تبدیلهای هندسی

جلد اول

ای. م. یاگلم

ترجمهٔ اسدالله کارشناس

عمید رسولیان

(ریاضیات پیش‌دانشگاهی ـ ۸)

تبدیلهای هندسی

جلد اول

(ریاضیات پیش‌دانشگاهی ـ ۸)

ای. م. یاگلم

ترجمهٔ اسدالله کارشناس، عمید رسولیان

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

Geometric Transformations I
New Mathematical Library (8)
I. M. Yaglom
The Mathematical Association of America, 1962

تبدیلهای هندسی
جلد اول
تألیف ای. م. یاگلم
ترجمهٔ دکتر اسدالله کارشناس، دکتر عمید رسولیان
ویراستهٔ دکتر محمدهادی شفیعیها
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۶۹
چاپ دوم ۱۳۸۳
تعداد ۱۰۰۰
حروفچینی: کلمه‌پرداز
لیتوگرافی: بهزاد
چاپ و صحافی: هورخش

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

یاگلم، ایساک موئیسئویچ ۱۹۲۱ - Yaglom, Isaak Moiseevich, 1921
تبدیلهای هندسی / ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها... [و دیگران]
۳ ج.
ISBN 964-01-0532-5 (ج ۱)
ISBN 964-01-0537-6 (ج ۲)
ISBN 964-01-0524-4 (ج ۳)
ISBN 964-01-8001-7 (دوره)
عنوان اصلی: *Geometric transformations*
۱. تبدیلهای ریاضی. الف. شفیعیها، محمدهادی، ، مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.
QA۶۰۱ ۵۱۶/۱

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

سخنی با خواننده

ارتباط بین استادان برجستهٔ دانشگاهها و دانش‌آموزان دوره‌های پیش‌دانشگاهی، از مؤثرترین وسیله‌هایی‌است که به‌کشف و پرورش استعدادها کمك می کند و زمینه را برای‌تربیت دانشمندان آینده فراهم‌می‌سازد. در بین‌شخصیتهای علمی تراز اول، که پژوهندگان یك علم را در بالاترین سطح ممکن آموزش می‌دهند و راهنمایی می کنند، عدهٔ‌کمی این‌توانایی را دارندکه درآن زمینهٔ‌علمی، و با رعایت همهٔ دقتها ونکته‌ها، کتابهایی تألیف‌کنند که برای قشر وسیعی از دانش‌آموزان دبیرستانی، وگاه برای افراد عادی، آموزنده وقابل درك باشد. این شخصیتها، که درهر کشور انگشت شمارند، از این راه، ارتباطی‌بین‌خود وجوانان برقرارمی‌سازند. دسترسی دانش‌آموزان به‌چنین کتابهایی، پشتوانه‌ای برای تأمین آیندهٔ علمی جامعه است.

جامعهٔ ریاضی آمریکا مجموعه‌ای از این‌گونه کتابها را زیر عنوان New Mathematical Library فراهم‌آورده و تاکنون بیش از سی جلد از آنها را منتشرکرده است‌که بعضی از آنها مستقیماً به زبان انگلیسی تألیف شده و بعضی دیگر از زبانهای مختلف به‌انگلیسی ترجمه شده‌اند. این‌کتابها تاکنون به بسیاری از زبانهای دیگر ترجمه‌شده وهرکدام، چه درآمریکا وچه درکشورهای‌دیگر، بارها تجدیدچاپ شده است.

گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر مرکز نشر دانشگاهی، به حکم وظیفه‌ای که برای‌گسترش دانش‌ریاضی به‌عهده دارد، به‌ترجمهٔ این‌کتابها از انگلیسی به‌فارسی، و ویرایش آنها‌پرداخته‌است. مترجمان و ویراستاران ازافرادخبره برگزیده شده‌اند وکوشش لازم به‌عمل‌آمده است تا، ضمن رعایت امانت‌کامل‌درترجمه، متن فارسی روان و خالی از ابهام باشد. کتابها به‌ترتیبی‌که ترجمهٔ آنها‌آماده شود زیر عنوان **ریاضیات پیش‌دانشگاهی** منتشر می‌شوند.

این مجموعه کتابها را می‌توان دو دسته کرد. یك دسته شامل کتابهایی است که مباحثی از ریاضیات را به زبان ساده تشریح می‌کنند و می‌توانند برای درسهای ریاضیات عمومی دانشگاه نیز جنبهٔ کمك درسی داشته باشند. ویراستاران متن اصلی این کتابها در پیشگفتار خود از جمله نوشته‌اند:

مطالب کتابهای این مجموعه در برنامهٔ ریاضیات دبیرستانی یا گنجانیده نشده یا به‌اجمال بیان شده است. میزان دشواری آنها متفاوت است و حتی دریك کتاب هم، مطالعهٔ بعضی از بخشها به‌تمرکز حواس بیشتری نیاز دارد. خواننده برای فهم مطالب اغلب این کتابها، هرچند به‌اطلاعات ریاضی چندانی نیاز ندارد، ولی باید تلاش فکری فراوانی به‌عمل آورد. کتاب ریاضی را نمی‌توان به‌سرعت خواند، و نباید توقع داشت که با یك بار مطالعه، تمام بخشهای آن فهمیده شود. می‌توان بدون معطل ماندن روی بخشهای پیچیده از آنها گذشت و بعد، برای مطالعهٔ عمیق به آنها بازگشت، زیرا بسیار پیش می‌آید که مطلبی در مبحث بعدی روشن می‌شود. از سوی دیگر، می‌توان بخشهایی را که مطالب آنها کاملا آشناست خیلی سریع مطالعه کرد. بهترین راه فراگرفتن ریاضیات، حل مسأله‌های آن است. هر کتاب شامل مسأله‌هایی است که حل برخی از آنها ممکن است مستلزم تأمل قابل ملاحظه‌ای باشد. پاسخها یا راهنماییهای مربوط به حل این مسأله‌ها، غالباً در پایان کتاب آمده‌اند. به خواننده توصیه می‌شود که کوشش کند هرمسأله را خود حل کند و فقط برای اطمینان از درستی راه‌حل خود به بخش پاسخها مراجعه نماید. بدین‌طریق، مطلب رفته‌رفته برایش پرمعناتر خواهد شد.

دستهٔ دیگر کتابها، شامل مجموعه‌هایی غنی از مسأله‌ها یا پرسشهای جالب چندگزینه‌ای است که در مسابقه‌های معروف ریاضی مطرح شده‌اند. دراین کتابها، راه‌حل دقیق مسأله‌ها آمده است. درمورد پرسشها به‌ذکر پاسخ درست اکتفا نشده، بلکه حل کامل آنها نیز عرضه شده‌است.

نظرات و پیشنهادهای خوانندگان ما را به‌ادامهٔ کار و گسترش این‌گونه فعالیتها تشویق خواهد کرد.

گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر
مرکز نشر دانشگاهی

پیشگفتار نگارنده

این کتاب، که به‌هندسهٔ مقدماتی اختصاص دارد، درسه قسمت تنظیم شده‌است. درباب هندسهٔ مقدماتی مطالب زیادی، به‌ویژه درسدهٔ نوزدهم، گردآوری و تعداد قابل‌توجهی قضایای جالب و ابتکاری دربارهٔ دایره‌ها، مثلثها، چندوجهیها، وغیره ثابت شده بود. در محدودهٔ هندسهٔ مقدماتی «مباحث» کاملا جداگانه‌ای مانند هندسهٔ مثلث یا هندسهٔ چهاروجهی پدید آمد، که مطالب گسترده و مسائل مخصوص به‌خود، و نیز روشهای ویژهٔ خود را درحل مسائل داشتند.

وظیفهٔ کتاب حاضر، آشناساختن خواننده با یك رشته‌قضایایی که برای وی جدید هستند، نیست. به‌نظر ما، آنچه در بالا گفته شد، به‌خودی خود توجیهی برای انتشار تکنگاشتی دربارهٔ هندسهٔ مقدماتی نیست، چرا که بیشتر قضایای هندسهٔ مقدماتی، که فراتر ازمحدودهٔ درسهای‌دبیرستانی هستند، صرفاً مطالب نادری‌هستندکه مورد استعمال بخصوصی ندارند و بیرون از مسیر پیشرفت ریاضی قرار دارند. در حالی‌که هندسهٔ مقدماتی، علاوه‌بر قضایای واقعی،شامل دواندیشهٔ‌کلی مهم هست که پایهٔ تمامی‌پیشرفتهای بعدی در هندسه هستند، و اهمیت آنها از این محدودهٔ کلی فراتر می‌رود. از یك سو درذهن‌خود روش‌قیاسی وپایهٔ اصل‌موضوعی هندسه را داریم وازسوی دیگر تبدیلات هندسی ومبنای نظریهٔ گروهی هندسه را. این اندیشه‌ها بسیار بارور بوده‌اند؛ تکامل هرکدام به هندسهٔ نااقلیدسی منجرشده است. وظیفهٔ اصلی این کتاب، شرح اندیشهٔ دوم، یعنی، فکر مبنای نظریهٔ‌گروهی هندسه است....

اکنون چندکلمه‌ای هم درباب ویژگی این‌کتاب صحبت کنیم. این‌کتاب برای ردهٔ وسیعی از خوانندگان نگاشته شده است، در این‌گونه موارد همواره لازم است منافع بعضی از خوانندگان را فدای منافع برخی دیگرکرد. نگارنده منافع خوانندهٔ مستعد را فداکرده است، وتلاش وی بیشتر متوجه سادگی و روانی مطلب بوده است

تا دقیق ومنطقی بودن آن. از این‌رو ، مثلا، در این‌کتاب مفهوم عام تبدیل هندسی را تعریف نکرده‌ایم، زیرا عبارات‌معرف که از لحاظ شهودی واضح هستند، همواره مشکلاتی را برای خوانندگان بی‌تجربه پدید می‌آورند. درست به‌همین دلیل بود که لازم دیدیم از به‌کاربردن زوایای جهتدار خودداری، و آشنایی با پاره خطهای جهتدار را به فصل دوم موکول کنیم، در حالی‌که، دقیقاً بگوییم، زیان این روش این است‌که برخی استدلالها درمتن اصلی و در حل مسائل ما، باید ناقص تلقی شوند (مثلا، برهان صفحهٔ ۵۱). به‌نظر ما چنین آمدکه درکلیهٔ این موارد خوانندهٔ مجرب می‌تواند استدلال را برای خود کامل‌کند و عدم دقت، خوانندهٔ‌کم تجربه را پریشان نخواهدکرد ... .

عین‌همین‌ملاحظات درانتخاب اصطلاحات نقش‌زیادی بازی‌کرده‌اند. نگارنده باتوجه به‌تجربیات خود به‌عنوان یك‌دانشجو، متقاعد شده‌است‌که وجودتعداد زیادی اصطلاحات ناآشنا می‌تواند ناهنجاریهای زیادی بیافریند و بدین لحاظ سعی‌کرده است‌که دراین باب‌کمال صرفه‌جویی را منظورکند. دربرخی موارد، این طرز تلقی موجب شده است‌که از به‌کاربردن عباراتی‌که مشکل‌آفرین بوده‌اند اجتناب ورزد، و از این‌رو خواستهای یك خوانندهٔ کارآزموده را نادیده‌گرفته است ....

مسائل، فرصتی برای خواننده فراهم می‌آورند تا ببیند که چه‌اندازه برمطالب نظری تسلط پیداکرده است. نیازی نیست‌که خواننده تمامی مسائل را به‌ترتیب حل کند، اما توصیه می‌شودکه حداقل یکی (ترجیحاً چندتا) از مسائل هر بخش را حل کند. این‌کتاب به‌گونه‌ای تدوین شده‌است‌که اگر خواننده چنین عمل‌کند، هیچ‌یك از مطالب اصلی محتوای‌آن ازنظرش دور نمی‌ماند. پس ازحل (یا سعی برای حل) یك مسأله باید راه حلی راکه درآخرکتاب‌آورده شده‌است، مطالعه‌کند.

صورت بندی مسائل، مطابق روال معمول، برطبق مطالب‌کتاب تنظیم نشده است. اما درراه‌حلها ازمطالب اصلی پیروی و ازتبدیلات درهندسهٔ مقدماتی استفاده شده‌است. توجه‌اصلی به‌روشها بوده است نه به‌نتایج؛ بنابراین یك تمرین بخصوص ممکن است در چند جا دیده شود، زیرا مقایسهٔ شیوه‌های مختلف‌راه حل یك مسأله همیشه آموزنده است.

مسائل ترسیمی زیادی درمتن وجود دارد. درحل آنها، علاقه‌مند به«ساده‌ترین» ترسیم (به‌تعبیری) نیستیم. بلکه نگارنده به‌این دیدگاه‌که مسائل‌اساساً یك سود منطقی دارند توجه می‌نماید، وبدین لحاظ خود را پای‌بند ترسیم عملی‌آنها نمی‌سازد.

برقضیه های فضای سه بعدی هیچ تأکیدی نشده است، این محدودیت، براندیشه‌های اصلی‌کتاب تأثیر جدی نداشته است. ممکن است برخی از مسائل در

هندسهٔ فضایی جلب توجه کنند، در این صورت، مسائل این کتاب جنبهٔ روشنگری دارند و به هیچوجه تنها به خود ختم نمی‌شوند.

دستنویس این کتاب را نگارنده در انستیتو آموزش و پرورش اورخوو ا- زوئوا... در ارتباط با کار خود در بخش هندسهٔ جلسات تبادل نظر دربارهٔ ریاضیات دبیرستانی در دانشگاه دولتی مسکو تهیه کرده است.

ای . م. یاگلم

مقدمه

هندسه چیست؟

در صفحهٔ اول کتاب درسی هندسهٔ دبیرستانی، تألیف ا. پ. کیسلیوف* ، بلافاصله بعد از تعاریف نقطه، خط، سطح، جسم، و عبارت «گردایه‌ای از نقاط، خطوط، سطوح یا اجسام که به‌طریق عادی در فضا واقع شده‌اند، یك شکل هندسی نامیده می‌شود»، تعریف هندسه به‌طریق زیر آمده است: «هندسه علمی است که ویژگیهای اشکال هندسی را بررسی می‌کند». پس این احساس درشخص پیدا می‌شود که سؤال مطروحه در عنوان این مقدمه قبلا درکتابهای درسی هندسهٔ دبیرستانی جواب داده شده‌است ونیازی به‌این‌نیست که شخص خود را بیش از این به‌آن مشغول کند.

اما این‌احساس ازماهیت سادهٔمسأله نادرست است. تعریف کیسلیوف نمی‌تواند غلط خوانده شود، ولی تاحدی ناقص است. واژهٔ «ویژگی» معنی خیلی کلیتری دارد، و اصلا به‌این معنی نیست که تمام ویژگیهای اشکال در هندسه مطالعه می‌شوند. مثلا، در هندسه مهم نیست که یك مثلث روی یك کاغذ سفید رسم شود، یا روی یك تخته سیاه؛ رنگ مثلث موضوع مورد مطالعه در هندسه نیست. این درست است که ممکن است کسی جواب دهد که هندسه ویژگیهای شکلهای هندسی را به‌تعبیر تعریف بالا مطالعه می‌کند، و رنگ یك ویژگی کاغذی است که شکل روی‌آن رسم می‌شود، و نه یك ویژگی خود شکل. اما، این جواب باز ممکن است شخص را ارضا نکند؛ برای اینکه بیشتر متقاعد شویم، دوست داریم که بتوانیم یك تعریف دقیق «ریاضی» از آن ویژگیهای اشکال که واقعاً در هندسه مورد مطالعه قرار می‌گیرند، ذکر کنیم و چنین تعریفی نداریم. این احساس عدم ارضا بخصوص زمانی تشدید می‌شود که شخص‌سعی می‌کند توضیح دهد که چرا درهندسه فاصلهٔ یك راس مثلثی مرسوم بر تختهٔ‌سیاه را

---

* این‌کتاب، کتاب مهم درسی هندسهٔ مسطحه در اتحاد شوروی است.

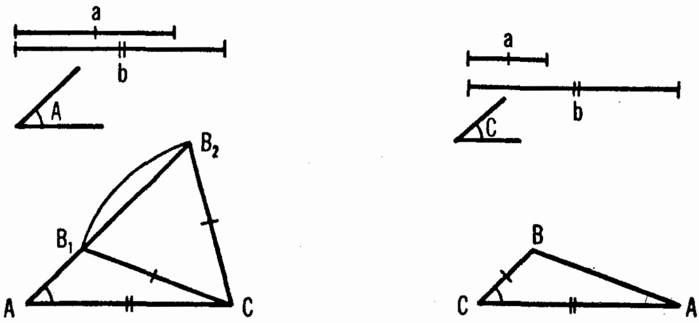
ازخطوط خاصی، مثلا، از ضلع مقابل آن بررسی می‌کنند و نه ازخطوط دیگر، مثل لبهٔ تختهٔ سیاه. چنین توضیحی برمبنای تعریف محض بالا به دشواری می‌تواند صورت گیرد.

پیش ازادامهٔ این‌بحث باید یادآوری کنیم که از کتاب درسی مذکور نمی‌توان به خاطر ناقص بودن تعریفش ایرادگرفت. تعریف کیسلیوف، شاید تنها تعریفی باشد که می‌تواند در نخستین مرحلهٔ مطالعهٔ هندسه داده شود. کافی است بگوییم که تاریخ هندسه از بیش از ۴۰۰۰ سال قبل شروع می‌شود، و اولین تعریف علمی هندسه، که توضیح آن یکی از اهداف اصلی این‌کتاب است، تنها در حدود ۸۰ سال قبل (در ۱۸۷۲) توسط ریاضیدان آلمانی ف. کلاین داده شده است. تا هندسهٔ نااقلیدسی توسط لباچفسکی آفریده نشده بود، ریاضیدانان به روشنی نیاز به‌داشتن یك تعریف دقیق برای موضوع هندسه را مورد توجه قرارنداده بودند. تنها پس ازاین آفرینش بودکه‌روشن شدکه مفهوم شهودی «شکلهای هندسی» بااین‌پیش‌فرض‌که چند«هندسه» نمی‌تواند وجود داشته‌باشد، نمی‌تواند زیربنای مؤثری برای ساختارجامع علم‌هندسه باشد.*

حال برگردیم و روشن‌کنیم که دقیقاً کدام یك از ویژگیهای شکلهای هندسی در هندسه مورد مطالعه واقع می‌شوند. قبلا دیدیم که هندسه‌کلیهٔ ویژگیهای اشکال را بررسی نمی‌کند، بلکه فقط بعضی ازآنها را مورد بررسی قرار می‌دهد. قبل از آنکه شرح دقیقی از آن ویژگیهایی که به هندسه تعلق دارند، داشته باشیم فقط می‌توانیم بگوییم که هندسه «ویژگیهای هندسی» اشکال را بررسی می‌کند. این افزودهٔ ما، به‌تعریف کیسلیوف به‌خودی خودتعریف راکامل نمی‌کند؛ بلکه این‌سؤال‌را به‌سؤالی دیگر بدل می‌کند: «ویژگیهای هندسی» کدام ویژگیها هستند؟ و تنها می‌توانیم جواب دهیم «آن ویژگیهایی‌هستندکه درهندسه مطالعه می‌شوند». بنا براین دچاردور شده‌ایم، هندسه رابه‌عنوان علمی‌که ویژگیهای هندسی اشکال‌را مطالعه می‌کند تعریف کرده‌ایم، و ویژگیهای هندسی آن ویژگیهایی هستندکه در هندسه مطالعه می‌شوند. برای خروج از این دور باید «ویژگی هندسی» را بدون استفاده از واژهٔ «هندسه» تعریف‌کنیم.

برای تامل دربارهٔ این سؤال که «ویژگیهای هندسی» شکلها کدام ویژگیها هستند، قضیهٔ معروف زیر را یادآوری می‌کنیم که: مسألهٔ ساختن مثلثی، که طول دو ضلع آن، a و b و زاویهٔ بین این دوضلع یعنی C معلوم است، تنها یك جواب

* با اینکه هندسهٔ نااقلیدسی موجباتی فراهم کرد که به‌تعریف دقیق هندسه انجامید، ولی خود این تعریف می‌تواند برای‌کسانی‌که هیچ آشنایی با هندسهٔ لباچفسکی ندارند، کاملا قابل شرح باشد.



(ب) (الف)

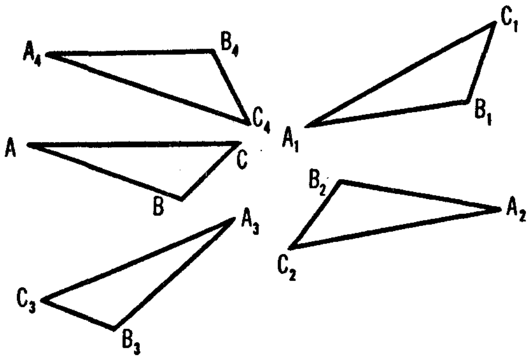
شکل ۱

دارد (شکل ۱ الف).* اگر اندکی بیشتر تأمل کنیم، جملهٔ آخر این قضیه به‌نظر نادرست می‌آید؛ در واقع، تنها یك مثلث با اضلاع داده شدهٔ a و b، و زاویهٔ بین آنها، C، وجود ندارد، بلکه تعداد بیشماری از آنها وجود دارد (شکل ۲)، بنابراین مسألهٔ ما تنها یك جواب ندارد، بلکه بینهایت جواب دارد (شکل ۲). پس، این ادعا که دقیقاً مسأله یك جواب دارد، به چه معنی است؟

این ادعا که با دوضلع داده شدهٔ a و b و زاویهٔ بین آنها، C، تنها یك مثلث می‌تواند ساخته شود، به وضوح به معنای آن است که همهٔ مثلثهایی که دارای دوضلع a و b، وزاویهٔ بین آنها، C، هستند با هم قابل انطباق‌اند.[1] از این‌رو دقیقتر این است که بگوییم با داشتن دوضلع وزاویهٔ بین آن دو از یك مثلث می‌توان تعداد بینهایت مثلث ساخت، اما همهٔ آنها با یکدیگر قابل انطباق‌اند. پس در هندسه وقتی می‌گویند که یك مثلث منحصر به‌فرد با اضلاع داده شدهٔ a و b و زاویهٔ بین C وجود دارد، به معنای آن است که مثلثهایی که صرفاً از لحاظ مکان با هم اختلاف دارند، متفاوت در نظر گرفته نمی‌شوند. وچون هندسه‌را به‌عنوان علمی تعریف کرده‌ایم که «ویژگیهای هندسی» اشکال‌را بررسی می‌کند، واضح است که تنها آن اشکالی که دقیقاً ویژگیهای هندسی واحدی دارند غیرمتمایز از یکدیگر خواهند بود. پس شکلهای قابل انطباق

* برعکس، مسأله ساختن مثلثی با دوضلع دادهشدهٔ c و b و زاویهٔ مقابل به‌یکی از این اضلاع، A، می‌تواند دوجواب داشته باشد (شکل ۱ ب).

۱. دراین مجلد در همه‌جا اصطلاح (قابل انطباق با...) یا (با... قابل انطباق) ترجمهٔ واژهٔ congruent یعنی «تساوی هندسی» گرفته شده است.ـــم.



شکل ۲

باهم دقیقاً ویژگیهای هندسی واحدی دارند؛ برعکس، شکلهایی که قابل انطباق باهم نیستند باید ویژگیهای هندسی متفاوتی داشته باشند، چه در غیر این صورت غیرقابل تمیز از یکدیگر خواهند بود.

بنابراین به تعریف مطلوب ویژگیهای هندسی اشکال رسیده‌ایم: ویژگیهای هندسی اشکال، آن ویژگیهایی هستند که در همهٔ شکلهای قابل انطباق باهم مشترك باشند. حال می‌توانیم به این سؤال که چرا، مثلا، فاصلهٔ یك رأس از یك مثلث تا لبهٔ تخته سیاه درهندسه بررسی نمی‌شود، یك جواب دقیق بدهیم: این فاصله یك ویژگی هندسی نیست، زیرا این فاصله ممکن است در مثلثهای قابل انطباق باهم متفاوت باشد. از سوی دیگر، ارتفاع یك مثلث، یك ویژگی هندسی آن است، چراکه ارتفاعهای متناظر در مثلثهای قابل انطباق باهم همیشه یك اندازه هستند.

حال به تعریف هندسه خیلی نزدیکتر شده‌ایم. می‌دانیم کــه هندسه «ویژگیهای هندسی» اشکال را مطالعه می‌کند، یعنی آن ویژگیهایی راکه در شکلهای قابل انطباق باهم یك اندازه هستند. تنها این باقی می‌ماند که به سؤال: «شکلهای قابل انطباق باهم چه شکلهایی هستند؟» جواب دهیم.

این سؤال آخری ممکن است باعث دلسری خواننده شود، و ممکن است این تصور را ایجاد کند که ما تااینجا کاری انجام نداده‌ایم، فقط مسأله‌را به‌مسألهٔ دیگری تبدیل کرده‌ایم، و آن‌هم درست به‌همان اندازه مشکل. اما، واقعاً چنین چیزی نیست، این سؤال که چه وقت دو شکل باهم قــابل انطباق‌اند، اصلا مشکل نیست، و کتاب درسی کیسلیوف جواب کاملا رضایت‌بخشی به‌آن می‌دهد. بنا به‌گفتهٔ کیسلیوف، «دو

شکل هندسی قابل انطباق باهم گفته می‌شوند هرگاه یکی از آنها، با حرکت درفضا، بتواند بردیگری منطبق شود به‌طوری که تمامی اجزای دوشکل برهم قرار گیرند». به‌عبارت دیگر شکلهای قابل انطباق باهم آنهایی هستندکه می‌توان آنها را به وسیلهٔ حرکت دادن برهم منطبق کرد؛ پس ویژگیهای هندسی اشکال، یعنی، ویژگیهای مشترك بین تمام شکلهای قابل انطباق با هم، ویژگیهایی هستندکه با حرکت اشکال تغییر نمی‌کنند.

