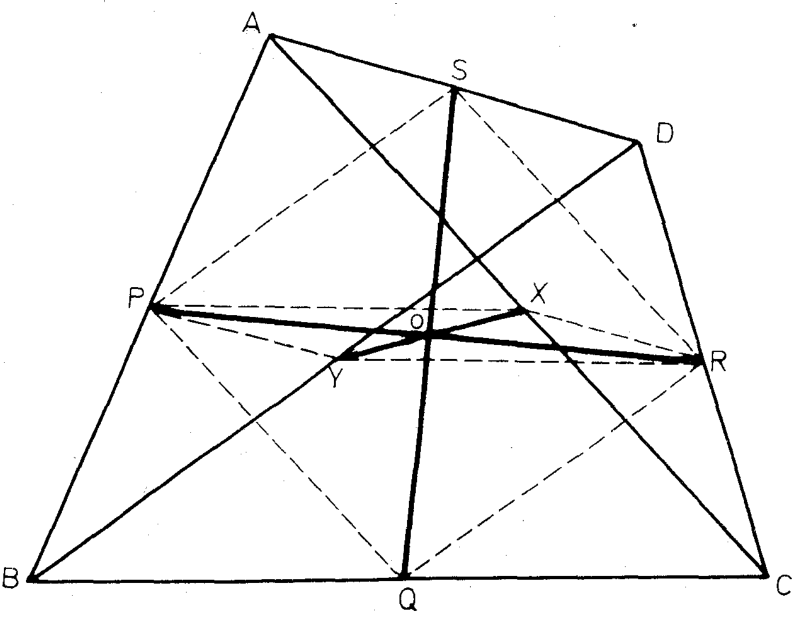
$$=S(ABCD)-\frac{1}{4}[S(ABCD)+S(ABCD)]$$

$$=\frac{1}{2}S(ABCD)$$

عملیات بالا برای چهار گوشهٔ کاو (ساده یا پنجره‌ای) نیز صادق است.

در هر متوازی‌الاضلاع دو قطر منصف یکدیگرند که نقطهٔ برخورد آنها مرکز متوازی‌الاضلاع است. در چهارگوشهٔ ABCD هرگاه X وسط قطر AC و Y وسط قطر BD باشد، مطابق باشکل (۱.۳، پ) که کامل‌شدهٔ شکل (۱.۳،ب)است، چهارگوشهٔ PYRX نیزمتوازی‌اضلاع است و O وسط PR ، یعنی‌مرکزمتوازی‌الاضلاع PQRS ، وسط XY نیز می‌باشد.

بنابراین:



(شکل ۱.۳، پ)

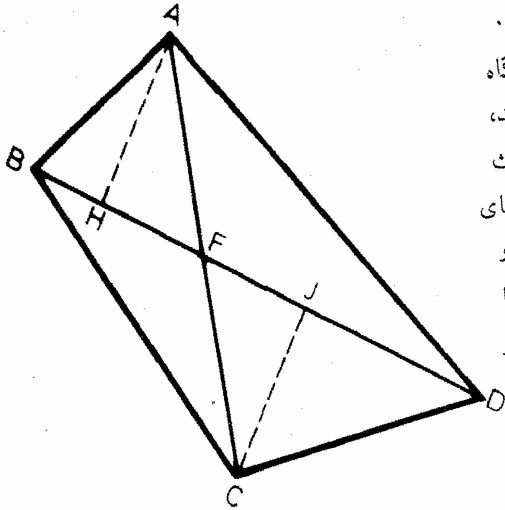
قضیهٔ ۲،۱.۳- درهرچهارگوشه، خطهایی‌که‌وسطهای ضلعهای روبرو ووسطهای دوقطر را بوهم وصل می‌کنند در یک نقطه متقاربندکه وسط هرکدام ازآنها است.

این قضیه نخستین قضیه‌ای است که در این بخش دربارهٔ خطهای متقارب بیان شد. پیش از بیان قضیه‌های دیگری دراین‌باره،قضیهٔ زیرکه درحد خود مفید است بیان می‌شود:

قضیهٔ ۳،۱.۳- اگریکی از قطرهای چهارگوشه‌ای آن‌را به‌دو مثلث معادل (= با

مساحتهای برابر) تقسیم‌کند، این قطر منصف قطر دیگر است.

برعکس؛ هرگاه قطری ازیك‌چهارگوشه منصف قطر دیگر باشد، آن‌قطر چهارگوشه را به‌دومثلث معادل تقسیم می‌کند.



(شکل ۱.۳،ت)

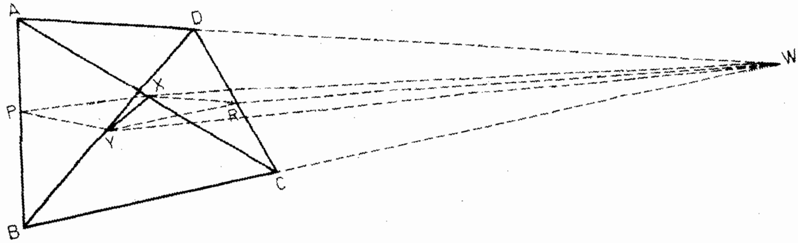
در چهارگوشهٔ ABCD هرگاه دومثلث ABD و CBD معادل‌باشند، شکل (۱.۳، ت)، چون این دومثلث در قاعده BD مشترکند پس ارتفاعهای AH و CJ ازآنها با هم برابرند و در نتیجه دومثلث AHF و CJF با هم برابرند و نتیجه می‌شود AF = FC یعنی F وسط قطر AC است.

برعکس، ازتساوی AF = FC تساوی دو مثلث AHF و CJF و از آنجا تساوی AH = CJ نتیجه می‌شود که معلوم می‌دارد دومثلث ABD و CBD باهم معادلند.

اکنون قضیهٔ دوم مربوط به‌عنوان این بخش را بیان می‌کنیم:

قضیهٔ ۴،۱.۳- هرگاه AD و BC دو ضلع روبرو ازچهارگوشهٔ $ABCD$ در W برخوردکنند و X و Y به‌ترتیب وسطهای قطرهای AC و BD باشند، مساحت مثلث WXY یك‌چهارم مساحت چهارگوشهٔ $ABCD$ است.

P وسط AB و R وسط CD را در نظر می‌گیریم و خطهای PX و PY و RX و RY و RW را رسم می‌کنیم. در مثلث BCD خط RY موازی با BC



(شکل ۲.۳،ت)

است وازوسط DW قطر دیگر چهارگوشهٔ DYWR می‌گذرد. بنابراین بنابرعکس قضیهٔ (۳،۱.۳) داریم:

$$S(RYW)=S(YRD)=\frac{۱}{۴}S(BCD)$$

همچنین خواهیم داشت:

$$S(RWX)=\frac{۱}{۴}S(CDA)$$

همچنین با توجه به‌قضیهٔ وارینیون برای چهارگوشهٔ ABCD خواهیم داشت:

$$S(RXY)=\frac{۱}{۲}S(PYRX)=\frac{۱}{۴}S(ABDC)=\frac{۱}{۴}S(CAB)+\frac{۱}{۴}S(BDC)$$

$$=\frac{۱}{۴}S(ABC)-\frac{۱}{۴}S(BCD)$$

از جمع نظیر به‌نظیر دوطرف سه‌رابطهٔ بالا بدست می‌آید:

$$S(WXY)=S(RXY)+S(RYW)+S(RWX)$$

$$=\frac{۱}{۴}S(ABC)-\frac{۱}{۴}S(BCD)+\frac{۱}{۴}S(BCD)+\frac{۱}{۴}S(CDA)$$

$$=\frac{۱}{۴}S(ABC)+\frac{۱}{۴}S(CDA)$$

$$=\frac{۱}{۴}S(ABCD)$$

[**یادداشت ازح. غیور:** از این قضیه، قضیهٔ زیرکه ازخواص مهم چهارضلعی‌کامل است بلافاصله نتیجه می‌شود که نمی‌توان ازآن صرف‌نظر کرد:

در چهار ضلعی‌کامل، وسطهای سه‌قطر بریك خط راست واقعند.

زیرا در چهار ضلعی کامل ABCDEF اگر P ، Q ، R به ترتیب وسطهای AC ، BD و EF باشند، بنابه‌قضیهٔ (۴،۱.۳) دو مثلث FPQ و EPQ معادلند وچون در قاعدهٔ PQ مشترکند راستای PQ قطر EF را نصف می‌کند.]

تمرینها

۱ ـ ثابت‌کنیدکه محیط متوازی‌الاضلاع وارینیون هرچهارگوشه برابر است با مجموع طولهای دوقطرآن چهارگوشه.

۲ ـ ثابت‌کنیدکه در هرچهارگوشه ، مجموع مجذورهـای ضلعها برابر است با

مجموع مجذورهای قطرها به‌اضافهٔ چهاربرابر مجذور طول پاره‌خط واصل بین وسطهای دوقطر.

۳ـ ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع، مجموع مجذورهای ضلعها برابر است با مجموع مجذورهای دوقطر.

۴ـ هرگاه a طول ساق و b و c طولهای دوقاعده و d طول قطر یك ذوزنقهٔ متساوی‌السّاقین باشد، ثابت کنید که:

$$d^2=a^2+bc$$

۲.۳ـ چهارگوشه‌های محاطی؛ دستور براهماگوپتا

مجموعه‌ای از پاره‌خطهایی به تعداد E را درنظرمی گیریم که دو به‌دو در V نقطهٔ واقع دریك صفحه به‌یکدیگروصل شده‌اند. این پاره خطها را می‌توانیم میله‌هایی صلب تصور کنیم که دوبه‌دوبه یکدیگرمفصل شده‌اند ومی‌توانند دوراین مفصلها حرکت کنند اما همیشه دریك‌صفحه واقعند. هرگاه $E=V=3$ باشد، شکل حاصل که مثلث است ثابت باقی می‌ماند. اما در مورد چهارگوشه که $E=V=4$ است یك درجه‌آزادی وجود دارد؛ هرزاویهٔ آن می‌تواند بزرگ یاکوچك شود. برای حالتهای‌دیگرنیزامکان تغییرات وجود دارد. چنین دستگاهی از میله‌های دوبه‌دو مفصل شده را «صلب» می‌نامیم هرگاه اندازه‌های جزءهای آن ثابت باقی بمانند، مانند حالت $E=V=3$ مثلث؛ و آن را «شبه صلب» می‌نامیم هرگاه یکی از میله‌های آن را حذف کنیم صلبیت آن ازبین برود. سرهوراس لامب[1] به روشی ساده ثابت‌کرده است‌که شرط لازم، اما نه‌کافی، برای شبه صلب بودن یك دستگاه میله‌های دوبه‌دوبه هم مفصل شده‌آن است‌که:

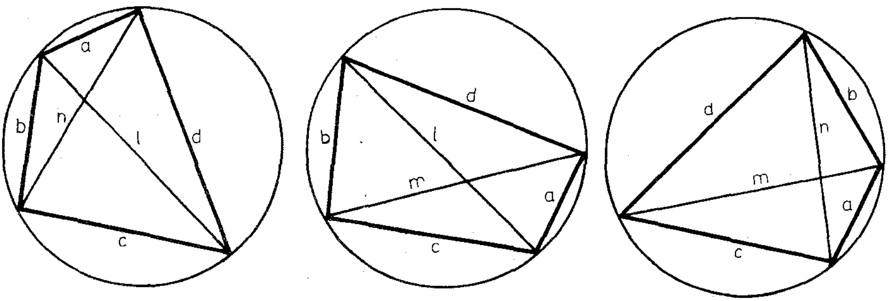
$$E=2V-3$$

برای مثال اگر $E=5$ و $V=4$ باشد یك چهارگوشه داریم که علاوه‌برطولهای ضلعها طول یك‌قطرآن نیزمشخص است؛ این چهارگوشه شکل ثابت دارد. به عبارت دیگرصلب است. اما اگر مثلاً قطر آن راکناربگذاریم، یعنی طول قطرآن غیر مشخص باشد: دراین صورت چهارگوشه یك درجه‌آزادی دارد، یعنی صلبیت‌آن ازبین رفته‌است.

با چهار پاره خط به طولهای a، b، c و d به شرط آنکه طول هرکدام از مجموع طولهای سه پاره خط دیگرکوچکتر باشد می‌توان چهار گوشه‌های کوژ متعدد ساخت. با توجه به‌یك درجهٔ آزادی این‌چهارگوشه‌ها، می‌توان با تغییرشکل آن، مجموع دوزاویهٔ مقابل از آن را کم یا زیاد کرد تا اینکه این مجموع برابر ۱۸۰ درجه شود:

1- Sir Horace Lamb

در این حالت چهار رأس بر یك دایره واقعند و چهار گوشه را محاطی می‌نامیم. اندازه‌های قطرهای این چهار گوشهٔ محاطی را l و n می‌گیریم. مثلث bcl از این چهار گوشه (شکل ۲.۳ ، الف ـ چپ) را ثابت نگاه می‌داریم و مثلث ald را از آن جدا کرده برمی‌گردانیم و مجدداً چنان قرار می‌دهیم که بازهم با مثلث bcl در ضلع l مشترك باشد. در این صورت چهار گوشهٔ محاطی $bcad$ را خواهیم داشت (شکل ۲.۳ ، الف ـ وسط) که طول یك قطر آن همان l و طول قطر دیگرش m می‌باشد. در این شکل باز مثلث bmd را برداشته برمی‌گردانیم و چنان قرار می‌دهیم که با مثلث amc بازهم در ضلع m مشترك باشد، در این صورت چهار گوشهٔ محاطی $cabd$ را داریم که m و n قطرهای آن می‌باشند (شکل ۲.۳ ، الف ـ راست).



(شکل ۲.۳ ، الف)

درچهار گوشه‌های محاطی بالا بنا به قضیهٔ بطلمیوس داریم:

$$ln=ac+bd \quad \text{و} \quad ml=ab+cd \quad \text{و} \quad nm=bc+ad$$

چهار گوشه‌های بالا کوژند و درهر کدام از آنها می‌توان مساحت چهار گوشه‌را برابر با مجموع مساحتهای دومثلث دانست که با تبدیلات به شرح بالا مساحتهای این دو مثلث مقدار ثابت باقی مانده است، پس سه چهار گوشهٔ بالا مساحتهای برابر دارند. از اینرو می‌توانیم قضیهٔ زیر را بیان کنیم:

قضیهٔ ۱،۲.۳ـ با چهار پاره خط که هرکدام از مجموع سه‌تای دیگر کوچکتر باشد می‌توان سه نوع چهار گوشهٔ محاطی ساخت و این چهار گوشه‌ها مساحتهای برابر دارند.

فرع ـ مساحت چهار گوشهٔ محاطی تابعی متقارن از اندازه‌های ضلعهای آن است.

[**یادداشت از ح. غیور:** بیان و اثبات این قضیه به نحو دیگر:

از دستور مساحت و شعاع دایرهٔ محیطی چهارضلعی محاطی برحسب ضلعهای آن

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

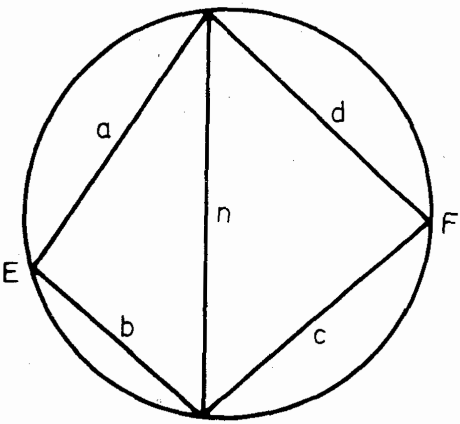
$$R=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}}{۴S}$$

نتیجه می‌شود که: باچهارپاره خط که هرکدام ازمجموع سه پاره خط دیگر کوچکتراست، می‌توان سه عدد چهار ضلعی محاطی ساخت که مساحتهای آنها باهم و شعاعهای دایره‌های محیطی آنها باهم برابر باشند.]

دستوردقیق مساحت چهار گوشهٔ محاطی برحسب اندازه‌های ضلعهای آن، نخستین بار توسط ریاضیدان هندی براهما گوپتا که درقرن هفتم میلادی می‌زیسته به‌شرح زیر بدست آمده است:

قضیهٔ ۲،۲.۳ـ هرگاه a و b و c و d اندازه‌های ضلعهای یك چهار گوشهٔ محاطی و s نصف محیط آن باشد، K مساحت آن از دستور زیر بدست می‌آید:

$$K^{۲}=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$



(شکل ۲.۳ ، ب)

یك روش سادهٔ اثبات این دستوراستفاده ازمثلثات است. هرگاه E رأس مشترك ضلعهای a و b ، و F رأس مشترك ضلعهای c و d ، و n طول قطری باشد کـه دو رأس دیگررا به هم وصل می‌کند (شکل ۲.۳ ، ب) ، از $E+F=\pi$ برمی‌آید که:

$$\sin E=\sin F \quad \text{و} \quad \cos E=-\cos F$$

اما داریم:

$$n^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos E$$
$$n^{۲}=c^{۲}+d^{۲}-۲cd\cos F$$

پس خواهیم داشت:

$$a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos E=c^{۲}+d^{۲}+۲cd\cos E$$
$$۲(ab+cd)\cos E=a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}-d^{۲} \qquad (۱-۲.۲.۳)$$

ازطرف دیگر برای مساحت چهارگوشه داریم:

$$K=\frac{۱}{۲}ab\sin E+\frac{۱}{۲}cd\sin F=\frac{۱}{۲}(ab+cd)\sin E$$
$$۲(ab+cd)\sin E=۴K \qquad (۲-۲.۲.۳)$$

دو طرف هریك از تساویهای (۲.۲.۳ـ۱) و (۲.۲.۳ـ۲) را به توان دو رسانده و بعد

نظیر به‌نظیر با هم جمع می کنیم ، بدست می آید:

$$۴(ab+cd)^{۲}=(a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}-d^{۲})^{۲}+۱۶K^{۲}$$

$$۱۶K^{۲}=(۲ab+۲cd)^{۲}-(a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}-d^{۲})^{۲}$$

$$۱۶K^{۲}=(۲ab+۲cb+a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}-d^{۲})\times(۲ab+۲cd-a^{۲}-b^{۲}+c^{۲}+d^{۲})$$

$$=[(a+b)^{۲}-(c-d)^{۲}][(c+d)^{۲}-(a-b)^{۲}]$$

$$=(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)\times(c+d-a+b)$$

با توجه به‌اینکه $۲s=a+b+c+d$ خواهیم داشت:

$$۱۶K^{۲}=(۲s-۲d)(۲s-۲c)(۲s-۲b)(۲s-۲a)$$

$$K^{۲}=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

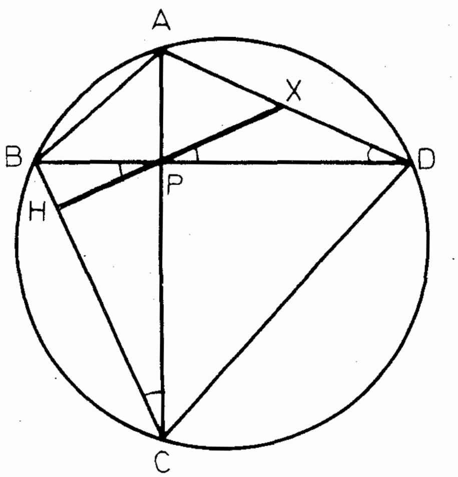
هرگاه در این دستور $d=۰$ اختیار شود ، دستور هرون مربوط بـه مساحت مثلث بدست می آید:

$$[S(ABC)]^{۲}=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

هرچندکه این‌دستور به هرون اسکندرانی (سال ۶۰ میلادی) منسوب است اما به‌گمان وان دِرویردن متعلق به ارشمیدس (قرن سوم پیش‌ازمیلاد) می باشد.

کشف دیگری از براهما گوپتا مربوط به نوع‌خاصی از چهارگوشهٔ محاطی است ، به شرح زیر:

قضیهٔ ۳،۲.۳- هرگاه دو قطر یك چهار گوشهٔ محاطی برهم عمود باشند ، هرخط که از نقطهٔ برخورد دو قطر بریك ضلع چهار گوشه عمود شود از وسط ضلع مقابل به این ضلع می‌گذرد.



(شکل ۲.۳ ، ب)

مطابق با شکل (۲.۳ ، پ) ، چهارگوشهٔ ABCD محاطی است ودوقطر AC و BD از آن در P برهم عمودند . خط PH بر BC عمود است و AD را در X تلاقی کرده است.

برای اثبات آنکه X وسط AD است ، ملاحظه مـی‌کنیم کـه زاویه‌های XPD و BPH باهم وزاویه‌های XDP و ACB باهم

برابرند. بنابراین دو زاویهٔ XDP و XPD باهم برابرند و در نتیجه $XP=XD$ ، همچنین ثابت می‌شود که $XP=XA$ بنابراین: $XA=XD$.[1]

تمرینها

۱ــ چهارگوشه‌ای کــه اندازه‌های ضلعهایش a ، b ، c ، d است در یك دایره محاط است و بر دایرهٔ دیگر محیط می‌باشد. ثابت کنید که K مساحت این چهارگوشه از دستور زیر بدست می‌آید:

$$K^{۲}=abcd$$

۲ــ مساحت هریك ازمثلثهای باضلعهای به‌اندازه‌های زیر را بدست‌آورید:

(۱۳ ، ۱۴ ، ۱۵) و (۳ ، ۱۴ ، ۱۵)

۳ــ اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی مثلث را برحسب a ، b و c اندازه‌های ضلعها ، و s نصف مجموع این اندازه‌ها بدست‌آورید.

۴ــ دریك مثلث ، r ، r_a ، r_b ، r_c شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی وخارجی ، R شعاع دایرهٔ محیطی ، s نصف محیط ، I_a ، I_b ، I_c مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی می‌باشد. ثابت کنید که:

$$r_a+r_b+r_c-r=۴R \quad و \quad S(I_aI_bI_c)=۲sR$$

۵ــ با توجه به نامگذاریهای روی شکلهای(۲.۳ ، الف) ثابت‌کنید که K مساحت چهارگوشهٔ مزبور برابراست با:

$$K=\frac{lmn}{۴R}$$

۶ــ تمرین ۵ را درحالت $d=0$ تعبیر کنید.

۷ــ چهارگوشهٔ با ضلعهای به اندازه‌های a ، b ، c و d دردایرهٔ به شعاع R محاط است. ثابت‌کنید که K مساحت‌آن ازدستورزیر بدست می‌آید:

$$K^{۲}=\frac{(bc+ad)(ca+bd)(ab+cd)}{۱۶R^{۲}}$$

۸ــ ضلعهای روبرواز یك چهارگوشهٔ محاطی در V و W برخورد می‌کنند. ثابت کنید که نیمسازهای دوزاویهٔ V و W برهم عمودند.

۱ــ یادداشت از ح.غیور: ازقضیهٔ (۲.۳ ، ۳) قضیهٔ زیر به سادگی بدست می‌اید:
درچهارگوشهٔ محاط دردایرهٔ به مرکز O که قطرهای آن در P برهم عمودند ، وسطهای ضلعها وتصویرهای قائم P روی ضلعهــا هشت نقطهٔ واقع برمحیط یك‌دایره‌اند که مرکز آن وسط OP است.

۹ــ از نقطهٔ P واقع در صفحهٔ مستطیل ABCD به رأسهای آن وصل می‌کنیم. ثابت کنید که:

$$\overline{PA}^2-\overline{PB}^2+\overline{PC}^2-\overline{PD}^2=0$$

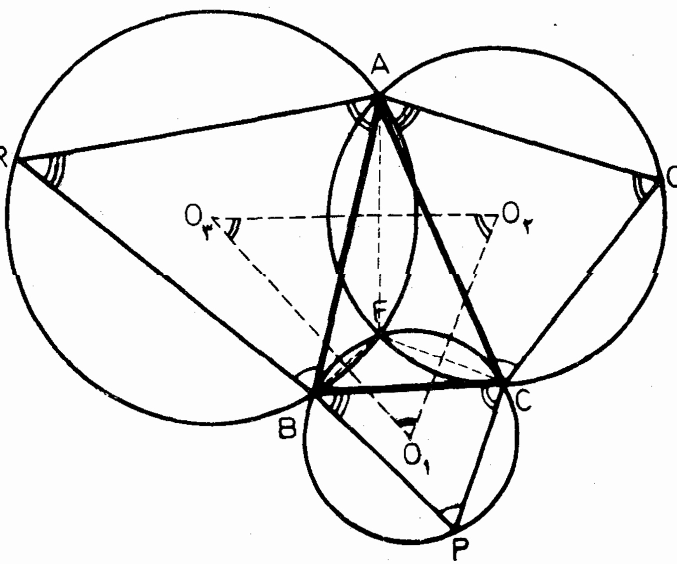
۱۰ــ ثابت کنید که حاصل‌ضرب فاصله‌های هر نقطهٔ واقع بر دایرهٔ محیطی یك چهار گوشهٔ محاطی از دو ضلع روبروی آن برابر است با حاصل‌ضرب فاصله‌های آن نقطه از دو ضلع دیگر و برابر است با حاصل‌ضرب فاصله‌های آن از دو قطر.

۳.۳ــ مثلثهای ناپلئون

در اینجا به بررسی چند شکل می‌پردازیم که از روی مثلثها و چهارگوشه‌ها بدست می‌آیند. شگفت‌آور است که به قضیه‌های ساده‌ای از قبیل قضیهٔ زیر چندان توجهی نشده است.

قضیهٔ ۱،۳.۳ــ هرگاه روی هریك از ضلعهای مثلث و در بیرون آن سه مثلث چنان رسم کنیم که مجموع زاویه‌های رأسهایی از آنها که غیرمجاور مثلث مفروض است برابر با $180°$ باشد، دایره‌های محیطی این مثلثها در یك نقطه مشترکند.

این قضیه که در بارهٔ خطهای متقارب است، اثباتی بسیار ساده دارد. بنا به شکل (۳.۳، الف)، روی ضلعهای مثلث ABC و در بیرون آن، مثلثهای CBP، ACQ و BAR را چنان رسم کرده‌ایم که مجموع سه زاویهٔ P، Q و R برابر با $180°$ است. دایره‌های محیطی دو مثلث CBP و ACQ که در C مشترکند در نقطهٔ دیگر F نیز مشترکند. از F به سه نقطهٔ A، B و C وصل می‌کنیم. هریك از چهارگوشه‌های FBPC



(شکل ۳.۳، الف)

و FCQA محاطی است و باتوجه به اینکه‌درهرچهارگوشهٔ محاطی زاویه‌های روبرو مکملند، می‌توانیم بنویسیم:

$$\widehat{AFB}=۳۶۰^\circ-(\widehat{BFC}+\widehat{CFA})$$
$$=۳۶۰^\circ-[(۱۸۰^\circ-\hat{P})+(۱۸۰^\circ-\hat{Q})]$$
$$=\hat{P}+\hat{Q}=۱۸۰^\circ-\hat{R}$$

بنابراین چهارگوشهٔ ARBF محاطی است و دایـرهٔ محیطی مثلث ABR از F می‌گذرد.

دو حالت خاص این‌قضیه، به‌شرح زیر، جالب‌توجه است:

قضیهٔ ۳،۳.۳- هرگاه رأسهای A، B و C ازمثلث ABC به‌ترتیب روی‌ضلعهای QR، RP و PQ ازمثلث PQR واقع باشند، دایره‌های محیطی مثلثهای CBP، ACQ و BAR دریك نقطه مشترکند.

قضیهٔ ۴،۳.۳- هرگاه روی ضلعهای مثلث ABC و در خارج‌آن سه‌مثلث متشابه PCB و CQA و BAR را بسازیم (که در تشابه آنها زاویه‌های نظیر به‌ترتیبی است‌که در نامگذاری مثلثها بکار رفته است وملاحظه می‌شودکه زاویه‌های P، Q و R متناظر نیستند)، دایره‌های محیطی سه‌مثلث مزبور دریك نقطه مشترکند.

قضیهٔ (۲،۳.۳) در ۱۸۳۸ توسط میکل[1] ثابت شده وازطرف فوردر[2] به‌قضیهٔ محور موسوم شده است. هرگاه به‌جای C، B، A، R، Q، P به‌ترتیب C_1، B_1، A_1، C، B، A را بکار ببریم تا همان شکل (۹.۱، الف) را داشته باشیم، می‌توانیم این قضیه را به‌شرح مبسوط زیر ثـابت‌کنیم: هرگاه A_1، B_1، C_1 سه‌نقطهٔ دلخواه باشند که به ترتیب برضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC واقع باشند، دایره‌های محیطی مثلثهای AB_1C_1، A_1BC_1 و A_1B_1C در یك نقطهٔ P مشترکند. در حالت خاص‌که AP، BP و CP قطرهای این دایره‌ها باشند $A_1B_1C_1$ مثلث عمودی نظیر نقطهٔ P نسبت به‌مثلث ABC می‌باشد. اگر مثلث ABC و نقطهٔ P ثابت باشد و خطهای PA_1، PB_1 و PC_1 را با هم حول محور P و به‌زاویهٔ دلخواه دوران‌دهیم، واضح است‌که دایره‌هـای محیطی مثلثهای AB_1C_1، A_1BC_1 و A_1B_1C همواره از P می‌گذرند.

لازم نیست‌که سه‌نقطهٔ A_1، B_1، C_1 حتماً مثلث تشکیل دهند؛ ممکن است‌که این سه‌نقطه بر یك خط راست واقع‌باشند، مانند شکل (۵.۲،الف). در این‌حالت سه‌نقطهٔ

1- A. Miquel 2- Forder.

A_1 ، B و C برخطهای B_1C_1 ، C_1A ، AB_1 واقعند و بنا به‌همان قضیه دایره‌های محیطی‌مثلثهای ABC ، A_1B_1C ، A_1BC_1 در یک‌نقطه مشترکند و چون تنها نقطه‌های مشترک دودایرهٔ‌آخری A_1 و P است، پس قضیهٔ زیر ثابت شده است:

قضیهٔ ۴،۳،۳- هرگاه چهار خط دوبه‌دو در شش نقطهٔ A ، B ، C ، A_1 ، B_1 ، C_1 متقاطع باشند به‌گونه‌ای که A_1BC ، AB_1C ، ABC_1 ، $A_1B_1C_1$ نقطه‌های بریک استقامت‌را مشخص‌کنند، دایره‌های محیطی چهار مثلث AB_1C_1 ، A_1BC_1 ، A_1B_1C و ABC دریک نقطه مشترکند.

درحالت خاص‌که AP ، BP و CP قطرهای سه دایرهٔ نخست باشند ، A_1B_1 خط سمسن نقطهٔ P نسبت به مثلث ABC می‌باشد. هرگاه مثلث ABC و نقطهٔ P ثابت بماند و خطهای PA_1 ، PB_1 و PC_1 باهم حول نقطهٔ P به زاویهٔ دلخواه به گونه‌ای دوران کنندکه «خط سمسن مایل» بدست‌آید ، دراین صورت A_1 ، B_1 ، C_1 چنانند کـه خطهای PA_1 ، PB_1 و PC_1 با خطهای BC ، CA و AB زاویه‌هـای متساوی (دریک جهت) می‌سازند.

ازقضیهٔ (۳،۳،۳) نتیجهٔ مهمی بدست‌می‌آیدکـه به‌مثلث حاصل‌از O_1 ، O_2 ، O_3 مرکزهای دایره‌های محیطی سه مثلث BCP ، CAQ ، ABR مربوط می‌باشد (شکل ۳،۳ ، الف). ضلعهای O_2O_3 ، O_3O_1 ، O_1O_2 از این مثلث به ترتیب بروترهـای مشترک(محورهای اصلی) دوبه‌دوازدایره‌ها عمودند و زاویه‌های O_1 ، O_2 ، O_3 از این مثلث به ترتیب با زاویه‌های P ، Q و R برابرند. بـا توجه به اینکه این زاویـه‌ها، زاویه‌های غیرمتناظرازسه مثلث متشابهند ، پس:

قضیهٔ ۵،۳،۳- هرگاه روی ضلعهای مثلث ABC و در خارج‌آن سه مثلث متشابه PCB، CQA، BAR را بسازیم (زاویه‌های متناظر به ترتیب نامگذاری مثلثها است)، مرکزهای دایره‌های محیطی این مثلثها، مثلثی تشکیل‌می‌دهند کـه با آن مثلثها متشابه است.

حالت خاص این قضیه را به صورت زیربیان می‌کنیم:

قضیهٔ ۶،۳،۳- هرگاه روی ضلعهای یک مثلث و در خارج آن سه مثلث متساوی ـ الاضلاع بسازیم ، مرکزهای دایره‌های محیطی این مثلثها نیز یک مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند.

ازقرار معلوم، ناپلئون بناپارت تااندازه‌ای ریاضیدان بوده وبه ویژه علاقه‌ای‌وافر به هندسه‌داشته است. می‌گویند پیش‌از آنکه‌حکومت‌فرانسه‌را دردست گیرد باریاضیدانان نامی لاگرانژ و لاپلاس جلسه‌های بحث و گفتگو داشته است. حتی اینکه ریاضیدان اخیر یک بار به طورجدی به اوچنین گفته است : «ژنرال، درسی ازهندسه،آخرین چیزی است

که ازشما مورد تمنا است». لاپلاس بعدها مهندس نظامی مخصوص امپراطوری شد.

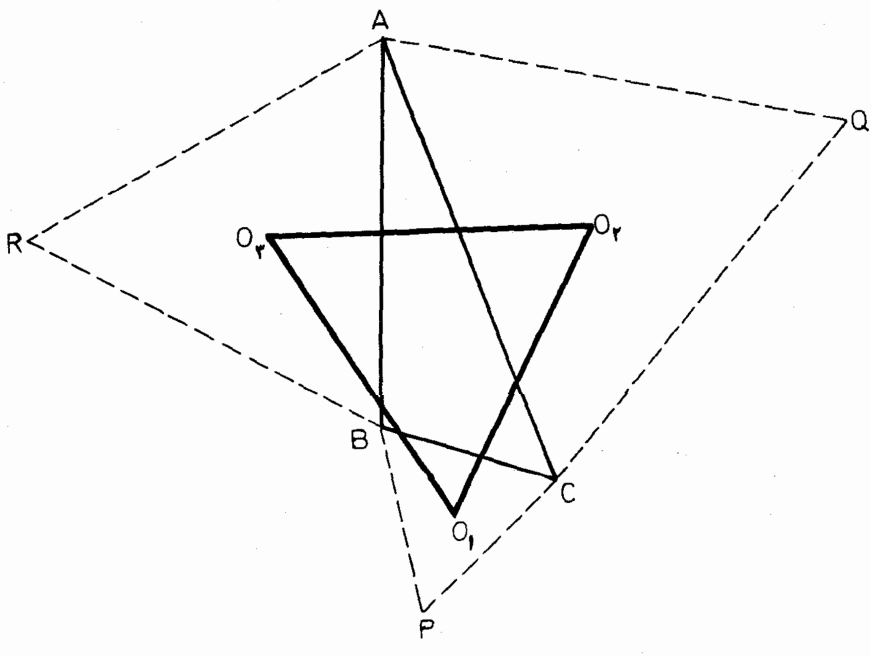
قضیهٔ (۶،۳.۳) را به ناپلئون نسبت می‌دهند، اما در این باره می‌توان شك داشت ، زیرا معلومات هندسی او آن اندازه نبوده کــه به این نتیجهٔ جالب توجه دست یابد: چنانکه درانگلیسی جملهٔ دوسویهٔ زیررا به اونسبت می‌دهند:

ABLE WAS I ERE I SAW ELBA

(تقریباً به این مضمون : «قبل ازدیدن جزیرهٔ الب می‌توانستم»).

به هر ترتیب ، درحالتی که مثلثهای متساوی‌الاضلاع PCB ، CQA ، BAR را درخارج مثلث ABC بسازیم و O_1 ، O_2 ، O_3 مرکزهای‌آن مثلثها باشند ، مثلث متساوی‌الاضلاع $O_1O_2O_3$ را مثلث ناپلئون خارجی نظیر مثلث ABC می‌نامند (شکل ۳.۳ ، ب) ، ودرحالتی که مثلثهای متساوی‌الاضلاع را ، مطابق شکل (۳.۳ ، پ)، درداخل مثلث بسازیم و N_1 ، N_2 ، N_3 مرکزهای‌آنها باشند ، مثلث $N_1N_2N_3$ را مثلث ناپلئون داخلی نظیر مثلث ABC می‌نامند . با این نامگذاری قضیهٔ (۶،۳.۳) چنین بیان می‌شود:

مثلث ناپلئون خارجی نظیر هرمثلث ، متساوی‌الاضلاع است.



(شکل ۳.۳ ، ب)

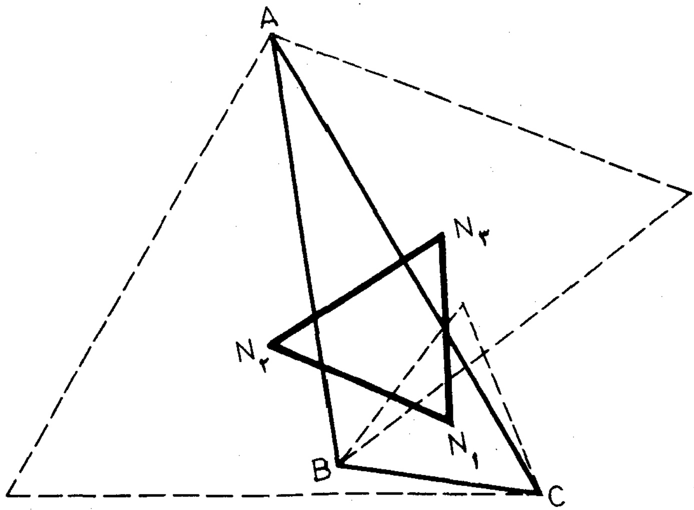
براین قضیه برهانی توسط یگلوم[1] ارائه شده است که با برهان گفته شده دربالا تفاوت دارد، اما درضمن اثبات قضیهٔ مشابه زیررا نیزدربردارد:

قضیهٔ ۷،۳.۳- مثلث ناپلئون داخلی هرمثلث ، متساوی‌الاضلاع است.

با قرارداد $AC=b$ ، $CB=a$ ، $BA=c$ داریم $AO_۲=\frac{b}{\sqrt{۳}}$ و $AO_۳=\frac{c}{\sqrt{۳}}$ وچون اندازهٔ زاویهٔ $O_۳AO_۲$ برابر $A+۶۰^\circ$ است ، بنابه قانون کسینوسها درمثلث $AO_۳O_۲$ داریم.

$$\overline{O_۳O_۲}^۲=\frac{۱}{۳}b^۲+\frac{۱}{۳}c^۲-\frac{۲}{۳}bc\cos(A+۶۰^\circ)$$

رأسهای $N_۲$ و $N_۳$ ازمثلث ناپلئون داخلی به ترتیب قرینه‌های $O_۲$ و $O_۳$ نسبت به



(شکل ۳.۳ ، پ)

CA و AB می‌باشند وبه‌علاوه زاویهٔ $N_۳AN_۲$ برابراست با $A-۶۰^\circ$ ونتیجه می‌شود:

$$\overline{N_۳N_۲}^۲=\frac{۱}{۳}b^۲+\frac{۱}{۳}c^۲-\frac{۲}{۳}bc\cos(A-۶۰^\circ)$$

ازدورابطهٔ بالا داریم:

$$\overline{O_۳O_۲}^۲-\overline{N_۳N_۲}^۲=\frac{۲}{۳}bc[\cos(A-۶۰^\circ)-\cos(A+۶۰^\circ)]$$

$$=\frac{۴}{۳}bc\sin A\sin ۶۰^\circ=\frac{۲}{\sqrt{۳}}bc\sin A$$

۱- Yaglom

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}S(ABC)$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\overline{O_1O_2}^2-\overline{N_1N_2}^2=\overline{O_3O_1}^2-\overline{N_3N_1}^2=\frac{4}{\sqrt{3}}S(ABC)$$

وچون $O_2O_3=O_3O_1=O_1O_2$ پس:

$$N_1N_3=N_3N_1=N_1N_2$$

بالاخره چون مساحت مثلث متساوی الاضلاع برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{4}$ برابر مربع یك ضلع آن ، پس می‌توانیم نتیجهٔ مهم زیررا بیان کنیم:

قضیهٔ **۸،۳.۳-** تفاضل مساحتهای دو مثلث ناپلئون خارجی و داخلی نظیرهرمثلث برابر است با مساحت آن مثلث.

دستورصحیح مربوط به این قضیه بادرنظر گرفتن جهت نامگذاری مثلثها به‌صورت زیر است:

$$S(O_1O_2O_3)-S(N_3N_2N_1)=S(ABC)$$

به عبارت دیگر:

$$S(O_1O_2O_3)+S(N_1N_2N_3)=S(ABC)$$

تمرینها

۱ــ روی دوضلع ازمثلثی ودرخارج آن دومربع می‌سازیم. ثابت کنید که دایره‌های محیطی این‌مربعها ودایره‌ای که‌قطرش‌ضلع‌سوم مثلث است دریك نقطه متقاربند ومرکزهای این سه دایره رأسهای یك مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین می‌باشند.

۲ــ با درنظرگرفتن شکل (۳.۳ ، ب) ثابت کنید که:

الف : سه خط PO_1 و QO_2 و RO_3 در O، مرکزدایرهٔ محیطی مثلث ABC ، متقاربند؛

ب : سه خط AO_1 و BO_2 و CO_3 متقاربند؛

ج : پاره خطهای AP ، BQ و CR باهم برابرند ؛ وبه علاوه این سه خط‌در F ، نقطهٔ مشترك دایره‌های محیطی مثلثهای ACQ ، BPC و ABR ، متقاربند ودو به‌دو با یکدیگرزاویهٔ °۶۰ می‌سازند.

(فرما برای نخستین بار ثابت کرده است که مجموع فاصله‌های FA ، FB ، FC وقتی می‌نیمم است که هیچیك اززاویه‌های مثلث ABC از °۱۲۰ بیشترنباشد).

۳ـ با درنظر گرفتن شکل (۳.۳، پ) ثابت کنید که سه خط AN_1، BN_2، CN_3 متقاربند.

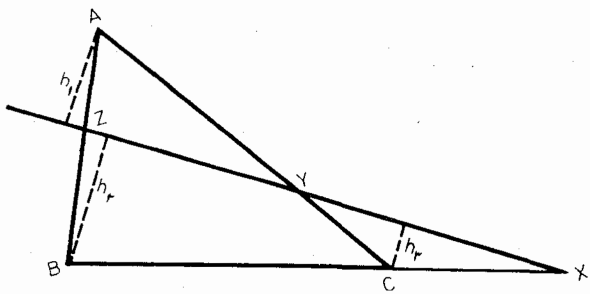
۴ـ ثابت کنید که مثلثهای ناپلئون داخلی و خارجی نظیر هر مثلث هم مرکزند.

۴.۳ـ قضیهٔ منلائوس

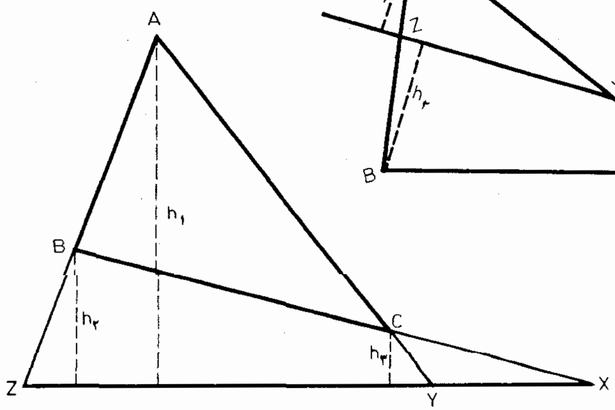
منلائوس[1] اسکندرانی (قرن اول میلادی)، که نباید با منلائوس اسپارتی اشتباه شود، رساله‌ای به نام «Sphoerica» منتشر کرده که در آن یك ویژگی مثلث کروی ذکر شده بود. وچنین برمی‌آید که ویژگی مشابه مربوط به مثلث مسطح نیز تا آن موقع شناخته شده بوده است؛ اما هیچ مدرك قدیمی که براین امر دلالت کند بدست نیامده است. با وجود این، ویژگی مزبور را به‌شرح زیر به نام قضیهٔ منلائوس بیان می‌کنیم که متکی به پاره خطهای جهت‌داراست:

قضیهٔ ۱،۴.۳ـ هرگاه سه نقطهٔ X، Y و Z واقع برضلعهای BC، CA و AB (یا واقع بر امتداد آنها) از مثلث ABC بریك خط راست واقع باشند، خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = +1$$



(شکل ۴.۳، ب)



(شکل ۴.۳، الف)

۱- Ménélaüs

وبرعکس، اگر چنین رابطه‌ای برای سه‌نقطهٔ X، Y و Z واقع برضلعها یا امتداد ضلعهای مثلث ABC برقرار باشد، این‌سه نقطه بریك خط راست واقعند.

فرض می‌کنیم سه‌نقطهٔ X ، Y و Z بریك خط راست واقع باشند. بنا به‌قرارداد، فاصله‌های همهٔ نقطه‌های واقع دریکی از دونیم صفحهٔ خط XYZ (مثلا بالای آن)را ازخط مزبور مثبت اختیار می‌کنیم و فاصله‌های نقطه‌های واقع در نیم‌صفحهٔ دیگر آن (پایین آن) را از آن منفی می‌گیریم. با این قرارداد برای هر یك از دو شکل صفحهٔ قبل داریم :

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}=\frac{h_2}{h_3}\ ،\ \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}}=\frac{h_3}{h_1}\ ،\ \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}}=\frac{h_1}{h_2}$$

از ضرب نظیر به‌نظیر طرفین این‌تساویها دریکدیگر رابطهٔ مطلوب بدست می‌آید (یادآوری می‌شود برای‌آنکه سه‌نقطهٔ X و Y و Z بریك خط راست واقع‌باشند لازم است‌که حداقل یکی ازآنها برامتداد ضلعهای مثلث واقع باشد)[1].

برعکس، هرگاه برای سه‌نقطهٔ X و Y و Z واقع برضلعهای مثلث، یا واقع بر امتدادهای‌آنها، داشته‌باشیم:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}\cdot\frac{\overline{CY}}{\overline{AY}}\cdot\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}}=+1$$

به‌فرض‌آنکه Z' نقطهٔ برخورد AB با XY باشد داریم:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}\cdot\frac{\overline{CY}}{\overline{AY}}\cdot\frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}}=+1$$

از مقایسهٔ دورابطه نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}}=\frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}}$$

۱- یادداشت ازح. غیور : اگر در اثبات قضیهٔ منلائوس به‌ترتیبی‌که ذکر شده برای راستای خطهای عمود برمورب جهت قائل شویم اثبات قضیه‌منطقی‌تر می‌شود واز رابطهٔ منلائوس بعد از اثبات نتیجه می‌شودکه مورب یا امتداد هرسه‌ضلع یا دوضلع وامتداد ضلع سوم را قطع می‌کند.

بنا براین Z' بر Z منطبق است، یعنی سه‌نقطهٔ X و Y و Z بریك‌خط راست واقعند.[۱]
قضیهٔ منلائوس در اثبات اینکه چند نقطه بریك خط راست واقعند مورد استفاده قرار می‌گیرد، آنچنانکه قضیهٔ سوا (بندهای ۲.۱، ۱ و ۲.۱، ۲) در اثبات تقارب چند خط بکار می‌رود. برای رفع تفاوت می‌توانیم رابطهٔ منلائوس‌را چنین بنویسیم:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}=-۱$$

تمرینها

۱ـ ثابت‌کنیدکه در هر مثلث، نیمسازهای زاویه‌های خارجی امتدادهای ضلعهای مقابل را در سه‌نقطهٔ واقع بریك خط راست قطع می‌کنند.

۲ـ ثابت‌کنیدکه در هرمثلث، پاهای نیمسازهای دوزاویهٔداخلی وپای نیمساززاویهٔ خارجی رأس دیگر سه‌نقطهٔ واقع بریك خط راست می‌باشند.

۵.۳ـ قضیهٔ پاپوس[۲]

قضیهٔ زیر یکی از مهمترین قضیه‌های هندسهٔ مسطحه است که نخستین‌بار توسط پاپوس اسکندرانی درحدود سال ۳۰۰ میلادی بیان شده است. شانزده قرن پس از بیان قضیه، اهمیت اساسی‌آن در هندسهٔ تصویری معلوم گردید. بی‌مورد نیست‌که پاپوس را خاتم هندسه‌دانان بزرگ گذشته می‌نامند.

قضیهٔ منسوب به‌پاپوس را به گونه‌های مختلف می‌توان بیان‌کرد. یکی از آنها چنین‌است:

قضیهٔ ۵.۳، ۱ـ سه‌نقطهٔ A ، C ، E بریك خط راست وسه‌نقطهٔ دیگر B، D، F برخط راست دیگر واقعند، هرگاه خطهای AB، CD و EF باخطهای DE، FA و BC به‌ترتیب در L ، M ، N برخوردکنند، این سه‌نقطه بریك خط راست واقعند.

در این قضیه‌که فقط موضع هندسی مطرح است واندازه‌های پاره‌خطها یازاویه‌ها

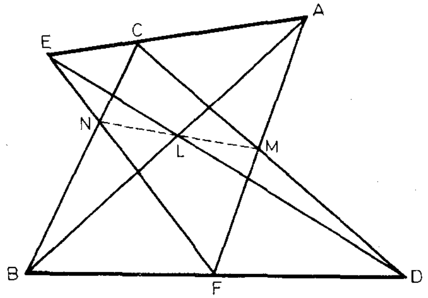
۱ـ درآثار ریاضی دورهٔاسلامی شکل‌حاصل ازمثلث ABC ومورب XYZ را رویهم‌شکل قطاع گفته ورابطهٔ منلائوس‌را به‌صورت

$$\frac{BX}{XC}\times\frac{CY}{YA}=\frac{ZB}{AZ}$$

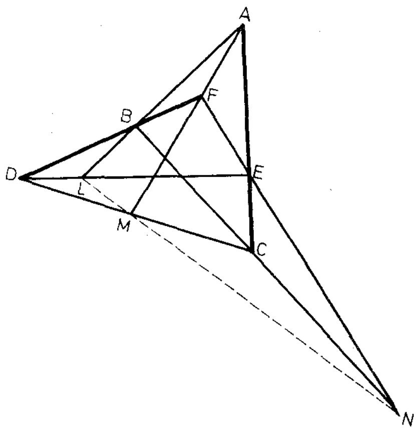
نوشته‌آن‌را نسبت مؤلف نامیده‌اند. مترجم

۲ـ Pappus

دخالتی ندارد، همچنین رعایت ترتیب درمیان نیست یعنی درهریك ازمجموعه‌های سه‌نقطه مهم نیست که کدام بین دوتای دیگر واقع است ، ویژگی تصویر عرض وجود می کند.



(شکل ۵.۳، الف)



(شکل ۵.۳، ب)

شکلهای (۵.۳، الف) و (۵.۳، ب) دووضع ممکن ازنقطه‌های مفروض را نشان می‌دهد، و البته شکلهای دیگری نیز می‌توان درنظر گرفت. می‌توان جایگشتهای مختلف نقطه‌های A، B، C، D، E و F را اختیار کرد ودرهرحالت‌نقطه‌های L ، M و N راتعیین کرد.

برای پرهیز از حالتهایی‌که نقطه‌ها دربینهایت واقع شوند،که اینچنین‌حالتهایی را بعدها در زمینهٔ هندسهٔ تصویری بررسی خواهیم کرد ، فعلا فرض می کنیم‌که مطابق شکل (۵.۳ ، پ) سه‌خط AB ، CD و EF مثلث UVW را تشکیل می‌دهند با بکاربردن قضیهٔ منلائوس برای هریك ازپنج مجموعهٔ سه‌نقطه‌ای:

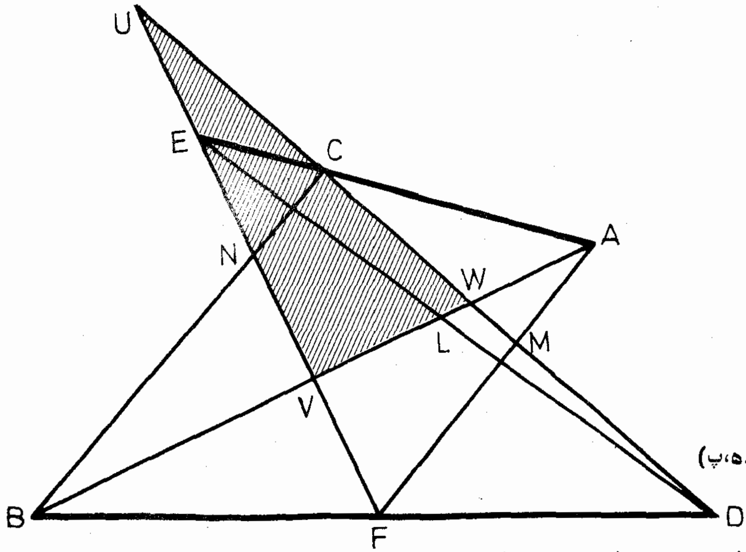
LDE ، AMF ، BCN ، ACE ، BDF

که هرکدام از آنها برضلعهای مثلث UVW واقعند خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{VL}}{\overline{LW}}\cdot\frac{\overline{WD}}{\overline{DU}}\cdot\frac{\overline{UE}}{\overline{EV}}=-1 \qquad \frac{\overline{VA}}{\overline{AW}}\cdot\frac{\overline{WM}}{\overline{MU}}\cdot\frac{\overline{UF}}{\overline{FV}}=-1$$

$$\frac{\overline{VB}}{\overline{BW}}\cdot\frac{\overline{WC}}{\overline{CU}}\cdot\frac{\overline{UN}}{\overline{NV}}=-1 \qquad \frac{\overline{VA}}{\overline{AW}}\cdot\frac{\overline{WC}}{\overline{CU}}\cdot\frac{\overline{UE}}{\overline{EV}}=-1$$

$$\frac{\overline{VB}}{\overline{BW}}\cdot\frac{\overline{WD}}{\overline{DU}}\cdot\frac{\overline{UF}}{\overline{FV}}=-1$$



(شکل ۳.۵،پ)

حاصل‌ضرب طرفین سه‌تساوی اول‌را برحاصل‌ضرب طرفین دوتساوی دیگر تقسیم می‌کنیم، پس از ساده‌کردن حاصل خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{VL}}{\overline{LW}} \cdot \frac{\overline{WM}}{\overline{MU}} \cdot \frac{\overline{UN}}{\overline{NV}} = -۱$$

از این رابطه بـنا به‌عکس قضیهٔ منلائوس نتیجه می‌شود که سه‌نقطهٔ L و M و N بریك خط راست واقعند.

