



تئوری اعداد

۲۵۰ مسأله حساب

نوشتۀ واتسلاو سرپینسکی

چاپ سوم

ترجمۀ

پرویز شهبازی

تئوری اعداد

۲۵۰ مسأله حساب

نوشته و اتسلاو سرپینسکی

ترجمه پرویز شهریاری



شرکت سهامی انتشارات خوارزمی

واتسلاو سرپینسکی

W. Sierpinski

تئوری اعداد

**250 problèmes
de théorie élémentaire
des nombres**

© Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1970

© Librairie Hachette 1927 pour l'édition française

چاپ اول: آبان ماه ۱۳۴۹ ه. ش. - تهران

چاپ دوم: شهریور ماه ۱۳۶۹ ه. ش. - تهران

چاپ سوم: تیر ماه ۱۳۷۷ ه. ش. - تهران

چاپ و صحافی: سازمان چاپ و انتشارات وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی

تعداد: ۵۰۰۰ نسخه

حق هر گونه چاپ و انتشار و تکثیر مخصوص شرکت سهامی (خاص) انتشارات خوارزمی است.

شابک ۷-۰۰۷-۴۸۷-۹۶۴-۷ ۹۶۴-۴۸۷-۰۰۷-۷ ISBN 964-487-007-7



W. S. S. S. S.

واتسلاو سرپینسکی

فهرست

در صفحه ۷		مقدمه مترجم فارسی
در صفحه ۹		واتسلاو سرپینسکی ریاضی‌دان برجسته لهستانی
در صفحه ۲۲		مقدمه مترجم روسی
حل	صورت مسئله	عنوان
۶۶	۲۶	۱. قابلیت تقسیم
۹۳	۳۲	۲. عددهائی که نسبت بهم اولند
۱۰۲	۳۳	۳. تصاعد حسابی
۱۱۹	۳۶	۴. عددهای اول و مرکب
۱۶۹	۴۶	۵. معادلات دیوفانتی
۲۲۱	۵۶	۶. مسائل مختلف
در صفحه ۲۶۵		یادداشت‌های مترجم
در صفحه ۲۸۴		اثبات پوستولات برتران (قضیه چیشف)
در صفحه ۲۹۷		قضیه شرك

نظریهٔ اعداد از دلچسب‌ترین مباحث ریاضی است. از یکطرف هر کسی می‌تواند نیروی استدلال و تفکر خود را در میدان نبرد با قوانین شناخته و ناشناختهٔ آن بیازماید و از طرف دیگر تنوع استدلالها و بی‌ارتباطی ظاهری که در مورد قوانین و روابط مربوط به آن به چشم می‌خورد، زیبایی خاص و بی‌نظیری به آن می‌دهد که جذبۀ آن هر علاقمندی را روزها و ماهها بخود مشغول می‌دارد.

وقتی خواننده صورت مسئله‌ای از این کتاب را می‌خواند، اگر قبلاً آنرا ندیده باشد، در ابتدای کار خود را در مقابل معمائی می‌بیند و بنظرش می‌رسد که تنها یک معجزه می‌تواند مسیر استدلال او را معین کند. ولی وقتی به آن مشغول می‌شود احتمالاً از قسمت مربوط به حل آن کمک می‌گیرد با شادی فوق‌العاده‌ای احساس می‌کند که خود به نقش معجزه‌ساز درآمده است و به محیط اسرارآمیز و تاریک مسئله نور امید داده است و توانسته است بتدریج به کلید حل آن نزدیک شود.

گاهی هم دهانش از تعجب باز می‌ماند که چگونه خود نتوانسته است ارتباطی به این سادگی و استدلالی به این روشنی را پیدا کند و راه حل مسئله را بگشاید.

خواننده در مقدمه و مؤخره و حواشی کتاب می بیند که این
وضع مخصوص او نیست و بزرگترین ریاضی دانها هم درچنین
احساسهایی با او شریک بوده اند و همین تشابه موقعیت ، او را قانع
می کند که اگر بخواند و حوصله کار و تفکر را داشته باشد ، می تواند
به جمع محققین مربوط به نظریه اعداد پیوندد .
اگر ترجمه و نشر این کتاب تنها همین اثر را بر روی خواننده
مستعد و علاقمند بگذارد ، اجری بزرگ برای مترجم فارسی آن
خواهد بود .

پرویز شهر یاری

واتسلاوس سرپینسکی

ریاضی دان برجسته لهستانی

در چهاردهم مارس ۱۸۸۲ در شهر ورشو، در خانواده کنستانین سرپینسکی طیب، پسری بدنیا آمد که دو نام به او دادند: **واتسلاو فرانسیسک**. همین پسر بچه بود که می بایست در آینده یکی از بزرگترین ریاضی دانهای لهستان بشود. واتسلاوس سرپینسکی تحصیلات خود را در ورشو گذراند و در همانجا دوره دبیرستان و دانشگاه خود را تمام کرد. استعداد غیر عادی سرپینسکی خیلی زود بروز کرد، ولی علاقه او به ریاضیات در سالهای آخر دبیرستان و تحت تأثیر دونفر از هم کلاسیهایش، که به بعضی از قسمتهای ریاضیات عالی آشنا بودند، و معلم برجسته خود: **ولودزیمیر بلودارسکی**، آشکار شد. این معلم به استعداد ریاضی سرپینسکی بی اندازه معتقد بود. سرپینسکی معلمین مشهور دیگری هم در دبیرستان داشت. مثلاً معلم زبان فرانسه او **ک. آپل** بود که بعدها استاد دانشگاه ورشو شد.

بین همسالان سرپینسکی در دبیرستان، افراد با استعداد کم نبودند. از کلاسی که سرپینسکی در آن تحصیل می کرد، تعداد قابل توجهی دانشمند و بزرگان فرهنگ بیرون آمد، که میان آنها می توان از منجم مشهور **تاده اوش** با ناخه و بیچ نام برد.

سرپینسکی از همان سالهایی که در دبیرستان بود به کارهای اجتماعی علاقه پیدا کرد. او همراه با چند نفر از دوستانش یک مدرسه مخفی برای بچه های کارگران اطراف خود سازمان داد. این مدرسه مخفی توانست طی سالها، شاگردان خود را برای امتحان چهار کلاس دبیرستان آماده کند. سرپینسکی در سال ۱۹۰۰ به دانشکده فیزیک - ریاضی دانشگاه ورشو

وارد شد ، این دانشگاه در آن زمان هنوز مؤسسه آموزشی جوانی بود و بیش از سی سال از تأسیس آن نمی گذشت و تدریس در آن به زبان روسی انجام می گرفت . باید متذکر شد ، لهستان یهائیکه می توانستند در دانشگاههای قدیمی لهستان (دانشگاه کراکوف ، دانشگاه لهوو) تحصیل کنند ، بازگشت به این دانشگاه جدید هم رو آوردند . مشکلاتی را که در سالهای نخستین تأسیس (بخاطر نداشتن سنتهای آموزشی ، کمبود معلمان علوم وغیره) ، گریبانگیر دانشگاه بود ، خیلی زود از میان برداشتند .

وجود ریاضی دانهای فعال در این دانشگاه (در مرحله اول م.آ.آ. اندروسکی ، ن.ن. آلکسه یف ، ن.یا. سونین و سپس و.آ.آ. آنیسیموو ، ن.ن. زینین و گ.ف. وارانوی) از لحاظ تعلیم ریاضی ، آنرا به سطح دانشگاههای پترزبورگ ، مسکو ، قازان و خارکوف رسانید .

گئورگی فدوسه ایویچ وارانوی (۱۸۶۸ - ۱۹۰۸) استاد ریاضی و عضو وابسته فرهنگستان علوم روسیه ، که خود پرورده دانشگاه پترزبورگ بود ، بیش از همه در سرپینسکی اثر گذاشت . فعالیت وارانوی در دانشگاه ورشو از سال ۱۸۹۴ شروع شد و تا زمان مرگ بیموقع او (با بعضی وقفه های کوتاه) ادامه داشت . وارانوی ، دانشمندی از تراز اول بود و بر آثار اومهر نبوغ نقش بسته است . به اتفاق هرمان مینکوسکی ، هندسه اعداد را بوجود آورد . در نظریه تحلیلی اعداد و هم در نظریه اعداد جبری به نتایج مهم و عمیقی رسید .

سرپینسکی چند دوره از کنفرانسهای وارانوی را گوش کرد و به اولین کار علمی خود درباره نظریه تحلیلی اعداد ، تحت تأثیر افکار و روشهای وارانوی ، پرداخت (او روی متنی که وارانوی برای مسابقات دانشجویی نوشته بود ، کار کرد) . معرفی مفصل وارانوی ، در باره این کار ، در جلد ششم اخبار دانشگاهی ورشو ، در سال ۱۹۰۴ چاپ شده است . وارانوی برای سرپینسکی پیشنهاد مدال طلا کرد و خواست که او در دانشگاه بماند تا برای مقام استادی

(۱) این دانشگاه بر مبنای مدرسه بزرگی بوجود آمد که در سالهای ۱۸۶۲ - ۱۸۶۹ در ورشو وجود داشت . از ابتدای قرن نوزدهم تا سال ۱۸۳۲ در ورشو ، دانشگاه لهستانی وجود

آماده شود. سر پینسکی همیشه نام وارانوی را با گرمی بخاطر می آورد. دیپلم سر پینسکی (درباره تمام کردن دانشگاه) نگهداری شده است. ما در اینجا متن این سند جالب را می آوریم، زیرا این سند را پ. آ. زیلووی رئیس دانشگاه ورشو و ن. ن. زینین رئیس دانشکده فیزیک - ریاضی امضا کرده اند (زینین پسر زینین شیمی دان مشهور روس است).

دیپلم

شورای دانشگاه سلطنتی ورشو اعلام می دارد که واتسلاو - فرانتسک کنستانتینویچ سر پینسکی در ابتدای سال تحصیلی ۱۹۰۰ - ۱۹۰۱ به دانشجویان دانشگاه ورشو پیوست و در جریان سالهای تحصیلی ۱۹۰۰ - ۱۹۰۱، ۱۹۰۱ - ۲، ۱۹۰۲ - ۳ و ۱۹۰۳ - ۴ دوره کامل علمی را که در چهار دوره رشته ریاضی دانشکده فیزیک - ریاضی دانشگاه او تدریس شد، تمام کرد، و در آزمایش نهائی وضع او چنین است: در هندسه، آنالیز، نظریه اعداد، نظریه احتمالات، مکانیک، نجوم، مساحی، فیزیک ریاضی، فیزیک تجربی، جغرافیای فیزیکی و شیمی - عالی (۵)؛ در زبان روسی و تألیف - خوب (۴). جوایز کتبی او ۵ ارزیابی شده است (عالی).

از تألیف او زیر عنوان «Summa» نام می بریم که در زمینه

رشته $\sum_{n>a}^n \tau(n)f(n)$ و مجموع آنست، در این رشته $\tau(n)$ عبارت

از تعداد تبدیل n به مجموع مربعات دو عدد صحیح است، و در شورای ۲۷ مه ۱۹۰۴ مدال طلا به آن داده شد. به این مناسبت، طبق تبصره ماده ۹۶ آئیننامه دانشگاه، سر پینسکی به نامزدی درجه علمی دانشکده فیزیک - ریاضی قبول شد و طبق ماده ۴۷ آئیننامه دانشگاه، با رأی شورای دانشگاه در تاریخ ۱۹ ژوئن ۱۹۰۴، به این درجه نائل شد. در نتیجه آقای سر پینسکی تمام حقوق و امتیازات درجه نامزدی را،

طبق قوانین امپراطوری روسیه ، بدست آورد . با تأیید این مطالب از طرف شورای دانشگاه امپراطوری ورشو ، این دیپلم که به مهر دانشگاه مهور است ، به او داده می شود .

ورشو . اول آوریل سال ۱۹۰۵

سرپینسکی بعد از اتمام دانشگاه ، در دو دیپلمستان ورشو به تدریس ریاضی پرداخت . فعالیت آموزشی او نتوانست ادامه پیدا کند ، زیرا در سال ۱۹۰۵ ، بعد از اعتصاب دانش آموزان جوان (که سرپینسکی به آنها پیوسته بود) ، مجبور به ترك ورشو شد . سرپینسکی به رشته فلسفه دانشگاه کراکوف داخل شد ، که در آنجا دو ریاضی دان مشهور لهستانی کار می کردند : ستانیسلاو-زارمبا و کازیمیر ژور اوسکی ؛ اولی متخصص در نظریه معادلات دیفرانسیلی بود و دومی در رشته هندسه کار می کرد . سرپینسکی در سال ۱۹۰۶ امتحان ریاضی ، نجوم و فلسفه را ، که برای درجه دکترا اجباری بود ، گذراند و به مناسبت تألیف علمی «در باره مجموع رشته $\sum (m^2 + n^2)$ ، به درجه علمی $m^2 + n^2 \leq x$

دکترای فلسفه نائل شد . سرپینسکی بعد از مراجعت به ورشو به تدریس ریاضی در مدارس متوسطه ، سمینار معلمان و در دوره هایی که نقش دانشگاه لهستان را داشتند (دانشگاه ورشو در سالهای ۱۹۰۵-۱۹۰۸ بسته شد) پرداخت ، ولی قسمت عمده وقت خود را صرف تحقیقات علمی می کرد . در سال ۱۹۰۶ اولین اثر او با عنوان «در باره يك مسئله از نظریه توابع مجانبی» چاپ شد (به زبان لهستانی) . چه از لحاظ طرح مسئله و چه از لحاظ روش کار ، این اثر مربوط به اثری از وارانوی (به همین نام) می شود که در سال ۱۹۰۳ در مجله کرول به زبان فرانسه چاپ شده بود . یادآوری این مطلب جالب است که همین نوشته وارانوی ، یکی از محرکهای آکادمیسین ای. م. ویناگرادوف برای تحقیقات مشهور اوست .

در تألیفی که نام بردیم ، سرپینسکی رابطه ای بدست می آورد که به کمک آن می توان تعداد نقاط $A(n)$ با مختصات صحیح x و y را در داخل دایره

$x^2 + y^2 \leq n$ بتقریب بدست آورد . رابطه سرپینسکی^۱ به اینصورت است .

$$A(n) = \pi n + o(\sqrt{n})$$

در اثر دیگری که در سال ۱۹۰۹ چاپ شد ، سرپینسکی ، رابطه مجانبی جدیدی طرح می کند که تعداد نقاط با مختصات صحیح را در داخل کره $x^2 + y^2 + z^2 \leq n$ بدست می دهد .

هر دو تألیف مذکور و بسیاری از تحقیقات دیگر سرپینسکی بر روش مکتب پترزبورگی قرار دارد که خطوط مشخصه آن عبارتست از طرح مسائل مشخص و واضح و حرکت بسمت حل «آلگوریتمی» مسئله ، به صورت رابطه ای که برای محاسبه ساده باشد .

در سال ۱۹۰۷ یکی از آثار خود را ، در زمینه آنالیز ، به زبان فرانسه منتشر کرد . از ۱۹۰۸ بیعد ، تعداد تألیفات سرپینسکی ، که محتوی آنها بسیار متنوع است ، به زبانهای لهستانی و فرانسوی ، بسرعت زیاد می شود . در ۱۹۴۸ ، در فهرست آثار سرپینسکی ، بیش از ۵۱۲ رساله ، ۱۵ بررسی خاص و کتابهای درسی نام برده شده است . ودیعه بزرگ سرپینسکی در علم مورد تقدیر جدی ریاضی دانهای کشور او و همه جهان قرار گرفت .

کنگره ششم ریاضی دانهای لهستان در سال ۱۹۴۸ مصادف با چهلمین سال فعالیت دانشگاهی سرپینسکی بود . در این مجمع اظهارات گرمی به عنوان سرپینسکی بیان شد . از ریاضی دانهای اتحاد شوروی آ. ن. کولموگوروف گفت : «از طرف آکادمی علوم اتحاد جماهیر شوروی سوسیالیستی و مجمع ریاضی دانهای مسکو ، به پروفیسور سرپینسکی ، بخاطر چهلمین سال فعالیت علمی او ، درود می فرستم .

ریاضی دانهای شوروی به کارهای علمی پروفیسور سرپینسکی و کوششهای او به عنوان بنیان گذار مکتب ریاضی لهستان ، که جای خود را در بین مکتبهای علمی جهان باز کرده است ، ارزش فراوان قائل اند .

(۱) $f(t) = O(g(t))$ به این معنی است که برای مقادیر به اندازه کافی

بزرگ t ، نامساوی $|f(t)| < kg(t)$ برقرار است (k مقدار ثابتی است) . این قضیه سرپینسکی در سال ۱۹۱۳ بوسیله ا. لاندو ریاضی دان مشهور آلمانی دوباره ثابت شد .

اجازه بدهید، و اتسلا و کنستانتینویچ، که سالهای درازی را برای فعالیتهای پرثمر شما آرزو کنیم.

کثرت آثار سرپینسکی (که تعداد آنها عددی افسانه‌ای است)، اجازه نمی‌دهد همه آثار او را تحلیل کنیم و ناچار خلاصیت علمی او را، در خطوط کلی خود، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. تنها روی چهار اثر سرپینسکی، که در ۱۹۰۸ چاپ شد، مکتب می‌کنیم.

این آثار زودرس سرپینسکی، مثل اولین کارچاپی او، معرف استعداد فوق‌العاده مؤلف در زمینه ریاضی و قابلیت علمی بلند پایه اوست.

در اثر بزرگ او درباره مجموع رشته $\sum \tau(n)f(n)$ ، ضمن نتایج مختلفی که بدست آمده است، به تخمین مجموعهایی به صورت:

$$\sum_{n=1}^x \tau(n^2), \sum_{n=1}^x \tau^2(n), \sum_{n=1}^x \tau_{\lambda}(n)$$

برمی‌خوریم که در آنها $\tau(n)$ و $\tau_{\lambda}(n)$ عبارتند از تعداد تجزیه n به 8 و 2 مربع. سرپینسکی در اثر دیگر خود «درباره حالتی از تبصره نادرست ضرب احتمالی» ثابت می‌کند که احتمال اینکه دو عدد طبیعی، که از n بزرگتر نباشند، نسبت بهم اول باشند، برابر است با:

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mu(k) \left[\frac{n}{k} \right]^2$$

که در آن μ تابع موبیوس و کروسه نماینده عدد صحیح است.

سرپینسکی نتیجه کلاسیک جدیدی در اثر خودش بنام «درباره تبدیل اعداد صحیح به تفاضل دو مربع» بدست آورد. در اینجا او ثابت کرد که تعداد تبدیلهای مختلف عدد n به صورت تفاضل دو مربع برابر است با دو برابر اختلاف بین تعداد مقسوم‌علیه‌های زوج و تعداد مقسوم‌علیه‌های فرد عدد n .

در سالهایی که سرپینسکی در دانشکده درس می‌خواند، هنوز نظریه مجموعه‌ها جزو مواد درسی قرار نگرفته بود. بسیاری از ریاضی‌دانها یا درباره نظریه مجموعه‌های ژرژ کانتور (۱۸۴۵ - ۱۹۱۸) چیزی نمی‌دانستند و یا تنها تصور مبهمی از آن داشتند. در سال ۱۹۰۷، سرپینسکی درباره کشفی که درباره مورد جالب توجهی از نظریه مجموعه‌ها کرده بود، نامه‌ای به

گوتینگن نوشت . در این زمان یکی از موضوعات مهمی که سر پینسکی را بخود مشغول کرده بود ، نظریه مجموعه‌ها و مطالب مربوط به آن در توپولوژی (مکان شناسی) ، نظریه توابع با متغیر حقیقی ، منطق ریاضی و سایر رشته‌های ریاضیات بود .

اولین اثر سر پینسکی درباره نظریه مجموعه‌ها در سال ۱۹۰۸ با عنوان «در باره يك قضیه کانتور» چاپ شد ؛ سر پینسکی در این اثر ، مستقل از کانتور ، قضیه‌ای را (که البته امروز برای هر دانش آموزی روشن است) در این مورد ثابت کرد که استقرار نقاط بر صفحه را می‌توان بوسیله يك عدد حقیقی معین کرد ؛ از همین قضیه بسادگی نتیجه می‌شود که مجموعه نقاط يك خط راست و يك صفحه ، و بطور کلی فضای چند بعدی ، هم‌ارزند .

سر پینسکی ، بعدها نتایج عمیق و مهمی ، چه در زمینه نظریه انتزاعی مجموعه‌ها و چه در زمینه تعبیر توپولوژیک آن ، و بخصوص در مورد ارتباط نظریه مجموعه‌ها با منطق ریاضی ، بدست آورد . در این مورد در نظر اول می‌بایستی به فرضیه مشهور کانتور (که به اصل موضوع نظریه مجموعه‌ها معروف شده است) و نتایج هندسی آن توجه می‌شد (ابتدا بوسیله سر پینسکی و سپس عده زیادی از دانشمندان دیگر)

سر پینسکی بیش از ده اثر بزرگ درباره نظریه مجموعه‌ها ، نظریه توابع و توپولوژی نوشت ، که از آن جمله می‌توان از «Leçon sur les nombre transfinis» (درسی از اعداد ترانسفینی) که در سال ۱۹۵۰ در پاریس چاپ شد و «Cardinal and ordinal numbers» (اعداد اصلی و ترتیبی) که در سال ۱۹۵۸ در ورشو چاپ شد ، نام برد .

شروع فعالیت سر پینسکی در ریاضیات ، موفقیت آمیز بود و بسرعت کسب شهرت کرد ، سر پینسکی از پائیز ۱۹۰۸ بدعوت ای. پوثرین رئیس دانشگاه لهوو و متخصص در نظریه توابع تحلیلی ، در این دانشگاه مشغول بکار شد . او در سالهای تحصیلی بعد ، در این دانشگاه ، بتدریس «نظریه مجموعه‌ها» پرداخت ، و بقول گهویدو-فتر مورخ ریاضی اهل چک ، نخستین دانشگاهی در جهان بود که نظریه مجموعه‌ها در آن تدریس می‌شد . دانشجویان علاقه زیادی به این درس نشان می‌دادند . بعضی از این دانشجویان ، بعدها همین رشته را

تعقیب کردند و به محققین برجسته‌ای معروف شدند. بین اولین شاگردان سرپینسکی، یکی ^{۱۰۰} نیکودیم بود، که حالا استادیکی از دانشگاه‌های امریکاست؛ دیگری س. روزهویچ، که بعدها استاد دانشگاه لهوو و رئیس تجارت خارجی شد و در سال ۱۹۴۱ همراه چند استاد دیگر دانشگاه لهوو، بدست غاصبین فاشیست آلمانی کشته شد.

در سال ۱۹۱۰، دانشگاه لهوو، عنوان استادی را به سرپینسکی داد و پس از سالی، آکادمی علوم کراکو، بخاطر کارهایی که در سالهای ۱۹۰۹-۱۹۱۰ بزبان لهستانی انجام داده بود، به او پاداش داد. فعالیت‌های سرپینسکی، توجه ریاضی‌دانهای جوان و با استعداد را بخود جلب کرد. در سال ۱۹۱۳، س. مازور که وپیچ که دورهٔ دکتر ارامی گذراند و ز. یانشوسکی که دکترای خود را از دانشگاه پاریس، بمناسبت کارش در زمینهٔ توپولوژی، گرفته بود، به لهوو وارد شدند. اجتماع شاگردان و همکاران سرپینسکی، که علاقمند به نظریهٔ مجموعه‌ها بودند، بطور نمایانی توسعه پیدا کرد، و در لهوو (شهری که در آن زمان در قلمرو اطریش-هنگری بود)، مکتب جدید ریاضی لهستانی بوجود آمد.

تقریباً در همین زمان در روسیه هم، مکتب ریاضی جدیدی بوجود آمد: مکتب مسکوی نظریهٔ توابع با متغیرهای حقیقی. فکر مربوط به نظریهٔ مجموعه‌ها در ادبیات ریاضی روسیه، از اوایل قرن بیستم بچشم می‌خورد. ب. ک. ملودزوسکی در دانشگاه مسکو اولین برنامهٔ مربوط به توابع بسا متغیرهای حقیقی را بعهدده داشت «اعداد متعالی» ای. ای. ژه‌گالکین در سال ۱۹۰۷ چاپ شد و بالاخره در سال ۱۹۱۱ اثر مشهور د. ف. یگوروف دربارهٔ دنباله‌های توابع اندازه‌پذیر، منتشر شد.

فعالیت‌های ن. ن. لوزین (۱۸۸۳-۱۹۵۰)، شاگرد د. ف. یگوروف در دانشگاه مسکو، در زمینهٔ نظریهٔ توابع در بوجود آمدن مکتب جدید ریاضی، اهمیت قطعی داشت. آثار اولیهٔ لوزین از گوتینگن و پاریس فرستاده شد؛ لوزین در فاصلهٔ سالهای ۱۹۱۰-۱۹۱۴ در این دو شهر در کلاسهای ریاضی-دانهای بزرگ شرکت می‌کرد و در همانجا آثار جالبی بوجود آورد.

لوزین در سال ۱۹۱۵، رسالهٔ دکتری خود را بنام «انتگرال ورشته‌های

مثلثاتی، نوشت که در تکامل بعدی نظریهٔ توابع اثر فوق‌العاده‌ای داشت از همین زمان است که باید لوزین را در رأس مکتب ریاضی مسکو به حساب آورد، که ناشر بررسیمهای مشهور خود لوزین و شاگردان او: پ. س. الکساندروف، د. ا. منشوو، م. یا. سوسلین و آ. یا. خینچین، بود.

شکفتگی اصلی مکتب لوزین مربوط به دوران حکومت شوروی می‌شود که همراه با آثار لوزین و نخستین شاگردان او، آثاری هم از آن کالماشوروف، م. آ. لاورنتیف، پ. س. نوویکوف، پ. س. اوریسوف، ل. و. کلدیش و سایر محققین منتشر شد.

تأثیر مکتب مسکوی در پیشرفت ریاضیات کشور شوروی خیلی محسوس است، بطوریکه افکار مربوط به نظریهٔ مجموعه‌ها در آنالیز تابعی، نظریهٔ احتمالات، نظریهٔ معادلات دیفرانسیل و سایر رشته‌های ریاضی نفوذ کرد.

مکتب مسکوی در تکامل ریاضیات خارج از شوروی هم اثر فراوان داشت، بخصوص اثر جدی در ریاضیات لهستانی داشت، که در آنجا مکتب نظریهٔ توابع بطور جدی بوجود آمده بود (سرپینسکی، شتین‌گائوز، مازورکیویچ، زیگموند و دیگران)؛ علاوه بر آن تأثیر این مکتب در دانشمندان فرانسوی، انگلیسی، آلمانی و ژاپونی هم کم نیست^۱.

فعالیت‌های علمی سرپینسکی، از همان آغاز کار، در لهستان شهرت پیدا کرد. در سال ۱۹۱۳، آکادمی علوم کراکوو بخاطر «شرح نظریهٔ مجموعه‌ها» و در سال ۱۹۱۷ بخاطر «نظریهٔ اعداد»، جوایزی به او اعطا کرد. هر دو کتاب، اولی در سال ۱۹۱۲ و دومی در سال ۱۹۱۴، در ورشو بزبان لهستانی چاپ شد.

در ابتدای جنگ اول جهانی، سرپینسکی مجبور شد به ویاتکا عزیمت کند (در آن زمان شهر لهوو جزو اطریش - هنگری محسوب می‌شد). ولی سرپینسکی در اینجا خیلی نماند، زیرا د. ف. یگورو و ب. ک. مه‌لودزه یوسکی، بعد از تلاش بسیار، موفق شدند اجازهٔ اقامت او را در مسکو بگیرند.

سرپینسکی در سال ۱۹۱۵ به مسکو رفت و در جریان قریب سه سال فعالیت‌های علمی خود را در آنجا دنبال کرد و بر خوردهای جالب و مفیدی با ریاضی‌دانهای

(۱) آ. پ. یوشکویچ، در کتاب «تاریخ علوم تجربی در روسیه».

روسی داشت. امکان همکاری با سرپینسکی، بسیاری از ریاضی دانهای مسکو را خوشحال کرده بود. مثلاً پ. س. آلکساندروف (که در آن موقع شاگرد لوزین بود) با افتخار از این خاطره یاد می‌کند، که در پائیز ۱۹۱۵ توانست دربارهٔ اولین کار علمی خود در حضور سرپینسکی سخنرانی ایراد کند. سرپینسکی هم با احترام و تشکر ازدقت و توجهی که به گوروو، مه‌لودزه یوسکی و دیگر ریاضی دانهای مسکوی نسبت به او داشتند، یاد می‌کند. ولی بیش از همه دوستی نزدیک او با لوزین، برای سرپینسکی، اهمیت خاص دارد. این دوستی بر اساس علاقه‌های مشترک علمی بنیان گذاشته شد و بخاطر تحقیقات مشترک آنها محکم شد و منبع الهامی برای هر دوی آنها، در طول چند ده سال (تا زمان مرگ لوزین) بود.

چه در ویاتکا و چه در مسکو، هرگز فکر تأسیس يك دانشگاه لهستانی در ورشو، سرپینسکی را رها نکرد. سرپینسکی اولین جلد «آنالیز ریاضی» خود را در دو قسمت، در سالهای ۱۹۱۶-۱۹۱۷، در مسکو بزبان لهستانی چاپ کرد. این کتاب در سال ۱۹۲۳ در ورشو تجدید چاپ شد و در طول سالهای زیادی کتاب درسی دانشجویان لهستانی بود. در سالهای ۱۹۱۵-۱۹۱۸، سرپینسکی ۳۶ اثر خود را چاپ کرد (که چهارتای آنها با لوزین مشترکاً تهیه شده بود)، یعنی بهمان اندازه که در چهار سال قبل از آن منتشر کرده بود. در بهار ۱۹۱۷، سرپینسکی از طریق روزنامه لهستانی که در مسکو نشر می‌شد، بطور غیر منتظره مطلع شد که آکادمی علوم کراکوو، او را به عضویت خود انتخاب کرده است. این خبر او را خیلی خوشحال کرد. بعد از انقلاب اکتبر، سرپینسکی به لهوو بازگشت و در آنجا در دانشگاه مشغول شد. در پائیز ۱۹۱۸، کرسی خود را در دانشگاه ورشو، که بتازگی تأسیس شده بود، بدست آورد. سرپینسکی در ورشو، دوستان خود پروفیسور ر. یانیشوسکی و س. مازورکه ویچ را پیدا کرد که بلافاصله به کمک آنها به طرح برنامهٔ تکامل ریاضیات در لهستان پرداخت. در سال ۱۹۱۹، این سه ریاضی‌دان تصمیم گرفتند، برای اولین بار در دنیا، مجلهٔ ریاضیات اختصاصی *Fundamenta*

(۱) عکسی باقی مانده است، که در آن به گوروو، لوزین و سرپینسکی را

«*Mathematicae*» را بوجود آوردند که در زمینه نظریه مجموعه‌ها، مکان شناسی (توپولوژی)، نظریه توابع با متغیرهای حقیقی و منطق ریاضی بحث کند. بسیاری از ریاضی‌دانهای مشهور (و منجمله آ. له بگ) اعتقادی به موفقیت این مجله نداشتند، آنها می‌گفتند، مجله‌ای که به سایر رشته‌های ریاضی نمی‌پردازد، نمی‌تواند به حیات خود ادامه دهد. اولین شماره این مجله، در سال ۱۹۲۵، چند ماهی بعد از مرگ زیانیشوسکی (یکی از مؤسسه‌های آن) منتشر شد. کاری را که سرپینسکی شروع کرده بود، با همکاری مازورکه ویچ تا ۱۹۴۵ (سال مرگ مازورکه ویچ) ادامه داشت، سپس وظیفه سنگین سردبیری را با ک. کوراتوسکی بعهده گرفت. در سالهای اخیر، سرپینسکی سردبیر افتخاری و کوراتوسکی سردبیر مجله می‌باشد. این مجله، نه تنها در لهستان بلکه در همه کشورهای اروپایی که از آن استفاده می‌کنند، نقش بسیار مؤثری در پیشرفت ریاضیات داشته است. وقتی که در سال ۱۹۳۵، بیست و پنجمین شماره مجله منتشر شد، یکی از ریاضی‌دانهای امریکایی گفت که تاریخ «*F. M.*» در عین حال تاریخ نظریه معاصر توابع با متغیرهای حقیقی است. در ۱۹۶۲، وقتی که پنجاهمین شماره مجله منتشر شد، پ. س. آلکساندروف اظهار داشت که سالروز این مجله، جشن همه ریاضی‌دانهای جهان است. همانطور که سرپینسکی متذکر می‌شود، در ۵ شماره این مجله، بیش از ۱۵۰۰ نوشته از ۴۲۰ مؤلف مختلف چاپ شده است، و از آنجمله قریب ۳۰۰ نفر آنها خارجی بوده‌اند، که در بین آنها بزرگترین ریاضی‌دانهای معاصر دیده می‌شود. در این مورد باید سهم اساسی را به ریاضی‌دانهای لهستانی، و بخصوص خود سرپینسکی داد که از ۱۵۰۰ اثر، ۲۶۲ تای آنها متعلق به اوست.

در سال ۱۹۲۱، سرپینسکی به عضویت آکادمی لهستان انتخاب شد. در بسیاری از کشورهای جهان، فعالیت خلاق و استثنائی او مورد توجه جدی قرار گرفت. سرپینسکی دعوت‌های متعددی از دانشگاه‌های خارجی دریافت کرد. او سخنرانیهائی در ستراسبورگ، سوربن، یاسی (در رومانی)، بروکسل، ژنو، بازل، پراگ، بوداپست، رم و دیگر شهرها انجام داد. نام سرپینسکی بسرعت جنبه عام پیدا کرد. در کتابهای ریاضی اصطلاحات «منحنی عمومی سرپینسکی»، «منحنی مثلثی سرپینسکی»، «پیوستگی سرپینسکی» و غیره

معمول شد .

سرپینسکی در سالهای جنگ دوم جهانی، کارهای علمی خود را تعطیل نکرد و حتی در دانشگاه مخفی ورشو تدریس می کرد . در پائیز ۱۹۴۴، وقتی که ارتش آلمان شروع به سوزاندن ورشو کرد ، سرپینسکی مجبور شد، به کمک دوستان خود ، شهر را ترک کند و به حومه مهخوووسکی برود .

در فوریه ۱۹۴۵ ، بعد از آنکه لهستان بوسیله ارتش شوروی آزاد شد، سرپینسکی پیاده به کراکوو برگشت و به دانشگاه وارد شد . در آنجا به ایراد سخنرانیها و چاپ مقالهها و کتابهای خود پرداخت و بعد از چند ماه چاپ مجله «F. M» را ، که در زمان جنگ قطع شده بود، از سر گرفت .

از پائیز ۱۹۴۵ ، سرپینسکی به ورشو بازگشت و با پشتکار فوق العاده به تجدید حیات دانشگاه پرداخت . دوباره سخنرانیهای او در دانشگاههای مختلف اروپا ، هند ، امریکا ، کانادا و شرکت در کنفرانسها و کنگرهها شروع شد .

فعالیتهای سرپینسکی ، در جمهوری مردم لهستان ، ارج بسیار گذاشته شد . در سال ۱۹۴۹، جایزه درجه اول دولتی به او داده شد ؛ در سال ۱۹۵۱، به مناسبت بیستمین سال انجام وظیفه ریاست مجمع علمی ورشو ، مدالی بانقش برجسته سرپینسکی ضرب شد .

سرپینسکی در سالهای ۱۹۵۲-۱۹۵۷ نایب رئیس آکادمی علوم لهستان بود . در آوریل ۱۹۵۷ ، شرکت در اجلاس علمی اتحاد جماهیر شوروی را، که به مناسبت دویست و پنجاهمین سال تولد لئونارد اولر تشکیل شده بود ، قبول کرد . در همین سال، او چاپ «Acta Arithmetica» را بنیان گذاشت، که تنها مجله ای در جهانست که به مسائل مربوط به نظریه اعداد می پردازد .

دره ۲ سال اخیر ، دوباره نظریه اعداد، جای مهمی را در بین کارهای سرپینسکی ، اشغال کرده است . نتایج فراوانی که سرپینسکی و شاگردان او (که مشهورترین آنها آندره شینتسل می باشد) بدست آوردند، به غنای نظریه اعداد و بخصوص نظریه مقدماتی اعداد ، کمک فراوانی کرده است .

هنوز هم سرپینسکی ، مثل سالهای گذشته ، به نشر مقاله های بکر و بدون رقیب و چاپ کتابهای اختصاصی و عمومی مشغول است . آنچه تاکنون از

سرپینسکی چاپ شده است، بالغ بر ۷۰۰ عنوان است، که در بین آنها ۳۰ عنوان مربوط به کتابهای درسی و عمومی است.

دانشگاههای ده شهر: آمستردام، بوردو، پراتسلاو، لاکهناو (هند)، له وو، مسکو، پاریس، پراگ، صوفیه و تارتو، به سرپینسکی دکترای افتخاری داده اند. سرپینسکی نایب رئیس آکادمی بین المللی علوم فلسفی، عضو وابسته آکادمی علوم بلغارستان، ایتالیا، پاریس، رومانی، نیویورک، چکوسلواکی و غیره می باشد. او همچنین عضو وابسته انجمن ریاضی دانهای لندن و بسیاری از انجمنهای علمی دیگر است.

وانسلاو سرپینسکی، آکادمیسین قدیمی لهستان است، او سه نسل شاگردان را تربیت کرده است، که از میان آنها ریاضی دانهای بزرگی پیدا شده است. فعالیت خلاق و بدون وقفه او در جریان شصت سال، شهرت و جلالی به علم لهستانی داد. حق است که سرپینسکی را پدر مکتب ریاضی لهستان می نامند.

ای. ملنیکوو

نظریه مقدماتی اعداد باید یکی از بهترین موضوعها، برای آموزش ابتدائی ریاضیات بحساب آید. برای آموزش این رشته اطلاعات قبلی بسیار محدودی لازم است، موضوع آن قابل درک و روشهایی که در آن بکار می رود، ساده، کلی و معدود است. بین علوم ریاضی، هیچ علمی نمی تواند از لحاظ ارضای کنجکاوی طبیعی آدمی، با آن برابری کند.

درباره این کتاب

نظریه اعداد از خیلی قدیم، و در یونان باستان، بوجود آمد، ولی پیشرفت آن به کندی صورت گرفت. علاقه جدی نسبت به موضوع نظریه اعداد تا حد زیادی به کوششهای پ. فرما (۱۶۰۱-۱۶۶۵) مربوط است. نظریه اعداد، به عنوان یک علم مستقل، رسمیت مقدماتی خود را در قرن هیجدهم و به مناسبت کارهای متعدد ل. اولر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) بدست آورد. پیشرفتهای بعدی با تحقیقات ک. ف. گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵) و دانشمندان بعد از او انجام گرفت. بررسیهای پ. ل. چیشف (۱۸۲۱-۱۸۹۴) و ریاضی دانهای روسی و شوروی، سهم زیادی در تکامل نظریه اعداد داشت. کارهای ای. م. وینوگرادوف، یو. و. لیمیک، ل. گ. شنیرلمان و سایر ریاضی دانهای شوروی، در زمینه نظریه اعداد، اهمیت جهانی دارد. سهم ریاضی دانهای سایر کشورهای جهان هم در تکامل نظریه اعداد جدی و قابل توجه است.

(۱) این عبارت متعلق به گ. ه. هاردی است، که سرپینسکی آنرا در درس لوحه کتاب خود به نام «۲۰۰ مسئله درباره نظریه مقدماتی اعداد» (که به زبان لهستانی چاپ شده است) آورده است.

در زمان ما ، نظریه اعداد یکی از رشته‌های وسیع و مشکل ریاضیات شده است . این علم در جهات مختلف تکامل یافته و از روشهای متنوعی استفاده می‌کند .

کاملاً طبیعی است که مطالب مربوط به حساب بر اساس روشهای «مدماتی» ، یعنی روشهای حسابی و جبر مدماتی قرار گرفته باشد . در بعضی موارد ، این توقع بطور نسبی بسادگی برآورده می‌شود . ولی در بعضی موارد جستجوی اثبات مدماتی به اشکالاتی برخورد می‌کند و همیشه هم به موفقیت نمی‌انجامد . وقتی که آرتین ، و اندرواردن ، سلبرگ و دیگران مسائل مشکلی از نظریه اعداد را با روشهای مدماتی حل کردند ، همه دنیای ریاضیات را به شگفتی انداخت ، ولی راه حل‌های آنها بسیار مشکل است و فهمیدن و یا آماده کردن آنها برای خواننده ، صرف وقت و دقت زیادی لازم دارد .

مسائلی که در این کتاب آمده است ، مربوط به نظریه مدماتی اعداد است . (مدماتی به معنای معمولی کلمه) ، بهمین مناسبت قسمت عمده کتاب می‌تواند مورد استفاده گروه وسیعی قرار گیرد . در کتاب به مسائل مشکلی هم برخورد می‌کنیم که بعضی از آنها بتازگی و بوسیله دانشمندان مثل سرپینسکی ، اردیوش ، شینتسل و دیگران بررسی شده است . شماره اینگونه مسائل را با ستاره مشخص کرده‌ایم .

اصل این کتاب در ۱۹۶۴ ، در لهستان منتشر شد که شامل ۲۰۰ مسئله با اضافاتی است . در چاپ حاضر ، علاوه بر این مسائل ، قریب چهار مسئله جدید وجود دارد ، که بوسیله مؤلف برای من فرستاده شده است .

این کتاب را نمی‌توان کتاب مسئله‌ای درباره نظریه اعداد دانست ، در این کتاب درباره بعضی از مباحث برنامه درسی تمرین و یا مسئله‌ای دیده نمی‌شود . با وجود این مسائل این کتاب و راه حل‌های کوتاه آنها ، می‌تواند وسیله پر قدرتی برای شکل دادن به تفکر و استدلال ریاضی خواننده باشد و به عنوان کار اضافی در زمینه نظریه مدماتی اعداد مورد استفاده قرار گیرد . مطالعه این کتاب می‌تواند عادت به درست اندیشیدن را بوجود آورد که در همه رشته‌های ریاضی شرط اول کار است ...

در کتاب ، به عنوان ضمیمه ، دو قسمت اضافه شده است که ترجمه‌ای است

از کتاب سرپینسکی بنام «نظریهٔ مقدماتی اعداد»، که در ۱۹۶۴ در ورشو به زبان انگلیسی چاپ شده است. در ضمیمهٔ اول، اثبات کاملاً مقدماتی از پوستولات برتران داده است که بوسیلهٔ پ. اندیوش طرح شده است، و در ضمیمهٔ دوم اثبات قضیهٔ شرک از خود سرپینسکی.

در کتاب تبصره‌هایی وجود دارد که از من است و بوسیلهٔ شماره‌هایی که داخل کروش قرار گرفته‌اند مشخص شده است...

ای. ملنیکوو

۱. قابلیت تقسیم

۱. مطلوبست همه عددهای طبیعی n ، که به ازای آنها عدد $n^2 + 1$ بر $n + 1$ قابل قسمت باشد.

۲. مطلوبست همه عددهای $x \neq 3$ ، بطوری که $x^3 - 3$ بر $x - 3$ قابل قسمت باشد.

۳. ثابت کنید که اگر $a^2 + b^2$ بر 7 قابل قسمت باشد (a و b عددهای صحیح اند)، a و b مضربی از 7 خواهند بود.

۴. ثابت کنید که بی نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که به ازای آنها عدد $4n^2 + 1$ بر هر دو عدد ۵ و ۱۳ قابل قسمت باشد.

۵. ثابت کنید که برای عددهای طبیعی n ، عدد $3^{2n} + 2 - 26n - 27$ مضربی از ۱۶۹ می باشد.

۶. ثابت کنید که برای $k = 0, 1, 2, \dots$ ، عدد $2^{2^{k+2}} + 3$ بر ۱۹ قابل قسمت است.

۷. ثابت کنید $3^{70} + 2^{70}$ بر ۱۳ قابل قسمت است.

۸. اگر $F_n = 2^{2^n} + 1$ و $n = 1, 2, \dots$ باشد، ثابت کنید $2^{F_n} - 2$ بر F_n قابل قسمت است.

۹. ثابت کنید که بی نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که $2^n + 1$ بر n قابل قسمت باشد.

۱۰. ثابت کنید که اگر k عددی فرد و n عددی طبیعی باشد، $k^{2^n} - 1$ بر 2^{n+2} قابل قسمت است.

۱۱. ثابت کنید که $20^{15} - 1$ بر $11 \times 31 \times 61$ قابل قسمت است.

۱۲. ثابت کنید که اگر m عددی طبیعی و $a > 1$ باشد، داریم:

$$\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1 \right) = (a - 1, m)$$

۱۳. ثابت کنید که اگر n عددی طبیعی باشد، عدد $3(1^5 + 2^5 + \dots + n^5)$ بر عدد $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ قابل قسمت است.

۱۴. عددهای طبیعی $n > 1$ را چنان پیدا کنید که به ازای آنها عدد $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$ بر n قابل قسمت باشد.

۱۵. تحقیق کنید به ازای مقادیر طبیعی n ، از عددهای
 $a_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ و $b_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ همیشه یکی
 قابل قسمت بر ۵ و دیگری غیر قابل قسمت بر ۵ است. شرایط n را
 برای هر حالت پیدا کنید.

۱۶. ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، عدد طبیعی برای x
 وجود دارد، بطوریکه هر يك از جمله‌های دنباله نامحدود

$$x+1, x^x+1, x^{x^x}+1, x^{x^{x^x}}+1, \dots$$

بر n قابل قسمت باشد.

۱۷. ثابت کنید که بی‌نهایت عدد فرد n وجود دارد که وقتی x عددی
 زوج باشد، هیچیک از جمله‌های دنباله

$$x^x+1, x^{x^x}+1, x^{x^{x^x}}+1, \dots$$

بر n قابل قسمت نباشند.

۱۸. ثابت کنید که به ازای همه مقادیر طبیعی n ، عدد $(n+1)^n - 1$
 بر n^2 قابل قسمت است.

۱۹. ثابت کنید که برای همه مقادیر طبیعی n ، عدد $1 - (2^n - 1)^n$
 بر $(2^n - 1)^2$ قابل قسمت است.

۲۰. ثابت کنید که بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، بطوریکه
 به ازای آنها $2^n + 1$ بر n قابل قسمت باشد، همه عددهای اول n را که
 دارای این خاصیت هستند پیدا کنید.

۲۱. ^{*} عددهای فرد n را طوری پیدا کنید که $3^n + 1$ بر n قابل

قسمت باشد .

۲۲* ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی $a > 1$ ، بی نهایت عدد

طبیعی n وجود دارد ، بنحوی که $a^n + 1$ بر n قابل قسمت باشد .

۲۳* ثابت کنید که بی نهایت عدد طبیعی n وجود دارد ، بنحوی

که $2^n + 2$ بر n قابل قسمت باشد .

۲۴. عددهای طبیعی a را طوری پیدا کنید، که به ازای آنها، عدد

$a^{10} + 1$ بر 10 قابل قسمت باشد .

۲۵* ثابت کنید که عدد طبیعی $n > 1$ وجود ندارد، بطوریکه عدد

$2^n - 1$ بر n قابل قسمت باشد .

۲۶. عددهای طبیعی n را طوری پیدا کنید که به ازای آنها

$n \cdot 2^n + 1$ بر 3 قابل قسمت باشد .

۲۷ ثابت کنید که برای هر عدد فرد اول p ، بی نهایت عدد طبیعی

n وجود دارد ، بنحوی که $1 + n \cdot 2^n$ بر p قابل قسمت باشد .

۲۸. ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، عدد های طبیعی

$x > n$ و y وجود دارند ، بنحوی که y^y بر x^x قابل قسمت ، ولی y

بر x غیر قابل قسمت باشد .

۲۹. ثابت کنید که بی نهایت عدد طبیعی n وجود دارد ، بنحوی که

عدد $3 - n^2$ بر مجذور کاملی بزرگتر از واحد قابل قسمت باشد، کوچکترین

عدد طبیعی n را در این مورد پیدا کنید .

۳۰* ثابت کنید که اگر n عددی فرد باشد، $1 - 2^{n!}$ بر n قابل قسمت

است .

۳۱. ثابت کنید که در دنباله نامحدود

$$2^n - 3 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

بی نهایت عدد مضرب ۵ و بی نهایت عدد مضرب ۱۳ وجود دارد ، ولی حتی يك عدد مضرب 5×13 وجود ندارد .

۳۲* اگر n عددی مرکب (غیراول) باشد ، دو جواب کوچکتر را برای n طوری پیدا کنید که $2^n - 2$ بر n و $3^n - 3$ بر n قابل قسمت باشند .

۳۳* کوچکترین عدد طبیعی n را طوری پیدا کنید که $2^n - 2$ بر n قابل قسمت باشد و $3^n - 3$ بر n قابل قسمت نباشد .

۳۴ کوچکترین عدد طبیعی n را طوری پیدا کنید که $3^n - 3$ بر n قابل قسمت باشد و $2^n - 2$ بر n قابل قسمت نباشد .

۳۵ برای هر عدد طبیعی a ، عدد مرکب n را طوری پیدا کنید که $a^n - a$ بر n قابل قسمت باشد .

۳۶ ثابت کنید که اگر برای عددهای صحیح a ، b و c ، عدد $a^3 + b^3 + c^3$ بر ۹ قابل قسمت باشد ، لااقل یکی از عددهای a ، b ، c بر ۳ قابل قسمت است .

۳۷ ثابت کنید که اگر برای اعداد صحیح a_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) عدد $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 + a_5^3$ بر ۹ قابل قسمت باشد ، a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 بر ۳ قابل قسمت خواهد بود .

۳۸ ثابت کنید که اگر x ، y و z اعدادی طبیعی ، $(x, y) = 1$ و $x^2 + y^2 = z^2$ باشد ، xy بر ۷ قابل قسمت است و ضمناً شرط $(x, z) = 1$ شرط لازمی است .

۰۳۹* ثابت کنید که بی‌نهایت زوج اعداد طبیعی x و y وجود دارد بنحوی که $y(y+1)$ بر $x(x+1)$ قابل قسمت باشد، ولی y بر x یا $x+1$ و $y+1$ بر x یا $x+1$ قابل قسمت نباشد. کوچکترین جواب x و y را پیدا کنید.

۰۴۰ برای هر عدد طبیعی $s \leq 25$ و همچنین برای $s = 100$ ، کوچکترین عدد طبیعی n_s را طوری پیدا کنید که مجموع ارقام مساوی s (در عدد شماری به مبنای ۱۰) و بر s قابل قسمت باشد.

۰۴۱* ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی s ، عدد طبیعی n وجود دارد که مجموع ارقام آن (در عدد شماری به مبنای ده) مساوی s و بر s قابل قسمت است.

۰۴۲* ثابت کنید

(a) هر عدد طبیعی مقسوم علیه‌هایی به شکل $4k+1$ دارد، که تعداد آنها از مقسوم علیه‌های به شکل $4k+3$ کمتر نیست.

(b) بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد که تعداد مقسوم علیه‌های طبیعی هر یک از آنها که به شکل $4k+1$ است، با تعداد مقسوم علیه‌هایی که بشکل $4k+3$ است، برابر است.

(c) بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد که تعداد مقسوم علیه‌های طبیعی به شکل $4k+1$ در مورد هر یک از آنها، بیش از تعداد مقسوم علیه‌های طبیعی به شکل $4k+3$ است.

۰۴۳ a ، b و c عددهای صحیح دلخواه و n عددی طبیعی بزرگتر از ۳ است. ثابت کنید عدد صحیح k وجود دارد، بنحوی که هیچ‌یک از عددهای $k+a$ ، $k+b$ و $k+c$ بر n قابل قسمت نباشند.

۲. عددهائی که نسبت بهم اولند

۴۴. ثابت کنید

(a) برای $n = 1, 2, \dots$ داریم $(n, 2^{2^n} + 1) = 1$.(b) بی نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که $(n, 2^n - 1) > 1$ باشد. کوچکترین آنها را پیدا کنید.۴۵. ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح k ، عددهای $2k + 1$ و $9k + 4$ نسبت بهم اولند و برای عددهای $2k - 1$ و $9k + 4$ ، بزرگترین مقسوم علیه مشترك را بدست آورید.

۴۶. ثابت کنید

(a) دنباله صعودی نامحدود از عددهای مثلثی (یعنی عددهای به شکل

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$
 وجود دارد که دوه دو نسبت بهم اولند.

(b) دنباله صعودی نامحدود از عددهای به شکل چهار وجهی

(یعنی عددهای به شکل $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ ؛ $n = 1, 2, \dots$) وجود

دارد که دو به دو نسبت بهم اولند.

۴۷. اگر a و b دو عدد مختلف صحیح باشند، ثابت کنید کهبی نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که عددهای $a + n$ و $b + n$ نسبت بهم اول باشند.۴۸. a, b, c سه عدد صحیح مختلف اند. ثابت کنید، بی نهایتعدد طبیعی n وجود دارد بنحوی که عددهای $a + n, b + n, c + n$ دو به دو نسبت بهم اول باشند.۴۹. نمونه ای برای چهار عدد صحیح مختلف a, b, c, d پیدا کنید

که در مورد آنها حتی يك عدد طبیعی n وجود نداشته باشد ، بنحوی که $a+n$ ، $b+n$ ، $c+n$ و $d+n$ دو به دو نسبت بهم اول شوند .

۵۰. ثابت کنید که هر عدد طبیعی بزرگتر از ۶ را می توان به-

صورت مجموع دو عدد بزرگتر از واحد نوشت که نسبت بهم اول باشند.

۵۱* ثابت کنید که هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱۷ را می توان

بصورت مجموع سه عدد بزرگتر از واحد نوشت، که دو به دو نسبت بهم اول

باشند و ضمناً عدد ۱۷ دارای این خاصیت نیست .

۵۲* ثابت کنید که هر عدد زوج $2k$ را می توان بصورت تفاضل

دو عدد طبیعی مختلف نوشت ، بطوریکه هر يك از آنها نسبت به عدد

طبیعی مفروضی مثل m اول باشد .

۵۳* ثابت کنید که از دنباله فیبوناچی (که با شرایط

$u_1 = u_2 = 1$ ، $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ برای $n = 1, 2, \dots$ معین می شود):

می توان دنباله صعودی نامحدودی درست کرد که جمله های آن دو به دو

نسبت بهم اول باشند .

۳. تصاعد حسابی

۵۴. ثابت کنید که تصادهای حسابی (با تعداد جمله های دلخواه)

وجود دارد که جمله های هر يك از آنها ، دو به دو نسبت بهم اول باشند .

۵۵. ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی k ، مجموعه همه عددهای

طبیعی n ، که در مورد آنها تعداد مقسوم علیه های طبیعی مضربی از k

است ، شامل يك تصاعد حسابی نامحدودند .

۵۶. ثابت کنید که بی نهایت دستگاه عددهای طبیعی x, y, z

وجود دارد بنحوی که عددهای $x(x+1)$ ، $y(y+1)$ و $z(z+1)$ تشکیل يك تصاعد حسابی صعودی بدهند .

۵۷. همهٔ مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای را پیدا کنید که اضلاع آنها اعدادی طبیعی و به تصاعد حسابی باشند .

۵۸. تصاعد حسابی صعودی نامحدودی، با کوچکترین قدر نسبت ممکنه، پیدا کنید که جمله‌های آن عددهای طبیعی باشد و حتی یکی از آنها عدد مثلثی نباشد .

۵۹. مطلوبست شرط لازم و کافی برای اینکه تصاعد حسابی $ak+b$ ($k=0,1,2,\dots$) که در آن a و b عددهای طبیعی هستند، شامل بی‌نهایت جملهٔ مجذور کامل باشد .

۶۰* . ثابت کنید تصاعدهای حسابی (با تعداد جمله‌های دلخواه) وجود دارد، بنحوی که جمله‌های آن مختلف و هر يك از آنها توانی از يك عدد طبیعی بزرگتر از واحد باشد .

۶۱. ثابت کنید که تصاعد حسابی نامحدودی وجود ندارد، بنحوی که جمله‌های آن مختلف و هر يك از آنها توانی از يك عدد طبیعی با نمای طبیعی بزرگتر از واحد باشد .

۶۲. ثابت کنید که نمی‌توان چهار عدد طبیعی متوالی پیدا کرد، بنحوی که هر يك از آنها توانی از يك عدد طبیعی با نمای طبیعی بزرگتر از واحد باشد .

۶۳. ثابت کنید که در هر تصاعد حسابی صعودی، که جمله‌های آن عددهای طبیعی است، فاصله‌ای به طول دلخواه وجود دارد که فقط از عددهای مرکب تشکیل شده است .

۶۴* . a و b دو عدد طبیعی و نسبت بهم اولند ؛ ثابت کنید که در تصاعد حسابی $ak + b$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) بی نهایت جمله وجود دارد که نسبت به عدد طبیعی m اولند .

۶۵ . ثابت کنید که در هر تصاعد حسابی صعودی، که از عددهای طبیعی تشکیل شده است، عددهائی وجود دارد که s رقم اول آنها (در دستگاه عدد شماری به مبنای ۱۰) دلخواه باشند .

۶۶ . مطلوبست همه تصاعدهای حسابی صعودی ، که از سه جمله دنباله فیبوناچی (مسئله ۵۳ را ببینید) تشکیل شده باشد . ثابت کنید که نمی توان از جمله های دنباله فیبوناچی يك تصاعد حسابی چهار جمله ای درست کرد .

۶۷* . تصاعد حسابی صعودی با حداقل قدر نسبت پیدا کنید ، بطوری که از عددهای طبیعی تشکیل شده باشد و شامل هیچیک از جمله های دنباله فیبوناچی نباشد .

۶۸* . اگر a و b دو عدد طبیعی و نسبت بهم اول باشند ، تصاعد حسابی $ak + b$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) را چنان پیدا کنید که شامل هیچیک از جمله های دنباله فیبوناچی نباشد .

۶۹ . اگر a و b دو عدد طبیعی و نسبت بهم اول باشند ، ثابت کنید در هر تصاعد حسابی $ak + b$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) ، بی نهایت جمله وجود دارد که دو به دو نسبت بهم اولند .

۷۰* . ثابت کنید در هر تصاعد حسابی $ak + b$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) a و b عددهای طبیعی)، بی نهایت جمله وجود دارد که دارای یک نوع مقسوم علیه های اول هستند .

۷۱. از قضیهٔ دیریکله، که بر طبق آن در هر تصاعد حسابی $ak + b$ ($a, k = 0, 1, 2, \dots$) دو عدد طبیعی و نسبت بهم اول، بی نهایت عدد اول وجود دارد [۱]، نتیجه بگیرید: در هر چنین تصاعدی، بی نهایت جمله وجود دارد که هر یک از آنها حاصل ضربی از s عدد مختلف اول باشند.

۷۲. همهٔ تصاعدهای حسابی با قدر نسبت ۱۰ را چنان پیدا کنید که از بیش از دو عدد اول تشکیل شده باشند.

۷۳. مطلوب است همهٔ تصاعدهای حسابی با قدر نسبت ۱۰۰ که از بیش از دو عدد اول تشکیل شده باشند.

۷۴*. تصاعد حسابی صعودی ده جمله‌ای پیدا کنید که از اعداد اول تشکیل شده باشد و ضمناً آخرین جملهٔ آن کوچکترین عدد ممکن با این شرایط باشد.

۷۵. نمونه‌ای از تصاعد حسابی صعودی و نامحدود بدهید که از عددهای طبیعی تشکیل شده باشد و هیچیک از جمله‌های آن مجموع یا تفاضل دو عدد اول نباشد.

۴. عددهای اول و مرکب

۷۶. ثابت کنید که برای هر عدد زوج $n > 6$ ، عددهای اول p و q ، کوچکتر از $n - 1$ ، وجود دارد، بنحوی که $(n - p, n - q) = 1$ باشد.

۷۷. همهٔ عددهای اولی را پیدا کنید که در عین حال مجموع و تفاضل دو عدد اول باشند.

۷۸. کوچکترین سه عدد طبیعی n را چنان پیدا کنید که بین

n و $n+10$ حتی يك عدد اول وجود نداشته باشد؛ همچنین کوچکترین سه عدد طبیعی m را طوری پیدا کنید که بین m و $10(m+1)$ حتی يك عدد اول وجود نداشته باشد.

۷۹. ثابت کنید هر عدد اول که بصورت $4k+1$ باشد، وتر مثلث قائم الزاویه‌ای است که اضلاع آن با عددهای طبیعی قابل بیان هستند.

۸۰. اگر p ، q و r عددهائی اول باشند، چهار جواب معادله $p^2 + q^2 + 1 = r^2$ را بدست آورید.

۸۱. ثابت کنید که اگر p ، q ، r ، s و t عددهائی اول باشند، معادله زیر جواب ندارد:

$$p^4 + q^4 = r^2 + s^2 + t^2$$

۸۲. تمام جوابهای معادله زیر را، برای عددهای اول p ، q و r بدست آورید:

$$p(p+1) + q(q+1) = r(r+1)$$

۸۳. عددهای اول p ، q و r را چنان پیدا کنید که عددهای $p(p+1)$ ، $q(q+1)$ و $r(r+1)$ يك تصاعد حسابی صعودی تشکیل دهند.

۸۴. همه عددهای طبیعی n را طوری پیدا کنید که هر يك از $n+1$ ، $n+3$ ، $n+7$ ، $n+9$ ، $n+13$ و $n+15$ اول باشند.

۸۵. همه عددهای صحیح $k \geq 5$ را پیدا کنید، بنحوی که دنباله

$$k+1, k+2, \dots, k+10$$

شامل حداکثر عددهای اول باشد .

۸۶. همهٔ عددهای صحیح $k \geq 0$ را پیدا کنید ، بنحوی که تعداد عددهای اول در دنبالهٔ

$$k+1, k+2, \dots, k+100$$

حداکثر باشد .

۸۷. صد عدد طبیعی متوالی پیدا کنید که شامل ۲۵ عدد اول باشد، همهٔ جوابها را معین کنید .

۸۸. تمام عددهای اول p را چنان پیدا کنید که $2^p + 1$ بر p قابل قسمت باشد .

۸۹. مطلوبست همهٔ فواصلی از عددهای طبیعی متوالی، بطوریکه هر يك از آنها از ۲۱ عدد تشکیل شده باشد و شامل ۸ عدد اول باشد.

۹۰. همهٔ عددهای p را چنان پیدا کنید که هر يك از شش عدد $p, p+2, p+6, p+8, p+12, p+14$ اول باشند .

۹۱. ثابت کنید که بی نهایت زوج عدد طبیعی m و n وجود دارد، بنحوی که اولاً مقسوم علیه‌های اول عددهای m و n برای هر دو عدد یکی باشد، ثانیاً مقسوم علیه‌های اول عددهای $m+1$ و $n+1$ برای هر دوی آنها یکی باشد .

۹۲. اگر n عددی طبیعی باشد ، تمام عددهای اول را که بصورت $1 - \frac{n(n+1)}{2}$ باشند، پیدا کنید .

۹۳. مطلوبست همهٔ عددهای اول بصورت $T_n + 1$ ، که در آن n عددی طبیعی و $T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ باشد.

۰۹۴. ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی s ، عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که عدد $1 - 2^n$ لااقل s مقسوم‌علیه اول مختلف داشته باشد.

۰۹۵. پنج عدد اول پیدا کنید، بطوریکه هر یک مساوی مجموع توانهای چهارم دو عدد طبیعی باشد.

۰۹۶. ثابت کنید که بی‌نهایت زوج عدد اول متوالی وجود دارد که غیر از زوج اعداد اول توأم هستند.

۰۹۷. براساس قضیه دیریکله (مسئله ۷۱ را ببینید) در باره تصاعد حسابی، ثابت کنید که بی‌نهایت عدد اول وجود دارد که هیچیک از آنها متعلق به زوج اعداد اول توأم نیستند.

۰۹۸. پنج جواب کوچکتر را برای عدد طبیعی n طوری پیدا کنید که به ازای آنها عدد $1 - n^2$ مساوی حاصلضرب سه عدد اول مختلف باشد.

۰۹۹. پنج جواب کوچکتر را برای عدد طبیعی n طوری پیدا کنید که به ازای آنها عدد $1 + n^2$ مساوی حاصلضرب سه عدد اول مختلف باشد، و عدد طبیعی n را طوری پیدا کنید که $1 + n^2$ مساوی حاصلضرب سه عدد اول مختلف و فرد باشد.

۱۰۰. ثابت کنید

(a^*) بین هر سه عدد طبیعی متوالی بزرگتر از ۷؛ لااقل یکی دارای دو مقسوم‌علیه مختلف اول است؛

(۱) زوج اعداد اول توأم، به دو عدد اولی گفته می‌شود که تفاضل آنها مساوی ۲ باشد «مترجم»

(b) از هر ۲۴ عدد طبیعی متوالی بزرگتر از ۵، لااقل یکی دارای سه مقسوم‌علیه مختلف اول است .

۱۰۱ . پنج جواب کوچکتر را برای عدد طبیعی n طوری پیدا کنید که به‌ازای آنها هر يك از عددهای n ، $n+1$ و $n+2$ حاصلضرب دو عدد اول مختلف باشند؛ و ثابت کنید که چهار عدد طبیعی متوالی نمی‌توان یافت بطوریکه هر يك از آنها حاصلضرب دو عدد اول مختلف باشند؛ نمونه‌ای از چهار عدد طبیعی متوالی بدهید که هر يك از آنها تنها دو مقسوم‌علیه اول داشته باشند .

۱۰۲ . ثابت کنید قضیهٔ مربوط به وجود تعداد محدودی عدد طبیعی n ، که به‌ازای آنها عددهای n و $n+1$ تنها يك مقسوم‌علیه اول دارند، با قضیهٔ مربوط به محدود بودن تعداد عددهای اول «مرسه‌نا» و محدود بودن تعداد عددهای اول فرما، هم‌ارز است .

۱۰۳ . همهٔ عددهائی را پیدا کنید که بصورت $2^n - 1$ (n عددی است طبیعی) و از يك میلیون کوچکتر و قابل تبدیل بد حاصلضرب دو عدد اول باشند؛ و ثابت کنید که اگر n عددی زوج و بزرگتر از ۴ باشد، عدد $2^n - 1$ حاصلضرب لااقل سه عدد طبیعی بزرگتر از واحد است .

۱۰۴ . با استفاده از مسئلهٔ ۵۰ ثابت کنید که، وقتی $k \geq 3$ باشد، نامساوی زیر برقرار است :

$$p_{k+1} + p_{k+2} \leq p_1 p_2 \cdots p_k$$

p_k به‌معنی k امین عدد اول است .

۱۰۵ . q_n را کوچکترین عدد اولی می‌گیریم، که مقسوم‌علیه عدد

طبیعی n نباشد. با استفاده از مسئله ۱۰۴، ثابت کنید که نسبت $\frac{q}{n}$ ، وقتی

که n بطور نامحدود صعودی باشد، بسمت صفر میل می کند.

۱۰۶. ثابت کنید که از قضیه چیشف، که طبق آن برای هر عدد

طبیعی $n > 1$ لااقل يك عدد اول بین n و $2n$ قرار گرفته است [۲]،

این قضیه را می توان نتیجه گرفت که برای هر عدد $n > 4$ ، بین n و

$2n$ لااقل يك عدد وجود دارد که حاصلضرب دو عدد اول مختلف است،

و برای عدد طبیعی $n > 15$ بین n و $2n$ لااقل يك عدد وجود دارد که

حاصلضرب سه عدد اول مختلف است.

۱۰۷. ثابت کنید که از قضیه چیشف می توان نتیجه گرفت که وقتی

عدد n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم. بین n و $2n$ لااقل يك

عدد وجود دارد که حاصلضرب 8 عدد اول مختلف باشد (8 عدد طبیعی

دلخواهی است).

۱۰۸. ثابت کنید بین عددهای دنباله نامحدود

$$1, 31, 331, 3331, \dots$$

بی نهایت عدد مرکب وجود دارد، کوچکترین عدد مرکب این دنباله را

پیدا کنید.

۱۰۹. کوچکترین عدد طبیعی n را پیدا کنید که به ازای آن

$$n^4 + (n+1)^4$$

عددی مرکب باشد.

۱۱۰. ثابت کنید که بین عددهای $10^n + 3$ ($n = 1, 2, \dots$)، بی نهایت

عدد مرکب وجود دارد.

۱۱۱. ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی $n > 1$ ، عدد $\frac{1}{5}(2^{4n+2} + 1)$

مرکب است .

۱۱۲. ثابت کنید که در دنباله $1 - 2^n$ ($n = 1, 2, \dots$) فاصله‌های

بطول دلخواه وجود دارد که تنها از عددهای مرکب تشکیل شده باشد .

۱۱۳. نادرستی این حکم را روشن کنید که از هر عدد طبیعی ،

می‌توان با تغییر یکی از ارقام آن ، عددی اول درست کرد .

۱۱۴. ثابت کنید که قضیهٔ چیشف C ، مبنی بر اینکه برای هر

عدد طبیعی $n > 1$ لااقل يك عدد اول بین n و $2n$ قرار دارد ، هم‌ارز

قضیهٔ T است مبنی بر اینکه برای عدد طبیعی $n > 1$ ، در تجزیه $n!$ به

عوامل اول ، لااقل يك عامل با نمای واحد وجود دارد . هم‌ارز بودن

دو قضیه به معنای آنست که از هر کدام می‌توان دیگری را نتیجه گرفت .

۱۱۵. با استفاده از این قضیه که برای عدد طبیعی $n > 5$ لااقل

دو عدد اول بین n و $2n$ قرار دارد ، ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی

$n > 10$ ، در تجزیهٔ عدد $n!$ به عوامل اول ، لااقل دو عامل اول با نمای

واحد وجود دارد .

۱۱۶. بر اساس قضیهٔ دیریکله دربارهٔ تصاعد حسابی ، ثابت کنید

که برای هر عدد طبیعی n ، عدد اول p وجود دارد ، بنحوی که هر يك

از عددهای $p-1$ و $p+1$ بیش از n مقسوم‌علیه طبیعی مختلف داشته

باشند .

۱۱۷* . بر اساس قضیهٔ دیریکله دربارهٔ تصاعد حسابی . ثابت کنید

که برای هر عدد طبیعی n ، عدد اول p وجود دارد بنحوی که هر يك از

عددهای $p-1$ ، $p+1$ و $p+2$ دارای لاقل n مقسوم علیه اول مختلف باشند .

۱۱۸ . ثابت کنید که اگر n عددی فرد و بزرگتر از واحد باشد، هر دو عدد n و $n+2$ تنها وقتی اول هستند که عدد $(n-1)$ نه بر n و نه بر $n+2$ قابل قسمت نباشد .

۱۱۹ . براساس قضیه دیریکله دربارهٔ تصاعد حسابی، ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی m ، عدد اولی وجود دارد که مجموع رقمهای آن در دستگاه عدد شماری به‌مبنای ده، بیشتر از m باشد .

۱۲۰ . براساس قضیه دیریکله دربارهٔ تصاعد حسابی، ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی m ، عدد اولی وجود دارد که وقتی در دستگاه عدد شماری به‌مبنای ده نوشته شود، لاقل m صفر داشته باشد .

۱۲۱ . مطلوبست همهٔ عددهای اول p ، بنحوی که مجموع همهٔ مقسوم علیه‌های طبیعی عدد p^4 مجذور یک عدد طبیعی باشد .

۱۲۲ . اگر s عددی طبیعی و $2 < s < 10$ باشد، مطلوبست همهٔ عددهای اولی که در مورد هر یک از آنها، مجموع همهٔ مقسوم علیه‌های طبیعی مساوی توان s ام یک عدد طبیعی باشد .

۱۲۳ . قضیهٔ لیوویل را ثابت کنید که برطبق آن برای عدد اول $p > 5$ و عدد طبیعی m ، تساوی $p^m = 1 + (p-1)!$ ممکن نیست .

۱۲۴ . ثابت کنید که بی‌نهایت عدد اول q وجود دارد، بنحوی که به‌ازای عدد طبیعی $n < q$ ، عدد $1 + (n-1)!$ بر q قابل قسمت باشد .