بدین ترتیب سرانجام به‌تعریف زیرین هندسه دست می‌یابیم: هندسه علمی است که‌آن ویژگیهایی ازشکلهای هندسی‌را که براثر حرکت اشکال تغییرنمی‌یابند مورد مطالعه قرار می‌دهد. ما تعریف‌را درهمین‌جا قطع می‌کنیم، باز جا برای بحث بیشتر وجود دارد، اما بعداً دربارهٔاش بیشتر سخن خواهیم گفت.

یك منتقد خرده‌گیرممکن‌است حتی با این‌تعریف اقناع نشده‌باشد و بازخواستار آن باشدکه منظور خود را از یك حرکت بیان‌کنیم. این را می‌توان به‌طریق زیر جواب داد: یك حرکت[1] یك تبدیل هندسی صفحه (یا فضا) است‌که هرنقطهٔ A را به‌یك نقطهٔ جدید A' می‌برد به‌قسمی‌که فاصلهٔ بین هردونقطهٔ A و B مساوی‌بافاصلهٔ بین مبدلهای‌آنها یعنی‌نقاط A' و B' باشد.[2] این تعریف تاحدی مجرد است؛ ولی حال‌که دریافته‌ایم که طولپاییها چه‌نقش اساسی درهندسه ایفامی‌کنند، میل داریم آنها را به‌طور شهودی بپذیریم و سپس به‌دقت همهٔ ویژگیهای آنها را مطالعه کنیم. چنین مطالعه‌ای مبحث اصلی جلد اول‌این‌کتاب خواهد بود. درآخر این‌جلد فهرست کاملی از تمام طولپاییهای ممکن یك صفحه آورده شده است، و این می‌تواند به‌عنوان

---

۱. طولپایی یا حرکت صلب، ازاین به‌بعد ازلغت «طولپایی» استفاده خواهد شد.

۲. فاصلهٔ بین دونقطهٔ A و B درصفحه برابراست با:

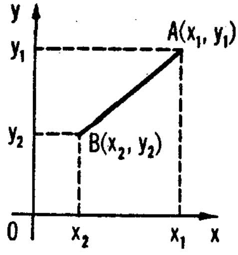
$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

که درآن x_1 ، y_1 و x_2 ، y_2 به‌ترتیب مختصات نقاط A و B در یك دستگاه مختصات دکارتی (که مهم نیست کدام‌یك باشد!) هستند (شکل ۳) ، بنابراین مفهوم فاصله به‌یك فرمول ساده جبری بدل می‌شود و توضیحی برای‌آنچه‌که بعد از این می‌آید، لازم نیست.

به‌طریق مشابه، فاصلهٔ بین دونقطهٔ A و B درفضا برابراست با

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

که درآن x_1، y_1، z_1 و x_2، y_2، z_2 به‌ترتیب مختصات دکارتی نقاط A و B در فضا هستند.



شکل ۳

یك تعریف جدید و ساده‌تر آنهـا تلقی شود. (برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ این‌مطلب، ← صص ۷۱–۷۳).

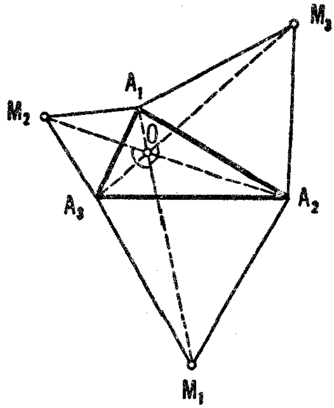
به‌علاوه یادآور می‌شویم که مطالعهٔ طولپاییها نه‌تنها برای دقیقتر کردن مفاهیم هندسی اساسی است، بلکه دارای اهمیت عملی نیز هست. نقش بنیادی طولپاییها در هندسه مبین کاربردهای متفاوت آنهـا در حل مسائل هندسی به‌ویژه مسائل ساختاری است. درعین حال، مطالعهٔ طولپاییها روشهایی کلی به‌دست می‌دهد که می‌توانند برای حل بسیاری ازمسائل هندسی مورد استفاده قـرارگیرند، وگاهی این امکان را فراهم می‌آورند که یك رشته ازتمرینهایی راکه حل هریك از آنها با روشهای دیگرمستلزم تأملی جدا از یکدیگراست در یك‌جا گردآوری و باهم ترکیب کنند. مثلا سه مسألهٔ ترسیمی معروف زیر را درنظر بگیرید:

الف) مثلثی درصفحه، رسم کنید که از آن، جای رأسهای سوم سه‌مثلث‌متساوی الاضلاعی‌که براضلاع مثلث مزبور ودرخارج آن رسم می‌شوند، معلوم باشد.

ب) مثلثی رسم کنیدکه از آن مراکز سه‌مربعی‌که براضلاع و درخارج آن بنا می‌شوند دردست باشند.

ج) یك هفت ضلعی رسم کنیدکه از آن هفت‌نقطه وسط اضلاع آن‌معلوم باشند.

به‌این مسائل می‌توان با روشهـای معمولی «کتب درسی» نزدیك شد؛ اما در آن صورت به‌نظرمی‌رسدکه آنها سه‌مسألهٔ جداگانه هستند، مستقل ازیکدیگر (ودرحد خود مسائلی نسبتاً پیچیده!). مسألهٔ اول را می‌توان بـا اثبات این مطلب‌که سه خط A_1M_1، A_2M_2، و A_3M_3 (شکل ۴ الف)، همگی در یـك نقطهٔ O متقاطع‌انـد و بـا یکدیگر زوایـای مساوی می‌سازنـد، حل‌کـرد (ایـن روش به‌مـا امکان می‌دهد کـه نقطهٔ O را بـاتوجه به‌نقاط M_1، M_2، و M_3 پیدا کنیم. زیـرا

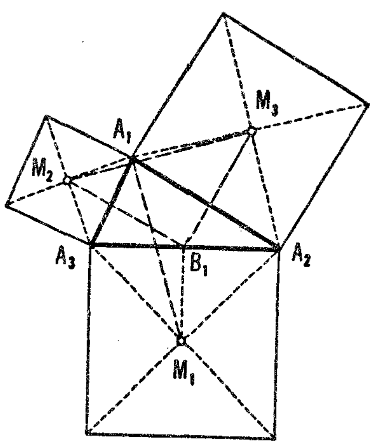


شکل ۴ الف

$\sphericalangle M_1OM_2 = \sphericalangle M_1OM_3 = \sphericalangle M_2OM_3 = 120^\circ$). حال می‌توان ثابت کرد که

$$OA_3+OA_1=OM_2 \quad OA_2+OA_3=OM_1 \quad OA_1+OA_2=OM_3$$

[به‌کمك این روش می‌توانیم نقاط A_1، A_2، و A_3 را پیدا کنیم. زیرا، مثلاً، $OA_1=\frac{1}{2}(OM_2+OM_3-OM_1)$].



شکل ۴ ب

مسألهٔ دوم، (شکل ۴ب)، را می‌توان با نشان دادن این مطلب که

$$M_2B_1 = M_3B_1 \quad \text{و} \quad M_2B_1 \perp M_3B_1$$

کــه در آن نقطهٔ B_1 وسط ضلع A_2A_3 ازمثلث $A_1A_2A_3$ است، یا (راه حل دوم!) این مطلب که

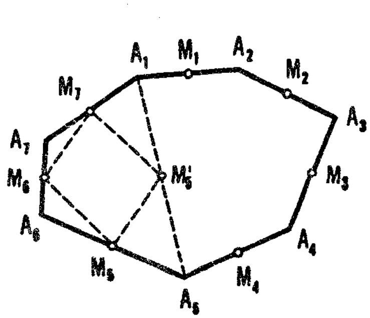
$$A_1M_1 \perp M_2M_3 \quad \text{و} \quad A_1M_1 = M_2M_3$$

حل کرد.

بالاخره، برای‌حل‌مسألهٔ سوم می‌توان ازاین واقعیت استفاده‌کرد که نقطهٔ M'_5 وسط قطر A_1A_5 از هفت ضلعــی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ رأس متـوازی الاضلاع $M_5M_6M_7M'_5$(شکل ۴ ج) است و بنا براین می‌تواند به‌دست آید. پس به‌یك مسألهٔ مشابه‌که در آن هفت ضلعی‌منتظم $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ به‌پنج ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5$ تبدیـل شده است، دست یافته‌ایم. ایـن مسألهٔ جدید به‌روش مشابه می‌توانـد ساده‌تر شود.

راه حلهای هر سه مسأله نسبتاً ابتکاری ومتضمن رسم خطوط معین وخاصی هستند (و چگونه می‌توان فهمید‌که چه‌خطی‌را باید رسم کرد؟) و بنا براین به‌هوشمندی خاصی نیاز دارند. مطالعهٔ طولپاییها این امکان را به‌ما می‌دهد تا نخست مسألهٔ ساختاری و عمومیتر زیررا مطرح و سپس‌آن را حل کنیم (مسألهٔ ۲۱، صفحهٔ ۳۸):

یك nـضلعی رسم‌کنید کــه از آن n نقطه، رئـوس مثلثهای متساوی‌الساقین (به‌قاعده‌های‌اضلاع nـ ضلعی) مرسوم بر اضلاع و درخارج nـضلعی، در دست‌باشند و زوایای رأسهای این مثلثهای متساوی‌الساقین برابر مقادیر معلوم α_1، α_2، ...، و α_n بــاشند. [از ایــن مسأله، مسألهٔ (الف) به دست می‌آیــد ، با فرض $n=3$ ،



شکل ۴ ج

$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=60^\circ$ ؛ مسألهٔ (ب) با فرض $n=3$، $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=90^\circ$؛ و مسألهٔ (ج) با فرض $n=7$ و $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_7=180^\circ$].

درعین حال این مسألهٔ کلی می‌توانـد خیلی ساده، به‌کمك برخی از قضایای کلی‌طولپاییها، بدون رسم هیچ شکلی، به‌طورذهنی جزء به‌جزء حل‌شود. درفصلهای ۱ و ۲ خواننده تعداد زیـادتری از مسائل هندسی دیگر را، کـه می‌توانند به‌کمك طولپاییها حل شوند، پیدا خواهدکرد.

فصل اول

تغییر مکانها[1]

۰۱ انتقال[2]

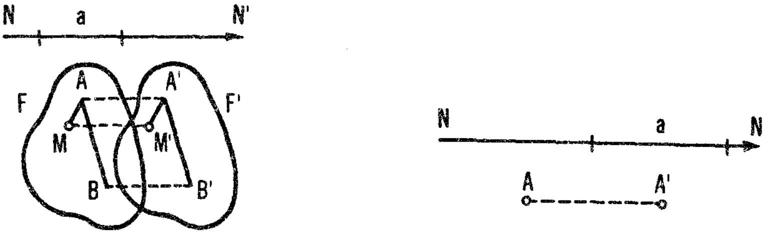
راستای NN' را در صفحه (که مثلا می‌تواند با یك خط و یك پیکان مشخص شود) انتخاب*، و فرض می‌کنیم پاره خطی روی آن به‌طول a داده شده باشد. گیریم A نقطه‌ای در صفحه و A' نقطهٔ دیگری باشد به‌قسمی که پاره‌خط AA' دارای راستای NN' و به‌طول a باشد (شکل ۵ الف). در این‌حالت می‌گوییم نقطهٔ A' از نقطهٔ A با یك انتقال در راستای NN' و به‌طول a به‌دست آمده‌است، یا نقطهٔ A با این انتقال به‌نقطهٔ A' برده شده‌است. نقاط شکل F ازراه انتقال به‌مجموعه نقاطی که شکل جدید F' را تشکیل می‌دهند، برده شده‌اند. می‌گوییم شکل جدید F' از انتقال F به‌دست آمده است (شکل ۵ ب).

بعضی اوقات نیز می‌گوییم که شکل F' از جا به‌جا کردن «کل» شکل F در راستای NN' و به‌طول a به‌دست آمده است. در اینجا عبارت «کل» به‌معنای آن است که کلیهٔ نقاط شکل F درهمان راستا وبا همان طول حرکت کرده‌اند، یعنی تمام پاره خطهای واصل بین نقاط متناظر شکلهای F و F' موازی، دریك جهت و دارای یك‌طول هستند. اگرشکل F' باانتقال شکل F در راستای NN' به‌دست آمده باشد،

---

1. displacements 2. translations

* در این‌کتاب، هرکجا نامی از راستا برده شده‌است جهت نیز درآن منظور شده‌است. همچنین منظوراز امتداد، فقط یك خط است که جهتی روی آن مشخص نشده‌است و بنا براین می‌توان دوجهت روی آن درنظر گرفت. — م.



(ب) (الف)

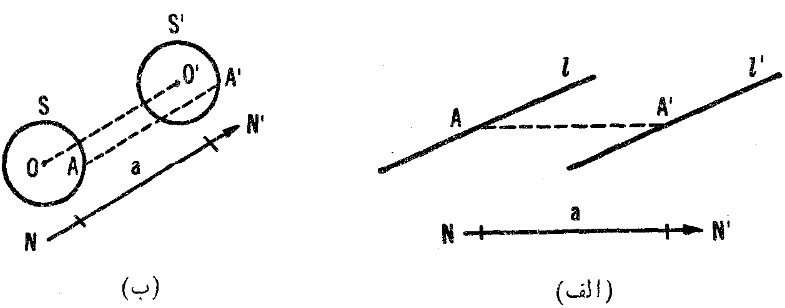
شکل ۵

آنگاه F نیز می‌تواند با انتقال شکل F' در راستای عکس NN' (در راستای $N'N$) به‌دست آید؛ بنابراین می‌توانیم از جفت شکلهای وابسته به‌هم بر اثر یک انتقال، سخن به‌میان آوریم.

انتقال، یک خط l را به‌خط l' موازی با آن (شکل ۶ الف)، و یک‌دایرهٔ S را به‌یک دایرهٔ S' مساوی با آن بدل می‌کند (شکل ۶ ب).

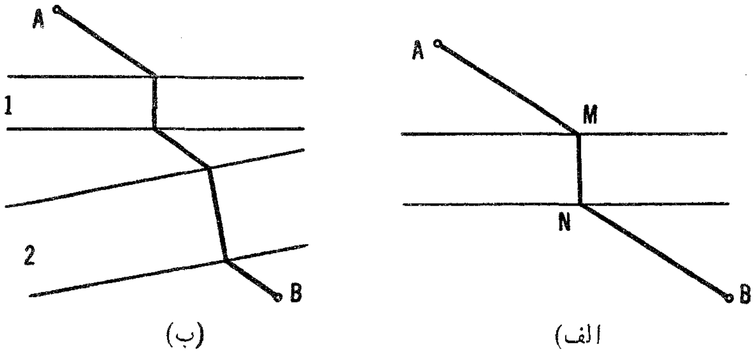
۱. دودایرهٔ S_1 و S_2 ویک خط l داده شده‌اند. خطی به‌موازات l متکی بر S_1 و S_2 رسم کنید که طول قسمتی از آن که بین دو دایره محصور است مساوی مقدار مفروض a باشد.

۲. الف) در کدام نقطه از رودخانه‌ای که دوشهر A و B را ازهم جدامی‌کند (شکل ۷ الف) باید یک پل MN زده شود تا مسیر $AMNB$ از شهر A به‌شهر B



(ب) (الف)

شکل ۶



شکل ۷

کوتاهترین‌مقدارممکن باشد، بافرض اینکه ساحلهای رودخانه خطوط مستقیم وموازی باشند، وپل بر رودخانه عمود باشد؟

ب) همین مسأله را، برای وقتی‌که شهرهای A و B توسط چند رودخانه ازهم جدا شده‌باشند حل، ومشخص‌کنیدکه درچه نقاطی پلها باید ساخته‌شوند (شکل۷ ب).

۳. الف) مکان هندسی نقاطی مانند M را پیداکنیدکه مجموع فاصله‌های آنها از دوخط داده شدهٔ l_1 و l_2 مساوی مقدارمفروض a باشد.

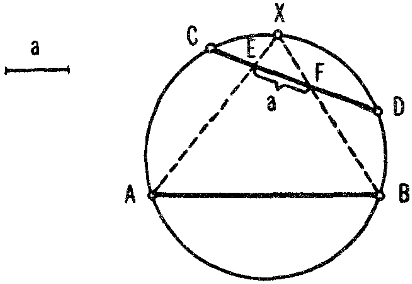
ب) مکان هندسی نقاطی مانند M را پیداکنیدکه تفاضل فاصله‌های آنها از دو خط داده شدهٔ l_1 و l_2 مساوی مقدارمفروض a باشد.

۴. فرض‌کنیم نقاط D، E، و F به‌ترتیب وسطهای‌اضلاع AB، BC، و CA ازمثلث ABC باشند. گیریم O_1، O_2، و O_3 به‌ترتیب معرف مراکز دایره‌های‌محیطی مثلثهای ADF، BDE، و CEF، و Q_1، Q_2، وQ_3 مراکز دایره‌های محاطی همین مثلثها باشند. نشان دهیدکه مثلثهای $O_1O_2O_3$ و $Q_1Q_2Q_3$ با هم قابل انطباق‌اند.

۵. ثابت‌کنیدکه اگرطول MN درچهارضلعی $ABCD$ (M وسط ضلع AD است، وN وسط ضلع BC) مساوی نصف مجموع طولهای‌اضلاع AB و CD باشد، چهارضلعی مذکور ذوزنقه است.

۶. وترهای AB و CD ازیك دایره مفروض‌اند. براین دایره نقطه‌ای‌مانند X پیدا کنید که وترهای AX و BX روی CD یك پاره خط EF به‌طول مفروض a جداکنند (شکل ۸).

۷. الف) دو دایرهٔ S_1 و S_2، متقاطع در نقاط A و B، داده شده‌اند؛ از نقطهٔ A، خطی‌مانند l بگذرانیدکه دایره‌های S_1 و S_2 را به‌ترتیب در دونقطهٔ متمایز M_1



شکل ۸

و $M_۲$ قطع کند و $M_۱M_۲$ دارای طول مفروض a باشد.

ب) مثلثی قابل انطباق بامثلث داده شده رسم کنید که اضلاع آن (یا امتداد آنها) از سه نقطهٔ مفروض بگذرند.

این مسأله به‌مناسبتی دیگر دربخش ۱، فصل ۲، جلددوم خواهد آمد (← مسألهٔ ۷۳ (الف)).

۸. دو دایرهٔ $S_۱$ و $S_۲$ داده شده‌اند، خطی مانند l رسم کنید که:

الف) موازی خط مفروض $l_۱$ باشد و $S_۱$ و $S_۲$ دو وترمساوی بر l جدا کنند.

ب) موازی خط مفروض $l_۱$ باشد، ومجموع (تفاضل) طولهای وترهایی که $S_۱$ و $S_۲$ روی l پدید می‌آورند مساوی مقدار مفروض a باشد.

(ج) ازنقطه مفروض A بگذرد و $S_۱$ و $S_۲$ وترهایی مساوی بر l جدا کنند.

انتقال، مثالی از یك تبدیل درصفحه است که هرنقطهٔ A را به‌یك نقطهٔ دیگر A' می‌برد.* بدیهی است که بااین تبدیل، هیچ نقطه‌ای درجای خودش باقی نمی‌ماند؛ به‌عبارت دیگر، انتقال نقطهٔ ثابت ندارد و هیچ نقطه‌ای را به‌خودش بدل نمی‌کند. ولی خطوط مستقیمی وجود دارند که براثر انتقال برجای خود می‌مانند؛ مثلاً، کلیهٔ خطوط موازی با راستای انتقال برروی خود منتقل می‌شوند (خطوط «روی خودشان می‌لغزند»)، وبنابراین این خطوط (وفقط همین خطوط) خطوط ثابت

---

* این تبدیل یك طولپایی (حرکت) به‌معنای تعریف مذکور درمقدمه است، زیرا، همان گونه که عنقریب نشان داده خواهد شد، هرپاره خط AB را به‌پاره خط $A'B'$، که‌طولش با طول AB مساوی است، بدل می‌کند.

انتقال هستند.

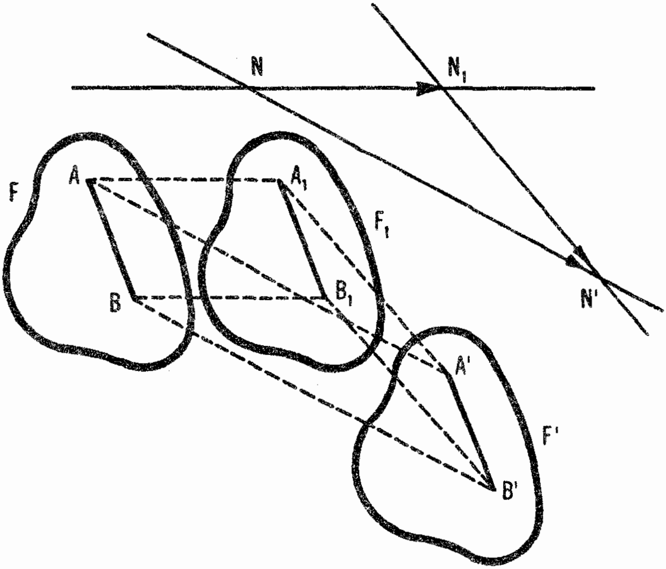
حال ویژگیهای بیشتری از انتقال را بررسی می‌کنیم. فرض کنید F و F' دو شکل باشند که با انتقالی به‌هم وابسته‌اند. فرض کنیم A و B دو نقطهٔ دلخواه از شکل F، و A' و B' نقاط متناظر آنها درشکل F' باشند (شکل ۵ ب) چون $AA' \| BB'$ و $AA'=BB'$،* چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است، درنتیجه $AB \| A'B'$ و $AB=A'B'$. بنابراین، اگر شکلهای F و F' با یك انتقال به‌هم وابسته باشند، پاره خطهای متناظر دراین اشکال مساوی، موازی، ودریك جهت هستند.

برعکس، نشان می‌دهیم که، اگر به‌هرنقطهٔ شکل F نقطه‌ای از شکل دیگر F' چنان نظیر شده باشد که پاره خط واصل بین یك جفت ازنقاط F مساوی، موازی، ودرهمان جهت پاره خط واصل بین جفت نقاط متناظرشان در F' باشد، آنگاه F و F' با یك انتقال به‌هم وابسته‌اند. زیرا، یك جفت از نقاط متناظر M و M' از اشکال F و F'، انتخاب وفرض کنید A و A' یك‌جفت دیگر ازنقاط متناظر این‌اشکال باشند (شکل ۵ ب). می‌دانیم که $MA \| M'A'$ و $MA=M'A'$، درنتیجه چهار ضلعی $MM'A'A$ متوازی‌الاضلاع است و بنابراین، $AA' \| MM'$ و $AA'=MM'$. یعنی، نقطهٔ A' ازنقطه A با یك انتقال درراستای خط MM' وبا طولی مساوی MM' به‌دست‌آمده است. اما چون A و A' یك جفت دلخواه ازنقاط متناظرهستند، پس تمام شکل F' از انتقال F در راستای MM' وبه‌فاصله‌ای مساوی MM' به دست‌آمده است.

حال نتیجهٔ ترکیب دو انتقال، یکی پس‌از دیگری، را بررسی می‌کنیم. فرض کنیدانتقال‌اول‌شکل F رابه‌شکل F_1 وانتقال‌دوم‌شکل F_1 را به‌شکل F' بدل کند(شکل ۹). ثابت‌می کنیم یك‌انتقال منحصر به‌فردوجود داردکه‌شکل F را به‌شکل F' بدل‌می‌کند. درواقع، اگر انتقال اول پاره‌خط AB ازشکل F را به‌پاره خط A_1B_1 ازشکل F_1 بدل کند، آنگاه $A_1B_1 \| AB$ و $A_1B_1=AB$، وپاره خطهای A_1B_1 و AB دارای یك جهت هستند. عیناً به همین طریق انتقال دوم، A_1B_1 را به‌پاره خط $A'B'$ بدل می‌کند به‌قسمی‌که $A'B' \| A_1B_1$ و $A'B'=A_1B_1$، وپاره‌خطهای $A'B'$ و A_1B_1 دارای یك جهت هستند. باتوجه به‌این‌مطلب بدیهی است که پاره خطهای متناظر AB و $A'B'$ از اشکال F و F' مساوی، موازی، ودارای یك جهت هستند. اما این بدان معنی است که انتقالی وجود داردکه F را به F' بدل می‌کند. بنابراین، به‌جای هر

---

* حکم $AA'=BB'$ به‌معنای آن است که طولهای پاره خطهای AA' و BB' مساوی‌اند. در بسیاری ازکتابها، فاصلهٔ یك نقطهٔ P از یك نقطهٔ Q با $\overline{PQ}$ نشان داده می‌شود، اما دراین‌کتاب به‌دلیل مشکلات چاپی با PQ نشان داده خواهد شد.



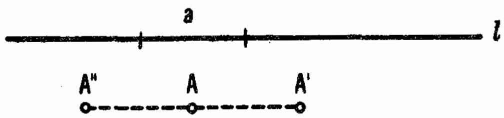
شکل ۹

دنبالهٔ متشکل از دو انتقال، می‌توان تنها یك انتقال گذارد.

