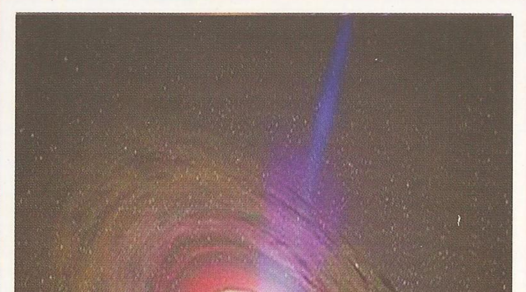
دانش پژوهان جوان

ناشر کتابهای المپیاد

بانک مسائل المپیاد نجوم



صمد غلامی

بانک مسائل المپیاد نجوم

۳۳۳ مسئله حل شده

تالیف

صمد غلامی

پیشگفتار ویرایش دوم

همان طور که شور و عشق موسیقی در برخی از اشخاص وجـود دارد، در برخی دیگر شور آموختن موجود است. در واقع این علاقه به آموختن در عموم کودکان وجود دارد، لیکن در بسیاری از اشخاص با بالا رفتن سـن این عشق این رو به کاهش می‌گذارد. بدون چنین عشـقی نـه ریاضـیات وجود خواهد داشت و نه علوم طبیعی

آلبرت اینشتین

در حین ترجمه کتاب تئوری و مسائل نجوم (از سری کتب شوم) متوجه ایـن مطلـب شـدم کـه کتاب فوق با تمام اعتبار و ارزشی که دارد نمی‌تواند به تنهایی پاسخگوی تمام نیاز دانش آموزان کشور باشد، چرا که سطح مسائل کتاب بسیار مقدماتی و ابتـدایی بـود. گرچـه کتـاب تئـوری و مسائل نجوم از سوی بسیاری از مراکز به عنوان مرجع کتاب المپیاد نجوم در نظـر گرفتـه شـده بود، اما تصمیم گرفتم با توجه به کتب ریاضی و فیزیک دبیرستان، مجموعه‌ای را بـه نگـارش در آورم که از توضیح و تفصیل مطالب دوری کـرده و بیشـتر بحـث پیرامـون مسـائل و تمرینـات و چگونگی حل آنها باشد. البته پس از آماده سازی این مجموعه به سراغ آمـاده‌سـازی تسـت‌هـای منتخب ستاره‌شناسی رفته و با توجه به انبوه سـئوالات بـی‌شـمار در زمینـه نجـوم، تسـت‌هـای برگزیده را نیز در یک جلد تدوین کردم.

در این کتاب سعی بر آن شده که از ارائه فرمول‌ها و روابط پیچیده ریاضی صرف نظر گـردد و همچنین با ارائه مسائل ساده بر درک بیشتر مطالب و مباحث افزوده گـردد امـا بـه هـر حـال دانستن فیزیک مقدماتی جهت فراگیری بهتر مسائل تقریبا الزامی است. تلاش بسیاری شده تا از توضیح و تفسیر و اثبات فرمول‌ها جلوگیری به عمل آید و فقط کاربرد آنها در مسائل مورد بحث قرار گیرد. همچنین از آنجا که ارائه تمام روابط ریاضی و فیزیک مورد نیاز باعـث افـزایش حجـم کتاب می‌گردید (هدف تالیف این مجموعه بررسی و حل مسائل بوده است) در نتیجـه برخـی از روابط به همراه مسئله و حل آنها آورده شده است. از طرفی بسته به نیـاز مسـئله ممکـن اسـت

برخی از اعداد ارائه شده در مسائل با پیوست آخر کتاب همخوانی نداشته باشد چرا که مسائل از منابع مختلف گردآوری شده و در برخی از آنها برای راحتی کار اعداد گرد شده است. سعی بسیاری شده تا مسائل و تمریناتی انتخاب گردند که با کتب دوره دبیرستانی و پیش دانشگاهی مطابقت داشته باشد چرا که برخی از مسائل دارای سطوح بالاتری نسبت به این کتاب بوده‌اند و از بررسی آنها خودداری شده است.

در چاپ دوم کتاب با توجه به نکات و پیشنهادات ارائه شده توسط اساتید و دانش‌آموزان گرامی، تصمیم به ویرایش مجدد کتاب گرفتم و علاوه بر رفع برخی نواقص، فصلی تحت عنوان روابط مهم ستاره‌شناسی به کتاب افزوده شد که در برگیرنده روابط اصلی و مهم مورد نیاز برای حل مسائل این کتاب است. البته گفتنی است که این روابط به تنهایی نمی‌توانند تمام نیاز علاقه‌مندان را برای حل تمامی مسائل نجوم بر طرف کنند.

این کتاب منبعی مفید برای دانشجویان رشته فیزیک در درس نجوم مقدماتی و همچنین علاقه‌مندان به شرکت در المپیاد نجوم می‌باشد. هیچ کدام از مطالب و قسمت‌های به نگارش درآمده دیدگاه شخصی نیست، بلکه گردآوردی و تنظیمی از متون سرشار و فراوان علم نجوم از منابع گوناگون است. به کلیه علاقه‌مندان و مشتاقان علم نجوم پیشنهاد می‌شود چنانچه قصد فراگیری کامل‌تر مباحث این کتاب را دارند در ابتدا به مجموعه چهار جلدی کتب **نجوم مقدماتی** (انتشارات دانش پژوهان جوان) مراجعه کنند و همچنین برای بررسی بیشتر مباحث ریاضی ستاره‌شناسی و اخترفیزیک و پاسخ پرسش‌ها و مسائل این کتاب، می‌توانند به کتب **بانک سئوالات چند گزینه‌ای نجوم، تئوری و مسائل نجوم، مکانیک سماوی، مبانی نجوم، مسائل اخترفیزیک و** .... مراجعه کنند. در حال حاضر نیز مجموعه سه جلدی دیگری به نام دوره درسی المپیاد نجوم در دست تالیف است که در آن اشاره‌ای نسبتا کامل به کلیه روابط ستاره‌شناسی شده است. در انتها از سرکار خانم **مریم صادقی** که ماه‌ها در تنظیم و ترجمه مسائل تلاش فراوان نمودند کمال تشکر و سپاس گذاری را دارم. امید است که این کتاب مورد استفاده شما عزیزان و علاقه‌مندان علم نجوم قرار گیرد و ما را در رفع نواقص و اشکالات احتمالی یاری نمائید.

صمد غلامی

بهار ۱۳۸۸

s_gh_ph@yahoo.com

www.ketab۸۸.com

فهرست

نکاتی جهت حل مسئله ۱۱

بخش اول: روابط مهم ستاره‌شناسی

۱ - ۱ مشخصات بیضی ۱۵

۱ - ۲ قانون گرانش جهانی ۱۸

۱ - ۳ قانون اول کپلر ۲۰

۱ - ۴ قانون دوم کپلر ۲۰

۱ - ۵ قانون سوم کپلر ۲۳

۱ - ۶ حرکت زاویه‌أی ۲۳

۱ - ۷ پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای ۲۵

۱ - ۸ محاسبه سرعت مداری ۲۶

۱ - ۹ سرعت سیاره در مدارش ۲۷

۱ - ۱۰ حد روچ و حد ناپایداری ۲۸

۱ - ۱۱ دوره تناوب گردش یک سیاره در مدارش ۲۹

۱ - ۱۲ نیروی جانب مرکز ۳۰

۱ - ۱۳ زمان چرخش ۳۱

۱ - ۱۴ اندازه گیری جرم یک سیاره ۳۲

۱ - ۱۵ سرعت چرخش ۳۳

۱ - ۱۶ سرعت فرار ۳۳

۱ - ۱۷ انرژی جنبشی و پتانسیل ۳۵

۱ - ۱۸ شعاع شوارتزشیلد ۳۵

۱ - ۱۹ اختلاف منظر مثلثاتی ۳۶

۱ - ۲۰ زوایای کوچک ۳۸

۱ - ۲۱ پدیده دوپلر ۳۹

۱- ۲۲ درخشندگی ۴۱

۱- ۲۳ قدر ۴۲

۱ - ۲۴ قدر ظاهری ۴۳

۱ - ۲۵ قدر مطلق ۴۴

۱- ۲۶ انبساط کیهان و عمر جهان ۴۵

بخش دوم: مسائل حل شده

۲ - ۲ ۳۳۳ مسئله حل شده ۴۹

بخش سوم:روابط اساسی

۳ - ۱ بیضی‌ها ۳۶۷
۳ - ۲ گرانش ۳۶۷
۳ - ۳ ویژگی‌های سیارات ۳۶۸
۳ - ۴ فاصله زاویه‌ای بین سیاره فراشمسی و ستاره یا بین دو ستاره دوتایی ۳۶۸
۳ - ۵ قدرها ۳۶۹
۳ - ۶ ساختار ستاره‌ای ۳۶۹
۳ - ۷ شعاع شوارتزشیلد ۳۷۰
۳ - ۸ ویژگی‌های خورشید ۳۷۰
۳ - ۹ کیهان شناسی ۳۷۱

بخش چهارم: ثابت‌های نجومی و فیزیکی

۴ - ۱ جدول ثابت‌های نجومی ۳۷۵
۴ - ۲ ثابت‌های فیزیکی ۳۷۶
۴ - ۳ سیارات: مشخصات مدار ۳۷۷
۴ - ۴ سیارات: مشخصات مدار ۳۷۸
۴ - ۵ سیارات: اتمسفر ۳۷۹
۴ - ۶ نمادهای اساسی ۳۸۰
۴ - ۷ ضرایب تبدیل ۳۸۱

بخش پنجم: اصطلاحات نجومی

واژه نامه توصیفی نجوم ۳۸۷

نکاتی جهت حل مسئله

۱ - مسئله را به دقت بخوانید و اگر متوجه صورت مسئله نشدید برای بار دوم و سوم نیز مسئله را خوانده و اعداد و پارامترهای به کار رفته در آن را در گوشه‌ای یاداشت کنید چرا که درک خود سئوال نقش به سزایی در حل آن دارد. اطمینان حاصل کنید که هیچ کدام از معلومات مسئله و همچنین هیچ یک از پرسشهایی که باید به آن پاسخ دهید از قلم نیداخته‌اید.

۲ - سعی کنید مسئله را در ذهن خود تجسم کنید طوری که گویی فیلمی را تماشا می‌کنید. بدین طریق می‌توان برای درک بهتر مسئله را در ذهن چندین بار تماشا کرد.

۳ - از خود بپرسید وضعیتی که در مراحل پیش طرح و تصور کرده‌اید با کدام شرایط فیزیکی مشخص می‌شود و کدام اصول فیزیکی در مورد آن کاربرد دارد.

۴ - پس از تعیین اینکه کدام شرایط و اصول فیزیکی صدق می‌کنند روابط ریاضی معتبر در این شرایط را بررسی کنید سپس بکوشید معادله‌ای را برگزینید که کمیت‌های مجهول را بر حسب کمیت‌های معلوم بیان می‌کنند.

۵ - اغلب می‌بینید تعداد مجهولات شما زیاد و تعداد معادلات کم است در این صورت از خود بپرسید آیا هیچ رابطه ریاضی دیگری هست که شرایط مسئله در مورد مجهولات صدق کند؟ آیا می‌توان چند معادله را ترکیب کرد تا برخی از مجهولات حذف شوند؟ آیا کمیت‌هایی هستند که بتوان آنها را به کمک کمیت‌های معلوم حساب کرد؟

۶ - بهترین روش آن است که همه معادلات را با حروف جبری حل کنید و فقط در آخر کار مقادیر عددی را جایگذاری کنید. این کار تشخیص و تصحیح اشتباهات را آسان‌تر می‌کنند.

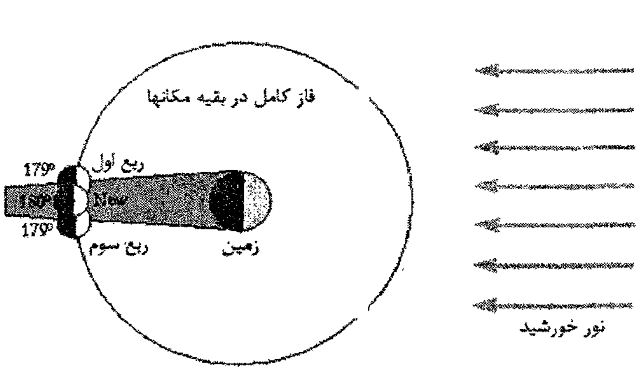
۷ - استفاده از نماد علمی و اعداد توان دارد حل مسئله را بسیار راحت‌تر و ساده کـردن عبارت‌های مشابه را امکان پذیر می‌سازد و از طولانی شده اعداد و همچنین داشتن تعداد ارقام اعشاری جلوگیری می‌کند.

۸ - اگر در تشخیص واحد نهایی دچار اشتباه می‌شوید وقتی اعداد را در معـادلات خـود جایگذاری می‌کنید یکاهای این اعداد را هم بگنجانید آنگاه یکاهای معادلات شما باید بـه صورتی ترکیب یا حذف شوند که یکای صحیح برای پاسخ نهایی به دست آید.

۹ - پس از اتمام محاسبات بررسی کنید که آیا پاسخ نهایی پذیرفتنی است یا خیر؟ ایـن امکان وجود دارد که پاسخ به دست آمده از نظر منطقی بسیار بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از حد مورد نظر باشد. به یاد داشته باشید که پاسخ نهایی را به همان تعداد ارقام بامعنی کـه در داده‌های مسئله هست گرد کنید.

بخش اول

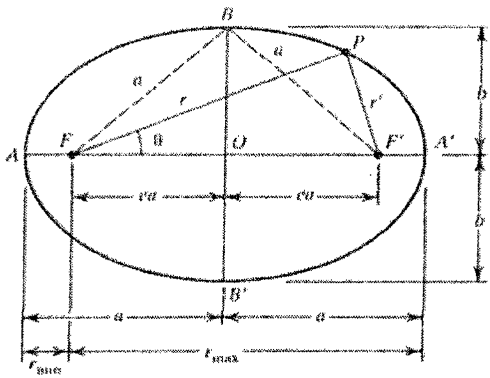
روابط مهم ستاره‌شناسی



بخش اول: روابط مهم ستاره‌شناسی

۱ - ۱ مشخصات بیضی

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن از دو نقطه ثابت، مقدار ثابتی باشد. می‌توانید برای رسم آن دو تا میخ کوچک در یک کاغذ قرار دهید و سپس دو انتهای نخ را به دور میخ‌ها محکم کنید و مدادی را درون نخ قرار داده و آن را به دور میخ‌ها بچرخانید. شکلی که برجا مانده یک بیضی است و میخ‌های کوچک در مراکز بیضی یا همان کانون بیضی هستند.



شکل ۱ - ۱ : جزئیات بیضی

مشخصات اصلی بیضی عبارتند از:

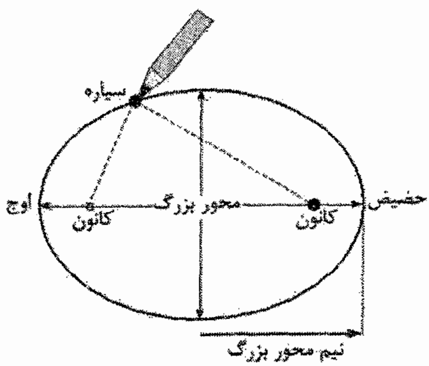
۱ - محور اصلی : طول بلندترین محور بیضی است.

۲ - نیم محور اصلی : نیمی از طول محور اصلی برابر با فاصله مرکز بیضی تا یک انتهای بیضی می‌باشد. همچنین میانگین فاصله سیاره ازخورشید در مرکز است.

۳ - محور فرعی : طول کوتاه‌ترین محور بیضی است.
۴ - نقطه حضیض: نقطه‌ای در مدار سیاره می‌باشد که وقتی سیاره در آن قرار می‌گیرد فاصله‌اش تا خورشید کمترین مقدار است. این نقطه روی محور اصلی قرار دارد.
۵ - نقطه اوج: نقطه‌ای بر روی مدار سیاره است که وقتی سیاره در آن قرار دارد فاصله‌اش تا خورشید بیشترین مقدار می‌باشد. این نقطه بر روی محور اصلی قرار داشته و دقیقا نقطه مقابل حضیض است.

نقطه اوج + نقطه حضیض = محور اصلی

۶ - کانون: یکی از دو نقطه اصلی در طول محور اصلی که فاصله بین آن و هر نقطه دیگر بر روی بیضی به اضافه فاصله بین کانون دیگر و همان نقطه با مجموع فاصله‌های دو کانون تا هر نقطه دیگری بر روی بیضی برابر است. خورشید بر روی یکی از این دو کانون اصلی قرار دارد نه در مرکز بیضی.
۷ - خروج از مرکز : به همان نسبت که دو کانون از هم دورتر می‌شوند، خروج از مرکز بیضی بیشتر می‌شود. خروج از مرکز بیضی مقدار کشیدگی آن را معین می‌کند. مقدار خروج از مرکز بیضی‌های بلند نزدیک به یک می‌باشد.



شکل ۱ - ۲ : رسم بیضی

بیضی یک منحنی است که توسط نقطه‌ای به نحوی پیموده می‌شود که مجموع فواصل آن از دو نقطه ثابت F', F که کانون نامیده می‌شوند، ثابت باشد.

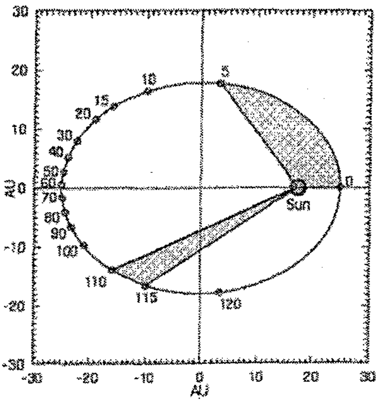
$$r + r' = ۲a \qquad (۱-۱)$$

معادله زیر برای یک بیضی در مختصات قطبی با مبدا در یک کانون به صورت زیر می‌باشد :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta} \qquad (۱-۲)$$

که a نیم محور بزرگ آن بر اساس رابطه زیر با شعاع می‌نیمم r_0 مربوط می‌شود.

$$r_0 = a(1-e) \qquad (۱-۳)$$



شکل ۱ - ۳ : خط بین خورشید و سیاره مکان‌های مساوی در مدت زمان مساوی طی می‌کند. میانگین فاصله سیاره به خورشید (مدار نیم محور اصلی) ۲۵ واحد نجومی است. بنابراین دوره مداری آن ۱۲۵ سال است.

در حالی که b نیم محور کوچک آن با رابطه زیر داده می‌شود :

$$b = a(1-e^2)^{1/2} \qquad (۱-۴)$$

e خروج از مرکز و مقدار آن کمتر از یک می‌باشد و از رابطه زیر به دست می‌آید :

$$e = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{mK^2}} \qquad (۱-۵)$$

که در این رابطه L اندازه حرکت زاویه‌ای، E انرژی و K مقدار ثابت است. همچنین می‌توان طول بزرگ آن را بر حسب انرژی ذره محاسبه کرد :

$$۲a = r_{\min} + r_{\max} = -\frac{۲L^۲}{mK}\frac{۱}{۱-e^۲} \qquad (۶-۱)$$

با جایگذاری خروج از مرکز در رابطه اخیرخواهیم داشت:

$$۲a = \frac{K}{E} \qquad (۷-۱)$$

این رابطه نشان می‌دهد که طول محور بزرگ از L مستقل است و تمامی مدارها با محور بزرگ یکسان، از انرژی برخوردارند و برعکس. همچنین:

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{۱+e}{۱-e} \qquad (۸-۱)$$

یعنی شکل بیضی به مقدار e بستگی دارد نه $r_۰$. چرا که $r_۰$ یک فاکتور مقیاسی است. همچنین بین خروج از مرکز بیضی و کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله بردارمکان سیاره تا کانون روابط زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} r_{\min} &= a(۱-e) \\ r_{\max} &= a(۱+e) \end{aligned} \qquad (۹-۱)$$

۱ - ۲ قانون گرانش جهانی

نیوتن با استفاده از قانون سوم کپلر و قانون دومش دریافت که مقدار نیروی کششی (به نام گرانش) بین سیاره و خورشید در فاصله d برابر است با :

$$\text{نیرو} = k_p \frac{\text{جرم سیاره}}{d^۲}$$

در اینجا k_p عددی است که برای همه سیارات یکسان است. به همان شیوه او یافت که مقدار جاذبه بین خورشید و سیاره برابر است با :

$$\text{نیرو} = k_s \frac{\text{جرم خورشید}}{d^{۲}}$$

شکل ۱ - ۴ : نیروی جاذبه بین دو جسم بر اساس قانون جاذبه نیوتن

نیوتن با استفاده از قانون سوم حرکت خود نشان داد که این نیروها باید یکسان ولی در جهت مخالف هم باشند. او سرانجام قانون جاذبه‌اش را به صورت زیر ارائه داد.

$$\text{نیروی جاذبه} = G \times \frac{\text{جرم ۱} \times \text{جرم ۲}}{(\text{فاصله بین آنها})^{۲}}$$

و جهت این نیروی همواره به سمت هر کدام از اجسام موجود می‌باشد، بنابراین این نیرو همیشه از نوع جاذبه است. G ثابت جهانی گرانش است. اگر شما از واحدهای کیلوگرم برای جرم و متر برای فاصله استفاده کنید خواهید داشت :

$$G = ۶/۶۷۲ \times ۱۰^{-۱۱} m^{۳} / (kg\,\sec)^{۲}$$

قانون گرانش جهانی نیوتن که وی آن را از مطالعات نخستین خود به دست آورد را می‌توان به این صورت بیان کرد: نیرویی که دو ذره به جرم‌های m و M به فاصله d از هم به یکدیگر وارد می‌کنند، نیروی جاذبه است که در امتداد خط واصل دو ذره اثر می‌کند و بزرگی آن برابر است با :

$$F = \frac{GmM}{d^{۲}} \qquad (۱۰-۱)$$

شتاب گرانی نیز از رابطه زیر به دست می‌آید :

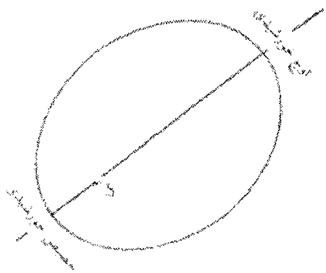
$$g = \frac{GM}{R^{۲}} \qquad (۱۱-۱)$$

که در آن G یک ثابت جهانی است و مقدار آن برای تمام زوج ذرات یکسان است.

۱ - ۳ قانون اول کپلر

قانون نخست کپلر بیان می‌کند که مدارهای سیارات بیضی هستند و خورشید در یکی از کانون‌های این بیضی قرار دارد.

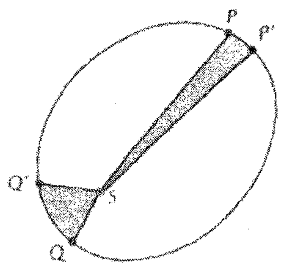
شکل (۱-۵) مدار سیاره‌ای بیضوی را نشان می‌دهد. نزدیک‌ترین نقطه به خورشید سمت‌الشمس یا حضیض خورشیدی نامیده می‌شود و دورترین نقطه از خورشید نیز اوج خورشیدی نام دارد. مجموع فواصل اوج و حضیض محور بزرگ بیضی است. فاصله از مرکز بیضی تا اوج نیم محور بزرگ است. این فاصله برابر میانگین فاصله‌های اوج و حضیض است.



شکل ۱ - ۵ : مدار سیارات اطراف خورشید

۱ - ۴ قانون دوم کپلر

قانون دوم کپلر چنین است. پاره خط شعاعی از خورشید تا سیاره در زمان‌های برابر مساحت‌های برابری را می‌پیماید.



شکل ۱ - ۶ : شعاع حامل در زمان‌های مساوی مسافت‌های برابری را طی می‌کند.

شکل (۱-۶) این قانون را بیان می‌کند. دو سطح سایه‌دار برابر هستند و سیاره در زمان‌های برابر مساحت‌های یکسانی را طی می‌کند. تندی سیاره هنگامی که به خورشید نزدیک‌تر باشد بزرگ‌تر از زمانی است که از خورشید دور است. قانون دوم که قانون مساحت‌ها هم خوانده می‌شود نتیجه مستقیم راستای مرکز سوی نیروی گرانشی است.

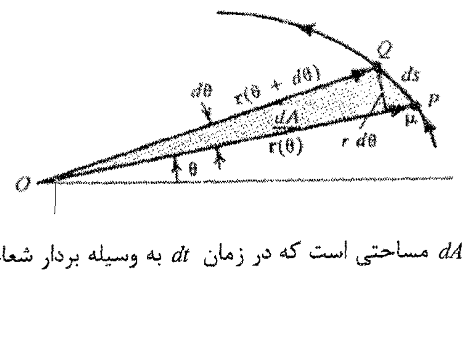
برای ذره متحرک تحت اثر نیروی مرکزی $F(r)$ که ممکن است با r هرگونه بستگی داشته باشد نشان دادیم اندازه حرکت زاویه‌ای L سیستم ثابت است. ذره‌ای به جرم μ در نظر می‌گیریم که در لحظه t در فاصله $r(\theta)$ از مرکز نیروی O قرار دارد. در فاصله زمانی dt این ذره از نقطه P به Q می‌رود که این نقطه در فاصله $r(\theta+d\theta)$ از مرکز نیروی O قرار دارد. مساحت dA روبیده شده به وسیله بردار شعاعی r در زمان dt (با این فرض که dS بسیار کوچک باشد تا بتوان آن را تقریبا به شکل خط مستقیم دانست زیرا $d\theta$ بسیار کوچک است) برابر مساحت مثلث OPQ است یعنی :

$$dA=\frac{۱}{۲}r(rd\theta)=\frac{۱}{۲}r^{۲}d\theta$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{۱}{۲}r^{۲}\frac{d\theta}{dt}=\frac{۱}{۲}r^{۲}\dot{\theta} \qquad (۱۲-۱)$$

با قرار دادن $\dot{\theta}=L/\mu r^{۲}$ داریم :

$$\frac{dA}{dt}=\frac{L}{۲\mu}=\text{ثابت} \qquad (۱۳-۱)$$



شکل ۱ - ۷ : dA مساحتی است که در زمان dt به وسیله بردار شعاعی r روبیده می‌شود.

رابطه بالا نشان می‌دهد که سرعت سطحی ثابت برای هر ذره متحرک تحت اثر نیرویی مرکزی صادق است. معادله اخیر همان بیان قانون دوم حرکت سیاره‌ای کپلر است که

قانون سطوح مساوی نامیده می‌شود. ضمنا اگر حرکت پریودیک با دوره تناوب T باشد از این معادله انتگرال می‌گیریم و به ازای یک دوره A را به دست می‌آوریم :

$$\int dA = \int_0^T \frac{L}{2\mu} dt \qquad (14-1)$$

یا :

$$A = \frac{L}{2\mu} T \qquad (15-1)$$

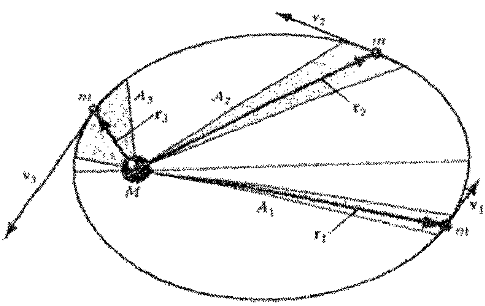
قانون سطوح مساوی پیامد ثابت بودن L است، پس می‌توان نوشت :

$$L = r_1 \times p_1 = r_2 \times p_2 \qquad (16-1)$$

با کاربرد این مطلب در مورد وضعیت نشان داده شده در شکل زیر برای حرکت جرم m بر مداری حول جرم M مشابه حرکت زمین دور خورشید $P = mv$ را چنین می‌نویسیم :

$$r_1 v_1 = r_2 v_2 = r_3 v_3 \qquad (17-1)$$

که v در آن سرعت مماسی است.



شکل ۱ - ۸ : طبق قانون دوم کپلر یعنی قانون سطوح مساوی $A_1 = A_2 = A_3$

برای آنکه سرعت سطحی ثابت باشد، اگر r افزایش یابد، v کاهش می‌یابد به نحوی که :

$$A_1 = A_2 = A_3 \qquad (18-1)$$

۱ - ۵ قانون سوم کپلر

قانون سوم کپلر در مورد حرکت سیاره‌ای می‌گوید میانگین فاصله سیاره از خورشید به توان ۳ به صورت مستقیم متناسب است با مدت چرخش به توان ۲ . قانون گرانش که نیوتن آن را کشف کرد می‌تواند قانون‌های کپلر را شرح دهد. قانون گرانش نیوتن در مورد هر شی که دارای جرم است به کار می‌رود. قانون کپلر می‌تواند در مورد هر شی که دور شی دیگر می‌چرخد کاربرد داشته باشد. توجه کنید به چرخش ماهواره‌ای دور یک سیاره. اگر دو ماهواره A و B به دور یک سیاره بچرخند، قانون سوم کپلر در مورد آنها می‌گوید:

$$\left(\frac{\text{مدت زمان چرخش A}}{\text{مدت زمان چرخش B}}\right)^{۲} = \left(\frac{\text{فاصله A از سیاره}}{\text{فاصله B از سیاره}}\right)^{۳}$$

اگر شما مدت چرخش یک ماهواره اطراف یک سیاره را اندازه‌گیری کنید به راحتی می‌توانید مدت زمان چرخش دیگر ماهواره‌ها با هر اندازه‌ای را به دست آورید. قانون سوم کپلر را می‌توان به صورت زیر ساده کرد :

$$\text{مدت چرخش A} = \text{مدت چرخش B} \times \left(\frac{\text{فاصله A}}{\text{فاصله B}}\right)^{۳/۲}$$

با استفاده از مکانیک نیوتنی قانون سوم کپلر به صورت زیر بیان می‌شود.

$$T^{۲} = \frac{۴\pi^{۲}}{GM} r^{۳} \qquad (۱-۱۹)$$

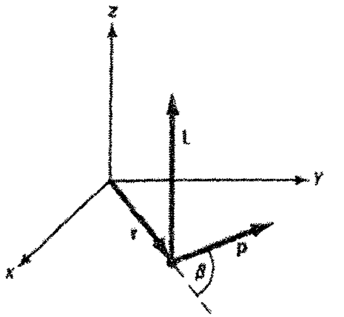
۱ - ۶ حرکت زاویه‌ای

اندازه حرکت یک ذره برابر است با حاصل ضرب جرم و سرعت آن ذره:

$$P = mv \qquad (۱-۲۰)$$

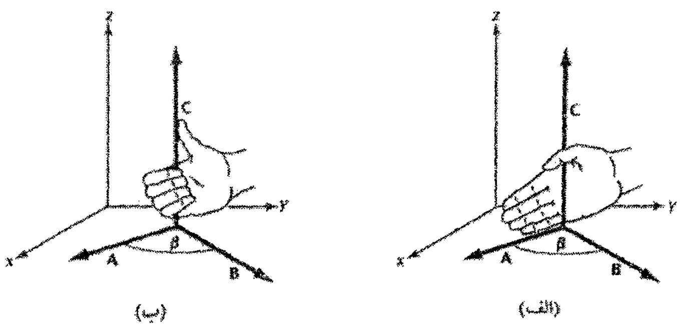
اگر ذره منفردی به جرم m را در نظر بگیریم که در یک لحظه از زمان دارای اندازه حرکت P است و در فاصله r از مبدا مختصات قرار دارد در این صورت اندازه حرکت زاویه‌ای L این ذره به صورت برداری به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$L = rp\sin\beta \qquad (۲۱-۱)$$



شکل ۱ - ۹ : بردار مکان، اندازه حرکت و اندازه حرکت زاویه‌ای

در این رابطه β زاویه بین اندازه حرکت P و بردار مکان r است. راستای بردار L در امتداد عمود بر صفحه‌ای است که با بردارهای P و r تعریف می‌شود. که با قاعده دست راست قابل بررسی است.



شکل ۱ - ۱۰ : استفاده از قانون دست راست

۱ - ۷ پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای

آهنگ تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

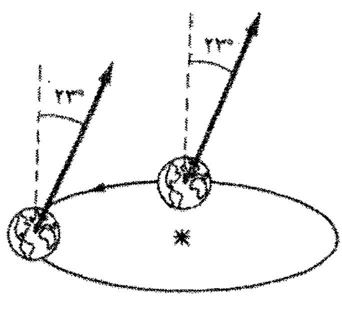
$$\frac{dL}{dt} = \tau_{\text{بیرونی}} \tag{۱-۲۲}$$

عبارت سمت راست گشتاور بیرونی کل است. اگر نیروهای بیرونی چنان باشند که گشتاور بیرونی کل صفر شود، آنگاه اندازه حرکت زاویه‌ای سیستم پایسته است. این قانون پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای است. اگر سیستم ذراتی که با آن سر و کار داریم یک جسم سخت باشد، آنگاه معادله بالا یک معادله دینامیکی است که حرکت چرخشی این جسم سخت را تعیین می‌کند. از آنجا که این معادله یک معادله برداری است سه مختصه دارد.

$$\frac{dL_x}{dt} = \tau_{\text{بیرونی}}, x \tag{۱-۲۳}$$

$$\frac{dL_y}{dt} = \tau_{\text{بیرونی}}, y \tag{۱-۲۴}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \tau_{\text{بیرونی}}, z \tag{۱-۲۵}$$



شکل ۱ - ۱۱ : محور چرخش زمین هنگامی که زمین حول خورشید می‌چرخد راستای ثابت خود را حفظ می‌کند.

چرخش زمین حول محور خود نیز پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای را عیان می‌کند. محور چرخش با صفحه مدار زمین به دور خورشید زاویه °۲۳/۵ می‌سازد. هیچ گشتاور بیرونی

وارد بر زمین وجود ندارد و اندازه حرکت زاویه‌ای آن ثابت باقی می‌ماند پس همچنان که زمین در مدار خود دور می‌زند، جهت محور چرخش ثابت باقی می‌ماند محور همیشه موازی خود حرکت می‌کند.

۱ - ۸ محاسبه سرعت مداری

برای درک بهتر مدارهای بیضی شکل، سرعت مداری V را در نظر می‌گیریم. سرعت مزبور را به دو مولفه عمود بر هم تجزیه کنیم. V_r تندی شعاعی و V_θ تندی زاویه‌ای است. با استفاده از معادله قانون مساحت‌ها داریم :

$$\frac{d\theta}{dt}=\left(\frac{۲\pi}{T}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^{۲}\left(۱-e^{۲}\right)^{۱/۲} \qquad (۲۶-۱)$$

با استفاده از معادله قطبی بیضی و معادله بالا، مشتقات نسبت به زمان را به دست می‌آوریم :

$$V_r=\frac{dr}{dt}=\left(\frac{۲\pi a}{T}\right)(e\sin\theta)\left(۱-e^{۲}\right)^{۱/۲}$$

$$V_\theta=r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=\left(\frac{۲\pi a}{T}\right)(a+e\cos\theta)\left(۱-e^{۲}\right)^{۱/۲} \qquad (۲۷-۱)$$

باید توجه داشت که معادله اخیر در نقاط حضیض و اوج به همان معادلات تندی حضیض و اوج سیاره در حال چرخش به دور خورشید تبدیل می‌گردند. اکنون تندی مداری کل از معادلات بالا پیروی می‌کنند.

$$V^{۲}=r_r^{۲}+r_\theta^{۲}=\left(\frac{۲\pi a}{T}\right)^{۲}\left(۱+۲e\cos\theta+e^{۲}\right)\left(۱-e^{۲}\right) \qquad (۲۸-۱)$$

با مرتب سازی مجدد معادله قطبی برای یک بیضی داریم :

$$e\cos\theta=\frac{\left[a\left(۱-e^{۲}\right)-r\right]}{r} \qquad (۲۹-۱)$$

و با جانشینی این نتیجه در معادله سرعت سرانجام با کمک معادله شکل نیوتنی قانون سوم کپلر، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$V^{۲}=G(m_{۱}+m_{۲})\left[\left(\frac{۲}{r}\right)-\frac{۱}{a}\right] \qquad (۱-۳۰)$$

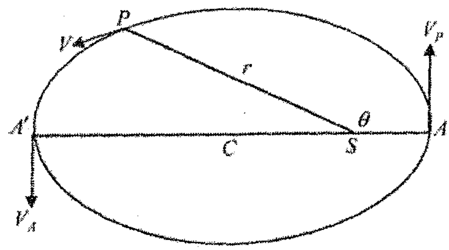
۱ - ۹ سرعت سیاره در مدارش

فرض کنید P موقعیت یک سیاره در مدار بیضوی آن به دور خورشید در یک زمان معین باشد. در این زمان سرعت سیاره V و طول شعاع حامل آن r می‌باشد و همچنین فرض کنید V_P و V_A به ترتیب سرعت سیاره در نقاط حضیض A و اوج خورشید A' باشد. نقاط A و A' تنها نقاطی از مدار هستند که برای یک لحظه سرعت بر شعاع حامل عمود می‌شود. پس می‌توانیم بنویسیم :

$$V=r\omega \qquad (۱-۳۱)$$

که در اینجا ω سرعت زاویه‌ای است. البته قانون دوم کپلر در هر نقطه مدار صادق است.

$$r^{۲}\omega=h \qquad (۱-۳۲)$$



شکل ۱ - ۱۲ : سرعت سیاره در یک مدار بیضوی که نشان می‌دهد بردار سرعت در نقاط حضیض و اوج بر شعاع حامل عمود است.

پس تنها در نقطه حضیض خورشید و اوج خورشید داریم :

$$V=\frac{h}{r} \qquad (۱-۳۳)$$

به ازای حضیض خورشید داریم :

$$V_P=\frac{h}{a(1-e)} \tag{۳۴-۱}$$

به ازای نقطه اوج خورشید داریم :

$$V_A=\frac{h}{a(1+e)} \tag{۳۵-۱}$$

در این صورت :

$$\frac{V_P}{V_A}=\frac{1+e}{1-e} \tag{۳۶-۱}$$

حاصل ضرب سرعت در نقطه اوج و حضیض به صورت زیر است :

$$V_A V_P=\frac{\mu}{a} \tag{۳۷-۱}$$

در نتیجه سرعت در هر نقطه از مدار بیضی به شکل زیر در می‌آید.

$$V^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) \tag{۳۸-۱}$$

۱ - ۱۰ حد روچ و حد ناپایداری

یک قمر مصنوعی نمی‌تواند به سیاره مرجع خود خیلی نزدیک شد (حد روچ) و یا از آن خیلی دور گردد (حد ناپایداری). یک قمر مصنوعی کروی شکل به جرم m که دارای شعاع r است در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم این قمر در فاصله d به دور سیاره مرجع خود که دارای جرم M و شعاع R است می‌چرخد. روچ نشان داد که چنین قمری اگر به فاصله‌ای کمتر از :

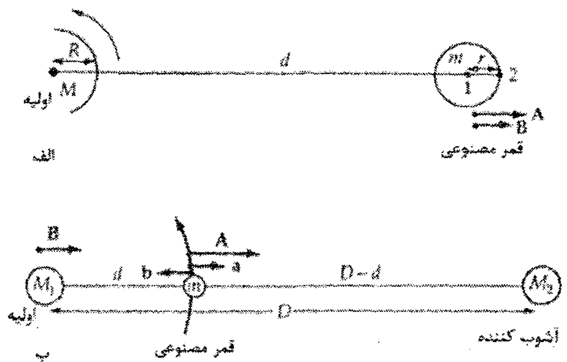
$$d=2/44\left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{\frac{1}{3}}R \tag{۳۹-۱}$$

به سیاره مرجع خود نزدیک شود، تکه تکه خواهد شد. در این رابطه ρ_M چگالی متوسط سیاره مرجع و ρ_m چگالی متوسط قمر است. همچنین هرچه یک جسم در فواصل دورتر

از سیاره مرجع خود به دور آن گردش کنـد پریشـندگی جزئـی از جانـب سـایر اجسـام، مهم‌تر می‌گردند. در بالای حد ناپایداری جسم از سیاره مرجع خود می‌گریزد.

$$d=\left(\frac{M_۱}{۲M_۲}\right)^{\frac{۱}{۳}}D \qquad (۴۰-۱)$$

معادله بالا زمانی معتبر است که $M_۱ << M_۲$ باشد.



شکل ۷ - ۲ : حد روچ و حد ناپایداری

۱ - ۱۱ دوره تناوب گردش یک سیاره در مدارش

فرض کنید مدار سیاره دایره‌ای باشد پس $r=a$ است. حال معادله اخیر سرعت در مـدار چنین است :

$$V^۲=\frac{\mu}{a} \qquad (۴۱-۱)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که :

$$V=\frac{۲\pi a}{T} \qquad (۴۲-۱)$$

که T زمانی است که صرف می‌شود تا سیاره مدار دایره‌ای خود را طی کند. پس :

$$T = 2\pi\left(\frac{a^3}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱-۴۳)$$

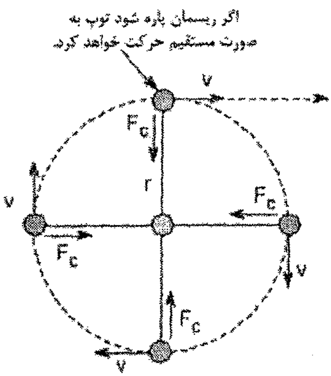
معادله آخر حتی در مواردی که مدار بیضوی است نیز صدق می‌کند و a نیم محور بزرگ مدار محسوب می‌شود.

۱ - ۱۲ نیروی جانب مرکز

اگر شما ریسمانی را که جسمی به انتهای آن بسته شده را با سرعت زیاد بچرخانید نیروی جانب مرکز کافی برای حرکت دایره‌ای بر آن وارد می‌کنید. مقدار نیروی جانب مرکز مورد نیاز برای تعادل یک جسم دارای اینرسی و نگه داشتن آن در یک مسیر دایره‌ای به شعاع r از قانون دوم نیوتن به دست می‌آید:

$$F = m\frac{V^2}{r} \qquad (۱-۴۴)$$

که در این رابطه v سرعت جسم و m جرم جسم و r فاصله جسم تا مرکز می‌باشد.



شکل ۱ - ۱۳ : یک نیروی جانب مرکز برای متعادل کردن سرعت و یک سرعت برای متعادل کردن نیروی جانب مرکز کافی می‌باشد.

حالا برای چرخش ماهواره‌ها این ریسمان نیست که مسیر حرکت آنها را تغییر می‌دهد بلکه جاذبه این کار را می‌کند. جاذبه، نیروی جانب مرکز مورد نیاز برای نگه داشتن

ماهواره در مسیر دایره‌ای را تامین می‌کند. اگر شما به یک حرکت چرخش ساده توجه کنید، می‌توانید از فرمول نیروی جانب مرکز و قانون جاذبه جرم سیاره و ستاره را تعیین کنید.

به سادگی می‌توان نیروی جاذبه را برابر نیروی جانب مرکز قرار داد و جرم ستاره و سیاره را بدست آورد:

$$\frac{GMm(۲۵-۴)}{r^{۲}}=\frac{mV^{۲}}{r} \qquad (۴۵-۱)$$

با حذف m از دو طرف و آوردن M به طرف دیگر فرمول به صورت زیر ساده می‌شود :

$$M=\frac{r^{۲}}{G}\times\frac{V^{۲}}{r}\Rightarrow M=\frac{rV^{۲}}{G} \qquad (۴۶-۱)$$

اگر جرم سیاره را m فرض کنیم، m بسیار کمتر از جرم مرکز است بنابراین می‌توان آن را نادیده گرفت و تاثیر جرم ماهواره نسبت به جرم مرکز را نادیده می‌گیریم.

۱ - ۱۳ زمان چرخش

بعضی وقت‌ها زمان چرخش T از سرعت چرخش اندازه‌گیری می‌شود. زمان چرخش زمانی است که طول می‌کشد تا ماهواره محیط دایره‌ای چرخش را طی کند (برای یک دایره محیط دایره برابر است با $= ۲\times۳/۱۴\times r$) و سرعت = زمان/فاصله بنابراین

سرعت = زمان چرخش/محیط دایره چرخش

هنگامی که سرعت را در رابطه جرم وارد می‌کنیم به صورت زیر می‌شود :

$$M=\frac{۴\pi^{۲}}{G}\frac{r^{۳}}{T^{۲}} \qquad (۴۷-۱)$$

این ممکن است قانون سوم کپلر را به یاد شما بیندازد. اینجا هم یک فاصله است که به توان ۳ ، یک زمان که به توان ۲ رسیده است و سایر فاکتورها. نیوتن کشف کرد که هنگامی که کپلر حرکت سیارات را فرموله کرد جرم خورشید را اندازه‌گیری کرد.

۱ - ۱۴ اندازه‌گیری جرم یک سیاره

سیاره‌ای را در نظر بگیرید که نیم محور بزرگش a دوره تناوب نجومی گردش آن T و جرم آن m باشد و یک قمر P_1 در مداری با نیم محور بزرگ a_1 و دوره تناوب نجومی گردش T_1 به دور آن سیاره P در حرکت است. جرم خورشید و قمر را به ترتیب M و m فرض کنید. با استفاده از معادله دوره تناوب سیاره به دور خورشید داریم :

$$T = 2\pi\left(\frac{a^3}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۴۸-۱)$$

همان طور که از قبل می‌دانیم $\mu = G(M+m)$ است. برای سیاره و قمر آن داریم :

$$T_1 = 2\pi\left(\frac{a_1^3}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۴۹-۱)$$

که $\mu_1 = G(m+m_1)$ است. پس از تقسیم دو رابطه بالا و ساده کردن داریم :

$$\frac{T_1}{T} = \left[\left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \frac{\mu}{\mu_1}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۵۰-۱)$$

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \left(\frac{T_1}{T}\right)^2\left(\frac{a}{a_1}\right)^3 = \frac{M+m}{m+m_1} \qquad (۵۱-۱)$$

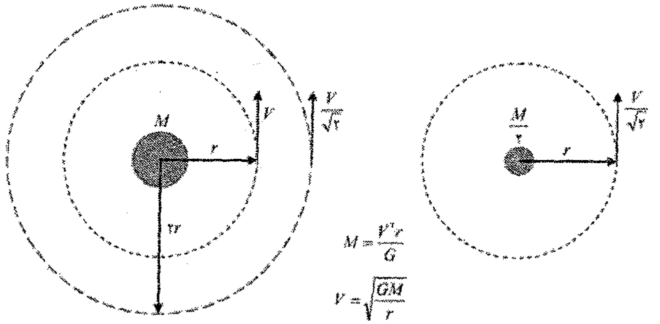
$$\frac{M+m}{m+m_1} = \left(\frac{M}{m}\right)\left(\frac{1+m/M}{1+m_1/m}\right) \qquad (۵۲-۱)$$

می‌دانیم که نسبت $\frac{m}{M}$ خیلی از یک کوچک‌تر است و برای اقمار منظومه شمسی نسبت جرمشان به جرم سیاره اولیه آنها بسیار کمتر از یک می‌باشد. پس :

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{T_1}{T}\right)^2\left(\frac{a}{a_1}\right)^3 \qquad (۵۳-۱)$$

۱ - ۱۵ سرعت چرخش

فرمول جرم به ما می‌گوید سرعت چرخش ماهواره به دور یک سیاره با جرم بیشتر و فاصله یکسان، بیشتر از سرعت چرخش دور با جرم کمتر است. سیاره با جرم بیشتر نیروی جاذبه قوی‌تر دارد بنابراین شتاب چرخش دور سیاره با جرم بیشتر، بیشتر از شتاب چرخش دور سیاره با جرم کمتر، با فاصله یکسان خواهد بود.



شکل ۱ - ۱۴ : سرعت چرخش در دو وضعیت متفاوت

برای متعادل کردن نیروی قوی‌تر جاذبه سیاره با جرم بیشتر، ماهواره باید با سرعت بیشتری نسبت به سیاره با جرم کمتر بچرخد. بنابراین این قوانین برای سیاره‌ای در حال چرخش دور ستاره‌ها و چرخش ستاره‌ها حول دیگر ستاره‌ها به کار می‌رود. اگر شما سرعت را در رابطه جرم به دست آورید می‌توانید سرعت مناسب برای متعادل کردن چرخش را نیز تعیین کنید.

$$V=\sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad (۵۴-۱)$$

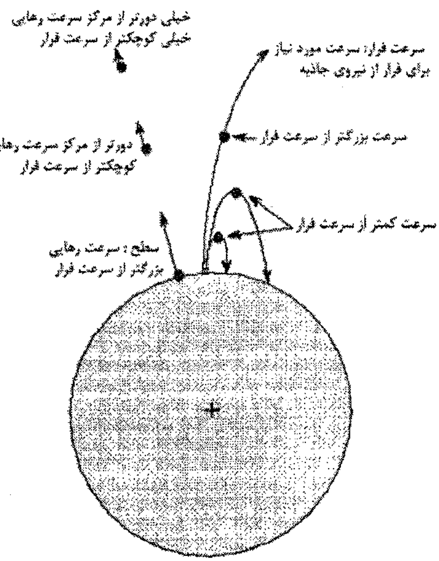
۱ - ۱۶ سرعت فرار

اگر یک شی با سرعت کافی حرکت کند می‌تواند از نیروی جاذبه سیاره فرار کند. سرعت مورد نیاز برای این کار سرعت فرار نامیده می‌شود. این سرعت، سرعت ابتدایی مورد نیاز

جسم برای فرار از جاذبه سیاره است و فرض می‌شود که نیروی دیگری غیر از جاذبه سیاره بر روی شی اثر نداشته باشد. راکت‌هایی که زمین را ترک می‌کنند سرعت فرار ندارند اما موتورها نیروی لازم برای بلند شدن راکت را فراهم می‌کنند. با استفاده از قانون حرکت نیوتن و قانون جاذبه می‌توان سرعت فرار را پیدا کرد که شبیه سرعت چرخش است :

$$V = \sqrt{\frac{۲GM}{r}} \qquad (۵۵-۱)$$

این فاکتور در برابر بیشتر از سرعت چرخش است چون M در صورت کسر قرار دارد، سرعت فرار با افزایش جرم بیشتر می‌شود. جسم با جرم زیاد نیروی بیشتری وارد می‌کند بنابراین سرعت بیشتری برای فرار از جاذبه آن نیاز دارد. لذا چون r در مخرج کسر قرار دارد هرچه سرعت فرار بیشتر شود r کوچک‌تر می‌شود. جاذبه با افزایش r کاهش می‌یابد بنابراین جسم دور از جسم با جرم زیاد برای فرار نسبت به جسم نزدیک‌تر نیاز به سرعت کمتری دارد.



شکل ۱ - ۱۵ : سرعت فرار در قسمت‌های مختلف بالای سطح

۱ - ۱۷ انرژی جنبشی و پتانسیل

جسم در حال حرکت نسبت به جسم ساکن انرژی بیشتری دارد که به آن انرژی جنبشی می‌گویند و به جرم جسم و سرعت آن بستگی دارد.

$$E = \frac{۱}{۲} m v^{۲} \qquad (۱-۵۶)$$

انرژی پتانسیل گرانشی نیز به علت اثر متقابل گرانش بین دو جسم ایجاد می‌گردد.

$$U = -\frac{GMm}{r} \qquad (۱-۵۷)$$

انرژی کل مکانیکی، برابر مجموع انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی است.

$$K = E + U = \frac{۱}{۲} m v^{۲} - \frac{GMm}{r} = \text{ثابت} \qquad (۱-۵۸)$$

این انرژی کل در طول حرکت ثابت باقی می‌ماند. اگر بخواهیم مدارهای ممکن حول خورشید را از نظر انرژی آنها مورد بررسی کنیم، می‌توانیم برای یک مدار دایره‌ای از رابطه تندی استفاده کنیم.

$$v = \sqrt{\frac{GM_s}{r}}$$

$$E = \frac{۱}{۲} m v^{۲} = \frac{GM_{۲} m}{۲r}$$

$$K = E + U = \frac{۱}{۲} m v^{۲} - \frac{GM_s m}{r}$$

$$K = \frac{GM_s m}{۲r} - \frac{GM_s m}{r} \Rightarrow K = -\frac{GM_s m}{۲r}$$

نتیجه می‌گیریم انرژی کل برای یک مدار دایره‌ای منفی و نصف انرژی پتانسیل است.

۱ - ۱۸ شعاع شوارتزشیلد

کارل شوارتزشیلد اخترفیزیکدان آلمانی بلافاصله پس از آنکه اینشتین نظریه نسبیت عام خود را به چاپ رسانید، شعاع بحرانی مربوط به سرانجام ستاره‌ها را محاسبه کرد.

با استفاده از معادله سرعت فرار و قرار دادن $v=c$ داریم.

$$c=\sqrt{\frac{۲GM}{d}} \qquad (۱-۵۹)$$

با بازنویسی دوباره خواهیم داشت :

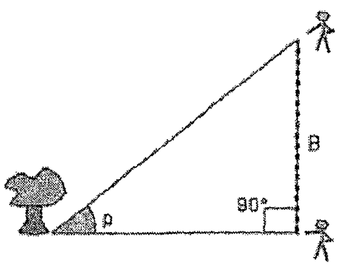
$$d=\frac{۲GM}{c^{۲}} \qquad (۱-۶۰)$$

از این فاصله (شعاع شوارتزشیلد) هیچ چیز نمی‌تواند از تاثیر گرانش سیاهچاله بگریزد.

۱ - ۱۹ اختلاف منظر مثلثاتی

تغییر زاویه‌ای (اختلاف منظر) یک زاویه مثلث است و فاصله بین دو نقطه برتر یک ضلع مثلث است. روابط مثلثاتی اساسی بین طول‌های اضلاع مثلث و زوایای آن برای محاسبه طول‌های اضلاع مثلث استفاده شده‌اند. این شیوه اختلاف منظر مثلثاتی نامیده می‌شود. ناظران از این شیوه برای اندازه‌گیری فاصله‌های زیاد استفاده می‌کنند. بنابراین این شیوه گاهی اوقات شیوه کاوشگر نامیده می‌شود.

ضلع مثلث بین ناظر در شکل زیر B نامیده شده است، خط اصلی نامیده می‌شود. اندازه زاویه اختلاف منظر p متناسب است با اندازه خط اصلی اگر زاویه اختلاف منظر آنقدر کوچک باشد که نتوان آن را اندازه گرفت چون شی بسیار دور است. کاوشگران مجبور هستند.

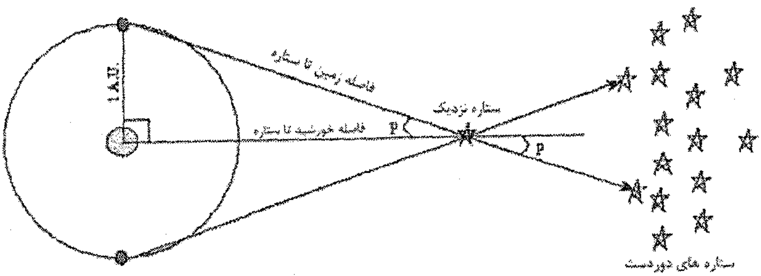


شکل ۱ - ۱۶ : اگر یک ضلع مثلث B و یک زاویه قائمه داشته باشیم؛ می‌توانیم طول دو ضلع دیگر را به دست آوریم.

فاصله خود را از یکدیگر افزایش دهند. معمولا شما باید از توابع مثلثاتی مانند تانژانت یا سینوس استفاده کنید. ولی اگر زاویه به اندازه کافی کوچک باشد می‌توانید رابطه بسیار ساده‌ای بین زاویه اختلاف منظر p خط اصلی B و فاصله d داشته باشید :

$$p=\frac{۲۰۶۲۶۵\times B}{d} \qquad (۶۱-۱)$$

که زاویه p در واحد بسیار کوچک زاویه به نام ثانیه قوس اندازه‌گیری می‌شود. هرچه شی دورتر باشد، کمتر به نظر می‌رسد که تغییر کنند. چون تغییرات ستاره‌ها بسیار کوچک هستند. ثانیه‌های قوس به عنوان واحد زاویه اختلاف منظر استفاده می‌شوند. ۳۶۰۰ ثانیه قوس در فقط یک درجه دارد. توپ در نوک خودکار دیده شد در طول زمین زمین فوتبال در حدود یک ثانیه قوس است.



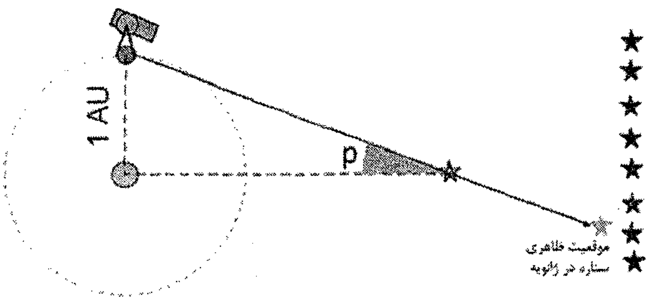
شکل ۱ - ۱۷ : تصویر گرفته شده از ستاره نزدیک در مقابل فاصله ستاره با ۶ ماه فاصله.

پارسک فاصله ستاره‌ای است که دارای یک ثانیه قوس با استفاده از خط اصلی ۱ واحد نجومی است. بنابراین یک پارسک برابر ۲۰۶۲۶۵ واحد نجومی است. لذا ستاره در حدود ۱/۳ پارسک از منظومه شمسی است. به منظور تبدیل پارسک به واحدهای استاندارد مانند کیلومتر یا متر، شما باید مقدار عددی را برای واحد نجومی بدانید. با استفاده از پارسک برای واحد فاصله و ثانیه قوس برای زاویه، فرمول ساده زاویه در بالا برای اندازه‌گیری‌ها از زمین بی‌نهایت ساده می‌شود :

$$p=\frac{۱}{d} \qquad (۶۲-۱)$$

۱ - ۲۰ زوایای کوچک

زوایای اختلاف منظر به کوچکی $\frac{۱}{۵۰}$ ثانیه‌ای قوس را می‌توان از سطح زمین اندازه گرفت. این بدان معناست که فاصله‌ها از زمین را می‌توان برای ستاره‌هایی که تا ۵۰ پارسک دور هستند را تعیین کرد. اگر ستاره‌ای دورتر از آن باشد، زاویه اختلاف منظر آنقدر است کـه نمی‌توان آن را اندازه گرفت و شما بایـد از شـیوه‌هـای غیـر مسـتقیم‌تـری بـرای تعیـین فاصله‌اش استفاده کنید. ستاره‌ها به طور متوسط در حدود یک پارسک از هم دور هستند بنابراین شیوه اختلاف منظر مثلثاتی برای فقط چند هزار ستاره نزدیک کار می‌کند.



شکل ۱ - ۱۸ : اختلاف منظرهای ستاره‌ای به بزرگ‌ترین خط اصلی ممکن نیاز دارند.

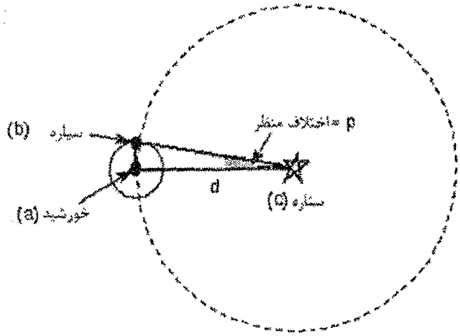
اگر مدار کل پلوتو در طول یک مربع (۲/۴ سانتیمتر در سرتاسر) بود، نزدیک‌ترین سـتاره ۸۰ متر فاصله داشت. برای مورد عمومی‌تر اختلاف منظر مشاهده شده از هر سیاره فاصله تا ستاره در واحد پارسک برابر است با $d = ab/p$ که p اختلاف در واحد ثانیه قوس ثانیه و ab فاصله بین سیاره و خورشید در واحد نجومی است.

با توجه به شکل بعد :

$$\frac{\text{اختلاف منظر}}{۳۶۰} = \frac{\text{فاصله سیاره - خورشید}}{\text{محیط خورشید - ستاره}}$$

بنابراین :

$$\frac{ab}{۲\pi d} = \frac{p}{۳۶۰} \qquad (۱-۶۳)$$



شکل ۱ - ۱۹ : مثلث اختلاف منظر بسیار طولانی مثلث بندی باریک

پس:

$$d = \frac{۳۶۰(ab)}{۲\pi p} \qquad (۶۴-۱)$$

p در واحد ثانیه قوس و d بر حسب پارسک و ab بر حسب واحد نجومی و همچنین :

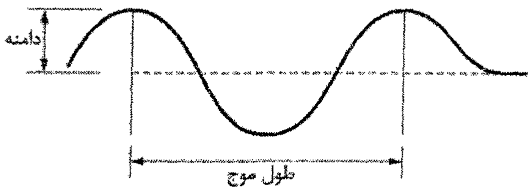
$$d = \frac{ab}{p} \qquad (۶۵-۱)$$

رابطه اول فاصله خط اصلی سیاره - خورشید را به اندازه اختلاف منظر اندازه گرفته شده مربوط می‌کند. این رابطه نشان می‌دهد که چگونه فاصله ستاره - خورشید به خط اصلی سیاره - خورشید و اختلاف منظر بستگی دارد. در مورد مشاهدات زمین، فاصله خورشید - سیاه برابر است با ۱ واحد نجومی بنابراین $d = ۱/p$ از زمین شما به سادگی زاویه اختلاف منظر را به دست می‌آورید.

۱ - ۲۱ پدیده دوپلر

تحت شرایط استاندارد، تندی یک موج وقتی در چارچوب سکون هوا اندازه‌گیری شود، $۳۳۱ m/s$ است. ولی وقتی در چارچوب مرجعی که در هوا متحرک است، اندازه‌گیری شود بسته به راستای حرکت چارچوب مرجع، ممکن است بیشتر یا کمتر باشد.

طبیعت موجی نور یعنی انتقال طیفی در یک شی اگر در حال حرکت باشد، اثر دوپلر نامیده می‌شود.



شکل ۱ - ۲۰ : دامنه و طول موج

حرکت جنبشی منبع نور باعث تغییر موقعیت طیف‌های خطی می‌شود. یک تکان شی باعث تغییر طول موج می‌شود.

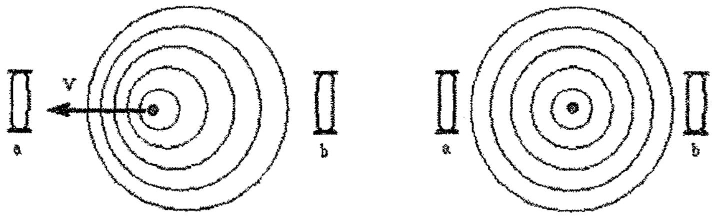
$$\Delta\lambda = \lambda_{new} - \lambda_{rest} \qquad (۱-۶۶)$$

که بستگی به سرعت و موقعیت شی در حال حرکت دارد. کل تغییرها بستگی به سرعت جسم دارد.

$$\Delta\lambda = \lambda_{rest} \times \frac{V_{radial}}{c} \qquad (۱-۶۷)$$

که c سرعت نور و λ طول موج است که شما اندازه‌گیری می‌کنید. وقتی که شی ساکن است و V_{radial} سرعتی است که پرتوهای نوری در امتداد خط طی می‌کنند. اطلاعات زیادی در این فرمول کوچک ذخیره شده است. اول اینکه سرعت بیشتر شی در حال حرکت تغییر دوپلر بزرگ‌تری داریم. برای مثال یک نشر خطی خاص ئیدروژن از کهکشان همسایه با تغییر کمتری نسبت به همین خطوط که از یک کهکشان بسیار دور می‌آید. این نشان می‌دهد که کهکشانی که دورتر است با سرعت بیشتری حرکت می‌کند. نسبت به کهکشان نزدیک.

دوم V_{radial} یعنی فقط حرکت شی در امتداد خط بینایی مهم است اگر شی حرکت کند با زاویه‌ای نسبت به خط بینایی تغییر دوپلر به ما فقط قسمتی از حرکت شی را در امتداد خط بینایی خواهد گفت شما باید از تکنیک‌های دیگری استفاده کنید.



شکل ۱ - ۲۱ : چپ؛ ناظر a امواج را به هم فشرده‌تر می‌بیند (انتقال آبی) ولی ناظر b امواج را کشیده‌تر می‌بیند (انتقال سرخ). راست؛ در اینجا هر دو ناظر امواج را یکسان می‌بینند.

۱- ۲۲ درخشندگی

ستارگان از نظر درخشندگی تفاوت‌های آشکار با یکدیگر دارند. نگاهی گذرا به آسمان شب کافی است تا درستی این گفته ثابت شود. متاسفانه درخشندگی یک ستاره را نمی‌توان مستقیما اندازه گرفت زیرا درخشندگی نه فقط به خواص ذاتی ستاره بستگی دارد بلکه تابع فاصله ستاره از رصد کننده نیز هست. یک ستاره می‌تواند درخشنده باشد زیرا گرم یا بزرگ (یا هر دو) است. درخشندگی هر شی برابر است با مقدار انرژی که در هر متر مربع تولید می‌شود ضربدر مساحت سطح آن. از فصل تابش الکترومغناطیس به خاطر آورید که مقدار انرژی که در هر متر مربع می‌ریزد برابر است با:

$\sigma \times$ (دمای سطح شی)^4

که σ ثابت استفان - بولتزمن است. چون دما تا توان چهارم افزایش می‌یابد، به این معناست که درخشندگی ستاره بسیار با سرعت حتی با افزایش کمی در دما، افزایش می‌یابد. درخشندگی ستاره بسیار با سرعت حتی با افزایش کمی در دما، افزایش می‌یابد.

اگر در فاصله d از ستاره باشیم، می‌توانیم مقدار انرژی که به هر سانتی‌متر مربع از فضای بالای جو زمین می‌رسد را اندازه بگیریم. این مقدار را با e نشان می‌دهیم که انرژی ورودی به ازای هر سانتی‌متر مربع در هر ثانیه است.

$$e = \pi f \qquad (۱-۶۸)$$

که f شار انرژی است. مقدار انرژی که به هر سانتی‌متر مربع در ثانیه به ازای هر سانتی‌متر از نوار طول موج λ می‌رسد πf_λ خوانده می‌شود. شار کل برابر است با :

$$\pi f = \int_0^\infty \pi f_\lambda d\lambda \qquad (۱-۶۹)$$

که روی همه طول موج‌ها انتگرال‌گیری شده است.

۱- ۲۳ قدر

میزان کم نوری و پرنوری ستارگان را با سیستمی به نام سیستم قدر معین می‌کنند. روشنایی ستاره‌ها با قدر مشخص می‌شوند. ستاره‌شناس یونانی این سیستم را در حدود ۱۵۰ بعد از میلاد ابداع کرد. سیستم قدر بر اساس این بود که یک ستاره با چشم غیر مسلح چقدر روشن به نظر برسد. تا قرن نوزدهم ستاره‌شناسان تکنولوژی را توسعه دادند تا روشنایی ستاره را به طور واقعی اندازه بگیرند. به جای رها کردن سیستم قدر بسیار طولانی استفاده شده، ستاره‌شناسان آن را تصحیح و کمیت آن را تعیین کردند. آنها بنا نهادند که تفاوت قدر ۵ مطابق است با ضریب دقیقا ۱۰۰ برابر آن در شدت. فاصله زمان‌های دیگر قدر بر اساس اعتقاد قرن نوزدهم که چگونه چشم انسان تفاوت‌ها را از نظر روشنایی درک می‌کند، بودند. این گونه تصور می‌شد که تفاوت‌هایی که چشم از نظر روشنایی احساس می‌کرد در مقیاس لگاریتمی بود بنابراین قدر ستاره به طور مستقیم متناسب با مقدار انرژی که شما دریافت می‌کنید نیست. اکنون معلوم است که چشم تقریبا آشکارگر لگاریتمی نیست.

دو ستاره با قدرهای m و n با روشنایی‌های ظاهری متوالی l_m و l_n را در نظر بگیرید. نسبت روشنائی‌های آنها $\frac{l_n}{l_m}$ به اختلاف قدر $m-n$ مربوط می‌شود. چون اختلاف یک واحد قدر به معنی نسبت روشنایی $۱۰۰^{۱/۵}$ است، پس قدر $m-n$ با نسبت :

$$\left(۱۰۰^{۱/۵}\right)^{m-n} = ۱۰۰^{(m-n)/۵} \qquad (۱-۷۰)$$

متناظر است:

$$\frac{l_n}{l_m} = ۱۰۰^{(m-n)/۵} \qquad (۷۱-۱)$$

با گرفتن لگاریتم پایه ۱۰ از طرفین معادله بالا و با توجه به روابط زیر:

$$\log x^a = a\log x$$
$$\log ۱۰^a = a\log ۱۰ = a$$

داریم:

$$\log\left(\frac{l_n}{l_m}\right) = \left[\frac{(m-n)}{۵}\right]\log ۱۰۰ = ۰/۴(m-n)$$

یا:

$$m-n = ۲/۵\log\left(\frac{l_n}{l_m}\right) \qquad (۷۲-۱)$$

معادله آخر قدر ظاهری را تعریف می‌کند توجه کنید که $m > n$ وقتی $l_n > l_m$ باشد، یعنی اجرام روشن‌تر از نظر عددی قدرهای کوچک‌تری دارند. همچنین توجه کنید که روشنائی‌های اجسام مشاهده شده از زمین، به طور فیزیکی شار آنها می‌باشند. قدر ظاهری یک راه ویژه نجومی برای صحبت راجع به شار می‌باشد.

۱ - ۲۴ قدر ظاهری

روشنایی ظاهری ستاره‌ای که از زمین مشاهده شده است قدر ظاهری نامیده می‌شد. قدر ظاهری اندازه شار ستاره دریافت شده توسط ماست.

ستاره نور خود را به اطراف پخش می‌کند. کافی است یک آشکار ساز قرار دهیم و مقدار انرژی را بر واحد سطح آن در واحد زمان حساب کنیم. ولی نور شهر مانع است. برای رفع این مشکل از تلسکوپ استفاده می‌شود. تلسکوپ زاویه دید را چنان تنگ می‌کند که فقط نور ستاره خاص به آن می‌تابد. آشکار سازها نسبت به بسامدهای مختلف به یک نسبت حساس نیستند. امواج الکترومغناطیسی از طول موج‌های رادیویی تا ماورا بنفش، اشعه ایکس و اشعه گاما می‌باشد. مثلا در قمرهای مصنوعی از اشعه مادون قرمز استفاده می‌شود. هرجا که شی مادون قرمز تشعشع کند به وسیله آشکارساز مادون قرمز آن آشکار می‌شود. I را به نواحی مختلف طیفی تقسیم می‌کنیم.

شار نوری (شار انرژی الکترومغناطیسی) = مقدار انرژی نورانی گذرنده از واحد سطح در واحد زمان = I

$$I = \int_{\circ}^{\infty} I_\lambda d\lambda \qquad (\text{۷۳}-\text{۱})$$

در رابطه لگاریتمی با I دارد.

$$m = -\text{۲}/\text{۵} \log I + m_\circ \qquad (\text{۷۴}-\text{۱})$$

که m قدر و $m_\circ$ قدر مرجع است. $m_\circ$ برای تمام ستاره‌ها یکسان است. مقدار قدر مرجع به گونه‌ای انتخاب می‌شود که قدری که برای ستارگان به دست می‌آید در صورت امکان با نجوم قدیم یکسان باشد. ستاره‌های روشن در حدود قدر صفر یا منفی دارد. کم نورترین ستاره‌ها قدر ۶ دارند که با چشم سالم دیده می‌شود. هر چقدر قدر یک ستاره بیشتر باشد؛ کم نورتر است. اگر دو ستاره را در نظر بگیریم که شدت نور یکی ۱۰ برابر ستاره دیگر باشد:

$$I_\text{۲} = \text{۱۰} I_\text{۱}$$

$$\begin{cases} m_\text{۱} = -\text{۲}/\text{۵} \log I_\text{۱} + m_\circ \\ m_\text{۲} = -\text{۲}/\text{۵} \log I_\text{۲} + m_\circ \end{cases} \Rightarrow m_\text{۲} - m_\text{۱} = -\text{۲}/\text{۵} \log \frac{I_\text{۲}}{I_\text{۱}} = -\text{۲}/\text{۵}$$

I و قدر تابع طول موج می‌باشند. قدرهایی که روی فیلترهای مختلف اندازه‌گیری می‌شوند مثلا فیلتر قرمز نور قرمز را از خود عبور می‌دهد. فیلترهای استاندارد معروف عبارتند از m_V قدر بصری و m_B قدر آبی و m_U قدر ماورا بنفش

۱ - ۲۵ قدر مطلق

اگر ستاره‌ای در فاصله ۱۰ پارسک از ما باشد، قدر ظاهری آن مساوی با قدر مطلق آن خواهد بود. قدرمطلق اندازه درخشندگی ستاره (مقدار کلی انرژی تابیده شده توسط این ستاره در هر ثانیه) است. اگر شما قدر مطلق ستاره‌ای را اندازه بگیرید و قدر مطلق آن را بدانید می‌توانید فاصله ستاره (با استفاده از قانون مربع معکوس روشنایی نور) بیابید. اگر قدر ظاهری ستاره و فاصله را بدانید، می‌توانید درخشندگی ستاره را بیابید. درخشندگی کمیتی است که به خود ستاره بستگی دارد نه به اینکه در چه فاصله‌ای است (این ویژگی

ذاتی است) به این دلیل درخشندگی ستاره در مورد فیزیک درونی ستاره به شما می‌گوید و این کمیت مهم‌تری از روشنایی ظاهری است.

قدر یک ستاره اگر از فاصله ده پارسکی به آن نگاه کنیم و از این فاصله قدر اندازه‌گیری شود. به طریق محاسباتی می‌توانیم از فاصله زیاد قدر را اندازه بگیریم

$$m(r) = -۲/۵ \log I + m_{\circ}$$

$$M(۱\cdot pa) = -۲/۵ \log I(۱\cdot) + m_{\circ}$$

$$m - M = -۲/۵ \log \frac{I}{I(۱\cdot)} = -۲/۵ \log \left(\frac{۱\cdot(pa)}{r(pc)}\right)^{۲} = ۵ \log \left(\frac{r(pc)}{۱\cdot(pa)}\right)$$

کمیت $m - M$ را مدول فاصله می‌گویند. مدول فاصله مستقل از طول موج است. می‌توان با یک تلسکوپ؛ فیلتر و آشکار ساز برای ستاره‌های مختلف؛ قدرهای مختلف را اندازه گرفت، فاصله ستاره‌ها را با روش اختلاف منظر، خوشه‌های در حال حرکت و . . . می‌توان به دست آورد. بعد می‌توانیم قدر مطلق را به دست آوریم. قدر مطلق بهتر است چون برای همه ستاره‌ها یک فاصله استاندار ۱۰ پارسک در نظر گرفتیم. پس یکسری اختلافات مربوط به فاصله از بین می‌رود. کم نوری و پر نوری ستارگان که به علت فاصله است، واقعی نیست.

۱- ۲۶ انبساط کیهان و عمر جهان

بر اساس قانون هابل :

$$v = Hr \qquad (۷۵-۱)$$

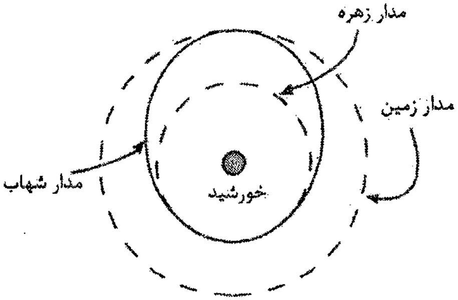
تمام خوشه‌های کهکشانی از یکدیگر دور می‌شوند. که در این رابطه $H_{\circ}$ ثابت هابل و مقدار آن از ۵۰ تا $۱۰۰ km/s \cdot Mpc$ متغیر است. توجه داشته باشید که $H_{\circ}^{-۱}$ با عمر جهان مربوط است زیرا دارای ابعاد سال می‌باشد. چون $H_{\circ}^{-۱}$ تخمین خوبی از عمر جهان است بایستی تحقیق نمائیم که محتویات جهان کمتر از ۲×۱۰^{۱۰} سال عمر دارند. تعیین عمر سرب - اورانیوم عمر زمین را حدود ۴×۱۰^{۹} سال بدست می‌دهد. هنگامی که سازه عدم قطعیت ۲ را در $H_{\circ}$ در نظر بگیریم $H_{\circ}^{-۱}$ تخمین مناسبی از عمر جهان ما می‌باشد اما لازم به ذکر است اگر $H_{\circ}$ تقریبا برابر $۱۰۰ km/s\, Mpc$ باشد آنگاه :

$$H_0^{-1} \approx ۱۰ \times ۱۰^۹$$

سال بوده که مسایلی را در مورد عمر ستارگان خوشه کروی جمعیت II بیـان مـی‌کنـد که به نظر می‌رسد پیرتر از جهان باشند.

بخش دوم

مسائل حل شده



بخش دوم: مسائل حل شده

مسئله ۱: با چند نفر انسان کامل می‌توانیم حجم زمین را پر کنیم؟ چه تعداد زمین لازم است تا حجم سیاره مشتری را پر کنیم؟ با چه تعداد سیاره مشتری می‌توان حجم خورشید را پر کرد؟ چه تعداد خورشید برای پر کردن حجم منظومه شمسی لازم است (تمام این اجرام را کروی تصور کنید).

حل: در ابتدا حجم یک انسان را محاسبه می‌کنیم. انسانی با ۱/۵ متر بلندی و ۰/۳ متر پهنا و ۰/۲ متر ضخامت فرض می‌کنیم. در نتیجه حجم یک انسان معمولی حدود ۰/۱ متر مکعب است و حجم اجرام منظومه شمسی برابر است با :

$$V=\frac{۴}{۳}\pi\times R^{۳}$$

$$V_{\text{زمین}}=\frac{۴}{۳}\pi\times\left(۶/۴\times۱۰^{۶}\,m\right)^{۳}=۱\times۱۰^{۲۱}\,m^{۳}$$

$$V_{\text{مشتری}}=\frac{۴}{۳}\pi\times\left(۷۲\times۱۰^{۶}\,m\right)^{۳}=۱/۶\times۱۰^{۲۴}\,m^{۳}$$

$$V_{\text{خورشید}}=\frac{۴}{۳}\pi\times\left(۷\times۱۰^{۸}\,m\right)^{۳}=۱/۴\times۱۰^{۲۷}\,m^{۳}$$

$$V_{\text{منظومه شمسی}}=\frac{۴}{۳}\pi\times\left(۴۰AU\times۱/۵\times۱۰^{۱۱}\,m/AU\right)^{۳}=۹\times۱۰^{۳۸}\,m^{۳}$$

بنابراین $۱۰^{۲۲}$ نفر لازم است تا حجم زمین پر شود و برای پر کردن حجم مشتری ۱۶۰۰ زمین، برای پر کردن خورشید ۱۰۰۰ سیاره مشتری لازم است. ۹×۱۰^{۱۱} خورشید برای پر کردن حجم منظومه شمسی مورد نیاز است. در اینجا نکته مورد توجه این است که انسان‌ها بسیار کوچک و خورشید و منظومه شمسی بسیار بزرگ هستند. همچنین منظومه شمسی در بیشتر قسمت‌هایش خالی از جرم است. کمتر از ۱ قسمت در $۱۰^{۱۱}$ (۱۰۰ میلیارد) با اشیا پر شده است.

مسئله ۴: قطر متوسط مریخ ۶۹۰۰ کیلومتر و قطر متوسط زمین $۱/۳\times۱۰^{۴}$ کیلومتر است.

الف) جرم مریخ ۰/۱۱ برابر جرم زمین است. رابطه چگالی متوسط مریخ با چگالی متوسط زمین چگونه است؟

ب) مقدار g بر روی مریخ چقدر است؟

ج) سرعت فرار از مریخ چقدر است؟

حل: الف) می‌توان نوشت:

$$\frac{\rho_m}{\rho_c}=\frac{M_m/V_m}{M_e/V_e}=\frac{M_mV_e}{M_eV_m}$$

که در آن M_m و M_e به ترتیب جرم مریخ و جرم زمین و V_m و V_e به ترتیب حجم مریخ و کره زمین و ρ_m و ρ_e به ترتیب چگالی متوسط مریخ و زمین هستند. چون داریم:

$$V_m=\frac{۴}{۳}\pi R_m^{۳} \quad \text{و} \quad V_e=\frac{۴}{۳}=\pi R_e^{۳} \quad \text{و} \quad M_m=۰/۱۱M_e$$

پس:

$$\frac{\rho_m}{\rho_e}=۰/۱۱\left(\frac{R_e}{R_m}\right)^{۳}=۰/۱۱\left(\frac{d_e}{d_m}\right)^{۳}$$

اما $d_e=۱/۳\times۱۰^{۴}\,km$ و $d_m=۶۹۰۰\,km$ است، پس به دست می‌آوریم:

$$\rho_m=۰/۷۳\rho_e$$

ب) رابطه g در مریخ به صورت زیر است:

$$g_m=G\frac{M_m}{R_m^{۲}}$$

و رابطه g در زمین به صورت زیر است:

$$g_e=\frac{GM_e}{R_e^{۲}}$$

از تقسیم طرفین دو رابطه فوق بر یکدیگر چنین به دست می‌آید:

$$\frac{g_m}{g_e}=\left(\frac{R_e}{R_m}\right)^{۲}\frac{M_m}{M_e}$$

اما

$$\frac{d_e}{d_m}=\frac{R_e}{R_m} \text{ و } M_m=۰/۱۱M_e$$

است. پس با قرار دادن مقادیر معلوم به دست می‌آید:

$$g_m=۰/۳۹g_e$$

اگر $g_e=۹/۸m/s^۲$ فرض شود پس:

$$g_m=۳/۸m/s^۲$$

ج) برای محاسبه $v_۰$ سرعت فرار از مریخ می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۲}mv_۰^۲=\frac{GM_m m}{R_m}\Rightarrow v_۰=\sqrt{\frac{۲GM_m}{R_m}}$$

با قرار دادن مقادیر عددی به دست می‌آوریم:

$$v_۰=۵km/s$$

مسئله ۳ : بقایای ابرنواختر با سرعتی حدود ۱۰۰۰ کیلومتر بر ثانیه منبسط می‌شوند. آثار باقیمانده در فاصله ۱۰۰۰۰ پارسکی مشاهده شده است. تغییر خط زاویه در هر سال چقدر است؟

حل : ابتدا انبساط خطی هر یک سال را با ضرب کردن سرعت در مقدار زمان پیدا می‌کنیم.

$$D=v\cdot t$$
$$D=(۱۰۰۰km/s)(۳/۱۶\times۱۰^۷s)$$
$$D=۳/۲\times۱۰^{۱۰}km$$

حالا از فرمول زاویه کوچک برای پیدا کردن اندازه زاویه تطبیقی استفاده می‌کنیم.

$$\theta('')=۲۰۶۲۶۵\times\frac{D}{d}$$

$$\theta('')=۲۰۶۲۶۵\times\frac{۳/۲\times۱۰^{۱۰}km}{۱۰pc}$$

$$(۱pc=۳/۱\times۱۰^{۱۳}km)$$

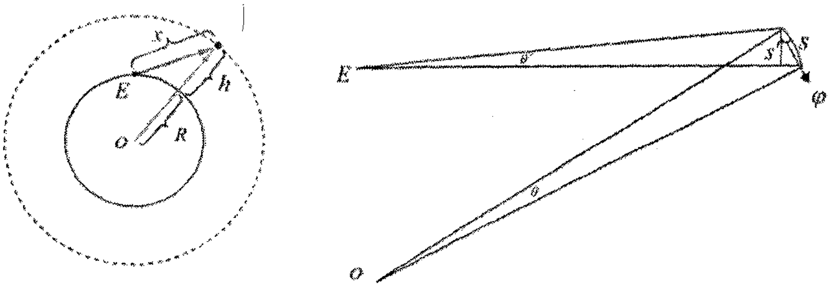
$$\theta('')=۲۰۶۲۶۵\times\frac{۳/۲\times۱۰^{۱۰}km}{۱۰\times۳/۱\times۱۰^{۱۳}km}$$

$$\theta('')=۰/۰۲$$

بنابراین از فاصله خیلی دور حتی چنین وسعت زیادی هم مشهود و قابل رویت می‌باشد. این انبساط زاویه فقط $\frac{1}{50}$ اندازه زاویه یک توپ تنیس است که در فاصله ۸ مایلی قرار گرفته است.

مسئله ۴ : فضانوردی که از روی استوای ماه به آسمان نگاه می‌کند فضاپیمای آپولو را دقیقا در بالای سر خود می‌بیند که با سرعت زاویه‌ای رصد شده ω_1 در حال حرکت است. چند دقیقه بعد این فضانورد می‌بیند که آپولو در افق شرق با سرعت زاویه‌ای رصد شده ω_2 غروب می‌کند. اگر $\frac{\omega_1}{\omega_2}=10/25$ باشد نسبت شعاع مدار آپولو به فاصله آپولو از سطح ماه چقدر است؟ مدار آپولو به دور ماه را دایره‌ای در نظر بگیرید.

حل :



شکل ۲ - ۱

$$\left.\begin{aligned} s' &= s\times\cos\varphi \\ s' &= x\theta' \\ s &= (R+h)\theta \end{aligned}\right\}\Rightarrow x\theta' = (R+h)\theta\cdot\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{\theta'}{\theta}=\frac{R+h}{x}\cos\varphi \Rightarrow \frac{\omega'}{\omega}=\frac{R+h}{x}\cos\varphi$$

آپولو در سمت‌الراس:

$$x=h\Rightarrow\begin{cases}\omega'=\omega_1\\ \varphi=0\end{cases}\Rightarrow\frac{\omega_1}{\omega}=\frac{R+h}{h} \qquad (1)$$

$$x = l \Rightarrow \begin{cases} \omega' = \omega_۲ \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{R+h} \end{cases} \Rightarrow \frac{\omega_۲}{\omega} = ۱ \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{R+h}{h} = ۱۰/۲۵$$

مسئله ۵ : فرض کنید که یک ابر مولکولی غول کروی با قطر $۲۰ly$ وجود دارد و در دمای $۵۰K$ چگالی ذره یکنواخت و برابر $۱\times۱۰^۴ cm^{-۳}$ است. وزن مولکولی متوسط ذراتی که این ابر را تشکیل می‌دهند برابر ۰/۷۷ است. جرم این ابر بر حسب واحد جرم شمسی چقدر است؟

حل : داده‌های مسئله چنین است:

$$R = \frac{۱}{۲}D = ۰/۵\times۲۰ly\times۹/۴۶۰۵\times۱۰^{۷}\ cm/ly = ۹/۴۶\times۱۰^{۱۸} cm$$

$$T = ۵۰K,\ \ N = ۱\times۱۰^{۴} cm^{-۳},\ \ \mu = ۰/۷۷$$

$$\rho = \mu m_H N = ۰/۷۷\times\left(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۴} gm\right)\left(۱\times۱۰^{۴} cm^{-۳}\right) = ۱/۲۹\times۱۰^{-۲۰}\ gm/cm^{۳}$$

جرم را می‌توان از چگالی محاسبه کرد. حجم کره برابر است با:

$$V = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$$

جرم ابر برابر است با:

$$M = \rho\frac{۴}{۳}\pi\rho R^{۳} = \frac{۴\pi}{۳}\left(۱/۲۹\times۱۰^{۲۰}\ gm/cm^{۳}\right)\left(۹/۴۶\times۱۰^{۱۸} cm\right)^{۳}$$

$$= ۴/۵۷\times۱۰^{۳۷} gm\left(\frac{۱M_\odot}{۱/۹۹\times۱۰^{۳۳} gm}\right)$$

$$= ۲/۳\times۱۰^{۴} M_\odot$$

مسئله ۶ : درصورتی که شعاع هسته عطارد $\frac{۳}{۴}R$ و باقیمانده بخش داخلی‌اش را چگالی یکنواخت $\rho = ۴۰۰۰\ kg/m^{۳}$ پر کرده باشد، چگالی یکنواخت این هسته چقدر است؟ جرم عطارد را $M = ۳\times۱۰^{۲۳} kg$ و شعاع آن $R = ۲۴۰۰km$ و $\pi \approx ۳$ فرض کنید.

حل : چون شعاع هسته $\frac{۳}{۴}$ شعاع کل سیاره است، پس می‌توانیم حجم قسمت باقیمانده را محاسبه کنیم.

$$V_{\text{هسته}} = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} = \frac{۴}{۳}\pi\frac{۲۷}{۶۴}R^{۳} = \frac{۲۷}{۶۴}\left(\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}\right)$$

$$V_{\text{باقیمانده}} = V_{\text{کل}} - V_{\text{هسته}} = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} - \frac{۲۷}{۶۴}\left(\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}\right)$$

$$V_{\text{باقیمانده}} = \frac{۳۷}{۶۴}\left(\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}\right)$$

از طرفی، جرم کل سیاره، مساوی است با جرم هسته به علاوه جرم قسمت باقیمانده:

$$M = m_{\text{هسته}} + m_{\text{باقیمانده}}$$

$$M = \frac{۲۷}{۶۴}\left(\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}\right)\rho_{۱} + \frac{۳۷}{۶۴}\left(\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}\right)\rho_{۲}$$

$$M = \frac{۱}{۶۴}\left(\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}\right)(۲۷\rho_{۱} + ۳۷\rho_{۲})$$

$$۳\times۱۰^{۲۳} = \frac{۱}{۶۴}\left(\frac{۴}{۳}\times۳\times\left(۲۴۰۰\times۱۰^{۳}\right)^{۳}\right)[۲۷\rho_{۱} + ۳۷\times۴۰۰۰]$$

$$۳\times۱۰^{۸} = ۸۶۴[۲۷\rho_{۱} + ۱۴۸۰۰۰]$$

$$۲۷\rho_{۱} = ۳۴۷۲۲۲ - ۱۴۸۰۰۰ = ۱۹۹۲۲۲$$

چگالی هسته داخلی عطارد چنین است:

$$\rho_{۱}\frac{۱۹۹۲۲۲}{۲۷} = ۷۳۷۸/۶\, kg/m^{۳}$$

مسئله ۷ : کهکشانی آن سوی صورت فلکی خرمن مستقیما با آهنگ $۲۱۶۰۰ km/s$ از کهکشان ما دور می‌شود. این کهکشان اکنون در فاصله $۱/۴\times۱۰^{۹}$ سال نوری از کهکشان ما قرار دارد. با فرض اینکه همیشه با تندی ثابت حرکت می‌کرده است، مشخص کنید چند سال پیش درست بالای کهکشان ما بوده است؟

حل : ابتدا فاصله را بر حسب کیلومتر به دست آورده و سپس زمان را محاسبه می‌کنیم.

$$x = ۱/۴\times۱۰^{۹} ly = ۱/۳۲\times۱۰^{۲۲} km$$

$$t = \frac{x}{v} = \frac{۱/۳۲\times۱۰^{۲۲}}{۲۱۶۰۰} = ۶/۱\times۱۰^{۱۸} s$$

$$t'=\frac{۶/۱\times ۱۰^{۱۸}}{۳/۱۵۶\times ۱۰^{۷}}=۱/۹۳۷\times ۱۰^{۱۱}$$ سال قبل

مسئله ۸ : ماهواره‌ای با تندی $۲۵۰۰ m/s$ بر مدار دایره‌ای به دور زمین می‌چرخد.

الف) دوره گردش

ب) شتاب شعاعی ماهواره را حساب کنید.

حل : الف) شعاع r مدار را پیدا می‌کنیم :

$$\frac{Gmm_E}{r^۲}=m\frac{v^۲}{r}\Rightarrow$$

$$r=\frac{Gm_E}{v^۲}=\frac{\left(۶/۶۷۳\times ۱۰^{-۱۱}N.m^۲/kg^۲\right)\left(۵/۹۷\times ۱۰^{۲۴}kg\right)}{\left(۵۲۰۰ m/s\right)^۲}=۱/۴۷۳\times ۱۰^{۷}m$$

بنابراین دوره چرخش ماهواره از رابطه زیر به دست می‌آید :

$$T=\frac{۲\pi r}{v}=\frac{۲\pi\left(۱/۴۷۳\times ۱۰^{۷}m\right)}{۵۲۰۰ m/s}=۱/۷۸\times ۱۰^{۴}s=۲۹۷\min$$

ب)

$$a=\frac{v^۲}{r}=\frac{\left(۵۲۰۰ m/s\right)^۲}{۱/۴۷۳\times ۱۰^{۷}m}=۱/۸۴ m/s^۲$$

مسئله ۹ : فاصله متوسط زمین تا خورشید برابر $۱/۴۹۶\times ۱۰^{۸}km$ است.

الف) این فاصله را بر حسب سال نوری بیان کنید. ($۱ly=۹/۴۶\times ۱۰^{۱۲}km$)

ب) این فاصله را بر حسب پارسک بیان کنید. ($۱pc=۳/۲۶ly$)

ج) آیا سال نوری و پارسک واحدهای مفیدی برای توصیف فاصله‌های این اندازه هستند؟

د) اگر خورشید وجودش یکباره متوقف شود، چقدر طول می‌کشد تا بشر روی زمین این مسئله را متوجه شود؟

هـ) فاصله تا نزدیک‌ترین ستاره قنطورس برابر ۴/۲ سال نوری است. نور از قنطورس چقدر طول می‌کشد تا به زمین برسد؟

حل : الف) فاصله بر حسب سال نوری چنین است:

$$d=\frac{۱/۴۶۹\times ۱۰^{۸}}{۹/۴۶\times ۱۰^{۱۲}}=۱/۵۸\times ۱۰^{-۵}ly$$

ب) فاصله بر حسب پارسک برابر است با:

$$d=\frac{۱/۵۸\times ۱۰^{-۲}}{۳/۲۶}=۴/۸۵\times ۱۰^{-۶}\,pc$$

ج) هر دو این اعداد کوچک هستند و به همین جهت شیوه مناسبی برای توصیف فاصله نیست.

د) مدت زمانی که برای فوتون طول می‌کشد تا به ما برسد برابر است با :

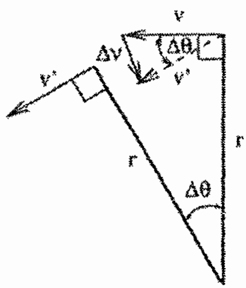
$$t=\frac{d}{c}=\frac{۴/۹۶\times ۱۰^{۸}\,km}{۳\times ۱۰^{۵}\,km/s}=۴۹۶/۶۷s$$

هـ) برای نور ۴/۲ سال طول می‌کشد تا از قنطورس به زمین برسد.

مسئله ۱۰ : جسمی را در نظر بگیرید که اطراف مداری مدور با شعاع r با سرعت ثابت v در حرکت است.

الف) نشان دهید که جسم شتابی را طی می‌کند با وجودی که سرعت آن ثابت است.

ب) بزرگی و مسیر شتاب را محاسبه کنید. (یادآوری $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$)

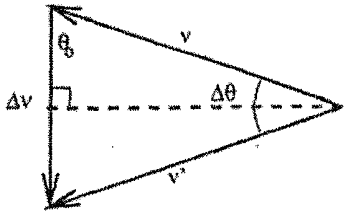


شکل ۲ - ۲

حل : الف) سرعت $\vec{v}$ یک بردار است. در حالی که اندازه آن ثابت است، مسیر ثابت و یکنواخت نیست. بنابراین سرعت $\vec{v}$ در حال تغییر است بدان معنا که یک شتاب وجود دارد.

ب) شکل بزرگ شده در زیر نشان داده شده است. این حقیقت که سرعت ثابت است بدان معناست که $|\vec{v}'|=|\vec{v}|$ بنابراین اینکه یک مثلث متساوی‌الساقین است در نتیجه تغییر در سرعت از این طریق حاصل می‌شود.

$$\left|\Delta\vec{v}\right| = ۲\left|\vec{v}\right|\sin\left(\Delta\theta/۲\right)$$



شکل ۲ - ۳

در محدوده یک فاصله زمانی بسیار کوتاه $\Delta t \to ۰$، چرخش زاویه به سوی صفر است. $\Delta\theta \to ۰$ بنابراین فرمول مثلث کوچک بیان می‌کنند که $\sin\theta \approx \theta$ زمانی که $\theta << 1$ آنگاه تغییر در سرعت برابر است با:

$$\left|\Delta\vec{v}\right| \to ۲v(\Delta\theta/۲) = v\Delta\theta$$

اکنون بزرگی شتاب برابر است با:

$$\left|\vec{a}\right| \equiv \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \left|\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right| = v\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

یک ذره که دایره‌وار در حرکت است از میان زاویه $\theta = ۲\pi$ رادیان در زمان :

$t =$ سرعت/محیط $= ۲\pi r / v$

در حرکت است. بنابراین:

$$(\Delta\theta)/(\Delta t) = ۲\pi/(۲\pi r/v) = v/r$$

آنگاه بزرگی شتاب برابر است با $a = v^۲/r$

اکنون شتاب مسیر تغییر در سرعت $\Delta\vec{v}$ است. این امر باعث ایجاد یک زاویه $\theta_۰$ نسبت به $v \to$ می‌شود. این زاویه $\theta_۰ = \pi/۲ - \Delta\theta/۲$ است. در وسعت غیر قابل سنجش $\Delta t \to ۰$ و $\Delta\theta \to ۰$ این زاویه $\theta_۰ \to \pi/۲ = ۹۰^\circ$ است. بنابراین شتاب عمود بر $\vec{v}$ است. که با $\vec{r}$ موازی است ولی در خلاف جهت. فرض کنید $\vec{e}_r$ برداری واحد و موازی با $\vec{r}$ باشد. این بدان معناست که شتاب برابر است با :

$$\vec{a} = -\frac{v^۲}{r}\vec{e}_r$$

مسئله ۱۱ : ستاره‌شناسانی که در مریخ زندگی می‌کنند واحد نجومی خود را از نظر مدار مریخ تعریف می‌کنند. اگر آنها پارسک را همانند آنچه که ما تعریف می‌کنیم، تعریف کنند، چنین پارسکی چه تعداد واحد مریخی نجومی دارد؟ چه تعداد واحد زمینی نجومی برابر با یک پارسک مریخی است. یک پارسک مریخی چه تعداد پارسک زمینی است؟

حل : پارسک: فاصله یک واحد نجومی در ۱ ثانیه قوس تعریف می‌شود. بنابراین تعداد AU در واحد پارسک تنها به تعداد قوس‌های ثانیه در یک رادیان، ۲۰۶۲۶۵ بستگی دارد. در نتیجه :

$$۱pc_{\text{مریخ}} = ۲۰۶۲۶۵\,AU_{\text{مریخ}}$$

پس :

$$۱AU_{\text{مریخ}} = ۱/۵۲۴AU_{\text{زمین}}$$

بنابراین :

$$۱pc_{\text{مریخ}} = ۱/۵۲۴pc_{\text{زمین}} = ۱/۵۲۴\times\left(۲۰۶۲۶۵AU_{\text{زمین}}\right) = ۳/۱۴\times۱۰^{۵}AU_{\text{زمین}}$$

توجه داشته باشید که یک ستاره‌شناس مریخی می‌تواند اختلاف منظر را ۱/۵ برابر دقیق‌تر از یک ستاره‌شناس واقع در زمین و با نادیده گرفتن اثرت اتمسفر تعیین کند و یا یک ستاره‌شناس مریخی می‌تواند اختلاف منظر را برای ستارگان ۱/۵ برابر دورتر با دقت قابل مقایسه‌ای (که توسط اثرات اتمسفر تعیین شده است) تعیین کند. با این وجود به دلیل اینکه سال مریخی ۲/۱ سال زمین است، پس ۲/۱ برابر طولانی‌تر است.

مسئله ۲ - ۱۲ : چرخش زمین در حال کند شدن است. در سال ۱۹۷۷ ، ۳۶۵ دور چرخش زمین ۱/۰۱ ثانیه بیش از سال ۱۹۰۰ طول می‌کشد. میانگین شتاب منفی زاویه‌ای زمین در فاصله زمانی ۱۹۰۰ تا ۱۹۷۷ چقدر است؟

حل : سرعت زاویه‌ای زمین در سال ۱۹۰۰ چنین است :

$$\omega_{۱۹۰۰} = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۶/۲۸}{t/۳۶۵} = \frac{۲۲۹۲/۲}{t}$$

و سرعت زاویه‌ای زمین در سال ۱۹۷۷ برابر است با :

$$\omega_{۱۹۷۷} = \frac{۲\pi}{T'} = \frac{۶/۲۸}{(t+۱/۰۱)/۳۶۵} = \frac{۲۲۹/۲}{t+۱/۰۱}$$

زمان ۷۷ سال بر حسب ثانیه :

$$\Delta t = ۷۷\ \text{سال} = ۷۷\times ۳۶۵\times ۲۴\times ۳۶۰۰ = ۲/۴۳\times ۱۰^{۹} s$$

زمان در یک سال بر حسب ثانیه :

$$t = ۳۶۵\times ۲۴\times ۳۶۰۰ = ۳/۱۵\times ۱۰^{۷} s$$

شتاب زاویه‌ای زمین در فاصله ۱۹۰۰ تا ۱۹۷۷ برابر است با :

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{۲۲۹۲/۲/(t+۱/۰۱) - ۲۲۹۲/۲/t}{\Delta t} = \frac{-۲۲۹۲/۲\times ۱/۰۱}{t(t+۱/۰۱)\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{۲۳/۱۵\times ۱۰^{۲}}{۲/۴\times ۱۰^{۲۴}} = -۹/۶\times ۱۰^{-۲۲}$$

مسئله ۱۳ : تپ اختر یک ستاره نوترونی در حال چرخش سریع است که با هم زمانی دقیق تپ‌هایی رادیویی گسیل می‌کند و به ازای هر چرخش ستاره یک تپ می‌فرستند. دوره تناوب چرخش T از اندازه‌گیری مدت زمان بین تپ‌ها به دست می‌آید. در حال حاضر دوره تناوب چرخش تپ اختر واقع در ناحیه مرکزی سحابی خرچنگ $T = ۰/۰۳۳s$ است و این مقدار با آهنگ $۱/۲۶\times ۱۰^{-۵} s/y$ در حال افزایش است.

الف) مقدار شتاب زاویه‌ای بر حسب $rad/s^{۲}$ چقدر است؟

ب) اگر شتاب زاویه‌ای ثابت باشد چند سال دیگر تپ‌اختر از چرخش باز خواهد ایستاد؟

ج) تپ اختر مورد نظر از انفجار یک ابرنواختر در سال ۱۰۵۴ به وجود آمده است. دوره تناوب T این تپ اختر به هنگام تولد چقدر بوده است؟

حل : الف)

$$\omega = \frac{۲\pi}{T}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow \alpha = ۲\pi \frac{d}{dt}\left(\frac{۱}{dT}\right) = \frac{-۲\pi}{T^{۲}}\frac{dT}{dt}$$

طبق فرض داریم:

$$\frac{dT}{dt} = ۱/۲۶\times ۱۰^{-۵} s/y = \frac{۱/۲۶\times ۱۰^{-۵} s}{۳۶۵\times ۲۴\times ۳۶۰۰ s} = ۳/۹۹\times ۱۰^{-۱۳}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{۲\pi}{(۰/۰۳۳s)^۲} \times ۳/۹۹ \times ۱۰^{-۱۳} = ۲/۳ \times ۱۰^{-۹}\, rad/s^۲$$

ب)

$$\omega = \omega_\circ + \alpha t$$

$$\Rightarrow t = \frac{-\omega_\circ}{\alpha} = \frac{-۲\pi/T}{\alpha} = \frac{۲\pi}{(۲/۳\times ۱۰^{-۹})\ \times ۰/۰۳۳} = ۸/۲۸ \times ۱۰^{۱۰} s$$

ج) باید سرعت زاویه‌ای تپ اختـر را در سـال ۱۰۵۴ داشـته باشـیم تـا T از رابطـه زیـر محاسبه شود.

$$T = \frac{۲\pi}{\omega}$$

اگر مبدا زمانی را در همان سال ۱۰۵۴ بگیریم، در واقـع بـه دنبـال $\omega_\circ$ مـی‌گـردیم و ω سرعت زاویه‌ای تپ اختر در حال حاضر است. بنابراین t زمان بـین حـال حاضـر (سـال ۲۰۰۱ میلادی) و سال ۱۰۵۴ میلادی می‌باشد. البته این با این فـرض اسـت کـه نتـایج مربوط به سال حاضر باشد. فرض می‌کنیم نتایج مربوط به سال ۱۹۹۴ میلادی است:

$$t = ۱۹۹۴ - ۱۰۵۴ = ۹۴۰ y$$

$$\omega_\circ = \omega - \alpha t = \frac{\alpha ۲\pi}{۰/۰۳۳} - (-۲/۳\times ۱۰^{-۹}) \times ۹۴۰ \times ۳۶۵ \times ۲۴ \times ۳۶۰۰ = ۲۵۸/۵۸\, rad/s$$

$$T = \frac{۲\pi}{\omega_\circ} = \frac{۲\times ۳/۱۴ rad}{۲۵۸/۵ rad/s} = ۲/۴۳ \times ۱۰^{-۲} s$$

مسئله ۱۴ : بسیاری از ماهواره‌ها در سطح استوای زمین به دور آن مـی‌چرخنـد، آنهـا در چنان ارتفاعی قرار دارند که همواره بالای یکـی از نقـاط مشـخص سـطح زمـین برجـای می‌مانند. ارتفاع چنین ماهواره‌ای را از سطح زمین پیدا کنید.

حل : برای اینکه ماهواره‌ای همواره بالای یک نقطه معین از سطح زمین باشـد بایـد دوره گردش آن روی مدار با دوره حرکت وضعی زمین برابر باشد. زمین هر شبانه روز یک بـار به دور خود می‌چرخد. بنابراین :

$$T = ۱d \left(\frac{۲۴h}{d}\right)\left(\frac{۳۶۰۰s}{۱h}\right) = ۸/۶۴ \times ۱۰^۴ s$$

$$T=\frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{Gm_E}}\Rightarrow T^2=\frac{4\pi^2 r^3}{Gm_E}\Rightarrow r=\left(\frac{T^2 Gm_E}{4\pi^2}\right)^{1/3}\Rightarrow$$

$$r=\left(\frac{\left(8/4\times10^4\right)\left(6/673\times10^{-11}\right)\left(5/97\times10^{24}\right)}{4\pi^2}\right)^{1/3}=4/23\times10^7\,m$$

این شعاع مدار است و با ارتفاع h ماهواره از سطح زمین و شعاع R_E زمین به صورت $r=h+R_E$ به هم مربوط هستند. بنابراین :

$$h=r-R_E=4/23\times10^7-6/38\times10^6=3/59\times10^7\,m$$

مسئله ۱۵ : برای یک مدار بیضی شکل شعاع این گونه داده می‌شود :

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

نقطه حضیض و اوج نزدیک‌ترین و دورترین نقطه تماس با خورشید هستند. فواصل r و زاویه‌های θ که مطابق با این دو نقطه است چیست؟

حل : شعاع r به $\cos\theta$ و ثابت‌ها بستگی دارد. اکنون $\cos\theta$ از ۱ تا ۱- متغیر است. همان طور که از صفر تا ۱۸۰ درجه (صفر تا π رادیان) در نوسان است. ولی $\cos\theta$ در مخرج کسر برای r با ضریب مثبت e ظاهر می‌شود به این معنا که مقادیر بزرگ $\cos\theta$ با مدارهای کمی از r مطابقت دارد. بنابراین نقطه حضیض (کوچک‌ترین مقدار برای r) مطابق با بزرگ‌ترین مقدار $\cos\theta=1$ است. این در حالی است که نقاط اوج بزرگ‌ترین مقدار برای r مطابق است با کوچک‌ترین مقدار $\cos\theta=-1$ در نقطه حضیض $\cos\theta=1$ بنابراین $\theta_p=0$ است و :

$$r_p=\frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1+e\times1\right)}=\frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1+e\right)}\Rightarrow r_p=a\left(1-e\right)$$

در نقطه اوج $\cos\theta=-1$ است بنابراین $\theta_a=180^\circ$ یا $\theta_a=\pi$ و :

$$r_p=\frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1+e\times-1\right)}=\frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e\right)}\Rightarrow r_p=a\left(1+e\right)$$

مسئله ۱۶ : دنباله‌داری که به وسیله اخترشناسان چینی در سال ۵۷۴ دیده شده بود، دوباره در مه ۱۹۹۴ رویت شد. فرض کنید که زمان میان مشاهده‌ها دوره دنباله‌دار و خروج از مرکز آن ۰/۱۱ باشد.

