تابع شوارتس و کاربردهای آن

$$\mathrm{Im}(s\bar{z}) = \begin{vmatrix} \mathrm{Re}\ z & \mathrm{Im}\ z \\ \mathrm{Re}\ s & \mathrm{Im}\ s \end{vmatrix}$$

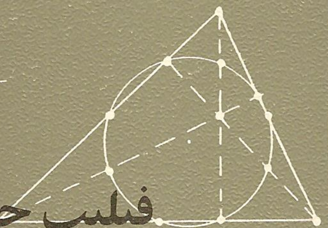


Fig. 4.1—The nine-point circle

فیلیپ جی. دیویس

$$X = \int_C dX, \qquad Y = \int_C dY,$$

Fig. 12.2

مترجم: محمد حلوداری ممقانی

$$S(z) = \bar{p}^{-1}(p - ci) = \frac{\ }{\pi}\sin^{-1}\left(e^{e}\csc\frac{\ }{a}\right)$$

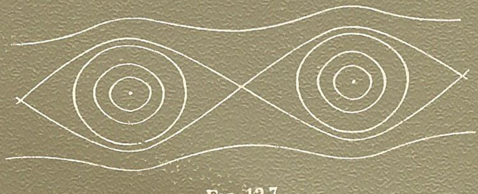


Fig. 12.7

ه. ا. شوارتس مفهوم انعکاس نسبت به خط و دایره را به انعکاس نسبت به یک کمان تحلیلی دلخواه تعمیم داد. این تعمیم کاربردهای فراوانی در اصل تقارن و مسائل مربوط به ادامهٔ تحلیلی توابع دارد. انعکاس از دیدگاه شوارتس یک نگاشت ضد - تحلیلی است که مزدوج آن تابعی تحلیلی است. این تابع تحلیلی، تابع شوارتس کمان مذکور نامیده می‌شود. در این کتاب علاوه بر بررسی توابع شوارتس از دیدگاههای مختلف، کاربردهای آنها در مکانیک سیالات، نظریهٔ کشسانی، نظریهٔ ارگودیک و آنالیز عددی مورد بررسی قرار گرفته است. شاید اوج مطالب کتاب در بررسی و حل کامل مسئلهٔ نیمساز زاویه‌های منحنی‌الخط نهفته باشد. مؤلف با نسبت دادن تابعی به نام تابع شرودر به یک تابع تحلیلی بخوبی از عهدهٔ این کار برآمده است.

گرچه کتاب خودکفا نیست ولی خواننده می‌تواند با در دسترس داشتن کتاب آنالیز مختلط آلفرس آن را به راحتی مطالعه نماید.

فیلیپ جی. دیویس

تابع شوارتس
و کاربردهای آن

مترجم

محمد جلوداری ممقانی

تهران ۱۳۷۹

فهرست مطالب

یادداشت مترجم

مفهوم قدیمی انعکاس با گذشت زمان تعمیم یافته و موجب تحولات عمده‌ای در شاخه‌های مختلف علمی شده است. در این کتاب تعمیمی از این مفهوم و کاربردهایی از آن مورد بررسی قرار گرفته است. بنابراین یکی از هدفهای انتشار این ترجمه را می‌توان شناساندن این تعمیم و کاربردهای آن به فارسی زبانان دانست.

مسلماً این ترجمه به خاطر سبک خاص متن اصلی خالی از اشکال نیست. بنابراین تذکر چند نکته ضروری به‌نظر می‌رسد.

الف ـ سعی شده است ترجمه جمله‌به‌جمله از متن اصلی صورت پذیرد، بنابراین تا حدّ امکان اصالت متن اصلی حفظ شده است.

ب ـ معادلهای واژه‌های تخصصی از واژه‌نامه‌های «ریاضی و آمار» و «فیزیک» مرکز نشر دانشگاهی گرفته شده‌اند، مگر جایی که معادل فارسی واژه‌ای در اختیار نبوده که در این صورت با استناد به موارد مشابه واژهٔ مناسب پیشنهاد شده است.

بنابراین، تذکّر اشکالات توسط خوانندهٔ محترم مورد تقاضا و پیشاپیش موجب امتنان و سپاسگزاری است.

در خاتمه از آقایان یحیی تابش و حسین باستانی به‌ترتیب به‌خاطر در اختیار قرار دادن متن اصلی و ویرایش ترجمه سپاسگزارم. همچنین از انتشارات علمی و فرهنگی به خاطر انتشار کتاب بسیار ممنونم.

محمد جلوداری ممقانی
دانشگاه علامه طباطبایی

سپاسگذاری

مایلم امتنان خود را از تشویقهای «کمیتهٔ تک‌نگاریهای کاروس»* اظهار کنم.

من مدیون این اشخاص هستم: الینور م.ادیسون، کاترینا اوری، مایلون باک لیو، ازورا فونسکا، فرانس کاژدووسکی، کارول کملر، کارول سالواتوره، دکتر هنری او. پولاک، پروفسور جی.اچ البرگ، پروفسور مارتین براون، پروفسور دانیل فینکبینر، پروفسور پیتر هنریچی، پروفسور هربرت کلاسکی، پروفسور فیلیپ رابینوویتس و پروفسور فرانک استنگر.

شکل صفحهٔ عنوان کتاب، تعبیر داوینچی از تصویر انسان بر طبق نسبتهای ویترووییوس است. این تصویر با یک تبدیل موبیوس که دایرهٔ محیطی را پایا نگاه می‌دارد، ارتباط دارد و آن را پروفسور آر.ویتیل از دانشگاه براون و پروفسور ک.لانگ از مدرسه طراحی رود آیلند تهیه نموده‌اند. قطعهٔ نهایی را نیز جاناتان ساخس تهیه کرده است. بخشی از هزینه‌های تهیهٔ پیش‌نویس این اثر را بنیاد ملی علوم تحت امتیاز شماره GP-35398 دانشگاه براون تأمین کرده است.

فیلیپ جی. دیویس
دانشگاه براون

---

*) "the Committee on Carus monographs"

۱

پیشگفتار

در سال تحصیلی ۱۹۶۸ـ۱۹۶۹، پروفسور ماری کارترایت عضو دیدارکنندهٔ بخش ریاضیات کاربردی دانشگاه براون بود. این سال برای دانشگاه براون ـ به ویژه از نظر برنامه‌ها ـ سال پرآشوبی محسوب می‌شود. در یکی از جلسات بخش، خانم کارترایت اظهار داشت که وقتی وی دانشجو بود، تمام دانشجویان با گرایش ریاضی ملزم به دانستن اثباتی از قضیهٔ دایرهٔ نُه نقطه بودند. اما در حال حاضر مبحث دایرهٔ نُه نقطه خارج از حیطهٔ تحقیق است. ظاهراً منظور خانم کارترایت این بود که در مورد یک برنامهٔ مناسب ریاضی، خیلی هم نباید انعطاف‌ناپذیر بود. حتی در ریاضیات وجود مُدهای یکنواخت چیز ناخواسته‌ای است؛ و معمولاً مرور زمان بسیاری از مباحث مستند و سخت را که اکنون روی آنها تأکید می‌شود به سرنوشت دایرهٔ نُه نقطه دچار می‌کند.

در آن سال، من با استفاده از جزوه‌های ل. ب. رال درسی در آنالیز عددی تحت عنوان «نظریهٔ تکرار در فضاهای باناخ» ارائه می‌دادم؛ و در همین زمان بود که متوجه شدم ارائه چندین سخنرانی برای ردیابی تکرار از طریق دشوار دایرهٔ نُه نقطه، امکان‌پذیر است ـ و زیاد هم دور از دسترس نیست.

این کتاب، چنین مسیری را معرفی می‌کند. حلقهٔ رابط استفاده از مختصات مزدوج و تابع انعکاس شوارتس است. بنا به گفتهٔ صاحب‌نظران، این مسیر عریض، چند مبحث نزدیک به هم در نظریه متغیر مختلط را که مورد علاقه من هستند در خود جای می‌دهد.

فصل بعدی کتاب، به معرفی مختصات مزدوج اختصاص دارد. در فصل سوم، مفاهیم مقدماتی هندسهٔ تحلیلی مسطحه بر حسب مختصات مزدوج بیان می‌شود؛ و در فصل چهارم، از این ابزار برای اثبات قضیهٔ دایرهٔ نه نقطه و قضیهٔ فویرباخ استفاده خواهد شد.

در فصل پنجم، تابع شوارتس مربوط به یک کمان تحلیلی را تعریف نموده و چندین مثال ارائه می‌دهیم. بقیهٔ کتاب، به شرح کاربردها و رابطه این تابع با چندین مبحث دیگرـ به ویژه نظریهٔ توابع تحلیلی یک متغیرهـ اختصاص یافته است.

فصل ششم، رابطهٔ تابع شوارتس را با انعکاس شوارتسی بررسی می‌کند و یک اتحاد تابعی مهم را به اثبات می‌رساند. فصل هفتم، مباحث مقدماتی هندسهٔ دیفرانسیل را در بر می‌گیرد و ارتباط بین ناورداهای دیفرانسیلی (خمیدگی و غیره)، تابع شوارتس و مشتق شوارتسی را برقرار می‌کند. فصل هشتم، دربارهٔ نگاشت همدیس، انعکاس و تقارن نسبت به کمانهای تحلیلی و خمهای ناوردا بحث می‌کند. در این فصل، صورتبندی مناسب جبری شامل تابع شوارتس برای حل چند مسأله معرفی می‌شود و این موضوع ما را به چند معادلهٔ تابعی راهنمایی می‌کند.

فصل نه به بیان رابطهٔ بین تابع شوارتس و دستگاههای معادلات دیفرانسیل خودگردان ۲ × ۲ می‌پردازد. فصل دهم، ویژگیهای کلان تابع شوارتس را ارائه می‌کند (در فصل هفتم، تابع شوارتس به صورت جزء مورد بررسی قرار می‌گیرد) به ویژه شرایطی را بررسی می‌نماید که تحت آنها این تابع گویاست.

فصل یازدهم، با بیان عملگرهای معادلات دیفرانسیل جزیی نسبت به مختصات مزدوج آغاز می‌شود. در بخشی از این فصل، کاربرد این عملگرها در حل مسائل مربوط به ادامهٔ تحلیلی توابع همساز که در داده‌های مرزی غیر خطی صدق می‌کنند، و همچنین کاربرد عملگرهای مذکور در مسأله کوشیِ معادلات بیضوی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش دیگری از این فصل، درگذر از مشتق به انتگرال، قضیهٔ گرین در حالت تحلیلی مختلط برای استنتاج آسان چندین اتحاد انتگرال به کارگرفته می‌شود. برخی از این اتحادها در نظریه تقریب درجه دومِ کاربرد دارند. از دو فصل دوازدهم و سیزدهم، اولی برخی از اصول نظریهٔ شار دو بعدی را بر حسب توابع شوارتس بیان می‌کند؛ و دومی جواب مسأله دیریکله را به تابع شوارتس مرز ناحیهٔ مطرح در مسأله ربط می‌دهد.

فصل چهاردهم، یک‌بار دیگر وارد بحث ویژگیهای کلان می‌شود؛ به ویژه در رابطه با خمهای بسته‌ای که تابع شوارتس آنها در داخل خم مرومرفیک است. در این فصل، اتحادهای جالب و معادلات تابعی بیشتری ـ که برخی از آنها با تابع هستهٔ برگمن در رابطه‌اندـ استخراج می‌شوند.

سرانجام در فصل آخر، توابع تحلیلی یک و دو متغیره حقیقی را برحسب مختصات

مزدوج بیان کرده و تکرارهای تابعی معینی را که از تابع شوارتس ناشی می‌شوند وارد بحث می‌کنیم. به نظر می‌رسد که تابع شرودر به خوبی با این نظریه سازگار باشد، و از این نقطه نظر در ادامه فصل چند مسألهٔ کلاسیک شامل «مسأله مرکز از دیدگاه نظریه تابعی» و «مسأله نیمساز زاویه‌های منحنی‌الخط» مورد بحث قرار خواهند گرفت.

در این کتاب، در مقابل وسوسه ارائهٔ مطالبی نظیر روش عملگر انتگرال برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی مقاومت شده است. در این روش، مختصات مزدوج نقش بسیار قاطعی دارند، در حالی که تابع شوارتس نقش کوچکی دارد. همچنین، درکتاب از بیان گستردهٔ مباحث هندسهٔ انعکاسی و الگوی پوانکاره برای هندسهٔ نااقلیدسی ـ با این احساس که این مباحث از جنبه‌های گوناگونی درکتابهای درسی مورد بحث قرار می‌گیرند ـ برحسب اصطلاحات موجود خودداری کرده‌ام.

ه.ا.شوارتس، مفهوم انعکاس نسبت به خط و دایره را به انعکاس نسبت به یک کمان تحلیلی دلخواه تعمیم داد. این تعمیم، در اصل تقارن و مسائل مربوط به ادامهٔ تحلیلی کاربردهای فراوانی دارد. انعکاس، از دیدگاه شوارتس یک نگاشت ضد تحلیلی است. با مزدوج گرفتن از آن، به یک تابع تحلیلی می‌رسیم که آن را تابع شوارتس کمان تحلیلی مذکور می‌نامیم. این تابع، به خودی خود ارزش مطالعه دارد و این کتاب حاوی نتایجی از این مطالعه است. در برخی مباحث آشنا، استفاده از تابع شوارتس نظر ما را به جنبه‌هایی معطوف می‌دارد که بسیار جذاب و زیبا هستند و درجه‌ای ازکلیت را فرا روی قرار می‌دهند که در شرایط دیگر دستیابی به آن غیر ممکن است. من همچنین دریافته‌ام که این تابع راه شاخه‌ای از تحقیق را می‌گشاید که به مسائل جالبی در خصوص متغیرهای مختلط منتهی می‌شوند. با استفاده از تابع مورد بحث، می‌توان به حل چند معادلهٔ تابعی و چند تکرار که برای متخصصین آنالیز عددی جالبند پرداخت. مسلماً خوانندهٔ با دقت، موضوعهای مورد علاقهٔ خود را ذیل عناوینی جدید پیدا خواهد کرد. ولی یکی از اصول رشد ریاضی آن است که فرایند تجدید عنوان موجب به وجود آمدن نسل جدیدی از مسائل می‌شود. وسیله‌ها تبدیل به هدف می‌شوند و رسانه بسرعت مبدل به پیام می‌گردد.

این کتاب، کاملاً خودبسنده نیست. خواننده درخواهد یافت که برای فهم آنچه پیش رو دارد، باید با مقدمات جبر خطی و نظریهٔ توابع یک متغیرهٔ مختلط آشنایی قبلی داشته باشد.

۲

مختصات مزدوج در صفحه

هندسهٔ اقلیدسی مسطحه و بویژه بیشتر مباحثی که معمولاً در هندسهٔ ترکیبی یا هندسهٔ انعکاسی پیشرفته ظاهر می‌شوند را می‌توان بسرعت با استفاده از مختصات مختلط بیان کرد. صفحهٔ حقیقی، با نسبت دادن عدد مختلط $z = x + iy$، $(i = \sqrt{-۱})$ به نقطهٔ حقیقی (x, y) به صفحه مختلط تبدیل می‌شود. اگر بخواهیم x و y را بر حسب z به دست آوریم، بایستی مقدار مزدوج $\overline{z}$ را توسط معادلات

$$z = x + iy \qquad , \qquad \overline{z} = x - iy \qquad (۱\text{-}۲)$$

تعریف کنیم؛ و در این حالت تبدیل وارون را می‌توان توسط رابطه‌های

$$x = \frac{۱}{۲}(z + \overline{z}) \quad , \quad y = \frac{۱}{۲i}(z - \overline{z}) \qquad (۲\text{-}۲)$$

بیان کرد. مقادیر وابستهٔ z و $\overline{z}$، مختصات مزدوج نقطهٔ (x, y) نامیده می‌شوند (در صورت مختلط بودن x و y، z و $\overline{z}$ مستقل می‌باشند، ولی لزوماً مزدوج نخواهند بود). در زمینه‌هایی تا اندازه‌ای متفاوت مشتمل بر هندسهٔ «دامنهٔ مختلط» که در آن x و y می‌توانند مقادیر مختلط را اختیار کنند، اصطلاحات مختصات ایزوتراپیک یا کمینه را برای بیان مفهوم مختصات مختلط به کار می‌برند. در این کتاب، تقریباً همه جا خود را به مقادیر حقیقی x و y ـ یعنی به صفحه گاوسی معمولی ـ محدود می‌کنیم.

ماتریس تبدیل (۲ − ۱)، عبارت است از

$$M = \begin{pmatrix} ۱ & i \\ ۱ & -i \end{pmatrix} \qquad (۳\text{-}۲)$$

حال، با توجه به اینکه

$$MM^* = ۲I \tag{۴-۲}$$

که در آن M^* ماتریس ترانهادهٔ مزدوج است، نتیجه می‌گیریم که ماتریس $\frac{۱}{\sqrt{۲}}M$ یکانی است. در چند مورد، تبدیل متناظر با این ماتریس می‌تواند بسیار مناسب باشد. در واقع، این تبدیل در نظریه خمینه‌های مختلط و عملگرهای انتگرال برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کاربرد وسیعی دارد.

۳

نکته‌های مقدماتی هندسی

به ازای دو نقطهٔ متمایز $z_۱$ و $z_۲$ در صفحهٔ مختلط، معادلهٔ

$$z = tz_۱ + (۱ - t)z_۲ \qquad (\text{حقیقی است } t) \tag{۳-۱}$$

تمام نقاط واقع بر خط واصل $z_۱$ و $z_۲$ را مشخص می‌کند. نقطه z، پاره‌خط واصل $z_۱$ و $z_۲$ را به نسبت

$$r = \frac{۱ - t}{t} \tag{۳-۲}$$

تقسیم می‌کند. فاصلهٔ بین $z_۱$ و $z_۲$، از رابطهٔ $\rho = |z_۱ - z_۲|$ یا

$$\rho = \sqrt{(z_۱ - z_۲)(\overline{z_۱} - \overline{z_۲})} \tag{۳-۳}$$

به دست می‌آید. دترمینان

$$D = \begin{vmatrix} z & \overline{z} & ۱ \\ z_۱ & \overline{z_۱} & ۱ \\ z_۲ & \overline{z_۲} & ۱ \end{vmatrix} \tag{۳-۴}$$

به ازای $z = z_۱$ یا $z = z_۲$ صفر می‌شود، و چون D نسبت به x و y خطی است، معادله

$$D = ۰ \tag{۳-۵}$$

باید معادله خط مستقیم گذرنده از z_1 و z_2 در مختصات مزدوج باشد. رابطهٔ (۳ – ۵) را پس از بسط دترمینان می‌توان به صورتهای زیر نوشت:

$$z(\overline{z_1}-\overline{z_2})-\overline{z}(z_1-z_2)+\bar{z}_1\bar{z}_2-z_2\overline{z_1}=0 \qquad (۳\text{-}۶)$$

یا

$$\overline{z}=\left(\frac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{z_1-z_2}\right)(z-z_2)+\overline{z_2}؛\frac{\bar{z}-\bar{z}_2}{z-z_2}=\frac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{z_1-z_2}. \qquad (۳\text{-}۷)$$

در نتیجه

$$\overline{z}=\left(\frac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{z_1-z_2}\right)z+\left(\frac{z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1}{z_1-z_2}\right) \qquad (۳\text{-}۸)$$

بنابراین، معادله خطی را که از نقاط z_1 و z_2 می‌گذرد می‌توانیم به صورت

$$\overline{z}=Az+B \qquad (۳\text{-}۹)$$

بنویسیم؛ که در آن

$$A=\frac{\overline{z}_1-\overline{z_2}}{z_1-z_2}\quad,\quad B=\frac{z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}}{z_1-z_2} \qquad (۳\text{-}۱۰)$$

اگر مختصات قطبی را به کار ببندیم و بنویسیم $z_2=z_1+\rho e^{i\theta}$ (به شکل ۳-۱ نگاه کنید)، آنگاه $\overline{z_2}-\overline{z_1}=\rho e^{-i\theta}$ و بنابراین

$$A=e^{-2i\theta}\quad,\quad |A|=1 \qquad (۳\text{-}۱۱)$$

اگر پاره‌خط واصل z_1 و z_2 را در نظر بگیریم و بنویسیم

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2+\rho e^{i(\theta+\pi)}\\ &= z_2-\rho e^{i\theta}, \end{aligned}$$

آنگاه یک‌بار دیگر رابطهٔ (۳ـ۱۱) به دست می‌آید. در حقیقت، کمیت A «جهت» خط بدون راستای واصل z_1 و z_2 را که مشابه مختلط ضریب زاویه‌ای است معین می‌کند. عدد A را شیب این خط می‌نامیم. قابل توجه است که از رابطهٔ (۳ـ۹) به دست می‌آوریم:

$$\frac{d\overline{z}}{dz}=A \qquad (۳\text{-}۱۲)$$

که درست مشابه حالت حقیقی

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \qquad (۱۳\text{-}۳)$$

ضریب زاویه‌ای خط $y = \lambda x + b$ است. بنابر رابطه (۳ـ۷)، معادله خط مستقیم با

شکل۳-۱

شیب A که از نقطهٔ $z_۰$ می‌گذرد، توسط

$$\overline{z} = A(z - z_۰) + \overline{z_۰} \qquad (۱۴\text{-}۳)$$

داده می‌شود.

رابطه بین شیب A و ضریب زاویه‌ای λ یک خط مستقیم، به شرح زیر است:

$$A = \frac{\overline{z_۲} - \overline{z_۱}}{z_۲ - z_۱} = \frac{(x_۲ - x_۱) - i(y_۲ - y_۱)}{(x_۲ - x_۱) + i(y_۲ - y_۱)}$$

$$= \frac{۱ - i\lambda}{۱ + i\lambda} = \frac{۱ - i\tan\theta}{۱ + i\tan\theta} = e^{-۲i\theta} \qquad (۱۵\text{-}۳)$$

بر عکس داریم

$$\lambda = i\frac{۱ - A}{۱ + A}. \qquad (۱۶\text{-}۳)$$

این، یک تبدیل موبیوس است که نیم‌صفحه پایین صفحه مختلط λ را به روی قرص واحد صفحه A می‌نگارد. در اینجا، برخی مقادیر خاص را درج می‌کنیم.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \text{ضریب زاویه‌ای } \lambda & ۰ & ۱ & \infty & -۱ \\ \hline \text{شیب } A & ۱ & -i & -۱ & i \end{array} \qquad (۱۷-۳)$$

زاویهٔ ψ بین خطی با ضریب زاویه‌ای $\lambda_۱$ و شیب $A_۱$ و خطی با ضریب زاویه‌ای $\lambda_۲$ و شیب $A_۲$، توسط رابطهٔ

$$\tan\psi = \frac{\lambda_۲ - \lambda_۱}{۱ + \lambda_۱\lambda_۲} = i\frac{A_۱ - A_۲}{A_۱ + A_۲} \qquad (۱۸-۳)$$

مشخص می‌شود. از این فرمول، نتیجه می‌گیریم که دو خط موازی هستند، اگر و تنها اگر شیب مساوی داشته باشند؛ یعنی

$$A_۱ = A_۲ \qquad (۱۹-۳)$$

و دو خط متعامدند، اگر و تنها اگر شیب آنها قرینه باشد؛ یعنی

$$A_۱ = -A_۲ \qquad (۲۰-۳)$$

از آنجایی که به‌ازای هر سه عدد $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$

$$\Delta = \begin{pmatrix} z_۱ & \overline{z_۱} & ۱ \\ z_۲ & \overline{z_۲} & ۱ \\ z_۳ & \overline{z_۳} & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ i & -i & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \qquad (۲۱-۳)$$

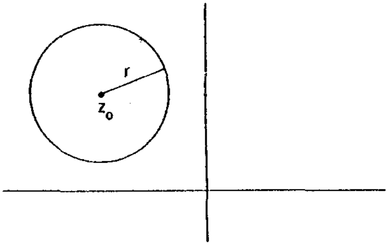
با محاسبهٔ دترمینانها داریم

$$|\Delta| = -۴i Area(z_۱, z_۲, z_۳) \qquad (۲۲-۳)$$

که در آن $Area(z_۱, z_۲, z_۳)$ مساحت علامتدار مثلثی با رأسهای به ترتیب $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ است.

دایره. معادله دایرهٔ به مرکز $z_۰$ و شعاع r (شکل ۲.۳) را می‌توان به صورت $|z - z_۰|^۲ = r^۲$ یا $(z - z_۰)(\overline{z} - \overline{z_۰}) = r^۲$ نوشت. بنابراین رابطهٔ

$$\overline{z} = \overline{z_۰} + \frac{r^۲}{z - z_۰} \qquad (۲۳-۳)$$



شکل۳-۲

معادلهٔ این دایره در مختصات مزدوج است. خطهای مستقیم را می‌توان «حدهای» خانواده‌های خاصی از دایره‌ها تلقی کرد. مثلاً، خانوادهٔ دایره‌های به شعاع $s > ۰$ و مرکز $z = is$ را در نظر می‌گیریم. در مختصات مزدوج داریم.

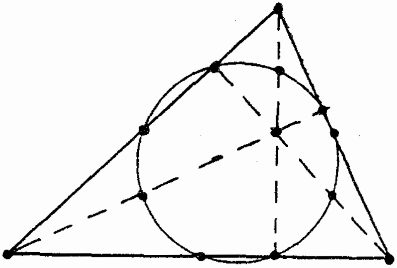
$$\overline{z} = \frac{z}{۱ + (iz/s)}$$

صورت حدی این معادله وقتی s به ∞ میل می‌کند، عبارت است از $z = \overline{z}$؛ که معادلهٔ محور xهاست.

۴

دایرهٔ نه نقطه

به ازای مثلث داده شدهٔ T، نقاط وسط سه ضلع، پای سه ارتفاع، و نقاط وسط پاره‌خط‌هایی از سه ارتفاع که بین محل تلاقی ارتفاعها (مرکز ارتفاعی) و رئوس مثلث واقع هستند، روی یک دایره به نام دایرهٔ نه نقطه قرار دارند. شعاع این دایره نصف شعاع دایره محیطی T، و مرکز آن وسط پاره‌خط واصل مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز ارتفاعی است. آنچه گفته شد، به قضیهٔ دایرهٔ نه نقطه معروف است (شکل ۱.۴ را ببینید). برای اثبات



شکل۴-۱: دایرهٔ نه نقطه

این قضیه، بهتر است دایره محیطی را دایره واحد $z\overline{z} = ۱$ انتخاب کنیم. بنابراین، فرض می‌کنیم که رأسهای T عبارت باشند از $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$؛ با توجه به اینکه $\overline{z}_i = z_i^{-۱}$. برای راحتی کار، فرض می‌کنیم

$$s = z_۱ + z_۲ + z_۳$$

$$t = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 \qquad (۱-۴)$$

$$p = z_1z_2z_3$$

می‌دانیم که مرکز ثقل T (محل تلاقی میانه‌ها)، منطبق بر نقطه

$$z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) = \frac{1}{3}s \qquad (۲-۴)$$

است.

شیب ضلع $[z_2z_3]$ برابر است با

$$\frac{\overline{z}_2 - \overline{z}_3}{z_2 - z_3} = \frac{\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3}}{z_2 - z_3} = -\frac{1}{z_2z_3}$$

در نتیجه، بنابر رابطهٔ (۳ـ۷) معادلهٔ این ضلع عبارت است از

$$\overline{z} = -\frac{1}{z_2z_3}(z - z_2) + \overline{z_2}$$

یا

$$\overline{z} = -\frac{1}{z_2z_3}(z - z_2) + \frac{1}{z_2} \qquad (۳-۴)$$

شیب خط عمود بر این ضلع که از رأس z_1 می‌گذرد، $\frac{1}{z_2z_3}$ و معادلهٔ آن

$$\overline{z} = \frac{1}{z_2z_3}(z - z_1) + \overline{z_1} \quad \text{یا} \quad \overline{z} = \frac{1}{z_2z_3}(z - z_1) + \frac{1}{z_1} \qquad (۴-۴)$$

است. با حل همزمان معادله‌های (۳.۴) و (۴.۴)، در می‌یابیم که پای ارتفاع در نقطهٔ

$$z = \frac{1}{2}\left\{z_1 + z_2 + z_3 - \frac{z_2z_3}{z_1}\right\} = \frac{1}{2}\left(s - \frac{p}{z_1^2}\right) \qquad (۵-۴)$$

واقع است. معادله‌های دو ارتفاع دیگر مثلث عبارتند از

$$\overline{z} = \frac{1}{z_2z_3}(z - z_1) + \frac{1}{z_1} \quad , \quad \overline{z} = \frac{1}{z_3z_1}(z - z_2) + \frac{1}{z_2}$$

با حل همزمان این معادله‌ها محل تلاقی آنها را به صورت

$$z = z_1 + z_2 + z_3 = s \qquad (۶-۴)$$

به دست می‌آوریم. این نقطه، مرکز ارتفاعی مثلث است.

قابل توجه است که مرکز دایرهٔ محیطی $z = 0$، مرکز ثقل (محل تلاقی میانه‌ها) $z = \frac{s}{3}$ و مرکز ارتفاعی $z = s$ است. بنابراین، مرکز ثقل در $\frac{1}{3}$ مسیر بین مرکز دایره محیطی و مرکز ارتفاعی قرار دارد. خط واصل این سه نقطه، خط اویلر مثلث T نامیده می‌شود. شیب این خط $\overline{s}/s = (\overline{s} - \overline{0})/(s - 0)$، و معادله آن

$$\overline{z} = \frac{\overline{s}}{s} z \qquad (۷-۴)$$

است، که به صورت

$$Im(s\overline{z}) = 0 \qquad (۸-۴)$$

هم نوشته می‌شود (عدد حقیقی

$$I_m(s\overline{z}) = \begin{vmatrix} Re & z & Im & z \\ Re & s & Im & s \end{vmatrix}$$

را حاصلضرب خارجی اعداد مختلط z و s نامیده و با $z * s$ نشان می‌دهیم). با توجه به آنچه گفته شد، نه نقطهٔ دایرهٔ نه نقطه عبارتند از:

$$\frac{1}{2}(z_1 + z_2), \frac{1}{2}(z_2 + z_3), \frac{1}{2}(z_3 + z_1)$$

$$\frac{1}{2}\left(s - \frac{p}{z_1^2}\right), \frac{1}{2}\left(s - \frac{p}{z_2^2}\right), \frac{1}{2}\left(s - \frac{p}{z_3^2}\right) \qquad (۹-۴)$$

$$\frac{1}{2}(s + z_1), \frac{1}{2}(s + z_2), \frac{1}{2}(s + z_3)$$

اکنون، دایرهٔ

$$\overline{z} = \frac{\frac{۱}{۴}}{z - \left(\frac{s}{۲}\right)} + \frac{\overline{s}}{۲} \qquad (۱۰\text{-}۴)$$

را در نظر می‌گیریم. شعاع این دایره نصف شعاع دایره محیطی، و مرکز آن $z = \frac{s}{۲}$ است. بنابراین، مرکز دایرهٔ نه نقطه روی خط اویلر و در وسط پاره‌خط واصل مرکز دایره محیطی و مرکز ارتفاعی واقع است. اکنون، تحقیق این که نه نقطهٔ (۴ـ۹) در معادلهٔ (۴ـ۱۰) صدق می‌کند چیز ساده‌ای است.

فرض می‌کنیم $z_۱$ روی دایرهٔ واحد باشد. شیب $oz_۱$، برابر است با $\frac{۱}{z_۱^۲} = \frac{\overline{z_۱}}{z_۱}$. بنابراین معادلهٔ خط مماس بر دایره در نقطهٔ $z_۱$ عبارت است از

$$\overline{z} = -\frac{۱}{z_۱^۲}(z - z_۱) + \overline{z_۱} = -\frac{z}{z_۱^۲} + \frac{۲}{z_۱}$$

با حل همزمان این معادله با معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $z_۲$ به رابطهٔ $z = \frac{۲z_۱z_۲}{z_۱ + z_۲}$ می‌رسیم. مثلث Δ که توسط سه خط مماس بر دایره در نقاط $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ تشکیل می‌شود را مثلث مماسی می‌نامیم. مختصات رأسهای مثلث Δ عبارتند از

$$\frac{۲z_۱z_۲}{z_۱ + z_۲}, \qquad \frac{۲z_۲z_۳}{z_۲ + z_۳}, \qquad \frac{۲z_۳z_۱}{z_۳ + z_۱}$$

نقاط z_i^* یا وسطهای اضلاع مثلث Δ (پس از کمی محاسبه) به صورت

$$z_i^* = \frac{t^۲}{st - p} - \frac{p^۲}{(st - p)z_i^۲} \qquad i = ۱, ۲, ۳ \qquad (۱۱\text{-}۴)$$

به دست می‌آیند. قابل توجه است که $\overline{s} = \frac{t}{p}$، $\overline{t} = \frac{s}{p}$، $p\overline{p} = ۱$. به علاوه

$$\overline{st - p} = (\overline{z_۱} + \overline{z_۲})(\overline{z_۲} + \overline{z_۳})(\overline{z_۳} + \overline{z_۱}) = \frac{st - p}{p^۲}.$$

بنابراین

$$\left(\frac{t^۲}{st-p}\right)=\frac{s^۲}{st-p}.$$

معادله دایره گذرنده از نقاط z_i^* (دایرهٔ نه نقطهٔ Δ) عبارت است از

$$\left(z-\frac{t^۲}{st-p}\right)\left(\overline{z}-\frac{s^۲}{st-p}\right)=\frac{p^۲}{(st-p)^۲}$$

$$=\frac{۱}{(st-p)(\overline{st-p})} \quad (۱۲\text{-}۴)$$

این مطلب، با قرار دادن برابری (۱۱.۴) در رابطهٔ (۱۲.۴) محقق می‌شود.

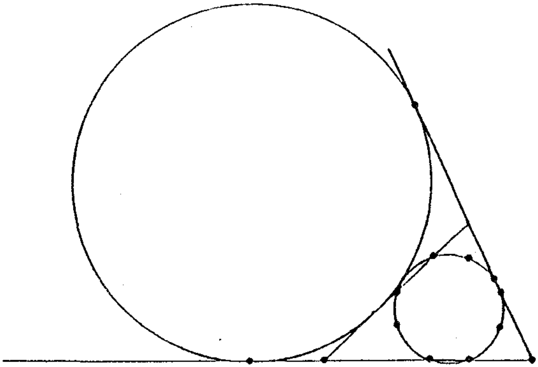
با حل همزمان رابطهٔ (۱۲.۴) و معادله $z\overline{z}=۱$ به‌دست می‌آوریم

$$s^۲z^۲-۲stz+t^۲=۰ \quad (۱۳\text{-}۴)$$

اگر فرض کنیم که مثلث با رأسهای $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ متساوی‌الاضلاع نباشد، آنگاه $s\neq ۰$. چون مبین معادله (۱۳.۴) برابر با صفر است ($۴s^۲t^۲-۴s^۲t^۲=۰$)، پس این معادله یک ریشهٔ مضاعف $z=\frac{t}{s}$ دارد. در نتیجه، دایرهٔ نه‌نقطهٔ Δ در این نقطه بر دایره واحد مماس است. اگر $s=۰$، این دو دایره بر هم منطبق می‌شوند.

حال، نوبت به بیان نکتهٔ پایانی این فصل می‌رسد. به ازای هر مثلث، چهار دایره وجود دارد، که همزمان بر اضلاع آن مماسند. یک دایره، دایره محاطی داخل مثلث است. سه دایره دیگر، در خارج مثلث و در واقع دایره‌های محاطی خارجی هستند. دایرهٔ نه نقطهٔ هر مثلث (غیرمتساوی‌الاضلاع)، بر دایرهٔ محاطی و دایره‌های خارجی مماس است. آنچه گفته شد، به قضیهٔ فویر باخ موسوم است. در مورد مثلث متساوی‌الاضلاع، واضح است که دایرهٔ نه نقطه بر دایره محاطی منطبق، و بر دایره‌های محاطی خارجی مماس است.

اگر به نه نقطهٔ مشخص شدهٔ قبلی، چهار نقطه تماس مذکور اضافه شود، می‌توان از یک دایرهٔ سیزده نقطه صحبت کرد. بر روی دایرهٔ نه نقطه، به عقیدهٔ برخی از نویسندگان ۳۱ نقطه و به عقیدهٔ برخی دیگر ۴۳ نقطه مهم وجود دارد. با ادامه دادنِ این روش، می‌توان به شگفتیهای دیگری دست یافت و قضایای بسیار زیاد دیگری را در هندسهٔ مثلث و دایره ثابت کرد. با وجود این، ما مطالب مهم دیگری را در پیش رو داریم و بنابراین مبحث حاضر را بیش از این ادامه نمی‌دهیم.



شکل۴-۲: قضیهٔ فویر باخ

۵

تابع شوارتس برای یك خم تحلیلی

در این فصل، توجه خود را از خطهای مستقیم و دایره‌ها، به کمانهای تحلیلی و خمها معطوف می‌کنیم. فرض می‌کنیم کمان C به صورت دکارتی

$$f(x,y) = ۰ \qquad (۱-۵)$$

نوشته شده است. این معادله، در مختصات مزدوج به

$$f\left(\frac{z+\overline{z}}{۲}, \frac{z-\overline{z}}{۲i}\right) \equiv g(z,\overline{z}) = ۰ \qquad (۲-۵)$$

تبدیل می‌شود.

مثال. مقطع مخروطی حقیقی.

$$X'AX = ۱, \qquad (۳-۵)$$

را که در آن

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ،A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

و نماد پریم به معنی ترانهاده است، در نظر می‌گیریم. اگر $Z = \binom{z}{\overline{z}}$ ، آنگاه $Z = MX$ که در آن

$$M = \begin{pmatrix} ۱ & i \\ ۱ & -i \end{pmatrix}$$

بنا بر رابطهٔ (۲ـ۴)، $X = \frac{۱}{۲}M^*Z$ و $X' = \frac{۱}{۲}Z'\overline{M}$ بنابراین

$$Z'(\overline{M}AM^*)Z = ۴ \qquad (۴ - ۵)$$

معادلهٔ مقطع مخروطی در مختصات مزدوج است.
اگر

$$\delta = det(\overline{M}AM^*) \qquad (۵ - ۵)$$

آنگاه

$$\delta = -۴\det A\cdot \qquad (۶ - ۵)$$

چون بر حسب اینکه مبین $\delta > ۰$ یا $\delta < ۰$ مقطع مخروطی به‌ترتیب بیضی یا هذلولی است، تبدیل به مختصات مزدوج «نوع صوری» صورت درجه دوم را تغییر می‌دهد. به‌طوری که در آینده خواهیم دید، این تغییر همچنین هنگام‌مطالعه عملگرهای دیفرانسیل مرتبهٔ دوم رخ می‌دهد و در این نظریه بسیار با اهمیت است.

برای لحظه‌ای فرض می‌کنیم که تابع $g(z,\bar{z})$ مربوط به رابطه (۵ـ۲) یک چند جمله‌ای تحویل‌ناپذیر از درجهٔ معینی باشد (یعنی g را نتوان به صورت $g \equiv g_۱g_۲$ نوشت، به طوری که $g_۱, g_۲$ چندجمله‌ای‌های حقیقی با درجهٔ بزرگتر یا مساوی ۱ باشند). می‌نویسیم

$$g(u,v) = \sum_{j,k=۰}^{m,n} \bar{a}_{jk}u^jv^k \qquad (۷ - ۵)$$

و

$$\bar{g}(u,v) = \sum_{j,k=۰}^{m,n} \bar{a}_{jk}u^jv^k \qquad (۸ - ۵)$$

روی C داریم $g(z,\bar{z}) = ۰$؛ و با مزدوج گرفتن از این معادله به‌دست می‌آوریم $\overline{g(z,\bar{z})} = \bar{g}(\bar{z},z) = ۰$. از یک قضیهٔ معروف جبر نتیجه می‌شود که چند جمله‌ای‌های

$g(z,\overline{z})$ و $\overline{g}(\overline{z},z)$ باید متناسب باشند (برای نمونه، به صفحه ۲۱۱ بوخر نگاه کنید). بنابراین

$$\bar{g}(\bar{z},z)=\lambda g(z,\bar{z}) \quad (\text{ثابت است}\ \lambda \neq ۰) \qquad (۵-۹)$$

چند جمله‌ای‌های با ویژگی (۵ـ۹) خود ـ مزدوج نامیده می‌شوند.

مثال. در مورد مقطع مخروطی مرکزی (۵ـ۴)، داریم

$$g(z,\overline{z})=(a-c-۲bi)z^۲+۲(a+c)z\overline{z}+(a-c+۲bi)\overline{z}^۲-۴$$

که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند. این چند جمله‌ای، در رابطهٔ (۵ـ۹) صدق می‌کند.

بنابراین، خود مزدوج بودن یک شرط لازم برای این است که یک چند جمله‌ای بر حسب مختصات مزدوج z و $\overline{z}$ یک خم حقیقی را نمایش دهد. به‌طوری که مثال $g(z,\overline{z})=z\overline{z}+۱$ نشان می‌دهد، این شرط کافی نیست.

اکنون فرض چند جمله‌ای بودن را از g حذف کرده و آن را تابعی تحلیلی از z و $\bar{z}$ فرض می‌کنیم. اگر در نقطهٔ $z_۰$ از خم C داشته باشیم $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}|_{z_0}\neq ۰$، آنگاه بنابر قضیهٔ تابع ضمنی می‌توان $\overline{z}$ را به گونه‌ای منحصر به فرد به صورت

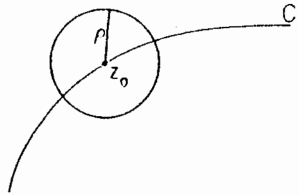
$$\overline{z}=S(z), \qquad (۵-۱۰)$$

به دست آورد، که در آن $S(z)$ یک تابع تحلیلی عادی از z در یک همسایگی $|z-z_۰|\leq p(z_۰)$ از $z_۰$ است (به شکل ۵ـ۱ نگاه کنید). در نقطه $z_۰$ داریم $S(z_۰)=\overline{z}_۰$، و تساوی (۵ـ۱۰) روی C در یک همسایگی از $z_۰$ برقرار است.

شرط $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\neq ۰$ معادل است با

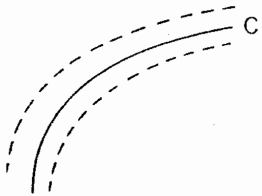
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}f\left(\frac{z+\overline{z}}{۲},\frac{z-\overline{z}}{۲i}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\neq ۰$$

یا اینکه $\frac{\partial f}{\partial x}=۰$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=۰$ به‌طور همزمان رخ نمی‌دهند. نقطه‌ای از C که در آن رابطه $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\neq ۰$ برقرار باشد، یک نقطه عادی C نامیده می‌شود.



شکل۵-۱

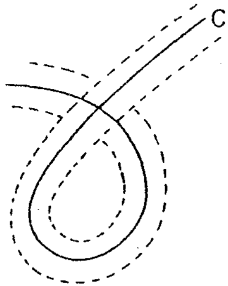
اگر رابطهٔ $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} \neq ۰$ روی قسمتی از یک کمان ساده که شامل نقاط انتهایی خود است برقرار باشد، می‌توانیم آن را نسبت به $\overline{z}$ حل کرده و در هر نقطه یک تابع عادی $S(z)$ به‌دست آوریم. بنابراین، طبق یک استدلال استاندارد در مبحث ادامهٔ تحلیلی، $S(z)$ را می‌توان به‌عنوان شاخه‌ای از یک تابع تحلیلی تک مقداری در یک ناحیه نوار مانند تعریف کرد، که کمان مذکور در درون آن واقع است (به شکل ۲.۵ نگاه کنید). اگر C خود را قطع کند، آنگاه ناحیهٔ نوار مانند خود را قطع خواهد کرد؛ یعنی $S(z)$ را می‌توان در یک ناحیه نوار مانند واقع در یک رویهٔ ریمان تعریف نمود (به شکل ۳.۵ نگاه کنید). اگر C یک خم



شکل۵-۲

سادهٔ بسته باشد، آنگاه $S(z)$ شاخه‌ای از یک تابع تحلیلی تک مقداری در یک ناحیهٔ حلقه مانند است که C را در درون خود دارد (به شکل ۴.۵ نگاه کنید). ممکن است بتوان $S(z)$ را به‌عنوان یک تابع یک یا چند مقداری به صورت تحلیلی به سایر قسمتهای صفحه ادامه داد. مثلاً، اگر g یک چند جمله‌ای باشد، آنگاه به‌طور کلی $S(z)$ یک تابع جبری چند مقداری از z است.

اگر $z_۰ = ۰$ روی C قرار داشته باشد، آنگاه $g(۰,۰) = ۰$ و $s(z)$ نمایشی به



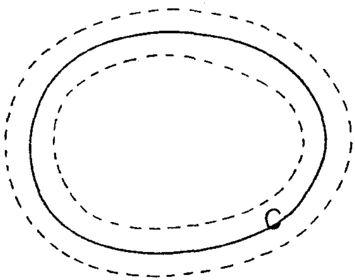
شکل۵-۳

صورت یک انتگرال خط به شکل زیر دارد

$$s(z) = \frac{۱}{۲_{\pi i}} \int_\Gamma \frac{wg_w(z,w)}{g(z,w)} dw \qquad (۱۰' - ۵)$$

که در آنΓ مسیری مناسب حول $w = ۰$ است (به یادداشتهای صفحه ۲۰۷ نگاه کنید).

به دلایلی که در آینده روشن خواهد شد، تابع $S(z)$ را تابع شوارتس C می‌نامیم. بنابر قضیهٔ یگانگی توابع تحلیلی، یک تابع تحلیلی به‌طور منحصر به‌فرد توسط مقادیر آن روی یک کمان معین می‌شود. تابع شوارتس C را می‌توان به صورت دیگری به‌عنوان تابع منحصر به فرد $S(z)$ که در هر نقطه z متعلق به C مقدار $\overline{z}$ را می‌گیرد تعریف کرد.



شکل۵-۴

اکنون، فهرستی از توابع شوارتس چند خم آشنا را می‌آوریم. این فهرست، فقط شامل

خمهایی است که توابع شوارتس آنها بر حسب عبارتهای «مقدماتی» قابل بیان هستند. البته، مقصود تنها اشاره‌ای به توابع شوارتس مذکور است، و نه ارائه لیستی کامل.

تابع شوارتس خط مستقیم گذرنده از نقاط $z_۱$ و $z_۲$

$$\overline{z} = S(z) = \frac{\overline{z}_۱ - \overline{z}_۲}{z_۱ - z_۲} z + \frac{z_۱\overline{z}_۲ - z_۲\overline{z}_۱}{z_۱ - z_۲} \qquad (۱۱-۵)$$

تابع شوارتس دایرهٔ به شعاع r و مرکز $z_۰$،

$$\overline{z} = S(z) = \frac{r^۲}{z - z_۰} + \overline{z_۰}\cdot \qquad (۱۲-۵)$$

تابع شوارتس بیضی $۱ = \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲}$، $(a > b)$

$$\overline{z} = S(z) = \frac{a^۲ + b^۲}{a^۲ - b^۲} z + \frac{۲ab}{b^۲ - a^۲}\sqrt{z^۲ + b^۲ - a^۲}\cdot \qquad (۱۳-۵)$$

تابع شوارتس هذلولی‌های متساوی‌الساقین $x^۲ - y^۲ = a^۲$ با مجانبهای مشترک $y = \pm x$ و خروج از مرکز $e = \sqrt{۲}$

$$\overline{z} = S(z) = \sqrt{۲a^۲ - z^۲} = \sqrt{\alpha^۲ - z^۲} \qquad \alpha = ea\cdot \qquad (۱۳'-۵)$$

تابع شوارتس مقطع مخروطی کلی: (به شکل ۴.۵ نگاه کنید.)

«خم گیج[1] $L^۴$»، $x^۴ + y^۴ = ۱$: (به شکل ۵.۵ نگاه کنید.)

$$\overline{z} = S(z) = (-۳z^۲ + ۲^{\frac{۳}{۲}}(z^۴ + ۱)^{۱/۲})^{۱/۲} \qquad (۱۴-۵)$$

(گاه خمهای $(\frac{x}{a})^m + (\frac{y}{b})^m = ۱$ خمهای لیم[2] نامیده می‌شوند.)

برای آمادگی جهت ارائه تابع شوارتس دستهٔ دیگری از خمها، اتحاد

$$\cos n\theta = \frac{۱}{۲}(e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = \frac{۱}{۲r^n}[(re^{i\theta})^n + (re^{-i\theta})^n]$$
$$= \frac{z^n + \overline{z}^n}{۲r^n}$$

1) gauge 2) lame

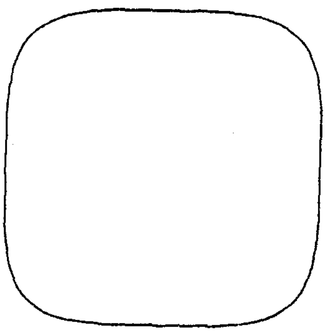
را در نظر می‌گیریم. بنابراین، برای عدد زوج n، $\cos n\theta = \dfrac{(z^n + \overline{z}^n)}{۲(z\overline{z})^{\frac{n}{۲}}}$
تابع شوارتس رُز $R_{۲m} : r^{۲m} = a + b\cos ۲m\theta$ ($۰ < b < a$ و $m = ۱, ۲, \dots$):
با استفاده از اتحاد پیشگفته، به‌دست می‌آوریم

$$z^m \overline{z}^m = a + b\left(\frac{z^{۲m} + \overline{z}^{۲m}}{۲z^m\overline{z}^m}\right).$$

بنابراین

$$\overline{z} = S(z) = z\left[\frac{a + \sqrt{a^۲ - b^۲ + ۲bz^{۲m}}}{۲z^{۲m} - b}\right]^{۱/m}. \qquad (۱۵-۵)$$

با انتخاب $m = ۱$، رز $R_۲$ به معادله $r^۲ = a^۲ + ۴\varepsilon^۲\cos^۲\theta$ به‌دست می‌آید که خم

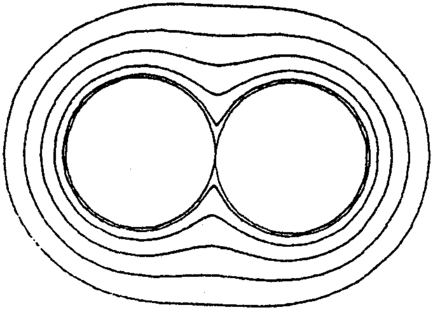


شکل۵-۵

درجه دوم دو دایره نیز نامیده می‌شود (به شکل ۶.۵ نگاه کنید).

$$\overline{z} = S(z) = \frac{z(a^۲ + ۲\varepsilon^۲) + z\sqrt{a^۴ + ۴a^۲\varepsilon^۲ + ۴\varepsilon^۲z^۲}}{۲(z^۲ - \varepsilon^۲)}. \qquad (۱۶-۵)$$

انتخاب $m = ۲$ نیز منجر به رُز $R_۴$ می‌شود، که آن را به صورت



شکل ۵-۶

$a^۴ + ۲b^۴ \cos ۴\theta$ $(a^۲ > ۲b^۴) r^۴ =$ می‌نویسیم. در این حالت، داریم

$$\overline{z}^۲ = S^۲(z) = \frac{a^۴ z^۲ + z^۲\sqrt{۴b^۴ z^۴ + a^۸ - ۴b^۸}}{۲(z^۴ - b^۴)}. \quad (۱۷-۵)$$

اگر $p_n(z) = (z - z_۱)(z - z_۲)\dots(z - z_n)$، خمهای $|p_n(z)| = r^n$ لمنیسکات تعمیم یافته £ هستند. با قرار دادن $\overline{p}_n(z) = (z - \overline{z})\dots(z - \overline{z}_n)$، به‌دست می‌آوریم $p_n(z)\overline{p}_n(\overline{z}) = r^{۲n}$، و بنابراین

$$\overline{p}_n(S(z)) = \frac{r^{۲n}}{p_n(z)}.$$

بویژه اگر $p_n(z) = z^n - ۱$، خواهیم داشت

$$\overline{z} = S(z) = \sqrt[n]{\frac{z^n + r^{۲n} - ۱}{z^n - ۱}}. \quad (۱۸-۵)$$

به ازای $n = ۲$، معادلهٔ فوق به معادلهٔ اُوالهای کاسینی تبدیل می‌شود.

در ادامه متن، چند خم تحلیلی دیگر را نیز ارائه خواهیم داد که توابع شوارتس متعالی «مقدماتی» دارند.

۶

تعبیر هندسی تابع شوارتس ـ انعکاس شوارتسی

انعکاس نسبت به خط مستقیم. فرض می‌کنیم z_1 و z_2 دو نقطهٔ متمایز باشند. تبدیل

$$T(z) = \frac{|z_1 - z_2|}{(z_1 - z_2)}(z - z_2)$$

حرکت صلبی است که z_2 را به مبدأ و z_1 را به نقطه‌ای روی محور xها می‌نگارد. وارون این تبدیل، عبارت است از $T^{-1}(z) = \dfrac{z_1 - z_2}{|z_1 - z_2|}z + z_2$. تبدیل $R(z) = \overline{z}$ یک انعکاس نسبت به محور xها می‌باشد. بنابراین، تابع مرکب $T^{-1}RT$، z را نسبت به خط l که توسط z_1 و z_2 معین می‌شود منعکس می‌کند. این تابع را می‌توان به صورت

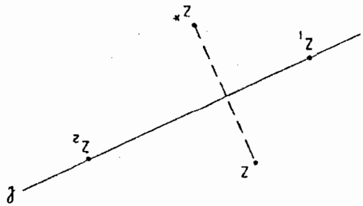
$$z^* = T^{-1}RT(z) = \frac{z_1 - z_2}{\overline{z_1} - \overline{z_2}}(\overline{z} - \overline{z_2}) + z_2. \qquad (۱-۶)$$

به آسانی محاسبه کرد. با مقایسهٔ این رابطه با رابطه‌های (۵ـ۱۱) یا (۳ـ۷) مشاهده می‌کنیم که

$$z^* = \overline{S(z)} \qquad (۱' - ۶)$$

که در آن $S(z)$ تابع شوارتس l است (به شکل ۱.۶ نگاه کنید).

انعکاس نسبت به دایرهٔ $C: |z - z_0| = r_0$ تعریف این مفهوم، بدین ترتیب است. فرض می‌کنیم $z \neq z_0$. نیمخط l^+ را که از z_0 به سوی z امتداد می‌یابد رسم می‌کنیم. نقطهٔ z^* را روی l^+ را چنان مشخص می‌کنیم که $|z - z_0||z^* - z_0| = r^2$. بنابراین،

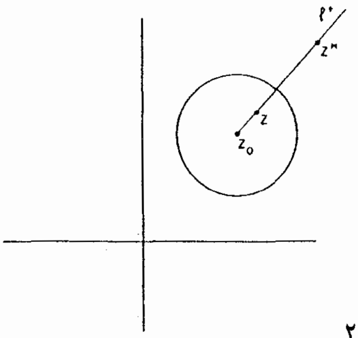


شکل ۶-۱: .

باید رابطهٔ $(z^* - z) = \sigma(z - z_\circ)$ که در آن σ عددی مثبت است برقرار باشد. در نتیجه $\sigma \mid z - z_\circ \mid^{۲} = r^{۲}$، و از این‌رو

$$z^* = z_\circ + \frac{r^{۲}(z - z_\circ)}{\mid z - z_\circ \mid^{۲}} = z_\circ + \frac{r^{۲}}{\bar{z} - \bar{z}_\circ}. \qquad (۲ - ۶)$$

با مقایسهٔ این رابطه با رابطه (۵ـ۱۲)، مجدداً مشاهده می‌کنیم که



شکل ۶-۲

$$z* = \overline{S(z)}, \qquad (۲' - ۶)$$

که در آن $S(z)$ تابع شوارتس دایره است (به شکل ۲.۶ نگاه کنید).

انعکاس نسبت به یک کمان تحلیلی کلی. اکنون، به دنبال یک توصیف هندسی مشابه برای تابع شوارتس یک کمان تحلیلی کلی هستیم. برای این منظور، باید در مورد این که یک کمان تحلیلی از چه چیزی تشکیل شده است بسیار دقیق باشیم.

در C که بر حسب پارامتر حقیقی t به صورت

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 1 \qquad (۳-۶)$$

بیان شده است، قرار می‌دهیم

$$z(t) = x + iy = f_1(t) + if_2(t) = f(t). \qquad (۴-۶)$$

در این صورت، C یک خم تحلیلی ساده نامیده می‌شود، اگر سه شرط زیر برقرار باشد: (الف) $z(t_1) = z(t_2)$، تنها وقتی که $t_1 = t_2$؛ (ب) $f_1(t)$ و $f_2(t)$ توابع تحلیلی حقیقی از t روی $0 \le t \le 1$ باشند؛ و
(پ) $z'(t) = f_1'(t) + if_2'(t) \neq 0, \quad 0 \le t \le 1$.