حکم آخری می‌تواند به شکل دیگری بیان شود. در مکانیك گذاردن یك تغییرمکان تنها به‌جای چند تغییرمکان، وقتی این تغییرمکان با همهٔ تغییرمکانها هم‌ارز باشد، معمولا «جمع تغییرمکانها» نامیده می‌شود؛ به‌همین جهت می‌توان از جمع تبدیلات، که در آن جمع دوتبدیل ازصفحه تبدیلی است که ابتدا یکی از تبدیلات انجام می‌گیرد وسپس دیگری، صحبت کرد.* بنا براین نتیجهٔ به‌دست آمدهٔ بالا می‌تواند بدین صورت بیان شود: مجموع دو انتقال یك انتقال است.** همچنین باید توجه داشته باشیم که اگر NN_1 پاره خطی باشدکه طول وراستای انتقال اول را مشخص کند (F را به F_1 بدل کند)، و N_1N' پاره خطی باشدکه طول وراستای انتقال

* درفرهنگ ریاضی اصطلاح «حاصلضرب تبدیلات» معمولا به‌همین معنا به‌کار برده‌می‌شود.

** باز این هم یك بیان دیگر از همان گزاره: دوشکل F و F' که هرکدام جداگانه از انتقال یك شکل واحد F_1 به دست آمده باشند می‌توانند از انتقال یکدیگر نیز به دست آیند.

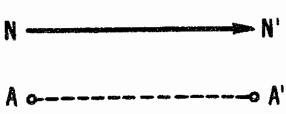


شکل ۱۰

دوم را معین کند (F_1 را به F' بدل کند)، آنگاه پـاره خط NN' طول و راستای انتقالی است که F را به F' بدل می کند.

غالباً از یك انتقال در امتداد خط داده شدهٔ l با یك طول مفروض a صحبت می کنند. امـا ، این عبارت دقیق نیست، زیرا برای یك نقطهٔ داده شدهٔ A شرطهای ۱. $AA' \| l$ ، ۲. $AA'=a$، دونقطهٔ A' و A'' را مشخص‌می کنند (شکل ۱۰)، و نه یك نقطه را. برای اینکه این عبارت را دقیقتر کنیم بـه‌ترتیب زیر عمل می کنیم. یکی از امتدادهای خط l را به‌عنوان جهت مثبت اختیارمی کنیم (که می‌تواند با یك پیکان مشخص شود)، ومقدار a را باتوجه به‌اینکه راستای انتقال درجهت مثبت l یا مقابل آن باشد، مثبت یـا منفی می گیریم. بنابراین دونقطهٔ A' و A'' درشکل ۱۰ به دوانتقال متفاوت (درعلامت) باطولهای‌مساوی متناظرمی‌شوند. پس‌مفهوم پاره‌خطهای جهتدار یك خط به‌طور طبیعی پدیدار می‌شود، یعنی پاره‌خطها می‌توانند مثبت یا منفی باشند .

همچنین انتقال می‌تواند با تنها یك پاره خط جهتدار NN' در صفحه مشخص شود، که همزمان راستا ومقدار انتقال را نشان می‌دهد (شکل ۱۱). بنابراین به‌مفهوم پـاره خطهـای جهتدار (بردارها) در صفحه می‌رسیم ؛ این بردارهـا نیز از دیدگاه دیگری در مکانیك و فیزیك پـدید می‌آیند . همچنین باید توجه داشته باشیم که مفهوم مجموع انتقالها به همان تعریف معمولی جمع بردارها منجر می‌شود (شکل ۹).

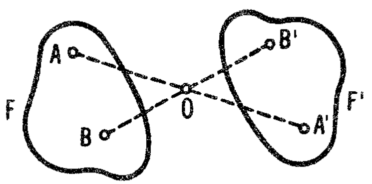


شکل ۱۱

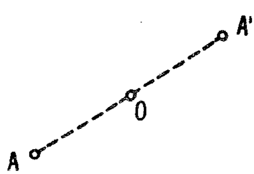
۰۲ نیمدور[1] ودوران*

می‌گوییم نقطهٔ A' از نقطهٔ A با یك نیمدور حول نقطهٔ O (که مرکز تقارن نامیده می‌شود) به‌دست می‌آید هرگاه نقطهٔ O وسط پاره خط AA' باشد (شکل ۱۲ الف). واضح است که اگر نقطهٔ A' از یك نیمدور نقطهٔ A حول O به‌دست آمده باشد، آنگاه بــه وارون A نیز از یك نیمدور نقطهٔ A' حول O به‌دست می‌آید. با توجه به‌این واقعیت می‌توانیم از یك جفت نقاط وابسته بــه هم توسط یك نیمدور حول یك نقطه صحبت کنیم. اگر A' از یك نیمدور نقطهٔ A حول O به‌دست آیــد، آنگاه چنین نیز می‌گویند: A' از بازتابی A نسبت به نقطهٔ O به‌دست آمده است، یا A' قرینهٔ A است نسبت به‌نقطهٔ O.

مجموعهٔ تمام نقاطی که از یك نیمدورشکل مفروض F حول نقطهٔ O به‌دست می‌آیند شکل F' را تشکیل می‌دهند، که از یك‌نیمدور شکل F حول O به‌دست‌می‌آید

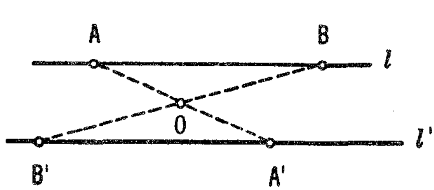


(ب)



(الف)

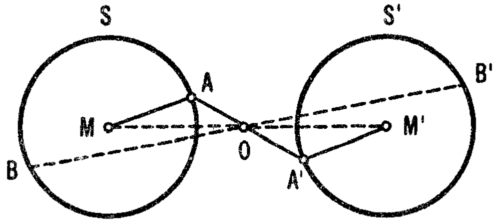
شکل ۱۲



شکل ۱۳ الف

1. half turn

* معمولا «نیمدور» را «تقارن نسبت به‌یك نقطه» می‌گویند.



شکل ۱۳ ب

(شکل ۱۲ ب). درعین‌حال، شکل F از یك نیمدور شکل F' حول O به‌دست می‌آید. در یك نیمدور، یك خط به‌یك خط موازی خودش بدل می‌شود (شکل ۱۳ الف)، و یك دایره به‌یك‌دایرهٔ قابل انطباق باخودش (شکل ۱۳ ب). (مثلا، برای اثبات آنکه یك دایره به‌شعاع r با نیمدور بـه‌یك دایرهٔ قابل انطباق با خود بدل می‌شود، کافی است توجه کنید که مثلثهای AOM و $A'OM'$، درشکل ۱۳ب، باهم قابل انطباق‌اند؛ درنتیجه مکان نقاط A که‌فاصله‌هاشان تا M مساوی r است به‌مکان نقاطی‌مانند A' بدل می‌شود که فاصله‌هاشان از M' مساوی r است.)

۹. از نقطهٔ مفروض A خطی بگذرانید کـه خـط مفروض l را در نقطهٔ P، و دایرهٔ مفروض S را در نقطهٔ P' قطع کند* و A وسط PP' باشد.

۱۰. از نقطهٔ A مشترك بین دودایرهٔ متقاطع S_1 و S_2 خطی مانند l بگذرانید که :

الف) دودایرهٔ S_1 و S_2 وترهای مساوی روی l جدا کنند.

ب) دایره‌های S_1 و S_2 وترهـایی روی l جدا کنند که تفاضل آنها مقدار مفروض a باشد.

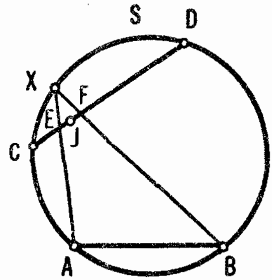
بدیهی است که مسألهٔ ۱۰ (ب) تعمیم مسألهٔ ۷ (الف) است.

۱۱. دو وتر AB و CD دریـك دایرهٔ S ویـك نقطهٔ مفروض J روی وتر CD داده شده‌اند. نقطه‌ای مـانند X برمحیط دایره بیابید که وترهای AX و BX روی وتر CD، پاره خط EF را جدا کنند، و نقطهٔ J وسط EF باشد (شکل ۱۴).

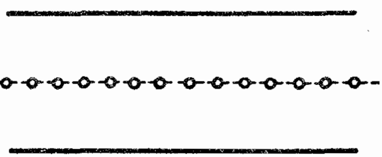
۱۲. واضح است کـه نوار متشکل از دوخط موازی دارای بینهـایت مرکز تقارن است (شکل ۱۵). آیا می‌توانید شکلی بیابید که بیش‌از یك مرکز تقارن، اما متناهی داشته باشد (مثلا، آیا می‌تواند دو و تنها دومرکز تقارن داشته باشد)؟

---

* دراینجا یکی از نقاط تقاطع خط مفروض با دایرهٔ S مورد نظر است.

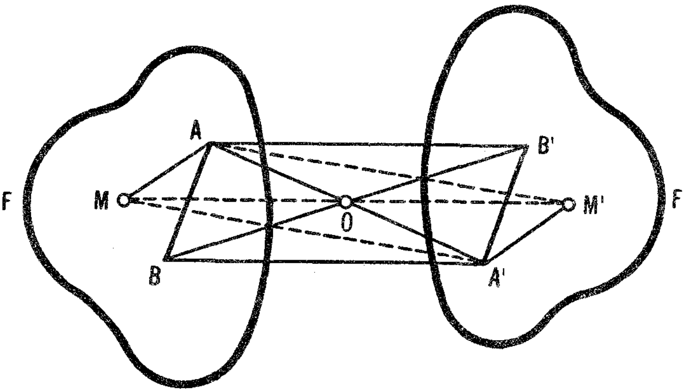


شکل ۱۴



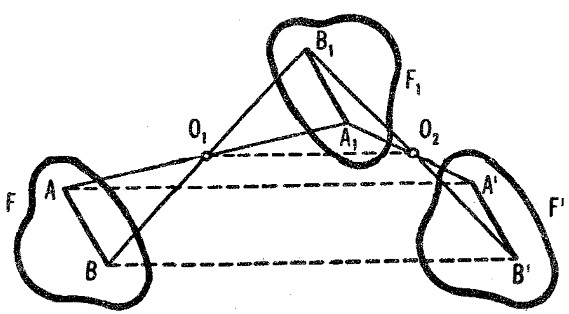
شکل ۱۵

اگر دو شکل F و F' با یك نیمدور حول نقطهٔ O به‌هم وابسته باشند، و اگر AB و $A'B'$ پاره خطهای متناظر این دوشکل باشند (شکل ۱۶)، آنگاه چهارضلعی $ABA'B'$ متوازی‌الاضلاع خواهد بود (چون قطرهای آن یکدیگر را درنقطهٔ تقاطعشان، O، نصف کرده‌اند). باتوجه به‌این‌مطلب واضح است که پاره‌خطهای متناظر از دوشکلی که با یك نیمدورحول یك نقطه به‌هم وابسته‌اند، مساوی، موازی، ومختلف‌الجهت هستند. به وارون، نشان می‌دهیم که اگر به‌هرنقطه ازشکل F بتوان یك نقطه ازشکل F' چنان مربوط‌کردکه پاره‌خط واصل بین نقاط متناظر این اشکال مساوی، موازی ومختلف‌الجهت باشند، آنگاه‌این دوشکل بایك نیمدورحول‌یك نقطه به‌هم‌وابسته‌اند. زیرا، فرض‌کنید M و M' یك جفت از نقاط متناظر ازشکلهای F و F' باشند و O وسط پاره خط MM' باشد. گیریم A و A' یك جفت دیگر ازنقاط متناظر این اشکال باشند (شکل ۱۶). فرض این است که $AM \| M'A'$ و $AM = M'A'$؛ در نتیجه چهارضلعی $AMA'M'$ متوازی‌الاضلاع است وبنابراین وسط قطر AA' بر نقطهٔ O، وسط قطر MM'، منطبق است؛ یعنی نقطهٔ A' با یك نیمدور نقطهٔ A حول نقطهٔ O به‌دست می‌آید وچون نقاط A و A' یك‌جفت دلخواه ازنقاط متناظر بودند، نتیجه می‌شود که شکل F' ازیك نیمدورشکل F حول O به‌دست می‌آید.

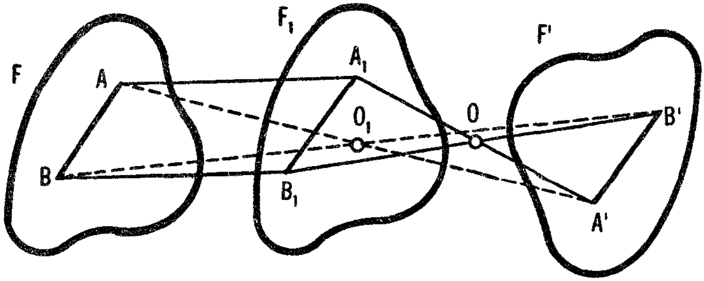


شکل ۱۶

حال سه شکل F، F_1، و F' راکه درآن شکل F_1 از یك نیمدور F حول نقطهٔ O_1 وشکل F' ازیك نیمدور F_1 حول O_2 به‌دست آمده است، درنظرمی‌گیریم (شکل ۱۷). فرض می‌کنیم A_1B_1 پاره خط دلخواهی ازشکل F_1، و AB و $A'B'$ پاره خطهای متناظر آن از شکلهای F و F' باشند. دراین صورت پاره خطهای A_1B_1 و AB مساوی، موازی ومختلف‌الجهت هستند؛ پاره خطهای A_1B_1 و $A'B'$ نیز مساوی، موازی ومختلف‌الجهت‌اند. درنتیجه پاره خطهای AB و $A'B'$ مساوی،



شکل ۱۷

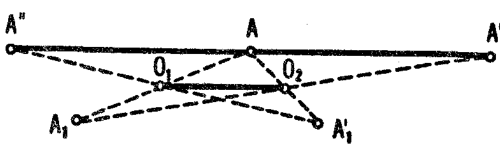


شکل ۱۸

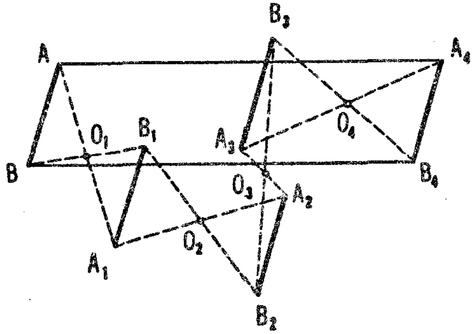
موازی و متحدالجهت هستند. اما با متناظر کردن پاره خطهای شکلهای F و F'، که مساوی، موازی ومتحدالجهت هستند، نتیجه می‌شود که F' با یك انتقال از F به‌دست می‌آیـد. پس مجموع دونیمدور یك انتقال است (مطلب فوق را بامطالب صفحهٔ ۱۹ مقایسه کنید). این مطلب مستقیماً نیز در شکل ۱۷ دیده می‌شود. چون O_1O_2 خطی است که نقطه‌هـای وسط اضلاع AA_1 و $A'A_1$ ازمثلث AA_1A' را به‌هم وصل می‌کند، پس $AA' \| O_1O_2$ و $AA' = 2O_1O_2$؛ یعنی، هرنقطهٔ A' ازشکل F' با یك انتقال نقطهٔ متناظر A درشکل F در راستای O_1O_2 و بـا طولی مساوی دو برابر O_1O_2 به‌دست می‌آید.

دقیقاً با همان روش می‌توان نشان دادکه مجموع یك انتقال و یـك نیمدور حول یك نقطهٔ O (شکل ۱۸)، یا یك نیمدور و یك انتقال، یك نیمدور حول یك نقطهٔ جدید O_1 است.

حال می‌خواهیم به‌یك نکتهٔ مهم اشاره‌کنیم. دونیمدور پیاپی حول نقاط O_1 و O_2 (درشکل ۱۹: $A\to A_1\to A'$) هم‌ارز بـا انتقالی است بـه‌طول $2O_1O_2$ در راستای O_1 به O_2، درحالی‌کـه همین دونیمدور پیاپی، با جهت عکس (شکل ۱۹ $A\to A'_1\to A''$)، هم‌ارز بـا انتقالی است بـا همان طول درراستای O_2 بـه O_1. بنابراین، مجموع دونیمدور بـه‌نحوهٔ ترتیب عمل این نیمدورها بستگی دارد. این



شکل ۱۹



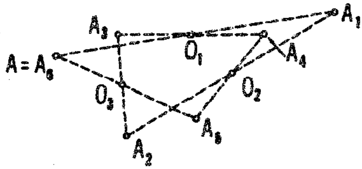
شکل ۲۰ الف

پدیده، درحالت کلی، مشخص‌کنندهٔ مجموع تبدیلات است. : مجموع دو تبدیل، در حالت‌کلی، به‌ترتیب تبدیلات بستگی دارد.

هنگامی‌که مجموع نیمدورها را بررسی‌کردیم، دیدیم‌که نیمدور، تبدیلی‌است ازصفحه‌که هر نقطهٔ A را به‌یك نقطهٔ جدید A' می‌برد.* به‌آسانی می‌توان دیدکه تنها نقطه‌ای که براثر یك نیمدور ثابت می‌ماند، مرکز O است که نیمدورحول‌آن صورت می‌گیرد وخطوط ثابت خطوطی هستندکه ازمرکز دوران می‌گذرند.

۱۳. الف) گیریم O_1، O_2،...، O_n (n زوج) نقاطی در صفحه باشند، و AB پاره خطی دلخواه باشد؛ فرض‌کنیم پاره خط A_1B_1 از یك نیمدور AB حول O_1 به‌دست‌آمده باشد، A_2B_2 ازیك نیمدور A_1B_1 حول O_2، A_3B_3 ازیك نیمدور A_2B_2 حول O_3،...، و A_nB_n ازیك نیمدور $A_{n-1}B_{n-1}$ حول O_n (شکل ۲۰الف که درآن $n=4$ است). نشان دهید $AA_n=BB_n$.

اگر n فرد باشد،آیا بازنتیجه‌گیری این تمرین صحیح است؟



شکل ۲۰ ب

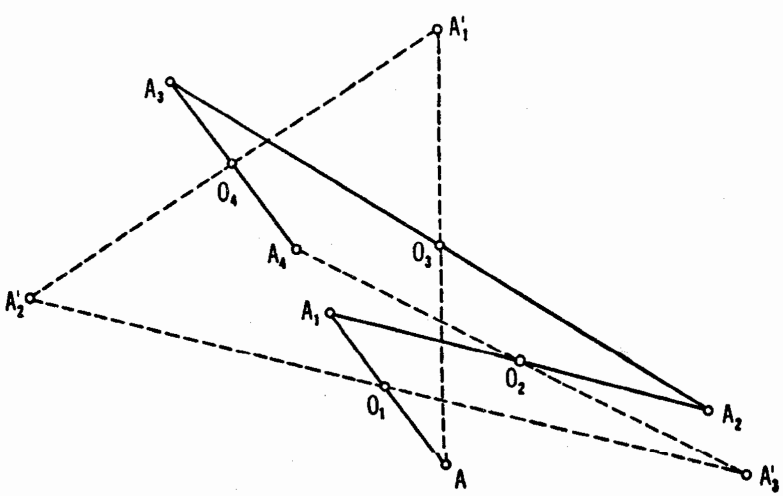
* به‌پاورقی * صفحهٔ ۱۷ نگاه کنید.

ب) گیریم تعداد فردی از نقاط O_1، O_2، ... ، O_n در صفحه داده شده باشند (شکل ۲۰ ب با $n=3$). گیریم یك نقطهٔ دلخواهٔ A مرتباً با نیمدورهایی حول O_1، O_2، ... ، O_n حرکت کند تا A_n به‌دست آید، وسپس A_n به‌طور مرتب با نیمدورهایی حول O_1، O_2، ... ، O_n حرکت کند تا A_{2n} به‌دست آید نشان دهید که نقطهٔ A_{2n}، که نتیجهٔ تأثیر $2n$ نیمدوراست، بر A منطبق است.

آیا حکم مسأله برای وقتی که n زوج باشد برقراراست؟

۱۴. الف) گیریم O_1، O_2، O_3، و O_4 چهار نقطه در صفحه باشند. فرض می‌کنیم نقطهٔ دلخواه پنجم A متوالیاً با نیمدورهایی حول O_1، O_2، O_3، و O_4 حرکت کند. حال با شروع دوباره از نقطهٔ اولیهٔ A، فرض می‌کنیم این نقطه با نیمدورهایی حول همان چهار نقطه حرکت کند، اما به‌ترتیب زیر: O_3، O_4، O_1، و O_2. نشان دهید که درهردوحالت جای نقطهٔ نهایی A_4 یکی‌است (← شکل ۲۱).

ب) گیریم O_1، O_2، O_3، O_4، و O_5 پنج نقطه درصفحه باشند. گیریم نقطهٔ دلخواه A متوالیاً با نیمدورهایی حول این پنج نقطه حرکت کند. حال با شروع دوباره از نقطهٔ اولیهٔ A، فرض می‌کنیم نقطهٔ A متوالیاً حول همان پنج نقطه، اما به‌ترتیب عکس، حرکت کند: O_5، O_4، O_3، O_2، و O_1. نشان دهید که درهردوحالت جای نقطهٔ نهایی A_5 یکی‌است.



شکل ۲۱

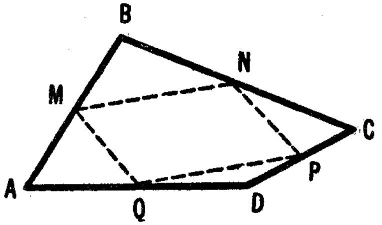
ج) فرض کنید n نقطهٔ O_1، O_2، ... ، O_n درصفحه داده شده باشند. یك نقطهٔ دلخواه متوالیاً با نیمدورهایی حول نقاط O_1، O_2، ...، و O_n حرکت می‌کند، سپس باردیگر همان نقطهٔ اولیه متوالیاً حول همان نقاط اما به‌ترتیب عکس‌حرکت می‌کند: O_n، O_{n-1}، ...، و O_1. به‌ازای چه مقدارهایی از n، جای نهایی درهردوحالت یکی است؟

۱۵. فرض می‌کنیم n عددی است فرد (مثلا $n=9$)، و n نقطه درصفحه‌داده شده است. رئوس یك n- ضلعی را پیدا کنید که نقاط داده شده وسطهای اضلاع آن باشند.

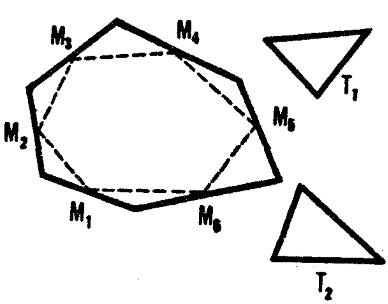
حالتی راکه n زوج باشد بررسی‌کنید.

مسألهٔ ۲۱ (صفحهٔ ۳۷)، همانند مسألهٔ ۶۶، بخش۲، فصل۱، جلد دوم، تعمیمی است‌از مسألهٔ ۱۵.

۱۶. الف) ثابت کنید که ۴ نقطهٔ وسط اضلاع یك چهار ضلعی دلخواه $ABCD$ تشکیل یك متوازی‌الاضلاع می‌دهند (شکل ۲۲ الف).



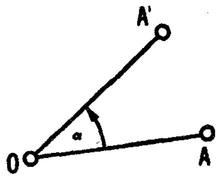
شکل ۲۲ الف



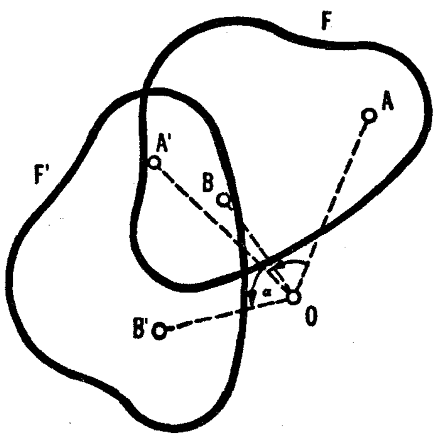
شکل ۲۲ ب

ب) فرض می‌کنیم نقاط M_1، M_2، M_3، M_4، M_5، و M_6 وسطهای اضلاع یك شش ضلعی دلخواه باشند. ثابت کنید که مثلثی مانند T_1 وجود دارد که اضلاع آن مساوی وموازی با پاره‌خطهای M_1M_2، M_3M_4، و M_5M_6 می‌باشند، و نیز یك مثلث T_2 وجود دارد که اضلاع آن مساوی وموازی با M_2M_3، M_4M_5، و M_6M_1 هستند (شکل ۲۲ ب).

نقطه‌ای مانند O درصفحه اختیارمی‌کنیم؛ فرض کنیم که یك زاویهٔ α داده شده، وروی جهت دوران توافق شده باشد (مثلا فرض‌می‌کنیم این جهت، پادساعتسو باشد). گیریم A نقطه‌ای دلخواه درصفحه و A' نقطه‌ای باشد که $OA'=OA$ و $\measuredangle AOA'=\alpha$ (بنابراین OA باید با دوران به‌اندازهٔ α درجهت انتخاب شده، بر OA' منطبق شود).



(الف)



(ب)

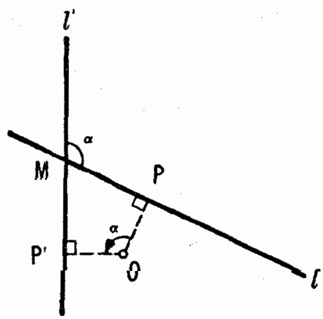
شکل ۲۳

دراین حالت می‌گوییم نقطهٔ A' ازنقطهٔ A با یك دوران به‌مرکز O و به‌زاویهٔ دوران α به‌دست آمده است، یا آنکه نقطهٔ A با این دوران به A' بــرده شده است (شکل ۲۳ الف). مجموعهٔ تمام نقاط حاصل از دوران نقاط شکل F حول نقطهٔ O به‌زاویهٔ α شکل جدید F' را تشکیل می‌دهد (شکل ۲۳ ب). گاهی اوقات می‌گویندکه شکل F' از دوران شکل F «یکجا» حول نقطهٔ O به‌زاویهٔ α به‌دست آمده است؛ دراینجا واژهٔ «یکجا» به‌معنای آن است که کلیهٔ نقاط شکل F بــر دایره‌هایی بریك مــرکز O حرکت کرده‌اند و همگی کمانهای مساوی (از لحــاظ زاویه) روی این دایره‌ها طی می‌کنند. اگر شکل F' با یك دوران از شکل F به‌دست آمده باشد، آنگاه به‌وارون، شکل F می‌تواند از یك دوران F' به‌همان مرکز و به‌زاویهٔ دوران $360^\circ - \alpha$ به‌دست آید (یا با دورانی به‌همان زاویهٔ α، اما درجهت عکس)؛ این مطلب به‌ما امکان می‌دهد که از جفت اشکال به‌دست آمده از یکدیگر توسط یك دوران صحبت کنیم.