الف) نیم محور بزرگ مدار دنباله‌دار

ب) بیشترین فاصله آن از خورشید بر حسب شعاع مداری میانگین R_p پلوتو چقدر است؟

حل : الف) دوره حرکت دنباله‌دار به گرد زمین برابر $۱۴۲۰y = ۱۹۹۴ - ۵۷۴$ است. کافی است در قانون دوره‌های حرکت r را به a (قطر بزرگ‌تر مدار بیضوی) جایگزین کنیم.

$$a = \left(\frac{GM_s T^۲}{۴\pi^۲}\right)^{۱/۳}$$

$$= \left(\frac{۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\times ۱/۹۹\times ۱۰^{۳۰}\times\left(۱۴۲۰\times ۳۶۵\times ۲۴\times ۳۶۰۰\right)^۲}{۴\pi^۲}\right)^{۱/۳}$$

$$= ۱/۸۹\times ۱۰^{۱۳} m$$

ب)

$$R_a = ۲a - R_p$$

$$R_p = a(۱-e)$$

$$e = ۰/۱۱$$

$$\Rightarrow R_a = ۲a - a + ae = a(۱+e) = ۱/۸۹\times ۱۰^{۱۳}(۱+۰/۱۱) = ۲/۱\times ۱۰^{۱۳}$$

$$R_p = ۵۹۰۰\times ۱۰^۹ m \Rightarrow R_a = ۳/۵۵ R_p$$

مسئله ۱۷ : نسبت گرانش وارد از خورشید بر ماه به کشش گرانشی وارد از زمین بر ماه چقدر است؟ با توجه به پاسخ به دست آمده صحیح‌تر است بگوئیم ماه به دور زمین می‌چرخد یا به دور خورشید؟

حل :

$$F_s = G\frac{m_s m_m}{r^۲}$$

$$F_E = G\frac{m_E m_m}{r'^۲}$$

$$\frac{F_s}{F_E} = \left(\frac{Gm_s m_m}{r^۲}\right)\left(\frac{r_E}{Gm_E m_m}\right) = \frac{m_s}{m_E}\left(\frac{r_E}{r_s}\right)^۲$$

$$=\frac{۱/۹۹\times ۱۰^{۳۰}}{۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}}\left(\frac{۳/۸۴\times ۱۰^{۸}}{۱/۵\times ۱۰^{۱۱}}\right)^{۲}=۲/۱۸$$

نیروی وارد از خورشید بر ماه از نیروی وارد از زمین بر ماه بزرگ‌تر است. حرکت ماه ترکیبی از دوران به دور خورشید و به دور زمین است.

مسئله ۱۸ : با توجه به شکل معادله زیر را برای مقاطع مخروطی پیدا کنید.

$$r=\frac{p}{۱+\varepsilon\cos\theta}$$

حل : با مراجعه به شکل زیر و تعیین مقاطع مخروطی در هر نقطه P روی آن داریم :

$$r/d=\varepsilon \Rightarrow d=r/\varepsilon$$

با جایگذاری در نقطه خاص P داریم :

$$p/D=\varepsilon \Rightarrow p=\varepsilon D$$

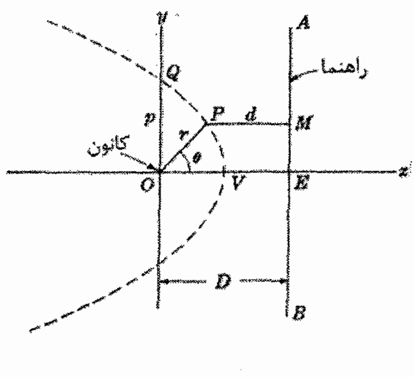
اما :

$$D=d+r\cos\theta=\frac{r}{\varepsilon}+r\cos\theta=\frac{r}{\varepsilon}(۱+\varepsilon\cos\theta)$$

از دو معادله بالا و با حذف D داریم :

$$p=r(۱+\varepsilon\cos\theta)\Rightarrow r=\frac{p}{۱+\varepsilon\cos\theta}$$

اگر $\varepsilon=۰$ باشد، معادله دایره، اگر $۰<\varepsilon<۱$ باشد، بیضی، اگر $\varepsilon=۱$ باشد، هذلولی و در نهایت اگر $\varepsilon>۱$ باشد، سهمی است.



شکل ۲-۴

مسئله ۱۹ : به طور متوسط مشتری در فاصله $۴/۲۰۳AU$ ($۱AU=۱/۴۹۶\times۱۰^{۱۳}cm$) از زمین قرار دارد. زمانی که در مقابله است یعنی زمانی که در مقارنه خورشید در آسمان (و نزدیک‌ترین حالت به زمین) است درونی‌ترین قمر گالیله‌ای یعنی آیو در فاصله ۲/۳۰۷ دقیقه قوس از مشتری است زمانی که در بزرگ‌ترین فاصله زاویه‌ای یعنی بزرگ‌ترین فاصله زاویه‌ای از مشتری است، دوره تناوب مداری نجومی آیو به دور مشتری برابر ۱/۷۶۹ روز است. جرم مشتری را بر حسب واحدهای جرم خورشید به دست آورید. فرض کنید که آیو در مدار دایره‌ای است. ($۱M_{\odot}=۱/۹۸۹\times۱۰^{۳۳}g$)

حل : می‌دانیم آیو زمانی که در بیشترین کشیدگی خود قرار دارد در فاصله ۲/۳۰۷ دقیقه قوس از مشتری است و فاصله از زمین برابر $L=۴/۲۰۳AU$ است. بنابراین می‌توانیم شعاع مدار آیو را به دور مشتری محاسبه کنیم:

$$\theta=۲/۳۰۷\,arc\min=\frac{۲/۳۰۷^{\circ}}{۶۰}=۰/۰۳۸۵^{\circ}$$

$$R_{Io}\approx\sin\theta\times L=۰/۰۰۰۶۷۱\times۴/۲۰۳AU=۲/۸۲\times۱۰^{-۳}AU$$

همچنین از قبل می‌دانیم :

$$P^{۲}=\frac{۴\pi^{۲}a^{۳}}{GM_J}$$

که P دوره تناوب مداری آیو به دور مشتری را نشان می‌دهد M_J جرم مشتری است. (آیو مدار دایره‌ای فرض می‌شود بنابراین نیم محور اصلی مساوی شعاع است) بنابراین جرم مشتری برابر است با :

$$M_J=\frac{۴\pi^{۲}R_{Io}^{۲}}{GP^{۲}}$$

با قرار دادن مقادیر R_{Io} و G با هم :

$$P=۱/۷۶۹\,days=۱/۷۶۹\times۸۶۴۰۰s$$

به دست می‌آوریم :

$$M_J=۱/۹\times۱۰^{۳۰}g=\frac{۱/۹\times۱۰^{۳۰}}{۱/۹۸۹\times۱۰^{۳۳}}M_{\odot}=۰/۹۶\times۱۰^{-۳}M_{\odot}$$

مسئله ۲۰ : شتاب حاصل از دوران برای جسمی که
الف) در استوا
ب) در عرض جغرافیایی ۶۰ درجه قرار دارد چقدر است؟
ج) سرعت دوران زمین به چه نسبت افزایش یابد تا برای نگه داشتن جسمی بر روی زمین در استوا شتاب لازم g باشد؟

حل : الف) اگر $R=۶/۳۷۸\times ۱۰\ m$ شعاع کره زمین و $T=۸۶۴۰۰s$ دوره تناوب دوران زمین باشند، شتاب ناشی از دوران زمین برای جسمی که در استوا قرار دارد برابر است با:

$$a=R\omega^{۲}=۴\pi^{۲}\frac{R}{T^{۲}}$$

با قرار دادن مقادیر معلوم داریم :

$$a=۳/۴\times ۱۰^{۲}\,m^{۲}/s^{۲}$$

ب) فاصله جسمی که در عرض جغرافیایی $\theta=۶۰^{\circ}$ قرار دارد از محور چرخش زمین برابر است با :

$$r=R\cos ۶۰^{\circ}$$

می‌توان نوشت :

$$a'=r\omega^{۲}=\left(R\cos ۶۰\right)=\frac{۴\pi^{۲}}{T^{۲}}$$

$$a'=\frac{۲\pi^{۲}R}{T^{۲}}=۱/۷\times ۱۰^{-۲}\,m/s^{۲}$$

ج) چون $a=R\omega^{۲}$ و $g=R\omega$ است پس :

$$\frac{\omega'}{\omega}=\sqrt{\frac{۹/۸}{۳/۴\times ۱۰^{-۲}}}\Rightarrow\frac{\omega'}{\omega}=۱۷$$

پس سرعت دوران زمین باید ۱۷ برابر افزایش یابد.

مسئله ۲۱ : وقتی ردیف بودن زمین، خورشید و ماه از کسوف (ماه بین زمین و خورشید) تا خسوف (زمین بین ماه و خورشید) تغییر کند، درصد تغییر در شتاب زمین به طرف خورشید چقدر خواهد بود؟

حل : در وضعیت کسوف، نیروی وارد بر زمین چنین می‌شود (F_s نیروی جاذبه بین زمین و خورشید، F_m نیروی جاذبه بین زمین و ماه و F_e نیروی برآیند وارد بر زمین در این وضعیت است.)

$$F_e = F_s + F_m = G\frac{M_s M_e}{r_s^۲} + G\frac{M_m M_e}{r_m^۲}$$

و در وضعیت خسوف، نیروی وارد بر زمین چنین می‌شود :

$$F_e = F_s - F_m = G\frac{M_s M_e}{r_s^۲} - G\frac{M_m M_e}{r_m^۲}$$

$$\Delta F = F_e - F_e = \frac{۲GM_M M_E}{r_m^۲}$$

$$a' = \frac{\Delta F}{M_e} = \frac{۲GM_m}{r_m^۲}$$

با توجه به تعریف شتاب خواهیم داشت :

$$a = \frac{GM_s}{r_s^۲}$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{۲GM_m/r_s^۲}{GM_s/r_m^۲} = ۲\left(\frac{M_m}{M_s}\right)\left(\frac{r_s}{r_m}\right)^۲$$

$$= ۲\left(\frac{۷/۳۶\times ۱۰^{۲۲}}{۱/۹۹\times ۱۰^{۳۰}}\right)\left(\frac{۱/۵\times ۱۰^{۱۱}}{۳/۸۲\times ۱۰^{۸}}\right) = ۱/۱۴\times ۱۰^{-۲} = ۱/۱۴\%$$

مسئله ۲۲ : یک کشتی فضایی در مسیر خط مستقیم میان زمین و ماه آن است. در چه فاصله‌ای از زمین نیروی گرانشی خالص وارد بر کشتی فضایی صفر است؟

حل : باید برآیند نیروهای وارد بر کشتی فضایی صفر باشد، به عبارت دیگر دو نیروی وارد بر آن برابر باشند.

$$F_۱ = F_۲$$

$$r_۲ = r_{me} - r_۱$$

$$r_{me} = ۳/۸۲\times ۱۰^{۸} m$$

$$\frac{M_m}{M_e} = \left(\frac{r_۲}{r_۱}\right)^۲ \Rightarrow \frac{M_m}{M_e} = \left(\frac{r_{me} - r_۱}{r_۱}\right)^۲ = \left(\frac{r_{me}}{r_۱} - ۱\right)^۲$$

$$\frac{r_{me}}{r_1}-1=\sqrt{\frac{M_m}{M_e}} \Rightarrow \frac{r_{me}}{r_1}=1+\sqrt{\frac{M_m}{M_e}} \Rightarrow r_1=\frac{r_{me}}{1+\sqrt{\frac{M_m}{M_e}}}$$

$$=\frac{3/82\times10^{8}}{1+\sqrt{\frac{7/36+10^{22}}{5/98\times10^{24}}}}=3/44\times10^{8}m=3/44\times10^{5}km$$

مسئله ۲۳ : تپ اختری را در نظر می‌گیریم که یک ستاره رمبیده با چگالی فوق العاده زیاد با جرم M برابر با جرم خورشید ($1/98\times10^{30}kg$) به شعاع فقط $12km$ و دروه حرکت چرخشی T برابر با $0/014s$ است. در استوای آن، شتاب سقوط آزاد g چند درصد با شتاب a_g فرق می‌کند؟

حل : برای پیدا کردن a_g روی سطح تپ اختر، را با قرار دادن r به جای R و M به عنوان جرم تپ اختر به کار می‌بریم. با قرار دادن این اندازه‌های معلوم خواهیم داشت:

$$a_g=\frac{GM}{R^2}=\frac{\left(6/67\times10^{-11}m^3/kgs^2\right)\left(1/98\times10^{30}kg\right)}{\left(12000m\right)^2}$$
$$=9/2\times10^{11}m/s^2$$

با استفاده از معادله زیر و تقسیم آن بر a_g و قرار دادن داده‌های معلوم، خواهیم داشت:

$$a_g-g=\omega^2R=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2R$$
$$\frac{a_g-g}{a_g}=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{R}{a_g}=\left(\frac{2\pi}{0/041s}\right)^2\frac{12000m}{9/2\times10^{11}m/s^2}$$
$$=3/1\times10^{-4}=0/031\%$$

با وجود که تپ اختر فوق‌العاده سریع می‌چرخد ولی چرخش آن شتاب سقوط آزاد را فقط اندکی از شتاب گرانشی کمتر می‌سازد، زیرا شعاع آن خیلی کوچک است.

مسئله ۲۴ : سفینه‌ای از زمین مستقیما به سوی خورشید می‌رود. در چه فاصله‌ای از مرکز زمین اندازه‌های نیروهای گرانشی وارد از زمین و خورشید بر سفینه با هم برابرند؟ (فاصله زمین تا خورشید برابر $1/5\times10^{11}$ متر می‌باشد)

حل : فاصله نقطه مورد نظر تا زمین را x و فاصله کلی را r می‌گیریم:

$$F_E = F_s \Rightarrow G\frac{mm_E}{x^۲} = G\frac{mm_s}{(r-x)^۲} \Rightarrow (r-x)^۲ = x^۲\frac{m_s}{m_E}$$

$$r = x\left(۱+\sqrt{\frac{m_s}{m_E}}\right) \Rightarrow x = \frac{r}{۱+\sqrt{\frac{m_s}{m_E}}}$$

$$x = \frac{۱/۵\times۱۰^{۱۱}}{۱+\sqrt{\frac{۱/۹۹\times۱۰^{۳۰}}{۵/۹۸\times۱۰^{۲۴}}}} = ۲/۵۹\times۱۰^{۸}m$$

مسئله ۲۵ : شتاب گرانشی در قطب شمال مشتری تقریبا ۲۵ متر بر مجذور ثانیه است. جرم مشتری $۱/۹\times۱۰^{۲۷}$ کیلوگرم و شعاع آن $۷/۱\times۱۰^{۷}$ متر می‌باشد و هر ۹/۸ ساعت یک دور کامل به دور محور خود می‌چرخد.

الف) نیروی گرانشی وارد بر جسم ۴ کیلوگرمی در قطب شمال مشتری را حساب کنید.

ب) وزن ظاهری همین جسم در استوای مشتری را به دست آورید.

حل : الف)

$$F = w_۰ = mg_۰ = (۴kg)(۲۵m/s^۲) = ۱۰N$$

که وزن واقعی جسم در قطب شمال مشتری است.

ب)

$$w = w_۰ - \frac{mv^۲}{R}$$

$$T = \frac{۲\pi r}{v} \Rightarrow v = \frac{۲\pi r}{T} = \frac{۲\pi(۷/۱\times۱۰^{۷}m)}{(۹/۸h)(۳۶۰۰s/h)} = ۱/۲۶۴\times۱۰^{۴}m/s$$

$$w = \frac{v^۲}{R} = \frac{(۱/۲۶۴\times۱۰^{۴}m/s)^۲}{۷/۱\times۱۰^{۷}} = ۲/۲۵m/s^۲$$

$$w = ۱۰۰N - (۴kg)(۲/۲۵m/s^۲) = ۹۱N$$

مسئله ۲۶ : ماهواره‌ای در یک مدار دایره‌ای در ارتفاع ۲۳۰ کیلومتری بالای سطح زمین دارای دوره حرکت ۸۹ دقیقه است. با توجه به این اطلاعات، جرم زمین چقدر به دست می‌آید؟

حل : قانون دوره حرکت کپلر را برای دستگاه ماهواره - زمین به کار می‌بریم.

$$M=\frac{۴\pi^۲ r^۳}{GT^۲}$$

شعاع r مدار ماهواره عبارت است از :

$$r=R+h=۶/۳۷\times۱۰^۶ m+۲۳۰\times۱۰^۳ m$$
$$=۶/۶\times۱۰^۶ m$$

که R شعاع زمین است. با قرار دادن این مقدار و دوره حرکت T در معادله بالا خواهیم داشت :

$$M=\frac{(۴\pi^۲)(۶/۶\times۱۰^۶ m)^۳}{(۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱} m^۳/kgs^۲)(۸۹\times۶۰s)^۲}$$
$$=۶\times۱۰^{۲۴} kg$$

مسئله ۲۷ : فرض کنید سفینه‌ای به سطح کالیستو یکی از اقمار مشتری نزدیک می‌شود. اگر موتور سفینه یک نیروی $۳۲۶۰N$ رو به بالا فراهم کند، سفینه با تندی ثابت پائین می‌آید. اگر موتور فقط $۲۲۰۰N$ فراهم کند، سفینه با شتاب $۰/۳۹m/s^۲$ رو به پائین حرکت می‌کند.

الف) وزن سفینه در نزدیکی سطح کالیستو چقدر است؟

ب) جرم سفینه چقدر است؟

ج) شتاب سقوط آزاد در نزدیکی سطح کالیستو چقدر است؟

حل : الف) از پیش فرض اول مسئله به راحتی وزن سفینه به دست می‌آید:

$$F-W=۰\Rightarrow W=F=۳۲۶۰N$$

ب) از پیش فرض دوم مسئله می‌توان معادله زیر را تشکیل داد:

$$F'-W=-ma$$

آنگاه با استفاده از W که در قسمت الف به دست آمد، خواهیم داشت:

$$m=\frac{W-F'}{a}=\frac{۳۲۶۰-۲۲۰۰}{۰/۳۹}=۲/۷۱\times۱۰^۳ kg$$

ج) حال که هم جرم و هم وزن سفینه را داریم می‌توانیم شتاب سقوط آزاد را هم محاسبه کنیم:

$$g=\frac{W}{m}=۱/۲\,m/s^{۲}$$

مسئله ۲۸ : ماهواره‌ای دارای دوره تناوب مداری ۲۴ ساعت می‌باشد. در نتیجه همیشه در یک طول خط استوای زمین قرار می‌گیرد.

الف) چرا مدارهای این ماهواره باید دایره باشد؟

ب) شعاع مداری برای این ماهواره را حساب کنید.

حل : الف) بر اساس قانون دوم کپلر سرعت زاویه‌ای بدون موقعیت روی مدارهای بیضوی تغییر می‌کند. بنابراین نسبت به سکون بودن نسبت به نقطه روی سطح زمین، به مداری با سرعت زاویه‌ای ثابت، مدار دایره‌ای نیاز داریم.

ب) با معادل قرار دادن نیروی گریز از مرکز و نیروی گرانشی داریم :

$$G\frac{m_E m_S}{R^{۲}}=\frac{۴\pi^{۲} m_S R}{P^{۲}}$$

$$\Rightarrow R=\left(\frac{GMP^{۲}}{۴\pi}\right)^{\frac{۱}{۳}}=۴/۲۳\times ۱۰^{۷}m=۴۲۳۰۰km$$

مسئله ۲۹ : مشاهدات نشان می‌دهد که نسبت فاصله قمر کالیستو از سیاره مشتری به شعاع این سیاره ۲۶/۳ است. اگر دوره تناوب مداری کالیستو ۱۶/۶۸ شبانه روز باشد، چگالی متوسط سیاره مشتری چقدر است؟

حل : با توجه به رابطه سوم کپلر داریم:

$$P^{۲}=\frac{۴\pi^{۲}}{GM}r^{۳}$$

از طرف دیگر داریم:

$$M=V\cdot\rho=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}\rho$$

در نتیجه:

$$P^{۲}=\frac{۴\pi^{۲}}{G\left(\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}\rho\right)}r^{۳}\Rightarrow P^{۲}=\frac{۴\pi^{۲}}{G\left(\frac{۴}{۳}\pi\rho\right)}\left(\frac{r}{R}\right)^{۳}$$

$$\Rightarrow \rho=۳\pi\left(\frac{r}{R}\right)^{۳}\frac{۱}{GP^{۲}},\quad \frac{r}{R}=۲۶/۳$$

$$\rho=\frac{۳\times۳/۱۴\times\left(۲۶/۳\right)^{۳}}{۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\times\left(۱۶/۶۸\times۸۶۴۰۰\right)^{۲}}\Rightarrow\rho=۱/۲۴\times۱۰^{۳}kgm^{-۳}$$

مسئله ۳۰ : الف) ستاره دنباله‌داری با ۳/۳ سال سن، دارای کوتاه‌ترین دوره تناوب در میان همه دوره تناوب‌های ستاره‌های دنباله‌دار است.

الف) نیم محور اصلی مدار ستاره دنباله‌دار بر حسب واحد نجومی چقدر است؟

ب) خروج از مرکز این ستاره دنباله‌دار برابر $e=۰/۸۴۷$ است. فاصله حضیض و اوج آن را محاسبه کنید.

حل : الف) نیم محور اصلی ستاره دنباله‌دار بر حسب واحد شمسی را می‌توان از قانون سوم کپلر به دست آورد.

$$P^{۲}=a^{۳}$$

در نتیجه:

$$a=P^{\frac{۲}{۳}}=۲/۲AU$$

ب) فاصله‌ها توسط روابط زیر داده می‌شود.

$$d_{\text{حضیض}}=\left(۱-e\right)a=۰/۳۴\,AU$$
$$d_{\text{اوج}}=\left(۱+e\right)a=۴/۰۶\,AU$$

مسئله ۳۱ : هنگامی که فاصله بین دو ستاره‌ها دو برابر می‌شود، دوره گردش یک جفت ستاره (ستارگان دوتایی که به دور هم می‌چرخند) چه تغییری می‌کنند؟

حل : برای حل این مسئله همان طور که قبلا گفته شد، باید از تناسب استفاده کنیم. برای این کار نیازمند استفاده از روابط معادله $P^{۲}$ و a^{3} هستیم.

$$\frac{P_{۲}^{۲}}{P_{۱}^{۲}}=\frac{\dfrac{۴\pi a_{۲}^{۳}}{G\left(m+M\right)}}{\dfrac{۴\pi a_{۱}^{۳}}{G\left(m+M\right)}}$$

$$\frac{P_{۲}^{۲}}{P_{۱}^{۲}}=\frac{a_{۲}^{۳}}{a_{۱}^{۳}}\Rightarrow\frac{P_{۲}^{۲}}{P_{۱}^{۲}}=\frac{\left(۲a_{۱}\right)^{۳}}{a_{۱}^{۳}}$$

$$\frac{P_{۲}^{۲}}{P_{۱}^{۲}}=\frac{۸a_{۱}^{۳}}{a_{۱}^{۳}}\Rightarrow\frac{P_{۲}}{P_{۱}}=\sqrt{۸}$$

$$\frac{P_2}{P_1}=2/8 \Rightarrow P_2=2/8P_1$$

هنگامی که فاصله دو ستاره دو برابر می‌شود دوره تناوب با عامل مشترک ۲/۸ افزایش می‌یابد.

مسئله ۳۲ : دو کهکشان با دوره مداری ۵۰ میلیارد سال به دور یکدیگر می‌چرخند. فاصله مابین آنها برابر است با ۰/۵ میلیون پارسک می‌باشد. جرم این جفت چه مقدار است؟

حل : در ابتدا این طول دوره ۵۰ میلیارد سالی را به ثانیه تبدیل می‌کنیم عدد به دست آمده برابر $1/58\times10^{18}$ ثانیه است. سپس 5×10^{5} پارسک را به $1/5\times10^{19}$ کیلومتر تبدیل می‌کنیم. سپس از قانون سوم کپلر استفاده می‌کنیم:

$$P^2=\frac{4\pi^2a^3}{G(m+M)} \Rightarrow (m+M)=\frac{4\pi^2a^3}{GP^2}$$

$$(m+M)=\frac{4\pi^2\left(1/5\times10^{22}m\right)^3}{6/67\times10^{-11}\,m/kg/s^2\left(1/58\times10^{18}s\right)^2}$$

$$(m+M)=\frac{1/33\times10^{68}\,m^3}{1/67\times10^{26}\,m^3/kg} \Rightarrow (m+M)=8\times10^{41}\,kg$$

جرم هر دو منظومه با هم برابر است با $8\times10^{41}\,kg$ یا حدود 4×10^{11}جرم خورشیدی

مسئله ۳۳ : ماهواره‌ای به جرم ۲۵۰۰ کیلوگرم روی مداری بیضی شکل دور زمین در حرکت است. در دورترین نقطه از زمین (نقطه اوج) ارتفاع آن ۳۶۰۰ کیلومتر و در نزدیک‌ترین نقطه به زمین (نقطه حضیض) ارتفاع ۱۱۰۰ کیلومتر است. انرژی و اندازه حرکت ماهواره همچنین سرعت آن در نقاط اوج V_a و حضیض V_p را محاسبه کنید.

حل :

$$GMm=mgR_e^2=(2500)(9/8)\left(6400\times10^3\right)^2=10/04\times10^{17}$$

$$2a=r_{\min}+r_{\max}=2R_e+d_a+d_p$$

$$\Rightarrow 2a=2(6400)+3600+1100=17500\,km$$

$$E=\frac{K}{۲a}=-\frac{GMm}{۲a}\Rightarrow E=-\frac{۱۰/۰۴\times ۱۰^{۱۷}}{۱۷۵۰۰\times ۱۰^{۳}}=-۵/۷۳\times ۱۰^{۱۰}\,j$$

انرژی ماهواره پیش از پرتاب یعنی E_i برابر است با :

$$E_I=-\frac{GMm}{R_e}=-\frac{mgR_e^{۲}}{R_e}=-mgR_e$$
$$\Rightarrow E_i=-(۲۵۰۰)(۹/۸)(۶۴۰۰\times ۱۰^{۳})=-۱۵/۶۸\times ۱۰^{۱۰}\,j$$

بنابراین انرژی لازم برای قرار دادن ماهواره در مدار برابر است با :

$$\Delta E=E-E_i=[-۵/۷۳-(-۱۵/۶۸۰)]\times ۹/۹۵\times ۱۰^{۱۰}\,j$$
$$e=\frac{r_{\max}-r_{\min}}{r_{\max}-r_{\min}}=\frac{d_a-d_p}{۲a}=\frac{۲۵۰۰}{۱۷۵۰۰}=\frac{۱}{۷}$$
$$e^{۲}=۱+\frac{۲EL^{۲}}{mK^{۲}}\Rightarrow L=\left[\frac{mK^{۲}(e^{۲}-۱)}{۲E}\right]^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow L=۱/۴۷\times ۱۰^{۱۴}\,kgm^{۲}/s$$

$$\Delta E=E-E_i=[-۵/۷۳-(-۱۵/۶۸۰)]\times ۹/۹۵\times ۱۰^{۱۰}\,j$$
$$e=\frac{r_{\max}-r_{\min}}{r_{\max}-r_{\min}}=\frac{d_a-d_p}{۲a}=\frac{۲۵۰۰}{۱۷۵۰۰}=\frac{۱}{۷}$$
$$e^{۲}=۱+\frac{۲EL^{۲}}{mK^{۲}}\Rightarrow L=\left[\frac{mK^{۲}(e^{۲}-۱)}{۲E}\right]^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow L=۱/۴۷\times ۱۰^{۱۴}\,kgm^{۲}/s$$

با استفاده از مقدار E و رابطه $K=-GmM$ خواهیم داشت :

$$-۵/۷۳\times ۱۰^{۱۰}=\frac{۱}{۲}(۲۵۰۰)v_a^{۲}-\frac{۱۰/۰۴\times ۱۰^{۱۷}}{۱۰^{۷}}\Rightarrow v_a=۵۸۷۲\,m/s$$

$$r_av_a=r_pv_p\Rightarrow v_p=\frac{r_a}{r_p}v_p=\frac{۱۰^{۷}}{۷۵\times ۱۰^{۵}}\times ۵۸۷۲=۷۸۲۹\,m/s$$

مسئله ۳۴ : اندازه حرکت زاویه‌ای زمین دور خورشید را محاسبه کنید. برای راحتی کار مدار حرکت را دایره فرض کنید.

حل : جرم زمین $۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}kg$ و فاصله میانگین آن از خورشید برابر $۱/۴۹\times ۱۰^{۱۱}m$ است. از تعریف ثانیه دوره حرکت انتقالی زمین دور خورشید برابر است با $۳/۱۶\times ۱۰^{۷}s$ بنابراین سرعت زاویه‌ای میانگین زمین دور خورشید برابر می‌شود با:

$$\omega=\frac{۲\pi}{P}=\frac{۲\pi}{۳/۱۶\times۱۰^{۷}s}=۱/۹۸\times۱۰^{-۷}s^{-۱}$$

در نتیجه اندازه حرکت زاویه‌ای زمین نسبت به خورشید برابر است با:

$$L=m\omega r^{۲}=\left(۵/۹۸\times۱۰^{۲۴}kg\right)\left(۱/۹۸\times۱۰^{-۷}s^{-۱}\right)\left(۱/۴۹\times۱۰^{۱۱}m\right)^{۲}$$
$$=۲/۶۷\times۱۰^{۴۰}m^{۲}kgs^{-۱}$$

مسئله ۳۵ : الف) برای مشتری ۱۱/۸۶ سال طول می‌کشد تا به دور خورشید بچرخد. از این حقیقت برای تخمین زدن حداکثر فاصله مشتری از زمین و حداقل فاصله‌اش از زمین استفاده کنید.

ب) مشتری دارای جرمی برابر ۰/۰۰۱ جرم خورشید است. تقریبا ۱۶ روز طول می‌کشد تا مدار قمر کالیستو به دور مشتری کامل شود. حداکثر زاویه‌ای که شما می‌توانید کالیستو را جدا از مشتری در آسمان مشاهده کنید، تخمین بزنید.

حل : الف) با توجه به قانون سوم کپلر و ایجاد تناسب داریم :

$$\left(\frac{P_J}{P_E}\right)^{۲}=\left(\frac{R_J}{R_E}\right)^{۳}$$

$$R_J=\left(\frac{P_J}{P_E}\right)^{\frac{۲}{۳}}R_E=\left(\frac{۱۱/۸۶}{۱}\right)^{\frac{۲}{۳}}AU=۵/۲AU$$

نزدیک‌ترین و دورترین نزدیکی در زمانی روی می‌دهد که مشتری، زمین و خورشید همگی روی یک خط هستند با سیارات به ترتیب روی همان طرف یا طرف مخالف خورشید :

$$d_{\max}=۵/۲+۱=۶/۲AU$$
$$d_{\min}=۵/۲-۱=۴/۲AU$$

ب) نسبت کالیستو به دور مشتری به زمین به دور خورشید را بدست می‌آوریم.

$$\left(\frac{P_C}{P_E}\right)^{۲}=\left(\frac{R_C}{R_E}\right)^{۳}\left(\frac{M_\odot}{M_J}\right)$$

$$R_C=\left(\frac{P_C}{P_E}\right)^{\frac{۲}{۳}}\left(\frac{M_J}{M_\odot}\right)^{\frac{۱}{۳}}R_E$$

$$R_C=\left(\frac{\text{۱۶ روز}}{\text{۳۶۵ روز}}\right)^{\frac{۲}{۳}}\left(\frac{۰/۰۰۱M_{\odot}}{۱M_{\odot}}\right)^{\frac{۱}{۳}}AU$$

$$R_C=\left(۰/۰۴۴\right)^{\frac{۲}{۳}}\left(۰/۰۰۱\right)^{\frac{۱}{۳}}۰/۱۲\times ۰/۱=۰/۰۱۲AU$$

حداکثر زاویه در آسمان زمانی روی می‌دهد که زاویه از کالیستو تا مشتری با زمین ۹۰ درجه است. از هندسه بنیادی زاویه بین اضلاع زمین - کالیستو و زمین - مشتری این زاویه راست برابر است با :

$$\theta=\arctan\left(\frac{d_{CJ}}{d_{JE}}\right)$$

که d_{CJ} فاصله از کالیستو تا مشتری است و d_{JE} فاصله از مشتری تا زمین است. :

$$d_{CJ}=۰/۰۱۲AU$$

قسمت الف محدوده d_{JE} ممکن را بین $۴/۲AU$ و $۶/۲AU$ می‌دهد. این زاویه در زمانی که d_{JE} کوچک‌ترین است بزرگ‌ترین خواهد بود بنابراین :

$$\theta=\arctan\left(\frac{۰/۰۱۲}{۴/۲}\right)=\arctan\left(۰/۰۰۲۹\right)=۰/۱۶^{\circ}=۰/۰۰۲۹rad$$

توجه داشته باشید که می‌توان از تقریب زاویه کوچک $\theta\approx d_{CJ}/d_{JE}$ استفاده کرد. اگر از واحدهای مناسب‌تری استفاده کنید داریم :

$$۰/۱۶^{\circ}\times\left(\frac{۶۰'}{۱}\right)=۹/۸'\ \text{دقیقه قوس}$$

مسئله ۳۶ : ماه در مداری تقریبا دایره‌ای به شعاع $۳/۸\times ۱۰^{۸}m$ در زمان ۲۷/۳ روز دور زمین می‌گردد. مقدار اندازه حرکت زاویه‌ای مداری ماه را محاسبه کنید. فرض کنید مبدا همارها در مرکز زمین است.

حل :

$$m_e=۷/۳۵\times ۱۰^{۲۲}kg$$
$$R=۳/۸\times ۱۰^{۸}m$$
$$T=۲۷/۳day=۲/۴\times ۱۰^{۶}s$$

$$L = RP = m_e vR = m_e(R\omega)R = m_e R^{۲}\left(\frac{۲\pi}{T}\right)$$
$$= ۷/۳۵\times۱۰^{۲۲}\times\left(۳/۸\times۱۰^{۸}\right)\frac{۲\times۳/۱۴}{۲/۴\times۱۰^{۶}}$$
$$\Rightarrow L = ۲/۸\times۱۰^{۳۴}\,kgm^{۲}/s$$

مسئله ۳۷ : اگر جرم ماهواره‌ای $m = ۲۵۰kg$ و فاصله آن تا مرکز زمین $r = ۲۲۰۰۰km$ باشد، کمیت‌های زیر را حساب کنید. ($M_e = ۵/۹۸۱\times۱۰^{۲۴}kg$)

الف) نیروی گرانش وارد بر ماهواره

ب) سرعت ماهواره

ج) دوره حرکت ماهواره

حل : نیروی گرانش وارد بر ماهواره برابر است با :

$$F = \frac{GM_e m}{r^{۲}} = \frac{۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\times۵/۹۸۱\times۱۰^{۲۴}\times۲۵۰}{\left(۲۲\times۱۰^{۶}\right)^{۲}} \approx ۲۰۶N$$

ب) سرعت ماهواره از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$
$$v = \sqrt{\frac{۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\times۵/۹۸۱\times۱۰^{۲۴}}{۲۲\times۱۰^{۶}}} = ۴۲۵۸\,m/s$$

ج) دوره حرکت ماهواره به دور زمین برابر است با :

$$T = \frac{۲\pi r}{v} = \frac{۲\times۳/۱۴\times۲۲\times۱۰^{۶}}{۴۲۵۸} = ۳/۲۵\times۱۰^{۴}$$

مسئله ۳۸ : فضانوردی در فضاپیمای خود در یک مدار دایره‌ای به شعاع $۹/۶\times۱۰^{۳}$ کیلومتر به دور زمین می‌گردد. در طی مسیر او خود را در مدار جدیدی قرار می‌دهد. اگر فاصله نزدیک به زمین مدار جدید ۷×۱۰^{۳} کیلومتر باشد در این صورت دوره‌های تناوب مدار جدید و قدیم را با یکدیگر مقایسه کنید.

حل : ابتدا دوره تناوب قدیم و سپس دوره تناوب جدید را به دست می‌آوریم:

$$T=\sqrt{\frac{۴\pi^۲}{GM}r^۳}=\sqrt{\frac{۴\pi^۲\times\left(۹/۶\times۱۰^۶\right)^۳}{۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\times۵/۹۸\times۱۰^{۲۴}}}=۹/۴\times۱۰^۳s$$

$$a=\frac{۱}{۲}\left(۹/۶\times۱۰^۳+۷\times۱۰^۳\right)=۸/۳\times۱۰^۳km$$

$$T'=\sqrt{\frac{۴\pi^۲}{GM}a^۳}=\sqrt{\frac{۴\pi^۲\times\left(۸/۳\times۱۰^۶\right)^۳}{۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\times۵/۹۸\times۱۰^{۲۴}}}=۷/۵\times۱۰^۳s$$

بنابراین دوره تناوب مدار جدید حدود ۲۰ درصد کوتاه‌تر از دوره تناوب مدار قدیم است.

مسئله ۳۹ : حداکثر سرعت به دست آمده از طریق بررسی پهنای خطوط طیفی کهکشانی دور درست $۶۰۰kms^{-۱}$ است. اگر فرض کنیم این کهکشان از لبه دیده می‌شود و قطرش در حدود $۱۰۰kpc$ است. نسبت جرم کهکشان به جرم خورشید به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

حل : داده‌های مسئله چنین است:

$$M_{sun}\approx ۲\times۱۰^{۳۰}KG$$

$$V=۶۰۰۰۰۰m/s$$

$$r=\left(۱۰^۵pc\right)\times\frac{۱}{۲}\times\left(۳/۰۸۶\times۱۰^{۱۶}m/pc\right)=۱/۵۴۳\times۱۰^{۲۱}m$$

شرط چرخش جرم m به دور مرکز کهکشان در حالت پایدار چنین است:

$$F=\frac{GM_Gm}{r^۲}=\frac{mV^۲}{r}$$

$$\Rightarrow\frac{GM_G}{r}=V^۲\Rightarrow M_G=\frac{rV^۲}{G}$$

$$M_G=۸/۳۲۸\times۱۰^{۴۲}KG$$

$$\frac{M_G}{M_{sun}}=۴/۱۶۴\times۱۰^{۱۲}$$

مسئله ۴۰ : یک توده از یک ابر مولکولی غول آسا را با شعاع حدود ۰/۰۵ سال نوری را فرض کنید که هر میلیون سال چرخ می‌زند. دوره چرخش این توده هنگامی که به اندازه منظومه شمسی سقوط کرده است، چه مدت زمانی است؟ (شعاع ۴۰ واحد نجومی) فرض کنید که جرم ثابت است؟ این دوره را با دوره‌های مداری نپتون و پلوتو مقایسه کنید. این

روش تخمینی است. از مدلی ساده استفاده کنید. اگر از اینرسی توده استفاده کنید می‌توانید به جواب دقیق‌تری دست یابید.

حل : سرعت v یک جسم چرخنده از ضرب سرعت چرخش ω در شعاع r به دست خواهد آمد.

$$v = \omega r$$

سرعت زاویه‌ای ابتدایی برابر است با :

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} r_1$$

که T_1 دوره چرخش $۱۰^۶$ سال است.

این رابطه را می‌توان در معادله تکانه زاویه‌ای جایگذاری کرد چرا که تکانه زاویه‌ای می‌بایست پایسته باشد.

$$L = m\omega r^۲ = \text{ثابت}$$

$$m_۱\omega_۱ r_۱^۲ = m_۲\omega_۲ r_۲^۲$$

اما m ثابت می‌ماند.

$$\omega_۱ r_۱^۲ = \omega_۲ r_۲^۲ \Rightarrow \omega_۲ = \omega_۱ \frac{r_۱^۲}{r_۲^۲}$$

$$\omega_۲ = \frac{۲\pi}{۱\times۱۰^۶\, yr}\frac{(۰/۰۵\, ly)}{(۴۰ AU)}$$

$$\omega_۲ = \frac{۲\pi}{۱\times۱۰^۶\, yr}\frac{(۰/۰۵\, ly \cdot ۶۳۰۰۰\, AU/ly)}{(۴۰ AU)}$$

$$\omega_۲ = \frac{۲\pi}{۱\times۱۰^۶\, yr}\frac{(۳۱۶۳)^۲}{(۴۰)^۲}$$

$$\omega_۲ = \frac{۲\pi \times ۶۲۵۵}{۱\times۱۰^۶\, yr} \cong \frac{۲\pi}{۱۶۰\, yr}$$

بنابراین در آخر دوره چرخش برابر با ۱۶۰ سال است. که به دوره مداری نپتون (۱۵۶ سال) بسیار نزدیک است. اما از دوره مداری پلوتو (۲۴۹ سال) کمتر است.

مسئله ۴۱ : ماهواره‌ای با تندی $۲۵۰۰\, m/s$ بر مدار دایره‌ای به دور زمین می‌چرخد.

الف) دوره گردش

ب) شتاب شعاعی ماهواره را حساب کنید.

حل : الف) شعاع r مدار را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{Gmm_E}{r^2}=m\frac{v^2}{r}$$
$$r=\frac{Gm_E}{v^2}=\frac{\left(6/673\times10^{-11}N.m^2/kg^2\right)\left(5/97\times10^{24}kg\right)}{\left(5200m/s\right)^2}=1/473\times10^{7}m$$

بنابراین دوره چرخش ماهواره از رابطه زیر به دست می‌آید :

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi\left(1/473\times10^{7}m\right)}{5200m/s}=1/78\times10^{4}s=297\min$$

ب)

$$a=\frac{v^2}{r}=\frac{\left(5200m/s\right)^2}{1/473\times10^{7}m}=1/84m/s^2$$

مسئله ۴۲ : ماهواره‌ای می‌خواهد در یک مدار دایره‌ای در بالای نقطه‌ای از سطح زمین در جا بماند. با این وجود خطای ۱ کیلومتری که در هنگام حرکت در شعاع مداری ماهواره‌ای برای این رخداد ایجاد می‌شود، خیلی زیاد است. با چه آهنگی و در چه جهتی نقطه درست زیر ماهواره در امتداد سطح زمین حرکت می‌کند؟

حل : اگر ماهواره بخواهد بر فراز یک نقطه ثابت بماند، باید صفحه مدار آن همان صفحه زمین باشد و بنابراین سرعت زاویه‌ای آن همان سرعت زاویه‌ای زمین باشد. شعاع حرکت این ماهواره چنین است :

$$R=\left(\frac{GM_e}{\omega_e^2}\right)^{1/3}$$
$$\omega_e=7/29\times10^{-5}\,rad/s$$
$$\Rightarrow R=4/21\times10^{7}m$$

این شعاع را شعاع مدار همگام می‌نامند. حال اگر R به R' تبدیل شود خواهیم داشت :

$$R'=R+10^{3}$$
$$\Rightarrow \omega'=\left(\frac{GM_e}{R'^3}\right)^{1/2}=7/28974\times10^{-5}\,rad/s$$

در نتیجه تغییر سرعت زاویه‌ای ماهواره چنین می‌شود :

$$\Delta\omega = \omega' - \omega_e = ۲/۶\times ۱۰^{-۹}\, rad/s$$

پس آهنگ تغییر سرعت نقطه‌ای روی زمین که درست زیر ماهواره است برابر می‌شود با :

$$v = \Delta\omega \times R_e = \left(۲/۶\times ۱۰^{-۹}\, rad/s\right)\times\left(۶/۳۷\times ۱۰^{۶}\, m\right) = ۱/۶۵\, cm/s$$

نقطه‌ای روی زمین در جهت افزایش مدار (رو به غرب) در امتداد استوا با این آهنگ تغییر می‌کند.

مسئله ۴۳ : پس از اختراع تلسکوپ، ستاره‌شناسان قادر بودند که تعیین کنند که آیو بسیار کوچک‌تر از مشتری است تقریبا در فاصله $۴/۲\times ۱۰^{۵} km$ از مشتری است و هر ۴۲/۵ ساعت می‌چرخند.

الف) جرم مشتری را از این مشاهدات تخمین بزنید.

ب) آیو تقریبا ۱۰٪ دورتر از مشتری است. (نسبت به ماه از زمین)، ولی این ۱۵/۵ برابر زمانی که ماه به دور زمین می‌چرخد، سریع‌تر می‌چرخد. توضیح دهید چرا آیو چنین با سرعت می‌چرخد.

حل : الف) طبق قانون کپلر داریم :

$$p^۲ = \frac{۴\pi^۲}{GM}a^۳$$

در این مسئله دوره تناوب را به صورت ۴۲/۵ ساعت و فاصله تا آیو ($a = ۴/۲\times ۱۰^{۵} km$) را می‌دانیم بنابراین برای M معادله را حل می‌کنیم:

$$M = \frac{۴\pi^۲}{G}\frac{a^۳}{p^۲}$$

$$= \frac{۴\pi^۲\left(۴/۲\times ۱۰^{۸} m\right)^۳}{\left(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱} m^۳/kg\, s^۲\right)\left(۴۲/۵\, h\right)^۲\left(۳۶۰۰\, s/h\right)^۲} = ۱/۹\times ۱۰^{۲۷} kg$$

ب) جرم مشتری تقریبا ۳۲۰ برابر جرم زمین است. چون دوره تناوب متناسب است با یک تقسیم بر ریشه دوم M بنابراین آیو باید تقریبا $\frac{۱}{۱۸}$ زمان برای چرخیدن به دور مشتری نسبت به آن مقداری که ماه می‌گیرد تا به دور زمین بچرخد، زمان ببرد.

مسئله ۴۴ : به نظر می‌رسد که برخی ستاره‌های نوترونی در هر ثانیه در حدود یک دور می‌چرخد. اگر شعاع چنین ستاره‌ای ۲۰ کیلومتر باشد، جرم آن چقدر باشد تا اجسام واقع بر سطح آن جذب ستاره شوند و بر اثر چرخش سریع، از ستاره جدا نشوند؟

حل : چون نیروی گرانشی بین ستاره و اشیایی که در سطح آن قرار دارند نیروی مرکزگرای لازم را فراهم می‌آورد، می‌توان نوشت :

$$\frac{GMm}{R^۲} = mR\omega^۲$$

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow M = \frac{۴\pi^۲ R^۳}{GT^۲}$$

$$\Rightarrow M = \frac{۴\pi^۲ (۲۰۰۰۰)^۳}{۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱} \times (۱)} = ۴/۷\times ۱۰^{۲۴} kg$$

مسئله ۴۵ : از تفسیر نیوتنی قانون سوم کپلر استفاده کنید و

الف) شعاع مداری ماهواره را در حدود زمین که دارای تناوب مداری ۲۳ ساعت و ۵۶ دقیقه است تعیین کنید.

ب) ماهواره‌ای که دارای تناوب مداری ۲۳ ساعت و ۵۶ دقیقه است ماهواره جسین چرانوس نامیده می‌شود. چرا؟

حل : الف) تفسیر نیوتن بیان می‌کند که :

$$p^۲ = \frac{۴\pi^۲}{GM} a^۳$$

در این مسئله دوره تناوب را به صورت ۲۴ ساعت و جرم زمین را می‌دانیم بنابراین برای a معادله را حل می‌کنیم.

$$a = \sqrt[۳]{\frac{GMp^۲}{۴\pi^۲}}$$

$$= \sqrt[۳]{\frac{\left(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱} m^۳/kg\, s^۲\right)\times\left(۵/۹۷\times ۱۰^{۲۴} kg\right)\times (۲۴h)^۲ \times (۳۶۰۰ s/۱h)^۲}{۴\pi^۲}}$$

$$= ۴/۲\times ۱۰^۷ m$$

ب) تقریبا در ۲۴ ساعت چرخش ماهواره در نقطه جغرافیایی ثابتی روی زمین باقی خواهد ماند. ماهواره‌های مخابراتی و ماهواره‌های مشاهده زمین این مدار را توجیه می‌کند.

مسئله ۴۶ : خورشید با سرعت $۲۲۰km/s$ به دور مرکز کهکشان راه شیری می‌چرخد. فاصله‌اش از مرکز برابر است با ۲۶ هزار سال نوری.

الف) جرم راه شیری را با این فرض که در مرکزش متمرکز می‌شود بیابید.

ب) با این فرض که جرم متوسط ستاره برابر است با $۱M_{\odot}$، چه تعداد ستاره در راه شیری وجود دارد؟

حل : الف) تقریب ناآشکار این است که بیشتر جرم راه شیری در درون مدار منظومهٔ شمسی قرار دارد. اگر نیروی اعمال شده توسط کهکشان، شتاب جانب مرکز منظومهٔ شمسی را فراهم می‌کند.

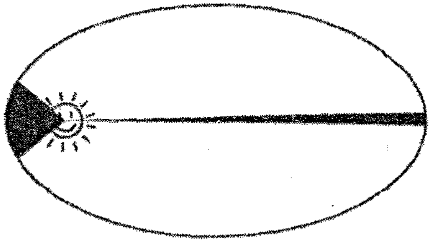
$$F = ma \Rightarrow \frac{GM_{MW}M_{\odot}}{R^۲} = \frac{M_{\odot}V^۲}{R}$$

$$M_{MW} = \frac{V^۲R}{G} = ۱/۸\times۱۰^{۴۴}gm = ۹\times۱۰^{۱۰}M_{\odot}$$

ب) یعنی آن روز در حدود ۹×۱۰^{۱۰} ستاره در بر دارد. در حقیقت میلیاردها و میلیاردها.

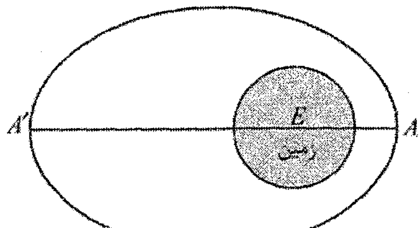
مسئله ۴۷ : قوانین کپلر برای ستاره‌های دنباله‌دار که مایل هستند مدارهای بیضوی بسیار خارج از مرکز داشته باشند به کار می‌روند. یک ستاره دنباله‌دار را که در حال حرکت در سرعت ۲/۵ کیلومتر در دورترین نقطه‌ای از خورشید است را در نظر بگیرید. نزدیک‌ترین نقطه‌اش به خورشید ۱۰ برابر نزدیک‌تر از دورترین نقطه است. در نزدیک‌ترین نقطه‌اش با چه سرعتی در حال حرکت است؟ (به طور مختصر دلیل خود را با یک طرح از مدار توضیح است.)

حل : بر اساس قانون دوم کپلر خطی از خورشید تا ستاره دنباله‌دار باید مساحت‌های مساوی را در زمان‌های مساوی اشغال کند. چون تکه به هم ریخته سمت چپ ۱۰ برابر کوچک‌تر به صورت افقی است. نیز باید ۱۰ برابر به صورت عمودی پهن‌تر باشد تا همان مساحت را داشته باشد بنابراین این ستاره دنباله‌دار باید ۱۰ برابر سریع‌تر از زمانی که نزدیک به خورشید است در حال حرکت باشد یعنی سرعتش باید برابر $۲۵km/s$ باشد.



شکل ۲-۵

مسئله ۴۸ : قمر مصنوعی وانگارد ۱ دارای دوره تناوب گردشی ۱۳۴ دقیقه است. این قمر به ۶۶۰ کیلومتری زمین نزدیک شده، سپس تا فاصله ۴۰۲۳ کیلومتری دور می‌شود. اگر نصف محور مدار زمین $۱۴۹/۵ \times ۱۰^۶$ کیلومتر، شعاع زمین ۶۳۷۲ کیلومتر و سال ۳۶۵/۲۵ روز متوسط خورشیدی تصور کنیم، جرم زمین را نسبت به جرم خورشید به دست آورید.



شکل ۲-۶

حل : اندازه محور بزرگ بیضی AA' به دست می‌آید :

$$AA' = ۴۰۲۳ + ۲ \times ۶۳۷۲ + ۶۶۰ = ۱۷۴۲۷\,km$$

در نتیجه نیم محور a برابر ۸۷۱۳/۵ کیلومتر است. دوره تناوب گردشی $T_1 = ۱۳۴$ دقیقه است. در مورد مدار زمین :

$$a = ۱۴۹/۵ \times ۱۰^۶\,km$$

$$T = ۳۶۵/۲۵ \times ۲۴ \times ۶۰ = ۵/۲۵۹۶ \times ۱۰^۵ \min$$

فرض کنید M و m به ترتیب جرم خورشید و زمین باشد، در این صورت با توجه به معادله جرم سیاره داریم :

$$\frac{M}{m}=\left(\frac{۱۳۴}{۵/۲۵۹۶\times۱۰^{۵}}\right)^{۲}\left(\frac{۱۴۹/۵\times۱۰^{۶}}{۸۷۱۳/۵}\right)^{۳}\Rightarrow\frac{M}{m}=۳۲۷۸۰۰$$

پس جرم زمین تنها حدود سه میلیونیم جرم خورشید است.

مسئله ۴۹ : نشان دهید که تپنده‌های سریع باید چگالی‌هایی مانند ستاره‌های نوترونی داشته باشند.

حل : فرض کنید که ساز و کاری که ساعت تپنده را به وجود می‌آورد، چرخش باشد. یک کره می‌تواند فقط با تندی دوران کند که شتاب جانب مرکز آن $V^{۲}/R$ در استوا برابر یا کمتر از شتاب گرانشی $GM/R^{۲}$ باشد. پس :

$$\frac{V^{۲}}{R}=\frac{GM}{R^{۲}}$$

$$V=\left(\frac{GM}{R}\right)^{۱/۲}$$

که در آن V سرعت استوایی کره، R شعاع و M جرم آن است. دوره تناوب یک کره چرخان عبارت است از :

$$P=\frac{۲\pi R}{V}$$

به طوری که :

$$P=\frac{۲\pi R}{(GM/R)^{۱/۲}}=\frac{۲\pi R^{۳/۲}}{(GM)^{۱/۲}}$$

از طرفی داریم :

$$M=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}\rho$$

$$P=\frac{۲\pi R^{۳/۲}}{\left(G\times۴/۳\pi\rho R^{۳}\right)^{۱/۲}}$$

$$P=\frac{۳/۸\times۱۰^{۵}}{\rho^{۱/۲}}$$

که در آن چگالی بر حسب کیلوگرم بر متر مکعب است. مثلا برای دوره تناوبی به اندازه ۲ms داریم :

$$۲\times ۱۰^{-۳} s=\frac{۳/۸\times ۱۰^{۵}}{\rho^{۱/۲}}$$
$$\rho^{۱/۲}=۱/۹\times ۱۰^{۸}$$
$$\rho=۴\times ۱۰^{۱۶}\, kg/m^{۳}$$

که درست به اندازه چگالی یک ستاره نوترونی است.

مسئله ۵۰ : یک موشک ساکن در فضا که عملا هیچ نیروی گرانشی به آن اثر نمی‌کند $۲/۵۵\times ۱۰^{۵} kg$ جرم دارد که $۱/۸۱\times ۱۰^{۵} kg$ آن سوخت است. موتور سوخت را با آهنگ $۴۸۰ kg/s$ مصرف می‌کند و تندی گازهای خروجی $۳/۲۷ km/s$ است. موتور به مدت $۲۵۰ s$ روشن می‌شود.

الف) نیروی پیشران موتور موشک را به دست آورید.
ب) جرم موشک پس از روشن شدن موتور چقدر است؟
ج) تندی کسب شده نهایی چقدر است؟

حل : الف) نیروی پیشران برابر است با $T=Ru$ که در آن R آهنگ مصرف سوخت و u تندی محصولات خروجی نسبت به موشک است. بر طبق صورت مسئله:

$$R=۴۸۰ kg/s$$
$$u=۳/۲۷\times ۱۰^{۳}\, m/s$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$T=Ru=۴۸۰\times ۳/۲۷\times ۱۰^{۳}=۱/۵۷\times ۱۰^{۶} N$$

ب) بدیهی است که در طی زمان ۲۵۰ ثانیه، جرم سوخت مصرف شده برابر است با:

$$m=Rt=۴۸۰\times ۲۵۰=۱/۲\times ۱۰^{۵} kg$$

پس جرم موشک پس از ۲۵۰ ثانیه برابر می‌شود با:

$$M_f=M_i-m=۲/۵۵\times ۱۰^{۵}-۱/۲\times ۱۰^{۵}=۱/۳۵\times ۱۰^{۵} kg$$

ج) طبق معادله دوم موشک داریم:

$$v_f - v_i = u \ln \frac{M_i}{M_f}$$

$$v_i = ۰$$

$$u = v_{rel}$$

$$v_f = ۳/۲۷ \ln \frac{۲/۵۵ \times ۱۰^۵}{۱/۳۵ \times ۱۰^۵} = ۲/۰۸ \times ۱۰^۳ \ m/s$$

مسئله ۵۱ : یک سیستم ستاره مزدوج شامل دو ستاره است که در یک مدار دایره‌ای اطراف یک مرکز جاذبه‌ای بین آن دو می‌چرخند. این بدان معنی است که جرم هر دو ستاره مساوی است. اگر سرعت مداری هر ستاره ۲۲۰ کیلومتر بر ثانیه باشد و دوره مداری هر ستاره ۱۴ روز باشد، جرم M را برای هر ستاره پیدا کنید. (جهت مقایسه جرم خورشید ۲×۱۰^{۳۰} کیلوگرم است)

حل : برای هر ستاره نیروی گرانش برابر است با نیروی مرکز گرا :

$$\frac{Mv^۲}{a} = \frac{MGM}{(۲a)^۲} \Rightarrow v = \frac{۲\pi a}{T}$$

برای هر ستاره جرم‌های خورشیدی بر طبق رابطه :

$$M = \frac{۲v^۳T}{\pi G} = ۶۳$$

حل می‌کنیم. دو ستاره غول شامل سیستم مزدوج سنگین‌ترین ستارگان شناخته شده هستند.

مسئله ۵۲ : الف) شعرای یمانی B مشاهده شده است که دارای تناوب مداری ۵۰ سال است. جرم کلی منظومه شعرای یمانی B چقدر است؟

ب) جرم خورشید ما در حدود $۲\times۱۰^{۳۰}kg$ است. منظومه شعرای یمانی A و B چند جرم شمسی است؟

حل : الف) قانون کپلر بیان می‌کند :

$$p^۲ = \frac{۴\pi^۲}{GM} a^۳$$

در این مسئله دوره تناوب p را به صورت ۵۰ سال و فاصله بین شعرای یمانی A و B را ($a=۲۰AU$) می‌دانیم بنابراین برای M حل می‌کنیم :

$$M=\frac{۴\pi^۲}{gG}\frac{a^۳}{p^۲}$$

$$=\frac{۴\pi^۲\left(۲۰AU\times ۱/۵\times ۱۰^{۱۱}\,m/AU\right)^۳}{\left(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\,m^۳/kg\,s^۲\right)\left(۵۰ly\times\frac{۳۶۵days}{۱yr}\times ۲۴\frac{h}{day}\times ۳۶۰۰\frac{s}{h}\right)^۲}$$

$$=۶/۴\times ۱۰^{۳۰}kg$$

ب)

$$\frac{۶/۴\times ۱۰^{۳۰}kg}{۲\times ۱۰^{۳۰}kg}=۳/۲M_{sun}$$

مثال ۵۳ : از طریق محاسبه فاصله مرکز خورشید تا مرکز جرم منظومه خورشید-مشتری نشان دهید که خورشید در حرکت منظومه شمسی ساکن و بی‌حرکت نیست.

حل : اگر فاصله مرکز خورشید تا مرکز جرم منظومه خورشید- مشتری برابر d و فاصله مرکز خورشید تا مشتری برابر D باشد آنگاه :

$$dM_{\odot}=(D-d)M_J$$

$$d(M_{\odot}+M_J)=DM_J$$

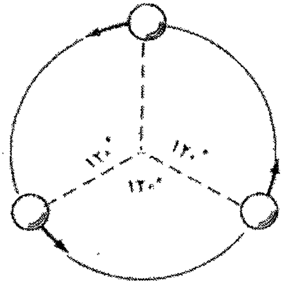
$$d=\frac{DM_J}{(M_{\odot}+M_J)}\cong\frac{DM_J}{M_{\odot}}=\frac{\left(۷/۸\times ۱۰^۸km\right)\left(۱/۹\times ۱۰^{۲۷}kg\right)}{\left(۲\times ۱۰^{۳۰}kg\right)}=۷/۴\times ۱۰^۵km$$

به دلیل اینکه این فاصله برابر است با ۱/۰۶ شعاع خورشیدی، مرکز دقیقا خارج از سطح خورشید است.

مسئله ۵۴ : یک منظومه سه ستاره‌ای فرضی شامل سه ستاره است که حول یکدیگر می‌گردند. به جهت سادگی فرض می‌شود جرم هر سه ستاره برابر است و آنها حول یک مدار مشترک دایره‌ای حرکت می‌کنند و فاصله زاویه‌ای ثابت ۱۲۰ درجه دارند. بر حسب M هر ستاره و شعاع مداری R دوره تناوب حرکت چیست؟

حل :

$$T^2=\frac{4\pi^2 r^3}{GM}\Rightarrow T^2=\frac{4\pi^2 R^3}{G\left(m_1+m_2+m_3\right)}=\frac{4\pi^2\left(2r/\sqrt{3}\right)^3}{G\left(3r\right)}=\frac{32\pi r^3}{\sqrt{3}Gm}$$



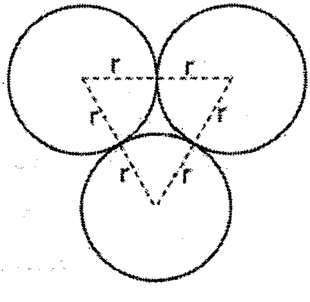
شکل ۲-۷

فرض می‌کنیم این سه ستاره به اندازه‌ای به یکدیگر نزدیک شوند که کاملا بر یکدیگر مماس شوند در این صورت مرکز جرم آنها هیچ تغییری نخواهد کرد. مطابق شکل می‌توان هر سه ستاره را یک جسم واحد در نظر گرفت که در اینجا هر سه ستاره دارای جرم برابر هستند.

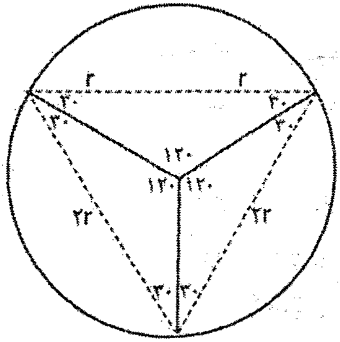
$$M=m+m+m=3m$$

و در نتیجه دارای شعاع‌های برابر هستند. در اینجا با توجه به شکل زیر دارای یک جرم واحد به جرم $M=3m$ هستیم که با توجه به روابط هندسی دارای شعاع R است.

$$\cos 30^\circ=\frac{r}{R}\Rightarrow R=\frac{r}{\cos 30^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}r$$



شکل ۲-۸



شکل ۲-۹

مسئله ۵۵ : گودال شهابی آریزونا سوراخی به عمق ۱۸۰ متر و عرض ۱۳۰۰ متر در اثر کوبش یک شهاب سنگ بزرگ بر سطح زمین حفر شد. جرم و تندی این شهاب سنگ پیش از کوبش به ترتیب $۲\times۱۰^{۹}kg$ و $۱۰km/s$ برآورد شده است.

الف) طی این برخورد ناکشسان زمین چه سرعت پس‌زدنی پیدا کرد؟

ب) طی برخورد چه مقدار انرژی جنبشی برای فرآیندهای ناکشسان آزاد شد. این انرژی را بر حسب تی‌ان‌تی بیان کنید. (یک تن تی‌ان‌تی به محض انفجار $۴/۲\times۱۰^{۹}J$ آزاد می‌کند)

حل : اطلاعات مسئله بدین شرح است :

$$h=۱۸۰m,\quad d=۱۳۰۰m,\quad m_۱=۲\times۱۰^{۹}kg,\quad v=۱۰km/s=۱۰۰۰۰m/s,$$
$$m_e=۵/۹۸\times۱۰^{۲۴}kg,\quad v'_۲=?$$

الف) سرعت پس زنی زمین به این صورت محاسبه می‌شود :

$$m_۱v_۱+m_۲v_۲=(m_۱+m_۲)v'_۲ \Rightarrow v'_۲=\frac{۲\times۱۰^{۱۳}}{۵/۹۸\times۱۰^{۲۴}}=۳/۳\times۱۰^{-۱۲}\,m/s$$

ب) مقدار انرژی جنبشی نیز چنین است :

$$E=\frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲=\frac{۱}{۲}\left(۲\times۱۰^{۹}\right)\left(۱۰۰۰۰\right)^۲=۱۰^{۱۷}j$$

مقدار تی ان تی معادل بدین صورت است :

$$x=\frac{۱۰^{۱۷}}{۴/۲\times۱۰^{۹}}=۲/۲\times۱۰^{۷}ton$$

مسئله ۵۶ : دو ستاره یکسان هریک به جرم M به دور مرکز جرم مشترک خود می‌چرخند. شعاع هر مدار R است لذا دو ستاره همواره در دو طرف متقابل روی دایره هستند.

الف) نیروی گرانش وارد از یک ستاره بر ستاره دیگر چقدر است؟

ب) تندی مداری و دوره گردش هر یک از ستاره‌ها چقدر هستند؟

ج) می‌نیمم انرژی لازم برای جدا کردن آنها از یکدیگر تا فاصله بی‌نهایت را حساب کنید.

حل : الف) فاصله دو ستاره از یکدیگر $۲R$ است. بنابراین :

$$F_g = G\frac{M^۲}{(۲R)^۲} = \frac{GM^۲}{۴R^۲}$$

ب)

$$F_g = ma$$

$$\frac{GM^۲}{۴R^۲} = M\frac{v^۲}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{۴R}}$$

$$T = \frac{۲\pi R}{v} = ۲\pi R\sqrt{\frac{۴R}{GM}} = ۴\pi\sqrt{\frac{R^۳}{GM}}$$

ج) از رابطه $K_۱ + U_۱ + W = K_۲ + U_۲$ در مورد دستگاه شامل دو ستاره استفاده می‌کنیم. بی‌نهایت از یکدیگر دور شدن $K_۲ = ۰$ و $U_۲ = ۰$

$$K_۱ = \frac{۱}{۲}Mv^۲ + \frac{۱}{۲}Mv^۲ = ۲\left(\frac{۱}{۲}M\right)\left(\frac{GM}{۴R}\right) = \frac{۱}{۴}\frac{GM^۲}{R}$$

$$U_۱ = -G\frac{M^۲}{۲R}$$

انرژی لازم برابر است با :

$$W = -(k_۱ + U_۱) = -\left(\frac{GM^۲}{۴R} - \frac{GM^۲}{۲R}\right) = \frac{۱}{۴}\frac{GM^۲}{R}$$

مسئله ۵۷ : یک زوج ستاره حول مرکز جرم مشترکشان می‌چرخند. جرم یکی از ستاره‌ها دو برابر دیگری است. ($M = ۲m$) فاصله مراکز ستاره‌ها از هم d است که در مقایسه با ابعاد آنها بزرگ است. رابطه مربوط به دوره تناوب دوران ستاره‌ها را حول مرکز

جرم مشترکشان را بـه دسـت آوریـد. تکانـه زاویـه‌ای دو سـتاره نسـبت بـه مرکـز جـرم مشترکشان را محاسبه کنید. همچنین انرژی جنبشی دو ستاره را با هم مقایسه کنید.
حل :

$$Mr_۱ = mr_۲ \Rightarrow (۲m)r_۱ = m(۲r_۱)$$
$$\Rightarrow \frac{GMm}{d^۲} = Mr_۱\omega^۲ = \frac{۴\pi^۲ Mr_۱}{T^۲} \Rightarrow T = \left(\frac{۴\pi^۲ r_۱ d}{Gm}\right)$$

چون $r_۱ + r_۲ = d$ و $r_۲ = ۲r_۱$ است، بنابراین $r_۱ = d/۳$ و $r_۲ = ۲d/۳$ می‌باشد :

$$T = \frac{۲\pi d^{\frac{۳}{۲}}}{\sqrt{۳Gm}}$$
$$\frac{L_m}{L_M} = \frac{mr_۲^۲\omega}{Mr_۱^۲\omega} = \frac{m(۲r_۱)^۲\omega}{۲m(r_۱)^۲\omega} = ۲$$
$$\frac{K_m}{K_M} = \frac{\frac{۱}{۲}mr_۲^۲\omega^۲}{\frac{۱}{۲}mr_۱^۲\omega^۲} = ۲$$

مسئله ۵۸ : ما در حال مشاهده منظومه دوتایی مرئی هستیم که دارای تناوب مـداری ۳ سال است. ستاره A در فاصله متوسط ۱ واحد نجومی از مرکز جرم می‌چرخند در حـالی که ستاره B در فاصله $۵AU$ از مرکز جرم می‌چرخند.
الف) فاصله متوسط بین این ستاره‌ها چقدر است؟
ب) مجموع جرم‌های ستاره‌ها چقدر است؟
ج) جرم هر ستاره چقدر است؟
حل : الف) فاصله متوسط بین این ستاره‌ها برابر است با :

$$a = a_A + a_B = (۱+۵)AU = ۶AU$$

ب) از قانون کپلر (a بر حسب واحد نجومی و P بر حسب سال)

$$M_A + M_B = \frac{a^۳}{P^۲} = \frac{۶\times۶\times۶}{۳\times۳} = ۲۴$$

در قانون کپلر جرم به دست آمده بر حسب واحد جرم شمسی داده می‌شود، بنابراین :

$$M_A + M_B = ۲۴M_\odot$$

ج) از معادله مرکز جرم :

$$a_A M_A = a_B M_B$$

جرم ستاره A برابر است با :

$$M_A = M_B \times \frac{a_B}{a_A} = ۵M_B$$

این معادله را در نتیجه حاصل از قسمت ب جایگذاری می‌کنیم تا به دست آوریم :

$$۲۴M_\odot = M_A + M_B = ۵M_B + M_B = ۶M_B$$

در نتیجه حاصل زیر بدست می‌آید :

$$M_B = ۴M_\odot$$
$$M_A = ۲۰M_\odot$$

مسئله ۵۹ : یک فضاپیما ابتدا در مداری دایره‌ای نزدیک به زمین حرکت می‌کند. می‌خواهیم این فضاپیما را در مدار جدیدی قرار دهیم که فاصله نقطه حضیض آن برابر با شعاع مدار ماه در اطراف زمین باشد.

الف) اگر برای این کار فقط از یک نیروی پیش برنده استفاده شود، نسبت سرعت نهایی به سرعت اولیه را به دست آورید. فرض کنید شعاع مدار دایره‌ای اولیه $\frac{۱}{۶۰}$ فاصله تا ماه باشد.

ب) اگر نسبت سرعت یک درصد بزرگ‌تر باشد، مدار جدید را بیابید.

حل :

$$r_\circ = \frac{۱}{۶۰} r_۱$$

$$r = r_\circ \frac{(v_\circ / v_c)^۲}{۱ + \left[(v_\circ / v_c)^۲ - ۱\right] \cos\theta}$$

$$\theta = \pi,\ r_۱ = \frac{۱}{۶۰} r_۱ \frac{(v_\circ / v_c)^۲}{۱ + \left[(v_\circ / v_c)^۲ - ۱\right]}$$

$$\Rightarrow ۱۲۰ - ۶۰\left(\frac{v_\circ}{v_c}\right)^۲ = \left(\frac{v_\circ}{v_c}\right)^۲ \Rightarrow \frac{v_\circ}{v_c} = ۱/۴۰۲۶$$

ب)

$$\frac{v_\circ}{v} = ۱/۰۱ \times ۱/۴۰۲۶ = ۱/۴۱۶۶$$

$$e = \left(\frac{v_\circ}{v_c}\right)^۲ - ۱ = ۲/۰۰۶۷ - ۱ = ۱/۰۰۶۷ > \text{هذلولی}$$

مسئله ۶۰ : دوره تناوب آونگی روی زمین ۲ ثانیه است. دوره تناوب آن بر روی سطح ماه چقدر است؟ جرم ماه $۷/۳۵ \times ۱۰^{۲۲}$ و شعاع آن ۱۷۲۰ کیلومتر و شعاع زمین ۶۴۰۰ کیلومتر و جرم آن ۶×۱۰^{۲۴} کیلوگرم است.

حل :

$$T_e = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g_e}} = ۲\pi\sqrt{\frac{lR_e^۲}{GM_e}}$$

$$T_m = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g_m}} = ۲\pi\sqrt{\frac{lR_m^۲}{GM_m}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_e}{T_m} = \sqrt{\frac{M_m R_e^۲}{M_e R_m^۲}} \Rightarrow \frac{۲}{T_m} = \sqrt{\frac{۷/۳۵ \times ۱۰^{۲۲}(۶۴۰۰)^۲}{۶ \times ۱۰^{۲۴}(۱۷۲۰)^۲}} \Rightarrow T_m = ۴/۸۶s$$

مسئله ۶۱ : ستارهٔ نوترونی دارای جرم $۱/۴M_\odot$ و شعاع $۱۰km$ است.

الف) یک سفینهٔ فضایی در نزدیکی پرواز می‌کند. یک فضانورد با قد $۱۸۰cm$ در درون آن وجود دارد. این سفینهٔ فضایی اجازه ندارد به ستارهٔ نوترونی نزدیک‌تر از فاصله‌ای شود که در آن نیروی جزر و مدی روی فضانورد دو برابر وزنش روی زمین است. (با این فرض که فضانورد در طول جهت شعاعی می‌ایستد) آن فاصله چقدر است؟

ب) سرعت فرار از موقعیت سفینهٔ فضایی چقدر است؟

حل : الف)

$$\Delta F_{\text{شعاعی}} = \frac{۲GMm}{r^۳}\Delta r = ۲mg$$

$$r = \left(\frac{GM\Delta r}{g}\right)^{۱/۳} = \left(\frac{(۶/۶۷ \times ۱۰^{-۸})(۱/۴ \times ۲ \times ۱۰^{۳۳})(۱۸۰)}{۹۸۰}\right)^{۱/۳} cm$$

$$= ۳/۲ \times ۱۰^۸ cm = ۳۲۰۰km$$

ب) سرعت فرار برابر است با:

$$v=\sqrt{\frac{۲GM}{r}}=۷/۶\times۱۰^{۸}cm\sec^{-۱}=۷۶۰۰km\sec^{-۱}$$

مسئله ۶۲ : الف) جرم خرده سیاره کروی دارای $۲km$ قطر و متشکل از صخره با چگالی متوسط $۲۵۰۰kgm^{-۳}$ را بیابید.

ب) سرعت مورد نیاز برای فرار از سطح این خرده سیاره چقدر است؟

ج) برای فضانوردی که تصمیم گرفته بود برای کار به این خرده سیاره برود چه اتفاقی می‌افتاد؟

حل : الف) جرم خرده سیاره برابر است با:

$$r=\frac{d}{۲}=\frac{۲km}{۲}=۱km=۱۰۰۰m$$

$$\rho=\frac{m}{V}\Rightarrow m=\rho V$$

برای خرده سیاره کروی داریم:

$$V=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}=\frac{۴}{۳}\pi\times(۱۰۰۰m)^{۳}=۴/۱۸۹\times۱۰^{۹}m^{۳}$$

جرم خرده سیاره برابر است با:

$$m=۲۵۰۰kgm^{-۳}\times۴/۱۸۹\times۱۰^{۹}m^{۳}=۱/۰۴۷\times۱۰^{۱۳}kg$$

ب) سرعت فرار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$v=\sqrt{\frac{۲GM}{r}}$$

$$v=\sqrt{\frac{۲\times۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}m^{۳}kg^{-۱}s^{-۲}\times۱/۰۴۷\times۱۰^{۱۳}kg}{۱۰^{۳}m}}$$

$$v=\sqrt{\frac{۱۳۹۷m^{۳}s^{-۲}}{۱۰^{۳}m}}=\sqrt{۱/۳۹}ms^{-۱}=۱/۱۸ms^{-۱}$$

ج) در صورتی که دونده در سرعت $۳m/s$ می‌رود، پرواز خواهد کرد.

مسئله ۶۳ : سرعت دایره‌ای سفینه فضایی در پائین‌تر مدار زمین (۳۰۰ کیلومتر بالای سطح) را محاسبه کنید.

حل : در رابطه سرعت دایره‌ای، M جرم جسمی است که در این حالت بر روی مداری گرد زمین می‌چرخید و d فاصله بین مراکز اجسام است. به خاطر اینکه G به متر و فاصله به کیلومتر است فاصله بین سفینه فضایی و مرکز زمین را به متر تبدیل می‌کنیم.

$$d = R_{\text{زمین}} + h_{\text{مدار}}$$
$$d = ۶/۳۷۸ + ۳۰۰ km$$
$$d = ۶/۶۷۸ km \times \frac{۱۰۰۰ m}{km}$$
$$d = ۶۶۷۸۰۰۰ m$$
$$d = ۶/۶۷۸ \times ۱۰^{۶} m$$

حالا از معادله سرعت دایره‌ای :

$$v_c = \sqrt{\frac{GM_{\text{زمین}}}{d}}$$
$$v_c = \sqrt{\frac{۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} m^{۳}/kg/s^{۲} \times ۵/۹۷ \times ۱۰^{۲۴} kg}{\left(۶/۶۷۸ \times ۱۰^{۶} m\right)}}$$
$$v_c = \sqrt{۵/۹۶ \times ۱۰^{۷} \frac{m^{۳} kg}{mkgs^{۲}}}$$
$$v_c = \sqrt{۵/۹۶ \times ۱۰^{۷} \frac{m^{۲}}{s^{۲}}}$$
$$v_c = ۷/۷۲ \ m/s \Rightarrow v_c = ۷/۷۲ \ km/s$$

بنابراین سرعت دایره‌ای سفینه فضایی $۷/۷۲ \ km/s$ است. برای تبدیل ثانیه به ساعت در مخرج، عدد به دست آمده را دوبار در ۶۰ ضرب می‌کنیم که در این صورت جواب حدود $۲۸۰۰۰ \ km/h$ به دست می‌آید.

مسئله ۶۴ : یک توده سرد از یک ابر مولکولی غول آسا را تصور کنید که به شکل منحصر به فردی بزرگ است. عرضی حدود $r = ۱۰ pc$ و جرمی به بزرگی $M = ۱ \times ۱۰^{۳}$ جرم خورشیدی دارد. آیا این توده برای تشکیل ستاره سقوط می‌کند؟

حل : برای اینکه یک ابر سقوط کند سرعت میانگین می‌بایست کمتر از $\frac{۱}{۶}$ سرعت فرار باشد در یک توده سرد از یک ابر مولکولی غول آسا اکثر ذرات مولکول‌های ئیدروژن

هستند و بنابراین جرمی برابر با دو پروتون یا $۳/۴\times۱۰^{-۲۴}g$ دارند. این ذرات دمایی حدود $۱۰K$ دارند. سرعت فرار از رابطه زیر به دست می‌آید :

$$v_{esc}=\sqrt{\frac{۲GM}{r}}$$
$$v_{esc}=\sqrt{\frac{۲\times۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}m^۳/s^۲/kg\times۱۰^۳\times۲\times۱۰^{۳۰}kg}{۱۰\times۳\times۱۰^{۱۶}m}}$$
$$v_{esc}=۹۴۳\,m/s$$

$\frac{۱}{۶}$ سرعت فرار برابر است با $۱۵۷\,km/s$ میانگین سرعت بیش از $\frac{۱}{۶}$سرعت فرار است در نتیجه این توده در جهت تشکیل ستاره سقوط نمی‌کند.

مسئله ۶۵ : الف) تندی فرار از خورشید برای جسمی واقع در مدار زمین (به شعاع مداری R) ولی دور از زمین چقدر است؟

ب) اگر جسمی قبلا تندی برابر با تندی مداری زمین را داشته باشد، چه مقدار تندی اضافی باید به آن داد تا نظیر مورد الف فرار کند؟

ج) فرض کنید جسمی در جهت حرکت مداری زمین از زمین پرتاب شود. در ضمن پرتاب، چه تندی باید به آن داده شود تا در هنگامی که از زمین دور می‌شود و هنوز در فاصله‌ای تقریبا برابر با R از خورشید قرار دارد، بتواند از خورشید فرار کند؟

حل : الف) چون جسم دور از زمین قرار دارد تحت اثر انرژی پتانسیل گرانشی زمین قرار نمی‌گیرد و داریم :

$$\frac{۱}{۲}mv_e^۲=G\frac{M_sm}{R'}$$
$$R'=R_e$$

که R_e فاصله زمین از خورشید است :

$$v_e=\sqrt{\frac{۲GM_s}{R_e}}=۴۲/۰۶\,km/s$$

ب) اگر پرتابه در همان جهت چرخش زمین نسبت به محورش پرتاب شود رسیدن به تندی بالا ساده‌تر خواهد بود. تندی مداری زمین بر این اساس که در حرکت زمین به

دور خورشید نیروی گرانشی وارد از خورشید بر زمین شتاب مرکزگرای آن را تامین می‌کند، به دست می‌آید :

$$\frac{GM_sM_e}{R_e^۲}=M_e\frac{v^۲}{R_e}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_s}{R_e}}$$

$$\Delta v=v_e-v=\sqrt{\frac{۲GM_s}{R_e}}-\sqrt{\frac{GM_s}{R_e}}=۱۲/۳۲\,km/s$$

ج) حالا جسم در فاصله R از خورشید است. طبق آنچه در قسمت الف گفته شد R دور از زمین بود. یعنی مقدارش زیاد بود. به طوری که ما از انرژی پتانسیل زمین صرف نظر کردیم. ولی اگر R فاصله از خورشید باشد، به زمین نزدیک است. بنابراین این بار باید سهم گرانش زمین را هم در نظر بگیریم. در این حالت تندی مورد نظر برآیند دو سرعت Δv و سرعت فرار از زمین می‌شود.

$$v=\sqrt{\Delta v^۲+\left(\frac{۲GM_e}{R_e}\right)}=۱۶/۶۵\,km/s$$

مسئله ۶۶: با کمک قانون پایستگی اندازه حرکت و پایستگی انرژی، تندی عطارد را در نزدیک‌ترین و دورترین فاصله مدار تا خورشید محاسبه کنید. (جرم عطارد برابر $۳/۳\times۱۰^{۲۳}$ کیلوگرم و نقطه حضیض خورشید $۴۵/۹\times۱۰^۶$ کیلومتر و نقطه اوج خورشید $۶۹/۸\times۱۰^۶$ کیلومتر می‌باشد).

حل : فواصل و تندی‌ها را در نزدیک‌ترین و دورترین فاصله تا خورشید به ترتیب با $r_۱$ و $v_۱$ و $r_۲$ و $v_۲$ نمایش می‌دهیم.

$$v_۱r_۱=v_۲r_۲\Rightarrow v_۲=v_۱\frac{r_۱}{r_۲}$$

همچنین از رابطه پایستگی انرژی خواهیم داشت :

$$\frac{۱}{۲}mv_۱^۲-\frac{GM_sm}{r_۱}=\frac{۱}{۲}mv_۲^۲-\frac{GM_sm}{r_۱}$$

جرم m در این معادلات حذف خواهد شد با جایگذاری رابطه اول در دوم خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}v_۱^۲-\frac{GM_s}{r_۱}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{v_۱r_۱}{r_۲}\right)^۲-\frac{GM_s}{r_۲}$$
$$\Rightarrow v_۱^۲=\frac{۲GM_s(۱/r_۱-۱/r_۲)}{۱-r_۱^۲/r_۲^۲}$$
$$\Rightarrow v_۱^۲=۲GM_s\frac{r_۲}{r_۱(r_۱+r_۲)}$$

پس از جایگذاری خواهیم داشت :

$$v_۱=۵/۹۱\times۱۰^۴\ m/s$$

پس تندی دورترین نقطه مدار چنین است :

$$v_۲=v_۱\frac{r_۱}{r_۲}=۵/۹۱\times۱۰^۴\times\frac{۴۵/۹}{۶۹/۸}=۳/۸۸\times۱۰^۴\ m/s$$

مسئله ۶۷ : یک موشک ۱۰۰ کیلوگرمی به فاصله شعاع زمین R_E از سطح زمین در مداری دایره‌ای قرار گرفته است. سپس موتورها آتش می‌شوند به طوری که موشک به یک مدار دایره‌ای $۱R_E$ بالاتر می‌رسد.

الف) برای رسیدن به مدار جدید، چه مقدار کار لازم است؟

ب) سر چشمه این کار چیست؟

حل : الف) حل این مسئله متضمن استفاده از قضیه کار - انرژی است. چون مدارها نسبت به سطح زمین مشخص شده‌اند، شعاع‌های مداری به ترتیب $۲R_E$ و $۳R_E$ هستند.

$$U_\circ(r)+K_\circ+W_{\text{ناپا}}=U(r)+K$$
$$W_{\text{ناپا}}=\Delta U(r)+\Delta K$$

داریم :

$$U_\circ=-\frac{GM_Em}{۲r_e},\ U=-\frac{GM_Em}{۳R_E}$$
$$K_\circ=\frac{GM_Em}{۲(۲R_E)},\quad K=\frac{GM_Em}{۲(۳R_E)}$$
$$W_{\text{ناپا}}=-\frac{GM_Em}{R_E}\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}\right)+\frac{GM_Em}{۲R_E}\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}\right)$$
$$=\frac{GM_Em}{R_E}\left(\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۲}\right)=\frac{۱}{۱۲}\frac{GM_Em}{R_E}$$

$$W_{\text{ناپا}} = \frac{۱}{۱۲}\frac{۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}N\cdot m^۲/kg^۲\times۵/۹۸\times۱۰^{۲۴}kg\times۱۰۰۰kg}{۶/۴\times۱۰^۶ m}$$

$$W_{\text{ناپا}} = ۵/۲\times۱۰^۸ J$$

مسئله ۶۸ : با استفاده از پایستگی انرژی مکانیکی نشان دهید که اگر جسمی در یک مدار بیضی گرد یک سیاره‌ای باشد، آنگاه فاصله r جسم سیاره و تندی v آن با رابطه زیر داده می‌شود :

$$v^۲ = GM\left(\frac{۲}{r}-\frac{۱}{a}\right)$$

حل :

$$E = K + U$$

مطابق با معادلات قبل داریم :

$$E = -\frac{GMm}{۲a}$$

در نتیجه :

$$-\frac{GMm}{۲a} = \frac{۱}{۲}mv^۲ - \frac{GMm}{r}$$

که در آن r فاصله دلخواه جسم از سیاره‌ای است که در کانون بیضی قرار دارد.

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{۲a}$$

$$\Rightarrow v^۲ = GM\left(\frac{۲}{r}-\frac{۱}{a}\right)$$

مسئله ۶۹ : مدار زمین گرد خورشید تقریبا دایره است. نزدیک‌ترین و دورترین فاصله به ترتیب $۱/۴۷\times۱۰^۸ km$ و $۱/۵۲\times۱۰^۸ km$ است. تغییرات مربوط به

الف) انرژی کل

ب) انرژی پتانسیل

ج) انرژی جنبشی

د) تندی مداری را تعیین کنید.

حل : الف)

$$R_p = ۱/۴۷ \times ۱۰^۸ \, km$$

$$R_a = ۱/۵۲ \times ۱۰^۸ \, km$$

$$R_a + R_p = ۲a \Rightarrow a = \frac{R_a + R_p}{۲} = ۱/۴۹۵ \times ۱۰^{۱۱} m$$

در نتیجه داریم:

$$E = -\frac{GM_sM_e}{۲a} = \frac{-۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} \times ۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۰} \times ۵/۹۸ \times ۱۰^{۲۴}}{۲/۹۹ \times ۱۰^{۱۱}}$$

$$= -۲/۳۵ \times ۱۰^{۳۳} J$$

ب و ج)

پتانسیل گرانشی در اوج $U_a = -\dfrac{GM_sM_e}{R_a}$

$$= \frac{-۶/۶۷ \times ۱۰^{۱۱} \times ۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۰} \times ۵/۹۸ \times ۱۰^{۲۴}}{۱/۵۲ \times ۱۰^{۱۱}}$$

$$= -۵/۲۲ \times ۱۰^{۳۳} J$$

انرژی جنبشی در اوج $K_a = E - U_a = -۲/۶۵ \times ۱۰^{۳۳} + ۵/۲۲ \times ۱۰^{۳۳}$

$$= ۲/۵۷ \times ۱۰^{۳۳} J$$

پتانسیل گرانشی در اوج $U_p = -\dfrac{GM_sM_a}{R_p}$

$$= \frac{-۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} \times ۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۰} \times ۵/۹۸ \times ۱۰^{۲۴}}{۱/۴۷ \times ۱۰^{۱۱}}$$

$$= -۵/۳۹ \times ۱۰^{۳۳} J$$

انرژی جنبشی در حضیض $K_a = E - U_p$

$$= -۲/۶۵ \times ۱۰^{۳۳} + ۵/۳۹ \times ۱۰^{۳۳} = ۲/۷۵ \times ۱۰^{۳۳} J$$

توجه شود که انرژی‌های پتانسیل و جنبشی در کل مسیر مدام تغییر می‌کنند ولی انرژی کل ثابت باقی می‌ماند. می‌توان انرژی جنبشی را به صورت تابعی از r چنین نشان داد:

$$K = \frac{۱}{۲} M_e v^۲ = \frac{۱}{۲} G M_e M_s \left(\frac{۲}{r} - \frac{۱}{a} \right)$$

د) با توجه به داده‌های مسئله می‌توان سرعت مداری را در دو نقطه حضیض و اوج به دست آورد. از پایستگی انرژی مکانیکی و اندازه حرکت زاویه‌ای داریم:

$$M_e R_p v_p = M_e R_a v_a$$

$$\Rightarrow v_p = \frac{R_a v_a}{R_p}$$

$$\frac{۱}{۲} M_e v_p^۲ - \frac{G M_s M_e}{R_p} = \frac{۱}{۲} M_e v_a^۲ - \frac{G M_s M_e}{R_a}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \frac{R_a^۲ v_a^۲}{R_p^۲} - G \frac{M_s}{R_p} = \frac{۱}{۲} v_a^۲ \frac{G M_s}{R_a}$$

$$\frac{v_a^۲}{۲} \left(\frac{R_a^۲}{R_p^۲} - ۱ \right) = G M_s \left(\frac{۱}{R_p} - \frac{۱}{R_a} \right)$$

$$\frac{v_a^۲}{۲} \left(\frac{R_a^۲ - R_p^۲}{R_p^۲} \right) = G M_s \left(\frac{R_a - R_p}{R_p R_a} \right)$$

$$\frac{v_a^۲}{۲} \left(R_a + R_p \right) = G \frac{M_s}{R_a} \Rightarrow v_a = \sqrt{\frac{۲ G M_s R_p}{R_a \left(R_a + R_p \right)}}$$

$$v_a = \sqrt{\frac{۲ \times ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} \times ۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۰} \times ۱/۴۷ \times ۱۰^{۱۱}}{۱/۵۲ \times ۱۰^{۱۱} \left(۱/۵۲ + ۱/۴۷ \right) ۱۰^{۱۱}}}$$

$$= ۲/۹۳ \times ۱۰^۴ \; m/s$$

در حالت کلی سرعت در هر نقطه مدار چنین است:

$$v_p = \frac{R_a v_a}{R_p} = ۳ \times ۱۰^۴ \; m/s$$

مسئله ۷۰ : در مسافرت‌های میان ستاره‌ای، یک سفینه فضایی باید بتواند بر میدان گرانشی خورشید و میدان گرانشی زمین غلبه کند. مقدار کل انرژی لازم برای اینکه یک سفینه فضایی ۱×۱۰^۶ کیلوگرمی واقع بر مداری به فاصله ۴۸۰ کیلومتر از سطح زمین بتواند از قید گرانش زمین و خورشید رهایی یابد، چقدر است؟ چه کسری از این انرژی برای غلبه بر میدان گرانشی خورشید صرف می‌شود؟

حل : اگر $d = R_e + h$ فاصله سفینه فضایی از مرکز زمین و D فاصله بین خورشید و زمین باشد، در این صورت :

$$K = G \frac{M_s M}{D} + G \frac{M_e M}{d}$$

نیروی گرانشی وارد از زمین بر سفینه شتاب مرکزگرای لازم برای حرکت دورانی سفینه با سرعت v حول زمین را فراهم می‌آورد :

$$G\frac{M_e M}{d^۲}=\frac{Mv^۲}{d}$$

انرژی جنبشی سفینه حول زمین نیز برابر است با :

$$\frac{۱}{۲}Mv^۲=\frac{GM_e M}{۲d}$$

به همین ترتیب انرژی جنبشی سفینه در اثر حرکت زمین حول خورشید چنین است :

$$GM_s M/۲D$$

در نتیجه انرژی موجود سفینه برابر است :

$$K'=\frac{GM}{۲}\left(\frac{M_s}{D}+\frac{M_e}{d}\right)$$

انرژی لازم برای فرار سفینه از قید میدان‌های گرانشی مورد نظر چنین است :

$$K''=K-K'=GM\left(\frac{M_s}{D}+\frac{M_e}{d}\right)-\frac{Gm}{۲}\left(\frac{M_s}{D}+\frac{M_e}{d}\right)$$

$$\Rightarrow K''=\frac{GM}{۲}\left(\frac{M_s}{D}+\frac{M_e}{d}\right)\Rightarrow$$

$$K''=\frac{۶/۶۷۲\times ۱۰^{-۱۱}\times ۱\times ۱۰^۶}{۲}\left(\frac{۲\times ۱۰^{۳۰}}{۱/۵\times ۱۰^{۱۱}}+\frac{۶\times ۱۰^{۲۴}}{۶/۸۸\times ۱۰^۶}\right)=۴/۷۴۷\times ۱۰^{۱۴}\ j$$

ب) کسر مورد نظر برابر است با :

$$\frac{\frac{GM}{۲}\left(\frac{M_e}{D}\right)}{K''}=\frac{۴/۴۴۷\times ۱۰^{۱۴}}{۴/۷۳۷\times ۱۰^{۱۴}}=۹۴\%$$

مسئله ۷۱ : دو ستاره یکسان هر یک به جرم M به دور مرکز جرم مشترکشان می‌چرخند. شعاع هر مدار R است لذا دو ستاره همواره در دو طرف متقابل روی دایره هستند.

الف) نیروی گرانش وارد از یک ستاره بر ستاره دیگر چقدر است؟
ب) تندی مداری و دوره گردش هر یک از ستاره‌ها چقدر است؟
ج) حداقل انرژی لازم برای جدا کردن آنها از یکدیگر تا فاصله بی‌نهایت را حساب کنید.
الف) فاصله دو ستاره از یکدیگر $2R$ است بنابراین :

$$F_g = G\frac{M^2}{(2R)} = \frac{GM^2}{4R^2}$$

ب)

$$F_g = ma$$

$$\frac{GM^2}{4R^2} = M\frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{4R}}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R\sqrt{\frac{4R}{GM}} = 4\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

ج) اگر دو ستاره بی‌نهایت از یکدیگر دور باشند $U_2 = 0, K_2 = 0$

$$K_1 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = 2\left(\frac{1}{2}M\right)\left(\frac{GM}{4R}\right) = \frac{1}{4}\frac{GM^2}{R}$$

$$U_1 = -G\frac{M^2}{2R}$$

$$K_1 + U_1 + W = K_2 + U_2 \Rightarrow W = -(K_1 + U_1) = -\left(\frac{GM^2}{4R} - \frac{GM^2}{2R}\right) = \frac{1}{4}\frac{GM^2}{R}$$

مسئله ۷۲ : حداکثر دمای تابش جسم سیاه را از سیاهچاله ۱۰۰ برابر جرم شمسی که در درخشندگی ادینگتون در حال پرتوافکنی است را محاسبه کنید.
حل : شعاع شوارتزشیلد سیاهچاله ۱۰۰ برابر جرم شمسی برابر است با :

$$R = 100 \times 2/9\,km = 300\,km$$

درخشندگی سیاهچاله ۱۰۰ برابر جرم شمسی که در درخشندگی ادینگتون در حال پرتوافکنی است برابر است با :

$$L = 100 \times 30000 L_{\odot} = 1/1 \times 10^{33} W$$

قانون استفان - بولتزمن برای شی کروی با شعاع R، درخشندگی L و دمای T برابر است با :

$$L = ۴\pi R^۲ \sigma T^۴$$

این رابطه را برای T حل می‌کنیم :

$$T = \left(\frac{L}{۴\pi\sigma R^۲}\right)^{۱/۴}$$

$$= \left(\frac{۱/۱\times ۱۰^{۳۳} W}{۴\pi\left(۵/۶۷\times ۱۰^{-۸} W m^{-۲} K^{-۴}\right)\left(۳\times ۱۰^{۵} m\right)^۲}\right)^{۱/۴} = ۱/۱\times ۱۰^{۷} K$$

دما در حدود ۱۱ میلیون درجه کلوین است. سیاهچاله ۱۰۰ برابر جرم شمسی تا حدی سردتر از سیاهچاله یک جرم شمسی است.

مسئله ۷۳ : الف) یک سیاهچاله با جرم $۱۰M_\odot$ را در نظر بگیرید. شعاع شوارتزشیلد آن (بر حسب واحد کیلومتر) چقدر است؟

ب) شعاع شوارتزشیلد سیاهچاله با جرم $۱۰^{۱۵}\ gm$ چقدر است؟

ج) شعاع شوارتزشیلد سیاهچاله با جرم $۱۰^{۹}M_\odot$ (بر حسب واحد نجومی) چقدر است؟

شعاع شوارتزشیلد برابر است با $R_S = \dfrac{۲GM}{c^۲}$ توجه داشته باشید که نتیجه مفید برای به خاطر سپاری $R_S \approx ۳\left(M/M_\odot\right) km$ است.

حل : الف) برای

$$M = ۱۰ M_\odot$$

$$R_S = \frac{۲\times ۶/۶۷\times ۱۰^{-۸}\times ۱۰\times ۱/۹۹\times ۱۰^{۳۳}}{\left(۳\times ۱۰^{۱۰}\right)^۲}$$

$$= ۲/۹۵\times ۱۰^{۶}\ cm \Rightarrow R_S = ۳۰ km$$

در حدود اندازه شهر اصلی است.

ب) برای $M = ۱۰^{۵} g$ شعاع برابر است با :

$$R_S = \frac{۲\times ۶/۶۷\times ۱۰^{-۸}\times ۱۰^{۱۵}}{\left(۳\times ۱۰^{۱۰}\right)^۲} = ۱/۵\times ۱۰^{-۱۳}\ cm$$

که در حدود اندازه یک هسته است.

ج) برای $M = ۱۰^{۹} M_\odot$ نتیجه بدیهی :

$$R_S = ۲/۹۵\times ۱۰^{۱۴}\, cm \Rightarrow R_S = ۳\times ۱۰^{۱۴}/۱/۵\times ۱۰^{۱۳} = ۲۰\, AU$$

یا در حدود اندازه منظومه شمسی است.

مسئله ۷۴ : یک سیاهچاله با جرم $۱۰M_\odot$ مقدار $۱۰^{-۷}M_\odot$ ماده در هر سال می‌افزاید.
الف) شعاع شوارتزشیلد $۲GM/c^۲$ سیاهچاله چقدر است؟
ب) با این فرض که ماده از بی‌نهایت سقوط می‌کند مقدار انرژی پتانسیل آزاد شده پیش از اینکه مواد افزوده شده به شعاع شوارتزشیلد برسند را محاسبه کنید و این را با درخشندگی خورشید مقایسه کنید.
حل : الف) با جایگذاری اعداد در رابطه :

$$r_s = ۳km\left(\frac{M}{M_\odot}\right)$$

شعاع شوارتزشیلد $۳۰km$ به دست می‌آید.
ب) چون انرژی پتانسیل در بی‌نهایت برابر صفر است با انرژی جرم ذره m که توسط سقوط از بی‌نهایت به شعاع r_s آزاد می‌شود توسط رابطه زیر داده می‌شود :

$$E = E_\infty - E(r_s) = ۰ - \left(-\frac{GMm}{r_s}\right) = \frac{GMm}{r_s}$$

انرژی آزاد شده در ثانیه (درخشندگی) توسط رابطه زیر داده می‌شود :

$$L = \frac{E}{T} = \frac{GMm}{r_s T}$$

در جایی که :

$$T = ۱\,\text{سال} = ۳۶۵/۲۵\times ۸۶۴۰۰s = ۳/۱۶\times ۱۰^{۷}s$$

و

$$\frac{m}{T} = \frac{۱۰^{-۷}M_\odot}{T} = ۶/۳\times ۱۰^{۱۵}kgs^{-۱}$$

با جایگذاری اعداد، درخشندگی به صورت زیر به دست می‌آید :

$$L = ۲/۸\times ۱۰^{۳۲}Js^{-۱} = ۷\times ۱۰^{۵}L_\odot$$

که بسیار بزرگ‌تر از خورشید است.

مسئله ۷۵ : یک ستاره کوتوله سفید معین دارای دمای سطح ۱۰۰۰۰ درجه کلوینی است و شعاعش برابر است با شعاع زمین. درخشندگی کوتوله سفید بر حسب واحد درخشندگی شمسی چقدر است؟

حل : ممکن است فکر کنید که به ثابت استفان - بولتزمن به منظور حل این مسئله نیاز داریم. ولی حل کردن آن درست توسط مقایسه کوتوله سفید با خورشید نیز ممکن است. شما برای حل به شعاع زمین و خورشید همانند دمای خورشید نیاز خواهید داشت.

$$L_{WD} = \left(\sigma T_{WD}^4\right)\left(4\pi R_E^2\right)$$
$$L_\odot = \left(\sigma T_\odot^4\right)\left(4\pi R_\odot^2\right)$$

نسبت را می‌خواهیم :

$$\frac{L_{WD}}{L_\odot} = \frac{\left(\sigma T_{WD}^4\right)\left(4\pi R_E^2\right)}{\left(\sigma T_\odot^4\right)\left(4\pi R_E^2\right)}$$
$$\frac{L_{WD}}{L_\odot} = \left(\frac{T_{WD}}{T_\odot}\right)^4\left(\frac{R_E}{R_\odot}\right)^2$$

برخی از اطلاعات مورد نیاز چنین است :

$$T_\odot = 5780\,K$$
$$R_E = 6/4\times10^6\,m$$
$$R_\odot = 7\times10^8\,m$$

با جایگذاری این اعداد داریم :

$$\frac{L_{WD}}{L_\odot} = \left(\frac{10000}{5780}\right)^4\left(\frac{6/4\times10^6}{7\times10^8}\right)^8$$

همه واحدها به طور مناسب حذف شدند :

$$\frac{L_{WD}}{L_\odot} = 7/5\times10^{-4}$$

اگرچه این بیشتر گرم است، ولی این بسیار کوچک‌تر از خورشید است، کوتوله سفید ما را بسیار درخشنده نمی‌سازد.

مثال ۷۶ : ستاره‌ای را در آسمان مشاهده می‌کنید که طیفش نشان می‌دهد درست مانند شعرای یمانی است. شعرای یمانی ۲۵ برابر روشن‌تر از این ستاره دیگر است. شعرای یمانی دارای اختلاف منظر ″۰/۳۸ است.

الف) شعرای یمانی در چه فاصله‌ای قرار دارد؟

ب) ستاره دیگر در چه فاصله‌ای قرار دارد؟

ج) یک سفینه فضایی که اختلاف منظر ستاره دیگر را ″۰/۰۰۸ اندازه می‌گیرد پرتاب می‌شود. آیا این اندازه‌گیری با تخمین قبلی شما مطابق است؟ اگر چنین است. توضیح دهید چرا؟

حل : الف)

$$\frac{d}{۱pc}=\frac{۱''}{p}$$

$$d=\frac{۱}{۰/۳۸}pc$$

$$d=۲/۶۳\,pc$$

ب) زمانی که فرد به سوی فاصله مربع شده می‌رود روشنایی افزایش می‌یابد، بنابراین اگر ستاره دیگر ۲۵ برابر تیره‌تر باشد، باید $\sqrt{۲۵}=۵$ برابر دورتر باشد :

$$d_{\text{ستاره دیگر}}=(۵)(۲/۶۳\,pc)=۱۳/۲\,pc$$

ج) برای ستاره‌ای در $۱۳/۲pc$ انتظار خواهید داشت ستاره را اندازه بگیرید.

$$\frac{p}{۱''}=\frac{۱pc}{d}$$

$$p=\frac{۱''}{۱۳/۲}-۰/۰۷۶$$

در واقع اختلاف منظری را اندازه می‌گیریم که بسیار کوچک‌تر از آن است که به این ستاره بسیار (در حدود ده برابر) دورتر از آن مقداری که فکر می‌کردیم از روشنایی‌اش دور بوده است. این ستاره باید در کل بسیار درخشنده‌تر از شعرای یمانی باشد چرا که احتمالا از نظر شعاع بزرگ‌تر است. اگر شما بپذیرید که ستاره و شعرای یمانی در واقع از نظر طیف دقیقا یکسان هستند در نتیجه باید غباری بین ما و شعرای یمانی باشد که باعث تیره‌تر ساختن شعرای یمانی نسبت به آنچه که باید باشد شده است.

مسئله ۷۷ : سحابی حلقه‌ای، یک سحابی سیاره‌ای با قطر زاویه‌ای ۱/۴ دقیقه قوس است. گاز در این سحابی لایه شکل کروی در سرعت $۲۰ km/s$ گسترش می‌یابد. سحابی در فاصله $۲۷۰۰ ly$ از زمین فاصله دارد.

الف) تقریبا چه مدت قبل ستاره مرکزی لایه‌های خارجی‌اش را خرد کرده است؟ (ممکن است تصور کنید که گاز با سرعت ثابت در حال حرکت است. همچنین ممکن است از اندازه ستاره اولیه چشم پوشی کنید و فرض کنید که همه گاز از مرکز خارج شده است؟

ب) فرض کنید که زمانی که سحابی سیاره‌ای دارای شعاع $۱۰ ly$ است، به اندازه کافی بزرگ است که چگالی گاز در همان حدود چگالی گاز واسطه بین ستاره‌ای اطراف است و پس از این نقطه، سحابی وجود نخواهد داشت. چه مدت پس از تولید سحابی سیاره‌ای این روی خواهد داد؟

حل : الف) گاز در سحابی مدت t طول کشیده است تا از مرکز سحابی به خارج از شعاع خارجی سحابی R برود.

$$R=\frac{۱/۴'}{۲}\times\frac{۱^\circ}{۶۰'}\times\frac{۲\pi\, rad}{۳۶۰^\circ}\times ۲۷۰۰ ly=۰/۵۵ ly$$
$$=۰/۵۵ ly\times ۹/۴۶\times ۱۰^{۱۲}\, km/ly=۵/۲\times ۱۰^{۱۲}\, km$$

وقتی که سرعت ثابت است، $v=R/t$ و $t=R/v$ زمانی که برای سحابی طول می‌کشد تا این فاصله را گسترش دهد برابر است با :

$$t=\frac{۵/۲\times ۱۰^{۱۲}\, km}{۲۰ km/s}=۲/۶\times ۱۰^{۱۱} s$$
$$=۲/۶\times ۱۰^{۱۱} s\times\frac{۱\, year}{۳/۱۴\times ۱۰^{۷} s}=۸/۳\times ۱۰^{۳}\ \text{سال}$$

ستاره مرکزی لایه‌های خارجی‌اش را در حدود ۸ هزار سال قبل خرد شده است.