[**یادداشت از ح. غیور:** اگر نامگذاری نقطه‌های قضیهٔ پاپوس‌را به‌ترتیب زیرقرار دهیم، صورت قضیه و برهان‌آن بیشتر قابل‌فهم وجالبتر می‌شود:

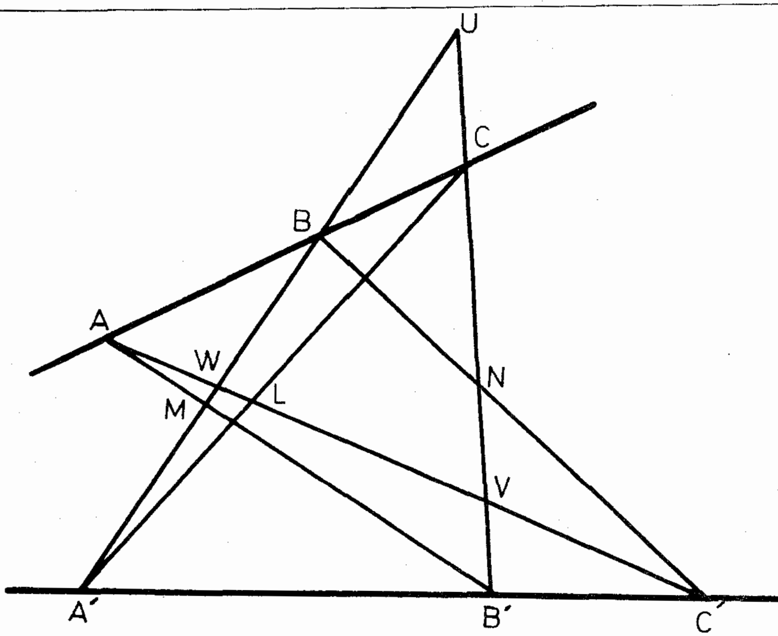
قضیه: سه‌نقطه A ، B ، C بریك خطراست وسه‌نقطهٔ A' ، B' ، C' برخط راست دیگر واقعند. اگر L ، M ، N به‌ترتیب نقطهٔ برخورد(CA' و AC')، (BA' و AB')، (CB' و BC') باشند، این‌سه‌نقطه بریك خط راست واقعند.

از تقاطع دوبـه‌دوی AB' و BA' و CB' مثلث UVW پدید می‌آید. نسبت به‌این مثلث برای موربهای $LA'C$ ، $MB'A$ و $NC'B$ به‌ترتیب داریم:

$$\frac{\overline{LV}}{\overline{LW}} \cdot \frac{\overline{A'W}}{\overline{A'U}} \cdot \frac{\overline{CU}}{\overline{CV}} = -۱$$

$$\frac{\overline{MW}}{\overline{MU}} \cdot \frac{\overline{B'U}}{\overline{B'V}} \cdot \frac{\overline{AV}}{\overline{AW}} = -۱$$

$$\frac{\overline{NU}}{\overline{NV}} \cdot \frac{\overline{C'V}}{\overline{C'W}} \cdot \frac{\overline{BW}}{\overline{BU}} = -۱$$



از ضرب دوطرف تساویهای بالا درهم بدست می‌آید:

$$\frac{\overline{LV}}{\overline{LW}}\cdot\frac{\overline{MW}}{\overline{MU}}\cdot\frac{\overline{NU}}{\overline{NV}}\cdot\frac{\overline{A'W}\cdot\overline{CU}\cdot\overline{B'U}\cdot\overline{AV}\cdot\overline{C'V}\cdot\overline{BW}}{\overline{A'U}\cdot\overline{CV}\cdot\overline{B'V}\cdot\overline{AW}\cdot\overline{C'W}\cdot\overline{BU}}=-۱$$

دو رابطهٔ منلائوس برای موربهای ABC و $A'B'C'$ را نیز نوشته و دوطرف آنها را درهم ضرب می‌کنیم. از مقایسهٔ رابطه‌ای‌که بدست می‌آید با رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود:

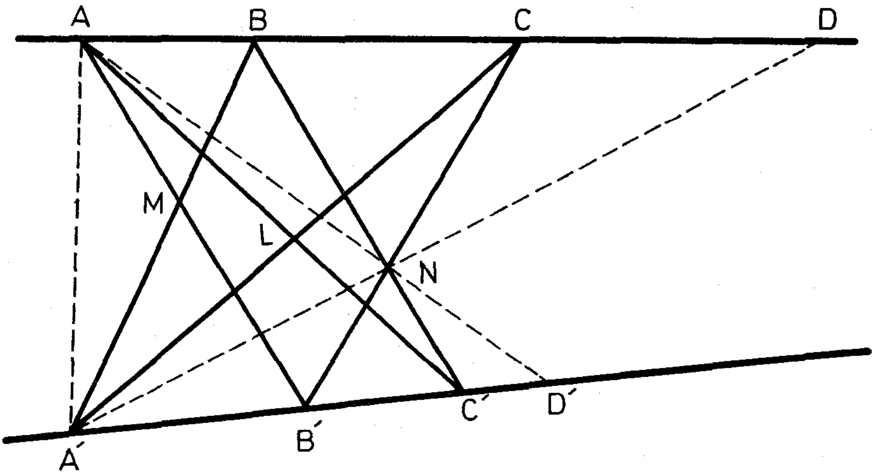
$$\frac{\overline{LV}}{\overline{LW}}\cdot\frac{\overline{MW}}{\overline{MU}}\cdot\frac{\overline{NU}}{\overline{NV}}=-۱$$

(بدیهی است‌که برای اثبات قضیه شکل دیگر لازم نیست، زیرا نقطه‌ها و خطها به‌هرترتیب واقع باشند به‌شرط‌آنکه نامهای نقطه‌های نظیر تغییر نکند، اثبات همان است که نوشته شده‌است. این برهان همان برهان کتاب است فقط نام نقطه‌ها تغییرکرده‌است.)

این جانب (حسین غیور) در سالها پیش به‌کمك نسبت ناهمسازی، برهان زیر را برای اثبات قضیهٔ پاپوس پیدا کرده‌ام: از A به A' وبه N وصل می‌کنیم تا دستگاه ناهمساز $(A،A'B'C'D')$ پدیدآید. دستگاه ناهمساز $(N ، A'B'C'D')$ رادرنظر می‌گیریم وآن را با خط AB قطع می‌کنیم:

$$(A'B'C'D')=(DCBA)=(ABCD)$$

دردودستگاه ناهمسازبا نسبت برابر $(A ، ABCD)$ و $(A،A'B'C'D')$ چون دو



شعاع نظیر AA' و $A'A$ برهم منطبق است M و L و N نقطه‌های تقاطع شعاعهای نظیر $(AB', A'B)$ و $(AC', A'C)$ و $(AD', A'D)$ بریك خط راست قراردارند.]

تمرینها

۱ــ سه نقطهٔ A ، C ، E بریك خط راست وسه نقطهٔ B ، D ، F برخط راست دیگر واقعند. هرگاه خطهای AB و CD به ترتیب با خطهای DE و FA موازی باشند، ثابت‌کنیدکه EF نیزبا BC موازی است.

۲ــ هرگاه نقطه‌های A ، B ، D ، E ، N ، M چنان‌باشندکه‌خطهای AE ، DM، NB در P وخطهای AM ، DB ، NE در Q متقارب باشند، خطهای AB ، DE ، NM نسبت به هم چه وضعی خواهند داشت؟

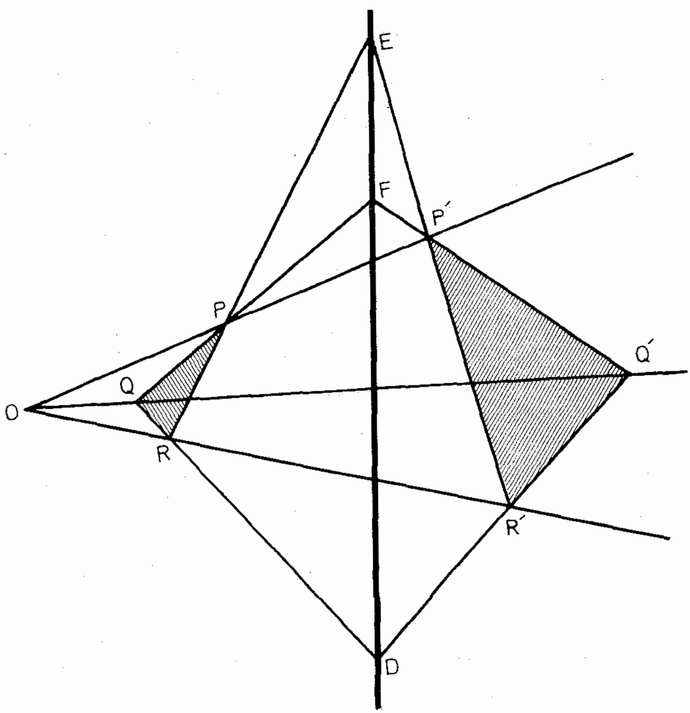
۳ــ نقطه‌های C و F به ترتیب روی ضلعهای AE و BD از متوازی‌الاضلاع $AEBD$ واقعند. خطهای CD و FA در M و خطهای EF و BC در N برخورد می‌کنند. هرگاه P نقطهٔ برخورد MN با DA و Q نقطهٔ برخورد MN با EB باشد، ثابت‌کنیدکه $AP=QB$.

۴ــ روی شکل (۵.۳ ، الف)، یا روی شکل (۵.۳ ، ب) چند خط و چند نقطه یافت می‌شود؟ برهریك از نقطه‌ها چند خط می‌گذرد؟ روی هریك از خطها چند نقطه واقع است؟

۶.۳ـ مثلثهای همسان[1] ـ قضیهٔ دزارگ[2]

نظریهٔ هندسی پرسپکتیو(= مناظر و مرایا) نخستین بار توسط آرشیتکت ایتالیائی فیلیپو برونله‌چی[3] (۱۴۴۶–۱۳۷۷) به میان آمده است. باید گفت که طرح گنبد هشت ترک کلیسای اعظم فلورانس وهمچنین کاخ پیتی ازاین آرشیتکت است. آرشیتکت دیگر، ژیرار دزارگ (۱۶۶۱–۱۵۹۱) نظریه را دنبال کرد وروی آن تحقیق کامل انجام داد. دیری نپایید که قضیهٔ معروف «دومثلث» که توسط دزارگ بیان شده بود اهمیتی همچون قضیهٔ پاپوس بدست آورد. درحقیقت می‌توان قضیهٔ دزارگ را با دشواریهایی از قضیهٔ پاپوس نتیجه گرفت، اما بااستفاده از قضیهٔ منلائوس اثبات آن به سادگی انجام می‌گیرد.

هرگاه بین دوشکل پدیدآمده ازنقاط وخطوط، چنان تناظری وجود داشته باشد که هرجفت نقطهٔ نظیرهم برخطهای متقارب واقع باشند می گوئیم که آن دوشکل مرکزهمسانی



(شکل ۶.۳ ، الف)

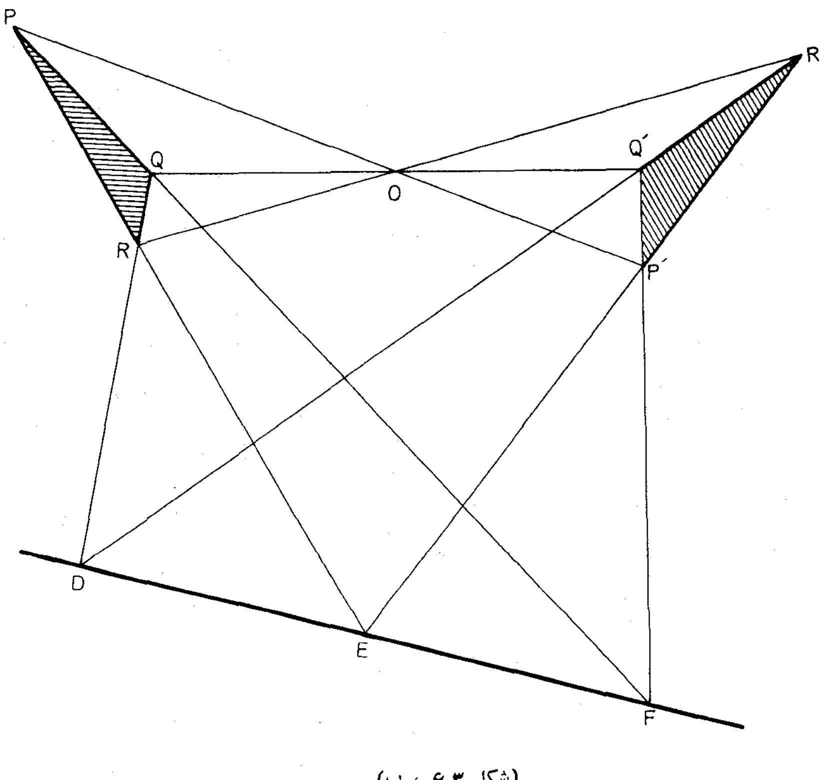
1- Homologique
2- Desargues
3- Filippo Brunelleschi

دارند. هرگاه تناظر بین دوشکل چنان باشد که هرجفت خط نظیرهم در نقاط واقع بر یك خط متقاطع باشند می‌گوئیم که آن دوشکل محورهمسانی دارند. ازنظرهندسهٔ تصویری، بیان قضیهٔ دو مثلث دزارگ چنین است: هرگاه دومثلث، مرکزهمسانی داشته باشند محور همسانی نیز خواهند داشت. اما برای پرهیز از پیچیدگیهایی که در حالت توازی خطها بوجود می‌آید، قضیهٔ مزبوررا چنین بیان می‌کنیم:

قضیهٔ ۱،۶.۳- هرگاه دو مثلث همسان باشند و ضلعهای متناظر آنها متقاطع باشند، نقطه‌های تقاطع ضلعها بریك خط راست واقعند.

دراین قضیه نیزمنحصراً وضع نقاط وخطوط دخالت‌دارد وبرای‌آن شکلهای مختلف می‌توان رسم کرد. شکلهای (۶.۳، الف) و (۶.۳، ب) دوحالت از شکلهای ممکن را نشان می‌دهد. دومثلث PQR و $P'Q'R'$ درهمسانی به مرکز O متناظرند وضلعهای متناظرآنها در D، E و F متقاطعند.

بااستفاده از قضیهٔ منلائوس برای مجموعه‌های سه نقطه‌ای $DR'Q'$، $EP'R'$، $FQ'P'$ که روی ضلعهای مثلثهای OQR، ORP و OPQ واقعند، خواهیم داشت:



(شکل ۶.۳، ب)

$$\frac{\overline{QD}}{\overline{RD}}\cdot\frac{\overline{RR'}}{\overline{OR'}}\cdot\frac{\overline{OQ'}}{\overline{QQ'}}=+1$$

$$\frac{\overline{RE}}{\overline{PE}}\cdot\frac{\overline{PP'}}{\overline{OP'}}\cdot\frac{\overline{OR'}}{\overline{RR'}}=+1$$

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{QF}}\cdot\frac{\overline{QQ'}}{\overline{OQ'}}\cdot\frac{\overline{OP'}}{\overline{PP'}}=+1$$

ازضرب نظیربه نظیرطرفین این تساویها وپس‌ازساده‌کردن خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{QD}}{\overline{RD}}\cdot\frac{\overline{RE}}{\overline{PE}}\cdot\frac{\overline{PF}}{\overline{QF}}=+1$$

بنا به عکس قضیهٔ منلائوس نتیجه می‌شود که سه‌نقطهٔ D ، E و F بریك خط راست واقعند.

عکس قضیهٔ دزارگ درحالت‌کلی چنین بیان‌می‌شود: هرگاه دومثلث محور همسانی داشته‌باشند مرکزهمسانی‌نیز خواهند داشت. اما دراینجا عکس‌قضیه‌را چنین بیان می کنیم:

قضیهٔ ۲،۶،۳- هرگاه دو مثلث محور همسانی داشته باشند و رأسهای متناظر آنها برخطهای متقارب واقع باشند، نقطهٔ تقارب خطها مرکز همسانی دومثلث است.

همانگونه‌که درشکلهای قبلی‌مشاهده‌می‌شود ، دومثلث PQR و $P'Q'R'$ دارای محور همسانی می‌باشند و ضلعهای QR و $Q'R'$ در D ، ضلعهای RP و $R'P'$ در E ، ضلعهای PQ و $P'Q'$ در F برخورد می‌کنند وسه نقطهٔ D ، E ، F بریك خط راست واقعند . هرگاه O نقطهٔ برخورد خطهای PP' و RR' باشد، باید ثابت‌کنیم که O و Q و Q' بریك خط راست واقعند . اما دو مثلث FPP' و DRR' دارای مرکز همسانی E می‌باشند، پس‌بنا به‌قضیهٔ (۳، ۶، ۱) نقطه‌های برخورد ضلعهای متناظر آنها، یعنی O (خطهای PP' و RR') ، Q' (خطهای $P'F$ و $R'D$)، Q (خطهای FP و DR)، سه‌نقطهٔ واقع بریك خط راست می‌باشند.

آنچه گفته شد برهانی مطلقاً «تصویری» بود.

تمرینها

۱ــ هرگاه دومثلث مرکز همسانی داشته باشند ودو جفت ازضلعهای متناظرآنها با

هم موازی باشند، یك‌جفت ضلعهای دیگر آنها نیز با هم موازیند (دراین حالت ، که در تمرین ۳ از بند ۲.۱ نیز بیان شده، دو مثلث متجانس نامیده می‌شوند).

۲ــ درشکل (۶.۳، الف)، یا درشکل (۶.۳،ب)،چند خط وچندنقطه یافت می‌شود؟ روی هریك ازخطها چندنقطه وجود دارد؟

۳ــ درهمان شکلها ، دو مثلث بیابید که مرکز همسانی‌آنها عبارت باشد از:
الف: P ، ب: P' ، پ: D

۴ــ دربارهٔ ضلعها ورأسهای دوپنج ضلعی $DFP'OR$ و $EPOQ'R'$ چه‌می‌توان گفت؟ آیا روی شکل، پنج ضلعیهای دیگری با همان خاصیت وجود دارد؟

۵ــ روی صفحهٔ کاغذ دوخط غیرموازی چنان رسم شده‌اندکه نقطهٔ برخوردآنهادر خارج از برگ‌ کاغذ می‌افتد، و P نقطه‌ای است روی صفحه در بخش واقع بین‌دوخط. از P خطی چنان رسم کنید که با دوخط مفروض متقارب باشد. راه‌حل را برای حالتی که دوخط موازی باشند تفسیر کنید.

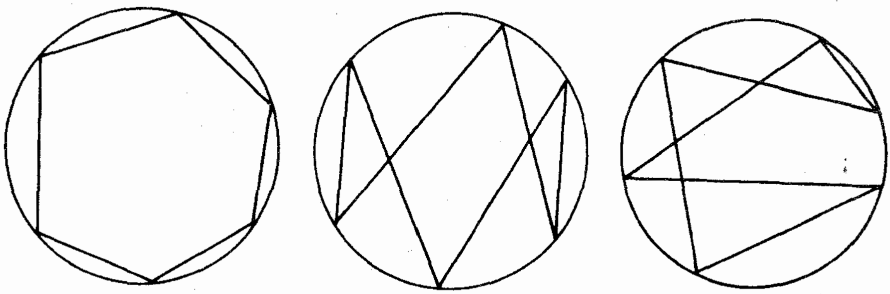
۷.۳ـ شش ضلعیها

در هر شش ضلعی ، دورأس را مجاور، یك‌درمیان یاروبرو می‌گوئیم برحسب آنکه یك‌ضلع، دوضلع یا سه ضلع بین‌آنها واقع باشد . در شش ضلعی ABCDEF نسبت به‌رأس A ، رأسهای B و F باآن مجاورند ، رأسهای C و E باآن یك درمیانند. و رأس D باآن روبروست. پاره‌خط واصل بین دورأس روبرو را قطر وضلعهای‌واقع بین دوجفت رأسهای روبرو را ضلعهای روبرو می‌نامیم . درشش ضلعــی گفته شده قطرها عبارتند از AD ، BE و CF و ضلعهای روبرو عبارتند از AB و DE ، BC و EF، CD و FA .

یك شش ضلعی داده شده را باشش حرف A ، B ، C ، D ، E و F به‌دوازده نوع می‌توانیم نامگذاری کنیم؛ هررأس راکه A بنامیم برحسب‌اینکه کدامیك ازرأسهای مجاورش را B بنامیم شش‌ضلعــی را می‌توانیم به‌دوگونه نامگذاری‌کنیم و چون برای رأس A شش انتخاب داریم پس رویهم به دوازده‌گونه می‌توانیم رأسها را نامگذاری کنیم.

هرگاه شش نقطهٔ غیر واقع بریك خط داده‌شده باشد، با ۷۲۰=!۶ حالت می‌توان حرفهای A ، B ، C ، D ، E و F را به‌آنها نسبت‌داد وچون شش ضلعی‌را به‌۱۲ گونه می‌توانیم نامگذاری کنیم، پس تعداد شش ضلعیهای متمایزکه باشش نقطهٔ معلوم می‌توانیم بسازیم برابر می‌شود با: $60=\frac{720}{12}$. درشکل (۷.۳، الف)سه‌گونه از ۶۰ گونه‌شش‌ــ

ضلعیهایی که از به‌هم وصل کردن شش نقطهٔ واقع بریك دایره بدست‌می‌آید مشاهده‌می‌شود.



شکل (۷.۳،الف)

شکل سمت چپ که شش ضلعی محدب است برای ما آشناتر از دو شکل دیگر، و بطور کلی آشناتر از ۵۹ گونهٔ دیگر، می‌باشد.

در بند ۳ .۱ یادآوری شد که در یك چند ضلعی هیچیك از مجموعه‌های سه‌رأس متوالی نمی‌توانند بریك خط راست واقع باشند. اما برای مجموعه‌های سه‌تایی رأسهای یك درمیان شش‌ضلعی وضع چنین نیست وبه‌ویژه می‌توانیم قضیهٔ پاپوس (قضیهٔ ۵.۳، ۱) را چنین بیان کنیم:

هرگاه در یك شش‌ضلعی سه‌رأس دوبه‌دو یك درمیان بریك خط راست واقع باشند و هرگاه سه‌جفت ضلعهای روبرو دوبه‌دو متقاطع باشند، سه‌نقطهٔ تقاطع آنها بریك خط راست واقعند.

تمرینها

۱ــ در شش ضلعی ABCDEF ضلعهای روبروی BC و EF با قطر AD موازیند. وهمچنین ضلعهای روبروی CD و FA با قطر BF وضلعهای روبری DE و AB با هم موازیند. ثابت کنید که قطر CF با AB موازی‌است ومرکزهای ثقل دومثلث ACE و BDF برهم منطبقند.

۲ ــ دو مجموعهٔ سه‌تایی نقطه‌های واقع بریك خط را در نظر می‌گیریم. این دو مجموعه را به‌چندگونه می‌توانیم رأسهای یك درمیان یك شش ضلعی اختیارکنیم؟

۸.۳ــ قضیهٔ پاسکال

فیلسوف وریاضیدان مشهور بلزپاسکال[1] (۱۶۶۲ــ۱۶۲۳) قضیهٔ زیر را درشانزده سالگی ثابت کرده است:

1- Blaise pascale.

قضیهٔ ۱،۸.۳- در هـر شش‌ضلعی محاطی نقاط تقاطع ضلعهای روبرو بریك خط راست واقعند.

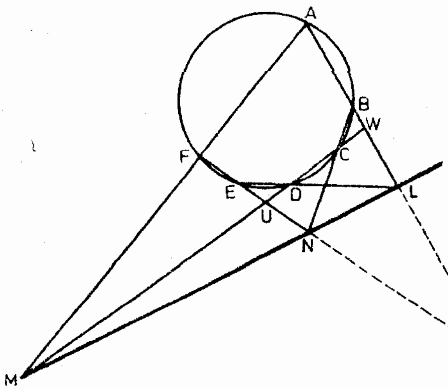
چگونگی اثبات این قضیه توسط پاسکال برهیچکس معلوم نیست زیرا راه‌حل وی بدست نیامده است؛ فقط ژ.و.لایب‌نیز[1] (که همزمان با نیوتن حساب دیفرانسیل وانتگرال را وضع کرده است) آن را دیده وازآن با ستایش یادکرده است. این موضوع می‌تواند انگیزه‌ای باشد تا با توجه به‌روشهای متداول زمان‌پاسکال ومعلومات‌آن دوره درجستجوی روش اثبات وی برآییم. چنانکه فوردر[2] به‌چنین‌کاری دست زد وکوشید تا فقط با استفاده از سه مقالهٔ اول هندسهٔ اقلیدس قضیه راثابت‌کند. اما روش اثبات بسیار پیچیده و دشوار بود وواضح ساخت‌که پاسکال بایستی با استفاده ازقضیهٔ منلائوس، با روشی مشابه به روش زیر، به‌اثبات قضیه نایل‌آمده باشد.

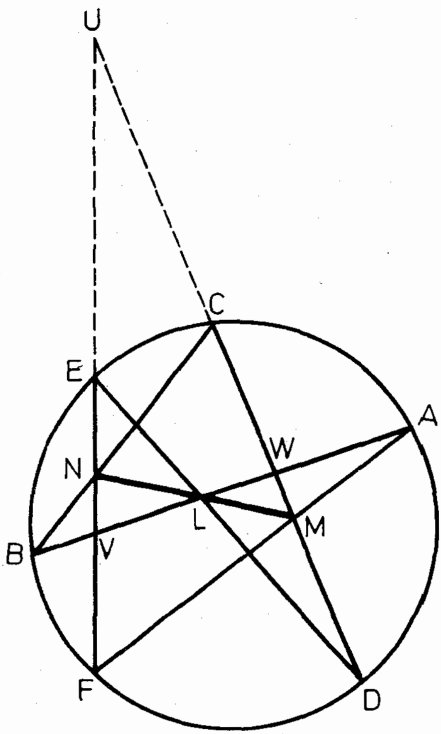
در پیش دیدیم‌که یك شش ضلعی محاطی را به ۶۰ شکل گوناگون می‌توان رسم کرد. قضیه را برای شکل (۸.۳، الف) ثابت می‌کنیم. خواننده می‌تواند چگونگی تطبیق اثبات را با ۵۹ شکل گونهٔ دیگر خود انجام دهد.[3]

1- G.W.Leibniz. 2- Forder.

۳- یادداشت ازح. غیور: قضیه‌ای راکه در اثبات‌آن اندازهٔ پاره‌خطها و مساحتها با عددهای مثبت ومنفی نموده شده است، یك‌برهان برای‌شکل مفروض درتمام شکلهای مربوط صدق می‌کند به‌شرط آنکه نقطه‌های نظیررا با یك حرف نشان دهیم (هرگاه درشکلی دو خط متقاطع به‌صورت دوخط متوازی درآیند ممکن است تصور شود حکم فوق درست نیست، درصورتی‌که‌اغلب در این حالت هم‌چون ازاصل دزارگ برای خطهای موازی استفاده شود بازحکم صحیح است).

وانگهی، اگراثبات قضیه‌را برای شش‌ضلعی محدب بنویسیم برای دانش‌آموز یادگیری آن سریعتر انجام می‌گیرد وآن‌را دیرتر فراموش می‌کند. شکل(۸.۳، الف) برای شش ضلعی محدب در زیر رسم شده است وبرهان متن‌کتاب برای‌آن صادق است





(شکل ۸.۳، الف)

درشش ضلعی‌محاطی ABCDEF ضلعهای‌روبروی AB و DE در L، ضلعهای روبروی CD و FA در M ضلعهای روبروی BC و EF در N برخورد می‌کنند، باید ثابت‌کنیم که سه‌نقطهٔ L، M، N بریك خط‌راست واقعند. خطهای AB، CD و EF مثلث UVW را تشکیل می‌دهند. نسبت به‌موربهای LDE، AMF و BCN برای مثلث نامبرده بنا به‌قضیهٔ منلائوس داریم:

$$\frac{\overline{VL}}{\overline{WL}}\cdot\frac{\overline{WD}}{\overline{UD}}\cdot\frac{\overline{UE}}{\overline{VE}}=+۱$$

$$\frac{\overline{VA}}{\overline{WA}}\cdot\frac{\overline{WM}}{\overline{UM}}\cdot\frac{\overline{UF}}{\overline{VF}}=+۱$$

$$\frac{\overline{VB}}{\overline{WB}}\cdot\frac{\overline{WC}}{\overline{UC}}\cdot\frac{\overline{UN}}{\overline{VE}}=+۱$$

طرفین این تساویها را درهم ضرب می‌کنیم وچون بنا به‌قضیهٔ (۱،۱۰۲) داریم:

$$\frac{\overline{WD}}{\overline{UD}}\cdot\frac{\overline{UE}}{\overline{VE}}\cdot\frac{\overline{VA}}{\overline{WA}}\cdot\frac{\overline{UF}}{\overline{VF}}\cdot\frac{\overline{VB}}{\overline{WB}}\cdot\frac{\overline{WC}}{\overline{UC}}=$$

$$\frac{\overline{UE}\times\overline{UF}}{\overline{UC}\times\overline{UD}}\cdot\frac{\overline{VA}\times\overline{VB}}{\overline{VE}\times\overline{VF}}\cdot\frac{\overline{WC}\times\overline{WD}}{\overline{WA}\times\overline{WB}}=+۱$$

نتیجه خواهد شد که:

$$\frac{\overline{VL}}{\overline{WL}}\cdot\frac{\overline{WM}}{\overline{UM}}\cdot\frac{\overline{UN}}{\overline{VN}}=+۱$$

بنا بر این سه نقطهٔ L و M و N بریك خط راست واقعند[1].

خط شامل سه نقطهٔ L ، M و N را خط پاسکال نظیر شش ضلعی ABCDEF می‌نامند ، و چون با شش نقطه شصت نوع شش ضلعی مشخص می‌شود پس برای شش نقطهٔ واقع بریك دایره تعداد شصت خط پاسکال وجود خواهد داشت. مجموعهٔ این خطها خود وضع جالبی دارد؛ برخی از آنها متقاربند و نقطه‌های تقارب بریك خط راست واقعند ، و ویژگیهای دیگر.

پاسکال با بررسیهای مختصری کــه در بارهٔ مقطعهای مخروطی انجام داده به این نکته توجه داشته است که قضیهٔ گفته شده دربارهٔ شش‌ضلعی محاط دریك مقطع مخروطی نیز صادق است.

عکس قضیهٔ پاسکال کــه توسط ویلیام برەکینریج[2] و کلین مك‌لورن[3] جداگانه و مستقلاً به اثبات رسیده و درکتابهای مربوط به هندسهٔ تصویری مندرج است ، به شرح زیرمی باشد:

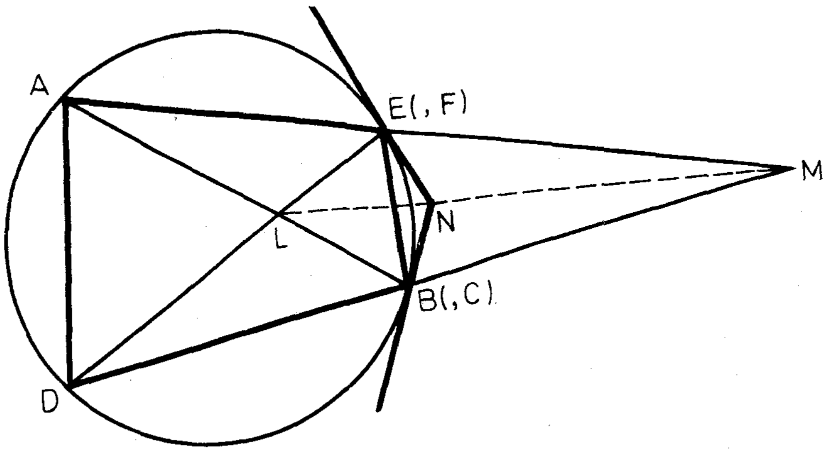
هرگاه سه نقطهٔ تقاطع ضلعهای روبرو از یك شش ضلعی بریك خـط راست واقع باشند آن شش ضلعی در یك مقطـع مخروطی محاط است . این شش ضلعی در حالت خاص به دوخط تبدیل می‌شود (مانند قضیهٔ ۱،۵۰۳).

هر گاه برخی ازرأسهای شش ضلعی را برهم منطبق‌کنیم دراین صورت با استفاده ازقضیهٔ پاسکال ، قضیه‌های جالبی برای پنج ضلعیها وچهارضلعیهای محاطی نتیجه می‌شود. وقتی دورأس شش ضلعی محاطی به سمت هم میل کنند ضلع بین آنها به یك نقطه و خط محمل این ضلع به مماس بردایره دراین نقطه تبدیل می‌شود. مثلاً هرگاه رأسهای B و C وهمچنین رأسهای E و F ازشش ضلعی ABCDEF برهم منطبق باشند،مطابق‌شکل (۸،۳،ب)،چهارضلعی‌محاطی ADBE را خواهیم‌داشت. هرگاه‌مماسهای بردایرهٔ‌محیطی این

---

۱ ـ این راه اثبات‌که در نتیجهٔ جستجو برای تعیین راه اثبات پاسکال انجام گرفته در چاپ هیجدهم‌کتاب هندسه تألیف تئودوراسپیکر (Théodor Spicker) چاپ ۱۸۸۸ در پوتسدام مشاهده شده است. همچنین درکتاب «شش‌ضلعی پاسکال» تألیف مؤلفان این‌کتاب نیز مندرج است. بالاخره‌کتاب «کوششی بــرای نوسازی این‌کشف» اثــر دانشمند جوان ژولیت‌کبك (Joliette Québec) چاپ ۱۹۶۳ نیز این‌برهان‌را شامل است.

۲- William Braikenridge   Colin Maclaurin



(شکل ۸.۳ ، ب)

چهار ضلعی درنقاط E و B باهم در N برخورد کنند و L نقطهٔ برخورد قطرهای AB و DE، و M نقطهٔ برخورد ضلعهای AE و DB باشد، بنا به‌قضیهٔ پاسکال نتیجه‌می‌شود که سه نقطهٔ L ، M ، N بریك خط راست واقعند.

تمرینها

۱ــ هرگاه سه نقطهٔ تقاطع ضلعهای روبرو ازیك شش ضلعی بریك خط راست واقع باشند و هرگاه دایره‌ای بر پنج رأس آن بگذرد، ثابت کنیدکه این دایره بر رأس دیگر آن نیز می‌گذرد.

۲ــ پنج ضلعی ABCDE در دایره‌ای محاط است. مماسهای بردایره در نقاط A و C با یکدیگر در L برخورد می‌کنند و M نقطهٔ برخورد AB با CE و N نقطهٔ برخورد AE با BC است. ثابت کنید کــه سه نقطهٔ L ، M ، N بریك خط راست واقعند.

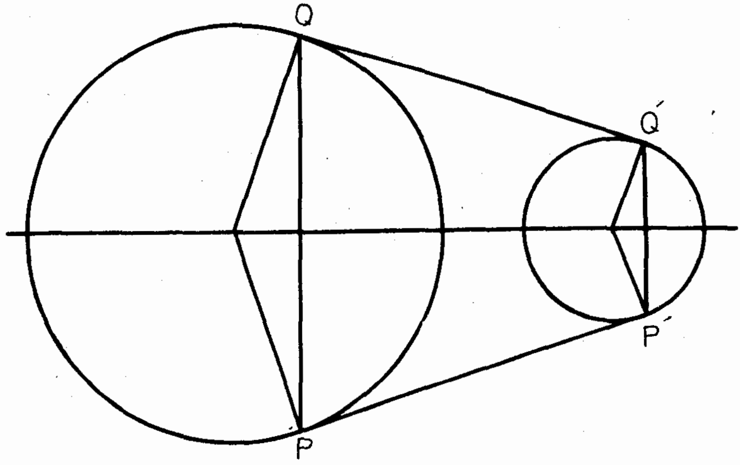
۹.۳ــ قضیهٔ بریانشن

ث.ژ. بریانشن[۱] (۱۷۶۰ــ۱۸۵۴) قضیهٔ مهمی مربوط به شش ضلعی محیطی را ثابت کرده است که رابطه‌ای ظریف باقضیهٔ پاسکال دارد. روشی که او برای اثبات قضیه بکار برده متکی بر«اصل دوگانگی»است که‌ازجمله اصول هندسهٔ تصویری است.جستجوی اثبات اقلیدسی قضیه برای‌حالتی که مقطع مخروطی به صورت دایره باشد به مسئلهٔ جالبی منجر شدکه‌راه‌حل آن توسط ا.س.اسموگورژوسکی[۲] ارائه گردید. اماقبل‌ازبیان این راه‌حل

1- C.J.Brianchon
۲- A.S.Smogorzhevskii

به بیان واثبات لم به شرح زیرمی‌پردازیم:

بردایره‌ای دونقطهٔ P و Q را انتخاب و در این دونقطه مماسهایی بردایره رسم می‌کنیم. هرگاه روی مماس درنقطهٔ P، نقطهٔ P' وروی مماس‌درنقطهٔ Q، نقطهٔ Q' را چنان برگزینیم‌که $QQ'=PP'$ وهردونقطهٔ P' و Q' دریك طرف خط PQ باشند،



(شکل ۹.۳ ، الف)

دراین صورت دایره‌ای وجود خواهد داشت‌که در P' برخط PP' و در Q' برخط QQ' مماس می‌باشد.

عمود منصف PQ که ازمرکزدایرهٔ مفروض می‌گذرد محورتقارن شکل است پس عمود منصف $P'Q'$ نیزمی‌باشد. عمودهایی‌که در P' و Q' به ترتیب بر PP'وQQ' رسم شوند روی محورتقارن شکل برخورد می‌کنندکه این نقطه مرکزدایرهٔ مطلوب است.

اکنون قضیهٔ اسموگورزوسکی را بیان واثبات می‌کنیم:

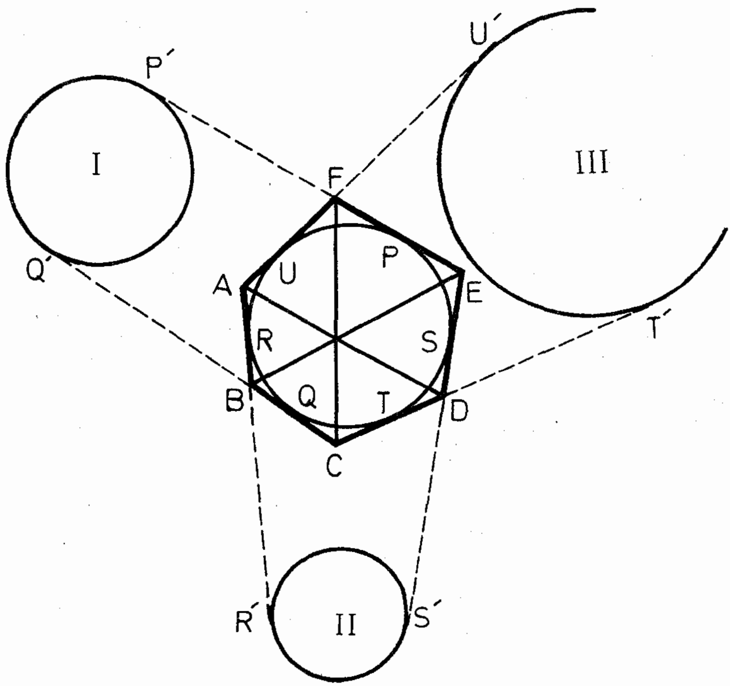
قضیهٔ ۱،۹.۳- هرگاه ضلعهای یك شش ضلعی بردایره‌ای مماس باشند ، سه قطر این شش ضلعی یا متقاربند و یا متوازیند.

نقطه‌های تماس ضلعهای AB، BC ، CD ، DE ، EF و FA را با دایره به ترتیب R ، Q ، T ، S ، P و U می‌نامیم وبرای‌سادگی شش ضلعی ABCDEF را محدب برمی‌گزینیم‌که درنتیجه قطرهای AD ، BE و CF نمی‌توانند متوازی باشند.

مطابق شکل (۹.۳ ، ب) روی امتدادهای ضلعهای شش ضلعی نقطه‌های P' ، Q'، R' ، S'،T' و U' را چنان انتخاب می‌کنیم‌که:

$$PP'=QQ'=RR'=SS'=TT'=UU'$$

بنابر لم یاد شده سه دایرهٔ I (مماس بـر PP' و QQ' در P' و Q') ، II



(شکل ۹.۳ ، ب)

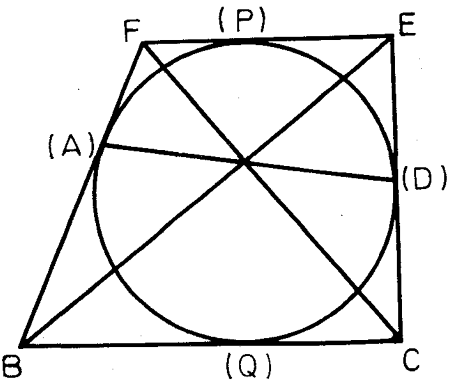
(مماس بر RR' و SS' در R' و S') و III (مماس بر TT' و UU' در T' و U') را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که مماسهایی که از یك نقطه بر دایره‌ای رسم شوند باهم برابرند، یعنی $AR=AU$ و چـون داشتیم $RR'=UU'$ پس نتیجه می‌شود که $AR'=AU'$. همچنین داریم $DS=DT$ و $SS'=TT'$ که نتیجه می‌شود $DS'=DT'$. هریك ازدونقطهٔ A و D نسبت به دو دایرهٔ II و III دارای یك قوتند پس خطی که براین دونقطه مـی‌گذرد ، یعنی خط AD ، محور اصلی این دو دایره است. به طریق مشابه ثابت می‌شود که BE محوراصلی دودایرهٔ I و II ، و CF محوراصلی دودایرهٔ III و I است. چنانکه قبلاً دیده‌ایم (بند ۳.۲) محورهای اصلی دوبه‌دوی سه دایرهٔ غیرمتعلق به یك دسته دوایرمتقاربند (یااینکه متوازیند). باید توجه داشت‌که دایره‌های I و II و III نمی‌توانند به یك دسته دوایرمتعلق باشند وهمچنین قطرهای شش ضلعی نمی‌توانند منطبق باشند ، بنا براین برهان گفته شده بدون خلل است.

عکس قضیه که ناشی ازهندسهٔ تصویری است چنین بیان می‌شود:

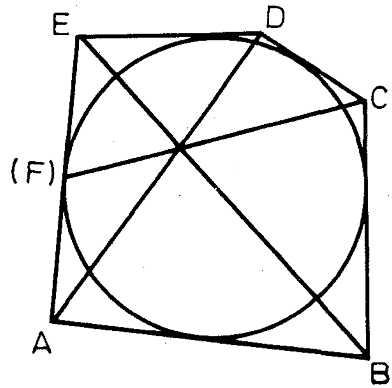
هرگـاه سه قطر یك شش ضلعی متقارب باشند ، ضلعهای این شش ضلعی بریك مقطـع مخروطی مماس می‌باشند کـه حالت خاص تبدیل مقطع مخروطی بـه یك زوج نقاط منتفی است.

می‌توانیم تصورکنیم که درشش ضلعی محیطی یك رأس یا دورأس مجاوررویضلع نظیرحرکت‌کرده به سمت نقطهٔ تماس این ضلع با دایره میل می‌کنند. در این صورت قضیه‌هایی مشابه با قضیهٔ بریانشن برای پنج ضلعی محیطی و چهارضلعی محیطی‌را نتیجه می‌گیریم.

مثلاً پنج ضلعی محیطی ABCDE ، شکل (۹.۳ ، پ) را کــه F نقطهٔ تماس ضلع AE با دایره است می‌توانیم شش ضلعی محیطی ABCDEF تصورکنیم که در آن زاویهٔ رأس F یك‌زاویهٔ نیم صفحه است. دراین‌صورت بنا به قضیهٔ بریانشن‌قطرهای AD و BE با خط CF که رأس C را به F وصل می‌کند، متقارب هستند.



شکل (۹.۳ ، ت)



(شکل ۹.۳ ، پ)

همچنین چهارضلعی محیطی BCEF ، شکل (۹.۳ ، ت) را که درآن A نقطهٔ تماس ضلع BF و D نقطهٔ تماس ضلع CE با دایره است می‌توان شش ضلعی محیطی ABCDEF تصورکرد وبنا به قضیهٔ بریانشن نتیجه گرفت که دوقطر BE و CF و خط AD ،که نقطه‌های تماس دوضلع روبرورا به هم وصل می‌کند ، متقار بند.

تمرینها

۱ــ درشکل(۹.۳ ، ت) ، ثابت‌کنید خط PQ که‌نقطه‌های تماس دوضلع‌روبروی BC و EF با دایره را به هم وصل می‌کند از نقطهٔ تقاطع دوقطرچهارضلعی می‌گذرد.

۲ــ هرگاه چهار ضلعی شکــل (۹.۳ ، ت) را شش ضلعی محیطی ABQCEF تصورکنیم ، خطهای متقارب کدامها می‌باشند؟

۳ــ آیا با استفاده از قضیهٔ بریانشن راه حل دیگــری برای تمرین ۳ از بند ۴.۱ بنظرمی‌آید؟

۴

تبدیل شکلها

خنوخ[1] بـه خاطر ایمانش منتقل شد تـا مرگ را ملاقات نکند، و او را نیافتند، زیرا کـه خدا اورا منتقل کرده بود. در حقیقت، قبل ازانتقالش به‌وی اعلام شده بود که مقرب خدا است.

مکتوب به‌عبرانیان، ۱۱،۵

در پایان بند ۶.۱، خاطرنشان کردیم که زاویهٔ قائمهٔ بین FD و OB (شکل ۶.۱، الف) مبدل زاویهٔ قائمهٔ بین HD و CB است، پس ازآنکه این‌دوخط به‌ترتیب حول D و B به‌زاویهٔ α دوران کرده باشند. همچنین در پیشگفتار قضیهٔ ۷.۱، ۱ یادآوری کردیم که دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند که در مرکز ثقل مشترکند و O و H مرکزهای ارتفاعی آنها می‌باشند و نتیجه گرفتیم که $AH = ۲OA'$. بالاخره با استفاده از تبدیلی به‌نام نیم‌دور بود که توانستیم پس ازقضیهٔ ۱،۸.۱ مرکزهای ارتفاعی دومثلث $A'B'C'$ و KLM را به‌یکدیگر بدل کنیم.

دوران، تشابه، نیم‌دور، نمونه‌هایی‌ازتبدیلات هندسی‌اند. تبدیل هندسی (درچهارچوب این‌کتاب) عبارتست ازگسترشی[2] ازصفحه‌روی‌خودش به‌قسمی‌که نظیر هرنقطهٔ P ازاین صفحه تصویر منحصر به‌فردآن P' وجـود داشته باشد وهرنقطهٔ Q' ازصفحه، تصویر منحصربه‌فرد یک‌نقطهٔ Q باشد. این‌مفهوم‌گسترش در بسیاری ازشاخه‌های ریاضی نقش اساسی دارد؛ چنانکه با نوشتن $y = f(x)$ مجموعهٔ مقادیر نظیر x را نشان می‌دهیم.

۱- Hénoch یا Énoch که به‌زبان عبری‌خنوخ می‌باشد به‌روایت توراة هفتمین نسل آدم است و به خاطر تقرب خاص به درگاه خدا بدون‌آنکه بمیرد به‌بهشت منتقل شد. بعضی از علمای اسلامی اورا همان ادریس پیغمبر دانسته‌اند. مترجم

۲- Application.

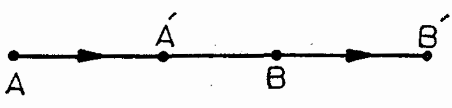
هندسهٔ اقلیدسی یکی از هندسه‌هایی است که هر کدام بامفاهیم اساسی خود، اصول و قضایـا، مشخص می‌شود. در ۱۸۷۲، فلیکس‌کلین[۱] درطرح مشهورش‌راجع به‌دانشگاه ارلانگن[۲] با تقسیم‌بندی هندسه‌ها برحسب گروههای تبدیلات آنها را بازسازی کرد بدون آنکه در مفاهیم اصول و قضایا اصلاحاتی انجام گیرد. به‌ویژه هندسهٔ اقلیدسی برحسب گروه تشابهات مشخص‌شده‌بود، یعنی برمبنای تبدیلاتی که اندازهٔ زاویه‌را محفوظ می‌دارد.

هم‌اندازگی[۳] حالت مهمی از تشابه است که علاوه براندازهٔ زاویه، فاصله را نیز محفوظ می‌دارد، مانند دوران‌وحالت ویژهٔ آن نیم‌دور. هم‌اندازگی مبتنی برمفهوم متعارف برابری است: دوشکل با هم برابرند اگروفقط اگربتوان با یك هم‌اندازگی‌ازیکی به‌دیگری رسید.

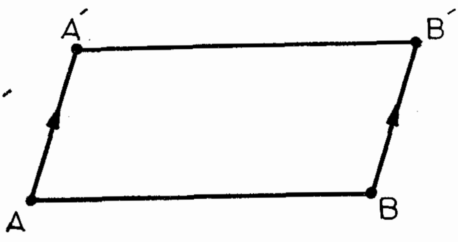
۱.۴ـ انتقال[۴]

صرف‌نظر ازعمل همانی[۵]که همهٔ نقاطرا دروضع اولیه ثابت نگاه می‌دارد، انتقال ساده‌ترین تبدیلی است کـه فاصلهٔ بین‌دونقطه و همچنین امتداد خط واصل بین آنها را محفوظ می‌دارد.

در انتقالی‌که $A'B'$ مبدل پاره‌خط AB باشد، یا A، B، A'، B' بر یك خط راست واقعند(شکل ۱.۴، الف) ویااینکه $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است (شکل ۱.۴،ب). درحالت‌اول(شکل ۱.۴، الف)نیزمی‌توان گفت‌که $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع حالت‌خاص‌است. بنابراین، انتقال‌با بردار $\overrightarrow{AA'}$، یا اینکه‌با هر بردار دیگرهمسنگ‌آن، مثل



(شکل ۱.۴، الف)



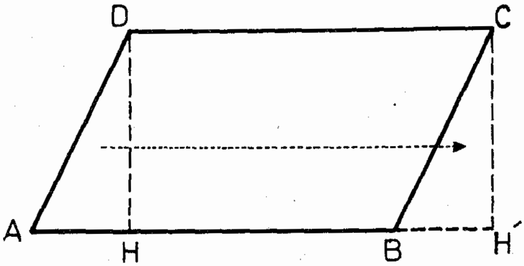
(شکل ۱.۴ ،ب)

$\overrightarrow{BB'}$، مشخص شده‌است. عمل‌همانی را می‌توانیم‌حالت خاص انتقال بدانیم که با بردار صفر مشخص می‌شود.

با استفاده ازویژگیهای انتقال که ریخت شکل وفواصل را ثابت می‌دارد می‌توان

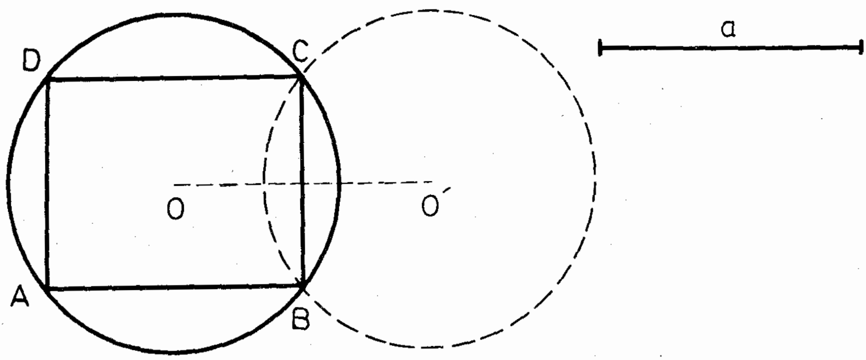
۱- Félix Klein. ۲- Erlangen. ۳- Isométrie.
۴- Translation. ۵- Identique.

انواع قضیه‌های مربوط به‌مساحتهارا ثابت کرد. چنانکه برای بدست‌آوردن فرمول مساحت متـوازی‌الاضلاع ABCD (شکل ۱.۴ ، پ) مثلث AHD را از آن جداکرده وانتقال می‌دهیم تا به‌وضع مثلث BH′C درآید و در نتیجه مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD همـان مساحت مستطیل HH′CD می‌باشد.



(شکل ۱.۴، پ)

در شکل (۱.۴، ت) نیز مشاهده می‌شود که چگونه از انتقال برای حل مسئلهٔ زیر استفاده شده است : در دایرهٔ داده شده مستطیلی چنـان محاط کنیدکه ضلع آن با پاره‌خط مفروض a برابر وهم‌امتداد باشد.



(شکل ۱.۴، ت)

این راه حل به‌این ترتیب است که دایرهٔ داده شدهٔ O را به‌بردار $\vec{a}$ انتقـال می‌دهیم تا به‌دایرهٔ O′ تبدیل شود. هرگاه C و B نقطه‌های برخورد دو دایره باشد، از این نقطه‌ها موازی با a رسم می‌کنیم تا دایرهٔ داده شده را در D و A قطع کنند.

تمرینها

۱ــ مثلث ABC و پاره‌خط a داده شده است. در مثلث پاره‌خطی چنان محاط کنیدکه با a برابر و هم‌امتداد باشد.

۲ــ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را متوالیاً با بردارهای $k\cdot\overrightarrow{AB}$ ، $k\cdot\overrightarrow{BC}$ ، $k\cdot\overrightarrow{CA}$ انتقال می‌دهیم کـه k عدد صحیح نسبی است . قسمتی از شکل حاصل را رسم کنید.

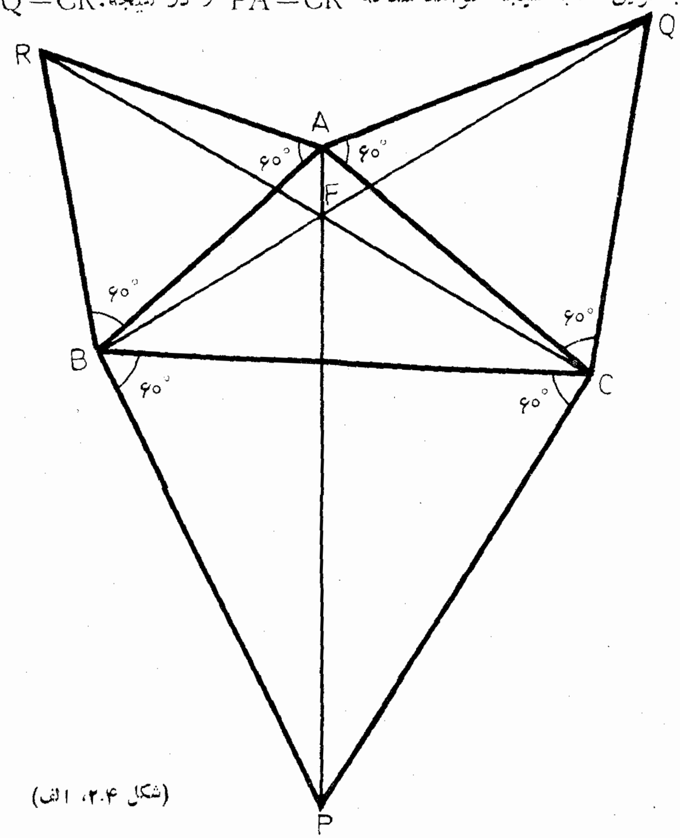
۲.۴ـ دوران

دوران نوع دیگری از تبدیلاتی است که فواصل را محفوظ می‌دارد. در دوران هریك از نقطه‌های شکل را حول نقطهٔ ثابت و به‌زاویهٔ معین می‌گردانیم. بنا براین ابعاد و ریخت شکلها درهر دوران محفوظ می‌ماند؛ اما نقطه‌ها روی دایره‌های هم‌مرکز تغییر جا می‌دهند. تنها نقطه‌ای که در دوران ثابت می‌ماند مرکز دوران است که ممکن است یکی از نقاط شکل دوران یافته باشد یا اینکه به‌آن تعلق نداشته باشد.