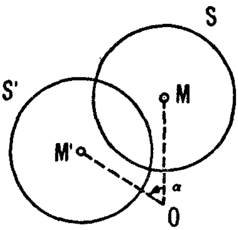
یك خط l با یك دوران حول نقطهٔ O به‌خط جدید l' بدل می‌شود؛ برای یافتن l' کافی است که پای خط عمود از O بر l، یعنی P را دوران دهیم، و سپس، بر نقطهٔ جدید P' خطی عمود بر OP' بگذرانیم (شکل ۲۴ الف). واضح است که زاویهٔ α بین خطوط l و l' مساوی زاویه دوران است؛ بــرای اثبات آن کافی است ببینید که زوایای POP' و lMl'، درشکل ۲۴ الف، مساوی هستند، زیــرا زوایایی هستند که اضلاع آنها برهم عمودند.

یك دایرهٔ S با دوران حول یك نقطهٔ O، به‌دایرهٔ جدید S' بدل می‌شود؛ برای رسم S' باید نخست نقطهٔ M مرکز دایرهٔ S را حول O دوران دهیم وسپس دایره‌ای به‌مرکز نقطهٔ جدید M' وبا همان شعاع دایرهٔ اولیه رسم کنیم (شکل ۲۴ ب).

واضح است که وقتی نقطهٔ A داده شده باشد، شرطهای ۱. $OA' = OA$ ،



شکل ۲۴ الف

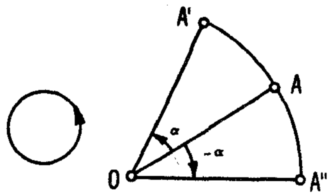


شکل ۲۴ ب

۲. $\measuredangle AOA'=\alpha$ ، بدون قید هیچ‌شرط دیگردربارهٔ جهت دوران، دونقطهٔ جدید A' و A'' را مشخص می‌کنند (شکل ۲۵). برای انتخاب یکی از آنهـا، می‌توانیم، مثلا، به‌این ترتیب عمل کنیم: موافقت می‌کنیم که جهت دورانی را به‌عنوان جهت‌مثبت (که ممکن است مثلا با پیکانی روی یك دایره مشخص شود) درنظر بگیریم، و جهت مخالف آن‌را جهت منفی. به‌علاوه، مثبت یا منفی بودن زاویهٔ دوران $\alpha=\measuredangle AOA'$ بستگی به‌جهت دورانی داردکه A را به A' می‌برد؛ دراین حالت دونقطهٔ A' و A'' به‌دو زاویهٔ متفاوت دوران (با اختلاف علامت) متناظر خـواهند شد. بنابراین به‌طور طبیعی به‌مفهوم زاویه‌های جهتدار که می‌توانند مثبت یا منفی باشند، رهنمون‌می‌شویم؛ این مفهوم در بسیاری‌ازمسائل‌دیگرریاضیات مقدماتی‌سودمنداست. (موضوع‌دایره‌های جهتدار، یعنی، دایره‌هایی که جهتی بر آنها انتخاب شده است، به مناسبتهای دیگـر نیز خواهد آمد.)

۱۷. دوخط l_1 و l_2، یك‌نقطهٔ A، ویك‌زاویهٔ α مفروض‌اند. دایره‌ای به‌مرکز A بیابید که دوخط l_1 و l_2 بر آن کمانی به‌اندازهٔ α جدا کنند.

۱۸. مثلث متساوی‌الاضلاعی بیابیدکه رئوس آن برسه خط موازی مفروض یا



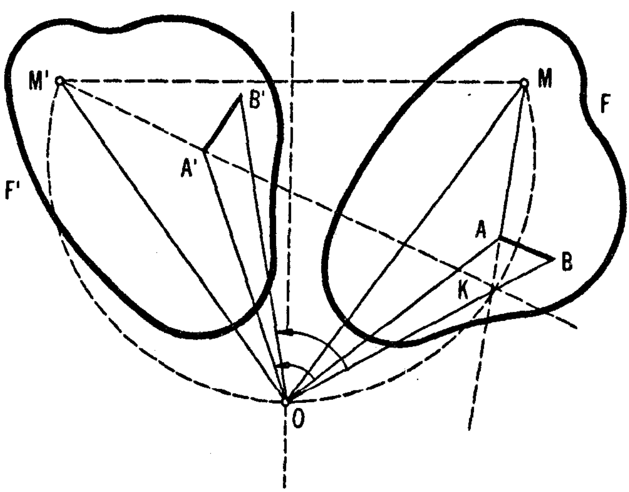
شکل ۲۵

بر سه دایرهٔ متحدالمرکزمفروض واقع باشند.

۱۹. یك دایرهٔ S، نقاط A و B، ویك زاویهٔ α مفروض‌اند. بر S دونقطهٔ C و D بیابید که $CA \| DB$ و $\widehat{CD}=\alpha$.

۲۰. دو دایرهٔ S_1 و S_2، یك‌نقطهٔ A، ویك زاویهٔ α مفروض‌اند. از A دوخط l_1 و l_2 به‌زاویهٔ α رسم کنیدکه دایـره‌های S_1 و S_2 وتـرهای مساوی بر این دوخط جدا کنند.

فرض می‌کنیم دوران به‌مـرکز O، و زاویهٔ دوران α، شکل F را به‌شکل F' بدل کند، و نیز فرض می‌کنیم AB و $A'B'$ دوپاره خط متناظر ازاین اشکال باشند (شکل ۲۶). پس مثلثهای OAB و $OA'B'$ بـا هـم قـابل انطبـاق‌اند ($OA=OA'$ ، $OB=OB'$ و $\measuredangle AOB=\measuredangle A'OB'$ ، زیـرا $\measuredangle AOA'=\measuredangle BOB'=\alpha$) ، درنتیجه $AB=A'B'$. زاویهٔ بین پاره‌خطهای AB و $A'B'$ مساوی α است (زیرا خطوط AB و $A'B'$ با دوران به‌زاویهٔ α به‌هم وابسته‌اند؛ (شکل ۲۴ الف)، درعین حال باید AB را به زاویهٔ α در جهت دوران بچرخانیم تا پاره خط جهتدار $A'B'$



شکل ۲۶

به‌دست آید.* بنا بر این می‌بینیم که اگر شکلهای F و F' با یك دوران به‌زاویهٔ α به هم وابسته باشند، پاره خطهای متناظر این اشکال بـا هم مساوی‌اند و با یکدیگر زاویهٔ α می‌سازند.

به وارون، نشان می‌دهیم که اگر به هر نقطه ازشکل F نقطه‌ای ازشکل دیگر F' نظیر شده باشد، واین شکلها چنان بـاشند کـه پاره خطهای متناظر، مساوی باشند وبا یکدیگر زاویهٔ α بسازند (به‌طوری‌که پاره خطهای شکل F، وقتی به‌زاویهٔ α درجهت انتخاب شده دوران کنند، بـا پـاره خطهای متناظـر ازشکل F' موازی شونـد)، آنگاه F و F' با دورانی به زاویهٔ α وحول یك مرکز به هم وابسته‌اند. زیرا، فرض می‌کنیم M و M' دونقطهٔ متناظر ازشکلهای F و F' باشند. روی پاره خط MM' کمان درخور** زاویهٔ α رارسم، وفرض‌می‌کنیم O نقطهٔ تقاطع این کمان با عمود منصف پـاره خط MM' باشد. چون $OM=OM'$ و $\sphericalangle MOM'=\alpha$، نتیجه می‌شود که دوران به‌مرکز O وزاویهٔ α نقطهٔ M را به M' می‌برد.*** به‌علاوه، فـرض می‌کنیم A و A' دونقطهٔ دلخواه ومتناظر از اشکال F و F' بـاشند. مثلثهای OMA و $OM'A'$ را درنظرمی‌گیریم. داریم $OM=OM'$ (باتوجه به طرز پیدا کردن نقطهٔ O)، $MA=M'A'$ (فـرض)؛ و $\sphericalangle OMA=\sphericalangle OM'A'$، زیـرا زاویهٔ بین OM و OM' مساوی زاویـهٔ بین MA و $M'A'$ است، یعنی، نقاط M، M'، O و K (K نقطهٔ تقاطع AM و $A'M'$ است) بریك‌دایره واقع‌اند وزاویه‌های محـاطی OMA و $OM'A'$ دارای یك کمان هستند. بنا بر این مثلثهای OMA و

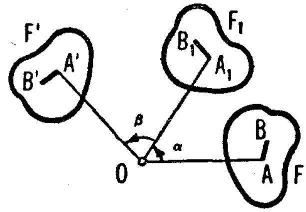
---

* زاویهٔ بین دوپاره خط AB و $A'B'$ که نقطهٔ مشترك ندارند، بنا برتعریف زاویهٔ بین خطوطی است که AB و $A'B'$ بر آنها واقع‌اند. این زاویه‌ای است که ما باید خط AB را درجهت آن بچرخانیم تا موازی خط $A'B'$ شود.

از این تذکر آخری نتیجه می‌شود که اگرسه پاره خط AB، A_1B_1 و $A'B'$ را داشته باشیم، زاویهٔ بین اولی وسومی برابر مجموع زاویهٔ بین اولی ودومی، وزاویهٔ بین دومی وسومی است. (برای اینکه‌کاملا دقیق باشیم باید از زاویهٔ جهتدار صحبت کنیم. صفحهٔ ۳۰). به‌زودی از این مطلب استفاده خواهیم‌کرد.

** برای شرح جزئیات این تـرسیم مسائل مسابقه‌هـای مجـارستان (۱)، ریاضیات پیشدانشگاهی ۱۱۰۰، یادداشت صفحهٔ ۳۰.

*** روابط $OM=OM'$ و $\sphericalangle MOM'=\alpha$ دو نقطهٔ O را به‌دست می‌دهد (عمودمنصف می‌تواند درهر دوطرف MM' رسم شود). باید یکی از این دونقطـه را چنان انتخاب کنیم که جهت دوران به مرکز O، که M را به M' می‌برد، برجهت دورانی به‌زاویهٔ α که پاره خطهای شکل F را با پاره‌خطهای متناظرشکل F' به‌صورت موازی درمی‌آورد، منطبق باشد.



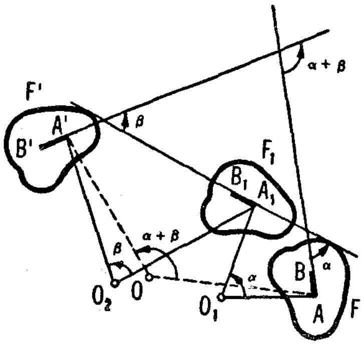
شکل ۲۷ الف

$OM'A'$ باهم قابل انطباق‌اند. از اینجا نتیجه می‌شود که $OA=OA'$ ؛ به‌علاوه، $\measuredangle AOA' = \measuredangle MOM' = \alpha$ (زیرا $\measuredangle A'OM' = \measuredangle AOM$). درنتیجه، دوران به‌مرکز O و زاویهٔ α هرنقطهٔ A ازشکل F را به‌نقطهٔ متناظرش A' ازشکل F' می‌برد، که همان حکم مطلوب است.

اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم به‌این سؤال که: مجموع دو دوران، معرف چیست؟ جواب دهیم. اول از همه، از لحاظ خود تعریف دوران واضح است که‌مجموع دودوران (همجهت یاهمسو) به‌مرکزمشترك O و زوایای دوران‌α و β، دورانی است به‌همان مرکز O به‌زاویهٔ دوران $\alpha+\beta$ (شکل ۲۷ الف).

اکنون حالت کلی را درنظرمی‌گیریم. فرض می‌کنیم شکل F_1 ازدوران شکل F به مرکز O_1 وزاویهٔ α به‌دست‌آمده باشد، وشکل F' از دوران F_1 به‌مرکز O_2 وزاویهٔ β درهمان جهت (شکل ۲۷ ب). اگر دوران اول، پاره خط AB ازشکل F را به‌پاره خط A_1B_1 ازشکل F_1 بدل‌کند و دوران دوم پاره خط A_1B_1 را به‌پاره خط $A'B'$ ازشکل F' بدل‌کند، آنگاه پاره خطهای AB و A_1B_1 مساوی‌اند وباهم زاویهٔ α می‌سازند؛ پاره‌خطهای $A'B'$ و A_1B_1 مساوی‌اند وباهم زاویهٔ β می‌سازند. پس پاره‌خطهای متناظر AB و $A'B'$ ازشکلهای F و F' مساوی هستند وباهم زاویهٔ $\alpha+\beta$ می‌سازند؛ اگر $\alpha+\beta$ برابر $360°$ باشد، معنای آن این است که پاره‌خطهای متناظر اشکال F و F' موازی هستند.* پس، بنابرآنچه قبلا ثابت شد نتیجه می‌شود که شکلهای F و F' با یك دوران به زاویهٔ $\alpha+\beta$ به هم وابسته‌اند، هرگاه

* اگر بخواهیم دقیقتر باشیم باید بگوییم که اگر $\alpha+\beta$ مضربی از $360°$ باشد، آنگاه پاره خطهای متناظر از دو شکل F و F' موازی‌اند. اما می‌توانیم همیشه فرض کنیم که α و β کمتر از $360°$ هستند، لذا دراین حالت $\alpha+\beta$ فقط زمانی مضربی از $360°$ است که $\alpha+\beta=360°$.



شکل ۲۷ ب

$\alpha+\beta=۳۶۰^\circ$ ، وبـا یك انتقال بـه هم وابسته‌اند هرگاه $\alpha+\beta\neq ۳۶۰^\circ$. پس مجموع دودوران دریك جهت با مراکز $O_۱$ و $O_۲$ وزوایای α و β یك دوران به‌زاویهٔ $\alpha+\beta$ است هرگاه $\alpha+\beta\neq ۳۶۰^\circ$، ویك انتقال است هرگاه $\alpha+\beta=۳۶۰^\circ$.
چون یك دوران به‌زاویهٔ α بـا یك دوران به‌زاویهٔ $۳۶۰^\circ-\alpha$ هم‌ارز است اما در جهت عکس، قسمت آخری قضیه که ثـابت کردیم می‌تواند بدین صورت بیان شود، مجموع دو دوران یك انتقال است هرگاه این دورانها زوایای دوران مساوی داشته باشند اما جهت دورانها عکس یکدیگر باشند.

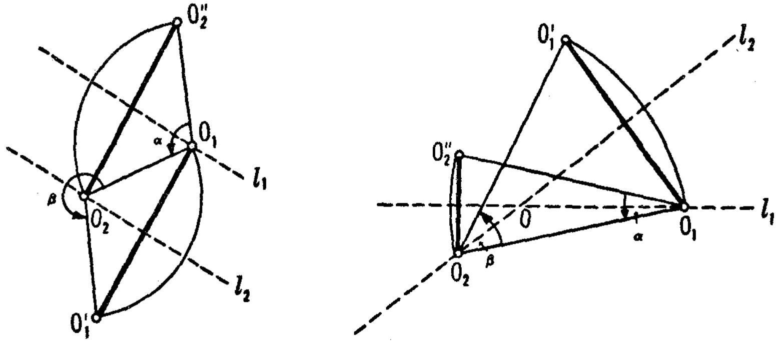
حال نشان‌خواهیم داد، که چگونه با داشتن مراکز $O_۱$ و $O_۲$ وزوایای α و βی دو دوران، می‌توان دوران یـا انتقالی پیداکرد که مجموع آنها را نشان دهد. ابتدا فرض می‌کنیم که $\alpha+\beta\neq ۳۶۰^\circ$. دراین حالت مجموع دورانها دورانی است به زاویهٔ $\alpha+\beta$. حـال مرکز آن را پیدا می‌کنیم. مجموع این دو دوران، مرکز $O_۱$ اولی را به‌نقطه $O'_۱$ می‌برد به‌طوری که

$$\measuredangle O_۱O_۲O'_۱=\beta \qquad \text{و} \qquad O'_۱O_۲=O_۱O_۲$$

(شکل ۲۸ الف؛ اولین دوران $O_۱$ را ثـابت نگـه می‌دارد، و دومی $O_۱$ را به $O'_۱$ می‌برد.) مجموع دو دوران یك نقطهٔ $O''_۲$ را به‌نقطهٔ $O_۲$ می‌برد به‌طوری که

$$\measuredangle O''_۲O_۱O_۲=\alpha \qquad \text{و} \qquad O''_۲O_۱=O_۲O_۱$$

(دوران اول، $O''_۲$ را به $O_۲$ می‌برد ودوران دومی $O_۲$ را ثابت نگه می‌دارد). از اینجا نتیجه می‌شود که مرکز O، که درپی آن‌هستیم، از $O_۲$ و $O''_۲$ و نیز از $O_۱$ و $O'_۱$ به



(ب) (الف)

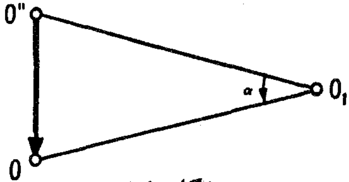
شکل ۲۸

یك فاصله است؛ درنتیجه می‌تواند به‌صورت نقطهٔ تقاطع عمود منصفهای پاره‌خطهای $O_2O''_2$ و $O_1O'_1$، که به‌ترتیب با l_1 و l_2 نشان داده‌شده‌اند، به‌دست آید. اما باتوجه به‌شکل ۲۸ الف به‌آسانی دیده می‌شودکه l_1 از O_1 می‌گذرد و $\measuredangle l_1O_1O_2=\alpha/2$، و l_2 از O_2 می‌گذرد و $\measuredangle O_1O_2l_2=\beta/2$. خطوط l_1 و l_2 با این شرایط کاملا معین می‌شوند؛ لذا مرکز دوران مورد نظر یعنی O، نقطهٔ تقاطع این دوخط است.

اگر $\alpha+\beta=360^\circ$، آنگاه انتقالی که مساوی مجموع دو دوران است ممکن است با این‌توجه‌که O_1 را به O'_1 (یا O''_2 را به O_2) می‌برد، تعیین‌شود؛ دراینجا نقاط O'_1 و O''_2 دقیقاً مثل قبل تعریف شده‌اند (شکل ۲۸ ب؛ درتصویر واضح است که خطوط l_1 و l_2 که درترسیم قبل پیدا شده‌اند دراین حال موازی‌اند ــ برراستای انتقال عمودند وفاصلهٔ بین‌آنها برابر نصف فاصلهٔ انتقال است).

با برهانی مشابه برهان قضیهٔ مجموع دو دوران، می‌توان نشان دادکه مجموع یك انتقال ویك دوران (و مجموع یك دوران و یك انتقال) دورانی است‌که زاویهٔ آن مساوی زاویهٔ دوران اول است، اما با مرکزی دیگر. پیداکردن مرکز O_1 این دوران، وقتی مرکز O و زاویهٔ α از دوران اولیه وفاصله وراستای انتقال داده شده باشند، به عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود. می‌توانید متن زیرین راکه با حروف ریزتر نوشته شده وهمچنین صفحهٔ ۵۳ را مطالعه کنید.

قضیه مجموع یك انتقال ویك دوران را می‌توان بــه‌روش زیر نیز ثــابت‌کرد. می‌دانیم‌که مجموع دو دوران به‌یك زاویه α اما بــا جهتهای مخالف، انتقالی است‌کــه



شکل ۲۹

یك نقطهٔ $O''_{۲}$ را بــه‌مرکز $O_{۲}$ ی دومین دوران می‌برد به‌طوری که $O_{۱}O''_{۲}=O_{۱}O_{۲}$ و $\alpha=\sphericalangle O''_{۲}O_{۱}O_{۲}$ (شکل ۲۸ب). حال انتقال داده شده‌را به‌صورت مجموع دودوران نشان‌می‌دهیم، که مرکزدومی همان O وزاویهٔ دوران آن‌همان α باشد، ولی دوجهت‌مخالف. (مرکز دوران اول، $O_{۱}$، با شرطهای $O_{۱}O''=O_{۱}O$ و $\sphericalangle O''O_{۱}O=\alpha$ تعیین‌می‌شود، که درآن O'' نقطه‌ای است که O باانتقال مفروض به‌آن برده شده است، (شکل ۲۹). بنابراین بــه‌جای مجموع یك انتقال و یك دوران مجموع سه دوران‌گذاشته شده است. اما دو دوران‌آخــر از این سه دوران همدیگر را خنثی می‌کنند وبنــا براین تنها یك دوران منحصربه‌فرد به‌مرکز $O_{۱}$ باقی می‌ماند.

به‌طریق مشابه می‌توان قضیهٔ مربوط به‌مجموع یك‌دوران ویك انتقال‌را ثابت‌کرد.

تشابه زیادموجود بین ویژگیهای دوران وویژگیهای انتقال، که ازمقایسهٔ براهین قضایای مربوط به‌جمع انتقالها وبراهین قضایای مربوط به‌جمع دورانها به‌دست می‌آید، شگفت‌انگیز است.* انتقال و دوران را روی هم تغییر مکان (یا حرکتهای خــاص یــا طولپاییهای مستقیم) می‌نامند، دلایل این نــامگذاری دربخش ۲، فصل ۲ توضیح داده خواهد شد (صفحهٔ ۶۸).

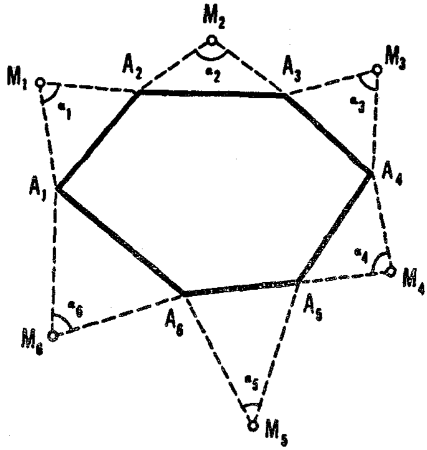
نیمدورحالت خاصی‌است ازدوران مربوط به‌زاویهٔ $\alpha=۱۸۰^\circ$. حالت خاص دیگری را می‌توانیم از قرار دادن $\alpha=۳۶۰^\circ$ بــه‌دست‌آوریم. دورانی بــه زاویهٔ $\alpha=۳۶۰^\circ$ هرنقطهٔ صفحه را به همان وضع اولیه‌اش برمی‌گرداند؛ این تبدیل، کــه درآن هیچ نقطــهٔ صفحه، تغییروضع نمی‌دهــد، همانی (یــا تبدیل همانی) نامیده می‌شود. (به‌نظرمی‌رسدکه خودکلمهٔ«تبدیل» دراینجا بیمورد باشد، زیرا تبدیل‌همانی هیچ شکلی را تغییرنمی‌دهد، بااین‌حال این نام برای ما مناسب خواهد بود.)

عیناً مانند حــالت نیمدور، دوران می‌تواند به‌عنوان تبدیلی ازتمام صفحه، که هرنقطهٔ A را به یك نقطهٔ جدید A' می‌برد، در نظر گرفته شود.** تنها نقطهٔ ثابت این تبدیل مرکز دوران، O، است (تنها حــالت استثنا، حالتی است که درآن زاویهٔ

---

* از یك‌دیدگاه پیشرفته‌تر، انتقال را می‌توان حالت خاصی ازدوران درنظرگرفت.

** پاورقی * صفحهٔ ۱۷ .



شکل ۳۰

دوران α مضربی از $360°$ است، یعنی، وقتی که دوران همانی است)، یك دوران درهیچ حالتی خط ثابت ندارد (بجزوقتی که α مضربی از $180°$ باشد. یعنی، وقتی که دورانهمانی، یانیمدور باشد).

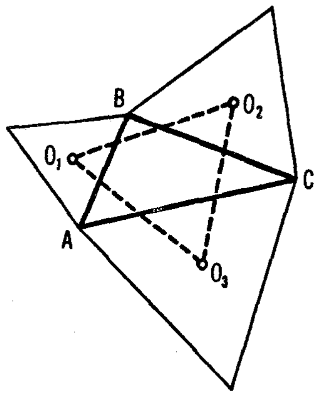
۲۱. یك nـ ضلعی رسم کنیدکه از آن n رأس مثلثهای متساویالساقینی که بر اضلاع این nـضلعی ودربیرون آن ساخته میشوند ونیز α_1، α_2،...،α_n زاویههای زاویههای این رئوس دردست باشند (شکل ۳۰ که درآن $n=6$).

مسألهٔ ۱۵ حالت خاصی است از مسألهٔ ۲۱ (درآنجا n فرد بود و $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=180°$). مسألهٔ ۶۶ ازفصل ۲، جلد دوم تعمیمی است از مسألهٔ ۲۱.

۲۲. الف) براضلاع یك مثلث دلخواه ABC و خارج آن مثلثهای متساویالاضلاعیبنا، وثابت کنیدکه مراکز O_1 و O_2 و O_3 این مثلثها خود رئوس یكمثلث متساویالاضلاع هستند (شکل ۳۱).