ب)

$$t=\frac{۱۰ ly}{۲۰ km/s}\times\frac{۹/۴۶\times ۱۰^{۱۲}\, km}{ly}=۴/۷۳\times ۱۰^{۱۲} s$$
$$=۴/۷۳\times ۱۰^{۱۲} s\times\frac{۱\, year}{۳/۱۵\times ۱۰^{۷} s}=۱/۵\times ۱۰^{۵}\ \text{سال}$$

مسئله ۷۸ : یک ستاره شناس دو ستاره زرد رنگ را که اعتقاد دارد دارای روشنایی‌های یکسان هستند، آشکار می‌کند. ستاره A دارای اختلاف منظر اندازه‌گیری شده "۰/۱۲۵ است. ستاره B، ۴۰۰ برابر تیره‌تر از ستاره A آشکار می‌شود. فاصله تا ستاره B چقدر است؟

حل : با اطلاعات داشته خود شروع می‌کنیم :

$$F_A = ۴۰۰ F_B$$
$$L_A = L_B$$
$$F_A = \frac{L_A}{۴\pi d_A^۲}$$
$$F_B = \frac{L_B}{۴\pi d_B^۲}$$

همچنین اختلاف منظر ستاره A را می‌دانیم و می‌توانیم از این برای محاسبه فاصله تا ستاره A استفاده کنیم :

$$d_A = \frac{۱}{p} = \frac{۱}{۰/۱۲۵} pc = ۸\, pc$$

(این فاصله را بر حسب پارسک می‌دهد زیرا اختلاف منظر در ثانیه قوس بود همان گونه که $d = ۱/p$ مورد نیاز است) چیزی که می‌خواهیم d_B است. دوباره با جایگذاری معادلات سوم و چهارم بالا در معادله اول شروع می‌کنیم.

$$\frac{L_A}{۴pi\, d_A^۲} = ۴۰۰ \frac{L_B}{۴\pi d_B^۲}$$

این را برای d_B حل می‌کنیم :

$$d_B^۲ = ۴۰۰ \frac{L_B}{L_A} d_A^۲$$

چون $L_B = L_A$ کسری که در وسط است از بین می‌رود :

$$d_B^۲ = ۴۰۰ d_A^۲$$
$$d_B = ۲۰ d_A$$
$$d_B = ۱۶۰\, pc$$

مسئله ۷۹ : شعرای یمانی روشن‌ترین ستاره در آسمان دارای اختلاف منظر ۰/۳۷۹ ثانیه قوس است. فاصله‌اش بر حسب پارسک چقدر است؟ بر حسب سال نوری چه فاصله‌ای

دارد؟ شعرای یمانی ۲۲ برابر درخشنده‌تر از خورشید است. و ستاره قطبی ۲۳۵۰ برابر درخشنده‌تر از خورشید است. شعرای یمانی ۲۳ برابر روشن‌تر از ستاره قطبی به نظر می‌رسد. فاصله ستاره قطبی بر حسب سال نوری چقدر است؟

حل : در ابتدا فاصله تا شعرای یمانی را بررسی می‌کنیم. می‌دانیم $d = ۱/p$ است که p اختلاف منظر بر حسب ثانیه قوس و d فاصله بر حسب سال است.

$$d = \frac{۱}{p} = \frac{۱}{۰/۳۷۹} = ۲/۶۴ pc$$

با دانستن اینکه $۱pc = ۳/۲۶ly$ این به اندازه کافی آسان است تا آن را تبدیل کنیم.

$$۲/۶۴\, pc\left(\frac{۳/۲۶ ly}{۱ pc}\right) = ۸/۶ ly$$

با یادآوری اینکه چقدر روشن است مانند شار می‌باشد جای برای شروع آن این است :

$$F = \frac{L}{۴\pi d^۲}$$

که F شار، L درخشندگی و d فاصله است. در اینجا دو مقدار F و L را می‌دانیم و سعی می‌کنیم d را محاسبه کنیم. ولی نمی‌توانیم آنها را مستقیما جایگذاری کنیم. می‌توانیم درخشندگی خورشید را بیابیم و L را برای ستاره قطبی محاسبه کنیم. ولی عددی برای F در هیچ جا داده نشده است فقط رابطه بین شعرای یمانی و ستاره قطبی. لذا آنچه که می‌دانیم برابر است با (اندیس S برای شعرای یمانی و P برای ستاره قطبی)

$$L_S = ۲۲ L_\odot$$
$$L_P = ۲۳۵۰ L_\odot$$
$$F_S = ۲۳ F_P$$
$$d_S = ۸/۶ ly$$

معادله شار - درخشندگی - فاصله را باید برای هر ستاره به کار برد.

$$F_S = \frac{L_S}{۴\pi d_S^۲}$$
$$F_P = \frac{L_P}{۴\pi d_P^۲}$$

می‌توانیم دو معادله را بر یکدیگر تقسیم کنیم که به ما نسبت‌های چیزهایی را می‌دهد که بر حسب یکدیگر می‌دانیم. یا اینکه می‌توانیم با $F_S = ۲۳F_P$ شروع کنیم و برای F_S و F_P جایگذاری کنیم :

$$\frac{L_S}{۴\pi d_S^۲} = ۲۳\frac{L_P}{۴\pi d_P^۲}$$

برای L_S و L_P جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{۲۲L_\odot}{۴\pi d_S^۲} = ۲۳\frac{۲۳۵۰L_\odot}{۴\pi d_P^۲}$$

اکنون $L_\odot$ در دو طرف به ما داده شده است، می‌توانیم به آن تقسیم کنیم. به همین ترتیب دو طرف را در ۴π ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۲۲}{d_S^۲} = \frac{۵۴۵۰۰}{d_P^۲}$$

که ۵۴۵۰۰ از ضرب ۲۳ در ۲۳۵۰ به دست می‌آید. اکنون معادله‌ای با یک مجهول به دست می‌آوریم.

$$d_P = \sqrt{۵۴۵۰۰\frac{d_S^۲}{۲۲}} = ۵۰d_S$$

$$d_P = ۴۳۰ly$$

مسئله ۸۰ : دورترین کهکشان‌ها در جهان فقط در حدود $۰/۲''$ در طول آسمان هستند.
الف) اگر ما در حال مشاهده این کهکشان‌ها با نور مرئی که دارای طول موج $۵۰۰nm$ است، باشیم یک تلسکوپ فضایی (بر حسب واحد متر) چقدر بزرگ باید ساخته شود تا چنین کهکشانی را تفکیک کند و بگویید چه شکلی است؟
ب) اگر بخواهیم چنین کهکشان‌هایی را در مادون قرمز به جای نور مرئی مشاهده کنیم قطر تلسکوپ مورد نیاز برای تفکیک پذیری لازم چقدر است؟
حل : الف) برای ساخت تلسکوپ فضایی به طور صحیح، تفکیک پذیری توسط فرمول پراش داده خواهد شد:

$$\theta = \frac{۳۶۰^\circ}{۲\pi}\frac{\lambda}{D} = ۲۰۵۶۲۵''\frac{\lambda}{D}$$

اگر بخواهیم جزئیات کهکشان، از قبیل شکل آن را ببینیم تفکیک پذیری باید کوچک‌تر از اندازه کهکشان باشد یا:

$$\theta \leq ۰/۲'' \Rightarrow D \geq \lambda \frac{۲۰۵۶۲۵''}{۰/۲''} = ۰/۵۱m$$

ب) اگر سعی کنیم همان تلسکوپ را در مادون قرمز که طول موج طولانی‌تری از نور مرئی مشاهده کنیم، فرمول پراش می‌گوید که زاویه تفکیک‌پذیری بزرگ‌تر خواهد بود که بدتر است و بنابراین تلسکوپ دیگر قادر به اندازه‌گیری شکل‌های کهکشان‌ها نخواهد بود. تلسکوپ بزرگ‌تری مورد نیاز است.

مسئله ۸۱ : الف) یک خط از $۵۰۰nm$ از یک ستاره منتشر می‌شود به سمت شما در $۱۰۰kms^{-۱}$ حرکت می‌کند. طول موج مشاهده شده چقدر است؟

ب) یک خط از کلسیم در $\lambda = ۳۹۷nm$ خارج شده به وسیله یک کهکشان به $۶۰۰۰۰kms^{-۱}$ می‌رسد. طول موج موج دریافت شده چقدر است؟

حل : الف) انتقال دوپلر برای $v << c$ به شکل زیر است:

$$\frac{\lambda - \lambda_۰}{\lambda_۰} = \frac{v}{c}$$

در نتیجه طول موج مشاهده شده چنین است:

$$\lambda = \lambda_۰ \left(۱ + \frac{v}{c}\right)$$

وقتی که $v > ۰$ به این معنی است که شی خارج شده در حال دور شدن از ما است و $c = ۳۰۰۰۰۰kms^{-۱}$ برای ستاره‌ای که به سمت ما حرکت می‌کنند $v = -۱۰۰kms^{-۱}$ پس:

$$\lambda = ۴۹۹/۸۳۳nm$$

ب) با توجه به رابطه بالا داریم $\lambda = ۶۰۰nm$ است اما باید توجه داشت که سرعت یعنی $۶۰۰۰۰kms^{-۱}$ به حد کافی نزدیک به c است که در عوض می‌بایست از رابطه نسبیتی استفاده کنیم:

$$\lambda = \lambda_۰ \sqrt{\frac{۱ + v/c}{۱ - v/c}}$$

که نتیجه می‌دهد $\lambda = ۴۸۶nm$

مسئله ۸۲ : کوازاری دارای انتقال سرخ $z=۵/۸$ است. در چه سرعتی این کوازار در حال پسروی از ماست؟ نتیجه را به صورت تابعی از سرعت نور بدهید.

حل : انتقال سرخ از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$z=\frac{\lambda-\lambda_{\circ}}{\lambda_{\circ}}$$

که λ طول موج مشاهده شده طیفی، $\lambda_{\circ}$ طول موج طبیعی خط طیفی است، تعریف می‌شود. فرمول غیر نسبیتی که سرعت را به انتقال سرخ ربط می‌دهد چنین است:

$$z=\frac{v}{c}$$

در نتیجه سرعت برابر خواهد بود با:

$$v=zc=۵/۸c$$

این امر ممکن نیست زیرا هیچ شی نمی‌تواند از سرعت نور بر اساس تئوری نسبیت خاص، تجاوز کند. زمانی که z نزدیک به ۱ یا بزرگ‌تر از ۱ است فرمول غیر نسبیتی معتبر نیست. فرمول نسبیتی چنین خواهد بود:

$$z=\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}-۱$$

یا به عبارتی سرعت برابر است:

$$\frac{v}{c}=\frac{(z+۱)^{۲}-۱}{(z+۱)^{۲}+۱}=\frac{(۵/۸+۱)^{۲}-۱}{(۵/۸+۱)^{۲}+۱}=۰/۹۵۸$$

کوازار در حال پسروی از ما در سرعت $۰/۹۵۸c$ بسیار نزدیک به سرعت نور است.

مسئله ۸۳ : یک ابر گاز در فاصله $۲۰۰۰۰pc$ از مرکز کهکشان مارپیچی دور در حال چرخش واقع شده است. اگر جرم کهکشان در طول فاصله $۲۰۰۰۰pc$ از مرکز $۷/۴۴\times۱۰^{۱۱}$ جرم خورشیدی باشد.

الف) سرعت مداری ابر گازی به دور مرکز کهکشان چقدر است؟

ب) طول موج مشاهده شده خط طیفی HI انتقال دوپلری یافته شده در مرکز ابر گازی چقدر است. اگر ابر در حال حرکت در خلاف جهت ما و یا به سمت ما باشد؟ (طول موج سکون خط HI برابر $۲۱/۱۲cm$ است.)

$r = ۲۰۰۰۰ pc, \quad M_G = ۷/۴۴ \times ۱۰^{۱۱} M_\odot$

$v = ? \quad G = ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} Nm^۲ kg^{-۲}$

حل : الف) سرعت مداری در حدود جرم کهکشانی M_G برابر است:

$$v = \sqrt{\frac{GM_G}{r}}$$

برای استفاده از این فرمول همه کمیت‌ها باید در واحدهای یکسانی مانند G باشند، G بر حسب واحد s, kg, m است. باید کمیت‌ها را به کمیت‌های s, kg, m تغییر دهیم.

$$r = ۲۰۰۰۰ pc = ۲۰۰۰۰ pc \times \frac{۳/۰۸۵۷ \times ۱۰^{۱۶} m}{۱ pc} = ۶/۱۷ \times ۱۰^{۲۰} m$$

$$M_G = ۷/۴۴ \times ۱۰^{۱۱} M_\odot = ۷/۴۴ \times ۱۰^{۱۱} M_\odot \times \frac{۲ \times ۱۰^{۳۰} kg}{۱ M_\odot} = ۱/۴۹ \times ۱۰^{۴۲} kg$$

$$G = ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} Nm^۲ kg^{-۲}$$

اعداد را در رابطه قرار می‌دهیم تا سرعت به دست آید.

$$v = \sqrt{\frac{۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} \left(m^۳ kg^{-۱} s^{-۲}\right) \times ۱/۴۹ \times ۱۰^{۴۲} kg}{۶/۱۷ \times ۱۰^{۲۰} m}}$$

$$v = ۴۰۱۳۴۰ ms^{-۱} \approx ۴۰۰۰۰۰ ms^{-۱} = ۴ \times ۱۰^{۵} ms^{-۱} = ۴۰۰ km/s$$

ب) اگر ابر در سکون می‌بود پس $\lambda_\circ = ۲۱/۱۲ cm$

پدیده دوپلر توسط رابطه زیر به سرعت مربوط می‌شود.

$$\frac{\lambda - \lambda_\circ}{\lambda_\circ} = \frac{v}{c} \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda_\circ} = \frac{v}{c} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{v\lambda_\circ}{c}$$

اعداد را در رابطه فوق قرار می‌دهیم:

$$\Delta\lambda = \frac{۴ \times ۱۰^{۵} ms^{-۱} \times ۲۱/۱۲ cm}{۳ \times ۱۰^{۸} ms^{-۱}} = ۰/۰۲۸۱۶ cm$$

در زمانی که ابر در خلاف جهت ما حرکت می‌کند، طولانی‌تر از طول موج سکون ظاهر خواهد شد. پیش بینی می‌کنیم که $\lambda > \lambda_\circ$

$$\lambda = \lambda_\circ + \Delta\lambda = ۲۱/۱۲ cm + ۰/۰۲۸۱۶ cm = ۲۱/۱۵ cm$$

در زمانی که ابر به سمت ما حرکت می‌کند طول موج کوتاه‌تر از طول موج سکون به نظر خواهد رسید. پیش بینی می‌کنیم که $\lambda < \lambda_{\circ}$

$$\lambda = \lambda_{\circ} - \Delta\lambda = ۲۱/۱۲cm - ۰/۰۲۸۱۶cm = ۲۱/۰۹cm$$

در اینجا دقت باید حداقل تا ۴ رقم بامعنی باشد یعنی به اندازه دقت طول موج سکون

مسئله ۸۴ : خط $۶۵۶۳\mathring{A}$ هیدروژن از کهکشان آندرومدا در $۶۵۵۶\mathring{A}$ مشاهده می‌شود.
الف) آیا کهکشان آندرومدا در حال حرکت به سمت ما یا دور شدن از ما (خلاف جهت ما) است؟
ب) با چه سرعتی کهکشان آندرومدا در حال حرکت درطول خط دید است؟
ج) اگر کهکشان‌های راه شیری و آندرومدا ۲/۶ میلیون سال نوری از هم فاصله داشته باشند و شما فرض کنید که هیچ سرعت مماسی (سرعت عمود بر خط دید)، پیش از اینکه دو کهکشان با هم برخورد کنند یا تا زمانی که فاصلهٔ بین آنها دو برابر شود چقدر خواهد بود؟ (نشان دهید که کدام روی خواهد داد)
حل : الف) این کهکشان در حال حرکت به سمت شماست. این خط را در طول موج پایین‌تر، که نور آبی‌تر است، مشاهده می‌کنید. انتقال آبی در زمانی روی می‌دهد که چیزی در حال نزدیک شدن به سمت شماست.
ب)

$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda_{\text{مشاهده شده}} - \lambda_{\circ}}{\lambda_{\circ}}$$

$$v = \left(\frac{۶۵۵۶\mathring{A} - ۶۵۶۳\mathring{A}}{۶۵۶۳\mathring{A}}\right)(۳/۰۰\times۱۰^{۸} m/s)$$

$$v = (-۰/۰۰۱)(۳\times۱۰^{۵} km/s)$$

$$v = ۳۰۰ km/s \text{ به سمت ما}$$

ج) فاصلهٔ بین دو کهکشان در حدود ۲/۶ میلیون سال نوری است. می‌توانید به آن در $۱lyr = ۹/۵\times۱۰^{۱۲} km$ نگاه کنید. پس:

$$d = vt$$

$$t = \frac{d}{v}$$

$$t = \frac{(۲/۶\times ۱۰^{۶}\,lyr)(۹/۵\times ۱۰^{۱۲}\,kmlyr^{-۱})}{۳۰۰\,kms^{-۱}}$$

$$t = (۸/۲۳\times ۱۰^{۱۶}\,s)\left(\frac{۱yr}{۳/۱۶\times ۱۰^{۷}\,s}\right)$$

$$t = ۲/۶\times ۱۰^{۹}\,yr$$

بنابراین اگر آنها مستقیم به سمت یکدیگر در ۲/۶ میلیارد سال حرکت کنند، کهکشان‌ها برخورد خواهند کرد.

مسئله ۸۵ : مشاهده یک ستاره نشان می‌دهد که خطوط ئیدروژن از $۴۸۶/۱\times ۱۰^{-۹}m$ به $۴۸۵/۷\times ۱۰^{-۹}m$ تغییر می‌کند آیا این ستاره در حال نزدیک شدن است یا درو شدن؟ با چه سرعتی؟ به این جهت که خطوط ستاره‌ای طوری تغییر می‌کند که طول موجشان کمتر از خطوط مرجع است در نتیجه آبی‌تر از آنچه که باید باشند، هستند. به این معنا که ستاره در حال نزدیک شدن است. برای محاسبه سرعت می‌توان از فرمول دوپلر استفاده کرد.

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\circ}} \Rightarrow v = \frac{۰/۴\times ۱۰^{-۹}}{۴۸۶/۱\times ۱۰^{-۹}}\times ۳\times ۱۰^{۸}\,m/s$$

$$v = ۲۴۷۰۰۰\,m/s \Rightarrow v = ۲۴۷\,m/s$$

الف) اتم‌های یونیزه شده اکسیژن نور سبزی با طول موج $\lambda = ۵۰۰۰A^{\circ}$ ایجاد می‌کنند. بسامد این نور چند هرتز است؟

ب) اتم‌های ئیدروژن پرتوئی بسیار مهم با بسامد $\nu = ۱۴۲۰MHz$ تولید می‌کنند. طول موج این نور چند سانتیمتر است؟ این پرتو در کدام قسمت از طیف الکترومغناطیس قرار دارد؟ (رادیویی، مادون قرمز، نوری، فرابنفش، اشعه ایکس، اشعه گاما)

حل : الف) بسامد ν و طول موج λ نور از این طریق به هم مربوط می‌شوند $\nu\lambda = c$ که در آن c سرعت نور است. یک انگستروم برابر $۱۰^{-۸}$ سانتیمتر است. بنابراین بسامد برابر است با:

$$\nu = c/\lambda = (۳\times ۱۰^{۱۰}\ cm/s)/(۵۰۰۰\times ۱۰^{-۸}\ cm) = ۶\times ۱۰^{۱۴}\ Hz$$

ب) رابطه معکوس برابر است با:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{(۳\times ۱۰^{۱۰}\ cm/s)}{(۱۴۲۰\times ۱۰^{۶}\ s^{-۱})} = ۲۱/۱\ cm$$

این خط را خط ۲۱ سانتیمتر ئیدروژن می‌نامند و این خط مهم‌ترین خط طیفی در جهان محسوب می‌شود. این خط در گروه طیفی رادیویی قرار دارد.

مسئله ۸۶ : فرض کنید که یک بیگانه‌ای در یک کهکشان دور حداکثر طول موج تابش زمینه کیهانی را اندازه می‌گیرد و می‌یابد که دارای حداکثر $۱/۰۶۰۶۷mm$ و حداقل $۱/۰۵۹۳۳mm$ بسته به جهتی که آنها نسبت به CMB در حال حرکت هستند، است. کهکشانشان نسبت به CMB با چه سرعتی در حال چرخش است؟
(نکته: در این مورد پدیده انتقال دوپلر به سبب چرخش کهکشانی است نه حرکت کلی کهکشان)
حل : چرخش کهکشان موجب می‌شود که حداکثر طول موج انتقال دوپلری یابد.

$$\text{انتقال دوپلری} = \frac{\lambda - \lambda_{\circ}}{\lambda_{\circ}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\circ}} = z = \frac{v}{c}$$
$$\text{حداکثر اوج طول موج} = \lambda_{\circ} + \Delta\lambda = ۱/۰۶۰۶۷mm$$
$$\text{حداقل اوج طول موج} = \lambda_{\circ} - \Delta\lambda = ۱/۰۵۹۳۳mm$$

با کم کردن معادله دومی از اولی نتیجه می‌گیریم:

$$۲\Delta\lambda = ۰/۰۰۱۳۴mm$$
$$\Delta\lambda = ۰/۰۰۰۶۷mm$$

از معادله حداکثر طول موج استفاده می‌کنیم در نتیجه:

$$\lambda_{\circ} = ۱/۰۶۰۶۷mm - ۰/۰۰۰۶۷mm = ۱/۰۶mm$$

انتقال دوپلر به این صورت تعریف می‌شود:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\circ}} = \frac{۰/۰۰۰۶۷mm}{۱/۰۶mm} = \frac{v}{c}$$
$$v = ۰/۰۰۰۶۳۲c = ۰/۰۰۰۶۳۲\times ۳\times ۱۰^{۵}\ kms^{-۱} = ۱۹۰\ km/s$$

مسئله ۸۷ : ستاره غول‌آسای آلفا شکارچی به نظر می‌رسد که دارای جرمی ۱۰ برابر جرم منظومه شمسی باشد. اگر درجه حرارت سطحی این ستاره غول آسا ۱/۲ برابر خورشید باشد و درخشندگی آن ۱۰ هزار برابر خورشید باشد آنگاه شعاع و چگالی متوسط این ستاره قرمز غول آسا را حساب کنید.

ب) ستاره همراه درخشان شعرای یمانی دارای قدرت درخشندگی ۰/۰۴ برابر خورشید است و جرم آن برابر جرم خورشید می‌باشد. اگر درجه حرارت سطحی این ستاره کوچک ۴ برابر خورشید باشد، شعاع و متوسط چگالی این ستاره کوتوله سفید چقدر است؟

$$M_{sun} = ۲\times ۱۰^{۳۰} kg$$
$$R_{sun} = ۷\times ۱۰^{۸} m$$
$$L_{sun} = ۳/۸\times ۱۰^{۲۶} W$$

حل : الف) درخشندگی در ارتباط با درجه حرارت سطحی است.

$$L = ۴\pi R^{۲}\sigma T^{۴}$$

در نتیجه:

$$\frac{L_*}{L_{sun}} = \frac{۴\pi R_*^{۲}\sigma T_*^{۴}}{۴\pi R_s^{۲}\sigma T_s^{۴}} \Rightarrow \frac{R_*}{R_s} = ۴۰۰$$
$$R_{\text{Red giant}} = ۲/۸\times ۱۰^{۱۱} m$$

اگر این ستاره عظیم در منظومه شمسی ما بود شعاع آن به مدار مریخ می‌رسید. چگالی متوسط آن:

$$\rho_* = \frac{۱۰ M_s}{\frac{۴}{۳}\pi R_s^{۳}(۴۰۰)^{۳}} = ۲\times ۱۰^{-۴} kg/m^{۳}$$

این مقدار بسیار رقیق است. در حدود چگالی اتمسفر زمین در ارتفاع ۷۰ کیلومتری)

ب) برای ستاره کوتوله سفید:

$$\frac{L_*}{L_{sun}} = \frac{۴\pi R_*^{۲}\sigma T_*^{۴}}{۴\pi R_s^{۲}\sigma T_s^{۴}} \Rightarrow \frac{R_*}{R_s} = ۴۰۰$$
$$R_* = \frac{۱}{۸۰} R_{sun}$$

ستاره کوتوله سفید کمی بزرگ‌تر از زمین است و دارای چگالی متوسط زیر می‌باشد.

$$\rho_* = \frac{M_s(۸۰)^۳}{\frac{۴}{۳}\pi R_s^۳} = ۷\times ۱۰^۸\, kg/m^۳$$

که ۷۰۰۰۰۰ برابر چگالی آب است.

مسئله ۸۸ : با استفاده از اطلاعات پیشین یک معنی در مورد ارتباط قدر مطلق یک ستاره با شعاع و دمای آن استنتاج کنید. (از تعریف قدر همچون نسبت شار جریان‌های اندازه‌گیری شده استفاده کنید و آن را برای شار خورشید و یک ستاره به کار ببرید فرض می‌شود هر دو در فاصله یکسانی هستند).

حل : همان طور که از قبل می‌دانیم:

$$m_۲ - m_۱ = -۲/۵\log\left(f_۲/f_۱\right)$$

وقتی شار از طریق قانون عکس مربع به دست می‌آید:

$$f = \frac{L}{۴\pi d^۲}$$

همچنین این تعریف از قدر به وضوح برای این مورد خاص از قدرهای مطلق صحیح است به طوری که:

$$d = d_۱ = d_۲ = ۱۰\, pc$$

بنابراین:

$$M_۲ - M_۱ = -۲/۵\log\left(\frac{L_۲/۴\pi d_۲^۲}{L_۱/۴\pi d_۱^۲}\right) = -۲/۵\log\left(L_۲/L_۱\right)$$

که L به وسیله قانون استفان بولتزمن داده شده است. آن را جایگزین می‌کنیم:

$$M_۲ - M_۱ = -۲/۵\log\left(\frac{R_۲^۲T_۲^۴}{R_۱^۲T_۱^۴}\right)$$

$$= -۲/۵\left[۲\log\left(\frac{R_۲}{R_۱}\right) + ۴\log\left(\frac{T_۲}{T_۱}\right)\right]$$

$$= -۵\log\left(\frac{R_۲}{R_۱}\right) - ۱۰\log\left(\frac{T_۲}{T_۱}\right)$$

مقادیر متناسب برای خورشید و برای ستاره شماره ۱ را جایگزین می‌کنیم سپس معنای عمومی را برای قدر مطلق یک ستاره تابعی از شعاع و دمای آن است:

$$M = ۴/۸۷ - ۵\log\left(\frac{R}{۷۰۰۰۰۰km}\right) - ۱۰\log\left(\frac{T}{۵۷۸۰K}\right)$$

با توجه به تعریف، قدر بدون واحد است.

مسئله ۸۹ : شعاع را تا جایی که خورشید باید برای چگالی متوسطش گسترده شود تا چگالی بحرانی باشد را تخمین بزنید. (از $H_\circ = ۷۱ km/s/Mpc$ استفاده کنید.)

حل : در ابتدا $H_\circ$ را به واحدهای استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$۱Mpc = ۱Mpc = ۱۰^{۶}\, pc \times \frac{۳/۰۸۵۷\times ۱۰^{۱۳} km}{۱pc} = ۳/۰۸۵۷\times ۱۰^{۱۹} km$$

$$H_\circ = ۷۱\frac{km}{Mpc}\times\frac{۱Mpc}{۳/۰۸۵۷\times۱۰^{۱۹}km} = \frac{۷۱}{۳/۰۸۵۷\times۱۰^{۱۹}}s^{-۱} = ۲/۳\times۱۰^{-۱۸}s^{-۱}$$

چگالی متوسط خورشید برابر است با:

$$\rho_s = \frac{M_\odot}{\frac{۴}{۳}\pi R^۳} = \frac{۳M_\odot}{۴\pi R^۳}$$

چگالی بحرانی برابر است با:

$$\rho_c = \frac{۳H_\circ^۲}{۸\pi G}$$

اگر آنها مساوی باشند پس:

$$\rho_c = \rho_s \Rightarrow \frac{۳H_\circ^۲}{۸\pi G} = \frac{۳M_\odot}{۴\pi R^۳}$$

R را جدا می‌کنیم:

$$H_\circ^۲ R^۳ = ۲M_\circ G \Rightarrow R^۳ = \frac{۲M_\odot G}{H_\circ^۲} \Rightarrow R = \sqrt[۳]{\frac{۲M_\odot G}{H_\circ^۲}}$$

مقادیر را بر حسب واحد mks قرار می‌دهیم:

$$R=\sqrt[3]{\frac{۲\times۲\times۱۰^{۳۰}kg\times۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}m^{۳}kg^{-۱}s^{-۲}}{\left(۲/۳\times۱۰^{-۱۸}s^{-۱}\right)^{۲}}}$$

$$R=\sqrt[3]{\frac{۲/۶۷\times۱۰^{۲۰}}{۵/۲۹\times۱۰^{۳۶}}m}=\sqrt[3]{۵/۰۵\times۱۰^{۵۵}}m=۳/۷\times۱۰^{۱۸}m$$

شعاع کنونی خورشید برابر $۶/۹۶\times۱۰^{۸}m$ است. نیاز است که شعاع خورشید با ضریب ۵ میلیارد برابر چگالی‌اش افزایش یابد تا مساوی با چگالی بحرانی شود.

مسئله ۹۰ : یک ستاره‌شناس تحقیقی درباره سرعت‌های ستاره‌ای و اطلاعاتی درباره ستاره HD ۱۲۳۴۵۶ ارائه می‌دهد. او موارد زیر را تعیین کرد:

- که خط H_α دارای طول موج $۶۵۶/۷nm$ از طیف نگار است.
- که تعداد واقعی مشاهدات تصویر نگاری در گذشته تهیه شده که امکان تعیین حرکت مناسب ستاره $\mu=۴/۲$ ثانیه قوس در سال، را می‌دهد.
- که قمر هیپارکوس اختلاف منظر ستاره را که $\pi=۰/۰۱۵۶$ زاویه قوس است تعیین می‌کند.

از این اطلاعات برای تعیین سرعت فضایی ستاره استفاده کنید (ممکن است از حرکت خورشید و حرکت زمین اطراف آن صرف نظر نمایید).

حل :

$$v_r=\frac{\Delta\lambda}{\lambda_\circ}c=\frac{۰/۴nm}{۶۵۶/۳nm}\left(۳\times۱۰^{۵}\frac{km}{s}\right)=۱۸۲/۳\frac{km}{s}$$

$$v_t=۴/۷۴\frac{\mu}{\pi}=۴/۷۴\frac{۴/۲}{۰/۰۱۵۹}=۱۲۵۲\frac{km}{s}$$

$$v=\sqrt{v_r^{۲}+v_t^{۲}}=\sqrt{\left(۱۸۲/۳\frac{km}{s}\right)^{۲}+\left(۱۲۵۲\frac{km}{s}\right)^{۲}}=۱۲۶۵\frac{km}{s}$$

مسئله ۹۱ : شار انرژی آفتاب که به سطح زمین می‌رسد $۱\times۱۰^{۳}W/m^{۲}$ است. در هر ثانیه چند فوتون به سطح زمین می‌رسند؟ برای حل این محاسبه فرض کنید همه فوتون‌های آفتاب دارای طول موج $۵۰۰۰\mathring{A}$ هستند.

حل : انرژی فوتونی با طول موج $۵۰۰۰\mathring{A}$ چنین است:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$
$$= \frac{۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴} J.s\times۳\times۱۰^{۸} m/s}{۵\times۱۰^{-۷} m} = ۴\times۱۰^{-۱۹} J$$

انرژی وارد بر هر متر مربع در ثانیه $۱\times۱۰^{۳} J$ است. برای پیدا کردن تعداد فوتون‌ها باید این مقدار را به انرژی هر فوتون $۴\times۱۰^{-۱۹} J$ تقسیم کنیم که از آن:

$$\frac{۱\times۱۰^{۳۱} J}{۴\times۱۰^{-۱۹} J} = ۲/۵\times۱۰^{۲۱}$$

فوتون بر متر مربع در ثانیه به دست می‌آید.

مسئله ۹۴ : ماهواره‌ای به جرم ۲۲۰ کیلوگرم ابتدا بر روی یک مدار تقریبا دایره‌ای در ارتفاع ۶۴۰ کیلومتر بالاتر از سطح زمین می‌چرخد.

الف) سرعت این ماهواره را تعیین کنید.

ب) دوره تناوب حرکت آن را حساب کنید.

ج) به دلایل متعدد این ماهواره در هر دور کامل به اندازه $۱/۴\times۱۰^{۵}$ ژول انرژی مکانیکی خود را از دست می‌دهد. با پذیرفتن این تقریب معقول که مسیر دایره‌ای است که شعاع آن رفته رفته کاهش می‌یابد، فاصله از سطح زمین، سرعت و دوره تناوب ماهواره را در آخر ۱۵۰۰ دور تعیین کنید.

د) بزرگی متوسط نیروی کند کننده چقدر است؟

هـ) آیا تکانه زاویه‌ای پایسته است؟

حل : الف) به فرض m, M_e, h, R_e به ترتیب شعاع زمین، ارتفاع ماهواره از سطح زمین، جرم زمین و ماهواره باشند. برای مدار دایره‌ای ماهواره حول مرکز زمین داریم:

$$\frac{GM_e m}{(R_e + h)^۲} = m\frac{v^۲}{(R_e + h)}$$

پس به دست می‌آوریم:

$$v = \left(\frac{GM_e}{R_e + h}\right)^{۱/۲} = ۷/۵۴\ km/s$$

زیرا $R_e = ۶۴۰۰ km, M_e = ۶\times۱۰^{۲۴} kg$ هستند.

ب) برای دوره تناوب حرکت ماهواره خواهیم داشت:

$$T=\frac{۲\pi(R_e+h)}{v}=۵۸۶۳\ s$$

ج) انرژی مکانیکی E برابر است با:

$$E=K+U=\frac{۱}{۲}mv^۲-\frac{GM_em}{(R_e+h)}=-\frac{GM_em}{۲(R_e+h)}$$

از این رابطه به دست می‌آوریم:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{GM_em}{۲(R_e+h)^۲}\frac{dh}{dt}$$

با قرار دادن مقادیر عددی معلوم خواهیم داشت:

$$\frac{dh}{dt}=-1576m/rev$$

علامت منفی نشان می‌دهد که ارتفاع ماهواره از سطح زمین رفته رفته کاهش می‌یابد. بعد از ۱۵۰۰ دور، برای فاصله ماهواره از سطح زمین سرعت و دوره تناوب آن خواهیم داشت:

$$h'=h-۱۵۰۰\left(\frac{dh}{dt}\right)=۶۴۰-۲۳۶=۴۰۴\ km$$

$$v'=\left(\frac{GM_e}{R_e+h}\right)^{۱/۲}=۷/۶۷\ km/s$$

$$T'=\frac{۲\pi(R_e+h')}{v'}=۵۵۷۱\ s$$

د) اگر F بزرگی متوسط نیروی کند کننده باشد در این صورت داریم:

$$\frac{dE}{dt}=F\cdot v=F(R_e+h)\left(\frac{۲\pi}{T}\right)$$

چون $T=۲\pi\,(R_e+h)^{۳/۲}/(GM_e)^{۱/۲}$ است، پس:

$$F=\left(\frac{R_e+h}{GM_e}\right)^{۱/۲}\frac{dE}{dt} \qquad (۱)$$

برای بزرگ‌ترین مدار (اولین مدار) ماهواره داریم:

$$\frac{dE}{dt}=۱/۴\times۱۰^۵\ J/rev$$

و یا اینکه:

$$\frac{dE}{dt}=۱/۴\times۱۰^{۵}\times\frac{۱}{۵۸۶۳}=۲۳/۸۸\ J/s$$

بنابراین با قرار دادن مقادیر عددی معلوم در رابطه (۱) به دست می‌آوریم:

$$F=۳/۱۷\times۱۰^{-۳}\ N$$

هـ) چون نیروی کند کننده گشتاوری بر ماهواره وارد می‌کند، در نتیجه تکانه زاویه‌ای ماهواره کاهش می‌یابد. باید توجه داشت که با صرف نظر از تاثیر اجسام خارج از سیستم زمین با اضافه ماهواره (ماه، خورشید و غیره) می‌توان سیستم را مجزا در نظر گرفت و در این حالت تکانه سیستم زمین با اضافه ماهواره پایسته خواهد بود.

مسئله ۹۳ : دمای متوسط بدن تقریبا ۳۷ درجه سلسیوس است.

الف) این مقدار برحسب دمای مطلق چقدر است؟

ب) حداکثر طول موج منتشر شده توسط فردی با این دما چقدر است؟

ج) در چه منطقه‌ای از طیف این طول موج قرار دارد؟

د) مساحت سطح جسم خود را تخمین بزنید.

هـ) با این فرض که جسمتان مانند جسم سیاه پرتو افکنی می‌کند توان کلی L منتشر شده توسط جسمتان را بر حسب وات ($۱W=۱۰^{۷}ergs^{-۱}$) تخمین بزنید. این چگونه با توان مورد نیاز چراغ روشن نمونه‌ای مقایسه می‌شود؟

و) جسم شما در یک روز چقدر انرژی تشعشع می‌کند؟ پاسخ خود را بر حسب ژول و سپس کالری بیان کنید.

$$۱Cal=۱kcal=۱۰^{۳}cal=۴/۲\times۱۰۳J=۴/۲\times۱۰^{۱۰}erg\,s^{-۱}$$

حل : الف) چون $t=۳۷^{\circ}C$ پس این دما بر حسب واحدهای کلوین برابر است با:

$$T=۲۷۳+۳۷=۳۱۰$$

ب) از قانون وین:

$$\lambda_{\max}T=۰/۲۹cmK$$

حداکثر طول موج منتشر شده توسط فرد برابر است با:

$$\lambda_{\max}=\frac{۰/۲۹}{T}=۹/۳۵۵\times۱۰^{-۴}cm=۹/۳۵۵\times۱۰^{۴}\ \mathring{A}$$

ج) طول موج در منطقه پرتو مادون قرمز قرار می‌گیرد.
د) در اولین تقریب ممکن است یک فرد را به صورت جعبه مستطیلی نمونه قرار دهیم. فرض کنید که ارتفاع $H = ۱۷۰cm$ پهنا $D = ۴۰cm$ و ضخامت $r = ۱۰cm$ باشد. پس مساحت سطح برابر است با:

$$A = ۲(HD + Hr + Dr) = ۱/۷۸ \times ۱۰^{۴} cm^{۲}$$

هـ) توان کلی L به بیرون منتشر شده توسط جسم برابر است با:

$$L_{out} = A\sigma T^{۴}$$

که $\sigma = ۵/۷ \times ۱۰^{-۵} erg\, s^{-۱} cm^{-۲} K^{-۴}$ در نتیجه مقدار L را چنین به دست می‌آوریم:

$$L_{out} = ۹/۳۷ \times ۱۰^{۹} erg\, s^{-۱} = ۹/۳۷ \times ۱۰^{۲} W$$

و) انرژی که جسم در یک روز خارج می‌کند برابر است با:

$$E = L_{out} t = ۹/۳۷ \times ۱۰^{۲} W \times ۸۶۴۰۰ s = ۱/۹ \times ۱۰^{۴} Cal$$

مسئله ۹۴ : کهکشان راه شیری در حدود ۲۰۰ میلیارد جرم شمسی ماده را در بر دارد. اگر کهکشان راه شیری از ابر گاز بین کهکشانی با چگالی $۱۰^{-۳} cm^{-۳}$ تشکیل شده بود، دمای ابر چقدر بود؟
حل : با استفاده از فرمول جینز :

$$M = ۱۸ M_{\odot} \sqrt{\frac{T^{۳}}{n}}$$

و با حل برای T می‌یابیم :

$$T = n^{\frac{۱}{۳}} \left(\frac{M}{۱۰ M_{\odot}}\right)^{۲/۳} = \left(۱۰^{-۳}\right)^{۱/۳} \left(\frac{۲ \times ۱۰^{۱۱} M_{\odot}}{۱۸ M_{\odot}}\right)^{۲/۳} = ۵ \times ۱۰^{۵} K$$

ابر باید در دمای حدودا $۵۰۰۰۰۰K$ بوده باشد.

مسئله ۹۵ : با استفاده از تعادل ئیدروستاتیک، فشار مرکزی ماه را محاسبه کنید و آن را با فشار مرکزی زمین مقایسه کنید.
حل :

$$P_{\text{ماه}} = \frac{۲}{۳}\pi G\langle\rho\rangle^{۲} R^{۲}$$

$$= \frac{۲}{۳}\pi\left(۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\frac{Nm^{۲}}{kg^{۲}}\right)\left(۳۳۷۰\frac{kg}{m^{۳}}\right)^{۲}\left(۱/۷۳۸\times۱۰^{۶}m\right)^{۲} = ۴/۸\times۱۰^{۹}pa$$

$$P_{\text{زمین}} = \frac{۲}{۳}\pi G\langle\rho\rangle^{۲} R^{۲}$$

$$= \frac{۲}{۳}\pi\left(۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\frac{Nm^{۲}}{kg^{۲}}\right)\left(۵۵۲۰\frac{kg}{m^{۳}}\right)^{۲}\left(۶/۳۸۷\times۱۰^{۶}m\right)^{۲} = ۱/۷۴\times۱۰^{۱۱}pa$$

بنابراین فشار مرکزی زمین ۳۵ برابر بیشتر است.

مسئله ۹۶ : یک گاز متشکل از هیدروژن یونیزه شده با دمای $T_{gas} = ۷\times۱۰^{۷}K$ در نظر بگیرید. میانگین سرعت گرمایی یون‌های مثبت (پروتون‌ها) موجود در گاز، بر حسب واحد $km/\sec$ محاسبه کنید. هر کدام از این سرعت‌های نور را با هم مقایسه کنید.

حل : میانگین سرعت (rms) با $(۱/۲)mv_{rms}^{۲} = (۳/۲)kT_{gas}$ داده شده است که نشان دهنده این است که:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{۳kT_{gas}}{m}}$$

برای فوتون‌ها $m = m_p$ و

$$v_{rms} = \sqrt{۳\times۱/۳۸\times۱۰^{-۱۶}\times۷\times۱۰^{۷}/۱/۶۷\times۱۰^{۲۴}}$$

یا:

$$v_{rms}(p) = ۱۳۲۰ km/s = ۰.۰۰۴۴c$$

برای الکترون‌ها، $m = m_e$ و $v_{rms}(e) = ۵/۶\times۱۰^{۴}km/s = ۰/۱۹c$.

مسئله ۹۷ : سطح یک ستاره به جرم M، شعاع R و درخشندگی L را در نظر بگیرید. به این دلیل که پرتو تنها در مسیری بیرون از سطح یک ستاره حرکت می‌کند، فشار تابش تنها در یک مسیر انجام می‌شود.

الف) فشار تابش چه نیرویی را بر یک اتم که جرم آن m و دارای سطح مقطعی برای جذب پرتوی A است، اعمال می‌کند؟

ب) شرایطی که طبق آن این فشار بیرونی قوی‌تر از نیروی جاذبه است بیان کنید.

ج) اجسام ستاره‌ای نوعا دارای یک تیرگی در واحد جرم $k \equiv A/m \approx ۰/۵ cm^۲ / gram$ هستند. نشان دهید که یک ستاره تحت تاثیر فشار تابش منفجر خواهد شد اگر

$$L/L_{\odot} \geq ۲\times ۱۰^۴ M/M_{\odot}$$

(این پدیده را حد ادینگتون برای درخشندگی یک ستاره یا اجسام دیگر می‌نامند.)

حل : الف) فشار تابش در سطح یک ستاره برابر است با:

$$P_{rad} = \frac{۴\sigma T^۴}{۳c} = \frac{۴\sigma T_{eff}^۴}{۳c}$$

در اینجا T_{eff} دمای سطحی است. فشار حاصل ضربدر واحد سطح است. به این دلیل که این فشار تنها در خارج عمل می‌کند نیروی وارد بر اتم با سطح مقطع A برابر است با:

$$F_{rad} = \frac{۴\sigma T_{eff}^۴}{۳C} A\hat{e}_r$$

که در آن $\hat{e}_r$ بردار واحد در مسیر منتسب بیرونی است. اکنون درخشندگی یک ستاره برابر است با:

$$L = ۴\pi R^۲ \sigma T_{eff}^۴ \Rightarrow ۴\sigma T_{eff}^۴ = \frac{L}{\pi R^۲}$$

بنابراین داریم:

$$F_{rad} = \frac{L}{۳\pi R^۲ c} A\hat{e}_r$$

ب) نیروی وارد بر جرم m یک اتم برابر است با:

$$F_{grav} = -\frac{GM(r)m}{r^۲}\hat{e}_r = -\frac{GMm}{R^۲}\hat{e}_r$$

بنابراین نیروی ویژه بیرونی است. اگر:

$$\frac{L}{۳\pi R^۲ c} A > \frac{GMm}{R^۲} m \Rightarrow L > \frac{۳\pi cGMm}{A} = \frac{۳\pi cGM}{k}$$

توجه داشته باشید که شرایط مستقل از شعاع ستاره است زیرا جاذبه و پرتو تابش به طور معکوس با مجذور فاصله کاهش می‌یابد.

ج) اگر

$$k \approx ۰/۵ cm^{۲} / gm \text{ و } M = M_{\odot} = ۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۳} gm$$

باشد، آنگاه از این عبارت داریم:

$$L \geq ۳ \times \pi \times ۳ \times ۱۰^{۱۰} \times ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۸} \times ۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۳} / ۰/۵ = ۷/۵۱ \times ۱۰^{۳۷} ergs$$
$$= ۷/۵۱ \times ۱۰^{۳۷} / ۳/۸۲۵ \times ۱۰^{۳۳} L_{\odot} = ۲ \times ۱۰^{۴} L_{\odot}$$

به دلیل اینکه درخشندگی محدود، نسبتی است از M نتیجه کلی این است که یک ستاره متلاشی خواهد شد اگر:

$$\frac{L}{L_{\odot}} \geq ۲ \times ۱۰^{۴} \frac{M}{M_{\odot}}$$

مسئله ۹۹ : اگر قدر ظاهری خورشید برابر با ۲۶/۷- باشد؟ قدر ظاهری ستاره‌ای با $d = ۳/۵ pc$ چقدر است؟ قدر مطلق این ستاره چقدر است؟ با چشم غیر مسلح آیا می‌توانید ستاره دارای قدر ظاهری ۸+ را ببینید؟

حل : تفاوت قدر ظاهری بین دو ستاره مربوط می‌شود به نسبت روشنایی ظاهری:

$$m_{\odot} - m = ۲/۵ \log\left(\frac{b}{b_{\odot}}\right)$$

چون نسبت روشنایی ظاهری چنین است:

$$\frac{b}{b_{\odot}} = ۱/۳ \times ۱۰^{-۱۱}$$

و قدر ظاهری خورشید $m_{\odot} = -۲۶/۷$ را می‌دانیم می‌توانیم قدر ظاهری این ستاره را بیابیم:

$$m = m_{\odot} - ۲/۵ \log\left(\frac{b}{b_{\odot}}\right)$$
$$= -۲۶/۷ - ۲/۵ \log\left(۱/۳ \times ۱۰^{-۱۱}\right) = ۰/۵۲$$

مقیاس قدر ظاهری به سمت عقب است. هر چقدر قدر ظاهری بزرگ‌تر باشد، روشنایی ظاهری کوچک‌تر است. اگر قدر مطلق فاصله M را بدانید که کمک می‌کند تا شما فاصله

d را بر حسب پارسک بدانید. (قدر مطلق فاصله به صورت قدر ظاهری ستاره‌ای که در $۱۰pc$ از زمین قرار گرفته است تعریف می‌شود.)

$$m - M = ۵\log d - ۵$$
$$M = m - ۵\log d + ۵$$

برای این ستاره $m = ۰/۵۲$ و $d = ۳/۵pc$ از اینرو قدر ظاهری آن برابر است با:

$$M = ۰/۵۲ - ۵\log(۳/۵) + ۵ = ۲/۸$$

قدر مطلق به صورت قدر ظاهری ستاره‌ای تعریف می‌شود اگر قرار بود که در فاصله $۱۰pc$ از زمین قرار گیرد. قدر مطلق خورشید برابر است با ۴/۸+ اگر قرار بود خورشید در $۱۰pc$ قدر ظاهری آن قرار بگیرد قدر ظاهری آن برابر می‌بود با ۴/۸+ به جای ۲۶/۷- چشم غیر مسلح انسان می‌تواند ستاره‌ها را تا قدر ظاهری ۶+ ببیند. بنابراین ستاره‌ای با قدر ظاهری ۸+ نمی‌تواند با چشم غیر مسلح دیده شود.

مسئله ۱۰۰ : الف) زمانی که قدر ظاهری m ستاره شارش را اندازه می‌گیرد قدر مطلق M درخشندگی‌اش را اندازه می‌گیرد. این با تعریف M که قدر ظاهری ستاره داشت اگر در فاصله $d_۰ = ۱۰pc$ بود. اگر فاصله صحیح تا ستاره برابر باشد با d نشان دهید که:

$$M = m - ۵\log\left(\frac{d}{d_۰}\right)$$

نشان دهید که چگونه درخشندگی ستاره L به درخشندگی خورشید یعنی $L/L_{\odot}$ را بیابیم قدر مطلق ستاره M و قدر مطلق خورشید $M_{\odot}$ داده شده است.

ب) حداقل روشنایی محدود کننده که چشم در باند مرئی می‌توانند ببینند در حدود $m_{\lim} = ۶mag$ است. این بدان معناست که چشم می‌توانند شارهای دارای $m < m_{\lim}$ را ببینید. اگر ستاره‌ای دارای قدر مطلق M باشد، یک عبارت برای فاصله $d_{\lim}$ بر حسب پارسک که در آن قدر ظاهری‌اش برابر است با $m_{\lim}$ بدهید.

حل : الف) در اینجا از قانون مربع معکوس استفاده می‌کنیم. می‌دانیم که:

$$F = \frac{L}{۴\pi d^۲}$$

فرض کنید که می‌توانستیم با هزینه زیادی گروه‌هایی در خطوط راس کهکشانی را اجاره کنیم و ستاره را تا فاصله استاندارد $d_\circ = ۱۰ pc$ حرکت دهیم. سپس شار برابر می‌بود با:

$$F_\circ = \frac{L}{۴\pi d_\circ^۲}$$

سپس مقدار با تعریف برابر می‌شد با قدر مطلق:

$$M = -۲/۵ \log\left(\frac{F_\circ}{F_{zp}}\right)$$

در حالی که قدر ظاهری برابر است با:

$$m = -۲/۵ \log\left(\frac{F}{F_{zp}}\right)$$

از اینرو داریم:

$$m - M = ۲/۵ \log \frac{F_\circ}{F} = ۲/۵ \log \frac{L/۴\pi d_\circ^۲}{L/۴\pi d^۲}$$

$$= ۲/۵ \log\left(\frac{d}{d_\circ}\right)^۲ = ۵ \log \frac{d}{d_\circ}$$

که قرار بود نشان داده شود. بنابراین اختلاف $m - M$ فقط به فاصله نه ویژگی‌های ستاره بستگی دارد و پس به نام قدر مطلق فاصله معروف است. بنابراین قدر مطلق ستاره با درخشندگی خورشید برای $L = L_\odot$ چنین است:

$$M_\odot = ۲/۵ \log\left(\frac{F_{\circ,\odot}}{F_{zp}}\right)$$

بنابراین داریم:

$$M - M_\odot = -۲/۵ \log\left(\frac{F_\circ}{F_{zp}}\right) - \left[-۲/۵ \log\left(\frac{F_{\circ,\odot}}{F_{zp}}\right)\right]$$

$$= -۲/۵ \log\left(\frac{F_\circ}{F_{\circ,\odot}}\right) = -۲/۵ \log\left(\frac{L/۴\pi d_\circ^۲}{L_\odot/۴\pi d_\circ^۲}\right)$$

$$= -۲/۵ \log\left(\frac{L}{L_\odot}\right)$$

و در نتیجه داریم:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = ۱۰^{-(M-M_{\odot})/۲/۵} = ۱۰^{-۰/۴(M-M_{\odot})}$$

توجه داشته باشید که شار نقطه صفر از بین می‌رود. لزوما به طور موثر از خورشید به عنوان استاندارد ارجح بر وگا استفاده می‌کنیم.

ب) از معادلات بالا داریم:

$$m = M + ۵\log\left(\frac{d}{d_{۰}}\right)$$

و بنابراین اگر $m = m_{\lim}$ داریم:

$$\log\frac{d_{\lim}}{d_{۰}} = m_{\lim} - M$$

بنابراین:

$$d_{\lim} = ۱۰^{۰/۲(m_{\lim}-M)} d_{۰} = ۱۰^{۰/۲(m_{\lim}-M)+۱}\, pc = ۱۰^{۲/۲-۰/۲M}\, pc$$

مسئله ۱۰۱ : الف) شعرای یمانی A و B ستاره دوتایی (دو ستاره که در حال چرخیدن به دور هستند) است. شعرای یمانی A روشن‌ترین ستاره در آسمان است و دارای قدر بصری ۱/۵− است. شعرای یمانی B را می‌توان فقط در تلسکوپ دید و دارای قدر بصری ۷/۲+ است. شعرای یمانی A چه مقدار روشن‌تر است؟

ب) ابرنواختر انفجار یک ستاره منفرد سنگین یا کوتوله سفید $۱/۴M_{\odot}$ است. در طول انفجار این ستاره با قدر ۲۰ روشن می‌شود و به قدر مطلق در حدود صفر می‌رسد. چه مقدار انرژی بیشتر در طول این انفجار ابرنواختر آزاد می‌شود؟ ابرنواختر به قدر ظاهری ۱۳/۵ رسیده است، آن ابرنواختر چقدر دور است؟

حل : الف)

$$m_{۲} - m_{۱} = ۲/۵\log\frac{Flux_{۱}}{Flux_{۲}}$$

$$۷/۲ - (-۱/۵) = ۸/۷$$

$$\log \text{نسبت شار} = \frac{۸/۷}{۲/۵} = ۳/۴۸$$

$$\text{نسبت شار} = ۱ : ۳۰۱۹$$

شعرای یمانی B در حدود ۳۰۰۰ برابر تیره‌تر است.

ب)

$$m_۲ - m_۱ = ۲/۵\log\frac{Flux_۱}{Flux_۲} = ۲۰$$

$$\log\frac{Flux_۱}{Flux_۲} = ۸$$

$$\frac{Flux_۱}{Flux_۲} = ۱۰^{۸}$$

فاصله ابرنواختر چنین است:

$$mM = ۵\log d - ۵$$
$$۱۳/۵ - ۰ = ۵\log d - ۵$$
$$۱۸/۵ = ۵\log d$$
$$\log d = ۳/۷$$
$$d = ۵۰۱۲pc$$

مسئله ۱۰۲ : خورشید دارای قدر ظاهری بصری ۲۶/۷۵− است.

الف) قدر مطلق بصری آن را محاسبه کنید.

ب) بزرگی آن را در فاصله قنطورس آلفا ($۱/۳pc$) محاسبه کنید.

ج) نقشه برداری دیجیتال آسمان دارای قدر محدود در حدود ۱۸/۲+ است. یک ستاره همانند خورشید باید در چه فاصله‌ای باشد تا فقط با اشکال به اندازه کافی روشن باشد تا در این نقشه برداری قابل رویت باشد؟

حل : الف)

$$m = -۲۶/۷۵, \quad d = ۴/۸\times۱۰^{-۶}\,pc$$
$$m - M = ۵\log d - ۵$$
$$M = -۲۶/۷۵ - ۵\log ۴/۸\times۱۰^{-۶} + ۵ \Rightarrow M = ۴/۸$$

ب) خورشید در فاصله $۴/۸\times۱۰^{-۶}\,pc$ است. در فاصله $۱/۳pc$ این $۱/۳۹\times۱۰^{-۱۱}$ برابر تیره‌تر خواهد بود. بنابراین:

$$-۲۶/۷۵ - m = ۲/۵\log\left(۱/۳۹\times۱۰^{-۱۱}\right) \Rightarrow m = ۰/۳۹$$

ج)

$$۱۸/۲ - ۴/۸ = ۵\log d - ۵ \Rightarrow d = ۴۷۸۶$$

مسئله ۱۰۳ : یک خوشه کروی ستاره دارای ۱۰۰ ستاره با قدر مطلق $M_V = ۰$ (غول قرمز) و $۱۰^۴$ ستاره با $M_V = ۵$ (ستارگان رشته اصلی) مجموع قدر مطلق خوشه چقدر است؟

حل : اگر زیرنویس ۱ بر ستارگان نورانی‌تر (غول پیکرها) دلالت داشته باشد و ۲ بر ستارگان کم نورتر، بزرگی مطلق برابر است با:

$$M_V(۲) = ۵ \text{ و } M_V(۱) = ۰$$

آنگاه نسبت درخشندگی‌ها:

$$L_۲/L_۱ = ۱۰^{-۰/۴[M_V(۲)-M_V(۱)]} = ۱۰^{-۰/۴\times۵} = ۱۰^{-۲}$$

درخشندگی کل برابر است با:

$$L_{tot} = ۱۰^۲ L_۱ + ۱۰^۴ L_۲ = ۱۰^۲ \times L_۱ + ۱۰^۴ \times ۱۰^{-۲} \times L_۱ = ۱۰۰L_۱ + ۱۰۰L_۱ = ۲۰۰L_۱$$

با مقایسه این مقدار با درخشندگی یک ستاره نورانی منفرد، به دست می‌آید:

$$M_V(tot) - M_V(۱) = -۲/۵\log(L_{tot}/L_۱) - ۲/۵\log(۲۰۰) = -۵/۷۵$$

چون که $M_V(۱) = ۰$ به دست می‌آید:

$$M_V(tot) = -۵/۷۵$$

مسئله ۱۰۴ : قدر ظاهری ستاره متغیر RR شلیاق از ۷/۱ تا ۷/۸ تغییر می‌کند. این ستاره در بیشینه چند برابر نسبت به حالت کمینه روشن‌تر است؟

حل : دامنه قدری برابر ۰/۷ است. برای پیدا کردن افزایش نسبی روشنایی از کمینه تا بیشینه از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\log\left(\frac{l_{\max}}{l_{\min}}\right) = ۰/۴ \times ۰/۷ = ۰/۲۸$$

بنابراین:

$$\frac{l_{\max}}{l_{\min}} = ۱۰^{۰/۲۸} = ۱/۹۳$$

این ستاره در بیشینه تقریبا دو برابر روشن‌تر از کمینه است.

مسئله ۱۰۵ : روشنایی ظاهری قیفاووسی δ (متغیر قیفاووسی نوع I) با دوره تناوب ۵/۴ روز تغییر می‌کند. روشنایی ظاهری متوسط آن برابر است با $۵/۱\times۱۰^{-۱۳}$ روشنایی ظاهری متوسط خورشید.

الف) به طور تقریبی قدر ظاهری قیفاووسی δ چقدر است؟

ب) به طور تقریبی قیفاووسی δ در چه فاصله‌ای است؟

حل : الف) روشنایی ظاهری $۵/۱\times۱۰^{-۱۳}$ روشنایی ظاهری خورشید است.

$$m_۲ - m_۱ = ۲/۵\log\left(\frac{b_۱}{b_۲}\right)$$

قدر ظاهری خورشید برابر است با $-۲۶/۷۵$ بنابراین:

$$-۲۶/۷۵ - m_۱ = ۲/۵\log\left(۱۰^{-۱۳}\right)$$

به طوری که:

$$m_۱ = ۳/۲۵$$

ب) با توجه به اطلاعات قبلی درخشندگی در حدود $۳\times۱۰^{۳}L$ بنابراین :

$$f = \frac{L}{۴\pi d^۲}$$

در نتیجه:

$$\frac{f_۱}{f_۲} = \frac{L_۱ d_۲^۲}{L_۲ d_۱^۲}$$

$$۱۰^{-۱۳} = \frac{\left(۳\times۱۰^{۳}\right)\left(۱AU\right)}{d_۱^۲} \Rightarrow d_۱ = ۱/۷\times۱۰^{۸}AU = ۸۶۶pc$$

مسئله ۱۰۶ : مشاهدات دقیق نشان داده است که ستاره ۵۵ در صورت فلکی خرچنگ دارای یک منظومه سیاره‌ای است. مشخصات فیزیکی یکی از سیارات این منظومه عبارت است از جرم $۰/۲۱M_J$، نیم محور بزرگ مدار $۰/۲۴AU$، دوره تناوب مداری ۴۴/۲۸ روز و خروج از مرکز ۰/۳۴ که در آن $M_J = ۱/۰۹\times۱۰^{۲۷}kg$ جرم مشتری است. با فرض اینکه طول عمر رشته اصلی خورشید ۱۰ میلیارد سال باشد، طول عمر رشته اصلی ستاره ۵۵ خرچنگ چند برابر خورشید است؟

حل :

$$\frac{P^۲}{a^۳}=\frac{۴\pi^۲}{G(M+m_p)}$$
$$M+m_p=۱/۸۸۴۷\times۱۰^{۳۰}kg$$
$$m_p=۰/۲۱M_J$$
$$M\doteq۱/۸۸۴۵\times۱۰^{۳۰}kg$$

با توجه به رابطه بین طول عمر رشته اصلی ستارگان و جرم آنها:

$$\frac{t}{t_{sun}}=\left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^{-۲/۵}\cong۱/۱۶\Rightarrow t\cong۱\times t_{sun}$$

مسئله ۱۰۷ : روشنایی ظاهری ستاره‌ای $۱/۳\times۱۰^{-۱۱}$ برابر روشنایی خورشید اندازه‌گیری شد. درخشندگی این ستاره بر حسب درخشندگی خورشید چقدر است؟ چرا یک چراغ روشن معمولی روشن‌تر از این ستاره ظاهر می‌شود اگرچه انرژی در ثانیه بسیار کمتری از ستاره ظاهر می‌شود؟

حل : روشنایی ظاهری b و درخشندگی L ستاره از طریق قانون مربع معکوس به هم مربوط می‌شوند.

$$b=\frac{L}{۴\pi d^۲}$$
$$L=۴\pi d^۲b$$

می‌توان درخشندگی خورشید $L_\odot$ را بر حسب فاصله‌اش از زمین $d_\odot$ و روشنایی ظاهری $b_\odot$ به صورت زیر نوشت:

$$L_\odot=۴\pi d_\odot^۲b_\odot$$

با تقسیم دو رابطه بر یکدیگر:

$$\frac{L}{L_\odot}=\left(\frac{d}{d_\odot}\right)^۲\left(\frac{b}{b_\odot}\right)$$

اگر روشنایی ظاهری ستاره را بر حسب روشنایی ظاهری خورشید را بدانیم:

$$\frac{b}{b_\odot}=۱/۳\times۱۰^{-۱۱}$$

و فاصله بر حسب فاصله تا خورشید:

$$\frac{d}{d_\odot}=\frac{۳/۵\times ۲۰۶۶۲۵AU}{۱AU}$$

سپس می‌توانیم درخشندگی ستاره را بر حسب درخشندگی شمسی بیابیم:

$$\frac{L}{L_\odot}=\left(\frac{d}{d_\odot}\right)^{۲}\left(\frac{b}{b_\odot}\right)=\left(\frac{۳/۵\times ۲۰۶۶۲۵AU}{۱AU}\right)^{۲}\times ۱/۳\times ۱۰^{-۱۱}=۶/۸$$

در نتیجه این ستاره ۶/۸ برابر درخشنده‌تر از خورشید است. قانون مربع معکوس شرح می‌دهد که روشنایی ظاهری به سرعت با فاصله کاهش می‌یابد. فاصله این ستاره موجب می‌شود که آن تیره‌تر از یک چراغ روشن به نظر برسد، اگرچه این چراغ روشن درخشندگی‌اش در حدود ۷ برابر خورشید است.

مسئله ۱۰۸ : خورشید چه مدت در درخشندگی کنونی‌اش باقی می‌ماند اگر ۲۰٪ ئیدروژن موجود در خورشید بتواند به هلیم تبدیل شود؟

حل : در واکنش ذوب، چهار هسته ئیدروژن با هم به یک هلیم با آزادی تفاوت جرم به صورت:

$$E_F=۴/۲\times ۱۰^{-۱۲}J$$

ترکیب می‌شوند. جرم خورشید برابر است با $۲\times ۱۰^{۳۰}kg$ از این ۷۰٪ توسط جرم، ئیدروژن است بنابراین ۲۰٪ بنابراین تعداد هسته‌های ئیدروژن قابل دسترسی در خورشید برابر است با :

$$N=\frac{M}{M_H}=۱/۷\times ۱۰^{۵۶}$$

تعداد واکنش‌های ذوب پتانسیل برابر است با تعداد هسته‌های ئیدروژن در دسترس تقسیم بر ۴. سپس انرژی کلی در دسترس برابر است با:

$$E=\times E_F=۱/۸\times ۱۰^{۴۴}J$$

درخشندگی خورشید برابر است با:

$$L=۳/۸\times ۱۰^{۲۶}W$$

طول عمر برابر است با:

$$T=\frac{E}{L}=۴/۷\times ۱۰^{۱۷}s$$

یا ۱۵ میلیارد سال.

مثال ۱۰۹ : ستاره A اختلاف منظر ″۰/۱۰ اندازه گرفته شده است و ستاره B اختلاف منظر ″۰/۰۲۵ اندازه گرفته شده است. ستاره B دارای دو برابر روشنایی ستاره A است. نسبت درخشندگی ستاره A به درخشندگی ستاره B چقدر است؟

حل : از اختلاف منظرها، فاصله‌ها را داریم:

$$d_A = \frac{۱}{۰/۱۰} pc = ۱۰ pc$$

$$d_B = \frac{۱}{۰/۰۲۵} pc = ۴۰ pc$$

نسبت روشنایی نیز به ما داده شده است:

$$B_B = ۲B_A$$

چیزی که به دنبال آن هستیم درخشندگی‌ها است. B دورتر و در عین حال روشن نیز هست بنابراین ترجیح می‌دهیم با B که درخشنده‌تر است کار کنیم. نسبت زیر را انتظار داریم:

$$\frac{L_A}{L_B} < ۱$$

فاصله‌ها و روشنایی‌ها را داریم و می‌دانیم که چگونه آنها را به درخشندگی ربط دهیم.

$$B = \frac{L}{۴\pi d^۲}$$

پس داریم:

$$B_A = \frac{L_A}{۴\pi d_A^۲}, \qquad B_B = \frac{L_B}{۴\pi d_B^۲}$$

چیزی که می‌خواهیم نسبت درخشندگی است بنابراین هر کدام از اینها را برای درخشندگی حل می‌کنیم:

$$L_A = ۴\pi d_A^۲ B_A, \quad L_B = ۴\pi d_B^۲ B_B$$

برای به دست آوردن این نسبت روابط بالا را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{L_A}{L_B}=\frac{۴\pi d_A^۲ B_A}{۴\pi d_B^۲ B_B}$$

$$\frac{L_A}{L_B}=\left(\frac{d_A}{d_B}\right)^۲\left(\frac{B_A}{B_B}\right)$$

$$\frac{L_A}{L_B}=\left(\frac{۱۰pc}{۴۰pc}\right)^۲\left(\frac{۱}{۲}\right)\Rightarrow\frac{L_A}{L_B}=\frac{۱}{۳۲}$$

این با B که درخشندگی بیشتری دارد مطابقت می‌کند همان گونه که انتظار داشتیم.

مسئله ۱۱۰ : با قدر ظاهری $m=-۱/۵\,mag$ صورت فلکی شعرای یمانی بزرگ‌ترین ستاره در آسمان است. شعرای یمانی در فاصله $d=۸/۶$ سال نوری است یعنی به ما بسیار نزدیک است. در فاصله ۴۹۰ سال نوری آلفا شکارچی دارای قدر ظاهری $m=۰/۸\,mag$ است. قدر مطلق شعرای یمانی و آلفا شکارچی را محاسبه کنید و درخشندگی هر دو ستاره را با هم مقایسه کنید.

حل : قدر مطلق M همچون قدر ستاره تعریف می‌شود که در مسافت $۱۰pc$ است. همان طور که قبلا گفته شد قدر مطلق و قدر ظاهری از رابطه زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند:

$$m-M-۵\log d-۵\Rightarrow M=m-۵\log d+۵$$

که d فاصله بر حسب pc است. می‌دانیم:

$$۱pc=۳/۲۶ly\Rightarrow d_{\text{یمانی}\quad\text{شعرای}}=۲/۶۴pc$$

$$d_{\text{شکارچی}\quad\text{آلفا}}=۱۵۰pc$$

از این دو رابطه قدر مطلق را به دست می‌آوریم. برای مقایسه درخشندگی شعرای یمانی و آلفا شکارچی با توجه داشت که تفاوت قدر از رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$m_۱-m_۲=۲/۵\log(f_۲/f_۱)$$

$f_۲$، $f_۱$ دو تغییرات پی در پی ستاره‌ها هستند بنابراین:

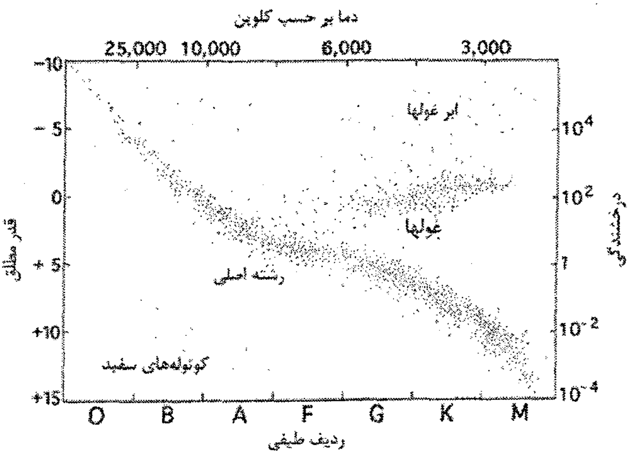
$$M_۱-M_۲=۲/۵\log\left[\left(\frac{L_۲/۴\pi d^۲}{L_۱/۴\pi d^۲}\right)\right]=۲/۵\log\left(\frac{L_۲}{L_۱}\right)$$

چون قدرهای مطلق هر دو در $d=10\,pc$ اندازه‌گیری می‌شود بنابراین نسبت درخشندگی چنین است:

$$\frac{L_2}{L_1}=10^{(M_1-M_2)/2.5}$$

بنابراین آلفا شکارچی در حدود ۴۰۰ بار از شعرای یمانی درخشان‌تر است.

مسئله ۱۱۱ : هر یک از موارد زیر را روی نمودار HR زیر رسم کنید با نامگذاری مناسب



شکل ۲ – ۱۰

الف) خورشید

ب) ستاره نسبتا سفید ($T=9000K$) که $2/4\times10^{-12}$ برابر روشن‌تر از خورشید در آسمان ما با اختلاف منظر $0/1''$

ج) یک ستاره نسبتا سرخ ($T=3000K$) که شعاع آن ۸۰ برابر شعاع خورشید است.

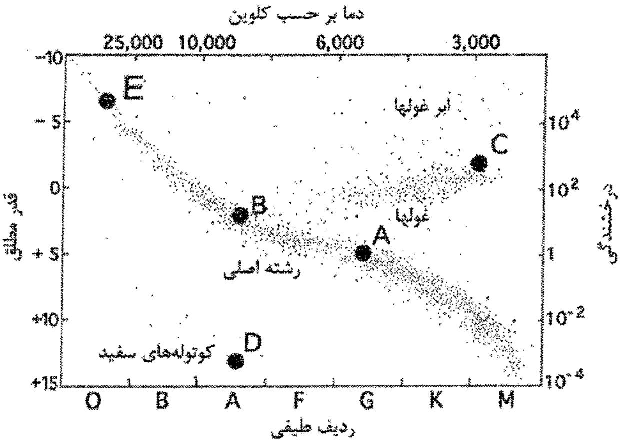
د) یک ستاره نسبتا سفید ($T=9000K$) که دارای شعاع شبیه به شعاع زمین است.

هـ) ستاره در حال ذوب ئیدروژن در هسته‌اش که فقط در حدود ۱۰ میلیون سال زندگی خواهد کرد.

و) یک ستاره سرخ که دارای اختلاف منظر $0/75''$ است و 4×10^{-14} برابر روشن‌تر از خورشید در آسمان ما

حل : الف) برای یافتن محل دقیق برخی از آنها نیاز به محاسبه می‌باشد.
ب) از اختلاف منظر می‌دانیم که فاصله برابر است با:

$$\frac{۱}{۰/۱}=۱۰\,pc$$



شکل ۲-۱۱

می‌توانیم این را با روشنایی با هم بگذاریم تا درخشندگی را بیابیم:

$$B=\frac{L}{۴\pi d^۲}$$

$$L=۴\pi\, Bd^۲$$

$$\frac{L_*}{L_\odot}=\frac{۴\pi\, B_* d_*^۲}{۴\pi\, B_\odot d_\odot^۲}$$

$$\frac{L_*}{L_\odot}=\left(\frac{B_*}{B_\odot}\right)\left(\frac{d_*^۲}{d_\odot^۲}\right)$$

$$\frac{L_*}{L_\odot}=\left(۲/۴\times ۱۰^{-۱۲}\right)\left(\frac{۱۰\,pc}{۱AU}\right)^۲\left(\frac{۲۰۶۲۶۵AU}{۱\,pc}\right)^۲$$

آخرین عاملی که وجود دارد تبدیل واحدهاست. آخرین چیز باید بدون واحد باشد چون این فقط نسبتی از درخشندگی‌هایی است که ما در مورد آنها صحبت می‌کنیم:

$$\frac{L_*}{L_\odot}=۱۰$$

ج) اکنون فاصله‌ها را نمی‌دانیم ولی شعاع‌ها را می‌دانیم بنابراین هنوز می‌توانیم $L_*/L_{\odot}$ را بیابیم:

$$\frac{L_*}{L_{\odot}}=\frac{۴\pi R_*^۲\sigma T_*^۴}{۴\pi R_{\odot}^۲\sigma T_{\odot}^۴}$$

$$\frac{L_*}{L_{\odot}}=\left(\frac{R_*}{R_{\odot}}\right)^۲\left(\frac{T_*}{T_{\odot}}\right)^۴$$

$$\frac{L_*}{L_{\odot}}=(۸۰)^۲\left(\frac{۳۰۰۰}{۵۷۸۰}\right)^۴$$

$$\frac{L_*}{L_{\odot}}=۴۶۰$$

د) این درست همانند مسئله آخر است:

$$\frac{L_*}{L_{\odot}}=\left(\frac{R_*}{R_{\odot}}\right)^۲\left(\frac{T_*}{T_{\odot}}\right)^۴$$

$$\frac{L_*}{L_{\odot}}=\left(\frac{۶۳۷۸\,km}{۶۹۵۵۰۰\,km}\right)^۲\left(\frac{۹۰۰۰}{۵۷۸۰}\right)^۴$$

$$\frac{L_*}{L_{\odot}}=۴/۹\times ۱۰^{-۴}$$

مسئله ۱۱۲ : ستاره‌شناسی یک ستاره روشن را که دارای زاویه اختلاف منظر $p=۰/۲$ ثانیه قوس است، مشاهده می‌کند. شار f از این ستاره تقریبا $۹/۴\times ۱۰^{-۱۲}$ برابر شار خورشید است. فاصله d از زمین تا خورشید برابر $pc(۱/۲۰۶۲۶۵)$ است.

الف) فاصله این ستاره بر حسب پارسک چقدر است؟

ب) درخشندگی این ستاره بر حسب واحد درخشندگی $L_{\odot}$ چقدر است؟

حل : الف)

$$d=\frac{۱}{p}=\frac{۱}{۰/۲}=۵\,pc$$

ب)

$$\frac{f_A}{f_{\odot}}=\left(\frac{L_A}{L_{\odot}}\right)\left(\frac{d_{\odot}^۲}{d_A^۲}\right)$$

$$\frac{L_A}{L_\odot}=\left(\frac{f_A}{f_\odot}\right)\left(\frac{d_A^۲}{d_\odot^۲}\right)$$

$$L_A=۹/۴\times۱۰^{-۱۲}\times\frac{(۵\,pc)^۲}{\left(\frac{۱}{۲۰۶۲۶۵\,pc}\right)^۲}L_\odot$$

$$L_A=۹/۴\times۱۰^{-۱۲}\times\frac{۲۵}{۲/۴\times۱۰^{-۱۱}}L_\odot=۰/۹۴\times\frac{۲۵}{۲/۴}L_\odot=۱۰L_\odot$$

مسئله ۱۱۳ : دو ستاره نزدیک به هم در آسمان مشاهده می‌شوند. طیف یک ستاره نشان می‌دهد که ستاره $O۵$ رشته اصلی است و طیف ستاره دیگر نشان می‌دهد که ستاره $K۲$ رشته اصلی است. دو ستاره دارای یک قدر طیف سنجی یکسان هستند. آیا دو ستاره در فاصله یکسانی از خورشید قرار دارند یا یکی نزدیک‌تر است؟ اگر یکی نزدیک‌تر است کدام یک و نسبت فاصله‌های آنها چقدر است؟

حل : ستاره $K۲$ رشته اصلی باید بسیار نزدیک‌تر باشد. آن ستاره‌ها به طور ذاتی دارای درخشندگی بسیار کمتری از ستاره‌های $O۵$ هستند بنابراین با همان قدر از زمین ظاهر می‌شوند. (و بنابراین با همان شار یا روشنایی) ستاره K باید بسیار نزدیک‌تر باشد. می‌توانیم شار را با:

$$F_{O۵}=\frac{L_{O۵}}{۴\pi\, d_{O۵}^۲}$$

$$F_{K۲}=\frac{L_{K۲}}{۴\pi\, d_{K۲}^۲}$$

به فاصله ارتباط می‌دهیم. چون هر دو دارای یک قدر یکسان هستند. می‌دانیم آنها دارای شار برابر هستند. بنابراین:

$$\frac{F_{O۵}}{F_{K۲}}=۱=\frac{L_{O۵}/۴\pi\, d_{O۵}^۲}{L_{K۲}/۴\pi\, d_{k۲}^۲}$$

$$۱=\left(\frac{L_{O۵}}{L_{K۲}}\right)\left(\frac{d_{K۲}}{d_{O۵}}\right)^۲$$

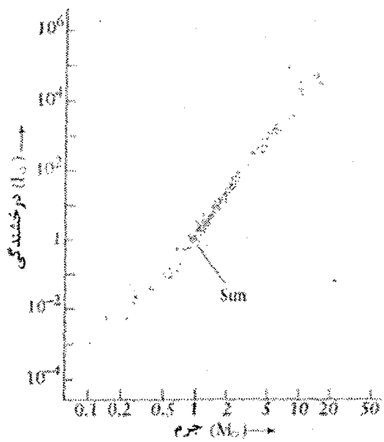
$$\frac{d_{O۵}}{d_{K۲}}=\sqrt{\frac{L_{O۵}}{L_{K۲}}}$$

می‌توانیم درخشندگی‌های برای این نوع ستاره‌ها را از جدول بیابیم. با قرار دادن این مقادیر خواهیم داشت:

$$\frac{d_{O5}}{d_{K2}}=1000$$

ستاره $O5$ ، ۱۰۰۰ برابر دورتر از ستاره $K2$ است اگر دارای یک قدر ظاهر شوند.

مسئله ۱۱۴ : ستاره‌های که ئیدروژن می‌سوزانند به نام ستاره‌های رشته اصلی معروفند. این ستاره‌ها یک رابطه جرم - درخشندگی نشان داده شده در شکل زیر را دنبال می‌کنند.



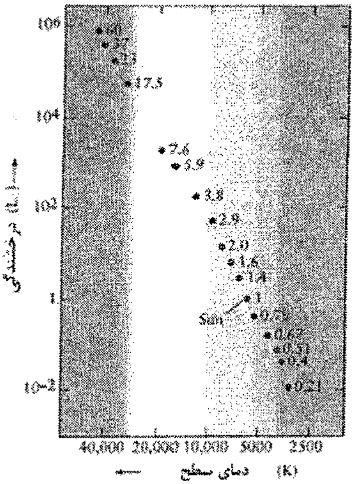
شکل ۲ - ۱۲

الف) (درخشندگی متناسب است با جرم به توان ۳/۵) موقعیت $10M_\odot$ و $0/1M_\odot$ را روی این نمودار نشان دهید. درخشندگی این ستاره‌ها بر حسب درخشندگی شمسی $L_\odot$ چقدر است؟

ب) موقعیت‌های تقریبی آنها را روی نمودار HR نشان دهید و دمای سطح آنها را بیان کنید.

حل : الف) از نمودار جرم - درخشندگی، درخشندگی ستاره $10M_\odot$ برابر است با $3000L_\odot$ درخشندگی ستاره $0/1M_\odot$ برابر است با $0/001L_\odot$

ب) از نمودار HR دمای سطح ستاره $10M_{\odot}$ برابر است با $25000K$ (تقریبا ۴ برابر دمای سطح خورشید)



شکل ۲ - ۱۳

مسئله ۱۱۵ : شعرای یمانی دومین ستاره روشن در آسمان است. این به سیستم دوتایی دو ستاره تبدیل می‌شود اگرچه فقط می‌توانیم یکی را با چشمان غیر مسلح ببینیم (شعرای یمانی A ؛ ۱۰۰۰۰ برابر روشن‌تر از شعرای یمانی B است) هر دو ستاره در گروه طیفی A هستند.

الف) شعرای یمانی دارای اختلاف منظر $0/38''$ اندازه گرفته شده است. چقدر دور است؟

ب) شعرای یمانی A دارای روشنایی $1/2\times10^{10}$ برابر کمتر از از روشن‌ترین ستاره در آسمان برای ناظر مرز زمین است. درخشندگی شعرای یمانی A در واحد وات و در واحد $L_{\odot}$ چقدر است؟

ج) آیا شعرای یمانی A کوتوله سفید، ستاره رشته اصلی، غول یا ابر غول است؟

د) آیا شعرای یمانی B کوتوله سفید، ستاره رشته اصلی، غول یا ابرغول است؟

حل : الف)

$$d=\frac{1}{p}=\frac{1}{0/38}pc \Rightarrow d=2/63\,pc$$

ب)

$$\frac{B_S}{B_\odot}=\frac{L_S/4\pi d_S^2}{L_\odot/4\pi d_\odot^2}$$

$$\frac{B_S}{B_\odot}=\left(\frac{L_S}{L_\odot}\right)\left(\frac{d_\odot}{d_\odot}\right)^2$$

$$L_S=\left(\frac{B_S}{B_\odot}\right)\left(\frac{d_S}{d_\odot}\right)^2 L_\odot$$

$$L_S=\left(\frac{1}{1/2\times 10^{10}}\right)\left(\frac{2/63\ pc}{1AU}\right)^2\left(\frac{206265\ AU}{1pc}\right)^2 L_\odot$$

$$L_S=25L_\odot=9/4\times 10^{27}W$$

ج) به نمودار HR نگاه کنید. ستاره‌ای که از نوع طیفی A است ولی فقط ۲۵ برابر درخشندگی خورشید را دارد به خوبی در طول باند رشته اصلی است.

د) کوتوله سفید، این شیوه‌ای است که روزنه تیره‌تر از شعرای یمانی است ولی با همان دما. این آن را با کوتوله سفید روی نمودار HR پائین قرار می‌دهد.

مسئله ۱۱۶ : به نمودار HR نگاه کنید. یک ستاره رشته اصلی را که ۱۰ برابر سنگین‌تر از خورشید است را در نظر بگیرید.

الف) آیا این ستاره آبی‌تر یا سرخ‌تر از خورشید خواهد بود؟ چرا؟

ب) دما و درخشندگی این ستاره را در نمودار HR بیابید. شعاع ستاره (در واحدهای شمسی) بیابید. (این مانند نسبت این شعاع ستاره به شعاع خورشید است) اکنون شعاع ستاره را بر اساس جایی که بین خطوط شعاع ثابت مورب روی نمودار قرار می‌گیرد را تخمین بزنید. دو مقدار را با هم مقایسه کنید.

ج) فرض کنید که این ستاره یکی از تیره‌ترین ستاره‌هایی است که می‌توانید به طور منظم در آزمایشگاه ببینید که در حدود 10^{12} برابر تیره‌تر از خورشید است. این ستاره در چه فاصله‌ای قرار دارد؟

حل : الف) آبی‌تر، به طور واضح روی نمودار این ستاره دارای دمای بالاتری از خورشید است. بنابراین این از نظر رنگ آبی‌تر خواهد بود.

ب) روی نمودار این مورد مانند آنچه که ما در حدود $T=21000K$ و $L=10^4L_\odot$ داریم به نظر می‌رسد. با توجه به این موارد اندازه را محاسبه کنیم.

$$L=4\pi R^2\sigma T^4$$
$$R=\sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T^4}}=\sqrt{\frac{\left(10^4\right)\left(3/85\times10^{26}W\right)}{4\pi\left(5/67\times10^{-8}W/m^2K^4\right)\left(21000K\right)^4}}$$
$$R=5/3\times10^9 m\left(\frac{1R_\odot}{6/96\times10^8}\right)=8\,R_\odot$$

این پاسخ فقط تا یک رقم با معنی خوب است. این به طور منطقی شبیه به مقداری است که از توزیع‌های اندازه روی شکل می‌یابید. (هر چیز بین ۵ و $10R_\odot$ به طور منطقی به اندازه کافی نزدیک به این است که بیشتر با چه دقتی قادر به دست کاری روی این شکل هستیم داده شده است.)

ج) داریم $F_\odot=10^{12}F_*$ یعنی خورشید یک تریلیون برابر روشن‌تر از ستاره است. از قسمت قبل می‌دانیم که:

$$L_*=10^4 L_\odot$$

این مورد برای خورشید و این ستاره هر دو به کار می‌رود. هر دو را بـه منظـور محاسـبه نسبت فاصله تقسیم می‌کنیم. (می‌دانیم که فاصله تا خورشید برابر است با $1AU$)

$$\frac{d_*}{d_\odot}=\frac{\sqrt{L_*/4\pi F_*}}{\sqrt{L_\odot/4\pi F_\odot}}$$
$$\frac{d_*}{d_\odot}=\sqrt{\frac{\left(L_*\right)\left(4\pi F_\odot\right)}{\left(L_\odot\right)\left(4\pi F_*\right)}}$$
$$d_*=\sqrt{\left(\frac{L_*}{L_\odot}\right)\left(\frac{F_\odot}{F_*}\right)}d_\odot$$
$$d_*=\sqrt{\left(10^4\right)\left(10^{12}\right)}\left(1AU\right)$$
$$d_*=10^8AU=500\,pc=1/5\times10^{19}m$$

مسئله ۱۱۷ : سیاره‌ای فرضی به نام والکان را در نظر می‌گیریم که در یک مدار در انـدازه $\frac{1}{4}$ اندازه مدار عطارد وجود داشت. سرعت زیاد دما روی سطح آن چقدر می‌بـود؟ فـرض کنید که دمای بسیار زیاد روی سطح عطارد ۴۵۰ درجه کلوین.

حل : رابطه‌ای که قبلا برای تعادل گرمایی سیاره به دست آوردیم مراجعه می‌کنیم:

$$\frac{L_{\odot}}{4\pi d^2}\pi R_d^2(1-a)=4\pi R_p^2\sigma T^4$$

که $L_{\odot}$ درخشندگی خورشید، d فاصله سیاره از خورشید R_p شعاع سیاره، a آلبیدو سیاره است و T دمای متوسط سطح سیاره است. که مانند بسیاری از حروف به نظر می‌رسد. طرف چپ معادله به شما سرعتی را می‌گوید که در آن سیاره توسط جذب اشعه‌های خورشید کاملا گرم می‌شود:

$$\frac{L_{\odot}}{4\pi d^2}$$

شار نور خورشید در سیاره، فاصله d از خورشید است. πR_p^2 مساحت مقطع عرضی سیاره مانند روزنه تلسکوپ شماست که می‌گوید چه مقدار از آن شار را سیاره قطع می‌کند. سرانجام $(1-a)$ کسر انرژی است که جذب می‌شود. (چون a کسری است که منعکس می‌شود.) در طرف راست شما سرعتی دارید که سیاره در حال سرد شدن است زیرا در حال پرتو افکنی است. σT^4 به شما می‌گوید که در یک متر مربع شی در دمای T انرژی را تشعشع می‌کند و $4\pi R_p^2$ مساحت سطح کل سیاره (یعنی تعداد کل متر مربع‌هایی که در حال پرتوافکنی هستند) است. در تعادل گرمایی، طرف‌های چپ و راست یکسان هستند. سرعتی که سیاره در حال کاملا گرم شدن است باید با سرعتی که در آن این در حال سرد شدن است یکسان باشد. (اگر یکسان نبودند پس دما یا بالا می‌رفت یا پائین می‌آمد) این معادله را در نظر بگیرید و دو طرف را بر $4\pi R_p^2$ تقسیم کنید و نتیجه چنین می‌شود:

$$\frac{L_{\odot}}{16\pi\sigma d^2}(1-a)=T^4$$

اگر T^4 را بدانیم می‌توانیم دوبار ریشه مربع را بگیریم تا T را به دست آوریم. اکنون می‌توانیم $L_{\odot}$ را جستجو کنیم. d را نمی‌دانیم ولی می‌توانیم آن را توسط مدار عطارد و تقسیم آن بر ۴ بیابیم. سرانجام می‌توانیم σ را بیابیم که درست ثابت استفان - بولتزمن است و همیشه دارای همان مقدار است که همه چیزی را که نیاز است بدانیم تا در آن جایگذاری کنیم و T را محاسبه کنیم به ما می‌دهد. ولی روش دیگری را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که T برای عطارد چقدر است و می‌دانیم که دو سیاره (عطارد و والکان) هر دو در حال چرخش به دور خورشید یکسانی هستند. بنابراین معادله را با

استفاده از d_V به عنوان فاصله از خورشید تا والکان و d_M به عنوان فاصله از خورشید تا عطارد می‌نویسیم و دو معادله را بر یکدیگر تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{\frac{L_{\odot}}{16\pi\sigma d_V^2}\left(1-a_V\right)=T_V^4}{\frac{L_{\odot}}{16\pi\sigma d_M^2}\left(1-a_M\right)=T_M^4}$$

$$\frac{L_{\odot}16\pi\sigma d_M^2\left(1-a_V\right)}{L_{\odot}16\pi\sigma d_V^2\left(1-a_M\right)}=\frac{T_V^4}{T_M^4}$$

همه موارد مشابه در صورت و مخرج حذف می‌شوند برای سادگی فرض می‌کنیم که $a_V = a_M$ بنابراین می‌توانیم عبارت $(1-a)$ را حذف کنیم.

$$\frac{d_M^2}{d_V^2}=\frac{T_V^4}{T_M^4}$$

معادله را مجددا به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left(\frac{d_M}{d_V}\right)^2=\left(\frac{T_V}{T_M}\right)^4$$

از دو طرف معادله جذر می‌گیریم:

$$\sqrt{\frac{d_M}{d_V}}=\frac{T_V}{T_M}$$

چون $d_M = 4d_V$ و $\sqrt{4}=2$ می‌دانیم که $T_V/T_M = 2$ بنابراین $T_V = 900K$ است. توجه داشته باشید که اگر یک پاسخ داشتید که دمای کمتری از دمای عطارد داشت می‌بایست مشکوک می‌شدید. والکان به خورشید نزدیک‌تر از عطارد است. (فاصله والکان تا خورشید کمتر از فاصله عطارد تا خورشید است)

مسئله ۱۱۸ : با استفاده از تعیین دمای موثر T_{eff} درخشندگی‌های ستاره‌های زیر را بر حسب درخشندگی‌های شمسی محاسبه کنید.

الف) کوتوله سفید با $R=0/01R_{\odot}$ و $T_{eff}=25000K$

ب) غول سرخ با $R=100R_{\odot}$ و $T_{eff}=3000K$

حل : الف) دمای موثر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$$

که برای خورشید چنین است:

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4$$

با تقسیم رابطه عمومی بر رابطه ویژه نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T_{eff}}{T_\odot}\right)^4$$

در نتیجه درخشندگی کوتوله سفید $0.035L_\odot$ به دست می‌آید.

ب) با استفاده از رابطه بالا درخشندگی غول قرمز برابر $716L_\odot$ است.

مسئله ۱۱۹ : منظومهٔ شمسی از یک صفحه تشکیل شده است که اساساً از هیدروژن مولکولی و مقداری هلیم تشکیل شده‌اند. ممکن است که سیارات همگن به صورت منطقی دارای اتمسفر غالب شده هیدروژن، بوده‌اند، همان گونه که سیارات غول مانند زحل هنوز دارا هستند. زمین همیشه دارای دمای متوسط حدوداً $280K$ بوده است و زحل دمای متوسط حدوداً $90K$ داشته است. زمین و زحل دارای جاذبه‌های سطح استوایی مشابه $g \sim 1000 cm/s^2$ هستند.

$$m_{H_2} = 6.64 \times 10^{-24} gm$$
$$m_{H_2} = 3.35 \times 10^{-24} gm$$
$$M_\oplus = 5.97 \times 10^{27} gm$$
$$M_v = 95.184 M_\oplus = 5.69 \times 10^{29} gm$$

الف) زمانی که سیارات تازه تشکیل شده بودند، مقیاس زمان فرار گرمایی هیدورژن زمین چقدر بوده است؟ مقیاس زمان مطابق برای زحل چقدر بوده است؟

ب) به همین نحو، مقیاس زمان فرار برای مولکول‌های نیتروژن زمین چقدر بود؟

$$(m_{N_2} = 4.65 \times 10^{-23} gm)$$

ج) توضیح دهید چرا اتمسفر زمین اساساً اکسیژن و نیتروژن مولکولی است و اتمسفر زحل اساساً (بیشتر) هیدروژن و هلیم است.

حل : الف) در ابتدا سرعت‌های متوسط گرمایی را تخمین می‌زنم. برای هیدروژن روی زمین:

$$v_{\cdot,H}=\sqrt{۳kT/m_H}=\sqrt{\frac{۳\times۱/۴\times۱۰^{-۱۶}\times۲۸۰}{۳/۳\times۱۰^{-۲۴}g}}=۱/۹\times۱۰^{۵}cm/s$$

زحل دارای دمایی است که $۰/۳۲=\frac{۹۰}{۲۸۰}$ برابر پایین‌تر از دمای زمین است. بنابراین روی زحل سرعت متوسط گرمایی برابر است با $\sqrt{۰/۳۲}=۰/۵۷$ برابر پایین‌تر از سرعت متوسط گرمایی زمین و زحل دارای سرعت متوسط گرمایی $v_{\cdot,H}=۱/۱\times۱۰^{۵}cm/s$ است.
اکنون ارتفاع‌های (منتها درجه) مقیاس راتخمین می‌زنم. برای هر دو مورد یک اتمسفر غالب شده توسط هیدروژن و ارتفاع مقیاس $h\sim\frac{kT}{m_H g}$ فرض می‌کنیم. برای زمین $h\sim۱۰^{۷}cm$. برای زحل با $۰/۳۲$ دمای کمتر $h\sim۴\times۱۰^{۶}cm$ هر دوی این مقدارها بزرگ‌تر از مقدارهای کنونی‌اشان هستند زیرا اتمسفرهایشان اکنون نیز مولکول‌های سنگین‌تر را در بردارند.
با تقسیم $\frac{h}{v_\cdot}$ یک مقیاس زمان مشخصه گرفتیم. برای زمین و هیدروژن این مقیاس زمان برابر است با $۷۷s$ برای زحل و هیدروژن این مقیاس زمان برابر است با ۳۶ ثانیه.
اکنون سرعت‌های فرار را تخمین می‌زنم. برای زمین سرعت فرار برابر است با:

$$v_e=\sqrt{۲gr}=۱/۱\times۱۰^{۶}cm/s$$

زحل دارای شعاع استوایی است که ۱۰ برابر بزرگ‌تر و شتاب مشابهی است. بنابراین دارای سرعت فراری است که $\sqrt{۱۰}$ برابر بزرگ‌تر از سرعت فرار زمین یا :

$$v_e\sim۳/۶\times۱۰^{۶}cm/s$$

اکنون با مقایسهٔ سرعت‌های متوسط گرمایی به سرعت‌های فرار نیاز داریم:

$$Y=\frac{v^{۲}_e}{v_\cdot^{۲}}=۲۵$$

برای زمین و $Y=۱۰۰۰$ برای زحل $e^Y/Y=۳\times۱۰^{۹}$ برای هیدروژن روی زمین و روی زحل. مقیاس‌های زمان فرار گرمایی برای هیدروژن از زمین در مرتبهٔ :

$$۷۷ \sec \times ۳\times ۱۰^{۹} \sim ۳\times ۱۰^{۱۱} \sec \sim ۱۰۰۰ \text{ سال}$$

هستند. برای زحل این مقیاس زمان بیشتر از مقیاس زمان (سن جهان) که $۱۰^{۱۰}$ سال دارد است.

ب) نیتروژن مولکولی در حدود ۱۴ برابر سنگین‌تر از هیدروژن مولکولی است.
بنابراین Y درحدود ۱۴ برابر بزرگ‌تر است:

$$Y = \frac{v_e^{۲}}{v_{\circ}^{۲}} = ۳۵۰$$

این به بدین معناست که مقیاس زمان فرار مانند مقیاس زمان فرار هیدروژن برای زحل خواهد بود و یک زمان بی‌نهایت طولانی.

ج) هیدروژن مولکولی می‌تواند از اتمسفر زمین در دماهای تعادل در مقیاس زمان کوتاه فرار کند. این مورد برای زحل درست نیست. ولی، زمین می‌تواند نیتروژن مولکولی و مولکول‌های سنگین دیگر را نگه دارد.

مسئله ۱۲۰ : شعرای یمانی روشن‌ترین ستاره در آسمان، آبی به نظر می‌رسد. طول موج حداکثر شدت در حدود $۲۹۰ nm$ است.

الف) دمای سطح شعرای یمانی چقدر است؟

ب) شعرای یمانی چه مقدار توان در واحد شطح پرتو افکنی می‌کند؟

ج) دمای سطح خورشید ۵۸۰۰ درجه کلوین است. شعرای یمانی چه مقدار توان در واحد سطح از خورشید تشعشع می‌کند؟

د) قطر شعرای یمانی در حدود دو برابر قطر خورشید است. انرژی خروجی آن در مقابل خورشید چقدر است؟

حل : الف) قانون وین را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$T = \frac{۲/۹\times ۱۰^{۶}}{\lambda_{peak}}\left(^{\circ}Knm\right) = ۱۰۰۰۰\,^{\circ}K$$

ب) از قانون استفان - بولتزمن استفاده می‌کنیم.

$$\frac{P}{A} = \sigma T^{۴} = \left(۵/۷\times ۱۰^{-۸}\frac{W}{m^{۲}K^{۴}}\right)\left(۱۰۰۰۰ K\right)^{۴} = ۵/۷\times ۱۰^{۸}\frac{W}{m^{۲}}$$

ج) چون دمای شعرای یمانی ۱/۷۲ برابر خورشید است، توان در سطح از شعرای یمانی $(1/72)^4$ برابر توان در واحد سطح از خورشید است. $(1/72)^4$ برابر است با $\sim 8/75$

د) شعرای یمانی ۸/۷۵ برابر انرژی خورشید در واحد سطح تشعشع می‌کند. چون این دارای دو برابر قطر است، دارای ۴ برابر مساحت خورشید می‌باشد. خروجی انرژی کلی آن برابر است با:

$$8/75 \times 4 = 35$$

برابر انرژی کلی خورشید

مسئله ۱۲۱ : مشاهدات طیف نگاری پیشنهاد می‌کنند که پلوتو از ذرات یخی پوشیده شده است و بنابراین دارای آلبدوی بالایی است ($A = 0/5$) روشنایی پلوتو در نقطه مقابله ($38AU$از زمین) 2×10^{-17} برابر روشنایی خورشید است. از این دو مشاهده، شعاع پلوتو را محاسبه کنید. دمای موثر خورشید $T_{\odot} = 5800°K$ تابندگی خورشید $L_{\odot} = 3/9\times10^{26}W$ شعاع خورشید $R_{\odot} = 4/7\times10^{-3}AU$، ثابت استفان - بولتزمن

$$\sigma = 5/67\times10^{-8} W/m^2.°K^4$$

حل : پلوتو را به عنوان یک جسم سیاه در نظر می‌گیریم، سپس با استفاده از رابطه دمای تعادلی جسم سیاه را برای پلوتو محاسبه می‌کنیم.

$$T_p = \left(\frac{R_{\odot}}{2r_p}\right)^{1/2} (1-A)^{1/4} T_{\odot}$$

$$T_p = \left(\frac{4/7\times10^{-3}}{2\times38}\right)^{1/2} (1-0/5)^{1/4} (5800)$$

$$T_p = 38°K$$

با داشتن دمای جسم سیاه و تابندگی آن می‌توانیم شعاع سیاره را به دست آوریم:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_p^4$$

$$R = \left(\frac{L}{4\pi\sigma T_p^4}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\times10^{-17}\times3/9\times10^{26}}{12/56\times5/67\times10^{-8}\times(38)^4}\right)$$

$$R = 72/6km$$

مسئله ۱۲۲ : دمای زمین را با این فرض که فقط انرژی ورودی به زمین، تابش از خورشید است و تنها انرژی خروجی از زمین، تابش گرمایی از سطحش است، تخمین بزنید.

حل : در ابتدا به انرژی ورودی به زمین از خورشید نیاز داریم. شار از خورشید در مدار زمین برابر است با:

$$F = \frac{L_{\text{خورشید}}}{۴\pi D^۲}$$

که $L_{\text{خورشید}}$ درخشندگی خورشید و D فاصله از زمین تا خورشید می‌باشد. تنها آن طرف زمین که با نور خورشید روشن شده، پرتو دریافت می‌کند بنابراین توان ورودی به زمین برابر است با:

$$P_{in} = \pi R^۲_{\text{زمین}} \quad F$$

که $R_{\text{زمین}}$ با شعاع زمین است (و از این رابطه برای مساحت دایره استفاده کرده‌ایم) اکنون به محاسبه دمایی نیاز داریم که در آن باید به منظور پرتوافکنی زمین این توان وجود داشته باشد. از قانون استفان - بولتزمن برای شی کروی:

$$P_{out} = ۴\pi R^۲_{\text{زمین}} \quad \sigma T^۴_{\text{زمین}}$$

سپس توان ورودی و خروجی را معادل قرار می‌دهیم:

$$۴\pi R^۲_{\text{زمین}} \quad \sigma T^۴_{\text{زمین}} \quad = \pi R^۲_{\text{زمین}} \quad F_{in} = \frac{\pi R^۲_{\text{زمین}} \quad L_{\text{خورشید}}}{۴\pi D^۲}$$

یا:

$$۴\sigma T^۴_{\text{زمین}} \quad = \frac{L_{\text{خورشید}}}{۴\pi D^۲}$$

در این جا می‌توانیم معادله را برای $T_{\text{زمین}}$ حل کنیم و اعداد را جایگذاری کنیم. ولی می‌توانیم مسئله را به اعداد قابل اندازه‌گیری کاهش دهیم اگر توجه داشته باشید که:

$$L_{\text{خورشید}} \quad = ۴\pi R^۲_{\text{خورشید}} \quad \sigma T^۴_{\text{خورشید}}$$

پس:

$$T^{۴}_{\text{زمین}} = T^{۴}_{\text{خورشید}} \left(\frac{R_{\text{خورشید}}}{۲D}\right)^{۲}$$

همچنین توجه داشته باشید که:

$$\frac{R_{\text{خورشید}}}{D}$$

که این مقدار نصف اندازه زاویه‌ای خورشید است همان گونه که از زمین دیده شده است (بر حسب واحد رادیان اندازه‌گیری شده است) فرد می‌تواند این را با استفاده از یک چوب یک متری (یا حتی یک ساعت) اندازه‌گیری کند. اندازه زاویه‌ای خورشید همان گونه که از زمین دیده می‌شود برابر است با °۰/۵۳ بنابراین:

$$\frac{R_{\text{خورشید}}}{D} = ۰/۰۰۴۷$$

دمای خورشید را می‌توان با استفاده از طیف نگار و تبدیل حداکثر طول موج طیف به دما اندازه‌گیری کرد. دوباره می‌توان با شخصی که روی زمین نشسته اندازه‌گیری کرد.

$$T_{\text{خورشید}} = ۵۸۰۰K$$

بنابراین دمای زمین برابر است با:

$$T_{\text{زمین}} = T_{\text{خورشید}} \left(\frac{R_{\text{خورشید}}}{۲D}\right)^{۱/۲} = ۲۸۰K$$

این مقدار در حدود °۴۵ فارنهایت است. دمای واقعی متوسط زمین در حدود $۵۵^{\circ}F$ است. بنابراین تخمین تا حدی دقیق است. برای دقیق‌تر بودن فرد مجبور خواهد بود شفافیت و انعکاس پذیری زمین و اتمسفرش را در نظر بگیرد.

مسئله ۱۲۳: ستاره‌ای هم اندازه با خورشید ولی با طیفی که با ۰/۲ میکرون تحلیل می‌رود تصور کنید.

الف) دمای سطح این ستاره چقدر است؟

ب) ستاره به چه رنگی ظاهر می‌شود؟

ج) درخشندگی ستاره کم و بیش چند برابر خورشید خواهد بود؟

حل: الف) از قانون وین برای یک جسم تیره استفاده می‌کنیم.

$$\lambda_{\max} = \frac{۰/۰۰۲۹Km}{T}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\lambda_{\max} = ۰/۲microns$$

به خاطر داشته باشید که میکرون را به متر تبدیل کنید.

$$۰/۲micron\left[\frac{۱۰^{-۶}m}{۱micron}\right] = ۲\times۱۰^{-۷}m$$

اکنون برای یافتن دمای سطح ستاره‌ای که حداکثر طول موج طیف آن داده شده است در قانون وین قرار می‌دهیم.

$$T = \frac{۰/۰۰۲۹Km}{\lambda_{\max}}$$
$$T = \frac{۰/۰۰۲۹Km}{۲\times۱۰^{-۷}m}$$
$$T = ۱۴۵۰۰K$$

ب) حداکثر طول موج طیف ستاره ۰/۲ میکرون در قسمت فرابنفش طیف الکترومغناطیس قرار می‌گیرد. بدان معنا که ستاره که شبیه یک جسم کدر است؛ نور بیشتری را در بخش آبی طیف مرئی در مقایسه با بخش قرمز انتشار می‌دهد. بنابراین ستاره از نظر چشمان ما آبی به نظر می‌رسد.

ج) از نسبت‌هایی که باعث مقایسه درخشندگی این ستاره با درخشندگی خورشید می‌شود استفاده می‌کنیم. معادله برای درخشندگی برابر است با:

$$L = ۴\pi R^{۲}F$$

که:

$$F = \sigma T^{۴}$$

می‌باشد.

$$\frac{L_*}{L_\odot} = \frac{۴\pi F_* R_*^{۲}}{۴\pi F_\odot R_\odot^{۲}}$$

گفته شد که این ستاره هم اندازه خورشید است بنابراین $R_* = R_\odot$

$$\frac{L_*}{L_\odot}=\frac{۴\pi F_* R_\odot^۲}{۴\pi F_\odot R_\odot^۲}$$
$$\frac{L_*}{L_\odot}=\frac{F_*}{F_\odot}$$
$$\frac{L_*}{L_\odot}=\frac{\sigma T_*^۴}{\sigma T_\odot^۴}$$
$$\frac{L_*}{L_\odot}=\frac{T_*^۴}{T_\odot^۴}$$

دمای خورشید ۵۸۰۰ درجه کلوین است و دمای ستاره را از قسمت الف می‌دانیم:

$$\frac{L_*}{L_\odot}=\frac{۱۴۵۰۰^۴}{۵۸۰۰^۴}$$
$$\frac{L_*}{L_\odot}=۳۹/۰۶$$
$$L_*=۳۹L_\odot$$

مسئله ۱۲۴ : میزان از دست رفتن کلی خورشید در حدود $۳\times۱۰^{-۱۴}\ M\ Sun/yr$ است. چه مقدار جرم هر روز به وسیله زمین جلوگیری می‌شود؟

حل : برای حل این مسئله بایستی بدانیم که چه اجزایی از باد خورشیدی به وسیله محیط‌های زمینی گرفته می‌شود. به عبارت دیگر صفحه زمین در مقایسه با کره شعاع $۱AU$ چقدر بزرگ‌تر است.

$$\frac{A_{\text{زمین}}}{A_{\text{کره}}}=\frac{\pi R_{\text{زمین}}^۲}{۴\pi R_{\text{کره}}^۲}=\frac{(۶\times۱۰^۶)^۲}{۴(۱/۵\times۱۰^{۱۱})^۲}=۴\times۱۰^{-۱۰}$$

این اجزای باد است که به وسیله زمین گرفته می‌شود.

