مکانیک

بررسی و تحلیل کتاب‌های

دانیل کلپنر، روبرت جی کلنکو
و
دیوید مورین

تالیف و ترجمه:
دکتر محمد به تاج، پوریا آیریا

بسم الله الرحمن الرحیم

بررسی

مکانیک کلپنر ـ کلنکو

و

دیوید مورین

مؤلفین

دکتر محمد به تاج

پوریا آیریا

به‌نام پروردگار یگانه

کتاب حاضر، کتابی است مناسب برای دانشجویان رشته‌های فیزیک و فنی مهندسی که درس فیزیک پایه‌ی ۱ برای آن‌ها ارایه می‌شود و دانش‌آموزانی که قصد شرکت در آزمون‌های المپیاد دانش‌آموزی را دارند. تنوع و سطح مسایل این کتاب کمی از کتاب هالیدی بالاتر مطرح شده است.

کتاب آشنایی با مکانیک توسط اساتید دانشگاه، برکلی به نگارش در آورده شده است. ما در این کتاب به بررسی و حل مسایل آشنایی با مکانیک (دانیل کلپنر ـ کلنکو) پرداخته‌ایم.

شایان ذکر است که این کتاب صرفاً جنبه‌ی حل‌المسایل را ندارد. در بررسی این کتاب برخی از مسایل به تفصیل شرح داده شده است و برای جلوگیری از کاستن خلاقیت مسایلی جدید با نگرش‌های نو طرح شده است.

در دانشگاه‌ها به علت کمبود وقت برای حل مسایل، نه صرفاً نوشتن حل مساله، بلکه آموزش نوع نگرش به مسایل فیزیک و علی‌الخصوص مکانیک که نیازمند خلاقیت بیشتری نسبت به مسایل دیگر فیزیک در حد پایه دارد و آموزش از طریق حل مساله و ارایه تاکتیک‌های برخورد با مسایل گوناگون، ما را بر آن داشت که به ارایه این کتاب بپردازیم تا به دانشجویان محترم یاری برسانیم.

در بخش دوم این کتاب برای تکمیل نگاه گفته شده به بررسی مسایل کتاب مکانیک نوشته‌ی دیوید مورین (از اساتید محترم دانشگاه هاروارد) پرداخته شده است. کتاب مکانیک مورین هم در دانشگاه‌های معتبر دنیا در دوره‌ی کارشناسی تدریس می‌شود.

هر چند تلاش شده است مجموعه‌ی حاضر دارای کمترین خطا باشد اما با گوشزد کردن خطاهای احتمالی از طرف خوانندگان محترم ما را در برطرف کردن آن در ویرایش‌های بعدی یاری می‌نمایید.

مولفین

mblpa@yahoo.com

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل اول

بردارها و مکانیک

۱. دو بردار $A=\left(2\hat{i}-3\hat{j}+7\hat{k}\right)$ و $B=\left(5\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}\right)$ مفروض‌اند، پیدا کنید؟

۱) $A+B$ ۲) $A-B$ ۳) $A.B$ ۴) $A\times B$

۲. کسینوس زاویه بین $A=\left(3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)$ و $B=\left(-2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}\right)$ را به‌دست آورید؟

۳. کسینوس‌های هادی یک بردار، کسینوس زوایایی هستند که آن بردار با محورهای مختصات می‌سازد، کسینوس زوایای بین یک بردار و محورهای y, x و z را معمولاً با γ, β, α نشان می‌دهند. با استفاده از هندسه و یا جبر برداری ثابت کنید که $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$.

۴. نشان دهید، اگر $|A-B|=|A+B|$ باشد، آن‌گاه A عمود است بر B.

۵. ثابت کنید که قطرهای یک لوزی بر هم عمودند.

۶. با استفاده از ضرب برداری، قانون سینوس‌ها را در دو یا سه سطر ثابت کنید.

(**راهنمایی:** مساحت مثلثی را که از سه بردار C, B, A تشکیل شده در نظر بگیرید که برای آن $A+B+C=0$).

۷. فرض کنید $\hat{a}$ و $\hat{b}$ بردارهای یکه در صفحه xy باشند، و با محور xها به‌ترتیب زوایای θ و ϕ بسازند. نشان دهید $\hat{a}=\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j}$ و $\hat{b}=\cos\phi\hat{i}+\sin\phi\hat{j}$ و با استفاده از جبر برداری ثابت کنید.

$$\cos(\theta-\phi)=\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi$$

۸. بردار یکه‌ای بیابید که بر بردارهای $A=\left(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)$ و $B=\left(2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}\right)$ عمود باشد.

۹. نشان دهید که حجم یک متوازی السطوح به ابعاد A, B, C از رابطه $A.(B\times C)$ به دست می‌آید.

۱۰. دو نقطه را که در r_1 و r_2 واقع شده و به فاصله $r=|r_1-r_2|$ از یکدیگر واقع شده‌اند در نظر می‌گیریم. بردار A را که از مبدأ به نقطه‌ای روی خط واصل r_1 و r_2 و به فاصله xr از r_1 وصل می‌شود پیدا کنید، در صورتی که x یک عدد مشخص است.

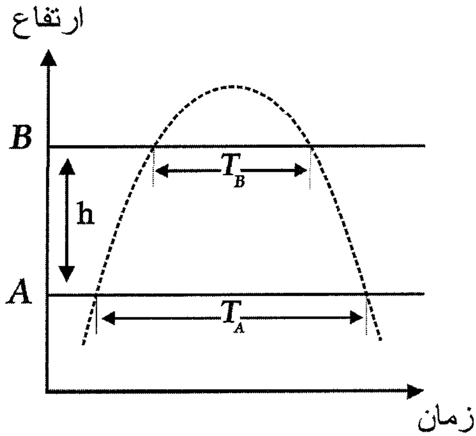
۱۱. فرض کنید A برداری اختیاری و $\hat{n}$ برداریکه در جهتی معین باشد، نشان دهید.

$$A=(A.\hat{n})\hat{n}+(\hat{n}\times A)\times\hat{n}$$

۱۲. شتاب گرانشی را می‌توان با پرتاب یک جسم به طرف بالا و اندازه‌گیری زمان لازم برای عبور از دو نقطه معین مسیر در هر دو جهت اندازه گرفت. اگر زمان لازم برای عبور جسم از یک خط افقی A در هر دو جهت برابر با T_A و برای خط دیگر B برابر T_B باشد، با فرض ثابت بودن شتاب نشان دهید که اندازه این شتاب برابر است با:

$$g=\frac{8h}{T_A^2-T_B^2}$$

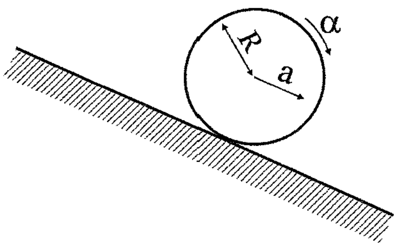
که در آن h ارتفاع خط B نسبت به خط A است (شکل ۱ـ ۱)



شکل ۱ ـ ۱

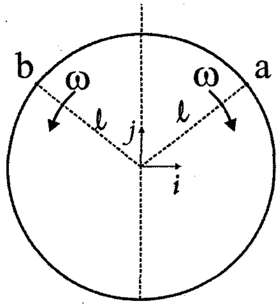
۱۳. آسانسوری با سرعت یکنواخت از زمین به طرف بالا شروع به حرکت می‌کند در زمان T_1 یکی از سرنشینان سنگی را از کف آن رها می‌سازد. این سنگ با شتاب $g=9.8\frac{m}{s^2}$ سقوط می‌کند و بعد از T_2 ثانیه به زمین می‌رسد. ارتفاع آسانسور از زمین را در لحظه T_1 پیدا کنید.

۱۴. استوانه‌ای به شعاع R روی سطح شیب‌داری، بدون لغزش به طرف پایین می‌غلتد (شکل ۲ـ۱). محور آن دارای شتاب a موازی با سطح شیب‌دار است، α شتاب زاویه‌ای استوانه، چقدر است؟



شکل ۲ ـ ۱

۱۵. منظور از سرعت نسبی، سرعت نسبت به یک دستگاه مختصات موردنظر است. (از واژه سرعت، به تنهایی معنای سرعت نسبت به دستگاه مخصات ناظر استنباط می‌شود). (الف) مشاهده شده است که نقطه‌ای دارای سرعت V_A نسبت به دستگاه مختصات A است. سرعت آن نسبت به دستگاه مختصات B که به اندازه R از دستگاه A فاصله دارد، چقدر است؟ (R نسبت به زمان می‌تواند تغییر کند).(ب) ذرات a و b در دو جهت مخالف هم روی دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ω در حرکت‌اند (شکل ۳ـ۱) در $t=0$ هر دوی آن‌ها در نقطه $r=\ell\hat{j}$ قرار دارند، که l شعاع دایره است. سرعت a را نسبت به b پیدا کنید.



شکل ۳ ـ ۱

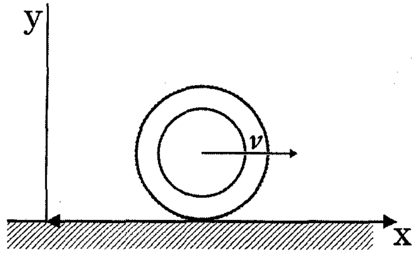
۱۶. یک اتومبیل مخصوص مسابقه، در 30 ثانیه می‌تواند به‌طور یکنواخت شتاب بگیرد و به سرعت 200 کیلومتر بر ساعت برسد. بیشینه شتاب کند کننده ناشی از ترمز آن نمی‌تواند از 0.7g تجاوز کند. زمان کمینه لازم برای پیمودن نیم کیلومتر چقدر است؟ فرض می‌کنیم که اتومبیل در زمان شروع و پایان کار در حالت سکون است.

(**راهنمایی:** نمودار سرعت بر حسب زمان می‌تواند مفید باشد)

۱۷. ذره‌ای با سرعت شعاعی ثابت $\dot{r}=4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ در صفحه حرکت می‌کند. سرعت زاویه‌ای آن ثابت و به مقدار $\dot{\theta}=2\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ است. وقتی که ذره در فاصله 3 متر از مبدأ قرار دارد (الف) بزرگی سرعت و (ب) بزرگی شتاب آن را پیدا کنید.

۱۸. آهنگ تغییر شتاب را گاهی اوقات "جرک" می‌گویند. اندازه و جهت جرک را برای ذره‌ای که روی دایره‌ای به شعاع R با سرعت زاویه‌ای ω حرکت می‌کند پیدا کنید. با رسم نمودار برداری، مکان، سرعت، شتاب و جرک لحظه‌ای را نشان دهید.

۱۹. لاستیک اتومبیلی در امتداد خط راست و بدون لغزش می‌غلتد (شکل ۴ـ۱). مرکز آن با سرعت ثابت V حرکت می‌کند. ریگ کوچکی در شیار آن جا گرفته است که در $t = 0$ با زمین تماس پیدا می‌کند. مکان، سرعت، و شتاب ریگ را به صورت تابعی از زمان به‌دست آورید.



شکل ۴ ـ ۱

۲۰. ذره‌ای در امتداد یک مارپیچ و به طرف خارج آن در حرکت است. مسیر آن به وسیله رابطه $r=A\theta$ مشخص شده است که در آن A مقدار ثابت و برابر است با $A=\left(\frac{1}{\pi}\right)\frac{m}{rad}$. مقدار θ هم با زمان مطابق رابطه $\theta=\frac{\alpha t^2}{2}$ افزایش می‌یابد که در آن α مقداری ثابت است.

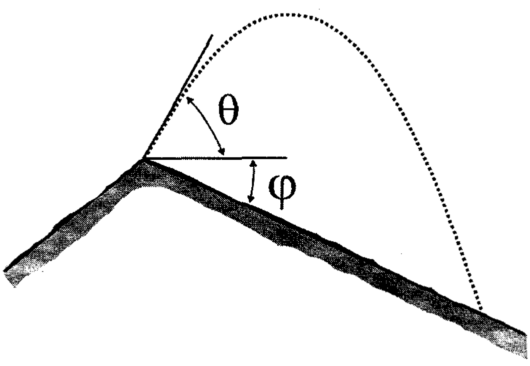
(الف) شکل مسیر حرکت را رسم کنید، و سرعت و شتاب تقریبی را در چند نقطه نشان دهید.

(ب) نشان دهید که شتاب شعاعی وقتی که $\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\,rad$ است، برابر صفر می‌شود.

(ج) در چه زاویه‌ای شتاب مماسی و شعاعی با هم برابرند؟

۲۱. پسربچه‌ای در بالای تپه‌ای ایستاده است، این تپه دارای شیب یکنواخت (با زاویه ϕ)به طرف پایین است. با چه زاویه‌ای از خط افق (θ) باید سنگی را پرتاب کند تا بیشترین بردار را داشته باشد

(شکل ۵ ـ ۱)



شکل ۵ ـ ۱

بردارها و مکانیک

(۱ـ۱

$$\vec{A}+\vec{B}=7\hat{i}-2\hat{j}+9\hat{k}$$

$$\vec{A}-\vec{B}=(2-5)\hat{i}+(-3-1)\hat{i}+(7-2)\hat{k}$$

$$=-3\hat{i}-4\hat{i}+5\hat{k}$$

$$\vec{A}.\vec{B}=10-3+14=21$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 7 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}=3\hat{i}+3\hat{j}+17\hat{k}$$

(۲ـ۱

$$\vec{A}.\vec{B}=|A||B|\cos\theta=A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z$$

$$\cos\theta=\frac{A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z}{|A||B|}=\frac{-10}{\left(\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{14}\right)}$$

$$\cos\theta=-0.805$$

(۳ـ۱

$$V=(a,b,c) \quad \Rightarrow \quad u=\frac{V}{|V|}=\frac{a\hat{i}+b\hat{j}+v\hat{k}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\cos\alpha\,\hat{i}+\cos\beta\,\hat{j}+\cos\gamma\,\hat{k}$$

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad , \quad \cos\beta\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad , \quad \cos\gamma=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=1$$

(۱ـ۴

اگر $|A+B|=|A-B|$ آن‌گاه $\vec{A}\perp\vec{B}$

$$\sqrt{\left(A_x-B_x\right)^2+\left(A_y-B_y\right)^2+\left(A_z-B_z\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(A_x+B_x\right)^2+\left(A_y+B_y\right)^2+\left(A_z+B_z\right)}$$
$$2A_xB_x+2A_yB_y+2A_zB_z=0 \quad \Rightarrow \quad A.B=0$$

توجه شود که می‌توانیم این اثبات را از $A.B$ شروع کنیم و نشان دهیم $|A+B|=|A-B|$ برقرار است.

(۱ـ ۵

شرط لوزی بودن این است که دو ضلع با یکدیگر برابر و اقطار بر هم عمود باشند با توجه به این‌که $|\vec{B}|=|\vec{A}|$ می‌توان نوشت:

$$\left(A\times\vec{B}\right).\left(\vec{A}-\vec{B}\right)=$$
$$\left[\left(A_x+B_x\right)\hat{i}+\left(A_y+B_y\right)\hat{j}\right].\left[\left(A_x-B_y\right)+\left(A_x-B_y\right)\right]$$
$$A_x^2-B_x^2+A_y^2-B_y^2=0$$

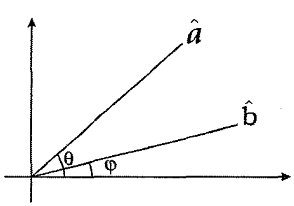
(۱ـ۶

یک مثلث در نظر می‌گیریم:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)$$
$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{B}\times\vec{C}=\vec{C}\times\vec{A} \quad \Rightarrow \quad AB\sin\gamma=BC\sin\alpha=CA\sin\beta$$
$$\frac{\sin\alpha}{|A|}=\frac{\sin\beta}{|B|}=\frac{\sin\gamma}{|C|}$$

(۱ـ۷

$$|\hat{a}|=1 \quad , \quad |\hat{b}|=1$$



$$\hat{a}.\hat{b}=|\hat{a}||\hat{b}|\cos\left(\theta-\varphi\right)=\cos\left(\theta-\varphi\right)$$
$$\hat{a}.\hat{b}=\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta h\varphi$$
$$\cos\left(\theta+\varphi\right)=\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi$$

۱ـ۸)

$$\vec{A}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k} \qquad \vec{B}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$$

$$\vec{N}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=2\hat{i}-5\hat{j}-3\hat{k}$$

$$\hat{n}=\frac{\vec{N}}{|N|}=\frac{2i-5\hat{j}-3\hat{k}}{\sqrt{38}}$$

که هم $\pm\hat{n}$ بر این دو بردار عمود است.

۱ـ۹)

حجم یک متوازی‌السطوح برابر است با: مساحت قاعده در ارتفاع به‌منظور بدست آوردن مساحت قاعده باید از یک رأس به ضلع مجاور عمود کنیم , بدست می‌آید $A\sin\theta$ و سپس در ارتفاع ضرب کنیم داریم:

$$V=\left|\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right|$$

۱ـ۱۰)

$$r=\left|r_1-r_2\right| \quad \vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$$

$$\vec{r}=\left(\vec{r}_2-\vec{A}\right)+\left(\vec{r}-\vec{A}\right)$$

$$r=xr+\left(\vec{r}_2-\vec{A}\right)$$

۱ـ۱۱)

A را یک بردار دلخواه در نظر می‌گیریم و $\hat{n}$ یک واحد در یک جهت ثابت در نظر می‌گیریم.

$$C=\left(\hat{n}\times\vec{A}\right)\times\hat{n} \quad , \quad B=(A.\hat{n})\hat{n}$$

در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که زاویه میان A و $\hat{n}$ ، θ باشد حال A را به بردار موازی با $\hat{n}$ و عمود بر $\hat{n}$ تجزیه می‌کنیم. B مولفه موازی را می‌دهد و مولفه عمودی باید $|A|\sin\theta$ باشد می‌توان ثابت کرد که $(\hat{n}\times A)\times n$ بر $\hat{n}$ عمود است.

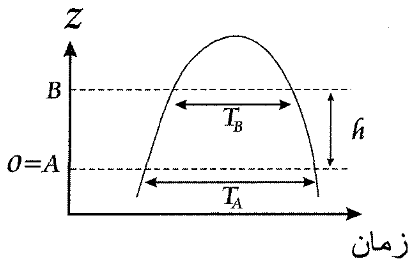
$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\left(\vec{A}.\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$$

با استفاده از قاعده BAC − CAB داریم:

$$\hat{n}\times\left(\hat{n}\times\vec{A}\right)=\hat{n}\left(\hat{n}.\vec{A}\right)-\vec{A}\left(\hat{n}.\hat{n}\right)$$

$$A=(A.\hat{n})\hat{n}+(\hat{n}\times A)\times\hat{n}$$

(۱ـ۱۲



از حرکت جسم در جهت y, x صرف‌نظر می‌کنیم و فرض می‌کنیم که فقط جهت z حرکت داشته باشد. زمان $t = 0$ را برای ارتفاع A در نظر می‌گیریم و این ارتفاع را هم $z = 0$ در نظر می‌گیریم. از $\frac{d^2 z}{dt^2} = -g$ داریم:

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0$$

که در این‌جا $z=0$ است. در چه زمان‌هایی پرتابه ما در $A(z=0), B(z=h)$ است؟

$$A: 0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \qquad t = 0 \ , \ \frac{2v_0}{g}$$

$$T_A = \frac{2v_0}{g}$$

$$B: h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \qquad \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t + h = 0$$

$$t = \frac{V_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4\left(\frac{1}{2}g\right)h}}{g}$$

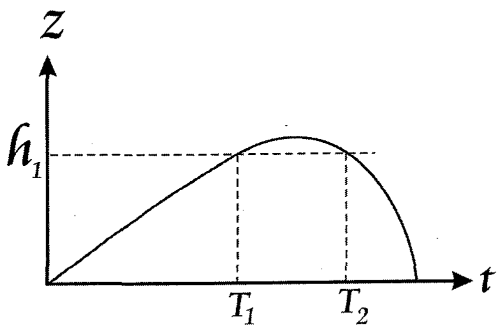
$$T_B = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g} - \frac{v_z - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g} = \frac{2\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$$

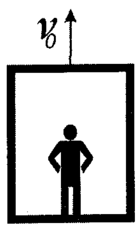
$$T_A^2 = \left(\frac{2v_0^2}{g}\right)^2 \qquad T_B^2 = \frac{4}{g^2}\left(v_z^2 - 2gh\right)$$

$$T_A^2 - T_B^2 = \frac{8h}{g} \qquad g = \frac{8h}{T_A^2 - T_B^2}$$

۱ـ۱۳)

T_1 زمانی که سنگ رها می‌شود و T_2 زمانی که به زمین می‌رسد. فرض می‌کنیم که در $t=0$ آسانسور از زمین شروع به حرکت می‌کند در زمان T_1 سنگ در ارتفاع $z_1=v_0T_1$ با سرعت اولیه $v(T_1)=v_0\hat{z}$ رها می‌شود.





توجه شود که $T_2'=T_1+T_2$

برای زمان $T_1\leq t\leq T_2'$ جسم طبق معادله زیر حرکت می‌کنیم.

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-g \qquad \frac{dz}{dt}=-gt+c_1=-gt+\left(v_0+gT_1\right)$$

$$\frac{dz(T_1)}{dt}=-gT_1+C_1=v_0 \qquad C_1=v_0+gT_1$$

$$z(t)=-\frac{1}{2}gt^2+\left(v_0+gT_1\right)t+c_2$$

$$z\left(T_2'\right)=0=-\frac{1}{2}gT_2'^2+\left(v_0+gT_1\right)T_2'+c_2$$

$$z\left(T_1\right)=h_1=-\frac{1}{2}gT_1^2+\left(v_0+gT_1\right)T_1+c_2$$

$$h_1=\frac{1}{2}g\left(T_2'^2-T_1^2\right)-\left(v_0+gT_1\right)\left(T_2'-T_1\right)$$

$$h_1=\frac{1}{2}g\left(T_2'^2-T_1^2\right)-\left(\frac{h_1}{T_1}+gT_1\right)\left(T_2'-T_1\right)\ ,\ v_0=\frac{h_1}{T_1}$$

$$h_1=\frac{1}{2}g\left(T_2'^2-T_1^2\right)-\left(\frac{h_1}{T_1}+gT_1\right)\left(T_2'-T_1\right)$$

$$h_1+\frac{h_1}{T_1}\left(T_2'-T_1\right)=\frac{1}{2}g\left(T_2'^2-T_1^2\right)-gT\left(T_2'\ -T_1\right)$$

$$h_1=\frac{T_1}{T_2'}\left[\frac{1}{2}g\left(T_2'^2+T_1^2\right)-gT_1T_2'\right]$$

حال حالت خاص $h_1=39.2\,m$ $\rightarrow$ $T_1=T_2=4\sec$ بررسی می‌کنیم.

$$h_1-\frac{T_1}{T_1+T_2}\left[\frac{g}{2}\left(\left(T_1+T_2\right)^2-T_1^2\right)-gT_1T_2\right]$$

$$=\frac{T_1}{T_1+T_2}\left[\frac{g}{2}\left(T_2^2+2T_1T_2\right)-gT_1T_2\right]$$

$$h_1=\frac{1}{2}\frac{T_1T_1^2}{T_1+T_2}g$$

$$h_1\left(T_1=T_2=4\sec\right)=\frac{4^3}{298}g;4g=39.2\,m$$

(فکر نمی‌کنم این ساده‌ترین راه باشد!!!)

(۱۴ـ۱

چون غلتش کامل است پس

$$a=R\times\alpha\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{a}{R\sin\theta}$$

(۱۵ـ۱

الف)

$$R=X_A+X_B$$

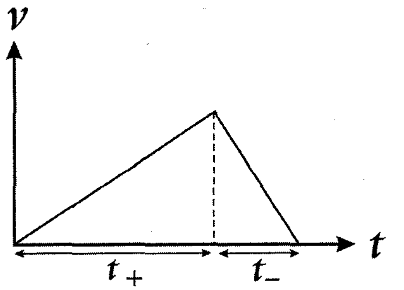
$$\frac{dR}{dt}=V_A+V_B\qquad V_B=V_A-\frac{dR}{dt}$$

ب)

$$\vec{V}_A=\ell\omega\hat{\theta}\qquad\vec{V}_B=-\ell\omega\hat{\theta}$$

$$\vec{V}_A-\vec{V}_B=2\ell\omega\hat{\theta}$$

۱ـ۱۶)



$$d_+=\frac{1}{2}a_+t_+^2$$
$$d_-=\frac{1}{2}a_-t_-^2$$

بیشترین سرعت

$$V_m=a_+t_+=a_-t_-$$

$$d=d_++d_-=\frac{1}{2}a_+t_+^2+\frac{1}{2}a_-t_-^2=\frac{1}{2}a_+t_+^2+\frac{1}{2}a_-\frac{d_+^2}{a_-^2}t_+^2$$

$$d=\frac{1}{2}a_+\left(1+\frac{a_+}{a_-}\right)t_+^2$$

$$t_+=\sqrt{\frac{2d}{a_+\left(1+\frac{a_+}{a_-}\right)}}\qquad t_-=\sqrt{\frac{2d}{a_-\left(1+\frac{a_-}{a_+}\right)}}$$

$$d=804.7\,m\qquad a_+=1.79\frac{m}{s^2}\qquad a_-=6.86\frac{m}{s^2}$$

$$t=t_++t_-=26.7+6.96=33.7\,sec$$

۱ـ۱۷)

$$\dot{r}=4m\qquad \dot{\theta}=2\frac{rad}{s}\qquad r\,(T)=3m$$

الف)

$$\vec{v}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{\dot{r}^2+\left(r\dot{\theta}\right)^2}=\sqrt{4^2+(3\times2)^2}=\sqrt{52}\,\frac{m}{s}$$

ب)

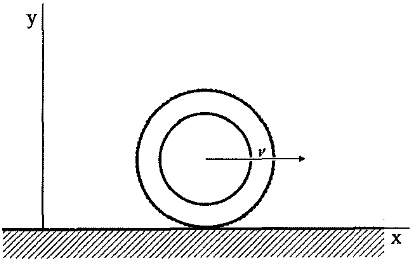
$$\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{r}+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

$$\vec{a}=-r\dot{\theta}^2\hat{r}+2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{\left(-r\dot{\theta}\right)^2+\left(2\dot{r}\dot{\theta}\right)^2}=\sqrt{12^2+(16)^2}=20$$

(۱ـ۱۹

اگر موقعیت اولیه ذره در مبدا در نظر بگیریم سرعت برابر می‌شود با:



$$\dot{x}=\omega R-\omega R\cos\omega t$$
$$\dot{y}=\omega R\sin\omega t$$

با انتگرال‌گیری از معادلهٔ بالا و در نظر گرفتن $\omega t=\phi$

$$x(t)=R(\phi-\sin\phi)$$
$$y(t)=R(1-\cos\phi)$$

شرایط اولیه $(x_{(0)},y_{(0)})=(0,0)$ که معادله یک سیکلوئیه است.

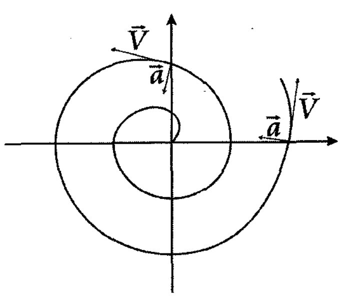
شتاب ذره برابر می‌شود با:

$$a=-\omega^2 R\vec{r}$$

(۱ـ۲۰

$$r=a\theta \qquad A=\frac{1}{\pi}\frac{m}{rad} \qquad \theta=\frac{\alpha+2}{2}$$

الف)



ب) شتاب شعاعی

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}=0 \qquad \ddot{r}=r\dot{\theta} \qquad \dot{\theta}=\alpha t \quad \dot{r}=A\dot{\theta}$$
$$\alpha A=A\theta(\alpha t)^2 \qquad \theta=\alpha \qquad \ddot{r}=A\ddot{\theta}$$
$$\alpha=\frac{1}{2}\alpha t^2(\alpha t)^2$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\alpha^3\left(t^4\right) \qquad t=\left(\frac{2}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\theta=\frac{1}{2}\alpha t^2=\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{2}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ج)

$$a_t=\frac{rd^2\theta}{dt^2}+\frac{2dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=r_\alpha+2A\alpha^2t^2$$

$$\left|a_r\right|=\left|a_\theta\right|$$

$$\left|A\alpha-r\alpha^2t^2\right|=\left|r\alpha+2\alpha^2t^2\right|$$

$$A\alpha\left|1-2\theta^2\right|=A\alpha\left|\theta+4\theta\right|$$

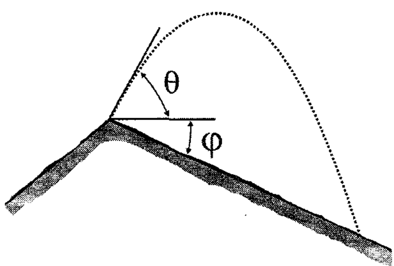
بنابراین نتیجه نهایی:

$$\left|1-2\theta^2\right|=\left|5\theta\right|$$

$$\theta<\frac{1}{\sqrt{2}} \ : \ \theta=\frac{\sqrt{33}-5}{4}$$

$$\theta>\frac{1}{\sqrt{2}} \ : \ \theta=\frac{\sqrt{33}+5}{4}$$

(۱ـ۲۱



$$x=v\cos\theta t \qquad y=v\sin\theta t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$y_{(x)}=x\operatorname{Tan}\theta-\frac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}$$

$$y_h(x)=-\tan\phi x$$

$$-\tan\phi x=\tan\theta x-\frac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}$$

$x=0$ یکی از جواب‌ها است ولی جواب دیگر که جواب ما است.

$$X=\frac{2v^2\cos^2\theta}{g}\left[\tan\theta+\tan(\phi)\right]$$

ماکسیمم X

$$\frac{dx}{d\theta}=0=\frac{2v^2}{g}\left[2\cos\theta(-\sin\theta)(\tan\theta+\tan\phi)\right]+\cos^2\theta\left(1+\tan^2\theta\right)\Big]$$

$$0=\frac{2v^2}{g}\left[-2\sin^2\theta-\sin 2\theta\tan\phi+\cos^2\theta+\sin^2\theta\right]$$

$$0=-\sin 2\theta\tan\phi+\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

$$0=-\sin(2\theta)\tan\phi+\cos 2\theta$$

$$\tan(2\theta)=(\cot\phi)\quad\Rightarrow\quad \tan 2\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\quad,\quad \theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}$$

$$\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\cot(\phi)\right]$$

در حالت خاص اگر $\phi=45^\circ$ باشد آن‌گاه:

$$\theta=45-\frac{60}{2}=45-3=15^\circ$$

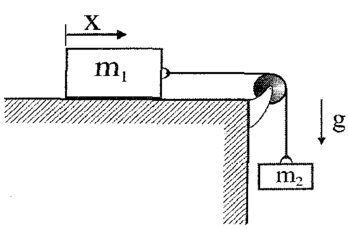
فصل دوم

قوانین نیوتن ـ مبانی مکانیک نیوتن

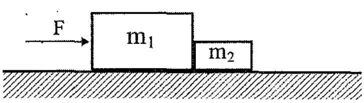
۱. یک جرم 5 کیلوگرمی تحت اثر نیروی $F=\left(4t^2\,\hat{i}-3t\hat{j}\right)N$ حرکت می‌کند که در آن t زمان بر حسب ثانیه است (1 نیوتون = 1N). این جرم در لحظه $t=0$ از مبدا شروع به حرکت می‌کند پیدا کنید: (الف) سرعت، (ب) مکان، (ج) $r\times v$ برای این جسم در زمان‌های بعد.

۲. در مکعب مطابق شکل ۱ـ۲ به وسیله نخی با جرم قابل اغماض به هم متصل شده‌اند. اگر سیستم از حالت سکون رها شود، پیدا کنید مکعب M_1 در زمان t چقدر می‌لغزد. از اصطکاک صرف‌نظر کنید.

۳. مطابق شکل ۲ـ۲ دو مکعب روی یک میز افقی در حال تماس با یکدیگرند. یک نیروی افقی به یکی از این مکعب‌ها وارد شده است. اگر $m_2=1kg, m_1=2kg$ و $F=3N$ باشد، نیروی تماس بین مکعب‌ها را پیدا کنید.



شکل ۱ ـ ۲



شکل ۲ ـ ۲

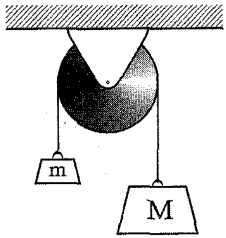
۴. دو ذره به جرم‌های m و M که در فاصله R از یکدیگر قرار دارند تحت اثر نیروی جاذبه F با حرکت یکنواخت دایره‌ای به دور یکدیگر در گردش‌اند. سرعت زاویه‌ای ω رادیان در ثانیه است. نشان دهید که $R=\left(\frac{F}{\omega^2}\right)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)$

۵. مطابق شکل ۳ـ۲ ماشین آتوود دارای قرقره‌ای با جرم قابل اغماض است. کشش طناب و شتاب M را پیدا کنید.

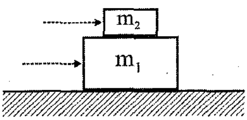
۶. در یک مخلوط‌کن بتون، سیمان، شن، و آب از طریق غلتیدن در یک محلظه استوانه‌ای که به آرامی دوران می‌کند مخلوط شده‌اند. اگر این محفظه خیلی سریع بچرخد، ذرات شن به جای مخلوط شدن به دیوارهٔ ظرف می‌چسبند.
فرض کنید که این محفظه مخلوط‌کند دارای شعاع R است و بر روی محور افقی سوار شده باشد. بیشترین سرعتی که این محفظه می‌تواند با آن دوران کند، بدون این‌که ذرات به دیواره آن بچسبند، چقدر است؟
فرض کنید $g=32\frac{ft}{s^2}$ است.

۷. مکعبی به جرم M_1 مطابق شکل ۴ـ۲ روی مکعب دیگری به جرم M_2 واقع شده است و جرم اخیر نیز روی میز بدون اصطکاکی قرار گرفته است. ضریب اصطکاک بین مکعب‌ها μ است. نیروی افقی بیشینه که می‌توان بر مکعب‌ها وارد کرد تا آن‌ها بدون لغزیدن روی یکدیگر شتاب بگیرند، در حالت‌هایی که (الف) نیرو بر مکعب 1، (ب) نیرو بر مکعب 2 وارد آید، چقدر است؟

۸. یک مکعبی 4 کیلوگرمی مطابق شکل ۵ ـ۲ روی یک مکعب 5 کیلوگرمی که روی یک میز بدون اصطکاکی قرار گرفته، واقع شده است. ضریب اصطکاک بین دو مکعب چنان است که اگر نیروی افقی F برابر با 27 نیوتون بر مکعب پایینی وارد شود، مکعب‌ها شروع به لغزیدن می‌کنند. فرض کنید که این نیروی افقی اینک فقط به مکعب بالایی وارد شده است. مقدار نیروی بیشینه برای این‌که مکعب‌ها بدون سر خوردن نسبت به همدیگر بلغزند چقدر است.

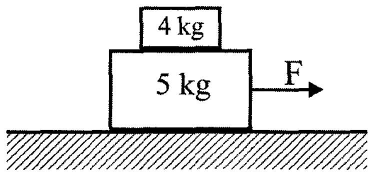


شکل ۳ ـ ۲

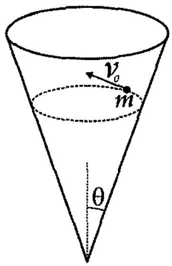


شکل ۴ ـ ۲

۹. ذره‌ای به جرم m در درون مخروطی بدون اصطکاک می‌لغزد (شکل ۶ـ۲). محور مخروط قائم است، جهت نیروی گرانی به طرف پایین است. نیم زاویه رأس مخروط طبق شکل θ است. مسیر ذره به صورت دایره و در یک صفحه افقی است. سرعت ذره v_0 است. یک نمودار نیرو رسم کنید و شعاع مسیر دایره‌ای ذره را بر حسب g, v_0 و θ پیدا کنید.



شکل ۵ـ۲



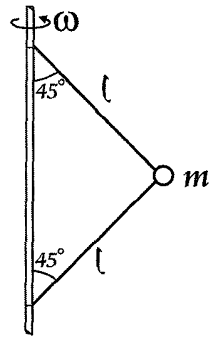
شکل ۶ـ۲

۱۰. شعاع مدار یک ماهواره همگام با کره زمین را پیدا کنید (یک ماهواره در هر 24 ساعت یک‌بار به دور زمین می‌چرخد، به طوری که مکان آن نسبت به یک ایستگاه زمینی همواره ثابت به نظر می‌آید). ساده‌ترین راه برای پیدا کردن جواب این است که مسافت‌ها را بر حسب شعاع زمین بیان کنید.

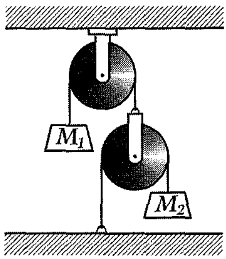
۱۱. مطابق شکل ۷ـ۲ جرم m به وسیله دو نیم سیم به طول l، به یک محور دوران کننده و قائم متصل‌اند و با محور زاویه 45 درجه می‌سازند. محور و جرم m هر دو با سرعت زاویه‌ای ω در حال دوران‌اند. جهت نیروی گرانی به طرف پایین است. (الف) یک نمودار نیروی واضح برای m بکشید. (ب) کشش سیم‌های بالایی $T_{\text{بالا}}$ و پایینی $T_{\text{پایین}}$ را پیدا کنید.

۱۲. اگر قوی و با جرأت باشید، می‌توانید یک رومیزی را از زیر ظروف واقع بر آن به طور ناگهانی بکشید و خارج سازید. طولانی‌ترین زمانی که طی آن رومیزی می‌تواند بیرون کشیده شود چقدر باید باشد تا لیوانی که در 15 سانتی‌متری لبهٔ میز قرار دارد قبل از سقوط از میز به حالت سکون درآید. فرض کنید ضریب اصطکاک لیوان برای لغزیدن بر روی رومیزی یا روی میز برابر با 0.5 باشد. (برای این‌که این عمل جالب توجه‌تر باشد باید پارچهٔ چنان به سرعت کشیده شود که لیوان هیچ حرکت قابل ملاحظه‌ای نداشته باشد).

۱۳. جرم‌های M_1 و M_2 مطابق شکل ۸ـ۲ به مجموعه‌ای از نخ‌ها و قرقره‌ها متصل شده‌اند.



شکل ۷ ـ ۲



شکل ۸ ـ ۲

نخ‌ها بدون جرم و غیرقابل انبساط‌اند و قرقره‌ها بی‌جرم و بدون اصطکاک هستند. شتاب M_1 را پیدا کنید.

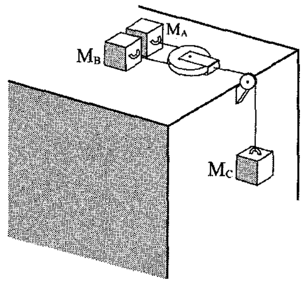
۱۴. دو جرم A و B روی یک میز بدون اصطکاکی قرار دارند (شکل ۹ـ۲). جرم‌ها به دو سرطنابی سبک به طول l که از روی قرقره‌ای به جرم قابل اغماض عبور می‌کند، متصل‌اند. این قرقره به طنابی که جرم C به آن آویخته است، متصل است. شتاب هر یک از جرم‌ها را پیدا کنید. (می‌توانید صحیح بودن جواب خود را با بررسی حالت خاص امتحان کنید. برای مثال حالت‌های $M_A=0$ یا $M_A=M_B=M_C$).

۱۵. در شکل ۱۰ـ۲ از قرقره و طناب بی‌جرم استفاده می‌شود. ضریب اصطکاک بین جرم‌ها و سطوح افقی μ است. فرض کنید که M_1 و M_2 در حال لغزیدن است و جهت نیروی گرانی به طرف پایین است.

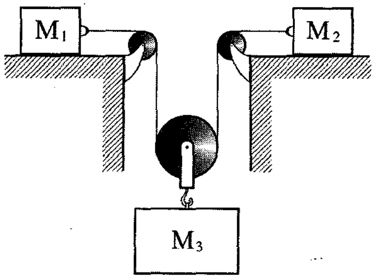
(الف) با رسم یک نمودار نیرو تمام مولفه‌های مورد استفاده را نشان دهید.

(ب) شتاب‌ها چگونه به هم مربوط‌اند؟

(ج) کشش طناب (T) را پیدا کنید.



شکل ۹ـ۲

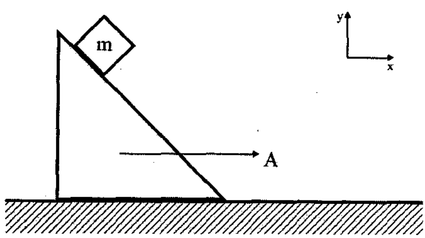


شکل ۱۰ـ۲

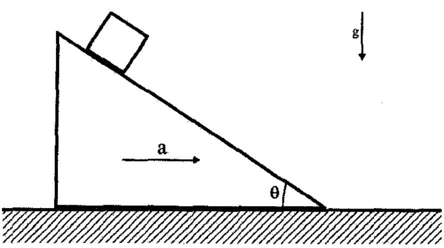
۱۶. یک گوه 45 درجه‌ای در امتداد نیرو با شتاب ثابت A مطابق شکل ۱۱ـ۲ کشیده می‌شود مکعبی به جرم m بدون اصطکاک روی گوه می‌لغزد. شتاب این مکعب را پیدا کنید. (جهت نیروی گرانی به طرف پایین است).

۱۷. مکعبی روی گوه‌ای با زاویه شیب θ قرار دارد (شکل ۱۲ـ۲). ضریب اصطکاک بین مکعب و سطح μ است.

(الف) پیدا کنید بیشینهٔ مقدار θ را برای این‌که مکعب بدون حرکت روی گوه باقی بماند در صورتی که گوه در جای معینی ثابت است.



شکل ۱۱ـ۲



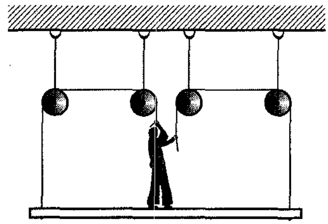
شکل ۱۲ـ۲

(ب) مطابق شکل، به گوه شتاب افقی a داده می‌شود. با فرض این‌که $\tan\theta<\mu$ باشد. پیدا کنید کمینهٔ شتاب را برای این‌که مکعب روی گوه بتواند بدون لغزش باقی بماند.

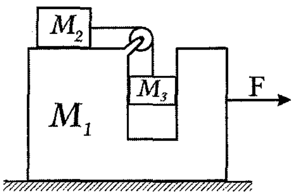
(ج) حالت (ب) را تکرار کنید ولی این‌بار بیشینهٔ مقدار شتاب را پیدا کنید.

۱۸. نقاشی به جرم M روی سکویی به جرم m ایستاده و خود را توسط دو طنابی که مطابق شکل ۱۳ـ۲ از روی قرقره‌ها می‌گذرند بالا می‌کشد. او هر دو طناب را با نیروی F می‌کشد و با شتاب ثابت a به طرف بالا شتاب می‌گیرد. شتاب a را پیدا کنید و از این واقعیت که هیچ کس این عمل را برای مدت طولانی نمی‌تواند انجام دهد صرف‌نظر کنید.

۱۹. در دستگاه آموزشی شکل ۱۴ـ۲ همه سطوح بدون اصطکاک‌اند. نیروی F وارد بر M_1 چقدر باید باشد تا مانع سقوط یا صعود M_3 شود؟



شکل ۱۳ـ۲



شکل ۱۴ـ۲

۲۰. دستگاه آموزشی شکل ۱۴ـ۲ را در حالتی که F صفر است در نظر بگیرید. شتاب M_1 را پیدا کنید.

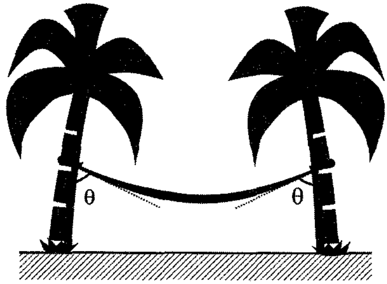
۲۱. طناب یکنواختی به جرم m و به طول l به مکعبی به جرم M متصل است. طناب با نیروی F کشیده می‌شود. کشش را در فاصله x از انتهای طناب پیدا کنید. از گرانش صرف‌نظر کنید.

۲۲. طناب یکنواختی به وزن W بین دو درخت مطابق شکل ۱۵ـ۲ آویخته شده است. دوسر طناب ارتفاع یکسانی دارند و هر کدام از آن‌ها با درخت‌ها زاویه θ می‌سازند. پیدا کنید: (الف) کشش را در دو انتهای طناب. (ب) کشش را در وسط طناب.

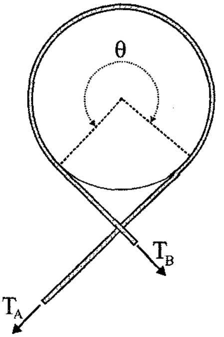
۲۳. قطعه سیمی به طول l و به جرم M به شکل حلقهٔ دایره‌ای بسته شده است و با سرعت زاویه‌ای ثابت‌اند، ω طول مرکز دایره دوران می‌کند. کشش سیم را پیدا کنید.

پیشنهاد: نمودار نیرو را برای قطعه کوچکی از حلقه که مقابل به زاویه $\Delta\theta$ است، رسم کنید.

۲۴. وسیله‌ای به نام چرخ تسمه در روی کشتی برای کنترل طناب تحت کشش زیاد به کار می‌رود. این طناب (معمولا با چندین دور) حول استوانه ثابتی پیچیده می‌شود. (شکل ۱۶ـ۲ فقط سه چهارم دور را نشان می‌دهد). با روی طناب، آن را با نیروی T_A می‌کشد، ملوان آن را با نیروی کمتری مانند T_B نگه می‌دارد. آیا می‌توانید نشان دهید $T_B = T_A e^{-\mu\theta}$، که در آن μ ضریب اصطکاک و θ زاویه کل احاطه و تماس طناب و استوانه است.



شکل ۱۵ـ۲



شکل ۱۶ـ۲

۲۵. کوتاه‌ترین زمان تناوب ممکن برای دوران دو کره توپر همسان را که تحت جاذبه گرانشی در فضای تهی در مدار دایره‌ای حول نقطه‌ای در وسط خط واصل مراکز خود دوران می‌کنند، پیدا کنید. (کره‌ها را از هر جنسی که قابل دسترسی باشد می‌توانید در نظر بگیرید).

۲۶. نیروی گرانشی وارد بر جسمی که به فاصله R از مرکز یک جرم کروی یکنواخت واقع است. صرفاً به‌خاطر جرمی است که در فاصله $r \leq R$ نسبت به مرکز کره قرار دارد. نیرویی که این جرم وارد می‌کند درست مانند آن است که یک جرم نقطه‌ای واقع در مبدأ آن را اعمال کرده است.

با استفاده از نتیجه فوق نشان دهید که اگر حفره‌ای در زمین ایجاد کنید و سپس به داخل آن سقوط کنید، حرکت هماهنگ ساده‌ای نسبت به مرکز زمین انجام خواهید داد. پیدا کنید زمانی را که طول می‌کشد تا به نقطه شروع حرکت برگردید و نشان دهید که این مقدار برابر است با زمانی که یک ماهواره نیاز دارد تا زمین را در یک مدار سطح پایین $r \approx R_e$ دور بزند. برای رسیدن به این نتیجه، لازم است زمین را به عنوان یک کره با چگالی یکنواخت در نظر بگیرید، و نیز باید از همه اصطکاک‌ها و اثرهای مربوط به دوران زمین صرف‌نظر کنید.

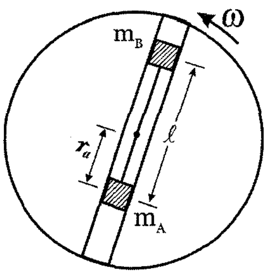
۲۷. به عنوان شکل دیگری از مسئله قبل نشان دهید که اگر این حفره خیلی دورتر از مرکز هم عبور کرده باشد، شما باز هم حرکت هماهنگ ساده‌ای همان زمان تناوب انجام خواهید داد.

۲۸. اتومبیلی مطابق شکل ۱۷ـ۲ وارد پیچی به شعاع R می‌شود. این جاده دارای زاویه θ است، و ضریب اصطکاک بین چرخ‌ها و جاده μ است. بیشینه و کمینه سرعت‌ها را برای این‌که اتومبیل بدون سر خوردن به اطراف روی جاده بماند پیدا کنید.

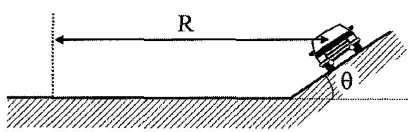
۲۹. اتومبیلی روی سکوی بزرگی که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند، در حالت حرکت است. در $t=0$ راننده مبدأ را ترک و در امتداد یکی از شعاع‌های سکو و به طرف خارج با سرعت ثابت V_0 حرکت می‌کند. وزن کل اتومبیل W و ضرب اصطکاک بین اتومبیل و سکو μ است، (الف) با استفاده از مختصات قطبی شتاب اتومبیل را بر حسب تابعی از زمان پیدا کنید. با رسم یک نمودار برداری، مولفه‌های شتاب را در زمانی که $t > 0$ است نشان دهید. (ب) زمانی را که در آن اتومبیل شروع به سر خوردن اتومبیل پیدا کنید. نتایج خود را در یک نمودار به طور واضح نشان دهید.

۳۰. صفحه‌ای مطابق شکل ۱۸ـ۲ با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند. دو جرم m_A و m_B در شیاری که از مرکز صفحه می‌گذرد بدون اصطکاک می‌لغزد. در ابتدا جرم‌ها به وسیله سیم سبکی به طول l به هم متصل‌اند و توسط گیره‌ای چنان قرار می‌گیرند که جرم m_A در فاصله r_A از مرکز باشد. در این‌جا از کرانش صرف‌نظر کنید. در $t=0$ گیره برداشته می‌شود و جرم‌ها برای لغزیدن آماده می‌شوند.

R_A را بلافاصله بعد از این‌که گیره برداشته می‌شود بر حسب m_A, m_B, l, r_A، ω پیدا کنید.



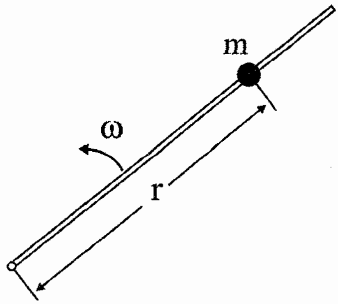
شکل ۱۸ـ۲



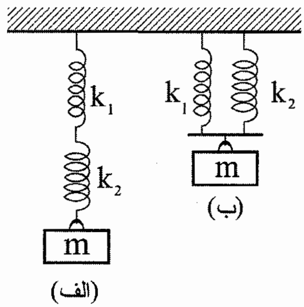
شکل ۱۷ـ۲

۳۱. در هر یک از دو وضعیت نشان داده شده (شکل ۱۹ـ ۲) بسامد نوسان جرم m را که توسط دو فنر با ثابت‌های k_1 و k_2 آویزان شده است، پیدا کنید.

۳۲. چرخی به شعاع R با سرعت V روی زمین می‌غلتد. سنگریزه‌ای با احتیاط در بالای چرخ طوری روی آن رها کرده‌ایم که به طور لحظه‌ای در حال سکون است. (الف) نشان دهید که اگر $V>\sqrt{Rg}$ باشد این سنگریزه بلافاصله از چرخ جدا می‌شود. (ب) نشان دهید در حالتی که زاویه $\theta=\arccos\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{V^2}{Rg}\right)\right]-\frac{\pi}{4}$ دوران کرده باشد.



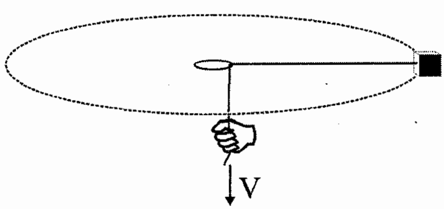
شکل ۲۰ - ۲



شکل ۱۹ - ۲

۳۳. ذره‌ای به جرم m می‌تواند روی میلهٔ نازکی مطابق شکل ۲۰ـ۲ بلغزد. این میله حول یک انتهای خود با سرعت زاویه ثابت ω در یک صفحه دوران می‌کند. نشان دهید که حرکت به وسیلهٔ رابطهٔ $r=Ae^{-\gamma t}+Be^{+\gamma t}$ معین می‌شود که در آن γ مقدار ثابتی است که باید پیدا شود و A و B ثابت‌های اختیاری‌اند. از گرانش صرف‌نظر کنید.
نشان دهید که با انتخاب شرایط اولیه به‌خصوص [یعنی $r(t=0)$ و $v(t=0)$] امکان پیدا کردن جوابی که در آن r به طور پیوسته با زمان کاهش یابد وجود دارد، ولی با هر شرط دیگری r سرانجام افزایش خواهد یافت. (حالت‌هایی را که ذره با مبدأ برخورد می‌کند مستثنی کنید).

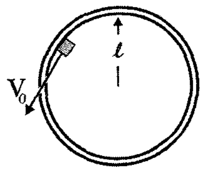
۳۴. جرم m مطابق شکل ۲۱ـ۲ به وسیلهٔ تاری که از میان حلقه‌ای عبور می‌کند می‌چرخد از گرانش صرف‌نظر کنید. در ابتدای این جرم در فاصله r_0 از مرکز قرار دارد و با سرعت زاویه‌ای ω_0 دوران می‌کند. نخ در $t = 0$ با سرعت ثابت V کشیده می‌شود به طوری که فاصله شعاعی جرم کاهش می‌یابد. نمودار نیرو را رسم کنید و معادله دیفرانسیلی برای ω بیابید. این معادله خیلی ساده است و می‌توان آن را یا از راه تجسس و یا به وسیله انتگرال‌گیری معمولی حل کرد. موارد زیر را پیدا کنید. (الف) ωt (ب) نیروی لازم برای کشیدن نخ.



شکل ۲۱ - ۲

۳۵. این مسئله مستلزم حل یک معادله دیفرانسیل ساده‌ای است. معکبی به جرم m بر روی میز بدون اصطکاکی می‌لغزد (شکل ۲۲ـ۲). این مکعب مقید است که داخل حلقه‌ای به شعاع l که به میز متصل است حرکت کند. در $t = 0$، مکعب در مسیر داخلی حلقه با سرعت v_0 در حرکت است. (یعنی، در امتداد مماس). ضریب اصطکاک بین مکعب و حلقه μ است.

(الف) سرعت مکعب را در زمان‌های بعدی پیدا کنید.



شکل ۲۲ ـ ۲

۳۶. این مسئله شامل یک معادله دیفرانسیل ساده‌ای است. باید بتوانید بعد از مختصر تغییراتی از آن انتگرال بگیرید.

ذره‌ای به جرم m در امتداد خط راستی حرکت می‌کند، و نیروی بازدارنده $F = be^{\alpha v}$ بر آن وارد می‌شود (که همواره در خلاف جهت حرکت است). b و α مقادیر ثابت و v سرعت است در $t = 0$ ذره با سرعت v_0 حرکت می‌کند. سرعت را در زمان‌های بعدی پیدا کنید.

۳۷. شرکتی به منظور تبلیغات تصمیم به برگزاری مسابقه سرعت هاورکرافت می‌گیرد. هاورکرافت با دمیدن هوا به طرف پایین، خود را نگه می‌دارد و دارای پروانه بزرگ ثابتی در بالای بدنه است که حرکت به جلو است. متاسفانه هاورکرافت وسیله‌ای به عنوان فرمان ندارد، و در نتیجه خلبان در چرخش با سرعت‌های زیاد دچار اشکال می‌شود. شرکت برای برطرف کردن این مشکل تصمیم گرفت یک سکوی پرواز کاسه شکلی طراحی کند به طوری که وقتی هاورکرافت با سرعت زیاد وارد آن می‌شود بدون احتیاج به فرمان بتواند در امتداد مسیری دایره‌ای قرار گیرد. برای طراحی و ساختن این سکو با مهندسی قرارداد بسته شد. مهندس مزبور پس از پایان کار با عجله کشور را ترک کرد. پس از برگزاری اولین مسابقه شرکت دریافت که دقیقاً یک زمان ثابت T برای هاورکرافت لازم است تا صرف‌نظر از سرعت بتواند این مسیر را دور بزند. معادله‌ای برای سطح مقطع این سکو بر حسب T پیدا کنید.

قوانین نیوتن ـ مبانی مکانیک نیوتونی

۲ـ۱)

الف) از قانون دوم نیوتن داریم:

$$\vec{F}=m\vec{a}$$

$$\vec{F}=m\vec{a}$$

$$\vec{F}=\left(4t^{2}\hat{i}-3t\hat{j}\right)=ma$$

$$\vec{v}=\int_0^t \frac{F}{m}dt=\frac{1}{m}\int\left(4t^{2}\hat{i}-3t\hat{j}\right)dt$$

$$=\frac{1}{m}\left(\frac{4}{3}t^{3}\hat{i}-\frac{3}{2}t^{2}\hat{j}\right)=\left(\frac{4}{15}t^{3}\hat{i}-\frac{3}{10}t^{2}\hat{j}\right)\left(\frac{m}{s}\right)$$

ب)

$$\vec{r}=\int_0^t \vec{v}(t)dt=\left(\frac{1}{15}t^{4}\hat{i}-\frac{1}{10}t^{3}\hat{j}\right)(m)$$

ج)

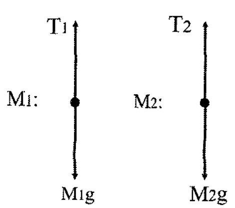
$$\vec{r}\times\vec{V}=\left[\left(\frac{1}{15}t^{4}\right)\left(-\frac{3}{10}t^{2}\right)-\left(-\frac{1}{10}t^{3}\right)\left(\frac{4}{15}t^{3}\right)\right]\hat{K}$$

$$=\frac{1}{150}t^{6}\hat{k}\left(\frac{m^{2}}{s}\right)$$

جواب حالت خاص برای $t=1s$

$$\vec{r}\times\vec{V}=\frac{1}{150}(1)^{3}\hat{k}=6.7\times10^{-3}\hat{k}\frac{m^{2}}{s}$$

۲ـ۲)



دیاگرام نیروی وارد بر جرم M_2, M_1 را رسم می‌کنیم.