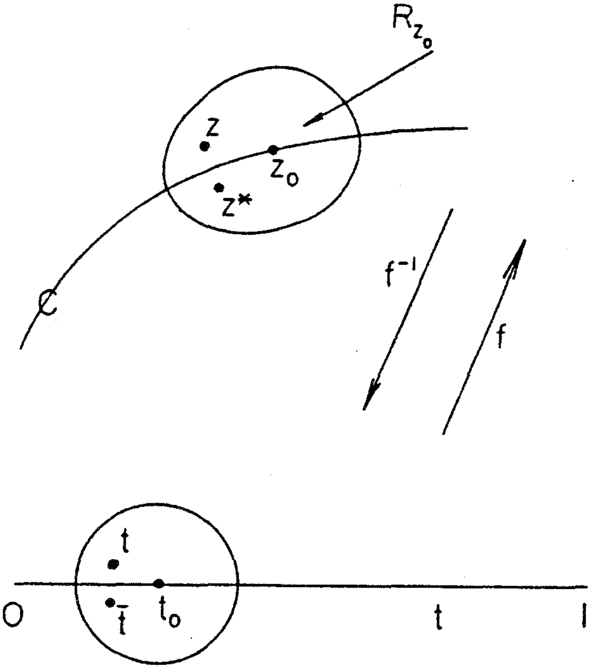
اکنون، به ازای هر $t_0 (0 \le t_0 \le 1)$، $f(t)$ به‌عنوان تابعی از متغیر مختلط t، **در یک همسایگی** $|t - t_0| \le \lambda(t_0)$ تحلیلی است. چون $f'(t_0) \neq 0$، $f(t)$ یک همسایگی چون $|t - t_0| \le \lambda_1 \le \lambda$ را به‌طور همدیس و به صورت یک به یک روی ناحیه‌ای چون R_z که شامل نقطه $z_0 = f(t_0)$ است می‌نگارد. بنابراین، هر نقطهٔ $z \in R_z$ نگارهٔ یک نقطهٔ منحصر به فرد t در صفحه t است: $z = f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ اکنون فرض می‌کنیم z^* نگارهٔ $\bar{t}$ توسط f باشد.

$$z^* = f(\bar{t}) = f_1(\bar{t}) + if_2(\bar{t}) \qquad (۵-۶)$$

در این صورت، z^* منعکس شوارتسی z نسبت به کمان تحلیلی C نامیده می‌شود.

قابل توجه است که انعکاس شوارتس فقط در ارتباط با نقاط بسیار نزدیک به C تعریف می‌شود (به شکل ۳.۶ نگاه کنید).

با توجه به آنچه گفته شد، انعکاس توسط دنبالهٔ $z \to t \to \bar{t} \to z^*$ تعریف می‌شود. اگر به جای z با z^* آغاز کنیم، به‌دست می‌آوریم $z^* \to \bar{t} \to \bar{\bar{t}} = t \to z$. بنابراین، منعکس شوارتسی z^* باید z باشد.



شکل ۶-۳

به‌علاوه داریم

$$\overline{z^*} = \overline{f_۱(\overline{t}) + if_۲(\overline{t})} = \overline{f_۱(\overline{t})} - \overline{if_۲(\overline{t})}. \qquad (۶-۶)$$

چون $f_۱$ و $f_۲$ توابع تحلیلی حقیقی مقدار روی خط حقیقی هستند، $f_i(\overline{t}) = \overline{f_i(t)}$ و در نتیجه

$$\overline{z^*} = f_۱(t) - if_۲(t). \qquad (۷-۶)$$

بنابراین

$$x = f_۱(t) = \frac{z + \overline{z}^*}{۲} \quad , \quad y = f_۲(t) = \frac{z - \overline{z}^*}{۲i}. \quad (۸-۶)$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلهٔ دکارتی $C : F(x, y) = ۰$، به‌دست می‌آوریم

$$F(\frac{z + \overline{z}^*}{۲}, \frac{z - \overline{z}^*}{۲i}) = ۰ \quad \text{یا} \quad g(z, \overline{z}^*) = ۰$$

اما حل این معادله نسبت به $\overline{z}^*$ (با توجه به نابرابری $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} \neq ۰$)، به رابطه

$$\overline{z^*} = S(z) \qquad (۹-۶)$$

می‌انجامد. بنابراین

$$z^* = \overline{S(z)} \qquad (۱۰-۶)$$

این رابطه، بیان می‌کند که مزدوج تابع شوارتس یک کمان تحلیلی، برابر است با منعکس شوارتسی یک نقطه نسبت به این کمان.

از اینکه تابع شوارتس تا این میزان به گونه‌ای منحصر به فرد توسط یک کمان تعریف شد، نتیجه می‌گیریم که عمل منعکس کردن مقوله‌ای مستقل از پارامتری کردن کمان است. انعکاس شوارتسی، یک تبدیل ضد ـ همدیس (یعنی تبدیلی که جهت زاویه‌ها را وارونه می‌کند) می‌باشد.

به‌طوری که دیده‌ایم، منعکسِ منعکسِ یک نقطه z، باید خود نقطهٔ z باشد. بنابراین، داریم

$$\overline{S(\overline{S(z)})} \equiv z \qquad (۱۱-۶)$$

این معادله، یک معادلهٔ تابعی است که در مورد تابع $S(z)$ برقرار می‌باشد.

هر جواب معادلهٔ (۶ـ۱۱)، یک تابع ضمنی هرمیتی نامیده می‌شود. ما این معادله را به صورتی نسبتاً متفاوت خواهیم نوشت.

فرض می‌کنیم $h(z)$ تابعی تحلیلی از یک متغیر مختلط باشد که روی ناحیه‌ای چون R از صفحه مختلط تعریف شده است. منعکس R را نسبت به محور xها با $\overline{R}$ نشان می‌دهیم: $\overline{R} = \{z : \overline{z} \in R\}$. تابع $\overline{h}(z)$ را روی $\overline{R}$ توسط معادلهٔ

$$\overline{h}(z) = \overline{h(\overline{z})} \quad z \in \overline{R}\cdot \qquad (۶-۱۲)$$

تعریف می‌کنیم. نشان دادن چند ویژگی تابع مزدوج $\overline{h}$ بسیار مفید خواهد بود. تابع $\overline{h}(z)$، روی $\overline{R}$ تحلیلی است. این تابع، در معادلهٔ

$$\overline{h(z)} = \overline{h}(\overline{z}) \quad z \in R \qquad (۶-۱۳)$$

صدق می‌کند. اگر به‌طور موضعی داشته باشیم $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$، آنگاه $\overline{h(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k(\overline{z} - \overline{z_0})^k$، و از این رو

$$\overline{h}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k(z - \overline{z}_o)^k\cdot \qquad (۶-۱۴)$$

قابل توجه است که اگر z_0 و q_k حقیقی باشند، آنگاه $\overline{h} = h$.

داریم

$$\overline{\overline{h}}(z) = h(z), \qquad (۶-۱۵)$$

و بنابراین

$$(\overline{h})' = (\overline{h'}) \quad \text{(علامت پریم نشانهٔ مشتق است)} \qquad (۶-۱۶)$$

داریم

$$\overline{g(h(z))} = \overline{g}(\overline{h(z)}) = \overline{g}(\overline{h}(\overline{z}))\cdot \qquad (۶-۱۷)$$

همچنین، داریم $\overline{gh}(z) = \overline{g(h(\overline{z}))} = \overline{g}(\overline{h}(z))$؛ و بنابراین

$$\overline{gh} = \overline{g}\overline{h} \qquad (۶-۱۸)$$

اگر g دارای وارون باشد به‌طوری که $g^{-۱}g = gg^{-۱} = I$، که در آن I تابع همانی است آنگاه $\overline{g^{-۱}}\overline{g} = \overline{g^{-۱}g} = \overline{I} = I$. بنابراین

$$\overline{(g^{-۱})} = (\overline{g})^{-۱} \qquad (۶-۱۹)$$

با استفاده از این نمادگذاری برای توابع مزدوج، از رابطه (۶ـ۱۱) داریم

$$\overline{S}(s(z)) \equiv z,$$

این رابطه را به صورت

$$\overline{S}S = I \qquad (۶-۲۰)$$

می‌نویسیم. از این رابطه، نتیجه می‌شود که

$$\bar{S} = S^{-۱}, S = (\overline{S})^{-۱} = \overline{(S^{-۱})} \quad و \quad S\bar{S} = I \qquad (۶-۲۱)$$

در ادامه این بخش، کنار هم نهادن نمادهای تابعی همچون رابطهٔ (۶ـ۲۰) به معنای عمل ترکیب توابع* خواهد بود.
جمع، ضرب و ترکیب توابع همراه باهم چیزی را می‌سازند که برخی مؤلفین آن را جبر سه عملگری می‌نامند. قوانین رسمی مربوط به ترکیب توابع از این قرارند:

(۱) $f(gh) = (fg)h$

(۲) $(f+g)h = fh + gh$

(۳) $(f.g)h = fh.gh$

(۴) $f^{-۱}f = ff^{-۱} = I$

(۵) $(fg)^{-۱} = g^{-۱}f^{-۱}.$

---

*) امید است که این طرز کاربرد به‌قدر کافی روشن بوده و با ضرب معمولی اشتباه گرفته نشود (بیشتر مؤلفین نماد fog را برای نمایش دادن ترکیب تابعی به‌کار می‌برند، ولی به نظر می‌رسد در نوشتار حاضر این نماد به‌گونه‌ای غیر ضروری و سنگین باشد).

توجه کنید که در (۲) و (۳) نمی‌توان جای توابع را عوض کرد تا روابطی مشابه در مورد $h(f+g)$ و $h(f.g)$ به دست آید.
به سه عمل جمع، ضرب و ترکیب، می‌توان عمل ازدواج را با قوانین زیر اضافه کرد.

$$\overline{\overline{f}} = f \qquad (۶)$$
$$\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g} \qquad (۷)$$
$$\overline{f.g} = \overline{f}.\overline{g} \qquad (۸)$$
$$\overline{fg} = \overline{f}\overline{g} \qquad (۹)$$
$$(\overline{f})^{-۱} = \overline{(f^{-۱})}. \qquad (۱۰)$$

همچنین، عمل مشتق‌گیری را که قوانین آن عبارتند از:

$$\overline{(f)'} = \overline{f}' \qquad (۱۱)$$
$$(f+g)' = f' + g' \qquad (۱۲)$$
$$(f.g)' = f.g' + f'.g \qquad (۱۳)$$
$$(fg)' = f'g.g'. \qquad (۱۴)$$

یک نمونه ساده از برابریهای (۶ـ۲۱) توسط تابع شوارتس دایره به‌دست می‌آید. فرمولبندی ماتریسی این تابع بسیار جالبتر از جایگزینی مستقیم است، و بنابراین ما توجه خود را به بحث در مورد ترکیبهای تبدیلات خطی کسری توسط ماتریسها معطوف می‌کنیم. تابع گویای $w = f(z) = \dfrac{Az+B}{Cz+D}$ (که از آن با عنوان تبدیل خطی، دو خطی، کسری خطی، یا موبیوس نیز یاد می‌شود) را با ماتریس $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ نمایش می‌دهیم و می‌نویسیم $f \sim \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. فرض می‌کنیم $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq ۰$، در غیر این صورت، صورت و مخرج متناسب بوده و f ثابت است. قابل توجه است که تابع $f(z)$ را می‌توان با هر ماتریس دیگر به صورت

$$\lambda \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A & \lambda B \\ \lambda C & \lambda D \end{pmatrix}$$

نیز (به ازای هر $\lambda \neq ۰$) نمایش داد. اکنون، اگر داشته باشیم

$$u = g(w) = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta},$$

آنگاه

$$u = gf(z) = \frac{\alpha\left(\dfrac{Az+B}{Cz+D}\right) + \beta}{\gamma\left(\dfrac{Az+B}{Cz+D}\right) + \delta} = \frac{(\alpha A + \beta C)z + (\alpha B + \beta D)}{(\gamma A + \delta C)z + (\gamma B + \delta D)}$$

بنابراین

$$gf \sim \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad (۲۲-۶)$$

این ارتباط را می‌توان به صورت نسبتاً متفاوتی بیان کرد. اگر ماتریس $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ را با نماد M_f نشان دهیم، آنگاه

$$M_{gf} = \lambda M_g M_f, \qquad (\lambda \neq ۰). \qquad (۲۲'-۶)$$

این نماد مناسب، در چند جای مطالب آینده مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

بنابر رابطه (۵ـ۱۲) در مورد دایرهٔ $C : |z - z_۰| = r$ داریم

$$S(z) \sim \begin{pmatrix} \bar{z}_۰ & r^۲ - |z_۰|^۲ \\ ۱ & -z_۰ \end{pmatrix} \qquad (۲۳-۶)$$

و

$$\bar{S}(z) \sim \begin{pmatrix} z_۰ & r^۲ - |z_۰|^۲ \\ ۱ & -\bar{z}_۰ \end{pmatrix}$$

این دو ماتریس را به ترتیب $S\overline{S}$ در هم ضرب کرده و به‌دست می‌آوریم.

$$S\overline{S}(z) \sim \begin{pmatrix} r^۲ & ۰ \\ ۰ & r^۲ \end{pmatrix} \sim \frac{r^۲ z}{r^۲} \equiv z \qquad (\text{یا } S\overline{S} = I)$$

بالاخره، به‌طور گذرا متذکر می‌شویم گاه دایره واحد $\overline{z} = \frac{۱}{z}$ که آن را با ماتریس $E = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$ نشان می‌دهند، ضد واحد نامیده می‌شود. محور x، $z = \overline{z}$ با ماتریس همانی $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = I$ نشان داده می‌شود و داریم $E^۲ = I$.

از رابطه (۶ـ۲۰) نتیجه می‌شود که ممکن است یک تابع تحلیلی «دلخواه» $S(z)$ به‌عنوان یک تابع شوارتس عمل نکند. بنابراین، به ازای تابع تحلیلی کلی $S(z)$ ریشه‌های $\overline{z} = s(z)$ نمی‌توانند یک کمان تحلیلی تشکیل دهند.

مثال. اگر $\overline{z} = z^n$، $(n > ۱)$، آنگاه $|z|^n = |z|$. بنابراین، انتظار می‌رود که $z = ۰$ یا $|z| = ۱$. بنابراین $z = exp(\frac{۲\pi j i}{n + ۱})$، $(j = ۰, \ldots, n)$.

به ازای $n + ۱$ نقطهٔ داده شدهٔ z_i در صفحه مختلط، به آسانی می‌توان چند جمله‌ای $P_n(z)$ با درجه کوچکتر یا مساوی n را پیدا کرد که $p_n(z_i) = \overline{z_i}$ $(i = ۱, ۲, \ldots, n+۱)$.
در حالت کلی، این چند جمله‌ای تابع شوارتس هیچ کمانی نخواهد بود.

حتی ممکن است تابع تحلیلی $S(z)$ در رابطهٔ (۶ـ۲۰) صدق کند، ولی تابع شوارتس هیچ کمان حقیقی نباشد.

مثال. اگر $S(z) = \frac{z - a}{z - ۱}$ (a حقیقی است)، آنگاه $\overline{S}S = I$. به هر ترتیب، $\overline{z} = \frac{z - a}{z - ۱}$ معادل است با $(x - ۱)^۲ + y^۲ = ۱ - a$ و بنابراین به ازای $a > ۱$ این معادله در صفحه حقیقی گاوسی هیچ جوابی ندارد.

در آینده خواهیم دید که یک شرط لازم و کافی برای شوارتسی بودن تابع $S(z)$، آن است که نمایشی به صورت (۸ـ۱) داشته باشد.

از آنجا که $S(z)$ یک تابع تحلیلی از z است، می‌توانیم مفاهیمی چون مشتقات، ادامهٔ تحلیلی، تعریف روی رویه‌های ریمانی و نقاط تکین آن را مطالعه و توصیف کنیم. همچنین، می‌توانیم به اجرای حساب مانده‌ها بر روی آن بپردازیم، به نمایشها و معادلات تابعی آن دقت کنیم و به دنبال کاربردهای مناسب آن باشیم. این برنامه در بقیهٔ این کتاب عملی خواهد شد.

۷

تابع شوارتس و هندسهٔ دیفرانسیل

در این بخش، مشتقات تابع شوارتس یک کمان تحلیلی C را به مفاهیمی از قبیل ضریب زاویه‌ای و خمیدگی آن کمان مرتبط می‌کنیم. فرض می‌کنیم نقطهٔ $z = re^{i\theta}$ روی C باشد. در این صورت، در طول کمان C

$$r^{۲} = z\overline{z} = zS(z) = |S(z)|^{۲} \tag{۱-۷}$$

چون $\dfrac{\overline{z}}{z} = e^{-۲i\theta}$ در طول کمان C رابطهٔ

$$\theta = \frac{i}{۲}\log\left(\frac{\overline{z}}{z}\right) = \frac{i}{۲}\log\left(\frac{S(z)}{z}\right)\cdot \tag{۲-۷}$$

برقرار است. و باز در طول کمان C داریم

$$\frac{d\overline{z}}{dz} = \frac{dx - idy}{dx + idy} = \frac{۱ - iy'}{۱ + iy'} \tag{۳-۷}$$

که در آن $y' = \dfrac{dy}{dx}$. با وجود این، چون در طول C، $\overline{z} = s(z)$، و چون مشتق یک تابع تحلیلی مستقل از جهتی است که نموها اختیار می‌شوند، داریم

$$S'(z) = \frac{d\overline{z}}{dz} = \frac{۱ - iy'}{۱ + iy'}\cdot \tag{۴-۷}$$

چون $dx - idy = \overline{dx + idy}$، از روابط (۷ـ۳) و (۷ـ۴) نتیجه می‌شود که در طول کمان C

$$|S'(z)| = ۱\cdot \tag{۵-۷}$$

تساوی (۷ـ۵) را می‌توان از معادلهٔ تابعی (۶ـ۲) (یا (۶ـ۱۱)) نیز به‌دست آورد. با مشتق‌گیری از رابطهٔ (۶ـ۲۰)، به‌دست می‌آوریم ۱ $\equiv \bar{S}'(S(z)S'(z))$. اکنون، در طول C رابطه $S(z) = \overline{z}$ برقرار است، و بنابراین به‌دست می‌آوریم ۱ $= \overline{S}'(\overline{z})S'(z)$ یا ۱ $= \overline{S'(z)}S'(z)$، که همان رابطهٔ (۷ـ۵) است.

حل معادله (۷ـ۴)، به رابطهٔ

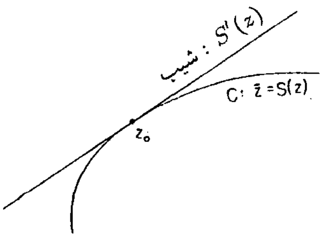
$$y' = -i\frac{۱ - S'(z)}{۱ + S'(z)}. \qquad (۶\text{-}۷)$$

می‌انجامد.

فرض می‌کنیم نقطه $z_\circ$ روی C باشد. معادلهٔ خط گذرنده از $z_\circ$ با ضریب زاویه‌ای λ، به صورت $\overline{z} = A(z - z_\circ) + \overline{z_\circ}$ است، که در آن، بنا بر رابطهٔ (۳ـ۱۵)، $A = \dfrac{۱ - i\lambda}{۱ + i\lambda}$. ولی اگر $\lambda = y'(x_\circ)$، آنگاه بنابر رابطه (۷ـ۴) خواهیم داشت $A = S'(z_\circ)$. در نتیجه، معادله خط مماس بر C در نقطه $z_\circ$ عبارت است از

$$\overline{z} = S'(z_\circ).(z - z_\circ) + \overline{z_\circ}. \qquad (۷\text{-}۷)$$

این معادله، مشابه فرمول نقطه ـ ضریب زاویه‌ای برای معادله خط است (به شکل ۱.۷ نگاه کنید). بنابراین، می‌توان از شیب کمان C در نقطهٔ $z_\circ$ صحبت کرد. مشاهده می‌شود که مشتق تابع شوارتس نقشی مشابه ضریب زاویه‌ای دارد.



شکل ۷-۱

اگر ψ زاویهٔ بین خط مماس بر C در نقطه $z_\circ$ و محور حقیقی باشد، آنگاه

$$\tan\psi = y' = -i\frac{\text{۱} - S'}{\text{۱} + S'}\cdot$$

از این رابطه، نتیجه می‌شود که

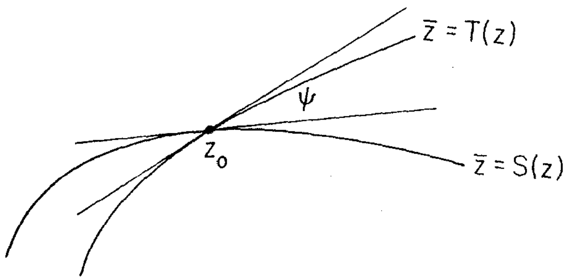
$$\psi = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}argS'(z_\circ)\cdot \qquad (\text{۸-۷})$$

بنابراین، رابطه‌های (۷ـ۸) و (۷ـ۵)، $S'(z)$ را روی C کاملاً معین می‌کنند.

اگر دو کمان تحلیلی با توابع شوارتس $S(z)$ و $T(z)$ در نقطه $z_\circ$ تلاقی کنند (به شکل ۲.۷ نگاه کنید)، آنگاه زاویه بین کمان اول و کمان دوم با رابطه

$$\tan\psi = \frac{\lambda_\text{۲} - \lambda_\text{۱}}{\text{۱} + \lambda_\text{۱}\lambda_\text{۲}}\cdot$$

بیان می‌شود، که در آن $\lambda_\text{۱}$ و $\lambda_\text{۲}$ به ترتیب ضریب‌های زاویه‌ای کمانهای اول و دوم هستند. با استفاده از رابطه (۷ـ۶)، به دست می‌آوریم



شکل۷-۲

$$\tan\psi = i\left(\frac{S' - T'}{S' + T'}\right)_{z=z_\circ} \qquad (\text{۹-۷})$$

یا

$$\psi = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left(argT' - argS'\right)\cdot \qquad (\text{۱۰-۷})$$

مشاهده می‌کنیم که دو کمان در نقطهٔ تلاقی مماسند، اگر و تنها اگر

$$S' = T'. \qquad (۱۱\text{-}۷)$$

و عمودند، اگر و تنها اگر

$$S' = -T' \qquad (۱۲\text{-}۷)$$

فرض می‌کنیم که کمانهای S، T و U در نقطهٔ z_0 متقاربند، و کمان T زاویهٔ بین کمان S و کمان U را نصف می‌کند. در این صورت، با استفاده از رابطه (۷ـ۹) داریم

$$\frac{S' - T'}{S' + T'} = \frac{T' - U'}{T' + U'}$$

یا

$$(T')^2 = S'U' \quad (\text{در نقطهٔ } z_0) \qquad (\text{۱۲.۷ـالف})$$

بنابراین، $T'(z_0)$ میانگین هندسی $S'(z_0)$ و $U'(z_0)$ است.

داریم

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (dx + idy)(dx - idy) = dz\overline{dz}$$

$$= dz d\bar{z} = dz S'(z) dz = S'(z)(dz)^2 \qquad (۱۳\text{-}۷)$$

بنابراین

$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{\sqrt{S'(z)}}. \qquad (۱۳' - ۷)$$

اکنون تعبیرهایی را برای مشتق دوم تابع شوارتس پیدا می‌کنیم. داریم $\frac{d^2y}{dx^2} = (\frac{dy'}{dz}).(\frac{dz}{dx})$. از رابطه (۷ـ۶) نیز به‌دست می‌آید که $\frac{dy'}{dz} = \frac{2iS''}{(1 + S')^2}$.

اکنون، رابطهٔ $\frac{dz}{dx} = \frac{dx + idy}{dx} = 1 + iy'$ برقرار است، و از این رو بنابر رابطهٔ (۷ـ۶) داریم

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{1 + S'} \qquad (۱۴ - ۷)$$

بنابراین

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{۴iS''}{(۱+S')^۳} \qquad (۱۵-۷)$$

اگر خمیدگی (علامت‌دار) C را با k نشان دهیم، داریم

$$k = \frac{d\psi}{ds} = \frac{d\ \tan^{-۱} y'}{dx}\frac{dx}{dz}.\frac{dz}{ds} = \frac{y''}{۱+y'^۲}\frac{dx}{dz}.\frac{dz}{ds} \qquad (۱۶-۷)$$

با استفاده از روابط (۷ـ۱۵)، (۷ـ۱۴) و (۷ـ′۱۴)، به‌دست می‌آوریم

$$k = \frac{i}{۲}\frac{S''}{(S')^{\frac{۳}{۲}}} \qquad (۱۷-۷)$$

در نتیجه بنابر رابطه (۷ـ۵)

$$|k| = \frac{۱}{۲}|S''| \qquad z \in C \qquad (۱۸-۷)$$

و بنابراین می‌توانیم S'' را «خمیدگی مختلط» C بنامیم.

مثال. دایره، خمیدگی ثابت دارد. بنابراین، با مشتق‌گیری از رابطه (۱۷.۷) درمی‌یابیم که $۲S'.S''' = ۳(S'')^۲$ معادله دیفرانسیلی است که تابع شوارتس هر دایره دلخواه در آن صدق می‌کند.

به ازای نقطهٔ $z_۰$ واقع بر C داریم

$$S(z) = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{S^{(n)}(z_۰)}{n!}(z-z_۰)^n \qquad (۱۹-۷)$$

و بر مبنای روابط قبلی، می‌توانیم چند جملهٔ اول سری (۱۹.۷) را به‌دست آوریم. با به‌دست آوردن دو جملهٔ اول خواهیم داشت

$$S(z) \approx S(z_۰) + S'(z_۰)(z-z_۰) = \overline{z_۰} + S'(z_۰)(z-z_۰) \qquad (۲۰-۷)$$

که برابر است با تابع شوارتس خط مماس

در این حالت، تابع شوارتس خط قائم به صورت زیر بیان می‌شود

$$S_N(z) = \overline{z_\circ} - S'(z_\circ)(z - z_\circ) \qquad (۲۰' - ۷)$$

بنابراین در یک همسایگی از $z_\circ$، انعکاس شوارتسی z نسبت به C به‌طور تقریبی به وسیلهٔ رابطه

$$z^* = \overline{S(z)} \approx \overline{S'(z_\circ)}(\bar{z} - \bar{z}_\circ) + z_\circ \qquad (۲۱ - ۷)$$

بیان می‌شود. عبارت طرف راست، انعکاس (معمولی) z نسبت به خط مماس بر C در نقطه $z_\circ$ است (به رابطهٔ (۶ـ۱) نگاه کنید). بنابراین، بدون در نظر گرفتن جمله‌های مرتبه دوم و بالاتر، می‌توان گفت که انعکاس شوارتسی نسبت به یک کمان C و انعکاس معمولی نسبت به خط مماس C یکسان هستند.

مشتقات مراتب بالاتر $S(z)$ را می‌توان بر حسب ناورداهای دیفرانسیل بالاتر $k' = \dfrac{dk}{ds}$، $k'' = \dfrac{dk'}{ds} = \dfrac{d^۲k}{ds^۲}$ و مانند آنها بیان کرد. یکی دیگر از این مقادیر را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$k' = \frac{dk}{ds} = \frac{dk}{dz}\frac{dz}{ds} \qquad (۲۲ - ۷)$$

از روابط (۷ـ۱۷) و (۷ـ'۱۳) نتیجه می‌شود

$$k' = \frac{i}{۲}\frac{S'S''' - \frac{۳}{۲}(S'')^۲}{(S')^۳} \qquad (۲۳ - ۷)$$

در نظریهٔ نگاشت همدیس، عبارت $\dfrac{w'''}{(w')^۲} - \dfrac{۳}{۲}\dfrac{(w'')^۲}{(w')^۳}$ را مشتق شوارتسی نامیده و آن را با $\{w, z\}$ نشان می‌دهند. این عبارت، یک ناوردای دیفرانسیلی برای گروه تبدیلات خطی کسری است؛ یعنی، اگر $W = \dfrac{Aw + B}{Cw + D}$، آنگاه $\{W, z\} = \{w, z\}$.

این رابطه را می‌توان با یک محاسبه صوری ثابت کرد. بویژه اگر $z = w(z)$، آنگاه $\{\dfrac{Az + B}{Cz + D}, z\} = \{z, z\} = \circ$ به‌علاوه اگر $Z = \dfrac{az + b}{cZ + d}$، آنگاه

$\{w, z\} = \left(\frac{dZ}{dz}\right)^۲ \{w, Z\}$. با این نمادگذاری، رابطه (۷ـ۲۳) به

$$k' = \frac{i}{۲}\{S, z\} \qquad (۲۳' - ۷)$$

تبدیل می‌شود.

مثال. در مورد دایره، $S(z)$ یک تابع دو خطی است. بنابراین، $k' = \frac{۱}{۲}i\{s, z\} = ۰$.
سری (۱۹.۷) راکه بسط موضعی $S(z)$ است، می‌توان بر حسب ضریبهای زاویه‌ای، خمیدگیها و غیره بازنویسی کرد. از روابط (۷ـ۴)، (۷ـ۱۷) و (۷ـ۲۳) سه جملهٔ اول این بسط در دسترس هستند. فرض اینکه C از $z_۰ = ۰$ می‌گذرد و در این نقطه دارای ضریب زاویه‌ای است، اوضاع را تا حدی ساده‌تر می‌کند. بنابراین $S(۰) = ۰$ و $S'(۰) = ۱$.
با این ساده‌سازی داریم

$$\begin{aligned} S(z) &= z - ikz^۲ + \left(-k^۲ - \frac{i}{۳}k'\right)z^۳ \\ &+ \left[-\frac{۵}{۶}kk' - i\left(\frac{۱}{۱۲}k'' - k^۳\right)\right]z^۴ \\ &+ \left[\left(-\frac{۱}{۴}kk'' - \frac{۱}{۶}(k')^۲ + k^۴\right)\right. \\ &\left. - i\left(\frac{۱}{۶۰}k''' - \frac{۴۸}{۴۰}k^۲k'\right)\right]z^۵ + \dots \quad |z| < \rho. \qquad (۲۳'' - ۷) \end{aligned}$$

با فرض مجدد $z_۰ = ۰$ و اینکه ضریب زاویه‌ای C در نقطهٔ $z_۰$ برابر با ۰ است، دایره خمیدگی C را در این نقطه C_k می‌نامیم. شعاع این دایره $\frac{۱}{k}$ و مرکز آن $z_۱ = \frac{i}{k}$ است. تابع شوارتس C_k عبارت است از

$$S_k(z) = \frac{iz}{i - kz} = z - ikz^۲ - k^۲z^۳ + \dots \qquad (۲۴ - ۷)$$

بنابراین

$$S_k(z) - S(z) = \frac{i}{۳}k'z^۳ + \dots. \qquad (۲۵ - ۷)$$

در نتیجه، تابع شوارتس دایره خمیدگی با تابع شوارتس کمان، در جمله‌های تا مرتبهٔ دوم برابرند. داریم $S(z_\circ) = S_k(z_\circ)$، $S'(z_\circ) = S'_k(z_\circ)$ و $S''(z_\circ) = s''_k(z_\circ)$. بنابراین، $S_k(z)$ یک تقریب گویای $S(z)$ به مفهوم پاده است. می‌توان تقریب‌کننده‌های پاده مراتب بالاتر $S(z)$ را پیدا کرد؛ یعنی، توابع گویای R که $R^{(j)}(z_\circ) = S^{(j)}(z_\circ) (j = \circ, \text{۱}, \ldots, q)$. با وجود این، هیچ کدام از اینها تابع شوارتس هیچ کمانی نخواهد بود (به فصل ۱۰ مراجعه کنید).

۸

نگاشتهای همدیس، انعکاسها و جبر آنها

در فصل ۶، یک کمان تحلیلی را به عنوان تصویر قطعهٔ حقیقی $a \leq t \leq b$ تحت یک نگاشت همدیس f تعریف کردیم. دریافتیم که اگر نقطه $z = f(t)$ در یک همسایگی C قرار داشته باشد، منعکس* z نسبت به C توسط $z^* = f(\bar{t})$ تعریف می‌شود. چون $S(z) = \overline{f(\bar{t})} = \bar{f}(t)$، و چون $t = f^{-۱}(z)$، داریم $S(z) = \bar{f}(f^{-۱}(z))$. این رابطه را به صورت زیر می‌نویسیم

$$S = \bar{f} f^{-۱} \qquad (۱\text{-}۸)$$

از این رابطه به‌دست می‌آوریم

$$S' = \overline{f'} f^{-۱} / f' f^{-۱}. \qquad (۱' - ۸)$$

اگر پارامتر t واقع در $[۰ , ۱]$ را به

$$t = g(t') \quad (۰ \leq t' \leq ۱) \qquad (۲ - ۸)$$

تغییر دهیم، که در آن g یک تابع تحلیلی حقیقی روی محور حقیقی t' است: $g = \bar{g}$ ، آنگاه به آسانی می‌توانیم $S(z)$ را با استفاده از تابع مرکب fg محاسبه کنیم. از رابطهٔ

*) مفهوم انعکاس را می‌توان به کمانهای غیر تحلیلی خاصی تعمیم داد. کافی است توابع نگاشتی f را در نظر بگیریم که به ازای آنها $z^* = f f^{-۱}(z)$ تعریف شده باشد. برای نمونه، این تعمیم به نظریهٔ توابع شبه ـ تحلیلی مربوط بوده و جزئیات قابل ملاحظه‌ای از آن شناسایی شده است. در اینجا، نمی‌توانیم جزئیات بیشتری از این موضوع را ارائه دهیم.

(۱.۸) نتیجه می‌شود

$$S=\overline{fg}(fg)^{-1}=\bar{f}\bar{g}g^{-1}f^{-1}=\bar{f}gg^{-1}f^{-1}=\bar{f}f^{-1}. \quad (۳-۸)$$

بنابراین، چنانکه مطلوب بود، S مستقل از پرمایش C است.

در یک همسایگی $t=0$، می‌نویسیم($a\neq 0$)، $z=f(t)=at+bt^2+ct^3+\dots$. با وارون کردن صوری این سری، به‌دست می‌آوریم $t=f^{-1}(z)=AZ+BZ^2+CZ^3+\dots$ که در آن

$$\begin{aligned} aA&=1\\ a^3B&=-b\\ a^5C&=2b^2-ac\\ a^7D&=5abc-a^2d-5b^3\\ a^9E&=6a^2bd+3a^2c^2+14b^4-a^3e-21ab^2c \end{aligned}$$

(۲-۸)

با محاسبه‌ای ساده به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} S(z)&=\overline{f}(f^{-1}(z))\\ &=\frac{\bar{a}}{a}z+\Big(\frac{a\bar{b}-\bar{a}b}{a^3}\Big)z^2\\ &\quad+\Big(\frac{a(a\bar{c}-\bar{a}c)+2b(\bar{a}b-a\bar{b})}{a^5}\Big)z^3+\dots \end{aligned} \quad (۳-۸)$$

اگر f روی محور حقیقی مقادیر حقیقی را اختیار کند، آنگاه $a=\bar{a}, b=\bar{b},\dots$، و تمام ضرایب بجز ضریب اول صفر می‌شوند؛ زیرا محور t روی محور x نگاشته می‌شود و $S(z)=z$.

اگر بنویسیم $s(z)=b_1z+b_2z^2+b_3Z^3+\dots$، آنگاه با توجه به رابطهٔ $\overline{S}=S^{-1}$

و ضرایب S^{-1} به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
\overline{b}_1 &= \frac{1}{b_1}\\
\overline{b}_2 &= -\frac{b^2}{b_1^3}\\
\overline{b}_3 &= \frac{2b_2^2 - b_1 b_3}{b_1^5}\\
\overline{b}_4 &= \frac{5b_1 b_2 b_3 - b_1^2 b_4 - 5b_2^3}{b_1^7}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{۴-۸}$$

اکنون، فرض می‌کنیم $b_1 = 1$ و تمام ضرایب b_2، b_3، b_4 و ... حقیقی باشند؛ یعنی $I_m b_2 = I_m b_3 = I_m b_4 = \cdots = 0$ و از معادلات فوق نتیجه می‌گیریم $\overline{b_2} + b_2 = 2Reb_2 = 0$. بنابراین $b_2 = 0$، و چون $\overline{b_3} + b_3 = 2Reb_3 = 2b_2^2 = 0$. لذا $b_3 = 0$. به ازای عدد دلخواه $n \geq 2$ و به ازای $b_1 = 1$، $\overline{b_n} + b_n = 2Reb_n$ برابر است با یک چند جمله‌ای همگن بر حسب $b_2, b_3, \ldots$ و b_{n-1}. بنابراین $(n = 2, 3, \ldots)$ $b_n = 0$ و در نتیجه $S(z) = z$.

تابع شوارتس، تعبیری به‌عنوان یک نگاشت همدیس دارد. داریم $S(z) = \bar{f}(f^{-1}(z)) = \overline{f(\overline{f^{-1}(z)})}$. اکنون، فرض می‌کنیم $a < t_0 < b$ و $f(t)$ قرص $\mathcal{C}: |t - t_0| < \epsilon$ را به ناحیهٔ $\mathcal{G}$ واقع در صفحه z که شامل $z_0 = f(t_0)$ بوده و قسمتی از C را در بر دارد بنگارد ـ برای درستی این مورد C باید به‌قدر کافی کوچک باشد. در این صورت، $S(z)$، $\mathcal{G}$ را به‌طور همدیس روی $\overline{\mathcal{G}}$ می‌نگارد؛ زیرا به ازای $z \in \mathcal{G}$، $f^{-1}(z) \in \mathcal{C}$، $\overline{f^{-1}}(z) \in \mathcal{C}$، $f(\overline{f^{-1}(z)}) \in \mathcal{G}$ و سرانجام $\overline{f(\overline{f^{-1}(z)})} \in \overline{\mathcal{G}}$. تمام نگاشتها، دوسویی هستند. چون $S(z)$ روی $\mathcal{G}$ تک مقداری است، نتیجه می‌شود که در سراسر $\mathcal{G}$، $S'(z) \neq 0$.

به جای قرص $\mathcal{C}$ می‌توانیم با هر ناحیهٔ همبند ساده در صفحه t که نسبت به محور حقیقی متقارن بوده و در ناحیه تک مقداری f قرار داشته باشد کار کنیم. این کار، ما را به مفهوم زیر که در مطالب آتی هم کاربردهایی دارد هدایت می‌کند. ناحیه $\mathcal{G}$ را نسبت به

کمان تحلیلی C به‌طور همدیس متقارن نامند، اگر نگارهٔ آن تحت f^{-1} نسبت به محور x متقارن باشد.

معمولاً به‌دست آوردن تابع شوارتس C از تابعی که C را روی دایرهٔ واحد می‌نگارد ـ بویژه هنگامی که C یک خم سادهٔ بستهٔ تحلیلی باشد، راحتتر است. فرض می‌کنیم C چنین خم بسته‌ای بوده و $W = M(z)$ تابعی باشد که یک نگاشت یک به یک را از داخل C واقع در صفحهٔ z به داخل دایره $|w| = 1$ برقرار می‌کند. و فرض می‌کنیم $z = m(w)$ وارون این تابع باشد.

بنابر یک قضیه معروف در مورد نگاشت همدیس (برای نمونه، به صفحهٔ ۲۲۵ کتاب آلفرنس نگاه کنید)، چون C یک خم تحلیلی است، $M(z)$ را می‌توان در طول مرز از داخل C چنان ادامه داد که در یک ناحیهٔ بزرگتر با مرز تحلیلی C' تحلیلی و تک مقداری باشد. به همین ترتیب، می‌توان $m(w)$، و بنابراین $\overline{m}(w)$، را روی ناحیه $|w| \geq r$ به ازای یک $r < 1$ به‌طور تحلیلی ادامه داد؛ زیرا به ازای zهای متعلق به داخل C'، تابع $w = M(z)$ مقادیر $|w| < r'$، $r' > 1$ را اتخاذ می‌کند. در نتیجه، $\frac{1}{M(z)}$ مقادیر خود را روی $|w| > \frac{1}{r'}$ اتخاذ می‌کند. بنابراین، تابع $\overline{m}(\frac{1}{M(z)})$ روی یک نوار شبه ـ حلقه که C در داخل آن واقع است تعریف شده و تحلیلی است. به ازای z متعلق به C، $w = \frac{1}{M(z)}$ روی دایرهٔ $|w| = 1$ یا $w\overline{w} = 1$ واقع است. بنابراین روی C داریم

$$\overline{m}\left(\frac{1}{M(z)}\right) = m\left(\overline{\overline{\frac{1}{M(z)}}}\right) = \overline{m(M(z))} = \overline{z}\cdot$$

بنابراین مقادیر این تابع روی C، $\overline{z}$ها هستند و لذا

$$S(z) = \overline{m}\left(\frac{1}{M(z)}\right). \qquad (۸-۴)$$

قابل توجه است که یک بار دیگر ثابت کردیم که تابع شوارتس C روی یک نوار شبه ـ حلقه محیط بر C تحلیلی است.

معادلهٔ تابعی

$$\overline{M}(S(z)) = \frac{1}{M(z)} \qquad (۸-۴')$$

را که باید نسبت به یک تابع تک مقداری در داخل C حل کنیم، مسأله نگاشت ریمان را برای یک ناحیه، با مرز تحلیلی تشکیل می‌دهد چون در این مسأله حجمها داده شده‌اند، روشن است که این فرمولبندی به طرز فریبنده‌ای آسان است.

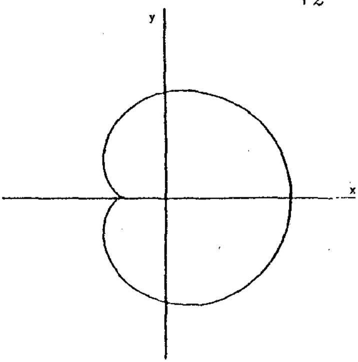
یک نتیجه مشابه را می‌توان برای تابع نگاشت خارجی خم C به‌دست آورد.

مثال. تابع نگاشت مربوط به دلنما عبارت است از (به شکلهای ۱.۸ و ۲.۸ نگاه کنید): $z = m(w) = w + \sigma w^{۲}$. بنابراین

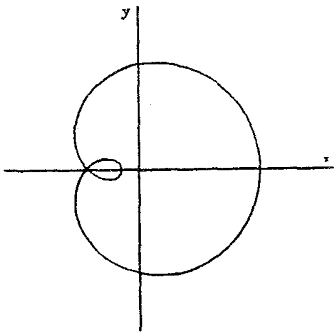
$$R = \sqrt{۱ + ۴\sigma z}\text{و} \qquad M(z) = \frac{-۱ + R}{۲\sigma}$$

بنابراین

$$S(z) = \overline{m}(\frac{۱}{M(z)}) = \frac{۲\sigma(R - ۱ + ۲|\sigma|^{۲})}{(R-۱)^{۲}}$$
$$= \frac{(R+۱)(۲z + \overline{\sigma}(R+۱))}{۴z^{۲}}$$



شکل۸-۱



شکل۸- ۲

فرض می‌کنیم کمان تحلیلی C واقع در صفحه w، توسط تابع تحلیلی $w = f(z)$ که یک به یک و همدیس در یک همسایگی C است به روی کمان B واقع در صفحه z نگاشته شود. فرض می‌کنیم $S_B(z)$ و $S_C(w)$ به ترتیب توابع شوارتس B و C باشند.

تابع

$$T(w) = \overline{f}(S_B(f^{-1}(w))) \qquad (۵-۸)$$

را در نظر می‌گیریم. به ازای $w \in C$، $f^{-1}(w) = z \in B$ در نتیجه،

$$\overline{T(w)} = \overline{\overline{f}(S_B(f^{-1}))} = f(\overline{S_B f^{-1}}) = f(f^{-1}(w)) = w$$

بنابراین، به ازای w متعلق به C، $\overline{w} = T(w)$ و لذا $T(w)$ تابع شوارتس C است در نتیجه، می‌توانیم بنویسیم

$$S_B = \overline{f}^{-1} S_C f \quad \text{و} \quad S_C = \overline{f} S_B f^{-1} \qquad (۶-۸)$$

یا

$$S_C f = \overline{f} S_B. \qquad (۷-۸)$$

توابع S_B و S_C را مزدوج (هرمیتی) تحت f می‌نامند. قابل توجه است که این ارتباط، انعکاسی متقارن و ترایاست. همچنین، باید توجه داشت که اگر S یک تابع مرتبه ۲ [1] باشد، هر مزدوج $\overline{f}^{-1} S f$ نیز مرتبه ۲ است.

به‌عنوان یک مثال خاص، می‌توان انتقال $w = f(z) = z - z_0$، $f^{-1}(w) = w + z_0$ و $\overline{f}(w) = z - \overline{z}_0$ را یادآور شد که به

$$S_C(w) = S_B(w + z_0) - \overline{z_0} \qquad (۸-۸)$$

می‌انجامد. به‌عنوان یک حالت خاص دیگر، دوران $w = f(z) = e^{i\psi} z$، $f^{-1}(w) = e^{-i\psi} w$، $\overline{f}(w) = e^{-1\psi} z$ قابل ذکر است که به

$$S_C(w) = e^{-i\psi} S_B(e^{-i\psi} w) \qquad (۹-۸)$$

ختم می‌شود.

مشاهده آنکه این ایده‌های جبری چگونه با همدیسی نگاشتهای تحلیلی جور در می‌آیند، سودمند است. فرض می‌کنیم C یک کمان تحلیلی باشد که از نقطهٔ $z = 0$ می‌گذرد و

1) involutory

$S_C(z)$ تابع شوارتس آن باشد. اگر ψ_C زاویه خط مماس بر C در نقطهٔ $z=\circ$ و محور x باشد، بنابر رابطهٔ (۷-۸)، $\psi_C = \frac{1}{2}argS'_C(\circ)$. فرض می‌کنیم $f(z)$ تحلیلی باشد، $f(\circ)=\circ$، $f'(\circ)\neq\circ$ وکمان C را به کمان B که آن نیز از مبدأ می‌گذرد، بنگارد. اگر ψ_B زاویهٔ متناظر با B باشد، آنگاه $\psi_B = \frac{1}{2}argS'_B(\circ)$، که در آن بنابر رابطه (۶.۸)، $S_B = \overline{f}^{-1}S_C f$ داریم

$$
\begin{aligned}
S_{B'}(\circ) &= (\overline{f}^{-1})'(S_C(f(\circ))).S_C(f(\circ)).f'(\circ) \\
&= (\overline{f}^{-1})'(\circ).S'_C(\circ).f'(\circ).
\end{aligned}
$$

چون $f^{-1}f=I$، $(\overline{f}^{-1})'(\circ)\overline{f}'(\circ)=1$، داریم

$$
\begin{aligned}
argSB'(\circ) &= argS'_C(\circ) + arg\frac{f'(\circ)}{\overline{f}'(\circ)} \\
&= argS'_C(\circ) + 2argf'(\circ).
\end{aligned}
$$

در نتیجه $\psi_B = \psi_2 + argf'(\circ)$، که بنابر قضیهٔ نگاشت همدیس مقدماتی باید به همین صورت باشد. مطالب دیگر در مورد ناورداهای همدیس را در بخش آخر این فصل ملاحظه می‌کنید.

ادامهٔ تحلیلی. روش دیگری نیز برای تعبیر (۷.۸) وجود دارد. فرض می‌کنیم $f(z)$ در یک ناحیهٔ R که کمان تحلیلی B قسمتی از مرز آن است عادی باشد. به‌علاوه، فرض می‌کنیم $f(z)$ روی B پیوسته بوده و وقتی z به نقاط B میل می‌کند، $f(z)$ به‌طور یکنواخت به نقاطی در طول کمان تحلیلی C میل نماید.

نقاط z واقع در خارج R و نزدیک B را در نظر می‌گیریم. به ازای این نقاط، S_B تعریف شده است و $\overline{S_B(z)}$ مبین نقاط داخل R و نزدیک B است. $f(\overline{S_B(z)})$ نیز تعریف شده و نقاط نزدیک C را نمایش می‌دهد. سرانجام آنکه $S_C(f(\overline{S_B(z)}))$ هم تعریف شده و مجدداً نقاط نزدیک به C را بیان می‌کند. اکنون، تابع $\Phi(z)=S_C(f(\overline{S_B(z)}))$ را در نظر می‌گیریم. این تابع، در خارج R و نزدیک B تحلیلی عادی است. به ازای

$z \in B$، $S_{\bar{B}}(z) = z$ و $f(z) \in C$. بنابراین

$$\Phi(z) = \overline{S_C(f(\overline{S_B(z)}))} = \overline{S_C(f(z))} = f(z)$$

در نتیجه $\phi(z)$ روی B با f برابر است. با استدلالی آشنا (برای نمونه به صفحهٔ ۶۴ کتاب فیلیپس نگاه کنید): $\phi(z)$ باید ادامهٔ تحلیلی f باشد. بنابراین، معادلهٔ

$$f(z) = \bar{S}_C \overline{f} S_B(z) \qquad (۷' - ۸)$$

را می‌توان بیانگر ادامهٔ تحلیلی تابع f در طول کمانی تحلیلی تلقی کرد که روی آن حامل اطلاعات تحلیلی است. این، تعمیمی از اصل انعکاس کلاسیک است.

مثال. (الف) فرض می‌کنیم B و C قطعه‌هایی از محور x باشند؛ $S_B = S_C = z$ در این صورت، رابطه (۷.۸) به $f(z) = \overline{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$ تبدیل می‌شود. این، اصل انعکاس استاندارد است.

(ب) فرض می‌کنیم B و C به ترتیب کمانهای دایره‌ای $r_۰ = |z - z_۰|$ و $|z - z_۱| = r_۱$ باشند؛

$$\overline{S_B(z)} = z_۰ + \frac{r_۰^۲}{\overline{z} - \overline{z_۰}} = z^*$$

$$\overline{S_C(z)} = z_۱ + \frac{r_۱^۲}{\overline{z} - \overline{z}_۱}$$

در این صورت، معادله (۷.۸) به $f(z) = z_۱ + \dfrac{r_۱^۲}{\overline{f(z^*)} - \overline{z}_۱}$ تبدیل می‌شود. این فرمول مربوط به ادامهٔ تحلیلی نقش مهمی را در مسائل نگاشت همدیس که در آنها ناحیه به کمانهای دایره‌ای محدود می‌شود ایفا می‌کند.

فرض می‌کنیم R یک ناحیهٔ همبند ساده باشد که مرز آن شامل قسمتی از کمان تحلیلی B است. فرض می‌کنیم $M(z)$، R را به صورت یک به یک و همدیس به روی قرص واحد $|W| \leq ۱$ بنگارد. با فرض $f(z) = M(z)$ در بحث قبلی، ملاحظه می‌کنیم که

$f(z)$ در طول دایرهٔ واحد که تابع شوارتس آن $S(z) = \overline{S}(z) = \frac{1}{z}$ است، مقادیری را اتخاذ می‌کند. در نتیجه، رابطهٔ

$$M(z) = \frac{1}{\overline{M}(S_B(z))} \qquad (\text{۷}'' - \text{۸})$$

ادامه تحلیلی مهم M را در طول کمان تحلیلی B به‌دست می‌دهد.

اگر کمان C با تابع شوارتس S تحت تبدیل f ناوردا (خم به خم) باشد، آنگاه از رابطه (۷.۸) نتیجه می‌شود.

$$Sf = \overline{f}S \qquad (\text{۱۰} - \text{۸})$$

برعکس، فرض می‌کنیم $Sf = \overline{f}S$ برقرار باشد. تابع شوارتس نگارهٔ C تحت f توسط $\overline{f}Sf^{-1} = S$ داده می‌شود؛ بنابراین C خم به خم ناورداست.

به‌علاوه، اگر f روی محور حقیقی، حقیقی باشد، آنگاه $\overline{f} = f$ در نتیجه

$$Sf = fS \qquad (\text{۱۱} - \text{۸})$$

و S و f توابع جابه‌جایی هستند.

اگر کمانی با تابع شوارتس S تحت f ناوردا باشد و تابع g، S را به کمانی با تابع شوارتس T بنگارد، آنگاه این کمان تحت نگاشت $h = g^{-1}fg$ ناورداست؛ زیرا بنابر رابطه (۱۰.۸)، $Sf = \overline{f}S$. با توجه به رابطه (۶.۸)، $T = \overline{g}^{-1}Sg$. در نتیجه $Th = \bar{g}^{-1}Sgg^{-1}fg = \bar{g}^{-1}Sfg = \bar{g}^{-1}\bar{f}Sg = \bar{g}^{-1}\bar{f}\overline{gg}^{-1}Sg = \bar{h}T$ ، و بنابر رابطه (۱۰.۸)، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

مثال. به‌عنوان مثالی در ارتباط با رابطهٔ (۱۰.۸)، گروه U متشکّل از تبدیلات موبیوس $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ را در نظر می‌گیریم که قرص واحد را ثابت نگه می‌دارند. اگر $f \sim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (به رابطهٔ ۲۲.۶ نگاه کنید)، آنگاه $\overline{f} \sim \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$. تابع شوارتس دایره واحد، عبارت است از

$$S(z) = \frac{1}{z} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E$$

یا $\lambda E = \begin{pmatrix} \circ & \lambda \\ \lambda & \circ \end{pmatrix}$. بنابراین، رابطه (۱۰.۸) به

$$\lambda \begin{pmatrix} \circ & \text{۱} \\ \text{۱} & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & \text{۱} \\ \text{۱} & \circ \end{pmatrix},$$

یا

$$\lambda E \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} E.$$

تبدیل می‌شود. این رابطه، شرط

$$\lambda \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{b} & \overline{a} \\ \overline{d} & \overline{c} \end{pmatrix}$$

را نتیجه می‌دهد. از این شرط، نتیجه می‌شود که

$$f(z) = \frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}}$$

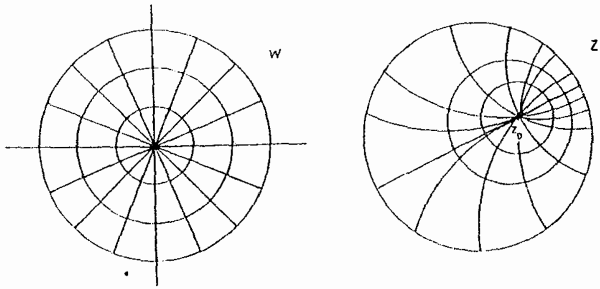
که در آن $a\overline{a} - b\overline{b} = \text{۱}$.

اگر $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = \Delta$، آنگاه $\lambda^{\text{۲}} = \dfrac{\overline{\Delta}}{\Delta}$. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم $\lambda = e^{-i\gamma}$. اگر انتخاب کنیم که $d = \text{۱}$ و $c = \overline{z_\circ}$، آنگاه $a = e^{i\gamma}$، $b = -e^{i\gamma}z_\circ$ و تبدیل مذکور به صورت استاندارد

$$w = f(z) = e^{i\gamma}\frac{z - z_\circ}{\text{۱} - z\overline{z}_\circ}$$

درمی‌آید (به شکل ۳.۸ نگاه کنید).

مثال. به‌عنوان مثالی دیگر، فرض می‌کنیم $f(z) = z + a$، خمهای C با تناوب مختلط a (یعنی اینکه اگر $z \in C$، آنگاه $z \pm a \in C$) تحت f ناوردا هستند. بنابراین، رابطه $S(z+a) = S(z) + \overline{a}$ معادلهٔ تابعی تابع شوارتس این خمهاست. این، یک



شکل۸-۳

معادله تابعی نوع آبل است (معادلات تابعی $gf = g$ و ثابت $gf = g+$ ، به ترتیب نوع خودریخت و نوع آبل نامیده می‌شوند).

اکنون، تبدیلهای ضد تحلیلی را در نظر می‌گیریم. منعکس کمان تحلیلی C را نسبت به محور حقیقی با $\overline{C}$ نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم $S(z)$ تابع شوارتس C باشد و $z \in C$. در این صورت، $\overline{z} = S(z)$ در نتیجه $\overline{\overline{z}} = z = \overline{S(z)} = \overline{S}(\overline{z})$. بنابراین، $S(z)$ تابع شوارتس C است، اگر و تنها اگر $\overline{S}$ تابع شوارتس $\overline{C}$ باشد:

$$S_{\overline{C}}(z) = \overline{S}_C(z). \qquad (۱۲ - ۸)$$

تبدیل ضد تحلیلی کلی $\overline{f(z)}$ را می‌توان به صورت ترکیب f با یک انعکاس نسبت به محور x در نظر گرفت. با ترکیب دو رابطهٔ (۶.۸) و (۱۲.۸)، متوجه می‌شویم که اگر کمان تحلیلی C توسط رابطهٔ $w = \overline{f(z)}$ به کمان B نگاشته شود، خواهیم داشت

$$S_B = f^{-1}\overline{S}_C\overline{f} \qquad (۱۲' - ۸)$$

اگرکمان C با تابع شوارتس S نسبت به محور حقیقی متقارن باشد، آنگاه $\overline{C} = C$،

و بنابراین از رابطهٔ (۱۲.۸) به‌دست می‌آوریم

$$\overline{S} = S \qquad (۱۳ - ۸)$$

چون $S\overline{S} = \overline{S}S = I$، در این حالت داریم

$$SS = \bar{S}\bar{S} = S^{۲} = \overline{S}^{۲} = I \qquad (۱۴ - ۸)$$

بنابراین، S مرتبه ۲ حقیقی است.

اگر کمان C با تابع شوارتس S تحت تبدیل ضد تحلیلی $w = \overline{f(z)}$ ناوردا باشد، آنگاه از رابطهٔ (۱۳.۸) داریم $S = f^{-۱}\overline{S}f$ بنابراین

$$\bar{S}\bar{f} = fS \qquad (۱۰' - ۸)$$

مثال. فرض می‌کنیم دایرهٔ $|z - z_{۰}|^{۲} = r^{۲}$ تحت انعکاس نسبت به دایرهٔ واحد ناوردا باشد. در این حال، $f(z) = z^{-۱}$. بنابر رابطهٔ (۱۰.۸) این شرط برقرار است، اگر و تنها اگر

$$\begin{pmatrix} z_{۰} & r^{۲} - |z_{۰}|^{۲} \\ ۱ & -\overline{z}_{۰} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z}_{۰} & r^{۲} - |z_{۰}|^{۲} \\ ۱ & -z_{۰} \end{pmatrix}$$

از $\lambda = -۱$ و $|z_{۰}|^{۲} = ۱ + r^{۲}$ نتیجه می‌شود که دایرهٔ ناوردا بر دایرهٔ واحد عمود است.