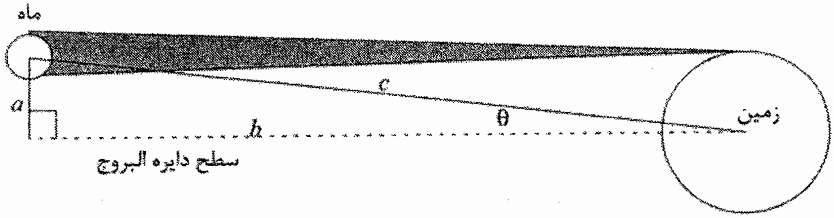
$$M=۳\times۱۰^{-۱۴}\frac{M_{\text{خورشید}}}{yr}۴\times۱۰^{-۱۰}=۱/۲\times۱۰^{-۲۳}\frac{M_{\text{خورشید}}}{yr}$$

مسئله را به روز تبدیل کرده و همچنین جرم خورشیدی را به کیلوگرم تبدیل می‌کنیم.

$$M=۴/۴\times۱۰^{-۲۱}\frac{M_{\text{خورشید}}}{day}=۸/۸\times۱۰^{۹}\frac{kg}{day}$$

تقریبا ۹ میلیارد کیلوگرم از جرم روزانه به وسیله زمین گرفته می‌شود.

مسئله ۱۲۵ : مدار ماه دارای زاویه 5° نسبت به صفحه دایره البروج است. موقعیت ماه می‌تواند در هر جایی بین $\pm 5^\circ$ بالا یا زیر صفحه دایره‌البروج همان گونه از خورشید و زمین عبور می‌کند، باشد شکل زیر را در نظر بگیرید.
الف) در چه فاصله‌ای از دایره‌البروج هیچ خورشید گرفتگی وجود نخواهد داشت؟ فاصله چقدر است؟



شکل ۲-۱۴

ب) زاویه θ چقدر است؟ به عبارت دیگر حداقل زاویه‌ای که ماه باید از دایره‌البروج داشته باشد تا هیچ خورشید گرفتگی وجود نداشته باشد چقدر است؟ با این فرض که ماه دارای زاویه تصادفی بین $\pm 5^\circ$ است در زمانی که بین خورشید و ماه عبور می‌کنند شما چه مدت به چه مدت انتظار خورشید گرفتگی را دارید؟

حل : الف) فاصله a شعاع زمین $\sim 6400\,km$ است. فاصله b فاصله بین ماه و زمین $384000\,km$ است.

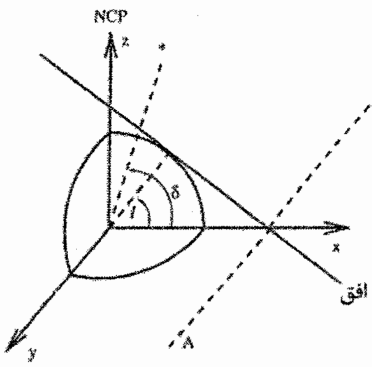
ب) چون:

$$\tan\theta = \frac{a}{b}$$

$$\theta = arc\tan\left(\frac{a}{b}\right) = 0/96^\circ$$

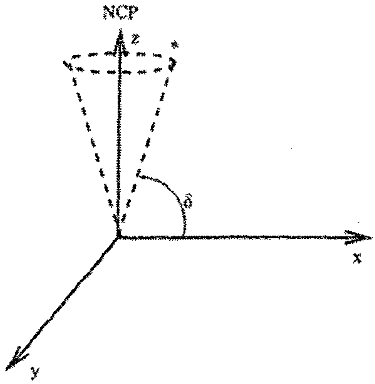
با این فرض که ماه دارای زاویه تصادفی بین $\pm 5^\circ$ است در زمانی که از بین خورشید و زمین عبور می‌کند در حدود $\frac{1}{5}$ زمان را بین $\pm 0/96^\circ$ خواهد بود. بنابراین تقریبا هر پنج ماه انتظار یک خورشید گرفتگی را داریم.

مسئله ۱۲۶ : $R.A$ یک ستاره در استوای آسمان چقدر است اگر این ستاره در افق در لحظه صفر نجومی در حال طلوع باشد؟
ب) اگر انحراف و زاویه میل ستاره بیشتر از صفر باشد آیا جواب‌ها متفاوت است؟ چرا؟
ج) اگر استوای آسمانی را صفحه $x-y$ در نظر بگیریم، قطب شمال آسمان محور z خواهد بود و سمت‌الراس ما صفحه $x-z$ است. اگر l عرض جغرافیایی ما باشد در لحظه صفر نجومی، اعتدال شب و روز بهاری بر روی نصف‌النهار مکان ما قرار دارد.
حل : الف) صفحه افق مکان ما، صفحه استوا را در یک خط مستقیم (حرف A در شکل) قطع می‌کند که موازی با محور y است. همان طور که همه ستارگان اساسا در فواصل نامحدود و بی‌نهایت دور قرار دارند، ستارگانی که در حال طلوع و غروب هستند در انتهای خط A قرار دارند و بنابراین در مسیر $\pm y$ قرار می‌گیرند. با اندازه گیری $R.A.$ برای شرق داریم $R.A.=6^h$ طلوع



شکل ۲-۱۵

ب) به طور مشابه $R.A.=18^h$ غروب
ج) جواب متفاوت است. به طور کلی مجموعه مسیر با انحراف ثابت δ، مخروط را تشکیل می‌دهند نه یک صفحه را. یک صفحه تنها در استوا تشکیل می‌شود. تقاطع یک مخروط و یک صفحه به طور کلی یک برش و مقطع مخروطی است. نه یک خط (برای مثال یک بیضی یک برش مخروطی است) به طور کلی تنها مقطع مخروطی موازی با محور y نخواهد بود.



شکل ۲-۱۶

مسئله ۱۲۷: ماه چند درجه (°)، چند دقیقه قوس (′) و چند ثانیه قوس (″) جابجا می‌شود تا یک ساعت در آسمان حرکت کند؟ چه زمانی لازم است تا ماه به اندازه قطرش در آسمان حرکت کند؟

حل: یک روز قطبی ۲۴ ساعت و ۴۸ دقیقه به طول می‌انجامد در نتیجه ماه ۳۶۰ درجه (یک دور کامل) در ۲۴ ساعت و ۸ دقیقه حرکت می‌کند. هر ساعت ماه از زاویه a می‌گذرد.

$$a=\frac{۳۶۰^\circ}{۲۴/۸\ \text{ساعت}} \Rightarrow a=۱۴/۵^\circ/\text{ساعت}$$

ماه در هر ساعت به اندازه ″۰ ′۳۰ °۱۴ حرکت می‌کند.

قطر ماه حدودا برابر است با °۰/۵ یا ′۳۰ بنابراین برای به دست آوردن زمانی که °۰/۵ حرکت می‌کند. زاویه فاصله طی شده را به سرعت زاویه‌ای تقسیم می‌کنیم.

$$t=\frac{d}{v} \Rightarrow t=\frac{۰/۵^\circ}{۱۴/۵^\circ/\text{ساعت}} \Rightarrow t=۰/۰۳۴\ \text{ساعت}$$

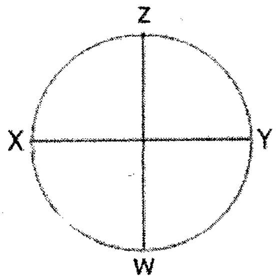
$$(\text{ساعت}۱ = ۶۰\text{دقیقه})$$

$$t=۲/۱\ \text{دقیقه}$$

بنابراین ماه بنا به حرکت مرکب زمین و ماه مسیری به اندازه قطرش را در ۲/۱ دقیقه یک بار طی می‌کند.

مسئله ۱۲۸ : غواصی در عمق ۲۰ متری دریا به خورشید نگاه می‌کند. اگر زاویه سمت‌الراسی خورشید ۴۵ درجه باشد، خورشید از نظر این غواص بیضی دیده خواهد شد. صد برابر خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟ ضریب شکست آب دریا ۱/۳۳ فرض کنید.

حل : قرص خورشید را به صورت زیر علامت گذاری می‌کنیم. خط XY در امتداد افق ناظر و موازی سطح آب است و خط ZW عمود بر سطح آب است. پرتوهایی که از دو نقطه X و Y به سطح آب می‌تابد فواصل یکسانی را طی می‌کنند و پس از آن شکست می‌یابند.



شکل ۲-۱۷

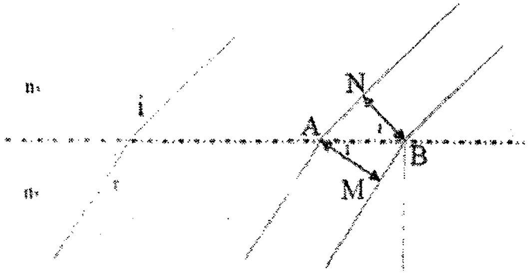
به این دلیل فاصله عمودی میان آنها تغییری نمی‌کند بنابراین اندازه ظاهری XY پس از شکست تغییری نمی‌یابد. اما پرتویی که از نقطه Z به آب می‌تابد دیرتر از پرتو تابیده از W به سطح آب می‌رسد. اندازه ظاهری ZW را پس از شکست AM می‌نامیم. بنابراین داریم:

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{n_۲}{n_۱}, \qquad n_۱=۱, \quad n_۲=۱/۳۳, \qquad \angle i=۴۵^\circ$$

$$\frac{\sin ۴۵}{\sin r}=۱/۳۳ \Rightarrow \angle r=۳۲/۱۲^\circ, \qquad \angle A_۱=\angle r, \qquad \angle B_۱=۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow NB=AB\cdot\cos B_۱, \qquad AM=AB\cdot\cos A_۱$$

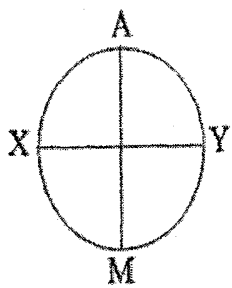
$$\frac{NB}{AM}=\frac{\cos B_۱}{\cos A_۱}=۰/۸۳۴۹$$



شکل ۲-۱۸

$$\frac{NB}{AM}=\frac{XY}{AM}=\cdot/\text{۸۳۴۹}$$

$$e=\sqrt{\text{۱}-\frac{b^{\text{۲}}}{a^{\text{۲}}}}=\sqrt{\text{۱}-\frac{(XY/\text{۲})^{\text{۲}}}{(AM/\text{۲})^{\text{۲}}}}=\sqrt{\text{۱}-(\cdot/\text{۸۳۴۹})^{\text{۲}}}=\cdot/\text{۵۵}\Rightarrow \text{۱۰۰}\times e=\text{۵۵}$$



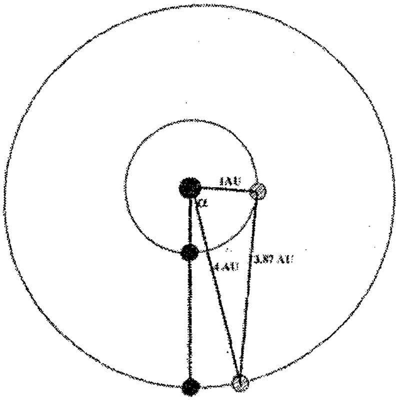
شکل ۲-۱۹

مسئله ۱۲۹ : بارتنای نجومی دارای مدار مدوری با نیم محور اصلی $\text{۴}AU$ است و اطـراف خورشید در مسیری مشابه همانند سیارات گردش می‌کند. (فرض کنید که مـدار زمـین هم مدور است و اینکه دو مدار هم صفحه هستند.)

در نیمه شب ۳۱ دسامبر (دقیقا در آغاز سال نو) بارتنا در جهت مخالف قرار دارد. چقـدر طول می‌کشد که در تربیع دیده شود؟

(راه حل شما باید شامل نموداری باشد که به درستی علامت گذاری شده باشد و حرکت زمین و بارتنا را نشان دهد. اولا توجه کنید که می‌تـوان دوره گـردش بارتنـا را از قـانون

سوم کپلر تعیین کنید. به دلیل اینکه زمین و بارتنا اطراف خورشید گردش می‌کنند می‌توان به راحتی از $P^{۲} = a^{۳} = \left(۴AU\right)^{۳}$ استفاده کرد، بنابراین $P = ۸$ سال.
ثانیا می‌توان جواب را از طریق توجه به این امر که زمین در مدار خود بسیار سریع‌تر از بارتنا حرکت می‌کند، تخمین زد. بنابراین زمانی که زمین ۹۰° حرکت کرده است، بارتنا حرکتی ندارد. بنابراین جواب باید به یک چهارم سال نزدیک باشد.



شکل ۲-۲۰

زاویه $\alpha = \cos^{-۱}\left(۱/۴\right) = ۷۵/۵^{\circ}$ است. این زاویه بین میزان فاصله حرکت زمین و میزان فاصله حرکت بارتنا متفاوت است.

$$\left(\frac{۳۶۰^{\circ}}{۱yr}\right)\Delta t - \alpha = \left(\frac{۳۶۰^{\circ}}{۸yr}\right)\Delta t$$

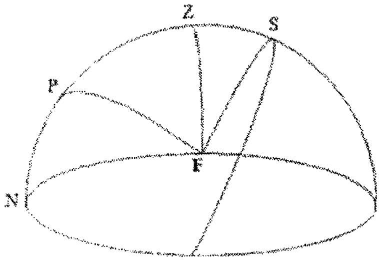
$$\Delta t - \frac{۷۵/۵^{\circ}}{۳۶۰^{\circ}} yr = \frac{\Delta t}{۸}$$

$$\frac{۷}{۸}\Delta t = ۰/۲۰۶yr$$

$$\Delta t = ۰/۲۳۹۶yr = ۸۷/۵days$$

مسئله ۱۳۰ : ستاره δ جبار با مختصات $\delta = ۰^{\circ}$ و $\alpha = ۵^{h}\,۳۲^{\min}$ در تاریخ ۸۴/۱۱/۱۳ در شهری با مختصات $۵۳^{\circ}E$ =طول جغرافیایی و $۳۳^{\circ}N$ =عرض جغرافیایی با چه سمتی طلوع می‌کند؟

حل :



شکل ۲-۲۱

زاویه PZF = سمت نقطه F (محل طلوع ستاره) = A و $FZ = ۹۰^\circ$ ارتفاع سمت‌الراس

چون F روی مسیر حرکت ستاره قرار دارد و میل ستاره برابر صفر است. $PF = ۹۰^\circ$

طبق قانون کسینوس‌ها در مثلث PZF داریم:

$$\cos PF = \cos PZ \cdot \cos ZF + \sin PZ \cdot \sin ZF \cdot \cos PZF$$
$$\cos ۹۰^\circ = \sin(۹۰ - \varphi) \cdot \cos A \Rightarrow \cos ۹۰^\circ = \cos\varphi \cdot \cos A$$
$$\cos A = ۰ \Rightarrow A = ۹۰^\circ$$

مسئله ۱۳۱ : سیاره مریخ با دوره تناوب مداری ۱/۸۸ سال زمینی در تاریخ ۸۴/۸/۱۶ در موقعیت مقابله بوده است. مقارنه بعدی این سیاره چه زمانی است؟ مدارهای زمین و مریخ را دایروی در نظر بگیرید.

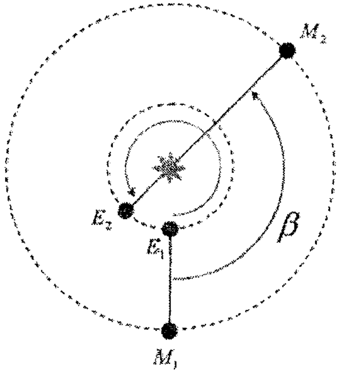
حل : t زمان بین مقابله و مقارنه است.

$$\beta = \frac{۲\pi}{T_M} t$$

$$\beta + \pi = \frac{۲\pi}{T_E} t$$

$$\frac{۲\pi}{T_M} t + \pi = \frac{۲\pi}{T_E} t \Rightarrow ۲t \cdot \left(\frac{۱}{T_E} - \frac{۱}{T_M}\right) = ۱$$

$$۲t = \frac{T_E T_M}{T_M - T_E} \Rightarrow t = \frac{۱/۸۸۱}{۰/۸۸۱ \times ۲} = ۱/۰۶۸ \text{ سال}$$



شکل ۲-۲۲

بنابراین اولین مقارنه بعدی در حدود یک سال و ۲۵ روز بعد یعنی ۱۱ آذر ۸۵ اتفاق می‌افتد.

مسئله ۱۳۲: پروکسیما- قنطورس (α قنطورس C) نزدیک‌ترین ستاره به خورشید است و قسمتی از یک منظومه ستاره‌ای سه جزئی است. دوره آن ۱۹۵۰ متناسب با:

$$(\alpha,\delta)=\left(۱۴^h۲۶/۳^m,-۶۲^\circ۳۸'\right)$$

در حالی که مرکز منظومه در $\left(۱۴^h۳۶/۲^m,-۶۰^\circ۳۸'\right)$ قرار دارد.

الف) پراکندگی جانبی پروکسیما- قنطورس از مرکز منظومه ستاره‌ای سه جزئی چقدر است.

ب) اگر فاصله تا پروکسیما- قنطورس برابر $۴\times۱۰^{۱۸}cm$ باشد. فاصله ستاره از مرکز منظومه سه جزئی چقدر است؟

$$\Delta\alpha=۹/۹^m=۲/۴۸^\circ,\Delta\delta=۲^\circ$$

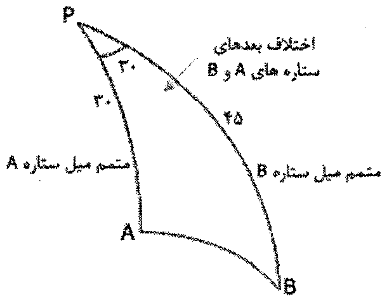
با استفاده از

$$(\Delta\theta)^۲=(\Delta\alpha\cos\delta)^۲+(\Delta\delta)^۲$$
$$=\left[(۲/۴۸^\circ)(\cos۶۱^\circ)\right]^۲+(۲^\circ)^۲$$
$$=۲/۳۳^\circ$$

$$s = d\Delta\theta = \left(۴\times ۱۰^{۱۸} cm\right)\left(\frac{۲/۳۳^{\circ}}{۵۷/۳۰/rad}\right)$$

$$= \left(۱/۶۳\times ۱۰^{۱۷} cm\right)\left(\frac{۱AU}{۱/۵\times ۱۰^{۱۳}}\right) = ۱۰۸۴۴AU$$

مسئله ۱۳۳ : فاصله زاویه‌ای ستاره A با مختصات $a = ۹^{h}$ و $\delta = ۶۰^{\circ}$ و ستاره B با مختصات $a = ۱۱^{h}$ و $\delta = ۴۵^{\circ}$ در آسمان چقدر است؟



شکل ۲-۲۳

حل : طبق قانون کسینوس‌ها در مثلث کروی PAB داریم (P ستاره قطبی است.)

$$\cos AB = \cos ۳۰ \times \cos ۴۵ + \sin ۳۰ \times \sin ۴۵ \times \cos ۳۰$$

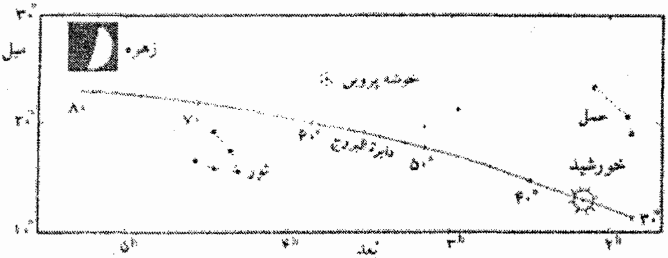
$$\cos AB = \frac{\sqrt{۶}}{۴} + \frac{\sqrt{۶}}{۸} = \frac{۳\sqrt{۶}}{۸} \Rightarrow AB = ۲۳^{\circ}$$

مسئله ۱۳۴ : با توجه به شکل زیر و با این فرض که زهره در صفحه دایره‌البروج به دور خورشید می‌گردد، فاصله زهره تا زمین کدام است؟

حل : مطابق شکل فاصله زاویه‌ای زهره تا خورشید برابر است با:

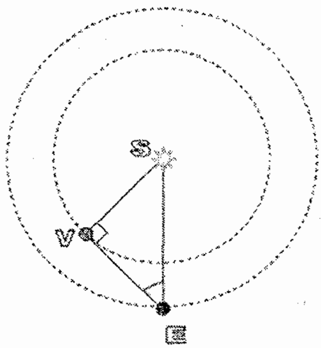
$$E = \left(۸۰^{\circ} - ۳۵^{\circ}\right) = ۴۵^{\circ}$$

و باز با توجه به شکل زهره در این حالت در تربیع خود قرار دارد. (لذا زاویه E برابر ۴۵ درجه می‌باشد.)



شکل ۲-۲۴

$$\cos E = \frac{VE}{ES}$$
$$VE = ۱AU \cdot \cos E$$
$$VE = ۱ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰/۷AY$$



شکل ۲-۲۵

مسئله ۱۳۵: دوتا از قمرهای مشتری به نام هیمالیا و کارمه در خلاف جهت یکدیگر به دور مشتری می‌گردند. دوره تناوب مداری هیمالیا ۲۵۱ شبانه روز زمینی و دوره تناوب مداری کارمه ۷۰۲ شبانه روز زمینی است. اگر فرض کنیم که مدارهای این دو قمر دایره‌ای و تقریبا در صفحه استوای مشتری قرار دارند، فاصله زمانی دو مقارنه متوالی برای این اقمار از نظر راصد روی استوای مشتری چند شبانه روز زمینی است؟

حل :

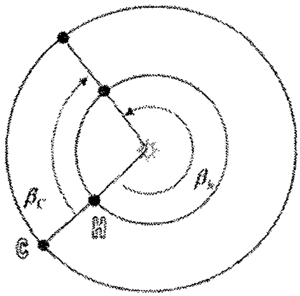
$$\beta_c = \frac{۲\pi}{P_c} t$$

$$\beta_h = \frac{۲\pi}{P_h} t$$

$$\beta_h + \beta_c = ۲\pi$$

$$\frac{۱}{P_h} + \frac{۱}{P_c} = \frac{۱}{t} \Rightarrow t = \frac{P_h P_c}{P_h + P_c}$$

$t = ۱۸۴/۸۹ \cong ۱۸۵$ روز



شکل ۲-۲۶

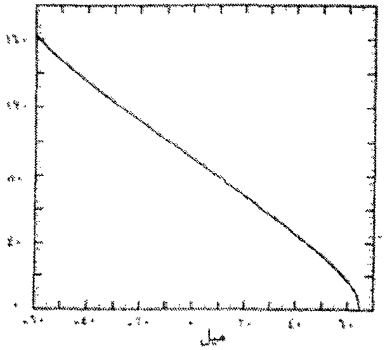
مسئله ۱۳۶ : نمودار زیر تغییرات زاویه سمت بر حسب تغییرات میل ستاره‌ها را در هنگام طلوع برای محل معینی نشان می‌دهد. عرض جغرافیایی این محل چقدر است؟

حل : ستاره‌ای که زاویه سمت طلوع آن صفر درجه است، ستاره‌ای است که مدار آن دقیقا از نقطه شمال افق، خراشان می‌گذرد. با توجه به نمودار بالا برای محل داده شده میل ستاره‌ای که زاویه سمت آن صفر درجه است برابر ۶۵ درجه است. بنابراین:

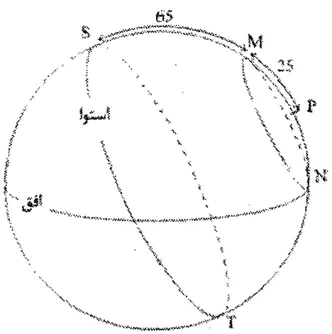
$\delta = ۶۵^\circ, \qquad A = ۰$

فاصله قطبی $= ۹۰ - \delta = ۲۵^\circ$

فاصله قطبی $= PM = PN = ۲۵^\circ \Rightarrow \varphi = ۲۵^\circ$



شکل ۲-۲۷



شکل ۲-۲۸

مسئله ۱۳۷ : فرض کنید که شما می‌خواهید از یک کهکشان بسیار تیره عکس بگیرید. با استفاده از یک تلسکوپ دارای قطر یک متری عکس شما به یک پرتوگیری نیاز دارد. اگر شما از یک تلسکوپ دارای قطر دومتری استفاده می‌کردید این نمایش به چقدر زمان نیاز داشت ؟ دلیل خود را توضیح دهید.

حل : آینه تلسکوپ دو متری دارای سطح چهار برابر بزرگ‌تر از مساحت سطح آینه یک متری است بنابراین چهار برابر نور بیشتری جمع آوری می‌کند. لذا به باز گذاشتن حائل (دوربین عکاسی و غیره) فقط برای یک چهارم زمان یا ۱۵ دقیقه نیاز داریم. هر سطح دو بعدی اگر شما اندازه‌اش را در دو بعد دو برابر کنید، مساحتش چهار برابر خواهد شد. برای یک دایره می‌توانید این رابطه $A = \pi r^2$ را ببینید. برای آینه یک متری شعاع برابر است با ۰/۵ متر بنابراین مساحت برابر است با:

$$\left(۳/۱۴\right)\left(۰/۵\right)^{۲}=۰/۷۸۵$$

متر مربع. برای آینه دو متری شعاع برابر است با ۱ متر بنابراین مساحت برابر است با ۳/۱۴ متر مربع که چهار برابر بزرگی ۰/۷۸۵ متر مربع.

مسئله ۱۳۸: در رصدخانه *ISU Fick* تلسکوپی داریم که قطرش $۰/۶m$ است. تلسکوپ *Keck I* دارای قطر $۱۰m$ است.

الف) توان جمع‌آوری نور *Keck I* چند برابر بزرگ‌تر است؟

ب) در طول موج $۶۵۰nm$ تفکیک پذیری زاویه‌ای تلسکوپ *Fick* چند برابر بزرگ‌تر است؟

ج) فرض کنید که می‌توانید به ندرت دهانه آتشفشان کوچک روی ماه با استفاده از *Keck I* ببینید. آیا می‌توانید آن را با تلسکوپ *Fick* ببینید؟ توضیح دهید.

حل: الف) نسبت توان‌های جمع آوری نور (LGP) مساوی است با مربع نسبت قطرها:

$$\frac{LGP_{Keck}}{LGP_{Fick}}=\left(\frac{D_{Keck}}{D_{Fick}}\right)^{۲}$$
$$=\left(\frac{۱۰}{۰/۶}\right)^{۲}=۲۷۷/۸$$

قدرت جمع آوری نور(LGP) تلسکوپ *Keck I* در حدود ۲۷۷/۸ برابر تلسکوپ *Fick* است.

ب) در طول موج داده شده، تفکیک‌پذیری زاویه‌ای تلسکوپ مساویست با معکوس نسبت قطرها.

$$\frac{\theta_{Fick}}{\theta_{Keck}}=\left(\frac{D_{Keck}}{D_{Fick}}\right)$$
$$=\left(\frac{۱۰}{۰/۶}\right)=۱۶/۷$$

تفکیک‌پذیری زاویه‌ای تلسکوپ *Fick* برابر است با ۱۶/۷ برابر بزرگ‌تر از تلسکوپ *Keck I*

ج) خیر، تفکیک پذیری زاویه‌ای $Fick$ بزرگ‌تر است، بنابراین دهانه به ندرت توسط $Keck\,I$ تفکیک شده توسط $Fick$ تفکیک نخواهد شد.

مسئله ۱۳۹ : فاصله متوسط تا ماه برابر است با ۳۸۴۴۰۰ کیلومتر و ماه زاویه $۰/۵^\circ$ را بسط می‌دهد.

الف) شعاع ماه را محاسبه کنید.

ب) اگر تلسکوپی داشتید که دید واضحی از اشیا و خصوصیاتی که زاویای حداقل ۲ ثانیه قوس را بسط می‌دهد، می‌داد قطر کوچک‌ترین دهانه‌ای که می‌توانید روی ماه ببینید چقدر است؟

حل : الف) فاصله تا ماه $d = ۳۸۴۴۰۰km$ و قطر زاویه‌ای ماه برابر $\alpha = ۰/۵^\circ$ است.

$$\text{درجه } ۱ = (۶۰\times۶۰)arcs$$

قطر زاویه‌ای در ثانیه قوس برابر است با:

$$\alpha = ۰/۵^\circ \times ۶۰ \times ۶۰ = ۱۸۰۰''$$

فرمول زاویه کوچک جدایی خطی D را از طریق فاصله d به جدایی زاویه‌ای D مربوط می‌سازد. از فرمول زاویه کوچک استفاده می‌کنیم.

$$D = \frac{\alpha d}{۲۰۶۲۶۵}$$

$$= \frac{۱۸۰۰\times۳۸۴۴۰۰}{۲۰۶۲۶۵} = ۳۳۵۵km$$

شعاع نصف قطر است از اینرو شعاع ماه برابر است با:

$$R = \frac{۳۳۵۵}{۲} \approx ۱۶۷۷/۵\,km$$

دوباره با استفاده از فرمول زاویه کوچک برای $\alpha = ۲''$ در فاصله $d = ۳۸۴۴۰۰km$ داریم. قطر کوچک‌ترین دهانه آتشفشانی برابر است با:

$$D = \frac{\alpha d}{۲۰۶۲۶۵} = \frac{۲\times۳۸۴۴۰۰}{۲۰۶۲۶۵} = ۳/۷\,km$$

مسئله ۱۴۰ : شخصی تلسکوپی می‌خرد که دارای طول کانونی $۷۰۰mm$ و دو عدسی چشمی با طول‌های کانونی $۲۰mm$ و $۱۰mm$ است. با این وضع فرد چه بزرگنمایی را می‌تواند به دست آورد؟

حل : بزرگنمایی تلسکوپ توسط رابطه:

$$M = \frac{F_{\circ}}{F_e}$$

داده می‌شود. برای عدسی چشمی $۲۰mm$ داریم:

$$M = \frac{۷۰۰}{۲۰} = ۳۵\times$$

برای عدسی چشمی $۱۰mm$ داریم:

$$M = \frac{۷۰۰}{۱۰} = ۷۰\times$$

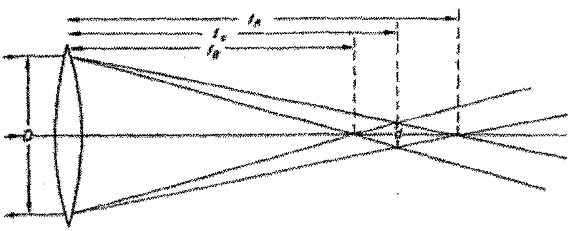
مسئله ۱۴۱ : یک عدسی با قطر ۴۰۰ سانتی‌متر به ازای مناطق آبی و قرمز طیف دارای فواصل کانونی به ترتیب $f_B = ۲۹۹۵$ میلی‌متر و $f_R = ۳۰۰۰$ میلی‌متر است.

الف) مقدار فاصله کانونی معادل محلی را که دایره حداقل آشفتگی در آن قرار دارد حساب کنید.

ب) اندازه خطی تصویر یک ستاره در این نقطه کانونی چقدر است؟

حل : الف) در مثلث‌های مشابه مطابق شکل زیر داریم:

$$\frac{D}{f_B} = \frac{d}{f_C - f_B}$$
$$\frac{D}{f_R} = \frac{d}{f_R - f_C}$$



شکل ۲-۲۹

از تقسیم این کمیت‌ها خواهیم داشت:

$$\frac{f_R}{f_B}=\frac{f_R-f_C}{f_C-f_B}$$

بنابراین:

$$f_C=\frac{۲f_Bf_R}{f_R+f_B}$$

به عبارت دیگر:

$$f_C=\frac{۲\times ۳۰۰۰\times ۲۹۹۵}{۵۹۹۵}$$
$$f_C=۲۹۹۷\,mm$$

ب) مجددا طبق مثلث‌های مشابه داریم:

$$\frac{d}{(f_C-f_B)}=\frac{D}{f_B}$$

بنابراین:

$$d=\frac{D(f_C-f_B)}{f_B}$$

به عبارت دیگر:

$$d=\frac{۴۰\times ۲}{۲۹۹۵}=۰/۳۳\,mm$$

مسئله ۱۴۲ : اگر شما ستاره‌ای را با همان قطر خورشید، ولی در فاصله ۱۰ پارسک در طول موج $۵۰۰\,nm$ مشاهده می‌کردید، به تلسکوپ چقدر بزرگی برای به دست آوردن تفکیک پذیری که ۱۰ برابر کوچک‌تر از اندازه زاویه است نیاز داشتید؟

حل : قطر ستاره مساوی است با قطر خورشید که برابر است با:

$$D=۱/۴\times ۱۰^{۹}m$$

فاصله تا ستاره برابر است با:

$$L=۱۰\,pc=۳/۱\times ۱۰^{۱۷}m$$

اندازه زاویه‌ای ستاره برابر است با:

$$\theta_{star}=\frac{D}{L}$$

تفکیک پذیری زاویه‌ای تلسکوپ برابر است با:

$$\theta_{res} = \frac{\lambda}{d}$$

که λ طول موج نور و d قطر تلسکوپ است.

$$\theta_{res} = ۰/۱\theta_{star}$$

را می‌خواهیم که به این معناست:

$$\theta_{res} = \frac{\lambda}{d} = ۰/۱\theta_{star} = ۰/۱\frac{D}{L}$$

می‌توانیم این معادله را برای d حل کنیم:

$$d = \frac{۱۰\lambda L}{D} = \frac{۱۰ \times (۵۰۰ \times ۱۰^{-۹} m) \times (۳/۱ \times ۱۰^{۱۷} m)}{۱/۴ \times ۱۰^{۹} m} = ۱۱۰۰ m$$

تلسکوپ بسیار بزرگی (به احتمال بیشتر یک آرایش وسیع گسترده‌ای از تلسکوپ‌ها) با قطر $۱۱۰۰m$ برای به دست آوردن تصاویری (حتی با فقط ۱۰۰~ پیکسل در تصویر) از ستاره خورشید مانندی که در فاصله ۱۰ پارسک قرار دارد نیاز خواهد بود.

مسئله ۱۴۳: با استفاده از دستگاه پیشرفته به نام اپتیک‌های تطابقی و آینه‌های انعطاف پذیر رصدخانه کک روی جزایر هاوایی قادر به تصحیح برای اختلال جوی در قسمت مادون قرمز نزدیک طیف و نزدیک شدن تفکیک پذیری محدود به پراش تئوریکی است.
الف) تفکیک پذیری زاویه‌ای (بر حسب ثانیه قوس) یکی از تلسکوپ‌های کک (روزنه‌ای دارای قطر ۱۰ متر) با مشاهده $۲/۲\mu m$ چقدر است؟ به طور تقریبی این چگونه با اجرای غیر صحیح تلسکوپ مشابه با مشاهده در $۵۰۰nm$ مقایسه می‌شود؟
ب) دو تلسکوپ کک ۱۰ متری در ۸۵ متر فاصله واقع شده‌اند. تفکیک پذیری زاویه‌اشان بر حسب ثانیه قوس زمانی که با هم به عنوان تداخل سنج $۲/۲\mu m$ کار کرده‌اند، چقدر است؟

حل: الف) حد پراش برابر است با:

$$\theta_{\lim} = ۱/۲۲\frac{\lambda}{D} = ۱/۲۲\left(\frac{۲/۲ \times ۱۰^{-۶} m}{۱۰ m}\right) = ۲/۷ \times ۱۰^{-۷} rad$$

تعداد ثانیه‌های قوس در یک رادیان از تعداد رادیان‌ها و درجه‌ها در یک دایره کامل دنبال می‌شود.

$$۲\pi\, rad = ۳۶۰^\circ \times \frac{۶۰'}{۱^\circ} \times = \frac{۶۰''}{۱'} = ۱۲۹۶۰۰۰''$$

بنابراین:

$$\theta_{\lim} = \left(۲/۷ \times ۱۰^{-۷} rad\right)\left(\frac{۱۲۹۶۰۰۰''}{۲\pi\, rad}\right) = ۰/۰۵۵''$$

تفکیک پذیری برای یک تلسکوپ تصحیح نشده برای اختلال جوی (دیدن) به طور نمونه‌ای محدود می‌شود به نه بیش از $\theta_{eff} \approx ۱''$ در قسمت قابل رویت طیف $\lambda \approx ۱۰۰ nm$ در نتیجه سیستم اپتیک‌های تطابقی یک پیشرفت قطعی در تفکیک پذیری تصویری تولید می‌کند.

ب) تفکیک پذیری برای یک تداخل سنج برابر است با:

$$\theta_{\lim} = \frac{\lambda}{B} = \frac{۲/۲ \times ۱۰^{-۶} m}{۸۵ m} = ۲/۶ \times ۱۰^{-۸} rad = ۰/۰۰۵۳''$$

مسئله ۱۴۴: اگر راصدی شدت نور ستاره‌ای را از پشت تلسکوپ خود برابر شدت نور ستاره شباهنگ با چشم غیر مسلح دیده باشد، قطر آینه تلسکوپ او تقریبا چه اندازه است؟ قدر ظاهری این ستاره و شباهنگ به ترتیب ۵/۱۱ و ۱/۵۸- می‌باشند.

حل:

$$m_۲ - m_۱ = ۲/۵ \log \frac{b_۱}{b_۲}$$

$$\frac{b_۱}{b_۲} = \frac{L_۱/A_۱}{L_۲/A_۲} = \frac{(D_۲)^۲}{(D_۱)^۲} = \left(\frac{D_۲}{D_۱}\right)^۲$$

$$\Rightarrow m_۲ - m_۱ = ۲/۵ \log\left(\frac{D_۲}{D_۱}\right)^۲ \Rightarrow m_۲ - m_۱ = ۵ \log \frac{D_۲}{D_۱}$$

$$D_۱ = ۸mm \Rightarrow ۵/۱۱ + ۱/۵۸ = ۵ \log \frac{D_۲}{۸} \Rightarrow D_۲ = ۱۷۴mm = ۱۷/۴cm$$

مسئله ۱۴۵: برای درک مشکلات مشاهده‌ای وابسته به سعی برای آشکار کردن نشر ستاره‌ای کهکشان به دور کوازار، قدر ظاهری و اندازه زاویه‌ای که یک کهکشان بزرگ ($M = -۲۱$, $R = ۵۰ kpc$) در انتقال سرخ

الف) $z = ۰/۱$

ب) $z=1$ خواهد داشت را محاسبه کنید. ($H = 72\,km s^{-1} Mpc^{-1}$)

حل : الف)

$$d = \frac{cz}{H} = \frac{(3\times10^5\ km/s)(0/1)}{(72\,km/s/Mpc)} = 417\,Mpc$$

$$\alpha = \frac{206265D}{d} = \frac{206265(50\,kpc)}{(417\times10^3\,kpc)} = 24/7\,arc\sec$$

$$m - M = 5\log d - 5 \Rightarrow m = -21 + 5\log(417\times10^6\,pc) - 5 = 17/1$$

ب) همانند قسمت الف داریم:

$$d = \frac{cz}{H} = \frac{(3\times10^5\ km/s)(1)}{(72\,km/s/Mpc)} = 2500\,Mpc$$

$$\alpha = \frac{206265D}{d} = \frac{206265(50\,kpc)}{(2500\times10^3\,kpc)} = 4/1\,arc\sec$$

$$m - M = 5\log d - 5 \Rightarrow m = -21 + 5\log(2500\times10^6\,pc) - 5 = 21$$

مسئله ۱۴۶ : خط HI (طول موج ساکن $21/10611cm$) را در طول $22/58173cm$ در یک کهکشان Sb که قدر ظاهری برابر با ۱۳/۲۳ در فیلتر آبی در زمانی که خاموشی بین کهکشانی کم شده است، مشاهده می‌کنیم. این خط ۲۱ سانتیمتر پهنایی دارد که یک حداکثر سرعت $406\,km/s$ برای چرخش این کهکشان می‌دهد.

الف) قدر مطلق این کهکشان در فیلتر آبی چقدر است؟

ب) فاصله تا این کهکشان در واحد مگا پارسک چقدر است؟

ج) سرعت شعاعی این کهکشان چقدر است؟

حل : الف) همان گونه که قبلا ذکر شد می‌توان این حل را با رابطه تور- ماهیگیر به دست آورد. برای یک کهکشان Sb یک حداکثر سرعت چرخش V_{max} برابر است با $406\,km/s$ یک قدر مطلق آبی می‌دهد:

$$M_B = -10/2\log V_{max} + 2/71$$
$$= -10/2\log(406) + 2/72 = -26/6 + 2/71 = -23/9$$

ب) از فرمول قدرمطلق فاصله برای تعیین این فاصله استفاده می‌کنیم.

$$B-M_B=5\log\left(\frac{d}{10\,pc}\right)$$

$$\frac{d}{10\,pc}=10^{0/2(B-M_B)}=10^{0/2[13/22-(-23/9)]}=10^{7/43}=2/69\times10^{7}$$

$$d=2/69\times10^{8}\,pc\,\frac{1\,Mpc}{10^{6}\,pc}=269\,Mpc$$

ج) در اینجا از فرمول دوپلر برای تعیین سرعت شعاعی استفاده می‌کنیم. انتقال سرخ این کهکشان برابر است با:

$$z=\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{22/58173\,cm-21/10611\,cm}{21/10611\,cm}=\frac{1/47562\,cm}{21/10611\,cm}=0/0699144$$

چون این تقریبا نزدیک به واحد است باید از شکل نسبیتی اثر دوپلر برای تعیین سرعت شعاعی استفاده کنیم.

$$\frac{v_r}{c}=\frac{(z+1)^2-1}{(z+1)^2+1}$$

$$=\frac{(1/0699144)^2-1}{(1/0699144)^2+1}=0/0674759$$

$$v_r=(0/0674759)(2/997925\times10^{5}\,km/s)$$

$$=2/02288\times10^{4}\,km/s$$

مسئله ۱۴۷: ابر نواختر I_a دارای درخشندگی $5/8\times10^{9}L_{\odot}$ در حداکثر نور است. این درخشندگی زیاد است که آن را از چنین فاصله‌های زیادی قابل رویت کرده است.

الف) شما یک ابرنواختر را در یک کهکشان دور کشف و مشاهده می‌کنید. در تلسکوپتان آن را دارای روشنایی $1/6\times10^{-7}$ برابر روشنایی که برای وگا دیده‌اید، مشاهده می‌کنید. این کهکشان (در واحد مگا پارسک) چقدر دور است؟

ب) شما یک انتقال سرخ برای این کهکشان $z=0/062$ اندازه می‌گیرید. با استفاده از داده‌های در مورد این کهکشان و این ابرنواختر محاسبه کنید که زمان هابل چقدر خواهد بود؟

ج) اگر دومین ابرنواختر در این کهکشان منفجر شود ۲۰۰ میلیون سال بعد از انفجار ابرنواختر شما آن را مشاهده خواهید کرد. چه مدت از اکنون یا چه مدت قبل از این، دومین ابرنواختر منفجر می‌شود؟

حل : الف) این یکی از چیزهای قدیمی روشنایی/درخشندگی/فاصله است.

$$B_{SN}=\frac{L_{SN}}{۴\pi d_{SN}^{۲}}$$

به مقایسه این با وگا نیاز داریم.

$$B_{Vega}=\frac{L_{Vega}}{۴\pi d_{Vega}^{۲}}$$

$$\frac{B_{SN}}{B_{Vega}}=\frac{L_{SN}/۴\pi d_{SN}^{۲}}{L_{Vega}/۴\pi d_{Vega}^{۲}}=\left(\frac{L_{SN}}{L_{Vega}}\right)\left(\frac{d_{Vega}}{d_{SN}}\right)^{۲}$$

این را برای d_{SN} حل می‌کنیم:

$$d_{SN}=d_{Vega}\sqrt{\left(\frac{L_{SN}}{L_{Vega}}\right)\left(\frac{B_{Vega}}{B_{SN}}\right)}$$

$$d_{SN}=(۷/۸pc)\sqrt{\left(\frac{۵/۸\times۱۰^{۹}L}{۵۵L}\right)\left(\frac{۱}{۱/۶\times۱۰^{-۷}}\right)}$$

$$d_{SN}=۲\times۱۰^{۸}pc=۲۰۰Mpc$$

ب) فاصله و انتقال سرخ را داریم بنابراین می‌توانیم محاسبه کنیم که t_H چقدر است.

$$z=\frac{d}{ct_H}\Rightarrow t_H=\frac{d}{cz}$$

$$t_H=\frac{۲\times۱۰^{۸}pc}{(۱lyr\,yr^{-۱})(۰/۰۶۲)}\left(\frac{۳/۲۶lyr}{۱pc}\right)$$

$$t_H=۱/۱\times۱۰^{۱۰}yr=۱۱\ \text{میلیارد سال}$$

توجه داشته باشید که استفاده از سرعت نور را به صورت سال نوری در سال نگه داشته‌ایم. این مورد ما را در تبدیل واحدها کمک می‌کند. مجبور نیستیم که با حرکت از پارسک به متر (فقط پارسک با سال نوری) یا از ثانیه به سال شلوغ کاری کنیم.

ج) این کهکشان ۲۰۰ میلیون پارسک یا ۶۵۰ میلیون سال نوری دور است. این بدین معناست که اولین ابرنواختر ۶۵۰ میلیون سال پیش منفجر شده است. بنابراین دومین نواختر ۴۵۰ میلیون سال پیش منفجر شده است.

مسئله ۱۴۸ : در سال ۱۹۹۸ تحقیق دیجیتالی آسمان یک کوازار را با انتقال سرخ $z=۵$ کشف کرد.

الف) با استفاده از قانون هابل فاصله برای این کوازار را در واحد Mpc و سال نوری محاسبه کنید. در مورد نتیجه توضیح دهید.

ب) یکی از قوی‌ترین خطوط نشر ئیدروژن خط لیمان α است که در $\lambda=۱۲۱/۵۶۷$ نانومتر در فرابنفش منتشر می‌شود. انتقال سرخ زیاد کوازار داده شده است، آیا شما قادر به مشاهده این خط در محدوده بصری هستید؟ (فرض کنید که باند موج بصری برابر است با $۳۰۰-۱۰۰۰m$ باند)

حل : الف) قانون هابل برابر است با $v=H_\circ d$ که $v=cz$ است. در نتیجه:

$$d=\frac{cz}{H_\circ}=۲۱۴۰۰Mpc=۲۱/۴Gpc=۷۰Gly$$

نتایج نشان می‌دهد که برای این انتقال سرخ‌ها مناسب نیست که از قانون هابل در ساده‌ترین شکلش استفاده کنیم. چون تاثیرات کیهان‌شناسی دیگر به حساب آمدن نیاز دارند. در واقع فاصله $۷۰Gly$ نشان می‌دهد که برای این نور ۷۰ میلیارد سال طول می‌کشد تا از کهکشان به ما برسد که مسئله است سن جهان ۱۵ بیلیون سال داده شده است.

ب) انتقال سرخ توسط رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$z=\frac{\lambda_{\text{مشاهده شده}}-\lambda_{\text{منتشر شده}}}{\lambda_{\text{منتشر شده}}}$$

در نتیجه:

$$\lambda_{\text{مشاهده شده}}=\lambda_{\text{منتشر شده}}\left(۱+z\right)=۷۳۰nm$$

روی باند بصری اثر نشان می‌دهد.

مسئله ۱۴۹: شما کهکشانی را پیدا می‌کنید که $۵۰ Mpc$ دور است.
الف) انتقال سرخ این کهکشان چقدر است؟
ب) اگر شما خط نشر ئیدروژن آلفا (طول موج سکون $۶۵۶۲/۸ \mathring{A}$) را از این کهکشان مشاهده کنید در چه طول موجی آن را خواهید دید؟
ج) اگر ستاره‌ای دقیقا مانند خورشید در این کهکشان بود روشنایی آن ستاره در مقایسه با روشنایی وگا چقدر می‌شد؟
د) تلسکوپ فضایی هابل (HST) اگر هل داده شود می‌تواند ستاره‌هایی که دارای روشنایی حدودا $۱۰^{-۱۱}$ برابر روشنایی وگا هستند را مشاهده کند. انتقال سرخ (با فرض اینکه فقط از گسترش جهان می‌آید) دورترین کهکشان که در آن ستاره‌ای دقیقا مانند خورشید را می‌توان با HST دید، چقدر است؟
هـ) ستاره متغیر قیفاووسی مشخصی ۱۲۰۰ برابر درخشنده‌تر از خورشید است. فاصله و انتقال سرخ کهکشان که در آن می‌توانیم این ستاره را با HST ببینیم چقدر است؟
حل : الف)

$$z = \frac{d}{ct_H} = \left(\frac{۵۰ Mpc}{(۱ lyr\, yr^{-۱})(۱۳/۸ \times ۱۰^{۹} yr)} \right) \left(\frac{۳/۲۹ \times ۱۰^{۶} lyr}{Mpc} \right)$$

$$z = ۰/۰۱۲$$

با دقت اضافی $z = ۰/۰۱۱۸۱$ که در محاسبات بعدی استفاده خواهیم کرد.
ب)

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{emit}}{\lambda_{emit}}$$

$$۱ + z = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emit}}$$

$$\lambda_{obs} = (۱+z)\lambda_{emit} = (۱/۰۱۱۸۱)\left(۶۵۶۲/۸ \mathring{A}\right)$$

$$\lambda_{obs} = ۶۶۴۰$$

ج)

$$B_* = \frac{L_\odot}{۴\pi d_*^۲}$$

$$B_{Vega}=\frac{L_{Vega}}{۴\pi d_{Vega}^{۲}}$$

$$\frac{B_*}{B_{Vega}}=\frac{L_\odot/۴\pi d_*^{۲}}{L_{Vega}/۴\pi d_{Vega}^{۲}}=\left(\frac{L_\odot}{L_{Vega}}\right)\left(\frac{d_{Vega}}{d_*}\right)^{۲}$$

$$\frac{B_*}{B_{Vega}}=\left(\frac{۱L_\odot}{۵۵L_\odot}\right)\left(\frac{۷/۸\,pc}{۵۰\times ۱۰^{۶}\,pc}\right)^{۲}$$

$$\frac{B_*}{B_{Vega}}=۴/۴\times ۱۰^{-۱۶}$$

د) این مسئله معادلاتش را از قسمت قبل می‌گیرد و معادله بالا را مرتب می‌کنیم.

$$\frac{B_*}{B_{Vega}}=\left(\frac{L_\odot}{L_{Vega}}\right)\left(\frac{d_{Vega}}{d_*}\right)^{۲}$$

الان فقط می‌دانیم که به دنبال نسبت روشنایی هستیم و می‌خواهیم برای d_* حل کنیم.

$$d_*=d_{Vega}\sqrt{\left(\frac{B_{Vega}}{B_*}\right)\left(\frac{L_\odot}{L_{Vega}}\right)}$$

$$d_*=(۷/۸pc)\sqrt{\left(\frac{۱}{۱۰^{-۱۱}}\right)\left(\frac{۱L_\odot}{۵۵L_\odot}\right)}$$

$$d_*=۳/۳\times ۱۰^{۵}\,pc=۰/۳Mpc$$

این جواب حتی به ما کهکشان آندرومدا را نمی‌دهد. وقتی که ما به ستاره‌های تک در کهکشان‌های دیگر نگاه می‌کنیم در کل در حال نگاه کردن به ستاره‌های بسیار روشن هستیم.

هـ)

$$z=\frac{d}{ct_H}=\frac{۳/۳\times ۱۰^{۵}\,pc}{(۱lyr\,yr^{-۱})(۱۳/۸\times ۱۰^{۹}\,yr)}\left(\frac{۳/۲۶lyr}{۱pc}\right)$$

$$z=۰/۰۰۰۰۸$$

مسئله ۱۵۰ : فرض کنید که شما در کهکشانی زندگی می‌کنید که با سرعت مداری زیادی در میان یک خوشه سیر می‌کند و بنابراین با سرعت $۲۰۰۰km/s$ حرکت می‌کند با

توجه به میکروویو تشعشع پیش زمینه کیهانی (از اثرات چرخش کهکشان صرف نظر کنید) تغییر در قله پیش زمینه میکروویو که می‌خواهیم آن را محاسبه کنیم به این واقعیت مربوط است که کهکشانی که آن را در آن نظر گرفته‌ایم با توجه به آن حرکت می‌کند و بنابراین یک تغییر دوپلر در ارتباط با حرکتش وجود دارد.

ابتدا اجازه دهید میکروویو تشعشع پیش زمینه را محاسبه کنیم. برای این کار از قانون وین استفاده می‌کنیم.

$$\lambda_{\max} = \frac{۰/۰۰۲۹}{T}$$

که در آن λ بر حسب متر و T بر حسب کلوین است. بنابراین:

$$\lambda_{o,\max} = \frac{۰/۰۰۲۹}{۲/۷۲۵} \approx ۱/۰۶۴ \times ۱۰^{-۳} m = ۱/۰۶۴ mm$$

با در نظر گرفتن اینکه دمای میکروویو پیش زمینه ۲/۷۲۵ درجه کلوین است حال از تغییر دوپلر استفاده می‌کنیم که $c = ۳ \times ۱۰^{۵} \frac{km}{s}$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_۰} = \frac{v}{c}$$

$$\frac{v}{c} = \pm \frac{۲۰۰۰ \ km/s}{۳ \times ۱۰^{۵} \ km/s} = +\frac{۲}{۳} \times ۱۰^{-۲}$$

قبلا $\lambda_۰$ را حساب کردیم و برابر شد با $۱/۰۶۴mm$ بنابراین معادله تغییر دوپلر بدین صورت است:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_۰} = \frac{\lambda - \lambda_۰}{\lambda_۰} = \pm \frac{۲}{۳} \times ۱۰^{-۲}$$

بنابراین قله طول موج پیش زمینه تغییر یافته دوپلر برابر است با:

$$\lambda = \lambda_۰ \times \left(\pm \frac{۲}{۳} \times ۱۰^{-۲} \right) + \lambda_۰$$

الف) قله طول موج تشعشع پیش زمینه کیهانی در جهت حرکت چقدر است؟

ب) قله طول موج تشعشع پیش زمینه کیهانی در جهت خلاف جهت حرکت چیست؟

ج) قله طول موج تشعشع پیش زمینه کیهانی در جهت ۹۰ درجه (در زوایای سمت راست) از جهت حرکت چیست؟

حل : الف) برای حرکت مستقیم CMB طول موج تغییر مکان آبی خواهد داد:

$$\lambda = ۱/۰۶۴mm \times \left(-\frac{۲}{۳} \times ۱۰^{-۲}\right) + ۱/۰۶۴mm = ۱/۰۵۷mm$$

ب) برای حرکت در جهت دور شدن از CMB طول موج تغییر مکان سرخ خواهد داد:

$$\lambda = ۱/۰۶۴mm \times \left(+\frac{۲}{۳} \times ۱۰^{-۲}\right) + ۱/۰۶۴mm = ۱/۰۷mm$$

ج) از آنجا که در حال دور یا نزدیک شدن به CMB نیستیم در این حالت $v = ۰$ و تغییر دوپلری وجود ندارد پس:

$$\lambda = \lambda_۰ = ۱/۰۶۴mm$$

مسئله ۱۵۱ : دو ستاره با شارهای مختلف با ضریب ۱۰۰ مشاهده می‌شوند، هر دو ستاره به نام ستاره‌های رشته اصلی معروف هستند و دارای دمای یکسانی می‌باشند. روشن‌ترین این ستاره‌ها معروف به داشتن قدر ظاهری $m = ۵mag$ است.

الف) قدر آن ستاره تیره‌تر در میان این دو ستاره چقدر است؟

ب) ستاره تیره‌تر دارای فاصله $۱۰۰pc$ است، فاصله ستاره روشن‌تر چقدر است؟

ج) قدر مطلق این ستاره‌ها را محاسبه کنید.

د) یک نمودار HR نامگذاری شده را رسم کنید و مکان خورشید و رشته اصلی را تعیین کنید.

هـ) قدر مطلق ستاره‌ها داده شده است. فکر می‌کنید که نوع طیف آنها چه باشد؟

حل : الف) رابطه بین شارها و قدرها دو ستاره توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$m_۲ - m_۱ = -۲/۵\log_{۱۰}\left(\frac{f_۲}{f_۱}\right)$$

بنابراین ستاره تیره‌تر دارای قدر $m = ۱۰mag$ است.

ب) چون این دو ستاره دارای دمای یکسانی هستند و هر دو روی رشته اصلی قرار دارند دارای درخشندگی یکسانی خواهند بود. چون:

$$f = \frac{L}{۴\pi r^۲}$$

نسبت شارهای ستاره‌ها توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$\frac{f_۱}{f_۲}=\left(\frac{r_۲}{r_۱}\right)^۲$$

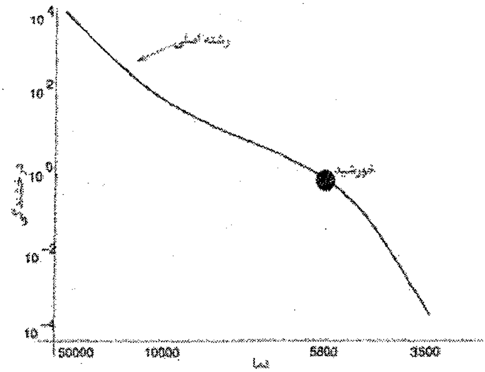
در نتیجه فاصله ستاره روشن‌تر برابر است با:

$$r=\frac{۱۰۰\,pc}{\sqrt{۱۰۰}}=۱۰\,pc$$

ج) قدر مطلق، قدری است که از همان فاصله $۱۰\,pc$ دیده می‌شود. یعنی برابر است با:

$$M=۵\,mag$$

د) طرحی از نمودار HR به صورت زیر است. چون قدر مطلق خورشید برابر $۴/۷۷\,mag$ است این ستاره بسیار شبیه خورشید است اگرچه تا حدودی تیره‌تر $۵\,mag$ است، بنابراین نوع طیفی آن G دیر یا K زود است.



شکل ۲-۳۰

مسئله ۱۵۲ : الف) از رابطه زیر استفاده کنید تا سرعت گسترش هابل را برای این کهکشان محاسبه کنید.

$$v_{obs}=v_{\text{هابل}}+v_{pec}$$

ب) کهکشان B دارای سرعت گسترش هابل $v_{\text{هابل}}=۲/۸\,km/s$ است. با استفاده از قانون هابل فاصله تا این کهکشان را محاسبه کنید.

$$H_\circ = ۷۰ km/s/Mpc$$

حل : الف)

$$v_{obs} = v_{هابل} + v_{pec}$$
$$v_{هابل} = v_{obs} - v_{pec}$$
$$v_{هابل} = -۳۶۰ km/s - (-۵۰۰) km/s = ۱۵۰ km/s$$

ب)

$$v_{هابل} = H_\circ d$$
$$d = \frac{v_{هابل}}{H_\circ}$$
$$d = \frac{۲/۸ km/s}{۷۰ km/s/Mpc} = ۰/۰۴ Mpc$$

مسئله ۱۵۳ : خط K کلسیم یونیزه شده به طور طبیعی دارای طول موج $\lambda_\circ = ۳۹۳/۳nm$ است. فرض شده که شب آخر شما یک کهکشان بیضوی غول $NGC۴۸۸۹$ مشاهده کرده‌اید و دریافته‌اید که خط K در طول موج $۴۰۱/۸nm$ ظاهر شده است.

الف) این کهکشان با چه سرعتی در حال دور شدن از ماست؟

ب) این کهکشان در خوشه کمای کهکشان ما قرار دارد. از قانون هابل برای یافتن فاصله تا خوشه استفاده کنید. از $H_\circ = ۷۰ km/s\, Mpc^{-۱}$ استفاده کنید.

حل : الف) از رابطه انتقال دوپلر استفاده می‌کنیم:

$$v = \frac{۴۰۱/۸ - ۳۹۳/۳}{۳۹۳/۳} c = ۰/۲۱۶۱c = ۶/۴۷۹ \times ۱۰^{۳} km/s$$

ب) طبق قانون هابل برابر است با:

$$d = \frac{v}{H_\circ} = \frac{۶/۴۷۹ \times ۱۰^{۳} km/s}{۷۰ km/s Mpc^{-۱}} = ۹۳ Mpc$$

مسئله ۱۵۴ : الف) هنگامی که ادوین هابل برای نخستین بار جهت تعیین فاصله‌ها از قیفاووسی‌ها استفاده کرد، هنوز از این مسئله آگاه نبود که دو نوع متغیر تپنده وجود دارد ستاره‌های خوشه W و قیفاووسی δ این دو نوع دارای رابطه دوره تناوب -

درخشندگی یکسانی هستند با این تفاوت بزرگ که ستاره‌های خوشه W با قدر کم نورتر از قیفاووسی δ هستند وقتی هابل فاصله‌ها را مشخص کرد رابطه دوره تناوب - درخشندگی را برای ستاره‌های خوشه W سنجید و سپس مشاهداتش را از قیفاووسی δ را برای تعیین فاصله در دیگر کهکشان‌ها استفاده کرد. وقتی که این اشتباه به وسیله والتر باد در سال ۱۹۵۲ اصلاح شد فاصله محاسبه شده چه مقدار تغییر کرد؟

ب) مشاهدات یک ابرنواختر نشان می‌دهد که خط $H\alpha$ در طول موج $۷۰۰ nm$ دیده می‌شود مسافت و قدر مطلق مسافت آن را محاسبه کنید (طول موج باقیمانده قالب برابر $\lambda = ۶۵۶/۲۸ nm$ است فرض کنید:

$$H_{\circ} = ۷۰ kms^{-۱} Mpc^{-۱}$$

حل : الف) قدر مطلق فاصله چنین است:

$$m - M = ۵\log_{۱۰} d - ۵ = ۵\log_{۱۰}(d/۱۰ pc)$$

بنابراین فاصله چنین است:

$$d = ۱۰ pc \times ۱۰^{(m-M)/۵}$$

اگر $m - M$ با قدر ۱/۵ کم نورتر است پس این تساوی به این معناست که مسافت‌ها $۱۰^{۱/۵/۵} = ۲$ دورتر است.

ب) با توجه به فرمول دوپلر داریم:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

به طوری که $v/c = ۰/۰۶۶$ مطابق است با افزایش $v = ۲۰۰۰۰ kms^{-۱}$ با داشتن:

$$H_{\circ} = ۷۰ kms^{-۱} Mpc^{-۱}$$

در می‌یابیم که:

$$d = ۲۸۶ Mpc = ۲/۸۶ \times ۱۰^{۸} pc$$

از رابطه هابل $v = H_{\circ}d$ استفاده کرده سپس قدرمطلق مسافت چنین به دست می‌آید:

$$DM = m - M = ۵\log d - ۵ = ۳۷/۳ mag$$

مسئله ۱۵۵ : یک سحابی سیاره‌ای با قطر زاویه‌ای ۱۵ دقیقه کمان است که ۱۲۰ پارسک از زمین واقع شده است.

الف) قطر سحابی را بر حسب پارسک محاسبه کنید.
ب) فرض کنید که خارجی‌ترین ماده در حال گسترش از ستاره مرکزی با سرعت $۲۰ km/\sec$ است و اینکه این سرعت در بیش از وقت معین ثابت شده است. سن سحابی در واحد سال چقدر است؟

حل : الف) توجه داشته باشید که $۱AU$ یک زاویه ۱ ثانیه قوس در فاصله $۱pc$ شامل می‌شود. بنابراین قطر برابر است با:

$$D = ۱۵ arc\min \times ۶۰ arc\sec/arc\min \times ۱۲۰ = ۱/۰۸ \times ۱۰^{۵}\ AU$$
$$= \frac{۱/۰۸\times ۱۰^{۵} \times ۱/۵ \times ۱۰^{۱۳} cm}{۳/۰۹\times ۱۰^{۱۸} cm} = ۰/۵۲\ pc$$

به طور متناوب:

$$۱۵' = ۱۵/۵۷/۳/۶۰ = ۰/۰۰۴۴\ rad$$
$$D = ۰/۰۰۴۴ \times ۱۲۰ = ۰/۵۲\ pc$$

ب) شعاع $R = D/۲$ بنابراین سن برابر است با:

$$t = \frac{R}{v} = \frac{۰/۵۲\times ۳/۰۹\times ۱۰^{۱۸}}{۲/(۲۰\times ۱۰^{۵})} = ۲/۷\times ۱۰^{۱۰} \sec \Rightarrow t = ۱۳۰۰۰\ yr$$

مسئله ۱۵۶ : فرض کنید خورشید در فاصله ۲۷۰۰۰ سال نوری ($۲/۶\times ۱۰^{۱۷} km$) از مرکز کهکشان راه شیری قرار گرفته است و در طول یک مدار مدور با سرعت $۲۲۰ km/s$ در حرکت است. چقدر طول می‌کشد تا منظومه شمسی ما یک دور کامل اطراف کهکشان را طی کند؟ همچنین پاسخ دهید که اگر عمر کهکشان ۱۴ میلیارد سال باشد، خورشید چند بار اطراف کهکشان گردش کرده است؟

حل : اگر ما در یک دایره در حرکت هستیم، فاصله کامل برای یک دور کامل، یک محیط دایره است:

$$c = ۲\pi r = ۲\pi\left(۲/۶\times ۱۰^{۱۷} km\right) = ۱/۶۴\times ۱۰^{۱۸} km$$

مدت زمان طی شده در اطراف کهکشان برابر این فاصله تقسیم بر سرعت است.

$$t = \frac{c}{v} = \frac{۱/۶۴\times ۱۰^{۱۸} km}{۲۲۰ km/s} = ۷/۴\times ۱۰^{۱۵} s = ۲۴۰ \text{ میلیون سال}$$

اگر کهکشان ۱۴ میلیارد سال عمر داشته باشد، آنگاه خورشید این اندازه گردش کرده است:

$$\frac{۱۴\times ۱۰^{۹}\,yr}{۲۴۰\times ۱۰^{۶}\,yr}=۵۹ \text{ بار}$$

بسیاری از شما به یک اشتباه در سئوال اشاره کردید. عمر خورشید تنها ۴/۵ میلیارد سال است! به همین صورت، برای ۱۴ میلیارد از عمر کهکشان، خورشید گردش نکرده است و تنها به این اندازه گردش کرده است:

$$\frac{۴/۵\times ۱۰^{۹}\,yr}{۲۴۰\times ۱۰^{۶}\,yr}=۱۹ \text{ بار}$$

مسئله ۱۵۷ : دو کهکشان با دوره مداری ۵۰ میلیارد سال به دور یکدیگر می‌چرخند. فاصله مابین آنها برابر است با ۰/۵ میلیون پارسک می‌باشد. جرم این جفت چه مقدار است؟

حل : در ابتدا این طول دوره ۵۰ میلیارد سالی را به ثانیه تبدیل می‌کنیم عدد به دست آمده برابر $۱/۵۸\times ۱۰^{۱۸}$ ثانیه است. سپس ۵×۱۰^{۵} پارسک را به $۱/۵\times ۱۰^{۱۹}$ کیلومتر تبدیل می‌کنیم. سپس از قانون سوم کپلر استفاده می‌کنیم:

$$P^{۲}=\frac{۴\pi^{۲}a^{۳}}{G(m+M)}\Rightarrow (m+M)=\frac{۴\pi^{۲}a^{۳}}{GP^{۲}}$$

$$(m+M)=\frac{۴\pi^{۲}\left(۱/۵\times ۱۰^{۲۲}m\right)^{۳}}{۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}m/kg/s^{۲}\left(۱/۵۸\times ۱۰^{۱۸}s\right)^{۲}}$$

$$(m+M)=\frac{۱/۳۳\times ۱۰^{۶۸}\,m^{۳}}{۱/۶۷\times ۱۰^{۲۶}\,m^{۳}/kg}\Rightarrow (m+M)=۸\times ۱۰^{۴۱}\,KG$$

جرم هر دو منظومه با هم برابر است با $8\times 10^{41}kg$ یا حدود 4×10^{11} جرم خورشیدی

مسئله ۱۵۸ : با این فرض که ثابت هابل برابر است با $۶۰\ km/s/Mpc$ سن جهان را تخمین بزنید.

حل : سن جهان زمانی است که در آن همه کهکشان‌ها یک موقعیت را اشغال می‌کردند اگر گسترش جهان را به صورت معکوس حرکت می‌دادیم. این سن برابر است با $1/H$ برای استفاده از H در این معادله به تبدیل Mpc به km

$$1Mpc = 3/086 \times 10^{19} km$$
$$H = 60 km/s/Mpc = 1/94 \times 10^{-18} s^{-1}$$

بنابراین سن جهان برابر خواهد بود با:

$$\frac{1}{H} = 5/14 \times 10^{17} s = 1/6 \times 10^{10} \text{ سال}$$

یا در حدود ۱۶ میلیارد سال.

مسئله ۱۵۹ : درخشش ستاره‌های دوتایی اشعه ایکس و هسته کیهانی فعال (AGN) با افتادن اجسامی از جایی خیلی دور بر روی اجسام به هم پیوسته تولید می‌شود مثل کوتوله سفید، ستاره نوترونی یا یک سیاهچاله در محل ستاره‌های دوتایی اشعه ایکس یا یک سیاهچاله با حجم بسیار با $M \geq 10^6 M_\odot$ در محل AGN در این مسئله ثابت خواهید کرد که این اجسام در حقیقت درخشان‌ترین اجسام در جهان هستند.

الف) استفاده از مباحث حفظ انرژی منتج به ایجاد فرمولی برای انرژی آزاد شده توسط یک جرم m می‌شود که از بی‌نهایت به فاصله r از یک جسم به هم پیوسته به جرم M افزایش یافته است. شاید فرض کنید که m در یک جای ثابت در بی‌نهایت قرار دارد. در فاصله r این جسم در حال حرکت به دور اجسام به هم پیوسته در یک مدار دایره‌ای شکل می‌باشد. (برای رسیدن به پاسخ این سئوال کافی است فرض کنید فیزیک نیوتنی به کلی تصرف می‌کند اگرچه شاید گفته شود فرضیه نسبیت عام می‌بایست استفاده شود ($E = GMm/2r$

ب) از نتیجه قبل استفاده کنید میزان انرژی آزاد شده توسط یک کیلوگرم از اجسامی که از بی‌نهایت به سطح یک ستاره نوترونی $1/44 M_\odot$ با شعاع $r_{NS} = 10 km$ افزایش می‌یابند، مشخص کنید. برای اندازه‌گیری حجم انرژی آزاد شده آن را نه تنها در ژول بلکه همچنین آن را در مگا تن تی ان تی قرار دهید در صورتی که:

$$1MT = 3 \times 10^{15} J$$

و یک قدرت برجسته برای بمب‌های هسته‌ای امروز است:

$G = ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} Nm^۲ kg^{-۲}$

$۱M_\odot = ۲ \times ۱۰^{۳۰} kg$

حل : الف) به خاطر حفظ انرژی، انرژی آزاد شده توسط m هنگامی که به سمت فاصله r از اجسام به هم پیوسته پائین می‌آید، متفاوت است. بین انرژی پتانسیل جاذبه‌ای آن در بی‌نهایت (که مقدار آن در عادی سازی معمول انرژی پتانسیل صفر است) و مجموع انرژی آن در فاصله r:

$$E(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{۱}{۲} mv^۲$$

سرعت در یک مدار دایره‌ای شکل را می‌توان از متعادل کردن نیروی جانب مرکز و نیروی جاذبه به دست آورد.

$$G\frac{Mm}{r^۲} = \frac{mv^۲}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

اگر v را در معادله اول قرار دهیم داریم:

$$E(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{۲r} = -\frac{GMm}{۲r}$$

صورتی که انرژی آزاد شده وقتی اجسام در حال افتادن از بی‌نهایت به فاصله r هستند به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E_{\text{آزاد شده}}(r) = E(\infty) - E(r) = ۰ - \left(-\frac{GMm}{۲r}\right) = \frac{GMm}{۲r}$$

ب) با قرار دادن اعداد در رابطه بالا داریم:

$$E_{\text{آزاد شده}}(r) = \frac{۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} Nm^۲ kg^{-۲} \times ۱/۴۴ \times ۲ \times ۱۰^{۳۰} kg \times ۱kg}{۲ \times ۱۰ \times ۱۰^۳ m} = ۹/۶ \times ۱۰^{۱۵} Nm$$

$$= ۹/۶ \times ۱۰^{۱۵} J \sim ۳ MT$$

به عبارت دیگر پرتاب یک کیلوگرم از این اجسام به سمت یک ستاره نوترونی منجر به آزاد شدن انرژی می‌شود که قابل مقایسه با انفجار یک سلاح هسته‌ای است.

مسئله ۱۶۰ : با استفاده از قانون هابل می‌توان سن جهان را ۱۵ سال تخمین زد. اما این مقدار بیانگر این است جهان خالی است بنابراین جاذبه سرعت گسترش را کاهش نمی‌دهد. اگر جهان تخت و چگال برابر با چگالی بحرانی باشد در نتیجه سن جهان چیزی حدود $\frac{۲}{۳}$ زمان هابل است. مقدار ثابت هابل در جهانی تخت با چگالی بحرانی چقدر است؟

حل :

$$\text{سن} = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{H} \Rightarrow H = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{\text{سن}}$$

$$H = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۱۵ \times ۱۰^{۹}\, yr}$$

$$H = \frac{۲ \times ۱۰^{-۹}}{۳ \times ۱۵\, yr} \Rightarrow H = ۰/۰۴۴۴ \times ۱۰^{-۹}\, yr^{-۱}$$

واحدها را مرتب می‌کنیم:

$$H = ۰/۰۴۴۴ \times ۱۰^{-۹}\, yr^{-۱}$$

$$H = ۰/۰۴۴۴ \times ۱۰^{-۹}\, yr^{-۱} \times \left(۱yr / ۳/۱۶ \times ۱۰^{۷} s\right)$$

$$H = ۰/۰۱۴۱ \times ۱۰^{-۱۶}\, s^{-۱}$$

$$H = ۰/۰۱۴۱ \times ۱۰^{-۱۶}\, s^{-۱} \times \left(۳/۰۹ \times ۱۰^{۱۹}\, km/Mpc\right)$$

$$H = ۰/۰۴۳۴ \times ۱۰^{۳}\, km/s/Mpc$$

$$H = ۴۳/۴\, km/s/Mpc$$

برای جهانی تخت با چگالی بحرانی که حدود ۱۵ میلیارد سال سن دارد ثابت هابل مقداری برابر با $۴۳\, km/s/Mpc$ است. این کمترین مقدار ثابت هابل است.

مسئله ۱۶۱ : اگر $H = ۶۵ km/s/Mpc$ باشد، چگالی بحرانی برابر خواهد بود با مقدار $۸ \times ۱۰^{-۲۷}\, kg/m^{۳}$ چه مقدار جرم در یک کره با شعاع مدار زمین ($R = ۱$) قرار می‌گیرد؟ جهان تختی را فرض کنید.

حل :

$$V = \frac{۴}{۳} \times \pi \times R^{۳}$$

$$V = \frac{۴}{۳} \times \pi \times \left(۱/۵ \times ۱۰^{۱۱} m\right)^{۳}$$
$$V = ۱۴/۱۳۷ \times ۱۰^{۳۳} m^{۳}$$

برای محاسبه جرم موجودی چگالی را در حجم ضرب می‌کنیم (در یک جهان تخت $\rho = \rho_c$)

$$m = \rho \cdot V$$
$$m = \left(۸ \times ۱۰^{-۲۷} kg/m^{۳}\right)\left(۱۴/۱۳۷ \times ۱۰^{۳۳} m^{۳}\right)$$
$$m = ۱۱۳ \times ۱۰^{۶} kg$$

جرم موجود در یک کره‌ای با شعاع $1AU$ برابر با ۱۰۰ میلیون کیلومتر است. این جرم در مقایسه با جرم زمین مقدار بسیار کمی است ($M_E \sim 6 \times 10^{24} kg$) به این معنی که جهان مقدار جرم بسیار پائینی دارد.

مسئله ۱۶۲ : انتقال سرخ کهکشان NGC۱۲۰ که کاملا به سبب گسترش جهان است برابر است با $z_{\cos} = ۰/۲۵$

الف) در چه طول موجی خط $H\alpha$ (طول موج سکون برابر است با $\mathring{A}$ ۶۵۶۳) مشاهده می‌شود؟

ب) این کهکشان با این فرض که ثابت هابل برابر $۵۰ km/s/Mpc$ باشد در چه فاصله‌ای است؟

حل : الف)

$$z_{\cos} = ۰۲۵$$
$$\lambda_{۰} = ۶۵۶۳ \mathring{A}$$

انتقال سرخ به سبب گسترش جهان به صورت:

$$z_{\cos} = \frac{\lambda - \lambda_{۰}}{\lambda_{۰}}$$
$$z_{\cos} = \frac{\lambda}{\lambda_{۰}} - ۱ \Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda_{۰}} = ۱ + z_{\cos} \Rightarrow \lambda = \left(۱ + z_{\cos}\right) \times \lambda_{۰}$$

با جایگذاری مقادیر:

$$\lambda = \left(۱ + ۰/۲۵\right) \times ۶۵۶۳ \mathring{A} = ۸۲۰۴ \mathring{A}$$

ب) با توجه به قانون هابل داریم:

$$v = H_\circ d \Rightarrow d = \frac{v}{H_\circ}$$

نیاز است که برای این رابطه v را بدست آوریم:

$$z_{\cos} = \frac{v}{c} \Rightarrow v = z_{\cos} c$$

با جایگذاری مقدار v در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$d = \frac{z_{\cos} c}{H_\circ}$$

$$d = \frac{۰/۲۵ \times ۳ \times ۱۰^{۶}\, kms^{-۱}}{۵۰\, kms^{-۱} Mpc^{-۱}} = ۱۵۰۰\, Mpc$$

مسئله ۱۶۳ : الف) قانون هابل چیست؟

ب) چرا قانون هابل یک سن نامحدود را برای جهان نشان می‌دهد؟

ج) قطعه کلیدی مدرک برای منشا متراکم و گرم برای جهان چیست؟

حل : الف) طیف کهکشان‌ها نشان می‌دهند که طول موج‌هایشان معمولا در مقایسه با مقادیر آزمایشگاه به سرخ انتقال می‌یابد، با نشان دادن اینکه آنها در حال دور شدن از ما هستند. سرعت پسروی از رابطه دوپلر اندازه‌گیری می‌شود:

$$v = c\left(\frac{\lambda - \lambda_\circ}{\lambda_\circ}\right)$$

هابل یک رابطه خطی بین فاصله تا کهکشان‌ها d و سرعت پسروی کشف کرد:

$$v = H_\circ d$$

که $H_\circ$ مقدار کنونی ثابت هابل است.

ب) اگر زمان را عکس کنیم، سپس کهکشان‌ها در حال حرکت به سمت ما خواهند بود. در زمان :

$$t = \frac{d}{v} = \frac{۱}{H_\circ}$$

همه چیز به یک نقطه خواهد آمد، با فرض اینکه سرعت گسترش ثابت بوده است. این سن نامحدودی را برای جهان نشان می‌دهد.

ج) تشعشع زمینه میکروموجی کیهانی را که می‌توان از همه قسمت‌های آسمان دید، اثر جهان نخستین ۳۰۰۰۰۰ سال پس از منشا است، زمانی که جهان دارای دمای $۳۰۰۰K$

بود. CMB با ضریب ۱۰۰۰ انتقال سرخ یافته است چون آن زمان و اکنون دارای طیف سیاه با $T = ۳K$ است.

مسئله ۱۶۴ : شما یک خوشه کهکشان را کشف کرده‌اید. یکی از این کهکشان‌ها در این خوشه دارای خط انتشار آلفا ئیدروژن (نقطه طول موج $۶۵۶۲/۸\mathring{A}$) است که در طول موج $۶۶۹۴\mathring{A}$ مشاهده شده است.

الف) چنانچه شما انبساط جهان را به دور شدن کهکشان‌ها نسبت دادید، سرعت سیر بازگشتی را برای این کهکشان چه اندازه محاسبه می‌کنید؟

ب) با استفاده از قانون هابل فاصله خوشه کهکشان را برآورد کنید.

ج) یک ستاره متغیر سفید در کهکشان ۱۲۰۰ بار به اندازه خورشید درخشان است. این ستاره در مقایسه با ستاره وگا تا چه اندازه سفید به نظر می‌رسد؟ چنانچه یک تلسکوپ خوب قادر باشد ستاره‌هایی که $۱۰^{۱۱}$ بار از ستاره وگا تاریک‌تر به نظر می‌رسد را نمایان سازد، آیا شما این ستاره را می‌توانید نمایان سازید؟

د) در طول مدت زمانی که لازم است شما فوتون‌هایی را که از کهکشان به سمتتان حرکت می‌کند را مشاهده کنید، جهان به وسیله چه درصدی از اندازه‌اش رشد کرده است؟

حل : الف)

$$z = \frac{\lambda_\circ - \lambda}{\lambda_\circ} = \frac{v}{c}$$

$$v = c\left(\frac{\lambda_{obs} - \lambda}{\lambda_\circ}\right)$$

$$v = \left(۳\times ۱۰^{۵}\frac{km}{s}\right)\left(\frac{۶۶۹۴\mathring{A} - ۶۵۶۲/۸\mathring{A}}{۶۵۶۲/۸\mathring{A}}\right)$$

$$v = ۶\times ۱۰^{۳}\ km/s$$

ب)

$$v = H_\circ d$$

$$d = \frac{v}{H_\circ} = \frac{۵۹۹۷kms^{-1}}{۷۱kms^{-1}Mpc^{-1}} = ۸۴Mpc$$

ج) داریم:

$$L_C = ۱۲۰۰ L_{\odot},\ \ L_V = ۵۵ L_{\odot}$$

پس:

$$B_C = \frac{L_C}{۴\pi d_C^۲}$$

$$B_V = \frac{L_V}{۴\pi d_V^۲}$$

برای بدست آوردن جواب دو تساوی را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{B_C}{B_V} = \frac{(L_C)(۴\pi d_V^۲)}{(L_V)(۴\pi d_C^۲)}$$

۴π را در صورت و مخرج حذف کرده و سپس اعداد را جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{B_C}{B_V} = \frac{(۱۲۰۰ L_{\odot})(۷/۸ pc)^۲}{(۵۵ L_{\odot})(۸۴/۵ \times ۱۰^۶ pc)^۲}$$

$$\frac{B_C}{B_V} = ۱/۹ \times ۱۰^{-۱۳}$$

بنابراین نمی‌توانیم آن را با تلسکوپ نمایان کنیم.

د) جایی که d فاصله و c سرعت نور است زمان از رابطه $t = \frac{d}{c}$ به دست می‌آید.

$$t = \frac{d}{c} = \left(\frac{۸۴/۵ \times ۱۰^۶ pc}{۱ lyr\ yr^{-۱}}\right)\left(\frac{۳/۲۶ lyr}{۱ pc}\right)$$

$t =$ ۲۷۵ میلیون سال

در طول این مدت کهکشان یک مسافت اضافی را به سمت دور حرکت خواهد کرد.

$$\Delta d = vt$$

$$\Delta d = \left(۵۹۹۷ \frac{km}{s}\right)(۲۷۵ \times ۱۰^۶ yr)\left(\frac{۳/۱۵۶ \times ۱۰^۷ s}{۱ yr}\right)$$

$$\Delta d = ۵/۲ \times ۱۰^{۱۹} km \left(\frac{۱۰^{-۶} Mpc}{۳/۰۸۶ \times ۱۰^{۱۳} km}\right)$$

$$\Delta d = ۱/۶۹ Mpc$$

پس درصدی که افزایش یافته این است:

$$\frac{\Delta d}{d}=\frac{۱/۶۹ Mpc}{۸۴/۵ Mpc}=۰/۰۲$$

اندازه جهان طی ۲۷۵ سال گذشته ۲٪ افزایش یافته است. به هر حال به نظر نمی‌رسد که گسترش سریع رخ دهد.

مسئله ۱۶۵ : تا همین چند وقت اخیر مقدار ثابت هابل برابر با مقداری نامطمئن با یک فاکتور ۲ بود. تخمین بزنید سن جهان را برای ثابت هابل به طوری که :

الف) $۵۰ km/s/Mpc$

ب) $۷۴ km/s/Mpc$

ج) $۱۰۰ km/s/Mpc$

د) عمر پیرترین خوشه‌های کروی چقدر است؟

هـ) با استفاده از جواب‌هایی که از الف تا د داده‌اید توضیح دهید که سن خوشه‌های کروی را می‌توان به عنوان تخمینی از ثابت هابل استفاده کرد.

حل : الف) بیائید جهانی را با ثابت هابل $H_{\circ}=۵۰ km\sec^{-1} Mpc^{-1}$ در نظر بگیریم. می‌توان عمر جهان را بدین صورت محاسبه کرد:

$$t_{\circ}=\frac{1}{H_{\circ}}$$

ثابت هابل دارای واحدهایی از معکوس زمان است. اجازه دهید آخرین فرمول را به واحدهای قابل استفاده‌ای تبدیل کنیم. می‌دانیم:

$$۱ly=۳/۱۶\times۱۰^{۷}\sec$$

$$۱Mpc=۱\times۱۰^{۶} pc=۳/۰۹\times۱۰^{۱۹} km$$

است. سپس با تبدیل واحد $t_{\circ}$ به سال داریم:

$$t_{\circ}=\frac{۹/۷۸\times۱۰^{۱۱}}{H_{\circ}}$$

که در آن $H_{\circ}$ بر حسب $km\sec^{-1} Mpc$ است. اگر $H_{\circ}=۵۰ km\sec^{-1} Mpc^{-1}$ باشد در آن صورت داریم $t_{\circ}=۱۹/۶$ میلیارد سال.

ب) دوباره از آخرین فرمول استفاده می‌کنیم ولی این بار $H_{\circ}=۷۵ km\sec^{-1} Mpc^{-1}$ داریم $t_{\circ}=۱۳$ میلیارد سال.

ج) حال اگر $H_\circ = ۱۰۰ km\sec^{-۱} Mpc^{-۱}$ در آن صورت داریم $t_\circ = ۹/۸$ میلیارد سال

د) خوشه کروی شامل پیرترین ستاره‌های کهکشان راه شیری است از محاسبات تکامل ستاره‌ای طول عمر این ستاره‌ها بین ۱۶ تا ۱۸ میلیارد سال است. ولی با اطلاعات به دست آمده از ماهواره متوجه شده‌ایم که فاصله GC (خوشه کروی) از آن چیزی که قبلا فکر می‌کردیم بیشتر بوده است. پس ستاره‌ها روشن‌تر هستند بنابراین سوختشان را سریع‌تر مصرف می‌کنند این بدان معنی است که GC جوان‌تر است سنی در حدود ۱۱ تا ۱۳ میلیارد سال دارد.

هـ) از آنجا که GC شامل پیرترین ستاره‌ها است سن آنها یک کران پائین برای سن جهان است. در حال حاضر می‌دانیم که تخمین جدید برای این سیستم‌ها در حدود ۱۳ میلیون سال است. این باعث می‌شود که این مقدار بزرگ‌تر یا مساوی با عدد $۷۵ km\sec^{-۱} Mpc^{-۱}$ باشد و مقادیر کوچک‌تر از آن دور ریخته شود.

مسئله ۱۶۶ : فرض کنید که جهان کهکشانی همانند کهکشان ما (با جرم $۱۰^{۱۱}M$) در هر حجم $۸ Mpc^{۳}$ دارد. (حجم $۸ Mpc^{۳}$ یک مکعب با طول ضلع‌های $۲Mpc$ است) چگالی متوسط جهان چقدر است و چگونه با چگالی بحرانی $\rho_c = ۹/۲ \times ۱۰^{-۲۷} kg/m^{۳}$ مقایسه می‌شود؟

حل : الف) چگالی برابر است با جرم تقسیم بر حجم:

$$۲Mpc = ۲\times۱۰^{۶} pc \times \frac{۳\times۱۰^{۱۶} m}{pc} = ۶\times۱۰^{۲۲} m$$

حجم در بر دارنده کهکشان برابر است با:

$$V = (۲Mpc)^{۳} = (۶\times۱۰^{۲۲} m)^{۳} = ۲۱۶\times۱۰^{۶۶} m^{۳} = ۲\times۱۰^{۶۸} m^{۳}$$

جرم کهکشان برابر است با:

$$M = ۱۰^{۱۱} M_{\odot} = ۲\times۱۰^{۴۱} kg$$

چگالی برابر است با:

$$\rho = \frac{۲\times۱۰^{۴۱} kg}{۲\times۱۰^{۶۸} m^{۳}} = ۱۰^{-۲۷} kg/m^{۳}$$

چگالی در حدود ضریب ۱۰ کوچک‌تر از چگالی بحرانی است.

مسئله ۱۶۷ : یک نوع شمع استاندارد استفاده شده توسط ستاره‌شناسان ابرنواختر I_a است. یک ابرنواختر نوع A دارای درخشندگی $۵/۸\times۱۰^{۹} L_{\odot}$ در حداکثر نور است. این دارای این درخشندگی بالاست که آنها را برای چنین فاصله‌های دوری قابل رویت می‌سازد.

الف) شما یک ابرنواختر در کهکشان دور کشف می‌کنید. در تلسکوپ شما، آن را دارای روشنایی که $۱/۶\times۱۰^{-۷}$ برابر روشنایی است که شما برای وگا مشاهده می‌کنید. این کهکشان (در واحد مگا پارسک) چقدر دور است؟

ب) یک انتقال سرخ این کهکشان $z=۰/۰۶۲$ اندازه می‌گیرید. با استفاده از اطلاعات این کهکشان و این ابرنواختر، سرعت گسترش جهان را چقدر محاسبه خواهید کرد؟

ج) سرعت گسترش آنها داده شده است. سن جهان چقدر خواهد بود. اگر سرعت گسترش در میان تاریخچه‌اش ثابت بوده باشد؟

د) اگر ابرنواختر دوم در این کهکشان ۲۰۰ میلیون سال پس از ابرنواختری که مشاهده کرده‌اید منفجر شود چه مدت از الان و چه مدت قبل این ابرنواختر دوم منفجر می‌شود؟ (از روی دادن آن در آینده یا گذشته مطمئن شوید.)

حل : الف)

$$\frac{B_{SN}}{B_V}=\frac{L_{SN}/۴\pi d_{SN}^{۲}}{L_V/۴\pi d_V^{۲}}$$

$$\frac{B_{SN}}{B_V}=\left(\frac{L_{SN}}{L_V}\right)\left(\frac{d_V}{d_{SN}}\right)^{۲}$$

$$d_{SN}=\sqrt{\left(\frac{L_{SN}}{L_V}\right)\left(\frac{B_V}{B_{SN}}\right)}\,d_V$$

$$d_{SN}=\sqrt{\left(\frac{۵/۸\times۱۰^{۹}L_{\odot}}{۵۵L_{\odot}}\right)\left(\frac{۱}{۱/۶\times۱۰^{-۷}}\right)}(۷/۸\ pc)$$

$$d_{SN}=۲۰۰۰۰۰۰۰۰\,pc=۲۰۰\,Mpc$$

ب) سرعت گسترش $H_{\circ}$ است داریم:

$$H_{\circ}=\frac{v}{d}=\frac{cz}{d}$$

$$H_{\circ}=\frac{\left(۳\times۱۰^{۵}\ km/s\right)\left(۰/۰۶۲\right)}{۲۰۰\,Mpc}$$

$$H_\circ = ۹۳\, kms^{-۱} Mpc^{-۱}$$

این مقدار با مقدار نجومی دقیق اندازه‌گیری شده $۷۵ \pm ۷\, kms^{-۱} Mpc^{-۱}$ متفاوت است.

ج) تخمین سن سرعت ثابت گسترش برای جهان، زمان هابل است:

$$t_H = \frac{۱}{H_\circ}$$

$$t_H = \left(\frac{s\, Mpc}{۹۳\, km}\right)\left(\frac{۳/۰۸۶ \times ۱۰^{۱۳}\, km}{۱ \times ۱۰^{-۶}\, Mpc}\right)\left(\frac{۱\, year}{۳/۱۵۶ \times ۱۰^{۷} s}\right)$$

$t_H = ۱/۱ \times ۱۰^{۱۰}$ سال = ۱۱ میلیارد سال

د) این ۲۰۰ میلیون پارسک دور است که به این معناست که $(۲۰۰ \times ۳/۲۶)$ میلیون سال نوری یا ۶۵۰ میلیون سال نوری دور است. به این معنا که ابرنواختری که ما دیده‌ایم در واقع ۶۵۰ میلیون سال پیش منفجر شده است بنابراین دومین ابرنواختر باید ۴۵ میلیون سال پیش منفجر شده باشد. (ما این مورد را برای ۲۰۰ میلیون سال دیگر نخواهیم دید اگر به آن طولانی عمر کنیم. تاریخچه گونه‌های دوام روی زمین بیان می‌کنند که ۲۰۰ میلیون سال احتمالا تخمین خوش‌بینانه‌ای است)

مسئله ۱۶۸ : تابش خورشید روی سطح زمین تقریبا $۱kW$ برای هر متر مربع است. اگر همه نور در $۵۵۰nm$ (یک فرض ضعیف) چه تعداد فوتون در متر مربع در هر ثانیه در سطح زمین فرو می‌رود؟ فرض کنید که خورشید مستقیما بالای سر قرار دارد.

حل : انرژی فوتون $۵۵۰nm$ برابر است با:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(۶/۶ \times ۱۰^{-۳۴} Js)(۳ \times ۱۰^{۸}\, m/s)}{۵/۵ \times ۱۰^{-۷} m} = ۳/۶ \times ۱۰^{-۱۹} J$$

توان برابر است با $۱۰۰۰ J/s$ بنابراین:

$$(۱۰۰۰ J/s) \times (۱\, photon / ۳/۶ \times ۱۰^{-۱۹} J) = ۲/۸ \times ۱۰^{۲۱}\, photons/s$$

مسئله ۱۶۹ : در جولای ۱۹۰۸ انفجار عظیمی در سیبری مرکزی به عرض جغرافیایی $۶۱۰^\circ N$ و طول جغرافیایی $۱۰۲^\circ E$ رخ داد.

الف) فقط با در نظر گرفتن حرکت چرخشی زمین حساب کنید چه مدت پس از این حادثه سیارک می‌توانسته این انفجار را روی هلسینگی به طول جغرافیایی E ° ۲۵ ایجاد کند؟

ب) اگر این سیارک، سیارک فلزی می‌بود، آیا می‌توانست به سطح زمین برسد؟ پس از چه مدت چنین سیارکی می‌توانسته است با اقیانوس آتلانتیک به طول جغرافیایی $۲۰^{\circ}W$ برخورد کرده باشد.

حل : دوره تناوب چرخش زمین به دور خودش ۲۳ ساعت و ۵۶ دقیقه است

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۸۶۱۶۰s}=۷/۲۹\times۱۰^{-۵}\,rad/s$$

چون حرکت زمین با سرعت زاویه‌ای ثابت است $\theta=\omega t$ هر دو منطقه در یک عرض جغرافیایی و در طول جغرافیایی متفاوتی هستند:

$$\theta_۱=۱۰۲-۲۵^{\circ}=۷۷^{\circ}=۱/۳۴rad$$

$$\Rightarrow t=\frac{\theta}{\omega}=\frac{۱/۳۴rad}{۷/۲۹\times۱۰^{-۵}\,rad/s}=۱/۸۴\times۱۰^{۴}s=۵/۱۲h$$

$$\theta_۲=۱۰۲+۲۰=۱۲۲^{\circ}=۲/۱۲۹rad$$

$$\Rightarrow t=\frac{\theta}{\omega}=\frac{۲/۱۲۹rad}{۷/۲۹\times۱۰^{-۵}\,rad/s}=۲/۹۴\times۱۰^{۴}s=۸/۱۱h$$

مسئله ۱۷۰ : فرض کنید که دمای پس زمینه یک تشعشع ۱۰۰۰ درجه کلوین به جای ۲/۷ درجه کلوین می‌بود.

الف) طول موج حداکثر شدت تشعشع چیست؟

ب) چه نوع تلسکوپی برای مشاهده آن نیاز داریم؟

حل : الف) می‌توانیم از قانون وین برای به دست آوردن طول موج حداکثر تشعشع استفاده کنیم. بنابراین:

$$\lambda_{\max}=\frac{۰/۰۰۲۹\,K\,m}{T}$$

اگر $\lambda_{\max}$ بر حسب متر باشد و T بر حسب کلوین با استفاده از این فرمول داریم:

$$\lambda_{\max} = \frac{۰/۰۰۲۹}{۱۰۰۰} = ۲/۹ \times ۱۰^{-۶}\, m = ۲/۹ \mu m$$

ب) $۲/۹ \mu m$ مربوط به ناحیه‌ای نزدیک منطقه مادون قرمز در طیف الکترومغناطیسی است. چو زمین هر تشعشعی با طول موجی بین ۱ تا ۵ میکروفاراد را از خود عبور می‌دهد در پنجره‌ای بین $CO_۲, H_۲O$ در نتیجه می‌توان از یک تلسکوپ زمینی استفاده کرد.

مسئله ۱۷۱ : کوازار $۳C۲۷۳$ دارای انتقال سرخ ۰/۱۶ است.

الف) فاصله‌اش چقدر است؟

ب) کرک اطراف $۳C۲۷۳$ دارای قطر $۱۵''$ است. اندازه خطی‌اش چقدر است؟

ج) قدر مطلق کرک برابر است با ۲۵- درخشندگی آن چقدر است؟ به یاد داشته باشید که قدرمطلق خورشید برابر است با $M = +۴/۷۷$

حل : الف)

$$d = \frac{cz}{H} = \frac{(۳ \times ۱۰^{۵}\, km/s)(۰/۱۶)}{(۷۲\, km/s/Mpc)} = ۶۶۷\, Mpc$$

ب)

$$D = \frac{\alpha d}{۲۰۶۲۶۵} = \frac{(۱۵ arc\sec)(۶۶۷ Mpc)}{۲۰۶۲۶۵} = ۰/۰۴۹\, Mpc = ۴۹\, kpc$$

ج) تفاوت در قدر مطلق بین کرک و خورشید برابر است با ۲۹/۷۷ بنابراین:

$$(۲/۵)^{۲۹/۷۷} = ۷ \times ۱۰^{۱۱}$$

برابر درخشنده‌تر از خورشید یا برابر $۳/۶ \times ۱۰^{۳۸} W$ است.

مسئله ۱۷۲ : فضانوردی در داخل یک دستگاه مرکز گریز مورد آزمایش قرار می‌گیرد. شعاع دستگاه $۱۰ m$ است و بنابر رابطه $\theta = ۰/۳ t^۲$ که در آن t بر حسب ثانیه و θ بر حسب رادیان است، شروع به چرخش می‌کند. $t = ۵ s$ مطلوب است تعیین

الف) سرعت زاویه‌ای

ب) تندی خطی

ج) شتاب مماسی

د) شتاب شعاعی

حل : الف)

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = ۰/۶t$$
$$t = ۵s \Rightarrow \omega = ۳rad/s$$

ب)

$$v = r\omega = ۱۰ \times ۳ = ۳۰m/s$$

ج)

$$a_۱ = r\alpha$$
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = ۰/۶rad/s^۲$$
$$a_t = ۱۰ \times ۰/۶ = ۶m/s^۲$$

د)

$$a_t = \frac{v^۲}{r} = \frac{۹۰۰}{۱۰} = ۹۰m/s^۲$$

مسئله ۱۷۳ : یک فیزیکدان قبض جریمه‌ای برای عبور از چراغ قرمز دریافت می‌کند. او سعی می‌کند با توضیح اینکه نور موضوع انتقال دوپلری است برای قاضی، از آن خلاص شود. به علت نزدیک شدنش به چهار راه، نور از چراغ راهنما از قرمز به سبز انتقال یافته است. بنابراین این فیزیکدان بحث می‌کند، او فکر می‌کند که این سیگنال در واقع سبز بوده و نباید یک جریمه‌ای داشته باشد.

الف) آیا داستان فیزیکدان با عقل جور در می‌آید؟ آیا فیزیکدان در حال نزدیک شدن یا دور شدن از چراغ راهنما بوده است؟

ب) بدون در نظر گرفتن جهت حرکت، محاسبه کنید که این فیزیکدان با چه سرعتی در واحد مایل در ساعت در حال حرکت بوده است؟

حل : الف) مطمئن باشید نور سبز در طول موج پائین‌تر از نور قرمز است، که به این معناست که شما به انتقال آبی نیاز دارید تا نور قرمز را کاری کنید که آبی به نظر برسد. برای بدست آوردن انتقال آبی، شما و چیزی که به آن نگاه می‌کنید بیشتر در حال نزدیک شدن به یکدیگر هستید. که این چیزی است با فیزیکدان و نور قرمزش.

ب)

$$\frac{\lambda_{obs}-\lambda_{\circ}}{\lambda_{\circ}}=\frac{v}{c}$$

$$v=c\left(\frac{\lambda_{obs}-\lambda_{\circ}}{\lambda_{\circ}}\right)$$

$$v=\left(۳\times ۱۰^{۸}\,m/s\right)\frac{۵۵۰۰\,\mathring{A}-۶۵۰۰\,\mathring{A}}{۶۵۰۰\,\mathring{A}}$$

$$v=\left(۳\times ۱۰^{۸}\right)\left(-۰/۱۵۴\right)$$

سرعت منفی نزدیک شدن را نشان می‌دهد، همان گونه که انتظار می‌رود. بنابراین شما در مورد سرعت (که بزرگی سرعت است بدون نگرانی در مورد جهت آن) بحث خواهیم کرد.

$$\text{سرعت}=\left(۴/۶۲\times ۱۰^{۷}\,\frac{m}{s}\right)\left(\frac{۰/۶۲mi}{۱۰۰۰m}\right)\left(\frac{۳۶۰۰s}{۱h}\right)$$

$$\text{سرعت}=۱\times ۱۰^{۸}mph$$

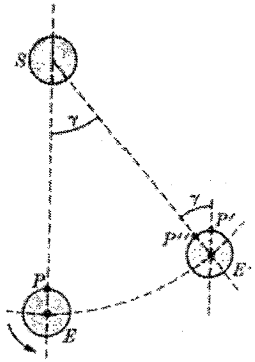
قبض جریمه احتمالا درست خواهد بود شاید هم راننده بی‌ملاحظه باشد.

مسئله ۱۷۴ : سرعت زاویه‌ای زمین را در حرکت وضعی آن به دور محورش بدست آورید.
حل : در شکل زیر نقطه P را در نظر می‌گیریم. هنگامی که زمین یک بار به طور کامل دور محور خودش چرخید، که روز نجومی نام دارد، به سبب حرکت انتقالی زمین دور خورشید از نقطه E به نقطه E' منتقل می‌شود و P در P' قرار می‌گیرد. برای اینکه یک روز کامل بگذرد باید نقطه P' در جای P'' یعنی از نو در مقابل خورشید قرار گیرد. به گفته دیگر زمین هنوز باید به اندازه γ بچرخد. بنابراین دوره حرکت وضعی زمین (روز نجومی) مختصری کمتر از $۸/۶۴\times ۱۰^{۴}s$ است. این مقدار با اندازه‌گیری

$$P=۸/۶۱۶\times ۱۰^{۴}s$$

بدست می‌آید که تقریبا $۲۴۰s$ کوتاه‌تر از روز خورشیدی میانگین است. در این صورت سرعت زاویه‌ای برابر می‌شود با:

$$\omega-\frac{۲\pi}{P}=۷/۲۹۲\times ۱۰^{-۵}rad\,s^{-۱}$$



شکل ۲-۳۱

این اختلاف $240s$ را می‌توان به شیوه نسبتا آسانی برآورد کرد. زمین در ۳۶۵ روز مدار کامل خود دور خورشید را به پایان می‌برد. بنا به γ در یک روز نجومی مختصری کمتر از یک درجه یعنی ۰/۰۱۷۴۵ رادیان است. زمان لازم برای چرخیدن این زاویه با سرعت زاویه‌ای داده شد برابر می‌شود با:

$$t=\frac{\theta}{\omega}=\frac{1/745\times10^{-2}rad}{7/292\times10^{-5}rad\,s^{-1}}$$

مسئله ۱۷۵ : اگر خورشید در اثر تبدیل ئیدروژن به هلیم حدود ۰/۷% جرمش به انرژی تبدیل شود چند سال دیگر به زندگی خود ادامه می‌دهد؟ این مسئله را برای ستاره‌ای با جرم ۴۰ برابر خورشید نیز به طور مجددا بررسی کنید.

حل : زمانی که ئیدروژن به هلیم تبدیل می‌شود، در حدود ۰/۷% جرمش به انرژی تبدیل می‌شود. درخشندگی خورشید برابر است با $L_{\odot}=3/86\times10^{26}W$ بنابراین:

$$0/007m_{conv}c^{2}=3/86\times10^{26}J$$
$$m_{conv}=6\times10^{11}kg$$

در هر ثانیه. خورشید دارای جرم کل $2\times10^{30}kg$ است. بنابراین می‌تواند برای:

$$\frac{2\times10^{30}kg}{6\times10^{11}kg/s}=3\times10^{18}s=10^{11}yr$$

دوام یابد. ستاره‌ای دارای ۴۰ برابر جرم است و این با استفاده از سوختش در ۲۴۰۰۰۰ برابر سرعت است. بنابراین فقط ۴۰/۲۴۰۰۰۰ برابر مدت زمانش یا در حدود ۲×۱۰^{۷} سال دوام خواهد یافت (اگر قرار بود از همه سوخت در دسترس استفاده کنیم، در حقیقت فقط چیزی مانند یک دهم چیزی که طول دارد، دوام می‌یابد.)

مسئله ۱۷۶ : یک فضانورد توپ بولینگی به جرم $m=۷/۲kg$ را در ارتفاع ۳۵۰ کیلومتری در یک مدار دایره‌ای نسبت به زمین رها می‌کند.

الف) انرژی مکانیکی توپ در آن مدار چقدر است؟

ب) انرژی مکانیکی توپ در نقطه پرتاب در کیپ کاناورال چقدر بوده است؟ از آنجا تا مدار، تغییر انرژی مکانیکی توپ چقدر است؟

حل : الف) r شعاع مدار با رابطه زیر داده می‌شود:

$$r=R+h=۶۳۷۰\,km+۳۵۰\,km=۶/۷۲\times۱۰^{۶}\,m$$

که در آن R شعاع زمین است. انرژی مکانیکی عبارت است از:

$$E=-\frac{GMm}{۲r}$$
$$=-\frac{\left(۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\,Nm^{۲}/kg^{۲}\right)\left(۵/۹۸\times۱۰^{۲۴}\,kg\right)\left(۷/۲kg\right)}{(۲)(۶/۷۲\times۱۰^{۶}\,m)}$$
$$=-۲/۱۴\times۱۰^{۸}\,J=-۲۱۴MJ$$

ب) در نقطه پرتاب توپ به دلیل چرخش زمین توپ دارای انرژی جنبشی است ولی می‌توان نشان داد که این آنقدر کوچک است که می‌توان از آن چشم پوشی کرد. بنابراین انرژی کل $E_{\circ}$ برابر با انرژی کل پتانسیل $U_{\circ}$ است که با معادله زیر داده می‌شود:

$$E_{\circ}=U_{\circ}=-\frac{GMm}{R}$$
$$=-\frac{\left(۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\,Nm^{۲}/kg\right)\left(۵/۹۸\times۱۰^{۲۴}\,kg\right)\left(۷/۲kg\right)}{۶/۳۷\times۱۰^{۶}\,m}$$
$$=-۴/۵۱\times۱۰^{۸}\,J=-۴۵۱MJ$$

شاید بگوئید که انرژی پتانسیل توپ روی سطح زمین صفر است ولی توجه داشته باشید که پیکر بندی انرژی پتانسیل صفر مربوط با آن پیکربندی است که در آن توپ فاصله

زیادی از زمین دور شده باشد. همچنین ممکن است برای پیدا کردن $E_{\circ}$ از معادله بالا استفاده کنید ولی به خاطر بیاورید که این معادله در مورد یک ماهواره واقع در مدار برقرار است. افزایش انرژی مکانیکی توپ از نقطه پرتاب تا مدار عبارت است از:

$$\Delta E = E - E_{\circ} = (-۲۱۴MJ) - (-۴۵۱MJ) = ۲۳۷MJ$$

مسئله ۱۷۷ : الف) تندی

ب) دوره حرکت ماهواره‌ای به جرم $۲۲۰kg$ در یک مدار تقریبا دایره‌ای $۶۴۰km$ بالاتر از سطح زمین چقدر است؟ فرض کنید که ماهواره انرژی مکانیکی را با آهنگ میانگین $۱/۴ \times ۱۰^{۵}$ ژول در هر گردش مداری از دست می‌دهد. با در نظر گرفتن این تقریب منطقی که مسیر دایره‌ای است که شعاعش به تدریج کاهش می‌یابد،

ج) ارتفاع

د) تندی

هـ) دوره حرکت را در انتهای ۱۵۰۰ امین گردش ماهواره تعیین کنید.