آیا حکم این تمرین وقتی مثلثهای متساویالاضلاع نه درخارج مثلث ABC، بلکه درهمان طرف اضلاع خود مثلث بنا شوند نیز درست است؟

ب) بر اضلاع مثلث دلخواه ABC ودرخارج آن، مثلثهای متساویالساقین BCA_1، ACB_1 و ABC_1 را چنان بنا میکنیم که زوایای رئوس A_1، B_1، و C_1 آنها بهترتیب مساوی α، β، و γ باشد. ثابت کنیدکه اگر $\alpha+\beta+\gamma=360°$،



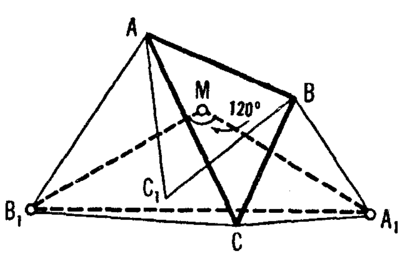
شکل ۳۱

آنگاه زوایای مثلث $A_۱B_۱C_۱$ مساوی $\alpha/۲$ ، $\beta/۲$، $\gamma/۲$ خواهند بود، یعنی این زوایا به‌شکل مثلث ABC بستگی ندارند.

آیا حکم این تمرین وقتی که مثلثهای متساوی‌الساقین، نه درخارج مثلث ABC، بلکه درهمان طرف اضلاع خود مثلث بنا شوند نیز درست است؟

می‌توان دیدکه مسألهٔ ۲۲ (الف) حالت خاصی از مسألهٔ ۲۲ (ب) است با $(\alpha=\beta=\gamma=۱۲۰^\circ)$.

۲۳. براضلاع مثلث دلخواه ABC مثلثهای‌متساوی‌الاضلاع $BCA_۱$، $ACB_۱$، و $ABC_۱$ را طوری بنا کنیدکه رئوس $A_۱$ و A در دوطرف BC، $B_۱$ و B دردو طرف AC، اما $C_۱$ و C دریک طرف AB باشند. گیریم M مرکز مثلث $ABC_۱$



شکل ۳۲

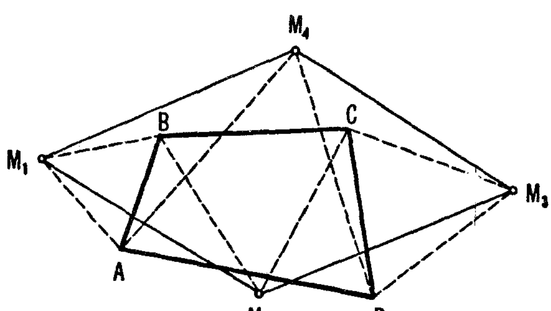
باشد. ثابت کنید که A_1B_1M مثلثی است متساوی‌الساقین بازاویهٔ ۱۲۰° دررأس M (شکل ۳۲).

۲۴. الف) بر اضلاع چهارضلعی (محدب) غیر مشخص $ABCD$ مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABM_1، BCM_2، CDM_3، و DAM_4 رسم شده‌اند، به طوری که اولی، وسومی دربیرون چهارضلعی هستند ودومی وچهارمی درهمان طرف اضلاع BC و DA که خود چهارضلعی قرار دارد. ثابت کنید که چهارضلعی $M_1M_2M_3M_4$ یك متوازی‌الاضلاع است (شکل ۳۳ الف؛ در حالتهای خاص، این متوازی‌الاضلاع ممکن است به‌یك بازه بدل شود).

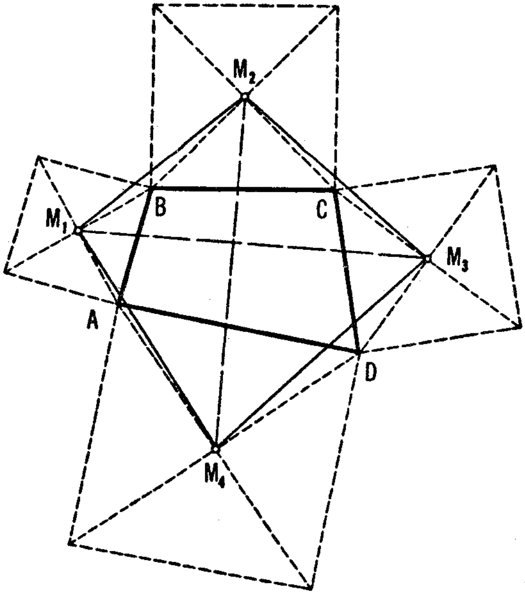
ب) بر اضلاع یك‌چهارضلعی(محدب) دلخواه $ABCD$ مربعهایی بنا شده‌اند، که همگی درخارج این چهارضلعی واقع‌اند. مراکز این مربعها M_1، M_2، M_3، و M_4 هستند. نشان دهید $M_1M_3 = M_2M_4$ و $M_1M_3 \perp M_2M_4$ (شکل ۳۳ ب).

ج) بر اضلاع یك‌متوازی‌الاضلاع دلخواه $ABCD$ مربعهایی بناشده‌اندکه در خارج آن هستند. ثابت کنید که مراکز M_1، M_2، M_3، M_4 خود رئوس یك مربع هستند (شکل ۳۳ ج).

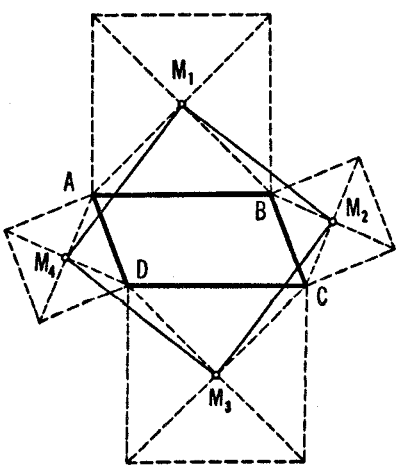
آیا حکم این مسأله باز هم درست است، وقتی که همهٔ مربعها درهمان طرفی که خود اضلاع متوازی‌الاضلاع واقع‌اند، بنا شده باشند؟



شکل ۳۳ الف



شکل ۳۳ ب



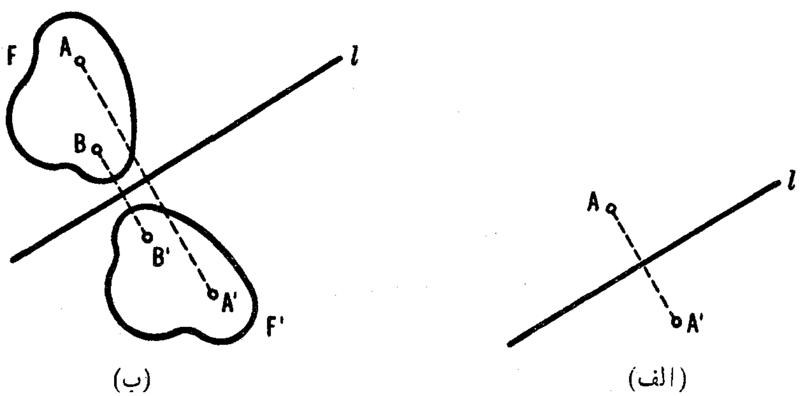
شکل ۳۳ ج

فصل دوم

تقارن[1]

۰۱ تقارن محوری* و تقارن لغزه‌ای[2]

نقطه A' را نگارهٔ نقطهٔ A نسبت به‌خط l (که محورتقارن گفته می‌شود) گویندهرگاه پاره‌خط AA' بر l عمود وتوسط l نصف شده باشد (شکل ۳۴ الف). اگر نقطهٔ A'



شکل ۳۴

1. Symmetry.

* reflection، تقارن محوری، درفیزیك، انعکاس آینه‌ای گفته‌می‌شود. ـم.

2. glide reflection

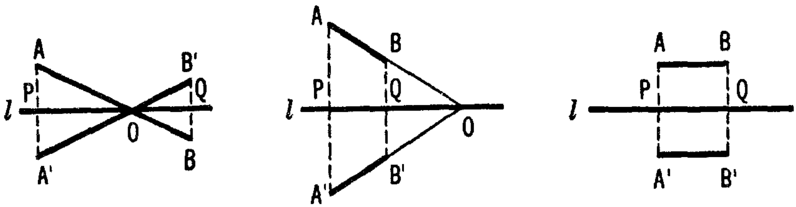
(ب) (الف)

شکل ۳۵

نگارهٔ A نسبت به l باشد، آنگاه به‌وارون، A نیـز نگارهٔ A' نسبت به l است. پس می‌توانیم از جفت نقاطی که نسبت به‌یك خط مفروض نگارهٔ یکدیگرند سخن به‌میان آوریم. اگر A' نگارهٔ A نسبت به‌خط l باشد، آن‌را بدین صورت نیز بیان می‌کنند: A' قرینهٔ A است نسبت به‌خط l.

مجموعهٔ تمام نگاره‌های نقاط شکل F نسبت به‌خط l، شکل جدید F' را تشکیل می‌دهند، که نگارهٔ F بر اثر تقارن نسبت به l گفته می‌شود (شکل ۳۴ب)؛ بدیهی است که به‌وارون، F نیز نگارهٔ F' نسبت به l است. یك خط بر اثر تقارن نسبت به l به‌یك خط جدید بدل می‌شود؛ درعین حال اگر خطی موازی l باشد، بر اثر تقارن به‌یك خط موازی با l بدل می‌شود، واگر این خط، l را در نقطهٔ O قطع کند، نگارهٔ آن نیز خط دیگری است که آن نیز l را در O قطع می‌کند (درشکل ۳۵ الف n به n'، و m به m' بدل شده است). یك دایره، به‌دایره‌ای قابل انطباق باخودش بدل می‌شود (شکل ۳۵ ب). (برای اثبات گزارهٔ اخیر، مثلاً، کافی است نشان داده شود که هر پاره‌خط AB به‌یك پاره‌خط $A'B'$ با همان طول بدل می‌شود. بدین‌ترتیب درشکل ۳۶ الف، $AB=PQ=A'B'$ و در شکلهای ۳۶ب و ج $AB=A'B'$، زیرا $\Delta A'OP\cong\Delta AOP$، $\Delta BOQ\cong\Delta B'OQ$ ودرنتیجه $OA=OA'$ و $OB=OB'$. از اینجا چنین نتیجه می‌شود که مکان نقاطی که فاصله‌هاشان از O مساوی r است به نقاطی بدل می‌شوند که فاصله‌هاشان از O' مساوی r است، که در آن O' قرینه O نسبت به خط l است، یعنی دایرهٔ S به‌دایرهٔ S'، قابل انطباق با آن، بدل می‌شود.)

۲۵. الف) فرض می‌کنیم خط MN ودونقطهٔ A و B در یك طرف آن، داده



(ج) (ب) (الف)

شکل ۳۶

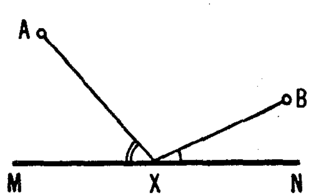
شده باشند. نقطهٔ X را برخط MN چنان بیابیدکه پاره‌خطهای AX و BX باخط MN زوایای مساوی درست کنند، یعنی چنان باشندکه

$$\sphericalangle AXM = \sphericalangle BXN$$

ب) خط MN ودودایرهٔ S_1 و S_2 دریك‌طرف آن داده شده‌اند. نقطهٔ X را برخط MN چنان پیداکنیدکه یکی‌از مماسهای مرسوم ازاین نقطه بردایرهٔ اولی و یکی از مماسهای مرسوم از همین نقطه بردایرهٔ دومی زوایـای مساوی با خط MN بسازند.

ج) فرض می‌کنیم خط MN ودو نقطهٔ A و B دریك‌طرف آن داده شده‌باشند. نقطهٔ X را برخط MN چنان پیداکنیدکه زاویهٔ MN با پاره‌خط XA مساوی دو برابر زاویهٔ MN با پاره خط XB بـاشد (یعنی، $\sphericalangle AXM = 2 \sphericalangle BXN$ ، شکل ۳۷).

۲۶. الف) فرض می‌کنیم سه خط متقارب l_1، l_2، و l_3 و نقطهٔ A بـریکی از این خطوط داده شده باشند. یك‌مثلث ABC بسازیدکه‌خطوط l_1، l_2، وl_3 نیمسازهای آن باشند.



شکل ۳۷

ب) فرض می‌کنیم یك دایرهٔ S، و سه‌خط l_1، l_2، و l_3 مار بـر مرکز آن داده شده باشند. یك مثلث ABC بیابیدکه رئوس آن بـر این خطوط باشند، و دایـرهٔ S دایرهٔ محاطی آن باشد.

ج) فرض‌کنیم سه‌خط متقارب l_1، l_2، و l_3 ونقطهٔ A_1 بر یکی از آنها داده شده باشد. یك‌مثلث ABC پیدا کنیدکه در آن، نقطهٔ A_1 وسط ضلع BC باشدوخطوط l_1، l_2، و l_3 عمود منصفهای اضلاع آن باشند.

مسألهٔ ۳۹ (ب) و (الف) تعمیمی است ازمسألهٔ ۲۶ (الف) و (ج).

۲۷. الف) مثلثی رسم کنیدکه طول قاعدهٔ ABی آن مساوی a، طول ارتفاع وارد بر این قاعده مساوی h، وتفاضل دوزاویهٔ مجاور به‌این قاعده γ باشد.

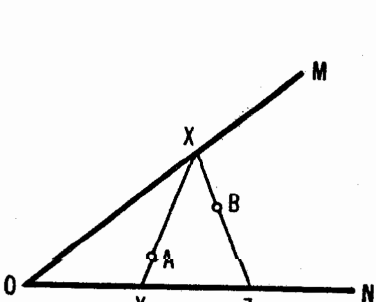
ب) مثلثی بسازیدکه از آن طول دوضلع و تفاضل زاویه‌هایی که این دوضلع با ضلع سوم می‌سازند، معلوم باشد.

۲۸. فرض‌کنیم زاویهٔ MON و دونقطهٔ A و B درداخل آن داده شده باشند. نقطهٔ X را برضلع OM چنان پیدا کنیدکه اگر Y و Z نقاط تقاطع XA و XB با ON باشند، مثلث XYZ متساوی‌الساقین باشد، $XY = XZ$ (شکل ۳۸).

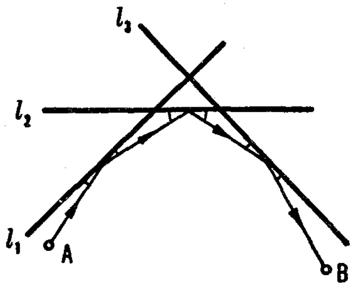
۲۹. الف) یك چهارضلعی $ABCD$ بسازیدکه از آن طولهای هرچهار ضلع معلوم وقطر AC نیمساز زاویهٔ A باشد.

ب) یك چهارضلعی رسم کنیدکه یك دایره بتواند درآن محاط شود به‌شرطی که طولهای اضلاع مجاور AB و AD وزوایای رأسهای B و D از آن داده شده باشند.

۳۰. الف) توپ بیلیاردی چنان به‌لبه میز بیلیارد برخورد می‌کندکه دوخطی که توپ پیش وپس‌از برخورد با آن لبه بر آنها حرکت می‌کند زاویه‌های مساوی با آن لبه تشکیل می‌دهند. فرض‌کنید میز بیلیاردی داری n لبهٔ l_1، l_2، ...، l_n، و A و



شکل ۳۸



شکل ۳۹

B دونقطه روی میز باشند. درچه‌راستایی باید به‌توپی که در نقطهٔ A واقع‌است، ضربه زد تا پس‌از برخوردهای متوالی به n لبهٔ l_1، l_2، ...، l_n (باحفظ شرط بالا) از نقطهٔ B بگذرد (شکل ۳۹ که درآن $n=3$)؟

ب) فرض‌کنید $n=4$، وخطوط l_1، l_2، l_3، وl_4 تشکیل یک‌مستطیل داده‌باشند و B بر A منطبق باشد. ثابت‌کنیدکه دراین حالت طول کل مسیری که توپ بیلیارد، درحرکت از نقطهٔA وبازگشت به‌همان نقطه، طی می‌کند مساوی مجموع‌دوقطرمستطیل است (والبته مهم نیست که A درکجا واقع شده باشد). همچنین ثابت کنیدکه اگر توپ هنگام‌رسیدن به‌نقطهٔ A توقف‌نکرده به‌حرکت خود ادامه دهد، باردیگردرهمان امتدادهای قبلی به‌چهارضلع مستطیل برخورد می‌کند و به‌نقطهٔ A بازمی‌گردد.

۳۱. الف) خط l و دو نقطهٔ A و B دریک‌طرف آن مفروض‌اند. نقطهٔ X را برخط l چنان پیداکنیدکه مجموع $AX+XB$ مساوی مقدارمفروض a باشد.

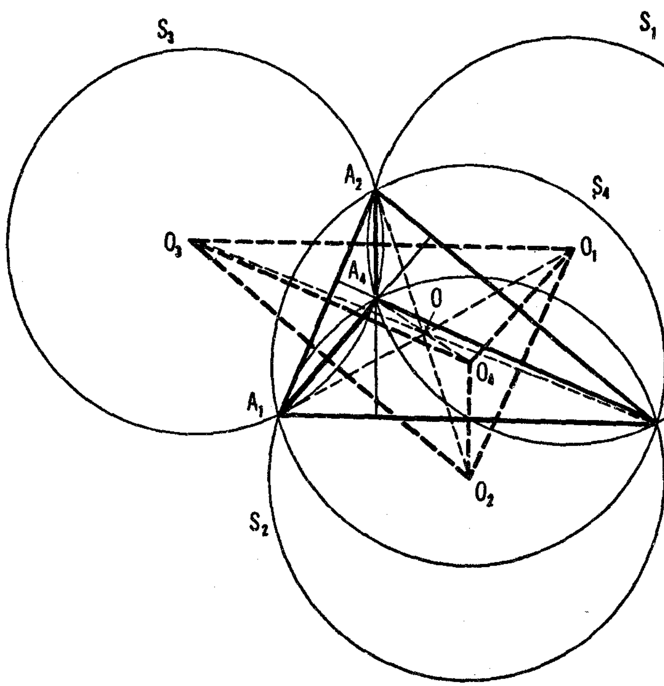
ب) خط l ودونقطهٔ A و B در دوطرف آن مفروض‌اند. نقطهٔ X را برخط l چنان بیابیدکه تفاضل $AX-XB$ مساوی مقدارمفروض a باشد.

۳۲. الف) فرض‌کنیم ABC یک‌مثلث باشد وH نقطهٔ تقاطع سه ارتفاع آن. نشان دهیدکه قرینه‌های H نسبت به‌اضلاع مثلث بردایرهٔ محیطی‌آن واقع‌اند.

ب) سه‌نقطهٔ H_1 وH_2 وH_3 قرینه‌های نقطهٔ تقاطع ارتفاعهای یک‌مثلث نسبت به‌اضلاع آن داده شده‌اند. مثلث را پیداکنید.

نقطهٔ تقاطع سه‌ارتفاع مثلث مرکز ارتفاع نامیده می‌شود.

۳۳. فرض می‌کنیم چهار نقطهٔ A_1، A_2، A_3، و A_4 درصفحه چنان باشندکه A_4 مرکز ارتفاع مثلث $A_1A_2A_3$ باشد. دایره‌های محیطی مثلثهای $A_1A_2A_3$ و $A_1A_2A_4$ و $A_1A_3A_4$ و $A_2A_3A_4$ را به ترتیب با S_4، S_3، S_2، و S_1 نشان می‌دهیم وفرض می‌کنیم مراکز این دایره‌ها O_4، O_3، O_2، و O_1 باشند. ثابت‌کنید:



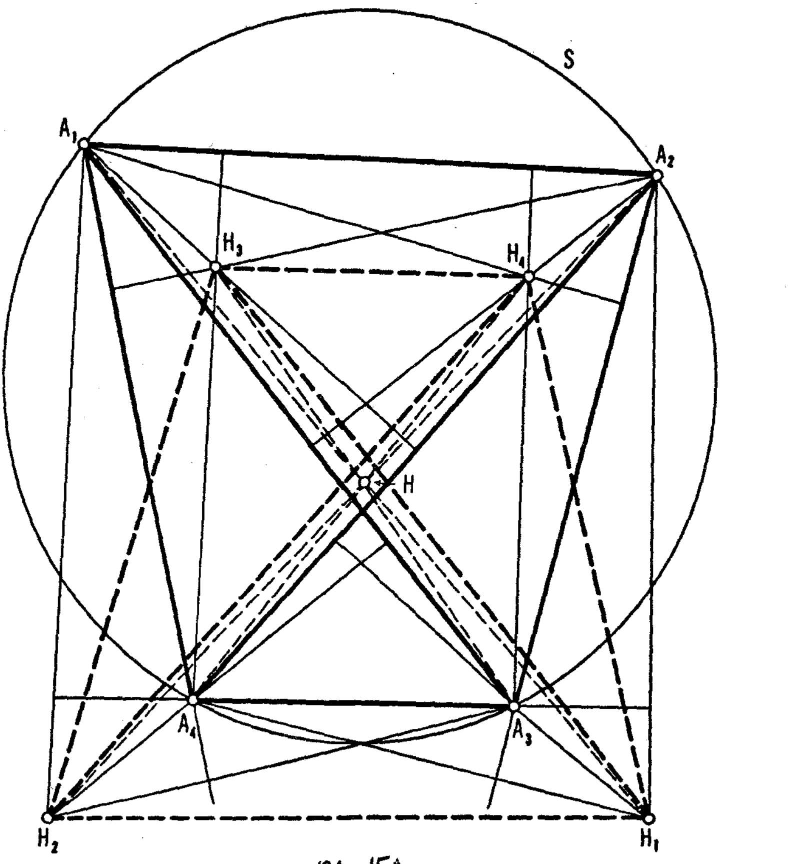
شکل ۴۰

الف) A_1 مرکزارتفاع مثلث $A_2A_3A_4$، A_2 مرکزارتفاع مثلث $A_1A_3A_4$، و A_3 مرکزارتفاع مثلث $A_1A_2A_4$ است.

ب) دایره‌های S_1، S_2، S_3، و S_4 همگی باهم قابل انطباق‌اند.

ج) چهارضلعی $O_1O_2O_3O_4$ از نیمدور چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ حول نقطه‌ای مانند O به دست می‌آید (شکل ۴۰). (به‌عبارت دیگر، اگر نقاط A_1، A_2، A_3، و A_4 چنان واقع شده باشند که هر نقطه مرکز ارتفاع مثلثی باشد که با سه‌نقطهٔ دیگر ساخته می‌شود، آنگاه چهار پاره خط واصل بین هر نقطه و مرکز دایرهٔ ماربر سه‌نقطهٔ دیگر یکدیگر را دریك نقطهٔ O، که وسط هر پاره‌خط است، قطع می‌کنند.)

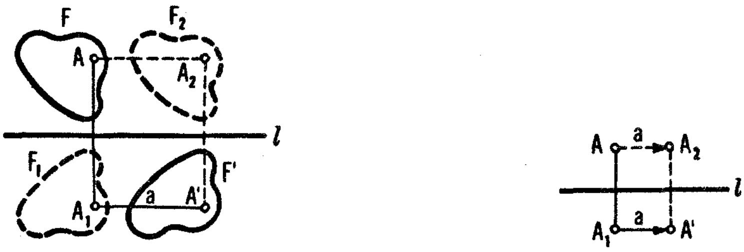
۳۴. فرض کنیم چهارنقطهٔ A_1، A_2، A_3، و A_4 که همگی بریك دایرهٔ S واقع‌اند، داده شده باشند. مراکز ارتفاع مثلثهای $A_1A_2A_3$ و $A_1A_2A_4$ و $A_1A_3A_4$ و $A_2A_3A_4$ را به‌ترتیب با H_4، H_3، H_2، و H_1 نشان می‌دهیم. ثابت کنید:



شکل ۴۱

الف) چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ از نیمدورچهارضلعی $H_1H_2H_3H_4$ حول نقطه‌ای مانند H به‌دست می‌آید (شکل ۴۱). به‌عبارت دیگر، اگر نقاط A_1 و A_2 و A_3 و A_4 همگی بریك دایره باشند، آنگاه چهار پاره‌خط واصل بین یکی از این نقاط ومرکز ارتفاع مثلث حاصل از سه نقطهٔ دیگر، همدیگر را دریك نقطه، که وسط هر پاره خط است، قطع می کنند.

ب) هریك از چهارگانه‌های A_1، A_2، H_3، H_4 ؛ A_1، A_3، H_2، H_4 ؛ A_1، A_4، H_2، H_3؛ A_2، A_3، H_1، H_4؛ A_2، A_4، H_1، H_3؛ A_3، A_4، H_1، H_2؛ و H_1، H_2، H_3، H_4 بریك دایره واقع‌اند. همچنین، هفت دایره‌ای که این چهار



(ب) (الف)

شکل ۴۲

گانه‌ها بر آنها قراردارند همگی با S قابل انطباق‌اند.

۳۵. ثابت کنیدکه اگر کثیرالاضلاعی چند (بیش‌از دو) محور تقارن داشته باشد، این محورها همگی دریك نقطه متقاطع‌اند.

تعداد دیگری تمرین که مربوط به‌تقارن نسبت به‌یك خط است دربخش ۲، فصل ۲، جلد ۲ این‌کتاب خواهدآمد.