فرض می‌کنیم دو کمان تحلیلی با توابع شوارتس S و T داده شده‌اند. این کمانها را نیز با S و T نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم منعکس کردن تمام نقاط T نسبت به S امکانپذیر باشد. منعکس این نقاط، روی کمانی چون U قرار خواهد داشت. سؤال این است که چگونه می‌توان تابع شوارتس را بر حسب T و S به‌دست آورد؟ برای جواب، نقطه‌ای چون t متعلق به T را انتخاب می‌کنیم. منعکس این نقطه نسبت به S، نقطهٔ $\overline{S(t)}$ می‌باشد. چون این نقطه روی U واقع است، $\overline{\overline{S(t)}} = U(\overline{S(t)})$. بنابراین $S(t) = U(\overline{S}(\overline{t}))$. چون t روی T واقع است. $\overline{t} = T(t)$. در نتیجه $S(t) = U(\bar{S}(T(t)))$ $(t \in T)$، و از آنجا $S = U\overline{S}T$. بدین ترتیب، نتایج زیر به‌دست می‌آیند:

$$T = S\overline{U}S \qquad (۱۵ - ۸)$$

$$U = S\overline{T}S \qquad (۱۵' - ۸)$$

چند قضیهٔ مهم، نتایج جبری سادهٔ رابطهٔ (۱۵$'$.۸) هستند. فرض می‌کنیم Q منعکس R نسبت به S، T منعکس U نسبت به S و U منعکس S نسبت به R باشد. در این صورت، T منعکس S نسبت به Q است؛ زیرا داریم $Q = S\overline{R}S$، $T = S\overline{U}S$ و $U = R\overline{S}R$. در نتیجه $T = S\bar{R}S\bar{R}S = S\bar{R}S(\bar{S}S)\bar{R}S = Q\tilde{S}Q$ ، و نتیجه به‌دست می‌آید.

به همین ترتیب، اگر Q منعکس R نسبت به S، T منعکس S نسبت به Q و U منعکس Q نسبت به T باشد، آنگاه U منعکس R نسبت به Q است.

مثال. منعکس دایره یا خط مستقیم T نسبت به دایرهٔ S یک دایره یا خط مستقیم است؛ چرا که تابع شوارتس S دو خطی و تابع شوارتس T خطی یا دو خطی است. بنابراین تابع مرکب $U = S\overline{T}S$ خطی یا دو خطی است و بدین ترتیب نتیجه حاصل می‌شود. با در نظر گرفتن جزئیاتی کمابیش تحلیلی‌تر، فرض می‌کنیم S دایرهٔ واحد و T دایرهٔ $|z - z_۰| = p$ باشد. می‌نویسیم

$$S = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} \overline{z}_۰ & p^۲ - |z_۰|^۲ \\ ۱ & -z_۰ \end{pmatrix}.$$

در این صورت، بنابر رابطهٔ (۱۵$'$.۸)

$$U = \lambda S\overline{T}S = \lambda \begin{pmatrix} -\overline{z}_۰ & ۱ \\ p^۲ - |z_۰|^۲ & z_۰ \end{pmatrix}$$

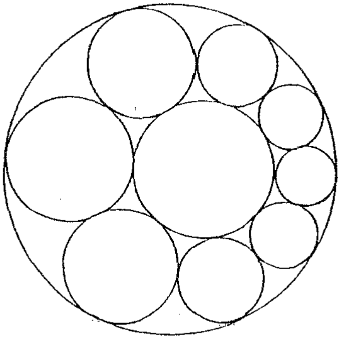
اکنون، قرار می‌دهیم $\lambda = \dfrac{۱}{p^۲ - |z_۰|^۲}$ و $\overline{w_۰} = -\lambda\overline{z_۰}$. با توجه به $|w_۰|^۲ + \lambda = \dfrac{p^۲}{(p^۲ - |z_۰|^۲)^۲}$ انتخاب می‌کنیم $r = \dfrac{p}{p^۲ - |z_۰|^۲}$. در این صورت

$$U = \begin{pmatrix} \overline{w}_۰ & r^۲ - |w_۰|^۲ \\ ۱ & -w_۰ \end{pmatrix}$$

و این ماتریس، ماتریس تابع شوارتس دایره $|z - w_۰| = r$ است. اگر $p^۲ - |z_۰|^۲ = ۰$، دایرهٔ T از مبدأ می‌گذرد و U خطی مستقیم است.

قبل از به پایان رساندن مبحث انعکاس نسبت به دایره و به‌عنوان کاربردی از ایده‌های مطرح شده، یکی از معروفترین قضایای هندسهٔ مسطحهٔ «قابل رؤیت» را که به «معمّای اشتاینر» معروف است، ذکر می‌کنیم.

فرض می‌کنیم دو دایره داریم که یکی از آنها در داخل دیگری قرار دارد. به علاوه، فرض می‌کنیم دایره‌هایی رسم شده‌اند که ـ همچون شکل ۴.۸ ـ به‌طور متوالی بر هم و بر این دو دایره مماسند. اکنون، با شروع از یکی از دایره‌های واقع در حلقه، سه امکان وجود



شکل۸-۴

دارد: (۱) حلقه تکمیل شود (یعنی دایرهٔ آخر بر دایرهٔ اول مماس باشد)؛ (۲) حلقه پس از «طی» تعدادی متناهی دایره تکمیل شود؛ و (۳) حلقه هرگز تکمیل نشود. معمّای اشتاینر بیان می‌کند که این امکانات، مستقل از محل شروع دایرهٔ اول در حلقه است.

برای اثبات، مشاهده می‌کنیم که یک نگاشت دو خطی $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$، دایره‌ها را به دایره‌ها (یا خطوط مستقیم) می‌نگارد؛ زیرا

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{bc-ad}{c^{2}}\frac{1}{(z+\frac{d}{c})} + \frac{a}{c}$$

بنابراین، هر نگاشت دو خطی توسط تبدیلات سادهٔ $z \to z+\alpha$، $z \to \dfrac{1}{z}$ و $z \to bz$ ساخته می‌شود. می‌توان برای نمونه با استفاده از رابطهٔ (۶.۸) ثابت کرد که هر یک از این تبدیلها، دایره و خط مستقیم را به دایره یا خط مستقیم می‌نگارد.

بنابر پیوستگی، دایره‌های مماس به دایره‌های مماس نگاشته می‌شوند. اکنون اگر دو دایره محدود کننده متحدالمرکز باشند، اثبات قضیه روشن است. لذا کافی است نشان

دهیم که می‌توان دو دایره متداخل را توسط یک تبدیل دو خطی به دو دایره متحدالمرکز نگاشت. ما با نشان دادن اینکه این مطلب اساساً یک مسألهٔ مقدار ویژه است، آن را ثابت خواهیم کرد. روشن است که می‌توانیم دایره بزرگتر را دایره واحد گرفته و مرکز دایرهٔ کوچکتر را بر پاره‌خط حقیقی $0 < x < 1$ قرار دهیم.

لم. فرض می‌کنیم $0 < r < 1$ و $0 < s < 1 - r$. همچنین، فرض می‌کنیم

$$E = \text{ضد واحد} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad S = \begin{pmatrix} s & r^2 - s^2 \\ 1 & -s \end{pmatrix}$$

در این صورت، مقادیر ویژه p_1 و p_2 مربوط به تبدیل SE حقیقی هستند و در $0 < p_1 < p_2 < 1$ صدق می‌کنند. به‌علاوه

$$(1 - p_1)(1 - p_2) = s^2 \qquad (*)$$

اثبات. معادلهٔ مشخصهٔ SE برابر است با $p^2 + (s^2 - r^2 - 1)p + r^2 = 0$. بنابراین $p_1 + p_2 = 1 + r^2 - s^2$ و $p_1p_2 = r^2$، و از آنجا نتیجه می‌شود که $(1 - p_1)(1 - p_2) = s^2$ مبین این معادله $\Delta = (1 + r^2 - s^2)^2 - 4r^2$ است. از نامساوی مفروض، داریم $1 - r^2 - s^2 > 2r$ در نتیجه $\Delta > 0$ و p_1, p_2 حقیقی و متمایزند. داریم $p_2 = \frac{1}{2}(1 + r^2 - s^2 + \sqrt{\Delta}) > r > 0$. چون $p_1p_2 = r^2$، پس $p_1 > 0$. بنابر رابطهٔ$(*)$ ، امکان ندارد که داشته باشیم $p_1 = 1$ یا $p_2 = 1$. اگر $p_2 > 1$ آنگاه بنابر $(*)$ $p_1 > 1$، که با $p_1p_2 = r^2$ متناقض است.

قضیه. فرض می‌کنیم $0 < s < 1$ و دایره $S : |z - s| = r$ در داخل دایره واحد قرار داشته باشد. در این صورت، تبدیل دو خطی $A(z)$ با ماتریس

$$A \sim \begin{pmatrix} \dfrac{1 - p_1}{s} & -1 \\ 1 & \dfrac{-s}{1 - p_2} \end{pmatrix}$$

دایره ۱ $= |z|$ را به خود آن و دایره S را به دایرهٔ ۱ $< \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} = \delta = |z|$ می‌نگارد.

اثبات. بنابر اتحاد (*)، داریم $EA = -AE$. در نتیجه، بنابر مثال ذکر شده بعد از رابطهٔ (۱۱.۸)، $A(z)$ دایره واحد را به خود آن می‌نگارد. ستونهای A، ویژه بردارهای SE هستند. بنابراین

$$SE = A\begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} A^{-1}, \qquad SEA = A\begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix},$$

$$-SAE = A\begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}, \qquad SA = -A\begin{pmatrix} p_1 & 1 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} E,$$

یا

$$A^{-1}SA = -p_2\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

بنابر رابطه (۶.۸)، S به دایره $\sigma = |z|$ نگاشته می‌شود.

فرض می‌کنیم کمان T تحت انعکاس نسبت به S خم به خم ناوردا باشد. از رابطهٔ (۱۵.۸) داریم

$$T = S\overline{T}S \qquad (۱۶ - ۸)$$

یا

$$S\overline{T} = T\overline{S} \qquad (۱۶' - ۸)$$

به بیان دیگر، توابع S و T تعویض‌پذیر هرمیتی یا جابجایی‌پذیر هرمیتی هستند. با پیروی از اصطلاحات مربوط به انعکاس نسبت به یک خط مستقیم، می‌گوئیم T نسبت به S متقارن است.

عکس این مطلب نیز صحیح است. اگر رابطهٔ (۱۶.۸) برقرار باشد، آنگاه T نسبت به S متقارن است. برای اثبات، فرض می‌کنیم $z \in T$. در این صورت، $\overline{z} = T(z)$. منعکس

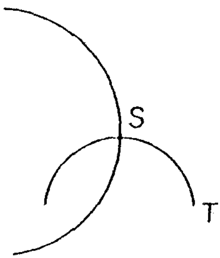
z نسبت به S عبارت است از $z^* = \overline{S(z)}$. اگر $T(z^*) = \overline{z^*}$ ، آنگاه $\overline{z^*}$ روی T واقع خواهد شد. اما داریم $S(z) = \overline{\overline{S(z)}} = \overline{z^*}$ و $T(z^*) = T(\overline{S(z)}) = T(\overline{S}(\overline{z})) =$ (بنابر رابطهٔ (۱۵.۸)) $S(z) = S(\overline{T(z)}) = S(\overline{T}(\overline{z}))$.

تساوی (۸.″۱۶) را می‌توانیم به صورت

$$T\overline{S} = S\overline{T} \qquad (۱۶'' - ۸)$$

بنویسیم. این رابطه، بیان می‌کند که کمان T نسبت به کمان S متقارن است، اگر و تنها اگر کمان S نسبت به کمان T متقارن باشد. بنابراین، صرفاً می‌توانیم دربارهٔ تقارن S و T صحبت کنیم (به شکل ۵.۸ نگاه کنید).

در رابطه با تقارن، مشاهده می‌کنید که کمان S به‌طور بدیهی نسبت به خودش متقارن



شکل۸-۵

است ($S\overline{S} = \overline{S}S = I$). با وجود این تقارن یک رابطهٔ هم‌ارزی نیست؛ زیرا شرط ترایایی برقرار نیست.

حالتهای خاص انعکاس. فرض می‌کنیم کمان S نسبت به خط $L : y = (\tan\theta)x$ متقارن باشد. تابع شوارتس l (به رابطهٔ (۱۵:۳) نگاه کنید)، $T(z) = e^{-۲i\theta}z$ است. بنابراین، با توجه به رابطهٔ (۱۵.۸) داریم

$$\overline{S}(z) = e^{۲i\theta}S(e^{۲i\theta}z) \qquad (۱۷ - ۸)$$

اگر S نسبت به محور حقیقی متقارن باشد، آنگاه

$$\overline{S} = S \qquad (۱۷' - ۸)$$

اگر S نسبت به محور موهومی متقارن باشد، آنگاه

$$\overline{S}(z) = -S(-z) \qquad (۱۷'' - ۸)$$

اگر S نسبت به دایرهٔ واحد $(T = \frac{۱}{z})$ متقارن باشد ـ یعنی منعکس خود باشد ـ آنگاه

$$\overline{S}(z) = \frac{۱}{S(\frac{۱}{z})}. \qquad (۱۸ - ۸)$$

اگر S نسبت به T و T نسبت به محور حقیقی متقارن باشد $(T = \bar{T})$، آنگاه

$$ST = T\overline{S}. \qquad (۱۹ - ۸)$$

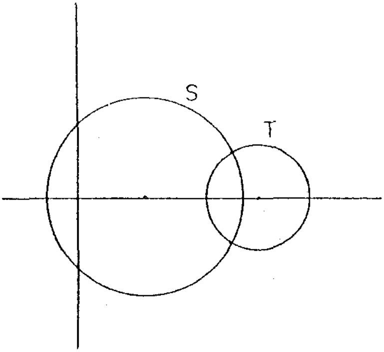
اگر S نسبت به T و S و T هر دو نسبت به محور حقیقی متقارن باشند، آنگاه

$$ST = TS. \qquad (۲۰ - ۸)$$

بنابراین، S و T توابع جابه‌جایی‌پذیر هستند (به شکل ۶.۸ نگاه کنید).

فرض می‌کنیم S، T و U سه کمان بوده و U منعکس T نسبت به S (یا T منعکس U نسبت به S) باشد. این ویژگی، توسط توابع تحلیلی یا ضد تحلیلی حفظ می‌شود.
اثبات : برای اثبات، روابط (۱۵'.۸) و (۶.۸) را مورد توجه قرار می‌دهیم. از رابطه اول می‌دانیم $U = S\overline{T}S$؛ و از رابطهٔ دوم می‌دانیم که توابع شوارتس نگاره‌های T و S و U تحت f عبارتند از $\overline{f}^{-۱}Tf$، $\bar{f}^{-۱}Sf$ و $\bar{f}^{-۱}Uf$. داریم

$$\begin{aligned}(\bar{f}^{-۱}Sf)\overline{(\bar{f}^{-۱}Tf)}(\bar{f}^{-۱}Sf) &= \bar{f}^{-۱}S(ff^{-۱})\overline{T}(\bar{f}\bar{f}^{-۱})Sf \\ &= \bar{f}^{-۱}S\overline{T}Sf = \bar{f}^{-۱}Uf.\end{aligned}$$



شکل۸-۶

بنابراین، حکم از رابطهٔ (۱۵.۸) نتیجه می‌شود. در مورد نگاشتهای ضد تحلیلی، می‌توان رابطهٔ (۱۲.۸) را به‌کار برد.

به‌عنوان یک حالت خاص، متذکّر می‌شویم:

تقارن دو کمان، تحت نگاشتهای تحلیلی یا ضد تحلیلی حفظ می‌شود.

دو دایره متقارن هستند، اگر و تنها اگر متعامد یا منطبق باشند. برای اثبات، قرار می‌دهیم

$$S(z) = \frac{۱}{z} \sim \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} = E$$

$$T(z) = \frac{p^۲}{z - z_۰} + \overline{z_۰} \sim \begin{pmatrix} \overline{z_۰} & p^۲ - |z_۰|^۲ \\ ۱ & -z_۰ \end{pmatrix} = r$$

شرط $S\overline{T} = T\overline{S}$، نتیجه می‌دهد که به ازای عدد ثابت λ، $E\tau = \lambda\tau\overline{E}$. به ازای $z_۰ \neq ۰$ از این رابطه نتیجه می‌شود $\lambda = -۱$ و $|z_۰|^۲ = ۱ + p^۲$ که شرط معروف تعامد دو دایره است. به ازای $z_۰ = ۰$، متوجه می‌شویم که $p = ۱$ و S و T منطبق هستند. یک یا هر دوی دایره‌ها ممکن است تبدیل به خط مستقیم شوند.

از این گذشته، قضیهٔ زیر را داریم

قضیه. اگر دو کمان تحلیلی متقارن بوده و نقطهٔ مشترک داشته باشند؛ آنگاه متعامد یا منطبق هستند.

اثبات. چون تقارن توسط نگاشتهای تحلیلی حفظ می‌شود، کافی است قضیه را برای حالتی ثابت کنیم که یکی ازکمانها محور حقیقی باشد. زیرا صرفاً یکی ازکمانها را بر روی محور حقیقی می‌نگاریم. در عمل، کمان دوم به یک کمان تحلیلی دیگر نگاشته شده و تعامد یا انطباق حفظ خواهد شد. فرض می‌کنیم که نقطهٔ مشترک کمانها $z = ۰$ است.

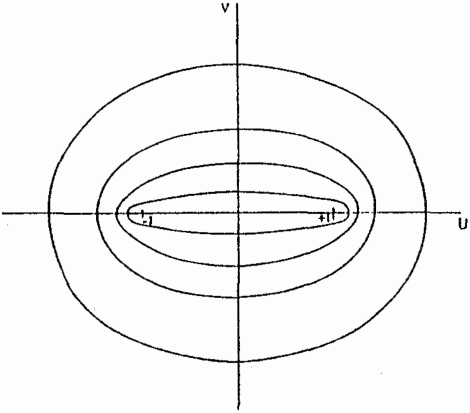
بنابراین، فرض می‌کنیم کمانی تحلیلی با تابع شوارتس $S(z)$ داده شده که نسبت به محور حقیقی متقارن است. بنابر رابطهٔ (۱۳.۸)، $\overline{S} = S$، و بنابراین $\overline{S}'(۰) = s'(۰)$. چون $|S'| = ۱$، $S'(۰) = \pm ۱$. اگر $S'(۰) = -۱$، آنگاه S بر محور x عمود است. اگر $S'(۰) = ۱$، آنگاه S در نقطهٔ $x = ۰$ به $y = ۰$ مماس است. در این حالت، فرض می‌کنیم $S(z) \neq z$. چون کمان در نقطه $z = ۰$ تحلیلی است، آن را می‌توانیم به صورت $y = t(x) = a_۲x^۲ + a_۳x^۳ + \ldots (|x| \leq \sigma)$ بنویسیم که در آن دستکم یکی از aها صفر نیست. فرض می‌کنیم اندیس اولین a که غیر صفر است p باشد؛ بنابراین $y = a_px^p(۱ + \frac{a_{p+۱}}{a_p}x + \ldots)$. به ازای xهای به‌قدر کافی نزدیک به صفر، داریم $۱ + \frac{a_{p+۱}}{a_p}x + \ldots \geq \mu > ۰$. بنابراین، اگر p زوج باشد، کمان در یک طرف محور x واقع است، و اگر p فرد باشد از ربع سوم به ربع اول یا از ربع دوم به ربع چهارم وارد می‌شود. در هر دو حالت، این با فرض متقارن بودن کمان نسبت به محور x متناقض است.

مثال. نگاشت همدیس

$$w = \frac{۱}{۲}(z + z^{-۱}) \qquad (۸ - ۲۱)$$

را در نظر بگیرید. تصویر نقطه $(p\cos\theta, p\sin, \theta)$،$(p > ۱)$ ، در صفحه z، نقطه $(\frac{۱}{۲}(p + p^{-۱})\cos\theta, \frac{۱}{۲}(p - p^{-۱})\sin\theta)$ در صفحهٔ w است. بنابراین، دایرهٔ $|z| = p > ۱$ روی بیضی $u = \frac{۱}{۲}(p + p^{-۱})\cos\theta$، $v = \frac{۱}{۲}(p - p^{-۱})\sin\theta$ نگاشته می‌شود. این بیضی را با $\in_p$ نشان می‌دهیم. وقتی $p > ۱$ تغییر کند، $\in_p$

خانواده‌ای از بیضیهای همکانون با کانونهای ۱ $\pm$ و نیم محورهای $a = \frac{1}{2}(p + p^{-1})$ و $b = \frac{1}{2}(p - p^{-1})$ را مشخص می‌کند (به شکل ۷.۸ نگاه کنید). تصویر دایرهٔ واحد بازهٔ $-1 \leq u \leq 1$ است که از ۱ تا ۱- طی شده و به ۱ برمی‌گردد.



شکل۸-۷

اکنون، فرض می‌کنیم $1 < p_1 < p_2$ و قرار می‌دهیم $p_3 = \frac{p_2^2}{p_1}$. اگر C_p دایره $|z| = \rho$ را نشان دهد، آنگاه، C_{p_3} انعکاس C_{p_1} نسبت به C_{p_2} است. بنابراین، از اصل کلی انعکاس نتیجه می‌شود که $\in_{p_3}$ انعکاس $\in_{p_1}$ نسبت به $\in_{p_2}$ است.

تکرار انعکاسها. فرض می‌کنیم دو کمان تحلیلی با توابع شوارتس S و T داده شده‌اند. حال (با فرض آنکه این اعمال امکانپذیرند)، اگر S را نسبت به T منعکس کنیم، بنابر رابطهٔ (۱۵:۸) $T\bar{S}T$ را به‌دست می‌آوریم و اگر T را نسبت به $T\bar{S}T$ منعکس کنیم، $T\bar{S}T\bar{S}T = T\bar{S}T\bar{T}T\bar{S}T$ را به‌دست می‌آوریم و غیره. به همین ترتیب، با انعکاس T نسبت به S به‌دست می‌آوریم $S\bar{T}S$؛ و با انعکاس S نسبت به $S\bar{T}S$ خواهیم داشت $S\bar{T}S\bar{T}S$ و غیره. مشاهده می‌کنیم که اگر این دو کمان متقاطع باشند، آنگاه این اعمال را می‌توان در یک همسایگیِ نقطهٔ تلاقی انجام داد. بنابراین، دنبالهٔ نامتناهی دو طرفه زیر

از کمانها را به‌دست می‌آوریم.

$$\dots S\bar{T}S\bar{T}S, S\bar{T}S, S, T, T\overline{S}T, T\overline{S}T\overline{S}T, \dots$$

اگر این کمانها را با A_n $(n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots)$ نشان دهیم، آنگاه $A_{n+۲}$ منعکس A_n نسبت به $A_{n+۱}$، و A_n منعکس $A_{n+۲}$ نسبت به $A_{n+۱}$ است. اگر S محور حقیقی باشد، $s(z) = z$، و بنابراین دنبالهٔ

$$\dots, \bar{T}\bar{T}, \overline{T}, I, T, TT, \dots$$

به‌دست می‌آید.
اگر در مورد توانهای ضربی اشتباهی رخ ندهد، می‌توانیم تکرارهای تابعی را با نما نشان دهیم. قابل توجه است که $\overline{T} = T^{-۱}$؛ بنابراین آخرین دنباله را می‌توانیم به صورت

$$\dots T^{-۲}, T^{-۱}, I, T, T^{۲}, \dots$$

بنویسیم. این دنباله، تعبیر هندسی توانهای متوالی (به معنای ترکیب تابعی) تابع شوارتس را به‌دست می‌دهد.

مثال. فرض می‌کنیم $S(z) = \sqrt{\alpha^۲ - z^۲}$، $\beta^۲ > \alpha^۲$، $T(z) = \sqrt{\beta^۲ - z^۲}$، بنابر رابطهٔ (۱۳′.۵)، S و T کمانهایی از خانوادهٔ $\mathcal{F}$ هذلولیهای متساوی‌الساقین با مجانبهای مشترک $y = \pm\lambda$ و خروج از مرکز $e = \sqrt{۲}$ هستند. این هذلولیها، محور x را در نقاط $x = \frac{\alpha}{e}, \frac{\beta}{c}$ قطع می‌کنند. چون $T\overline{S}T = \sqrt{۲\beta^۲ - \alpha^۲ - z^۲}$، پس انعکاس S نسبت به T نیز به $\mathcal{F}$ تعلق دارد. تکرار nام این عمل، به هذلولیی می‌انجامد که تابع شوارتس آن $\sqrt{(n + ۱)\beta^۲ - n\alpha^۲ - z^۲}$ است.

قضیه. فرض می‌کنیم S و T کمانهایی تحلیلی و U منعکس S نسبت به T است. اگر کمان چهارمی نسبت به هر دوی کمانهای S و T متقارن باشد، باید نسبت به U نیز متقارن باشد.

اثبات. داریم $U = T\overline{S}T$. برای اینکه V نسبت به U متقارن باشد، باید داشته باشیم $U\overline{V} = V\overline{U}$ یا $V\overline{T}S\overline{T} = T\overline{S}T\overline{V}$. داریم $S\overline{V} = V\overline{S}$ و $T\overline{V} = V\overline{T}$.

بنابراین،

$$V\overline{T}S\overline{T} = T(\overline{V}S)\overline{T} = T(\overline{S}V)\overline{T} = T\overline{S}V\overline{T} = T\overline{S}T\overline{V}.$$

مثال. اگر دایره V بر دایره‌های S و T عمود باشد، آنگاه بر منعکس S نسبت به T نیز عمود است.

ملاحظات بیشتر در ارتباط با جبر ترکیب تابعی. به‌طوری که در ابتدای این فصل دیدیم، جبر صوری همراه ترکیب و انعکاس تابعی، مشکلات محاسباتی خاص خود را دارد در این بخش ما روشهایی را جهت آسان کردن این مشکلات مورد بحث قرار می‌دهیم. در رابطه با خط مستقیم و دایره که توابع شوارتس آنها دو خطی می‌باشد، برخی از محاسبات توسط روش کیلی ـ که کار با ماتریسهای ۲ × ۲ است ـ روشن می‌گردد. معادلهٔ $M_{fg} = \lambda M_f M_g$، اجازه می‌دهد که ترکیب این توابع را بر حسب ضرب ماتریسی بیان کنیم. آیا این شیوه را می‌توان به توابع بسیار کلّی‌تر تعمیم داد؟ به‌طوری که الان خواهیم دید، این کار با وجود عملی بودن، هزینه‌ای کمابیش بالا دارد.

منظور از یک سری لوران صوری، سری‌ای به صورت

$$L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \qquad (۲۲-۸)$$

است که در آن فقط تعدادی متناهی از جملات دارای اندیس منفی و غیر صفر هستند. در این جا، همگرایی سری (۲۲.۸) اهمیتی نخواهد داشت. مجموع دو سری لوران صوری، با جمع ضرایب جمله‌های متشابه، و حاصلضرب آنها در حالت صوری به روش معمول تعریف می‌شود (ضرایب حاصلضرب، حاصلضربهای کوشی هستند). مجموعهٔ تمام سریهای لوران صوری، یک میدان تشکیل می‌دهد. مشتق صوری L، به صورت

$$L' = \sum_{-\infty}^{\infty}(n+۱)a_{n+۱}z^n \qquad (۲۳-۸)$$

تعریف می‌شود. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که $(L+M)' = L' + M'$، $(L.M)' = L.M' + L'.M$ و $(L^m)' = mL^{m-۱}.L'$. در اینجا، L^m توان mام L را نشان

می‌دهد. ماندهٔ سری (۲۲.۸) توسط

$$ResL = a_{-۱} \qquad (۲۴-۸)$$

تعریف می‌شود. این تعریف، در حالتی که L در یک قرص $|z| < \rho$ همگراست، با تعریف معمولی $ResL = \frac{۱}{۲\pi i}\int_\Gamma L(z)dz$، که در آن $\Gamma : |z| = \rho' < \rho$، مطابقت دارد. روشن است که یک سری لوران صوری L یک مشتق (صوری) است، اگر و تنها اگر $ResL = ۰$. به ازای هر توان مثبت، صفر و منفی m، ضرایب $a_n^{(m)}$ را توسط

$$L^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(m)} z^n \qquad (۲۵-۸)$$

تعریف می‌کنیم.

منظور از یک سری توان صوری، عبارتی به صورت

$$R = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n z^n \qquad (۲۶-۸)$$

است. هیچ توجهی به همگرایی سری (۲۶.۸) نمی‌کنیم. مجموعهٔ سریهای توان صوری یک دامنه صحیح است. این دامنه را با $\mathcal{R}$ نشان خواهیم داد. مجموعهٔ سریهای توان صوری به صورت

$$P = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n z^n \qquad b_۱ \neq ۰ \qquad (۲۷-۸)$$

را نیز در نظر می‌گیریم. این مجموعه را با $\mathcal{P}$ نشان می‌دهیم. در اینجا، ترکیب با جایگذاری صوری و تغییر ترتیب صوری تعریف می‌شود. بنابراین

$$RP = \sum_{n=o}^{\infty} c_n z^n \qquad (۲۸-۸)$$

که در آن

$$c_۰ = a_۰, \qquad c_n = \sum_{k=۱}^{n} a_k b_n^{(k)} \qquad (۲۹-۸)$$

با این عمل، $\mathcal{P}$ یک گروه غیر جابه‌جایی با عضو خنثی

$$I = ۱.z + ۰.z^{۲} + ۰.z^{۳} + \ldots \equiv z \qquad (۳۰-۸)$$

است. هر عضو P از $\mathcal{P}$، دارای یک وارون $P^{-۱}$ است که در رابطهٔ $PP^{-۱} = P^{-۱}P = I$ صدق می‌کند. به هر سری توان صوری $P = \sum\limits_{۱}^{\infty} b_n z^n$ از رده $\mathcal{P}$، ماتریس بالا مثلثی

$$M_P = \begin{bmatrix} b_۱^{(۱)} & b_۲^{(۱)} & b_۳^{(۱)} & \ldots \\ ۰ & b_۲^{(۲)} & b_۳^{(۲)} & \ldots \\ ۰ & ۰ & b_۳^{(۳)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \qquad (۳۱-۸)$$

را نسبت می‌دهیم. قابل توجه است که M_P توسط سطر اول آن و رابطه (۲۵.۸) کاملاً معین می‌شود. ماتریس M_I، یک ماتریس واحد نامتناهی است. همچنین باید توجه داشت که دو ماتریس نامتناهی بالا مثلثی را می‌توان در هم ضرب کرد؛ زیرا مجموعهای متناظر با ضرب ماتریس، تنها شامل تعدادی متناهی جملهٔ غیر صفر هستند.

قضیه. به ازای هر دو سری توان صوری P و Q متعلق به $\mathcal{P}$داریم

$$M_{PQ} = M_P M_Q. \qquad (۳۲-۸)$$

اثبات. حاصلضرب دو ماتریس بالا مثلثی، بالا مثلثی است.

بنابر رابطهٔ (۲۹.۸) درایه‌های سطر اول $M_P M_Q$ ضرایب توان اول PQ هستند. چون $(PQ)^{۲} = (PQ).(PQ) = P^{۲}Q$، از رابطه (۲۹.۸) نتیجه می‌شود که درآیه‌های سطر دوم $M_P M_Q$ برابر است با ضرایب $(PQ)^{۲}$. همچنین، با توجه به $P^{۳}Q = (PQ)^{۳}$، درآیه‌های سطر سوم $M_P M_Q$ برابر است با ضرایب $(PQ)^{۳}$ و غیره.

حالت خاصی از رابطهٔ (۳۲.۸)، با انتخاب $Q = P^{-۱}$ به‌دست می‌آید. در این

حالت

$$M_P M_{P^{-1}} = M_{P^{-1}} M_P = M_{PP^{-1}} = M_{P^{-1}P} = M_I = I\cdot$$
(۸ − ۳۳)

در نتیجه، اتحاد مهم

$$M_{P^{-1}} = (M_P)^{-1}. \qquad (۸ − ۳۴)$$

به‌دست می‌آید.

قبل از به‌دست آوردن اتحادهای بیشتر، برای ارایهٔ کاربردی از توابع شوارتس توقف می‌کنیم. فرض می‌کنیم کمان C از مبدأ $z = 0$ بگذرد. در این صورت، در یک همسایگی مبدأ، $S(z)$ را می‌توانیم به صورت سری $S(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots$ که به رده $\mathcal{P}$ تعلق دارد بسط دهیم. بنابراین، هر تابع شوارتس S (متعلق به $\mathcal{P}$) را می‌توان توسط ماتریس M_S نمایش داد. چون $\overline{P^2} = \overline{P}^2$ و تساویهایی نظیر آن نیز برقرارند، $M_{\overline{S}} = \overline{M}_S$. بنابراین، تمام قوانین ترکیب تابعی در رابطه با توابع شوارتس را می‌توان به صورت قضیه‌هایی دربارهٔ ماتریسهای M_S بیان کرد. مثلاً، $\overline{S}S = S\overline{S} = I$؛ تبدیل می‌شود به

$$M_S \overline{M}_S = I \qquad (۸ − ۳۵)$$

مثال. دایره $C : |z - 1| = 1$ را در نظر می‌گیریم. تابع شوارتس این دایره $S(z) = \dfrac{z}{z-1} = -(z + z^2 + \dots)$، و ماتریس مربوط به آن

$$G = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

است. حالت خاص اتحاد (۳۵.۸)، عبارت است از $G^2 = I$. بنابراین، تمام اتحادهای دو جمله‌ای موجود در این رابطه در مورد مثلث پاسکال، جنبه‌هایی از انعکاس شوارتسی

نسبت به دایره هستند. به‌عنوان مثالی دیگر، قابل توجه است که تساوی (۱.۸) به صورت

$$M_s = \overline{M}_f(M_f)^{-۱} \qquad (۳۶-۸)$$

در می‌آید، که در آن $S = \bar{f}f^{-۱}$.

مثال. خم درجه سوم

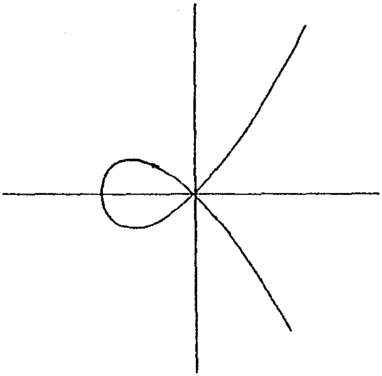
$$\begin{cases} x = t(t-۲) \\ y = t(t-۱)(t-۲) \end{cases}$$

را در نقطهٔ $t = ۰$ در نظر می‌گیریم (به شکل ۸.۸ نگاه کنید). داریم $z = f(t) = (-۲+۲i)t + (۱-۳i)t^۲ + it^۳$. با استفاده از برابری ماتریسی (۳۶.۸)، بسط تابع شوارتس این خم در نقطه $t = ۰$ به صورت

$$\begin{aligned} S(z) = iz &- (۰/۲۵ + ۰/۲۵i)z^۲ + (۰/۱۲۵ + ۰/۱۸۷۵i)z^۳ \\ &- (۰/۰۶۲۵ + ۰/۱۷۱۸۷۵i)z^۴ + (۰/۰۱۵۶۲۵ + ۰/۱۶۶۰۱۵۶۲۵i)z^۵ \\ &+ (۰/۰۲۷۳۴۳۷۵ + ۰/۱۶۰۶۴۴۵۳۱۲i)z^۶ \\ &+ (-۰/۰۷۰۳۱۲۵ + ۰/۱۵۱۲۴۵۱۱۷۲i)z^۷ + \ldots \end{aligned}$$

محاسبه شده است.

چند تذکّر در مورد محاسبه. در یک زبان کامپیوتری (مانند APL)، که دارای ابزارهای ماتریسی بسیار پیشرفته است، معادله‌های (۳۱.۸)، (۳۲.۸) و (۳۴.۸) روشی بسیار مناسب را برای برنامه‌نویسی در مورد ترکیب و انعکاس تابعی به‌وجود می‌آورند. با وجود این، اجرای این برنامه لزوماً با صرفه‌ترین روش نیست. در این موارد، معمولاً لازم است که با سری توانی که دارای ضرایب مختلط است و بنابراین در خصوص آن حساب مختلط کاربرد دارد کار کنیم. نگاشت معروف $a + bi \to \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$، مجموعها،



شکل۸-۸

حاصلضربها و حاصلضربهای اسکالر را حفظ می‌کند؛ و ثابت شده که کاربرد ماتریس

$$\overline{M}_P = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \beta_1^1 \\ -\beta_1^1 & \alpha_1^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha_2^1 & \beta_2^1 \\ -\beta_2^1 & \alpha_2^1 \end{pmatrix} & \cdots \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha_2^2 & \beta_2^2 \\ -\beta_2^2 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} & \cdots \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots \\ & & \cdots \end{bmatrix}$$

که در آن $\alpha_{j'}^k = Reb_j^{(k)}$ و $\beta_j^k = I_m b_j^{(k)}$ ، مناسبتر ازکاربرد (۳۱.۸) است. ماتریس $\overline{M}_P$، بالا مثلثی بلوکی است.

قضیه. فرض می‌کنیم $P = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ و $P^{-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$.
در این صورت

$$c_n^{(k)} = \frac{k}{n} b_{-k}^{(-n)} \qquad (n, k = 1, 2, \ldots). \qquad (37-8)$$

اثبات. بنابر رابطهٔ (۳۴.۸)، تنها لازم است نشان دهیم که ماتریس بالا مثلثی $C = (c_{mn})$ با درایه‌های $c_{mn} = \frac{m}{n} b^{(-n)}_{-m} (n \geq m)$ یک وارون راست (و لذا وارون) ماتریس M_P است. می‌نویسیم $D = (d_{mn}) = M_P C$. D بالا مثلثی است، زیرا حاصلضرب دو ماتریس بالا مثلثی می‌باشد. اکنون، به ازای m که $m = ۱, ۲, \ldots$، داریم $d_{mm} = b^{(m)}_m b^{(-m)}_{-m} = b^m_۱ b^{-m}_۱ = ۱$. اگر $n > m$، آنگاه

$$
\begin{aligned}
d_{mn} &= \sum_{k=m}^{n} b^{(m)}_k c_{kn} = \frac{۱}{n} \sum_{k=m}^{n} k b^{(m)}_k b^{(-m)}_{-k} \\
&= Res((P^{(m)})' P^{(-n)}) = m Res(P^{(n-۱)} P' P^{(-n)}) \\
&= \frac{m}{m-n} Res(P^{(m-n)})' = ۰
\end{aligned}
$$

زیرا d_{mn} ماندهٔ یک مشتق است.

تابع شوارتس $S(z) = b_۱ z + b_۲ z^۲ + \ldots$ در معادله $S^{-۱} = \overline{S}$ صدق می‌کند. بنابراین

$$
\frac{k}{n} b^{(-n)}_{-k} = \overline{b}^{(k)}_n \qquad (n, k = ۱, ۲, ۳, \ldots) \qquad (۳۸ - ۸)
$$

در حالت خاص $k = ۱$، رابطهٔ (۳۸.۸) به

$$
n \overline{b}_n b^{(-n)}_{-۱} = ۱ \qquad (۳۹ - ۸)
$$

یا

$$
\overline{b}_n = \frac{۱}{n} Res(S^{(-n)}) \qquad (۴۰ - ۸)
$$

تبدیل می‌شود، که اتحادهای رابطه (۳.۸ ب) را در بر دارد.

قضیه. (**قضیه لاگرانژ- بورمان**) فرض می‌کنیم $R = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n z^n$، فرض می‌کنیم P متعلق به $\mathcal{P}$ است و دارای وارون $P^{-۱}$ می‌باشد. در این صورت

$$
R P^{-۱} = a_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} Res(R'.P^{(-n)}) z^n \qquad (۴۱ - ۸)
$$

اثبات. داریم $M_{RP^{-1}} = M_R M_{P^{-1}} = M_R[(\frac{k}{n})b_{-k}^{(-n)}]$. اکنون، ضرایب سری RP^{-1} بجز جملهٔ ثابت درایه‌های سطر اول $M_{RP^{-1}}$ هستند. می‌نویسیم $RP^{-1} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n$. داریم

$$d_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{k}{n} b_{-k}^{(-n)} = \frac{1}{n} Res(R'.P^{(-k)}), (n = 1, 2, \dots)$$

اگر سریهای P و R هر دو در یک قرص $|z| \leq \rho$ عادی تحلیلی بوده و لذا معنایی بیش از معنای صوری داشته باشند، آنگاه

$$Res R'.P^{(-k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R'(z)dz}{[P(z)]^k}$$

که در آن Γ خم بسته‌ای است که در $|z| \leq \rho$ قرار دارد و $z = 0$ را احاطه کرده است. بنابراین

$$\begin{aligned} RP^{-1}(z) &= R(0) + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{1}{2\pi i n} \int_{\Gamma} \frac{R'(z)dz}{[P(z)]^n} \qquad (۴۲-۸) \\ &= R(0) + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{1}{n!} \frac{(n-1)!}{2\pi i} \\ &\quad \times \int_{\Gamma} \left[\frac{z}{P(z)}\right]^n \frac{R'(z)dz}{z^n} \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned} RP^{-1}(z) &= R(0) \qquad (۴۳ \quad ۸) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{z^n}{n!} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{n-1}} \left[R'(z) \left[\frac{z}{P(z)}\right]^n\right]_{z=0} \right\}. \end{aligned}$$

به‌عنوان یک مثال خاص، قرار می‌دهیم $P = f(t) = at + bt^2 + \dots$ و $R = \overline{f}(t)$.

در این صورت، بنابر رابطه (۱.۸)

$$S(z) = \overline{f}f^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left[\frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}} \overline{f}'(t) \left(\frac{t}{f(t)}\right)^n \right]_{t=0} \quad (۴۴-۸)$$

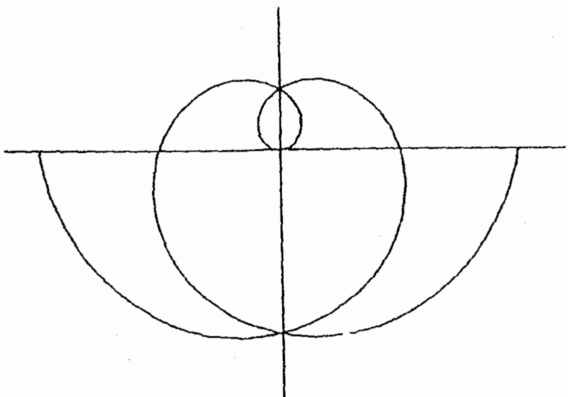
$$= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{1}{2\pi i n} \int_{\Gamma} \frac{\overline{f}'(t)}{[f(t)]^n} dt.$$

اکنون، به ازای Γای که در داخل ناحیه‌ای که f عادی است اختیار شود و به ازای z به‌قدر کافی کوچک، می‌توانیم ترتیب علامتهای جمع و انتگرال را عوض کرده و بنویسیم

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \bar{f}'(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{z^n}{[f(t)]^n} dt \quad (۴۵-۸)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \bar{f}'(t) \log \frac{f(t)}{f(t)-z} dt.$$

این فرمول، $S(z)$ را به صورت یک انتگرال کوشی، بر حسب پارامتر t، روی Γ نشان می‌دهد.



شکل۸-۹

مثال. مارپیچ ارشمیدس. به ازای عدد ثابت ω که $0 < \omega < \infty$ ، $z =$

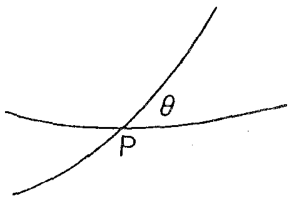
$te^{i\omega t} = f(t) \quad (\circ \leq t < \infty) = re^{i\theta}$. مشاهده می‌کنیم که $r = t$ و $\theta = \omega t$، و در نتیجه $r = \dfrac{\theta}{\omega}$ معادلهٔ این کمان در مختصات قطبی است. داریم $\overline{f}'(t)[\dfrac{t}{f(t)}]^n = (\text{۱} - i\omega t)e^{-i(n+\text{۱})\omega t}$. بنابراین، از رابطهٔ (۴۲.۸) نتیجه می‌گیریم

$$S(z) = \text{۲}\sum_{n=\text{۱}}^{\infty} \frac{(n+\text{۱})^{n-\text{۲}}(-i\omega)^{n-\text{۱}} z^n}{(n-\text{۱})!}$$

(به شکل ۹.۸ نگاه کنید).

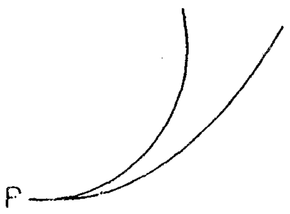
ناوردایی همدیس زاویه‌های منحنی‌الخط، مسأله نیمساز و تابع شوارتس. در رابطهٔ (۴.۶)، نگاشت $z = f(t) \quad (\circ \leq t \leq \text{۱})$ را برای تعریف یک کمان تحلیلی به‌کار بردیم. تبدیل وارون $f^{-\text{۱}}$، این کمان را به پاره‌خطی مستقیم تبدیل می‌کند. بنابراین، هر کمان تحلیلی را می‌توان به‌طور همدیس به هر کمان تحلیلی دیگر ابتدا با نگارش روی یک پاره‌خط، نگاشت. به‌طور دقیقتر، فرض می‌کنیم دو کمان دارای توابع شوارتس S و T باشند. بنابر رابطهٔ (۱.۸)، داریم $S = \bar{f}f^{-\text{۱}}$ و $T = \bar{g}g^{-\text{۱}}$. اکنون، اگر انتخاب کنیم $h = fg^{-\text{۱}}$، خواهیم داشت $T = \bar{g}g^{-\text{۱}} = \bar{g}\bar{f}^{-\text{۱}}\bar{f}f^{-\text{۱}}fg^{-\text{۱}} = \bar{h}^{-\text{۱}}Sh$ بنابراین، h یک نگاشت همدیس را از T به S نمایش می‌دهد. اگر یک نقطهٔ τ در داخل T (یعنی $\text{۱} > t > \circ$) و یک نقطهٔ σ در داخل S انتخاب کنیم، روشن است که می‌توانیم بینهایت تبدیل همدیس h پیدا کنیم که در یک همسایگی از τ عادی باشند، به‌طوری که $h(\tau) = \sigma$ و T توسط h به S نگاشته شود. این مطلب، به مسأله موضعی پوانکارهٔ هندسهٔ همدیس معروف است (پوانکاره نشان داد که مسأله مشابه این مسأله در مورد توابع مختلط دو متغیر، در حالت کلی جوابی ندارد). یک راه دیگر بیان این قضیه، آن است که بگوییم یک کمان تحلیلیِ تنها دارای هیچ ناوردایی نسبت به گروه تبدیلات همدیس نیست.

وقتی شکلی که از دو کمان تحلیلی که در یک نقطه P تلاقی کرده‌اند در نظر گرفته شود، مسأله بکلی متفاوت خواهد بود. این شکل، زاویهٔ منحنی‌الخط نامیده می‌شود. (به شکل ۱۰.۸ نگاه کنید). زاویهٔ بین این کمانها را با θ نشان می‌دهیم. اگر $\theta = \circ$، این شکل را معمولاً زاویهٔ شاخی می‌نامند (به شکل ۱۱.۸ نگاه کنید). حال، اگر تبدیل f در یک همسایگی از P تحلیلی باشد و $f'(P) \neq \circ$، آنگاه بنابر ویژگی اساسی همدیسی، θ توسط f حفظ می‌شود. بنابراین، زاویهٔ بین دو کمان تحلیلی یک ناوردای همدیس است.



شکل۸-۱۰ زاویهٔ منحنی‌الخط θP

ولی از طرف دیگر، اگر دو زاویه دارای اندازهٔ یکسان باشند، لزوماً به‌طور همدیس معادل نیستند. مثلاً می‌توان دو کمان که به‌طور متعامد متلاقی هستند را پیدا کرد که به‌طور همدیس معادل دو خط مستقیم متعامد نباشند. بر حسب توابع شوارتس، مسأله از این قرار است:



شکل۸-۱۱: زاویهٔ شاخی

فرض می‌کنیم توابع شوارتس اضلاع زاویهٔ اول P و Q (این زاویهٔ منحنی‌الخط را با $\widehat{PQ}$ نشان می‌دهیم)، و توابع شوارتس اضلاع زاویهٔ دوم S و T باشند. مطلوب است تابع

تحلیلی f، به‌طوری که

$$\begin{cases} P = \bar{f} S f^{-1} \\ Q = \overline{f} T f^{-1} \end{cases} \qquad (۴۶ - ۸)$$

اگر S و T خطهای مستقیم $S(z) = \alpha z$ و $T(z) = \beta z$ باشند، آنگاه رابطهٔ (۴۹.۸) با یک قطری سازی همزمان به معنایی که در نظریه ماتریس به‌کار می‌رود مشابه است.

با الهام گرفتن از نظریهٔ ماتریسها (مبنی بر اینکه ماتریسهای قطری‌پذیر همزمان جابه‌جا می‌شوند)، فرض می‌کنیم S و T متلاقی و نسبت به هم متقارن باشند.

چون تقارن دوکمان توسط نگاشتهای تحلیلی حفظ می‌شود، اگر $\widehat{ST}$ معادل همدیس زاویهٔ $\widehat{pQ}$ باشد، باید P و Q نسبت به هم متقارن باشند. برای به‌دست آوردن مثال نقض، تنها لازم است S و T خطهای متعامد بوده، و P یک خط و Q کمانی باشد که بر P عمود است، ولی نسبت به آن متقارن نیست.

در حالت کلی، فرض می‌کنیم Q و T هر دو محور حقیقی با تابع شوارتس $Q(z) = T(z) = z$ باشند. قرار می‌دهیم $P(z) = z + \alpha z^۲ + \beta z^۳ + \dots$ و $S(z) = z + \alpha' z^۲ + \beta' z^۳ + \dots$، $(\alpha, \alpha' \neq ۰)$. بنابراین $\widehat{ST}, \widehat{PQ}$ هر دو در نقطهٔ $z = ۰$ زاویه‌های شاخی بوده و P و Q و نیز S و T در نقطهٔ $z = ۰$ دارای تماس مرتبهٔ اول هستند. از معادلهٔ دوم رابطه (۴۶.۸) داریم $f = \overline{f}$ ، و بنابراین از معادلهٔ اول در مورد معادل همدیس بودن $\widehat{PQ}$ و $\widehat{ST}$ باید داشته باشیم

$$Pf = fS \qquad (۴۷ - ۸)$$

که در آن $f(z) = a_۱ z + a_۲ z^۲ + a_۳ z^۳ + \dots$، a_iها حقیقی‌اند و $a_۱ \neq ۰$.
با قرار دادن سریهای توانی مربوطه در رابطهٔ (۴۷.۸) و بسط آنها تا توانهای سوم، باید

داشته باشیم

$$Pf = a_1 z + (a_2 + \alpha a_1^2) z^2 + (a_3 + 2 a_1 a_2 \alpha + \beta a_1^3) z^3 + \dots = a_1 z + (a_1 \alpha' + a_2) z^2 + (a_1 \beta' + 2 a_2 \alpha' + a_3) z^3 + \dots = fS \qquad (۴۸-۸)$$

از ضریب دوم این بسط نتیجه می‌شود که $\alpha' a_1 = \alpha a_1^2$، و بنابراین $a_1 = \frac{\alpha'}{\alpha}$. با قرار دادن این مقدار در ضرایب سوم و مساوی قرار دادن مقادیر حاصل، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{\beta'}{\alpha'^2} \qquad (۴۹-۸)$$

درنتیجه $\frac{\beta}{\alpha^2}$ یک ناوردای همدیس زاویهٔ شاخی $\widehat{PQ}$ است. بنابر رابطهٔ (۲۳.۷)، $\alpha = -ik$، $k =$ خمیدگی، $\beta = -k^2 - \frac{i}{3}k'$ و $k' = \frac{dk}{ds}$. بنابراین $\frac{\beta}{\alpha^2} = 1 + \frac{i}{3}(\frac{k'}{k^2})$، و در نتیجه $\frac{k'}{k^2}$ یک ناوردای همدیس است. ثابت بودن این ناوردا، یک شرط لازم برای معادل همدیس بودن دو زاویهٔ شاخی است. اگر مرتبهٔ تماس بین P و Q بالاتر باشد، می‌توان استدلال مشابهی را به‌کار برد و نشان داد که هر زاویهٔ شاخی فقط یک ناوردای همدیس بالاتر دارد.

اکنون، توجه خود را به زاویه‌های منحنی‌الخط با اندازهٔ $\theta = \frac{p}{q}\pi$. (p و q صحیح هستند) معطوف می‌داریم. فرض می‌کنیم توابع شوارتس مربوط به اضلاع این زاویه T و S باشند. S را نسبت به T منعکس کرده و $T\overline{S}T$ را به‌دست می‌آوریم (به ۱۵.۸ نگاه کنید). همچنین، T را نسبت به $T\overline{S}T$ منعکس می‌کنیم تا $T\overline{S}T\overline{S}T$ حاصل شود و غیره. بازهم زاویهٔ بین T و $T\overline{S}T$ برابر با θ است؛ همین‌طور است زاویهٔ بین $T\overline{S}T$ و $T\overline{S}T\overline{S}T$ و غیره. بدین ترتیب، دنباله‌ای ازکمانها که از نقطه مشترک S و T می‌گذرند را به دست می‌آوریم. چون تمام زاویه‌ها مساوی بوده و θ مضرب گویایی از π است، پس‌از چند مرحله به کمانی چون S' می‌رسیم که با S هم‌جهت می‌باشد. بنابراین، زاویه $\widehat{SS}'$

شاخی است. هر ناوردای همدیس این زاویهٔ شاخی باید یک ناوردای همدیس $\widehat{ST}$ باشد؛ و با ترکیب این مطلب با آنچه پیشتر گفته شد درمی‌یابیم که هر زاویهٔ منحنی‌الخط که اندازهٔ آن مضرب گویایی از π است، یک ناوردای همدیس دارد.

مسألهٔ نیمساز، رابطهٔ ویژه‌ای با مسأله ناوردایی همدیس زاویه‌های منحنی‌الخط دارد. فرض می‌کنیم که کمانهای تحلیلی S و U متقاطع باشند. کمان T را که از محل تلاقی آنها می‌گذرد چنان پیدا می‌کنیم که U منعکس S نسبت به T باشد و برعکس. این کمان را (در صورت وجود) نیمساز زاویهٔ منحنی‌الخط $\widehat{SU}$ می‌نامیم (به شکل ۱۲.۸ نگاه کنید). بنابر رابطه (۸. ′۱۵)، داریم

$$S = T\overline{U}T \qquad (۸ - ۵۰)$$

با ضرب کردن دو طرف رابطهٔ فوق در $\overline{U}$ از سمت راست نتیجه می‌شود

$$S\overline{U} = T\overline{U}T\overline{U} \qquad (۸ - ۵۱)$$

حال، اگر بنویسیم

$$g = S\overline{U} \text{ و } f = T\overline{U} \qquad (۸ - ۵۲)$$

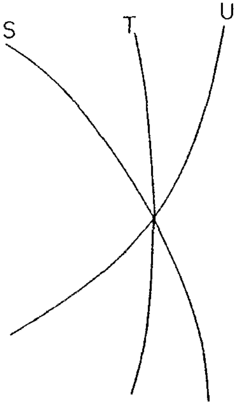
به‌دست می‌آوریم

$$ff = g \qquad (۸ - ۵۳)$$

که باید نسبت به f حل شود. اگر U را محور x بگیریم (کاری که می‌توانیم به آسانی انجام دهیم)، معادله (۸. ۵۰) به صورت

$$TT = S \qquad (۸ - ۵۴)$$

درمی‌آید، که باید نسبت به T حل شود. بنابراین، مسأله نیمساز به تعیین «ریشه دوم تابعی» منجر می‌شود. روشن است که می‌توان مسألهٔ مشابهی را در مورد ثلث‌سازها مطرح کرد که معادلهٔ تابعی در این مورد عبارت است از $TTT = S$ و غیره. این‌گونه معادلات تابعی، معادلات نوع بابیج نامیده می‌شوند.



شکل۸-۱۲

فرض می‌کنیم کمان S محور x، U را در $z = \circ$ قطع کند و بسط موضعی تابع شوارتس آن

$$S(z) = \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} a_n z^n \qquad |a_\text{۱}| = \text{۱} \qquad (\text{۵۵} - \text{۸})$$

باشد. به‌دنبال جوابی چون

$$T(z) = \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} b_n z^n \qquad |b_\text{۱}| = \text{۱} \qquad (\text{۵۶} - \text{۸})$$

هستیم که یک تابع شوارتس نیز هست. با قرار دادن روابط (۵۶.۸) و (۵۵.۸) در رابطهٔ (۵۴.۸) و مساوی قرار دادن ضرایب جمله‌های متشابه، به دست می‌آوریم

$$b_\text{۱}^\text{۲} = a_\text{۱} \qquad (\text{۵۷} - \text{۸})$$

و

$$b_n(b_\text{۱}^n + b_\text{۱}) + P_n(b_\text{۱}, b_\text{۲}, \ldots, b_{n-\text{۱}}) = a_n \qquad (\text{۵۸} - \text{۸})$$

که در آن P_n یک چند جمله‌ای وابسته به $b_\text{۱}, \ldots, b_{n-\text{۱}}$ (نه b_n) است. روشن است که معادله (۵۷.۸) دو جواب دارد. بنابراین، اگر به ازای $n = \text{۲}, \text{۳}, \ldots$ داشته باشیم

$b_1^n + b_1 \neq \circ$، آنگاه می‌توانیم b_nها را به ترتیب به‌دست آوریم. روشن است که این وقتی رخ می‌دهد که a_1 یک ریشهٔ واحد نباشد. بسط (۵۶.۸) حاصل از این محاسبه، صرفاً صوری است. این بحث، نشان می‌دهد که اگر S یک سری توانی بوده و a_1 یک ریشهٔ واحد نباشد، آنگاه رابطه (۵۴.۸) دقیقاً دو جواب صوری دارد، و در این مرحله دربارهٔ همگرایی آنها و اینکه اگر S تابع شوارتس باشد T نیز یک تابع شوارتس است، چیزی بیان نمی‌کنیم. قابل توجه است که بنا به تجربه‌ای که در مورد خطهای متقاطع داریم، وجود دو نیمساز را انتظار داریم؛ یک نیمساز داخل و یک نیمساز خارج در یک زاویه شاخی، اگر مرتبه تماس خمها دقیقاً ۱ باشد، می‌توان نشان داد که یک نیمساز داخل وجود دارد و نیمساز خارجی وجود ندارد. اگر مرتبهٔ تماس دقیقاً ۲ باشد، دو نیمساز وجود خواهند داشت.