و) بزرگی میانگین نیروی بازدارنده چقدر است؟

ز) آیا اندازه حرکت زاویه‌ای به دور مرکز زمین برای ماهواره یا دستگاه ماهواره - زمین پایسته است؟

حل : الف)

$$\frac{GM_e m}{(R_e + h)^{۲}} = m\frac{v^{۲}}{(R_e + h)} \Rightarrow v = \left(\frac{GM_e}{R_e + h}\right)^{۱/۲}$$

$$v = \left(\frac{۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} \times ۵/۹۷ \times ۱۰^{۲۴}}{۶/۳۷ \times ۱۰^{۶} + ۶۴۰ \times ۱۰^{۳}}\right)^{۱/۲} = ۷/۵۳۶\, km/s$$

ب)

$$v = (R_e + h)\omega = (R_e + h)\frac{۲\pi}{T}$$

$$T = \frac{۲\pi(R_e + h)}{v} = \frac{۲\pi(۶/۳۷ \times ۱۰^{۶} + ۶۴۰ \times ۱۰^{۳})}{۷/۵۳۶ \times ۱۰^{۳}} = ۵۸۴۴s$$

$$= ۹۷/۳ \min$$

ج) انرژی اولیه ماهواره به قرار زیر است:

$$E_{\circ}=\frac{۱}{۲}mv^{۲}+U=-\frac{GM_{e}m}{۲(R_{e}+h)}$$

$$E_{\circ}=\frac{-۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\times ۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}\times ۲۲۰}{۲\left(۶/۳۷\times ۱۰^{۶}+۶۴۰\times ۱۰^{۳}\right)}$$

$$=-۶/۲۵۸\times ۱۰^{۹}J$$

با توجه به راهنمایی مسئله پس از ۱۵۰۰ امین دور انرژی چنین می‌شود:

$$E=E_{\circ}-۱۵۰۰\times ۱/۴\times ۱۰^{۵}=-۶/۴۶۸\times ۱۰^{۹}J$$

با استفاده از این نتیجه می‌توانیم ارتفاع h' را بدست آوریم:

$$E=\frac{۱}{۲}mv^{۲}+U=-\frac{GM_{e}m}{۲(R_{e}+h')}\Rightarrow ۲E(R_{e}+h')=-GM_{e}m$$

$$\Rightarrow R_{e}+h'=-\frac{GM_{e}m}{۲E}\Rightarrow h'=-\frac{GM_{e}m}{۲E}-R_{e}$$

$$h'=\frac{-۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\times ۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}\times ۲۲۰}{-۲\times ۶/۴۶۸\times ۱۰^{۹}}-۶/۳۷\times ۱۰^{۶}$$

$$=۴/۱۳\times ۱۰^{۵}m=۴۱۳/۴۳km$$

د)

$$\frac{GM_{e}m}{(R_{e}+h')^{۲}}=m\frac{v'^{۲}}{(R_{e}+h')}$$

$$\Rightarrow v'=\sqrt{\frac{GM_{e}}{R_{e}+h'}}\Rightarrow\sqrt{\frac{۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\times ۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}}{۶/۳۷\times ۱۰^{۶}+۴/۱۳\times ۱۰^{۵}}}=۷/۶۷\,km/s$$

هـ)

$$T=\frac{۲\pi(R_{e}+h')}{v'}=\frac{۲\pi\left(۶/۳۷\times ۱۰^{۶}+۴/۱۳\times ۱۰^{۵}\right)}{۷/۶۷\times ۱۰^{۳}}$$

$$=۵/۵۵\times ۱۰^{۳}s=۹۲/۶\min$$

و) توجه شود که حرکت ماهواره در جهت $\hat{\theta}$ و نیروی بازدارنده میانگین در جهت $-\hat{\theta}$ اعمال می‌شود. کار انجام شده توسط این نیرو برابر می‌شود با:

$$W=F(-\hat{\theta})\,L(\hat{\theta})=-Fl$$

که l طول مدار است که با فرض دایره‌ای بودن آن برابر $۲\pi r$ می‌شود.

$$\frac{dW}{dt}=\frac{dE}{dt}=-F\frac{dl}{dt}=-Fv$$
$$\Delta E=-۱/۴\times ۱۰^{۵}\ J/rev$$

برای مدار اول:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{-۱/۴\times ۱۰^{۵}\ J/rev}{۵۸۴۴\ s/rev}=-۲۳/۹۶\ J/s$$
$$F=\frac{dE/dt}{-v}=\frac{۲۳/۹۶\ J/s}{۷/۵۳۶\times ۱۰^{۳}\ m/s}=۳/۱۸\times ۱۰^{-۳}\ N$$

ز) نیروی بازدارنده بر ماهواره گشتاور اعمال می‌کند. بنابراین اندازه حرکت زاویه‌ای ماهواره پایسته نیست. ولی اگر سیستم (زمین+ ماهواره) را با چشم‌پوشی از اثر ماه، خورشید و سایر اجرام سماوی در نظر بگیریم، در این حالت اندازه حرکت زاویه‌ای پایسته می‌ماند.

مسئله ۱۷۸ : فرض کنید یک کاوشگر فضایی در برابر تنش‌هایی به اندازه شتاب $۲۰g$ ایستادگی کند.

الف) کمینه شعاع چرخش چنین وسیله‌ای که با تندی یک دهم تندی نور حرکت می‌کند چقدر است؟

ب) چقدر طول می‌کشد تا با این تندی به اندازه ۹۰ درجه بچرخد؟

حل : الف)

$$R=\frac{v^{۲}}{a}=\frac{\left(۰/۱\times ۳\times ۱۰^{۸}\right)^{۲}}{۲۰\times ۹/۸}=۴/۵۹\times ۱۰^{۱۲}m$$

ب) چرخش به اندازه ۹۰ درجه برابر $\frac{۱}{۴}$ دور کامل است. پس کافی است دوره حرکت را به دست آورده، تقسیم بر ۴ کرد.

$$T=\frac{۲\pi R}{v}=\frac{۲\times ۳/۱۴\times ۴/۵۹\times ۱۰^{۱۲}}{۰/۱\times ۳\times ۱۰^{۸}}=۹/۶\times ۱۰^{۵}s=۲۶۷h$$
$$\Rightarrow t=\frac{T}{۴}=۶۶/۷۵h$$

مسئله ۱۷۹ : ماهواره‌ای روی نقطه معینی از استوای زمین ایستاده است. ارتفاع مدار آن چقدر است؟

حل : ماهواره به دور زمین می‌چرخد و در قانون دوره‌های حرکـت، M بـا M_e جـایگزین می‌شود، T دوره حرکت ماهواره به دور زمین است.

$$T^{۲}=\frac{۴\pi^{۲}}{GM_e}r^{۴}$$

توجه شود برای آنکه ماهواره در نقطه‌ای ثابت باشـد، بایـد صـفحه مـدار مـاهواره همـان صفحه استوایی زمین باشد. بنابراین T دوره حرکت وضعی زمـین (۲۴ سـاعت) خواهنـد بود و خواهیم داشت:

$$r=\left(\frac{T^{۲}GM_e}{۴\pi^{۲}}\right)^{۱/۴}$$

$$=\left(\frac{(۲۴۰\times ۳۶۰۰)^{۲}\times ۶/۶۷\times ۱۰^{۱۱}\times ۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}}{۴\pi^{۲}}\right)^{۱/۳}=۴/۲۲\times ۱۰^{۷}m$$

مسئله ۱۸۰ : در سال ۱۹۹۳ کشتی فضایی گالیله تصـویری از سـیارک آیـدا و یـک مـاه کوچک در حال گردش به زمین فرستاد کـه اولـین نمونـه تائیـد شـده از یـک دسـتگاه سیارک - ماه است. در تصویر این ماه که $۱/۵km$ پهنـا دارد از مرکـز سـیارک بـه طـول $۵۵km$ به اندازه $۱۰۰km$ فاصله دارد. شکل ماه به خوبی شناخته نشده است. فرض کنید که این مدار دایره‌ای و دوره آن $۲۷h$ است.

الف) جرم سیارک چقدر است؟

ب) حجم سیارک که از تصاویر گالیله اندازه‌گیری شده $۱۴۱۰۰km^{۳}$ است. چگالی سـیارک چقدر است؟

حل : الف)

$$T^{۲}=\frac{۴\pi^{۲}}{GM}r^{۳}$$

که r شعاع مدار حرکت ماه، M جرم سیارک و T دوره حرکت ماه است.

$$\Rightarrow M=\frac{۴\pi^{۲}}{GT^{۲}}r^{۳}=\frac{۴\pi^{۲}\times\left(۱/۵\times ۱۰^{۳}\right)^{۳}}{۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\times\left(۲۷\times ۳۶۰۰\right)^{۲}}$$

$$=۲/۱۱\times ۱۰^{۱۱}kg$$

ب)

$$\rho=\frac{M}{V}=\frac{۲/۱۱\times ۱۰^{۱۱}}{۱۴۱۰۰\times\left(۱۰^{۳}\right)^{۳}}=۱/۵\times ۱۰^{-۲}\,kg/m^{۳}$$

مسئله ۱۸۱ : یک راه برای حمله به ماهواره‌ای در مدار زمین پرتاب گروهی گلوله در همان مدار ماهواره ولی در خلاف جهت حرکت آن است. فرض کنید که ماهواره‌ای در یک مدار دایره‌ای که $۵۰۰km$ بالاتر از سطح زمین است با گلوله‌ای با جرم ۴g برخورد کند.

الف) انرژی جنبشی گلوله در چارچوب مرجع ماهواره چقدر است؟

ب) نسبت این انرژی به انرژی جنبشی یک گلوله ۴ گرمی که از یک تفنگ نظامی با سرعت دهانه‌ای $۹۵۰m/s$ خارج می‌شود، چقدر است؟

حل : الف) توجه شود که در چارچوب مرجع ماهواره، گلوله انگار با سرعت $۲v$ به سوی آن حرکت می‌کند. یعنی سرعت ماهواره با سرعت سنگ جمع می‌شود. توجه کنید که سرعت به جرم بستگی ندارد و تمام اجسامی که در یک مدار قرار می‌گیرند سرعت مشابهی دارند.

$$\frac{GM_e m}{\left(R_e+h\right)^{۲}}=\frac{mv^{۲}}{\left(R_e+h\right)}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_e}{\left(R_e+h\right)}}$$

بنابراین انرژی گلوله از دید ناظر سوار بر ماهواره چنین می‌شود:

$$K=\frac{۱}{۲}m\left(۲v\right)^{۲}=۲mv^{۲}$$

$$=\frac{۲mM_eG}{R_e+h}=\frac{۲\times ۴\times ۱۰^{-۳}\times ۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}\times ۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}}{۶/۳۷\times ۱۰^{۶}+۵۰۰\times ۱۰^{۳}}$$

$$=۴/۶۴\times ۱۰^{۵}J$$

ب)

$$K'=\frac{۱}{۲}mv'^{۲}=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱۰^{-۳}\times\left(۹۵۰\right)^{۲}=۱۸۰۵J$$

$$\frac{K}{K'}=\frac{۴/۶۴\times ۱۰^{۵}}{۱۰۸۵}=۲۵۷/۳۲$$

مسئله ۱۸۲ : سیارکی که به طور مستقیم حرکت می‌کند وقتی در فاصله ۱۰ برابر شعاع زمین از آن قرار دارد دارای تندی $12km/s$ نسبت به زمین است. با چشم پوشی از آثار جو زمین روی سیارک، تندی آن را در هنگامی که به سطح زمین می‌رسد پیدا کنید.

حل : چون جرم سیارک از جرم زمین خیلی کمتر است، انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه سیارک - زمین را فقط به سیارک نسبت می‌دهیم و از هر تغییری در تندی زمین نسبت به سیارک در حین افتادن سیارک صرف نظر می‌کنیم. چون از آثار جو روی سیارک چشم پوشی می‌کنیم، انرژی مکانیکی آن را در ضمن سقوط پایسته می‌ماند یعنی:

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

که در آن K و U انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل سیارک و زیرنویس‌های i و f به اندازه‌های اولیه (در فاصله ۱۰ برابر شعاع زمین) و اندازه‌های نهایی (در فاصله شعاع زمین) مربوط‌اند. جرم سیارک را m و جرم زمین را M ($5/98\times10^{24}kg$) و شعاع زمین را ($=6/37\times10^{6}m$) R قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GMm}{10R}$$

با ترتیب دوباره و قرار دادن اندازه‌های معلوم داریم:

$$v_f^2 = v_i^2 + \frac{2GM}{R}\left(1-\frac{1}{10}\right)$$
$$= \left(12\times10^{3}\,m/s\right)^2 + \frac{2\left(6/67\times10^{-11}\,m^3/kgs^2\right)\left(5/98\times10^{24}\,kg\right)}{6/37\times10^{6}\,m}0/9$$
$$= 2/567\times10^{8}\,m^2/s^2$$

و در نتیجه

$$v_f = 1/6\times10^{4}\,m/s = 16\,km/s$$

مسئله ۱۸۳ : آمد و شد خورشیدی، یک قایق خورشیدی عبارت است از یک سفینه فضایی با بادبان بزرگی که به وسیله نور خورشید رانده می‌شود. اگرچه این طور فشار آوردن در شرایط روزانه کوچک است ولی برای فرستادن رایگان و آهسته سفینه‌ای به بیرون از خورشید به اندازه کافی می‌تواند بزرگ باشد. فرض کنید جرم سفینه $900kg$ است و نیروی $20N$ به آن وارد می‌آید.

الف) بزرگی شتاب حاصل چقدر است؟ اگر سفینه از حالت سکون شروع کرده باشد.
ب) در یک روز چقدر حرکت می‌کند؟
ج) با چه سرعتی حرکت می‌کند؟
حل : الف)

$$a=\frac{F}{m}=\frac{۲۰N}{۹۰۰kg}=۲/۲۲\times ۱۰^{-۲}\,m/s^۲$$

ب)

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_\circ t$$
$$v_\circ=۰$$
$$t=۱d=۲۴\times ۳۶۰۰s=۸۶۴۰۰s$$
$$x=\frac{۱}{۲}\times ۲/۲۲\times ۱۰^{-۲}\times (۸۶۴۰۰)^۲=۸/۲۸\times ۱۰^۷ m$$
$$=۸/۲۸\times ۱۰^۴ km$$

ج)

$$v=at+v_\circ=۲/۲۲\times ۱۰^{-۲}\times ۸۶۴۰۰=۱/۹۲\times ۱۰^۳\,m/s$$

مسئله ۱۸۴ : جرم یک سفینه میان ستاره‌ای $۱/۲\times ۱۰^۶ kg$ است و در آغاز نسبت به یک دستگاه ستاره‌ای ساکن است.
الف) چه شتاب ثابتی لازم است تا تندی سفینه را نسبت به دستگاه ستاره‌ای در مدت ۳ روز به $۰/۱c$ برساند.
ب) این شتاب بر حسب یکای g چقدر است؟
ج) چه نیرویی برای ایجاد این شتاب لازم است؟
د) اگر این سفینه هنگامی که به تندی $۰/۱c$ می‌رسد موتورهایش خاموش شود، چقدر طول می‌کشد (از شروع تا پایان) تا ۵ ماه نوری را طی کند؟ (یعنی مسافتی که نور در ۵ ماه می‌پیماید)
حل : الف)

$$v=۰/۱c$$
$$v_\circ=۰$$
$$t=۳d=۳\times ۲۴\times ۳۶۰۰s$$
$$v=v_\circ+at\Rightarrow ۰/۱\times ۳\times ۱۰^۸=a\times ۳\times ۲۴\times ۳۶۰۰\Rightarrow a=۱/۱۵\times ۱۰^۲\,m/s^۲$$

ب)

$$a=11/81g$$

ج)

$$F=ma=1/2\times10^{6}\times1/15\times10^{2}=1/388\times10^{8}N$$

د) ماه نوری مسافتی است که نور در یک ماه طی می‌کند. نخست این مسافت را محاسبه می‌کنیم.

$$l.m.=3\times10^{8}\,m/s\times30\times24\times3600s$$
$$=7/77\times10^{14}m=2592000c$$

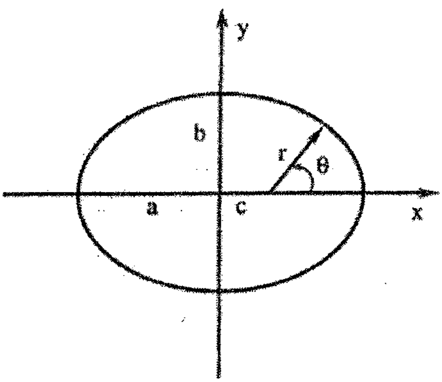
حرکت حالا شتاب‌دار نیست و خواهیم داشت:

$$t=\frac{5l.m.}{v}=\frac{2592000c\times5}{0/1c}$$
$$=1/296\times10^{8}s=36000h=1500d=4y$$

مسئله ۱۸۵ : فرمولی را برای یک بیضی در محورهای مختصات در نظر بگیرید. فرض کنید پایه‌ها در مرکز بیضی تجمع یافته‌اند و محور x در امتداد نیم محور اصلی بیضی.

حل : با شروع از عبارت مختصات داده شده نشان می‌دهد که فرمول محور مختصات برای بیضی برابر است با :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2}+\left(\frac{y}{b}\right)=1$$



شکل ۲-۳۲

با استفاده از نمودار می‌دانیم که $x = c + r\cos\theta$ در حالی که $y = r\sin\theta$ بنابراین :

$$r\cos\theta = (x-c) \qquad (*)$$
$$r\sin\theta = y$$

اگر از این دو معادله جذر بگیریم و آنها را با هم جمع کنیم آنگاه :

$$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = (x-c)^2 + y^2$$
$$y = (x-c)^2 + y^2 \qquad (**)$$

شکل وارونه معادله برای یک بیضی برابر است با :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

با ضرب آن در $(1+e\cos\theta)$ داریم :

$$r + er\cos\theta = a(1-e^2)$$
$$r = a(1-e^2) - er\cos\theta$$

با جایگزین کردن معادله (*) در آخرین مرحله به سمت راست، بدست می‌آید :

$$r = a - ae^2 - ex + ec$$

با توجه به اینکه $e \equiv c/a$ چنین به دست می‌آید :

$$r = a - \frac{c^2}{a} - \frac{cx}{a} - \frac{cx}{a} + \frac{c^2}{a} = a - \frac{cx}{a}$$

با جذر گرفتن از این معادله و جایگزین کردن در معادله (**) داریم :

$$r^2 = (x-c)^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

توجه داشته باشید که $b^2 = a^2 - c^2$ یا $c^2 = a^2 - b^2$ که به دست می‌آوریم :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{۲}+\left(\frac{y}{b}\right)^{۲}=۱$$

مسئله ۱۸۶ : مرکز کهکشان راه شیری $SGRA^*$ نامیده می‌شود. یک نوع ستاره رشته اصلی O به نام $S_۲$ به دور $SGRA^*$ روی مدار بیضوی می‌چرخد. برای $S_۲$، ۱۵ روز طول می‌کشد تا یک مدار بسازد و نیم محور اصلی مدارش برابر است $۸۳۶AU$

الف) جرم $SGRA^*$ (بر حسب واحد شمسی) با این فرض که جرم $SGRA^*$ در مرتبه بزرگی بسیار بزرگ‌تر از جرم $S_۲$ است، را بیابید.

ب) فرض کنید که $SGRA^*$ سیاهچاله است. شعاع افق رویداد آن چقدر خواهد بود؟ پاسخ خود را بر حسب km و AU بیان کنید.

ج) $SGRA^*$ در فاصله $۸kpc$ از ما قرار دارد. قطر زاویه‌ای $SGRA^*$ را همان گونه که از زمین دیده می‌شود اگر شعاع آن توسط محاسبه شما در قسمت ب داده شود، محاسبه کنید.

حل : M_A را جرم $SGRA^*$ و $M_۲$ را جرم $S_۲$ قرار می‌دهیم. فرض خواهیم کرد که جرم $S_۲$ بسیار کوچک‌تر از $SGRA^*$ است. از قانون حرکت مداری کپلر :

$$M_A \approx M_A + M_{S۲} = \frac{a^۳}{P^۲} = \frac{(۸۳۶)^۳}{۱۵^۲} = ۲/۶\times ۱۰^۶ M_{\odot}$$

جرم در مرکز کهکشان ما در حدود ۲/۶ میلیون جرم شمسی است.

ب) اگر $SGRA^*$ سیاهچاله باشد، شعاع افق رویدادش توسط رابطه زیر داده می‌شود :

$$R_{EH} = ۳\,km\frac{M}{M_{\odot}}$$

با استفاده از حل خود از قسمت الف این شعاع :

$$R_{EH} = ۳\times ۲/۶\times ۱۰^۶\,km = ۷/۸\times ۱۰^۶\,km$$

بر حسب واحد نجومی این برابر است با :

$$R_{EH} = ۷/۸\times ۱۰^۶\,km\times\frac{۱AU}{۱/۵\times ۱۰^۸\,km} = ۵/۲\times ۱۰^{-۲}\,AU$$

سیاهچاله به سادگی در منظومه شمسی ما می‌گنجد.

ج) قطر سیاهچاله برابر است با $۱۰/۴\times۱۰^{-۲}AU$ و از فاصله $۸kpc$ دیده می‌شود. این مطابق است با زاویه :

$$\theta = \frac{۱۰/۴\times۱۰^{-۲}AU}{۸\times۱۰^{۳}pc}\times\frac{۱pc}{۲\times۱۰^{۵}AU}rad\times\frac{۲\times۱۰^{۵''}}{rad}$$

$$=\frac{۱۰/۴\times۱۰^{۲}}{۸\times۱۰^{۳}}arc\,s = ۱\times۱۰^{-۵}arc\,s$$

مسئله ۱۸۷ : شعاع شوارتزشیلد سیاهچاله ۳۰۰۰۰۰۰ جرم شمسی چقدر است؟

حل : شعاع شوارتزشیلد به طور خطی با جرم سیاهچاله مقیاس گذاری می‌شود و برای سیاهچاله دارای یک جرم شمسی برابر است با $۲/۹۵km$ بنابراین شعاع شوارتزشیلد سیاهچاله ۳۰۰۰۰۰۰ جرم شمسی برابر است با :

$$۳۰۰۰۰۰۰\times۲/۹۵km \approx ۹۰۰۰۰۰۰km$$

که به سادگی در مدار عطارد قرار می‌گیرد.

مسئله ۱۸۸ : فرض کنید متوسط چگالی مواد موجود در سیاهچاله را به این صورت تعریف کنیم :

$$\langle\rho\rangle \equiv \frac{M}{(۴\pi R_S^{۳}/۳)}$$

که M جرم و R_S شعاع شوارتزشیلد است. چگالی متوسط (بر حسب واحد گرم بر سانتیمتر مکعب) برای موارد زیر چقدر است؟

الف) سیاهچاله $۱۰M_\odot$

ب) سیاهچاله $۱۰^{۱۵}\,gm$

ج) سیاهچاله $۱۰^{۹}M_\odot$

حل : الف)

$$M = ۱۰M_\odot$$

$$R_S = ۲/۹۵\times۱۰^{۶}cm$$

$$\langle\rho\rangle = \frac{M}{\left(۴\pi R_S^{۳}/۳\right)} = \frac{۳M}{۴\pi R_S^{۳}} = \frac{۳\times۱۰\times۱/۹۹\times۱۰^{۳۳}}{۴\pi\left(۲/۹۵\times۱۰^{۶}\right)^{۳}} = ۱/۸۵\times۱۰^{۱۴}\,g/cm^{۳}$$

شبیه به ستاره نوترونی یا چگالی‌های هسته‌ای است.

ب) برای :

$$M=۱۰^{۵}g$$

$$R_S=۱/۵\times ۱۰^{-۱۳}cm$$

$$\langle\rho\rangle=\frac{۳\times ۱۰^{۱۵}}{۴\pi\left(۱/۵\times ۱۰^{-۱۳}\right)^{۳}}=۷\times ۱۰^{۵۲}\,g/cm^{۳}$$

بسیار بزرگتر از حتی چگالی هسته‌ای است.

ج) به طور بدیهی :

$$\langle\rho\rangle\propto\frac{M}{M^{۳}}\propto M^{-۲}$$

$$M=۱۰M_{\odot}$$

$$\langle\rho\rangle=\frac{۱/۸۵\times ۱۰^{۱۴}}{\left(۱۰^{۹}/۱۰\right)^{۲}}=\frac{۱/۸۵\times ۱۰^{۱۴}}{۱۰^{۱۶}}=۰/۰۱۸۵\,g/cm^{۳}$$

که کمی متراکم‌تر از هواست.

مسئله ۱۸۹ : یک منظومه ستاره دوتایی معین شامل یک کوتوله سفید و یک غول سرخ که در حال چرخش به دور یکدیگر هستند، می‌شود. فرض کنید که کوتوله سفید دارای شعاع $۱R_e$ و غول قرمز دارای شعاع $۱۰۰R_{\odot}$ است. دمای سطح کوتوله سفید $۶۰۰۰K$ است و دمای سطح غول قرمز برابر است با $۳۰۰۰K$ این یک منظومه ستاره دوتایی در جایی است که دو ستاره با هم در یک زمان تشکیل شده‌اند.

الف) نسبت B_W/B_R روشنایی مشاهده شده کوتوله سفید به روشنایی مشاهده شده غول قرمز چقدر است؟

ب) آیا این ممکن است که غول قرمز و کوتوله سفید هر دو دارای یک جرم باشند؟ توضیح دهید. مطمئن باشند که مقایسه جرم‌های ستاره‌ها را در زمانی که هر دو در ابتدا تشکیل شده‌اند را در نظر بگیرید.

ج) فرض کنید که این منظومه ستاره دوتایی ۲۰۰ پارسک دور است. کوتوله سفید تصادفی دیگر نیاز است که در چه فاصله‌ای باشد تا همان روشنایی غول قرمز در منظومه نمونه را داشته باشد.

حل : الف) دو ستاره در یک فاصله از ما قرار دارند. بنابراین نسبت روشنایی مانند نسبت درخشندگی است :

$$\frac{B_W}{B_R}=\frac{L_W}{L_R}=\frac{4\pi R_W^2\sigma T_W^2}{4\pi R_R^2\sigma T_R^2}$$

$$\frac{B_W}{B_R}=\left(\frac{R_W}{R_R}\right)^2\left(\frac{T_W}{T_R}\right)^4$$

$$\frac{B_W}{B_R}=\left(\frac{6378\,km}{100\times 695500\,km}\right)^2\left(\frac{6000\,K}{3000\,K}\right)^4$$

$$\frac{B_W}{B_R}=1/35\times 10^{-7}$$

کوتوله سفید بسیار تیره تر از غول قرمز است.

ب) احتمالا خیر. اگر دو ستاره با هم تشکیل شده باشند پس زمانی که آنها ستاره‌ای را تشکیل داده‌اند که به کوتوله سفیدی تبدیل می‌شد که جرم بیشتری نسبت به ستاره‌ای داشت که به غول قرمز تبدیل می‌شد. کوتوله سفید تکامل یافته‌تر از غول قرمز است و ستاره‌های سنگین‌تر با جرم بیشتر زندگی‌هایشان را سریع‌تر می‌گذارنند. ولی این پیچیده است، زیرا زمانی که ستاره به کوتوله سفید تبدیل می‌شود جرم بسیاری را از دست می‌دهد مقداری جرم با بادهای ستاره‌ای در فاز غول قرمز از دست می‌روند و توده جرم در زمانی که سحابی سیاره‌ای خارج می‌شود از دست می‌رود. بنابراین اگرچه ستاره‌ای که اکنون کوتوله سفید است، در زمانی که دو ستاره شروع شده‌اند، می‌بایست سنگین‌تر می‌بود ولی درست اکنون ممکن است دو ستاره جرم یکسانی داشته باشند همان گونه که کوتوله سفید کسر بزرگ‌تری از جرمشان را از دست داده است. اگرچه آن مقداری میزان سازی دقیق خواهد بود.

ج) ما به دنبال کوتوله سفید دیگری می‌گردیم که :

$$\frac{1}{1/35}\times 10^{-7}$$

روشن‌تر است.

$$\frac{B_{other}}{B_W}=\frac{1}{1/35\times 10^{-7}}$$

ولی این یک کوتوله سفید تصادفی است بنابراین $L_{other}=L_W$ در نتیجه :

$$\frac{B_{other}}{B_W}=\frac{L_{other}/4\pi d_{other}^2}{L_W/4\pi d_W^2}$$

$$\frac{B_{other}}{B_W}=\left(\frac{d_W}{d_{other}}\right)^{۲}$$

$$d_{other}=d_W\sqrt{\frac{B_W}{B_{other}}}$$

$$d_{other}=(۲۰۰pc)\sqrt{۱/۳۵\times۱۰^{-۷}}$$

$$d_{other}=۰/۰۷۳pc$$

ما هیچ ستاره‌ای به این نزدیکی نمی‌شناسیم تقریبا مطمئنا هیچ کوتوله سفیدی آنقدر نزدیک وجود ندارد. نزدیک‌ترین ستاره‌ای که می‌شناسیم در حدود $۱/۳pc$ فاصله دارد.

مسئله ۱۹۰ : الف) آنتارس ستاره نورانی دارای دمای سطحی ۳۸۰۰ درجه کلوین است. این مقدار را با دمای سطحی خورشید مقایسه کنید. چه مقدار انرژی از هر ثانیه از هر متر مربع از سطح آنتارس انتشار می‌یابد.

ب) آنتارس یک ستاره سرخ غول پیکر که شعاع آن ۶۰۰ برابر شعاع خورشید است. درخشندگی آنتارس در واحدهای خورشیدی چیست؟

حل : الف) انرژی انتشار یافته در هر ثانیه از هر متر مربع سطح یک ستاره با تغییرات پی در پی ستاره است (اغلب بر حسب $w/m^۲$) تغییرات پی در پی سطح آنتارس را با تغییرات پی در پی سطح خورشید با استفاده از نسبت‌ها مقایسه کنید. نیازی به محاسبه مقدار عددی تغییرات پی در پی بر حسب $w/m^۲$ نیست.

$$\frac{F_*}{F_\odot}=\frac{\sigma T_*^۴}{\sigma T_\odot^۴}$$

$$\frac{F_*}{F_\odot}=\frac{T_*^۴}{T_\odot^۴}$$

دمای خورشید ۵۸۰۰ درجه کلوین است و دمای آنتارس ۳۸۰۰ درجه داده شده است.

$$\frac{F_*}{F_\odot}=\frac{۳۸۰۰^۴}{۵۸۰۰^۴}$$

$$\frac{F_*}{F_\odot}=۲۵$$

$$F_*=۰/۱۸۴F_\odot$$

توجه داشته باشید که آنتارس یک ستاره با دمای سطحی سردتر، انرژی کمتری را در هر متر مربع نسبت به خورشید انتشار می‌دهد.
ب) بار دیگر نیازی به محاسبه مقدار عددی درخشندگی آن گونه که معادله برای درخشندگی در واحدهای خورشیدی سئوال شده نیست.

$$L = ۴\pi R^۲ F$$

نسبت‌ها بار دیگر استفاده می‌شوند:

$$\frac{L_A}{L_\odot} = \frac{۴\pi R_A^۲ F_A}{۴\pi R_\odot^۲ F_\odot}$$

$$\frac{L_A}{L_\odot} = \left(\frac{R_A}{R_\odot}\right)^۲ \times \frac{F_A}{F_\odot}$$

گفته شد که شعاع آنتارس ۶۰۰ برابر شعاع خورشید است بنابراین $R_A = ۶۰۰ R_\odot$ و از قسمت الف می‌دانیم که $F_A = ۰/۱۸۴ F_\odot$:

$$\frac{L_A}{L_\odot} = \left(\frac{۶۰۰ R_\odot}{R_\odot}\right)^۲ \times \frac{۰/۱۸۴ F_\odot}{F_\odot}$$

$$\frac{L_A}{L_\odot} = ۶۰۰^۲ \times ۰/۱۸۴$$

$$\frac{L_A}{L_\odot} = ۶۶۲۴۰$$

$$L_A = ۶۶۲۴۰ L_\odot$$

مسئله ۱۹۱ : الف) با تعیین اینکه فتوسفر در دمای $۶۰۰۰K$ است، آیا انتظار دارید تحریکات برخوردی یا تابش مهم‌تر از تحریک اتم‌های هیدروژن به دومین تراز $(n = ۲)$ باشد.
ب) آیا انتظار می‌رود خط لیمان α انتشاری باشد یا جذبی؟
می‌توان نتیجه گرفت که تحریک تابشی طبق دو عامل بسیار ناچیز است؟
۱) اگر به منحنی جسم تیره با $۶۰۰۰K$ ماده نگاه کنیم می‌توان فوتون‌های بسیار کمی از خط لیمان- α را که ایجاد شده است، مشاهده نمود.
۲) اگر به نسبت $N_۲ / N_۱$ معادله بولتزمن نگاه کنیم در می‌یابیم که بسیار کوچک و اندک است.

برای محاسبه و برآورد اهمیت تحریک برخوردی، فرض کنید الکترونی را که با یک اتم هیدروژن در تراز پایه برخورد می‌کند مد نظر قرار دهیم. می‌توانیم سرعتی را که الکترون طی آن به ایجاد $۱۰/۲eV$ مورد لزوم برای صعود یک الکترون به دومین تراز نیاز دارد محاسبه کنیم.

$$\frac{۱}{۲}m_e v^۲ = E = ۱۰/۲eV = ۱/۶۳\times۱۰^{-۱۸}J$$

$$v=\sqrt{\frac{۲E}{m_e}}=\sqrt{\frac{۲\left(۱/۶۳\times۱۰^{-۱۸}J\right)}{\left(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}kg\right)}}=۱/۹\times۱۰^{۶}\frac{m}{s}$$

می‌توان این مقدار را با میانگین سرعت الکترون در این دما مقایسه کرد.

$$\frac{۱}{۲}m_e v^۲=\frac{۳}{۲}kT$$

$$v=\sqrt{\frac{۳kT}{m}}=\sqrt{\frac{۳\left(۱/۳۸\times۱۰^{-۲۳}\frac{J}{K}\right)\left(۶۰۰۰K\right)}{\left(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}kg\right)}}=۵/۲\times۱۰^{۵}\frac{m}{s}$$

با این وجود سرعت‌ها در مقدارهای متوسطی توزیع شده‌اند. بنابراین هنوز الکترون‌هایی با سرعت کافی و تحریک برخوردی وجود دارند که حائز اهمیت هستند. بنابراین می‌توان خط لیمان α را به صورت انتشاری مشاهده کرد.

مسئله ۱۹۲ : یک ستاره‌شناس مشاهدات زیر را انجام می‌دهد.

- یک متغیر قیفاووسی با دوره تناوب ۱۰ روز دارای اختلاف منظر ۰/۰۲۳است.
- ستاره متغیر دارای $۳/۴\times۱۰^{-۱۱}$ برابر روشنایی خورشید در آسمان است.
- ستاره متغیر قیفاووسی دیگر در کهکشان نزدیک نیز دارای دوره تناوب ۱۰ روز و روشنایی $۱/۱\times۱۰^{-۲۱}$ برابر روشنایی خورشید است. (این ستاره بسیار تیره‌ای است و برای مثال تلسکوپ فضایی هابل به زمان زیادی برای مشاهده آن نیاز دارد)
- ابرنواختر I_a در همان کهکشان نزدیک، مانند دومین قیفاووسی دارای روشنایی $۱/۵\times۱۰^{-۱۵}$ برابر روشنایی خورشید مشاهده شده است.
- ابرنواختر نوع I_a در کهکشان دور دیگری دارای روشنایی $۱/۳\times۱۰^{-۱۹}$ برابر روشنایی خورشید مشاهده شده است. این ستاره چقدر دور است؟

حل : فاصله اولین ستاره متغیر قیفاووسی را می‌توان به آسانی از اختلاف منظر تعیین کرد.

$$d_{C1} = \frac{1}{p} = \frac{1}{0/022}$$
$$d_{C1} = 45/45\ pc$$

دومین ستاره متغیر قیفاووسی تیره‌تر است ولی دور نیز است. این اگرچه دارای همان دوره تناوب است ولی باید همان درخشندگی ستاره متغیر را داشته باشد (این چیزی است که قیفاووسی‌ها را سودمند می‌کند)

$$B = \frac{L}{4\pi d^2}$$
$$L = 4\pi d^2 B$$
$$L_{C1} = L_{C2}$$
$$4\pi d_{C1}^2 B_{C1} = 4\pi d_{C2}^2 B_{C2}$$
$$d_{C2} = d_{C1}\sqrt{\frac{B_{C1}}{B_{C2}}}$$
$$d_{C2} = 45/45\ pc\sqrt{\frac{3/4\times10^{-11}}{1/1\times10^{-21}}}$$
$$d_{C2} = 8\times10^{6}\ pc = 8\,Mpc$$

این یک فاصله منطقی برای کهکشان نزدیک (کهکشان‌ها مایلند چند Mpc دور شوند) است. اولین ابرنواختر نوع I_a ؛ $8\,Mpc$ دور است. البته چون در همان کهکشان اولین ستاره متغیر است، نمی‌توانیم همان کار را که در بالا انجام دادیم برای محاسبه فاصله‌های بین دو ابرنواختر انجام دهیم. به خاطر داشته باشید که ابرنواخترها شمع‌های استاندارد هستند.

$$L_{S1} = L_{S2}$$
$$4\pi d_{S1}^2 B_{S1} = 4\pi d_{S2}^2 B_{S2}$$
$$d_{S2} = d_{S1}\sqrt{\frac{B_{S1}}{B_{S2}}}$$

$$d_{S۲} = ۸\,Mpc\sqrt{\frac{۱/۵\times۱۰^{-۱۵}}{۱/۳\times۱۰^{-۱۹}}}$$

$$d_{S۲} = ۸۰۰\,Mpc = ۸/۶\times۱۰^{۶}\,pc$$

مسئله ۱۹۳ : با استفاده از جذر میانگین مجذور سرعت، مسیر آزاد متوسط مولکول‌های نیتروژن موجود در کلاس را در دمای $۳۰۰K$ تخمین بزنید. زمان متوسط بین برخوردها چقدر است؟ شعاع مولکول ئیدروژن و چگالی هوا را $۱/۲\times۱۰^{-۳}g\,cm^{-۳}$ بگیرید. مولکول نیتروژن ۲۸ نوکلئون (پروتون و نوترون) دارد.

حل :

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{۳kT}{m}} = \sqrt{\frac{۳\left(۱/۳۸\times۱۰^{-۲۳}\right)\left(۳۰۰\right)}{۲۸\times۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}}} = ۵۱۵\,m/s$$

$$l = \frac{۱}{n\sigma} = \frac{۱}{\left(\rho/m\right)\pi\left(۲a_{\circ}\right)^{۲}} = \frac{۲۸\times۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}}{۱/۲\pi\left(۲\times۱۰^{-۱۰}\right)^{۲}} = ۳/۱\times۱۰^{-۷}m$$

$$\bar{t} = \frac{l}{v_{rms}} = \frac{۳/۱\times۱۰^{-۷}}{۵۱۵} = ۶\times۱۰^{-۹}s$$

مسئله ۱۹۴ : بار دیگر شرایطی را که باعث تشکیل خورشید شد بررسی می‌کنیم.

الف) موارد زیر را در نظر بگیرید: هسته یک ابر مولکولی عظیم دارای شعاعی حدود $۱pc$، دمایی بین ۳۰ و $۱۰۰K$ و عدد غلظت $۱۰^{۱۰}/m^{۳}$ است. آیا برای تشکیل یک ستاره از نوع خورشیدی احتمال واپاشی وجود دارد. لازم است به راحتی جرم را بررسی و کنترل کنیم و ببینیم که آیا این جرم قابل مقایسه با خورشید است یا خیر.

ب) گره‌های کوچک درون هسته‌ای ابرهای مولکولی عظیم دارای شعاعی حدود $۰/۱pc$، دماهایی بین ۳۰ و $۲۰۰K$ و عدد غلظت $۱۰^{۱۲}/m^{۳}$ است. آیا نسبت به مورد الف برای تشکیل یک ستاره از نوع خورشیدی احتمال بیشتری نسبت به مورد (الف) برای متلاشی شدن وجود دارد؟

ج) برای محتمل‌ترین مورد قسمت ب، زمان سقوط آزاد از واپاشی چقدر است؟

د) برای محتمل‌ترین مورد، متوسط درخشندگی تابیده شده توسط اولین ستاره طی مرحله واپاشی آن چقدر است؟

حل : الف) فرض کنید که ابر، هیدروژن مولکولی است.

$$\rho = ۲m_H N = \left(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}kg\right)\left(\frac{۱۰^{۱۰}}{m^۳}\right) = ۳/۳۴\times۱۰^{-۱۷}\frac{kg}{m^۳}$$

$$M = \frac{۴}{۳}\pi R^۳\rho = \frac{۴}{۳}\pi\left(۳/۰۸۶\times۱۰^{۱۶}m\right)^۳\left(۳/۳۴\times۱۰^{-۱۷}\frac{kg}{m^۳}\right)$$

$$= ۴\times۱۰^{۳۳}kg \approx ۲۰۰۰M_\odot$$

بنابراین برای اینکه این ابر به صورت یک ستاره از نـوع خورشـیدی متلاشـی شـود، لازم است ۹۹/۹۵% از جرم اولیه خود را از دست بدهد. اغلب می‌توان از معادلـه قبـل بـرای محاسبه و ارزیابی اندازه ناحیه متلاشی شده برای این غلظت وگسـترده دمـایی اسـتفاده کرد.

$$L \approx ۱۰^۷\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

$$L_۱ = ۱۰^۷\sqrt{\frac{۳۰}{۳/۳۴\times۱۰^{-۱۷}}} = ۹/۵\times۱۰^{۱۵} \approx ۰/۳pc$$

$$L_۲ = ۱۰^۷\sqrt{\frac{۱۰۰}{۳/۳۴\times۱۰^{-۱۷}}} = ۱/۷\times۱۰^{۱۶} \approx ۰/۵۵pc$$

بنابراین این ابر برای متلاشی شدن و تبدیل به یک ستاره از نوع خورشیدی بسیار بزرگ است.

ب)

$$M = \frac{۴}{۳}\pi R^۳\rho = \frac{۴}{۳}\pi\left(۳/۰۸۶\times۱۰^{۱۵}m\right)\left(۳/۳۴\times۱۰^{-۱۵}\frac{kg}{m^۳}\right)$$

$$= ۴\times۱۰^{۳۲}kg \approx ۲۰۰M_\odot$$

برای اینکه این گره برای تبدیل به یک ستاره از نوع خورشیدی متلاشی شود، لازم اسـت ۹۹/۵% از جرم اولیه خود را از دست بدهد.

$$L_۱ = ۱۰^۷\sqrt{\frac{۳۰}{۳/۳۴\times۱۰^{-۱۵}}} = ۹/۵\times۱۰^{۱۴} \approx ۰/۰۳pc$$

$$L_۲ = ۱۰^۷\sqrt{\frac{۲۰۰}{۳/۳۴\times۱۰^{-۱۵}}} = ۲/۴\times۱۰^{۱۵} \approx ۰/۰۸pc$$

حقیقتا این ابر احتمال بیشتری برای واپاشی و تشکیل ستاره‌ای از نوع خورشیدی در مقایسه با ابر ذکر شده در قسمت الف دارد زیرا باید مقدار کمتری از جرم اولیه خود را از دست بدهد و اندازه آن قابل مقایسه‌تر از اندازه ابر متلاشی شده است.

ج)

$$t_{ff}=\frac{۶/۴۴\times۱۰^{۴}}{\rho_{\circ}^{\frac{۱}{۲}}}=\frac{۶/۴۴\times۱۰^{۴}}{\left(۳/۳۴\times۱۰^{-۱۵}\right)^{\frac{۱}{۲}}}=۱/۱۲\times۱۰^{۱۲}s=۳/۵\times۱۰^{۴}yr$$

د) طبق قضیه ویریال، می‌دانیم که انرژی موجود برای تابش طی واپاشی گرانش برابر گره در قسمت ب نصف انرژی پتانسیل گرانش موجود است.
با استفاده از $۰/۱pc=۳/۰۸۶\times۱۰^{۱۵}m$ برای سنجش اندازه، به دست می‌آید.

$$E_{radiation}=\frac{۱}{۲}U\approx\frac{GM^{۲}}{۲L}$$
$$=\frac{۱}{۲}\frac{\left(۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\frac{N-m^{۲}}{kg^{۲}}\right)\left(۴\times۱۰^{۳۲}kg\right)^{۲}}{\left(۳/۰۸۶\times۱۰^{۱۵}m\right)}=۱/۷\times۱۰^{۳۹}J$$

و با استفاده از مقیاس زمان واپاشی از قسمت (ج) متوسط درخشندگی طی واپاشی برابر است با:

$$\langle L\rangle=\frac{E_{radiation}}{t_{ff}}=\frac{۱/۷\times۱۰^{۳۹}J}{۱/۱\times۱۰^{۱۲}s}=۱/۶\times۱۰^{۲۷}W\approx۴L$$

که مقداری معقول و منطقی است.

مسئله ۱۹۵ : ابر گاز دارای دمای $۱۰K$ و چگالی $۱۰۰۰cm^{-۳}$ است. قطعاتی که ابر قطعه قطعه می‌شوند، چقدر است؟

حل : اندازه یا جرم قطعات توسط رابطه جینز داده می‌شود. تحت این شرایط جرم جینز برای دمای T در K و عدد چگالی n در اتم‌ها در سانتی متر مکعب برابر است با :

$$M=۱۸M_{\odot}\sqrt{\frac{T^{۳}}{n}}=۱۸M_{\odot}\sqrt{\frac{۱۰^{۳}}{۱۰۰۰}}=۹۴M_{\odot}$$

ابر به قطعاتی با جرم‌های در حدود $۱۸M_{\odot}$ قطعه قطعه خواهد شد.

مسئله ۱۹۶ : الف) گانیمید، قمر مشتری، دارای نیروی بازتاب ۰/۳ است. از این مقدار برای به دست آوردن دمای تعادل گانیمید استفاده کنید.
ب) این دما را برای نتیجه رابطه یک اتمسفر به کار برید. آیا گانیمید می‌تواند گاز گزنون را حفظ کند.
حل : الف)

$$T_p = ۲۷۹(1-A)^{\frac{1}{۴}}(r_p)^{\frac{1}{۲}}$$
$$= ۲۷۹(1-۰/۳)^{\frac{1}{۴}}(۵/۲AU)^{\frac{1}{۲}} = ۱۱۲K$$

ب) سرعت فرار برابر است با:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{۲GM}{R}} = \sqrt{\frac{۲\left(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\frac{N-m^۲}{kg^۲}\right)\left(۱/۴۸۲\times ۱۰^{۲۳}kg\right)}{(۲۶۳۰\times ۱۰^{۳}m)}} = ۲۷۴۰\frac{m}{s}$$

جرم یک اتم گزنون برابر است با:

$$(۱۳۱/۳)\times ۱/۶۶\times ۱۰^{-۲۷}kg = ۲/۱۸\times ۱۰^{-۲۵}kg$$

ریشه میانگین مجذور سرعت برابر است با:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{۳KT}{m}} = \sqrt{\frac{۳\left(۱/۳۸\times ۱۰^{۲۳}\frac{J}{K}\right)(۱۱۲K)}{۲/۱۸\times ۱۰^{-۲۵}kg}} = ۱۴۵/۸\frac{m}{s}$$

به دلیل اینکه $v_{escape} > ۱۰^{*}v_{rms}$ ، گاز باید باقی بماند.

مسئله ۱۹۷ : اگر ابرنواختر $۱۰^{۱۰}$ برابر روشنایی خورشید باشد این باید به منظور به اندازه روشنایی خورشید در آسمان ما ظاهر شدن، چقدر دور باشد؟ پاسخ خود را بر حسب سال نوری بیان کنید.
حل :

$$f=\frac{L}{۴\pi d^۲}$$

$$\frac{L_\odot}{۴\pi(۱AU)^۲}=\frac{۱۰^{۱۰}L_\odot}{۴\pi d^۲}$$

$$d^۲=۱۰^{۱۰}AU^۲$$

$$d=۱۰^۵AU$$

حاصل به دست آمده را به سال نوری تبدیل می‌کنیم.

$$۱۰^۵AU\times\left(\frac{۸\min}{AU}\right)\times\left(\frac{۱hr}{۶۰\min}\right)\times\left(\frac{۱day}{۲۴hr}\right)\times\left(\frac{۱yr}{۳۶۵day}\right)=۱/۵$$

مسئله ۱۹۸ : هنگامی که درباره ستارگان دوتایی بحث کردیم، از رابطه جرم - درخشندگی برای ستارگان رشته اصلی آگاهی یافتیم. $(L/L_\odot)\approx(M/M_\odot)^۳$ اگر این روابط صحیح باشد، سنگین‌ترین ستاره کدام است. کدام یک تحت تاثیر فشار تابش نابود نمی‌شود؟

حل : در مسائل قبل دریافتیم که حدود بالا بر درخشندگی یک جسم به طوری که این جسم تحت فشار تابش متلاشی نشده باشد برابر است با:

$$\frac{L}{L_\odot}\leq ۲\times۱۰^۴\frac{M}{M_\odot}$$

از طرف دیگر رابطه جرم - درخشندگی برای ستارگان رشته اصلی تقریبا چنین است:

$$\frac{L}{L_\odot}\approx\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^۳$$

ترکیب این دو رابطه حدود بالایی را برای جرم یک ستاره که متلاشی نشده است ارائه می‌دهد:

$$\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\leq ۲\times۱۰^۴\frac{M}{M_\odot}\Rightarrow\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^۲\leq ۲\times۱۰^۴\Rightarrow M\leq ۱۴۰M_\odot$$

مسـئله ۱۹۹ : اخـتلاف منظـر سـتاره A برابـر ″۰/۱ و اخـتلاف منظـر B برابـر ″۰/۰۲۵ اندازه‌گیری شده است. ستاره B دو برابر روشن‌تر از ستاره A بـه نظـر مـی‌رسـد. نسـبت درخشندگی ستاره A به درخشندگی ستاره B چقدر است؟

حل : از اختلاف منظرها فواصل را بدست می‌آوریم.

$$d_A = \frac{۱}{۰/۱} pc = ۱۰ \, pc$$

$$d_B = \frac{۱}{۰/۰۲۵} pc = ۴۰ \, pc$$

همچنین نسبت درخشندگی نیز به ما داده شده است:

$$B_B = ۲B_A$$

آنچه به دنبال آن هستیم درخشندگی‌هاست. B دورتر اما روشن‌تر است بنابراین مـا B را به علت اینکه درخشان‌تر است بهتر به دست می‌آوریم. انتظار چنین نسبتی می‌رود:

$$\frac{L_A}{L_B} < ۱$$

فاصله و روشنی را داریم و می‌دانیم چگونه همه آنها را به درخشندگی ربط دهیم:

$$B = \frac{L}{۴\pi d^۲}$$

در نتیجه :

$$B_A = \frac{L_A}{۴\pi d_A^۲} \qquad B_B = \frac{L_B}{۴\pi d_B^۲}$$

ما به دنبال نسبت درخشندگی‌ها هستیم. پس هر کدام از اینها را برای درخشندگی حـل می‌کنیم :

$$L_A = ۴\pi d_A^۲ B_A \qquad L_B = ۴\pi d_B^۲ B_B$$

برای به دست آوردن این نسبت دو رابطه زیر را بر هم تقسیم می‌کنیم :

$$\frac{L_A}{L_B}=\frac{۴\pi d_A^{۲} B_A}{۴\pi d_B^{۲} B_B}$$

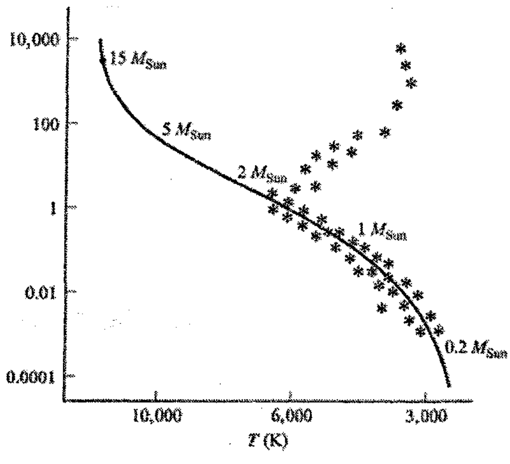
$$\frac{L_A}{L_B}=\left(\frac{d_A}{d_B}\right)^{۲}\left(\frac{B_A}{B_B}\right)$$

$$\frac{L_A}{L_B}=\left(\frac{۱۰pc}{۴۰pc}\right)^{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\frac{L_A}{L_B}=\frac{۱}{۳۲}$$

همان طور که انتظار می‌رفت این پاسخ با B درخشان‌تر بدست آمد.

مسئله ۲۰۰ : خوشه‌های کروی گروهی از ستارگانی هستند که همگی در یک زمان و خارج از ابر به وجود می‌آیند یک نمونه ارائه شده ستارگان در یک خوشه کروی ذهنی در نمودار HR طراحی شده است. که در راستای یک میله که بیانگر موقعیت‌های رشته اصلی ستارگانی با جرم‌های خاص است. سن این خوشه کروی چقدر است؟



شکل ۲-۳۳

حل : از این جهت که چگال‌ترین ستاره رشته اصلی حدودا $۲M_{Sun}$ جرم دارد سن خوشه کروی می‌بایست برابر با سن رشته اصلی یک ستاره با $۲M_{Sun}$ باشد:

$$\frac{t}{t_{\text{خورشید}}}=\left(\frac{M}{M_{\text{خورشید}}}\right)^{-۲/۵}\Rightarrow t=\left(\frac{M}{M_{\text{خورشید}}}\right)^{-۲/۵}\times t_{\text{خورشید}}$$

$\Rightarrow t=(۲)^{-۲/۵}\times ۱۰$ میلیارد سال $\Rightarrow$

$\Rightarrow t=۱/۸$ میلیارد سال

این خوشه کروی حدودا ۲ میلیارد سال سن دارد.

مسئله ۲۰۱ : یک کوتولهٔ سفید دارای چگالی تقریبی $۱۰^۹ kg/m^۳$ است. زمین دارای چگالی متوسط $۵۵۰۰ kg/m^۳$ و قطر ۱۲۷۰۰ کیلومتر است. اگر زمین به همان چگالی کوتولهٔ سفید فشرده می‌شد، چقدر بزرگ می‌بود؟

حل : حجم زمین برابر است با:

$$V_E=\frac{۴}{۳}\pi R_E^۳=\frac{۴}{۳}\pi(۶/۳۵\times۱۰^۶ m)^۳$$
$$V_E=۱/۰۷\times۱۰^{۲۱}m^۳$$

پس جرم زمین برابر است با:

$$M_E=(۵۵۰۰ kg/m^۳)(۱/۰۷\times۱۰^{۲۱}m^۳)$$
$$M_E=۵/۹۰\times۱۰^{۲۴}kg$$

اگر شما این عدد را با چگالی کوتولهٔ سفید خود مقایسه کنید، چنین بدست می‌آوریم:

$$M=V$$
$$V=\frac{M}{d}=\frac{۵/۹۰\times۱۰^{۲۴}kg}{۱۰^۹ kgm^{-۳}}$$
$$V=۵/۹\times۱۰^{۱۵}m^۳=\frac{۴}{۳}\pi R^۳$$

این عبارت را برای شعاع حل می‌کنیم.

$$R=\left(\frac{۳}{۴\pi}(۵/۹\times۱۰^{۱}۵\ ۳)\right)^{۱/۳}$$
$$R=۱۰^۵ m=۱۰۰ km$$

قطر دو برابر آن خواهد بود.

راه مستقیم‌تری برای انجام این قسمت وجود دارد که ریاضی کمتری را شامل می‌شود. برای زمین واقعی و کوتولهٔ سفید دارای جرم زمین، معادلهٔ جرم- حجم- چگالی را داریم.

$$M_E = M_E d_E = \frac{۴}{۳}\pi R_E^۳ d_E$$

$$M_{wd} = V_{wd} d_{wd} = \frac{۴}{۳}\pi R_{wd}{}^۳ d_{wd}$$

ولی داریم $M_E = M_{dw}$، چون این زمین است که به چگالی کوتولهٔ سفید تبدیل می‌کنیم. از آنجا که مراقب اندازه‌اش هستیم، هر یک از این معادلات را برای شعاع حل می‌کنیم.

$$R_E = \left[\frac{۴}{۳\pi}\frac{M_E}{d_E}\right]^{۱/۳} = R_E$$

$$R_{wd} = \left[\frac{۴}{۳\pi}\frac{M_E}{d_E}\right]^{۱/۳} = R_{wd}$$

اکنون دو معادله را تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{R_{wd}}{R_E} = \left[\left(\frac{M_{wd}}{M_E}\right)\left(\frac{d_E}{d_{wd}}\right)\right]^{۱/۳}$$

موارد مشابه در صورت و مخرج کسر حذف می‌شود چون $M_{wd} = M_E$، در نتیجه:

$$\frac{R_{wd}}{R_E} = \left(\frac{d_E}{d_{wd}}\right)^{۱/۳}$$

همان گونه که قطر دو برابر شعاع است، می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\text{قطر}_{wd} = \left(\frac{d_E}{d_{wd}}\right)^{۱/۳} \text{قطر}_E$$

$$\text{قطر}_{wd} = \left(\frac{۵۵۰۰}{۱۰^۹}\right)^{۱/۳} (۱۲۷۰۰ km)$$

$$\text{قطر}_{wd} = ۲۰۰ km$$

مسئله ۲۰۲ : الف) زمین در هر سال یک دایره به دور خورشید می‌سازد. شعاع این دایره برابر است با $۱/۵\times ۱۰^{۱۱} m$ که یک واحد نجومی یا AU نامیده می‌شود. زمین با چه سرعتی در حال حرکت بر حسب واحد متر بر ثانیه است؟

ب) زمین با چه سرعتی بر حسب واحد مایل بر ساعت در حال حرکت به دور خورشید است؟

ج) اگر زمین به طور ناگهانی جهت‌های خود را تغییر می‌داد و در این سرعت شروع به حرکت به سمت خورشید می‌کرد، چقدر طول می‌کشید تا به آنجا برسد؟

د) نور با سرعت $۳\times ۱۰^{۸}\ m/s$ حرکت می‌کند. چقدر طول می‌کشد تا اشعه نور خورشید تا زمین حرکت کند؟

هـ) نزدیک‌ترین ستاره در حدود $۲۵۰۰۰۰AU$ فاصله دارد. چقدر طول می‌کشد تا نور از این ستاره به ما برسد؟

و) بر حسب واحد سال چقدر طول می‌کشید تا یک موشک از اینجا به نزدیک‌ترین ستاره برسد اگر قرار بود در سرعت زمین از قسمت الف حرکت کنیم؟

حل : الف) سرعت برابر است با فاصله (محیط مدار) تقسیم بر زمان (یک سال) که توسط رابطه زیر به دست می‌آید :

$$v=\frac{d}{t}=\frac{\text{محیط}}{۱\,yr}$$

$$=\frac{۲\pi\times ۱/۵\times ۱۰^{۱۱}m}{۱yr}\times\left(\frac{۱\,yr}{۳۶۵/۲۴\,d}\right)\times\left(\frac{۱d}{۲۴\,hr}\right)\times\left(\frac{۱h}{۶۰\min}\right)\times\left(\frac{۱\min}{۶۰s}\right)$$

$$=۳\times ۱۰^{۴}\ m/s$$

ب) می‌دانیم که:

$$۱mile=۱/۶km=۱۶۰۰m$$

در نتیجه می‌توانیم بنویسم:

$$v=۳۰\frac{km}{s}\times\left(\frac{۱mile}{۱/۶km}\right)\times\left(\frac{۳۶۰۰s}{۱h}\right)=۶/۸\times ۱۰^{۴}\ mile/hr$$

ما محاسبه را با رقم‌های به اندازه کافی قابل توجه محاسبه نکردیم تا بگوئیم که آیا زمین واقعا در سرعت $۶۶۶۶۶mph$ در حال حرکت است.

ج) اگر یک سال طول بکشد تا $۲\pi R$ حرکت کند که R فاصله تا خورشید است، پس برای پیمودن فاصله R تا خورشید $\frac{۱}{۲}\pi$ یک سال طول می‌کشد که برابر است با ۵۸/۱ روز.

د) زمان پیمودن $۱AU$ در سرعت نور برابر است با :

$$t=\frac{d}{v}=\frac{۱/۵\times۱۰^{۱۱}m}{۳\times۱۰^{۸}ms^{-۱}}=۵۰۰s=۸/۳\min$$

هـ) ما پاسخ بالا را در ۲۵۰۰۰۰ ضرب می‌کنیم تا زمان به صورت زیر بدست آید.

$$t=۲۵۰۰۰۰\times۵۰۰s$$
$$=۱/۲۵\times۱۰^{۸}s\times\left(\frac{۱\min}{۶۰s}\right)\times\left(\frac{۱hr}{۶۰\min}\right)\times\left(\frac{۱day}{۲۴hr}\right)\times\left(\frac{۱yr}{۳۶۵/۲۴day}\right)=۴\text{ سال}$$

گفته می‌شود که ستاره ۴ سال نوری از ما فاصله دارد.

و) اکنون ۲۵۰۰۰۰ برابر طولانی‌تر از آن مقداری که طول می‌کشد تا به خورشید (در قسمت ج) برسد طول خواهد کشید. بنابراین:

$$t=۲۵۰۰۰۰\times۵۸/۱day\times\left(\frac{۱yr}{۳۶۵/۲۴day}\right)=۴\times۱۰^{۴}\text{ سال}$$

مسئله ۲۰۳ : فاصله متوسط خورشید از زمین را ۴۰۰ برابر فاصله متوسط ماه از زمین بگیرید. نتایجی را که از گرفت کامل خورشید درباره

الف) رابطه میان قطر خورشید و قطر ماه

ب) نسبت حجم خورشید به حجم ماه می‌توان به دست آورد، بیان کنید.

ج) یک سکه دو ریالی را تحت چه زاویه‌ای در مقابل چشم خود بگیریم تا قرص ماه را به طور کامل بپوشاند؟ با استفاده از این نتیجه تجربی و فاصله میان ماه و زمین قطر ماه را تعیین کنید. ($۳/۸\times۱۰^{۵}km$)

حل : الف) اگر D قطر خورشید، d قطر ماه، R فاصله خورشید از زمین و r فاصله ماه از زمین باشد برای حالت کسوف کامل که ماه بین خورشید و زمین قرار می‌گیرد می‌توان نوشت:

$$\frac{D}{d}=\frac{R}{r}=\frac{۴۰۰r}{r}=۴۰۰$$

ب) اگر V_s حجم خورشید و V_m حجم ماه باشد، پس:

$$\frac{V_s}{V_m}=\frac{(۴\pi/۳)(D/۲)^۳}{(۴\pi/۳)(d/۲)^۳}=\left(\frac{D}{d}\right)^۳=۶/۴\times۱۰^۷$$

ج) به طور تجربی اگر سکه یک ریالی را در فاصله ۱۹۰cm چشم خود نگاه داریم، این سکه می‌تواند قرص کامل ماه را بپوشاند و در این حالت زاویه دید $\theta = ۰/۰۰۹۲ rad$ است. چون فاصله ماه از زمین $r = ۳/۸\times ۱۰^{۵} km$ است، پس قطر ماه برابر است با :

$$d = r\theta = ۳/۵\times ۱۰^{۳} km$$

مسئله ۲۰۴ : یک توده سرد از یک ابر مولکولی غول آسا را با اندازه ۰/۱ پارسک فرض کنید. با در دست داشتن چگالی‌های عنوان شده این توده چه اجرامی را شامل می‌شود؟

حل : جرم موجود در یک توده از ضرب چگالی در حجم بدست می‌آید:

$$M = \rho \cdot V \Rightarrow M = \rho \cdot \frac{۴}{۳}\pi \cdot R^{۳} \Rightarrow M = \frac{۴}{۳}\pi \times ۱۰^{-۲۰}\frac{g}{cm^{۳}}\left(۰/۰۵ pc\right)^{۳}$$

$$M = ۵/۲\times ۱۰^{-۲۴}\frac{g \cdot pc^{۳}}{cm^{۳}}$$

$$\Rightarrow M = ۵/۲\times ۱۰^{۲۴} g \cdot \left(\frac{pc}{cm}\frac{۳\times ۱۰^{۱۸} cm}{pc}\right)^{۳}$$

$$M = ۵/۲\times ۱۰^{-۲۴}\left(۳\times ۱۰^{۱۸}\right)^{۳} g$$

$$\Rightarrow M = ۱/۴\times ۱۰^{۳۲} g \Rightarrow M = ۰/۱\times ۱۰^{۳۰} kg \Rightarrow M = ۰/۱$$

جرم موجود در توده با چگالی کم و به اندازه ۰/۱ جرم‌های خورشیدی است و برای تشکیل یک ستاره کافی نیستند اگر این جرم برای یک توده سرد ماکزیمم چگالی را داشته باشد چگالی به اندازه ۱۰۰ افزایش یافته اما دیگر چگالی‌ها بدون تغییر باقی می‌مانند. بنابراین جرم برابر خواهد بود با :

$M = ۱۰۰\times$ جرم توده سرد

$M = ۱۰۰\times ۰/۱\times$ جرم خورشید

$M = ۱۰$ جرم خورشید

در نتیجه جرم در توده با چگالی بالا حدودا ۱۰ منظومه شمسی را تشکیل می‌دهد اگر چه که حجم آن برابر است با توده کم چگالی که توانایی تشکیل هیچ جرم منظومه شمسی را ندارد.

مسئله ۲۰۵ : چه تعداد ستاره از نوع خورشیدی را با ابرهای مولکولی غول پیکر با قطر $D = ۱۰pc$ و چگالی $\rho = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۷} kg/m^۳$ می‌توان تشکیل داد؟ با فرض اینکه ابر کروی است و نصف آن برای تشکیل ستارگان استفاده می‌شود.

حل : حجم یک ابر مولکولی برابر است با:

$$V = \frac{۴}{۳} \times \pi \times R^۳$$

جرم یک ابر مولکولی غول آسا را می‌توان با ضرب چگالی در حجم بدست آورد:

$$M = \rho \cdot V$$

اگر تنها نیمی از این جرم، ستارگان را تشکیل دهد می‌بایست این مقدار را بر ۲ تقسیم کنیم تا جرم تمام ستارگان تشکیل شده را به دست آوریم. با جایگذاری معادله اول در دومین معادله خواهیم داشت:

$$M = \frac{۱}{۲} \rho \times \frac{۴}{۳} \times \pi \times \left(\frac{D}{۲}\right)^۳$$

$$M = \frac{۲ \times \pi}{۳ \times ۲^۳} \times \rho \times D^۳$$

$$M = ۰/۲۶ \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۷} kg/m^۳ \,(۱۰pc)^۳$$

$$M = ۴/۲ \times ۱۰^{-۱۵} kg/m^۳ \cdot pc^۳$$

$$M = ۴/۲ \times ۱۰^{-۱۵} kg/m^۳ \cdot \left(pc \cdot \frac{۳/۰۸ \times ۱۰^{۱۶} m}{pc}\right)$$

$$M = ۴/۲ \times ۱۰^{-۱۵} (۳/۰۸ \times ۱۰^{۱۶})^۳ kg$$

$$M = ۱/۲ \times ۱۰^{۳۵} kg$$

برای محاسبه اینکه چه تعداد ستاره جرم خورشیدی ممکن است تولید شود، این جرم را به جرم خورشید ($۲ \times ۱۰^{۳۰} kg$) تقسیم می‌کنیم و عدد به دست آمده برابر است با :

$$M = ۶۱۰۰۰ M_{Sun}$$

حدود ۶۰۰۰۰ ستاره با جرمی برابر با جرم خورشید و در اندازه متوسط ابر مولکولی تولید می‌شود.

مسئله ۲۰۶ : سحابی سرطان حدودا ۲۳۰ ثانیه قوس عرض دارد. قطر خطی آن چه مقدار است؟

حل : می‌دانیم که رابطه میان اندازه زاویه، فاصله و اندازه خطی برابر است با:

$$\theta('') = ۲۰۶۲۶۵ \times \frac{d}{D}$$

فاصله تا سحابی عقرب برابر با ۱۸۰۰ پارسک است. می‌توان از این حقیقت استفاده کرد و معادله را برای محاسبه اندازه خطی مرتب کرد.

$$d = \frac{\theta('') \times D}{۲۰۶۲۶۵} \Rightarrow d = \frac{۲۳۰ \times ۱۸۰۰}{۲۰۶۲۶۵} \Rightarrow d = ۲$$

مسئله ۲۰۷ : یکی از درخشنده‌ترین ستاره‌ها در آسمان ستاره وگا است که در فاصله $۷/۸\,pc$ قرار دارد.

الف) چه مدت طول می‌کشد تا نور وگا به زمین برسد؟

ب) اگر سیاره‌ای به دور وگا در همان فاصله‌ای که زمین از خورشید می‌گردد، می‌گشت جدایی زاویه‌ای بین این سیاره فرضی و ستاره وگا در آسمان چیست؟

حل : الف) برای حل این مسئله فاصله خود تا وگا را بر حسب متر بیان می‌کنیم:

$$۱\,pc = ۳/۰۹ \times ۱۰^{۱۶} m$$

بنابراین داریم:

$$۷/۸\,pc \times \frac{۳/۰۹ \times ۱۰^{۱۶} m}{۱\,pc} = ۲/۴۱ \times ۱۰^{۱۷} m$$

با استفاده از فرمول :

زمان × سرعت = فاصله

به دست می‌آوریم :

$$۲/۴۱ \times ۱۰^{۱۷} m = c \times t$$

$$t = \frac{۲/۴۱ \times ۱۰^{۱۷} m}{۳ \times ۱۰^{۸}\, m/s} = ۸/۰۳ \times ۱۰^{۸} s = ۲۵/۵\, yrs$$

ب) برای این مسئله تمام آن چیزی را که برای جواب دادن به آن احتیاج داریم، در دست داریم. از معادله‌ای تخمین زوایای کوچک استفاده می‌کنیم.

$$D = \alpha^c d$$

که در آن α^c بر حسب شعاع حساب شده :

$$\alpha^c = \frac{۲\pi^c}{۳۶۰^\circ} \times \alpha^\circ$$

بنابراین اگر سیاره‌ای حول وگا می‌چرخید (که در فاصله d قرار دارد) در فاصله‌ای برابر با فاصله زمین از خورشید یا $۱AU$ قرار می‌داشت. بنابراین :

$$\alpha^\circ = \frac{۱AU}{۷/۸\,pc} = ۰''/۱۳$$

مسئله ۲۰۸ : مدار زمین به دور خورشید تقریبا یک دایره است. نسبت به خورشید

الف) تندی زاویه‌ای

ب) سرعت خطی

ج) شتاب زمین چقدر است؟

حل : با استفاده از جدول داده‌ها، فاصله زمین تا خورشید $۱/۵\times۱۰^{۱۱}m$ و دوره تناوب چرخش آن به دور خورشید ۱ سال است.

الف)

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۳/۱۵\times۱۰^{۷}s} = ۱/۹۹^{-۷}\,rad/s$$

ب)

$$v = r\omega = ۱/۵\times۱۰^{۱۱}\times۱/۹۹\times۱۰^{-۷} = ۲/۹۸\times۱۰^{۴}\,m/s$$

ج)

$$a = r\omega^۲ = ۱/۵\times۱۰^{۱۱}\times\left(۱/۹۹\times۱۰^{-۷}\right)^۲ = ۵/۹\times۱۰^{-۳}\,m/s^۲$$

مسئله ۲۰۹ : اگر شما به قمر اروپا بروید، خورشید در آسمان شما چقدر بزرگ‌تر خواهد شد؟ فاصله از مشتری (بنابراین از قمر اروپا تا خورشید) $۵/۲AU$است. قطر خورشید $۱/۴\times۱۰^{۹}$ می‌باشد. از فرمول زاویه‌ای کوچک استفاده کنید.

حل :

$$\frac{d}{D}=\frac{\theta}{۲۰۶۲۶۵}\Rightarrow \theta=۲۰۶۲۶۵\frac{d}{D}$$
$$=۲۰۶۲۶۵\frac{۱/۴\times۱۰^{۹}}{۵/۲\times۱/۵\times۱۰^{۱۱}}=۳۷۰''=۰/۱^{\circ}$$

این درجه در حدود ۱/۵ اندازه خورشید است که از زمین دیده می‌شود.

مسئله ۲۱۰ : فرض کنید خورشید بر اثر سوزاندن ئیدروژن بادی یکنواختی تولید کرده باشد (حدود ۴/۵ میلیارد سال قبل) بادی اولیه چه مسافتی دور شده است؟ چه زمانی باد خورشیدی به آلفا قنطورس می‌رسد؟ (فرض کنید باد با سرعت یکسان همواره مسافت می‌پیماید)

حل : باد خورشیدی با سرعتی معادل $۴۵۰ km/s$ حرکت می‌کند به طوری که ۴/۵ میلیارد سال چنین مسافتی را طی کرده است.

$$d=v\cdot t$$
$$d=۴۵۰ km/s\times۴/۵\times۱۰^{۹} yr\times۳/۱۶\times۱۰^{۷} s/yr$$
$$d=۶/۴\times۱۰^{۱۹} km$$
$$d=۴/۳\times۱۰^{۸} AU$$

اگر ما از بین ستارگان حرکت کنیم قادر خواهیم بود ذراتی از باد خورشیدی را در فاصله ۴۳۰ میلیارد AU در اطراف پیدا کنیم. آلفا قنطورس در فاصله ۱/۳۳ پارسک دورتر یا به عبارتی در فاصله $3/9\times10^{13} km$ واقع شده است. با توجه به سرعت $۴۵۰ km/s$ باد خورشیدی زمان چنین است.

$$t=\frac{d}{v}$$
$$t=\frac{۳/۹\times۱۰^{۱۳} km}{۴۵۰ km/s}$$
$$t=۸/۷\times۱۰^{۱۰} s$$
$$t=۲۷۰۰ yr$$

پس طی زمان ۲۷۰۰ سال به آلفا قنطورس می‌رسد. ذراتی از خورشید ممکن است پس از ۳۰۰۰ سال بعد از شروع باد به آلفا قنطورس برسند.

مسئله ۲۱۱ : یک سحابی سیاره‌ای با قطر زاویه‌ای ۱۵ دقیقه قوس است در فاصله ۱۲۰ پارسک از زمین واقع شده است.

الف) قطر سحابی را بر حسب پارسک محاسبه کنید.

ب) فرض کنید که خارجی‌ترین ماده در حال گسترش از ستاره مرکزی با سرعت $۲۰ km/\sec$ است. سن سحابی بر حسب واحد سال چقدر است؟

حل : الف) توجه داشته باشید که ۱ واحد نجومی، زاویه ۱ ثانیه قوس در فاصله ۱ پارسک را شامل می‌شود. بنابراین قطر برابر است با :

$$D = ۱۵ arc\min \times ۶۰ arc\sec/arc\min \times ۱۲۰ = ۱/۰۸ \times ۱۰^{۵}\ AU$$
$$= \frac{۱/۰۸ \times ۱۰^{۵} \times ۱/۵ \times ۱۰^{۱۳} cm}{۳/۰۹ \times ۱۰^{۱۸} cm} = ۰/۵۲\, pc$$

همچنین :

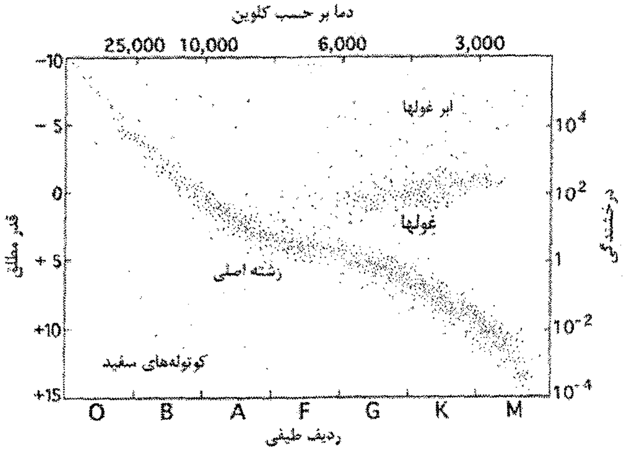
$$۱۵' = ۱۵/۵۷/۳/۶۰ = ۰/۰۰۴۴\, rad$$
$$D = ۰/۰۰۴۴ \times ۱۲۰ = ۰/۵۲\, pc$$

ب) شعاع $R = D/۲$ است، بنابراین سن برابر است با :

$$t = \frac{R}{v} = \frac{۰/۵۲ \times ۳/۰۹ \times ۱۰^{۱۸}}{۲/\left(۲۰ \times ۱۰^{۵}\right)} = ۲/۷ \times ۱۰^{۱۱} \sec \Rightarrow t = ۱۳۰۰۰\, yr$$

مسئله ۲۱۲ : نمودار HR زیر را در نظر بگیرید.

الف) یک نقطه روی نمودار با A نامگذاری کنید که مطابق است با ستاره‌ای که در حال حاضر در ئیدروژن سوزی در هسته‌اش است، ولی فقط برای حدودا ۱۰ میلیون سال زندگی خواهد کرد؟



شکل ۲-۳۴

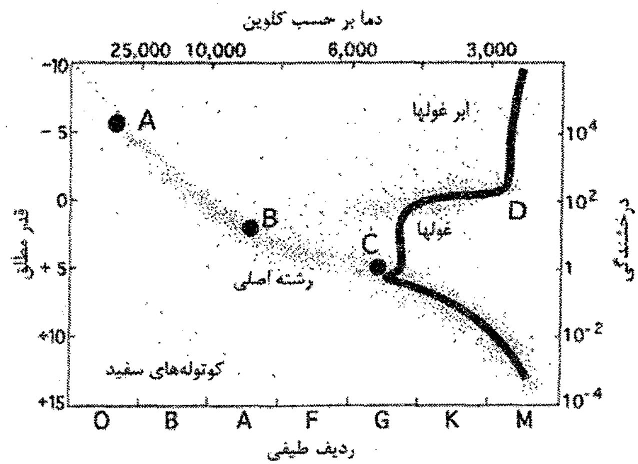
ب) یک نقطه روی نمودار با B نامگذاری کنید که مطابق است با ستاره‌ای که برای حدودا ۵۰۰ میلیون سال زندگی خواهد کرد.

ج) یک نقطه روی نمودار با C نامگذاری کنید که مطابق است با ستاره‌ای که برای حدودا ۱۰ بیلیون سال زندگی خواهد کرد.

د) یک منطقه را سایه بزنید یا یک خط یا چند خط بکشید که مطابق است با منطقه‌ای روی نمودار که توسط مشاهدات ستاره‌های موجود در خوشه‌ای که بیش از ۱۰ میلیارد سال قبل اشغال خواهد شد.

هـ) مفهوم خاموشی رشته اصلی را توضیح دهید و این چگونه به محاسبه سن خوشه ستاره‌ها مربوط می‌شود؟

حل : نمودار زیر پاسخ قسمت‌های الف تا د می‌باشد.



شکل ۲-۳۵

هـ) برای خوشه ستاره‌هایی که به طور ناگهانی تشکیل می‌شوند در هر زمان بعد، نقطه‌ای در طول رشته اصلی خواهد بود که ستاره‌های آبی‌تر و گرم‌تر بوده‌اند که دارای طول عمرهای کوتاه‌تری از سن خوشه هستند. آن ستاره‌ها دیگر روی رشته اصلی نخواهند بود. اگر آنها هنوز غول باشند (یعنی اخیرا از رشته اصلی به جا مانده‌اند) از جایی در سمت راست نمودار خارج خواهند شد. نقطه‌ای که مرز بین ستاره‌هایی است که از رشته اصلی به جا نمانده‌اند و ستاره‌هایی که به جا مانده‌اند در جرم واحد است، آن نقطه خاموشی رشته اصلی است. اگر بدانید که چه مدت یک ستاره با جرم داده شده زندگی می‌کند (به طور مثال از تئوری ستاره‌ای) با دیدن اینکه آن با چه جرمی از خاموشی رشته اصلی خوشه داده شده مطابق است، می‌توانید سن خوشه را محاسبه کنید.

مثال ۲۱ – ۵ : دو ستاره نزدیک به هم در آسمان مشاهده می‌شود. طیف یک ستاره نشان می‌دهد که ستاره $O5$ رشته اصلی است طیف ستاره دیگر نشان می‌دهد که ستاره $K2$ رشته اصلی است. دو ستاره دارای یک قدر بلومتری یکسان هستند. آیا دو ستاره در فاصله یکسانی از خورشید قرار دارند یا یکی نزدیک‌تر است؟ اگر یکی نزدیک‌تر است کدام یک و نسبت فاصله‌های آنها چقدر است؟

حل : ستاره $K2$ رشته اصلی باید بسیار نزدیک‌تر باشد. آن ستاره‌ها به طور ذاتی دارای درخشندگی بسیار کمتری از ستاره‌های $O5$ هستند بنابراین با همان قدر از زمین ظاهر

می‌شوند. (و بنابراین با همان شار یا روشنایی) ستاره K باید بسیار نزدیک‌تر باشد. می‌توانیم شار را با:

$$F_{O5} = \frac{L_{O5}}{4\pi d_{O5}^2}$$

$$F_{K2} = \frac{L_{K2}}{4\pi d_{K2}^2}$$

به فاصله مرتبط می‌کنیم. چون هر دو دارای یک قدر یکسان هستند. می‌دانیم آنها دارای شار برابر هستند. بنابراین:

$$\frac{F_{O5}}{F_{K2}} = 1 = \frac{L_{O5}/4\pi d_{O5}^2}{L_{K2}/4\pi d_{k2}^2}$$

$$1 = \left(\frac{L_{O5}}{L_{K2}}\right)\left(\frac{d_{K2}}{d_{O5}}\right)^2$$

$$\frac{d_{O5}}{d_{K2}} = \sqrt{\frac{L_{O5}}{L_{K2}}}$$

می‌توانیم درخشندگی‌های برای این نوع ستاره‌ها را از جدول بیابیم. با قرار دادن این مقادیر خواهیم داشت:

$$\frac{d_{O5}}{d_{K2}} = 1000$$

ستاره $O5$ ، ۱۰۰۰ برابر دورتر از ستاره $K2$ است اگر دارای یک قدر ظاهر شوند.

مسئله ۲۱۳ : هنگامی که زهره در نزدیک‌ترین فاصله به خورشید قرار دارد قطر زاویه‌ای آن چه اندازه است؟ آیا شما می‌توانید زهره را در این نقطه در مدار خودش ببینید؟

حل : فرمول زاویه کوچک را مورد استفاده قرار می‌دهیم. فاصله میان زمین و ناهید زمانی که در نزدیک‌ترین فاصله قرار دارند :

$$d = (1 - 0/72)AU = 0/28\,AU = 0/28\,AU = 4/2 \times 10^{10} m$$

قطر زهره $12 \times 10^6 m$ است.

$$\theta = 206265 \times \frac{D}{d}$$

$$\theta = ۲۰۶۲۶۵ \times \frac{۱۲\times ۱۰^{۶}}{۴/۲\times ۱۰^{۱۰}}$$
$$\theta = ۵۸/۹\, arc\sec$$

این مقدار بسیار نزدیک به محدوده تجزیه چشمی است (حدود ۱ دقیقه قوس) و کاملا نامربوط می‌باشد زیرا درست شبیه به ماه جدید است. زمانی که زهره در نزدیک‌ترین فاصله قرار دارد در مسیر جدید قرار گرفته است و غیر قابل مشاهده می‌باشد مگر آن که کاملا در مقابل خورشید قرار بگیرد و در این صورت شما نیازمند فیلتری می‌باشید که قادر به مشاهده نمودن آن باشد.

مسئله ۲۱۴ : الف) کهکشان‌های مارپیچی دارای شعاع $۱۰kpc$ هستند. قطر زاویه‌ای کهکشان را محاسبه کنید. با این فرض که تلسکوپ‌های روی زمین قادر به بررسی محدوده‌ای به تفکیک پذیری ″۰/۱ هستند آیا قادر به تعیین قطر زاویه‌ای خود خواهید بود یا نه؟
ب) کهکشان‌ها انواع مختلفی دارند که در ابتدا توسط ادوین هابل طبقه بندی شد. به طور مختصر ویژگی‌های کهکشان‌های بیضوی را شرح دهید.
حل : الف) با استفاده از تقریب زاویه کوچک، قطر زاویه‌ای برابر است با :

$$\theta = ۲\frac{r}{d}$$

که r شعاع و d فاصله است. با قرار دادن اعداد داریم :

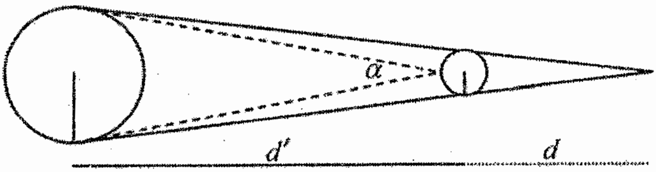
$$\theta = ۲\frac{۱۰ pc}{۴۶۰۰۰ kpc} = ۴/۴\times ۱۰^{-۴} rad = ۹۰''$$

و بنابراین قطر را می‌توان به سادگی اندازه گرفت.
ب) کهکشان‌های بیضوی بیشتر غبارهای آزاد هستند. چون سرعت تشکیل ستاره در این منظومه‌ها کم است، آنها اساسا شامل ستاره‌های مسن و تکامل یافته هستند و به آنها رنگ مایل به سرخ می‌دهد. عموما دارای جرم پائین (فقط چندین میلیون $M_{\odot}$) هستند اگرچه کهکشان‌های بیضوی بسیار انبوه در مراکز خوشه‌های کهکشان وجود دارند.

مسئله ۲۱۵ : شعاع‌های زمین و خورشید به ترتیب $۶/۴\times۱۰^{۳}km$ و $۷\times۱۰^{۵}km$ بوده و بزرگی زاویه‌ای خورشید $\frac{۱}{۲}$ درجه است. فاصله ماه از زمین از چه مقداری باید بیشتر می‌بود تا هیچ‌گاه ماه گرفتگی اتفاق نیفتد؟

حل : مطابق شکل خورشید، زمین و مخروط سایه زمین قرار دارند. اگر قرار باشد هیچ گاه ماه گرفتگی رخ ندهد باید ماه بیرون مخروط سایه زمین باشد. از شکل پیداست که :

$$\frac{d}{R_e}=\frac{d+d'}{R_s}$$



شکل ۲ -۳۶

چون بزرگی زاویه‌ای خورشید کوچک است داریم :

$$\alpha=\frac{۲R_s}{d'}\Rightarrow\frac{d'}{R_s}=\frac{۲}{\alpha}$$ بر حسب رادیان

$$\frac{۱}{۱۱۴}$$ بر حسب رادیان $$=\frac{۱}{۲}$$ بر حسب درجه

$$d\left(\frac{۱}{R_e}-\frac{۱}{R_s}\right)=\frac{d'}{R_s}=\frac{۲}{\alpha}\Rightarrow d=\frac{R_eR_s}{R_s-R_e}\frac{۲}{\alpha}\approx\frac{۲R_e}{\alpha}$$

$$d=\frac{۲\times۶/۴\times۱۰^{۳}}{۱/۱۱۴}=۱/۴۵۹\times۱۰^{۶}km$$

مسئله ۲۱۶ : برای یک مدار بیضی شکل شعاع این گونه داده می‌شود :

$$r=\frac{a(۱-e^{۲})}{۱+e\cos\theta}$$

نقطه حضیض و اوج نزدیک‌ترین و دورترین نقطه تماس با خورشید هستند. فواصل r و زاویه‌های θ که مطابق با این دو نقطه است چیست؟

حل : شعاع r به $\cos\theta$ و ثابت‌ها بستگی دارد. اکنون $\cos\theta$ از ۱ تا ۱- متغیر است. همان طور که از صفر تا ۱۸۰ درجه (صفر تا π رادیان) در نوسان است. ولی $\cos\theta$ در مخرج کسر برای r با ضریب مثبت e ظاهر می‌شود به این معنا که مقادیر بزرگ $\cos\theta$ با مدارهای کمی از r مطابقت دارد. بنابراین نقطه حضیض (کوچک‌ترین مقدار برای r) مطابق با بزرگ‌ترین مقدار $\cos\theta = ۱$ است. این در حالی است که نقاط اوج بزرگ‌ترین مقدار برای r مطابق است با کوچک‌ترین مقدار $\cos\theta = -۱$ در نقطه حضیض $\cos\theta = ۱$ بنابراین $\theta_p = ۰$ است و :

$$r_p = \frac{a\left(۱-e^۲\right)}{\left(۱+e\times ۱\right)} = \frac{a\left(۱-e^۲\right)}{\left(۱+e\right)} \Rightarrow r_p = a\left(۱-e\right)$$

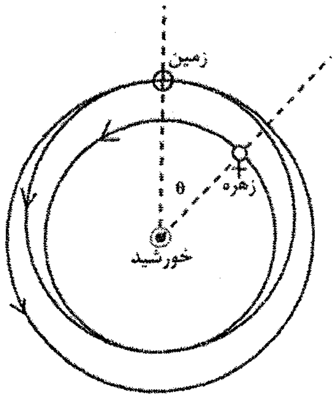
در نقطه اوج $\cos\theta = -۱$ است بنابراین $\theta_a = ۱۸۰^\circ$ یا $\theta_a = \pi$ و :

$$r_p = \frac{a\left(۱-e^۲\right)}{\left(۱+e\times -۱\right)} = \frac{a\left(۱-e^۲\right)}{\left(۱-e\right)} \Rightarrow r_p = a\left(۱+e\right)$$

مسئله ۲۱۷ : فرض کنید زمین و زهره در مدارهایی دایره‌ای اطراف خورشید به ترتیب با شعاع ۱ و $\frac{۳}{۴}AU$ در حال گردش هستند، فضاپیمایی از زمین به سوی زهره در مداری بیضی شکل که مماس با مدارهای هر دو سیاره است، فرستاده می‌شود. چنین مداری را مدار حداقل انرژی برای پرتاب از زمین می‌نامند زیرا به موشکی بسیار کوچک نیاز دارد. در زمان پرتاب زهره در مدار خود از پشت زمین چقدر باید فاصله داشته باشد برای اینکه هنگام رسیدن سفینه فضایی به مدار زهره این سیاره در مدار خود قرار گیرد. (به این معنی که در نمودار زاویه θ چند درجه است.)

حل : طبق قانون اول کپلر فضاپیما باید بر مدار بیضی شکل باشد در حالی که خورشید در مرکز قرار دارد. بنابراین نیم محور اصلی باید در امتداد نخستین خط خورشید - زمین (خط عمودی در شکل) باشد. اگر $a_e = ۱AU$ شعاع مدار زمین و $a_z = ۰/۷۵AU$ شعاع مدار زهره باشد آنگاه نیم محور اصلی مدار فضاپیما دقیقا $a_e = a_z$ بنابراین مدار نیم اصلی مدار فضاپیما برابر است با :

$$a = \left(a_e + a_z\right)/۲ = \left(۱+۰/۷۵\right)/۲ = ۷/۸AU$$



شکل ۲-۳۷

طبق قانون سوم کپلر دوره تناوب P مدار فضاپیما از این طریق به دست می‌آید.

$$P = (۷/۸)^{۳/۲}\, yr = ۰/۸۱۸۵\, yr \quad \text{یا} \quad (P/yr)^{۲} = (a/AU)^{۳}$$

لازم است فضاپیما نصف مدار را برای رسیدن به زهره کامل کند بنابراین زمان حرکت به آنجا برابر است با :

$$t = P/۲ = ۰/۴۰۹۲\, yr$$

دوره تناوب مدار زهره برابر است با :

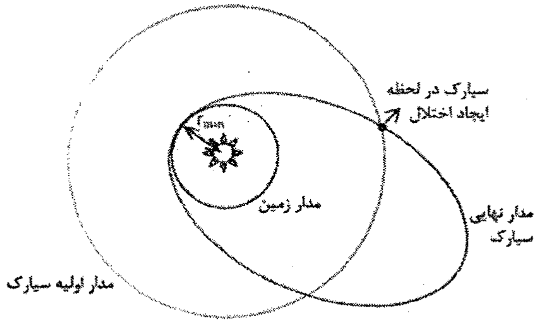
$$P_z = (a_z/yr)^{۳/۲}\, yr = (۳/۴)^{۳/۲}\, yr = ۰/۶۴۹۵\, yr$$

در طول زمانی که فضاپیما به سوی زهره حرکت می‌کند، سیاره اطراف مدار خود در زاویه کلی :

$$\phi = ۳۶۰^\circ \frac{t}{P_z} = ۳۶۰^\circ \frac{۰/۴۰۹۲}{۰/۶۴۹۵} = ۲۲۷^\circ$$

حرکت خواهد کرد. هم زمان فضاپیما نیمی از مدار را طی کرده است یا زاویه‌ای ۱۸۰ درجه را پیموده است. بنابراین سفینه فضایی باید زمانی پرتاب شود که زهره زاویه $\theta = \phi - ۱۸۰^\circ$ یا $\theta = ۴۷^\circ$ واقع در پشت زمین در مدار خود، داشته باشد.

مسئله ۲۱۸ : یکی از سیارک‌های بین مریخ و مشتری در مدار بیضوی با نیم محور بزرگ $a_{\circ}=2AU$ و خروج از مرکز $e_{\circ}=0/05$ حرکت می‌کنـد. بـه دلیـل اغتشاشـات ناشـی از حرکت مشتری، خروج از مرکز مدار جدید چقدر باشد تا احتمال برخورد این سیارک بـا زمین به وجود آید؟ فرض می‌کنیم این سیارک در صفحه دایره‌البروج است.



شکل ۲-۳۸

حل : حداقل احتمال برخورد سیارک با زمین زمانی است کـه $r_{\min}$ برابـر شـعاع مـداری زمین شود.

$$r_{\min}=a(1-e)\Rightarrow 1=3(1-e)$$
$$\Rightarrow e=0/66\Rightarrow 100\times e=66/6\cong 67$$

مسئله ۲۱۹ : یک ستاره دنباله‌دار برای اولین بار در فاصله d از خورشید دیده می‌شود بـا سرعتی که q برابر سرعت زمین است، در حال حرکت می‌باشد. نشان دهید با توجـه بـه اینکه q^2d بزرگ‌تر، مساوی یا کوچک‌تر از ۲ باشد، متناظرا مدار این ستاره دنبالـه‌دار بـه شکل هذلولی، سهمی یا بیضی است.

حل :

$$e=\left[1+\left(v^2-\frac{2}{R}\right)(Rv\sin\varphi)^2\right]^{\frac{1}{2}}\Rightarrow e=\left[1+\left(q-\frac{2}{d}\right)(dq\sin\varphi)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$e < ۱ \rightarrow$ بیضی

$e = ۰ \rightarrow$ دایره

$e = ۱ \rightarrow$ سهمی

$e > ۱ \rightarrow$ هذلوی

$$e^۲ = ۱ \Rightarrow \left[۱ + \left(q^۲ - \frac{۲}{d} \right)(dq \sin\phi)^۲ \right]^{\frac{۱}{۲}} = ۱ \Rightarrow \left(q^۲ - \frac{۲}{d} \right)(dq \sin\phi)^۲ = ۰ \Rightarrow$$

$$\left(q^۲ - \frac{۲}{d} \right) = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{d}\left(q^۲ d - \frac{۲}{d} \right) = ۰ \Rightarrow q^۲ d = ۲$$

$q^۲ d = ۲ \Rightarrow e = ۱ \rightarrow$ سهمی

$q^۲ d > ۲ \Rightarrow e > ۱ \rightarrow$ هذلولی

$q^۲ d < ۲ \Rightarrow e < ۱ \rightarrow$ بیضی

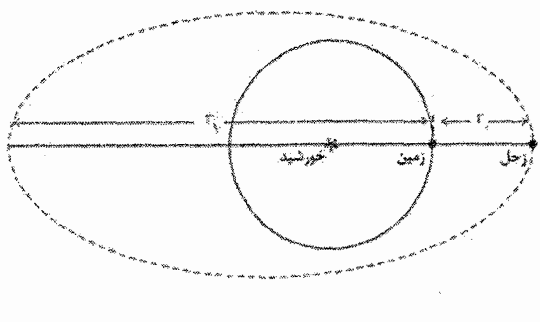
مسئله ۲۲۰ : فاصله متوسط زحل تا زمین در دورترین حالت آن حدودا ۱/۲۴ برابر آن در نزدیک‌ترین فاصله است. (با توجه به این مدار زحل پیرامون خورشید مدار بیضی است، اندازه‌گیری قطر آن در چندین دوره متوالی صورت می‌گیرد و قطر پذیرفته شده، متوسط داده‌هایی است که بدین صورت به دست آمده است) نصف قطر بزرگ زحل a پیرامون خورشید چقدر است؟

حل : فرض کنیم زحل در نزدیک‌ترین فاصله $r_۰$ و در دورترین فاصله $r_۱$ باشد. در این حالت مدار زمین به دور خورشید را r فرض می‌کنیم. با توجه به شکل و فرض مسئله :

$r_۱ = ۱/۲۴ r_۰$

$r_۰ + ۲r = ۱/۲۴ r_۰$

$\Rightarrow r_۰ = \frac{۲r}{۰/۲۴}$



شکل ۲-۳۹

$$\Rightarrow r_{\circ}=\frac{۲\times ۱۵۰\times ۱۰^{۶}}{۰/۲۴}=۱۲۵۰\times ۱۰^{۶}\,km$$
$$a=r_{\circ}+r=۱۲۵۰\times ۱۰^{۶}+۱۵۰\times ۱۰^{۶}=۱۴۰۰\times ۱۰^{۶}\,km$$

مسئله ۲۲۱ : جسمی که از زمین مشاهده می‌شود دارای دوره تناوب هلالی ۱/۵ سال است. دو مقدار ممکن برای نیم محور اصلی مدار جسم چیست؟

این جسم (احتمالا یک سیارک) می‌تواند هم دارای یک مدار مادون و هم یک مدار فرادست باشد.

فرادست به دلیل اینکه زمین اطراف خورشید ۱/۵ بار می‌چرخد. سیاره بزرگ‌تر تنها ۰/۵ بار می‌چرخد بنابراین دوره گردش مداری سیاره ۳ سال و

$$\alpha=P^{۲/۳}=(۳\,year)^{۲/۳}=۲/۰۸AU$$

است.

$$\frac{۱}{S}=\frac{۱}{P}-\frac{۱}{E}$$
$$\frac{۱}{P}=\frac{۱}{S}+\frac{۱}{E}=\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۱/۵}=\frac{۵}{۳}$$
$$P=۰/۶yr$$
$$\alpha=P^{۲/۳}=(۰/۶yr)^{۲/۳}=۰/۷۱AU$$

مسئله ۲۲۲ : الف) یک ماهواره با چه سرعت افقی در ارتفاع ۱۶۰ کیلومتری سطح زمین باید پرتاب شود تا مدار چرخش آن به دور زمین دایره‌ای باشد؟ شعاع زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر بگیرید.

ب) دوره تناوب این دوران چقدر خواهد بود؟

حل : الف) اگر $h=۱۶km$ ارتفاع ماهواره از سطح زمین باشد چون نیروی گرانش وارد بر ماهواره شتاب مرکزگرای لازم را فراهم می‌آورد پس :

$$G\frac{M_e m}{(R_e+h)}=m\frac{v^{۲}}{(R_e+h)^{۲}}$$

با قرار دادن مقادیر معلوم به دست می‌آوریم :

$$v=۷/۸\times ۱۰^{۳}\,m/s$$

ب) چون $v=(R_e+h)\omega$ و $\omega=\frac{۲\pi}{T}$، پس دوره تناوب حرکت ماهواره برابر است با :

$$T=\frac{۲\pi(R_e+h)}{v}$$

با قرار دادن مقادیر معلوم به دست می‌آوریم :

$$T=۵۲۸۴s=۸۷\min$$

مسئله ۲۲۳ : به نظر می‌رسد که برخی ستاره‌های نوترونی در هر ثانیه در حدود یک دور می‌چرخند. اگر شعاع چنین ستاره‌ای ۲۰ کیلومتر باشد، جرم آن چقدر باشد تا اجسام واقع بر سطح آن جذب ستاره شوند و بر اثر چرخش سریع از ستاره جدا نشوند؟

حل : چون نیروی گرانشی بین ستاره و اشیایی که در سطح آن قرار دارند نیروی مرکزگرای لازم را فراهم می‌آورد می‌توان نوشت :

$$\frac{GMm}{R^۲}=mR\omega^۲$$

چون $\omega=\frac{۲\pi}{T}$ است پس $M=\frac{۴\pi^۲R^۳}{GT^۲}$ و با قرار دادن مقادیر $R=۲۰km$ و $T=۱s$ و

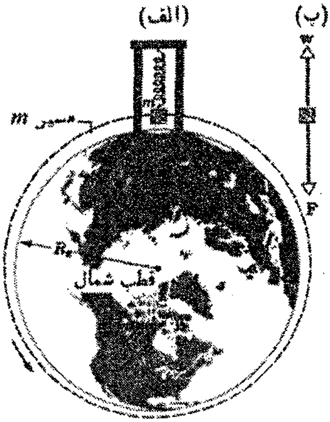
$$G=۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}N.m^۲/kg^۲$$

بدست می‌آوریم.

$$M=۴/۷\times۱۰^{۲۴}kg$$

مسئله ۲۲۴ : با طراحی یک آزمایش اثر دوران زمین روی g را حساب کنید.

حل : شکل زیر را در نظر بگیرید. در اینجا در شکل بزرگ شده جسمی به جرم m را نشان داده‌ایم که در استوا به یک نیروسنج آیخته شده است. نیروهای وارد بر این جسم عبارتند از کشش رو به بالای نیروسنج w که همان وزن ظاهری جسم است و کشش رو به پائین جاذبه گرانش زمین، که با رابطه $F=GmM_e/R_e^۲$ داده می‌شود.



شکل ۲-۴۰

این جسم در حال تعادل نیست زیرا ضمن دوران با زمین تحت تاثیر یک شتاب مرکزگرای a_R قرار می‌گیرد. بنابراین باید یک نیروی خالص به طرف مرکز زمین به جسم وارد شود. در نتیجه F نیروی جاذبه گرانشی (وزن واقعی جسم) باید از w نیروی کشش رو با بالای نیروسنج (وزن ظاهری جسم) بیشتر باشد.
با استفاده از قانون دوم حرکت نیوتن داریم :

$$F - w = ma_R$$
$$\frac{GM_e m}{R_e^2} - mg = ma_R$$

در استوا :

$$g = \frac{GM_e}{R_e^2} - a_R$$

در قطب‌ها $a_R = 0$ در نتیجه در قطب‌ها :

$$g = \frac{GM_e}{R_e^2}$$

این مقداری است که (با فرض کروی بودن زمین) در هر محل که دوران زمین قابل چشم پوشی باشد برای g به دست می‌آید. در واقع جهت شتاب مرکزگرا به جز در استوا به طرف مرکز زمین نیست. این شتاب در هر عرض جغرافیایی معین، بر محور دوران

زمین عمود و به طرف محور است. بنابراین تحلیل مفصل این مطلب در واقع یک تحلیل دو بعدی است. اما شتاب در استوا بیشترین مقدار را دارد. در استوا داریم :

$$a_R = \omega^2 R_e = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_e = \frac{4\pi^2 R_e}{T^2}$$

که در آن ω سرعت زاویه‌ای دوران زمین T دوره تناوب و R_e شعاع زمین است. با استفاده از مقادیر زیر :

$R_e = 6/37 \times 10^6 m$

$T = 8/64 \times 10^4 s$

نتیجه می‌گیریم :

$a_R = 0/0336 m/s^2$

مسئله ۲۲۵ : سیاره پلوتو یک قمر به نام شارن دارد. فرض کنید که آنها در مدارهای دایره‌ای به دور مرکز دو طرفه جرمشان می‌چرخند و با دوره تناوب $P \approx 7$ روز باعث گرفتگی یکدیگر می‌شوند. اندازه‌ها آشکار می‌کنند که حداکثر سرعت شعاعی آنها $v \approx 0/02 km\, s^{-1}$ (پلوتو) و $v_c \approx 0/2 km\, s^{-1}$ (شارن) است.

الف) نیم محورهای اصلی پلوتو (a_p) و مدارهای شارن (a_c) به دور مرکز جرمشان چه هستند؟

ب) جرم پلوتو M_p و کارن M_c را به ترتیب به دست آورید.

ج) نیم محور اصلی مدار پلوتو به دور خورشید $39/5 AU$ است. اندازه زاویه‌ای تقریب در آسمان مدار شارن به دور پلوتو که از زمین مشاهده می‌شود، چقدر است؟

د) برای این که مدار شارن در آسمان در طول موج مرئی تجزیه شود به تلسکوپ چه اندازه‌ای نیاز است؟ آیا انجام چنین مشاهده‌ای از فضا بهتر است یا از مین؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

هـ) یک فرمول برای حداکثر سرعت شعاعی ماهواره v_{sat} بنویسید.

و) برای زاویه میل مدار ماهواره نسبت به صفحه مداری پلوتو و شارن یک رابطه ریاضی بنویسید.

حل : الف) به نظر می‌رسد در واقع ۱۴ روز (چون هر ۷ روز باعث گرفتگی یکدیگر می‌شوند) اگر تصور کنید که روز زمانی است که شارن جلوی پلوتو است و سپس روز ۷

یک گرفتگی است این بار پلوتو جلوی شارن است. سپس روز ۱۴ روزهایی است که شارون دوباره از جلوی پلوتو عبور می‌کند. بنابراین کامل کردن یک مدار کامل ۱۴ روز طول می‌کشد تا همه مسیر را به دور مدار طی کند. هر پاسخی که به دست آوریم را صحیح در نظر خواهیم گرفت. با فرض مدارهای دایره‌ای:

$$v = \frac{2\pi a}{P}$$

$P \approx$ ۱۴ روز را به دست می آوریم. که به معنی $P \approx 1/2 \times 10^6 s$ است. همچنین

$$v_c \approx 0/2 km\, s^{-1} = 2 \times 10^4 cm\, s^{-1} \text{ و } v_p \approx 0/02 km\, s^{-1}$$

را بدست می‌آوریم. اگر اعداد را در معادله بالا بگذاریم:

$$a_p \approx 4 \times 10^8 cm$$
$$a_c \approx 4 \times 10^9 cm$$

را بدست می‌آوریم. توجه داشته باشید که اگر از دوره تناوب ۷ روزه استفاده می‌کردیم پاسخ شما نصف این مقادیر می‌شد.