۱۲۵* . ثابت کنید که برای هر عدد صحیح $k \neq 1$ ، بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که عدد $2^{2^n} + k$ مرکب باشد .

۱۲۶. ثابت کنید که بی نهایت عدد فرد $k > 0$ وجود دارد، بنحوی که به ازای آنها همه عددهای $k + 2^{2^n}$ ($n = 1, 2, \dots$) مرکب باشند.

۱۲۷. ثابت کنید که همه عددهای $3 + 2^{2^{2n+1}}$ ، $7 + 2^{2^{2n+1}}$ ، $13 + 2^{2^{6n+2}}$ ، $19 + 2^{2^{10n+1}}$ و $21 + 2^{2^{6n+2}}$ ($n = 1, 2, \dots$) مرکب هستند.

۱۲۸*. ثابت کنید بی نهایت عدد طبیعی k وجود دارد، بنحوی که عددهای $1 + k \cdot 2^n$ ($n = 1, 2, \dots$) مرکب باشند.

۱۲۹*. بر اساس حل مسئله ۱۲۸، قضیه اردیوش را ثابت کنید مبنی بر اینکه بی نهایت عدد فرد طبیعی k وجود دارد که به ازای هر يك از آنها، عددهای $k + 2^n$ ($n = 1, 2, \dots$) مرکب اند.

۱۳۰. اگر k توانی از عدد ۲ با نمای طبیعی باشد، ثابت کنید به ازای مقادیر به اندازه کافی بزرگ n ، همه عددهای $1 + k \cdot 2^{2^n}$ مرکب اند.

۱۳۱. وقتی که عدد طبیعی k کوچکتر یا مساوی ۱۰ باشد، کوچکترین عدد طبیعی n را طوری پیدا کنید که به ازای آن $1 + k \cdot 2^{2^n}$ عددی مرکب باشد.

۱۳۲. همه عددهای طبیعی $k \leq 10$ را چنان پیدا کنید که به ازای آنها، هر يك از عددهای $1 + k \cdot 2^{2^n}$ ($n = 1, 2, \dots$) مرکب باشند.

۱۳۳. ثابت کنید که برای عددهای طبیعی $n > 1$ ، همه عددهای $(1 + 2^{2^n}) + 2^{2^n}$ مرکب اند.

۱۳۴. ثابت کنید که بین عددهای $2^2 + (2^{2^n} + 1)^2$ ، وقتی $n = 1, 2, \dots$ باشد، بی نهایت عدد مرکب وجود دارد.

۱۳۵* . ثابت کنید که به ازای عددهای طبیعی $1 < a \leq 100$ ، لااقل يك عدد طبیعی $n \leq 6$ وجود دارد ، بنحوی که عدد $a^{n+1} + 1$ مرکب باشد .

۱۳۶ . ثابت کنید که بی نهایت عدد فرد وجود دارد ، بطوریکه مساوی مجموع سه عدد اول مختلف باشد، ولی مجموع کمتر از سه عدد اول نباشند.

۱۳۷ . ثابت کنید که کثیرالجمله $f(x)$ با ضرایب صحیح وجود ندارد ، بنحوی که $f(1) = 2$ ، $f(2) = 3$ ، $f(3) = 5$ باشد. ولی ، وقتی $m > 1$ باشد، کثیرالجمله $f(x)$ با ضرایب گویا وجود دارد، بنحوی که $f(k) = p_k$ باشد ؛ $k = 1, 2, \dots, m$ و k ، p_k امین عدد اول است .

۱۳۸* . از حالت خاص قضیه دیریکله - برای هر عدد طبیعی m ، در تصاعد حسابی $1 + mk$ ($k = 1, 2, \dots$) ، بی نهایت عدد اول وجود دارد - نتیجه بگیرد که برای هر عدد طبیعی n ، کثیرالجمله $f(x)$ با ضرایب صحیح وجود دارد بنحوی که $f(1) < f(2) < \dots < f(n)$ باشد و ضمناً همه این عددها ، اول باشند .

۱۳۹ . مثالی برای کثیرالجمله $f(x)$ (با ضرایب صحیح) بدهید که به ازای m مقدار مختلف طبیعی x ، m عدد مختلف اول بدست آید.
 ۱۴۰ . ثابت کنید که اگر $f(x)$ ، کثیرالجمله ای با درجه مثبت و ضرایب صحیح باشد ، همنهشتی $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ برای بی نهایت عدد اول p ، جواب دارد .

۱۴۱ . ثابت کنید به ازای عددهای طبیعی n . برای اینکه عدد $2^n + 1$ اول باشد ، نه لازم و نه کافی است که عدد $2^{2^n} + 1$ اول باشد .

۵. معادلات دیوفانتی (سبال)

۱۴۲. ثابت کنید که معادله $3x^2 - 7y^2 + 1 = 0$ ، بی نهایت جواب

برای عددهای طبیعی x و y دارد.

۱۴۳. تمام جوابهای صحیح معادله زیرا پیدا کنید :

$$2x^2 + xy - 7 = 0$$

و ثابت کنید که اگر x و y عددهای مثبت و گویائی باشند، این معادله بی نهایت جواب دارد.

۱۴۴. اگر m و n دو عدد طبیعی باشند، ثابت کنید معادله خطی

$ax + by = c$ (عددهای صحیح اند) وجود دارد، بنحوی که برای

عددهای طبیعی x و y تنها يك جواب؛ $y = n$ و $x = m$ را داشته باشد.

۱۴۵. ثابت کنید که همیشه معادله خطی $ax + by = c$

عددهای صحیح اند) وجود دارد، بنحوی که درست m جواب طبیعی برای x و y داشته باشد (m عدد طبیعی دلخواهی است).

۱۴۶. ثابت کنید، معادله

$x^2 + y^2 + 2xy - mx - my - m - 1 = 0$ (عددی طبیعی است)،

درست m جواب برای عددهای طبیعی x و y دارد.

۱۴۷. ثابت کنید که معادله

$$(x-1)^2 + (x+1)^2 = y^2 + 1$$

بی نهایت جواب طبیعی برای x و y دارد.

۱۴۸. تمام جوابهای صحیح x را برای معادله زیر پیدا کنید

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2$$

۱۴۹. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، معادله

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + \dots + (x+n)^2 = y^2$$

دارای جوابهای صحیح برای x و y می باشد.

۱۵۰. همه جوابهای صحیح معادله زیر را پیدا کنید:

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 = (x+5)^2$$

۱۵۱. همه جوابهای گویای معادله زیر را پیدا کنید:

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 = (x+10)^2$$

۱۵۲. ثابت کنید، معادله

$$x(x+1) = 4y(y+1)$$

برای x و y جواب طبیعی ندارد، ولی بی نهایت جواب مثبت گویا برای x و y دارد.

۱۵۳. ثابت کنید که برای هر عدد صحیح و مفروض n ، معادله

$$n = x^2 + y^2 - z^2$$

بی نهایت جواب بزرگتر از واحد برای عددهای صحیح x ، y و z دارد.

۱۵۴. اگر m و n عددهای طبیعی باشند، همه جوابهای معادله

$$3^m - 2^n = 1$$

۱۵۵. اگر m و n عددهای طبیعی باشند، همه جوابهای $3^m - 2^n = 1$

را پیدا کنید.

۱۵۶. ثابت کنید که دستگاه معادلات

$$2x^2 + y^2 = t^2, \quad x^2 + 2y^2 = z^2$$

برای عددهای طبیعی x, y, z, t جواب ندارد.

۱۵۷. با توجه به اتحاد

$$[2(2x + 2y + 1) + 1]^2 - 2(4x + 3y + 2)^2 = (2x + 1)^2 - 2y^2$$

ثابت کنید که معادله $x^2 + (x + 1)^2 = y^2$ برای عددهای طبیعی x و y بی نهایت جواب دارد.

۱۵۸. با توجه به اتحاد

$$[2(7y + 12x + 6)]^2 - 3[2(4y + 7x + 3) + 1]^2 = (2y)^2 - 3(2x + 1)^2$$

ثابت کنید که معادله $(x + 1)^2 - x^2 = y^2$ برای عددهای طبیعی x و y بی نهایت جواب دارد.

۱۵۹. اگر x, y, z, t عددهائی طبیعی باشند، ثابت کنید دستگاه

$$x^2 + 5y^2 = z^2, \quad x^2 + y^2 = t^2, \quad 5x^2 + y^2 = z^2$$

۱۶۰. ثابت کنید که دستگاه دو معادله $x^2 + 6y^2 = z^2$ ،

$x^2 + y^2 = t^2$ ، برای عددهای طبیعی x, y, z, t دارای جواب نیست.

۱۶۱. ثابت کنید که دستگاه دو معادله $x^2 + 7y^2 = z^2$ ،

$x^2 + y^2 = t^2$ ، برای عددهای طبیعی x, y, z, t جواب دارد.

۱۶۲. قضیهٔ لِه بک را در این باره ثابت کنید که معادله $x^2 = y^2 = 7$

برای عددهای طبیعی x, y جواب ندارد.

۱۶۳. اگر c عدد طبیعی فردی باشد، ثابت کنید معادله

$$x^2 - y^2 = (2c)^2 - 1$$

برای عددهای صحیح x, y جواب ندارد.

۱۶۴. قضیه میسر: مطلوبست همه جوابهای طبیعی x, y, z, t از دستگاہ دو معادله $z + t = xy$ ، $x + y = zt$ ، $(x \leq z \leq t, x \leq y)$. ثابت کنید این دستگاہ دارای بی نهایت جواب برای عددهای صحیح x, y, z, t است.

۱۶۵. ثابت کنید که برای عددهای x_1, x_2, \dots, x_n و n عددی (است طبیعی)، معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_n = x_1 x_2 \dots x_n$ ، لااقل يك دستگاہ جواب دارد.

۱۶۶. برای هر دو عدد طبیعی و مفروض a و n ، روش پیدا کردن همه جوابهای معادله $x^n - y^n = a$ را، برای عددهای طبیعی x و y ، شرح دهید.

۱۶۷* اگر p عددی اول و n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید معادله

$$x(x+1) = p^{2n} \cdot y(y+1)$$

برای عددهای طبیعی x و y جواب ندارد.

۱۶۸. دو جواب از عددهای طبیعی x و y را در معادله زیر پیدا کنید:

$$y(y+1) = x(x+1)(x+2)$$

۱۶۹. با درست داشتن جوابهای صحیح x و y در معادله $x^2 - 2y^2 = k$ (عدد صحیح مفروضی است)، مطلوبست جوابهای صحیح u و v از معادله $u^2 - 2v^2 = -k$.

۱۷۰. a ثابت کنید معادله

$$x^2 - Dy^2 = z^2$$

برای هر عدد صحیح D ، بی نهایت جواب برای عددهای طبیعی z, y, x دارد.

(b) ثابت کنید معادله $1 + x^2 + y^2 = z^2$ ، برای عددهای طبیعی z, y, x بی نهایت جواب دارد.
 ۱۷۱. ثابت کنید که معادله

$$xy + x + y = 2^{32}$$

وقتی که $x \leq y$ باشد، برای عددهای y, x تنها يك جواب دارد.
 ۱۷۲. ثابت کنید که برای عددهای صحیح z, y, x ، معادله زیر جواب ندارد:

$$x^2 - 2y^2 + 8z = 3$$

۱۷۳. همه جوابهای طبیعی y, x را از معادله زیر پیدا کنید:

$$y^2 - x(x+1)(x+2)(x+3) = 1$$

۱۷۴. همه جوابهای گویای x, y, z را از معادله زیر بدست آورید:

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$$

۱۷۵. قضیه اولر: ثابت کنید معادله

$$4xy - x - y = z^2$$

برای عددهای طبیعی x, y, z جواب ندارد [۳]؛ و ثابت کنید که این معادله برای عددهای صحیح و منفی x, y, z بی نهایت جواب دارد.

۱۷۶. ثابت کنید که اگر $D = m^2 + 1$ و m عددی طبیعی باشد،

معادله

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

بی نهایت جواب برای عددهای طبیعی x و y دارد.

۱۷۷. همه جوابهای صحیح x و y را برای معادله زیر بدست

آورید:

$$y^2 = x^2 + (x + 4)^2$$

۱۷۸. برای هر عدد طبیعی m ، همه جوابهای معادله

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = m$$

را برای عددهای صحیح x و y و z بدست آورید، بشرطی که x, y, z مخالف صفر و دو به دو نسبت بهم اول باشند.

۱۷۹. ثابت کنید که معادله

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$$

برای عددهای طبیعی x, y, z ، جواب ندارد.

۱۸۰. ثابت کنید که معادله

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 2$$

برای عددهای طبیعی x, y, z ، جواب ندارد.

۱۸۱. همه جوابهای طبیعی x, y, z را از معادله زیر بدست

آورید :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3$$

۱۸۲* . ثابت کنید به ازای $m=1$ و $m=2$ ، معادله

$$x^2 + y^2 + z^2 = mxyz$$

برای عددهای طبیعی x, y, z جواب ندارد و در حالت $m=3$ همه جوابهای طبیعی معادله را پیدا کنید .

۱۸۳ . ثابت کنید قضیه T_1 ، که طبق آن برای عددهای طبیعی

x, y, z ، معادله $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$ جواب ندارد ، هم ارز یا قضیه T_7 است

که طبق آن معادله $u^2 + v^2 = w^2$ برای عددهای طبیعی u, v, w جواب ندارد (به این معنا که از هر يك از قضیه‌های T_1 و T_7 می‌توان دیگری را نتیجه گرفت) .

۱۸۴* . ثابت کنید که معادله

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = 1$$

برای عددهای طبیعی x, y, z, t جواب ندارد . ولی دارای بی‌نهایت جواب صحیح مخالف صفر است .

۱۸۵* . ثابت کنید که معادله

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = m$$

به ازای $m=2$ و $m=3$ ، برای عددهای طبیعی x, y, z, t ، جواب ندارد ، و همه جوابهای طبیعی معادله را برای x, y, z, t به ازای $m=4$ پیدا کنید .

۱۸۶. اگر $x < y < z < t$ عددهای طبیعی باشند، همهٔ جوابهای معادلهٔ زیر را پیدا کنید :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 1$$

۱۸۷. ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی s ، معادلهٔ

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_s} = 1$$

برای عددهای طبیعی x_1, x_2, \dots, x_s ، تعداد محدودی جواب دارد .

۱۸۸* ثابت کنید که برای عدد طبیعی $s > 2$ ، معادلهٔ

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_s} = 1$$

برای عددهای طبیعی صعودی x_1, x_2, \dots, x_s دارای جواب است و اگر همهٔ اینگونه جوابها را به I_s نشان دهیم ، برای $s = 3, 4, \dots$ ، نامساوی $I_{s+1} > I_s$ برقرار است .

۱۸۹. ثابت کنید که اگر s عدد طبیعی مخالف ۲ باشد ، معادلهٔ

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_s} = 1$$

برای عددهای مثلثی x_1, x_2, \dots, x_s (یعنی عددهای به صورت $n, t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ عددی طبیعی)، جواب دارد .

۱۹۰. ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، می توان عدد

$\frac{1}{n}$ را به صورت مجموع n عدد معکوس عددهای مثلثی مختلف نوشت.

۱۹۱. همه جوابهای معادلهٔ زیر را برای عددهای طبیعی x, y, z, t

پیدا کنید :

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} = 1$$

۱۹۲. عددهای طبیعی s را چنان پیدا کنید که معادلهٔ

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_s^2} = 1$$

لااقل يك جواب برای عددهای طبیعی x_1, x_2, \dots, x_s داشته باشد .

۱۹۳. ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی $s > 1$ ، معادلهٔ

$$\frac{1}{x_0^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_s^2}$$

برای عددهای طبیعی $x_0 < x_1 < \dots < x_s$ جواب دارد .

۱۹۴. ثابت کنید که عدد ۱ رانمی شود به صورت مجموع محدودی

از مربع معکوسات عددهای مختلف طبیعی نوشت، بطوریکه تعداد آنها بیشتر

از واحد باشد .

۱۹۵. عدد $\frac{1}{p}$ را به مجموع محدودی از مربع معکوسات عددهای

طبیعی تبدیل کنید .

۱۹۶* . ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی m ، وقتی که s به اندازهٔ

کافی بزرگ باشد، معادلهٔ

$$\frac{1}{x_1^m} + \frac{1}{x_2^m} + \dots + \frac{1}{x_s^m} = 1$$

لااقل يك جواب برای عددهای طبیعی x_1, x_2, \dots, x_s دارد .

۱۹۷ . ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی s ، معادله

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_s} = \frac{1}{x_{s+1}}$$

برای عددهای طبیعی x_1, x_2, \dots, x_s و x_{s+1} دارای بی نهایت جواب است .

۱۹۸ . ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی $s \geq 3$ ، معادله

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_s^2} = \frac{1}{x_{s+1}^2}$$

برای عددهای طبیعی x_1, x_2, \dots, x_s و x_{s+1} بی نهایت جواب دارد .

۱۹۹* . جوابهای صحیح x, y, z را از دستگاه دو معادله زیر بدست

آورید :

$$x + y + z = 3 \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

۲۰۰ . تحقیق کنید به ازای چه مقادیر طبیعی عدد n ، معادله

$$3x + 5y = n$$

لااقل يك جواب برای عددهای طبیعی x و y دارد . ثابت کنید که تعداد

این جوابها همراه با n ، بطور نامحدود صعودی است .

۲۰۱ (a) همه جوابهای طبیعی x, n ، y و z را در معادله زیر

پیدا کنید :

$$n^x + n^y = n^z$$

(b) همه جوابهای طبیعی x, y, z, t را در معادله زیر پیدا کنید:

$$n^x + n^y + n^z = n^t$$

(c) همه جوابهای طبیعی x, y, z, t را از معادله زیر بدست آورید:

$$4^x + 4^y + 4^z = 4^t$$

۶. مسائل مختلف

۲۰۲. ثابت کنید که اگر بتوان عدد صحیح k را به صورت $k = x^2 - 2y^2$ (عددهائی طبیعی اند) نوشت، می توان آنرا به بی نهایت طریق به این صورت نوشت.

۲۰۳. اگر k, y, x عددهائی صحیح باشند، ثابت کنید که هر عدد به صورت $8k + 3$ یا $8k + 5$ را نمی توان به صورت $x^2 - 2y^2$ نوشت.

۲۰۴. ثابت کنید در بین عددهای $8k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) بی نهایت عدد وجود دارد که به صورت $x^2 - 2y^2$ (اعدادی صحیح اند) نوشته شوند و بی نهایت عدد وجود دارد که به این صورت قابل تبدیل نباشند. کوچکترین عدد نوع اخیر را پیدا کنید.

۲۰۵. ثابت کنید که آخرین رقم عدد کامل زوج (در دستگاه عدد شماری به مبنای ده)، همیشه یا ۶ است یا ۸.

۲۰۶. ثابت کنید که اگر در صورت و منخرج کسر $\frac{101010101}{110010011}$ ، که در دستگاه عدد شماری به مبنای دلخواه g (عددی است طبیعی و بزرگتر

از واحد) نوشته شده است، بجای رقم وسط ۱ (رقم پنجم)، به تعداد فرد، ولی دلخواه عدد ۱ قرار دهیم، مقدار آن تغییر نمی کند:

$$\frac{۱۰۱۰۱۰۱۰۱}{۱۱۰۰۱۰۰۱۱} = \frac{۱۰۱۰۱۱۱۰۱۰۱}{۱۱۰۰۱۱۱۰۰۱۱} = \frac{۱۰۱۰۱۱۱۱۱۰۱۰۱}{۱۱۰۰۱۱۱۱۱۰۰۱۱} = \dots$$

۲۰۷* ثابت کنید که مجموع رقمهای عدد ۲^n (که در دستگاه عدد شماری به مبنای ده نوشته شده است)، همراه با n صعودی است.

۲۰۸* k عدد طبیعی دلخواهی بزرگتر از واحد و c رقم دلخواهی از دستگاه عدد شماری به مبنای ده است. ثابت کنید عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که k امین رقم از آخر در بسط عدد ۲^n ، رقم c باشد.

۲۰۹* ثابت کنید، چهار رقم آخر عددهای ۵^n ($n = ۱, ۲, ۳, \dots$) يك دنباله متناوب را تشکیل می دهند، دوره تناوب را تعیین کنید و روشن کنید که آیا این دنباله متناوب خالص است یا نه [۴].

۲۱۰* ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی s ، s رقم اول بسط يك عدد مجذور کامل در دستگاه به مبنای ده، می تواند دلخواه باشد.

۲۱۱* ثابت کنید، رقمهای آخر عددهای n^n ($n = ۱, ۲, ۳, \dots$) در دستگاه عدد شماری به مبنای ده، از يك دنباله متناوب تشکیل شده است، دوره تناوب را پیدا کنید و تحقیق کنید که آیا خالص است.

۲۱۲* ثابت کنید، در هر کسر اعشاری نامحدود، دنباله ای از ارقام اعشاری بطول دلخواه وجود دارد، که بی نهایت مرتبه تکرار شده است.

۲۱۳* $(a \cdot ۲^{۱۳})$ برای هر عدد طبیعی k ، عدد $۳^{۲k}$ را به صورت ۳^k جمله بنویسید بطوری که دنباله ای از اعداد طبیعی را تشکیل دهند.

(b) ثابت کنید که هیچیک از عددهای فرما ، $F_n = 2^{2^n} + 1$ ، عددی طبیعی و بزرگتر از واحد است) ، نمی‌توانند به صورت مجموع دو عدد اول نوشته شوند.

۲۱۴. ثابت کنید ، برای هر عدد طبیعی $s > 1$ ، عدد طبیعی m_s وجود دارد ، بنحوی که برای عدد طبیعی $n \geq m_s$ ، بین n و $2n$ لااقل يك توان s ام عدد طبیعی وجود داشته باشد . کوچکترین عدد m_s را برای $s=2$ و $s=3$ پیدا کنید .

۲۱۵. ثابت کنید که دنباله‌ای بطول دلخواه ، از عددهای طبیعی متوالی وجود دارد ، بطوری که هیچیک از آنها توانی از يك عدد طبیعی با نمای بزرگتر از واحد نباشد .

۲۱۶. مطلوبست بیان جمله n ام از دنباله نامحدود u_n ($n=1, 2, \dots$) که با شرایط زیر معین می‌شود :

$$u_1 = 1, u_2 = 3, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

۲۱۷. مطلوبست بیان جمله n ام از دنباله نامحدودی که با شرایط زیر معین شده است : $u_1 = a$ ، $u_2 = b$ ، $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ ، (برای $n=1, 2, \dots$) .

۲۱۸. جمله n ام از دنباله نامحدودی را پیدا کنید که با شرایط زیر معین می‌شود : $u_1 = a$ ، $u_2 = b$ ، $u_{n+2} = -(u_n + 2u_{n+1})$ ، (برای $n=1, 2, \dots$) . حالت‌های خاص $a=1$ ، $b=-1$ و $a=1$ ، $b=-2$ را بحث کنید .

۲۱۹. مطلوبست جمله n ام از يك دنباله نامحدود ، با شرایط :

$$u_{n+2} = 2u_n + u_{n+1}, u_2 = b, u_1 = a$$

۲۲۰. همهٔ عددهای صحیح $a \neq 0$ را طوری پیدا کنید که برای $n = 1, 2, 3, \dots$ دارای خاصیت $a^n = a$ باشند.
۲۲۱. روش بدست آوردن همهٔ زوج عددهای طبیعی را نشان دهید، بطوریکه هم مجموع و هم حاصلضرب آنها مجذور یک عدد طبیعی باشند. همهٔ جوابهای کوچکتر از ۱۰۰ را پیدا کنید.
۲۲۲. مطلوبست همهٔ جمله‌های دنبالهٔ فیوناچی که مجذور یا مکعب یک عدد طبیعی بوده و کوچکتر از ۱۰۰۰۰ باشند.
۲۲۳. ثابت کنید که هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع جمله‌های مختلف دنبالهٔ فیوناچی نوشت.
۲۲۴. ثابت کنید که برای جملهٔ u_n از دنبالهٔ فیوناچی $(n = 2, 3, \dots)$ ، رابطهٔ $u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1} + (-1)^{n-1}$ برقرار است.
۲۲۵. ثابت کنید که هر عدد صحیح را می‌توان به صورت مجموع پنج مکعب عددهای صحیح به بی نهایت طریق نوشت.
۲۲۶. ثابت کنید که عدد ۳ را به بی نهایت طریق می‌توان به صورت مجموع چهار مکعب عدد صحیح (غیر از صفر و واحد) نوشت.
۲۲۷. ثابت کنید، بی نهایت عدد طبیعی وجود دارد که لااقل به دو طریق بتوان آنها را به مجموع چهار مربع کامل تبدیل کرد. همین مسئله را در مورد تبدیل به مجموع چهار مکعب هم حل کنید.
۲۲۸. ثابت کنید که بد ازای همهٔ عددهای طبیعی m ، در هر تبدیل عدد $4^m \cdot 7$ به مجموع چهار مربع عددهای صحیح غیر منفی، هر یک از این عددها بزرگتر یا مساوی 2^{m-1} است.
۲۲۹. کوچکترین عدد طبیعی بزرگتر از ۲ را پیدا کنید که هم

مجموع مربعات دو عدد طبیعی و هم مجموع مکعبهای دو عدد طبیعی باشد. ثابت کنید که بی نهایت عدد طبیعی وجود دارد، بنحوی که بتوان هر يك از آنها را هم به مجموع مربعات و هم به مجموع مکعبهای دو عدد طبیعی و نسبت بهم اول، تبدیل کرد.

۲۳۰. ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی 8 ، عدد طبیعی $n > 2$ وجود دارد، بنحوی که برای $k = 1, 2, \dots, 8$ مساوی مجموع دو توان k ام عددهای طبیعی باشد.

۲۳۱* . ثابت کنید که بی نهایت عدد طبیعی وجود دارد که مساوی مجموع مکعبهای دو عدد صحیح نیست، ولی مساوی مجموع مکعبهای دو عدد مثبت گویا می باشد.

۲۳۲* . ثابت کنید، بی نهایت عدد طبیعی وجود دارد که می توانند به صورت تفاضل مکعبهای دو عدد طبیعی نوشته شود، ولی نمی توانند به صورت مجموع مکعبهای دو عدد طبیعی تبدیل شوند.

۲۳۳* . ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی $k > 1$ و $k \neq 3$ ، بی نهایت عدد طبیعی وجود دارد، بنحوی که مساوی مجموع توانهای k ام دو عدد طبیعی باشند، ولی مساوی تفاضل توانهای k ام دو عدد طبیعی نباشند.

۲۳۴ . مطلوبست کوچکترین عدد طبیعی $n > 1$ ، که به ازای آن مجموع مربعات عددهای طبیعی متوالی از 1 تا n ، مساوی مربع يك عدد طبیعی باشد.

۲۳۵ (a) هر عدد به صورت a^b را، توان صحیح می نامیم (a و b عددهای طبیعی بزرگتر از واحدند). مطلوبست همه عددهای طبیعی که به صورت مجموع تعداد محدودی (بزرگتر یا مساوی واحد) از توانهای صحیح باشد.

(b) ثابت کنید که هر عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰ و مخالف ۶ را می‌توان به صورت تفاضل دو توان صحیح نوشت .

۲۳۶ . ثابت کنید، برای هر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع آن عددهای طبیعی هستند و برای هر عدد طبیعی n ، مثلثی متشابه با آن وجود دارد، بطوریکه هر یک از اضلاع آن به صورت توانی از یک عدد طبیعی با نمای بزرگتر یا مساوی n باشد .

۲۳۷ . مطلوبست همهٔ عددهای طبیعی $n > 1$ ، که به ازای آنها $n^2 = 1 + (n-1)!$ باشد .

۲۳۸ . ثابت کنید که حاصلضرب دو عدد مثلثی متوالی نمی‌تواند مربع کامل باشد، ولی برای هر عدد مثلثی $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ، بی‌نهایت عدد مثلثی t_m وجود دارد، بنحوی که عدد $t_n \cdot t_m$ مربع کامل باشد .

۲۳۹ . بدون استفاده از جدولهای لگاریتم، ثابت کنید عدد $F_{1945} = 2^{1945} + 1$ بیش از 10^{582} رقم دارد. تعداد رقمهای $1 + 5 \cdot 2^{1947}$ را پیدا کنید (این عدد کوچکترین مقسوم‌علیه اول عدد F_{1945} است) .

۲۴۰ . تعداد رقمهای عدد $1 - 2^{11213}$ را، در دستگاه عددشماری به‌مبنای ده، پیدا کنید (این عدد، بزرگترین عدد اولی است که تا امروز شناخته شده است) .

۲۴۱ . تعداد رقمهای عدد $(1 - 2^{11213}) \cdot 2^{11212}$ را، در دستگاه عددشماری به‌مبنای ده، پیدا کنید (این عدد، بزرگترین عدد کاملی است که تا امروز شناخته شده است) .

۲۴۲ . ثابت کنید که عدد $3!!!$ در دستگاه عدد شماری به‌مبنای

ده، بیش از هزار رقم دارد. حساب کنید، این عدد به چند صفر ختم شده است.
 *۲۴۳. تحقیق کنید، به ازاء چه مقادیر طبیعی $m > 1$ ، کثیر الجمله $f(x)$ با ضرایب صحیح وجود دارد، بنحوی که در تقسیم بر m به ازای یک مقدار صحیح x باقیمانده‌ای مساوی صفر و به ازای بقیه مقادیر صحیح x ، باقیمانده‌ای مساوی ۱ بدست آید.

*۲۴۴. عدد \sqrt{D} را به کسر مسلسل تبدیل کنید، بشرطی که

$$D = [(4m^2 + 1)n + m]^2 + 4mn + 1$$

و m و n عددهائی طبیعی باشند.

*۲۴۵. مطلوبست همه عددهای طبیعی $n < 30$ ، که برای آنها

$\varphi(n) = d(n)$ باشد؛ $\varphi(n)$ تابع اولرو و $d(n)$ تعداد مقسوم علیه‌های طبیعی

عدد n است.

*۲۴۶. ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی g ، می‌توان عدد گویای $w > 1$

را بصورت

$$w = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(1 + \frac{1}{k+1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{k+s}\right)$$

نشان داد، که در آن k عدد طبیعی بزرگتر از g و s عدد صحیح غیر منفی است.

*۲۴۷. قضیه اردیوش و شوران را ثابت کنید: هر عدد صحیح

k را می‌توان به بی‌نهایت طریق به صورت $k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm m^2$ نشان داد، که در آن m عددی طبیعی است و علامت « \pm » می‌تواند به وضع مناسبی اختیار شود.

a. *۲۴۸. واضح است که اگر $f(x)$ کثیر الجمله‌ای با ضرایب صحیح

$f(x) = 0 \pmod{p}$ دارای ریشه‌های صحیح باشد، همنهشتی $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$

برای هر عدد اول مدول p دارای جواب است. روی مثال معادله درجه اول $ax + b = 0$ ثابت کنید که عکس این قضیه صحیح نیست.

(b) ثابت کنید که اگر همنهشتی $(ax + b \equiv 0 \pmod{m})$ و a و b عددهای صحیح اند، برای هر مقدار طبیعی مدول m جواب داشته باشد، معادله $ax + b = 0$ دارای ریشه صحیح است.

۲۴۹. ثابت کنید همنهشتی $(6x^2 + 5x + 1 \equiv 0 \pmod{m})$ ، برای هر مدول طبیعی m دارای جواب است، با وجودی که معادله $6x^2 + 5x + 1 = 0$ دارای جواب صحیح نیست.

(a. ۲۵۰) قضیه فرما را ثابت کنید: اگر p عددی اول باشد، هر مقسوم علیه اول مخالف ۳ از عدد $2^p + 1$ به صورت $2kp + 1$ است، که در آن k عددی است طبیعی.

(b) ثابت کنید، بی نهایت عدد طبیعی وجود دارد که هم مساوی مجموع دو عدد مثلثی (یعنی عددی بصورت $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ، $n = 1, 2, \dots$) و هم مساوی مجموع مربعات دو عدد طبیعی باشند.

(c) ثابت کنید، بی نهایت عدد طبیعی وجود دارد که مساوی مجموع دو عدد مثلثی هستند، ولی نمی توانند بصورت مجموع مربعات دو عدد طبیعی درآیند.

(d) ثابت کنید، بی نهایت عدد طبیعی وجود دارد که مساوی مجموع مربعات دو عدد طبیعی باشند، ولی نمی توانند بصورت مجموع دو عدد مثلثی درآیند.

(e) ثابت کنید، بی نهایت عدد طبیعی وجود دارد که نمی توانند

نه مساوی مجموع دو عدد مثلثی و نه مساوی مجموع مربعهای دو عدد طبیعی باشد.

(f) همه جوابهای صحیح x و y را از معادله زیر بدست آورید:

$$x^2 + (x+1)^2 = y^4$$

۱ - قابلیت تقسیم اعداد

۱. تنها يك عدد طبيعي $n=1$ در این مورد وجود دارد. زیرا
چون $(n-1) - (n^2+1) = n(n+1)$ است، برای اینکه n^2+1
بر $n+1$ قابل قسمت باشد، باید $n-1$ بر $n+1$ قابل قسمت شود که
تنها وقتی ممکن است که $n-1=0$ یعنی $n=1$ باشد.

۲. فرض کنید $t = x-3$ ، عددی صحیح و مخالف صفر چنان
باشد که $3 - (t+3)^3$ بر t قابل قسمت شود. این شرط هم‌ارز با این

حکم است که $3 - 3^2$ یعنی ۲۴ بر t قابل قسمت شود. بنابراین لازم و کافی است که t مقسوم علیه صحیحی از عدد ۲۴ باشد، یعنی عددهای $1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$ ، در این صورت برای $x = t + 3$ مقادیر زیر بدست می آید: $-3, -5, -9, -21, 1, 5, 9, 27$.

۳. مربع يك عدد صحیح، در حالتی که بر ۷ قابل قسمت نباشد، در تقسیم بر آن باقیمانده‌ای مساوی ۱، ۲ یا ۴ می‌دهد. به این ترتیب مجموع دو مربع کامل، در تقسیم بر ۷، یکی از باقیمانده‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ را خواهد داد. بنابراین اگر دو عدد صحیح a و b چنان باشند که $a^2 + b^2$ بر ۷ قابل قسمت باشد، یکی از آنها و در نتیجه دیگری هم باید مضربی از ۷ باشد.

۴. مثلاً، همه عددهای طبیعی n ، که در تشکیل تصاعد حسابی $56k + 56$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) دخالت دارند، دارای این خاصیت هستند؛

زیرا اگر $n = 56k + 56$ باشد، وقتی که $k \geq 0$ است، داریم:

$$n \equiv 0 \pmod{56}; \quad n \equiv 4 \pmod{13}$$

و از آنجا

$$4n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{56}; \quad 4n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{13}$$

یعنی $4n^2 + 1$ بر ۵ و ۱۳ قابل قسمت است.

۵. اثبات را به کمک استقراء ریاضی انجام می‌دهیم. به ازای $n = 1$

داریم:

$$3^{2n+2} - 26n - 27 = 3^6 - 26 - 27 = 676 = 4 \times 169$$

سپس داریم:

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)+2} - 26(n+1) - 27 - (3^{2n+2} - 26n - 27) &= \\ &= 26(3^{2n+2} - 1) \end{aligned}$$

ولی $(3^2 - 1)$ بر ۱۳ قابل قسمت است، از آنجا $1 - 3^{2(n+1)}$ بر ۱۳ قابل قسمت می‌شود و بنابراین $26(3^{2n+2} - 1)$ بر ۱۶۹ قابل قسمت خواهد بود.

۰۶ چون داریم: $2^6 = 64 \equiv 1 \pmod{9}$ ، به‌ازای $k = 0, 1, 2, \dots$

داریم: $2^{6k} \equiv 1 \pmod{9}$ و از آنجا: $2^{6k+2} \equiv 4 \pmod{9}$ ؛ چون هر

دو طرف هم‌نهمستی اعداد زوج هستند، بدست می‌آید: $2^{6k+2} \equiv 4 \pmod{18}$

به‌این ترتیب $2^{6k+2} = 18t + 4$ (t عددی صحیح بزرگتر یا مساوی

صفر) می‌شود. از طرف دیگر، با توجه به قضیه کوچک فرما داریم:

$2^{18} \equiv 1 \pmod{19}$ ، از آنجا برای $t = 0, 1, 2, \dots$ بدست می‌آید:

$2^{18t} \equiv 1 \pmod{19}$ و بنابراین: $2^{18t+4} \equiv 2^4 \pmod{19}$

و از آنجا: $2^{6k+2} + 3 \equiv 2^4 + 3 \equiv 0 \pmod{19}$ می‌شود.

۰۷ بر اساس قضیه کوچک فرما داریم:

$$2^{12} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{6^0} \equiv 1 \pmod{13}$$

از طرف دیگر داریم:

$$2^5 \equiv 6 \pmod{13} \Rightarrow 2^{1^0} \equiv -3 \pmod{13}$$

و بنا بر این خواهیم داشت: $۲^{۷۰} \equiv -۳ \pmod{۱۳}$. از طرف دیگر داریم:

$$۳^۲ \equiv ۱ \pmod{۱۳} \Rightarrow ۳^{۶۹} \equiv ۱ \pmod{۱۳} \Rightarrow ۲^{۷۰} \equiv ۳ \pmod{۱۳}$$

و بنا بر این $۲^{۷۰} + ۳^{۷۰} \equiv ۰ \pmod{۱۳}$ می شود یعنی $۲^{۷۰} + ۳^{۷۰}$ بر ۱۳ قابل قسمت است .

۰۸ . به کمک روش استقراء ریاضی ، می توان بسادگی ثابت کرد که

برای عددهای طبیعی n داریم : $۲^n \geq n+1$ ، از آنجا نتیجه می شود که

$۲^{۲^n}$ بر ۲^{n+1} قابل قسمت است و در نتیجه $۲^{۲^n} - ۱$ بر $۲^{۲^n+1} - ۱$ قابل

قسمت می شود . بنا بر این با توجه به اینکه $F_n = ۲^{۲^n} + ۱$ مقسوم علیهی

از $۲^{۲^n+1} - ۱$ و $۲^{۲^n} - ۱$ مقسوم علیهی از $۲^{F_n} - ۲ = ۲^{۲^{۲^n}+1} - ۲$

می باشد ، $۲^{F_n} - ۲$ بر F_n قابل قسمت است .

تبصره . ت . باناخه ویچ عقیده دارد که فرما ، با توجه به همین قضیه

قابل قسمت بودن $۲^{F_n} - ۲$ بر F_n حکم کرد که همه عددهای F_n ($n = ۱, ۲, \dots$)

اول هستند . در زمان فرما قضیه چینی را صحیح می دانستند که بر طبق آن هر

عدد طبیعی $m > ۱$ که در شرط قابل قسمت بودن $۲^m - ۲$ بر m صدق

کند ، عددی است اول . در حقیقت این حکم برای چند صد عدد طبیعی اولیه

صحیح است . ولی این قضیه برای عدد $m = ۳۴۱ = ۱۱ \times ۱۲$ صحیح نیست

که در آن زمان هنوز شناخته نشده بود [۵] .

۰۹ . مثلاً همه عددهائی که به ازای $n = ۳^k$ بدست می آیند ،

دارای این خاصیت اند ($k = ۱, ۲, \dots$) . این حکم را می توان بدکمک

روش استقراء ریاضی و با استفاده از تجزیه زیر ثابت کرد :

$$2^{2k+1} + 1 = (2^{2k} + 1)(2^{2 \cdot 2k} - 2^{2k} + 1)$$

عامل دوم سمت راست تساوی مساوی $2^{2k} + 1$ و بر

۳ قابل قسمت است (زیرا 2^{2k} در تقسیم بر ۳ باقیمانده‌ای مساوی ۱ می‌دهد و $2^{2k} + 1$ طبق فرض بر 3^k قابل قسمت است).

۱۰. وقتی $n = 1$ باشد، حکم صحیح است، زیرا مربع هر عدد

فرد در تقسیم بر ۸، باقیمانده‌ای مساوی واحد می‌دهد. فرض می‌کنیم

که برای عدد فرد k ، به‌ازای عدد طبیعی n ، عدد $2^{2n} - 1$ بر 2^{n+2} قابل قسمت باشد. در این صورت داریم: $2^{2n} = 2^{n+2}t + 1$ ، t عددی

است صحیح، یعنی

$$\begin{aligned} k^{2n+1} &= (2^{n+2}t + 1)^2 = 2^{2n+4}t^2 + 2^{n+2}t + 1 = \\ &= 2^{n+2}(2^{n+2}t^2 + t) + 1 \end{aligned}$$

و در نتیجه $2^{n+2} - 1$ بر k^{2n+1} قابل قسمت است. به این ترتیب اثبات

به کمک استقراء ریاضی انجام شد.

۱۱. کافی است ثابت کنیم که هر یک از عددهای اول ۱۱، ۳۱ و

۶۱ مقسوم علیهمی از $2^{15} - 1$ هستند. داریم:

$$\begin{cases} 2^5 \equiv -1 \pmod{11} \\ 10^5 \equiv -1 \pmod{11} \end{cases} \Rightarrow 2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{15} \equiv 1 \pmod{11}$$

و از آنجا $2^{15} - 1$ بر ۱۱ قابل قسمت است.

همچنین داریم:

$$\begin{aligned} 20 &\equiv -11 \pmod{31} \Rightarrow 20^2 \equiv 121 \equiv -3 \pmod{31} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 20^3 \equiv (-11)(-3) = 33 \equiv 2 \pmod{31} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 20^{15} \equiv 2^5 \equiv 1 \pmod{31} \end{aligned}$$

و از آنجا ۱ - ۲۰^{۱۵} بر ۳۱ قابل قسمت است. بالاخره:

$$3^4 \equiv 20 \pmod{61} \Rightarrow 20^{15} \equiv 3^{60} \equiv 1 \pmod{61}$$

(طبق قضیه کوچک فرما)

یعنی ۱ - ۲۰^{۱۵} بر ۶۱ قابل قسمت است.

۱۲. فرض می‌کنیم: $d = \left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1 \right)$ ، با توجه به اتحاد

$$\frac{a^m - 1}{a - 1} = (a^{m-1} - 1) + (a^{m-2} - 1) + \dots + (a - 1) + m \quad (1)$$

و اینکه $a^k - 1$ بر $a - 1$ قابل قسمت است (به ازای $k = 0, 1, 2, \dots$)

نتیجه می‌گیریم که m بر d قابل قسمت است. اگر عددهای $a - 1$ و

m مقسوم‌علیه مشترکی مثل $\delta > d$ داشته باشند، با توجه به رابطه (۱)

نتیجه می‌شود که $\frac{a^m - 1}{a - 1}$ بر δ قابل قسمت است و دو عدد $\frac{a^m - 1}{a - 1}$ و

مقسوم‌علیه مشترك $\delta > d$ دارند. از اینجا نتیجه می‌گیریم که d بزرگترین

مقسوم‌علیه مشترك عددهای $a - 1$ و m است.

۱۳. میدانیم که برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(که مثلاً می‌توان آنرا بسادگی و به کمک استقراء ریاضی ثابت کرد).

همچنین به کمک استقراء ریاضی می‌توان ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی

n رابطه زیر صحیح است :

$$1^5 + 2^5 + \dots + n^5 = \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1)$$

و از این روابط نتیجه می شود :

$$\frac{3(1^5 + 2^5 + \dots + n^5)}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} = 2n^2 + 2n - 1$$

۱۴. همه عددهای فرد $n > 1$ ، دارای این خاصیت اند. درحقیقت

اگر n عددی فرد و بزرگتر از واحد باشد، $\frac{n-1}{2}$ عددی طبیعی می شود

و به ازای $\frac{n-1}{2}, 1, 2, \dots, k$ واضح است که $k^n + (n-k)^n$ بر n

قابل قسمت است (زیرا $(-k)^n = -k^n$ است). بنابراین نتیجه می گیریم که

$$1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n \text{ بر } n \text{ قابل قسمت است.}$$

حالا فرض کنید n عددی زوج باشد و 2^s را بزرگترین توانی از

2 می گیریم که n را عاد کند (s عددی طبیعی است). چون $s < 2^s$

است، برای عددهای زوج k واضح است که k^n بر 2^s قابل قسمت است،

برای عددهای فرد k هم (که تعداد آنها در دنباله $1, 2, \dots, n-1$ مساوی

$\frac{n}{2}$ است) با توجه به قضیه اول داریم : $2k^{s-1} \equiv 1 \pmod{2^s}$ ، یعنی

$$k^n \equiv 1 \pmod{2^s} \text{ (زیرا } n \text{ بر } 2^{s-1} \text{ قابل قسمت است)، از آنجا:}$$

$$1^n + 3^n + \dots + (n-3)^n + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}$$

بنابراین اگر $2^n + 4^n + \dots + (n-2)^n$ بر 2^s قابل قسمت باشد،

داریم:

$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + (n-1)^n = \frac{n}{2} \pmod{2^s}$$

حال اگر فرض کنیم که $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$ بر n قابل قسمت باشد، چون n بر 2^s قابل قسمت است، به همنهشتی $0 \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}$ می‌رسیم که از آنجا باید $\frac{n}{2}$ بر 2^s و n بر 2^{s+1} قابل قسمت باشد، که با فرضی که برای s کردیم متناقض است. به این ترتیب اگر n عددی زوج باشد، $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$ بر n قابل قسمت نیست.

تبصره. به کمک قضیه کوچک فرما می‌توان ثابت کرد که اگر n عددی اول باشد، $1^{n-1} + 2^{n-1} + \dots + (n-1)^{n-1} + 1$ بر n قابل قسمت است؛ ولی حتی یک عدد غیر اول هم برای n شناخته نشده است که به ازای آن حکم بالا صحیح باشد. **توجه**، جوامع تحقیق کرده است که چنین عدد مرکبی کوچکتر از 10^{1000} نیست و از آنجا نتیجه گرفته است که چنین عددی بطور کلی وجود ندارد.

۱۵. چهار حالت در نظر می‌گیریم:

(a) $n = 4k$ ، k عددی است طبیعی، در این صورت

$$a_n = 2^{4k+1} - 2^{4k+1} + 1 \equiv 2 - 2 + 1 = 1 \pmod{5}$$

$$b_n = 2^{4k+1} + 2^{4k+1} + 1 \equiv 2 + 2 + 1 = 5 \pmod{5}$$

(b) $n = 4k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)، در این صورت

$$a_n = 2^{4k+2} - 2^{4k+2} + 1 \equiv 8 - 4 + 1 = 5 \pmod{5}$$

$$b_n = 2^{4k+2} + 2^{4k+2} + 1 \equiv 8 + 4 + 1 = 13 \pmod{5}$$

(c) در اینصورت $(k = 0, 1, 2, \dots) n = 4k + 2$ ،

$$a_n = 2^{4k+5} - 2^{4k+3} + 1 \equiv 2 - 8 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$b_n = 2^{4k+5} + 2^{4k+3} + 1 \equiv 2 + 8 + 1 \equiv 1 \pmod{5}$$

(d) در اینصورت $(k = 0, 1, 2, \dots) n = 4k + 3$ ،

$$a_n = 2^{4k+7} - 2^{4k+4} + 1 = 8 - 1 + 1 = 8 \pmod{5}$$

$$b_n = 2^{4k+7} + 2^{4k+4} + 1 = 8 + 1 + 1 = 10 \pmod{5}$$

بنابراین ، عدد a_n تنها وقتی بر ۵ قابل قسمت است که در تقسیم n بر ۴ ، باقیمانده‌ای مساوی ۱ یا ۲ داشته باشیم ، همچنین عدد b_n تنها وقتی بر ۵ قابل قسمت است که در تقسیم n بر ۴ ، باقیمانده‌ای مساوی ۰ یا ۳ داشته باشیم ، از دو عدد a_n و b_n همیشه یکی (و تنها یکی) بر ۵ قابل قسمت است .

۱۶. کافی است $x = 2n - 1$ بگیریم . در اینصورت ، چون هر يك از عددهای x, x^2, x^3, \dots فرد هستند ، عدد $2n = x + 1$ مقسوم علیه هر يك از عددهای دنباله نامحدود $x + 1, x^2 + 1, x^3 + 1, \dots$ خواهد بود .

۱۷. از این قبیل ، مثلاً همه عددهای اول p به صورت $4k + 3$ هستند . در حقیقت ، وقتی x عددی زوج باشد ، هر يك از جمله‌های دنباله x, x^2, x^3, \dots عددهائی زوج هستند . بنابراین ، اگر جمله‌ای از دنباله $1 + x, 1 + x^2, \dots$ بر p قابل قسمت باشد ، برای عدد طبیعی مانند m باید $1 + x^{2m}$ بر p قابل قسمت باشد ، بنابراین بدست می آید $(x^m)^2 \equiv -1 \pmod{p}$ ، که ممکن نیست (زیرا -1 نمی تواند باقیمانده تقسیم يك مربع کامل بر عدد اول $p = 4k + 3$ باشد) .

۱۸. از بسط^۱

$$(1+n)^n = 1 + \binom{n}{1}n + \binom{n}{2}n^2 + \dots + \binom{n}{n}n^n$$

نتیجه می‌شود که برای $n > 1$ (که می‌توان فرض کرد، زیرا $1 - 2^1$ بر 1^2 قابل قسمت است) همه جمله‌ها، با شروع از جمله سوم، شامل عامل n با نمای بزرگتر یا مساوی ۲ می‌باشند، جمله دوم هم $\binom{n}{1}n = n^2$ است. بنابراین $1 - (1+n)^n$ بر n^2 قابل قسمت است.

۱۹. با توجه به مسئله ۱۸، برای مقادیر طبیعی m ، عدد $1 - (m+1)^m$ بر m^2 قابل قسمت است. بنابراین اگر $m = 2^n - 1$ باشد $(m+1)^m = 2^{n(2^n-1)}$ می‌شود، یعنی $1 - 2^{n(2^n-1)}$ بر $(2^n - 1)^2$ قابل قسمت است.

۲۰. $1 + 2^2$ بر 3 قابل قسمت است. اگر برای یک مقدار طبیعی m ، عدد $1 + 2^{3^m}$ بر 3^m قابل قسمت باشد، خواهیم داشت:
 $2^{3^m} = 3^m \cdot k - 1$ (عددی طبیعی است)، از آنجا خواهیم داشت:
 $2^{3^{m+1}} = (3^m \cdot k - 1)^2 = 3^{2m} \cdot k^2 - 2 \cdot 3^m \cdot k + 1$
 $+ 3^{m+1} \cdot k - 1 = 3^{m+1}t - 1$

که در آن t عددی است طبیعی. بنابراین $1 + 2^{3^{m+1}}$ بر 3^{m+1} قابل

(۱) علامت $\binom{n}{k}$ ، نوع دیگری از نمایش ضریب دو جمله‌ای، یعنی C_n^k ، است. این علامت بطور کلی برای مفهوم وسیع‌تری بکار می‌رود یعنی:
 $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$
 که در آن k عدد مثبت و صحیح و n عدد حقیقی دلخواهی است. گاهی، علامت $\binom{n}{0}$ را برابر با واحد می‌گیرند.

قسمت می‌شود؛ از اینجا به کمک استقراء ریاضی نتیجه می‌شود که $2^{2^m} + 1$ برای $m = 1, 2, \dots$ بر 3^m قابل قسمت است.

عددهای طبیعی دیگری هم برای n وجود دارد، بطوری که به ازای آنها $2^n + 1$ بر n قابل قسمت باشد. در حقیقت، اگر $2^n + 1$ بر n قابل قسمت باشد، وقتی که n يك عدد طبیعی است، $2^{2^n} + 1 + 1$ هم بر $2^n + 1$ قابل قسمت خواهد بود. زیرا اگر $2^n + 1 = k \cdot n$ (k عددی طبیعی است) باشد، واضح است که $k \cdot n$ عددی فرد می‌شود و $2^{2^n} + 1 + 1 = 2^{kn} + 1$ بر $2^n + 1$ قابل قسمت خواهد بود، مثلا از قابل قسمت بودن $2^9 + 1$ بر ۹ نتیجه می‌شود که $2^{512} + 1$ هم بر 513 قابل قسمت است.

حالا فرض می‌کنیم که n عددی اول و $2^n + 1$ بر n قابل قسمت باشد، در این صورت، با توجه به قضیه کوچک فرما، $2^n - 2$ هم بر n قابل قسمت است، بنابراین باید ۳ بر n قابل قسمت، یعنی $n = 3$ باشد. به این ترتیب تنها يك عدد اول n وجود دارد، بنحوی که $2^n + 1$ بر n قابل قسمت باشد، یعنی $n = 3$.

۲۱* تنها يك عدد فرد $n = 1$ ، با این خاصیت، وجود دارد. فرض کنیم n عددی فرد و بزرگتر از واحد باشد، بنحوی که $3^n + 1$ بر n قابل قسمت باشد. p را کوچکترین مقسوم‌علیه اول n می‌گیریم. واضح است که p مساوی ۲ یا ۳ نمی‌تواند باشد یعنی $p > 3$ است. α را نمای طبیعی ۲ نسبت به مدول p می‌گیریم که به ازای آن $3^\alpha - 1$ بر p قابل قسمت باشد. چون $p > 3$ است، طبق قضیه کوچک فرما $3^{p-1} - 1$ بر p و طبق فرض $3^{2^n} - 1$ بر p قابل قسمت است، بنابراین نتیجه

می گیریم که هم $p-1$ و هم $2n$ بر α قابل قسمت اند. اگر α عددی فرد باشد، n بر α قابل قسمت می شود و چون $\alpha < p$ و p کوچکترین مقسوم علیه اول n است باید $\alpha = 1$ باشد، یعنی $1 - 3^1$ بر p قابل قسمت است که قابل قبول نیست، زیرا $p > 3$ بود. بنابراین α باید عددی زوج باشد: $\alpha = 2k$ ، و چون $2n$ بر α قابل قسمت است، n بر k قابل قسمت می شود، و بنابراین k عددی است فرد. اگر $k=1$ باشد $\alpha=2$ و $1 - 3^2$ بر p قابل قسمت و $p=2$ می شود که قابل قبول نیست. بنابراین $k > 1$ و $k < \alpha < p$ می شود که ممکن نیست، زیرا p کوچکترین مقسوم علیه اول n بود، در حالیکه حالا n بر $k < p$ قابل قسمت است.

تبصره. اگر a عدد طبیعی باشد، بنحوی که $a+1$ مساوی توانی از 2 نشود (یعنی $1, 3, 7, 15, \dots$)، بی نهایت عدد طبیعی برای n پیدا می شود، طوری که $a^n + 1$ بر n قابل قسمت باشد.

اثبات این قضیه (با کمی اختلاف نسبت به اثبات رویترو) چنین است: چون $a+1$ توانی از 2 نیست باید مقسوم علیه اولی مانند $p > 2$ داشته باشد. حالا لم زیر را ثابت می کنیم.

لم. اگر برای عدد صحیح $c, k \geq c$ ، $a^{p^k} + 1$ بر p^{k+1} قابل قسمت باشد (a عددی طبیعی و بزرگتر از واحد و p عدد فرد اول است)، در اینصورت $a^{p^{k+1}} + 1$ بر p^{k+2} قابل قسمت خواهد بود.

اثبات. فرض می کنیم برای عدد صحیح $c, k \geq c$ ، عدد $a^{p^k} + 1$ بر p^{k+1} قابل قسمت باشد. $a^{p^k} = b$ می گیریم. $b+1$ بر p^{k+1} قابل قسمت است، یعنی $b \equiv -1 \pmod{p^{k+1}}$. چون p عددی است فرد، داریم:

$$a^{p^{k+1}} + 1 = b^p + 1 = (b+1)(b^{p-1} - b^{p-2} + \dots - b + 1) \quad (*)$$

و چون $b \equiv -1 \pmod{p^{k+1}}$ و یا $b \equiv -1 \pmod{p}$ ، خواهیم داشت :

$$b^{2l} \equiv 1 \pmod{p}, \quad b^{2l-1} \equiv -1 \pmod{p} \quad (l=1, 2, \dots)$$

از آنجا :

$$b^{p-1} - b^{p-2} + \dots - b + 1 \equiv 1 + 1 + \dots + 1 = p \equiv 0 \pmod{p}$$

بنابراین عامل دوم سمت راست رابطه (*) بر p قابل قسمت است و چون عامل اول بر p^{k+1} قابل قسمت بود ، حاصلضرب آنها یعنی $a^{p^{k+1}} + 1$ بر p^{k+2} قابل قسمت می شود .

با استفاده از این لم و به کمک استقراء ریاضی می توان ثابت کرد که اگر

$a + 1$ بر p قابل قسمت باشد $a^{p^k} + 1$ بر p^{k+1} و در نتیجه $a^{p^k} + 1$ بر p^k (برای $k=1, 2, \dots$) قابل قسمت است . بنابراین بی نهایت عدد طبیعی برای n وجود دارد . بنحوی که $a^n + 1$ بر n قابل قسمت باشد .

۲۲* . بنابر قضیهٔ رویتز ، که در تبصرهٔ مسئلهٔ قبل ثابت کردیم ،

کافی است ثابت کنیم که برای هر عدد فرد $a > 1$. بی نهایت عدد طبیعی n وجود دارد ، بنحوی که $a^n + 1$ بر n قابل قسمت باشد . واضح است که به ازاء $n=2$ ، با توجه به فرد بودن a ، عدد $a^2 + 1$ بر ۲ قابل قسمت است . ضمناً واضح است که a^2 عددی به صورت $4k+1$ می باشد ، یعنی $(4k+1) = a^2 + 1 = 4k+2$ مساوی دو برابر يك عدد فرد است . حالاً لم زیر را ثابت می کنیم .

لم . اگر a عددی فرد و بزرگتر از واحد ، s و $a^s + 1$ هر کدام دو برابر يك عدد فرد و $a^s + 1$ بر s قابل قسمت باشد ، عدد طبیعی $s_1 > s$ وجود دارد ، بنحوی که s_1 و $a^{s_1} + 1$ هر يك دو برابر يك عدد فرد و $a^{s_1} + 1$ بر s_1 قابل قسمت باشد .

اثبات. چون $a^s + 1$ بر s قابل قسمت و s و $a^s + 1$ دو برابر عدد هائی فرد هستند ، $a^s + 1 = ms$ می شود بطوریکه m عددی فرد است . از آنجا $a^{ms} + 1$ بر $a^s + 1$ یا $a^{s+1} + 1$ بر $a^s + 1$ قابل قسمت می شود ضمناً چون $a^s + 1$ عددی است زوج ، $a^{s+1} + 1$ دو برابر یک عدد فرد است .

به این ترتیب برای $s_1 = a^s + 1$ ، عدد $a^{s_1} + 1$ بر s_1 قابل قسمت است و ضمناً s_1 و $a^{s_1} + 1$ هر کدام دو برابر یک عدد فرد هستند و (چون $a > 1$ است) داریم :

$$s_1 = a^s + 1 > s$$

حالا اگر $s = 2$ فرض کنیم ، با توجه به فرد بودن a ، شرایط لم برقرار است و در نتیجه بی نهایت عدد طبیعی n وجود دارد ، بنحوی که $a^n + 1$ بر n قابل قسمت باشد .

۲۳* ثابت می کنیم که اگر n عددی زوج باشد بنحوی که $2^n + 2$ بر n و $2^n + 1$ بر $n - 1$ قابل قسمت باشند (که مثلاً به ازای $n = 2$ صحیح است) ، برای عدد $n_1 = 2^n + 1$ هم همین خاصیت وجود دارد ، یعنی $2^{n_1} + 2$ بر n و $2^{n_1} + 1$ بر $n_1 - 1$ قابل قسمت است .

اگر $2^n + 2$ بر n قابل قسمت و n عددی زوج باشد $2^n + 2 = nk$ (k عددی است فرد) می شود و بنابراین $2^{nk} + 1 = 2^{2^n + 2} + 1$ بر $2^n + 1$ قابل قسمت می شود ؛ به این ترتیب برای $n_1 = 2^n + 2$ ، عدد $2^{n_1} + 1$ بر $n_1 - 1$ قابل قسمت است . از طرف دیگر ، چون $2^n + 1$ بر $n - 1$ قابل قسمت است داریم : $2^n + 1 = (n - 1)m$ (m عددی است فرد) و بنابراین $2^{(n-1)m} + 1 = 2^{2^n + 1} + 1$ بر $2^{n-1} + 1$ قابل

قسمت و از آنجا $2 + 2 + 2^{2^n} + 2$ بر $2^n + 2$ یعنی $2^n + 2$ بر $2^n + 2$ قابل قسمت است.

چون $n > 2^n + 2 = n_1$ است، بی نهایت عدد زوج n وجود دارد که در شرایط مسئله صدق می کند. با شروع از $n = 2$ ، با روش مذکور، دنبالهٔ عددهای $2, 6, 6, 2, 2^{2^{2^{2^6}}} + 2, \dots$ بدست می آید. ولی، همانطور که بیندشده اند متذکر می شود، از این راه نمی توان همهٔ عددهای طبیعی n را بدست آورد، بطوریکه به ازای آنها $2^n + 2$ بر n قابل قسمت باشد. مثلاً $2^{2^{2^{2^6}}} + 2$ بر $2^{2^{2^6}}$ قابل قسمت است، زیرا $2^{2^{2^6}} = 2 \cdot 11 \cdot 43 = 946$ است، چون $1 + 5$ بر 11 قابل قسمت است در نتیجه $2^{2^{2^6}} + 1 = 2^{2^{2^6}} + 1 = 2^{5 \cdot 11} + 1$ بر 11 قابل قسمت است و از آنجا $2^{2^{2^6}} + 2$ بر 11 قابل قسمت می شود؛ از طرف دیگر داریم: $1 - 3 \cdot 43 = -128 = 2^7$ و از آنجا $1 + 2^7$ بر 43 قابل قسمت است و چون داریم: $7 \cdot 135 = 945$ بنابراین $1 + 2^{945} = 2^{7 \cdot 135} + 1$ بر 43 و در نتیجه $2^{2^{2^6}} + 2$ بر 43 قابل قسمت می شود.

۲۴. اگر a عددی طبیعی و r باقیماندهٔ تقسیم عدد a بر 10 باشد، تنها وقتی $1 + a^{10}$ بر 10 قابل قسمت است که $1 + r^{10}$ بر 10 قابل قسمت باشد. بنابراین بجای r می توان عددهای $0, 1, 5, 2, \dots, 9$ را در نظر گرفت که در مورد آنها تنها $1 + 3^{10}$ و $1 + 7^{10}$ بر 10 قابل قسمت است. به این ترتیب به ازای همهٔ عددهای طبیعی a که بصورت $10k + 3$ و $10k + 7$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) باشند، $1 + a^{10}$ بر 10 قابل قسمت است.

۲۵* اثبات آ. شینتسل. $n > 1$ و $2^n - 1$ را بر n قابل قسمت می گیریم. p را کوچکترین مقسوم علیه اول n و α را نمای عدد p نسبت

بهمدول p فرض می‌کنیم. در این صورت $1 - 2^\alpha$ بر p و (طبق قضیه کوچک فرما) $1 - 2^{p-1}$ بر p قابل قسمت می‌شود، طبق فرض هم $1 - 2^n$ بر n و در نتیجه بر p قابل قسمت بود، بنابراین $p-1$ و n بر α قابل قسمت و $\alpha < p$ می‌شود. از طرف دیگر $\alpha > 1$ است، زیرا نمی‌شود فرض کرد که $1-2^1$ بر p قابل قسمت است. بنابراین عدد n مقسوم علیی بزرگتر از واحد و کوچکتر از p پیدا می‌کند که متناقض با فرض است (p را کوچکترین مقسوم علیه اول n گرفته بودیم).

۲۶. واضح است که n نمی‌تواند مضربی از ۳ باشد. اگر در تقسیم n بر ۳ باقیمانده‌ای مساوی واحد بدست آید، باید عدد $1 + 2^n$ مضربی از ۳ باشد. یعنی باید n عدد فردی باشد و در نتیجه n عددی بصورت $1 + 6k$ در می‌آید ($k \geq 0$ و عددی صحیح). اگر در تقسیم n بر ۳ باقیمانده ۲ بدست آید، باید عدد $1 + 2 \cdot 2^n$ بر ۳ قابل قسمت باشد و بنابراین n باید عددی زوج و بصورت $2 + 6k$ باشد ($k = 0, 1, 2, \dots$). به این ترتیب همه عددهای طبیعی n که به ازای آنها $1 + 2 \cdot 2^n$ بر ۳ قابل قسمت است به صورت $1 + 6k$ و $2 + 6k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) هستند.

۲۷. اگر p عددی اول و فرد باشد و داشته باشیم:

$$n = (p-1)(k \cdot p + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

خواهیم داشت: $n \equiv -1 \pmod{p}$ و n بر $p-1$ قابل قسمت می‌شود، از اینجا با توجه به قضیه کوچک فرما: $2^n \equiv 1 \pmod{p}$ و عدد $1 + 2^n$ بر p قابل قسمت می‌شود.

تبصره. از این مسئله نتیجه می‌شود که بی‌نهایت عدد مرکب بصورت $n \cdot 2^n + 1$ (n عددی طبیعی است) وجود دارد. عددهائی که به اینصورت باشند، **عددهای کالن** نامیده می‌شوند.

ثابت شده است که همهٔ این عددها برای $1 < n < 141$ مرکب‌اند ولی به ازای $n = 141$ ، عدد $n \cdot 2^n + 1$ ، عددی اول می‌شود. معلوم نیست که آیا بین عددهای کالن بی‌نهایت عدد اول وجود دارد یا نه؟

۲۸. n را يك عدد طبیعی و k را عدد طبیعی بزرگتر از واحد می‌گیریم، بنحوی که $2^k > n$ باشد، p را هم عددی اول فرض می‌کنیم که از $k \cdot 2^{k-1}$ بزرگتر باشد. چون $k > 1$ است، برای $x = 2^k$ و $y = 2p$ واضح است که y بر x قابل قسمت نیست ولی y^y بر x^x قابل قسمت است زیرا $x^x = 2^k \cdot 2^k$ و $y^y = (2p)^{2p}$ و ضمناً $k \cdot 2^k > 2p$ است. مثلاً 1010 بر 4^4 قابل قسمت است، در حالیکه 10 بر 4 قابل قسمت نیست؛ 1212 بر 8^8 قابل قسمت است، در حالیکه 12 بر 8 قابل قسمت نیست؛ 2121 بر 9^9 قابل قسمت است، در حالیکه 21 بر 9 قابل قسمت نیست.

۲۹. بترتیب به عوامل اول تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 1^2 - 3 &= -2, 2^2 - 3 = 1, 3^2 - 3 = 2 \cdot 3, 4^2 - 3 = 13, \\
 5^2 - 3 &= 2 \cdot 11, 6^2 - 3 = 3 \cdot 11, 7^2 - 3 = 2 \cdot 23, 8^2 - 3 = 61, \\
 9^2 - 3 &= 2 \cdot 3 \cdot 13, 10^2 - 3 = 97, 11^2 - 3 = 2 \cdot 59, \\
 12^2 - 3 &= 3 \cdot 47, 13^2 - 3 = 2 \cdot 83, 14^2 - 3 = 193, \\
 15^2 - 3 &= 2 \cdot 3 \cdot 37, 16^2 - 3 = 11 \cdot 23, 17^2 - 3 = 2 \cdot 11 \cdot 13, \\
 18^2 - 3 &= 3 \cdot 107, 19^2 - 3 = 2 \cdot 179, 20^2 - 3 = 397, \\
 21^2 - 3 &= 2 \cdot 3 \cdot 73, 22^2 - 3 = 13 \cdot 37, 23^2 - 3 = 2 \cdot 263, \\
 24^2 - 3 &= 3 \cdot 191, 25^2 - 3 = 2 \cdot 311, 26^2 - 3 = 673, \\
 27^2 - 3 &= 2 \cdot 3 \cdot 113,
 \end{aligned}$$

به این ترتیب، کوچکترین عدد طبیعی n که به ازای آن $n^2 - 3$ بر مجذور کامل يك عدد طبیعی بزرگتر از واحد، قابل قسمت باشد، عبارتست از $n = 27$.

چون $27^2 - 3$ بر 11^2 قابل قسمت است، $(27 + 121k)^2 - 3$ هم بر 11^2 قابل قسمت خواهد بود (به ازای $k = 0, 1, 2, \dots$). از اینجا نتیجه می شود که بی نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که $n^2 - 3$ بر مجذور کامل يك عدد طبیعی بزرگتر از واحد قابل قسمت باشد. تبصره (آ. شینسل). می توان ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی m عدد صحیح a وجود دارد، بنحوی که حتی یکی از اعدادهای $a, a+1, a+2, \dots, a+m^2$ بر مجذور کامل يك عدد طبیعی بزرگتر از واحد قابل قسمت نباشد. همچنین می توان ثابت کرد که اگر $f(x)$ کثیر الجمله ای با ضرایب صحیح باشد، بی نهایت عدد طبیعی x وجود دارد، که به ازای آنها عدد $f(x)$ ، مقسوم علیه مجذور کاملی بزرگتر از واحد داشته باشد.

۳۰* اگر n عددی طبیعی باشد $n!$ بر $\varphi(x)$ قابل قسمت است. در حقیقت، برای $n = 1$ حکم واضح است؛ اگر $n > 1$ ، $n = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot q_k^{\alpha_k}$ تجزیه عدد n به عوامل اول باشد $(q_1 < q_2 < \dots < q_k)$ ، در این صورت $\varphi(n) = q_1^{\alpha_1 - 1} \cdot q_2^{\alpha_2 - 1} \cdot \dots \cdot q_k^{\alpha_k - 1} (q_1 - 1) \cdot \dots \cdot (q_k - 1)$ بر n قابل قسمت و $q_k^{\alpha_1 - 1} \cdot q_2^{\alpha_2 - 1} \cdot \dots \cdot q_k^{\alpha_k - 1} < n$ می شود و $q_1 - 1 < q_2 - 1 < \dots < q_k - 1$ ، عددهای مختلف طبیعی کوچکتر از n هستند، بنحوی که عدد $(n - 1)!$ بر عدد $(q_1 - 1)(q_2 - 1) \cdot \dots \cdot (q_k - 1)$ قابل قسمت است.

در نتیجه $n! = (n - 1)!$ بر $\varphi(x)$ قابل قسمت می شود. وقتی که n عددی فرد باشد، طبق قضیه اولر، $1 - \varphi(x)$ بر n

قابل قسمت است و چون $1 - 2^{n!}$ بر $1 - 2^{\varphi(n)}$ قابل قسمت است ،
 $1 - 2^{n!}$ بر n قابل قسمت می شود .

۳۱ . طبق قضیه کوچک فرما $1 - 2^4$ بر 5 و $1 - 2^{12}$ بر 13 قابل
 قسمت است . بنابراین ، با توجه به اینکه $3 - 2^2$ بر 5 و $3 - 2^4$ بر 13
 قابل قسمت است ، برای $k = 0, 1, 2, \dots$ عدد $3 - 2^{4k+2}$ بر 5 و
 $3 - 2^{12k+4}$ بر 13 قابل قسمت است .