برای بیان مثالی از مورد استعمال دوران درحل مسائل، مثلث ABC را در نظر می‌گیریم وروی هریك ازضلعهای آن ودر خارج مثلث، مثلثی متساوی‌الاضلاع بنا می‌کنیم که‌مثلثهای متساوی‌الاضلاع BPC، CQA و ARB بدست می‌آید (شکل ۲.۴، الف). با رسم‌خطهای BQ و CR ملاحظه می‌کنیم که در دوران به‌زاویهٔ ۶۰ و به‌مرکز A مثلث ARC به‌مثلث ABQ تبدیل می‌شود. نتیجه می‌شود که

$$RC = BQ \quad \text{و} \quad \widehat{RFB} = 60^\circ$$

به‌طریق مشابه نتیجه خواهد شد که $PA = CR$ و در نتیجه: $AP = BQ = CR$



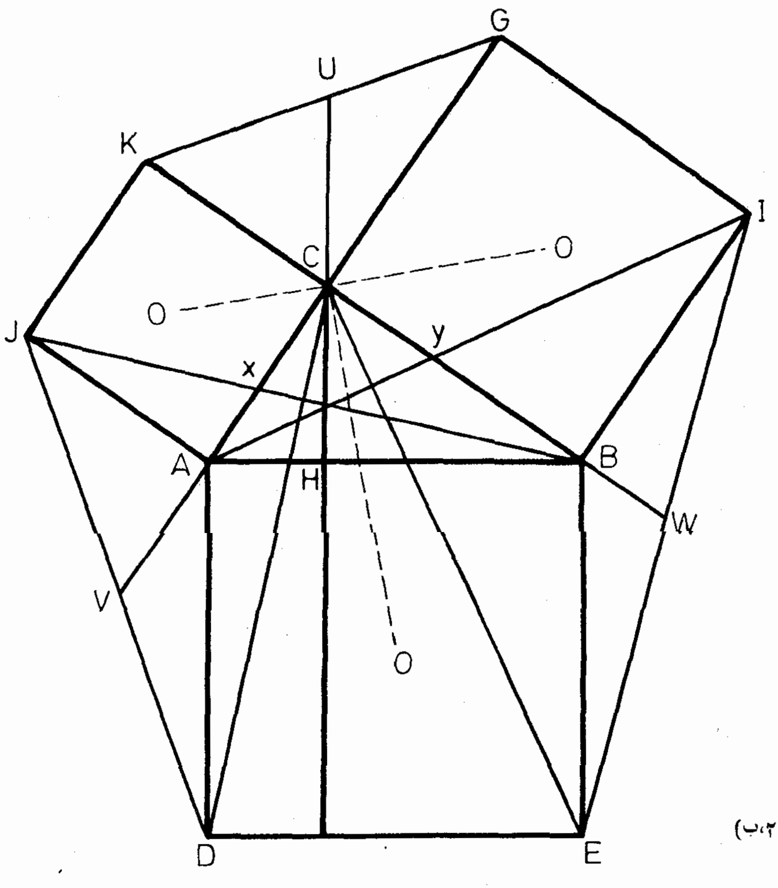
(شکل ۲.۴، الف)

همچنین:

$$\widehat{RFB}=60^\circ=\widehat{RAB}$$
$$\widehat{CFQ}=60^\circ=\widehat{CAQ}$$

از اینرو چهارگوشه‌های ARBF و CQAF محاطی‌اند. چون $\widehat{BFC}=120^\circ$ و $\widehat{CPB}=60^\circ$ پس چهارگوشهٔ BPCF نیزمحاطی است. بنابراین دایره‌های محیطی مثلثهای BPC و CQA و ARB درنقطهٔ F مشترکند که این‌نقطه را نقطهٔ فرما نظیر مثلث ABC می‌نامند. از اینکه دایره‌های گفته شده در F مشترکند نتیجه می‌شود که هریك ازشش زاویهٔ به‌رأس F برابر 60° است و چون F نقطهٔ برخورد BQ با CR انتخاب شده‌بود پس AP نیز بر F می‌گذرد. بنابراین سه‌خط AP ، BQ ، CR متقارب‌ند و با هم برابر می‌باشند.

دراثبات قضیهٔ فیثاغورس که‌توسط اقلیدس بیان شده‌است، مطابق باشکل (۲.۴،ب)



(شکل ۲.۴،ب)

روی ضلعهای مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و درخارج آن مربعهای BADE ، CBIG و ACKJ را می‌سازیم وارتفاع CH ازمثلث، مربع به‌ضلع AB را به‌دو مستطیل تقسیم می‌کند. دردوران به‌مرکز A وبه‌زاویهٔ $90°$ مثلث ADC به‌مثلث ABJ تبدیل می‌شود. پس BJ=DC و BJ بر DC عمود است . همچنین ثابت می‌شودکه AI و CE با هم برابر وبرهم عمودند.

بالاخره از تشابه دو مثلث BCX و BKJ و همچنین دومثلث CAY و GAI رابطه‌های زیر بدست می‌آید:

$$\frac{CX}{b}=\frac{CX}{KJ}=\frac{BC}{BK}=\frac{a}{a+b} \quad \text{و} \quad \frac{CY}{a}=\frac{CY}{GI}=\frac{CA}{GA}=\frac{b}{a+b}$$

ازاین رابطه‌ها بدست می‌آید که:

$$CX=\frac{ab}{a+b}=CY$$

تمرینها

۱ـ روی ضلعهای یك متوازی الاضلاع ودرخارج آن چهارمربع می‌سازیم. ثابت کنیدکه مرکزهای این چهارمربع رأسهای یك مربع می‌باشند.

۲ـ با توجه به شکل (۲.۴ ، ب) ثابت‌کنیدکه:

الف) سه خط AI ، BJ و CH متقاربند.

ب) پاره خطهای O_1O_2 و CO_3 باهم برابر وبرهم عمودند.

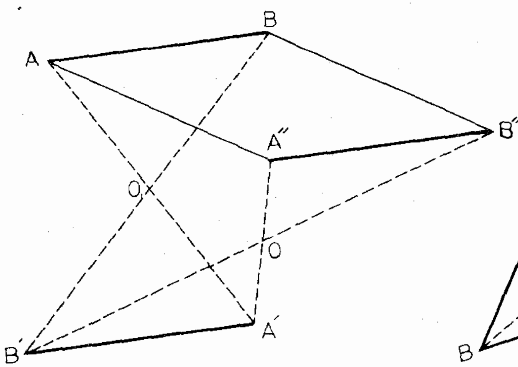
پ) نقطه‌های U ، V ، W به ترتیب‌وسطهای GK ، JD ، EI می‌باشند.

۳ـ مثلث متساوی‌الاضلاعی چنان رسم‌کنیدکه نقطهٔ داده شده درداخل آن واقع‌شده وازرأسهای آن به فاصله‌های ۲،۳و۴ باشد.

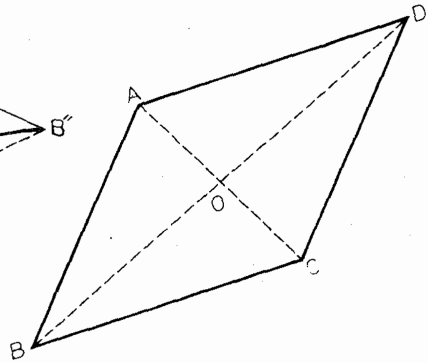
۳.۴ـ نیم دور (= تقارن مرکزی)

نوعی ازدوران دارای این خاصیت‌است‌که همانند انتقال‌هرخط را به خط موازی با خودش ، اما درجهت معکوس ، تبدیل می‌کند ؛ این نوع دوران را نیم‌دور می‌نامیم . نیم‌دور دوران با زاویهٔ $180°$ است‌که نام دیگرآن تقارن مرکزی است و با معلوم بودن مرکزش مشخص می‌شود. حاصل دونیم‌دورمعادل با یك انتقال است ، زیرا در نتیجهٔ آن هرخط به خط موازی با خودش و درهمان جهت تبدیل می‌گردد (به‌ویژه اگر مرکزهای دونیم‌دوربرهم منطبق باشند نتیجهٔ ترکیب آنها عملی همانی است،یعنی شکل را به‌خودش تبدیل می‌کند). هرگاه ، ، B ، C سه نقطهٔ واقع بریك خط و B وسط AC باشد؛ نیم‌دوربه مرکز A جای این نقطه را عوض نمی‌کند ونیم‌دور به مرکز B نقطهٔ A را

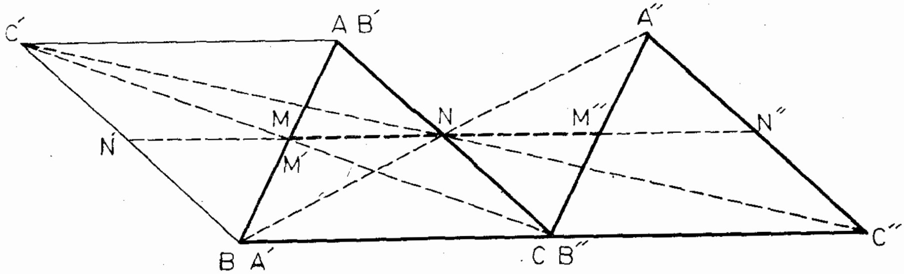
برنقطهٔ C منطبق می‌سازد ، پس حاصل این دونیم‌دور با انتقال $\overrightarrow{AC}$ معادل است. همین انتقال با حاصل دونیم‌دورمتوالی به مرکزهای B و C نیزمعادل است.



(شکل ۳.۴ ، الف)



(شکل ۳.۴ ، ب)



(شکل ۳.۴ ، پ)

درشکل (۳.۴ ، الف) مشاهده می‌شود که درنتیجهٔ دو نیم‌دورمتوالی به مرکزهای O_1 و O_2 پاره خط AB به پاره خط $A''B''$ تبدیل شده است که معادل است با انتقال $\overrightarrow{AA''}$ یا $\overrightarrow{BB''}$.

هرگاه O وسط مشترک دوپاره خط AC و BD باشد (شکل ۳.۴ ، ب) ، در نیم‌دوربه مرکز O پاره خط AB به پاره خط CD تبدیل می‌گردد که با آن مساوی وموازی است ، پس ABCD متوازی‌الاضلاع است.

درشکل (۳.۴ ، پ) ، M وسط AB و N وسط AC است. نیم‌دوربه مرکز M مثلث ABC را به مثلث $A'B'C'$ تبدیل می‌کند که درآن M' نظیر M ، بر M

واقع است و N' نظیر N در وسط $A'C'$ می‌باشد. در نیم‌دور به مرکز N مثلث $A'B'C'$ به مثلث $A''B''C''$ و M' به M'' تبدیل می‌شود. حاصل این دو نیم دور انتقال به بردار $\overrightarrow{BB''}$ یا $\overrightarrow{MM''}$ است. بنابراین $BC = MM''$ ونتیجه می گیریم کـه MN با BC موازی وبا نصف آن برابراست.

تمرینها

۱ــ دو دایره در A مشترکند. از A خطی چنان رسم کنید که توسط دو دایره به دو بخش برابر تقسیم شود.

۲ــ دایره‌ای ویك نقطهٔ A در خارج آن واقع است. از A خطی‌چنان رسم کنید که دایره را در P و Q قطع کند به قسمی‌که $AP = PQ$.

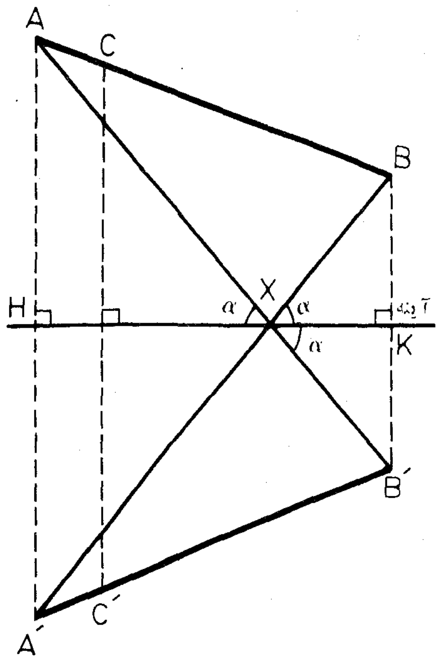
۳ــ دوضلع مقابل یك شش‌ضلعی باهم مساوی وموازیند. ثابت کنید کـه قطرهای اصلی این شش ضلعی متقارنند.

۴.۴ــ تقارن محوری

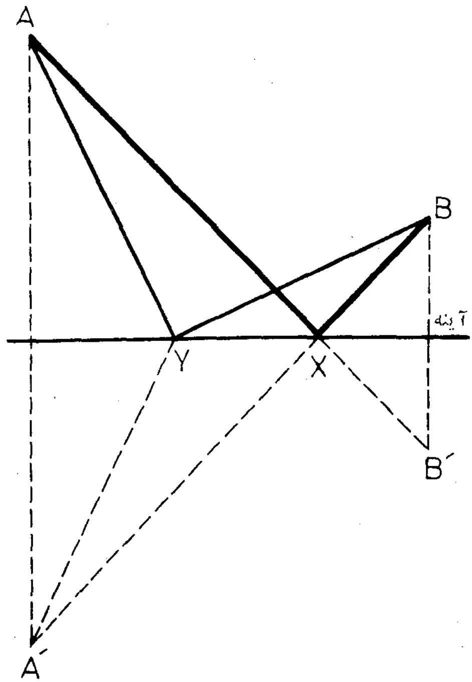
تقارن نسبت به یك محور که آن را تقارن محوری می‌نامیم،نوع دیگری از تبدیلاتی است که فواصل را محفوظ می‌دارد. درتقارن محوری هر نقطهٔ واقع برمحور، مانند H یا K (شکل ۴.۴ ، الف) ثابت مـی‌ماند. به عبارت دیگر قرینهٔ خودش می‌باشد. هرگـاه HK را نمای آینه‌ای تصور کنیم که‌صفحهٔ آن برصفحهٔ‌شکل عمود باشد، تصویر نقطهٔ A نقطهٔ A' است به قسمی‌که اولاً AA' برآینه ــ یعنی برمحور تقارن ــ عمود می‌باشد و ثانیاً اگر H پای این عمود روی محور تقارن باشد طولهای HA' و AH باهم برابرند. در شکل (۴.۴ ، الف) خط AB وتصویر آن $A'B'$ مشاهده می‌شود. تصویر هر نقطهٔ C از AB بر $A'B'$ واقع است کـه با C' نموده شده است. و هر نقطهٔ C' تصویر نقطه‌ای مانند C از AB می‌باشد. چهار گوشهٔ $ABB'A'$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است ودوقطر آن AB' و $A'B$ که تصویرهای یکدیگرند درنقطهٔ X روی محورتقارن برخورد مـی‌کنند. زاویه‌های AXH و $B'XK$ باهم برابرند. مثلث BXB' متساوی‌الساقین است وزاویه‌های BXK و $B'XK$ باهم برابرند. بنابراین:

$$\widehat{AXH} = \widehat{KXB}$$

خط شکستهٔ AXB مسیر نوری را نشان می‌دهد که پس‌ازخروج از A وبازتاب درسطح آینه از B می‌گذرد. مطابق شکل (۴.۴ ، ب) نقطهٔ دیگر Y را برسطح آینه در نظرمی گیریم. ملاحظه می کنیم که:



(شکل ۴.۴ ، الف)



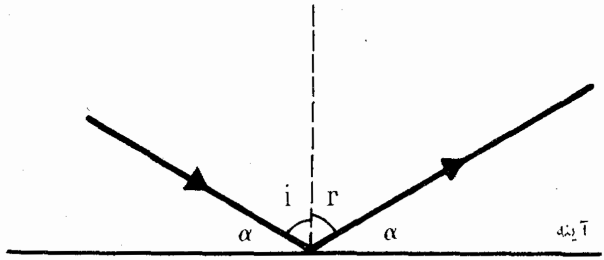
(شکل ۴.۴ ، ب)

$$AX+XB=A'X+XB=A'B$$
$$AY+YB=A'Y+YB>A'B$$

یعنی طول مسیر AXB کوتاهتر از طول مسیر AYB است، وچون نقطهٔ Y به‌اختیار برگزیده شده است، پس طول AXB کوتاهترین مسیری است که از A شروع می‌شود و پس از برخورد با سطح آینه به B می‌رسد.

آنچه گفته شد یکی از مسائل مشهور مربوط به ماکزیمم و می‌نیمم است که با استفاده از تقارن محوری، بدون نیاز به محاسبات پیچیده، به سادگی حل می‌شود. این مسئلهٔ مشهور هندسی از نظر فیزیکی چنین بیان می‌شود: مسیر نوری که پس از خروج از A و باز-تاب در سطح آینه به B می‌رسد چنان‌است که برای پیمودن آن کمترین زمان صرف می‌شود. به‌عبارت دیگر، مسیری که نور در یك محیط همگن می‌پیماید با زمانی که صرف پیمودن آن می‌شود متناسب است. همچنین نتیجه می‌گیریم شعاع نوری که از A خارج و پس از بازتاب در سطح آینه به B می‌رسد، به هنگام رسیدن به‌سطح آینه زاویه‌ای با آن می‌سازد که برابر است با زاویه‌ای که پس از خروج با سطح آینه می‌سازد. هرگاه در نقطهٔ برخورد نور با سطح آینه عمودی بر این سطح اخراج کنیم، مطابق با شکل (۴.۴ ، پ) از برابری دو زاویهٔ α نتیجه می‌شود که زاویه‌های i و r نیز باهم برابرند. زاویهٔ i را زاویهٔ

تابش وزاویهٔ r را زاویهٔ بازتاب می‌نامند. پس شعاع نورپس‌از برخورد با سطح آینهٔ تخت چنان منعکس می‌شودکه زاویه‌های تابش و بازتاب باهم برابرند.



(شکل ۴.۴ ، پ)

تمرینها

۱ــ فرض می‌کنیم‌ضلعهای مثلث ABC همانندآینه نوررا منعکس می‌کنند. نقطهٔ P را برضلع AB چنان انتخاب‌کنیدکه شعاع نور خارج شدهٔ از P پس‌از بازتاب روی ضلعهای BC و CA به نقطهٔ P برگردد وپس‌ازبازتاب روی ضلع AB همان مسیرقبلی را بپیماید.

راهنمایی : بند ۶.۱ را ملاحظه‌کنید.

۲ــ درمثلثی قاعده ومساحت اندازه‌های‌ثابت دارند. ثابت‌کنیدکه محیط این مثلث وقتی می‌نیمم است‌که آن‌مثلث‌متساوی‌الساقین باشد.

۳ــ تمرین ۱ ازبند ۳.۴ را بااستفاده ازتقارن محوری حل‌کنید.

۵.۴ــ مسئلهٔ فاگنانو[1]

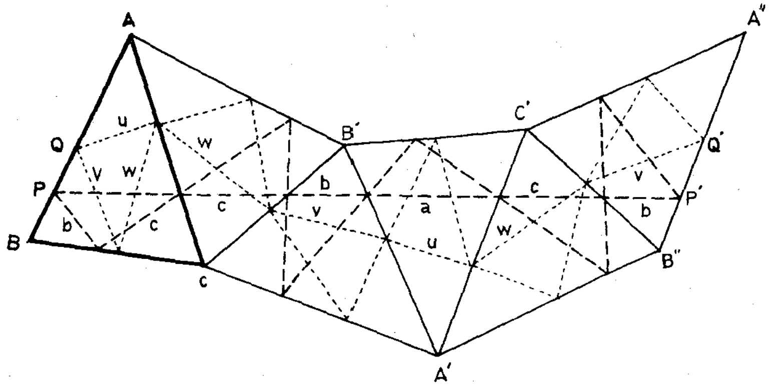
با استفاده از تقارن محوری بسیاری از مسائل مهم را می‌توان ازراهی ساده‌تر و کوتاهتر حل‌کرد. برای‌نمونه مسئلهٔ فاگنانو به‌شرح زیررا ذکر می‌کنیم: درمثلث مفروض با زاویه‌های حاده مثلثی بامحیط می‌نیمم محاط کنید[2].

برای حل‌مسئله، مطابق با شکل (۵.۴، الف)، در مثلث مفروض وبازاویه‌های حاده ABC دو مثلث محاطی درنظر می‌گیریم: یکی مثلث ارتفاعی‌آن (که درشکل به‌صورت خطچین رسم شده) و دیگری مثلثی دلخواه (که در شکل به‌صورت نقطه‌چین رسم شده است). مثلث ACB' قرینهٔ مثلث ABC را نسبت به ضلع AC رسم می‌کنیم، آنگاه

۱ـ Fagnano.

۲ـ فاگنانو این مسئله را در ۱۷۷۵ مطرح ساخت و خودش از راه محاسبه آن را حل‌کرد . راه حلی‌که دراینجا عرضه می‌شود توسط H. A. Schwarz انجام‌گردیده‌که روش‌آن توسط Frank Morley و F. V. Morley برای $2n+1$ ضلعی تعمیم یافته است.

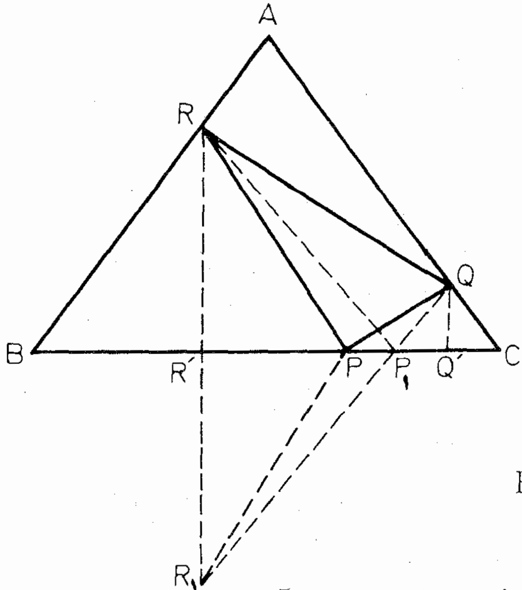
مثلث $A'B'C$ قرینهٔ مثلث ACB' را نسبت به ضلع CB'، سپس مثلث $A'B'C'$ قرینهٔ مثلث $A'B'C$ را نسبت به $A'B'$، پس از آن مثلث $A'C'B''$ قرینهٔ مثلث $A'B'C'$ را نسبت به‌ضلع $A'C'$ و بالاخره مثلث $C'A''B''$ قرینهٔ مثلث $A'C'B''$ را نسبت به‌ضلع $C'B''$ رسم می‌کنیم.



(شکل ۵.۴، الف)

اکنون شکل بدست‌آمده‌را بررسی می‌کنیم. صفحه را جهت‌دارمی‌گیریم وملاحظه می‌کنیم که اندازه‌های زاویه‌هـای خط شکستهٔ $BAB'A'B''A''$ در رأس A برابر $2A$، در رأس B' برابر $2B$، دررأس A' برابر $-2A$، در رأس B'' برابر $-2B$ است که مجموع آنها صفرمی‌شود. نتیجه‌می‌شود که $B''A''$ با BA موازی‌است و درنتیجه‌چهارضلعی $PP'Q'Q$ متوازی‌الاضلاع است. می‌دانیم که ارتفاعهای‌مثلث ABC نیمسازهای زاویه‌های مثلث ارتفاعی نظیر آن می‌باشند، نتیجه می‌گیریم که در تبدیلهای تقارنی بالا ضلعهای مثلث ارتفاعی مثلث ABC متوالیاً برخط PP' قراردارند. در صورتی‌کـه در همین تبدیلهای تقارنی ضلعهای مثلث محاطی دیگر متوالیاً برخط شکستهٔ QQ' واقع شده‌اند. اما PP' با QQ' برابراست وخط راست QQ' ازخط‌شکستهٔ QQ' کوچکتر است. از طرفی طول PP' برابراست بادوبرابر محیط مثلث ارتفاعی و طول خط شکستهٔ QQ' دوبرابر محیط مثلث محاطی اختیاری است. بنابراین محیط مثلث ارتفاعی از محیط مثلث محاطی اختیاری کوچکتر است. پس از بین مثلثهای محاط در مثلث ABC مثلث ارتفاعی کمترین محیط را دارد.

[**یادداشت از ح. غیور**: دو نمونه راه حل دیگـر بـرای مسئلهٔ فاگنانو:



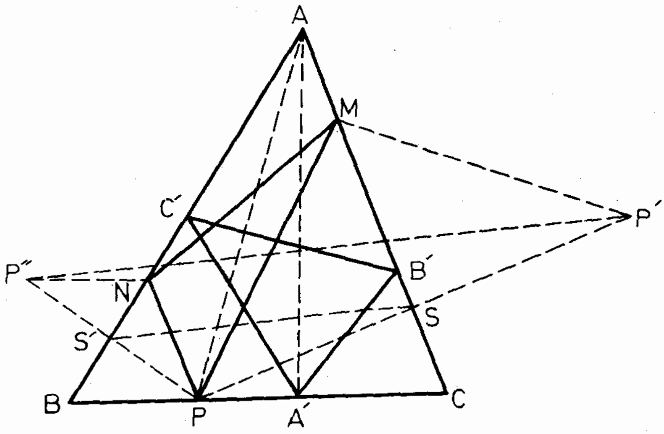
راه‌حل اول - برای آنکه محیط مثلث PQR محاط درمثلث ABC می‌نیمم باشد، باید هرضلع از مثلث ABC نیمساز زاویهٔ خارجی مثلث PQR باشد. با قبول اینکه مثلث PQR جواب مسئله است، فرض می‌کنیم ضلع BC نیمساز خارجی زاویهٔ QPR نباشد؛ P_1 را روی ضلع BC طوری اختیار می‌کنیم که BC نیمساز خارجی زاویهٔ RP_1Q باشد. برای این‌منظور R_1 قرینهٔ R نسبت به BC را به Q وصل می‌کنیم تا P_1 بدست آید. P_1 بین B و C است زیرا با فرض حاده بودن زاویه‌های مثلث، R' و Q' تصویرهای R و Q روی ضلع BC و P_1 بین R' و Q' است. از نامساوی $P_1Q+P_1R < PQ+RP$ نتیجه می‌شود که محیط مثلث P_1RQ از محیط مثلث PRQ کوچکتر است و این خلاف فرض است. پس باید هرضلع ازمثلث ABC نیمساز خارجی زاویهٔ نظیر ازمثلث PQR باشد. نیمساز داخلی زاویهٔ P ازمثلث PQR ازطرفی بر BC عمود است وازطرف دیگر باید با نیمسازهای خارجی دوزاویهٔ R و Q متقارب باشد، یعنی از A بگذرد، پس نیمساز داخلی زاویهٔ P ارتفاع رأس A از مثلث ABC است. چون این استدلال را دربارهٔ دورأس دیگر Q و R تکرار کنیم، معلوم می‌شود که مثلث PQR که محیط آن می‌نیمم است مثلث ارتفاعی مثلث ABC ومنحصر به‌فرد است.

راه‌حل دوم- مثلث $A'B'C'$ مثلث ارتفاعی مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم محیط هرمثلث PMN محاط در مثلث ABC (با زاویه‌های حاده) از محیط مثلث $A'B'C'$ بزرگتر است . برای این‌کار P' و P'' قرینه‌های رأس P را نسبت به AC و AB تعیین‌کرده به‌هم‌وصل می‌کنیم و S و S' تصویرهای P بر AC و AB را نیز به‌هم وصل می‌کنیم. با توجه به‌شکل ملاحظه می‌شود که:

$$PM+MN+NP=P'M+MN+NP'' \geqslant P'P'' \qquad (۱)$$

در مثلث ASS' بنا به‌قضیهٔ سینوسها داریم $SS'=AP\sin A$ و چون $SS'=\frac{۱}{۲}P'P''$ پس

$$P'P''=۲AP\sin A \qquad (۲)$$



از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود.

$$PN+NM+MP \geqslant ۲AP\sin A \qquad (۳)$$

آنچه را دربارهٔ مثلث PNM عمل شد دربارهٔ مثلث ارتفاعی $A'B'C'$ انجام می‌دهیم، با توجه به اینکه قرینه‌های A' نسبت به AC و AB درراستای $B'C'$ واقع می‌شود نتیجه می گیریم

$$A'B'+B'C'+C'A' = ۲AA'\sin A \qquad (۴)$$

با توجه به اینکه $AA' < AP$ از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود

$$A'B'+B'C'+C'A' < PN+NM+MP$$

یعنی محیط مثلث $A'B'C'$ می‌نیمم است.]

۶.۴ـ مسئلهٔ سه پیمانه

یکی‌ازموارد استعمال شگفت‌انگیز تقارن‌محوری ، استفاده ازآن در حل معماهایی است که موضوع آنها تقسیم مایع یك ظرف به‌قسمتهای معین بااستفادهٔ فقط از دو پیمانهٔ معلوم است. اما چون در این‌کاربرد تقارن از مختصات مثلثی استفاده می‌شود ، از اینرو لازم است که قبلاً این‌نوع مختصات معرفی شود.

نوعی‌کاغذ معروف به‌شطرنجی را خوب می‌شناسیم که همه‌جا در دسترس است. روی این‌نوع‌کاغذ دودسته‌خطهای متوازی‌عمود برهم رسم شده وباایجاد مربعهای متساوی مجاور هم صفحه را خانه‌بندی کرده‌اند. ازاین‌نوع کاغذهای شطرنجی درمختصات دکارتی استفاده‌می کنند. می‌توانیم روی یك‌صفحه مثلثی متساوی‌الاضلاع، به‌اندازه‌کافی بزرگ ، رسم کرده و در داخل‌آن سه‌دسته خطهای متوازی ومتساوی‌الفاصله به‌موازات ضلعهای‌آن رسم کنیم . بداین طریق صفحهٔ مثلث را با ایجاد مثلثهای متساوی‌الاضلاع مساوی‌ومجاور

با هم خانه‌بندی می کنیم . از این صفحهٔ کاغذ که به‌این نوع، خانه‌بندی شده‌است برای مختصات مثلثی (= مختصات‌سه‌خطی)، به‌شرح زیر، استفاده می‌کنیم:

اگر P نقطه‌ای ازصفحهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به‌ضلع a و به‌ارتفاع h باشد، فاصله‌های نقطهٔ P را ازضلعهای BC ، CA ، AB مختصات مثلثی P می‌نامیم و آنها را به‌ترتیب با x ، y ، z می‌نماییم و می‌نویسیم:

$$P(x ، y ، z)$$

با توجه به‌اینکه داریم:

$$\frac{۱}{۲}ax+\frac{۱}{۲}ay+\frac{۱}{۲}az=S(PBC)+S(PCA)+S(PAB)$$

$$=S(ABC)=\frac{۱}{۲}ah$$

از اینرو بدست می‌آید که:

$$x+y+z=h$$

هرگاه مجموع سه‌مقدارمتغیرمقدارثابت باشد،استفاده ازمختصات مثلثی کاملاً مناسبت دارد. هرگاه یکی ازآنها ثابت ومجموع دومتغیردیگرنیزمقدارثابت باشد، نقطهٔ(x،y،z) روی خطی موازی با یك ضلع مثلث تغییرمکان می‌دهد، به ویژه درمختصات مثلثی،ضلعهای مثلث مبدأ به معادله‌های زیرمی باشند:

$$x=\circ ، y=\circ ، z=\circ$$

ورأسهای مثلث به مختصات زیرمی باشند:

$$A(h ، \circ ، \circ) ، B(\circ ، h ، \circ) ، C(\circ ، \circ ، h)$$

وقتی خواسته باشیم مقدار h لیتر از یك مایع را بین سه ظرف پخش کنیم به‌گونه‌ای که اولی شامل x لیتر ، دومی شامل y لیتروسومی شامل z لیترازآن باشد، درموقعیتی هستیم که می‌توانیم آنچه را دربالا گفته شد درنظر داشته باشیم. چنانچه مایع درون ظرف اول را دست نزده اما مایع یکی از دو ظرف دیگررا در دیگری بریزیم ، دراین صورت نقطهٔ (x ، y ، z) دارای مکان به معادلهٔ: ثابت= x می‌باشد. همچنین است هرگاه مایع ظرف اول را ثابت بداریم و از مایع ظرف دوم متوالیاً برداشته در ظرف سوم بریزیم. هرگـاه هریك از ظرفها ظرفیت h لیتر را داشته باشد هریك از مختصات بین صفرو h می‌تواند تغییرکند . به این ترتیب مسئلهٔ عمومی [h:h ، h ، h] را خواهیم داشت کـه حوزهٔ تعریف جوابهای آن سطح مثلث ABC و با شرایط زیر می‌باشد:

$$\circ \leqslant x \leqslant h ، \circ \leqslant y \leqslant h ، \circ \leqslant z \leqslant h$$

یکی از مسئله‌های کاملاً جالب عبارت است از : $[h : a ، b ، c]$ با شرط : $h > a > b > c$. در این حالت سه پیمانهٔ a و b و c لیتری داده شده‌اند و h لیترازمایعی مفروض است ومقصود بدست‌آوردن مقدارمعین d لیترازآن مایع بااستفادهٔ فقط از سه پیمانهٔ مزبوراست ؛ هرچند مرتبه می‌توانیم مقداری از مایع داده شده یا کل آن را درآن سه ظرف جابجا کنیم. دراین صورت متغیرها دارای حدهای زیر می‌باشند:

$$0 \leqslant x \leqslant a \text{ و } 0 \leqslant y \leqslant b \text{ و } 0 \leqslant z \leqslant c$$

وحوزهٔ تعریف جوابها مساحت شش ضلعی ، منظم یا نامنظمی ، است که به شش خط زیر محدود است:

$$x=0 ، x=a \text{ و } y=0 ، y=b \text{ و } z=0 ، z=c$$

درحالتهای ویژه ممکن است که این شش‌ضلعی به یکی ازصورتهای زیردرآید: پنج‌ضلعی یا ذوزنقه یا متوازی‌الاضلاع ویا همانگونه‌که گفته شد تمام مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را دربر گیرد.

برای مثال این مسئله را درنظرمی‌گیریم که ۸ لیترمایع دراختیارداریم وبااستفاده‌از سه پیمانهٔ ۷ لیتری ، ۶ لیتری و ۳ لیتری می‌خواهیم ۴ لیتر از آن مایع را بدست‌آوریم. این مسئله به صورت [۸:۷،۶،۳] نموده می‌شود وحدهای متغیرها چنین است:

$$0 \leqslant x \leqslant ۷ \text{ و } 0 \leqslant y \leqslant ۶ \text{ و } 0 \leqslant z \leqslant ۳$$

حوزهٔ تعریف جوابها شش ضلعی است محدود به خطهای زیر:

$$x=۷ \text{ و } z=0 \text{ و } y=۶ \text{ و } x=0 \text{ و } z=۳ \text{ و } y=0$$

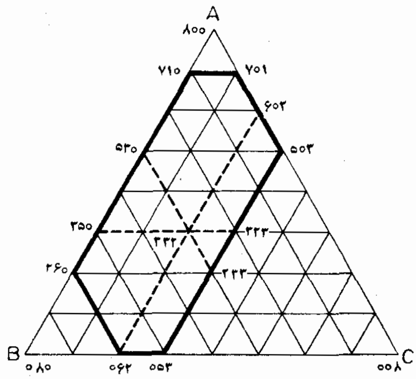
ورأسهای این شش ضلعی نقطه‌های با مختصات زیرمی‌باشند:

(۷،۰،۱) و (۵،۰،۳) و (۰،۵،۳) و (۰،۶،۲) و (۲،۶،۰) و (۷،۱،۰)

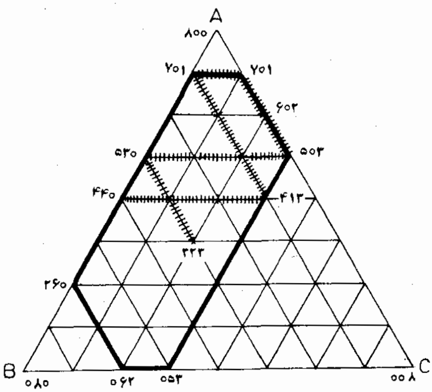
که برای اختصارآنها را به صورتهای زیرمی‌نویسیم:

۷۱۰ ، ۲۶۰ ، ۰۶۲ ، ۰۵۳ ، ۵۰۳ ، ۷۰۱

درشکلهای زیردوحالت ازاین مسئله نموده شده است. در شکل (۶.۴ ، الف) که نقطهٔ ۳۳۲ نموده شده مبین آن است که در ظرف اول ۳ لیتر ، در ظرف دوم ۳ لیتر و در ظرف سوم ۲ لیترازمایع وجود دارد. شش پاره خط واصل به این نقطه‌که نقطه‌چین رسم شده‌اند شش حالت ممکن جابجا کردن مایع را درون ظرفها برای رسیدن به آن وضع نشان می‌دهد. عبورازنقطهٔ ۳۳۲ به نقطهٔ ۵۳۰ به این معنی است‌که ظرف سوم را خالی کرده (۰ به‌جای ۲) ومحتوی‌آن را درظرف اول می‌ریزیم (۵ به جای ۳) ؛ درحالی‌که مسیراز ۳۳۲ به ۲۳۳ نشان می‌دهدکه ظرف سوم را از محتوای ظرف اول پرکرده‌ایم. همچنین مسیراز ۲۳۳ به ۰۶۲ به این معنی است‌که محتوای ظرف سوم را درظرف دوم سپس محتوای ظرف اول را درظرف سوم می‌ریزیم. درشکل (۶.۴ ، ب) خط شکسته‌ای



(شکل ۶.۴ ، الف)



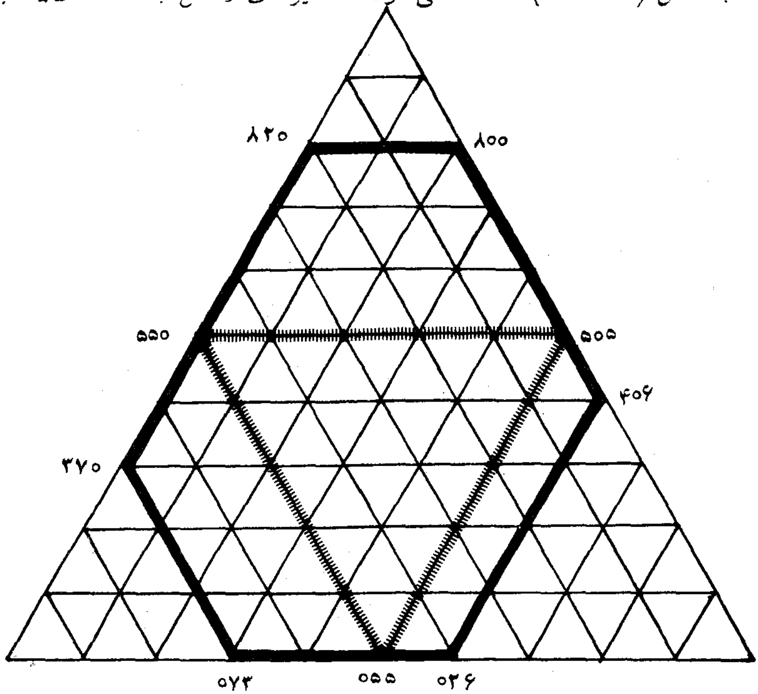
(شکل ۶.۴ ، ب)

که با خطهای پرداز نموده شده و ۳۳۲ را به ۴۴۰ وصل کرده یکی از راههای متعدد و ممکن بین این دونقطه را نشان می‌دهد ، به‌عبارت دیگر راههای مختلف تقسیم ۸ لیتر را به دوبخش برابرمی‌نمایاند. این مسیرخط شکسته درهرحال بایکی ازضلعهای مثلث مبدأ موازی است وفقط وقتی تغییرجهت می‌دهد که با محیط شش‌ضلعی حوزهٔ تعریف جوابها برخورد کند. هرگاه طبق قاعدهٔ مزبور مسیرهای دیگر را درنظر بگیریم به نقطه‌های با مختصات صحیح واقع برمرزشش ضلعی می‌رسیم. ازاینرودرمسئلهٔ [۸:۷،۶،۳] ازراه جابجاکردن مایع درون ظرفها می‌توانیم هرمقدارصحیح به حسب لیتر کمتر از ۸ لیتررا از مایع داده شده بدست آوریم.

شکل (۶.۴ ، پ) نظیرمسئلهٔ [۱۰:۸،۷،۶] رسم شده است. دراین مسئله بااستفاده ازسه پیمانهٔ ۸ لیتری، ۷ لیتری و ۶ لیتری می‌خواهیم بخشی‌معین ازمقدار ۱۰ لیترمایع‌مفروض را بدست آوریم. دراین‌مسئله بدست آوردن ۱ لیتر، ۲ لیتر، ۳ لیترو ۴ لیتربه‌آسانی انجام‌می گیرد. اما ، مگردرحالتی که درابتدا یکی ازظرفها شامل ۵ لیترباشد ، بدست آوردن ۵ لیتر غیر ممکن‌است. زیرا سه نقطهٔ ۵۵۰ ، ۰۵۵ ، ۵۰۵ مسیربسته‌ای به‌شکل مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند وطبق قاعدهٔ مربوط ازهیچ مسیردیگری نمی‌توان به‌این مسیر راه یافت. این چنین وضعیتی در حالت کلی برای مسئلهٔ [h : a ، b ، c] وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم:

$$h = ۲d \geqslant a > b > c > d$$

مسئلهٔ [۱۰:۸،۶،۴] نیزدارای وضعیتی ویژه اما کمی متفاوت ازمسئلهٔ قبل می‌باشد. با توجه به شکل (۶.۴ ، ت) ملاحظه می‌شودکه مسیرهای واصل به نقطهٔ ۵۵۰ شبکه‌ای



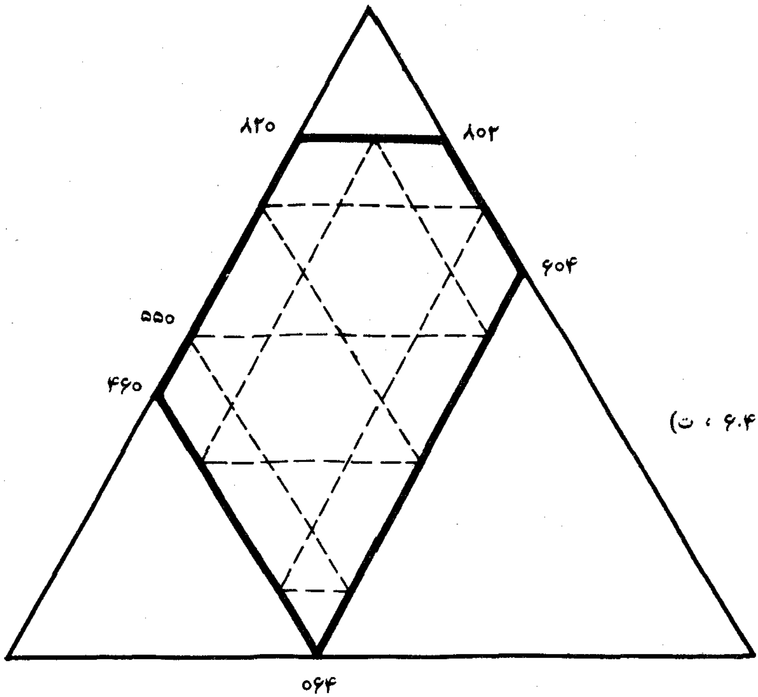
(شکل ۶.۴ ، پ)

بسته متشکل ازمثلثهای متساوی‌الاضلاع وچند ضلعیهای منتظم تشکیل می‌دهند. دراین‌حالت ظرفیت هریك ازپیمانه‌های مفروض عددزوج است درحالی‌که مقدارمایعی‌که می‌خواهیم بدست‌آوریم عدد فرد است. این چنین مسئله‌هایی نیزجواب ندارند. یك چنین اشکالی درهرمسئلهٔ [h : a ، b ، c] که در آن سه عدد a ، b ، c دارای مقسوم‌علیه مشترك بزرگترازیك می‌باشند وجود دارد.

مشهورترین مسئله‌های [h : a ، b ، c] به مشخصات زیرمی‌باشند:

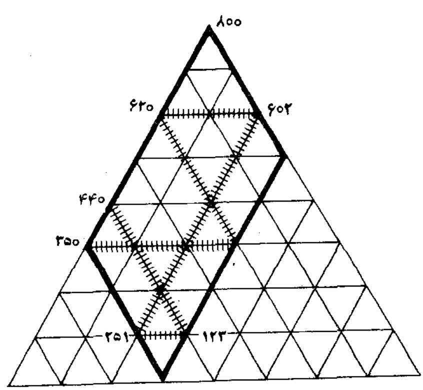
$$h = a = ۲d = b + c$$

در این مسئله‌ها حوزهٔ جوابها به شکل متوازی‌الاضلاعی است که a۰۰ ، cb۰ ، b۰c ، ۰bc رأسهای آن‌می‌باشند. مسئلهٔ [۸:۸،۵،۳] یك‌مثال‌عددی‌ازاین نوع مسئله‌هااست. راه حل هفت مرحله‌ای این مسئله درشکل(۶.۴ ، ث) وراه‌حل هشت مرحله‌ای آن درشکل (۶.۴ ، ج) نموده شده است. این مسئله معمولا چنین بیان می‌شود : دو مرد یك ظرف شامل ۸ لیترمایع ودوپیمانهٔ ۵ لیتری و ۳ لیتری دراختیاردارند. آنان چگونه می‌توانند

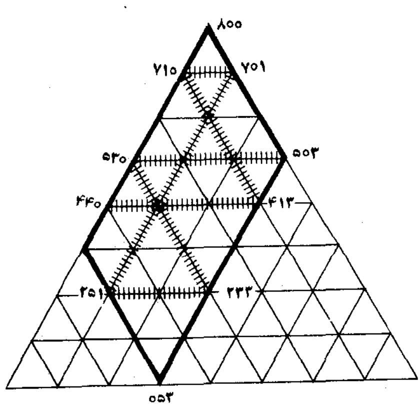


(شکل ۶.۴ ، ت)

آن مایع را به تساوی بین خود بخش کنند؟ اولین مرحلهٔ عمل پر کـردن پیمانه‌های ۵ لیتری و ۳ لیتری است (شکلهای ۶.۴، ث و ۶.۴، ج). به این ترتیب نقطهٔ ۳۵۰ یا ۵۰۳ بدست می‌آید. از این نقطه مسیری را تعقیب می‌کنیم که با ضلع مثلث مبدأ موازی است و هرگاه



(شکل ۶.۴ ، ث)



(شکل ۶.۴ ، ج)

که به ضلع متوازی‌الاضلاع حوزهٔ جوابها برخورد می‌کند ، به همان ترتیب که نور در برخورد با آینه منعکس می‌شود ، تغییرجهت می‌دهد. هرضلع این مسیر به شکل خط‌شکسته نشان می‌دهد که جابجائی مایع درون پیمانه‌ها چگونه انجام می‌شود. به این ترتیب یك راه‌حل مسئله شامل هفت مرحلهٔ زیربدست می‌آید:

۸۰۰،۳۵۰،۳۲۳،۶۲۰،۶۰۲،۱۵۲،۱۴۳،۴۴۰

یك راه‌حل دیگرشامل هشت مرحله به صورت زیربدست می‌آید:

۸۰۰،۵۰۳،۵۳۰،۲۳۳،۲۵۱،۷۰۱،۷۱۰،۴۱۳،۴۴۰

باید توجه داشت که یك چنین مسئله (به فرض $a=b+c$) وقتی قابل حل است که دو عدد طبیعی b و c نسبت به هم اول باشند ، یعنی مقسوم‌علیه مشترك غیراز یك نداشته باشند.

تمرینها

۱ــ ظرفی شامل ۱۲ لیتر مایع در اختیار است. با دوپیمانهٔ ۹ لیتری و ۵ لیتری چگونه می‌توان آن مایع را به دوبخش متساوی تقسیم کرد؟

۲ــ سه نفردزد ظرفی محتوی ۲۴ لیترروغن‌را می‌ربایند. اولی پیمانه‌ای ۱۳ لیتری، دومی پیمانه‌ای ۱۱ لیتری وسومی پیمانه‌ای ۵ لیتری در اختیاردارد. آنان با استفاده از این پیمانه‌ها چگونه می‌توانند روغن دزدیده شده را به تساوی بین خود تقسیم کنند؟

۳ــ نسبت بـه مثلث ABC دو نقطهٔ P و P' بـه ترتیب دارای مختصات مثلثی $(x ، y ، z)$ و $(x' ، y' ، z')$ می‌باشند. هرگاه داشته باشیم:

$$xx'=yy'=zz'$$

می‌گوییم کـه دو نقطهٔ P و P' مزدوج هم‌زاویه‌ای یکدیگرند. ثابت کنید کـه دو این حالت داریم:

$$\widehat{P'AC}=\widehat{BAP} \text{ و } \widehat{P'BA}=\widehat{CBP} \text{ و } \widehat{P'CB}=\widehat{ACP}$$

۷.۴ــ تجانس

تبدیلهایی که گفته شد همه دارای این ویژگی بودند کـه شکل مفروض را به شکل مساوی با آن تبدیل می‌کردند. وهمهٔ آنها که ویژگی حفظ فواصل راداشته‌باشند«هم‌اندازگی (= ایزومتری)» نامیده می‌شوند.

اکنون به منظوربهره‌وری تبدیلی را درنظر می‌گیریم که به هرشکل، شکلی متشابه با آن را نظیرمی‌سازد. درچنین تبدیل موسوم به تشابه اندازه‌های زاویه‌ها ثابت‌می‌مانند، اما فاصله‌ها عموماً تغییرمی‌کنند وبه نسبت معینی بزرگ یاکوچك می‌شوندکه این نسبت‌را

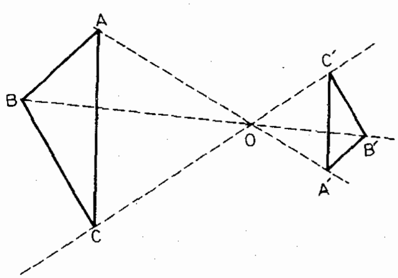
نسبت تشابه می‌نامیم. درتشابه، هرپاره خط AB به پاره خط $A'B'$ تبدیل می‌گردد که طول آن برابراست با:

$$A'B'=k\,.\,AB$$

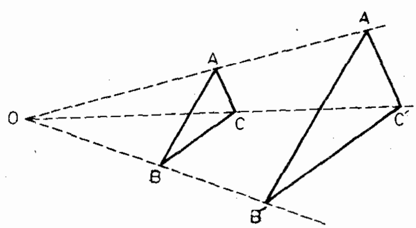
نسبت k می‌تواند بزرگتر ازیك، مساوی با یك، یا کوچکتر ازیك باشد. درحالت $k=۱$، تشابه همان‌هم‌اندازگی می‌باشد. برای تصریح بیشتر نکته‌های بالا می‌توان گفت که تشابه تبدیلی است که نسبت بین فاصله‌ها را ثابت نگاه می‌دارد؛ زیرا این تعریف ایجاب می‌کند که زاویه‌ها، همچنین استقامت نقاط واقع برخطوط محفوظ بمانند.

تجانس ساده‌ترین نوع تشابه است که هر خط را به خط موازی با خودش تبدیل می‌کند. تجانس در حالت خاص ممکن است که به‌صورت یك انتقال ساده باشد، در غیر این صورت آن‌را تجانس مرکزی می‌نامند؛ زیراهر خط واصل بین دونقطهٔ متناظر بر نقطهٔ ثابت به‌نام مرکزتجانس می‌گذرد. برای اثبات این موضوع، هرگاه در یك تجانس به نسبت $\pm k$ (به‌فرض $k>۰$)، پاره‌خط $A'B'$ مبدل پاره‌خط AB باشد، مطابق باشکلهای (۷.۴ ، الف) و (۷.۴ ، ب)، این دوپاره خط با هم موازیند و داریم:

$$\overrightarrow{A'B'}=\pm k\cdot\overrightarrow{AB}$$



(شکل ۷.۴ ، الف)



(شکل ۷.۴ ، ب)

هرنقطهٔ C از شکل مفروض که با A و B مثلثی بسازد، دارای مبدل C' است به گونه‌ای که $A'C'$ با AC و $B'C'$ با BC موازی‌است. درحالتی که‌تجانس به‌صورت انتقال نباشد (یعنی داشته باشیم $k\neq ۱$) دوخط AA' و BB' دریك نقطهٔ O برخورد می‌کنند به‌گونه‌ای که:

$$\overrightarrow{OA'} = \pm k.\overrightarrow{OA} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OB'} = \pm k.\overrightarrow{OB}$$

بنا به قضیهٔ تالس که خطهای متوازی روی هر دو خط متقاطع پاره خطهای نظیر به نظیر متناسب بوجود می‌آورند ، نتیجه می‌شود که:

$$\overrightarrow{OC'} = \pm k \cdot \overrightarrow{OC}$$

و بنا براین C' بر امتداد OC واقع است.

در شکل (۷.۴ ، الف) هر گاه نقطهٔ O به سمت چپ حرکت کند و به فاصلهٔ بینهایت واقع شود ، درحد ، خطهای AA' و BB' و CC' باهم موازی می‌شوند که دراین صورت k به سمت ۱ میل می‌کند و خواهیم داشت: $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ پس دراین حالت، تجانس به صورت انتقال درآمده است.

در شکل (۷.۴ ، ب) هرگاه O وسط AA' واقع شود خواهیم داشت: $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$ که دراین صورت تجانس به صورت تبدیل نیم‌دور، به عبارت‌دیگر به صورت تقارن مرکزی ، درمی‌آید.

تمرینها

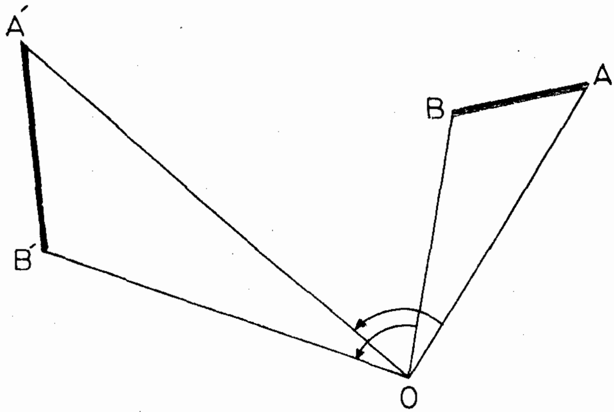
۱ــ مکان هندسی وسط پاره خط متغیری را تعیین کنید که یك سر آن ثابت است و سر دیگر آن روی دایرهٔ ثابت حرکت می‌کند.

۲ــ مثلث ABC با زاویه‌های حاده داده شده است. مربعی چنان رسم کنید که یك ضلعش روی BC و دورأس دیگرش بر AB و AC واقع باشند.

۸.۴ــ تبدیل تشابهی

هرگاه شکلی نخست به وسیلهٔ تجانس و آنگاه به وسیلهٔ انتقال تبدیل شود، خطهای نظیر موازی باهم باقی می‌مانند ودرنتیجه شکل حاصل مجانسی ازشکل اول است. همچنین و بنا به همان دلیل ، ترکیب دوتجانس بازیك تجانس است. اما اگر شکلی نخست بوسیلهٔ تجانس و آنگاه به‌وسیلهٔ دوران تبدیل شود ، خطهای نظیر معمولاً موازی باهم نخواهند بود. بنابراین ترکیب یك تجانس بایك دوران (که این دوران تمام دور و یا نیم دور نباشد) یك تجانس نخواهد بود ، بلکه یك تشابه مستقیم می‌باشد که علاوه‌بر اندازه‌های زاویه‌ها جهتهای آنها را نیز ثابت نگاه می‌دارد.