M_1 را در جهت X ، M_2 را در جهت Y در نظر می‌گیریم داریم:

در مسائل برای این‌که در جهت نیرو تناب دچار اشتباه نشویم می‌توانیم جهت آن را همواره به سمت بالا در نظر بگیریم در نتیجه تغییر علامت در شتاب‌ها ظاهر می‌شود (عملاً همیشه به سمت بالا است)

$$M_1 \ddot{X}_1 = F_{1x} = T$$

$$M_2 \ddot{Y}_2 = F_{2y} = T - M_2 g$$

$$X_1 = -Y_2$$

از آن‌جایی که تناب کشیده نمی‌شود داریم:

$$X_1 = Y_2 \qquad \ddot{X}_1 = \ddot{Y}_2 \text{ معادله قید}$$

$$\frac{T}{M_1} = -\frac{T - M_2 g}{M_2}$$

$$T\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right) = \frac{M_2 g}{M_2}$$

$$T = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}\vec{g}$$

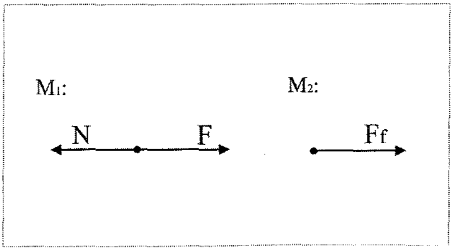
$$X(t) = \frac{M_1}{M_1 + M_2}\frac{g}{2}t^2$$

جواب حال خاص $M_1 = M_2$

$$X(t) = \frac{1}{4}gt^2$$

(۲ـ۳)

دیاگرام نیروی وارد بر جرم m_2 ، m_1 را رسم می‌کنیم داریم:



F_c نیروی تماسی

دو جسم شتاب یکسان دارند.

$$a = \frac{F}{M_1 + M_2}$$

$$F_c = M_2 a$$

$$F_c = \frac{M_1}{M_1 + M_2} F$$

با توجه به داده‌های مساله یعنی

$$M_1 = 2\,kg$$

$$M_2 = 1\,kg$$

$$F = 3\,N$$

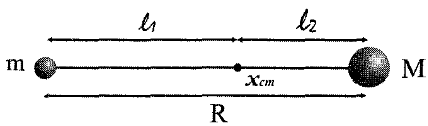
می‌توان F_c را به‌دست آورد.

$$F_c = \frac{1}{2+1} \times 3 = 2\,N$$

۲ـ۴)

راه اول: فاصله جسم M تا مرکز جرم را ℓ_1 و جسم m را ℓ_2 در نظر می‌گیریم.

X_{cm} مرکز جرم از رابطه $X_{cm} = \frac{M_1 X_1 + M_2 X_2}{M_1 + M_2}$ بدست خواهد آمد.



مبدا را روی جسم M در نظر می‌گیریم (می‌توان هر جای دیگری نیز در نظر گرفت برای راحتی این کار را انجام می‌دهیم)

$$X_{cm} = \frac{m}{M+m} R$$

$$F = M \ell_1 \omega^2$$

چون حرکت دایروی است داریم:

$$F = \frac{Mm}{m+M} R \omega^2$$

از طرفی

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M} = \frac{m+M}{mM} \qquad \mu = \frac{mM}{m+M}$$

$$R = \frac{F}{\omega^2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)$$

راه حل دوم:

می‌توانیم مستقیم یک سیستم دو جسمی در نظر گرفته و از مفهوم جرم کاهش یافته و فاصله نسبی استفاده کنیم در بسیاری از مسائل این راه بسیار مفیدتر و کوتاه‌تر خواهد بود.

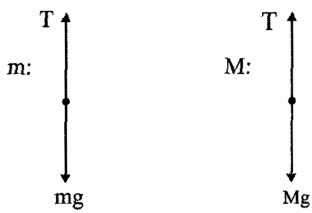
$$F=\mu R\omega^2 \qquad R=\frac{F}{\mu\omega^2}=\frac{F}{\omega^2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)$$

۲ـ۵)

از آنجایی که تناب کشیده نمی‌شود داریم

$$\ddot{y}_m=-\ddot{y}_M$$

دیاگرام نیروی وارد بر جرم m , M را رسم می‌کنیم



داریم:

$$\frac{1}{m}(T-mg)=\frac{-1}{M}(T-Mg)$$

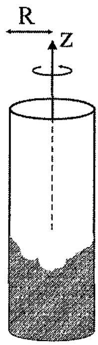
$$\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)T=2g \qquad T=\frac{2mM}{m+M}g$$

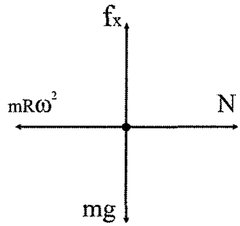
$$\ddot{y}_M=\frac{1}{M}\left(\frac{2mM}{m+M}g-Mg\right)$$

$$\ddot{y}_m=-\frac{M-m}{M+m}g$$

۲ـ۶)

یک جرم m که مخلوطی از آب سیمان و بتون است در نظر می‌گیریم، مسئله ساده‌سازی می‌کنیم و دیاگرام نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.





f_k نیروی اصطکاک هم می‌تواند به سمت پایین و هم بالا، با توجه به سرعت چرخش استوانه باشد ولی ما فرض می‌کنیم حالتی است که دانه می‌خواهد به سمت پایین بیفتد تا با دانه‌های دیگر مخلوط شود.

دستگاه مختصات استوانه‌ای بر می‌گزینیم پس داریم:

$$\Sigma\vec{F}=m\vec{a}$$
$$f_k-mg=ma_z$$
$$mR\omega^2-N=ma_\rho$$

مخلوط‌کن باید با سرعتی بچرخد که دانه‌های به دیواره نچسبد یعنی $N\geq mR\omega_{max}^2$ باشد. لذا می‌تواند به سمت داخل شتاب هم بگیرید ولی بیشترین سرعتی که مخلوط‌کن می‌تواند بچرخد زمانی است که نیروی عمود بر سطح با نیروی جانب مرکز برابر باشد پس شتاب در جهت شعاعی صفر است $a_\rho=0$

پس داریم:

$$mR\omega^2=N$$

حال با توجه به معادله 6.2 که در راستای عمود z است داریم:

$$N-mg=ma_z$$

دانه، باز می‌تواند به سمت بالا یا پایین حرکت کند ولی اگر فرض کنیم که دانه شن به سمت پایین باید بیاید تا مخلوط شود باز یک حداکثری برای a_z در نظر بگیریم.

$$mR\omega_{max}^2=mg$$
$$\omega_{max}=\sqrt{\frac{g}{R}}$$

برای حالت خاص داریم:

$$\omega_{max}=\sqrt{\frac{10}{1.1}}=3\ \frac{rad}{s}\approx3.8$$ دور در دقیقه

۲ـ۷)

الف) دیاگرام نیروی وارد بر جسم m_1 , m_2 را رسم می‌کنیم.

$$f_{max}=\mu N=\mu M_{1g}$$

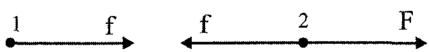
چون جسم‌ها بدون لغزیدن روی یکدیگر شتاب یکسان می‌گیرند داریم (هم در قسمت الف و هم ب) (a_t شتاب کل)

$$a_1=a_2=a_t$$

$$\frac{F-f}{M_1}=\frac{f}{M_2}=\frac{F}{M_1+M_2}$$

$$F_{max}=\frac{M_1}{M_2}\left(M_1+M_2\right)\mu g$$

ب)



$$a_1=a_2=a_t$$

$$\frac{f}{M_1}=\frac{F-f}{M_2}=\frac{F}{M_1+M_2}$$

$$F_{max}=\left(M_1+M_2\right)\mu g$$

۲ـ ۸)

برای جسم بالایی $F_{max,up}=\frac{M_1}{M_2}\left(M_1+M_2\right)\mu g=\frac{M_1}{M_2}F_{max,Down}=\frac{4}{5}\times 27=21.6\,N$

۲ـ۱۰)

زمان تناوب زمین $T = 24h$ است پس

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

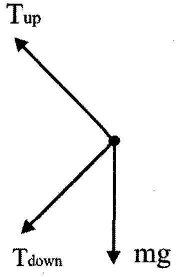
$$\Sigma\vec{F}=m\vec{a}$$

$$mr\omega^2=\frac{GMm}{r^2}$$

$$r^3\omega^2=GM$$

$$r^3=\frac{GM}{\omega^2}$$

۲ـ۱۱)



الف) دستگاه مختصات استوانه‌ای انتخاب می‌کنیم

ب)

$$F_z = m\ddot{z}$$

$$F_z = \left(T_{up} - T_{10W}\right)\cos\theta - mg = 0$$

$$F_r = ma_r$$

$$-\left(T_{up} + T_{low}\right)\sin\theta = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)$$

$$\left(T_{up} + T_{low}\right)\sin\theta = m\ell\sin\theta\,\omega^2$$

دو معادله دو مجهول داریم:

$$T_{up} - T_{low} = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$T_{up} + T_{low} = m\ell\omega^2$$

$$T_{up} = -\frac{1}{2}m\ell\omega^2 + \frac{mg}{2\cos\theta}$$

$$T_{low} = \frac{1}{2}m\ell\omega^2 - \frac{mg}{2\cos\theta}$$

$$\theta = 45 \qquad \begin{aligned} T_{up} &= \frac{m\ell\omega^2}{2} + \frac{mg}{\sqrt{2}} \\ T_{low} &= \frac{m\ell\omega^2}{2} - \frac{mg}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

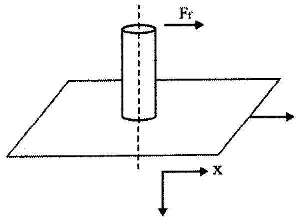
می‌توانیم در بسیاری از مسائل با استفاده از حد مسئله، با شرایط مرزی جواب مسئله را چک کنیم داریم:

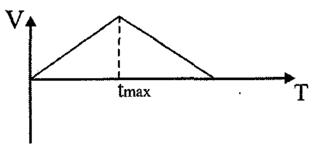
$$\theta \to 0 \qquad T_{up} - T_{low} = mg$$

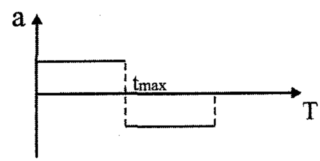
$$\lim_{\omega\to\infty} T_{up} = \infty$$

۲ـ۱۲)

برای حل این مسئله ابتدا فرض برای ساده‌سازی انجام می‌دهیم. فرض می‌کنیم که ضریب اصطکاک میز و رومیزی و رومیزی و لیوان یکسان است. سرعت لیوان قبل از افتادن باید به صفر برسد پس برای درک این مطلب نمودار شتاب زمانی وسرعت زمان را می‌کشیم به صورت شماتیک :







از آن‌جایی که رومیزی لیوان را می‌کشد.

$$\ddot{x}=\frac{F_f}{M}=\frac{\mu Mg}{M}=\mu g$$

در زمان t لیوان مقدار $x=\frac{1}{2}\mu g t^2$ حرکت می‌کند.

در حالت دوم مسافت مشابه را حرکت می‌کند.

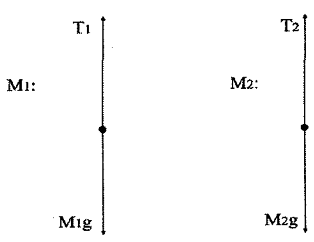
$$X_T=2x_a$$

$$\frac{1}{2}\mu g t_{max}^2=\frac{1}{2}x_T$$

$$t_{max}=\sqrt{\frac{x_T}{\mu g}}=\sqrt{\frac{15\times10^{-2}}{0.5\times10}}=\frac{\sqrt{3}}{10}\sec$$

۲ـ۱۳)

دیاگرام نیروی وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:



از آنجایی که قرقره بدون جرم است داریم:

$$F_{\text{قرقره}} = m_{\text{قرقره}}\, a_{\text{قرقره}}$$

$$T_1-2T_2=0 \qquad T_1=2T_2$$

از آنجایی که یک قسمت تناب جسم دوم به زمین متصل است.

$$2y_1=-y_2$$

$$2\ddot{y}_1=-\ddot{y}_2$$

$$2\frac{T_1-M_1g}{M_1}=-\frac{T_2-M_2g}{M_2}$$

$$2\frac{T_1}{M_1}-2g=-\frac{T_1}{2M_2}+g \qquad \left(\frac{2}{M_1}+\frac{1}{2M_2}\right)T_1=3g$$

$$T_1=\frac{2M_1M_2}{M_1+4M_2}3g$$

$$T_1=\frac{6M_1M_2}{M_1+4M_2}g$$

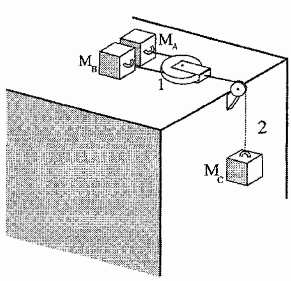
$$\ddot{y}_1=\frac{T_1-M_1g}{M_1}=\frac{6M_2}{M_1+4M_2}g-g=\frac{2M_2-M_1}{M_1+4M_2}$$

$M_1=M_2$ داریم:

$$\ddot{y}_1=\frac{1}{5}g$$

۲ـ١٤)

تنابی که به جسم M_A و M_B متصل است، تناب شماره یک و تنابی که به جسم M_C وصل است تناب دوم در نظر می‌گیریم. از آنجایی که قرقره‌ها بدون وزن هستند؛ محور مختصات دکارتی در نظر می‌گیریم:



$$2T_1=T_2$$

$$F_A=T_1=M_A\ddot{x}_A$$

$$F_B=T_1=M_B\ddot{x}_B$$

$$F_C=T_2-M_cg=M_c\ddot{y}_c$$

$$-\ddot{y}_c=\frac{1}{2}\left(\ddot{x}_A+\ddot{x}_B\right)$$

از معادله قید داریم

$$-\frac{2T_1-M_C g}{M_C}=\frac{1}{2}\left(\frac{T_1}{M_A}+\frac{T_1}{M_B}\right)$$

$$T_1\left(\frac{1}{2M_A}+\frac{1}{2M_B}+\frac{2}{M_C}\right)=g$$

$$T_1=\frac{2M_A M_B M_C}{M_B M_C+M_A M_C+4M_A M_B}g$$

$$\ddot{x}_A=\frac{T_1}{M_A}=\frac{2M_B M_C}{M_B M_C+M_A M_C+4M_A M_B}g$$

$$\ddot{x}_B=\frac{T_1}{M_A}=\frac{2M_A M_C}{M_B M_C+M_A M_C+4M_A M_B}g$$

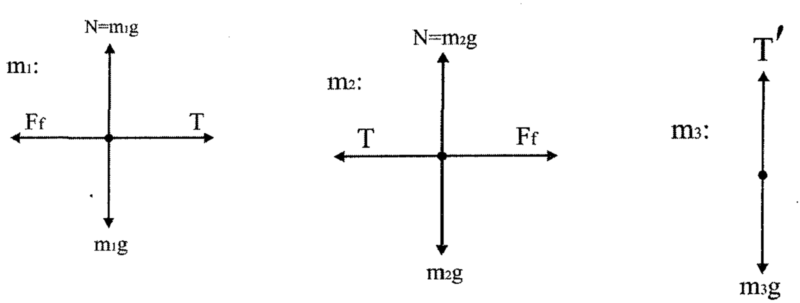
$$\ddot{y}_C=\frac{T_2}{M_C}-g=\frac{4M_A M_B}{M_B M_C+M_A M_C+4M_A M_B}g$$

حال شرایط $M_A=0$ بررسی می‌کنیم.

$$M_A=0 \qquad \ddot{x}_A=2g \qquad \ddot{y}_C=-g$$

$$M_A=M_B=M_C \qquad \ddot{x}_A=\ddot{x}_B=\frac{g}{3} \qquad \ddot{y}_C=-\frac{1}{3}g$$

(۱۵ـ۲



$$T'=2T$$

از آنجایی که قرقره بدون جرم است.

$$-a_3=\frac{a_1+a_2}{2}$$

$$-\frac{2T-M_3 g}{M_3}=\frac{T-M_1 g\mu}{2M_1}+\frac{T-M_2 g\mu}{2M_2}$$

$$T=\left(\frac{2}{M_3}+\frac{1}{2M_2}+\frac{1}{2M_2}\right)=g(1+\mu)$$

$$T=\frac{(\mu+1)g}{\left[\frac{2}{M_3}+\frac{1}{2M_1}+\frac{1}{2M_2}\right]}$$

۲ـ۱۶)

برای حل این مسئله دو راه‌حل ارائه می‌شود، دستگاه مختصات دکارتی انتخاب می‌کنیم.

راه‌حل اول: از مثال (2-4) کتاب استفاده می‌کنیم از این مثال داریم:

x مختصات مکعب در امتداد محور $\hat{x}$

X مختصات گوه در امتداد محور $\hat{x}$

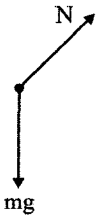
$$(x-X)=(h-g)\cot\theta$$

$$\ddot{x}-\ddot{X}=-\ddot{y}\cot\theta$$

$$\ddot{x}-A=-\ddot{y}\cot\theta$$

معادلات قیدی مستقل از نیروهای وارد شده هستند و این روابط با حضور یا بدون حضور اصطکاک برقرار می‌باشد. حال دیاگرام نیروهای وارد بر جسم را می‌کشیم.

در این گونه مسائل ما بردار N را تجزیه می‌کنیم (چرا؟)



$$m\ddot{x}=N\sin\theta$$

$$m\ddot{y}=N\cos\theta-mg$$

$$m\ddot{y}=\frac{m\ddot{x}}{\sin\theta}\cos\theta-mg$$

$$\ddot{y}=\ddot{x}\cot\theta-g$$

$$\ddot{x}=\tan\theta(\ddot{y}+g)$$

از جمع دو رابطه برای شتاب داریم:

$$\tan\theta(\ddot{y}+g)-A=-\ddot{y}\cot\theta$$

$$\ddot{y}(\tan\theta+\cot\theta)=A-g\tan\theta$$

$$\ddot{y}=\frac{A-g\tan\theta}{\tan\theta+\cot\theta}$$

با استفاده از $\ddot{y}$ بقیه مجهولات را می‌یابیم.

$$\ddot{y}=\sin\theta(A\cos\theta-g\sin\theta)$$

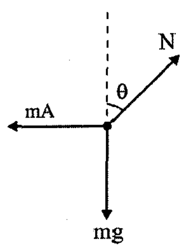
$$\ddot{x}=A-\ddot{y}\cot\theta=A-\cos\theta(A\cos\theta-g\sin\theta)$$

برای زاویه $\theta=45^\circ$ به‌دست می‌آوریم.

$$\ddot{y}=\frac{1}{2}(A-g) \quad , \quad \ddot{x}=\frac{1}{2}(A+g)$$

راه‌حل دوم:

در دستگاه مختصات متصل به جسم دیاگرام نیروی آزاد وارد بر جسم رسم می‌کنیم.



مولفه آن روی سطح شیب‌دار $A\cos\theta-g\sin\theta$

$$\ddot{y}=\sin\theta(A\cos\theta-g\sin\theta) \qquad \ddot{x}=A-(A\cos\theta-g\sin\theta)\cos\theta$$

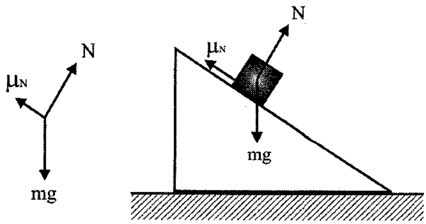
اگر $\theta=45$ باشد.

$$\ddot{y}=\frac{1}{2}(A-g)$$

$$\ddot{x}=A-\frac{1}{2}(A-g)=\frac{1}{2}(A+g)$$

۲ـ۱۷)

دیاگرام نیروی وارد بر جسم را رسم می‌کنیم دستگاه مختصات دکارتی X موازی سطح بر می‌گزینیم.



در حالت ب)

$$N = mg\cos\theta$$

الف)

در θ بیشینه:

$$\mu N = mg\sin\theta$$

$$\mu mg\cos\theta = mg\sin\theta$$

$$\mu = \tan\theta$$

ب) a_{min} زمانی اتفاق می‌افتد که جسم بخواهد به سمت پایین شروع به حرکت کند و نیروی اصطکاک به سمت بالا باشد y , x مختصات جسم مکعب Y , X مختصات مربوط به گوه

در مثال ۲ـ۴ کتاب داریم رابطه $\ddot{x} - \ddot{X} = -\ddot{y}\cot\theta$

مولفه نیرو را در جهت y , x از روی قانون دوم نیوتن می‌نویسیم:

$$F_x = N\sin\theta - \mu N\cos\theta = m\ddot{x} = ma_{min}$$

$$F_y = m\ddot{y}$$

$$N\cos\theta + \mu N\sin\theta - mg = 0$$

$$N(\cos\theta + \mu\sin\theta) = mg$$

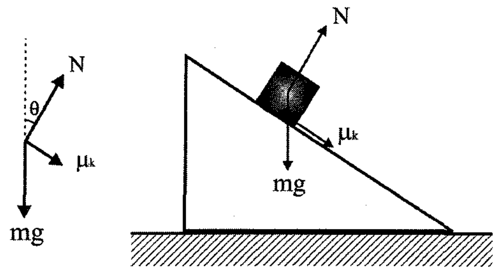
$$\frac{ma_{min}}{\sin\theta - \mu\cos\theta}(\cos\theta + \mu\sin\theta) = mg$$

$$a_{min} = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

به ازای $\theta = \frac{\pi}{4}$ داریم:

$$a_{min} = \frac{g(1-\mu)}{(1+\mu)}$$

ج) زمانی a_{max} رخ می‌دهد که جسم به سمت بالا بخواهد شروع به حرکت کند و اصطکاک به سمت پایین باشد با رسم دیاگرام:



$$\ddot{x}=a_{max}=\ddot{X}$$
$$\ddot{y}=0=\ddot{Y}$$
$$F_x=m\ddot{x}$$
$$N\sin\theta+\mu N\cos\theta=ma_{max}$$
$$F_y=m\ddot{y}$$
$$N\cos\theta-\mu N\sin\theta-mg=0$$
$$N(\cos\theta-\mu\sin\theta)=mg$$
$$\frac{ma_{max}}{\sin\theta+\mu\cos\theta}(\cos\theta-\mu\sin\theta)=mg$$
$$a_{max}=\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}$$

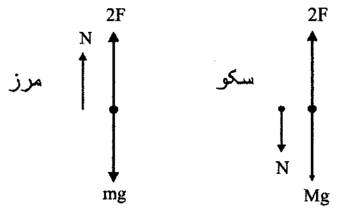
به ازای $\theta=45^\circ$

$$a_{max}=\frac{g(1+\mu)}{(1-\mu)}$$

۲ـ۱۸)

این مسئله را می‌توان به سه روش حل کرد روش اول نوشتن قانون نیوتن روش دوم از قید حرکت که $a_m=a_M$ است، شروع می‌کنیم، که این دو روش معادل یکدیگرند و فقط نگاه اولیه به حل مسئله فرق می‌کند ولی مسیری که برای حل می‌پیماییم یکی است به همین دلیل به‌خاطر مطابقت با این کتاب از معادله قید که ناشی از این است که هم مرد و هم سکو به هم متصل و هر دو شتاب یکسان و در یک جهت دارند در نظر می‌گیریم. در روش دوم که کاملاً نوع دیگری نگاه به این گونه مسائل است، که به تفصیل بعد از حل مسئله به روش قیدی بررسی می‌کنیم.

مطابق تمام مسائل یک دستگاه مختصات دکارتی x موازی سکو بر می‌گزینیم دیاگرام نیروی وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.



از آنجایی که سکو و مرد با یکدیگر درتماس هستند.

$$a_M = a_m \qquad \frac{F_M}{M} = \frac{F_m}{m}$$

$$\frac{1}{M}(2F + N - mg) = \frac{1}{m}(2F - N - mg)$$

$$N\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) = 2F\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M}\right) + (g - g)$$

$$N = \frac{mM}{m+M}\left(\frac{M-m}{mM}\right)2F$$

$$N = \frac{M-m}{M+m}2F$$

توجه شود که نیروی عمود بر سطح باید همیشه بزرگتر از صفر باشد به همین دلیل $M > m$ وگرنه سکو به سمت پایین شتاب می‌گیرد و مرد به سمت بالا شتاب خواهد گرفت.

$$a_M = a_m = \frac{1}{M}\left(2F + \frac{M-m}{M+m}2F - Mg\right)$$

$$= 2F\frac{1}{M}\frac{2M}{M+m} - g$$

$$a = \frac{4F}{M+m} - g$$

راه‌حل دوم: در بسیاری از مسائل فیزیک می‌توانیم سیستم را به زیر سیستم‌هایی تقسیم کنیم و به خاطر همین است که در بسیاری مسائل می‌توان بر هم کنش‌های ذرات را به صورت نیروی داخلی در نظر گرفت حال ما سیستم را این گونه در نظر می‌گیریم، سیستم مرد و سکو، پس به این سیستم چهار نیروی کشش تناب $T = F$ به سمت بالا و نیروی وزن مرد و سکو به سمت پایین وارد می‌شود در نتیجه داریم:

$$4F-(M+m)g=(M+m)a$$

$$\frac{4F}{m+M}-g=a$$

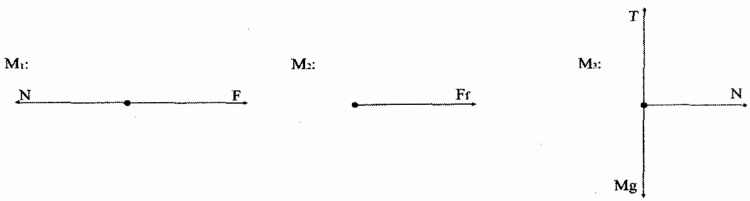
و به راحتی با یک دید متقاوت به مسئله جواب به‌دست می‌آید.

۲ـ۱۹)

اگر جسم M_3 سقوط نکند M_2 نسبت به M_1 حرکتی ندارد و جسم M_2 بر روی جسم M_1 از نظر M_1 ساکن است از معادلهٔ قیدی داریم که 19.1 a شتاب کل سیستم است.

$$a_1=a_2=a_3=a$$

دیاگرام نیروهای وارد بر اجسام را رسم می‌کنیم داریم:



از معادله ۱۹.۱ داریم:

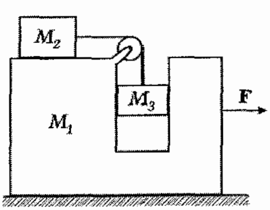
$$\frac{F-N}{M_1}=\frac{T}{M_2}=\frac{N}{M_3}=\frac{F}{M_1+M_2M_3}$$

$$F=\frac{M_1+M_2+M_3}{M_2}M_3g$$

از معادله ۱۹.۳ با فرض $M_1=M_2=M_3=m$ برای جواب حالت خاص داریم:

$$F=3\,mg$$

۲ـ۲۰)



با توجه به قانون نیوتن داریم:

$$\begin{aligned} &T=M_2 a_2 \\ &M_3 g-T=M_3 a_{3y} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad M_3 g=M_2 a_2+M_3 a_{3y} \quad (1)$$

شتاب جرم M_3 در راستای $\ddot{Y}$ برابر است با:

$$a_{3y}=a_2+a_1 \quad (2)$$

شتاب نسبی a_2 , a_1: $\left(a_{3y}=a_1-\left(-a_2\right)\right)$

$$\left(\vec{F}_{ext}\right)_x=0 \quad \Rightarrow \quad Ma_{cmx}=0 \quad \Rightarrow \quad M_2 a_2-\left(M_1+M_3\right)a_1=0$$

$$\Rightarrow \quad a_2=\frac{M_1+M_3}{M_2}a_1$$

$$(1),(2) \quad \Rightarrow \quad M_3 g=M_2 a_2+M_3 a_2+M_3 a_1=\left(M_2+M_3\right)a_2+M_3 a_1$$

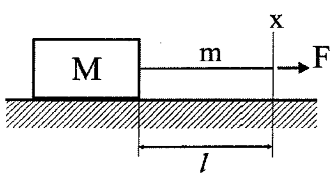
$$(3),(4) \quad \Rightarrow \quad M_3 g=\left(M_2+M_3\right)\frac{M_1+M_3}{M_2}a_1+M_3 a_1$$

$$M_2 M_3 g=\left(M_1 M_2+M_3 M_2+M_1 M_3+M_3^2+M_3 M_2\right)a_1$$

$$a_1=\frac{M_2 M_3 g}{M_1 M_2+M_1 M_3+2M_2 M_3+M_3^2}$$

(۲ـ۲۱)

جسم و تناب دارای شتاب یکسان هستند.



$$|a|=\frac{F}{M+m}$$

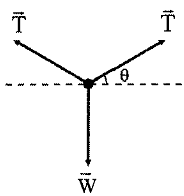
جرم تناب با اضافه‌تر شدن طول ℓ زیاد می‌شود پس از مفهوم چگالی خطی برای تناب و جسم استفاده می‌کنیم داریم:

$$T_{(x)}=\left[M+m\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\right]\frac{F}{M+m}$$

$$T_{(x)}=\frac{\left[M+m\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\right]}{M+m}F$$

۲ـ۲۲)

الف) دیاگرام نیروی وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.



از

$$\Sigma \vec{F}=m\vec{a}$$

$$2T\sin\theta=W$$

$$T=\frac{W}{2\sin\theta}$$

ب) از

$$\Sigma \vec{F}=\vec{m}a$$

T' کشش نخ در وسط

$$T'-T\cos\theta=0 \quad T'=T\cos\theta$$

با قرار دادن T از معادله ۲۲.۲ داریم:

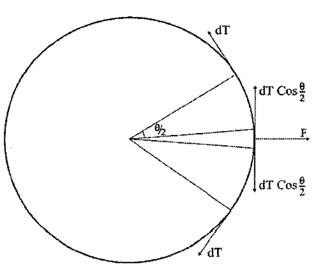
$$T'=\frac{w}{2\sin\theta}\cos\theta$$

$$T'=\frac{w}{2}\cot\theta$$

۲ـ۲۳)

F نیرویی است که نخ به قرقره وارد می‌کند.

در حالت تعادل نیروی کل صفر است پس:



$$\Delta F-2T\sin\frac{\theta}{2}=0$$

$$\Delta F=2T\sin\frac{\theta}{2}=2T\quad\frac{\Delta\theta}{2}$$

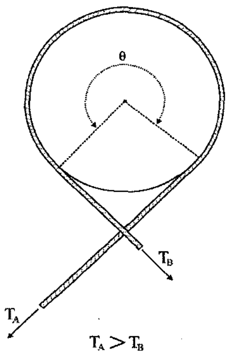
از تقریب $\sin\theta\approx\theta$ استفاده کردیم.

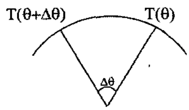
$$T\Delta\theta=dmr\omega^2=\lambda r\omega^2 d\ell=\lambda r d\theta r\omega^2$$

$$T=\lambda r^2\omega^2=\frac{M}{L}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\omega^2$$

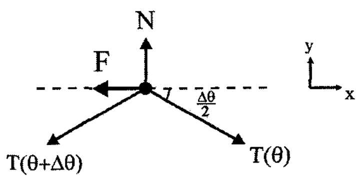
$$T=\frac{ML}{(2\pi)^2}\omega^2$$

(۲۴ـ۲)





قسمتی از تناب که بین θ , $\theta+\Delta\theta$ رادر نظر می‌گیریم. نیروهای وارد بر این قسمت از تناب با توجه به دیاگرام مسئله عبارت است از:



$$x:\left[T(\theta)-T(\theta+\Delta\theta)\right]\cos\frac{\Delta\theta}{2}-F=ma_x=0$$

$$y:N-\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\left[T(\theta+\Delta\theta)+T(\theta)\right]=ma_y=0$$

$$\left[T(\theta)-T(\theta+\Delta\theta)\right]\cos\frac{\Delta\theta}{2}=F=\mu N$$

$$\left[T(\theta+\Delta\theta)-T(\theta)\right]\cos\frac{\Delta\theta}{2}=-\mu\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\left[T(\theta+\Delta\theta)+T(\theta)\right]$$

$$\frac{T(\theta+\Delta\theta)-T(\theta)}{\tan\frac{\Delta\theta}{2}}=-\mu\left[T(\theta+\Delta\theta)+T(\theta)\right]$$

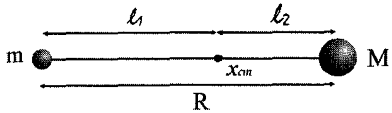
از تعریف حد استفاده می‌کنیم و حد عبارت 24.5 را زمانی که $\Delta\theta\rightarrow 0$ میل می‌کند می‌گیریم:

$$2\frac{dT}{d\theta}=-2\mu T(\theta) \quad \frac{dT}{d\theta}=-\mu T(\theta)\Rightarrow \int\frac{dT}{T}=\int-\mu d\theta$$

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{T_B}{T_A}\right)=-\mu\theta \quad T_B=T_A e^{-\mu\theta}$$

(۲ـ۲۵

چون دو کره بنا بر فرض مسئله همسان هستند پس مرکز جرم در وسط خط واصل دو مرکز کره قرار دارد زمانی زمان تناوب می‌نیمم می‌شود که هر دو حول مرکز جرم بچرخد.



$$T=\frac{2\pi}{\omega} \quad \omega=\frac{V}{R}=\frac{V}{\frac{\ell}{2}}$$

$$\Sigma\vec{F}=m\vec{a}$$

برای جسم m_1

$$G\frac{m_1 m_2}{\ell^2}=m_1\frac{v^2}{\frac{\ell}{2}} \quad V=\sqrt{\frac{Gm_2}{2\ell}}$$

$$\omega=\frac{\sqrt{\frac{Gm_2}{2\ell}}}{\frac{\ell}{2}}=\sqrt{\frac{2Gm_2}{\ell}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2Gm^2}{\ell}}} \qquad (۲۵.۵)$$

چون $m_1 = m_2$ در نتیجه $T_1 = T_2 = T$

(۲ـ۲۶

زمین رابه صورت یک کره یکنواخت با جرم M_e و شعاع R_e در نظر می‌گیریم اگر $r\leq R_e$ در این‌صورت جرم محصور در کره به شعاع r عبارت است از $\hat{r}$ $M_e\left(\frac{r}{R_e}\right)^3$ و از آنجا داریم:

$$\vec{F}_{(r)}=-\frac{Gm}{r^2}M_e\left(\frac{r}{R_e}\right)^3\hat{r}$$

$$=-GmM_e\frac{r}{R_e}\hat{r}$$

$$\vec{F}_r = m\vec{a}_r$$

$$\frac{GmM_e}{R_e} r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)$$

$$\ddot{r} = \frac{GM_e}{R_e} r$$

معادله دیفرانسیلی که در بالا به‌دست آمد معادله حرکت نوسانی با سرعت زاویه‌ای $\omega=\sqrt{\frac{GM_e}{R_e}}$ است و دوره تناوب حرکت نوسانی عبارت است از:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R_e}{GM_e}}$$

حال با در نظر گرفتن ماهواره در مدار زمین $r \simeq R_e$ است داریم:

$$\ddot{r} = 0$$

$$F_r = -mR_e\dot{\theta}^2$$

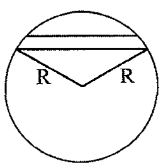
$$-\frac{GmM_e}{R_e^2} = -mR_e\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{GM_e}{R_e}}$$

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R_e}{GM_e}}$$

مقدار به‌دست آمده نشان می‌دهد که زمان دوران یک ماهواره در یک مدار سطح پایین $r \simeq R_e$ به دور زمین معادل زمان رفت و برگشت مشخص در حفره ایجاد شده در زمین است.

(۲ـ۲۷)



$$F_r = G\frac{mM_{(r)}}{r^2} \qquad M(r) = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$$

$$F_r = \frac{4}{3}\pi\rho Gmr$$

$$F_x = F_r \sin\alpha = \frac{4}{3}\pi\rho Gmr\sin\alpha = \frac{4}{3}\pi\rho Gmx$$

$$m\ddot{x} + \frac{4}{3}\pi\rho Gmx = 0$$

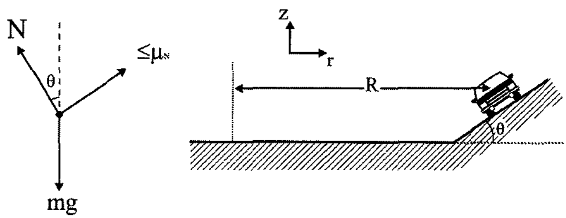
در سطح زمین داریم $g=\frac{4}{3}\pi\rho GR$ از معادله داریم:

$$\ddot{x}+\frac{g}{R}x=0$$

که منجر بر یک حرکت نوسانی مانند مثال قبل خواهد شد.

۲ـ۲۸)

دیاگرام مربوط به ماشین را رسم می‌کنیم.



$$F_r=Ma_r$$
$$=M\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)$$
$$=-M\frac{v^2}{R}$$

کمترین سرعت جهت نیروی اصطکاک به طرف بالای سطح شیب‌دار در بیشترین سرعت جهت آن به سمت پایین سطح شیب‌دار خواهد بود.

$$F_r=-M\frac{v^2}{R}$$
$$\pm\mu N\cos\theta-N\sin\theta=-M\frac{v^2}{R}$$
$$F_z=M\ddot{z}$$
$$N\cos\theta\pm\mu N\sin\theta-Mg=0$$
$$N=\frac{Mg}{\cos\theta\pm\mu\sin\theta}$$

از ترکیب F_z, F_r داریم

$$\frac{Mg}{\cos\theta\pm\mu\sin\theta}(\pm\mu\cos\theta-\sin\theta)=-\frac{Mv^2}{R}$$
$$V_{max}^{min}=\sqrt{\frac{\sin\theta\mp\mu\cos\theta}{\cos\theta\pm\mu\sin\theta}Rg}$$

۲ـ۲۹)

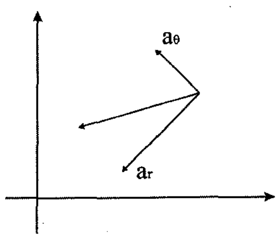
$$\theta=\omega t$$
$$r=v_0 t$$

$$\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{r}+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}$$
$$=-v_0\omega^2 t\hat{r}+2v_0\,\omega\hat{\theta}$$

ب) زمانی که $\mu m=\mu\,\omega=|\vec{a}|m$ اتومبیل شروع به حرکت خواهد کرد.

$$\mu w=m|\vec{a}|$$
$$\mu g=\sqrt{\left(v_0\omega^2\right)^2 t^2+4v_0^2\omega^2}$$
$$t=\sqrt{\frac{\mu^2 g^2-4v_0^2\omega^2}{v_0^2\omega^4}}$$

ج)



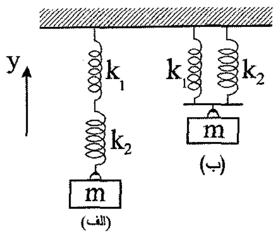
۲ـ۳۰)

از قید $r_a-r_b=\ell$ داریم:

$$\ddot{r}_a=-\ddot{r}_b$$
$$\Sigma\vec{F}=m\vec{a}=m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)e_r$$
$$T=m_a\left(\ddot{r}_a-r_a\,\omega\right)$$
$$T=m_b\left(-\ddot{r}_a-\left(\ell-r_a\right)\omega\right)$$

۲ـ۳۱)

با در نظر گرفتن y_1، y_2 به عنوان میزان جابه‌جایی از حالت تعادل هر یک از فنرها نیروی وارد بر هر فنر برابر است با:



$$k_1 y_1=k_2 y_2$$
$$y=y_1+y_2$$

$$F=m\ddot{y}$$

$$-k_1 y_1=m\left(\ddot{y}_1+\ddot{y}_2\right)$$

$$-k_1 y_1=m\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)\ddot{y}_1$$

$$-\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}y_1=m\ddot{y}_1$$

$$k_{eff}=\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}$$

$$\omega_a^2=\frac{k_{eff.a}}{m}$$

جواب حالت خاص با در نظر گرفتن $k_1=k_2=k$ $\quad \omega_a=\sqrt{\frac{k}{2m}}$

$$y=y_1=y_2$$

$$F=m\ddot{y}$$

$$-k_1 y_1-k_2 y_2=m\ddot{y}$$

$$-k_1 y-k_2 y=m\ddot{y}$$

$$-\left(k_1+k_2\right)y=m\ddot{y}$$

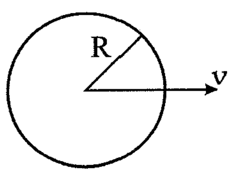
$$k_{eff}=k_1+k_2$$

$$\omega_b^2=\frac{k_{eff,b}}{m}$$

جواب حالت خاص با در نظر گرفتن $k_1=k_2=k$

$$\omega_b=\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

۲ـ۳۲)



الف) این مسئله را در دستگاه مختصات چرخ در نظر می‌گیریم در این دستگاه با سرعت زاویه‌ای $\omega=\frac{V}{R}$ و سنگریزه در بالای چرخ با بردار سرعت $-V\hat{x}$ مشخص می‌شود. برای این‌که سنگریزه در تماس با چرخ باقی بماند باید نیروی عموی بر سطح مثبت باشد.

$$F_r=ma_r$$

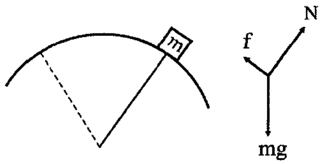
$$N - mg = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)$$

$$N - mg = mR\left(\frac{V}{R}\right)^2$$

اگر $N < 0$ باشد سنگریزه به سرعت از سطح چرخ جدا می‌شود.

$$N<0 \quad \rightarrow \quad V>\sqrt{Rg}$$

ب) $V<R_g$



در لحظه‌ای که ذره شروع به حرکت می‌کند داریم:

$$\vec{F}=\mu\vec{N}$$

مولفه مماس نیرو Fe به ما می‌دهد.

$$F_\theta = ma_\theta$$

$$F - mg\sin\theta = 0$$

$$\mu N = mg\sin\theta$$

مولفه شعاعی نیرو F_r به ما می‌دهد.

$$F_r = m a_r$$

$$N - mg\cos\theta = -\frac{mv^2}{R}$$

$$mg\left(\frac{\sin\theta}{\mu} - \cos\theta\right) = -\frac{mv^2}{R}$$

با قرار دادن $\mu=1$ داریم:

$$\sin\theta - \cos\theta = -\frac{V^2}{Rg}$$

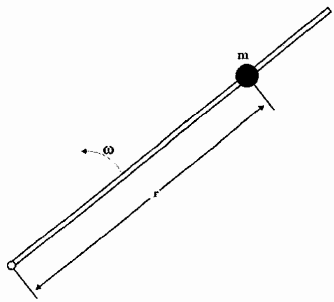
$$-\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{V^2}{Rg}$$

از رابطه مثلثاتی $\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\theta-\cos\theta$ استفاده کردیم.

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{v^2}{\sqrt{2}\,Rg}$$

$$\theta = \operatorname{Arc}\cos\frac{V^2}{\sqrt{2}\,Rg} - \frac{\pi}{4}$$

۲ـ۳۳)



از قانون دوم نیوتن داریم:

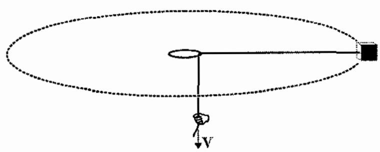
$$\Sigma\vec{F}=m\vec{a}$$

$$m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=0 \quad , \quad m\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)=0$$

r باید جوابی به صورت

$$r=Ae^{-\gamma t}+Be^{\gamma t}$$

۲ـ۳۴)



$$\vec{F}=m\left[\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{r}+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}\right]$$

$$\dot{r}=-V \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r=-vt+r_0 \\ \ddot{r}=0 \end{cases}$$

$$F_\theta=0 \quad \Rightarrow \quad 2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=0 \quad \Rightarrow \quad -2V\dot{\theta}+\left(r_0-vt\right)\ddot{\theta}=0$$

$$\Rightarrow \quad 2V\dot{\theta}=\left(r_0-Vt\right)\frac{d\dot{\theta}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \frac{2V\,dt}{r_0-Vt}=\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}}$$

$$-2\left[\ln\left(r_0-Vt\right)\right]_0^t=\left[\ln\dot{\theta}\right]_{\omega_0}^{\omega}$$

$$\ln\left(\frac{r_0-Vt}{r_0}\right)^{-2}=\ln\frac{\omega}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega}{\omega_0}=\left(\frac{r_0-Vt}{r_0}\right)^{-2}$$

$$\omega=\frac{\omega_0 r_0^2}{\left(r_0-Vt\right)^2}$$

$$F_r=T=m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=-mr\dot{\theta}^2=-m\left(r_0-Vt\right)\frac{\omega_0 r_0^2}{\left(r_0-Vt\right)^2}=\frac{-m\omega_0 r_0^2}{r_0-Vt}$$

به ازای $vt=\frac{r_0}{2}$

$$vt=\frac{r_0}{2}\Rightarrow\ \omega=4\omega_0$$

۲ـ۳۵)

برای این‌که معکب بتواند داخل حلقه حرکت کند باید دارای شتابی معادل $\vec{a}=\frac{-v^2}{L}\hat{r}+a_\theta\hat{\theta}$ باشد. این شتاب نیروی شعاعی $N=m|a_r|=\frac{mv^2}{R}$ را به ما می‌دهد. بنابراین برای نیروی اصطکاک داریم:

$$f=\mu N=\mu m\frac{v^2}{L}$$

$$-F_\theta=\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)m$$

$$-f=m\ell\dot{\omega}$$

$$-\frac{v^2}{\ell}\mu m=\dot{v}m$$

$$-\frac{\mu}{L}\int dt=\int\frac{dV}{V^2}$$

$$-\frac{\mu}{L}t=-\left[\frac{1}{v(t)}-\frac{1}{v_0}\right]$$

$$\frac{\mu t}{L}+\frac{1}{V_0}=\frac{1}{V(t)}$$

$$v(t)=\frac{v_0}{1+\frac{\mu v_0 t}{L}}$$

ب)

$$\omega(t)=\frac{V(t)}{L}$$

$$\theta(t)=\theta_0+\int_0^t \omega(t)dt$$

$$=\theta_0+\int_0^t \frac{v_0\,dt}{L+\mu v_0 t}$$

$$=\theta_0+\frac{1}{\mu}\left[Ln\frac{\left(L+\mu V_0{}^t\right)}{L}\right]$$

$$\vec{r}(r)=L\hat{r}$$

۲ـ۳۶)

چون نیرو بازدارنده است

$$F=-be^{\alpha v}$$

$$m\frac{dV}{dt}=-be^{\alpha v}$$

$$mdVe^{-\alpha v}=-b\,dt$$

$$\frac{m}{\alpha}e^{-\alpha v}=bt+c$$

در $t=0$ داریم:

$$m\frac{e^{-\alpha v_0}}{\alpha}=c$$

$$\frac{m}{\alpha}e^{-\alpha v}=bt+\frac{m}{\alpha}e^{-\alpha v_0}$$

$$e^{-\alpha v}=\frac{\alpha b}{m}t+e^{-\alpha v_0}$$

دو طرف Ln می‌گیریم:

$$-\alpha v=Ln\left(\frac{\alpha b}{m}+e^{-\alpha v_0}\right)$$

$$v=\frac{1}{-\alpha}Ln\frac{\alpha b}{m}t+e^{-\alpha v_0}$$

$$v=\frac{1}{\alpha}Ln\left(\frac{1}{\frac{\alpha b}{m}t+e^{-\alpha v_0}}\right)$$

۲ـ۳۷)

هر سطح مقطع از ای سکوی کاسه شکل یک دایره با شعاع r_1 می‌باشد و این مسیر شعاع‌هایی از r_i تا r_n دارد و هر چه بالاتر برویم شعاع بزرگتر و در نتیجه سرعت بیشتر می‌شود. در واقع هر چه هاور کرافت سرعت بیشتری پیدا کند چون T و ω ثابت است باید در مسیری با r_i بزرگتر

$$r_i<r_i<r_n \quad\Rightarrow\quad v_1=r_1\omega \quad\Rightarrow\quad r_1=\frac{v_1}{\omega}$$

برای هر مسیر دایره‌ای داریم:

$$x^2+y^2==r_1^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=\left(\frac{v_1}{\omega}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=\frac{\left(T_{v_1}\right)^2}{4\pi^2}$$

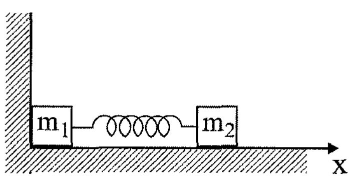
فصل سوم

تکانه

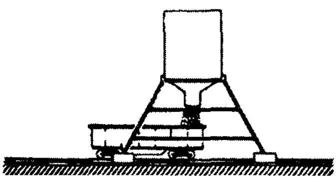
۱. چگالی میلهٔ نازکی به طول l بر حسب فاصله x از یک انتهای آن طبق رابطه $\rho=\frac{\rho_0 x^2}{l^2}$ تغییر می‌کند. مرکز جرم آن را پیدا کنید.

۲. مرکز جرم یک ورقهٔ نازک یکنواخت به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را پیدا کنید.

۳. فرض کنید سیستمی از چندین جسم تشکیل شده است، و مرکز جرم هر کدام از اجسام معلوم است. ثابت کنید که مرکز جرم سیستم را با در نظر گرفتن هر جسم به عنوان ذره‌ای که در مرکز جرم خود متمرکز شده می‌توان پیدا کرد.



شکل ۱ ـ ۳



شکل ۲ ـ ۳

۴. یک پرتابهٔ حامل وسایل سنجش به طور اتفاقی در بالای مسیر خود منفجر می‌شود. مسافت افقی بین نقطه پرتاب و نقطه انفجار L است. پرتابه به دو تکه تقسیم می‌شود که به طور افقی از هم دور می‌شوند. تکه بزرگتر دارای جرمی به اندازه سه برابر جرم تکه کوچکتر است. در مقابل تعجب دانشمندان دست‌اندرکار این مسئله، تکه کوچکتر در ایستگاه پرتاب به زمین بر می‌گردد. تکه بزرگتر چقدر دورتر از آن به زمین می‌نشیند؟ از مقاومت هوا و اثر انحنای زمین صرف‌نظر کنید.

۵. یک بازیگر آکروبات سیرک به جرم M با سرعت اولیه v_0 از روی تور مخصوص آکروبات مستقیماً به طرف بالا پرش می‌کند. هنگام پریدن به طرف بالا، در ارتفاع h بالای تور میمون تربیت شده‌ای را از جایگاهش بر می‌دارد و با خود همراه می‌برد. حداکثر ارتفاعی که این در سبک می‌کنند چقدر است؟

۶. یک هواپیمای کوچک به وزن ۱۰۰۰ کیلوگرم در یک باند کوتاه فرود اضطراری می‌کند، و با موتور خاموش با سرعت $40\frac{m}{s}$ روی باند می‌نشیند. قلابی روی این هواپیما قرار دارد که به وسیله کابلی به کیسه شنی به وزن ۱۰۰ کیلوگرم متصل است و آن را در امتداد حرکت بر روی زمین می‌کشد. اگر ضریب اصطکاک بین کیسه شن و باند هواپیما ۰،۴ باشد، و ترمزهای هواپیما هم نیروی کاهندهٔ اضافی ۱۵۰ کیلوگرم نیرو ایجاد کنند. این هواپیما تا توقف کامل چقدر راه خواهد رفت؟

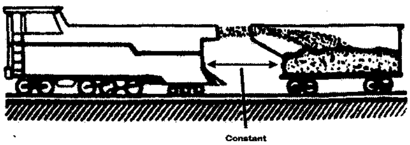
۷. سیستمی مطابق شکل ۱ـ۳ تشکیل شده از دو مکعب به جرم m_1 و m_2 که توسط فنر بدون جرمی با ثابت فنری k به هم متصل‌اند. این مکعب‌ها روی صفحه بدون اصطکاک می‌لغزند. طول فنر کشیده شده l است. در آغاز m_2 طوری نگهداشته شده که فنر تا طول $\frac{1}{2}$ فشرده می‌شود و m_1 مطابق شکل به مانعی تکیه دارد. m_2 در لحظه $t = 0$ رها می‌شود.

۸. شخصی به جرم ۵۰ کیلوگرم به طور مستقیم به هوا می‌پرد، و ۰،۸ متر از کف زمین بالا می‌رود. برای رسیدن به این ارتفاع، این شخص از طرف زمین چه ضربه‌ای دریافت می‌کند؟

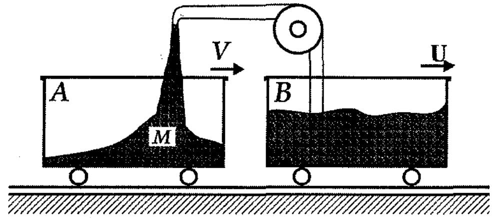
۹. یک واگن باری به جرم M محتوای مقداری شن به جرم m است. در لحظه $t = 0$ نیروی ثابت افقی F در جهت غلتش بر آن وارد می‌شود و همزمان با آن دریچه‌ای در ته آن باز می‌شود که شن با آهنگ ثابت $\frac{dm}{dt}$ از آن خارج می‌شود. سرعت واگن باری را وقتی که تمام شن خارج شده است پیدا کنید در لحظه $t = 0$ واگن باری در حال سکون است.

۱۰. یک واگن باری خالی به جرم M از حالت سکون تحت اثر نیروی F شروع به حرکت می‌کند. در همین زمان، از قیف مخصوصی که در امتداد مسیر در حالت سکون قرار دارد، شن با آهنگ ثابت b به داخل واگن شروع به ریزش می‌کند. سرعت را پس از انتقال جرم m شن پیدا کنید. (**راهنمایی:** این مسئله را می‌توان به سادگی در یکی دو سطر حل کرد).

۱۱. از ارابهٔ B موادی با آهنگ b کیلوگرم در ثانیه مطابق شکل ۳ ـ۳ به داخل ارابه ریخته می‌شود. این مواد دهانهٔ مسیر را به‌صورت قائم و به طرف پایین ترک می‌کنند، به‌طوری که سرعتشان همان سرعت افقی ارابه B یعنی u است. مطابق شکل، در لحظه موردنظر ارابه A دارای جرم M و سرعت v است. شتاب لحظه‌ای A یعنی $\frac{dv}{dt}$ را پیدا کنید.



شکل ۴ ـ ۳



شکل ۳ ـ ۳

۱۲. یک لوکوموتیو شن‌پاش، مطابق شکل ۴ـ۳ شن را به صورت افقی به داخل یک واگن باری می‌باشد. لوکوموتیو واگن باری به هم متصل نیستند. راننده لوکوموتیو سرعت خود را چنان نگه می‌دارد که فاصله آن تا واگن باری ثابت بماند. شن با آهنگ $\frac{dm}{dt}=10\frac{kg}{s}$ و سرعت $5\frac{m}{s}$ نسبت به لوکوموتیو انتقال می‌یابد. واگن از حالت سکون با جرم 2000 کیلوگرم شروع به کار می‌کند. سرعت واگن را بعد از 100 ثانیه پیدا کنید.

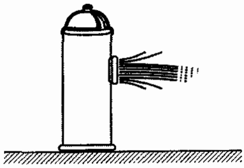
۱۳. یک بالابر اسکی متشکل از یک تسمه بلند است که حول دو قرقره که یکی در پایین و دیگری در بالای شیب قرار دارد می‌چرخد. قرقره‌ها توسط یک موتور الکتریکی قوی به حرکت در می‌آیند به طوری که تسمه با سرعت ثابت 1.5 متر بر ثانیه حرکت می‌کند. قرقره‌ها به فاصله 100 متر از یکدیگر قرار دارند، و زاویه شیب 20 درجه است.

اسکی‌بازها با گرفتن تسمه به بالا کشیده می‌شوند، و در آن‌جا با رها کردن طناب به پایین سر می‌خورند. اگر در هر 5 ثانیه یک بار اسکی به جرم 70 کیلوگرم از بالابر استفاده کند، نیروی متوسط موردنیاز برای کشیدن تسمه چقدر است؟ از اصطکاک بین برف و اسکی صرف‌نظر می‌کنیم.

۱۴. N نفر هر یک به جرم m روی واگن تخت راه‌آهن به جرم M ایستاده‌اند. این افراد از یک انتهای این واگن با سرعت u نسبت به واگن به خارج می‌پرند. در نتیجه، واگن بدون اصطکاک در جهت مخالف به حرکت در می‌آید. (الف) اگر همه افراد در یک زمان به خارج بپرند، سرعت نهایی واگن چقدر است؟ (جواب را می‌توانید به صورت مجموع جملات بنویسید). (ج) در کدام یک از حالت‌های (الف) با (ب). بزرگترین سرعت نهایی برای واگن حاصل می‌شود؟ آیا می‌توانید توضیح فیزیکی ساده‌ای برای جواب خود ارائه دهید؟

۱۵. طنابی به جرم M و به طول l روی میز بدون اصطکاکی قرار دارد، قسمت کوچک l_0 آن از میان سوراخی آویزان است. ابتدا طناب در حالت سکون است. (الف) جواب کلی $x(t)$ را برای طولی از طناب که از سوراخ می‌گذرد به دست آورید.