چون $2^6 \equiv -1 \pmod{65}$ ، پس $2^{12} \equiv 1 \pmod{65}$ و
 $2^{n+12} - 3 \equiv 2^n - 3 \pmod{65}$. از همنهشتی اخیر نتیجه می شود که
 دنباله باقیمانده های $2^n - 3$ ($n = 2, 3, \dots$) بر 65 متناوب است و هر
 دوره تناوب آن شامل 12 جمله است^۱ بنابراین برای اینکه ثابت کنیم
 هیچیک از عددهای $2^n - 3$ ($n = 2, 3, \dots$) بر 65 قابل قسمت نیستند،
 کافی است تحقیق کنیم که هیچیک از عددهای $2^n - 3$ برای $m = 2, 3, \dots, 13$
 بر 65 قابل قسمت نیستند . بسادگی می توان تحقیق کرد که در تقسیم هر
 يك از این عددها بر 65 بترتیب باقیمانده های $1, 5, 13, 29, 61, 60, 58$ ،
 $54, 46, 30, 63, 64$ بدست می آید که هیچکدام آنها مساوی صفر نیست.
^{۳۲} . چهار عدد مرکب کوچکتر از n ، که به ازای آنها $2^n - 2$ بر
 n قابل قسمت است ، عبارتند از $341, 561, 645$ و 1105 . برای 341 ،
 عدد $3 - 341$ بر 341 قابل قسمت نیست ، زیرا طبق قضیه کوچک فرما ،
 $1 - 3^{30}$ بر 31 و در نتیجه $1 - 3^{330}$ بر 31 قابل قسمت است ، بنابراین
 $341 \equiv 311 \pmod{31}$. سپس ، چون $3^3 \equiv -4 \pmod{31}$ است ،
 $3^9 \equiv -2 \pmod{31}$ و از آنجا $3^{11} \equiv -18 \pmod{31}$

و بنابراین $(\text{mod } 21) - 21 = 3 - 311 \equiv 3 - 3241$ می شود و بنا بر این $3 - 3241$ بر 31 و طبعاً بر $11 \cdot 31 = 341$ قابل قسمت نیست. ولی $3 - 3561$ بر $3 \cdot 11 \cdot 17 = 561$ قابل قسمت است، زیرا $1 - 310$ بر 11 و از آنجا $1 - 3240$ بر 11 و در نتیجه $3 - 3241$ بر 11 قابل قسمت است؛ همچنین $1 - 316$ بر 17 ، از آنجا $1 - 316 \cdot 35 = 1 - 3560$ بر 17 و بنا بر این $3 - 3561$ بر 17 قابل قسمت است. به این ترتیب کوچکترین عدد مرکب n ، که به ازای آن $2^n - 2$ و $3^n - 3$ بر n قابل قسمت باشند، $n = 561$ است.

عدد 645 مقسوم علیه $3 - 3645$ نیست، زیرا $3 \cdot 5 \cdot 43 = 645$ است. از طرف دیگر $1 - 342$ بر 43 و در نتیجه $1 - 342015$ بر 43 ($630 = 42 \cdot 15$) قابل قسمت است و از آنجا $315 \equiv 3645 \pmod{43}$. سپس $3^4 \equiv -5 \pmod{43}$ و بنا بر این $2 \pmod{43} \equiv -45 \equiv 3^6$ ، $3^{12} \equiv 4 \pmod{43}$ و $22 \pmod{43} \equiv 108 \equiv 3^{15}$ می شود و از آنجا $3 \equiv 19 \pmod{43} \equiv 3645 - 3$ می شود، یعنی $3 - 3645$ بر 43 قابل قسمت نیست.

عدد 1105 مقسوم علیه عدد $3 - 31105$ می باشد، زیرا $1105 = 3 \cdot 13 \cdot 17$ است و داریم:

$$3^4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 3^{1104} \equiv 1 \pmod{5} \quad (1104 = 4 \cdot 276)$$

و بنابراین $3 - 31105$ بر 5 قابل قسمت است، از طرف دیگر

$$3^{12} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 3^{1104} \equiv 1 \pmod{13} \quad (1104 = 12 \cdot 92)$$

یعنی $3 - 31105$ بر 13 قابل قسمت است؛ بالاخره

$$3^{16} \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow 3^{1104} \equiv 1 \pmod{17} \quad (1104 = 16 \cdot 69)$$

و در نتیجه $3 - 3^{1105}$ بر 17 قابل قسمت است .

به این ترتیب ، کوچکترین دو عدد مرکب n ، که به ازای آنها $2^n - 2$ و $3^n - 3$ بر n قابل قسمت باشند ، عبارتست از 561 و 1105 .
تبصره . معلوم نیست که آیا بی نهایت عدد مرکب n وجود دارد ، که به ازای آنها $2^n - 2$ و $3^n - 3$ بر n قابل قسمت باشند . ولی وقتی n عددی اول باشد ، طبق قضیه کوچک فرما ، هم $2^n - 2$ و هم $3^n - 3$ بر n قابل قسمت اند .

عددهای مرکب n را ، که به ازای آنها $2^n - 2$ بر n قابل قسمت است ، عددهای اول نما گویند . آ. روتکه ویچ ثابت کرد که در هر تصاعد حسابی $ax + b$ ($x = 0, 1, 2, \dots$) ، بشرطی که a و b دو عدد طبیعی و نسبت بهم اول باشند ، بی نهایت عدد اول نما وجود دارد [۶] .

^{۳۳} چون $3^n - 3$ بر n قابل قسمت نیست ، بنابراین طبق قضیه کوچک فرما نتیجه می گیریم که n باید عددی مرکب باشد . کوچکترین عدد مرکبی که به ازای آن $2^n - 2$ بر n قابل قسمت باشد 341 است و در مسئله 32 ثابت کردیم که $341 - 3$ بر 341 قابل قسمت نیست . بنابراین کوچکترین عدد طبیعی n ، برای اینکه $2^n - 2$ بر n قابل قسمت ، ولی $3^n - 3$ بر n غیر قابل قسمت باشد ، 341 است .

تبصره . آ. روتکه ویچ ثابت کرد که بی نهایت عدد طبیعی n ، چه زوج و چه فرد وجود دارد ، بنحوی که $2^n - 2$ بر n قابل قسمت و $3^n - 3$ بر n غیر قابل قسمت باشد .

می توان ثابت کرد که کوچکترین عدد طبیعی n ، که به ازای آن $2^n - 2$

و $3^n - 3$ بر n قابل قسمت و $5^n - 5$ بر n غیر قابل قسمت باشد
 $n = 37.73 = 2701$ است .

۳۴ . این عدد $n = 6$ است . در حقیقت وقتی $2^n - 2$ بر n قابل قسمت نیست . باید n عددی مرکب باشد. کوچکترین عدد مرکب ۴ است ولی $3^4 - 3$ بر ۴ قابل قسمت نیست . عدد مرکب بعدی ۶ است و ضمناً $2^6 - 2 = 62$ بر ۶ قابل قسمت نیست ، ولی $3^6 - 3$ بر ۶ قابل قسمت است ، زیرا $3^6 - 3$ عددی است زوج و مضرب ۳ .

تبصره ۵.۷. رو تکه و بیچ ثابت کرد که بی نهایت عدد مرکب n ، چه زوج و چه فرد ، وجود دارد ، بنحوی که $3^n - 3$ بر n قابل قسمت و $2^n - 2$ بر n غیر قابل قسمت باشد .

۳۵ . اگر a عددی مرکب باشد، می توان $n = a$ فرض کرد، زیرا واضح است که $a^n - a$ بر a قابل قسمت است . اگر $a = 1$ باشد، می توان مثلاً $n = 4$ گرفت ، زیرا $1^4 - 1$ بر ۴ قابل قسمت است . وقتی که a عددی اول و بزرگتر از ۲ باشد ، می توان $n = 2a$ فرض کرد ، زیرا در این صورت عدد a فرد است و عدد زوج $a^{2n} - a$ بر عدد فرد a و بر عدد ۲ و در نتیجه بر $2a$ قابل قسمت است .

تنها حالت $a = 2$ باقی می ماند. در این مورد می توان $n = 341 = 11.31$ فرض کرد که در این صورت $2 - 2^{341}$ بر 341 قابل قسمت است ، زیرا $1 - 2^{10}$ و در نتیجه $1 - 2^{340}$ بر ۱۱ قابل قسمت است ، یعنی $2 - 2^{341}$ بر ۱۱ قابل قسمت می شود . همچنین $1 - 2^5$ و در نتیجه $1 - 2^{340}$ بر ۳۱ قابل قسمت ، یعنی $2 - 2^{341}$ بر ۳۱ قابل قسمت می شود . عدد $2 - 2^{341}$ بر ۱۱ و ۳۱ قابل قسمت است ، بنابراین بر حاصلضرب آنها یعنی 341 قابل قسمت می شود .

تبصره . م . چی پولا ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی a ، بی نهایت عدد مرکب n وجود دارد ، بنحوی که $1 - a^{n-1}$ بر n قابل قسمت باشد .
 آ. شینتسل ثابت کرد که برای هر عدد صحیح a و هر عدد طبیعی m ، دو عدد مختلف اول $p > m$ و $q > m$ وجود دارد ، بنحوی که $a^{pq} - a$ بر pq قابل قسمت باشد .

نمی دانیم که آیا بی نهایت عدد مرکب n وجود دارد ، که به ازای آنها ، برای هر عدد صحیح a ، عدد $a^n - a$ بر n قابل قسمت باشد . کوچکترین این عددها $n = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ است .

می توان ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی a ، بی نهایت عدد زوج n وجود دارد ، بنحوی که $a^n - a$ بر n قابل قسمت باشد ؛ همچنین برای هر عدد طبیعی $a > 1$ و هر عدد طبیعی s ، بی نهایت عدد طبیعی n وجود دارد ، بنحوی که n مساوی حاصل ضرب s عدد اول مختلف باشد و $1 - a^n$ بر n قابل قسمت شود .

۳۶ . مکعب عدد صحیحی که بر ۳ قابل قسمت نباشد ، در تقسیم بر ۹ باقیمانده ای مساوی ۱ یا ۱- دارد . اگر هیچیک از عددهای a, b, c بر ۳ قابل قسمت نباشند ، از تقسیم $a^2 + b^2 + c^2$ بر ۹ یکی از باقیمانده های $1 \pm 1 \pm 1$ می رسمیم ، که هیچ ترکیبی از علامتها ، مضربی از ۹ بدست نمی دهد . بنابراین اگر $a^2 + b^2 + c^2$ بر ۹ قابل قسمت باشد abc بر ۳ قابل قسمت است .

۳۷ . اثبات کاملا شبیه مسئله قبل است ، زیرا از ترکیب علامتها در $1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1$ ، عددی که بر ۹ قابل قسمت باشد ، بدست نمی آید .

۳۸. شرط $(x, y) = 1$ لازم است، زیرا مثلاً داریم: $۱۵^۲ + ۲۰^۲ = ۵^۴$

در حالیکه $۱۵ \cdot ۲۰$ بر ۷ قابل قسمت نیست. ولی اگر $(x, y) = 1$ و x, y, z و z چنان باشند که رابطه $x^۲ + y^۲ = z^۲$ برقرار باشد، با توجه به معادله فیثاغورثی، عددهای m و n وجود دارند، بنحوی که مثلاً
 $z^۲ = m^۲ + n^۲$ ، $y = 2mn$ ، $x = m^۲ - n^۲$ باشد.

فرض می‌کنیم y بر ۷ قابل قسمت نباشد، که در اینصورت m و n هم غیر قابل قسمت بر ۷ می‌شوند. بسادگی می‌توان محاسبه کرد که مجذور عدد صحیحی که بر ۷ قابل قسمت نیست، در تقسیم بر ۷ باقیمانده‌ای مساوی ۱ یا ۲ یا ۴ می‌دهد. چون هیچک از مجموعهای $۱ + ۲$ ، $۱ + ۴$ و $۲ + ۴$ نه مضرب ۷ هستند و نه منطبق بر یکی از همین باقیمانده‌ها، از تساوی $z^۲ = m^۲ + n^۲$ نتیجه می‌شود که عددهای m و n باید در تقسیم بر ۷ باقیمانده‌های مساوی داشته باشند و از آنجا $x = m^۲ - n^۲$ بر ۷ قابل قسمت می‌شود.

۳۹*. مثلاً عددهای زیر دارای خاصیت مطلوبند:

$$x = ۳۶k + ۱۴, \quad y = (۱۲k + ۵)(۱۸k + ۷)$$

($k = 0, 1, 2, \dots$) در حقیقت بسادگی می‌توان تحقیق کرد که در اینصورت

$y(y+1)$ بر $x(x+1)$ قابل قسمت است. زیرا داریم:

$$x(x+1) = ۲ \cdot ۳ \cdot (۱۲k+۵)(۱۸k+۷) = ۶y$$

و $y+1$ هم بر ۶ قابل قسمت است. از طرف دیگر y بر $x+1$ قابل قسمت نیست، زیرا $x+1$ بر ۳ قابل قسمت است، ولی y بر ۳ قابل قسمت نیست؛ $y+1$ هم بر x قابل قسمت نیست، زیرا x بر $۱۸k+۷$ قابل قسمت است، ولی y بر $۱۸k+۷$ قابل قسمت نیست؛ بالاخره $y+1$ بر

$x+1$ قابل قسمت نیست، زیرا $x+1$ بر $۱۲k+۵$ قابل قسمت است، در حالیکه $y+1$ بر $۱۲k+۵$ قابل قسمت نیست.

به ازای $k=۰$ بدست می آید: $x=۱۴$ ، $y=۳۵$. این دو عدد، کوچکترین زوج عددی هستند که دارای خاصیت مورد نظر می باشند. ۰.۴۰ واضح است که برای $s < ۱۰$ داریم: $n_s = s$. سپس با جستجوی بین مضربهای عدد s ، بطور متوالی، بدست می آید:

$$n_{۱۰} = ۱۹۰, n_{۱۱} = ۲۰۹, n_{۱۲} = ۴۸, n_{۱۳} = ۲۴۷, n_{۱۴} = ۲۶۶,$$

$$n_{۱۵} = ۱۹۵, n_{۱۶} = ۴۴۸, n_{۱۷} = ۴۷۶, n_{۱۸} = ۱۹۸, n_{۱۹} = ۸۷۴,$$

$$n_{۲۰} = ۹۹۲۰, n_{۲۱} = ۳۹۹, n_{۲۲} = ۲۳۹۸, n_{۲۳} = ۱۶۷۹,$$

$$n_{۲۴} = ۸۸۸, n_{۲۵} = ۴۹۷۵.$$

وبالاخره $n_{۱۰۰} = ۱۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۰۰$ ، در حقیقت دور رقم سمت راست هر عددی که بر ۱۰۰ قابل قسمت باشد، صفر است و ضمناً مجموع رقمهای هر عدد طبیعی کوچکتر از ۱۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹ کمتر از ۱۰۰ می باشد.

۰.۴۱^* فرض کنید s عددی طبیعی و به صورت $t = ۲^\alpha \cdot ۵^\beta$

باشد (α و β عددهای صحیح غیر منفی و t ، عددی طبیعی غیر قابل قسمت بر ۲ و ۵ است). بر اساس قضیه اولر داریم: $۱۰^{\varphi(t)} \equiv 1 \pmod{t}$. فرض می کنیم:

$$n = ۱۰^{\alpha+\beta} (۱۰^{\varphi(t)} + ۱۰^{۲\varphi(t)} + \dots + ۱۰^{s \cdot \varphi(t)}),$$

عدد n بر s قابل قسمت است، زیرا $۱۰^{\alpha+\beta}$ بر $۲^\alpha \cdot ۵^\beta$ قابل قسمت است و داریم:

$$10^{\varphi(t)} + 10^{2\varphi(t)} + \dots + 10^{s \cdot \varphi(t)} \equiv s \equiv 0 \pmod{t}$$

(زیرا s بر t قابل قسمت است). از طرف دیگر، واضح است که مجموع رقمهای عدد n (در دستگاه عدد شماری به مبنای 10) مساوی s است. $4k+3$ در حالتی که عدد، مقسوم علیه اولی بصورت $4k+3$ ندارد، قضیه واضح است. فرض می کنیم که قضیه برای همه عددهای طبیعی، که در تجزیه به عوامل اول با نماهای واحد (که طبعاً این عوامل می توانند مختلف نباشند)، دارای $s \geq 0$ عامل اول بصورت $4k+3$ هستند، صحیح باشد؛ و فرض می کنیم n عددی طبیعی باشد، که در تجزیه به عوامل اول (بانماهای واحد) دارای $s+1$ عامل اول بصورت $4k+3$ باشد. $n = m \cdot q$ در نظر می گیریم، بطوریکه m در تجزیه به عوامل (بانماهای واحد) دارای s عامل اول بصورت $4k+3$ و q ، عدد اولی بصورت $4k+3$ باشد.

g را تعداد مقسوم علیه های طبیعی عدد m بصورت $4k+1$ ، و h را تعداد مقسوم علیه های طبیعی عدد m بصورت $4k+3$ فرض می کنیم طبق فرضی که در مورد تعداد s کردیم، $g \geq h$ است.

مقسوم علیه های طبیعی بصورت $4k+1$ در عدد $m \cdot q$ عبارتست از مقسوم علیه های طبیعی بصورت $4k+1$ در عدد m (که تعداد آنها g است)، و حاصل ضرب q در هر یک از مقسوم علیه های طبیعی عدد m که بصورت $4k+3$ هستند (که تعداد آنها h است).

به این ترتیب، تعداد مقسوم علیه های طبیعی بصورت $4k+1$ در عدد $m \cdot q$ مساوی $g+h$ است. مقسوم علیه های طبیعی بصورت $4k+3$ در عدد $m \cdot q$ عبارتست از مقسوم علیه های طبیعی بصورت $4k+3$ در عدد

m (که تعداد آنها h است)، و حاصلضرب عدد q در هر يك از مقسوم علیه‌های طبیعی بصورت $4k+1$ در عدد m (که تعداد آنها g است). ولی در این حاصلضربهای اخیر ممکن است مقسوم علیه‌هایی از عدد m ، که بصورت $4k+3$ بودند، ظاهر شود.

بنابراین، تعداد مقسوم علیه‌های طبیعی بصورت $4k+3$ در عدد $m \cdot q$ کوچکتر یا مساوی $h+g$ است (و می‌تواند کوچکتر باشد). در هر حالتی، قضیه برای عدد $m \cdot q$ صحیح است. بنابراین با استفاده از روش استقراء ریاضی، نتیجه می‌گیریم که برای هر عدد طبیعی n صحیح است.

(b) عدد 3^{2n-1} ($n=1, 2, \dots$) بهمان تعداد که مقسوم علیه‌های طبیعی بصورت $4k+1$ دارد (که عبارتند از عددهای $1, 3^2, 3^4, \dots, 3^{2n-2}$) بهمان تعداد هم مقسوم علیه‌های طبیعی بصورت $4k+3$ دارد (که عبارتند از عددهای $3, 3^3, 3^5, \dots, 3^{2n-1}$).

(c) عدد 3^{2n} ($n=1, 2, \dots$) دارای $n+1$ مقسوم علیه طبیعی بصورت $4k+1$ (که عبارتند از $1, 3^2, 3^4, \dots, 3^{2n}$) و فقط n مقسوم علیه طبیعی بصورت $4k+3$ است (که عبارتند از $3, 3^3, \dots, 3^{2n-1}$). همه $n+1$ مقسوم علیه عدد 5^n بصورت $4k+1$ هستند، در حالیکه این عدد حتی يك مقسوم علیه بصورت $4k+3$ ندارد.

$43 \cdot r_1, r_2, r_3$ را باقیمانده‌های متناظر تقسیم عدد های $-a, -b, -c$ بر n فرض می‌کنیم. چون این باقیمانده‌ها به دنباله $0, 1, 2, \dots, n-1$ تعلق دارند، در این دنباله می‌توان عدد r را طوری انتخاب کرد که $r \neq r_1, r \neq r_2, r \neq r_3$ باشد. فرض می‌کنیم

$a+r$ بر n قابل قسمت باشد، در اینصورت با در نظر گرفتن همنهشتی $-a \equiv r_1 \pmod{n}$ ، نتیجه می‌شود که $r-r_1$ بر n قابل قسمت است. r_1 و r عددهای صحیحی بزرگتر یا مساوی صفر و کوچکتر از n هستند؛ بنابراین اگر تفاضل آنها بر n قابل قسمت باشد، باید $r=r_1$ شود، که با انتخاب عدد r مغایر است. بهمین ترتیب ثابت می‌شود که $b+r$ و $c+r$ هم بر n قابل قسمت نیستند. بنابراین می‌توان $k=r$ گرفت.

۲. عددهائی که نسبت بهم اولند

(۴۴. a) میدانیم که هر مقسوم‌علیه بزرگتر از واحد عدد $F_n = 2^{2^n} + 1$ عددی بصورت $2^{n+2}k + 1$ است (k عددی طبیعی است). چون برای عددهای طبیعی n و k داریم: $2^{n+2}k + 1 > 2^{n+2} + 1 > n$ ، بنابراین هر مقسوم‌علیه بزرگتر از واحد F_n ، عددی بزرگتر از n است و از آنجا $(n, F_n) = 1$ می‌شود.

(b) بسادگی می‌شود که برای $n=1, 2, 3, 4, 5$ داریم: $(n, 2^n - 1) = 1$ و $(6, 2^6 - 1) = 3$. بنابراین کوچکترین جواب n برای سؤال مسئله، $n=6$ است.

سپس، چون $2^6 - 1$ بر ۳ و $2^{6k} - 1$ بر $2^6 - 1$ قابل قسمت است ($k=1, 2, \dots$)، نتیجه می‌گیریم: $(k, 2^{6k} - 1) \geq 3$ برای $k=1, 2, \dots$.
۴۵. عددهای $2k+1$ و $9k+4$ نسبت بهم اولند، زیرا داریم:

$$9(2k+1) - 2(9k+4) = 1$$

$$2k-1 = 2(k+8) - 17, \quad 9k+4 = 4(2k-1) + (k+8)$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$(9k+4, 2k-1) = (2k-1, k+8) = (k+8, 17)$$

اگر $k \equiv 9 \pmod{17}$ باشد ، $(k+8, 17) = 17$ می شود . در غیر اینصورت هم $k+8$ بر ۱۷ قابل قسمت نیست و $(k+8, 17) = 1$ می شود. بنابراین بشرطی که $k \equiv 9 \pmod{17}$ باشد $(9k+4, 2k-1) = 17$ و در غیر اینصورت $(9k+4, 2k-1) = 1$ خواهد بود .

۴۴ . ابتدا ثابت می کنیم که اگر m عدد مثلی (m عددی است طبیعی)

$a_1 < a_2 < \dots < a_m$ ، دو به دو نسبت بهم اول باشند ، عدد مثلی $t > a_m$ وجود دارد ، بنحوی که داشته باشیم :

$$(t, a_1 a_2 \dots a_m) = 1$$

فرض می کنیم $a = a_1 a_2 \dots a_m$ باشد ؛ عددهای $a+1$ و $2a+1$

نسبت به a اولند. عدد:

$$a_{m+1} = t_{2a+1} = \frac{(2a+1)(2a+2)}{2} = (a+1)(2a+1)$$

عددی مثلی و بزرگتر از a_m است و ضمناً نسبت به a و بنابراین نسبت بهریک از عددهای a_m, \dots, a_2, a_1 اول است .

از اینجانب نتیجه می شود که اگر يك دنبالهٔ صعودی و محدود از عددهای

مثلی داشته باشیم ، بنحوی که دو به دو نسبت بهم اول باشند ، همیشه می توانیم عدد مثلی بزرگتر از این دنباله پیدا کنیم که نسبت بهریک از آنها اول باشد .

با انتخاب کوچکترین این عددها، دنبالهٔ نامحدود:

$$t_1 = 1, t_2 = 3, t_3 = 10, t_4 = 91, t_5 = 253, \dots$$

از عددهای مثلی بدست می آید که دو به دو نسبت بهم اولند .

b) ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر برای هر عدد طبیعی m ، عددهای
 به شکل چهار وجهی $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ وجود داشته باشد، که دو به دو
 نسبت بهم اول باشند، در این صورت عدد چهار وجهی T وجود دارد،
 بنحوی که داشته باشیم:

$$(T, a_1 a_2 \dots a_m) = 1$$

فرض می‌کنیم $a = a_1 a_2 \dots a_m$ باشد؛ عدد:

$$T = T_{6a+1} = (6a+1)(3a+1)(2a+1)$$

نسبت به a اول است و بنابراین نسبت بهم یک از عددهای a_1, a_2, \dots, a_m
 اول می‌شود و ضمناً داریم: $T > a \geq a_m$.

به این ترتیب دنباله صعودی نامحدود از اعداد به شکل چهار وجهی،
 که دو به دو نسبت بهم اول باشند، به کمک استقراء ریاضی بدست می‌آید.
 اگر به عنوان اولین عضو آن $T_1 = 1$ انتخاب کنیم، وقتی که (به ازای
 عدد طبیعی و مفروض m) عدد چهار وجهی و دو به دو نسبت بهم
 اول داشته باشیم، به عنوان عضو $(m+1)$ ام، کوچکترین عدد چهار
 وجهی را می‌گیریم که از m بزرگتر و نسبت بهم یک از m عدد دنباله،
 اول باشد. به این ترتیب دنباله صعودی نامحدودی از عددهای چهار وجهی
 بدست می‌آید که هر یک از آنها نسبت به بقیه اول هستند:

$$T_1 = 1, T_2 = 4, T_3 = 35, T_4 = 969, \dots$$

۴۷. a و b را دو عدد صحیح مختلف و $a < b$ می‌گیریم؛ اگر
 $n = (b-a)k + 1 - a$ باشد، وقتی k به اندازه کافی بزرگ انتخاب
 شود، n عددی طبیعی می‌شود؛ عددهای $a + n = (b-a)k + 1$:

و $b+n=(b-a)(k+1)+1$ هم طبیعی هستند. اگر $a+n$ و $b+n$ بر d قابل قسمت باشند، $b-a$ هم بر d قابل قسمت می‌شود و در این صورت از قابل قسمت بودن $a+n=(b-a)k+1$ بر d نتیجه می‌شود که $d=1$ است. به این ترتیب داریم:

$$(a+n, b+n) = 1$$

۴۸*. چون a, b, c عدد های صحیح مختلف اند، عدد $h=(a-b)(a-c)(b-c)$ عددی صحیح و مخالف صفر و $1 \pm$ می‌شود. q_1, q_2, \dots, q_s را همه اعدادی اول بزرگتر از ۳ می‌گیریم که مقسوم علیه عدد h باشند.

اگر لاقل دو عدد از a, b, c زوج باشند $r=1$ در غیر این صورت $r=0$ فرض می‌کنیم، در این صورت واضح است که لاقل دو تا از اعداد $a+r, b+r, c+r$ فرد خواهند شد.

اگر a, b, c در تقسیم بر ۳ باقیمانده های مختلف بدهند $r_0=0$ و اگر لاقل دو تا از اعداد a, b, c در تقسیم بر ۳، باقیمانده ای مساوی p بدهند $r_0=1-p$ فرض می‌کنیم، در این صورت واضح است که در هر حالت لاقل دو تا از اعداد $a+r_0, b+r_0, c+r_0$ غیر قابل قسمت بر ۳ می‌شوند.

حالا اگر i یکی از اعداد $1, 2, \dots, s$ فرض کنیم، چون $q_i > 3$ است، با توجه به مسئله ۴۳، عدد صحیح r_i وجود دارد، بنحوی که هیچیک از اعداد $a+r_i, b+r_i, c+r_i$ بر q_i قابل قسمت نباشند.

بر اساس قضیه چینی دربارهٔ باقیمانده‌ها [۷] نتیجه می‌گیریم که بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که داشته باشیم :

$$n \equiv r \pmod{2}, n \equiv r_0 \pmod{3}, n \equiv r_i \pmod{q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

در اینصورت عدد اول q پیدا می‌شود، طوری که $a+n$ و $b+n$ و از آنجا $a-b$ ، یعنی h بر q قابل قسمت می‌شود و $h \neq \pm 1$ چون $n \equiv r \pmod{2}$ و چون لاقبل دو تا از عددهای $a+r$ ، $b+r$ و $c+r$ فرد هستند، در اینصورت لاقبل دو تا از عددهای $a+n$ ، $b+n$ و $c+n$ هم فرد می‌شود و بنابراین $q \neq 2$ است. چون $n \equiv r_0 \pmod{3}$ و لاقبل دو تا از عددهای $a+r_0$ ، $b+r_0$ و $c+r_0$ غیر قابل قسمت بر ۳ هستند، در اینصورت لاقبل دو تا از عددهای $a+n$ ، $b+n$ و $c+n$ هم غیر قابل قسمت بر ۳ می‌شوند و بنابراین $q \neq 3$ است. سپس چون q یکی از مقسوم‌علیه‌های اول عدد h است، می‌توان فرض کرد $q = q_i$ (i می‌تواند یکی از عدد های ۱، ۲، ۳، ...، s باشد)، ولی در اینصورت با توجه به $n \equiv r_i \pmod{q_i}$ یا $n \equiv r_i \pmod{q}$ و اینکه هیچیک از عدد های $a+r_i$ ، $b+r_i$ و $c+r_i$ بر q_i قابل قسمت نیستند، نتیجه می‌شود که هیچیک از عددهای $a+n$ ، $b+n$ و $c+n$ بر q_i یا q قابل قسمت نیستند، درحالی‌که فرض کرده بودیم $a+n$ و $b+n$ بر q قابل قسمت‌اند به این ترتیب ثابت کردیم که $(a+n, b+n) = 1$.

به همین ترتیب ثابت می‌کنیم $(a+n, c+n) = 1$ و $(b+n, c+n) = 1$

است، یعنی $a+n$ ، $b+n$ و $c+n$ دوه‌دو نسبت بهم اولند. چون تعداد عددهای طبیعی n ، که به این ترتیب انتخاب کردیم، بی‌نهایت زیاد

است ، مسئله را می توان ثابت شده بحساب آورد .

۴۹. مثلاً $a=1, b=2, c=3, d=4$ دارای این خاصیت اند.

در حقیقت وقتی n عددی فرد باشد ، $a+n$ و $c+n$ زوج می شوند و بنابراین نسبت بهم اول نیستند ، و وقتی n عددی زوج باشد ، $b+n$ و $d+n$ زوج می شوند و نسبت بهم اول نیستند .

۵۰. اگر n عددی فرد و بزرگتر از ۶ باشد داریم: $n=2+(n-2)$ ،

ضمناً $n-2$ عددی است فرد و بزرگتر از واحد و داریم: $1=(n-2, 2)$.

برای حالتی که $n > 6$ عددی زوج باشد، اثبات آمونکوسکی را

می آوریم .

اگر $n=4k$ باشد ، k عددی طبیعی و بزرگتر از واحد است

(زیرا $n > 6$ بود) ، در این صورت $n=(2k+1)+(2k-1)$ و ضمناً

$2k-1 > 1 > 2k+1$ (چون $k > 1$ بود) می شود ، عددهای $2k-1$

و $2k+1$ دو عدد فرد متوالی و بنابراین نسبت بهم اولند .

اگر $n=4k+2$ باشد ، k عددی طبیعی و بزرگتر از واحد است

(چون $n > 6$ است) ؛ در این صورت $n=(2k+3)+(2k-1)$ و ضمناً

$2k-1 > 1 > 2k+3$ (چون $k > 1$ است) می شود. عددهای $2k+3$

و $2k-1$ نسبت بهم اولند ، زیرا اگر $2k+3$ و $2k-1$ بر d قابل

قسمت باشند ، $4=(2k+3)-(2k-1)$ هم بر d قابل قسمت می شود

و چون d مقسوم علیه عددی فرد است ، باید عددی فرد باشد، یعنی $d=1$

می شود و نتیجه می گیریم :

$$(2k+3, 2k-1) = 1$$

۵۱* . وقتی n عددی زوج و بزرگتر از ۸ باشد ، بیکی از سه صورت $n = 6k$ ، $n = 6k + 2$ یا $n = 6k + 4$ است ، ضمناً در دو حالت اول k عددی طبیعی و بزرگتر از واحد و در حالت سوم ، عددی طبیعی است . از روابط :

$$6k = 2 + 2 + [6(k-1) + 1] , \quad 6k + 2 = 3 + 4 + [6(k-1) + 1]$$

$$6k + 4 = 2 + 3 + (6k - 1)$$

سادگی نتیجه می شود که n مساوی مجموع سه عدد طبیعی بزرگتر از واحد است که دو به دو نسبت بهم اولند .

حالا فرض کنید ، n عددی فرد و بزرگتر از ۱۷ باشد . شش حالت پیش می آید :

$$n = 12k + 1, 12k + 3, 12k + 5, 12k + 7, 12k + 9, 12k + 11$$

ضمناً در سه حالت اول ، k عددی طبیعی و بزرگتر از واحد و در سه حالت بقیه ، k عددی طبیعی است . داریم :

$$12k + 1 = [6(k-1) - 1] + [6(k-1) + 5] + 9$$

که در آن عددهای $6(k-1) - 1$ ، $6(k-1) + 5$ و 9 بزرگتر از واحد و دو به دو نسبت بهم اولند ، زیرا دو عدد اول غیر قابل قسمت بر ۳ و نسبت بهم اولند (زیرا اگر این دو عدد مقسوم علیه مشترکی داشته باشند ، باید تفاضل آنها ، یعنی ۶ ، بر این مقسوم علیه مشترك قابل قسمت باشد ، در حالیکه این دو عدد فرد و غیر قابل قسمت بر ۳ هستند). برای حالت‌های بعدی داریم :

$$n = 12k + 3 = (6k - 1) + (6k + 1) + 3;$$

$$n = 12k + 5 = (6k - 5) + (6k + 1) + 9 ;$$

$$n = 12k + 7 = (6k + 5) + (6k - 1) + 3 ;$$

$$n = 12k + 9 = (6k - 1) + (6k + 1) + 9 ;$$

$$n = 12k + 11 = [6(k+1) - 5] + [6(k+1) + 1] + 3$$

در هر يك از این حالتها ، سه عدد بزرگتر از واحد بدست می آید، که دو به دو نسبت بهم اولند .

عدد ۱۷ دارای این خاصیت نیست، زیرا اگر $17 = a + b + c$ باشد، هر سه عدد a ، b و c (بزرگتر از واحد و دو به دو نسبت بهم اول) باید فرد و مختلف باشند . داریم :

$$3 + 5 + 7 = 15 < 17 \quad 3 + 5 + 11 = 19 > 17$$

و در حالتی که $3 < a < b < c$ باشد $a \geq 5$ ، $b \geq 7$ ، $c \geq 9$ می شود و از آنجا :

$$a + b + c \geq 5 + 7 + 9 \geq 21 > 17$$

یعنی ۱۷ را نمی توان به مجموع سه عدد فرد مختلف و بزرگتر از واحد تجزیه کرد .

۵۲* . اثبات را با الهام از فکر شینتسل می آوریم :

k را عدد مفروض طبیعی و m را عددی طبیعی می گیریم که تجزیه آن به عوامل اول بصورت زیر باشد :

$$m = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdots q_s^{\alpha_s}$$

$f(x) = x(x + 2k)$ و i را یکی از عددهای $1, 2, \dots, s$ فرض می کنیم.

فرض قابل قسمت بودن $x(x+2k)$ بر q_i (به ازای همه مقادیر x) به تناقض بر خورد می کند، زیرا به ازای $x=1$ باید $2k+1$ و به ازای $x=-1$ باید $2k-1$ بر q_i قابل قسمت باشد، یعنی به این ترتیب باید $2k+1 - (2k-1) = 2$ بر q_i قابل قسمت بشود و چون $2k+1$ و $2k-1$ ، عددهائی فرد هستند، باید ۱ بر q_i قابل قسمت باشد که ممکن نیست. بنابراین عدد صحیح x_i وجود دارد، بنحوی که $f(x_i) = x_i(x_i+2k)$ بر q_i قابل قسمت نباشد.

بر اساس قضیه چینی درباره باقیماندهها، عدد طبیعی x_0 وجود دارد، بنحوی که $x_0 \equiv x_i \pmod{q_i}$ ($i=1, 2, \dots, s$) باشد، که از آنجا نتیجه می شود که $f(x_0) \equiv f(x_i)$ در تقسیم بر q_i باقیماندهای مخالف صفر دارد.

به این ترتیب، برای $i=1, 2, \dots, s$ داریم: $(f(x_0), q_i) = 1$ ، از آنجا، با در نظر گرفتن تجزیه عدد m به عوامل اول، بدست می آید:

$$(f(x_0), m) = 1 \implies (x_0(x_0+2k), m) = 1$$

بنابراین اگر $b = x_0$ ، $a = x_0 + 2k$ بگیریم، داریم: $2k = a - b$ ، که در آن $(a, m) = 1$ و $(b, m) = 1$ است.

تصوره. اگر به عددهای a و b ، مضربی از عدد m را اضافه کنیم، برای عدد $2k = a - b$ ، صورت جدیدی از تفاضل دو عدد طبیعی بدست می آید، که نسبت به m اولند. به این ترتیب ثابت می شود که هر عدد زوج را به بی نهایت طریق می توان به تفاضل دو عدد طبیعی تبدیل کرد، بطوریکه هر یک از آنها نسبت به عدد طبیعی m اول باشند.

ما نمی‌دانیم که آیا هر عدد زوج را می‌توان بصورت تفاضل دو عدد اول نشان داد. از یک فرضیهٔ شینتسل می‌توان نتیجه گرفت که هر عدد زوج را به بی‌نهایت طریق می‌توان بصورت تفاضل دو عدد اول نشان داد.

۵۳*. اثبات روتکه ویچ را می‌آوریم:

اگر U_n را n امین جمله دنبالهٔ فیبوناچی و m و n را دو عدد طبیعی بگیریم، داریم: $(U_m, U_n) = U_{(m,n)}$. بنابراین جمله‌های دنبالهٔ نامحدود:

$$U_{p_1}, U_{p_2}, U_{p_3}, \dots$$

دو به دو نسبت بهم اولند. ضمناً p_k را می‌توان $2^{2^k} + 1$ انتخاب کرد، زیرا برای عددهای طبیعی $m \neq n$ داریم: $(2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1) = 1$.

۳. تصاعد حسابی

۵۴. m را عدد طبیعی مفروضی بزرگتر از واحد فرض کنید. عددهای $1, k+1, \dots, m$ ($k=1, 2, \dots, m$) دو به دو نسبت بهم اولند، زیرا اگر برای عددهای طبیعی l, k ($k < l \leq m$)، عدد $d > 1$ مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $m!k+1$ ، $m!l+1$ باشد، در این صورت باید عدد $l(m!k+1) - k(m!l+1) = l - m < m$ و چون $1 < d < m$ است، $m!$ بر d قابل قسمت می‌شود و با توجه به اینکه $m!k+1$ بر d قابل قسمت بود، باید 1 بر d قابل قسمت باشد که با فرض $d > 1$ مغایر است.

۵۵. مثلاً تمام جمله‌های تصاعد حسابی $2^{k-1} + 2^k t$ (که در آن $t=0, 1, 2, \dots$ است) دارای این خاصیت هستند، زیرا در تجزیهٔ عدد

از آنجا به کمک رابطهٔ مربوط به تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی يك عدد، نتیجه می‌شود که تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد n بر k قابل قسمت است.

۰۵۶. مثلاً برای هر عدد طبیعی $x, y = 5x + 2, z = 7x + 3$,

این خاصیت وجود دارد، زیرا در این صورت عددهای :

$$x(x+1) = x^2 + x, y(y+1) = 25x^2 + 25x + 6,$$

$$z(z+1) = 49x^2 + 49x + 12$$

يك تصاعد حسابی به قدر نسبت $24x^2 + 24x + 6$ تشکیل می‌دهند.

تبصره. می‌توان ثابت کرد که چهار عدد طبیعی $x < y < z < t$ تشکیل يك تصاعد حسابی بدهند. در حقیقت، اگر این عددها به تصاعد حسابی باشند، وقتی که به چهار برابر هر يك از آنها يك واحد اضافه کنیم، که در این صورت عددهای $(2x+1)^2, (2y+1)^2, (2z+1)^2, (2t+1)^2$ بدست می‌آید، که باز هم باید يك تصاعد حسابی داشته باشیم؛ ولی طبق قضیهٔ فرما، نمی‌توان چهار مجذور کامل پیدا کرد، طوری که به تصاعد حسابی باشند.

از مسئلهٔ ۵۶ نتیجه می‌شود که بی‌نهایت تصاعد حسابی می‌توان یافت

که از سه عدد مثلثی تشکیل شده باشد. همچنین می‌توان ثابت کرد که بی‌نهایت تصاعد هندسی صعودی وجود دارد که از سه عدد مثلثی تشکیل شده باشند. مثلاً تصاعدهای زیر :

$$t_1 = 1, t_3 = 6, t_8 = 36 ; t_8 = 6^2, t_{20} = 6 \cdot 36, t_{49} = 36^2;$$

$$t_{49} = 36^2, t_{84} = 36 \cdot 204, t_{288} = 204^2$$

۵۷. اگر اضلاع مثلث فیثاغورثی^۱، تشکیل يك تصاعد حسابی

بدهند، می‌توانیم آنها را به $b, b-r$ و $b+r$ نشان دهیم (r, b عددهای طبیعی هستند)، طوری که $(b-r)^2 + b^2 = (b+r)^2$ باشد، از آنجا $b = 4r$ می‌شود. در نتیجه مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع $3r, 4r, 5r$ بدست می‌آید که r می‌تواند هر عدد طبیعی دلخواهی باشد. بنابراین، هر مثلث فیثاغورثی، که اضلاع آن به تصاعد حسابی باشند، از ضرب اضلاع مثلث $3, 4, 5$ در يك عدد طبیعی بدست می‌آید^۲.

۵۸. عددهای مثلثی $t_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ ، برای $n = 4u + 1$

($u = 0, 1, 2, \dots$) فرد و برای $n = 4u$ ($u = 1, 2, \dots$) زوج‌اند. بنابراین هر يك از دو تصاعد حسابی با قدر نسبت ۲ (که یکی از عددهای زوج و دیگری از عددهای فرد تشکیل شده‌است) شامل بی‌نهایت عدد مثلثی هستند. تصاعد $2 + 3k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) شامل حتی يك عدد مثلثی نیست، زیرا هر يك از جمله‌های این تصاعد در تقسیم بر ۳ باقیمانده ۲ را می‌دهند، در حالی‌که برای عددهای مثلثی، اگر n مضربی

(۱) فیثاغورثی به‌مثلث قائم‌الزاویه‌ای‌گویند که همه اضلاع آن باعددهای طبیعی قابل بیان باشد.

(۲) از حل مسئله دیده می‌شود که هر مثلثی که این شرایط را داشته باشد، با مثلث به اضلاع $3, 4, 5$ متشابه است. طبعاً سؤالی پیش می‌آید: آیا عکس این حکم صحیح است، یعنی همه اینگونه مثلثها در شرط مسئله صدق می‌کنند. واضح است که چون انتخاب واحد به دلخواه انجام می‌گیرد، بنابراین شرط صحیح بودن عدد اضلاع مثلث، لزومی ندارد و جواب برای هر مقدار مثبت و حقیقی b و r صحیح است.

از ۳ یا $n = 2u + 2$ یا $n = 2u + 3$ باشد، t_n بر ۳ قابل قسمت می‌شود و اگر $n = 2u + 1$ باشد ($u = 0, 1, 2, \dots$)، خواهیم داشت:

$$t_n = 9 \frac{u(u+1)}{2} + 1$$

و بنابراین باقیمانده تقسیم آن بر ۳ مساوی ۱ خواهد بود.

۵۹. لازم و کافی است که h باقیمانده تقسیم مجذور کاملی بر a باشد، در حقیقت، اگر به ازای عدد طبیعی x و عدد صحیح $k \geq 0$ داشته باشیم $x^2 = ak + h$ ، خواهیم داشت: $x^2 \equiv h \pmod{a}$ و باقیمانده تقسیم مجذور کاملی بر a است. برعکس اگر h باقیمانده تقسیم مجذور کاملی بر a باشد، بی‌نهایت عدد طبیعی x وجود دارد که داشته باشیم: $x^2 \equiv h \pmod{a}$ ، بنابراین $x^2 = ak + h$ ، که در آن k عددی است صحیح و (وقتی x به اندازه کافی بزرگ باشد) طبیعی.

۶۰*. اثبات شینتسل را می‌آوریم.

p_k را k امین عدد اول فرض می‌کنیم. s را عدد طبیعی دلخواه و $P = p_1 p_2 \dots p_s$ می‌گیریم. طبق قضیه چینی درباره باقیمانده‌ها، برای هر عدد طبیعی $k \leq s$ ، عدد طبیعی a_k وجود دارد، بنحوی که:

$$a_k \equiv -1 \pmod{p_k} \text{ و } a_k \equiv 0 \pmod{\frac{P}{p_k}}$$

فرض می‌کنیم:

$Q = 1^\alpha 1.2^\alpha \dots s^\alpha$ (که $k = 1, 2, \dots, s$) kQ عددی است که واضح است که kQ شامل s جمله می‌دهد، از تعریف عدد a_k ($k = 1, 2, \dots, s$) نتیجه می‌شود که $a_k + 1$ بر p_k و a_n بر p_k قابل قسمت است، برای $k \neq n$ ، که n عددی طبیعی و کوچکتر یا مساوی s است،

به این ترتیب عددهای

$$Q_k = k^{\frac{a_k+1}{p_k}} \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^s n^{\frac{a_n}{p_k}}$$

طبیعی هستند و بسادگی می توان تحقیق کرد که برای $k=1, 2, \dots, s$ ،
عددهای kQ توانی از یک عدد طبیعی با نمای طبیعی بزرگتر از واحدند.

۶۱. قضیه‌ای که باید ثابت کنیم، هم‌ارز با قضیه‌ای است که بر طبق

آن در هر تصاعد حسابی صعودی و نامحدود، که از عددهای طبیعی
تشکیل شده است، جمله‌هایی وجود دارد که توان یک عدد طبیعی با نمای
طبیعی بزرگتر از واحد نیستند. فرض کنید $ak+b$ ($k=0, 1, 2, \dots$)
تصادد حسابی نامحدودی باشد (a و b عددهای طبیعی هستند).

عدد اول $p > a+b$ همیشه وجود دارد.

چون $(a, p) = 1$ است، معادله $ax - p^2y = 1$ برای عددهای

طبیعی x و y دارای جواب می‌باشد. $k = (p-h)x$ می‌گیریم؛ روشن
است که این عدد و عدد $ak+h = p^2y(p-h) + p$ طبیعی هستند
(زیرا $p > b$ است)؛ به این ترتیب جمله $ak+b$ از تصادد p
قابل قسمت است، ولی بر p^2 قابل قسمت نیست و بنابراین نمی‌تواند
توانی از یک عدد طبیعی با نمای طبیعی بزرگتر از واحد باشد.

۶۲. از چهار عدد طبیعی متوالی، یکی بصورت $4k+2$ است

($k \geq 0$ عددی صحیح است) و این عدد زوج است، ولی بر ۴ قابل قسمت

نیست و نمی‌تواند توانی از يك عدد طبیعی با نمای طبیعی بزرگتر از واحد باشد .

تبصره . آ . مونکوسکی ثابت کرده سه عدد طبیعی متوالی وجود ندارد ، بنحوی که هر يك از آنها توانی از يك عدد طبیعی با نمای بزرگتر از واحد باشد ؛ اثبات این قضیه مشکل است . ولی دو عدد طبیعی متوالی وجود دارد که هر کدام از آنها توانی از يك عدد طبیعی با نمای بزرگتر از واحد باشند ، مثل $2^2 = 8$ و $3^2 = 9$. سؤال کاتالان هنوز مطرح است که آیا دو عدد متوالی دیگر با این خاصیت وجود دارد یا نه .

آ. روتکه‌ویچ ثابت کرده اگر دو توان عددهای طبیعی غیر از ۹۰۸ ، نمای بزرگتر از واحد داشته باشند و اختلاف دو نما يك واحد باشد ، هر دو این عددهای طبیعی از ۱۰۰۰ بزرگترند . روتکه‌ویچ همچنین ثابت کرده اگر عددهای صحیح بزرگتر از واحد x و y ، و عددهای اول z و t در معادله $1 = y^2 - xz$ صدق کنند (بشرطی که جواب $x=3, y=2, z=3$ ، $t=2$ را به حساب نیاوریم) ، $x > 10^6$ و $y > 10^6$ خواهد بود .

۰۶۳ . این قضیه را می‌توان مستقیماً از مسئله ۶۰ نتیجه گرفت ، ولی اثبات ساده‌تری هم برای آن وجود دارد . m را عدد طبیعی مفروض و بزرگتر از واحد و q_i ($i=1, 2, \dots, m$) را عددهای اول با شرط $q_1 < q_2 < \dots < q_m$ فرض می‌کنیم .

بنابر قضیه چینی دربارهٔ باقیمانده‌ها ، عدد طبیعی x وجود دارد ، بنحوی که $ax \equiv -b - aj \pmod{q_j}$ باشد ($j=1, 2, \dots, m$) . از آنجا $a(x+j) + b$ بر q_j قابل قسمت می‌شود (برای $j=1, 2, \dots, m$) و بنابراین m جمله متوالی تصاعد $ak + b$ ، یعنی جمله‌های $a(x+j) + b$

به‌ازای $m, 1, 2, \dots, j$ ، عددهائی مرکب هستند .

۰۶۴* واضح است که می‌توان m را عدد طبیعی بزرگتر از واحد در نظر گرفت . حاصلضرب همهٔ مقسوم‌علیه‌های اول و مختلف عدد m را که ضمناً مقسوم‌علیه‌های عدد a هم باشند ، P فرض می‌کنیم و درحالی‌که چنین مقسوم‌علیه‌هایی وجود نداشته باشد $P=1$ می‌گیریم. حاصلضرب مقسوم‌علیه‌های اول و مختلف عدد m را ، که ضمناً جزو مقسوم‌علیه‌های عدد b هم باشند، Q و اگر چنین عددهائی وجود نداشته باشند $Q=1$ می‌گیریم . چون $(a,b)=1$ است ، $(P,Q)=1$ می‌شود . بالاخره R را حاصلضرب مقسوم‌علیه‌های اولی از عدد m می‌گیریم که بین مقسوم‌علیه‌های عددهای a و b وجود نداشته باشند ، و اگر چنین مقسوم‌علیه‌هایی وجود نداشته باشد $R=1$ می‌گیریم. واضح است که $(R,P)=1$ و $(R,Q)=1$ است .

حالا ثابت می‌کنیم $(aPR+b,m)=1$ است . در حقیقت اگر چنین نباشد، عدد اول p پیدا می‌شود ، بنحوی‌که هم m و هم $aPR+b$ بر آن قابل قسمت باشند . اگر P بر p قابل قسمت باشد ، باید b و در نتیجه Q بر p قابل قسمت باشد که مغایر رابطهٔ $(P,Q)=1$ است . اگر فرض کنیم که Q بر p قابل قسمت است ، در اینصورت b بر p یعنی aPR بر p قابل قسمت است ، که ممکن نیست ، زیرا $(a,b)=1$ ، $(b,P)=1$ و $(b,R)=1$ است . بالاخره اگر فرض کنیم R بر p قابل قسمت است ، در اینصورت b بر p ، یعنی Q بر p قابل قسمت می‌شود که مغایر با $(P,Q)=1$ است .

به این ترتیب ثابت کردیم که $(aPR + b, m) = 1$ است. از آنجا

نتیجه می‌شود:

$$(a(km + PR) + b, m) = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

یعنی در تصاعد ما، بی‌نهایت جمله وجود دارد که هر کدام از آنها نسبت به m اولند.

۶۵. b را جمله اول و a را قدر نسبت تصاعد و a و b را دو عدد

طبیعی می‌گیریم. اگر r را باقیمانده تقسیم b بر a فرض کنیم، داریم:

$b = at + r$ ، که در آن $t \geq 0$ عددی صحیح و r عددی صحیح و ضمناً

$0 \leq r < a$ است. s را عدد طبیعی دلخواه و c_1, c_2, \dots, c_s را دنباله

دلخواهی از رقمها، در دستگاه عدد شماری به مبنای ۱۰، می‌گیریم و

ضمناً $c_1 \neq 0$. N را عدد s رقمی فرض می‌کنیم که ردیف رقمهای آن

(c_1, c_2, \dots, c_s) باشد.

واضح است که عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که $10^n > 2a(t+1)$

$$\text{و } 1 > t - \frac{N \cdot 10^n}{a} \text{ باشد.}$$

k را کوچکترین عدد طبیعی بزرگتر از $t - \frac{N \cdot 10^n}{a}$ فرض می-

کنیم، در این صورت $t - \frac{N \cdot 10^n}{a} \leq k - 1$ می‌شود و بنابراین، چون

$10^n > 2a$ است داریم:

$$k + 1 \leq \frac{N \cdot 10^n}{a} + 2 - t < \frac{(N+1)10^n}{a} - t$$

به این ترتیب داریم:

$$N \cdot 10^n < a(k+t) \leq ak + at + r = ak + b < a(k+t+1) < \\ < (N+1)10^n = N \cdot 10^n + 10^n$$

از آنجا نتیجه می شود که s رقم اول $ak+b$ بر s رقم اول عدد N ، یعنی c_1, c_2, \dots, c_s منطبق است.

۰۶۶ اگر جمله های u_1, u_k, u_m از دنباله فیبوناچی تشکیل

یک تصاعد حسابی صعودی بدهند، باید $1 > 2, u_1 > 1$ (زیرا $u_2 = 1$ است)، $m > 3$ و $u_m = u_1 + (u_1 - u_k)$ باشد، از آنجا

$$u_m < u_1 + u_1 < u_1 + u_{1+1} = u_{1+2} \Rightarrow u_m < u_{1+2}$$

بنابراین $u_m \leq u_{1+1}$ می شود و چون $u_m > u_1$ بود $u_m \geq u_{1+1}$ ، یعنی $u_m = u_{1+1}$ می شود، از آنجا (چون $1 > 2$ است) $m = 1 + 1$ می شود. بنابراین داریم:

$$u_k = 2u_1 - u_m = u_1 - (u_{1+1} - u_1) = u_1 - u_{1-1} = u_{1-2}$$

و در نتیجه $k = 1 - 2$ می شود.

به این ترتیب، اگر جمله های u_1, u_k, u_m از دنباله فیبوناچی،

تشکیل یک تصاعد حسابی صعودی بدهند. باید $1 > 2, k = 1 - 2$ و

$m = 1 + 1$ باشد. از طرف دیگر، بسادگی می توان تحقیق کرد که اگر

$1 > 2$ باشد، عددهای u_1, u_{1-2} و u_{1+2} یک تصاعد حسابی با قدر

نسبت u_{1-1} تشکیل می دهند.

فرض کنید n عددی طبیعی و بزرگتر از $1 + 1$ باشد. در این صورت

$n \geq 1 + 2$ و از آنجا $u_n \geq u_{1+2}$ (چون $1 > 2$ است) داریم:

$$u_n - u_{1+1} > u_{1+2} - u_{1+1} = u_1 > u_{1-1}$$

بنابراین هیچ تصاعد حسابی چهار جمله‌ای از عددهای فیبوناچی نمی‌توان تشکیل داد .

۶۷* میدانیم که اگر m عددی طبیعی باشد، باقیمانده‌های تقسیم عددهای دنباله فیبوناچی بر m ، دنباله متناوبی با تناوب ساده^۱، تشکیل می‌دهند. از تقسیم عددهای دنباله فیبوناچی بر عددهای $2, 3, 4, 5, 6, 7$ ، $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ، ترتیب باقیمانده‌های زیر بدست می‌آید (در اینجا چند جمله اول هر يك از این دنباله‌ها را نوشته‌ایم، و نه همه جمله‌های يك دوره تناوب را):

$$m=2: \quad 1, 1, 0, \dots$$

$$m=3: \quad 1, 1, 2, 0, \dots$$

$$m=4: \quad 1, 1, 2, 3, 1, 0, \dots$$

$$m=5: \quad 1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, \dots$$

$$m=6: \quad 1, 1, 2, 3, 5, 2, 1, 3, 4, 1, 5, 0, \dots$$

$$m=7: \quad 1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 0, \dots$$

چون برای هر عدد طبیعی $m \leq 7$ ، در تقسیم عددهای فیبوناچی بر m ، همه باقیمانده‌های ممکن وجود دارد، نتیجه می‌گیریم که در هر تصاعد حسابی با قدر نسبت $m \leq 7$ ، بی‌نهایت عدد فیبوناچی وجود دارد. حالا ثابت می‌کنیم که تصاعد $4 + 8k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)، شامل هیچیک از عددهای دنباله فیبوناچی نیست .

در دنباله فیبوناچی داریم: $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ و $u_1 = u_2 = 1$
 ، بسادگی معلوم می‌شود که در تقسیم عددهای
 u_1, u_2, \dots, u_{14} بر ۸ بترتیب باقیمانده‌های زیر بدست می‌آید:

$$1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1$$

از اینجا دیده می‌شود که $u_1 - u_{13}$ و $u_2 - u_{14}$ بر ۸ قابل قسمت
 است. بنابراین می‌توان گفت که به ازای $n = 1, 2, \dots$
 $u_{n+1} - u_{n+13}$ بر ۸ قابل قسمت است.

حالا فرض می‌کنیم که خاصیت اخیر به ازای مقداری از n وجود
 داشته باشد؛ در این صورت $(u_n + u_{n+1}) - (u_{n+12} + u_{n+13})$ ، یعنی
 $u_{n+14} - u_{n+2}$ بر ۸ قابل قسمت است. بنابراین ثابت شد که اگر
 $u_{n+12} - u_n$ و $u_{n+13} - u_{n+1}$ بر ۸ قابل قسمت باشند،
 $u_{n+14} - u_{n+2}$ هم بر ۸ قابل قسمت می‌شود. به این ترتیب ثابت می‌شود
 که دنباله باقیمانده‌های فیبوناچی بر ۸، دنباله‌ای متناوب با دوره تناوب ساده
 دوازده جمله‌ای است.

اگر به ۱۲ جمله اول دنباله باقیمانده‌های عددهای فیبوناچی بر
 ۸، توجه کنیم، می‌بینیم که تنها عددهای ۱، ۲، ۳، ۵ و ۷ وجود دارد.
 چون بین این باقیمانده‌ها، عددهای ۴ و ۶ وجود ندارد، تصاعدهای
 $8k+4$ و $8k+6$ ($k=0, 1, 2, \dots$)، شامل هیچیک از عددهای دنباله
 فیبوناچی نیست. و واضح است که این تصاعدها (که از عددهای طبیعی
 تشکیل شده‌اند)، حداقل قدر نسبت را، در مورد شرایط مسئله، دارا
 می‌باشد.

۶۸* . مثلاً تصاعد $4k+1$ ($k=0,1,2,\dots$) دارای این خاصیت

است .

اگر با استفاده از روش استقراء ریاضی و کاملاً شبیه مسئله ۶۷ عمل کنیم ، بسادگی ثابت می شود که $u_n - u_{n+10}$ به ازای $n=1,2,\dots$ بر ۱۱ قابل قسمت است ، از اینجا نتیجه می شود که از تقسیم عددهای دنباله فیبوناچی بر ۱۱ ، دنباله متناوبی با دوره تناوب ساده ده جمله ای بدست می آید . این دوره تناوب عبارتست از :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0$$

و همانطور که دیده می شود ، شامل ۴ (و همچنین ۶ ، ۷ و ۹) نیست .

۶۹ فرض می کنیم n جمله تصاعد ما

$$ak_1 + b, ak_2 + b, \dots, ak_n + b$$

دو به دو نسبت بهم اول باشند (برای $n=1$ می توان $k_1=1$ گرفت) .
در نظر می گیریم :

$$m = (ak_1 + b)(ak_2 + b) \dots (ak_n + b)$$

بر اساس مسئله ۶۴ ، عدد طبیعی k_{n+1} وجود دارد ، بنحوی که

$$(ak_{n+1} + b, m) = 1$$

برای $i=1,2,\dots,n$. به این ترتیب عددهای

$$ak_2 + b, \dots, ak_n + b, ak_{n+1} + b$$

دو به دو نسبت بهم اول می شوند .

بنابراین دنباله نامحدودی از عددهای طبیعی k_1, k_2, \dots بوسیله

استقراء بدست می آید که دنباله متناظر آن $(i=1, 2, \dots) ak_i + b$ ، که دنباله ای از جمله های تصاعد مفروض است ، دو به دو نسبت بهم اولند .

۷۰* . فرض کنید : $d = (a, a+b)$ ، در این صورت $a = da_1$ و $a+b = dc$ ، که در آن $(a_1, c) = 1$ و $c > 1$ است (زیرا $d \leq a$ و $dc = a+b > a$) . چون $(a_1, c) = 1$ است ، طبق قضیه اولرداریم :

$$c^{\varphi(a_1)} \equiv 1 \pmod{a_1} \implies c^{n\varphi(a_1)} \equiv 1 \pmod{a_1} \implies c^{n\varphi(a_1)} - 1 = t_n a_1$$

t_n عددی طبیعی است که می تواند به اندازه کافی بزرگ باشد (زیرا $c > 1$ و n عدد طبیعی دلخواهی است) ، ضمناً داریم :

$$a(ct_n + 1) + b = da_1 \cdot ct_n + dc = dc^{n\varphi(a_1) + 1}$$

بنابراین جمله های $a(ct_n + 1) + b$ از تصاعد ما (که می تواند به اندازه کافی بزرگ باشد) دارای همان مقسوم علیه های اول عدد $dc > 1$ است .

به این ترتیب در تصاعد مفروض ، بی نهایت جمله وجود دارد که مقسوم علیه های اول مشترك دارند .

۷۱ . از قضیه دیریکله بلافاصله نتیجه می شود ، که قضیه برای حالت

$s = 1$ صحیح است . حالا s را عدد مفروض طبیعی می گیریم . فرض می کنیم که قضیه برای عدد s صحیح باشد . بنابراین ، اگر $(a, b) = 1$ باشد ، عدد k_s وجود دارد ، بنحوی که $ak_s + b = q_1 q_2 \dots q_s$ باشد ،

که در آن $q_1 < q_2 < \dots < q_s$ عددهائی اول هستند. طبق قضیه دیریکله ، بی نهایت عدد طبیعی k وجود دارد ، بنحوی که $ak + 1 = q$ ، عدد اولی بزرگتر از q_s باشد .

برای $t = q_1 q_2 \dots q_s k + k_0$ داریم :

$$at + b = q_1 q_2 \dots q_s ak + ak_0 + b = q_1 q_2 \dots q_s (ak + 1) = \\ = q_1 q_2 \dots q_s q$$

یعنی قضیه برای $s + 1$ صحیح است ، بنابراین با استقراء ریاضی ثابت شد که قضیه برای هر عدد طبیعی s صحیح است .

۰۷۲. اگر p عددی اول باشد ، از سه عدد $p + 10$ ، $p + 20$ ، همیشه یکی بر ۳ قابل قسمت است (زیرا در هر حال داریم : $p + 10 \equiv p + 1 \pmod{3}$ ، $p + 20 \equiv p + 2 \pmod{3}$ ، و از سه عدد متوالی p ، $p + 1$ ، و $p + 2$ همیشه یکی بر ۳ قابل قسمت است). بنابراین اگر بخواهیم هر سه عدد اول باشد ، باید یکی از آنها ، طبعاً کوچکترین آنها ، مساوی ۳ باشد ؛ یعنی $p = 3$ ، $p + 10 = 13$ ، $p + 20 = 23$. به این ترتیب ، تنها يك تصاعد حسابی با قدر نسبت ۱۰ وجود دارد که از سه عدد اول تشکیل شده باشد ، یعنی تصاعد :

$$3, 13, 23$$

سپس بسادگی می توان ثابت کرد که تصاعد حسابی با قدر نسبت ۱۰ وجود ندارد که از چهار جمله (و یا بیشتر) عدد اول تشکیل شده باشد . در حقیقت اگر عددهای p ، $p + 10$ ، $p + 20$ ، $p + 30$ ، ... ، عددهای اول باشند ، طبق آنچه گفتیم باید $p = 3$ شود ، که در این صورت

عددی مرکب می‌شود. $p + 30 = 33 = 3 \cdot 11$

تبصره. از يك فرضیه آ. شینتسل دربارهٔ عددهای اول نتیجه می‌شود که بی‌نهایت عدد اول p وجود دارد، بنحوی که $p + 10$ هم عددی اول باشد. مثل ۱۷ و ۲۳، ۲۳ و ۱۳، ۲۹ و ۱۹، ۴۱ و ۳۱، ۴۷ و ۳۷، ۵۹ و ۴۹، ۷۱ و ۶۱، ۷۳ و ۶۳، ۸۳ و ۷۳، ۸۹ و ۷۹.

۰۷۳. چنین تصاعدی وجود ندارد، زیرا از عددهای p ، $p + 100$ و $p + 200$ همیشه یکی بر ۳ قابل قسمت است، یعنی اگر آنها اول باشند، باید $p = 3$ شود، که در این صورت عدد $p + 200 = 203 = 7 \cdot 29$ هم عددی اول نیست.

تبصره. بهمین ترتیب می‌توان ثابت کرد که تصاعدی با قدر نسبت ۱۰۰۰ وجود ندارد، که از سه (یا بیشتر) عدد اول تشکیل شده باشد، زیرا $1003 = 17 \cdot 59$ عددی است مرکب. از فرضیهٔ شینتسل نتیجه می‌شود که بی‌نهایت عدد اول p وجود دارد، که در مورد آن $p + 1000$ هم عددی اول باشد، مثلاً ۱۳ و ۱۰۱۳، ۱۹ و ۱۰۱۹، ۳۱ و ۱۰۳۱، ۶۱ و ۱۰۶۱، ۷۳ و ۱۰۷۳، ۱۰۳ و ۱۱۰۳، ۱۰۳۹ و ۲۰۳۹.

۰۷۴. اگر قدر نسبت تصاعد، فرد باشد، جملهٔ دوم این تصاعد عددی زوج می‌شود که ممکن نیست، زیرا تصاعد ما ازده عدد اول تشکیل شده است. بنابراین قدر نسبت تصاعد ما، عددی است زوج. اگر هم جملهٔ اول تصاعد مساوی ۲ باشد. جمله‌های بعد از آنها عددهائی زوج و مرکب می‌شوند. به این ترتیب، جملهٔ اول تصاعد، عدد اول فردی است و بنابراین همهٔ جمله‌های تصاعد (با توجه به زوج بودن قدر نسبت)، عددهای اول فرد هستند.

از قضیه ۷. ته بولت استفاده می‌کنیم که بر طبق آن ، اگر n جمله از يك تصاعد حسابی ، عددهای اول فرد باشند قدر نسبت این تصاعد بر هر يك از عددهای اول کوچکتر از n قابل قسمت‌اند .

از این قضیه نتیجه می‌شود (برای $n=10$) ، که قدر نسبت تصاعد ما باید مضربی از عددهای ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۰ مضربی از ۲۱۰ باشد. ابتدا تصاعد حسابی ده جمله‌ای را جستجو می‌کنیم که قدر نسبتی مساوی ۲۱۰ داشته باشد و از کوچکترین عددهای ممکن اول تشکیل شده باشد .

چون ۲۱۰ (قدر نسبت تصاعد) ، بر عددهای ۲، ۳، ۵، ۷ قابل قسمت است ، واضح است که هیچیک از این عددها نمی‌توانند جمله اول تصاعد مورد نظر باشند. عدد ۱۱ هم نمی‌تواند جمله اول تصاعد باشد ، زیرا در این صورت جمله دوم $13.17 = 221$ ، عددی مرکب می‌شود. بنابراین جمله اول تصاعد مورد نظر بزرگتر از ۱۱ است ، یعنی هیچیک از جمله‌های تصاعد قابل قسمت بر ۱۱ نیستند . باقیمانده عدد ۲۱۰ بر ۱۱ مساوی واحد است ، بنابراین هر يك از جمله‌های تصاعد ، در تقسیم بر ۱۱ ، باقیمانده‌ای پیدا می‌کنند که يك واحد بیشتر از باقیمانده تقسیم جمله قبلی آن بر ۱۱ است . پس ، اگر باقیمانده تقسیم جمله اول تصاعد بر ۱۱ ، عددی بزرگتر از واحد باشد ، یکی از جمله‌های تصاعد قابل قسمت بر ۱۱ می‌شود ، که ممکن نیست . بنابراین باید جمله اول تصاعد مورد نظر در تقسیم بر ۱۱ . باقیمانده‌ای مساوی واحد داشته باشد ، یعنی بصورت $22k + 1$ (k عددی است طبیعی) باشد . دنباله عددهای اولی که به این صورت هستند ، عبارتست از ۲۳ ، ۶۷ ، ۸۹ ، ۱۹۹ ، ...

اگر جمله اول تصاعد را ۲۳ بگیریم . جمله ششم تصاعد :
 $۲۹.۳۷ = ۱۰۷۳$ ، عددی مرکب می شود . اگر جمله اول را ۶۷ بگیریم ،
 جمله چهارم آن ، عدد مرکب $۱۷.۴۱ = ۶۹۷$ می شود . اگر جمله اول
 تصاعد ۸۹ باشد ، جمله دوم تصاعد : $۱۳.۲۳ = ۲۹۹$ ، عددی مرکب
 می شود . ولی اگر عدد ۱۹۹ را به عنوان اولین جمله تصاعد ، در نظر
 بگیریم ، تصاعدی با قدر نسبت ۲۱۰ بدست می آید که از ده عدد اول
 تشکیل شده است :

۱۹۹, ۴۰۹, ۶۱۹, ۸۲۹, ۱۰۳۹, ۱۲۴۹, ۱۴۵۹, ۱۶۶۹, ۱۸۷۹, ۲۰۸۹

حالا فرض می کنیم ، تصاعد حسابی صعودی با قدر نسبت ۲ ، غیر
 از ۲۱۰ ، داشته باشیم . همانطور که می دانیم ، باید ۲ مضربی از ۲۱۰
 باشد ، یعنی در هر حال $۲ \geq ۴۲۰$ در اینصورت جمله دوم تصاعد از
 ۴۲۰ ، و در نتیجه از جمله دوم تصاعد فوق (یعنی ۴۰۹) بزرگتر می شود .
 بنابراین جمله های بعدی آن ، از جمله های متناظر تصاعدی که پیدا
 پیدا کرده ایم بزرگتر می شوند .

به این ترتیب ، تصاعدی که بدست آورده ایم ، یعنی تصاعد حسابی
 با جمله اول ۱۹۹ و قدر نسبت ۲۱۰ ، يك تصاعد ده جمله ای حسابی
 صعودی است ، که جمله های آن از عددهای اول تشکیل شده است و
 آخرین آن ، کوچکترین عدد ممکنه است .

تبصره . طولانی ترین تصاعد حسابی صعودی ، که از عددهای اول
 تشکیل شده و تاکنون شناخته شده است ، يك تصاعد سیزده جمله ای است ،
 که جمله اول آن ۴۹۴۳ و قدر نسبت آن ۶۰۰۶۰ می باشد . این تصاعد را
 سره وینسکی از مسکو پیدا کرده است .

از فرضیه شینتسل دربارهٔ عددهای اول نتیجه می‌شود که بی‌نهایت تصاعد حسابی سیزده جمله‌ای با قدرنسبت 30030 وجود دارد، که همهٔ جمله‌های آن عددهائی اول باشند؛ ولی تاکنون حتی یکی از این تصاعدها هم پیدا نشده است.

۰۷۵. مثلاً تصاعد $30k + 7$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) از این نوع است. در حقیقت، اگر فرض کنیم $30k + 7 = p + q$ ، چون $30k + 7$ عددی است فرد، باید یکی از عددهای p و q زوج باشند، بنابراین برای اینکه اول باشد باید ۲ باشد. اگر مثلاً $q = 2$ باشد $p = 30k + 5 = 5(6k + 1)$ می‌شود که ممکن نیست، زیرا p عددی است اول. اگر هم فرض کنیم $30k + 7 = p - q$ (که p و q عددهائی اولند)، باید مثلاً $q = 2$ باشد و در این صورت $p = 30k + 9 = 3(10k + 3)$ می‌شود که ممکن نیست.

تبصره. می‌توان ثابت کرد (که البته مشکل است)، که بی‌نهایت عدد زوج وجود دارد. بنحوی که در عین حال هم مجموع و هم تفاضل دو عدد اول باشند. از یک فرضیهٔ شینتسل دربارهٔ عددهای اول نتیجه می‌شود که بی‌نهایت عدد فرد وجود دارد که می‌تواند هم مجموع و هم تفاضل دو عدد اول باشد.

۰۴. عددهای اول و مرکب

۰۷۶. کافی است $p = 3$ و $q = 5$ بگیریم. اگر n عددی زوج و بزرگتر از ۶ باشد، $n - 1 \geq 6$ و $n - 1 < p < q < n$ ، ضمناً $n - p = n - 3$ و $n - q = n - 5$ دو عدد فرد متوالی و بنابراین نسبت بهم اول می‌شوند.