درحالت کلی ، ترکیب یك تجانس ویك دوران که مرکزهای مشترك داشته باشند تبدیل تشابهی نامیده می‌شود. این تبدیل راه‌حل بسیاری ازمسئله‌ها راآسان خواهدکرد. مطابق شکل (۸.۴ ، الف) ، در یك چنین تبدیل تشابهی پاره خط AB به پاره-



(شکل ۸.۴ ، الف)

خط $A'B'$ بدل‌شده است. دومثلث OAB و $O'A'B'$ مستقیماً متشابهند وداریم:

$$\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}$$

و به علاوه همانگونه که درمورد تجانس درحالت کلی وجود دارد ، داریم:

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB}$$

هر تبدیل تشابهی با مرکزش O ، نسبتش k وزاویهٔ دورانش θ کاملاً مشخص می‌شود وآن را چنین نشان می‌دهیم:

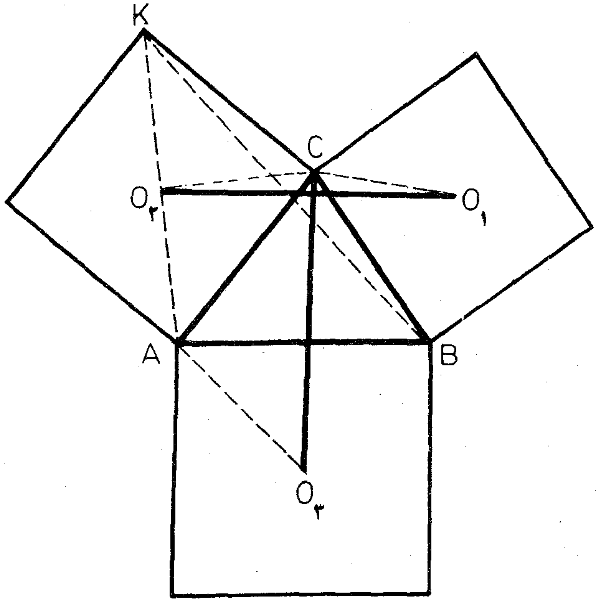
$$O(k\ ,\ \theta)$$

(همانگونه که می‌دانیم زاویهٔ دوران جهت‌داراست که اگر جهت‌آن‌درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد اندازهٔ‌آن مثبت است ودرجهت خلاف‌آن اندازه‌اش منفی مـی‌باشد). شکل (۷.۴ ، الف) تبدیل تشابهی $O(k\ ,\ ۰^\circ)$ و شکل (۷.۴ ، ب) تبدیل تشابهی $O(k\ ,\ ۱۸۰^\circ)$ می‌باشد. یك دوران به زاویهٔ θ تبدیل تشابهی $O(۱\ ,\ \theta)$ می‌باشد.

برای‌آنکه چگونگی کاربرد تبدیل تشابهی را نشان بدهیم ، قضیه‌های زیر و اثبات آنها را ارائه می‌دهیم:

قضیهٔ ۱،۸.۴- هرگاه ، روی ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC و در خارج آن ، مربعهای به‌مرکزهای $O_۱$ ، $O_۲$ و $O_۳$ را بسازیم ، خطهای $O_۱O_۲$ و $CO_۳$ باهم برابر و برهم عمودند.

با توجه به شکل (۸.۴ ، ب) ملاحظه می‌کنیم که درتبدیل تشابهی $A(\sqrt{۲}\ ،\ ۴۵^\circ)$ مثلث KAB مبدل مثلث $CAO_۳$ است ، همچنین درتبدیل تشابهی $C(\sqrt{۲}\ ،\ -۴۵^\circ)$



(شکل ۸.۴ ، ب)

مثلث BCK مبدل مثلث $O_۱CO_۲$ است. در دو تبدیل مزبور دو پاره خط $CO_۳$ و $O_۱O_۲$ با نسبت $\sqrt{۲}$ به یك پاره خط BK بدل شده‌اند. بنابراین دو پاره خط مزبور باهم برابرند. به علاوه، در تبدیل دو پاره خط مزبور به BK ، یکی از آنها به زاویهٔ ۴۵° و دیگری به زاویهٔ $۴۵^\circ-$ دوران کرده‌اند، پس زاویهٔ بین آن دو پاره خط برابر با مجموع قدرمطلقهای زاویه‌های دوران یعنی برابر با ۹۰° است، یعنی آن دو پاره خط برهم عمودند. (به‌طریق مشابه ثابت می‌شود که $O_۲O_۳$ و $AO_۱$ وهمچنین $O_۳O_۱$ و $BO_۲$ نیز باهم برابروبرهم عمودند ونتیجه‌خواهد شد خطهای $O_۱A$ ، $O_۲B$ و $O_۳C$ که ارتفاعهای مثلث $O_۱O_۲O_۳$ می‌باشند متقاربند).

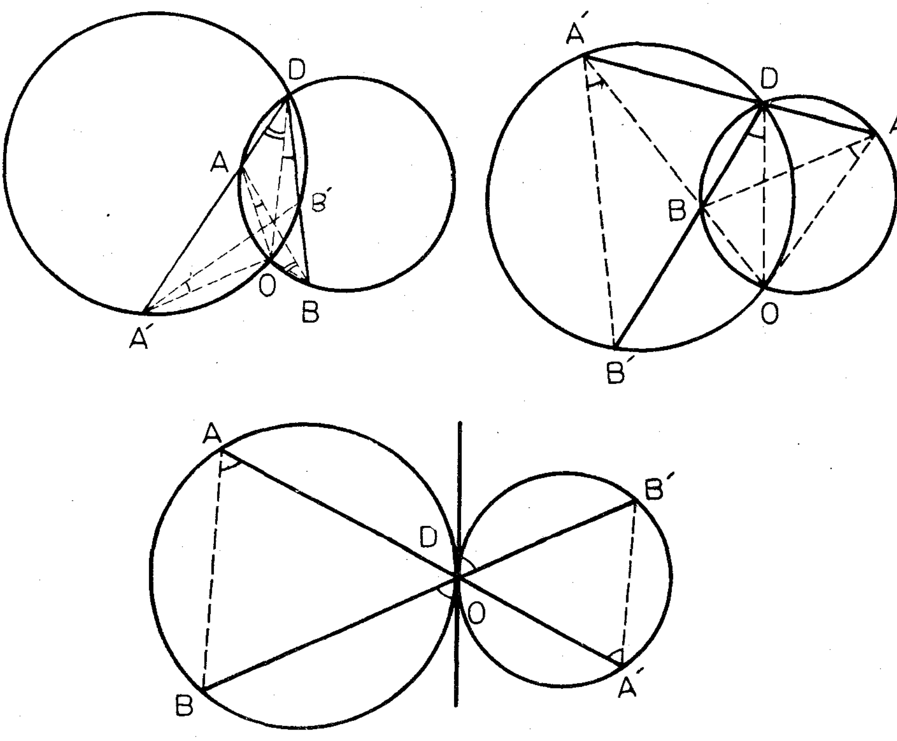
اکنون که تبدیل تشابهی را به عنوان حاصل ترکیب یك تجانس و یك دوران با مرکزهای مشترك تعریف کردیم، این پرسش برای ما پیش می‌آید که حاصل ترکیب یك تجانس و یك دوران بامرکزهای مختلف چه می‌باشد. پاسخ ساده ودرعین‌حال شگفت‌آور است: حاصل ترکیب این دو تبدیل بازهم یك تبدیل تشابهی است، زیرا تبدیلهای تشابهی مستقیم ازنوع بسیار پیچیده وجود ندارد.

قضیهٔ ۲،۸.۴- هر دو شکل دلخواه متشابه، یا در یك انتقال و یا در یك تبدیل تشابهی، مبدل یکدیگرند.

برای اثبات، فرض می‌کنیم که در دو شکل مفروض مستقیماً متشابه، دو پاره خط

AB و $A'B'$ نظیریکدیگرباشند. اگر $A'B'$ با AB مساوی وموازی باشد. دراین صورت تبدیل انجام یافته یك انتقال است. ازشکل اول نقطهٔ C را غیرواقع بر AB درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم C' نقطهٔ نظیرآن باشد. چون دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مستقیماً متشابهند و $A'B'$ با AB مساوی وموازی است پس‌دومثلث‌مزبور باهم برابرند وضلعهای نظیرآنها باهم موازیند. چون نقطهٔ C را به دلخواه می‌توانیم انتخاب کنیم پس‌هردوپاره خط متناظرازدوشکل مفروض باهم مساوی وموازیند وبنابراین دوشکل مفروض دریك انتقال مبدل یکدیگرند.

فرض می‌کنیم که AB و $A'B'$ بایکدیگرمساوی وموازی نباشند، دراین‌صورت AA' با BB' دریك نقطهٔ D برخورد می‌کنند. (اگرچهار نقطهٔ A، B، A'، B' یك چهارگوشه تشکیل ندهند، مثلاً A' درامتداد AB واقع باشد، می‌توانیم وسط AB را به جای A و وسط $A'B'$ را به جای A' انتخاب کنیم). مطابق با شکل (۸.۴، پ) دایره‌های محیطی دو مثلث ABD و $A'B'D$ را رسم می‌کنیم. این دو دایره‌که در D مشترکند درنقطهٔدیگر O نیزمشترکند (که ممکن است O بر D منطبق باشد). از تساوی دو زاویهٔ OAB و ODB و همچنین دو زاویهٔ ODB' و $OA'B'$



(شکل ۸.۴، پ)

تساوی دوزاویهٔ OAB و $OA'B'$ نتیجه می‌شود. همچنین تساوی دوزاویهٔ OBA و $OB'A'$ بدست می‌آید. بنابراین دومثلث OAB و $OA'B'$ که مستقیماً متشابهند در تبدیل تشابهی زیرمتناظرند:

$$O(k\,,\,\theta)\ :\ k=\frac{OA'}{OA}\quad \text{و}\quad \theta=\widehat{AOA'}$$

هر تبدیل تشابهی مستقیم که انتقال نباشد دارای نقطهٔ ثابتی است که این نقطه منحصر به فرد است. زیرا اگر برای تبدیل تشابهی دونقطهٔ ثابت A و B وجود داشته باشد، پاره خط AB نیز ثابت است و باید داشته باشیم:

$$k=\frac{AB}{AB}=۱$$

ودراین صورت تبدیل مزبوریك هم‌اندازگی خواهد بود وچنانچه دراین تبدیل دومثلث ABC و ABC' نظیرهم باشند نقطهٔ C' درعین حال به‌دایره‌های به مرکزهای A و B و به شعاعهای AC و BC تعلق خواهد داشت. بنابراین، تبدیل مزبور یا یك همانی (یعنی انتقال به بردارصفر) خواهد بود ویا یك تقارن محوری (که در این صورت تشابه نظیرآن غیرمستقیم است زیرا درآن جهت زاویه‌ها تغییرمی‌کند).

عملا هم می‌توانیم وجود یك مرکزتشابه منحصر به فرد را برای دو شکل متشابه آزمایش‌کنیم؛ هرگاه یك شکل را با دو مقیاس روی‌کاغذهای کالك رسم‌کنیم و آنها را روی هم قراربدهیم ویکی را بلغزانیم تا دقیقاً درکناردیگری واقع شود ملاحظه خواهیم کردکه باید یك نقطه را ثابت نگاه داریم.

این ملاحظات توسط جولیوس پترسن[1] (۱۸۸۰) و پ. ه. اسکوت[2] (۱۸۹۰) از راه بیان و اثبات قضیه‌ای بسیار قشنگ توسعه یافته‌اند. یك حالت خاص این قضیه از این قرار است:

قضیهٔ ۳،۸.۴- هرگاه دو مثلث مستقیماً متشابه ABC و $A'B'C'$ مفروض باشد و مثلثهای $AA'A''$، $BB'B''$ و $CC'C''$ نیز مستقیماً متشابه باشند، در این صورت دو مثلث ABC و $A''B''C''$ نیز مستقیماً متشابهند.

هرگاه دومثلث ABC و $A'B'C'$ باهم برابر باشند حکم واضح است. درحالت کلی که آنها با هم برابر نباشند، شکل (۸.۴، ت)، فرض می‌کنیم $O(k,\theta)$ تبدیل تشابهی باشد که آنها را بههم بدل می‌کند به گونه‌ای که داریم:

1- Julius Petersen. ۲- P. H. Schoute.

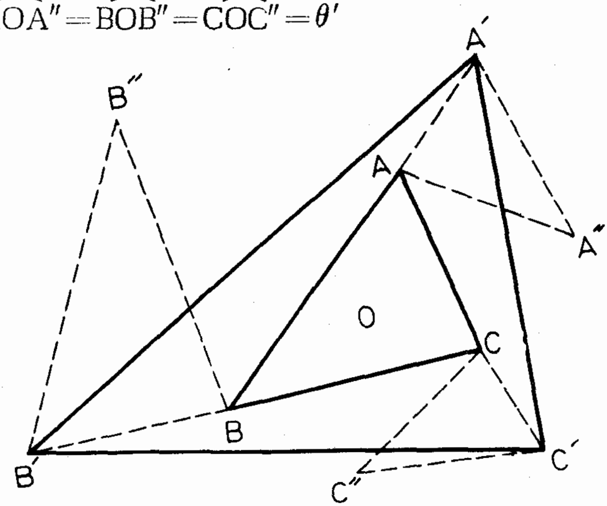
$$k=\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}$$

$$\theta=AOA'=\widehat{BOB'}=\widehat{COC'}$$

نتیجه می‌شود که مثلثهای OAA' ، OBB' و OCC' باهم متشابهند و با توجه به‌فرض نتیجه می‌شود کـه مثلثهای OAA'' ، OBB'' ، OCC'' نیز با هم متشابهند.
پس داریم:

$$\frac{OA''}{OA}=\frac{OB''}{OB}=\frac{OC''}{OC}=k'$$

$$\widehat{AOA''}=\widehat{BOB''}=\widehat{COC''}=\theta'$$



(شکل ۸.۴ ، ت)

بنا براین درتبدیل تشابهی $O(k',\theta')$ دومثلث ABCو$A''B''C''$ نظیر یکدیگرند، یعنی با هم متشابهند.

قضیهٔ زیر حالت خاص دیگری از قضیهٔ پترسن ـ اسکوت است که با روش مشابه ثابت می‌شود:

قضیهٔ۴،۸.۴ ـ دریك تبدیل‌تشابهی‌که پاره خطهای AB و $A'B'$ نظیر یکدیگرند، هرگاه P نقطه‌ای از AB وP' نقطهٔ نظیرش از $A'B'$ باشد، نقطه‌هایی که PP' را به‌نسبت معین تقسیم می‌کنند یا متمایزند وبریك خط راست واقعند یا اینکه همه برهم منطبقند .

تمرینها

۱ــ مثلث ABC و تبدیل تشابهی به مرکز ثابت A و به‌نسبت متغیر k را در نظر می‌گیریم. هرگاه در این تبدیل، مبدل رأس B بر BC حرکت کند ثابت کنید که مبدل رأس C نیز بریك خط ثابت حرکت خواهد کرد.

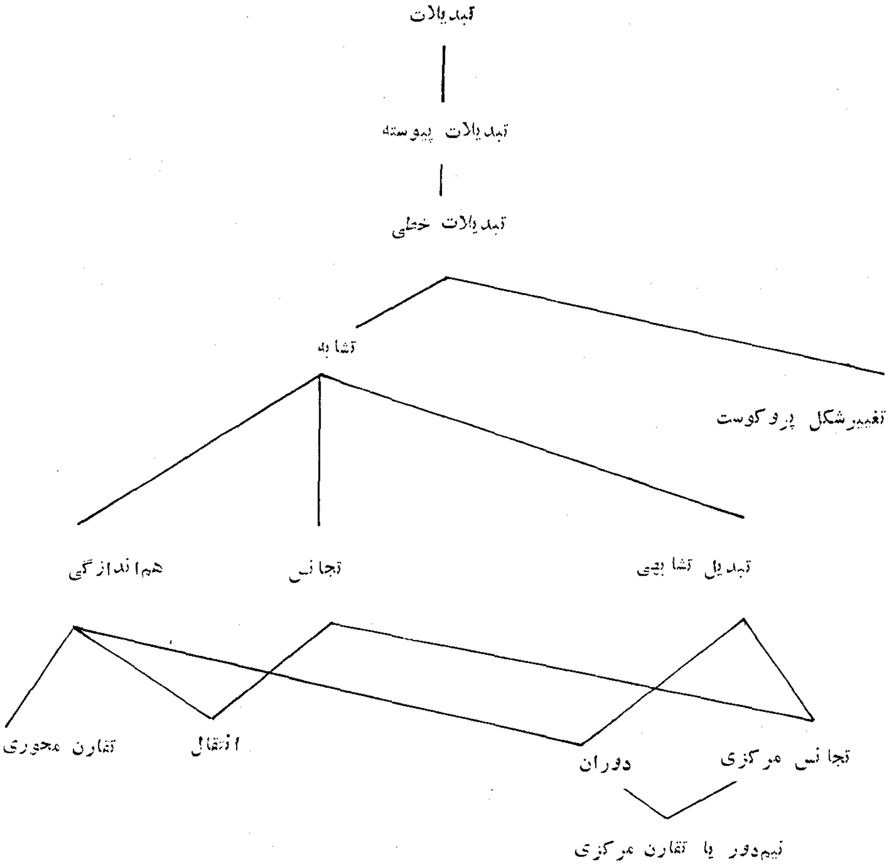
۲ــ دربند ۳۰۳ بدون اثبات بیان‌شده است که‌مثلث‌ناپلئون داخلی هرمثلث‌مختلف الاضلاع ABC باآن درجهت معکوس است (یعنی‌جهت توالی رأسهای آنها درخلاف یکدیگراست). این‌حکم راثابت کنید.

۹.۴ــ تبدیلهای متوالی

در پیش گفتیم که هرتبدیل عبارت است از تناظر یك به‌یك بین نقاط متعلق به یك صفحه با خود آنها . تاکنون چند تبدیل‌را شرح داده‌ایم که همهٔ آنها تبدیل پیوسته بوده‌اند. یعنی تبدیلهایی بوده‌اند که نقطه‌های مجاور را به نقطه‌های باز هم مجاور بدل می‌کرده‌اند. از بین این تبدیلهای پیوسته ازآنهایی که‌صحبت کرده‌ایم خطی بوده‌اند، یعنی‌خطوط‌رامحفوظ می‌داشته‌اند، به‌عبارت دیگرخط‌را به‌خط تبدیل‌می‌کرده‌اند. همچنین از تبدیلهایی بحث شدکه توازی خطوط را محفوظ می‌داشتند یا اینکه نسبت بین فواصل را ثابت نگاه می‌داشتند. در این میان تبدیلهایی با ویژگیهای شگفت را به‌کنار گذارده‌ایم که ازآن جمله می‌توان از تغییر شکل پروکوست[1] نام‌برد(که دایره را به‌بیضی با همان مساحت بدل می‌کند). از تبدیلهای تشابهی بحث شد که یا هم‌اندازگی بود که اندازه‌ها را محفوظ می‌داشت، و یا تجانس بود که خط را به‌خط موازی با خودش بدل می‌کرد، ویا اینکه شامل نقطهٔ ثابت و دوران درجهت معین بود. وانگهی ، این ویژگیها گاهی درهم آمیخته‌اند: بین هم‌اندازگیها، تقارن محوری و انتقال (که خودحالت خاص تجانس است) ودوران (که تبدیل تشابهی بانسبت‌یك می‌باشد)را بررسی‌کردیم. همچنین ملاحظه‌کردیم که تجانس نوعی‌تبدیل تشابهی‌با زاویهٔ صفر است. بالاخره‌ازنیم‌دوریاتقارن مرکزی بحث شدکه دوران‌به‌زاویهٔ 180° ویا اینکه تجانس به‌نسبت -1 می‌باشد.روابط بین این تبدیلها را می‌توانیم به‌صورت نمودار درختی مانند صفحه بعد نشان دهیم.

* * *

1- Procuste.



تمرینها

نسبت به محورهای مختصات متعامد، تغییر شکل پروکوست نقطهٔ $(x \text{ و } y)$ را به‌نقطهٔ $(x' \text{ و } y')$ بدل می‌کند به گونه‌ای که:

$$x' = kx \text{ و } y' = \frac{1}{k}y$$

نظیر این معادلات را برای تبدیلهای زیر بدست آورید:

۱ــ انتقالی که $(0 \text{ و } 0)$ را به $(a \text{ و } b)$ بدل می‌کند.

۲ـ تقارن نسبت به‌محور y ها.

۳ـ تقارن نسبت به‌خط به‌معادلهٔ $x - y = 0$

۴ـ تقارن نسبت به‌مبدأ مختصات.

۵ـ تجانس $O(k$ و $0^\circ)$.

۶ـ تبدیل تشابهی $O(k$ و $90^\circ)$

۷ـ یك هم‌اندازگی که تاکنون ذکر نشده است.

۸ـ یك تبدیل تشابهی که تاکنون از آن بحث نشده است.

۹ـ تبدیلی پیوسته وغیرخطی.

۱۰ـ تبدیلی ناپیوسته.

۵

آشنایی باهندسهٔ انعکاسی

قفسی گوی گون را در بیشه بگذاریم؛ به‌درون آن برویم و درش را ببندیم . سپس انعکاسی نسبت به‌قفس را انجام دهیم. آنگاه شیر دردرون قفس خواهد بود و ما دربیرون آن.

ﻫ. پتارد **(H. Petard)**

در این بخش، تا حد امکان، دیگر به‌تبدیلهای یك به‌یکی کـه همهٔ نقطه‌های صفحهٔ اقلیدسی را دربرمی‌گیرند قناعت نخواهیم کرد: باتبدیلی سروکار داریم که درآن یك نقطهٔ O دارای مبدل نیست. به‌عبارت واضحتر،دایره‌ای ثابت به‌مرکز O به‌نام دایرهٔ انعکاس درنظر می‌گیریم: در آن صورت بنا به‌تعریفی که می‌کنیم هردایره که بر O بگذرد به‌یك خط تبدیل می‌شود در حالی کـه هردایرهٔ دیگر بازهم به دایره تبدیل خواهد شد . (در بسیاری از موارد، از راه تبدیل دایره‌ها به‌خطهای راست می‌توان مسئله‌ها را ساده‌کرد؛ که در این صورت شکلهای بغرنج به‌ریخت کاملاً جدید درخواهندآمد).

۵.۱ـ جفتهای نقطه‌های جداساز

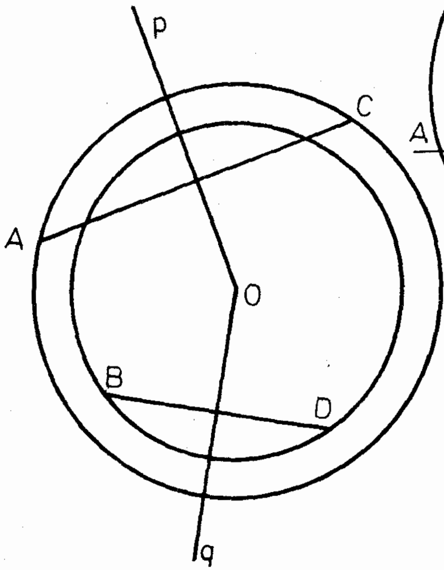
قضیهٔ زیـر در ۱۹۶۵ در مسابقه‌های ویلیام لاول‌پاتنیم[1] مطرح شده است . اما تصدیق خواهید کرد که‌طرح آن‌در چنین‌مسابقه‌ای به‌علت مشکل بودن‌اثبات‌آن مناسبتی نداشته است. اثباتی که درزیر ارائه می‌شود با استفاده ازراه‌حلهای گوناگونی که برای‌آن انجام گرفته بدست‌آمده است.

1- William Lowell Putnam.

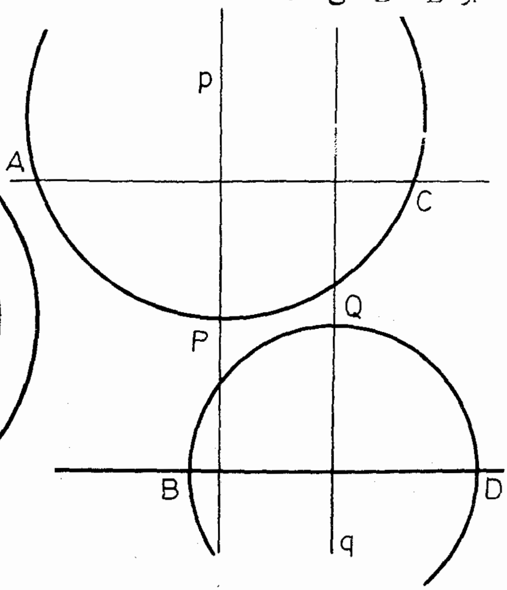
مسابقه‌هایی است‌که هرسال درایالات متحدهٔ امریکا برگزار می‌شود.

قضیهٔ ۱،۱.۵- هرگاه چهار نقطهٔ A ، B ، C ، D نه بریك خط و نه بریك دایره واقع باشند، دو دایرهٔ بدون نقطهٔ مشترك وجود خواهد داشت که یکی از آنها بر A و C و دیگری بر B و D بگذرد.

برای اثبات، عمودمنصف پاره‌خط AC را با p و عمودمنصف پاره‌خط BD را با q نشان می‌دهیم. p و q نمی‌توانند برهم منطبق باشند، بنابراین یا در یك نقطهٔ O متقاطعند و یا باهم موازیند. اگر p و q در O متقاطع باشند، مطابق با شکل(۱.۵،الف)، دایره‌های به‌مرکز O و به‌شعاعهای OA و OB متداخلند و اولی بر A و C و دومی بر B و D می‌گذرد.



(شکل ۱.۵ ، الف)



(شکل ۱.۵ ، ب)

اگر p با q موازی باشد ، در این صورت AC نیز با BD موازی است. مطابق با شکل (۱.۵، ب)، نقطه‌های P و Q بـه ترتیب بر p و q و به‌یك فاصله از خطهای موازی AC و BD وجود دارند. دایره‌ای کـه بر A ، C ، P می‌گذرد با دایره‌ای که بر B ، D ، Q می‌گذرد نقطهٔ مشترك نخواهد داشت.

جفت‌نقاط A ، C را نسبت‌به‌جفت نقاط B ، D جداساز[1] می‌نامیم هرگاه چهار نقطهٔ A ، B ، C ، D یا بریك خط و یا بریك دایره واقع باشند و پاره‌خط یا کمان AC یکی و فقط یکی از دونقطهٔ B و D را در بـرداشته باشد، به‌عبارت ساده‌تر هریك از

1- Séparé.

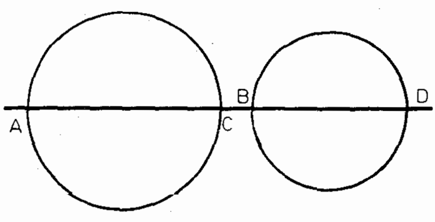
جفتها بین نقطه‌های جفت دیگر جدایی بیندازد . رابطهٔ مزبور را بنا به‌قرارداد به صورت متداول زیر نشان می‌دهیم:

$$AC \,|\,|\, BD$$

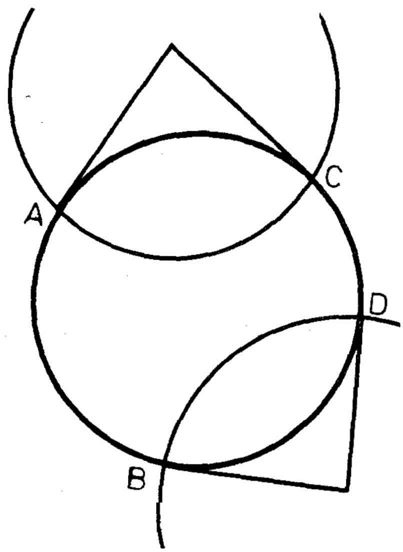
این رابطه را به‌هفت صورت دیگر می‌توان نوشت. مانند:

$$AC \,|\,|\, DB \quad \text{یا} \quad BD \,|\,|\, AC$$

هرگاه چهارنقطهٔ A ، B ، C و D بریك‌خط یا بریك‌دایره واقع باشند اما جفت نقاط A ، C نسبت به جفت نقاط B ، D جدا سازنباشد ، به سادگی می‌توان دودایرهٔ بدون نقطهٔ مشترك رسم‌کرد که یکی بر A و C ودیگری بر B و D بگذرد: درحالتی که این چهارنقطه بریك خط واقع باشند ، مانند شکل (۱.۵ ، پ) ،کافی است‌دایره‌های به قطرهای AC و BD را رسم کنیم ؛ هرگاه چهار نقطهٔ A ، B ، C و D به شرط مذکور بریك دایره واقع باشند ، مانند شکل (۱.۵ ، ت) ، مماسهایی کـه در A و C بردایره رسم‌کنیم وهمچنین مماسهایی که در B و D بر آن‌رسم‌کنیم مرکزهای دایره‌هایی متمایزرا بدست می‌دهند.



(شکل ۱.۵ ، پ)

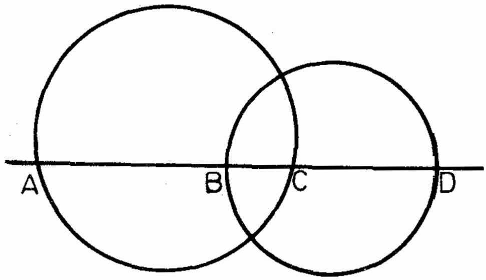


(شکل ۱.۵ ، ت)

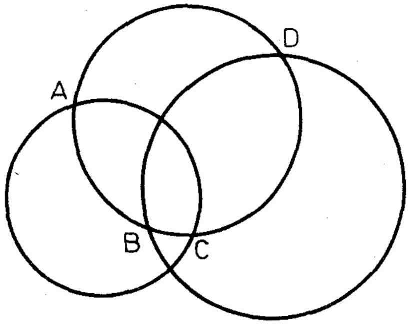
هرگاه داشته باشیم $AC \,|\,|\, BD$ ،دراین صورت هردایره‌که بر A و C بگذرد، ازدونقطهٔ B و D یکی در درون‌آن ودیگری دربیرون‌آن واقع خواهد شد : بنابراین هردایره‌که بر A و C بگذرد با هردایره‌که بر B و D بگذرد متقاطع خواهد بود.

صورت نقیض قضیهٔ (۱،۱.۵) بدین معنی است که هرگاه دایره‌ای دلخواه که بردو

نقطهٔ مفروض می‌گذرد با دایرهٔ دلخواه دیگر که بردو نقطهٔ مفروض دیگرمی‌گذرد حداقل دردو نقطه مشترك باشد ، آن چهار نقطهٔ مفروض باید یا بریك خط و یا بریك دایره واقع باشند ، شکلهای (۱.۵ ، ث) و (۱.۵ ، ج). درچنین حالتی ، دوجفت نقطه‌های مفروض



(شکل ۱.۵ ، ث)



(شکل ۱.۵ ، ج)

هر کدام نسبت به دیگری جدا ساز می‌باشد. با توجه به‌آنچه گفته شد می‌توانیم بدون قید آنکه چهار نقطه بریك خط یا بریك دایره واقع باشند ، تعریف مفهوم جدا سازی[1] را به شرح زیر بیان کنیم:

دوجفت نقطه‌های (A ، C) و (B ، D) را نسبت به یکدیگرجدا سازمی گوییم هرگاه هردایرهٔ گذرنده بر A و C با هردایرهٔ گذرنده بر B و D حداقل در دو نقطه مشترك باشد؛ که‌این دودایره یا متقاطعند ویا منطبقند.

ناگفته نماند که به نوع دیگری وبدون ارتباط دادن هیچ دایره‌ای نیز می‌توان جداسازی را مشخص کرد.

قضیهٔ ۲،۱.۵- بین فاصله‌های هرچهار نقطهٔ A ، B ، C ، D از یکدیگررابطهٔ زیر برقرار است:

$$AB \times CD + BC \times AD \geqslant AC \times BD$$

تساوی وقتی برقرار است که $BD| \; |AC$ باشد.

اثبات این قضیه هرچند که نیاز به یادآوریهایی دارد اما حائزاهمیت است. نخست حالتی را درنظرمی گیریم که چهار نقطه بریك خط واقع باشند. دراین صورت با استفاده ازویژگیهای برداری (بند ۱.۲) فرض می کنیم که:

$$\overrightarrow{AD} = x \text{ ، } \overrightarrow{BD} = y \text{ ، } \overrightarrow{CD} = z$$

1- Séparation

دراین صورت خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{AB}=x-y \text{ ، } \overrightarrow{BC}=y-z \text{ ، } \overrightarrow{AC}=x-z$$

بنابراین:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AD}=(x-y)z+(y-z)x$$

$$=(x-z)y=\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD} \qquad (۱-۲،۱.۵)$$

هرگاه داشته باشیم $AC||BD$ ، مانند شکل (۱.۵ ، ث) ، پاره‌خط AC فقط یکی از دو نقطهٔ B یا D را دربردارد و بنابراین نسبتهای $\overrightarrow{AB}:\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AD}:\overrightarrow{DC}$ مختلف‌العلامتند و در نتیجه حاصلضربهای $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AD}$ نیز مختلف‌العلامتند و بنابراین حاصلضربهای $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AD}$ هم‌علامت می‌باشند. در چنین حالتی رابطهٔ (۱-۲،۱.۵) برای اندازه‌های هندسی بردارها نیز محقق خواهد بود. اما اگر جفت A ، C نسبت به جفت B ، D جداساز نباشد، مانند شکل (۱.۵ ، پ)، علامتهای گفته شده تغییر خواهند کرد؛ مثلاً حاصلضربهای $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AD}$ مختلف‌العلامت می‌باشند. در این حالت وقتی اندازه‌های هندسی بردارها را درنظربگیریم ، از رابطهٔ (۱-۲،۱.۵) برمی‌آید که مقدارمثبت $AC\times BD$ که با تفاضل دومقدارمثبت $AB\times CD$ و $BC\times AD$ برابراست ازمجموع این دومقدارمثبت کوچکترخواهد بود ، یعنی داریم:

$$AB\times CD+BC\times AD>AC\times BD$$

بنابراین برای حالتی که چهار نقطه بریک خط واقع باشند ، حکم قضیهٔ (۲،۱.۵) ثابت شده است.

برای حالتی که چهارنقطه بریک خط واقع نباشند ، ازبین آنها دست‌کم سه نقطه تشکیل مثلث می‌دهند . مثلاً مثلث ABC ، و چهارمین نقطه ، یعنی D ، یا بریکی از ضلعهای این مثلث واقع است و یا داخل یا خارج آن قرار خواهد داشت. درهرصورت بنا به قضیهٔ بطلمیوس (قضیهٔ ۱،۶.۲) وعکس آن (قضیهٔ ۲،۶.۲) خواهیم داشت:

$$AB\times CD+BC\times AD\geqslant AC\times BD$$

تساوی فقط وقتی برقرار است که چهارنقطه بریک دایره واقع باشند.

تمرینها

۱ــ هشت رابطهٔ معادل با $AC||BD$ را بنویسید.

۲.۵ــ نسبت ناهمساز (=غیرتوافقی)

نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ غیرمشخص A ، B ، C ، D که جدا از هم و به همین

ترتیب مفروضند عبارت است از عدد $(ABCD)$ که برحسب فاصله‌های دو به دوی این نقطه‌ها به صورت فرمول زیر تعریف می‌شود:[1]

$$(ABCD)=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}}\quad\left(\text{یا}\ \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}\cdot\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}\right)$$

هرگاه طرفین رابطه‌ای راکه درقضیهٔ (۲،۱.۵) محقق شد بر $AC\times BD$ تقسیم کنیم، با توجه به تعریف بالا نتیجه خواهد شد که:

قضیهٔ ۱،۲.۵- برای آنکه نسبتهای ناهمساز چهار نقطهٔ جدا از هم در رابطهٔ

$$(ADBC)+(ABDC)=1$$

صدق کنند لازم و کافی است که $AC|\ |BD$ باشد.

این ارتباط بین نسبتهای ناهمساز و «جداسازی» امکان آن را بوجود می‌آورد که برعکس آنچه که قبلاً عمل کردیم عمل کنیم، یعنی به‌جای آنکه جداسازی را برحسب دوایر تعریف کردیم، اکنون دوایر را برحسب جداسازی تعریف کنیم! زیرا سه نقطهٔ متمایز A، B، C یك دایره (یا یك خط) منحصر به‌فرد را مشخص می‌کنند و می‌توان آن را متشکل از همان سه نقطه و همهٔ نقطه‌های X دانست به قسمی که:

$$BC|\ |AX\ \text{یا}\ CA|\ |BX\ \text{یا}\ AB|\ |CX$$

تمرینها

۱ــ ثابت کنید که:

$$(ABCD)=(BADC)=(CDAB)=(DCBA)$$

۲ــ حاصل $(ADBC)+(ABDC)$ را درحالتهای زیر حساب کنید:

الف) B بین A و C و D خارج A و C بوده ونسبت فاصله‌های B از A و C برابراست با نسبت فاصله‌های D از A و C ، یعنی:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}$$

۱ــ یادداشت از ح.غیور: نشانهٔ ⟶ ازروی همهٔ پاره خطهای BD،AC ، ... باید حذف‌شود زیرا در $(ABCD)$ فاصلهٔ نقطه‌ها مطرح است.

درحالتی‌که چهارنقطه بریك استقامت باشند:

$$(ABCD)=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

درحالتی‌که نقطه‌ها بریك استقامت نیستند:

$$(ABCD)=\frac{AC}{AD}\cdot\frac{BD}{BC}$$

ب) مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و D مرکز آن است.
پ) ABDC مربع است.
ت) ABCD مربع است.

۳.۵ـ انعکاس[1]

برای نخستین بار ل.ج.مگنوس[2] در ۱۸۳۱ به کشف «تقریباً تبدیل» زیر نایل آمد.
دایرهٔ ثابت ω به مرکز O و به شعاع k و نقطهٔ P متمایز از O مفروض است، بنا به تعریف، منعکس نقطهٔ P نقطهٔ P′ است که برخط OP واقع بوده وداشته باشیم:

$$\overline{OP}\times\overline{OP'}=k^2$$

ازاین تعریف برمی‌آیدکه P نیزمنعکس P′ است. بنابراین، انعکاس هم مانند تقارن مرکزی یا محوری نقطه‌ها را جفت به جفت متناظرمی‌سازد. علاوه برآن، منعکس هرنقطهٔ واقع درداخل دایرهٔ انعکاس ω نقطه‌ای است واقع درخارج آن دایره وبرعکس، بنابراین انعکاس «داخل وخارج دایره» را به یکدیگر تبدیل می‌کند. تنها نقطه‌هایی که مبدل هرکدام برخودش واقع می‌شود نقاط واقع بردایرهٔ انعکاس می‌باشند.

هرگاه P یك مکان هندسی (مثلا یك منحنی) را بپیماید، P′ مکان هندسی‌منعکس آن را خواهد پیمود. به‌ویژه، منعکس هردایرهٔ به مرکز O وبه‌شعاع r دایره‌ای‌است به مرکز O و به شعاع $r'=\frac{k^2}{r}$. هرخط که بر O بگذرد، منعکس آن برخودش واقع است که البته نقطهٔ O را باید از آن استثنا کرد. (باید توجه داشت که در این انطباق مبدل هرنقطه برخودش واقع نیست. به‌علاوه انعکاس یك تبدیل پیوسته نمی‌باشد،

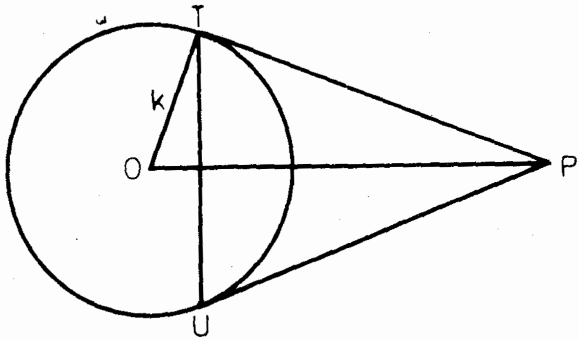
۱ـ توجه خواننده به این نکته جلب می‌شودکه دراغلب آثارفرانسوی تبدیل انعکاس به این ترتیب تعریف می‌شودکه نقطهٔ ω را به نام قطب انعکاس و عدد مثبت یا منفی μ را به نام قوت انعکاس درنظر گرفته و منعکس هرنقطهٔ M نقطهٔ M′ خواهد بود که اولا M′ برامتداد OM باشد و ثانیاً $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=\mu$ باشد. بنابراین تعریف، فقط در حالتی‌که μ مثبت است دایرهٔ انعکاس به مرکز ω و به شعاع $R=\sqrt{\mu}$ مشخص می‌شود که هردایرهٔ گذرندهٔ بردونقطهٔ منعکس برآن عمود می‌باشد.

برخلاف تعریف بالا، مؤلفان کتاب ازهمان ابتدا دایرهٔ انعکاس به مرکز ω وبه‌شعاع k را درنظر گرفته و برمبنای آن انعکاس را تعریف کرده‌اندکه با این ترتیب فقط انعکاس مثبت مورد بحث واقع شده است.

ناگفته نماندکه بجز در آخرین بند (۷.۶) درسایر بندها هندسهٔ مسطحه مورد نظر بوده است.

۲ـ L.J.Magnus

زیرا هرچه P به O نزدیکتر باشد P' به‌فاصلهٔ دورتر قرارخواهد گرفت). مطابق شکل (۳.۵ ، الف) دایرهٔ انعکاس ω و نقطهٔ P را داخل آن در نظرمی گیریم که برO واقع نباشد. درنقطهٔ P وتر TU را عمود بر OP رسم‌می‌کنیم.

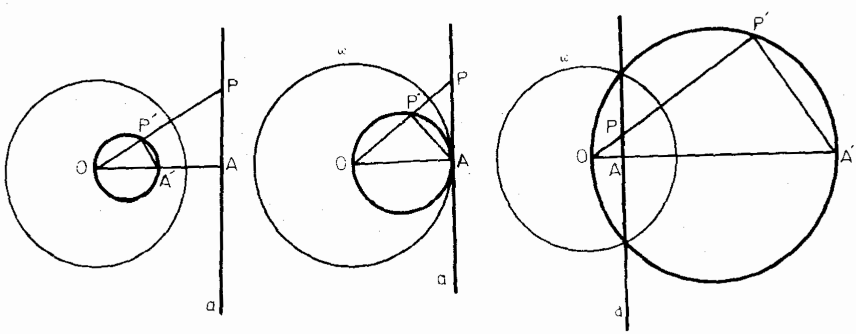


(شکل ۳.۵ ، الف)

مماسهایی‌که در T و U بر ω رسم شوند با خط OP در P' متقاربند. ازتشابه دو مثلث OPT و OTP' برمی‌آید که:

$$\frac{OP}{OT}=\frac{OT}{OP'} \Longrightarrow OP\times OP'=\overline{OT}^{2}=k^{2}$$

بنابراین P' منعکس P است. برعکس ، برای تعیین منعکس P' واقع درخارج ω، دایرهٔ به قطر OP' را رسم می کنیم که با ω در T و U برخورد می‌کند ، P وسط TU یعنی نقطهٔ برخورد TU با OP' منعکس P' می‌باشد.



(شکل ۳.۵ ، ب)

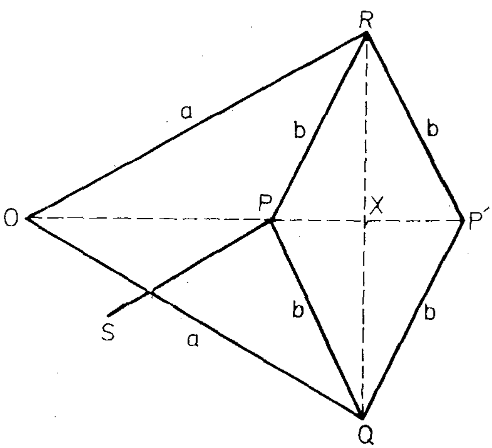
با توجه به شکل (۳.۵ ، ب) نتیجه خواهد شد که منعکس هرخط a که بر O نگذرد دایره‌ای است که بر O می‌گذرد (خود نقطهٔ O از آن استثنا است) وقطری از آن که بر O می‌گذرد بر a عمود است. زیرا اگر A پای عمود وارداز O بر a و P نقطهٔ دلخواهی از a و A' منعکس A باشد ، دایرهٔ به قطر OA' با OP در P' برخورد می‌کند. دومثلث OAP و $OP'A'$ متشابهند وداریم:

$$\frac{OP}{OA}=\frac{OA'}{OP'} \Longrightarrow OP\times OP'=OA\times OA'=k^{2}$$

پس P' منعکس P است . یعنی منعکس هرنقطه از خط a بردایرهٔ به قطر OA' واقع است.

برعکس هرنقطهٔ P' ازدایرهٔ به‌قطر OA' ، به‌غیرازنقطهٔ O ، که‌درنظربگیریم، منعکس آن برخط a قرارخواهد داشت. بنابراین ، منعکس هردایره که بر O می گذرد خطی است عمود برقطری ازآن دایره که بر O می‌گذرد. اگر دودایره در O ونقطهٔ دیگر P' متقاطع باشند منعکسهای آنها دوخط می‌باشند که‌در P' منعکس P بایکدیگر برخورد می‌کنند. دو دایره‌که در O بریکدیگر مماس باشند ، منعکسهای آنها دو خط متوازی است.

ابزاری ساده دراختیار است که به‌کمک آن می‌توان منعکس هرمکان هندسی را رسم کرد. این ابزارکه چندان پیچیده‌تر ازپرگار نیست در ۱۷۸۱ توسط ل.لیپکین[1] کشف و نود سال‌پس‌ازآن توسط ا.پوسلیه[2] ازنواختراع گردید وفعلا به نام عاکس پوسلیه معروف است. این عاکس مطابق شکل (۳.۵ ، پ) ازشش تیغه تشکیل یافته است ؛ دوعدد از این تیغه‌ها به‌طول a بوده در O با یکدیگرودر R و Q به دورأس مقابل لوزی $PQP'R$ که ازچهار تیغهٔ دیگر به طول b تشکیل یافته پیچ شده‌اند که $b<a$ است. تیغه‌ها درنقاط اتصال با یکدیگر به صورت مفصلی لولا گردیده‌اند به گونه‌ای که شکل همواره مسطح است اما اندازه‌های زاویه‌های آن قابل تغییراست. درنقطهٔ O سوزنی تعبیه شده‌که به‌وسیلهٔ آن این نقطه



(شکل ۳.۵ ، پ)

1- L.Lipkin ۲- A.Peaucellier

ثابت می‌گردد. در نقطهٔ P نیز سوزنی بکار رفته که آن را روی شکل مفروض حرکت می‌دهند. در نقطهٔ P' مدادی نصب است که منعکس شکل مفروض را رسم می‌کند؛ زیرا اگرمرکزلوزی را با X بنماییم داریم:

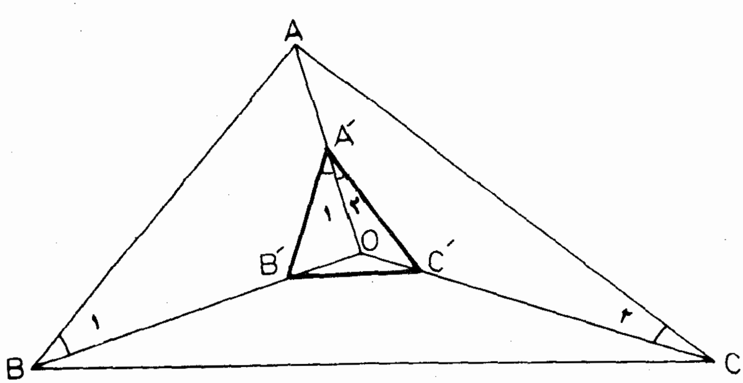
$$\overline{OP}\times\overline{OP'}=(OX-PX)(OX+PX)=\overline{OX}^{2}-\overline{PX}^{2}$$
$$=\overline{OX}^{2}-[\overline{PR}^{2}-\overline{RX}^{2}]=[\overline{OX}^{2}+\overline{RX}^{2}]-PR^{2}$$
$$=\overline{OR}^{2}-\overline{PR}^{2}=a^{2}-b^{2}=\text{مقدار ثابت}$$

این عاکس نقطه‌هایی از شکل را دربرمی‌گیرد که حداکثر فاصلهٔ آنها از O برابر با $a+b$ و حداقل فاصلهٔ آنها از O برابر با $a-b$ باشد.

هرگاه تیغهٔ هفتم SP را مطابق شکل به‌عاکس وصل‌کنیم وعلاوه بر O نقطهٔ S را نیز ثابت بداریم به‌قسمی‌که فاصلهٔ S از O برابر با طول SP باشد، در این صورت P بردایره‌ای حرکت می‌کندکه از O می‌گذرد، پس مکان P' یك‌خط‌مستقیم خواهد بود. بنابراین، عاکس پوسلیه وسیله‌ای است‌که امکان حل مسئلهٔ قدیمی و معروف «رسم‌خط بدون استفاده از خط‌کش» را فراهم ساخته است. (درضمن ملاحظه می‌کنیم‌که استقامت خط رسم‌شده مستقل از خط مستقیم دیگر تحقق یافته است). می‌توان‌گفت عاکس وسیله‌ای است‌که حرکت مستدیر را به‌حرکت مستقیم تبدیل می‌کند.

منعکس یك مثلث معمولاً شکلی است شامل کمانهایی از سه‌دایره که هرکدام از O می‌گذرند. صرف‌نظر از این شکل، اگر A، B، C رأسهای مثلث مفروض و A'، B'، C' منعکسهای‌آنها باشند، مطابق با شکل (۳.۵، ت)، بین نقطهٔ O و مثلثهای ABC و $A'B'C'$ رابطه‌های جالبی برقرار است. برای سادگی شکل، نقطهٔ O را در درون مثلث ABC می‌گیریم. ازتساویهای:

$$OA\times OA'=k^{2}=OB\times OB'$$



(شکل ۳.۵ ، ت)

نتیجه می‌شود که مثلثهای OAB و $OA'B'$ متشابهند وزاویه‌هایی از دو مثلث که باعدد ۱ نموده شده‌اند باهم براپرند. همچنین زاویه‌هایی از دومثلث OAC و $OA'C'$ که با عدد ۲ نموده شده‌اند با هم برابرند. بنابراین زاویهٔ BOC بامجموع زاویه‌های A و A' از دو مثلث ABC و $A'B'C'$ برابر است، زیرا داریم:

$$\widehat{BOC} = \hat{۱} + \widehat{A'B'O} + \hat{۲} + \widehat{A'C'O}$$

$$\widehat{A'B'O} = \widehat{BAO} \text{ و } \widehat{A'C'O} = \widehat{CAO}$$

$$\widehat{BOC} = \hat{۱} + \hat{۲} + \widehat{BAO} + \widehat{CAO} = \widehat{B'A'C'} + \widehat{BAC}$$

همچنین داریم:

$$\widehat{COA} = \hat{B} + \hat{B}'$$

بنابراین با معلوم بودن مثلث ABC می‌توانیم نقطهٔ O را به‌قسمی تعیین کنیم که اندازه‌های زاویه‌های A' و B' از مثلث $A'B'C'$ مقادیر مشخص باشند. یا اینکه نقطهٔ O که معین گردیدمی‌توان مقدار k را تغییر داد و درنتیجه‌ابعادمثلث $A'B'C'$ را نیز تغییر داد (تمرین ۷ را ملاحظه کنید). هرگاه O درخارج مثلث ABC واقع‌باشد، روش اثبات باتغییراتی جزئی به‌همان گونه خواهد بود. همچنین می‌توان نقطه‌های A، B، C را بریك خط انتخاب کرد.

ازآنچه‌گذشت قضیهٔ زیر محقق شده است:

قضیهٔ ۱،۳،۵- با انتخاب دایرهٔانعکاس مناسب، می‌توان منعکسهای سه‌نقطهٔ متمایز A، B، C را چنان بدست‌آوردکه نقطه‌های حاصل رأسهای مثلث $A'B'C'$ باشند که متساوی بامثلث مفروض باشد.

تمرینها

۱- منعکس مربع محیطی دایرهٔ انعکاس را رسم کنید.

۲- نقطهٔ O چگونه انتخاب شود تا منعکس مثلث مفروض عبارت باشد از سه دایرهٔ متساوی؟

۳- دایرهٔ انعکاس ω به‌مرکز O ونقطهٔ‌دلخواه P متمایز از O مفروض‌است. در دوحالت زیر منعکس نقطهٔ P را بااستفادهٔ فقط از پرگار، بدون استفاده ازخط کش، بدست‌آورید[1]:

۱- با استفاده از ویژگیهای انعکاس می‌توان ثابت‌کردکه همهٔ ترسیمات هندسی را می‌شود با استفادهٔ فقط ازپرگار انجام داد.

الف) $OP > \frac{k}{۲}$

ب) $\frac{k}{۲n} < OP \leqslant \frac{k}{۲(n-۱)}$

۴ـ در هریك از حالتهای زیر چه رابطه‌ای بین مثلث ABC و منعکس آن وجود دارد:

الف) O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است.
ب) O مرکز ارتفاعی مثلث ABC است.
پ) O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC است.

۵ـ در صفحهٔ محورهای مختصات، دایرهٔ انعکاس به معادلهٔ $x^۲+y^۲=k^۲$ و نقطهٔ (x و y) در درون آن مفروض است. مختصات منعکس این نقطه را بدست آورید.

۶ـ دومثلث ABC و DEF داده شده است. با ترسیمی اجمالی مرکز O و شعاع k از دایرهٔ انعکاس را به قسمی تعیین کنید که اگر A'، B'، C' منعکسهای A، B، C باشند، مثلث $A'B'C'$ بامثلث DEF برابر باشد.

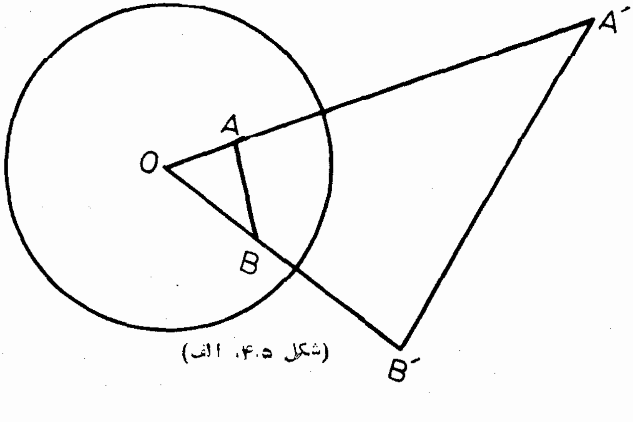
۴.۵ـ انعکاس در صفحه

دیدیم که اگر دایره‌ای بر O، مرکز دایرهٔ انعکاس، بگذرد (و این نقطهٔ O از آن استثناء باشد)، منعکس آن یك‌خط است، ومنعکس هردایرهٔ به‌مرکز O دایرهٔ دیگری هم‌مرکز با آن می‌باشد. اکنون به‌بررسی این مسئله می‌پردازیم که اگر دایره به‌وضع دیگر باشد منعکس آن چگونه خواهد بود. اما پیش از آن باید این موضوع را بررسی کنیم که فاصلهٔ بین دونقطه پس از انعکاس چگونه تغییر می‌کند.