در نتیجه، مسألهٔ نیمساز یک مسأله بسیار دشوار است و ما بحث بیشتر در این مورد را تا فصل ۱۵ به تأخیر می‌اندازیم.

مثال. به ازای دایره‌های $S : |z-s| = s^2$ و $U : |z-u| = u^2$، $\circ < s < u$ که در نقطهٔ $z = \circ$ مماس هستند، می‌توانیم دایره $|z-t| = t^2$ که نیمساز زاویهٔ شاخی تشکیل شده توسط S و U است را پیدا کنیم با مراجعه به روابط (۲۲:۶) و (۵۰.۸)، باید داشته باشیم

$$\lambda \begin{pmatrix} s & \circ \\ 1 & -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & \circ \\ 1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & \circ \\ 1 & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & \circ \\ 1 & -t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ut^2 & \circ \\ 2ut - t^2 & -ut^2 \end{pmatrix}$$

در نتیجه $\lambda s = ut^2$ و $\lambda = 2ut - t^2$ و بنابراین $t = \dfrac{2us}{u+s}$. به عبارت دیگر، شعاع t دایرهٔ مورد نظر میانگین توافقی s و u است.

وقتی $u \to \infty$، خواهیم داشت $t \to 2s$، که شعاع نیمساز زاویه‌ای است که توسط S و محور x ساخته می‌شود.

۹

شکل توان $\sqrt{-۱}$ ام یك دایره

توان $\sqrt{-۱}$ ام یک دایره و مارپیچها. هرچند ممکن است بتوان از زوایای مختلف عنوان این فصل را مورد بحث قرار داد، ما در این فصل موضوع را از نقطه‌نظر تابع شوارتس بررسی می‌کنیم.

فرض می‌کنیم C یک کمان تحلیلی بوده (به شکل ۱.۹ نگاه کنید) و $z \neq ۰$ یک نقطهٔ متغیر واقع بر آن باشد. نیمخطی را که از نقاط o و z می‌گذرد و با این کمان زاویهٔ $\psi = \psi(z)$ می‌سازد رسم می‌کنیم. زاویهٔ ψ، تابعی تحلیلی از z خواهد بود. شیب این نیمخط برابر با $\frac{\overline{z}}{z}$، و شیب کمان مساوی با $S'(z)$ است. بنابراین، با توجه به رابطهٔ (۹.۷) داریم

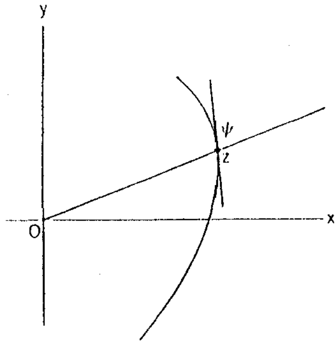
$$\frac{S'(z) - \frac{\overline{z}}{z}}{S'(z) + \frac{\overline{z}}{z}} = -i\tan\psi = \mu(z)\cdot \qquad (۱-۹)$$

این معادله را نسبت به $S'(z)$ حل می‌کنیم

$$S'(z) = \frac{\overline{z}}{z}\left(\frac{۱+\mu(z)}{۱-\mu(z)}\right) = \frac{\overline{z}}{z}e^{-۲i\psi(z)} \qquad (۲-۹)$$

ولی در طول C، $\overline{z} = s(z)$ و بنابراین

$$\frac{S'(z)}{S(z)} = \frac{d}{dz}\log(S(z)) = \frac{e^{-۲i\psi(z)}}{z}\cdot \qquad (۳-۹)$$



شکل۹-۱: y O ψ z x

بنابراین، با انتگرالگیری ملاحظه می‌کنیم که تابع شوارتس C عبارت است از

$$S(z) = exp \int e^{-2i\psi(z)} \frac{dz}{z}. \qquad (۹-۴)$$

فرض می‌کنیم $z_\circ \in C$. در این صورت $s(z_\circ) = \overline{z_\circ}$، و به‌دست می‌آوریم

$$S(z) = \overline{z_\circ} exp \int_{z_\circ}^{z} e^{-2i\psi(z)} \frac{dz}{z}. \qquad (۹-۵)$$

اکنون، فرض می‌کنیم $\psi(z) = \psi$ $\quad (0 \leq \psi \leq \pi)$ ثابت باشد. قرار می‌دهیم

$$\omega = e^{-2i\psi} \qquad (۹-۶)$$

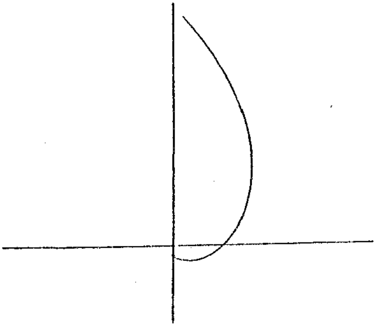
در این صورت، $S(z)$ در رابطه (۵.۹) به‌صورت

$$S(z) = \overline{z_\circ} exp(\omega \log \frac{z}{z_\circ}) = (\frac{\overline{z_\circ}}{z_\circ^\omega}) z^\omega. \qquad (۹-۷)$$

درمی‌آید. در حالت خاص، اگر قرار بدهیم $\psi = \frac{\pi}{4}$ و $z_\circ = 1$، مارپیچ متساوی‌الزاویهٔ برنولی با زاویه $\psi = 45^\circ$ را که از $z = 1$ می‌گذرد، به‌دست می‌آوریم (به شکل ۹.۲ نگاه کنید). در این حالت $\omega = -1$، و بنابراین

$$S(z) = \frac{1}{z^i} \qquad (۹-۸)$$

تابع شوارتس این مارپیچ است. سادگی این شکل، شگفت‌آور است. به ازای $\psi = \frac{\pi}{2}$



شکل ۹-۲

و $z_0 = 1$ و $\omega = -1$، دایره واحد با تابع شوارتس $s(z) = \frac{1}{z}$ را (چنانکه از قبل هم می‌دانستیم) به‌دست می‌آوریم. بنابراین، می‌توان گفت که مارپیچ 45° برنولی که از $z = 1$ می‌گذرد، «توان iام دایرهٔ واحد» است.

اگر ω عدد مختلط دلخواهی روی این دایرهٔ واحد باشد، آنگاه توان ωام دایرهٔ واحد، یک مارپیچ متساوی‌الزاویه است. این مارپیچ، به ازای $\omega = 1$ به دایره واحد، و به‌ازای $\omega = -1$ به محور حقیقی تبدیل می‌شود. چون $(z^{-i})^i = z$ و $(z^i)^i = z^{-1}$، پس دنبالهٔ شکلهای دایره واحد ← مارپیچ 45° ← محور حقیقی ← مارپیچ 135° ← دایره واحد با به توان i رساندن تابع شوارتس به دست می‌آوریم. همچنین، این دور را می‌توان به صورت هندسی و بر حسب انعکاسهای متوالی به شکل

$$I, S, SS, \cdots$$

ـ که در بخش قبل بیان شد ـ تعبیر کرد (به مبحث «تکرار انعکاسها» در فصل قبل نگاه کنید). دورهای مشابه، به‌ازای $\omega = e^{-2\pi i r}$ (r گویاست) پدید می‌آیند.

فرمول (۵.۹)، تابع شوارتس یک کمان را بر حسب زاویه ψ به‌دست می‌دهد. این در حالی است که تابع شوارتس مارپیچ‌های برنولی را می‌توان با استفاده از تبدیلهای همدیس و فرمول (۶.۸) نیز بسرعت محاسبه کرد؛ به این ترتیب که در صفحه zها خط $l : y = \lambda x$ دارای تابع شوارتس $S(z) = Az$ است که در آن $A = \frac{1 - i\lambda}{1 + i\lambda}$. نگارهٔ l تحت نگاشت

$\omega = f(z) = e^z$، مارپیچ $\rho = e^{\frac{\theta}{\lambda}}$ است. چون $\overline{f}(z) = e^{\overline{z}}$ و $f^{-1}(z) = \log z$، داریم

$$S(z) = exp(A\log z) = z^A \qquad (|A| = 1) \qquad (۹-۹)$$

قرار می‌دهیم $|\omega_\circ| = |\omega_1| = 1$. در این صورت، $S_\circ(z) = z^{\omega_\circ}$ و $S_1(z) = z^{\omega_1}$ توابع شوارتس دو مارپیچ برنولی هستند که از نقطه $z = 1$ می‌گذرند. چون $\overline{S_\circ}(z) = z^{\overline{\omega_\circ}}$ و $\bar{S_1}(z) = z^{\overline{\omega_1}}$، داریم $S_\circ(s_1(z)) = (z^{\overline{\omega_1}})^{\omega_\circ} = z^{\omega_\circ\overline{\omega}_1}$ و $S_1(\bar{S}_\circ(z) = (Z^{\overline{w}_\circ})^{w_1} = z^{\omega_\circ\omega_1}$ حال، اگر $\overline{\omega}_\circ\omega_1 = \omega_\circ\overline{\omega}_1$، آنگاه بنابر رابطهٔ (۱۵.۸) این دو مارپیچ نسبت به‌هم متقارن هستند. این تقارن، هنگامی رخ می‌دهد که $argw_1 - argw_\circ = \pi$. به عنوان مثال، مارپیچهای $\overline{z} = \overline{z}^i$ و $\overline{z} = z^i$ متقارن هستند (یعنی منعکس شوارتسی یکدیگرند).

مارپیچ $\overline{z} = z^w$، $|\omega| = 1$، تحت هر نگاشت همدیس $f(z) = z^\alpha$ (α حقیقی است) به صورت خم به خم ناورداست. چرا که در این حالت، روابط $\bar{f}(z) = z^\alpha$ و $(z^w)^\alpha = (z^\alpha)^w$، نتیجه می‌دهند که $S\bar{f} = fS$. این رابطه، بنابر رابطه (۱۰.۸) ناوردایی خم به خم را نتیجه می‌دهد.

متذکّر می‌شویم که مارپیچهای $\overline{z} = z^w$ ($|\omega| < 1$) تنها توانهایی از دایرهٔ واحدند که کمانها را معرفی می‌کنند؛ زیرا اگر $S(z) = (\frac{1}{z})^p$ تابع شوارتس یک کمان باشد، آنگاه $\bar{S}S = I$ و $z \equiv (z^{-p})^{-\overline{p}} = Z^{p\overline{p}}$ در نتیجه، و بنابراین $|p| = 1$

مارپیچ برنولی نیز در نظریهٔ تکرار مورد توجه زیاد است؛ زیرا نمونه‌ای از رفتار تکرار یک تابع تحلیلی را در یک همسایگی از یک نقطهٔ ثابت ارائه می‌دهد (به فصل ۱۵ رجوع کنید).

۲.۹ خمهای ناوردا تحت تبدیلات موبیوس. تمام این مفاهیم را می‌توان با مطالعه خمهایی که تحت تبدیلات موبیوس ناوردا هستند، به دست آورد. مقدمتاً، خمهایی را پیدا می‌کنیم که تابع شوارتس آنها $S(z) = Az^w$ بوده و تحت تابع $f(z) = \mu z$ و $\mu \neq \circ$ ناوردا هستند. بنابر رابطهٔ (۱۰.۸)، باید داشته باشیم. $A(\mu z)^w = \bar{\mu}Az^w$؛ و بدین ترتیب $\mu^w = \overline{\mu}$ مستقل از A به‌دست می‌آید. از این رابطه، نتیجه می‌شود.

$$\omega = \frac{\log\overline{\mu}}{\log\mu} = \frac{\overline{\log\mu}}{\log\mu}$$

در اینجا سه حالت مشخص وجود خواهند داشت: (۱) μ حقیقی است. (حالت هذلولوی: تجانسها). از رابطهٔ (۹.۹ الف) نتیجه می‌شود $\omega = 1$ ، و خطوط مستقیم گذرنده از مبدأ $S(z) = Az, 1 =| A |$ ناوردا هستند.

(۲) $1 =| \mu |$ (حالت بیضوی: دورانها). دراینجا $\omega = -1$ و دایره‌های $S(z) = \dfrac{A}{z}(A > 1)$ ناوردا هستند.

(۳) $1 \neq| \mu |$ و μ حقیقی نیست (حالت قناس). در این صورت $1 =| \omega |$، $\omega \neq 1$ ، $\omega \neq -1$ و مارپیچهای $S(z) = (\frac{\overline{z}_\circ}{z_\circ^\omega})z^w$ ناوردا هستند.

اکنون، تبدیل کلی موبیوس $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ را با ماتریس $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$، $(detM \neq \circ)$ نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم مقادیر ویژهٔ M، λ_1 و λ_2 بوده و متمایز باشند. در این صورت، M را می‌توان توسط ماتریسی چون G قطری کرد؛ بدین ترتیب که $G^{-1}MG = \wedge = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \circ \\ c & \lambda_1 \end{pmatrix}$ یا $M = G \wedge G^{-1}$.

تبدیلی که $\wedge$ معرفی می‌کند، عبارت است از $\wedge(z) = \mu z$ که در آن $\mu = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$. خمهای ناوردا تحت M، نگاره‌های خمهای ناوردا تحت $\wedge$ توسط Gهستند. به زبان توابع شوارتس، اگر S تحت $\wedge$ ناوردا باشد، خمی با تابع شوارتس

$$T = \bar{G}SG^{-1}$$

تحت M ناورداست؛ زیرا

$$TM = \bar{G}SG^{-1}G \wedge G^{-1} = \bar{G}S \wedge G^{-1} = \overline{G}\overline{\wedge}SG^{-1}$$

$$= \overline{G}\overline{\wedge}\bar{G}^{-1}\overline{G}SG^{-1} = \overline{M}T \qquad (۱۰-۹)$$

حالت ۱: μ حقیقی است. $S \sim \begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & 1 \end{pmatrix}$ و $1 =| A |$. در این حالت، خطهای مستقیم گذرنده از مبدأ تحت $\wedge$ ناوردا هستند. اعضای این دسته خطوط، همدیگر را در

نقاط $z = \circ$ و $z = \infty$ قطع می‌کنند. نگارهٔ این دسته از خطوط توسط G، یک دستهٔ بیضوی از دایره‌هاست، که از دو نقطهٔ z_1 و z_2 که به ترتیب نگاره‌های $\circ$ و ∞ تحت Gهستند می‌گذرند. چرا که با یک نمادگذاری بدیهی

$$(z_1, z_2) = G(\circ, \infty) = G \wedge (\circ, \infty) = G \wedge G^{-1}(z_1, z_2) = M(z_1, z_2)$$

این دو نقطه نقطه‌های ثابت M هستند.

حالت ۲. $|\mu| = 1$، $S \sim \begin{pmatrix} \circ & A \\ 1 & \circ \end{pmatrix}$ و $A > \circ$. اکنون، دایره‌های متحدالمرکز حول مبدأ تحت $\wedge$ ناوردا هستند. نقاط $z = \circ$ و $z = \infty$، «دایره‌های نقطه‌ای» این دستهٔ دوایر هستند. نگارهٔ این دسته از دایره‌ها تحت G، یک دستهٔ هذلولوی از خمها را تشکیل می‌دهد که دایره‌های نقطه‌ای آنها نقاط ثابت M هستند.

حالت ۳: $| \mu | \neq 1$، μ حقیقی نیست. (در این حالت نمی‌توانیم ماتریسها را برای ترکیب تابعی با S بکار ببریم.) داریم $S(z) = Az^{\omega}$، $A = \dfrac{\bar{z}_\circ}{z_\circ^{\omega}}$ و $| \omega | = 1$، $| \omega | \neq 1, -1$. می‌نویسیم

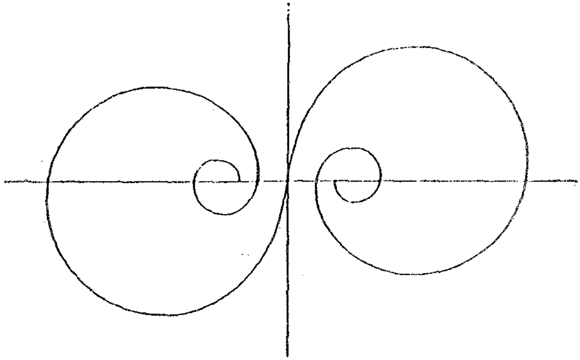
$$G = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{pmatrix} \text{و} \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \Gamma_3 & \Gamma_4 \end{pmatrix}$$

لگزودرامها خمهای ناوردا هستند، و تابع شوارتس آنها توسط

$$T(z) = \frac{\overline{\gamma}_1 u + \overline{\gamma_2}}{\overline{\gamma}_3 u + \overline{\gamma}_4} \quad \text{و} u = A\left(\frac{\Gamma_1 z + \Gamma_2}{\Gamma_3 z + \Gamma_4}\right)^{\omega}$$

داده می‌شود (به شکل ۳.۹ نگاه کنید).

۳.۹ معادلات دیفرانسیل. برای مشاهدهٔ مارپیچها روی یک پردهٔ عریض، به معادلات دیفرانسیل خودگردان می‌پردازیم. یک دستگاه 2×2 از معادلات دیفرانسیل خودگردان را



شکل۹-۳

می‌توان به صورت

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases} \qquad (۹ - ۱۰)$$

نوشت. این دستگاه، در مختصات مزدوج به صورت

$$\begin{cases} \dot{z} = f(x,y) + ig(x,y) = \phi(z,\bar{z}) \\ \dot{\bar{z}} = f(x,y) - ig(x,y) = \overline{\phi(z,\overline{z})} = \overline{\phi}(\overline{z},z)\cdot \end{cases} \qquad (۹ - ۱۱)$$

درمی‌آید.

فرض می‌کنیم که f و g و بنابراین ϕ توابع تحلیلی از متغیرهای خود هستند. البته، معادلهٔ دوم رابطه (۹.۱۱) زاید است. فرض می‌کنیم C یک کمان به معادلهٔ $z = h(t)$، ($t_1 \leq t \leq t_2$) باشد که یک جواب معادله (۹.۱۱) است. در طول C، داریم

$$S'(z) = \frac{d\overline{z}}{dz} = \frac{\dot{\overline{z}}}{\dot{z}} = \frac{\overline{\phi}(\overline{z},z)}{\phi(z,\overline{z})} = \frac{\overline{\phi}(S(z),z)}{\phi(z,S(z))}\cdot \qquad (۹ - ۱۲)$$

بنابراین

$$S'(z) = \frac{\overline{\phi}(S(z), z)}{\phi(z, S(z))} \qquad (۹ - ۱۲')$$

یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول برای توابع شوارتس مربوط به جوابهای دستگاههای (۱۰.۹) یا (۱۱.۹) است. اگر تابع ϕ نسبت به z و $\bar{z}$ جدایی‌پذیر باشد ـ یعنی اگر ϕ را بتوان به صورت $\phi(z, \overline{z}) = \psi(z)\chi(\overline{z})$ نوشت که در آن ψ و χ تحلیلی هستند ـ آنگاه می‌توان برای خمهای جواب دستگاه (۱۰.۹) تعبیر ساده‌ای را ارائه داد. در این حالت، داریم

$$\frac{dS}{dz} = \frac{\overline{\psi}(S)\overline{\chi}(z)}{\psi(z)\chi(S)} \qquad (۹ - ۱۳)$$

بنابراین

$$\int_{S_\circ}^{S} \frac{\chi(S)}{\bar{\psi}(S)} dS = \int_{z_\circ}^{z} \frac{\overline{\chi}(z)}{\psi(z)} dz \quad , \quad \overline{z_\circ} = S(z_\circ) = S_\circ \qquad (۹ - ۱۴)$$

تابع

$$H(z) = \int_{z_\circ}^{z} \frac{\overline{\chi}(z)}{\psi(z)} dz \qquad (۹ - ۱۵)$$

را در نظر می‌گیریم. بنابر رابطهٔ (۱۴.۹)، داریم $\overline{H}(S) - \overline{H}(S_\circ) = H(z) - H(z_\circ)$

بنابراین، با فرض وجود H^{-1} داریم

$$\begin{aligned} S(z) &= \bar{H}^{-1}(H(z) - H(z_\circ) + \bar{H}(S_\circ)) \\ &= \bar{H}^{-1}(H(z) - H(z_\circ) + \overline{H(z_\circ)}) \end{aligned} \qquad (۹ - ۱۶)$$

می‌نویسیم $u_\circ = H(z_\circ)$ و $\overline{u}_\circ = \overline{H(z_\circ)}$. بنابر رابطهٔ (۸.۸)، تابع $l(z) = z - u_\circ + \overline{u_\circ}$ تابع شوارتس خط $y = Im u_\circ$ است. بنابر رابطهٔ (۱۶.۹)، $S = \bar{H}^{-1} l H$، و در نتیجه

بنابر رابطه (۶.۸) جوابهای دستگاههای (۱۰.۹) یا (۱۱.۹) همگی نگاره‌های خطوط موازی ثابت $= y$ تحت H^{-1} هستند.

مثال. معادله دیفرانسیل $z^{2}\bar{z} = \dot{z}$ را بررسی می‌کنیم. در اینجا $\psi(z) = z^{2}$، $\chi(z) = z$، $H(z) = \log z$ و $H^{-1}(z) = e^{z}$. نگاره $y = c$ تحت e^{z} خط $\acute{y} = (tanc)\acute{x}$ است. صورت حقیقی معادلهٔ دیفرانسیل عبارت است از

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^{2} + y^{2}) \\ \dot{y} = y(x^{2} + y^{2}) \end{cases}$$

بنابراین $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$، و همان احکام نتیجه می‌شوند.

دستگاه خودگردان خطی مرتبهٔ اول حقیقی 2×2 به صورت

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y \\ \dot{y} = \gamma_{x} + \delta y \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad (۹-۱۷)$$

است. حال، $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ ؛ بنابراین در مختصات مزدوج، این دستگاه به صورت

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \qquad (۹-۱۸)$$

در می‌آید، که در آن $P = MQM^{-1}$

ماتریس P را می‌توان به صورت

$$\begin{matrix} A = \frac{1}{2}((\alpha+\delta)+i(\gamma-\beta)) \\ B = \frac{1}{2}((\alpha-\delta)+i(\gamma+\beta)) \end{matrix} \quad P = \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \qquad (۹-۱۹)$$

نوشت. قابل توجه است که P و Q متشابهند. بنابراین، مقادیر ویژهٔ آنها یکسان هستند.

ناورداها از این قرارند.

$$\Delta=(\alpha-\delta)^{۲}+۴\beta\gamma=p^{۲}-۴q=(A-\overline{A})^{۲}+۴B\bar{B}$$
$$=۴(|B|^{۲}-(ImA)^{۲}),$$

$$q=\det Q=\alpha\delta-\beta\gamma=A\overline{A}-B\overline{B}=|A|^{۲}-|B|^{۲} \quad (۱۱\text{-}۹)$$

$$p=-traceQ=-(\alpha+\delta)=-(A+\bar{A})=-۲ReA$$
$$\lambda_{۱}=\frac{۱}{۲}(-p+\Delta^{۱/۲}),\qquad \lambda_{۲}=\frac{۱}{۲}(-p-\Delta^{۱/۲}).$$

نقطه $z=۰$، یک نقطه تکین دستگاه (۱۰.۹) یا (۹. ۱۱) است و می‌توان رده‌بندی آن را برحسب مقادیر ویژهٔ $\lambda_{۱}, \lambda_{۲}$ به‌طورکامل انجام داد. این رده‌بندی، به شرح زیر است:

۱ـ اگر مقادیر ویژه حقیقی، نامساوی و همعلامت باشند. ($\Delta>۰$ و $q>۰$)، نقطهٔ تکین یک گره است.

۲ـ اگر مقادیر ویژه حقیقی، نامساوی و با علامت متفاوت باشند ($q<۰, \Delta>۰$)، نقطهٔ تکین زینی است.

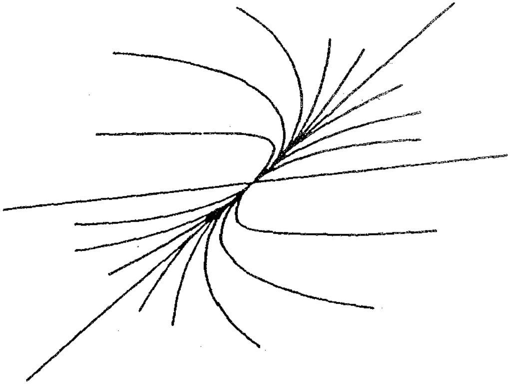
۳ـ اگر مقادیر ویژه مساوی باشند، رتبهٔ $Q-\lambda I$ صفر است ($q\neq ۰, \Delta=۰$)، A حقیقی است و $B=۰$). در این حالت، نقطه تکین ستاره‌ای است.

۴ـ اگر مقادیر ویژه مساوی باشند، رتبهٔ $Q-\lambda I$ یک است. در این حالت، نقطهٔ تکین یک گره است.

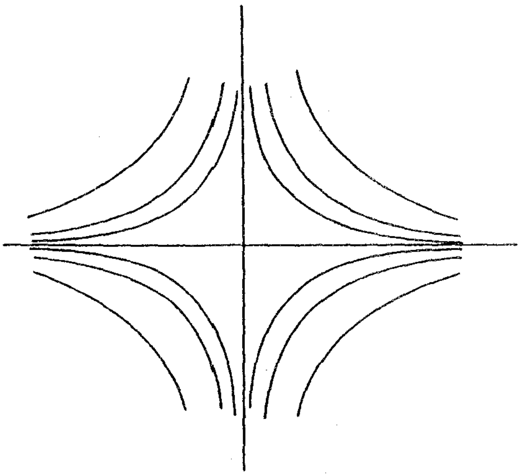
۵ـ اگر مقادیر ویژه موهومی محض باشند ($p=۰, \Delta<۰$)، نقطهٔ تکین کانون است.

۶ـ اگر مقادیر ویژه مختلط باشند ($p\neq ۰, \Delta<۰$) نقطهٔ تکین مارپیچی است.
(شکلهای ۴.۹ ـ ۹.۹ را ببینید)

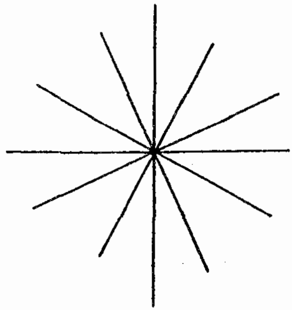
بنابر رابطهٔ (۱۲′.۹)، معادلهٔ دیفرانسیل توابع شوارتس جوابهای معادله (۱۸.۹) عبارت



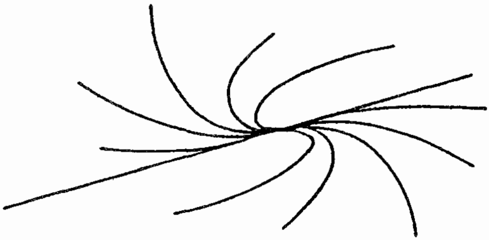
شکل۹-۴: حالت ۱



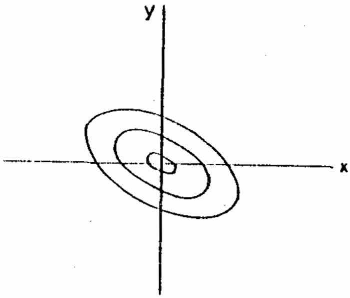
شکل۹-۵: حالت ۲



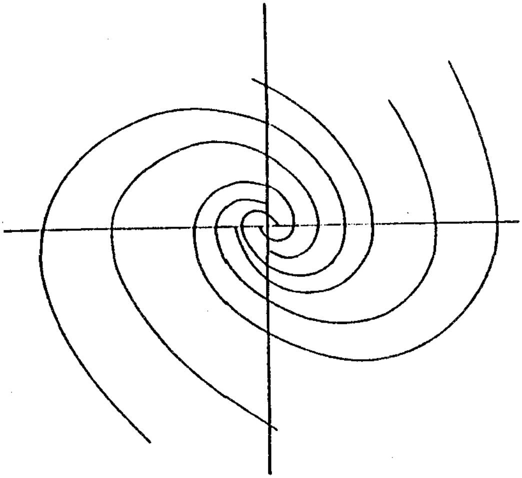
شکل۹-۶: حالت ۳



شکل۹-۷: حالت ۴



شکل۹-۸: حالت ۵



شکل۹-۹: حالت ۶

است از

$$S'(z) = \frac{\overline{B}z + \overline{A}S}{Az + BS} \qquad (۹-۲۱)$$

یا به طور معادل (۹.۲۲)

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ S \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z \\ S \end{pmatrix} \qquad (۹-۲۲)$$

جواب معادلهٔ (۹. ۲۲) را می‌توان به روش معمول برحسب مقادیر ویژه و بردارهای ویژه P نوشت.

مثال. $A = ۱ + i$ ، $B = ۰$ ، $\Delta = -۴$ و $p = -۲ \neq ۰$. این حالت، همان حالت ۶، یعنی حالتی است که نقطه تکین مارپیچ می‌باشد. بنابر رابطهٔ (۹.۲۱)، داریم

$$\frac{dS}{dz} = \frac{۱ - i}{۱ + i}\frac{S}{z} = -i\frac{S}{z} \qquad (۹-۲۳)$$

در نتیجه $S(z) = (const)z^{-i}$، و رابطهٔ (۹ـ۸) مجدداً به دست می‌آید.

۱۰

ویژگیهای کلان تابع شوارتس

ویژگیهای سرتاسری تابع شوارتس یک کمان تحلیلی داده شده، دارای اهمیت بسیاری است. اولین اظهار نظر در این مورد، مطلبی است که از بررسی توابع شوارتس که بروشنی در فصل ۵ نشان داده شد نتیجه می‌گردد، و آن این است که همهٔ توابع شوارتس بجز توابع شوارتس خط مستقیم دارای نقاط تکین هستند. به‌طوری که اکنون ثابت خواهیم کرد، این مطلب درست‌است. و اثبات آن مبتنی است بر اتحاد (۶. ۱۱) که برمبنای قضیه‌ای از پولیا در مورد ترکیب توابع تام قرار دارد.

قضیه. فرض می‌کنیم $f(z), g(z), h(z)$ توابعی هستند که توسط رابطه

$$f(z) = g(h(z)) \qquad (۱-۱۰)$$

به‌هم مربوط‌اند همچنین، فرض می‌کنیم $h(0) = 0$. اگر $F(r)$، $G(r)$، $H(r)$ مساوی با ماکزیمم قدرمطلق f، g، h روی $|z| \leq r$ باشند، در این صورت عددی چون c، ($0 < c < 1$) مستقل از r، g و h وجود دارد که

$$F(r) \geq G(cH(\tfrac{1}{2}r)). \qquad (۲-۱۰)$$

قضیه. تابع شوارتس کمان تحلیلی C تام است، اگر و تنها اگر C خطی مستقیم باشد.

اثبات . اگر C یک خط مستقیم باشد، آنگاه $S(z)=Az+B$ تابعی تام است. فرض می‌کنیم C خط مستقیم نبوده و $S(z)$ تام باشد. می‌توانیم فرض کنیم که C از مبدأ مختصات می‌گذرد و بنابراین $S(0)=0$ (در غیر این صورت انتقال $w=z-z_0$ ـ بنابر رابطهٔ (۸.۸) تابع شوارتس را به $S_1(w)=S(w+z_0)-\overline{z}_0$ تبدیل می‌کند. حال $S_1(w)$ تام است، اگر و تنها اگر $S(z)$ تام باشد). بنابراین، می‌توانیم بنویسیم $|z|\leq\rho$, $S(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots$ ، که در آن دست‌کم یکی از ضرایب a_k با $k\geq 2$ غیر صفر است. اگر $S(z)$ تام باشد، $\overline{S}(z)$ نیز تام است و چون $\overline{S}(z)=\overline{S(\overline{z})}$، تابع ماکزیمم قدرمطلق این دو تابع یکسان و برابر با $M(r)$ است.

چون $\overline{S}(S(z))=z$، بنابر قضیهٔ پولیا، عدد c،$(0<c<1)$ چنان وجود دارد که $M(cM(\frac{r}{2}))\leq r$. بنابر فرمول برآورد کوشی، به ازای هر r، $|a_k|\,r^k\leq M(r)$ در نتیجه $\frac{r^k}{2^k}|a_k|\leq M(\frac{r}{2})$، و بنابراین یک بار دیگر

$$r\geq M\left(cM\left(\frac{r}{2}\right)\right)\geq|a_k|\,c^k\left(M\left(\frac{r}{2}\right)\right)^k$$

$$\geq|a_k|\,c^k\,|a_k|^k\left(\frac{r}{2}\right)^{k^2}=r^{k^2}\ \text{مضرب ثابتی از}$$

چون $k\geq 2$، با میل دادن $r\to\infty$ یک تناقض به‌دست می‌آوریم. اکنون این پرسش مطرح است که تحت چه شرایطی تابع شوارتس می‌تواند گویا باشد؟ پاسخ این پرسش را قضیه زیر فراهم می‌کند.

قضیه. تابع شوارتس کمان تحلیلی C گویاست، اگر و تنها اگر C قسمتی از یک دایره یا خط مستقیم باشد.

اثبات . دایرهٔ $|z-z_0|^2=p^2$ دارای تابع شوارتس $S(z)=\dfrac{p^2}{z-z_0}+\overline{z_0}$ است. برعکس، فرض می‌کنیم داشته باشیم $S(z)=R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ که در آن $P(z)=a_0z^m+\cdots$، $Q(z)=b_0z^n+\cdots$ $a_0b_0\neq 0$ و $(P,Q)=1$. چون

رابطه $\overline{R}(R(z)) = z$ به صورت اتحاد برقرار است داریم

$$\frac{\bar{a}_{0}R^{m} + \bar{a}_{1}R^{m-1} + \cdots}{\bar{b}_{0}R^{n} + \bar{b}_{1}R^{n-1} + \cdots} = z \qquad (۳-۱۰)$$

یا

$$(\bar{a}_{0}R^{m} + \overline{a}_{1}R^{m-1} + \cdots) = z(\bar{b}_{0}R^{n} + \bar{b}_{1}R^{n-1} + \cdots). \qquad (۴-۱۰)$$

حالت ۱. فرض می‌کنیم $m > n$ در این صورت

$$\overline{a}_{0}P^{m} + \overline{a}_{1}QP^{m-1} + \cdots = Q^{m}(\bar{b}_{0}R^{n} + \bar{b}_{1}R^{n-1} + \cdots)$$

در نتیجه $Q \mid \overline{a}_{0}P^{m}$، و چون $(P,Q) = 1$، پس $Q =$ ثابت. بنابراین، $R = \alpha_{0}z^{m} + \alpha_{1}z^{m-1} + \cdots$. چون $\overline{R}(R(z)) = z$ به صورت اتحاد برقرار است، داریم

$$z = \overline{\alpha}_{0}(\alpha_{0}z^{m} + \alpha_{1}z^{m-1} + \cdots)^{m} + \overline{\alpha}_{1}(\alpha_{0}z^{m} + \cdots)^{m-1} + \cdots$$

با مقایسهٔ ضرایب بزرگترین توانها در می‌یابیم که $z = \alpha_{0}\overline{\alpha}_{0}z^{m^{2}}$ ، و در نتیجه $m = 1$، $\overline{a}_{0}a_{0} = 1$. پس

$$R(z) = \alpha z + \beta, \alpha\overline{\alpha} = 1, Re(\overline{\alpha}\beta) = 0. \qquad (۵-۱۰)$$

حالت ۲. فرض می‌کنیم $m < n$. بنابراین، مانند گذشته $Q \mid \bar{b}_{0}zP^{n}$ و با توجه به $(Q,P) = 1$ ، نتیجه می‌شود که $Q =$ ثابت یا $Q =$ ثابت $\times z$. چون درجهٔ P از درجهٔ Q کمتر است، بواقع باید داشته باشیم $R(z) = \frac{c}{z}$. حال، رابطهٔ $\overline{R}(R(z)) = z$ نتیجه می‌دهد که $c = \bar{c}$. در نتیجه، در این حالت داریم .

$$R(z) = \frac{c}{z} \quad \text{حقیقی } c \qquad (۶-۱۰)$$

حالت ۳. فرض می‌کنیم $m = n$. در این صورت

$$\bar{a}_\circ P^m + \bar{a}_\backslash QP^{m-\backslash} + \cdots = z(\bar{b}_\circ P^m + \bar{b}_\backslash QP^{m-\backslash} + \cdots)$$

از این رابطه، نتیجه می‌شود که $\overline{a_\circ} - \overline{b_\circ} z \equiv \circ \pmod{Q}$ بنابراین $Q = cz + d$، در نتیجه $P = az + b$، که در آن a، b، c، d اعدادی مختلط هستند. می‌نویسیم

$$R(z) \sim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

در این صورت، اتحاد $\overline{R}((R)z) = z$ نتیجه می‌دهد

$$\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda I$$

بنابراین، باید ماتریسهایی مانند

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

را چنان پیدا کنیم که $\overline{M}M = I$ چرا که فرض کرده‌ایم $\det M = ۱$. از $\overline{M} = M^{-۱}$، نتیجه می‌شود که

$$\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

بنابراین $\overline{d} = a$، $\overline{c} = -c$، $\overline{b} = -b$ و $\overline{a} = d$ در نتیجه

$$M = \begin{pmatrix} a & ib \\ ic & \overline{a} \end{pmatrix}$$

که در آن $a\overline{a} + bc = ۱$. اکنون، ملاحظه می‌کنیم که $R(z)$ به شکل

$$R(z) = \frac{p^۲}{z - z_\circ} + \overline{z}_\circ \qquad (۷-۱۰)$$

است. که در آن $p = c^{-1}$ و $z_{\circ} = \frac{i\overline{a}}{c}$. تمام جوابهای معادله تابعی $\overline{R}(R(z)) = z$، توسط روابط (۱۰ . ۵)، (۱۰ . ۶) و (۱۰ . ۷) داده می‌شوند. حالت ۱ به خط مستقیم در صفحه، و حالتهای ۲ و ۳ به دایرهٔ کامل منتهی می‌شوند.

اکنون، اثبات دیگری از این قضیه‌ها را ارائه می‌کنیم که جنبه‌های دیگری از مطلب را روشن می‌کند.

لم اگر تابع $f(z)$ تک مقداری و روی $|z| < \infty$ تام باشد، آنگاه به صورت $f(z) = az + b$ است.

اثبات. تابع $f(z)$ نمی‌تواند ثابت باشد، و در نتیجه بنابر قضیهٔ لیوویل بی‌کران است. قرار می‌دهیم $z^* = f(\circ)$. در این صورت، قرص واحد $|z| \leq 1$ بر روی ناحیه‌ای چون R که شامل z^* است نگاشته می‌شود. در نتیجهٔ به ازای $|z| > 1$ ‏$f(z)$ در خارج R واقع می‌شود. اکنون، تابع $g(z) = \frac{1}{f(z) - z^*}$ را در نظر می‌گیریم. تابع مزبور، روی $|z| > 1$ عادی و کراندار است. چون این تابع را می‌توان تا $z = \infty$ ادامه داد، پس در $z = \infty$ نیز عادی است. از آنجایی که $f(z)$ در خارج R بی‌کران است، پس $g(\infty) = \circ$، بنابراین f در $z = \infty$ یک قطب دارد. اکنون، می‌توان گفت یک تابع تام که دارای قطبی در بینهایت است باید یک چند جمله‌ای باشد. چون این تابع تک مقداری است، پس به ازای هر z خواهیم داشت $f'(z) \neq \circ$ بنابراین، طبق قضیهٔ اساسی جبر $f'(z) = b$ ثابت، و اثبات تمام است.

با استدلالی مشابه داریم.

لم اگر $f(z)$ روی $|z| < \infty$ تک مقداری و مرومرفیک باشد به صورت $f(z) = (az + b)/(cz + d)$است.

اکنون فرض می‌کنیم که تابع شوارتس $S(z)$ تام باشد. در این صورت، تابع $\overline{S}$ نیز تام است. بنابر پایداری اتحادهای تحلیلی، باید اتحاد $\overline{S}S = I$ روی $|z| < \infty$ معتبر باشد. فرض می‌کنیم $S(z_1) = S(z_2)$ دو طرف این تساوی را از طرف چپ در $\overline{S}$ ضرب کرده و به‌دست می‌آوریم $\overline{S}S(z_1) = \overline{S}S(z_2)$ یا $z_1 = z_2$. بنابراین، $S(z)$ روی $|z| < \infty$

تک مقداری است و در نتیجه طبق لم اول $S(z)$ به صورت $a + bz$ می‌باشد.

وقتی $S(z)$، روی $|z| < \infty$ مرومرفیک باشد، می‌توان ملاحظات مشابهی را به کار برد.

یکی از نتایج قضیه‌های این فصل آن است که در حالت کلی اگر یک تابع شوارتس کمی آشفته شود به صورت تابع شوارتس یک کمان باقی نخواهد ماند. مثلاً تابع $S^*(z) = z+\epsilon z^2$ به‌ازای مقدار کوچک ϵ آشفته شدهٔ تابع $S(z) = z$ است؛ اما به ازای عدد $\epsilon \neq 0$، $S^*(z)$ یک چند جمله‌ای درجهٔ دو بوده و بنابراین تابع شوارتس نیست.

در فصل ۱۳، مسأله تعیین شرایطی که تحت آنها تابع شوارتس مربوط به یک خم بسته در داخل این خم مرومرفیک است، بررسی می‌کنیم.

۱۱

مشتق و انتگرال

مشتق . با استفاده از اتحاد

$$F(z,\bar{z}) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{۲}, \frac{z-\bar{z}}{۲i}\right) \qquad (۱\text{-}۱۱)$$

تابع دو متغیرهٔ $f(x,y)$ را می‌توان به صورت تابعی از z و $\bar{z}$ نوشت. حال، چون

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{۱}{۲}\right) + \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{۱}{۲i}\right)$$

داریم

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right) \qquad (۲\text{-}۱۱)$$

به همین ترتیب

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right) \qquad (۲' - ۱۱)$$

این روابط، ما را به سوی معرفی عملگرهای

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad (۳\text{-}۱۱)$$

سوق می‌دهند. بر عکس، داریم

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \qquad (۴\text{-}۱۱)$$

مشتق سویی $f(x,y)$، در جهت α توسط رابطهٔ

$$D_\alpha f(x,y) = \lim_{h\to \circ} \frac{f(x+h\cos\alpha, y+h\sin\alpha)}{h}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} + \sin\alpha$$

تعریف می‌شود. با استفاده از رابطهٔ (۱۱. ۴) نتیجه می‌شود که

$$D_\alpha F(z,\bar{z}) = F_z e^{i\alpha} + F_{\bar{z}} e^{-i\alpha} \qquad (۵\text{-}۱۱)$$

برای به دست آوردن مشتقهای سویی در طول کمان تحلیلی $C-$ با تابع شوارتس $S(z)-$ و در جهت قائم بر آن، به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض می‌کنیم $z_\circ \in C$ و ψ زاویهٔ خط مماس بر C در $z_\circ$ و محور x باشد. بنابر تعریف

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\psi + \frac{\partial F}{\partial y}\sin\psi \qquad (۵' - ۱۱)$$
$$\frac{dF}{dn} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos(\psi+\pi/۲) + \frac{\partial F}{\partial y}\sin(\psi+\pi/۲)$$
$$= -\frac{\partial F}{\partial x}\sin\psi + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\psi$$

با استفاده از روابط (۱۱. ۴)، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{dF}{ds} = F_z e^{i\psi} + F_{\bar{z}} e^{-i\psi}; \frac{dF}{dn} = i(F_z e^{i\psi} - F_{\bar{z}} e^{-i\psi}) \qquad (۶\text{-}۱۱)$$

در حالت خاص، با قرار دادن $F = z$ و $F = \bar{z}$ در روابط (۶.۱۱) به دست می‌آوریم

$$\frac{dz}{ds} = e^{i\psi} = -i\frac{dz}{dn}; \qquad \frac{d\bar{z}}{ds} = e^{-i\psi} = i\frac{d\bar{z}}{dn}. \qquad (۷\text{-}۱۱)$$

با ترکیب این فرمول و فرمول (۶.۱۱)، رابطه

$$\frac{dF}{ds} = F_z\frac{dz}{ds} + F_{\bar{z}}\frac{d\bar{z}}{ds}; \qquad \frac{dF}{dn} = F_z\frac{dz}{dn} + F_{\bar{z}}\frac{d\bar{z}}{dn} \qquad (۸\text{-}۱۱)$$

تبدیل می‌شود. حال، بنابر رابطه (۱۳.۷) داریم

$$\frac{dz}{ds} = -i\frac{dz}{dn} = \frac{۱}{\sqrt{S'(z)}}, \qquad \frac{d\bar{z}}{ds} = i\frac{d\bar{z}}{dn} = \sqrt{S'(z)}$$

در نتیجه، سرانجام به دست می‌آوریم.

$$\frac{dF}{ds}=F_z\frac{۱}{\sqrt{\acute{S}(z)}}+F\bar{z}\sqrt{\acute{S}(z)}$$

$$\frac{dF}{dn}=i\left(F_z\frac{۱}{\sqrt{\acute{S}(z)}}-F\bar{z}\sqrt{\acute{S}(z)}\right) \qquad (۹-۱۱)$$

اگر $f(x,y)$ تابع مختلط مقداری از x و y باشد، می‌توان نوشت $f(x,y)=u(z,y)+iv(x,y)$ در این صورت، داریم

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{۱}{۲}(u_x+ivx-iu_y+v_y),\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{۱}{۲}(u_z+iv_z+iu_y-v_y)$$

حال، اگر f تابعی تحلیلی از z باشد، آنگاه بنابر معادلات کوشی ـ ریمان $u_x=v_y$ و $u_y=-v_x$ از این رو

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial z}=u_z+iv_x=\acute{f}(z)\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=۰\end{cases} \qquad (۱۰-۱۱)$$

اگر تابع ضد ـ تحلیلی* $u-iv$ را با $\overline{f(z)}$ نشان دهیم، داریم

$$\frac{\partial\overline{f(z)}}{\partial z}=\frac{\partial\overline{f}(\overline{z})}{\partial z}=۰$$

$$\frac{\partial\overline{f(z)}}{\partial \overline{z}}=\frac{\partial\overline{f}(\overline{z})}{\partial \overline{z}}=\overline{f'(z)}=\overline{f'}(\bar{z}) \qquad (۱۱-۱۱)$$

در مورد تابع تحلیلی $f(z)$، رابطه (۹.۱۱) به

$$\frac{df}{ds}=f'(z)\frac{۱}{\sqrt{S'(z)}}=-i\frac{df}{dn} \qquad (۱۲-۱۱)$$

---

*) توابع ضد تحلیلی گاهی تحلیلی مزدوج نامیده می‌شوند. بین نظریه‌های دو نوع تابع یک یکریختی برقرار است. لذا قضیه یک کوشی در مورد $\int_c f(\overline{z})d\overline{z}$ وجود دارد و غیره.

تبدیل می‌شود.

ژاکوبین. فرض می‌کنیم $\phi(x,y)$ و $\psi(x,y)$ توابعی حقیقی از متغیرهای x و y باشند و قرار می‌دهیم $F(z,\overline{z}) = \phi + i\psi$، $\overline{F}(\overline{z},z) = \phi - i\psi$
فرض می‌کنیم.

$$J = \begin{pmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_z + \phi_{\overline{z}} & i(\phi_z - \phi_{\overline{z}}) \\ \psi_z + \psi_{\overline{z}} & i(\psi_z - \psi_{\overline{z}}) \end{pmatrix} \qquad (۱۱-۱۳)$$

در این صورت

$$\det J = \frac{\partial F}{\partial x} * \frac{\partial F}{\partial y} = -۲i \begin{vmatrix} \phi_z & \phi_{\overline{z}} \\ \psi_z & \psi_{\overline{z}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \phi_z + i\psi_z & \phi_{\overline{z}} + i\psi_{\overline{z}} \\ \phi_z - i\psi_z & \phi_{\overline{z}} - i\psi_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_z & F_{\overline{z}} \\ \overline{F_{\overline{z}}} & \overline{F_z} \end{vmatrix}$$

$$= | F_z |^۲ - | F_{\overline{z}} |^۲ \qquad (۱۱-۱۴)$$

و

$$traceJ = \phi_x + \psi_v = F_z + \overline{F_z} \qquad (۱۱-۱۵)$$

مثال. فرض می‌کنیم $f(z,\overline{z}) = \overline{z} - S(z)$، که در آن $S(z)$ تابع شوارتس کمان C است. در این حالت، $\det J = | s'(z) |^۲ - ۱$. بنابراین، در طول C، $\det J = ۰$.
اگر نگاشت حاصل از رابطهٔ $w = F(z,\overline{z})$ جهت نگهدار باشد، آنگاه $\det J > ۰$.
اگر این نگاشت جهت برگردان باشد آنگاه $\det J < ۰$. قابل توجه است که اگر w تابعی تحلیلی از z باشد، آنگاه $F_{\overline{z}} = ۰$. بنابراین $\det J = | F_z | > ۰$، و تبدیل جهت را حفظ می‌کند. اگر w ضد ـ تحلیلی باشد، آنگاه $F_z = ۰$ بنابراین $\det J = - | F_{\overline{z}} |^۲ < ۰$، و تبدیل جهت را برمی‌گرداند آنچه گفته شد، شیوهٔ خوبی برای یاد گرفتن این نکته است که فرمول (۱۱. ۱۴) به چه دردی می‌خورد.

فرض می‌کنیم $\det J > ۰$ در این صورت، $| F_{\overline{z}} | < | F_z |$. داریم

$$| D_a F(z,\overline{z}) | = | F_z e^{i\alpha} + F_{\overline{z}} e^{-i\alpha} | = | F_z + F_{\overline{z}} e^{-۲i\alpha} |$$

بنابراین، روشن است که

$$\max_\alpha \mid D_\alpha F \mid = \mid F_z \mid + \mid F_{\overline{z}} \mid$$
$$\min_\alpha \mid D_\alpha F \mid = \mid F_z \mid - \mid F_{\overline{z}} \mid > \circ$$

می‌توان نتیجه گرفت که در یک همسایگی نقطه‌ای که در آن $\det J > o$، نگاشت $w = F(z, \overline{z})$ دایره‌های بینهایت کوچک را به بیضیهای بینهایت کوچک می‌نگارد که نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک آنها عبارت است از

$$D = (\mid F_z \mid + \mid F_{\overline{z}} \mid) \div (|F_z| - \mid F_{\overline{z}} \mid) \geq ۱$$

قرار می‌دهیم $\mid F_{\overline{z}} \mid \div \mid F_z \mid = \rho$. در این صورت، $D = \dfrac{۱+\rho}{۱-\rho}$ و $\rho = (D-۱) \div (D+۱)$ ، $(\circ \leq \rho < ۱)$ اگر $D = ۱$ و $d = \circ$، نگاشت مذکور همدیس است. تابع مختلط مقدار $\rho(z) = \dfrac{F_{\overline{z}}}{F_z}$ را تجانس مختلط F می‌نامند، و معادله دیفرانسیل از نوع بلترامی وابسته به آن $F_{\overline{z}} = \rho F_z$، در نظریه نگاشتهای شبه همدیس ـ یعنی نگاشتهایی که برای آنها رابطهٔ $\rho < k < ۱$ در سراسر ناحیه برقرار است ـ بسیار مهم است.

رابطهٔ بین تجانس مختلط و تابع شوارتس، به قرار زیر است. فرض می‌کنیم تابع $F(z, \overline{z})$ در نقطهٔ z واقع در ناحیه R تعریف شده باشد و در طول کمان تحلیلی C با تابع شوارتس $S(z)$، داشته باشیم $F(z, \overline{z}) = \circ$. در این صورت، در طول C، $f(z, S(z)) = \circ$ ، و اگر f نسبت به z و $\overline{z}$ تحلیلی باشد، آنگاه متحد با o است. با مشتقگیری از این معادله به دست می‌آوریم. $F_z + F_z S'(z) = \circ$ و در نتیجه

$$S'(z) = -\frac{F_z(z, S(z))}{F_{\overline{z}}(z, S(z))}.$$

بنابراین روی C داریم.

$$S'(z) = -\frac{F_z(z, \overline{z})}{F_{\overline{z}}(z, \overline{z})} = -\frac{۱}{\rho(z)}.$$

از رابطه (۶.۳)، نتیجه می‌شود که شیب λ خم C توسط رابطهٔ $\lambda = i\dfrac{F_z + F_{\bar{z}}}{F_z - F_{\bar{z}}}$ داده می‌شود. چون در طول C داریم $|S'(z)| = 1$، پس $|\rho_{(z)}| = \rho = 1$. بنابراین، یک تابع ناصفر شبه همدیس نمی‌تواند روی یک کمان تحلیلی صفر شود

مشتقات مراتب بالاتر. با توجه به رابطهٔ (۳.۱۱)، در مورد لاپلاسین داریم

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \equiv \frac{1}{4}\Delta F. \quad (11-16)$$

عملگر دیفرانسیل بیضوی کامل

$$L(F) = F_{xx} + F_{yy} + aF_x + bF_y + cF \qquad (11-17)$$

را می‌توان به صورت

$$L(F) = F_{z\bar{z}} + \alpha F_z + \beta F_{\bar{z}} + \gamma F. \qquad (11-17')$$

نوشت که در آن

$$\alpha = \frac{1}{4}(a + ib), \quad \beta = \frac{1}{4}(a - ib), \quad \gamma = c/4.$$

با تکرار رابطهٔ (۱۶.۱۱)، عملگرهای لاپلاس مراتب بالاتر به صورت

$$\frac{\partial^{2n} F}{\partial z^n \partial \bar{z}^n} = \frac{1}{4^n}\Delta^n F. \qquad (11-18)$$

حاصل می‌شوند. جوابهای معادله $\Delta^n f = 0$ ، به ازای $n = 1$ توابع همساز، و به ازای $n = 2$ تابع دو همساز نامیده می‌شوند و غیره.

با استفاده از روابط (۱۰.۱۰) و (۱۱.۱۰)، انتگرالگیری صوری از $\Delta F = 4\dfrac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ به

$$F(z, \bar{z}) = f(z) + g(\bar{z}) \qquad (11-19)$$

f و g تحلیلی هستند) به عنوان جواب معادلهٔ لاپلاس منجر می‌شود. قابل توجه است که

$$Re(f(z)+g(\overline{z}))=\frac{۱}{۲}[f(z)+\bar{g}(z)+\overline{f}\overline{z})+g(\bar{z})]$$

در نتیجه، بنابر رابطهٔ (۱۶.۱۱) تابع $Re[f(z)+g(\overline{z})]$ همساز حقیقی است که شامل دو تابع دلخواه می‌باشد. بویژه، قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی در معادلهٔ لاپلاس $\Delta f=۰$ صدق کرده و همسازند.

انتگرالگیری از معادله $\Delta\Delta F=۱۶\frac{\partial^۴ F}{\partial z^۲\partial\overline{z}^۲}=۰$ تابع

$$F(z,\overline{z})=\overline{z}f(z)+g(z)+zh(\overline{z})+k(\overline{z}) \qquad (۲۰-۱۱)$$

را که در آن f و g، h و k تحلیلی‌اند، به عنوان جواب عمومی معادله دو همساز به دست می‌دهد.

ادامهٔ توابع همساز که در داده‌های مرزی غیر خطی تحلیلی صدق می‌کنند. فرض می‌کنیم $u(x,y)$ یک تابع همساز باشد و در طول خم تحلیلی C با تابع شوارتس $S(z)$، در رابطه

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\phi(x,y,u) \qquad (۲۱-۱۱)$$

صدق کند، که در آن ϕ تابعی تحلیلی از متغیرهای خود است. فرض می‌کنیم v مزدوج همساز u و لذا $f=u+iv$ تحلیلی باشد. داریم $u=\frac{۱}{۲}(f+\overline{f})$ و بنابر رابطهٔ (۹.۱۱)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial n}&=\frac{i}{۲}\left(\frac{f'(z)}{\sqrt{S'(z)}}-\overline{f'(z)}\sqrt{S'(z)}\right)\\&=\phi\left(\frac{z+\bar{z}}{۲},\frac{z-\bar{z}}{۲i},\frac{f+\overline{f}}{۲}\right).\end{aligned}$$

به‌طور نمادین، به ازای یک تابع تحلیلی Φ، در طول C می‌نویسیم

$$\overline{f'}(\overline{z})=\overline{f'(z)}=\Phi(z,\overline{z},f(z),\overline{f(z)},f'(z))$$

بنابراین

$$\overline{f'}(S(z)) = \Phi(z, S(z), f(z), \overline{f}(S(z)), f'(z)). \quad (۱۱ - ۲۲)$$

قرار می‌دهیم $g(z) = \overline{f}(S(z)) = \overline{f(\overline{S(z)})}$. فرض می‌کنیم $f(z)$ در یک طرف C تعریف شده باشد. $\overline{S(z)}$ در طرف دیگر C قرار دارد به‌طوری که رابطهٔ (۲۲.۱۱) یک معادله دیفرانسیل مرتبهٔ اول

$$g'(z) = \Phi(z, S(z), f(z), g(z), f'(z)) \qquad (۱۱ - ۲۳)$$

است. این معادله را باید با شرط اولیهٔ $g(z_\circ) = \overline{f(z_\circ)}$ به ازای $z_\circ \in C$ ای حل کنیم. در این صورت، رابطهٔ

$$f(z) = \overline{g}(S(z)) \qquad (۱۱ - ۲۴)$$

یک ادامهٔ تحلیلی تابع f را در طول C به دست می‌دهد.