۷۷. تنها يك عدد اول با این خاصیت وجود دارد: ۵. فرض می‌کنیم که عدد اول r ، در عین حال هم مجموع و هم تفاضل دو عدد اول باشد. واضح است که r باید از ۲ بزرگتر باشد و بنابراین عددی است فرد. چون r هم مجموع و هم تفاضل دو عدد اول است، باید یکی از آنها عددی فرد و دیگری زوج، یعنی ۲، باشد.

بنابراین داریم: $r = p + 2 = q - 2$ ، که q و p عددهای اول فرد هستند. ولی در این صورت $p = r + 2$ و $q = r + 2$ ، سه عدد فرد متوالی می‌شوند و همانطور که می‌دانیم تنها سه عدد ۳، ۵، ۷ این خاصیت را دارند (زیرا از هر سه عدد فرد متوالی، باید یکی بر ۳ قابل قسمت باشد). بنابراین داریم: $r = 5 = 3 + 2 = 7 - 2$.

$$m = 20, 51, 62 : n = 113, 129, 181 \quad 78$$

۷۹. طبق قضیه معروف فرما، هر عدد اول بصورت $4k + 1$ را می‌توان به مجموع دو مربع کامل تبدیل کرد. به این ترتیب برای هر عدد اول p داریم: $a \cdot p = a^2 + b^2$ و b عددهای طبیعی و مختلف‌اند (زیرا p عددی فرد بود) و مثلاً $a > b$. از آنجا بدست می‌آید: $p^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$ ، یعنی p وتر مثلث قائم‌الزاوی است که اضلاع مجاور به زاویه قائمه آن $a^2 - b^2$ و $2ab$ است. مثلاً

$$5^2 = 3^2 + 4^2, 13^2 = 5^2 + 12^2,$$

$$17^2 = 15^2 + 8^2, 29^2 = 21^2 + 20^2 \dots$$

۸۰. جوابها چنین‌اند:

$$13^2 + 1 = 7^2 + 11^2, 17^2 + 1 = 11^2 + 13^2,$$

$$23^2 + 1 = 13^2 + 19^2, 31^2 + 1 = 11^2 + 29^2$$

تبصره. از اتحاد $(4x + 11)^2 + (3x + 7)^2 = (\Delta x + 13)^2 + 1$

نتیجه می‌شود که اگر عددهای $p = \Delta x + 13$ ، $q = 3x + 7$ ، $r = 4x + 11$ اول باشند، $p^2 + 1 = q^2 + r^2$ خواهد بود. از یک فرضیه شینتسل درباره عددهای اول می‌توان نتیجه گرفت که تعداد چنین دستگاهائی از عددهای اول بی‌نهایت است.

۸۱. قبل از همه متذکر می‌شویم که اگر p, q, r, s, t و عددهائی

اول و $t^2 + q^2 = r^2 + s^2 + p^2$ باشد، هر یک از عددهای p, q, r, s, t با هر یک

از عددهای t, s, r فرق خواهند داشت. در حقیقت، اگر مثلاً $p = r$

باشد، به معادله $q^2 = s^2 + t^2$ می‌رسیم، که برای عددهای اول t, s, q جواب

ندارد، زیرا عددهای s و t نمی‌توانند هر دو زوج یا هر دو فرد باشند

(در هر یک از این دو حالت $q = 2$ می‌شود، در حالیکه طرف دیگر

تساوی از ۴ بزرگتر است). اگر هم $s = 2$ بگیریم، عدد ۴ مساوی

تماضل مربعهای دو عدد طبیعی می‌شود که ممکن نیست.

اگر $t^2 + q^2 = r^2 + s^2 + p^2$ باشد، در این صورت همه عددهای

p, q, r, s, t نمی‌توانند فرد باشند. اگر p زوج باشد، $p = 2$ می‌شود،

بنابراین باید عددهای t, s, r, q فرد باشند، و چون در تقسیم یک مربع

کامل بر ۸ باقیمانده ۱ بدست می‌آید، باقیمانده سمت چپ تساوی در

تقسیم بر ۸ مساوی ۵ و باقیمانده سمت راست تساوی در تقسیم بر ۸ مساوی

۳ می‌شود، که ممکن نیست. اگر هر دو عدد p, q فرد باشند، از

تقسیم سمت چپ تساوی بر ۸، باقیمانده ۲ بدست می‌آید، در سمت راست

تساوی، تنها یکی از عددها می‌تواند و باید زوج باشد و مثلاً $r = 2$.

ولی در این صورت از تقسیم سمت راست تساوی بر ۸، باقیمانده ۶ بدست

می آید. که ممکن نیست.

۸۲* . حل آ. شینتسل را می آوریم .

معادله برای عددهای اول تنها يك جواب دارد : $r=3, p=q=2$
 برای اینکه این مطلب را ثابت کنیم ، همه جوابهای معادله
 $p(p+1)+q(q+1)=n(n+1)$ را بدست می آوریم ، که در
 آن p و q عددهائی اول و n يك عدد طبیعی است ، از این معادله می توان
 بدست آورد .

$$p(p+1) = n(n+1) - q(q+1) = (n-q)(n+q+1)$$

ضمناً باید $n > q$ باشد . چون p عددی است اول ، باید $n - q$ یا
 $n + q + 1$ بر p قابل قسمت باشد . اگر $n - q$ بر p قابل قسمت باشد
 باید $p \leq n - q$ شود ، که از آنجا $p(p+1) \leq (n-q)(n-q+1)$ و در
 نتیجه $n + q + 1 \leq n - q + 1$ می شود که ممکن نیست . بنابراین
 $n + q + 1$ بر p قابل قسمت است ، یعنی به ازای يك عدد طبیعی k
 داریم :

$$n + q + 1 = kp \implies p + 1 = k(n - q) \quad (1)$$

اگر $k=1$ باشد ، $n + q + 1 = p$ و $p + 1 = n - q$ و از
 آنجا $p - q = n + 1$ و $p + q = n - 1$ می شود که ممکن نیست .
 به این ترتیب $k > 1$ است . از رابطه (۱) بسادگی بدست می آید:

$$\begin{aligned} 2q &= (n+q) - (n-q) = kp - 1 - (n-q) = \\ &= k[k(n-q) - 1] - 1 - (n-q) = (k+1)[(k-1)(n-q) - 1] \end{aligned}$$

چون $k \geq 2$ است ، $k+1 \geq 3$ می شود و از تساوی اخیر ، که سمت چپ آن تنها مقسوم علیه های طبیعی ۱ ، ۲ ، q و $2q$ را دارد ، نتیجه می شود که $k+1=q$ یا $k+1=2q$. اگر $k+1=q$ باشد ، $(k-1)(n-q)=3$ ، یعنی $(q-2)(n-q)=3$ می شود که یا $q-2=1$ ، $n-q=3$ را می دهد که از آنجا $q=3$ ، $n=6$ ، $k=q-1=2$ و با توجه به (۱) $p=5$ بدست می آید و یا $q-2=1$ ، $n-q=1$ را می دهد که از آنجا $q=5$ ، $n=6$ ، $k=4$ و با توجه به (۱) $p=3$ بدست می آید .

اگر $k+1=2q$ باشد ، $(k-1)(n-q)=2$ ، یعنی $2(q-1)(n-q)=2$ می شود و از آنجا $q-1=1$ و $n-q=1$ بدست می آید ؛ بنابراین $q=2$ ، $n=3$ ، $p=2(1)$ بدست می آید . به این ترتیب ، وقتی n عددی طبیعی باشد ، جوابهای زیر بدست می آید :

$$p=q=2, n=3 ; p=5, q=3, n=6 ; p=3, q=5, n=6$$

که اگر بخواهیم هر سه عدد p, q, r اول باشند ، تنها جواب $r=3$ ، $p=q=2$ قابل قبول است .

تبصره . اگر $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ را n امین عدد مثلثی بگیریم ، قضیه

فوق را می توان به این ترتیب منظم کرد : معادله $t_p + t_q = t_r$ تنها یک جواب برای عددهای اول دارد : $r=3$ ، $p=q=2$.

۸۳* . مثلاً عددهای اول $p=127$ ، $q=3697$ ، $r=5527$ دارای

این خاصیت اند . بسادگی (و مثلاً به کمک جدول عددهای اول) روشن می شود که این سه عدد اولند و سپس اینکه $(p+1), (q+1), (q(q+1))$ ،

$r(r+1)$ تشکیل يك تصاعد حسابی می دهند. بطریق زیر می توان اینگونه
 عددهای اول را جستجو کرد.
 از اتحاد

$$n(n+1) + (41n+20)(41n+21) = 2(29n+14)(29n+15)$$

نتیجه می شود، که وقتی n عددی طبیعی باشد، عددهای $n(n+1)$ ،
 $(29n+14)(29n+15)$ و $(41n+20)(41n+21)$ تشکیل يك
 تصاعد حسابی می دهند. اگر به ازای مقداری از عدد طبیعی n ، عددهای
 n ، $29n+14$ و $41n+20$ اول باشند، سه عدد مورد نظر بدست
 می آید.

بنابر این کافی است روی عددهای فرد اول n آزمایش کنیم و ببینیم که
 آیا عددهای $29n+14$ و $41n+20$ اول هستند یا نه. کوچکترین
 این عددها $n=127$ است که به عنوان جواب در ابتدای حل ذکر کردیم.
 ولی ما تایید نمی کنیم که از این راه، می توان همه جوابهای مسئله را
 بدست آورد.

تبصره. از يك فرضیه شینتسل نتیجه می شود که بی نهایت عدد اول n
 وجود دارد، که به ازای آن هر دو عدد $29n+14$ و $41n+20$ اولند.
 این مسئله را به این طریق هم می توان بیان کرد: سه عدد مثلثی
 چنان پیدا کنید که اولاً شمارهٔ ردیف (اندیس) آنها عددی اول باشد،
 ثانیاً تشکیل يك تصاعد حسابی بدهند.

۸۴. مسئله تنها يك جواب دارد: $n=4$. در حقیقت به ازای

$n=1$ ، عدد $4=3+n$ مرکب است؛ به ازای $n=2$ ، عدد $9=2+n$ ،

مرکب است؛ به ازای $n=3$ ، عدد $n+1=4$ مرکب است؛ و وقتی $n > 4$ باشد، همه عددها از ۵ بزرگتر می‌شوند و لااقل یکی از آنها بر ۵ قابل قسمت می‌شود، زیرا از تقسیم عددهای ۱۳، ۹، ۷، ۳، ۱ و ۱۵ بر ۵ بترتیب باقیمانده‌های ۱، ۳، ۲، ۴، ۳ و ۰ بدست می‌آید، یعنی همه باقیمانده‌های ممکن. از اینجا نتیجه می‌شود که عددهای $n+1$ ، $n+3$ ، $n+7$ ، $n+9$ ، $n+13$ و $n+15$ در تقسیم بر ۵، همه باقیمانده‌های ممکن را می‌دهند و بنابراین لااقل یکی از آنها بر ۵ قابل قسمت و عددی مرکب می‌شود (به ازای $n > 4$). ولی وقتی $n=4$ باشد، عددهای ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹ بدست می‌آید.

تبصره. از يك فرضیه شینتسل درباره عددهای اول نتیجه می‌شود که بی‌نهایت عدد طبیعی برای n وجود دارد، بنحوی $n+1$ ، $n+3$ ، $n+7$ ، $n+9$ و $n+13$ اول باشند. مثلاً به ازای $n=10$ و $n=100$.

۸۵. تنها يك عدد $k=1$ وجود دارد، که به ازای آن دنباله

$$k+1, k+2, \dots, k+10 \quad (1)$$

شامل پنج عدد اول ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ می‌شود. به ازای $k=0$ و $k=2$ دنباله (۱)، تنها چهار عدد اول وجود دارد. اگر $k \geq 3$ باشد، در دنباله (۱) عدد ۳ وجود ندارد، ضمناً میدانیم که از بین هر سه عدد فرد متوالی، یکی بر ۳ قابل قسمت است. بنابراین در دنباله (۱)، لااقل يك عدد فرد مرکب وجود دارد. علاوه بر آن، دنباله (۱) همیشه شامل ۵ عدد زوج و بنابراین (وقتی $k > 2$ باشد) مرکب است. به این ترتیب در دنباله (۱)، به ازای $k \geq 3$ لااقل ۶ عدد مرکب پیدا می‌شود و بنابراین تعداد عددهای اول نمی‌تواند از چهار، تجاوز کند.

تبصره. دنباله (۱) برای $k = 0, 2, 10, 100, 190, 820$ شامل چهار عدد اول است. معلوم نیست که آیا تعداد چنین عددهائی برای k بی نهایت است یا نه؟ تنها به کمک يك فرضیه شینتسل درباره عددهای اول، می توان به این سؤال پاسخ داد.

۸۶. تنها يك عدد $k = 1$ وجود دارد، که به ازای آن دنباله

$$k + 1, k + 2, \dots, k + 100 \quad (1)$$

شامل ۲۶ عدد اول است. به ازای $k = 0, 2, 3, 4$ ، دنباله (۱) شامل ۲۵ عدد اول است. فرض می کنیم، $k \geq 5$ باشد. دنباله (۱) شامل ۵۰ عدد زوج است که اگر $k > 1$ باشد، همه آنها عددهائی مرکب هستند. علاوه بر آن، دنباله (۱) شامل ۵۰ عدد فرد متوالی است، که از بین آنها لااقل ۱۶ تا مضرب ۳ هستند (زیرا از هر سه عدد فرد متوالی، یکی بر ۳ قابل قسمت است)، بنابراین، وقتی $k > 2$ باشد، این ۱۶ عدد هم مرکب اند. حالا حساب می کنیم که در دنباله (۱)، چند عدد بر ۵ قابل قسمت، ولی بر ۳ و ۲ غیر قابل قسمت است. چنین عددهائی بصورت $30t + 7$ هستند که در آن $t \geq 0$ عددی صحیح و ۷ یکی از عددهای ۵ یا ۲۵ باشد. این عددها، دنباله نامحدود صعودی را تشکیل می دهند.

(۲) $5, 25, 35, 55, 65, 85, 95, 115, 125, 145, 155, 175, 185, \dots$

جمله n ام این دنباله را u_n می گیریم. بسادگی معلوم می شود که در این صورت $u_{n+6} - u_n < 100$ است ($n = 1, 2, \dots$) را بزرگترین جمله از دنباله (u_1, u_2, \dots) می گیریم که از k بزرگتر نباشد. در این صورت داریم:

$$u_n \leq k < u_{n+1} < u_{n+6} < u_n + 100 \leq k + 100$$

به این ترتیب دیده می‌شود که در دنباله (۱)، لااقل ۶ جمله از دنباله (۲) وجود دارد، بنابراین لااقل شش جمله وجود دارد که بر ۵ قابل قسمت و بر ۲ و ۳ غیر قابل قسمت است، که اگر $k \geq 5$ باشد، همه آنها عددهائی مرکب‌اند.

بالاخره به محاسبه تعداد عددهائی از دنباله (۱) می‌پردازیم که بر ۷ قابل قسمت، ولی بر ۲، ۳ و ۵ غیر قابل قسمت باشند، همه این عددها بصورت $7t + 210$ هستند، که در آن t یکی از عددهای ۷، ۴۹، ۷۷، ۹۱، ۱۱۹، ۱۳۳، ۱۶۱، ۲۰۳ و $t \geq 0$ عددی صحیح است. از همه اینگونه عددها دنباله صعودی و نامحدود زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$7, 49, 77, 91, 119, 133, 161, 203, 217, 259, 287, \dots \quad (3)$$

n امین جمله این دنباله را به v_n نشان می‌دهیم. بسادگی معلوم می‌شود که $v_{n+3} - v_n < 100$ است ($n = 1, 2, \dots$). فرض کنید v_n بزرگترین عدد از دنباله (v_1, v_2, \dots) باشد، که از k تجاوز نکند، در این صورت داریم:

$$v_n \leq k < v_{n+1} < v_{n+3} < v_n + 100 \leq k + 100$$

از اینجا روشن می‌شود که در دنباله (۱)، لااقل ۳ عدد از دنباله (۳) وجود دارد، یعنی ۳ عددی که بر ۷ قابل قسمت، ولی بر ۲، ۳، ۵ غیر قابل قسمت است و اگر $k \geq 7$ باشد همه آنها عددهائی مرکب‌اند. به این ترتیب دیده می‌شود که اگر $k \geq 7$ باشد، در دنباله (۱) لااقل $75 = 50 + 16 + 6 + 3 = 75$ عدد مرکب وجود دارد و بنابراین تعداد

عددهای اول از ۲۵ تجاوز نمی‌کند. به‌ازای $k=5$ و $k=6$ ، عددهای $۷۲, ۷۳$ و ۷۴ در دنبالهٔ (۱) مرکب‌اند. بنابراین اگر $k > 1$ باشد، دنبالهٔ (۱) شامل بیش از ۲۵ عدد اول نیست.

۰۸۷. مسئله فقط شش جواب دارد، یعنی هر ۱۰۰ عدد متوالی که با یکی از عددهای $1, 3, 4, 5, 10, 11$ شروع شود، شامل ۲۵ عدد اول است.

اثبات این قضیه از لم زیر بدست می‌آید: وقتی $k > 11$ باشد، بین عددهای $k+1, k+2, \dots, k+99$ ، لااقل ۷۶ عدد وجود دارد که بر یکی از عددهای $2, 3, 5, 7$ یا 11 قابل قسمت است.

برای اثبات لم دنبالهٔ صعودی نامحدودی از عددهائی که بر $2, 3, 5, 7$ یا 11 قابل قسمت‌اند، تشکیل می‌دهیم. اگر γ ، عددی از این دنباله باشد، عدد $2310 + \gamma$ هم جزو آن خواهد بود و برعکس (زیرا داریم: $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$). $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ راهمهٔ عددهای طبیعی می‌گیریم که از 2310 تجاوز نکنند و بر $2, 3, 5, 7$ یا 11 قابل قسمت باشند، همهٔ این عددها در s تصاعد حسابی $2310t + \gamma_i$ وجود دارند ($i=1, 2, \dots, s$ و $t=1, 2, \dots$). حالا کافی است همهٔ عددهای طبیعی که از $2310 + 100$ تجاوز نمی‌کنند و بر $2, 3, 5, 7$ یا 11 قابل قسمت‌اند بنویسیم و ببینیم که در هر صد عدد k ، یا 11 قابل قسمت‌اند $k+1, k+2, \dots, k+99$ ، برای $1 \leq k \leq 2310$ ، لااقل ۷۶ عدد از دنبالهٔ نوشته شده وجود دارد.

تبصره. با اشکال می‌توان ثابت کرد که تعداد محدودی از عدد طبیعی k وجود دارد، که برای آنها در دنبالهٔ $k+1, k+2, \dots, k+99$ ، فقط ۲۴ عدد

اول وجود داشته باشد. از يك فرضیه شینتسل نتیجه می شود که بی نهایت عدد طبیعی k وجود دارد، که به ازای آنها، در چنین دنباله ای ۲۳ عدد اول وجود دارد.

۸۸. تنها يك عدد اول با این خاصیت وجود دارد: $p = ۳$. در حقیقت اگر p عددی اول باشد، طبق قضیه کوچک فرما، $۲^p - ۲$ بر p قابل قسمت است و اگر $۲^p + ۱$ هم بر p قابل قسمت باشد، باید ۳ بر p قابل قسمت شود، یعنی $p = ۳$ باشد.

۸۹. م. هر فاصله ای از سلسله طبیعی اعداد، که شامل ۲۱ عدد باشد، شامل لا اقل ۱۴ عدد است که هر يك از آنها لا اقل بر یکی از عدد های ۲ ، ۳ یا ۵ قابل قسمت است.

اثبات. در هر فاصله سلسله طبیعی، که شامل ۲۱ عدد باشد، لا اقل ۱۰ عدد وجود دارد که بر ۲ قابل قسمت است، همچنین لا اقل ۱۰ عدد فرد متوالی وجود دارد، که در بین آنها لا اقل سه عدد بر ۳ قابل قسمت است. بنابراین باقی می ماند که ثابت کنیم در چنین فاصله ای، لا اقل يك عدد قابل قسمت بر ۵ و غیر قابل قسمت بر ۲ یا ۳ وجود دارد. باقیمانده تقسیم عدد x را بر ۳۰ مساوی γ فرض می کنیم، در این صورت $x = ۳۰t + \gamma$ می شود ($t \geq ۰$ عددی صحیح و $\gamma = ۰, ۱, \dots, ۲۹$ است). اگر $\gamma \leq ۵$ باشد، $x + ۲۰ < x + ۵ \leq ۳۰t + ۵$ می شود و عدد $۳۰t + ۵$ عددی از دنباله

$$x, x+1, \dots, x+۲۰ \quad (۱)$$

می شود که بر ۵ قابل قسمت و بر ۲ یا ۳ غیر قابل قسمت است. اگر $۵ < \gamma \leq ۲۵$ باشد. $x + ۲۰ < x + ۲۵ \leq ۳۰t + ۲۵$ می شود و عدد $۳۰t + ۲۵$

عددی از دنباله (۱) است که بر ۵ قابل قسمت و بر ۲ یا ۳ غیر قابل قسمت است .

بالاخره اگر $25 < x < 30$ باشد ، $x < 30t + 35 < x + 20$ ، می شود و عدد $30t + 35$ عددی از دنباله (۱) است که بر ۵ قابل قسمت و بر ۲ یا ۳ غیر قابل قسمت است . به این ترتیب لم ثابت شد .

از این لم بلافاصله نتیجه می شود که در هر فاصله سلسله طبیعی ، که شامل ۲۱ عدد و هر کدام از آنها بزرگتر از ۵ باشد . لااقل ۱۴ عدد مرکب وجود دارد و بنابراین تعداد عددهای اول از ۷ تجاوز نمی کند . برای $x = 1$ ، $x = 2$ و $x = 3$ در دنباله (۱) هشت عدد اول و برای $x = 4$ و $x = 5$ ، هفت عدد اول وجود دارد . به این ترتیب در دنباله

$$x, x+1, x+2, \dots, x+20$$

تنها وقتی ۸ عدد اول وجود دارد که $x = 1, 2, 3$ باشد .

۰۹۰ . تنها $p = 5$ دارای این خاصیت است . بسهولت تحقیق می شود که $p < 5$ نمی تواند باشد . برای $p = 5$. عددهای اول ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹ بدست می آید . اگر $p > 5$ و $p = 5k$ باشد (k عددی است طبیعی) ، p عددی مرکب می شود . اگر $p = 5k + 1$ باشد ، عدد $p + 14$ بر ۵ قابل قسمت و عددی مرکب می شود . اگر $p = 5k + 2$ باشد ، $p + 8$ بر ۵ قابل قسمت و عددی مرکب است . اگر $p = 5k + 3$ باشد ، $p + 12$ بر ۵ قابل قسمت است و بالاخره اگر $p = 5k + 4$ باشد $p + 6$ بر ۵ قابل قسمت است .

۰۹۱ . اگر $k > 1$ عددی طبیعی باشد ، عددهای $m = 2^k - 2$ و

$n = 2^k(2^k - 2)$ دارای این خاصیت‌اند، که برای آنها $m + 1 = 2^k - 1$ و $n + 1 = (2^k - 1)^2$ می‌شود.

تبصره . پ . اردیوش این سؤال را مطرح می‌کند که آیا زوج عدد دیگری دارای این خاصیت وجود دارد؟

۹۲ . تنها دو عدد اول به این صورت وجود دارد: $2 = \frac{2 \cdot 3}{2} - 1$ و

$5 = \frac{3 \cdot 4}{2} - 1$ در حقیقت داریم: $\frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{1}{2}(n-1)(n+2)$

و وقتی $n \geq 4$ باشد، هر دو عدد $n-1$ و $n+2$ بزرگتر از ۲ می‌شوند و بنابراین یکی از آنها عددی است زوج.

۹۳ . فقط سه عدد اول به این صورت وجود دارد: $T_1 + 1 = 2$ ،

$T_2 + 1 = 5$ ، $T_3 + 1 = 11$. در حقیقت اگر $n \geq 4$ باشد، داریم: $T_n + 1 = \frac{(n+3)(n^2+2)}{6}$ ، ضمناً $n+3 > 6$ و $n^2+2 > 6$ است.

از عددهای $n+3$ و n^2+2 یا یکی زوج و دیگری قابل قسمت بر ۳ است و یا یکی از آنها بر ۶ قابل قسمت است.

۹۴ . مثلاً عدد زیر دارای خاصیت مورد نظر است:

$$n = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_{s+1} - 1)$$

زیرا در این صورت، بنا بر قضیه کوچک فرما، عدد $2^n - 1$ بر هر یک از عددهای p_1, p_2, \dots, p_{s+1} قابل قسمت است.

(۱) به سؤال اردیوش می‌توان جواب مثبت داد. آ . مونکوسکی یک

زوج دیگر از این عددها را بما می‌دهد: $m = 75 = 3 \cdot 5^2$ ، $n = 1215$

$5 \cdot 3^5 = 5 \cdot 3^5$ که در مورد آنها داریم: $m + 1 = 2^6 \cdot 19$ ، $n + 1 = 2^6 \cdot 19$

۰۹۵ مثلاً پنج عدد زیر :

$$۲ = ۱^۴ + ۱^۴, ۱۷ = ۱^۴ + ۲^۴, ۹۷ = ۲^۴ + ۳^۴,$$

$$۲۵۷ = ۱^۴ + ۴^۴, ۶۴۱ = ۲^۴ + ۵^۴$$

تبصره. از يك فرضیه شینتسل دربارهٔ عددهای اول نتیجه می‌شود که بی‌نهایت عدد اول وجود دارد، بطوریکه هر يك از آنها مساوی مجموع توانهای چهارم دو عدد طبیعی باشد، و بطور کلی برای هر عدد طبیعی n ، بی‌نهایت عدد اول بصورت $a^{2^n} + b^{2^n}$ وجود دارد (a و b عددهای طبیعی هستند).

۰۹۶ P_k را k امین عدد اول و P_{k_n} را بزرگترین عدد اولی که از $۶n+۱$ کوچکتر باشد (برای عدد طبیعی n) فرض می‌کنیم. چون عددهای به صورت $۶n+۲ = ۲(۳n+۱)$ ، $۶n+۳ = ۳(۲n+۱)$ ، $۶n+۴ = ۲(۳n+۲)$ مرکب هستند، در اینصورت واضح است که $P_{k_n+۱} \geq ۶n+۵$ می‌شود و بنابراین داریم :

$$P_{k_n+۱} - P_{k_n} \geq (۶n+۵) - (۶n+۱) = ۴$$

یعنی دنبالهٔ عددهای P_{k_n} و $P_{k_n+۱}$ تشکیل زوج عددهای اول توأم را نمی‌دهند.

چون $P_{k_n+۱} \geq ۶n+۵$ و n می‌تواند هر عدد طبیعی باشد، تعداد این زوج عددهای P_{k_n} و $P_{k_n+۱}$ بی‌نهایت می‌شود. متذکر می‌شویم که در زوج عددهای P_{k_n} و $P_{k_n+۱}$ ، ممکن است P_{k_n} بزرگترین عدد از يك زوج عدد اول توأم و $P_{k_n+۱}$ کوچکترین عدد از زوج دیگری از عددهای اول توأم باشند؛ مثلاً برای $n=۱$ ، $P_{k_n}=۷$ عدد بزرگتر

از زوج عددهای توام $11, 7, 5$ و $P_{k_n+1} = 11, 7, 5$ عدد کوچکتر از زوج عددهای توام 11 و 13 است؛ برای $n = 2$ داریم: $P_{k_n} = 13$ (بزرگترین عدد از 11 و 13) و $P_{k_n+1} = 17$ (کوچکترین عدد از 17 و 19)؛ برای $n = 17$ داریم: $103 = 6 \cdot 17 + 1$ ؛ $P_{k_n} = 103$ (بزرگترین عدد از دو عدد توام 101 و 103) و $P_{k_n+1} = 107$ (کوچکترین عدد از دو عدد توام 107 و 109).

۹۷، طبق قضیهٔ دیریکه دربارهٔ تصاعد حسابی، در تصاعد $15k + 7$ ($k = 1, 2, \dots$) بی‌نهایت عدد اول وجود دارد. هیچیک از این عددها متعلق به زوج عددهای اول توام نیستند، زیرا داریم:

$$(15k + 7) - 2 = 5(3k + 1), \quad (15k + 7) + 2 = 3(5k + 3)$$

و چون $k > 0$ است، هر دو عدد مرکب‌اند.

۹۸. اگر برای عدد طبیعی n ، عدد $n^2 - 1$ مساوی حاصلضرب سه عدد مختلف اول باشد، چون $3 = 2^2 - 1$ است، باید عدد n از 2 بزرگتر باشد. از طرف دیگر n باید عددی زوج باشد، زیرا در غیر اینصورت هر دو عامل سمت راست تساوی $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ زوج و $n^2 - 1$ بر 4 قابل‌قسمت می‌شود. ضمناً عددهای $n - 1$ و $n + 1$ (که هر دو از واحد بزرگترند) نمی‌توانند هر دو مرکب باشند. زیرا در این حالت، عدد $n^2 - 1$ بصورت حاصلضرب سه عدد اول در نمی‌آید. به این ترتیب یکی از عددهای $n - 1$ و $n + 1$ باید اول و دیگری حاصلضرب دو عدد اول مختلف باشد. به ازای $n = 4$ داریم: $n - 1 = 3$ و $n + 1 = 5$ ، یعنی با شرایط ما نمی‌سازد. به همین ترتیب در مورد

$n=6$ ، زیرا $n-1=5$ و $n+1=7$ می‌شود. برای $n=8$ داریم:
 $n-1=7$ و $n+1=9$ ، برای $n=10$ داریم: $n-1=9$ ، $n+1=11$ ،
 برای $n=12$ داریم: $n-1=11$ ، $n+1=13$ ، برای $n=14$
 داریم: $n-1=13$ ، $n+1=15$.

کوچکترین عدد طبیعی n ، که به ازای آن n^2-1 مساوی
 حاصلضرب سه عدد مختلف اول می‌شود، $n=14$ است که در مورد آن
 داریم: $n^2-1=3.5.13$. چون $17.19=3.5.17-1=16^2-1$ است، عدد بعدی
 $n=16$ می‌باشد. سپس بدست می‌آید: $17.19=18^2-1$ و
 $19.23=20^2-1$ ، سومین عدد $n=20$ است. عدد چهارم $n=22$
 است زیرا داریم: $23.29=24^2-1$. اگر بهمین ترتیب ادامه دهیم
 بسادگی به این نتیجه می‌رسیم که عدد پنجم از عددهای مورد نظر ما
 $n=32$ است که به ازای آن داریم: $31.37=32^2-1$. به این ترتیب
 پنج عدد کوچکتری که با شرط مسئله بسازد عبارتند از ۱۴، ۱۶، ۲۰،
 ۲۲، ۳۲.

تبصره. از يك فرضیه شینتسل دربارهٔ عددهای اول نتیجه می‌شود که
 برای عدد n بی‌نهایت جواب وجود دارد که به ازای هر يك از آنها n^2-1
 مساوی حاصلضرب سه عدد اول مختلف باشد، و بطور کلی برای هر عدد
 طبیعی $s > 1$ ، بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که به ازای هر
 يك از آنها n^2-1 بصورت حاصلضرب s عدد اول مختلف تجزیه شود. واضح
 است که در مورد $s=2$ ، عددهای $n-1$ و $n+1$ زوج عددهای اول توأم
 را می‌دهند.

۹۹. پنج جواب کوچکتر برای عدد طبیعی n ، بنحوی که عدد

$n^2 + 1$ مساوی حاصلضرب سه عدد اول مختلف بشود ، عبارتند از عددهای ۱۳، ۱۷، ۲۱، ۲۳ و ۲۷: زیرا داریم:

$$13^2 + 1 = 2 \cdot 5 \cdot 17, \quad 17^2 + 1 = 2 \cdot 5 \cdot 29, \quad 21^2 + 1 = 2 \cdot 13 \cdot 17,$$

$$23^2 + 1 = 2 \cdot 5 \cdot 53, \quad 27^2 + 1 = 2 \cdot 5 \cdot 73$$

و برای $n = 112$ داریم: $112^2 + 1 = 5 \cdot 13 \cdot 193$

(کوشش کنید نمونه‌های دیگری بدست آورید).

تبصره. از يك فرضیه شینتسل دربارهٔ عددهای اول نتیجه می‌شود که برای هر عدد طبیعی g ، بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، بنحوی که به‌ازای هر يك از آنها، عدد $n^2 + 1$ مساوی حاصلضرب g عدد اول مختلف باشد.

۱۰۰. a^{\otimes} فرض می‌کنیم که هر يك از سه عدد طبیعی $n+1$ ، n

و $n+2$ ($n > 7$) تنها بر يك عدد اول قابل قسمت باشند. در اینصورت هیچیک از این عددها نمی‌توانند بر ۶ قابل قسمت باشند و بنابراین عدد n می‌تواند تنها بصورت $6k+1$ ، $6k+2$ یا $6k+3$ باشد (k عددی است طبیعی).

اگر $n = 6k+1$ باشد، چون عدد $6k+2$ زوج است و يك مقسوم‌علیه اول دارد، باید بصورت 2^m باشد، که در آن m عددی طبیعی و بزرگتر از ۳ است (زیرا $n > 7$ یعنی $n+1 > 8 = 6k+2$ بود).

عدد $n+2 = 6k+3$ هم، چون بر ۳ قابل قسمت است و يك مقسوم‌علیه اول دارد، باید بصورت 3^s باشد، که در آن s عددی طبیعی و بزرگتر از ۲ است (زیرا $n+2 > 9 = 6k+3$). ضمناً باید رابطهٔ $3^s - 2^m = 1$

برقرار باشد. ولی معادلهٔ اخیر برای عددهای طبیعی m و s فقط دو جواب دارد: $s=1, m=1$ و $s=2, m=3$ (مسئلهٔ ۱۵۵ را ببینید). بنابراین حالت $n=6k+1$ ممکن نیست.

اگر $n=6k+2$ باشد، باید $3^s = 6k+3 = 3(2k+1)$ باشد. ولی معادلهٔ $2^m - 3^s = 1$ برای عددهای طبیعی m و s تنها یک جواب دارد: $s=1, m=2$ (مسئلهٔ ۱۵۴ را ببینید) بنابراین حالت $n=6k+2$ هم ممکن نیست.

بالاخره اگر $n=6k+3$ باشد، باید داشته باشیم: $3^s = (s \geq 2)n = 6k+3 = 3(2k+1)$ و $2^m - 3^s = 1$ که ممکن نیست.

به این ترتیب فرض اینکه به ازای عددهای طبیعی $n > 7$ ، هیچیک از عددهای $n, n+1, n+2$ ، دو مقسوم علیه مختلف اول یا بیشتر نداشته باشند، به تناقض برخورد می‌کند.

ولی به ازای $n=7$ داریم: $n+1=2^3, n+2=3^2$ ، یعنی هر یک از عددهای $n, n+1, n+2$ ، فقط یک مقسوم علیه اول دارند.

(b) اگر k عددی طبیعی باشد، عددهای $6(6k+1)$ و $6(6k+5)$ لاقلاً سه مقسوم علیه مختلف اول دارند. یعنی بجز ۲ و ۳ لاقلاً یک مقسوم علیه اول دیگر هم دارند (زیرا عددهای $6k+1 > 1$ و $6k+5 > 1$ نه بر ۲ و نه بر ۳ قابل قسمت نیستند). اگر دو تصاعد $36k+6$ و $36k+30$ ($k=1, 2, \dots$) را در یک دنباله بنویسیم و عدد $30=2 \cdot 3 \cdot 5$ را به ابتدای آن اضافه کنیم، دنبالهٔ بی‌نهایت

زیر بدست می‌آید :

$$۳۰.۴۲.۶۶, ۷۸, ۱۰۲, \dots, ۳۶k + ۶, ۳۶k + ۳۰, \dots$$

که تفاضل هر دو جمله متوالی آن ۱۲ یا ۲۴ است و هر يك از جمله‌های آن لااقل سه مقسوم‌علیه مختلف اول دارد .

. ۱۰۱

$$n = ۳۳ \quad (n = ۳۰.۱۱, n + ۱ = ۲۰.۱۷, n + ۲ = ۵.۰۷)$$

$$n = ۸۵ \quad (n = ۵۰.۱۷, n + ۱ = ۲۰.۴۳, n + ۲ = ۳۰.۲۹)$$

$$n = ۹۳ \quad (n = ۳۰.۳۱, n + ۱ = ۲۰.۴۷, n + ۲ = ۵.۱۹)$$

$$n = ۱۴۱ \quad (n = ۳۰.۴۷, n + ۱ = ۲۰.۷۱, n + ۲ = ۱۱.۱۳)$$

$$n = ۲۰۱ \quad (n = ۳۰.۶۷, n + ۱ = ۲۰.۱۰۱, n + ۲ = ۷.۲۹)$$

چهار عدد طبیعی متوالی وجود ندارد که هر يك از آنها مساوی حاصلضرب دو مقسوم‌علیه مختلف اول باشد، زیرا از چهار عدد طبیعی متوالی، حتماً یکی بر ۴ قابل قسمت است. نمونه چهار عدد طبیعی متوالی که هر يك از آنها تنها دو مقسوم‌علیه اول داشته باشند، عبارتست از

$$۳۳ = ۳۰.۱۱, ۳۴ = ۲۰.۱۷, ۳۵ = ۵.۰۷, ۳۶ = ۲^۲.۳^۲$$

تبصره. نمی‌توانیم ثابت کنیم که بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، که به ازای هر يك از آنها، عددهای n ، $n + ۱$ ، $n + ۲$ حاصلضرب دو عدد اول مختلف باشند (این حکم نتیجه‌ای از يك فرضیه شینتسل درباره عددهای اول است).

۱۰۲. فرض می‌کنیم که بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود داشته باشد،

که به ازای آنها هر يك از عددهای n و $n+1$ تنها يك مقسوم عليه اول داشته باشند. در اینصورت، اگر $n > 1$ باشد، با توجه به اینکه از دو عدد n و $n+1$ يکي زوج و دیگری فرد است، برای عدد اولی مثل p خواهیم داشت $p^k - 2^m = \pm 1$ (عددهای طبیعی هستند) و از آنجا $p^k = 2^m \pm 1$.

می‌دانیم که اگر عدد مرسنا از واحد بزرگتر باشد، نمی‌تواند توان يك عدد طبیعی با نمای بزرگتر از واحد باشد؛ بنابراین اگر $p^k = 2^m - 1$ باشد، $k=1$ می‌شود یعنی $p = 2^m - 1$ عدد اول مرسنا است. اگر هم $p^k = 2^m + 1$ باشد، یا $k=1$ است که در اینصورت $p = 2^m + 1$ عدد اول فرما است، یا $k > 1$ ، که در اینصورت داریم:

$$2^m = p^k - 1 = (p-1)(p^{k-1} + p^{k-2} + \dots + 1)$$

و ضمناً $m > 1$. از اینجا نتیجه می‌شود که k باید عددی زوج باشد:

$$k = 2l \quad (l \text{ عددی طبیعی است}), \text{ یعنی داریم: } 2^m = (p^l - 1)(p^l + 1)$$

بنابراین عددهای $p^l - 1$ و $p^l + 1$ ، که مخالف ۲ هستند،

باید توانی از ۲ باشند: $p^l - 1 = 2$ ، $p^l + 1 = 4$ ، یعنی $p^l = 3$ و از

$$\text{آنجا } p = 3، 2^m = 2 \cdot 4 = 8، \text{ یعنی } m = 3 \text{ که می‌دهد } 3^2 = 2^3 + 1$$

به این ترتیب ثابت کردیم که اگر به ازای $n > 8$ ، عددهای n

و $n+1$ تنها يك مقسوم عليه اول داشته باشند، یا n عدد اول مرسنا

و یا $n+1$ عدد اول فرما است. برعکس اگر $M_m = 2^m - 1$ ، عدد

اول مرسنا باشد، عددهای M_m و $M_m + 1 = 2^m$ تنها يك مقسوم عليه

اول دارند و اگر $F_k = 2^{2^k} + 1$ عدد اول فرما باشد هر يك از عددهای F_k و $F_k - 1 = 2^{2^k}$ تنها يك مقسوم علیه اول خواهند داشت. از اینجا صحت حکم قضیه ثابت می شود.

تبصره تا حالا ۲۹ عدد طبیعی n می شناسیم که به ازای آنها، عددهای n و $n+1$ دارای يك مقسوم علیه اول هستند. پنج جواب کوچکتر n عبارتست از $n=2, 3, 4, 7, 8$ و بزرگترین آنها عدد $n=2^{11213} - 1$.

۱۵۳. داریم: $2^2 - 1 = 3$ ، $2^4 - 1 = 3 \cdot 5$ ، و همچنین داریم: $2^{2^k} - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1)$. اگر برای $n = 2^k > 4$ ، عدد $2^{2^k} - 1$ حاصلضرب دو عدد اول باشد، عددهای $2^k - 1$ و $2^k + 1$ باید اول باشند ولی از سه عدد $2^k - 1$ و 2^k و $2^k + 1$ یکی بر ۳ قابل قسمت است (که البته 2^k بر ۳ قابل قسمت نیست). و چون به ازای $k > 2$ ، هر دو عدد $2^k - 1$ و $2^k + 1$ از ۳ بزرگترند، یکی از این عددها مرکب است. به این ترتیب وقتی n عددی زوج و بزرگتر از ۴ باشد، عدد $2^n - 1$ حاصلضرب لااقل سه عدد طبیعی بزرگتر از واحد می شود.
اگر n فرد باشد، داریم:

$$2^3 - 1 = 7, 2^5 - 1 = 31, 2^7 - 1 = 127, 2^9 - 1 = 7 \cdot 73,$$

$$2^{11} - 1 = 23 \cdot 89, 2^{13} - 1 = 8191 \quad (\text{عدداول})$$

$$2^{15} - 1 = 7 \cdot 31 \cdot 151,$$

عددهای $2^{17} - 1$ و $2^{19} - 1$ اول و عدد $2^{21} - 1 = 7 \cdot 127 \cdot 337$

۱ - ۲۳ از ۱۰^۶ بزرگتر است . به این ترتیب همهٔ عددهای ۱ - ۲ⁿ :
(n = ۱, ۲, ...) که ۱۰^۶ کوچکتر و حاصلضرب دو عدد اول هستند عبارتند از :

$$۲^۴ - ۱ = ۳.۵, ۲^۹ - ۱ = ۷.۷۳, ۲^{۱۱} - ۱ = ۲۳.۸۹$$

تبصره. از عددهای مرسه نا ، که بزرگتر از یک میلیون و به صورت حاصلضرب

دو عدد اول باشند ، عبارتند از عددهای ۱ - ۲ⁿ = M_n وقتی که داشته باشیم :
n = ۲۳, ۳۷, ۴۹, ۶۷, ۱۰۱ . ما نمی‌دانیم که آیا تعداد اینگونه عددها
محدود است یا نامحدود ،

۱۰۴ . چون $k \geq ۳$ است ، $۲.۳.۵ > ۶$ ، $p_۱ p_۲ \dots p_k \geq p_۱ p_۲ p_۳ = ۲.۳.۵ > ۶$ ،

می‌شود و بنابراین ، بنا بر مسئلهٔ ۵۰ ، $p_۱ p_۲ \dots p_k$ را می‌توان بصورت
 $a + b$ نوشت ، بنحوی که a و b بزرگتر از واحد و نسبت بهم اول ، و بنا بر این
نسبت به مجموعشان $p_۱ p_۲ \dots p_k$ اول باشند. عددهای a و b مقسوم‌علیه‌های
اول مختلفی دارند : فرض کنید a بر p و b بر q قابل قسمت و $p < q$

باشد . چون $(p, p_۱ p_۲ \dots p_k) = ۱$ است ، پس $p \geq p_{k+۱}$ و چون $q > p$
بود $q \geq p_{k+۲}$ می‌شود و چون $p + q \leq a + b$ است ، بدست می‌آید :

$$p_{k+۱} + p_{k+۲} \leq p_۱ p_۲ \dots p_k$$

۱۰۵ . m را عدد طبیعی دلخواهی بزرگتر از ۳ و n را عددی

طبیعی فرض می‌کنیم ، بنحوی که $n > p_۱ p_۲ \dots p_m$ باشد . عدد طبیعی
 $k \geq m \geq ۴$ وجود دارد ، بنحوی که داشته باشیم :

$$p_۱ p_۲ \dots p_k \leq n < p_۱ p_۲ \dots p_k p_{k+۱} \quad (۱)$$

اگر $p_{k+۱} + ۱ > q_n \geq p_{k+۱}$ باشد ، طبق تعریف عدد q_n ، هر یک

از عددهای p_1, p_2, \dots, p_{k+1} مقسوم‌علیه‌ی از عدد n هستند، از آنجا
 $n \geq p_1 p_2 \dots p_k p_{k+1}$ می‌شود که با (۱) متناقض است. به این ترتیب
 $q_n < p_{k+1} + 1 < p_k + p_{k+1}$ می‌شود و چون $k \geq 4$ است، بنا بر مسئله
 $10^4, \dots, q_n < p_1 p_2 \dots p_{k-1}$ می‌شود و از آنجا، با توجه به (۱)، بدست
 می‌آید: $\frac{q_n}{n} < \frac{1}{p_k} < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{m}$. به این ترتیب ثابت کردیم که به ازای

هر عدد طبیعی $m > 3$ ، وقتی که $n > p_1 p_2 \dots p_m$ باشد، $\frac{q_n}{n} < \frac{1}{m}$ می‌-

شود و از آنجا نتیجه می‌شود که نسبت $\frac{q_n}{n}$ ، وقتی که n غیر منفی

و صعودی باشد، بسمت صفر میل می‌کند.

۱۰۶. n را عدد طبیعی بزرگتر از ۴ فرض می‌کنیم. در این صورت

یا $n = 2k$ است (که k عددی طبیعی و بزرگتر از ۲ است) و یا

$n = 2k + 1$ (که k عددی طبیعی و بزرگتر از واحد است). اگر

$n = 2k$ باشد ($k > 2$)، طبق قضیهٔ چیشف، عدد اول p وجود دارد

بنحوی که $k < p < 2k$ باشد، ضمناً چون $k > 2$ است، $p > 2$

می‌شود. از آنجا $n = 2k < 2p < 4k = 2n$ می‌شود و چون $p > 2$ است،

$2p$ مساوی حاصلضرب دو عدد اول مختلف می‌شود و ضمناً $n < 2p < 2n$

است، اگر $n = 2k + 1$ باشد ($k \geq 2$)، طبق قضیهٔ چیشف، عدد اول p وجود

دارد. بنحوی که $k < p < 2k$ باشد، از آنجا $3 \leq k + 1 \leq p < 2k$

و $n = 2k + 1 < 2k + 2 \leq 2p < 4k < 4k + 2 = 2n$ می‌شود؛ بنابراین

دوباره $n < 2p < 2n$ می‌شود و $2p$ مساوی حاصلضرب دو عدد اول

مختلف می‌شود.

حالا فرض کنید ، n عددی طبیعی بزرگتر از ۱۵ باشد. اگر n مساوی یکی از عدد های ۱۶ ، ۱۷ ، ... ، ۲۹ باشد ، بین n و $2n$ عدد $2.3.5 = 30$ قرار دارد . بنابراین می توانیم $n \geq 30$ در نظر بگیریم در این صورت داریم : $n = 6k + r$ که k عددی طبیعی و بزرگتر یا مساوی ۶ و r باقیمانده تقسیم n بر ۶ است ، بنحوی که $0 \leq r \leq 5$ باشد . طبق قضیه چیشف ، عدد اول p وجود دارد ، بنحوی که $k < p < 2k$ باشد ؛ بنابراین $p > 5$ و $k + 1 < p < 2k$ می شود و از آنجا بدست می آید : $2n < 12k < 2.3.0.p < 6(k+1) \leq 2.3.0.p < 2n$ ، بنحوی که خواهیم داشت : $2.3.0.p < 2n < 2.3.0.p$ حاصلضرب سه عدد اول مختلف است . $107 \cdot p_k$ را k امین عدد اول ، s را عدد مفروض طبیعی بزرگتر از واحد و n را عدد طبیعی بزرگتر از $p_1 p_2 \dots p_s$ فرض می کنیم . ثابت می کنیم که بین n و $2n$ لا اقل يك عدد وجود دارد که مساوی حاصلضرب s عدد اول مختلف است .

$n = kp_1 p_2 \dots p_{s-1} + r$ می گیریم ، که در آن عبارتست از باقیمانده تقسیم عدد n بر $p_1 p_2 \dots p_{s-1}$. در اینجا $k > p_s$ (زیرا $n > p_1 p_2 \dots p_s$ بود) و $0 \leq r < p_1 p_2 \dots p_{s-1}$ است و از آنجا $k > p_s$ و $k + 1 < p < 2k$ می شود و در نتیجه خواهیم داشت :

$$n = p_1 p_2 \dots p_{s-1} k + r < p_1 p_2 \dots p_{s+1} (k+1) \leq p_1 p_2 \dots p_{s-1} p < 2p_1 p_2 \dots p_{s-1} k \leq 2n,$$

بنحوی که $p < 2n$ و $n < p_1 p_2 \dots p_{s-1} p < 2n$ و ضمناً $p > p_s$ است ، در این صورت

• مساوی حاصلضرب s عدد مختلف اول می شود .

۱۰۸ • بسادگی می توان تحقیق کرد که جمله n ام از دنباله مفروض

مساوی $(10^n - 7) / 3$ است . داریم :

$$10^2 \equiv 15 \equiv -2 \pmod{17} \Rightarrow 10^4 \equiv$$

$$\equiv 16 \equiv -1 \pmod{17} \Rightarrow 10^8 \equiv -10 \equiv 7 \pmod{17}$$

و چون داریم : $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ ، نتیجه می شود :

$$10^{16k+9} \equiv 7 \pmod{17} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

بنابراین عدد $(10^{16k+9} - 7) / 3$ بر ۱۷ قابل قسمت است ، یعنی عدد

$(10^{16k+9} - 7) / 3$ به ازای $k = 0, 1, 2, \dots$ عددی است مرکب (زیرا

همه آنها بزرگتر یا مساوی $(10^9 - 7) / 3$ و بنابراین بزرگتر از ۱۷

هستند) . مونکوسکی ، به کمک جدول عددهای اول ، ثابت کرد که عدد

$(10^n - 7) / 3$ وقتی n مساوی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ باشد ، عددی است

اول . بنابراین کوچکترین عدد مرکب از این دنباله چنین است :

$$\frac{1}{3}(10^9 - 7) = 333\ 333\ 331$$

طبعاً این سؤال پیش می آید : آیا عددهای مرکب دیگری در

این دنباله ، غیر از آنچه که پیدا کردیم ، وجود دارد یا نه ؟ بترتیب

داریم :

$$10^2 \equiv 5 \pmod{19} \Rightarrow 10^4 \equiv 25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow \\ \Rightarrow 10^{12} \equiv 6^3 \equiv 7 \pmod{19},$$

و چون $10^{18k} \equiv 1 \pmod{19}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) است، بنابراین عدد $(10^{18k+12} - 7)$ بر ۱۹ قابل قسمت است ($k = 0, 1, 2, \dots$). به این ترتیب مثلاً عدد $(10^{12} - 7)$ هم عددی است مرکب.

معلوم نیست که آیا عددهای اول دیگری به این صورت، علاوه بر آنچه

که در بالا دادیم، وجود دارد و آیا تعداد آنها بی نهایت است یا نه؟

۱۰۹. عدد مورد نظر $n = 5$ است، زیرا عددهای

$$1^4 + 2^4 = 17, 2^4 + 3^4 = 97, 3^4 + 4^4 = 327, 4^4 + 5^4 = 871,$$

اول هستند، ولی $5^4 + 6^4 = 1921 = 17 \cdot 113$ عددی است مرکب.

۱۱۰. مثلاً عددهای $10^{6k+4} + 3$ ($k = 0, 1, \dots$) مرکب هستند،

زیرا همه آنها بر ۷ قابل قسمت اند. در حقیقت بسادگی می توان تحقیق

کرد: $10^4 \equiv 4 \pmod{7}$ ، و چون طبق قضیه فرما $10^6 \equiv 1 \pmod{7}$

بنابراین (برای عدد طبیعی k) داریم:

$$10^{6k+4} + 3 \equiv 10^4 + 3 \equiv 4 + 3 \equiv 0 \pmod{7}$$

تبصره. معلوم نیست که آیا بین عددهای بصورت $10^n + 3$ ($n = 1, 2, \dots$)

بی نهایت عدد اول وجود دارد یا نه. این عددها به ازای $n = 1$ و $n = 2$

اولند، ولی به ازای $n = 3$ و $n = 4$ مرکب اند (زیرا $10^3 = 17 \cdot 59$)

و $10^4 + 3$ هم بر ۷ قابل قسمت است).

۱۱۱. از اتحاد (برای عدد طبیعی n)

$$2^{4n+2} + 1 = (2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1) \quad (1)$$

و اینکه $2^{4n+2} + 1$ بر $2^2 + 1$ یعنی ۵ قابل قسمت است و اینکه برای عدد طبیعی $n > 1$ داریم:

$$2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1 = 2^{n+1}(2^n - 1) + 1 \geq 2^2 \cdot 2 + 1 = 25$$

نتیجه می‌شود که لااقل یکی از عوامل سمت راست اتحاد (۱) بر ۵ قابل قسمت است و در تقسیم بر ۵ (به ازای $n > 1$)، خارج قسمت زوجی بزرگتر از واحد می‌دهد. از اینجا نتیجه می‌شود که عدد $\frac{1}{5}(2^{4n+2} + 1)$ به ازای $n = 2, 3, \dots$ مساوی حاصلضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از واحد می‌شود و عددی است مرکب.

۱۱۲. m را عدد طبیعی بزرگتر از واحد می‌گیریم و فرض می‌کنیم

$n = m! + k$ باشد ($k = 2, 3, \dots, m$). چون در اینجا $k < m!$

و $m! + k$ بر k قابل قسمت است، $2^{m!+k} - 1 < 2^k - 1$ و $2^{m!+k} - 1$

بر $2^k - 1$ قابل قسمت می‌شود، یعنی $2^{m!+k} - 1$ ، عددی است

مرکب ($k = 2, 3, \dots, m$). بنابراین فاصله‌ای از دنباله $2^n - 1$ بدست

می‌آید که از $m - 1$ عدد مرکب تشکیل شده است.

۱۱۳. مثلاً عدد ۲۰۰ را انتخاب می‌کنیم. برای اینکه آنرا به

عدد اول تبدیل کنیم، باید رقم آخر آنرا با رقمی فرد عوض کرد. ولی

۲۰۱ بر ۳، ۲۰۳ بر ۷، ۲۰۵ بر ۵، ۲۰۷ بر ۳ و ۲۰۹ بر ۱۱ قابل

قسمت است. به این ترتیب تنها با تغییر یکی از رقمهای عدد ۲۰۰

نمی‌توان آنرا به عددی اول تبدیل کرد.

تبصره. معلوم نیست که آیا همیشه می توان با تعویض دو رقم از یک عدد ، آنرا به عددی اول تبدیل کرد یا نه .

می توان بسادگی ثابت کرد که بی نهایت عدد طبیعی n وجود دارد ، بنحوی که با تعویض یکی از رقمهای آن (به شرطی که در دستگاه عدد شماری به مبنای ۱۰ نوشته شده باشد) نتوان یک عدد اول بدست آورد . مثلاً عددهای $n = 2310k - 210$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) از این قبیل اند ، زیرا در اینحالت باید رقم آخر عدد n را تغییر داد (یعنی صفر را) . و بسهولت می توان تحقیق کرد که $n + 1$ بر ۱۱ ، $n + 3$ بر ۳ ، $n + 7$ بر ۷ و $n + 9$ بر ۳ قابل قسمت و بنابراین با تعویض یکی از رقمهای عدد n ، همیشه عددی مرکب بدست می آید .

۱۱۴ . فرض می کنیم که قضیه C صحیح باشد ، واضح است که قضیه T برای $n = 2$ و $n = 3$ صحیح است . بنابراین می توان n را عدد طبیعی بزرگتر از ۳ در نظر گرفت . اگر $n = 2k$ ، عددی زوج باشد ، چون $n > 3$ است ، $k > 1$ می شود و بنا به قضیه چیشف ، عدد اول p وجود دارد ، بنحوی که $k < p < 2k$ باشد ، از آنجا $p < n < 2p$ می شود ، یعنی n مقسوم علیهی از نمای واحد در حاصلضرب $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ می باشد .

اگر هم $n = 2k + 1$ باشد ، که k عدد طبیعی بزرگتر از واحد است (زیرا $n > 3$ بود) ، طبق قضیه C عدد اول p وجود دارد بنحوی که $k < p < 2k < n$ باشد ، از آنجا $k + 1 \leq p$ می شود و بنابراین $2k + 1 < 2p$ و $p < n < 2p$ خواهد بود و مثل حالت قبل نتیجه می گیریم که p در تجزیه $n!$ به عوامل اول ، نمائی مساوی واحد دارد .

به این ترتیب از قضیه C ، قضیه T را نتیجه گرفتیم.

حالا فرض می‌کنیم که قضیه T صحیح باشد؛ n را عدد طبیعی بزرگتر از واحد می‌گیریم. طبق قضیه T ، عدد اول p وجود دارد که در تجزیه عدد $(2n)!$ به عوامل اول، نمائی مساوی واحد دارد. به این ترتیب داریم $2p < 2n < 2p$ (زیرا اگر $2p \leq 2n$ باشد، حاصلضرب $2n \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot 2 = (2n)!$ ، عوامل p و $2p$ وجود خواهد داشت و بنابراین، عدد p در تجزیه این حاصلضرب به عوامل اول، نمائی بزرگتر یا مساوی ۲ خواهد داشت که برخلاف قضیه T است). از آنجا $n < p < 2n$ می‌شود. به این ترتیب از قضیه T ، قضیه C بدست می‌آید و قضایای C و T هم‌ارزند.

۱۱۵. در تجزیه عدد $11!$ به عوامل اول، عده‌های ۷ و ۱۱ با نمای واحد ظاهر می‌شوند. بنابراین می‌توانیم $n > 11$ در نظر بگیریم بنحوی که هم در حالت $n = 2k$ و هم در حالت $n = 2k + 1$ داریم $k > 5$ ، یعنی طبق قضیه‌ای که در شرط مسئله ذکر کردیم، دو عدد اول p و $q > p$ وجود دارد، بنحوی که $k < p < q < 2k$ باشد. از آنجا در هر حالت داریم $p < q < n$ و $p \geq k + 1$. یعنی در هر حالت $n > 2p > 2q$ می‌شود که براساس آن نتیجه می‌گیریم که هم عدد اول p و هم عدد اول q در تجزیه عدد $n!$ به عوامل اول، نمائی مساوی واحد دارند.

در مورد $15!$ ، اگر به عوامل اول تجزیه شود، تنها عدد اول ۷، نمائی مساوی واحد دارد.

۱۱۶. n را عدد طبیعی مفروضی در نظر می‌گیریم. طبق قضیه

دیریکله در بارهٔ تصاعد حسابی، عدد اول p بصورت $p = 6^n k + 2 \cdot 3^{2^n - 1} - 1$ وجود دارد (k عددی طبیعی است). از آنجا (چون $n \geq 2^{n-1}$ است)، $p+1$ بر 3^n قابل قسمت می‌شود و عدد $p+1$ بیش از n مقسوم علیه طبیعی مختلف دارد (مثلاً عددهای $1, 3, 3^2, \dots, 3^n$). همچنین طبق قضیهٔ اولر داریم: $3^{\varphi(2^n)} \equiv 1 \pmod{2^n}$ ، از آنجا $3^{2^n - 1} - 1$ بر 2^n قابل قسمت، یعنی $p-1$ بر 2^n قابل قسمت است و عدد $p-1$ بیش از n مقسوم علیه طبیعی مختلف خواهد داشت (مثلاً عددهای $1, 2, 2^2, \dots, 2^n$).

۱۱۷* n را عدد طبیعی مفروض و p_i را i امین عدد اول در نظر می‌گیریم. بر اساس قضیهٔ چینی دربارهٔ باقیمانده‌ها، عدد طبیعی b وجود دارد، بنحوی که داشته باشیم:

$$b \equiv 1 \pmod{p_1 p_2 \cdots p_n} ; b \equiv -1 \pmod{p_{n+1} p_{n+2} \cdots p_{2n}} ;$$

$$b \equiv -2 \pmod{p_{2n+1} p_{2n+2} \cdots p_{3n}}$$

چون $(b, p_1 p_2 \cdots p_{2n}) = 1$ ، طبق قضیهٔ دیریکله عدد طبیعی k وجود دارد، بنحوی که $p = p_1 p_2 \cdots p_{2n} k + b$ ، عدی اول باشد. در این حالت $b-1$ بر p_i برای $i = 1, 2, \dots, n$ قابل قسمت است؛ بنابراین $p-1$ بر p_i برای $i = 1, 2, \dots, n$ قابل قسمت است، همچنین $b+1$ بر p_i برای p_i بر $p+1, n+2, \dots, 2n$ قابل قسمت می‌شود و از آنجا $p+1$ بر p_i ($i = n+1, n+2, \dots, 2n$) قابل قسمت است، بهمین ترتیب $p+2$ هم بر p_i برای $i = 2n+1, 2n+2, \dots, 3n$ قابل قسمت می‌شود. بنابراین هر یک از عددهای $p-1$ ، $p+1$ و $p+2$ لا اقل n مقسوم علیه

مختلف اول دارند .

۱۱۸. اگر به ازای عدد طبیعی m ، عدد $m!$ بر عدد اول p قابل قسمت باشد ، باید p مقسوم علیه لااقل یکی از عوامل حاصلضرب $m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$ باشد ، یعنی $p \leq m$ است . بنابراین اگر عدد $m!$ بر عدد طبیعی $a > m$ قابل قسمت باشد ، باید a عددی مرکب باشد .
 به این ترتیب اگر به ازای عدد طبیعی $n > 1$ ، عدد $(n-1)!$ بر n یا $n+2$ قابل قسمت باشد ، عدد n یا $n+2$ مرکب خواهند بود . بنابراین شرط مسئله لازم است .

حالا فرض می کنیم که برای عدد مفروض فرد $n > 1$ ، عدد $(n-1)!$ نه بر n و نه بر $n+2$ قابل قسمت نباشد .

ثابت می کنیم که عددهای n و $n+2$ اولند . اگر عددی مرکب باشد ، مثلاً $n = ab$ است ، که a و b عددهای طبیعی کوچکتر از n هستند ، یعنی $a \leq n-1$ و $b \leq n-1$ و بنابراین عددهای a و b عواملی از حاصلضرب $(n-1) \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = (n-1)!$ هستند . از آنجا در حالت $a \neq b$ باید $(n-1)!$ بر ab قابل قسمت باشد که مخالف فرض است .
 در حالت $a = b$ داریم $n = a^2$ و چون n عددی فرد و بزرگتر از واحد است ، $a \geq 3$ می شود . بنابراین $2a > 3a > 2a \geq n = a^2$ و از آنجا $2a \leq n-1$ به این ترتیب ، عددهای a و $2a$ عوامل مختلفی از حاصلضرب $(n-1) \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = (n-1)!$ هستند و از آنجا $(n-1)!$ بر $n = a^2$ قابل قسمت می شود که مخالف فرض است ، بنابراین عدد n اول است .
 اگر عدد $n+2$ مرکب باشد ، $n+2 = ab$ می شود ، که در آن

a و b عددهای طبیعی بزرگتر از واحد و چون n عددی فرد است، این دو عدد هم فرد و بزرگتر یا مساوی ۳ هستند، از آنجا چون $n \geq 7$ است،

$$a \leq \frac{n+2}{3} \leq \frac{n-1}{2} \text{ می شود.}$$

به این ترتیب $2a \leq n-1$ است؛ بهمین ترتیب معلوم می شود که $2b \leq n-1$ است. اگر a و b عددهای مختلفی باشند، عوامل مختلفی از حاصلضرب $(n-1)!$ می شود، از آنجا برخلاف فرض $(n-1)!$ بر $ab+2=ab$ قابل قسمت می شود. اگر هم $a=b$ باشد، a و $2b$ عوامل مختلفی از حاصلضرب $(n-1)!$ می شود و از آنجا دوباره برخلاف فرض $(n-1)!$ بر $2ab$ و در نتیجه بر $n+2$ قابل قسمت می شود.

به این ترتیب، شرط مسئله کافی هم هست.

۱۱۹. m را عدد مفروض طبیعی در نظر می گیریم. چون $(10^m, 10^m - 1) = 1$ است، طبق قضیهٔ دیریکه دربارهٔ تصاعد حسابی، عدد طبیعی k وجود دارد، بنحوی که عدد $p = 10^m k + 10^m - 1$ عددی اول باشد، چون m رقم آخر عدد p مساوی ۹ است، نتیجه می شود که مجموع همهٔ رقمهای عدد p بزرگتر از m است.

تبصره. آمونکوسکی متذکر می شود که این قضیه در هر دستگاه عدد شماری به مبنای طبیعی $q > 1$ صحیح است؛ برای این منظور، باید در اثبات فوق بجای ۱۰، عدد q را در نظر بگیریم. معلوم نیست که آیا مجموع رقمهای عدد اول، همراه با خود عدد بطور نامحدود صعودی است یا نه.

۱۲۰. m را عدد طبیعی مفروضی در نظر می‌گیریم. چون $(1, 10^m) = 1$ است، براساس قضیهٔ دیریکله دربارهٔ تصاعد حسابی، عدد طبیعی k وجود دارد، بنحوی که $p = 10^{m+1}k + 1$ عددی اول باشد. واضح است که $m+1$ رقم آخر عدد p از m صفر و به دنبال آنها واحد، تشکیل شده است. بنابراین در نوشتن عدد اول p در عدد شماری به‌مبنای ۱۰، لااقل m صفر وجود دارد.

تیسره. معلوم نیست که آیا برای هر عدد طبیعی m ، چنان عدد اولی وجود دارد، بنحوی که در دستگاه عددشماری به‌مبنای ۱۰، درست شامل m صفر باشد. برای $m=1$ ، کوچکترین این عددها ۱۰۱ و برای $m=2$ ، ۱۰۰۹ می‌باشد.

۱۲۱. اگر p عددی اول باشد، مجموع همهٔ مقسوم علیه‌های طبیعی عدد p^4 عبارتست از $1 + p + p^2 + p^3 + p^4$. اگر $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = n^2$ باشد، بسادگی می‌توان روشن کرد که نامساویهای زیر برقرار است:

$$(2p^2 + p)^2 < (2n)^2 < (2p^2 + p + 2)^2$$

که از آنها تساوی $(2n)^2 = (2p^2 + p + 1)^2$ نتیجه می‌شود، یعنی $4n^2 = 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1$ ، و چون از طرف دیگر $4n^2 = 4(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1)$ ، باید $0 = p^2 - 2p - 3$ باشد که از آنجا $p=3$ بدست می‌آید. در حقیقت برای $p=3$ داریم: $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 11^2$ وجود دارد که در شرط مسئله صدق می‌کند.

۱۲۲. عدد اول p ، تنها دو مقسوم علیه طبیعی ۱ و p دارد. بنابراین اگر مجموع همه مقسوم علیه های طبیعی عدد اول p مساوی توان s ام عدد طبیعی n باشد، باید $1 + p = n^s$ شود و از آنجا داشته باشیم:

$$p = n^s - 1 = (n - 1)(n^{s-1} + n^{s-2} + \dots + 1)$$

در اینجا $n > 1$ است و برای $s \geq 2$ ، عامل اول سمت راست تساوی اخیر از عامل دوم آن کوچکتر است. به این ترتیب تجزیه عدد اول p به دو عامل طبیعی بدست می آید که عامل اول آن کوچکتر از عامل دوم آنست.

از اینجا نتیجه می شود که عامل اول مساوی واحد است، یعنی $n - 1 = 1$ ؛ بنابراین $n = 2$ و $p = 2^s - 1$. بنابراین برای هر عدد طبیعی $s \geq 2$ بیش از یک عدد اول وجود ندارد که در شرط مسئله صدق کند، و چنین عددی تنها وقتی وجود دارد که $2^s - 1$ عددی اول باشد. برای $s = 2$ این عدد مساوی ۳ می شود، برای $s = 3$ مساوی ۷. برای $s = 5$ مساوی ۳۱، برای $s = 7$ مساوی ۱۲۷ بدست می آید. وقتی s مساوی یکی از عددهای ۴، ۶، ۸ و ۱۰ باشد، بترتیب عددهای مرکب $2^4 - 1 = 3 \cdot 5$ ، $2^6 - 1 = 3^2 \cdot 7$ ، $2^8 - 1 = 3 \cdot 5 \cdot 17$ ، $2^{10} - 1 = 3 \cdot 11 \cdot 31$ بدست می آید.

۱۲۳. برای عددهای اول $p > 5$ داریم:

$$2 < \frac{p-1}{2} < p-1$$

از آنجا $(p-1)!$ بر $(p-1) \cdot \frac{p-1}{2} = 2 \cdot (p-1)!$ قابل قسمت است.

فرض می‌کنیم که برای عدد اول $p > 5$ ، به ازای یک مقدار طبیعی m داشته باشیم :

$$(p-1)! + 1 = p^m \quad (1)$$

از آنجا $p^m - 1$ بر $(p-1)^2$ قابل قسمت می‌شود که در نتیجه باید $p-1$ بر $p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + p + 1$ قابل قسمت باشد ، از آنجا $m \geq p-1$ می‌شود و بنابراین باید داشته باشیم :

$$p^m \geq p^{p-1} > (p-1)^{p-1} > (p-1)!$$

به این ترتیب $p^m > (p-1)! + 1$ می‌شود که با فرض (۱) مخالف است .

۱۲۴ . بنابر مسئله لیوویل (مسئله ۱۲۳ را ببینید) ، اگر p عدد

اول بزرگتر از ۵ باشد، برای عدد طبیعی m ، تساوی $(p-1)! + 1 + p^m$ ممکن نیست . عدد فرد $(p-1)! + 1$ از واحد بزرگتر است و بنابراین

دارای مقسوم علیه فرد $q \neq p$ می‌باشد. از قابل قسمت بودن $(p-1)! + 1$ بر

q نتیجه می‌شود که $q > p-1$ است و بنابراین (چون $q \neq p$ بود) $q > p$

می‌شود . حالا با توجه به اینکه p می‌تواند عدد اول دلخواهی

باشد ، نتیجه می‌گیریم که تعداد عددهای اول q که برای آنها به ازای

$p < q$ ، $(p-1)! + 1$ بر q قابل قسمت باشد ، بی‌نهایت است .

۱۲۵* . راه حل آ . شینتسل را می‌آوریم .

a را عدد طبیعی دلخواه و k را عدد صحیح مخالف واحد فرض

می‌کنیم . $2^s h = k - 1$ می‌گیریم ، که در آن 2^s بزرگترین توانی از ۲ است که $k - 1$ را عاد می‌کند و h عددی فرد که می‌تواند مثبت یا منفی باشد . عدد طبیعی m را چنان انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم : $2^{2^m} > a - k$ و $t \geq s$ را عدد طبیعی می‌گیریم بنحوی که $t \geq m$ باشد . اگر عدد $2^{2^t} + k > a$ مرکب باشد ، عدد مرکبی بصورت مورد نظر و بزرگتر از a خواهیم داشت . بنابراین فرض می‌کنیم $p = 2^{2^t} + k$ عددی اول باشد . چون $t \geq s$ و $2^s h = k - 1$ است ، $p - 1 = 2^{2^t} + k - 1 = 2^s h_1$ عددی فرد و مثبت است .