۱۶. از یک شیر آتش‌نشانی که قطر دهانهٔ آن D است مطابق شکل ۵ـ۳ آب با سرعت V_0 خارج می‌شود. نیروی واکنش وارد بر شیر آتش‌نشانی چقدر است؟



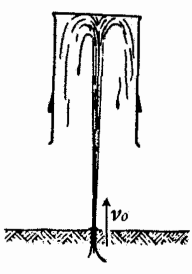
شکل ۵ ـ ۳

۱۷. یک ظرف زبالهٔ وارونه به وزن W توسط آب حاصل از یک آبفشان مطابق شکل ۶ـ۳ به صورت معلق در هوا قرار دارد. آب با سرعت v_0 از زمین با آهنگ ثابت $\frac{dm}{dt}$ فوران می‌کند. حداکثر ارتفاعی که این ظرف زباله کیسه می‌کند چقدر است؟ برای رسیدن به حداکثر ارتفاع چه فرضی باید پذیرفته شود؟

۱۸. یک قطرهٔ باران به جرم اولیه M_0 از حالت سکون تحت اثر گرانش شروع به سقوط می‌کند.
فرض می‌کنیم که جرم این قطره با آهنگی متناسب، حاصل‌ضرب جرم لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای آن در ابر افزایش می‌یابد.

$$\frac{dM}{dt}=KMV$$

که در آن k مقدار ثابتی است.
نشان دهید که سرعت قطره سرانجام عملا به صورت ثابت در می‌آید، و رابطه‌ای برای سرعت نهایی به‌دست آورید. از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.



شکل ۶ ـ ۳

۱۹. کاسهٔ پر از آبی در معرض ریزش باران قرار دارد. مساحت سطح آن 500 سانتی‌متر مربع است. باران با سرعت 5 متر بر ثانیه با آهنگ $10^{-3}\frac{g}{cm^2 s}$ مستقیماً به طرف پایین می‌آید. اگر آب‌های اضافی با سرعتی قابل اغماض از کاسه خارج شود، نیروی وارد بر کاسه را بر اثر ریزش باران پیدا کنید.

اگر کاسه با سرعت یکنواخت 2 متر بر ثانیه به طرف بالا حرکت کند، این نیرو چقدر است؟

۲۰. موشکی در یک میدان یکنواخت گرانشی با خارج ساختن گاز با سرعت ثابت u از حالت سکون صعود می‌کند. فرض کنید آهنگ خروج جرم از موشک با رابطه $\frac{dm}{dt}=\gamma m$ داده می‌شود، که در آن m جرم لحظه‌ای موشک و γ مقدار ثابتی است. موشک توسط مقاومت هوا با نیروی mbv کند می‌شود که در آن b مقدار ثابتی است. سرعت موشک را بر حسب تابعی از زمان پیدا کنید.

تکانه

(۳ـ۱)

طول میله ℓ و چگالی آن $\rho=\rho_0 \frac{x^2}{\ell^2}$

$$X_{cm}=\frac{1}{M}\int_0^{\ell} x\rho(x)dx$$

$$X_{cm}=\frac{\int_0^{\ell} x\rho_0 \frac{x^2}{\ell^2}dx}{\int_0^{\ell} \rho(x)dx}$$

M جرم کل است.

$$x_{cm}=\frac{\frac{\rho_0}{\ell^2}\frac{\ell^4}{4}}{\int_0^{\ell} \rho_0 \frac{x^2}{\ell}dx}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\rho_0 \ell^2}{\frac{1}{3}\rho_0 \ell}=\frac{3}{4}\ell$$

(۳ـ۲)

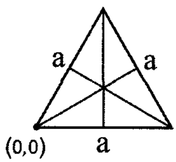
مثلث متساوی‌الاضلاع است و زوایای آن برابر است محل برخورد عمود منصف‌الاضلاع محل مرکز جرم است.

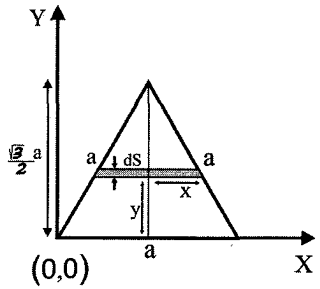
برای جرم کل داریم:

$$M=\sigma \iint dx\,dy=\sigma.\ (\text{مساحت})=\sigma\frac{1}{2}a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)=\sigma\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

اگر مبدأ را در نقطه سمت چپ انتخاب کنیم داریم:

مرکزجرم در $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$





راه حل دوم

$$y_{cm} = \frac{1}{A} \iint y\, Ax\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}\, a^2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} y\, dy \int_{\left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} y\right)}^{\left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} y\right)} dx$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}\, a^2} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} y\left[a - \frac{2\sqrt{3}}{3} y\right] dy$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}\, a^2}\left[a\frac{y^2}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

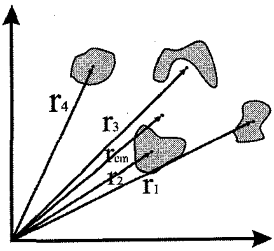
$$= \frac{4}{\sqrt{3}\, a^2}\left[\frac{3a^3}{4\times 2} - \frac{2\sqrt{3}}{3\times 3}\frac{3\sqrt{3}}{8}a^3\right]$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}\, a^2}\left[\frac{3}{8}a^3 - \frac{a^3}{4}\right]$$

$$y_{cm} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$x_{cm} = \frac{a}{2}$$

۳ـ۳)



بنابر رابطه مرکز جرم هر جسم

$$R=\frac{1}{M}\sum m_j r_j$$

که در مورد این مسئله m_j ها به صورت جرم پیوسته هستند ولی هر کدام؛ m_i ها به صورت گسسته در یک سیستم قرار دارند بنابراین تعریف اولیه مرکز جرم برای خود $m_1 m_2, m_3, \ldots$ صادق است. از تعریف مرکز جرم که گویی تمام جرم آن در مرکز متمرکز است و همه نیروهای خارجی به ان وارد می‌شود، واصل بر هم نهی که در مورد تک تک اجسام صادق است و چون رابطه خطی است برای جمع آن‌ها یعنی و $m_1, m_2, \ldots$ هم صادق است در نتیجه این مفهوم را می‌توان به کل سیستم موردنظر هم بسط دارد.

۴ـ۳)

انفجار در بالاترین نقطه صورت می‌گیرد از آنجایی که نیروی در جهت افق نداریم. تکانه خطی در امتدا در افق پایسته باقی می‌ماند.

سرعت ذره m و $3m$ را به‌ترتیب با v_m و v_{3m} نشان می‌دهیم از پایستگی تکانه در راستای افق

$$-mv_m+3mv_{3m}=4mv_{cm}$$

زمانی که لازم است به زمین رسند $T=\sqrt{\frac{h}{g}}$ است.

بنابراین، $v_{cm}T=L$, $v_m T=L$ زیر انفجار در بالاترین نقطه بوده است. با استفاده از روابط بالا برای جرم $3m$ به‌دست می‌آید که $V_{3m}T=\frac{5L}{3}$ نتیجه جرم $3m$ ، $\frac{8L}{3}$ دورتر به زمین می‌رسد.

۵ـ۳)

بازیگر آکروبات به جرم M با سرعت $V_0\hat{k}$ به سمت بالا می‌پرد سپس میمون را در ارتفاع h بر می‌دارد از قانون دوم نیوتن داریم:

$$\Sigma F_z=M\ddot{z}$$

$$-gM=M\ddot{z} \qquad -g=\ddot{z}$$

$$\dot{z}(t)=v_0-gt$$

$$z(t)=v_0 t-\frac{1}{2}gt^2 \qquad -\frac{1}{2}gt^2+v_0 t-h=0$$

$$t=\frac{-v_0\pm\sqrt{V_0^2-4\left(-\frac{1}{2}g\right)(-h)}}{-g}$$

$$t_h=\frac{v_0}{g}\mp\frac{1}{g}\sqrt{v_0^2-2gh}$$

زمانی که بازیگر آکروبات به ارتفاع h می‌رسد.

$$v_{(t_h)}=\dot{z}_{(t_h)}=v_0-g t_h=v_0-\left[v_0-\sqrt{v_0^2-2gh}\right]$$

$$v_{(t_h)}=\sqrt{v_0^2-2gh}$$

این یکی از معادلاتی است که در دوران دبیرستان هم با آن برخورد کرده‌ایم و می‌توانستیم مستقیم هم بنویسیم ولی برای تحلیل مسئله از ابتدا شروع به حل آن کردیم. بعد از این‌که بازیگر آکروبات میمون را بر می‌دارد و سرعت آن به علت پایستگی تکانه کم می‌شود پس داریم:

$$Mv_{(t_h)}=(M+m)v_{(t_{h+})}$$

$$v_{(t_{h+})}=\frac{M}{M+m}v_{(t_{h-})}=\frac{M}{M+m}\sqrt{v_0^2-2gh}$$

$$\Delta z=\frac{v^2_{(t_{h+})}}{g}-\frac{1}{2}g\left(\frac{v_{(t_{h+})}}{g}\right)^2=\frac{\frac{1}{2}v_{(t_{h+})}}{g}$$

بیشترین ارتفاع h_{max} برابر است با:

$$h_{max}=h+\Delta z=h+\frac{1}{2g}\left(\frac{M}{M+m}\right)^2\left(v_0^2-2gh\right)$$

۳ـ۶)

$$m_a=1000\,kg \qquad v_0=40\frac{m}{s}$$

$$m_s=100\,kg \qquad M=0.4$$

$$\Sigma F=ma \qquad F_f=\mu_x mg=100\times10\times0.4=400\,N$$

$$F=400+150=550$$

$550=(1100)a \quad \rightarrow \quad a=0.5$ کند شونده

$$V^2-V^2=2ax$$

$$0-(40)^2=2(0.5)x \quad \Rightarrow \quad 1600=x$$

۳ـ۷)

زمانی که جرم m_1 تماس خود را با دیوار قطع می‌کند دیگر نیروی در جهت $\hat{x}$ (به جزفنر) به آن وارد نمی‌شود، بنابراین مرکز جرم با سرعت ثابت در جهت $\hat{x}$ حرکت خواهد کرد.

در زمان $t = 0$ فنر از طول $\frac{\ell}{2}$ شروع به باز شدن می‌کند به علت این‌که در ابتدا m_1 حرکتی ندارد نیروی عمودی که به m_1 از طرف دیوار به آن وارد می‌شود به جهت بیرون دیوار و برابر با نیروی اعمال شده از طرف فنر خواهد بود.

$x_2 = 0$ موقعیتی برای فنر در نظر می‌گیریم که فنر طول طبیعی ℓ را داشته باشد در نتیجه:

$$x_2(t=0) = -\frac{\ell}{2} \qquad \dot{x}_2(t=0) = 0$$

$$F = m_2 \ddot{x}_2$$

$$-Kx = m_2 \ddot{x}_2$$

برای x_2 جوابی کلی به‌صورت $\cos, \sin$ در نظر می‌گیریم داریم:

$$x_2(t) = A\sin\sqrt{\frac{K}{m_2}}\,t + B\cos\sqrt{\frac{K}{m_2}}\,t$$

از شرایط مرزی داریم: $A = 0\ ,\ B = -\frac{\ell}{2}$

$$x_2(t) = -\frac{\ell}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m^2}}\,t\right)$$

جرم m_1 زمانی که $x_2(t) = 0$ می‌شود از دیوار جدا می‌شود.

$$\sqrt{\frac{k}{m_2}}\,t = \frac{\pi}{2} \qquad t^* = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_2}{k}}$$

t^* زمانی که طول فنر به طول طبیعی خود رسیده باشد برای $t < t^*$ $F_x = -kx_2(t)$ مرکز جرم به صورت زیر حرکت می‌کند.

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)}{m_1 + m_2} = \frac{-m_1\ell - \frac{\ell}{2}\cos\sqrt{\frac{k}{m_2}}\,t\,m_2}{m_1 + m_2}$$

برای $t > t^*$ برای x_{cm} داریم:

$$X_{cm}^{(t)} = \frac{-m_1\ell}{m_1+m_2} = \frac{d}{dt}x_{cm}(t=t^*)(t-t^*) = \frac{-m_1\ell}{m_1+m_2} + \frac{\ell\sqrt{Km_2}}{2(m_1+m_2)}(t-t^*)$$

۳ـ۸)

$$m = 50\,kg \qquad h = 0.8$$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \qquad J = \Delta P = \int F\Delta t$$

$$V^2 - V_0^2 = 2ax$$

$$0-V_0^2=-2(10)(0.8)=16$$
$$V_0=4$$
$$J=\Delta P=4\times 50=200$$

۳ـ۹)

واگن باری به جرم M و محتوی شن به جرم m است.

$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{d}{dt}\left(M_{tot}V\right)=\frac{d}{dt}M_{tot}\,v+M_{tot}\frac{dv}{dt}$$
$$=\frac{dm}{dt}v+\left(m_{ti}+\frac{dm}{dt}t\right)\frac{dv}{dt}$$
$$M_{ti}=M_{tot}\,(t=0)$$
$$Fdt=\left(M_{ti}+\frac{dm}{dt}t\right)dv$$
$$\int\frac{Fdt}{M_{ti}+\frac{dm}{dt}t}=\int dv=\frac{1}{\frac{dm}{dt}}F\ln\left[\frac{M_{ti}+\frac{dm}{dt}t}{M_{ti}}\right]=v_{(t)}-v_{(0)}$$
$$v_{(t)}=\frac{F}{\frac{dm}{dt}}Ln\left[\frac{M_{ti}+\frac{dm}{dt}t}{M_{ti}}\right]$$

واگن زمانی خالی می‌شود که

$$m+\frac{dm}{dt}t^*=0$$
$$t^*=\frac{-m}{\frac{dm}{dt}}$$
$$v_{(t^*)}=\frac{F}{\frac{dm}{dt}}Ln\left(\frac{M}{M+m}\right)$$

این مسئله را نیز می‌توانید مستقیم از فرمول $M\frac{dV}{dt}=F_{ext}+V_{rel}\frac{dM}{dt}$ به‌دست آورید.

۳ـ۱۰)

$$M\frac{dV}{dt}=F_{ext}+\frac{dM}{dt}$$

از آنجایی که شن با آهنگ ثابت b به داخل واگن می‌ریزد.

$$\frac{dm}{dt}=b \qquad m=bt$$

$$M\frac{dV}{dt}=F-bv$$

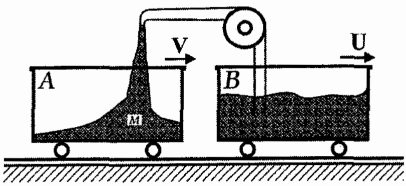
$$(M+bt)\frac{dV}{dt}=F-bv$$

$$(M+bt)dv=(F-bv)\,dt$$

$$\int_0^v \frac{dV}{F-bv}=\int_0^t t=\frac{m}{b}\ \frac{dt}{M+bt}$$

$$V=\frac{F_0\,m}{b(M+m)}$$

(۱۱ـ۳



با در نظر گرفتن زمان Δt و جرمی که در این زمان به A وارد می‌شود.

$$P(t)=Mv+b\Delta t\,u$$

$$P(t+\Delta t)=(M+b\Delta t)v(t+\Delta t)$$

از آنجایی که نیروی خارجی نداریم $\frac{dP}{dt}=0$

$$P(t)=P(t+\Delta t)$$

$$Mv(t)+bu\Delta t=(M+b\Delta t)v(t+\Delta t)$$

$$M[v(t+\Delta t)-v(t)]=[bu-bv(t+\Delta t)]\Delta t$$

$$\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\frac{ba-bv(t+\Delta t)}{M}$$

حد می‌گیریم زمانی که $\Delta t\to 0$ میل کند داریم:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{b(u-v)}{M}$$

(۱۲ـ۳

جرم واگن در ابتدا برابر 2000kg است ولی پس از گذشت 100 ثانیه به مقدار $mt, M=M_0+mt$ به جرم اولیه آن اضافه می‌شود پس در ثانیه 100 جرم واگن

$$M=2000+100\times10=3000\,kg$$

خواهد شد. از آنجایی که فاصله بین واگن و لوکوموتیو ثابت باقی می‌ماند پس با همان سرعت که شن در لوکوموتیو خارج می‌شود به واگن نیز وارد خواهد شد.

در مسئله صحبتی از وجود نیروی خارجی یا اصطکاک نکره است در نتیجه F_{ext} را برابر صفر قرار می‌دهیم پس داریم:

$$M\frac{dv}{dt}=F_{ext}+V_{rel}\frac{dM}{dt}$$

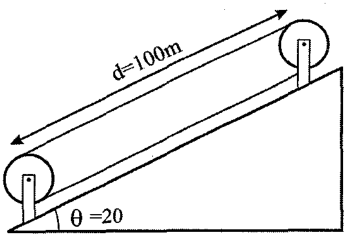
$$dV=50\frac{dt}{2000+10t}$$

از آنجایی که سرعت اولیه واگن صفر فرض شده داریم:

$$V=5Ln(2000+10t)\Big|_{0}^{100}$$

$$V=5Ln\frac{3}{2}$$

۳ـ۱۳)



تسمه با سرعت $1.5\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند.

بازه زمانی که اسکی باز به بالا می‌رود τ برابر $5 sec$ است. دو مولفه نیرو وجود دارد.

۱) برای نگه داشتن اسکی‌باز از لیز خوردن از سطح شیب‌دار نیروی $F_s=mg\sin\theta$ نیاز است. F کلی به صورت

$$F_1=\frac{d}{v\tau}F_s=\frac{d}{v\tau}mg\sin\theta$$

$N=\frac{d}{v\tau}$ تعداد اسکی‌بازها

۲) نیرویی که لازم است که هر اسکی باز به سرعت موردنیاز برسد.

$$F_2=\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}=\frac{\left(N+\frac{\Delta t}{\tau}\right)mv-Nmv}{\Delta t}$$

نیروی کل برابر است با:

$$F_2=\frac{mv}{\tau}$$

$$F_T=F_1+F_2=\frac{d}{v\tau}mg\sin\theta+\frac{mv}{\tau}\quad,\quad F_T=3128N+21N=3149N$$

۱۴ـ۳)

این مسئله در کتاب هالیدی به طور مشابه مطرح شده است.

الف) از پایستگی تکانه داریم:

$$P_i = P_f$$
$$0 = -Nm\nu_m + M\nu_m$$
$$0 = -Nm(u - V_m) + M\nu_m$$
$$Nmu = (Nm + M)\nu_m \qquad u = \nu_m + \nu_m$$
$$\nu_m = \frac{Nm}{Nm + M}u$$

به صورت حدی جواب مسئله را بررسی می‌کنیم.

$$M \to \infty \qquad V_m \to 0$$
$$M = Nm \qquad \nu_m = \frac{u}{2}$$
$$M = 0 \qquad N_m = u$$

ب) V_n سرعت در نظر می‌گیریم که n مرد به بیرون از واگن می‌پرند از معادله قسمت a استفاده می‌کنیم داریم:

$$V_i = \frac{m}{m + (M + (N+1)\,m)}n$$
$$\nu_f = \nu_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{m}{m + [M + (N-i)m]}n$$

ج) قسمت a منجر به سرعت نهایی بیشتر می‌شود زیرا در قسمت (ب) افرادی که به بیرون می‌پرند باید شتاب داشته باشند.

۱۵ـ۳)

$X(t)$ را طولی از طناب که در زمان t آویزان می‌شود در نظر می‌گیریم چگالی در واحد طول طناب را ρ در نظر می‌گیریم بنابراین جرم کل $M=\rho\ell$ خواهد شد و جرم آویزان ρx خواهد بود.

با توجه به نیروی وزن طناب آویزان و $\vec{F} = m\vec{a}$ داریم:

$$\rho g x = \rho \ell \ddot{x} \qquad \ddot{x} = \frac{g}{\ell}x$$

حل این معادله به صورت

$$x(t) = Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t}$$

که در این‌جا $\gamma = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ است.

از معادله مکان ریسمان مشتق می‌گیریم. داده‌های مسئله که $\dot{x}(0)=0$ را در آن قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آوریم که $A = B$ و با استفاده از $x(0)=\ell_0$ به رابطه $A=B=\frac{\ell_0}{2}$ می‌رسیم پس طول طناب آویزان از رابطه زیر پیروی می‌کند.

$$x(t)=\frac{\ell_0}{2}\left(e^{\gamma t}+e^{-\gamma t}\right)=\ell_0 \cosh \gamma t$$

سرعت آن را نیز می‌توان به صورت

$$\dot{x}(t)=\frac{\gamma\ell_0}{2}\left(e^{\gamma}-e^{-\gamma t}\right)=\gamma\ell_0 \sinh \gamma t$$

در نظر گرفت.

۳ـ۱۶)

تکانه انتقال یافته به آب را در مدت یک ثانیه حساب می‌کنیم که این با نیروی وارد بر آب از طرف شیر آتش‌نشانی برابر است.

در مدت 1S حجم آب خارج شده برابر با حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده D و ارتفاع V_0 است پس جرم خارج شده برابر است با $\rho\frac{\pi D^2}{4}V_0$

$$\text{تکانه انتقال یافته آب در مدت 1S}=\left(\rho\frac{\pi D^2}{4}V_0\right)V_0=\frac{\rho\pi D^2 V_0^2}{4}$$

پس نیروی وارد بر آتش‌نشانی برابر است با $\frac{\rho\pi D^2 V_0^2}{4}$ (طبق قانون عمل و عکس‌العمل)

طبق مباحث انتقال تکانه:

$$F=\lambda V_0^2 \quad , \quad \lambda=\frac{M}{1}=\rho A=\frac{\rho\pi D^2}{4} \quad \Rightarrow \quad F=\rho\pi\left(\frac{V_0 D}{2}\right)^2$$

نیروی وارد شده به شیر عکس‌العمل این نیرو است و برابر است با:

$$F=-\rho\pi\left(\frac{V_0 D}{2}\right)^2$$

۳ـ۱۷)

فرض می‌کنیم که برخورد غیر الاستیک باشد

سرعت آب وقتی به سمت بالا می‌رود کاهش می‌یابد از مسئله ۵ ـ۳ داریم:

$$V(h)=\sqrt{v_0^2-2gh}$$

$$F_{\omega}=\frac{dp}{dt}=\frac{p(t+\Delta t)-p(t=0)}{\Delta t}=\frac{0-\frac{dm}{dt}\Delta t V(h)}{\Delta t}$$

$$-w=-\frac{dm}{dt}\sqrt{v_0^2-2gh}$$

$$-v_0^2+\left(\frac{w}{\frac{dm}{dt}}\right)^2=-2gh$$

$$h=\frac{1}{2g}\left[-\left(\frac{w}{\frac{dm}{dt}}\right)^2+v_0^2\right]$$

طبق مباحث انتقال تکانه با فرض این‌که آب پس از برخورد به سطل با همان سرعت باز گردد، داریم:

$$F=2\lambda v^2$$

در لحظه برخورد فواره آب به سطل سرعت آن برابر است با :

$$\left(v^2-v_0^2=-2gh\right), V=\sqrt{v_0^2-2gh}$$

۳ـ۱۸)

جرم اولیه قطره باران M_0 است که جرم آن با آهنگ $\frac{dm}{dt}=kmv$ افزایش می‌یابد جهت مثبت را به سمت پایین در نظر می‌گیریم.

با در نظر گرفتن زمان Δt

$$F=\frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$$M(t)g\Delta t=P(t+\Delta t)-P(t)$$

$$M(t)g\Delta t=\left[M(t)+\frac{dm}{dt}\Delta t\right]V_1(t+\Delta t)-M_1(t)V_1(t)$$

$$KM(t)V(t)V(t+\Delta t)+M(t)g\Delta t=M(t)\left[V(t+\Delta t)-V(t)\right]$$

حد می‌گیریم زمانی که $\Delta t \to 0$ میل پیدا کند

$$g-kv^2(t)=\frac{dv}{dt}$$

$$KV_{term}=g \qquad V_{term}=\sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$g-kV^2(t)=\frac{dv}{dt} \qquad \int dt=\int\frac{dv}{g-kv^2(t)}$$

$$t=\left[\frac{1}{\sqrt{gk}}\operatorname{Tanh}^{-1}\left(\frac{V\sqrt{gk}}{g}\right)\right]_0^{V_{(t)}}$$

$$V(t)=\sqrt{\frac{g}{k}}\operatorname{Tanh}\left(\sqrt{gk}\,t\right)$$

وقتی $t\to\infty$ میل پیدا کند داریم:

$$V(t)=\sqrt{\frac{g}{k}}$$

(۳ـ۱۹

طبق مباحث انتقال تکانه داریم:

چون آب پس از برخورد به سرعت صفر می‌رسد. (سرعت برگشت قابل اغماض است) $F=\lambda V^2$

$$v=5\frac{m}{s}$$

$$\lambda=\frac{m}{l}=10^{-3}\times A\times\frac{1}{v}=10^{-3}\times500\times\frac{1}{5}=0.1\times10-3$$ در این مسئله

$$\Rightarrow \quad F=0.1\times25=2.5\times10^{-3}\,N$$

اگر کاسه با سرعت $\frac{m}{s}$ بالا بیاید با در نظر گرفتن سرعت نسبی داریم: $v=7\frac{m}{s}$

$$\Rightarrow \quad F=10^{-3}\times500\times7\times10^{-3}=3.5\times10^{-3}\,N$$

(۳ـ۲۰

از قانون دوم نیوتن برای جرم متغیر داریم:

$$M\frac{dv}{dt}=F_{ext}+V_{rel}\frac{dM}{dt}$$

از آنجایی که M جرم لحظه‌ای موشک است.

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-mbv+m\gamma u$$

$$\frac{dv}{dt}=(-g+\gamma u)-bv$$

$$\frac{dv}{(-g+\gamma u)-bv}=dt \quad\Rightarrow\quad \int_0^v -bv+\left(\frac{dv}{(-g+\gamma u)}\right)=\int_0^t dt$$

موشک با سرعت اولیه $V=V_0$ شروع به حرکت می‌کند.

$$-\frac{1}{b}\mathrm{Ln}(-g+\gamma u)-b\nu\Big|_{0}^{\nu}=t$$
$$\mathrm{Ln}\big[(-g+\gamma u)-b\nu\big]/(-g+\gamma u)=-bt$$
$$(-g+\gamma u)-b\nu=e^{-bt}(\gamma u-g)$$
$$(-g+\gamma u)-e^{-bt}(\gamma u-g)=b\nu$$

زمانی که $t\to\infty$ میل کند خواهد شد

$$\nu=\frac{1}{b}(-g+\gamma u)$$
$$\frac{mdV}{dt}=-mg-mb+m\gamma u=-mg+m\gamma u-mb\nu$$

در صورتی‌که نیروهای $mb\nu$, $V_{rel}\frac{dm}{dt}$ را نیروی استوکس فرض کنید (cv) این نیرو نیروی میراکننده است و پس در زمان‌های طولانی سرعت ذره به سرعت حد می‌رسد که در سرعت شتاب (نیرو) صفر است یا صفر قرار دادن نیرو می‌توان سرعت حدی را به دست آورد.

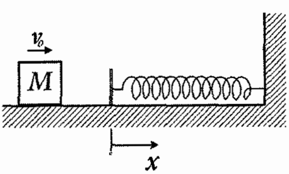
$$-mg+m\gamma u-mb\nu=0$$
$$V=\frac{-mg+m\gamma u}{mb}$$
$$V=\frac{1}{b}(-g+\gamma u)$$

فصل چهارم

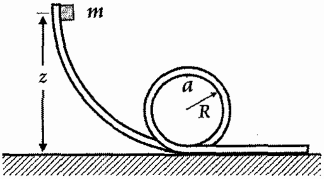
کار و انرژی

۱. قطعه کوچکی به جرم m از حالت سکون روی مسیر حلقوی بدون اصطکاکی مطابق شکل ۱ـ۴ شروع به لغزیدن می‌کند. ارتفاع اولیه آن (z) چقدر باید باشد تا این‌که m در بالای مسیر (در نقطه a) با نیرویی برابر با وزن خود به طرف خارج فشار وارد کند.

۲. قطعه مکعبی به جرم M روی یک میز افقی با سرعت v_0 می‌لغزد. در $x = 0$ این قطعه با فنری که ثابت آن k است برخورد می‌کند و در این لحظه مطابق شکل ۲ ـ ۴ اعمال نیروی اصطکاک شروع می‌شود. ضریب اصطکاک متغیر است و از رابطه $\mu = bx$ به‌دست می‌آید، که در آن b مقدار ثابتی است. انرژی مکانیکی از دست رفته را در زمانی که قطعه برای اولین بار به طور آنی به حالت سکون می‌رسد، تعیین کنید.



شکل ۲ ـ ۴



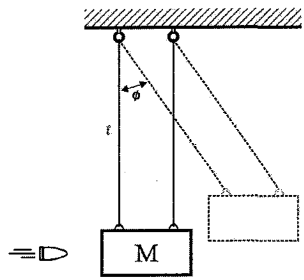
شکل ۱ ـ ۴

۳. ساده‌ترین راه اندازه‌گیری سرعت یک گلوله، استفاده از آونگ بالیستیک است. طبق شکل ۳ـ۴، این آونگ از یک قطعه مکعب چوبی به جرم M تشکیل شده است که گلوله به داخل آن شلیک می‌شود. این قطعه توسط کابل‌هایی به طول l به صورت معلق درآمده است و برخورد گلوله باعث می‌شود که این قطعه چوب با یک زاویه بیشینه ϕ مطابق شکل به نوسان درآید. سرعت اولیه گلوله v و جرم آن m است.

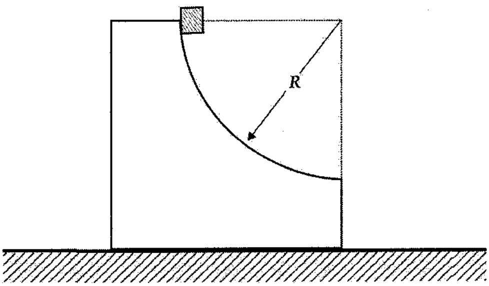
(الف) بلافاصله بعد از این‌که یک گلوله به حالت سکون درآمد، قطعه با چه سرعتی حرکت می‌کند؟ (فرض کنید این عمل خیلی سریع اتفاق می‌افتد).

(ب) نشان دهید که با اندازه‌گیری l, M, m و ϕ می‌توانیم سرعت گلوله را پیدا کنیم.

۴. مکعب کوچکی به جرم m در مسیر دایره شکلی به شعاع R که از قطعه بزرگی به جرم M بریده شده مطابق شکل ۴ـ۴ به طرف پایین می‌لغزد. قطعه M روی میزی قرار دارد و هر دو قطعه بدون اصطکاک حرکت می‌کنند. این قطعات ابتدا در حالت سکون‌اند و m از بالای مسیر شروع به حرکت می‌کند. سرعت v مکعب را وقتی که از قطعه جدا می‌شود پیدا کنید.



شکل ۳ ـ ۴

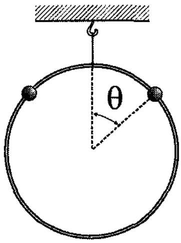


شکل ۴ ـ ۴

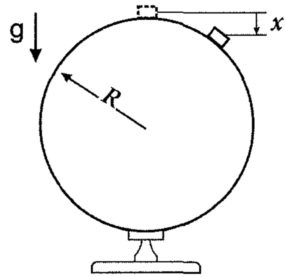
۵. جرم m روی میز بدون اصطکاکی می‌چرخد، این جرم به وسیلهٔ سیمی که از سوراخی در سطح یک میز عبور می‌کند در حال حرکت دایره‌ای نگهداشته می‌شود. سیم به آرامی از سوراخ کشیده می‌شود به طوری که شعاع دایره از l_1 به l_2 تغییر می‌کند. نشان دهید کار انجام شده در فرایند کشیدن سیم با افزایش انرژی جنبشی جرم برابر است.

۶. قطعه مکعب کوچکی از حالت سکون از بالای کرهٔ بدون اصطکاکی به شعاع R مطابق شکل ۵ـ۴ به پایین می‌لغزد. با توجه به شکل، این قطعه چقدر، x پایین‌تر از رأس کرهٔ، تماس خود را با کره از دست می‌دهد. فرض کنید که کره حرکت نمی‌کند.

۷. حلقه‌ای به جرم M توسط نخی آویزان است، و دو مهره به جرم m روی آن بدون اصطکاک می‌لغزند (شکل ۶ ـ۴) مهره‌ها از بالای حلقه و به طور همزمان رها شده‌اند، و به طرف پایین در دو جهت مخالف می‌لغزند. نشان دهید اگر $m>3\frac{M}{2}$ باشد حلقه شروع به بالا رفتن می‌کند، و زاویه‌ای که در آن این عمل اتفاق می‌افتد چقدر است؟

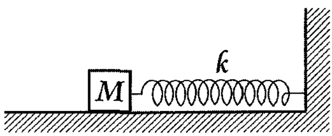


شکل ۶ ـ ۴



شکل ۵ ـ ۴

۸. قطعه مکعبی مطابق شکل ۷ـ۴ تحت اثر فنری با ثابت k و نیروی اصطکاک ضعیفی با ضریب ثابت f قرار دارد. این قطعه را به اندازه فاصله x_0 از حالت تعادل کشیده و سپس رها می‌کنند. قطعه چندین بار نوسان می‌کند و سرانجام به حالت سکون در می‌آید. (الف)نشان دهید کاهش دامنه برای هر چرخه نوسان یکسان است. (ب) پیدا کنید تعداد نوسان‌های کامل (n) این جرم را قبل از این‌که به حالت سکون درآید.



شکل ۷ ـ ۴

۹. یک واکنش شیمیایی ساده و خیلی سریع عبارت است از $H+H \rightarrow H_2+5eV$ ($1eV=1.6\times10^{-19}J$ یکای انرژی در مقیاس اتمی است). اما، وقتی که اتم‌های هیدروژن در فضای ازاد با هم برخورد می‌کنند به سادگی از هم جدا می‌شوند. دلیل این است که در یک برخورد ساده دو جسمی که انرژی آزاد می‌شود، برقراری قوانین پایستگی تکانه و انرژی ممکن نیست. آیا می‌توانید این مسئله را ثابت کنید؟ شما می‌توانید با نوشتن عباراتی برای پایستگی تکانه و انرژی این کار را آغاز کنید. (دقت کنید که انرژی واکنش را در معادله انرژی دخالت دهید و علامت آن را هم درست انتخاب کنید). با حذف تکانه نهایی مولکول‌ها از دو معادله، می‌توانید نشان دهید که تکانه اولیه باید شرط غیرممکنی داشته باشد.

۱۰.قطعه مکعبی به جرم M روی یک میز افقی بدون اصطکاک به فنری با ثابت k متصل است. حرکت این قطعه طوری است که حول نقطه تعادل خود با دامنهٔ A_0 نوسان می‌کند و دوره تناوب حرکت برابر $T_0=2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$ است. (الف) مقداری از بتونهٔ چسبان به جرم m را روی قطعه می‌اندازیم، به طوری که بدون برگشت به قطعه می‌چسبد. بتونه لحظه‌ای به جرم M برخورد می‌کند که سرعت M برابر صفر است. پیدا کنید:

۱. دورهٔ تناوب جدید

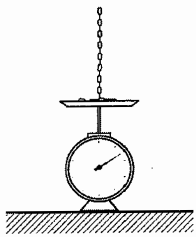
۲. دامنه جدید

۳. تغییر انرژی مکانیکی سیستم را.

(ب) قسمت (الف) را با این شرط تکرار کنید که بتونهٔ چسبان در لحظه‌ای که M دارای سرعت بیشینه است با آن برخورد کند.

۱۱. زنجیری به جرم M به طول l مطابق شکل ۸ ـ۴ به طور قائم معلق است به نحوی که انتهای پایینی آن با کفه یک ترازو در تماس است. زنجیر را رها می‌کنیم تا بر روی ترازو بیفتد.

وقتی که طول x زنجیر روی ترازو می‌افتد درجهٔ ترازو چه عددی را نشان می‌دهد. (از اندازهٔ حلقه‌های اتصال صرف‌نظر کنید).



شکل ۸ ـ ۴

۱۲. در جنگ جهانی دوم روس‌ها که برای انجام عملیات هوابرد دچار کمبود چتر نجات بودند، گاهگاهی سربازان را در کیسه‌ای از علف خشک از هواپیما به روی برف سقوط می‌دادند. بدن انسان به طور متوسط می‌تواند یک فشار برخورد $20.7\times10\frac{N}{m^2}$ را تحمل کند.

فرض کنید هواپیمای راهنما یک محمولهٔ ساختگی را که از نظر وزن برابر با یک محمولهٔ واقعی است از ارتفاع 45 متری رها کند. خلبان می‌بینند این محموله به اندازه 0.6 متر در برف فرو می‌رود. اگر جرم متوسط سربازها برابر 65 کیلوگرم و سطح موثر آن‌ها 0.5 متر مربع باشد، آیا چنین سقوطی برای انسان بی‌خطر خواهد بود؟

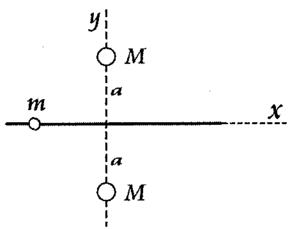
۱۳. تابع انرژی پتانسیلی که معمولاً برای توصیف برهم‌کنش بین دو اتم به‌کار می‌رود عبارت است از پتانسیل 12.6 لنارد ـ جونز (شکل ۹ـ۴)

$$U=\epsilon\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}-2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right]$$

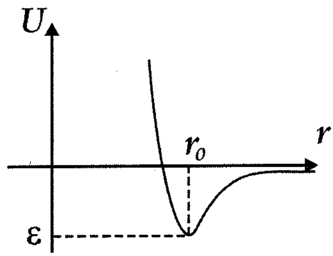
(الف) نشان دهید که شعاع مربوط به پتانسیل کمینه برابر r_0 و عمق چاه پتانسیل برابر ϵ است.

(ب) بسامد نوسان‌های کوچک حول نقطه تعادل دو اتم یکسان به جرم‌های m را که از طریق بر هم کنش لنارد ـ جونز با هم ارتباط دارند پیدا کنید.

۱۴. مهره‌ای به جرم m بدون اصطکاک روی میله صافی در جهت x می‌لغزد. این میله بین دو کره به جرم‌های M و به فاصله مساوی از آن‌ها قرار دارد. کره‌ها مطابق شکل ۱۰ـ۴ در $x = 0$ و $y = \pm a$ قرار دارند و مهره را به صورت گرانشی جذب می‌کنند. (الف) انرژی پتانسیل مهره را پیدا کنید. (ب) مهره در $x = 3a$ با سرعت v_0 به طرف مبدأ رها می‌شود. سرعت آن را وقتی که از مبدأ عبور می‌کند پیدا کنید. (ج) بسامد نوسان‌های کوچک مهره را حول مبدأ پیدا کنید.



شکل ۱۰ ـ ۴



شکل ۹ ـ ۴

۱۵. ذره‌ای به جرم m در جهت مثبت x در یک بعد حرکت می‌کند. این ذره تحت تاثیر نیروی ثابتی که بزرگی آن B و جهت آن به طرف مبدأ است، و یک نیروی دامنهٔ تابع قانون عکس مجذور فاصله به بزرگی $\frac{A}{x^2}$ قرار می‌گیرد. (الف) تابع انرژی پتانسیل $U(x)$ را پیدا کنید. (ب) نمودار انرژی سیستم را وقتی که بیشینه انرژی جنبشی آن $K_0 = 1.2\,mv_0^2$ است رسم کنید. (ج) مکان تعادل x_0 را پیدا کنید. (د) بسامد نوسان کوچک حول x_0 چقدر است؟

۱۶. یک ماشین مسابقه ۱۸۰۰ پوندی در ۸ ثانیه تا $6\frac{\text{mile}}{\text{h}}$ سرعت می‌گیرد. توان متوسطی که موتور آن در طی زمان حرکت ماشین مصرف می‌کند چقدر است؟

۱۷. یک سورتمهٔ برفی با سرعت $15\ \frac{\text{mile}}{\text{h}}$ از تپه‌ای بالا می‌رود. این تپه دارای شیبی است که هر ۴۰ فوت به اندازه یک فوت ارتفاع پیدا می‌کند. نیروی مقاومت مربوط به برف برابر با ۵ درصد وزن سورتمه است. این سورتمه با چه سرعتی به طرف پایین حرکت می‌کند، با فرض این‌که موتور آن در این حالت هم همان‌قدر توان مصرف کند.

۱۸. یک مرد ۱۶۰ پوندی به حالت دولا به هوا می‌پرد. گرانیگاه او قبل از این‌که زمین را ترک کند ۵ft را بالاتر از سطح زمین قرار دارد. سپس این گرانیگاه در انتهای پرش تا ۳ft بالا می‌رود. با فرض این‌که مرد با نیروی ثابتی به زمین فشار وارد کند، چه توانی بوجود می‌آورد؟

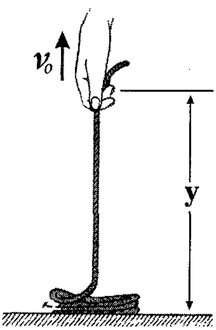
۱۹. همان شخص مسئله قبل به هوا می‌پرد، اما این دفعه نیرویی که اعمال می‌کند از یک بیشینه در آغاز پرش شروع شده و در لحظه‌ای که زمین را ترک می‌کند به صفر می‌رسد. به عنوان تقریب قابل قبول نیرو را به صورت $F=F_0\cos\omega t$ در نظر بگیرید که در آن F_0 نیروی بیشینه است، و تماس با زمین وقتی از بین می‌رود که $\omega t=\frac{\pi}{2}$ شود. بالاترین توانی را که این شخص در این پرش تولید می‌کند پیدا کنید.

۲۰. از قیفی با آهنگ $\frac{dm}{dt}$ روی یک تسمه انتقالی افقی که توسط موتوری با سرعت ثابت V به حرکت درآمده است، شن ریخته می‌شود. (الف) توان لازم برای به حرکت در آوردن تسمه را پیدا کنید. (ب) جواب را با آهنگ تغییر انرژی جنبشی شن مقایسه کنید، آیا دلیل اختلاف را می‌توانید بیان کنید؟

۲۱. طناب یکنواختی با جرم واحد طول λ روی میز افقی صافی مطابق شکل ۱۱ـ۴ حلقه شده است. یک سر آن را با سرعت ثابت v_0 مستقیماً به طرف بالا می‌کشیم.

(الف) نیروی وارد بر انتهای طناب بر حسب تابعی از ارتفاع y پیدا کنید.

(ب) توان داده شده به طناب را با آهنگ تغییر انرژی مکانیکی کل طناب مقایسه کنید.

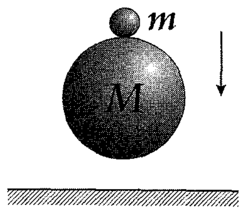


شکل ۱۱ ـ ۴

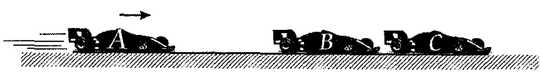
۲۲. توپی را به کف اتاق می‌اندازیم این توپ پس از جهش‌های متوالی سرانجام به حالت سکون در می‌آید. برخورد بین توپ و کف اتاق ناکشسان است، سرعت پس از هر برخورد برابر است با سرعت قبل از برخورد ضربدر e، که در آن $e < 1$ است (e را ضریب بازگشت می‌نامند). اگر سرعت لحظه‌ای قبل از اولین جهش v_0 باشد، زمان لازم برای ساکن شدن توپ را پیدا کنید.

۲۳. گلولهٔ کوچکی به جرم m مطابق شکل ۱۲ـ۴ روی یک " توپ بزرگ" به جرم M قرار دارد. این دو را از ارتفاع h به کف اتاق می‌اندازیم. گلوله کوچک بعد از برخورد چقدر بالا می‌رود؟ فرض کنید برخورد توپ بزرگ کشسان، و $m \ll M$ باشد. به‌منظور کمک به تجسم مسئله، فرض کنید وقتی که توپ بزرگ با کف اتاق برخورد می‌کند گلوله کمی از آن فاصله دارد. (اگر از جواب خیلی تعجب می‌کنید، سعی کنید مسئله را با یک ساچمه و توپ بزرگ امتحان کنید).

۲۴. مطابق شکل ۱۳ـ۴ اتومبیل‌های B و C در حالت خاص و در حال سکون هستند. اتومبیل A با سرعت زیاد با اتومبیل B برخورد می‌کند و B را به طرف C می‌فشارد. اگر برخوردها کاملاً ناکشسان باشند، چه کسری از انرژی اولیه در اتومبیل C از بین می‌رود؟ در ابتدا هر سه اتومبیل مشابه یکدیگرند.



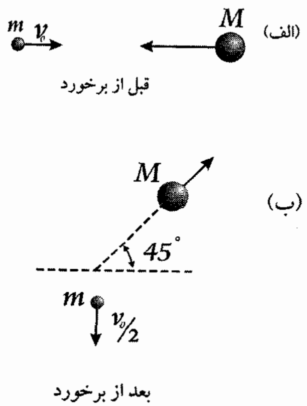
شکل ۱۲ـ۴



شکل ۱۳ـ۴

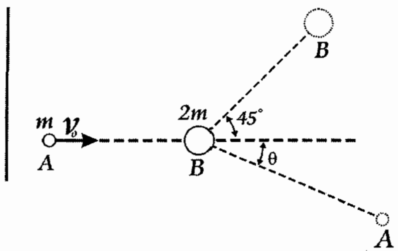
۲۵. پروتونی با یک ذره مجهول در حال سکون برخورد رودرو انجام می‌دهد. پروتون با ۴،۹ انرژی جنبشی اولیه خود مستقیماً به عقب بر می‌گردد. نسبت جرم ذره مجهول به جرم پروتون را با فرض اینکه برخورد کشسان باشد پیدا کنید.

۲۶. ذره‌ای به جرم m و سرعت اولیه v_0 با ذره دیگری به جرم مجهول M که از جهت مقابل، مطابق شکل ۱۴ـ۴ (الف) در حرکت است برخوردی کشسان انجام می‌دهد. بعد از برخورد، m با سرعت $\frac{v_0}{2}$ و زاویه قائم نسبت به جهت فرودی به حرکت در می‌آید، و M در جهت نشان داده شده در شکل ۱۴ـ۴ (ب) حرکت می‌کند. نسبت $\frac{M}{m}$ را پیدا کنید.



شکل ۱۴ـ۴

۲۷. ذره A به جرم m دارای سرعت اولیه v_0 است. این ذره بعد از برخورد با ذرهٔ B به جرم 2m که در ابتدا در حالت سکون است، مسری مطابق شکل ۱۵ـ۴ را طی می‌کند. θ را پیدا کنید.



شکل ۱۵ـ۴

۲۸. هدف نازکی از لیتیم توسط هسته‌های هلیم با انرژی E_0 بمباران می‌شود. هسته‌های لیتیم در ابتدا در هدف در حالت سکون‌اند ولی اساساً مقید نیستند. وقتی که هستهٔ هلیم وارد هستهٔ لیتیم می‌شود، یک واکنش هسته‌ای می‌تواند رخ دهد و هسته مرکب حاصل به‌صورت یک هسته بورویک نوترون تجزیه شود. بخورد ناکشسان است، و انرژی جنبشی نهایی به اندازهٔ 2.8 MeV کمتر است $\left(1\text{MeV}=10^6\text{ eV}=1.6\times10^{-13}\text{J}\right)$. جرم‌های نسبی ذرات عبارت‌اند از:

جرم هلیم 4، جرم لیتیم 7، جرم بور 10، جرم نوترون 1.

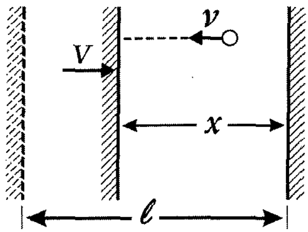
واکنش هسته‌ای را می‌توان به طریق زیر خلاصه کرد

$$^{7}\text{Li}+{}^{4}\text{He} \rightarrow {}^{10}\text{B}+{}^{1}\text{n}-2.8\,\text{MeV}$$

الف) انرژی آستانه $E_{0\,\text{آستانه}}$، یا مقدار کمینه E_0 برای این‌که نوترون تولید شود چقدر است؟ انرژی نوترون در این حالت آستانه‌ای چقدر است؟

ب) نشان دهید که اگر انرژی فرودی در فاصله $E_{0\,\text{آستانه}} < E_0 < E_{0\,\text{آستانه}} + 0.27\,\text{MeV}$ باشد، نوترون‌هایی که رو به جلو بیرون رانده می‌شوند همگی انرژی یکسانی ندارند بلکه باید یکی از دو انرژی ممکن را دارا باشند. (با مطالعه واکنش در دستگاه مرکز جرم می‌توانید منشأ این دو گروه را درک کنید).

۲۹. یک "توپ مخصوص" به جرم m مطابق شکل ۱۶-۴ با سرعت v_0 بین دو دیواره به جلو و عقب می‌جهد. از گرانش صرف‌نظر می‌کنیم و برخوردها را کاملاً کشسان در نظر می‌گیریم.



شکل ۱۶-۴

الف) نیروی متوسط وارد بر هر دیواره را پیدا کنید.
ب) اگر یکی از دیواره‌ها به آرامی و با سرعت $V \ll v$ به طرف دیگری حرکت کند، به دلیل فاصلهٔ کوتاه بین برخوردها و به علت این‌که سرعت توپ هنگام جهش از دیواره متحرک افزایش می‌یابد آهنگ جهش تندتر خواهد شد. F را بر حسب فاصله بین دیواره‌ها، x، پیدا کنید. (راهنمایی: آهنگ متوسط افزایش سرعت توپ را با حرکت دیواره پیدا کنید).
ج) نشان دهید که کار لازم برای حرکت دادن دیواره از l تا x برابر است با افزایش انرژی جنبشی توپ. (این مسئله سازوکار گرم شدن گاز را بر اثر تراکم نشان می‌دهد).

۳۰. ذره‌ای به جرم m و سرعت v_0 به طور کشسان با ذره‌ای به جرم M که در ابتدا به حالت سکون است برخورد می‌کند. و با زاویه Θ در دستگاه مرکز جرم پراکنده می‌شود.
الف) سرعت نهایی m را در دستگاه آزمایشگاه پیدا کنید.
ب) کسری از انرژی جنبشی m را که تلف می‌شود، پیدا کنید.

کار و انرژی

۴ـ۱)

در بالاترین نقطه از حلقه دو نیرو وجود دارد. نیروی وزن mg و نیروی عمود بر سطح N = mg
برای حرکت قطعه در مسیر دایروی داریم:

$$a_r = -\frac{v^2}{R} = -\frac{mg}{m} - \frac{N}{m} = -\frac{mg+mg}{m} = -2g$$

$\frac{v^2}{R} = 2g$ و از آن‌جا $V = \sqrt{2gR}$ با استفاده از بقای انرژی در ارتفاع z در نقطه a خواهیم داشت.

$$E_z = E_a$$

$$k_i + u_i = k_f + u_f$$

$$0 + mgz = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg(2R)$$

$$mgz = \frac{1}{2}m(2Rg) + mg(2R)$$

$$= 3mgR \quad \Rightarrow \quad Z = 3R$$

۴ـ۲)

با توجه به وجود اصطکاک انرژی دیگر پایسته نخواهد بود.

$$E_2 - E_1 = w_f$$

$$w_f = -\int F.dx$$

$$= -\int mg\,x\,dx = -\mu mg\frac{x^2}{2} = w_f$$

می‌توان مقدار x^2 را نیز بر حسب مقادیر مشخص به‌دست آورد.

$$E_2 - E_1 = w_f$$

$$\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\int bmg\,x\,dx$$

$$\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -bmg\frac{x^2}{2}$$

$$x^2(k+bmg) = mv_0^2$$

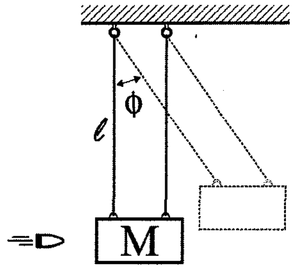
$$x = \sqrt{\frac{m}{k+mgb}}\;v_0$$

$$W = -\frac{b}{2}mg\frac{m}{k+mg\,b}v_0$$

$$= -\frac{b}{2}\frac{m^2gv_0}{k+mgb}$$

(۳ـ۴

در برخورد پایستگی تکانه برقرار است.



$$P_{\text{قبل از برخورد}} = P_{\text{بعد از برخورد}}$$

$$m\nu = (m+M)v$$

$$v = \frac{m}{m+M}\nu$$

از بقای انرژی دو حالت II و III یعنی بعد از برخورد و زمانی که جسم به زاویه ϕ برسد داریم:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\ell(1-\cos\phi)$$

$$\frac{1}{2}m\frac{m^2v^2}{(m+M)^2} = mg\ell(1-\cos\phi)$$

$$\nu = \frac{m+M}{m}\sqrt{2y\ell(1-\cos\phi)}$$

(۴ـ۴

با استفاده از قوانین بقای انرژی و تکانه خواهیم داشت:

$$P_i = P_f$$

$$0 = m\nu - MV \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{M}\nu$$

$$E_i = E_f$$

$$mgR = \frac{1}{2}m\nu^2 + \frac{1}{2}M\nu^2$$

$$= \left(\frac{m}{2} + \frac{m^2}{2M}\right)\nu^2$$

$$Rg = \frac{M+m}{2M}\nu^2$$

$$\nu = \sqrt{\frac{2M}{m+M}Rg}$$

به ازای $M = m$ $V = \sqrt{Rg}$ و به ازای $M \to \infty$ و $V = \sqrt{2Rg}$ میل خواهد کرد.

(۵ـ۴

ساده‌ترین روش برای حل این مسئله استفاده از پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای است. چون در این فصل به این مبحث پرداخته نشده است از قانون دوم نیوتن استفاده می‌کنیم.

$$F_\theta = ma_\theta$$

$$0 = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) \Rightarrow 0 = r\dot{\omega} + 2\dot{r}\omega$$

$$\frac{d\omega}{dt} + 2\frac{dr}{dt}\omega = 0$$

$$\int\frac{d\omega}{\omega} = -2\int\frac{dr}{r} \quad \mathrm{Ln}\frac{\omega_{(t)}}{\omega_0} = -2\mathrm{Ln}\frac{r_{(t)}}{r_0}$$

$$\omega_{(t)} = \omega_0\left(\frac{r_0}{r(t)}\right)^2$$

با توجه به $V = r\omega$ داریم:

$$v(t) = r(t)\omega(t)$$

$$= \omega_0\frac{r_0^2}{r(t)}$$

$$= V_0\frac{r_0}{r(t)}$$

در این مثال جرم m ابتدا با سرعت v_1 در شعاع L_1 و پس با سرعت v_2 شعاع L_2 حرکت می‌کند

بنابراین: $v_2 = v_1\left(\frac{L_1}{L_2}\right)$ تغییرات انرژی جنبشی سیستم عبارت است از:

$$\Delta k = k_2 - k_1$$

$$= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$= \frac{m}{2}\left[v_1^2\left(\frac{L_1}{L_2}\right)2 - v_1^2\right] = \frac{m}{2}v_1^2\left[\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 - 1\right]$$

از تعریف کارا داریم:

$$w = -\int F.dr$$

$$= -\int_{L_1}^{L_2} m\frac{v^2}{r}dr$$

$$= -\int_{L_1}^{L_2} \frac{m}{r}v_1^2\frac{L_1^2}{L_2^2}dr$$

$$\omega = -mv_1^2L_1^2\int_{L_1}^{L_2}\frac{dr}{r^3}$$

$$=-mv_1^2L_1^2\left(-\frac{1}{2L_2^2}+\frac{1}{2L_1^2}\right)$$

$$=\frac{m}{2}v_1^2\left[\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2-1\right]$$

$$\Delta K=W$$

(۴ـ۶

از پایستگی انرژی می‌توان نوشت:

$$E_1=E_2$$

$$mgR=\frac{1}{2}mV^2+mgR\cos\theta$$

از قانون دوم نیوتن داریم:

$$N+mg\cos\theta=m\frac{V^2}{R}$$

در لحظه جدا شدن مکعب دو کره $N=0$ خواهد بود.

$$V^2=Rg\cos\theta$$

$$mgR=\frac{m}{2}Rg\cos\theta+mgR\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{2}{3}$$

با توجه به این‌که $X=R-R\cos\theta$ می‌باشد داریم:

$$X=R-R\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$X=\frac{R}{3}$$

(۴ـ۷

نیروهای وارد بر جرم m را می‌نویسیم:

$$N=\frac{mv^2}{R}-mg\cos\theta=mR\dot{\theta}^2-mg\cos\theta$$

باید از بالا $\dot{\theta}^2$ را پیدا کنیم و جایگزین کنیم برای این منظور از مولفه مماسی نیرو کمک می‌گیریم.

$$mg\sin\theta=m\left(R\ddot{\theta}+2\dot{R}\dot{\theta}\right)$$

در دایره $\dot{R}=0$ است پس

$$mg\sin\theta=mR\ddot{\theta}$$

می‌توان $\ddot{\theta}$ را به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{\theta}=\frac{d\dot{\theta}}{dt}=\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \ddot{\theta}=\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

$$2\dot{\theta}d\dot{\theta}=2d\theta\frac{g}{R}\sin\theta$$

$$\dot{\theta}^2=2\frac{g}{R}(1-\cos\theta)$$

$$N=2mg(1-\cos\theta)-mg\cos\theta$$
$$=mg(2-3\cos\theta)$$

شرط این‌که حرکت روبرو بالا باشیم این است که

$$\frac{mv^2}{R}\geq mg\cos\theta$$

یا $N\geq 0$ بنابراین:

$$2-3\cos\theta\geq 0 \Rightarrow \cos\theta\geq\frac{2}{3}$$

$$\theta\leq\cos^{-1}\frac{2}{3}$$

در قسمت دوم اگر جرم حلقه M باشد برای این‌که حرکت رو به بالا داشته باشیم باید نیروهای رو به بالا حداقل برابر Mg باشد یعنی:

$$2N\cos\theta\geq Mg$$
$$2mg(2-3\cos\theta)\cos\theta\geq mg$$

اگر مساوی صفر قرار دهیم.

$$-3\cos^2\theta+2\cos\theta-\frac{M}{2m}=0$$

$$\cos\theta=\frac{-1\mp\sqrt{1-\frac{3M}{2m}}}{-3}$$

برای این‌که جواب داشته باشیم باید $1-\frac{3M}{2m}\geq 0$ باشد یعنی:

$$1\geq\frac{3}{2}\frac{M}{m} \Rightarrow m\geq\frac{3}{2}M$$

۴ـ۸)

روش اول:

تغییر انرژی این سیستم عبارت است از:

$$\Delta E=\int f.dx=4Af$$

که در آن f نیروی اصطکاک و A دامنه نوسان است.

$$E_i = \frac{1}{2}KA_i^2$$

$$E_f = \frac{1}{2}KA_f^2$$

$$= \frac{1}{2}KA_i^2 - 4Af$$

$$\frac{1}{2}K\left(A_i^2 - A_f^2\right) = 4Af$$

$$\left(A_i - A_f\right)\left(A_i + A_f\right) = \frac{8Af}{k}$$

$$\Delta A = A_i - A_f = \frac{4f}{k}$$

ب) بنابراین تعداد نوسانات کامل این جرم عبارت است از:

$$n = \frac{x_0}{\Delta A} = \frac{kx_0}{4f}$$

روش دوم:

حل مسئله را با چند سوال آغاز می‌کنیم.