فرض می‌کنیم نقطهٔ A_1 قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به‌خط l باشد، ونقطهٔ A' ازانتقال A_1 درامتداد همان خط وبه‌فاصلهٔ a به‌دست آمده باشد (شکل ۴۲ الف). در این حالت می‌گوییم نقطهٔ A' از تقارن لغزه‌ای* نقطهٔ A در امتداد محور l و به‌فاصلهٔ a به‌دست‌آمده است. به‌عبارت دیگر، لغزه (تقارن لغزه‌ای) مجموع یك تقارن نسبت به‌یك خط l و یك انتقال در امتداد همین خط است. (همان‌طور که در شکل ۴۲ الف دیده می‌شود مجموع می‌تواند به‌ترتیب عکس حاصل شود، درآنجا A_2 از انتقال A به‌فاصلهٔ a درامتداد l به‌دست‌آمده است و سپس A' از قرینهٔ A_2 نسبت به l).

مجموعهٔ همهٔ نقاطی‌که ازلغزهٔ نقاط شکل F به‌دست می‌آیند، شکل جدید F' را می‌سازندکه از لغزهٔ شکل F به‌دست می‌آید (شکل ۴۲ ب). به‌وارون، واضح است‌که شکل F ازلغزهٔ F' با همان محور l (و با جهت عکس در انتقال) به‌دست

---

* از این به‌بعد برای سهولت بیان به‌جای تقارن لغزه‌ای واژهٔ لغزه را به‌کار خواهیم برد. -م.

می‌آید. با توجه به‌این مطلب می‌توان از شکلهای وابسته به‌هم توسط یك لغزه صحبت کرد.

۳۶. یك‌خط l، دو نقطهٔ A و B دریك‌طرف آن، ویك پاره‌خط به‌طول a داده شده‌اند. پاره‌خط XY به‌طول a را برخط l چنان پیدا کنید که طول راه $AXYB$ کوتاهترین راه ممکن باشد (شکل ۴۳).

۳۷. الف) یك چهارضلعی $ABCD$ رسم کنید که در آن $\measuredangle C = \measuredangle D$، طولهای اضلاع AB و CD، مجموع طولهای اضلاع BC و AD، وفاصلهٔ رأس A ازضلع CD، d، داده شده باشند.

ب) یك چهارضلعی $ABCD$ رسم کنید که در آن طولهای اضلاع AB وCD، مجموع طولهای اضلاع BC و AD، و d_1 وd_2، فاصله‌های رئوس A و B از ضلع CD، از آن معلوم باشند.

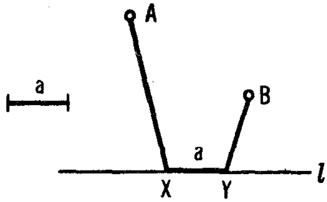
حال به‌اثبات چندگزاره دربارهٔ مجموع تقارنهای محوری می‌پردازیم.*

گزارهٔ ۱. مجموع دوتقارن نسبت به‌یك خط، یك تبدیل همانی است.

درواقع، اگر تقارن‌نسبت به‌خط l، نقطهٔ A را به‌نقطهٔ A' ببرد (← شکل ۳۴ الف)، آنگاه دومین تقارن نسبت به l نقطهٔ A' را به A برمی‌گرداند، یعنی، براثر دو تقارن وضع نقطهٔ A تغییر نمی‌کند.

حکم گزاره می‌تواند بدین‌صورت نیز بیان شود: دو تقارن نسبت به یك خط یکدیگررا خنثی می‌کنند.

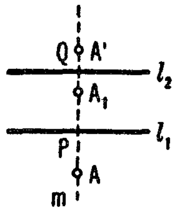
گزارهٔ ۲. مجموع دوتقارن نسبت به‌دو خط موازی، انتقالی است درامتداد عمود بردوخط و به‌طولی مساوی دوبرابرفاصلهٔ بین دوخط.



شکل ۴۳

---

* غالباً به‌جای تقارن نسبت به‌یك خط، فقط واژهٔ تقارن را به‌کارخواهیم برد.



شکل ۴۴ الف

فرض می‌کنیم A نقطه‌ای دلخواه درصفحه باشد، A_1 قرینهٔ A نسبت به‌خط l_1، و A' قرینهٔ A_1 نسبت به‌خط l_2 باشد که موازی l_1 است (شکل ۴۴ الف). پس $AA_1 \perp l_1$ و $A_1A' \perp l_2$؛ درنتیجه نقاط A، A_1، و A' برخط m، عمود بر l_1 و l_2، قرار دارند. اگر P و Q نقاط تقاطع خط m با l_1 و l_2 باشند، آنگاه $AP=PA_1$ ، $A_1Q=QA'$ و مثلا درحالت شکل ۴۴ الف،* داریم:

$$AA'=AP+PA_1+A_1Q+QA'=2PA_1+2A_1Q=2PQ$$

بنابراین، $AA'\perp l_1$ و $AA'=2PQ$، که همان حکم مطلوب است.

گزارهٔ ۱ را می‌توان حالت خاص گزارهٔ ۲ تلقی کرد، یعنی حالتی که $PQ=0$.

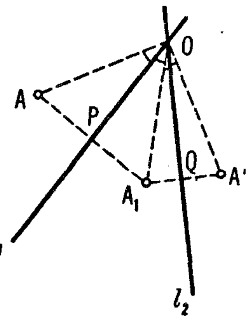
گزارهٔ ۳. مجموع دوتقارن نسبت به‌دوخط متقاطع، دورانی است به مرکز نقطهٔ تقاطع این دوخط و به‌زاویه‌ای دوبرابر زاویهٔ بین آنها.

فرض می‌کنیم A نقطه‌ای دلخواه ازصفحه باشد، A_1 قرینهٔ A نسبت به‌خط l_1، و A' قرینهٔ A_1 نسبت به‌خط l_2 باشد که l_1 را درنقطهٔ O قطع می‌کند (شکل ۴۴ ب). اگر P و Q به‌ترتیب نقاط تقاطع AA_1 با l_1 و A_1A' با l_2 باشند، آنگاه

$$\triangle AOP\cong\triangle A_1OP \quad \text{و} \quad \triangle A_1OQ\cong\triangle A'OQ$$

---

* برای اینکه ازتصویر برای اثبات استفاده نکنیم، لازم است که مفهوم پاره‌خط جهتدار را به‌کار ببریم (←حروف ریز صفحات ۲۰ـ۲۱).



شکل ۴۴ ب

پس داریم

$$OA = OA_1 \qquad\qquad OA_1 = OA'$$

$$\sphericalangle AOP = \sphericalangle POA_1 \qquad\qquad \sphericalangle A_1OQ = \sphericalangle QOA'$$

مثلا همان‌گونه که درتصویر شکل ۴۴ ب هویداست،*

$$\begin{aligned} \sphericalangle AOA' &= \sphericalangle AOP + \sphericalangle POA_1 + \sphericalangle A_1OQ + \sphericalangle QOA' \\ &= ۲ \sphericalangle POA_1 + ۲ \sphericalangle A_1OQ \\ &= ۲ \sphericalangle POQ. \end{aligned}$$

بنابراین، $OA = OA'$ و $\sphericalangle AOA' = ۲ \sphericalangle POQ$، که همان بود که می‌خواستیم.**

گزاره‌های ۲ و ۳ می‌توانند برهانهای ساده‌ای برای قضایای مربوط به‌جمع دورانها یا جمع یك دوران ویك انتقال به‌دست دهند.

---

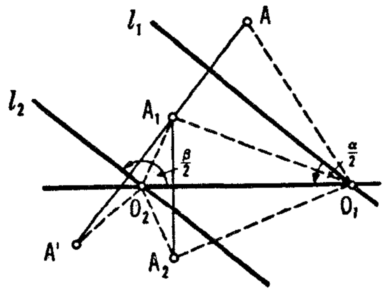
* برای اثبات این مطلب، بدون استفاده ازتصویر، لازم است‌که مفهوم زاویهٔ جهتدار را به‌کار ببریم (حروف ریز صفحه ۳۱).

** از برهانهای گزاره‌های ۲ و۳ به‌آسانی دیده می‌شودکه‌مجموع دوتقارن نسبت به‌دو خط به‌ترتیبی‌که این تقارنها عمل می‌کنند بستگی دارد (به‌استثنای وقتـی‌که خطوط برهم عمودند، که دراین حالت مجموع تقارنها به‌هرترتیب یك نیمدور حول‌نقطهٔ تقاطع است).

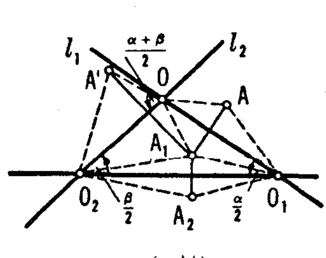
فرض کنید مثلا بخواهیم مجموع دو دوران به‌مراکز O_1 و O_2 و زوایای α و β را پیدا کنیم. بنا بر گزارهٔ ۳، به‌جای دوران اولی می‌توان مجموع دوتقارن نسبت به خطوط l_1 و O_1O_2 را که در آن l_1 از O_1 می‌گذرد و $\sphericalangle l_1O_1O_2=\alpha/2$، جایگزین کرد، به‌جای دومین دوران نیز می‌توان مجموع دوتقارن نسبت به خطوط O_1O_2 و l_2 راکه در آن l_2 از O_2 می‌گذرد و $\sphericalangle O_1O_2l_2=\beta/2$، قراردارد(شکل ۴۵). بنا بر این به‌جای مجموع دو دوران مجموع چهار تقارن نسبت به‌خطوط l_1، O_1O_2، O_1O_2، و l_2 جایگزین می‌شود. اما دو تقارن میانی، دارای یك محورند و بنا بر این با توجه به‌گزارهٔ ۱ همدیگر را خنثی می‌کنند. پس مجموع چهار تقارن نسبت به‌خطوط l_1، O_1O_2، O_1O_2، و l_2 با مجموع دوتقارن نسبت به‌خطوط l_1 و l_2 برابر است. اگر O نقطهٔ تقاطع l_1 و l_2 باشد، آنگاه بنا بر گزارهٔ ۲ مجموع این تقارنها دورانی‌است به‌مرکز O وزاویهٔ $2\sphericalangle l_1OO_2$، که همان‌گونه‌که ازشکل ۴۵الف پیدا است، مساوی مجموع زوایای $2\sphericalangle O_1O_2l_2=\beta$ و $2\sphericalangle l_1O_1O_2=\alpha$ است ($\sphericalangle l_1OO_2$ زاویهٔ خارجی مثلث O_1O_2O است).

اگر l_1 و l_2 موازی باشند (ازشکل ۴۵ ب به‌آسانی دیده می‌شودکه‌این‌حالت وقتی رخ می‌دهد که $\sphericalangle l_1O_1O_2+\sphericalangle O_1O_2l_2=180^\circ$، یعنی وقتی که $\alpha+\beta=360^\circ$)، بنا بر گزارهٔ ۲ مجموع دوتقارن نسبت به l_1 و l_2 یك‌انتقال‌است. بنا بر این می‌توانیم به‌همان نتیجهٔ قبل دست یابیم (← شکل صفحهٔ ۳۵).

حال مجموع یك انتقال در راستای NN' به‌طول a ویك دوران به‌مرکز O وبه‌زاویهٔ α را پیدا می‌کنیم. به‌جای انتقال مجموع دو تقارن نسبت به‌خطوط l_1 و l

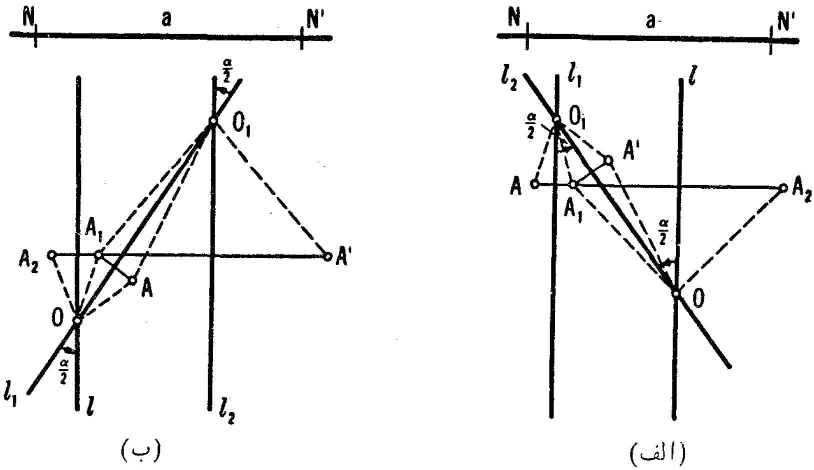


(ب)



(الف)

شکل ۴۵



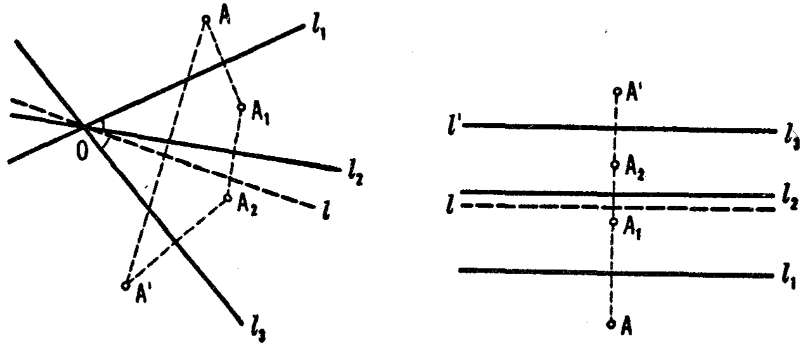
شکل ۴۶

را که عمود بر NN' هستند جایگزین می‌کنیم، به طوری که فاصلهٔ بین آنها $a/۲$ باشد و l را طوری انتخاب می‌کنیم که از O بگذرد (شکل ۴۶ الف). به جای دوران مجموع دو تقارن نسبت به‌خطوط l و $l_۲$ راکه $l_۲$ از O می‌گذرد و $\measuredangle lOl_۲=\alpha/۲$ ، می‌گذاریم. پس به جای مجموع یك انتقال و یك دوران مجموع چهار تقارن نسبت به‌خطوط $l_۱$، l، l، و $l_۲$ را قرار می‌دهیم. دوتقارن وسطی در این تقارنها همدیگر را، بنابر گزارهٔ ۱، خنثی می‌کنند، پس دوتقارن نسبت به‌خطوط $l_۱$ و $l_۲$ برای ما باقی می‌ماند، که بنابر گزارهٔ ۳، دورانی است حول نقطهٔ $O_۱$ ، محل تقاطع $l_۱$ و $l_۲$، و به‌زاویهٔ

$$۲\measuredangle l_۱O_۱l_۲=۲\measuredangle lOl_۲=\alpha$$

(← شکل ۴۶ الف).

دقیقاً به‌همان طریق می‌توان نشان داد که مجموع یك دوران به مرکز O و به‌زاویهٔ α ویك انتقال در راستای NN' به‌طول a، دورانی است به‌همان زاویهٔ α. برای یافتن مرکز این دوران، $O_۱$ ، خطوط $l_۱$ و l را از O چنان می‌گذرانیم که $l\perp NN'$ و $\measuredangle l_۱Ol=\alpha/۲$ ، وسپس یك خط $l_۲$ موازی l و به‌فاصلهٔ $a/۲$ از l رسم می‌کنیم. در این‌صورت نقطهٔ تقاطع $l_۱$ و $l_۲$ نقطهٔ $O_۱$ است (شکل ۴۶ ب).



(ب) (الف)

شکل ۴۷

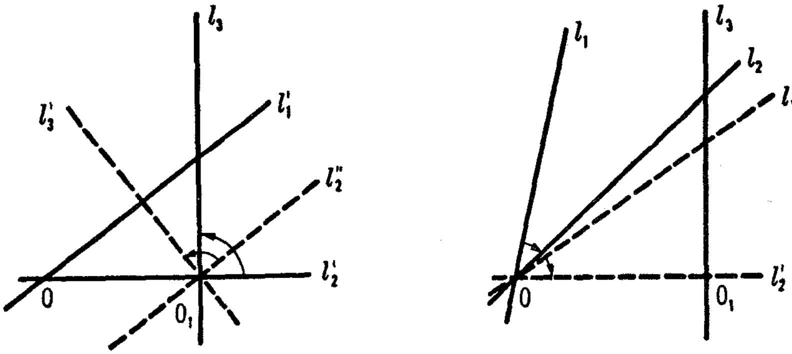
گزارهٔ ۴. مجموع سه تقارن نسبت به سه خط موازی یا سه خطی که در یك نقطه متقاطع‌اند، تقارنی است نسبت به یك خط.

نخست فرض می‌کنیم که سه خط l_1، l_2، و l_3 موازی باشند (شکل ۴۷ الف). بنا بر گزارهٔ ۲ مجموع دو تقارن نسبت به خطوط l_1 و l_2 انتقالی است در راستای عمود بر l_1 و l_2 به فاصله‌ای مساوی دو برابر فاصلهٔ بین آنها، و با مجموع دو تقارن نسبت به دو خط دیگر l و l' موازی l_1 و l_2، که همان فاصله را دارا باشند، مساوی است. حال فرض می‌کنیم که l' بر l_3 منطبق باشد. به جای مجموع سه تقارن، مجموع سه تقارن نسبت به خطوط l، l'، و l_3 را می‌گذاریم. بنا بر گزارهٔ ۱، دو تقارن آخری یکدیگر را خنثی می‌کنند و بنا براین تنها یك تقارن نسبت به l باقی می‌ماند.

حال فرض کنید خطوط l_1، l_2، و l_3 یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند (شکل ۴۷ ب). بنابر گزارهٔ ۳ مجموع دو تقارن نسبت به l_1 و l_2 دورانی است حول O به زاویهٔ $\measuredangle l_1Ol_2$ ۲ و با مجموع دو تقارن نسبت به خطوط l و l_3، که l از O می‌گذرد و $\measuredangle lOl_3 = \measuredangle l_1Ol_2$، مساوی است. پس مجموع سه تقارن نسبت به l_1، l_2، و l_3 مساوی مجموع سه تقارن نسبت به l، l_3. و l_3 یا یك تقارن تنها نسبت به l است (زیرا دو تقارن آخری نسبت به l_3 یکدیگر را خنثی می‌کنند).

گزارهٔ ۵. مجموع سه تقارن نسبت به سه خط، که یکدیگر را در سه نقطه قطع می‌کنند، و یا دوتا از آنها موازی‌اند و سومی آنها را قطع می‌کند، یك لغزه است.

فرض کنیم خطوط l_1 و l_2 یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند (شکل ۴۸ الف).



(ب) (الف)

شکل ۴۸

مجموع دو تقارن نسبت به l_1 و l_2 دورانی است به مرکز O و زاویهٔ $2\measuredangle l_1Ol_2$ ($\longrightarrow$ گزارهٔ ۳)، بنابراین به‌جای مجموع این‌تقارنها، مجموع دوتقارن نسبت به‌دوخط دیگر l_1' و l_2' که یکدیگررا درهمان‌نقطهٔ O قطع می‌کنند وهمان زاویهٔ l_1 و l_2 را با هم می‌سازند، می‌تواند جایگزین‌شود. حال خطوط l_1' و l_2' را چنان انتخاب‌می‌کنیم که $l_3 \perp l_2'$، و به‌جای مجموع سه تقارن نسبت به l_1، l_2، و l_3 مجموع سه تقارن نسبت به‌خطوط l_1'، l_2'، و l_3' را درنظرمی‌گیریم (یعنی مجموع یك‌تقارن نسبت به l_1' ویك نیمدور حول نقطهٔ O_1، محل تقاطع l_2' و l_3ــ یا مجموع یك تقارن نسبت به‌خط l_1' ویك تقارن نسبت به‌نقطهٔ O_1ــ زیرا بنابر گزارهٔ ۳، مجموع دوتقارن نسبت به‌دو خط عمود برهم نیمدوری است حول نقطهٔ تقاطع آنها).

بعد به‌جای مجموع دوتقارن نسبت به‌دوخط متعامد l_2' و l_3، مجموع دوتقارن نسبت به‌دوخط متعامد جدید l_2'' و l_3'، متقاطع درهمان‌نقطهٔ O_1 را باشرط $l_1' \| l_2''$ می‌گذاریم (شکل ۴۸ب. این تغییرمجاز است زیرا مجموع دوتقارن نسبت به l_2'' و l_3' نیز نیمدوری‌است درحول O_1). درعین حال به‌جای مجموع سه تقارن نسبت به l_1'، l_2'، و l_3 مجموع سه تقارن نسبت به l_1'، l_2''، و l_3' گذاشته شده‌است. اما به‌موجب گزارهٔ ۲، مجموع دوتقارن نسبت به‌خطوط موازی l_1' و l_2'' انتقالی است درامتداد، l_3'، عمود بر l_1' و l_2''. پس مجموع سه‌تقارن نسبت‌به l_1'، l_2''، و l_3' مساوی‌مجموع یك انتقال در راستای l_2'' ویك تقارن نسبت به l_3'، یعنی یك لغزه با

محور l'_3 است.

درحالتی‌که l_1 و l_2 موازی باشند، و l_2 و l_3 یکدیگر را درنقطهٔ O قطع کنند، استدلال عیناً به‌روش مشابه صورت می‌گیرد. (دراین‌حالت‌لازم‌است‌که نخست به‌جای مجموع دوتقارن نسبت به l_2 و l_3، مجموع دو تقارن نسبت به l'_2 و l'_3، متقاطع درهمان‌نقطهٔ O را باشرط $l_1 \perp l'_2$، قرار داد. سپس به‌جای‌مجموع دوتقارن نسبت به‌خطوط متعامد l_1 و l'_2، مجموع دوتقارن نسبت به‌خطوط متعامد l'_1 و l''_2، متقاطع درهمان نقطهٔ O_1 را با شرط $l''_2 = l'_3$، گذاشت.)

ازگزاره‌های ۲ تا ۵ قضیهٔ‌کلی زیر را به‌دست می‌آوریم.

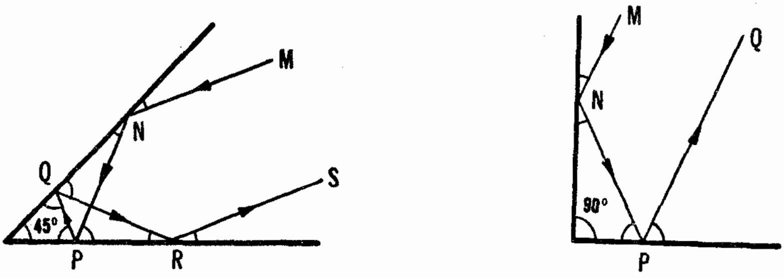
قضیه . مجموع تعداد زوجی تقارن محوری یك دوران یا یك انتقال است؛ مجموع تعداد فردی از این تقارنها یك تقارن محوری یا یك لغزه است.

زیرا، به‌موجب‌گزاره‌های ۲ و ۳، به‌جای مجموع تعداد زوجی تقارن‌محوری مجموع تعداد دوران وانتقال می‌تواند جایگزین شود. اما مجموع هرتعدادی دوران و انتقال باز یا یك دوران است یا یك انتقال (در این باب ← فصل ۱، یا متن با حروف‌ریز صفحات ۵۲-۵۳).

به‌علاوه، چون مجموع تعداد زوجی تقارن محوری یك دوران یا یك انتقال است، پس به‌جای مجموع تعداد فردی تقارن محوری می‌توان مجموع یك دوران یا یك انتقال، ویك تقارن محوری را قرارداد. به‌موجب‌گزاره‌های ۲ و ۳، به‌جای یك دوران یاانتقال مجموع دوتقارن محوری می‌تواند جایگزین شود. پس مجموع تعداد فردی تقارن محوری همیشه می‌تواند با مجموع سه تقارن محوری برابر باشد، وبا توجه به‌گزاره‌های ۴ و ۵ نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

باید توجه‌کنیم‌که مجموع تعداد زوجی تقارن محوری، درحالت‌کلی، یك دوران است؛ حالتهایی راکه ممکن است این مجموع به‌یك انتقال بینجامد می‌توان به‌عنوان استثنا درنظرگرفت (مجموع دوتقارن نسبت به‌خطوط l_1 و l_2 تنها وقتی یك انتقال است‌که $l_1 \| l_2$؛ مجموع دو دوران به‌زوایای α و β تنها هنگامی یك انتقال است‌که $\alpha + \beta = ۳۶۰^\circ$، وقس‌علیهذا). به‌طریق مشابه، مجموع تعداد فردی تقارن محوری، در حالت‌کلی، یك لغزه است؛ حالتهایی را که ممکن است مجموع تعداد فردی تقارن محوری به یك تقارن محوری بینجامد باید به‌عنوان استثنا درنظرگرفت (مثلا، مجموع سه‌تقارن‌نسبت به‌خطوط l_1، l_2، و l_3 تنها درحالتهایی یك‌تقارن است که خطوط l_1، l_2، و l_3 یا همگی موازی‌باشند یا همگی دریك نقطه متقاطع).

تقارن‌محوری و لغزه تبدیلاتی‌ازصفحه هستندکه هرنقطهٔ A را به‌یك نقطهٔ جدید



(ب) (الف)

شکل ۴۹

A' می‌برند.* نقاط ثابت یك تقارن نسبت به l، نقاط محور تقارن l هستند؛ خطوط ثابت تقارن، محور l وهمهٔ خطوط عمود بر l هستند. تنها خط ثابت یك‌لغزه، محور آن l است، لغزه به‌هیچ وجه نقطه ثابتی ندارد.