بنابر قضیه اولر داریم : $2^{\varphi(h_1)} \equiv 1 \pmod{h_1}$ ، یعنی (چون $2^{s+\varphi(h_1)} \equiv 2^s \pmod{p-1}$ ، ($p-1 = 2^s h_1$ بود) ، $2^{t+\varphi(h_1)} \equiv 2^t \pmod{p-1}$ است ، بدست می‌آید $t \geq s$ با توجه به اینکه $t \geq s$ است ، بالآخره ، بنابر قضیه کوچک فرما داریم :

$$2^{t+\varphi(h_1)} + k \equiv 2^t + k \equiv 0 \pmod{p}$$

و چون $2^{t+\varphi(h_1)} + k > 2^t$ است ، $2^{t+\varphi(h_1)} + k$ بزرگتر از $2^t + k = p$ می‌شود و $2^{t+\varphi(h_1)} + k$ عددی مرکب و بزرگتر از a خواهد بود ، زیرا داریم : $p = 2^{2^t} + k \geq 2^{2^m} + k > a$.

قضیه ثابت شد . از حالت $k = 1$ اطلاع نداریم ، زیرا نمی‌دانیم که آیا تعداد عددهای مرکب فرما بی‌نهایت است یا نه .

متذکر می‌شویم که حکم ضعیف‌تری از آنچه که در بالا ثابت کردیم

یعنی اینکه برای هر عدد صحیح k لااقل یک عدد طبیعی n وجود دارد

بنحوی که عدد $2^{2^n} + k$ مرکب باشد، در سال ۱۹۴۳ بوسیله ای. رینر (I. Reiner) به عنوان حالت خاصی از یک قضیه کلی، ثابت شد. برای اینکه این حکم ضعیف از اثبات ما (برای $k=1$) بدست آید، کافی است توجه کنیم که عدد $2^{2^5} + 1$ مرکب و بر ۶۴۱ قابل قسمت است.

۱۲۶. مثلاً همه عددهای $k = 6t - 1$ (t عددی صحیح و مثبت است) دارای این خاصیت اند. زیرا برای هر عدد طبیعی n ، عدد 2^{2^n} در تقسیم بر ۳، باقیمانده‌ای مساوی واحد می‌دهد، بنابراین عدد $2^{2^n} + k = 2^{2^n} - 1 + 6t$ بزرگتر از ۳ و مضربی از ۳، یعنی عددی مرکب است.

۱۲۷. (a) اگر n عددی طبیعی باشد، $2^{2^n} - 1$ بر ۳ قابل قسمت است، بنابراین عدد $(2^{2^{2^n}} - 1) = 2(2^{2^n} - 1)$ بر ۶ قابل قسمت است و می‌توان $2^{2^{2^n}} - 1 = 6k + 2$ فرض کرد، که در آن k عددی است طبیعی، از آنجا بدست می‌آید:

$$2^{2^{2^n}} - 1 + 3 = (2^6)^k \cdot 2^2 + 3 \equiv 0 \pmod{7}$$

بنابراین $2^{2^{2^n}} - 1 + 3$ ، به ازای $n = 1, 2, \dots$ بر ۷ قابل قسمت است و ضمناً داریم:

$$2^{2^{2^n}} - 1 + 3 \geq 2^{2^2} + 3 > 7$$

یعنی $2^{2^{2^n}} - 1 + 3$ ، به ازای $n = 1, 2, \dots$ عددی است مرکب.

(b) اگر n عددی طبیعی باشد، $16^n - 1 = 2^{4n} - 1$ و بنابراین $2^{2^{2^n}} - 1 = 2(2^{2^n} - 1)$ بر ۱۰ قابل قسمت است. در نتیجه می‌توان فرض کرد:

$2^{4n+1} = 10k + 2$ (k عددی است طبیعی) . و از آنجا داریم :

$$2^{4n+1} + 7 \equiv (2^{10})^k \cdot 2^2 + 7 \equiv 2^2 + 7 \equiv 0 \pmod{11}$$

یعنی $2^{4n+1} + 7$ بر ۱۱ قابل قسمت و ضمناً از $2^{25} + 7$ بزرگتر یا مساوی آن ، یعنی از ۱۱ بزرگتر است . بنابراین $2^{4n+1} + 7$ ، به‌ازای $n = 1, 2, \dots$ عددی است مرکب .

(c) اگر n عددی طبیعی باشد، عدد $2^{6n} - 1 = (64)^n - 1$ بر ۷ و بنابراین عدد $2^{6n+2} - 2^2$ بر ۲۸ قابل قسمت است ، یعنی می‌توان $2^{6n+2} = 28k + 4$ فرض کرد (k عددی طبیعی است) و در نتیجه خواهیم داشت :

$$2^{6n+2} = (2^{28})^k \cdot 2^4 \equiv 16 \pmod{29}$$

و بنابراین $2^{6n+2} + 13$ بر ۲۹ قابل قسمت و ضمناً بزرگتر یا مساوی $2^{28} + 13$ ، یعنی بزرگتر از ۲۹ است . یعنی $2^{6n+2} + 13$ عددی است مرکب (به‌ازای $n = 1, 2, \dots$) .

(d) به‌ازای هر عدد طبیعی n ، عدد $2^{10n} - 1$ بر ۱۱ و بنابراین $2^{10n+1} - 2$ بر ۲۲ قابل قسمت است و از آنجا می‌توان $2^{10n+1} = 22k + 2$ فرض کرد (k عددی طبیعی است) و نوشت :

$$2^{10n+1} = (2^{22})^k \cdot 2^2 \equiv 4 \pmod{23}$$

در نتیجه $2^{10n+1} + 19$ بر ۲۳ قابل قسمت است و چون ، وقتی $n = 1, 2, \dots$ باشد ، از ۲۳ بزرگتر است عددی مرکب می‌شود .

(e) اگر n عددی طبیعی باشد ، $(2^2)^{2^n} - 1 = 2^{6^n} - 1$ بر ۹ و بنابراین $2^{6^{n+2}} - 2^2$ بر ۳۶ قابل قسمت است و می‌توان $2^{6^{n+2}} = 36k + 4$ (k عددی طبیعی است) فرض کرد . یعنی :

$$2^{6^{n+2}} = (2^{26})^k \cdot 16 \equiv 16 \pmod{37}$$

در نتیجه $2^{6^{n+2}} + 21$ بر ۳۷ قابل قسمت و ضمناً ، برای $n = 1, 2, \dots$ از ۳۷ بزرگتر است ، یعنی $2^{6^{n+2}} + 21$ عددی است مرکب .

تبصره . حتی برای يك عدد صحیح k هم ثابت نشده است که آیا بین عددهای $k + 2^{2^n}$ ($n = 1, 2, \dots$) ، بی‌نهایت عدد مرکب وجود دارد یا نه .

۱۲۸* . می‌دانیم که عدد $F_m = 2^{2^m} + 1$ ، وقتی که m مساوی یکی از عددهای ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ باشد ، اول است و عدد $F_5 = 641p$ می‌باشد ، که در آن p عددی است اول و بزرگتر از $F_4 + 1 = 2^{16} + 1$. علاوه بر آن F_5 بر p قابل قسمت است ، داریم :

$$(p, F_5 - 2) = 1 \implies (p, 2^{2^2} - 1) = 1$$

بنابراین قضیهٔ چینی دربارهٔ باقیمانده‌ها ؛ بی‌نهایت عدد طبیعی k وجود دارد ، بنحوی در هم‌نشست‌های زیر صدق کند :

$$k \equiv 1 \pmod{(2^{2^2} - 1) \cdot 641} \text{ و } k \equiv -1 \pmod{p} \quad (1)$$

ثابت می‌کنیم که اگر k عددی طبیعی و بزرگتر از p باشد و در هم‌نشست‌های (۱) صدق کند ، همهٔ عددهای $k \cdot 2^n + 1$ ($n = 1, 2, \dots$) مرکب هستند .

عدد n را می‌توان به صورت $n = 2^m(2t+1)$ گرفت (m و t عددهای صحیح غیر منفی هستند). ابتدا m را یکی از عددهای $0, 1, 2, 3$ یا 4 می‌گیریم. بر اساس اولین همنهشتی (۱) داریم:

$$k \cdot 2^n + 1 \equiv 2^{2^m}(2t+1) + 1 \pmod{2^{2^2} - 1} \quad (2)$$

چون، وقتی m یکی از عددهای $0, 1, 2, 3$ یا 4 باشد، $2^{2^2} - 1$ بر F_m و $2^{2^m}(2t+1) + 1$ بر F_m قابل قسمت است، بنابراین (۲)، $k \cdot 2^n + 1$ بر F_m قابل قسمت می‌شود و با توجه به اینکه داریم:

$$k \cdot 2^n + 1 > k > p > F_4$$

عدد $k \cdot 2^n + 1$ مرکب می‌شود.

حالا باید به حالتی بپردازیم که $m \geq 6$ است. n بر 2^6 قابل قسمت و بنابراین $n = 2^6 \cdot h$ است (h عددی طبیعی است). بر اساس همنهشتی دوم (۱) داریم: $k \cdot 2^n + 1 \equiv -2^{2^6 \cdot h} + 1 \pmod{p}$ ، و چون $2^{2^6 \cdot h} - 1$ بر $2^5 + 1$ و عدد اخیر بر p قابل قسمت است، $k \cdot 2^n + 1$ بر p قابل قسمت می‌شود و بنابراین، با توجه به اینکه $k \cdot 2^n + 1 > k > p$ است عدد $k \cdot 2^n + 1$ مرکب می‌شود.

تبصره. نمی‌دانیم که کوچکترین عدد k کدام است، که به‌ازای آن هر

یک از عددهای $k \cdot 2^n + 1$ ($n = 1, 2, \dots$) مرکب باشد.

۱۲۹*. قبلا متذکر می‌شویم که در اثبات مسئله ۱۲۸، می‌توان

به همنهشتیهای (۱)، همنهشتی $k \equiv 1 \pmod{2}$ را اضافه کرد، بنحوی که قضیه T را بدست آوریم: بی‌نهایت عدد فرد $k > p$ وجود دارد، بنحوی

که هر يك از عددهای $1 + p \cdot 2^l$ ($l = 1, 2, \dots$)، لااقل بر یکی از شش عدد اول

$$F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, p \quad (3)$$

قابل قسمت باشند ($p > F_4$). حاصلضرب شش عدد (۳) را Q فرض می‌کنیم.

چون این عدد فرد است، $2^{\varphi(Q)} \equiv 1 \pmod{Q}$ می‌شود و در نتیجه $2^{\varphi(Q)} \equiv 1 \pmod{q}$ ، که در آن q یکی از عددهای (۳) است. n را عددی طبیعی می‌گیریم. بنا بر قضیه T (برای $l = n[\varphi(Q) - 1]$)، عدد $1 + k \cdot 2^{n[\varphi(Q) - 1]}$ لااقل بر یکی از عددهای (۳) قابل قسمت است که آنرا به q نشان می‌دهیم. بنابراین $1 + k \cdot 2^{n[\varphi(Q) - 1]} \equiv 0 \pmod{q}$ و از آنجا با ضرب طرفین همنهشتی در 2^n بدست می‌آید: $2^{\varphi(Q)} \equiv 1 \pmod{q}$ ، در نتیجه با توجه به $k \cdot 2^{n\varphi(Q)} + 2^n \equiv 0 \pmod{q}$ یعنی $2^{n\varphi(Q)} \equiv 1 \pmod{q}$ ، بدست می‌آید: $k + 2^n \equiv 0 \pmod{q}$ و چون $k > p$ و بنابراین $k > q$ و $k + 2^n > q$ است، از همنهشتی اخیر معلوم می‌شود که $k + 2^n$ عددی است مرکب.

بنابراین بی‌نهایت عدد طبیعی و فرد k وجود دارد، که به ازای آنها، همهٔ عددهای $2^n + k$ ($n = 1, 2, \dots$) مرکب‌اند.

۱۳۰. فرض کنید $k = 2^m$ و m عددی طبیعی باشد، و فرض

کنید $h = 2^s$ ، که در آن $s \geq 0$ عددی صحیح و h عددی فرد است در اینصورت داریم:

$$k \cdot 2^{2^n} + 1 = 2^{2^s} (2^{n-s} + h) + 1$$

و چون به ازای $n > s$ ، عدد $2^{n-s} + h$ طبیعی و فرد است، $k \cdot 2^{2^n} + 1$ بر $2^{2^s} + 1$ قابل قسمت می‌شود. و بنابراین، با توجه به اینکه به ازای $n > s$ داریم: $k \cdot 2^{2^n} + 1 > 2^{2^s} + 1$ ، عدد $k \cdot 2^{2^n} + 1$ به ازای $n > s$ مرکب است (بر $2^{2^s} + 1$ قابل قسمت است)،

در حالت خاصی که k توانی از ۲ با نمای فرد باشد، عدد $k \cdot 2^{2^n} + 1$ (بر $n = 1, 2, \dots$) قابل قسمت است.

۱۳۱. وقتی $k = 1$ باشد $n = 5$ است، زیرا عدد $2^{2^5} + 1$ به ازای $n = 1, 2, 3, 4$ اول است و $2^{2^5} + 1$ بر 641 قابل قسمت، یعنی $2^{2^5} + 1$ عددی است مرکب.

وقتی $k = 2$ باشد $n = 1$ است، زیرا $2 \cdot 2^{2^1} + 1$ بر 3 قابل قسمت است.

وقتی $k = 3$ باشد $n = 2$ ، زیرا عدد $3 \cdot 2^{2^2} + 1$ اول و عدد $3 \cdot 2^{2^2} + 1 = 49$ بر 7 قابل قسمت است.

وقتی $k = 4$ باشد $n = 2$ است، زیرا $4 \cdot 2^{2^2} + 1 = 17$ اول و عدد $4 \cdot 2^{2^2} + 1$ بر 5 قابل قسمت است.

وقتی $k = 5$ باشد $n = 1$ است، زیرا $5 \cdot 2^{2^1} + 1$ بر 3 قابل قسمت است.

وقتی $k = 6$ باشد $n = 1$ است، زیرا $6 \cdot 2^{2^1} + 1$ بر 5 قابل قسمت است.

وقتی $k = 7$ باشد $n = 3$ است. زیرا $7 \cdot 2^{2^3} + 1 = 29$ و $7 \cdot 2^{2^3} + 1 = 113$ اول و عدد $7 \cdot 2^{2^3} + 1$ بر 11 قابل قسمت است.

وقتی $k=8$ باشد $n=1$ است، زیرا $1+2^2=8$ بر ۳ قابل قسمت است.

وقتی $k=9$ باشد $n=2$ است، زیرا $1+2^2=9$ بر ۳ قابل قسمت است.

وقتی $k=10$ باشد $n=2$ است، زیرا $1+2^2=10$ بر ۳ قابل قسمت است.

۱۳۲. از حل مسئله ۱۳۱ معلوم می‌شود که وقتی k مساوی یکی از عددهای ۱، ۳، ۴، ۷، ۹ یا ۱۰ باشد، شرط مسئله برقرار نیست، عدد ۶ هم در شرط مسئله صدق نمی‌کند، زیرا $1+2^2=6$ بر ۳ قابل قسمت است. عددهای $1+2^{2^n}$ و $1+2^{2^{2^n}}$ و $1+2^{2^{2^{2^n}}}$ به‌ازای $n=1, 2, \dots$ مرکب‌اند، زیرا همه آنها از ۳ بزرگتر و بر ۳ قابل قسمت‌اند.

تبصره. اگر $k=2t+3$ باشد ($t=0, 1, 2, \dots$)، همه عددهای $1+2^{2^n} \cdot k$ ($n=1, 2, \dots$) بر ۳ قابل قسمت و مرکب‌اند.

۱۳۳. عدد $\frac{1}{3}(2^{2^n+1} + 2^{2^n} + 1)$ ، به‌ازای $n=1, 2, \dots$ عددی طبیعی است.

اگر n عددی زوج باشد، $2^n - 1$ بر ۳ قابل قسمت است و می‌توان $2^n = 3k + 1$ گرفت (k عددی طبیعی است)، از آنجا خواهیم داشت:

$$2^{2^n} = (2^3)^k \cdot 2 = 8^k \cdot 2 \equiv 2 \pmod{7}$$

و بنابراین:

$$2^{2^n+1} = (2^{2^n})^2 \equiv 4 \pmod{7},$$

$$2^{2^n+1} + 2^{2^n} + 1 \equiv 4 + 2 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

و اگر n عددی فرد باشد، $2^n - 2$ بر ۳ قابل قسمت و $2^n = 3k + 2$ ($k \geq 0$)
 عددی صحیح است) و از آنجا:

$$2^{2^n} = 2^{3k+2} = 8 \cdot 4^k \equiv 4 \pmod{7}$$

$$2^{2^{n+1}} = (2^{2^n})^2 \equiv 4^2 \equiv 2 \pmod{7}$$

و از آنجا بدست می آید:

$$2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1 \equiv 2 + 4 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

به این ترتیب عدد $(2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1)$ ، به ازای عددهای

طبیعی n ، بر ۷ قابل قسمت است و چون برای $n > 1$ داریم:

$$\frac{1}{3}(2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1) \geq \frac{1}{3}(2^{2^2} + 2^{2^2} + 1) = 91 > 7$$

وقتی $n = 2, 3, \dots$ باشد، این عدد مرکب است.

۱۳۴. مثلاً وقتی $n = 28k + 1$ باشد ($k = 1, 2, \dots$) همه عددهای

دنباله مفروض مرکب خواهند بود.

در حقیقت، بنا بر قضیه کوچک فرما، $2^{2^8} - 1$ بر ۲۹ قابل قسمت

است و از آنجا، به ازای $k = 1, 2, \dots$ عددهای $2^{2 \cdot 28k} - 1$ بر ۲۹ قابل

قسمت می شوند؛ بنابراین، به ازای $n = 28k + 1$ داریم:

$$(2^{2^n} + 1)^2 + 2^2 \equiv 25 + 4 \equiv 0 \pmod{29}$$

یعنی $2^2 + (2^{2^n} + 1)^2$ بر ۲۹ قابل قسمت است، ضمناً چون برای

عددهای طبیعی k داریم: $n = 28k + 1 \geq 29$ ، بنابراین

$2^2 > 2^1 + (1 + 2^1)$ می شود. در نتیجه همه عددهای بصورت
 $2^2 + (1 + 2^{2n})$ ، به ازای $n = 2k + 1$ ($k = 1, 2, \dots$) مرکب اند.
 ۱۳۵* در حالتی که a عددی فرد و بزرگتر از واحد باشد،
 عددهای $1 + a^{2n}$ ($n = 1, 2, \dots$) زوج و بزرگتر از ۲ و بنابراین
 مرکب اند؛ بنابراین می توان فرض کرد که a عددی زوج است. $1 + 2^{25}$
 بر ۶۴۱ قابل قسمت است، بنابراین عددهای $1 + 4^{14}$ و $1 + 16^{13}$ هم بر
 ۶۴۱ قابل قسمت می شوند. سپس می توان بسادگی ثابت کرد که هر يك از
 عددهای $1 + 2^{22}$ ، $1 + 4^2$ ، $1 + 6^{13}$ ، $1 + 8^{12}$ ، $1 + 10^{13}$ ،
 $1 + 12^{12}$ ، $1 + 14^{12}$ ، $1 + 20^{12}$ ، $1 + 22^{12}$ ، $1 + 24^{12}$ ،
 $1 + 26^{12}$ ، $1 + 28^{12}$ ، $1 + 30^2$ ، $1 + 32^{12}$ بر ۱۷ قابل قسمت اند.
 مثلا برای اینکه ثابت کنیم $1 + 28^{12}$ بر ۱۷ قابل قسمت است،
 می نویسیم:

$$\begin{aligned} 28 &\equiv 11 \pmod{17} \implies 28^2 \equiv 121 \equiv 2 \pmod{17} \implies \\ &\implies 28^{12} \equiv 2^6 \equiv -1 \pmod{17} \end{aligned}$$

و بنابراین $1 + 28^{12}$ بر ۱۷ قابل قسمت می شود.

بر اساس آنچه که بدست آوردیم، برای $k = 0, 1, 2, \dots$ نتیجه
 می شود که هر يك از عددهای $1 + (34k + 2)^2$ ، $1 + (34k + 4)^2$ ،
 $1 + (34k + 6)^2$ ، $1 + (34k + 8)^2$ ، $1 + (34k + 10)^2$ ،
 $1 + (34k + 12)^2$ ، $1 + (34k + 14)^2$ ، $1 + (34k + 20)^2$ ،
 $1 + (34k + 22)^2$ ، $1 + (34k + 24)^2$ ، $1 + (34k + 26)^2$ ،
 $1 + (34k + 28)^2$ ، $1 + (34k + 30)^2$ ، $1 + (34k + 32)^2$ بر
 ۱۷ قابل قسمت اند.

حالا ، با توجه اینکه $1 + 18^2$ بر ۵ و $1 + 34^2$ بر ۱۳ قابل قسمت‌اند ، نتیجه می‌گیریم که برای هر عدد طبیعی $a \leq 100$ ، به استثنای عددهای ۵۰ ، ۵۲ ، ۶۸ ، ۸۴ و ۸۶ عدد طبیعی $n \leq 5$ وجود دارد، بنحوی که به ازای آن $a^{2^n} + 1$ مرکب باشد .

ولی $41.61 = 2501 = 50^2 + 1$ است و دو عدد $52^2 + 1$ و $1 + 68^2$ بر ۵ و عدد $1 + 84^2$ بر 13 قابل قسمت‌اند . بنابراین برای هر عدد طبیعی $a < 100$ ، عدد طبیعی $n \leq 6$ وجود دارد، بنحوی که عدد $a^{2^n} + 1$ مرکب باشد .

تبصره. آشینتسل ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی a . بنحوی که $2^{212} < a < 1$ باشد ، عدد طبیعی n وجود دارد ، طوری که عدد $a^{2^n} + 1$ مرکب باشد .

معلوم نیست که آیا برای هر عدد طبیعی $a > 1$ ، عدد طبیعی برای n وجود دارد . بنحوی که عدد $a^{2^n} + 1$ مرکب باشد یا نه . مثلاً جواب این سؤال در مورد عدد $a = 2^{1945}$ معلوم نیست . ولی ثابت شده است که برای $a = 2^{1944}$ ، عدد $a^2 + 1$ مرکب است و حتی کوچکترین مقسوم‌علیه اول آنرا می‌دانیم : $502^{1947} + 1$.

۱۳۶ . هر عدد اول بزرگتر از ۵ به صورت $30k + r$ است ، که $k \geq 0$ عددی صحیح و r یکی از عددهای ۱، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳ یا ۲۹ است . چون تعداد عددهای اول بی‌نهایت است ، لااقل برای یکی از این هشت مقدار r ، بی‌نهایت عدد اول به صورت $30k + r$ وجود دارد (k عددی طبیعی است) . بنابراین کافی است هشت حالت زیر را مورد مطالعه قرار دهیم .

(۱) بی‌نهایت عدد اول به صورت $۳۰k + ۱$ وجود دارد. p را یکی از آنها و $n = ۷ + ۱۹ + p$ فرض می‌کنیم؛ n عددی فرد است، زیرا
 $n = ۷ + ۱۹ + ۳۰k + ۱ = ۳(۱۰k + ۹)$ عدد مساوی مجموع سه عدد مختلف اول است (زیرا $p = ۳۰k + ۱$ عددی است اول و مخالف با ۷ و ۱۹) و n نمی‌تواند مساوی مجموع دو عدد اول باشد، زیرا در این صورت باید یکی از آنها زوج و مساوی ۲ باشد، یعنی داشته باشیم:
 $n = ۳۰k + ۲۷ = q + ۲$ ، که در آن $q = ۵(۶k + ۵)$ می‌شود و نمی‌تواند اول باشد.

(۲) بی‌نهایت عدد اول به صورت $۳۰k + ۷$ وجود دارد. $p > ۷$ را یکی از آنها می‌گیریم و فرض می‌کنیم $n = ۷ + ۱۳ + p$ باشد؛ n عدد فرد مرکبی است، زیرا $n = ۳۰k + ۲۷ = ۳(۱۰k + ۹)$. این عدد مساوی مجموع سه عدد مختلف اول شده است، زیرا $p \geq ۳۷$ است و بالاخره عدد n در شرط مفروض مسئله صدق می‌کند، زیرا $n - ۲ = ۳۰k + ۲۵ = ۵(۶k + ۵)$ مرکب است.

(۳) بی‌نهایت عدد اول به صورت $۳۰k + ۱۱$ وجود دارد. فرض کنید $p > ۱۱$ یکی از آنها و فرض کنید $n = ۱۱ + ۱۳ + p$ باشد؛ n عددی است فرد و مساوی مجموع سه عدد مختلف اول شده است. عدد n در شرط مسئله صدق می‌کند، زیرا $n = ۳۰k + ۳۵ = ۵(۶k + ۷)$ و $n + ۲ = ۳(۳۰k + ۱۱)$ مرکب می‌شود.

(۴) بی‌نهایت عدد اول به صورت $۳۰k + ۱۳$ وجود دارد، p را یکی از آنها می‌گیریم. در این صورت $n = ۲ + ۱۱ + p$ عددی است فرد و مساوی مجموع سه عدد مختلف اول. عدد n در شرط مسئله صدق

می‌کند، زیرا $n = 3(10k + 9)$ و $n - 2 = 5(6k + 5)$ است.

(۵) بی‌نهایت عدد اول به صورت $30k + 17$ وجود دارد. p

رایکی از آنها و $n = 3 + 7 + p$ فرض می‌کنیم. چون $p = 3(10k + 9)$

و $n - 2 = 5(6k + 5)$ است، عدد n در شرط مسئله صدق می‌کند.

(۶) بی‌نهایت عدد اول به صورت $30k + 19$ وجود دارد. p را

یکی از آنها و $n = 3 + 5 + p$ می‌گیریم. مثل حالت قبل می‌توان

نتیجه گرفت که عدد n در شرایط مسئله صدق می‌کند.

(۷) بی‌نهایت عدد اول به صورت $30k + 23$ وجود دارد. p را

یکی از آنها و $n = 5 + 7 + p$ می‌گیریم. چون $n = 5(6k + 7)$ و

$n - 2 = 3(10k + 21)$ است، عدد n با شرایط مسئله می‌سازد.

(۸) بی‌نهایت عدد اول به صورت $30k + 29$ وجود دارد. p را

یکی از آنها و $n = 5 + 31 + p$ می‌گیریم. چون $n = 5(6k + 13)$ و

$n - 2 = 3(10k + 21)$ است، عدد n در شرایط مسئله صدق می‌کند.

۱۳۷. فرض می‌کنیم کثیرالجمله $f(x)$ با ضرایب صحیح وجود

داشته باشد، بنحوی که $f(1) = 2$ ، $f(2) = 3$ ، و $f(3) = 5$ باشد، در

اینصورت $g(x) = f(x) - 2$ کثیرالجمله‌ای با ضرایب صحیح است،

طوری‌که $g(1) = 0$ ، یعنی $g(x) = (x - 1)h(x)$ باشد، که در آن

$h(x)$ کثیرالجمله‌ای با ضرایب صحیح است.

چون $f(3) = 5$ است، $g(3) = f(3) - 2 = 3$ و بنابراین $2h(3) = 3$

می‌شود، ولی تساوی اخیر ممکن نیست، زیرا $h(3)$ عددی است صحیح.

حالا فرض کنید ، m عدد طبیعی مفروضی بزرگتر از واحد باشد. در اینصورت کثیرالجمله

$$g_k(x) = \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-m)}{x-k} \quad (k=1,2,\dots,m)$$

از درجه $m-1$ با ضرایب صحیح است . واضح است که برای هر عدد طبیعی $x \leq m$ ، بجز k ، داریم : $g_k(x) = 0$ ، و $g_k(k)$ عدد صحیحی مخالف صفر است . فرض می کنیم $f_k(x) = \frac{g_k(x)}{g_k(k)}$ ؛ $f_k(x)$ کثیرالجمله ای

از درجه $m-1$ با ضرایب گویا خواهد بود و ضمناً برای هر عدد طبیعی $x \leq m$ ، بجز k ، داریم : $f_k(x) = 0$ و $f_k(k) = 1$.

حالا فرض می کنیم :

$$f(x) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x) + \dots + p_m f_m(x)$$

واضح است که $f(x)$ ، کثیرالجمله ای با ضرایب گویاست و ضمناً برای $k=1,2,\dots,m$ داریم : $f(k) = p_k$ ،

۱۳۸* اثبات بروکین (j. Browkin) را می آوریم . n را

عدد طبیعی مفروضی می گیریم . عدد طبیعی t_k را برای عدد طبیعی $k \leq n$ بوسیله استقراء بطریق زیر بدست می آوریم .

$t_0 = 1$ می گیریم و فرض می کنیم که به ازای عدد طبیعی و مفروض

$k \leq n$ ، عدد طبیعی t_{k-1} را معین کرده باشیم . بنا بر قضیه دیریکله درباره

عددهای اول در تصاعد حسابی ، عدد طبیعی t_k وجود دارد ، بنحوی

که عدد $t_k + 1 = (k-1)!(n-k)!t_{k-1}$ اول باشد ، و در حالت $k > 1$

از عددهای

$$(k-2)!(n-k+1)!t_{k-1} + 1$$

بزرگتر باشند. به این ترتیب عددهای q_1, q_2, \dots, q_n اولند و ضمناً $q_1 < q_2 < \dots < q_n$ است. فرض کنید داشته باشیم:

$$f(x) = 1 + \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{x-j} t_j;$$

$f(x)$ کثیرالجمله‌ای با درجه کوچکتر یا مساوی $n-1$ و با ضرایب صحیح است و بسادگی می‌توان تحقیق کرد که:

$$f(k) = 1 + (k-1)!(n-k)!t_k = q_k$$

۱۳۹. مثلاً کثیرالجمله زیر دارای چنین خاصیتی است:

$$f(x) = [(x-p_1)(x-p_2)\dots(x-p_m) + 1]x$$

که در آن عبارتست از k امین عدد اول.

در این کثیرالجمله برای $k = 1, 2, \dots, m$ داریم: $f(p_k) = p_k$.

۱۴۰. اگر مقدار ثابت کثیرالجمله $f(x)$ با ضرایب صحیح مساوی

صفر باشد، $f(0) = 0$ می‌شود و همنهشتی $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ برای هر

مدول p دارای جواب است. بنابراین فرض می‌کنیم که مقدار ثابت a_0

از کثیرالجمله $f(x)$ مخالف صفر باشد. چون $f(a_0 x) = a_0 f(x)$ ، که

که در آن $f(x)$ کثیرالجمله‌ای با ضرایب صحیح و جمله ثابت مساوی

واحد است، کافی است قضیه را برای چنین کثیرالجمله‌هایی ثابت کنیم.

n را عدد طبیعی مفروضی در نظر می‌گیریم. واضح است که

$k_1(n!) = n!k + 1$ که در آن $f_1(n!) - 1$ بر $n!$ قابل قسمت است، که در آن k عددی صحیح است. روشن است که قدر مطلق کثیر الجمله $f_1(x)$ (که درجه آن مثبت است) همراه با x بطور نامحدود صعودی است. بنابراین وقتی n به اندازه کافی بزرگ باشد $|f_1(n!)| = |n!k + 1| > 1$ و عدد $n!k + 1$ دارای مقسوم علیه اول p است. چون $n!k + 1$ بر p قابل قسمت است $p > n$ و چون $f_1(n!) \equiv 0 \pmod{p}$ قابل قسمت است، همبستگی طبیعی دلخواهی است، بنابراین همبستگی $f_1(x) \equiv 0 \pmod{p}$ و لی n عدد همبستگی $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ برای بی نهایت عدد اول p جواب دارد. ۱۴۱. شرط لازم نیست، زیرا عدد $3^2 + 1 = 7^3$ مرکب است، در حالیکه عدد $2^{12} + 1 = 257$ اول است. شرط کافی نیست، زیرا عدد $2^8 + 1 = 257$ اول است، در حالیکه $2^{24} + 1$ مرکب است. مثال دیگر: عدد $2^{16} + 1$ اول است، ولی عدد $2^{216} + 1$ مرکب است.

۵. معادلات دیوفانتی [۹]

۱۴۲. از اتحاد

$$3(55a + 84b)^2 - 7(36a + 55b)^2 = 3a^2 - 7b^2$$

نتیجه می شود که اگر عددهای طبیعی $x = a$ و $y = b$ در معادله $x^2 - 7y^2 + 1 = 0$ صدق کند، عددهای طبیعی بزرگتر $x = 55a + 84b$ و $y = 36a + 55b$ در آن صدق خواهند کرد؛ و چون عددهای $x = 3$ ، $y = 2$ در معادله مفروض صدق می کنند، بی نهایت جواب x و y

در معادله صدق خواهد کرد .

۱۴۳ . چون داریم : $x(2x^2 + y) = 7$ ، باید مقسوم علیه

صحیحی از عدد ۷ باشد ، یعنی یکی از عددهای ۱ ، ۷ ، -۱ ، -۷ . با

قرار دادن این مقادیر در معادله ، برای y بترتیب مقادیر ۵ ، -۹۷ ، -۹ ، و

-۹۹ بدست می آید . بنابراین معادله مفروض برای عددهای صحیح

x و y ، چهار جواب دارد :

$$(1, 5); (7, -97); (-1, -9); (-7, -99)$$

حالا n را عدد طبیعی بزرگتر از ۵ در نظر بگیرید و فرض کنید

$x = \frac{y}{n}$ ، $y = n - \frac{98}{n^2}$. چون $n > 5$ ، یعنی $n \geq 6$ است ، این

عددها گویا و مثبت هستند و بسادگی می توان تحقیق کرد که در معادله

$$2x^2 + xy - 7 = 0 \text{ صدق می کنند .}$$

۱۴۴ . m و n را عددهای طبیعی مفروض و a و b را دو عدد

مختلف اول و بزرگتر از $m+n$ و $c = am + bn$ در نظر می گیریم .

واضح است که در اینصورت دستگاه $x = m$ ، $y = n$ در معادله

$$ax + by = c \text{ صدق می کند .}$$

فرض می کنیم که دستگاه دیگری از عددهای طبیعی x و y در این

معادله صدق کند . واضح است که در اینجا نمی شود $x > m$ ، $y > n$ یا

$x > m$ ، $y \geq n$ باشد ، زیرا در اینصورت $ax + by > am + bn = c$

می شود . بنابراین باید یا $x < m$ و یا $y < n$ باشد . اگر $x < m$ باشد

$x - m$ عدد طبیعی کوچکتر از m می شود و چون $ax + by = am + bn$

است ، $by = a(m - x) + bn$ می شود و در اینصورت باید $a(m - x)$

بر b قابل قسمت باشد. b و a دو عدد مختلف اول بودند و بنابراین باید $m-x$ بر b قابل قسمت شود. ولی شرط اخیر هم ممکن نیست، زیرا طبق تعریف عدد b داشتیم $b > m$.

بهین ترتیب ثابت می شود که فرض $y < n$ هم ممکن نیست.

تبصره. بسادگی می توان متوجه شد که همیشه برای هر دو دستگاه عددهای طبیعی، معادله خطی $ax + by = c$ (a, b, c عددهای صحیح اند) وجود ندارد، بطوریکه فقط همین دو دستگاه در آن صدق کنند. ولی بسادگی می توان ثابت کرد که همیشه معادله درجه دومی با ضرایب صحیح وجود دارد، که چنین خاصیتی داشته باشد.

۱۴۵. مثلاً معادله $x + y = m + 1$ دارای این خاصیت است،

یعنی درست دارای m جواب طبیعی برای x و y است.

$$x = k, \quad y = m - k + 1 \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

تبصره. می دانیم که معادله خطی بصورت $ax + by = c$ وجود ندارد بنحوی که تعداد جوابهای صحیح آن برای x و y ، محدود باشد.

۱۴۶. برای $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy - mx - my - m - 1$

اتحاد زیر برقرار است:

$$f(x, y) = (x + y - m - 1)(x + y + 1)$$

چون برای عددهای طبیعی x و y ، مقدار $x + y + 1$ همیشه مثبت است، بنابراین $f(x, y)$ تنها وقتی مساوی صفر می شود که $x + y - m - 1 = 0$ باشد. در نتیجه، با توجه به حل مسئله ۱۴۵، معادله $f(x, y) = 0$ برای عددهای طبیعی x و y تنها m جواب دارد.

تبصره. کثیرالجمله $f(x, y)$ ، که شامل دو متغیر است، قابل تجزیه است. این سؤال پیش می‌آید: آیا برای عدد طبیعی m ، کثیرالجمله غیر قابل تجزیه $F(x, y)$ ، شامل دو متغیر، وجود دارد بطوریکه معادله $F(x, y) = 0$ درست m جواب طبیعی برای عددهای x و y داشته باشد؟ می‌توان ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی m ، عدد طبیعی a_m وجود دارد بنحوی که معادله $x^2 + y^2 = a_m$ تنها m جواب برای عددهای طبیعی x و y داشته باشد.

بخصوص می‌توان ثابت کرد که برای $a_{2k} = 5^{2k-1}$ و $a_{2k-1} = 2 \cdot 5^{2k-2}$ (که در آن $k = 1, 2, 3$ است) این حکم صحیح است، ولی اثبات آن ساده نیست.

متذکر می‌شویم که \bar{A} . شینتسل ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی m ، کثیرالجمله درجه درم $f(x, y)$ ، شامل دو متغیر، وجود دارد بنحوی که معادله $f(x, y) = 0$ تنها m جواب برای عددهای صحیح x و y داشته باشد.

۱۴۷. بسادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر عددهای x و y در

معادله

$$(x-1)^2 + (x+1)^2 = y^2 + 1 \quad (1)$$

صدق کنند، در معادله زیر هم صدق خواهند کرد:

$$(2y+3x-1)^2 + (2y+3x+1)^2 = (3y+4x)^2 + 1$$

بنابراین، از هر جواب معادله (۱) برای عددهای طبیعی x و y ، می‌توان جوابهای طبیعی بزرگتری برای آن بدست آورد: $2y+3x$ و $3y+4x$. از طرف دیگر عددهای $x=2$ و $y=3$ در معادله (۱) صدق می‌کنند و بنابراین دارای بی نهایت جواب می‌شود.

۱۴۸. با فرض $x = t + 3$ ، معادله مفروض بصورت زیر در

می آید:

$$2t(t^2 + 9t + 21) = 0$$

که تنها يك جواب حقیقی $t = 0$ را دارد. از اینجا نتیجه می شود که معادله مورد نظر برای عددهای حقیقی x ، تنها جواب $x = 3$ را قبول می کند.

تبصره. می توان ثابت کرد که همه جوابهای معادله

$$x^2 + (x+r)^2 + (x+2r)^2 + \dots + [x+(n-1)r]^2 = (x+nr)^2$$

برای عددهای طبیعی x ، r و n عبارتست از $n = 3$ و $x = 3r$ (عددی طبیعی دلخواهی است).

۱۴۹. اگر $n = 2k - 1$ باشد (عددی طبیعی دلخواهی است)،

بسادگی می توان تحقیق کرد که $x = -k$ ، $y = 0$ جوابی از معادله مفروض است؛ و اگر $n = 2k$ باشد (عددی طبیعی است)، $x = -k$ و $y = k$ جواب معادله است.

تبصره. جوابهای دیگری هم وجود دارد، مثلا به ازای $n = 8$:

$$x = -3, y = 6, n = 25: \text{ برای } x = -11 \text{ و } y = 20, \text{ برای}$$

$$x = 1333, y = 16830, n = 1000.$$

۱۵۰. در این معادله ضرایب x^2 ، x و x^3 بر ۳ قابل قسمت اند،

در حالیکه مقدار ثابت معادله مساوی -25 است که بر ۳ قابل قسمت نیست. از اینجا نتیجه می شود که معادله مفروض دارای جواب صحیح

برای x نیست .

۱۵۱ . با تبدیل $x = t + 10$ ، معادله مفروض به صورت زیر در

می آید :

$$3t(t^2 + 40t + 230) = 0$$

چون معادله $t^2 + 40t + 230 = 0$ جواب گویا ندارد ، باید

$t = 0$ باشد ، بنابراین معادله ما تنها يك جواب گویای $x = 10$ را قبول

دارد .

۱۵۲ . اگر برای عددهای طبیعی x و y داشته باشیم :

$$x(x+1) = 4y(y+1)$$

خواهیم داشت :

$$3 = [2(2y+1)]^2 - (2x+1)^2 =$$

$$= (4y - 2x + 1)(4y + 2x + 3)$$

و بنابراین عدد ۳ مضرب طبیعی $4y + 2x + 3$ است . ولی $4y + 2x + 3$

از ۳ بزرگتر است و نمی تواند مقسوم علیه از آن باشد .

سپس می توان بسادگی تحقیق کرد که برای عدد طبیعی $n > 1$ ،

وقتی داشته باشیم :

$$x = \frac{3^n - 3^{1-n} - 2}{4} , y = \frac{3^n + 3^{1-n} - 4}{8}$$

خواهیم داشت : $x(x+1) = 4y(y+1)$

مثلا برای $n = 2$ داریم : $x = \frac{5}{3}$ ، $y = \frac{2}{3}$. بنابراین معادله

مفروض دارای بی نهایت جواب مثبت و گویا برای x و y است .

۱۵۳. اثبات مستقیماً و به کمک دو اتحاد زیر بدست می آید :

$$2k - 1 = (2l^2 - k)^2 + (2l)^2 - (2l^2 - k + 1)^2,$$

$$2k = (2l^2 + 2l - k)^2 + (2l + 1)^2 - (2l^2 + 2l - k + 1)^2$$

که در آنها k عددی صحیح و $l > k$ است .

۱۵۴. این معادله تنها يك جواب طبیعی دارد : $m = 2$ ، $n = 1$

در حقیقت داریم : $3^2 \equiv 1 \pmod{8}$ ، بنابراین برای عددهای طبیعی

k بدست می آید : $3^{2k} + 1 \equiv 2 \pmod{8}$ و $3^{2k-1} + 1 \equiv 4 \pmod{8}$ ،

از اینجا نتیجه می شود که برای عددهای طبیعی n ، عدد $3^n + 1$ بر ۸

بنابراین بر 2^m (برای $m \geq 3$) قابل قسمت نیست . به این ترتیب ،

اگر به ازای عددهای m و n داشته باشیم $2^m - 3^m = 1$ ، باید $m \leq 2$

باشد و چون $2 - 3^n = 1$ ممکن نیست تنها $2 - 3^0 = 1$ ممکن می شود

که از آنجا $n = 1$ بدست می آید .

۱۵۵. این معادله تنها دو جواب طبیعی دارد : $n = m = 1$ و

$n = 2$ ، $m = 3$. در حقیقت ، اگر n عددی فرد و بزرگتر از واحد یعنی

$n = 2k + 1$ باشد (k عددی طبیعی است) ، چون واضح است که داریم :

$3^2 \equiv 1 \pmod{4}$ ، خواهیم داشت : $3^{2k+1} \equiv 3 \pmod{4}$ و از آنجا

بدست می آید :

$$2^m = 3^n - 1 = 3^{2k+1} - 1 \equiv 2 \pmod{4}$$

بنابراین $m \leq 1$ ، یعنی $m = 1$ می شود ، و چون $3^n - 2^m = 1$ بود

$n = 1$ می شود . اگر هم n عددی زوج ، یعنی بصورت $n = 2k$ باشد ،

داریم: $3^m = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$. به این ترتیب دو عدد زوج متوالی $3^k - 1$ و $3^k + 1$ توانی از ۲ می‌شوند و بنابراین باید ۲ و ۴ باشند، بنحوی که $k = 1$ ، $n = 2$ و بالاخره $m = 3$ بدست می‌آید.

۱۵۶. فرض می‌کنیم که این دستگاه برای عددهای طبیعی x, y, z و t جواب داشته باشد. می‌توان y و x را نسبت بهم اول گرفت زیرا اگر $(x, y) = d > 1$ باشد، طرفین هر دو معادله را بر d^2 تقسیم می‌کنیم. بنابراین لااقل یکی از دو عدد y و x فرد هستند. ولی هر دو عدد هم نمی‌توانند فرد باشند، زیرا در این صورت در تقسیم سمت چپ معادله بر ۴ باقیمانده ۳ بدست می‌آید که ممکن نیست، زیرا سمت راست معادله هم یک مجذور کامل است. از طرف دیگر اگر x عددی زوج باشد، y نمی‌تواند عددی فرد بشود، زیرا در این صورت باقیمانده تقسیم سمت چپ معادله $z^2 = 2y^2 + x^2$ بر ۴ مساوی ۲ می‌شود که ممکن نیست، زیرا z^2 مجذور کامل است. به این ترتیب در هر حالت به تناقض برخورد می‌کنیم.

۱۵۷. بسادگی می‌توان تحقیق کرد که معادله مفروض هم از معادله $-1 = 2y^2 - (2x+1)^2$ می‌باشد، که جواب $x = 3$ ، $y = 5$ در آن صدق می‌کند. بنابراین از اتحاد نتیجه می‌شود که اگر عددهای طبیعی y و x در معادله مفروض صدق کنند، عددهای بزرگتر $x_1 = 3x + 2y + 1$ و $y_1 = 4x + 3y + 2$ هم در آن صدق خواهند کرد. در نتیجه معادله مفروض بی‌نهایت جواب برای عددهای طبیعی x و y دارد. مثلاً به‌ازای $x = 3$ ، $y = 5$ ، جواب $x_1 = 20$ ،

$$y_1 = 29 \text{ بدست می آید.}$$

۱۵۸. بسادگی تحقیق می شود که معادله مفروض هم ارز معادله

$$1 = (2y)^2 - 3(2x+1)^2 \text{ است و یکی از جوابهای آن } x=7,$$

$y=13$ است. بنابراین از اتحاد نتیجه می شود که اگر عددهای طبیعی

x و y در معادله ما صدق کنند، عددهای بزرگتر $x_1 = 4y + 7x + 3$ ،

$y_1 = 7y + 12x + 6$ هم در آن صدق خواهند کرد. به این ترتیب معادله

$$y^2 - x^2 = (x+1)^2 \text{ برای عددهای طبیعی } x \text{ و } y \text{ دارای بی نهایت}$$

جواب است. مثلاً به ازای $x=7$ ، $y=13$ بدست می آید: $x_1=104$ ،

$$y_1=181$$

۱۵۹. برای اثبات از فکر یا برومین استفاده می کنیم. اگر

دستگاه مفروض برای عددهای طبیعی x ، y ، z و t جواب داشته باشد،

مسلماً جوابی هم خواهد داشت که در آن $(x, y) = 1$ باشد. اگر دو

معادله دستگاه را باهم جمع کنیم، بدست می آید: $6(x^2 + y^2) = z^2 + t^2$

از آنجا نتیجه می شود که باید $z^2 + t^2$ بر ۳ قابل قسمت باشد. چون

باقیمانده مربع هر عدد صحیح بر ۳ (بشرطی که خود عدد بر ۳ قابل

قسمت نباشد) برابر واحد است، بنابراین برای قابل قسمت بودن

$z^2 + t^2$ بر ۳ باید z و t هر دو بر ۳ قابل قسمت باشند و در نتیجه

سمت راست تساوی $6(x^2 + y^2) = z^2 + t^2$ بر ۹ قابل قسمت می شود. ولی در

این صورت $x^2 + y^2$ و در نتیجه هر دو عدد x و y بر ۳ قابل قسمت

می شوند که با فرض $(x, y) = 1$ متناقض است.

۱۶۰. از معادلات مفروض نتیجه می شود که $z^2 + t^2$ بر ۷ قابل

قسمت است، از آنجا (مسئله ۳ را ببینید) هر دو عدد z و t بر ۷ قابل قسمت می‌شوند؛ بنابراین $(x^2 + y^2)$ بر ۷، یعنی x و y بر ۷ قابل قسمت‌اند. در نتیجه دستگاه نمی‌تواند جوابی داشته باشد، که در آن $(x, y) = 1$ باشد. ولی در اینصورت نمی‌تواند برای عددهای طبیعی x, y, z, t جواب داشته باشد، زیرا اگر $(x, y) = d > 1$ باشد، t و z بر d قابل قسمت می‌شوند بنحوی که اگر عددهای x, y, z, t را بر d تقسیم کنیم، جواب x_1, y_1, z_1, t_1 بدست می‌آید که در مورد آنها $(x_1, y_1) = 1$ است که ممکن نیست.

۱۶۱. مثلاً یکی از جوابهای این دستگاه برای عددهای طبیعی

$$x = 3, y = 1, z = 4, t = 8.$$

۱۶۲. اگر y عددی زوج باشد، در اینصورت باید x^2 بصورت

$$y = 2k + 1 \text{ در آید که ممکن نیست. اگر } y \text{ عددی فرد بصورت } y = 2k + 1 \text{ باشد، چون داشتیم:}$$

$$x^2 + 1 = y^2 + 2^2 = (y + 2)[(y - 1)^2 + 3]$$

باید $x^2 + 1$ بر $(2k)^2 + 3$ قابل قسمت باشد؛ ولی عدد $(2k)^2 + 3$ مقسوم‌علیه اولی بصورت $4k + 3$ دارد، بنابراین $x^2 + 1$ هم باید همین مقسوم‌علیه را داشته باشد که ممکن نیست، زیرا $(x, 1) = 1$ است.

۱۶۳. داریم:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= (2c)^2 + y^2 = (y + 2c)(y^2 - 2cy + 4c^2) = \\ &= (y + 2c)[(y - c)^2 + 3c^2]. \end{aligned}$$

چون $c^2 \equiv 1 \pmod{8}$ ، $3c^2 \equiv 3 \pmod{8}$ می شود . اگر y فرد باشد ، $y - c$ عددی زوج و $(y - c)^2 + 3c^2$ عددی بصورت $4k + 3$ می شود و بنابراین مقسوم علیه اولی بهمین صورت خواهد داشت که باید مقسوم علیه $x^2 + 1$ باشد و ممکن نیست . اگر y زوج باشد ، داریم :

$$x^2 = (2c)^2 + y^2 - 1 \equiv -1 \pmod{8}$$

که باز هم ممکن نیست . از اینجا نتیجه می شود که معادله مفروض برای عددهای صحیح x و y جواب ندارد .

۱۶۴ . ابتدا $x = 1$ می گیریم . در این صورت معادله های $1 + y = zt$

و $z + t = y$ را خواهیم داشت ، که از آنجا معادله $zt = z + t + 1$ بدست می آید . از اینجا $z \neq 1$ می شود (زیرا به ازای $z = 1$ بدست می آید : $t = t + 2$ که غیر ممکن است) . اگر $z = 2$ باشد ، $t = 3$ و با توجه به معادله $y = z + t$ ، $y = 5$ می شود . بنابراین يك جواب دستگاه : $x = 1$ ، $y = 5$ ، $z = 2$ و $t = 3$ است . اگر $z \geq 3$ باشد ، $t \geq z \geq 3$ می شود و داریم : $t = t_1 + 2$ ، $z = z_1 + 2$ ($t_1 \geq 1$ ، $z_1 \geq 1$) و از آنجا

$$zt = (z_1 + 2)(t_1 + 2) =$$

$$= z_1 t_1 + 2z_1 + 2t_1 + 4 \geq z_1 + t_1 + 7 = z + t + 3$$

که متناقض رابطه $zt = z + t + 1$ می باشد .

حالا $x = 2$ می گیریم : $x = 2$ ، $z \geq x = 2$ می شود . اگر $z = 2$ باشد

و $2 + y = 2t$ و $2 + t = 2y$ از آنجا $y = t = 2$ می شود . بنابراین

در این حالت $x=y=z=t=2$ می شود که جواب دیگری از دستگاه است. اگر $z > 2$ باشد، چون $t \geq z$ است $t > 2$ می شود و می توان فرض کرد $z = z_1 + 2$ و $t = t_1 + 2$ ، از آنجا بدست می آید:

$$zt = (z_1 + 2)(t_1 + 2) = z_1 t_1 + 2z_1 + 2t_1 + 4 \geq z_1 + t_1 + 7 = z + t + 3$$

ولی چون $x=2$ است، داریم: $2+y=zt$ و $z+t=2y$ ، از آنجا $zt = 2 + \frac{z+t}{2}$ به این ترتیب باید داشته باشیم:

$$\frac{z+t}{2} + 2 = zt \geq z+t+3 \implies z+t+2 \leq 0$$

که ممکن نیست.

حالا $x > 2$ ، یعنی $x \geq 3$ می گیریم. در این صورت $z \geq x \geq 3$ و $t \geq z \geq 3$ می شود. بنابراین می توان فرض کرد: $z = z_1 + 2$ ، $t = t_1 + 2$ ، $(t_1 \geq 1, z_1 \geq 1)$. از آنجا خواهیم داشت:

$$zt = (z_1 + 2)(t_1 + 2) = z_1 t_1 + 2z_1 + 2t_1 + 4 \geq z_1 + t_1 + 7 = z + t + 3$$

بهین ترتیب از شرایط $x \geq 3$ و $y \geq x \geq 3$ بدست می آید: $xy \geq x+y+3$ ، ولی $z+t=xy$ بود، بنابراین بدست می آید:

$$zt \geq z+t+3 = xy+3 \geq x+y+6 = zt+6$$

که ممکن نیست. به این ترتیب دستگاه دو معادله مفروض، برای عددهای طبیعی x, y, z, t و با شرط $x \leq z \leq t$ تنها دو جواب دارد:

$$x=1, y=5, t=2, t=3 ; x=y=z=t=2$$

تبصره. دستگاه مفروض برای عددهای x, y, z, t بی نهایت جواب دارد. مونکوسکی جواب زیر را برای دستگاه متذکر می شود:

$$x=t=-1, z=1-y, y = \text{عددی دلخواه}$$

۱۶۵. به ازای $n=1$ ، عدد x_1 می تواند دلخواه باشد. به ازای

$n=2$ داریم: $x_1=x_2=2$. به ازای $n>2$ جواب عبارتست از

$$x_n=n, x_{n-1}=2, x_1=x_2=\dots=x_{n-2}=1$$

دیگری هم برای دستگاه وجود دارد، مثلا به ازای $n=5$ جواب

$$x_1=x_2=x_3=1, x_4=x_5=3$$

می توان n عدد طبیعی پیدا کرد که مجموع آنها با حاصلضربشان

برابر باشد.

۱۶۶. اگر $n=1$ باشد، جوابهای طبیعی معادله $x-y=a$ عبارتند

از $x=a+y$ و y عدد طبیعی دلخواه. اگر n عددی فرد و بزرگتر از واحد

باشد، داریم:

$$a=x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+y^{n-1})$$

و چون $a>0$ و $x-y \geq 1$ است، پس $x^{n-1}+y^{n-1} < a$ و بنابراین

$$x < \sqrt[n+1]{a} \text{ و } y < \sqrt[n+1]{a}$$

مورد آزمایش قرار دهیم.

اگر $n=2k$ باشد (k عددی طبیعی است)، خواهیم داشت:

$$a=x^n-y^n=x^{2k}-y^{2k}=(x^k-y^k)(x^k+y^k)$$

از آنجا، با توجه به $a>0$ ، $x^k-y^k \geq 1$ و بنابراین $x^k+y^k \leq a$ می شود

یعنی $y < \sqrt[k]{a}$ و $x < \sqrt[k]{a}$ ، یعنی در اینحالت هم باید تعداد محدودی عدد را مورد امتحان قرار داد .

۱۶۷* . اثبات آ. شینتسل . p را عددی اول و n را عددی طبیعی می‌گیریم و فرض می‌کنیم که عددهای طبیعی x و y در معادله $x(x+1) = p^{2n} \cdot y(y+1)$ صدق کنند . چون دو عدد x و $x+1$ نسبت بهم اولند یا x و $x+1$ بر p^{2n} قابل قسمت می‌شود ، بنحوی که در هر حال $x+1 \geq p^{2n}$ است . از طرف دیگر معادله مفروض هم‌ارز معادله زیر است :

$$p^{2n} - 1 = [p^n(2y+1) + (2x+1)] [p^n(2y+1) - (2x+1)]$$

از آنجا که سمت چپ این تساوی و اولین عامل سمت راست آن ، عددهائی طبیعی هستند ، باید عامل دوم سمت راست تساوی هم عددی طبیعی باشد . از اینجا نتیجه می‌شود که $p^{2n} - 1 > 2x + 1$ ، یعنی $p^{2n} > 2(x+1)$ است . حالا با در نظر گرفتن نامساوی $x+1 \geq p^{2n}$ (که در بالا بدست آمد) ، نتیجه می‌شود : $p^{2n} > 2p^{2n}$ که ممکن نیست .

$$y = 14, x = 5 \text{ (زیرا } 1.2.3 = 2.3 \text{)} \quad y = 2, x = 1 \text{ (زیرا } 1.2.3 = 5.6.7 \text{)}$$

$$\text{(زیرا } 14.15 = 5.6.7 \text{)}$$

تبصره . ل . موردل ثابت کرد که این معادله جواب طبیعی دیگری ندارد [۱۰] .

۱۶۹ . با توجه به اتحاد

$$(x - 2y)^2 - 2(x - y)^2 = -(x^2 - 2y^2)$$

می توان فرض کرد: $u = x - y$, $t = x - 2y$.

(۱۷۰ . a) اثبات مستقیماً ناشی از اتحاد زیر است :

$$(m^2 + Dn^2)^2 - D(2mn)^2 = (m^2 - Dn^2)^2$$

کافی است برای عدد طبیعی دلخواه n ، عدد طبیعی m را طوری

انتخاب کنیم که نامساوی $m^2 > Dn^2$ برقرار باشد و فرض کنیم :

$$x = m^2 + Dn^2 , y = 2mn , z = m^2 - Dn^2$$

(b) اثبات مستقیماً از اتحاد زیر نتیجه می شود :

$$1 + (2n)^2 + (2n^2)^2 = (2n^2 + 1)^2 \quad (n = 2, 3, \dots)$$

$$\text{مثلاً } 1 + 6^2 + 18^2 = 19^2 \text{ و } 1 + 4^2 + 8^2 = 9^2$$

تبصره. همچنین می توان ثابت کرد که برای هر عدد صحیح k ، معادله

$$k + x^2 + y^2 = z^2$$

دارای بی نهایت جواب برای عددهای طبیعی x و y است .

کافی است x عدد دلخواهی بزرگتر از $|k| + 1$ و در حالت فرد بودن

k زوج و در حالت زوج بودن k فرد بگیریم و

$$y = \frac{k + x^2 - 1}{2} \text{ و } z = \frac{k + x^2 + 1}{2}$$

۱۷۱ . معادله مفروض با معادله $(x+1)(y+1) = 2^5 + 1$ هم

ارز است . چون عدد فرما $F_5 = 2^5 + 1$ برابر حاصلضرب دو عدد اول

است که کوچکترین آنها ۶۴۱ می باشد ، معادله ما تنها یک جواب برای

عددهای طبیعی x و $y \geq x$ دارد که در آن $x = 640$ است .

تبصره. یادآوری این مطلب جالب است که بعضی از معادلات درجه دوم

دو مجهولی تنها يك جواب برای عددهای طبیعی x و $y \geq x$ دارند ، ولی (به علت اشکال آن) در بحث تشکیل اینگونه معادلات وارد نمی‌شویم . مثلاً معادله $xy + x + y + 2 = 2^{101}$ از این جمله است .

ما نمی‌دانیم که آیا معادله $xy + x + y = 2^{17}$ دارای جواب طبیعی هست یا نه .

۱۷۲ . اگر y عددی زوج باشد . $x^2 = 3 - 8z + 2y^2$ در تقسیم

بر ۸ باقیمانده‌ای مساوی ۳ می‌دهد که ممکن نیست . اگر هم y عددی فرد باشد : $y = 2k + 1$ (k عددی است صحیح) ، در اینصورت عدد $x^2 = 3 - 8z + 8k^2 + 8k + 2$ در تقسیم بر ۸ باقیمانده‌ای مساوی ۵ می‌دهد که باز هم ممکن نیست ، زیرا در تقسیم مجذور يك عدد فرد بر ۸ ، باقیمانده‌ای مساوی واحد بدست می‌آید .

۱۷۳ . x را عدد طبیعی دلخواهی فرض می‌کنیم . بسادگی می‌توان

صحت اتحاد زیر را تحقیق کرد :

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$$

که با توجه به معادله ما $y = x^2 + 3x + 1$ می‌شود . به این ترتیب همه جوابهای معادله ما برای عددهای طبیعی x و y از رابطه $y = x^2 + 3x + 1$ بدست می‌آید که در آن x عدد طبیعی دلخواهی است .

۱۷۴ . معادله $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$ برای عددهای

گویا جواب ندارد ، زیرا این معادله هم‌ارز معادله زیر است :

$$(2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2 = 7$$

یعنی باید عدد ۷ مساوی مجموع مربعات سه عدد گویا باشد .

ثابت می‌کنیم که امکان چنین وضعی وجود ندارد. در حقیقت اگر عدد γ مساوی مجموع مربعات سه عدد گویا باشد، پس از تبدیل این عددها بیک مخرج به معادله زیر می‌رسیم:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \gamma m^2 \quad (1)$$

که در آن a و b و c سه عدد صحیح و m عددی طبیعی است، به این ترتیب کوچکترین عدد طبیعی m وجود دارد که به‌ازای آن معادله (۱) دارای جوابهای صحیح a, b, c است.

اگر m عددی زوج باشد: $m = 2n$ (n عددی طبیعی است)، سمت راست معادله (۱) بر ۴ قابل قسمت می‌شود، از آنجا بسادگی نتیجه می‌شود که هر سه عدد a, b, c باید زوج باشد، یعنی $a = 2a_1, b = 2b_1, c = 2c_1$ که ضمناً a_1, b_1, c_1 عددهائی صحیح‌اند، چون $m^2 = 4n^2$ است، معادله (۱) بصورت زیر در خواهد آمد.

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = n^2$$

که در آن n عددی طبیعی و کوچکتر از m است، در حالیکه m را کوچکترین عدد طبیعی گرفته بودیم که به‌ازای آن γm^2 مساوی مجموع مربعات سه عدد صحیح باشد.

به این ترتیب m عددی است فرد و باقیمانده تقسیم m^2 بر ۸ مساوی واحد می‌شود، یعنی از تقسیم سمت راست معادله (۱) بر ۸ باقیمانده‌ای مساوی ۷ بدست می‌آید. ولی روشن است که هیچ عددی به این صورت نمی‌تواند مساوی مجموع مربعات سه عدد صحیح باشد.

۱۷۵. اگر عددهای طبیعی x ، y و z در معادله

$$4xy - x - y = z^2$$
 صدق کنند، داریم:

$$(4x - 1)(4y - 1) = (2z)^2 + 1$$

و عدد طبیعی $3 \leq 4x - 1$ مقسوم علیه اول p به صورت $4k + 3$ را خواهد داشت. بنابراین همنهشتی $(2z)^2 \equiv -1 \pmod{p}$ برقرار و از آنجا با توجه به $p = 4k + 3$ بدست می آید:

$$(2z)^{p-1} = (2z)^{2(2k+1)} \equiv -1 \pmod{p}$$

متناقض با حکم قضیه کوچک فرماست.

ولی اگر n عدد طبیعی دلخواه و $y = -5n^2 - 2n \cdot x = -1$

و $z = -5n - 1$ باشد، بسادگی می توان تحقیق کرد که عددهای x ، y و z در معادله $4xy - x - y = z^2$ صدق می کنند.

۱۷۶. بسادگی می توان تحقیق کرد که برای عددهای طبیعی

m و برای $D = m^2 + 1$ داریم:

$$(2m^2 + 1)^2 - D(2m)^2 = 1$$

و اگر برای عددهای طبیعی x و y داشته باشیم: $x^2 - Dy^2 = 1$ ، با توجه به اتحاد

$$(x^2 + Dy^2)^2 - D(2xy)^2 = (x^2 - Dy^2)^2$$

خواهیم داشت: $x_1^2 - Dy_1^2 = 1$ ، که در آن $x_1 = x^2 + Dy^2$ و $y_1 = 2xy$ عددهائی طبیعی و بزرگتر از x و y هستند.

از اینجا نتیجه می شود که معادله $x^2 - Dy^2 = 1$ برای عددهای

طبیعی x و y ، وقتی که D مساوی یکی از عددهای ۲، ۵، ۱۰، ۱۷، ۲۶،

۳۷، ۵۰، ۶۵، ۸۲، ... باشد، دارای بی نهایت جواب است.

۱۷۷* معادله $y^2 = x^2 + (x+4)^2$ دو جواب واضح دارد:

$x=0, y=4$ و $x=0, y=-4$. ثابت می کنیم (که متعلق به آ. شینتسل است) که این معادله جواب صحیحی برای x و y که در آن $x \neq 0$ باشد، ندارد.

فرض می کنیم که عددهای صحیح $x \neq 0$ و y در معادله صدق کنند. در این صورت داریم:

$$x^2 = (y-x-4)(y+x+4) \quad (1)$$

چون $x \neq 0$ است، باید عددهای صحیح $y-x-4$ و $y+x+4$ مخالف صفر باشد. فرض کنید:

$$d = (y-x-4, y+x+4) \quad (2)$$

اگر عدد d مقسوم علیه اول و فرد p را داشته باشد، با توجه به رابطه (۱) باید x بر p قابل قسمت باشد و چون d بر p قابل قسمت است، با توجه به (۲) $y-x-4$ و $y+x+4$ بر p قابل قسمت می شوند، بنابراین $2y$ بر p قابل قسمت است و چون p عددی است فرد، y بر p و 4 بر p قابل قسمت می شود که ممکن نیست. بنابراین d نمی تواند مقسوم علیه اول فرد داشته باشد، یعنی d توانی از ۲ با نمای صحیح بزرگتر یا مساوی صفر می شود.

اگر d بر ۱۶ قابل قسمت باشد، با توجه به (۱) و (۲)، x^2 بر 2^8 و از آنجا x بر 2^3 قابل قسمت می شود و چون، با توجه به رابطه (۲) $(y+x+4) - (y-x-4) = 2x+8$ بر d قابل قسمت است، باید

۸ بر ۱۶ قابل قسمت باشد که ممکن نیست . بنابراین d بر ۱۶ قابل قسمت نیست .

اگر $d = 2$ باشد، $y - x - 4 = 2m$ و $y + x + 4 = 2n$ می شود بطوریکه $(m, n) = 1$ باشد . با توجه به (۱) و (۲) معلوم می شود که باید x بر ۲ و از آنجا y بر ۲ قابل قسمت باشد . از طرف دیگر داریم: $2y = 2(m + n)$ و از آنجا $y = m + n$ می شود ، یعنی $m + n$ بر ۲ قابل قسمت است که با توجه به اینکه $(m, n) = 1$ است ثابت می شود که عددهای m و n هر دو فرد هستند . به این ترتیب چون $x^2 = 4mn$ است ، x^2 بر ۸ غیر قابل قسمت می شود که ممکن نیست (کمی قبل ثابت شد که x بر ۲ و بنابراین x^2 بر ۸ قابل قسمت است). به این ترتیب $d \neq 2$ است .

$d = 4$ می گیریم . در این صورت $y - x - 4 = 4m$ و $y + x + 4 = 4n$ می شود که در آن $(m, n) = 1$ است . بنابراین با توجه به (۱) داریم : $x^2 = 16mn$ و از آنجا معلوم می شود که x باید بر ۴ ، یعنی mn بر ۴ قابل قسمت باشد ، و چون $(m, n) = 1$ است باید یکی از عددهای m و n بر ۴ قابل قسمت و دیگری فرد باشد .

ولی چون x و $x - y - 4$ بر ۴ قابل قسمت اند، $y = 2(m + n)$ بر ۴ قابل قسمت می شود که ممکن نیست . به این ترتیب $d \neq 4$ است . چون d مساوی ۲ و ۴ و یا قابل قسمت بر ۱۶ نیست و از طرف دیگر باید توانی از ۲ باشد، تنها دو حالت $d = 1$ یا $d = 8$ باقی می ماند. اگر $d = 1$ باشد، از (۱) و (۲) نتیجه می شود که عددهای $y + x + 4$ و $y - x - 4$ مکعب عددهای صحیحی هستند :

بدست $y - x - 4 = a^2$ و $y + x + 4 = b^2$ ، از آنجا با توجه به (۱) می‌آید: $x = ab$ و $2x + 8 = b^2 - a^2$. در اینجا $a = b$ نمی‌تواند باشد، زیرا در این صورت $x = -4$ می‌شود و از معادله $y^2 = x^2 + (x+4)^2$ نتیجه می‌شود $y^2 = -4^2$ که ممکن نیست. چون $x = ab$ است، داریم:

$$2ab + 8 = b^2 - a^2 = (b-a)[(b-a)^2 + 2ab]$$

و از آنجا نتیجه می‌شود که اگر $b-a=1$ باشد، $2ab+8=1+2ab$ و $ab=7$ می‌شود؛ بنابراین $x=7$ و $464=11^2+7^2=y^2$ می‌شود که ممکن نیست، زیرا عدد ۴۶۴ مجذور کامل نیست. به این ترتیب، اگر $ab > 0$ باشد، $b-a > 0$ و از آنجا با توجه به $b-a \neq 1$ نتیجه می‌شود $b-a \geq 2$ و $2ab+8 > 6ab$ ، بنحوی که $ab < 2$ یعنی $ab=1$ بشود و از آنجا $a=b$ بدست می‌آید که ممکن نیست، اگر هم $ab < 0$ باشد، یا $a > 0$ ، $b < 0$ است که از آنجا بدست می‌آید:

$$a^2 - b^2 = a^2 + (-b)^2 \geq a^2 + (-b)^2 \geq 2ab$$

که رابطه $-2ab < a^2 - b^2 = -2ab - 8 < -2ab$ را نقض می‌کند؛ یا $a < 0$ ، $b > 0$ است، که در این صورت $b^2 = a^2 + 2ab + 8$ می‌شود و $b^2 < 8$ ، یعنی $b=1$ و $a^2 + 2a + 7 = 0$ می‌شود. تساوی اخیر هم ممکن نیست، زیرا معادله $t^2 + 2t + 7 = 0$ دارای جواب صحیح نیست. بنابراین باید $ab=0$ ، یعنی $x=0$ باشد که برخلاف فرض $x \neq 0$ است. به این ترتیب حالت $d=1$ ممکن نیست. تنها حالت $d=8$ برای بررسی باقی می‌ماند.

در این حالت، بنابر (۲) داریم: $y - x - 4 = 8m$ و

با توجه $y + x + 4 = 8n$ که در آن $(m, n) = 1$ است؛ در اینصورت، با توجه به (۱)، داریم: $x^2 = 64mn$ ، یعنی $\left(\frac{x}{4}\right)^2 = mn$. از آنجا، چون $(m, n) = 1$ است، نتیجه می‌شود که عددهای m و n مکعب عددهای صحیحی هستند و مثلاً $m = a^2$ ، $n = b^2$ ، از اینجا $\frac{x}{4} = ab$ و $2x + 8 = 8(n - m) = 8(b^2 - a^2)$ می‌شود، بنحوی که $a^2 - b^2 = ab + 1$ باشد. واضح است که در اینجا $a = b$ نمی‌تواند باشد و بنابراین $|b - a| \geq 1$ است.

اگر $ab > 0$ باشد، $b > a$ و $b - a \geq 1$ می‌شود و چون داریم:

$$ab + 1 = b^2 - a^2 = (b - a)[(b - a)^2 + 3ab] > 3ab$$

بدست می‌آید: $2ab < 1$ که با $ab > 0$ متناقض است. سپس، چون $ab = x \neq 0$ است، تنها فرض $ab < 0$ باقی می‌ماند. به این ترتیب از یکطرف $|b - a| \geq 1$ و $|b - a| \cdot |(b + a)^2 - ab| < |b^2 - a^2|$ می‌شود و از طرف دیگر. چون $ab < 0$ است، داریم: $|ab + 1| < |ab| = -ab$. بنابراین تساوی $b^2 - a^2 = ab + 1$ ممکن نیست.

به این ترتیب ثابت شد که معادله $y^2 = x^2 + (x + 4)^2$ جوابهای صحیح بصورت $x \neq 0$ و y ندارد.