۱) آیا فرکانس تغییر می‌کند؟

۲) در هر دورهٔ تناوب دامنه چقدر کم می‌شود.

۳) پس از چند دورهٔ تناوب سیستم انرژیش را کامل از دست می‌دهد و می‌ایستد؟

پاسخ:

۱) فرکانس تغییر نمی‌کند چون نیروی ثابت تأثیری در فرکانس ندارد (μ هم ثابت است)

۲) $m\ddot{x} = -kx + \mu mg \qquad m\ddot{x} = -k\left(x - \frac{\mu mg}{k}\right)$

$$x - \frac{\mu mg}{k} = X \quad , \quad \ddot{x} = \ddot{x}\,,\ \delta = \frac{\mu mg}{k}, X = x - \delta$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

دوره تناوب تغییر نمی‌کند.

$$x = x_0 \cos\omega t$$

$$w = \int \vec{f}.\vec{dx} = \int_0^{\frac{T}{4}} \mu mg x_0 \omega \sin\omega t\, dt$$

W: مقدار انرژی که از بین می‌رود. متوسط sin در یک دورهٔ تناوب صفر است پس ما فقط $\frac{T}{4}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$w = \mu mg x_0 \frac{\omega}{\omega}(-\mathrm{Cos}\,\omega t)_0^{\frac{T}{4}}$$

انرژی تلف‌شده:

$$w = \mu mg x_0 = \mu mg(x - \delta) = \delta k(x-\delta)$$

انرژی یک نیم سیکل

$$E = \frac{1}{2}kA^2 - 2\delta k(x-\delta) = \frac{1}{2}k\left(A^2 - 4\delta x + 4\delta^2\right)$$

$$E = \frac{1}{2}k(A-2\delta) = \frac{1}{2}kA'^2 \Rightarrow A' = A - 2\delta$$

در یک نیم سیکل به اندازه 2δ از دامنه کم می‌شود. پس در یک دورهٔ تناوب 4δ کم می‌شود.

حال می بینیم پس از چند دوره صفر می‌شود.

$$X_0 - 4\delta = 0$$

$$X_0 = 4n\delta \Rightarrow n = \frac{x_0}{4\delta} = \frac{x-\delta}{4\delta}$$

$$\text{تعداد نوسانات} = \frac{A-\delta}{4\delta}$$

نتایج کلی:

۱) ω تغییر نمی‌کند.

۲) در هر سیکل کامل به‌اندازه $\frac{4\mu mg}{k}$ از دامنه کم می‌شود.

۳) پس از $n = \frac{A - \frac{\mu mg}{k}}{\frac{4\mu mg}{k}}$ ساکن می‌شود.

۴) بین هر دو دامنه رابطه‌ی $x_m = x_{m-1} - 4\delta$ برقرار است یعنی اختلافی به اندازه‌ی 4δ وجود دارد.

۵) دامنه به‌صورت خطی میرا می‌شود.

(۴-۹)

قانون پایستگی تکانه : $mv_1 - mv_2 = 2mv \Rightarrow v_1 - v_2 = 2v$

قانون پایستگی انرژی : $\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(2m)v^2 + E_0 \Rightarrow (v_1^2 + v_2^2) = 2v^2 + \frac{2E_0}{m}$

$$v_1^2 + v_2^2 = \frac{2(v_1 - v_2)^2}{4} + \frac{2E_0}{m} \Rightarrow 2(v_1^2 + v_2^2) = (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 + \frac{4E_0}{m})$$

جرم اتمی هیدروژن ۱ و یکای جرم اتمی : $1.67\times10^{-27}, E_0 = 5ev$

اگر v_1, v_2 را تقریباً مشابه بگیریم $v_1 \cong v_2 \cong 21887.03$ این بدان معنی است که لااقل سرعت یکی از دو اتم هیدروژن موقع برخوردباید به این زیادی باشد .ولی در دمای معمولی و فضای آزاد هرگز این سرعت برای آنها میسر نیست.

۱۰ـ٤)

الف) در ابتدا بلوک که در اختیار داریم دارای زمان تناوب $T_0=2a\sqrt{\frac{M}{k}}$ و انرژی $E_0=\frac{1}{2}KA^2$ است. در قسمت (الف) زمانی که بتونه روی بلوک می‌افتد $r = ۰$ است و در دامنه ماکزیمم خود را دارا است پس در دامنه تغییری ایجاد نمی‌شود $A_a = A.$ خواهد شد ولی دوره تناوب تغییر می‌کند پس $T_a=2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}$ خواهد شد. و انرژی به علت تغییر نکردن دامنه ثابت باقی می‌ماند پس داریم:

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}} \quad (۱$$

$$A_a = A_0 \quad (۲$$

$$E_a = E. \quad (۳$$

ب) بتونه به بلوک زمانی که دارای سرعت ماکزیمم است برخورد می‌کند. از پایستگی تکانه خطی داریم:

$$P_i = P_f$$

$$Mv_i = (M+m)v_f$$

توجه شود که انرژی اولیه

$$E_i = \frac{1}{2}KA_0^2 = \frac{1}{2}mv_i^2$$

خواهد بود.

۱) زمان تناوب به ا نرژی یا دامنه بستگی ندارد پس $T_a = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$

۲)

$$\frac{1}{2}KA_b^2 = \frac{1}{2}(M+m)v_f^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{M^2}{M+m}v_i^2$$

$$= \frac{M}{M+m}\frac{1}{2}KA_0^2$$

در نتیجه داریم:

$$A_b = \sqrt{\frac{M}{M+m}}A_0$$

۳) با جانشینی A_b در $E_b=\frac{1}{2}KA_b^2$ داریم:

$$E_b=\frac{1}{2}KA_b^2=\frac{1}{2}K\frac{M}{M+m}A_0^2=\frac{M}{M+m}E_0$$

(۱۱ـ٤

از رابطه مستقل از زمان داریم:

$$V^2-V_0^2=2gx$$

که در آن x طولی از زنجیر است که روی تراز می‌افتد و .v سرعت زنجیر در لحظه رها شدن می‌باشد.

$$v=\sqrt{2gx}$$

$$m\frac{dv}{dt}=F_{ext}+v\frac{dm}{dt}$$

زمانی که زنجیر ترازو می‌رسد ساکن می‌شود.

$$0=N-\lambda gx-\lambda v\frac{dx}{dt} \qquad N=\lambda gx+\lambda(2gx)$$

$$N=3\lambda gx$$

در حالت کلی، مسائل جرم متغیر و از این قبیل مسائل را می‌توان با توجه به رابطه نیرو برای جرم متغیر یا از طریق قانون پایستگی انرژی حل کرد (به ماریون رجوع شود.)

(۱۲ـ٤

از فرمول سرعت‌های مستقل از زمان داریم چون محموله از هواپیما رها می‌شود پس سرعت اولیه آن صفر است داریم:

$$V^2-V_0^2=2gy$$

$$V^2=-2gy$$

$$=-2\times10\times45$$

$$V=30\frac{m}{s}$$

سرعت رسیدن محموله به سطح زمین

$$V^2-V_0^2=2a\Delta h$$

$$-900=2\times a\times0.6$$

شتاب منفی که محموله می‌گیرد تا ساکن شود.

$$a=\frac{-900}{1.2}=-750\frac{m}{s^2}$$

$$V=at+V_0$$

$$0=-750t+30$$

زمان این برخورد

$$t=\frac{30}{750}=0.04\ S$$

نیروی وارد بر محموله به علت تغییر تکانه

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}$$

$$F=\frac{65\times30\times75}{3}=48750\,N$$

فشار وارد بر جسم

$$P=\frac{F}{A}=\frac{48750}{\frac{1}{2}}=97500\frac{N}{m^2}$$

خودتان مقایسه کنید.

(۴ـ۱۳

الف)

$$u(r)=\varepsilon\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2-2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6\right]$$

برای به‌دست آوردن شعاع پتانسیل را کمینه می‌کنیم.

$$\frac{du}{dr}=\varepsilon\left[-12\frac{r_0^{12}}{r^{13}}+12\frac{r_0^{6}}{r^{7}}\right]=0$$

$$\frac{r_0^6}{r^7}=\frac{r_0^{12}}{r^{13}}$$

$$r^6=r_0^6 \qquad r=r_0$$

می‌نیمم u در $r=r_0$ اتفاق می‌افتد.

عمق پتانسیل برابر است با:

$$u(r\to\infty)=0 \qquad u(r_0)=\varepsilon[1-2]=-\varepsilon$$

ب) برای به‌دست آوردن بسامد نوسانات کوچک K_{eff} را به‌دست می‌آوریم.

$$K_{eff}=\left.\frac{d^2u}{dr^2}\right|_{r=r_0}=\varepsilon\frac{d}{dr}\left[-12\frac{r_0^{12}}{r^{13}}+12\frac{r_0^{6}}{r^{7}}\right]_{r=r_0}$$

$$=\varepsilon\left[12\times13\frac{r_0^{12}}{r^{14}}-12\times7\frac{r_0^{6}}{r^{8}}\right]_{r=r_0}=12\varepsilon\left(\frac{13}{r_0^2}-\frac{7}{r_0^2}\right)$$

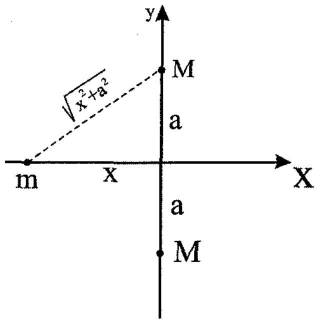
$$K_{eff}=72\frac{\varepsilon}{r_0^2}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{K_{eff}}{\mu}}$$

که در این‌جا $\mu=\frac{m^2}{m+m}=\frac{m}{2}$ است.

$$\omega=\sqrt{\frac{72\frac{\varepsilon}{r_0^2}}{\frac{m}{2}}}=12\sqrt{\frac{\varepsilon}{r_0^2\,m}}$$

۱۴_۴)



چون دو جسم M وجود دارد.

$$u=-\frac{2GMm}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=-2\frac{GMm}{a}\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cong\frac{-2GMm}{a}\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}.......\right)$$

$$\Delta u\approx\frac{1}{2}\frac{2GMm}{a^3}x^2$$

می‌توان با مقایسه پتانسیل بالا با پتانسیل فنر $\left(\frac{1}{2}Kx^2\right)$، $\frac{2GMm}{a^3}$ را به عنوان K_{eff} در نظر گرفت.

$$\omega=\sqrt{\frac{K_{eff}}{m}}$$

$$=\sqrt{\frac{2GMm}{ma^3}}=\sqrt{\frac{2GM}{a^3}}$$

از پایستگی انرژی داریم:

$$E(x=3a)=E(x=0)$$

$$\frac{-2GMm}{\sqrt{9a^2+a^2}}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{2GMm}{a}$$

$$V^2=\frac{4GM}{a}-\frac{4GM}{\sqrt{10}a}$$

$$V=2\sqrt{\frac{GM}{a}\left(1-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)}$$

۱۵ ـ ٤)

به ذره دو نیرو که یکی ثابت و جاذب است $(F_1=-B)$ و دیگری به صورت $F_2=\frac{A}{x^2}$ وارد می‌شود بنابراین:

$$F=-B+\frac{A}{x^2}$$

$$u(x)=-\int F dx=-\int\left(\frac{A}{x^2}-B\right)dx$$

$$u(x)=\frac{A}{x}+Bx$$

ج) برای به‌دست آوردن مکان تعادل از پتانسیل مشتق می‌گیریم در محل تعادل $F = ۰$ است بنابراین $\Sigma F=0$ خواهد بود.

$$F=0 \qquad B=\frac{A}{x^2} \qquad x=\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2}}$$

د) برای به‌دست آوردن بسامد نوسانات کوچک داریم:

$$u'(x)=B-\frac{A}{x^2}$$

$$u''_{(x)}=2\frac{A}{x^3}$$

$$u''=\left(\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{2A}{\left(\frac{A^3}{B^3}\right)^{\frac{1}{2}}}=2\left(\frac{B^3}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{u''(x=x_0)}{m}}=\sqrt{\frac{2B}{m}\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

۱٦ـ٤)

$$\overline{P}=F.\overline{V}$$

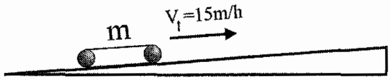
$$=F\frac{V}{2}$$

برای به‌دست آوردن $\overline{V}$ از رابطه سرعت متوسط استفاده کرده‌ایم $\overline{V}=\frac{v+v_0}{2}$ که در آن $v_0=0$ است.

$$=ma\frac{v}{2}=m\frac{v^2}{2t}$$

$$=\frac{1800\times 60}{2\times 8}=6750$$

۱۷ـ٤)



سورتمه جهت حرکت‌کردن باید بر نیروی مقاومت برف و نیروی گرانش غلبه کند.

$$P=\frac{1}{40}\quad V_{\uparrow}\,mg+\frac{mg}{20}V_{\uparrow}=-\frac{1}{40}V_{\downarrow}\,mg+\frac{mg}{20}V_{\downarrow}$$

$$3V_{\uparrow}\frac{mg}{40}=V_{\downarrow}\frac{mg}{40}$$

$$V_{\downarrow}=3V_{\uparrow}=45\frac{\text{mile}}{h}$$

۱۸ـ٤)

$$F-Mg=M\frac{dv}{dt}\quad\Rightarrow\quad\int_0^t dt=\int_0^v\frac{M\,dv}{F-Mg}$$

$$t=\frac{MV}{F-Mg}\quad\Rightarrow\quad(F-Mg)t=MV \qquad (۱)$$

$$F-Mg=MV\frac{dV}{dz}$$

$$(F-Mg)h=\frac{1}{2}MV^2 \qquad (۲)$$

با تقسیم رابطه‌ی ۲ بر ۱ داریم:

$$\frac{V}{2}=\frac{h}{t} \qquad (۳)$$

توان برابر است با:

$$P=\frac{W}{t}=\frac{F.h}{t}=\frac{FV}{2}$$

با جایگذاری $\frac{V}{2}$ از رابطه‌ی (۳) به‌دست می‌آید:

$$P=\frac{F}{2}\left[\frac{2h}{M}(G-Mg)\right]^{\frac{1}{2}}$$

۱۹ـ٤)

$$F=F_0\cos\omega t$$

$$F=ma\qquad\qquad\frac{dV}{dt}=\frac{F_0\cos\omega t}{m}$$

$$V=\frac{F}{m}\frac{1}{\omega}\sin\omega t$$

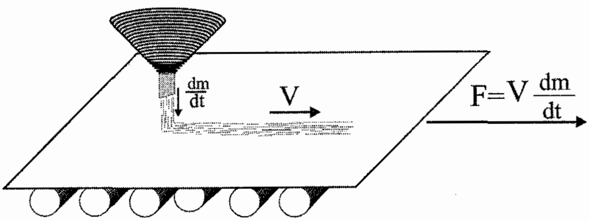
$$P=F.V$$

$$P=\frac{F^2}{m\omega}\sin\omega t\cos\omega t$$

$$P=\frac{F^2}{2m\omega}\sin 2\omega t$$

$$P_{max}=\frac{F^2}{2m\omega}$$

۲۰ـ٤)



سرعت تسمه ثابت است، تسمه با جرم متغیر در نظر می‌گیریم:

$$M\frac{dV}{dt}=F_{ext}+V_{rel}\frac{dM}{dt}$$

$$0=F_{ext}-V\frac{dM}{dt}$$

$$F_{ext}=V\frac{dM}{dt}$$

برای توان از رابطه داریم:

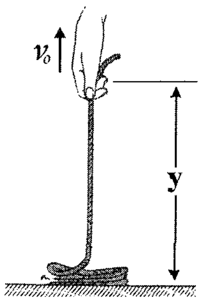
$$P=F.V=V^2\frac{dM}{dt}$$

معادله بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P=\frac{d}{dt}\left(MV^2\right)=2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}MV^2\right)=2\frac{dK}{dt}$$

این رابطه نشان می‌دهد که توان لازم برای حفظ حرکت تسمه دو برابر آهنگ افزایش انرژی جنبشی دستگاه است. (به هالیدی مراجعه شود)

۴ـ۲۱)



الف)

چگالی در واحد طول λ است.

۱) گرانش در جهت y: $F_G = Mg = \lambda y g$

۲) نیرویی که در لحظه Δt به بخشی از طناب $\Delta y = v_0 \Delta t$ وارد می‌شود.

$$F_A = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

$$F_A = \frac{\Delta m V_0 - 0}{\Delta t} = \frac{\lambda \Delta y V_0}{\Delta t} = \frac{\lambda V_0 \Delta t V_0}{\Delta t} = \lambda V_0^2$$

$$F_T(y) = F_G + F_A = \lambda y g + \lambda V_0^2$$

ب) چه مقدار دست کار انجام می‌دهد؟

$$W = \int_0^y F(y) dy = \int_0^y \left(\lambda y g + \lambda V_0^2\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\lambda y^2 g + \lambda V_0^2 y$$

توان نرخ تغییرات کار انجام شده است:

$$P = \frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\lambda g\left(V_0 t\right)^2 + \lambda V_0^2\left(V_0 t\right)\right]$$

$$= \lambda g V_0^2 t + \lambda V_0^3 = F.V$$

انرژی مکانیکی سیستم چقدر است؟

$$E = k + u$$

$$= \frac{1}{2} M_{(y)} V_0^2 + \frac{1}{2} M_{(y)} g \frac{y}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\lambda y V_0^2 + \frac{1}{2}\lambda y^2 g$$

$$E = \frac{1}{2}\lambda V_0^3 t + \frac{1}{2}\lambda g V_0^2 t^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\lambda V_0^3 + \lambda g V_0^2 t$$

همان‌طور که انتظار داشتیم کار انجام شده بیشتر از انرژی مکانیکی است.

$$W \neq E \qquad P=\frac{dW}{dt}\neq\frac{dE}{dt}$$

این واقعاً خارق‌العاده است . به مطالب ذیل توجه کنید.

حال سعی می‌کنیم که نتیجه بالا را حس کنیم. در ابتدا ما می‌دانیم که انرژی پایسته است به این معنی که مقدار کاری که ما انجام می‌دهیم به گرما و کار مکانیکی تبدیل می‌شود (مانند برخورد غیر الاستیک)

حال F را نیروی کل خارجی وارد بر جسم در نظر می‌گیریم.

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt} \qquad\qquad \vec{F}=m\vec{a}$$

$$F=\dot{m}\vec{V}+m\dot{\vec{V}} \qquad\qquad \vec{F}=\frac{m\,d\vec{v}}{dt}$$

$$F.\vec{V}=\dot{m}\vec{V}^2+m\dot{\vec{V}}.\vec{V} \qquad\qquad \vec{F}.\vec{V}=m\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{V}$$

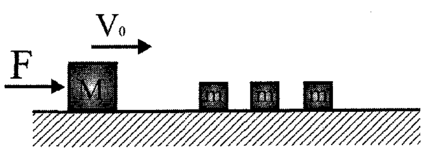
$$P=\frac{1}{2}\dot{m}\vec{V}+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{V}^2\right) \qquad\qquad P=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\dot{m}\vec{v}^2+\frac{dk}{dt} \qquad\qquad =\frac{dk}{dt}$$

این نتیجه فقط زمانی که m تغییر نکند درست است اگر m (t) باشد داریم:

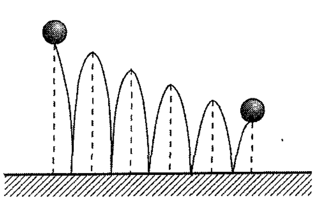
$$P=\frac{dk}{dt}+\frac{1}{2}\dot{m}\vec{v}^2$$

حال یک جسم به جرم M که با سرعت ثابت .v تحت نیروی F حرکت می‌کند در نظر بگیرید. اگر جرم‌های کوچک m در سر راه M باشد و به آن برخورد کند و بچسبد ما دوباره به‌دست می‌آوریم: $W\neq E$



۴ـ۲۲)

توپ را رها کرده‌ایم پس $v_0=0$



پس:

$$-v=-gt+v_0$$

$$t_0=\frac{v_0}{g}$$

$$t_1=et=\frac{ev_0}{g}$$

$$t=t_0+2t_1+2t_2+...$$

$$=t_0+2et_0+2e^2t_0+...$$

$$=\frac{v_0}{g}\left(1+2e+2e^2+2e^3+...\right)$$

$$=\frac{v_0}{g}\left(1-2+2+2e+2e^2+2e^3\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{1+e}{1-e}$$

که در آن از بسط $2+2e+2e^2+... = \frac{2}{1-e}$ استفاده کرده‌ایم.

همچنین می‌توان کل مسافت طی شده‌ی توپ را قبل از متوقف شدن محاسبه کرد. اگر ارتفاع جهش‌ها را در هر مرحله حساب کنیم، با فرض این‌که ارتفاع اول را با h، ارتفاع دوم را با h' و... نشان دهیم می‌توان مانند بالا از تصاعد هندسی مسئله را جمع حساب کنیم.

$$\frac{1}{2}mV^2=mgh \qquad h=\frac{v^2}{2g}$$

$$mgh'=\frac{1}{2}mv'^2$$

$$h'=\varepsilon^2h \qquad h''=\varepsilon^2h'=\varepsilon^4h$$

$$H_{\text{کل}}=h+2h'+2h''+..$$

$$=h+2\varepsilon^2h+2\varepsilon^4h+...$$

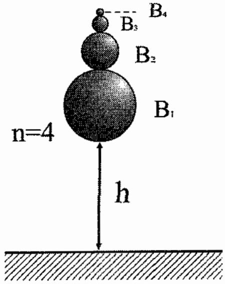
$$=h+2h'\frac{1}{1-e^2}=h\frac{1-e^2+2}{1-e^2}$$

$$=h\frac{1+e^2}{1-e^2}$$

۴ـ۲۳)

قبل از این‌که توپ M به زمین برخورد کند هر دو توپ با سرعت $V=\sqrt{2gh}$ (از $\frac{mv^2}{2}=mgh$) به سمت پایین حرکت می‌کنند.

دقیقاً بعد از برخورد توپ M به زمین با سرعت V به سمت بالا حرکت می‌کند در آن هنگام توپ m باسرعت v به سمت پایین می‌آید.
سرعت نسبی بنابراین v ۲ خواهد شد بعد از برخورد به یکدیگر سرعت نسبی ۲v باقی خواهد ماند از آنجایی که سرعت M برابر V است بنابراین سرعت گلوله بالایی بعد از برخورد $2v+v=3v$ خواهد شد. از پایستگی انرژی جسم تا ارتفاع $H=d+\frac{(3v)^2}{2g}$ بالا خواهد رفت یا $H = d + 9h$
حال توجه شما را به این مسئله جلب می‌کنم.



n توپ $B_1,\dots,B_n$ با جرم‌های $m_1,m_2..m_n$ $(m_1>>m_2>>\dots>>m_n)$ مانند شکل قرار دارند توپ B_1 از ارتفاع h از سطح زمین رها می‌شود و توپ nام در ارتفاع $h+l$ قرار دارد توپ n ام بعد از برخورد با زمین چقدر بالا می‌رود؟
جواب نهایی:

$$V_n=\left(2^n-1\right)v$$

$$H=\ell+\left(2^n-1\right)^2\frac{V^2}{2g}=\ell+\left(2^n-1\right)^2h$$

(۴ـ۲۴)

در برخورد تکانه پایسته می‌ماند داریم

$$P_i=P_f$$

$$m_A V=\left(m_A+m_B+M_C\right)v'$$

$$v'=\frac{m_A}{m_A+m_B+m_C}v$$

از پایستگی انرژی کل داریم:

$$\frac{1}{2}m_A V^2=\frac{1}{2}\left(m_A+m_B+m_C\right)V'^2+Q$$

$$\frac{1}{2}m_A V^2=\frac{1}{2}\left(m_A+m_B+m_C\right)\frac{m_A^2 V^2}{m_A+m_B+m_C}$$

$$Q=\frac{1}{2}m_A\ V^2\left(1-\frac{m_A}{m_A+m_B+m_C}\right)$$

$$=\frac{1}{2}m_A\ V^2\left(\frac{m_B+m_C}{m_A+m_B+m_C}\right)$$

روش دیگر استفاده از سیستم دو ذره‌ایی می‌باشد می‌دانیم در سیستم دو ذره‌ایی مقدار اتلاف انرژی برابر است با:

$$Q=T-T'=\frac{1}{2}\mu v^2\left(1-e^2\right)$$

چون $e=0$ است داریم:

$$Q=\frac{1}{2}\frac{m_A\left(m_B+m_c\right)}{m_A+m_B+m_C}$$

(۲۵ـ٤)

این یک برخورد الاستیک است بنابراین انرژی و تکانه پایسته می‌ماند.

$$P_i=P_f$$

$$mv_0=-\frac{2}{3}mv_0+Mv$$

$$\frac{5}{3}mv_0=Mv$$

$$E_i=E_f$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}m\frac{4}{9}v_0^2+\frac{1}{2}MV^2$$

$$\frac{5}{9}mv_0^2=Mv^2$$

$$=\frac{5}{3}mv_0\ v$$

$$\frac{1}{3}v_0=v$$

از روابط بالا داریم:

$$\frac{5}{3}mv_0=M\frac{v_0}{3}\quad\Rightarrow\quad M=5m$$

۴ـ۲۶)

از پایستگی تکانه در راستای x و y داریم

$$x: mv_0 - Mv = \frac{mv'}{\sqrt{2}}$$

$$y: \frac{mv_0}{2} = M\frac{v'}{\sqrt{2}}$$

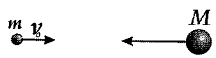
با جانشینی v' از روابط بالا خواهیم داشت:

$$v = \frac{mv_0}{2M}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{v_0^2}{4} + \frac{1}{2}Mv'^2 \quad ; \quad \frac{m}{3} = M$$

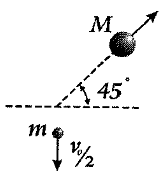
۴ـ۲۷)

(الف)



قبل از برخورد

(ب)



بعد از برخورد

از پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای در راستای y , x داریم:

$$x: mv_0 = mv_1\cos\theta + 2mv_2\cos 45$$

$$\left(v_1\cos\theta\right)^2 = \left(v_0 - \sqrt{2}\,v_2\right)^2$$

$$v_1^2\cos^2\theta = v_0^2 + 2v_2^2 - 2\sqrt{2}\,v_0\,v_2$$

$$y: mv_1\sin\theta = 2mv_2\sin 45$$

$$v_1^2\sin^2\theta = 2v_2^2$$

از جمع معادلات روابط بالا داریم:

$$v_1^2 = v_0^2 + 4v_2^2 - 2\sqrt{2}\,v_0\,v_2$$

از پایستگی انرژی داریم:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}2mv_2^2$$

$$v_0^2=v_1^2+2v_2^2$$

$$v_1^2=v_0^2+4v_2^2-2\sqrt{2}\,v_0v_2$$

$$v_0^2=v_1^2+2v_2^2$$

$$v_0^2-2v_2^2=v_0^2+4v_2^2-2\sqrt{2}\,v_0v_2$$

$$2\sqrt{2}\,v_0v_2=4v_2^2$$

$$\sqrt{2}\,v_0=3v_2$$

$$v_2=\frac{\sqrt{2}\,v_0}{3}$$

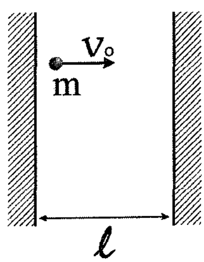
$$v_0^2=v_0^2+2\times\frac{2}{9}v_0^2$$

$$v_0^2-\frac{4}{9}v_0^2=v_1^2$$

$$\frac{5}{9}v_0^2=v_1^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3}v_0=v_1$$

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}\,v_2}{v_1}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}\,\frac{v_0}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}v_0}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

۴ ـ ۲۹)



در مدت زمان $\Delta t=\frac{2\ell}{V_0}$ هر دیوار یک برخورد را تجربه می‌کند.

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{2mv_0}{\frac{2\ell}{v_0}}$$

$$F=\frac{mv_0^2}{\ell}$$

ب) دیوار سمت چپ با سرعت $v \ll v_0$ در حرکت است اگر فاصله بین دو دیوار x باشد این جابه‌جایی در زمان $T=\frac{\ell-x}{v}$ صورت خواهد گرفت.

در هر برخورد توپ سرعت ۲v را دریافت می‌کند و برخورد در هر $t=\frac{2x}{v}$ تاثیر رخ می‌دهد.

$$\frac{dv}{dt}=\frac{2v}{\frac{2x}{v}}=\frac{vv}{x}$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{v}{\ell-vt}dt$$

$$Ln\left(\frac{v}{v_0}\right)=-Ln\left(\frac{\ell-vt}{\ell}\right)$$

$$v(t)=v_0\left(\frac{\ell}{\ell-vt}\right)=v_0\left(\frac{\ell}{x}\right)$$

$$F=\frac{mv^2}{x}=\frac{m}{x}v_0^2\frac{\ell^2}{x^2}=\frac{mv_0^2}{\ell}\left(\frac{\ell}{x}\right)^3=F_0\left(\frac{\ell}{x}\right)^3$$

$$\Delta k=k_f-k_i=\frac{m}{2}\left(v_f^2-v_i^2\right)$$

$$=\frac{m}{2}\left[v_0^2\left(\frac{\ell}{x}\right)^2-v_0^2\right]=\frac{m}{2}v_0\left[\left(\frac{\ell}{x}\right)^2-1\right]$$

$$W=\int F.dx$$

$$=-\int_\ell^x \frac{mv_0^2}{\ell}\left(\frac{\ell}{x}\right)^3dx=\frac{mv_0^2}{\ell}\ell^3\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]_\ell^x$$

$$-\frac{1}{2}mv_0^2\ell^2\left(\frac{1}{\ell^2}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{m}{2}v_0^2\left[\left(\frac{\ell}{x}\right)^2-1\right]$$

$$W=\Delta K$$

۴ـ۳۰)

پایستگی تکانه در راستای x و y:

$$mv_0=mv_f\cos\theta_1+Mu\cos\theta_2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} Mu\cos\theta_2&=mv_0-mv_f\cos\theta_1\\ Mu\sin\theta_2&=mv_f\sin\theta_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$M^2u^2=m^2\left[v_0^2-2v_0v_f\cos\theta_1+v_f^2\right]$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_f^2+\frac{1}{2}Mu^2 \quad \Rightarrow \quad M^2u^2=mM\left(v_0^2.v_f^2\right)$$

$$mM\left(v_0^2-v_f^2\right)=m^2\left[v_0^2-2v_0v_f\cos\theta_1+v_f^2\right]$$

$$(m+M)v_f^2-2mv_0\cos\theta_1\ v_f+(m-M)v_0^2=0$$

$$v_f=\frac{mv_0\cos\theta_1\pm\sqrt{m^2v_0^2\cos\theta_1-(m+M)(m-M)v_0^2}}{m+M}$$

$$v_f=\frac{v_0}{m+M}\left(m\cos\theta_1\pm\sqrt{M^2-m^2\sin\theta_1}\right) \qquad (۱)$$

از طرفی: $tg\theta_1=\dfrac{\sin\theta}{\dfrac{m}{M}+\cos\theta}=\dfrac{M\sin\theta}{m+M\cos\theta}$

$$1+tg^2\theta_1=\frac{1}{\cos^2\theta_1}=1+\frac{M^2\sin^2\theta}{(m+M\cos\theta)^2}=\frac{m^2+2mM\cos\theta+M^2}{(m+M\cos\theta)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta_1=\frac{m+M\cos\theta}{\left(m^2+2mM\cos\theta+M^2\right)}^{\frac{1}{2}} \qquad (۲)$$

$$\sin^2\theta_1=1-\cos^2\theta_1=1-\frac{(m+M\cos\theta)^2}{m^2+2mM\cos\theta+M^2}=\frac{M^2\sin^2\theta}{m^2+2mM\cos\theta+M^2} \qquad (۳)$$

$$(1),(2),(3) \quad \Rightarrow \quad v_f=\frac{v_0}{m+M}\left[\frac{m^2+mM\cos\theta}{\left[m^2+2mM\cos\theta+M^2\right]^{\frac{1}{2}}}\pm\right.$$

$$\left.\left(M^2-\frac{m^2M^2\sin^2\theta}{m^2+2M\cos\theta+M^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$v_f=\frac{v_0}{m+M}\frac{m^2+mM\cos\theta\pm M(m\cos\theta+M)}{\left(m^2+2mM\cos\theta+M^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{v_0}{m+M}\frac{m^2+mM\cos\theta+mM\cos\theta+M^2}{\left(m^2+2mM\cos\theta+M^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{k_0-k_f}{k_0}=\frac{v_0^2-v_f^2}{v_0^2}=1-\frac{m^2+2mM\cos\theta+M^2}{(m+M)^2}=\frac{2mM(1-\cos\theta)}{(m+M)^2}$$

فصل پنجم

خصوصیات ریاضی نیرو و انرژی

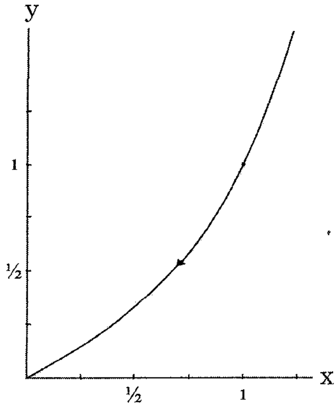
۱. نیروهای مربوط به انرژی پتانسیل‌های زیر را پیدا کنید:

الف) $U = Ax^2 + By^2 + Cz^2$

ب) ($\ln$ لگاریتم طبیعی $\log_e$ است) $U = A\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$

ج) $U = A\dfrac{\cos\theta}{r^2}$ (در مختصات قبلی مسطح).

۲. ذره‌ای به جرم m در صفحه‌ای افقی روی سهمی $y=x^2$ مطابق شکل ۱ـ۵ حرکت می‌کند. این ذره در لحظه $t=0$ در نقطه $(1,1)$ است و در جهت نشان داده شده با سرعت v_0 حرکت می‌کند. غیر از نیرویی که آن را روی مسیر حفظ می‌کند، نیروهای خارجی زیر بر آن وارد می‌شود.



شکل ۱ ـ ۵

یک نیروی شعاعی به صورت $F_a = -Ar^2\hat{r}$

نیروی مفروضی به صورت $F_b = B\left(y^2\hat{i} - x^2\hat{j}\right)$

که در آن‌ها A و B ثابت هستند، (الف) آیا نیروها پایستارند؟ (ب) سرعت ذره v_f هنگام رسیدن به مبدأ چیست؟

۳. پایستگی نیروهای زیر را تحقیق کنید: (الف) $F = F_0 \sin at$ که در آن F_0 برداری ثابت است؛ (ب) $F = A\theta\hat{r}$ که در آن $A = \text{const}$ و $0 \le \theta \le 2\pi$ است (F در صفحه xy قرار دارد)؛ (ج) نیرویی که بستگی به سرعت ذره دارد ولی همیشه بر سرعت عمود است.

۴. معلوم کنید که کدام یک از نیروهای زیر پایستارند. تابع انرژی پتانسیل را، اگر وجود دارد، پیدا کنید. A، α، و β مقادیر ثابت‌اند. (الف) $F = A\left(3\hat{i} + z\hat{j} + y\hat{k}\right)$؛ (ب) $F = Axyz\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)$؛ (ج) $F_x = 3Ax^2y^5e^{\alpha z}$, $F_y = 5Ax^3y^4e^{\alpha z}$, $F_z = \alpha Ax^3y^5e^{\alpha z}$؛ (د)

$$F_x = A\sin(\alpha y)\cos(\beta z)\,,\; F_y = -Ax\alpha\cos(\alpha y)\cos(\beta z),$$
$$F_z = Ax\sin(\alpha y)\sin(\beta z)$$

۵. تابع انرژی پتانسیل کی نیروی دوبعدی به‌خصوص با معادله $U = Cxe^{-y}$ داده شده است که در آن C مقداری ثابت است. (الف) خطوط انرژی ثابت را رسم کنید. (ب) نشان دهید که اگر یک نقطه به فاصله کوتاه dx روی خط انرژی ثابت جابه‌جا شود، آن‌گاه مقدار کل جابه‌جایی آن باید برابر $dr = dx\left(\hat{i} + \frac{\hat{j}}{x}\right)$ باشد؛ (ج) با استفاده از نتیجه قسمت (ب) و به‌طور مستقیم نشان دهید که ∇U عمود بر خط انرژی ثابت است.

۶. اگر $A(r)$ یک تابع برداری از r باشد به طوری که همه جا در $\nabla \times A = 0$ صدق کند، نشان دهید A را می‌توان به صورت $A(r) = \nabla\phi(r)$ نوشت که در آن $\phi(r)$ یک تابع نرده‌ای است. (راهنمایی: جواب مستقیماً از استدلال فیزیکی به‌دست می‌آید)

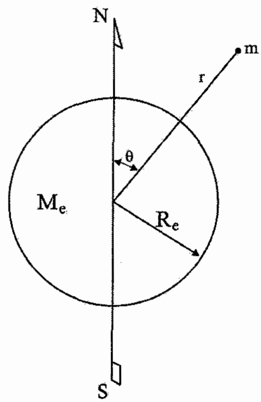
۷. وقتی تخت شدگی کره زمین در قطبین به حساب بیاید، انرژی پتانسیل گرانشی جرم m که به فاصله r از مرکز زمین قرار دارد و به طور تقریبی چنین می‌شود.

$$U = -\frac{GM_e m}{r}\left[1 - 5.4\times10^{-4}\left(\frac{R_e}{r}\right)^2\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right]$$

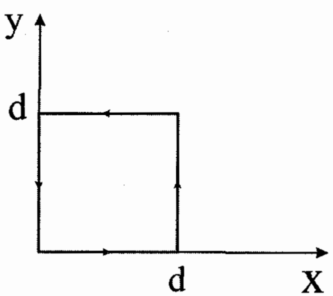
که در آن θ از قطب اندازه‌گیری می‌شود.

نشان دهید جز در مواردی که جسم بر فراز قطب یا استوانه قرار می‌گیرد، نیروی گرانشی مماسی کوچکی بر m وارد می‌شود. نسبت این نیرو را به $\frac{GM_e m}{r^2}$ برای زاویه $\theta=45^\circ$ و R_e پیدا کنید. (شکل ۲ـ ۵)

۸. نیروی $F=A\left(y^2\hat{i}+2x^2\hat{j}\right)$ روی مسیری که در شکل ۳ـ۵ نشان داده شد، چقدر کار انجام می‌دهد؟ در این‌جا A ثابت و x و y بر حسب متر هستند. به وسیله انتگرال خطی و همچنین به وسیله قضیه استوکس جواب را پیدا کنید.



شکل ۲ ـ ۵



شکل ۳ ـ ۵

خصوصیات ریاضی نیرو و انرژی

۵-۱)

الف)

$$F=-\nabla u$$
$$=-\left[2Ax\hat{i}+2By\hat{j}+2Cz\hat{k}\right]$$

ب)

$$F=-\nabla u$$
$$=-\frac{2}{r^2}\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)$$

که $r^2=x^2+y^2+z^2$

ج)

$$F=-\left[\frac{\partial}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta}\right]$$
$$=-\left[\frac{-2A}{r^3}\cos\theta\hat{r}+\frac{-A}{r^3}\sin\hat{\theta}\right]$$
$$=\frac{A}{r^3}\left[2\cos\theta\hat{r}+\sin\theta\hat{\theta}\right]$$

۵-۲)

در مختصات کروی

$$\nabla\times F_a=\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ -Ar^3 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

بنابراین پایستار است.

$$\nabla\times F_b==B(0+0)=0$$

$$U_a=-\int\vec{F}_a.d\vec{r}=\frac{Ar^4}{4}$$

نیروی $F_b=B\left(y^2\hat{i}-x^2\hat{j}\right)$ نیروی ناپایستار است زیرا:

$$\nabla\times F\neq0$$

$$\nabla\times F=\begin{bmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ By^2 & Bx^2 & 0\end{bmatrix}=\hat{k}(2By+2Bx)\neq 0$$

ب) می‌توان بین نقطه‌ی (1 , 1) و (0 , 0) نوشت:

$$E(0,0)-E(1,1)=W_f$$

$$\left(\frac{1}{2}mv_f^2+U_a(0,0)\right)-\left(\frac{1}{2}mv_0^2+U_a(1,1)\right)=\int \vec{F}_b\cdot d\vec{r}$$

$$\left(\frac{1}{2}mv_f^2+0\right)-\left(\frac{1}{2}mv_0^2+A\right)=B\int y^2\,dx-B\int x^2\,dy$$

$$=B\int_1^0 x^4\,dx-B\int_1^0 x^2\,2x\,dx=\frac{3B}{10}$$

$$\frac{1}{2}mV_f^2-A-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{3B}{10}$$

$$v_f^2=\frac{2A}{m}+\frac{3}{5}\frac{B}{m}+v_0^2 \quad\Rightarrow\quad v_f=\left(v_0^2+\frac{2A}{m}+\frac{3}{5}\frac{B}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

۵-۳)

الف) شرط پایستار بودن یک نیرو آن است که داشته باشیم:

$$\nabla\times F=0$$

که برای نیروی $F=F_0\sin at$، $\nabla\times F=0$ است ولی دارای پایستگی انرژی نیست چون $\dfrac{\partial U}{\partial t}\neq 0$ است.

ب) ناپایستار است.

$$\nabla\times A\theta\hat{r}=\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ A\theta & 0 & 0\end{vmatrix}\times\frac{1}{r^2\sin\theta}=\frac{-Ar\sin\hat{\phi}}{r^2\sin\theta}=-\frac{A}{r}\hat{\varphi}$$

ج) ناپایستار است.

۵ ـ ۴)

الف)

پایستار است.

$$\nabla\times F=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3A & 3zA & 3yA\end{vmatrix}=0$$

ب) ناپایستار است.

$$\nabla\times F=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ Axyz & Axyz & Axyz\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}(Axz-Axy)+\hat{j}(Axy-Ayz)+\hat{k}(Ayz-Axz)$$

ناپایستار است.

پ)

$$\nabla\times F=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 3Ax^2y^5e^{\alpha z} & 5Ax^3y^4e^{az} & \alpha Ax^3y^5e^{\alpha z}\end{vmatrix}$$

$$=i\left(5\alpha Ax^3y^4e^{\alpha z}-5\alpha Ax^3y^4e^{\alpha z}\right)+\hat{j}\left(3\alpha Ax^2y^5e^{\alpha z}-3\alpha Ax^2y^5e^{\alpha z}\right)$$

$$\hat{k}\left(15Ax^2y^4e^{\alpha z}-15Ax^2y^4e^{\alpha z}\right)=0$$

پایستار است.

ت)

$$\nabla\times F=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A\sin\alpha y\cos\beta z & -A\alpha x\beta\cos\alpha y\cos\beta z & Ax\sin\alpha y\sin\beta z\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\left[(Ax\alpha\cos\alpha y\sin\beta z)-(A\alpha x\beta\cos\alpha y\sin\beta z)\right]+j\left[(-A\beta\sin\alpha y\sin\beta z)\right]$$

$$(A\sin\alpha y\sin\beta z)+\hat{k}\left[(-A\alpha\cos\alpha y\cos\beta z)-(A\alpha\cos\alpha y\cos\beta z)\right]$$

ناپایستار است.

۵ ـ ۵)

$$U=cxe^{-y}=\text{ثابت}$$

$$xe^{-y}=\text{ثابت}$$

$$x=\text{ثابت}\ e^{+y}$$

$$y=\text{Ln}\ ax$$

$$d\vec{r}=dx\,\hat{i}+dy\,\hat{j}$$

$$=dx\,\hat{i}+\frac{dx}{x}\hat{j}=\left(\hat{i}+\frac{1}{x}\hat{j}\right)dx$$

$$\nabla U=\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}=Ce^{-y}\hat{i}-Cxe^{-y}\hat{j}$$

$$\nabla U . d\vec{r} = Ce^{-y}dx - Cxe^{-y}\frac{dx}{x}$$
$$= Ce^{-y}dx - Ce^{-y}dx = 0$$

۵ـ ۶)

می‌دانیم

$\nabla\times\nabla$ (هر تابع اسکالری) $=0$

با توجه به این‌که $\nabla\times A=0$ است می‌توان A را به‌صورت $A(r)=\nabla\Phi(r)$ نوشت.

۵ـ ۷)

اگر محور z بر قطب و صفحه xy بر صفحه استوایی منطبق باشد با در نظر گرفتن dM المان جرم زمین در مکان $r'=(x',y',z')$ و جسم در بالای سطح زمین در مکان $r=(x,y,z)$ برای انرژی پتانسیل گرانشی بر واحد جرم جسم داریم:

$$U=-\int\frac{GdM}{|r-r'|}=-\int\frac{G\,dM}{\left[r^2-2r.r'+r'^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$
$$=-\int\frac{GdM}{r}\left[1-\frac{2r.r'}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

با استفاده از بسط تیلور و صرف‌نظر از جملات مرتبه بالاتر از $\left(\frac{r'}{r}\right)$ خواهیم داشت:

$$U=-\int\frac{GdM}{r}\left[1+\frac{r.r'}{r^2}-\frac{r'^2}{r^2}+\frac{3}{2}\frac{(r.r')^2}{r^4}\right]$$

چون r ثابت و زمین به عنوان یک بیضی فرض شده است.

$$\int r.r'dM=r.\int r'dM=0$$

بنابراین:

$$U=-\frac{GM}{r}-\frac{G}{r^3}\int\left[\frac{3}{2}\frac{(r.r')^2}{r^2}-\frac{r'^2}{2}\right]dM$$
$$=-\frac{GM}{r}-\frac{G}{r^3}\int\left[\frac{3(xx'+yy'+zz')^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)}{2r^2}\right]dM$$

انتگرال‌های $x'y', y'x', z'x'$ به دلیل هندسه زمین همگی صفرند در نتیجه

$$U=-\frac{GM}{r}-\frac{G}{r^3}\int 2\left(x^3x'^2+y^2y'^2+z^2z'^2\right)-$$
$$\left(x^2y'^2+x^2z'^2+y^2x'^2+y^2z'^2+z^2x'^2+z^2y'^2\right)\frac{dM}{2r^3}$$

حال با انتخاب محورهای x , y به گونه‌ای که در صفحه استوایی قرار بگیرد انتگرال معادل y' می‌باشد بنابراین:

$$U=-\frac{GM}{r}-\frac{G}{r^3}\int\left[\frac{x^2x'^2+y^2y'^2+2z^2z'^2-x^2z'^2-y^2z'^2-2x^2x'^2}{2r^2}\right]dM$$

$$=-\frac{GM}{r}-\frac{G}{r^3}\int\left[\frac{\left(x^2+y^2\right)x'^2-2z^2x'^2+\left(2z^2-x^2-y^2\right)z'^2}{2r^2}\right]dM$$

$$=\frac{-GM}{r}-\frac{G}{r^3}\int\frac{\left(3z^2-r^2\right)\left(z^2-x^2\right)}{2r^2}dM$$

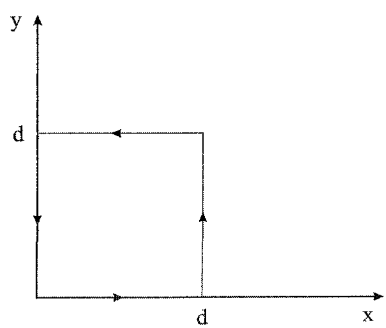
$$=-\frac{GM}{r}-\frac{G}{r^3}\left(\frac{3z^2}{2r^2}-\frac{1}{2}\right)\int\left[\left(z'^2+y'^2\right)-\left(x'^2+y'^2\right)\right]dM$$

$$=-\frac{GM}{r}-\frac{G}{r^3}\left(\frac{3z^2}{2r^2}-\frac{1}{2}\right)\left(I_x-I_y\right)$$

اگر $I_x=I_y=A$, $I_z=C$, $z=r\cos\theta$ باشد خواهیم داشت:

$$=-\frac{GM}{r}\left[1-\frac{C-A}{ma^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(\frac{3\cos^2\theta-1}{2}\right)\right]$$

۵ ـ ۸)



از تعریف کار داریم:

$$w=\int F.dr$$

$$=\int F_x+dx+F_y\,dy+F_z\,dz$$

با توجه به شکل $\int F_z\,dz=0$ می‌باشد. بنابراین

$$w=\int_0^d ay^2dx+\int_0^d 2Ax^2dy+\int_d^0 Ay^2dx+\int_d^0 2Ax^2dy$$

چون در مسیرهای 1 , 4 به ترتیب مقدار y , x ثابت و صفر است پس انتگرال روی مسیرهای 1 , 4 صفر می‌باشد در نتیجه خواهیم داشت:

$$\omega = 2Ax^2y\Big|_0^d + Ay^2x\Big|_d^0 = 2Ad^3 - Ad^3 = Ad^3$$

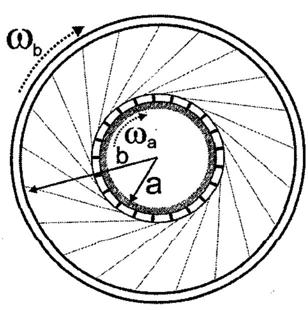
که در آن θ زاویه بین r و محور قطبی است.

فصل ششم

تکانهٔ زاویه‌ای و محور دوران ثابت

۱. (الف) نشان دهید اگر تکانهٔ خطی کلی یک سیستم از ذرات صفر باشد، تکانهٔ زاویه‌ای حول تمام مبدأها برابر صفر است. (ب) نشان دهید اگر نیروی کل روی یک سیستم از ذرات صفر باشد، گشتاور نیروی وارد بر سیستم حول تمام مبدأها برابر است.

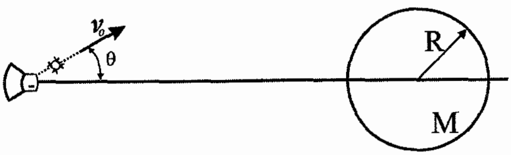
۲. یک استوانه به جرم M_A و شعاع a مطابق شکل ۱ـ۶ با سرعت زاویه‌ای اولیهٔ $\omega_A(0)$ آزادانه دوران می‌کند. استوانه دیگری با جرم M_B و شعاع $b > a$ روی محور آن و در حال سکون کار گذاشته شده است و برای دوران آزاد است. لایه نازکی از شن با جرم M_S روی سطح داخلی استوانهٔ کوچک توزیع شده است. در زمان $t = 0$ سوراخ‌های کوچکی در استوانهٔ داخلی باز می‌شود. شن‌ها با آهنگ ثابت λ شروع به بیرون پریدن می‌کنند و به استوانهٔ بیرونی می‌چسبند.سرعت زاویه‌ای بعدی دو استوانه ω_A و ω_B را پیدا کنید. از زمان لازم برای عبور شن صرف‌نظر کنید.



شکل ۱ ـ ۶

۳. حلقه‌ای به جرم M و شعاع R از یک طرف روی میزی بدون اصطکاک قرار دارد و می‌تواند حول یک محور در نقطه‌ای روی پیرامونش دوران کند. حشره‌ای به جرم m روی حلقه با سرعت v از نقطهٔ تماس محور شروع به حرکت می‌کند. سرعت دوران حلقه وقتی که حشره (الف) نصف حلقه را پیموده و (ب) به نقطه تماس برگشته است، چقدر است؟

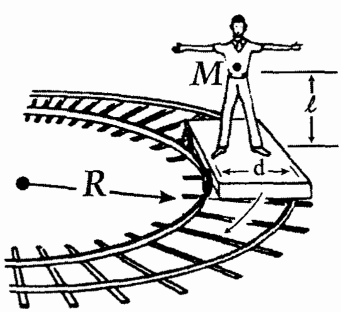
۴. یک سفینه فضایی برای بررسی سیاره‌ای به جرم M و شعاع R فرستاده شده است. هنگامی که در فاصله 5 R از مرکز سیاره، در فضا بدون حرکت معلق است، بسته‌ای از وسائلی را با سرعت v_0 مطابق شکل ۲ـ۶ شلیک می‌کند، جرم بسته m است که به مراتب کوچکتر از جرم سفینهٔ فضایی است. این بسته با چه زاویه‌ای (θ) پرتاب می‌شود تا در آستانه برخورد تماسی با سیاره قرار گیرد؟



شکل ۲ ـ ۶

۵. اتومبیل به جرم 1350 kg در خیابانی با شیب 30° رو به بالا پارک شده است. مرکز جرم اتومبیل در وسط فاصله بین چرخ‌های جلو و عقب و به ارتفاع 60 cm از زمین قرار دارد. فاصله چرخ‌ها از یکدیگر 240 cm است. نیروی قائم ناشی از جاده را روی چرخ‌های جلو و عقب پیدا کنید.

۶. شخصی به جرم M مطابق شکل ۳ـ۶ روی چهار چرخهٔ راه‌آهن و بدون اتکا ایستاده است و مسیری به شعاع R را با سرعت v دور می‌زند. مرکز جرم او در ارتفاع L از چهارچرخه است و پاهایش به فاصله d از یکدیگر قرار دارد. صورت این شخص رو به جهت حرکت است. چه وزنی بر هر یک از پاهایش وارد می‌شود؟



شکل ۳ ـ ۶

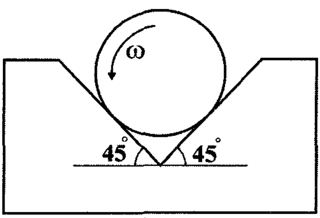
۷. گشتاور لختی یک ورقه نازک به جرم M و به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع را حول محوری که از یک رأس آن می‌گذرد و بر ورقه عمود است پیدا کنید. طول هر ضلع را L بگیرید.

۸. گشتاور لختی یک کرهٔ یکنواخت به جرم M و شعاع R را حول محوری که از مرکز آن می‌گذرد، پیدا کنید.

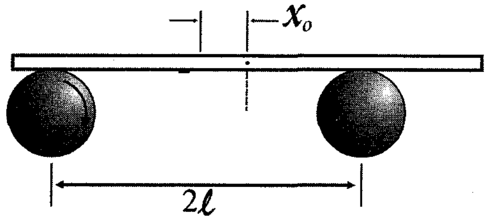
۹. یک تیر سنگین و یکنواخت به جرم M روی دو غلتک یکسان قرار دارد و غلتک‌ها پیوسته و به سرعت در دو جهت مخالف مطابق شکل ۴ـ۶ می‌چرخند. مرکز غلتک‌ها به فاصله 2ℓ از یکدیگرند. ضریب اصطکاک بین تیر و سطوح غلتک‌ها μ است که مقداری ثابت و مستقل از سرعت نسبی دو سطح است.

ابتدا تیر در حال سکون نگاه داشته می‌شود و مرکز آن در فاصله x_0 از وسط دو غلتک قرار دارد. در لحظه $t = 0$ دستگاه آزاد می‌شود. حرکت بعدی تیر را پیدا کنید.

۱۰. استوانه‌ای به جرم M و شعاع R در شیار یکنواخت V شکل با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد (شکل ۵ ـ ۶). ضریب اصطکاک بین استوانه و هر سطح برابر μ است. چه گشتاور نیرویی باید اعمال شود، تا استوانه در حال چرخش باقی بماند.

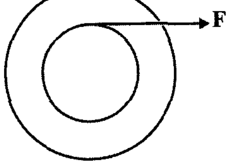


شکل ۵ ـ ۶



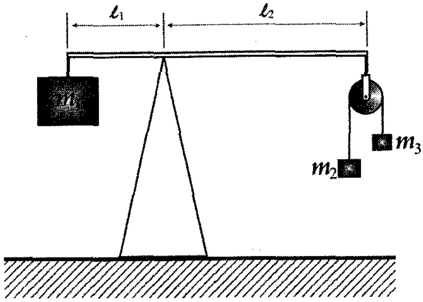
شکل ۴ ـ ۶

۱۱. چرخی روی یک محور ثابت نصب شده است و دستگاه مطابق شکل ۶ـ ۶ برای دوران بدون اصطکاک آزاد است. برای اندازه‌گیری گشتاور لختی دستگاه، نواری با جرم قابل اغماض که به دور میله پیچیده شده است با نیروی ثابت و معلوم F کشیده می‌شود. وقتی که طول L از نوار باز شده است، دستگاه با سرعت زاویه‌ای ω_0 می‌چرخد. گشتاور لختی دستگاه I_0 را پیدا کنید.



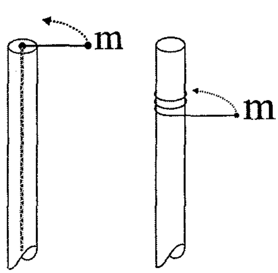
شکل ۶ ـ ۶

۱۲. از یک انتهای میله‌ای که می‌تواند حول محوری دوران کند جرم M_1 و از انتهای دیگر آن ماشین آتوودی آویزان است (شکل ۷ ـ۶). قرقره بدون اصطکاک و دارای جرم و ابعاد قابل اغماضی است. نیروی گرانش به سمت پایین ممتد است و داریم $M_2 > M_3$.
رابطه‌ای بین M_1, M_2, M_3, l_1 و l_2 پیدا کنید به طوری که پس از رها شدن جرم‌ها، میله تمایلی به چرخش نداشته باشد.