۳۸. یك پرتو نوری از یك‌آینه،که به‌شکل خط مستقیمی است، چنان منعکس می‌شودکه زاویهٔ تابش با زاویهٔ انعکاس برابر است (یعنی، با همان قانونی‌که توپ بیلیارد به‌کناره‌های‌میز بیلیارد برخورد می‌کند وبرمی‌گردد،(←مسألهٔ ۳۰). حال‌فرض کنید دو آینه به‌شکل خط مستقیم که باهم زاویهٔ α می‌سازند درصفحه داده شده باشند. ثابت‌کنیدکه اگر $\alpha = 90^\circ / n$، n یك عدد طبیعی، (وتنها دراین حالت)، آنگاه هر پرتونوری پس‌ازچندین‌بارانعکاس درهردوآینه، سرانجام، درامتدادی برمی‌گرددکه درست مخالف امتدادی‌است‌که در وهلهٔ اول تابیده‌است [←شکلهای ۴۹ الف‌وب که برای حالتهای $n = 1$، $\alpha = 90^\circ$ و $n = 2$، $\alpha = 45^\circ$ نشان داده شده‌اند، در هردوحالت راستای نهایی پرتوها (به‌ترتیب PQ و RS) درجهت مخالف راستای اولیهٔ MN هستند].

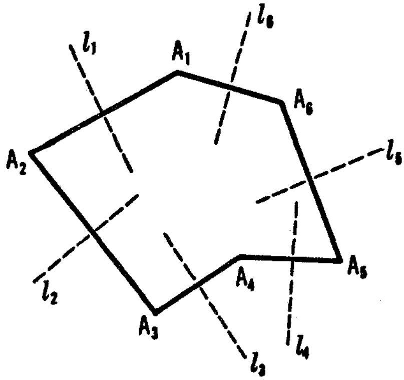
۳۹. n خط l_1، l_2، ...، l_n درصفحه داده شده‌اند. یك n- ضلعی $A_1A_2\cdots A_n$ بسازیدکه این خطوط:

الف) عمود منصفهای اضلاع آن باشند (شکل ۵۰ الف).

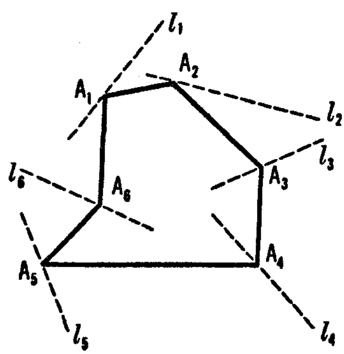
ب) نیمسازهای خارجی یا داخلی زوایای رئوس آن باشند (شکل ۵۰ ب).

---

* تقارن محوری به‌تعبیر تعریف مذکور درمقدمهٔ این قسمت، یك طولپایی است، زیرا این‌تبدیل هرپاره خط AB را به‌پاره خط $A'B'$ با همان طول منتقل می‌کند (←شکل ۳۶ ومتن همراه‌آن). لغزه نیزیك طولپایی است، زیرا هرلغزه مجموع دوطولپایی‌است: تقارن محوری و انتقال.



شکل ۵۰ الف



شکل ۵۰ ب

حالتهای n زوج و n فرد را جداگانــه بررسی‌کنید. درکدام حالت مسألــه جواب ندارد، یا جواب منحصر به‌فرد ندارد؟

۴۰. فــرض‌کنید یــك نقطهٔ M و ۱ — n خط $l_۲$، $l_۳$، ...، l_n درصفحه داده شده‌اند. یك nـ ضلعی $A_۱A_۲...A_n$ رسم کنید که:

الف) وسط ضلع $A_۱A_۲$ بـر نقطهٔ M منطبق باشد وعمود منصفهای بقیهٔ اضلاع برخطوط $l_۲$، $l_۳$، ...، l_n منطبق باشند.

ب) زاویهٔ $A_۱$ مقدار مفروض α باشد، نیمساز آن از M بگذرد و نیمسازهای

زوایای A_2، A_3، ...، A_n بر l_2، l_3، ...، l_n منطبق باشند.

۴۱. دریك دایرهٔ مفروض، یك n- ضلعی چنان محاط کنید که:

الف) اضلاع آن موازی n خط داده شده درصفحه باشند.

ب) ضلع A_1A_n ازیك نقطهٔ مفروض بگذرد، وبقیه اضلاع موازی با $n-1$ خط داده شده باشند.

۴۲. الف) فرض کنید سه خط متقارب l_1، l_2، و l_3 داده شده باشند. فرض کنید قرینهٔ یك نقطهٔ دلخواه A ازصفحه متوالیاً نسبت به‌سه خط l_1، l_2، و l_3 به‌دست آمده باشد؛ سپس قرینهٔ نقطهٔ A_3 که بدین طریق به‌دست آمده است، دوباره به‌همان ترتیب متوالیاً نسبت به‌این خطوط به‌دست آید. نشان دهید که نقطهٔ نهایی A_6 که درنتیجهٔ شش تقارن بـه‌دست می‌آید برهمان نقطهٔ اولیهٔ A منطبق می‌شود (شکل ۵۱ الف).

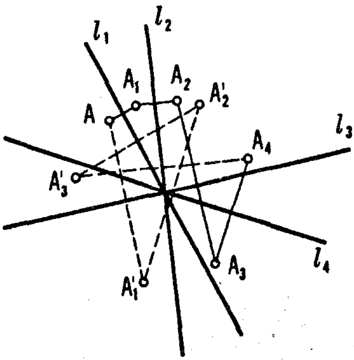
آیا نتیجه‌گیری این تمرین برای n خط متقارب (بـه‌جای سه خط متقارب l_1، l_2، و l_3) بازمعتبر است (شش تقارن اینك به $2n$ تقارن بدل می‌شود)؟

ب) فرض کنید سه خط متقارب l_1، l_2، و l_3 درصفحه داده شده باشند. قرینهٔ یك نقطهٔ دلخواه A درصفحه متوالیاً نسبت بـه l_1، l_2، و l_3 به‌دست می‌آید؛ سپس قرینهٔ A نسبت به همان سه خط اما به‌ترتیب عکس، اول نسبت‌به l_3، بعد نسبت به l_2، وبالاخره نسبت به l_1 به‌دست می‌آید. نشان دهید که درهر دوحالت به‌یك، وتنها یك نقطهٔ نهایی A_3 می‌رسیم.

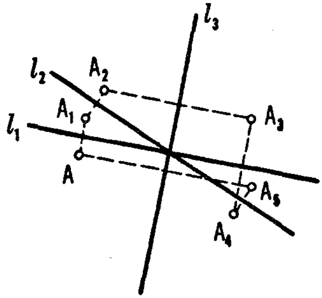
ج) چهارخط متقارب l_1، l_2، l_3، و l_4 درصفحه داده شده‌اند. قرینهٔ یك‌نقطهٔ دلخواه A ازصفحه را متوالیاً نسبت به خطوط l_1، l_2، l_3، و l_4 به‌دست می‌آوریم، سپس قرینهٔ همین‌نقطهٔ A را متوالیاً نسبت به‌همین خطوط ولی به‌ترتیب دیگر به‌دست می‌آوریم: اول نسبت به l_3، آنگاه نسبت بـه l_4، بعد نسبت به l_1، وسرانجام نسبت به l_2. نشان دهید که درهردوحالت به‌یك، وتنها یك نقطهٔ نهایی A_4 می‌رسیم (شکل ۵۱ ب).

۴۳. الف) فرض کنید M، N، و P به‌ترتیب نقاطی براضلاع AB، BC، و CA ازمثلث ABC باشند. فرض کنید CM' و AN' و BP' بـه‌ترتیب قرینه‌های CM، AN، و BP نسبت به‌نیمسازهـای زوایای C و A و B ی مثلث باشند. نشان دهید که اگرخطوط CM، AN، و BP همدیگر را دریك‌نقطه قطع کنند یا همگی باهم موازی باشند، آنگاه خطوط CM'، AN'، و BP' نیزهمدیگر را دریك‌نقطه قطع می‌کنند یا همگی باهم موازی‌اند (شکل ۵۲ الف).

ب) گیریم M و N و P نقاطی براضلاع AB، BC، و CA ازمثلث ABC

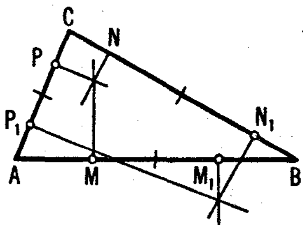


(ب)

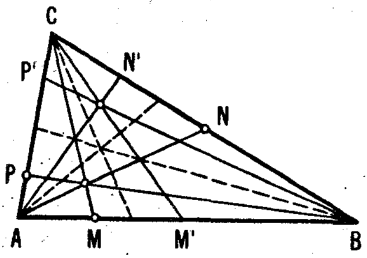


(الف)

شکل ۵۱



(ب)



(الف)

شکل ۵۲

باشند و M_1، N_1، P_1 قرینه‌های M، N، و P نسبت به‌اوساط اضلاع متناظر مثلث باشند (یعنی M_1 ازیك نیمدورنقطهٔ M حول نقطهٔ وسط AB به‌دست آید، و به‌طریق مشابه برای دیگرنقاط). نشان دهید کـه اگرعمودهای مرسوم بر AB، BC، و CA درنقاط M، N، و P همدیگر را دریك نقطه قطع کنند، آنگاه عمودهای مرسوم بـر AB، BC، و CA درنقاط M_1، N_1، و P_1 نیزهمدیگر را دریك نقطه قطع می‌کنند (شکل ۵۲ ب).

۴۴. فرض می‌کنیم سه خط دلخواه l_1، l_2، و l_3 درصفحه داده شده بـاشند. قرینه‌های یك‌نقطهٔ دلخواه A ازصفحه را دوبارنسبت به‌این‌سه‌خط به‌دست می‌آوریم:

اول نسبت به l_1، l_2، l_3 ودوباره نسبت به l_1، l_2، l_3. نتیجهٔ این ۶ تقارن نقطهٔ A_6 است. حال قرینه‌های نقطه A_6 را باز نسبت به‌همین خطوط اما به یك ترتیب دیگر به‌دست می‌آوریم: اول نسبت به l_2، l_3، l_1 ودوباره نسبت به l_2، l_3، l_1. حال دوباره کار را از آغازشروع می‌کنیم، اما این بارقرینه‌های نقطهٔ اولیهٔ A را متوالیاً اول نسبت به l_2، l_3، l_1 ودوباره‌نسبت به l_2، l_3، l_1 به‌دست می‌آوریم تا نقطهٔ A'_6، که نتیجهٔ ۶ تقارن است، به‌دست آید. حال قرینه‌های نقطهٔ A'_6 را دوبارنسبت به l_1، l_2، l_3 به‌همین ترتیب، به‌دست می‌آوریم. نشان دهیدکه درهرمورد درپایان۱۲ تقارن به‌یك وفقط یك‌نقطهٔ A_{12} می‌رسیم.

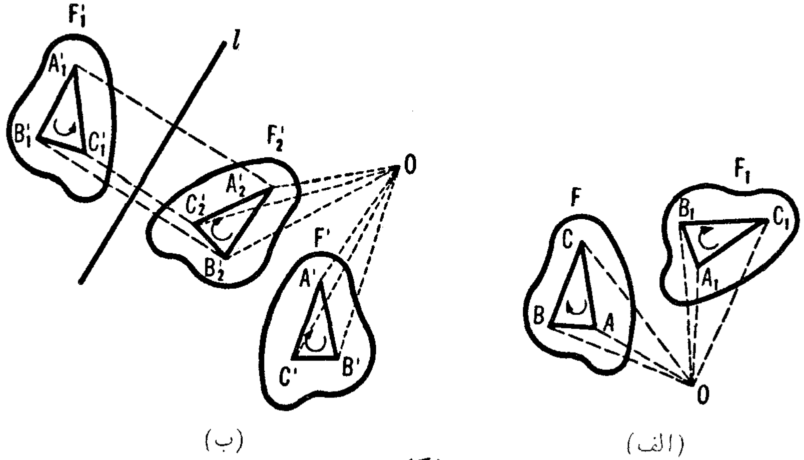
۲. شکلهای مستقیماً قابل انطباق باهم[1] ومعکوساً قابل انطباق باهم[2]. رده‌بندی طولپاییهای صفحه

به موجب‌کتاب هندسهٔ دبیرستانی کیسلیوف، «دو شکل هندسی زمانی قابل انطباق با هم گفته می‌شوند که یکی از اشکال، بتواند با حرکت در فضا بر دیگری منطبق شود». این تعریف درهمان‌آغاز اولین‌کتاب هندسهٔ کیسلیوف داده شده و برای‌کلیهٔ مطالبی‌که پس از آن‌آمده، اساسی است. اما، بودن این تعریف درآغاز یك‌کتاب هندسهٔ مسطحه می‌تواند موجب ایراد قرارگیرد. زیرا ، هندسهٔ مسطحه ویژگیهای اشکال درصفحه را درنظرمی‌گیرد، درحالی‌که تعریف قابلیت‌انطباق باهم، ازحرکت اشکال درفضا صحبت می‌کند. بنا براین به‌نظرمی‌رسدکه اولین واساسیترین تعریف در یك‌کتاب هندسهٔ مسطحه اصلا ربطی به‌هندسهٔ مسطحه ندارد، بلکه به‌هندسهٔ فضایی مربوط می‌شود. پس صحیحتر این است‌که دریك‌کتاب هندسهٔ مسطحه‌گفته شودکه دو شکل زمانی باهم قابل انطباق‌اندکه بتوانند با حرکت درصفحه برهم منطبق شوند، و نه درفضا– درچنین تعریفی نباید ازمفاهیم هندسهٔ فضایی استفاده شود. اما این‌تعریف جدید قابلیت انطباق اشکال باهم، اصلا با تعریف اولی هم‌ارز نیست.

درواقع، قابلیت انطباق یك جفت شکل درصفحه باهم می‌تواند به‌دوگونه صورت‌گیرد. ممکن است‌که دوشکل قابل انطباق باهم را با حرکت یکی، اما بدون خارج ساختن‌آن از صفحه‌ای‌که اول درآن واقع شده است، بردیگری منطبق نمود؛ مثلا، اشکال F و F_1 درشکل ۵۳ الف از این‌گونه هستند (می‌توانند با یك دوران حول نقطهٔ O برهم منطبق شوند). اما همچنین ممکن است‌که دوشکل واقع درصفحه

---

1. Directly Congruent   2. Oppositely Congruent



شکل ۵۳

باهم قابل انطباق باشند، ولی برای منطبق کردن آنها لازم باشد که یکی از آنها را ازصفحه بیرون آورد و پشت و رو کرد و «بر طرف دیگرش» خوابانید. شکلهای F' و F'_1 درشکل ۵۳ب ازاین گونه‌اند؛ غیرممکن است که بتوان شکل F'_1 را باحرکت دادن درصفحه برشکل F' منطبق کرد.

برای اثبات این امر، سه نقطهٔ A'_1 ، B'_1، و C'_1 ازشکل F'_1 و نقاط متناظر آنها ازشکل F' یعنی A'، B'، و C' را درنظرمی‌گیریم. بنا بر آنچه مصطلح است مثلثهای $A'B'C'$ و $A'_1B'_1C'_1$ «جهتهای متفاوت» دارند: در مثلث $A'B'C'$ جهت حرکت برمحیط ازرأس A' به رأس B' وسپس به‌رأس C' درجهت حرکت عقربه‌های ساعت (ساعتسو) صورت می‌گیرد، درحالی که درمثلث $A'_1B'_1C'_1$ جهت‌حرکت برمحیط ازرأس A'_1 به‌رأس B'_1 وسپس به‌رأس C'_1 درجهت‌مخالف حرکت عقربه‌های‌ساعت(پاد ساعتسو)است. وچون آشکارا دیده می‌شود که هرحرکت شکل F'_1، که کاملا درداخل صفحه باشد، نمی‌تواند جهت مثلث $A'_1B'_1C'_1$ را تغییر دهد، لذا نمی‌توانیم مثلث $A'_1B'_1C'_1$ را برمثلث $A'B'C'$ منطبق کنیم. اما اگر «شکل F'_1 را برگردانیم و به‌طرف دیگرش بخوابانیم»ــ که برای این کار کافی است F'_1 را بایك تقارن نسبت به‌خط l به F'_2 تبدیل کنیم ــ آنگاه به‌آسانی می‌توانیم با حرکت دادن F'_2، آن را بر F' منطبق کنیم (یك دوران حول نقطهٔ O، ← شکل ۵۳ب).

درآنچه که از پی می‌آید شکلهایی که می‌توانند پس‌ازحرکت درداخل صفحه برهم منطبق شوند مستقیماً قابل انطباق با هم گفته می‌شوند، شکلهای قابل انطباق باهمی که نمی‌توانند باحرکت درداخل‌صفحه برهم منطبق شوند معکوساً قابل‌انطباق باهم نامیده می‌شوند. ازآنچه قبلا گفته شد نتیجه می‌شود که به‌آسانی می‌توان تعیین کرد که دوشکل قابل انطباق F و F'، مستقیماً یا معکوساً باهم قابل انطباق‌اند: کافی است که سه نقطهٔ A، B، C ازشکل F ونقاط متناظر آنها A'، B'، C' ازشکل F' را انتخاب، ومشخص کنیم که جهتهای مثلثهای ABC و $A'B'C'$ (از A به B وبه C، وبه‌ترتیب از A' به B' وبه C') یکی هستند یا مخالف. ما دوشکل را تنها وقتی «قابل انطباق باهم» گوییم که مستقیماً یا معکوساً قابل انطباق بودن آنها با یکدیگر برای ما مطرح نباشد.

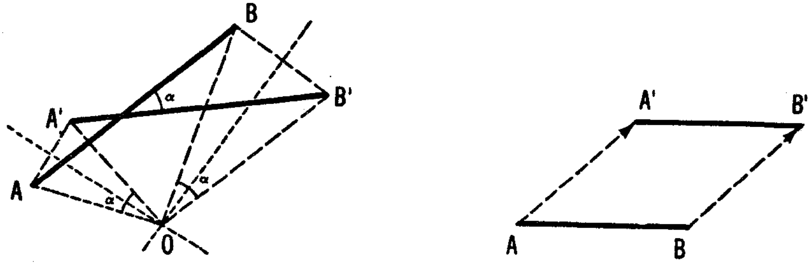
بنابراین، دوشکل هندسی مستقیماً قابل‌انطباق باهم‌گفته می‌شوند هرگاه یکی ازآنها بتواند باحرکت فقط درداخل صفحه، بردیگری منطبق شود. این‌تعریف تقریباً کلمه به‌کلمه مشابه به تعریف کیسلیوف برای قابلیت انطباق باهم است، اما این تعریف کاملا برای هندسهٔ مسطحه است.

اینك دوقضیهٔ مهم را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. *هردوشکل‌مستقیماً قابل‌انطباق باهم درصفحه می‌توانند بایك دوران یا یك انتقال برهم منطبق شوند.

نخست باید دقت کنیم که هردو پاره خط AB و $A'B'$ قابل انطباق با هم در صفحه می‌توانند با یك دوران یا یك انتقال برهم منطبق شوند. درحقیقت، اگر پاره خطهای AB و $A'B'$ مساوی، موازی، ودر یك جهت باشند (شکل ۵۴ الف)، AB می‌تواند با یك انتقال بر$A'B'$ منطبق شود (← صفحات ۱۸و۱۹، که درآنجا گزارهٔ کلیتری در بـاب دو شکل F و F' که به‌پاره خطهای مساوی، موازی، وهم جهت مربوط می‌شونـد اثبات شده است)؛ فاصله و راستای این انتقال با پاره خط AA' مشخص شده است. اگر پـاره خطهای AB و $A'B'$ زاویـهٔ α باهم بسازند (شکل ۵۴ب)،* آنگاه AB می‌تواند بایك دوران به‌زاویهٔ α بر $A'B'$ منطبق‌شود(ص ۱۸ و ۱۹، درآنجا گزارهٔ کلیتری در بارهٔ دوشکل F و F' که پاره‌خطهای‌متناظر آنها مساوی هستند وزاویهٔ α با هم می‌سازند، ثابت شده است.)؛ مرکز این دوران، O، می‌تواند

* وقتی‌کـه پاره خطهای AB و $A'B'$ نیز زاویهٔ $\alpha = 180°$ بسازند، یعنی وقتی‌کـه مساوی، موازی، ومختلف‌الجهت باشند، بازهم این حالت صادق است.



(ب) (الف)

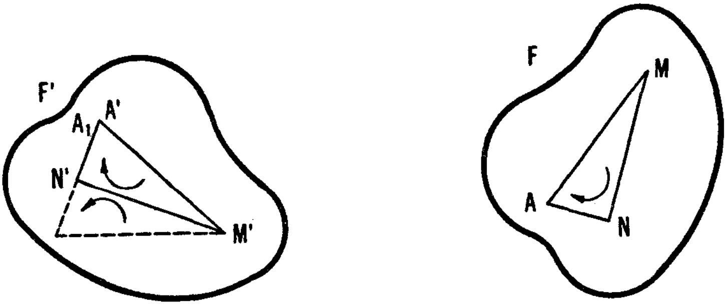
شکل ۵۴

مثلا نقطهٔ تقاطع عمود منصفهای پاره خطهای AA' و BB' باشد.*

حال دوشکل F و F'، مستقیماً قابل انطباق بـا هم را درنظرمی‌گیریم (شکل ۵۵). فرض‌کنید M و N دونقطهٔ دلخواه ازشکل F، و M' و N' متناظرهای آنها ازشکل F' باشند. چون شکلها باهم قابل‌انطباق‌اند، پس $MN = M'N'$، ودرنتیجه دورانی (یـا انتقالی) وجود دارد کـه پاره خط MN را به پاره خط $M'N'$ بدل می‌کند.

اکنون می‌گوییم‌که تمام شکل F عملا روی شکل F' برده می‌شود، یعنی هر نقطهٔ A ازشکل F بـه‌نقطهٔ متناظرش A' از شکل F' منتقل می‌شود. اگر A_1 وضع جدید نقطهٔ A براثر دورانی (یا انتقالی) باشدکه MN را به $M'N'$ بدل می‌کند، باید ثابت‌کنیم A_1 بر A' منطبق است. چون شکلهای F و F' باهم قابل‌انطباق‌اند، پس $AM = A'M'$، $AN = A'N'$؛ ازسوی‌دیگر، واضح‌است‌که $AM = A_1M'$، $AN = A_1N'$. از اینجا نتیجه می‌شودکه مثلثهای $A'M'N'$ و $A_1M'N'$ با هم قابل انطباق‌اند. وچون این مثلثها درضلع $M'N'$ مشترک‌اند، یـا باید برهم منطبق و

* اگراین عمود منصفها بریکدیگرمنطبق شوند، این روش‌کارایی‌ندارد؛ دراین‌حالت O نقطهٔ تقاطع خود پاره خطهای AB و $A'B'$ است (واگر این پاره خطها برهم منطبق باشند، یعنی اگر A بر B' منطبق باشد و B بر A'، آنگاه نقطهٔ O وسط مشترک AB و $A'B'$ است). همچنین O می‌تواند نقطهٔ تقاطع عمود منصف AA' باکمان حاوی زاویهٔ α ماربر A و A' باشد. بالاخره دو روش مناسب دیگر برای یافتن مرکز دورانی کـه پاره خط AB را به‌پاره خط دیگر $A'B'$ بدل‌کند، درجلد ۲، فصل ۱، بخش ۲ خواهد آمد.



(ب) (الف)

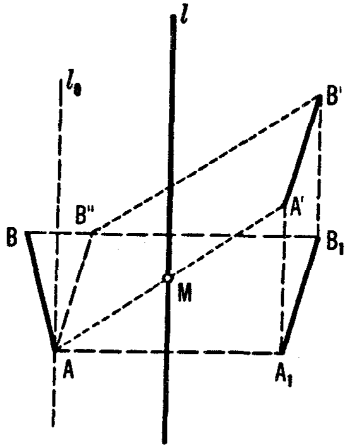
شکل ۵۵

یا قرینهٔ یکدیگر نسبت به‌خط $M'N'$ باشند. پس‌کافی است ثابت‌کنیم که حالت دوم غیرممکن‌است. مثلثهای AMN و $A'M'N'$ جهتهای واحدی دارند زیرا شکلهای F و F' مستقیماً باهم قابل انطباق‌اند؛ مثلثهای AMN و $A_1M'N'$ نیز یك‌جهت دارند، زیرا با یك دوران یا یك انتقال به‌هم وابسته‌اند. بنابراین مثلثهای $A'M'N'$ و $A_1M'N'$ یك جهت دارند ودرنتیجه نمی‌توانند معکوساً باهم قابل انطباق باشند. این بدین معنی است که آنها برهم منطبق می‌شوند، ونقطهٔ A عملا به‌کمك دوران (یا انتقال) به‌نقطهٔ A' برده می‌شود واثبات قضیهٔ ۱ کامل است.

اگر شکلهای F و F' بتوانند بایك دوران به‌مرکز O برهم قرارگیرند، آنگاه نقطهٔ O را مرکز دوران این دوشکل می‌گویند. برای یافتن این مرکز دوران، O، در دوشکل مستقیماً قابل انطباق باهم، کافی است که دونقطهٔ دلخواه A و B ازشکل اول ونقاط متناظر آنها A' و B' ازشکل دوم را اختیارکنیم، نقطهٔ تقاطع عمودمنصفهای AA' و BB' نقطهٔ O است (⟵ پانوشت *صفحهٔ ۶۵).

قضیهٔ ۲. هردوشکل معکوساً قابل انطباق با هم درصفحه را می‌توان با یك تقارن محوری یا یك لغزه برهم منطبق نمود.