کاربرد در محاسبات نور ـ کشسانی. برای ارائه کاربردی از مطالب پیش گفتهٔ این فصل، بررسی فیزیک و معادلهٔ کشسانی صفحه ضروری است. وقتی ورقهٔ B از مادهٔ کشسان شفافی تحت کشش قرار بگیرد، به صورت کریستال موقتی عمل می‌کند، و وقتی به آن توسط پولارویدهای متقاطع نگاه کنیم شکلی رنگی دیده می‌شود (به شکل ۱ . ۱۱ نگاه کنید). در تمام نقاطی که در آنها اختلاف کشش اصلی $p - q$ ثابت باشد، رنگ یکسان است؛ و این موجب به وجود آمدن یک خط همرنگی می‌شود. به‌علاوه، در هر جا که صفحهٔ قطبش با یکی از جهتهای کشش اصلی منطبق باشد، یک نقطهٔ سیاه حاصل می‌شود. بنابراین، با تغییردادن صفحه قطبش می‌توان دسته‌ای از خطوط ایزوکلنیک را به‌دست آورد؛ خطوطی که مکان هندسی نقاطی هستند که در آنها کششهای اصلی با جهت اولیه زاویهٔ ثابت α را تشکیل می‌دهند.

کششهای قائم در B را با σ_{xx}، σ_{yy} کشش مایل را با σ_{xy} نشان می‌دهیم. در این

صورت، داریم

$$\begin{cases} \sigma_{xx} - \sigma_{yy} = (p-q)\cos ۲\alpha \\ \\ ۲\sigma_{xy} = (p-q)\sin ۲\alpha \end{cases} \qquad \text{(الف)}$$

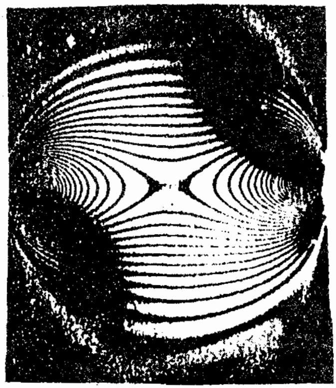
در نتیجه اگر قرار دهیم

$$w = \frac{۱}{۲}(\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + ۲i\sigma_{xy}) \qquad \text{(ب)}$$

آنگاه داریم

$$w = -\frac{۱}{۲}(p-q)e^{-۲i\alpha}. \qquad \text{(پ)}$$

عدد مختلط w، که انحراف کشش مزدوج نام دارد، و به طوری که گفته شد می‌توان آن را از آزمایشهای نور ـ کشسانی به‌دست آورد. کشش قائم متوسط σ را توسط



شکل۱۱-۱: لایه تحت کشش، خطهای همرنگ و ایزوکلنیک

$$\sigma = \frac{۱}{۲}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \qquad \text{(ت)}$$

تعریف می‌کنیم.

بنابر شرایط سازگاری، می‌دانیم که σ تابعی همساز است در حالت کشش صفحه، معادلات تعادل یک جسم کشسان عبارتند از

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \dfrac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\sigma_{xy} + \dfrac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} = 0 \end{cases} \qquad \text{(ث)}$$

با به کار بردن نمادهای (۳.۱۱) و با استفاده از روابط (ب) و (ت)، می‌توان این معادلات را به صورت

$$\frac{\partial\sigma}{\partial z} = \frac{\partial w}{\sigma\overline{z}} \qquad \text{(ج)}$$

نوشت. چون σ یک تابع حقیقی همساز روی B می‌باشد، می‌توان نوشت $\sigma = 2Re\Phi(z) = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)}$، که در آن Φ روی B تحلیلی است. بنابر رابطهٔ (۱۱.۱۰)، معادله (ج) به صورت

$$\Phi'(z) = \frac{\partial w}{\partial\overline{z}} \qquad \text{(چ)}$$

درمی‌آید با توجه به آنچه گفته شد، می‌توان با داشتن w، Φ را پیدا کرد. برای این کار، ابتدا از رابطهٔ (چ) نتیجه می‌گیریم

$$\Phi(z) = \Phi(z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial w}{\partial\overline{z}}dz. \qquad \text{(ح)}$$

بیان این جواب به صورت حقیقی، روش اختلاف شکست نامیده می‌شود. به کاربردن این جواب، مشتق گرفتن از داده‌های تجربی موجود در w را ایجاب می‌کند، و تحت‌الشعاع خطاهای معروف مشتقگیری عددی قرار دارد.

از دو طرف رابطهٔ (ح) نسبت به $\overline{z}$ انتگرال می‌گیریم نتیجه می‌شود (به رابطهٔ (۱۱.۱۰) نگاه کنید) که

$$w = \overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z) \qquad \text{(خ)}$$

که در آن Ψ یک تابع تحلیلی دلخواه روی B است. اگر C یک خم بسته در B با تابع شوارتس $S(z)$ باشد، آنگاه داریم.

$$w(z) = S(z)\Phi'(z) + \Psi(z) \quad , \quad (z \in C) \qquad \text{(د)}$$

بنابراین

$$\int_C w(z)dz = \int_C S(z)\Phi'(z)dz \qquad \text{(ذ)}$$

قرار می‌دهیم $C :| z - z_\circ |= r$ ، $S(z) = \dfrac{r^{۲}}{z - z_\circ} + \overline{z}_\circ$ در این صورت بنابر رابطهٔ (ذ) و قضیه کوشی داریم

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_C w(z)dz = \frac{r^{۲}}{۲\pi i}\int_C \frac{\Phi'(z)dz}{z - z_\circ} = r^{۲}\Phi'(z_\circ) \qquad \text{(ر)}$$

بنابراین، $\Phi(z)$، با انتگرال‌گیری از w حول دایره‌ها قابل محاسبه است و $\Phi = \Phi_\circ + \int_{z_\circ}^{z}\Phi'(z)dz$. این روش را روش تک دایره می‌نامند. رابطهٔ (د) را در $\dfrac{z - z_\circ}{z - t}$ که در آن t در داخل C انتخاب می‌شود ضرب می‌کنیم. به دست می‌آوریم

$$\frac{(z - z_\circ)}{z - t}w(z) = \frac{r^{۲} + \overline{z}_\circ(z - z_\circ)}{z - t}\Phi'(z) + \frac{z - z_\circ}{z - t}\Psi(z) \qquad \text{(ز)}$$

با انتگرالگیری از این برابری حول C، به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}&\frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{(z - z_\circ)w(z)}{z - t}dz \\ &\quad = r^{۲}\Phi'(t) + \overline{z}_\circ(t - z_\circ)\Phi'(t) + (t - z_\circ)\Psi(t). \end{aligned} \qquad \text{(ژ)}$$

اکنون دایره‌های متحدالمرکز $C_۱ :| z - z_\circ |= r_۱$ و $C_۲ :| z - z_\circ |= r_۲$ و $(r_۱ < r_۲)$ را در نظر گرفته و می‌نویسیم

$$W_j(t) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{cj} \frac{(z - z_\circ)w(z)}{z - t}dz \quad , \quad (j = ۱, ۲) \qquad \text{(س)}$$

در این صورت، با دو بار استفاده از رابطهٔ (ژ) به ازای $C = C_۱$ و $C = C_۲$، Ψ حذف می‌شود.

$$\Phi'(t) = \frac{W_۲(t) - W_۱(t)}{r_۲^۲ - r_۱^۲} \qquad \text{(ش)}$$

سرانجام اگر قرار دهیم

$$\begin{aligned} \Omega_j(z) &= \int_{z_۰}^{z} W_j(t)dt \\ &= \frac{۱}{۲\pi i}\int_{c_j} (\zeta - z_۰)w(\xi)\log\frac{\zeta - z_۰}{\zeta - z}d\zeta \end{aligned} \qquad \text{(ص)}$$

آنگاه روی $C_۱$ رابطه

$$\Phi(z) = \Phi(z_۰) + \frac{\Omega_۲(z) - \Omega_۱(z)}{r_۲^۲ - r_۱^۲} \qquad \text{(ض)}$$

به ازای هر z برقرار است.

این فرمول، به روش دو دایره موسوم است و بسیار به صرفه‌تر از به‌کار بردن روش تک دایره می‌باشد. در این روش، برای محاسبهٔ Φ مقادیر یکسان w روی $C_۱$ و $C_۲$ به‌ازای هر z متعلق به $C_۱$ کفایت می‌کنند.

مسأله کوشی در مورد معادلات بیضوی. فرض می‌کنیم C یک کمان تحلیلی بوده و $f(z)$ و $g(z)$ دو تابع تک مقداری و تحلیلی در ناحیه‌ای شامل C باشند. مسأله کوشی ، پیدا کردن جوابی چون $f(x,y)$ برای معادله $L(F) = ۰$ است که دارای مشتقات مرتبهٔ دوم پیوسته در یک همسایگی از C بوده و در شرایط

$$\begin{aligned} F(z,y) &= f(z), \\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial n} &= g(z) \\ z &= x + iy \in C \end{aligned} \qquad (۱۱ - ۲۵)$$

صدق کند ـ در اینجا، $L(F)$ توسط رابطهٔ (۱۱. ۱۷) تعریف شده است. معمولاً، توابع $f(z)$ و $g(z)$ داده‌های کوشی نامیده می‌شوند. ما در رابطه با ادامهٔ تحلیلی جوابهای

مسأله کوشی بحث خواهیم کرد. برای این کار، ابتدا باید پیشنیازهایی را برآورده کنیم. فرض می‌کنیم $\mathcal{R}$ یک ناحیه در صفحه $z = x + iy$ باشد. در سرتاسر ادامهٔ این بخش، فرض خواهیم کرد که $\mathcal{R}$ همبند ساده است. منعکس $\mathcal{R}$ را نسبت به محور x با $\overline{\mathcal{R}}$، (به رابطهٔ (۲.۶) نگاه کنید)، و در فضای دو متغیرهٔ مختلطِ z و z^*، ناحیه‌ای متشکل از نقاط $z \in \mathcal{R}, z^* \in \overline{\mathcal{R}}$ را با $\mathcal{R} \times \overline{\mathcal{R}}$ نشان می‌دهیم.

فرض می‌کنیم $f(x,y)$ تابعی تحلیلی از x و y به ازای $(x,y) \in \mathcal{R}$ باشد. در هر نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ) \in \mathcal{R}$، $f(x,y)$ دارای بسط سری توانی به صورت

$$f(x,y) = \sum_{m,n=\circ}^{\infty} a_{m,n}(x - x_\circ)^m (y - y_\circ)^n$$

است، که به ازای ρای بزرگتر از $\circ$ روی $| x - x_\circ | \leq \rho$ و $| y - y_\circ | \leq \rho$ همگرایی مطلق و همگرای یکنواخت است اگر x و y را با دو متغیر مختلط $x' + ix''$ و $y' + iy''$ جایگزین کنیم ـ که در آنها x'، x'' و y' و y'' حقیقی هستند ـ آنگاه سری

$$F(x' + ix'', y' + iy'') = \sum_{m,n=\circ}^{\infty} a_{m,n}(x' + ix'' - x_\circ)^m (y' + iy'' - y_\circ)^n$$

روی $| x' + ix'' - x_\circ | \leq \rho$ و $| y' + iy'' - y_\circ | \leq \rho$ همگرای مطلق و یکنواخت است و یک ادامهٔ تحلیلی را از تابع $f(x,y)$ در این قسمت از فضای دو متغیر مختلط تعریف می‌کند. با استدلالی آشنا، مشاهده می‌کنیم که $f(x,y)$ را می‌توان به داخل ناحیه‌ای چون Q از فضای دو مختلط به طور تحلیلی ادامه داد. ناحیهٔ Q، شامل $\mathcal{R}$ می‌باشد و این ادامهٔ تحلیلی به ازای مقادیر حقیقی x و y با $f(x,y)$ مساوی است. اکنون تغییر متغیرهای

$$\begin{aligned} z &= x + iy \qquad (۱۱ - ۲۶) \\ &= (x' + ix'') + i(y' + iy''), \\ z^* &= x - iy \\ &= (x' + ix'') - i(y' + iy'') \end{aligned}$$

را وارد می‌کنیم. تبدیل وارون این تبدیل، عبارت است از

$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲}(z + z^*) \\ y = \frac{۱}{۲i}(z - z^*). \end{cases} \qquad (۲۷ - ۱۱)$$

(z^*, z را نباید مزدوج یکدیگر بنامیم. این دو، تنها در صورتی که y, x هر دو حقیقی باشند ($x'' = ۰$ و $y'' = ۰$) مزدوج خواهند بود. در مورد تابع تحلیلی حقیقی $F(x, y)$، قرار می‌دهیم

$$F(z, z^*) = f(x, y) = f(x' + ix'', y' + iy'') \qquad (۲۸ - ۱۱)$$

$$= f\left(\frac{z + z^*}{۲}, \frac{z - z^*}{۲i}\right).$$

در نقطه $(x_۰, y_۰)$، بسط موضعی

$$f(z, z^*) = \sum_{m,n=۰}^{\infty} a_{m,n}\left(\frac{۱}{۲}(z + z^*) - x_۰\right)^m \left(\frac{۱}{۲i}(z - z^*) - y_۰\right)^n$$

را داریم. اگر ناحیهٔ $\mathcal{G}: | z - x_۰ - iy_۰ | < \frac{\rho}{۲}$ را با $\bar{\mathcal{G}}$ نشان دهیم، آنگاه $\overline{\mathcal{G}}$ عبارت خواهد بود از $\overline{\mathcal{G}}: | z - x_۰ + iy_۰ | < \frac{\rho}{۲}$ بنابراین اگر $(z, z^*)\mathcal{G} \times \overline{\mathcal{G}}$، روشن است که $| \frac{۱}{۲}(z + z^*) - x_۰ | < \rho$ و $| \frac{۱}{۲i}(z - z^*) - y_۰ | < \rho$ در نتیجه، هر نقطهٔ $(x_۰ + iy_۰) \in \mathcal{R}$ دارای یک همسایگی‌ای چون $\mathcal{G}$ است، به طوری که $F(z, z^*)$ در $\mathcal{G} \times \overline{\mathcal{G}}$ تحلیلی است.

می‌گوئیم تابع $f(x, y)$ به ردهٔ $V(\mathcal{G})$ تعلق دارد، اگر تابع دو متغیرهٔ مختلط $f(\frac{z + z^*}{۲}, \frac{z - z^*}{۲i})$ در ناحیه $\mathcal{G} \times \overline{\mathcal{G}}$ تحلیلی باشد.

مثال. فرض می‌کنیم $u(x, y)$ در ناحیهٔ همبند سادهٔ $\mathcal{G}$ حقیقی همساز باشد. می‌دانیم

که، تابع یک متغیره مختلط $f(z)$ که روی $\mathcal{G}$ تحلیلی است وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned} u(x,y) = R_e f(z) &= \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(z)}) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f}(\overline{z})) \\ &= \frac{1}{2}(f(x+iy) + \overline{f}(x-iy)). \end{aligned}$$

اکنون، $\overline{f}(z^*)$ به ازای $z^* \in \overline{\mathcal{G}}$ تحلیلی است. بنابراین، تابع $u(z,z^*) = u(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}) = f(z) + \overline{f}(z^*)$ روی $\mathcal{G} \times \overline{\mathcal{G}}$ تحلیلی است، و در نتیجه $u(x,y)$ به $V(\mathcal{G})$ تعلق دارد.

بنابر قضیه‌ای از وکوآ که آن را بدون اثبات می‌آوریم، این پدیدهٔ قابلیت تمدید تحلیلی توابع همساز در مورد جوابهای معادلات بیضوی کلی نیز صادق است .

قضیه. فرض می‌کنیم $\mathcal{G}$همبند ساده باشد ضرایب $L(u) = u_{xx} + u_{yy} + au_x + bu_y + cu$ به $V(\mathcal{G})$ تعلق داشته باشد. در این صورت، هر جواب u از $L(u) = 0$ که مشتقات مرتبهٔ دوم پیوسته داشته باشد، متعلق به $V(\mathcal{G})$ است.

بنابراین، با شرایط قوی موجود در این قضیه، جوابها، از رفتار ضرایب پیروی می‌کنند.

$\mathcal{G}$ را یک ناحیهٔ بنیادی L می‌نامیم، اگر همبند ساده بوده و ضرایب a، b، c متعلق به $V(\mathcal{G})$ باشند. در مورد مسأله کوشی، قضیه وجودی زیر را داریم.

قضیه فرض می‌کنیم $\mathcal{G}$ یک ناحیهٔ بنیادی برای L بوده و به‌طور همدیس نسبت به کمان تحلیلی C متقارن باشد (به فصل ۸ را رجوع کنید). همچنین فرض می‌کنیم داده‌های کوشی $g(z), f(z)$ که روی کمان C داده شده‌اند در سراسر $\mathcal{G}$ تحلیلی باشند.

در این صورت، جواب مسأله کوشی وجود دارد و روی $\mathcal{G}$ دوبار مشتقپذیر با مشتقات پیوسته است.

این قضیه، دارای عکسی است که اکنون آن را بیان می‌کنیم.

قضیه فرض می‌کنیم $\mathcal{G}$ یک ناحیهٔ بنیادی برای L بوده، و نسبت به کمان تحلیلی

C به‌طور همدیس متقارن باشد. همچنین، فرض می‌کنیم u جواب معادله $L(u) = 0$ باشد که روی $\mathcal{G}$ دارای مشتقات مرتبهٔ دوم پیوسته است. در این صورت، دو تابع

$$f(z) = u, g(z) = \frac{\partial u}{\partial n} \quad (z = x + iy \in C)$$

روی C تحلیلی بوده و به‌طور تحلیلی می‌توانند به داخل $\mathcal{G}$ ادامه یابند.

اثبات. بنابر قضیهٔ وکوآ، $u(x,y)$ یک ادامهٔ تحلیلی چون $U(z, z^*) = u(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i})$ دارد که در $\mathcal{G} \times \overline{\mathcal{G}}$ تحلیلی است اکنون، فرض می‌کنیم که $S(z)$ تابع شوارتس C باشد. تابع $U(s, S(z))$ را در نظر می‌گیریم. اگر $z \in \mathcal{G}$، آنگاه $S(z) \in \overline{\mathcal{G}}$ و در نتیجه U روی $\mathcal{G}$ تحلیلی است. از طرف دیگر، به ازای $z \in C$ داریم $z = \overline{S(z)} = \overline{S}(\overline{z})$ بنابراین، $U(z, S(z))$ به $U(z, \overline{z}) = y(x,y)$ تبدیل می‌شود؛ پس $U(z, S(z))$ ادامهٔ مورد نظر از f است.

اکنون، تابع

$$i\left\{\frac{U_1(z, S(z))}{\sqrt{S'(z)}} - U_2(z, S(z))\sqrt{S'(z)}\right\}$$
$$U_1 = U_z, \quad U_2 = U_{z^*}$$

را در نظر می‌گیریم. این تابع روی $\mathcal{G}$ تحلیلی است؛ زیرا رابطهٔ $S'(z) \neq 0$ روی $\mathcal{G}$ برقرار است. روی C، داریم $S(z) = \overline{z}$ بنابراین وقتی $(x,y) \in C$، تابع داخل کروشه به $\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}$ تبدیل می‌شود.

انتگرال. فرض می‌کنیم B یک ناحیه کراندار در صفحه x و y، و ∂B مرز آن باشد. در این صورت، قضیه گرین دو متغیر بیان می‌کند که

$$\int_{\partial B} Pdy - Qdx = \int_B \int (P_x + Q_y)dxdy \quad (۲۹ - ۱۱)$$

شرطهای کافی بسیار کلی در مورد P، Q و B برای درست بودن این فرمول را می‌توان در منابعی چون بوخنر [B5]، لهتو و ویرتانن [L1، ص ۱۵۶] پیدا کرد.

$$\frac{1}{2i} \int_{\partial B} \overline{f(z)} g(z)dz = \frac{1}{2i} \int_{\partial B} \overline{f} g(dx + idy), \quad (۳۰ - ۱۱)$$

اکنون، انتگرال را که در آن f و g (برای سادگی) توابع تحلیلی عادی روی $B+\partial B$ هستند، در نظر می‌گیریم. می‌نویسیم

$$P = \frac{۱}{۲}\overline{f}g, \qquad Q = \frac{۱}{۲}\overline{f}g$$

در این صورت، بنابر رابطهٔ (۴.۱۱) داریم

$$P_x = \frac{۱}{۲}(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}})\overline{f}y$$

و

$$Q_y = -\frac{۱}{۲}(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}})\overline{f}g$$

، و بنابراین $P_x + Q_y = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\overline{f}g) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\overline{f}(\overline{z})g(z)) = \overline{f'(z)}g(z)$. بنابر رابطهٔ (۲۹ .۱۱)

$$\int\int_B \overline{f'(z)}g(z)dxdy = \frac{۱}{۲i}\int_{\partial B}\overline{f(z)}g(z)dz \qquad (۳۱-۱۱)$$

$$= \frac{۱}{۲i}\int_{\partial B}\overline{f}(\overline{z})g(z)dz\cdot$$

این مطلب قضیهٔ گرین را در فرم تحلیلی ثابت می‌کند. اکنون، فرض می‌کنیم ∂B یک خم تحلیلی با تابع شوارتس $S(z)$ باشد. در این صورت، روی ∂B داریم $\overline{z} = S(z)$، و بنابراین

$$\int\int_B \overline{f'(z)}g(z)dxdy = \frac{۱}{۲i}\int_{\partial B}\overline{f}(S(z))g(z)dz \qquad (۳۲-۱۱)$$

در حالت خاص، با انتخاب $f(z) = z$ داریم

$$\int_B\int g(z)dxdy = \frac{۱}{۲i}\int_{\partial B}S(z)g(z)dz \qquad (۳۳-۱۱)$$

قضیه. فرض می‌کنیم f روی $B+\partial B$ و $\overline{f}(S(z))(=\overline{f(\overline{S(z)})})$ روی B عادی باشد. در این صورت، f برابر است با یک تابع ثابت.

اثبات: (قابل توجه است که به ازای مقادیر z واقع در داخل B و نزدیک به ∂B، $\overline{S(z)}$ در خارج و نزدیک به ∂B واقع است بنابراین، پیشاپیش و بدون هیچ فرض اضافی می‌دانیم که $f'(S(z))$ عادی است.) بنابر رابطهٔ (۱۱. ۳۲) و قضیهٔ کوشی، داریم

$$\int_B\int |f'(z)|^۲\, dxdy = \frac{۱}{۲i}\int_{\partial B} \overline{f}(S(z))f'(z)f'(z)dz = ۰.$$

در نتیجه $f'(z) = ۰$ و حکم ثابت می‌شود.

با انتخاب $z \equiv f$، مشاهده می‌کنیم که $S(z)$ باید در داخل B یک نقطهٔ تکین داشته باشد، و به‌علاوه نقاط تکین S را نمی توان با ترکیب S با یک تابع عادی از بین برد.

ماهیّت نقطهٔ تکین $S(z)$ در داخل B، بر نوع کاربردی که می‌توان ارائه کرد فوق‌العاده مؤثر است. در اینجا، ما در مورد سه نوع نقطهٔ تکین بحث خواهیم کرد: (الف) تابعی چون S برای ناحیهٔ B با مرز قطعه‌ای تحلیلی ؛ (ب) تابع S که در داخل B مرومرفیک است؛ (پ) تابع S که با یک برش ناحیه‌ای در داخل B تک مقداری شده است.

(الف) مطلب را با ناحیه‌ای که مرز آن و در نتیجه تابع شوارتس وابسته به آن قطعه‌ای تحلیلی است آغاز می‌کنیم. مثلث t را که رأسهای آن در جهت خلاف ساعت $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ هستند، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $A = area(T)$. اضلاع T را با $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ نشان می‌دهیم بنابر رابطهٔ (۳. ۱۰)، در طول $T_۱$ داریم

$$\overline{z} = S(z) = S_۱(z) = A_۱ z + B_۱,$$
$$A_۱ = \frac{\overline{z_۱} - \overline{z_۲}}{z_۱ - z_۲}, B_۱ = \frac{z_۱\overline{z_۲} - z_۲\overline{z_۱}}{z_۱ - z_۲},$$

در مورد سایر اضلاع نیز روابط مشابهی را به‌دست می‌آوریم. اکنون، داریم

$$\int_T\int f''(z)dxdy = \frac{i}{۲}\int_{T_۱+T_۲+T_۳} f'(z)d\overline{z}$$
$$= \frac{i}{۲}\int_{z_۱}^{z_۲} + \int_{z_۲}^{z_۳} + \int_{z_۳}^{z_۱} f'(z)d\overline{z}$$

اکنون $\int_{z_۱}^{z_۲} f'(z)d\overline{z} = A_۱\int_{z_۱}^{z_۲} f'(z)dz = A_۱(f(z_۲) - f((z_۱))$ ، در مورد

انتگرالهای دیگر نیز روابط مشابهی وجود دارند. بنابراین

$$\int\int_T f''(z)dxdy = \frac{i}{۲}\{(A_۳ - A_۱)f(z_۱) + (A_۱ - A_۲)f(z_۲) + (A_۲ - A_۳)f(z_۳)\}$$

اکنون داریم

$$A_۳ - A_۱ = \frac{\bar{z}_۳ - \bar{z}_۱}{z_۳ - z_۱} - \frac{\bar{z}_۱ - \bar{z}_۲}{z_۱ - z_۲} = \frac{۱}{(z_۱ - z_۲)(z_۱ - z_۳)}\begin{vmatrix} z_۱ & \bar{z}_۱ & ۱ \\ z_۲ & \bar{z}_۲ & ۱ \\ z_۳ & \bar{z}_۳ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-۴iA}{(z_۱ - z_۲)(z_۱ - z_۳)} \quad \text{(بنابر رابطهٔ (۳. ۲۱))}$$

در مورد $A_۱ - A_۲$ و $A_۲ - A_۳$ نیز روابط مشابهی برقرارند. بنابراین

$$\int_T\int f''dxdy = ۲A\left\{\frac{f(z_۱)}{(z_۱ - z_۲)(z_۱ - z_۳)} + \frac{f(z_۲)}{(z_۲ - z_۱)(z_۲ - z_۳)} + \frac{f(z_۳)}{(z_۳ - z_۱)(z_۳ - z_۲)}\right\}. \quad (۱۴\text{-}۱۱)$$

این رابطه را می‌توان به صورتهای مختلف بیان کرد

$$\frac{۱}{۲A}\int_T\int f''(z)dxdy \qquad (۳۵ - ۱۱)$$

$$= f(z_۱, z_۲, z_۳)$$

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ z_۱ & z_۲ & z_۳ \\ f(z_۱) & f(z_۲) & f(z_۳) \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ z_۱ & z_۲ & z_۳ \\ z_۱^۲ & z_۲^۲ & z_۳^۲ \end{vmatrix}$$

دومین تفاضل تقسیم شدهٔ f در $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ =

$$R(f;z_۱)=\frac{(z_۱-z_۲)(z_۱-z_۳)}{۲A}\int_T\int f''(z)dxdy \qquad (۱۱-۳۶)$$

که در آن R باقیمانده f در نقطهٔ $z_۱$ نسبت به درونیابی خطی $f(z)$ در $z_۲$ و $z_۳$ است (در مورد ارتباط بین تفاضلهای تقسیم شده و باقیمانده‌های درونیابی، به صفحهٔ ۶۴ از کتاب دیویس $[D_۱]$ مراجعه کنید.)

فرض می‌کنیم $f(z_۱)=f(z_۲)=۰$. در این صورت، رابطهٔ (۱۱. ۳۴) به

$$f(z_۳)=\frac{(z_۳-z_۱)(z_۳-z_۲)}{۲A}\int_T\int f''(z)dxdy$$
$$(۱۱-۳۷)$$
$$=\frac{(z_۳-z_۱)(z_۳-z_۲)}{۲}\times \text{میانگین } f'' \text{ روی } T$$

تبدیل می‌شود. با گرفتن قدرمطلق، نامساوی زیر به‌دست می‌آید:

فرض می‌کنیم $f(z)$ در ناحیهٔ محدب $\mathcal{R}$ شامل نقاط $z_۱$ و $z_۲$ تحلیلی بوده و در سرتاسر $\mathcal{R}$ رابطه‌های $f(z_۱)=f(z_۲)=۰$ و $|f'(z)|\le ۱$ برقرار باشند، در این صورت در ناحیهٔ $\mathcal{R}$ خواهیم داشت.

$$|f(z)|\le\frac{۱}{۲}|z-z_۱||z-z_۲| \qquad (۱۱-۳۸)$$

مثال. فرض می‌کنیم T مثلث متساوی‌الاضلاعی با رئوس ۱، w، $w^۲$ باشد که در آن $w=exp(\frac{۲\pi i}{۳})$. در این صورت

$$\int_T\int f''dxdy=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\{f(۱)+wf(w)+w^۲f(w^۲)\}.$$

اتحادهای دیگری را نیز می‌توان به‌دست آورد. فرض می‌کنیم P یک چند ضلعی با رئوس $z_۱$، $z_۲$، $\cdots$ و z_n باشد. P را به چند مثلث تجزیه کرده و رابطه (۱۱. ۳۴) را در مورد

هر مثلث به کار می‌بریم. در این صورت، می‌توان اعداد ثابت $a_۱$، $\cdots$ و a_n را چنان پیدا کرد که تنها به P بستگی دارد و رابطه

$$\int_P \int f'' dxdy = \sum_{j=۱}^{n} a_j f(z_j) \qquad (۱۱ - ۳۹)$$

به ازای هر تابع تحلیلی عادی در داخل p که روی بستار آن پیوسته است، برقرار باشد.

اکنون، فرض می‌کنیم k عددی صحیح و نامنفی و $P(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه نابیشتر از k باشد. قرار می‌دهیم

$$g(z) = \sum_{\alpha=۰}^{k} (-۱)^{k-\alpha}(k-\alpha+۱)p^{(k-\alpha)}(z) f^{(\alpha)}(z)$$

با مشتقگیری از این برابری، به آسانی می‌توان نشان داد که

$$g''(z) = p(z) f^{(k+۲)}(z).$$

در نتیجه بنابر رابطهٔ (۱۱. ۳۹) داریم

$$\begin{aligned}\int_P \int & p(z) f^{(k+۲)}(z) dxdy \\ &= \sum_{j=۱}^{n} a_j, g(z_j) \\ &= \sum_{j=۱}^{n} a_j \sum_{a=۰}^{k} (-۱)^{k-\alpha}(k-\alpha+۱)p^{(k-\alpha)}(z_j) f^{(a)}(z_j).\end{aligned}$$

در این رابطه به جای $p(z)$، $(z-t)^k$ قرار داده و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\int_P \int & (z-t)^k f^{(k+۲)}(z) dxdy \\ &= \sum_{j=۱}^{n} a_j \sum_{a=۰}^{k} (-۱)^{k-\alpha}(k-\alpha+۱) f^{(\alpha)}(z_j) \frac{k!}{\alpha!}(z_j-t)^a.\end{aligned}$$

رابطهٔ فوق، فرمول انتگرال دوگانه از نوع داربو است.

(ب) اکنون ناحیه Q را که تابع شوارتس آن در Q مرومرفیک است در نظر می‌گیریم. Q را ناحیه دو دایره‌ای درجه چهار (۱۶.۵) یعنی $r^{۲} \leq a^{۲} + ۴\epsilon^{۲}\cos^{۲}\theta$ در نظر می‌گیریم که تابع شوارتس آن عبارت است از

$$S(z) = \frac{z(a^z + ۲\epsilon^{۲}) + z\sqrt{a^{۴} + ۴a^{۲}\epsilon^{۲} + ۴\epsilon^{۲}z^{۲}}}{z(z^{۲} - \epsilon^{۲})}$$

وقتی $z = \pm i\sqrt{a^{۲} + \frac{a^{۴}}{۴\epsilon^{۲}}}$، مقدار زیر رادیکال صفر می‌شود. چون $\frac{a^{۴}}{۴\epsilon^{۲}} > ۰$ و به ازای $\theta = \frac{\pi}{۲}$ و $\theta = \frac{۳\pi}{۲}$ داریم $r = a$، این نقاط خارج از خم Q قرار دارند. بنابراین، در داخل Q، $S(z)$ را می‌توان یک تابع تک مقداری تحلیلی با قطبهای ساده $z = \pm\epsilon$ تعریف کرد. ملاحظه می‌کنیم که $\int\int_Q f(z)dxdy = \frac{\pi}{۲\pi i}\int_{\partial Q} S(z)f(z)dz$. چون تنها نقاط تکین $S(z)$ قطبهای ساده $z = \pm\epsilon$ هستند، لازم است مانده‌ها را در این نقاط محاسبه کنیم. به‌ازای $z = \epsilon$ داریم

$$(z-\epsilon)S(z) = \frac{\epsilon(a^{۲} + ۲\epsilon^{۲}) + \epsilon\sqrt{a^{۴} + ۴a^{۲}\epsilon^{۲} + ۴\epsilon^{۴}}}{۲(۲\epsilon)}$$
$$= \frac{\epsilon a^{۲} + ۲\epsilon^{۳} + \epsilon a^{۲} + ۲\epsilon^{۲}}{۴\epsilon} = \frac{a^{۲}}{۲} + \epsilon^{۲}$$

نتیجه مشابهی نیز به ازای $z = -\epsilon$ حاصل می‌شود. بنابراین

$$\int_Q\int f(z)dxdy = \pi\left(\frac{a^{۲}}{۲} + \epsilon^{۲}\right)(f(\epsilon) + f(-\epsilon)) \quad (۴۰ - ۱۱)$$

انتخاب $f(z) \equiv z^{۲m}$ و محاسبه انتگرال طرف چپ در مختصات قطبی، به اتحاد انتگرالی

$$\int_{۰}^{۲\pi} e^{i۲m\theta}(a^{۲} + ۴\epsilon^{۲}\cos^{۲}\theta)^{m+۱}d\theta$$
$$(۴۱ - ۱۱)$$
$$= (۲m+۲)\pi(a^{۲} + ۲\epsilon^{۲})\epsilon^{۲m}$$

منجر می‌شود. به‌ازای $m = \circ$، به‌دست می‌آوریم.

$$\int_Q\int dxdy = Q\text{مساحت}=\pi(a^{\text{۲}} + \epsilon^{\text{۲}}) \qquad (\text{۱۱} - \text{۴۲})$$

به‌طور کلی، بنابر رابطهٔ (۳۲.۱۱) به ازای $n \geq \circ$ داریم

$$\int_Q\int \overline{z}^n f(z)dxdy = \frac{\text{۱}}{\text{۲}i(n+\text{۱})}\int_{\partial Q} S^{n+\text{۱}}(z)f(z)dz \qquad (\text{۱۱} - \text{۴۳})$$

برای سادگی، می‌نویسیم

$$N(z) = z/\text{۲}((a^{\text{۲}} + \text{۲}\epsilon^{\text{۲}}) + \sqrt{a^{\text{۴}} + \text{۴}a^{\text{۲}}\epsilon^{\text{۲}} + \text{۴}\epsilon^{\text{۲}}z^{\text{۲}}) \qquad (\text{۱۱} - \text{۴۴})$$

بنابراین $S^{n+\text{۱}}(z) = [N^{n+\text{۱}}(z)]/[(z-\epsilon)^{n+\text{۱}}(z+\epsilon)^{n+\text{۱}}]$، و این تابع در داخل ∂Qـ بجز در نقاط $z = \pm\epsilon$ که قطبهای مرتبهٔ $n+\text{۱}$-ام آن هستند ـ عادی است. در نتیجه

$$\int_Q\int \overline{z}^n f(z)dxdy \qquad (\text{۱۱} - \text{۴۵})$$
$$= \frac{\pi}{(n+\text{۱})!}\frac{n!}{\text{۲}\pi i}\int_{\partial Q}\frac{N^{n+\text{۱}}(z)}{(z-\epsilon)^{n+\text{۱}}(z+\epsilon)^{n+\text{۱}}}f(z)dz$$
$$= \frac{\pi}{(n+\text{۱})!}\left\{\frac{d^n}{dz^n}\frac{N^{n+\text{۱}}(z)f(z)}{(z+\epsilon)^{n+\text{۱}}}\Big|_{z=\epsilon}\right.$$
$$\left.+\frac{d^n}{dz^n}\frac{N^{n+\text{۱}}(z)f(z)}{(z-\epsilon)^{n+\text{۱}}}\Big|_{z=-\epsilon}\right\}$$
$$= \frac{\pi}{(n+\text{۱})!}[a_{n\circ}f(\epsilon) + a_{n\text{۱}}f'(\epsilon) + \cdots + a_{nn}f^{(n)}(\epsilon)$$
$$+ b_{n\circ}f(-\epsilon) + b_{n\text{۱}}f'(-\epsilon) + \cdots + b_{nn}f^{(n)}(-\epsilon)]$$

که در آن اعداد ثابت a_{nk} و b_{nk} مستقل از f بوده و از بسط عبارت واقع در داخل ابرو به دست می‌آیند.

(پ) سرانجام حالتی را بررسی می‌کنیم که در آن تابع شوارتس در یک ناحیه برش داده شده عادی است. ناحیه بیضوی ε

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}\leq ۱ \qquad (a>b)$$

$$S(z)=\frac{a^{۲}+b^{۲}}{a^{۲}-b^{۲}}z+\frac{۲ab}{b^{۲}-a^{۲}}\sqrt{z^{۲}+b^{۲}-a^{۲}}$$

را در نظر می‌گیریم. جملهٔ اول S تابعی عادی در ε است بنابراین

$$\int_{\varepsilon}\int f(x)dxdy=\frac{ab}{i(b^{۲}-a^{۲})}\int_{\partial\varepsilon}\sqrt{z^{۲}+b^{۲}-a^{۲}}f(z)dz \tag{۴۶ − ۱۱}$$

$$=\frac{ab}{b^{۲}-a^{۲}}\int_{\partial\varepsilon}\sqrt{a^{۲}-b^{۲}-z^{۲}}f(z)dz$$

تابع $\sqrt{a^{۲}-b^{۲}-z^{۲}}$، در صفحهٔ برش داده شده در طول $-\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}\leq x\leq \sqrt{a^{۲}-b^{۲}}$ تک مقداری است. در نتیجه، می‌توانیم خم $\partial\xi$ را فرو بکشیم، به‌طوری که برش را دوبار_لبهٔ پائینی را از $-\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}$ تا $\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}$ و لبهٔ بالایی را در جهت عکس_طی کند. در مورد اول $dz=dx$ و رادیکال مساوی است با $-\sqrt{a^{۲}-b^{۲}-x^{۲}}$؛ در برگشت $dz=-dx$ و رادیکال برابر است با $\sqrt{a^{۲}-b^{۲}-x^{۲}}$. بنابراین

$$\int_{\varepsilon}\int f(z)dxdy \tag{۴۷ − ۱۱}$$

$$=\frac{۲ab}{a^{۲}-b^{۲}}\int_{-\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}}^{\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}}\sqrt{a^{۲}-b^{۲}-x^{۲}}f(x)dx$$

معمولاً، بهتر است کانونهای ناحیهٔ ε را در ± ۱ قرار دهیم. می‌نویسم $a=\frac{۱}{۲}(\rho+\rho^{-۱})$، $b=\frac{۱}{۲}(\rho-\rho^{-۱})$، و بیضی با کانونهای ± ۱ و با مجموع دو نیم قطر مساوی با $a+b=\rho$ را با $\mathcal{E}_\rho$ نشان می‌دهیم. در این صورت، $۲ab=\frac{۱}{۲}(\rho^{۲}-\rho^{-۲})$ و

$$\int_{\mathcal{E}_\rho}\int f(z)dxdy=\frac{۱}{۲}(\rho^{۲}-\rho^{-۲})\int_{-۱}^{+۱}\sqrt{۱-x^{۲}}f(x)dx \tag{۴۸ − ۱۱}$$

اتحاد (۴۸.۱۱)، با تعامد چند جمله‌ای‌های جبیچف نوع دوم ـ $U_n(z)$ ـ روی بیضیهای $\mathcal{E}_\rho$ ارتباط دارد.

۱۲

کاربرد تابع شوارتس در مکانیك سیالات مقدماتی

نظریهٔ توابع تحلیلی، معمولاً در حل مسائل مسطحهٔ مربوط به جریان شاره، شارش گرمایی، الکترو استاتیک و کشسانی به کار برده می‌شود. در اینجا، به عنوان نمونه جریان شاره را انتخاب کرده و رابطه آن را با تابع شوارتس به‌دست می‌آوریم.

فرض می‌کنیم D یک ناحیه در صفحه مختلط باشد یک میدان سرعت با شارش پایا روی D، از دو تابع

$$u(z) = u(x, y), v(z) = v(x, y) \qquad (۱-۱۲)$$

تشکیل شده است که مؤلفه‌های x و y سرعت یک ذرهٔ شاره واقع در نقطه $z = x + iy$ هستند. یک راه تجسم شارش، رسم بردار $V = ui + vj$ در هر نقطهٔ z_0 است. سرعت مختلط شارش را توسط

$$q(z) = u + iv \qquad (۲-۱۲)$$

تعریف می‌کنیم. خط واصل z_0 و $z_0 + y$، دارای شیب $\frac{\overline{q}}{q} = \frac{u-iv}{u+iv}$ است. اکنون فرض می‌کنیم

$$p(z) = \phi(z) + i\psi(z) \qquad (۳-۱۲)$$

یک تابع تحلیلی روی D باشد به طوری که $p'(z)$ تک مقداری است. به‌علاوه، فرض

می‌کنیم داشته باشیم

$$q(z) = u + iv = -\frac{\overline{dp}(z)}{dz} = -\overline{p'(z)} = -\overline{p'(z)} = -\overline{p'}(\overline{z})$$
(۴ − ۱۲)

در این صورت، شارهٔ (u, v) شارهٔ پتانسیل، $p(z)$ پتانسیل سرعت مختلط نامیده می‌شود. هر تابع تحلیلی $p(z)$، با مشتق تک مقداری یک شارهٔ پتانسیل را به‌دست می‌دهد. برعکس، می‌دانیم که هرشارهٔ مشتق‌پذیر که واگرا و بدون گردش باشد با استفاده از رابطهٔ (۱۲. ۴) از یک پتانسیل مختلط قابل حصول است. از رابطهٔ (۱۰.۱۱)، داریم

$$\frac{dp}{dz} = \phi_x + i\psi_x$$

بنابراین

$$q = u + iv = -\frac{\overline{dp}}{\overline{dz}} = -\phi_x + i\psi x \qquad (۵ - ۱۲)$$

در نتیجه

$$u = -\phi_x, \epsilon = \psi_x \qquad (۶ - ۱۲)$$

در واقع، از روابط کوشی-ریمان داریم

$$u = -\phi_x = -\psi_y, \qquad v = \psi_x = -\phi_y \qquad (۶' - ۱۲)$$

شیب بردار سرعت، برابر است با

$$\frac{\overline{q}}{q} = \frac{-p'(z)}{\overline{-p'(z)}}$$

اکنون، کمان

$$S : \psi = Imp(z) = c \qquad (۷ - ۱۲)$$

را در نظر می‌گیریم (c عددی حقیقی و ثابت است). داریم $I_m p(z) = \frac{1}{2i}(p(z) - \overline{p(z)}) = c$، و بنابراین $p(z) - \overline{p}(\overline{z}) = ci$. اگر $S(z)$ تابع شوارتس کمان S باشد، آنگاه بر روی S رابطه

$$p(z) - \overline{p}(S(z)) = ci \qquad (۸ - ۱۲)$$

برقرار خواهد بود. در نتیجه، بنابر یک قضیهٔ استاندارد یکتایی در خصوص توابع تحلیلی، رابطهٔ (۱۲.۸) به‌ازای هر z برقرار است. با حل این معادله نسبت به $S(z)$، داریم

$$S(z) = \overline{p}^{-1}(p(z) - ci). \qquad (۹ - ۱۲)$$

با مشتق‌گیری از رابطهٔ (۱۲.۸)، درمی‌یابیم که $p'(z) - p^{-1}(S(z))S'(z) = 0$، و بنابراین

$$S'(z) = \frac{p'(z)}{\overline{p}'(S(z))} \qquad (۱۰ - ۱۲)$$

در نتیجه، روی S داریم $S'(z) = \frac{p'(z)}{\overline{p'(\overline{z})}}$. شیبهای S و شیبهای میدان سرعت مساویند؛ بنابراین خمهای (۱۲. ۷) خطهای جریان متعلق به شار هستند. خمهای

$$T : \phi = Rep(z) = c \qquad (۱۱ - ۱۲)$$

را هم پتانسیل‌های سرعت می‌نامند (c حقیقی و ثابت است). اگر $T(z)$ تابع شوارتس این خمها باشد، استدلال مشابهی نشان می‌دهد که

$$p(z) + \overline{p}(T(z)) = c \qquad (۱۲ - ۱۲)$$

$$T(z) = \overline{p}^{-1}(c - p(z)), \qquad (۱۲' - ۱۲)$$

$$T'(z) = -p'(z)\sqrt{p'(z)}. \qquad (۱۲'' - ۱۲)$$

در نتیجه بنابر رابطهٔ (۱۲.۷) این دو خانواده خمهای متعامدند.

فرض می‌کنیم ϕ و ψ قسمتهای حقیقی و موهومی تابع تحلیلی $p(z)$ باشند. در این صورت، خمهای ثابت $= \phi$ و ثابت $= \psi$ نسبت به هم متقارنند. چون $S = \overline{p}^{-۱}(p-ic)$ و $T = \overline{p}^{-۱}(c_۱ - p)$ پس $\overline{T} = p^{-۱}(c_۱ - \overline{p})$ و $\overline{S} = p^{-۱}(\overline{p} + ic)$، داریم

$$S\bar{T} = \overline{p}^{-۱}(pp^{-۱}(c_۱ - \overline{p}) - ic) = \overline{p}^{-۱}(c_۱ - ic - \overline{p})$$

همچنین، به‌طور مشابه

$$T\bar{S} = \overline{p}^{-۱}(c_۱ - pp^{-۱}(\overline{p} + ic)) = \overline{p}^{-۱}(c_۱ - ic - \overline{p}) = S\overline{T}$$

معادلات تابعی (۸.۱۲) و (۱۲.۱۲) را مزدوج نوع آبل می‌نامیم. اگر قرار دهیم $\Pi(z) = e^{p(z)}$، آنگاه معادلهٔ (۸.۱۲) به $\overline{\Pi}S = e^{-ic}\Pi$ تبدیل می‌شود، که یک معادله تابعی مزدوج نوع شرودر است.

تندی $| q |$ متعلق به ذرهٔ شارهٔ واقع در z به وسیلهٔ رابطهٔ

$$| q |^۲ = q\overline{q} = p'(z)\overline{p'(z)} = | p'(z) |^۲ \qquad (۱۳ - ۱۲)$$

بیان می‌شود. نقاط تعادل‌شار (نقاط با سرعت صفر)، در صفرهای $p'(z)$ قرار دارند. انتگرال زیر که حول یک مسیر بسته C واقعه در D محاسبه می‌شود

$$J = -\int_C p'(z)dz \qquad (۱۴ - ۱۲)$$

به شار با پتانسیل $p(z)$ وابسته است داریم

$$J = \int_C (udx + vdy) + i\int_C (-vdx + udy) \qquad (۱۵ - ۱۲)$$

دو انتگرال حقیقی موجود در رابطهٔ (۱۵.۱۲) به ترتیب گردش شار و واگرایی شار حول

مسیر C نامیده می‌شوند.

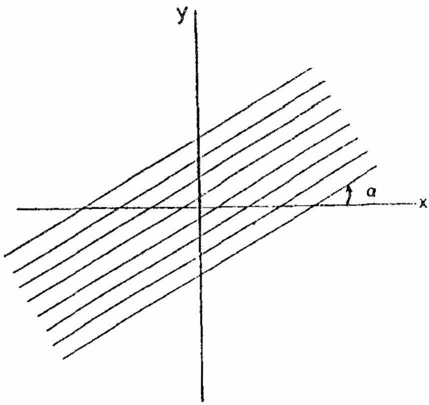
$$\text{گردش}=\int_C udx+vdy=-Re\int_C p'(z)dz \qquad (۱۲-۱۶)$$

$$\text{واگرایی}=\int_C -vdx+udy=-Im\int_C p'(z)dz. \qquad (۱۲-۱۷)$$

بسیاری از پتانسیل‌های مختلط، به‌طور صریح در فرم بسته مورد مطالعه قرارگرفته‌اند. در اینجا، ما بعضی از ساده‌ترین نمونه‌های این پتانسیل‌ها را نشان می‌دهیم.

مثالها.

(الف) شاریکنواخت. $D:|z|<\infty$. $p(z)=\sigma e^{i\alpha}z$، $\sigma\geq ۰$، α حقیقی است. $p'(z)=\sigma e^{-i\alpha}$. شیب بردار سرعت: $e^{-۲i\alpha}$. و تندی به‌طور یکنواخت مساوی با σ است (به شکل ۱.۱۲ نگاه کنید).



شکل۱۲-۱

(ب) شار دوقطبی. $D:|z|>۰$. $p(z)=\dfrac{\sigma e^{i\alpha}}{z}$، $\alpha,\sigma>۰$ حقیقی است. $\overline{p}^{-۱}=\frac{\sigma e^{-i\alpha}}{z}$، در نتیجه، بنابر رابطه (۹.۱۲) خطهای جریان دارای تابع شوارتس

$$S(z)=\frac{ic\sigma e^{-i\alpha}z}{z+ic\sigma e^{i\alpha}}$$

می‌باشند، c حقیقی و ثابت است. این یک خانواده از دایره‌هاست که از مبدأ می‌گذرند و مرکز آنها روی خط $\overline{z}=-e^{-2i\alpha z}$ قرار دارد. (به شکل ۲.۱۲ نگاه کنید.)

لازم به ذکر است که پتانسیل‌های مختلط را می‌توان با همدیگر جمع کرد.

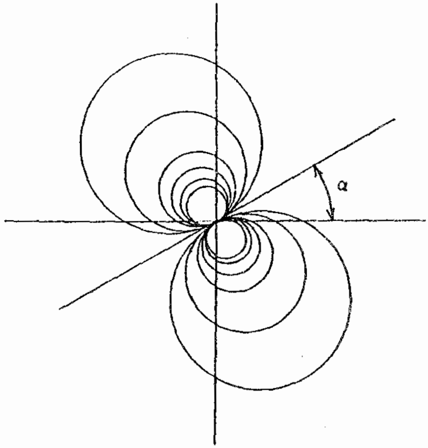
(پ) حرکت بیرون از دایره و یکنواخت در $z=\infty$. $D:|z|\geq a$. در این حالت، $p(z)=\beta z+\dfrac{\gamma}{z}$ که در آن $\beta=ue^{-i\alpha}$ و $\gamma=ua^2e^{i\alpha}$، u حقیقی است و $a>0$. چون $p'(z)=\beta-\dfrac{\gamma}{z^2}$، وقتی $z\to\infty$ شار به سوی شار یکنواخت توصیف شده در قسمت (الف) میل می‌کند. تابع شوارتس دایره $|z|=a$ عبارت است از $\frac{a^2}{z}$ و چون $\gamma=\overline{\beta}a^2$ و $p(z)-\overline{p}(S(z))=0$ پس این دایره یک خط جریان است.نقاط تعادل، جوابهای معادله $p'(z)=0$ هستند. از این معادله، نتیجه می‌شود که $z=\pm ae^{i\alpha}$و این نقاط روی دایره مورد بحث قرار دارند (به شکل ۳.۱۲ نگاه کنید.)

با توجیه‌های مناسب، $p(z)$ را می‌توان مشروط بر اینکه $p'(z)$ تک مقداری باشد چند مقداری انتخاب کرد.

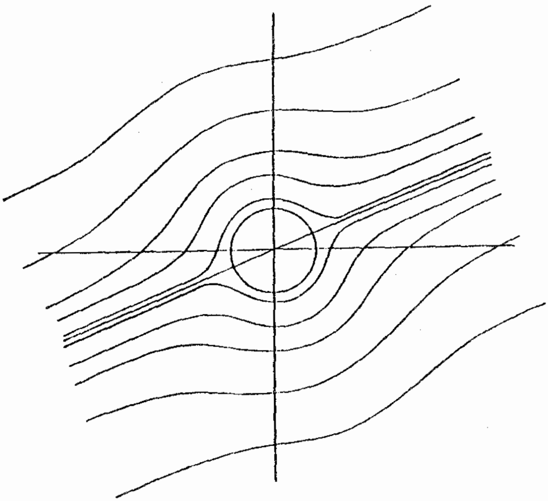
(ت) منبع، چاهک، گرداب، منبع و گرداب. $D:|z|>0$

حالت ۱. $p(z)=\sigma\log z$ (σ حقیقی است). اگر $\sigma>0$، یک منبع داریم. اگر $\sigma<0$، یک چاهک داریم. در حالت مورد بحث $p'(z)$ مساوی با $\frac{\sigma}{z}$ و تک مقداری می‌باشد و $q=\dfrac{-\sigma}{\overline{z}}$. همچنین، شیب سرعت برابر است با $\frac{\overline{q}}{q}=\frac{\overline{z}}{z}$ و برابر است با بردار شعاع و بنابراین سرعت، شعاعی می‌باشد. تندی نیز مساوی است با $|q|=\frac{|\sigma|}{|z|}$ در نتیجه وقتی $z\to 0$، تندی به بینهایت میل می‌کند (به شکل ۱۲. ۴ نگاه کنید).

حالت ۲. $p(z)=\sigma i\log z$، σ حقیقی است. این حالت، مبین یک گرداب است. در این حالت $\overline{p}^{-1}(z)=\exp(\dfrac{iz}{\sigma})$ و بنابراین خطهای جریان توسط رابطهٔ $S(z)=\overline{p}^{-1}(p-ci)=e^{c/a}/z$ که تابع شوارتس دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات است، داده می‌شوند. داریم $|q|^2=|p'(z)|^2=\dfrac{\sigma^2}{|z|^2}$ بنابراین، بر روی هر دایره مقدار تندی ثابت است (به شکل ۱۲. ۵ نگاه کنید).



شکل۱۲-۲



شکل۱۲-۳

حالت ۳. $p(z) = a\log z$، a مختلط است. این معادله، نشان دهندهٔ چاهک یا منبع و گرداب است. در این حالت، $\overline{p}^{-1}(z) = \exp(\frac{z}{\overline{a}})$. بنابراین

$$S(z) = \overline{p}^{-1}(p(z) - ci) = \exp((\frac{1}{\overline{a}})(a\log z - ci)) = e^{\frac{-ic}{\overline{a}}} z^{\omega}$$

که در آن $\omega = \frac{a}{\overline{a}}$. اینها مارپیچهای برنولی هستند (به شکل ۶.۱۲ نگاه کنید).

(ث) خط‌گرداب. $p(z) = \sigma i \log\sin\frac{\pi z}{a}$، $a > 0, \sigma > 0$. گردابهای «قوت» σ، در نقاط $z = 0, \pm a, \pm 2a, \cdots$ قرار دارند. در این حالت، $\overline{p}^{-1}(z) = \frac{a}{\sigma} sin^{-1}(\exp(\frac{\pi}{a}))$ و خطهای جریان نیز، توسط رابطه

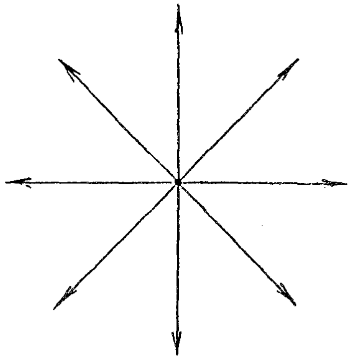
$$S(z) = \overline{p}^{-1}(p - ci) = \frac{a}{\pi}\sin^{-1}(e^{c} csc\frac{\pi z}{a})$$

بیان می‌شوند. (به شکل ۱۲. ۷ نگاه کنید.)

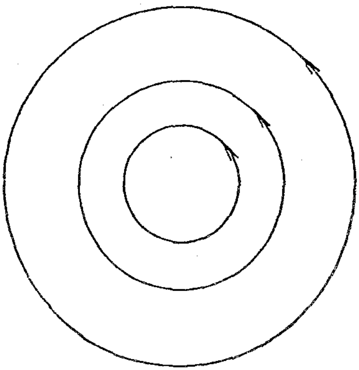
اصل نگاشت همدیس فرض می‌کنیم $p(z)$ یک پتانسیل مختلط باشد که در ناحیهٔ D از صفحه z تعریف شده و دارای یک خط جریان با تابع شوارتس $S(z)$ است. فرض می‌کنیم تابع تحلیلی $w = f(z)$، D را به‌طور یک به یک و همدیس روی ناحیهٔ E در صفحه w و کمان S را به کمان T بنگارد در این صورت، $pf^{-1}(w)$ یک پتانسیل مختلط در E با خط جریان T است.

برای اثبات آنچه گفته شد، تنها لازم است نشان دهیم که $pf^{-1}(w) - \overline{pf^{-1}}(T(w)) = ci$ (c حقیقی است). اکنون بنابر رابطهٔ (۶.۸)، $T = \overline{f}Sf^{-1}$. بنابراین، لازم است نشان دهیم که $pf^{-1} - \overline{pf^{-1}}\,\overline{f}Sf^{-1} = pf^{-1} - \overline{p}Sf^{-1} = ci$. چون S یک خط جریان برای p است پس $p - \overline{p}S = c'i$. در نتیجه، اگر دو طرف این تساوی را از طرف راست با f^{-1} ترکیب کنیم خواهیم داشت $c' = c$.

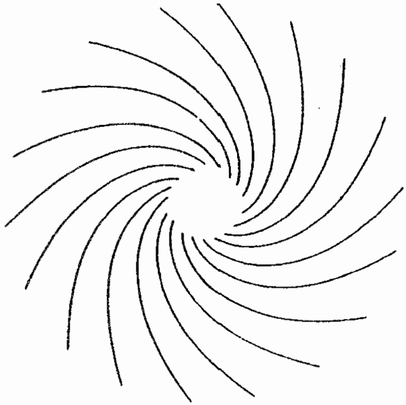
توسعهٔ قضیه دایره. اگر $p(z)$ یک پتانسیل مختلط در ناحیهٔ D و $S(z)$ تابع شوارتس کمانی چون S باشد که در D واقع است، آنگاه $\overline{p}(S(z)) = \overline{p(\overline{S(z)})}$ در یک



شکل۱۲-۴



شکل۱۲-۵



شکل۱۲-۶

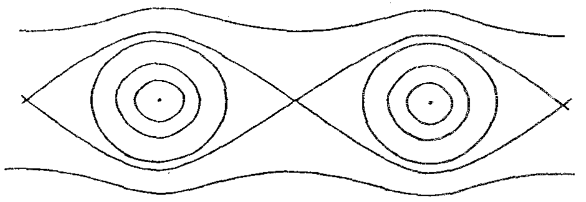
همسایگی از S تعریف شده و تابع

$$h(z) = p(z) + \overline{p}(S(z))$$

یک پتانسیل مختلط است که S برای آن یک خط جریان می‌باشد؛ زیرا کافی است نشان دهیم که $h(z) - \overline{h}(S(z)) = ci$. چون $\overline{h}(S(z)) = \overline{p}(S(z)) + p(\overline{S}(S(z)) = \overline{p}(S(z)) + p(z)$، پس $h(z) - \overline{h}(S(z)) = 0$.