قضیهٔ ۱،۴.۵ـ هرگاه O و k مرکز و شعاع دایرهٔ انعکاس و A'، B' منعکسهای نقطه‌های مفروض A، B باشند، بین فاصله‌های آنها رابطهٔ زیر برقرار است:

$$A'B' = \frac{k^۲ . AB}{OA . OB}$$

زیرا مطابق باشکل (۴.۵،الف) دومثلث OAB و $OB'A'$ باهم متشابهندوداریم:



(شکل ۴.۵، الف)

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OA'}{OB}=\frac{OA.OA'}{OA.OB}=\frac{k^2}{OA.OB}$$

از این ویژگی برمی‌آید که انعکاس نسبت ناهمساز چهار نقطه را محفوظ می‌دارد، چنانکه در قضیهٔ زیر بیان می‌شود:

قضیهٔ ۲،۴.۵- هرگاه A'، B'، C'، D' به ترتیب منعکسهای نقطه‌های A، B، C، D باشند داریم:

$$(A'B'C'D')=(ABCD)$$

زیرا داریم:

$$(A'B'C'D')=\frac{\overline{A'C'}\times\overline{B'D'}}{\overline{A'D'}\times\overline{B'C'}}=\frac{\dfrac{k^2.\overline{AC}}{\overline{OA}.\overline{OC}}\times\dfrac{k^2.\overline{BD}}{\overline{OB}.\overline{OD}}}{\dfrac{k^2.\overline{AD}}{\overline{OA}.\overline{OD}}\times\dfrac{k^2.\overline{BC}}{\overline{OB}.\overline{OC}}}$$

$$=\frac{\overline{AC}.\overline{BD}}{\overline{AD}.\overline{BC}}=(ABCD)$$

از این ویژگی نیز برمی‌آید که درانعکاس، ویژگی جداسازی بین دو جفت نقطه محفوظ می‌ماند:

قضیهٔ ۳،۴.۵- هرگاه A'، B'، C'، D' بهترتیب منعکسهای نقاط A، B، C، D باشند و اگر داشته باشیم $AC \,||\, BD$ خواهیم داشت: $A'C' \,||\, B'D'$

زیرا با توجه به‌قضیه‌های (۱،۲.۵) و (۲،۴.۵) از رابطهٔ $AC \,||\, BD$ نتیجه می‌شود که:

$$(A'D'B'C')+(A'B'D'C')=(ADBC)+(ABDC)=1$$

بنابراین داریم: $A'C' \,||\, B'D'$

قبلاً در پایان بند ۲.۵ ملاحظه کردیم که هر دایره را می‌توان متشکل از سه نقطهٔ A، B، C و همهٔ نقطه‌های X دانست که در یکی از رابطه‌های $AX \,||\, BC$ یا $BX \,||\, CA$ یا $CX \,||\, AB$ صدق می‌کنند. از این خاصیت نتیجه می‌شود که منعکس این دایره متشکل است از سه نقطهٔ A'، B'، C' وهمهٔ نقطه‌های X' که در یکی از رابطه‌های $A'X' \,||\, B'C'$ یا $B'X' \,||\, C'A'$ یا $C'X' \,||\, A'B'$ صدق می‌کنند، پس این منعکس، دایره یا خطی است که بر سه نقطهٔ A'، B'، C' می‌گذرد و البته فقط وقتی خط است که دایرهٔ مفروض بر O بگذرد. بنابراین قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم:

قضیهٔ ۴،۴.۵- منعکس هردایره‌که بر O نگذرد دایرهٔ دیگری‌است‌که بر O نمی‌گذرد.

تعریف دایره برحسب جفتهای جداساز نقاط مستلزم آن است که خط را حالت‌خاص دایره بدانیم، یعنی خط را دایره‌ای بدانیم که شعاع آن بینهایت بزرگ است. از اینرو به‌صفحهٔ اقلیدسی یك‌نقطهٔ منحصر به‌فرد P_∞ را اضافه‌می‌کنیم که منعکس نقطهٔ O مرکز دایرهٔ انعکاس می‌باشد، و یك‌چنین‌صفحه‌را صفحهٔ انعکاسی می‌نامیم. بنا براین دایرهٔ انعکاس به‌مرکز O هردایرهٔ‌گذرنده بر O را به‌یك خط تبدیل می‌کند، که خط را دایره‌ای می‌دانیم‌که بر P_∞ می‌گذرد. همچنین منعکسهای دودایره‌که در O برهم مماس باشند دوخط متوازی است،که این دو خط متوازی را می‌توانیم دو دایره بگیریم‌که در P_∞ برهم مماسند. با توجه به‌این قراردادها می‌توانیم نتایج بند(۳.۵) و قضیهٔ (۴،۴.۵) را یکجا به‌صورت قضیهٔ زیر درصفحهٔ انعکاسی بیان‌کنیم:

قضیهٔ ۵،۴.۵- منعکس هردایره یك‌دایره است.

اضافه‌کردن نقطهٔ P_∞ به‌صفحهٔ اقلیدسی این‌امکان را فراهم می‌آورد‌که انعکاس‌را تبدیلی یك به یك بدانیم‌که هرنقطه از صفحهٔ انعکاسی را با نقطهٔ دیگری از آن متناظر می‌سازد: هرنقطه (بدون استثنـاء) از صفحهٔ انعکاسی یك‌نقطهٔ منعکس دارد و هرنقطه از صفحهٔ انعکاسی منعکس نقطهٔ دیگری از آن صفحه است.

دودایره را متقاطع، مماس یا جدا از هم می‌نامیم برحسب آنکه تعداد نقطه‌های مشترك آنها ۲، ۱، یا ۰ باشد؛ دو دایره‌کـه هروضعی از این سه‌حالت را داشته باشند منعکسهای آنها نیز همان وضع را خواهند داشت‌که از دو دایرهٔ مماس برهم ممکن‌است یکی ازآنها به‌صورت خط مماس بردایرهٔ دیگریا اینکه هردوبه‌صورت‌دوخط‌متوازی باشند.

تمرینها

۱ــ دایرهٔ انعکاس ω و نقطهٔ متغیر P را واقـع برآن ونقطهٔ دلخواه A را در خارج آن در نظر بگیرید، ثابت کنید‌که نسبت $\frac{PA}{PA'}$ مقدار ثابت است. برعکس، اگردو نقطهٔ B و C بر AA' واقع‌باشندکه یکی ازآنها بین A و A' و دیگری در خارج AA' باشد و نسبتهای فاصله‌های آنها از A و A' با هم برابر و مخالف با یك باشند، ثابت کنید که دایرهٔ به‌قطر BC مکان هندسی نقطه‌هایی است‌که نسبت فاصله‌های آنها از A و A' باآن نسبتها برابر است. (این مکان هندسی را دایرهٔآپولونیوس می‌نامند).

۲ــ بردایـرهٔ انعکاس ω نقطهٔ A و قطر BC ازآن را درنظر می‌گیریم. قطر عمود بر BC با خطهـای AB و AC در P و P' برخورد می‌کند. ثابت کنیدکـه P' منعکس P است.

۳ــ ثابت کنید که بردو نقطهٔ واقع در داخل یك دایــره بیش ازدو دایره نمی‌توان رسم کرد که بر دایرهٔ مفروض مماس باشند.

۴ــ سه‌نقطهٔ جدا از هم به فاصله‌های a ، b ، c از یکدیگر واقعند (ممکن است بریك خط واقع باشند یا اینکه مثلثی را تشکیل دهند). به‌مرکزهای این سه‌نقطه سه‌دایرهٔ دو به‌دو برهم مماس می‌توان رسم کرد که شعاعهای آنها $s-a$ ، $s-b$ ، $s-c$ می‌باشد که s نصف مجموع $a+b+c$ است. ثابت کنید که دو دایرهٔ مماس براین هرسه دایره وجود دارد که باهم نقطهٔ مشترك ندارند. این دو دایره رادایره‌های سدی (Soddy) می‌نامند.

۵ــ بااستفاده از انعکاس، اثبات بسیار سادهٔ قضیهٔ (۲،۱.۵) را بیان کنید.

۶ــ دایرهٔ انعکاس ω به‌مرکز O ودایرهٔ a گذرنده بر O مفروض است. ثابت کنید که خط منعکس دایرهٔ a عبارت است ازمحور اصلی دودایرهٔ ω و a.

۷ــ بافرض اینکه هرخط را می‌توان حالت خاص دایره‌دانست، آیا دوخط‌متقاطع را می‌توان به‌دو دایرهٔ مماس یا دو دایرهٔ متقاطع تبدیل کرد؟ جواب را برحسب تعداد نقطه‌های مشترك دوخط مفروض تفسیر کنید

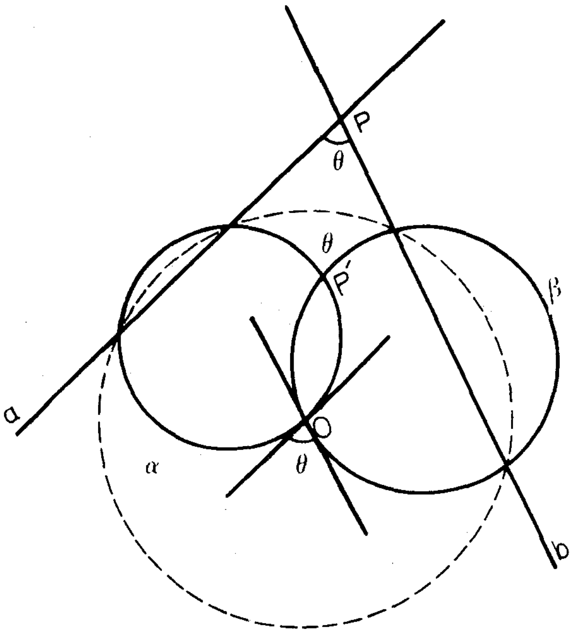
۵.۵ــ دایره‌های عمود برهم

با مطرح ساختن دوایر، مطرح‌شدن زوایا خود به‌خود به‌میان می‌آید. زاویهٔ بین دو دایرهٔ متقاطع همان زاویه‌ای است که مماسهای مرسوم بــرآن دو دایره در یکی از نقاط تقاطعشان با یکدیگر می‌سازند؛ زیرا به‌علت تقارن نسبت به‌خط‌المرکزین، زاویه‌های دو دایره در دو نقطهٔ تقاطعشان با یکدیگر برابرند.

برای بررسی اینکه آیا در انعکاس نسبت بــه‌یك دایرهٔ به مرکز O ، زوایا تغییر می‌کنند یا نه، دوخط a و b در نظر می‌گیریم که در P باهم برخورد کرده وبایکدیگر زاویهٔ θ می‌سازند، شکل (۵.۵،الف) و همچنین شکل (۳.۵،ب) که پیش از این بررسی شد. در انعکاس نسبت به‌دایرهٔ به‌مرکز O خط a به‌دایرهٔ α تبدیل می‌شود که بر O برمی‌گذرد و مماس براین دایره در O با a موازی است. خط b نیز به‌دایرهٔ β تبدیل می‌شود که بر O می‌گذرد ومماس برآن در O با b موازی است. زاویهٔ بین دو مماس که با θ برابر است بنا به‌تعریف زاویــهٔ بین دو دایرهٔ α و β می‌باشد. دو دایرهٔ α و β در نقطهٔ دیگر P' که منعکس نقطهٔ P است نیز متقاطعند وزاویهٔ بین دو دایره در P' با زاویهٔ بین‌آنها در O برابر بوده وهمان θ است.

هرگاه a و b در O برخوردکرده باشند، منعکس هرکدام برخودش واقع‌است وتغییرناپذیری θ بازهم ثابت است.

هرگاه a و b بردایره‌هایی‌که از P می‌گذرند مماس باشند ، این دایره‌ها پس



(شکل ۵،۵ ، الف)

از انعکاس به مماسهای بر α و β در P' تبدیل می‌شوند. بنابراین قضیهٔ زیر ثابت شده است:

قضیهٔ ۱،۵.۵- اگر دو دایره به‌زاویهٔ θ با یکدیگر برخورد کرده باشند، منعکسهای آنها نیز به‌زاویهٔ θ با یکدیگر برخورد می‌کنند.

اگر دو دایره در نقطهٔ برخوردشان بایکدیگر زاویهٔ قائمه بسازند، یعنی مماسهای بردو دایره‌درنقطهٔ برخوردآنها برهم عمودباشند، می‌گوییم که آن دو دایره‌برهم‌عمودند. ازاین‌رو حالت ویژهٔ قضیهٔ (۱،۵.۵) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

قضیهٔ ۲،۵.۵- منعکسهای دودایرهٔ عمود برهم، دودایرهٔ عمود برهم می‌باشند.

هرگاه در شکل (۱.۲،ب) انعکاسی در نظر بگیریم که O قطب‌آن بر P واقع بوده و A و A' منعکسهای یکدیگر باشند، در این‌صورت داریم:

$$k^2 = OA \times OA' = OB \times OB' = \overline{OT}^2$$

بنابراین هرقاطع، مانند OBB' ، که بر O بگذرد دایره را در دونقطهٔ منعکس یکدیگر قطع می‌کند، و به‌علاوه نقطهٔ تماس هـر مماسی‌که از O بردایره رسم شود ، مانند T نقطهٔ تماس OT ، منعکس خودش می‌باشد که روی دایرهٔ انعکاس ω واقع است. بنابراین:

قضیهٔ ۳،۵.۵- هر دایره که بردو نقطهٔ متمایز منعکس یکدیگر بگذرد منعکس خودش می‌باشد و بردایرهٔ انعکاس ω عمود است.

برعکس، هردایره که بردایرهٔ ω عمود باشد منعکس خودش است. زیرا اگر آن دایره در T با ω برخورد داشته و A نقطهٔ دلخواهی از آن باشد، خط OA در نقطهٔ دیگر A' با آن برخورد می‌کند به‌گونه‌ای که داریم:

$$OA \times OA' = \overline{OT}^2 = k^2$$

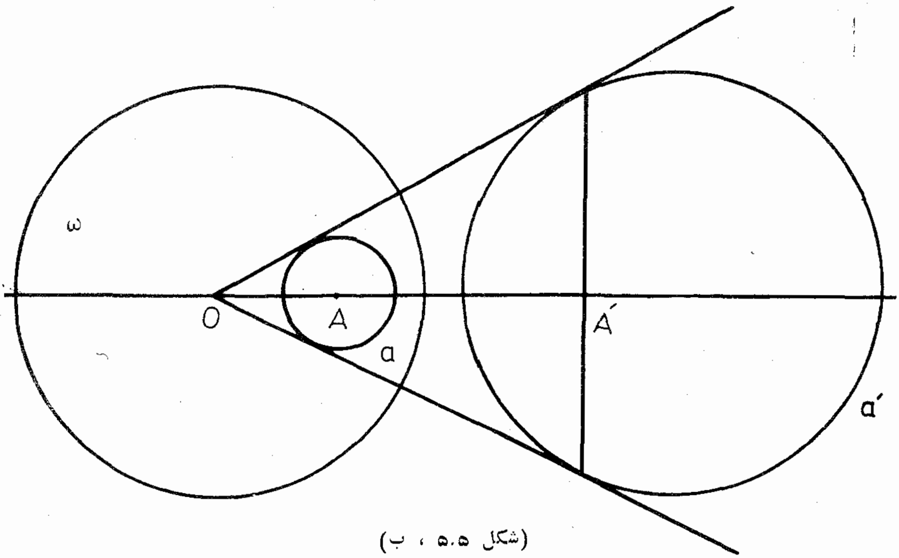
همچنین، هرگاه دو دایرهٔ عمود بر ω بایکدیگر برخورد داشته باشند، نقطه‌های مشترك آنها منعکس یکدیگرند. زیرا اگر A نقطهٔ‌مشترك این‌دودایره باشد، خط OA باید هریك از دو دایره را در A' منعکس A تلاقی‌کند، پس هردو دایره در A' مشترکند.

ازآنچه‌گذشت می‌توانیم انعکاس را برحسب دایره‌های عمود برهم به‌صورت زیر بیان‌کنیم:

با انتخاب دایرهٔ ω به‌عنوان دایرهٔ انعکاس، منعکس هرنقطهٔ واقع بر ω برخودش واقع است و منعکس هرنقطهٔ P غیر واقع بر ω عبارتست از نقطهٔ دیگر برخورد دودایره که بر P می‌گذرند وبر ω عمودند.

هرگاه در این تعریف خطی را جانشین دایرهٔ ω سازیم، براساس تعریف بالا نتیجه می‌گیریم‌که تقارن محوری را می‌توان حالت خاص انعکاس دانست.

بنابرتعریف گفته شده، هر دایرهٔ a ودونقطهٔ منعکس یکدیگر (نسبت به‌دایرهٔ a) درانعکاس‌نسبت به‌دایرهٔ ω به‌ترتیب به‌یك دایرهٔ a' ودو نقطهٔ منعکس یکدیگر (نسبت به‌دایرهٔ a') تبدیل می‌شوند. اکنون به‌مرحله‌ای رسیده‌ایم‌که با استفادهٔ مشترك از صفحهٔ اقلیدسی وصفحهٔ انعکاسی می‌توانیم این‌موضوع‌را بررسی‌کنیم که منعکس نقطهٔ A مرکز دایرهٔ a به‌چه وضعی درمی‌آید. در وهلهٔ اول این تصور پیش می‌آید که منعکس A عبارت باشد ازمرکزدایرهٔ a' ! آیا به‌همین سادگی خواهد بود؟ (درصورتی‌که می‌دانیم اگر a بر ω واقع شود این تصور درست نمی‌باشد). امادایرهٔ a و دو نقطهٔ A و P_∞ (که نسبت به a منعکس یکدیگرند) در انعکاس نسبت به‌دایرهٔ ω به ترتیب به‌دایرهٔ a' ودونقطهٔ A' و O (که نسبت به a' منعکس یکدیگرند) تبدیل می‌شوند. بنابراین مطابق باشکل (۵.۵،ب)؛مرکز دایرهٔ a' منعکس نقطهٔ A (نسبت به‌دایرهٔ ω) نمی‌باشد، بلکه A'، یعنی منعکس A نسبت به ω، عبارتست از منعکس O نسبت به a'.



(شکل ۵.۵ ، ب)

تمرینها

۱ــ دایرهٔ ω ونقطهٔ A در بیرون آن مفروض است. به‌مرکز A دایره‌ای رسم کنید که بر ω عمود باشد.

۲ــ دایرهٔ ω و دو نقطهٔ P و Q که منعکس یکدیگر نمی‌باشند مفروض است. بر P و Q دایره‌ای بگذرانید که بر ω عمود باشد.

۳ــ نقطهٔ P ودودایرهٔ ω_1 و ω_2 که بر P نمی‌گذرند مفروض است. دایره‌ای رسم کنید که بر P بگذرد و برهریك از دو دایرهٔ ω_1 و ω_2 عمود باشد.

۴ــ نسبت به دایـرهٔ انعکاس ω به‌مرکز O وبه‌شعاع k دایرهٔ a به‌دایرهٔ a' تبدیل شده است. بین قوتهای O نسبت به‌دایره‌های a و a' چه‌رابطه برقرار است؟

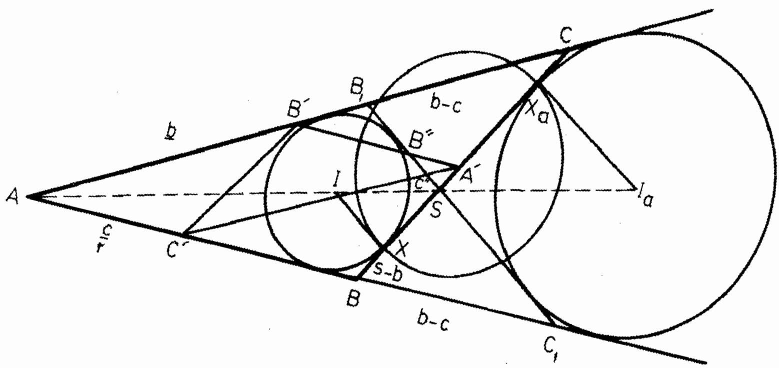
۵ــ دایرهٔدلخواه a ، نقطهٔ P واقع بر a ونقطهٔ O غیرواقع بر a داده‌شده است. ثابت کنید که‌فقط یك‌دایره وجود داردکه بر O بگذرد وبر a در P مماس‌باشد.

۶.۵ــ قضیهٔ فوئرباخ

در پایان بند (۸.۱) به‌اختصار به‌قضیهٔ فوئرباخ اشاره شده و اثبات آن به‌این‌بخش موکول شده بود؛ بااستفاده ازانعکاس حداقل به سه طریق می‌توان این‌قضیه را ثابت‌کرد، که یکی ازآنها در زیر، پس ازبیان صورت قضیه، ارائه می‌شود.

قضیهٔ ۱،۶.۵ــ دایرهٔ نه‌نقطهٔ هرمثلث برهریك ازدایره‌های محاطی داخلی وخارجی آن مماس است.

در شکل (۶.۵، الف) مثلث ABC، مثلث میانه‌ای آن $A'B'C'$، دایرهٔ محاطی داخلی آن به‌مرکز I که در X بر BC مماس است، دایرهٔ محاطی خارجی داخل زاویهٔ A به‌مرکز I_a کـه در X_a بر BC مماس است. و بالاخره B_1C_1 مماس مشترك داخلی دیگر این دو دایره مشاهده می‌شود. دایرهٔ ω به‌قطر XX_a نیز رسم شده



(شکل ۶.۵ ، الف)

است و B_1C_1 با BC، $A'B'$، $A'C'$ به‌ترتیب در S، B''، C'' برخورد کرده‌است. دایرهٔ ω برهریك ازدایره‌های به‌مرکزهای I و I_a عمود است، پس هریك از دایره‌ها در انعکاس به‌دایرهٔ ω منعکس خودش می‌باشد. اکنون ثابت خواهیم کرد کـه در همین انعکاس خط B_1C_1 منعکس دایرهٔ نه‌نقطه است. با فرض اینکه s نصف محیط مثلث ABC باشد، بنا به‌قضیهٔ (۱،۴.۱) داریم.

$$BX = X_aC = s - b$$

و ازآنجا نتیجه می‌شود که A' وسط BC مرکز دایرهٔ ω است وطول قطر این‌دایره برابر است با:

$$XX_a = a - ۲(s - b) = b - c$$

(نامگذاری رأسهای مثلث را به‌گونه‌ای درنظر می‌گیریم که این مقدار مثبت باشد). چون دایرهٔ نه نقطه بر A' مرکزدایرهٔ ω می‌گذرد پس منعکس‌آن نسبت به این دایره خطی است مستقیم. ثابت می‌کنیم که‌این‌خط بر B'' و C'' (ودرنتیجه بر B_1 و C_1) می‌گذرد، یعنی ثابت می‌کنیم که B'' و C'' منعکسهای نقطه‌های B' و C' می‌باشند.

نقطهٔ S برخط II_a یعنی برنیمساز زاویهٔ A_1 واقـع است، پس بنا به قضیهٔ

(۳،۳.۱) ضلع BC را به نسبت دوضلع دیگرمثلث ABC تقسیم می کند وداریم:

$$CS=\frac{ab}{b+c} \quad \text{و} \quad SB=\frac{ac}{b+c}$$

با محاسبهٔ نصف تفاضل این دومقدارداریم:

$$SA'=\frac{a(b-c)}{۲(b+c)}$$

همچنین می‌دانیم که:

$$BC_۱=AC_۱-AB=AC-AB=b-c$$
$$CB_۱=BC_۱=b-c$$

مثلثهای $SA'B''$ و $SBC_۱$ وهمچنین مثلثهای $SA'C''$ و $SCB_۱$ باهم‌متشابهند ونتیجه می‌شود:

$$\frac{A'B''}{b-c}=\frac{A'B''}{BC_۱}=\frac{SA'}{SB}=\frac{b-c}{۲c}$$
$$\frac{A'C''}{b-c}=\frac{A'C''}{CB_۱}=\frac{SA'}{SC}=\frac{b-c}{۲b}$$
$$A'B'\times A'B''=\frac{c}{۲}\cdot\frac{(b-c)^۲}{۲c}=\left(\frac{b-c}{۲}\right)^۲$$
$$A'C'\times A'C''=\frac{b}{۲}\cdot\frac{(b-c)^۲}{۲b}=\left(\frac{b-c}{۲}\right)^۲$$

چون $\frac{b-c}{۲}$ شعاع دایرهٔ ω است پس نسبت به دایرهٔ ω نقطه‌های B'' و C'' به ترتیب منعکسهای نقطه‌های B' و C' می‌باشند. بنا براین در انعکاس نسبت به دایرهٔ ω هریك ازدایره‌های محاطی به مرکزهای I و I_a منعکس خودش می‌باشد وخط $B_۱C_۱$ منعکس‌دایرهٔ نه نقطه است، وچون‌این‌خط بردودایرهٔ مزبورمماس‌است‌پس دایرهٔنه‌نقطه‌نیز بردو دایرهٔ مزبورمماس می‌باشد. با روش مشابه ثابت می‌شودکه دایرهٔ نه نقطه برهریك ازدودایرهٔ‌محاطی خارجی دیگرمثلث نیزمماس‌است.

دایرهٔ نه نقطه برنقطه‌های D ، E ، F (شکل ۴.۲ ، ب) می‌گذردکه این نقطه‌ها عبارتند از نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل چهارگـوشهٔ $ABCH$ (پایان بند ۴.۲ را ملاحظه‌کنید). به عبارت دیگر، چهارمثلث ABC ، BCH ، CAH و ABH دارای یك دایرهٔ نه‌نقطه‌انداماداирه‌های‌محاطی آنها متفاوتند. بنا براین‌چهار گوشهٔ ارتفاعی‌مجموعهٔ شانزده دایره را مشخص می کندکه همه بردایرهٔ DEF مماس می‌باشند.

تمرینها

۱ـ با توجه به شکل (۶.۵، الف) ثابت کنید که زاویهٔ B_1C_1 با BC برابر است با $B-C$.

۲ـ با توجه به شکل (۶.۵، الف) اگر D پای ارتفاع نظیر رأس A از مثلث ABC باشد، ثابت کنید که نسبت به دایرهٔ ω نقطه‌های S و D منعکسهای یکدیگرند.

۷.۵ـ دسته‌های دایره‌ها

پیش‌ازاین در بند (۳.۲) یادآوری کرده‌ایم که یك‌دسته دوایرشامل دودایرهٔ αوβ، که‌آن را دسته دوایر $\alpha\beta$ می‌نامیم، عبارتست ازمجموعهٔ دایره‌هایی که محور اصلی‌هردو عدد ازآنها‌همان محور اصلی دو دایرهٔ α و β باشد. بنابراین هردسته دوایر یك محور اصلی مشترك دارد وهرنقطهٔ P متعلق به این محوراصلی نسبت به همهٔ دایره‌های‌آن‌دسته دارای یك قوت است. هرگاه این قوت مقدارمثبت باشد، جذرآن طول مماسی را معین می‌کندکه ازنقطهٔ P برهردایرهٔ دلخواه ازدسته دوایررسم می‌شود واین مماسها عبارتند ازشعاعهای دایره‌ای به مرکز P که برهمهٔ دایره‌های‌آن دسته دوایرعمود است. باتوجه به اینکه نقطهٔ P برمحور اصلی به دلخواه انتخاب شده است پس دایره‌های بی‌شمار می‌توان رسم‌کردکه همه بردایره‌های یك دسته دوایرعمود می‌باشند؛ این دایره‌ها نیز یك دسته دوایر تشکیل می‌دهندکه اگر γ و δ دودایرهٔ غیرمشخص ازآن باشندآن را با $\gamma\delta$ مشخص می‌کنیم دودسته دوایر $\alpha\beta$ و $\gamma\delta$ چنانندکه هریك ازدایره‌های هرکدام از آنها برهمهٔ دایره‌های دیگری عمود است و به علاوه، محور اصلی هردسته عبارتست از خط‌المرکزین دستهٔ دیگر: پس این دوخط، که هرکدام خط‌المرکزین یك دسته دوایرو محوراصلی دستهٔ دیگراست برهم عمودند. هرگاه به‌همان‌گونه‌که دربند (۳.۲) گفته‌شده است این دو خط عمود برهم را محورهای مختصات بگیریم، در این صورت معادله‌های دودسته دوایرعبارت خواهند بود از:

$$x^2+y^2-2ax+c=0 \quad \text{و} \quad x^2+y^2-2by-c=0$$

که درآنها c مقدارثابت اما a و b مقدارهای متغیرند. اگر $c>0$ باشد، دستهٔ نخست دایره‌های بدون نقطه‌های مشترك را دربردارد، که در شکل (۳.۲، الف) نمونهٔ آن ملاحظه شده است، درحالی‌که دایره‌های دستهٔ دیگردر دو نقطهٔ حد به مختصات $(0\ ,\ \pm\sqrt{c})$ مشترکند، که این دونقطه را می‌توان دودایرهٔ به شعاع صفرمتعلق به‌دستهٔ نخست دانست که معادله‌های‌آنها عبارتند از:

$$(x-\sqrt{c})^2+y^2=0 \quad \text{و} \quad (x+\sqrt{c})^2+y^2=0$$

اگر $c < 0$ باشد پس از دوران حول محورهای مختصات به زاویهٔ ۹۰ درجه بازهم همان وضع بالا را خواهیم داشت؛ به‌عبارت دیگردایره‌های دستهٔ نخست همه در دو نقطهٔ حد مشترکند و دایره‌های دستهٔ دیگرنقطهٔ مشترك ندارند. اگر $c = 0$ باشد دو دسته دایره‌های متماس عمود برهم داریم، یعنی همهٔ دایره‌های هردسته در مبدأ مختصات به‌ترتیب بریکی از دومحورمماس می‌باشند.

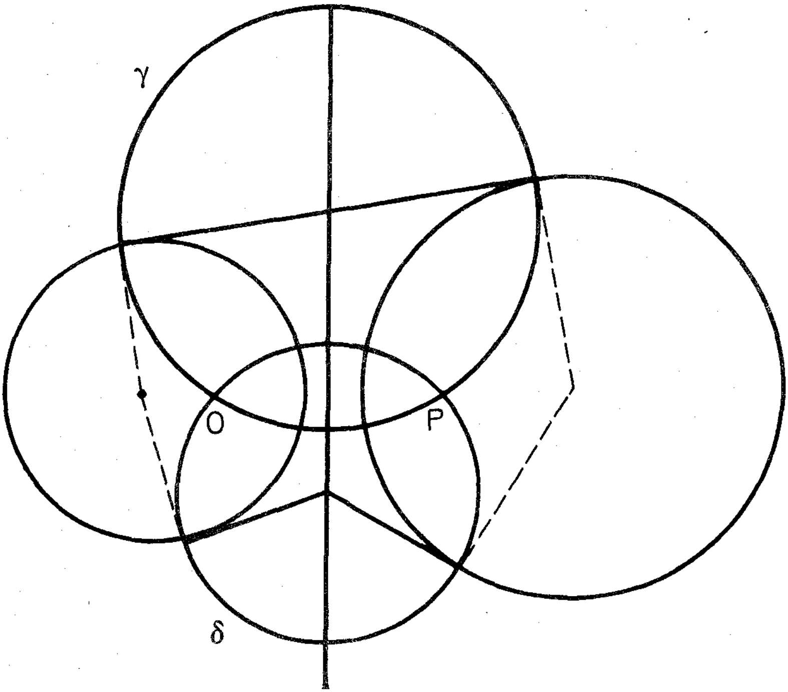
ترتیب دایره‌های هردسته دوایر برحسب ترتیب نقاط تلاقی آنها با خطی که برنقاط حد می‌گذرد مشخص می‌شود وازاین راه معلوم شود که مثلا ازهرسه دایره کدام دایره بین دودایرهٔ دیگرواقع است.

با توجه به عکس مطلب، می‌توان هردسته دوایر $\alpha\beta$ را به عنوان مجموعه دایره‌هایی‌که همه بردودایرهٔ γ و δ ازدسته دوایر $\gamma\delta$ عمودند تعریف کرد، و همچنین دسته دوایر $\gamma\delta$ را مجموعهٔ دایره‌هایی‌که همه بردودایرهٔ متمایز α و β عمود می‌باشند تعریف نمود. به عبارت دیگر، دسته دوایر $\alpha\beta$ شامل همهٔ دایره‌های عمود بردودایرهٔ متمایزعمود بر α و β می‌باشد.

هرگاه دودایرهٔ γ و δ دردونقطهٔ O و P متقاطع باشند،انعکاس نسبت به‌هردایرهٔ به مرکز O دو خط بدست می‌دهد که بر P' منعکس نقطهٔ P می‌گذرند. دایره‌های عمود براین خط دسته دوایری هم مرکزبه مرکز P' تشکیل می‌دهند، ومجموعهٔ‌قطرهای این‌دایره‌ها منعکسهای دسته دوایر $\gamma\delta$ می‌باشند. هرگاه دودایرهٔ بدون نقطهٔ مشترك‌درنظر گیریم بازهم همین نتیجه را خواهیم داشت. به سادگی می‌توانیم دودایرهٔ متقاطع γوδ را چنان رسم کنیم که هرکدام بردایره‌های α و β عمود باشند، یعنی دودایره چنان‌رسم کنیم که مرکزهای آنها برمحوراصلی دودایرهٔ α و β واقع باشد، مطابق شکل (۷.۵، الف)، ازاینروقضیهٔ زیرنتیجه می‌شود:

قضیهٔ ۱،۷.۵- به وسیلهٔ انعکاس می‌توان دو دایرهٔ غیرمشخص غیر متقاطع را به دو دایرهٔ هم مرکز تبدیل کرد.

برای چنین تبدیلی‌کافی است‌که مرکزدایرهٔ انعکاس یکی از نقطه‌های حد O یا P ازدسته دوایرغیرمتقاطع $\alpha\beta$ انتخاب شود. هرگاه α داخل β واقع باشد، هردایرهٔ انعکاس به‌مرکز O (یا P) دایرهٔ α را به‌بزرگترین(یا کوچکترین) دایره‌های هم‌مرکز تبدیل‌خواهدکرد. هرگاه‌مرکزدایرهٔ انعکاس‌راثابت‌نگاهداشته اما شعاع آن را تغییردهیم، که درنتیجه یك جفت دیگر دایره‌های هم مرکز را جانشین جفت دایره‌های هم مرکزخواهیم ساخت‌که نسبت بین شعاعهای آنها محفوظ خواهد ماند و در نتیجه این تبدیل معادل است با حاصل ترکیب تبدیل اول بایك تجانس. همچنین، هردایرهٔ انعکاس به مرکز P یك



(شکل ۷.۵، الف)

جفت دایرهٔ هم مرکزرا به جفت دیگردایره‌های هم مرکزتبدیل خواهدکردکه شعاعهای آنها برنسبت عکس خواهند بود.

هرگاه α و ω دودایرهٔ دلخواه متمایز باشند، منعکس α نسبت به ω به دستهٔ دوایر $\alpha\omega$ تعلق خواهد داشت: هردو دایرهٔ دلخواهی‌که برهریك از دودایرهٔ α و ω عمود باشند برمنعکسهای آنها نیزعمود خواهند بود. اگر منعکس α را β بنامیم، دایرهٔ ω را دایرهٔ «نیمساز» دو دایرهٔ α و β می‌نامیم (در این مورد اصطلاح «دایرهٔ متشابه انعکاسی» نیز بکار می‌رود اما اصطلاح «نیمساز» مناسبتر است)[1]. دایرهٔ β به دستهٔ دوایر

۱ــ یادداشت از ح.غیور: اصطلاح نیمسازدراینجا به این مناسبت است‌که اگر α و β و ω جزء یك دسته دایره باشند و α و β نسبت به ω منعکس یکدیگرباشند، درحالتی که α و β متقاطعند به سادگی ثابت می‌شودکه دایرهٔ ω نیمسازدودایرهٔ α و β است.

اگرسه منحنی C_1 و C_2 و C_3 ازیك نقطه بگذرند ومماس مرسوم دراین نقطه بر C_1 نیمساززاویهٔ بین مماسهای مرسوم در این نقطه بر C_2 و C_3 باشد، منحنی C_1 نیمساز دومنحنی C_2 و C_3 درنقطهٔ تقاطع آنها نامیده می‌شود. حال اگرمنحنیها دایره باشند و یك دایره درهردو نقطهٔ تقاطع نیمسازدودایرهٔ دیگرباشد، این دایره را بطورمطلق نیمساز دودایرهٔ دیگرمی‌گویند.

$\alpha\omega$ ودایرهٔ ω به دسته دوایر $\alpha\beta$ تعلق خواهد داشت. اکنون در مرحله‌ای هستیم که به اثبات عکس قضیهٔ (۵،۴۰۵) به شرح زیر بپردازیم:

قضیهٔ ۵.۷،۲- هردو دایرهٔ دلخواه حداقل یك دایرهٔ نیمساز دارند: اگر دو دایره غیر متقاطع یا مماس باشند، دایرهٔ نیمساز آنها منحصر به فرد است: اگر دو دایره متقاطع باشند دارای دو دایرهٔ نیمساز عمود بریکدیگر خواهند بود.

زیرا دودایره که متقاطع باشند توسط انعکاس به‌دوخط متقاطع تبدیل می‌شوند که این دوخط متقاطع دارای دونیمسازعمود برهم می‌باشند. درتبدیل عکس‌نتیجه می‌شود که دودایرهٔ متقاطع دارای‌دودایرهٔ نیمسازعمود بریکدیگرندکه‌این دودایره برنیمسازهای زاویه‌های بین مماسهای مرسوم بردودایرهٔ متقاطع درنقاط تقاطع آنها مماس می‌باشند.

دودایرهٔ α و β که برهم مماس باشند توسط انعکاس به دوخط متوازی تبدیل می‌شوند ودرنتیجه بیش‌ازیك دایرهٔ نیمساز ندارند.

هرگاه دودایرهٔ α و β نقطهٔ مشترك نداشته باشند، می‌توان توسط انعکاس آنها را به‌دودایرهٔ‌هم‌مرکز به‌شعاعهای‌مثلا a و b تبدیل کرد. دراین صورت‌این‌دودایره‌نسبت به‌دایرهٔ به شعاع $\sqrt{ab}$ وهم مرکزآنها منعکس یکدیگرمی‌باشند وبا تبدیل انعکاسی عکس نتیجه می‌شودکه‌دودایرهٔ‌غیرمتقاطع α و β فقط یك‌دایرهٔ نیمسازدارند. اگر α و β دودایرهٔ متساوی باشند دایرهٔ نیمسازآنها همان محوراصلی‌آنها می‌باشد.

تمرینها

۱- چه رابطه‌ای بین c و c' باید برقرار باشد تا دو دایرهٔ به معادله‌های‌زیربرهم عمود باشند؟

$$x^2+y^2-2ax+c=0 \quad \text{و} \quad x^2+y^2-2by+c'=0$$

۲- دودایره نسبت به هم مماس داخلی‌اند. ثابت‌کنید که شعاع دایرهٔ نیمسازآنها برابراست با واسطهٔ توافقی شعاعهای‌آن دودایره.

۳- دودسته دوایرمماس عمود برهم را درنظربگیرید. هرگاه نقطهٔ مشترك همهٔ این دایره‌ها مرکزدایرهٔ انعکاس‌انتخاب شود ودایره‌هانسبت به این دایرهٔ انعکاس تبدیل گردند، نتیجهٔ حاصل چه خواهد بود؟

۴- آیا می‌توان دودایرهٔ دلخواه را به دودایرهٔ متساوی تبدیل‌کرد؟

۵- ثابت‌کنیدکه محوراصلی دودایرهٔ متساوی غیرمشخص دایرهٔ نیمسازآنها است.

۶- ثابت‌کنیدکه هرچهارنقطهٔ دلخواه متمایزرا می‌توان به چهاررأس یك‌متوازی‌الاضلاع $A'B'C'D'$ تبدیل‌کرد (که ممکن است در حالت خاص چهار نقطهٔ A'، B'، C'، D' بریك خط راست واقع باشند اما داشته باشیم: $A'B'=D'C'$ و $A'D'=B'C'$).

راهنمایی : سه حالت زیر را جداگانه درنظر بگیرید:

الف ـ $AC| \; |BD$

ب ـ $AD| \; |BC$ یا $AB| \; |CD$

پ ـ A ، B ، C ، D بریك دایره واقع نباشند.

۷ـ دودایرهٔ غیرمتقاطع داده شده است ، دایرهٔ نیمسازآنها را رسم کنید.

راهنمایی : با توجه به تمرین ۳ از بند ۵.۵ ، چگونگی تعیین نقطه‌های حد یك دسته دوایر $\alpha\beta$ را درحالتی‌که α و β دودایرهٔ غیرمتقاطع با مرکزهای مختلف باشند بررسی کنید.

۸.۵ـ انحراف انعکاسی[1]

زاویهٔ بین دودایرهٔ متقاطع درواقع انحراف‌آنها ازیکدیگراست ، و چون درتبدیل انعکاسی، نیمساززاویه به‌نیمساززاویه تبدیل می‌شود، پس‌هریك ازدودایرهٔنیمساز دو دایرهٔ متقاطع، درواقع انحراف بین‌آن دو دایره را نصف می‌کند. برای اینکه این ویژگی را دربارهٔ دایرهٔ نیمساز دو دایرهٔغیرمتقاطع تعمیم دهیم ، نوعی انحراف را بین‌آن دو دایره تصورمی‌کنیم‌که دایرهٔ نیمساز آنها آن را به تساوی بین‌آن دوبخش می‌کند. برای تحقق چنین تصوری ، برای هردو دایرهٔ α و β انحرافی به نام انحراف انعکاسی وبا نماد $(\alpha \, , \, \beta)$ درنظر می‌گیریم به‌گونه‌ای‌که اگردایرهٔ γ به دسته دوایر $\alpha\beta$ تعلق داشته و بین α و γ β واقع‌باشد رابطهٔ زیررا داشته باشیم:

$$(\alpha \, , \, \beta)+(\beta \, , \, \gamma)=(\alpha \, , \, \gamma) \qquad (۱،۸.۵)$$

در انعکاسی‌که مرکزش یکی از نقطه‌های حد دسته دوایر $\alpha\beta$ باشد ، سه دایرهٔ مزبوربه سه دایرهٔ هم مرکز به شعاعهای a ، b ، c تبدیل می‌شوندکه یکی از دو رابطهٔ $a<b<c$ یا $a>b>c$ وهمچنین رابطهٔ زیر برقرارمی‌باشد:

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{c}$$

با توجه به اینکه لگاریتم عمل ضرب را به عمل جمع تبدیل می‌کند ، این‌رابطه به صورت زیرنوشته می‌شود:

$$\left(lg\,\frac{a}{b}\right)+\left(lg\,\frac{b}{c}\right)=\left(lg\,\frac{a}{c}\right)$$

ازاینرو ، انحراف انعکاسی دودایرهٔ α و β را به‌صورت زیراختیارمی‌کنیم:

۱ـ Ecart inversif

$$(\alpha\ ,\ \beta)=\left|lg\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right| \qquad (۲،۸.۵)$$

که اگر $\mathrm{b}>\mathrm{a}$ باشد، داریم $(\alpha,\beta)=lg\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ و اگر $\mathrm{a}<\mathrm{b}$ باشد، داریم $(\alpha,\beta)=lg\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$

و به این ترتیب رابطهٔ (۱،۸.۵) برای سه دایرهٔ هم مرکز مزبور به وضوح محقق می‌باشد.

علامت log که برای خواننده آشنا می‌باشد به معنی لگاریتم به پایهٔ ۱۰ می‌باشد؛ یعنی رابطهٔ $\mathrm{x}=log\,\mathrm{y}$ به معنی $\mathrm{y}=۱۰^{\mathrm{x}}$ می‌باشد. پایهٔ ۱۰ در عدد نویسی از این جهت بکار رفته است که انسان ده انگشت دارد. درریاضیات لگاریتم را با پایهٔ e بکار می‌برند که e عدد متعالی است برابر با:

$$\mathrm{e}=\sum_{۰}^{\infty}\frac{۱}{\mathrm{n}!}=۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰\ldots$$

دراین‌صورت $\mathrm{x}=lg\,\mathrm{y}$ (که آن‌را به صورت $\mathrm{x}=ln\,\mathrm{y}$ یا به صورت $\mathrm{x}=Lg\,\mathrm{y}$ نیز می‌نویسند و آن را «لگاریتم طبیعی» y می‌نامند) به معنی آن است که:

$$\mathrm{y}=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}=\sum_{۰}^{\infty}\frac{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}$$

همچنین لگاریتم طبیعی به‌صورت سری زیرمشخص می‌شود:

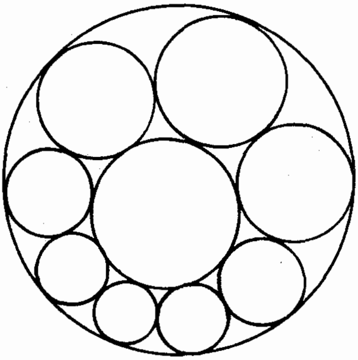
$$lg(۱+\mathrm{t})=\mathrm{t}-\frac{\mathrm{t}^{۲}}{۲}+\frac{\mathrm{t}^{۳}}{۳}-\frac{\mathrm{t}^{۴}}{۴}+\cdots$$

بنا به تعریف، انحراف انعکاسی دو دایرهٔ غیرمشخص غیر متقاطع عبارتست از لگاریتم طبیعی نسبت شعاعهای دو دایرهٔ هم مرکزی که دو دایرهٔ مفروض را می‌توان به آنها تبدیل کرد (درنسبت شعاعها آن راکه بزرگتراست صورت می گیریم).

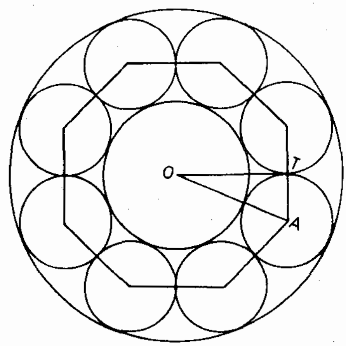
با توجه به اینکه دایره‌های هم مرکز مبدلهای دایره‌های متعلق به یك دسته دوایر می‌باشند، یك چنین «انحراف» برای دایره‌های آن دسته دوایردارای ویژگی جمعی (به معنی رابطهٔ ۱،۸.۵) خواهد بود. به ویژه، دایرهٔ نیمساز دو دایرهٔ غیر متقاطع انحراف انعکاسی آنها را نصف می‌کند. همچنین با قبول اینکه دو خط متوازی حالت حدی دو دایرهٔ هم‌مرکز می‌باشند، مجازخواهیم بودکه انحراف انعکاسی دودایرهٔ مماس برهم را صفر بگیریم.

اکنون دودایرهٔ متداخل با مرکزهای متفاوت را درنظرمی‌گیریم. مطابق با شکل (۸.۵،الف) می‌توانیم یك سلسله دایره رسم کنیم که متوالیاً برهم مماس باشند و هرکدام

از آنها بردو دایرهٔ مفروض نیز مماس باشد. در این سلسله دوایر، که تعداد آنها را n می گیریم، می‌توانیم هریك از آنهارا اولین دایره بگیریم که بر دومین دایره وبرآخرین دایره مماس می‌باشد. شکل حاصل به چیستان اشتینر[1] معروف است وبا استفاده ازقضیهٔ (۱،۷.۵) به سادگی می‌توان ثابت‌کرد که انجام پذیراست. برای این کارکافی است که دایره‌های متداخل مفروض را به دایره‌های هم مرکز تبدیل کنیم که دراین صورت سلسله دایره‌های مورد نظر به دایره‌هایی برابر با هم تبدیل می‌شوندکه مرکزهای آنها رأسهای یك n ضلعی منتظم خواهند بود، مطابق با شکل (۸.۵،ب)، اگر A مرکزیکی ازاین دایره‌های متساوی و T نقطهٔ تماس‌آن با دایرهٔ متوالیش و O مرکزمشترك مبدلهای دو



(شکل ۸،.۵ الف)



(شکل ۸.۵ ، ب)

دایرهٔ مفروض باشد، با فرض آنکه شعاعهای دودایرهٔ هم‌مرکز آنکه بزرگتر است a و دیگری b باشد، خواهیم داشت:

$$OA=\frac{a+b}{۲} \quad و \quad AT=\frac{a-b}{۲}$$

اندازهٔ زاویهٔ AOT برابربا $\frac{\pi}{n}$ رادیان و انحراف انعکاسی دودایره برابر با $\delta=lg\,\frac{a}{b}$ است و داریم:

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{AT}{OA}=\frac{a-b}{a+b}=\frac{\frac{a}{b}-۱}{\frac{a}{b}+۱}=\frac{e^{\delta}-۱}{e^{\delta}+۱}$$

1- Porisme de Steiner

بنابراین چیستان اشتینر درحالتی‌محقق‌است که انحراف انعکاسی دو دایرهٔ مفروض دررابطهٔ زیرصدق کند:

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{e^{\delta} - ۱}{e^{\delta} + ۱}$$

این معادله را برحسب δ حل می‌کنیم:

$$e^{\delta} = \frac{۱ + \sin \frac{\pi}{n}}{۱ - \sin \frac{\pi}{n}} = \left(\frac{۱ + \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)^{۲} = \left(\sec \frac{\pi}{n} + tg \frac{\pi}{n} \right)^{۲}$$

$$\delta = ۲\, lg \left(\sec \frac{\pi}{n} + tg \frac{\pi}{n} \right) \qquad (۳،۸.۵)$$

اگربه ویژه $n = ۴$ باشد ، انحراف انعکاسی‌دودایره برابرمی‌شود با:

$$\delta = ۲ lg(\sqrt{۲} + ۱)$$

و در این حالت شکل نظیر شامل شش دایره است که هرکدام ازآنها برچهار دایرهٔ دیگر مماس می‌باشد. این شش دایره به سه جفت دایره‌های «متقابل» بخش می‌شوند که هردایره برهمهٔ دایره‌های دیگر،مگر بردایرهٔ متقابلش مماس است. انحراف انعکاسی‌دودایرهٔ متقابل برابر با $۲lg(\sqrt{۲} + ۱)$ است درحالی‌کـه انحراف انعکاسی هردو دایرهٔ غیر متقابل صفر است.

هرگاه سلسله دایره‌هـای چیستان‌اشتینر پس از d دور شکل گیرد، در این صورت باید در رابطه‌های گذشته n را با $\frac{n}{d}$ جانشین سازیم.

هردایره با مرکز و شعاعش مشخص می‌شود و چون در صفحه مرکز دایـره بادو مختص معین می گردد ، پس مجموعهٔ همهٔ دایره‌هـای صفحهٔ اقلیدسی و منعکسهای آنها با معادله‌ای سه‌پارامتری مشخص می گردند که هریك ازپارامترها می‌توانندتغییراتی تابینهایت داشته‌باشد. هرگاه چنین تعبیرکنیم که این سه‌تائیهای نامحدود ازدایره‌های متعلق به‌صفحهٔ انعکاسی، صفحات فضای سه‌بعدی‌را مشخص‌می کنند، می‌توانیم به‌هندسهٔ نااقلیدسی مشهور گؤس، بلیائی، لوباچفسکی[1] دست‌یابیم که بین سالهای ۱۸۲۰ و ۱۸۳۰ هرکدام ازآنان مستقلاً به‌کشف آن نایل آمدند . زاویه‌های متشکل از دو دایرهٔ متقاطع در این هندسه به‌زاویه‌های بین دوصفحه که در یك خط متقاطعند تبدیل می‌شوند؛ دو دایرهٔ مماس برهم به‌دو صفحهٔ متوازی تبدیل می‌شوند؛ انحراف انعکاسی دودایرهٔ غیرمتقاطع عبارت می‌شود

1- Gauss, Bolyai, Lobatchevsky.

از فاصلهٔ بین دوصفحهٔ غیرمتقاطع که یك عمود مشترك دارند و طول آن فاصلهٔ مزبور را معین می‌کند.

تمرینها

۱ــ ثابت کنید که در چیستان‌اشتینر، نقاط تماس دایره‌های متوالی بردایرهٔ نیمساز دودایرهٔ مفروض واقعند (در واقع دایرهٔ نیمساز، یا دایره‌های نیمساز، دو دایرهٔ دلخواه α و β را می‌توان مکان‌هندسی نقطهٔ P دانست‌که این‌نقطهٔ P نقطهٔ تماس دو دایره‌ای است‌که هرکدام ازآنها بردایره‌های α و β نیز مماسند).

۲ــ ثابت کنید که معادلهٔ (۳،۸.۵) را می‌توان چنین نوشت:

$$\delta = ۲ lg\ tg\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۲n}\right)$$

۳ــ اولا سه‌دایرهٔ متساوی رسم‌کنید‌که برهم مماس باشند. ثانیاً سه‌دایرهٔ دیگر با همان ویژگی را چنان رسم‌کنید‌که هرکدام ازآنها بردو دایره ازمجموعهٔ اول نیز مماس باشند. انحرافهای انعکاسی بین این‌شش دایره را تعیین‌کنید.

۹.۵ــ تابعهای هذلولوی[۱]

تابعهای مثلثاتی زاویه، زاویهٔ بین دو دایرهٔ متقاطع، را می‌شناسیم. تابعهایی از انحراف انعکاسی دو دایرهٔ غیر متقاطع تعریف شده است که به مناسبت اینکه هندسهٔ نااقلیدسی‌گوٌس، بولیائی، لوباچفسکی، به‌هندسهٔ هذلولوی‌معروف‌است آنهارا تابعهای هذلولوی (تابعهای هیپربولیك) می‌نامند. این تابعها عبارتند از: سینوس هیپربولیك با نماد sh، کسینوس هیپربولیك با نماد ch، تانژانت هیپربولیك با نماد th، و برحسب تابع نمائی e^x طبق فرمولهای زیر تعریف می‌شوند:

$$sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} ،\ ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} ،\ th x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

از این فرمولها رابطه‌های مختلف بدست می‌آید، ازجمله:

$$ch x + sh x = e^x ،\ ch x - sh x = e^{-x}$$

اکنون طبق جدول زیر تشابهات موجود بین‌دونوع تابعهای مثلثاتی وهذلولوی‌را ملاحظه می‌کنیم:

۱- Fonctions hyperboliques

$$\sin 0 = 0 \;،\; \cos 0 = 1 \qquad sh\,0 = 0 \;،\; ch\,0 = 1$$

$$tg\,0 = 0 \;،\; tg\frac{\pi}{4} = 1 \qquad th\,0 = 0 \;،\; th\,\infty = 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad ch^2 x - sh^2 x = 1$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = tg\,x \qquad \frac{sh\,x}{ch\,x} = th\,x$$

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \qquad sh^2\frac{x}{2} = \frac{ch\,x - 1}{2}$$

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} \qquad ch^2\frac{x}{2} = \frac{ch\,x + 1}{2}$$

$$tg\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \qquad th\frac{x}{2} = \frac{ch\,x - 1}{sh\,x}$$

با توجه به‌ملاحظات بالا، معادلهٔ (۳،۸.۵) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$th\frac{\delta}{2} = \sin\frac{\pi}{n} \text{ یا } sh\frac{\delta}{2} = tg\frac{\pi}{n} \text{ یا } ch\frac{\delta}{2} = \sec\frac{\pi}{n}$$

شاید خوانندگان به‌اهمیت نقش ریشهٔ NH_4 آمونیم در شیمی‌وقوف‌داشته‌باشند؛ این ریشه مانند یك‌اتم سدیم یا یك اتم پتاسیم عمل می‌کند ودر عین‌حال به‌اتمهای ازت و هیدرژن قابل تجزیه است. در مقام مقایسه می‌توان گفت‌که نقش تابعهای هذلولوی در ریاضیات نیز از یك‌چنین اهمیتی برخوردار است؛ این تابعها مانند تابعهای مثلثاتی عمل می‌کنند ودرعین‌حال برحسب تابعهای نمایی‌قابل بیان می‌باشند.وانگهی، برای‌خوانندگانی که با تابعهای با یك متغیر مختلط آشنایی دارند ومعنی فرمولهای:

$$\cos x = ch\,ix \;،\; i\sin x = sh\,ix$$

را درمی‌یابند دیگر گفتگو از شیمی ومقایسه موردی نخواهد داشت.