ب) در ابتدا می‌توانیم برای جرم کلی منظومه پلوتو- شارن با استفاده از قانون کپلر چنین بنویسیم:

$$P^۲ = \frac{۴\pi^۲}{G(M_c + M_p)} a^۳$$

در اینجا P دوره تناوبی است که در قسمت الف به کار رفته است و $a = a_c + a_p$ حقیقتی که دفعات بسیاری با جایگذاری این اعداد می‌گیریم که

$$M = M_c + M_p \approx ۳/۵ \times ۱۰^{۲۵} g$$

همچنین معادله زیر را داریم:

$$M_p a_p = M_c a_c$$

رابطه به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$M_p = M_c \frac{a_c}{a_p} = 10 M_c \Rightarrow M = M_p + M_c = 11 M_c = 3/5 \times 10^{25}$$

در نتیجه به دست می‌آوریم:

$$M_c = 3/2\times 10^{34} g$$
$$M_p = 3/2\times 10^{35} g$$

توجه داشته باشید اگر دوره تناوب ۷ روزه استفاده می‌کردید پاسخ شما نصف این مقادیر می‌شد.

ج) بنابراین بسته به این که زمین و پلوتو دقیقا در مدارهای ترتیبی‌اشان قرار دارند فاصله بین دو ستاره می‌تواند تغییر کند ولی این تفاوت‌ها در فاصله نسبتا کمی هستند بنابراین می‌توانیم فقط نیم محور اصلی $39/5AU$ به عنوان یک فاصله بین زمین و پلوتو استفاده کنیم. این بدان معنی است که فاصله زمین - پلوتو

$$d = ۳۹/۵\,AU \approx ۶\times ۱۰^{۱۴}\,cm$$

است. حال برای به دست آوردن اندازه زاویه‌ای مدار شارن به خاطر می‌سپاریم که:

$$\theta \approx \frac{D}{d}$$

در اینجا θ اندازه زاویه ای در آسمان و D اندازه فیزیکی مدار شارن (و همچنین فرض کردیم که $d >> D$) بنابراین:

$$\theta \approx \frac{D}{d} = \frac{2a_c}{d} \approx 1/3\times 10^{5}\,rad \approx 2/8 arc$$

د) از نظر فیزیکی بهترین دقت زاویه‌ای ممکن در حد پراش $\theta_{diff} \approx \frac{\lambda}{D}$ اسـت. در اینجـا D قطر تلسکوپ است. (و فرض کرده‌ایم که $\lambda << D$) همچنین می‌دانیم که

$$\theta_{diff} = \theta \approx 1/3\times 10^{5}\,rad \text{ و } \lambda_{visible} \approx ۵۰۰۰ A^\circ = ۵\times ۱۰^{-۵}\,cm$$

از dاست. با قرار دادن مقادیر در معادله بالا نتیجه می‌گیریم:

$$D \approx 3/75 cm$$

توجه داشته باشید اگر از دوره تناوب ۷ روزه استفاده می‌کردیم پاسخ دو برابر این مقـدار می‌شد. محاسبه این مشاهده در فضا ایده خوبی بود چون در آنجا هـیچ اتمسـفری بـرای تداخل با مشاهدات نداشت و لذا شما می‌توانستید دقت زاویه‌ای نزدیک به حد پـراش را

به دست آورید. همچنین این یک زاویه در اندازه نسبتا کوچک برای تلسکوپ است بنابراین فرستادن آن به فضا نسبتا کم خرج خواهد بود.
یک ماهواره از زمین فرستاده شده و در یک مدار دایره‌ای بزرگ به دور شارن و پلوتو قرار گرفته است. مدار آن بسیار بزرگ‌تر از جدایی بین آنها و دوره تناوب مداری آن P_{sat} است. فاجعه رخ می‌دهد. ماهواره از فرمان‌ها پیروی نمی‌کند و شما اطلاعاتی در مورد جهت یابی (زاویه میل) صفحه مداری ماهواره (که مانند زاویه میل پلوتو و جسمش نیست.) از دست می‌دهید. خوشبختانه علائم رادیویی از ماهواره نشان می‌دهد که طول موج آنها λ توسط $\pm\Delta\lambda$ در زمانی که ماهواره با دوره تناوب P_{sat} می‌چرخد تفاوت می‌کند.
برای هر یک از دو سئوال بعد یک فرمول برای کمیت مطلوب از لحاظ متغیرهای داده شده در بالا بنویسید و پاسخ هایتان را به قسمت‌های اولیه این سئوال را بنویسید.
هـ) برای به دست آوردن سرعت شعاعی از طول موج انتقال سرخ مشاهده شده می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{rest}} = ۱ + \frac{v_{rad}}{c}$$

همچنین می‌دانیم که $\lambda_{obs} = \lambda_{resa} \pm \Delta\lambda$ در جایی که سرعت مماسی در حداکثر مقدار خود است (روش منفی حداقل سرعت شعاعی است.) همچنین در مسئله‌مان λ_{rest} را λ مقرر قدیمی می‌نامیم. با جایگذاری این در معادله بالا و حل کردن برای v_{rad} می‌گیریم:

$$\frac{\pm\Delta\lambda}{\lambda} c = v_{rad,\max}$$

و) برای ارتباط دادن حداکثر سرعت مماسی از قسمت (هـ) به سرعت واقعی ماهواره می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$v_{sar}\sin(i) = v_{rad,\max} = \frac{\pm\Delta\lambda}{\lambda} c$$

دوباره یک مدار دایره‌ای فرض کرده‌ایم بنابراین می‌توانیم بگوئیم که:

$$v_{sat} = \frac{۲\pi a_{sat}}{P_{sat}}$$

این رابطه به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{2\pi a_{sat}}{P_{sat}}\sin(i)=\frac{\pm\Delta\lambda}{\lambda}c$$

اکنون تنها مسئله این است که a_{sat}، نیم محور اصلی مدار ماهواره به ما داده نشده است. خوشبختانه دوره تناوب را می‌دانیم و لذا می‌توانیم از قانون کپلر استفاده کنیم:

$$P_{sat}^2=\frac{4\pi^2}{G(M_c+M_p)}a_{sat}^3$$

P_{sat} به ما داده شده است و M_c+M_p را در قسمت ب محاسبه کردیم. تنها مجهول a_{sat} است. با حل برای a_{sat} نتیجه می‌گیریم:

$$a_{sat}=\left(\frac{P_{sat}^2G(M_c+M_p)}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

توجه داشته باشید اگر پاسخ خود را از فرمول قبل برای $\sin(i)$ رها کرده بودید و توجه کرده بودید که معادله دقیقا بالا a_{sat} را می‌دهد خوب می‌شد. اگر هر دو را با هم قرار بدهید تا نتیجه بگیرید:

$$\sin(i)=\frac{\pm\Delta\lambda}{\lambda}\frac{P_{sat}}{2\pi\left(\frac{P_{sat}^2G(M_c+M_p)}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}}c$$

این عبارت را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\sin(i)=\frac{\pm\Delta\lambda}{\lambda}\left(\frac{P_{sat}}{2\pi G(M_c+M_p)}\right)^{\frac{1}{3}}c$$

مسئله ۲۲۶ : بیشترین نیرویی که توسط مشتری روی شما اعمال می‌شود چقدر است؟

حل : بیشترین مقدار این نیرو زمانی اتفاق می‌افتد که سیارات به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شوند. یعنی زمانی که آنها در یک طرف خورشید واقع هستند. به طوری که فاصله بین آنها چنین است :

$$d = \left(d_{\text{خورشید به مشتری}}\right) - \left(d_{\text{خورشید به زمین}}\right)$$
$$d = ۵/۲AU - ۱AU$$
$$d = ۴/۲AU$$

AU را با ضرب در $۱/۵\times۱۰^{۱۱}m.AU$ به متر تبدیل می‌کنیم. به طوری که فاصله از زمین تا مشتری $۶/۳\times۱۰^{۱۱}$ می‌شود. فرض کنید در این مسئله جرم شما ۶۵ کیلوگرم باشد. بنابراین نیروی جاذبه بین شما و مشتری چنین است :

$$F = \frac{GmM}{d^۲}$$
$$F = \frac{۶/۶۷\times۱۰^{۱۱}\,m^۲/kg/s^۲ \times ۶۵\,kg \times ۲\times۱۰^{۲۷}\,kg}{\left(۶/۳\times۱۰^{۱۱}m\right)^۲}$$
$$F = ۲/۲\times۱۰^{-۵}\,kg\cdot m^۲/s^۲$$
$$F = ۲/۲\times۱۰^{-۵}N$$

در نتیجه نیروی جاذبه بین شما و مشتری $۲/۲\times۱۰^{-۵}$ نیوتن می‌باشد.

مسئله ۲۲۷ : گفته می‌شود که یک ستاره سوخته می‌رمبد و شعاع آن به شعاع گرانشی می‌رسد. این شعاع طبق تعریف عبارت است از شعاعی که به ازای آن کار لازم برای بردن جسمی به جرم $m_۰$ از سطح ستاره به بی‌نهایت با انرژی سکون آن جسم یعنی با $m_۰c^۲$ برابر است. نشان دهید که شعاع گرانشی خورشید $GM_s/c^۲$ است و مقدار آن را بر حسب شعاع فعلی خورشید محاسبه کنید.

حل : می‌دانیم کاری که برای بردن یک جسم به جرم $m_۰$ از سطح ستاره‌ای به شعاع R تا بی‌نهایت لازم است برابر GMm_c/R می‌باشد حال اگر ستاره مورد نظر خورشید باشد و R شعاع گرانشی آن باشد در این صورت می‌توان نوشت :

$$\frac{GM_sm_c}{R} = m_۰c^۲$$

در نتیجه شعاع گرانشی خورشید برابر است با :

$$R = \frac{GM_s}{c^۲}$$

با قرار دادن مقادیر عددی به دست می‌آوریم $R=1/475\,km$ چون شعاع فعلی خورشید برابر $R_s=6/96\times10^5\,km$ است در نتیجه :

$$R=2/12\times10^{-6}R_s$$

مسئله ۲۲۸ : الف) سرعت نقاط حضیض و اوج عطارد چقدر است؟ فواصل نقاط حضیض و اوج این سیاره چقدر است؟

ب) حاصل vr (فاصله در سرعت لحظه‌ای) در هر یک از این دو نقطه محاسبه کنید و نتیجه به دست آمده را از نظر فیزیکی تفسیر و توضیح دهید.

حل :

$$v_{\text{حضیض}}=\frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}=\frac{2\pi\left(57/9\times10^6\,km\right)}{\left(7/6\times10^6\,s\right)}\sqrt{\frac{1+0/206}{1-0/206}}=59\frac{km}{s}\frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$v_{\text{اوج}}=\frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}=\frac{2\pi\left(57/9\times10^6\,km\right)}{\left(7/6\times10^6\,s\right)}\sqrt{\frac{1-0/206}{1+0/206}}=39/8\frac{km}{s}$$

$$r_{\text{حضیض}}=a(1+e)=\left(57/9\times10^6\,km\right)\left(1+0/206\right)=4/60\times10^7\,km$$

$$r_{\text{اوج}}=a(1-e)=\left(57/9\times10^6\,km\right)\left(1-0/206\right)=6/98\times10^7\,km$$

ب)

$$v_{\text{حضیض}}\,r_{\text{حضیض}}=\left(59\frac{km}{s}\right)\left(4/60\times10^7\,km\right)=2/71\times10^9\,\frac{km^2}{s}$$

$$v_{\text{اوج}}\,r_{\text{اوج}}=\left(39/8\frac{km}{s}\right)\left(6/98\times10^7\,km\right)=2/71\times10^9\,\frac{km^2}{s}$$

این قانون دوم کپلر را ثابت می‌کند و نشان می‌دهد که نیروی حرکت آنی جانبی حفظ شده است.

مسئله ۲۲۹ : نیرویی که یک شخص می‌تواند با فشار ساق‌هایش به سطحی وارد کند (مثلا با جهیدن) مادام که جسم جذب کننده (زمین یا ماه) در مقایسه با شخص جهنده بی‌اندازه پر جرم است، باید به گرانش محلی ناوابسته باشد. بدین ترتیب شخص باید بتواند از سطح ماه یا زمین با نیروی یکسانی بجهد. نشان دهید که نسبت ارتفاع‌هایی که از جهش روی ماه و روی زمین به دست می‌آید. ۶:۱ بیشتر است با فرض اینکه داریم :

$$g_m = \left(\frac{۱}{۶}\right) g_e$$

حل : شتاب حین جهش روی سطح چنین است :

$$a_e = F - Mg_e$$
$$a_m = F - Mg_m$$

تندی که جهنده با آن سطح را ترک می‌کند چنین است :

$$v_e^۲ = ۲a_e x$$
$$v_m^۲ = ۲a_m x$$
$$\frac{v_m^۲}{v_e^۲} = \frac{a_m^۲}{a_e^۲}$$

ارتفاعی که در هر مورد به آن می‌رسد چنین است :

$$h_m = \frac{v_m^۲}{۲g_m}$$
$$h_e = \frac{v_e^۲}{۲g_e}$$

یا

$$\frac{h_m}{h_e} = \frac{v_m^۲}{v_e^۲}\frac{g_e}{g_m}$$

که به دست می‌آید :

$$\frac{h_m}{h_e} = \frac{(F/M - g_m)}{(F/M - g_e)}\frac{g_e}{g_m}$$

اکنون $g_e/g_m \approx ۶$ است پس :

$$\frac{h_m}{h_e} = \frac{(۶F/Mg_m - ۱)}{(F/Mg_e - ۱)}$$

که دارای شکل زیر است :

$$\frac{h_m}{h_e} = \frac{۶X - ۱}{X - ۱}$$

که در آن $X = F/Mg_e$ توجه کنید که $h_m/h_e > ۶$ است. حد ۶ فقط وقتی که $X >> ۱$ باشد به دست می‌آید. ولی این بدین معنی است که $F >> Mg_e$ است یعنی F بزرگ‌تر از

وزن زمینی شخص است که یک مورد غیر واقعی است. در واقع اگر $F=۲Mg_e$ باشد، خواهیم داشت :

$$\frac{h_m}{h_e}=۱۲$$

مسئله ۲۳۰ : نیوتن قانون سوم کپلر را تعمیم داد تا نشان دهد :

$$P^۲=\frac{۴\pi^۲a^۳}{GM}$$

بار دیگر مسئله در حال پسروی را در نظر می‌گیریم. انرژی کلی آن E برابر با مجموع انرژی جنبشی $\frac{۱}{۲}mv^۲$ و انرژی پتانسیل گرانشی آن $-GMm/r$ می‌باشد. باید یادآوری کرد که

$$v(r_{\min})=v_\theta(r_{\min})$$

انرژی کلی سیاره در $r=r_{\min}$ ارزیابی کنید و از تعمیم نیوتنی قانون سوم کپلر برای نشان دادن اینکه انرژی کلی سیاره خودمان برابر است با :

$$E=-\frac{GMm}{۲a}$$

استفاده کنید. چون انرژی بقا می‌یابد نشان دهید که سرعت کلی سیاره ما در این یا هر نقطه دیگری در مدارش سپس معادله را ارضا می‌کند.

حل :

$$v^۲=GM\left(\frac{۲}{r}-\frac{۱}{a}\right)$$

این معادله را برای $v^۲$ به نام معادله ویز ویرا معروف است و در واقع برای مدارهای باز (سهمی یا هذلولی) به خوبی برای مدارهای بسته معتبر است.
انرژی کلی سیاره برابر است با مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل آن :

$$E_{tot}=K.E.+P.E.=\frac{۱}{۲}mv^۲+\left(\frac{GMm}{r}\right)$$

که m جرم سیاره و M جرم ستاره در مرکز است. در $r = r_{\min}$ با جایگذاری در فرمول نتیجه می‌گیریم :

$$E_{tot,r_{\min}} = \frac{m}{۲}\frac{۴\pi^{۲}a^{۲}}{P^{۲}}\frac{۱+e}{۱-e} - \frac{GMm}{r_{\min}}$$

با

$$P^{۲} = \frac{۴\pi^{۲}a^{۳}}{GM}$$

سپس می‌توانیم داشته باشیم :

$$E_{tot,r_{\min}} = \frac{m}{۲}\frac{GM}{a}\frac{۱+e}{۱-e} - \frac{GMm}{a(۱-e)}$$
$$= \frac{GMm}{a(۱-e)}\left(\frac{۱+e}{۲} - ۱\right)$$
$$= \frac{GMm}{a(۱-e)}\frac{e-۱}{۲}$$
$$= -\frac{GMm}{۲a}$$

چون E_{tot} بقا می‌یابد، $E_{tot,r_{\min}}$ مساوی است با مقدار انرژی کلی در هر نقطه در مدار سیاره بنابراین :

$$-\frac{GMm}{۲a} = \frac{۱}{۲}mv^{۲} - \frac{GMm}{r}$$

با حل این معادله برای $v^{۲}$ به معادله ویز ویرا می‌رسیم :

$$v^{۲} = GM\left(\frac{۲}{r} - \frac{۱}{a}\right)$$

مسئله ۲۳۱ : فوبوس با دوره تناوب نجومی $P_{\text{فوبوس}} = ۰/۳۱۸۹۱d$ می‌چرخد. مدارش در عمل در صفحه خط استوای مریخ قرار دارد و برای همه اهداف عملی با نیم محور اصلی $a_{\text{فوبوس}} = ۹۳۸۰$ در مقایسه با شعاع مریخ $R_{\text{u}} = ۳۳۹۷km$ دایره‌ای است. فوبوس خودش دارای شکل غیر منتظمی است ولی می‌تواند به صورت یک کره با شعاع $R_{\text{فوبوس}} = ۱۱/۱km$ تقریب زده شود. جرمش که از پیگیری اطلاعات از چند کاوشگر

مریخ تعیین شده است برابر است با $M_{\text{فوبوس}}=1/073\times10^{19}g$ که مطابق است با چگالی متوسط $\overline{\rho}_{\text{فوبوس}}=1/872g\,cm^{-3}$

الف) از مدار فوبوس برای محاسبه M_{u} جرم مریخ استفاده کنید.

ب) چگالی متوسط $\overline{\rho}_{\text{u}}$ مریخ چقدر است؟

ج) آیا فوبوس در میان یا خارج از حد روچ خود قرار دارد؟ آیا باید توسط جزر و مدهای مریخی به بیرون کشیده شود؟ اگر چنین است چرا دست نخورده باقی می‌ماند؟

د) سرعت فرار از فوبوس را محاسبه کنید. در یک پرش ارتفاع، یک ورزشکار خوب می‌تواند به ۱ متر بالای زمین برسد که مطابق با سرعت پرتاب $4/4ms^{-1}$ آیا چنین ورزشکاری می‌تواند آزاد از فوبوس بپرد؟

حل : الف) قانون سوم کپلر :

$$a^3=\frac{GMP^2}{(4\pi^2)}$$

به کار رفته برای فوبوس ($P=P_{\text{فوبوس}}$ و $a=a_{\text{فوبوس}}$) جرم مریخ را به دست می‌دهد. (جرم فوبوس به مقدار ناچیزی کوچک‌تر می‌شود).

$$M_{\text{u}}=\frac{4\pi^2a^3}{GP^2}$$

$$=\frac{4\pi^2\times\left(9/38\times10^{8}cm\right)^3}{\left(6/673\times10^{-8}cm^3g^{-1}s^{-2}\right)\left(0/31891d\times86400sd^{-1}\right)^2}$$

$$=6/43\times10^{26}g$$

ب)

$$\overline{\rho}_{\text{u}}=\frac{M_{\text{u}}}{\frac{4}{3}\pi R_{\text{u}}^3}=\frac{3\times\left(6/43\times10^{26}g\right)}{4\pi\times\left(3/397\times10^{8}cm\right)^3}=3/92gs^{-3}$$

ج) حد روچ برای فوبوس برابر است با :

$$R_{\text{روچ}} = ۲/۴۲۳\left(\frac{\bar{\rho}_{\text{U}}}{\bar{\rho}_{\text{فوبوس}}}\right)^{\frac{۱}{۳}} R_{\text{U}}$$

$$= ۲/۴۲۳\left(\frac{۳/۹۲\,gcm^{-۳}}{۱/۸۷۲\,gcm^{-۳}}\right)^{\frac{۱}{۳}} (۳۳۹۷\,km)$$

$$= ۱۰۵۳۰\,km > a_{\text{فوبوس}} \quad = ۹۳۸۰\,km$$

فوبوس در میان حد روچ خود قرار می‌گیرد. اگر قرار بود فقط توسط جاذبه به تنهایی نگه داشته شود باید توسط جزر و مدهای مریخی بیرون کشیده می‌شد. ولی توسط پیوندهای مولکولی نگه داشته می‌شود. (در واقع این دلیلی است برای اینکه چرا جاذبه آن را به شکل کروی نکشیده است)

سرعت فرار از r از معکوس معادله با قرار دادن $a \to \infty$ (بنابراین مدار به بی‌نهایت فرار می‌کند) دنبال می‌شود.

$$v_{esc} = \left(\frac{۲GM}{R}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \left(\frac{۲\times\left(۶/۶۷۳\times ۱۰^{-۸}\,cm^{۳}g^{-۱}s^{-۲}\right)\left(۱/۰۷۳\times ۱۰^{۱۹}\,g\right)}{(۱/۱۱\times ۱۰^{۶}\,cm)}\right)$$

$$= ۱۱۳۶\,cms^{-۱}$$

این کمی فراتر از توانایی یک ورزشکار برای پرش آزاد فوبوس است.

مسئله ۲۳۲ : ذره m را در حال حرکت در میدان جاذبه تنظیم شده توسط جرم کروی بسیار بزرگ‌تر M در نظر بگیرید. میدان گرانش نیوتنی روی m دارای بزرگی :

$$F = \frac{GMm}{r^{۲}}$$

است. این ذره در یک مدار دایره‌ای در فاصله ثابت $r = a$ حرکت می‌کند.

الف) سرعت مداری v_c را بیابید. به خاطر بسپارید که شتاب گریز از مرکز $a_c = v_c^{۲}/r$ است و توسط شتاب گرانشی فراهم می‌شود.

ب) P را دوره تناوب مداری قرار دهید. نشان دهید که این مدار از قانون سوم کپلر $a^{۳} \propto P^{۲}$ پیروی می‌کند و یک عبارت برای ثابت تناسب بیابید. به حل برای P ادامه دهید.

ج) نشان دهید که این مدار همیشه از رابطه $2T = -U$ پیروی می‌کند که $T = 1/2mv^2$ انرژی جنبشی و $U = -GMm/r$ انرژی پتانسیل است. سپس نشان دهید که انرژی کل E_{tot} مربوط به U است.

حل : الف) برای یافتن سرعت دایره‌ای v_c چندین شیوه وجود دارد که معادل هستند که با دنبال کردن شتاب جانب مرکز $a_c = v_c/r$ و توسط شتاب گرانشی، به وجود آمده است. در نتیجه $a_c = g$ که $g = GMm/r^2$ بنابراین داریم :

$$\frac{v_c^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

$$v_c^2 = \frac{GM}{r}$$

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

که در عبارت آخر $r = a$ استفاده کردیم.

ب) احتمالا ساده‌ترین شیوه در اینجا در نظر گرفتن ستاره‌ای با معادله دوم بالا است و درک اینکه سرعت زاویه‌ای یک ثابت و برابر با $\omega = 2\pi/P$ است سپس داریم $v_c = \omega r$ و بنابراین :

$$\omega^2 = \frac{GM}{a^3}$$

که می‌توانیم دوباره معادله مرتب کنیم تا رابطه زیر را به دست آوریم :

$$a^3 = \frac{GM}{4\pi^2} P^2$$

که دارای شکل مورد نیاز $a^3 \propto P^2$ است و ثابت تناسب برابر است با $GM/4\pi^2$ می‌توانیم به حل برای رسیدن به دوره تناوب ادامه دهیم.

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

این عبارات به این مورد اشاره دارد که می‌توانیم اطلاعاتی در مورد P و a (یا P و $v_c = 2\pi a/P$) بدست آوریم، سپس می‌توانیم M را محاسبه کنیم. به عبارت دیگر از جاذبه و دینامیک‌ها برای اندازه‌گیری جرم می‌توانیم وزن اشیا را با استفاده از مدارهای ماهواره‌هایشان، استفاده کنیم.

ج) داریم :

$$T=\frac{۱}{۲}mv^{۲}=\frac{۱}{۲}mv_c^{۲}=\frac{۱}{۲}\frac{GMm}{a}$$

و چون $U=-GMm/a$ به طور واضح داریم $T=-U/۲$ یا $۲T=U$ که قبلا نشان داده شده بود. سرانجام چون انرژی کلی E_{tot} برابر است با :

$$E_{tot}=T+U$$

$$E_{tot}=-U/۲+U=\frac{U}{۲}=-\frac{GMm}{۲a}$$

این منفی نباید نگران کننده باشد. همان گونه که بیان می‌کند این منظومه باید دارای انرژی افزوده شده بر آن باشد تا انرژی صفر داشته باشد. ولی انرژی صفر چیزی است که شما در زمانی که این ذره در سکون است، دارید. (به عبارتی $v=۰$ و بنابراین $T=۰$) در بی نهایت ($U=-GMm/r\rightarrow ۰$ زمانی که $r\rightarrow ۰$) به بیان دیگر $|E_{tot}|$ انرژی است که مقداری را دارد که می‌تواند منظومه را متلاشی کند.

مسئله ۲۳۳ : خروج از مرکز مداری ۰/۹۶۷ است.

الف) فاصله نقطه حضیض ستاره دنباله‌دار چقدر است؟ فاصله نقطه اوج چقدر است؟

ب) دمای فرعی خورشیدی بر ستاره دنباله‌دار هالی در نقطه حضیض چقدر است؟

ج) نیروی بازتاب ستاره دنباله‌دار هالی ۳% است. دمای تعادل جسم تیره در نقطه حضیض چقدر است؟ در نقطه اوج چقدر است؟

- برای محاسبه کردن نیروی بازتاب (و گردش هسته ستاره دنباله‌دار) از معادله $۲/۵a$ استفاده کنید.

حل : الف)

$$P^{۲}=a^{۳}$$

$$a=P^{\frac{۲}{۳}}=(۷۶)^{\frac{۲}{۳}}=۱۷/۹AU$$

$$r_{حضیض}=a(۱-e)=(۱۷/۹AU)(۱-۰/۹۶۷)=۰/۵۹AU$$

$$r_{اوج}=a(۱+e)=(۱۷/۹AU)(۱+۰/۹۶۷)=۳۵/۲AU$$

بنابراین نقطه حضیض ستاره دنباله‌دار هالی درون مدار زهره ونقطـه اوج بیـرون از مـدار نپتون است.

ب)

$$T_{SS} = \sqrt{\frac{R}{r_p}}T \approx ۳۹۴\frac{۱}{\sqrt{r_p}}$$

$$T_{SS-\text{حضیض}} = ۳۹۴\frac{۱}{\sqrt{۰/۵۹}} \approx ۵۱۰K$$

$$T_{SS-\text{اوج}} = ۳۹۴\frac{۱}{\sqrt{۳۵/۲}} \approx ۶۶K$$

ج)

$$T_{eq} = (۱-A)^{\frac{۱}{۴}}\sqrt{\frac{R}{۲r_p}} \approx ۲۷۹(۱-A)^{\frac{۱}{۴}}\frac{۱}{\sqrt{r_p}}$$

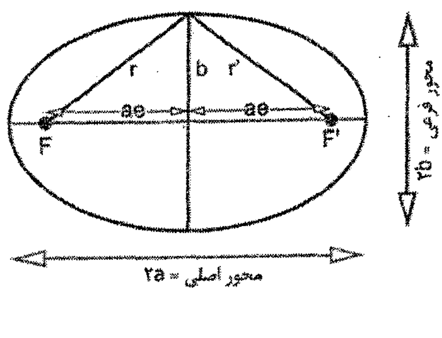
$$T_{eq-\text{حضیض}} = ۲۷۹(۱-۰/۰۳)^{\frac{۱}{۴}}\sqrt{\frac{۱}{۰/۵۹}} \approx ۳۶۰K$$

$$T_{eq-\text{حضیض}} = ۲۷۹(۱-۰/۰۳)^{\frac{۱}{۴}}\sqrt{\frac{۱}{۳۵/۲}} \approx ۴۷K$$

مسئله ۲۳۴ : طرح مدار پلوتو و نپتون را رسم کنیـد. بـرای اینکـه شـکل مـدار پلوتـو را صحیح به دست آورید از اطلاعات محاسبه شده در سئوال قبل احتیاج دارید که خـود را قانع کنید که محور کوچک b مربوط به یک بیضی از این رابطه به دست می‌آید :

$$b = a\sqrt{۱-e^۲}$$

حل : طرح زیر بخش‌های اصلی یک بیضی را توصیف می‌کند.



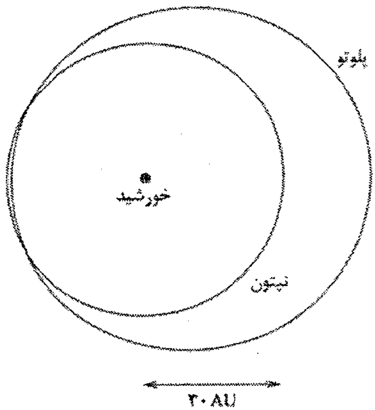
شکل ۲-۴۱

به واسطه تعریف بیضی $r + r' = 2a$ در مثلث نشان داده شده است $r = r'$ طوری که سریعا استنباط می‌شود که $r = a$ سپس قضیه فیثاغورث نتیجه می‌دهد :

$$(ae)^2 + b^2 = r^2 = a^2$$

بنابراین :

$$b^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2(1-e^2)$$



شکل ۲-۴۲

یا :

$$b = a\sqrt{1-e^2}$$

بنابراین نیم محور کوچک مدار پلوتو برابر $b = 38/2\,AU$ است. با توجه به نیروی گریز از مرکز کوچک مدار نپتون می‌توانیم این را به یک دایره نزدیک کنیم و نتیجه زیر را برای محاسبه ابعاد طرح هر دو مدار به دست آوریم. مدارهای پلوتو و نپتون به سمت یکدیگر متمایل شده‌اند طوری که هیچ خطری ناشی از تصادم دو سیاره وجود ندارد.

مسئله ۲۳۵ : یک سفینه فضایی از زمین پرتاب می‌شود تا در مداری حول زهره قرار گیرد. مقادیر v_0 و v_1 و v_2 و T را محاسبه کنید.

حل : v_0 سرعت سفینه فضایی حول زمین با رابطه زیر بیان می‌شود :

$$v_\circ = \frac{۲\pi r_E}{T_E} = \frac{۲\pi \times ۱/۴۹ \times ۱۰^{۸} km}{۳/۱۶ \times ۱۰^{۷} s} = ۲۹/۶\, km/s$$

سرعت $v_۱$ سفینه فضایی در مدار انتقال نیز بر اساس معادلات بالا چنین است :

$$v_۱^۲ = v_\circ^۲ \frac{۲r_v}{r_E + r_v} = v_\circ^۲ \frac{۲(۰/۷۲ r_E)}{r_E + ۰/۷۲ r_E} = ۰/۸۳۷ v_\circ^۲$$
$$v_۱ = ۲۷/۱\, km/s$$

بنابراین در نقطه E سرعت سفینه فضایی باید به اندازه :

$$۲۹/۶\, km/s - ۲۷/۱\, km/s = ۲/۵\, km/s$$

کاهش یابد. زمان تناوب T مدار انتقال نیز چنین است :

$$T = \left(\frac{r_E + r_V}{۲r_E}\right)^{۳/۲} T_E = \frac{r_E + ۰/۷۲ r_E}{۲r_E} T_E = ۰/۸۶ T_E$$

سفینه در نیم دوره یا نصف این مدت زمان به نقطه V می‌رسد.

$$\frac{۱}{۲}(۰/۸۶ T_E) = \frac{۱}{۲}(۰/۸۶)(۱\,\text{سال}) = ۰/۴۳\,\text{سال} = ۱۵۶\,\text{روز}$$

سرعت سفینه هنگامی که به نقطه V می‌رسد، چنین است :

$$v_۲^۲ = v_\circ^۲ \frac{۲r_E^۲}{r_V(r_V + r_E)} = v_\circ^۲ \frac{۲}{۰/۷۲(۰/۷۲ + ۱)} = ۱/۶۱۵ v_\circ^۲$$
$$v_۲ = ۳۷/۶۲\, km/s$$

سرعت مداری زهره نیز برابر است با :

$$v_V = \frac{۲\pi r_V}{T_V} = \frac{۲\pi(۱/۰۷۸ \times ۱۰^{۸} km)}{۰/۶۲(۳/۱۶ \times ۱۰^{۷} s)} = ۳۴/۵\, km/s$$

بنابراین هنگامی که سفینه به نقطه V می‌رسد باید سرعت خود را به اندازه :

$$۳۷/۶۲\, km/s - ۳۴/۵\, km/s = ۳/۱۲\, km/s$$

کاهش دهد تا در مدار زهره قرار گیرد.

مسئله ۲۳۶ : قانون سوم کپلر را اثبات کنید مربع دوره تناوب سیارات مختلف بستگی به مکعب نیم محورهای اصلی آنها دارد.

حل : اگر b, a طول نیم محورهای اصلی و نیمه فرعی باشند، پس محیط بیضی πab است. چون سرعت طی مساحت دارای بزرگی $h/۲$ است زمان سپری کردن محیط πab یا دوره تناوب برابر است با :

$$P = \frac{\pi ab}{h/۲} = \frac{۲\pi ab}{h/۲} = \frac{۲\pi ab}{h} \qquad (۱)$$

حالا با توجه به مسائل قبل داریم :

$$b = a\sqrt{۱-\varepsilon^۲}, \qquad p = a(۱-\varepsilon^۲) = mh^۲/K \qquad (۲)$$

آنگاه از معادلات (۱) و (۲) داریم :

$$P = ۲\pi m^{۱/۲} a^{۳/۲}/K \Rightarrow P^۲ = ۴\pi^۲ m a^۳/K$$

بنابراین مربع دوره تناوب با مکعب نیم محورهای اصلی رابطه مستقیم دارد.

مسئله ۲۳۷ : همان طور که قبلا نشان داده شد قانون دوم کپلر یک نتیجه از پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای است. به ویژه نشان داده شد که :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{۲m} = \text{ثابت}$$

در حالی که dA/dt سرعت قطاعی و dA منطقه پوشش توسط خط سیر شعاع سیاره در طول فاصله زمانی dt است.

الف) با کامل کردن dA/dt در طول یک چرخش از زمان P سیاره دارای جرم m در اطراف خورشید، نشان می‌دهد که چنین اندازه حرکت زاویه‌ای در واحد جرم چنین است

$$\frac{L}{m} = \frac{۲\pi\, ab}{P}$$

همان طور که می‌دانید مساحت بیضی از رابطه $A = \pi ab$ بدست می‌آید که a و b نیم محور بزرگ و کوچک آن هستند.

ب) از معادله دوم استفاده کرده و نشان دهید سرعت‌های حضیض و اوج مربوط به یک ستاره به شکل زیر به دست می‌آید.

$$v_{\text{حضیض}} = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$v_{\text{اوج}} = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

حل : الف) با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه اول خواهیم داشت :

$$\int_0^P \frac{dA}{dt}dt = \int_0^P \frac{L}{2m}dt$$

$$A = \pi ab = \frac{LP}{2m}$$

چون منطقه پوشش داده شده توسط خط سیر شعاع در طول یک چرخش سیاره، یک منطقه از بیضی است آن را برای L حل می‌کنیم. پاسخ مورد نظر به دست می‌آید.

ب) قسمت مهم در این راه حل توجه به این نکته است که در حضیض و اوج جهت حرکت یک سیاره عمود است بر جهت شعاع به طوری که :

$$\left|\vec{L}\right| = m\left|\vec{r}\times\vec{v}\right| = mrv$$

سپس بقیه محاسبات آسان است. سرعت حضیض و اوج چنین است :

$$v = \frac{L}{mr} = \frac{2m\pi ab}{Pmr} = \frac{2\pi a^2}{Pr}\sqrt{1-e^2}$$

که از رابطه $b = a\sqrt{1-e^2}$ استفاده می‌کنیم. قبلا فواصل نقاط حضیض و اوج را بدست آوردیم.

$$r_{\text{حضیض}} = a(1-e)$$

$$r_{\text{اوج}} = a(1+e)$$

این روابط را در معادلات قبل قرار می‌دهیم.

$$v_{\text{حضیض}} = \frac{2\pi a^2}{Pa(1-e)}\sqrt{1-e^2} = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$v_{\text{اوج}} = \frac{2\pi a^2}{Pa(1+e)}\sqrt{1-e^2} = \frac{2\pi a}{P}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

و نتیجه همان است که انتظار می‌رفت.

مسئله ۲۳۸ : یک شهاب با تندی زیاد به خط تقریبا مستقیم از کنار زمین می‌گذرد. جرم شهاب ۱۵۰ کیلوگرم، تندی آن نسبت به زمین $۶۰ km/s$ و نزدیک‌ترین فاصله مدار آن از مرکز زمین $۱/۲\times۱۰^{۴} km$ است.

الف) اندازه حرکت زاویه‌ای شهاب در چارچوب مرجع زمین (مبدا در مرکز زمین) چقدر است؟

ب) اندازه حرکت زاویه‌ای شهاب در چارچوب مرجع شهاب (مبدا در مرکز شهاب) چقدر است؟

حل : الف)

$M = ۱۵۰ kg$

$M_e = ۵/۹۸\times۱۰^{۲۴} kg$

$v = ۶۰ km/s = ۶۰۰۰۰ m/s, \quad R = ۱/۲\times۱۰^{۴} km = ۱/۲\times۱۰^{۷} m$

اندازه حرکت شهاب سنگ در چارچوب مرجع زمین چنین است :

$$L = MRv = ۱۵۰\times۶۰۰۰۰\times۱/۲\times۱۰^{۷} = ۱/۰۸\times۱۰^{۱۴} kg\, m^{۲}/s$$

ب) اندازه حرکت شهاب سنگ در چارچوب خود نیز چنین است :

$$L = M_e Rv = ۵/۹۸\times۱۰^{۲۴}\times۱۰^{۷}\times۶۰۰۰۰ = ۴/۳\times۱۰^{۳۶} kg\, m^{۲}/s$$

مسئله ۲۳۹ : یک سال زمینی ۳۶۵/۲۴۴ روز است. متخصص این رشته بسیار خوشحال‌تر می‌شد اگر این مقدار یک عدد صحیح بود. با استفاده از شکل کپلری قانون سوم نیوتن سه روش ارائه دهید تا روزهای سال ۳۵۴ شود. (این باعث هماهنگی بیشتر بین ماه‌های قمری می‌شود زیرا به این شیوه می‌توانیم ۶ ماه ۲۹ روزه و ۶ ماه ۳۰ روزه داشته باشیم.) و از آنجا که طول ماه قمری ۲۹/۵ روز است که داریم :

(ماه ۱۲) × (۲۹/۵) = ۳۵۴ روز

این یک تقویم بسیار فوق‌العاده خواهد بود.

الف) جرم خورشید باید چه تغییری کند اگر هیچ چیز تغییر نکند؟

ب) جرم زمین باید چقدر می‌شد اگر هیچ چیز دیگر تغییر نمی‌کرد.

ج) زاویه مداری زمین باید چه تغییری می‌کرد اگر هیچ چیز دیگر تغییر نمی‌کرد؟

حل : الف) اگر شکل کپلری قانون سوم نیوتن را در نظر بگیریم :

$$P^2=\left[\frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}\right]a^3$$

با توجه به مقادیر :

$$M_\odot=1/989\times10^{30}kg$$
$$M_\oplus=5/974\times10^{24}kg$$

برای واحدهایی که انتخاب کرده‌ایم طول نیم محور بزرگ (که با عنوان ۱ واحد نجومی شناخته می‌شود) در حدود $1/496\times10^{11}$ متر و همچنین ثابت جهانی در حدود

$$6/67\times10^{-11}m^3/kgs^2$$

است. سپس معادله را بر حسب m_2 حل می‌کنیم.

$$P^2=\left[\frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}\right]a^3$$
$$P^2(m_1+m_2)=\left[\frac{4\pi^2}{G}\right]a^3$$
$$m_1+m_2=\frac{4\pi^2a^3}{GP^2}$$
$$m_2=\frac{4\pi^2a^3}{GP^2}-m_1$$

می‌توانیم مقادیری را که از این مسئله می‌دانیم جایگذاری کنیم $m_1=M_\oplus$ و $m_2=M_\odot$

$$M_\odot=\frac{4\pi^2\left(1/496\times10^{11}m\right)^3}{\left(6/67\times10^{-11}m^3/kgs^2\right)\left(3/0856\times10^7s\right)^2}-5/974\times10^{24}kg$$
$$M_\odot=2/118\times10^{30}kg-5/974\times10^{24}kg$$
$$M_\odot=2/1179\times10^{30}kg=1/065M_\odot$$

ب) از روابطی که در قسمت الف استفاده شد بهره می‌گیریم $m_2=M_\oplus$ و $m_1=M_\odot$

$$M_\oplus=\frac{4\pi^2\left(1/496\times10^{11}m\right)^3}{\left(6/67\times10^{-11}m^3/kgs^2\right)\left(3/0856\times10^7s\right)^2}-1/989\times10^{30}kg$$

$$M_{\oplus} = ۲/۱۱۸\times ۱۰^{۳۰} kg - ۱/۹۸۹\times ۱۰^{۳۰} kg$$
$$M_{\oplus} = ۱/۲۹۳\times ۱۰^{۲۹} kg = ۲۱۶۴۳/۷۹ M_{\oplus}$$

ج) این قسمت را می‌توان به طور کاملا مشابه با قسمت‌های قبل حل کرد ولی برای یک متغیر متفاوت

$$P^{۲} = \left[\frac{۴\pi^{۲}}{G(m_۱ + m_۲)}\right] a^{۳}$$
$$a^{۳} = \frac{G(m_۱ + m_۲)P^{۲}}{۴\pi^{۲}}$$
$$a = \left(\frac{G(m_۱ + m_۲)P^{۲}}{۴\pi^{۲}}\right)^{۱/۳}$$

حالا مقادیر را جایگذاری می‌کنیم توجه داشته باشید که جرم زمین بسیار کمتر از جرم خورشید است پس می‌توان در این قسمت از آن صرف نظر کرد.

$$a = \left(\frac{\left(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱} m^{۳}/kgs^{۲}\right)\left(۱/۹۸۹\times ۱۰^{۳۰} kg\right)\left(۳/۰۵۸۵۶\times ۱۰^{۷} s\right)}{۴\pi^{۲}}\right)^{۱/۳}$$
$$a = \left(۳/۱۴۴\times ۱۰^{۳۳} m^{۳}\right)^{۱/۳}$$
$$a = ۱/۴۶۵\times ۱۰^{۱۱} m = ۱/۴۶۵\times ۱۰^{۸} km = ۰/۹۷۹ AU$$

مسئله ۲۴۰ : الف) حداکثر طول زهره °۴۷ است. فاصله آن از خورشید در واحدهای نجومی چقدر است.

ب) مریخ دارای دوره تناوب هلالی ۷۷۹/۹ روز ودوره نجومی ۶۸۶/۹۰۸ روز است. در ۱۱ فوریه ۱۹۹۰، طول مریخ °۴۳ غربی بود. طول مریخ ۶۸۷ روز دیرتر است، در ۳۰ دسامبر ۱۹۹۱، °۱۵ غربی بود. فاصله مریخ از خورشید در واحدهای نجومی چیست؟

حل : الف)

$$r_{\text{زهره}} = (۱AU)\times \sin ۴۷^{\circ} = ۰/۷۳ AU$$

ب) این یک مسئله پیچیده چند مرحله‌ای است. اول باید یک تصویر رسم کنید.

اولا توجه داشته باشید که $E_۱ - S - E_۲$ می‌تواند از اطلاعاتی مربوط به زمان حل شود.

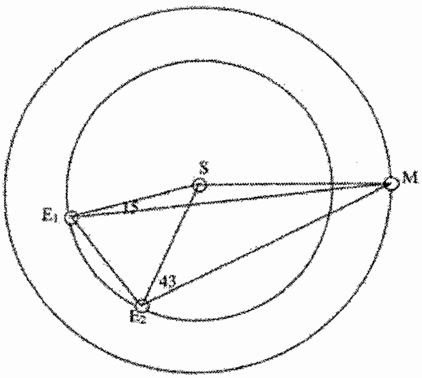
$$720 - \left(\frac{360^\circ}{365 days}\right)(687 days) = 43^\circ$$

آنگاه توجه داشته باشید که $E_1 - S - E_2$ یک مثلث متساوی‌الساقین است، قانون کسینوس‌ها را برای حل $E_1 - E_2$ فاصله از $0/73AU$ بکار برید.

توجه کنید که $M - E_1 - E_2 = 111/5^\circ$ است و $M - E_2 - E_1 = 53/5^\circ$

قانون سینوس‌ها را برای $E_1 - M - E_2$ برای بدست آوردن $E_1 - M = 2/27AU$ به کار برید.

- قانون کسینوس‌ها را برای $E_1 - S - M$ برای به دست آوردن $S - M = 1/68$ به کار برید. توجه داشته باشید که این مقدار متفاوت‌تر از مقدار $1/52AU$ به دست آمده برای نیم محور اصلی مریخ که باعث شد کپلر این نتیجه را بگیرد که مریخ دارای مداری بیضوی است.



شکل ۲-۴۳

مسئله ۲۴۱ : فرض کنید با تلسکوپ، سیاره جدیدی را مشاهده می‌کنید که هر ۸ سال به دور خورشید می‌چرخد. این سیاره دارای یک جسم با تناوب مداری ۱۰ روز است. این جسم از سیاره $0/1^\circ$ قرار دارد. در زمانی که از زمین در مقابله مشاهده می‌شود. در مورد نمودار زیر مطالعه و بررسی کنید.

الف) فاصله b چقدر است؟

ب) فاصله a چقدر است؟

ج) جرم سیاره چقدر است؟ آیا کمتر یا بیشتر از زمین است؟

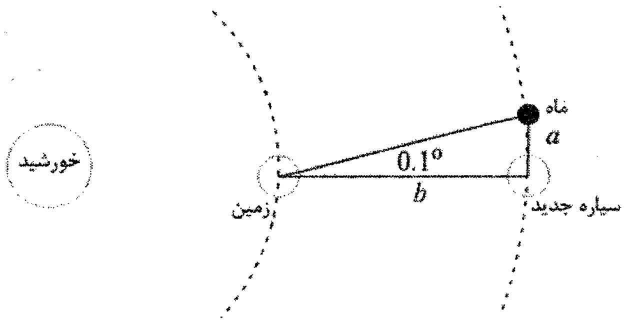
حل : الف) در ابتدا فاصله سیاره را از خورشید با قانون سوم کپلر محاسبه می‌کنیم.

$$T^{۲} = r^{۳} \Rightarrow r = T^{۲/۳} = ۴AU$$

این سیاره در فاصله ۳ واحد نجومی از زمین در مقابله وجود دارد بنابراین $b = ۳AU$

ب) با توجه به شکل :

$$\frac{a}{b} = \tan(۰/۱^\circ)$$



شکل ۲-۴۴

فرمول زاویه کوچک بیان می‌کند که :

$$\tan\theta = \theta\, rad$$

بنابراین :

$$a = b \times ۰/۱^\circ \times \frac{\pi}{۱۸۰^\circ} = ۰/۰۰۵۲AU = ۷/۸۵ \times ۱۰^{۵}\, km$$

ج) جرم سیارات را می‌توان از تفسیر نیوتن از قانون سوم کپلر محاسبه کرد.

$$M = \frac{۴\pi^{۲} r^{۳}}{GT^{۲}}$$

$$= \frac{۴\pi^{۲}\left(۷/۸۵ \times ۱۰^{۸} m\right)^{۳}}{\left(۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} m^{۳}/kgs^{۲}\right)\left(۱۰ day \times \frac{۲۴h}{۱day} \times \frac{۳۶۰۰s}{۱h}\right)}$$

$$= ۳/۸ \times ۱۰^{۲۶} kg$$

سیاره جدید دارای جرم بیشتری از زمین و جرم کمتری از مشتری است.

مسئله ۲۴۲: سرعت یک پرتابه در سطح زمین چقدر باشد تا بتواند به ارتفاعی برابر شعاع زمین صعود کند؟
حل:

$$E = K + U$$
$$W' = \cdot = E_۲ - E_۱$$
$$U = -G\frac{mm_E}{r}$$
$$E_۱ = \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ - G\frac{mm_E}{۲R}$$
$$Gm_E = R^۲ g$$
$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ - mgR = -\frac{mgR}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ = \frac{mgR}{۲} \Rightarrow v_۱ = \sqrt{gR}$$
$$v_۱ = \sqrt{(۹/۸)(۶/۳۷\times ۱۰^۶)} = ۷/۹\times ۱۰^۳\ m/s$$

مسئله ۲۴۳: درصد تغییر شتاب کره زمین به سمت خورشید، وقتی همردیفی کره زمین، خورشید و کره ماه در یک کسوف (که ماه بین زمین و خورشید قرار می گیرد) به یک خسوف (که زمین بین ماه و خورشید قرار می گیرد) تغییر می کند، چقدر است؟
حل: در وضعیت خسوف ماه بین زمین و خورشید قرار می گیرد و در وضعیت خسوف، این زمین است که میان ماه و خورشید قرار می گیرد. پس در وضعیت خسوف شتاب های گرانشی وارد بر زمین هر دو در یک سو هستند و داریم:

$$a_{g,net} = a_{g,s} + g_{g,M}$$

که $a_{g,M}$ و $a_{g,s}$ به ترتیب شتاب های گرانشی ناشی از ماه و خورشید هستند. در حالی که در وضعیت خسوف شتاب‌های گرانشی وارد بر زمین در دو سوی مخالفند و بنابراین :

$$a'_{g,net} = g_{g,S} - a_{g,M}$$

اختلاف میان این مقدار (از لحاظ قدرمطلق) برابر $۲a_{g,M}$ می شود. آنچه که مورد نظر مسئله است این است که این اختلاف شتاب را بر میانگین دو شتاب خالص:

$$\frac{(a_{g,net}+a'_{g,net})}{۲}$$

که برابر $a_{g,s}$ می شود تقسیم کنیم و حاصل تقسیم را به درصد بیان کنیم:

$$\frac{۲a_{g,M}}{a_{g,S}}=۲\left(\frac{M_m}{M_s}\right)\left(\frac{r_{SE}}{r_{ME}}\right)^۲$$
$$=۲\left(\frac{۷/۳۶\times۱۰^{۲۲}}{۱/۹۹\times۱۰^{۳۰}kg}\right)\left(\frac{۱/۵\times۱۰^{۱۱}m}{۳/۸۲\times۱۰^{۸}}\right)^۲=۰/۰۱۱=۱/۱\%$$

که در این محاسبه از $a_g=GM/r^۲$ استفاده کردیم و در آن r_{SE} فاصله خورشید تا زمین و r_{ME} فاصله ماه تا زمین است.

مسئله ۲۴۴ : ماهواره‌ای از زمین در مدار بیضوی دور خورشید پرتاب می‌شود. اوجش در موقعیت زمین است و عطارد (نیم محور اصلی مداری $۰/۳۸۷AU$) را در اوج ملاقات خواهد کرد.

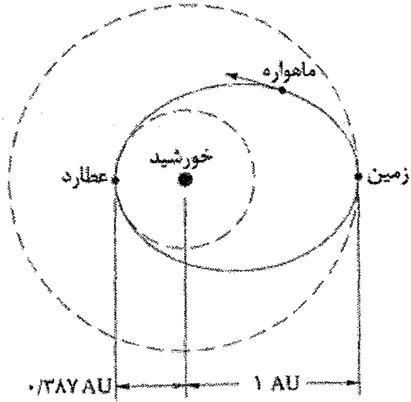
الف) یک مدار از این مدار ماهواره با نشان دادن موقعیت‌های خورشید، دو سیاره و نیز مدارهایشان رسم کنید.

ب) نیم محور اصلی مدار ماهواره را بر حسب واحد نجومی بیابید.

ج) خروج از مرکز مدار ماهواره را بیابید.

د) وقتی که ماهواره از زمین پرتاب می‌شود، در چه زاویه‌ای عطارد در مدارش است؟ (دوره تناوب مداری ماهواره را بیابید و آن را با دوره تناوب مداری عطارد مقایسه کنید). زاویه را روی نمودار در قسمت الف نشان دهید.

حل : الف) نمودار به صورت زیر است.



شکل ۲-۴۵

ب) روی نمودار می‌بینیم که طول محور اصلی مدار ماهواره برابر است با مجموع شعاع‌های مداری مدارهای عطارد و زمین. بنابراین :

$$a = \frac{۱AU + ۰/۳۸۷AU}{۲} = ۰/۶۹AU$$

ج) فاصله اوج ماهواره $F = a(۱+\varepsilon)$ برابر است با شعاع مداری زمین $۱AU$، بنابراین :

$$\varepsilon = \frac{f}{a} - ۱ = ۰/۴۴$$

د) دوره تناوب‌های ماهواره و عطارد به ترتیب برابرند با :

$$P_S = a_S^{۳/۲} = (۰/۶۹)^{۳/۲} yr = ۰/۵۸ yr,$$
$$P_M = a_M^{۳/۲} = (۰/۳۸۷)^{۳/۲} yr = ۰/۲۴ yr,$$

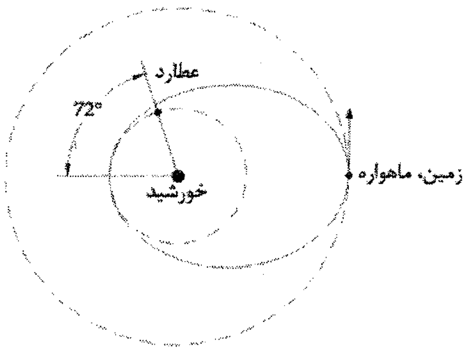
این ماهواره به اندازهٔ نصف مدارش یا ۰/۲۹ سال طول می‌کشد تا به عطارد برسد. این :

$$\frac{۰/۲۹}{۰/۲۴} = ۱/۲$$

تناوب مداری عطارد است، بنابراین زمانی که ماهواره از عطارد پرواز می‌کند توسط ۰/۲ یک مدار خارج از موقعیت است، زاویهٔ :

$$\frac{۳۶۰^\circ}{\text{مدار}} = ۷۲^\circ \qquad \text{مدار } ۰/۲$$

همان گونه که در نمودار نشان داده شده است.



شکل ۲-۴۶

مسئله ۲۴۵ : پلوتو دارای جرم $۱۳۲\times۱۰^{۲۳} g$ و شارن دارای جرم $۱۵\times۱۰^{۲۳} g$ است. شارن در مدار به دور پلوتو با نیم محور اصلی $۱۹/۶\times۱۰^{۳} km$ است. پلوتو و شارن در مدار به دور خورشید با نیم محور اصلی $۳۹/۵ AU$ و خروج از مرکز $e=۰/۲۵$ است.

الف) در چه فاصله‌ای (بر حسب کیلومتر) از پلوتو، مرکز جرم منظومهٔ پلوتو - شارن قرار دارد؟

ب) پلوتو و شارن در چه فاصله‌ای از زمین (بر حسب واحد نجومی) در حضیض خواهند بود. فرض کنید که آنها در مقابله هستند.

ج) جدایی زاویه‌ای (در ثانیه قوس) بین پلوتو و شارن همان گونه که از زمین مشاهده می‌شود در زمانی که آنها در حضیض هستند، چقدر است؟

د) تلسکوپی با چه قطری برای تفکیک پلوتو و شارن در طول موج‌های بصری ($۵۵۰۰ \mathring{A}$ یا $۵۵۰ nm$ ~) در زمانی که آنها در حضیض هستند، مورد نیاز است؟ آیا نیاز است که این تلسکوپ در فضا باشد یا برای تجزیه کردن پلوتو از شارن به اپتیک‌های انطباقی نیاز دارد؟

هـ) مشاهده می‌شود که پلوتو دارای قدر بصری $m_v = ۷/۵$ است. شارن ۱/۹ تیره‌تر از پلوتو قدر دارد. قدر بصری دو جسم که با هم مشاهده شده‌اند چقدر است؟

حل : الف)

$$M_p X_p + M_{ch} X_{ch} = (M_p + M_{ch}) X_{COM}$$

بیایید یک محور مختصات را در نظر بگیریم که $X_p = ۰$

در این محور مختصات، X_{ch} فاصله بین دو شی است در این محور مختصات، X_{COM} برابر فاصلهٔ مرکز جرم از پلوتو است. معادله را برای X_{COM} حل می‌کنیم.

$$\mathrm{X_{COM}} = \frac{M_{ch} X_{ch}}{M_p + M_{ch}} = \frac{۱۵ \times ۱۹/۶ \times ۱۰^{۳} km}{۱۵ + ۱۳۲} = ۲۰۰۰ km$$

ب) در حضیض شعاع از خورشید برابر است با $r = (۱ - e)a$ بنابراین فاصله از خورشید برابر:

$$r = (۱ - ۰/۲۵) ۳۹/۵ AU = ۲۹/۶ AU$$

خواهند بود. اگر پلوتو در مقابله باشد زمین بین خورشید و پلوتو قرار می‌گیرد. فاصله بین زمین و پلوتو برابر خواهد بود با $۲۸/۶AU$ (یک AU کمتر از r)

ج) $\theta = \frac{d}{D}$ که d جدایی زاویه‌ای بین پلوتو و شارن و D فاصلهٔ پلوتو - شارن تا زمین است.

$$\theta = \frac{۱۹/۶ \times ۱۰^{۳} km}{۲۹ AU} \times \frac{۱ AU}{۱/۶ \times ۱۰^{۸} km} = ۴/۲ \times ۱۰^{-۶} rad$$

$$۱'' = \frac{\pi}{۱۸۰^{\circ} \times ۶۰^{m} \times ۶۰^{s}} = ۴/۸ \times ۱۰^{-۶} rad$$

جدایی زاویه‌ای بین پلوتو و شارن برابر است با $\theta = ۰/۹''$ همان گونه که از زمین در مقابله دیده شده است.

د) حد پراش تفکیک پذیری زاویه‌ای $\theta = \frac{\lambda}{D}$ را در جایی که λ طول موج است، D قطر تلکسوپ و θ در رادیان است، می‌دهد.

$$D = \frac{\lambda}{\theta} = \frac{۵۵۰ \times ۱۰^{-۹} m}{۴/۲ \times ۱۰^{-۶} rad} = ۰/۱۳ m$$

ولی "۰/۹ مشاهده کردنش با دید پایگاه زمینی مشکل است. دشوار ولی نه غیر ممکن، اگر شما برای به دست آوردن دید بزرگی، روی دید تلسکوپ بهینه (که می‌توان به خوبی "۰/۵ باشد) قرار بگیرید. همچنین می‌توانید امیدوار باشید که سیستم AO (اپتیک انطباقی) کار خواهند کرد یا سعی خواهند کرد از فضا مشاهده کنند.
هـ) شارن ۱/۹ قدر تیره‌تر از پلوتو است بنابراین :

$$\text{۱/۹} = -\text{۲/۵} \log_{\text{۱۰}} (f_{ch} / f_p)$$
$$\rightarrow \text{شار نسبت} \quad f_{ch} / f_p = \text{۰/۱۷}$$
$$m_{\text{کلی}} = -\text{۲/۵} \log (f_p + f_{ch})$$
$$= -\text{۲/۵} \log (f_p (\text{۱} + f_{ch} / f_p))$$
$$= m_p - \text{۲/۵} \log (\text{۱} + \text{۰/۱۷}) = \text{۷/۵} - \text{۰/۱۷} = \text{۷/۳}$$

مسئله ۲۴۶ : سرعت یک ماهواره زمین هنگامی که در لایه‌های بالایی جو در حرکت است بر حسب زمان چگونه تغییر می‌کند؟
حل : مقاومت جو باعث خواهد شد که ماهواره به تدریج به زمین نزدیک شود و شعاع مدار آن کاهش یابد. چون این مقاومت در لایه‌های بالایی کم است، کاهش شعاع مدار حرکت در یک دور گردش ناچیز است. اگر مدار را تقریبا دایره‌ای در نظر بگیریم می‌توان نوشت :

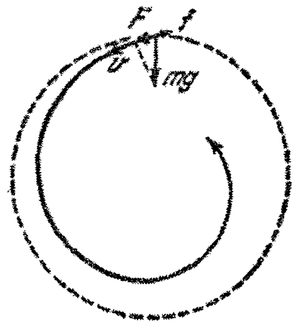
$$\frac{mv^{\text{۲}}}{R} = G \frac{mM}{R^{\text{۲}}}$$

که در آن R شعاع مدار است. بنابراین :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

یعنی سرعت ماهواره با کاهش شعاع R افزایش می‌یابد. توضیح این امر از این قرار است نظر به وجود مقاومت جو، ماهواره‌ای که به طور مثال در مداری دایره‌ای قرار می‌گیرد (خط نقطه چین در شکل زیر) در عمل در یک مارپیچ معین حرکت می‌کند (خط پر) به این دلیل تصویر نیروی گرانش F روی امتداد سرعت ماهواره v مخالف با صفر است. این کار نیروی F است (این نیرو از مقاومت جوی f بزرگ‌تر است) که سرعت را افزایش می‌دهد.

هنگامی که ماهواره در جو حرکت می‌کند، انرژی مکانیکی کل آن کاهش می‌یابد، اما با نزدیک شدنش به زمین انرژی پتانسیل آن سریع‌تر از کل انرژی کاهش می‌یابد و این باعث افزایش انرژی جنبشی می‌شود. باید تاکید کرد که به علت مقاومت زیاد در لایه‌های متراکم جو، حتی به طور تقریبی نیز می‌توان حرکت ماهواره را به صورت چرخش روی یک مسیر دایره‌ای در نظر گرفت، و نتیجه گیری ما درست نیست.



شکل ۲-۴۷

مسئله ۲۴۷ : یک ستارهٔ دنباله‌دار را روی مدار بیضوی در حدود خورشید در نظر بگیرید. فاصلهٔ حضیض برابر $0/3AU$ و فاصلهٔ اوج برابر است با $0/5AU$ سرعت باد شمسی را $400 km/s$ در نظر بگیرید.

الف) مؤلفهٔ مماسی (نه شعاعی) سرعت v_θ را در حضیض و در اوج محاسبه کنید.

ب) زاویهٔ بین دنبالهٔ یون و خط خورشید- ستارهٔ دنباله‌دار را در حضیض و اوج محاسبه کنید.

حل : الف) در اوج :

$$v_\theta^2 = \left(\frac{GM}{a}\right)\left(\frac{1-e}{1+e}\right)$$

و در حضیض :

$$v_\theta^2 = \left(\frac{GM}{a}\right)\left(\frac{1-e}{1+e}\right)$$

هر روز از سرعت دایره‌ای :

$$v_c^{۲}=\left(\frac{GM}{a}\right)$$

مقیاس گذاری می‌کنیم. فاصلهٔ حضیض برابر با $a(۱-e)=۰/۳AU$ و فاصلهٔ اوج برابر با :

$$a(۱+e)=۱۵AU$$

است بنابراین نیم محور اصلی برابر است با :

$$a=\frac{۱}{۲}(۰/۳+۱۵)=۷/۵۶AU$$

و خروج از مرکز ستارهٔ دنباله‌دار برابر است با :

$$e=\frac{r_{\text{اوج}}-r_{\text{حضیض}}}{۲a}=\frac{۱۵-۰/۳}{۲\times۷/۵۶}=۰/۹۶۱$$

اکنون در مقادیر e,a در تخمین‌های سرعت قرار می‌دهیم.

$$\sqrt{\frac{۱+e}{۱-e}}=۷/۱$$

$$V_c=\sqrt{\frac{GM}{a}}=۳۰km/s\left(\frac{۱AU}{a}\right)^{۱/۲}=۱۰/۸km/s$$

سپس سرعت در حضیض برابر است با ۷/۱ یا $۷۷km/s$ و در اوج برابر است با $۱/۵km/s$

ب) از معادلهٔ قبل کتاب استفاده می‌کنیم.

$$\tan\phi=\frac{v_\theta}{v_{sw}-v_r}$$

در حضیض و اوج مؤلفه سرعت شعاعی برابر است با صفر، بنابراین این زاویه را می‌توان از نسبت سرعت باد شمسی با مؤلفه مماسی تخمین زد.

$$\tan\phi=\frac{۷۷}{۴۰۰}=۰/۱۹$$

یا $\phi=۱۱^\circ$ در حضیض و $\tan\phi=۰/۰۰۴$ یا ۲° در اوج

مسئله ۲۴۸ : یک جسم روی خط وصل کننده زمین و خورشید و در چه فاصله‌ای از زمین قرار گیرد تا جاذبه گرانشی خورشید با جاذبه گرانشی زمین روی آن برابر شوند؟ فاصله خورشید تا زمین $۱/۵\times۱۰^{۸}$ کیلومتر و جرم $۳/۲۴\times۱۰^{۵}$ برابر جرم زمین است.

حل :

$$r_1 + r_2 = 1/5 \times 10^8 km$$

$$F_2 = F_1 \Rightarrow G\frac{M_e m}{r_2^2} = G\frac{M_s m}{r_2^2} \Rightarrow \frac{M_e}{r_1^2} = \frac{M_s}{r_1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{M_e}{r_2^2} = \frac{3/24 \times 10^5 M_e}{r_1^2} \Rightarrow r_2 = 2/6 \times 10^5 km$$

مسئله ۲۴۹ : الف) فضانوردی که قدش $1/7m$ است در یک شاتل فضایی قرار دارد که در مدار زمین به اندازه $r = 6/77 \times 10^6 m$ از زمین فاصله دارد و با پاهای به طرف پائین شناور است. اختلاف شتاب گرانشی در پاها و سر او چقدر است؟

ب) اگر اینک پای شناور به پائین در همان مدار $r = 6/77 \times 10^6 m$ به دور یک سیاهچاله به جرم $M_h = 1/99 \times 10^{31} kg$ (که ۱۰ برابر جرم خورشید است) باشد اختلاف شتاب گرانشی در پاها و سر او چقدر است؟ سیاهچاله سطحی (به نام سیاهچاله) دارد که شعاع آن $R_h = 2/95 \times 10^4 m$ است. هیچ چیز حتی نور از سطح یا هر جایی دور آن نمی‌تواند فرار کند. توجه داشته باشید که فضانورد کاملا در بیرون سطح (در $r = 229R_h$) قرار دارد.

حل : الف) شتاب گرانشی در هر فاصله‌ای مانند r از مرکز زمین عبارت است از :

$$a_g = \frac{GM_E}{r^2}$$

که M_E جرم زمین است. معادله بالا را نمی‌توان یک بار برای پا $r = 6/77 \times 10^6 m$ و سپس برای سر $r = 6/77 \times 10^6 m + 1/7m$ به کار برد. اگر چنین کنیم نتیجه محاسبه در هر دو بار همان a_g را خواهد داد و بنابراین اختلاف صفر می‌شود، چون h در مقایسه با r خیلی کوچک است. به جای آن از معادله بالا نسبت به r مشتق می‌گیریم و از آنجا داریم :

$$da_g = -2\frac{GM_E}{r^3}dr$$

که da_g تغییر دیفرانسیلی در شتاب گرانشی ناشی از تغییر dr در r است. در مورد فضانورد $dr = h$ و $r = 6/77 \times 10^6 m$ است. با قرار دادن داده‌ها در معادله اخیر خواهیم داشت :

$$da_g = -۲\frac{\left(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\, m^۳/kgs^۲\right)\left(۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴} kg\right)}{\left(۶/۷۷\times ۱۰^۶ m\right)^۳}(۱/۷m)$$
$$= -۴/۳۷\times ۱۰^{-۶}\, m/s^۲$$

این نتیجه بدان معناست که شتاب گرانشی پاهای فضانورد به سوی زمین اندکی بیشتر از شتاب گرانشی سر او به سوی زمین است. این اختلاف در شتاب، بدن او را می‌فشارد ولی به قدری کوچک است که فشردگی قابل توجه نیست.

ب) اگر به جای M_E، جرم $M_h = ۱/۹۹\times ۱۰^{۳۱} kg$ را قرار دهیم، باز می‌توانیم معادله آخر را به کار ببریم :

$$da_g = -۲\frac{\left(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\, m^۳/kgs^۲\right)\left(۱/۹۹\times ۱۰^{۳۱} kg\right)}{\left(۶/۷۷\times ۱۰^۶ m\right)^۳}(۱/۷m)$$
$$= -۱۴/۵\, m/s^۲$$

این بدان معناست که شتاب گرانشی پاهای فضانورد به سوی سیاهچاله به طور قابل توجهی بیشتر از سر اوست. نتیجه نشان می‌دهد که بدن او درد کشیدگی را احساس ولی تحمل می‌کند. اگر او به نزدیکی سیاهچاله رانده شود، میل به کشیدگی به طور وحشتناکی افزایش می‌یابد.

مسئله ۲۵۰ : جرم خورشید را معین کنید در صورتی که شعاع متوسط مدار گردش زمین برابر ۱۴۹×۱۰^۶ کیلومتر باشد.

حل :

$$\omega = \frac{۲\pi}{T}$$
$$F = m\omega^۲ R$$
$$F = G\frac{mM}{R^۲} \Rightarrow G\frac{mM}{R^۲} = m\omega^۲ R \Rightarrow M = \frac{\omega^۲ R^۳}{G} \approx ۲\times ۱۰^{۳۳}\, gr$$

با فرض اینکه مدار گردش زمین تقریبا دایره‌ای باشد، نیروی گرانی را می‌توان با استفاده از نیروی جانب مرکز و نیروی گرانش نیوتن به دست آورد. (m جرم زمین و M جرم خورشید است)

مسئله ۲۵۱ : نیروی بالا برنده جزر و مدی خورشید نسبت به ماه عبارت را محاسبه کنید.

حل :

$$\left(\frac{M_s}{M_m}\right)\left(\frac{r_m}{r_s}\right)^{۳}=\left(\frac{۱/۹۹\times ۱۰^{۳۰}}{۷/۳۶\times ۱۰^{۵}}\right)\left(\frac{۳/۸۴\times ۱۰^{۵}}{۱/۵\times ۱۰^{۸}}\right)\approx ۵/۱۱$$

اثرات جزر و مدی خورشید و ماه به صورت برداری با هم جمع می‌شوند، به طوری که جزر و مد منتجه به کشیدگی ماه بستگی دارد. زمانی که ماه در حالت مقابله یا مقارنه قرار می‌گیرد، این دو نیرو با هم جمع می‌شوند تا جزر و مدهای بهاری خیلی بلند را ایجاد کنند، وقتی ماه در حالت تربیع‌ها قرار می‌گیرد، دو نیروی جزر و مدی قسمتی از یکدیگر را حذف می‌کنند و نتیجه جزر و مدهای خفیف و معمولا کم است.

مسئله ۲۵۲ : طیف‌های جرم ستاره $۰/۸M_{\odot}$(اگرچه انتقال دوپلر) نشان دهید که دارای سرعت مداری $۱۷ms^{-۱}$به علت سیاره در حال چرخش به دور آن با دوره تناوب ۷ سال است. جرم سیاره را محاسبه کنید.

حل : قانون سوم کپلر نتیجه می‌دهد :

$$\omega^{۲}=\frac{G\left(M_S+M_P\right)}{R^{۳}}$$

که $\omega=۲\pi/P$ بسامد زاویه‌ای مداری است M_S و M_P به ترتیب جرم ستاره و سیاره هستند و R فاصله جدائیشان است. با فرض $M_P << M_S$ می‌توانیم R را از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم :

$$R=\left(\frac{GM_S}{\omega^{۲}}\right)^{۱/۳}$$

سپس از این امر که ستاره و سیاره به دور مرکز مشترک جرمشان می‌چرخند در نتیجه :

$$M_P=\frac{R_S}{R_P}M_S$$

که R_S و R_P شعاعهای مدارهای ستاره‌ای و سیاره‌ای هستند. در نتیجه :

$$R_P+R_S=R$$

دوباره با فرض $M_P << M_S$ سپس $R_S << R_P$ و بنابراین $R_P \approx R$ که R_S را مـی‌تـوان از $V_S = \omega R_S$ که $V_S = ۱۷ms^{-۱}$ سرعت اندازه‌گیری شده از انتقال دوپلر است بدست آورد.

$$M = \frac{V_S}{\omega\left(GM_S/\omega^۲\right)^{۱/۳}} M_S$$
$$= \frac{V_S}{\left(GM_S\omega\right)^{۱/۳}} M_S$$
$$= \left(\frac{PV_۳^۲}{۲\pi GM_S}\right)^{۱/۳} M_S$$
$$= \left(\frac{۷\times ۳۶۵/۲۵\times ۲۴\times ۳۶۰۰\times ۱۷^۳}{۲\pi\times ۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\times ۰/۸\times ۱/۹۹\times ۱۰^{۳۰}}\right)^{۱/۳} \times ۰/۸\times ۱/۹۹\times ۱۰^{۳۰} kg$$
$$= ۱/۸۷\times ۱۰^{۲۷} kg$$

چون این مقدار برابر است با $\approx ۰/۰۰۱M_{\odot}$، $M_P << M_S$ تقریب‌هایمان توجیه مـی‌شوند. در عمل انتقال دوپلر فقط مولفه سـرعت سـتاره‌ای در طـول خـط دیـد مـا را بـه هـدف می‌دهد. در بیشتر موارد این ممکن نیست که جهت مدارها نسبت به خط دید را تعیـین کرد. می‌توان نشان داد که این موجب خواهد شد که جرم‌های سیارات یافت شده در این حالت را کمتر تخمین بزنیم. اگر مدار از لبه دیده نشود سرعتی که اندازه می‌گیریم کمتر از سرعت مداری واقعی خواهد بود. برای مثال در مورد حالت نهایی مدارهای از رو بـه رو اصلا هیچ حرکتی را اندازه نگرفتیم. چون در بالا نشان دادیم :

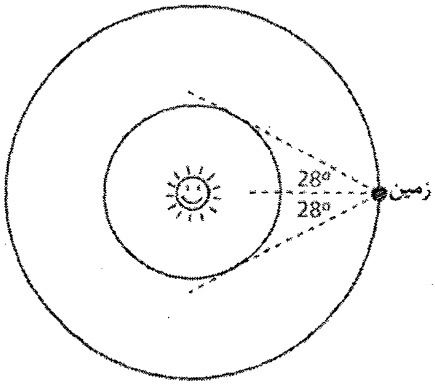
$$M_P = \left(\frac{PV_S^۳}{۲\pi GM_S}\right)^{۱/۳} M_S$$

سپس اگر تخمین ما از V_S پائین باشد M_P نیز این گونه خواهد بود. در عمل ایـن بـدان معناست که فقط جرم‌های دقیق برای سیارات فراشمسی که در طول وجـوه سـتاره‌هـای میزبانشان که فقط در صورتی روی می‌دهند که آنها را از لبه ببینیم، داریم.

مسئله ۲۵۳ : سیاره عطارد هرگز دورتر از $^\circ ۲۸ \pm$ از خورشید در آسمان دیده نمی‌شود. یک طرح از مدار زمین به دور خورشید در مدل کپرنیکی رسم کنیـد، سـپس بـا اسـتفاده از نقاله خطوط را از زمین به سمت حداکثر زاویه عطارد به هر طرف خورشید رسم کنید. از

این خطوط برای رسم مدار عطارد برای مقیاس گذاری روی همان طرح استفاده کنید. اگر شعاع مدار زمین یک واحد نجومی باشد شعاع مدار عطارد در واحد نجومی چقدر است؟

حل : مطابق شکل زیر مدار زمین را رسم می‌کنیم. خورشید را در مرکز قرار داده و زاویه ۲۸ درجه را روی هر طرف خط از زمین تا به خورشید اندازه می‌گیریم. سپس مدار عطارد را در مرکز یافته روی خورشید (که در واقع سراسر نیست) رسم می‌کنیم که به اندازه کافی بزرگ است تا خطوط ۲۸ درجه را لمس می‌کنیم.



شکل ۲-۴۸

سرانجام شعاع مدار زمین را (۱/۲۵۷ اینچ) اندازه می‌گیریم و شعاع مدار عطارد را (۰/۵۹ اینچ) اندازه گرفته‌ایم. اولی مطالق است با $1AU$ دوز منظومه شمسی واقعی بنابراین شعاع واقعی مدار عطارد برابر است با نسبت :

$$\frac{0/59}{1/257}=0/47$$

واحد نجومی. (در واقع این به سبب خروج از مرکز تا حدودی کم است)

مسئله ۲۵۴ : یک سفینه فضایی از زمین پرتاب می‌شود تا در مدار حول زهره قرار گیرد. مقادیر سرعت سفینه حول زمین V_0، سرعت سفینه در مدار انتقال V_1، سرعت سفینه هنگام رسیدن به زهره V_2 و دوره تناوب آن T را محاسبه کنید.

حل : با استفاده از جدول و داشتن اطلاعات لازم محاسبه به صورت زیر است:

$$v_\circ = \frac{۲\pi r_E}{T_E} = \frac{۲\pi \times ۱/۴۹ \times ۱۰^{۸}}{۳/۱۶ \times ۱۰^{۷}} = ۲۹/۶\, km/s$$

$$v_۱^۲ = v_\circ^۲ \frac{۲r_v}{r_E + r_v} = v_\circ^۲ \frac{۲(۰/۷۲r_E)}{r_E + ۰/۷۲r_E} = ۰/۸۳۷ v_\circ^۲ \Rightarrow v_۱ = ۲۷/۱ km/s$$

$$T = \left(\frac{r_E + r_v}{۲r_E}\right)^{\frac{۳}{۲}} T_E = \frac{r_E + ۰/۷۲r_E}{۲r_E} T_E = ۰/۸۶T_E$$

سفینه در نیم پریود یا نصف این مدت به نقطه $V_۲$ می‌رسد. بنابراین :

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}(۰/۸۶T_E) = \frac{۱}{۲}(۰/۸۶)(۱) = ۰/۴۳ \text{ سال} \quad = ۱۵۶ \text{ روز}$$

$$v_۲^۲ = v_\circ^۲ \frac{۲r_E^۲}{r_v(r_v + r_E)} = v_\circ^۲ \frac{۲}{۰/۷۲(۰/۷۲+۱)} = ۱/۶۱۵ v_\circ^۲ \Rightarrow v_۲ = ۳۷/۶۲\, km/s$$

سرعت مداری زهره نیز برابر است با :

$$v_v = \frac{۲\pi r_v}{T_v} = \frac{۲\pi(۱/۰۷۸ \times ۱۰^{۸})}{۰/۶۲(۳/۱۶ \times ۱۰^{۷})} = ۳۴/۵\, km/s$$

مسئله ۲۵۵ : ستاره دنباله‌دار در مدار بیضی با خروج از مرکز زیاد به دور خورشید می‌چرخد. اگر تندی ستاره دنباله‌داری در فاصله ۳×۱۰^{۱۱} متر از مرکز خورشید برابر ۲×۱۰^{۴} متر بر ثانیه باشد، در فاصله ۴×۱۰^{۱۰} متری تندی آن چقدر است؟

حل : از قانون پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. نیروی گرانش وارد از طرف خورشید تنها نیرویی است که بر روی ستاره دنباله‌دار کار انجام می‌دهد. پس خواهیم داشت :

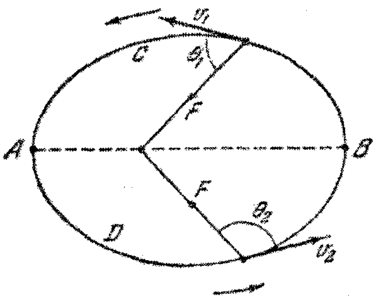
$$K_۱ + U_۱ = K_۲ + U_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ - G\frac{m_s m}{r_۱} = \frac{۱}{۲}m_۲^۲ - G\frac{m_s m}{r_۲} \Rightarrow$$

$$v_۲^۲ = v_۱^۲ + ۲Gm_s\left(\frac{۱}{r_۲} - \frac{۱}{r_۱}\right) = v_۱^۲ + ۲Gm_s\left(\frac{r_۱ - r_۲}{r_۱ r_۲}\right) \Rightarrow$$

$$v_۲ = \sqrt{(۲\times۱۰^{۴}) + ۲(۶/۶۷۳\times۱۰^{-۱۱})(۱/۹۹\times۱۰^{۳۰})\left(\frac{۳\times۱۰^{-۱۱} - ۴\times۱۰^{۱۰}}{(۳\times۱۰^{۱۱})(۴\times۱۰^{۱۰})}\right)} = ۷/۸\times۱۰^{۴}\, m/s$$

مسئله ۲۵۶ : سیاره‌ای روی مسیری بیضوی که خورشید در یکی از کانون‌هایش قرار دارد حرکت می‌کند. با در نظر گرفتن کار نیروی گرانش، نقاطی از مسیر را پیدا کنید که سرعت سیاره در این نقاط ماکزیمم و می‌نیمم است.

حل : مطابق شکل زیر در فاصله BCA نیروی گرانش کار مثبت انجام می‌دهد چون زاویه θ_1 حاده است و سرعت سیاره افزایش می‌یابد و در نقطه A به بیشترین مقدار خود می‌رسد.



شکل ۲-۴۹

در فاصله ADB نیروی گرانش کار منفی انجام می‌دهد چون زاویه θ_2 منفرجه است و سرعت سیاره کاهش می‌یابد و در نقطه B به می‌نیمم مقدار خود می‌رسد.

مسئله ۲۵۷ : یک ماهواره در مدار $3/59\times10^4 km$ بالای سطح زمین قرار دارد. در نقطه‌ای مستقیما زیر ماهواره روی سطح زمین موشکی به طور عمودی به سوی بالا آتش می‌شود که مستقیما ماهواره را هدف می‌گیرد. اگر قرار باشد موشک درست به همان ارتفاع ماهواره برسد موشک هنگام خاموش شدن موتور چه تندی باید داشته باشد؟

حل : برای اینکه موشک فقط به ارتفاع ماهواره برسد انرژی جنبشی هنگام خاموش شدن موتور باید برای اینکه به موشک انرژی نهایی پتانسیلی برابر با ماهواره بدهد کافی باشد. چون تنها نیرویی که فرض شده است بر موشک وارد می‌شود گرانی است پایستگی انرژی مکانیکی چنین است :

$$U_\circ(r)+K_\circ=U(r)+K$$

$$-\frac{GM_E m}{R_E}+\frac{۱}{۲}mv_\circ^۲=-\frac{GM_E m}{r}+۰$$

$$\frac{۱}{۲}mv_\circ^۲=GM_E m\left(\frac{۱}{R_E}-\frac{۱}{r}\right)$$

$$v_\circ^۲=۲GM_E\left(\frac{r-R_E}{rR_E}\right)$$

$$v_\circ^۲=۲\times۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\times۵/۹۸\times۱۰^{۲۴}\left(\frac{۳/۵۹\times۱۰^{۷}}{۴/۲۲\times۱۰^{۷}\times۶/۴\times۱۰^{۶}}\right)$$

$$v_\circ^۲=۱/۰۶\times۱۰^{۸}\Rightarrow v=۱/۰۳\times۱۰^{۴}\,m/s$$

مسئله ۲۵۸ : یک کاوشگر فضایی بدون سرنشین به جرم $۲۵۰۰kg$ با تندی ثابت $۳۰۰m/s$ در امتداد یک خط مستقیم حرکت می‌کند. موشک‌های کنترل کننده کاوشگر فضایی روشن می‌شوند و به مدت ۶۵ ثانیه نیروی پیشران $۳۰۰N$ را اعمال می‌کنند.

الف) تغییر در اندازه حرکت خطی کاوشگر چقدر است در صورتی که نیروی پیشران به سمت عقب، به سمت جلو یا مستقیما به سمت پهلو باشد؟

ب) تغییر انرژی جنبشی در همین سه شرط چقدر است؟ فرض کنید که جرم سوخت خارج شده در مقایسه با جرم کاوشگر فضایی ناچیز است.

حل :

$$\overline{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\frac{m(v_f-v_i)}{\Delta t}$$

$$F=۳۰۰۰N$$

$$\Delta t=۶۵s$$

اگر نیروی پیشران رو به جلو باشد :

$$\vec{F}=Fi\Rightarrow\Delta\vec{P}=۳۰۰۰\times۶۵i=۱/۹۵\times۱۰^{۵}iN\cdot s$$

اگر نیروی پیشران رو به عقب باشد :

$$\vec{F}=-Fi\Rightarrow\Delta\vec{p}=-۱/۹۵\times۱۰^{۵}iN\cdot s$$

اگر نیروی پیشران رو به پهلو باشد :

$$\vec{F}=Fj\Rightarrow\Delta\vec{p}=۱/۹۵\times۱۰^{۵}jN\cdot s$$

ولی از لحاظ مقدار تغییر اندازه حرکت مقدار ثابتی است.

ب)

$$K = \frac{P^{۲}}{۲m}$$

$$\Delta K = \frac{P_f^{۲}}{۲m} - \frac{P_i^{۲}}{۲m} = \frac{۱}{۲m}\left(P_f^{۲} - P_i^{۲}\right)$$

اگر $\vec{F} = Fi \Rightarrow m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = ۱/۹۵\times۱۰^{۵} i$

$$\Rightarrow m\vec{v}_f = ۲۵۰۰\times۳۰۰ i + ۱/۹۵\times۱۰^{۵} i = ۹/۴۵\times۱۰^{۵} i$$

$$\Rightarrow P_f = ۹/۴۵\times۱۰^{۵}\, kgm/s$$

$$\vec{F} = -Fi \Rightarrow m\vec{v}_f = ۲۵۰۰\times۳۰۰ i - ۱/۹۵\times۱۰^{۵} i = ۵/۵۵\times۱۰^{۵} i$$

$$\Rightarrow P_f = ۵/۵\times۱۰^{۵}\, kgm/s$$

اگر $\vec{F} = Fj \Rightarrow m\vec{v}_f = ۲۵۰۰\times۳۰۰ i + ۱/۹۵\times۱۰^{۵} j$

$$= ۷/۵\times۱۰^{۵} i + ۱/۹۵\times۱۰^{۵} j$$

$$P_f = ۷/۷۵\times۱۰^{۵}\, kgm/s$$

$$P_i = mv_i = ۲۵۰۰\times۳۰۰ = ۷/۵\times۱۰^{۵}\, kgm/s$$

در حالت اول،

$$\Delta K = \frac{۱}{۲m}\left(P_f^{۲} - P_i^{۲}\right)$$

$$= \frac{۱}{۵۰۰۰}\left[\left(۹/۴۵\times۱۰^{۵}\right)^{۲} - \left(۷/۵\times۱۰^{۵}\right)^{۲}\right] = ۵/۸۵\times۱۰^{۷} J$$

در حالت دوم،

$$\Delta K = \frac{۱}{۵۰۰۰}\left[\left(۵/۵\times۱۰^{۵}\right)^{۲} - \left(۷/۵\times۱۰^{۵}\right)^{۲}\right] = -۵/۹۶\times۱۰^{۷} J$$

در حالت سوم،

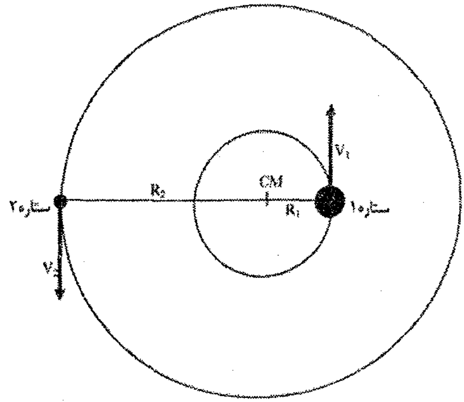
$$\Delta K = \frac{۱}{۵۰۰۰}\left[\left(۷/۷۵\times۱۰^{۵}\right)^{۲} - \left(۷/۵\times۱۰^{۵}\right)^{۲}\right] = ۲\times۱۰^{۴} J$$

مسئله ۲۵۹ : منحنی‌های سرعت یک ستاره دوتایی با خطوط طیفی دوگانـه، سینوسـی است با میدان نوسان $۲۰ km/s$ و $۶۰ km/s$ و دوره گردش ۱/۵ سال.

الف) اختلاف از مرکز مداری ستاره چقدر است؟

ب) کدام ستاره عظیم‌تر است و نسبت اجرام ستاره‌ای چقدر است؟

ج) اگر زاویه میل مداری 90° باشد، نیم محور اصلی نسبی رادر واحدهای نجومی و اجرام منفرد ستاره‌های را در واحد اجرام خورشیدی بدست آورید.



شکل ۲ - ۵۰

به دلیل اینکه منحنی‌های تابش سرعت، سینوسی است مدارها باید مدور باشند. شتاب صفر است. به دلیل اینکه مدارها مدور هستند در می‌یابیم که $V = 2\pi R/P$. بنابراین:

$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{v_2}{v_1}=\frac{\left(60\frac{Km}{s}\right)}{\left(20\frac{Km}{s}\right)}=3$$

بنابراین بزرگی ستاره ۱ (با سرعت کمتر) سه برابر بزرگی ستاره ۲ است M_1M_2 برای مدارهای مدور نیم محور اصلی نسبی باید برابر مجموع دو شعاع مداری باشد.

$$a=R_1+R_2$$

$$=\frac{P(v_1+v_2)}{2\pi}=\frac{(1/5\,yr)\left(80\frac{Km}{s}\right)}{2\pi}\left(\frac{3/16\times10^{7}s}{yr}\right)\left(\frac{1AU}{1/5\times10^{8}km}\right)=4/02AU$$

در اینجا با استفاده از قانون کپلر:

$$(M_1+M_2)=(3M_2+M_2)=4M_2$$

$$\frac{a^{۳}}{p^{۲}}=\frac{\left(۴/۰۲\right)^{۳}}{\left(۱/۵\right)^{۲}}=۲۸/۹M_{\odot}$$

$$M_{۱}=۷/۲M_{\odot}$$

$$M_{۲}=۲۱/۷M_{\odot}$$

مسئله ۲۶۰ : یک منظومه دو ستاره‌ای حول مرکز جرم مشترک خود در اثر نیروهای گرانشی دو سویه خویش گردش می‌کنند. دوره تناوب حرکت مداری ۵/۶ روز است. یکی از ستاره‌ها یک ابر غول با جرمی ۲۵ برابر جرم خورشید است. دیگری یک سیاهچاله تصور می‌شود که جرم آن حدود ۱۰ برابر جرم خورشید است. اگر به فرض مدار هر دو ستاره دایره‌ای باشد، فاصله این ستاره‌ها را تعیین کنید.

حل :

$$m_{۱}=۲۵m_{s}=۴/۹۷۵\times۱۰^{۳۱}kg$$

$$m_{۲}=۱۰m_{s}=۱/۹۹\times۱۰^{۳۱}kg$$

$$T=۵/۶\times۲۴\times۳۶۰۰=۴/۸۴\times۱۰^{۵}s$$

$$T^{۲}=\frac{۴\pi^{۲}(r_{۱}+r_{۲})^{۳}}{G(m_{۱}+m_{۲})}\Rightarrow(r_{۱}+r_{۲})^{۳}=r^{۳}=\frac{T^{۲}G(m_{۱}+m_{۲})}{۴\pi^{۲}}$$

$$\Rightarrow r^{۳}=\frac{(۴/۸۴\times۱۰^{۵})^{۲}(۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱})(۴/۹۷۵+۱/۹۹)\times۱۰^{۳۱}}{۴(۳/۱۴)^{۲}}۲۷/۶\times۱۰^{۳۰}$$

$$\Rightarrow r=۳\times۱۰^{۱۰}m$$

مسئله ۲۶۱ : خورشید در حال حرکت به دور مرکز کهکشان راه شیری در طول مدار تقریبا دایره‌ای در شعاع $R=۸kpc$ با سرعت $v=۲۱۰kms^{-۱}$ است. بیابید توزیع جرم و پتانسیل گرانشی کهکشان را به صورت کروی متقارن تقریب بزنیم.

الف) جرم کلی درون R چقدر است؟

ب) اگر چگالی جرم با شعاع به صورت $\rho\propto r^{۲}$ تغییر کند، سپس چگالی در شعاع R چقدر است؟ آن را بر حسب واحدهای جرم‌های پروتون در واحد $cm^{۳}$ بیان کنید. (جرم پروتون برابر است با $m_{p}=۱/۶۷۲\times۱۰^{-۲۴}g$)

حل : الف) جرم کلی درون R از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\frac{GM\left(R\right)}{R}=v_{c}^{۲}\left(R\right)$$

البته پاسخ را می‌توان با جایگذاری برای مقدار G و هر چیز دیگر در سیستم واحدهای مورد علاقه یافت. برای زمین با $1M_\odot$ و مدار $1AU$ سرعت برابر است با $30 kms^{-1}$ (اگر نمی‌دانستید زمین با چه سرعتی به دور خورشید حرکت می‌کند، این عدد خوبی برای به خاطر سپردن است) بنابراین جرم درون شعاع R برابر است با :

$$M(R)=\left(\frac{210\, kms^{-1}}{30\, kms^{-1}}\right)^2 \frac{8\, kpc}{1AU} M_\odot$$
$$=7^2 \times 8000 \times 206265 M_\odot = 8\times 10^{10} M_\odot$$

به یاد داشته باشید $1pc = 206265\, AU$ است.

ب) اگر چگالی در R برابر ρ باشد پس چگالی در هر شعاع r دیگر برابر است با :

$$\rho_\circ\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

بنابراین جرم درون R برابر است با :

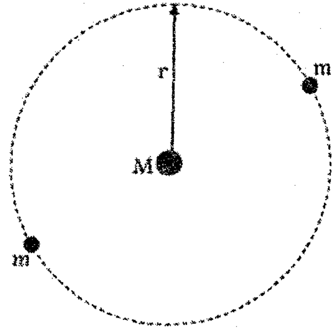
$$M(R)=4\pi \int_0^R drr^2 \rho_\circ\left(\frac{R}{r}\right)^2 = 4\pi\rho_\circ R^3$$

از اینرو چگالی در R برابر است با :

$$\rho_\circ = \frac{M(R)}{4\pi R^3} = 0/51 m_p cm^{-3}$$

نتیجه به سادگی با یادآوری اینکه جرم شمسی شامل $1/19\times 10^{57}$ جرم پروتون محاسبه می‌شود و یک پارسک برابر است با $3/086\times 10^{18} cm$

مسئله ۲۶۲ : یک دستگاه سه ستاره‌ای معین از دو ستاره تشکیل شده است که جرم هر یک m است و به دور یک ستاره مرکزی به جرم M در یک مداره دایره‌ای به شعاع r در گردش هستند. دو ستاره همواره در انتهای قطری از مدار دایره‌ای قرار دارند. عبارتی برای دوره حرکت گردش ستاره‌ها بدست آورید.



شکل ۳-۵۱

حل : هر یک از دو جرم تحت تاثیر دو نیروی گرانشی قرار می‌گیرند. یعنی نیروی جانب مرکز دوران حول M را با نیروی ناشی از M و m دیگر تامین می‌کنند.

$$\frac{GmM}{r^2}+\frac{Gmm}{(2r)^2}=mr\omega^2$$

$$\frac{GM}{r^2}+\frac{Gm}{4r^2}=r\omega^2 \Rightarrow \frac{G(4M+m)}{4r^2}=r\omega^2$$

$$\omega^2=\frac{G}{r^3}\left(M+\frac{m}{4}\right)$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=\frac{G}{r^3}\left(M+\frac{m}{4}\right)\Rightarrow \frac{T^2}{4\pi^2}=\frac{r^3}{G(M+m/4)}$$

$$\Rightarrow T=\frac{2\pi\, r^{3/2}}{\sqrt{G(M+m/4)}}$$

مسئله ۲۶۳ : از یک منظومه دوتایی متشکل از دو ستاره به نام‌های A و B است B و A روی مدارهای دایره‌ای به دور مرکز جرم حرکت می‌کنند و خط دید ما عمود بر صفحه مدار است. از طریق یک تلسکوپ می‌توان دید که A و B توسط زاویه ۱ از هم جدا می‌شوند. می‌توانیم زاویه اختلاف منظر را برای منظومه دوتایی اندازه بگیریم و این دارای مقدار $\frac{1}{2}\times10^{-1}$ است. تناوب مداری ۴۰ سال است.

الف) فاصله بین A و B چقدر است؟ پاسخ خود را بر حسب واحد AU بیان کنید.
ب) نسبت فاصله بین ستاره‌ها و مرکز جرم برابر است با $a_M = ۴a_H$ کدام ستاره سنگین‌تر است و این ستاره در مقایسه با ستاره دارای جرم کمتر چند برابر سنگین است؟
ج) مجموع جرم‌های ستاره‌ها چقدر است؟
د) جرم هر ستاره چقدر است؟
حل : الف) d را فاصله بین خورشید و منظومه دوتایی قرار دهید. این فاصله توسط فرمول اختلاف منظر داده می‌شود:

$$d = \frac{۱}{p} = \frac{۱pc}{\frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۱}} = ۲۰ pc$$

جدایی زاویه‌ای مشاهده شده A و B برابر است با:

$$\theta = ۱'' = \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۵} rad$$

فاصله صحیح بین A و B برابر است با a توسط تقریب زاویه کوچک برابر با:

$$a = \theta d = \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۵} \times ۲۰ pc = \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۵} \times ۲۰ pc \times \frac{۲\times ۱۰^{۵} AU}{pc} = ۲۰ AU$$

داده می‌شود. A و B فاصله‌ای معادل $۲۰AU$ دارند.
ب) معادله مرکز جرم برابر است با :

$$a_H M_M = a_H M_H$$

با دوباره مرتب سازی این منجر به معادله زیر می‌شود.

$$M_H = M_M \times \frac{a_M}{a_H} = M_M \times ۴$$

B چهار برابر سنگین‌تر از A است.
ج) قانون کپلر برابر است با:

$$M_H + M_M = \frac{a^۳}{P^۲}$$

چون $a = ۲۰AU$ و $P = ۴۰$ سال، مجموع جرم‌های ستاره‌ها برابر است با:

$$M_H + M_M = \frac{(۲۰)^۲}{(۴۰)^۲} = \frac{۲\times۲\times۲\times۱۰^۳}{۴\times۴\times۱۰^۲} = \frac{۱}{۲}\times۱۰ = ۵M_\odot$$

د) می‌دانیم که $M_H = ۴M_M$ بنابراین:

$$M_H + M_M = ۴M_M + M_M = ۵M_M$$

ولی درست با استفاده از قانون کپلر نشان دادیم که مجموع جرم برابر است با $۵M_\odot$ بنابراین:

$$۵M_M = ۵M_\odot$$

این بدان معناست که A دارای جرم $M_M = M_\odot$ و B دارای جرم $M_H = ۴M_\odot$ است.

مسئله ۲۶۴ : یک کهکشان دور دارای خطوطی با پهنای ۶۰۰ کیلومتر بر ثانیه در حال بلند شدن از یک منطقه ۱۰۰ کیلو پارسکی در قطر مشاهده می‌شود.
الف) فرض کنید که کهکشان در حال چرخش است و حرکات درونی تصادفی ندارد و اینکه سطح چرخش روی لبه آن مشاهده می‌شود. قطر را در منطقه مرکزی ۱۰۰ کیلو پارسکی قطر محاسبه کنید.
ب) فرض کنید که کهکشان در حال چرخش نیست و فقط حرکات درونی تصادفی دارد و جرم را در منطقه مرکزی قطر ۱۰۰ کیلو پارسکی محاسبه کنید.
ج) شکل و نوع تقریبی کهکشان هابل چگونه خواهد بود اگر فرض‌ها در قسمت الف درست بودند؟ اگر فرض‌ها در قسمت ب درست بودند؟
حل : الف) در اینجا گستره سرعت‌ها را در نتیجه چرخش ۶۰۰ کیلومتر بر ثانیه در نظر می‌گیریم. بنابراین بزرگ‌ترین سرعت‌های چرخشی $\pm ۳۰۰ km/s$ است. شعاع منطقه مشاهده شده فرض می‌کنیم ۵ کیلوگرم است بنابراین با این فرض که منظومه روی لبه مشاهده می‌شود تخمین می‌زنیم :

$$M = \frac{rv_r^۲}{G} = \frac{۵۰\times۱۰^۳\times\left(۳/۰۹\times۱۰^{۱۸}\right)\times۳۰۰^۲\times\left(۱۰^۵\right)^۲}{۶/۶۷\times۱۰^{-۸}}gm$$
$$= ۲/۱\times۱۰^{۴۵}gm = ۱/۰\times۱۰^{۱۲}M_\odot$$

ب) اکنون سرعت‌های مماسی مشاهده شده در نتیجه حرکات تصادفی تا حداکثر $\pm ۳۰۰ km/s$ است.

$$M=\frac{۶rv_r^۲}{G}=\frac{۶\times ۵۰\times ۱۰^۳\left(۳/۰۹\times ۱۰^{۱۸}\right)\times ۳۰۰^۲\times \left(۱۰^۵\right)^۲}{۶/۶۷\times ۱۰^{-۸}}gm$$
$$=۱/۳\times ۱۰^{۴۶}gm=۶/۳\times ۱۰^{۱۲}M_\odot$$

ج) کهکشان کاملا در حال چرخش است، هر چه مقیاس ارتفاع کوچک‌تر باشد حرکات تصادفی کمتر هستند (احتمالا یک مارپیچی است) اگر در مورد دومی حرکات تصادفی در جهت کاملا تصادفی باشند بنابراین کهکشان کروی است. ($E_۰$ بیضوی است.)

مسئله ۲۶۵ : برای فرار از جاذبه زمین شما باید در موشکی باشید که با سرعت بیش از $۱۱/۲ km/s$ حرکت می‌کند. این سرعت فرار از زمین است. اگر خورشید به کوتوله سفید تبدیل شده بود، مجبور بود به قطری اندازه قطر زمین فشرده شود. سرعت فرار را برای این کوتوله سفید بیابید.

حل : همان گونه که گفته شد سرعت فرار از رابطه زیر به دست می‌آید :

$$v_{es}=\sqrt{\frac{۲GM}{R}}$$

با توجه به مقادیر معلوم مسئله پاسخ چنین است :

$$v_{es}=\sqrt{\frac{۲\times\left(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}N\,m^۲/kg^۲\right)\times\left(۲\times ۱۰^{۳۰}kg\right)}{۶/۳۷۸\times ۱۰^۶ m}}$$
$$=۶/۵\times ۱۰^۶\ m/s$$

برای فرار از این کوتوله سفید باید با سرعت $۶۵۰۰ km/s$ حرکت کنید.

مسئله ۲۶۶ : فرض کنید که یک سیاره اتمسفر اولیه‌اش را توسط زمان کنونی حفظ خواهد کرد اگر سرعت مولکولی متوسط از یک ششم سرعت فرار تجاوز کند، جرم عطارد چقدر باید باشد تا برای آن هنوز اتمسفر نیتروژن داشته باشد؟

حل : سرعت فرار از رابطه زیر به دست می‌آید :

$$v_e=۱۱/۲\sqrt{\frac{M}{r}}$$

که M جرم بر حسب جرم زمین و r شعاع بر حسب شعاع زمین است. سرعت مولکولی متوسط برابر است با :

$$v_{mol} = ۰/۱۵۷\sqrt{\frac{T}{m}}$$

که T دما بر حسب کلوین و m وزن مولکولی است. در این سئوال حداقل جرم مطرح شده است به گونه‌ای که $\frac{۱}{۶}$ برابر سرعت فرار کمی بیشتر از سرعت مولکولی متوسط است. (اگر سرعت فرار بزرگ‌تر از سرعت مولکولی باشد، سپس مولکول‌ها فرار نخواهند کرد.) بنابراین :

$$v_{moi} \le \frac{۱}{۶} v_e$$

$$۰/۱۵۷\sqrt{\frac{T}{m}} \le \frac{۱۱/۲}{۶}\sqrt{\frac{M}{r}}$$

با قرار دادن دما در نزدیک سطح عطارد $T = ۶۰۰K$، وزن مولکولی نیتروژن $m = ۲۸$ و شعاع عطارد $r = ۳۸$ برابر شعاع زمین، می‌توانیم برای M معادله را حل کنیم.

$$۰/۱۵۷\sqrt{\frac{۶۰۰}{۲۸}} \le \frac{۱۱/۲}{۶}\sqrt{\frac{M}{۰/۳۸}}$$

$$۷/۲ \le M$$

که بدین معناست که عطارد باید ۷/۲ برابر سنگین‌تر زمین باشد تا اتمسفر نیتروژن آن را نگه دارد (این کاملا به سبب دمای افزایش یافته روی عطارد از نزدیک‌تر شدن به خورشید است)

مسئله ۲۶۷ : فرض کنید که مدار چرخش دایره‌ای است. چه اندازه جرم درون گردش مدار خورشید قرار می‌گیرد؟

حل : معادله سرعت دایره‌ای را به خاطر آورید.

$$v_e = \sqrt{\frac{GM}{d}}$$

در این حالت d, v_e مشخص می‌باشند اما M نامعلوم است. با مرتب کردن معادله و جایگذاری اعداد داریم :

$$M=\frac{d\cdot v_e^۲}{G}\Rightarrow M=\frac{۲/۶\times ۱۰^۷ km\cdot(۲۲۰ km/s)^۲}{۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱} m^۳/kg/s^۲}$$

$$M=۲\times ۱۰^{۳۲} kg\cdot km^۳/m^۳$$

$$M=۲\times ۱۰^{۳۲} kg\times ۱۰^۹$$

$$M=۲\times ۱۰^{۴۱} kg$$

جرم کهکشان داخل خورشید حدود $1/2\times 10^{42} kg$است. در مقایسه با جرم خورشید ($۲\times ۱۰^{۳۰} kg$) به سختی $۱۰^{۱۱}$(صد میلیارد) جرم خورشیدی در بخش راه شیری داخل مدار خورشید وجود دارد.

مسئله ۲۶۸ : سفینه فضایی هلیوس در فاصله ۴۳ میلیون کیلومتر از خورشید تندی ۷۱ کیلومتر بر ثانیه دارد.

الف) ثابت کنید که سفینه در مدار دایره‌ای به دور خورشید نمی‌چرخد.

ب) ثابت کنید که مدار آن بیضی است. (جرم سفینه m است)

حل : الف)

$$G\frac{m_s m}{r^۲}=m\frac{v^۲}{r}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{Gm_s}{r}}$$

$$=\sqrt{\frac{(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱})(۱/۹۹\times ۱۰^{۳۰})}{۴۳\times ۱۰^۹}}=۵/۶\times ۱۰^۴ m/s=۵۶ km/s$$

تندی واقعی ۷۱ کیلومتر بر ثانیه است بنابراین مدار نمی‌تواند دایره‌ای باشد.

ب) اگر مدار منحنی بسته باشد یا دایره است و یا بیضی و اگر منحنی باز باشد یا سهمی است و یا هذلولی. اگر انرژی کل (جنبشی به اضافه پتانسیل) منفی باشد مدار مسدود است و شعاع جسم نمی‌تواند به بی‌نهایت برسد.

مسئله ۲۶۹ : یک ابر گاز با جرم ۵ برابر جرم شمسی از شعاع ۱۰۰۰ شعاع شمسی به ۱۰ شعاع شمسی فرو می‌پاشد (فاز A) و سپس از ۱۰ شعاع شمسی به یک شعاع شمسی فرو می‌پاشد. (فاز B) نسبت انرژی آزاد شده در فاز A به انرژی آزاد شده در فاز B چقدر است؟

حل : انرژی پتانسیل ابر گاز کروی برابر است با :

$$U=(R)=-\frac{۳GM^{۲}}{۵R}$$

انرژی آزاد شده یا تغییر در انرژی پتانسیل که از شعاع R_i به R_f می‌رود برابر است با :

$$\Delta E=U(R_i)-U(R_f)=\frac{۳GM^{۲}}{۵}\left(\frac{۱}{R_f}-\frac{۱}{R_i}\right)$$

انرژی آزاد شده در فاز A برابر است با :

$$\Delta E_A=U(۱۰۰۰R_{\odot})-U(۱۰R_{\odot})$$

و در فاز B برابر است با :

$$\Delta E_B=U(۱۰R\ )-U(۱R\ )$$

تناسب بین دو رابطه نتیجه می‌دهد :

$$\frac{\Delta E_A}{\Delta E_B}=\frac{\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۱۰۰۰}}{\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۱۰}}=۰/۱۱$$

بیشتر این انرژی در قسمت دوم فروپاشی آزاد می‌شود.