به عنوان یک حالت خاص، قرار می‌دهیم $S(z) = z$. در این صورت $h(z) = p(z) + \overline{p}(z)$، و محور x یک خط جریان است. اگر انتخاب کنیم $S(z) = \frac{1}{z}$، آنگاه $h(z) = p(z) + \overline{p}(\frac{1}{z})$ و دایره واحد یک خط جریان است. این مطلب به قضیهٔ دایره موسوم است.

فرمولهای بلزیوس. فرض می‌کنیم یک شار با پتانسیل مختلط $p(z)$ دارای خط جریان بسته‌ای چون C با تابع شوارتس $S(z)$ باشد. در این حالت، فرمولهای بلزیوس نیرو و گشتاوری را که C تحمل می‌نماید به صورت نتیجهٔ شاربیان می‌کنند. در اینجا فشار موضعی را با $\mathcal{P} = \mathcal{P}(z)$ نشان می‌دهیم. اگر شاره تراکم ناپذیر باشد، از معادله برنولی به دست می‌آید $\mathcal{P} = a - \frac{1}{2}\rho \mid q \mid^2$ که در آن a عددی ثابت و ρ چگالی یکنواخت شاره است. واحدها را چنان اختیار می‌کنیم که داشته باشیم $\rho = 2$. در این صورت، $\mathcal{P} = a - \mid q \mid^2 = a - \mid p'(z) \mid^2$ دیفرانسیلهای نیرو را با dX، dY نشان می‌دهیم.



شکل۱۲-۷

داریم $dX = -\mathcal{P}dY$، $dY = pdX$

$$X = \int_C dX, \quad Y = \int_C dY,$$

از این رو

$$dX - idY = -i\mathcal{P}(dx - idy) = -i\mathcal{P}d\overline{z}$$

بنابراین

$$X - iY = -i\int_C P(z)d\overline{z} = i\int_c (\mid p'(z)\mid^2 - a)d\overline{z} \qquad (۱۸-۱۲)$$

$$= i\int_C p'(z)\overline{p'(z)}S'(z)dz$$

بنابر (۱۰.۱۲)

$$i\int_C \mathcal{P}'(z)\overline{p'(z)}\frac{p'(z)}{p'(z)}dz$$

$$= i\int_c (p'(z))^2 dz$$

یعنی:

$$X - iY = i\int_C (p'(z))^2 dz. \qquad (۱۹-۱۲)$$

اگر M گشتاور نیروها حول مبدأ باشد، آنگاه $dM = xdY - ydX = \mathcal{P}(xdx + ydy) = \mathcal{P}Re(zd\overline{z})$. بنابراین

(۱۲ − ۲۰)

$$M = \int_C dM = \int_C \mathcal{P}Re(zd\overline{z}) = Re\int_C (a- \mid p'(z) \mid^{۲})zd\overline{z}.$$

چون $\int_C zd\overline{z} = -۲i$ (مساحت C)، پس $Re\int_C zd\overline{z} = ۰$. در نتیجه، مانند مورد نیروها داریم

$$M = -Re\int_C z \mid p'(z) \mid^{۲} dz. \qquad (۱۲ - ۲۱)$$

اگر پتانسیل $p(z)$ در داخل C دارای نقاط تکین نباشد، انتگرالهای (۱۹.۱۲) و (۲۲.۱۲) صفر می‌شوند.انتگرال

$$KE = \int_C \int \frac{۱}{۲}\rho \mid q \mid^{۲} dxdy \qquad (۱۲ - ۲۲)$$

انرژی جنبشی شار در داخل Cنامیده می‌شود با انتخاب $\rho = ۲$، داریم.

$$KE = \int_C \int \mid p'(z) \mid^{۲} dxdy = \frac{۱}{۲i}\int_C \overline{p(z)}p'(z)dz$$

(۱۲ − ۲۳)

$$= \frac{۱}{۲i}\int_C \overline{p}(s(z)p'(z)dz$$

برای اثبات قضیهٔ کوتا ـ یوکوسکی، فرض می‌کنند که حباب هوای C، در یک جریان یکنواخت هوا با تندی v و گردش k واقع است. بنابراین، پتانسیل مختلط را به صورت

$$p(z) = Ve^{i\alpha} - A\log z + \frac{B}{z} + \cdots, -A = \frac{ik}{۲\pi}$$

در نظر می‌گیرند، که در آن تابع $q(z) = \frac{B}{z} + \cdots$ در خارج C عادی است و $\lim_{z\to x} zq(z) = B \neq \infty$. در این صورت، $p'(z) = Ve^{i\alpha} - (\frac{A}{z}) + q'(z)$ و بنابراین

$$(p'(z))^{۲} = V^{۲}e^{۲i\alpha} + \frac{ikVe^{i\alpha}}{\pi z} + \cdots$$

از رابطهٔ (۱۹.۱۲)، نتیجه می‌شود که $X - iY = -۲iKVe^{i\alpha}$ و در نتیجه

$$X + iY = ۲kVe^{i(\frac{\pi}{۲}-\alpha)}. \qquad (۲۴ - ۱۲)$$

بنابر رابطهٔ (۱۲. ۲۱) داریم

$$M = Re۴\pi iBVe^{i\alpha}.$$

رابطه (۱۲. ۲۴) قضیه کوتا - یوکوسکی، و رابطه (۱۲. ۲۵)قضیه بلزیوس نامیده می‌شوند.

۱۳

تابع شوارتس و مسألهٔ دیریکله

مسألهٔ دیریکله یا مسألهٔ مقدار مرزی اول دوبعدی به‌شرح زیر است: به ازای ناحیه مفروض B در صفحه (x,y) و به ازای تابع مفروض $u(z^*)$ که روی نقاط مرز B تعریف شده باشد، مطلوب است یافتن تابع $u(z)$ به طوری که روی B همساز بوده (یعنی در معادلهٔ $\Delta u = ۰$ در نقاط داخلی B صدق کند) و $\lim_{z\to z^*} u(z) = u(z^*)$ برای سازگاری با مقاصد این کتاب، فرض می‌کنیم B ناحیه‌ای باشد که مرز آن خمی تحلیلی با تابع شوارتس $S(z)$ است و تابع مرزی $u(z^*)$ پیوسته باشد.

جواب مسأله دیریکله را در حالتی که B دایره R >| z |: B است می‌دانیم. این جواب، عبارت است از

$$u(t) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{|z|=R} \frac{R^۲ - | t |^۲}{| z - t |^۲} u(z) d\theta. \qquad (۱ - ۱۳)$$

محاسبهٔ ساده‌ای نشان می‌دهد که اگر $S(t) = \frac{R^۲}{t}$ تابع شوارتس دایره $| z |= R$ باشد، آنگاه فرمول (۱۳ . ۱) را می‌توان به صورت زیرنوشت:

$$u(t) = Re\{\frac{۱}{۲\pi i}\int_{|z|=R} \frac{u(z)}{z-t} dz - \frac{۱}{۲\pi i}\int_{|z|=R} \frac{u(z)}{z - \overline{S(t)}} dz\} \qquad (۲ - ۱۳)$$

چون $\overline{s(t)}$ نگاره یا منعکس T نسبت به دایره R =| z | است، این روش حل مسأله دیریکله را روش نگاره‌ها می‌نامیم. فرمول (۱۳ . ۲) را می‌توان به نواحیی بجز دایره

نیز تعمیم داد. به این موضوع و اثبات آن اشاره‌ای می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$u(t) = Re\{\frac{۱}{۲\pi i}\int_{\partial B}\frac{u(z)dz}{z-t} - \frac{۱}{۲\pi i}\int_{\partial B}\frac{u(z)dz}{z-\overline{S(t)}}\} \quad (۳ - ۱۳)$$

$$= Re\{\frac{۱}{۲\pi i}\int_{\partial B}\frac{u(z)(t-\overline{S(t)})}{(z-t)(z-\overline{S(t)})}dz\}.$$

در درجه اول، اگر $u(t)$ روی ∂B پیوسته باشد، آنگاه انتگرال $\frac{۱}{۲\pi i}\int_{\partial B}\frac{u(z)dz}{z-t}$ تابعی چون $f(t)$ را که در داخل B تحلیلی و عادی است تعریف می‌کند. به همین ترتیب، انتگرال $\frac{۱}{۲\pi i}\int_{\partial B}\frac{u(z)dz}{z-\overline{S(t)}}$ تابعی تحلیلی و عادی چون $g(\bar{t})$ از $\bar{t}$ را روی یک نوار شبه حلقوی از B که مرزش ∂B است تعریف می‌کند . از رابطهٔ (۱۶.۱۱) نتیجه می‌شود که $u(t) = Re(f(t) + g(\bar{t}))$ یک تابع همساز است. به‌طور کلی، $u(t)$ تابعی ادامه‌پذیر در سراسر قسمت داخلی B به عنوان شاخه‌ای تک مقداری از یک تابع همساز نخواهد بود. با وجود این اگر $S(t)$ تابع شوارتس B خود در داخل B مرومرفیک باشد، این امکان وجود دارد. قطبهای $S(t)$، صفرهای g خواهند بود.

سرانجام، نشان می‌دهیم که اگر t روی یک خط قائم بر ∂B به سوی z^* میل کند، آنگاه $\lim_{t\to z^*} u(t) = u(z*)$.

اگر t متعلق به داخل B باشد $\overline{S(t)}$ در خارج آن خواهد بود. در نتیجهٔ بنابر قضیهٔ کوشی داریم

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_{\partial B}\frac{dz}{z-t} - \frac{۱}{۲\pi i}\int_{\partial B}\frac{dz}{z-S(t)} = ۱,$$

و بنابراین

$$Re\{\frac{۱}{۲\pi i}\int_{\partial B}\frac{u(z^*)dz}{z-t} - \frac{۱}{۲\pi i}\int_{\partial B}\frac{u(z^*)dz}{z-\overline{S(t)}}\} = u(z^*)$$

و در نتیجه

$$u(t) - u(z^*) \quad (۴ - ۱۳)$$

$$= Re\{\frac{۱}{۲\pi i}\int_{\partial B}(u(z)-u(z^*))\frac{t-\overline{S(t)}}{(z-t)(z-\overline{S(t)})}dz\}$$

با محاسبه قدر مطلق‌ها، به دست می‌آوریم

$$| u(t) - u(z^*) | \le \frac{۱}{۲\pi} \int_۰^L | u(z) - u(z^*) | \frac{| t - \overline{S(t)} |}{| z - t || z - \overline{S(t)} |} | dz |, \qquad (۵-۱۳)$$

که در آن L مساوی است با طول ∂B. نقاط ∂B را با طول کمان s، $۰ \le s \le L$ توسط $s \leftrightarrow z$ و $s^* \leftrightarrow z^*$ پارامتری می‌کنیم. چون $u(s)$ پیوسته است، می‌توان قرار داد $\underset{۰\le s\le L}{Max} | u(s) - u(s^*) = M < \infty$ قائم بر ∂B را در s^* رسم کرده و t را روی آن در داخل B انتخاب می‌کنیم. اگر قرار دهیم $\epsilon = | z^* - t |$، آنگاه بنابر رابطهٔ (۷. ۲۱)، با صرف نظرکردن از جمله‌های مرتبه بالاتر به‌دست می‌آوریم $|z^* - \overline{s(t)}| = \epsilon, t - \overline{s(t)}) = ۲\epsilon$ به علاوه به ازای $z \in \partial B$ ، با فراموش کردن جمله‌های مرتبه بالاتر در یک همسایگی z^* داریم $| z - \overline{S(t)} | = \sqrt{(s - s_۰)^۲ + \epsilon^۲} = | z - t |$. چون $u(s)$ پیوسته است، به‌ازای $\delta > ۰$ ، $\sigma > ۰$، را می‌توان چنان پیدا کرد که به‌ازای هر s متعلق به $[s^* - \sigma, s^* + \sigma]$ داشته باشیم $| u(s) - u(s^*) | \le \delta$ این کمان را با $C_۲$ وکمان متمم آن را روی ∂B با $C_۱$ نشان می‌دهیم. در این صورت، بنابر رابطهٔ (۵.۱۳) داریم

$$| u(t) - u(z^*) | \le \frac{۱}{۲\pi} \int_{C_۱} + \int_{C_۲} | u(z) - u(z^*) | \frac{| t - \overline{S(t)}}{| z - t || z - \overline{S(t)} |} ds. \qquad (۶-۱۳)$$

از این فرمول، نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} | u(t) - u(z^*) | & \le \frac{M_\epsilon}{\pi} \int_{C_۱} \frac{ds}{| z - t || z - \overline{S(t)} |} + \frac{\delta}{۲\pi} \int_{s^*-\sigma}^{s^*+\sigma} \frac{۲\epsilon}{(s - s^*)^۲ + \epsilon^۲} ds \\ & \le \frac{M_\epsilon}{\pi} \int_{C_۱} \frac{ds}{| z - t || z - \overline{S(t)} |} + \frac{۲\delta}{\pi} arctan \frac{\sigma}{\epsilon} \end{aligned}$$

حال، اگر $t \to z^*$، آنگاه $\epsilon \to ۰$. به‌ازای $z \in C_۱$ ، روشن است که $| z - t || z - \overline{S(t)} |$ دارای کران پایین مثبتی چون η است. بنابراین

$$| u(t) - u(z^*) | \le \frac{M\epsilon S}{\eta} + \frac{۲\delta}{\pi} arctan \frac{\sigma}{\epsilon}. \qquad (۷-۱۳)$$

بنابر رابطهٔ (۷.۱۳)، $\lim sup_{t\to z^*} \mid u(t) - u(z^*) \mid \leq \delta$ و چون δ به دلخواه کوچک است داریم $\lim\limits_{t\to z^*} u(t) = u(z^*)$. این نتیجه، مستقل از ادامه‌پذیر بودن $u(t)$ در سراسر B است.

حالتی که در آن $S(z)$ در B مرومرفیک است، در قسمتهای قبل مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین می‌توان روش نگاره‌ها را چنان تغییر داد که قابل کاربرد در مسیری با تابع شوارتس $S(z)$ به صورت تابعی جبری از نوع معین باشد. به هر ترتیب، این بحث را ادامه نمی‌دهیم و تنها به مراجعه دادن به منابع مرتبط با موضوع اکتفا می‌نماییم (به فصل ۱۷ و قسمت مربوط به این فصل حاضر مراجعه کنید).

۱۴

توابع شوارتس از نوع خاص

با توجه به این نکته که برای ساختن برخی توابع لازم است که $S(z)$در داخل خم مرومرفیک باشد. تعیین خمهای تحلیلی با این خصوصیت دارای فواید قابل توجهی است. در حقیقت، می‌توان بر حسب تابع نگاشت ناحیهٔ محدود به خم، نوعی رده‌بندی انجام داد.

تعریف. فرض می‌کنیم B یک ناحیه در صفحه مختلط باشد نماد $QC(= QC(B))$، ردهٔ توابع f را نشان می‌دهد که روی B عادی و روی $B + \partial B$ پیوسته هستند.

تعریف. تابعک خطی L را که روی ردهٔ توابع عادی روی B تعریف می‌شود متعلق به ردهٔ $\mathcal{D} = \mathcal{D}(B)$ می‌نامند، اگر بتوان آن را به صورت

$$L(f) = \sum_{n=۱}^{N} \sum_{k=۰}^{nk} a_{nk} f^k(z_n), \qquad (۱-۱۴)$$

نوشت که در آن $z_۱, \cdots, z_n$ نقاط متمایز در داخل B و a_{nk}ها اعداد ثابت مستقل از f هستند.

ردهٔ $\mathcal{D}$ را می‌توان به عنوان تابعکهای دیفرانسیل نقطه‌ای مرتبه متناهی توصیف کرد.

به منظور آمادگی برای قضیهٔ بعدی، قضیه‌ای از جی. ل. والش را بیان می‌کنیم که در حین اثبات مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

قضیه. فرض می‌کنیم B ناحیه‌ای کراندار و همبند ساده باشد که مرز آن C یک خم تحلیلی جردن است. همچنین C فرض می‌کنیم $t(z)$ روی C پیوسته باشد. با این شرط، به ازای هر $f \in \mathcal{QC}(B)$ خواهیم داشت

$$\int_c t(z)f(z)dz = ۰ \qquad (۲-۱۴)$$

اگر و تنها اگر تابع $g \in \mathcal{QC}(B)$ چنان وجود داشته باشد که روی C برابر با t است.

اکنون، می‌توانیم قضیه زیر را ثابت کنیم:

قضیه. فرض می‌کنیم B ناحیه‌ای کراندار، همبند ساده و با مرز تحلیلی ∂B باشد؛ همچنین، فرض می‌کنیم تابع شوارتس ∂B، $S(z)$ باشد. در این صورت، $S(z)$ روی B مرومرفیک است، اگر و تنها اگر $L \in \mathcal{D}$ چنان وجود داشته باشد که به‌ازای هر f متعلق به $\mathcal{QC}(B)$ داشته باشیم

$$\int_B \int f(z)dxdy = L(f) \qquad (۳-۱۴)$$

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم $S(z)$ مرومرفیک است. بنابر رابطهٔ (۳۳.۱۱)، به‌ازای هر $f \in \mathcal{Q}c(B)$ داریم $\int\int_B f(z)dxdy = \frac{۱}{۲i}\int_{\partial B} S(z)f(z)dz$. چون S روی ∂B عادی و در B مرومرفیک است، تنها تعداد متناهی قطب $z_۱$، $z_۲$، ...، z_n متعلق به B است. در نتیجه

$$\frac{۱}{۲i}\int_{\partial B} S(z)f(z)dz = \sum_{n=۱}^{N} \frac{\pi}{۲\pi i}\int_{C_n} S(z)f(z)dz,$$

که در آن C_n دایره‌ای به قدرکافی کوچک به مرکز z_n است. اکنون $S(z)$ در داخل C_n دارای بسطی به صورت

$$S(z) = \zeta_n(z) + \frac{B_{۱n}}{z-z_n} + \frac{B_{۲n}}{(z-z_n)^۲} + \cdots + \frac{B_{p_n n}}{(z-z_n)^{p_n}}$$

است که در آن $\zeta_n(z)$ در بستار C_n عادی می‌باشد. بنابراین

$$\frac{\pi}{۲\pi i}\int_{C_n} S(z)f(z)dz=\pi\sum_{k=۱}^{p_n}\frac{B_{kn}f^{(k-۱)}(z_n)}{(k-۱)!}$$

در نتیجه درستی رابطهٔ (۳.۱۴) را می‌توانیم نتیجه بگیریم.

برعکس، فرض می‌کنیم رابطه (۳.۱۴) به‌ازای یک $L\in\mathcal{D}$ که توان رابطه (۱.۱۴) داده می‌شود و به ازای هر $f\in\mathcal{Q}C(B)$ برقرار باشد. فرض می‌کنیم تابع گویای

$$R(z)=\frac{۱}{\pi}\sum_{n=۱}^{N}\sum_{k=۱}^{n_k}\frac{k!a_{nk}}{(z-z_n)^{k+۱}},$$

چنان باشد که به ازای هر $f\in\mathcal{Q}C(B)$ داشته باشیم $L(f)=\frac{۱}{۲i}\int_{\partial B}R(z)f(z)dz$ با این شرایط به‌ازای هر $f\in\mathcal{Q}C(B)$ داریم

$$\int_{\partial B}(S(z)-R(z))f(z)dz=۰$$

مسلماً تابع $S(z)-R(z)$ روی ∂B پیوسته است (در واقع این تابع در یک نوار شبه حلقه شامل ∂B عادی است). در نتیجه، بنابر قضیه والش تابع $\zeta(z)\in\mathcal{Q}C(B)$ چنان وجود دارد که $S(z)-R(z)=\zeta(z)$، $z\in\partial B$. بنابراین، $\zeta(z)$ روی ∂B مقادیری تحلیلی را اتخاذ می‌کند و در نتیجه باید روی $B+\partial B$ تحلیلی باشد، و بدین ترتیب یک ناحیه مشترک تحلیلی با $S(z)-R(z)$ دارد. بنابر قضیهٔ یگانگی، در سراسر B، $S(z)-R(z)=\zeta(z)$ و در نتیجه $S(z)=R(z)+\zeta(z)$ روی B مرومرفیک است.

در این مرحله، بهتر است (ولی لازم نیست) با فضای هیلبرت یا $L^۲(B)$ متشکل از توابعی تک مقداری و تحلیلی روی B با خاصیت $\int\int_B\mid f(z)\mid^۲ dxdy<\infty$ کار کنیم. در اینجا، ذکر خلاصه‌ای از ویژگیهای اساسی $L^۲(B)$ بی‌مناسبت نیست. در این فضا، ضرب داخلی به صورت $(f,g)=\int\int_B f(z)\overline{g(z)}dxdy$ تعریف می‌شود. فرض می‌کنیم B یک ناحیه کراندار همبند ساده با مرز ∂B باشد. همچنین، فرض می‌کنیم مکمل B فقط یک ناحیه با مرز ∂B باشد. در این صورت، مجموعه توابع ۱، z، $z^۲$، $\cdots$ در $L^۲(B)$ کامل است و در نتیجه به‌ازای چنین ناحیه‌ای یک مجموعه متعامدیکهٔ کامل از چند جمله‌ای‌های $\{p_n^*(z)\}$ وجود دارد. اگر B ناحیهٔ همبند ساده‌ای در صفحه

z باشد که به‌طور همدیس توسط $w = M(z)$ به روی ناحیه $|w| \leq 1$ به صورت یک به یک نگاشته شود، آنگاه توابع به صورت $\phi_n^*(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}(M(z))^n M'(z)$، $n = 0, 1, 2, \cdots$، یک مجموعه متعامدیکه کامل را برای $L^2(B)$ تشکیل می‌دهند.

اگر $\{\phi_n^*(z)\}$ یک دستگاه متعامدیکه کامل برای $L^2(B)$ باشد، بسط دوخطی $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^*(z)\overline{\phi_n^*(w)}$ به تابع هسته‌ساز برگمن $K(z, \overline{w})$ همگرا خواهد شد. این همگرایی، روی $B \times B$ مطلق و یکنواخت است. تابع مورد بحث، دارای ویژگی مشخصهٔ بازسازی توابع $L^2(B)$ با استفاده از فرمول $f(w) = (f(z), K(z, \overline{w}))$ است. اگر z_0 یک نقطه در داخل B باشد، آنگاه به‌ازای هر n تابعک خطی $L_n(f) = f^{(n)}(z_0)$، $n = 0, 1, 2, \cdots$ روی $L^2(B)$ کراندار است. اگر C خمی با طول متناهی در داخل B (شامل نقاط انتهایی C) باشد و اگر $\int_C |w(z)||dz| < \infty$، آنگاه تابعک خطی $L(f) = \int_C w(z)f(z)dz$ روی $L^2(B)$ کراندار است. اگر L یک تابعک خطی کراندار روی $L^2(B)$ باشد، نمایندهٔ آن $r(z)$ توسط

$$r(z) = \overline{L_w K(\overline{z}, w)} \qquad (۴-۱۴)$$

تعریف می‌شود. این رابطه به معنی

$$L(f) = (f, r) = \int_B\int f(z)\overline{r(z)}dxdy \qquad f \in L^2(B), \qquad (۵-۱۴)$$

است.

اگر B ناحیه‌ای همبندساده و $w = M(z)$، $M(0) = 0$، یک نگاشت همدیس یک به یک از B به‌روی $|w| \leq 1$ باشد، در این صورت هستهٔساز برگمن را می‌توان بر حسب $M(z)$ به صورت زیر بیان کرد:

$$K(\overline{z}, w) = \frac{1}{\pi}\frac{\overline{M'(z)}M'(w)}{(1 - \overline{M(z)}M(w))^2}.$$

اگر $L(f) = \int\int_B f(z)dxdy$ آنگاه $r(z) \equiv 1$ و داریم

$$\overline{L_\eta K(\overline{z}, \eta)} \equiv 1. \qquad (۶-۱۴)$$

این معادله تابعی، در مورد تابعکهایی است که معرف آنها متحداً برابر ۱ است. اگر فرض کنیم که B همبند ساده است، آنگاه

$$1 = \frac{1}{\pi} \overline{L_\eta\left(\frac{\overline{M'(z)}M'(\eta)}{(1 - \overline{M(z)}M(\eta))^2}\right)}, \qquad (۷ - ۱۴)$$

یا

$$1 \equiv \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(M(z))^n M'(z)\overline{L((M(\eta))^n M'(\eta))} \qquad (۸ - ۱۴)$$

که در آن همگرایی در هر زیر ناحیهٔ فشرده از B یکنواخت و مطلق است. در نتیجه

$$1 = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}(M(z))^{n+1}\overline{L(M^n(\eta)M'(\eta)}. \qquad (۹ - ۱۴)$$

با انتگرال‌گیری از $z = 0$ تا $z = z$ در B داریم

$$\pi z = M(z)\sum_{n=0}^{\infty}(M(z))^n \overline{L(M^n(\eta)M'(\eta))}. \qquad (۱۰ - ۱۴)$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که

$$\overline{z} = \overline{M(z)}L_\eta\left(\frac{M'(\eta)}{1 - M(\eta)\overline{M(z)}}\right). \qquad (۱۱ - ۱۴)$$

اگر $z = m(w)$، $m(0) = 0$، تابع وارون تابع $w = M(z)$ باشد، رابطهٔ (۱۴. ۱۱) را می‌توان به صورت

$$\pi\overline{m(w)} = \overline{w}L_\eta\left(\frac{M'(\eta)}{1 - \overline{w}M(\eta)}\right) \qquad (۱۲ - ۱۴)$$

نوشت.

قضیه. فرض می‌کنیم B ناحیه‌ای کراندار و همبند ساده باشد که مرز آن ∂B تحلیلی با تابع شوارتس $S(z)$ است همچنین، فرض می‌کنیم. که $z = 0$ متعلق به B است و

$z = m(w)$، $m_{\circ}(\circ) = \circ$، دایره واحد $|w| \leq 1$ را به‌طور همدیس و یک به یک روی B می‌نگارد. در این صورت $S(z)$ در B مرومرفیک است، اگر و تنها اگر $m(w)$ تابع گویایی از w باشد.

اثبات. فرض می‌کنیم $m(w)$ گویا باشد. می‌توانیم بنویسیم

$$m(w) = \frac{aw(1 - \beta_1 w)\cdots(1 - \beta_p w)}{(1 - \alpha_1 w)\cdots(1 - \alpha_n w)} = aw + \cdots,$$

که در آن αها و βها متفاوتند. داریم

$$\begin{aligned}\int_B\int f(z)dxdy &= \frac{1}{2i}\int_{\partial B}\overline{z}f(z)dz\\ &= \frac{1}{2i}\int_{|w|=1}\overline{m(w)}f(m(w))m'(w)dw\\ &= \frac{1}{2i}\int_{|w|=1}\overline{m}\left(\frac{1}{w}\right)f(m(w))m'(w)dw.\end{aligned}$$

اکنون، می‌توانیم بنویسیم

$$\overline{m}\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\overline{a}w^{n-p-1}(w - \overline{\beta}_1)\cdots(w - \overline{\beta}_p)}{(w - \overline{\alpha}_1)\cdots(w - \overline{\alpha}_n)}.$$

اگر $n \geq p + 1$ ، آنگاه نقاط $\overline{\alpha}_1, \cdots, \overline{\alpha}_n$ قطبهای $\overline{m}(\frac{1}{w})$ هستند و این تابع نقاط تکین دیگری ندارد اگر $n < p + 1$، آنگاه $\overline{m}(\frac{1}{w})$ در نقطهٔ $\circ$ دارای یک قطب مرتبهٔ $p + 1 - n$ است.

ابتدا با فرض برقراری رابطه $n \geq p + 1$ و متمایز بودن αها، بنابر قضیهٔ مانده داریم

$$\begin{aligned}&\int_B\int f(z)dxdy\\ &= \pi\overline{a}\sum_{k=1}^{m} f(m(\overline{\alpha}k))m'(\overline{\alpha}_k)\frac{\overline{\alpha}_k^{n-p-1}(\overline{\alpha}_k - \overline{\beta}_1)\cdots(\overline{\alpha}_k - \overline{\beta}_p)}{\overline{P'}(\alpha_k)},\\ &P(w) = (w - \alpha_1)\cdots(w - \alpha_n).\end{aligned}$$

این تساوی، به صورت $\int_B \int f(z)dxdy = \sum_{k=1}^{n} c_k f(z_k)$ است که در آن c_kها و $z_k = m(\overline{\alpha}_k)$ مستقل از f می‌باشند. اگر α_1 ها متمایز نباشند. آنگاه هر قطب از مرتبهٔ بالاتر τ_k یک عملگر دیفرانسیل مرتبهٔ $\tau_k - 1$ را در این مجموعه وارد می‌کند که به‌ازای $\overline{\alpha}_k$ محاسبه شده است.

اگر $n < p + 1$، آنگاه نقطهٔ $\alpha = 0$ یک قطب است. درنتیجه، اگر $n-p-1 = -1$ آنگاه خودِ، $f(0)(m(0) = 0)$ و اگر $m - p - 1 < -1$ آنگاه مشتقات مراتب بالاتر آن در این مجموع حضور خواهد داشت.

بنابراین در هر حال $L \in D$ به‌ازای هر f که $f \in QC(B)$ و $\int_B \int (z)dxdy = L(f))$. در نتیجه، بنابر آخرین قضیه $S(z)$ باید روی B مرومرفیک باشد.

برعکس، فرض می‌کنیم $S(z)$ روی B مرومرفیک باشد. در این صورت بنابر آخرین قضیه، به‌ازای f که $f \in QC(B)$ خواهیم داشت $\int_B \int f dxdy = L(f)$، که در آن $L \in D$. اکنون، بنابر رابطه (۱۲.۱۴) داریم

$$\pi\overline{m(w)} = \overline{w} L_\eta(\frac{M'(\eta)}{1 - \overline{w}M(\eta)})$$

چون L یک تابعک دیفرانسیل نقطه‌ای است، پس

$$L\eta((M'(\eta))/(1 - \overline{w}M(\eta))$$

و در نتیجه $\overline{m(w)}$ یک تابع گویا از $\overline{w}$ است.

چند مثال. (الف) اگر داشته باشیم $m'(w) = w + aw^2$ آنگاه $m'(w) = 1 + 2aw$، $m''(w) = 2a$، $\overline{m}(w) = w + \overline{a}w^2$ (دلنما).

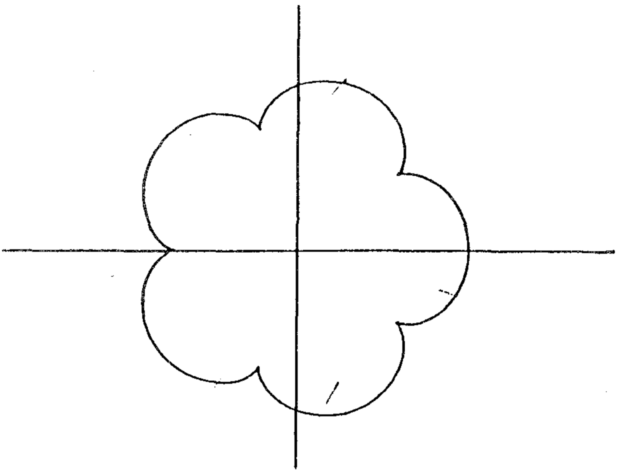
به ازای مقادیر به‌قدر کافی کوچک $|a|$، ($|a| \leq \frac{1}{2}$)، $m(w)$ در دایره واحد تک مقداری است در نتیجه آن را به ناحیه‌ای چون B می‌نگارد. بنابر مثال بعد از رابطهٔ (۴′.۸)، داریم

$$S(z) = \frac{1}{4z^2}(R + 1)(2z + \overline{a}(R + 1))$$

که در آن $R = \sqrt{1 + 4az}$. بنابراین، $S(z)$ دارای یک قطب مرتبه دوم در نقطهٔ $z = 0$ است و قطب دیگری در داخل دلنما ندارد. داریم

$$\int_B \int f(z)dxdy = \pi \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} f(m(w))m'(w)\left[\frac{1}{w} + \frac{\overline{a}}{w^2}\right]dw$$
$$= \pi[(1 + 2 \mid a \mid^2)f(0) + \overline{a}f'(0)]$$

فرمولهای مشابهی را می‌توان در مورد $m(w) = w + aw^n$ (بروچرخزاد) نیز به‌دست آورد (به شکلهای ۱.۱۴ و ۲.۱۴ نگاه کنید)

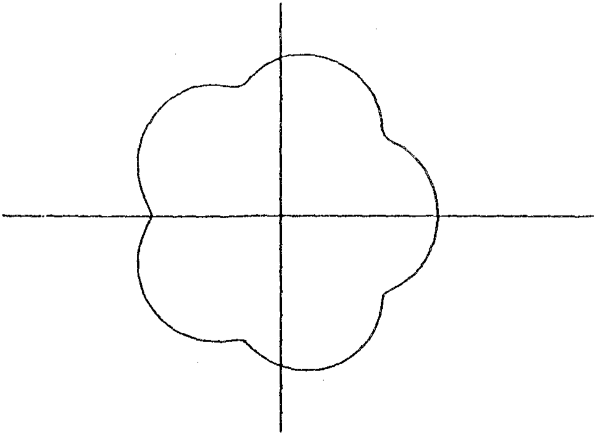


شکل۱۴-۱: بروچرخزاد $z = w + \frac{1}{6}w^6$

(ب) فرض می‌کنیم

$$m(w) = \frac{w(1 - \beta^2 w^2)}{1 - \alpha^2 w^2} \quad (\beta \neq \pm\alpha).$$

α و β را بقدری کوچک اختیار می‌کنیم که $m(w)$ در دایرهٔ $|w| \leq 1$ تک مقداری بوده



شکل۱۴-۲: بروچرخزاد $z = w + \frac{1}{10} w^{6}$

و آن را به ناحیهٔ B بنگارد. در این صورت

$$m'(w) = \frac{1 + \alpha^{2} w^{2} - 3\beta^{2} w^{2} + \alpha^{2}\beta^{2} w^{4}}{(1 - \alpha^{2} w^{2})^{2}}$$

$$\overline{m}\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w} \cdot \frac{(w^{2} - \overline{\beta}^{2})}{(w^{2} - \overline{\alpha}^{2})}$$

بنابراین

$$\int_{B}\int f(z)dxdy = Af(z^{*}) + Bf(0) + Af(-z^{*})$$

که در آن

$$z^{*} = \frac{\overline{\alpha}(1 - \beta^{2}\overline{\alpha}^{2})}{1 - |\alpha|^{4}}$$

$$A = \frac{1 + |\alpha|^{4} - 3\beta^{2}\overline{\alpha}^{2} + \beta^{2}\overline{\alpha}^{2} |\alpha|^{4}}{1 - |\alpha|^{4}}$$

$$B = (\overline{\beta}/\overline{\alpha})^{2}$$

(پ) اکنون کاربرد دیگری از رابطه (۱۲.۱۴) را ارائه می‌دهیم. $L(f)$ را به صورت $L(f) = \int_{-۱}^{+۱} f(\eta)d\eta$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت، چون به علت تقارن $M(۱) = -M(-۱) = \alpha > ۰$ بنابر رابطهٔ (۱۲.۱۴) داریم

$$\pi\overline{m(w)} = \overline{w}\frac{۱}{\overline{w}}\log\left(\frac{۱+\overline{w}\alpha}{۱-\overline{w}\alpha}\right) = \log\left(\frac{۱+\overline{w}\alpha}{۱-\overline{w}\alpha}\right)$$

در نتیجه

$$z = \frac{۱}{\pi}\log\left(\frac{۱+w\alpha}{۱-w\alpha}\right) \qquad (۱۳-۱۴)$$

با قرار دادن $z = ۱$ و $w = \alpha$ در رابطه (۱۳.۱۴)، رابطهٔ $e^{\pi} = \frac{۱+\alpha^۲}{۱-\alpha^۲}$ به‌دست می‌آید. بنابراین

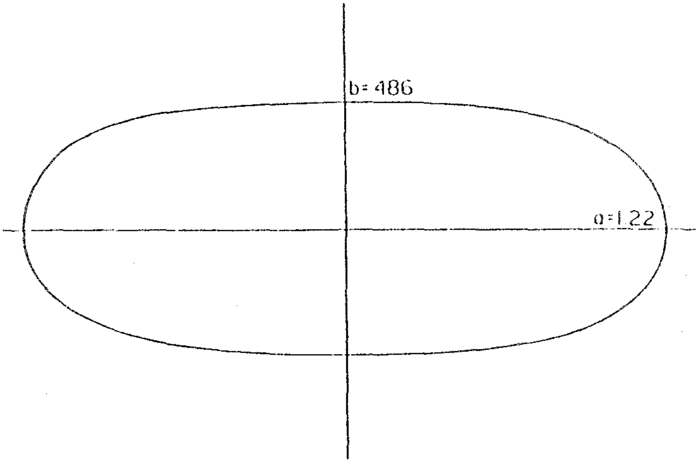
$$\alpha = \sqrt{\frac{۱-e^{-\pi}}{۱+e^{\pi}}} \approx ۰{,}۹۵۸ < ۱. \qquad (۱۴-۱۴)$$

مشاهده می‌شود که به ازای $۱ > ۰/۹۵۸ \simeq \alpha > ۰$، وقتی w دایره واحد را طی کند $\zeta = \frac{۱-\alpha w}{۱+\alpha w}$ دایره‌ای واقع در $Re\zeta > ۰$ را طی می‌نماید. مرکز این دایره نقطهٔ $(\frac{۱+\alpha^۲}{۱-\alpha^۲}, ۰)$ و شعاع آن $\frac{۲\alpha}{۱-\alpha^۲}$ است. بنابراین تحت نگاشت (۱۳.۱۴) روی دایره $| w | = ۱$ یک به یک است. چون $| m(\pm ۱) | = \alpha < ۱$ و $m(z)$ به ازای عدد حقیقی z حقیقی است، پاره خط $[-۱, ۱]$ در داخل این نگاره قرار دارد. بنابراین، نگاشت (۱۳.۱۴) یک ناحیهٔ همبند ساده چون B را تعریف می‌کند.

ناحیه B شکلی شبیه بیضی دارد که نیم‌قطر بزرگ آن $a = \frac{۱}{\pi}\log\frac{۱+\alpha}{۱-\alpha} \simeq ۱{,}۲۲$ و نیم‌قطر کوچک آن $b = \frac{۱}{\pi}arctan\frac{۲\alpha}{۱-\alpha^۲} \simeq ۰/۴۸۶$ است به (شکل ۳.۱۴ نگاه کنید). ناحیهٔ B چنان است که به ازای هر $f \in QC(B)$ داریم

$$\int_B\int f(z)dxdy = \int_{-۱}^{+۱} f(x)dx \qquad (۱۵-۱۴)$$

این تساوی را می‌توان با استفاده از روشهای فصل ۱۱ نیز به‌دست آورد.



شکل۱۴-۳

داریم $m(w) = \frac{۱}{\pi} \log \frac{۱+\alpha w}{۱-\alpha w}$ و $M(z) = \frac{۱}{\alpha} \frac{۱-e^{\pi z}}{۱+e^{\pi z}}$ اکنون، بنابر رابطهٔ (۴.۸)

$$S(z) = \overline{m}\left(\frac{۱}{M(z)}\right) = \frac{۱}{\pi} \log\left(\frac{۱ - e^{\pi} e^{\pi z}}{e^{\pi} - e^{\pi z}}\right). \quad (۱۶-۱۴)$$

قابل توجه است که نقطه‌های $z = \pm ۱ \pm ۲ki$، $k = ۰, ۱, ۲, \cdots$، نقاط تکین لگاریتمی $S(z)$ هستند و هیچ نقطه دیگری در صفحه نقطهٔ تکین $S(z)$ نیست. بنابراین، تنها نقاط تکین $S(z)$ واقع در داخل B، $z = \pm ۱$ هستند. با ایجاد یک برش در طول محور x، می‌توان از نقطه ۱− تا نقطهٔ ۱ یک شاخه تک مقداری از $S(z)$ را در داخل B که به این صورت بریده شده است تعریف کرد.

به ازای $-۱ \leq x \leq ۱$، در لبهٔ بالائی این برش قرار می‌دهیم

$$S_u(z) = S_{upper} = \frac{۱}{\pi} \log\left(\frac{e^{\pi x} e^{\pi} - ۱}{e^{\pi} - e^{\pi x}}\right) - i \quad (۱۷-۱۴)$$

و در طول لبهٔ پایینی آن، انتخاب می‌کنیم

$$S_l(z) = S_{lower} = \frac{۱}{\pi} \log\left(\frac{e^{\pi x} e^{\pi} - ۱}{e^{\pi} - e^{\pi x}}\right) + i. \quad (۱۸-۱۴)$$

داریم $\int_B\int f(z)dxdy = \frac{۱}{۲i}\int_{\partial B} S(z)f(z)dz$. اکنون، به‌جای ∂B مسیر متشکل از $-۱ + \varepsilon \leq x \leq (۱-\varepsilon)$ را که دو دایرهٔ به شعاع ε و مرکزهای $x = ۱$ و $x = -۱$ به آن افزوده شده است، قرار می‌دهیم. به‌دست می‌آوریم

$$\int\int_B f(z)dxdy = \frac{۱}{۲i}\int_{-۱}^{+۱}(S_l(x)f(x) - S_u(x)f(x))dx. \qquad (۱۴-۱۹)$$

چون $\lim_{\epsilon\to ۰}\epsilon\log\epsilon = ۰$ پس فرایند حدگیری معتبر است. در نتیجه، بنابر رابطه‌های (۱۴.۱۷)، داریم $\int\int_B f(z)dxdy = \int_{-۱}^{۱} f(x)dx$.

اکنون گشتاورهای مختلط مراتب بالاتر، از رابطهٔ (۱۱.۳۲) به‌دست می‌آیند.

$$\int_B\int \overline{z}^p f(z)dxdy = \frac{۱}{۲i(p+۱)}\int_{\partial B} S^{p+۱}(z)f(z)dz \qquad (۱۴-۲۰)$$

$$= \frac{۱}{۲i(p+۱)}\int_{-۱}^{+۱}(S_i^{p+۱}(x) - S_u^{p+۱}(x))f(x)dx$$
$$= \frac{۱}{۲i(p+۱)}\int_{-۱}^{+۱}\zeta_p(x)f(x)dx,$$

که در آن

$$\zeta_p(x) = \left(\frac{۱}{\pi}\log\left(\frac{e^{\pi x}e^{\pi}-۱}{e^{\pi}-e^{\pi x}}\right)+i\right)^{p+۱} - \left(\frac{۱}{\pi}\log\left(\frac{e^{\pi x}e^{\pi}-۱}{e^{\pi}-e^{\pi x}}\right)-i\right)^{p+۱}$$

$$= ۲iIm\left(\frac{۱}{\pi}\log\left(\frac{e^{\pi x}e^{\pi}-۱}{e^{\pi}-e^{\pi x}}\right)+i\right)^{p+۱} \qquad (۱۴-۳)$$

به عنوان مثالی خاص، به‌ازای $p = ۱$ به‌دست می‌آوریم

$$\int_B \int \overline{z} f(z) dx dy = \frac{۱}{\pi} \int_{-۱}^{+۱} \log \left(\frac{e^{\pi x} e^{\pi} - ۱}{e^{\pi} - e^{\pi x}} \right) f(x) dx \qquad (۲۲ - ۱۴)$$

به ازای $p = ۲$ داریم

$$\int \int_B \overline{z}^۲ f(z) dx dy = \frac{۱}{\pi^۲} \int_{-۱}^{+۱} \log^۲ \left(\frac{e^{\pi x} e^{\pi} - ۱}{e^{\pi} - e^{\pi x}} \right) f(x) dx \qquad (۲۳ - ۱۴)$$

$$- \frac{۱}{۳} \int_{-۱}^{+۱} f(x) dx$$

اکنون، رابطهٔ (۱۵.۱۴) را با جستجوی ناحیه‌ای چون B که برای آن رابطهٔ

$$\int \int_B f(z) dx dy = \int_{-۱}^{+۱} f(x) h(x) dx \qquad (۲۴ - ۱۴)$$

به ازای تابع وزن ثابتی چون $h(x)$ برقرار است، تعمیم می‌دهیم. در رابطهٔ (۱۲.۱۴) در نظر می‌گیریم $L_\eta(f) = \int_{-۱}^{+۱} f(\eta) h(\eta) d\eta$. حال با فرض اینکه $m(w)$ روی محور حقیقی، حقیقی است، رابطهٔ (۱۲.۱۴) به معادلهٔ انتگرال

$$m(w) = \frac{w}{\pi} \int_{m^{-۱}(-۱)}^{m^{-۱}(۱)} \frac{h(m(u)) du}{۱ - mu} \qquad (۲۵ - ۱۴)$$

تبدیل می‌شود. با فرض اینکه در فاصلهٔ (۱، ۱ـ) $h(x) \geq ۰$، و اینکه $h(x) = h(-x)$ و $\int_{-۱}^{+۱} h(x) dx > ۰$، اف. استنگر ثابت کرده است که نگاشت $m(u)$ چنان وجود دارد که در (۲۵.۱۴) صدق می‌کند و دایره واحد را روی ناحیهٔ ساده B که شامل (۱، ۱ـ) است می‌نگارد.

وقتی انتگرال دوگانهٔ $\int \int_B f(z) dx dy$ دارای نمایش دیگری چون $L(f)$ باشد، آنگاه ساختار تکینی تابع شوارتس ∂B و تابع $\psi(z) = L_x(\frac{۱}{z-x})$ یکی است. این مطلب را به حالت $L(f) = \int_a^b g(x) f(x) dx$، $(-\infty < a < b < \infty)$ توسعه خواهیم داد. در اینجا $\psi(z) = \int_a^b \frac{g(x)}{z-x} dx$ ثابت شده که بهتر است g را از ردهٔ توابع پیوسته در فاصله

$a < x < b$ که در یک شرط لیپشیتر صدق می‌کنند ولی احتمالاً در نقاط انتهایی a و b نقاط تکین انتگرال‌پذیر دارند انتخاب کنیم. به‌طور دقیقتر، فرض می‌کنیم.

(۱) به‌ازای هر زیربازهٔ بسته $\overline{\pounds}$ از $a < x < b$، g در یک شرط لیپشیتر صدق کند؛ یعنی اعداد مثبت A و η چنان وجود داشته باشند که به‌ازای هر $x_1, x_2 \in \overline{\pounds}$ داریم
$$| g(x_1) - g(x_2) | \leq A \, | x_1 - x_2 |^{\eta}$$

(۲) در یک همسایگی a یا b، $g(x)$ به صورت

$$g(x) = \frac{g^*(x)}{(x-c)^{\alpha}} \qquad 0 \leq \alpha < 1 \qquad \text{به ازای یک عدد،}$$

باشد؛ که در آن C مساوی با a یا b بوده و $g^*(x)$ در فاصلهٔ $a \leq x \leq b$ در شرط لیپشیتز (۱) صدق کند.

ردهٔ توابعی را که در شرایط (۱) و (۲) صدق می‌کند با H^* نشان می‌دهیم. می‌دانیم که اگر $g \in H^*$ آنگاه انتگرال کوشی

$$\psi(z) = \int_a^b \frac{g(x)dx}{z-x} \qquad (۲۶ - ۱۴)$$

در سراسر صفحهٔ مختلط که از آن بازهٔ $a \leq x \leq b$ حذف شده باشد تحلیلی است. به‌علاوه، این تبدیل انتگرال را می‌توان به فرمول پلملج ـ استیلیس

$$\psi(x - i0) - \psi(x + i0) = 2\pi i g(x) \qquad a < x < b\text{،}$$
$$(۲۷ - ۱۴)$$

تبدیل کرد.

قضیه. فرض می‌کنیم B یک ناحیهٔ (باز) کراندار همبندساده با مرز تحلیلی ∂B باشد. همچنین، فرض می‌کنیم $[a, b]$ زیرمجموعه‌ای از B و $S(z)$ تابع شوارتس ∂B باشد، $g \in H^*$ و $\psi(z)$ توسط رابطهٔ (۲۶.۱۴) داده شده باشد. در این صورت، $S(z)$ به صورت رابطهٔ

$$S(z) = \psi(z) + \phi(z) \qquad (۲۸ - ۱۴)$$

خواهد بود که در آن $\phi(z) \in QC(B)$ اگر و تنها اگر

$$\int_B \int f(z)dxdy = \pi \int_a^b g(x)f(x)dx \qquad (۱۴-۲۹)$$

به‌ازای هر $f \in QC(B)$

اثبات. فرض می‌کنیم رابطهٔ (۲۸.۱۴) برقرار باشد. در این صورت، به‌ازای هر $f \in QC(B)$، داریم

$$\begin{aligned}
\int_B \int f(z)dxdy &= \frac{۱}{۲i} \int_{\partial B} S(z)f(z)dz \\
&= \frac{۱}{۲i} \int_{\partial B} (\psi(z) + \phi(z))f(z)dz \\
&= \frac{۱}{۲i} \int_{\partial B} \psi(z)f(z)dz \\
&= \frac{۱}{۲i} \int_{\partial B} \left(\int_a^b \frac{g(x)dx}{z-x} \right) f(z)dz \\
&= \pi \int_a^b \frac{g(x)}{۲\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z-x} dx \\
&= \pi \int_a^b g(x)f(x)dx
\end{aligned}$$

لازم به ذکر است که تعویض جای علامتهای انتگرال، با توجه به فرضهای داده شده موجه است.

برعکس، فرض می‌کنیم رابطهٔ (۱۴. ۲۹) به‌ازای هر $f \in QC(B)$ برقرار باشد. در این صورت، با استدلالی مشابه استدلال فوق داریم

$$\frac{۱}{۲i} \int_{\partial B} S(z)f(z)dz = \frac{۱}{۲i} \int_{\partial B} \psi(z)f(z)dz.$$

بنابراین، به ازای هر $f \in QC(B)$، $\int_{\partial B} S(z) - \psi(z)f(z)dx = ۰$ در این حالت، با توجه به قضیهٔ والش، رابطه (۱۴. ۲۸) نتیجه می‌شود.

رابطهٔ بین این اتحادها و فرمول. پلملج رابطه (۱۴. ۲۷) بسیار جالب است.

فرض می‌کنیم به‌ازای $a < x < b$، داشته باشیم $\lim_{y \to \circ^+} \psi(x + iy) = \psi_u(x)$، و $\lim_{y \to \circ^+} \psi(x - iy) = \psi_l(x)$. در این صورت، به‌ازای هر $a < x < b$، از رابطهٔ (۲۸.۱۴) نتیجه می‌شود که $\lim_{y \to \circ^+} S(x + iy)$ وجود دارد و مساوی است با یک $S_u(x)$ و به علاوه $\lim_{y \to \circ^+} S(x - iy)$ وجود دارد و مساوی است با یک $S_l(x)$. بنابر رابطهٔ (۱۴. ۲۷)، داریم $S_l(x) - S_u(x) = ۲\pi i g(x)$. حال،

$$\int_B \int f(z) dx dy = \frac{۱}{۲i} \int_{\partial B} S(z) f(z) dz$$

با «انقباض» مسیر انتگرال‌گیری ∂B به پاره خط $[a, b]$ که دو بار طی می‌شود (با فرضهای مناسب) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{۱}{۲i} \int_{\partial B} S(z) f(z) dz = \frac{۱}{۲i} \int_{-۱}^{+۱} S_l(x) f(x) dx - \frac{۱}{۲i} \int_{-۱}^{+۱} S_u(x) f(x) dx$$
$$= \pi \int_{-۱}^{+۱} g(x) f(x) dx$$

بنابراین، فرمول (۲۹.۱۴) تأیید می‌شود (به‌رابطه (۴۸.۱۱) نیز نگاه کنید).

اکنون، به یک نتیجه جالب از اتحاد (۱۵.۱۴) اشاره می‌کنیم.

لم. فرض می‌کنیم B یک ناحیه کراندار در صفحه مختلط باشد. در این صورت دنباله‌ای از قرصهای $C_n : | z - z_n | < r_n$، $(n = ۱, ۲, \cdots)$ وجود دارند، به‌طوری که (۱) C_n زیرمجموعه‌ای از B است، (۲) این قرصها قسمت مشترک ندارند، و (۳) مساحت $(B) = \sum_{n=۱}^{\infty} \pi r_n^۲ =$ مساحت$\sum_{n=۱}^{\infty} (C_n)$.

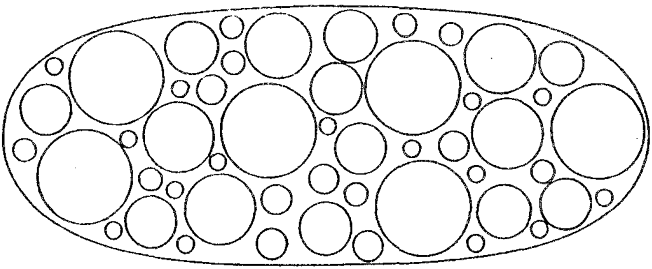
این دستگاه دوایر را یک هسته‌بندی کامل B می‌نامند. این قضیه را می‌توان به آسانی اثبات کرد.

لم. فرض می‌کنیم C نمایش دایرهٔ $| z - z_\circ | < r$ باشد. اگر $f \in QC(C)$ آنگاه $\int_C \int f(z) dx dy = \pi r^۲ f(z_\circ)$.

این لم صورتی از قضیهٔ میانگین برای توابع تحلیلی بوده و نمونه ساده‌ای از اتحادهای بعد از رابطهٔ (۱۴. ۳) است.

قضیه. فرض می‌کنیم B ناحیهٔ (۱۵.۱۴) را نشان دهد همچنین، فرض می‌کنیم $C_n: |z_n - z| < r_n$ یک بسته‌بندی کامل B توسط قرصها باشد (به شکل ۱۴. ۴ نگاه کنید) اگر $f(z) \in QC(B)$ آنگاه

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty} r_k^2 f(z_k) \qquad (۱۴ - ۳۰)$$



شکل۱۴-۴

فرمولی به صورت $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} w_k f(x_k)$ را که در آن x_kها متمایزند یک تربیع کامل می‌نامند. قضیهء فوق، نشان می‌دهد که چگونه می‌توان تربیعهای کامل (با متغیر مختلط) را برای توابع تحلیلی به‌دست آورد. می‌دانیم که برای ردهٔ $C[a, b]$ از توابع حقیقی و پیوسته روی $[a, b]$، تربیهای کامل وجود ندارند. اس. هابر نشان داده است که این تربیعها در خصوص ردهٔ $Lip^{\alpha}[a, b]$ $(\alpha > 0)$وجود دارند. تربیعهای کامل هابر

مطلقاً همگرا نیستند. فرمول (۱۴. ۳۰) را باید به جای یک روش عملی برای انتگرال گیری عددی، یکی از ظرافتهای نظریه تربیع دانست. در مورد بسته‌بندی‌های کامل، می‌دانیم که $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \infty$ بنابراین، همگرایی رابطهٔ (۱۴. ۳۰) اگر مطلق هم باشد بسیار کند است.

تاکنون، چندین فرمول خاص را نتیجه گرفته‌ایم که نمایشهای تابعی متفاوتی را از انتگرالهای دوگانه $\int\int_B f(z)dxdy$ توابع تحلیلی به‌دست می‌دهند. این فرمولها، عبارتند از فرمولهای (۳۱.۱۱)، (۳۴.۱۱)، (۴۰.۱۱)، (۳.۱۴) و (۱۵.۱۴) همچنین، معادلهٔ تابعی (۶.۱۴) را در مورد مسأله وارون «به‌ازای تابعک داده شدهٔ L، ناحیه B را چنان پیدا کنید که به‌ازای هر تابع تحلیلی f روی B داشته باشیم $\int_B\int f(z)dxdy = L(f)$» به‌دست آورده‌ایم. این ناحیهٔ B را در صورت وجود، می‌توان ناحیه مشخصه تابعک L نامید. بدین ترتیب، برای تجسم L روی یک مبنای هندسی عام معمولی روش آسانی به دست می‌آید. بسیاری از تابعکهای موجود در آنالیز عددی، تابعکهای خطای متناظر با قواعد مختلف درونیابی، انتگرال‌گیری تقریبی و غیره هستند. این تابعکها، معمولاً ناحیهٔ مشخصه‌ای دارند که مطالعهٔ این نواحی و مقایسه آنها در چهارچوب قواعد مختلف به نتایج جالبی می‌انجامد.