از موضوع خارج نشویم و همان بحث مربوط به‌زاویهٔ بین دو دایرهٔ متقاطع و انحراف بین‌آنها را دنبال کنیم. دو دایره به‌شعاعهای a و b و به طول خط‌المرکزین c را در نظر می‌گیریم. هرگاه هریك از سه‌مقدار a، b، c از مجموع دوتای دیگر کوچکتر باشد، دو دایره در دو نقطه متقاطع می‌باشندکه هریك از این نقطه‌های تقاطع بـا مرکزهای دو دایره مثلثی تشکیل می‌دهد. زاویهٔ بین دوضلع a و b از این مثلث همان زاویهٔ بین دو دایره است و مقدارکسینوس آن برابر است با:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

اگر یکی ازسه‌مقدار a، b، c ازمجموع دوتای دیگر بزرگتر باشد، دودایره

متقاطع نیستند و مثلثی تشکیل نمی‌شود. دراین‌حالت سعی می‌کنیم تا تعبیری هندسی برای عبارت بالا، یعنی:

$$\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

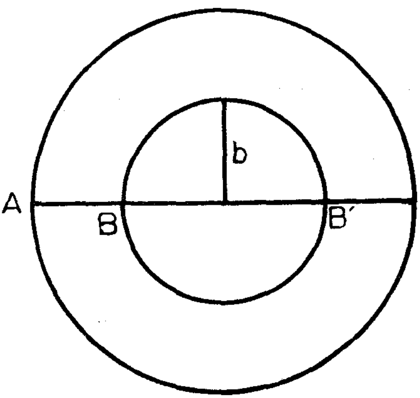
بدست دهیم. هرگاه این‌دودایره هم‌مرکز باشند،یعنی $c=0$، و AA' و BB' قطرهایی از دودایره باشدکه در امتداد یکدیگرند، رابطهٔ $A'B \mid\mid AB'$ برقرار می‌باشد،مطابق شکل (۹،۵،الف). انحراف انعکاسی این‌دو دایره $\delta=lg\frac{a}{b}$ است و نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A، A'، B، B' برحسب δ عبارت می‌شود از:

$$(AA'BB')=\frac{\overline{AB}\times\overline{A'B'}}{\overline{AB'}\times\overline{A'B}}=\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}\right)^2=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$$

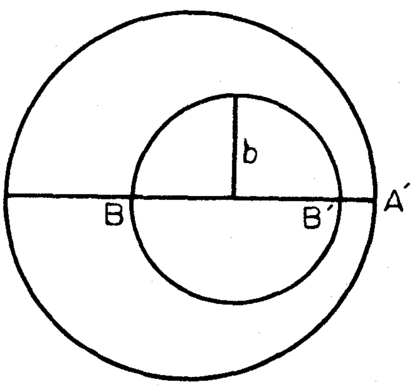
$$=\left(\frac{e^{\delta}-1}{e^{\delta}+1}\right)^2=\frac{e^{2\delta}+1-2e^{\delta}}{e^{2\delta}+1+2e^{\delta}}=\frac{e^{\delta}+e^{-\delta}-2}{e^{\delta}+e^{-\delta}+2}$$

$$=\frac{ch\delta-1}{ch\delta+1}$$

هرگاه این دو دایره را منعکسهای دودایرهٔ غیر متقاطع به‌خطالمرکزین به‌طول c در نظر بگیریم و شعاعهای آنها a و b ونقاط برخورد خطالمرکزین باآنها A، A' و B، B' باشد (که داشته باشیم $A'B \mid\mid AB'$)، بنا به‌قضیه‌های(۲،۴،۵) و(۳،۴،۵)



(شکل۹،۵ ، الف)



(شکل ۹،۵ ، ب)

نسبت ناهمساز وجداسازی محفوظ بوده وبازهم خواهیم داشت:

$$(AA'BB')=\frac{ch\delta-1}{ch\delta+1}$$

که بایدآن را برحسب a ، b ، c بدست‌آوریم. مطابق با شکل(۹.۵،ب) یعنی‌درحالت $a-b>c$ داریم:

$$(AA'BB')=\frac{\overline{AB}\times\overline{A'B'}}{\overline{AB'}\times\overline{A'B}}=\frac{(a+c-b)(a-c-b)}{(a+c+b)(a-c+b)}=\frac{(a-b)^{2}-c^{2}}{(a+b)^{2}-c^{2}}$$

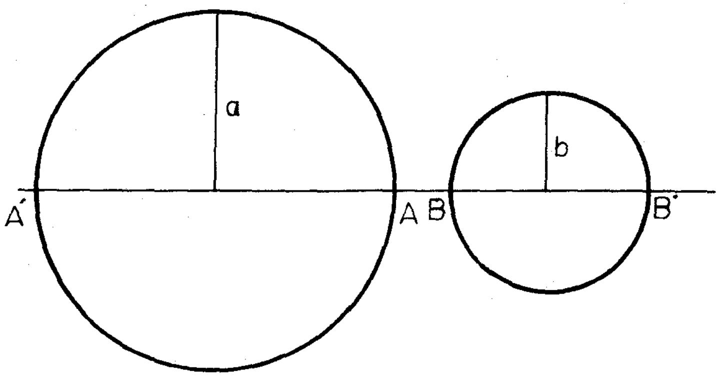
$$=\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}-2ab}{a^{2}+b^{2}-c^{2}+2ab}=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

بنابراین داریم : $ch\delta=\gamma$. در حالتی‌که داشته باشیم $a+b<c$ مطابق با شکل (۹.۵ ، پ) داریم:

$$(AA'BB')=\frac{\overline{AB}\times\overline{A'B'}}{\overline{AB'}\times\overline{A'B}}=\frac{(c-a-b)(c+a+b)}{(c-a+b)(c+a-b)}=\frac{c^{2}-(a+b)^{2}}{c^{2}-(a-b)^{2}}$$

$$=\frac{-a^{2}-b^{2}+c^{2}-2ab}{-a^{2}-b^{2}+c^{2}+2ab}=\frac{-\gamma-1}{-\gamma+1}$$

ودرنتیجه داریم: $ch\delta=-\gamma$.



(شکل ۹.۵ ، پ)

درآنچه‌گذشت رویهم اثبات قضیهٔ زیرانجام‌گرفته است:

قضیهٔ ۱،۹.۵- مقدار انحراف انعکاسی δ بین دو دایرهٔ غیر متقاطع به شعاعهای a و b و به طول خط‌المرکزین c در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$ch\delta=\left|\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{2ab}\right|$$

یادآوری - منحنی نمایش تابع $y=chx$ به زنجیره موسوم است و در واقع شکل زنجیر یا نخی است‌که دوسرش را گرفته و به‌حالت آویزان قرارداده باشند.

هرگاه دودایره به‌طول خط‌المرکزین c چنان باشندکه اولی به شعاع a بریك چهارگوشه محیط ودومی به شعاع b درهمان چهارگوشه محاط باشد، چنانکه‌می‌دانیم رابطهٔ زیربرقراراست:

$$\frac{1}{(a-c)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}=\frac{1}{b^2}$$

این رابطه را می‌توان چنین نوشت:

$$|a^2+b^2-c^2|=b\sqrt{4a^2+b^2}$$

وبرای δ انحراف انعکاسی دودایره خواهیم داشت:

$$ch\delta=\frac{|a^2+b^2-c^2|}{2ab}=\frac{\sqrt{4a^2+b^2}}{2a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

وچون داریم $ch^2\delta=1+sh^2\delta$ بنابراین درمورد دودایرهٔ مزبورداریم:

$$sh\delta=\frac{b}{2a}$$

تمرینها

۱ــ دودایرهٔ به شعاعهای ۱ وبه طول خط‌المرکزین $2(\sqrt{3}+1)$ داده شده‌است. دایرهٔ دیگری به شعاع ۱ چنان رسم‌کنیدکه سطح بین آنها را به تساوی بخش‌کند. آیا این دایره انحراف انعکاسی بین دودایرهٔ مفروض را نیز نصف می‌کند؟ وآیا این دایره، دایرهٔ نیمسازآنها است؟

۲ــ ثابت‌کنیدکه انحراف انعکاسی بین دایره‌های سدی (تمرین ۴ از بند ۴.۵ را ملاحظه‌کنید) دررابطهٔ زیرصدق می‌کند:

$$ch\,\frac{\delta}{2}=2$$

۳ــ می‌دانیم‌کــه دو دایرهٔ متخارج دارای چهار مماس مشترك می‌باشند. اگــر δ انحراف انعکاسی این دو دایره باشد، ثابت‌کنیدکــه نسبت بین طولهای بزرگترین و کوچکترین مماس مشترك برابراست با $th\,\frac{\delta}{2}$.

۴ــ خطی به فاصلهٔ p ازمرکزدایرهٔ به شعاع b واقع است. هرگاه $p<b$ باشد خط با دایره یك زاویهٔ δ می‌سازدکه ثابت کنید $cos\delta=\pm\frac{p}{b}$، اگر $p>b$ باشد ثابت‌کنیدکه انحراف انعکاسی بین خط ودایره ازفرمول $ch\delta=\frac{p}{b}$ بدست‌می‌آید.

۵ــ شعاعهای دایره‌های محیطی و محاطی مثلث را با R و r می‌نماییم . ثابت کنید که δ انحراف انعکاسی این دودایره در رابطهٔ زیرصدق می‌کند:

$$sh\frac{\delta}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{r}{R}}$$

راهنمایی : ازقضیهٔ (۲،۱.۲) می‌توانید استفاده کنید.

۶ــ ثابت کنیدکه اگریکی اززاویه‌های مثلث ABC منفرجه باشد دایرهٔ محیطی ودایرهٔ نه نقطهٔ آن به زاویهٔ δ یکدیگررا تلاقی می‌کنندکه دررابطهٔ زیرصدق می‌کند:

$$\sin^{۲}\frac{\delta}{۲}=-\cos A\cos B\cos C$$

واگرمثلث قائم‌الزاویه یا حادالزوایا باشد ، δ انحراف انعکاسی بین دودایرهٔ مذکور دررابطهٔ زیرصدق می‌کند:

$$sh^{۲}\frac{\delta}{۲}=\cos A\cos B\cos C$$

۷ــ دایره‌های به معادله‌های زیررا درنظرمی‌گیریم:

$$x^{۲}+y^{۲}-۲ax+d^{۲}=۰ \quad ، \quad a>d>۰$$
$$x^{۲}+y^{۲}-۲bx+d^{۲}=۰ \quad ، \quad b>d>۰$$

وفرض می‌کنیم $th\alpha=\frac{d}{a}$ و $th\beta=\frac{d}{b}$. ثابت کنیدکه انحراف انعکاسی این‌دایره برابراست با: $|\alpha-\beta|$

۶

آشنایی با هندسهٔ تصویری

اکنون که هندسه و مثلثات را یادگرفته‌اید، مسئله‌ای برای شما مطرح می‌کنم: یك کشتی به سوی دریا درشرف حرکت‌است. بارآن پشم است و ظرفیت خالص آن ۲۰۰ تن می‌باشد. بندری که ازآن می‌خواهد حرکت‌کند بوستن است ومقصدآن لوهاورنی می‌باشد. باد از سمت شرق ـ شمال شرقی می‌وزد و ماه مه می‌باشد. سن کاپیتان کشتی چقدراست؟

گوستاو فلوبر

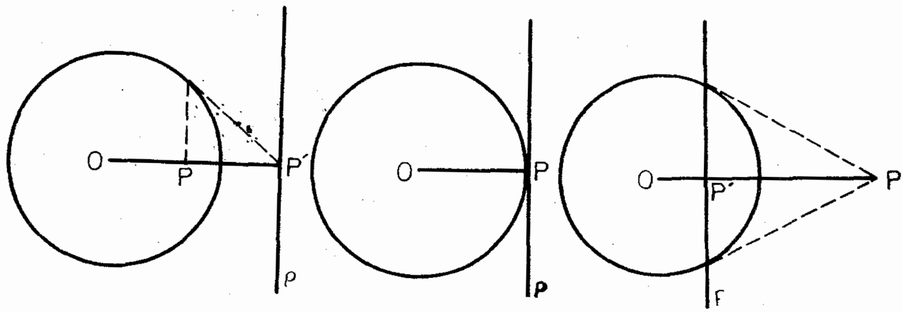
در همهٔ تبدیلهایی که تاکنون ملاحظه کردیم. نقطه متناظر با نقطه بود. اما اصل دوگانگی که‌سیمای‌مشخصهٔ «صفحهٔ تصویری» را نشان می‌دهد امکان‌آن‌را فراهم می‌آورد که نقطه با خط و یا خط بانقطه نظیر گردد. یکی از تبدیلهای جدید، که وجه تشابهی باانعکاس دارد، تبدیل «قطبی معکوس» نسبت به دایره می‌باشد. دراین تبدیل، هرنقطهٔ غیراز O مرکزدایره با یك خط، و هرخط که بر O نگذرد با یك نقطه متناظر مـی‌باشد، مبدل هردایره یك «مقطع مخروطی» است که یکی ازکانونهایش نقطهٔ O است.

درپایان این بخش، پس‌ازآنکه‌انواع مقطعهای مخروطی بررسی‌گردید، مقایسه‌ای احتیاط‌آمیزبین هندسهٔ انعکاسی وهندسهٔ تصویری انجام خواهدگرفت.

۱.۶ـ قطب وقطبی ـ تبدیل قطبی معکوس

دایرهٔ ω به‌مرکز O وبه شعاع k رادرنظرمی‌گیریم. درصفحهٔ دایره، نظیر هرنقطهٔ P متمایز از O یك خط p وجود داردکـه بر P'، منعکس P نسبت به

ω ، می‌گذرد؛ این خط را قطبی P نسبت به ω می‌نامیم. برعکس نظیرهرخط p که بر O نگذرد یك نقطهٔ P وجود داردکه برعمود OP' وارداز O بر p واقع است ومنعکس نقطهٔ P' نسبت به ω می‌باشد؛ این‌نقطه قطب خط p نامیده می‌شود. بنابراین نسبت به دایرهٔ ω ، هرنقطهٔ غیراز O یك قطبی دارد و هرخط غیرگذرندهٔ بر O یك قطب دارد، مطابق با شکل (۱.۶ ، الف).



(شکل ۱.۶ ، الف)

بااستفاده ازویژگیهای انعکاس وبا توجه به شکل (۳.۵ ، الف) نتیجه مـی گیریم که: اگر P داخل دایره باشد قطبی‌آن p درخارج دایره واقع است و برای رسم آن می‌توانیم در P عمودی بر OP اخراج‌کنیم تا با دایره برخوردکند ودرنقطهٔ برخورد مماسی بر دایره رسم‌کنیم تا با OP تلاقی کند، به این ترتیب P' بدست می‌آید و p را رسم می‌کنیم؛ اگر P بردایره واقع باشد قطبی‌آن بردایره مماس است وبر P می‌گذرد؛ اگر P درخارج دایره باشد قطبی‌آن با دایره متقاطع است و برای رسم آن می‌توان از P بردایره دو مماس رسم‌کرد ونقطه‌های تماس را به یکدیگر وصل نمود. همچنین، اگرخطی با دایره متخارج باشد قطب‌آن درداخل‌دایره واقع است؛ اگرخطی بردایره مماس باشد قطب‌آن‌همان نقطهٔ تماس است؛ اگرخط با دایره متقاطع باشدقطب آن درخارج دایره قراردارد[1]. از این پس برای سادگـی خطها را با a ، b ، ... و

۱ـ **یادداشت‌ازح.غیور:** تعریفی که‌درمتن کتاب، برای‌قطب وقطبی انجام‌گرفته‌مخصوص‌دایره‌است. درصورتی‌که قطبی نقطه نسبت به دو خط متقاطع و نسبت به منحنیهای مقطع مخروطی نیز تعریف می‌شودکه بازهم یك خط مستقیم است. قطبی نقطه نسبت به دو خط متقاطع‌خاصیت مهم چهارضلعی‌کامل را بیان می‌کندکه درآن هرقطر بوسیلهٔ دوقطر دیگر به نسبت توافقی تقسیم می‌شود (ودراین‌کتاب‌کوچکترین اشاره‌ای به‌آن نشده است).

←

قطبهای آنها را به ترتیب با A ، B ، ... نشان می‌دهیم.

مطابق با شکل (۱.۶ ، ب) نقطهٔ A متمایز از O را درنظرمی گیریم وقطبی آن‌را با a ومنعکس‌آن را با A' نشان می‌دهیم. نقطهٔ دلخواه B را بر a درنظرمی گیریم و OB همچنین عمود AB' را بر OB رسم می‌کنیم. دو مثلث OAB' و OBA' متشابهند وداریم:

$$OB \times OB' = OA \times OA' = k^{2}$$

بنابراین B' منعکس B و AB' یعنی b قطبی B می‌باشد. برعکس ، هرخط b که بر A بگذرد (وبر OA واقع نباشد) بریك خط که بر O مـی‌گذرد در B' عمود می‌باشد و OB' با a در B برخورد می‌کندکه B قطب b می‌باشد. بنابراین قضیهٔ زیر ثابت شده است:

قضیهٔ ۱،۱.۶- قطبی هرنقطهٔ واقع برخط مفروض از قطب آن خط می‌گذرد.

اکنون فرض می‌کنیم که نقطهٔ A و در نتیجه قطبی‌آن a ثابت بوده و B بر a تغییرمکان دهد ، درهرحال قطبی B بر A می‌گذرد ، پس می‌توان گفت کـه قطبی‌های مجموعه نقاط یك خط، مجموعه خطوطی‌است که در قطب‌آن خط متقارببند. ویژگی که گفته شد وبراثرآن ، خطها ونقطه‌ها به ترتیب به قطبها وقطبی‌های خود تبدیل می‌شوند ، تبدیل قطبی معکوس نام دارد. اصل دوگانگی[1] نیزکه در پیش‌از آن نام بردیم چنین است :

→

برای ارزشیابی دقیق تعریف قطب وقطبی که یکی ازتبدیلات مهم هندسه بشمار می‌آید تعریف مشهوروکلاسیك آن را درزیرمی آوریم:

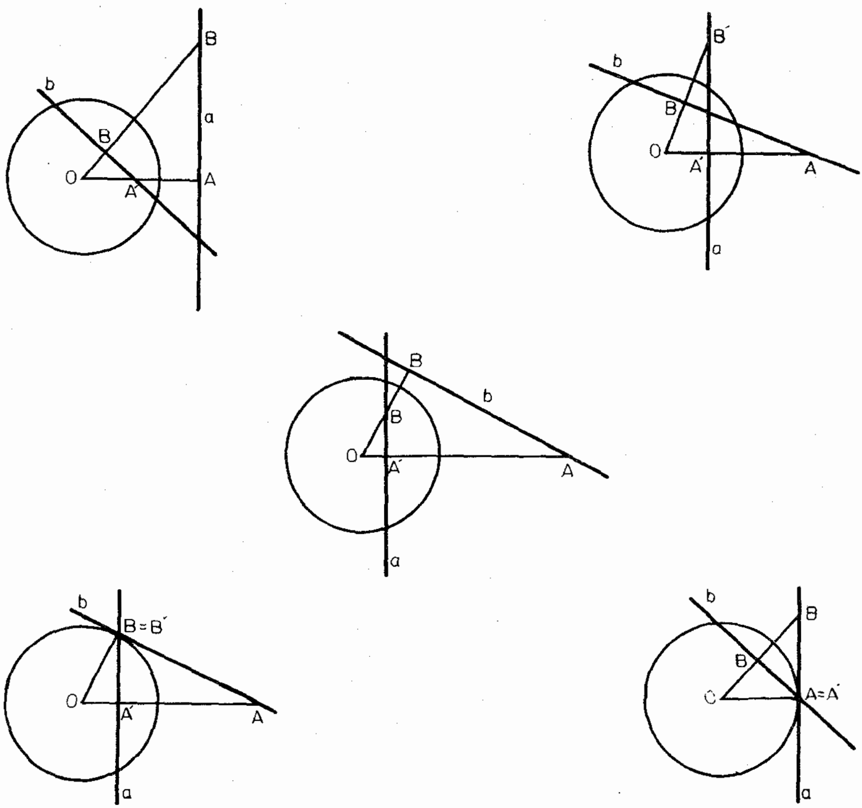
«مکان هندسی مزدوج توافقی نقطهٔ واقع درصفحهٔ دایرهٔ مفروض نسبت به دونقطهٔ تقاطع قاطعی که ازآن نقطه می‌گذرد با دایره ، قطبی‌آن نقطه نسبت به دایره نامیده می‌شود.»

به موجب این تعریف ، قطبی نقطه برحسب اینکه داخل یا خارج یا روی دایره باشد نسبت به دایره به ترتیب خط نامحدود ، پاره خط ونقطه است ومرکزدایره قطبی ندارد.

با قبول فرض نقطه‌های موهومی (اصل پونسله) وخط بینهایت صفحه (اصل دزارك) وبویژه اینکه بطور استثنا قطبی هرنقطه ازدایره را مماس مرسوم از آن نقطه بردایره بدانیم ، به موجب تعریف کلاسیك ، قطبی نقطه نسبت به دایره در هرحال خط نامحدود است (در متن‌کتاب درتعریف صفحهٔ تصویری به اصل خط بینهایت اشاره شده است).

امتیازتعریف کلاسیك با پذیرفتن اصلها وآنچه ذکرشد برتعریف متن دراین است‌که آن تعریف برای منحنی درجهٔ دوم، اعم ازدوخط و یا مقطعهای‌مخروطی که بکاررود فقط‌کافی است‌کـه به جای دایره بنویسیم دو خط متقاطـع یا بیضی ، یا هذلولـی یا سهمی . لازم به یادآوری‌است که درمنحنیهای ازدرجهٔ بالاترازدو،قطبی نقطه ازحالت خط مستقیم درمی‌آید ومنحنی می‌شود.

1- Principe de dualité.

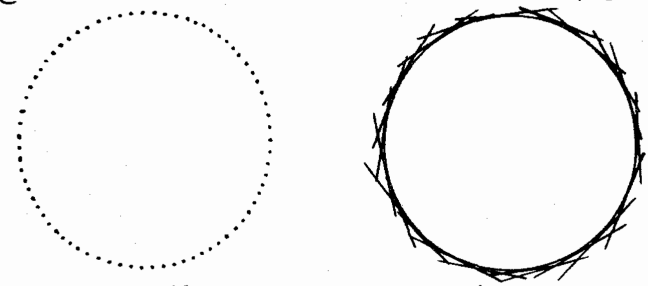


(شکل ۱.۶ ، ب)

به هرشکل مرکب از خطها و نقطه‌ها که در آن بعضی از نقطه‌ها بر بعضی از خطها واقعند ، متقابلاً شکلی مرکب از نقطه‌ها و خطها نظیر است که در آن بعضی ازخطها بر بعضی ازنقطه‌ها می‌گذرند. مثلاً به یک چهارگوشهٔ ABCD (که شامل چهار نقطه است که هیچ یک از سه تای آنها بر یک خط واقع نیستند و شامل شش خط می‌باشد که به ترتیب بر جفتهای نقاط D ، A و D ، B و D ، C و C ، B و A ، C و B ، A مــی‌گذرند) متقابلاً یک چهار خطی abcd نظیر می‌شود (که شامل چهار خط است بدون آنکه هیچ سه تای آنها متقارب باشند وشامل شش نقطه است که به ترتیب محل برخورد جفتهای خطوط d ، a و d ، b و d ، c و c ، b و a ، c و b ، a می‌باشند).

دایره را می‌توان مکان هندسی نقاط یــا اینکه پوش خطوط (مماسهای برآن) در نظر گرفت، شکل (۱.۶،پ). هرمماس بر دایره وضع حدی قاطعی است که دو نقطهٔ تقاطع

آن بادایره برهم منطبق گردند. متقابلاً هرنقطه از دایره را می‌توان وضع حـدی نقطهٔ



(شکل ۶.۱، پ)

تقاطع دومماس برآن دانست‌که این‌دو مماس برهم منطبق‌گـردند. بنابراین، تبدیل قطبی معکوس، مکان هندسی و پوش را نظیر هم قرار می‌دهد. هرگاه دایرهٔ ω را مکان‌هندسی نقاط بگیریم مبدل‌آن درتبدیل قطبی معکوس نسبت به ω، همان دایره است امابه‌عنوان پوش خطوط، وبرعکس. همچنین اگر دایره‌ای به‌مرکز O و به‌شعاع r داشته‌باشیم، مبدل قطبی معکوس آن نسبت به‌دایرهٔ ω به‌مرکز O و بـه‌شعاع k، دایره‌ای خواهد بود به‌مرکز O و به‌شعاع $\frac{k^2}{r}$.

فرهنگچهٔ زیر مفاهیم متناظررا در تبدیل قطبی معکوس نشان می‌دهد ودربکاربردن آن در قضایا وترسیمات کافی است‌که هرمفهـوم ازیك ستون را بامفهوم مقابل‌آن از ستون دیگر جانشین ساخت.

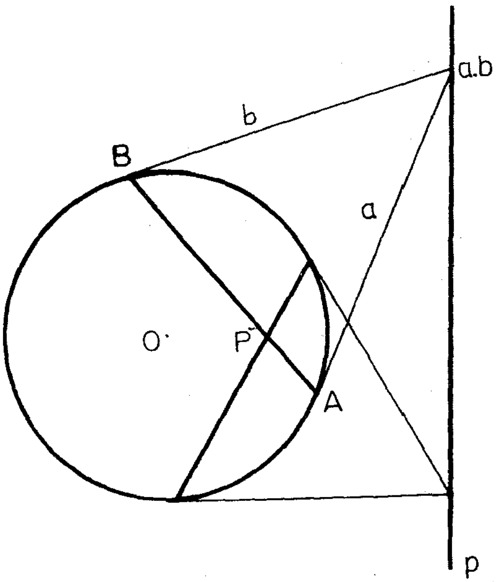
نقطه	خط
واقع است بر	می‌گذرد بر
خط واصل بین دونقطه	نقطهٔ تقاطع دوخط
متقارب	واقع بریك استقامت
چهارگوشه	چهار خطی
قطب	قطبی
مکان هندسی	پوش
مماس	نقطهٔ تماس

اگر دو نقطه چنان باشندکه هرکدام ازآنها برقطبی دیگـری واقع باشد آنها را نقطه‌های مزدوج و قطبی‌های آنهارا خطهای مزدوج می‌نامند. هرگاه a قطبی نقطهٔ A برنقطهٔ B بگذرد، بنابه‌قضیه (۶.۱،۱) خط b قطبی B نیز بر A می‌گذرد، بنابراین

A و B نقطه‌های مزدوج و a و b خطهای مزدوج می‌باشند. باتوجه به‌اینکه می‌توانیم نقطه را دایرهٔ به‌شعاع صفر بگیریم،قطبی هرنقطه مکان هندسی مزدوجهای آن نقطه، وقطب هرخط پوش مزدوجهای‌آن خط می‌باشد.

اگرخط a درنقطهٔ A بردایرهٔ ω مماس باشد، هرنقطهٔ واقع بر a مزدوج نقطهٔ A ودر عین‌حال نقطهٔ A مزدوج خودش‌نیز می‌باشد، همچنین دراین حالت هرخط که بر A بگذرد مزدوج a و بخصوص خط a مزدوج خودش نیز می‌باشد.

قطب هرخط که بردو نقطهٔ A و B بگذرد (بدون آنکه بر O بگذرد) برنقطهٔ تلاقی a و b قطبی‌های A وB واقع است. در شکل (۱.۶، ت) دو نقطهٔ A و B بردایرهٔ ω واقعند پس a و b قطبی‌های آنها که به‌ترتیب در A و B بر ω مماسند درقطب خطAB، که آن را با a.b نشان داده‌ایم متقاطع می‌باشند. برعکس، هرگاه از نقطهٔ خارج ω دو مماس a و b را برآن رسم‌کنیم خطی که A و B نقطه‌های تماس را به‌هم‌وصل‌می‌کند قطبی نقطهٔ مفروض می‌باشد.



(شکل ۱.۶ ، ت)

هرگاه برخط p دو نقطه انتخاب کنیم وقطبی‌های آنها را رسم کنیم در P قطب خط p برخورد می‌کنند. درعمل این‌دونقطه را در خارج ω انتخاب کرده از هریك‌ازآنها دومماس بردایره رسم ونقطه‌های تماس را به‌هم وصل می‌کنیم که از برخورد دوخط حاصل قطب خط مفروض مشخص می‌شود. برعکس هرگاه P داده شده‌باشد وازآن دوقاطع نسبت به‌دایره رسم‌کنیم وقطبهای این‌دو قاطع را به‌یکدیگر وصل کنیم قطبی نقطهٔ P مشخص می‌گردد.

آنچه گفته شد درقضیهٔ زیر خلاصه می‌شود:

قضیهٔ ۲،۱.۶- قطب هرخط که در A و B با دایرهٔ ω برخوردکند (بدون‌آنکه بر مرکز دایره بگذرد) نقطهٔ برخورد مماسهایی است که در A و B بردایره رسم می‌شوند. قطبی هرنقطهٔ واقع در خارج دایره عبارت است از خط واصل بین نقطه‌های تماس دومماسی‌که ازآن نقطه بردایره رسم می‌شود. قطب هرخط(که برمرکز دایره نگذرد) نقطهٔ

تلاقی قطبیهـای دو نقطه ازآن می‌باشد. قطبی هرنقطه (غیر از O) خط واصل بین قطبهای دوقاطع است‌که ازآن نقطه بردایره رسم شوند.

نکتهٔ قابل‌توجه این است که با معلوم بودن دایرهٔ هـادی ω و همهٔ مماسهایی‌که می‌توان برآن رسم‌کرد، ترسیمات مربوط به‌تبدیل قطبی معکوس فقط به‌وجود خود نقاط و خطـوط بستگی دارد و فواصل بین آنها مطرح نیست. این نکته ازویژگیهای سرشتی هندسهٔ تصویری است.

تمرینها

۱ـ دایرهٔ ω به‌مرکز O و یك نقطهٔ A متمایز از O داده شده است. ثابت کنیدکه قطبی A نسبت به‌دایرهٔ ω همان محور اصلی دایرهٔ ω با دایرهٔ به‌قطر OA است.

۲ـ ثابت‌کنیدکه یکی‌اززاویه‌های بین‌قطبی‌های دونقطهٔ A و B بازاویهٔ AOB برابر است.

۳ـ ثابت‌کنیدکه در تبدیل قطبی معکوس، مبدلهای رأسها وضلعهای یك n ضلعی منتظم به‌مرکز O به‌ترتیب ضلعها و رأسهای یك n ضلعی منتظم می‌باشند.

۴ـ ثابت‌کنیدکه مبدل قطبی معکوس مستطیل به‌مرکز O یك‌لوزی است.

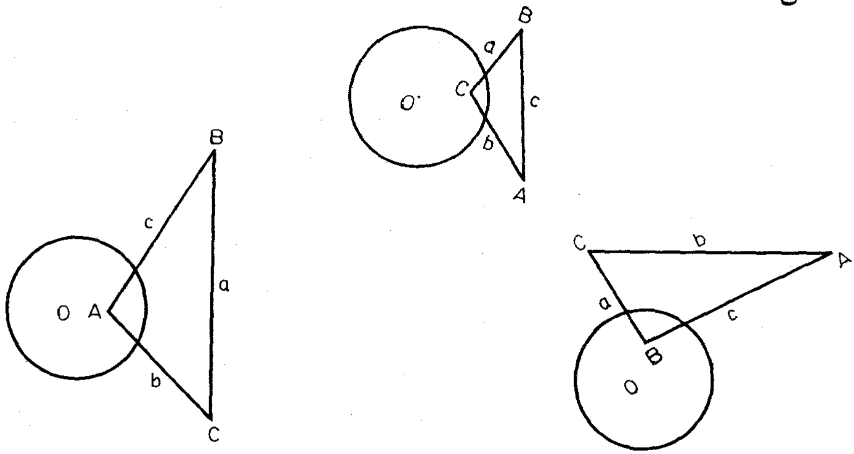
۲.۶ـ دایرهٔ مزدوج مثلث

در شکل (۱.۶، ب) که چهار نقطهٔ A، B، A'، B' از یکدیگـر متمایزند، چنانچه نقطهٔ برخورد a و b را بـا C نشان دهیم مثلث ABC دارای ویژگیهای زیر می‌باشد: هررأس و ضلع روبروی‌آن قطب و قطبی یکدیگرند؛ هردو رأس دلخواه‌آن نقطه‌های مزدوجند؛ هردو ضلع‌دلخواه‌آن خطهای مزدوجند. یك‌چنین مثلثی‌را مثلث مزدوج می‌نامند و هردو نقطهٔ مزدوج‌که از یکدیگر متمایز باشند دو رأس از یك مثلث مزدوج خواهند بود.

در شکل (۲.۶، الف) سه‌حالت ممکن مثلث مزدوج ABC نشان داده شده‌است و ملاحظه می‌شودکه در هریك از سه‌حالت یك‌رأس در داخل دایره ودو رأس دیگر در خارج دایره واقعند و زاویهٔ نظیر رأس واقع درداخل دایره منفرجه می‌باشد (زیرا مرکز ارتفاعی مثلث همان O مرکز دایرهٔ ω می‌باشد). برعکس، اگر مثلث ABC در یك زاویه منفرجه و O مرکز ارتفاعی آن و A'، B'، C' به‌ترتیب پاهای ارتفاعهای نظیر رأسهای A، B، C باشند، با توجه به‌رابطهٔ (۴،۴.۲) داریم:

$$\overline{OA}\times\overline{OA'}=\overline{OB}\times\overline{OB'}=\overline{OC}\times\overline{OC'}=k^2$$

بنا براین نسبت به دایرهٔ ω به‌مرکز O و به‌شعاع k مثلث مزبور مزدوج می‌باشد. این دایره را که برای مثلث منفرج‌الزاویهٔ ABC منحصر به فرد است دایرهٔ مزدوج آن مثلث می‌نامند.



(شکل ۶.۲، ۱ الف)

از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود که در انعکاس نسبت به‌دایرهٔ ω نقطه‌های A ، B ، C به ترتیب به‌نقطه‌های A' ، B' ، C' تبدیل می‌شوند، به‌عبارت دیگر، دایرهٔ محیطی مثلث ABC به‌دایرهٔ محیطی مثلث $A'B'C'$ تبدیل می‌شود. از اینرو قضیهٔ زیر ثابت شده است:

قضیهٔ ۶.۲، ۱- برای هرمثلث منفرج‌الزاویه یک‌دایرهٔ‌مزدوج وجود داردکه نسبت به‌این دایره، دایره‌های محیطی و نه نقطهٔ مثلث مزبور منعکس یکدیگرند.

به‌عبارت دیگر، دایرهٔ مزدوج مثلث یکی از دو دایرهٔ نیمساز دایره‌های محیطی و نه نقطهٔ مثلث می‌باشد. نتیجه می‌شود که این‌سه‌دایره به‌یک دسته دوایر تعلق دارند (که مرکزهای آنها بر خط اولر واقع است)؛ و بنابراین درمثلث منفرج‌الزاویه، دایرهٔ نه‌نقطه نه‌تنها بر نه‌نقطه بلکه بریازده نقطهٔ مهم می‌گذرد ودو نقطهٔ دیگرآن عبارتند از نقطه‌های برخورد دایرهٔ محیطی با دایرهٔ مزدوج مثلث.

تمرین

زاویهٔ دایرهٔ محیطی مثلث منفرج‌الزاویه بادایرهٔ مزدوج آن‌را به θ نشان می‌دهیم. ثابت کنید که:

$$\cos^2\theta = -\cos A \cos B \cos C$$

۳.۶ـ مقطعهای مخروطی

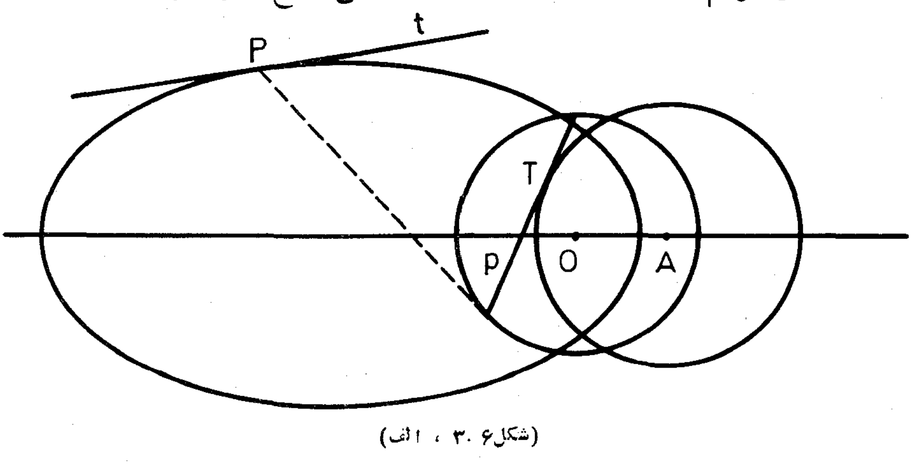
برای بررسی منحنیهای مقطع مخروطی که کلاً مخروطات نامیده می‌شود روشهای مختلف وجود دارد. در بندهای ۸.۳ و ۹.۳ نیز در این باره به‌اختصار اشاره‌ای شده است. یکی ازروشهایی‌که بکارمی‌رود این است‌که هریك ازمنحنیهای مزبوررا به‌عنوان مبدل قطبی معکوس دایره در نظر بگیریم؛ به‌این ترتیب‌که نسبت به‌دایرهٔ ω به‌مرکز O و به‌شعاع k مبدل قطبی معکوس دایرهٔ α به‌مرکز A وبه‌شعاع r را بررسی‌کنیم[1].

شعاع k از دایرهٔ ω را ثابت می‌گیریم، زیرااندازهٔآن فقط درابعاد شکل‌حاصل تأثیر دارد و درنوع این‌شکل دخالتی ندارد. نوع منحنی مقطع مخروطی ازروی رابطهٔ

$$\varepsilon = \frac{OA}{r}$$

مشخص می‌شود. ایـن نسبت را خروج از مرکز و نقطهٔ O را یك کانون منحنی مقطع مخروطی می‌نامند.

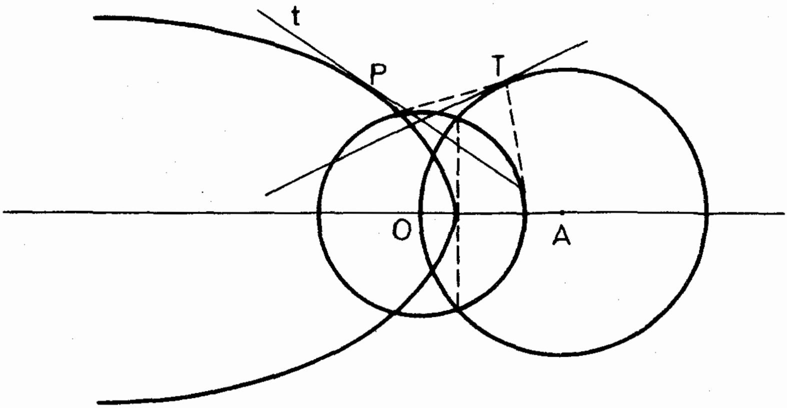
وقتی منحنی مقطع مخروطی را به‌عنوان مبدل قطبی معکوس یك دایرهٔ α در نظر می‌گیریم به‌معنی آن است‌که آن منحنی مکان هندسی قطبهای مماسهای بر α و یا پوش قطبیهـای نقطه‌های واقع بر α می‌باشد. اگر $\varepsilon<1$ باشد، O داخل دایرهٔ α قرار داشته و روی هرنیم خط ابتدا از O نقطه‌ای از منحنی مقطع وجود خواهد داشت؛ در



(شکل ۶ .۳ ، الف)

۱ـ یادداشتازح. غیور: تعریف مقطعهای مخروطی به‌عنوان قطبی معکوس دایره (آنگونه که در متن کتاب بکار رفته است) این امتیاز را برسایر تعریفها داردکه خواصی از دایره مانند قضیهٔپاسکال وقضیهٔبریانشن وامثال‌آنها را درمنحنیهای مقطع مخروطی تعمیم‌می‌دهد.

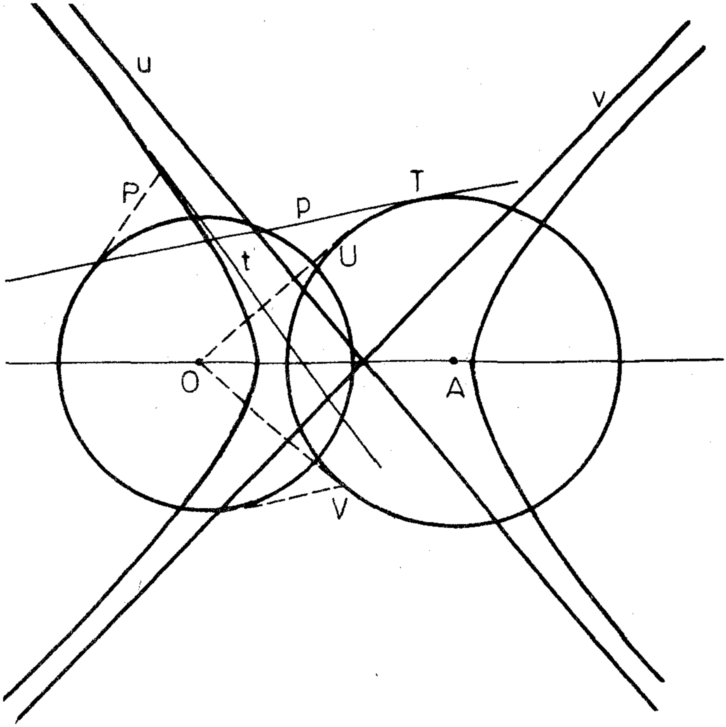
این حالت، منحنی مقطع یك‌مرغانه است که بیضی نام دارد، مانند شکل (۳.۶، الف). در حالت خاص $\varepsilon=0$ بیضی به‌دایره تبدیل می‌شود. با ترقی کردن مقدار ε منحنی به‌تدریج از شکل دایره خارج شده وکشیده‌تر می گردد . وقتی $\varepsilon=1$ باشد داریم $OA=r$ و نقطهٔ O بردایرهٔ α قرار دارد ؛ در این‌حال همهٔ نقطه‌های واقع بر α به‌استثنای نقطهٔ O دارای‌قطبی می‌باشند وتنها نقطهٔ O قطبی ندارد،همچنین همه مماسهای بر α دارای قطب می‌باشند مگر مماس در O که قطب ندارد. در این حالت منحنی حاصل درامتداد OA دارای نقطهٔ بینهایت دور می‌باشد. این‌منحنی سهمی نام دارد ودر شکل (۳.۶،ب) نموده شده است.



(شکل ۳.۶ ، ب)

در حالت $\varepsilon>1$ نقطهٔ O در خارج دایرهٔ α واقع است‌که از آن دو مماس می‌توان بردایرهٔ α رسم‌کرد. اگر نقطه‌های تماس این مماسها را بادایره با U و V نشان‌دهیم مماسهای OU و OV قطب ندارند درصورتی‌که‌نقطه‌های U و V دارای قطبی می‌باشند. منحنی حاصل هذلولی نام دارد کــه u و v قطبی‌های نقاط U و V مجانبهای آن‌می‌باشند . این مجانبها برمنحنی مماس می‌باشند اما نقطه‌های تماس در فاصلهٔ محدود وجود ندارند . مطابق با شکل (۳.۶، پ) هرچه منحنی دورتر شود به مجانبها نزدیکتر می گردد تا در فاصلهٔ بینهایت دور برآن مماس می‌شود.

می‌دانیم‌که مشاهدات نجومی کپلر که توسط نیوتن توجیه گردید معلوم ساخت‌که مسیر هریك از سیارات یك‌بیضی است‌که خورشید در یکی از دو کانون آن واقع است. خروج از مرکز مدارهای سیارات و همچنین ستارگان دنباله‌دار که تاکنون حساب شده طبق جدول صفحه بعد است:



(شکل ۶.۳، پ)

سیارات		ستارگان دنباله‌دار		
عطارد	۰/۲۰۵۶	انك	Encke	۰/۸۵
زهره	۰/۰۰۶۸	بیلا	Biela	۰/۷۶
زمین	۰/۰۱۶۷	هلم	Holmes	۰/۴۱
مریخ	۰/۰۹۳۴	بروکس	Brooks	۰/۴۷
مشتری	۰/۰۴۸۴	هالی	Halley	۰/۹۶۷
زحل	۰/۰۵۵۷	دناتی	Donati	۰/۹۹۶۳
اورانوس	۰/۰۴۷۲	کگژیا	Coggia	۰/۹۹۸۸
نپتون	۰/۰۰۸۶	دانیل	Daniel	۱/۰۰۰
پلوتن	۰/۲۴۸۱	مورهوز	Morehouse	۱/۰۰۰

تمرینها

۱ـ شعاعهای دودایرهٔ α و β تقریباً باهم برابرند ومرکزهای آنها بسیارنزدیك به‌هم می‌باشند و α داخل β واقع است. نقطه‌های A_1 ، A_3 ، A_5 ، ... را روی α و نقطه‌های B_0 ، B_2 ، B_4 ، ... را روی β چنان تعیین‌کنیدکه خطهای B_0B_2 ، B_2B_4 ، ... در A_1 ، A_3 ، ... بر α مماس باشند. خطهای A_1A_3 ، A_3A_5 ، ... را به ترتیب با b_2 ، b_4 ، ... و نقطه‌های برخورد مماسهای بر β در B_0 ، B_2 و در B_2 ، B_4 ، ... را به‌ترتیب با C_1 ، C_3 ، ... نشان می‌دهیم. ثابت‌کنیدکه اولاً خطهای b_2 ، b_4 ، ... برشکل قطبی معکوس β نسبت به α مماسند ، ثانیاً نقطه‌های C_1،C_3،... برشکل قطبی معکوس α نسبت به β واقعند.

۲ـ شکل قطبی معکوس دایرهٔ α نسبت به دایرهٔ ω یك محور تقارن داردکه همان خط‌المرکزین دو دایره است . آیا این شکل می‌تواند یك محور تقارن دیگر داشته باشد؟

۳ـ ثابت‌کنیدکه تصویرهای‌قائم کانون سهمی برمماسهای مرسوم برآن، روی یك خط راست واقعند.

۴ـ هریك ازمجانبهای هذلولی با خط OA (شکل ۳.۶ ، پ) زاویهٔ θ می‌سازد ثابت‌کنیدکه:

$$\cos\theta = \frac{1}{\varepsilon}$$

ازاین رابطه مقدارخروج ازمرکزهذلولی متساوی‌القطرین را بدست‌آورید.

۵ـ اگر خروج از مرکز مدار یك ستارهٔ دنباله‌دار $\varepsilon \geqslant 1$ باشد ، چه وضعی پیش می‌آید؟

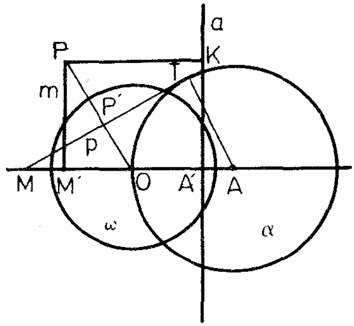
۴.۶ـ کانونها وخطهای هادی

منحنی مقطع مخروطی‌را شکل قطبی معکوس دایرهٔ α به‌مرکز A نسبت به‌دایرهٔ ω به مرکز O درنظرمی‌گیریم؛ قطبی‌نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ ω را خط هادی نظیر کانون O منحنی وپاره خط واصل بین O ونقطهٔ دلخواه P ازمنحنی را شعاع حامل نقطهٔ P می‌نامیم. اکنون یکی‌ازویژگیهای بسیارمهم وجالب مقطع مخروطی رابه‌صورت قضیهٔ زیربیان می‌کنیم‌که نخستین بار در قرن چهارم میلادی توسط پاپوس اسکندرانی ، وشاید هم ششصد سال زودترتوسط اقلیدس اثبات شده است.

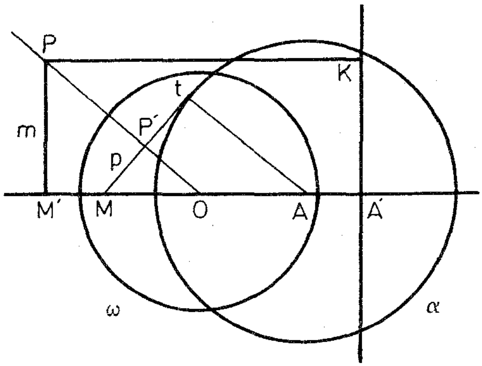
قضیهٔ ۱،۴.۶ـ منحنی مقطع مخروطی با خروج از مرکز ε مفروض است. اگر O یك کانون و a خط هادی نظیر این کانون و P نقطهٔ دلخواهی از منحنی باشد ،

طول OP ، شعاع حامل نقطهٔ P ، برابر است با حاصل ضرب ε در فاصلهٔ نقطهٔ P از خط a.

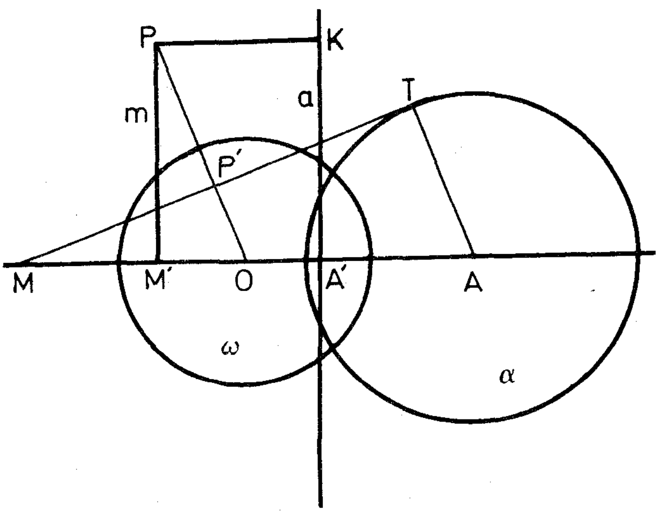
درشکلهای (۴.۶ ، الف ، ب ، پ) ، P نقطه‌ای ازمنحنی مقطع مخروطی است و



(شکل ۴.۶ ، الف)



(شکل ۴.۶ ب)



(شکل ۴.۶ ، پ)

p قطبی P (نسبت به دایرهٔ ω) است که در T بر α مماس می‌باشد و با OA در M برخورد کرده است. خط p با OP در P' برخورد می‌کند که منعکس P می‌باشد. همچنین خط هادی a (نظیر کانون O) با OA در A' برخورد می‌کند که منعکس نقطهٔ A است و بالاخره خط m قطبی نقطهٔ M نیز با OA در M' منعکس نقطهٔ M تلاقی می‌کند. از P عمود PK را برخط a رسم می‌کنیم و می‌خواهیم ثابت کنیم که: $OP=\varepsilon.PK$. برای آنکه اثبات در حالتهای مختلف را یکجا انجام دهیم خط حامل OA راجهت‌دار می‌گیریم و جهت مثبت آن‌را همان جهت از O به A اختیار می‌کنیم. با توجه به اینکه k شعاع دایرهٔ ω و r شعاع دایرهٔ α است می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\overline{PK}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{OA'}-\overline{OM'}}{\overline{OP}}=\frac{k}{\overline{OP}}\left(\frac{\overline{OA'}}{k}-\frac{\overline{OM'}}{k}\right)$$

$$=\frac{\overline{OP'}}{k}\left(\frac{k}{\overline{OA}}-\frac{k}{\overline{OM}}\right)=\frac{\overline{OP'}}{\overline{OM}}\left(\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}}-۱\right)$$

$$=\frac{\overline{AT}}{\overline{AM}}\cdot\frac{\overline{AM}}{\overline{AO}}=\frac{r}{\overline{OA}}=\frac{۱}{\varepsilon}$$

هرگاه به ترتیب عکس عمل کنیم عکس قضیه نیز ثابت می‌شود. بنابراین:

قضیهٔ ۲،۴،۶- نقطهٔ O و خط a که بر O نمی‌گذرد و مقدار مثبت ε داده شده است، مکان هندسی نقاطی که فاصلهٔ آنها از O برابر است باحاصلضرب ε درفاصلهٔ آنها از a، یك مقطع مخروطی‌است.

به سادگی معلوم می‌شود که هرگاه دایرهٔ ω به مرکز O مماس بر a انتخاب شود و A نقطهٔ تماس باشد، دایرهٔ α به مرکز A و به شعاع $\frac{OA}{\varepsilon}$ خواهد بود.

تمرینها

۱- درصفحهٔ محورهای مختصات دکارتی نقطهٔ متغیر P را در نظر می‌گیریم که فاصلهٔ آن ازمبدأ مختصات برابر باشد باحاصلضرب ε درفاصلهٔ آن از خط به معادلهٔ $\frac{1}{\varepsilon}$. معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P را بدست آورید.

۲- درتمرین ۱ مقدار ε را مخالف یك می‌گیریم، در این صورت مکان هندسی نقطهٔ P با محور xها در دو نقطه برخورد می‌کند. محورهای مختصات را انتقال

می‌دهیم تا مبدأ جدید بر وسط دو نقطهٔ مزبور واقع گردد و فرض می‌کنیم که:

$$a = l(1-\varepsilon^2) \quad \text{و} \quad b = |la|$$

معادلهٔ مکان را به ساده‌ترین صورت بدست آورید که محورهای تقارن آن به‌سادگی مشخص باشند.

۵.۶ـ صفحهٔ تصویری

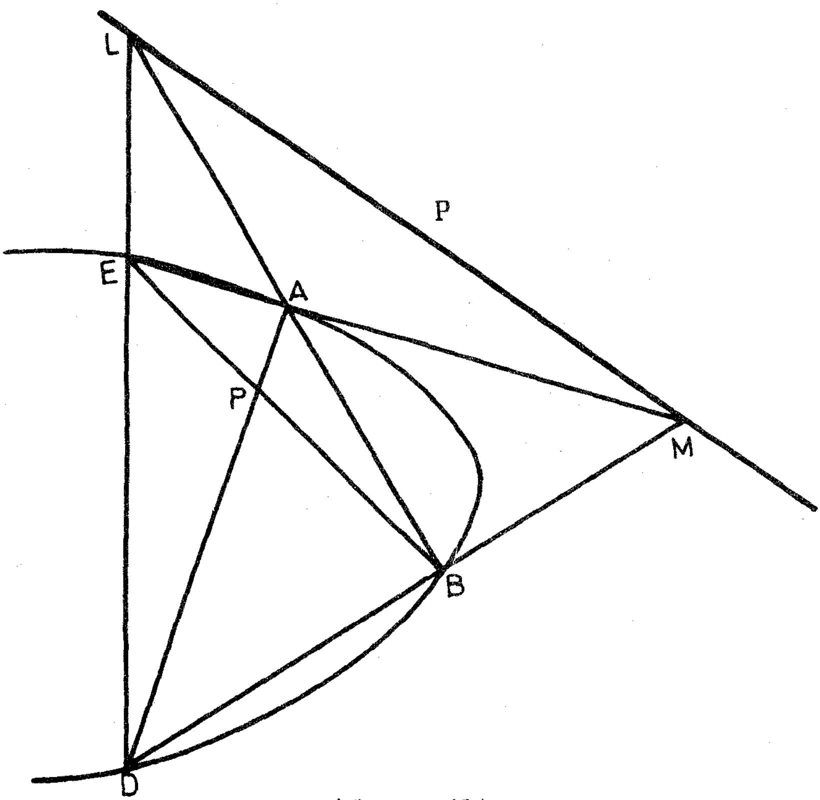
در تبدیل قطبی معکوس اگر نقطهٔ O و خطهای گذرنده بر آن را کنار بگذاریم، آنگاه به‌طور دقیق می‌توانیم بگوییم که هر نقطه به یك خط و هر خط به یك نقطه تبدیل می‌شود. درمورد انعکاس نیز یك چنین استثنایی وجود داشت که برای رفع آن نقطهٔ بینهایت را پذیرفتیم و صفحهٔ انعکاس را بدست آوردیم. برای آنکه در تبدیل قطبی معکوس نیز استثناهایی وجود نداشته باشد خط بینهایت l منحصر به فرد را می‌پذیریم که قطبی نقطهٔ O باشد و در نتیجه نقطه‌های آن (نقطه‌های بینهایت) قطبهای خطهایی خواهند بود که بر O می‌گذرند. با پذیرفتن این عناصر جدید، یعنی خط بینهایت و نقطه‌های بینهایت، می‌توان بطور قاطع حکم کرد که هر خط دلخواه a یك قطب A دارد که قطبی‌های همهٔ نقاط واقع بر a بر A می‌گذرند. هرگاه a بر O بگذرد قطبی‌های نقاط آن که همه بر a عمودند یك دسته خطوط متوازی را تشکیل می‌دهند و درعین حال قطب a که نقطهٔ بینهایت است نقطهٔ مشترك همهٔ این دسته خطوط می‌باشد. صفحهٔ شامل خط بینهایت را صفحهٔ تصویری می‌نامیم و در این صفحه بیان زیر بدون استثنا صحیح می‌باشد: هردو خط دلخواه و متمایز a و b یك نقطهٔ مشترك دارند.