مسئله ۲۷۰ : ماهواره اکسپلور ۱۲ هنگامی که در ارتفاع ۴۵۷ کیلومتری بالای زمین در دورترین فاصله خود از آن بود به آن یک سرعت مماسی ۱۰/۳۹ کیلومتر بر ثانیه داده شد. ارتفاع دورترین فاصله از زمین را محاسبه کنید.

حل :

$$r_۱=h_۱+R_e=(۶۳۸۰+۴۵۷)\times ۱۰^{۳}=۶/۸۳۷\times ۱۰^{۶}m$$

$$\frac{E}{m}=\frac{۱}{۲}v_۱^{۲}-\frac{GM_e}{r_۱}=\frac{۱}{۲}(۱۰/۲۹)^{۲}\times ۱۰^{۶}-\frac{۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\times ۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}}{۶/۸۳۷\times ۱۰^{۶}}=-۴/۴۶\times ۱۰^{۶}$$

$$\frac{E}{m}=-\frac{GM_e}{r_۱+r_۲}\Rightarrow r_۱+r_۲=-\frac{GM_e}{E/m}=\frac{۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\times ۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}}{۴/۴۶\times ۱۰^{۶}}=۸۹/۵۶۵\times ۱۰^{۶}m$$

$$r_۲=(۸۹/۵۹۵-۶/۸۳۷)\times ۱۰^{۶}\ m$$

$$h_۲=r_۲-R_e=(۸۲/۷۵۸-۶/۳۸)\times ۱۰^{۶}=۷۶/۳۵۸\times ۱۰^{۶}\ m$$

مسئله ۲۷۱ : الف) رابطه مربوط بـه انـرژی پتانسـیل جسـمی بـه جـرم m را در میـدان گرانشی زمین و ماه بنویسید. فرض کنید M_e جرم زمـین، M_m جـرم مـاه، R فاصـله از مرکز زمین و r فاصله از مرکز ماه باشد.

ب) در چه نقطه‌ای میان زمین و ماه شدت میدان گرانشی کل حاصل از زمین و ماه صفر است؟

ج) پتانسیل گرانشی و شدت میدان گرانشی در سطح زمین چقدر است؟

د) به همین پرسش‌ها در مورد سطح ماه نیز جواب بدهید.

به فرض R_e و R_m به ترتیب شعاع زمین و شعاع ماه و d فاصله بـین مراکـز آنهـا باشـند جرم m به فاصله R از مرکز زمین و به فاصله r از مرکز ماه قرار گرفته است.

حل : الف) انرژی پتانسیل جرم m در میدان گرانشی زمین و ماه به صورت زیر می‌باشد :

$$U=-G\frac{M_e m}{R}-G\frac{M_m m}{r}=-Gm\left(\frac{M_e}{R}+\frac{M_m}{r}\right)$$

ب) برای نقطه‌ای بین ماه و زمین که در آنجا شدت میدان گرانشی حاصل از زمین و مـاه صفر باشد، می‌توان نوشت :

$$G\frac{M_e m}{R^۲}=G\frac{M_m m}{r}$$

اما $r=d-R$ و $M_e=۸۱M_m$ است، پس از رابطه فوق به دست می‌آوریم :

$$R=۰/۹d=۰/۹\left(۳/۸\times۱۰^۸\right)=۳/۴۲\times۱۰^۸\,m$$

ج) برای نقطه‌ای روی سطح زمین $R=R_e$ و $r=d-R_e$ انرژی پتانسیل گرانشی در ایـن نقطه برابر است با :

$$U=-G\frac{M_e m}{R_e}-G\frac{M_m m}{(d-R_e)}$$

در نتیجه پتانسیل گرانشی در روی سطح زمین برابر است با :

$$V=\frac{U}{m}=-G\left(\frac{M_e}{R_e}+\frac{M_m}{d-R_e}\right)$$

با قرار دادن مقادیر عددی به دست می‌آوریم :

$$d=۳/۸\times ۱۰^{۵}\, m,\ M_m=۷/۴\times ۱۰^{۲۲} kg,\ M_e=۶\times ۱۰^{۲۴}\, kg$$
$$G=۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱} N.m^{۲}/kg^{۲},\ R_e=۶/۴\times ۱۰^{۶}\, m$$
$$\Rightarrow V=-۶/۳\times ۱۰^{۷} J/kg$$

برای شدت میدان گرانشی در روی سطح زمین خواهیم داشت :

$$g=\frac{GM_e}{R_e^{۲}}-\frac{GM_e}{(d-R_e)^{۲}}$$

که به طرف مرکز زمین می‌باشد. با عددگذاری بدست می‌آوریم :

$$g=۹/۸ m/s^{۲}$$

د) برای برای نقطه‌ای روی سطح مـاه $R=d-R_e$ و $r=R_m$ اسـت پتانسـیل گرانشـی و شدت میدان گرانشی روی سطح ماه برابر است با :

$$V=\frac{U}{m}=-G\left(\frac{M_e}{d-R_m}+\frac{M_m}{R_m}\right)=-۳/۹\times ۱۰^{۶} J/kg$$
$$g=\frac{GM_m}{R_m^{۲}}-\frac{GM_e}{(d-R_m)^{۲}}=۱/۶ m/s^{۲}$$

شدت میدان گرانشی به طرف مرکز ماه است.

مسئله ۲۷۲ : فرض کنید خورشید در حال تولید انرژی در سرعت ثابت در طول زنـدگی خود در ۴/۵ میلیارد سال ($۱/۴\times ۱۰^{۱۷} s$) بوده است.

الف) چه مقدار جرم این با تولید انرژی در طول عمرش از دست داده است؟

ب) جرم کنونی خورشید برابر است با $۲\times ۱۰^{۳۰} kg$ چه کسری از جرم کنـونی‌اش در طـول عمر خورشید به انرژی تبدیل شده است؟

حل : الف) درخشندگی خورشید برابر اسـت بـا $۳/۸۵\times ۱۰^{۲۶} W$ (کـه $۱W$ برابـر اسـت بـا $۱J/s$) همه این از تبدیل جرم به انرژی از طریق ذوب هسته می‌آیـد. بـرای تولیـد ایـن همه انرژی خورشید باید از مقدار مناسب جرم در هر ثانیه مصرف کند.

$$E=mc^{۲}$$
$$m=\frac{E}{c^{۲}}$$

با به خاطر سپردن اینکه یک ژول برابر است با $1 kg\, m^2/s^2$

$$m=\frac{3/85\times10^{26} J}{\left(3\times10^{8} m s^{-1}\right)^2}$$
$$m=4/28\times10^{9} kg$$

این مقدار جرم استفاده شده در هر ثانیه است. در طول عمر خورشید برای به روز رسانی سپس کل جرم استفاده شده برابر است با :

$$m_{used}=\left(4/28\times10^{9}\frac{kg}{s}\right)\left(1/4\times10^{17} s\right)$$
$$m_{used}=6\times10^{26} kg$$

ب) برای محاسبه اینکه چه کسری از جرم خورشید به انرژی تبدیل شده است، فقط جرم مصرف شده توسط جرم کلی خورشید را تقسیم کنید.

$$f=\frac{6\times10^{26} kg}{2\times10^{30} kg}$$
$$f=0/0003=3\times10^{-4}$$

(این ۰/۰۳٪ جرم خورشید است) این پاسخ منطقی است، می‌دانیم که فقط کسر کوچکی از جرم چهار هسته ئیدروژن که به هسته هلیم ذوب شده است، به انرژی تبدیل می‌شود و خورشید قطعا همه ئیدروژنش را ذوب نکرده است، بنابراین فقط انتظار داریم که کسر کوچکی از جرم خورشید کاملا مصرف شده باشد.

مسئله ۲۷۳ : کهکشان آندرومدا در فاصله $2/1\times10^{22}$ متری از کهکشان ما قرار دارد. جرم آن 6×10^{41} و جرم کهکشان ما 4×10^{41} کیلوگرم است.

الف) گرانش باعث شتاب کهکشان‌ها به سوی ما می‌شود. شتاب کهکشان آندرومدا چقدر است؟ شتاب کهکشان ما را نیز محاسبه کنید.

ب) تندی کهکشان آندرومدا نسبت به کهکشان ما ۲۶۶ کیلومتر بر ثانیه است. تندی کهکشان آندرومدا و تندی کهکشان ما نسبت به مرکز جرم دو کهکشان چقدر است؟

ج) انرژی جنبشی هر کهکشان نسبت به مرکز جرم چقدر است؟ کل انرژی منظومه دو کهکشان چقدر است؟

حل : الف)

$$r = ۲/۱ \times ۱۰^{۲۲} m$$
$$M = ۶ \times ۱۰^{۴۱} kg$$
$$M' = ۴ \times ۱۰^{۴۱} kg$$

شتاب گردش کهکشان آندرومدا برابر است با :

$$a = \frac{GM}{r^۲} = \frac{۶/۶۷ \times ۱۰^{۱۱} \times ۴ \times ۱۰^{۴۱}}{\left(۲/۱ \times ۱۰^{۲۲}\right)^۲} = ۶/۰۵ \times ۱۰^{-۱۴} m/s^۲$$

شتاب گردش کهکشان ما نیز چنین است :

$$a = \frac{GM}{r^۲} = \frac{۶/۶۷ \times ۱۰^{۱۱} \times ۶ \times ۱۰^{۴۱}}{\left(۲/۱ \times ۱۰^{۲۲}\right)^۲} = ۹/۰۷ \times ۱۰^{-۱۴} m/s^۲$$

ب) تندی مرکز جرم :

$$\left(M + M'\right)v = M_۱ v_۱ + M_۲ v_۲$$
$$\Rightarrow \left(۴ \times ۱۰^{۴۱} + ۶ \times ۱۰^{۴۱}\right)v = ۶ \times ۱۰^{۴۱} \times ۲۶۶ \times ۱۰^۳ + ۴ \times ۱۰^{۴۱} \times ۰$$
$$\Rightarrow v = ۱۵/۹۶ \times ۱۰^۴ m/s$$

تندی کهکشان آندرومدا نسبت به مرکز جرم :

$$v' = ۲/۶۶ \times ۱۰^۵ - ۱/۵۹۶ \times ۱۰^۵ = ۱/۰۶ \times ۱۰^۴ m/s$$

تندی کهکشان ما نسبت به مرکز جرم :

$$v'' = ۱/۵۹۶ \times ۱۰^۵ - ۰ = ۱/۵۹۶ \times ۱۰^۵ m/s$$

ج) انرژی جنبشی کهکشان ما نسبت به مرکز جرم :

$$E_۱ = \frac{۱}{۲} M v_۱^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱۰^{۴۱} \times \left(۱/۰۶ \times ۱۰^۵\right)^۲ = ۳/۴ \times ۱۰^{۵۱} j$$

انرژی جنبشی کهکشان آندرومدا :

$$E_۲ = \frac{۱}{۲} M' v_۲^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۱۰^{۴۱} \times \left(۱/۵۹۶ \times ۱۰^۵\right)^۲ = ۵/۱ \times ۱۰^{۵۱} j$$

انرژی کل نیز چنین است :

$$E = E_۱ + E_۲ = \frac{۱}{۲} M v_۱^۲ - \frac{GMM'}{r} + \frac{۱}{۲} M' v_۲^۲ = ۷/۷ \times ۱۰^{۵۱} j$$

مسئله ۲۷۴: تا چه مقدار چگالی ماده ستاره مرده $\text{۸}M_{\odot}$ به منظور اینکه ستاره در درون افق رویدادش ناپدید شود، باید فشرده شود؟ این چگونه با چگالی در مرکز ستاره نوترونی که در حدود $\text{۳}\times\text{۱۰}^{\text{۱۸}}kgm^{-\text{۳}}$ است، مقایسه می‌شود؟

حل: افق رویداد نقطه‌ای است که در آن سرعت فرار دقیقا مساوی با سرعت نور است. برای اینکه همه ستاره در طول افق رویداد باشد باید به اندازه کافی فشرده شود در نتیجه شعاعش به اندازه شعاع سیاهچاله است (که دارای جرمی مساوی با جرم آن ستاره است.) این همان شعاع شوارتزشیلد است.

$$R_{sch}=\frac{\text{۲}GM}{c^{\text{۲}}}$$

که با توجه به تعریف چگالی هم به جرم و هم به حجم سیاهچاله نیاز دارد:

$$M=\text{۸}M_{\odot}$$

$$V=\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\pi\times\left(R_{sch}\right)^{\text{۳}}$$

$$\rho=\frac{M}{V}$$

برای یافتن حجم در ابتدا به یافتن شعاع سیاهچاله نیاز داریم:

$$R_{sch}=\frac{\text{۲}\times\left(\text{۶/۶۷}\times\text{۱۰}^{-\text{۱۱}}kg^{-\text{۱}}m^{\text{۳}}s^{-\text{۲}}\right)\times\left(\text{۸}\times\text{۲}\times\text{۱۰}^{\text{۳۰}}kg\right)}{\left(\text{۳}\times\text{۱۰}^{\text{۸}}ms^{-\text{۱}}\right)^{\text{۲}}}$$

$$R_{sch}=\frac{\text{۲/۱۳۴}\times\text{۱۰}^{\text{۲۱}}}{\text{۹}\times\text{۱۰}^{\text{۱۶}}}m=\text{۲۳۷۰۰}m$$

سپس حجم سیاهچاله را بدست می‌آوریم.

$$V=\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\pi\times\left(R_{sch}\right)^{\text{۳}}=\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\pi\times\left(\text{۲/۳۷}\times\text{۱۰}^{\text{۴}}m\right)^{\text{۳}}=\text{۵/۵۷۶}\times\text{۱۰}^{\text{۱۳}}m^{\text{۳}}$$

در پایان چگالی را محاسبه می‌کنیم:

$$\rho=\frac{M}{V}=\frac{\text{۸}\times\text{۲}\times\text{۱۰}^{\text{۳۰}}kg}{\text{۵/۵۷۶}\times\text{۱۰}^{\text{۱۳}}m^{\text{۳}}}=\text{۲/۸۷}\times\text{۱۰}^{\text{۱۷}}kg/m^{\text{۳}}$$

در حدود ۱۰۰ برابر کمتر از چگالی در مرکز ستاره نوترونی

مسئله ۲۷۵: با محاسبه ریاضی شعاع بحرانی شوارتزشیلد را به دست آورید.

حل : موردی را در نظر بگیرید که در آن سرعت فرار چنان باشد که وقتی جسمی درست با آن سرعت فرار دور می‌شود، در بی نهایت سرعت صفر داشته باشد. در آنجا انرژی کل جسم عبارت است از :

$$TE = \frac{۱}{۲}mv^{۲} - \frac{GmM}{R} = ۰$$

از آنجا که انرژی کل می‌بایست بقا داشته باشد در موقع شروع پرتاب جسم باید داشته باشیم :

$$TE = ۰ = \frac{۱}{۲}m_{esc}^{۲} - \frac{GmM}{R}$$

$$\frac{۱}{۲}V_{esc}^{۲} = \frac{GM}{R}$$

$$V_{esc} = \left(\frac{۲GM}{R}\right)^{۱/۲}$$

اکنون می‌گوئیم که هیچ جسمی نمی‌تواند بیش از تندی نور حرکت کند و بنابراین سرعت فرار بیشینه c است. پس معادله شعاع سیاهچاله عبارت خواهد بود از :

$$R = \frac{۲GM}{c^{۲}}$$

M بر حسب واحد جرم خورشیدی :

$$R = ۳M\ km$$

این شعاع بحرانی شعاع شوارتزشیلد نامیده می‌شود.

مسئله ۲۷۶ : تفکیک زاویه‌ای یک تلسکوپ (یا هر سیستم مخصوص دیگر) اندازه کوچک‌ترین جزئیاتی است که با آن وسیله می‌توان دید. به خاطر تاثیرات مخرب جو زمین بهترین تفکیک زاویه‌ای که به وسیله تلسکوپ‌های نوری می‌توان به آنها دست یافت معمولا ۱ ثانیه قوس است. به همین دلیل است که می‌توان تصویر واضح‌تری از فضای خارج از جو به دست آورد. برای مثال قدرت تفکیک زاویه‌ای تلسکوپ فضایی هابل در حدود ۰/۰۵ ثانیه قوس است و کوچک‌ترین زاویه‌ای که می‌توان با آن اندازه گرفت (به وسیله تلسکوپ فضایی هابل) کسری از یک عنصر تفکیک شده است یا در حدود ۰/۰۰۴ ثانیه قوس

الف) فاصله ستاره متغیر قیفاووسی که زاویه اختلاف منظر آن در حدود ۰/۰۸ ثانیه قوس است چقدر است؟ جواب خود را هم به صورت سال خورشیدی هم به صورت پارسک بیان کنید.

ب) فرض کنید که زاویه اختلاف منظر با دقت نامتناهی حساب نشده باشد. بنابراین با یک عدم دقت ۰/۰۱± روبرو هستیم. کدام بازه فاصله‌ایی است که سازگار است با زاویه اختلاف منظر ۰/۰۲±۰/۰۸ ثانیه قوس.

حل : الف) معادله زیر را داریم :

$$d=\frac{1}{p}$$

که d در آن فاصله بر حسب پارسک است و p در آن زاویه اختلاف منظر بر حسب ثانیه قوس است. پس اجازه دهید مقادیر خود را جایگذاری کرده و مسئله را حل کنیم.

$$d=\frac{1}{0/08''}\Rightarrow d=12/50\,pc$$

$$d=12/50\,pc\times\frac{3/26ly}{1pc}\Rightarrow d=40/75ly$$

بنابراین فاصله تا ستاره متغیر قیفاووسی حدود ۱۲/۵ پارسک یا ۴۰/۷۵ سال نوری است.

ب) به ما گفته شده که یک عدم قطعیت در حدود ۰/۰۱± موجود است. حال اجازه دهید برای فاصله مورد نظر یک بازه خطا را محاسبه کنیم. به سادگی از همان فرمولی که در قسمت الف استفاده کردیم استفاده خواهیم کرد ولی این دفعه p را با ۰/۰۲±۰/۰۸ جانشین می‌کنیم :

$$d=\frac{1}{0/1''}\Rightarrow d=10\,pc$$

$$\Rightarrow d=10\,pc\times\frac{3/26ly}{1pc}\Rightarrow d=32/6ly$$

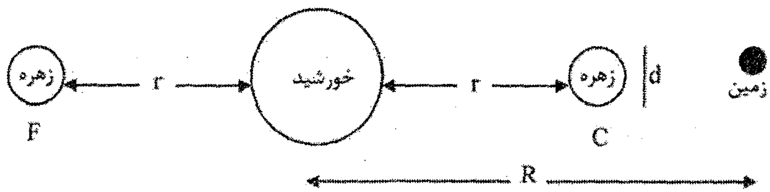
$$d=\frac{1}{0/06''}\Rightarrow d=16/67\,pc$$

$$\Rightarrow d=16/67\,pc\times\frac{3/26ly}{1pc}\Rightarrow d=54/33ly$$

بنابراین فاصله ستاره متغیر قیفاووسی از زمین در حدود ۱۰ پارسک تا ۱۶/۶۷ پارسک یا ۳۲/۶ سال نوری تا ۵۴/۴۴ سال نوری

مسئله ۲۷۷ : اگر با تلسکوپ به زهره نگاه کنیم مشخص می‌شود که زهره هم مثل ماه حالت‌های هلال و بدر دارد. بزرگی زاویه‌ای زهره در حالت هلال کامل تقریبا ۶ برابر بزرگی زاویه‌ای آن در حالت بدر کامل است. نسبت شعاع مدار زهره در حرکت به دور خورشید به شعاع مدار زمین در حرکت به دور خورشید چقدر است؟

حل : مدار حرکت سیاره زهره به دور خورشید از مدار گردش زمین به دور خورشید کوچک‌تر است. هنگامی که زهره در حالت بدر کامل است. نیمی از کره زهره که توسط خورشید روشن می‌شود باید مقابل زمین قرار گیرد.



شکل ۲-۵۲

هنگامی که زهره در هلال کامل است باید نیمه‌ای از کره زهره که مقابل خورشید نیست رو به روی زمین باشد. این دو وضعیت سیاره زهره در شکل با حرف C و F نشان داده شده است. در شکل فاصله زمین تا خورشید با R و فاصله زهره تا خورشید با r و قطر زهره با d نشان داده شده است. قطر ظاهری زهره در حالت بدر کامل و هلال کامل چنین است :

$$\alpha_F = \frac{d}{R+r} \qquad \alpha_C = \frac{d}{R-r}$$

$$\frac{\alpha_F}{\alpha_C} = \frac{\frac{d}{R+r}}{\frac{d}{R-r}} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow R+r = ۶(R-r)$$

$$\frac{r}{R} = \frac{۵}{۷}$$

مسئله ۲۷۸ : از زمین قطر زاویه‌ای خورشید ۰/۵ درجه است. روشنایی خورشید در زمین برابر $۱۳۷۰ W/m^۲$ اندازه گرفته شده است. فرض کنید که می‌دانیم که قانون استفان - بولتزمن باید درخشندگی خورشید را شرح دهد. دمای سطح خورشید را با استفاده از قطر زاویه‌ای، روشنایی خورشید و ثابت استفان - بولتزمن در پاسخ خود بیابید.

حل : قطر زاویه‌ای خورشید برابر است با :

$$\alpha = ۰/۵^\circ = ۰/۵^\circ \times \frac{۲\pi \, rad}{۳۶۰^\circ} = ۸/۷۲۶۶ \times ۱۰^{-۳}$$

قطر زاویه‌ای بر حسب رادیان، d فاصله بین زمین و خورشید و D قطر خورشید توسط

$$\alpha = \frac{D}{d}$$

مربوط می‌شود. روشنایی خورشید برابر است با $b = ۱۳۷۰ W/m^۲$ با استفاده از قانون مربع معکوس برای نور همراه با معادله استفان - بولتزمن روشنایی برابر است با :

$$b = \frac{L}{۴\pi d^۲} = \frac{۴\pi \sigma R^۲ T^۴}{۴\pi d^۲} = \frac{\sigma R^۲ T^۴}{d^۲}$$

ولی قطر خورشید توسط $D = ۱R$ به شعاعش مربوط می‌شود بنابراین :

$$b = \frac{\sigma D^۲ T^۴}{۲^۲ d^۲} = \frac{\sigma \alpha^۲ T^۴}{۲^۲}$$

می‌توانیم این معادله را به منظور حل برای T دوباره مرتب کنیم :

$$T = \left(\frac{b}{\sigma}\right)^{\frac{۱}{۴}} \sqrt{\frac{۲}{\alpha}} = \left(\frac{۱۳۷۰}{۵/۶۷ \times ۱۰^{-۸}}\right)^{\frac{۱}{۴}} \sqrt{\frac{۲}{۸/۷۲۶۶ \times ۱۰^{-۳}}} = ۵۹۶۹K$$

این بسیار نزدیک به دمای معمولا ذکر شده $۵۷۰۰K$ است.

مسئله ۲۷۹ : کهکشان $M۳۳$ نزدیک $D = ۶۹۰ kpc$ تقریبا رو به روی کهکشان مارپیچی نوع Sc است.

الف) فاصله چند پارسکی در $M۳۳$ مطابق است با اندازه زاویه‌ای ″۱ به صورتی که از زمین دیده می‌شود وجود دارد؟

ب) اگر منحنی چرخش مانند کهکشان Sc، $NGC۳۱۴۵$ باشد دوره تناوب حرکت انتقالی برای ستاره ۱۰ کیلو پارسکی از مرکز کهکشانی $M۳۳$ چقدر است؟

ج) سرعت ستاره در قسمت ب بر حسب واحد پارسک در سال چقدر است؟

د) به نظر می‌رسد که این ستاره بر حسب واحد پارسک در ۱۰۰ سال چقدر دور حرکت خواهد کرد؟

هـ) اگر ستاره شناسان بتوانند موقعیت‌های با دقت ″۰/۰۱ را اندازه بگیرند در مورد اینکه پیش از اینکه حرکت خاص این ستاره در $M۳۳$ بتواند به آسانی آشکار شود چقدر طول خواهد کشید توضیح دهید.

حل : الف) فاصله برابر است با :

$$D=\frac{\alpha d}{۲۰۶۲۶۵}=\frac{(۱ arc\sec)(۶۹۰ kpc)}{۲۰۶۲۶۵}=۳/۳\times۱۰^{-۳}kpc=۳/۳\,pc$$

ب) دوره تناوب :

$$T=\frac{۲\pi R}{v}=\frac{۲\pi(۱۰۰۰۰ pc)(۳/۱\times۱۰^{۱۳}km/pc)}{(۲۵۰ km/s)}=۷/۸\times۱۰^{۱۵}s=۲/۵\times۱۰^{۸}yr$$

ج) سرعت بر حسب پارسک :

$$(۲۵۰ km/s)(۳/۱۴\times۱۰^{۷}s/yr)(pc/۳/۱\times۱۰^{۱۳}km)=۲/۵\times۱۰^{-۴}pc/yr$$

د) از قسمت ج داریم :

$$(۲/۵\times۱۰^{۴}pc/yr)(۱۰۰ yr)(۱ arc\sec/۳/۳ pc)$$
$$=۷/۶\times۱۰^{-۳}arc\sec=۰/۰۰۷۶ arc\sec$$

هـ) زمان آشکارسازی :

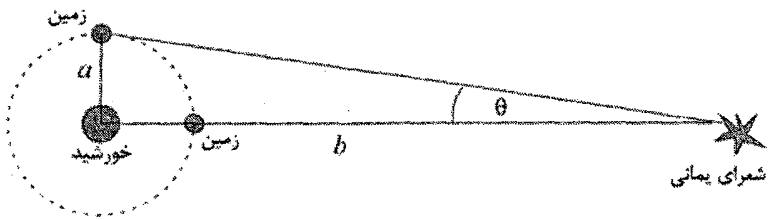
$\approx$ ۲۰۰ سال

مسئله ۲۸۰ : شعرای یمانی دارای اختلاف منظر زاویه‌ای $\theta=۰/۳۸ arc\,s$ است. آن در چه فاصله‌ای است؟ پاسخ خود را بر حسب پارسک و سال نوری بیان کنید.

حل : از فرمول زیر استفاده می‌کنیم :

$$\tan\frac{a}{b} \cong \frac{a}{b} = \theta\ rad$$

که $a = ۱AU$ و $\theta = ۰/۳۸\,arc\,s$



شکل ۲-۵۳

$$b = \frac{a}{\theta} = \frac{۱AU}{۰/۳۸\,arc\,s}$$

$$= \frac{۱/۵ \times ۱۰^{۸}\,km}{۰/۳۸\,arc\,s \times \left(۱^{\circ}/۳۶۰۰\,arc\,s\right) \times \left(\pi\ rad/۱۸۰^{\circ}\right)}$$

$$= ۸/۱۴ \times ۱۰^{۱۳}\,km = ۸/۶\,ly = ۲/۶۴\,pc$$

متناوبا

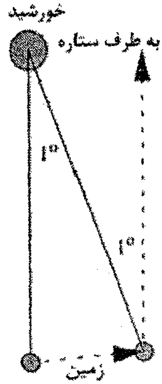
$$b = \frac{۱\,pc}{۰/۳۸} = ۲/۶۴\,pc = ۸/۶\,ly$$

مسئله ۲۸۱ : زمین در حدود ۳۶۵ روز به دور خورشید می‌چرخد. بنابراین در هر روز زمین تقریبا ۱° از مدارش را به دور خورشید می‌پیماید.

الف) با یک نمودار نشان دهید که زمین باید ۱° اضافی یا ۳۶۱° در هر روز شمسی بچرخد.

ب) بیان شده که یک روز شمسی ۲۴ ساعت طول می‌کشد تا ۳۶۱° بچرخد، چقدر طول می‌کشد تا زمین ۱° اضافی بچرخد. این تفاوت روز نجومی و روز شمسی است.

حل : الف) چون زمین ۳۶۵ روز طول می‌کشد تا به دور خورشید بچرخد این تقریبا ۱° از سفرش به دور خورشید را در هر روز می‌پیماید. با دیدن نمودار شخص می‌تواند ببیند که زمین باید در حدود ۱° بیشتر از ۳۶۰° بچرخد تا پس از یک روز رو به روی خورشید قرار بگیرد.



شکل ۲-۵۴

ب) ۲۴ ساعت طول می‌کشد تا °۳۶۱ بچرخد بنابراین $\frac{۲۴}{۳۶۱}$ ساعت طول می‌کشد تا °۱ بچرخد.

$$\frac{۲۴}{۳۶۱}h\times\left(\frac{۶۰\min}{۱h}\right)=۴\min$$

مسئله ۲۸۲ : الف) یک ابر ئیدروژن طبیعی یک خط رادیویی تولید می‌کند که با بسامد $\nu=۱۴۲۰/۴\,MHz$ است در حالی که با شدت $۲۰۰\,kms^{-۱}$ دور می‌شود (چون $\lambda\sim۲۱cm$ این خط اغلب به نام خط $۲۱cm$ ئیدروژن خوانده می‌شود و با اهمیت زیادی در نجوم رادیویی مشاهده‌ای) در کدام بسامد خط مشاهده می‌شود؟

ب) خط $H\alpha$ ئیدروژن ($\lambda=۶۵۶/۳\,nm$) مربوط به یک شی نجومی با توجه به حرکت زمین به دور خورشید حداکثر توسط چه مقدار می‌تواند تغییر کند؟

حل : الف) طول موج λ و بسامد ν از رابطه زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند:

$$\lambda\nu=c$$

جایگزینی $\lambda=\nu/c$ در فرمول مسئله قبل، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\nu=\frac{\nu_۰}{۱+(v/c)}$$

در این صورت داریم $\nu=۱۴۱۹/۴۵\,MHz$

ب) جهت حل این قسمت کافی مدار زمین را دایره با شعاع زیر در نظر بگیریم:

$$r=1AU=150\times10^{6}km=1/5\times10^{11}m$$

در نتیجه سرعت زمین از رابطه زیر تعیین می‌گردد.

$$v=\frac{2\pi r}{T}$$

با $T=365/25\times86400=3/16\times10^{7}s$ (طول یک سال) v چنین است:

$$v=29800\,ms^{-1}\sim30\,kms^{-1}$$

یا $\Delta\lambda/\lambda=v/c=10^{-4}$ بنابراین حداکثر تغییرات مربوط به خط $H\alpha$ ناشی از حرکت زمین برابر $\Delta\Lambda=\pm0/065nm$ است.

مسئله ۲۸۳ : انتقال سرخ گرانشی کسری را برای نور منتشر شده از سطح ستاره‌ای با جرم ۱۰ برابر جرم شمسی و شعاع برابر شعاع زمین محاسبه کنید.

حل : نسبت بسامد مشاهده شده اصلی برابر است با:

$$\frac{\nu'}{\nu}=\sqrt{1-\frac{2GM}{Rc^{2}}}$$

$$=\sqrt{1-\frac{2\left(6/67\times10^{-11}m^{2}kg^{-1}s^{-2}\right)\left(2\times10^{31}kg\right)}{\left(6/4\times10^{6}m\right)\left(3\times10^{8}ms^{-1}\right)^{2}}}=0/9977$$

تغییر کسر در بسامد برابر است با:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{\nu'-\nu}{\nu}=-2/3\times10^{-3}$$

مسئله ۲۸۴ : ستاره‌ای روشن در صورت فلکی گاو دارای دمای سطح ۳۸۵۰ درجه کلوین است. طول موج حداکثر نشر چقدر است؟ جواب را بر حسب نانومتر بیان کنید. این ستاره چه رنگی دارد؟

حل: قانون وین دما را به طول موج حداکثر نشر λ_{max} به صورت زیر مربوط می‌سازد.

$$\lambda_{max}=\frac{0/0029}{T}=753\times10^{-9}m=\frac{0/0029}{3850}=753nm$$

این ستاره سرخ است.

مسئله : الف) انرژی فوتون طول موج‌های $\lambda = ۳۰۰nm$ چیست؟ پاسخ خود را بر حسب ژول و الکترون ولت بیان کنید.
ب) یک اتم در دومین تراز تحریک شده ($n = ۳$) هیدروژن، زمانی یونیزه می‌شود که یک فوتون به یک اتم برخورد کند اگر همه انرژی فوتون به اتم منتقل شود طول موج آن چقدر است.
حل : الف)

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{\left(۶/۶۲۶\times۱۰^{-۳۴} J.s\right)\left(۳\times۱۰^{۸}\frac{m}{s}\right)}{\left(۳۰۰\times۱۰^{-۹}m\right)} = ۶/۶۲۶\times۱۰^{-۱۹}J = ۴/۱۴eV$$

ب) انرژی موجود در انتقال سرخ برابر است با:

$$۱۳/۶ev/۹ = ۱/۵۱eV = ۲/۴۲\times۱۰^{-۱۹}J$$

$$\lambda = \frac{\left(۶/۶۲۶\times۱۰^{-۳۴} J.s\right)\left(۳\times۱۰^{۸}\frac{m}{s}\right)}{\left(۲/۴۲\times۱۰^{-۱۹}J\right)} = ۸۲۱nm$$

مسئله ۲۸۵ : طول موج سکون خط هیدروژن $Ly\alpha$ را در منطقهٔ فرابنفش نهایی طیف در ۰/۱۲۱۶ میکرون است.
الف) طول موج این خط در طیف کوازار با انتقال سرخ $z = ۵/۸۲$ چقدر خواهد بود؟
ب) در چه منطقه‌ای از طیف این خط انتقال سرخ واقع خواهد شد؟
حل : الف)

$$z = \frac{\lambda_{\text{مشاهده شده}} - \lambda_{\text{منتشر شده}}}{\lambda_{\text{منتشر}}}$$

$$z = \frac{\lambda_{\text{مشاهده شده}}}{\lambda_{\text{منتشر شده}}} - \frac{\lambda_{\text{منتشر شده}}}{\lambda_{\text{منتشر شده}}} = \frac{\lambda_{\text{مشاهده شده}}}{\lambda_{\text{منتشر شده}}} = -۱$$

$$۱+z = \frac{\lambda_{\text{مشاهده شده}}}{\lambda_{\text{منتشر شده}}}$$

$$\lambda_{\text{مشاهده شده}} = (۱+z)\lambda_{\text{منتشر شده}}$$

$$\lambda_{\text{منتشر شده}} = (۱+۵/۸۲)(۰/۱۲۱۶\mu m)$$

$$\lambda_{\text{مشاهده شده}} = ۰/۸۲۹۳\mu m = ۸۲۹۳\mathring{A}$$

ب) این درست خارج از انتهای سرخ محدودهٔ قابل رؤیت طیف و در مادون قرمز نزدیک است.

مسئله ۲۸۶ : منجمان می‌توانند شدت پرتویی (که به سمت ما یا مخالف سمت ما است) را با محاسبه انتقال دوپلر اندازه‌گیری کنند. برای انجام این کار، به طیفی از شی دست یافتیم. ترکیباتی را یافتیم که طول امواج طبیعی (سکون) آنها را می‌دانیم (برای مثال، خطوط بالمر هیدروژن، $H\alpha$ و $H\beta$ و غیره) و محاسبه کردیم که چه وقت آنها در شی ظاهر می‌شوند. اگر شی از ما دور می شود، ستاره قرمز رنگ خواهد بود؛ به این معنی که خطوط به صورت طول موج‌های بلندتری (قرمزتری) ظاهر می‌شوند. به طور مشابه اگر یک شی به سوی ما حرکت کند، ستاره آبی رنگ خواهد شد.
قرمز شدن، z به وسیله این فرمول تعریف می‌شود.

$$z=\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\circ}}$$

الف) نسبت ویژه فرمولی را برای تغییر دوپلر به ما ارائه می‌دهد.

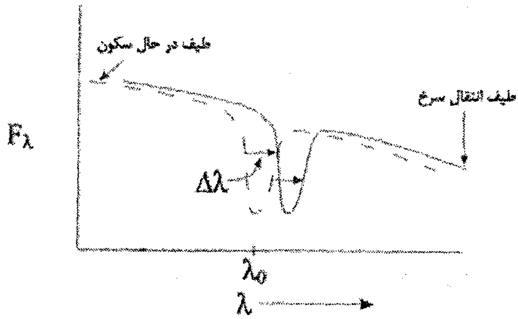
$$۱+z=\frac{\sqrt{۱+v/c}}{\sqrt{۱-v/c}}$$

که v مثبت شدت جریان دور شدن از مشاهده کننده است. نشان دهید که برای $v<<c$ ، به $z=v/c$ کاهش می‌یابد.

ب) شما یک طیف از ستاره $A\cdot$ را اختیار می‌کنید. خط $H\alpha$ (طول موج ساکن $۶۵۶۳\mathring{A}$)

در $۶۵۶۸\mathring{A}$ مشاهده می‌شود. آیا این شی به سمت ما می‌آید یا از ما دور می‌شود؟ با چه شدتی؟

ج) فرض کنید شما بر روی مریخ قرار دارید که بر روی یک مدار بیضوی می‌چرخد و مریخ به تازگی از کنار نزدیک‌ترین نقطه به خورشید گذشته است. آیا شما خطوط طیفی را در خورشید قرمز شونده، آبی شوند یا بدون تغییر می‌بینید؟ توضیح دهید.



شکل ۲-۵۵

حل : الف) هر دو طرف را در $(1-v/c)$ ضرب کنید.

$$(1-v/c)(1+z)=\sqrt{(1+v/c)(1-v/c)}$$

سمت راست را به عنوان تفاوت دو مربع تعیین کنید.

$$(1-v/c)(1+z)=\sqrt{(1-v/c)^2}$$

سمت چپ را ضرب کرده و در قسمت راست از قضیه دو جمله‌ای استفاده کنید.

$$1-\frac{v}{c}+z-z\frac{v}{c}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

بدانید که هر مورد در v/c مساویست با $1>>$ ، همان طور که z این گونه است، بنابراین هر جمله در $(v/c)^2$ یا $z(v/c)$ بسیار کوچک‌تر است و می‌توان آن را نادیده گرفت. (اگر جملات سری v/c را نادیده بگیرید، $1=1$ است، که بسیار هم جالب نیست).

$$1-\frac{v}{c}+z=1$$

$$z=\frac{v}{c}$$

ب) خط به یک طول موج بلندتر تبدیل می‌شود که به رنگ قرمز مبدل می‌گردد یا یک قرمز شونده مثبت است و به این اشاره دارد که شی از ما دور می‌شود. تغییر به رنگ قرمز این گونه است.

$$z=\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{(۶۵۶۸\mathring{A}-۶۵۶۳\mathring{A})}{۶۵۶۳\mathring{A}}=\frac{۵\mathring{A}}{۶۵۶۳\mathring{A}}=۷.۶\times ۱۰^{-۴}$$

بنابراین: $z<<۱$

$$z=\frac{v}{c}$$
$$v=(۷/۶\times ۱۰^{-۴})(۳\times ۱۰^{۵}km/s)$$
$$v=۲۳۰ km/s$$

ج) نه ! اگر ما در یک دایره بچرخیم همیشه دارای فاصله‌ای مساوی با مرکز کهکشان هستیم. از اینرو، هیچ تغییر دوپلری وجود ندارد. (و اگر می‌خواهید درباره قرمز شونده گرانشی حاصل از پتانسیل کهکشان به خوبی صحبت کنید، بسیار سخت فکر خواهید کرد)

ب) قرمز شده. اگر مریخ به تازگی نزدیک‌ترین نقطه به خورشید را طی کرده است، بنابراین از خورشید دور می‌شود. (اغلب، مماس بر خط جدا کننده خورشید - مریخ حرکت می‌کند، اما قسمت‌های کوچکی از حرکت او دور از خورشید است) یا برای مشاهده کننده‌ای بر روی مریخ، خورشید دور می‌شود. از اینرو خورشید باید قرمز شوندگی خیلی کوچکی را نشان دهد.

مسئله ۲۸۷ : انرژی جنبشی یک پروتون را در باد خورشیدی مشخص کنید. چگونه می‌توان این انرژی را با انرژی اشعه ایکس یا اشعه گاما مقایسه کرد؟

حل : انرژی جنبشی ذره به صورت زیر است:

$$K_E=\frac{۱}{۲}mv^{۲}=\frac{۱}{۲}(۱/۷\times ۱۰^{-۲۷})(۴۵۰۰۰۰)^{۲}=۱/۷\times ۱۰^{-۱۶}j$$

بسامد اشعه ایکس در حدود $۱۰^{۱۸}$ هرتز است. انرژی فوتون این گونه است:

$$E=hf=(۶/۶۲۶\times ۱۰^{-۳۴})\times ۱۰^{۱۸}=۶/۶۲۶\times ۱۰^{-۱۶}j$$

این تنها یک فاکتور از سه فاکتور بزرگ‌تر انرژی پروتون است. پروتون در بادهای خورشیدی انرژی لازم برای اختلالات سلولی و به وجود آوردن جهش را دارد.

خوشبختانه زمین به وسیله میدان مغناطیسی احاطه شده است که ما را از این ذره‌های پرسرعت محفوظ نگه می‌دارد.

مسئله ۲۸۸ : یک طیف رادیویی یک ابر میان ستاره‌ای نشان می‌دهد که طیف خطی به اندازه ۲۱ سانتیمتر به ۲۱/۰۰۷ سانتیمتر تغییر می‌کند آیا این ابر در حال نزدیک شدن یا دور شدن از ما است؟ یا در مکان خودش باقی می‌ماند؟ اگر در حال حرکت است با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

حل : به علت اینکه طول موج افزایش می‌یابد این گسیل انتقال سرخ است. بنابراین این امر می‌بایست ابر از ما دور شود. برای پیدا کردن سرعت رادیویی آن، از معادله دوپلر استفاده می‌کنیم.

$$\frac{v}{c}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\Rightarrow v=\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\times c\Rightarrow v=\frac{(۲۱/۰۰۷-۲۱)}{۲۱}\times ۳\times ۱۰^{۸}\ m/s$$
$$\Rightarrow v=۱۰۰۰۰۰\, m/s\Rightarrow v=۱۰۰\, km/s$$

این ابر با سرعت ۱۰۰ کیلومتر بر ثانیه از ما دور می‌شود.

مسئله ۲۸۹ : مشکل اصلی در آشکار سازی سیارات مشتری مانند نزدیک به ستاره‌های دیگر نسبت بزرگ روشنایی بین سیارات و ستاره‌ها است که موجب می‌شود سیارات در درخشندگی زیاد از ستاره‌ها گم شوند. برای درک این مشکل، درخشندگی مشتری را در مقایسه با خورشید در مورد فرضی که همه توانش از نور منعکس کننده‌ای که جلوی آن را از خورشید می‌گیرد، می‌آید ۱۰۰٪ انعکاس را فرض کنید.

حل : اگر مشتری دارای شعاع R_J و فاصله d از خورشید باشد، سپس این یک مساحت مقطع فرضی $\pi R^۲$ را تا کره مرکز یافته روی خورشید با مساحت $۴\pi R^۲$ نشان می‌دهد. بنابراین فرضیات ۱۰۰٪ انعکاسی و اینکه مشتری منبع دیگری از توان ندارد.

$$\frac{L_J}{L_\odot}=\frac{\pi R_J^۲}{۴\pi d^۲}=\frac{۱}{۴}\left(\frac{R_J}{d}\right)^۲$$

با قرار دادن :

$$R_J=۰/۱R\ =۶/۹۶\times ۱۰^{۷}m$$

$$d=۵/۲AU=۷/۷۵\times ۱۰^{۱۱}m$$

داریم:

$$\frac{L_J}{L_\odot}=\frac{۱}{۴}\left(\frac{۶/۹۶\times ۱۰^{۷}}{۷/۷۵\times ۱۰^{۱۱}}\right)=۲\times ۱۰^{-۹}$$

به طور کمی اتفاقی ناهنجاری فرضیات داده شده است ای یک تخمین منطقی از درخشندگی اپتیکی مشتری در مقایسه با درخشندگی اپتیکی خورشید است. مقایسه بسیار زیاد است.

مسئله ۲۹۰ : شعاع ستارگان زیر که همگی دارای دمای سطحی ۸۰۰۰ درجه کلوین هستند را حساب کنید (همه آنها ستارگان F هستند) شعاع را در واحدهای خورشیدی (یعنی شعاع‌های خورشید) ارائه دهید.

الف) ستاره رشته اصلی F با $L=۱۰L_\odot$

ب) ستاره غول با $L=۱۰^{۳}L_\odot$

ج) ستاره کوتوله سفید F با $L=۱۰^{-۲}L_\odot$

برای حل هر قسمت از این مسئله آنچه را که لازم داریم قانون استفان - بولتزمن با فرض یک شکل هندسی کروی است.

$$L=۴\pi R^{۲}\sigma T^{۴}$$

که σ ثابت استفان - بولتزمن است. ابتدا مسئله را برای متغیری که مورد توجه ماست یعنی شعاع، حل می‌کنیم:

$$L=۴\pi R^{۲}\sigma T^{۴}$$

$$R^{۲}=\frac{L}{۴\pi\sigma T^{۴}}$$

$$R=\sqrt{\frac{L}{۴\pi\sigma T^{۴}}}$$

به دلیل اینکه راه حل را در واحدهای خورشیدی می‌خواهیم، نسبت را با خورشید در نظر می‌گیریم آنگاه ثابت‌ها را حذف می‌کنیم. معادله‌ای کلی را به دست می‌آوریم که با مقادیر L و T جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{R_*}{R_\odot}=\frac{\sqrt{\frac{L_*}{۴\pi\sigma T_*^۴}}}{\sqrt{\frac{L_\odot}{۴\pi\sigma T_\odot^۴}}}$$

$$\frac{R_*}{R_\odot}=\sqrt{\frac{L_*}{۴\pi\sigma T_*^۴}\frac{۴\pi\sigma T_\odot^۴}{L_\odot}}$$

$$\frac{R_*}{R_\odot}=\sqrt{\frac{L_* T_*^۴}{L_\odot T_*^۴}}$$

الف) مقادیر داده شده را در روابط بالا قرار می‌دهیم:

$$T_\odot=۵۸۰۰K,\ T=۸۰۰۰K,\ L=۱۰L_\odot$$

$$\frac{L}{L_\odot}=۱۰$$

$$\frac{R_*}{R_\odot}=\sqrt{۱۰\times\frac{۵۸۰۰^۴}{۸۰۰۰^۴}}$$

$$R_*=۱/۶۶R_\odot$$

ب) همانند قسمت قبل از معادله مشابه استفاده می‌کنیم. تنها مقدار جدیدی برای L جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{R_*}{R_\odot}=\sqrt{۱۰۰۰۰۰\times\frac{۵۸۰۰^۴}{۸۰۰۰^۴}}$$

$$R_*=۱۶۶R_\odot$$

ج) بار دیگر از معادله‌ای مشابه همانند قسمت‌های قبل استفاده می‌کنیم و مقدار جدید را برای L جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{R_*}{R_\odot}=\sqrt{۰/۰۰۱\times\frac{۵۸۰۰^۴}{۸۰۰۰^۴}}$$

$$R_*=۰/۰۱۷R_\odot$$

مسئله ۲۹۱ : مقادیر زیر را برای یک ستاره رشته اصلی با :

$$T=۱۰۰۰۰K,\ R=۲R_\odot,\ M=۳M_\odot$$

فرض کنید که زنجیره پروتون - پروتون تنها واکنش هسته‌ای است. تصور کنید ۷۴٪ از جرم اصلی ستاره به شکل ئیدروژن؛ ۲۵٪ به صورت هلیم و ۱٪ به صورت عناصر سنگین‌تر است. فرض کنید که تنها ۳٪ ئیدروژن در هسته قرار دارد و می‌تواند ذوب هسته‌ای را طی کند.

الف) تعداد کل هسته‌های ئیدروژن در هسته‌های این ستاره چیست؟

ب) چه مقدار انرژی در هر هسته ئیدروژن از ذوب هسته‌ای طی زنجیر پروتون - پروتون در هسته این ستاره بر حسب ژول موجود است؟

ج) مقدار کل انرژی موجود برای ذوب هسته‌ای طی زنجیره پروتون - پروتون در هسته این ستاره بر حسب ژول کدام است؟

د) درخشندگی این ستاره را به دست آورید. جواب را در واحدهای خورشیدی و در واحد ژول بر ثانیه ارائه دهید.

هـ) درخشندگی این ستاره را ارئه کنید، مدت عمر اصلی آن چیست؟ به عبارتی ذخیره انرژی تا چند سال باقی می‌ماند؟ (هسته ئیدروژن در مرکز)

و) ستاره چه مقدار جرم را طی این مدت عمر رشته اصلی در حین ذوب هسته‌ای از دست می‌دهد؟ (بر حسب اجرام خورشید)

ز) ترکیب اصلی ستاره در پایان عمر رشته اصلی آن چه خواهد بود؟ به عبارتی کسر و مقدار جرم کلی ستاره به صورت ئیدروژن، هلیم و عناصر سنگین‌تر کدام است؟

حل : الف) می‌دانیم که ستاره $M = ۳M_\odot$ از ۴٪ ئیدروژن تشکیل شده تنها ۳۰٪ از این ئیدروژن در هسته قرار دارد. آنگاه می‌توانیم جرم ستاره را که تنها از H تشکیل شده از این راه به دست آوریم.

$$M_H = ۰/۳ \times ۰/۷۴ \times (۳M_\odot)$$
$$= ۰/۶۶۶M_\odot$$
$$= ۰/۶۶۶ \times ۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۳}\, gr$$
$$= ۱/۳۳ \times ۱۰^{۳۳}\, gr$$

اگر جرم پروتون m_p است آنگاه تعداد هسته‌های H برابر است با:

$$n = \frac{M_H}{m_p} = \frac{۱/۳۳ \times ۱۰^{۳۰}\, kg}{۱/۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\, kg} = ۷/۹۴ \times ۱۰^{۵۶} \text{ هسته}$$

ب) برای ذوب هسته‌ای طی زنجیره $p-p$:

$$E_H = 0/007 m_p c^2$$
$$= 0/007\left(1/67\times10^{-27}\right)\left(3\times10^{8}\right)^2$$
$$= 1/05\times10^{-12} J$$

ج) به راحتی تعداد اتم‌های ئیدروژن در هسته را در مقدار انرژی در هر اتم H ضرب می‌کنیم.

$$E_{TOT} = n\times E_H$$
$$= 7/94\times10^{56}\times1/05\times10^{-12} J$$
$$= 8/35\times10^{44} J$$

د) برای آسان‌تر کردن حل این مسئله از تناسب استفاده می‌کنیم.

$$\frac{L_*}{L_\odot} = \frac{4\pi R_*^2 \sigma T_*^4}{4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4} = \frac{R_*^2 T_*^4}{R_\odot^2 T_\odot^4}$$
$$= \left(\frac{R_*}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T_*}{T_\odot}\right)^4$$
$$= 2^2 \times \left(\frac{10000}{5800}\right)^4$$
$$L_* = 35/35 L_\odot$$
$$= 35/35\times3/86\times10^{26} Js^{-1}$$
$$L_* = 1/36\times10^{28} Js^{-1}$$

هـ)

$$T_{ms} = \frac{E_{TOT}}{L_*}$$
$$= \frac{8/35\times10^{44} J}{1/36\times10^{28} Js^{-1}}$$
$$= 6/12\times10^{16} s \approx 2\times10^{9}\ \text{سال}$$

و) فرض می‌کنیم که تمام جرم از دست رفته از ذوب هسته‌ای به انرژی تبدیل شده است.

$$E_{TOT} = m_{\text{تبدیلی}} c^{2}$$

$$m_{\text{تبدیلی}} = \frac{E_{TOT}}{c^{2}}$$

$$= \frac{۸/۳۵ \times ۱۰^{۴۴} J}{\left(۳ \times ۱۰^{۸} ms^{-1}\right)^{۲}} = ۹/۲۸ \times ۱۰^{۲۷} kg = ۴/۶۶ \times ۱۰^{-۳} M_{\odot}$$

ز) در ابتدا داریم:

ئیدروژن : $۰/۷۴ \times \left(۳M_{\odot}\right) = ۲/۲۲M_{\odot}$
هلیم : $۰/۲۵ \times \left(۳M_{\odot}\right) = ۰/۷۵M_{\odot}$
عناصر سنگین : $۰/۰۱ \times \left(۳M_{\odot}\right) = ۰/۰۳M_{\odot}$

در پایان عمر رشته اصلی ستاره داریم:

ئیدروژن : $۰/۷۴ \times \left(۳M_{\odot}\right) - ۰/۳ \times ۰/۷۴ \times \left(۳M_{\odot}\right) = ۱/۵۵۴M_{\odot}$
هلیم : $۰/۲۵ \times \left(۳M_{\odot}\right) + ۰/۳ \times ۰/۷۴ \times \left(۳M_{\odot}\right) \times ۰/۹۹۳ = ۱/۴۱۱M_{\odot}$
عناصر سنگین : $۰/۰۱ \times \left(۳M_{\odot}\right) = ۰/۰۳M_{\odot}$

جرم کل ستاره اکنون $M = ۲/۹۹۵M_{\odot}$ است (باقیمانده $۰/۰۰۵M_{\odot}$ به انرژی تبدیل شده است) که $۵۱/۸۸۶\% \left(= ۱/۵۵۴/۲/۹۹۵\right)$ ئیدروژن و $۴۷/۱۱۲\% \left(= ۱/۴۱۱/۲/۹۹۵\right)$ هلیم و $۱/۰۰۲\% \left(= ۰/۰۳/۲/۹۹۵\right)$ عناصر سنگین است.

مسئله ۲۹۲ : در یک شب مهتابی سطح زمین در اثر تابش، گرما از دست می‌دهد. فرض کنید دمای زمین $۱۰^{\circ}C$ باشد و زمین به صورت یک جسم سیاه تابش کند. آهنگ از دست دادن انرژی در متر مربع چقدر است؟

حل : دمای مطلق زمین $۲۸۳K$ است. پس قانون استفان - بولتزمن می‌گوید که شار تابشی، یا توان در یکای سطح چنین است:

$$S = \sigma T^{۴} = ۵/۶۷ \times ۱۰^{-۸} W/\left(m^{۲} \cdot K^{۴}\right) \times \left(۲۸۳K\right)^{۴} = ۳۶۴W/m^{۲}$$

این بالغ بر ۸۷ کالری بر متر مربع در ثانیه است.

مسئله ۲۹۳ : یک جسم سیاه کروی با دمای ثابت و جرم M که سطحش در مختصات شعاعی $r=R$ قرار دارد را در نظربگیرید. یک ناظر در سطح کره قرار گرفته است پرتو جسم سیاه خارج شده توسط کره را اندازه بگیرید.

حل : برای به دست آوردن رابطه درخشندگی داریم:

$$\frac{t_\circ}{t_\infty}=\frac{\nu_\circ}{\nu_\infty}=\left(1-\frac{2GM}{r_\circ c^2}\right)^{1/2}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{L_\infty}{L}=\frac{E_\infty/t_\infty}{E/t}=\frac{\nu_\infty}{\nu}\frac{t}{t_\infty}=\left(1-\frac{2GM}{r_\circ c^2}\right)$$

که در دو تا مانده به مرحله آخر از $E=h\nu$ استفاده کرده‌ایم. اساسا تعداد فوتون‌هایی که در واحد زمان در حال عبور هستند با ضریب:

$$\sqrt{1-\frac{GM}{r_\circ c^2}}$$

کاهش می‌یابد و سپس چون انرژی هر یک از این فوتون‌ها توسط ضریب:

$$\sqrt{1-\frac{GM}{r_\circ c^2}}$$

توقیف می‌شود، انرژی در واحد زمان توسط دو تا از این ضریب‌ها پائین می‌آید. برای دما از قانون وین:

$$T=\frac{290}{\lambda_{\max}}$$

استفاده می‌کنیم.

$$\frac{T_\infty}{T}=\frac{\lambda}{\lambda_\infty}=\frac{\nu_\infty}{\nu}=\left(1-\frac{2GM}{r_\circ c^2}\right)^{1/2}$$

برای شعاع جسم سیاه کروی همان گونه که توسط ناظران اندازه‌گیری شد، ما از قانون استفان - بولتزمن استفاده می‌کنیم.

$$\frac{R_\infty}{R}=\sqrt{\frac{L_\infty}{L}\left(\frac{T}{T_\infty}\right)^4}=\left(1-\frac{2GM}{r_\circ c^2}\right)^{-1/2}$$

مسئله ۲۹۴ : یک خوشه کروی در فاصله $۴/۶kpc = ۱/۴۲\times۱۰^{۲۲}cm$ از زمین قرار دارد. یک منبع اشعه ایکس در آن خوشه مشاهده می‌شود با تولید شار انرژی در زمین $۶\times۱۰^{-۱۰}ergs^{-۱}cm^{-۲}$ توزیع اشعه ایکس در انرژی $۲/۴keV = ۳/۸۵\times۱۰^{-۹}reg$ به حداکثر می‌رسد. فرض کنید که این حداکثر مطابق است با انرژی فوتون اشعه ایکس و همچنین با حداکثر طول موج توزیع اشعه ایکس، و فرض کنید که منبع اشعه ایکس مانند یک جسم سیاه تابش می‌کند.

الف) تعداد چنین فوتون‌های اشعه ایکس را در واحد ثانیه که توسط تلسکوپ اشعه ایکس در مدار زمین با مساحت جمع آوری $۱m^۲$ جمع آوری می‌شود را تخمین بزنید.

ب) درخشندگی (انرژی تشعشع شده در واحد زمان) اشعه ایکس منبع چقدر است؟

ج) با چه طول موجی حداکثر توزیع انرژی اشعه ایکس مطابق است؟

د) دمای این منبع اشعه ایکس چقدر است؟

هـ) با این فرض که منبع کروی است، شعاع آن چقدر است؟

حل : الف) این درست شار انرژی اشعه ایکس F_X تقسیم بر انرژی متوسط در فوتون F_γ ضربدر مساحت جمع آوری A است.

$$\dot{N}_\gamma = \frac{F_X A}{E_\gamma}$$

$$= \frac{\left(۶\times۱۰^{-۱۰}ergs^{-۱}cm^{-۲}\right)\left(۱۰^{۴}cm^{۲}\right)}{۳/۸۵\times۱۰^{-۹}ergphoton^{-۱}} = ۱۵۶۰\,photons\,s^{-۱}$$

ب)

$$L_X = ۴\pi d^{۲} F_X$$

$$= ۴\pi\left(۱/۴۲\times۱۰^{۲۲}cm\right)^{۲}\left(۶\times۱۰^{-۱۰}ergs^{-۱}cm^{-۲}\right)$$

$$= ۱/۵۲\times۱۰^{۳۶}ergs^{-۱}$$

ج) چون:

$$E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\lambda = \frac{hc}{E_\gamma}$$
$$= \frac{(۶/۶۲۶\times ۱۰^{-۲۷} ergs)(۲/۹۹۸\times ۱۰^{۱۰} cms^{-۱})}{۳/۸۵\times ۱۰^{-۹} erg}$$
$$= ۵/۱۶\times ۱۰^{-۸} cm$$

د) با مشخص کردن λ به صورت $\lambda_{\max}$ قانون وین می‌دهد:

$$T = \frac{۰/۲۸۹۸ cm}{\lambda_{\max}} = ۵/۶\times ۱۰^{۶} K$$

هـ) با استفاده از قانون جسم سیاه برای کره:

$$L = ۴\pi R^{۲}\sigma T^{۴}$$

نتیجه می‌گیریم:

$$R = \left(\frac{L}{۴\pi\sigma T^{۴}}\right)^{۱/۲}$$
$$= \left(\frac{۱/۵۲\times ۱۰^{۳۶} ergs^{-۱}}{۴\pi(۵/۶۷\times ۱۰^{-۵} ergcm^{-۲}s^{-۱}K^{-۴})(۵/۶\times ۱۰^{۶} K)^{۴}}\right)^{۱/۲}$$
$$= ۱/۴۶\times ۱۰^{۶} cm = ۱۴/۶ km$$

این اندازه نمونه‌ای از ستاره‌های نوترونی است.

مسئله ۲۹۵ : با استفاده از مواد در ساختار اتمسفر، فشار اتمسفر را در سطح زمین محاسبه کنید (از وزن ماده در بالای ستون استفاده کنید.)
از میزان ارتفاع $۸km$ استفاده و به چگالی اتمسفر در سطح زمین $\rho = ۱/۲۹ kg/m^{۳}$ توجه داشته باشید. فشار در پائین ستون ماده چقدر است؟
حل :

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\rho g h A}{A} = \rho g h$$
$$= \left(۱/۲۹\frac{kg}{m^{۳}}\right)\left(۹/۸\frac{m}{s^{۲}}\right)(۸۰۰۰ m) = ۱/۰۱\times ۱۰^{۵} Pa$$

مسئله ۲۹۶ : سرعت متوسط مولکول‌های نیتروژن چیست؟ (دما ۷۵ درجـه فارنهایـت و جرم $۴/۷\times۱۰^{-۲۶}$ کیلوگرم)

ابتدا دمای فارنهایت را به کلوین تبدیل می‌کنیم.

$$T^{\circ c}=\left(T^{\circ F}-۳۲\right)\times\frac{۵}{۹}\Rightarrow T^{\circ c}=۲۴$$

$$T^{\circ K}=T^{\circ c}+۲۷۳=۲۹۷K$$

$$v=\sqrt{\frac{۸kT}{\pi m}}=\sqrt{\frac{۸\times\left(۱/۳۸\times۱۰^{-۲۳}\right)\times۲۹۷}{\pi\times۴/۷\times۱۰^{-۲۶}}}\Rightarrow v=۴۷۰m/s$$

مسئله ۲۹۷ : یک کهکشان نمونه‌ای (به نام کهکشـان L_*) در حـدود $۱۰^{۱۱}$ سـتاره در بـر دارد. فرض کنید که اینها به طور نمونه دارای $L=۰/۲L_{\odot}$ هستند و نشان دهید که قـدر مطلق کهکشان روشن در حدود $M_*=-۲۱mag$ است. حداکثر فاصـله بـر حسـب واحـد Mpc که در آن کهکشان L_* می‌تواند باشد و هنوز بـا چشـم قابـل رویـت باشـد، چقـدر است؟ این نتیجه را با فضای $۵Mpc\sim$ کهکشان تا کهکشان نمونه‌ای مقایسه کنید و نظـر بدهید.

حل : اگر کهکشان به نمونه‌ای روشن دارای $N=۱۰^{۱۱}$ ستاره با متوسط $L=۰/۲L_{\odot}$ باشد سپس کل درخشندگی برابر است با :

$$L_*=NL=۲\times۱۰^{۱۰}L_{\odot}$$

(این در حدود درخشندگی قابل رویت راه شیری اسـت) بنـابراین قـدر مطلـق کهکشـان برابر است با:

$$M_*=-۲/۵\log\frac{L/۴\pi d_{\circ}^{۲}}{F_{zd}}=-۲/۵\log\left(\frac{L_*}{L}\frac{L_{\odot}/۴\pi d_{\circ}^{۲}}{F_{zp}}\right)$$

$$=-۲/۵\log\frac{L_*}{L}+M_{\odot}$$

و بنابراین به طور عددی داریم:

$$M_*=۲۵/۷۵+۴/۸۳=-۲۰/۹۲\approx-۲۱$$

دوباره با استفاده از فرمول داریم:

$$d_{\lim}=۲/۵\times۱۰^{۶}pc=۲/۵Mpc$$

این قابل مقایسه با فاصله نمونه‌ای کهکشان تا کهکشان $\sim ۵Mpc$ است. بنابراین انتظار خواهیم داشت که بتوانیم چند کهکشان را در آسمان ببینیم ولی تعداد گسترده‌ای وجود دارد که نمی‌توانیم با چشم غیر مسلح ببینیم. در حقیقت در این مورد با چشمتان می‌توانید $M_{۳۱}$، کهکشان آندرومدا را ببینید و در نیم‌کره جنوبی می‌توانید ابرهای ماژلانی بسیار نزدیک که ماهواره‌های راه شیری هستند ببینید. که در مورد آن است بقیه به تلسکوپ نیاز دارند.

در مورد این امر که نور کهکشان در طول آسمان منتشر می‌شود چطور؟ راه آسان برای دیدن علامت این تاثیر این است که یک کهکشان از میلیاردها نقطه مبدا تشکیل نشده است به جز دوتا هر یک دارای نصف کل درخشندگی هستند. شار از هر یک کوچک‌تر از شار نقطه مبدا تک خواهد بود و بنابراین آنقدر تیره هستند که نمی‌توانیم آنها را ببینیم. بنابراین نتیجه می‌گیریم که حد فاصله نقطه مبدا ما حد بالای حد کهکشان‌های واقعی است.

مسئله ۲۹۸ : کهکشان آندرومدا اکنون معلوم است که در حدود ۲/۵ میلیون سال نوری یا تقریبا ۸۰۰۰۰۰ پارسک از ما فاصله دارد. ادوین هابل با بهترین تکنولوژی به روز خود (صفحات عکاسی روی تلسکوپ ۱۰۰ اینچی) در سال ۱۹۳۵ فقط با اشکال قادر به آشکارسازی ستاره متغیر قیفاووسی (قدرمطلق $M = -۵$) در آندرومدا بود.

الف) قدرظاهری m ستاره‌های قیفاووسی در آندرومدا که هابل دید چقدر بودند؟

ب) تلسکوپ فضایی هابل اکنون می‌تواند قیفاووسی‌ها را در فاصله تقریبا $۱۵Mpc$ آشکار کند. قدر ظاهری قیفاووسی روشن در این فاصله چقدر است؟

ج) از نظر شار قیفاووسی تلسکوپ فضایی هابل در مقایسه با قیفاووسی آندرومدای ادوین هابل چند برابر تیره‌تر است؟ تلسکوپ فضایی هابل در حدود یک تلسکوپ ۱۰۰ اینچی است. از سال ۱۹۳۵ چه پیشرفت‌هایی برای توانایی ما برای دیدن چنین اشیا تیره‌ای با تلسکوپ همان اندازه‌ای به حساب می‌آید؟

حل : الف) با استفاده از فرمول‌هایی که قدر ظاهری و مطلق را به هم مربوط می‌سازند.

$$m = M + \mu = M + ۵\log_{۱۰}\left(\frac{d}{۱۰pc}\right) = -۵ + ۵\log_{۱۰}\left(\frac{۸۰۰۰۰۰}{۱۰}\right) = -۵ + ۲۴/۵ = ۱۹/۵$$

ب)

$$m = M + ۵\log_{۱۰}\left(\frac{d}{۱۰\,pc}\right) = -۵ + ۵\log_{۱۰}\left(\frac{۱۵\times۱۰^{۶}}{۱۰}\right) = -۵ + ۳۰/۹ = ۲۵/۹$$

ج) قیفاووسی‌های HST با ضریب :

$$\frac{۱۵\times۱۰^{۶}\,pc}{۸\times۱۰^{۵}\,pc} = ۱۸/۷۵$$

دورتر هستند چون شار متناسب است با $\frac{۱}{d^{۲}}$ قیفاووسی‌های HST ، $۱۸/۷۵^{۲} = ۳۵۰$ برابر تیره‌تر از قیفاووسی‌های آندرومدای هابل هستند. این پیشرفت عظیم در حساسیت به علت دو عامل است. اول اینکه هابل از صفحات عکاسی استفاده کرد در حالی که ما اکنون از آشکارگرهای CCD الکترونیکی که ۱۰۰-۱۰ برابر موثرتر در جمع آوری فوتون‌ها هستند، استفاده می‌کنیم. همچنین این امر مهم است که HST بالای تاثیرات تیره کنندگی اتمسفر هستند و از اینرو ستاره‌ها زنده‌تر هستند و آسان‌تر از روی زمین می‌توان آنها را اندازه‌گیری کرد.

مسئله ۲۹۹ : خط ئیدروژن I (طول موج سکون $۲۱/۱۰۶۱۱cm$) را در در طول موج $۲۲/۵۸۱۷۳cm$ در کهکشان Sb مشاهده می‌کنیم که دارای قدر ظاهری ۱۳/۲۳ در صافی آبی خاموشی بین کهکشانی کم شده است. این خط ۲۱ سانتیمتری دارای پهنایی است که حداکثر سرعت $۴۰۶km/s$ را برای چرخش این کهکشان می‌دهد.

الف) قدر مطلق این کهکشان در صافی آبی چقدر است؟ نام رابطه‌ای که شما برای محاسبه این استفاده کردیده‌اید چیست؟

ب) فاصله تا این کهکشان بر حسب واحد Mpc چقدر است؟ نام فرمولی که شما برای این فاصله استفاده کرده‌اید چیست؟

ج) سرعت شعاعی این کهکشان در واحد km/s چقدر است؟ نام فرمولی که برای محاسبه استفاده کردید چیست؟

حل : الف) این حل را می‌توان با رابطه تور ماهیگیری به دست آورد. برای کهکشان Sb حداکثر سرعت چرخش $V_{\max}$ برابر $۴۰۶km/s$ قدر مطلق آبی را می‌دهد:

$$M_B = -۱۰/۲\log V_{\max} + ۲/۷۱$$
$$= -۱۰/۲\log(۴۰۶) + ۲/۷۲$$
$$= -۲۶/۶ + ۲/۷۱ = -۲۳/۹$$

ب) ما از رابطه قدر مطلق فاصله برای یافتن این فاصله که برابر است با:

$$B-M_B = ۵\log\left(\frac{d}{۱۰\,pc}\right)$$
$$= \frac{d}{۱۰\,pc} = ۱۰^{۰/۲(B-M_B)} = ۱۰^{۰/۲[۱۳/۲۳-(-۲۳/۹)]} = ۱۰^{۷/۴۳} = ۲/۶۹\times ۱۰^{۷}$$
$$d = ۲/۶۹\times ۱۰^{۸}\,pc\times\frac{۱\,Mpc}{۱۰^{۶}\,pc} = ۲۶۹\,Mpc$$

ج) در اینجا از فرمول انتقال دوپلر برای تعیین سرعت شعاعی استفاده می‌کنیم. انتقال سرخ این کهکشان برابر است:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\circ}} = \frac{۲۲/۵۸۱۷۳\,cm - ۲۱/۱۰۶۱۱\,cm}{۲۱/۱۰۶۱۱\,cm}$$
$$= \frac{۱/۴۷۵۶۲\,cm}{۲۱/۱۰۶۱۱\,cm} = ۰/۰۶۹۹۱۴۴$$

چون این کاملا نزدیک وحدت است، باید از شکل نسبیتی انتقال دوپلر برای تعیین سرعت شعاعی همان گونه که قبل گفته شد استفاده می‌کنیم:

$$\frac{v_r}{c} = \frac{(z+۱)^{۲}-۱}{(z+۱)^{۲}+۱}$$
$$= \frac{(۱/۰۶۹۹۱۴۴)^{۲}-۱}{(۱/۰۶۹۹۱۴۴)^{۲}+۱} = ۰/۰۶۷۴۷۵۹$$
$$v_r = (۰/۰۶۷۴۷۵۹)(۲/۹۹۷۹۲۵\times ۱۰^{۵}\,km/s)$$
$$= ۲/۰۲۲۸۸\times ۱۰^{۴}\,km/s$$

مسئله ۳۰۰ : یک ستاره دارای اختلاف منظر $\pi'' = ۰/۰۱''$ و بزرگی تابش سنجی ظاهری $m_{bot} = ۵$ است.

الف) فاصله تا ستاره چند پارسک است؟

ب) بزرگی تابش سنجی مطلق ستاره M_{bot} چقدر است؟

ج) درخشندگی ستاره چند $L_{\odot}$ است؟

د) درخشندگی ستاره در واحد ارگ بر ثانیه چیست؟

حل : الف) فاصله ستاره برابر است با:

$$d_{pc} = 1/\pi'' = 1/0.01 \Rightarrow d = 100\ pc$$

ب) بزرگی تابش سنجی مطلق برابر است با:

$$M_{bol} = m_{bol} - 5\log d_{pc} + 5 = 5 - 5\log(100) + 5 = 5 - 5/2 + 5 \Rightarrow M_{bol} = 0$$

ج) بزرگی تابش سنجی مطلق خورشید $M_{bol}(\odot) = 4/74$ است. بنابراین:

$$M_{BOL} - M_{bol}(\odot) = M_{bol} - 4/74 = -2/5\log(L/L_\odot) \Rightarrow$$
$$\log(L/L_\odot) = -0/4(0 - 4/74) = 1/896$$

که به دست می‌آید $L = 79L_\odot$

د) درخشندگی خورشید $L_\odot = 3/845 \times 10^{33}\ ergs/\sec$ است. بنابراین درخشندگی ستاره برابر است با:

$$L = 79 \times 3/845 \times 10^{33} \Rightarrow L = 3 \times 10^{35}\ ergs/\sec$$

مسئله ۳۰۱ : خورشید در حدود ۱۶ تریلیون ($1/6 \times 10^{13}$) برابر روشن‌تر از تیره‌ترین ستاره‌های قابل رویت با چشم غیر مسلح است.

الف) بر حسب واحد AU ستاره نوع شمسی یکسان در چه فاصله‌ای می‌بود اگر درست قابل مشاهده با چشم غیر مسلح بود؟

ب) فاصله اش در واحد سال نوری چقدر می‌بود؟

حل : الف) شار - درخشندگی - فاصله ریاضی در مسئله قبل را مجددا ببینید و از آن نتیجه استفاده کنید.

$$\frac{d_*}{d_\odot} = \sqrt{\left(\frac{L_*}{L_\odot}\right)\left(\frac{F_\odot}{F_*}\right)}$$

در اینجا داریم $L_* = L_\odot$ است بنابراین:

$$d_* = \sqrt{1/6 \times 10^{13}}\,(1AU)$$
$$d_* = 4 \times 10^{6}\ AU$$

که ۴ میلیون AU است.

ب)

$$\left(4\times10^{6}\,AU\right)\left(\frac{1\,pc}{206265\,AU}\right)\left(\frac{3/26\,lyr}{1\,pc}\right)=63\,lyr$$

مسئله ۳۰۲ : یک خوشه ستاره شامل ستاره‌های B می‌شود، ولی هیچ ستاره O روی رشته اصلی وجود ندارد. این خوشه چقدر سن دارد؟

حل : جرم نمونه ستاره B در حدود $10-18M_{\odot}$ است. عمر ستاره متناسب است با ۲/۵- توان. بنابراین عمر ستاره ۱۰ جرم شمسی برابر خواهد بود با:

$$10^{-2/5}=0/003$$

برابر طول عمر خورشید (در حدود ۳۰ میلیون سال) و طول عمر ستاره ۱۸ جرم شمسی برابر خواهد بود با :

$$18^{-2/5}=0/0007$$

برابر طول عمر خورشید (در حدود ۷ میلیون سال) بنابراین برای مرتبه بزرگی خوشه در حدود ۱۰ میلیون سال سن دارد.

مسئله ۳۰۳ : الف) دنباله تکاملی روی نمودار HR چیست؟

ب) دنباله تکاملی یک ستاره $1M_{\odot}$ را رسم و مراحل زیر را نام گذاری کنید.

ج) ستاره‌ای روی رشته اصلی یا شاخه افقی قادر است یک ساختار به طور مساعد را با درخشندگی دائمی نگه دارد، ولی یک ستاره شاخه غول سرخ یا شاخه مجانب غول نمی‌تواند توضیح دهد.

حل : الف) دنباله تکاملی مسیری است که یک ستاره روی نمودار HR، در زمانی که درخشندگی‌اش و دمای سطحش در بیش از مدت معین تغییر دهد، دنبال می‌کند. جرم ستاره رشته اصلی تعیین می‌کند که کدام تکامل آن را دنبال می‌کند. برای مراحل پایانی زندگی‌اش دنبال خواهد کرد.

ب) رشته اصلی (MS)، شاخه غول سرخ (RGB)، شاخه افقی (HB) و شاخه مجانب غول (AGB) مطمئن شوید که به محورهایتان عنوان داده‌اید و مقدارهای عددی را برای موقعیت رشته اصلی ستاره $1M_{\odot}$ نامگذاری کنید.

ج) به طور مساعد، منبع ثابت انرژی، تامین می‌کنند، هستند. این یک فشار به سمت بیرون برقرار می‌کند که نیروی جاذبه را به سمت درون متعادل می‌کند. چون منبع

انرژی فشار ستاره ثابت هستند. زمانی که هیدروژن در هسته ستاره رشته اصلی یا منبع هلیم در هسته ستاره شاخه افقی تخلیه می‌شود، ستاره به شاخه غول سرخ (پس از رشته اصلی) یا شاخه مجانب غول (از شاخه افقی) تکامل می‌یابد. در این مراحل، ذوب دیگر در هسته اتفاق نمی‌افتد. هسته منقبض می‌شود و الکترون، تبهگن می‌شود. در شاخه غول سرخ، لایه هیدروژن در مناطق قشر، همان گونه که به سمت مرکز ستاره فرو می‌رود وگرم می‌شود در بیش از وقت معین افزایش می‌یابد. محصولات ذوب در حال فرو رفتن در هسته به این اشاره دارد که هسته به طور پی در پی در حال تکامل یافتن است، بنابراین هیچ ساختار ثابتی نمی‌تواند برقرار شود. این فرآیندها به ساختن ساختار ستاره منسوب و درخشندگی به طور چشم‌گیری تغییر می‌کند در حالی که لایه سوخت منبع انرژی اصلی ستاره را تامین می‌کند.

مسئله ۳۰۴ : دبران ستاره سرخ بسیار روشنی است. مشاهده می‌کنیم که حداکثر نشر آن در $۷۲۵nm$ (سرخ) است و اینکه درخشندگی (مقدار کل توانی که منتشر می‌کند) برابر است با ۳۵۰ برابر بیشتر از خورشید.

الف) دمای سطح دبران چقدر است؟

ب) چه مقدار توان در واحد سطح دبران منتشر می‌کند؟

ج) چه مقدار توان در واحد سطح خورشید ($T = ۵۸۰۰K$) منتشر می‌کند؟

د) چه مقدار مساحت سطح بیشتری باید دبران از خورشید ما داشته باشد؟

هـ) شعاع دبران چقدر است؟ پاسخ خود را بر حسب کیلومتر و پارسک بیان کنید.

و) اندازه زاویه‌ای دبران را اگر از سیاره‌ای در فاصله $۱AU$ دیده شده باشد تخمین بزنید. به بیان دیگر اگر دبران خورشید ما بود، چقدر بزرگ در آسمان ما به نظر می‌رسید؟

حل : الف) از قانون وین استفاده می‌کنیم.

$$T = \frac{۲/۹\times۱۰^{۶}}{\lambda_{peak}}\left({}^{\circ}Knm\right) = \frac{۲/۹\times۱۰^{۶}}{۷۲۵nm}\left({}^{\circ}Knm\right) = ۴۰۰۰{}^{\circ}K$$

ب) از قانون استفان - بولتزمن استفاده می‌کنیم.

$$\frac{P}{A} = \sigma T^{۴} = \left(۵/۷\times۱۰^{-۸}\,W/m^{۲}K^{۴}\right)\left(۴۰۰۰K\right)^{۴} = ۱/۴۶\times۱۰^{۷}\,W/m^{۲}$$

ج) در این قسمت نیز مجددا از قانون استفان - بولتزمن استفاده می‌کنیم.

$$\frac{P}{A} = \sigma T^{۴} = \left(۵/۷\times۱۰^{-۸} W/m^{۲}K^{۴}\right)\left(۵۸۰۰K\right)^{۴} = ۶/۴۷\times۱۰^{۷} W/m^{۲}$$

د) چون دبران ۳۵۰ برابر توان خورشید منتشر می‌کند ولی فقط در حدود $\frac{۱}{۴}$ توان در واحد سطح منتشر می‌کند، باید بسیار بزرگ‌تر باشد. کل توانی که یک ستاره منتشر می‌کند برابر است با:

(مساحت سطح)×(مساحت سطح / توان)

به صورت دقیق‌تر:

$$A_{\text{دبران}} \left(۱/۴۶\times۱۰^{۷} W/m^{۲}\right) = ۳۵۰ A_{\text{خورشید}} \left(۶/۴۵\times۱۰^{۷} W/m^{۲}\right)$$

بنابراین:

$$A_{\text{دبران}} = ۳۵۰ A_{\text{خورشید}} \left(\frac{۶/۴۵\times۱۰^{۷} W/m^{۲}}{۱/۴۶\times۱۰^{۷} W/m^{۲}}\right) = ۱۵۵۰ A_{\text{خورشید}}$$

هـ) شعاع خورشید برابر است با $۷۰۰۰۰۰km$ بنابراین:

$$r_{\text{دبران}} = \sqrt{۱۵۵۰} d_{\text{خورشید}} = ۳۹\times۷\times۱۰^{۵} km$$
$$= ۲/۷۶\times۱۰^{۷} km \left(\frac{۱AU}{۱/۵\times۱۰^{۸} km}\right) = ۰/۱۸AU$$

دبران تقریبا خارج از مدار عطارد خواهد بود.

و) راه آسان : خورشید تقریبا $\frac{۱}{۲}^{\circ}$ و دبران ۳۹ برابر اندازه است. بنابراین ۲۰°~ در آسمان ما می‌بود. راه دیگر:

$$\alpha = \frac{s}{۲\pi d}\times۳۶۰^{\circ} = \frac{۲\times۰/۱۸AU}{۲\pi(۱AU)}\times۳۶۰^{\circ} = ۲۰^{\circ}$$

مسئله ۳۰۵ : دما و روشنی ستارگان در خوشه ستاره‌ای اندازه گرفته و رسم شده‌اند در نمودار HR یکی از خوشه‌ها دارای یک دنباله اصلی خاموشی با یک جرم ستاره‌ای در حدود $۰/۸M_{\odot}$ دیگری دارای یک دنباله خاموشی با یک جرم ستاره‌ای $۳M_{\odot}$ اندازه‌های این خوشه ستاره‌ای چقدر است؟ (از رابطه جرم - عمر ستاره‌ها استفاده کنید.)

حل: رابطه جرم - عمر بدین صورت است $T \propto M^{-۲/۵}$ بنابراین با استفاده از خورشید به عنوان یک مرجع داریم:

$$\frac{T_*}{T_\odot} = \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)^{-۲/۵}$$

برای خوشه ستاره‌ای ۱ :

$$\frac{T_۱}{T_\odot} = \left(\frac{۰/۸M_\odot}{M}\right)^{-۲/۵}$$
$$\frac{T_۱}{T_\odot} = ۰/۸^{-۲/۵}$$
$$T_۱ = ۱/۷۵T_\odot$$

برای خوشه ستاره‌ای ۲ :

$$\frac{T_۲}{T_\odot} = \left(\frac{۳M_\odot}{M}\right)^{-۲/۵}$$
$$\frac{T_۲}{T_\odot} = ۳^{-۲/۵}$$
$$T_۲ = ۰/۰۶۴T_\odot$$

سپس فرض کنید $T_\odot = ۱۲Gyrs$ ستاره خوشه یک دارای عمر $۲۱Gyrs$ و ستاره خوشه‌ایی دو $۰/۷۷Gyrs$ عمر می‌باشد.

مسئله ۳۰۶ : حدود ۷۰۰۰ سیاره کوچک در منظومه شمسی وجود دارد. فرض کنید هر کدام جرمی معادل $۱۰^{۱۷}kg$ دارند. جرم کل همه سیارات چقدر است؟ اگر این سیارات کوچک همه سنگی در نظر گرفته شوند و دارای چگالی حدود ۳۰۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب باشند، شعاع سیاره‌ای که از آنها شکل می‌گیرد، چقدر می‌تواند باشد؟

حل : جرم نهایی همه سیارات کوچک تنها حاصل تعداد این سیارات و جرم تک تک آنهاست.

$$M = n \cdot m$$
$$M = ۷۰۰۰ \times ۱۰^{۱۷}\, kg$$
$$M = ۷ \times ۱۰^{۲۰}\, kg$$

حجم سیاره‌ای که می‌تواند تشکیل شود چنین است.

$$V = \frac{M}{\rho}$$

$$V = \frac{۷\times ۱۰^{۲۰}\, kg}{۳۰۰۰\, kg/m^{۳}}$$

$$V = ۲/۳۳\times ۱۰^{۱۷}\, m^{۳}$$

اگر فرض کنیم سیارات کروی هستند، می‌توانیم شعاع را پیدا کنیم.

$$R = \sqrt[۳]{\frac{۳V}{۴\pi}}$$

$$R = \sqrt[۳]{\frac{۳\times ۲/۳۳\times ۱۰^{۱۷} m^{۳}}{۴\pi}}$$

$$R = ۳۸۰\, km$$

این شعاع حدود ۲۰ برابر کمتر از شعاع زمین و در حدود ۱۰ برابر کمتر از شعاع مریخ است.

مسئله ۳۰۷ : چه قسمتی از حجم زمین در هسته اش قرار دارد؟ چه قسمتی از جرم زمین در هسته آن قرار دارد؟

حل : در یک نگاه به نظر می‌رسد، هر دو سوال یکی می‌باشد. اما این طور نیست. زیرا تراکم هسته با تراکم بقیه سیاره، متفاوت می‌باشد. قسمت حجم به سادگی با در نظر گرفتن نسبت حجم هسته به حجم کل سیاره محاسبه می‌شود.

$$f_{\text{حجم}} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi \times R_{\text{هسته}}^{۳}}{\frac{۴}{۳}\pi \times R_{\text{زمین}}^{۳}} \Rightarrow f_{\text{حجم}} = \frac{R_{\text{هسته}}^{۳}}{R_{\text{زمین}}^{۳}}$$

با استفاده از $R_{\text{هسته}} = ۱۲۰۰\, km$ و $R_{\text{زمین}} = ۶۳۷۸\, km$ داریم:

$$f_{\text{حجم}} = \frac{(۱۲۰۰\, km)^{۳}}{(۶۳۷۸\, km)^{۳}} \Rightarrow f_{\text{حجم}} = ۰/۰۰۷$$

هسته زمین ۰/۰۰۷ یا ۰/۷ درصد از کل سیاره است. با یافتن قسمتی از طریق جرم، حجم را از طریق تراکم تعمیم داده‌ایم.

$$f_{\text{مریخ}}=\frac{\frac{4}{3}\pi\times R^{3}_{\text{هسته}}\times\rho_{\text{هسته}}}{\frac{4}{3}\pi\times R^{3}_{\text{زمین}}\times\rho_{\text{زمین}}}$$

$$f_{\text{مریخ}}=f_{\text{حجم}}\times\frac{\rho_{\text{هسته}}}{\rho_{\text{زمین}}}$$

با استفاده از مقدار چگالی $\rho_{\text{هسته}}=12000\,kg/m^{3}$ و میزان چگالی میانگین زمین یعنی $\rho_{\text{زمین}}=5500\,kg/m^{3}$ داریم:

$$f_{\text{مریخ}}=0/007\times\frac{12000\,kg/m^{3}}{5500\,kg/m^{3}}\Rightarrow f_{\text{مریخ}}=0/015$$

هسته ۰/۰۱۵ یا ۱/۵ درصد از زمین است. این دو برابر قسمتی است که از طریق حجم نشان داده می‌شود.

مسئله ۳۰۸ : دو کهکشان با دوره مداری ۵۰ میلیارد سال به دور یکدیگر می‌چرخند. فاصله مابین آنها برابر است با ۰/۵ میلیون پارسک می‌باشد. جرم این جفت چه مقدار است؟

حل : در ابتدا این طول دوره ۵۰ میلیارد سالی را به ثانیه تبدیل می‌کنیم عدد به دست آمده برابر $1/58\times10^{18}$ ثانیه است. سپس 5×10^{5} پارسک را به $1/5\times10^{19}$ کیلومتر تبدیل می‌کنیم. سپس از قانون سوم کپلر استفاده می‌کنیم.

$$P^{2}=\frac{4\pi^{2}a^{3}}{G(m+M)}\Rightarrow(m+M)=\frac{4\pi^{2}a^{3}}{GP^{2}}$$

$$(m+M)=\frac{4\pi^{2}\left(1/5\times10^{22}m\right)^{3}}{6/67\times10^{-11}m/kg/s^{2}\left(1/58\times10^{18}s\right)^{2}}$$

$$(m+M)=\frac{1/33\times10^{68}\,m^{3}}{1/67\times10^{26}\,m^{3}/kg}\Rightarrow(m+M)=8\times10^{41}\,kg$$

جرم هر دو منظومه با هم برابر است با $8\times10^{41}\,kg$ یا حدود 4×10^{11} جرم خورشیدی

مسئله ۳۰۹ : نیم محور اصلی از مدار پلوتو $a_z = ۳۹/۴۴AU$ و مرکز از مرکز آن $e_z = ۰/۲۴۹$ است، ضمن اینکه پارامترهای مداری نپتون $a_y = ۳۰/۰۶$ و خروج از مرکز $e_y = ۰/۰۰۹$ هستند در سال ۱۹۸۹ پلوتو در حضیض قرار داشت. فاصله حضیض پلوتو را محاسبه کنید. آیا پلوتو در سال ۱۹۸۹ خارج یا داخل مدار پلوتو بوده است؟

حل : فاصله حضیض پلوتو چنین به دست می‌آید :

$$r_{\text{حضیض}} = a_z\left(۱-e_z\right) = ۲۹/۶۲\,AU$$

در حالی که فاصله حضیض و اوج و نپتون به قرار زیر است :

$$r_{\text{حضیض}} = a_y\left(۱-e_y\right) = ۲۹/۷۹\,AU$$
$$r_{\text{اوج}} = a_y\left(۱+e_y\right) = ۳۰/۳۳\,AU$$

در نتیجه در سال ۱۹۸۹ پلوتو در مدار نپتون بوده است. توجه داشته باشید که برای پاسخ به این سئوال محاسبه فاصله حضیض و اوج نپتون لازم است چرا که مشخص نیست نپتون در سال ۱۹۸۹ در مدار خودش بوده است.

مسئله ۳۱۰ : یک سفینه فضایی با سرعت اولیه‌ای از ۳۰۰ کیلومتری بالای سطح زمین به سوی ماه را انداخته می‌شود. کمترین تندی شروع برای اینکه سفینه تمام راه تا ماه را بدون استفاده از موتورهای موشک خود بپیماید، چیست؟ سفینه به چه تندی به ماه برخورد می‌کند؟

حل :

$$r = h + R_e = ۰/۳\times۱۰^{۶} + ۶/۳۶\times۱۰^{۶} = ۶/۶۶\times۱۰^{۶}\,m$$

$$v^{۲} - v_{۰}^{۲} = ۲ar \Rightarrow v = \sqrt{۲ar} = \sqrt{\frac{۲GMr}{R_e^{۲}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{۲\times۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\times۵/۹۸\times۱۰^{۲۴}\times۶/۶۶\times۱۰^{۶}}{\left(۶/۳۶\times۱۰^{۶}\right)^{۲}}}$$

$$v = ۱/۱۴۶\times۱۰^{۴}\,m/s$$

$$v = \sqrt{\frac{۲GM}{R}} = \sqrt{\frac{۲\times۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\times۷/۳۵\times۱۰^{۲۲}}{۱/۷۴\times۱۰^{۶}}} = ۲/۳۷\times۱۰^{۳}\,m/s$$

مسئله ۳۱۱ : تصور کنید یک سنگ در حال سکون از نقطه‌ای بر روی مدار زمین اطراف خورشید رها شده است و مستقیما به درون خورشید سقوط کرده است. چند سال طول می‌کشد تا این سنگ به درون خورشید سقوط کند؟ خورشید را یک جرم مرکزی در نظر بگیرید. (مسیر خط مستقیم سنگ را مانند یک بیضی در نظر گرفته از قانون سوم کپلر استفاده کنید.)

حل : مدار یک بیضی بسیار باریک است. نقطه اوج مکانی است که سنگ شروع به حرکت می‌کند. زیرا سنگ در آنجا در حال سکون است و نمی‌تواند از فاصله زیاد سقوط کند و یا حرکت نماید. بنابراین فاصله کانون (خورشید) در نقطه اوج برابر است با $r_a = ۱AU$
نقطه حضیض در خورشید است. خورشید را به عنوان یک نقطه در نظر گرفتن به این معناست که شعاع در این نقطه برابر است با $r_p = ۰$ اکنون $۲a = r_p + r_a = ۱AU$ که دارای نیم محور اصلی $A = ۱/۲AU$ است. دوره تناوب P زمانی است که در آن یک دور کامل می‌شود. سقوط حرکت درون خورشید و آنگاه به سوی عقب راه را ادامه دادن و به نقطه شروع رسیدن. لحظه سقوط نصف این مقدار است $t_{\inf all} = (۱/۲)P$. توسط قانون سوم کپلر طول دوره بدین شکل به دست می‌آید :

$$P_{yr}^{۲} = a_{AU}^{۳} = (۱/۲)^{۳}$$

بنابراین دوره تناوب برابر است با $P = \sqrt{۲}/۴$ سال. آنگاه زمان سقوط برابر است با :

$$t_{\inf all} = \sqrt{۲}/۸\,yr = ۰/۱۷۷\,yr$$

مسئله ۳۱۲ : قانون سوم کپلر را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$P^{۲} = \frac{CR^{۳}}{M}$$

که C ثابت جهانی و M جرم شی مرکزی است. ماه با دوره تناوب $P = ۲۷/۳۲$ روز در فاصله $R = ۳۸۴۴۰۰km$ می‌چرخد.

الف) جرم زحل ۹۵ برابر جرم زمین است. اگر قمر زحل در مدار به دور آن با دوره تناوب $P = ۲۳۴/۰۱$ روز باشد، شعاع مدار قمر زحل چقدر است؟

ب) اگر جرم زمین سه برابر شده باشد، در حالی که فاصله زمین - ماه یکسان بماند، دوره تناوب مدار ماه چقدر می‌شد؟

حل : الف) برای حل این قسمت از تناسب استفاده می‌کنیم.

$$\left(\frac{P_{MS}}{P_M}\right)^۲=\left(\frac{R_{MA}}{R_M}\right)^۳\left(\frac{M_E}{M_S}\right)$$

$$\left(\frac{R_{MS}}{R_M}\right)^۳=\left(\frac{P_{MS}}{P_M}\right)^۲\left(\frac{M_S}{M_E}\right)$$

$$\left(\frac{R_{MS}}{R_M}\right)=\left(\frac{P_{MS}}{P_M}\right)^{۲/۳}\left(\frac{M_S}{M_E}\right)^{۱/۳}$$

$$\left(\frac{R_{MS}}{R_M}\right)=\left(\frac{۲۳۴/۰۱ day}{۲۷/۳۲ day}\right)^{۲/۳}(۹۵)^{۱/۳}$$

$$\left(\frac{R_{MS}}{R_M}\right)=(۸/۶)^{۲/۳}(۹۵)^{۱/۳}=۴/۲\times ۴/۶$$

$$R_{MS}=۴/۲\times ۴/۶ R_M=۱۹/۱\times ۳/۸۴۴\times ۱۰^۵ km=۷/۳۴\times ۱۰^۶ km$$

ب)

$$\left(\frac{P_۲}{P_۱}\right)^۲=\frac{M_۱}{M_۲}$$

$$P_۲^۲=\left(\frac{M_۱}{M_۲}\right)P_۱^۲$$

$$P_۲=\sqrt{\frac{M_۱}{M_۲}}P_۱=\sqrt{\frac{۱}{۳}}\times ۲۷/۳۲ days=۱۵/۷۷ days$$

مسئله ۳۱۳ : الف) خورشید و ستاره‌های نزدیک در هر ۲۳۰ سال یک بار به دور مرکز کهکشان می‌چرخند. محاسبه کنید که با چه سرعتی یک چارچوب مختصات به ستاره‌های نزدیک نسبت به چارچوبی که در حال چرخش نیستند توسط کهکشان‌های دور تعریف شده‌اند، محدود می‌شود. پاسخ را بر حسب ثانیه قوس بر سال بیان کنید.

ب) ستاره‌ها حرکات تصادفی نسبت به خورشید نشان می‌دهند که موجب می‌شود موقعیت‌هایشان تغییر کند. این به نام حرکت خاص معروف است. محاسبه کنید که یک ستاره در فاصله $۳۰ pc$ و در حال حرکت در $۵۰ kms^{-۱}$ عمود بر خط دید با چه سرعتی موقعیت را تغییر می‌دهد؟ پاسخ خود را بر حسب ثانیه قوس بر سال بیان کنید.

ج) ماموریت آژانس فضایی اروپایی $GAIA$ برای اندازه‌گیری موقعیت‌های ستاره‌ها به دقت $۲\times ۱۰^{-۵} arcs$ طراحی می‌شود. این به اندازه کافی کوچک است تا سیارات فراشمسی را در طول حرکت ستاره‌های میزبانشان آشکار کند. داده شده است که به علت کشش گرانشی مشتری، خورشید از یک مدار با شعاع $۷۵۰۰۰۰km$ اجرا می‌شود حداکثر فاصله بر حسب واحد پارسک را تا جایی که $GAIA$ می‌تواند آشکار کند که ستاره خورشید مانندی میزبان یک سیاره مشتری مانند است.

د) اختلاف منظرها نسبت به ستاره‌های زمینه اندازه‌گیری می‌شوند. اگر اینها به طور بی‌نهایت دور باشند، اختلاف منظر تا شی پیش زمینه کمتر و فاصله‌اش بیشتر تخمین زده خواهد شد. فاصله‌ای را که تا ستاره‌ای در فاصله صحیح $۴۰pc$ اندازه‌گیری خواهد شد محاسبه کنید. اگر ستاره‌های زمینه در فاصله $۵۰۰pc$ باشند و این تاثیر مجاز نباشد.

حل : الف) این به سادگی موردی از دایره کامل است یعنی ۳۶۰ درجه در ۲۳۰ میلیون سال در ثانیه قوس در سال. این برابر است با :

$$\frac{۳۶۰\times ۳۶۰۰}{۲۳۰\times ۱۰^{۶}}=۰/۰۰۵۶/yr$$

ب) این شانس برای استفاده است از تقریب زاویه کوچک $\alpha=l/d$ برای زاویه α بسط یافته توسط طول l و فاصله d است. با به خاطر سپاری تبدیل از رادیان به ثانیه قوس و با استفاده از :

$$۱pc=۳/۰۹\times ۱۰^{۱۶}m$$

سپس سرعت تغییر توسط رابطه زیر داده می‌شود.

$$\frac{۱۸۰\times ۳۶۰۰}{\pi}\times\frac{۵۰\times ۱۰^{۳}\times ۳۶۵\times ۲۴\times ۳۶۰۰}{۳۰\times ۳/۰۹\times ۱۰^{۱۶}}=۰/۳۵/yr$$

یک شیوه دیگر این است که محاسبه کنیم ستاره در هر سال چند واحد نجومی را می‌پیماید زیرا $۱AU$ در $۱pc$ ، یک ثانیه قوس را بسط می‌دهد. این از تبدیل رادیان به ثانیه قوس جلوگیری خواهد کرد.

ج) $۷۵۰۰۰۰km$ مطابق است با $۰/۰۰۵AU$ ($۱AU=۱۵۰\times ۱۰^{۶}km$) چون $۱AU$ در $۱pc$، یک ثانیه قوس را بسط می‌دهد برای طول $۰/۰۰۵AU$ تا ۲×۱۰^{-۵} ثانیه قوس را بسط دهد باید در فاصله :

$$d=\frac{۰/۰۰۵}{۲\times ۱۰^{-۵}}=۲۵۰\,pc$$

باشد. پاسخ‌های در طول ضریب ۲ این قابل پذیرش هستند. در واقع ستاره‌ها مجبور خواهند بود که به منظور به دست آوردن اندازه‌های سیگنال به نویز منطقی نزدیک‌تر باشند با این حال انتظار می‌رود که $GAIA$ هزارها سیاره را در طول این شیوه بیابد.

د) این آزمون‌ها دانش اساسی اختلاف منظر است. اختلاف منظر تقویت تغییر موقعیت به علت حرکت زمین به دور خورشید است و توسط $p=۱/d$ داده می‌شود در زمانی که اختلاف منظر p در واحد ثانیه قوس و فاصله d بر حسب پارسک اندازه‌گیری می‌شود. اگر در اینجا فرد در اجازه برای فاصله نامحدود ستاره‌های زمینه رد می‌شود، سپس اختلاف منظر p' (نادرست) به صورت زیر اندازه‌گیری خواهد شد.

$$p'=\frac{۱}{۴۰}-\frac{۱}{۵۰۰}=۰/۰۲۳''$$

این به فاصله زیر تبدیل می‌شود.

$$d'=\frac{۱}{۰/۰۲۳}=۴۳/۵\,pc$$

مسئله ۳۱۴ : یک ریسمان کل کره زمین را به دور خط استوا احاطه کرده است. فرض کنید زمین کاملا کروی است و شعاع آن برابر $R=۶۳۷۸km$ و جاذبه آن نیز برابر $g=۹/۸\,ms^{-۲}$ است. این ریسمان کاملا محکم به دور زمین است در نتیجه دقیقا مانند پیرامونش اندازه‌گیری می‌کند.

با فرض معتبر بودن هندسی اقلیدسی ارتفاع در بالای سطح زمین که در آن طناب باید افزایش یابد چقدر است؟ در نتیجه دوباره کاملا محکم بسته است و دارای شکل دایره کامل به دور مرکز زمین است؟

حل : اگر هندسه اقلیدسی معتبر باشد پس به طور بدیهی شعاع هر دایره برابر است با محیط تقسیم بر ۲π و بنابراین اگر پارامترها ۱ متر تفاوت داشته باشند شعاع‌ها باید $۱/۲\pi$ متر متفاوت باشند. با $h=۱۵/۹cm$

مسئله ۳۱۵ : الف) دو ستاره رشته اصلی که از دقیقا یک گاز تشکیل شده‌اند را تصور کنید. ستاره ۱ و ستاره ۲ دارای سن یکسانی هستند. ولی ستاره ۱ درصد بالاتری از هلیم

نسبت به ستاره ۲ دارد. در چند جمله توضیح دهید که کدام ستاره احتمالا درخشنده‌تر است؟

ب) یک ستاره فرضی را که در آن فشار نه به چگالی گاز و نه به دمایش بستگی دارد در نظر بگیرید. آیا ذوب در چنین ستاره‌ای مانند خورشید ثابت و خود به خود تنظیم شونده خواهد بود یا مانند یک بمب فرار خواهد بود؟ پاسخ خود را در چند جمله توضیح دهید.

ج) یک ستاره را در منظومه دوتایی مشاهده کنید که جرمش M، درخشندگی آن L و شعاع آن R است. یک فرمول برای ضخامت اتمسفر ستاره بر حسب متغیرهای بالا بنویسید. فرض کنید که این متشکل از ئیدروژن یونیزه است.

حل : الف) ستاره ۱ احتمالا درخشنده‌تر است. می‌دانیم که ستاره‌ها با جرم‌های اولیه بالاتر ئیدروژن را نسبت به ستاره‌های دارای جرم اولیه پائین‌تر سریع‌تر ذوب می‌کنند و لذا درخشنده‌تر هستند اگر ستاره ۱ و ستاره ۲ دارای سن یکسانی بودند بنابراین آن ستاره که اخیرا هلیم بیشتری داشته باشد درخشنده‌تر از آن خواهد بود.

ب) ذوب در چنین ستاره‌ای ثابت و خود به خود افزایش شونده نخواهد بود. ذوب در مرکز ستاره شروع شده دمای هسته را بالا می‌برد ولی فشار در هسته افزایش نخواهد یافت. (همان گونه که در ستاره‌های طبیعی افزایش می‌یابد.) بنابراین دمای هسته بالاتر می‌ماند و موجب می‌شود ذوب بیشتری روی دهد که موجب می‌شود دمای هسته بیشتر افزایش یابد. (و هسته دوباره در این دما بالاتر بماند چون هیچ راه سرد شدنی ندارد.) که موجب می‌شود ذوب بیشتری روی دهد و بنابراین ذوب یک فرایند فرار خواهد بود این واکنش فرار زنجیره ذوب ممکن است موجب انفجار ستاره شود. (نمی‌توانیم از اطلاعات داده شده بگوئیم.) ولی می‌توانیم به طور قطعی بگوئیم که ذوب خود به خود تنظیم شونده نیست و این واکنش‌های ذوب به طور کنترل نشده فرار کنند همان گونه که در ذوب بمب فرار می‌کنند.

ج) می‌توانیم از معادله تعادل ئیدروستاتیک، در ترکیب با قانون گاز ایده‌آل برای تخمین ضخامت اتمسفر استفاده کنیم. به یاد داشته باشید:

$$\frac{dP}{dr}=-\frac{GM_r}{r^2}\rho$$

در آن سطح ستاره‌ای $r=R$ اندازه ستاره و $M_r \approx m$ جرم کلی آن ستاره است. چون اتمسفر در مقایسه ناچیز است. همچنین فرض می‌کنیم که ضخامت اتمسفر بسیار کمتر

از اندازه ستاره است $dr << R$ به علاوه فشار گرادیان اتمسفر $dP \approx P = \rho kT/m$ است در جایی که m جرم پروتون و T دمای موثر است. بنابراین ضخامت اتمسفر برابر است با:

$$dr \approx \frac{kTR^۲}{GMm} \qquad (۵)$$

این کاملا خوب است اگر متوجه شده باشید که مقیاس ارتفاع $H = kT/gm$ در معادله $n(z)$ در برگه معادله ظاهر می‌شود و این که شتاب محلی به سبب جاذبه g برابر است با $GM/R^۲$ نیاز است که T را به منظور ارزیابی dr به دست آوریم. ممکن است از معادله استفان - بولتزمن $L = ۴\pi R^۲\sigma T^۴$ استفاده کنیم. این نتیجه می‌دهد:

$$T = \left[\frac{L}{۴\pi R^۲\sigma}\right]^{۱/۴}$$

حال می‌توانیم در دمای موثر در معادله بالا جایگذاری کنیم تا ضخامت اتمسفر را تخمین بزنیم:

$$dr \approx \frac{k\left[\frac{L}{۴\pi R^۲\sigma}\right]^{۱/۴} R^۲}{GMm}$$

تنها چیزی که برای رسیدگی کردن باقی مانده است میانگین جرم m ذرات در اتمسفر (که قبلا به ما گفته شده است که از ئیدروژن یونیزه تشکیل شده است.) است. بنابراین:

$m =$ جرم میانگین ذرات = (مجموع تعداد ذرت) /(مجموع جرم‌های هر ذره)

$$m = \frac{n_e m_e + n_p m_p}{N} = \frac{n_e m_e + n_p m_p}{n_e + n_p}$$

همچنین چون فرض می‌کنیم (مانند همیشه) که ابر خنثی است $n_e = n_p$ بنابراین:

$$m = \frac{n_e(m_e + m_p)}{۲n_e} = \frac{m_e + m_p}{۲} \approx \frac{m_p}{۲}$$

با جایگذاری در آن سرانجام نتیجه می‌گیریم:

$$dr \approx \frac{k\left[\frac{L}{۲\pi R^۲\sigma}\right]^{۱/۴} R^۲}{GM\frac{m_p}{۲}}$$

مسئله ۳۱۶ : ضعیف‌ترین ستاره‌هایی را که می‌توان به وسیله تلسکوپ فضایی هابل مشاهده کرد درخششی در حدود $۱۰^{۲۱}$ بار ضعیف‌تر از خورشید دارند. ستاره‌هایی مانند خورشید باید چقدر دور باشد تا باز هم بتوان آن را به وسیله تلسکوپ هابل رویت کرد.