مثلاً، مسأله انتگرال‌گیری تقریبی $\int_{-1}^{+1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{m} c_k f(x_k)$ را در نظر می‌گیریم ناحیه B مذکور در رابطهٔ (۱۴. ۱۵)، ناحیهٔ مشخصه تابعک $L(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ است به‌طوری که قبلاً دیده‌ایم. تابعکهای تقریب کنندهٔ $L_A(f) = \sum_{k=1}^{m} c_k f(x_k)$ و نواحی مشخصهٔ آنها را می‌توان توسط نگاشت گویای

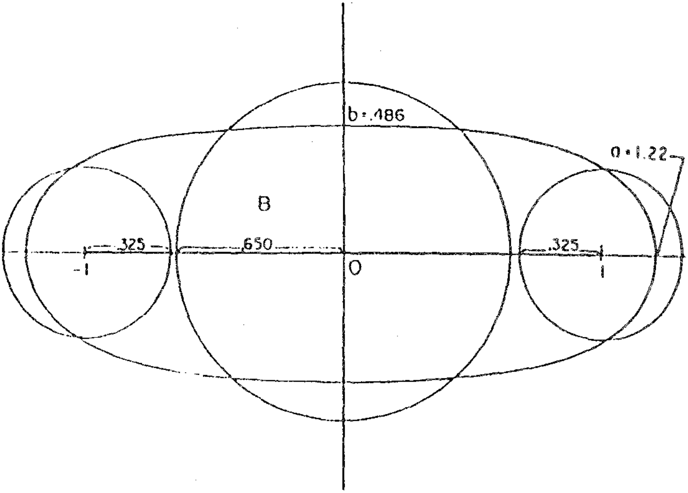
$$m(w) = \frac{aw(1-\beta_1 w)\cdots(1-\beta_p w)}{(1-\alpha_1 w)\cdots(1-\alpha_n w)}$$

به دست‌آورد، که در آن $n \geq p+1$ و α_iها متمایزند. اگر $C_i \geq 0$، نواحی مشخصه را می‌توان با روش آزمایش و خطا و با استفاده از

$$\int\int_{|z-z_0|\leq r} f(z)dxdy = \pi r^2 f(z_0)$$

همان‌گونه که در مورد دسته‌بندی‌ها انجام شد، بدست آورد. با کم کردن دو ناحیه، یک ناحیه برای تابعک خطا به‌دست می‌آوریم. شکل ۵.۱۴، نتیجه این کار را در مورد خطای قاعدهٔ سیمپسون یعنی $R(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \frac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1))$ نشان

می‌دهد. ناحیه بیضی شکل توسط سه دایره تقریب زده شده است. ناحیهٔ تفاضلی D ، به صورت ناحیهٔ تفاضلی اول منهای ناحیهٔ تفاضلی دوم توصیف می‌شود. یعنی، D شامل ناحیهٔ بیضی شکل می‌باشد که ۱+ با آن اضافه شده و سه دایره که ۱− به آنها الحاق شده است. با این تعبیر، $R(f) = \int\int_D f(z)dxdy$. چون در قاعدهٔ سیمپسون دقیقاً از چند جمله‌ای‌های درجه دوم انتگرال می‌گیریم. اتحادهای $\int\int_D dxdy = \int\int_D zdxdy = \int\int_D z^2dxdy = 0$ برقرارند



شکل۱۴-۵

۱۵

توابع شوارتس و تکرار

هدف نظریهٔ تکرار، مطالعهٔ ویژگیهای مجموعه تبدیلات متوالی $\tau^n(P)$ $(n = ۰, ۱, ۲, \cdots)$ نقطهٔ P است سوالات زیر جزو سئوالات مورد علاقه هستند.

(الف) زیرمجموعه‌های ناوردای τ کدامند؟ نقاط ثابت τ چه نقاطی هستند؟ نقاط تناوبی (دورهای) τ کدامند؟ به عبارت دیگر، نقاط $P_۱$، $P_۲$، $\cdots$، P_k، با شرط $\tau(P_i) = P_{i+۱}$ که در آنها اندیس‌ها به پیمانهٔ k محاسبه می‌شوند چه نقاطی هستند؟ خمهای ناوردا کدامند؟

(ب) ویژگیهای همگرایی $\tau^n(P)$ چیستند؟ مجموعه‌های حدی کدامند؟

(پ) ویژگیهای ارگودیکی τ کدامند؟ یعنی، دربارهٔ میانگینهای $\tau(p)$، $\cdots$،$\tau^n(p)$، چه می‌توان گفت؟

(ت) چگونه می‌توان معادلات را با استفاده از تکرار به سرعت حل کرد؟

حتی در مورد تبدیلهای τ با ساختار تحلیلی بسیار ساده، پاسخ به این پرسشها ممکن است بسیار پیچیده باشد و هیچ روش تحلیلی مشخص را برای پاسخ دادن به آنها، موجود نباشد. برخی از پژوهشگران، اخیراً به منظور کسب آگاهی در مورد ماهیت τ^n از کامپیوتر استفاده کرده‌اند (به‌وسیلهٔ نمایش تکرارهای متوالی روی صفحه مانیتور).

در این فصل، با ساده‌ترین تبدیلهای τ فضای دوبعدی سروکار داریم و تنها توجه خود را معطوف به پرسشهایی می‌کنیم که در پاسخ آنها تابع شوارتس نقش دارد.

۱.۱۵ نقاط ثابت ـ کلیات . فرض می‌کنیم $\tau : R^n \to R^n$ خود نگاشتی از فضای n ـ بعدی باشد.

مجموعهٔ نقاط $\mathcal{R}$ تحت τ ناورداست* اگر و تنها اگر $\tau(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ نقطه P یک نقطه ثابت (یا یک نقطه تعادل) τ است، اگر $\tau(P) = P$.
به‌ازای نقطه $P_\circ$ مسألهٔ

$$P_{n+1} = \tau(P_n) = \tau^{n+1}(P_\circ) \quad (n = \circ, 1, 2, \cdots) \quad (1-15)$$

را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ ثابت P را جاذب یا موضعاً همگرا می‌نامند، اگر همسایگی π از P چنان وجود داشته باشد که وقتی $P_\circ \in \pi$، بتوان تکرارهای متوالی (۱.۱۵) را تشکیل داد و $\lim_{n\to\infty} P_n = P$.

مفهوم پایداری، تعاریف مختلفی دارد، و ما در اینجا تعریف زیر را به کار خواهیم برد: τ را در نقطه ثابت P پایدار می‌نامیم، اگر هر همسایگی π از P شامل یک همسایگی ناوردا باشد.

فرض می‌کنیم τ ناحیه $\mathcal{R}$ را به خود آن بنگارد. در این صورت، τ یک نگاشت انقباضی‌است، اگر عدد ثابت k، $1 > k > \circ$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $P, \mathbb{Q} \in \mathcal{R}$ داشته باشیم $\| \tau(P) - \tau(Q) \| \leq k \| P - Q \|$ نماد $\|\|$، نشان دهندهٔ نرم اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$، یا یک تابع فاصله در یک فضای متری است.

اهمیت نگاشتهای انقباضی، در این واقعیت نهفته است که تکرارهای متوالی آنها به یک نقطهٔ ثابت همگراست. در همین ارتباط، فرمول‌بندی زیر از قضیهٔ نگاشت انقباضی از کلیت کافی برخوردار است:

قضیه. فرض می‌کنیم X یک فضای متری کامل و $\tau : X \to X$ یک نگاشت انقباضی باشد. در این صورت: (۱) τ در X فقط یک نقطهٔ ثابت x^* دارد. (۲) $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$؛ که در آن $x_{n+1} = \tau(x_n)$ $(\circ, 1, 2, \cdots) = n$ و $x_\circ \in X$ دلخواه است.

$$\| x_n - x^* \| < \frac{k^n}{1-k} \| x_1 - x_\circ \|$$

قضیهٔ زیر، یک شرط کافی در مورد نقطهٔ جاذب است.

*) در این فصل، وقتی τ تحلیلی است معمولاً $\mathcal{R}$ یک کمان تحلیلی می‌باشد؛ به‌طوری که کافی است و فرض کنیم که $\mathcal{R}, \tau(\mathcal{R})$ هر دو زیرکمانهایی از یک کمان تحلیلی هستند.

قضیه. فرض می‌کنیم تبدیل

$$\tau : x'_i = f_i(x_1, \cdots, x_n) \quad (i = 1, 2, \cdots n) \qquad (15-2)$$

در یک همسایگی از نقطه ثابت $P = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ متعلق به ردهٔ C' باشد. همچنین، فرض می‌کنیم

$$J = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right)_{x_i = x_i^*}$$

ماتریس ژاکوبین این تبدیل در P بوده و λ^+ ماکزیمم قدرمطلق‌های مقادیر ویژهٔ J باشد. در این صورت، P یک نقطهٔ ثابت جاذب است، اگر و تنها اگر

$$\lambda^+ < 1 \qquad (15-3)$$

ببینیم این شرط، در حالت خاص

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \qquad (15-4)$$

یا $z' = x' + iy' = f + ig = F(z, \overline{z})$

که در آن f و g توابع تحلیلی هستند، چه معنایی دارد. داریم

$$\lambda = \frac{1}{2}(T \pm \sqrt{T^2 - 4 \mid J \mid}) \qquad (15-5)$$

که در آن $\mid J \mid = \det J$ و $T = d_x + g_y =$ اثر (J). با استفاده از رابطهٔ (۱۴.۱۱) و بر حسب مختصات مزدوج، داریم.

$$T = F_z + \overline{F}_z, \mid J \mid = \begin{vmatrix} F_z & F_{\overline{z}} \\ \overline{F_{\overline{z}}} & \overline{F}_z \end{vmatrix} \qquad (15-6)$$

در حالتهای بسیاری خاص $F(z,\overline{z}) = f(z)$ و $\overline{F}(z,\overline{z}) = \overline{f}(z)$، داریم $T = \overline{f'(z)} + f'(z)$ و $|J| = |f'(z)|^2$ بنابراین $\lambda_1 = f'(z)$ و $\lambda_2 = \overline{f'(z)}$ در یک نقطهٔ ثابت z^*، شرط $\lambda^+ < 1$ به $|f'(z^*)| < 1$ تبدیل می‌شود.

در این مورد، یک اثبات به روش متغیرهای مختلط ارائه می‌دهیم.

قضیه. فرض می‌کنیم $f(z)$ در یک همسایگی از نقطهٔ $z = 0$ تحلیلی باشد. همچنین، فرض می‌کنیم $f(0) = 0$ و $f'(0) = s$، $(0 < |s| < 1)$ در این صورت $z = 0$ یک نقطه جاذب برای تکرارهای f است.

اثبات. ابتدا باید توجه داشت که صفرهای $f(z)$ باید منفرد باشند. بنابراین، $\rho_1 > 0$ وجود دارد که $z = 0$ تنها صفر f در $|z| < \rho_1$ است. چون $\dfrac{f(z)}{z} = s + bz + cz^2 + \cdots$، پس به‌ازای یک عدد مفروض t با شرط $|s| < t < 1$، می‌توان $\rho_2 > 0$ را چنان یافت که به‌ازای $|z| < \rho_2$ داشته باشیم $\left|\dfrac{f(z)}{z}\right| < t$ قرار می‌دهیم $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$ نقطه دلخواه z_0 را با شرط $0 < |z_0| < \rho$ در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$z_1 = f(z_0) \neq 0, \left|\frac{z_1}{z_0}\right| = \left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| < t$$

بنابراین، $0 < |z_1| < t\,|z_0| < t_\rho < \rho$ ، به همین ترتیب، $z_2 = f(z_1)$؛ و در نتیجه $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \left|\dfrac{f(z_1)}{z_1}\right| < t$. بنابراین، $0 < |z_2| < t\,|z_1| < t^2 p < \rho$ به طور کلی، $0 < |z_n| < t^n\rho < \rho$؛ پس دنباله $\{z_n\}$ از نقاطی متمایز تشکیل شده است و $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. این همگرایی، در زیر مجموعه‌های بستهٔ $|z| < p$ یکنواخت است.

اگر $f(z)$ در ناحیه بسته، کراندار و محدب R تعریف شده باشد، می‌توان نشان داد که یک شرط لازم و کافی برای اینکه $f(z)$ یک نگاشت انقباضی باشد، آن است که روی $\mathbb{R}$ داشته باشیم $|f'(z)| \leq k < 1$. با وجود این، مسلماً شرط انقباض برای به‌دست آوردن یک نقطهٔ ثابت لازم نیست. در همین رابطه، علاوه بر معادلهٔ (۳.۱۵)، قضیهٔ نقطهٔ ثابت هنریچی را نیز داریم:

قضیه. فرض می‌کنیم ناحیه R داخل یک خم جردن C باشد. همچنین، فرض می‌کنیم $f(z)$ در R عادی و تحلیلی و روی $R+C$ پیوسته باشد و f، $R+C$ را به توی R بنگارد. در این صورت، f فقط یک نقطهٔ ثابت دارد و دنبالهٔ تکرارهای سادهٔ $z_{n+۱} = f(z_n)$ با شروع از نقطهٔ دلخواه $z_۰ \in R+C$ به این نقطهٔ ثابت همگرا است.

اثبات. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که C دایرهٔ واحد است. فرض قضیه نتیجه می‌دهد که $\max_{|z|\leq ۱} | f(z) | < ۱$. s یک نقطهٔ ثابت f است، اگر و تنها اگر یک صفر تابع $f(z) - z$ باشد. از قضیهٔ روشه (به عنوان نمونهٔ نگاه کنید به آلفرس [A1]، صفحه ۱۲۴) نتیجه می‌شود که تعداد صفرهای $f(z) - z$ در $| z |\leq ۱$، مساوی است با تعداد صفرهای z یعنی یک ریشه.

اگر s این نقطهٔ ثابت باشد، تبدیل دو خطی

$$T(z) = \frac{z-s}{۱ - z\bar{s}}$$

قرص $| z |\leq ۱$ را به روش خودش می‌نگارد، و دایرهٔ واحد را حفظ می‌کند و s را به صفر می‌نگارد. (نگاه کنید به صفحه ۹۶) وارون این تابع را با $T^{-۱}$ را نشان داده و تابع مرکب

$$G = TfT^{-۱}$$

را که o نقطهٔ ثابت آن است، در نظر می‌گیریم.

این تابع روی $| z |\leq ۱$ پیوسته است و این قرص را به یک زیرمجموعهٔ بستهٔ $| z |< ۱$ می‌نگارد. بنابراین، $۰ \leq k = \max_{|z|\leq ۱} | G(z) | < ۱$. فرض می‌کنیم $k > ۰$؛ در غیر این صورت G و در نتیجه f ثابتند و همگرایی در یک مرحله رخ می‌دهد. مقدار تابع $\frac{G}{k}$ در نقطه ۰، صفر است و روی $| z |\leq ۱$ در $| \frac{G}{k} |\leq ۱$ صدق می‌کند. بنابر لم شوارتس (به عنوان مثال، نگاه کنید به آلفرس [A1]، صفحه ۱۱۰ در $| z |\leq ۱$ داریم $| \frac{G(z)}{k} |\leq |z|$ و بنابراین $| G(z) |\leq k|z|$. اکنون، قرار می‌دهیم $w_n = T(z_n)$ در این صورت داریم.

$$w_{n+۱} = T(z_{n+۱}) = T(f(z_n)) = TfT^{-۱}(w_n) = G(w_n),$$

و

$$| w_{n+1} | \leq k | w_n |$$

در نتیجه $| w_n | \leq k^n | w_0 |$. پس $w_n \to 0$، و از آنجا $z_n = T^{-1}(w_n) \to T^{-1}(0) = s$.

حال، اگر C یک خم جردن کلی باشد، قضیهٔ نگاشت ریمان را با فرمولبندی اوسگود ـ کاراتئودوری به‌کار می‌بریم که نشان می‌دهد یک تابع تحلیلی g وجود دارد به‌طوری که R را به‌طور همدیس به روی $| z |< 1$ و $R + C$ را به صورت یک به یک به روی $| z |\leq 1$ می‌نگارد. به عنوان نمونه، به صفحات ۹۲ـ۹۸ کتاب آلفرس [A1] نگاه کنید).

اکنون، تابع مرکب $h = gfg^{-1}$ در شرایط قضیه برای قرص واحد صدق می‌کند. اگر $w_n = g(z_n)$، آنگاه $w_{n+1} = h(w_n)$ بدین ترتیب، حکم از قسمت اول اثبات نتیجه می‌شود.

۲.۱۵. تکرار توابع شوارتس. برای یک متخصص آنالیز تابعی یا آنالیز عددی، معادلهٔ $z = \overline{S}(z)$ در مورد خم تحلیلی C به‌طور اجتناب ناپذیری اشاره بر تکرار و برقراری شرایط قضیهٔ نگاشت انقباضی دارد. متخصص آنالیز عددی، با معادله $x = f(x)$ که در آن x عموماً متغیر حقیقی است سروکار دارد. با وجود این، تفاوتهای قابل ذکری نیز وجود دارند. نگاشت $z \to \overline{S(z)}$، نمی‌تواند یک انقباض باشد؛ در غیر این صورت می‌بایست ریشهٔ منحصر به فردی می‌داشت که غیر ممکن است به‌علاوه، روی C داریم $| S'(z) |= 1$ نکتهٔ دیگر این که تکرار $z_{n+1} = \overline{S(z_n)}$ دُوری بوده (زیرا $S\overline{S} = I$) و در نتیجه واگراست، مگر داشته باشیم $z_1 \in C$. به هر ترتیب، ماهیت تحلیلی $\overline{S(z)}$ به صورت دیگری است.

با کمک گرفتن از هندسه، می‌توان چنین استدلال کرد که به‌ازای نقطه z نزدیک به C، $\overline{S(z)}$ تقریباً منعکس هندسی z نسبت به C است. در نتیجه بنابر تذکر بعد از رابطهٔ (۷.۲۱)، نقطهٔ $\frac{1}{2}(z + s(z))$ بسیار نزدیک به C است. این مطلب، ما را به معادلهٔ تکرار

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + \overline{S(z_n)}) \qquad (۷-۱۵)$$

یا به طور کلی*

$$z_{n+۱} = (۱-t)z_n + t\overline{S(z_n)} \quad (۰ < t < ۱) \qquad (۸-۱۵)$$

سوق می‌دهد. در واقع، ثابت خواهیم کرد که به‌ازای هر نقطهٔ به‌قدر کافی نزدیک به C، دنبالهٔ (۸.۱۵) حداقل با سرعت خطی، و دنباله (۷.۱۵) حداقل با سرعت درجه دوم به $z^* \in C$ همگرا هستند.

در مورد تکرار (۱۵. ۸)، داریم

$$F(z, \overline{z}) = (۱-t)z + t\overline{S(z)} \quad (|۱-۲t| < ۱)$$

بنابر رابطهٔ (۵.۱۵)، داریم $\lambda = (۱-t) \pm t \mid S'(z) \mid$ چون در طول C رابطهٔ $\mid S'(z) \mid = ۱$ برقرار است، $\lambda^+ = ۱$ بنابراین، تکرار (۸.۱۵) مثال جالبی است حاکی از این که شرط $\lambda^+ < ۱$ برای همگرایی در یک همسایگی نقطه ثابت لازم نیست. (البته حد z_n به نقطهٔ آغازی $z_۰$ وابسته است).

قابل توجه است که اگر C دایره $\mid z \mid = R$ باشد، دنبالهٔ (۱۵. ۷) به

$$z_{n+۱} = \frac{۱}{۲}(z_n + \frac{R^۲}{\overline{z}_n}) \qquad (۹-۱۵)$$

تبدیل می‌شود، که در حالت حقیقی، همان الگوریتم ریشهٔ دوم است. تکرار (۸.۱۵) عبارت است از

$$z_{n+۱} = (۱-t)z_n + \frac{tR^۲}{\overline{z}_n} \qquad (۱۰-۱۵)$$

حالت حقیقی این تکرارها، همان روش نیوتن

$$z_{n+۱} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

است که روی تابع $f(z) = (z^۲ - R^۲)^{\frac{۱}{۲}t}$ اعمال می‌شود.

*) تاکنون تکرارهای عددی پیچیده‌ای مورد بررسی قرارگرفته‌اند ـ به عنوان مثال، نگاه کنید به تروب [T1] و رال [RI] اما، ما در این کتاب به تکرارهایی اکتفا می‌کنیم که از الگوی «ریشهٔ دوم» پیروی کرده و توسط خود معادله تابعی القا می‌شوند.

قبل از هر چیز، باید توجه کرد که اگر C یک کمان تحلیلی باشد و $z_\circ \in C$، آنگاه می‌توان یک همسایگی به قدر کافی کوچک $U = U(z_\circ)$ از $z_\circ$ یافت که اگر $z \in U$، آنگاه $(1-t)z + t\overline{S(z)} \in U$ ($\circ \leq t \leq 1$). بنابراین، اگر $z_\circ \in U$ آنگاه $z_{n+1} \in U$ و تمام تکرارها در U رخ می‌دهند.

برای اثبات، فرض می‌کنیم $z = f(t), z_\circ = f(t_\circ)\ (\circ \leq t \leq 1, \circ < t_\circ < 1)$ نمایش پارامتری C باشد در این حالت، یک قرص $| t - t_\circ | \leq \rho$ وجود دارد که f آن را به صورت تک مقداری روی مجموعه‌ای چون v می‌نگارد. اکنون، بنابر قضیهٔ بسیار معروف اِستادی (نگاه کنید به هیل [H4]، جلد دوم، صفحه ۳۵۹ یک قرص کوچکتر $D : | t - t_\circ | \leq \sigma < p$ وجود دارد که نگاره آن U تحت f محدب است. $z \in U$ را انتخاب می‌کنیم. در این صورت، $f^{-1}(z) \in D$. بنابراین، $\overline{f^{-1}(z))} \in D$ و در نتیجه $f(\overline{f^{-1}(z)}) = \overline{S(z)} \in U$. چون U محدب است، پس $(1-t)z + t\overline{S(z)} \in U$.

با اینحال در اثبات لم زیر از این نکته استفاده نمی‌شود.

لم . فرض می‌کنیم C یک خم تحلیلی بسته (یعنی مرزیک ناحیهٔ همبند ساده) با تابع شوارتس $S(z)$ باشد و $S(z)$ در یک ناحیهٔ بسته ستاره مانند B که C در داخل آن است یک شاخهٔ تک مقداری عادی داشته باشد، همچنین، فرض می‌کنیم $z_\circ \in C$ و قرار می‌دهیم.

$$S(z) = S(z_\circ) + S'(z_\circ)(z - z_\circ) + (z - z_\circ)^2 \epsilon(z, z_\circ) \qquad (15-11)$$

در این صورت، می‌توان عدد ثابت M را چنان یافت که

$$| \epsilon(z, z_\circ) | \leq M \quad \forall z_\circ \in C, z \in B \qquad (15-12)$$

اثبات: یک ناحیهٔ شبه حلقهٔ B^* را می‌توان یافت که B در داخل آن بوده و $S(z)$ در آن عادی تک مقداری باشد. همچنین، می‌توانیم فرض کنیم که مرزهای داخلی و خارجی B خمهای هموار Γ_1, Γ_2 هستند. بنابر صورت مختلط قضیهٔ تیلور با باقیماندهٔ کامل،

به‌ازای نقاط ثابت $z_\circ$ و z_1 داریم

$$\epsilon(z, z_\circ) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{S(t)dt}{(t-z_\circ)^3(t-z)} \qquad (15-13)$$

که در آن G خمی واقع در داخل B^* بوده و z و $z_\circ$ در داخل آن هستند. با یک استدلال معمولی می‌توانیم G را با $\Gamma_1 - \Gamma_2$ جایگزین کنیم. بنابراین

$$\epsilon(z; z_\circ) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{S(t)dt}{(t-z_\circ)^3(t-z)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{S(t)dt}{(t-z_\circ)^3(t-z)} \qquad (15-14)$$

اگر $S_i = \max_{t\epsilon\Gamma_i} | S(t) |$ برابر با L_i طول Γ_i، $\delta_i =$ مینیمم فاصلهٔ Γ_i از C و $\Delta_i =$ مینیمم فاصله Γ_i از B باشد آنگاه به‌ازای هر $z_\circ \in C$ و هر $z \in B$ داریم

$$| \epsilon(z; z_\circ) | \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{2} \frac{S_i L_i}{\delta_i^3 \Delta_i} \equiv M. \qquad (15-15)$$

فرض می‌کنیم C مانند قبل و به‌ازای یک δ به‌قدر کافی کوچک، $C_{\pm\delta}$ دو خم موازی با C و به فاصلهٔ δ از آن باشند این بدان معنی است که کوتاهترین فاصلهٔ هر نقطهٔ z متعلق به C_δ از C مساوی با δ بوده و $P(z)$ افکنش عمودی z روی C است C در داخل C_δ است، در حالی که $C_{-\delta}$ در داخل C قرار دارد. قرار می‌دهیم $D_\delta = \cup_{\circ \leq \Delta \leq \delta} C_{\pm\Delta}$. D_δ ناحیه‌ای حلقوی بوده و C در داخل آن قرار دارد. و فاصلهٔ تمام نقاط آن از C نابیشتر از δ است.

فرض می‌کنیم t نقطهٔ ثابتی در $| t - \frac{1}{2} | < \frac{1}{2}$ و $\lambda = 1 - 2t$ در این صورت، $| \lambda | < 1$.

به‌ازای C و B (مانند لم ۱ و متغیر σ، قرار می‌دهیم $\tau = | \lambda | + | t | \sigma M$ روشن است که می‌توان σ را طوری کوچک انتخاب کرد که (۱) D_σ در داخل B قرارگیرد و (۲) داشته باشیم $\circ < \tau < 1$.

لم. فرض می‌کنیم $z_\circ \in D_\sigma$. قرار می‌دهیم $z_\text{۱} = (\text{۱} - t)z_\circ + t\overline{S(z_\circ)}$ و فرض می‌کنیم P تابع افکنش فوق باشد. در این صورت

$$| z_\circ - P(z_\circ) | \leq \sigma \quad , \quad | z_\text{۱} - P(z_\circ) | \leq \sigma\tau \quad (\text{۱۶} - \text{۱۵})$$

و $z_\text{۱} \in D_\sigma$.

اثبات. بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم فرض کنیم که $z_\circ$ روی محور موهومی واقع است و $P(z_\circ) = \circ$؛ بدین معنی که C از نقطهٔ صفر می‌گذرد و شیب آن در این نقطه برابر با صفر است. در این صورت با استفاده از روابط (۲۳.۷) و (۱۱.۱۵) می‌توانیم بنویسیم

$$S(z) = z + z^\text{۲}\epsilon(z; \circ) \quad (\text{به‌ازای } z \in B)$$

اکنون، بنابه فرض داریم $z_\circ = i\rho$ و $| \rho | \leq \sigma$، و در نتیجه

$$\overline{S(z_\circ)} = i\rho - \rho^\text{۲}\overline{\epsilon(ip, \circ)}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} z_\text{۱} &= (\text{۱} - t)i\rho + t(-i\rho - \rho^\text{۲}\overline{\epsilon(i\rho, \circ)}) \\ &= (\text{۱} - \text{۲}t)i\rho - t\rho^\text{۲}\overline{\epsilon(i\rho, \circ)} \end{aligned}$$

بنابراین

$$| z_\text{۱} - P(z_\circ) | = | z_\text{۱} | \leq |\lambda|\rho + | t | \rho^\text{۲} M \leq (| \lambda | + | t | \sigma M)\sigma = \tau\sigma < \sigma.$$

داریم $| z_\text{۱} - P(z_\text{۱}) | \leq | z_\text{۱} - P(z_\circ) | \leq \sigma$ (زیرا تصویر $z_\text{۱}$ روی C، $P(z_\text{۱})$ است) و $z_\text{۱} \in D_\sigma$.

قضیه. فرض می‌کنیم $z_\circ \in D_\sigma$. در این صورت می‌توان تکرارهای

$$z_{n+\text{۱}} = (\text{۱} - t)z_n + t\overline{S(z_n)} \quad (n = \circ, \text{۱}, \cdots) \quad (\text{۱۷} - \text{۱۵})$$

معنی دارند و دنبالهٔ تولید شدهٔ $\{z_n\}$ به $z^* \in C$ همگراست.

اثبات. بنابر لم ۲، $z_1 \in D_\sigma$؛ بنابراین $S(z_1)$ تعریف شده است و می‌توان z_2 را تعریف کرد. اکنون، این وضع را تکرار می‌کنیم. با استفاده مجدد از لم ۲ و با جایگذاری به جای z_0 داریم

$$| z_1 - P(z_1) | \leq \sigma\tau, | z_2 - P(z_1) | \leq \sigma\tau^2, | z_2 - P(z_2) | \leq \sigma\tau^2, \cdots,$$
$$| z_n - P(z_n) | \leq \sigma\tau^n, | z_{n+1} - P(z_n) | \leq \sigma\tau^{n+1}.$$

بنابراین $| z_{n+1} - z_n | \leq \sigma(1+\tau)\tau^n$، از این رو $\sum_{i=0}^{\infty} | z_{i+1} - z_i | \infty$ و در نتیجه $\sum_{i=0}^{\infty}(z_{i+1} - z_i)$ همگراست . چون $\sum_{i=0}^{n}(z_{i+1} - z_i) = z_{n+1} - z_0$، z_{n+1} نیز همگراست حد z_{n+1} را z^* می‌نامیم. داریم $z^* \in D_\sigma$، با فرض $n \to \infty$ در رابطهٔ (۸.۱۵)، بنابر پیوستگی داریم $z^* = (1-t)z^* + t\overline{S(z^*)}$ یا $z^* = \overline{S(z^*)}$ ، و در نتیجه $z^* \in C$.

قضیه. سرعت همگرایی z_n به z^* حداقل خطی است. اگر $t = \frac{1}{2}$، این سرعت حداقل درجه دوم است.

اثبات. داریم $z^* - z_n = (z_{n+1} - z_n) + (z_{n+2} - z_{n+1}) + \cdots$

$$| z^* - z_n | \leq | z_{n+1} - z_n | + | z_{n+2} - z_{n+1} | + \cdots$$
$$\leq \sigma(1+\tau)(\tau^n + \tau^{n+1} + \cdots) = \sigma\frac{1+\tau}{1-\tau}\tau^n$$

اگر $t = \frac{1}{2}$، آنگاه $\lambda = 0$ بنابر اثبات قضیهٔ قبل. داریم $| z_0 - P(z_0) | \leq \sigma$ و $| z_1 - P(z_0) | \leq \frac{M}{2}\sigma^2 = \mu\sigma^2$ که در آن $\mu = \frac{M}{2}$ قابل توجه است که $\mu\sigma < 1$. بنابراین، $| z_1 - P(z_1) | \leq M\sigma^2$ و $| z_2 - P(z_1) | \leq \mu(\mu\sigma^2)^2 = \mu^3\sigma^4$. به‌طور کلی، $| z_n - P(z_n) | \leq \frac{1}{\mu}(\mu\sigma)^{2^n}$ و لذا

$$| z_{n+1} - z_n | \leq \frac{1}{\mu}((\mu\sigma)^{2^n} + (\mu\sigma)^{2^{n+1}}).$$

در نتیجه

$$|z^* - z_n| \leq (۲/\mu)[(\mu\sigma)^{۲^n} + (\mu\sigma)^{۲^n+۱} + (\mu\sigma)^{۲^n+۲} + \cdots]$$
$$\leq \frac{۲}{\mu}\frac{(\mu\sigma)^{۲^n}}{۱ - (\mu\sigma)^{۲^n}}$$

۳.۱۵. ناوردایی خمهای تحلیلی. تبدیل τ از صفحه را می‌توان به وسیلهٔ رابطه

$$\tau : \begin{cases} u = f(x, y) \\ v = y(x, y) \end{cases} \qquad (۱۸ - ۱۵)$$

بیان کرد. فرض خواهیم کرد که f و y توابعی تحلیلی، دو متغیره در ناحیهٔ معینی باشند. می‌توانیم (۱۸.۱۵) را بر حسب متغیرهای مزدوج به صورت

$$\begin{aligned} w &= u + iv \\ &= f\left(\frac{z + \overline{z}}{۲}, \frac{z - \overline{z}}{۲i}\right) + ig\left(\frac{z + \overline{z}}{۲}, \frac{z - \overline{z}}{۲i}\right) \end{aligned} \qquad (۱۹ - ۱۵)$$

یا

$$\tau : w = F(z, \overline{z}) \qquad (۲۰ - ۱۵)$$

بنویسیم. بهتر است فرض کنیم $z = ۰$ نقطهٔ ثابت τ است و در نتیجه $F(۰, ۰) = ۰$.
بویژه تبدیل خطی

$$\begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq ۰ \qquad (۲۱ - ۱۵)$$

که در آن a، b، c، d حقیقی هستند به صورت

$$w = Az + B\overline{z} \equiv F(z, \overline{z}) \qquad (۲۲ - ۱۵)$$

درمی‌آید که در آن

$$\begin{cases} A = \frac{۱}{۲}((a+d) + i(c-b)) \\ B = \frac{۱}{۲}((a-d) + i(c+b)). \end{cases} \qquad (۲۳ - ۱۵)$$

این رابطه را می‌توان به صورت ماتریسی

$$\begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \qquad (۲۴ - ۱۵)$$

نوشت. بنابراین

$$P^{-۱} = \frac{۱}{\mid J \mid} \begin{pmatrix} \overline{A} & -B \\ -\overline{B} & A \end{pmatrix}$$

که در آن $\mid J \mid = \mid A \mid^{۲} - \mid B \mid^{۲}$. به‌علاوه، P و $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ متشابهند در نتیجه مقادیر ویژهٔ آنها برابرند (به رابطهٔ (۱۹.۹) نگاه کنید.).

فرض می‌کنیم که خم تحلیلی S با تابع شوارتس $S(z)$ تحت τ ناوردا باشد. اگر z روی کمان S باشد، آنگاه $\overline{z} = S(z)$ اما w نیز روی S است در نتیجه $\overline{w} = S(w)$. بنابراین، $\overline{w} = S(F(z, \overline{z})$ این در حالی است که $\overline{w} = \overline{\tau(z)} = \overline{F(z, \overline{z})} = \bar{F}(\overline{z}, z)$ و بدین ترتیب

$$S(F(z, S(z)) = \overline{F}(S(z), z). \qquad (۲۵ - ۱۵)$$

برعکس، فرض می‌کنیم. که تابع شوارتس $S(z)$ خم تحلیلی S در رابطه (۲۵.۱۵) صدق کند. در این صورت، در $z \in S$ نتیجه می‌شود که $w \in S$. در نتیجه، رابطهٔ (۲۵.۱۵) معادلهٔ تابعی مربوط به ناوردایی یک خم تحلیلی است.

به عنوان مثالی خاص، تحت تبدیل خطی (۱۵. ۲۲)، تابع شوارتس $S(z)$ یک خم تحلیلی ناوردا باید در رابطه

$$S(Az + BS(z)) = \overline{A}S(z) + \overline{B}z \qquad (۲۶ - ۱۵)$$

صدق می‌کند.

اکنون، زیر فضاهای ناوردای τ (یعنی خطهای مستقیم گذرنده از مبدأ) با تابع شوارتس $S(z)=\omega z$، $|\omega|=1$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. معادلهٔ (۲۶.۱۵). به معادلهٔ

$$B\omega^{2}+(A-\overline{A})\omega-\overline{B}=0 \qquad (15-27)$$

تبدیل می‌شود. ریشه‌های این معادله، عبارتند از

$$\omega_1=\frac{\rho+\Delta^{1/2}}{2B},\qquad \omega_2=\frac{\rho-\Delta^{1/2}}{2B}$$

که در آنها $\rho=\overline{A}-A=-2iImA$ و

$$\Delta=\rho^{2}+4\mid B\mid^{2}=4(\mid B\mid^{2}-(ImA)^{2}).$$

اگر $\Delta>0$، آنگاه ω_iها متمایزند و $|\omega_i|=1$ خطهای $\overline{z}=\omega_1 z$ و $\overline{z}=\omega_2 z$ ناوردا هستند. بنابر رابطهٔ (۲۶.۱۵)، به آسانی می‌توان نشان داد که دایره‌های به معادله $S(z)=\frac{r^{2}}{z}$ ناوردا هستند اگر و تنها اگر $|A|=1$ و $B=0$ یا $A=0$ و $|B|=1$ (دورانها یا انعکاسها) در حالی که به‌ازای $|A|\neq 1$، $B=0$ یا $A=0$، $|B|\neq 1$ خمهای ناوردا مارپیچهای برنول $S(z)=z^{\omega}$ (در این حالت $\omega=\frac{\log\overline{A}}{\log A}$) هستند.

اگر $\Delta>0$، ماتریسهای P یا Q دارای مقادیر ویژهٔ λ_1 و λ_2 هستند که حقیقی و متمایزند. بنابراین، ماتریس حقیقی T وجود دارد که

$$T^{-1}QT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

متغیرهای (x,y) و (u,v) را با تعریف $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix}=T\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}$ را به (ξ,η) و ξ',η' تغییر می‌دهیم در این صورت، τ به

$$\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix}=T^{-1}QT\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \qquad (15-28)$$

تبدیل می‌شود و T به صورت متعارفی

$$\begin{cases} \xi' = \lambda_1 \xi \\ \eta' = \lambda_2 \eta \end{cases} \qquad (۱۵ - ۲۹)$$

درمی‌آید.

با قراردادن $z' = \xi + i\eta$ و $w' = \xi' + i\eta'$ این تبدیل به صورت

$$w' = Cz' + D\overline{z'} \quad C = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \qquad (۱۵ - ۳۰)$$

که در آن $D = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$ و C, D حقیقی هستند. معادلهٔ (۲۷.۱۵)، در این حالت به $\frac{\overline{D}}{D} = 1$ = ω^2 و از آنجا به $\omega = \pm 1$ تبدیل می‌شود و بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم که خطهای ناوردا محورهای مختصات هستند.

در مورد تبدیل غیر خطی τ داریم

$$\tau : \omega = \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma z^2 + \delta z \bar{z} + \epsilon \bar{z}^2 + \cdots \qquad (۱۵ - ۳۱)$$

که تحت شرایط بیان شده و با تغییر متغیر، می‌توان آن را به صورت

$$\tau : \omega' = Cz' + Dz^{-1} + \cdots \text{(C و D حقیقی هستند)} \qquad (۱۵ - ۳۲)$$

نوشت. وجود خمهای ناوردا تحت τ، موضوعی است که به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است. برای نمونه داریم:

فرض می‌کنیم به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت p داشته باشیم $|\lambda_1| \neq 1$ و $\lambda_1^p \neq \lambda_2$. در این صورت، کمانی تحلیلی وجود دارد که از مبدأ می‌گذرد، بر محور حقیقی z' مماس است و تحت τ ناوردا می‌باشد. اگر به ازای هر عدد صحیح و مثبت q داشته باشیم $|\lambda_2| \neq 1$ و $\lambda_2^q \neq \lambda_1$ آنگاه کمان تحلیلی ناوردایی وجود دارد که از مبدأ می‌گذرد و در این نقطه برمحور موهومی z' مماس است. اگر $\lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0$ آنگاه دو کمان ناوردای فوق‌الذکر منحصر بفرد هستند.

در آخرین حالت، اگر $\eta = f(\xi)$ کمان ناوردای منحصر بفردی باشد که از مبدأ می‌گذرد و بر محور ξ مماس است و اگر $\eta = f_0(\xi)$ تابع دلخواهی با $f_0(0)$

مساوی با صفر باشد که در یک شرط لیپشیتز در همسایگی $\xi = \circ$ صدق کند، آنگاه $\eta = f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f_n(\xi), f_{n+\text{۱}}(\xi) = \tau f_n(\xi)$.

این نمادگذاری، به معنای تبدیل کمان $\eta = f_n(\zeta)$ به کمان $\eta = f_{n+\text{۱}}(\xi)$ توسط τاست.

۴.۱۵ تکرار و مدارها. یک برنامهٔ تکرار دو متغیره (حقیقی) را معمولاً به صورت

$$\tau : \begin{cases} x_{n+\text{۱}} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+\text{۱}} = g(x_n, y_n) \end{cases} \quad n = \circ, \text{۱}, \text{۲}, \cdots . \qquad (\text{۳۳} - \text{۱۵})$$

مشخص می‌کنند. فرض می‌کنیم که f و g توابع تحلیلی عادی از دو متغیر در یک ناحیه بوده و دامنهٔ تعریف آنها طوری باشد که تکرار بتواند صورت گیرد. این تبدیل را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} x_{n+\text{۱}} &= \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(z_{n+\text{۱}} + \overline{z}_{n+\text{۱}}) \\ &= f\left(\frac{z_n + \overline{z}_n}{\text{۲}}, \frac{z_n - \overline{z}_n}{\text{۲}i}\right) \equiv \phi(z_n, \overline{z}_n) \\ y_{n+\text{۱}} &= \frac{\text{۱}}{\text{۲}i}(z_{n+\text{۱}} - \overline{z}_{n+\text{۱}} \\ &= g\left(\frac{z_n + \overline{z}_n}{\text{۲}}, \frac{z_n - \overline{z}_n}{\text{۲}i}\right) \equiv \psi(z_n, \overline{z}_n) \end{cases} \qquad (\text{۳۴} - \text{۱۵})$$

بنابراین

$$z_{n+\text{۱}} = F(z_n, \overline{z}_n) = (\phi + i\psi)(z_n, \overline{z}_n) \qquad (\text{۳۵} - \text{۱۵})$$

صورت معادل (۳۳.۱۵) در مختصات مزدوج است.

فرض می‌کنیم که تمام تکرارهای $z_\circ$، $z_\text{۱}$، $\cdots$ تحت تبدیل (۱۵. ۳۵) روی کمان تحلیلی C قرار داشته و مجموعهٔ نقاط $\{z_n\}$ یک نقطهٔ حدی z^* در داخل کمان C داشته باشند. حداکثر یک کمان تحلیلی از این نوع موجود است زیرا اگر دو کمان با توابع شوارتس $S(z)$ و $T(z)$ وجود داشته باشند، باید روابط $\overline{z}_n = S(z_n)$، $\overline{z}_\circ = T(z_n)$ و $T(z^*) = S(z^*) = \overline{z}^*$ برقرار باشند، و بنابراین S و T و در نتیجه $S - T$ در

یک همسایگی از z^* عادی و تحلیلی می‌باشند. چون $S(z_n) - T(z_n) = ۰$ (روی مجموعه‌ای با یک نقطه حدی واقع در داخل ناحیه‌ای که این تابع در آن عادی است)، قضیهٔ یگانگی توابع تحلیلی بیان می‌کند که $S(z) - T(z) \equiv ۰$.

کمان C را (که به وسیلهٔ F و $z_۰$ تعیین می‌شود) مدار $\{z_n\}$ می‌نامیم.

فرض می‌کنیم تابع شوارتس C، $T(z)$ باشد و $\{z_n\}$ یک نقطه انباشتگی متناهی روی C داشته باشد. در این صورت، $\overline{z}_n = T(z_n)$. اکنون، داریم

$$z_{n+۱} = \overline{T}(\overline{z}_{n+۱}) = \overline{T}(\overline{F}(\overline{z}_n, z_n)) = \overline{T}(\overline{F}(T(z_n), z_n))$$

از آنجایی که $z_{n+۱} = F(z_n, \overline{z}_n) = F(z_n, T(z_n))$، داریم

$$F(z_n, T(z_n)) = \overline{T}(\overline{F}(T(z_n), z_n)) \qquad n = ۰, ۱, ۲, \cdots$$

چون توابع $F(z, T(z))$ و $\overline{T}(\overline{F}(T(z), z))$ عادی هستند و $\{z_n\}$ در داخل ناحیه‌ای که این توابع در آن عادی‌اند دارای یک نقطهٔ انباشتگی متناهی است، پس باید داشته باشیم

$$F(z, T(z)) \equiv \overline{T}(\overline{F}(T(z), z)) \qquad (۱۵ - ۳۶)$$

یا

$$T(F(z, T(z))) = \overline{F}(T(z), z)\cdot \qquad (۱۵ - ۳۷)$$

تابع شوارتس T مربوط به مدار $\{z_n\}$، باید در این معادلهٔ تابعی صدق کند.

همچنین باید توجه داشت که تابع شوارتس $T(z)$ مربوط به خمی که تحت تبدیل $w = F(z, \overline{z})$ ناورداست در معادلهٔ تابعی (۳۷.۱۵)، صدق می‌کند. (به‌رابطه (۲۵.۱۵) نگاه کنید.) در ادامه این فصل، حالتهای خاص معادلهٔ تابعی فوق‌الذکر را بررسی خواهیم کرد:

الف) $F(z, \overline{z}) = f(z)$. در این صورت، $\overline{f} = f(z)$ این رابطه، به

$$Tf = \overline{f}T \qquad (۱۵ - ۳۸)$$

منتهی می‌شود.

قبلاً این معادله را در قالب رابطهٔ (۱۰.۸) دیده‌ایم.

مثالها. (۱) $f(z) = \frac{۱}{۲}z$، (۱ $= z_۰, \cdots, z_n = ۲^{-n}$). در این حالت، مدار محور xاست و دنباله $\{z_n\}$ یک نقطهٔ حدی داخلی در $z = ۰$ دارد. قابل توجه است که $y = ۰$ تنها کمان تحلیلی گذرنده از نقاط z_i نیست. مثلاً $y = \sin(\frac{\pi}{x})$ نیز از این نقاط می‌گذرد، ولی با وجود این، این کمان را نمی‌توان به بعد از نقطهٔ $x = ۰$ ادامه داد.

(۲) $f(z) = \alpha z$، $\alpha = e^{\pi i \theta}$ و $z_۰ = ۱$. اگر θ گویا باشد، تعدادی متناهی نقطهٔ $z - ۱$ وجود دارد و مداری را نمی‌توان تعیین کرد. اگر θ اصم باشد، آنگاه z_nها در $|z| = ۱$ چگالند. این مدار مورد نظر است. در این صورت معادله تابعی $Tf = \overline{f}T$ به برابری $\frac{\overline{\alpha}}{z} = \frac{۱}{\alpha z}$ تبدیل می‌شود.

(۳) فرض می‌کنیم $f(z) = az^p$، p عددی صحیح و مثبت است و $az_۰^{p-۱} \neq ۰, ۱$. در این صورت

$$T(z) = \frac{\overline{z}_۰}{z_۰^{\omega}} z^{\omega} \quad \text{که در آن} \quad \omega = \frac{\log(\overline{az_۰^{p-۱}})}{\log(az_۰^{p-۱})}$$

در معادلهٔ (۳۸.۱۵) صدق می‌کند و $\overline{z}_۰ = T(z_۰)$ بنابر رابطهٔ (۷.۹)، T تابع شوارتس یک مارپیچ برنولی است تمام تکرارهای $z_۰$ تحت f روی این مارپیچ قرار دارند. این مارپیچها، تحت f ناوردای خم به خم هستند.

(الف) اگر $|a| < ۱$، آنگاه f، $۱ \leq |z|$ را به $|z| \leq a < ۱$ می‌نگارد. قابل توجه است که $|f'(z)| = p|a|$؛ بنابراین به ازای p به‌قدر کافی بزرگ f نمی‌تواند نگاشتی انقباضی باشد. با وجود این، بنابر قضیهٔ نقطهٔ ثابت هنریچی، تکرارهای سادهٔ f به o، نقطهٔ ثابت منحصر به‌فرد f، همگرا هستند.

(ب) $F(z, \overline{z}) = g(\overline{z})$. این وضعیت، به $\overline{F} = \overline{g}(\overline{z})$، $Tg = \overline{g}T$ یا $TgT = \overline{g}$ منتهی می‌شود.

(پ). فرض می‌کنیم S یک کمان تحلیلی با تابع شوارتس $S(z)$ باشد و برنامهٔ تکرار (۷.۱۵) را که به $f(z,\bar{z}) = \frac{1}{2}(z+\bar{S}(\bar{z}))$ منجر می‌شود، در نظر می‌گیریم. در این صورت، تابع شوارتس T مربوط به مدار تکرارها در معادلهٔ تابعی

$$\frac{1}{2}(S(z)+T(z)) = T(\frac{1}{2}(z+\bar{S}(T(z)))). \qquad (۳۹-۱۵)$$

از رابطهٔ (۳۹.۱۵)، می‌توان بسادگی چند نتیجه به‌دست آورد. مثلاً، اگر T محور y باشد. آنگاه $T = -z$؛ در نتیجه $\frac{1}{2}(S-z) = -\frac{1}{2}(z+\bar{S}(-z))$. بنابراین، $\bar{S}(z) = -S(-z)$. بنابر رابطهٔ (۸. ″۱۷)، همان‌طور که انتظار می‌رود S نسبت به محور y متقارن است.

به پیروی از رابطهٔ (۲۳.۷)، می‌نویسیم $S(z) = z - ikz^2 + (-k^2 - \frac{i}{3}k')z^3 + \ldots$. فرض می‌کنیم $T = az + \ldots$. با قرار دادن این توابع در رابطهٔ (۳۹.۱۵) و مقایسهٔ ضرایب z، به‌دست می‌آوریم. $a^2 = 1$. در نتیجه $a = 1$ یا $a = -1$. با مقایسهٔ ضرایب دیگر، مشاهده می‌کنیم که هر رابطه یک جواب صوری T را به‌دست می‌دهد، انتخاب $a = 1$، به $T = S$ می‌انجامد که مورد علاقهٔ ما نیست. با انتخاب $a = -1$

$$T(z) = -z + 0.z^2 + \frac{i}{3}k'z^3 + \ldots$$

به‌دست می‌آید. در نتیجه کمان T بر S عمود است و در مبدأ دارای خمیدگی صفر است.

فرض می‌کنیم S یک کمان باشد و بخواهیم مدار تکرار T را در نقطهٔ z_0 روی S پیدا کنیم. معادله (۳۹.۱۵)، تکرار

$$T_{n+1}(z) = \frac{1}{2}(T_n + (-S + 2T_n(\frac{1}{2}(z+\overline{S}T_n(z))))) \qquad (۴۰-۱۵)$$

را پیشنهاد می‌کند که از تقریب ۰ام $T_0(z) = \alpha z$ با فرض $\alpha = -S'(0)$ آغاز می‌شود. تجربه نشان می‌دهد که این دنباله بسرعت همگراست.

مثال. S را کمان درجه سوم

$$\begin{cases} x = t(t-2) \\ y = t(t-1)(t-2) \end{cases}$$

در نظر می‌گیریم که بعد از (۳۶.۸) مورد بحث قرار گرفت. پس‌از هشت تکرار، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}T(z) = &-iz + ۰z^{۲} + (-۰/۱۸۷۵i)z^{۳} + (۰/۰۷۰۳۱۲۵\\ &+ ۰/۰۷۰۳۱۲۵i)z^{۴} + (۰/۰۵۴۶۸۷۵ - ۰/۰۵۲۷۳۴۳۷۵i)z^{۵}\\ &+ (-۰/۰۲۷۵۸۷۸۹۰۶۳ + ۰/۱۱۹۸۷۳۰۴۶۹i)z^{۶}\\ &+ (۰/۰۲۱۲۴۰۲۳۴۳۷ - ۰/۰۳۶۷۴۳۱۶۴۰۶i)z^{۷} + \dots\end{aligned}$$

و تکرار نهم مساوی است با تکرار هشتم. این محاسبه، کمابیش به وسیلهٔ ضرب ماتریسی ـ که پس‌از معادله (۳۶.۸) پیشنهاد شده است ـ انجام گرفته است.

بالاخره، توجه خود را به تکرار $z_{n+۱} = f(z_n)$، (f تابعی تحلیلی است) معطوف می‌کنیم. فرض می‌کنیم که ۰ یک نقطهٔ ثابت باشد: $f'(۰) = a \neq ۰, f(۰) = ۰$. حال، از نظریهٔ ماتریس پیروی می‌کنیم. اگر بتوانیم A را قطری کنیم، قادر خواهیم بود که توانهای بالای آن را به آسانی مطالعه کنیم؛ یعنی، اگر ماتریس وارون پذیری چون H وجود داشته باشیم که رابطهٔ $A = H^{-۱}\Lambda H$ را برقرار کند (Λ ماتریس قطری

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_۱ & & \cdots & ۰ \\ & \lambda_۲ & & \vdots \\ ۰ & & \cdots & \lambda_q \end{pmatrix}$$

است)، آنگاه خواهیم داشت $A^n = H^{-۱}\lambda^n H$، که در آن

$$\Lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda_۱^n & & \cdots & O \\ & \lambda_۲^n & & \vdots \\ O & & \cdots & \lambda_q^n \end{pmatrix}$$

با همین بیان، تابع $f(z) = az + \dots$ را «قطری شده» می‌نامیم، اگر بتوان تابع تحلیلی $H(z) = z + \dots$، $|z| \leq \alpha$ چنان یافت که $f = H^{-۱}aH$ یا

$$Hf = aH \qquad (۴۱ - ۱۵)$$

یا

$$Hf = AH \qquad (۴۲-۱۵)$$

که در آن A تابع «قطری» az است.

اکنون، تکرار موضعی کاملاً تعیین می‌شود، مشروط بر اینکه رابطه

$$z_n = H^{-1}A^n H(z_0) = H^{-1}(a^n H(z_0)) \quad ,(n = 0, 1, 2, \dots) \qquad (۴۳-۱۵)$$

به ازای مقادیر z_0 که به‌قدر کافی نزدیک به مبدأ هستند، برقرار باشد. اگر قرار دهیم $a = \rho e^{i\psi}$ و

$$z_t = z_t(z_0) = H^{-1}(a^t H(z_0)) = H^{-1}(\rho^t e^{it\psi} H(z_0)) \qquad (۴۴-۱۵)$$

آنگاه رابطه (۴۴.۱۵) را می‌توانیم برای تعریف تکرارهای کسری یا پیوستهٔ f به‌کار ببریم. از سوی دیگر، به شاخه‌های a^t باید توجهی خاص معطوف کنیم. این تکرارها، در معادلهٔ تابعی

$$z_u(z_t(z_0)) = z_{u+t}(z_0) \qquad (۴۵-۱۵)$$

صدق می‌کنند.

اگر در رابطه (۴۴.۱۵) قرار دهیم $z_t = F(z, t)$، آنگاه رابطه (۴۵.۱۵) به معادله تابعی

$$F(F(z, u), t) = F(z, u + t) \qquad (۴۶-۱۵)$$

(برحسب سه متغیر z، u و t) تبدیل می‌شود. این معادله به معادله تابعی برای گروههای تکرار موسوم است. ثابت شده است که تحت شرایط خاصی جواب عمومی این معادله را می‌توان به صورت $F(z, u) = \zeta^{-1}(a^u \zeta(z))$ یا به صورت $F(z, u) = \zeta^{-1}(\zeta(z) + u)$ نوشت که در آن ζ یک تابع وارون‌پذیر دلخواه است.

۵.۱۵ تابع شرودر. همان‌طور که بحث کامل قطری‌سازی ماتریسها منجر به فرم متعارفی جردن و غیره می‌شود. باید انتظار داشت که بحث کامل رابطهٔ (۴۱.۱۵) نیز با مشکلات عمده‌ای مواجه باشد. در واقع، به‌طوری که خواهیم دید، این مطلب درست است ولی مشکلات ماهیت دیگری هم دارند.

معادلهٔ تابعی $Hf = aH, a = f'(\circ)$، معادله شرودر ـ کونیگز نامیده می‌شود. برای اختصار، ما H را تابع شرودرِ f می‌نامیم. اگر $\Omega = H^{-\backslash}$ ، این معادله را می‌توان به صورت $f\Omega(z) = \Omega(az)$ نوشت.

مثالها. برای پیدا کردن مثالهای ابتدایی تابع شرودر، فرمول $f = H^{-\backslash}aH$ را می‌نویسیم و با شروع از توابع فرم بستهٔ $H(z) = z + \dots$ که دارای وارون فرم بسته هستند به عقب برمی‌گردیم.

$\underline{f(z)}$	$\underline{H(z)}$
$\frac{\backslash}{k}((\backslash + kz)^a - \backslash)$	$\frac{\backslash}{k}\log(\backslash + kz)$
$\frac{\backslash}{k}\log(ae^{kz} - a + \backslash)$	$\frac{\backslash}{k}(e^{kz} - \backslash)$
$\frac{\backslash}{\text{۲}k}(-\backslash + (\text{۴}ak^{\text{۲}}z^{\text{۲}} + \text{۴}akz + \backslash)^{\frac{\backslash}{\text{۲}}})$	$z + kz^{\text{۲}}$
$\sin(a \quad arc\sin z)^*$	$arc\sin z$
$\frac{az+b}{cz+d}$	

به مثال بعدی مراجعه کنید.

مثال. فرض می‌کنیم $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$، $ad - bc \neq \circ$ و فرض می‌کنیم که f دارای دو نقطهٔ ثابت $\alpha = \frac{\backslash}{\text{۲}c}(a - d + \sqrt{(a-d)^{\text{۲}} + \text{۴}bc})$ و $\beta = \frac{\backslash}{\text{۲}c}(a-d) - $

---

*) اگر a یک عدد صحیح نامنفی باشد، این تابع به صورت $(\backslash - T_a^{\text{۲}}((\backslash - z^{\text{۲}})^{\frac{\backslash}{\text{۲}}})^{\frac{\backslash}{\text{۲}}}$ درمی‌آید که در آن T_a چند جمله‌ای aام چبیچف است.

$\sqrt{(a-d)^2+4bc})$ باشد. داریم $f'(\alpha)=\dfrac{ad-bc}{(c\alpha+d)^2}$ و $(c\alpha+d)=(a-c\beta)$
در نتیجه

$$\begin{pmatrix}1 & -\alpha\\ 1 & -\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}f'(\alpha) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\alpha\\ 1 & -\beta\end{pmatrix}$$

که در آن $\lambda=a-c\beta$. بنابراین، $H(z)=\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ در معادلهٔ $Hf=f'(\alpha).H$ صدق می‌کند.

بنابراین، تابع $(\alpha-\beta)H(z)=(z-\alpha)+\ldots$ تابع شرودر $f(z)$ در نقطهٔ ثابت $z=\alpha$ است.

اتحاد شرودر را معمولاً به صورت

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta}=K\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

می‌نویسند، که در آن

$$K=\frac{a+d-\sqrt{s}}{a+d+\sqrt{s}},\qquad s=(a-d)^2+4bc.$$

این رابطه، تبدیل دو خطی را بر حسب نقاط ثابت آن بیان می‌کند. در حالتی (حالت سهموی) که نقاط ثابت برابرند $(\alpha=\beta=\dfrac{a-d}{2c})$، تبدیل دو خطی را می‌توان به صورت

$$\frac{1}{w-\alpha}=\frac{1}{z-\alpha}+\frac{2c}{a+d}\qquad a+d\neq 0$$

نوشت.