شکل ۷ ـ ۶

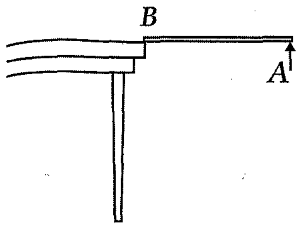
۱۳. جرم m به وسیله ریسمانی به تیری به شعاع R وصل شده است (شکل‌های ۸ـ ۶). این جرم ابتدا به فاصله r از مرکز تیر است و با سرعت مماسی v_0 حرکت می‌کند. در حالت (الف) ریسمان از سوراخی در مرکز تیر و از بالای آن می‌گذرد، و به تدریج با کشیده شدن از سوراخ کوتاه می‌شود. در حالت (ب) ریسمان به دور تیر می‌پیچد.



شکل ۸ ـ ۶

در هر حالت چه کمیت‌هایی پایسته هستند؟ سرعت نهایی جرم m را وقتی که به تیر می‌رسد در هر دو حالت پیدا کنید.

۱۴. خط‌کش یکنواختی به جرم M و طول l مطابق شکل ۹ ـ ۶ از انتهای B روی لبهٔ یک میز قرار دارد و از انتهای A به وسیلهٔ دست به طور افقی نگه داشته می‌شود. نقطه A به طور ناگهانی رها می‌شود. در لحظهٔ رها شدن: (الف) گشتاور نیرو حول Bچقدر است؟ (ب) شتاب زاویه‌ای حاصل حول B چقدر است؟ (ج) شتاب قائم مرکز جرم چقدر است؟ (د) با استفاده از قسمت ج نیروی عمودی را در B از راه تحقیق پیدا کنید.

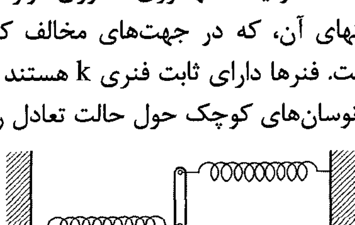


شکل ۹ ـ ۶

۱۵. یک آونگ از دو قرص تشکیل شده است که هر یک به جرم M و شعاع R است و به وسیلهٔ میلهٔ بدون جرمی از هم جدا شده‌اند. یکی از قرص‌ها به وسیلهٔ سوزن کوچکی که در مرکز آن قرار دارد آویخته شده است. قرص‌ها در یک صفحه قرار دارند و فاصله مرکزهایشان l است. زمان تناوب را برای نوسان‌های کوچک پیدا کنید.

۱۶. یک آونگ فیزیکی از قرص یکنواختی به جرم M و شعاع R ساخته شده است که از میله‌ای با جرم قابل اغماض آویزان است. فاصله نقطه آویز تا مرکز قرص l است. به ازای چه مقداری از l زمان تناوب کمینه است.

۱۷. میله‌ای به طول l و جرم m که از یک انتها روی محوری قرار دارد به وسیله فنری در نقطهٔ وسط و فنر دیگری در انتهای آن، که در جهت‌های مخالف کشیده می‌شوند، مطابق شکل ۱۰ ـ ۶ نگه داشته شده است. فنرها دارای ثابت فنری k هستند و کشش در حال تعادل آن‌ها عمود بر میله است. بسامد نوسان‌های کوچک حول حالت تعادل را پیدا کنید.



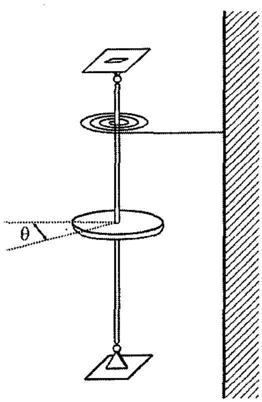
شکل ۱۰ ـ ۶

۱۸. زمان تناوب آونگی را پیدا کنید که از یک قرص به جرم M و شعاع R تشکیل یافته و به انتهای میله‌ای به طول l و جرم m نصب شده است. اگر قرص به وسیلهٔ یک یاتاقان بدون اصطکاک روی میله کار گذاشته شده بود و کاملاً آزادانه می‌توانست بچرخد، زمان تناوب چه تغییری کرد (شکل ۱۱ـ ۶)؟

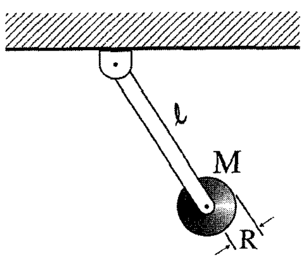
۱۹. یک قرص توپر به جرم M و شعاع R روی محوری عمودی قرار دارد. محور به یک فنر مارپیچی که گشتاوری نیروی خطی نگهدارنده‌ای به بزرگی $C\theta$ وارد می‌کند متصل است که θ زاویه انحراف از وضعیت تعادل استاتیکی و C یک مقدار ثابت است (شکل ۱۲ ـ ۶). از جرم محور و فنر صرف‌نظر کنید و فرض کنید که یاتاقان‌ها بدون اصطکاک هستند. (الف) نشان دهید حرکت قرص می‌تواند حرکت هماهنگ ساده باشد و بسامد حرکت را پیدا کنید. (ب) فرض کنید قرص با معادله $\theta=\theta_0 \sin(\omega t)$ حرکت می‌کند که ω بسامد حاصل در قسمت (الف) است. در زمان $t_1=\frac{\pi}{\omega}$، یک حلقه چسبنده به جرم M و شعاع R به طور متحدالمرکز روی قرص می‌افتد. پیدا کنید:

۱. بسامد جدید حرکت را.

۲. دامنه جدید حرکت را.



شکل ۱۲ ـ ۶

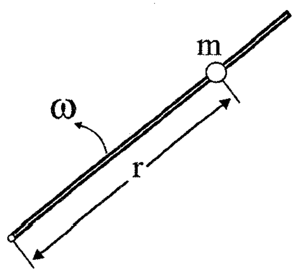


شکل ۱۱ـ ۶

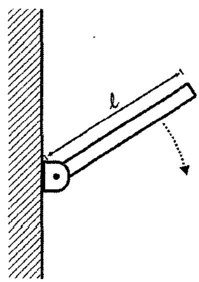
۲۰. الوار باریکی به جرم M و طول l از یک سر و بر یک محور قرار دارد (شکل ۱۳ـ ۶). الوار در زاویه $60°$ نسبت به قائم رها می‌شود. وقتی که الوار افقی است، اندازه و جهت نیروی وارد بر لولا چقدر است؟

۲۱. استوانه‌ای به شعاع R و جرم M بدون لغزش روی سطحی با زاویه شیب θ به پایین می‌غلتد. ضریب اصطکاک μ است. بیشترین مقدار θ برای این‌که استوانه بدون لغزش بغلتد چقدر است؟

۲۲. مهره‌ای به جرم m مطابق شکل ۱۴ـ ۶ بدون اصطکاک روی میله‌ای که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω چرخانده می‌شود، می‌لغزد. از اثر ثقل صرف‌نظر کنید. (الف) نشان دهید که $r=r_0 e^{\omega t}$ حرکتی ممکن برای مهره است، که در آن r_0 فاصله اولیهٔ مهره از محور دورن است. (ب) برای حرکت توصیف شده در قسمت (الف)، نیروی وارد بر مهره از سوی میله را پیدا کنید. (ج) برای حرکت توصیف شده در بالا، توان مصرف شده دستگاه چرخان را پیدا کنید و با محاسبهٔ مستقیم نشان دهید که این توان برابر آهنگ تغییرات انرژی جنبشی مهره است.

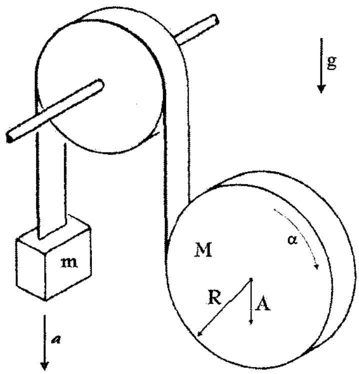


شکل ۱۴ ـ ۶



شکل ۱۳ ـ ۶

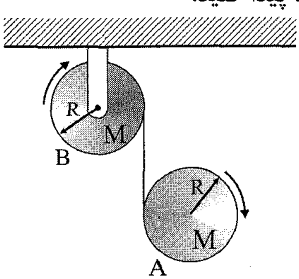
۲۳. قرصی به جرم M و شعاع R از نواری که به دور آن پیچیده شده است باز می‌شود (شکل ۱۵ ـ۶). نوار از روی قرقره بدون اصطکاکی عبور می‌کند، و جرم m، از طرف دیگر آن آویزان است.



شکل ۱۵ ـ ۶

فرض کنید قرص به طور عمودی سقوط می‌کند. (الف) شتاب جرم m و قرص (به ترتیب a و A) را با شتاب زاویه‌ای قرص ارتباط دهید.

۲۴. استوانه A به جرم M و شعاع R از استوانه B به همان جرم و شعاع آویزان است و می‌تواند حول محور خود بگردد (شکل ۱۶ـ ۶). وسیلهٔ آویختگی نوار فلزی بدون جرمی است که دور هر یک از استوانه‌ها پیچیده می‌شود و برای باز شدن آزاد است. مطابق شکل، گرانش به سمت پایین مقید است و هر دو استوانه در ابتدا ساکن‌اند. شتاب اولیهٔ A را، با فرض این‌که مستقیماً به سمت پایین حرکت می‌کند، پیدا کنید.

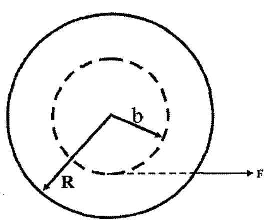


شکل ۱۶ ـ ۶

۲۵. ساچمه‌ای به جرم M و شعاع R روی سطحی با زاویه θ به بالا می‌غلتد. اگر سرعت اولیهٔ ساچمه v_0 باشد. فاصله l که ساچمه تا بالا طی می‌کند، قبل از این‌که شروع به غلتیدن به پایین کند چقدر است؟

۲۶. یک کرهٔ یکنواخت به جرم M و شعاع R و یک استوانه یکنواخت به جرم M و شعاع R به‌طور همزمان از حال سکون در بالای یک سطح شیب‌دار رها می‌شوند. اگر هر دو بدون لغزش بغلتند، کدام یک ابتدا به پایین می‌رسد؟

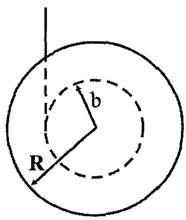
۲۷. یک یویو به جرم M دارای محوری به شعاع b و قرقره‌ای به شعاع R است. گشتاور لختی آن می‌تواند $\frac{MR^2}{2}$ باشد. یویو به طور عمودی روی میز قرار دارد و نخ به وسیلهٔ نیروی افقی F مطابق شکل ۱۷ـ۶ کشیده می‌شود. ضریب اصطکاک بین یویو و میز μ است. مقدار بیشینهٔ F که یویو بدون لغزیدن خواهد غلتید چقدر است؟



شکل ۱۷ ـ ۶

۲۸. یویوی مسئله قبل چنان کشیده می‌شود که نخ با افق زاویه θ می‌سازد. به ازای چه مقدار θ یویو میل به چرخیدن ندارد؟

۲۹. یک یویو به جرم M مطابق شکل ۱۸ـ۶ دارای محوری به شعاع b و قرقره‌ای به شعاع R است. گشتاور لختی را می‌توان $\frac{MR^2}{2}$ گرفت و از ضخامت نخ صرف‌نظر کرد. یویو از حالت سکون رها می‌شود (الف) در حالتی که یویو بالا و پایین می‌رود کشش نخ چقدر است؟ (ب) قبل از این‌که نخ کاملاً باز شود، مرکز یویو به اندازه h سقوط می‌کند. بافرض این‌که جهت دوران با سرعت چرخش یکنواختی معکوس شود، نیروی متوسط روی نخ را هنگام برگشت یویو پیدا کنید.



شکل ۱۸ ـ ۶

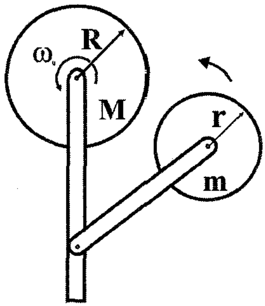
۳۰. یک توپ بولینگ با سرعت v_0 از راهروی مخصوص آن پرتاب می‌شود. ابتدا بدون غلتش می‌لغزد، اما به واسطهٔ شروع به غلتش می‌کند. نشان دهید سرعت آن وقتی که بدون لغزش می‌غلتد، برابر $\frac{5}{7}v_0$ است.

۳۱. استوانه‌ای به شعاع R با سرعت زاویه‌ای ω_0 می‌چرخد. وقتی استوانه به آرامی روی یک سطح قرار داده می‌شود، برای زمان کوتاهی سر می‌خورد و سرانجام بدون لغزش می‌غلتد. سرعت زاویه‌ای نهایی آن ω_f چقدر است؟

۳۲. چرخ لاستیکی زبری به شعاع R و به جرم M با سرعت زاویه‌ای ω_0 حول محوری بدون اصطکاک دوران می‌کند (شکل ۱۹ـ ۶). چرخ لاستیکی دیگری به شعاع r و جرم m، که آن هم روی محوری بدون اصطکاک کار گذاشته شده است، با آن تماس داده می‌شود. سرعت زاویه نهایی چرخ اول چقدر است؟

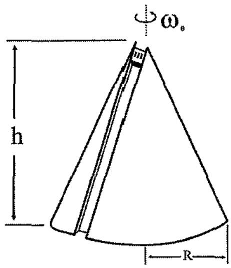
۳۳. مخروطی به ارتفاع h و شعاع قاعده R مطابق شکل ۲۰ـ۶ می‌تواند حول محور قائم ثابتی بچرخد. شیار باریکی در سطح آن وجود دارد. مخروط با سرعت زاویه‌ای ω_0 آزادانه به دوران در می‌آید و مکعب کوچکی به جرم m در بالای شیار بدون اصطکاک رها می‌شود و تحت اثر گرانش می‌تواند به پایین بلغزد. فرض کنید مکعب در شیار باقی می‌ماند. گشتاور لختی

مخروط را حول محور قائم I_0 بگیرید. (الف) سرعت زاویه‌ای مخروط وقتی که مکعب به پایین رسیده است چقدر است؟ (ب) سرعت مکعب را در چارچوب لخت وقتی که به پایین رسیده است پیدا کنید.



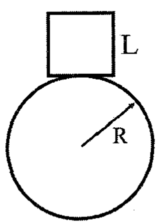
شکل ۱۹ ـ ۶

۳۴. ساچمه‌ای به شعاع b در داخل ظرف کم عمقی به شعاع R به عقب و جلو می‌غلتد. بسامد را برای نوسان‌های کوچک پیدا کنید. $R \gg b$ است.



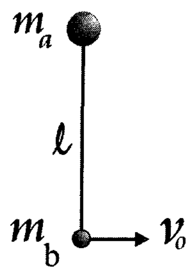
شکل ۲۰ـ ۶

۳۵. مکعبی به ضلع L روی یک بشکهٔ استوانه‌ای ثابت به شعاع R قرار دارد. بزرگترین مقدار L را که به ازای آن مکعب پایدار است پیدا کنید (شکل ۲۱ـ۶).



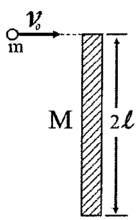
شکل ۲۱ ـ ۶

۳۶. دو جرم m_A و m_B به وسیله نخی به طول l به هم متصل‌اند و روی میز بدون اصطکاکی قرار دارند. دستگاه را می‌چرخانند و رها می‌کنند، به طوری که m_A در سکون لحظه‌ای است و m_B با سرعت لحظه‌ای v_0 در جهت عمود بر خط واصل مرکز آن‌ها حرکت می‌کند، که در شکل ۲۲ـ ۶ نشان داده شده است. حرکت بعدی دستگاه و کشش نخ را پیدا کنید.



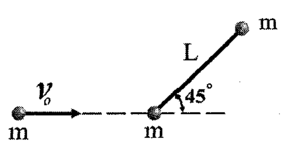
شکل ۲۲ـ ۶

۳۷. (الف) الواری به طول 2l و جرم M روی سطح بدون اصطکاک قرار دارد. توپی به جرم m و سرعت v_0 همان‌طور که در شکل ۲۳ـ۶ نشان داده شده است به انتهای آن برخورد می‌کند. سرعت نهایی توپ v_f را با فرض این‌که انرژی مکانیکی پایسته است و v_f روی خط حرکت ابتدایی قرار دارد، پیدا کنید. (ب) سرعت v_f را با فرض این‌که الوار در سر دیگر لولا شده باشد پیدا کنید.



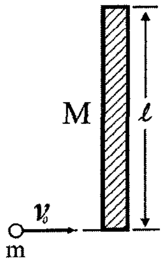
شکل ۲۳ ـ ۶

۳۸. میله صلب بدون جرمی به طول L دو ذره هر یک به جرم m را به یکدیگر متصل کرده است. میله روی میزی بدون اصطکاک قرار دارد، و ذره‌ای به جرم m و سرعت v_0 که مطابق شکل ۲۴ـ۶ حرکت می‌کند، به آن برخورد می‌کند. ذره بعد از برخورد مستقیماً به عقب بر می‌گردد.



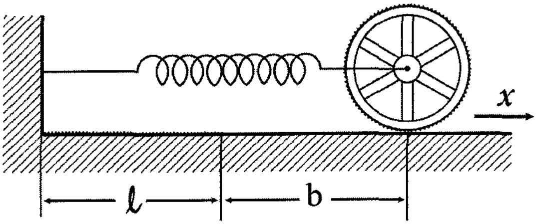
شکل ۲۴ ـ ۶

۳۹. پسر بچه‌ای به جرم m با سرعت v_0 روی یخ می‌دود و در انتهای الواری به طول l و جرم M که عمود بر مسیر است می‌ایستد (شکل ۲۵ـ ۶). (الف) حرکت دستگاه را بعد از این‌که پسربچه روی الوار ایستاده است به طور کمی توضیح دهید. از اصطکاک صرف‌نظر کنید. (ب) نقطه‌ای از الوار بلافاصله بعد از برخورد ساکن می‌ماند این نقطه کجا است؟



شکل ۲۵ ـ ۶

۴۰. چرخی با دندانه‌های ریز به انتهای فنری با ثابت k و طول باز نشدهٔ l مطابق شکل ۲۶ـ۶ متصل است. چرخ برای $x > l$ آزادانه روی سطح می‌لغزد، ولی برای $x < l$، آزادانه روی سطح می‌لغزد، ولی برای $x < l$ داندانه‌های چرخ با دندانه‌های روی سطح درگیر می‌شود و چرخ نمی‌تواند بلغزد. فرض کنید تمام جرم چرخ در محیط آن قرار دارد. (الف) چرخ به اندازه $x = l + b$ کشیده و سپس رها می‌شود. بار اول چقدر به دیوار نزدیک می‌شود؟ (ب) بعد از ترک دیوار چقدر دور خواهد شد؟ (ج) در دور بعدی حرکت چرخ روی دندانه‌های مسیر چه اتفاقی روی می‌دهد؟

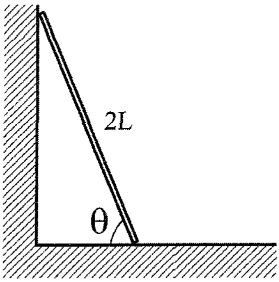


شکل ۲۶ ـ ۶

۴۱. بسیاری از قوانین مهمی که تا حال معرفی شده‌اند در این مسئله مورد استفاده قرار می‌گیرند و بنابراین شایستهٔ کوشش زیادی است. این مسئله معماگونه است (ولی واقعاً مشکل نیست)، بنابراین اگر در حل آن گیج شدید نگران نشوید.

الواری به طول $2\,L$ مطابق شکل ۲۷ـ ۶ که به دیوار بدون اصطکاک تکیه دارد شروع به لغزیدن به پایین می‌کند. نشان دهید سر فوقانی الوار وقتی که در ارتفاع دو سوم مقدار اولیه خود قرار می‌گیرد، از دیوار جدا می‌شود.

راهنمایی: تنها یک متغیر برای توصیف حرکت دستگاه لازم است. به حرکت مرکز جرم توجه کنید.



شکل ۲۷ ـ ۶

تکانه زاویه‌ای و محور دوران ثابت

۶ـ۱)

می‌دانیم که تکانه خطی کل سیستم صفر است.

$$P=\sum_{c} P_i=0$$

نشان می‌دهیم که تکانه زاویه‌ای سیستم هم صفر است. برداری که از مبدأ به نقاط i وصل می‌شود را با r_i نشان می‌دهیم. تکانه زاویه‌ای در حالت کلی نسبت به هر مبدأ برابر می‌شود با:

$$L=\sum_{i} r_i \times P_i$$

می‌خواهیم تکانه زاویه‌ای را حول مبدأ جدید به‌دست آوریم که موقعیت آن در R است. در سیستم جدید مکان هر ذره i برابر می‌شود با $r_i - R$، تمام نقاط به یک مقدار ثابت تغییر می‌کنند. مقدار جدید تکانه زاویه‌ای برابر می‌شود با:

$$L_{\text{جدید}}=\sum_{i} \left(r_i - R\right)\times P_i$$

$$=\sum_{i} r_i \times P_i - \sum R \times P_i$$

R برای تمام نقاط یکسان است می‌توان آن را از سیگما خارج کرد و نوشت:

$$L_{\text{جدید}}=\sum_{i} r_i \times P_i - R\sum_{i} P_i=\sum_{i} r_i \times P_i - R\times P$$

و می‌دانیم $P = 0$ در نتیجه

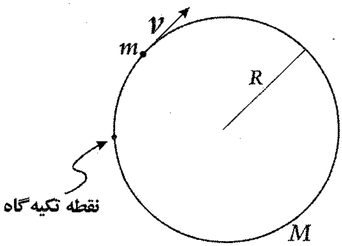
$$L_{\text{جدید}}=L$$

ب) بر منظور اثبات قسمت (ب)، تکانه زاویه با گشتاور و تکانه خطی با نیرو جابه}ا شود نتیجه موردنظر حاصل می‌شود.

در نتیجه اگر تکانه خطی کل یک سیستم ذرات صفر باشد تکانه زاویه‌ای حول تمام مبداها برابر می‌شود.

۶ـ۳)

الف) تکانه زاویه‌ای حول نقطه تکیه‌گاه صفر است زیرا گشتاوری به سیستم حلقه حشره وارد نمی‌شود



گشتاور لختی این سیستم چی‌ست؟

$$I_R = I_0 + m\ell^2$$

از قضیه محورهای موازی:

$$= MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$

تکانه زاویه کل مجموع تکانه زاویه‌ای حلقه با حشره است.

$$L_T = L_R + L_B$$

V_1 سرعت حشره نسبت به میز است.

$$0 = I_R\,\omega_R - m\nu_1 2R$$

$$\omega_R = \frac{2mR}{I_R}(\nu - 2R\omega_R)$$

$$\omega_R\left(1 + \frac{4R^2 m}{2MR^2}\right) = \frac{2mVR}{2MR^2}$$

$$\omega_R = \frac{mV}{MR + 2mR}$$

به ازای $m = M$ ، $W_R = \dfrac{V}{3R}$ خواهد شد و به ازای $m \to 0$ ، $\omega_R = 0$ خواهد شد.

ب) از پایستگی تکانه زاویه‌ای داریم

$$L_T = L_R + L_B$$

$$0 = L_R + 0$$

$$0 = I_R\,\omega_R$$

$$\omega_R = 0$$

۶ـ۵)

ماشینی به جرم m روی سطح شیب‌داری با زاویه θ رو به بالا پارک شده است.

مرکز جرم به فاصله d بالای زمین و وسط دوچرخ قرار دارد که فاصلهٔ چهارخطها ℓ است.

می‌خواهیم نیروی عکس‌العمل سطح از طرف جاده که به چرخ‌های جلو و عقب وارد می‌شود را

بیابیم. در این مسئله ساده‌تر آن است که مبدأ به ازای جاده دقیقاً زیر مرکز جرم در نظر بگیریم. حول این نقطه سر گشتاور وجود دارد نیروی عمودی جلو را با N_f و عقب راه را با N_r در نظر می‌گیریم، گشتاوری که چرخ‌ها تولید می‌کنند و گشتاوری که از گرانش به‌وجود می‌آید $mg\,d\sin\theta$، زیرا ماشین در حالت افقی قرار ندارد. اصطکاک گشتاوری تولید نمی‌کند. ماشین ثابت است در نتیجه

$$0=N_f\frac{\ell}{2}+mgd\sin\theta-N_r\frac{\ell}{2}$$

$$\begin{aligned} N_r-N_f&=2\frac{mgd}{\ell}\sin\theta \\ N_r+N_f&=mg\cos\theta \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} N_r&=mg\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{d}{\ell}\sin\theta\right) \\ N_f&=mg\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{d}{\ell}\sin\theta\right) \end{aligned}$$

۶ ـ ۶)

برای محاسبه گشتاور لختی یک کره به جرم M و شعاع R داریم:

$$M=\rho V=\rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

در دستگاه مختصات کروی داریم:

$$I=\iiint d^2\,dm$$

d فاصله از محور کره است.

$$d=r\sin\phi$$

$$dm=\rho r^2\sin\phi\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^4\,dr\int_0^{\pi}\rho\sin^3\phi\,d\phi$$

$$=2\pi\left(\frac{1}{5}R^5\right)\rho\int_0^{\pi}\sin\phi\left(1-\cos^2\phi\right)d\phi$$

$$=\frac{2\pi}{5}R^5\rho\left[-\cos\phi+\frac{1}{3}\cos^3\phi\right]_0^{\pi}$$

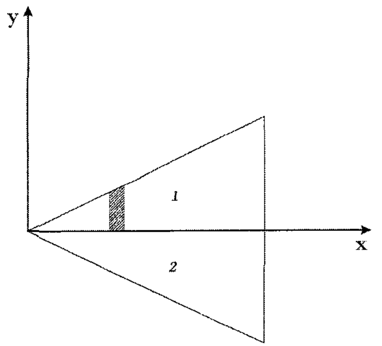
$$=\frac{2\pi}{5}\rho R^5\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{2}{5}\frac{4}{3}\pi\rho R^5$$

$$=\frac{2}{5}\frac{4}{3}\pi\rho R^3R^2$$

در نتیجه $I=\frac{2}{5}MR^2$ خواهد بود.

۶ ـ ۷)



$$I=\iint\left(x^2+y^2\right)\sigma\,dx\,dy$$

$$=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}x}\sigma\left(x^2+y^2\right)dy\,dx$$

$$=2\sigma\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}x}dx$$

$$=2\sigma\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\frac{x^3}{9\sqrt{3}}\right)dx$$

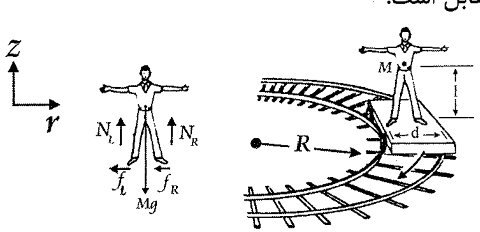
$$=\frac{2\sigma}{\sqrt{3}}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{1}{9}\frac{x^4}{6}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{5}{16}\frac{\sigma}{\sqrt{3}}a^4$$

$$M=\frac{\sqrt{3}}{4}\sigma a^2$$

$$I=\frac{5}{12}Ma^2$$

۶ ـ ۸)

دیاگرام نیرو به صورت مقابل است.



شخص روی یک مسیر دایره‌ای در حال حرکت است پس

$$F_r = Ma_r$$
$$-f_L + \left(-f_R\right) = M\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)$$

از آنجایی که یک مسیر دایره‌ای است $\ddot{r}=0$

$$-\left(f_L + f_R\right) = -MR\omega^2 = -M\frac{V^2}{R}$$

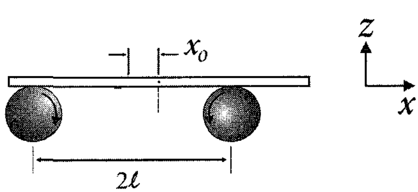
شخص شتاب به سمت بالا یا پایین ندارد.

$$F_z = M\ddot{z}$$
$$-Mg + N_L + N_R = 0$$
$$N_L + N_R = Mg$$

همچنین شخص هیچ دورانی ندارد در نتیجه

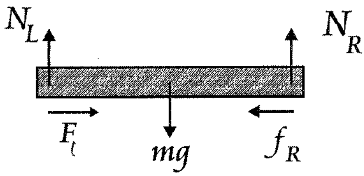
$$\tau = I\alpha$$
$$\frac{d}{2}N_R - \frac{d}{2}N_L - L\left(f_L + f_R\right) = 0$$
$$N_R - N_L = 2\frac{L}{d}\left(f_L + f_R\right)$$
$$N_R - N_L = 2\frac{L}{d}M\frac{V^2}{R}$$
$$2N_R = Mg + 2\frac{L}{d}M\frac{V^2}{R}$$
$$N_L = \frac{M}{2}g - \frac{L}{d}M\frac{V^2}{R}$$

۶ـ۹)



حرکت اولیه وزن روی غلتک راست است بنابراین نیروی اصطکاک غلتک را به چپ خواهد راند اما ناگهان غلتک شروع به نوسان به طرف جلو و عقب خواهد نمود.

چون هیچ شتابی در راستای z نداریم.



$$F_z = Ma_z = 0$$

$$N_L+N_R-Mg=0 \Rightarrow N_L+N_R=Mg$$

غلتک هیچ چرخشی ندارد بنابراین گشتاور روی آن‌اعمال نمی‌شود.

$$\tau=I\alpha$$

$$(L-x)N_R-(\ell+x)N_L=0$$

$$(\ell-x)N_R-(\ell+x)(Mg-N_R)=0$$

$$2\ell N_R=(\ell+x)Mg$$

$$N_R=\frac{\ell+x}{2\ell}Mg$$

$$N_\ell=\frac{\ell-x}{2\ell}Mg$$

نیرو در جهت $\hat{x}$ چقدر است؟

$$\Sigma F_x=Ma_x$$

$$\mu N_\ell-\mu N_R=M\ddot{x}$$

$$\mu Mg\left(\frac{\ell-x}{2\ell}-\frac{\ell+x}{2\ell}\right)=M\ddot{x}$$

$$-\frac{\mu M_g}{\ell}x=M\ddot{x}$$

K_{eff} را به صورت $K_{eff}=\frac{\mu Mg}{\ell}$ در نظر می‌گیریم.

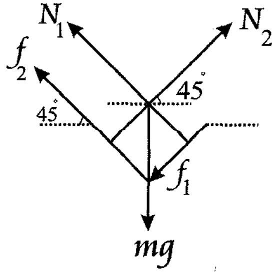
$$-K_{eff}\,x=M\ddot{x}$$

که یک معادله یک نوسانگر ساده است اگر $x(0)=x_0$ ، $\dot{x}(0)=0$

$$x(t)=x_0\cos\left(\sqrt{\frac{K_{eff}}{M}}\,t\right)=x_0\cos\sqrt{\frac{Mg}{\ell}}t$$

۶ ـ ۱۰)

با توجه به قوانین نیرو یعنی



$$\Sigma F_x=ma_x$$

$$\Sigma F_y=Ma_y$$

می‌توان نوشت:

$$x:\frac{N_2}{\sqrt{2}}-\frac{N_1}{\sqrt{2}}-\frac{f_2}{\sqrt{2}}-\frac{f_1}{\sqrt{2}}=0$$

$$N_2-N_1=f_2+f_1 \quad \Rightarrow \quad N_2(1-\mu)=N_1(\mu+1) \tag{1}$$

$$N_1=\frac{N_2(1-\mu)}{(\mu+1)}$$

$$y:\frac{N_1}{\sqrt{2}}+\frac{N_2}{\sqrt{2}}+\frac{f_2}{\sqrt{2}}-\frac{f_1}{\sqrt{2}}-mg=0$$

$$N_1(1-\mu)+N_2(1+\mu)=\sqrt{2}\,mg \tag{2}$$

با قرار دادن N_1 رابطه‌ی (1) می‌توان N_2 را به‌دست آورد.

$$N_2\frac{(1-\mu)(1-\mu)}{(1+\mu)}+N_2(1+\mu)=\sqrt{2}\,mg$$

$$N_2=\frac{\sqrt{2}\,mg(1+\mu)}{(1-\mu)^2+(1+\mu)^2}$$

$$N_2=\frac{\sqrt{2}\,mg(1+\mu)}{2\left(1+\mu^2\right)} \quad ; \quad N_1=\frac{\sqrt{2}\,mg(1+\mu)}{2\left(1+\mu^2\right)}\cdot\frac{(1-\mu)}{(1+\mu)}$$

مقدار گشتاور خاربی برای ثابت بودن ω برابر است با:

$$N_1=\frac{\sqrt{2}\,mg(1-\mu)}{2\left(1+\mu^2\right)}$$

$$\tau=R\left(f_1+f_2\right)$$

$$=R\mu\left(N_1+N_2\right)$$

$$=\frac{\mu R\sqrt{2}\,mg}{2\left(1+\mu^2\right)}(1-\mu+1+\mu)$$

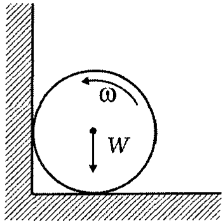
$$\tau=\frac{\sqrt{2}\,\mu mgR}{\left(1+\mu^2\right)}$$

حالت خاص $\mu=0.5$, $R=0.1\text{m}$, $W=100\text{N}$

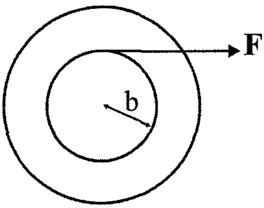
$$\tau=\frac{\sqrt{2}\times0.5\times100\times0.1}{1+0.25}\approx5.6\,\text{Nm}$$

شما برای تمرین می‌توانید مسئله ذیل را حل کنید.

مطلوبست محاسبه‌ی گشتاور نیروی خارجی که باعث می‌شود چرخ شکل مقابل در شرف دوران قرار گیرد. ضریب اصطکاک با کلیه سطوح μ در نظر بگیرید.



۶ـ ۱۱)



$$\omega^2=\omega_0^2+2\alpha\theta$$

$$L=b\theta \qquad \theta=\frac{L}{b}$$

فرض می‌کنیم حالت سکون شروع به حرکت کرده

$$\omega^2\left(\frac{b}{2L}\right)=\alpha$$

از آنجایی که نیروی F گشتاور حول محور ایجاد می‌کند داریم:

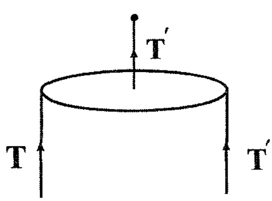
$$\tau=I_0\,\alpha$$

$$Fb=\frac{\omega^2 b}{2L}I_0 \qquad I_0=F\left(\frac{2L}{\omega^2}\right)$$

با جانشینی مقادیر داریم

$$I_0=\frac{10\times2\times5}{25\times b^{-2}}=400\frac{kg}{m^2}$$

۶ـ ۱۲)



$$\Sigma\tau=0$$

$$M_1 g\ell_1-T\ell_2=0$$

$$T=2T'$$
$$T'-M_3 g=M_3 a$$
$$M_2 g-T'=M_2 a$$
$$M_2 g-T'=M_2\left(\frac{T'}{M_3}-a\right)$$

در نتیجه

$$T'=\frac{2M_2 M_3}{M_2+M_3}a$$

با جانشینی T' خواهیم داشت:

$$M_1 g\ell_1-\frac{4M_2 M_3}{M_2+M_3}g\ell_2=0$$
$$M_1\ell=\frac{4M_2 M_3}{M_2+M_3}\ell_2$$

۶ـ ۱۳)

الف) قانون پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای داریم:

$$m v_0 r=m v R \qquad m r^2\omega_1=m R^2\omega_2$$
$$v=v_0\left(\frac{r}{R}\right)$$
$$\omega=\left(\frac{r}{R}\right)^2\omega_0$$

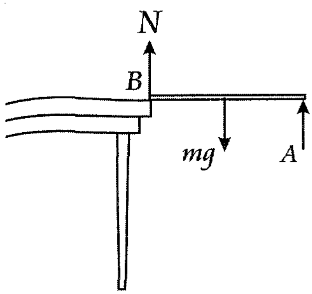
ب) انرژی سیستم پایسته نی‌ست ولی اندازه حرکت زاویه‌ای حول مرکز استوانه پایسته نیست به علت این‌که طناب باعث یک گشتاور می‌شود

$$\frac{1}{2}m v^2=\frac{1}{2}m V_0^2 \qquad (1)$$
$$V_0=\omega_0\ell \quad , \quad V=\omega(\ell-R\theta) \qquad (2)$$

می‌توان با استفاده از (1) و (2) ω را به دست آورد.

$$\omega=\frac{\omega_0}{1-\frac{R}{\ell}\theta}$$

۶ـ ۱۴)



گشتاور نیرو حول نقطه B به ما می‌دهد.

$$Mg\frac{L}{2}=\frac{1}{3}ML^2\alpha=\frac{1}{3}ML^2\frac{a}{\frac{L}{2}}$$

که در آن $\alpha=\frac{a}{\frac{L}{2}}$ است بنابراین شتاب مرکز جرم عبارت است از:

$$a=\frac{3}{4}g$$

در نتیجه برای شتاب زاویه‌ای داریم:

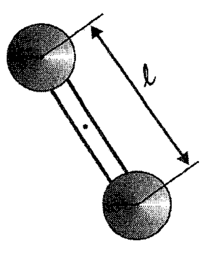
$$\alpha=\frac{3}{4}\frac{g}{\frac{L}{2}}=\frac{3g}{2L}$$

$$Mg-N=Ma$$

$$N=Mg-\frac{3}{4}Mg$$

$$=\frac{Mg}{4}$$

۶ـ ۱۵)



بنابر قضیه محورهای موازی داریم

$$I=I_{cm}+M\ell^2$$

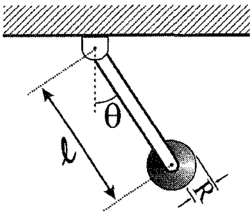
$$I=\frac{1}{2}m^2+m\ell^2+\frac{1}{2}mx^2$$

$$I=mR^2+m\ell^2$$

بنابرای‌ن برای دوره تناوب آونگ فیزیکی داریم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R^2+\ell^2}{g\ell}}$$

۶ـ ۱۶)



$$\tau=I\dot{\omega}$$

$$-\ell Mg\sin\theta=I\ddot{\theta}$$

$$-\ell Mg\sin\theta=\left(\frac{1}{2}MR^2+M\ell^2\right)\ddot{\theta}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}mR^2+m\ell^2}{\ell Mg}}$$

$$=2\,\pi\sqrt{\frac{R^2+2\ell^2}{2\ell g}}$$

$\frac{d}{d\ell}T=0$ می‌نیمم مقدار ℓ را به ما خواهد داد اما اجازه دهید چنین عمل کنیم.

$$\frac{d}{d\ell}\left(\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\right)=\frac{d}{d\ell}\left(\frac{R^2+2\ell^2}{2\ell g}\right)=0$$

$$\frac{4\ell}{2\ell g}-\frac{R^2+2\ell^2}{2\ell^2 g}=0$$

$$4\ell^2=R^2+2\ell^2 \Rightarrow 2\ell^2=R^2 \quad \Rightarrow \ell=\frac{1}{\sqrt{2}}R$$

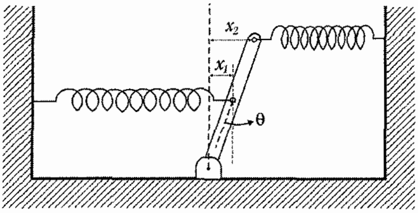
به ازای مقدار به‌دست آمده برای L دوره تناوب عبارت است از

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R^2+2\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2}{2\frac{R}{\sqrt{2}}g}}$$

$$=2\pi\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{R}\,g}=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{R}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

این در واقع همان دوره تناب یک آونگ با جرم نقطه‌ای m که از میله‌ای به طول R آویزان است می‌باشد.

۶ ـ ۱۷)



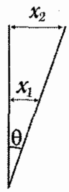
$$\Sigma\tau = I\ddot{\theta}$$

$$-kx_2 - kx_1 - mg = I\ddot{\theta}$$

رابطه(۱):

$$-kx_2 L - kx_1 \frac{L}{2} - mg\sin\theta \frac{L}{2} = \frac{1}{3} mL^2 \ddot{\theta}$$

با استفاده از شکل (۲) می‌توان رابطه بین x_2, x_1, θ_1 را به‌دست آورد.



شکل(۲)

$$\tan\theta = \frac{x_1}{\frac{L}{2}} = \frac{x_2}{L}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{L}{2}\tan\theta \approx \frac{L}{2}\theta \\ x_2 = L\tan\theta \approx L\theta \end{cases} \quad (2)$$

با استفاده از رابطه‌ی (1) و قرار دادن مقادیر (2) داریم:

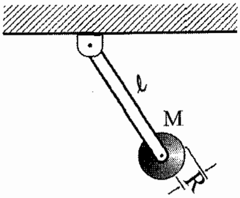
$$-KL^2\theta - K\frac{L}{2}\theta\frac{L}{2} - mg\theta\frac{L}{2} = \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{3}{4}\frac{5k}{m} + \frac{3}{2}\frac{g}{L}\right)\theta = 0$$

معادله‌ی دیفرانسیل بالا یک حرکت نوسانی ساده را می‌رساند با $\omega = \sqrt{\frac{15}{4}\frac{k}{m} + \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}}$

۶ ـ ۱۸)

این مسئله شبیه به مسئله (۶ ـ ۱۶) هستند.



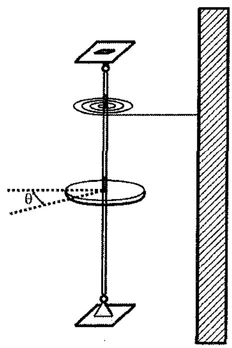
$$\tau = I\dot{\omega} = I\ddot{\theta}$$

$$-\left(\ell Mg + \frac{1}{2}\ell mg\right)\sin\theta = \left(\frac{1}{2}MR^2 + M\ell^2 + \frac{1}{3}m\ell^2\right)\ddot{\theta}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}MR^2+M\ell^2+\frac{1}{3}m\ell^2}{Mg\ell+mg\frac{\ell}{3}}}$$

اگر دیسک فاقد دوران بود در این‌صورت عبارت $\frac{1}{2}MR^2$ ناپدید و دوره تناوب کاهش می‌یافت.

۶ـ۱۹)



الف) انرژی پتانسیل سیستم را به‌دست آورید:

$$U=-\int\tau d\theta$$
$$=-\int -C\theta d\theta=+\frac{1}{2}C\theta^2$$
$$E=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}C\theta^2$$

به‌علت پایسته بودن انرژی $\frac{dE}{dt}=0$ است بنابراین

$$\frac{dE}{dt}=I\dot{\theta}\ddot{\theta}+C\theta\dot{\theta}=0$$
$$\dot{\theta}\left(I\ddot{\theta}+C\theta\right)=0$$
$$\ddot{\theta}+\frac{C}{I}\theta=0 \quad\Rightarrow\quad \theta=\theta\sin\left(\sqrt{\frac{C}{I}}t+\theta_0\right)$$

ب)

در زمان $t_1=\frac{\pi}{\omega}$ داریم:

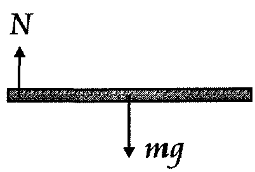
$$\theta\left(t=\frac{\pi}{\omega}\right)=\theta_0\sin\left(\omega.\frac{\pi}{\omega}\right)=0$$

یعنی در هنگامی‌که دامنه صفر است (بیشینه انرژی جنبشی) یک حلقه‌ی چسبنده به جرم M و شعاع R به‌طور متحدالمرکز روی قرص می‌افتد دوره‌تناوب هیچ رابطه‌ای با انرژی و دامنه ندارد. بنابراین:

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{C}{I+I}}$$
$$=2\pi\sqrt{\frac{C}{2I}}$$

۶ ـ ۲۰)

در حالت افقی



$$\tau=I\alpha \qquad mg\frac{\ell}{2}=\frac{1}{3}m\ell^2\alpha$$

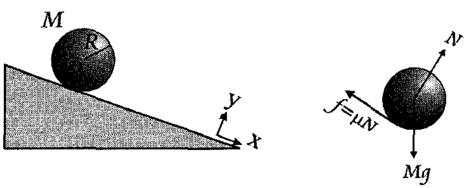
با استفاده از $\alpha=\frac{\alpha}{\frac{\ell}{2}}$ داریم:

$$mg\frac{\ell}{2}=\frac{1}{3}\ell^2\frac{a}{\frac{\ell}{2}}$$
$$a=\frac{3}{4}g$$

بنابراین نیروی رو به پایین $F=\frac{3}{4}mg$ و بقیه‌ی نیروی عمودی سطح $N=\frac{1}{4}mg$ است در نتیجه نیروی وارد بر تکیه‌گاه عبارت است از برایندکه نیروی رو به پایین و نیروی عمودی سطح یعنی:

$$F_{tot}=\sqrt{\frac{9}{16}m^2g^2+\frac{1}{16}m^2g^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}mg$$

۶ ـ ۲۱)



در جهت $\hat{Y}$ شتاب نداریم پس

$$F_y = M\ddot{y}$$
$$N - mg\cos\theta = 0$$
$$N = mg\cos\theta$$

برای این‌که حرکت ما لغزش نداشته باشد و غلتش کامل باشد.

$$\ddot{x} = R\omega$$
$$\ddot{x} = R\dot{\omega} = R\ddot{\theta}$$

معادلات حرکت عبارت است از:

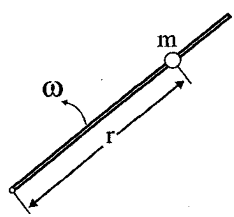
$$F_x = M\ddot{x}$$
$$Mg\sin\theta - \mu N = M\ddot{x}$$
$$Mg\sin\theta - \mu M\cos\theta = M\ddot{x}$$
$$g\sin\theta - \mu g\cos\theta = \ddot{x} = R\ddot{\theta}$$

$$\tau = I\dot{\omega}$$
$$\mu NR = I\ddot{\theta}$$
$$\mu Mg\cos\theta R = I\ddot{\theta}$$
$$\mu Mg\cos\theta R = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta}$$
$$2Mg\cos\theta = R\ddot{\theta}$$

$$g\sin\theta - \mu g\cos\theta = 2\mu g\cos\theta$$
$$\mathrm{Tan}\,\theta = 3\mu \qquad \theta = \mathrm{Arc}\tan(3\mu)$$

۶-۲۲)

مانند مسئله ۲ ـ ۳۳ داریم:



$$\vec{F} = m\left[\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta\right]$$
$$\ddot{m}\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = 0$$

این معادله دیفرانسیل دارای جوابی به معادلات $r = Ae^{-\gamma t} + Be^{\gamma t}$ که با جایگزینی که B , A به صورت اولیه مسئله مرتبط است بنابراین با توجه به فاصله اولیه همراه مسئله داریم:

$$r = r_0 e^{\omega t}$$

$$V = \omega_0 r_0 e^{\omega t}\left[\hat{e}_r + \hat{e}_\theta\right]$$

$$F=m\left[\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r+2\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta\right]$$
$$=m\left[\left(r_0\,\omega^2 e^{\omega t}-r_0 e^{\omega t}\omega^2\right)\hat{e}_r+2r_0\,\omega^2 e^{\omega t}\,\hat{e}_\theta\right]$$
$$P=\vec{F}.\vec{V}=2r_0^2\,\omega^3 e^{2\omega t}$$
$$\frac{d}{dt}\;\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}m\;\frac{d}{dt}V^2$$
$$=\frac{1}{2}m\,2\omega^2.r^2\,2\omega\,e^{2\omega t}$$
$$=2m\omega_0^3 r_0^2\;e^{2\omega t}$$

۲۳ـ۶)

$$mg-T=ma_1\Rightarrow T=mg-ma_1$$
$$Mg-T=Ma_2\Rightarrow T=Mg-Ma_2$$
$$mg-ma_1=Mg-Ma_2$$
$$Ma_2-ma_1=Mg-mg$$
$$\sum\tau=I\ddot{\theta}\Rightarrow TR=\frac{1}{2}MR\ddot{\theta}\Rightarrow T=\frac{1}{2}MR\ddot{\theta}$$
$$Mg-Ma_2=\frac{1}{2}MR\ddot{\theta}$$
$$2g-2a_2=R\dot{\theta}=a_1+a_2\Rightarrow 2g=a_1+3a_3$$
$$\begin{cases}a_1+3a_2=2g\\ Ma_2-ma_1=Mg-mg\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}ma_1+3ma_2=2mg\\ Ma_2-ma_1=Mg-mg\end{cases}$$
$$(3m+M)a_2=mg+Mg\Rightarrow a_2=\frac{m+M}{3m+M}g$$
$$a_1=\frac{3m-M}{3m+M}g$$
$$A=a_2,a_1=a$$

۲۴ ـ ۶)

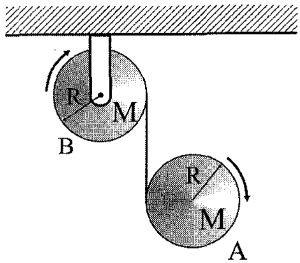
از قانون دوم نیوتن داریم (در این قانون فقط ذره‌ای بودن منظور شده)

$$mg-T=ma$$
$$\Sigma\tau=I\ddot{\theta}$$
$$TR=\frac{1}{2}MR^2\,\frac{a}{2R}$$

نکته بالا به این است که در این‌جا $a=R\alpha$ نیست بلکه $a=2R\alpha$ است (اثبات نکته در انتهای مسئله) با جانشینی T از معادله دوم در معادله اول خواهیم داشت:

$$mg-\frac{1}{4}Ma=Ma$$

$$a=\frac{4}{5}g$$



$$S=R_1\theta_1+R_2\theta_2$$

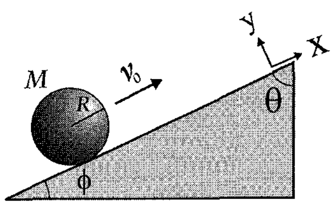
$$\ddot{S}=R_1\ddot{\theta}_1+R_2\ddot{\theta}_2$$

چون دو کره مانند هم هستند.

$$\ddot{S}=2R\ddot{\theta}$$

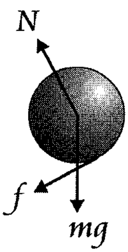
$$a=2R\alpha$$

۶ ـ ۲۵)



$$x(0)=0 \qquad \dot{x}(0)=v_0 \qquad \omega(0)=\frac{v_0}{R}=\omega_0$$

$$y(0)=0 \qquad \dot{y}(0)=0$$



فرض می‌کنیم که ساچمه روی سطح نمی‌لغزد پس با این فرض داریم:

$$\dot{x}(t)=R\omega(t)$$

$$\ddot{x}(t)=R\dot{\omega}(t)$$

$$\frac{1}{M}\left[f(t)-Mg\cos\theta\right]=\frac{R}{I}\left[-Rf(t)\right]$$

$$f(t)\left[\frac{1}{M}+\frac{R^2}{I}\right]=g\cos\theta$$

$$f(t)=\frac{g\cos\theta}{\frac{1}{M}+\frac{R^2}{\frac{2}{5}MR^2}}=\frac{Mg\cos\theta}{1+\frac{5}{2}}$$

$$f(t)=\frac{2}{7}Mg\cos\theta$$

$$F_x=M\ddot{x}$$

$$\frac{2}{7}Mg\cos\theta-Mg\cos\theta=M\ddot{x} \quad\Rightarrow\quad -\frac{5}{7}g\cos\theta=\ddot{x}$$

$$\dot{x}(t)=v_0-\frac{5}{7}g\cos\theta t$$

$$x(t)=v_0 t-\frac{5}{4}g\cos\theta t^2$$

$$\frac{dx}{dt}=v_0-\frac{5}{7}g\cos\theta t=0$$

$$t=\frac{7v_0}{5g\cos\theta}$$

$$x_{max}=\frac{7v_0^2}{5g\cos\theta}-\frac{5}{14}g\cos\theta\left(\frac{7v_0}{5g\cos\theta}\right)^2$$

$$=\left(\frac{7}{5}-\frac{7}{10}\right)\frac{v_0^2}{g\cos\theta}$$

$$x_{max}=\frac{7}{10}\frac{v_0^2}{g\cos\theta}$$

$$x_{max}=\frac{7}{10}\frac{v_0^2}{g\sin\theta}$$

راه حل دوم:

$$\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2\frac{v_0^2}{R^2}=mgh$$

$$\frac{1}{2}v_0^2\left(1+\frac{2}{5}\right)=gh \quad\Rightarrow\quad h=\frac{v^2}{g}\left(\frac{7}{10}\right) \quad\Rightarrow\quad \ell=\frac{v_0^2}{g\sin\theta}\left(\frac{7}{10}\right)$$

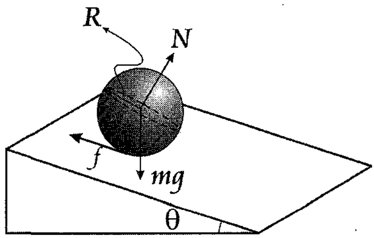
اگر $v_0=3$ و $\theta=30$ در نتیجه $\ell=1.3\text{m}$ خواهد شد.

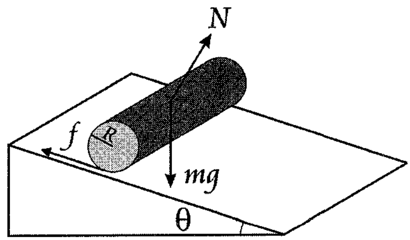
۶ ـ ۲۶)

برای هر دو حرکت انتقالی یک نوع رابطه صادق است.

$$\Sigma\vec{F}=m\vec{a}$$

$$Mg\sin\theta-f=Ma$$





$$\tau = I\alpha \qquad\qquad \tau = I\alpha$$

$$fR = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{2}{5}MRa \qquad\qquad FR = \frac{MR^2}{2}\alpha = \frac{MR}{2}a$$

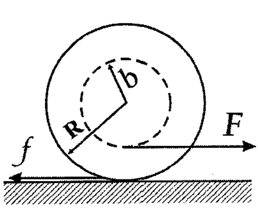
$$\alpha R = a \qquad\qquad \alpha R = \frac{Ma}{2}$$

از حذف f داریم:

$$a = \frac{5}{7}g\sin\theta \qquad\qquad a = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

چون هر دو یک مسافت را طی می‌کند کره که شتابش بیشتر است زمان کمتری طول می‌کشد که پایین برسد.