حل : ضعیف‌ترین ستاره‌ای را که می‌توان به وسیله تلسکوپ فضایی هابل شناسایی کرد روشنایی در حدود $۱۰^{۲۱}$ با ضعیف‌تر از خورشید دارد. بنابراین حد نهایی ظهور ستاره برای این تلسکوپ $b_{\lim} = ۱۰^{-۲۱} b_\odot$ است. از طرف دیگر می‌دانیم که:

$$L = ۴\pi d^۲ b$$

که در آن L وضوح دید (روشنایی) و d فاصله است. بنابراین:

$$L_\odot = ۴\pi d_\odot^۲ b_\odot = ۴\pi d^۲ b_{\lim}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$d = d_\odot \sqrt{\frac{b_\odot}{b_{\lim}}}$$

در نهایت به این نتیجه می‌رسیم که:

$$d = ۳/۱۶ \times ۱۰^{۱۰} d_\odot = ۳/۱۶ \times ۱۰^{۱۰} AU = ۱۵۳\, kpc$$

چون $۲۰۶۲۶۵ AU = ۱ pc$

ستاره‌های متغیر قیفاووسی نشان دهنده‌های بسیار مهم فاصله هستند. به خاطر آنکه آنها دارای روشنائی‌های متداول و بزرگی هستند. یک ستاره قیفاووسی با روشنایی $\frac{۱}{۴۰۰۰}$ برابر خورشید باید در چه فاصله‌ای از زمین قرار گیرد تا با این وضع هم آن را بتوان توسط تلسکوپ فضایی هابل دید.

برای ستاره‌های قیفاووسی $L = ۴ \times ۱۰^۳ L_\odot$ برای آنکه می‌خواهیم محاسبه کنیم فاصله حدی مناسب برای رویت چنین جسمی. همانند قسمت الف:

$$L=4\pi d_{\lim}^{2}$$
$$d=\sqrt{\frac{L}{4\pi b_{\lim}}}$$

اگر بگوئیم $L=4\times10^{3}L_{\odot}$ که در آن صورت:

$$L=4\times10^{3}\times4\pi d_{\odot}^{2}b_{\odot}$$

(که نتیجه می‌دهد $L_{\odot}=4\pi d_{\odot}^{2}b_{\odot}$) و $b_{\lim}=10^{-21}b_{\odot}$ در آن صورت داریم:

$$d=\sqrt{\frac{4\times10^{3}\times4\pi d_{\odot}^{2}b_{\odot}}{4\pi\times10^{-21}b_{\odot}}}$$
$$d=2\times10^{12}d_{\odot}=9/7\times10^{6}\,pc=9/7Mpc$$

ستاره‌های قیفاووسی متغیر به اندازه کافی درخشنده هستند که در کهکشان‌های دیگر هم شناسایی شوند. کهکشان‌هایی در خوشه سنبله وجود دارند که فاصله آنها به وسیله قیفاوسی‌های متغیر حساب می‌شود. سوپرنواهای نوع اول همچنین در همان نوع کهکشان‌ها دیده شده‌اند. این بسیار هیجان‌انگیز است به خاطر آنکه بدان معنی است که می‌توانیم فاصله خود را با کهکشان‌هایی که بسیار دور هستند اندازه بگیریم. با استفاده از سوپرنواها به عنوان شمع‌های استاندارد سوپرنوای نوع اول دارای درخشندگی‌های متداولی هستند و 10^{10} برابر درخشنده‌تر از خورشید هستند. یک سوپرنوای نوع اول تا چه فاصله‌ایی می‌تواند دور باشد؟ و در عین حال بتوان آن را توسط تلسکوپ فضایی هابل دید. برای انفجار سوپرنوا $L=10^{10}L_{\odot}$ یک بار دیگر

$$d=\sqrt{\frac{L}{4\pi b_{\lim}}}$$

با جایگذاری $b_{\lim}=10^{-21}b_{\odot},L_{\odot}=4\pi d_{\odot}^{2}b_{\lim},L=10^{10}$ داریم:

$$d=3/16\times10^{15}d_{\odot}=15/3\times10^{9}\,pc=15/3Gpc$$

مسئله ۳۱۷ : یک شکاف دوتایی را که می‌توان فاصله بین آنها را تغییر داد برای سهولت اندازه‌گیری دو ستاره که روشنایی آنها به یک اندازه است، بر روی یک شیئی قرار

داده‌ایم. جدایی این دو ستاره ۰/۱ ثانیه قوس است. دو شکاف مذکور به ازای چه فاصله‌ای باعث محو شدن الگوی نواری می‌شوند؟

حل : با استفاده از معادلات پیشین الگوی نواری تشکیل شده توسط هر ستاره در صورتی یکدیگر را محو می کنند که:

$$d=\frac{\lambda}{۲\theta}$$

در اینجا داریم:

$$\theta=۰/۱\,arc\,s=\frac{۱}{۲۰۶۲۶۵۰}rad$$

اگر فرض کنیم $\lambda=۵\times۱۰^{-۴}$ میلی‌متر باشد.

$$d=\frac{۵\times۱۰^{-۴}}{۲\left(\frac{۱}{۲۰۶۲۶۵۰}\right)}mm$$

مسئله ۳۱۸ : ستاره‌ای روشن در صورت فلکی شکارچی دارای دمای سطح حدودا ۱/۶ برابر دمای سطح خورشید است. درخشندگی آن در حدود $۶۴۰۰۰L_\odot$ است. شعاع این ستاره بر حسب شعاع شمسی چقدر است؟

حل : درخشندگی L ستاره مربوط است به شعاع R و دمای سطح T:

$$L=۴\pi R^۲\sigma T^۲$$

درخشندگی شمسی $L_\odot$ مربوط است به شعاع $R_\odot$ و دمای سطح آن $T_\odot$:

$$L_\odot=۴\pi R^۲\sigma T_\odot^۲$$

با تقسیم دو رابطه بر یکدیگر:

$$\frac{L}{L_\odot}=\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^۲\left(\frac{T}{T_\odot}\right)^۴$$

دمای سطح این ستاره را بر حسب دمای سطح خورشید می‌دانیم.

$$\left(\frac{T}{T_\odot}\right)=۱/۶$$

درخشندگی این ستاره را بر حسب درخشندگی خورشید می‌دانیم:

$$\left(\frac{L}{L_\odot}\right)=۶۴۰۰۰$$

از اینرو می‌توانیم شعاعی این ستاره را بر حسب شعاع خورشید بدست آوریم.

$$\frac{L}{L_\odot}=\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^۲\left(\frac{T}{T_\odot}\right)^۴$$

$$۶۴۰۰۰=\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^۲(۱/۶)^۴$$

$$\left(\frac{R}{R_\odot}\right)=\sqrt{\frac{۶۴۰۰۰}{۱/۶^۲}}=۹۸/۸$$

در نتیجه شعاع این ستاره در حدود ۱۰۰ برابر شعاع شمسی است.

مسئله ۳۱۹ : درخشندگی ستاره، انرژی از دست رفته از خورشید به صورت پرتو را نشان می‌دهند در نتیجه این از دست رفتن انرژی، جرم خورشید با زمان تغییر می‌کند. جرم خورشید در چه نسبتی در واحد گرم بر ثانیه در حال کاهش است؟

حل : درخشندگی خورشید $L_\odot=۳/۸۴۵\times ۱۰^{۳۳}\ ergs/\sec$ است. معادله جرم و انرژی $E=Mc^۲$ است. بنابراین:

$$L=\frac{dE}{dt}=\frac{dM}{dt}c^۲$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\frac{dM}{dt}=\frac{L}{c^۲}=\frac{۳/۸۴۵\times ۱۰^{۳۳}\ ergs/\sec}{\left(۳\times ۱۰^{۱۰}\ cm/\sec\right)^۲}\Rightarrow\frac{dM}{dt}=۴/۲۶\times ۱۰^{۱۲}\ gm/\sec$$

این حدودا معادل ۴ میلیون تن در هر ثانیه است.

مسئله ۳۲۰ : ستاره A در دمای مشابهی با دمای ستاره B است ولی شعاع ستاره A دو برابر شعاع ستاره B است.

الف) نسبت درخشندگی ستاره A به درخشندگی ستاره B چقدر است؟

ب) نسبت بین فاصله تا ستاره A و فاصله تا ستاره B چقدر است؟

حل : الف) این مسئله را می‌توانید با متوسل شده به معادلات حل کنید یا می‌توانید با به خاطر آوردن اینکه برای دو ستاره دارای یک دما، مساحت سطحشان است که نسبت درخشندگی‌ها را تعیین می‌کند، بررسی کنید. اگر یکی دارای دو برابر شعاع دیگری باشد پس دارای چهار برابر درخشندگی است اگر شما ترجیح دهید به معادلات متوسل شوید معادله‌ای که درخشندگی ستاره را می‌گوید اندازه و دمایش را می‌گوید برابر است با:

$$L_A = \left(\sigma T_A^{۴}\right)\left(۴\pi R_A^{۲}\right)$$
$$L_B = \left(\sigma T_B^{۴}\right)\left(۴\pi R_B^{۲}\right)$$

رابطه $T_A = T_B$ و $R_A = ۲R_B$ را داریم. دو معادله بالا را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{\left(\sigma T_A^{۴}\right)\left(۴\pi R_A^{۲}\right)}{\left(\sigma T_B^{۴}\right)\left(۴\pi R_B^{۲}\right)}$$

مواردی که در صورت و مخرج کسر مشترک هستند، حذف می‌کنیم که شامل دما نیز می‌شود.

$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{R_A^{۲}}{R_B^{۲}}$$
$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{۲R_B^{۲}}{R_B^{۲}}$$
$$\frac{L_A}{L_B} = ۴$$

ب) در اینجا، به هیچ چیز در مورد دما یا شعاع نیاز نداریم. اینکه هر چیزی چقدر روشن ظاهر می‌شود (یعنی شارش) به درخشندگی‌اش و فاصله بستگی دارد.

$$F_A = \frac{L_A}{۴\pi d_A^{۲}}$$
$$F_B = \frac{L_B}{۴\pi d_B^{۲}}$$

هر معادله را به صورت ضربدری ضرب می‌کنیم تا بدست آوریم:

$$F_A\left(۴\pi d_A^{۲}\right) = L_A$$
$$F_B\left(۴\pi d_B^{۲}\right) = L_B$$

البته باید توجه داشت که اگر از ضرب کردن ضربدری نمی‌خواستیم استفاده کنیم باید رابطه دو معادله بهره می‌بردیم که در این صورت یک مرحله اضافه‌تر داشتیم. اکنون این دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{F_A}{F_B}\frac{۴\pi d_A^۲}{۴\pi d_B^۲}=\frac{L_A}{L_B}$$

از قسمت قبلی نسبت L_A/L_B را داریم. و چون $F_A=F_B$ است کسر اول از بین می‌رود. ۴π را از دو طرف تقسیم می‌کنیم و باقی می‌ماند:

$$\frac{d_A^۲}{d_B^۲}=۴\Rightarrow\frac{d_A}{d_B}=۲$$

هر دو به طور مساوی یکسان روشن به نظر می‌رسند. بنابراین آن یکی که درخشنده‌تر است باید دورتر باشد.

مسئله ۳۲۱ : ستاره باب نسبت به ستاره میک چهار برابر دورتر از ماست. باب دارای نصف روشنایی میک است. نسبت درخشندگی‌هایشان چقدر است؟

حل : اطلاعات داده شده به صورت زیر است:

$$d_{BOB}=۴d_{MIK}$$
$$b_{BOB}=۰/۵b_{MIK}$$

رابطه مورد نیاز چنین است:

$$b=\frac{L}{۴\pi d^۲}\Rightarrow L=۴\pi d^۲b$$

برای دو ستاره رابطه فوق را می‌نویسیم:

$$L_{BOB}=۴\pi d_{BOB}^۲b_{BOB}$$
$$L_{MIK}=۴\pi d_{MIK}^۲b_{MIK}$$

با تقسیم دو رابطه بر یکدیگر ۴π از بین می‌رود.

$$\frac{L_{BOB}}{L_{MIK}}=\frac{d_{BOB}^۲}{d_{MIK}^۲}\times\frac{b_{BOB}}{b_{MIK}}=\frac{(۴d_{MIK})^۲}{d_{MIK}^۲}\times\frac{۰/۵b_{MIK}}{b_{MIK}}=۸$$

نتیجه بدین معنی است که باب بسیار دورتر است و دارای نصف روشنایی است. بنابراین دارای درخشندگی بزرگ‌تری است.

مسئله ۳۲۲ : کهکشان مجاور ما یعنی آندرومدا دارای درخشندگی ۳ برابر روشنایی درخشندگی کهکشان راه شیری ما است. $L_A = ۳L_{MW}$ و در فاصله $d_A = ۰/۷\,Mpc$ است. شاری که از کهکشان آندرومدا مشاهده می‌کنیم (روشنایی ظاهری) ۱۰۰۰۰ برابر روشن‌تر از شار مشاهده شده از کوازار دور $f_A = ۱۰^۴ f_q$ این کوازار دارای درخشندگی است که ۱۰۰۰ برابر درخشندگی کهکشان ماست. $L_q = ۱۰^۳ L_{MW}$ فاصله d تا کوازار چقدر است؟

حل :

$$\frac{f_A}{f_q} = \left(\frac{L_A}{L_q}\right)\left(\frac{d_q^۲}{d_A^۲}\right)$$

$$\frac{d_q^۲}{d_A^۲} = \left(\frac{f_A}{f_q}\right)\left(\frac{L_q}{L_A}\right)$$

$$\frac{d_q}{d_A} = \sqrt{\left(\frac{f_A}{f_q}\right)\left(\frac{L_q}{L_a}\right)}$$

$$\frac{d_q}{d_A} = \sqrt{\left(۱۰^۴\right)\left(\frac{۱۰^۳ L_{MW}}{۳L_{MW}}\right)}$$

$$d_{quasar} = \sqrt{\frac{۱۰^۷}{۳}} \times ۰/۷Mpc = ۱۸۲۶ \times ۰/۷Mpc = ۱/۲۸ \times ۱۰^۳\,Mpc$$

مسئله ۳۲۳ : یک مدل ستاره که یک جسم سیاه کروی با دمای سطح $۲۸۰۰۰K$ و شعاع $۵/۱۶ \times ۱۰^{۱۱}cm$ در بر دارد را در نظر بگیرید. بگذارید این مدل ستاره در فاصله ۱۸۰ پارسکی از زمین قرار بگیرد و موارد زیر را برای این ستاره تعیین کنید.

الف) درخشندگی

ب) قدر تابش سنجی مطلق

ج) قدر تابش سنجی ظاهری

د) قدر مطلق فاصله

هـ) شار تابشی در سطح ستاره

و) شار تابشی در سطح زمین (در واقع در بالای اتمسفر زمین و این را با ثابت شمسی مقایسه کنید)

ز) حداکثر طول موج λ_{max} این ستاره

برای پاسخگویی به این سئوال اطلاعات زیر را در مورد خورشید داریم:

$$R_\odot = ۶/۹۵۹۸\times۱۰^{۱۰}\,cm,\quad T_\odot = ۵۷۷۰\,K$$
$$L_\odot = ۳/۸۲۶۸\times۱۰^{۳۳}\,erg/s,\quad M_{bol}(\odot)$$

و ثابت شمسی برابر است با:

$$f = ۱/۳۶۰\times۱۰^{۶}\,erg/s/cm^{۲}$$

حل : الف) درخشندگی این دقیقا مقدار جریان انتگرال گرفته شده از انتگرال روی سطح کامل ستاره است. با فرض اینکه ستاره نور را مانند یک جسم سیاه کروی منتشر می‌کند، می‌توان تناسب را با توجه به خورشید برقرار کرد.

$$L = \left(۴\pi R^{۲}\right)\left(\sigma T^{۴}\right)$$
$$\frac{L}{L_\odot} = \frac{۴\pi R^{۲}}{۴\pi R_\odot^{۲}}\frac{\sigma T^{۴}}{\sigma T_\odot^{۴}}$$
$$= \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{۲}\left(\frac{T}{T_\odot}\right)^{۴}$$
$$= \left(\frac{۵/۱۶\times۱۰^{۱۱}cm}{۶/۹۵۹۸\times۱۰^{۱۰}cm}\right)^{۲}\left(\frac{۲۸۰۰۰\,K}{۵۷۷۰\,K}\right)^{۴}$$

$$= \left(۷/۴۱۴\right)^{۲}\left(۴/۸۵۳\right)^{۴} = ۳/۰۴۸\times۱۰^{۴}$$
$$L = ۳/۰۴۸\times۱۰^{۴}L_\odot = ۱/۲\times۱۰^{۳۸}\,erg/s$$

ب) قدر تابش سنجی این گونه به درخشندگی مربوط می‌شود:

$$M_{bol} - M_{bol}(\odot) = -۲/۵\log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) = -۲/۵\log\left(\frac{۱/۲\times۱۰^{۳۳}\,erg/s}{۳/۸۲۶۸\times۱۰^{۳۳}\,erg/s}\right)$$
$$= -۲/۵\log\left(۳/۰۴۸\times۱۰^{۴}\right) = -۱۱/۲$$
$$M_{bol} = -۱۱/۲ + M_{bol}(\odot) = -۱۱/۲ + ۴/۷۶ = -۶/۴۵$$

ج و د) برای پاسخ به قسمت د می‌توانیم به سئوال ج پاسخ گوئیم. قدرمطلق فاصله برابر است با:

$$m_{bol}-M_{bol}=5\log d-5=5\log(180)-5=6/28$$

از این رابطه و جواب قسمت ب قدر تابش سنجی ظاهری را به دست می‌آوریم:

$$m_{bol}=6/28+M_{bol}=6/28-6/45=-0/17$$

هـ) شار تابشی در سطح ستاره این گونه داده می‌شود:

$$F=\frac{L}{4\pi R^2}=\frac{1/166\times10^{38}\,erg/s}{4\pi\left(5/15^{11}cm\right)^2}=3/48\times10^{13}\,erg/cm^2$$

توجه داشته باشید که می‌توانستیم این را از قانون استفان - بولتزمن نیز به دست آوریم:

$$F=\sigma T^4=5/67\times10^{5}\,erg/s/cm^2/K^2\left(28000K\right)^4=3/48\times10^{13}\,erg/s/cm^2$$

و) برای تعیین شار تابشی از این ستاره در بالای اتمسفر زمین، نیاز است که فاصله تا ستاره را از واحد پارسک به سانتیمتر تبدیل کنیم:

$$r=180\,pc\times3/0856\times10^{18}\,cm/pc=5/55\times10^{20}\,cm$$

پس:

$$f=\frac{L}{4\pi r^2}=\frac{1/166\times10^{38}\,erg/s}{4\pi\left(5/55\times10^{20}cm\right)^2}=3/01\times10^{-5}\,erg/s/cm^2$$

با مقایسه این با ثابت شمسی نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{f}{f_\odot}=\frac{3/01\times10^{-5}\,erg/s/cm^2}{1/36\times10^{6}\,erg/s/cm^2}=2/21\times10^{-11}$$

ز) با استفاده از قانون جایگزینی وین داریم:

$$\lambda_{\max}=\frac{0/29cmK}{T}=\frac{0/29cmK}{28000K}=1/036\times10^{-5}cm=1036\mathring{A}$$

که در فرابنفش است.

مسئله ۳۲۴ : ستاره $1M_\odot$ با شعاع $1R_\odot$ درست اکنون به پایان زندگی رشته اصلی خود با دمای مرکزی $1/4\times10^{7}K$ و هسته‌ای که ۱۰ درصد جرم کلی آن را در بر دارد رسیده

است. ذوب ئیدروژن اخیرا در هسته‌اش قطع شده است که فرض می‌کنیم کـاملا از $^{4}_{2}He$ تشکیل شده است.

الف) فشار مرکزی به سبب وزن لایه‌های خارجی ستاره چقدر است؟

ب) در مرکز ستاره، فشار تبهگن الکترون غیر نسبیتی جاذبه را متعادل می‌کند. در اینجا چگالی الکترون‌ها چقدر است؟

ج) اکنون ذوب ئیدروژن در لایه درست خارج از هسته هلیم (که مانند دمای خود هسته است) شروع می‌شود و زمانی که این ذوب پیش می‌رود خاکستر هلیم بـه هسـته اضـافه می‌شود. دما با جرم هسته M_C بر اساس :

$$T_C \propto M_C^{4/3}$$

مقیاس گذاری می‌شود. جرم هسته هلیم در زمانی که دما به اندازه کافی بالا مـی‌رود تـا ذوب $^{4}_{2}He$ را مشتعل کند ($10^{8}K$) چقدر است؟

د) نشان دهید که $T_C \propto M_C^{4/3}$ با در نظر گـرفتن اینکـه وزن هسـته هلـیم توسـط فشـار تبهگن الکترون غیر نسبیتی تامین می‌شود و هسته‌های هلیم در همان فشار گاز ایـده‌آل هستند.

حل : الف) این مورد در این نقطه بسیار مانند خورشید است.

$$P_C = 19\frac{GM_\odot^2}{R_\odot^4} = 19\frac{(6/67\times10^{-8})(2\times10^{33})^2}{(6/96\times10^{10})^4}\, dyns\, cm^{-2}$$
$$= 2/2\times10^{17}\, dyns\, cm^{-2}$$

ب)

$$n_e = \left(\frac{m_e P_C}{0/0485h^2}\right)^{3/5} = \left(\frac{(9/11\times10^{-28})(2/2\times10^{17})}{(0/0485)(6/63\times10^{-27})^2}\right)^{3/5}$$

ج)

$$M_C = M_{C,\text{اولیه}} \quad \frac{T_C^{3/4}}{T_{C,\text{اولیه}}^{3/4}} = 0/1M_\odot\left(\frac{10^8}{1/4\times10^7}\right)^{3/4} = 0/44M_\odot$$

د) برای گاز ایده‌آل:

$$P_C = \frac{\rho_C k T_C}{m} \propto \frac{M_C}{R_C^3}\frac{kT_C}{m} \propto \frac{GM_C^2}{R_C^4}$$

که این در صورتی است که فشار گاز وزن را متعادل کند. بنابراین:

$$T_C \propto \frac{M_C}{R_C}$$

اما :

$$R = ۰/۱۱۴\frac{h^۲}{Gm_e m_p^{۵/۳}}\left(\frac{Z}{A}\right)^{۵/۳} M^{-۱/۳} \propto M^{-۱/۳}$$

برای شی تامین شده با فشار تبهگن غیر نسبیتی بنابراین:

$$T_C \propto \frac{M_C}{M_C^{-۱/۳}} = M_C^{۴/۳}$$

مسئله ۳۲۵ : یک ستاره متشکل از ئیدروژن یونیزه شده را در نظر بگیرید. بار خنثی به این نیاز دارد که $n_e = n_p$ و تعادل گرمایی نشان می‌دهد که $T_e = T_p$ نشان دهید که برای الکترون‌ها و پروتون‌ها هر دو به طور جداگانه در تعادل نیرو (نه نیروی برآیند) هستند باید یک میدان الکتریکی در ستاره وجود داشته باشد، قدر و جهت میدان الکتریکی را محاسبه کنید.

حل : بیایید نگاهی به تعادل ئیدروستاتیک برای فوتون‌ها و الکترون‌ها به طور جداگانه بیندازیم :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^۲} = -\frac{GM_r nm}{r^۲}$$

طرف سمت چپ برای هر دو یکسان است، چون $P = nkT$ و از بار خنثی و تعادل گرمایی می‌دانیم $n = n_p = n_e$ و $T = T_p = T_e$ ولی طرف سمت راست به طور واضح متفاوت است چون $m_p \neq m_e$ از اینرو مسئله با معادله تعادل ئیدروستاتیک استاندارد ما مطابقت دارد. چون این یک گاز یونیزه شده است می‌توانیم فرض کنیم که میدان الکتریکی $Q/r^۲$ (تعریف Q به گونه‌ای است که بار مثبت احساس می‌کند که یک نیرو به سمت بیرون به r بزرگ‌تر سوق می‌دهد.) در اینجا معادله تعادل نیرو برای لایه جرم $M_{لایه}$ تعداد ذرات N و مساحت سطح A مانند :

$$\left(P_{\text{پائین}} - P_{\text{بالا}}\right)A - \frac{GM_r M_{\text{لایه}}}{r^۲} + \frac{QNq}{r^۲} = ۰$$
$$-AdP - \frac{GM_r (A\rho dr)}{r^۲} + \frac{Q(nAdr)q}{r^۲} = ۰$$
$$\frac{dP}{dr} = \frac{GM_r \rho}{r^۲} + \frac{Qnq}{r^۲}$$

به نظر می‌رسد. (فرض کنید که هیچ نیروی برآیندی وجود ندارد) چون می‌دانیم که الکترون‌ها و پروتون‌ها باید دارای همان dP/dr باشند و اینکه بار پروتون‌ها برابر است با $+q$ و الکترون‌ها $-q$ می‌توانیم بنویسیم:

$$-\frac{GM_r nm_p}{r^۲} + \frac{Qnq}{r^۲} = -\frac{GM_r nm_e}{r^۲} - \frac{Qnq}{r^۲}$$
$$۲Qnq = GM_r n(m_p - m_e)$$
$$Q = \frac{GM_r}{۲q}(m_p - m_e)$$

مسئله ۳۲۶ : اتمسفر زمین در ابتدا از اکسیژن مولکولی و نیتروژن ساخته می‌شود در نتیجه جرم متوسط ذره تقریبا برابر است با $۳۰m_p$ در دمای اتاق

الف) مقیاس ارتفاع اتمسفر زمین را محاسبه کنید. چگونه با شعاع زمین مقایسه می‌شود؟ این چگونه با ارتفاع بلندترین کوه‌های روی زمین مقایسه می‌شود؟

ب) جرم اتمسفر رمین را محاسبه کنید. این مقدار چگونه با جرم زمین مقایسه می‌شود؟

حل : الف) عبارت برای مقیاس ارتفاع را به خاطر بسپارید. $h = kT/mg$ جرم ذره متوسط برابر است با $۳۰m_p$ دمای اتاق را تا $۳۰۰K \sim$ در نظر بگیرید. مقادیر ثابت را جایگذاری می‌کنیم:

$$h = \frac{kT}{mg}$$
$$= \frac{\left(۱/۳۸\times۱۰^{-۱۶}\,erg\,K^{-۱}\right)(۳۰۰K)}{۳۰\left(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۴}\,g\right)\left(۹۸۰\,cm\,s^{-۲}\right)}$$
$$= ۸/۴۳\times۱۰^{۵}\,cm$$

شعاع زمین برابر است با $R_E = ۶/۴\times ۱۰^{۸} cm$ بنابراین به ترتیب هزار برابر کوچک‌تر از شعاع زمین است. رشته کوه اورست در حدود ۸۸۰۰ متر بالای سطح دریاست. که به طور تقریبی مقیاس ارتفاع ماست.

ب) در ابتدا فرض می‌کنیم که فشار جوی سطح دریا برابر است با:

$$۱ atm = ۱/۰۱\times ۱۰^{۶}\, dyns\, cm^{-۲}$$

می‌توانیم این را با استفاده از قانون گاز ایده‌آل به عدد چگالی تبدیل کنیم.

$$P_\circ = n_\circ kT$$
$$۱/۰۱\times ۱۰^{۶}\, dyne\, cm^{-۲} = n_\circ (۱/۳۸\times ۱۰^{۱۶}\, erg\, K^{-۱})(۳۰۰ K)$$
$$n_\circ = ۲/۴۴\times ۱۰^{۱۹} cm^{-۲}$$

اکنون می‌توانیم روی همه ارتفاع z انتگرال بگیریم تا چگالی ستون را به دست آوریم (یعنی تعداد ذرات در واحد سطح)

$$N = \int n_\circ e^{-z/h dz}$$
$$= n_\circ h = (۲/۴۴\times ۱۰^{۱۹} cm^{-۳})(۸/۴۳\times ۱۰^{۵} cm)$$
$$= ۲/۰۶\times ۱۰^{۲۵} cm^{-۲}$$

چون اتمسفر در مقایسه با شعاع زمین بسیار نازک است می‌توانیم با آن مانند اتمسفر صفحه موازی رفتار کنیم و به سادگی N را در مساحت سطح زمین ضرب می‌کنیم تا تعداد کل ذرات موجود در اتمسفر را به دست آوریم. یعنی:

$$N_{tot} = N ۴\pi R_E^{۲} = ۱/۰۶\times ۱۰^{۴۴} \text{ ذره}$$

چون جرم متوسط ذره برابر است با $۳۰ m_p$ جرم کل اتمسفر بنابراین برابر است با:

$$M_{tot} = N_{tot} ۳۰ m_p = ۵/۳۱\times ۱۰^{۲۱} g$$

جرم زمین تقریبا برابر است با $۶\times ۱۰^{۲۷} g$ بنابراین اتمسفر کسر ناچیزی از جرم زمین است.

مسئله ۳۲۷ : شعاع افق رویداد سیاهچاله با جرم M با رابطه زیر داده می‌شود.

$$R_{EH}=\frac{۲GM}{c^۲}$$

الف) با جایگذاری نشان دهید که شعاع افق رویداد سیاهچاله با همان جرم خورشید برابر است با $۳km$ (با یک رقم بامعنی) این بدان معناست که معادله دیگری برای شعاع افق رویداد برابر است با :

$$R_{EH}=۳\,km\times\frac{M}{M_{\odot}}$$

ب) شعاع افق رویداد را برای ستاره‌ای با جرم $M=۲۰M_{\odot}$ محاسبه کنید.

ج) شعاع افق رویداد را برای سیاهچاله‌ای با جرم کهکشان راه شیری $M=۱۰^{۱۲}M_{\odot}$ محاسبه کنید.

حل : الف) برای $M=M_{\odot}$ شعاع افق رویداد برابر است با :

$$R_{EH}=\frac{۲GM}{c^۲}=\frac{۲\times۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\times۱/۹۸۹\times۱۰^{۳۰}}{\left(۲/۹۹۷۹\times۱۰^{۸}\right)^۲}=۲/۹۵\times۱۰^{۳}m$$

با گرد کردن تا یک رقم بامعنی شعاع افق رویداد خورشید برابر است با $۳km$:

ب)

$$R_{EH}=۳km\times۲۰=۶۰km$$

ج)

$$R_{EH}=۳\times۱۰^{۱۲}km=۳\times۱۰^{۱۲}km\times\frac{۱\,pc}{۳\times۱۰^{۱۳}km}=۰/۱\,pc$$

مسئله ۳۲۸ : پرسیون یکی از ۱۰ ستاره روشن موجود در آسمان است. که دارای بعد ۷ ساعت و ۳۹ دقیقه و میل $+۵^{\circ}۱۴''$ است. به خاطر داشته باشید که:

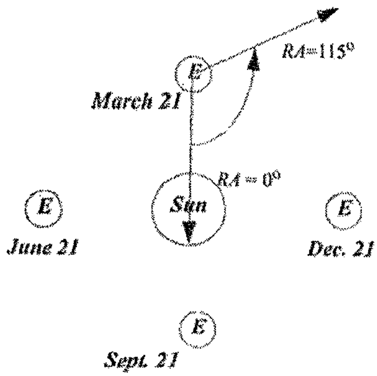
$$۲۴\,hr=۳۶۰^{\circ}$$

الف) جهت آن را روی نمودار نشان دهید. کدام جهت دارای $RA=۰^{\circ}$ است؟

ب) آن ماهی از سال را که شما انتظار دارید پرسیون در ظهر روی نصف‌النهار باشد را تخمین بزنید.

ج) یک دریانورد در دریا تعیین می‌کند که پرسیون در $۷۵^{\circ}۱۴''$ بالای افق جنوبی است در زمانی که نصف‌النهار را قطع می‌کند. عرض جغرافیایی او چقدر است؟

حل : الف) به نمودار زیر نگاه کنید.

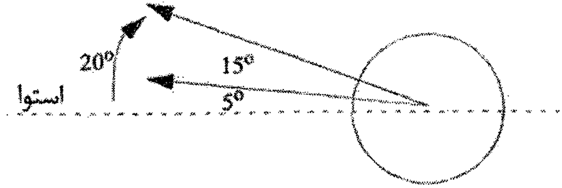


شکل ۲-۵۶

ب) نمودار را امتحان کنید. اگر ستاره دارای $RA=\text{۰}^\circ$ باشد. سپس نصف‌النهار را در ظهر روز ۲۱ مارس قطع می‌کند. با $RA=\text{۱۱۵}^\circ$ انتظار داریم که ۱۱۷ روز بعد (با در نظر گرفتن ۳۶۵ روز در سال و ۳۶۰ درجه در دایره) آن را قطع کند. بنابراین انتظار داریم پرسیون نصف النهارمان را در ظهر در دقیقا ۱۶ جولای قطع کند.

$$RA = \text{۷}hr\,\text{۳۹}\min\times\left(\frac{\text{۳۶۰}^\circ}{\text{۲۴}\,hr}\right)=\text{۱۱۵}^\circ$$

ج) پرسیون تقریبا ۱۵° جنوب سمت‌الراس دریانورد است بنابراین او در عرض جغرافیایی ۲۰° شمال است. به شکل زیر نگاه کنید.



شکل ۲-۵۷

مسئله ۳۲۹ : اگر می‌توانستید خورشید را به یک سیاهچاله فشرده کنید، چقدر بزرگ می‌بود؟ شعاع را در واحد کیلومتر حساب کنید. سرعت فرار این سیاهچاله چقدر است؟ اگر خورشید به طور ناگهانی به یک سیاهچاله تبدیل می‌شد، برای مدار زمین چه اتفاقی می‌افتاد؟

حل : اندازه سیاهچاله جرم M برابر است با شعاع شوارتزشیلد و به وسیله رابطه زیر محاسبه می‌گردد :

$$R_{sch}=\frac{۲GM}{c^{۲}}$$

با توجه به معلومات مسئله پاسخ چنین است :

$$R_{sch}=\frac{۲\times\left(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\,Nm^{۲}/kg^{۲}\right)\times\left(۲\times ۱۰^{۳۰}\,kg\right)}{\left(۳\times ۱۰^{۸}\right)^{۲}}$$
$$=۲۹۶۴/۴\,m\approx ۳\,km$$

سرعت فرار برابر است با سرعت نور :

$$c=۳\times ۱۰^{۸}\,km/s$$

توجه داشته باشید که حتی نور نمی‌تواند از آن فرار کند که دلیل این است که چرا این جسم سیاهچاله نامیده می‌شود. اگر خورشید یک باره به یک سیاهچاله تبدیل می‌شد، هیچ اتفاقی برای مدار چرخش زمین روی نمی‌داد زیرا مدار فقط به جرم خورشید بستگی دارد و جرمش باید هنوز یکسان باشد.

مسئله ۳۳۰ : سیاره‌ای با مدار تقریبا دایره‌ای محور چرخشش °۳۷ به دایره البروجش مایل می‌شود.

الف) نواحی گرمسیری در چه عرض‌های جغرافیایی هستند؟

ب) مدارهای قطب شمال در چه عرض‌های جغرافیایی هستند؟

ج) آیا انتظار دارید که فصول شدیدتر یا دارای شدت کمتری از روی زمین باشند؟

د) در عرض جغرافیایی °۴۰ شمال، خورشید در چقدر بالای افق نصف‌النهار را در انقلاب تابستان قطع می‌کند؟

هـ) در عرض جغرافیایی °۴۰ شمال، خورشید در چقدر بالای افق نصف‌النهار را در انقلاب زمستان قطع می‌کند؟

حل : الف) عرض‌های جغرافیایی حاره‌ای مانند زاویه میل $\pm ۳۷^\circ$ هستند.
ب) عرض‌های جغرافیایی ۹۰ درجه زاویه میل $\pm ۵۳^\circ$
ج) فرد انتظار فصول سخت‌تری را با میل بیشتری خواهد داشت.
د) در انقلاب تابستان، عرض جغرافیایی ۴۰ درجه، خورشید نصف النهار را در

$$۵۰^\circ + ۳۷^\circ = ۸۷^\circ$$

تقریبا بالای سر قطع می‌کند.
هـ) در انقلاب زمستان، عرض جغرافیایی ۴۰ درجه، خورشید نصف النهار را در

$$۵۰^\circ - ۳۷^\circ = ۱۳^\circ$$

کاملا پائین روی افق قطع می‌کند.

مسئله ۳۳۱ : فرض کنید مدت حیات t_* یک ستاره متناسب با نسبت بین انرژی موجود برای ارسال کردن و میزانی از این انرژی که مصرف می‌شود یعنی متناسب با M_*/L_* است. برای رشته اصلی یک رابطه مبنی بر تجربه بین یک ستاره M_* و درخشندگی آن L_* وجود دارد که دارای فرم زیر است :

$$\frac{L_*}{L_\odot}=\left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)^{۳/۲}$$

از نتیجه بالا استفاده کنید و مدت عمر یک ستاره بسیار حجیم را با $M_* = ۲۵M_\odot$ و یک ستاره بسیار کوچک با جرم $M_* = ۰/۱M_\odot$ محاسبه کنید.
حل : نسبت بین رشته اصلی مدت عمر مربوط به خورشید و ستاره این گونه است :

$$\frac{t_*}{t_\odot}=\frac{M_*/M_\odot}{M_\odot/L_\odot}=\frac{M_\odot/M_\odot}{K_*/L_\odot}=\frac{M_\odot/M_\odot}{(M_*/M_\odot)^{۳/۲}}=\left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)^{-۲/۳}$$

از سئوال در می‌یابیم که $t = ۱۰^{۱۰}$ سال است. طوری که مدت عمر یک ستاره با :

$$M_* = ۲۵M_\odot$$

برابر

$$t_{*,۲۵M} = ۶/۱\times۱۰^{۶}$$ سال

است در حالی که طول عمر یک ستاره با $M_* = ۰/۱M_\odot$ برابر است با :

$$t_{*,۰/۱M_\odot} = ۲\times۱۰^{۱۲}$$ سال

بنابراین ستاره‌های حجیم دارای طول عمر خیلی کوتاه در حالی که عمر ستاره‌های کم حجم مدت خیلی طولانی است.

مسئله ۳۳۲ : با محاسبه ریاضی شعاع بحرانی شوارتزشیلد را به دست آورید.

حل : موردی را در نظر بگیرید که در آن سرعت فرار چنان باشد که وقتی جسمی درست با آن سرعت فرار دور می‌شود، در بی‌نهایت سرعت صفر داشته باشد. در آنجا انرژی کل جسم عبارت است از :

$$TE = \frac{۱}{۲} mv^{۲} - \frac{GmM}{R} = ۰$$

از آنجا که انرژی کل می‌بایست بقا داشته باشد در موقع شروع پرتاب جسم باید داشته باشیم :

$$TE = ۰ = \frac{۱}{۲} m_{esc}^{۲} - \frac{GmM}{R}$$

$$\frac{۱}{۲} V_{esc}^{۲} = \frac{GM}{R}$$

$$V_{esc} = \left(\frac{۲GM}{R} \right)^{۱/۲}$$

اکنون می‌گوئیم که هیچ جسمی نمی‌تواند بیش از تندی نور حرکت کند و بنابراین سرعت فرار بیشینه c است. پس معادله شعاع سیاهچاله عبارت خواهد بود از :

$$R = \frac{۲GM}{c^{۲}}$$

M بر حسب واحد جرم خورشیدی :

$$R = ۳M\, km$$

این شعاع بحرانی شعاع شوارتزشیلد نامیده می‌شود.

مسئله ۳۳۳ : یکی از سه ستاره در کمربند شکارچی ۱۲ ساعت را بالای افق در روچستر (عرض جغرافیایی '۴۳°۰۷ شمال، طول جغرافیایی '۷۷°۳۷ غرب، همان گونه که در مرکز چهار ضلعی در UR تعیین شده است)

الف) میلِ آن چقدر است؟

ب) آن چه مدت زمان را از روی افق در پاریس، فرانسه، که در 49° شمال و 2° شرق است می‌گذارند؟

حل : الف) اگر ۱۲ ساعت را بالا بگذارند سپس زاویهٔ ساعتش برابر است با $\pm 6h = \pm 90^\circ$ در طلوع / غروب. ارتفاعش در طلوع یا غروب صفر است. بنابراین:

$$\sin\eta = 0 = \sin\delta\sin\varphi - \cos\delta\cos\varphi\cos(\pm 90^\circ)$$
$$\sin\delta\sin\varphi = 0$$

چون $\sin\varphi \neq 0$ تنها می‌تواند به این معنا باشد.

$$\sin\delta = 0 \Rightarrow \delta = 0^\circ$$

(اشیا روی خط استوای آسمانی برای ۱۲ ساعت بالا هستند)

ب) دلیل آوردن در قسمت الف نشان می‌دهد که شی در استوای آسمانی همیشه برای ۱۲ ساعت در هر عرض جغرافیایی به جز قطب شمال یا جنوب بالا است . ولی اگر شما اصرار دارید : زاویهٔ ساعتی در طلوع یا غروب از:

$$\sin\eta = 0 = \sin\delta\sin\varphi - \cos\delta\cos\varphi\cos HA$$
$$0 = -\cos\varphi\cos HA$$

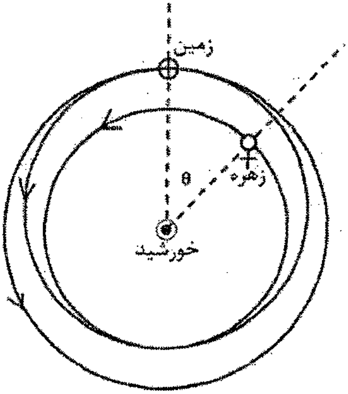
چون این $\cos\varphi \neq 0$ این فقط می‌تواند به این معنا باشد که :

$$\cos H 0 \Rightarrow HA = \pm 90^\circ = \pm 6^h$$

بنابراین ۱۲ ساعت بین طلوع و غروب، همان گونه که انتظار می‌رود، عبور می‌کند.

بخش سوم

روابط اساسی



بخش سوم: روابط اساسی

۳ - ۱ بیضی‌ها

خروج از مرکز

$$e = \frac{\text{فاصله بین کانونهای}}{\text{محور اصلی}} = \frac{d}{a}$$

فاصله‌های حضیض و اوج برابر است با

$$d_{\text{حضیض}} = a(۱-e)$$
$$d_{\text{اوج}} = a(۱+e)$$

۳ - ۲ گرانش

قانون جاذبه نیوتن

$$F_{grav} = G\frac{m_۱ m_۲}{R^۲}$$

ثابت گرانش

$$G = ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} Nm^۲ kg^{-۲}$$

مرکز جرم

$$m_۱ r_۱ = m_۲ r_۲$$

نیروی گریز از مرکز روی مدار دایره‌ای

$$F = \frac{mv^۲}{r} = \frac{۴\pi^۲ mr}{P^۲}$$

شکل نیوتنی از قانون سوم کپلر

$$\frac{a^۳}{P^۲} = \frac{G(m_۱ + m_۲)}{۴\pi^۲}$$

قانون سوم کپلر بر حسب واحدهای $M_\odot$ و AU و سال ($M_۲=۰$) را بـرای سـیارات قـرار می دهیم)

$$\frac{a^۳}{P^۲}=M_۱+M_۲$$

تابع جرم برای ستاره‌های دوتایی

$$f(M,m)=\frac{m^۳\sin^۳ i}{(M+m)^۲}=\frac{r_۱^۳}{P^۲}$$

۳ - ۳ ویژگی‌های سیارات

چگالی‌های نمونه‌ای سیارات زمین مانند و غول‌های گازی

$$\langle\rho\rangle_{terr}\sim ۵/۵ g\, cm^{-۳}$$
$$\langle\rho\rangle_{gas\ giants}\sim ۱/۲ g\, cm^{-۳}$$

جرم‌های نمونه‌ای

$$M_{earth}=۶\times ۱۰^{۲۴} kg$$
$$M_{jupiter}=۳۱۸\, M_{earth}$$

واحد نجومی

$$۱AU=۱۵۰\times ۱۰^{۶} kg$$

مقیاس‌های اندازه نمونه‌ای برای منظومه شمسی

عطارد $۰/۴\,AU$

مریخ $۱/۵\,AU$

زحل $۱۰\,AU$

زمین $۱\,AU$

مشتری $۵\,AU$

نپتون $۳۰\,AU$

۳ - ۴ فاصله زاویه‌ای بین سیاره فراشمسی و ستاره یا بین دو ستاره دوتایی

$$\theta=\frac{r}{d}$$

زاویه اختلاف منظر (دومین معادله برای p در واحد قوس ثانیه و d بر حسب پارسک)

$$p=\frac{1AU}{d}=\frac{1}{d}$$

پارسک

$$1pc=206264\,AU=3\times10^{16}m=3/26\,ly$$

۳- ۵ قدرها

درخشندگی و شار

$$F=\frac{L}{4\pi d^{2}}$$

قدر ظاهری

$$m_2-m_1=-2/5\log_{10}\left(\frac{F_2}{F_1}\right)$$

روشن‌ترین ستاره (شعرای یمانی)

$$m=-1/4\,mag$$

تیره‌ترین ستاره‌ها

$$m\sim6\,mag$$

قدر مطلق M قدر که شی در فاصله $d=10\,pc$ دارد.

قدر مطلق فاصله

$$m-M=2/5\log_{10}\left(\frac{d}{10\,pc}\right)^{2}=5\log_{10}d-5$$

۳ - ۶ ساختار ستاره‌ای

ترکیب شمسی نمونه‌ای (از نظر جرم)

۷۵% ئیدروژن

۲۴% هلیم

۱% فلز

معادله تعادل ئیدروستاتیک

$$\frac{dP}{dr}=-\rho(r)\frac{GM(r)}{r^{2}}$$

قانون گاز ایده‌آل

$$P = nkT$$

رابطه جرم درخشندگی (بر حسب واحد شمسی)

$$L \propto M^{۴}$$

۳ - ۷ شعاع شواترزشیلد

$$r_s = \frac{۲GM}{c^{۲}} \sim ۳\, km\left(\frac{M}{۱M_\odot}\right)$$

۳ - ۸ ویژگی‌های خورشید

$$M_\odot = ۲\times ۱۰^{۳۰}\, kg \qquad L_\odot = ۳/۹\times ۱۰^{۲۶}\, Js^{-۱}$$
$$R_\odot = ۷۰۰۰۰۰\, km \qquad T_{eff} = ۵۸۰۰K$$
$$m = -۲۶\, mag \qquad M = ۵\, mag$$

ویژگی‌های ستاره‌ای

$$۰/۰۱ \le \frac{L}{L} \le ۱۰^{۴}$$

$$۰/۰۱ \le \frac{M}{M} \le ۱۰۰$$

$$-۷\, mag \le M_V \le +۱۳ mag$$
$$۳۰۰۰K \le T_{eff} \le ۵۰۰۰۰K$$

انرژی فوتون‌ها

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

انتقال دوپلر (سرعت‌های غیر نسبیتی)

$$\frac{\lambda_{\text{مشاهده شده}} - \lambda_{\text{منتشر شده}}}{\lambda_{\text{منتشر شده}}} = \frac{v}{c}$$

انتقال دوپلر (سرعت‌های نسبیتی)

$$\lambda_{\text{مشاهده شده}} = \lambda_{\text{منتشر شده}} \sqrt{\frac{۱+v/c}{۱-v/c}}$$

قانون پلانک

$$B_\lambda = \frac{۲hc^۲/\lambda^۵}{\exp(hc/\lambda kT)-۱}$$

قانون استفان - بولتزمن (توان منتشر شده در متر مربع توسط سطح با دمای T)

$$P = \sigma T^۴$$

قانون وین

$$\lambda_{\max} T = ۲/۸۹۸ \times ۱۰^{-۳} mK$$

۳ - ۹ کیهان شناسی

قانون هابل: انتقال سرخ کهکشان متناسب است با فاصله‌اش

$$v = cz = H_\circ d$$

که

$$H_\circ = ۷۲ kms^{-۱} Mpc^{-۱} = ۲/۳ \times ۱۰^{-۱۸} s^{-۱}$$

$\frac{۱}{H_\circ}$ به طور تقریبی سن جهان است.

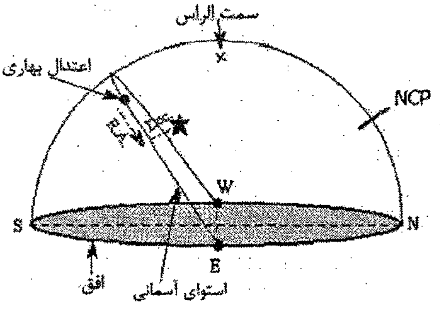
چگالی بحرانی

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}}$$

$$\rho_{crit} = \frac{۳H_\circ^۲}{۸\pi G}$$

بخش چهارم

ثابت‌های نجومی و فیزیکی



بخش چهارم: ثابت‌های نجومی و فیزیکی

جدول ثابت‌های نجومی

کمیت	مقدار
واحد نجومی (AU)	۱۴۹۵۹۷۸۷۰/۶۹۱ km
سال نوری (ly)	۹/۴۶۰۵۳۶۲۰۷ $\times$ ۱۰^{۱۲} km – ۶۳۲۴۰ AU
پارسک (pc)	۳/۰۸۵۶۷۸۰۲ $\times$ ۱۰^{۱۳} km = ۲۰۶۲۶۵ AU
سال نجومی	۳۶۵/۲۵۶۲ $days$
سال اعتدالی	۳۶۵/۲۴۲۲ $days$
سال	۳۶۵/۲۴۲۵ $days$
جرم زمین	۵/۹۷۳۶ $\times$ ۱۰^{۲۴} km
جرم خورشید	۱/۹۸۹۱ $\times$ ۱۰^{۳۰} kg = ۳۳۲۹۸۰ $\times$ زمین
شعاع میانگین زمین	۶۳۷۱ km
شعاع خورشید	۶/۹۶۲۶۵ $\times$ ۱۰^{۵} km = ۱۰۹ $\times$ زمین
درخشندگی خورشید	۳/۸۲۷ $\times$ ۱۰^{۲۶} w

ثابت‌های فیزیکی

کمیت	مقدار
سرعت نور c	۲۹۹۷۹۲/۴۵۸km
ثابت گرانش G	۶/۶۷۲۹×۱۰$^{-۱۱}$ $m^{۳}/kgs^{۲}$
ثابت بولتزمن k	۱/۳۸۰۶۵۸×۱۰$^{-۲۳}$ J/K
ثابت استفان - بولتزمن σ	۵/۶۷۰۵۱×۱۰$^{-۸}$ $J/m^{۲}K^{۴}s$
ثابت قانون وین	۲/۸۹۷۷۵۶×۱۰^{۶} کلوین نانومتر
ثابت پلانک h	۶/۶۲۶۰۷۵۵×۱۰$^{-۳۴}$ Js
جرم الکترون	۹/۱۰۹۳۸۹۸×۱۰$^{-۲۸}$ gr = ۵/۴۸۵۷۹۹۰۳×۱۰$^{-۴}$ amu
جرم پروتون	۱/۶۷۲۶۲۳۱×۱۰$^{-۲۴}$ gr = ۱/۰۰۷۲۷۶۴۷۰ amu
جرم نوترون	۱/۶۷۴۹۲۸۶×۱۰$^{-۲۴}$ gr = ۱/۰۰۸۶۶۴۹۰۴ amu
جرم هسته دوتریوم	۳/۳۴۳۵۸۶۰×۱۰$^{-۲۴}$ gr = ۲/۰۱۳۵۵۳۲۱۴ amu

سیارات : مشخصات مدار

سیاره	فاصله (AU)	حرکت انتقالی	خروج از مرکز	زاویه میل
عطارد	۰/۳۸۷	۸۷/۹۷d	۰/۲۰۵۶	۷/۰
زهره	./۷۲۳	۲۲۴/۷۰d	۰/۰۰۶۸	۳/۴
زمین	۱/۰۰۰	۳۶۵/۲۶d	۰/۰۱۶۷	۰
مریخ	۱/۵۲۴	۶۸۶/۹۸d	۰/۰۹۳۴	۱/۸۵
مشتری	۵/۲۰۳	۱۱/۸۶y	۰/۰۴۸۴۵	۱/۳۰۵
زحل	۹/۵۳۹	۲۹/۴۶y	۰/۰۵۵۶۵	۲/۴۸۹
اورانوس	۱۹/۱۸۲	۸۴/۰۱y	۰/۰۴۷۲	۰/۷۷۳
نپتون	۳۰/۰۶	۱۶۴/۷۹d	۰/۰۰۸۵۸	۱/۷۷۳
پلوتو	۳۹/۵۳	۲۴۷/۶۸y	۰/۲۴۸۲	۱۷/۱۵

سیارات : مشخصات فیزیکی

سیاره	جرم $\times M_E$	قطر (km)	چگالی g/cm^3	$\frac{D_e - D_p}{D_e}$	حرکت وضعی	کجی محور درجه	میدان مغناطیس
عطارد	۰/۰۵۵۳	۴۸۸۰	۵/۴۳	.	۵۸/۸۱d	۰/۱	/۰۰۶
زهره	۰/۸۱۵	۱۲۱۰۴	۵/۲	.	۲۴۳/۶۹d	۱۷۷/۳	.
زمین	۱/۰۰۰	۱۲۷۴۲	۵/۵۲	۰/۰۰۳۴	۲۳/۹۳۴۵h	۲۳/۴۵	۱
مریخ	۰/۱۰۷	۶۷۸۰	۳/۹۳	۰/۰۰۶۵	۲۴/۶۲۳h	۲۵/۱۹	.
مشتری	۳۱۷/۸۳	۱۳۹۸۲۲	۱/۳۳	۰/۰۶۴۹	۹/۹۲۵h	۳/۱۲	۹۵۱۹
زحل	۹۵/۱۶۲	۱۱۶۴۶۴	۰/۶۸۷	۰/۰۹۸	۱۰/۵۰h	۲۶/۷۳	۵۷۸
اورانوس	۱۴/۵۳۶	۵۰۷۲۴	۱/۳۲	۰/۰۲۳	۱۷/۲۴	۹۷/۸۶	۴۷/۹
نپتون	۱۷/۱۴۷	۴۹۲۴۸	۱/۶۴	۰/۰۱۷	۱۶/۱۱h	۲۹/۵۶	۲۷
پلوتو	۰/۰۰۲۱	۲۲۷۴	۲/۰۵	.	۶/۴۰۵d	۱۲۲/۴۶	.

سیارات : اتمسفر

سیاره	g $(\times g_E)$	v_{esc} (km/s)	فاصله (AU)	آلبدو $(\%)$	دما (K)	فشار اتمسفر (نسبت به زمین)
عطارد	۰/۳۷۸	۴/۳	۰/۳۸۷	۵/۶	شب ۱۰۰ روز ۷۲۵–۵۹۰	10^{-15}
زهره	۰/۹۰۷	۱۰/۳۶	۰/۷۲۳	۷۲	۷۳۷	۹۱
زمین	۱	۱۱/۱۸۶	۱	۳۸/۵	روز ۲۹۳–۲۸۳	۱
مریخ	۰/۳۷۷	۵/۰۳	۱/۵۲۴	۱۶	روز ۲۴۲–۱۸۴	۰/۰۰۷ – ۰/۰۰۹
مشتری	۲/۳۶۴	۵۹/۵	۵/۲۰۳	۷۰	۱۶۵	$>>100$
زحل	۰/۹۱۶	۳۵/۵	۹/۵۳۹	۷۵	۱۳۴	$>>100$
اورانوس	۰/۸۸۹	۲۱/۳	۱۹/۱۸۲	۹۰	۷۶	$>>100$
نپتون	۱/۱۲۵	۲۳/۵	۳۰/۰۶	۸۲	۷۲	$>>100$
پلوتو	۰/۰۶۷۵	۱/۱	۳۹/۵۳	۱۴/۵	۵۰	۰/۰۰۳

نمادهای اساسی

$$R_{\mathrm{Earth}} = 6,378 \text{ km}$$
$$R_{\odot} = 695,500 \text{ km}$$
$$L_{\odot} = 3.8 \times 10^{26} \text{ W}$$
$$d_{\odot} = 1\,\mathrm{AU} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$$
$$L_{\mathrm{Vega}} = 55\, L_{\odot}$$
$$d_{\mathrm{Vega}} = 7.8\,\mathrm{pc}$$
$$M_{\mathrm{Vega}} = 3\, M_{\odot}$$

$$1\,\mathrm{Mpc} = 10^{6} \text{ pc}$$
$$1\,\mathrm{pc} = 3.26 \text{ lyr}$$
$$1\,\mathrm{pc} = 206,265\,\mathrm{AU}$$
$$1\,\mathrm{pc} = 3.086 \times 10^{16} \text{ m}$$
$$1\,\mathrm{km} = 1,000\,\mathrm{m}$$

سال 4.6×10^{9} :سن منظومه شمسی

سال 13.7×10^{9} :سن عالم

ستاره جرم بالا : $M_{*} > 8\, M_{\odot}$

$$L = A\,\sigma T^4$$
$$L = 4\pi {R_{\odot}}^2\, \sigma T^4$$
$$B = \frac{L}{4\pi\, d^2}$$
$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$$

$$d = \frac{1}{p} \quad d \text{ in pc, } p \text{ in } ''$$
$$z = \frac{d}{c\, t_H} \quad (\text{For } z \ll 1)$$
$$z = \frac{\lambda_{\mathrm{obs}} - \lambda_{\mathrm{orig}}}{\lambda_{\mathrm{orig}}}$$
$$z = \frac{v}{c} \quad (\text{For } v \ll c)$$
$$z = \frac{\text{اندازه فعلی}}{\text{اندازه قبلی}}$$

$$t_H = 13.8 \times 10^{9} \text{ yrs} = 4.35 \times 10^{17} \text{ s}$$
$$c = 3.00 \times 10^{8} \text{ m s}^{-1} = 1 \text{ lyr yr}^{-1}$$

ضرایب تبدیل

زاویه

۱ رادیان = $۵۷/۳۰^\circ = ۳/۴۳۸\times۱۰^{۳}{}' = \frac{۱}{۲\pi}$ دور $= ۲/۰۶۳\times۱۰^{۵}{}''$

۱ درجه (°) = $۱/۷۴۵\times۱۰^{-۲}$ رادیان = $۶۰'$ = $۳۶۰۰''$ = $\frac{۱^\circ}{۳۶۰}$ دور

۱ دقیقه کمانی (′) = $۲/۹۰۹\times۱۰^{-۴}$ رادیان = $\frac{۱^\circ}{۶۰}$ = $۴/۶۳۰\times۱۰^{-۵}$ دور = $۶۰''$

۱ دور (rev) = ۲π رادیان = ۳۶۰° = $۲/۱۶۰\times۱۰^{۴}{}'$ = $۱/۲۹۶\times۱۰^{۶}{}''$

۱ ثانیه کمانی (″) = $۴/۸۴۸\times۱۰^{-۶}$ رادیان = $\frac{۱^\circ}{۳۶۰۰} = \frac{۱'}{۶۰} = ۷/۷۱۶\times۱۰^{-۷}$ دور

جرم

۱ کیلوگرم (kg) = $۶/۰۲۴\times۱۰^{۲۶}$ u = ۵۰۰۰ قیراط = $۱/۵۴۳\times۱۰^{۴}$ گندم =
۱۰۰۰ g = ۱×۱۰^{-۳} t = ۳۵/۲۷ oz. = ۲/۲۰۵ lb = $۱/۱۰۲\times۱۰^{-۳}$ تن کوچک
= $۶/۸۵۲\times۱۰^{-۲}$ اسلاگ

۱ یکای اتمی جرم (u) = $۱/۶۶۰۵\times۱۰^{-۲۷}$ kg = $۱/۶۶۰۵\times۱۰^{-۲۴}$ g

۱ قیراط = ۲×۱۰^{-۴} kg = ۰/۲ g = $۷/۰۵۵\times۱۰^{-۳}$ oz. = $۴/۴۰۹\times۱۰^{-۴}$ lb

۱ گندم = $۶/۴۸۰\times۱۰^{-۵}$ kg = $۶/۴۸۰\times۱۰^{-۲}$ g = $۲/۲۸۶\times۱۰^{-۳}$ oz. = $\frac{۱}{۷۰۰۰}$ lb

۱ گرم (g) = ۱×۱۰^{-۳} kg = $۶/۰۲۴\times۱۰^{۲۳}$ u = ۵ قیراط = ۱۵/۴۳ گندم =
۱×۱۰^{-۶} t = $۳/۵۲۷\times۱۰^{-۲}$ oz. = $۲/۲۰۵\times۱۰^{-۳}$ lb = $۱/۱۰۲\times۱۰^{-۶}$ تن کوچک =
= $۶/۸۵۲\times۱۰^{-۵}$ اسلاگ

۱ تن متری، یا تن (t) = ۱×۱۰^{۳} kg = ۱×۱۰^{۶} g = $۲/۲۰۵\times۱۰^{۳}$ lb =
۱/۱۰۲ تن کوچک = ۶۸/۵۲ اسلاگ

۱ اُنس (oz.) = $۲/۸۳۵\times۱۰^{-۲}$ kg = ۱۴۱/۷ قیراط = ۴۳۷/۵ گرین =
= ۲۸/۳۵ g = $\frac{۱}{۱۶}$ lb

۱ پوند (lb)* = ۰/۴۵۳۶ kg = ۴۵۳/۶ g = $۴/۵۳۶\times۱۰^{-۴}$ t = ۱۶ oz. =
$۳/۱۰۸\times۱۰^{-۲}$ اسلاگ = $\frac{۱}{۲۰۰۰}$ تن کوچک

۱ تن کوچک = ۹۰۷/۲ kg = $۹/۰۷\times۱۰^{۵}$ g = ۰/۹۰۷۲ t = ۲۰۰۰ lb

۱ اسلاگ = ۱۴/۵۹ kg = $۱/۴۵۹\times۱۰^{۴}$ g = ۳۲/۱۷ lb

طول

۱ متر (m) = ۱×۱۰^{۱۰} Å = $۶/۶۸۵\times۱۰^{-۱۲}$ AU = ۱۰۰ cm = ۱×۱۰^{۱۵} Fm =
= ۳/۲۸۱ ft = ۳۹/۳۷ in. = ۱×۱۰^{-۳} km = $۱/۰۵۷\times۱۰^{-۱۶}$ سال نوری =
= ۱×۱۰^{۶} μm = $۵/۴۰۰\times۱۰^{-۴}$ nmi = $۶/۲۱۴\times۱۰^{-۴}$ mi =
= $۳/۲۴۱\times۱۰^{-۱۷}$ pc = ۱/۰۹۴ yd

۱ آنگستروم (Å) = ۱×۱۰^{-۱۰} m = ۱×۱۰^{-۸} cm = ۱×۱۰^{-۵} fm = $۳/۲۸۱\times۱۰^{-۱۰}$ ft =
= ۱×۱۰^{-۴} μm

۱ یکای اخترشناسی (AU) = $۱/۴۹۶\times۱۰^{۱۱}$ m = $۱/۴۹۶\times۱۰^{۱۳}$ cm =
= $۱/۴۹۶\times۱۰^{۸}$ km = $۱/۵۸۱\times۱۰^{-۵}$ سال نوری = $۴/۸۴۸\times۱۰^{-۶}$ pc

۱ سانتی‌متر (cm) = ۰/۰۱ m = ۱×۱۰^{۸} Å = ۱×۱۰^{۱۳} fm = $۳/۲۸۱\times۱۰^{-۲}$ ft
= ۰/۳۹۳۷ in. = ۱×۱۰^{-۵} km = $۱/۰۵۷\times۱۰^{-۱۸}$ سال نوری = ۱×۱۰^{۴} μm

۱ فرمی (fm) = ۱×۱۰^{-۱۵} m = ۱×۱۰^{-۱۳} cm = ۱×۱۰^{-۵} Å

۱ فوت (ft) = ۰/۳۰۴۸ m = ۳۰/۴۸ cm = ۱۲ in. = $۳/۰۴۸\times۱۰^{۵}$ μm =
$۱/۸۹۴\times۱۰^{-۴}$ mi = $\frac{۱}{۳}$ yd

۱ اینچ (in.) = $۲/۵۴۰\times۱۰^{-۲}$ m = ۲/۵۴ cm = $\frac{۱}{۱۲}$ ft = $۲/۵۴\times۱۰^{۴}$ μm = $\frac{۱}{۳۶}$ yd

۱ کیلومتر (km) = ۱×۱۰^{۳} m = ۱×۱۰^{۵} cm = $۳/۲۸۱\times۱۰^{۳}$ ft = ۰/۵۴۰۰ nmi
= ۰/۶۲۱۴ mi = $۱/۰۹۴\times۱۰^{۳}$ yd

۱ سال نوری = $۹/۴۶۱\times۱۰^{۱۵}$ m = $۶/۳۲۴\times۱۰^{۴}$ AU = $۹/۴۶۱\times۱۰^{۱۷}$ cm =
$۹/۴۶۱\times۱۰^{۱۲}$ km = $۵/۸۷۹\times۱۰^{۱۲}$ mi = ۰/۳۰۶۶ pc

۱ میکرون، یا میکرومتر (μm) = ۱×۱۰^{-۶} m = ۱×۱۰^{۴} Å = ۱×۱۰^{-۴} cm
= $۳/۲۸۱\times۱۰^{-۶}$ ft = $۳/۹۳۷\times۱۰^{-۵}$ in.

۱ مایل دریایی (nmi) = $۱/۸۵۲\times۱۰^{۳}$ m = $۱/۸۵۲\times۱۰^{۵}$ cm = $۶/۰۷۶\times۱۰^{۳}$ ft
= ۱/۸۵۲ km = ۱/۱۵۱ mi

۱ مایل رسمی (mi) = $۱/۶۰۹\times۱۰^{۳}$ m = $۱/۶۰۹\times۱۰^{۵}$ cm = ۵۲۸۰ ft =
۱/۶۰۹ km = ۰/۸۶۹۰ nmi = ۱۷۶۰ yd

۱ پارسک (pc) = $۳/۰۸۶\times۱۰^{۱۶}$ m = $۲/۰۶۳\times۱۰^{۵}$ AU = $۳/۰۸۶\times۱۰^{۱۸}$ cm =
$۳/۰۸۶\times۱۰^{۱۳}$ km = ۳/۲۶۲ سال نوری

۱ یارد (yd) = ۰/۹۱۴۴ m = ۹۱/۴۴ cm = ۳ ft = ۳۶ in. = $\frac{۱}{۱۷۶۰}$ mi

حجم

۱ مترمکعب ($m^۳$) = ۱×۱۰^{۶} $cm^۳$ = ۳۵/۳۱ $ft^۳$ = ۲۶۴/۲ gal. =
$۶/۱۰۲\times۱۰^{۴}$ $in.^۳$ = ۱×۱۰^{۳} لیتر = ۱/۳۰۸ $yd^۳$

۱ سانتی‌متر مکعب ($cm^۳$) = ۱×۱۰^{-۶} $m^۳$ = $۳/۵۳۱\times۱۰^{-۵}$ $ft^۳$ =
$۲/۶۴۲\times۱۰^{-۴}$ gal. = $۶/۱۰۲\times۱۰^{-۲}$ $in.^۳$ = ۱×۱۰^{-۳} لیتر

۱ فوت‌مکعب ($ft^۳$) = $۲/۸۳۲\times۱۰^{-۲}$ $m^۳$ = $۲/۸۳۲\times۱۰^{۴}$ $cm^۳$ = ۷/۴۸۱ gal. =
۱۷۲۸ $in.^۳$ = ۲۸/۳۲ لیتر = $\frac{۱}{۲۷}$ $yd^۳$

۱ گالن (gal.)** = $۳/۷۸۵\times۱۰^{-۳}$ $m^۳$ = ۰/۱۳۳۷ $ft^۳$

۱ اینچ مکعب (in.^{۳}) = ۱/۶۳۹×۱۰$^{-۵}$ m^{۳} = ۱۶/۳۹ cm^{۳} = ۵/۷۸۷×۱۰$^{-۴}$ ft^{۳}
۱ لیتر (l) = ۱×۱۰$^{-۳}$ m^{۳} = ۱۰۰۰ cm^{۳} = ۳/۵۳۱×۱۰$^{-۲}$ ft^{۳}
۱ یارد مکعب (yd^{۳}) = ۰/۷۶۴۶ m^{۳} = ۷/۶۴۶×۱۰^{۵} cm^{۳} = ۲۷ ft^{۳} = ۲۰۲/۰ gal

زمان

۱ ثانیه (s) = ۱/۱۵۷×۱۰$^{-۵}$ روز = $\frac{۱}{۳۶۰۰}$ ساعت = $\frac{۱}{۶۰}$ دقیقه =
۱/۱۶۱×۱۰$^{-۵}$ روز نجومی = ۳/۱۶۹×۱۰$^{-۸}$ سال
۱ روز = ۸/۶۴۰×۱۰^{۴} s = ۲۴ ساعت = ۱۴۴۰ دقیقه = ۱/۰۰۳ سال نجومی =
۲/۷۳۸×۱۰$^{-۳}$ سال
۱ ساعت (h) = ۳۶۰۰ s = $\frac{۱}{۲۴}$ روز = ۶۰ دقیقه = ۱/۱۴۱×۱۰$^{-۴}$ سال
۱ دقیقه (min) = ۶۰ s = ۶/۹۴۴×۱۰$^{-۴}$ روز = $\frac{۱}{۶۰}$ ساعت = ۱/۹۰۱×۱۰$^{-۶}$ سال
۱ سال نجومی = ۸/۶۱۶×۱۰^{۴} s = ۰/۹۹۷۳ روز = ۲۳/۹۳ ساعت = ۱/۴۳۶×۱۰^{۳} دقیقه
= ۲/۷۳۰×۱۰$^{-۳}$ سال
۱ سال (yr) = ۳/۱۵۶×۱۰^{۷} s = ۳۶۵/۲۴ روز = ۸/۷۶۶×۱۰^{۳} ساعت =
۵/۲۵۹×۱۰^{۵} دقیقه = ۳۶۶/۲۴ سال نجومی

مساحت

۱ مترمربع (m^{۲}) = ۱×۱۰^{۴} cm^{۲} = ۱۰/۷۶ ft^{۲} = ۱/۵۵۰×۱۰^{۳} in.^{۲} =
۱×۱۰$^{-۶}$ km^{۲} = ۳/۸۶۱×۱۰$^{-۷}$ mi^{۲} = ۱/۱۹۶ yd^{۲}

۱ بارن = ۱×۱۰$^{-۲۸}$ m^{۲} = ۱×۱۰$^{-۲۴}$ cm^{۲}
۱ سانتی‌متر مربع (cm^{۲}) = ۱×۱۰$^{-۴}$ m^{۲} = ۱/۰۷۶×۱۰$^{-۳}$ ft^{۲} = ۰/۱۵۵۰ in.^{۲}
= ۱×۱۰$^{-۱۰}$ km^{۲} = ۳/۸۶۱×۱۰$^{-۱۱}$ mi^{۲}
۱ فوت مربع (ft^{۲}) = ۹/۲۹۰×۱۰$^{-۲}$ m^{۲} = ۹۲۹/۰ cm^{۲} = ۱۴۴ in.^{۲} =
۳/۵۸۷×۱۰$^{-۸}$ mi^{۲} = $\frac{۱}{۹}$ yd^{۲}
۱ اینچ مربع (in.^{۲}) = ۶/۴۵۲×۱۰$^{-۴}$ m^{۲} = ۶/۴۵۲ cm^{۲} = $\frac{۱}{۱۴۴}$ ft^{۲}
۱ کیلومترمربع (km^{۲}) = ۱×۱۰^{۶} m^{۲} = ۱×۱۰^{۱۰} cm^{۲}
= ۱/۰۷۶×۱۰^{۷} ft^{۲} = ۰/۳۸۶۱ mi^{۲}
۱ مایل مربع رسمی (mi^{۲}) = ۲/۵۹۰×۱۰^{۶} m^{۲} = ۲/۵۹۰×۱۰^{۱۰} cm^{۲} =
۲/۷۸۸×۱۰^{۷} ft^{۲} = ۲/۵۹۰ km^{۲}
۱ یارد مربع (yd^{۲}) = ۰/۸۳۶۱ m^{۲} = ۸/۳۶۱×۱۰^{۳} cm^{۲} = ۹ ft^{۲} = ۱۲۹۶ in.^{۲}

چگالی

۱ کیلوگرم بر مترمکعب (kg/m^{۳}) = ۱×۱۰$^{-۳}$ g/cm^{۳} = ۶/۲۴۳×۱۰$^{-۲}$ lb/ft^{۳}
= ۸/۳۴۵×۱۰$^{-۳}$ lb/gal. = ۳/۶۱۳×۱۰$^{-۵}$ lb/in.^{۳} = ۸/۴۲۸×۱۰$^{-۴}$ تن کوچک / yd^{۳}
= ۱/۹۴۰×۱۰^{۳} اسلاگ / ft^{۳}

۱ گرم برسانتی مترمکعب (g/cm^{۳}) = ۱×۱۰^{۳} kg/m^{۳} = ۶۲/۴۳ lb/ft^{۳} =
۸/۳۴۵ lb/gal. = ۳/۶۱۳×۱۰$^{-۲}$ lb/in.^{۳} = ۰/۸۴۲۸ تن کوچک / yd^{۳} =
۱/۹۴۰ اسلاگ / ft^{۳}

۱ پوند بر فوت مکعب (lb/ft^{۳}) = ۱۶/۰۲ kg/m^{۳} = ۱/۶۰۲×۱۰$^{-۲}$ g/cm^{۳} =
۰/۱۳۳۷ lb/gal. = ۱/۳۵۰×۱۰$^{-۲}$ تن کوچک / yd^{۳} = ۳/۱۰۸×۱۰$^{-۲}$ اسلاگ / ft^{۳}

۱ پوند ـ جرم بر گالن (۱ lb/gal.) = ۱۱۹/۸ kg/m^{۳} = ۷/۴۸۱ lb/ft^{۳}
= ۰/۲۳۲۵ اسلاگ / ft^{۳}

۱ تن کوچک بر یارد مکعب (تن کوچک / yd^{۳}) = ۱/۱۸۷×۱۰^{۳} kg/m^{۳}
= ۷۴/۰۷ lb/ft^{۳}

۱ اسلاگ بر فوت مکعب (اسلاگ / ft^{۳}) = ۵۱۵/۴ kg/m^{۳} = ۰/۵۱۵۴ g/cm^{۳} =
۳۲/۱۷ lb/ft^{۳} = ۴/۳۰۱ lb/gal.

تندی

۱ متربرثانیه (m/s) = ۱۰۰ cm/s = ۳/۲۸۱ ft/s = ۳/۶۰۰ km/h =
۱/۹۴۴ گره = ۲/۲۳۷ mi/h

۱ سانتی‌متر ثانیه (cm/s) = ۰/۰۱ m/s = ۳/۲۸۱×۱۰$^{-۲}$ ft/s =
۳/۶۰۰×۱۰$^{-۲}$ km/h = ۱/۹۴۴×۱۰$^{-۲}$ گره = ۲/۲۳۷×۱۰$^{-۲}$ mi/h

۱ فوت برثانیه (ft/s) = ۰/۳۰۴۸ m/s = ۳۰/۴۸ cm/s = ۱/۰۹۷ km/h =
۰/۵۹۲۵ گره = ۰/۶۸۱۸ mi/h

۱ کیلومتر بر ساعت (km/h) = ۰/۲۷۷۸ m/s = ۲۷/۷۸ cm/s = ۰/۹۱۱۳ ft/s
= ۰/۵۴۰۰ گره = ۰/۶۲۱۴ mi/h

۱ گره یا مایل دریایی بر ساعت = ۰/۵۱۴۴ m/s = ۵۱/۴۴ cm/s =
۱/۶۸۸ ft/s = ۱/۸۵۲ km/h = ۱/۱۵۱ mi/h

۱ مایل بر ساعت (mi/h) = ۰/۴۴۷۰ m/s = ۴۴/۷۰ cm/s =
۱/۴۶۷ ft/s = ۱/۶۰۹ km/h = ۰/۸۶۹۰ گره

شتاب

۱ متر بر مجذورثانیه (m/s^{۲}) = ۱۰۰ cm/s^{۲} = ۳/۲۸۱ ft/s^{۲} = ۰/۱۰۲۰ G

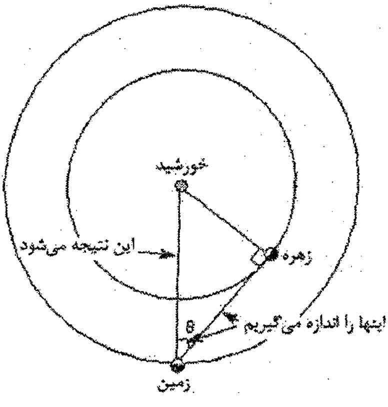
۱ سانتی‌متر بر مجذور ثانیه، یا Gal (cm/s^{۲}) = ۰/۰۱ m/s^{۲} =
۳/۲۸۱×۱۰$^{-۲}$ ft/s^{۲} = ۱/۰۲۰×۱۰$^{-۳}$ G

۱ فوت بر مجذور ثانیه (ft/s^{۲}) = ۰/۳۰۴۸ m/s^{۲} = ۳۰/۴۸ cm/s^{۲} =
۳/۱۰۸×۱۰$^{-۲}$ G

۱ G = ۹/۸۰۷ m/s^{۲} = ۹۸۰/۷ cm/s^{۲} = ۳۲/۱۷ ft/s^{۲}

بخش پنجم

اصطلاحات نجومی



بخش پنجم: اصطلاحات نجومی

۵ - ۱ واژه‌نامه توصیفی نجوم

آلفا - قنطورس

ستاره‌ای واقع در صورت فلکی قنطورس که نیمکره جنوبی آسمان قرار داد و در نواحی شمال آسیا و سراسر اروپا و آمریکای شمالی قابل مشاهده نیست. این ستاره با ۴/۳ سال نوری فاصله از منظومه خورشیدی نزدیک‌ترین ستاره همسایه خورشید است. آلفا قنطورس در واقع از سه ستاره تشکیل شده است.

آندرومدا

صورت فلکی واقع در نیمکره شمالی آسمان و نزدیک دو صورت قیفاووس و ذات الکرسی. این مجموعه برای پیشینیان مجسم کننده زنی اسیر در زنجیر بوده است.

ابر غول

شبه ستاره‌هایی که جرمشان صدها برابر جرم خورشید است. چنین اجرامی احتمالا هسته کهکشان‌های ابتدایی را تشکیل می‌دهند و پس از میلیون‌ها سال، به کهکشان‌های رادیویی بدل می‌گردند. ابر غول‌ها معمولا به رنگ‌های زرد، قرمز، سفید و یا آبی هستند.

ابر نواختر

هنگامی که مسیر واکنش‌های گرما - هسته‌ای ستاره‌ای تغییر یابد، انفجار عظیمی در آن رخ خواهد داد که ضمن آن بخش عمده مواد موجود در ستاره به فضای بین ستاره‌ای پرتاب شده و طی چند روز انرژی عظیمی برابر هزار میلیون سال تشعشع مداوم خورشید آزاد می‌کند، در این حالت درخشش ظاهری ستاره به تنهایی برابر یک کهکشان می‌گردد به طوری که حتی در روز روشن نیز قابل مشاهده خواهد بود.

اثر دوپلر

تغییر بسامد در امواج صوتی یا نوری به واسطه حرکت نسبی منبع و ناظر. این پدیده در سال ۱۸۴۲ میلادی توسط یوهان کریستیان دوپلر کشف شد. در مورد امواج نورانی، هرگاه جسمی با سرعت بسیار زیاد به ناظر نزدیک شود، طول موج نور دریافتی از آن، کوتاه‌تر از حالت سکون به نظر خواهد رسید یا به عبارتی رنگ آن به رنگ طیف آبی نزدیک‌تر خواهد شد و بالعکس هنگامی که جسم به سرعت از ناظر بگریزد طول موج نور آن بلندتر به چشم خواهد رسید و رنگ آن به سمت طیف نور سرخ انتقال خواهد یافت.

اعتدال

نقاط تلاقی مدار گردش ظاهری خورشید به دور زمین با امتداد صفحه استوای زمین. در چنین وضعیتی از آنجا که دایره حد فاصل روشنایی روز و تاریکی شب دقیقا از دو قطب زمین می‌گذرد، تمامی مدارها به دو قسمت مساوی تقسیم شده و در نتیجه در همه نقاط، ساعات روز با شب برابر می‌شود. چنین موقعیتی دو بار هر سال اتفاق می‌افتد. نخستین بار در اول فروردین ماه که اعتدال بهاری می‌نامند و دوم بار در اول مهرماه که آن را اعتدال پائیزی می‌خوانند.

افق

صفحه‌ای به ظاهر مسطح و دایره‌وار، مماس بر سطح زمین که در پیرامون ناظری ساکن، با شعاعی کم و بیش ثابت تا لبه آسمان امتداد می‌یابد. از دیدگاه اخترشناسی، افق دایره‌ای است عظیم در کره آسمان با فاصله زاویه‌ای ۹۰ درجه از سمت الراس. مرز افق از نظر اخر فیزیک در فاصله‌ای است که از ورای آن نور، پرتو الکترومغناطیسی و یا آثاری دال بر حضور ماده و انرژی به زمین نرسد. این فاصله برابر خواهد بود با حاصل ضرب عمر عالم در سرعت نور.

افق رویداد

محدوده‌ای که ماده و انرژی قادر به گریز از آن نیست. (سطح کُره‌ای به شعاع شوارتزشیلد) در افق رویداد سرعت گریز برابر سرعت نور است.

انبساط جهان

با توجه به پدیده انتقال سرخ در نور کهکشان‌های دور دست، ادوین هابل در سال ۱۹۲۳ میلادی اعلام نمود که جهان در حال انبساط است و کهکشان‌ها با سرعتی متناسب با فاصله‌اشان از یکدیگر می‌گریزند. از این دیدگاه عالم توده تک روند و همگنی است که در تمامی ابعاد اتساع و گسترش می‌یابد. کشف هابل در نهایت به پیدایش نظریه انفجار بزرگ و مدل‌های کیهان‌شناختی منجر گردید.

انبساط زمان

طبق اصول نسبیت، زمان برای هر جسم متحرک به نسبت سرعت آن به تعویق می‌افتد و هرچه سرعت جسم به سرعت سیر نور نزدیک‌تر شود، زمان وقوع یک رخداد در جسم از دیدگاه ناظر خارجی کندتر و کندتر می‌گذرد.

انتقال دوپلری

تغییر طول موج امواج صوتی و یا نوری به واسطه حرکت مسبی منبع و ناظر

انحنای فضا

طبق اصل نسبیت عام، گرانش موجب خمیدگی در مختصات چهار بعدی فضا - زمان می‌گردد، میزان خمیدگی مستقیما با جرم منبع گرانش ارتباط دارد، بدین گونه که هرچه جرم آن بیشتر باشد، انحنای بیشتری در فضای اطراف خود پدید خواهد آورد.

انفجار بزرگ

نظریه‌ای در پیامد نظریه انبساط جهان که ماده و انرژی موجود در عالم را بازمانده انفجاری همه جانبه و عظیم در آتشگویی بسیار بسیار چگال و متمرکز (آتشگوی آغازین) می‌داند. از وقوع این حادثه فرضی باید بیش از یازده میلیارد سال گذشته باشد و محصول اولیه آن کولاکی از نوکلئون‌ها، مقادیر بسیار زیادی ذره آلفا و اقیانوسی عظیم از پرتوهای گوناگون بوده است. زمینه تشعشی میکروموجی که بی‌وقفه از تمامی نقاط فضا به زمین می‌رسد شاهد خوبی بر احتمال وقوع چنین حادثه‌ای است. انفجار بزرگ قابل قبول‌ترین فرضیه در زمینه منشا و تاریخچه پیدایش عالم است.

انقلاب تابستانی

هنگامی از سال که خورشید بیشترین فاصله را با قطب جنوب کره آسمانی دارد. (اول تیرماه تقویم ایرانی) در این هنگام خورشید بر فراز مدار راس السرطان قرار دارد و طول ساعات روز نیمکره شمالی زمین به حداکثر میزان خود می‌رسد.

انقلاب زمستانی

هنگامی از سال که خورشید بیشترین فاصله را با قطب شمال کره آسمانی دارد. (اول دی ماه تقویم ایرانی) در این هنگام خورشید بر فراز مدار راس الجدی قرار دارد و طول ساعات روز در نیمکره شمالی زمین به حداقل میزان خود می‌رسد.

اوج
نقطه‌ای از مدار ماه یا ماهواره به دور سیاره زمین که دورترین فاصله را از آن داشته باشد و یا دورترین نقطه از مسیر حرکت هر جسم حول هر جسم مرکزی. با این تعریف هنگامی که سیاره‌ای در مسیر حرکت خود به دور خورشید به امتداد قطر اطول مسیر برسد در اوج قرار خواهد داشت.

اهله زهره
حالات و شکل‌هایی شبیه به اهله قمر که در فاصله بین دو مقارنه داخلی و خارجی زهره با زمین در سیمای ظاهری این سیاره مشاهده می‌شود.

بعد
فاصله زاویه‌ای هر جسم آسمانی بر روی استوای کره آسمان که نسبت به دایره اعتدال و در امتداد طول معدل النهار از صفر تا ۳۶۰ درجه (صفر تا ۲۴ ساعت) و از شرق به غرب اندازه گیری می‌شود. بعد در کره آسمان نظیر طول جغرافیایی در کره زمین است.

بیضی
مکان هندسی نقاطی از یک صفحه که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت، مقداری ثابت باشد دو نقطه مورد نظر کانون بیضی نام دارند.

پارسک
واحد طول نجومی. مطابق فاصله یک جسم فضایی که اختلاف منظر سالانه آن در زمین یک ثانیه قوس اندازه‌گیری شود، یک پارسک خواهد بود. یک پارسک $۳/۰۸۵۶\times۱۰^{۱۳}$ کیلومتر یا ۳/۲۶۱۶۳۳ سال نوری است.

پالسار (تپ اختر)
دسته‌ای از ستارگان نوترونی که احتمالا باقی مانده انفجار ابرنواختری هستند و به صورت چشمه‌های رادیویی، امواجی با دوره منظم از خود گسیل می‌کنند.

پیش ستاره
قسمتی از یک سحابی که ضمن فرایندهای تکاملی بدل به تاره خواهد شد.

تلسکوپ بازتابی

دوربین نجومی که در آن از آینه مقعر برای همگرایی پرتوهای دریافت شده استفاده می‌شود. این تلسکوپ توسط ایزاک نیوتن فیزیکدان بزرگ بریتانیایی برای اجتناب از خطای رنگی حاصل از عدسی‌های ساده تلسکوپ‌های شکستی، اختراع شد. در نوع پیشرفته و حرفه‌ای این گونه تلسکوپ‌ها، برای جلوگیری هرچه بیشتر از خطای رنگی، سطح بیرونی آینه را نقره‌پوش می‌کنند تا پرتوها در مسیر خود از لایه شیشه‌ای جذب کننده نور عبور نکنند.

تلسکوپ رادیویی

وسیله‌ای که برای دریافت و تفسیر امواج رادیویی گسیل شده از اجرام آسمانی به کار می‌رود. در این تلسکوپ به جای هر وسیله اپتیکی (آینه و عدسی) از آنتن‌های بزرگ بشقابی استفاده می‌شود.

تلسکوپ شکستی

وسیله‌ای که در آن یک عدسی، موجب همگرایی پرتوهای دریافتی از اجسام آسمانی می‌شود. ساده‌ترین نوع تلسکوپ‌های شکستی از دو عدسی شیئی و چشمی تشکیل می‌شوند. با وجود دقت بسیار زیادی که در ساخت عدسی‌ها می‌شود، همواره دو نقیصه در کار با تلسکوپ‌های شکستی مشاهده می‌گردد. یکی از این نقایص خطای رنگی است که معلول جذب مقادیری از شدت نور توسط شیشه عدسی بوده و دیگری خطای کروی که از شکل هندسی عدسی‌ها است.

جسم سیاه

مدلی فرضی و ایده‌آل از جسمی کاملا اندود شده که می‌تواند در دماهای پائین،پرتو فرو سرخ با طول موج‌های بلند از خود گسیل کند. شدت پرتو تابیده از چنین جسمی، تنها تابعی از دمای آن خواهد بود. جسم سیاه به همان اندازه که گسیلنده خوبی است درآشام خوبی نیز هست. بدین معنی که تمامی پرتوهایی را که به آن می‌تابند، صرف نظر از طول موج آنها جذب می‌کند.

جهان باز

یکی از مدل‌های فرضی کیهان‌شناختی که بر طبق آن سرعت نسبی دور شدن کهکشان‌های عالم از یکدیگر بیشتر از سرعت گریز باشد، جهان به طور نامحدودی انبساط خواهد یافت. شکل هندسی چنین جهانی هذلولی و پارامتر کند شدن آن برابر صفر فرض می‌شود. پراکندگی و گریز کهکشان‌ها در چنین مدلی تا آنجا پیش خواهد رفت که عملا هیچ گونه نور، امواج الکترومغناطیسی و گرانشی از کهکشانی به کهکشان دیگر نخواهد رسید و در نتیجه پایان موثر در جهان باز فرا می‌رسد.

جهان بسته

یکی از مدل‌های فرضی کیهان‌شناختی که بر طبق آن هرگاه سرعت نسبی دور شدن کهکشان‌های عالم از یکدیگر کمتر از سرعت گریز باشد، آهنگ انبساط رفته رفته و بعد از گذشت زمانی طولانی کندتر شده و تدریجا نیروی گرانش متقابل کهکشان‌ها بر انبساط غالب می‌شود. چنین جهانی از نظر هندسی کروی بوده و پارامتر کند شدن آن بیشتر از یک دوم فرض می‌شود. بسیار محتمل است که بعد از توقف کامل انبساط، در هم فرو ریختگی و انقباض آغاز گردد.

جهان پایدار

مدلی از مدل‌های فرضی کیهان‌شناختی که برای عالم، آغاز و پایانی از نظر زمان قائل نیست. مطابق این مدل انبساط جهان حاصل انفجار بزرگ نبوده بلکه آفرینش مدام ماده در فضاهای تهی موجب گریز کهکشان‌های عالم از یکدیگر می‌گردد. چنین جهانی از نظر اندازه نامحدود فرض می‌شود. شواهد کم و بیش قانع کننده‌ای برای احتمال بروز انفجار بزرگ در زمان‌های بسیار دور موجود است، همچنین مدرک عینی و رصدی برای زایش ماده در فضای خالی در دست نیست. در مجموع می‌توان گفت که مدل جهان پایدار مدل قابل اتکائی نیست. پارامتر کند شدن در جهان پایدار برابر یک دوم فرض می‌شود.

جهان نوسان کننده

یکی از مدل‌های کیهان‌شناختی که بر طبق آن انبساط حاصل از انفجار بزرگ سرانجام تحت تاثیر نیروی گرانش متوقف شده و از آن زمان انقباض آغاز می‌گردد. این انقباض نیز به دنبال تراکم نهایی (تشکیل آتشگوی ثانوی و وقوع انفجار بزرگ بعدی) جای خود را به انبساط مجدد خواهد داد. چنین نوسانی بین حالت‌های انبساط و انقباض، در صورت وجود می‌تواند پایدار یا میرا باشد.

حد روچ

محدوده بین ارتفاع ۱/۴۴ تا ۲/۴۴ برابر شعاع هر سیاره از سطح آن. طبق کشف روش هیچ قمر طبیعی یا مصنوعی نمی‌تواند در محدوده یاد شده واقع شود.

حرکت انتقالی

حرکت مداری سیارات به دور خورشید و حرکت هر جسم دیگر از جمله اقمار، حول جرم مرکزی. حرکت انتقالی زمین به دور خورشید، خلاف عقربه‌های ساعت و بر مسیری بیضوی صورت می‌گیرد. این مدار خود را با سرعت ۳۰ کیلومتر بر ثانیه در طول مدت ۳۶۵/۲۵۶ روز خورشید دور می‌زند.

حرکت تقدیمی

جابجایی تدریجی راستای محور زمین که در هر ۲۵۸۰۰ سال مخروط فرضی و مضاعفی را در فضا رسم می‌کند. این حرکت که حاصل گرانش متقابل ماه و زمین است، موجب تعویض ستاره قطبی و جابجایی سایر ستارگان دور قطبی به سمت مغرب در طول مدت زمان یاد شده می‌شوند.

حرکت خاص

جابجایی نسبی برخی از اجسام آسمانی، حاصل حرکت آنها در صفحه عمود بر امتداد دید ناظر زمینی. میزان این جابجایی در طول یک سال و بر حسب ثانیه قوس اندازه گیری می‌شود.

حرکت رجعی

تغییر مسیر ظاهری یک سیاره به عقب و سپس بازگشت مجدد آن به مدار معمول پس از طی یک مسیر حلقوی. این حرکت تنها از دید ناظر زمینی قابل مشاهده بوده و در اثر جلو افتادن زمین در مدار از سیاره مورد نظر صورت می‌گیرد.

حرکت وضعی

دوران یک سیاره یا هر جسم آسمانی دیگر حول محور قطب‌های خود. حرکت وضعی زمین موجب پیدایش شب و روز می‌شود.

حضیض

نقطه ای از مدار حرکت انتقالی یک سیاره به دور خورشید که نزدیک‌ترین فاصله را با خورشید دارد.

خروج از مرکز

از نظر هندسی خروج از مرکز یک بیضی، نسبت فاصله کانونی است به قطر بزرگ‌تر و آن را با رابطه $e=۲c/۲a$ محاسبه می‌نمایند که در آن $۲c$ قطر اطول است. مقدار e که از صفر تا یک تغییر می‌کند، نشان دهنده میزان کشیدگی بیضی است. هرگاه $e=۰$ باشد، دو کانون بر هم منطبق هستند و در واقع شکل، یک دایره است در حالی که $e=۱$ نشان دهنده کشیده‌ترین بیضی است.

خسوف

وضعیتی که در آن زمین با قرار گرفتن میان خورشید و ماه، مانع تابش نور آفتاب به سطح ماه شود. خسوف بر حسب اینکه سایه زمین تا چه میزان سطح ماه را پوشانده باشد، کامل یا جزئی خواهد بود. در هر ۱۸ سال تقریبا ۳۹ خسوف رخ می‌دهد.

درخشندگی

روشنایی دادن، فروغ بخشیدن و پرتو افکندن مانند درخشش عناصر گداخته و درخشش اجسام آسمانی. در اخترشناسی، درخشندگی خورشید به عنوان مبنا و برابر یک در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال شعرای یمانی که ۲۷ بار درخشان تر از خورشید است، درخشندگی برابر ۲۷ دارد.

درخشندگی ظاهری

مقدار کل انرژی که در واحد سطح در واحد زمان از جسمی آسمانی دریافت می‌کند.

درخشندگی مطلق

مقدار کل انرژی که در واحد زمان از هر جسمی آسمانی در فضا منتشر می‌شود. روشنایی حقیقی هر جسم فضایی، درخشندگی مطلق آن جسم است.

دوره تناوب

مدت زمان عملی که به صورت دوره‌ای و تناوبی تکرار شود. دوره تناوب را معمولا با نماد T نشان می‌دهند. در امواج و حرکات ارتعاشی به مدت زمانی اطلاق می‌شود که نقطه‌ای از موج یا ارتعاش بعد از یک دوره حرکت به وضع اولیه خود برگردد.

راه شیری

خورشید همراه با هزاران میلیون ستاره دیگر مجموعه‌ای را تشکیل می دهد که به کهکشان موسوم است. کهکشان ما شکلی قرص مانند همچون سنگ آسیا با ضخامت ۶۰۰۰ سال نوری و قطری در حدود ۱۰۰۰۰۰ سال نوری دارد. از آنجا که منظومه ما در داخل این قرص و به فاصله ۳۰۰۰۰ سال نوری از مرکز هسته آن قرار گرفته و ناظر زمینی در امتداد صفحه قرص به آن نگاه می‌کند، منظره این کهکشان در آسمان شب به دور از چراغ‌های مصنوعی، نوار پهنی است که با درخشندگی نه چندان زیاد از میانه آسمان عبور کرده و افق شمال شرق را به جنوب غربی متصل می‌سازد. عرض این نوار نامنظم از ۵ تا ۵۰ درجه تغییر می‌کند.

راس السرطان

مدار ۲۳/۵ درجه عرض شمالی زمین. ساکنین این نواحی در اولین روز تابستان (آغاز انقلاب تابستانی) خورشید را که در برج سرطان واقع شده در ۱۲ ساعت ظهر درست در سمت الراس می‌بینید.

رشته اصلی
نواری در نمودار هرتسپرونگ - راسل که بیش از ۸۰ درصد کل ستارگان از جمله خورشید را در بر می‌گیرد.

روز متوسط خورشیدی
روز قراردادی برابر ۲۴ ساعت که چهار دقیقه و پنجاه و شش ثانیه از روز نجومی طولانی‌تر است.

روز نجومی
مدت زمان یک دوران کامل زمین به دور محور حرکت وضعی که برابر ۲۳ ساعت و پنجاه و شش دقیقه و چهار ثانیه است.

زاویه میل
زاویه میان مدارهای میل (مدارهایی که با معدل النهار یا استوای آسمانی موازی‌اند) زاویه میل هر جسم آسمانی نسبت به استوای آسمانی سنجیده می‌شود، در صورتی که جسم در نیمکره شمالی آسمان واقع باشد، زاویه میل آن را مثبت و زوایای مربوط به نیمکره جنوبی آسمان را منفی تلقی می‌کنند. زاویه میل در کره آسمان نظیر عرض جغرافیایی در کره زمین است.

زمان محلی
زمانی که مستقیما از طریق تعیین موقعیت نقاط زمین نسبت به خورشید به دست می‌آید.

سال نجومی
مدت زمان یک گردش کامل زمین به دور خورشید که نسبت به موقعیت ستارگان سنجیده می‌شود و برابر ۳۶۵/۲۵۶۴ روز متوسط خورشیدی است.

ستارگان رشته اصلی
ستارگانی با اندازه و دمای معمولی شامل ۸۰ درصد کل ستارگان از جمله خورشید که نواری را در نمودار هرتسپرونگ - راسل تشکیل می‌دهند.

ستارگان متغیر
ستارگانی که نور دریافتی آنها در زمان‌های مختلف تغییر می‌کند. علل گوناگونی می‌تواند موجب بروز چنین حالتی گردد که بر پایه آن علل می‌توان ستارگان متغیر را به ترتیب زیر دسته بندی نمود:

الف) قیفاووسی‌ها یا ستارگانی که تغییر حجم تناوبی، عامل تغییر میزان درخشندگی آنهاست.

ب) نواختران و ابرنواختران که انفجارهای عظیم درونی باعث افزایش سریع نور آنها می‌شود.
ج) دوتایی‌های گرفتی که در آنها عبور مولفه کم فروغ‌تر از مقابل ستاره پرنورتر موجب گرفت می‌شود.

ستاره تپنده
ستاره‌ای که دارای تغییرات تناوبی حجم بوده و به همین سبب روشنایی متغیری دارد.

ستاره کوتوله
نامی که به ستارگان رشته اصلی، در مقایسه با غولها و ابرغولها داده‌اند، خورشید از جمله ستارگان کوتوله محسوب می‌شود.

ستاره نوترونی
ستاره‌ای با چگالی بسیار بالا و رمبیده که مرکز آن عمدتا از نوترون تشکیل شده است. اگر کره‌ای با چگالی متعارف به کره‌ای نوترونی تبدیل شود قطر آن به ۱/۱۰۰۰۰۰ میزان اولیه کاهش می‌یابد و این در حالی است که جرم و گرانش آن کم و بیش ثابت مانده است. یک ستاره نوترونی معمولا به دنبال نواختری شکل می‌گیرد.

سمت
زاویه‌ای که امتداد نقطه دید ناظر تا یک جسم آسمانی با جهت شمال می‌سازد. این زاویه از غرب به شرق و تا محل تلاقی افق با دایره عمودی گذرنده از جسم سنجیده می‌شود.

سیاهچاله
در یک ستاره بزرگ به دنبال انفجار نواختری و پایان فعالیت‌های گرما - هسته‌ای، هرگاه نیروی انقباض و فروریزش اجزای هسته اتم‌های تشکیل دهنده ستاره بر فشار اعمال شونده توسط نوترون‌های پیشی بگیرد، با کاهش فواصل هسته، حجم ستاره به سمت صفر میل می‌کند و این در حالی است که جرم آن کم و بیش بدون تغییر می‌ماند، در چنین وضعیتی، یک ستاره یک میلیارد تنی شعاعی برابر $۱۰^{-۱۳}$ سانتی‌متر (شعاع یک پروتون) خواهد داشت. گرانش سطحی این جسم فوق چگال به حدی بالاست که نه ماده، نه نور و نه سایر صورتهای انرژی، قادر به گریز از آن نیستند.

شعاع شوارتزشیلد
شعاع بحرانی که هرگاه جسمی با توجه به جرم خاص خود به آن میزان انقباض یابد به سیاهچاله بدل می‌شود. این شعاع که برای هر جسم مقدار به خصوصی دارد، با جرم آن نسبت مستقیم دارد.

صورت فلکی

منطقه‌ای از کره آسمان که با توجه به شکل بندی و آرایش ظاهری ستارگان به اشیا، حیوانات و اشخاص مختلف تشبیه شده است. نام بیشتر صورت‌های فلکی ریشه‌ای اساطیری و افسانه‌ای داشته و طلوع و غروب و همچنین موقعیتشان نسبت به ماه و خورشید و سیارات، در گذشته منشا خیر و شر و حوادث زمینی تلقی می‌شد. با این وجود همان شکل بندی و نام گذاری که با مقاصد و باورهای غالبا خرافی صورت گرفته، امروز به عنوان بهترین شیوه دسته بندی ظاهری ستارگان در علمی‌ترین اطلس‌های اخترشناسی به کار می‌رود.

طول جغرافیایی

قوس بین نصف النهار گذرنده از نقطه‌ای مورد نظر در سطح زمین، و نصف النهار مبدا که بر روی دایره استوا و بر حسب زاویه و آحاد آن اندازه‌گیری می‌شود، طول جغرافیایی هر نقطه بر حسب قرارگیری آن در شرق یا غرب نصف النهار مبدا، شرقی یا غربی خوانده می‌شود.

طول موج

فاصله میان دو ماکزیمم یا دو می‌نیمم متوالی از یک دسته موج. هر موج، از جمله امواج مربوط به پرتوهای الکترومغناطیسی با دو ویژگی دامنه، طول موج شناخته می‌شود.

طیف جذبی

طیفی که پیوسته نبوده و در زمینه آن خطوط تاریکی معروف به خطوط جذبی مشاهده می‌شود. مناطق تاریک، مربوط به طول موجهای به خصوصی است که توسط ماده شفاف حائل میان ناظر و منبع، از طول موجهای پیوسته اولیه جذب و حذف گردیده است. گازهای نسبتا سرد لایه‌های بیرونی جو ستارگان، موجب جذب طول موج‌های به خصوصی از نور آنها شده و از این رو طیف ستارگان از نوع جذبی است.

عرض جغرافیایی

فاصله زاویه‌ای نقطه‌ای مورد نظر در سطح زمین تا خط استوا، بر حسب درجه و اجزای آن، چنین عرضی بر حسب اینکه نقطه مزبور در نیمکره شمالی یا جنوبی زمین باشد، جنوبی یا شمالی خوانده می‌شود.

غول قرمز

هرگاه ستاره‌ای تمام ئیدروژن مرکزی خود را به مصرف فعالیتهای گرما - هسته‌ای برساند به ستاره غول قرمز بدل می‌شود. غول‌های قرمز حجمی فوق‌العاده زیاد دارند و چون حجم چنین

ستارگانی افزایش بسیار بسیار زیادی دارد، کاهش میزان چگالی اولیه در آنها اجتناب پذیر خواهد بود. این افزایش حجم که به صورت انبساط لایه‌های بیرونی ستاره تجلی می‌یابد، با انقباض تدریجی هسته آن همراه است، از سوی دیگر دمای سطحی ستاره به هنگام بروز این تغییرات رفته رفته کاهش می‌پذیرد و غول سرخ مقادیر قابل توجهی از جرم خود را به صورت نشت گازها از لایه رقیق بیرونی از دست می‌دهد.

قانون هابل

قانونی که تناسب میان فاصله کهکشان‌ها و سرعت گریزشان از یکدیگر را با توجه به پدیده انتقال سرخ بیان می‌کند.

قدر

میزان روشنایی یک ستاره که با مقیاسی لگاریتمی سنجیده می‌شود. به ازای افزوده شدن یک واحد به قدر، روشنایی ستاره ۲/۵۱۲ بار کاهش می‌یابد. بنابراین هرچه میزان عددی قدر یک ستاره بیشتر باشد، ستاره کم فروغ‌تر است.

قدر تابش سنجی

میزان قدر یک جسم آسمانی هنگامی که روشنایی آن در تمامی طول موج‌های مرئی و غیر مرئی سنجیده شود.

قدر ظاهری

میزان روشنای ظاهری یک ستاره به همان گونه که چشم غیر مسلح از زمین مشاهده می‌کند.

قدر مطلق

قدر ظاهری یک ستاره آنگونه که از فاصله ۱۰ پارسک مشاهده شود.

قطر زاویه‌ای

قطر قرص ظاهری خورشید، ماه و سیارات از دید ناظر زمینی که بر حسب آحاد زاویه یا طول قوس به دست می‌آید.

قوانین کپلر

سه قانون عمومی و بنیادی در خصوص حرکت سیارات منظومه خورشیدی که در قرن ۱۷ میلادی از سوی یوهان کپلر دانشمند و اخترشناس بزرگ آلمانی کشف و ارائه گردید.

کوتوله سفید

ستاره‌ای سفید رنگ با چگالی فوق العاده زیاد. هنگامی که ستاره‌ای متوسط همانند خورشید به مرحله غول قرمز رسید و رفته رفته ذخیره انرژی هسته‌ای خود را به انتها رسانید گرانش در غیاب انرژی درونی، ستاره را تدریجا منقبض می‌سازد (ستاره از درون می‌رمبد) و این انقباض تا آنجا ادامه می‌یابد که چگالی هسته احتمالا به ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ گرم در هر سانتی متر مکعب برسد. پوسته بیرونی یک کوتوله سفید دمایی بیش از ۱۰۰۰۰۰ درجه سانتیگراد دارد اما با تابش تدریجی گرمای اولیه به فضای اطراف، سطح ستاره سرد و سردتر می‌شود.

کهکشان بیضوی گون

گونه‌ای از کهکشان‌های عالم که شکلی بیضی مانند دارند. بزرگ‌ترین کهکشان‌های کیهان از نوع بیضی‌گون هستند. با این وجود، بیضی‌گون‌های کوچک خیلی بیشتر از نمونه‌های بزرگ‌تر یافت می‌شوند.

کهکشان مارپیچی

گونه‌ای از کهکشان‌های عالم که دارای هسته‌ای برآمده و بازوهایی پیچ خورده‌اند. اکثر کهکشان‌های عالم از جمله راه شیری از نوع مارپیچی‌اند. این دسته از کهکشان‌ها خود به دو گروه ساده و مسدود تقسیم تقسیم می‌شوند. در هر دو نوع کهکشان مارپیچی ساده و مسدود، بزرگی برآمدگی هسته و میزان پیچیدگی بازوها با یکدیگر تناسب دارند.

کهکشان مارپیچی ساده

دسته‌ای از کهکشان‌های مارپیچی که بازوهای آنها مستقیما از هسته مرکزی شروع و در فضای اطراف گسترده شده‌اند.

کهکشان نامنتظم

کهکشان‌هایی که از نظر شکل ظاهری در هیچ یک از دو گروه مارپیچی و بیضی‌گون جای نمی‌گیرند. احتمالا بی شکلی این گونه کهکشان‌ها معلول انفجارهای عظیمی در مرکز و یا برخورد آنها با کهکشان‌های اطراف است. ابرهای ماژلانی واقع در نیمکره جنوبی آسمان، از جمله کهکشان‌های نامنتظم هستند.

گرانش

نیروی جاذبه، خاصیت عام و بنیادی حاکم بر عالم ماده که قانون گرانش عمومی نیوتن مقدار کمی آن را به دست می‌دهد.

متغیرهای قیفاووسی

دسته‌ای از ستارگان متغیر که تغییر حجم تناوبی آنها موجب می‌شود تا نور دریافتی از آنها در زمان‌های مختلف دستخوش تغییر گردد.