نظریهٔ تابع شرودر، در حال حاضر (۱۹۷۳) ناقص است، و ما در اینجا تنها خلاصه‌ای از آنچه در خصوص آن معلوم است را می‌آوریم.

اگر n عددی مثبت یا منفی باشد، تابع شرودرِ f تابع شرودرِ f^n (n امین تکرار f) نیز هست. چرا که اگر $f(z)=sz+\ldots$، آنگاه $f^n(z)=s^nz+\ldots$. داریم $Hf^2=Hff=sHf=ssH=s^2H$؛ بنابراین H تابع شرودر f^2 نیز هست، و غیره. در مورد مقادیر کلیتر n، به تذکر بعد از رابطهٔ (۴۴.۱۵) توجه کنید.

اگر H تابع شرودر f باشد و اگر $h(z) = z + \dots$، آنگاه Hh^{-1} تابع شرودر تابع مزدوج $g = hfh^{-1}$ است، زیرا

$$(Hh^{-1})g = Hh^{-1}(hfh^{-1}) = (Hf)h^{-1} = sHh^{-1}$$

اگر H تابع شرودر f باشد، $\overline{H}$ تابع شرودر $\overline{f}$ است.

قضیه. فرض می‌کنیم $f(z) = az + bz^{2} + cz^{3} + \dots$ یک سری توان صوری باشد و فرض می‌کنیم a غیر صفر بوده و یک ریشهٔ واحد نباشد ($a^{p} \neq 1$). در این صورت، یک سری توان صوری $H(z) = z + \dots$ وجود دارد که در معادلهٔ شرودر $Hf = aH$ صدق می‌کند.

اثبات. قرار می‌دهیم $H(z) = z + \alpha z^{2} + \beta z^{3} + \dots$ و f را در این رابطه وارد می‌کنیم. ضرایب Hf و aH را مقایسه می‌نماییم. معادلات حاصل را می‌توان به ترتیب نسبت به α، β و $\dots$ حل کرد؛ زیرا ضریب جمله پیشرو بر حسب α، β و $\cdots$، $a^{q} - a \neq 0$ است.

البته، آنچه ما بدان احتیاج داریم، چیزی بیش از جوابی است که به صورت سری توانی صوری باشد.

حالت ۱. $|a| \neq 1, 0$. در این حالت، یک تابع شرودر منحصر به‌فرد وجود دارد. معادلهٔ تابعی $Hf = aH$ تکرار $H_{n+1} = (\frac{1}{a})H_{n}f$ را پیش می‌آورد و این تکرار به ازای $H_{0} \equiv z$ همگراست.

حالت ۲. $|a| = 1$. این حالت، مشکلترین و به تعبیری جالبترین حالتهاست. برخی مؤلفین، این حالت را به خاطر رابطهٔ خاص آن با مسائل پایداری «مسألهٔ مرکز نظریهٔ تابعی» نام نِهاده‌اند.

حالت ۲ الف. a یک ریشهٔ pام واحد است؛ یعنی عدد طبیعی p وجود دارد که

$a^p = ۱$ در این حالت، تابع شرودر $f(z)$ وجود دارد، اگر و تنها اگر $f^p = ff\dots f \equiv z$. در این حالت جواب یکتا نیست.

حالت ۲ ب. a ریشهٔ pام (به ازای $p = ۱, ۲, \dots$) واحد نیست. در این حالت، با جایگذاری صوری سری $H(z) = z + \dots$ در رابطهٔ (۴۱.۱۵) به دنباله‌ای از معادلات می‌رسیم، که جواب یکتایی دارند. بنابراین، همواره یک جواب صوری وجود دارد. این جواب، ممکن است به یک جواب واقعی همگرا بوده یا واگرا باشد. مجموعهٔ مقادیر a که به ازای آنها سری همگرای $f(z) = az + \dots$ تابع شرودری با سری و اگر دارد، روی $|a| = ۱$ چگال است.

حالت ۲ ب.ا. عدد ثابت $k > ۰$ وجود دارد، به طوری که

$$|\log|a^n - ۱|| \le k \log n, n = ۲, ۳, \dots \qquad (۴۷.۱۵)$$

در این حالت، سری شرودر به یک تابع شرودر واقعی همگراست. شرط (۴۷.۱۵)، تقریباً در تمام نقاط $|a| = ۱$ برقرار است، ولی به ازای عدد داده شدهٔ a بیان اینکه این عدد در رابطه (۴۷.۱۵) صدق می‌کند یا نه بسیار مشکل است.

اکنون، اثبات گزاره‌هایی را که در بالا بیان کردیم می‌آوریم.

قضیه. فرض می‌کنیم $f(z)$ در یک همسایگی از $z = ۰$ تحلیلی باشد، $f(۰) = ۰$، و فرض می‌کنیم $f'(۰) = s$، $(s \neq ۱, ۰)$. در این صورت، تابع شرودر یکتایی برای f وجود دارد. این تابع را می‌توان از تکرار $H_{n+۱} = \frac{۱}{s} H_n f$ با فرض $H_۰(z) \equiv z$ به‌دست آورد.

اثبات. حالت ۱. $۱ > |s| > a$. با شروع از نقطهٔ $z_۰$، دنبالهٔ $\{z_n\}$ را به‌وسیله رابطه $z_{n+۱} = f(z_n), n = ۰, ۱, \dots$ تعریف می‌کنیم. مانند قضیهٔ قبل، اگر $|z_۰| \neq ۰$ به‌قدر کافی کوچک باشد، آنگاه $z_n \neq ۰$ و $\lim_{n\to\infty} z_n = ۰$ چون

$$\frac{z_{n+۱}}{z_n} = \frac{f(z_n)}{z_n} = s + bz_n + cz_n^۲ + \dots$$

پس $s = \lim_{n\to\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n}$. تکرار nام f را با f^n نشان داده و تابع $H_n(z_\circ) = \frac{f^n(z_\circ)}{s^n}$ را در نظر می‌گیریم. این تابع، در یک همسایگی از مبدأ تابعی تحلیلی از $z_\circ$ است. داریم

$$H_n(z_\circ) = \left(\frac{z_n}{sz_{n-1}}\right)\left(\frac{z_{n-1}}{sz_{n-2}}\right)\dots\left(\frac{z_1}{sz_\circ}\right)z_\circ \qquad (z_\circ \neq \circ)$$

$H_n(\circ) = \circ$. جملهٔ عمومی این حاصلضرب $\frac{z_{n+1}}{sz_n}$ است. فرض می‌کنیم در بسط $\frac{f(z)}{z} = s + bz + cz^2 + \dots$ اولین جمله با ضریب ناصفر az^h با $h \geq 1$ و $a \neq \circ$ باشد. در این صورت، می‌توان نوشت $\frac{z_n + 1}{sz_n} = \frac{f(z_n)}{sz_n} = 1 + w_n$، که در آن $w_n = \frac{az_n^h}{s} + \dots$. اکنون با توجه به

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(\frac{az_{n+1}^h}{s} + \dots\right) \div \left(\frac{az_n^h}{s} + \dots\right)$$

داریم $\lim_{n\to\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{z_n + 1}{z_n}\right)^h = s^h$. چون $|s| < 1$، نتیجه می‌شود که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| < \infty$ روی زیرمجموعه‌های بستهٔ $\circ < |z| < \rho$ همگرایی یکنواخت است.

از قضیهٔ کلی حاصلضربهای نامتناهی، نتیجه می‌شود که $H_n(z)$ به تابعی تحلیلی چون $H(z)$ همگرا است. تنها مشکل در $z = \circ$ وجود دارد. داریم $sH_{n+1}(f(z)) = H_n(z)$. بنابراین، در حالت حدی $Hf = sH$. سرانجام از $H_n(z) = \frac{f^n(z)}{s^n} = z + \dots$ ، نتیجه می‌شود که $H'(\circ) = 1$ بنابراین H تابع شرودر f است.

حالت ۱.۲ $|s| > 1$. اگر $w = f(z) = sz + \dots$، تابع وارون $f^{-1}(z) = \frac{1}{s}z + \cdots$ را در نظر می‌گیریم. چون $\circ < |\frac{1}{s}| < 1$، f^{-1} تابع شرودری چون H دارد: در نتیجه، $H = (\frac{1}{s})Hf$ یا $sH = Hf$؛ بنابراین H تابع شرودر f نیز هست.

قضیه. فرض می‌کنیم p عدد صحیح مثبتی باشد و $a^p = 1$. در این صورت، $f(z) = az + \dots$ دارای تابع شرودری چون $H(z) = z + \dots$ است، اگر و تنها اگر

$f^p \equiv z$. در این حالت، جواب یکتا نیست و می‌توان یک جواب عمومی را ارائه داد که به تابع تحلیلی دلخواهی وابسته باشد.

اثبات. فرض می‌کنیم H یک تابع شرودر f باشد. در این صورت، $Hf = aH$ و بنابراین $(HfH^{-1})(z) \equiv az$. توان pام این تابع، به معنای ترکیب تابعی عبارت است از $Hf^pH^{-1} = a^pz \equiv z$. در نتیجه، $f^p \equiv z$.

برعکس، فرض می‌کنیم $f^p \equiv z$ و $g(z)$ تابع تحلیلی دلخواهی در یک همسایگی دلخواه $z = 0$ باشد. بنابر

$$H(z) = \sum_{k=0}^{p-1} a^{-k} g f^k$$

داریم

$$Hf = \sum_{k=0}^{p-1} a^{-k} g f^{k+1} = a\sum_{r=1}^{p} a^{-r} g f^r = a\sum_{r=1}^{p-1} a^{-r} g f^r + ag = aH$$

بنابراین، H یک تابع شرودر برای f است.

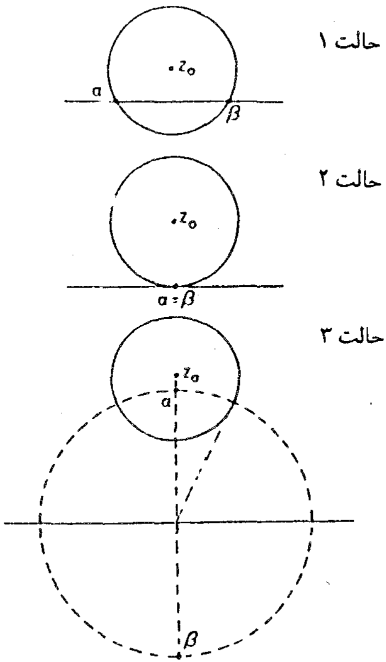
باید توجه داشت که هر تابع شرودر را با انتخاب $g = \frac{1}{p}H$ می‌توان به این صورت نوشت. چرا که $Hf = aH$، $Hf^k = a^kH$. بنابراین

$$\sum_{k=0}^{p-1} a^{-k}\frac{1}{p}Hf^k = \sum_{k=0}^{p-1} a^{-k}\frac{1}{p}a^kH = H.$$

اگر معادلهٔ $Hf = AH$ را با استفاده از معادلهٔ (۳۱.۸) به صورت ماتریسی تعبیر کنیم، ماتریس A به صورت قطری

$$A = \begin{vmatrix} a & & & \\ & a^2 & & \\ & & a^3 & \\ & & & \cdots \end{vmatrix}$$

خواهد بود. بنابراین، اعداد a، a^{2}، a^{3}، ... را می‌توان «مقادیر ویژه» $f(z)$ تلقی کرد. حالتهای ۱ و ۲.ب، حالتهایی هستند که این مقادیر ویژهٔ همگی متمایزند و حداقل یک جواب صوری برای مسأله قطری‌سازی وجود دارد.



شکل ۱۵-۱

حالت ۲ ب، متعلق به سی.ل.سیگل، بسیار عمیق و موسوم به «روش مقسوم علیه‌های کوچک» است.

مثال. فرض می‌کنیم $z_0 = x_0 + y_0$. تابع شوارتس دایرهٔ $|z - z_0| = r$،

$S(z) = \dfrac{r^{۲}}{z - z_{\circ}} + \overline{z_{\circ}}$ است. نقاط ثابت این تابع دو خطی عبارتنداز

$$x_{\circ} \pm \sqrt{r^{۲} - y_{\circ}^{۲}} \quad \text{اگر} \quad y_{\circ}^{۲} \le r^{۲}.$$

یا

$$x_{\circ} \pm i\sqrt{y_{\circ}^{۲} - r^{۲}} \quad \text{اگر} \quad y_{\circ}^{۲} > r^{۲}.$$

بنابراین، می‌توانیم سه حالت را مشخص کنیم (به شکل ۱.۱۵ نگاه کنید): ۱ـ حالتی که دایره محور x را در دو نقطه متمایز (نقاط ثابت α و β) قطع می‌کند؛ ۲ـ حالتی که دایره در نقطهٔ α بر محور x مماس است (دو نقطهٔ ثابت بر هم منطبقند) و ۳ـ حالتی که دایره محور x را قطع نمی‌کند. در این حالت، نقاط ثابت نسبت به دایره منعکس بوده و به صورتی که در شکل (۳،۱.۱۵) نشان داده شده است، بدست می‌آیند.

در حالتهای ۱ و ۳، تابع $S(z)$ مانند مثال دوم بخش ۵.۱۵ دارای یک تابع شرودر است. در حالت ۲ $(\alpha = \beta = x_{\circ})$، $S'(x_{\circ}) = ۱$ یک ریشهٔ یکم واحد است و در نتیجه بنابر قضیهٔ قبل تابع شرودری وجود ندارد.

مثال. (عددی). می‌خواهیم تابع شرودر تابع $f(z) = \frac{۱}{۲}z + z^{۲}$ را پیدا کنیم. برای این منظور، $H(z) = \lim\limits_{n\to\infty} ۲^{n} f^{n}(z)$ و نمایش ماتریسی (۱۰.۵.۸) را به‌کار می‌بریم. پس‌از ۳۹ تکرار، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} H(z) \approx z &+ ۴z^{۲} + ۱۰/۶۶۶۶۶۶۶۷z^{۳} + ۲۷/۴۲۸۵۷۱۴۳z^{۴} \\ &+ ۶۳/۳۹۰۴۷۶۱۹z^{۵} + ۱۴۷/۸۵۸۶۷۸۹z^{۶} \\ &+ ۳۲۸/۷۷۴۵۸۳۶z^{۷} + ۷۲۶/۶۴۰۸۶۸۸z^{۸} + \dots \end{aligned}$$

تکرار ۴۰ام، تا ۱۰ رقم اعشار تغییری نمی‌کند

قضیه پایداری زیر به حالت $|a| = ۱$ مربوط است.

قضیه. نگاشت $\tau : z' = f(z) = az + bz^{۲} + \dots$ در نقطهٔ ثابت $z = \circ$ پایدار است، اگر و تنها اگر $|a| = ۱$ و f تابع شرودری چون $H(z) = z + \dots$ داشته باشد.

اثبات ـ کفایت. فرض می‌کنیم که $|a| = ۱$ چنان وجود داشته باشد که $Hf = aH$. به ازای تمام مقادیر به‌قدر کافی کوچک r، نگارهٔ قرص باز $D : |w| < r$ تحت $z = H^{-۱}(w)$ ناحیهٔ شبه دایره‌ای چون B و شامل $z = ۰$ است. اگر $z \in B$، آنگاه $f(z) = fH^{-۱}(w) = H^{-۱}(aw)$. حال اگر $w \in D$، آنگاه $aw \in D$. بنابراین، $H^{-۱}(aw) = f(z) \in B$. به همین ترتیب، $f^{-۱}(z) = f^{-۱}H^{-۱}(w) = (Hf)^{-۱}(w) = (aH)^{-۱}(w) = H^{-۱}(\frac{w}{a})$. چون $\frac{w}{a} \in D$، پس $f^{-۱}(z) \in B$. در نتیجه، $\tau(B) = B$ و B یک همسایگی ناوردای $z = ۰$ است. هر همسایگی $z = ۰$، شامل همسایگی Bای از نوع مذکور است و بدین ترتیب τ پایدار می‌باشد.

لزوم. اگر ρ شعاع همگرایی $az + bz^۲ + \dots$ باشد، بنابر تعریف پایداری، قرض $|z| < \rho$ شامل یک همسایگی ناوردای B از $z = ۰$ است $(\tau(B) = B)$. نشان خواهیم داد که می‌توان یک همسایگی ناوردا که همبند ساده هم باشد پیدا کرد. فرض می‌کنیم C یک قرص باز واقع در B و شامل $z = ۰$ باشد. به ازای هر $n = ۰, \pm۱, \pm۲, \dots$، $\tau^n C \subset B$ و ۰ متعلق به $\tau^n C$ است. بنابراین مجموعهٔ $D = \cup_{n=-\infty}^{\infty} \tau^n c$ یک همسایگی همبند و ناوردا از $z = ۰$ است. اگر D همبند ساده نباشد، تمام نقاط داخل خمهای سادهٔ بستهٔ Γ واقع در D را به آن اضافه می‌کنیم و مجموعهٔ بزرگتر را D^* می‌نامیم. در این صورت، روشن است که D^* همبند ساده است. به‌علاوه، این مجموعه تحت τ ناورداست؛ زیرا $\tau D = D$. اکنون، فرض می‌کنیم $z.z \in D^* - D$ در داخل یک خم Γ قرار دارد. در نتیجه، $\tau(z)$ به داخل $\tau(\Gamma)$ تعلق دارد. اما $\tau(\Gamma) \subset B$، بنابراین $\tau(\Gamma)$ در D^* واقع است. بنابراین، $\tau(z) \in D^*$. در مورد $\tau^{-۱}(z)$ نیز، اثبات به شیوه‌ای مشابه انجام می‌گیرد.

بنابر قضیهٔ نگاشت ریمان، D^* را می‌توان توسط نگاشتی چون $w = M(z) = z + \dots$، $(z = M^{-۱}(w) = w + \dots)$ به صورت یک به یک و همدیس روی قرصی چون $\Delta : |w| < \sigma$ نگاشت. تابع مرکب $T(w) = MfM^{-۱}(w)$ را در نظر می‌گیریم. به ازای $w \in \Delta$ داریم $T^{\pm}(w) \in D$. بنابراین نگاشت T، Δ را به صورت همدیس به روی خودش می‌نگارد و $w = ۰$ یک نقطهٔ ثابت آن است. بنابر یک قضیهٔ معروف نگاشت همدیس (به‌عنوان مثال، رجوع کنید به [A1] صفحه ۱۳۶)، عدد α، $|\alpha| = ۱$ وجود دارد که $T(w) = \alpha w$ (یعنی T یک دوران است). در نتیجه، $T(w) = MfM^{-۱}(w) = \alpha w$ $(|\alpha| = ۱)$. بنابراین، $a = \alpha$ و $|a| = ۱$. همچنین

$Mf(z) = aM(z)$؛ پس $M(z)$ یک تابع شرودر برای f است.

متذکر می‌شویم که در قسمت اول اثبات، قرصهای $r > |w|$ تحت $\bar{H}^{-۱}$ همسایگیهای ناوردایی چون B از $z = ۰$ تحت f هستند. اگر $S(z)$ تابع شوارتس مرز B باشد، آنگاه بنابر رابطه (۴.۸)، $S(z) = H^{-۱}(\frac{r^۲}{H(z)})$؛ در نتیجه اتحاد $\overline{H}S(z).H(z) = r^۲$ برقرار است.

اکنون، فرض می‌کنیم $f(z) = f'(۰)z + \dots$ نگاشتی باشد که در آن برای سادگی $f'(۰)$ را حقیقی فرض کرده‌ایم. فرض می‌کنیم f تابع شرودر یکتایی چون H داشته باشد، به‌طوری که $Hf = f'(۰)H$. همچنین، فرض می‌کنیم که کمان تحلیلی S با تابع شوارتس $S(z) = \alpha z + \dots$، $|\alpha| = ۱$ ، تحت f خم به خم ناوردا باشد (یا مداری برای $\{z_n\}$ با فرض $z_۰ \in S$ باشد). اکنون، این سؤال مطرح می‌شود که چه رابطه‌ای بین H و S برقرار است؟ از رابطهٔ بالا، داریم $\bar{H}\bar{f} = f'(۰)\overline{H}$، و بنابراین $\overline{H}\overline{f}S = f'(۰)\overline{H}S$. چون S تحت f ناورداست، $\overline{f}S = Sf$ در نتیجه، $\overline{H}Sf = f'(۰)\overline{H}S$. چون $\overline{H}s = \alpha_z + \dots$، پس $(\frac{۱}{\alpha})\overline{H}S = z + \dots$. بنابراین، $\{(\frac{۱}{\alpha})\overline{H}S\}f = f'(۰)\{(\frac{۱}{\alpha})\overline{H}S\}$ ، و $(\frac{۱}{\alpha})\overline{H}S$ نیز تابع شرودر f است. این بدان معنی است که $(\frac{۱}{\alpha})\overline{H}S = H$، و بنابراین

$$S = \overline{H}^{-۱}\alpha H \qquad (۴۸-۱۵)$$

برعکس، به ازای هر α، با شرط $|\alpha| = ۱$، و هر تابع وارون‌پذیر $H(z) = az + \dots$ $(a \neq ۰)$، $\overline{H}^{-۱}\alpha H$ تابع شوارتس یک کمان است. چرا که اگر داشته باشیم

$$f(z) = H^{-۱}(z/\sqrt{\alpha}), \qquad \bar{f} = \bar{H}^{-۱}(\frac{z}{\sqrt{\bar{\alpha}}})$$

آنگاه $f^{-۱}(z) = \sqrt{\alpha}H(z)$ و بنابراین

$$\overline{f}f^{-۱}(z) = \overline{H}^{-۱}\frac{\sqrt{\alpha}H(z)}{\sqrt{\overline{\alpha}}} = \bar{H}^{-۱}\alpha H(z).$$

قضیه. فرض می‌کنیم $f(z) = az + \ldots$ دارای تابع شرودر $H(z) = z + \ldots$ ($Hf = aH$) باشد. به ازای نقاط $z_\circ \neq \circ$ به‌قدر کافی نزدیک به مبدأ، تکرارهای حقیقی پیوستهٔ $z_t(z_\circ)$ از $z_\circ$ تحت f کمانی را طی می‌کنند که تحت f ناورداست.

اثبات. بنابر رابطه (۴۴.۱۵)، تکرارهای پیوستهٔ $z_\circ$ توسط تابع $H^{-1}(a^t H(z_\circ))$ (t حقیقی است) داده می‌شوند. این تابع را به صورت $H^{-1}Q$ می‌نویسیم که در آن $Q(t) = a^t H(z_\circ)$. بنابر (۱.۸)، تابع شوارتس این خم $S = \overline{H^{-1}Q}(H^{-1}Q)^{-1} = \bar{H}^{-1}\bar{Q}Q^{-1}H$ است. داریم

$$\overline{Q}Q^{-1}H = \overline{H(z_\circ)}(H(z)/H(z_\circ))^{(\log\overline{\alpha}/\log\alpha)}$$

و

$$\overline{Q}Q^{-1}aH = H\overline{(z_\circ)}(aH(z)/H(z_\circ))^{(\log\overline{a}/\log a)}.$$

چون

$$a^{(\log a/\log\bar{a})} = e^{(\log a/\log a)\log a} = e^{\log\overline{a}} = \overline{a}$$

پس

$$\overline{Q}Q^{-1}aH = \overline{a}\overline{Q}Q^{-1}H$$

بنابراین

$$\overline{Q}Q^{-1}Hf = \bar{H}\bar{f}\bar{H}^{-1}\overline{Q}Q^{-1}H$$

یا

$$\overline{H}^{-1}\overline{Q}Q^{-1}Hf = \overline{f}\overline{H}^{-1}\overline{Q}Q^{-1}H$$

$$Sf = \overline{f}S \qquad (۱\text{-}۱۵)$$

در نتیجه بنابر (۱۰.۸) S تحت f ناورداست.

حال، می‌توان یک حل (نسبی) از مسألهٔ نیمساز را بر حسب تابع شرودر ارائه داد. به ازای خم S که از $z = 0$ می‌گذرد، برای نصف کردن زاویهٔ منحنی‌الخط تشکیل شده توسط محور x و S باید معادلهٔ تابعی $TT = S$ را حل کنیم.

قضیه. فرض می‌کنیم تابع شوارتس $S(z) = az + \ldots$، ($|\alpha| = 1$) دارای تابع شرودر $H(z) = z + \ldots$، ($HS = \alpha H$) باشد. همچنین، فرض می‌کنیم تابع $T = H^{-1}(\pm\sqrt{\alpha})H$ تابع شوارتس کمانی چون T باشد. در این صورت T یک نیمساز است. برعکس. فرض می‌کنیم α یک ریشهٔ واحد نبوده و زاویه منحنی‌الخط دارای نیمسازی چون T باشد. در این صورت T توسط $T = H^{-1}(\pm\sqrt{\alpha})H$ داده می‌شود.

اثبات. قسمت اول. داریم $TT = H^{-1}(\pm\sqrt{\alpha})HH^{-1}(\pm\sqrt{\alpha})H$

$$= H^{-1}\alpha H = H^{-1}HS = S$$

قسمت دوم. اگر α یک ریشهٔ واحد نباشد، آنگاه به‌طوری که در فصل ۸ دیده‌ایم، معادلهٔ تابعی $TT = S$ دقیقاً دو جواب دارد. اما سری توان تابع $H^{-1}(\pm\sqrt{\alpha})H$ دو جواب همگرا به‌دست می‌دهد که یکی از آنها باید مساوی با T باشد.

مثال. فرض می‌کنیم S کمانی از دایره‌ای باشد که از مبدأ می‌گذرد و محور x را در نقطهٔ $x = \beta \neq 0$ قطع می‌کند و مرکز دایره z_0 است. در نتیجه $\beta = 2Rez_0 = z_0 + \overline{z_0}$ و $S(z) = \dfrac{\overline{z_0}z}{z - z_0}$ تابع شوارتس S باشد. در چنین شرایطی، نقطه‌های ثابت $S(z)$ عبارتند از $z = 0$ و $z = \beta$. بنابراین تابع $H(z) = \dfrac{\beta z}{\beta - z} = z + \ldots$ تابع شرودر $S(z)$ است. داریم $S'(0)' = -\dfrac{\overline{z_0}}{z_0}$ و در نتیجه اگر قرار دهیم $z_0 = \rho e^{i\theta}$، آنگاه $\theta \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$، $S'(0) = -e^{-2i\theta}$، $\sqrt{S'(0)} = e^{-i(\theta \pm \frac{\pi}{2})} = a \neq 1$. با انجام محاسبه داریم

$$T = H^{-1}aH = \frac{\alpha\beta z}{\beta + (a-1)z}$$

به آسانی دیده می‌شود که T تابع شوارتس دایره‌هایی است که از مبدأ مختصات می‌گذرند و مرکز آنها $z_1 = \frac{\beta}{1-\alpha}$ است. این دایره‌ها، در حقیقت نیمساز زاویه‌های مذکور در بالا هستند.

اگر $z_0 = x_0 + iy_0$، $x_0 \to 0$ و $y_0 \neq 0$ ثابت باشد، آنگاه $\beta \to 0$ و $z_1 \to 2iy_0$. این مطلب را قبلاً در فصل ۸ دیده‌ایم. بنابراین، برای وجود نیمساز وجود تابع شرودر S لازم نیست.

۱۶

فهرست روابط تابعی

معنی	معادلهٔ تابعی	شمارهٔ معادله
S مرتبه ۲ است	$S\overline{S}=\overline{S}S=I$	(۲۰.۶)
نمایش پارامتری	$S=\overline{f}f^{-1}$	(۱.۸)
نمایش توسط تابع نگاشت	$S=\overline{m}(\frac{1}{M})$	(۴.۸)
نگارهٔ کمان تحت نگاشت تحلیلی	$S_C f=\overline{f}S_B$	(۷.۸)
ادامهٔ تحلیلی	$f=\bar{S}_C\bar{f}S_B$	(۷'.۸)
ناوردایی خم به خم S تحت f	$Sf=\overline{f}S$	(۱۰.۸)
انعکاس C نسبت به محور x	$S_{\overline{C}}=\bar{S}_C$	(۱۲.۸)
تقارن نسبت به محور x	$\overline{S}=S$	(۱۳.۸)
U منعکس T نسبت به S است	$U=S\overline{T}S$	(۱۵.۸)
تقارن دو کمان	$S\overline{T}=T\overline{S}$	(۱۶'.۸)
تابع شرودر	$Hf=aH$	(۴۱.۱۵)
مدار	$\overline{H}T=aH, \lvert a\rvert=1$	(۴۸.۱۵)

۱۷

نکته‌های کتابشناسی و تکمیلی

فصل ۱: یادداشتهای ل.ب.رال قبلاً در [R1] منتشر شده است.

فصلهای ۲، ۳، ۴: در مورد هندسه تحلیلی مسطحه با استفاده از اعداد مختلط، برای نمونه رجوع کنید به دبلیو.ب .کرور [C2]، مورلی و مورلی [M5]، هـ.ب.ایوز [E1]، آی.م.یاگلوم [Y1]. هـ.شوردوتفگر [S5] هندسهٔ انعکاسی را با تأکید بر روشهای ماتریسی معرفی می‌کند. مطالب زیبای بسیاری در این کتابها وجود دارد که در درسهای مقدماتی قابل ارائه هستند.

تعریف کرور [C2] از شیب با تعریف ما قدری تفاوت دارد.

(۲.۱): البته با محدود کردن x و y به مقادیر حقیقی، برخی اصول وحدتبخش از بین می‌روند. مؤلف برای کنترل مطالب کتاب این محدودیت را به‌کار برده است. اتفاقاً سه صفحهٔ مختلط متناظر با سه دستگاه اعداد مختلط با عمل ضرب جابجایی و شرکتپذیر مورد بررسی قرارگرفته‌اند. این صفحه‌ها از این قرارند (۱) صفحهٔ مختلط معمولی $x + iy$، $i^۲ = -۱$؛ (۲) صفحهٔ مختلط دوگان؛ $x + \epsilon y$، $\epsilon^۲ = ۰$ (۳) صفحهٔ مختلط غیرمعمول، $x + jy$، $j^۲ = ۱$. برای کاربردهای صفحهٔ مختلط دوگان در هندسهٔ دوایر جهتدار رجوع کنید به یاگلوم [Y1].

نسبت به «نامربوطی زیبای» قضیهٔ دایرهٔ نه نقطه، جالب است ذکر کنیم که این قضیه غالباً مجرای گریز ازگناهان واهی آموزش ریاضی نسلهای گذشته بوده است. لذا اخیراً در کنفرانسی (نگاه کنید به «میزگرد» دومین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران، مارس ۱۹۷۱ صفحه‌های ۱۷ـ۳۰) پروفسور ژان دیودونه از قضیهٔ دایرهٔ نه نقطه به‌عنوان «قضیهٔ بدبختی» در مورد مثلث یاد می‌کند که پس از اثبات هرگز نیازی به

آن پیدا نمی‌شود، وی در ادامه پیشنهاد می‌کند که، مثلاً سادگی گروه متعامد سه بعدی برای آموزش مقدماتی بسیار مناسب است. در تأیید این سخنان، پروفسور جان مک کارتی استاد علوم کامپیوتر اشاره کرد که این قضیه‌ها هرگز در وی انگیزه‌ای ایجاد نکرده‌اند.

لذا این سؤال مجرد که هر نسلی باید حامل چه نوع ریاضیاتی باشد بدون پاسخ می‌ماند. ریاضیات بی‌پایان است و کوشش برای کشف راز جاودانگی آن محکوم به شکست است.

فصلهای ۵، ۶: هـ.ا. شوارتس انعکاس نسبت به خم تحلیلی را در سال ۱۸۷۰ طی مقالهٔ:

Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u=0$ unter vorgeschriebenen Grenz -und Unstetigkeitsbedingungen.

تعریف کرد. این مقاله در [S4] چاپ شده است.

انعکاس نسبت به خط مستقیم و دایره در بسیاری ازکتابهای متغیر مختلط معرفی شده است. بررسی حالت کلی معمول نیست. هندسهٔ انعکاس شوارتسی را کسنر و شاگردانش وسیعاً بررسی کرده‌اند. کتابشناسی کامل کسنر را می‌توان در مقالهٔ یزه داگلاس [D8] پیدا کرد. بی‌تعارف فکر می‌کنم مقاله‌های کسنر موجز و الهام‌بخش هستند.

$S(z)$ به‌عنوان تابعی تحلیلی توسط دیویس و پولاک [D6]تابع شوارتس نامیده و بر آن پافشاری گردید. کاربردهایی از این تابع در گشتاورهای مختلط و ادامهٔ تحلیلی ارائه شد. لیستی طولانی از توابع شوارتس مقدماتی در دیویس [D5]ارائه شده است.

علیرغم کاربرد نام «تابع شوارتس» در نظریه توابع اتومرفیک به معنایی کاملاً متفاوت، توجیه خوبی ازکاربرد این نام در این کتاب وجود دارد.

در مورد قضیهٔ تابع ضمنی که به نمایش (۵ ـ ′۱۰) منجر می‌شود، رجوع کنید به جلد اول کتاب هیل [H4]، صفحه ۲۶۹.

(۶ـ۲۰)، (۶ـ۲۳): توسط برخی مؤلفان ماتریسهای $n \times n$ای مانند S که در معادلهٔ $S\overline{S} = \overline{S}S = I$ صدق می‌کنند، ماتریسهای دایره نامیده شده‌اند. برای مطالعه رجوع کنید به یاکوبستال [J3].

در مورد جبر سه عملی رجوع کنید به ک. منگر [M2].

نمایش تبدیلات خطی کسری با ماتریسهای ۲×۲ به کیلی منسوب است.

تعمیمی از هندسهٔ انعکاسی به n متغیر مختلط به هندسه سیمپلکتیک موسوم است و توسط زیگل ابداع شده است [S7]. این هندسه در نهایت به مطالعه دستگاههای

دینامیکی همیلتونی مربوط می‌شود. رجوع کنید به زیگل و موزر [S6].

فصل ۷. خوانندهٔ علاقمند به ادامه مطالعهٔ مبحث انعکاس شوارتسی از نقطه نظر هندسهٔ دیفرانسیل (هندسهٔ همدیس) باید به کارهای ا.کسنر، جی.پفیفر و ج.دو چیکو [k4] ، [P3,4]مراجعه نماید. فرمول (۲۲.۷) که اساساً در مورد $\overline{S(z)}$ اثبات شده در کسنر [k3] داده شده است. همچنین به [D5] مراجعه کنید.

در مورد کاربردهای مشتق شوارتسی در نگاشت همدیس رجوع کنید به جلد دوم کتاب هیل [H4] صفحه‌های ۳۷۵ـ۳۸۰ و نهاری [N1].

فصل ۸. دیویس و پولاک [D6]. علاقه به تکرار تابعی توابع تحلیلی و مبحث توابع جایگشت‌پذیر موجب نوشتن این مطالب و ویژگیهای وابسته تابع شوارتس شد. ظاهراً مؤلفین تابع شوارتس را به‌عنوان منبع معادله‌های تابعی گوناگون در رابطه با مبحث اخیر نادیده گرفته‌اند. در مورد توابع جایگشت‌پذیر در حالت حقیقی رجوع کنید به کوتسما [K7]. در مورد توابع جایگشت‌پذیر و تکرارها مقاله آی.ن.بیکر [*B1*] از اهمیت زیادی برخوردار است.

تابع مرکب $f'f^{-1}$ که در (۸ ـ'۱) اساساً دوبار ظاهر شده است، در مباحث مختلف هندسهٔ دیفرانسیل اهمیت بسیاری دارد. اگر درایه‌های ماتریس A تابع متغیر u باشند نویسندگان جدید $C(A) = (\frac{da}{du})A^{-1}$ را ماتریس کارتان Aنامیده‌اند. گفته می‌شود که اتحاد $C(AB) = C(A) + AC(B)A^{-1}$ مقدار زیادی هندسهٔ دیفرانسیل در بر دارد.

در مورد نگاشتهای شبه ـ همدیس رجوع کنید به لتو و ویرتانن [L1].

برای مشاهدهٔ یک نظریهٔ انعکاس در ردهٔ خاصی از خمهای جردن بسته رجوع کنید به سلاس [S9].

در مورد قوانین انعکاس معادلات دیفرانسیل جزیی مختلف رجوع کنید به لوی [L3] و سلاس [S8,9].

در مورد نمایش ماتریسی ترکیب تابعی و اتحاد (۸ـ۳۶) رجوع کنید به آی.شور [S3]، ای.یابوتینسکی [J2]. این مؤلفان اتحادهای مذکور را به چند جمله‌ایهای فایبر که توابع تحلیلی را نسبت به آنها در ناحیه‌های کلی می‌توان بسط داد، اعمال می‌کنند. اثبات قضیهٔ لاگرانژـبورمن با تأکید بر این که این قضیه یک اتحاد جبری کلی است از هنریچی است [H2].

در مورد زاویه‌های منحنی‌الخط و مسألهٔ نیمساز رجوع کنید به کسنر [K1]، [K3]،

پفیفر [P3]، [P4]، [P5]. در [K2] کسنر مسألهٔ هم‌ارزی همدیسی خمهای تحلیلی با نقاط تکین را مورد بررسی قرار می‌دهد.

پفیفر اظهار می‌دارد که جی.د. برکهف علاقه زیادی به دو مسألهٔ این بخش داشت. هرچند وی چیزی در این باره منتشر نکرده است اما استاد راهنمای رساله‌ای در این مبحث بوده است (ل.ت.ویلسون. ۱۹۱۵). پروفسور گارت بیرکهف یادآوری می‌کند که پدرش بین «جوابهای صوری» و «جوابهای همگرا» تفاوت قایل بود، تفاوتی که در اینجا حائز اهمیت است. رجوع کنید به جی.د.بیرکهف. مجموعهٔ مقالات، جلد اول، صفحه ۵۱۹ پانویس.

فصل ۹: این فصل مبنای سخنرانی مؤلف در بخش شمالشرقی جامعهٔ ریاضی آمریکا، در پاییز ۱۹۶۹ در کالج ویتن شهر نورتن ایالت ماساچوست بود. شکل سادهٔ تابع شوارتس به‌ویژه در مورد مارپیچ متساوی‌الزاویه شگفت‌انگیز است و بی‌تردید روح ج. برنولی کاشف بسیاری از ویژگیهای بارز این خمها را خوشحال خواهد کرد. سؤال اول عنوان فصل را می‌توان به چندین روش پاسخ داد. به نظر می‌رسد که پاسخ داده شده جالبترین باشد.

در مورد خمهای ناوردا تحت تبدیلهای موبیوس رجوع کنید به شوردتفگر [S5]

در مورد رده‌بندی نقاط تکین معادله‌های دیفرانسیل معمولی نگاه کنید به هورویتس [H5].

فصل ۱۰: در حالتی که $s(z)$ گویاست رجوع کنید به پولیا [P7] و دیویس و پولاک [D6]. اثبات نامساوی (۲.۱۰) توسط پولیا مبتنی بر یک قضیه از هـ.بوهر می‌باشد که خودش نیز بسیار جالب است، با استفاده از این نامساوی، پولیا قضیه زیر را در مورد توابع تام مرتبهٔ متناهی ثابت می‌کند: اگر g و h توابعی تام و gh تام مرتبه متناهی باشد آنگاه (الف) h یک چند جمله‌ای و مرتبهٔ g متناهی است. یا (ب) مرتبهٔ h متناهی و مرتبهٔ g صفر است. برای استفاده بیشتر نگاه کنید به گروس [G4].

نتیجه زیر نیز که با کشفی مجدد همراه است ماهیتی نظیر قضیهٔ گویایی $S(z)$ دارد. فرض کنیم $w = f(z)$ تابعی تک مقداری از $|z| \leq \infty$ به توی خودش باشد فرض کنیم f هر خط مستقیم یا دایره را به خط مستقیم یا دایره بنگارد. در این صورت $f(z)$ یک تبدیل موبیوس به صورت $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ یا مزدوج تبدیلی به این صورت است. برای نمونه، رجوع کنید به شوردتفگر [S5]، صفحه ۱۰۶.

در مورد مشابه حقیقی $S\overline{S} = I$. معادلهٔ $f^n(x) = x$ که $n > 1$ و $f^n = ff\cdots f$

به معادله بابیج موسوم است. برای بحثی در مورد جوابهای حقیقی رجوع کنید به فصل ۱۵ کوسزما [K7]. تنها جوابهای مرودفیک معادلهٔ بابیج به صورت $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ هستند.

فصل ۱۱. عملگرهای $\dfrac{\partial}{\partial z}$ ، $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ را می‌توان درکتابهای بسیاری پیدا کرد، مثلاً، برگمن [B3]، گارابدیان [G1]، وکوآ [v1]، ککیک [K5]، لتو و ویرتانن [L1].

بوخز [B5]، وکوآ [v1] شرایط کافی کلی برای قضیهٔ گرین ارائه می‌دهند. د.پمپیو قبلاً فرمول (۱۱ـ۱۳) را می‌دانست. در مورد نقاط تکین $S(z)$ نگاه کنید به دیویس و پولاک [D6]. فرمول (۱۱ـ۳۴) اصلاً توسط آی.ج. شوئنبرگ و موتزیکین ثابت شده و در شوئنبرگ [S2] گزارش شده است. آنها این فرمول را با استفاده از فرمول ماندهٔ ارمیت گینوکی ثابت کرده‌اند. این فرمول مستقلاً توسط گرانسکی [G5]، [G6]، [G7]نیز اثبات شد و در معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم به کار رفته است. همچنین رجوع کنید به دیویس [D2]، [D5]. در مورد (۱۱ـ۴۰) نگاه کنید به [D5]. در مورد (۱۱ـ۳۸) نگاه کنید به گرانسکی [G6]. در مورد بسط نوع داربو در مثال نگاه کنید به گرانسکی [G6].

جواب عمومی $\Delta^n F = 0$ را به آسانی می‌توان بر حسب $2n$ تابع تحلیلی نمایش داد. نگاه کنید به وکرآ [v1]، صفحه ۳۵.

در مورد ادامهٔ تحلیلی توابع موزون نگاه کنید به گارابدیان [G2]صفحه ۶۴۶. در مورد مسأله کوشی رجوع کنید به هینریچی [H1].

در مورد نظریهٔ نگاشتهای شبه ـ همدیس، برای نمونه نگاه کنید به لتو و ویرتانن [L1].

روش دو دایره درکشسانی نوری متعلق به لوئیس و پولاک است [L2]. برای اتحادهای بیشتر، که برخی شامل توابع شوارتس بیضیهای همکانون هستند به این مقاله نگاه کنید. همچنین در مورد سایر کاربردهای روشهای متغیر مختلط در میدانهای تنش مسطح نگاه کنید به نمینی و ساینز [N2].

فصل ۱۲. در مورد موضوعهای مقدماتی مکانیک سیالات، برای نمونه، نگاه کنید به میلنه ـ تامپسون [M3].

فصل ۱۳. روش نگاره‌ها در مورد ناحیه‌هایی که کرانهٔ آنها خط مستقیم، دایره، صفحه یا کره است معمولاً در کتابهای معادلات دیفرانسیل جزیی یا متغیر مختلط مورد بحث واقع می‌شود. این روش در مورد ناحیه‌هایی که مرز جبری دارند و شاخه‌هایی از تابع شوارتس ویژگی گروهی (که در این کتاب مورد بحث قرار نگرفتند) معینی دارد از د.ا.گریو

[G3] نتیجه می‌شود. موضوعهای وابسته در مورد حل مسأله اصلی نظریه پتانسیل توسط انتگرال کوشی و فرمول پلمیلج را می‌توان در ل.ث.وودز [W3] مشاهده کرد. این مطالب را می‌توان مقدمه‌ای بر روشهای موسخلیشویلی و مکتب او در کشسانی مسطح دانست.

فصل ۱۴. دیویس [D4]، [D5]. قضیهٔ والش را در صفحهٔ ۴۰ والش [W1] می‌توان یافت. این قضیه به قضیه‌ای از م. و. ف.ریس در مورد اندازه‌های متعامد بر توابع تحلیلی روی قرص واحد، مربوط است. در مورد $L^۲(B)$، برای نمونه، نگاه کنید به برگمن [B2]، دیویس [D1].

در مورد بسته‌بندی کامل ناحیه‌ای چون B توسط قرصها، نگاه کنید به وسلر [W2] ، که در آن قضیه‌ای بسیار کلیتر اثبات شده است. استفاده از بسته‌بندیها در نظریه متغیر مختلط دست‌کم به د.پمپیر برمی‌گردد. بسته‌بندیها منبعی از مثالهای آسیب‌شناسی هستند.

واگرایی $\sum r_n$ برای بسته‌بندیهای کامل متعلق به س.مرگلیان است (نگاه کنید به وسلر [W2]). همگرایی سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} r_n^\alpha$ را ز.ا.ملزاک [M1] و دیگران مورد مطالعه قرار داده‌اند. در این مورد مطالب قابل ملاحظه‌ای انتشار یافته است.

نتیجهٔ هابر از این قرار است. فرض کنیم $w(x)$ یک مدول پیوستگی باشد، یعنی، $w(x)$ روی $(۰,\infty)$ حقیقی و صعودی است و $\lim\limits_{x\to o^+} tw(x)=۰$. فرض کنیم خانوادهٔ $F(w)$ متشکل از توابع f روی $[a,b]$ باشد که به ازای عددی چون $C=C(t)$ در شرط

$$|f(x_۱)-f(x_۲)|\leq C(f).w(|x_۱-x_۲|), \qquad x_۱,x_۲\in[a,b]$$

صدق می‌کنند در این صورت F یک تربیع ساده دارد.

فصل ۱۵. برخی از مطالب جدید این بخش مبنای سخنرانی مؤلف در مرکز محاسبات دانشگاه آکسفورد انگلیس در ژانویهٔ ۱۹۷۱ بوده است.

قضیه نگاشت انقباضی را می‌توان در اغلب کتابهای آنالیز تابعی و اغلب کتابهای جدید آنالیز عددی پیدا کرد.

در مورد قضیهٔ نقطهٔ ثابت هنریچی نگاه کنید به هنریچی [H1]. پرفسور هنریچی به من گفت که شرایط قضیهٔ وی را می‌توان ضعیفتر کرد. بنابراین کافی است f در ناحیهٔ همبند ساده‌ای مانند R تحلیلی و R شامل بستار $f(R)$ باشد. اثبات مستلزم استفاده از خود قضیهٔ نگاشت ریمان است. بعلاوه اگر R همبند چندگانه باشد، می‌توان با استفاده

از تابع گرین R نتیجه مشابهی به‌دست آورد.

شرط (۱۵ـ۳) را می‌توان در استروسکی [O1] پیدا کرد.

فصل ۱۶: یک فرمولبندی بسیارکلی از این قرار است: فرض کنیم تابع $G : R^n \to R^n$ دارای نقطه ثابتی مانند x^* باشد، یعنی $Gx^* = x^*$. به‌علاوه فرض کنیم G دارای مشتق فرشهٔ $G'(x^*)$ در x^* باشد و شعاع طیفی آن در $\rho(G'(x^*)) < ۱$ صدق نماید. در این صورت x^* برای تکرار $x_{n+۱} = Gx_n$ جاذب است.

در مورد خمهای ناوردای حقیقی نگاه کنید به [M4]، کوشزما [k7]. وجود خمهای ناوردا در مکانیک سماوی اهمیت بسیاری دارد. نگاه کنید به زیگل و موزر [S6]. به‌نظر می‌رسد که ارتباط این خمها با تابع شوارتس مطلوب باشد. در مورد تکرار و توابع شرودر نگاه کنید به مونتل [M4]، کوتسزما [k7]، زیگل و موزر [S6].

اثبات حالت IIب۱ (قضیهٔ زیگل) که توسط موزر در زیگل و موزر [S6] ارایه شده است شرح زیبایی از روش کولموگورف ـ آرنولد ـ موزر از «همگرایی درجه دوم است». کوسزما به مقالات زیادی در مورد تکرارهای تحلیلی ارجاع داده است. برای مطالب بیشتر در مورد تکرارهای تبدیلهای موبیوسی نگاه کنید به شوردتفگر [S5]فصل II، بخش ۱۰ . در مورد تکرارهای توابع تام نگاه کنید به گروس [G4] فصلهای ۹ و ۱۰.

یک تحقیق وسیع کامپیوتری از تکرارهای غیرخطی در اشتاین و اولام [S10]داده شده است.

برای تأکید بر کار کامپیوتری، این مؤلفین مثال «ساده» زیر را مطرح می‌کنند. تکرار یک متغیرهٔ

$$
\begin{aligned}
y_{n+۱} &= w_n(۳ - ۳w_n + \sigma w_n^۲) \\
w_n &= ۳y_n(۱ - y_n) \qquad ۰ < y_۰ < ۱
\end{aligned}
$$

را در نظر بگیرید. اگر $\sigma = ۰/۹۹۰۰۴$ آنگاه به ازای «تقریباً تمام» $y_۰$ها دنبالهٔ $\{y_n\}$ به یک دور مرتبهٔ ۱۴ همگراست. اگر $\sigma = ۰/۹۹۰۰۵$ این دنباله به دوری مرتبهٔ ۲۸ همگراست. اگر $\sigma = ۰/۹۹۰۰۸$ هیچ رفتار دوری در ۵×۱۰^۵ تکرار مشاهده نمی‌شود.

من در صفحه کامپیوتر چیزهای هیجان‌انگیز و شگفت‌آور بسیاری دیده‌ام این صفحه می‌تواند تصویر گرافیکی را به عنوان یک شیئ متعارف حاصل از تحقیق ریاضی ارائه نماید نسبت نقاشیها و تصاویر متحرک کامپیوتری به تصاویر ثابت سابق به قول دکارت همانند

نسبت خطابه‌های سیسرون به الفبای ساده است. این تصاویر را نمی‌توان درکتابها آورد، آنها را باید در فیلمها نشان داد.

من ـ بویژه در این فصل ـ می‌خواستم کامپیوتر را آزادانه جهت توضیح نکته‌های مطرح شده و ارائه مسایل جدید به‌کار ببرم. ولی این کار را به آینده موکول کردم.

۱

واژه‌نامه فارسی‌ـ‌انگلیسی

الف

ادامهٔ تحلیلی	Analytic Continuation
ازدواج	Conjugation
اصل نگاشت همدیس	The Principal of Conformal Mapping
انتگرال‌ها	Integrals
انحراف کشش مزدوج	Conjugate Stress Deviatior
انعکاس	Inversion / Reflection
انعکاس شوارتسی	Schwarzian Reflection
اوال‌های کاسینی	Ovals of Cassini
اولام	Ulam

ب

بروچرخزاد	Epitrochoid
بسته‌بندی کامل	Complete Packing
بیضی	Elipse
بیضی‌های هم کانون	Confocal Ellipses

ت

تابع تحلیلی مزدوج	Conjugate Analytic Function
تابع جدایی‌پذیر	Separable Function

Biharmonic Function	تابع دوهم ساز
Schwarz Function	تابع شوارتس
Anti - analytic Function	تابع ضد تحلیلی
Involutory Function	تابع مرتبه دو
Conjugate Function	تابع مزدوج
Reproducing Kernel Function	تابع هسته‌ساز
Harmonic Function	تابع هم‌ساز
Identity Function	تابع همانی
Stable Transformation	تبدیل پایدار
Transformation of The Plane	تبدیل صفحه
Anti - analytic Transformation	تبدیل ضد تحلیلی
Bilinear Transformation	تبدیل دو خطی
Möbius Transformation	تبدیل موبیوس
Complex Dilation	تجانس مختلط
Complete Quadrature	تربیع کامل
Functional Composition	ترکیب توابع
Orthogonality	تعامد
Symmetry	تقارن
Symmetry with Respect of Lines	تقارن نسبت به خط‌ها
Symmetry with Respect of Circles	تقارن نسبت به دایره‌ها
Symmetry with to Arcs	تقارن نسبت به کمان‌ها
Conformal Symmetry	تقارن همدیس
Pade′ Approximates	تقارن تقریب کننده‌های پاده
Iteration	تکرار
Functional Iteration	تکرار تابعی
Permutable	توابع جابه‌جایی

ج

Trioperational Algebra	جبر سه عملگری

جدول تابع شرودر	Table of Schroeder Function

ح

حاصل‌ضرب خارجی	Exterior Product

خ

خط اویلر	Euler Line
خط گرداب	Vortex Line
خط مستقیم	Straight Line
خط‌های ایزوکلینیک	Isoclinic Lines
خط‌های جریان	Stream Lines
خط‌های همرنگی	Isochromatic Lines
خم درجه دوم دو دایره	Bicircular Quartic
خم لیم	Lame′ Curve
خم ناوردا / کمان ناوردا	Invariant Curve
خمیدگی	Curvature
خود مزدوج	Self - Conjugate

د

داخل	Interior
دایره	Circle
دایرهٔ خمیدگی	Circle of Curvature
دایرهٔ محاطی	Inscribed Circle
دایرهٔ نه ـ نقطه	Nine - Point Circle
دو قطبی	Doublet

ر

رز	Rose
روش اختلاف شکست	Shear difference method
روش تک دایره	Single - Circle method

روش دو دایره	Two - Circle Method
روش نیوتن	Newtons method
ریشهٔ دوم تابعی	Functional Square root

ز

زاویه شاخی	Horn Angle
زاویهٔ منحنی‌الخط	Curvilinear Angle

س

سرعت مختلط	Complex Velocity
سری توانی صوری	Formal Power Series
سری لوران	Laurent Series

ش

شار یکنواخت	Uniform Flow
شیب	Clinant

ص

صفحه مختلط	Complex Plane
صفحه مختلط دوگان	Dual - Complex plane

ض

ضد واحد	Counteridentity

ع

عملگر دیفرانسیل بیضوی	Elliptie Differential Operator

ف

فاصله	Distance
فرمول بلزیوس	Balsius , Formula
فرمول پلملج ـ استیلیس	Plemelj - Stielljes Formula
فرمول نقطه ـ ضریب زاویه‌ای	Point Slope Formula
فرمول نوع داربو	Darboux Type Formula
فضای هیلبرت $L^۲(B)$	Hilbert Space $L^۲(B)$

ق

قضیهٔ پولیا	Po′lya's Theorem
قضیهٔ دایره	Circle Theorem
قضیهٔ زیگل	Siegel's Theorem
قضیهٔ فویر باخ	Feuer bach's Theorem
قضیهٔ کوتا ـ یوکوسکی	Kutta - Joukowski Theorem
قضیهٔ گرین	Green's Theorem
قضیهٔ لاگرانژ ـ بورمان	Lagrange -Bürmann Theorem
قضیهٔ موتزیکین ـ شوئنبرگ ـ گرانسکی	Motzikin - Schoenberg - Gruns
قضیهٔ نقطهٔ ثابت هنریچی	Henrici Fixed Point Theorem
قضیهٔ نگاشت انقباضی	Contraction Mapping Theorem
قضیهٔ والش	Walsh's Theorem
قضیهٔ وکوآ	Vekua's Theorem
قطری کردن تابع	Diagonalization of Function

ک

کمان تحلیلی	Analytic Arc
کمان جبری	Algebraic Arc
کمان غیرتحلیلی	Non - analytic Arc

گ

گردش شار	Circulation

ل

لاپلاسین	Laplacian
لگزودرام	Loxodrome
لیماسون	Limacon
لیمینسکات تعمیم‌یافته	Generalized Leminscate

م

ماتریس	Matrix
ماتریس برای تبدیهای دوخطی	Matrix for Bilinear Transformation
ماتریس کارتان	Cartan Matrix
ماتریس‌های دایره	Circle Matrices
مارپیچ ارشمیدس	Spiral of Archmedes
مارپیچ برنولی	Spiral of Bernoulli
مانده	Residue
مثلث مماسی	Tangential Triangle
مجموعهٔ ناوردا	Invariant Set
محاسبه	Computation
مختصات ایزوتراپیک	Isotropic Coordinates
مختصات کمینه	Minimal Coordinats
مختصات مزدوج	Conjugate Coordinats
مدار	Orbit
مزدوج‌ها (هرمیتی)	Conjugates (Hermitian)
مسئلهٔ پوانکاره	Poincaré's Problem
مسئلهٔ دیریکله	Dirichlet Problem
مسئلهٔ کوشی، معادله‌های بیضوی	Cauchy Problem , Elliplic Equations

Function Theoretic Center Problem — مسئلهٔ مرکز نظریهٔ توابع
Bisection Problem — مسئلهٔ نیمساز
Directional Derivative — مشتق جهت‌دار
Normal Derivative — مشتق جهت قائم
Schwarzian Derivative — مشتق شوارتسی
Tangenital Derivative — مشتق مماسی
Complex Derivatives — مشتق‌های مماسی
Ordinary Differential Equation — معادلات دیفرانسیل معمولی
Babbage Equation — معادلهٔ بابیج
Functional Equation — معادلهٔ تابعی
Autonomous Differential Equation — معادلهٔ دیفرانسیل خودگردان
Differential Equation , Beltrami Type — معادلهٔ دیفرانسیل نوع بلترامی
Schroeder - Koenigs Equation — معادلهٔ شرودر ـ کونیگز
Functional Equations, Conjugate Abel Type — معادله‌های تابعی مزدوج نوع آبل
Functional Equations , Conjugate Schroder Type — معادله‌های تابعی مزدوج نوع شرودر
Steiner's Porism — معمای اشتاینر
Conic Section — مقطع مخروطی
Fluid Mechanics — مکانیک سیالات
Repeated — مکرر
Source — منبع

ن

Conformal Invariants — ناورداهای همدیس

ناوردایی همدیس	Conformal Invariance
نقاط تکین دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل	Singularities of Differential Systems
نقطهٔ ثابت	Fixed Point
نقطهٔ جاذب	Attractive Point
نگاشت شبه ـ همدیس	Quasi - Conformal Mapping
نور ـ کشسانی	Photoelasticity
نوع خودریخت	Qutomorphic Type

و

واگرایی	Divergence
ویژگیهای کلان	Properties in The Large

هـ

هم پتانسیل‌های سرعت	Velocity Equipotentials
هندسهٔ انعکاسی	Inversive Geometry
هندسهٔ دیفرانسیل	Differential Geometry
هندسهٔ سیمپلکتیک	Symplectic Geometry