۶ ـ ۲۷)



در بیشینه F نیرو اصطکاک نیز بیشینه خود را داراست.

$$f = \mu N$$

از حرکت خطی:

$$F_x = M\ddot{x} \qquad F_y = M\ddot{y}$$

$$F - \mu N = M\ddot{x} \qquad N - Mg = 0$$

$$F - \mu Mg = M\ddot{x} \qquad N = Mg$$

از حرکت دورانی می‌توان نوشت:

$$\tau = I\alpha$$

$$Rf - bF = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

اگر یویو لغزش نداشته باشد بنابراین $\dot{x}=R\omega$, $\ddot{x}=R\alpha$ خواهد بود پس

$$Rf-bF=\frac{1}{2}MR^2\frac{\ddot{x}}{R}$$

$$\mu MgR-bF=\frac{1}{2}MR\left[\frac{1}{M}(F-\mu mg)\right]$$

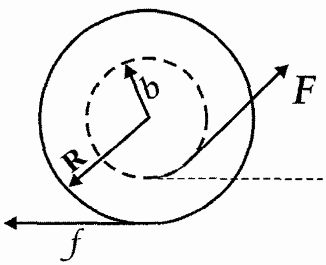
$$\frac{3}{2}\mu MgR=\left(b+\frac{1}{2}R\right)F$$

$$F_{max}=\frac{3R}{R+2b}\mu Mg$$

مقدار حدی برای F داریم:

$$b=R, F=\mu Mg \quad ; \quad b\to 0, F=3\mu Mg \quad , \quad \mu \to 0$$

۶ـ ۲۸)



$$F\cos\theta-f=ma$$

$$\Sigma\tau=0 \quad Fb-fR=0$$

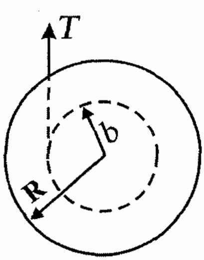
با جایگذاری کمان $f=\frac{Fb}{R}$ در معادله نیوتن داریم:

$$F\cos\theta-\frac{Fb}{R}=ma$$

$$\cos\theta=\frac{ma}{F}+\frac{b}{R} \qquad \theta=\mathrm{Arc}\cos\left(\frac{ma}{F}+\frac{b}{R}\right)$$

۶ـ ۲۹)

برای حرکت انتقالی و دورانی یویو هنگام پایین افتادن در امتداد قائم الزاویه



$$mg-T=ma$$

$$Tb=I\alpha \qquad Tb=\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{a}{b}\right)$$

از ترکیب دو معادله بالا داریم:

$$T=\frac{mgR^2}{\left(R^2+2b^2\right)} \qquad a=\frac{2gb^2}{\left(R^2+2b^2\right)}$$

در حالت بالا آمدن:

یویو در پایین‌ترین نقطه دارای بیشترین سرعت زاویه‌ای است و در حین بالا آمدن از سرعت زاویه‌ای آن کم می‌شود در هنگام بازگشت کشش نخ T' که شتاب کند کننده‌ای بر یویو وارد می‌کند در نتیجه شتاب یویو منفی خواهد شد داریم:

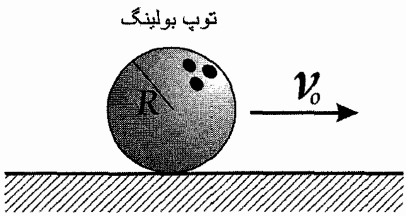
$$T'-mg=ma'$$

$$T'r=\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{a'}{b}\right)$$

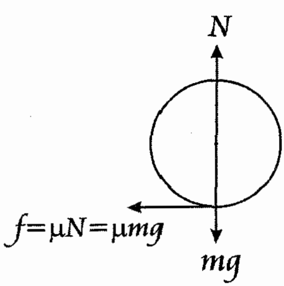
$$T'=\frac{mgR^2}{\left(R^2+2b^2\right)}$$

$$a'=\frac{2gb^2}{\left(R^2+2b^2\right)}$$

۶ ـ ۳۰)



دیاگرام نیروهای وارد بر آن



نیروی اصطکاک تا لحظه متوقف شدن لغزش توپ ثابت خواهد بود.

$$F_x = M\ddot{x} \qquad \tau = I\dot{\omega}$$
$$-f = M\ddot{x} \qquad fR = I\dot{\omega}$$
$$-\mu Mg = M\ddot{x} \qquad \mu MgR = \frac{2}{5}MR^2\dot{\omega}$$
$$-\mu g = \ddot{x} \qquad \mu g = \frac{2}{5}R\dot{\omega}$$

زمانی لغزش توپ بولینگ تمام می‌شود که $\dot{x} = R\omega$ شود. از معادلات حرکت می‌توان $\dot{x}$ و ω را به دست آورد.

$$\ddot{x} = -\mu g \qquad \dot{\omega} = \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}$$
$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t) - \mu gt \qquad \omega(t) = \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}t$$
$$= v_0 - \mu g = R\omega$$
$$v_0 - \mu gt = \frac{5}{2}\mu gt \qquad v_0 = \frac{7}{2}\mu gt$$
$$t^* = \frac{2}{7}\frac{V_0}{\mu g}$$

اگر زمان محاسبه شده در عبارت $\dot{x}(t) = V_0 - \mu gt$ جایگزین کنیم سرعت توپ وقتی که غلتش کامل دارد به‌دست خواهد آمد.

$$\dot{x}(t^*) = V_0 - gt^* = V_0\ \mu g\frac{2}{7}\frac{V_0}{\mu g}$$
$$\dot{x}(t) = \frac{5}{7}V_0$$

۶ ـ ۳۱)

$$\tau = I\alpha$$
$$-\mu mgR = \frac{1}{2}mR^2\alpha \qquad \alpha = -2\frac{\mu g}{R}$$
$$\frac{\omega - \omega_0}{t} = \alpha \qquad \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{-2\mu g}{R}$$

با جانشینی t از معادله $a = \frac{V - V_0}{t}$ و جانشینی آن از معادله بالا داریم:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\frac{v}{a}} = \frac{-2\mu g}{R}$$
$$\omega = \frac{\omega_0}{3}$$

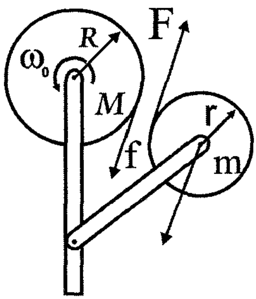
که در آن $a=\mu g$ از قانون دوم نیوتن به‌دست آمد.

$$f=ma$$

$$\mu mg=ma \qquad \mu g=a$$

جواب حالت خاص $\omega_0=\frac{3\,rad}{s}$ $\omega_f=\frac{1\,rad}{s}$ خواهد شد.

۶ ـ ۳۲)



در ابتدا می‌بنیم که اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ پایسته نیست.

$$\vec{L}_i=I_R\,\omega_0\,\hat{z}$$

به سمت خارج صفحه

$$\vec{L}_f=I_R\,\omega_R+I_r\left(-\omega_r\right)\hat{z}$$

$\omega_0>\omega$ و تکانه زاویه‌ای چرخ دوم L_r در جهت عکس است $L_i\neq L_f$ چرا؟

به همین دلیل نیروی به کار خواهد افتاد که کل سیستم را به دوران در می‌آورد. تنها عامل در حذف این نیرو اعمال گشتاور خارجی به سیستم است.

$$R\omega_R=r\omega_r$$

$$fR=-I_R\,\alpha_R \qquad f\,r=I_r\,\alpha_r$$

$$\int_0^{t^*} f\,dt=-\frac{MR^2}{2R}\int d\omega_R \qquad \int_0^{t^*} f\,dt=\frac{mr^2}{2r}\int d\omega_r$$

$$-\frac{1}{2}MR^2\left(\omega_R-\omega\right)=\frac{1}{2}mr\left(\omega_r-0\right)$$

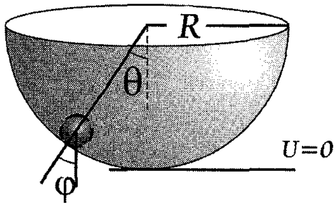
$$MR\left(\omega_0-\omega_R\right)=mr\left(\omega_r-0\right)$$

$$MR\,\omega_0=\left(mR+mR\right)\omega_R$$

$$\omega_R=\frac{M}{M+m}\omega_0$$

۶ ـ ۳۴)

انرژی ساچمه را ابتدا می‌نویسیم: (با توجه به مبدأ پتانسیل)



$$E=\frac{1}{2}mV_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2+mg(R-b)(1-\cos\theta)$$

$$V_m=(R-b)\dot{\theta}=b\dot{\phi}$$

$$\omega=\dot{\varphi}$$

$$I=\frac{2}{5}mb^2$$

$$E=\frac{1}{2}mv_c(R-b)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\frac{2}{5}mb^2\dot{\varphi}^2+mg(R-b)(1-\cos\theta)$$

$$E=\frac{1}{2}m(R-b)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{5}m(R-b)^2\dot{\theta}^2+mg(R-b)(1-\cos\theta)$$

$$=\frac{7}{10}m(R-b)^2\dot{\theta}^2+mg(R-b)(1-\cos\theta)$$

برای نوسان‌های کوچک داریم:

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2}$$

$$E=\frac{7}{10}m(R-b)^2\dot{\theta}^2+mg(R-b)\frac{\theta^2}{2}$$

به علت این‌که انرژی ثابت است بنابراین $\frac{dE}{dt}=0$ است.

$$\frac{dE}{dt}=\frac{7}{5}m(R-b)^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+mg(R-b)\theta\dot{\theta}=0$$

$$\dot{\theta}\left(\frac{7}{5}m(R-b)^2\ddot{\theta}+mg(R-b)\theta\right)=0$$

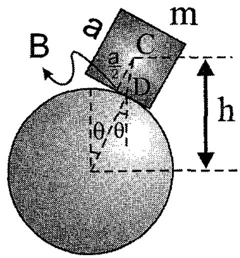
با ساده کردن رابطه بالا داریم:

$$\ddot{\theta}+\frac{5}{7}\frac{g}{(R-b)}\theta=0$$

معادله‌ی دیفرانسیل بالا معادله‌ی دیفرانسیل حرکت نوسانی با بسامد زاویه‌ای $\omega=\sqrt{\frac{5g}{7(R-b)}}$ در صورتی‌که $R\gg b$ باشد می‌توان از b در مقابل R صرف‌نظر کرد. بنابراین

$$\omega=\sqrt{\frac{5g}{7R}}$$

۶ ـ ۳۵)



در شکل نشان داده شده مکعب بعد از کمی انحراف از وضعیت اولیه نشان داده شده است اگر h ارتفاع مرکز جرم مکعب (نقطه‌یC) از نقطه O مرکز استوانه باشد انرژی پتانسیل مکعب نسبت به مرکز استوانه به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$U=mgh$$
$$=mg\left[(OD)\cos\theta+CD\cos(\phi-\theta)\right] \qquad (1)$$

اما با توجه به شکل داریم $OD=r$ به دلیل کوچک بودن زاویه ϕ داریم: $CD\cong\frac{a}{2}$

پس از رابطه‌ی بالا به‌دست می‌آید:

$$U=mg\left[r\cos\theta+\frac{a}{2}\cos(\phi-\theta)\right] \qquad (2)$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} AD=r\theta \\ BD-\frac{a}{2}\tan\phi\approx\frac{a}{2}\phi \end{cases} \qquad (3)$$

اما انحراف مکعب خیلی کم است. (یعنی زوایای ϕ,θ خیلی کوچک هستند) در نتیجه داریم:

$$AD\cong BD \qquad (4)$$

از دو رابطه‌ی (3) , (4) به‌دست می‌آید:

$$r\theta\cong\frac{a}{2}\phi \qquad (5)$$

از طرفی داریم:

$$\cos(\phi-\theta)=\cos\phi\cos\theta+\sin\phi.\sin\theta$$
$$\cong1\cos\theta+\phi\sin\theta \qquad (6)$$

زیرا $\cos\phi\cong1 \quad , \quad \sin\phi\cong\phi$ است.

از ترکیب دو رابطه (5) , (6) به‌دست می‌آید:

$$\cos(\phi-\theta)=\cos\theta+\left(\frac{2r\theta}{a}\right)\sin\theta \qquad (7)$$

از جانشانی رابطه‌ی بالا در رابطه‌ی (2) خواهیم داشت:

$$U=mg\left[\left(r+\frac{a}{2}\right)\cos\theta+r\theta\sin\theta\right] \tag{8}$$

$$U'=\frac{\partial U}{\partial\theta}=mg\left[-\frac{a}{2}\sin\theta+r\theta\cos\theta\right] \tag{9}$$

که به ازای $\theta=0$ داریم $U'=0$ یعنی $\theta=0$ وضعیت تعادل مکعب است اما شرط تعادل پایدار عبارت است از:

$$U''=\left[\frac{d^2U}{d\theta^2}\right]_{\theta=0}>0$$

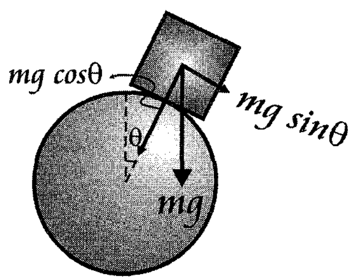
که با استفاده از رابطه‌ی (9) خواهیم داشت:

$$U''(\theta=0)=mg\left[-\frac{a}{2}+r\right]>0$$

در نتیجه، برای تعادل پایدار مکعب باید داشته باشیم:

$$r>\frac{a}{2}$$

روش دوم:



به علت این‌که تعادل باید پایدار باشد گشتاور نیروی $mg\cos\theta$ باید بزرگتر از گشتاور نیروی $mg\sin\theta$ باید باشد.

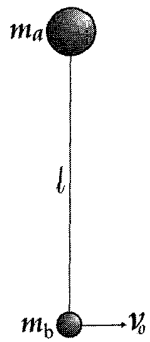
$$mg\sin\theta\frac{a}{2}<mg\cos\theta r\theta$$

$$\frac{1}{\theta}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{a}{2}<r$$

به علت این‌که θ بسیار کوچک است بنابراین $\frac{\tan\theta}{\theta}\approx 1$ است.

$$\frac{a}{2}<r$$

۶ ـ ۳۶)



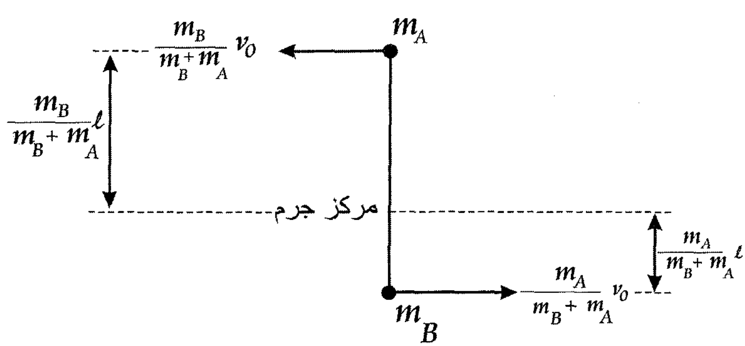
هیچ نیروی خارجی وجود ندارد پس مرکز جرم با سرعت ثابت حرکت خواهد کرد.

در ابتدا موقعیت m_B, m_A را $(0,\ell), (0,0)$ در نظر می‌گیریم.

مرکز جرم در لحظه $t = 0$ در مکان $\left(0, \frac{\ell m_A}{m_A + m_B}\right)$ قرار دارد و دارای سرعت $\vec{V}_{cm}(t) = \frac{M_B}{M_A + M_B} v_0 \hat{x}$ در نتیجه $r_{cm}(t) = \frac{m_B}{m_A + m_B} v_0 t x + \frac{m_A}{m_A + m_B} \ell \hat{y}$ است

مرکز جرم شتابدار نبوده بنابراین می‌توان آن را به عنوان چارچوب مرجع لخت در نظر گرفت ما می‌دانیم که در چهارچوب مرکز جرم، مرکز جرم حرکتی ندارد و این به آن علت است که دو جرم در یک مدار دایره‌ای حول مرکز جرمشان در حرکت باشند.

دستگاه مرکز جرم



حال با در نظر گرفتن m_A در دستگاه مختصات قطبی چقدر نیرو (کشش) لازم هست تا جسم روی یک دایره حرکت کند؟

$F_r = m a_r$

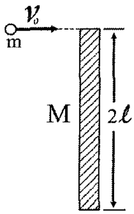
$$-T=-M_A\frac{v_A^2}{r_A}$$

$$T=m_A\frac{m_A+m_B}{m_B\ell}\left(\frac{m_B}{m_A+m_B}\right)^2 v_0^2$$

$$=\frac{m_A m_B}{m_A+m_B}\frac{v_0^2}{\ell}$$

این چنین نیرو (کشش) نیز برای جرم m_B لازم است تا آن حول مرکز جرم یک حرکت دایره‌وار انجام دهد (فقط جهت سرعت عکس می‌شود)

۶-۳۷)



فرض می‌کنیم برخورد الاستیک است و $\vec{v}_f=-\vec{v}_f\,\hat{x}$ حال v_f چیست؟

ما از پایستگی تکانه و انرژی استفاده می‌کنیم داریم:

$$P_i=P_f$$

$$mv_0=-mv_f+MV_f$$

$$E_i=E_f$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_f^2+\frac{1}{2}Mv_f^2+\frac{1}{2}I\omega_f^2$$

I برابر است با $I=\frac{1}{12}M(2\ell)^2=\frac{1}{3}M\ell^2$

$$L_i=L_f$$

$$\ell mv_0=-\ell mv_f+I\omega_f$$

حال سه معادله سه مجهول داریم از حل آن‌ها:

$$\omega_f=\frac{\ell m}{I}\left(v_0+v_f\right) \qquad V_f=\frac{m}{M}\left(v_0+v_f\right)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_f^2+\frac{1}{2}MV_f^2+\frac{1}{2}I\left(\frac{\ell m}{I}\left(v_0+v_f\right)\right)^2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_f^2+\frac{1}{2}M\left[\frac{m}{M}\left(v_0+v_f\right)\right]^2+\frac{1}{2}\frac{(\ell m)^2}{I}\left(v_0+v_f\right)^2$$

$$v_0^2=v_f^2+\frac{m}{M}\left(v_0^2+2v_0v_f+v_f^2\right)+\frac{\ell^2 m}{I}\left(v_0^2+2v_0v_f+v_f^2\right)$$

$$\left(\frac{m}{M}+\frac{\ell^2 m}{I}+1\right)v_f^2+\left(\frac{m}{M}+\frac{\ell^2 m}{I}\right)2v_0v_f+\left(\frac{m}{M}+\frac{\ell^2 m}{I}-1\right)v_0^2=0$$

$$\left(4\frac{m}{M}+1\right)v_f^2+\left[\left(14\frac{m}{M}\right)\left(\frac{m}{M}\right)2v_0\right]v_f+\left(4\frac{m}{M}-1\right)v_0^2=0$$

$$(4m+M)v_f^2+\left(8v_0m\right)v_f+(4m-M)v_0^2=0$$

$$v_f=-8mv_0\pm\sqrt{\frac{64\,v_0^2m^2-4(4m+M)(4m-M)v_0}{2(4m+M)}}$$

$$v_f=-4mv_0+\sqrt{\frac{16m^2v_0^2-\left(16m^2-M^2\right)v_0^2}{4m+M}}$$

$$v_f=\frac{M-4m}{M+4m}v_0$$

حال در حالت حدی داریم:

$$V_f=-V_0 \quad M\to 0 \quad , \quad v_f=v_0 \qquad M\to\infty$$

۶ـ۳۸)

چون هیچ گشتاور خارجی وجود ندارد بنابراین قانون پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای داریم:

$$L_{\text{قبل از برخورد}}=L_{\text{بعد از برخورد}}$$

$$mV.\frac{L}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{mL^2}{2}\omega-mv'\frac{L}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v_0\frac{L\sqrt{2}}{2}=\omega L^2-V'\frac{\sqrt{2}}{2}L \quad\Rightarrow\quad v'=\sqrt{2}\,\omega\ell-v_0$$

قانون پایستگی تکانه

$$P_{\text{قبل از برخورد}}=P_{\text{بعد از برخورد}}$$

$$mV_0=-mV'+2mV_{cm}$$

$$V_0+V'=2V_{cm}$$

$$2V_{cm}=v_0+\sqrt{2}\,\omega\ell-v_0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\omega\ell=v_{cm}$$

قانون پایستگی انرژی

$$E_{\text{قبل از برخورد}}=E_{\text{بعد از برخورد}}$$

$$\frac{1}{2}mV_0^2=\frac{1}{2}mV'^2+\frac{1}{2}2mV_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2\ ;\ I=\frac{m}{2}\ell^2$$

$$v_0^2=2\left(\frac{1}{2}\omega^2\ell^2\right)+2\omega^2\ell^2+v_0^2-2\sqrt{2}\,\omega\ell v_0+\frac{\ell^2\omega^2}{2}$$

$$\omega=\frac{4\sqrt{2}}{7}\frac{v_0}{L}$$

۶ـ ۳۹)

$$J=mV$$

$$V=\frac{J}{m+M}$$

$$h'J=I\omega$$

$$\omega=\frac{h'.J}{I}=\frac{h'J}{(m+M)k^2}$$

$$V=V-h\omega=0 \quad\Rightarrow\quad V=h\omega=\frac{L}{2}\omega$$

$$\frac{J}{m+M}=h.\frac{h'}{(m+M)k^2}$$

$$K^2=h.h'$$

$$\frac{1}{12}=\frac{L}{2}. \quad\Rightarrow\quad L'=\frac{1}{6}L$$

$$L+L'=\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}L$$

۶ـ ۴۰)

$$E_1=\frac{1}{2}kb^2$$

$$E_2=\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}I\omega^2=E_1$$

چون غلتش کامل است $\frac{1}{2}\left(m\ell^2+I\right)\omega^2=\frac{1}{2}kb^2$

$$E=\frac{1}{2}k(-b+x)^2 \quad , \quad \sum\vec{F}=m\vec{a} \quad , \quad \sum\tau=I\alpha \quad\Rightarrow\quad -fr=I\frac{a}{r}$$

$$m\ddot{x}=kx+\mu mg \qquad\qquad m\ddot{x}=-k\left(x-\frac{\mu mg}{k}\right)$$

$x-\frac{\mu mg}{k}=x$ در نظر می‌گیریم.

$$X-\frac{\mu mg}{k}=x \qquad\qquad \ddot{x}=\ddot{x}$$

$$m\ddot{x}+kx=0 \quad , \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

برای به‌صورت خواهد داشت.

$$x = x_0 \cos \omega t$$

کار نیروی ناپایستار

$$w = \int f \, .dx = \int_0^{\frac{T}{4}} \mu mg X_0 \omega \sin \omega t \, dt$$

$$w = \mu mg \left(-\cos \omega t \right)_0^{\frac{T}{4}} = -\mu mg X_0$$

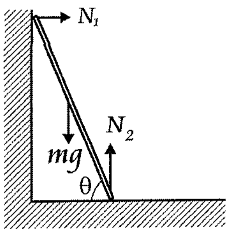
کار نیروی ناپایستار برابر است با تغییرات انرژی داریم:

$$w_f = \Delta E = -\mu mg X_0 = \frac{1}{2} K X_0^2 - \frac{1}{2} kb^2$$

$$X_0^2 + \frac{2\mu mg}{k} X_0 - b^2 = 0 \qquad X_0 = \frac{\mu mg}{k} \pm \sqrt{\frac{\mu^2 m^2 g^2}{k^2} - b^2}$$

(۶-۴۱)

ابتدا قانون پایستگی انرژی را می‌نویسیم. چون هیچ نیروی ناپایستار وجود ندارد.



$$\frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \; \frac{1}{3} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + mg \ell \sin \theta = mg \ell \sin \theta_0$$

با ساده‌سازی:

$$\frac{2}{3} \ell \dot{\theta}^2 = g \left(\sin \theta_0 - \sin \theta \right) \qquad (1)$$

مکان مرکز جرم را مشخص کنید.

$$x = \ell \cos \theta$$

$$y = \ell \sin \theta$$

$$\ddot{x} = -\ell \left(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta \right) \qquad (2)$$

با توجه به شکل در راستای x فقط در راستای x نیروی N_1 وجود دارد بنابراین می‌توان نوشت $N_1 - m\ddot{x}$ اما در لحظه جدا شدن الوار $N_1 = 0$ است بنابراین:

$$\dot{\theta}^2 \cos \theta = -\ddot{\theta} \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\dot{\theta}^2 \cot \theta \qquad (3)$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (1) داریم:

$$\ddot{\theta}=-\frac{3g}{4\ell}\cos\theta \qquad (4)$$

حال رابطه‌ی بالا را در رابطه‌ی (1) قرار می‌دهیم آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\sin\theta=2(\sin\theta_0-\sin\theta)$$

$$\sin\theta=\frac{2}{3}\sin\theta_0$$

$$\theta=\arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\theta_0\right)$$

لازم به ذکر است می‌توان نیروی N_2 را در لحظه‌ی جدا شدن الوار به‌دست آورد.

$$-mg+N_2=m\ddot{y}$$

$$N_2=mg+m\ddot{y}$$

$$\ddot{y}=-\ell\dot{\theta}^2\sin\theta+\ell\ddot{\theta}\cos\theta=-\ell\dot{\theta}^2\sin\theta+\ell\left(-\dot{\theta}^2\right)(\cot\theta)\cos\theta$$

$$=-\ell\dot{\theta}^2\left(\sin\theta+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)=-\ell\dot{\theta}^2\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)=-\frac{\ell\dot{\theta}^2}{\sin\theta}$$

$$N_2=mg-\frac{\ell\dot{\theta}^2}{\sin\theta}$$

در لحظه‌ای که الوار دیوار را ترک کند با استفاده از روابط (3) , (4) می‌توان $\dot{\theta}^2$ را به‌دست آورد و در بالا قرار داد.

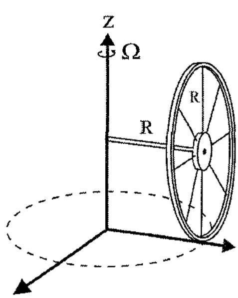
$$\dot{\theta}^2=\frac{3g}{4\ell}\sin\theta$$

$$N_2=mg-\frac{3}{4}mg=\frac{1}{4}mg>0$$

فصل هفتم

حرکت جسم صلب

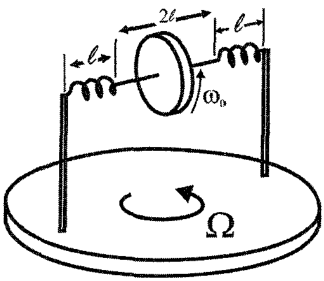
۱. حلقه نازکی به جرم M و شعاع R بدون لغزش حول محور z می‌چرخد. این حلقه به وسیلهٔ محوری به طول R که از مرکز آن می‌گذرد مطابق شکل ۱ـ۷ نگهداری می‌شود. حلقه با سرعت زاویه‌ای Ω حول محور z دور می‌زند. (الف) سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای حلقه (ω) چقدر است؟ (ب) تکانهٔ زاویه‌ای حلقه L چیست؟ آیا L با ω موازی است؟ (تذکر: گشتاور لختی حلقه برای محوری در امتداد قطرش برابر $\frac{1}{2}MR^2$ است).



شکل ۱ ـ ۷

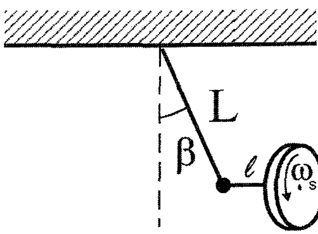
۲. چرخ طیاری مطابق شکل ۲ـ۷ با گشتاور لختی I_0 با سرعت زاویه‌ای ω_0 در وسط محوری به طول $2l$ دوران می‌کند. هر دو سر محور از طریق فنری که تا طول l کشیده شده و کشش T را ایجاد می‌کند به پایه‌ای متصل است. می‌توانید فرض کنید که T برای جابه‌جایی‌های کوچک محور، ثابت می‌ماند. پایه‌ها روی میزی استوار است که با سرعت زاویه‌ای Ω دوران می‌کند $(\Omega \ll \omega_0)$. مرکز جرم چرخ طیار درست بالای مرکز دوران میز قرار دارد. از گرانش

صرف‌نظر کرده و فرض کنید که حرکت کاملاً یکنواخت است، به‌طوری که اثر رقص محوری وجود ندارد. می‌خواهیم جهت محور را نسبت به خط راست واصل بین دو پایه پیدا کنیم.



شکل ۲ ـ ۷

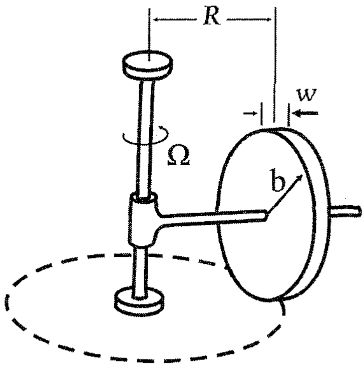
۳. چرخ ژیروسکوپی مطابق شکل ۳ـ۷ در یک انتهای محوری به طول l قرار دارد. انتهای دیگر محور از نخی به طول L آویخته است. چرخ طوری به حرکت واداشته می‌شود که حرکت تقدیمی یکنواخت در صفحه افقی انجام می‌دهد. چرخ دارای جرم M و گشتاور لختی I_0 حول مرکز جرم است. سرعت زاویه‌ای اسپینی ω_s است. از جرم میله و نخ صرف‌نظر کنید.



شکل ۳ ـ ۷

۴. در آسیاب قدیمی، غلات توسط آسیابی به شکل قرص که روی سطحی تخت به وسیلهٔ میله قائمی روی دایره‌ای می‌غلتد، آرد می‌شود. به علت وجود تکانه زاویه‌ای سنگ، نیروی تماس با سطح می‌تواند به‌طور قابل ملاحظه‌ای بیشتر از وزن چرخ باشد.

فرض کنید سنگ آسیاب مطابق شکل ۴ـ۷ از قرص یکنواختی به جرم M، شعاع b و پهنای w تشکیل شده است و بدون لغزش روی دایره‌ای به شعاع R با سرعت زاویه‌ای Ω می‌غلتد. نیروی تماس را پیدا کنید. فرض کنید که سنگ آسیاب به خوبی روی محور سوار است به طوری که نمی‌تواند کج شود، و همچنین $\omega \ll R$ است. از اصطکاک صرف‌نظر کنید.



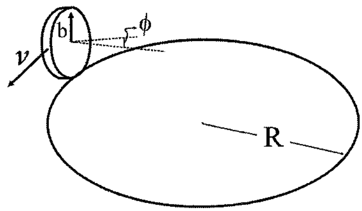
شکل ۴ ـ ۷

۵. هنگامی که اتومبیلی با سرعت زیاد یک منحنی را می‌پیماید، بارهای (توزیع وزن) روی چرخ‌های آن به‌طور محسوسی تغییر می‌کند. برای سرعت‌هایی که به اندازه کافی زیادند بار روی چرخ‌های داخلی صفر می‌شود، که در این زمان اتومبیل شروع به چپه شدن می‌کند. این تمایل را می‌توان با نصب یک چرخ طیار بزرگ روی اتومبیل از بین برد. (الف) محور چرخ طیار در چه جهتی باید نصب شود، و سوی دوران چه باید باشد تا به توازن بار کمک کند؟ (مطمئن شوید که روشتان برای دور زدن اتومبیل در هر جهتی کارآمد باشد). (ب) نشان دهید برای چرخ طیاری به شکل قرص و به جرم m و شعاع R شرط توازن بارها این است که سرعت زاویه‌ای چرخ طیار ω با رابطهٔ زیر به سرعت اتومبیل v مربوط باشد.

$$\omega=2v\frac{ML}{mR^2}$$

که در آن M جرم کل اتومبیل و چرخ طیار و L ارتفاع مرکز جرم اتومبیل (به انضمام چرخ طیار) از سطح جاده است. فرض کنید جاده فاقد شیب عرضی است.

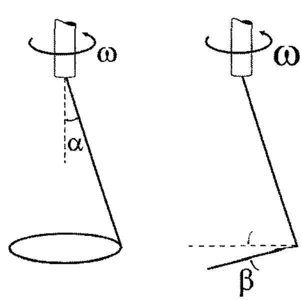
۶. اگر سکه‌ای را با دقت روی میز بغلتانید، می‌توانید آن را روی دایره‌ای به غلتش وادارید. همچنان‌که در شکل ۵ـ۷ می‌بینید سکه با محوری مایل ″ میل″ به داخل دارد. شعاع سکه b و شعاع دایره‌ای که روی میز طی می‌کند R و سرعت آن v است. فرض کنید لغزش وجود ندارد. زاویه‌ای را که محور با افق می‌سازد (ϕ) پیدا کنید.



شکل ۵ ـ ۷

۷. حلقهٔ نازکی به جرم M و شعاع R با نخی که از نقطه‌ای روی پیرامون حلقه می‌گذرد آویزان است. اگر نگهدارندهٔ با سرعت زاویه‌ای زیاد ω بچرخد، حلقه مطابق شکل‌های ۶ـ۷ تقریباً دز سطح افقی و حول مرکزی روی محور نگهدارنده خواهد چرخید. نخ با راستای قائم زاویه α می‌سازد. (الف) زاویه کوچک β بین صفحه حلقه و افق را به طور تقریبی پیدا کنید. (ب) شعاع دایرهٔ کوچکی را که حول محور قائم توسط مرکز جرم رسم می‌شود به طور تقریبی بیابید. (این حرکت را شما می‌توانید با مهارت با یک طناب نمایش دهید. این همان کمند مورد استفادهٔ گاوچرانهاست).

۸. یک حلقهٔ بازی بچه با جرم M و شعاع b روی خط راستی با سرعت v می‌غلتد. به بالای آن به وسیله خط‌کشی در جهت عمود بر حرکت به آرامی ضربه‌ای نواخته می‌شود. مقدار ضربه نواخته شده برابر I است. (الف) نشان دهید که این امر موجب انحراف خط غلتش به اندازه زاویه $\phi=\frac{I}{Mv}$ می‌شود. فرض کنید که تقریب ژیروسکوپ صادق است و از اصطکاک زمین صرف‌نظر کنید. (ب) نشان دهید که تقریب ژیروسکوپ به شرط $F\ll\frac{Mv^2}{b}$ برقرار است؛ که در آن F مقدار نیروی اعمال شده است.



شکل ۶ ـ ۷

۹. این مسئله مستلزم بررسی اثر تکانه زاویه‌ای چرخ‌های یک دوچرخه بر پایداری دو چرخه‌سوازی است. فرض کنید که مرکز جرم دوچرخه و دوچرخه سوار در ارتفاع $2l$ از سطح زمین قرار دارد. هر چرخ دارای جرم m و شعاع l و گشتاور لختی ml^2 است. دوچرخه با سرعت V در مسیر دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کند. نشان دهید که دوچرخه به اندازه زاویه داده شده زیر نسبت به زمین مایل است.

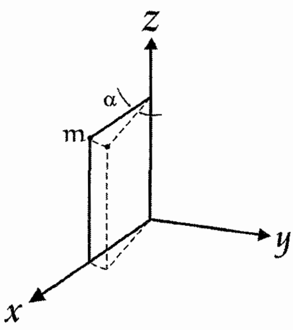
$$\tan\phi=\frac{V^2}{Rg}\left(1+\frac{m}{Mx}\right)$$

که در آن M جرم کل است.

جمله آخر داخل پرانتز در صورت صرف‌نظر کردن از تکانهٔ زاویه‌ای حذف می‌شد. آیا فکر می‌کنید که این مطلب مهم است؟ اگر دوچرخه بدون دوچرخه‌سوار باشد، اهمیت آن در چیست؟

۱۰. به وسیلهٔ ژیروسکوپی که محور آن به طور افقی نصب شده و در امتداد شرق ـ غرب قرار دارد، عرض جغرافیایی را می‌توان اندازه گرفت. (الف) نشان دهید ژیروسکوپ هنگامی که محور اسپینی آن موازی محور قطبی بوده و زاویهٔ عرض جغرافیایی λ را با افق می‌سازد، پایدار باقی می‌ماند. (ب) اگر ژیروسکوپ با محور چرخشی که زاویهٔ کوچکی با محور قطبی می‌سازد رها شود، نشان دهید که محور چرخش ژیروسکوپ حول محور قطبی با بسامد $\sqrt{I_1\omega_s\frac{\Omega_e}{I_\perp}}=\omega_{\text{نوسان}}$ خواهد کرد، که در آن $I_\perp$ گشتاور لختی ژیروسکوپ حول محور چرخش، $I_\perp$ گشتاور لختی آن حول محور افقی ثابت، و Ω_e سرعت زاویه‌ای دوران زمین است. برای ژیروسکوپی که با سرعت $40000\ \text{rpm}$ می‌چرخد، چه مقداری را برای $\omega_{\text{نوسان}}$ انتظار دارید؟

۱۱. ذره‌ای به جرم m مطابق شکل ۷ـ۷ در مکان $x=2$, $y=0$ و $z=3$ قرار دارد.



شکل ۷ ـ ۷

(الف) گشتاور لختی وحاصل‌ضرب‌های لختی آن را نسبت به مبدأ پیدا کنید. (ب) این ذره دوران خالصی حول محور z به اندازهٔ زاویهٔ کوچک انجام می‌دهد. نشان دهید دار تقریب مرتبه اول نسبت به α، اگر $\alpha\ll 1$ باشد، گشتاور لختی تغییر نمی‌کند.

حرکت جسم صلب

۷ـ۱)

الف) جهت محور را $\hat{r}$ در نظر می‌گیریم. سرعت زاویه‌ای دو مولفه تجزیه می‌شود، یکی منجر به حرکت چرخش حول محور چرخش می‌شود و دیگری منجر به گردش حول محور، پس داریم:

$$\vec{\omega}=-\omega_s\,\hat{r}+\Omega\,\hat{z}=-\Omega\hat{r}+\Omega\,\hat{z}$$

ب)

$$\vec{L}=-I_s\,\omega_s\,\hat{r}+I_z\,\Omega\,\hat{z}$$

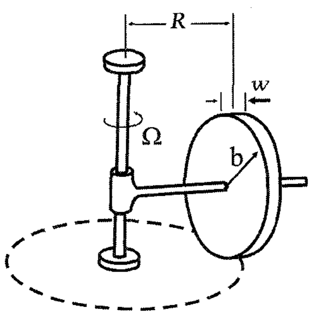
$$=MR^2\,\omega_z\,\hat{r}+\left(\frac{1}{2}MR^2+MR^2\right)\Omega\,\hat{z}$$

در جمله دوم از قضیه محورهای موازی استفاده شده است.

$$\vec{L}=-MR^2\,\omega_s\,\hat{r}+\Omega\left(\frac{3}{2}MR^2\right)\hat{z}$$

$\vec{L}$ با $\vec{\omega}$ موازی نیست.

۷-۴)



$$\vec{\omega}=-\omega_s\,\hat{r}+\Omega\,\hat{z}=-\frac{R}{b}\Omega\hat{r}+\Omega\,\hat{z}$$

$$\vec{L}=-I_s\,\omega_s\,\hat{r}+I_z\,\Omega\,\hat{z}=-\frac{1}{2}Mb^2\,\frac{R}{b}\Omega\,\hat{r}+\left(\frac{1}{4}Mb^2+MR^2\right)\Omega\,\hat{z}$$

$$\frac{dL}{dt}=-\frac{1}{2}Mb\,R\,\Omega\frac{d\hat{r}}{dt}=-\frac{1}{2}mM\,bR\,\Omega\dot{\theta}\hat{\theta}=\tau$$

$$=-\frac{1}{2}MbR\,\Omega^2\,\hat{\theta}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$-\frac{1}{2}MbR\,\Omega^2\,\hat{\theta}=-R\,(N-Mg)\,\hat{\theta}$$

$$\frac{1}{2}Mb\Omega^2=N-Mg$$

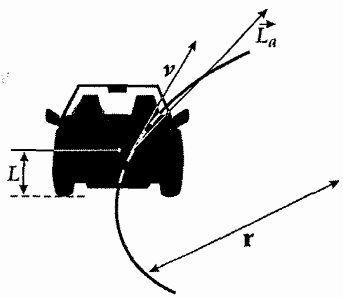
$$N=Mg+\frac{1}{2}Mb\Omega^2$$

$$N\xrightarrow{\Omega=0}Mg$$

$$N\xrightarrow{\Omega^2 b=2g}2Mg$$

۷ـ۵)

با ملاحظه گردش ماشین به سمت راست با چپ داریم:



گردش به سمت راست   گردش به سمت چپ

گشتاوری باید به ماشین داده شود زیرا تغییرات تکانه زاویه‌ای داریم. مولفه افقی $\vec{L}_a$ مانند چرخش ماشین می‌چرخد. ما یک چرخ طیاری می‌خواهیم که دقیقاً مولفه افقی $\vec{L}_a$ را خنثی کند. توجه شود که این کار در هر دو مورد می‌تواند با اتصال یک چرخ طیار به طوری که L_s چرخ طیار به سمت راست ماشین باشد.

m جرم چرخ طیار

M جرم ماشین و چرخ طیار

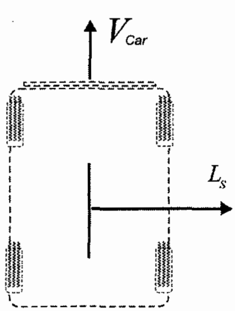
R شعاع چرخ طیار

$$L_s=L_{a,h}$$

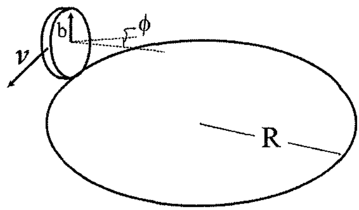
$$\omega I_0=LMV$$

$$\omega\frac{1}{2}mR^2=LMV$$

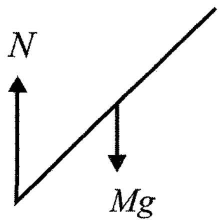
$$\omega=\frac{2LMV}{mR^2}$$

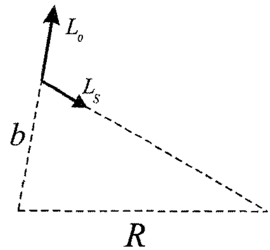


۷ـ۶)



با توجه به تکانه زاویه‌ای حول مرکز دایره‌ای با شعاع R





مولفه در امتداد محور $\hat{z}$ با زمان تغییر نمی‌کند پس باید سراغ مولفه در جهت $\hat{r}$ می‌رویم.

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{L}}{dt} \qquad F_z=M\ddot{z}$$

$$N-Mg=0$$

$$\left[Mg(R-b\sin\phi)-NR\right]\hat{\theta}=-\Omega\left(L_{o,r}+L_{s,r}\right)\hat{\theta}$$

$$-Mg\,b\sin\phi=\frac{-N}{R-b\sin\phi}\left[b\cos\phi MV+\frac{V}{b}\frac{1}{2}Mb^2\cos\phi\right]$$

$$Mg\,b\sin\phi=\frac{3}{2}\frac{MbV^2}{R-\sin\phi}\cos\phi$$

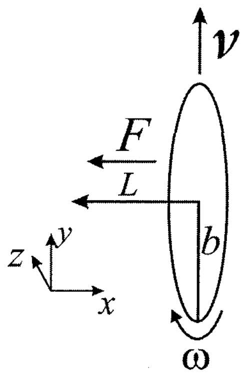
$$\operatorname{Tan}\phi=\frac{3V^2}{2g(R-b\sin\phi)}$$

اگر $R>>b\sin\theta$ باشد

$$\operatorname{Tan}\phi=\frac{3V^2}{2gR}$$

۷ـ۸)

الف)



$$v = b\omega$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$$

$$\int \vec{\tau}\, dt = \int d\vec{L}$$

$$-b \int F\, dt\, \hat{y} = \Delta\vec{L}$$

$$-bI\,\hat{y} = -\phi L \hat{y}$$

$$bI = \phi \frac{N}{b} Mb^2$$

$$\phi = \frac{I}{MV}$$

توجه شود که ما از اصطکاک صرف‌نظر کردیم. اگر ما اصطکاک را در نظر می‌گرفتیم ϕ به علت ایجاد گشتاور شروع به کاهش می‌کرد.

ب) تقریب ژیروسکوپی: تکانه زاویه چرخش به دور خود را (اسپینی) خیلی بزرگتر است از تکانه زاویه‌ای گردش دایروی باشد.

$$L_{spin} >> L_{orbital}$$

$$\omega I_0 >> \frac{\phi}{\Delta t} I_L$$

$$\frac{v}{b} Mb^2 >> \frac{1}{\Delta t} \frac{I}{MV} \frac{1}{2} Mb^2$$

$$\frac{2MV^2}{b} >> \frac{F.\Delta t}{\Delta t}$$

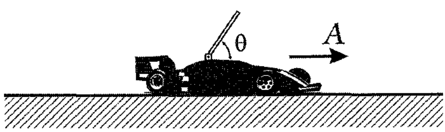
$$F << \frac{2MV^2}{b}$$

توجه کنید که فاکتور 2 نقش مهمی را بازی نمی‌کند.

فصل هشتم

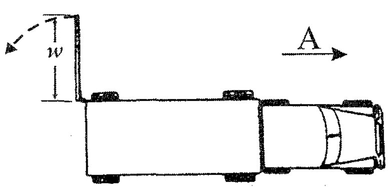
سیستم‌های نالخت و نیروهای مجازی

۱. میلهٔ یکنواخت نازکی به طول L و جرم M از یک انتها لولا شده است. لولا به سطح فوقانی اتومبیلی که دارای شتاب A است مطابق شکل ۱ـ۸ متصل است. (الف) مقدار زاویه تعادل θ بین میله و سطح فوقانی اتومبیل چقدر است؟ (ب) فرض کنید میله به اندازهٔ زاویهٔ کوچک ϕ از وضعیت تعادل خارج شده باشد. حرکت آن به ازای این زاویه چگونه است؟



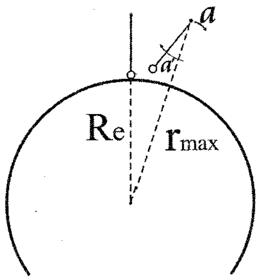
شکل ۱ ـ ۸

۲. کامیونی، مطابق شکل ۲ـ ۸ با درب کاملاً باز در حال سکون است. کامیون با آهنگ ثابت A به جلو شتاب می‌گیرد و درب‌آن در شروع حرکت در جهت بسته شدن گردش می‌کند. درب یکنواخت و جامد دارای جرم کل M، ارتفاع h و پهنای W است. از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید. (الف) سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای درب را حول لولای کامیون وقتی که به اندازه 90° چرخیده است پیدا کنید. (ب) نیروی افقی وارد بر درب را وقتی که به اندازه 90° چرخیده است پیدا کنید.



شکل ۲ ـ ۸

۳. آونگی که گلوله آن به طرف مرکز زمین است مطابق شکل ۳ـ ۸ در حال سکون است. نقطهٔ آویز آونگ به طور افقی با شتاب یکنواخت a شروع به حرکت می‌کند، و آونگ شروع به نوسان می‌کند. شتاب زاویه‌ای α' آونگ را پیدا کنید. زمان تناوب آونگ را که به ازای آن آونگ در امتداد شعاع زمین قرار می‌گیرد پیدا کنید. از دوران زمین صرف‌نظر کنید. (این موضوع، اصول کار وسیله‌ای به نام آونگ شولر است که برای نصب ژیروسکوپ در دستگاه‌های راهنمای لخت استفاده می‌شود).

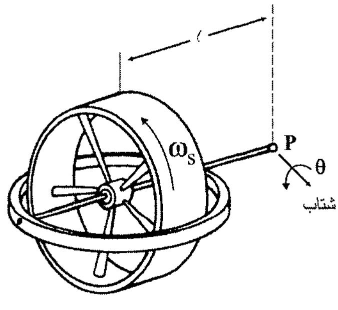


شکل ۳ ـ ۸

۴. مرکز جرم یک اتومبیل به جرم 1600 کیلوگرم در وسط چرخ‌ها و در 60 سانتی‌متری بالای سطح زمین است. فاصله چرخ‌ها از یکدیگر 2.5 متر است. (الف) مقدار کمینه شتاب A اتومبیل که به ازای آن چرخ‌های جلو شروع به بلند شدن از سطح زمین می‌کنند چقدر است؟ (ب) اگر اتومبیل با آهنگ g شتاب منفی پیدا کند، نیروی عمودی وارد بر چرخ‌های جلو و عقب چقدر است؟

۵. برای ژیروسکوپ در دستگاه‌های کشتیرانی و هواپیمایی کاربردهای بسیاری پیدا شده است. برای مثال ژیروسکوپ می‌تواند برای اندازه‌گیری شتاب به کار رود. ژیروسکوپی را که با سرعت زیاد ω_s در حال چرخش است مطابق شکل ۴ـ۸ در نظر بگیرید. ژیروسکوپ از طریق تکیه‌گاه P به وسیله نقلیه متصل است. اگر وسیلهٔ نقلیه در جهت عمود بر محور چرخش با آهنگ a شتاب بگیرد، ژیروسکوپ حول محور شتاب حرکت تقدیمی خواهد داشت که در شکل نشان داده شده است. زاویهٔ کل حرکت تقدیمی θ اندازه گرفته می‌شود. نشان دهید که اگر دستگاه از حال سکون شروع به حرکت کند، سرعت نهایی وسیله نقلیه با رابطه زیر داده می‌شود.

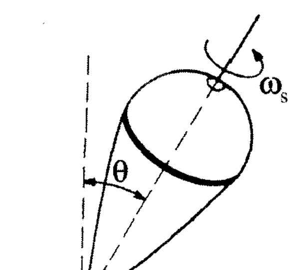
$$v=\frac{I_s\,\omega_s}{Ml}\theta$$



شکل ۴ ـ ۸

که در آن $I_s \omega_s$ تکانهٔ چرخشی ژیروسکوپ، M جرم کل قسمتی از ژیروسکوپ که روی تکیه‌گاه قرار دارد، و l فاصله تکیه‌گاه تا مرکز جرم است. (چنین دستگاهی، ژیروسکوپ انتگرال گیرنده نامیده می‌شود، زیرا به طور خودکار از شتاب انتگرال و سرعت را به دست می‌دهد).

۶. فرفره‌ای به جرم M با سرعت زاویه‌ای ω_s حول محور خود می‌چرخد. طبق شکل ۸ـ۵ گشتاور لختی فرفره حول محور چرخش I_0 و مرکز جرم فرفره به فاصله l از نوک آن قرار دارد. محور به اندازه زاویه ϕ نسبت به قائم، مایل است و فرفره حرکت تقدیمی یکنواخت انجام می‌دهد. گرانش به سمت پایین است. فرفره در داخل یک آسانسور است به نحوی که نوک آن توسط تکیه‌گاه بدون اصطکاکی در کف آسانسورقرار دارد. در هر یک از حالات زیر با ذکر جهت، آهنگ حرکت تقدیمی Ω را پیدا کنید: (الف) آسانسور در حال سکون است (ب) آسانسور با آهنگ 2g به پایین شتاب دارد.



شکل ۵ ـ ۸

۷. اختلاف ظاهری شتاب گرانش را در استوار و قطب‌ها پیدا کنید. با فرض این‌که زمین کروی است.

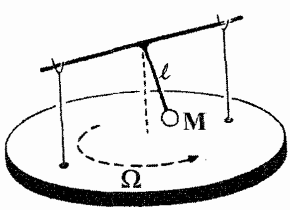
۸. با بررسی حرکت یک ذره در دستگاه مختصات دوار که در آن سرعت لحظه‌ای به صورت شعاعی است، عبارت آشنایی $v=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}$ را برای سرعت در مختصات قطبی مسطح پیدا کنید.

۹. یک قطار 400 تنی با سرعت $90\frac{km}{h}$ در عرض جغرافیایی 60° شمالی به طرف جنوب می‌رود. (الف) نیروی افقی وارد بر قطار چقدر است؟ (ب) این نیرو در چه جهتی است؟

۱۰. شتاب گرانشی که در یک دستگاه مختصات متصل به زمین اندازه‌گیری شده با g نشان داده می‌شود. اما به دلیل دوران زمین g با مقدار حقیقی شتاب حاصل از گرانش، g متفاوت است. با فرض اینکه زمین با شعاع R_e و سرعت زاویه‌ای Ω_e و کاملاً گرد باشد، g را بر حسب تابعی از عرض جغرافیایی λ پیدا کنید. (فرض گردد بودن زمین در واقع به مورد نیست. سهم مربوط به تخت شدگی قطبین در تغییرات g بر حسب عرض جغرافیایی با اثری که در این‌جا محاسبه می‌شود قابل مقایسه است).

۱۱. یک هیدروفویل تندرو با سرعت $200\frac{mi}{h}$ در سطح اقیانوس در استوا حرکت می‌کند. فرض کنید شتاب گرانش برای ناظری که روی زمین درحال سکون است g باشد. پیدا کنید تغییر نسبی گرانشی $\frac{\Delta g}{g}$ را که به وسیلهٔ سرنشین هیدروفویل اندازه گرفته می‌شود، وقتی که هیدروفویل در جهت‌های زیر پیش می‌رود: (الف) شرق، (ب) غرب، (ج) جنوب، (د) شمال.

۱۲. یک آونگ روی محوری که توسط دو پایه نگهداری می‌شود مطابق شکل ۶ـ۸ به طوری سوار است که فقط می‌تواند روی صفحه‌ای عمود بر محور نوسان کند. آونگ شامل جرم M است که به میلهٔ بدون جرمی به طول l متصل است. پایه‌های روی سکویی نصب شده‌اند که با سرعت زاویه‌ای Ω دوران می‌کند. با فرض کوچک بودن دامنه، بسامد آونگ را پیدا کنید.

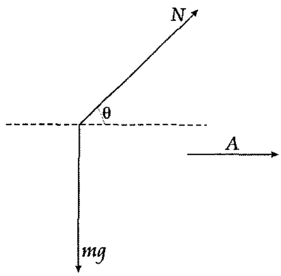


شکل ۶ ـ ۸

سیستم‌های نالخت و نیروهای مجازی

۸ ـ ۱)

الف)

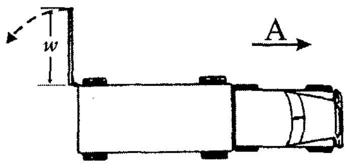


$$\begin{cases} N\cos\theta - mA = 0 \\ N\sin\theta - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad tg\theta = \frac{A}{g} \quad \Rightarrow \quad \theta = \mathrm{Arctg}\left(\frac{A}{g}\right)$$

ب) در این صورت میله با فرکانس ω و دامنه ϕ حول وضعیت تعادل معین شده در قسمت الف نوسان خواهد کرد.

$$\omega = \frac{m\sqrt{g^2 + A^2}\,\frac{\ell}{2}}{\frac{1}{3}m\ell^2} = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{g^2+A^2}}{\ell}$$

۸ـ۲) الف)



نیروی گرانشی موثر در جهت $x-$ ومقدار A وارد میشود.

سرعت زاویه را بر حسب θ با استفاده از پایستگی انرژی بدست می آوریم. $E_i = E_f$

$$MA\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MA(1-\sin\theta)\omega$$

$$\frac{1}{2}MA\omega\sin\theta = \frac{1}{6}M\omega^2\dot{\theta}^2 \rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{3A\sin\theta}{\omega}$$

$$\theta = \frac{\theta}{2} \rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{3A}{\omega}}$$

ب)

$$F_T = Mr\dot{\theta}^2$$

$$F_T = M\frac{\omega}{2}\frac{3A}{\omega} \rightarrow F_T = \frac{3}{2}MA$$

$$F_T = F_h - MA = \frac{3}{2}MA$$

$$F_h = \frac{5}{2}MA$$

۸ـ۳)

آونگی را که از نقطه ϕ_0 به‌صورت عملی آویزان شده است در نظر بگیرید.

اگر نقطه آویز ناگهان در جهت افقی شتاب بگیرد، پاندول شروع به چرخ می‌کند که ناشی از نیروی اینرسی روی مرکز جرم است.

به‌سادگی می‌توان نشان داد که مرکز آن حرکت در این مورد دقیقاً مرکز ضربه مربوط به θ است.

فرض می‌کنیم که پاندول روی سطح زمین است که مرکز ضربه در مرکز زمین است. حال نقطه آویز شتاب می‌گیرد، پاندول طوری می‌چرخد که تمام نقاط آن به سمت زمین باشد. چنین پاندولی همواره خودرا به صورت عمودی نگه می‌دارد صرف‌نظر از آن‌که چه مقدار شتابی داشته باشد.

برای حل این مسئله ابتدا به روی آونگ مرکب می‌پردازیم و با استفاده از نتایج آن جواب مسئله را می‌یابیم.

آونک مرکبی را در نظر بگیرید از نقطهٔ O آویزان شده و r_G فاصلهٔ نقطه آویز تا مرکز جرم و θ مقدار انحراف از حالت تعادل باشد پایستگی تکانه زاویه‌ای حول نقطه آویز

$$I_0\ddot{\theta} = -mgr_G\sin\theta$$

I_o را بر حسب شعاع چرخش می‌نویسیم.

$$I_o = mK_0^2$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g r_G}{k_0^2}\sin\theta = 0$$

حال طول تعادل را در این گونه تعریف می‌کنیم:

$$L_{eq} = \frac{K_0^2}{r_G} = \frac{K_G^2 + r_G^2}{r_G}$$

در این بالا این موضوع استفاده کردیم که $I_o=I_G+mr_G^2$ پس $K_0^2=k_G^2+r_G^2$ حال ما یک حرکتی مانند یک پاندول ساده خواهیم داشت:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L_{eq}}{g}}$$

r_p فاصله محل ضربه تا نقطه مرکز جرم است $r_p=\dfrac{k_{eq}^2}{r_a}$

$$L_{eq}=\frac{k_q^2+r_q^2}{r_G}=\frac{r_p r_G+r_G^2}{r_G}=r_G+r_P$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r_G+r_P}{g}}$$

اگر پاندول از نقطه P آویزان باشد.

$$\frac{K_G^2+r_p^2}{q_p}=\frac{r_p r_G+r_p^2}{r_p}=r_G+r_p=L_{eq}$$

حال اگر $R=6370\,km$ که شعاع زمین است باشد $R\approx r_P$ و $r_G=0.3\,m$ در نظر بگیریم، فاصله میان نقطه آویز تا مرکز جرم

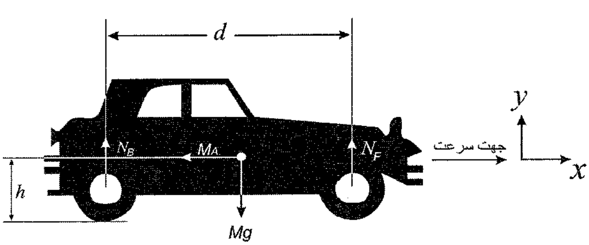
$$r_G=\frac{0.3^2}{637\times10^6}=1.5\times10^{-8}\,m=0.015\,Mm$$

خواهد بود.

$$T_{sh}=2\pi\sqrt{\frac{L_{eq}u_{iv}}{g}}\approx\sqrt{\frac{R}{g}}\approx 84.4\,min$$

۸ـ٤)

در مختصات مرجع ماشین

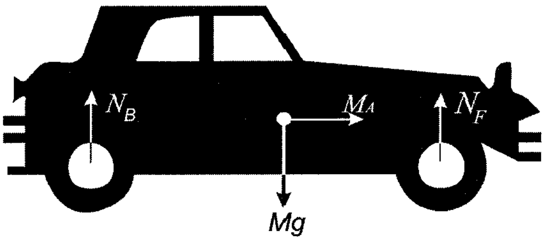


Amin چقدر باشد تا $N_F=0$ شود.

$$F_y = m\ddot{y} \qquad \tau = I_\alpha$$

$$N_b - Mg = 0 \qquad Mg\frac{d}{2} - mAh = 0$$

$$N_b = Mg \qquad A_{min} = \frac{d}{2h}\ g = \frac{2.5}{2\times 0.6}\times 9.8 = 20.42\frac{m}{s}$$



ب)

حول چرخ عقبی:

$$\tau = I\alpha$$

$$Mg\left(\frac{d}{2} + h\right) - N_f d = 0 \qquad N_f = \frac{d+2h}{2d}Mg$$

حول چرخ جلویی

$$N_b d + Mgh - Mg\frac{d}{2} = 0 \qquad N_b = \frac{d-2h}{2d}Mg$$

توجه شود که $N_b + N_f = Mg$ است.