با توجه به تبدیل قطبی معکوس، هر قضیهٔ مربوط به خطها و نقطه‌ها را که درنظر بگیریم می‌توانیم نظیر آن قضیه‌ای مربوط به نقطه‌ها و خطها بیان کنیم که این نقطه‌ها و خطها به ترتیب قطبها و قطبی‌های خطها و نقطه‌های قضیهٔ اول باشند. برای مثال، شش ضلعی محیطی دایرهٔ ω را درنظر می‌گیریم، نقطه‌های تماس ضلعهای این شش ضلعی با دایره شش ضلعی محاطی تشکیل می‌دهند و این دو شش ضلعی در تبدیل قطبی معکوس نسبت به ω مبدل یکدیگرند. بنابراین قضیهٔ پاسکال (بند ۸.۳) و قضیهٔ بریانشن (بند ۹.۳) نظیر یکدیگرند و می‌توان با استفاده از تبدیل قطبی معکوس هرکدام را از دیگری نتیجه گرفت. در حالت کلی که دایرهٔ ω غیراز دایرهٔ محیطی یا محاطی شش ضلعی انتخاب شود، هریك از دو قضیهٔ مزبور را که درمورد دایره درنظر بگیریم؛ به صورت قضیهٔ دیگری درمورد یك منحنی مقطع مخروطی بیان خواهد شد که این منحنی مبدل قطبی معکوس آن دایره خواهد بود.

اکنون می‌خواهیم قضیهٔ (۲،۱.۶) را با کنار گذاردن استثناهای آن (که در داخل

پرانتزها قرار داشتند) به صورت کلی و ساده بیان کنیم. قضیه را برای دایرهٔ دلخواه α درنظر می گیریم واگر α' منحنی مقطع مخروطی باشد که نسبت به دایرهٔ ω مبدل قطبی معکوس دایرهٔ α است، دراین صورت قضیه را برای α' نیز نتیجه خواهیم گرفت. به این ترتیب ترسیماتی که برای قطبها وقطبی‌ها نسبت به α خواهیم داشت به‌ترسیمات مربوط به قطبی‌ها و قطبها نسبت به α' تبدیل می‌شوند. ازاینرو می‌توانیم قطب و قطبی نسبت به دایره را به‌صورت کلی قطب و قطبی نسبت به یك مقطع مخروطی تعمیم‌دهیم. قضیهٔ (۲،۱.۶) باکنار گذاشتن استثناهای آن شامل چهار بخش می باشدکه هریك ازآنها متقابلا نظیر بقیه است؛ هرگاه به جای ω یك منحنی مقطع مخروطی درنظربگیریم بازهم قضیه درست خواهد بود.

درشکل (۸.۳ ، ب)خط LM از N نقطهٔ‌برخورد b و c وهمچنین نقطهٔ‌برخورد a و d می‌گذرد. با توجه به‌این نکته وبا درنظر گرفتن بخش آخر قضیهٔ (۲،۱.۶) وتعمیم آن، روش سادهٔ ترسیم قطبی یك نقطهٔ دلخواه P نسبت به یك منحنی مقطع مخروطی به شرح زیرومطابق با نمونهٔ شکل (۵.۶ ، الف) نتیجه می‌شود:



(شکل ۵.۶ ، الف)

قضیهٔ ۱،۵.۶- منحنی مقطع مخروطی و نقطهٔ P غیر واقع برآن مفروض است. هرگاه از P دو قاطع AD و BE رسم شود و L نقطهٔ برخورد AB و DE به M نقطهٔ برخورد AE و BD وصل شود، خط حاصل قطبی نقطهٔ P نسبت به منحنی مزبور می‌باشد.

با توجه به اینکه اگر قطب وقطبی نسبت به یك دایرهٔ α را درنظر بگیریم وآن‌را نسبت به دایرهٔ هادی ω تبدیل قطبی معکوس کنیم، قطبی‌وقطب نسبت به مقطع مخروطی α' را بدست خواهیم‌آورد. درشکلهای (۳.۶ ، الف ، ب ، پ) نقطهٔ A وخط بینهایت I_∞ نسبت به دایرهٔ α قطب و قطبی می‌باشند ، هرگاه α' مبدل قطبی معکوس α نسبت به ω باشد ، خط a و نقطهٔ O نسبت به α' قطبی و قطب خواهند بود . بنا براین داریم:

قضیهٔ ۲،۵.۶- در هرمنحنی مقطع مخروطی ، خط هادی نظیر یك‌کانون، قطبی‌آن کانون نسبت به منحنی می‌باشد.

تمرینها

۱- قضیهٔ دزارگ (۱،۶.۳) را که به هندسهٔ تصویری برگردانیم به چه صورت بیان خواهد شد؟

۲- تمرین ۱ را دربارهٔ قضیهٔ پاپوس (۵.۳ ، ۱) نیزانجام دهید.

۳- یکی ازضلعهای یك مثلث مزدوج نسبت به یك دایره خط بینهایت است. دو ضلع دیگراین مثلث چگونه‌اند؟

۴- ثابت‌کنید که منحنی مقطع مخروطی بیضی ، سهمی یا هذلولی است برحسب آنکه خط بینهایت درخارج‌آن واقع باشد ، برآن مماس باشد یاآن را قطع کند.

۵- ثابت‌کنید که مجانبهای هذلولی در نقاط برخورد منحنی با خط بینهایت برآن مماسند.

۶- ثابت‌کنید از هرنقطهٔ خط هادی سهمی دو مماس عمود برهم می‌توان برآن رسم کرد.

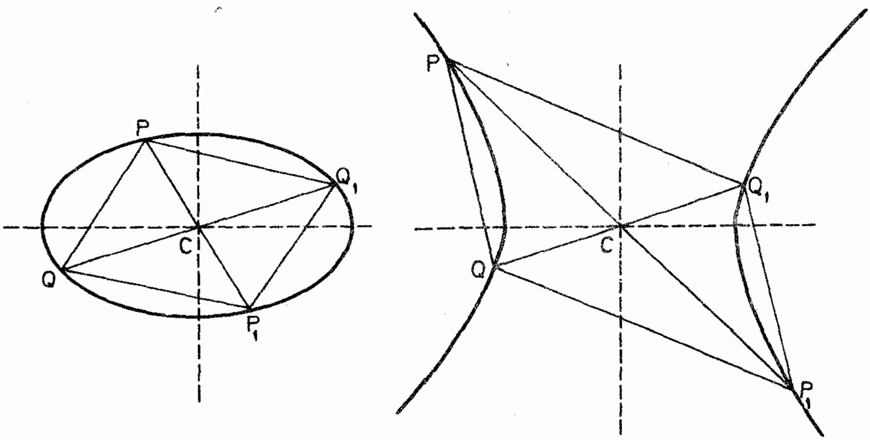
۷- هرگاه چهار رأس یك چهار گوشهٔ کامل بریك منحنی مقطع مخروطی واقع باشد ، ثابت‌کنید که نقاط برخورد سه جفت ضلعهای روبروی‌آن سه‌رأس یك مثلث مزدوج می‌باشند.

۶.۶- مقطعهای مخروطی مرکزدار

درترسیم منحنیهای بیضی و هذلولی و ملاحظهٔ وضع عنصرهای هرکدام از آنها

نسبت به‌هم، مثلاً وضع متشابه دورأس کانونی بیضی یا وضع متشابه دوشاخهٔ هذلولی، چنین بنظرمی‌آید که این منحنیها دارای تقارن می‌باشند. ازاینروطبیعی خواهد بودکه به بررسی ویژگیهای تقارنی دراین منحنیها بپردازیم. بحث زیروجود تقارن‌کامل را در این منحنیهاآشکارمی‌سازد.

با توجه به قضیهٔ (۱،۵.۶) معلوم می‌شودکه اگر C نقطه‌ای غیر واقع برمقطع مخروطی و PP_1 و QQ_1 دوقاطع دلخواه‌گذرنده برآن باشند، قطبی نقطهٔ C نسبت به مقطع مخروطی خطی است‌که‌برنقطهٔ برخورد دو خط PQ و P_1Q_1 و همچنین نقطهٔ برخورد دو خط PQ_1 و P_1Q می‌گذرد. هرگاه قطبی نقطهٔ C خط بینهایت باشد، مانند شکل(۶.۶، الف)، دراین‌صورت چهارگوشه محاطی PQP_1Q_1 متوازی‌الاضلاع



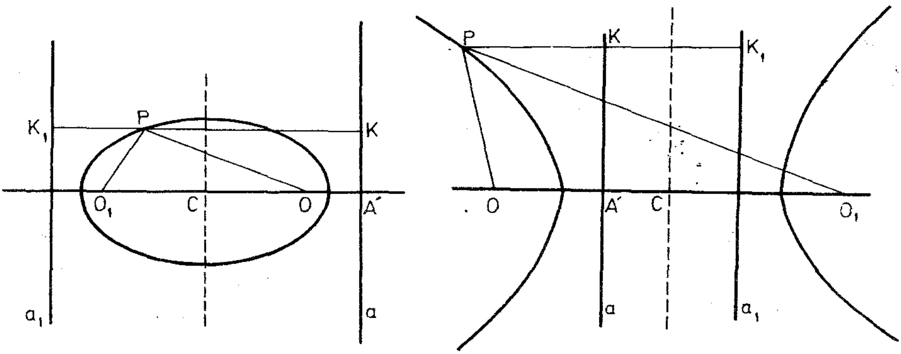
(شکل ۶.۶ ، الف)

می‌باشد؛ نقطهٔ C که برمقطع مخروطی واقع نیست، قطبی آن (یعنی خط بینهایت، l_∞) براین مقطع مخروطی مماس نمی‌باشد و در نتیجه این منحنی سهمی نخواهد بود و بعلاوه، نقطهٔ C که‌قطب‌خط بینهایت است‌دروسط هریك ازپاره خطهای PP_1 و QQ_1 قرار دارد و بنابراین PQP_1Q_1 متوازی‌الاضلاع است. قاطعهای PP_1 و QQ_1 به دلخواه انتخاب شده‌اند، پس C مرکزتقارن منحنی است وآن را مرکز مقطع مخروطی (بیضی وهذلولی) می‌نامند. ازاینرومنحنیهای بیضی وهذلولی مقطعهای مخروطی مرکزدار نامیده می‌شوند.

ازآنچه گذشت قضیهٔ زیرثابت شده است:

قضیهٔ ۱،۶.۶- مقطع مخروطی مرکزدار نسبت به مرکزش متقارن است ، یعنی با تبدیل نیمدور حول مرکزش به خودش تبدیل می‌شود.

هرگاه O کانون و a خط هادی نظیر آن در یك مقطع مخروطی مرکزدار باشد (بند ۴.۶) ، قرینه‌های آنها نسبت به C یعنی نقطهٔ O_1 وخط a_1 نیز به ترتیب کانون و خط هادی نظیرآن درآن مقطع مخروطی خواهد بود ، شکل (۶.۶ ، ب) . همچنین در

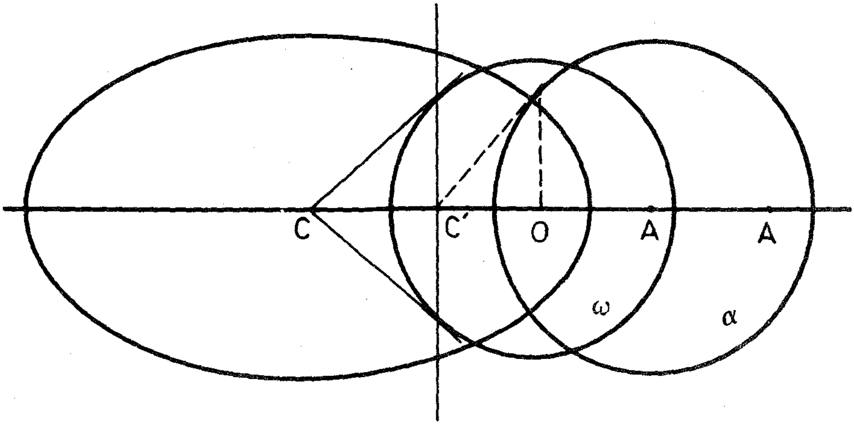


(شکل ۶.۶ ، ب)

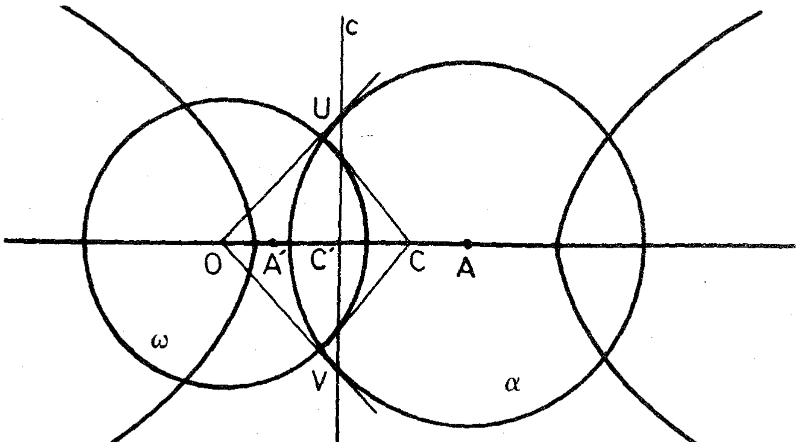
تبدیل نیمدور به مرکز C دایره‌های ω و α از بند(۳.۶) به دایره‌های جدید ω_1 و α_1 تبدیل می‌شوند به‌گونه‌ای که قطبی متقابل α_1 نسبت به ω_1 بازهمان مقطع‌مخروطی به مرکز C خواهد بود.

صرف‌نظر از حالتی‌که O و A برهم منطبق‌باشند،خط OA محور تقارن هرمقطع مخروطی است. بدیهی است که درمقطعهای مخروطی مرکزدار ، مرکز آنها براین محور تقارن قراردارد. بنا براین تبدیل نیمدور به مرکز C را می‌توان ترکیب دوتقارن محوری دانست که محورهای آنها در C برهم عمودند؛ یکی ازاین محورهای تقارن خط OA است ، پس درمقطعهای مخروطی مرکزدار خطی‌که در C عمود بر OA است نیزمحور تقارن منحنی‌می‌باشد. می‌توان گفت‌که مقطع مخروطی مرکزدار دارای‌همان نوع‌تقارن نهایی است که لوزی یا مستطیل دارا می‌باشد.

قطبی C را نسبت به دایرهٔ ω با c نشان می‌دهیم‌که درشکلهای (۶.۶ ، پ) و (۶.۶ ، ت) نموده شده است. نقطهٔ C وخط بینهایت ، l_∞ نسبت به دایرهٔ α' قطب وقطبی یکدیگرند ، خط c ونقطهٔ O نیز باید قطبی و قطب یکدیگر نسبت به دایرهٔ α



(شکل ۶.۶ ، پ)



(شکل ۶.۶ ، ت)

باشند. پس نقطهٔ C قطب خط c است نسبت به دایرهٔ ω در حالی‌که همین خط c قطبی نقطهٔ O نسبت به دایرهٔ α است. اگر C' نقطهٔ برخورد c با OA باشد، نقطهٔ C' ازیک طرف منعکس C نسبت به ω وازطرف دیگرمنعکس O نسبت به α است، یعنی داریم:

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC'}=k^2=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'}$$

$$r^2=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{C'A}$$

بنا براین:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA'}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OC'}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OA}-\overline{C'A}}=\frac{\overline{OA}^{2}}{\overline{OA}^{2}-\overline{OA}\cdot\overline{C'A}}$$

$$=\frac{\overline{OA}^{2}}{\overline{OA}^{2}-r^{2}}=\frac{\varepsilon^{2}}{\varepsilon^{2}-1}$$

برحسب آنکه $1>\varepsilon$ یا $1<\varepsilon$ باشد نسبت بالا مثبت یا منفی خواهد بود. بنا براین دربیضی مرکز C وخط هادی a در دوطرف O قرار دارند درحالی‌که در هذلولی دریك طرف O واقعند، همچنانکه در شکلهای (۶.۶ ، ب) نموده شده است. به عبارت دیگر در بیضی دوکانون در درون منحنی واقعند ومنحنی به تمامی بین دو خط هادی قراردارد. اما در هذلولی دوخط هادی دربخشی از صفحه واقعند که بین دو شاخهٔ هذلولی واقع شده است.

درمکانیك ثابت می‌شود که اگرازمقاومت هوا صرف‌نظر گردد مسیریك گلوله که از دهانهٔ توپ پرتاب گردد کمانی ازسهمی خواهد بود که تعیین کانون آن به‌سادگی میسر می‌باشد. ازآنجاکه می‌توان برای حداقل چند ثانیه گلوله را همچون یك سیارهٔ کوچك تصور کرد، دراین صورت مسیرآن که بنظرمی‌رسد سهمی است درواقع یك بیضی بسیار کشیده خواهد بود که خروج ازمرکزآن بسیارنزدیك به یك می‌باشد. دراین صورت کانون دیگر این بیضی درکجا قراردارد؟ ... درمرکززمین!

تمرینها

۱ــ نقطهٔ P بر بیضی به‌کانونهای O و O_1 تغییر مکان می‌دهد، ثابت کنید که مجموع شعاعهای حامل آن یعنی $OP+O_1P$ مقدار ثابت است (شکل ۶.۶، ب).

۲ــ نقطهٔ P برهذلولی به‌کانونهای O و O_1 تغییرمکان می‌دهد، ثابت کنید که تفاضل شعاعهای حامل آن یعنی $|OP-O_1P|$ مقدارثابت است.

۳ــ ثابت کنیدکه درمقطع مخروطی مرکزدار تصویرهای کانونها برخطهای مماس برمنحنی روی‌دایرهٔ ثابتی (دایرهٔ اصلی) واقعند.

۷.۶ــ تصویر جسم‌نمایی (رسم‌الجسمی) ــ تصویرمرکزی

دربند (۳.۵) ملاحظه کردیم کـه تنها نقطهٔ O مرکز دایرهٔ انعکاس بی دارای منعکس نمی‌باشد. برای ازبین‌بردن این نارسائی، یعنی برای‌آنکه انعکاس یك‌تبدیل نقطه به‌نقطه برای کل‌نقاط صفحه باشد، باافزودن نقطهٔ بینهایت (که‌مبدل انعکاسی نقطهٔ O

است) به‌صفحهٔ اقلیدسی صفحهٔ انعکاسی رابدست آوردیم. به‌عبارت‌دیگر ، صفحهٔ اقلیدسی را به‌صفحهٔ انعکاسی گسترش‌دادیم.

همچنین چنانکه دربند (۱.۶) دیدیم ، درصفحهٔ اقلیدسی تنها نقطه‌ای که‌قطبی‌ندارد نقطهٔ O مرکز دایرهٔ هادی‌است. برای از بین‌بردن این‌نارسایی ، یعنی برای‌آنکه‌تبدیل قطبی‌معکوس نیزهمهٔ نقطه‌های صفحه رادربر گیرد ، خط بینهایت راپه‌صفحهٔ اقلیدسی‌اضافه کردیم و صفحهٔ‌تصویری را بدست‌آوردیم. دراین حالت هم‌صفحهٔ اقلیدسی را به‌صفحهٔ تصویری گسترش‌دادیم.

بنابراین دو روش متفاوت اما متشابه وجود دارد که بدان وسیله می‌توان صفحهٔ اقلیدسی راگسترش داد، دراینجا نکتهٔ‌مهمی وجود دارد که‌خیلی کمتراز آنچه‌لازم بوده به‌آن توجه‌شده است. هر گاه استدلال رانه‌تنها درصفحه بلکه درفضا تعمیم‌دهیم‌ودو گونهٔ بسیار سادهٔ‌گسترش کره روی‌صفحه راموردمقایسه قراردهیم می‌توانیم به‌توجیه دقیقتر دو روش گفته‌شده دست‌یابیم.

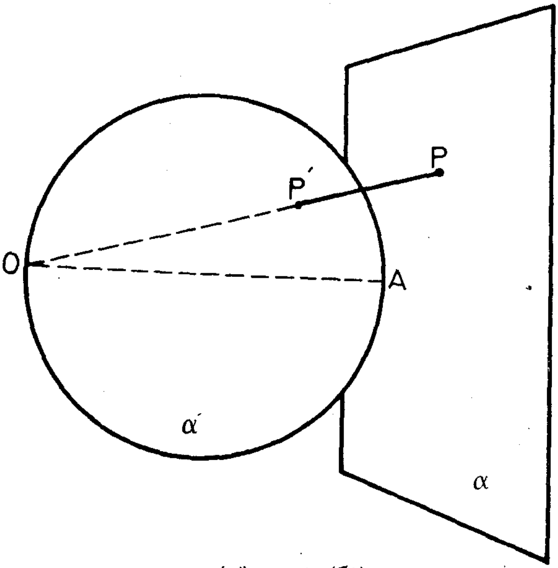
نخست تعریفی‌راکه دربارهٔ انعکاس نسبت به‌یک‌دایره دربند (۳.۵) بکاربردیم در مورد یک‌کره تعمیم‌می‌دهیم: کرهٔ‌به‌مرکز O وبه شعاع k ونقطهٔ P متمایز ازنقطهٔ O رادرنظر می‌گیریم ؛ بنابه‌تعریف، نقطهٔ P' راکه برنیم‌خط OP قرارداشته وفاصلهٔ آن از O طبق رابطهٔ‌زیر مشخص می‌شود منعکس نقطهٔ P می‌نامیم.

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = k^2$$

هر گاه صفحهٔ شکل (۳.۵ ، ب) رامتعلق به‌فضای سه‌بعدی بدانیم وآن‌را حول خط OA دوران‌دهیم ودرضمن صفحه راکرهٔ به‌شعاع بینهایت درنظر بگیریم ، دراین صورت به‌سادگی می‌توانیم نتیجه بگیریم که‌انعکاس هرکره رابه‌کرهٔ دیگرتبدیل می‌کند. بویژه اگر α صفحه‌ای باشد که‌در A برکرهٔ انعکاس ω مماس باشد ، منعکس آن‌کرهٔ α' به‌قطر OA خواهدبود. ازاینرو می‌توانیم باواسطهٔ ω بین‌نقاط صفحهٔ α ونقاط‌کرهٔ α' تناظری برقرار سازیم: اگر P نقطه‌ای ازصفحهٔ α باشد نقطهٔ P' نظیرآن‌عبارت است‌ازنقطهٔ تلاقی OP باکرهٔ α' (شکل ۷.۶ ، الف). برعکس ، نظیر هرنقطهٔ P' ازکرهٔ α' ، به‌استثنای O ، نقطهٔ P ازصفحهٔ α وجوددارد که‌همان نقطهٔ برخورد OP' با α است. دراینجاهم استثنایی وجوددارد که‌برای برطرف کردن آن ، صفحهٔ α را باافزودن یک‌نقطهٔ بینهایت به‌آن به‌صفحهٔ انعکاسی تبدیل می‌کنیم که این یک‌نقطه وضع P خواهدبود وقتی‌که P' روی O واقع‌باشد.

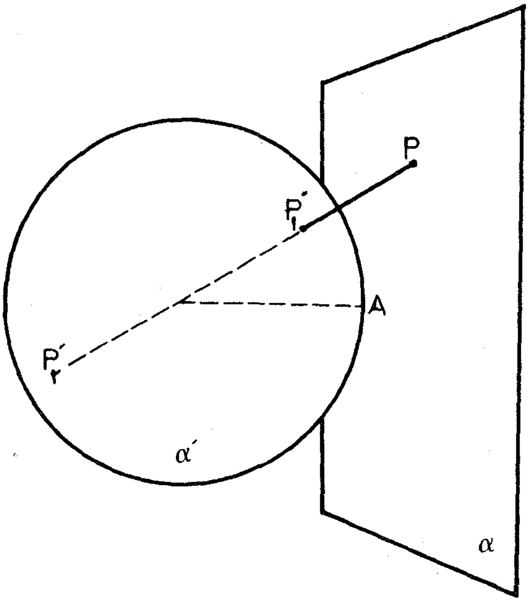
این‌روش نمایش‌کرهٔ α' روی‌صفحهٔ α به تصویرجسم‌نمایی موسوم است. با ملاحظهٔ‌آنکه این‌گونه تصویر شیوهٔ ویژه‌ای ازانعکاس است ، به‌سادگی نتیجه می‌گیریم

که تصویر هردایره بازهم یك‌دایره می‌باشد. منعکس هر کره یك کره (یا یك‌صفحه)است وهردایره فصل مشترك دوکره است ؛ بنا براین منعکس هردایره (به‌هروضعی کـه‌در فضا واقع باشد وحتی اگر برکرهٔ α' قرارداشته باشد) یك‌دایره می‌باشد.



(شکل ۷.۶ ، الف)

برای نمایش کرهٔ α' روی‌صفحهٔ α مماس برآن ، روش‌دیگری وجود داردکـه تصویرمرکزی نامیده‌می‌شود. دراین‌روش نقطهٔ‌دید را مرکزکرهٔ α' اختیار می کنندکه‌وسط OA است. هرصفحه‌ای که‌براین نقطه بگذردکرهٔ α' را دریك دایرهٔ عظیمه‌وصفحهٔ α را دریك‌خط قطع‌می کند: بنابراین هرخط از صفحهٔ α بایك دایرهٔ عظیمه از کرهٔ α' معین‌می‌شود ، همچنین هرنقطه‌از α بایك‌جفت نقطه‌های واقع در دوسر یك قطر از کرهٔ α' مشخص می گردد ، چنانکه درشکل (۷.۶ ، ب) ملاحظه می‌شود دو نقطهٔ P'_1 و P'_2 ازکرهٔ α' نظیرنقطهٔ P ازصفحهٔ α می‌باشند. برعکس ، هـردایرهٔ عظیمه ازکرهٔ α' را ، به‌استثنای دایرهٔ عظیمه‌ای‌که صفحهٔ‌آن با α موازی‌است ، که‌درنظر بگیریم نظیرآن درصفحهٔ α خطی‌وجوددارد که محل برخورد صفحهٔ‌آن‌دایرهٔ عظیمه باصفحهٔ α می‌باشد. دراینجاهم برای ازبین‌بردن استثنا باافزودن یك‌خط بینهایت به‌صفحهٔ α آن‌را به‌صورت صفحهٔ تصویری درمی‌آوریم که‌این‌خط بینهایت نظیردایرهٔ عظیمه‌ای ازکرهٔ α' است که صفحهٔ آن‌باصفحهٔ α موازی‌است. هریك ازنقطه‌های‌این‌خط ــ نقطه‌های بینهایت ــ نظیر یك‌جفت نقطهٔ واقع در دوسرقطری ازدایرهٔ عظیمهٔ مزبور می‌باشند. هـردو خط ازصفحه



(شکل ۶.۷، ب)

یک‌نقطهٔ مشترک دارند ومؤکد آن‌است که‌هردو دایرهٔ‌عظیمه واقع برکره در دونقطه واقع در دوسریک قطر مشترک خواهندبود. درواقع هردوصفحه که برمرکز کره بگذرند در یک‌خط متقاطع می باشند.

با توجه به‌آنچه که‌گفته شد نتیجه می گیریم که‌هریک ازنقاط صفحهٔ تصویری (با درنظر گرفتن نقطهٔ بینهایت) تصویر یک‌جفت نقطه واقع در دوسرقطری ازکره است ؛ از اینرو بادرنظر گرفتن کره به‌صورت مجموعه‌ای از جفت نقاط می‌توان آن‌را به‌صفحهٔ تصویری تبدیل کرد‌که دراین تبدیل هرجفت نقطه از کره به‌یک نقطه از صفحهٔ تصویری تبدیل می‌شود.

ازنظر عملی می‌توان روش تبدیل کره به‌صفحه را در رسم نقشهٔ جغرافیائی کرهٔ زمین روی یک‌صفحه بکاربرد. دراین‌باره هیچیک ازروشهای تصویر جسم‌نمایی و تصویر مرکزی مطلوب واقعی‌نخواهدبود ، اما هریک‌ازآنها دارای‌امتیازهایی‌است. روش‌نخست زاویه‌های بین هردو نیم‌خط به‌مبدأ مشترک رامحفوظ می‌دارد ودرنتیجه به‌عنوان مثال ، دوره‌های‌جزیره‌های کوچک‌تغییرشکل نمی‌دهند. بااستفاده ازروش‌دوم می‌توان کوتاهترین راه بین‌دونقطه ازکره رابه‌صورت خط مستقیم نمایش‌داد.

قبلا دیده‌ایم (درقضیهٔ ۴.۵ ، ۱) که‌انعکاس نسبتهای ناهمساز رامحفوظ می‌دارد.

این ویژگی در تبدیل قطبی معکوس فقط درمورد نقطه‌های واقع بر یک خط وجود دارد. به‌عبارت دقیقتر، نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ واقع بر یک خط p برابر است با نسبت ناهمساز چهار نقطه‌ای که از برخورد قطبیهای نقاط مزبور با هر خط غیر گذرنده بر p، قطب خط p، بدست می‌آیند. اثبات این ویژگی طولانی است ومتأسفانه دراینجا مجال آن وجود ندارد.

خوانندهٔ دقیق که مفاهیم گذشته را درک کرده باشد توانایی آن‌را خواهد داشت که بیان اصولی هندسهٔ تصویری راحدس بزند: این بار قضیه‌های دزارگ، پاپوس و پاسکال را از نقطه‌نظر کاملاً متفاوتی درخواهد یافت، اما بازهم درآنها دوستان قدیمی را بـاز خواهد شناخت.

تمرینها

۱ـ ثابت کنید که تصویر جسم‌نمایی زاویه‌ها رامحفوظ می‌دارد.

۲ـ ثابت کنید که‌در تصویر جسم‌نمایی هر دایرهٔ عظیمه از کرهٔ α' به‌یک‌دایره (یا یک‌خط) ازصفحهٔ α تبدیل می‌شود که بادایرهٔ معینی دردونقطهٔ واقع در دوسر یـک قطر متقاطع می‌باشند.

۳ـ دونقطهٔ P'_1 و P'_2 واقـع در دوسر قطـری متغیر از کـرهٔ α' رادر نظر می‌گیریم وتصویرهای جسم‌نمایی آنهارا روی‌صفحهٔ α با P_1 و P_2 نشان‌می‌دهیم. نوع تبدیلی رابیابید که به‌وسیلهٔ آن‌بتوان درصفحهٔ α از P_1 به‌P_2 رسید.

۴ـ بااستفاده ازتصویر جسم‌نمایی، شش‌دایرهٔ مورد نظر تمرین ۳ از بند (۸.۵) را ازروی شش‌دایرهٔ محاط درشش‌وجه یک مکعب بدست‌آورید.

راهنمائی وحل تمرینها

پاسخش به مغزم چنان راه می‌یابدکه گوئی آب از غربال می گذردا

C.L.Dodgson

بند ۱.۱

۱ـ ارتفاع وارد ازرأس A روی ضلع BC دوپاره‌خط به طولهای $b\cos C$ و $c\cos B$ جدا می‌کند. برحسب آنکه هردوزاویهٔ B و C حاده یااینکه یکی‌ازآنها منفرجه باشد ، این دومقداررا باهم جمع یا ازهم کم کنید.

۲ـ مقادیر $\sin A$ ، $\sin B$ و $\sin C$ را به صورت $\frac{a}{۲R}$ ، $\frac{b}{۲R}$ و $\frac{c}{۲R}$ نوشته‌و ساده کنید.

۳ـ دورابطهٔ زیررا بکارببرید:

$$S(ABC)=\frac{۱}{۲}ab\sin C \quad \text{و} \quad \sin C=\frac{c}{۲R}$$

۴ـ رابطه‌های زیررا ضرب کرده وساده کنید:

$$c=۲p\sin B=\frac{pb}{R} \quad \text{و} \quad b=۲q\sin C=\frac{qc}{R}$$

بند ۲.۱

۱ـ با توجه بـه $BX=XC$ ، $CY=YA$ و $AZ=ZB$ از قضیهٔ سوا استفاده کنید.

۲ـ بااستفاده ازرابطه‌های $BX=c\cos B$ ، $XC=b\cos C$ و غیره قضیهٔ سوا را بکار ببرید.

۳ـ هرگاه O نقطهٔ برخورد BB' با CC' و A_1 نقطهٔ برخورد OA با $A'B'$ باشد، مثلثهای ABC و $A'B'C'$ متشابهند ومی‌توان نوشت:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{OB'}{OB}=\frac{A_1B'}{AB}$$

که پیامدآن همانی بودن A_1 با A' است.

۴ـ زاویه‌های CXA و AXB مکمل یکدیگرند ومجموع عبارتهای کسینوسهای آنها برابربا صفراست.

بند ۳.۱

۱ـ هرگاه یك زاویه ازمثلث منفرجه باشد، آن مثلث درکمانی کوچکتر ازنیمدایره ازدایرهٔ محیطی محاط است ودوارتفاع مثلث ضلع روبرو به زاویهٔ منفرجه را در امتداد آن تلاقی می‌کنند.

۲ـ شکل (۳.۱ ، ب) را درنظرگرفته وپاره خط $A'D$ را موازی و مساوی با BB' رسم‌کنیدکه $A'CDB'$ متوازی‌الاضلاع بوده و E مرکزآن وسط CB' است. دراین صورت ضلعهای مثلث DAA' با میانه‌های مثلث ABC مساوی و موازیند و نتیجه می‌شود:

$$\frac{S(ABC)}{S(DAA')}=\frac{S(CAA')}{S(EAA')}=\frac{CA}{EA}=\frac{۴}{۳}$$

۳ـ اگر G نقطهٔ برخورد دومیانهٔ باهم برابر BB' و CC' باشد، چون BG و CG به ترتیب با دوسوم BB' و CC' برابرند مثلث GBC متساوی‌الساقین است‌و دوزاویهٔ $C'CB$ و $B'BC$ باهم‌برابرند. دومثلث $B'BC$ و $C'CB$ درحالت تساوی دوضلع وزاویهٔ بین با هم برابرند و نتیجه می‌شودکه دو زاویهٔ ABC و ACB باهم برابرند.

۴ـ اگر BE و CF دو ارتفاع باهم برابر باشند، مساحت مثلث برابر است با نصف هریك ازحاصلضربهای $b.BE$ و $c.CF$ وبنابراین $b=c$.

۵ـ با توجه به شکل (۳.۱ ، ت) داریم:

$$\frac{BL}{LC}=\frac{c}{b} \quad \text{و} \quad \ldots$$

۶ـ با بکاربردن قضیهٔ استوارت (تمرین ۴ ازبند ۲.۱) خواهیم داشت:

$$a\left(p^{۲}+\frac{۱}{۴}a^{۲}\right)=\frac{۱}{۲}a(b^{۲}+c^{۲})$$

$$p=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲b^{۲}+۲c^{۲}-a^{۲}}$$

۷ـ قضیهٔ استوارت را بکاربرید با توجه به اینکه داریم:

$$m=kc \text{ و } n=kb \text{ و } k=\frac{a}{b+c}$$

۸ـ پاسخ : $\frac{۱۲\sqrt{۲}}{۷}$

۹ـ هرگاه در شکلهای (۱.۱ ، الف) و (۱.۱ ، ب) ارتفاع CF را رسم کنید ، دومثلث BCJ و FCA متشابه بوده وخواهید داشت:

$$BC \cdot CA=CJ \cdot FC \;؛\; ab=۲Rh_c$$

بند ۴.۱

۱ـ با توجه به‌شکل(۴.۱ ، الف) شعاعهای سه دایره x و y و z است وداریم:

$$y+z=a \text{ و } z+x=b \text{ و } x+y=c$$
$$x+y+z=s \text{ و } \ldots$$

۲ـ قضیهٔ (۲،۴.۱) وتمرین ۳ ازبند ۱.۱ را بکاربرید.

۳ـ قضیهٔ سوا را بکاربرید با توجه به‌آنکه:

$$AY=AZ=x \text{ و } BZ=BX=y \text{ و } CX=CY=z$$

۴ـ نیمسازهای داخلی وخارجی هریك اززاویه‌های مثلث برهم عمودند.

۵ـ داریم:

$$S(ABC)=S(I_aCA)+S(I_aAB)-S(I_aCB)$$
$$=\frac{۱}{۲}(b+c-a)r_a=(s-a)r_a$$

همچنین می‌توان ازتشابه دومثلث AI_aY_a و AIY استفاده کرد ونتیجه گرفت که:

$$\frac{r_a}{r}=\frac{s}{s-a}$$

۶ـ داریم:

$$\frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}=\frac{s-a}{s}+\frac{s-b}{s}+\frac{s-c}{s}=۱$$

بند ۵.۱

۱ـ با توجه به اینکه:

$$\widehat{BCM}=۴۸^\circ=\widehat{CMB} \text{ و } \widehat{CBN}=۱۲^\circ=\widehat{BNC}$$

نتیجه می‌شود که: $BM=BC=CN$

توجه خواهید داشت که I_a مرکز دایرهٔ محاطی خارجی در خارج پاره خط CN ودرداخل پاره خط BM واقع است.

۲ـ دربکاربردن لم (۲،۱،۵.۱) ازقضیهٔ (۱،۵.۱) درمورد نیمسازهای داخلی از این جهت اشتباهی پیش نمی‌آید که دایرهٔ محیطی مثلث BCN که با خط BM در M' برخورد می‌کند M' بین B و M واقع است و نابرابری $BM > BM'$ درست می‌باشد. اما وقتی BM نیمسازخارجی زاویهٔ B باشد M' درخارج B و M قرار می گیرد ونابرابری $BM > BM'$ را نمی‌توان درهرحال درست دانست.

۳ـ ازبرابری $BM=CN$ نتیجه می‌شود:

$$ca\left[۱-\left(\frac{b}{c+a}\right)^۲\right]=ab\left[۱-\left(\frac{c}{a+b}\right)^۲\right]$$

$$a(a+b+c)[(a+b+c)(a^۲+bc)+۲abc](b-c)=۰$$

بند ۶.۱

۱ـ چهار ضلعی $BCEF$ محاطی است و نتیجه می‌شود کـه زاویهٔ B با زاویهٔ AEF برابراست و ...

۲ـ نقطهٔ H بازهم روی نیمسازداخلی زاویهٔ EDF اما روی نیمسازهای‌خارجی زاویه‌های FED و DFE قرارخواهد داشت.

۳ـ پاسخ تمرین قبلی را ملاحظه کنید.

۴ـ داریم:

$$\widehat{HAC}=۹۰^\circ-C \text{ و } \widehat{OAC}=۹۰^\circ-B$$

بند ۷.۱

۲ـ با توجه به شکل (۶.۱ ، الف) داریم:

$$\overline{OA'}^۲=R^۲-\left(\frac{a}{۲}\right)^۲$$

همچنین با فرض $GA'=n$ داریم $AG=2n$ و $AA'=3n$ وبا توجه به تمرین ۶ از بند ۳.۱ داریم:

$$3n=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$$

اکنون قضیهٔ استوارت را برای مثلث OAA' بکارمی‌بریم ؛ خواهیم داشت:

$$3n(\overline{OG}^2+2n^2)=2n\overline{OA'}^2+n\overline{OA}^2=n\left(2R^2-\frac{1}{2}a^2+R^2\right)$$

$$\overline{OA}^2=(3\overline{OG})^2=9R^2-\frac{3}{2}a^2-18n^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$$

۳ــ با فرض $b>c$ وبا توجه به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$\overline{BA}^2-\overline{BD}^2=\overline{AA'}^2-\overline{DA'}^2$$

$$c^2-\left(\frac{a}{2}-\overline{DA'}\right)^2=\left(\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)-\overline{DA'}^2$$

$$\overline{DA'}=\frac{b^2-c^2}{2}$$

۴ــ هرگاه خط اولر با BC موازی باشد با AD دریك سوم ازطول آن برخورد می‌کند ، پس $OA'=\frac{AD}{3}$. اکنون کافی است که AD و OA' را به صورت زیر بنویسیم:

$$AD=b\sin C=2R\sin B\sin C$$
$$OA'=R\cos A=R(\sin B\sin C-\cos B\cos C)$$

بند ۸.۱

۱ــ OA' بانصف AH یعنی با AK برابر است وهمچنین باآن موازی‌است.

۲ــ بنابرآنچه درپایان بند ۶.۱ گفته شد ، EF بر OA و برموازی آن $A'K$ عمود است. بنابراین قطر $A'K$ وتر EF وکمان EF را دروسط آنها قطع می‌کند.

۳ــ مثلث ABC مثلث ارتفاعی مثلث $I_aI_bI_c$ است.

۴ــ مرکزهای دایره‌های متساوی PBC و PCA و PAB را به ترتیب O_a ، O_b و O_c می‌نامیم. هریك از چهار ضلعیهای PO_bAO_c و PO_aCO_b لوزی است. پس مثلثهای PO_bO_a و O_bAC باهم برابرند و $AC=O_cO_a$. همچنین داریم $BA=O_aO_b$ و $CB=O_bO_c$. بنابراین مثلثهای ABC و $O_aO_bO_c$ باهم برابرند

وشعاعهای دایره‌های محیطی آنها نیز باهم برابرند. ازطرفی AP بر O_bO_c که با BC موازی است عمود است ؛ پس AP ، BP و CP ارتفاعهای مثلث ABC می‌باشند و P همان H مرکزارتفاعی مثلث است.

۵- DK بر BC عمود و KA' قطردایرهٔ نه نقطه است. پس این دایره باضلع BC به زاویهٔ زیربرخورد می‌کند:

$$\widehat{DKA'}=\widehat{HKN}=\widehat{HAO}=|B-C|$$

(تمرین ۴ ازبند۱.۶ را ملاحظه کنید).

بند ۱.۹

۱- خط CP راتا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم به گونه‌ای که مثلث BDP متساوی‌الاضلاع باشد. ازتشابه مثلثهای DCB و PCQ نتیجه می‌شود:

$$\frac{DB}{PQ}=\frac{DC}{PC}=۱+\frac{DP}{PC}$$

دوطرف را بر $DB=PB=DP$ تقسیم می‌کنیم. بدست می‌آید:

$$\frac{۱}{PQ}=\frac{۱}{PB}=\frac{۱}{PC}$$

۲- برابری $PC=PD$ به سادگی (از برابر دو مثلث PCB و PAD) نتیجه می‌شود. فرض می‌کنیم که $PD<CD$ دراین صورت زاویهٔ CPD ازهریك از دو زاویهٔ PCD و PDC ودرنتیجه از ۶۰° بزرگتراست وخواهیم داشت:

$$\widehat{DPA}<۷۵^\circ \quad \text{و} \quad AD<PD<CD$$

که خلاف فرض مسئله است. اکنون فرض می‌کنیم $PD>CD$ به همان طریق نتیجه خواهد شد $AD>CD$ کـه باز خلاف فرض مسئله (مربع بودن ABCD) است. بنابراین $PD=CD$.

راه‌حلهای دیگری نیز برای این مسئله وجود دارد. مثلا می‌توان در داخل مربع ، مثلث BQC رابرابربا مثلث APB رسم کردکه نتیجه می‌شود مثلث BPQ متساوی‌الاضلاع است. خط CQ که بر BP عمود است ازوسط BP می‌گذرد ودرنتیجه :

$CP=CB=CD$.

۳- با توجه به شکل رابطه‌های زیررا داریم:

$$\frac{\sin(\delta+\varepsilon)}{\sin\gamma}=\frac{\sin(\delta+\varepsilon)\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\gamma}=\frac{CD}{PC}\cdot\frac{PC}{BC}=\frac{CD}{BC}=\frac{AB}{AD}$$

$$=\frac{AB}{PA}\cdot\frac{PA}{AD}=\frac{\sin(\gamma+\varepsilon)\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\sin\delta}=\frac{\sin(\gamma+\varepsilon)}{\sin\delta}$$

$$\sin\gamma\sin(\gamma+\varepsilon)=\sin\delta\sin(\delta+\varepsilon)$$

$$\cos\varepsilon-\cos(2\gamma+\varepsilon)=\cos\varepsilon-\cos(2\delta+\varepsilon)$$

$$\gamma=\delta$$

۴ـ از D موازی با BC رسم می‌کنیم تا با AB در F برخورد کند. خط CF را رسم می‌کنیم که با BD در G برخورد می‌کند. مثلث BCG متساوی‌الاضلاع است و $BG=BC$. درمثلث متساوی‌الساقین CBE داریم $BE=BC$. بنابراین‌مثلث BGE متساوی‌الساقین بوده ودرنتیجه:

$$\widehat{BGE}=80^\circ \quad و \quad \widehat{FGE}=40^\circ$$

و چون زاویهٔ EFG نیز برابر 40° است پس مثلث FEG متساوی‌الساقین است و $FE=EG$. همچنین داریم $DF=DG$، پس دومثلث GDE و FDE باهم برابرند و DE نیمسازِزاویهٔ FDG بوده وزاویهٔ EDB برابر 30° است.

۵ـ هرگاه D و E نقطه‌های‌تقسیم نیمدایرهٔ به قطر AC باشد وترهای ADو DE و EC ضلعهای شش‌ضلعی منتظم محاطی بوده باهم برابرند و DE با AC موازی است. ضلعهای AB و BC را امتداد می‌دهیم تا با امتداد DE در P و Q برخورد کنند. مثلثهای PAD و QCE متساوی‌الاضلاع وباهم برابرند. پس ضلع PQ از مثلث متساوی‌الاضلاع BPQ به سه پارهٔ برابربخش شده وازآنجا نتیجه می‌گیریم که ضلع AC نیزبه سه پارهٔ برابربخش گردیده است.

بند ۱.۲

۱ـ کمترین مقدارقوت نقطه $-R^2$ ونقطهٔ نظیرآن مرکزدایره است.

۲ـ دایره‌ای است هم مرکزبا دایرهٔ مفروض.

۳ـ t برابراست با طول مماسی که ازآن‌نقطه بردایره رسم می‌شود.

۴ـ داریم:

$$\overline{PT}^2-\overline{PU}^2=\overline{OU}^2-\overline{OT}^2=\overline{OQ}^2-\overline{OT}^2=\overline{QT}^2$$

۵ـ داریم:

$$R(R-2r)=R^2-2rR=d^2 \geqslant 0 \text{ و } R>0 \Longrightarrow R-2r \geqslant 0$$

۶ـ قوت مورد نظر برابراست با:

$$d^2-R^2=-2rR$$

۷ـ هرگاه در شکل (۲.۱ ، پ) P را به جای A و A را به جای X قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\overline{BC}(\overline{PA}^2+\overline{BA}\cdot\overline{AC})=\overline{PC}^2\cdot\overline{BA}+\overline{PB}^2\cdot\overline{AC}$$

$$\overline{BC}(\overline{PA}^2+\overline{CA}\cdot\overline{AB})+\overline{PB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{PC}^2\cdot\overline{AB}=0$$

۸ـ برضلع BC نقطه‌های U و V را انتخاب می‌کنیم که $BU=UV=VC$ باشد. GU با AB و GV با AC موازی است وداریم:

$$\overline{GX}\left(\frac{1}{\overline{GX}}+\frac{1}{\overline{GY}}+\frac{1}{\overline{GZ}}\right)=1+\frac{\overline{VX}}{\overline{VC}}+\frac{\overline{UX}}{\overline{UB}}$$

$$=1+\frac{\overline{VX}-\overline{UX}}{\overline{VC}}=1+\frac{\overline{VU}}{\overline{UV}}=0$$

۹ـ پاسخ : ۱۴۳/۲ کیلومتر.

بند ۲.۲

۱ـ بخشی ازمحوراصلی دودایره‌که دربیرون‌آنها واقع است مکان هندسی مورد نظراست.

۲ـ وسطهای مماسهای مشترك دودایره نقطه‌هایی هستندکه ازآنها مماسهای برابر بردودایره رسم شده است، پس برمحوراصلی دودایره واقعند.

۳ـ ازتشابه‌دومثلث PAB و AQB نتیجه می‌شودکه دوزاویهٔ PBA و AQB باهم برابرند. نقطهٔ Q بر BP قراردارد وداریم:

$$\frac{PB}{AB}=\frac{AB}{QB}$$

همچنین از تشابه دو مثلث AQB و ABR تساوی دو زاویهٔ BAQ و ARB نتیجه شده و R بر AQ واقع بوده وداریم:

$$\frac{AQ}{AB}=\frac{AB}{AR}$$

ازدورابطهٔ بالا داریم:

$$\overline{AB}^{2}=PB\cdot QB=AQ\cdot AR$$

دونقطهٔ A و B ازمرکزدایرهٔ PQR به یك فاصله است و عمود منصف AB محورتقارن این دایره است. بنابراین نقطه‌های P' ، Q' و R' به دایرهٔ PQR تعلق دارند ونقطه‌های برخورد این دایره با خطهای BR ، AP' و AP می‌باشند.

۴ــ معادلهٔ داده شده به صورت زیرنوشته می‌شود:

$$(x-a)^{2}+(y-b)^{2}=a^{2}+b^{2}-c$$

برای‌آنکه این رابطه با معنی باشد باید داشته باشیم:

$$a^{2}+b^{2}-c\geqslant 0 \quad ; \quad c\leqslant a^{2}+b^{2}$$

درحالت $c=a^{2}+b^{2}$ دایره به شعاع صفرخواهد بود.

۵ــ دایرهٔ دلخواهی رسم می‌کنیم کــه مرکزش درخارج خطالمرکزین دو دایره واقع باشد واولی را در A و B ودومی را در C و D قطع کند. محوراصلی‌دودایره ازنقطهٔ برخورد AB و CD می‌گذرد وبرخطالمرکزین دودایره عمود است.

بند ۳.۲

۱ــ مماس مشترك دو دایره با AB در O برخورد می‌کند. دو مثلث OAT و OTB متشابهند و $OT=OP$ ومی‌توان نوشت:

$$\frac{TA}{TB}=\frac{OP}{OB}=\frac{OA}{OP}=\frac{OP-OA}{OB-OP}=\frac{AP}{PB}$$

وبالاخره ازعکس قضیهٔ (۳،۳.۱) استفاده‌کنید.

۲ــ شش مماسی‌که از O مرکـز اصلی سه دایره برآنها رسم مــی‌شوند دارای طولهای برابرند پس‌نقطه‌های تماس‌آنها بادایره‌ها روی‌دایره‌ای به‌مرکز O قراردارند.

بند ۴.۲

۱ــ شکل (۴.۲ ، ب) را درنظربگیرید. نقطه‌های D ، E ، F به ترتیب دروسط HD' ، HE' ، HF' واقعند ودرنتیجه ضلعهای مثلث $D'E'F'$ باضلعهای مثلث‌ارتفاعی موازیند ودومثلث متشابهند.

۲ــ داریم:

$$\widehat{MLN}=\widehat{MLA}+\widehat{ALN}=\widehat{MBA}+\widehat{ACN}=\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{B+C}{2}$$

$$\widehat{NML}=\frac{C+A}{2} \quad \text{و} \quad \widehat{LNM}=\frac{A+B}{2}$$

بند ۵.۲

۱ــ بلی.

۲ــ نقطه‌ای که درسردیگرقطرمرسوم از B واقع است.

۳ــ رأسهای مثلث ، ارتفاعهای مثلث.

۴ــ خطهای PB ، PC ، C_1A_1 و A_1B_1 را رسم کنید. چهار گوشه‌های A_1PB_1C و A_1BC_1P محاطی‌اند و:

$$\widehat{A_1B_1P}=\widehat{A_1CP}=\widehat{BCP}=\widehat{C_1BP}=\widehat{C_1A_1P}$$

$$\widehat{PA_1B_1}=\widehat{PCB_1}=\widehat{PBC}=\widehat{PBA_1}=\widehat{PC_1A_1}$$

دومثلث PA_1B_1 و PC_1A_1 متشابهند وازآنجا:

$$\overline{PA_1}^2=\overline{PB_1}\cdot\overline{PC_1}$$

بند ۶.۲

۱ــ قضیه‌های (۱،۶.۲) و (۲،۶.۲) را با شرط $AB=BC=CA$ بکار ببرید.

۲ــ قضیهٔ بطلمیوس را برای چهار ضلعیهای $PABC$ و $PDAB$ بکار ببرید و نتیجه بگیرید:

$$PA+PC=PB\sqrt{2} \quad \text{و} \quad PB+PD=PA\sqrt{2}$$

۳ــ ازشکل نتیجه می‌شود که:

$$\widehat{QPR}=\widehat{QAR}=\widehat{CAD}=\widehat{ACB}$$

$$\widehat{PRQ}=\widehat{PAQ}=\widehat{BAC}$$

دومثلث PQR و CBA متشابهند وبا بکاربردن قضیهٔ بطلمیوس نتیجه می‌شود:

$$AP\cdot RQ+AR\cdot QP=AQ\cdot RP$$
$$AP\cdot AB+AR\cdot BC=AQ\cdot AC$$

بند ۷.۲

۱ــ اگر OH خط اولرنظیرمثلث ABC (شکل ۷.۱ ، الف) و PP' قطری از دایرهٔ محیطی این مثلث باشد ، بنا به قضیهٔ (۲،۷.۲) خط سمسن نقطه‌های P و P' با HP و HP' در M و M' وسطهای آنها برخورد می‌کند. بنا به قضیهٔ(۲،۸.۱)نقطه‌های O ، M ، M' و N کــه وسطهای PP' ، HP ، HP' و OH می‌باشند ، نقطهٔ N

همچنین وسط MM' است . همچنین شعاع دایرهٔ نه نقطه بنابه قضیهٔ (۱،۸.۱) برابر است با:

$$NM=\frac{۱}{۲}OP=\frac{۱}{۲}R$$

پس $M'M$ قطری از دایرهٔ نه‌نقطه است. هرگاه X نقطهٔ برخورد خطهای سمسن باشد ، زاویهٔ MXM' قائمه است (قضیهٔ ۱،۷.۲) وبنابراین X روی دایرهٔ نه نقطه واقع است.

۲ــ درمثلث متساوی‌الاضلاع مرکزهای دایره‌های محیطی و نه‌نقطه برهم واقعند.