۱۷۸. این معادله با معادله $x^2z + y^2x + z^2y = mxyz$

هم‌ارز است، که در آن x, y, z ، عددهائی صحیح و مخالف صفر و دو به دو نسبت بهم اولند. از این معادله نتیجه می‌شود که x^2z بر y ، y^2x بر z و z^2y بر x قابل قسمت است. چون $(x, y) = 1$ و

$(z, y) = 1$ است ، $(x^2 z, y) = 1$ می شود و از قابل قسمت بودن $x^2 z$ بر y نتیجه می شود : $y = \pm 1$. بهمین ترتیب بدست می آید :
 $x = \pm 1$ ، $z = \pm 1$.

اگر x ، y و z هم علامت باشند، از معادله مفروض بدست می آید $m = 1 + 1 + 1 = 3$ ، یعنی $m = 3$. اگر از عددهای x ، y و z دو تا مثبت و یکی منفی یا دو تا منفی و یکی مثبت باشد ، بر خلاف فرض برای m جوابی منفی بدست می آید .

بنابراین ، وقتی m عددی طبیعی باشد ، معادله

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = m$$

تنها وقتی جوابهای صحیح ، مخالف صفر و دو به دو نسبت بهم اول ، برای x ، y و z دارد که $m = 3$ باشد و در این صورت هم بیش از دو جواب ندارد : $x = y = z = 1$ ، $x = y = z = -1$. در حالت $m \neq 3$ ، معادله مفروض با شرایط مورد نظر جواب ندارد .

۱۷۹ . چون $1 = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x}$ است ، عددهای مثبت و گویای

$\frac{x}{y}$ ، $\frac{y}{z}$ و $\frac{z}{x}$ نمی توانند کوچکتر از واحد باشند ؛ و اگر لااقل از این

عددها بزرگتر یا مساوی واحد باشد ، خواهیم داشت :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} > 1$$

یعنی مقدار سمت چپ این نامساوی ، به ازای هیچ مقدار طبیعی x ، y و z نمی تواند مساوی واحد شود .

تبصره. اثبات این مطلب که معادله مفروض برای عددهای صحیح مخالف صفر جواب ندارد، بسیار مشکل است.

۱۸۵*. لم. اگر a, b, c عددهای حقیقی و مثبت باشند، بشرطی که هر سه با هم مساوی نباشند داریم:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 > abc \quad (1)$$

اثبات. a, b, c را عددهای مثبتی که هر سه با هم مساوی نیستند می‌گیریم، در این صورت سه عدد مثبت u, v, w (که هر سه مساوی هم نباشند) وجود دارد بنحوی که $a = u^2, b = v^2, c = w^2$ باشد. اتحاد زیر صحیح است:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 - 3uvw &= \\ &= \frac{1}{2}(u+v+w)[(u-v)^2 + (v-w)^2 + (w-u)^2] \end{aligned}$$

چون سه عدد مساوی هم نیستند، عامل دوم سمت راست اتحاد، عددی مثبت است و بنابراین

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 &> 3uvw \\ \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{3}\right)^2 &> u^2 v^2 w^2 \quad (2) \end{aligned}$$

و از آنجا

چون $a = u^2, b = v^2, c = w^2$ است، از نامساوی (۲). نامساوی (۱) بدست می‌آید و بنابراین صحت لم ثابت می‌شود.

حالا x, y, z را سه عدد طبیعی می‌گیریم. اگر عددهای

$\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}$ با هم مساوی باشند، چون همه مثبت‌اند و حاصلضربی

مساوی واحد دارند، باید هر کدام آنها مساوی واحد باشند که در این صورت داریم:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3 > 2$$

بنابراین سه عدد $\frac{x}{y}$ ، $\frac{y}{z}$ و $\frac{z}{x}$ مساوی هم نیستند و با توجه

به لم داریم:

$$\left[\frac{1}{3} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \right]^3 > \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1$$

و از آنجا بدست می‌آید:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} > 3$$

به این ترتیب معادله $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 2$ ، برای عددهای

طبیعی x ، y و z جواب ندارد.

۱۸۱. فرض می‌کنیم عددهای طبیعی x ، y و z در معادله مفروض

صدق کنند. اگر سه عدد $\frac{x}{y}$ ، $\frac{y}{z}$ و $\frac{z}{x}$ با هم مساوی نباشند، همانطور

که در حل مسئله ۱۸۰ دیدیم، داریم:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} > 3$$

بنابراین باید $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$ باشد و از معادله مفروض نتیجه

می‌شود که هر کدام از این عددها باید مساوی واحد، یعنی $x = y = z$

باشد. در این حالت خواهیم داشت:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1 + 1 + 1 = 3$$

به این ترتیب، معادله مفروض بی نهایت جواب برای عددهای

طبیعی x ، y و z دارد. همه جوابهای طبیعی معادله از شرط $x = y = z$ بدست می آید که در آن z عدد طبیعی دلخواه باشد.

تبصره. ما نمی دانیم که آیا معادله

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 4$$

برای عددهای طبیعی x ، y و z جواب دارد یا نه. در معادله

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 5$$

مثلا جواب $x = 1$ ، $y = 2$ ، $z = 4$ و در معادله

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 6$$

مثلا جواب z که یا بروکین پیدا کرده است) $x = 2$ ، $y = 12$ ، $z = 9$ صدق می کند.

۱۸۲^{*}. همانطور که آ. شینتسل یادآوری می کند، اگر برای

عدد طبیعی و مفروض m ، عددهای طبیعی x ، y و z در معادله

$$x^2 + y^2 + z^2 = mxyz \quad (1)$$

صدق کنند، در معادله زیر هم صدق می کنند:

$$\frac{x^2 y}{y^2 z} + \frac{y^2 z}{z^2 x} + \frac{z^2 x}{x^2 y} = m \quad (2)$$

زیرا داریم :

$$\frac{x^2 y}{y^2 z} = \frac{x^2}{xyz}, \frac{y^2 z}{z^2 x} = \frac{y^2}{xyz}, \frac{z^2 x}{x^2 y} = \frac{z^2}{xyz}$$

بنابراین ، با توجه به مسئله های ۱۷۹ و ۱۸۰ ، نتیجه می شود که معادله (۱) به ازای $m=1$ و $m=2$ ، برای عددهای طبیعی x ، y و z جواب ندارد . از حل مسئله ۱۸۱ نتیجه می شود که برای $m=3$ ، معادله (۱) جواب $x^2 y = y^2 z = z^2 x = n$ (عددی طبیعی است) را قبول می کند . ولی در این صورت $x^2 y \cdot y^2 z \cdot z^2 x = n^3$ یا $(xyz)^3 = n^3$ و از آنجا $xyz = n$ می شود ، و چون $x^2 y = n$ بود ، $\frac{z}{x} = 1$ ، یعنی $z = x$ می شود . بهمین ترتیب $x = y$ هم بدست می آید . به این ترتیب باید $x = y = z$ باشد . به ازای $m=3$ ، همه جوابهای معادله (۱) از رابطه $y = z = x$ بدست می آید که در آن x عدد طبیعی دلخواهی است .

۱۸۳ . فرض می کنیم که قضیه T_1 صحیح باشد . اگر قضیه T_2 صحیح نباشد ، عددهای طبیعی u ، v و w را می توان طوری پیدا کرد که $u^3 + v^3 = w^3$ باشد ، در این صورت اگر فرض کنیم : $x = u^2 v$ ، $z = w^2 u$ ، $y = v^2 w$ ، برخلاف حکم قضیه T_1 بدست می آید :

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{z} &= \frac{u^2 v}{v^2 w} + \frac{v^2 w}{w^2 u} = \frac{u^2}{vw} + \frac{v^2}{wu} = \\ &= \frac{u^2 + v^2}{uvw} = \frac{w^3}{uvw} = \frac{z}{x} \end{aligned}$$

به این ترتیب ثابت شد که از قضیه T_1 ، قضیه T_2 نتیجه می شود

(این اثبات متعلق به شینتسل است) .

حالا فرض می کنیم که قضیه T_1 صحیح نباشد. در این صورت عددهای

طبیعی x, y, z را می توان پیدا کرد بنحوی که $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$ ،

یعنی $x^2z + y^2x = z^2y$ باشد . فرض می کنیم : $x^2z = a$ ، $y^2x = b$ ،
در این صورت $z^2y = a + b$ و $(xyz)^2 = ab(a+b)$ می شود . $d = (a, b)$
می گیریم ، بنحوی که $a = da_1$ ، $b = db_1$ باشد که در آن $(a_1, b_1) = 1$
است . داریم :

$$a + b = d(a_1 + b_1) , a_1 b_1 (a_1 + b_1) d^2 = (xyz)^2 ,$$

از آنجا معلوم می شود که $(xyz)^2$ بر d^2 یعنی xyz بر d قابل قسمت
است ، بنحوی $xyz = dt$ می شود (t عددی طبیعی است) .

بنابراین $a_1 b_1 (a_1 + b_1) = t^2$ می شود و چون عددهای a_1, b_1 و

$a_1 + b_1$ نسبت بهم اولند ، نتیجه می گیریم که $a_1 = u^2$ ، $b_1 = v^2$ و

$a_1 + b_1 = w^2$ که در آنها عددهای u, v, w طبیعی هستند . از

آنجا برخلاف حکم قضیه T_4 بدست می آید $u^2 + v^2 = w^2$. به این

ترتیب ثابت کردیم که از قضیه T_4 ، می توان قضیه T_1 را نتیجه گرفت .

قضیه های T_1 و T_4 را می توان از یکدیگر نتیجه گرفت و بنابراین

این دو قضیه هم ارزند .

تبصره . قضیه T_4 را می توان با روشهای مقدماتی ثابت کرد (اگر

چه مشکل است) و بنابراین قضیه T_1 هم صحیح است .

۱۸۴* . اگر x, y, z, t عددهائی طبیعی باشند ، عددهای

گویا و مثبت و به حاصلضرب واحد خواهند بود . $\frac{t}{x}, \frac{z}{t}, \frac{y}{z}, \frac{x}{y}$

بنابراین همه این چهار عدد نمی توانند کوچکتر از واحد باشند . اما اگر یکی از آنها بزرگتر از واحد باشد ، مجموع آنها بزرگتر از واحد می شود و تساوی

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = 1$$

غیر ممکن می شود . به این ترتیب ثابت کردیم که معادله مفروض برای عددهای صحیح و مثبت x, y, z, t جواب ندارد .

حالا ثابت می کنیم که این معادله بی نهایت جواب صحیح مخالف صفر دارد . کافی است تحقیق کنیم که عددهای زیر در معادله مفروض صدق می کنند :

$$x = -n^2, y = n^2(n^2 - 1), z = (n^2 - 1)^2, t = -n(n^2 - 1)$$

که در آن n عددی است طبیعی ، دلخواه و بزرگتر از واحد .
 * ۱۸۵ . تم . اگر a, b, c, d عددهای مثبت باشند ، بشرطی که هر چهار عدد مساوی هم نباشند ، داریم :

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 > abcd \quad (1)$$

اثبات . a, b, c, d را عددهای مثبت و مثلا $a \neq b$ می گیریم در این صورت یا $a+c \neq b+d$ یا $a+d \neq b+c$ خواهد شد ، زیرا اگر $a+c = b+d$ و $a+d = b+c$ باشد ، $a-b = d-c = c-d$ و از آنجا $a-b = 0$ می شود که برخلاف فرض $a \neq b$ است .
 اگر مثلا $a+c \neq b+d$ باشد ، فرض می کنیم $u = a+c$

داریم $u \neq v$ ، بنابراین $(u-v)^2 > 0$ که از آن نتیجه می‌شود $u^2 + v^2 > 2uv$ ، یعنی $(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv > 4uv$ از آنجا $(a+b+c+d)^2 > 4(a+c)(b+d)$ می‌شود و چون $(a+c)^2 \geq 4ac$ و $(b+d)^2 \geq 4bd$ است ، داریم :

$$(a+b+c+d)^4 > 4^2(a+c)^2(b+d)^2 > 4^4abcd$$

که از آن نامساوی (۱) بدست می‌آید . به این ترتیب صحت حکم لم ثابت شد .

حالا فرض می‌کنیم که برای عددهای طبیعی m ، معادله

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = m$$

دارای جوابهای طبیعی x, y, z, t باشد . حاصلضرب چهار جمله مثبت و گویای ما برابر واحد است ؛ اگر هر چهار جمله با هم مساوی باشند ، $m = 4$ می‌شود و بنابراین اگر m عددی طبیعی و کوچکتر از ۴ باشد ، هر چهار عدد مثبت $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{t}, \frac{t}{x}$ نمی‌توانند با هم مساوی شوند و طبق لم داریم :

$$\left[\frac{1}{4} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} \right) \right]^4 > \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{t} \cdot \frac{t}{x} = 1$$

که از آنجا نتیجه می‌شود :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} > 4$$

بنابراین معادله مفروض برای عددهای طبیعی x, y, z, t ،

وقتی $m < 4$ باشد، جواب ندارد و وقتی $m = 4$ باشد، تنها جوابهایی

را قبول می کند که به ازای آنها عددهای $\frac{x}{y}, \frac{z}{t}, \frac{y}{z}, \frac{x}{t}$ و برابر و

بنابراین مساوی واحد باشند که از آنجا $x = y = z = t$ می شود.

به ازای $m = 4$ معادله ما بی نهایت جواب برای عددهای طبیعی

x, y, z, t دارد که همه آنها را می توان با شرط $y = z = t = x$

مشخص کرد (x عدد طبیعی دلخواهی است).

۱۸۶. در اینجا باید $x \leq 4$ باشد، زیرا در حالت $x \geq 5$ ، با

با توجه به نامساویهای $x \leq y \leq z \leq t$ بدست می آید:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \leq \frac{4}{5} < 1$$

همچنین واضح است $x \geq 2$ است. بنابراین باید حالت های $x = 2, 3, 4$

را مورد مطالعه قرار داد.

ابتدا فرض می کنیم $x = 2$ باشد، در این صورت داریم:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

چون $y \leq z \leq t$ است، $\frac{3}{y} \geq \frac{1}{2}$ و از آنجا $y \leq 6$ می شود، از طرف دیگر

با توجه به (۱) داریم: $\frac{1}{y} < \frac{1}{2}$ یعنی $y > 3$. بنابراین عدد y می تواند

مقادیر ۳، ۴، ۵ یا ۶ را قبول کند.

اگر $y = 3$ باشد، $\frac{1}{6} = \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \leq \frac{2}{z}$ و از آنجا $z \leq 12$ می شود

و چون از طرف دیگر $\frac{1}{6} > \frac{1}{z}$ است، عدد z می تواند تنها مقادیر ۷،

۸، ۹، ۱۰، ۱۱ یا ۱۲ را قبول کند.

به ازای $z=7$ داریم: $\frac{1}{t} = \frac{1}{42}$ و از آنجا $t=42$ و جواب

معادله مفروض: $x=2, y=3, z=7, t=42$ می شود.

به همین ترتیب برای حالت‌های دیگر z بدست می آید:

به ازای $z=8$: $x=2, y=3, z=8, t=24$.

به ازای $z=9$: $x=2, y=3, z=9, t=18$.

به ازای $z=10$: $x=2, y=3, z=10, t=15$.

به ازای $z=11$ بدست می آید $\frac{1}{t} = \frac{5}{66}$ ، یعنی برای t عددی

طبیعی بدست نمی آید.

به ازای $z=12$: $x=2, y=3, z=12, t=12$.

اگر $y=4$ باشد، $\frac{1}{4} = \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \leq \frac{2}{z}$ و از آنجا $z \leq 8$ می شود

و چون $\frac{1}{4} > \frac{1}{z}$ است، $z > 4$ می شود و z تنها می تواند عددهای ۵، ۶،

۷ یا ۸ را قبول کند.

به ازای $z=5$ بدست می آید: $x=2, y=4, z=5, t=20$.

به ازای $z=6$: $x=2, y=4, z=6, t=12$.

به ازای $z=7$ بدست می آید: $\frac{1}{t} = \frac{3}{28}$ ، یعنی t عددی طبیعی

نیست.

به ازای $z=8$: $x=2, y=4, z=8, t=8$.

اگر $y=5$ باشد، $\frac{2}{5} = \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{10} \leq \frac{2}{z}$ و از آنجا $z \leq \frac{20}{3}$ ،

یعنی $z \leq 6$ می‌شود و چون $z \geq y = 5$ است، z تنها می‌تواند مساوی یکی از دو عدد ۵ یا ۶ باشد.

به ازای $z = 5$ بدست می‌آید: $x = 2$ ، $y = 5$ ، $z = 5$ ، $t = 10$.

بدازای $z = 6$ بدست می‌آید: $\frac{1}{t} = \frac{2}{15}$ ، یعنی t عددی طبیعی نیست.

اگر $y = 6$ باشد، $\frac{1}{3} = \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \leq \frac{2}{z}$ ، یعنی $z \leq 6$ می‌شود و چون $z \geq y = 6$ است، بدست می‌آید $z = 6$ و از آنجا $t = 6$ می‌شود و یک جواب معادله بدست می‌آید: $x = 2$ ، $y = 6$ ، $z = 6$ ، $t = 6$.

به این ترتیب حالت $x = 2$ را بررسی کردیم و ثابت کردیم که در اینحالت معادله (۱) دارای ۱۰ جواب برای عددهای طبیعی y ، z و t (با شرط $y \leq z \leq t$) است:

$$3, 7, 42 ; 3, 8, 24 ; 3, 9, 18 ; 3, 10, 15 ;$$

$$3, 12, 12 ; 4, 5, 20 ; 4, 6, 12 ; 4, 8, 8 ;$$

$$5, 5, 10 ; 6, 6, 6$$

حالا فرض می‌کنیم $x = 3$ باشد، در اینصورت بدست می‌آید:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{2}{3}$$

از آنجا و با توجه به شرط $y \leq z \leq t$ بدست می‌آید: $\frac{2}{3} \geq \frac{2}{y}$ ، یعنی

$$y \leq \frac{9}{2} \text{ و بنابراین } y \leq 4$$

چون $x \leq y = 3$ است، y می‌تواند یکی از دو عدد ۳ یا ۴ باشد.

اگر $y = 3$ باشد، داریم: $\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{3}$ و از آنجا $\frac{1}{z} \geq \frac{1}{3}$ ، یعنی

$z \leq 3$ و چون $\frac{1}{z} < \frac{1}{3}$ است $z > 3$ می‌شود و z می‌تواند تنها عددهای ۴، ۵ یا ۶ را قبول کند.

به ازای $z = 4$ بدست می‌آید: $x = 3, y = 3, z = 4, t = 12$.

به ازای $z = 5$ بدست می‌آید: $t = \frac{15}{2}$ که عددی طبیعی نیست.

به ازای $z = 6$: $x = 3, y = 3, z = 6, t = 6$.

اگر $y = 4$ باشد، داریم: $\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{5}{12} \leq \frac{2}{z}$ ، از آنجا $z \leq \frac{24}{5} < 5$ ،

می‌شود و چون $z \geq y = 4$ است، باید $z = 4$ باشد که از آنجا $t = 6$

بدست می‌آید یعنی: $x = 3, y = 4, z = 4, t = 6$.

حالا $x = 4$ فرض می‌کنیم، به معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{3}{4}$$

که با توجه به شرط $y \leq z \leq t$ بدست می‌آید $\frac{3}{4} \leq \frac{3}{y}$ ، یعنی $y \leq 4$ و چون

$y \geq x = 4$ است، تنها $y = 4$ بدست می‌آید. از آنجا $\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2} \leq \frac{2}{z}$

و یا $z \leq 4$ می‌شود و چون $z \geq y = 4$ است، $z = 4$ و از آنجا $t = 4$

بدست می‌آید: $x = 4, y = 4, z = 4, t = 4$.

به این ترتیب تمام حالت‌های ممکن را بررسی کردیم و معلوم شد

که به ازای عددهای طبیعی x, y, z, t ($x \leq y \leq z \leq t$)، ۱۴ جواب برای

معادله مفروض وجود دارد:

$$x, y, z, t =$$

$$\begin{aligned} & 2, 3, 7, 42 ; 2, 3, 8, 24 ; 2, 3, 9, 18 ; 2, 3, 10, 15 ; \\ & 2, 3, 12, 12 ; 2, 4, 5, 20 ; 2, 4, 6, 12 ; 2, 4, 8, 8 ; \\ & 2, 5, 5, 10 ; 2, 6, 6, 6 ; 3, 3, 4, 12 ; 2, 3, 6, 6 ; \\ & 3, 4, 4, 6 ; 4, 4, 4, 4 \end{aligned}$$

تبصره. از معادله‌ای که در اینجا حل کردیم، می‌توان برای حل مسئله پوشاندن صفحه بوسیله چند ضلعی‌های منتظم استفاده کرد.

۱۸۷. برای هر عدد طبیعی s ، معادله مفروض حداقل یک جواب

$$\cdot x_1 = x_2 = \dots = x_s$$

برای اینکه ثابت کنیم که معادله برای هر عدد طبیعی s ، تعداد

محدودی جواب دارد، قضیه کلی‌تری را ثابت می‌کنیم: برای هر عدد

گویای w و برای هر عدد طبیعی s ، معادله

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_s} = w$$

دارای تعداد محدودی جواب (که می‌تواند صفر هم باشد) برای عددهای

طبیعی x_1, x_2, \dots, x_s است.

اثبات این قضیه را به کمک استقراء روی عدد s می‌دهیم. واضح

است که قضیه برای $s=1$ صحیح است.

حالا s را عدد طبیعی دلخواهی می‌گیریم و فرض می‌کنیم که قضیه برای

عدد s صحیح باشد: عددهای طبیعی $x_1, x_2, \dots, x_s, x_{s+1}$ را در نظر می‌گیریم

که در معادله زیر صدق کنند :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_s} + \frac{1}{x_{s+1}} = u \quad (1)$$

که در آن u عدد مفروض، گویا و مثبتی است .

فرض می‌کنیم $x_1 < x_2 < \dots < x_s < x_{s+1}$. با توجه به (۱) پیدا

می‌کنیم $u \geq \frac{s+1}{x_1}$ و از آنجا $\frac{s+1}{u} \leq x_1$ ؛ بنابراین عدد x_1 می‌تواند

تعداد محدودی مقادیر طبیعی مختلف را قبول کند .

یکی از این مقادیر را برای x_1 انتخاب می‌کنیم ، در اینصورت

برای s عدد x_{s+1}, \dots, x_r, x_2 معادله زیر را خواهیم داشت :

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_s} + \frac{1}{x_{s+1}} = u - \frac{1}{x_1} \quad (2)$$

که با انتخاب x_1 ، طرف راست آن عددی گویا خواهد بود و بنابراین

بنابه فرض استقراء دارای تعداد محدودی جواب ≥ 0 برای عددهای طبیعی

$x_{s+1}, x_s, \dots, x_r, x_2$ است . ولی چون x_1 تعداد محدودی جواب طبیعی

قبول می‌کند ، صحت قضیه برای $s+1$ عدد ثابت می‌شود .

^{*} ۱۸۸۰ . بسادگی می‌توان تحقیق کرد که به ازای $s=3$ ، عددهای

طبیعی و صعودی $x_1=2$ ، $x_2=3$ ، $x_3=6$ در معادله صدق می‌کند .

اگر برای عدد طبیعی و مفروض $s \geq 3$ ، عددهای طبیعی $x_1 < x_2 < \dots < x_s$

در معادله ما صدق کند ، چون $s \geq 3$ است $x_1 > 1$ می‌شود و بنابراین

داریم : $2 < 2x_1 < 2x_2 < \dots < 2x_s$. متذکر می‌شویم که عددهای

دنباله‌ای $t_{s+1} = 2x_s, t_s = 2x_{s-1}, \dots, t_r = 2x_r, t_r = 2x_1, t_1 = 2$

از عددهای طبیعی صعودی را تشکیل می‌دهند و در معادله زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_s} + \frac{1}{t_{s+1}} = 1 \quad (1)$$

بنابراین I_s جواب مختلف معادله (۱) را در عددهای طبیعی و صعودی $t_1, t_2, \dots, t_s, t_{s+1}$ داریم. بنابراین $I_s \geq I_{s+1}$ ، از اینجاست نتیجه می‌شود که برای هر عدد طبیعی $s \geq 3$ ، معادله $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_s} = 1$ لااقل يك جواب برای عددهای طبیعی x_1, x_2, \dots, x_s دارد.

اگر $s = 3$ باشد، معادله مفروض تنها يك جواب برای عددهای طبیعی و صعودی دارد. درحقیقت باید $x_1 > 1$ باشد؛ بنابراین $x_1 \geq 2$ می‌شود و اگر $x_1 \geq 3$ باشد، $x_2 \geq 4$ و $x_3 \geq 5$ می‌شود و از آنجا خواهیم داشت:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1$$

که ممکن نیست. به این ترتیب $x_1 = 2$ و $x_2 \geq 3$ می‌شود، ولی در حالت $x_2 \geq 4$ داریم $x_3 \geq 5$ و از آنجا چنین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1$$

که ممکن نیست. بنابراین $x_2 = 3$ و از آنجا $x_3 = 6$ می‌شود، یعنی $I_3 = 1$ است. $I_4 < 1$ است، زیرا معادله $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 1$ جوابهای ۲، ۳، ۷، ۴۲ و ۲، ۳، ۸، ۲۴ را قبول دارد (جوابهای

دیگری هم دارد).

بنابراین می توان فرض کرد $s \geq 4$. در این حالت معادله

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{s-1}} = 1$$

لااقل يك جواب برای عددهای طبیعی و صعودی $x_1 < x_2 < \dots < x_{s-1}$ دارد و عددهای $t_1 = 2, t_2 = 3, t_3 = 6x_1, t_4 = 6x_2, \dots, t_{s-1} = 6x_{s-1}$

عددهای طبیعی و صعودی هستند که در معادله (۱) صدق می کنند، ضمناً این جواب غیر از هر يك از I_s جواب معادله (۱) است که قبلاً بدست آوردیم، زیرا در آنجا تمام عددها زوج بود و اینجا عدد $t_4 = 3$ فرد است. بنابراین $I_{s+1} > I_s + 1$ می شود، یعنی برای $s \geq 3$ داریم:

$$I_{s+1} > I_s$$

۱۸۹. $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ را n امین عدد مثلثی می گیریم. بسادگی

می توان صحت روابط زیر را تحقیق کرد:

$$\frac{1}{t_1} = 1, \quad \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_2} = 1, \quad \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_3} = 1$$

بنابراین می توان s را عددی طبیعی و بزرگتر از ۴ فرض کرد. اگر

$s = 2k - 1$ عددی فرد باشد (k عددی طبیعی و بزرگتر یا مساوی ۳)

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_{k-1}} + \frac{k+1}{t_k} &= \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \dots + \\ &+ \frac{2}{(k-1)k} + \frac{2}{k} = 2 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \right] + \frac{2}{k} = 1 \end{aligned}$$

که سمت چپ عبارتست از مجموع $8 = 2k - 1$ (که هر کدام از آنها عکس يك عدد مثلثی است).

اگر هم $8 = 2k$ عددی زوج باشد ($k \geq 3$ عددی طبیعی)، در

حالت $k=3$ داریم: $\frac{6}{t_3} = 1$ و در حالت $k > 3$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{t_3} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} + \dots + \frac{1}{t_{k-1}} + \frac{k+1}{t_k} &= \\ = \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{(k-1)k} + \frac{2}{k} &= 1 \end{aligned}$$

که سمت چپ آن عبارتست از مجموع $8 = 2k$ (که هر کدام از آنها عکس يك عدد مثلثی است).

۱۹۰. با توجه به رابطه $\frac{1}{t_k} = 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ ، وقتی که

$k = 1, 2, \dots$ باشد، بسادگی می‌توان تحقیق کرد که برای عدد طبیعی n داریم:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{t_n} + \frac{1}{t_{n+1}} + \dots + \frac{1}{t_{2n-1}}$$

۱۹۱. واضح است که هیچیک از عددهای طبیعی x, y, z

که در معادله مفروض صدق می‌کنند، نمی‌توانند مساوی واحد باشند. همچنین هیچکدام از این عددها نمی‌توانند بزرگتر از ۲ باشند، زیرا مثلاً در حالت $x=3, y=2, z=2$ داریم:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{1}{9} + \frac{3}{4} = \frac{31}{36} < 1$$

که ممکن نیست. بنابراین باید $x=y=z=t=2$ باشد؛ و این تنها جواب معادله مفروض برای عددهای طبیعی است.

۱۹۲. عددهای مورد نظر s عبارتند از $s=1$ ، $s=4$ و همه عددهای طبیعی $s \geq 6$. برای $s=1$ جواب واضح $x_1=1$ وجود دارد. برای $s=2$ و $s=3$ معادله مفروض برای عددهای طبیعی جواب ندارد، زیرا عددهای مجهول باید بزرگتر از واحد، یعنی ≥ 2 باشند، برای چنین عددهائی داریم:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} \leq \frac{3}{4} < 1$$

برای $s=4$ جواب $x_1=x_2=x_3=x_4=2$ در معادله صدق می‌کند برای $s=5$ ، معادله مفروض برای عددهای طبیعی جواب ندارد، زیرا اگر دستگاه عددهای $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$ در معادله صدق کند، باید $x_1 \geq 2$ و $x_1 < 3$ باشد، چون اگر $x_1 \geq 3$ باشد داریم:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_5^2} \leq \frac{5}{9} < 1$$

بدین ترتیب باید $x_1=2$ باشد و از آنجا

$$\frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_5^2} = \frac{3}{4}$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که $x_2 < 3$ است و چون $\frac{4}{9} < \frac{3}{4}$ است، بنابراین

$x_2 = 2$ می شود و

$$\frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_5^2} = \frac{1}{2}$$

یعنی $x_2 < 3$ و چون $\frac{1}{9} < \frac{1}{2}$ است $x_2 = 2$ و $\frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_5^2} = \frac{1}{4}$ می شود که ممکن نیست، زیرا $x_4 \geq 2$ و $x_5 \geq 2$ است.

برای $s = 6$ جواب $x_1 = x_2 = x_3 = 2$ ، $x_4 = x_5 = 3$ و $x_6 = 6$ صدق می کند.

برای $s = 7$ جواب $x_1 = x_2 = x_3 = 2$ ، $x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 4$ صدق می کند.

برای $s = 8$ جواب $x_1 = x_2 = x_3 = 2$ ، $x_4 = x_5 = 3$ ، $x_6 = 7$ ، $x_7 = 14$ ، $x_8 = 21$ صدق می کند.

حالا فرض می کنیم که برای یک عدد طبیعی s ، معادله

$$\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} + \dots + \frac{1}{t_s^2} = 1$$

جوابی برای عددهای طبیعی t_1, t_2, \dots, t_s داشته باشد، چون

$$\frac{1}{t_s^2} = \frac{4}{(2t_s)^2}$$

بنابراین معادله

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_{s+2}^2} = 1$$

جواب $x_s = x_{s+1} = x_{s+2} = x_{s-1} = t_{s-1}, \dots, x_2 = t_2, x_1 = t_1$ را قبول دارد.

به این ترتیب اگر معادله ما برای عدد طبیعی s جواب طبیعی داشته باشد، برای عدد $s+3$ هم جواب خواهد داشت و چون معادله برای $s=6$ ، $s=7$ ، $s=8$ دارای جواب است، برای هر عدد طبیعی $s \geq 6$ جواب خواهد داشت (و علاوه بر آن، همانطور که ثابت کردیم، برای $s=1$ و $s=4$).

۱۹۳. حکم برای $s=2$ صحیح است، زیرا بسادگی می توان

تحقیق کرد:

$$\frac{1}{12^2} = \frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2} \quad (1)$$

حالا فرض می کنیم که حکم برای عددهای طبیعی

$$x_0 < x_1 < \dots < x_s \quad (2)$$

صحیح باشد، بنحوی که داشته باشیم:

$$\frac{1}{x_0^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_s^2} \quad (3)$$

فرض می کنیم $(i=1, 2, \dots, s) y_i = 20x_i$ ، $y_0 = 12x_0$.

در این صورت با توجه به (۳) و (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{y_0^2} = \frac{1}{y_1^2} + \frac{1}{y_2^2} + \dots + \frac{1}{y_{s+1}^2}$$

بسادگی دیده می شود که همه عددهای $y_{s+1}, y_s, \dots, y_1, y_0$

مختلف اند. در حقیقت، با در نظر گرفتن نامساویهای (۲)، داریم:

$y_0 < y_{s+1} < \dots < y_1 < y_0$ ، علاوه بر آن داریم: $y_0 < y_{s+1}$ و

داریم: اگر چنین نباشد، زیرا $(i=1,2,\dots,s) y_i \neq y_{s+1}$

$$\frac{1}{y_0^2} = \frac{1}{12^2 x_0^2} > \frac{1}{y_i^2} + \frac{1}{y_{s+1}^2} = \frac{2}{15^2 x_0^2}$$

که ممکن نیست. بنابراین اثبات را به کمک استقراء و روی عدد s انجام دادیم.

تبصره. پ. اردیوش ثابت کرد که برای هر عدد گویای w ، بنحوی

که $0 < w < \frac{\pi^2}{6} - 1$ باشد، عددهای طبیعی n و $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

وجود دارد، بنحوی که داشته باشیم [۱۱]:

$$w = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2}$$

۱۹۴. فرض می‌کنیم که به‌ازای عدد طبیعی $n > 1$ داشته باشیم:

$$1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2}$$

بطوریکه $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ، عددهائی طبیعی باشند.

چون $n > 1$ است، باید $x_1 > 1$ و $x_k \geq k+1$ باشد

؛ بنابراین $(k=1,2,\dots,n)$:

$$1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2}$$

از طرف دیگر واضح است $\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

، از آنجا $(k=1,2,\dots,n)$

$$1 < (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

که ممکن نیست .

۱۹۵ . بسادگی می توان تحقیق کرد که

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{14^2} +$$

$$+ \frac{1}{21^2} + \frac{1}{36^2} + \frac{1}{45^2} + \frac{1}{60^2}$$

(برای تحقیق در صحت این تساوی در نظر داشته باشید :

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{21^2} = \frac{1}{6^2} \quad \text{و} \quad \frac{1}{45^2} + \frac{1}{60^2} = \frac{1}{36^2}$$

بقیه جمله‌ها هم مخرج مشترك ۳۶۲ دارند) .

ما نمی دانیم که آیا می توان عدد ۱۲ را به مجموع کمتر از ۱۲

عدد تبدیل کرد که هر کدام از آنها مجذور معکوس يك عدد طبیعی باشد

یا نه [۱۲] .

۱۹۶* . m را عدد طبیعی مفروضی می گیریم ، به ازای $s = 2^m$

معادله مفروض جواب زیر را (برای عددهای طبیعی) قبول دارد :

$$x_1 = x_2 = \dots = x_s = 2$$

a را عدد مفروض طبیعی بگیرید ؛ فرض می کنیم عددهای طبیعی

t_1, t_2, \dots, t_s وجود داشته باشد بطوریکه به ازای عدد طبیعی s ، در معادله

ما صدق کنند :

$$\frac{1}{t_1^m} + \frac{1}{t_2^m} + \dots + \frac{1}{t_s^m} = 1$$

چون داریم: $\frac{1}{t_s^m} = \frac{a^m}{(at_s)^m}$ ، برای $t_1, x_1 = t_1, x_2 = t_2, \dots, x_r = t_r, \dots$

$$x_s = x_{s+1} = \dots = x_{s+a^{m-1}} = at_s, x_{s-1} = t_{s-1}$$

است :

$$\frac{1}{x_1^m} + \frac{1}{x_2^m} + \dots + \frac{1}{x_{s+a^{m-1}}^m} = 1$$

به این ترتیب اگر معادله مفروض به ازای عدد طبیعی s جواب داشته باشد، به ازای عدد $s + a^m - 1$ و بطور کلی به ازای $s + (a^m - 1)k$ جواب خواهد داشت (k عدد طبیعی دلخواهی است). از اینجا، با فرض $a = 2^m - 1, a = 2$ (به ازای $s = 2^m$) معلوم می شود که معادله ما به ازای عددهای زیر دارای جواب است :

$$s = 2^m + (2^m - 1)k + [(2^m - 1)^m - 1]l$$

(k و l عددهای طبیعی دلخواهی هستند).

واضح است که عددهای $2^m - 1$ و $(2^m - 1)^m - 1$ نسبت بهم اولند. از آنجا با توجه به این قضیه: « اگر a و b دو عدد طبیعی و نسبت بهم اول باشند، هر عدد طبیعی $n > ab$ را می توان به صورت $n = ax + by$ (x و y دو عدد طبیعی اند) نوشت^{۱)}، نتیجه می گیریم که

۱) W. Sierpinski, Teoria liczł, Czesc II .

(صفحه ۱۰، نتیجه اول)، Warszawa, 1959

هر عدد طبیعی که به اندازه کافی بزرگ باشد، می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$(2^m - 1)k + [(2^m - 1)^m - 1]$$

(k و l عددهای طبیعی اند).

از آنجا می شود که هر عدد طبیعی، که به اندازه کافی بزرگ باشد، عددی به صورت زیر است:

$$2^m + (2^m - 1)k + [(2^m - 1)^m - 1]$$

یعنی به ازای هر عدد طبیعی s، معادله مفروض، برای عددهای طبیعی، دارای جواب است.

۱۹۷. کافی است ثابت کنیم که معادله ما به ازای هر عدد طبیعی

s، لااقل یک جواب برای عددهای طبیعی x_1, x_2, \dots, x_{s+1} دارد، زیرا با ضرب هر یک از عددها در یک عدد طبیعی دلخواه، باز هم جوابی از معادله مفروض بدست می آید.

برای $s = 1$ داریم: $x_1 = x_2 = 1$.

برای $s = 2$ داریم:

$$\frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2} = \frac{1}{12^2}$$

حالا فرض می کنیم s عدد طبیعی دلخواهی باشد؛ فرض می کنیم

که معادله ما، برای عددهای طبیعی، دارای جواب باشد:

$$\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} + \dots + \frac{1}{t_s^2} = \frac{1}{t_{s+1}^2}$$

چون داریم: $\frac{1}{(12t_s)^2} = \frac{1}{(15t_s)^2} + \frac{1}{(20t_s)^2}$ ، بنابراین

عددهای طبیعی $x_i = 12t_i$ (برای $i = 1, 2, \dots, s-1$) ، $x_s = 15t_s$ ، $x_{s+1} = 20t_s$ در معادله زیر صدق می کنند:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_s^2} + \frac{1}{x_{s+1}^2} = \frac{1}{x_{s+2}^2}$$

و به این ترتیب حکم مورد نظر با استقراء روی عدد s ثابت می شود .

۱۹۸ . کافی است ثابت کنیم که معادله ما به ازای $s \geq 3$ ، لااقل

یک جواب برای عددهای طبیعی $x_1, x_2, \dots, x_s, x_{s+1}$ دارد . به ازای $s = 3$ داریم:

$$\frac{1}{12^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2} = \frac{1}{10^2}$$

(که از تقسیم طرفین تساوی $6^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2$ بر 60^2 بدست آمده است) به ازای $s = 4$ داریم:

$$\frac{1}{(5 \cdot 7 \cdot 13)^2} + \frac{1}{(5 \cdot 12 \cdot 13)^2} + \frac{1}{(7 \cdot 12 \cdot 13)^2} + \frac{1}{(5 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 13)^2} = \frac{1}{(5 \cdot 7 \cdot 12)^2}$$

که از تقسیم طرفین تساوی زیر بر $(5 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 13)^2$ بدست آمده است:

$$1^2 + 5^2 + 7^2 + 12^2 = 13^2$$

حالا s را عدد طبیعی مفروضی ≥ 3 در نظر می گیریم؛ فرض می کنیم

معادله مفروض به ازای عدد s ، دارای جواب (برای عددهای طبیعی) باشد، یعنی عددهای طبیعی $t_1, t_2, \dots, t_s, t_{s+1}$ وجود داشته باشد، بنحوی که داشته باشیم:

$$\frac{1}{t_1^3} + \frac{1}{t_2^3} + \dots + \frac{1}{t_s^3} = \frac{1}{t_{s+1}^3}$$

فرض می‌کنیم: $x_i = 10t_i$ ($i = 1, 2, \dots, s-1$)، $x_s = 12t_s$ ،

بدست می‌آید: $x_{s+1} = 15t_s$ ، $x_{s+2} = 20t_s$ ، $x_{s+3} = 10t_{s+1}$ ،

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \dots + \frac{1}{x_{s+3}^3} = \frac{1}{x_{s+3}^3}$$

به این ترتیب اگر معادله مفروض برای s دارای جواب باشد، برای $s+2$ هم جواب دارد و چون به ازای $s=3$ و $s=4$ دارای جواب بود، به ازای هر عدد طبیعی $s \geq 3$ دارای جواب خواهد بود.

تبصره. با روشهای مقدماتی می‌توان ثابت کرد که به ازای $s=2$ ، معادله مفروض برای عددهای طبیعی، جواب ندارد (ولی این اثبات مشکل است).

۱۹۹۴. حل آ. شینتسل اتحاد زیر واضح است:

$$(x+y+z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x+y)(x+z)(y+z) \quad (1)$$

اگر x, y, z عددهای صحیح باشند و داشته باشیم:

$$x+y+z=3, \quad x^3+y^3+z^3=3$$

با توجه به اتحاد (۱) بدست می‌آید:

$$0 = (x+y)(x+z)(y+z) = (3-x)(3-y)(3-z) \quad (2)$$

با توجه به اتحاد (۱) بدست می آید :

$$\lambda = (x+y)(x+z)(y+z) = (3-x)(3-y)(3-z) \quad (2)$$

و چون $x+y+z=2$ است داریم :

$$6 = (3-x) + (3-y) + (3-z) \quad (3)$$

از (۳) نتیجه می شود که عددهای $3-x$ ، $3-y$ ، $3-z$ یا هر سه و یا فقط یکی باید زوج باشد. در حالت اول، با توجه به (۲)، باید هر يك از آنها از لحاظ قدر مطلق مساوی ۲ باشند، و بنابر (۳) هر سه مساوی ۲ و در این صورت $x=y=z=1$ باشد. در حالت دیگر بنابر (۲) یکی از عددهای $3-x$ ، $3-y$ ، $3-z$ از لحاظ قدر مطلق مساوی ۸ و بقیه از لحاظ قدر مطلق مساوی واحدند؛ بنابراین با توجه به (۳)، یکی از آنها مساوی ۸ و هر يك از دو تای دیگر مساوی -۱ می شود، یعنی $x=y=4$ یا $y=z=4$ یا $x=-5$ یا $z=-5$ یا بالاخره $x=4$ ، $y=-5$ ، $z=4$.

به این ترتیب دستگاه مفروض، برای عددهای صحیح، تنها چهار

جواب دارد :

$$x, y, z = 1, 1, 1 ; -5, 4, 4 ; 4, -5, 4 ; 4, 4, -5$$

تبصره. نمی دانیم که آیا معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ غیر از چهار جواب فوق، جواب دیگری برای عددهای صحیح x ، y و z دارد یا نه؟

۲۰۰. واضح است که باید $n \geq 8$ باشد. اگر $n = 3k$ باشد

(k عددی طبیعی و بزرگتر از ۵ است)، به ازای $x = k - 5$ و $y = 3$

داریم: $3x + 5y = n$. اگر $n = 3k + 1$ باشد (k عددی

است طبیعی و بزرگتر از ۳) ، به ازای $x = k - 3$ و $y = 2$ می‌شود .
 $3x + 5y = n$ ، بالاخره اگر $n = 3k + 2$ باشد (k عددی است طبیعی و بزرگتر از واحد) ، به ازای $x = k - 1$ و $y = 1$ بدست می‌آید :
 $3x + 5y = n$. از اینجا نتیجه می‌شود که وقتی $n > 15$ باشد معادله مفروض لااقل يك جواب برای عددهای طبیعی x و y دارد . به این ترتیب تنها حالت‌هایی که n مساوی یکی از مقادیر ۸، ۹، ۱۰، ۱۲ و ۱۵ باشد ، باقی می‌ماند . به ازای $n = 8$ داریم : $x = y = 1$. به ازای $n = 9, 12, 15$ ، معادله مفروض برای عددهای طبیعی x و y جواب ندارد زیرا در این حالت‌ها یا y ۵ بر ۳، یعنی y بر ۳ و $5y$ بر ۱۵ قابل قسمت باشد و از آنجا $n = 3x + 5y > 5y \geq 15$ می‌شود که ممکن نیست . به ازای $n = 10$ هم معادله مفروض برای عددهای طبیعی x و y جواب ندارد ، زیرا باید $3x$ بر ۵، یعنی x بر ۵ و $3x$ بر ۱۵ قابل قسمت باشد و $n = 3x + 5y > 15$ می‌شود .

به این ترتیب معادله مفروض ، بجز مواردی که n مساوی یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۹، ۱۰، ۱۲ و ۱۵ باشد، لااقل يك جواب برای عددهای طبیعی x و y دارد .

حالا فرض می‌کنیم m عدد طبیعی دلخواه و n عدد طبیعی بزرگتر از m ۴۰ باشد. در این صورت معادله $3x + 5y = n$ دارای جواب x_0 و y_0 (عددهای طبیعی) است که لااقل یکی از آنها از m ۵ بزرگتر است ، زیرا در حالت $x_0 \leq 5m$ و $y_0 \leq 5m$ داریم : $3x_0 + 5y_0 \leq 40m < n$ اگر $x_0 > 5m$ باشد ، عددهای $x = x_0 - 5k$ و $y = y_0 + 3k$ ($k = 1, 2, \dots, m$) عددهایی طبیعی هستند و در معادله مفروض

اگر $y_0 > 5m$ باشد، $(3x + 5y = 3x_0 + 5y_0 = n)$ صدق می‌کنند. عددهای $(k = 1, 2, \dots, m) y = y_0 - 3k$ و $x = x_0 + 5k$ طبیعی هستند و در معادله $3x + 5y = n$ صدق می‌کنند، بنابراین وقتی $m > 40$ باشد، معادله مفروض بیش از m جواب برای عددهای طبیعی x و y دارد، یعنی تعداد اینگونه جوابها، همراه با n بطور نامحدود صعودی است.

۲۰۱. a) $n = 2$ ، $y = x$ ، $z = x + 1$ ، که x عدد طبیعی دلخواهی است؛ زیرا، وقتی x عددی طبیعی باشد، داریم: $2^x + 2^x = 2^{x+1}$.
حالا فرض می‌کنیم به ازای عددهای طبیعی x, y, z, n داشته باشیم: $n^x + n^y = n^z$ ، می‌توانیم در $x \leq y < z$ نظر بگیریم: $n = 1$ نمی‌تواند باشد، بنابراین $n \geq 2$ است. داریم:

$$n^x = n^z - n^y = n^x (n^{z-x} - n^{y-x})$$

و از آنجا $n^{z-x} - n^{y-x} = 1$ می‌شود. اگر $y > x$ باشد باید 1 بر n قابل قسمت بشود که ممکن نیست. بنابراین $y = x$ است. از آنجا $n^{z-x} = 2$ و $n = 2$ ، $z - x = 1$ می‌شود، یعنی $n = 2$ ، $y = x$ و $z = x + 1$.

تبصره. معادله $n^x + n^y = n^z$ از معادله فرما $x^n + y^n = z^n$ ، با تبدیل نقش پایه‌ها و نماها به یکدیگر، بدست می‌آید.

(b) فرض می‌کنیم، عددهای طبیعی x, y, z, n در معادله مفروض صدق کنند:

$$n^x + n^y + n^z = n^t \quad (1)$$

که می‌توان $x \leq y \leq z < t$ در نظر گرفت. $n = 1$ نمی‌تواند باشد. اگر

$n = 2$ باشد، از تساوی (۱) بدست می آید: $1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 2^{t-x}$
 از آنجا معلوم می شود که $y > x$ نمی تواند باشد. پس $y = x$ است
 و از آنجا $2 + 2^{z-x} = 2^{t-x}$ می شود که از آن بسهولت $z - x = 1$ پیدا
 می شود و بنابراین $t - x = 2$. به این ترتیب اگر $n = 2$ باشد باید داشته
 باشیم: $y = x$ ، $z = x + 1$ ، $t = x + 2$ و بسادگی می توان تحقیق کرد که
 برای هر عدد طبیعی x داریم:

$$2^x + 2^x + 2^{x+1} = 2^{x+2}$$

بالاخره فرض می کنیم $n \neq 2$ ، یعنی $n \geq 3$ باشد. بنا بر (۱) داریم:
 $1 + n^{y-x} + n^{z-x} = n^{t-x}$
 باشد، یعنی $2 + n^{z-x} = n^{t-x}$ و چون $n > 2$ است باید $z - x = 0$
 باشد و بنابراین $3 = n^{t-x}$ می شود که از آنجا $n = 3$ و $t - x = 1$
 بدست می آید. بنابراین اگر $n \neq 2$ باشد باید داشته باشیم: $n = 3$ ،
 $x = y = z$ و $t = x + 1$ و بسادگی می توان تحقیق کرد که به ازای هر
 عدد طبیعی x داریم:

$$3^x + 3^x + 3^x = 3^{x+1}$$

به این ترتیب همه جوابهای معادله (۱)، برای عددهای طبیعی
 n, x, y, z, t عبارتند از:

$$n = 2, y = x, z = x + 1, t = x + 2;$$

$$n = 3, y = x, z = x, t = x + 1$$

(x عدد طبیعی دلخواهی است.)

(c) از حل قسمت قبل بلافاصله نتیجه می‌شود که معادله $4^x + 4^y + 4^z = 4^t$ ، برای عددهای طبیعی x, y, z, t جواب ندارد. در حقیقت اگر چنین جوابی وجود داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$2^{2x} + 2^{2y} + 2^{2z} = 2^{2t}$$

و در حالت $x < y < z < t$ از حل قسمت قبل نتیجه می‌شود که باید $2z - 2x = 1$ باشد که ممکن نیست.

متذکر می‌شویم که این معادله را می‌توان با تبدیل نقش پایه‌ها و نماها در معادله $x^4 + y^4 + z^4 = t^4$ بدست آورد که تا حالا هنوز معلوم نشده است که آیا برای عددهای طبیعی x, y, z, t جواب دارد و یا، آنطور که اولر فرض کرده است، بدون جواب است [۱۳].

۶. مسائل مختلف

۲۰۲. اثبات نتیجه‌ای از اتحاد زیر است:

$$(3x + 4y)^2 - 2(2x + 3y)^2 = x^2 - 2y^2$$

توجه می‌کنیم که وقتی x و y عددهائی طبیعی باشند، داریم:

$$3x + 4y > 2x + 3y > x$$

۲۰۳. اگر به‌ازای عددهای صحیح x و y ، عدد $x^2 - 2y^2$ فرد

باشد، باید عدد x فرد بشود و بنابراین $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$ می‌شود؛ در

حالتی که y زوج باشد $2y^2 \equiv 0 \pmod{8}$ و در حالتی که y عددی فرد باشد

$2y^2 \equiv 2 \pmod{8}$ می‌شود. بنابراین اگر $x^2 - 2y^2$ عددی فرد باشد،

$x^2 - 2y^2 \equiv \pm 1 \pmod{8}$ می‌شود، یعنی به‌ازای عددهای صحیح x و y

نمی‌توان عدد $x^2 - 2y^2$ را به صورت $8k + 3$ یا $8k + 5$ (k عددی

است صحیح) نوشت .

۲۰۴ . سهولت می توان متوجه شد که به ازای عدد طبیعی و دلخواه

n ، عدد $۲۰۲^۲ - (۲n + ۱)^۲$ را می توان به صورت $۸k + ۱$ نوشت (k

عددی صحیح و $۰ \leq$ است) . سپس داریم :

$$۱ = ۳^۲ - ۲۰۲^۲; ۹ = ۹^۲ - ۲۰۶^۲; ۱۷ = ۵^۲ - ۲۰۲^۲; ۲۵ = ۱۵^۲ - ۲۰۱۰^۲$$

ولی عدد ۳۳ را نمی توان به صورت $x^۲ - ۲y^۲$ (x و y عددهای طبیعی

هستند) نوشت . ثابت می کنیم که هر عدد به صورت $۷۲t + ۳۳$

($t = ۰, ۱, ۲, \dots$) را نمی توان به صورت $x^۲ - ۲y^۲$ نوشت (x و y عددهای

صحیح هستند) . فرض می کنیم $۷۲t + ۳۳ = x^۲ - ۲y^۲$ باشد (x, y, t

عددهائی صحیح اند) . سمت چپ تساوی بر ۳ قابل قسمت و بر ۹ غیر

قابل قسمت است . از آنجا نتیجه می شود که هیچیک از عددهای x و y

نمی توانند بر ۳ قابل قسمت باشند . در حقیقت اگر x بر ۳ قابل قسمت

باشد ، y هم بر ۳ قابل قسمت می شود و برعکس اگر y بر ۳ قابل قسمت

باشد ، باید x هم بر ۳ قابل قسمت شود ؛ ولی در این صورت سمت راست

تساوی ما بر ۹ قابل قسمت می شود که ممکن نیست . بنابراین عددهای

x و y بر ۳ قابل قسمت نیستند ، از آنجا از تقسیم هر یک از دو عدد

$x^۲$ و $y^۲$ بر ۳ ، باقیمانده ای مساوی ۱ بدست می آید ، یعنی از تقسیم

$x^۲ - y^۲$ بر ۳ باقیمانده ای مساوی ۲ پیدا می شود که ممکن نیست ، زیرا

سمت چپ تساوی بر ۳ قابل قسمت است .

به این ترتیب بی نهایت عدد طبیعی به صورت $۸k + ۱$ ($k = ۱, ۲, \dots$)

وجود دارد که به صورت $x^۲ - ۲y^۲$ قابل تبدیل نیست (x و y عددهائی

صحیح اند) و کوچکترین این عددها $۱ + ۸۰۴ = ۳۳$ است .

۲۰۵. عدد کامل زوج به عددی گویند که به صورت $(2^p - 1)2^{p-1}$

باشد، که در آن p و $2^p - 1$ عددهائی اولند. به ازای $p = 2$ ، عدد ۶ بدست می آید. اگر $p > 2$ باشد، p عددی است اول که می توان آنرا یکی از دو صورت $4k + 1$ یا $4k + 3$ در نظر گرفت.

اگر $p = 4k + 1$ باشد، $2^{4k} = 2^{4k} = 16^k$ می شود و واضح

است که آخرین رقم عدد 2^{p-1} مساوی ۶ می شود، رقم آخر عدد $1 - 16^k = 2 \cdot 16^k - 1 = 2^{4k+1} - 1$ مساوی واحد است. به این ترتیب

آخرین رقم حاصلضرب $(2^p - 1)2^{p-1}$ مساوی ۶ می شود. در حالتی که

$p = 4k + 3$ باشد داریم: $2^{4k+2} = 2^{4k+2} = 4 \cdot 16^k$ که رقم آخر آن

مساوی ۴ است. رقم آخر 2^p هم مساوی ۸ و بنابراین رقم آخر 2^{p-1}

مساوی ۷ می شود، بنابراین آخرین رقم عدد $(2^p - 1)2^{p-1}$ مساوی

۸ خواهد شد (زیرا از ضرب دو عددی که یکی به ۴ و دیگری به ۷ ختم

شده باشد: عددی بدست می آید که به ۸ ختم شده است).

تبصره. با کمی اشکال بیشتر می توان این قضیه را ثابت کرد که اگر آخرین

رقم عدد کامل مساوی ۸ باشد، رقم ماقبل آخر آن مساوی ۲ خواهد بود.

۲۰۶. مقدار کسر در مبنای g چنین است:

$$\frac{1 + g^2 + g^4 + g^6 + g^8}{1 + g + g^3 + g^5 + g^7}$$

و باید ثابت کرد که، برای هر عدد طبیعی k ، این مقدار برابر است با

کسر زیر:

$$\frac{1+g^2+g^4+g^6+\dots+g^{2k+2}+g^{2k+4}+g^{2k+6}}{1+g+g^2+g^3+\dots+g^{2k+2}+g^{2k+5}+g^{2k+6}} \quad (1)$$

تساوی دو کسر از اینجا بدست می آید که حاصلضرب منخرج کسر اول در صورت کسر دوم برابر است با حاصلضرب منخرج کسر دوم در صورت کسر اول.

تبره . یا . بروکین متذکر می شود که برای هر عدد طبیعی k ، اتحادهای زیر صحیح است :

$$1+g^2+g^4+g^6+\dots+g^{2k+2}+g^{2k+4}+g^{2k+6} = (1-g+g^2-g^3+g^4)(1+g+g^2+\dots+g^{2k+2}),$$

$$1+g+g^2+g^3+\dots+g^{2k+2}+g^{2k+5}+g^{2k+6} = (1-g^2+g^4)(1+g+g^2+\dots+g^{2k+2}),$$

که بر اساس آنها، کسر (۱) ، به ازای $k=1, 2, \dots$ ، مساوی کسر زیر است :

$$\frac{1-g+g^2-g^3+g^4}{1-g^2+g^4}$$

و بنابراین مقدار آن بستگی به عدد طبیعی k ندارد .

^{۲۰۷} . شینتسل قضیه کلی تری را ثابت کرد، یعنی اگر g عددی طبیعی و زوج و غیر قابل قسمت بر ۱۰ باشد، مجموع رقمهای عدد g^n (وقتی در دستگاه عددشماری به مبنای ده نوشته شود)، همراه با n بطور نامحدود صعودی است . و این اثبات اوست :

دنباله بی نهایتی از عددهای صحیح a_i ($i=0, 1, 2, \dots$) بترتیب زیر معین می کنیم : $a_0=0$ و برای $k=0, 1, 2, \dots$ فرض می کنیم که a_{k+1} کوچکترین عدد طبیعی باشد که در شرط $2^{a_{k+1}} > 10^{a_k}$ (به این

ترتیب $1 = a_1, a_2 = 4, a_3 = 14$ (غیره می شود) صدق کند .

در این صورت داریم : $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$

ثابت می کنیم که اگر برای عدد طبیعی k داشته باشیم $n \geq a_k$ ،
مجموع رقمهای عدد g^n بزرگتر یا مساوی k خواهد بود . c_j را رقمی
از تجزیه اعشاری عدد g^n می گیریم که در 10^j ضرب شده است . چون
 g عددی است زوج ، g^n بر 2^n قابل قسمت است و چون $n \geq a_k$ است ،
 g^n بر 2^{a_i} قابل قسمت است $(i = 1, 2, \dots, k)$. بنابراین با توجه به
اینکه $10^{a_i} c_{a_i}$ بر 2^{a_i} قابل قسمت است ، $c_{a_i-1} \cdot 10^{a_i-1} + \dots + c_0$ بر
 2^{a_i} قابل قسمت می شود .

اگر برای $a_i-1 \leq j < a_i$ ، همه رقمهای c_j مساوی صفر باشد ،
 $c_{a_i-1} \cdot 10^{a_i-1} + \dots + c_0$ بر 2^{a_i} قابل قسمت است . و چون
 $c_0 \neq 0$ است داریم :

$$2^{a_i} \leq a_{a_i-1} \cdot 10^{a_i-1} + \dots + c_0 < 10^{a_i-1}$$

از آنجا $2^{a_i} < 10^{a_i-1}$ بدست می آید که برخلاف فرض است .
بنابراین لااقل یکی از رقمهای c_j ، با شرط $a_i-1 < j < a_i$ ، مخالف صفر
است .

ولی نتیجه اخیر برای $k = 1, 2, \dots, n$ صحیح است ، بنابراین
عدد g^n لااقل k رقم مخالف صفر دارد . به این ترتیب ، وقتی که n به اندازه
کافی بزرگ باشد (به ازای $n \geq a_k$) ، مجموع رقمهای عدد g^n کمتر از
مقدار عدد طبیعی و دلخواه k نیست ، یعنی مجموع رقمهای عدد g^n بطور
نامحدود همراه با n صعودی است .

شبه روشی که سینتسل استفاده می کند ، می توان ثابت کرد که اگر عدد طبیعی فرد قابل قسمت بر ۵ باشد، مجموع رقمهای عدد g^n همراه با n بطور نامحدود صعودی است .

از اثبات قضیه سینسل می توان نتیجه گرفت که در حالت خاص (بد ازای $g=2$) ، مجموع رقمهای عدد 2^n همراه با n بطور نامحدود صعودی است، ولی این صعودی بودن یکنوا (مونوتون) نیست؛ مثلاً ، مجموع رقمهای عدد 2^3 مساوی ۸ است، مجموع رقمهای عدد 2^4 مساوی ۷، مجموع رقمهای عدد 2^5 مساوی ۵ ، مجموع رقمهای عدد 2^9 مساوی ۸ ، مجموع عدد 2^{10} مساوی ۷، مجموع رقمهای عدد 2^{16} مساوی ۲۵ و مجموع رقمهای عدد 2^{17} مساوی ۱۴ .

۳۰۸. اثبات ۲. سینتسل .

k را عدد طبیعی بزرگتر از واحد و c را رقم دلخواهی از دستگاه عدد شماری به مبنای ده می گیریم . چون $k > 1$ است بسادگی (و مثلاً به کمک استقراء ریاضی) می توان ثابت کرد که $2 \cdot 2^k > 10^{k-1}$ است . اگر t را کوچکترین عدد صحیحی فرض کنیم که در شرط

$$t \geq c \cdot \frac{10^{k-1}}{2^k} \text{ صدق کند ، داریم :}$$

$$t < c \cdot \frac{10^{k-1}}{2^k} + 1 \Rightarrow t + 1 < c \cdot \frac{10^{k-1}}{2^k} + 2$$

از دو عدد غیر منفی و صحیح $t+1$ و t ، لا اقل یکی بر ۵ قابل قسمت نیست ، آنرا به u نشان می دهیم ، داریم :

$$c \cdot \frac{10^{k-1}}{2^k} \leq u < c \cdot \frac{10^{k-1}}{2^k} + 2$$

و چون $2 \cdot 2^k < 10^{k-1}$ ، به ازای $t = 2^k \cdot u$ داریم :

$$c \cdot 10^{k-1} \leq t < (c+1)10^{k-1}$$

از آنجا دیده می شود که عدد $t = 2^k \cdot u$ دارای k رقم است که اولین آنها (یا k امین رقم از آخر) مساوی c است (این رقم مساوی صفر هم می تواند باشد).

چون $t = 2^k \cdot u$ است، t بر 2^k قابل قسمت می شود و از تعریف عدد u نتیجه می شود u بر 5 قابل قسمت نیست، بنحوی که $(t, 5) = 1$ است.

چون $(t, 5) = 1$ است، عدد طبیعی $n \geq k$ وجود دارد بنحوی $2^n \equiv t \pmod{5^k}$ باشد. ولی t بر 2^k و 2^n بر 2^k قابل قسمت اند، بنابراین $2^n \equiv t \pmod{2^k}$ می شود. به این ترتیب $2^n \equiv t \pmod{10^k}$ ، یعنی k رقم آخر عدد t همان k رقم آخر عدد 2^n است.

از اینجا نتیجه می شود که رقم k ام از آخر در عدد 2^n برابر c است.

تبصره. چهار رقم آخر توان 2 نمی تواند c باشد، که در آن c مساوی 2 ، 4 ، 6 یا 8 است، زیرا هیچیک از عددهای 1112 ، 1114 ، 1116 و 1118 بر 16 قابل قسمت نیستند.

شبه استدلال بالا، می توان ثابت کرد که رقمهای سوم و چهارم عدد 2^n از آخر ($n = 3, 4, \dots$) می توانند دلخواه باشند. همچنین می توان ثابت کرد که اگر m ، عدد طبیعی دلخواهی باشد و k ، تعداد رقمهای آن؛ عدد طبیعی n وجود دارد بنحوی که k رقم اول عدد 2^n همان رقمهای عدد m باشند.

۲. رونکه ویچ ثابت کرد که اگر a عدد مفروض طبیعی بزرگتر از واحد باشد، بنحوی که $(a, 10) = 1$ و 2^α و 5^β بالاترین توان عددهای 2 و 5 باشند که بر $a^2 - 1$ قابل قسمت اند و $\gamma = \text{Max}(\alpha, \beta)$ باشد، در

اینصورت برای هر دو دنباله رقمهای a_m, \dots, a_2, a_1 و b_k, \dots, b_2, b_1 (در دستگاه اعشاری) عدد بزرگ و دلخواه s وجود دارد، بنحوی که m رقم اول عدد a^s همان دنباله a_m, \dots, a_2, a_1 باشد و بجای شماره‌های $\gamma + k - 1, \dots, \gamma + 1$ از آخر دنباله b_k, \dots, b_2, b_1 وجود داشته باشد.

۰۲۰۹. برای عدد طبیعی $n \geq 4$ داریم:

$$5^{n+4} - 5^n = 5^n(5^4 - 1) = 5^n \cdot 16 \cdot 39$$

و بنابراین $5^{n+4} \equiv 5^n \pmod{10000}$ می‌شود، از آنجا نتیجه می‌شود که چهار رقم آخر دنباله 5^n ($n = 4, 5, \dots$) يك دوره چهار جمله‌ای تشکیل می‌دهند، یعنی دوره‌ای بصورت زیر:

$$0625, 3125, 5625, 8125$$

این دوره خالص نیست، زیرا عددهای ۵ و $5^2 = 25$ و $5^3 = 125$ به آن مربوط نیستند.

۰۲۱۰. را عدد طبیعی مفروض و c_s, \dots, c_2, c_1 را دنباله s رقم دلخواه از دستگاه عددشماری به مبنای ده می‌گیریم. $m = (c_s c_2 \dots c_1)_{10}$ را عدد s رقمی فرض می‌کنیم که رقمهای آن از دنباله c_s, \dots, c_2, c_1 تشکیل شده باشد. عدد طبیعی k را طوری انتخاب می‌کنیم که $10^k \sqrt{m} < 2\sqrt{m}$ باشد و فرض می‌کنیم $n = [10^k \sqrt{m}] + 1$ که در آن $[x]$ عبارتست از بزرگترین عدد صحیحی که از x کوچکتر نباشد. داریم:

$$10^k \sqrt{m} < n \leq 10^k \sqrt{m} + 1,$$

و از آنجا:

$$10^{2k} m < n^2 \leq 10^{2k} m + 2 \cdot 10^k \sqrt{m} + 1 < 10^{2k} m + 10^{2k} - 1 + 1 < 10^{2k} m + 10^{2k} - 1;$$

بنابراین :

$$10^{2k} \cdot m < n^2 < 10^{2k} \cdot m + (10^{2k} - 1)$$

یعنی :

$$(c_1 c_2 \dots c_s 0 0 \dots 0)_{10} < n^2 < (c_1 c_2 \dots c_s 9 9 \dots 9)_{10}$$

که در آن تعداد رقمهای صفر و یا تعداد رقمهای ۹ مساوی $2k$ است .
از آنجا نتیجه می شود که s رقم اول عدد n^2 عبارتست از دنباله
 c_s, \dots, c_2, c_1

۲۱۱ . اگر n عددی طبیعی باشد ، عدد

$$n^{n+20} - n^n = n^n (n^{20} - 1)$$

بر ۴ قابل قسمت است ، زیرا اگر n عددی زوج باشد ، n^n بر ۴ قابل قسمت است و اگر n عددی فرد باشد ، n^{20} هم عددی فرد می شود و بنابراین مجذور آن یعنی n^{20} در تقسیم بر ۸ باقیمانده ای مساوی واحد دارد ، از آنجا $1 - n^{20}$ بر ۸ قابل قسمت می شود .

بنابراین به ازای هر عدد طبیعی n ، هم عدد $n^{n+20} - n^n$ و هم

$$n^{n+20} - n^n + 20$$

بر ۴ قابل قسمت اند .

ولی اگر a و b دو عدد طبیعی باشند بشرطی که $a > b$ و $a - b$

قابل قسمت بر ۴ باشد ، برای هر عدد طبیعی n ، عدد $n^a - n^b$ بر ۵

قابل قسمت است . در حقیقت $a = b + 4k$ است (k عددی طبیعی است)

بنحوی که داریم : $n^a - n^b = n^b (n^{4k} - 1)$. اگر n بر ۵ قابل قسمت

باشد ، اولین عامل سمت راست تساوی بر ۵ قابل قسمت است و اگر

n بر ۵ قابل قسمت نباشد ، بر اساس قضیه کوچک فرما داریم : $n^4 \equiv 1 \pmod{5}$

از آنجا $n^{2k} \equiv 1 \pmod{5}$ یعنی عامل دوم سمت راست تساوی بر ۵ قابل قسمت است. به این ترتیب ثابت کردیم که اگر a و b عددهائی طبیعی، $a > b$ و $a - b$ قابل قسمت بر ۴ باشد، برای عددهای طبیعی n ، عدد $n^a - n^b$ بر ۵ قابل قسمت است و واضح است که در این صورت $n^b - (n+20)^a$ بر ۵ قابل قسمت است. در حالت خاص، وقتی $a = (n+20)^{n+20}$ و $b = n^n$ باشد، همانطور که قبلاً ثابت کردیم $a - b$ بر ۴ و بنابراین $n^n - (n+20)^{n+20}$ بر ۵ قابل قسمت است و چون این عدد زوج است (زیرا عددهای n و $n+20$ یا هر دوزوج و یا هر دفرزند) برای هر عدد طبیعی n ، عدد $n^n - (n+20)^{n+20}$ بر ۱۰ قابل قسمت می شود. از اینجاست نتیجه می گیریم که دو عدد $(n+20)^{n+20}$ و n^n بیک رقم ختم می شوند.

بنابراین دنباله ای که از رقمهای آخر عدد n^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) تشکیل می شود، متناوب است و ضمناً دوره آن خالص و تعداد جمله های آن بیشتر از ۲۰ نیست. بسادگی می توان حساب کرد که این دوره درست شامل ۲۰ جمله است که از رقمهای زیر تشکیل شده است:

۰، ۹، ۴، ۳، ۶، ۵، ۶، ۳، ۱، ۰، ۹، ۴، ۳، ۶، ۵، ۶، ۷، ۶، ۱

۲۱۲. m را عدد طبیعی دلخواهی فرض کنید. کسر اعشاری نامحدود مفروض را به قطعاتی که هر کدام شامل m رقم باشند، تقسیم می کنیم. تعداد این قطعات بی نهایت زیاد است. از طرف دیگر، تعداد دستگاههای متفاوتی که از m رقم تشکیل شده باشند برابر 10^m است یعنی این تعداد محدود است. بنابراین لااقل یکی از این دستگاهها

باید بی نهایت مرتبه تکرار شده باشد .

تبصره برای عددهای گنگ $\sqrt{2}$ ، π یا e ، ما حتی نمی دانیم کدام رقم در نمایش اعشاری آنها ، بی نهایت مرتبه تکرار می شود ، اگر چه هر یک از این عددها لاقلاً شامل دورقم متفاوت از اینگونه است (و مطلب اخیر را می توان ثابت کرد) .

۲۱۳ . اگر داشته باشیم :

$$3^{2k} = (n+1) + (n+2) + \dots + (n+3^k)$$

بدست خواهد آمد :

$$3^{2k} = 3^k \cdot n + \frac{1}{2} 3^k (3^k + 1)$$

و از آنجا $n = \frac{3^k - 1}{2}$ می شود . به این ترتیب ، عدد 3^{2k} برابر مجموع

3^k جمله از دنباله عددهای طبیعی است که کوچکترین آنها $n+1 = \frac{3^k + 1}{2}$

است . مثلاً (برای $k=1, 2, 3$) داریم :

$$3^2 = 2 + 3 + 4, 3^4 = 5 + 6 + \dots + 13, 3^6 = 14 + 15 + \dots + 40$$

(b) عدد F_n ($n=2, 3, \dots$) فرد است . بنابراین اگر عدد F_n

مساوی مجموع دو عدد اول باشد ، باید یکی از آنها زوج ، یعنی مساوی

۲ و دیگری مساوی $F_n - 2$ باشد . ولی داریم :

$$F_n - 2 = 2^{2^n} - 1 = (2^{2^{n-1}} - 1)(2^{2^{n-1}} + 1)$$

که وقتی $n > 1$ باشد ، عددی است مرکب زیرا $2^{2^{n-1}} - 1 \geq 3$ است .

۲۱۴ . روشن است که اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و $b - a > 1$

باشد، بین a و b لااقل يك عدد طبیعی وجود دارد. در حقیقت، این عدد عبارت از $a+1$ است ($[x]$ بزرگترین عدد صحیحی است که بزرگتر از x نباشد)، زیرا داریم: $a < [a] + 1 \leq a + 1 < b$.