۸ـ۵)

شتاب وسیله نقلیه ما یک گرانشی را ایجاد می‌کند که موجب فشاردادن ژیروسکوپ خواهد شد.

$$\Omega = \frac{\ell Ma(t)}{I_s \omega_s}$$

$$\int_0^t \Omega(t)dt = \frac{\ell M}{I_s \omega_s}$$

$$\int_0^t \Omega(t)dt = \frac{\ell M}{I_s \omega_s}\int_0^t d(t)dt$$

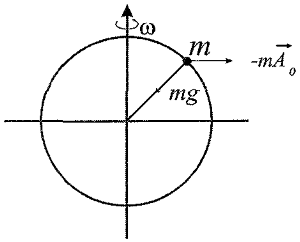
$$\theta = \frac{\ell M}{I_s \omega_s}\big(v(t) - v(0)\big)$$

که در این $V(0)$ برابر صفر است.

$$V = \frac{I_s \omega_s}{\ell M}\theta$$

۸ ـ ۷)

اگر نیروی واقعی ربایش گرانشی زمین را با $m\vec{g}$ و نیروی گریز از مرکز را با $-mA,$ نشان دهیم نیروی ظاهری ربایش گرانشی که آن را با $m\vec{g}$ نشان می‌دهیم از رابطه $mg = m\vec{g} - m\vec{A}_0$ حاصل می‌شود.



$$m\vec{g}_{\text{قطب}} = m\vec{g}$$

$$m\vec{g}_{\text{استوا}} = m\vec{g} - m r_e \omega^2 \frac{\vec{g}}{g} = m\vec{g}\left(1 - \frac{r_e \omega^2}{g}\right)$$

$$mg_{\text{قطب}} - mg_{\text{استوا}} = m r_e \omega^2$$

۸ـ۸)

$$\vec{v}_{\text{لختی}} = \vec{v}_{\text{دوار}} + \Omega \times \vec{r}$$

$$\vec{v}_{\text{دوار}} = \dot{r}\hat{r}$$

$$\Omega = \dot{\varphi}\hat{k}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v}_{\text{لختی}} = \dot{r}\hat{r} + \dot{\varphi}\hat{k} \times r\hat{r} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

۸ـ۱۲)

معادله حرکت را می‌توان چنین نوشت:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} + m\vec{g} - m\vec{A}_0 - 2m\omega \times \dot{\vec{r}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$\vec{F}$ نمایش هر نیروی وارد بر ذره غیر از نیروی گرانی است. ترکیب $m\vec{g} - m\vec{A}_0$ را $m\vec{g}$ می‌نامیم. بنابراین می‌توانیم معادله حرکت را به طریق زیر بنویسیم.

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} + mg - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' - m\omega \times (\omega \times \vec{r}')$$

در این مساله با، $\vec{F} = 0$ به علاوه جمله $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ در مقایسه با جمله‌های دیگر خیلی کوچک است، از این‌رو از آن نیز چشم‌پوشی می‌کنیم. بدین‌ترتیب معادله حرکت تبدیل می‌شود به

$$m\ddot{\vec{r}}' = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

که جمله آخر همان نیروی کوریولیس است.

برای حل معادله بالا جهت محورهای مختصات $o'x'y'z'$ را طوری انتخاب می‌کنیم که محور z' قائم (در راستای شاقول) رو به بالا، محور x' شرق و محور y' به شمال متوجه می‌باشد. با این انتخاب محورها داریم:

$$\vec{g} = -\vec{k}'g$$

مولفه‌های ω در دستگاه پریم‌دار عبارتند از:

$$\omega'_x = 0 \qquad \omega'_y = \omega \sin\lambda \qquad \omega'_x = \omega \sin\lambda$$

بدین‌ترتیب حاصل‌ضرب برداری چنین می‌شود.

$$\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}' = \begin{vmatrix} \hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ \omega_{x'} & \omega_{y'} & \omega_{z'} \\ \dot{x}' & \dot{y}' & \dot{z}' \end{vmatrix} = \hat{i}'(\omega\ddot{z}'\cos\lambda - \omega\dot{y}'\sin\lambda) + \hat{j}'\omega\dot{x}'\sin\lambda - \hat{k}\omega\dot{x}'$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{2}{g}\left|\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}'\right|$$

در این مساله $\lambda = 0$

الف) $\dot{x}' = v \quad , \quad \dot{y}' = \dot{z}' = 0$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{2}{g}\left|-\hat{k}\,\omega v\right| = \frac{2}{g}\omega v$$

ب) $\dot{x}' = v \quad , \quad \dot{y}' = \dot{z}' = 0$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{2}{g}\omega v$$

ج) $\dot{x}' = \dot{z}' = 0 \quad , \quad \dot{y}' = -\theta$

$$\frac{\Delta g}{g} = 0$$

د) $\dot{x}' = \dot{z}' = 0 \quad , \quad \dot{y}' = v$

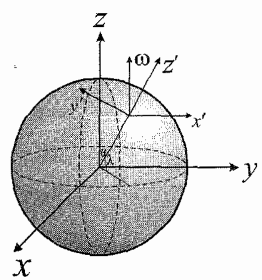
$$\frac{\Delta g}{g} = 0$$

۸-۹)

$$F_c = -2m\vec{\Omega}\times\vec{V}_{rot}$$

$$\left|F_c\right| = 2m\Omega\, V_{rot}\sin\lambda = 121\text{kg}$$

ب)



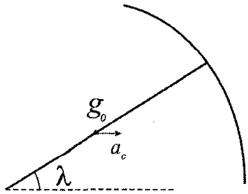
$$\vec{\omega} = \omega\left(\cos\lambda\,\hat{y}' + \sin\lambda\,\hat{k}'\right)$$

$$F_{cor} = -2m\vec{\omega}\times\vec{V} = -2ma\left[\cos\lambda\hat{j}' + \sin\lambda\,\hat{k}'\right]\times\left(-v.\hat{j}'\right)$$

$$F_{cor} = -2m\omega v_0 \sin\lambda\, i$$

بنابراین جهت انحراف به سمت غرب است.

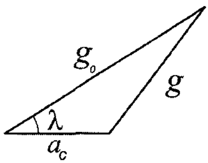
۸ـ۱۰)



$$g^2 = g_0^2 + a_c^2 - 2g_0 a_c \cos\lambda$$

$$g^2 = g_0^2 + \left(\Omega_e^2 R_c \cos\lambda\right)^2 - 2g_0 \Omega_e \mathrm{Re} \cos^2\lambda$$

$$g^2 = g_0^2 \left[1 + \left(\frac{\Omega_e^2 R_e^2}{g_0}\right)^2 - \frac{2\Omega_e^2 \mathrm{Re}}{g_0} \cos^2\lambda\right]$$



اما از آنجایی که $\frac{\Omega_e^2 R_e}{g_1}$ می‌توانیم به صورت زیر ساده کنیم.

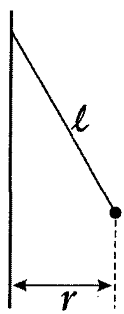
$$g \cong g + \left[1 - 2\frac{\Omega_e^2 R_e}{g_0} \cos^2\lambda\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cong g_0 \left(1 - \frac{\Omega_e^2 R_e}{g_0} \cos^2\lambda\right)$$

۸ـ۱۲)

ما در دستگاه مقید چرخان یک نیروی $M\Omega^2 r$ که جسم را از نقطه‌ی تعادل خارج می‌کند داریم:

$\tau = I\ddot{\theta}$



$$-g\ell M \sin\theta + M\Omega^2 \ell^2 \sin\theta = M\ell^2 \ddot{\theta}$$

$$-\left(Mg\ell - M\Omega^2 \ell^2\right)\theta \simeq M\ell^2 \ddot{\theta}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g - \Omega^2 \ell}{\ell}} = \sqrt{\frac{g}{\ell} - \Omega^2}$$

فصل نهم

حرکت ناشی از نیروی مرکزی

۱. با دیفرانسیل‌گیری از معادلات ۹ ت ۸ الف و ب نسبت به زمان، معادلات ۹ ـ ۷ الف و ب را به‌دست آورید.

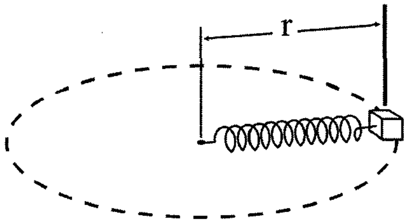
۲. ذره‌ای به جرم 50g تحت تاثیر نیروی جاذبهٔ مرکزی به بزرگی $4r^3$ دین حرکت می‌کند. تکانهٔ زاویه‌ای برابر $1000\frac{\text{g.cm}^2}{\text{s}}$ است. (الف) انرژی پتانسیل موثر را پیدا کنید. (ب) روی نمودار پتانسیل موثر، انرژی کل را برای دایره‌ای مشخص کنید. (ج) شعاع مدار ذره، بین r_0 و $2r_0$ متغیر است، r_0 را پیدا کنید.

۳. ذره‌ای تحت اثر نیروی متناسب با عکس مکعب فاصله روی دایره حرکت می‌کند. نشان دهید که ذره می‌تواند با سرعت شعاعی یکنواخت، به داخل یا به خارج، نیز حرکت کند. (این مثال برای حرکت ناپایدار است. هر گونه اختلالی در مدار دایره‌ای موجب آغاز حرکت شعاعی ذره و ادامهٔ آن خواهد شد). برای حرکت با سرعت شعاعی یکنواخت، θ را بر حسب r پیدا کنید.

۴. به ازای چه مقادیری از n مدارهای دایره‌ای با انرژی پتانسیل $U(r)=-\frac{A}{r^n}$ که در آن $A > 0$ است پایدارند.

۵. یک جرم 2 کیلوگرمی مطابق شکل ۱ـ ۹ روی میز بدون اصطکاکی به انتهای فنر بدون جرمی متصل است. انتهای دیگر فنر توسط تکیه‌گاه بدون اصطکاکی نگهداری می‌شود. فنر نیرویی به بزرگی $3r$ (نیوتون) بر جرم وارد می‌کند که در آن r فاصله جرم از تکیه‌گاه بر حسب متر است. جرم روی دایره‌ای حرکت می‌کند و دارای انرژی کل $12\ \text{J}$ است. (الف) شعاع مدار و سرعت جرم را پیدا کنید. (ب) ضربه‌ای کوتاه و ناگهانی به این جرم نواخته می‌شود که سرعت شعاعی

لحظه‌ای $1\frac{m}{s}$ به سمت خارج به آن می‌دهد. حالت دستگاه را قبل و بعد از ضربه، روی نمودار انرژی نشان دهید. (ج) برای مدار جدید، پیشینه و کمینه r را پیدا کنید.



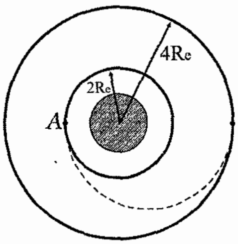
شکل ۱ـ۹

۶. ذره‌ای به جرم M تحت اثر نیروی جاذبه مرکزی Kr^4 با تکانه زاویه‌ای l حرکت می‌کند. به ازای چه مقداری از انرژی، حرکت دایره‌ای خواهد بود و شعاع دایره چقدر است؟ بسامد نوسان‌های شعاعی را پیدا کنید در صورتی که به ذره یک ضربه شعاعی کوچک وارد شود؟

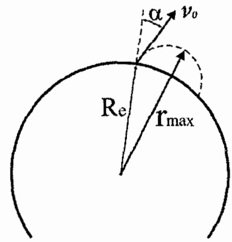
۷. موشکی روی یک مدار بیضوی حول زمین در حرکت است. برای گذاشتن آن در مدار فرار، موتور آن در مدت کوتاهی روشن می‌شود، که سرعت موشک را به اندازه ΔV تغییر می‌دهد. در کجای مدار و در چه جهتی موتور باید روشن شود تا با کمترین مقدار ΔV فرار انجام گیرد؟

۸. پرتابه‌ای به جرم m از سطح زمین با زاویهٔ α از قائم مطابق شکل ۹ ـ ۳۹ پرتاب شده است. سرعت اولیه v_0 برابر $\sqrt{\frac{GM_e}{R_e}}$ است. پرتابه تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ از مقاومت هوا و دوران زمین صرف‌نظر کنید. (راهنمایی: احتمالاً به کار گرفتن مستقیم قوانین پایستگی آسان‌تر است تا استفاده از معادلات مدار).

۹. ستاره دنباله‌دار هالی در مداری بیضوی حول خورشید قرار دارد. خروج از مرکز مدار 0.967 و تناوب آن 76 سال است. جرم خورشید $2\times10^{30}\,kg$ و $G=6.67\times10^{-11}\,N\frac{m^2}{kg^2}$ است.
(الف) با استفاده از این داده‌ها، فاصله ستاره دنباله‌دار هالی را از خورشید در حضیض و اوج تعیین کنید. (ب) سرعت ستاره دنباله‌دار هالی هنگامی که در نزدیک‌ترین فاصله از خورشید قرار دارد چقدر است؟



شکل ۳ ـ ۹



شکل ۲ ـ ۹

۱۰. (الف) ماهواره‌ای به جرم m در مداری دایره‌ای حول زمین است. شعاع مدار r_0 و جرم زمین M_0 است. انرژی مکانیکی کل ماهواره را پیدا کنید. (ب) حال فرض کنید که ماهواره در طبقات بالای جو زمین حرکت می‌کند، جایی که به واسطهٔ نیروی ضعیف و ثابت اصطکاک f سرعت آن کند می‌شود. ماهواره به آهستگی به صورت مارپیچ به طرف زمین حرکت می‌کند. از آن‌جا که نیروی اصطکاک ضعیف است، تغییر شعاع خیلی به آهستگی صورت خواهد گرفت. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که در هر لحظه ماهواره عملاً در مداری دایره‌ای به شعاع متوسط r قرار دارد. تغییر تقریبی شعاع را در هر دورهٔ گردش ماهوارهٔ Δr پیدا کنید. (ج) تغییر تقریبی انرژی جنبشی ماهواره (ΔK) را در هر دوره پیدا کنید.

۱۱. قبل از پیاده شدن بشر در ماه، فضاپیمای آپولو 11 در مداری حول ماه قرا داده شد. جرم فضاپیما 9979 kg دوره گردش مدار، 119 دقیقه، و بیشینه و کمینه فاصله از مرکز ماه 1861 km و 1838 km بود. با فرض این‌که ماه جسمی کروی و یکنواخت باشد. مطابق این داده‌ها جرم ماه چقدر است؟ $G=6.67\times10^{-11}\,N\dfrac{m^2}{kg^2}$

۱۲. فضاپیمایی در مداری دایره‌ای حول زمین در حرکت است. جرم فضاپیما 3000kg و شعاع مدار $2\,R_e = 12800$ km است. می‌خواهیم فضاپیما را به مداری دایره‌ای به شعاع $4R_e$ منتقل کنیم. (الف) حداقل مصرف انرژی موردنیاز برای انتقال چقدر است؟ (ب) یک روش موثر برای انتقال، استفاده از مداری نیم بیضوی (معروف به مدار انتقال هومان) طبق شکل ۹ ـ ۴۰ است. چه تغییر سرعت‌هایی در نقاط تقاطع A و B موردنیاز است؟

حرکت ناشی از نیروی مرکزی

۹ـ۱)

(الف)

$$\ell=\mu r v_\theta = Mr^2\dot\theta$$

(ب)

$$E=\frac{1}{2}\mu v^2+V(r)=\frac{1}{2}\mu\left(\dot r^2+r^2\dot\theta^2\right)+U(r)$$

(ب)

$$\frac{d\ell}{dt}=0 \quad\Rightarrow\quad \mu\left(2r\dot r\dot\theta+r^2\ddot\theta\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \mu\left(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta\right)=0$$

$$\frac{dE}{dt}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\mu\left(2\dot r\ddot r+2r\dot r\dot\theta^2+2r^2\dot\theta\ddot\theta\right)+\frac{dU}{dr}\dot r=0$$

$$\mu\dot r\left(\ddot r+\dot r\dot\theta^2\right)+\mu r^2\dot\theta\frac{-2\dot r\dot\theta}{r}+\frac{dU}{dr}\dot r=0$$

$$\mu\left(\ddot r+r\dot\theta^2-2r\dot\theta^2\right)=\frac{-dU}{dr}$$

$$\mu\left(\ddot r-r\dot\theta^2\right)=f(r) \qquad \text{(۹ـ۷الف)}$$

۹ـ۲)

الف)

$$f(r)=-4r^3=-\frac{dU}{dr} \quad\Rightarrow\quad U=r^4$$

$$U_{eff}=U+\frac{L^2}{2mr^2}=r^4+\frac{10^6}{2\times 50r^2}=r^4+\frac{10^4}{r^2}$$

ب)

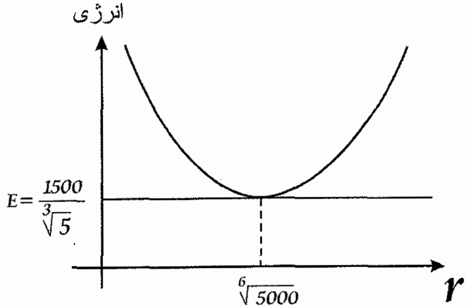
$$E=\frac{1}{2}m\dot r^2+U_{eff}$$

$$r=cte \quad\Rightarrow\quad E=U_{eff}=r^4+\frac{10^4}{r^2}=\frac{r^6+10^4}{r^2}$$

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial r}=4r^3-\frac{2\times10^4}{r^3}=0 \quad\Rightarrow\quad 4r^3=\frac{2\times10^4}{r^3} \quad\Rightarrow\quad r^6=5\times10^3$$

$$r^2=10\sqrt[3]{5}$$

$$\Rightarrow\quad E=\frac{5\times10^3+10^4}{10\sqrt[3]{5}}=\frac{1500}{\sqrt[3]{5}}$$



ج) نقاط بازگشتی از حل معاله $E=U_{eff}$ حاصل می‌شود در این‌جا $E=U_{eff}(r_0)=U_{eff}(2r_0)$ حال r_0 را می‌یابیم.

$$r_0^4+\frac{10^4}{r_0^2}=(2r_0)^4+\frac{10^4}{(2r_0)^2}=16r_0^4+\frac{10^4}{4r_0^2} \quad\Rightarrow\quad 15r_0^4=\frac{10^4}{r_0^2}\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow\quad r_0^6=\frac{\frac{3}{4}\times 10^4}{15}=\frac{10^4}{20}=500 \quad\Rightarrow\quad r_0=\sqrt[6]{500}\simeq 2.8\,\text{cm}$$

۹ـ۳)

هر گاه ذره‌ای تحت تاثیر نیروی مرکزی در مدار دایره‌ای به شعاع $r=a$ در حال حرکت باشد با تغییر متغیر $x=r-a$ به معادله زیر می‌رسیم.

$$m\ddot{x}+\left[\frac{-3}{a}f(a)-f'(a)\right]x=0$$

$$f(r)=\frac{-k}{r^3}$$

$$f'(r)=\frac{3k}{r^4}$$

$$\frac{-3}{a}f(a)-f(a)=\frac{-3}{a}\frac{-k}{a^3}-\frac{3k}{a^4}=0$$

پس حرکت دایره‌ای ناپایدار است و معادله حرکت به شکل $\ddot{x}=\ddot{r}=0$ یعنی در صورت اختلال در مدار حرکت دایره‌ای ذره با سرعت شعاعی یکنواخت شروع به حرکت خواهد کرد.

برای قسمت دوم مساله داریم:

$$\dot{r}=\alpha \quad\Rightarrow\quad r=r_0+\alpha t$$

$$mr^2\dot{\theta}=L \quad\Rightarrow\quad m(r_0+\alpha t)^2\frac{d\theta}{dt}=L \quad\Rightarrow\quad d\theta=\frac{L\,dt}{m(r_0+\alpha t)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \theta=\theta_0-\frac{L}{m\alpha}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_0+\alpha t}\right)$$

$$\theta=\theta_0-\frac{L}{m\alpha}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)$$

۹ـ٤)

$$U(r)=\frac{-A}{r^n}$$

$$f(r)=-\frac{dU}{dr}=A\frac{d}{dr}r^{-n}=-nAr^{-n-1}$$

$$f'(r)=n(n+1)Ar^{-n-2}$$

اگر فرض کنیم ذره در مسیری دایروی به شعاع $r = a$ در حال حرکت است شرط پایداری آن این است که: $\frac{-3}{a}f(a)-f(a')>0$ پس:

$$\frac{-3}{a}(-nA)a^{-n-1}-n(n+1)Aa^{-n-2}>0$$

$$Aa^{-n-2}\left(-n^2-n+3n\right)>0$$

$$-n^2+2n>0 \quad \Rightarrow \quad 0<n<2$$

۹ـ۵)

$$f(r)=-3r$$

$$f(r)=-\frac{dU}{dr} \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dr}=3r \quad \Rightarrow \quad U=\frac{3}{2}r^2$$

$$U_{eff}=\frac{L^2}{2mr^2}+U=\frac{L^2}{4r^2}+\frac{3}{2}r^2$$

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial r}=\frac{-L^2}{2r^3}+3r$$

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial r}=0 \quad \Rightarrow \quad r^4=\frac{L^2}{6} \quad \Rightarrow \quad r=\frac{\sqrt{L}}{\sqrt[4]{6}}$$ شعاع دایره

$$E=U_{eff} \quad \Rightarrow \quad 12=\frac{L^2}{4\frac{L}{\sqrt{6}}}+\frac{3}{2}\frac{L}{\sqrt{6}}=L\left(\frac{3}{2\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)=L\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad L=\frac{24}{\sqrt{6}}=4\sqrt{6}$$

$$r=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt[4]{6}}=2$$

$$L=mr^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}=\frac{L}{mr^2}=\frac{4\sqrt{6}}{2\times 4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\theta=r\dot{\theta}=\sqrt{6}$$

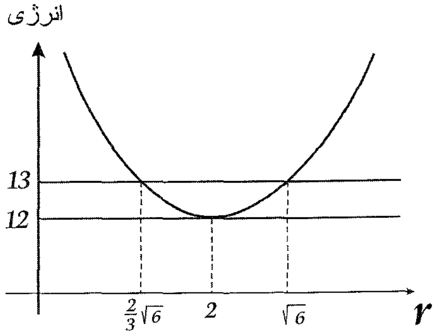
ب) انرژی ذره بعد از ضربه

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+U_{eff} \quad \Rightarrow \quad E=12+\frac{1}{2}\times 2\times 1=13J$$

$$\dot{r}=1\frac{m}{s}$$

لازم به ذکر است که در اثر این ضربه چون $\dot{\theta}$ تغییر نمی‌کند لذا L تغییری نمی‌کند.

$$U_{eff}=\frac{24}{r^2}+\frac{3}{2}r^2$$



ج) بیشینه و کمینه r از حل نامعادله $U_{eff}\leq E$ به دست می‌آید پس

$$\frac{24}{r^2}+\frac{3}{2}r^2\leq 13$$

$$48+3r^4\leq 26r^2$$

$$3r^4-26r^2+48\leq 0$$

$$\frac{8}{3}\leq r^2\leq 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}\sqrt{6}\leq r\leq\sqrt{6}$$

۹ـ۶)

$$f(r)=-Kr^4$$

$$f(r)=-\frac{du}{dr} \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dr}=Kr^4 \quad \Rightarrow \quad U=\frac{K}{5}r^5 \quad \Rightarrow \quad U_{eff}=\frac{\ell^2}{2mr^2}+\frac{k}{5}r^5$$

$$E=\frac{1}{2}mr^2+U_{eff} \quad \Rightarrow \quad E=U_{eff}(r=a)$$

$r=a$ شعاع دایره

$$\left.\frac{\partial U_{eff}}{\partial r}\right|_{r=a}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{-\ell^2}{ma^3}+ka^4=0 \quad\Rightarrow\quad a=\left(\frac{\ell^2}{mk}\right)^{\frac{1}{7}} \; E=\frac{7}{10}\left(\frac{k^2\ell^{10}}{m^5}\right)^{\frac{1}{7}}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_{eff}}{\partial r^2}\right|_{r=a}=\left.\frac{3\ell^2}{mr^4}+4kr^3\right|_{r=a}=7\left(\frac{\ell}{m^7\frac{\ell^3}{m^7k^4}}\right)=7\left(\frac{\ell^6k^4}{m^3}\right)^{\frac{1}{7}}$$

$$\omega=\left(\frac{1}{m}\left.\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial r^2}\right|_{r=a}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(7\left(\frac{\ell^6k^4}{m^{10}}\right)^{\frac{1}{7}}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7}\left(\frac{\ell^6k^4}{m^{10}}\right)^{\frac{1}{14}}$$

۹ـ۷)

اگر a نیم قطر بزرگ بیضی باشد همواره رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2-\frac{k}{r}=\frac{-k}{2a}$$

برای این‌که موتور در مدار فرار قرار گیرد باید انرژی آن حداقل برابر با صفر باشد.

با فرض این‌که با روشن شدن موتور سرعت ذره از $\vec{v}$ به $\vec{v}+\Delta\vec{v}$ تغییر می‌کند پی برای قرار گرفتن موشک در مدار فرار باید داشته باشیم $\frac{1}{2}m(\vec{v}+\Delta\vec{v})^2-\frac{k}{r}=0$

بدیهی است که $\Delta\vec{v}$ وقتی کمترین مقدار را خواهد داشت که در جهت $\vec{v}$ باشد یعنی $\Delta\vec{v}=\Delta v\frac{\vec{v}}{v}$

پس

$$\frac{1}{2}m\left(\vec{v}+\frac{\Delta\vec{v}}{v}\vec{v}\right)^2-\frac{k}{r}=0$$

$$\frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)^2-\frac{k}{r}=0$$

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{k}{r}+\frac{1}{2}m(\Delta v)^2+mv\Delta v=0$$

$$\frac{1}{2}m(\Delta v)^2+mv\Delta v-\frac{k}{2a}=0$$

$$\Delta v=\frac{-mv\pm\sqrt{m^2v^2+\frac{mk}{a}}}{m} \quad\Rightarrow\quad \Delta v=-v+\sqrt{v^2+\frac{k}{ma}}$$

$$\frac{d\Delta V}{dV}=-1+\frac{2V}{2\sqrt{V^2+\frac{K}{ma}}}<0$$

ملاحظه می‌شود که Δv بر حسب v نزولی است، لذا Δv زمانی کمترین مقدار را دارد که v بیشترین مقدار را داشته باشد که این از نقطه حضیض مدار بیضوی اتفاق می‌افتد.
بنابراین از نقطه حضیض مدار دو در جهت $\vec{v}_{max}$ موتور باید روشن شود تا $\Delta\vec{v}$، می‌نیمم باشد

۹ـ۸)

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM_e}{r}=\frac{1}{2}m\frac{GM_e}{R_e}-\frac{GmM_e}{R_e}=-\frac{GmM_e}{2R_e}<0$$

پس مدار حرکت پرتابه بیضی است.

پایستگی تکانه زاویه‌ای: $mR_e v_0 \sin\alpha = mr_{max}v_{min} \quad \Rightarrow \quad v_{min}=\frac{R_e v_0 \sin\alpha}{r_{max}}$

پایستگی انرژی

$$\frac{1}{2}mv_{min}^2-\frac{Gm M_e}{r_{max}}=\frac{-GmM_e}{2R_e}$$

$$\frac{1}{2}m\frac{R_e^2\sin^2\alpha}{r_{max}^2}\frac{GM_e}{R_e}-\frac{GmM_e}{r_{max}}=\frac{-GmM_e}{2R_e}$$

$$\frac{R_e\sin^2\alpha}{2r_{max}^2}-\frac{1}{r_{max}}+\frac{1}{2R_e}=0$$

$$R_e^2\sin^2\alpha-2r_{max}R_e+r_{max}^2=0$$

$$r_{max}=R_e\pm\sqrt{R_e^2-R_e^2\sin^2\alpha}=R_e(1+\cos\alpha)$$

$$\alpha=\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad r_{max}=\frac{3}{2}R_e$$

۹ـ۹)

الف) $T^2=\frac{\pi^2A^3}{2(M+m)G} \quad \Rightarrow \quad A=\left(\frac{2T^2(M+m)G}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

با جایگذاری داده‌های مساله A به دست می‌آید با استفاده از رابطه‌های زیر r_{min}، r_{max} به دست می‌آید.

$$r_{min}=\frac{A}{2}(1-\varepsilon)$$

$$r_{max}=\frac{A}{2}(1+\varepsilon)$$

اگر نیم قطر کوچکی بیضی را a و نیم قطر بزرگ آن را b بنامیم داریم:

ب)

$$b=a\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

$$T=\frac{2m\pi ab}{L} \Rightarrow L=\frac{2m\pi ab}{T}$$

$$L=mr^2\dot{\theta}=\frac{2m\pi ab}{T} \Rightarrow \dot{\theta}=\frac{\pi ab}{Tr^2}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_{max}=\frac{\pi ab}{Tr_{min}^2}$$

$$\upsilon_{max}=r_{min}\dot{\theta}_{max}=\frac{\pi ab}{Tr_{min}}$$

۹ـ۱۰)

$$\frac{GmM_e}{r_0^2}=\frac{m\nu^2}{r_0} \Rightarrow k=\frac{1}{2}m\nu^2=\frac{GmM_e}{2r_0}$$

$$E=K-\frac{GmM_e}{r_0}=\frac{GmM_e}{2r_0}-\frac{GmM_e}{r_0}r=\frac{GmM_e}{2r_0}$$

ب)

$$W_f=E_f-E_i=\Delta K+\Delta U$$

$$K=\frac{GmM_e}{2r} \Rightarrow \Delta K=\frac{-GmM_e}{2r^2}\Delta r=\frac{GmM_e}{2r^2}|\Delta r|$$

$$U=\frac{-GmM}{r} \Rightarrow \Delta U=\frac{GmM}{r^2}\Delta r$$

از سه رابطه فوق نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$-2\pi rf=+\frac{GmM_e}{2r^2}\Delta r \Rightarrow \Delta r=\frac{-4\pi r^3 f}{GmM_e}$$

$$\Delta K=\frac{GmM_e}{2r^2}|\Delta r|=2\pi f$$

۹ـ۱۱)

$$T^2=\frac{\pi^2}{2(M+m)G}A^3$$

$$A=r_{min}+r_{max}=1861+1838=3699\,km$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad M=\frac{\pi^2 A^3}{2T^2 G}$$

با جایگذاری داده‌های مساله مقدار M به دست می‌آید.

۹ـ۱۲)

برای این انتقال باید علیه نیروی جاذبه گرانی کار انجام داد پس

$$W=\int_{r_1}^{r_2} \frac{GmM_e}{r^2}\hat{r}_0\,d\bar{r}=GmM_e\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}=-GmM_e\left[\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2}=GmM_e\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad W=GmM_e\left(\frac{1}{2R_e}-\frac{1}{4R_e}\right)=\frac{GmM_e}{4R_e^2}R_e=\frac{mgR_e}{4}=\frac{3000\times10\times6400\times10^2}{4}$$

$$W=48\times10^9\,J=48\,GJ$$

ب) وقتی فضاپیما در مدار دایروی $r=2R_e$ قرار دارد انرژی آن برابر با $\frac{-GmM_e}{4R_e}$ است. در نقطه A اگر بخواهیم مدار را به مدار بیضوی با نیم قطر بزرگ $3R_e$ تبدیل کنیم باید انرژی فضاپیما را به $\frac{-GmM_e}{6R_e}$ افزایش دهیم. اگر سرعت فضاپیما را در این نقطه به اندازه Δv_0 افزایش دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}m(v+\Delta v)^2-\frac{GmM_e}{2R_e}=\frac{-GmM_e}{6R_e}$$

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM_e}{2R_e}+mv\Delta v+\frac{1}{2}m\Delta v^2=\frac{-GmM_e}{6R_e}$$

$$\frac{-GmM_e}{4R_e}+mv\Delta v+\frac{1}{2}m\Delta v^2=\frac{-GmM_e}{6R_e}$$

$$\Delta v^2+2v\Delta v-\frac{GM_e}{6R_e}=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta v=-v\pm\sqrt{v^2+\frac{GM_e}{6R_e}}$$

از طرفی: $v=\sqrt{\frac{GM}{2R_e}}$

$$\Rightarrow \quad \Delta v=-v+\sqrt{v^2+\frac{GM_e}{6R_e}} \quad \Rightarrow \quad \Delta v=\sqrt{\frac{GM_e}{2R_e}}+\sqrt{\frac{GM_e}{2R_e}+\frac{GM_e}{6R_e}}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}\sqrt{\frac{GM_e}{R_e}}$$

اگر v_A را سرعت فضایی در نقطه A پس از قرار گرفتن آن در مدار بیضوی فرض کنیم از پایستگی تکانه زاویه‌ای داریم:

$$2R_e v_A = 4R_e v_B \quad \Rightarrow \quad v_B = \frac{v_A}{2} = \frac{v+\Delta v}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{\frac{GM_e}{R_e}}$$

اما وقتی فضاپیما به نقطه B رسید سرعت آن باید به $u_B = v_B + \Delta u$ تغییر کند تا بتواند در مدار دایروی به شعاع $4R_e$ قرار گیرد پس:

$$\frac{1}{2}m\left(v_B + \Delta u\right)^2 - \frac{GMm}{4R_e} = \frac{-GmM}{8R_e}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GMm}{4R_e} + mv_B\,\Delta u + \frac{1}{2}m\Delta u^2 = -\frac{GmM}{8R_e}$$

$$\frac{-GmM_e}{6R_e} + \frac{1}{2}m\Delta u^2 + mv_B\,\Delta u + \frac{G_m M_e}{8R_e} = 0$$

$$\Delta u^2 + 2v_B\,\Delta u - \frac{GM_e}{12R_e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta u = -v_B \pm \sqrt{v_B^2 + \frac{GM_e}{12R_e}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{\frac{GM_e}{R_e}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM_e}{R_e}} \quad \Rightarrow \quad \Delta u = \frac{\sqrt{6}+3}{6}\sqrt{\frac{GM_e}{R_e}}$$

فصل دهم

نوسانگر هماهنگ

۱. با محاسبه مستقیم نشان دهید $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = 1.2$ است که در آن میانگین زمانی برای دورهٔ تناوب کامل $t_1 \le t \le t_1 + \frac{2\pi}{\omega}$ گرفته شده است.

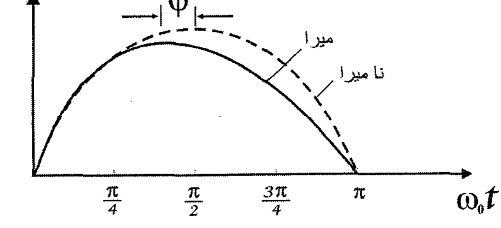
همچنین نشان دهید وقتی که میانگین برای یک دوره تناوب کامل حساب شود $\langle \sin(\omega t)\cos(\omega t) \rangle = 0$ است.

۲. یک جرم 0.3 کیلوگرمی به فنری متصل است و با بسامد 2 Hz و مقدار $Q = 60$ نوسان می‌کند. ثابت فنر و ثابت میرایی را پیدا کنید.

۳. حرکت یک نوسانگر هماهنگ آزاد و نامیرا با رابطه $x = A \sin \omega_0 t$ داده شده است. جابه‌جایی دقیقا در وسط فاصله بین نقاط تقاطع منحنی با محور افقی بیشینه است.

حرکت نوسانگر میرا دیگر حرکتی سینوسی نیست نقطهٔ بیشینه به جلوتر از نقطهٔ وسط منحنی پیش می‌رود. نشان دهید که پیشروی نقطهٔ بیشینه به اندازه زاویهٔ فاز ϕ است که تقریباً با رابطه زیر داده می‌شود (شکل ۱ـ۱۰)

$$\phi = \frac{1}{2Q}$$



شکل ۱ ـ ۱۰

که در آن فرض کرده‌ایم Q بزرگ است.

۴. کاهش لگاریتمی δ برابر لگاریتم طبیعی نسبت جابه‌جایی‌های بیشینهٔ متوالی یک نوسانگر میرایی آزاد (در یک جهت)تعریف شده است. نشان دهید $\delta=\dfrac{\pi}{Q}$ است.

ثابت فنر k و ضریب میرایی b یک نوسانگر میرا را پیدا کنید که دارای جرم $5\ \mathrm{kg}$ و بسامد نوسان $0.5\ \mathrm{Hz}$ و کاهش لگاریتمی 0.02 است.

۵. اگر ضریب میرایی یک نوسانگر آزاد $\gamma=2\omega_0$ باشد، این دستگاه را میرای بحرانی می‌نامند. با جایگزین کردن مستقیم نشان دهید که در این حالت حرکت با رابطه زیر توصیف می‌شود.

$$x=(A+Bt)e^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t}$$

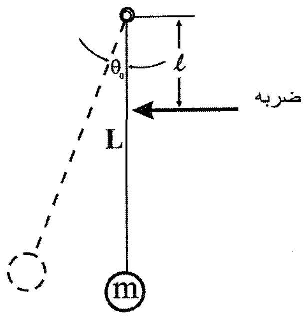
که در آن A و B ثابت‌اند.

یک نوسانگر میرای بحرانی در نقطه تعادل در حال سکون است. در $t=0$ ضربهٔ I به آن نواخته می‌شود. منحی حرکت را رسم کنید و زمانی را که جابه‌جایی شروع به کاهش می‌کند پیدا کنید.

۶. (الف) یک جرم 10 کیلوگرمی از ارتفاع 50 سانتی‌متری به سوی کفهٔ یک ترازوی فنری رها می‌شود و روی آن قرار می‌گیرد. کف سرانجام در 10 سانتی‌متری پایین مکان اولیه خود به حال سکون در می‌آید. جرم کفه 2 کیلوگرم است. ثابت فنر را پیدا کنید. (ب) می‌خواهیم یک دستگاه میراکننده که بتواند ترازو را در حداقل زمان و بدون حرکت اضافی به حالت سکون در آورد نصب کنیم. این امر بدان معنی است که نوسان ترازو بایستی به‌طور بحرانی میرا شود (یادداشت ۱۰ ـ ۱ را ببینید). ضریب میرایی لازم و معادلهٔ حرکت کفه را پس از برخورد این جرم پیدا کنید.

۷. بسامد نیروی وادارنده‌ای که به ازای آن سرعت نوسانگر میرای واداشته دقیقاً با نیروی وادارنده همفاز باشد، پیدا کنید.

۸. آونگ یک ساعت دیواری هر بار که از خط قائم می‌گذرد، یک چرخ دنگ را فعال می‌کند. چرخ دنگ (توسط وزنه‌ای که به آن آویخته است) تحت کشش قرار دارد و به آونگ در فاصله l از نقطه آویزش ضربهٔ کوچکی وارد می‌کند (شکل ۲ـ ۱۰). انرژی منتقل شده، از این ضربه، انرژی تلف شده به وسیله اصطکاک را جبران می‌کند. به طوری که آونگ با دامنه ثابتی نوسان می‌کند. (الف) ضربهٔ موردنیاز برای تداوم حرکت آونگی به طول L و جرم m و دامنه نوسان θ_0 و ضریب کیفیت Q چقدر است؟ (ب) چرا فعال شدن چرخ دنگ هنگام عبور از خط قائم بر هر نقطه دیگر از مسیر ترجیح دارد؟



شکل ۲ ـ ۱۰

۹. نشان دهید که برای نوسانگر واداشته با میرایی کم و نزدیک به تشدید، داریم

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \approx \frac{\text{میانگین انرژی ذخیره شده در نوسانگر}}{\text{میانگین انرژی تلف شده در هر رادیان}}$$

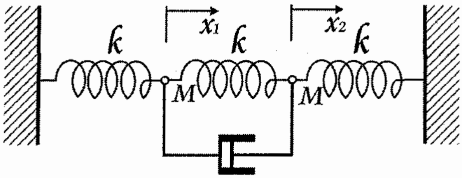
۱۰. یک ساعت کوچک کوکو، آونگی به طول 25 cm با جرم 10 kg و دورهٔ تناوب 1 s دارد. نیروی محرکهٔ ساعت به وسیلهٔ وزنهٔ 200 گرمی که در فاصله بین کوک شدن روزنه‌اش به اندازهٔ 2 متر سقوط می‌کند، تامین می‌شود. دامنه نوسان 0.2 رادیان است. مقدار Q برای این ساعت چقدر است؟ اگر این ساعت توان خود را از یک باطری به ظرفیت 1 J بگیرد، چه مدتی کار خواهد کرد؟

۱۱. دو ذره هر یک به جرم M بین سه فنر یکسان قرار دارند. فنرها بدون جرم فرض می‌شوند و ثابت فنر هر یک برابر k است. از گرانش صرف‌نظر کنید. جرم‌ها همان‌طور که شکل ۳ـ۱۰ نشان می‌دهد به ضربه‌گیر بدون جرمی متصل‌اند.

جعبهٔ اصطکاک نیروی bv را اعمال می‌کند، که v سرعت نسبی دو انتهای آن است. نیروی اصطکاک با حرکت مخالفت می‌کند. فرض کنید x_1 و x_2 جابه‌جایی‌های دو جرم از وضع تعادل باشند. (الف) معادلهٔ حرکت هر یک از جرم‌ها را پیدا کنید. (ب) نشان دهید که معادلات حرکت بر حسب متغیرهای وابستهٔ جدید $y_1=x_1+x_2$ و $y_2=x_1-x_2$ قابل حل است. (ج) نشان دهید که اگر جرم‌ها در ابتدا ساکن باشند و به جرم 1 سرعت اولیهٔ v_0 داده شود، معادلات حرکت جرم‌ها پس از مدت زمانی به اندازه کافی طولانی چنین است.

$$x_1 = x_2 = \frac{v_0}{2\omega}\sin\omega t$$

ω را تعیین کنید.



شکل ۳ ـ ۱۰

۱۲. حرکت یک نوسانگر میرا که نیروی وادارندهٔ $F_0 \cos \omega t$ بر آن وارد می‌شود، با رابطه $x_a(t)=A\cos(\omega t+\phi)$ داده شده است که در آن A و ϕ از معادله ۱۰ ـ ۲۵ تعیین می‌شوند. نوسانگری را در نظر بگیرید که از حالت سکون در $t = 0$ رها می‌شود. در این حرکت شرایط

$x(0) = 0$ و $v(0) = 0$ باید صدق کند، ولی پس از زمانی طولانی، انتظار داریم $x(t)=x_a(t)$ باشد. برای این‌که چنین شرایطی برقرار باشد، جوابی همچون معادلهٔ زیر را اختیار می‌کنیم.

$$x(t)=x_a(t)+x_b(t)$$

که در آن $_b(t)$ جواب معادلهٔ حرکت نوسانگر میرای آزاد، معادله ۱۰ ـ ۸ است. (الف) نشان دهید که اگر $x_a(t)$ در معادلهٔ نوسانگر میرای آزاد، معادلهٔ ۱۰ ـ ۲۵ صدق می‌کند. (ب) ثابت‌های اختیاری $x_b(t)$ را طوری انتخاب کنید که $x(t)$ در شرایط اولیه صدق کند. $x_b(t)$ با معادله ۱۰ ـ ۹ داده شده است. توجه کنید A و ϕ در این‌جا اختیاری هستند. (ج) حرکت حاصل را در حالتی که نوسانگر در تشدید واداشته باشد رسم کنید.

نوسانگر هماهنگ

۱۰-۱)

$$\left\langle \sin^2 \omega t \right\rangle = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}} \int_{t_2}^{t_1+\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2 \omega t\, dt = \frac{\omega}{4\pi} \int_{t_1}^{t_1+\frac{2\pi}{\omega}} (1-\cos 2\omega t) dt$$

$$= \frac{\omega}{4\pi}\left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{1}{2\omega}\left[\sin 2\omega t\right]_{t_1}^{t_1+\frac{2\pi}{\omega}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8\pi}\left[\sin\left(2\omega t_1 + 4\pi\right) - \sin\left(2\omega t_1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8\pi}\left(\sin 2\omega t_1 - \sin 2\omega t_1\right) = \frac{1}{2}$$

$$\left\langle \sin \omega t \cos \omega t \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \sin 2\omega t \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{2\pi}{2\omega}} \int_{t_1}^{t_1+\frac{\pi}{\omega}} \sin 2\omega t\, dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\frac{-1}{2\omega}\left[\cos 2\omega t\right]_{t_1}^{t_1+\frac{\pi}{\omega}} = 0$$

۱۰ـ۲)

$$Q = \frac{\omega_1}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\omega_1}{Q} = \frac{2\pi f_1}{Q} = \frac{2\pi \times 2}{60} = \frac{\pi}{15}$$

$$\gamma = \frac{b}{m} \quad \Rightarrow \quad b = m\gamma = 0.3 \times \frac{\pi}{15} = 0.02\pi$$

$$\omega_0 \approx \omega_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} = 4\pi^2 f_1^2 = 4\pi^2 \times 4 = 16\pi^2 \quad \Rightarrow \quad k = 4.8\pi^2$$

۱۰ـ۳)

$$x = A \sin \omega_0 t$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \omega_0 t = 0$$

اولین ماکزیمم در $\omega_0 t = \frac{\pi}{2}$ اتفاق می‌افتد.

$$x = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin \omega_0 t$$

$$\frac{dx}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-\gamma}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}t}\sin\omega_0 t+\omega_0\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos\omega_0 t=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\gamma}{2}\sin\omega_0 t=\omega_0\cos\omega_0 t \quad \Rightarrow \quad \cot\omega_0 t=\frac{\gamma}{2\omega_0}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\omega_0 t\right)=\tan\frac{\gamma}{2\omega_0}=\tan\frac{1}{2}Q$$

اولین ماکزیمم در $\omega_0 t=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2Q}$ اتفاق می‌افتد پس:

$$\phi=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2Q}\right)=\frac{1}{2Q}$$

این نتیجه با فرض $Q>>1$ با معادله آن $\omega_0=\omega_1$ حاصل شد.

۱۰ـ۴)

$$\delta=\mathrm{Ln}\frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{e^{-\frac{\gamma}{2}(t+t_1)}}=\mathrm{Ln}\, e^{\frac{\gamma}{2}\frac{2\pi}{\omega_1}}=\frac{\pi}{\frac{\omega_1}{\gamma}}=\frac{\pi}{Q}$$

$$\delta=\frac{\pi\gamma}{\omega_1}=\frac{\pi b}{\omega_1 m} \quad \Rightarrow \quad b=\frac{m\omega_1\delta}{\pi}=\frac{5\times2\pi\times0.5\times0.2}{\pi}=\frac{5\times2\pi\times0.5\times0.02}{\pi}=0.1$$

$$\omega_1\simeq\omega_0\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow k=m\omega_1^2=4\pi^2 m f_1^2=40\times5\times0.25=50$$

۱۰ـ۵)

$$m\ddot{x}=-kx-b\dot{x}$$

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0$$

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=0$$

$$\ddot{x}+2\omega_0\dot{x}+\omega_0^2 x=0$$

$$x=(A+Bt)e^{-\frac{\gamma}{2}t}=(A+Bt)\,e^{-\omega_0 t}$$

$$\dot{x}=Be^{-\omega_0 t}+(A+Bt)(-\omega_0)e^{-\omega_0 t}=\left(B-A\omega_0-B\omega_0 t\right)e^{-\omega_0 t}$$

$$\ddot{x}=\left(-B\omega_0-\omega_0\left(B-A\omega_0\right)-\omega_0\left(-B\omega_0\right)t\right)e^{-\omega_0 t}$$

$$=\left(-2B\omega_0+2\omega_0^2+B\omega_0^2 t\right)e^{-\omega_0 t}$$

$$\ddot{x}+2\omega_0\dot{x}+\omega_0^2x=(-2B\omega_0+A\omega_0^2+B\omega_0^2t+2B\omega_0-2A\omega_0^2$$
$$-2B\omega_0^2t+\omega_0^2A+\omega_0^2Bt)e^{-\omega_0 t}=$$
$$\Rightarrow \quad \ddot{x}+2\omega_0\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

که همان معادله است

$$x=(A+Bt)e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad \Rightarrow \quad x=Bte^{-\frac{\gamma}{2}t}$$
$$x(0)=A=0$$

$$\dot{x}=B(1-\omega_0 t)e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$\dot{x}(0)=B=\frac{I}{m}$$

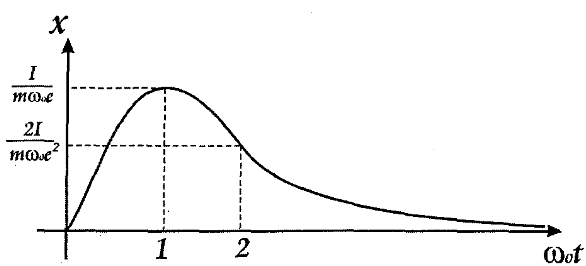
پس

$$x=\frac{I}{m}te^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$\dot{x}=\frac{I}{m}(1-\omega_0 t)e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$\dot{x}=0 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{1}{\omega_0}$$

$$\ddot{x}=\frac{I}{m}\omega_0(\omega_0 t-2)e^{-\omega_0 t}$$



۱۰ـ۶)

الف)

$$Kh=Mg \quad \rightarrow \quad K=\frac{Mg}{h}=\frac{10\times10}{10^{-1}}=1000\frac{N}{m}$$

ب)

$$\gamma=2\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{M+m}=2\sqrt{\frac{K}{M+m}} \quad \Rightarrow \quad b=2\sqrt{K(M+m)}=2\sqrt{10^3(10+2)}$$

$$\Rightarrow \quad b=40\sqrt{30}$$

سرعت جرم M را در لحظه برخورد با کفه ترازو و v فرض می‌کنیم و سرعت مجموعه کف و جرم M را درست پس از برخورد u فرض می‌کنیم.

$$v=\sqrt{2gH}=\sqrt{2\times10\times0.5}=\sqrt{10}$$

پایستگی تکانه:

$$Mv=(m+M)u$$

$$u=\frac{M}{m+M}v=\frac{10}{10+2}\sqrt{10}=\frac{5}{6}\sqrt{10}$$

$$x=(A+Bt)e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$\gamma=\frac{b}{M+m}=\frac{40\sqrt{30}}{10+2}=\frac{10\sqrt{30}}{3} \quad \Rightarrow \quad x=(A+Bt)e^{-\frac{5}{3}\sqrt{30}t}$$

با به کار بستن شرایط مرزی $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=\frac{5}{6}\sqrt{10}$

$$x=\frac{5}{6}\sqrt{10}\,t\exp\left(-\frac{5}{3}\sqrt{30}\,t\right)$$

(۷ـ۱۰

$$x=A\cos(\omega t+\phi)$$

$$A=\frac{F}{m}\frac{1}{\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\omega\gamma)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\phi=\arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\right)$$

$$\begin{cases}\dot{x}=-\omega A\sin(\omega t+\phi)=\omega A\cos\left(\frac{\pi}{2}+\omega t+\phi\right)\\ F=F_0\cos\omega t\end{cases}$$

برای این‌که $F,\dot{x}$ هم فاز باشند لازم است که:

$$\phi+\frac{\pi}{2}=0$$

$$\phi=\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}=tg\left(\frac{-\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega=-\omega_0}$$

۱۰ــ۸)

$$\theta=e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(A\sin\omega_1 t+B\cos\omega_1 t\right)$$

$$\theta(0)=B=\theta_0$$

$$\dot\theta=-\frac{\gamma}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(A\sin\omega_1 t+B\cos\omega_1 t\right)+e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\omega_1 A\cos\omega_1 t-\omega_1 B\sin\omega_1 t\right)$$

$$\dot\theta(0)=-\frac{\gamma}{2}B+A\omega_1=0 \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{\gamma B}{2\omega_1}=\frac{\gamma\theta_0}{2\omega_1}=\frac{\theta_0}{2Q}$$

$$\theta=\theta_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\frac{1}{2Q}\sin\omega_1 t+\cos\omega_1 t\right)$$

$$\dot\theta=\theta_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\frac{\omega_1}{2Q}\cos\omega_1 t-\omega_1\sin\omega_1 t-\frac{\gamma}{2}\frac{1}{2Q}\sin\omega_1 t-\frac{\gamma}{2}\cos\omega t\right)$$

$$=-\theta_0\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\omega_1+\frac{\gamma}{4Q}\right)\sin\omega_1 t$$

با فرض‌های معادل $Q>>1$ یا $\gamma<<\omega_0$ یا $\omega_1\simeq\omega_0$ داریم:

$$\dot\theta=-\theta_0\,\omega_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\sin\omega_1 t$$

$$\omega_1=\dot\theta\left(t=\frac{\pi}{2\omega_1}\right)=-\theta_0\,\omega_1 e^{-\frac{\gamma}{2}\frac{\pi}{2\omega_1}}\sin\left(\omega_1\frac{\pi}{2\omega_1}\right)=-\theta_0\,\omega_1 e^{-\frac{\pi}{4Q}}$$

$$\omega_2=\dot\theta\left(t=\frac{3\pi}{2\omega_1}\right)=-\theta_0\,\omega_1 e^{-\frac{\gamma}{2}\frac{3\pi}{2\omega_1}}\sin\left(\omega_1\frac{3\pi}{2\omega_1}\right)=\theta_0\,\omega_1 e^{-\frac{3\pi}{4Q}}$$

$$\Delta\omega=\left|\omega_1\right|-\left|\omega_2\right|=\theta_0\,\omega_1\left(e^{-\frac{\pi}{4Q}}-e^{-\frac{3\pi}{4Q}}\right)$$

این کاهش باید توسط ضربه وارده جبران شود از لازم است که داشته باشیم:

$$\ell J=I\Delta W \quad \Rightarrow \quad J=\frac{I\Delta\omega}{\ell}=\frac{mL^2}{\ell}\theta_0\sqrt{\frac{g}{L}}\,e^{-\frac{3\pi}{4Q}}\left(e^{\frac{\pi}{2Q}}-1\right)$$

ب) اگر چرخ زنگ در جایی دیگر فعال شود باید به طور متناوب (یک در میان) مقدار آن به دو مقدار متفاوت J_1, J_2 تغییر نماید. اما در صورت فعال شدن در حالت دائم مقدار کاستی خواهد داشت.

۱۰ـ۹)

میانگین انرژی ذخیره شده در نوسانگر در حالت تشدید $=\dfrac{F_0^2}{8m}\dfrac{4}{\gamma^2}=\dfrac{F_0^2}{2m\gamma^2}$

$$x=A(\omega)\cos(\omega t+\phi)$$

$$\dot{x}=-\omega A(\omega)\sin(\omega t+\phi)$$

آهنگ اتلاف انرژی $=b\dot{x}^2=b\omega^2A^2(\omega)\sin^2(\omega t+\phi)$

انرژی تلف شده در یک رادیان $=\dfrac{b\omega^2A^2(\omega)\sin^2(\omega t+\phi)}{\omega}=b\omega A^2(\omega)\sin^2(\omega t+\phi)$

میانگین انرژی تلف شده در یک رادیان $=\dfrac{b\omega A^2(\omega)}{2}$

$$A(\omega_0)=\frac{F_0}{m\omega_0\gamma}$$

میانگین انرژی تلف شده در یک رادیان در حالت تشدید $=\dfrac{m\gamma\omega_0}{2}\dfrac{F.2}{m^2\omega_0^2\gamma^2}$

$$A(\omega_0)=\frac{F_0}{m\omega_0\gamma}$$

$\dfrac{\text{میانگین انرژی دخیره شده در نوسانگر کم میرا در حالت تشدید}}{\text{میانگین انرژی تلف شده در هر رادیان در حالت تشدید}}=\dfrac{\dfrac{F_0^2}{2m\gamma^2}}{\dfrac{F_0^2}{2m\omega_0\gamma}}=\dfrac{\omega_0}{\gamma}=Q$

۱۰ ـ ۱۰) به عهده دانشجو

۱۰-۱۱)

الف)

$$m\ddot{x}_1=-kx_1-k(x_1-x_2)-b(\dot{x}_1-\dot{x}_2)\ (1)$$

$$m\ddot{x}_2=-kx_2-k(x_2-x_1)-b(\dot{x}_2-\dot{x}_1)\ (2)$$

ب)

$$(1)+(2)\quad\Rightarrow\quad m\ddot{y}_1=-ky_1$$

$$(1)-(2) \quad \Rightarrow \quad m\ddot{y}_2=-ky_2-2ky_2-2b\dot{y}_2$$

$$\ddot{y}_1+\frac{k}{m}y_1=0$$

$$m\ddot{y}_2+2by_2+3ky_2=0$$

ج)

$$x_1(0)=x_2(0)=0 \qquad y_1(0)=y_2(0)=0$$

$$\dot{x}_1(0)=v_0 \qquad \dot{y}_1(0)=\dot{y}_2(0)=0$$

$$\dot{x}(0)=0$$

با به کار بستن شرایط اولیه فوق نتیجه می‌شود که: $y_1=v_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t:$ بعد از مدت زمان طولانی y_2 صفر خواهد شد. پس:

$$x_1=x_2=\frac{y_1}{2}=\frac{v_0}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

۱۰ـ۱۲)

الف) $\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t$

$$\ddot{x}_b+\gamma\dot{x}_b+\omega_0^2x_b=0 \ (1)$$

$$\ddot{x}_a+\gamma\dot{x}_a+\omega_0^2x_a=\frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$(1),(2) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=\ddot{x}_a+\ddot{x}_b+\gamma\left(\dot{x}_a+\dot{x}_b\right)+\omega_0^2\left(x_a+x_b\right)=$$

$$\underbrace{\ddot{x}_a+\gamma\dot{x}_a+\omega_0^2x_a}+\underbrace{\ddot{x}_b+\gamma\dot{x}_b+\omega_0^2x_b}$$

$$=F_0\cos\omega t+0$$

$$=F_0\cos\omega t$$

ب) $x=ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos\left(\omega_1t+\beta\right)+A(\omega)\cos\left(\omega t+\phi\right)$

$$x(0)=0 \quad \Rightarrow \quad a\cos\beta+A(\omega)\cos\phi=0$$

$$\dot{x}=ae^{-\frac{\gamma}{2}}\left[\frac{-\gamma}{2}\cos\left(\omega_1t+\beta\right)-\omega_1\sin\left(\omega_1t+\beta\right)\right]-\omega A(\omega)\sin(\omega t+\phi)$$

$$\dot{x}(0)=0 \quad \Rightarrow \quad a\left(\frac{-\gamma}{2}\cos\beta-\omega_1\sin\beta\right)-\omega A(\omega)\sin\phi=0$$

$$-a\cos\beta\left(\frac{\gamma}{2}+\omega_1\,\mathrm{tg}\,\beta\right)-\omega A(\omega)\sin\phi$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\omega_1}\left(\omega\operatorname{tg}\phi-\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\cos^2\beta=\left(1+\operatorname{tg}^2\beta\right)^{-1}=\frac{1}{1+\frac{1}{\omega_1^2}\left(\omega\operatorname{tg}\phi-\frac{\gamma}{2}\right)^2}=\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2+\left(\omega\operatorname{tg}\phi-\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

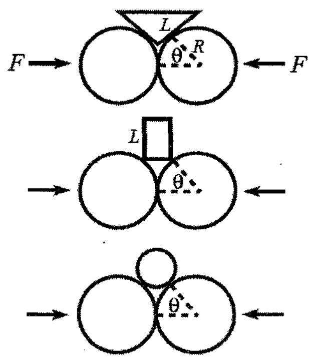
$$a^2=\frac{A^2(\omega)\cos^2\phi}{\cos^2\beta}=\frac{A^2(\omega)\cos^2\phi}{\omega_1^2}\left[\omega_1^2+\left(\omega\operatorname{tg}\phi-\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]$$

پس β و a یافته شدند.