بند ۸.۲

۱ــ همان اثبات قضیهٔ پروانه‌را با اندك تغییراتی درعلامات بکار ببرید.

۲ــ مرکزدایره را با O ونقطهٔ برخورد AP با HT را به X می‌نماییم . دو مثلث AHX و ABP همچنین دومثلث HTB و TOP متشابهند ودرنتیجه:

$$\frac{HX}{AH}=\frac{BP}{AB} \quad \text{و} \quad \frac{HT}{HB}=\frac{TO}{TP}$$

$$\frac{HX}{HT}=\frac{HX\cdot HT}{HT^{۲}}=\frac{HX\cdot HT}{AH\cdot HB}=\frac{BP\cdot TO}{TP\cdot AB}=\frac{۱}{۲}$$

۳ــ با فرض $b>c$ روی BC نقطهٔ X را به گونه‌ای می گزینیم که:

$$BX'=XC=s-c$$

در نتیجه:

$$XA'=A'X'=\frac{b-c}{۲}$$

ارتفاع AD را رسم می‌کنیم. بنابه تمرین ۳ ازبند ۷.۱ داریم:

$$DA'=\frac{b^{۲}-c^{۲}}{۲a}$$

$$DX'=DA'+A'X'=\frac{b^{۲}-c^{۲}}{۲a}+\frac{b-c}{۲}=\frac{s(b-c)}{a}$$

$$AD=\frac{۲S(ABC)}{a}=\frac{۲sr}{a}$$

$$\frac{DX'}{AD}=\frac{b-c}{۲r}=\frac{XA'}{r}=\frac{XA'}{IX}$$

بنابراین دومثلث ADX' و IXA' متشابهند و AX' با IA' موازی است. بنابراین خط IA' ازوسط XX' همچنین ازوسط AX می‌گذرد.

بند ۹.۲

۱ـ خطهای UX و VY و WZ نیمسازهای زاویه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع XYZ می‌باشند.

۲ـ باید $A=۱۰۸^\circ$ و $B=C=۳۶^\circ$.

۳ـ نقطه‌های A ، Y' و Z' دایره را به سه کمان برابر تقسیم می‌کنند. همچنین Z و Y کمان $Y'Z'$ را به سه بخش برابر تقسیم می‌کند.

۴ـ با توجه به شکل (۹.۲ ، ب) خواهیم داشت:

$$\widehat{BZX}=۶۰^\circ+\alpha \quad و \quad \widehat{BXC}=۱۲۰^\circ+\alpha$$

$$\frac{ZX}{\sin\beta}=\frac{BX}{\sin(۶۰^\circ+\alpha)} \quad و \quad \frac{BX}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin(۱۲۰^\circ+\alpha)}$$

$$=\frac{۲R\sin۳\alpha}{\sin(۶۰^\circ-\alpha)}$$

$$ZX=\frac{۲R\sin۳\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin(۶۰^\circ+\alpha)\sin(۶۰^\circ-\alpha)}=\frac{۴R\sin\alpha(۳-۴\sin^۲\alpha)\sin\beta\sin\gamma}{\cos۲\alpha-\cos۱۲۰^\circ}$$

$$=۸R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

۵ـ طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع XYZ را واحد می‌گیریم. داریم:

$$BC=Y'Z'=۳ \quad و \quad BY'=CZ'=\sqrt{۳}$$

$$tg\,\widehat{CBX}=tg\,\widehat{CBZ'}=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \quad و \quad tg\,\widehat{ZBY'}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\widehat{CBX}=\widehat{ZBY'}=۳۰^\circ$$

بند ۱.۳

۱ـ با توجه به شکل (۱.۳ ، ب) ملاحظه می‌شود که:

$$PS=QR=\frac{BD}{۲}$$

$$PS+QR=BD \quad و \quad PQ+RS=AC$$

۲ـ اگر $ABCD$ چهارگوشهٔداده شده و X و Y به‌ترتیب وسطهای AC و BD باشد ، کافی است که تمرین ۶ از بند ۳.۱ را برای مثلثهای ABC ، CDA و

BDX بکاربریم. (توجه خواننده به این نکته جلب می‌شود که «هرچهار گوشه» که درصورت مسئله بیان شده است چهار گوشهٔ چپ را نیزدربرمی‌گیرد).

۳ـ ازتمرین قبل استفاده می‌شود با این تفاوت‌که $XY=0$ است.

۴ـ قضیهٔ بطلمیوس را بکاربرید.

بند ۲.۳

۱ـ اولا ازاین ویژگی استفاده‌کنید‌که اگراز یك نقطه دو مماس بردایره‌ای رسم کنیم طولهای‌آنها باهم برابرند. ثانیاً قضیهٔ (۲،۲.۳) را بکاربرید با توجه به‌اینکه:

$$s=a+c=b+d$$

۲ـ پاسخ : ۸۴ ، $۴\sqrt{۲۶}$

۳ـ پاسخ :

$$r=\frac{S(ABC)}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

۴ـ با توجه به تمرین ۵ از بند ۴.۱ وتمرین ۳ ازبند ۱.۱ داریم:

$$r_b+r_b+r_c-r=S(ABC)\left[\frac{۱}{s-a}+\frac{۱}{s-b}+\frac{۱}{s-c}-\frac{۱}{s}\right]$$

$$=\frac{S(ABC)abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{abc}{S(ABC)}=۴R$$

$$S(I_aI_bI_c)=S(I_aCB)+S(I_bAC)+S(I_cBA)+S(ABC)$$

$$=\frac{۱}{۲}(ar_a+br_b+cr_c)+sr$$

$$=\frac{۱}{۲}s(r_a+r_b+r_c-r)-\frac{۱}{۲}(s-a)r_a$$

$$-\frac{۱}{۲}(s-b)r_b-\frac{۱}{۲}(s-c)r_c+۳sr$$

$$=\frac{۱}{۲}s\cdot ۴R-\frac{۳}{۲}S(ABC)+\frac{۳}{۲}S(ABC)$$

$$=۲sR$$

۵ـ داریم:

$$K=\frac{abn}{۴R}+\frac{cdn}{۴R}=\frac{(ab+cd)n}{۴R}=\frac{lmn}{۴R}$$

۶ـ درحالت $d=0$ داریم:

$$l=a \text{ و } m=b \text{ و } n=c \text{ و } K=\frac{abc}{4R}$$

۷ـ مساحت را یك بار با استفاده از تمرین ۳ از بند ۱.۱ برای دو مثلث شکل (۲.۳ ، ب) وافزودن‌آنها به هم بدست‌آورید و باردیگر‌با استفاده ازهمان روش اما برای دومثلث قطر EF بدست آورید. آنگاه‌آنها را در هم ضرب‌کرده و قضیهٔ بطلمیوس را بکار ببرید.

۸ـ کمانهایی را کـه از برخورد نیمسازها با دایره بوجود می‌آیند باهم مقایسه کنید.

۹ـ از P عمودهایی برضلعهای مستطیل رسم‌کنید وقضیهٔ فیثاغورس را چهار بار بکاربیرید. (به سادگی می‌توان دریافت‌که P می‌تواند درخارج از صفحهٔ مستطیل نیز واقع باشد).

۱۰ـ اگر $ABCD$ چهار گوشهٔ محاط دردایرهٔ به قطر d و P نقطه‌ای ازدایره باشد ، باتوجه به‌تمرین ۹ ازبند ۳.۱ حاصل‌ضرب فاصله‌های P از AB و CD برابر است با:

$$\frac{PA \cdot PB}{d} \cdot \frac{PC \cdot PD}{d}=\frac{PB \cdot PC}{d} \cdot \frac{PD \cdot PA}{d}$$
$$=\frac{PA \cdot PC}{d} \cdot \frac{PB \cdot PD}{d}$$

بند ۳.۳

۱ـ قطرهای CP و CQ ازدومربعی راکه روی ضلعهای BC و CA ازمثلث ساخته شده‌اند رسم‌کنید. همچنین مثلث قائم‌الزاویه ومتساوی‌الساقین BAR را به‌وتر AB رسم‌کنید. باتوجه به‌تشابه مثلثهای PCB ، CQA و BAR ازقضیه‌های(۳.۳.۳) و (۵.۳.۳) استفاده‌کنید.

۲ـ الف : خطهای PO_1 ، QO_2 و RO_3 عمود منصفهای‌ضلعهای مثلث ABC می‌باشند.

ب : هرگاه X ، Y ، Z نقطه‌های برخورد خطهای AO_1 ، BO_2 ، CO_3 با ضلعهای مثلث ABC باشد ، داریم:

$$\frac{BX}{XC}=\frac{S(ABO_1)}{S(CAO_1)}=\frac{c\sin(B+30^\circ)}{b\sin(C+30^\circ)}$$

برای نسبتهای $\frac{CY}{YA}$ و $\frac{AZ}{ZB}$ نیزمقدارهای متشابه بدست می‌آید وازآنجا ازعکس قضیهٔ سوا استفاده می‌شود.

پ : ازتساوی دومثلث PCA و BCQ تساوی $PA=BQ$ نتیجه می‌شود.
همچنین داریم:

$$BQ=CR \text{ و } \widehat{PFC}=\widehat{PBC}=۶۰^\circ$$

به روش مشابه خواهیم داشت:

$$\widehat{CFQ}=۶۰^\circ \text{ و } \widehat{QFA}=۶۰^\circ$$

از جمع طرفین رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود که زاویهٔ PFA برابر با ۱۸۰° است ، یعنی نقطهٔ F برخط PA قراردارد. به‌همین‌ترتیب‌ثابت می‌شود که نقطهٔ F برخطهای BQ و CR نیزقراردارد. یعنی سه‌خط AP ، BQ و CR در F متقاربند وشش‌زاویهٔ ۶۰° می‌سازند.

۳ــ با روشی مشابه با آنچه که درقسمت ب ازتمرین ۲ گفته شد عمل کرده وازعکس قضیهٔ سوا استفاده کنید.

۴ــ شکلهای (۳.۳ ، ب) و (۳.۳ ، پ) را با هم و به صورت یك شکل درنظر می‌گیریم . شش مثلث $BO_۱N_۱$ ، $CN_۱O_۱$ ، $CO_۲N_۲$ ، $AN_۲O_۲$ ، $AN_۳O_۳$ و $BO_۳N_۳$ متساوی‌الاضلاعند . همچنین شش مثلث $AN_۳O_۲$ ، $AO_۳N_۲$ ، $O_۳BN_۱$ ، $N_۳BO_۱$ ، $N_۲O_۱C$ ، $O_۲N_۱C$ با مثلث ABC مستقیماً متشابهند وبا یکدیگربرابرند. بنابراین خواهیم داشت:

$$N_۳O_۲=O_۳N_۲=BN_۱=BO_۱=O_۱C=N_۱C=\frac{a}{\sqrt{۳}}$$

$$N_۱O_۳=O_۱N_۳=CN_۲=CO_۲=O_۲A=N_۲A=\frac{b}{\sqrt{۳}}$$

$$N_۲O_۱=O_۲N_۱=AN_۳=AO_۳=O_۳B=N_۳B=\frac{c}{\sqrt{۳}}$$

$$O_۱\widehat{BO}_۳=O_۱\widehat{BN}_۱+N_۱\widehat{BO}_۳=۶۰^\circ+B$$

$$B\widehat{O_۳N}_۲=B\widehat{O_۳A}-N_۲\widehat{O_۳A}=۱۲۰^\circ-B$$

بنابراین چهارگوشهٔ $BO_۱N_۲O_۳$ (که‌دوضلع روبرویش باهم برابرند)متوازی‌الاضلاع است. هرگاه‌وسط $O_۲O_۳$ را با X و وسط CA (که همچنین‌وسط $O_۲N_۲$ است)را با B' نشان دهیم ، نتیجه می‌شود که XB' با $O_۳N_۲$ و $BO_۱$ موازی است. چون

BO_1 دوبرابر XB' است، خطهای O_1X و BB' در G برخورد می‌کنند به‌گونه‌ای که: $O_1G=2GX$ و $BG=2GB'$. اما O_1X و BB' میانه‌های مثلثهای $O_1O_2O_3$ و ABC می‌باشند، پس G مرکز ثقل مشترك دومثلث مزبوراست. هرگاه متوازی‌الاضلاع $BN_1O_2N_3$ را به جای متوازی‌الاضلاع $BO_1N_2O_3$ قراردهیم با روش مشابه نتیجه خواهد شد که G همچنین مرکز ثقل مثلث $N_1N_2N_3$ است.

بند ۴.۳

۱ــ اگر AX، BY، CZ نیمسازهای خارجی زاویه‌های مثلث ABC باشند داریم:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}\cdot\frac{\overline{CY}}{\overline{AY}}\cdot\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}}=\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}=+1$$

۲ــ اگر AX' و BY' دونیمسازداخلی دوزاویه و CZ نیمسازخارجی زاویهٔ دیگر باشد، داریم:

$$\frac{\overline{BX'}}{\overline{CX'}}\cdot\frac{\overline{CY'}}{\overline{AY'}}\cdot\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}}=\left(-\frac{c}{b}\right)\left(-\frac{a}{c}\right)\frac{b}{a}=+1$$

بند ۵.۳

۱ــ اگر AC و BD باهم موازی باشند، چهار ضلعیهای $ABDE$ و $CDFA$ متوازی‌الاضلاعند ونتیجه می‌شودکه $BD=AE$ و $DF=CA$ وازجمع این دورابطه نتیجه می‌شودکه $BF=CE$. بنابراین $EFBC$ نیز متوازی‌الاضلاع است و EF با BC موازی است.

اگر AC و BD دریك نقطهٔ O مشترك باشند، چون داریم:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OE}{OD} \quad \text{و} \quad \frac{OC}{OD}=\frac{OA}{OF}$$

خواهیم داشت:

$$OB\cdot OE=OA\cdot OD=OC\cdot OF$$

$$\frac{OE}{OF}=\frac{OC}{OB}$$

۲ــ هرگاه R نقطهٔ برخورد AB و DE باشد، بنابه قضیهٔ پاپوس سه نقطهٔ M، N، R بریك خط راست واقعند یعنی سه خط AB، DE، MN متقاربند.

۳ـ بنا به قضیهٔ پاپوس خط MN از مرکز متوازی‌الاضلاع می‌گذرد، پس روی ضلعهای روبرو پاره خطهایی پدید می‌آورد که نظیر به‌نظیر باهم برابرند.

۴ـ پاسخ : نه نقطه ؛ نه خط ؛ برهرنقطه سه خط می‌گذرد ؛ روی هرخط سه‌نقطه واقع است.

بند ۶.۳

۱ـ هرگاه دومثلث PQR و P′Q′R′ به مرکز O همسان باشند وعلاوه‌برآن QR با Q′R′ و RP با R′P′ موازی باشد، داریم:

$$\frac{OQ}{OQ'}=\frac{OR}{OR'}=\frac{OP}{OP'}$$

بنابراین PQ با P′Q′ موازی‌است.

۲ـ پاسخ : ده‌نقطه ؛ ده‌خط ؛ بریك نقطه سه‌خط می‌گذرد ؛ روی هرخط سه‌نقطه واقع‌است.

۳ـ الف: OQR و P′FE

ب: OQ′R′ و PFE

پ: ERR′ و FQQ′

۴ـ رأسهای هرپنج‌ضلعی روی‌ضلعهای پنج‌ضلعی دیگر واقعند. روی‌شکل کلاً شش جفت پنج‌ضلعی باهمان وضعیت یافت می‌شود، مثل RPP′Q′D و EFQOR′

۵ـ مثلث PQR رادرنظر می‌گیریم کـه‌رأسهای Q و R ازآن‌روی e و f، خطهای داده‌شده، واقع‌باشند. نقطه‌های D و E را برامتدادهای QR و RP انتخاب می‌کنیم‌ونقطهٔ برخورد DE و QP را F می‌نامیم. نقطهٔ Q′ را بر e اختیارمی‌کنیم و نقطهٔ برخورد DQ′ رابا f به R′ نشان مـی‌دهیم. خطهای ER′ و FQ′ در P′ برخورد می‌کنند. خط PP′ که‌رسم شود باخطهای e و f متقارب می‌باشد.

درحالتی‌که دوخط e و f موازی باشند، خط PP′ که‌باروش بالابدست‌می‌آید نیز باآنها موازی خواهدبود.

بند ۷.۳

۱ـ ضلعهای AB، CD، EF راامتداد می‌دهیم تااز برخورد آنها بایکدیگرمثلث UVW پدیدآیـد که A و B بر UV، C و D بر VW، E و F بر WU واقـع باشند. چون UE=AD=FW نتیجه‌می‌شودکه UF=EW=BC. پس BCFU متوازی‌الاضلاع استو CF با AB موازی‌است. هرگاه X و Y نقطه‌هـای برخورد

BE با CF و AD باشد، CDEX و BCDY متوازی‌الاضلاعند و A′ و F′ مرکز های آنهاکه وسطهای DB و DX می‌باشند روی خطی موازی با BX و AF قرار دارند وداریم:

$$AF = BX = ۲F'A'$$

بنابراین AA′ و FF′ در G برخورد می‌کنند به‌گونه‌ای که:

$$AG = ۲GA' \text{ و } FG = ۲GF'$$

اما AA′ و FF′ میانه‌های مثلثهای ACE و BDF می‌باشند، پس G مرکز ثقل هریك ازاین دومثلث است.

۲ــ پاسخ : شش گونه

بند ۸.۳

۱ــ فرض می‌کنیم پنج‌رأس A، B، C، D و E ازشش‌ضلعی ABCDEF روی‌یك دایره واقع باشند ونقطهٔ برخورداین دایره را باضلع AF علاوه‌بر A به F′ نشان می‌دهیم. همچنین فرض‌می‌کنیم که خطهای AB و DE در L، خطهای CD و FA در M، خطهای BC و EF در N برخورد کرده وسه‌نقطهٔ L، M، N بریك خط راست واقع‌باشند. بنا به‌قضیهٔ پاسکال هر یك از خطهای EF و EF′ باید بر نقطهٔ N (نقطهٔ برخورد BC با LM) بگذرند. بنابراین F′ بر F واقع‌است.

۲ــپنج‌ضلعی ABCDE رامی‌توان‌به‌صورت‌شش‌ضلعی AABCCE یابه‌صورت شش‌ضلعی ABCCEA درنظر گرفت وازقضیهٔ پاسکال استفاده‌کرد.

بند ۹.۳

۱ــ چهارضلعی رابه‌صورت شش‌ضلعی BQCEPF درنظربگیرید.

۲ــ خطهای AC، BE، QF.

۳ــ شکل (۴.۱، الف) رابه‌صورت شش‌ضلعی AZBXCY درنظربگیرید.

بند ۱.۴

۱ــ پاره‌خط a رابه‌صورت یك‌بردار درنظر گرفته ومثلث ABC را به‌بردار a یك‌بار درجهت مثبت وباردیگر درجهت‌منفی انتقال‌دهیدتامثلثهای A′B′C′ و A″B″C″ بدست‌آیند. آنگاه نقطهٔ برخورد AB و A″C″ رابه‌نقطهٔ برخورد AC و A′B′ وصل کنید.

۲ـ شکل سنگفرش ازآجرهای به‌شکل مثلث متساوی‌الاضلاع بدست می‌آید که در هررأس آن شش‌مثلث درکنارهم قرارگرفته‌اند.

بند ۲.۴

۱ـ دورانهای به‌زاویهٔ 90° وبه‌مرکزهای مربعها را درنظر بگیرید.

۲ـ الف: ازبرابری $\frac{CX}{b}=\frac{a}{a+b}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{CX}{XA}=\frac{CX}{b-CX}=\frac{a}{a+b-a}=\frac{a}{b}$$

همچنین خواهیم‌داشت:

$$\frac{BY}{YC}=\frac{a}{b} \text{ و } \frac{AH}{HB}=\frac{S(CAH)}{S(CHB)}=\frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{CX}{XA}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{AH}{HB}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b^2}{a^2}=1$$

بنابراین بنا به‌قضیهٔ سوا سه‌خط AI ، BJ و CH متقاربند.

ب: روی‌مثلث ABC متوازی‌الاضلاع ABFC رامی‌سازیم‌که M وسط BC مرکزآن می‌باشد. باتوجه به‌تمرین قبل (تمرین۱) نتیجه خواهد شدکـه $MO_2=MO_3$ وخطهای حامل این دوپاره‌خط برهم عمودند. دوپاره خط MO_1 و MC نیزباهم‌برابر وبرهم‌عمودند. دوران‌به‌مرکز M وبه‌زاویهٔ 90° مثلث MO_1O_2 رابرمثلث MCO_3 منطبق می‌سازد.

پ: مستطیل $KCGC'$ و متوازی‌الاضلاعهای $DAJA'$ و $IBEB'$ را در نظر بگیرید. باتوجه به‌دورانهای به‌زوایه‌های $+90^\circ$ و -90° وحول نقطه‌های O_1 ، O_2 ، O_3 نتیجه می‌شودکـه شش‌مثلث $B'IB$ ، $C'CG$ ، $CC'K$ ، $JA'A$. DAA' و BEB' بـا مثلث ABC مستقیماً برابرند. ازاینجا نتیجه‌می‌شودکه نقطه‌های U ، V ، W به‌ترتیب مرکزهای مستطیل ودو متوازی‌الاضلاع می‌باشند.

۳ـ یك‌رأس‌مثلث راتعیین کنید و دوران‌حول این رأس‌وبه‌زاویهٔ 60° راانجام‌دهید.

بند ۳.۴

۱ـ تقارن مرکزی یکی ازدایره‌ها رانسبت به‌نقطهٔ A بدست‌آورید وازنقطهٔ‌تلاقی آن بادایرهٔ دیگر به A وصل کنید.

۲ـ اگر O و r به‌ترتیب مرکز وشعاع دایرهٔمفروض‌باشند، دودایره یکی به‌مرکز

A وبه‌شعاع r ودیگری به‌مرکز O وبه‌شعاع ۲r رسم‌کنیدکه یکدیگر را در P و Q قطع‌می‌کنند. از A به‌وسط OP (یا OQ) وصل‌کنید.

۳ـ تقارن نسبت به‌وسط یکی‌از قطرها رادرنظر بگیرید:

بند ۴.۴

۱ـ بنابه‌ویژگیهای مثلث ارتفاعی ، نقطهٔ P رابایددرپای ارتفاع وارد از رأس C برگزید.

۲ـ باتوجه به‌داده‌های مسئله، طول ارتفاع مثلث ثابت‌است، پس‌اگر AB قاعدهٔ مثلث‌باشد ، رأس C برخط Δ موازی‌با AB واقع‌است. بنابرآنچه دربند ۴.۴ گفته شده ، برای‌آنکه AC+CB می‌نیمم‌باشد لازم وکافی است‌که C نقطهٔ برخورد Δ با خطی باشدکه قرینهٔ A نسبت‌به Δ را به B وصل می‌کند. دراین حال مثلث ACB متساوی‌الساقین خواهدبود.

۳ـ محور تقارن خطی خواهد بودکه از A و از وسط خط‌المرکزین دو دایره می‌گذرد.

بند ۶.۴

۱ـ یکی‌از راه‌حلهای ممکن شامل مرحله‌های زیراست:

(۹ ، ۱ ، ۲) ، (۵ ، ۵ ، ۲) ، (۵ ، ۰ ، ۷)

(۰ ، ۵ ، ۷) ، (۰ ، ۰ ، ۱۲) ، (۶ ، ۰ ، ۶)

(۱ ، ۵ ، ۶) ، (۱ ، ۰ ، ۱۱) ، (۰ ، ۱ ، ۱۱) .

۲ـ نخست پیمانه‌های ۱۱ لیتری‌و ۵ لیتری راپرمی‌کنند. آنگاه ۸ لیتر مانده‌را به‌یکی ازدزدها می‌دهند. اکنون بایدمسئلهٔ به‌صورت [۵،۱۱،۱۳،۱۶] راحل‌کرد که راه حل‌آن شامل چهار مرحله‌است.

۳ـ بادرنظر گرفتن شکل (۹.۱ ، ب) وباتوجه به‌داده‌های مسئله ، دوچهار ضلعی متشابه AC_1PB_1 و $AB'_1P'C'_1$ راخواهیم داشت که‌باهم متشابهند وازآنجا تساوی زاویه‌های مورد نظر نتیجه‌می‌شود.

بند ۷.۴

۱ـ مکان مطلوب دایره‌ای است‌که شعاع‌آن‌نصف شعاع دایرهٔ ثابت است ومرکز آن وسط پاره خط واصل بین نقطهٔ ثابت ومرکزدایرهٔ ثابت می‌باشد.

۲ــ روی ضلع BC ازمثلث ودرخارج آن مربع $CBED$ را می‌سازیم. نقطه‌های برخورد خطهای AD و AE با ضلع BC دورأس مربع مطلوب می‌باشند.

بند ۸.۴

۱ــ هرگاه $AB'C'$ یك وضع دلخواه ازمثلثی باشد که مبدل تشابهی مثلث ABC به مرکز A است و B' بر BC واقع باشد، دومثلث ACC' و ABB' متشابهند و نتیجه می‌شود که:

$$\widehat{ACC'}=\widehat{ABB'}=\widehat{ABC}$$

۲ــ با توجه به مجموعهٔ پاره خطهای برابرمذکوردرحل تمرین ۴ ازبند ۳.۳ملاحظه می‌شودکه دوران به مرکز G وبه زاویهٔ 120° (که O_1 را به O_2 و O_2 را به O_3 و O_3 را به O_1 تبدیل می‌کند) نقطهٔ N_3 را به N_2 و N_2 را به N_1 و N_1 را به N_3 تبدیل می‌کند. بنابراین تبدیلی تشابهی وجود داردکه O_1، O_2، O_3 را به ترتیب به N_1، N_2، N_3 تبدیل می‌کند. این تبدیل تشابهی که درجهت معکوس است ترکیب یك تجانس با یك تقارن خواهد بود.

بند ۹.۴

۱) $x'=x+a$ ، $y'=y+b$

۲) $x'=-x$ ، $y'=y$

۳) $x'=y$ ، $y'=x$

۴) $x'=-x$ ، $y'=-y$

۵) $x'=kx$ ، $y'=ky$

۶) $x'=-ky$ ، $y'=kx$

۷) $x'=x+a$ ، $y'=-y$

۸) $x'=kx$ ، $y'=-ky$

۹) $x'=x^3$ ، $y'=y$

۰) $x'=x$ ،

$$y'=\begin{cases} y & \text{اگر } x\geqslant 0 \\ -y & \text{اگر } x<0 \end{cases}$$

بند ۱.۵

۱ــ داریم:

$AC|\ |BD$ ، $AC|\ |DB$ ، $CA|\ |BD$ ، $CA|\ |DB$ ، $BD|\ |AC$ ، $BD|\ |CA$ ، $DB|\ |AC$ ، $DB|\ |CA$.

بند ۲.۵

۱ـ داریم:

$$(BADC)=\frac{BD\cdot AC}{BC\cdot AD}=\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}=(ABCD)$$

تساویهای دیگر به روش مشابه بدست می‌آیند.

۲ـ الف: ۱ ، ب: ۲ ، پ: ۳ ، ت: ۱

بند ۳.۵

۱ـ شکل حاصل همانند یك گل از چهار نیمدایرهٔ متساوی که روی ضلعهای یك مربع و درخارج آن رسم شده باشند تشکیل می‌شود.

۲ـ باید O را درمرکز دایرهٔ محاطی داخلی یا خارجی انتخاب کرد.

۳ـ الف: دایرهٔ به‌مرکز P وبه شعاع PO را رسم می‌کنیم که با دایرهٔ ω دردو نقطهٔ A و B برخورد می‌کند. به مرکزهای A و B دودایره چنان رسم می‌کنیم که بر O بگذرند. نقطهٔ برخورد دیگر این دودایره منعکس نقطهٔ P است.

ب: با معلوم بودن نقطهٔ O ویك نقطهٔ P_1 می‌توان با استفادهٔ فقط از پرگار، نقطهٔ P_2 را چنان یافت که $OP_2=2OP_1$ باشد (دایرهٔ به مرکز P_1 وبه شعاع P_1O را رسم می‌کنیم وآن را با رسم دایره‌های به همان شعاع به شش کمان برابر تقسیم می‌کنیم). همچنین می‌توان با رسم دایرهٔ به مرکز P_2 وبه شعاع P_2P_1 وتقسیم آن به‌شش قسمت نقطهٔ P_3 را یافت که $OP_3=3OP$ باشد. با تکرار عمل می‌توان نقطهٔ P_n را یافت که $OP_n=nOP_1$ باشد. هرگاه $OP_1>\frac{k}{2n}$ باشد خواهیم داشت $OP_n>\frac{k}{2}$ و بنا به حالت الف می‌توان P'_n منعکس P_n را بدست آورد. با تعیین نقطهٔ P'_1 که $OP'_1=n\cdot OP'_n$ باشد منعکس P_1 بدست می‌آید.

۴ـ الف: مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC متشابه است.

ب: بنا به‌معادلهٔ (۴.۲ ، ۴) مثلث $A'B'C'$ با مثلث ارتفاعی DEF متشابه است.

پ: با توجه به تمرین ۴ ازبند ۴.۱ وقضیهٔ (۶.۱ ، ۱) مثلث $A'B'C'$ با مثلث $I_aI_bI_c$ متشابه است.

۵ـ داریم :

$$x'=\frac{k^2x}{x^2+y^2}\ ،\ y'=\frac{k^2y}{x^2+y^2}$$

۶ـ مثلث متساوی‌الساقین BO_1C را چنان رسم می‌کنیم که هریك ازدوزاویهٔ B

و C برابر با $A+D-90^\circ$ باشد. همچنین مثلث متساوی‌الساقین CO_2A را چنان رسم می‌کنیم که هریك ازدوزاویهٔ C و A برابر با $B+E-90^\circ$ باشد.

دایره‌های به مرکزهای O_1 و O_2 را رسم می‌کنیم که بر C بگذرند که در نقطهٔ دیگر O برخورد خواهند داشت. نقطهٔ O قطب انعکاس است و k قوت آن از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$k^2=\frac{OA\cdot OB\cdot DE}{AB}$$

بند ۴.۵

۱ـ هرگاه O مرکز دایرهٔ ω باشد، دومثلث OAP و OPA' متشابهند وداریم:

$$\frac{PA}{PA'}=\frac{OA}{OP}=\text{ثابت}$$

۲ـ دومثلث POB و COP' متشابهند وداریم:

$$\frac{PO}{OB}=\frac{CO}{OP'} \quad \text{و} \quad OP\cdot OP'=k^2$$

۳ـ دونقطهٔ P و Q را در درون دایرهٔ معلوم α درنظرمی گیریم. منعکسهای P و Q نسبت به هر دایرهٔ به مرکز P عبارتند از P_∞ و Q' ومنعکس دایرهٔ α در این انعکاس یك دایرهٔ α' است که P_∞ و Q' دربیرون α' واقعند. مماسهای مرسوم از Q' بر α' دو «دایره» اند که بر P_∞ و بر Q' می گذرند که عبارتند ازمنعکسهای دودایره‌ای که بر P و Q می گذرند و بر α مماس می‌باشند.

۴ـ نقطهٔ تماس دو دایره از سه دایره را مرکز دایرهٔ انعکاس می گیریم. در این صورت منعکس شکل مفروض عبارت خواهد بود از دوخط متوازی و دایره‌ای که برآنها مماس است.

۵ـ دایرهٔ دلخواه به مرکز A را دایرهٔ انعکاس می گیریم. منعکسهای B ، C و D عبارتنداز B' ، C' و D' که C' بر $B'D'$ واقع نخواهد بودمگرآنکه $AC\,|\,|BD$ باشد. بنابه‌قضیهٔ (۴.۵ ، ۱) نابرابری $B'C'+C'D'\geqslant B'D'$ معادل خواهد بود با:

$$\frac{BC}{AB\cdot AC}+\frac{CD}{AC\cdot AD}\geqslant\frac{BD}{AB\cdot AD}$$

$$AD\cdot BC+AB\cdot CD\geqslant AC\cdot BD$$

۶ـ درحالتی که ω و α متقاطع یا برهم مماس باشند حکم بدیهی است. درحالتی

که α و ω متخارج باشند، معادله‌های آنها را به صورت زیردرنظرمی‌گیریم:

$$x^۲+y^۲=k^۲ \text{ و } x^۲+y^۲=ax$$

بنا به تمرین ۵ از بند ۳.۵ معادلهٔ منعکس α نسبت به ω می‌شود:

$$\left(\frac{k^۲x}{x^۲+y^۲}\right)^۲+\left(\frac{k^۲y}{x^۲+y^۲}\right)^۲=a\left(\frac{k^۲x}{x^۲+y^۲}\right)$$

که پس ازساده‌کردن خواهیم داشت: $k^۲=ax$

۷ـ به دودایرهٔ متقاطع؛ نقطهٔ دیگرتقاطع دوخط P_∞ است.

بند ۵.۵

۱ـ اگر O مرکزدایرهٔ ω باشد، دایرهٔبه‌قطر OA را رسم می‌کنیم که‌با دایرهٔ ω در دو نقطه برخورد می‌کند. دایرهٔ مطلوب بر این دونقطه می‌گذرد.

۲ـ اگر P' منعکس P نسبت به ω باشد، دایرهٔ $PP'Q$ جواب مسئله است.

۳ـ هرگاه $P_۱$ و $P_۲$ منعکسهای P نسبت به‌دایره‌های $\omega_۱$ و $\omega_۲$ باشد، دایرهٔ $PP_۱P_۲$ جواب مسئله است.

۴ـ حاصل ضرب آنها برابر با $k^۴$ است.

۵ـ منعکسهای a و P را نسبت به‌یك دایرهٔ به مرکز O بدست می‌آوریم که‌دایرهٔ a' و نقطهٔ P' واقع بر آن خواهد بود. در P' فقط یـك خط مماس بر a' می‌توان رسم کرد. همچنین می‌توانیم منعکسهای a و O رانسبت به‌یك دایرهٔ به مرکز P بدست‌آوریم که خط a' و نقطهٔ O' غیر واقع برآن خواهد بود و از O' فقط یك خط موازی با a' می‌توان رسم کرد.

بند ۶.۵

۱ـ دو مثلث ABC و $AB_۱C_۱$ که نسبت به خط AS قرینه‌اند با هم برابرند و بنا برآن:

$$\widehat{BSC_۱}=\widehat{SBA}-\widehat{SC_۱B}=B-C$$

۲ـ باتوجه به‌تمرین ۳ از بند ۷.۱ داریم:

$$A'D=\frac{b^۲-c^۲}{۲a}$$

و چنانکه در بند ۶.۵ دیدیم:

$$A'S=\frac{a(b-c)}{۲(b+c)}$$

بنا براین داریم:

$$A'S \cdot A'D = \left(\frac{b-c}{۲}\right)^{۲}$$

بند ۷.۵

۱ــ باید داشته باشیم: $c+c'=۰$

۲ــ شعاعهای دو دایرهٔ مماس داخلی را با a و b وشعاع دایرهٔ نیمساز آنها را با r نشان می‌دهیم. دایرهٔ انعکاس را به مرکز نقطهٔ تماس دو دایره انتخاب می‌کنیم. منعکسهای دو دایره می‌شود دوخط موازی کــه بهفاصله‌هــای $\frac{k^۲}{۲a}$ و $\frac{k^۲}{۲b}$ از قطب انعــکاس واقعند. منعکس‌دایرهٔ‌نیمسازخطی‌می‌شودموازی‌ومتساوی‌الفاصله‌بادوخط‌مزبوروبه‌فاصلهٔ $\frac{k^۲}{۲r}$ ازقطب انعکاس. بنا براین داریم:

$$\frac{۲}{r}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$$

۳ــ دو دسته خطهای متوازی عمود بر هم بدست می‌آید.

۴ــ هر گاه یك نقطه از دایرهٔ نیمساز دو دایره را قطب انعکاس اختیار کنیم، این دایره به‌یك خط و دو دایره به‌دو دایره تبدیل می‌شوندکه نسبت به آن خط قرینه‌اند.

۵ــ تقارن نسبت به‌یك خط حالت خاص انعکاس نسبت به‌دایره است.

۶ــ الف: فرض‌می‌کنیم $|AC|\ |BD|$ و علاوه برآن‌چهار نقطهٔ مفروض بریك دایرهٔ γ واقع باشند. دو دایرهٔ β و α را درنظرمی گیریم‌که بردایرهٔ γ عمود باشند و α بر A و C و β بر B و D بگذرد ونقطه‌های‌برخورد این دو دایره را با L و O نشان می‌دهیم. در انعکاس نسبت به دایرهٔ به مرکز L دایره‌های α و β به دو قطر از دایــرهٔ γ تبدیــل می‌شوند به گونه‌ای‌که $A'B'C'D'$ یك مستطیل به‌مرکز O' خواهد بود.

ب: فرض‌می‌کنیم $|AB|\ |CD|$ یا $|AD|\ |BC|$ و دایره‌های α،γ و β را به گونهٔ بالا در نظر می گیریم، اما این بار دو دایرهٔ α و β متقاطع نمی‌باشند. نقطه‌های‌حد دسته دایره‌های$\alpha\beta$را باL و O نشان‌می‌دهیم، یعنی L و O نقطه‌های برخورد γ باخط‌المرکزین α و β می‌باشند. درانعکاس نسبت به‌دایرهٔ به‌مرکز L دو دایرهٔ α و β به‌دو دایرهٔ به‌مرکز مشترك O' تبدیل می‌شوند. چون $A'C'$ و $B'D'$ (که روی یك خط واقعند) قطرهای دو دایرهٔ هم‌مرکز می‌باشند. پس $A'B'C'D'$ یك متوازی‌الاضلاع به وضع خاص می‌باشد.

پ: وقتی A،B،C،D روی‌یك‌دایره‌واقع نباشند، چهار دایرهٔ متمایز ABC،ACD، ABD، BCD را معین می‌کنند. یکی از دو دایرهٔ نیمساز دایره‌های ABC و ACD را که جداسازی بین B و D را پدید می‌آورد با μ نشان می‌دهیم. همچنین یکی از دو دایرهٔ نیمساز دایره‌های ABD و BCD را که جداسازی بین A و C را پدید می‌آورد با ν نشان می‌دهیم. دو دایرهٔ μ و ν در L و O برخورد می‌کنند. در انعکاس نسبت به دایرهٔ به‌مرکز L دایره‌های ABC و ACD به دو دایرهٔ متساوی $A'B'C'$ و $A'C'D'$ تبدیل می‌شوند که μ' محور اصلی آنها بین B' و D' جداسازی پدید می‌آورد به‌گونه‌ای که:

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{C'D'A'}$$

همچنین درانعکاس مزبور دایره‌های ABD و BCD به دو دایرهٔ متساوی $A'B'D'$ و $B'C'D'$ تبدیل می‌شوند که ν' محور اصلی آنها جداسازی بین A' و C' را پدید می‌آورد و داریم:

$$\widehat{D'A'B'} = \widehat{B'C'D'}$$

بنابراین $A'B'C'D'$ یک‌متوازی‌الاضلاع است.

یادداشت: درهریک‌ازحالتهای بالا، جفت‌نقطهٔ (O و L) به‌نام ژاکوبین[1] جفتهای نقاط (C و A) و (D و B) موسوم‌است.

۷ـ خط‌المرکزین دو دایره را رسم‌می‌کنیم که‌قطر AB از اولی وقطر CD از دومی‌را پدید می‌آورد به‌گونه‌ای که $BD| |AC$. دایره‌های به‌قطر AD و به‌قطر BC رابا α و β نشان می‌دهیم‌و L و M نقطه‌های حدی دسته دایره‌های $\alpha\beta$ را بدست می‌آوریم. دایرهٔ نیمساز مطلوب دایرهٔ به‌قطر LM است. زیرا در انعکاس نسبت به‌این دایره که بردایره‌های α و β عموداست، A به D و B به C تبدیل‌می‌شود.

بند ۸.۵

۱ـ تمرین ۴ از بند ۷.۵ را بکار ببرید.

۲ـ اتحاد مثلثاتی زیر را درنظر گرفته و درآن θ رابا $\frac{r}{n}+\frac{r}{۲}$ جانشین‌سازید:

$$\frac{۱}{\sin\theta} - \cot g\,\theta = tg\frac{\theta}{۲}$$

۳ـ ازنقطه‌نظر هندسهٔ انعکاسی وضع دایره‌های مورد نظر نظیر شکل مربوط به چیستان اشتینر درحالت $n=۴$ می‌باشد. بنابراین‌سه عدد از انحرافهای انعکاسی برابر با $۲lg\,(\sqrt{۲}+۳)$ و دوازده عدد دیگر برابرَ با صفر است.

1– Jacobien

بند ۹.۵

۱ــ کوچکترین انحراف انعکاسی بین‌دو دایرهٔ داده‌شده عبارتست‌از:

$$ch\delta = \left|\frac{1+1-(\sqrt{3}+1)^2}{2}\right| = \sqrt{3}+1$$

درحالی‌که کسینوس هیپربولیك بزرگترین انحراف انعکاسی برابراست با:

$$\left|\frac{1+1-4(\sqrt{3}+1)^2}{2}\right| = 4\sqrt{3}+7 = 2ch^2\delta - 1 = ch\,2\delta$$

دایرهٔ مرسوم بین‌دودایره نمی‌تواند نیمساز آنها باشد ، زیرا به‌یك دسته دایره‌ها تعلق ندارند.

۲ــ دایره‌های سدی همان دایره‌های چیستان اشتینر در حالت $n=3$ می‌باشند. بنابراین:

$$ch\frac{\delta}{2} = sec\,\frac{\pi}{3} = 2$$

۳ــ مجذور نسبت بین‌طولهای مماسها برابراست‌با:

$$\frac{c^2-(a+b)^2}{c^2-(a-b)^2} = \frac{c^2-a^2-b^2-2ab}{c^2-a^2-b^2+2ab} = \frac{ch\delta-1}{ch\delta+1} = th^2\,\frac{\delta}{2}$$

۴ــ بارسم‌شکل درحالت اول حکم به‌سادگی محقق می‌شود. درحالت دوم کافی است که‌قضیهٔ (۹.۵ ، ۱) رابافرض $a=b$ و $c=2p$ بکاربرد که نتیجه خواهدشد:

$$ch2\delta = \frac{(2p)^2-b^2-b^2}{2b^2} = 2\left(\frac{p}{b}\right)^2-1$$

۵ــ داریم:

$$2sh^2\,\frac{\delta}{2}+1 = ch\delta = \frac{r^2+R^2-(R^2-2rR)}{2rR} = \frac{r}{2R}+1$$

۶ــ باتوجه به‌شکل (۳.۱ ، پ) داریم:

$$AH = \frac{b\cos A}{\sin B} = 2R\cos A$$

وبا استفاده ازتمرین ۴ ازبند ۶.۱ خواهیم‌داشت:

$$\begin{aligned}\overline{OH}^2 &= R^2+(2R\cos A)^2-4R^2\cos A\cos(B-C)\\ &= R^2(1-8\cos A\cos B\cos C)\end{aligned}$$

وچون $ON = \frac{OH}{2}$ بنابراین:

$$cos\delta \text{ یا } ch\delta = \left[R^{۲}+\left(\frac{R}{۲}\right)^{۲}-R^{۲}\left(\frac{۱}{۴}-۲\cos A\cos B\cos C\right)\right]\times\frac{۱}{R^{۲}}$$
$$=۱+۲\cos A\cos B\cos C$$

۷ـ با توجه به اینکه محوراصلی دودایره به‌معادلهٔ $x=o$ است و با توجه به نتیجهٔ تمرین ۴ خواهیم داشت:

$$ch\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^{۲}-d^{۲}}} \quad \text{و} \quad ch\beta=\frac{b}{\sqrt{b^{۲}-d^{۲}}}$$

بند ۱.۶

۱ـ درانعکاس نسبت به‌دایرهٔ ω دایـرهٔ به‌قطر OA بـه‌خط a قطبی نقطهٔ A تبدیل می‌شود. بنابراین این قطبی ودودایره به‌یك‌دسته دایره‌ها تعلق دارند ودرنتیجه a محور اصلی دودایره است.

۲ـ قطبیهای نقطه‌های A و B به‌ترتیب بر OA و بر OB عمودند.

۳ـ شکل‌دلخواه F رادرنظر می‌گیریم ، قطبیهای معکوس F نسبت به‌یك دایـرهٔ ω به‌مرکز O ونسبت به‌دایرهٔ دیگر به‌همان مرکز باهم متشابهند؛ بنابراین می‌توان‌دایرهٔ ω راهمان دایرهٔ محاطی چندضلعی منتظم مفروض $ABC...$ اختیار کرد. دراین صورت قطبهای هریك‌ازضلعهای AB ، BC ،... وسطهای‌این ضلعهاوقطبیهای‌رأسهای A ، B... عبارتنداز خطهایی که‌وسطهای دوضلع مجاور به‌آن رأس رابه‌هم وصل می‌کنند. هرگاه دایرهٔ محیطی چندضلعی را به‌عنوان دایره ω انتخاب‌کنیم ، مبدل قطبی معکوس چندضلعی عبارتست ازچندضلعی دیگری که ضلعهایش بردایرهٔ محیطی در رأسهای چند ضلعی اول مماس می‌باشند.

۴ـ قطبهای دوضلع روبروی مستطیل عبارتند از دونقطهٔ متساوی الفاصله‌از O که روی یك‌خط D واقعند. قطبهای دوضلع روبـروی دیگر نیز عبارتند از دونقطهٔ متساوی الفاصله‌از O که‌روی یك‌خط D' قرار دارند. دوخط D و D' در O برهم عمودند. بنابراین‌چهارنقطهٔ‌حاصل یك‌چهارگوشه‌تشکیل‌می‌دهند که‌دوقطر آن‌عمود منصف‌یکدیگرند، پس‌این چهارگوشه یك‌لوزی است. همچنین می‌تـوان ازاین ویژگـی استفاده کرد که محورهای تقارن مستطیل روی مماسهایی که در رأسهای مستطیل بردایرهٔ محیطی آن‌رسم می‌شوند پاره‌خطهای برابر جدامی‌کنند.

بند ۲.۶

بنابه‌قضیهٔ (۲.۶ ، ۱) مماس بردایرهٔ مزدوج عبارتست ازنیمساز یکی‌از دوزاویـهٔ

مکملی که بین‌دایرهٔ محیطی بادایرهٔ نه‌نقطه تشکیل می‌شود؛ وقتی یکی ازاین دوزاویه به سمت صفر میل کند دیگری به‌سمت ۱۸۰° میل خواهد کرد. بنابراین باتوجه به‌تمرین ۶ ازبند ۹.۵ داریم:

$$\theta = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \delta)$$

بند ۳.۶

۱ـ خط $b_۲$ قطبی‌نقطهٔ $B_۲$ نسبت‌به‌دایرهٔ α است؛ وغیره. نقطهٔ $C_۱$ قطب‌خط $B_۱B_۲$ نسبت به‌دایرهٔ β است، وغیره.

۲ـ بـرای همهٔ شکلهای بند ۳.۶ خط OA یك‌محور تقارن است. از شکلهای (۳.۶، الف) و (۳.۶، پ) برمی‌آید که برای‌بیضی‌وهذلولی می‌توان محورتقارن‌دیگری عمودبر OA رادرنظر گرفت (موضوعی که دربند ۶.۶ بررسی شده‌است).

۳ـ ازروی شکل (۳.۶، ب) معلوم می‌شود که‌هرمماس t که‌برسهمی رسم‌شود قطبی یك‌نقطهٔ T ازدایرهٔ α است. پای عمودی‌که از O بر t رسم‌شودمنعکس T نسبت به‌دایرهٔ ω است ومکان هندسی‌آن منعکس دایرهٔ α (گذرندهٔبر O) است‌که یك‌خط می‌باشد.

۴ـ همانگونه که ازشکل (۳.۶، پ) برمی‌آید، مجانب u کـه قطبی نقطهٔ U است برضلع OU از مثلث‌قائم‌الزاویهٔ OAU عموداست. بنابراین زاویـهٔ $A = \theta$ ازاین مثلث دررابطهٔ زیرصدق می‌کند:

$$\frac{۱}{\cos\theta} = \frac{OA}{AU} = \frac{OA}{r} = \varepsilon$$

برای هذلولی متساوی‌القطرین $\theta = ۴۵^\circ$ و $\varepsilon = \sqrt{۲}$ می‌باشد.

۵ـ هرگاه مداریك ستارهٔ دنباله‌دارسهمی یا هذلولی باشد، این ستاره مجدداً به خورشیدنزدیك‌نخواهدشد وازطریق مشاهدات نمی‌توان به‌وجود چنین‌ستاره‌ای حکم‌قطعی داد. هرچندکه دراثراختلالات ناشی‌ازسیارات (به ویژه مشتری که دارای‌جرم فوق‌العاده بزرگ است)آن‌قسمت ازمدارستاره‌های دنباله‌دارکه بنظرمی‌رسد به هذلولی‌شباهت‌دارد، وهرچندکه بعضی‌ازمدارهای بیضوی‌آنقدر کشیده‌اندکه تمایزآنها ازسهمی‌مشکل‌می‌باشد، با وجود این سرعت ستاره‌های دنباله‌دارنسبت به خورشید به‌آن اندازه زیاد نیست‌که‌در فضای خارج‌آنقدردورشوندکه جاذبهٔ ستارهٔ دیگری بتواندآنها را به‌خود بکشاند.

بند ۴.۶

۱ــ معادلهٔ مکان به‌صورت زیراست:

$$x^2 + y^2 = (l - \varepsilon x)^2$$

۲ــ مبدأ جدید نسبت به محورهای اول به طول $x = -\varepsilon a$ می‌باشد وازدونقطهٔ $x = \frac{l}{\varepsilon \pm 1}$ به‌یك فاصله‌است که این‌دونقطه محل برخورد مکان هندسی تمرین ۱ با محور x ها است. دراین صورت معادلهٔ جدید مکان چنین می‌شود:

$$(x - \varepsilon a)^2 + y^2 = [l - \varepsilon(x - \varepsilon a)]^2 = (a - \varepsilon x)^2$$

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 = (1 - \varepsilon^2)a^2 = la = \pm b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

علامت $+$ نظیر $\varepsilon < 1$ وعلامت $-$ نظیر $1 < \varepsilon$ می‌باشد. چون این معادله نسبت به x ونسبت به y ازدرجهٔ زوج‌است پس بیضی وهذلولی نسبت به‌هریك ازمحورها ونسبت به مبدأ مختصات‌متقارن می‌باشند.

بند ۵.۶

۱ــ هرگاه دومثلث دارای مرکزهمسانی باشند، دارای محورهمسانی نیزمی‌باشند وبرعکس.

۲ــ اگرشش‌رأس یك شش‌ضلعی متوالیاً روی دوخط واقع‌باشند، سه‌نقطهٔ‌برخوردسه جفت‌ضلعهای روبروی آن بریك خط راست‌واقعند. اگرشش‌ضلع یك‌شش‌ضلعی متوالیاً بردو نقطه بگذرند، سه قطرآن متقاربند.

۳ــ آنها درمرکزدایره برهم عمودند.

۴ــ خط بینهایت l قطبی نقطهٔ O مرکزدایرهٔ ω است، پس هرنقطه ازمقطع مخروطی که دربینهایت باشد قطب (نسبت به دایرهٔ ω) یك مماس بردایرهٔ α است‌که‌از O می‌گذرد. بنابراین برحسب‌آنکه O داخل α، روی α یا خارج α باشد تعداد نقطه‌های بینهایت مقطع ۰، ۱ یا ۲ می‌باشد.

۵ــ روی شکل (۳.۶، پ) مشاهده می‌شودکه OU در U بر α مماس است. بنابراین یکی ازنقطه‌های بینهایت هذلولی نقطهٔ تماس‌آن با مجانب u است. نقطهٔ‌دیگر بینهایت‌آن نقطهٔ تماس با مجانب دیگراست.

۶ــ خط هادی سهمی قطبی‌نقطهٔ A است وهر نقطه ازاین‌خط قطب قطری ازدایرهٔ

α است ومماسهایی که ازاین نقطه برسهمی رسم شوند قطبیهای دوسرقطرنظیرمی باشند. هردونقطهٔ دوسر هرقطرازدایرهٔ α بردوضلع یك زاویهٔ قائمهٔ به‌رأس O واقعند. بنابراین قطبیهای آنها برهم عمودند.

۷ــ هرنقطهٔ برخورد دوقطررا می‌توان همچون نقطهٔ P ازقضیهٔ (۵۰۶ ، ۱) درنظر گرفت که دونقطهٔ برخورد دوجفت قطرهای دیگربرقطبی نقطهٔ P واقع‌است.

بند ۶.۶

۱ــ داریم:

$$OP + O_1P = \varepsilon.PK + \varepsilon.K_1P = \varepsilon.K_1K$$

که K_1K فاصلهٔ دوخط هادی است. -

۲ــ اگر P را برشاخهٔ چپ هذلولی بگیریم ، مطابق باشکل (۶۰۶ ، پ) داریم:

$$OP - O_1P = \varepsilon.PK - \varepsilon.PK_1 = -\varepsilon.KK_1$$

اگر P برشاخهٔ راست هذلولی باشد علامت حاصل تغییرمی‌کند.

۳ــ این دایره منعکس دایرهٔ α نسبت به ω است. (تمرین ۳ ازبند ۳۰۶ را بااین تمرین مقایسه کنید).

بند ۷.۶

۱ــ تصویرجسم‌نمایی حالت خاص انعکاس است.

۲ــ صفحهٔ عمود منصف OA (شکل ۷۰۶ ، الف)کرهٔ α' را دریك دایرهٔ عظیمهٔ خاص قطع می‌کند که اصطلاحاً آن را استوا می‌نامیم. این استوا هردایرهٔ عظیمهٔ دیگراز کره را در دو نقطه قطع می‌کندکه در دوسریك قطر واقعند. ویژگی استوا این است که تصویرهای قطرهای آن روی‌صفحهٔ α عبارتند ازقطرهای‌دایره‌ای ازاین صفحه‌که مرکزش A و شعاعش ۲k می‌باشد.

۳ــ نقطه‌های P'_1 و P'_2 را نقطه‌های برخورد دودایرهٔ عظیمه ازکرهٔ α' می‌گیریم که یکی‌ازآنها بر O و A می‌گذرد. دراین صورت P_1 و P_2 درصفحهٔ α نقطه‌های برخورد خطی‌گذرندهٔ بر A ~~با~~ دایره‌ای هستندکه از دونقطهٔ Q_1 و Q_2 می‌گذرد واین دونقطه دوسرقطری ازدایرهٔ به مرکز A وبه‌شعاع ۲k یعنی دوسرقطری ازدایرهٔ تصویر استوا می‌باشند. چون داریم:

$$AP_1 \cdot AP_2 = AQ_1 \cdot AQ_2 = -(2k)^2$$

پس P_1 و P_2 توسط یك انعکاس‌منفی به‌هم مربوط می‌باشندکه ترکیبی است ازیك انعکاس نسبت به دایرهٔ تصویراستوا با نیم دورحول A.

۴ـ کرهٔ α' را درنظرمی‌گیریم که بردوازده یال مکعب دروسط آنها مماس می‌باشد. یکی ازنقطه‌های برخورد این کره با خط واصل بین دورأس روبروازمکعب را O می‌نامیم. O را مرکزتصویرجسم نمایی نسبت به کرهٔ α' قرارمی‌دهیم.

(هرگاه یکی ازنقطه‌های برخورد خط واصل بین مرکزهای دو وجه روبرو با کرهٔ α' را O مرکزتصویربرگزینیم، شکل حاصل شکل متقارن چیستان اشتینردرحالت $n=۴$ خواهد بود).

فهرست الفبایی