فرض کنید s ، عدد مفروض طبیعی بزرگتر از واحد باشد. در این صورت

$$\mu_s = \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^s} \text{ عدد حقیقی و مثبتی است. برای عددهای طبیعی}$$

$$\mu_s > n \text{ داریم: } n > \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^s} \text{ و از آنجا:}$$

$$\sqrt[n]{n} > \frac{1}{\sqrt{2}-1} \text{ و } \sqrt[n]{n}(\sqrt{2}-1) > 1$$

بنابراین:

$$\sqrt[n]{2n} - \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n}(\sqrt{2}-1) > 1$$

و در نتیجه، عدد طبیعی k وجود دارد بنحوی که داشته باشیم:

$$\sqrt[n]{n} < k < \sqrt[n]{2n} \Rightarrow n < k^n < 2n$$

به این ترتیب می توان m_s را مساوی عدد $[\mu_s] + 1$ گرفت.

برای $s=2$ داریم: $[\mu_2] = 5$ و بین ۵ و ۱۰ يك مجذور کامل

(۳۲) وجود دارد، در حالیکه بین ۴ و ۸ هیچ مجذور کاملی وجود ندارد.

بنابراین کوچکترین عدد m_2 مساوی ۵ است، همچنین بسادگی

می توان حساب کرد که کوچکترین عدد m_3 مساوی ۳۳ است.

۲۱۵۰ را عدد طبیعی دلخواهی می گیریم. طبق قضیه چینی

در باره باقیماندهها، عدد طبیعی x وجود دارد، بنحوی که برای

$i = 1, 2, \dots, m$ داشته باشیم :

$$x \equiv p_i - i + 1 \pmod{p_i^2} \quad (1)$$

که در آن p_i عبارتست از i امین عدد اول .

فاصلهٔ سلسلهٔ عددهای طبیعی که از m عدد $x + 1, \dots, x + m - 1$

تشکیل شده است ، دارای خاصیت مورد نظر مسئله است ، زیرا داریم :

$$x + i - 1 = p_i^2 k_i + p_i \quad (k_i \text{ عددی است صحیح}).$$

بنابراین عدد $x + i - 1$ بر عدد اول p_i قابل قسمت ، ولی بر p_i^2 غیر قابل قسمت است . به این

ترتیب این عدد نمی‌تواند توانی از یک عدد طبیعی بزرگتر از واحد باشد.

۲۱۶ . جواب : $u_n = 3^{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) . اثبات را می‌توان

با کمک استقراء ریاضی انجام داد .

۲۱۷ . جواب : $u_n = (2-n)a + (n-1)b$ برای $n = 1, 2, \dots$

اثبات به کمک استقراء ریاضی بدست می‌آید .

۲۱۸ . $u_n = (-1)^n [(n-2)a + (n-1)b]$ برای $n = 1, 2, \dots$

سادگی می‌توان تحقیق کرد که رابطه برای $n = 1$ و $n = 2$ صحیح است .

فرض می‌کنیم که به ازای عدد طبیعی n ، این رابطه برای u_n و u_{n+1}

صحیح باشد ، با توجه به رابطه $u_{n+2} = -(u_n + 2u_{n+1})$ می‌توان

بسهولت صحت رابطه را برای u_{n+2} تحقیق کرد . بنابراین اثبات به کمک

استقراء ریاضی بدست می‌آید .

در حالت خاص $a = 1$ و $b = -1$ داریم : $u_n = (-1)^{n+1}$

و برای $a = 1$ و $b = -2$ بدست می‌آید : $u_n = (-1)^{n+1} \cdot n$

$$u_n = \frac{3}{4} [3^{n-2} + (-1)^{n-1}]a + \frac{1}{4} [3^{n-1} + (-1)^n]b \quad ۲۱۹$$

برای $n = 1, 2, \dots$ اثبات با استقاده از روش استقراء ریاضی بدست می‌آید .

۲۲۰ . فقط دو عدد صحیح با این خاصیت وجود دارد : $a = 1$

$a = -1$. بسادگی می‌توان تحقیق کرد که این دو عدد در شرایط مفروضه صدق می‌کنند . از این شرط معلوم می‌شود که برای $n = 1$ داریم :

$a^a = a$. بنابراین اگر عدد صحیحی بزرگتر یا مساوی ۲ باشد خواهیم داشت : $a^a > a^2 > a$ که ممکن نیست ، اگر $a \leq -2$ باشد ، بدست

می‌آید : $|a^a| = \frac{1}{|a|^{|a|}} < 1$ که باز هم ممکن نیست ، زیرا $a^a = a$

و برای $a \leq 2$ داریم : $|a^a| = |a| \geq 2$.

۲۲۱* . دو عدد طبیعی دلخواه a و b را بزرگترین مقسوم‌علیه

عدد $a^2 + b^2$ می‌گیریم : $a^2 + b^2 = kc^2$. فرض می‌کنیم $x = a^2k$ و $y = b^2k$ در این صورت

$$x + y = a^2k + b^2k = (a^2 + b^2)k = (kc)^2 \quad \text{و} \quad xy = (abk)^2$$

حالا ثابت می‌کنیم که همه زوج عددهای طبیعی را که مجموع و حاصلضرب مجذور کامل دارند ، می‌توان از این راه و با انتخاب عددهای طبیعی متناظر a و b بدست آورد .

فرض می‌کنیم $x + y = z^2$ و $xy = t^2$ باشد (t و z عددهای طبیعی هستند) . $d = (x, y)$ و c_1 را بزرگترین مقسوم‌علیه مجذور کامل عدد d می‌گیریم ؛ به این ترتیب $d = kc^2$ که در آن k عددی طبیعی و غیر قابل قسمت بربیک مجذور کامل بزرگتر از واحد است . داریم :

$x + y = z^2$ است. از تساوی $(x_1, y_1) = 1$ که در آن $y = dy_1$ ، $x = dx_1$ نتیجه می شود که $(x_1 + y_1)d = z^2$ و از آنجا باید z^2 بر $d = k \cdot c_1^2$ قابل قسمت باشد و چون عدد k بر هیچ مجذور کامل بزرگتر از واحد قابل قسمت نیست z بر kc_1 قابل قسمت و بنا بر این $z = kc_1 z_1$ می شود که در آن z_1 عددی طبیعی است .

از آنجا $(x_1 + y_1)d = x + y = z^2 = k^2 c_1^2 z_1^2 = k d z_1^2$ و در نتیجه $x_1 + y_1 = k z_1^2$ و $x_1 y_1 = \frac{t^2}{d^2}$ می شود که با توجه به اینکه $(x_1, y_1) = 1$ است، نتیجه می شود که عددهای x_1 و y_1 مجذور کامل اند :
 $x_1 = a_1^2$ ، $y_1 = b_1^2$. بنابراین خواهیم داشت: $x = dx_1 = k(c_1 a_1)^2$ ، $y = dy_1 = k(c_1 b_1)^2$ که اگر $a = c_1 a_1$ و $b = c_1 b_1$ فرض کنیم خواهیم داشت: $x = ka^2$ ، $y = kb^2$ و ضمناً

$$a^2 + b^2 = (c_1 a_1)^2 + (c_1 b_1)^2 = c_1^2 (x_1 + y_1) = k(c_1 z_1)^2$$

که با فرض $c_1 z_1 = c$ بدست می آید: $a^2 + b^2 = kc^2$. ضمناً چون k بر هیچ عدد مجذور کاملی بزرگتر از واحد قابل قسمت نیست ، عدد c^2 بزرگترین مقسوم علیه مجذور کامل از عدد $a^2 + b^2$ است .

همه زوج عددهای طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰ که هم مجموع

و هم حاصلضرب آنها مجذور کامل باشند ، عبارتند از :

$$2, 2 ; 5, 20 ; 8, 8 ; 10, 90 ; 18, 18 ; 20, 80 ; 9, 16 ; 32, 32 ; 50, 50 ; 72, 72 ; 2, 98 ; 36, 64$$

۲۲۲ . جمله های دنباله فیبوناچی (که با شرایط $u_1 = u_2 = 1$

معین می شوند) ، وقتی که بزرگتر از 10^4 نباشند ،

بترتیب عبارتند از :

۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹, ۱۴۴, ۲۳۳,

۳۷۷, ۶۱۰, ۹۸۷, ۱۵۹۷, ۲۵۸۴, ۴۱۸۱, ۶۷۶۵

که در بین آنها مجذور کامل تنها عددهای $u_1 = u_2 = 1^2$ و $u_{12} = 12^2$ و مکعب کامل عددهای $u_1 = u_2 = 1^3$ و $u_6 = 2^3$ است [۱۴].

بصره. از جدول عددهای فیبوناچی و تجزیه آنها به عوامل اول معلوم می شود که عددی بزرگتر از ۱۴۴ و کوچکتر از 10^{13} ، در این دنباله وجود ندارد که توانی از یک عدد طبیعی با نمای بزرگتر از واحد باشد. مانمی دانیم که آیا اصولاً چنین عددهائی بزرگتر از ۱۴۴ وجود دارد یا نه ؟

۲۳۳* . صحت قضیه را با استفاده از استقراء روی عدد n ، برای هر عدد طبیعی که بزرگتر از u_n نباشد، ثابت می کنیم. حکم برای $n=1$ صحیح است، زیرا $u_1 = 1$ و برای $n=2$ ، زیرا $u_2 = 1$ است و همچنین برای $n=3$ ، زیرا $u_3 = 2$ است. حالا فرض می کنیم که n عدد طبیعی بزرگتر از ۲ باشد و ضمناً فرض می کنیم که هر عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی u_n را بتوان به صورت مجموع جمله های مختلف دنباله فیبوناچی نوشت.

k را عدد طبیعی می گیریم که برای آن $u_n < k \leq u_{n+1}$ باشد. اگر $k - u_n > u_{n+1}$ باشد، داریم :

$$u_{n+1} \geq k > u_{n-1} + u_n = u_{n+1}$$

که ممکن نیست. بنابراین داریم : $0 < k - u_n \leq u_{n+1}$.

به این ترتیب عدد طبیعی $k - u_n$ به صورت مجموعی از عددهای مختلف دنباله فیبوناچی است که بین آنها عدد u_n وجود ندارد، زیرا

$k = (k - u_n) + u_n$ است. از آنجا نتیجه می شود که $k - u_n \leq u_{n-1} < u_n$ مساوی مجموع چند عدد مختلف از دنباله فیبوناچی است. به این ترتیب ثابت کردیم که هر يك از عددهای طبیعی کوچکتر یا مساوی u_{n+1} را می توان به صورت مجموع عددهای مختلف دنباله فیبوناچی نوشت.

مثال: $1 = u_1$ ، $2 = u_2$ ، $3 = u_2 = u_1 + u_1$ ، $4 = u_1 + u_2$ ،

$$5 = u_2 + u_3$$

$$6 = u_1 + u_4$$

$$7 = u_3 + u_4$$

$$8 = u_4 = u_2 + u_2$$

$$9 = u_1 + u_5$$

$$10 = u_3 + u_5$$

۲۲۴. اثبات را با استفاده از استقراء روی شماره n می دهیم.

رابطه مفروض برای $n = 2$ صحیح است، زیرا $1^2 = 1 + (-1)$

است. فرض می کنیم که این رابطه برای عدد طبیعی $n \geq 2$ صحیح باشد.

در این صورت داریم:

$$u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1} + (-1)^{n-1}$$

و از آنجا بدست می آید:

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - u_n \cdot u_{n+2} &= u_{n+1}^2 - u_n(u_n + u_{n+1}) = \\ &= u_{n+1}(u_{n+1} - u_n) - u_n^2 = u_{n+1} \cdot u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n \end{aligned}$$

یعنی رابطه حکم برای $n + 1$ هم صحیح است.

۲۲۵. قبلاً متذکر می شویم که از اتحاد

$$6t = (t+1)^2 + (t-1)^2 + (-t)^2 + (-t)^2$$

نتیجه می شود که هر عدد صحیح قابل قسمت بر ۶ را می توان به صورت

مجموعی از ۴ مکعب کامل نوشت .

چون برای هر عدد صحیح k و هر عدد طبیعی n ، وقتی $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ باشد، هر يك از عددهای $6k+r - (6n+r)^2$ بر ۶ قابل قسمت اند (زیرا وقتی r عددی صحیح باشد $r^2 - r$ بر ۶ قابل قسمت است) ، بنابراین هر عدد صحیح را می توان به بی نهایت طریق به صورت مجموعی از پنج مکعب کامل نوشت .

۲۲۶ . اثبات این قضیه بلافاصله از اتحاد زیر نتیجه می شود :

$$3 = (4 + 24n^2)^2 + (4 - 24n^2)^2 + (-24n^2)^2 + (-5)^2$$

که برای $n = 1, 2, \dots$ صحیح است .

۲۲۷ . اثبات با توجه به دو اتحاد زیر ، که برای $t > 8$ صحیح اند،

بدست می آید :

$$(t-8)^2 + (t-1)^2 + (t+1)^2 + (t+8)^2 = (t-7)^2 + \\ + (t-4)^2 + (t+4)^2 + (t+7)^2,$$

$$(t-8)^2 + (t-1)^2 + (t+1)^2 + (t+8)^2 = (t-7)^2 + \\ + (t-4)^2 + (t+4)^2 + (t+7)^2$$

۲۲۸ . فرض می کنیم که يك برای عدد طبیعی m داشته باشیم :

$$4^m \cdot v = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

و مثلاً a در شرط $0 \leq a < 2^{m-1}$ صدق کند . در اینجا $a = 0$ نمی تواند

باشد، زیرا در این صورت عدد $4^m \cdot v$ مساوی مجموع سه مربع کامل از

عددهائی صحیح می شود ، که ممکن نیست . بنابراین $m > 1$ و

$a = 2^k(2t-1)$ می شود که $k \leq m-2$ عدد صحیح غیر منفی و t عددی

طبیعی است. از آنجا:

$$4^{m \cdot 7} - [2^k(2t-1)]^2 = 4^k[4^{m-k \cdot 7} - (\lambda u + 1)] = 4^k(\lambda v + 7)$$

که در آن v و u عددهائی صحیح اند (زیرا $k \leq m-2$ و از آنجا $m-k \geq 2$ است) و بنابراین

$$4^k(\lambda v + 7) = b^2 + c^2 + d^2$$

که ممکن نیست.

تبصره. بسادگی می توان ثابت کرد که عدد $4^m \cdot 7$ (m عددی طبیعی است) را لااقل یک طریق می توان به صورت مجموع چهار مربع کامل از عددهای طبیعی نوشت، زیرا داریم:

$$4^m \cdot 7 = (2m)^2 + (2m)^2 + (2m)^2 + (2m+1)^2$$

۲۳۹. شش جواب برای کوچکترین عددهای طبیعی بزرگتر از ۲،

که بتوان هر یک از آنها را به صورت مجموع دو مکعب کامل نوشت چنین اند:

$$1^2 + 2^2 = 9, 2^2 + 2^2 = 16, 1^2 + 3^2 = 28, 2^2 + 3^2 = 35, \\ 3^2 + 3^2 = 54, 1^2 + 4^2 = 65$$

هیچیک از عددهای ۹، ۱۶، ۲۸، ۳۵ و ۵۴ نمی توانند به صورت

مجموع دو مربع کامل در آیند، ولی $65 = 1^2 + 8^2$ است.

بنابراین کوچکترین عدد طبیعی بزرگتر از ۲ که هم به صورت

مجموع دو مربع کامل و هم به صورت دو مکعب کامل در می آید، عدد ۶۵ است.

برای اینکه ثابت کنیم بی نهایت عدد طبیعی وجود دارد، که

بتوان هر يك از آنها را هم به صورت مجموع دو مربع كامل وهم به صورت مجموع دو مكعب كامل از عددهای طبیعی و نسبت بهم اول نوشت، كافی است توجه كنیم كه به ازای هر عدد طبیعی k داریم :

$$1 + 26k = 1^2 + (22k)^2 = 1^2 + (22k)^2$$

۰۲۳۰. از این قبیل اند مثلا عددهای $1 + 26s$ ، زیرا $s!$ بر k

قابل قسمت است ($k = 1, 2, \dots, s$). واضح است كه در اینجا بجای $s!$

می توان كوچكترین مضرب مشترك عددهای $1, 2, \dots, s$ را گرفت .

۰۲۳۱*. مثلاً همه عددهای به صورت $6 \cdot 8^n$ از این قبیل اند

($n = 0, 1, 2, \dots$). در حقیقت هیچيك از این عددها مساوی مجموع

مكعبات دو عدد صحیح نیستند، زیرا در حالتی كه n زوج باشد، در

تقسیم بر ۹ باقیماندهای مساوی ۶ می دهند و وقتی n فرد باشد باقیماندهای

مساوی ۳، ولی در تقسیم مجموع دو مكعب عددهای صحیح بر ۹ نمی توان

به باقیماندهای ۳ یا ۶ (و همچنین ۴ یا ۵) رسید، زیرا در تقسیم هر

مكعب كامل يك عدد صحیح بر ۹، یکی از باقیماندههای ۰، ۱ یا

۱ - بدست می آید و بنابراین باقیمانده تقسیم مجموع دو مكعب كامل

بر ۹ مساوی ۰، ۱، -۱، ۲ یا -۲ می شود .

ولی بسادگی می توان تحقیق کرد :

$$6 = \left(\frac{17}{21}\right)^2 + \left(\frac{37}{21}\right)^2$$

و از آنجا :

$$6 \cdot 8^n = \left(\frac{17 \cdot 2^n}{21}\right)^2 + \left(\frac{37 \cdot 2^n}{21}\right)^2$$

بنابراین عددهای $۶ \cdot ۸^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) می‌توانند به صورت مجموع مکعبات دو عدد گویا نوشته شوند .

۲۳۲* . اثبات آ . شینتسل را می‌آوریم .

مثل عددهای به صورت $۷ \cdot ۸^n$ از این قبیل‌اند ($n = 0, 1, 2, \dots$) در حقیقت از یکطرف داریم: $(۲^n)^3 - (۲^n + 1)^3 = ۷ \cdot ۸^n$ ، از طرف دیگر ثابت می‌کنیم که هیچیک از عددهای $۷ \cdot ۸^n$ مساوی مجموع مکعبهای دو عدد طبیعی نیستند . این مطلب بسادگی برای حالت‌های $n = 0$ و $n = 1$ تحقیق می‌شود . حالا فرض می‌کنیم که عدد طبیعی n وجود داشته باشد بنحوی که $۷ \cdot ۸^n$ مساوی مجموع مکعبهای دو عدد طبیعی باشد ؛ می‌توان n را کوچکترین این عددها در نظر گرفت ؛ به این ترتیب $n \geq 2$ می‌شود و

$$۷ \cdot ۸^n = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

که در آن x و y عددهائی طبیعی هستند . چون سمت چپ تساوی عددی زوج است ، عددهای x و y یا هر دو زوج و یا هر دو فرد می‌شوند .

اگر x و y عددهائی فرد باشند ، عدد $x^2 - xy + y^2$ هم فرد می‌شود و چون عدد سمت چپ تنها دو مقسوم‌علیه فرد دارد: ۱ و ۷ ، یا $x^2 - xy + y^2 = ۱$ و یا $x^2 - xy + y^2 = ۷$ می‌شود . در حالت اول $x^2 + y^3 = x + y$ می‌شود و چون x و y عددهائی طبیعی هستند باید $x = y = ۱$ باشد ، بنابراین $۷ \cdot ۸^n = ۲$ می‌شود که ممکن نیست . اگر $x^2 - xy + y^2 = ۷$ باشد ، باید داشته باشیم :

$$(2x - y)^2 + 3y^2 = (2y - x)^2 + 3x^2 = 28$$

که از آنجا بدست می‌آید: $3x^2 \leq 28$ و $3y^2 \leq 28$ و بنابراین $x \leq 3$ و $y \leq 3$ و از آنجا $x^2 + y^2 \leq 54$ که باز هم ممکن نیست، زیرا داریم:

$$x^2 + y^2 = 7 \cdot 8^n \geq 7 \cdot 8^1$$

بنابراین x و y هر دو زوج اند: $x = 2x_1$, $y = 2y_1$.
 عددهائی طبیعی هستند). چون $x^2 + y^2 = 7 \cdot 8^n$ بود بدست می‌آید:
 $x_1^2 + y_1^2 = 7 \cdot 8^{n-1}$ که برخلاف تعریف عدد n است.

به این ترتیب ثابت کردیم که عدد $7 \cdot 8^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) دارای خاصیت مورد نظر مسئله است.

تبصره، می‌توان ثابت کرد که بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد که بریک مکعب کامل بزرگتر از واحد قابل قسمت نیستند و به صورت مجموع مکعبهای دو عددگویا هم در نمی‌آیند (اثبات مشکل است). عددهای کوچکتر از ۵۰ که دارای این خاصیت‌اند چنین‌اند:

۳, ۴, ۵, ۱۰, ۱۱, ۱۴, ۱۸, ۲۱, ۲۳, ۲۵, ۲۹, ۳۶, ۳۸, ۳۹, ۴۱, ۴۴, ۴۵, ۴۶, ۴۷

عدد ۲۲ را می‌توان به صورت مجموع مکعبهای دو عدد گویا نوشت (البته با مخرجهای بزرگ):

$$22 = \left(\frac{17299}{9954}\right)^2 + \left(\frac{25469}{9953}\right)^2$$

۲۳۳* اثبات آ. شینتسل.

مثلاً عددهای $(2^k - 1)2^{nk}$ دارای این خاصیت‌اند ($n = 0, 1, 2, \dots$)

در حقیقت چون داریم:

$$(2^k - 1)2^{nk} = (2^{n+1})^k - (2^n)^k$$

این مطلب باقی‌مانده که ثابت کنیم، معادله

$$(2^k - 1)2^{nk} = u^k + v^k \quad (1)$$

برای عددهای u و v جواب ندارد. این حکم برای $n=0$ صحیح است، زیرا $1^k + 1^k < 2^k - 1 < 2^k + 1^k$.

فرض می‌کنیم عددهای طبیعی برای n وجود داشته باشد که به ازای آنها معادله (۱) برای عددهای طبیعی u و v دارای جواب باشد و n را کوچکترین آنها می‌گیریم. اگر عددهای u و v هر دو زوج باشد: $u = 2u_1$ ، $v = 2v_1$ ، با توجه به رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$(2^k - 1)2^{(n-1)k} = u_1^k + v_1^k$$

که برخلاف فرض ما درباره عدد n است. بنابراین، چون سمت چپ معادله (۱) عددی زوج است، باید عددهای u و v هر دو فرد باشند. k را عدد فردی بزرگتر از ۳ می‌گیریم. در این صورت از رابطه

$$\frac{u^k + v^k}{u + v} = u^{k-1} - u^{k-2}v + u^{k-3}v^2 \dots + v^{k-1}$$

(در سمت راست این رابطه k جمله وجود دارد که همه آنها عددهای فرد هستند)، نتیجه می‌شود که سمت چپ عددی فرد است و چون مقسوم‌علیهی از $(2^k - 1)2^{nk}$ است، خواهیم داشت:

$$\frac{u^k + v^k}{u + v} \leq 2^k - 1$$

می‌توانیم $u \geq v$ فرض کنیم. در این صورت

$$\frac{u^k + v^k}{u + v} \geq v^{k-1}$$

و بنا بر این $2^k < v^{k-1}$ و از آنجا $3 < 2^{\frac{k}{2k+1}} < v$ می شود (چون $k > 3$ بود) و چون v عددی است فرد ، پس $v = 1$ می شود . از آنجا

$$\frac{u^k + v^k}{u + v} = \frac{u^k + 1}{u + 1} > u^{k-2}(u-1) > (u-1)^{k-1}$$

بنا بر این $2^k < (u-1)^{k-1}$ که می دهد $3 < u-1$ و از آنجا ، با توجه به فرد بودن عدد u یا $u=1$ و یا $u=3$ می شود . حالت $u=1$ ممکن نیست ، زیرا منجر به تساوی $u^k + v^k = 2$ می شود که با تساوی (۱) نمی سازد .

حالت $u=3$ هم ممکن نیست ، زیرا بدست می آید :

$$\frac{u^k + v^k}{u + v} = \frac{3^k + 1}{4}$$

که از $2^k - 1$ بزرگتر است (برای $k > 3$) .

حالا فرض می کنیم که k عدد زوج طبیعی باشد . با توجه به فرد بودن عددهای v و u ، عدد $u^2 + v^2$ در تقسیم بر ۴ باقیمانده ای مساوی ۲ می دهد که ممکن نیست ، زیرا سمت چپ رابطه (۱) بر ۴ قابل قسمت است .

به این ترتیب قضیه ثابت شد .

تبصره . (آر.روتکوویچ) . برای هر عدد طبیعی $n > 1$ ، بی نهایت عدد طبیعی وجود دارد که مساوی مجموع توانهای n ام دو عدد طبیعی باشد ، ولی مساوی تفاضل توانهای n ام دو عدد طبیعی نباشد .

اثبات . اگر n بر ۲ قابل قسمت باشد ، برای عددهای طبیعی $|k|$ عدد $(2k+1)^n + (2l+1)^n$ مساوی مجموع توانهای n ام دو عدد طبیعی

است ، ولی (چون به صورت $۲ + ۴t$ است) نمی تواند مساوی تفاضل مربعهای دو عدد طبیعی باشد ، یعنی مساوی تفاضل توانهای n ام دو عدد طبیعی هم نیست. اگر n بر ۲ قابل قسمت نباشد، عدد $(۲^k)^n + ۲(k+۱)n = (۲^n + ۱)۲^{nk}$ برای $k = ۰, ۱, ۲, \dots$ ، مساوی تفاضل توانهای n ام دو عدد طبیعی نیست . در حقیقت اگر داشته باشیم : $(۲^n + ۱)۲^{nk} = x^n - y^n$ ، که در آن x و y

$(x > y)$ عددهائی طبیعی هستند ، عددهای $x_1 = \frac{x}{(x,y)}$ و $y_1 = \frac{y}{(x,y)}$

عددهای طبیعی هستند و نمی توانند هر دوزوج باشند ، از آنجا بسادگی معلوم

می شود که $\frac{x_1^n - y_1^n}{x_1 - y_1}$ بر ۲ قابل قسمت نیست و چون داریم :

$$(۲^n + ۱)۲^{nk} = (x,y)^n (x_1 - y_1) \frac{x_1^n - y_1^n}{x_1 - y_1},$$

معلوم می شود که $۲^n + ۱$ بر $\frac{x_1^n - y_1^n}{x_1 - y_1}$ قابل قسمت و از آنجا خواهیم داشت:

$$\frac{x_1^n - y_1^n}{x_1 - y_1} \leq ۲^n + ۱$$

ولی داریم : $x_1^{n+1} \geq x_1^{n+1} \geq ۳^{n-1}$ (چون $x_1 = ۲$ نمی تواند

باشد، زیرا در این صورت $y_1 = ۱$ می شود، یعنی $۲^n + ۱$ بر $۲^n - ۱$ قابل قسمت می شود که ممکن نیست)، بنابراین $۲^n + ۱ < ۳^{n-1}$ می شود که برای $n \geq ۳$ ممکن نیست .

۲۴۴ . رابطه زیر واضح است :

$$۱^۲ + ۲^۲ + \dots + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

بنابراین باید کوچکترین عدد طبیعی $n > ۱$ را چنان پیدا کنیم

که $6m^2 = (n+1)(2n+1)$ باشد (m عددی طبیعی است). ۶ حالت در نظر می‌گیریم:

(۱) $n = 6k$ (k عددی طبیعی است). معادله مفروض به صورت $m^2 = k(6k+1)(12k+1)$ درمی‌آید. در اینجا عوامل سمت چپ تساوی دو به دو نسبت بهم اولند، یعنی همه باید مجذور کامل باشند. اگر $k=1$ باشد، $6k+1$ مجذور کامل نیست. اگر $k=4$ باشد $6k+1=5^2$ و $12k+1=7^2$ می‌شود و بنابراین برای $n=6k=24$ مجموع $1^2+2^2+\dots+24^2$ مساوی مجذور عدد ۷۰ می‌شود.

(۲) $n = 6k+1$ (k عددی طبیعی است). داریم:

$$(6k+1)(2k+1)(2k+1) = m^2$$

و هر يك از عددهای $6k+1$ ، $2k+1$ ، و $2k+1$ (که دوه دو نسبت بهم اولند) باید مجذور کامل باشند.

کوچکترین عدد k که به ازای آن عدد $2k+1$ مجذور کامل باشد $k=4$ است که در این صورت $n=6k+1 > 24$ می‌شود.

(۳) $n = 6k+2$ (k عددی طبیعی و یا صفر است). بدست می‌آید:

$$(3k+1)(2k+1)(12k+5) = m^2$$

و عددهای $3k+1$ ، $2k+1$ ، و $12k+5$ (که دو به دو نسبت بهم اولند) باید مجذور کامل باشند. اگر $k=0$ باشد $2k+5$ مجذور کامل نیست و برای اینکه $2k+1$ ($k \neq 0$) مجذور کامل شود باید $k \geq 4$ باشد که از آنجا $n=6k+2 > 24$ می‌شود.

(۴) $n = 6k + 3$ ($k \geq 0$ عددی صحیح است) . داریم :

$$(2k+1)(3k+2)(12k+7) = m^2$$

که ضمناً بسادگی روشن می‌شود که عددهای $2k+1$ ، $3k+2$ و $12k+7$ دو به دو نسبت بهم اولند ، یعنی باید هر کدام مجذور کامل باشند . چون عدد $3k+2$ به ازای $k=0,1,2,3$ مجذور کامل نیست باید $k \geq 4$ باشد ، که در آن صورت $n = 6k + 3 > 24$ می‌شود .

(۵) $n = 6k + 4$ ($k \geq 0$ عددی صحیح است) . داریم :

$$(3k+2)(6k+5)(4k+3) = m^2$$

که چون عددهای $3k+2$ ، $4k+3$ و $6k+5$ دو به دو نسبت بهم اولند ، باید هر کدام مجذور کامل باشند . در اینجا k نمی‌تواند یکی از عددهای 0 ، 1 ، 2 ، و 3 باشد ، زیرا عدد $3k+2$ مجذور کامل نیست . بنابراین $k \geq 4$ و از آنجا $n = 6k + 4 > 24$ می‌شود .

(۶) $n = 6k + 5$ ($k \geq 0$ عددی صحیح است) . داریم :

$$(6k+5)(k+1)(12k+11) = m^2$$

که در آن عددهای $6k+5$ ، $k+1$ و $12k+11$ دو به دو نسبت بهم اول و بنابراین باید هر کدام مجذور کامل باشند . در اینجا k نمی‌تواند یکی از عددهای 0 ، 1 ، 2 ، و 3 باشد ، زیرا در این صورت $6k+5$ مجذور کامل نیست . بنابراین $k \geq 4$ و از آنجا $n = 6k + 5 > 24$ می‌شود .

به این ترتیب ثابت کردیم که کوچکترین عدد طبیعی $n > 1$ ، که

به ازای آن $n^2 + n^2 + \dots + 1^2$ مساوی یک مجذور کامل باشد $n = 24$

است .

تبصره. با سختی می توان ثابت کرد که $n = 24$ تنها عدد طبیعی بزرگتر از واحد است که به ازای آن مجموع $n^2 + 2^2 + \dots + 1^2$ مساوی مجذور کامل یک عدد طبیعی باشد. در حالیکه مجموع $n^3 + 2^3 + \dots + 1^3$ برای هر عدد طبیعی $n > 1$ مجذور کامل است ولی به ازای هیچ عدد طبیعی $n > 1$ نمی تواند مکعب کامل باشد.

(۲۳۵. a) عددهای مورد نظر عبارتند از همه عددهای طبیعی بجز

عددهای زیر:

$$1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 19, 23$$

بسادگی می توان ثابت کرد که هیچکدام از این ۱۲ عدد نمی توانند مساوی مجموع محدودی از توانهای صحیح باشند (این توانهای صحیح بترتیب مقدار آنها عبارتند از $2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, \dots$).

حالا فرض می کنیم n عددی طبیعی و غیر از ۱۲ عدد نامبرده باشد.

اگر $n = 4k$ باشد (k عددی است طبیعی)، در این صورت عدد

n برابر است با مجموع k عدد مساوی 2^2 .

اگر $n = 4k + 1$ باشد، چون $n \neq 1$ و $n \neq 5$ است، می توان

فرض کرد $k \geq 2$ بنحوی که داشته باشیم: $n = 4k + 1 = 3^2 + 4(k - 2)$

که در آن $k - 2 \geq 0$ عددی است صحیح. اگر $k = 2$ باشد $n = 3^2$

و اگر $k > 2$ باشد $n = 3^2 + 2^2 + \dots + 2^2$ می شود که تعداد جمله های

2^2 در آن مساوی $k - 2$ است.

اگر $n = 4k + 2$ باشد، چون n مساوی ۶، ۱۰ و ۱۴ نیست

داریم $k \geq 4$ و $n = 4k + 2 = 3^2 + 3^2 + 4(k - 4)$ و از آنجا نتیجه

می شود که n دارای خاصیت مورد نظر مسئله است.

بالاخره اگر $n = 4k + 3$ باشد، چون n مساوی عددهای ۳، ۷،

۱۱، ۱۵، ۱۹ و ۲۳ نیست $k \geq 6$ و $n = 3^2 + 4(k-6)$ می شود و بنابراین صحت حکم در این حالت هم ثابت می شود.

(b) داریم :

$$1 = 3^2 - 2^2, 2 = 3^3 - 5^2, 3 = 2^7 - 5^2, 4 = 5^2 - 11^2 = 2^2 - 2^2$$

$$5 = 3^2 - 2^2 = 2^5 - 3^3, 7 = 2^7 - 11^2, 8 = 2^4 - 2^3, 9 = 5^2 - 4^2,$$

$$10 = 13^2 - 3^2$$

تبصره. نمی دانیم که آیا ۶ می تواند مساوی تفاضل دو توان صحیح باشد یا نه ؟

این هئوزیک فرضیه است که هر عدد طبیعی را می توان به صورت تفاضل دو توان صحیح نوشت .

۲۳۶. اگر $a^2 + b^2 = c^2$ ، a ، b و c عددهائی طبیعی باشند،

با ضرب طرفین تساوی در

$$a^{2(4n^2-1)} \cdot b^{4n(2n+1)(n-1)} \cdot c^{4n^2(2n-1)}$$

بدست می آید :

$$\left[(a^{2n} b^{(2n+1)(n-1)} c^{n(2n-1)})^{2n} \right]^2 + \left[(a^{2n+1} b^{2n^2-1} c^{2n^2})^{2n-1} \right]^2 =$$

$$= \left[(a^{2n-1} b^{2n(n-1)} c^{2n^2-2n+1})^{2n+1} \right]^2$$

۲۳۷. تنها يك عدد طبیعی با این خاصیت وجود دارد: $n = 5$.

بسادگی می توان تحقیق کرد که این عدد در معادله $(n-1)! + 1 = n^2$

صدق می کند و همچنین عددهای ۲، ۳ و ۴ در آن صدق نمی کنند.

برای $n = 6$ داریم $n^2 > 6n - 4$ و به کمک استقراء ریاضی بسادگی

ثابت می شود که این نامساوی برای هر عدد طبیعی $n \geq 6$ صحیح است.

اگر n عددی طبیعی و بزرگتر یا مساوی ۶ باشد داریم :

$$(n-1)! + 1 > 2(n-1)(n-2) = n^2 + [n^2 - (6n-4)] > n^2$$

چون $n^2 > 6n - 4$ بود . به این ترتیب برای عددهای طبیعی $n > 5$ تساوی $n^2 = (n-1)! + 1$ ممکن نیست .

تبصره. تنها دو عدد طبیعی بزرگتر از ۵ شناخته شده است که به ازای آنها $(n-1)! + 1$ بر n^2 قابل قسمت است . یعنی عددهای ۱۳ و ۵۶۳ . عددهای دیگری با این خاصیت نمی‌شناسیم و نمی‌دانیم که آیا تعداد آنها محدود است یا نامحدود . ولی این مطلب معلوم است که هر عددی با این خاصیت باید اول باشد .

متذکر می‌شویم که به ازای $n = 5, 6, 8$ ، عدد $(n-1)! + 1$ مجذور کامل است (بر ترتیب مجذور عددهای ۵ ، ۱۱ و ۷۱ بدست می‌آید) ، ولی معلوم نیست که آیا عددهای دیگری با این خاصیت وجود دارد یا نه ؟

۲۳۸ . اگر برای عدد طبیعی $n > 1$ داشته باشیم :

$$(n^2 - 2)n^2 = (2m)^2$$

و چون $n^2 - 1$ و n^2 نسبت بهم اولند باید هر کدام مجذور کامل باشند که ممکن نیست ، زیرا تفاضل دو مجذور کامل نمی‌تواند مساوی واحد باشد .

حالا n را عدد طبیعی مفروضی می‌گیریم . در این صورت معادله

$$x^2 - n(n+1)y^2 = 1$$

است . در حقیقت یکی از این جوابها $x = 2n + 1$ و $y = 2$ است و اگر

به ازای عددهای طبیعی x و y معادله $x^2 - n(n+1)y^2 = 1$ برقرار باشد

معادله زیر هم برقرار است :

$$[(2n+1)x + 2n(n+1)y]^2 - n(n+1)[2x + (2n+1)y]^2 = 1$$

بالاخره اگر برای عددهای طبیعی x و y داشته باشیم:

$$x^2 - n(n+1)y^2 = 1$$

در این صورت داریم:

$$t_n \cdot t_{2n} y^2 = t_n \cdot t_n \cdot y^2 (2t_n \cdot y^2 + 1) = t_n^2 \cdot y^2 \cdot x^2 = (t_n \cdot yx)^2$$

مثلا برای $n=2$ داریم:

$$t_2 \cdot t_{24} = 30^2, \quad t_2 \cdot t_{2400} = (30 \cdot 20 \cdot 49)^2$$

از آنجا داریم: $2^{10} = 1024 > 10^2 \cdot 239$

$$2^{1945} = 2^5 (2^{10})^{194} > 10 \cdot 10^{2 \cdot 194} = 10^{582},$$

$$2^{1945} > 2^{10^{582}} = (2^{10})^{10^{582}} > 10^{3 \cdot 10^{582}}$$

و عدد اخیر هم بیش از 10^{582} رقم دارد.

تعداد رقمهای عدد $1 + 5 \cdot 2^{1947}$ برابر است با تعداد رقمهای عدد $10 \cdot 2^{1946} = 5 \cdot 2^{1947}$ و چون داریم: $\log_{10} 2 = 0,30103 \dots$ در این صورت:

$$2^{1946} = 10^{1946 \log 2} = 10^{585,8 \dots}$$

و از آنجا نتیجه می شود که عدد $1 + 5 \cdot 2^{1947}$ دارای ۵۸۷ رقم است.

تبصره. عدد F_{1945} بزرگترین عدد مرکبی است که از عددهای فرما شناخته شده است.

۰۲۴۰ واضح است که تعداد رقمهای عدد $1 - 2^{11213}$ (در دستگاه

عدد شماری به مبنای ۱۰) برابر است با تعداد رقمهای عدد 2^{11213} ، که تنها در رقم آخر با آن اختلاف دارد. بنابراین کافی است تعداد رقمهای عدد اخیر را پیدا کنیم.

اگر n عددی طبیعی به صورت 10^x باشد ($x \geq 0$ عددی است حقیقی)

و $[x]$ را بزرگترین عدد صحیحی بگیریم که از x بزرگتر نباشد، داریم: $10^{[x]} < n \leq 10^{[x]+1}$ ، از آنجا نتیجه می‌شود که عدد n $[x]+1$ رقم دارد، از طرف دیگر داریم: $2^{11213} = 10^{11213 \log_2 2}$ و چون داریم $3376 < 11213 \log_2 2 < 3375$ ، در این صورت $\log_2 2 = 0,30103\dots$ بنا بر این عدد $2^{11213} - 1$ شامل 3376 رقم است (در دستگاه عدد شماری به مبنای ۱۰).

۰۲۴۱ داریم:

$$2^{11212}(2^{11213} - 1) = 2^{22425} - 2^{11212}$$

ابتداء تعداد رقمهای عدد 2^{22425} را محاسبه می‌کنیم. چون داریم:

$$22425 \log_{10} 2 = 22425 \cdot 0,30103\dots = 6750,597\dots$$

در این صورت (حل مسئله ۴۰ را ببینید)، عدد 2^{22425} دارای 6751 رقم است. از طرف دیگر داریم:

$$2^{22425} = 10^{6750,100,597\dots}$$

و چون $3 > 10^{\frac{1}{2}} > 10^{0,597\dots}$ ، پس

$$10^{6751} > 2^{22425} > 3 \cdot 10^{6750}$$

از آنجا نتیجه می‌شود که اولین رقم عدد 2^{22425} باید بزرگتر یا مساوی ۳ باشد. بنابراین تعداد رقمهای عدد 2^{22425} ، با کم کردن 2^{11212} از آن (که رقمهای کمتری دارد)، تغییر نمی‌کند. به این ترتیب عدد $(2^{11212} - 1)$ دارای 6751 رقم است.

۰۲۴۲ داریم:

$$3! = 6, 3!! = 6! = 720, 3!!! = 720! > 99! \cdot 100^{21} > 10^{1242}$$

یعنی عدد $3!!!$ بیش از هزار رقم دارد .

بر اساس قضیه‌ای* که طبق آن : اگر m عددی طبیعی و p عددی اول باشد، بزرگترین توان عدد p که مقسوم‌علیه‌ی $m!$ باشد، عبارتست از

$$\left[\frac{m}{p} \right] + \left[\frac{m}{p^2} \right] + \left[\frac{m}{p^3} \right] + \dots$$

منظور از $[x]$ عبارتست از بزرگترین عدد صحیحی که کوچکتر یا مساوی x باشد. از اینجا معلوم می‌شود که بزرگترین توان 5 که مقسوم‌علیه $720!$ باشد، $3!!! = 720!$ چنین است :

$$\left[\frac{720}{5} \right] + \left[\frac{720}{25} \right] + \left[\frac{720}{125} \right] + \left[\frac{720}{625} \right] = 144 + 28 + 5 + 1 = 178$$

و بزرگترین توان 2 که مقسوم‌علیه $720!$ است از 178 بزرگتر است، زیرا $\left[\frac{720}{2} \right] = 360$ می‌شود. بنابراین روشن می‌شود که عدد $720! = 3!!!$ به 178 سفر ختم می‌شود.

* ۳۴۳. حل آ. شینتسل را می‌آوریم.

این خاصیت برای عددهای طبیعی m وجود دارد که توانی از یک عدد اول باشند (با نمای طبیعی) و تنها برای چنین عددهائی از m . در حقیقت اگر $m = p^k$ باشد (p عددی اول و k عددی طبیعی است)، برای $f(x) = x^{\varphi(p^k)}$ ، در حالتی که x بر p قابل قسمت نباشد طبق قضیه اولرد داریم: $f(x) \equiv 1 \pmod{p^k}$ و در حالتی که x بر p قابل قسمت باشد x^k هم بر p^k قابل قسمت است و چون $p^k \geq p^{k-1} \geq k$ ($\varphi(p^k)$ که

(* اثبات این قضیه را در ضمیمه کتاب ببینید .

سادگی و به کمک استقراء ریاضی برای عددهای طبیعی k ثابت می شود،
 $x^{p^k} \equiv 0 \pmod{p^k}$ قابل قسمت و بنابراین $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ می شود.
 اگر m عددی طبیعی و بزرگتر از واحد باشد ولی توانی از یک عدد
 اول نباشد، لااقل دو مقسوم علیه اول مختلف دارد: p و $q \neq p$. فرض
 می کنیم $f(x)$ کثیرال جمله ای با ضرایب صحیح و عددهای صحیح x_1 و
 x_2 چنان باشند که $f(x_1) \equiv 0 \pmod{m}$ و $f(x_2) \equiv 1 \pmod{m}$ باشد
 در این صورت چون m بر p و q قابل قسمت است $f(x_1) \equiv 0 \pmod{p}$
 و $f(x_2) \equiv 1 \pmod{q}$ می شود. ولی p و q دو عدد اول مختلف اند،
 بنابراین با توجه به قضیه چینی در مورد باقیمانده ها عدد صحیح x_0
 وجود دارد بنحوی که $x_0 \equiv x_1 \pmod{p}$ و $x_0 \equiv x_2 \pmod{q}$ باشد که
 از آنجا بدست می آید:

$$f(x_0) \equiv f(x_1) \equiv 0 \pmod{p}, \quad f(x_0) \equiv f(x_2) \equiv 1 \pmod{q}$$

از همبستگی اول نتیجه می شود که $f(x_0) \equiv 1 \pmod{m}$ نمی تواند
 برقرار باشد و از همبستگی دوم نتیجه شود که $f(x_0) \equiv 0 \pmod{m}$
 برقرار نیست.

بداین ترتیب در تقسیم $f(x_0)$ بر m نه باقیمانده صفر نه باقیمانده
 ۱ بدست نمی آید. بنابراین اگر m توانی از یک عدد اول نباشد، هیچ
 کثیرال جمله $f(x)$ با ضرایب صحیح وجود ندارد که با شرایط مسئله بسازد.
 ۲۴۴. سادگی می توان فهمید که

$$D < [(4m^2 + 1)n + m + 1]^2$$

بنابراین قسمت صحیح عدد \sqrt{D} عبارتست از $a_0 = (4m^2 + 1)n + m$

از آنجا

$$D - a_0^2 = 4mn + 1$$

به این ترتیب: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{D} - a_0} = \frac{\sqrt{D} + a_0}{D - a_0^2}$ و $\sqrt{D} = a_0 + \frac{1}{x_1}$

چون $a_0 < \sqrt{D} < a_0 + 1$ داریم، \sqrt{D} صحیح عدد است، داریم: و از آنجا

$$2a_0 < \sqrt{D} + a_0 < 2a_0 + 1$$

که با توجه به اینکه $a_0 = (4mn + 1)m + n$ است، بدست می آید:

$$2m + \frac{2n}{4mn + 1} < \frac{\sqrt{D} + a_0}{D - a_0^2} < 2m + \frac{2n + 1}{4mn + 1}$$

از آنجا، چون $\frac{2n + 1}{4mn + 1} < 1$ است، نتیجه می شود که قسمت

صحیح عدد $x_1 = \frac{\sqrt{D} + a_0}{D - a_0^2}$ عبارتست از عدد $a_1 = 2m$. به این ترتیب

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} \quad \text{و} \quad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$$

از طرف دیگر داریم:

$$x_1 - a_1 = \frac{\sqrt{D} + a_0}{4mn + 1} - 2m = \frac{\sqrt{D} - [(4mn + 1)m - n]}{4mn + 1}$$

بنابراین:

$$x_2 = \frac{(4mn + 1)[\sqrt{D} + (4mn + 1)m - n]}{D - [(4mn + 1)m - n]^2}$$

ولی بسادگی می توان تحقیق کرد:

$$D = [(4mn + 1)m - n]^2 + (4mn + 1)^2$$

و بنابراین :

$$x_r = \frac{\sqrt{D} + (4mn + 1)m - n}{4mn + 1}$$

و چون $a_0 < \sqrt{D} < a_0 + 1$ است ، بترتیب داریم :

$$(4mn + 1)m + n < \sqrt{D} < (4mn + 1)m + n + 1,$$

$$2m < x_r < 2m + \frac{1}{4mn + 1}$$

یعنی قسمت صحیح عدد x_r عبارتست از $a_r = 2m$. بنابراین

$$x_r = a_r + \frac{1}{x_r - a_r} \text{ و } x_r = \frac{1}{x_r - a_r} \text{ می شود و داریم :}$$

$$\begin{aligned} x_r - a_r &= \frac{\sqrt{D} + (4mn + 1)m - n}{4mn + 1} - 2m = \\ &= \frac{\sqrt{D} - (4mn + 1)m - n}{4mn + 1} \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} x_r &= \frac{(4mn + 1)\sqrt{D} + (4mn + 1)m + n}{D - [(4mn + 1)m + n]^2} = \\ &= \sqrt{D} + (4mn + 1)m + n = \sqrt{D} + a_0 \end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می شود که قسمت صحیح عدد x_0 عبارتست از $2a_0$ و عدد \sqrt{D} به کسر مسلسلی با تناوب سه جمله ای تبدیل می شود . این سه جمله عبارتند از $2m$ ، $2a_0$ و $2m$.

تبصره . می توان ثابت کرد که همه عددهای طبیعی D ، که در تجزیه \sqrt{D} به کسر مسلسل ، شامل دوره تناوب سه جمله ای هستند ، به صورت عدد

D هستند که در این مسئله مورد مطالعه قرار دادیم .

۲۴۵ . اگر تجزیه عدد n به عوامل اول معلوم باشد :

$$n = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$$

برای $\varphi(n)$ و $d(n)$ روابط زیر را داریم :

$$\varphi(n) = q_1^{\alpha_1 - 1} (q_1 - 1) \dots q_s^{\alpha_s - 1} (q_s - 1),$$

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_s + 1)$$

مقادیر توابع $\varphi(n)$ و $d(n)$ را برای $n \leq 30$ حساب می کنیم ، بسادگی معلوم می شود که برای $n \leq 30$ وقتی $\varphi(n) = d(n)$ است که n یکی از عددهای ۱ ، ۳ ، ۸ ، ۱۰ ، ۱۸ ، ۲۴ و ۳۰ باشد :

$$\varphi(1) = d(1) = 1, \quad \varphi(3) = d(3) = 2, \quad \varphi(8) = d(8) = 4,$$

$$\varphi(10) = d(10) = 4, \quad \varphi(18) = d(18) = 6, \quad \varphi(24) = d(24) = 8,$$

$$\varphi(30) = d(30) = 8$$

تبصره. ثابت می شود که معادله $\varphi(n) = d(n)$ برای دیگر عددهای طبیعی n جواب ندارد ، یعنی می توان ثابت کرد که اگر $n > 30$ باشد ، $\varphi(n) > d(n)$ است .

۲۴۶ . بسادگی می توان تحقیق کرد که برای عدد طبیعی k و عدد

صحیح $s \geq 0$ داریم :

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(1 + \frac{1}{k+1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{k+s}\right) = 1 + \frac{s+1}{k} \quad (1)$$

روشن است که عددگویای $w-1$ را می توان به صورت $w-1 = \frac{m}{n}$

نشان داد که در آن m و n عددهای طبیعی هستند (اجباری نیست که نسبت بهم اول باشند) و $n > g$ است . حالا برای اینکه سمت راست

رابطه (۱) مساوی w باشد کافی است $k = n$ و $s = m - 1$ گرفت . در چنین صورتی برای w تجزیه مورد نظر بدست می آید .

۲۴۷* . ابتدا ثابت می کنیم که هر عدد صحیح $k \geq 0$ را می توان لاقلاً بیک طریق ، به صورت زیر نوشت :

$$k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm m^2 \quad (1)$$

که در آن m عددی طبیعی است و علامت « \pm » می تواند به وضع مناسبی اختیار شود . این رابطه برای 0 صحیح است زیرا داریم :

$$0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2$$

همچنین برای عددهای $1, 2, 3, 4$ هم داریم :

$$1 = 1^2, 2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2, 3 = -1^2 + 2^2,$$

$$4 = -1^2 - 2^2 + 3^2$$

حالا کافی است ثابت کنیم که اگر رابطه (۱) برای $k \geq 0$ صحیح باشد ، برای $k + 4$ هم صحیح است .

فرض می کنیم که قضیه برای عدد k صحیح باشد ، یعنی عدد طبیعی m وجود داشته باشد بطوریکه با انتخاب مناسب علامتهای « \pm » ، رابطه (۱) برقرار باشد . بسادگی می توان تحقیق کرد :

$$(m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 = 4 \quad (2)$$

بنابراین از رابطه (۱) نتیجه می شود :

$$k + 4 = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm m^2 + (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2$$

یعنی قضیه مفروض برای $k+4$ و بنابراین برای هر عدد طبیعی k صحیح است.

حالا متذکر می شویم که از اتحاد (۲) برای هر عدد طبیعی m ، رابطه زیر نتیجه می شود:

$$(m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 - (m+5)^2 + (m+6)^2 + (m+7)^2 - (m+8)^2 = 0$$

یعنی می توان در رابطه (۱)، عدد m را به عدد $m+8$ تغییر داد و بنابراین به عدد $m+16$ و غیره. به این ترتیب هر عدد صحیح k را به بی نهایت طریق می توان به صورت (۱) نشان داد.

۲۴۸. a روشن است که معادله $4x+2=0$ دارای ریشه صحیح نیست. ولی همبستگی $(4x+2) \equiv 0 \pmod{p}$ برای هر مدول اول p دارای جواب است. برای مدول ۲ همبستگی متحداً برقرار است و اگر p عدد اول فرد باشد: $p=2k+1$ (k عددی طبیعی است)، جواب همبستگی است.

$m=a$ (b) می گیریم، چون همبستگی $ax+b \equiv 0 \pmod{m}$ جواب دارد باید b بر a قابل قسمت باشد، بنابراین $b=ak$ می شود (k عددی صحیح است) و معادله $ax+b=0$ جواب $x=-k$ را خواهد داشت.

۲۴۹. از $6x^2+5x+1=(3x+1)(2x+1)$ نتیجه می شود

که معادله $6x^2+5x+1=0$ جواب صحیح ندارد. m را عدد طبیعی دلخواهی فرض می کنیم و $m=2^a m_1$ می گیریم ($\alpha \geq 0$ عددی صحیح و m_1 عددی طبیعی و فرد است). چون $(2^a, m) = 1$ است، عدد طبیعی

x وجود دارد بنحوی که $2x \equiv -1 \pmod{2^a}$ و $2x \equiv -1 \pmod{m_1}$ باشد، و از آنجا $(2x+1)(3x+1)$ بر $m = 2^a m_1$ قابل قسمت می‌شود و بنابراین داریم: $6x^2 + 5x + 1 \equiv 0 \pmod{m}$.

۲۵۰ (a) اگر q عددی اول غیر از ۳ و $2^p + 1$ بر q قابل قسمت باشد، $2^p - 1$ بر q قابل قسمت می‌شود و داریم: $2^{2p} \equiv 1 \pmod{q}$. فرض می‌کنیم δ نمای عدد 2 نسبت به مدول q باشد. چون $2p$ بر δ قابل قسمت است، δ مساوی یکی از عددهای $1, 2, \dots, p$ یا $2p$ خواهد بود. ولی برای $\delta = 1$ بدست می‌آید: $2 \equiv 1 \pmod{q}$ که ممکن نیست؛ برای $\delta = 2$ بدست می‌آید: $2^2 \equiv 1 \pmod{q}$ که از آنجا $q = 3$ می‌شود که برخلاف فرض است؛ برای $\delta = p$ باید $2^p - 1$ بر q قابل قسمت باشد و چون $2^p + 1$ بر q قابل قسمت است باید 2 بر q قابل قسمت باشد که ممکن نیست، زیرا $2^p + 1$ بر q قابل قسمت و q عددی فرد است. به این ترتیب $\delta = 2p$ می‌شود و چون $q - 1$ بر δ قابل قسمت است، $q - 1$ بر $2p$ قابل قسمت می‌شود و از آنجا $q = 2kp + 1$ می‌شود که در آن k عددی است طبیعی.

جالب است قضیه‌ای را که ثابت کردیم با این قضیه مقایسه کنیم که بر طبق آن: اگر p عددی اول و بزرگتر از 2 باشد، هر مقسوم‌علیه عدد $2^p - 1$ به صورت $2kp + 1$ است که در آن k عددی صحیح است. (b) اثبات از تساوی زیر بدست می‌آید:

$$t_{n^2} + t_{n^2+1} = (n^2 - 1)^2 + (2n)^2 \quad (n = 2, 3, \dots)$$

(c) مثلاً عددهای $4k(8k+1) + 3 = t_{8k} + t_{8k+1}$ از این قبیل‌اند ($k = 1, 2, \dots$)، زیرا این عددها در تقسیم بر 4 باقیمانده‌ای مساوی

۳ می دهند و بنا بر این نمی توانند مساوی مجموع مربعهای دو عدد طبیعی باشند.

(d) مثلاً عددهای $1^2 + (9t+7)^2$ از این قبیل اند ($t = 0, 1, 2, \dots$) زیرا همه این عددها به صورت $9k+5$ هستند (k عددی طبیعی است). در حقیقت اگر $9k+5 = t_x + t_y$ باشد، باید داشته باشیم:

$$8(9k+5) + 2 = (2x+1)^2 + (2y+1)^2$$

که در آن x و y عددهائی طبیعی هستند. ولی در تقسیم مجذور یک عدد فرد بر ۹ یکی از باقیمانده‌های ۰، ۱، ۴ یا ۷ بدست می‌آید، بنا بر این وقتی که مجموع دو مربع کامل را بر ۹ تقسیم کنیم هرگز باقیمانده‌ای مساوی ۶ بدست نمی‌آید، در حالیکه $9(8k+4) + 6 = 8(9k+5) + 2$ است.

(e) مثلاً عددهای $15 + 36k$ ($k = 0, 1, \dots$) از اینگونه اند، زیرا در تقسیم بر ۹ باقیمانده‌ای مساوی ۶ می‌دهند و در تقسیم بر ۴ باقیمانده‌ای مساوی ۳.

f) حل آ. شینتسل:

در سال ۱۹۴۲ گ. لیونگرن ثابت کرد که معادله $z^2 + 1 = 2y^4$ تنها دو جواب برای عددهای طبیعی z و y دارد: $y = z = 1$ و $y = 13$ ، $z = 239$. از این معادله نتیجه می‌شود که z عددی فرد است: $z = 2x + 1$ که اگر قرار دهیم به معادله $y^4 = x^2 + (x+1)^2$ می‌رسیم. بنا بر این معادله مفروض مسئله برای عددهای طبیعی x و y تنها یک جواب دارد: $x = 119$ ، $y = 13$ [۱۵].

۱. یادداشت‌های مترجم^۱

۱ (صفحه ۳۶). ریاضی‌دانهای قدیم می‌توانستند این قضیه را ثابت کنند که سلسله عددهای اول بی‌پایان است، یعنی قضیه وجود مجموعه نامحدود عددهای اول را در تصاعد حسابی $2x+1$ ($x=1,3,5,\dots$) می‌دانستند. بعدها استدلال مشهور اقلیدس («مقدمات»، کتاب IX، حکم ۲۰) را برای اثبات قضیه مشابه آن درباره عددهای اول در تصاعدهای به صورتهای خاص $4x-1$ ، $6x-1$ و غیره بکار بردند.

(۱) منظور، ملنیکوو مترجم روسی کتاب است

کشف قضیه کلی درباره نامحدود بودن تعداد عددهای اول در تصاعد حسابی $ax + b$ ، که در آن $(a, b) = 1$ و $x = 1, 2, \dots$ است، متعلق به لژاندر است. لژاندر مقاله خود را، که شامل این قضیه بود، در ۱۷۷۸ نوشت. اثبات قضیه لژاندر در چاپ دوم کتاب او «Essai sur la theorie des nombres» (پاریس ۱۸۰۸) آمده است. ولی این اثبات اشتباه بود.

اولین اثبات قضیه لژاندر را دیریکله پیدا کرد و در ۱۸۳۷ منتشر کرد. کار دیریکله در مورد روشن کردن این قضیه، نقش اساسی در تکامل نظریه تحلیلی اعداد (که شروع آنرا اولر پایه‌گذاری کرده بود)، بازی کرد. قضیه‌ای که بوسیله لژاندر کشف شد. بحق نام دیریکله را بخود گرفت. قضیه دیریکله یکی از مهمترین قضایای نظریه اعداد است. خود دیریکله این قضیه را برای اعداد صحیح مختلط بسط داد. بعدها کوششهای زیادی انجام گرفت تا قضیه دیریکله را با روشهای مقدماتی‌تر اثبات کنند. آ. سلبرگ، ف. شاپیرو و دیگران در این زمینه موفقیت‌هایی بدست آوردند.

طبق قضیه دیریکله، کثیرالجمله صحیح درجه اول $ax + b$ (که در آن $(a, b) = 1$ است و x می‌تواند همه مقادیر صحیح را اختیار کند)، مجموعه نامحدودی از عددهای اول را می‌دهد. آیا کثیرالجمله‌های صحیح (و یا کثیرالجمله‌های باضرایب گویا)، وقتی که از درجه دوم و یا درجه‌های بالاتر باشند، دارای چنین خاصیتی هستند؟ اگر چه این سؤال مورد توجه بسیاری از ریاضیدانها قرار گرفته است، ولی تاکنون راه حلی برای آن پیدا نشده است.

معلوم است که در این مسئله، کثیرالجمله صحیح $f(x)$ باید دارای این خواص باشد: ۱) ضرایب آن نسبت بهم اول باشد (یعنی مقسوم‌علیه مشترکی نداشته باشند) و ۲) درهیت اعداد گویا غیر قابل تحویل باشد (یعنی به صورت حاصلضرب دو کثیرالجمله با ضرایب گویا، که درجه آنها کمتر از درجه

۲) ف. و بلیتنر در کتاب «تاریخ ریاضیات از دکارت تا اواسط قرن نوزدهم» خود (مسکو، ۱۹۶۰، صفحه ۸۱)، کشف این قضیه را به اولر نسبت می‌دهد. ولی اولر تنها درباره نامحدود بودن تعداد عددهای اول در تصاعدهای حسابی $4x + 1$ ، $4x - 1$ و $100x + 1$ و شبیه آنها بحث می‌کند که طبعاً در حالت تعمیم به صورت $mx + 1$ و $mx - 1$ درمی‌آیند.

$f(x)$ است در نیاید). با وجود این می توان بسادگی ثابت کرد که کثیرال جمله هائی با درجه بالاتر از واحد وجود دارد که این دو شرط در مورد آن صدق می کند ولی هیچ عدد اولی بدست نمی دهد. مثلاً کثیرال جمله غیر قابل تحویل

(۱)

$$f(x) = x^2 + 3x^2 + 8x + 18 = 6 \left[\frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + x + 3 \right]$$

تنها عددهائی را می دهد که مضرب ۶ هستند.

در سال ۱۸۵۷، و. یا. بونیاکوسکی این فرضیه را تنظیم کرد: اگر $f(x)$ کثیرال جمله ای با ضرایبی نسبت بهم اول و در هیئت اعداد گویا غیر قابل تحویل باشد، و N بزرگترین مقسوم علیه مشترک مقادیر آن به ازای همه

مقادیر صحیح x باشد، در این صورت کثیرال جمله $\frac{f(x)}{N}$ مجموعه نامحدودی

از عددهای اول (وقتی که x مقادیر صحیح را اختیار می کند) بدست می دهد.

در مورد کثیرال جمله (۱) واضح است که $N \geq 6$ است. ولی چون

$f(0) = 18$ و $f(1) = 30$ است، روشن است که N از ۶ تجاوز نمی کند.

بنابراین $N = 6$. بنابراین طبق فرضیه بونیاکوسکی مقادیر کثیرال جمله

$$\frac{f(x)}{6} = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x + 3$$

وقتی x همه مقادیر صحیح را اختیار کند، شامل بی نهایت عدد اول است.

بجز قضیه دیریکله، حتی يك نشانه دیگر وجود ندارد که فرضیه

بونیاکوسکی را تأیید کند. هنوز به این سؤال مورد علاقه اولر جواب داده

نشده است که: آیا تعداد عددهای اولی که از کثیرال جمله $x^2 + 1$ ، به ازای

همه مقادیر طبیعی x بدست می آید، محدود است یا نامحدود؟ فرضیه

بونیاکوسکی و بسیاری از فرضیه ها و قضیه های دیگر نظریه اعداد نتیجه ای

از يك فرضیه کلی است که در این اواخر بوسیله آ. شینتسل مطرح شده است.

مدهاست که ریاضی دانها به این سؤال هم علاقمندند که کوچکترین عدد

اول در تصاعد حسابی کدام است. در ۱۹۴۴ یو. و. لنینیک نتیجه جالب و

مهمی در این زمینه بدست آورد. لینیك ثابت کرد که عدد ثابت C وجود دارد بنحوی که اگر $(a, b) = 1$ و $a < b$ باشد، تصاعد حسابی

$$a, a+b, 2a+b, \dots$$

شامل عدد اولی است که از a^c کوچکتر است. چن تسه زین رون در ۱۹۶۵ ثابت کرد که عدد ثابت لینیك C از ۷۷ تجاوز نمی‌کند.

۲ (صفحه ۴۱). در سال ۱۸۴۵ ژوزف برتران ریاضی‌دان مشهور فرانسوی، برای حل مسئله‌ای از نظریهٔ گروه‌ها، از حکمی استفاده کرد که

طبق آن: به‌ازای هر عدد صحیح $n > 7$ بین $\frac{n}{2}$ و $n-2$ همیشه عددی اول

وجود دارد. او این حکم را به کمک جدول عددهای اول $n < 6.10^6$ مورد تحقیق قرار داد. برتران نتوانست حکم مورد نظر خود را ثابت کند و بنابراین آنرا به‌عنوان يك اصل پذیرفت.

معلوم است که اصل برتران را می‌توان به‌صورت زیر تنظیم کرد: به‌ازای هر عدد صحیح $n > 3$ بین n و $2n-2$ لااقل يك عدد اول وجود دارد. اصل برتران، به‌صورت اخیر، برای نخستین بار به‌وسیلهٔ پ. ل. چبیشف در اثر او «Memoire sur les nombres premiers» در سال ۱۸۵۰ ثابت شد. این اثر کلاسیك ریاضی‌دان بزرگ، با جمله‌های زیر شروع می‌شود. «همهٔ سئوالهای مربوط به قانون پراکندگی عددهای اول

در رشتهٔ

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots$$

بطور کلی بسیار مشکل‌اند. آن نتایجی را هم که می‌توان با احتمال زیاد بر اساس جدول عددهای اول نتیجه گرفت، اغلب بدون اثبات دقیق باقی مانده است. مثلاً جدول عددهای اول این فکر را تلقین می‌کند که با شروع از $a < 3$ ، همیشه عددی اول بزرگتر از a و کوچکتر از $2a-2$ وجود دارد، همان چیزی که اصل برتران را تشکیل

(۱) از این حکم نتیجه می‌شود که برای عددهای طبیعی $n > 2$ بین n و $2n$ لااقل يك عدد اول وجود دارد، حکم اخیر را هم گاهی اصل برتران می‌نامند. تنظیم اصل برتران به این‌صورت، در این اواخر در یکی از یادداشت‌های اولر پیدا شده است:

می‌دهد، ولی تاکنون این حکم برای مقادیری از a که خارج از حدود جدولهای ما باشد، ثابت نشده است. بخصوص، وقتی که با حدود تنگ‌تری سروکار داشته باشیم، این اشکال زیاده‌تر می‌شود...».

ارزش اثباتی که چیبیشف برای اصل نرتران پیدا کرد، بخودی خود معلوم است. ولی باز هم در اینجا لازم است از ارزش روشهایی که چیبیشف برای حل مشکلترین مسائل مربوط به قانون پراکندگی عددهای اول، مورد استفاده قرار داد گفتگو کنیم. روشهای جدید چیبیشف، در مقام مقایسه باروشهای مقدماتی، اثر فوق‌العاده روی ریاضی‌دانها گذاشت. سه‌ره ریاضی‌دان فرانسوی یادداشت چیبیشف «در باره عددهای اول» را در جلد دوم دوره «جبر عالی» خود نقل کرده و می‌نویسد: «من زاید می‌دانم که در اینجا تحلیل پرنبوغ چیبیشف را معرفی کنم، تحلیلی که متکی بر ملاحظاتی و افکار کاملاً جدید است». سیلوستر ریاضی‌دان مشهور انگلیسی یادداشت خود را در سال ۱۸۸۱ با این کلمات تمام می‌کند: «برای اینکه بطور دقیق درباره وجود امکان مشابهی بحث شود، باید تا زمانی انتظار کشید که کسی پا به عرصه وجود بگذارد که همانند چیبیشف از نظر دید عمومی و فراست در سطحی بمراتب بالاتر از میزان عادی جامعه بشری باشد».

اثبات چیبیشف بر قضیه‌ای تکیه دارد که بوسیله خود او ثابت شده و برطبق آن به ازای هر $\frac{1}{\epsilon}$ ، عدد طبیعی $n = n_0(\epsilon)$ وجود دارد، بنحوی که برای $n > n_0$ بین n و $(1 + \epsilon)n$ (با به حساب آوردن خود عدد اخیر) لا اقل یک عدد اول وجود دارد.

اصل نرتران و قضیه چیبیشف بر رسیهای زیادی را بخود اختصاص داد. در سال ۱۹۲۹ ای. شوز ثابت کرد که حد n_0 را در قضیه چیبیشف می‌توان معین کرد و برای $\epsilon = \frac{1}{4}$ پیدا کرد: $n_0\left(\frac{1}{4}\right) = 24$ ، سه سال بعد نتیجه شوز بوسیله ز. بروش دقیق‌تر شد: او (به کمک دستگاه تحلیلی بفرنجی) پیدا کرد که $n_0\left(\frac{1}{8}\right) = 48$. در حال حاضر بهترین نتیجه

در باره قضیهٔ چبیشف متعلق به ه. رورباخ و ژ. ویس است که با روشهای مقدماتی و به کمک توابع چبیشف $\theta(x)$ و $\psi(x)$ ثابت کرده‌اند که $n_0(0, 0.73) = 118$ و حتی با اشکال بیشتری ثابت کرده‌اند که $n_0(0, 0.73) = 118$ است.

۳ (صفحه ۵۰). قضیه اولر، که طبق آن معادله

$$4xy - x - y = z^2 \quad (1)$$

برای عددهای طبیعی x ، y و z جواب ندارد، برای نخستین بار در نامهٔ اولر به گولدباخ در ۹ سپتامبر ۱۷۴۱ ذکر شده است. اولر در این نامه ضمن تایید صحت قضیهٔ گولدباخ که طبق آن $3 + n^2 + (2m + 3)$ به ازای مقادیر صحیح m و n نمی‌تواند مجذور کامل باشد، متذکر می‌شود که مدتهاست به نتیجهٔ مشابهی رسیده‌است و این قضیه را پیدا کرده است که عددهای $1 - m - 4mn$ و $n - m - 4mn$ به ازای عددهای صحیح و مثبت m و n نمی‌توانند مجذور کامل باشند.

این دو قضیه و قضایای مشابه آنها، مدت زیادی موضوع بحث اولر و گولدباخ بود. اولر می‌دید که عدم امکان تساوی

$$4mn - m - 1 = a^2 \quad (2)$$

و یا تساوی معادل آن

$$(4n - 1)m = a^2 + 1 \quad (3)$$

به ازای عددهای طبیعی m ، n و a نتیجه‌ای از قضیهٔ فرما است: هیچ عدد اولی به صورت $4k - 1$ نمی‌تواند مقسوم‌علیه‌ی از مجموع مربعات دو عدد نسبت بهم اول، باشد. اولر اثبات این قضیهٔ فرما را پیدا کرد و آن را در نامهٔ ۶ مارس ۱۷۴۲ به گولدباخ اطلاع داد (برای این اثبات [۵] را هم ببینید). از قضیهٔ فرما عدم امکان تساوی $1 + (2a)^2 = (4n - 1)(4m - 1)$ و بنابراین عدم امکان تساوی $a^2 = 4mn - m - n$ را هم می‌توان نتیجه گرفت.

ولی هم اولر و هم گولدباخ اعتقاد داشتند که این دو قضیه را می‌توان با

روشهای ساده تری حل کرد و مصرانه استدلالهای جدیدی را جستجویی کردند. در این جستجو گولدباخ با فعالیت بیشتری تلاش می کرد. اگرچه استدلال او در ابتدا مفصل و پیچیده بود و حتی همراه با اشتباهاتی بود، بالاخره موفق شد اثبات بسیار ساده و زیبایی از قضیه اولر پیدا کند که طبق آن معادله

$$4xy - x - 1 = z^2 \quad (4)$$

برای عددهای طبیعی x ، y و z جواب ندارد. در اینجا اثبات او را، با بعضی تغییرات جزئی و غیر اساسی، می آوریم.