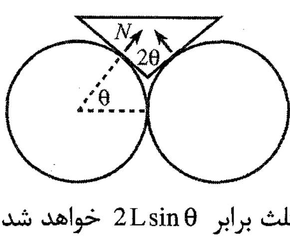
فصل یازدهم

بررسی مسائلی از مکانیک مورین

۱. هر کدام از این اشکال بین دایره‌ای به شعاع R قرار دارد و چگالی هر کدام از اشکال σ است و شعاع از مرکز تا نقطه تماس اجسام زاویه θ با محور افقی می‌سازد. برای هر کدام در موارد زیر نیروی افقی که باید اعمال شود تا اجسام با یکدیگر در تماس بمانند چقدر است. برای چه زاویه‌ای نیرو ماکسیمم، مینیمم خواهد شد؟



N را نیروی نرمال می‌گیریم هدف در این مسئله پیدا کردن مولفه‌های N و $N\cos\theta$ است.



نیروی رو به بالا که به مثلث متساوی‌الساقین وارد می‌شود $2N\sin\theta$ است. این باید با نیروی وزن آن برابر باشد.

از آنجائی که زاویه پایین مثلث 2θ است وجه بالایی مثلث برابر $2L\sin\theta$ خواهد شد و ارتفاع $L\cos\theta$ خواهد بود. بنابراین مساحت مثلث $2L^2\sin\theta\cos\theta$ خواهد بود بنابراین جرم آن برابر است با $\sigma L^2\sin\theta\cos\theta$

پس از مساوی قرار دادن نیروی N عمودی با وزن

$$N=\frac{\left(g\sigma L^2\cos\theta\right)}{2}$$

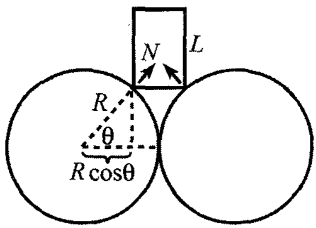
$$2N\sin\theta=\sigma L^2\sin\theta\cos\theta g$$

مستقل از R است مولفه افقی این نیرو برابر است با:

$$N\cos\theta=\frac{g\sigma L^2\cos^2\theta}{2}$$

وقتی که بین نیرو $\theta=\frac{\pi}{2}$ باشد صفر است با کاهش θ تا صفر $\frac{g\sigma L^2}{2}$ $\theta\to 0$

ب)



مطابق شکل ضلع پائینی مستطیل برابر می‌شود با $2R(1-\cos\theta)$ پس جرم آن می‌شود $\sigma 2RL(1-\cos\theta)$ با برابر قرار دادن نیروی به سمت بالا فرض داریم:

$$2N\sin\theta=\sigma 2RL(1-\cos\theta)g$$

$$N=\frac{g\sigma LR(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$$

پس نیروی افقی برابر است با:

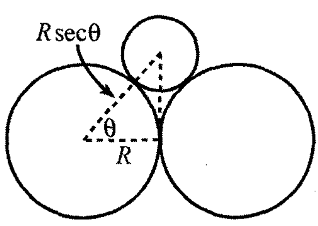
$$N\cos\theta=\frac{g\sigma LR(1-\cos\theta)\cos\theta}{\sin\theta}$$

که در $\theta=0$ و $\theta=\frac{\pi}{2}$ صفر است برای به‌دست آوردن ماکسیم مشتق می‌گیریم. و در نتیجه

$$\cos^3\theta-2\cos\theta+1=0$$

$$\cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

ج)



طول AB برابر است با $R\sec\theta$ بنابراین شعاع دایره $R(\sec\theta-1)$ بنابراین جرم می‌شود $\sigma\pi R^2(\sec\theta-1)^2$، از برابر قرار دادن نیروی به سمت بالا با جرم داریم $(2N\sin\theta)$

$$N=\frac{g\sigma R^2(\sec\theta-1)}{2\sin\theta}$$

نیروی افقی برابر است با:

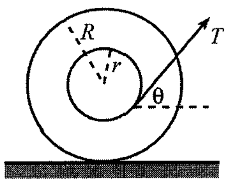
$$N\cos\theta=\frac{g\sigma\pi R^2}{2}\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)^2$$

$\theta=0$ (با استفاده از $\cos\theta\approx1-\frac{\theta^2}{2}$) برای θ کوچک بنابراین $\frac{1}{\cos\theta}\approx1+\frac{\theta^2}{2}$ بنابراین

$\theta\to\frac{\pi}{2}$ که آن مانند $\frac{1}{\cos\theta}$ رفتار می‌کند و به سمت بی‌نهایت می‌رود.

۲. یک قرقره شامل یک محور با شعاع r و یک دایره با شعاع R که محور را برای گرفته و می‌تواند روی زمین بغلتد است. یک ریسمان که به دور آن پیچیده شده است به وسیله کشش T آن را می‌کشد.

الف) R , r داده شده است، زاویه θ چقدر باشد در صورتی که قرقره نتواند حرکت کند. (فرض کنید که به اندازه کافی ضریب اصطکاک میان قرقره و سطح زیاد باشد تا قرقره نتواند بلغزد.)



ب) R , r داده شده است، و ضریب اصطکاک μ میان زمین و قرقره داده شده است بیشترین مقدار کشش چقدر T می‌تواند باشد (فرض می‌کنیم قرقره حرکت نکند)

ج) R, μ داده شده است، r چقدر باشد که بالاترین مقدار T که در قسمت (ب) یافت شد کمترین مقدار ممکنه را داشته باشد (فرض کنید که قرقره حرکت نمی‌کند) مقدار T چقدر است؟

الف) نیرو F_f را نیروی اصطکاک میان قرقره و زمین در نظر می‌گیریم از تعادل نیروها در جهت افقی داریم:

$$T\cos\theta=F_f$$

از تعادل گشتاور حول مرکز دایره داریم:

$$Tr=F_f\,R$$

این دو معادله می‌رسانند که

$$\cos\theta=\frac{V}{R}$$

ب) نیروی عمودی از سطح زمین برابر است با:

$$N=Mg-T\sin\theta$$

نیروی اصطکاک برابر است با: $F_f = T\cos\theta$ از آنجایی که گفته شد $F_f \le \mu N$ داریم:

$$T\cos\theta \le \mu(Mg - T\sin\theta)$$

در نتیجه

$$T \le \frac{\mu Mg}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

که θ توسط رابطه $\cos\theta = \frac{r}{R}$ داده می‌شود.

ج) بیشترین مقدار T از رابطه قبل به‌دست می‌آید و رابطه قبل وابسته به θ و θ وابسته به r است. r را می‌خواهیم پیدا کنیم که T را ماکسیمم کند. θ به راحتی از رابطه قبل به‌دست می‌آید $\mathrm{Tan}\,\theta = \mu$ مقدار T برای این θ برابر است با:

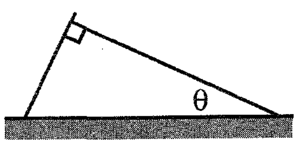
$$T = \frac{\mu Mg}{\sqrt{1+\mu^2}} = Mg\sin\theta$$

برای پیدا کردن r متناظر به آن می‌توان نوشت $\mathrm{Tan}\,\theta = \sqrt{\frac{R^2 - r^2}{r}}$ که $\mathrm{Tan}\,\theta = \mu$ است در نتیجه:

$$r = \frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

این r کمترین مقدار حد بالایی قرار می‌دهد.

۳. دوعصا مانند شکل به یکدیگر تکیه داده شده‌اند و در نقطه اتصال بر یکدیگر عمود هستند عصای سمت راست با سطح افقی زاویه θ می‌سازد عصای سمت چپ به اندازه بی‌نهایت کوچکی از انتهای عصای دیگر امتداد پیدا کرده است. ضریب اصطکاک بین دوعصا μ است. دوعصا دارای جرم درواحد طول یکسانی هستند و هر دو به زمین لولا شده‌اند. کمترین مقدار θ چقدر باشد تا عصاها نیافتند.



M_r جرم عصای سمت چپ و M_l را جرم عصای سمت راست در نظر می‌گیریم در نتیجه $\frac{M_\ell}{M_r} = \mathrm{Tan}\,\theta$ ، N را نیروی نرمال میان دوعصا در نظر می‌گیریم و F_f را نیروی اصطکاک میان دوعصا در نظر می‌گیریم.

(بیشترین مقدار F_f برابر است با μN) از تعادل گشتاور روی عصای سمت چپ (حول نقطه اتصال به زمین) داریم:

$$N=\frac{M_\ell g}{2}\sin\theta$$

از تعادل گشتاور حول عصای سمت راست (حول نقطه اتصال با زمین)

$$F_f=\frac{M_r g}{2}\cos\theta$$

از شرط $F_f \le \mu N$ داریم:

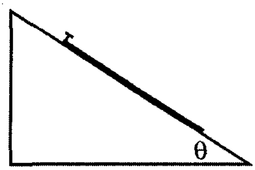
$$M_r\cos\theta \le \mu M_\ell \sin\theta$$

و با استفاده از $\frac{M_\ell}{M_r}=\tan^2\theta$

$$\mathrm{Tan}^2\theta=\frac{1}{\mu}$$

۴. الف) یک طناب به طول ℓ و جرم و واحد طول ρ از یکی از انتهای خود آویزان شده است کشش را در امتداد طناب پیدا کنید.

ب) یک طناب مشابه روی یک سطح شیب‌دار با زاویه θ قرار می‌دهیم و انتهای بالای آن به سطح زمین میخ می‌کنیم. ضریب اصطکاک μ است. کشش در انتهای بالای طناب چقدر است.



قطعه‌ای از طناب میان y , $y+dy$ $(0\le y\le \ell)$ در نظر می‌گیریم. نیروی روی قسمت بالای طناب برابر است با $T(y+dy)$ و قسمت پایین $T(y)$ و وزن آن قطعه برابر با $\rho g\,dy$ است. اگر طناب ساکن باشد بنابراین $T(y+dy)=T(y)+\rho y\,dy$ خواهد شد. در نتیجه $T'(y)=\rho g$ است کشش طناب در پایین‌ترین نقطه برابر صفر است در نتیجه رابطه انتگرال‌گیری از $y=0$ تا y داریم

$$T(y)=\rho g y$$

در بالاترین نقطه هم داریم $T(\ell)=\rho g \ell$ که همان وزن نیروی طناب است.

ب) مختصر z را امتداد سطح می‌گیریم. قطعه‌ای از طناب میان z , $z+dz$ در نظر می‌گیریم از تعادل نیروها داریم $T(z+dz)+F_f(z)dz=T(z)+\rho g\sin\theta\,dz$ که جهت نیروی اصطکاک را بر جهت بالا در نظر گرفتیم:

$$T'(z)=\rho g\sin\theta F_f(z)$$

مقدار نیروی اصطکاک روی طناب $\mu N dz$است که در اینجا N نیروی عمود بر سطح در واحد طول طناب است $(N=\rho g\cos\theta)$

اگر $\rho g\sin\theta<\mu N$ بنابراین $F_f(z)$ برابر با $\rho g\sin\theta$ است اگر $\rho g\sin\theta>\mu N$ باشد بنابراین $F_f=\mu N=\mu\rho\cos\theta$

$$T'(z)=\rho g\sin\theta-\mu\rho g\cos\theta$$

با استفاده از $T(0)=0$

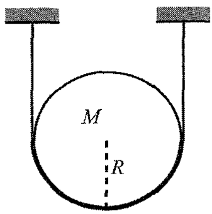
$$T(\ell)=\rho g\sin\theta-\mu\rho g\ell\cos\theta=\rho g\left(y_0-\mu X_0\right)$$

که x_0 و y_0 عرض و طول طناب هستند وقتی که $x_0=0$ باشد جواب حالت الف می‌شود.

۵. الف) یک دیسک به جرم M و شعاع R به وسیله طنابی بدون جرم نگه داشته شده است (مانند شکل) سطوح دیسک بدون اصطکاک است. کشش طناب چقدر است؟

نیروهای عمود بر سطح در واحد طول طناب که به دیسک وارد می‌شود چقدر است!

ب) اگر بین طناب و ریسک اصطکاک با ضریب μ وجود داشته باشد کمترین مقدار ممکنه کشش در پایین‌ترین نقطه چقدر است؟



نیروی به سمت پایین Mg و نیروی به سمت بالا 2T است این دو نیرو باید برابر باشند پس

$$T=\frac{Mg}{2}$$

نیروی عمودی (نرمال) در واحد طول طناب را می‌توان به دو روش به‌دست آورد.

روش اول:

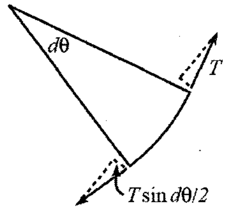
$Nd\theta$ را نیروی عمود بر سطح برای کمان با زاویه θ در نظر می‌گیریم.

کشش طناب یکنواخت است بنابراین N ثابت و مستقل از θ است مولفه نیرو به سمت بالا $Nd\theta\cos\theta$ است $\left(\frac{\pi}{2}<\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$ نیروی کل به سمت بالا برابر است با:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} N\cos\theta d\theta=Mg$$

انتگرال سمت چپ برابر است با 2N بنابراین $N=\frac{Mg}{2}$ است نیروی عمود در واحد طول $\frac{N}{R}$, $\frac{Mg}{2R}$ خواهد بود.

روش دوم:



با در نظر گرفتن نیروی وارد بر یک کمان کوچکی از طناب به صورت $Nd\theta$ در راستای عمود بر سطح $2T\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)$ خواهد بود. و از آنجایی که $d\theta$ بسیار کوچک است $Nd\theta=Td\theta$ بنابراین $N = T$ خواهد شد و نیروی عمود بر سطح به واحد طول قوس $\frac{N}{R}$ برابر $\frac{T}{R}$ خواهد شد در نتیجه $T=\frac{Mg}{2}$ خواهد شد.

ب) $T(\theta)$ را که تابعی از θ است $\left(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$ به عنوان کشش نخ در نظر می‌گیریم با توجه به قسمت قبلی

$$T(\theta)=N(\theta)$$

$F_f(\theta)d\theta$ نیروی اصطکاک که قطعه کوچکی از طناب که بین $\theta,\theta+d\theta$ قرار دارد در نظر می‌گیریم. از تعادل نیروها داریم:

$$T(\theta+d\theta)=T(\theta)+F_f(\theta)d\theta$$

و $T(\theta+d\theta)\approx T(\theta)+T'(\theta)d\theta$ می‌توان به‌دست آورد

$$T'(\theta)=F_f(\theta)$$

از آنجایی که هدف ما پیدا کردن مقدار $T(0)$ است و از آنجایی که می‌دانیم $T\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{Mg}{2}$ است و از $F_f(\theta)d\theta\leq\mu N(\theta)d\theta=\mu T(\theta)d\theta$ داریم:

$$T'(\theta)\leq\mu T(\theta)$$

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{T(\theta)}{T(0)}\right)\leq\mu\theta$$

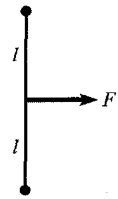
$$T(\theta)\leq T(0)e^{\mu\theta}$$

$$\theta=\frac{\pi}{2}\ \rightarrow T=\frac{Mg}{2}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{Mg}{2}\leq T_0\,e^{\frac{\mu\pi}{2}}$$

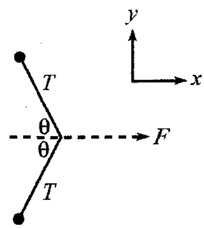
$$T(0)\geq\frac{Mg}{2}e^{-\frac{\mu\pi}{2}}$$

کمترین مقدار $T(0)$ زمانی است که می‌رود به سمت $\frac{Mg}{2}$ $\mu \to 0$ و آن می‌رود به سمت صفر که $\mu \to \infty$

۶. الف) یک طناب به طول 2ℓ به دو توپ‌های که روی یخ بدون اصطکاکی قرار دارد وصل است. یک نیروی ثابت افقی F به میان طناب اعمال می‌شود چه مقدار انرژی وقتی که دو توپ برخورد می‌کند تلف می‌شود. (فرض کنید به یکدیگر می‌چسبند.)



الف) θ را زاویه‌ای که از شکل نشان داده شده است در نظر می‌گیریم. کشش نخ برابر است با $T=\frac{F}{2\cos\theta}$ $\Rightarrow$ $2T\cos\theta=F$ از آنجایی که طناب‌ها بدون جرم هستند. از نظر توپ بالایی نیرو در جهت y برابر است با $-F\tan\frac{\theta}{2}$ کار انجام شده روی توپ‌ها در جهت Y داریم



$$T\cos\theta=Ma_x$$

$$T\sin\theta=Ma_y=\frac{-F}{2\cos\theta}\sin\theta=\frac{-F\tan\theta}{2}$$

$$W\,y=\int_{\ell}^{0}\frac{-F\tan\theta}{2}dy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{-F\tan\theta}{2}d(\ell\sin\theta)$$

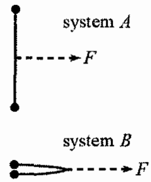
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{-F\ell\sin\theta}{2}d\theta=\frac{F\ell\cos\theta}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}=F\frac{\ell}{2}$$

انرژی جنبشی هنگامی که دو توپ برخورد می‌کنند نصف می‌شود بنابراین چون دو توپ به هم می‌چسبد انرژی در راستای y از دست می‌رود تا دو جسم جرم بچسبند.

$$KE_{loose}=F\ell$$

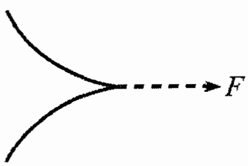
راه حل دوم) با در نظر گرفتن دو سیستم A , B , A چینش اصلی است و حال آن‌که B از θ شروع می‌کند که مقدار آن صفر است. در هر دو سیستم مکان اولیه توپ‌ها را $x = 0$ می‌گیریم. از

آنجایی که نیرو اعمال شده تمام توپ‌ها $x(t)$ مشابه می‌دهد، زیرا یک نیروی مشابه در جهت x $\frac{F}{2}$ در تمام زمان‌ها به توپ‌ها وارد می‌شود سیستم‌ها بعد از صوت برخورد دقیقاً مشابه هستند.



اگر برخورد را در نقطه d بگیریم $x = d$ در این نقطه Fd کار انجام شده در سیستم A است در حالی که $F(d-\ell)$ کار انجام شده در سیستم B است. از آنجایی که هر دو سیستم انرژی جنبشی برخورد یکسانی دارند $F\ell$ کار انجام شده در سیستم A باید مقدار $F\ell$ باشد

اگر جرم‌های متعددی داشته باشیم یا جرم ما مانند طناب پیوسته باشد اگر در نقطه میانی نیرو وارد شود رابطه بالا صادق است.



۷. یک ذره تحت تاثیر پتانسیل $V(x)=-Cx^{n}e^{-ax}$ حرکت می‌کند فرکانس نوسانات کوچک حول نقطه تعادل را بیابد.

$$V'(x)=-Ca^{-x}x^{n-1}(n-ax)$$

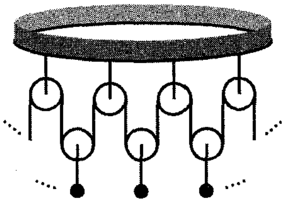
از $V'(x)=0$ بنابراین $x=\frac{n}{a}=x_0$ که x_0 نقطه تعادل است. از رابطه فوق مشتق دوم می‌گیریم و با استفاده از رابطه $\omega=\sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}$ می‌توان به‌دست آورد.

$$V''(x)=-Ce^{-ax}x^{n-2}((n-1-ax)(n-ax)-ax)$$

با قرار دادن $x_0=\frac{n}{a}$ به سادگی می‌توان به دست آورد.

$$\omega=\sqrt{\frac{V''(x)}{m}}=\sqrt{\frac{Ce^{-n}n^{n-1}}{ma^{n-2}}}$$

۸. سیستم قرقره‌ای که در شکل نشان داده شده است راملاحظه کنید. (این چرخه تمامی ندارد) N قرقره ثابت آویزان است N جرم $m_1, m_2, ..., m_N$ به هم وصل شده‌اند شتاب هر جسم را بیابید.



T کشش شتاب‌های گیریم طناب $F = m_a$ برابر m_i

$$2T - m_i g = m_i a_i$$

طول طناب‌ها ثابت است پس جمع تمام جابه‌جایی‌ها صفر می‌شود.

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$$

معادله اول را بر m_i تقسیم می‌کنیم و N معادله را با هم جمع کنیم.

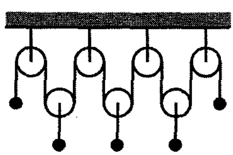
$$2T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + ... + \frac{1}{MN}\right) - Ng = 0$$

$$a_i = g\left(\frac{N}{m_i\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + ... + \frac{1}{m_M}\right)} - 1\right)$$

۹. N+2 جرم آویزان شده‌اند از یک سیستم قرقره که در شکل نشان داده شده است شتاب جرم‌های که به انتهای قرقره وصل هستند چقدر است؟

a شتاب جرم‌های انتهایی و

a' شتاب دیگر جرم‌های



$N=3$

$$T - mg = ma \quad \Rightarrow \quad T = m(g + a)$$

$$2T - mg = ma'$$

طول طناب ثابت است پس

$$N(2a') + a + a = 0 \quad , \quad N(2a') + 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad N(2a') = 2a \quad \Rightarrow \quad a = -Na'$$

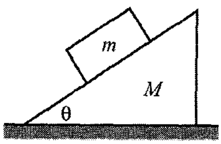
T از معادله بالا حذف می‌کنیم، به‌دست می‌آید $a' = 2a + a$ با ترکیب در معادله به‌دست می‌آید.

$$a=\frac{-g}{2+\frac{1}{N}}$$

$$N=0 \quad \rightarrow \quad a=0, N=1 \quad \rightarrow \quad a=\frac{-g}{3}, \quad N \quad \rightarrow \quad \infty \qquad a=-\frac{g}{2}$$

N شتاب را افزایش می‌دهد.

۱۰. یک بلوک به جرم m روی یک سطح بدون اصطکاک M با زاویه θ قرار دارد و گوه روی یک سطح بدون اصطکاک است بلوک از حالت تعادل رها می‌شود شتاب افقی گوه را پیدا کنید.



$$+mg-N\cos\theta=ma_y$$

$$N\sin\theta=ma_x$$

$$N\sin\theta=ma_x$$

$$(x_1-x_2)=(h-y)=\cot\theta$$

$$\ddot{x}_1-\ddot{x}_2=-\ddot{y}\cot\theta$$

$$\frac{-g+\frac{N\cos\theta}{m}}{\frac{N}{m}\sin\theta-\frac{F}{M}\sin\theta}=\tan\theta$$

$$\Rightarrow \quad N=g\left(\sin\theta\, tg\,\theta\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)+\frac{\cos\theta}{m}\right)^{-1}$$

$$A_x=\frac{N\sin\theta}{M}=\frac{mg\, tg\,\theta}{M\left(1+tg^2\theta\right)+mtg^2\theta}$$

۱۱. الف) یک زنجیر به طول ℓ روی یک میز بدون اصطکاک افقی قرار دارد، طول y_0 از آن آویزان است. زنجیر رها می‌شود طول زنجیر را بر حسب تابعی از زمان در طرفی که آویزان است به‌دست آورید. (نگران آن نباشد که زنجیر ارتباط خود را با میز قطع کند) همچنین سرعت زنجیر را درست هنگامی که ارتباطش با میز قطع شده بیابید.

ب) حالا مسئله بالا را با ضریب اصطکاک حل μ کنید (فرض کنید ابتدا زنجیر به اندازه کافی آویزان باشد تا بتواند از حالت شدن شروع به حرکت کند.)

$$m\frac{dv}{dt}=F_{ext}+v_{rel}\frac{dm}{dt} \qquad V_{rel}=0$$

$$\rho\ell\ddot{y}=\rho g\ddot{y} \quad \rightarrow \quad y(t)=Ae^{\alpha t}+Be^{-\alpha t} \qquad \alpha=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\dot{y}(0)=0 \quad \Rightarrow \quad A=B \quad , \quad y(0)=y_0 \quad \Rightarrow \quad A=B=\frac{y_0}{2}$$

$$y(t)=\frac{y_0}{2}\left(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}\right)=y_0 \cosh\alpha t$$

$$\dot{g}(t)=\frac{\alpha y_0}{2}\left(C^{\alpha t}-e^{-\alpha t}\right)=\alpha y_0 \sinh\alpha t$$

$$\begin{cases} y(T)=\ell \quad \Rightarrow \quad =y_0 \cosh\alpha t \\ \sinh x=\sqrt{\cosh^2 x-1} \end{cases} \begin{array}{l} \Rightarrow \quad \dot{y}(t)=\alpha y_0 \sinh(\alpha t)=\alpha\sqrt{\ell^2-y_0^2} \\ \Rightarrow \quad \sqrt{g\ell}\sqrt{1-\left(\frac{y}{\ell}\right)^2}=\sqrt{g}\sqrt{\ell-\frac{y_0}{\ell}} \end{array}$$

$$E_2=E_1=\left(\rho y_0\right)g\frac{y_0}{2}=\frac{1}{2}\rho\ell V^2+(\rho\ell)g\frac{\ell}{2}$$

$$g y_0^2=\ell v^2+g\ell^2$$

$$\Rightarrow \quad g\left(y_0^2-\ell^2\right)=\ell v^2$$

$$\Rightarrow \quad v^2=g\left(\frac{y_0^2}{\ell}-\ell\right)$$

ب)

$$m\frac{dv}{dt}=F_{ext}+u_{rel}\frac{dm}{dt} \qquad u_{rel}=0$$

$$\rho\ell\ddot{y}=\rho g y-\mu g\rho(\ell-y)$$

شرط حرکت این است که

$$\rho g y-\mu g\rho(\ell-y)>0 \quad \Rightarrow \quad y(1+\mu)>\mu\ell \quad \Rightarrow \quad y>\frac{\mu\ell}{1+\mu}$$

حال پارامتر جدیدی تعریف می‌کنیم.

$$Z=y-\frac{\mu\ell}{1+\mu}$$

$$y=\ell \quad \Rightarrow \quad z=\ell\left(1-\frac{\mu}{1+\mu}\right)=\ell\left(\frac{1}{1+\mu}\right)=\frac{\ell}{1+\mu}=z$$

$$\ddot{z}=\ddot{y}$$

$$\rho g\left(z+\frac{\mu\ell}{1+\mu}\right)-\mu g\rho\left(z(1+\mu)-z+\frac{\mu\ell}{1+\mu}\right)=\rho\ell\ddot{y}$$

$$z\frac{g}{\ell}(1+\mu)=\ddot{z}$$

$$z(t)=z_0\cosh(\alpha' t) \qquad \alpha=\sqrt{\frac{g(1+\mu)}{\ell}}$$

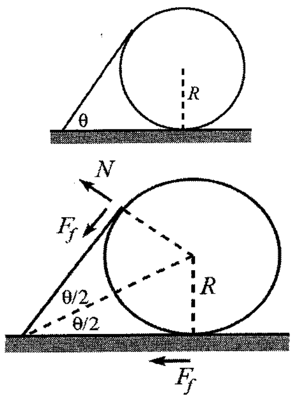
$$y(t)=y-\frac{\mu\ell}{1+\mu}\cosh(\alpha t)+\frac{\mu\ell}{1+\mu}$$

$$\dot{y}(T')=\dot{z}(T')=\alpha' z_0 \sinh\alpha t'=\alpha'\sqrt{\frac{\ell^2}{(1+\mu)^2}-z_0^2}=\sqrt{\frac{g\ell}{1+\mu}}\sqrt{1-\eta_0^2}$$

$$\eta_0=\frac{z_0}{\ell(1+\mu)}$$

۱۲. یک عصا به جرم در واحد طول ρ روی یک دایره به شعاع R تکیه داده شده است (مانند شکل) عصا با افق زاویه θ می‌سازد عصا در انتهای خود بر دایره مماس است.

اصطکاک در تمام نقاط تماس این مسئله وجود دارد فرض کنید که نیروی اصطکاک به اندازه کافی بزرگ باشد که سیستم را در حال سکون نگه دارد نیروی اصطکاک بین زمین و دایره مقدار است.



$$Mg\frac{L}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=NL$$

$$\Rightarrow \quad N=\frac{Mg}{2}\cos\theta$$

نیروی عمود بر سطح بین عصا و دایره در نظر می‌گیریم و F_f نیروی اصطکاک بین زمین دایره می‌گیریم بنابراین N می‌بینیم که نیروی اصطکاک میان عصا و دایره هم F_f است (زیرا گشتاور روی دو نیروی اصطکاک دایره درست را خنثی می‌کند.)

توجه گشتاور عصا حول نقطه ارتباطی با زمین داریم $NL=Mg\cos\theta\left(\frac{L}{2}\right)$ و M جرم عصا و L طول آن است. بنابراین $N=\frac{Mg}{2}\cos\theta$ نیروی افقی $N\sin\theta=F_f+F_f\cos\theta$ بنابراین داریم:

$$F_f=\frac{N\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{Mg}{2}\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

اما $M=\rho L$ و از شکل داریم $L=\frac{R}{\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)}$ با استفاده از

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

ما به‌دست می‌آوریم $F_f=\frac{1}{2}\rho g R\cos\theta$

در حال $\frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ θ می‌رسیم به $\theta=0$ نیروی اصطکاک به مقدار ثابت $\rho g\frac{R}{2}$ نزدیک می‌شود.

۱۳. یک زنجیر به طول L و چگالی جرمی σ به صورت عمودی بالای یک ترازو قرار دارد سپس رها می‌شود. عددی که روی ترازو خوانده می‌شود به صورت تابعی از ارتفاع زنجیر بالای ترازو به‌دست آورید.

y را ارتفاع زنجیر در نظر می‌گیریم F نیروی خواسته شود که توسط ترازو اعمال می‌شود در نظر می‌گیریم نیروی خالص برابر است با $F-\sigma Lg$ و تکانه زنجیر برابر است با $\sigma y\dot{y}$

$$F-\sigma Ly=\frac{d(\sigma y\dot{y})}{dt}=\sigma y\ddot{y}+\sigma\dot{y}^2$$

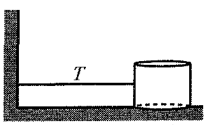
$$\ddot{y}=-g \quad , \quad \ddot{y}=\sqrt{2g(L-g)}$$

$$F=\sigma Lg-\sigma yg+2\sigma(L-y)g$$

$$=3\sigma(L-y)g$$

این جواب زمانی که $y=L$ باشد برابر صفر خواهد شد در زمانی که تمام زنجیر در لحظه آخر روی ترمز باشد $3\sigma Lg$ را نشان خواهد داد.

۱۴. در زمان $t=0$ یک سطل بدون جرم حاوی مقداری شن به جرم M است.



سطل توسط یک ریسمان بدون جرم با کشش ثابت T به دیوار متصل است، سطح بدون اصطکاک است طول ابتدایی ریسمان L است.

در زمان‌های بعدی x را فاصله از دیوار و m را جرم سطل در نظر می‌گیریم. سطل را رها می‌کنیم. در راه دیوار سطل سوراخ می‌شود (درست بعد از رها شدن) شن با نرخ $\frac{dm}{dt}=-bM$ از آن خارج می‌شود.

الف) $x(t),v(t)$ را بیابید.

ب) بیشترین مقدار انرژی جنبش سطل چقدر است.
ج) بیشترین مقدار اندازه تکانه سطل چقدر است.
د) برای چه مقدار از b سطل درست در زمان برخورد با دیوار خالی می‌شود.

الف) جرم سطل در زمان t برابر می‌شود با $M(1-bt)$ برای $t<\frac{1}{b}$ و $F=ma$ به ما می‌دهد.

$$-T=M(1-bt)\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{-T\,dt}{M(1-bt)}=dv$$

$$V(t)=\frac{T}{bm}\mathrm{Ln}(1-bt)$$

مقدار ثابت انتگرال در اینجا صفر است زیرا در $t=0$ و $v=0$ ا ست.

با انتگرال‌گیری از معادله بالا استفاده از $\left(\int \mathrm{Ln}y=y\,\mathrm{Ln}\,y-y\right)$ داریم:

$$x(t)=L-\frac{T}{b^2M}-\frac{T}{b^2M}\left(\left(1-bt\,\mathrm{Ln}(1-bt)\right)-(1-bt)\right)$$

مقدار ثابت انتگرال $t=0$ برابر $x=L$ است.

ب) جرم در زمان t برابر است با $M(1-bt)$ و با استفاده از معادله $V(t)$ انرژی جنبشی در زمان t به‌دست می‌آید $(z\equiv 1-bt)$

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}M_z\ v^2=\frac{T^2}{2b^2M}z\,\mathrm{Ln}^2 z$$

برای به‌دست آوردن بیشترین مقدار از رابطه بالا مشتق می‌گیریم در نتیجه داریم:

$$z=\frac{1}{e^2} \quad \Rightarrow \quad E_{max}=\frac{2T^2}{e^2b^2M}$$

ج) با فرضیات بالا

$$P=MV=M(z)v=\frac{T}{b}z\,\mathrm{Ln}\,z$$

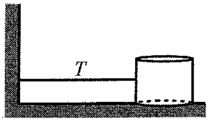
با مشتق‌گیری از رابطه بالا

$$Z=\frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad |P|_{max}=\frac{T}{eb}$$

د) می‌خواهیم $M(1-bt)$ درست زمانی که به دی‌واره می‌رسد صفر شود در نتیجه وقتی $x=0$ شود $t=\frac{1}{b}$ داریم:

$$0=L-\frac{T}{b^2M} \quad \Rightarrow \quad b=\sqrt{\frac{T}{ML}}$$

۱۵. در زمان $t = 0$ یک سطل بدون جرم حاوی مقداری شن به جرم M است سطل توسط یک ریسمان بدون جرم با کشش ثابت T به دیوار متصل است.



سطح بدون اصطکاک است طول ابتدایی ریسمان L است. در زمان‌های بعدی x را فاصله از دیوار و m را جرم سطل در نظر می‌گیریم. سطل رها شده در راه دیوار سوراخ می‌شود (درست بعد از رها شدن) و شن با نرخ $\frac{dm}{dt}=b\ddot{x}$ از آن خارج می‌شود.

الف) جرم را به صورت تابعی از زمان بیابید.

ب) $x(t)$, $v(t)$ رابیابید؟ سرعت سطل درست قبل از خروج تمام شن‌ها چقدر است؟

ج) بیشترین مقدار انرژی جنبشی چقدر است.

د) بیشترین مقدار تکانه چقدر است.

ه) به ازای چه مقدار از b سطل درست قبل از برخورد با دیوار خالی می‌شود.

الف) رابطه $F=ma$ به ما می‌گوید که $-T=m\ddot{x}$ با ترکیب آن با رابطه $\frac{dm}{dt}=b\ddot{x}$ داریم $mdm=-bTdt$ با انتگرال‌گیری از رابطه قبل داریم $\frac{m^2}{2}=c-bt$ از آنجایی که در $t = 0$ ،$m=M$ است $C=\frac{M^2}{2}$ خواهد شد پس:

$$m(t)=\sqrt{m^2-2bt}$$

این رابطه برای $t<\frac{m^2}{2bt}$ برقرار است.

ب) از رابطه $\frac{dm}{dt}=b\ddot{x}=b\frac{dv}{dt}$ و انتگرال‌گیری از آن منجر می‌شود به $v=\frac{m}{b}+c$ در زمان $t=0$، $v=0$ است در نتیجه $C=-\frac{M}{b}$ پس

$$v(t)=\frac{m-M}{b}=\frac{\sqrt{M^2-2bTt}}{b}-\frac{M}{b}$$

$$x(t)=\frac{-\left(M^2-2bTt\right)^{\frac{3}{2}}}{3b^2T}-\frac{M}{b}t+L+\frac{M^3}{3b^2T}$$

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2b^2}m(m-M)^2$$

برای به دست آوردن بیشترین مقدار E, $\frac{dE}{dm}$ را حساب می‌کنیم

$$m=\frac{M}{3} \quad \Rightarrow \quad E_{max}=\frac{2M^3}{27b^2}$$

د)

$$P=mv=\frac{1}{b}m(m-M)$$

$$m=\frac{M}{2} \quad \Rightarrow \quad P_{max}=\frac{M^2}{4b}$$

ه) می‌خواهیم $m(t)=\sqrt{M^2-2bTt}$ درست هنگام رسیدن سطل به دیوار صفر شود در نتیجه خواهیم وقتی $x=0$ شود $t=\frac{m^2}{2bT}$ شود در نتیجه:

$$0=\frac{-M}{b}\left(\frac{M^2}{2bT}\right)+L+\frac{M^3}{3b^2T} \quad \Rightarrow \quad b=\sqrt{\frac{M^3}{6TL}}$$

۱۶. یک ورقه به جرم M و سرعت V در منطقه‌ای از فضا که شامل ذراتی به جرم m است حرکت می‌کند. n ذره‌ای در واحد حجم وجود دارد. ورقه و ذرات در جهت عمود بر هم حرکت می‌کنند.اگر $m<<M$، و ذرات با یکدیگر برهمکنش نداشته باشند.

الف) فرض کنید $v<<V$ نیروی مقاومی که ذرات در واحد سطح روی ورقه وارد می کنند چقدر است؟

ب) فرض کنید $V<<v$ نیروی مقاومی که ذرات در واحد سطح روی ورقه وارد مکنند چقدر است؟

الف) $v=0$در نظر می‌گیریم. اگر صفحه به ذرات برخورد کند بنابراین سرعت ذرات برابر $2v$ خواهد شد و در نتیجه تکانه آن‌ها $2\,mv$ خواهد شد.

در زمان t، ورقه حجم Avt را جاروب می‌کند که A سطح ورقه است در نتیجه، در زمان t ورقه با $Avtn$ ذره برخورد می‌کند. ورقه در نتیجه برخورد با نرخ $\frac{dP}{dt}=(Avn)$ تکانه خود را از دست می‌دهد.

اما $F=\frac{dP}{dt}$ بنابراین نیرو در واحد سطح برابر می‌شود با

$$F=2mv^2=2\rho v^2$$

که ρ چگالی جرمی است.

ب) برای $v<<v$ ذرات به دو طرف ورقه برخورد می‌کند. توجه شود که در این‌جا ما نمی‌توانیم v را دقیقاً برابر صفر قرار دهیم (چرا)؟ زیرا جوابی برابر صفربه‌دست می‌آوریم و تاثیر اولین مرتبه را

از دست خواهیم داد. ما در این مسئله فقط نیاز داریم که جهت حرکت ذرات را در جهت x در نظر بگیریم.

ذرات که به جلو ورقه برخورد می‌کنند با سرعت v_x+2v بر می‌گردند در نتیجه تکانه‌ها $m\left(2v_x+2v\right)$ تغییر می‌کند سرعتی که ورقه آن‌ها برخورد می‌کند از قسمت (الف) $A\left(vx+v\right)\frac{n}{2}$ می‌شود. ($\frac{n}{2}$ مربوط به چگالی است زیرا نصف ذرات به سمت راست و نصف دیگر به سمت چپ حرکت می‌کنند). ذرات از پشت ورقه با سرعت v_x-2v بر می‌گردند بنابراین تغییر تکانه آن‌ها $m\left(2v_\alpha-2v\right)$ می‌شود و سرعت که ورقه به آن‌ها برخورد می‌کند $A\left(v_x-v\right)\frac{n}{2}$ می‌شود در نتیجه

$$\frac{F}{A}=\frac{1}{A}\frac{dP}{dt}=\left(\left(\frac{n}{2}\right)\left(v_x+v\right)\right)\left(m\left(2v_x+2v\right)\right)-$$
$$\left(\left(\frac{n}{2}\right)\left(v_A-v\right)\left(m(2v_x-2v)\right)\right)$$
$$\frac{F}{A}=4nmv_x v\equiv 4\rho v_x v$$

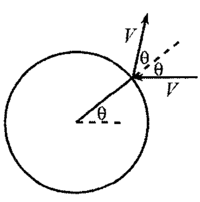
که در این‌جا $v_x=\frac{v}{\sqrt{3}}$ است.

۱۷. یک سیلندر به جرم M و شعاع R با سرعت V در منطقه‌ای از فضا شامل ذراتی ساکنی به جرم m است حرکت می‌کند n ذره در واحد حجم وجود دارد. فرض کنید $m<<M$ و ذرات با یکدیگر بر هم کنش نداشته باشند.

نیروی مقاومی که ذرات بر سی‌لندر وارد می کند چقدر است؟

ذرات با زاویه θ به سیلندر برخورد می‌کند. در دستگاه سیلندر ذرات با سرعت $-V$ می‌آیند و با سرعت $V\cos 2\theta$ برگشت می‌کند.

بنابراین در دستگاه آزمایشگاه، ذرات تکانه افقی زاویه را افزایش می‌دهند $mv\left(1+\cos 2\theta\right)$



سطح سیلندر بین $\theta,\theta+d\theta$ حجم را با نرخ $(Rd\theta\cos\theta)\,v\ell$ جاروب می‌کند که در این‌جا ℓ طول سیلندر است. ($\cos\theta$ فاکتور مقدار عمودی در جهت حرکت است) نیرو در واحد طول روی سیلندر برابر است.

$$\frac{F}{\ell}=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(n\left(R\,d\theta\cos\theta\right)v\right)\left(mv\left(1+\cos 2\theta\right)\right)$$

$$=2nmR\,v^{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\left(1-\sin^{2}\theta\right)d\theta$$

$$=2nmRv^{2}\left(\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^{3}\theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{8}{3}nmRv^{2}\equiv\frac{8}{3}\rho RV^{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{F}{2R\ell}=\frac{4}{3}\rho V^{2}$$

۱۸. الف) ریسمان به طول L به صورت مستقیم و کشیده روی یک میز بدون اصطکاک قرار دارد قسمتی کوچکی از ریسمان از سوراخی که در میان میز قرار دارد آویزان است.

ریسمان رها می‌شود و شروع به افتادن می‌کند. سرعت ریسمان را در لحظه‌ای که تماس خود را با میز از دست می‌دهد بیابید.

ب) ریسمانی به طول L به صورت یک توده روی میز بدون اصطکاکی قرار دارد و فقط قسمت کوچکی از ریسمان از سوراخی در میز آویزان است ریسمان رها شده و باز می‌شود و شروع به افتادن می‌کند. سرعت ریسمان را درست زمانی که ریسمانی تماس خود را با میز قطع می‌کند بیابید (فرض کنید که ریسمان چرب شده و با خود اصطکاک ندارد)

الف) راه‌حل اول: چگالی ریسمان را σ در نظر می‌گیریم با در نظر گرفتن پایستگی انرژی حرکت انرژی پتانسیل $(\sigma L)\left(\frac{L}{2}\right)g$ به انرژی جنبشی $\sigma L\frac{v^{2}}{2}$ تبدیل می‌شود در نتیجه $v=\sqrt{gL}$ خواهد شد. بدون آن‌که بدانیم طول مسیر چه اتفاقی افتاده است سرعت لحظه آخر را به‌دست می‌آوریم.

راه حل دوم: چگالی ریسمان را σ در نظر می‌گیریم و طول ریسمان آویزان را x می‌گیریم. از $F=ma$ به ما نتیجه می‌دهد که $(\sigma x)y=\sigma L\ddot{x}$ در نتیجه $\ddot{x}=\frac{g}{L}x$ یک جواب کلی به صورت

$$x=Ae^{t\sqrt{\frac{g}{L}}}+Be^{-t\sqrt{\frac{g}{L}}}$$

خواهد شد. (اگر ε مقدار اولیه x باشد $A=B=\frac{\varepsilon}{2}$ و در شرایط مرزی اولیه $x(0)=0\,,\,x(0)=\varepsilon$ خواهد بود. اما این اطلاعات را در روشی که پی می‌گیریم لازم نداریم.)

t_f در زمانی که $x(t_f)=L$ شود در نظر می‌گیریم. اگر ε خیلی کوچک باشد $(\varepsilon << L)$ t_f بسیار بزرگ خواهدشد. در نتیجه می‌توانیم جمله‌ای که حاصل توان منفی است صرف‌نظر کنیم در نتیجه $L \approx Ae^{t_f\sqrt{\frac{g}{L}}}$ بنابراین $\dot{x}(t_f)=\sqrt{\frac{g}{L}}Ae^{t_f\sqrt{\frac{g}{L}}}=gL$

ب) σ را چگالی ریسمان در نظر می‌گیریم. x را طولی از ریسمان که از میز آویزان است در نظر می‌گیریم. در نتیجه نیروی روی ریسمان برابر $(\sigma x)g$ خواهد شد. تکانه ریسمان برابر $(\sigma x)\dot{x}$ می‌شود با استفاده از $F=\frac{dP}{dt}$

$$xg=x\ddot{x}+\dot{x}^2$$

از آنجایی که g یک پارامتر است جواب $x(t)$ فقط شامل g و t خواهد بود.

با توجه به دیمانسیون $x(t), x(t)$ باید به صورت $x(t)=bgt^2$ باشد که b یک ثابت عددی است. با قرار دادن آن در رابطه فوق نتیجه می‌دهد که $b=2b^2+4b^2$ و در نتیجه $b=\frac{1}{6}$ می‌شود در نتیجه یک جواب ممکن به صورت

$$x(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{g}{3}\right)t^2$$

خواهد بود. این معادله نشان می‌دهد که ریسمان با شتاب $g'=\frac{g}{3}$ به پایین می‌افتد. زمانی که طول ریسمان برابر L شود $t=\sqrt{\frac{2L}{g'}}=\sqrt{\frac{6L}{g}}$ در نتیجه سرعت نهایی برابر می‌شود با

$$v=g't=\sqrt{2Lg}=\sqrt{2\frac{gL}{3}}$$

کمتر از $\sqrt{gL}$ قسمت (الف).

۱۹. یک ریسمان به طول L و چگالی σ به صورت یک توده روی سطح قرار دارد. یک سر ریسمان را در دست می‌گیرید رو به بالا می‌کشیم به طوری که نیروی ما منجر به حرکت با سرعت ثابت شود کل کار انجام شده توسط دست شما چقدر است، چقدر طول می‌کشد ریسمان کاملاً از سطح زمین بلند شود، چقدر انرژی به گرما تبدیل می‌شود؟

y را ارتفاع ریسمان در نظر می‌گیریم. $F(y)$ را نیروی دست شما در نظر می‌گیریم نیروی خالص که روی ریسمان وارد می‌شوئد $F-(\sigma y)g$ خواهد بود جهت بالا را مثبت فرض کردیم. تکانه ریسمان $(\sigma y)\dot{y}$ خواهد شد با برابر قرار دادن نیروی خالص با تکانه زاویه

$$F-\sigma yg=\frac{d}{dt}(\sigma y\dot{y})=\sigma y\ddot{y}+\sigma\dot{y}^2$$

اما $\ddot{y}=0$ و $\dot{y}=v$ در نتیجه

$$F=\sigma y g+\sigma v^2$$

کاری که دست شما انجام داده‌است از انتگرال نیرو به‌دست می‌آید. از

$$W=\frac{\sigma L^2 g}{2}+\sigma L v^2$$

انرژی پتانسیل نهایی ریسمان $(\sigma L)g\left(\frac{L}{2}\right)$ و انرژی جنبش نهایی $\sigma L\frac{v^2}{2}$ خواهد بود در نتیجه $(\sigma L)\frac{v^2}{2}$ از انرژی آن به گرما تبدیل می‌شود.

۲۰. فرض می‌کنید که ابر، ذرات آب بسیار ریزی است که در هوا مطلق است (به صورت یکنواخت توزیع شده‌اند و در حالت سکون هستند) یک قطره باران از میان آن عبور می‌کند، بعد از طی یک زمانی طولانی، شتاب قطره را بیابید(فرض کنید زمانی که قطره با دانه ذرات ریز آب برخورد می‌کند جذب آن می‌شوند، و همچنین فرض کنید که قطرات باران کاملاً در تمام زمان‌ها کروی هستند، و لذا مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.)

ρ چگالی جرمی قطره باران و λ میانگین چگالی جرمی در فضای ذرات آب در نظر می‌گیریم. $v(t),M(t),r(t)$ را شعاع جرم و سرعت قطره باران در نظر می‌گیریم. جرم قطره باران $M=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$ در نظر می‌گیریم در نتیجه

$$\dot{M}=4\pi r^2\rho=3M\frac{\dot{r}}{r}$$

قطره باران سطح مقطعی که جاروب می‌کند.

$$\dot{M}=\pi r^2 v\lambda$$

نیروی Mg روی ذرات برابر است با تغییرات تکانه $\frac{dP}{dt}=\frac{dMv}{dt}=\dot{M}v+M\dot{v}$

$$Mg=\dot{M}v+M\dot{v}$$

این معادله شامل سه مقدار مجهول v,M,r است.

هدف ما پیدا کردن $\dot{v}$ بر حسب t است.

$$v=\frac{4\rho}{\lambda}r \quad\Rightarrow\quad \dot{v}=\frac{4\rho}{\lambda}$$

$$Mg=\left(3M\frac{\dot{r}}{r}\right)\left(\frac{4\rho}{\lambda}\dot{r}\right)+M\left(\frac{4\rho}{\lambda}\ddot{r}\right)$$

$$\frac{g\lambda}{\rho}r=12\dot{r}^2+4r\ddot{r}$$

از آنجایی که قطر بعد از گذشت زمان طولانی با شتاب ثابت سقوط می‌کند

$$\ddot{r}\approx bg \qquad \dot{r}\approx bgt \;,\; r\approx\frac{1}{2}bgt^2$$

برای t بزرگ است.بنابراین b پارامتری است که باید تعیین شود

$$\left(\frac{g\lambda}{\rho}\right)\left(\frac{1}{2}bgt^2\right)=12(bgt)^2+4\left(\frac{1}{2}bgt^2\right)bg$$

$$b=\frac{\lambda}{28\rho} \;\rightarrow\; \ddot{r}=\frac{g\lambda}{28}\rho \rightarrow \dot{v}=\frac{g}{7}$$

۲۱. ذره‌ای در پتانسیل $v(r)=\frac{-2}{3r^3}$ حرکت می‌کند.

الف) L داده شده است بیشترین مقدار پتانسیل موثر را بیابید.

ب) ذره‌ای که را که از بی‌نهایت با سرعت v و پارامتر برخورد b در نظر بگیرید.

بیشترین مقدار b، (b_{max})، برای این‌که ذره در پتانسیل به دام بیافتد چقدر است؟

(به عبارت دیگر مقدار $\pi b^2{}_{max}$ سطح مقطع پراکندگی این پتانسیل چقدر است.)

پتانسیل موثر برابر است با

$$V_{eff}(r)=\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{c}{3r^3}$$

با مشتق گرفتن از آن و برابر صفر قرار دادن داریم $r\equiv\frac{mc}{L^2}$ با قرار دادن آن در $V_{eff}(r)$ داریم:

$$V_{eff}^{max}=\frac{L^6}{6m^3c^2}$$

ب) با استفاده از $E=E_\infty=\frac{mV_0^2}{2}, L=m_0v_0b$ داریم:

$$\frac{(mv_0b)^6}{6m^3c^2}<\frac{mv_0^2}{2} \quad\Rightarrow\quad b<\left(\frac{3c^2}{m^2v_0^4}\right)^{\frac{1}{6}}=b_{max}$$

سطح مقطع برابر خواهد بود با:

$$\sigma=\pi b^2{}_{max}=\pi\left(\frac{3c^2}{m^2v_0^4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

۲۲. ذره‌ای در پتانسیل $V(r)=-V_0 e^{-\lambda^2 r^2}$ حرکت می‌کند.

الف) L داده شده است شعاع چرخش دایروی را بیابید.

ب) بیشترین مقدار L را طوری بدست آورید تا چرخش دایروی وجود داشته، مقدار $V_{eff}(r)$ در این چرخش دایروی را بیابید.

الف)

پتانسیل موثر برابر است با

$$V_{eff}(r)=\frac{L^2}{2mr^2}-V_0 e^{-\lambda r^2}$$

چرخش دایروی زمانی امکان‌پذیر است که $V'_{eff}(r)=0$ شود. از رابطه بالا مشتق می‌گیریم و بر حسب L^2 داریم:

$$L^2=\left(2mv_0\lambda^2\right)r^4 e^{-\lambda^2 r^2}$$

ب) برای به‌دست آوردن بیشترین مقدار L از تابع سمت راست $r^4 e^{-\lambda^2 r^2}$ مشتق می‌گیریم.

$$\left(r^4 e^{-\lambda^2 r^2}\right)'=e^{-\lambda^2}\left[4r^3-r^4\left(-2\lambda^2 r\right)\right]=0 \quad \Rightarrow \quad r^2=\frac{2}{\lambda^2}\equiv r_0^2$$

با قرار دادن r_0 در معادله L^2 داریم:

$$L_{max}=\frac{8mV_0}{\lambda^2 e^2}$$

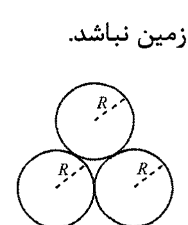
و همچنین با قرار دادن r_0 معادله $V_{eff}(r)$ داریم

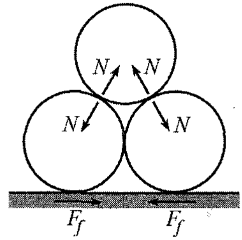
$$V_{eff}(r_0)=\frac{r_0}{e^2}$$

۲۳. سه دایره با گشتاوری لختی $I=\eta mR^2$ که مراکز آن صورت مثلث شکل قرار دارد شتاب اولیه دایره بالایی را بیابید اگر

الف) اصطکاک بین دایره با زمین وجود داشته باشد اما اصطکاک بین توپ‌ها وجود نداشته باشد.

ب) اصطکاک بین توپ‌ها باشد ولی با زمین نباشد.





با توجه به گشتاور حول مرکز توپ‌های پایینی فقط F_f باشیم

$\alpha=\frac{a_t}{R}$ شتاب ابتدایی افقی دو دایره پایینی و a_y شتاب عمودی

$$N\cos 60-F_f=Ma_x$$

$$Mg-2N\sin 60=May$$

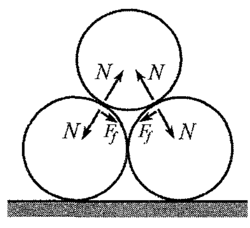
$$F_f R=\eta MR^2\left(\frac{a_x}{R}\right) \qquad \tau=I\alpha$$

اگر توپ‌های پایینی d جابه‌جا شود توپها بالایی $d\,Tan\,30$ جابه‌جا می‌شود.

$$a_x=\sqrt{3}\,a_y$$

$$\to \quad a_y=\frac{g}{7+6\eta}$$

ب)



گشتاور حول مرکز توپ‌های پایینی فقط F_f است

$$a_x=\sqrt{3}\,a_y$$

در این‌جا

$$\alpha\neq\frac{a_x}{R}$$

$$N\cos 60-F_f\sin 60=Ma_x \qquad \frac{d}{R\cos 30}$$

$$Mg-2N\sin 60-2F_f\cos 60=Ma_y$$

$$F_f R=\left(\eta mR^2\alpha\right) \qquad \alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{a_x}{R}$$

$$a_x=\sqrt{3}\,a_y$$

$$a_y=\frac{g}{7+8\eta}$$

۲۴. یک توپ به شعاع R (با چگالی یکنواخت) روی زمین بدون لغزش می‌غلتد. توپ با یک پله به ارتفاع h مواجه می‌شود و به بالای آن می‌غلتد.

نشان دهید که کمترین سرعتی V_0 که نیاز دارد توپ به بالا پله برود برابر است با:

$$V_0 \geq \frac{R\sqrt{14g\frac{h}{5}}}{\frac{7R}{5}-h}$$

از این حقیقت استفاده می‌کنیم که تکانه زاویه‌ای توپ حول گوشه برخورد تغییر نمی‌کند. زیرا تمام نیروهای وارد شده به این نقطه گشتاور صفر حول آن ایجاد می‌کند این حقیقت به ما کمک می‌کند که انرژی آن را درست بعد برخورد mgh در نظر بگیریم.

برای تکانه زاویه در شرط چرخش کامل داریم:

$$v_0 = R\omega_0$$

$$L = \frac{2}{5}mRV_0 + MV_0(R-V) = MV_0\left(\frac{7R}{s}-h\right)$$

ω' سرعت زاویه‌ای توپ دقیقاًبعد از برخورد می‌گیریم.

با استفاده از قضیه محورهای موازی گشتاور لختی حول نقطه برخورد برابر $\frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$ خواهد شد و از پایستگی L حول نقطه برخورد داریم:

$$MV_0\left(\frac{7R}{5}-h\right) = \frac{7}{5}MR^2\omega'^2$$

انرژی توپ درست بعد از برخورد

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}MR^2\right)\omega'^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}MR^2\right)\left(\frac{MV_0\left(\frac{7R}{5}-h\right)}{\frac{7}{5}MR^2}\right)^2$$

$$= \frac{MV_0^2\left(\frac{7R}{5}-h\right)^2}{\left(\frac{14}{5}\right)R^2}$$

توپ به بالای پله می‌رود اگر $E \geq Mgh$ باشد در نتیجه

$$V_0 \geq \frac{R\sqrt{14\frac{gh}{5}}}{7\frac{R}{5}-h}$$