فرض کنید معادله (۴) برای عددهای طبیعی x ، y و z جواب داشته باشد و a را کوچکترین مقدار طبیعی z می گیریم که در معادله (۴) صدق کند، بنحوی که رابطه (۲) برقرار باشد m و n در این رابطه عددهای طبیعی هستند). به دو طرف تساوی (۲) عبارت $4ma + 4m^2 - 1$ را اضافه می کنیم، بدست می آید:

$$4m(n - a + m) - m - 1 = (a - 2m)^2 \quad (5)$$

حالا به سادگی ثابت می شود که

$$a < m \quad (6)$$

در حقیقت حالت $a = m$ ممکن نیست، زیرا در این صورت سمت راست تساوی (۲) بر m قابل قسمت و سمت چپ آن بر m غیر قابل قسمت است. در حالتی هم که $a > m$ باشد، باید داشته باشیم: $n - a + m < n$ ، یعنی سمت چپ تساوی (۵) کوچکتر از سمت چپ تساوی (۲) می شود و بنابراین به نامساوی $a^2 < (a - 2m)^2$ می رسیم که بنا بر تعریف عدد a ممکن نیست.

ثابت می کنیم که

$$4n - 1 > 2a \quad (7)$$

به دو طرف تساوی (۲) عبارت $(4n - 1) + 2a(4n - 1) - 1$ را اضافه می کنیم، بدست می آید:

$$, [a - (4n - 1)]^2 = (4n - 1)(m - 2a + 4n - 1) - 1$$

بنابراین، با توجه به تعریف عدد a ، به نامساوی $a^2 < [a - (4n - 1)]^2$ می رسیم که از آن بلافاصله نامساوی (۷) نتیجه می شود.

بادر نظر گرفتن (۲) ، (۶) و (۷) بدست می آید :

$$a^2 + 1 = (4n - 1)m > 2a \cdot a = 2a^2$$

واز آنجا $a^2 < 1$ می شود که ممکن نیست . قضیه ثابت شد .

این اثبات نمونه خوبی از استدلال خالص حسابی است . اولر باشادی در نامه ۱۵ اکتبر ۱۷۴۳ خود می نویسد : « باید اعتراف کنم که من انتظار نداشتم که بشود این قضیه را باروشی به این سادگی و زیبایی اثبات کرد . من مطمئن هستم که بسیاری از قضایای فرما را می توان با راههایی از این نوع اثبات کرد و بنابراین من خود را خیلی مدیون شما می دانم که چنین استدلال عالی و قشنگی را طرح کردید » . اولر در همین نامه ثابت کرد روش گولدباخ را برای قضیه مربوط به معادله (۱) هم می توان بکار برد . اثبات اولر چنین است .

فرض می کنیم معادله (۱) برای عددهای طبیعی x ، y و z جواب داشته باشد و a را کوچکترین مقدار طبیعی z می گیریم که در این معادله صدق کند ، بنحوی که تساوی زیر برقرار باشد :

$$4mn - m - n = a^2 \quad (۸)$$

که در آن m و n عددهایی طبیعی هستند .

طرفین معادله (۸) را در ۴ ضرب می کنیم ، بصورت زیر درمی آید :

$$(4m - 1)(4n - 1) - 1 = 4a^2 \quad (۹)$$

عبارت $4(4n - 1) + 8a(4n - 1) - 1$ را به طرفین تساوی (۹) اضافه می کنیم ، بدست می آید :

$$\begin{aligned} [4m - 1 - 8a + 4(4n - 1)](4n - 1) - 1 &= \quad (۱۰) \\ &= 4(a - 4n + 1)^2 \end{aligned}$$

تساوی (۱۰) شبیه تساوی (۹) است و بنابراین جواب جدیدی برای

معادله (۱) با $z = 2|a - 4n + 1|$ بدست می دهد .

با توجه به تعریف عدد a داریم :

$$\begin{aligned} [4m - 1 - 8a + 4(4n - 1)](4n - 1) &> (4m - 1)(4n - 1) \\ \text{واز آنجا } 4n - 1 &> 2a \end{aligned}$$

چون تساوی (۸) نسبت به m و n متقارن است ، با عملیاتی شبیه آنچه گذشت بدست می آید : $4m - 1 > 2a$.

فرض می کنیم $4m - 1 = 2a + p$ و $4n - 1 = 2a + q$ ، که در آنها q و p عددهائی طبیعی هستند . در اینصورت داریم :

$$(4m - 1)(4n - 1) = 4a^2 + 2a(p + q) + pq$$

از آنجا ، باتوجه به (۹) ، $2a(p + q) + pq = 1$ ، که عدم امکان آن برای عددهای طبیعی a و p و q واضح است . و این تناقض قضیه را ثابت می کند .

علاقه اولر به معادله (۱) تصادفی نبود . این معادله با تحقیقی که اولر درباره مقسوم علیه های خطی صورتهای مربعی می کرد ارتباط داشت و همین تحقیق منجر به کشف قضیه مهمی در نظریه اعداد شد : قانون تقابل مربعی .
۴ (صفحه ۵۷) دنباله عددی $\{a_n\}$ رامتناوب گویند ، وقتی که عددهای طبیعی k و l وجود داشته باشند بنحوی که برای هر عدد $n \geq k$ تساوی $a_{n+1} = a_n$ برقرار باشد . اگر l کوچکترین عدد طبیعی باشد که در این شرط صدق کند ، گویند دنباله $\{a_n\}$ تناوب n جمله ای دارد . وقتی تناوب را خالص گویند که هر l جمله اول دنباله متعلق به تناوب باشد . بنابراین تناوب خالص تنها به ازای $k = 1$ بدست می آید .

۵ (صفحه ۶۹) . قریب ۵۰۰ سال قبل از میلاد ، چینی ها با حالت خاصی از قضیه فرما آشنا بودند : اگر n عددی اول و فرد باشد $2n - 1$ بر n قابل قسمت است . ولی چینی ها به اشتباه تصور می کردند که عکس این قضیه هم صحیح است : اگر $1 - 2n - 1$ بر n قابل قسمت باشد ، n نمی تواند عددی مرکب باشد . این حکمها را ظاهراً بر اساس استقراء تجربی بدست آورده بودند . در اروپا تنها در آخر قرن نوزدهم به منشاء چینی این قضیه ها پی بردند .

روشن است که این اشتباه «قضیه چینی» ، می توانست در اروپا هم بوجود آید . د . مانکه با مطالعه اثری از لایبنیتس ، متذکر می شود که لایبنیتس این «قضیه چینی» را کشف و حتی راه اثبات آنرا پیدا کرد (اشتباه این استدلال را بسادگی می توان پیدا کرد) .

اشتباه «قضیه چینی» برای نخستین بار در سال ۱۸۳۰ ثابت شد. در این سال یک مولف ناشناس در مقاله‌ای که در شماره ششم مجله گول چاپ شد، ثابت کرد: $2^{340} - 1 \equiv 0 \pmod{341}$.

نویسنده این سطور طرفدار این عقیده است که حکم غلط فرما درباره

اول بودن عددهای $2^{2^n} + 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ناشی از استقرار تجربی است. فرما دید که وقتی n مساوی ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ باشد، F_n برتیب مساوی ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷، ۶۵۵۳۷ می‌شود که عددهائی اول هستند پیدا کردن عددهای بعدی F_n کار مشکلی بود. فرما در سالهائی که از ۱۶۴۰ شروع می‌شود بطور پیگیر به دنبال اثبات قضیه غلط خود بود در سال ۱۶۵۹ در نامه‌ای که به کارکاو نوشته است متذکر می‌شود که قضیه مربوط به عددهای اول F_n را می‌توان با روش نزول لایتناهی ثابت کرد.

اگر قبول کنیم که فرما می‌توانسته است قضایای حسابی خود را ثابت کند، باید این مطلب را بپذیریم که درباره قضیه غلط خود بر اساس روش نزول استدلال نادرستی کرده است. ولی توضیح باناخاله ویج از روش نزول استفاده نمی‌کند. به اعتقاد باناخاله ویج، فرما باید از «قضیه چینی» استفاده کرده باشد، که ممکن است آنرا به عنوان یک اصل پذیرفته باشد. بنظر باناخاله ویج، چنین استدلالی وجود داشته است که حکم مربوط به عددهای F_n را در نظر فرما صحیح نشان داده است.

در اثرهائی که از فرما باقی مانده است (و تاکنون پیدا شده)، هیچ اشاره‌ای به «قضیه چینی» نشده است. از این گذشته، می‌توان ثابت کرد که فرما از این قضیه استفاده نکرده است. فرما به عددهائی که بصورت $2^n - 1$ بودند ($n = 1, 2, \dots$) علاقمند شد. در دو نامه‌ای که فرما در سال ۱۶۴۰ نوشته است متذکر می‌شود که اگر n عددی مرکب باشد، $2^n - 1$ هم مرکب است، اگر n عددی اول باشد، $2^n - 2$ بر 2^n قابل قسمت است و بالاخره مقسوم‌علیه‌های اول $2^n - 1$ باید بصورت $2kn + 1$ باشند؛ مثلا $23 \cdot 19 = 439 - 1$ است یا $2^2 - 1$ بر $2^{23} - 1$ قابل

قسمت‌اند. بنابراین غلط بودن این حکم برای فرما روشن بوده است که :
 اگر n عددی اول باشد ، $2^n - 1$ هم عددی اول است. ولی این حکم را می‌توان
 نتیجه‌ای از «قضیه چینی» دانست. درحقیقت اگر n عددی اول باشد $2^n - 2$
 بر n قابل قسمت است و بنابراین $2^{2^n-1} - 2$ بر $2^{2^n-2} - 1$ و عدد اخیر
 بر $2^n - 1$ قابل قسمت است و از آنجا طبق قضیه چینی ، $2^n - 1$ عددی
 است اول .

توضیح باناخره ویج قانع‌کننده نیست، با این نتیجه‌گیری او هم نمی‌توان
 موافقت کرد که « اشتباه‌گاههای چینی با شکل تغییر یافته‌ای ، بصورت قضیه
 غلط فرما ، در اروپا تکرار شد ». این دو حکم هم‌ارز نیستند (به این معنا
 که از قضیه غلط فرما نمی‌شود « قضیه چینی » را نتیجه گرفت) .

باناخره ویج می‌گوید که فرما می‌دانست که مقسوم‌علیه‌های F_n را باید
 فقط بین عدددهائی که بصورت $1 + 2^{n+1} \cdot k$ هستند (k عددی طبیعی است)
 جستجو کرد و بنابراین فرما می‌توانست امکان قابل‌قسمت بودن F_n را بر بسیاری
 از عددهای اول استثنا کند . ولی این هم قانع‌کننده نیست . نمی‌شود چیزی
 را به فرما منسوب کرد که می‌توانست در فکر او باشد . فرما می‌دانست که هیچ
 عدد اول بصورت $4k - 1$ نمی‌تواند مقسوم‌علیه مجموع مربعات دو عدد متباین
 (نسبت بهم اول) باشد و بنابراین مقسوم‌علیه‌های اول F_n باید بصورت $4k + 1$
 باشند . دقت بیشتر در شکل مقسوم‌علیه‌های F_n را اول‌رانجام داد .

استدلال اولر را بطور خلاصه در اینجا می‌آوریم . p را عددی اول و
 فرد می‌گیریم و فرض می‌کنیم هیچک از دو عدد a و b بر p قابل قسمت
 نباشند . طبق قضیه کوچک فرما $a^{p-1} - b^{p-1}$ بر p قابل قسمت و از آنجا
 $a^{p-1} + b^{p-1} = (a^{p-1} - b^{p-1}) + 2b^{p-1}$ بر p غیر قابل قسمت
 است . بنابراین اگر $p = 4k - 1$ باشد ، عدد

$$a^{4k-2} + b^{4k-2} = (a^2 + b^2)(a^{4k-4} - a^{4k-6}b^2 + \dots)$$

بر p غیر قابل قسمت و در نتیجه $a^2 + b^2$ بر p غیر قابل قسمت می‌شود .
 اولر ضمن اثبات قضیه فرما ، جلوتر هم رفت . او متذکر می‌شود که برای دو

عدد a و b که نسبت بهم اول باشند ، مقسوم علیه های فرد مجموع $a^2 + b^2 = (a^2)^2 + (b^2)^2$ تنهایی توانند بصورت $4k + 1$ ، یعنی با بصورت $4k + 1$ یا بصورت $8k - 3$ باشند . اگر $p = 8k - 3$ عددی اول باشد ، $a^2 + b^2 = (a^2)^{2k-1} + (b^2)^{2k-1}$ بر $a^{8k-4} + b^{8k-4}$ و در نتیجه $a^2 + b^2$ بر p غیر قابل قسمت می شود . به این ترتیب مقسوم علیه های فرد و اول مجموع توانهای چهارم دو عددی که نسبت بهم اولند تنها می توانند بصورت $8k + 1$ باشند . بهمین ترتیب ثابت می شود که مقسوم علیه های فرد و اول مجموع $a^4 + b^4$ باید بصورت $16k + 1$ باشند و بطور کلی اگر $(a, b) = 1$ باشد مقسوم علیه های فرد و اول مجموع $a^{2^n} + b^{2^n}$ بصورت $2^{n+1} \cdot k + 1$ باید باشند .

در طول يك ربع قرن فرما از قضیه مورد علاقه اش درباره عددهای اول F_n جدا نشده بود . اولر که در ابتدا کوشش می کرد این قضیه را ثابت کند ، نادرست بودن آنرا در سال ۱۷۳۲ ثابت کرد و نشان داد که F_5 عددی است مرکب . اگر فرما می دانست که مقسوم علیه های F_5 باید بصورت $64k + 1$ باشند ، با آزمایش عددهای اول ۱۹۳ ، ۲۵۷ ، ۴۴۹ ، ۵۷۷ ، ۶۴۱ ، یعنی بعد از پنج آزمایش ، متوجه می شد که F_5 بر ۶۴۱ قابل قسمت است . عدم موفقیت فرما در مورد عددهای F_n ، همچنین اشتباهات دیگری که در بعضی احکام کرده است ، این فکر را بوجود می آورد که فرما نتوانسته بود بسیاری از قضایائی را که از طریق مشاهده بدست آورده بود ، ثابت کند .
 ۶ (صفحه ۸۶) . بعضی از اطلاعات مربوط به عددهای اول نما را می توانید در کتاب و . سرپینسکی بنام « آنچه درباره عددهای اول می دانیم ، پیدا کنید (صفحه های ۳۶ تا ۳۸) .

۷ (صفحه ۹۷) . قضیه چینی درباره باقیمانده ها در فصل سوم از کتاب سرپینسکی « درباره جوابهای صحیح معادلات » آمده است . ما در اینجا صورت این قضیه را می آوریم . اگر $m \geq 2$ عددی طبیعی و a_1, a_2, \dots, a_m عددهای طبیعی و دو به دو نسبت بهم اول و r_1, r_2, \dots, r_m عددهای صحیح دلخواهی باشند ، عددهای صحیح x_1, x_2, \dots, x_m وجود دارد بنحوی که در دستگاه

معادله‌های زیر صدق کنند :

$$a_1x_1 + r_1 = a_2x_2 + r_2 = \dots = a_mx_m + r_m$$

چینی‌ها از زمانی که از قرن سوم تجاوز نمی‌کند ، عملاً از این قضیه استفاده می‌کردند ، ولی در اروپا تنها در اواسط قرن نوزدهم به این مطلب پی بردند . بنابراین نامگذاری «قضیه چینی درباره باقیمانده‌ها» نمی‌تواند مربوط به قبل از نیمه دوم قرن نوزدهم باشد . در زمانهای مختلف و در کشورهای مختلف از این قضیه برای حل مسائل حسابی استفاده می‌کردند ^۱ .

اولر مقاله سوم کتاب خود را بنام «حل مسائل حساب درباره پیدا کردن عددهائی که در تقسیم بر عددهای مفروض ، باقیمانده‌های مفروض را بدهند» به قضیه چینی درباره باقیمانده‌ها اختصاص داده است . در حل مسائل مقاله مذکور ، اولر به حل دستگاه معادلات خطی که تعداد آنها یکی کمتر از تعداد مجهولات باشد ، می‌رسد . گوس حل این مسائل را در «بررسیهای حسابی» خود منجر به حل دستگاه همنهشتیهای درجه اول می‌کند . ولی روش گوس ، در اساس همان روشی است که مورد استفاده اولر بود .

۸) (صفحه ۱۵۸) . اخیراً نتیجه کاملاً کلی‌تری بدست آمده است . ثابت شده است که برای هر عدد طبیعی a ، تصاعد عددی Q وجود دارد که از بی‌نهایت عدد طبیعی تشکیل شده باشد ، بنحوی که عدد $ka^n + 1$ فرد و به ازای هر عدد طبیعی n و هر عدد k از تصاعد Q ، عددی مرکب باشد ^۲ .

۹) (صفحه ۱۶۹) . نظریه معادلات دیوفانتی را گاهی تحلیل دیوفانتی هم‌گویند . در تحلیل دیوفانتی ، معادلات و یا دستگاه معادلاتی مورد مطالعه قرار می‌گیرد (و اگر با معادلات جبری سروکار داشته باشیم حتماً با ضرایب صحیح) که باید جوابهای آنها را بصورتی معین بدست آورد : مثلاً جوابهای که گویا ، صحیح ، طبیعی ، مثلثی و یا اول باشند . در مسائل تحلیل دیوفانتی

۱) L.E.Dickson, History of the theory of numbers, T.2. Washington, 1920, (صفحه‌های ۵۷ تا ۶۴)

۲) R.Bowen. the sequence $ka^n + 1$ Composite for all n , American Math. Monthly 71, 1964 (صفحه‌های ۱۷۵-۱۷۶)

معمولا تعداد مجهولات بیش از تعداد معادلات است و بهمین مناسبت در چنین وضعی معادلات سیال نامیده می‌شوند .

از زمانی که شروع آن از اعماق تاریخ قدیم سرچشمه می‌گیرد، معادلات سیال جلب نظر ریاضی‌دانها را کرده بود . امروز دیگر روشن شده است که در حدود ۱۷۵۰ سال قبل از میلاد ، ریاضی‌دانهای بابل می‌توانستند معادله به اصطلاح فیثاغورثی $x^2 + y^2 = z^2$ را برای جوابهای گویا ، یعنی با در نظر گرفتن تجانس معادله ، برای جوابهای صحیح حل کنند .

قسمت بزرگی از همه تحقیقات مربوط به نظریه اعداد رامی‌توان مربوط به تحلیل دیوفانتی دانست . به عنوان مثال مسئله مربوط به تبدیل عدد صحیح و مفروض m بصورت $ax^2 + bxy + cy^2 = m$ ، منجر به مطالعه معادله سیال $ax^2 + bxy + cy^2 = m$ ، یعنی منجر بیک تحلیل دیوفانتی می‌شود. بسیاری از مسائل مربوط به نظریه شکستن اعداد به تحلیل دیوفانتی مربوط می‌شود، مثل نتیجه مشهوری که ای . م . وینوگرادوف بدست آورد که بر طبق آن معادله $x + y + z = N$ ، که در آن N عدد فرد مثبت و به اندازه کافی بزرگ است ، برای عددهای اول x, y, z دارای جواب است .

به عقیده پ . ل . چبیشف نظریه اعداد دعددها را فقط از لحاظ قابلیت آنها در مورد صادق بودن در این و یا آن معادله سیال مطالعه می‌کند . بهمین مناسبت است که چبیشف قبول می‌کند که « نظریه اعداد ، و یا نام دیگر آن حساب مقعالی علمی است که معادلات سیال را برای عددهای صحیح حل می‌کند » .

شروع مطالعه منظم درباره معادلات سیال ، از دیوفانت ریاضی‌دان یونانی شروع می‌شود که ظاهراً در قرن سوم می‌زیسته است . دیوفانت توانست جوابهای مثبت و گویای بعضی انواع معادلات سیال (تا حداکثر درجه چهارم) را پیدا کند . روشهای دیوفانت ، بطور کلی ، برای جستجوی جوابهای صحیح بیفایده است . بسیاری از محققین روی حالت‌های استثنائی و نمونه‌های خاصی که مورد استفاده دیوفانت بوده است تکیه می‌کنند و متذکر می‌شوند که او نتوانسته است راه‌حلها و روشهای کلی پیدا کند . عده‌ای هم عکس این عقیده را دارند ، که از آن جمله می‌توان جمله‌ای از ای . سی . با شماکر و نقل

کرد : «کتابهای دیوفانت مجموعه ساده‌ای از مسائل نیست ، بلکه مبتنی بر طرح منظم و عمیق بررسیهای نظری است» .

کتاب «حساب» دیوفانت برای تکامل نظریه اعداد اهمیت فوق‌العاده‌ای دارد . تأثیر این کتاب بخصوص در قرن هفدهم معلوم شد ، وقتی که ترجمه لاتینی آن (از متن یونانی) با شرح و تفسیر باشه‌دومه‌زیریاک در سال ۱۶۲۱ در پاریس چاپ شد^۱ . برحواشی نسخه‌ای از همین ترجمه است که فرما یادداشتهای معروف خود را برای ما باقی گذاشته است . ظاهراً در همین دوره است که نامهای «دیوفانتی ، سیال ، تحلیلی» پیدا شد و حل معادلات سیال برای عددهای صحیح ، به‌عنوان معمول‌ترین مسائل دیوفانتی مطرح شد^۲ .

بعد از دیوفانت ، بیش از همه فرما روی معادله‌های سیال کار کرد . فرما يك رشته مسائل مهم دیوفانتی را مطرح کرد و بعضی از روشهای آنها را مورد بررسی قرارداد . کارهای فرما مایه مطالعات اولر ، لاگرانژ ، ژاندر ، گوس ، کوشی ، کومر و بسیاری از ریاضی‌دانهای دیگر قرار گرفت . این بررسیها به‌پیدایش و تکامل نظریه عددهای جبری (که یکی از مهمترین رشته‌های نظریه نوین اعداد است) کمک کرد . عددهای جبری هم بنوبه خود مسائل دیوفانتی را توسعه داد و بخصوص مسائل مربوط به حل معادله‌های سیال برای عددهای جبری صحیح در يك هیئت عددی مفروض ، بوجود آمد .

در هیچیک از رشته‌های ریاضی به‌اندازه تحلیل دیوفانتی ، نارسائی‌ها محسوس نیست . بهترین موقعیت در این مورد مربوط به پیدا کردن جوابهای صحیح معادلات جبری دوجمله‌ای با ضرایب صحیح است . نظریه معادلات درجه اول

(۱) ترجمه لاتینی باشه‌دومین ترجمه بود . اولین ترجمه «حساب» دیوفانت در سال ۱۵۷۵ چاپ شد ، این ترجمه را گولتسمان پروفسور زبان یوتانی در هیدلبرگ انجام داده بود . اولین ترجمه‌های عربی دیوفانت را ابن لوقا (وفات در سال ۹۱۲ میلادی) در بغداد و سپس ابوالوفا (۹۴۰-۹۹۸) انجام دادند .

(۲) قبلاً هم معادلات متفرقی برای عددهای صحیح بوسیله ریاضی‌دانهای قدیم حل شده بود ؛ در قرن سوم بوسیله چینیهیها ، در قرنهای پنجم ، هفتم و دوازدهم بوسیله هندیهیها ، در قرنهای نهم و یازدهم بوسیله ریاضی‌دانهای کشورهای اسلامی و در قرن سیزدهم در اروپا بوسیله لئوناردو پیزانسکی .

$ax + by = c$ در ابتدای قرن هفدهم بوسیلهٔ باشه دومه زیریاك تکمیل شد. نظریهٔ کامل معادلات درجه دوم $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ با کوشش دسته‌جمعی فرما، برونکر، وایس، اولر و لاگرانژ بوجود آمد و در اوایل قرن نوزدهم بوسیلهٔ گوس جمع‌بندی شد. در قرن بیستم ریاضی‌دانهای شوروی به بعضی نتایج مهم رسیدند. مثلاً ب. ن. دلون حل کامل معادلهٔ سیال $ax^2 + y^2 = 1$ را پیدا کرد (a عددی طبیعی و غیر مکعب کامل، x و y عددهائی صحیح). او همچنین روش پیدا کردن جوابهای صحیح گروه بزرگی از معادلات به صورت $ax^2 + bx^2y + cxy^2 + dy^2 = 5$ را به نتیجه رساند. و آ. تارناکوسکی روش حل همهٔ معادله‌های به صورت $x^{2n} - py^{2n} = 1$ را، به استثنای معادلهٔ $x^4 - 15y^4 = 1$ مشخص کرد. د. ک. فاده‌یف راه حل يك دسته از معادله‌های درجه چهارم را پیدا کرد که در بین آنها معادلهٔ $x^4 - 15y^4 = 1$ هم وجود دارد. آ. ت. توهه ریاضی‌دان نروژی، در ابتدای قرن بیستم، قضیهٔ کلی زیر را بدست آورد:

اگر $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ کثیرالجملهٔ با ضرایب صحیح و از درجهٔ $n \geq 3$ ، برای عددهای گویا جواب نداشته باشد، در این صورت به ازای هر مقدار صحیح b ، معادلهٔ

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n = b$$

نمی‌تواند بی‌نهایت جواب برای عددهای صحیح x و y داشته باشد. اثبات این قضیه ابتدا به کمک نظریهٔ تقریب عددهای جبری بوسیلهٔ عددهای گویا، بدست آمد. این نظریه هم در اثر کوششهای لیوویل، توهه، ک. زیگل، د. د. مرده‌خای بالتووسکی، ر. کوزمین، آ. گلفونند، د. دایسون، ک. روت، آ. بیکر و سایر ریاضی‌دانها بوجود آمد و تکامل پیدا کرد. برای مطالعهٔ معادلات جبری با سه یا بیشتر مجهول، اشکالاف زیادی وجود دارد، اگر چه در این زمینه هم کوششهای عده‌ای از ریاضی‌دانها (مثل د. ک. فاده‌یف، ت. ناسل و دیگران) منجر به نتایج با ارزشی شده است. در خاتمهٔ این بررسی کوتاه، از مسئلهٔ دهم مشهور هیلبرت نام می‌بریم که در آن سؤال مربوط به پیدا کردن آلگوریتمی طرح شده است، بطوریکه بتوانیم در مورد هر معادلهٔ دیوفانتی روشن کنیم که آیا جواب صحیح دارد یا

نه. نتایج سالهای اخیر ما را به این سمت هدایت می‌کند که چنین الگوریتمی وجود ندارد؛ عدم وجود يك رشته مسائل الگوریتمی نزدیک به این مسئله اخیراً بوسیلهٔ م. دیویس، ه. پوتنام و ج. روبینسون ریاضی‌دانهای امریکائی ثابت شده است.

۱۰ (صفحه ۱۸۲). اثبات موردل مقدماتی نیست. اوازنظریهٔ جبری اعداد استفاده می‌کند و بررسی خود را به معادله‌ای بصورت زیر مربوط می‌کند (a, b, c, d, e عددهائی صحیح‌اند).

$$ey^2 = ax^2 + bx^2 + cx + d \quad (۱)$$

موردل معادله

$$y(y+1) = x(x+1)(x+2) \quad (۲)$$

را، با ضرب طرفین آن در ۸ و سپس فرض $u = 2y + 1$ و $v = 2x + 2$ ، به معادلهٔ زیر تبدیل می‌کند:

$$2u^2 = v^2 - 4v + 2 \quad (۳)$$

و معادلهٔ (۳) را در حوزهٔ درجه سوم $R(\theta)$ مطالعه می‌کند (θ ریشهٔ معادلهٔ $0 = \theta^3 - 4\theta + 2$ است). در حوزهٔ $R(\theta)$ ، می‌توان معادلهٔ (۳) را بصورت زیر نوشت:

$$2u^2 = (v - \theta)(v^2 + \theta v + \theta^2 - 4) \quad (۴)$$

سپس موردل روی معادلهٔ (۴)، با توجه به خواص حسابی حوزهٔ $R(\theta)$ ، کار می‌کند. این خواص چنین‌اند: (۱) عددهای صحیح این حوزه بصورت $a + b\theta + c\theta^2$ هستند که در آن a و b و c اعدادی صحیح‌اند؛ (۲) واحدها یعنی مقسوم‌علیه‌های عدد ۱ در این حوزه عبارتند از عددهای $\pm \varepsilon^i \eta^m$ ، که در آن $\varepsilon = \theta - 1$ ، $\eta = 2\theta - 1$ و l و m هر مقدار صحیح دلخواهند، (۳) در حوزهٔ $R(\theta)$ قضیهٔ یگانه بودن تجزیه به عوامل اول بقوت خود باقی‌است. موردل ثابت می‌کند که جوابهای صحیح معادلهٔ (۳) فقط $2, 4, 12, \pm 2, \pm 4, \pm 12, 0, v = 0$ است. بعد ثابت می‌کند که معادله (۲) برای عددهای طبیعی تنها دو جواب دارد: $x = 1, y = 2, x = 5, y = 14, x = 1, y = 2, x = 5, y = 14$ ، یعنی عددهای $6 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$

و $۵.۶.۷ = ۱۴.۱۵ = ۲۱۰$ تنها عددهای طبیعی هستند که هم مساوی حاصلضرب دو عدد صحیح متوالی و هم مساوی حاصلضرب سه عدد صحیح متوالی می‌توانند باشند. نتیجه جالبی را هم که ۴ ن. واتسون بدست آورده است، متذکر

می‌شویم. واتسون ثابت کرد که معادله $\frac{x(x+1)(2x+1)}{6} = y^2$ تنها

دو جواب برای عددهای طبیعی دارد: $x=1$ و $x=24$ ، یعنی تنها دو عدد هرمی وجود دارد که مجذور یک عدد طبیعی هستند.

۱۱ (صفحه ۲۱۱). شرط $۱ - \frac{\pi^2}{6} < w < \frac{\pi^2}{6}$ برای تبدیل زیر لازم

نیست:

$$w = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} \quad (1)$$

که در آن w عددی گویا و $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ عددهای طبیعی مختلف است و n بسته به عدد w بدست می‌آید.

بر اساس حکم اردیوش، سرپینسکی این قضیه شینتسل را ثابت کرد: برای اینکه عدد گویای w بتواند بصورت (۱) تبدیل شود، لازم است که یکی

از شرایط $۱ - \frac{1}{6}\pi^2 \leq w < \frac{1}{6}\pi^2$ و یا $۱ \leq w < \frac{1}{6}\pi^2$ برقرار باشد.

۱۳ (صفحه ۲۱۲). در مقاله‌ای از ل. م. گراهام، علاوه بر تبدیل عدد

$\frac{1}{3}$ ، تبدیل عددهای $\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{37}$ هم داده شده است:

$$\frac{1}{3} = 2^{-2} + 4^{-2} + 10^{-2} + 12^{-2} + 20^{-2} + 30^{-2} + 60^{-2},$$

$$\frac{5}{37} = 2^{-2} + 5^{-2} + 10^{-2} + 15^{-2} + 16^{-2} + 24^{-2} + 111^{-2} +$$

$$+ 185^{-2} + 240^{-2} + 296^{-2} + 444^{-2} + 1840^{-2}$$

۱۳ (صفحه ۲۲۱). در اینجا مؤلف از یک مسئله بسیار جالب دیوفانتی

عبور می‌کند. اولر یک رشته احکامی که برای فرضیه زیر لازم است منظم کرده است: به ازای عددهای طبیعی k و n که در شرط $2 \leq k < n$ صدق می‌کنند

معادله $x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = x_{k+1}^n$ برای عددهای طبیعی x جواب ندارد از آنجا به ازای $k=3$ و $n=4$ به حکم غیر قابل حل بودن معادله $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = x_4^4$ برای عددهای طبیعی، می‌رسیم. به ازای $k=2$ فرضیه اولر به «قضیه بزرگ فرما» تبدیل می‌شود. حالت خاص اخیر از فرضیه اولر نشان می‌دهد که این مسئله تاچه اندازه مشکل است. اگر فرضیه اولر صحیح و قابل اثبات باشد، طبعاً باید انتظار داشت که قبل از آن اثبات حالت خاص فرضیه پیدا شود.

در سال ۱۹۱۴ آ. و بربروسوف اثبات حکم اولر را درباره معادله غیر قابل حل $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = x_4^4$ طرح می‌کند. دیکسون^۱ در کتاب خود از این کار و بربروسوف نام می‌برد. ولی متذکر نمی‌شود که اثبات و بربروسوف غلط است. فقط در سال ۱۹۳۵، پادھی به این اشتباه توجه می‌کند^۲. این اشتباه و بربروسوف را بل هم تکرار کرده است^۳. وارد^۴ صحت حکم خاص اولر را تا $10000 < x_4$ ثابت کرده است^۵.

۱۴ (صفحه ۲۳۶). بتازگی ثابت شده است که در دنباله فیبوناچی

فقط عددهای u_1, u_2, u_3 مجذور کامل اند^۶.

۱) L. E. Dickson. History of the theory of numbers. T.2. 1920 (صفحه ۶۴۸)

۲) W. Padhy. the mathematics student, T.3. N22, 1935 (صفحه‌های ۱۰۰ و ۱۰۱)

۳) E. Bell. The mathematics student, T.4. N21, 1936 (صفحه ۷۸)

۴) M ward Proc. Nat. Acad. Sc. 31, 1645 (صفحه ۱۲۵)

۵) بنابه گفته لهمر (D.H. Lehmer) (از نامه‌ای که در ۱۳ ژوئیه ۱۹۶۶ به شینتسل نوشته است) لئون لاندلر (L. Lander) در ۲۷ ژوئن ۱۹۶۶ رابطه $1445 = 1335 + 1105 + 845 + 275$ را پیدا کرد که فرضیه اولر را در حالت $k=4$ و $n=5$ رد می‌کند.

۶) O. Wyler. Squares in the Fibonacci series, American Math. Monthly, 71, 1964, (صفحه‌های ۲۲۰-۲۲۲)

۱۵ (صفحه ۲۶۱). روشن است حلی که در اینجا داده شده است، برای خواننده‌ای مفهوم است که با معادله زیر آشنا باشد :

$$2y^4 - 1 = z^2 \quad (1)$$

این معادله تاریخیچه جالبی دارد. اولر در نامه‌ای که در تاریخ دوم سپتامبر ۱۷۴۷ به فولدباخ نوشته است، متذکر می‌شود که معادله (۱) برای عددهای گویای y و z جواب دارد و این جوابها، وقتی که y مساوی یکی از عددهای ۱، ۱۳، و $\frac{1525}{1343}$ و $\frac{2165017}{2372159}$ باشد، بدست می‌آید ضمناً

یادآوری می‌کند که برای عددهای طبیعی y و z بجز دو جواب $y = z = 1$ و $y = 13$ ، $z = 229$ ، جواب دیگری پیدا نمی‌شود. بعدها اولر روشی را پیدا کرد که به کمک آن می‌شد مجموعه نامحدودی از جوابهای معادله (۱) را بدست آورد، ولی ثابت نکرد که این روش همه اینگونه جوابها را معین می‌کند. معادله (۱) لاگرانژ را هم بخود مشغول داشت. او يك رابطه برگشتی پیدا کرد که به کمک آن می‌توان همه جوابهای گویای این معادله را بدست آورد. معادله (۱) علاقه بسیاری از محققین دیگر را هم بخود جلب کرد. حل مسئله مربوط به جوابهای طبیعی معادله (۱) تا زمان لئونگرن باقی ماند و بالاخره او ثابت کرد که این معادله تنها دو جواب طبیعی دارد که قبلاً اولر پیدا کرده بود. معادله (۱) نقش بزرگی در تحقیقات مربوط به نظریه اعداد بازی کرده است.

۱) L Euler. Opera omnia, T.5, (صفحه‌های ۸۲-۹۳)

۲) این رابطه را می‌توان در کتاب سرپنیسکی بنام «حل معادلات برای جوابهای صحیح» پیدا کرد.

۳) W. Ljunggren. zur Theorie der Gleichung $x^2 + 1 = Dy^4$, Avh. Norske Vid. Akad. Oslo (Mat-hat.klasse), 1, 1942, N25, (صفحه‌های ۱-۲۷)

اثبات پوستولات برتران (قضیهٔ چبیشف) (از سرپینسکی)

اگر x عددی حقیقی باشد، علامت $[x]$ یعنی بزرگترین عدد صحیح $\leq x$. بنابراین مثلاً داریم:

$$[\pi] = 3, \quad [\sqrt{2}] = 1, \quad [-\frac{3}{4}] = -1, \quad [\frac{3}{4}] = 0$$

از این تعریف نتیجه می‌شود که برای هر عدد حقیقی نامساویهای $x - 1 < [x] \leq x$ برقرار است، تساوی $[x] = x$ تنها وقتی برقرار است که x عددی صحیح باشد، به ازای هر عدد حقیقی x داریم: $[x+k] = [x] + k$. وقتی x و y

(۱) علامت $[x]$ چنین خوانده می‌شود: «قسمت صحیح x ».

دو عدد حقیقی باشند داریم : $[x] + [y] \leq [x+y]$. مثلاً

$$0 = \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] < \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right] = 1 ; \left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right] = 0$$

قضیه ۱ . اگر n عددی طبیعی باشد، در تجزیه عدد $n!$ به عوامل اول، عدد اول p بصورت توانی با نمای α خواهد بود، بطوریکه

$$\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots \quad (1)$$

اثبات . n و k را دو عدد طبیعی مفروض و $p \leq n$ را عددی اول فرض می‌کنیم . عددهای دنباله $1, 2, \dots, n$ که بر p^k قابل قسمت‌اند، باید بصورت lp^k باشند، که در آن l عددی است طبیعی و در شرط $lp^k \leq n$ صدق می‌کند،

بنحوی که $l \leq \frac{n}{p^k}$. تعداد مقادیر l مساوی $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ است . از طرف دیگر

روشن است که α (یعنی نمای توان p^α) که در تجزیه $n!$ به عوامل اول ظاهر می‌شود عبارتست از مجموع عددهائی که از تعداد جمله‌های دنباله $1, 2, \dots, n$ که بر p^2 یا p^3 و غیره قابل قسمت‌اند، بدست می‌آید . از اینجا رابطه (۱) ثابت می‌شود .

به عنوان مثال ساده‌ای از قضیه ۱، این سؤال را مطرح می‌کنیم که عدد $100!$ به چند صفر ختم شده است .

طبق رابطه‌ای که ثابت کردیم نمائی که برای عدد 2 در تجزیه $100!$ بدست می‌آید عبارتست از :

$$\begin{aligned} \left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{2^2}\right] + \left[\frac{100}{2^3}\right] + \dots &= \\ &= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97 \end{aligned}$$

و نمائی که برای عدد 5 بدست می‌آید :

$$\left[\frac{100}{5}\right] + \left[\frac{100}{5^2}\right] = 20 + 4 = 24$$

از اینجا نتیجه می‌شود که اگر عدد $100!$ را در دستگاه عدد شماری به مبنا 10 بنویسیم به 24 صفر ختم می‌شود .

لم ۱. برای عدد طبیعی $n > 1$ داریم:

$$\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \quad (2)$$

اثبات. نامساوی (۲) به‌ازای $n=2$ صحیح است، زیرا داریم:

$$\binom{4}{2} = 6 > \frac{4^2}{2\sqrt{2}}$$

صحیح باشد. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \binom{2n+2}{n+1} &= 2 \frac{2n+1}{n+1} \binom{2n}{n} > \frac{2(2n+1)4^n}{(n+1)2\sqrt{n}} = \\ &= \frac{2(2n+1)4^n}{\sqrt{4n(n+1)} \cdot \sqrt{n+1}} > \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

زیرا $2n+1 > \sqrt{4n(n+1)}$ و از آنجا $(2n+1)^2 > 4n(n+1)$ به‌این ترتیب اثبات صحت نامساوی (۲) برای عددهای طبیعی $n > 1$ به‌کمک استقراء ریاضی، بدست آمد.

لم ۲. حاصلضرب P_n همه عددهای اول $n \leq n$ (عددی است طبیعی)

کوچکتر است از 4^n .

اثبات. روشن است این لم برای $n=1$ و $n=2$ صحیح است. بنابراین

عدد طبیعی n را بزرگتر از ۲ می‌گیریم. فرض می‌کنیم که لم برای عددهای طبیعی کوچکتر از n صحیح باشد. اگر n عددی زوج باشد داریم:

$$P_n = P_{n-1}$$

باشد (k عددی است طبیعی)، هر عدد اول p که در شرط $k+2 \leq p \leq 2k+1$

صدق کند، مقسوم‌علیهی از عدد زیر است:

$$\binom{2k+1}{k} = \frac{(2k+1)2k(2k-1)\dots(k+2)}{1 \cdot 2 \dots k} \quad (3)$$

(۱) برای علامت $\binom{n}{k}$ به پاورقی صفحه ۷۵ مراجعه کنید.

با در نظر گرفتن اینکه

$$(1+1)^{2k+1} > \binom{2k+1}{k} + \binom{2k+1}{k+1} = 2 \binom{2k+1}{k}$$

$$\binom{2k+1}{k} < 2^k \quad \text{داریم:}$$

حاصلضرب همهٔ عددهای اول (و مختلف) p ، بنحوی که $k+2 < p \leq 2k+1$ باشد، مقسوم‌علیهی از عدد $(2k+1)!$ و بنابراین از 2^k کوچکتر است. فرض کرده بودیم که برای هر عدد طبیعی کوچکتر از n ، حاصلضرب عددهای اول $1 < k \leq 2k+1$ کوچکتر از 2^k باشد. بنابراین

$$P_n = P_{2k+1} < 2^k \cdot 2^{k+1} = 2^{2k+1} = 2^n$$

از آنجا $P_n < 2^n$. به این ترتیب به کمک استقرای ریاضی صحت لم را برای هر عدد طبیعی n ثابت کردیم.

لم ۳. اگر p مقسوم‌علیه اولی از عدد $\binom{2n}{n}$ و ضمناً $k \geq \sqrt{2n}$

باشد، در تجزیهٔ عدد $\binom{2n}{n}$ به عوامل اول، عدد p بصورت توانی بانمای واحد ظاهر خواهد شد.

اثبات. طبق قضیهٔ ۱ نمای عدد p ، در تجزیهٔ عدد $(2n)!$ به عوامل اول، برابر است با:

$$\left[\frac{2n}{p} \right] + \left[\frac{2n}{p^2} \right] + \left[\frac{2n}{p^3} \right] + \dots$$

و نمای عدد p در تجزیهٔ عدد $n!$:

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

و چون داریم: $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ ، در تجزیهٔ عدد $\binom{2n}{n}$ به عوامل اول

عدد p بصورت توانی با نمای α ظاهر می‌شود، بنحوی که داریم:

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2n}{p^k} \right] - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left[\frac{2n}{p^k} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^k} \right] \right)$$

اگر $p \geq \sqrt{2n}$ باشد، $p = \sqrt{2n}$ تنها وقتی است که $n=2$ شود.

بنابراین برای $n \neq 2$ داریم: $p > \sqrt{2n}$ ، از آنجا $\left[\frac{2n}{p} \right] - 2 \left[\frac{n}{p} \right] < 2$.

بنابراین $\alpha < 2$ و چون α عددی صحیح است $\alpha \leq 1$. به این ترتیب برای $n \neq 2$ لم ثابت شد و برای $n=2$ هم صحت آن بسادگی و بطور مستقیم بدست

می آید، زیرا $\binom{4}{2} = 2 \cdot 3$.

لم ۴. هر يك از مقسوم علیه‌های عدد $\binom{2n}{n}$ که بصورت p^r باشد

(p عددی است اول و r عددی طبیعی)، از $2n$ بزرگتر نیست و ضمناً:

$$\binom{2n}{n} < (2n) \pi(2n)$$

اثبات. اگر $\binom{2n}{n}$ بر p^r قابل قسمت باشد، در اینصورت ضمن تجزیه

عدد $\binom{2n}{n}$ به عوامل اول، عدد p بصورت توانی با نمای α است، بنحوی که داریم:

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left[\frac{2n}{p^k} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^k} \right] \right) \geq r$$

اگر $p^r > 2n$ باشد، برای $k \geq r$ داریم: $\left[\frac{2n}{p^k} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^k} \right] = 0$ و بنابراین:

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left[\frac{2n}{p^k} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^k} \right] \right)$$

ولی چون برای هر عدد حقیقی x نامساوی $\lfloor 2x \rfloor - 2 \lfloor x \rfloor \leq 1$ برقرار است،

(۱) علامت $\pi(x)$ یعنی تعداد همه عددهای اول $\leq x$.

از تساوی اخیز بدست می‌آید : $\alpha \leq r - 1$; که برخلاف $\alpha \geq r$ است بنابراین

$p^r \leq 2n$. برای اثبات قسمت دوم لم توجه می‌کنیم که در تجزیهٔ عدد $\binom{2n}{n}$

به عوامل اول، فقط عددهای اول $2n \leq$ وارد می‌شود. از آنجا $\pi(2n) < \binom{2n}{n}$

۵. اگر n عددی طبیعی بزرگتر از ۲ باشد، هیچ عدد اولی که در

شرط $\frac{2}{3}n < p \leq n$ صدق کند، نمی‌تواند مقسوم علیه عدد $\binom{2n}{n}$ باشد.

اثبات. اگر $\frac{2}{3}n < p \leq n$ باشد، داریم : $\frac{2n}{p} < 3$ و $\frac{n}{p} \geq 1$.

بنابراین $[\frac{n}{p}] \geq 1$ و $[\frac{2n}{p}] \leq 2$ که نتیجه می‌دهد $[\frac{2n}{p}] - 2[\frac{n}{p}] = 0$

برای $k > 1$ داریم : $\frac{4}{9}n^2 < p^k < 2n$ و بنابراین $\frac{2n}{p^k} < \frac{9}{2n}$ برای $n > 4$.

به این ترتیب برای $k > 1$ و $n > 4$ داریم : $[\frac{2n}{p^k}] - 2[\frac{n}{p^k}] = 0$.

بنابراین به ازای $n > 4$ در تجزیهٔ $\binom{2n}{n}$ به عوامل اول عدد p با نمای ۰

است، یعنی عدد $\binom{2n}{n}$ بر p قابل قسمت نیست. به این ترتیب برای $n > 4$

صحت لم ثابت شد. در حالت‌های $n = 3$ و $n = 4$ صحت لم را با آزمایش

تحقیق می‌کنیم. در هر دو حالت عدد اول p ، که باید در شرط $\frac{2}{3}n < p \leq n$ صدق

کند، برابر است با ۳. عدد ۳ هم مقسوم علیه عدد $\binom{6}{3} = 20$ یا $\binom{8}{4} = 70$

نیست .

(۱) این تساوی از اینجا نتیجه میشود که

$[\frac{2n}{p}] - 2[\frac{n}{p}] \leq 2 - 2 \cdot 1 = 0$ ، یعنی $[\frac{2n}{p}] - 2[\frac{n}{p}] \leq 0$ ، از طرف

دیگر برای هر عدد حقیقی x ، نامساوی $[\frac{2x}{3}] - 2[\frac{x}{3}] \geq 0$ صحیح است .

لم ۶. عدد اول p ، که در شرط $n < p < 2n$ صدق کند، در تجزیه عدد $\binom{2n}{n}$ به عوامل اول، بصورت توانی با نمای واحد خواهد بود.

اثبات. برای $n < p < 2n$ داریم: $1 < \frac{2n}{p} < 2$ و $\frac{n}{p} < 1$.

بنابراین $\left[\frac{2n}{p}\right] = 1$ و $\left[\frac{n}{p}\right] = 0$. برای $k \geq 2$ داریم: $\frac{2n}{p^k} \leq \frac{2n}{p^2} < \frac{2}{n}$.

بنابراین برای $n > 1$ ، $\frac{2n}{p^k} < 1$ می شود، بنحوی که $\left[\frac{2n}{p^k}\right] = 0$ و شبیه

آن $\left[\frac{n}{p^k}\right] = 0$. به این ترتیب نمای α از عدد p در تجزیه عدد $\binom{2n}{n}$

به عوامل اول برابر است با ۱، حالت $n = 1$ احتیاجی به اثبات ندارد،

زیرا در این حالت هیچ عدد اول p در شرط $n < p < 2n$ صدق نمی کند.

لم ۷. برای عددهای طبیعی $n \geq 14$ نامساوی زیر برقرار است:

$$\pi(n) \leq \frac{1}{2}n - 1$$

اثبات. بسادگی می توان محاسبه کرد: $\pi(14) = 6 = \frac{14}{2} - 1$.

بنابراین لم ۷ برای $n = 14$ صحیح است. فرض می کنیم n عددی طبیعی

و $n \geq 15$ باشد. در دنباله $1, 2, \dots, n$ ، عددهای زوج $2, 4, 6, 8, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$

مرکب اند و تعداد آنها مساوی $\left[\frac{n}{2}\right] - 1$ است. علاوه بر آن در دنباله

$1, 2, \dots, n$ به ازای $n \geq 15$ ، عددهای فرد $1, 3, 5, 7, 9, \dots, 15$ هم اول نیستند.

بنابراین داریم:

$$\pi(n) \leq n - \left(\left[\frac{n}{2}\right] - 1 + 3\right) = n - \left[\frac{n}{2}\right] - 2 < \frac{n}{2} - 1$$

زیرا $\left[\frac{n}{2}\right] > \frac{n}{2} - 1$. به این ترتیب برای $n \geq 15$ داریم $\pi(n) < \frac{n}{2} - 1$ و

لم بطور کامل ثابت شد.

لم ۸. R_n را مساوی حاصلضرب همه عددهای اول p می گیریم که

در شرط $n < p \leq 2n$ صدق کنند و در حالتی که چنین عددهای اولی وجود نداشته باشد $R_n = 1$ می‌گیریم. در اینصورت به‌ازای همه عددهای طبیعی $n \geq 98$ داریم:

$$R_n > \frac{4^{\frac{n}{3}}}{2\sqrt{n}(2n)^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

اثبات. از تعریف R_n بلافاصله نتیجه می‌شود که $\binom{2n}{n}$ بر R_n قابل

قسمت است. بنابراین $\binom{2n}{n} = Q_n R_n$ ، که در آن Q_n عددی است طبیعی.

از اینجا با توجه به لم ۶ نتیجه می‌گیریم که حتی یک عدد اول p ، که در شرط $n < p \leq 2n$ صدق کند، در تجزیه عدد Q_n به عوامل اول وجود ندارد به این ترتیب عددهای اول p که در این تجزیه وجود دارند باید $n \leq$ باشند.

اما در اینصورت بنا بر لم ۵ باید $\frac{2}{3}n \leq$ باشند. بنابراین حاصلضرب همه عددهای

اول و مختلف p ، بنحوی که Q_n بر p قابل قسمت باشد: از حاصلضرب همه

عددهای اول $\frac{2}{3}n \leq$ تجاوز نمی‌کند و بنا بر این طبق لم ۲: $\frac{2}{3}n \leq 4^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}$ می‌-

شود. بر اساس لم ۳ و با توجه به اینکه $\binom{2n}{n}$ بر Q_n قابل قسمت است.

نتیجه می‌گیریم که نمای عدد اول p در تجزیه Q_n به عوامل اول فقط وقتی

بزرگتر از واحد است که $p < \sqrt{2n}$ باشد. تعداد اینگونه عددها طبق لم ۷

(با تبدیل n به $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ در آن، و این تبدیل هم ممکن است زیرا با

شرط $n \geq 98$ داریم $\sqrt{2n} \geq 14$ و از آنجا $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor \geq 14$) کمتر از

$\frac{\sqrt{2n}}{2}$ است.

طبق لم ۴ حاصلضرب توانهای اولی که در تجزیه عدد $\binom{2n}{n}$ به

عوامل اول بدست می‌آید، یعنی حاصلضرب توانهای عددهای اولی که در

تجزیه Q_n به عوامل اول بدست می آید کمتر از $\frac{\sqrt{2n}}{2}$ است از آنجا نتیجه

می شود $Q_n < 4 \frac{\sqrt{2n}}{2}$ و $\binom{2n}{n} = Q_n R_n$ ولی چون $Q_n < 4 \frac{\sqrt{2n}}{2}$ و طبق لم ۱ ،

$Q_n R_n > \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$ است ، بسادگی نامساوی (۴) بدست می آید .

لم ۹ . برای عددهای طبیعی $k \geq 8$ داریم : $2^k > 18(k+1)$.

اثبات . داریم : $2^8 = 256 > 18 \cdot 9$ و اگر $2^k > 18(k+1)$ باشد ،

بدست می آید :

$$2^{k+1} = 2^k + 2^k > 18k + 18 + 18k + 18 > 18k + 36 = 18(k+2)$$

به این ترتیب لم ۹ به کمک استقراء ریاضی ثابت شد .

لم ۱۰ . برای عددهای حقیقی $x \geq 8$ داریم $2^x > 18x$.

اثبات . برای عددهای حقیقی $x \geq 8$ داریم $[x] \geq 8$. بنابراین طبق

لم ۹ : $2^x > 18x$ و از آنجا $2^x \geq 2^{[x]} > 18([x]+1) > 18x$.

لم ۱۱ . برای هر عدد طبیعی $k \geq 6$ داریم : $2^k > 6(k+1)$.

اثبات . با توجه به لم ۹ ، کافی است لم ۱۱ را برای $k=6$ و $k=7$

ثابت کنیم . ولی داریم :

$$2^6 = 64 > 6 \cdot 7 ; \quad 2^7 = 128 > 6 \cdot 8$$

لم ۱۲ . برای عددهای حقیقی $x \geq 6$ داریم $2^x > 6x$.

اثبات . شبیه اثبات لم ۱۰ می باشد .

لم ۱۳ . اگر $n \geq 648$ عددی طبیعی باشد $R_n > 2n$ است .

اثبات . با توجه به لم ۸ ، کافی است ثابت کنیم که اگر $n \geq 648$

باشد داریم : $\frac{2^n}{2} > 4n\sqrt{n} \binom{n}{2n} \sqrt{\frac{n}{2}}$. توجه می کنیم که اگر $n \geq 648$

باشد ، $\frac{\sqrt{2n}}{2} > 6$ است و طبق لم ۱۲ نامساوی $\frac{\sqrt{2n}}{2} > 6$ برقرار

است ، از آنجا اگر طرفین نامساوی اخیر را به توان $\sqrt{2n}$ برسانیم بدست

می‌آید : $\sqrt{\frac{n}{2}} > (2n) \cdot 2^{\frac{n}{2}}$ ولی چون $n \geq 648$ ، یعنی $\frac{2n}{9} > 8$ است

طبق لم ۱۵ داریم : $2^{\frac{2n}{9}} > 4n$ و از آنجا $\sqrt{\frac{n}{2}} > 4n \sqrt{4n} > 4n \sqrt{n}$ به

این ترتیب برای $n \geq 648$ داریم : $\sqrt{\frac{n}{2}} > (2n) \cdot 2^{\frac{n}{2}}$ و $2^{\frac{n}{2}} > 4n \sqrt{n}$ و

از آنجا : $\frac{n}{4^{\frac{n}{2}}} > 4n / (2n) \sqrt{\frac{n}{2}}$.

لم ۱۴ . اگر $n \geq 648$ باشد ، بین n و $2n$ لااقل دو عدد مختلف اول وجود دارد .

اثبات . از تعریف عدد R_n نتیجه می‌شود که اگر بین n و $2n$ تنها يك عدد اول وجود داشته باشد $R_n \leq 2n$ می‌شود که برای $n \geq 648$ ممکن نیست ، زیرا مخالف لم ۱۳ است .

قضیهٔ ۲ . اگر $n > 5$ عددی طبیعی باشد ، بین n و $2n$ لااقل دو عدد مختلف اول وجود دارد .

اثبات . به‌ازای $n = 6$ قضیه صحیح است . زیرا بین عددهای ۱۲ و ۶

عددهای اول ۷ و ۱۱ قرار دارد . بنابراین ، با توجه به لم ۱۴ ، کافی است

ثابت کنیم که قضیه برای هر عدد طبیعی صحیح است ، بنحوی که $7 \leq n < 648$

باشد . برای اثبات این مطلب لازم نیست صحت قضیه را برای هر يك

از عددهای $7, 8, 9, \dots, 647$ بطور جداگانه آزمایش کنیم . کافی است

دنبالهٔ صعودی عددهای اول q_0, q_1, \dots, q_m را تشکیل دهیم ، بنحوی که

$q_0 = 7, q_k < 2q_{k-2}, q_m > a$ (برای $m = 0, 1, 2, \dots$) باشد .

در حقیقت فرض کنید n عددی طبیعی باشد که در شرط $7 \leq n < a$ صدق کند .

اولین جملهٔ دنبالهٔ q_0, q_1, \dots, q_m از n تجاوز نمی‌کند ، آخرین جملهٔ

این دنباله هم $a \geq n$ و بنابراین $n > a$ است ، به‌این ترتیب بزرگترین

اندیس k کوچکتر از $m - 1$ وجود دارد ، بنحوی که $q_k \leq n$ باشد . در

نتیجه داریم : $k+2 \leq m$ و $n < q_{k+1}$ بنا در نظر گرفتن رابطه
 $2n \leq 2q_k < q_{k+2}$ معلوم می‌شود که بین n و $2n$ لااقل دو عدد اول
 q_{k+1} و q_{k+2} وجود دارد .

به کمک جدول عددهای اول بسادگی تحقیق می‌شود که دنباله مورد بحث
 فوق عبارتست از دنباله عددهای ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۹، ۲۳، ۳۷، ۴۳، ۷۳،
 ۸۳، ۱۳۹، ۱۶۳، ۲۷۷، ۳۱۷، ۵۴۷، ۶۳۱، ۶۵۳، ۱۲۵۹ .
 از اثبات قضیه ۲ مستقیماً قضیه زیر نتیجه می‌شود .

قضیه ۳ (قضیه چبیشف) . اگر $n > 3$ عددی طبیعی باشد ، بین n و
 $2n - 2$ لااقل يك عدد اول وجود دارد .

قضیه برای $n = 4$ و $n = 5$ صحیح است ، زیرا بین ۴ و ۶ عدد اول
 ۵ و بین ۵ و ۸ عدد اول ۷ قرار گرفته است . اگر $n > 5$ باشد ، طبق قضیه
 ۲ ، بین n و $2n$ لااقل ۲ عدد اول وجود دارد . اگر بزرگترین آنها $q = 2n - 1$
 باشد . دیگری باید از $2n - 2$ کوچکتر شود ، زیرا به ازای $n > 5$ ، عدد
 $2n - 2$ مرکب است . به این ترتیب $2n - 2 < p < n$. اگر هم $q < 2n - 1$
 باشد ، چون $p < q$ است دوباره داریم : $n < p < 2n - 2$.

قضیه ۳ در سال ۱۸۴۵ بوسیله برتران طرح شد و برای اولین بار در
 سال ۱۸۵۰ بوسیله چبیشف اثبات شد . اثباتی که در اینجا ذکر شد از اولر
 است که با تغییر اثبات کالمار بدست آورد .

نتیجه ۱ . اگر $n > 1$ عددی طبیعی باشد ، بین n و $2n$ لااقل يك
 عدد اول وجود دارد .

اثبات . طبق قضیه ۳ ، این حکم برای عددهای طبیعی $3 > p$ صحیح است .
 برای عددهای طبیعی ۲ و ۳ هم صحیح است ، زیرا بین ۲ و ۴ عدد اول ۳ و
 بین ۳ و ۶ عدد اول ۵ قرار گرفته است .

نتیجه ۲ . برای عدد طبیعی $k > 1$ داریم : $2^k < p_k < p_k$ یعنی k
 امین عدد اول به ردیف) .

اثبات . داریم $2^2 = 3 = p_2$. اگر برای عدد طبیعی k نامساوی
 $2^k < p_k$ صحیح باشد . طبق نتیجه ۱ لااقل يك عدد اول بین عددهای 2^k

و $2k+1$ وجود دارد که البته از p_k بزرگتر است. بنابراین نامساوی $p_{k+1} < 2k+1$ هم صحیح می شود. به این ترتیب اثبات حکم به کمک استقراء ریاضی انجام گرفت.

نتیجه ۳. اگر $n > 1$ باشد، در تجزیه عدد $n!$ به عوامل اول لااقل یک عامل با نمای واحد وجود دارد.

اثبات. واضح است که حکم به ازای $n=2$ صحیح است. اگر $n=2k > 1$ باشد ($k > 1$ عددی طبیعی است)، بنا بر نتیجه ۱ عدد اول p وجود دارد بنحوی که $k < p < 2k$ باشد و از آنجا $p < n < 2p$ ، بنابراین p تنها مقسوم علیه یکی از عوامل حاصل ضرب $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$ می شود. از طرف دیگر اگر $n=2k+1$ باشد (k عددی است طبیعی)، عدد اول p وجود دارد بنحوی که $k < p < 2k < n < 2p$ باشد، از آنجا $2k < 2p$ و بنا بر این $2k+1 < 2p$ می شود، بنحوی که مثل حالت اول داریم: $p < n < 2p$ یعنی باز هم حکم لم صحیح است.

از نتیجه ۳ بلافاصله نتیجه می شود:

نتیجه ۴. برای $n > 1$ ، عدد $n!$ نمی تواند مساوی توانی از یک عدد صحیح با نمای صحیح بزرگتر از واحد باشد. حالا حکم زیر را از قضیه ۲ نتیجه می گیریم:

قضیه ۴. برای عددهای طبیعی $k > 3$ داریم: $p_{k+2} < 2p_k$

اثبات. k را عددی طبیعی و $3 < k$ می گیریم، در این صورت $p_k > p_3 = 5$ می شود. طبق قضیه ۲ بین p_k و $2p_k$ لااقل دو عدد اول مختلف وجود دارد و چون کوچکترین عددهای اولی که از p_k بزرگتر باشند عبارتند از p_{k+1} و p_{k+2} باید $p_{k+2} < 2p_k$ باشد.

متذکر می شویم که برعکس از قضیه ۴ هم می توان بلافاصله قضیه ۲ را نتیجه گرفت. فرض می کنیم که قضیه ۴ صحیح باشد و n را عددی طبیعی $6 > n$ می گیریم. به این ترتیب $n \geq 7$ یعنی $7 \leq n = p_4 \cdot p_k$ را بزرگترین عدد

اولی می گیریم که از n بزرگتر نباشد؛ واضح است: $3 < k < n < p_{k+1}$

طبق قضیه ۴ داریم : $p_{k+2} < 2p_k \leq 2n$. بنابراین بین n و $2n$ لااقل دو عدد اول p_{k+1} و p_{k+2} وجود دارد. بنابراین تنها امتحان درستی قضیه ۲ به ازای $n=6$ باقی می ماند .

به این ترتیب ثابت کردیم که قضیه های ۲ و ۴ هم ارزند ، به این معنا که از هر کدام می توان دیگری را نتیجه گرفت .

نتیجه ۱ . به ازای $k=1, 2, \dots$ داریم : $p_{k+1} < 2p_k$.

اثبات . به ازای $k=4, 5, \dots$ این حکم مستقیماً از قضیه ۴ نتیجه

می شود . بنابراین حکم مفروض را برای $k=1, 2, 3$ تحقیق می کنیم :

$$p_2 = 3 < 4 = 2p_1 ; p_3 = 5 < 6 = 2p_2 ; p_4 = 7 < 10 = 2p_3$$

نتیجه ۲ . برای عددهای طبیعی $k > 1$ داریم : $p_{k+2} < p_k + p_{k+1}$.

اثبات . وقتی $k > 3$ باشد، رابطه حکم بلافاصله از قضیه ۴ نتیجه می شود :

$$p_{k+2} < 2p_k < p_k + p_{k+1} \quad (\text{زیرا } p_k < p_{k+1}).$$

و $k=3$ هم صحیح است زیرا داریم :

$$p_4 = 7 < 3 + 5 = p_2 + p_3 ; p_5 = 11 < 5 + 7 = p_3 + p_4$$

قضیه شرک (H.F.Scherk)

از سرپنیسکی

قضیه . برای هر عدد طبیعی n ، با انتخاب مناسب علامتهای «+» یا «-» داریم :

$$P_{2n} = 1 \pm p_1 \pm p_2 \pm \dots \pm p_{2n-2} + p_{2n-1} \quad (5)$$

$$P_{2n+1} = 1 \pm p_1 \pm p_2 \pm \dots \pm p_{2n-1} + 2p_{2n} \quad (6)$$

این روابط را شرک در سال ۱۸۳۵ پیدا کرد. اثبات آنها در سال ۱۹۲۸
بوسیله پیلای (S.S.Pillai) منتشر شد. اثباتی که در اینجا آمده است در سال

۱۹۵۲ بوسیله سر پنیسکی چاپ شد. اثبات مشابیهی هم در سال ۱۹۵۵ بوسیله توفل (R. Teuffel) داده شد.

اثبات. گوئیم دنباله نامحدود q_1, q_2, \dots دارای خاصیت P است وقتی که صعودی باشد و به استثنای جمله اول بقیه جمله‌ها فرد باشند بنحوی که داشته باشیم (برای $n = 1, 2, \dots$):

$$q_1 = 2, q_2 = 3, q_3 = 5, q_4 = 7, q_5 = 11, q_6 = 13, q_7 = 17 \quad (7)$$

$$q_{n+1} > 2q_n \quad (8)$$

بخصوص توجه می‌کنیم که بذا بر نتیجه ۱ از قضیه ۴، دنباله $q_n = p_n$

($n = 1, 2, \dots$) دارای خاصیت P است.

بنابراین برای اثبات قضیه شریک کافی است ثابت کنیم که روابط (۵) و

(۶) با انتخاب مناسب علامتهای «+» یا «-» برای هر دنباله با خاصیت P صحیح است.

لم. اگر q_1, q_2, \dots دنباله نامحدود با خاصیت P باشد. برای $n \geq 3$

هر عدد فرد $\leq q_{2n+1}$ را می‌توان با انتخاب مناسب علامتهای «+» یا «-» بصورت زیر نوشت:

$$\pm q_1 \pm q_2 \pm \dots \pm q_{2n-1} + q_{2n}$$

اثبات لم. بر اساس (۷) نتیجه می‌گیریم که لم برای $n = 3$ صحیح

است. در حقیقت داریم:

$$1 = -q_1 + q_2 + q_3 - q_4 - q_5 + q_6,$$

$$3 = q_1 - q_2 - q_3 + q_4 - q_5 + q_6,$$

$$5 = q_1 + q_2 + q_3 - q_4 - q_5 + q_6,$$

$$7 = -q_1 - q_2 - q_3 - q_4 + q_5 + q_6,$$

$$9 = q_1 + q_2 - q_3 + q_4 - q_5 + q_6,$$

$$11 = q_1 - q_2 - q_3 - q_4 + q_5 + q_6,$$

$$۱۳ = q_1 - q_2 + q_3 + q_4 - q_5 + q_6,$$

$$۱۵ = -q_1 + q_2 + q_3 + q_4 - q_5 + q_6,$$

$$۱۷ = q_1 + q_2 - q_3 - q_4 + q_5 + q_6$$

متذکر می شویم که به ازای $n = ۲$ حکم لم صحیح نیست ، زیرا با انتخاب ترکیبی از علامتهای « + » یا « - » تساوی $۵ = \pm ۲ \pm ۳ \pm ۵$ ممکن نیست .

حالا فرض می کنیم که لم برای عدد طبیعی $n \geq ۳$ صحیح باشد، $۲k - ۱$ را عددی فرد $q_{2n+2} \leq$ می گیریم .

بنابر رابطه (۸) داریم : $q_{2n+2} < 2q_{2n+1}$ و بنابراین

$$-q_{2n+1} \leq \pm (2k - 1 - q_{2n+2}) - q_{2n+1} < q_{2n+1}$$

بنابراین می توان علامتهای « + » یا « - » را طوری انتخاب کرد که داشته باشیم :

$$0 \leq \pm [\pm (2k - 1 - q_{2n+2}) - q_{2n+1}] \leq q_{2n+1} \quad (۹)$$

چون هر يك از عددهای q_{2n+2} و q_{2n+1} فرد هستند، عددی که در نامساویهای (۹) در وسط قرار گرفته است عدد طبیعی فردی $q_{2n+1} \leq$ است . بنابراین براساس فرض استقراء که لم برای عدد n صحیح بود، می توانیم نتیجه بگیریم که با انتخاب مناسب علامتهای « + » یا « - » تساوی زیر صحیح است :

$$\pm [\pm (2k - 1 - q_{2n+2}) - q_{2n+1}] = \pm q_1 \pm q_2 \pm \dots \pm q_{2n-1} + q_{2n}$$

از آنجا با انتخاب مناسب علامتهای « + » یا « - » بدست می آید :

$$2k - 1 = \pm q_1 \pm q_2 \pm \dots \pm q_{2n} \pm q_{2n+1} + q_{2n+2}$$

یعنی صحت حکم لم برای عدد $n + ۱$ ثابت شد و بنابراین به کمک استقراء ریاضی ثابت کردیم که لم برای هر عدد طبیعی $n \geq ۳$ صحیح است . نتیجه . با انتخاب مناسب علامتهای « + » یا « - » داریم :

$$q_{r_{n+1}} = \pm q_1 \pm q_2 \pm \dots \pm q_{r_{n-1}} + q_{r_n} \quad (۱۰)$$

اثبات نتیجه. چون $q_{r_{n+1}}$ عدد طبیعی فردی است، رابطه (۱۰)

برای $n \geq 3$ بلافاصله از لم نتیجه می شود. به ازای $n=1$ و $n=2$ با در نظر گرفتن (۷)، مستقیماً بدست می آید:

$$q_3 = q_1 + q_2; \quad q_5 = q_1 - q_2 + q_3 + q_4$$

حالا به اثبات روابط (۵) و (۶) می پردازیم.

اثبات رابطه (۶). به ازای $n \geq 3$ ، عدد $q_{r_{n+1}} - q_{r_n} - 1$ ، با

توجه به (۸) عدد فرد طبیعی کوچکتر از $q_{r_{n+1}}$ است. بنابراین براساس

لم، با انتخاب مناسب علامتهای «+» یا «-» داریم:

$$q_{r_{n+1}} - q_{r_n} - 1 = \pm q_1 \pm q_2 \pm \dots \pm q_{r_{n-1}} + q_{r_n}$$

از آنجا (برای $q_i = p_i, i=1, 2, \dots$) رابطه (۶) بدست می آید. برای

$n=1$ و $n=2$ مستقیماً معلوم می شود:

$$q_3 = 1 - q_1 + 2q_2; \quad q_5 = 1 - q_1 + q_2 - q_3 + 2q_4$$

بنابراین رابطه (۶) برای هر عدد طبیعی n صحیح است.

اثبات رابطه (۵). براساس (۷) داریم $2q_{r_{n+1}} < q_{r_{n+2}}$ و توجه

می کنیم که $q_{r_{n+2}} - q_{r_{n+1}} - 1$ عدد فرد طبیعی و کوچکتر از $q_{r_{n+1}}$

است. حالا با در نظر گرفتن لم، برای $n \geq 3$ و انتخاب مناسب علامتهای

«+» یا «-» داریم:

$$q_{r_{n+2}} - q_{r_{n+1}} - 1 = \pm q_1 \pm q_2 \pm \dots \pm q_{r_{n-1}} + q_{r_n}$$

و از آنجا:

$$q_{r_{n+2}} = 1 \pm q_1 \pm q_2 \pm \dots \pm q_{r_{n-1}} + q_{r_n} + q_{r_{n+1}} \quad (۱۱)$$

علاوه بر آن با در نظر گرفتن (۷) داریم:

$$q_3 = 1 + q_1; \quad q_5 = 1 - q_1 + q_2 + q_3;$$

$$q_6 = 1 + q_1 - q_2 - q_3 + q_4 + q_5$$

که رابطه (۱۱) را برای $n=0$ و $n=1$ و $n=2$ ثابت می کند. به این

ترتیب رابطه (۱۱) برای $0, 1, 2, \dots, n$ صحیح است و بنابراین (چون

هم برای $0, 1, 2, 3, \dots, n$ صحیح است. رابطه (۵) $(i=1, 2, \dots, p_i = q_i)$

به این ترتیب قضیه شرك ثابت شد.