برهان‌قضیهٔ ۲ شبیه برهان قضیهٔ ۱ است. قبل ازهمه، نشان می‌دهیم که دوپاره خط مساوی AB و $A'B'$ می‌توانند بـا لغزه‌ای به یك محور l (یا با تقارنی نسبت به‌یك خط l) برهم قرارگیرند. زیرا، فرض‌کنیدکه این مطلب درست و l محور لغزه (یا محور تقارن) بـاشد. پاره خط $A'B'$ را به وضع جدید $A''B''$ انتقال می‌دهیم چنانکه A' بر A منطبق شود (یعنی، $A''=A$، ⟵ شکل۵۶). چون پاره‌خط A_1B_1 از



شکل۵۶

AB براثر تقارن نسبت به‌خط l بـه‌دست می‌آید.باید با $A''B''$ موازی باشد (هردو پاره خط، موازی $A'B'$ هستند)، کـه نتیجه می‌شود خط l بـاید موازی $l_\circ$، نیمساز زاویهٔ $B''AB$ ، بـاشد (زیرا مجموع دوتقارن نسبت به $l_\circ$ و l پاره خط $A''B''$ را برپاره خط موازی $A_\lambda B_\lambda$ قرارمی‌دهد). به‌علاوه، نقاط A و A' باید متساوی‌الفاصله ازخط l ودر دوطرف آن باشند (زیرا نقاط A و A_λ در دوطرف l ومتساوی‌الفاصله ازآن هستند، ونقاط A_λ و A' به‌فاصله‌های مساوی از l ودریك طرف آن). ازاینجا نتیجه می‌شود که خط l بـاید ازنقطهٔ M وسط پاره خط AA' بگذرد. پس اگر پاره خطهای AB و $A'B'$ را داشته بـاشیم، می‌توانیم خط l را (که موازی $l_\circ$ است و از M می‌گذرد) رسم کنیم.

اکنون فرض می‌کنیم پـاره خط $A_\lambda B_\lambda$ قرینه AB نسبت به‌خط l باشد. چون $l \| l_\circ$، داریم $A_\lambda B_\lambda \| A'B'$؛ چون l از M می‌گذرد، پس نقـاط A_λ و A' به‌یك فاصله از l ودریك طرف آن قرار دارند. درنتیجه، اگر پاره خط $A_\lambda B_\lambda$ بر $A'B'$ منطبق نباشد، می‌تواند با انتقالی درراستای خط l بر $A'B'$ قرارداده شود. ازاینجا نتیجه می‌شود که پاره‌خط AB بایك لغزه (یا یك تقارن محوری) برپاره خط مساوی $A'B'$ قرار داده می‌شود.

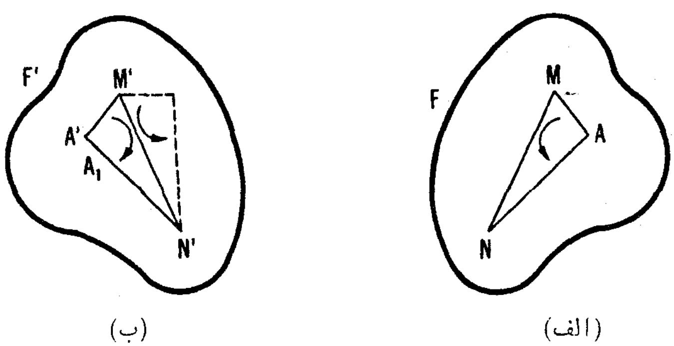
جزء پایانی برهان قضیهٔ ۲ تقریباً تکرارکامل آخرین جزء برهان قضیهٔ ۱ است. گیریم F و F' دوشکل معکوساً قابل انطباق باهم باشند و M، N و M' ، N' دو

جفت نقطهٔ متناظر از این اشکال (شکل ۵۷). یك لغزه (یا یك تقارن محوری) وجود دارد که MN را روی $M'N'$ می‌برد. حال نشان می‌دهیم که واقعاً تمام شکل F با این لغزه (یا تقارن) روی شکل F' برده می‌شود، یعنی، نقطه A_1 که از نقطهٔ A بر اثر این لغزه (یا تقارن محوری) به‌دست آمده است بر نقطهٔ A' از شکل F'، که متناظر با نقطهٔ A از F است، منطبق می‌شود (F و F' معکوساً با هم قابل انطباق‌اند، و بنابراین به‌هر نقطهٔ A از F یك نقطهٔ متناظر A' از F' نظیر می‌شود). زیرا، $\Delta A'M'N' \cong \Delta AMN$ چون شکلهای F و F' باهم قابل انطباق‌اند؛

$$\Delta A_1M'N' \cong \Delta AMN$$

چون $A_1M'N'$ بر اثر یك لغزه (یا یك تقارن) از AMN به‌دست می‌آید. بنابراین $\Delta A_1M'N'$ یا بر $\Delta A'M'N'$ منطبق است یا قرینهٔ $\Delta A'M'N'$ نسبت به ضلع مشترك $M'N'$ از این دو مثلث است. اما مثلثهای $A_1M'N'$ و $A'M'N'$ نمی‌توانند قرینهٔ یکدیگر باشند، زیرا دارای یك جهت هستند. این مطلب از این واقعیت نتیجه می‌شود که مثلثهای $A'M'N'$ و AMN مختلف‌الجهت هستند (زیرا شکلها معکوساً باهم انطباق‌اند)؛ جهتهای مثلثهای $A_1M'N'$ و AMN نیز مخالف یکدیگرند (زیرا تقارن محوری و لغزه، جهت یك مثلث را عوض می‌کنند). بنابراین مثلث $A_1M'N'$ باید بر مثلث $A'M'N'$ منطبق شود، درنتیجه برهان قضیهٔ ۲ کامل می‌شود.

طولپاییهایی که شکلهای مستقیماً قابل انطباق باهم را به‌یکدیگر تبدیل می‌کنند، طولپاییهای مستقیم (یا تغییرمکان) نامیده می‌شوند؛ برعکس، طولپاییهایی که دو شکل معکوساً قابل انطباق باهم را به‌یکدیگر تبدیل می‌کنند طولپاییهای معکوس نامیده



شکل ۵۷

می‌شوند. قضایای ۱ و ۲ چنین حکم می‌کنند که هر طولپایی مستقیم یا یك انتقال است یا یك دوران، درحالی‌که هر طولپایی معکوس یا یك انعکاس است یا یك لغزه (با مطالب متن صفحات ۷۱ و ۷۲ مقایسه کنید).

از ترکیب نتایج قضایای ۱ و ۲ می‌توان حکم کلی زیر را به‌دست آورد:

هردوشکل قابل انطباق باهم درصفحه، می‌توانند با یك انتقال یایك دوران یا یك تقارن محوری یا یك لغزه برهم منطبق شوند.

درعین حال اگر دوشکل مستقیماً قابل انطباق باهم باشند درحالت کلی‌می‌توان آنها را بایك دوران به‌هم وابسته‌کرد؛ حالتهایی راکه شکلها به‌وسیلهٔ یك انتقال به هم وابسته‌اند می‌توان به‌صورت استثنا درنظرگرفت. اگر شکلها معکوساً باهم قابل انطباق باشند، درحالت‌کلی، با یك لغزه به‌هم وابسته خواهند بود؛ حالتهایی راکه شکلها به‌وسیلهٔ یك تقارن محوری به هم وابسته می‌شوند، می‌توان مستثنی کرد.

انتقال و دوران را می‌توان به‌عنوان مجموع دوتقارن نسبت به‌دوخط (موازی یا متقاطع) درنظرگرفت، درحالی‌که تقارن نسبت به‌یك خط یا لغزه می‌تواند به‌صورت مجموع یك تقارن نسبت به‌یك خط ویك نقطه نمایش داده شود (تقارن‌نسبت به‌یك خط m مساوی است با مجموع سه تقارن نسبت به‌سه خط: $l \perp m$ و l و m، یعنی مساوی است با مجموع یك تقارن نسبت به‌خط l ویك تقارن نسبت به‌نقطهٔ O محل‌تقاطع l و m؛ دربارهٔ لغزه ← صفحهٔ ۴۹). بنابراین نتیجه‌گیری ما می‌تواند به‌صورت زیر نیز بیان شود:

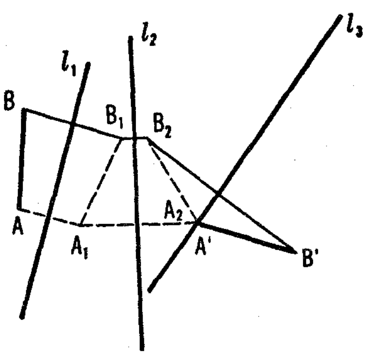
هردوشکل‌قابل انطباق باهم درصفحه، می‌توانند توسط مجموع دوتقارن نسبت به دوخط l_1 و l_2 یا دوتقارن نسبت به‌یك خط l ویك نقطهٔ O برهم منطبق شوند.

وقتی‌که $l_1 \| l_2$ ، دارای یك انتقال هستیم، ووقتی نقطهٔ O برخط l واقع باشد، تنها یك تقارن نسبت به‌یك خط داریم.

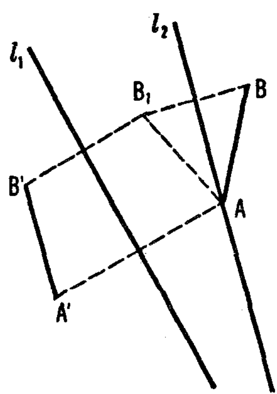
قضایای ۱ و ۲ نیز می‌توانند ازگزاره‌های مربوط به‌جمع تقارنهای محوری نتیجه شوند (← صفحات ۵۰–۵۶). زیرا، برهان قضیهٔ ۱ برپایهٔ این واقعیت استوار است که هردوپاره خط مساوی AB و $A'B'$ می‌توانند بایك دوران یایك انتقال برهم منطبق شوند. اما واضح‌است که AB می‌تواند بادوتقارن متوالی نسبت به‌دوخط l_1 و l_2 به $A'B'$ بدل شود: کافی‌است که l_1 عمود منصف پاره خط AA' باشد (اگر A' بر A منطبق باشد، آنگاه l_1 می‌تواند هرخط ماربر A باشد) و l_2، نیمساز زاویهٔ B_1AB باشد، که نقطهٔ B_1 قرینهٔ B' نسبت به خط l_1 است (شکل ۵۸ الف). حال کافی است ازگزاره‌های ۲ و ۳ ی صفحات ۵۰–۵۲ استفاده کرد. برهان قضیهٔ ۲ برپایهٔ این واقعیت استوار است که دوپاره خط مساوی AB و $A'B'$ می‌توانند با

یك لغزه یا یك تقارن محوری برهم منطبق شوند. اما AB می‌تواند با دنباله‌ای ازسه تقارن نسبت به خطوط l_1، l_2، و l_3 به $A'B'$ بدل شود. محور اولین تقارن، l_1، می‌تواند کاملا اختیاری انتخاب شود، وسپس خطوط l_2 و l_3 می‌توانند چنان انتخاب شوند که مجموع تقارنها نسبت به این دوخط، پاره‌خط A_1B_1 راکه قرینهٔ AB نسبت به l_1 است، روی $A'B'$ ببرد (شکل ۵۸ ب). تنها باقی می‌ماند که گزاره‌های ۴ و ۵ صفحات ۵۵ و ۵۶ را مورد استفاده قراردهیم.

برعکس، تمام گزاره‌های مربوط به جمع طولپاییها می‌توانند ازقضایای ۱ و ۲ به‌دست آیند. زیرا، قضیهٔ ۱ می‌گوید که هرجفت از اشکال مستقیماً قابل انطباق با هم می‌توانند با یك دوران یا یك انتقال از یکدیگر به‌دست آیند. اما اگر دو شکل F و F' به‌وسیلهٔ دو تقارن محوری، یا درحالت کلی به‌وسیلهٔ تعداد زوجی تقارن محوری به‌هم وابسته باشند، آنگاه این اشکال مستقیماً باهم قابل انطباق‌اند (چون یك تقارن محوری تنها، جهت مثلث را عوض می‌کند، اما دو تقارن‌محوری آن‌را تغییر نمی‌دهد). بنابراین F' می‌تواند با یك دوران یا یك انتقال از F به‌دست آید ــ یعنی، مجموع دوتقارن محوری (یا درحالت کلی، تعداد زوجی تقارن محوری) یك دوران یا یك انتقال است (← صفحهٔ ۵۷). با روشی کاملا مشابه از قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود که مجموع سه تقارن محوری (یا در حالت کلی تعداد فردی تقارن محوری) یك لغزه یا یك تقارن محوری است (← صفحهٔ ۵۷). از قضیهٔ ۱ نیز نتیجه می‌شود که مجموع دو دوران، یك دوران یا یك انتقال است (← صفحهٔ ۳۴ یا مطالب ریز متن صفحات ۵۳)، و



(ب)



(الف)

شکل ۵۸

نیز مجموع دولغزه یك دوران است یا یك انتقال، و به‌همین‌ترتیب... .

۴۵. گیریم دو خط l_1 و l_2 ویك نقطهٔ A برخط l_1 ویك‌نقطهٔ B برخط l_2 داده شده باشند. یك‌خط m که خطوط l_1 و l_2 را درنقاط X و Y باشرط $AX=BY$ قطع کند چنان رسم کنید که:

الف) خط m موازی خط مفروض n باشد.

ب) خط m ازنقطهٔ مفروض M بگذرد.

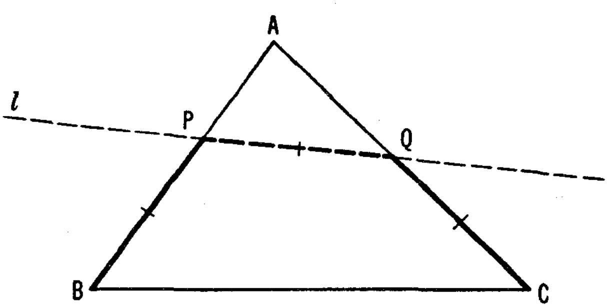
ج) پاره‌خط XY دارای طول مفروض a باشد.

د) پاره‌خط XY توسط خط مفروض r نصف شود.

۴۶. فرض می‌کنیم سه‌خط l_1، l_2، و l_3 و سه نقطهٔ A، B، و C هریك بریکی از آنها داده‌شده‌باشند. خطی‌مانند m رسم کنید که خطوط l_1، l_2 و l_3 را درنقاط X، Y، و Z قطع کند و $AX=BY=CZ$.

۴۷. فرض می‌کنیم مثلث ABC داده شده باشد. خطی مانند l رسم کنید که اضلاع AB و AC را درنقاط P و Q قطع‌کند و $BP=PQ=QC$ (شکل ۵۹).

قضایای ۱ و ۲ می‌توانند اساس تعریف برای طولپاییهای صفحه گرفته شوند. زیرا، وقتی درهندسه ازطولپایی صحبت می‌کنیم، تنها به‌نتیجهٔ حرکت یك شکل از وضعی به‌وضع دیگرعلاقه‌مندیم، نه به‌فرایند واقعی حرکت (مانند مسیرهای مرسوم به‌وسیلهٔ نقاط منفرد شکل درحین‌حرکت، سرعت‌این‌نقاط وغیره). وچون بنا برقضایای ۱ و ۲ هردوشکل قابل انطباق با هم می‌توانند با یك انتقال، یا یك دوران، یا یك تقارن، یا یك لغزه برهم منطبق شوند، پس می‌توان‌گفت که درهندسه این چهارنوع



شکل ۵۹

طولپایی تنها طولپاییهای صفحه هستند.* این فهرست تمام طولپاییهایی است که می‌توانند به‌عنوان تعریف یك طولپایی درصفحه‌مورد استفاده قرارگیرند. لذا می‌توانیم بگوییم که هندسه خواص اشکالی را بررسی می‌کندکه براثر انتقال، دوران، تقارن محوری، و لغزه تغییر نمی‌کنند (← مقدمه، صفحهٔ ۹).

در ریاضیات (و به‌طورکلی در علوم) با دونوع متفاوت از تعریف مواجهیم. یك مفهوم جدید ممکن است ازراه ذکرویژگیهایی که دارد تعریف شود، مثلا خطوط موازی درصفحه می‌توانند به‌صورت خطوطی که هرقدر امتداد دهیم یکدیگر را قطع نمی‌کنند، تعریف شوند؛ یك تصاعد حسابی ممکن است به‌عنوان دنباله‌ای از اعداد با این ویژگی‌که تفاضل هردوعدد متوالی آن مقدارثابتی باشد، تعریف‌شود؛ یك‌ماشین بخار می‌تواند به‌عنوان مکانیسمی‌که انرژی حرارتی را به انرژی مکانیکی تبدیل می‌کند، تعریف‌شود. این‌گونه تعاریف را توصیفی می‌گویند. همچنین‌ممکن‌است که یك شیء جدید را، به‌جای شمارش یکایك ویژگیهایش، مستقیماً از راه چگونگی‌ساختن آن، تعریف‌کرد. مثلا خطوط موازی می‌توانند به‌عنوان دوخط عمود بریك‌خط تعریف شوند (دراینجا یك شیوهٔ ساختن خطوط موازی ارائه می‌شود)، یك تصاعد حسابی دنباله‌ای است از اعداد:

$$a, \quad a+\text{۲}d, \quad a+d, \quad a+\text{۳}d, \quad \ldots$$

(دراینجا عدد a جملهٔ اول تصاعد نام دارد، و d قدرنسبت‌آن)، یك تعریف ماشین بخار می‌تواند متضمن بیان توصیفی ساختمان‌آن باشد. تعاریفی ازاین‌گونه‌را تعریف ساختمانی‌گویند. می‌توان گفت‌که وظیفهٔ اصلی علوم یافتن تعاریف ساختمانی برای مفاهیمی است‌که قبلا فقط تعریف توصیفی داشته‌اند. ازاین‌رومسألهٔ ایجاد یك ماشین بخارممکن است ابتدا به‌عنوان مسأله‌ای با تعریف توصیفی، یعنی مکانیسمی‌که انرژی حرارتی را به‌انرژی مکانیکی تبدیل می‌کند، درنظر گرفته شود و یافتن یك تعریف ساختمانی یعنی ساختن عملی‌آن بعداً مورد توجه قرارگیرد.**

---

* برعکس درمکانیك وقتی فرایند حرکت مطالعه می‌شود، غیرممکن‌است‌که بتوان به‌این سادگی همهٔ حرکات درصفحه را برشمرد.

** همچنین اشاره می‌کنیم‌که یافتن یك تعریف ساختمانی برای شیئی‌که قبلا فقط یك تعریف توصیفی داشته‌است، می‌تواند به‌عنوان اثبات وجود این شیء مورد استفاده قرارگیرد؛ وجود شیء اصلا از تعاریف توصیفی‌تنها نتیجه نمی‌شود. مثالهایی ازتعاریف

←

تعـریف طولپایی به‌عنوان تبدیلی‌که فاصله‌های میـان نقاط را تعبیر نمی‌دهد (ــــ مقدمهٔ این جلد صفـحهٔ ۹) نمونهٔ یك تعریف توصیفی‌است. ومسألهٔ اصلی درنظریهٔ طولپایی یافتن تعریف ساختمـانی یك طولپایی، یعنی شمارش یکایك تمام طولپاییهای صفحه است. وهمین مسأله است‌که دقیقاً به‌توسط قضایای ۱ و ۲ی این بخش حل‌شده است؛ لذا این قضایا نتایج اساسی این بخش هستند.

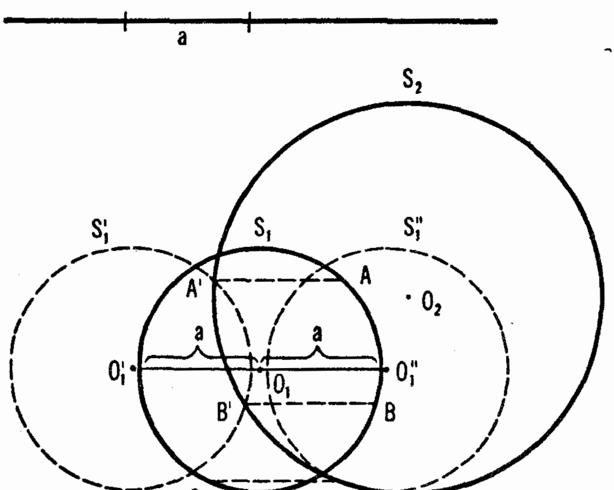
به‌وارون اگر یك تعریف ساختمانی از مفهومی داده شده باشد، غالباً به‌راحتی می‌توان تعریف توصیفی ساده‌ای پیداکردکه برای مطالعهٔ ویژگیهای این شیء جدید مفید باشد. ما دراین فصل ازاین‌نوع مثالها نیز داشته‌ایم. مثلا بعداز اولین تعـریف ساختمانی انتقال، یك تعریف توصیفی‌مجرد ازانتقال نیزارائه دادیم: انتقال‌تبدیلی از صفحه است‌که هرپاره‌خط AB را به پاره‌خط $A'B'$ مساوی، موازی، وهمجهت بـا پاره‌خط AB بدل‌می‌کند(ــــ صفحات۱۸و۱۹و ۲۰).این تعریف برای‌حل‌این‌مسأله‌که چه نوع تبدیلی به‌وسیلهٔ مجموع دوانتقال بیان می‌شود، بسیار مفید است؛ اولین تعریف (ساختمانی) انتقال‌کمتردرحل این مسأله به‌کار می‌آید. به‌همین‌ترتیب حل‌مسألهٔ‌یافتن تبدیلی‌که نتیجهٔ مجموع دو دوران باشد برپایهٔ تعریف توصیفی دوران استواراست. دوران تبدیلی است ازصفحه‌که هرپاره‌خط AB را به پاره‌خط $A'B'$ بدل می‌کندکه باآن مساوی است و باآن یك زاویهٔ مفروض α می‌سازد (ــــ صفحهٔ ۳۳). خواننده باید مثالهایی ازاین نوع را دراین‌کتاب جستجوکند.

→ توصیفی‌که به شیئی واقعی نظیر نیستند، در زیـر آمده است: «یك تـری‌کورنیـکوم (tricornicum) مثلثی است‌که درآن دونیمساز برهم عمود باشند» [این را با جواب مسألهٔ ۲۶ (الف) دراین فصل مقایسه‌کنید]، یا «یك‌ماشین‌پیوسته ــ کارمکانیسمی که قادراست کار را بدون استفاده از انـرژی انجام دهد». واضح است‌که یك‌تعریف ساختمانی برای این‌حالتها غیرممکن است.

حل مسائل

فصل اول، تغییر مکان

۱. دایرهٔ S_1 را به‌طول a درامتداد l انتقال دهید، وفرض کنید S'_1 وضع جدید آن باشد؛ گیریم A' و B' نقاط تقاطع S'_1 بادایرهٔ S_2 باشند(←شکل ۶۰). دوخط موازی با l، که یکی از نقطهٔ A' بگذرد ودیگری از نقطهٔ B'، جوابهای مسأله هستند (پاره خطهای AA' و BB' درشکل ۶۰ هریک مساوی فاصلهٔ انتقال، یعنی a است). می‌توان دوجواب دیگررا باانتقال S_1 درجهت مخالف وموازی l و به‌فاصلهٔ a به‌مکان جدید S''_1 به‌دست آورد.



شکل ۶۰

با توجه به تعداد نقاط تقاطع S'_1 و S''_1 با S_2، دیده می‌شود که مسأله بینهایت جواب، چهارجواب، سه‌جواب، دوجواب ویا یك جواب دارد، و یا اصلا جواب ندارد. درشکل ۶۰ مسأله سه‌جواب دارد.

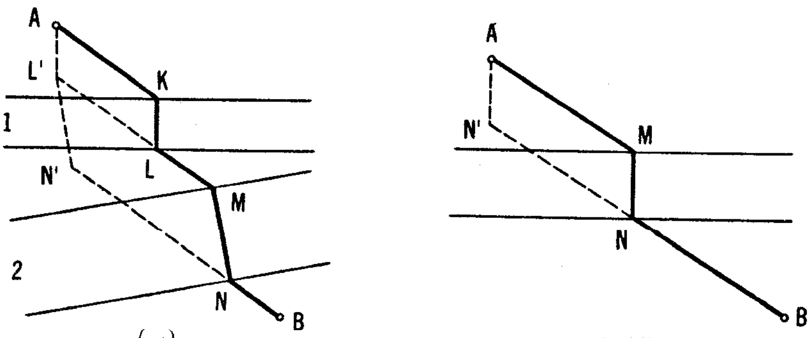
۴. الف) فرض‌کنید مسأله حل شده‌است، پاره‌خط MN را به‌وضع جدید AN' انتقال می‌دهیم به‌طوری‌که نقطهٔ M به‌نقطهٔ A برده شود (شکل ۶۱ الف). در این‌صورت $AM=N'N$، وبنا براین

$$AM+NB=N'N+NB$$

پس مسیر $AMNB$ کوتاهترین مسیرخواهدبود، اگروتنها اگر، نقاط N'، N، و B دریك امتداد باشند.

ازاین‌رو ترسیم زیررا داریم: ازنقطهٔ A پاره‌خط AN' را به‌طولی مساوی پهنای رودخانه، عمود بررودخانه، ومتوجه به‌آن رسم، ونقاط N' و B را به‌هم وصل می‌کنیم؛ گیریم N نقطهٔ تقاطع این‌خط باآن لبهٔ‌رودخانه‌که به B نزدیکتراست باشد، پل را درنقطهٔ N بررودخانه می‌زنیم.

ب) برای سادگی، دورودخانه درنظرمی‌گیریم. فرض‌کنید مسأله حل‌شده باشد و KL و MN دوپل روی دورودخانه باشند. پاره‌خط KL را به‌وضع جدید AL' انتقال می‌دهیم به‌طوری‌که نقطهٔ K به‌نقطهٔ A برده شود (شکل ۶۱ ب). آنگاه $AK=L'L$ و



شکل ۶۱

$$AK+LM+NB=L'L+LM+LB$$

اگر $AKLMNB$ کوتاهترین مسیر از A به B باشد، آنگاه $L'LMNB$ کوتاهترین مسیر از L' به B و $LMNB$ کوتاهترین مسیر از L به B خواهدبود. اما L و B فقط توسط رودخانهٔ دومی ازهم جدا شده‌اند، و بنابراین با توجه به‌قسمت (الف) می‌فهمیم که چگونه بایدکوتاهترین مسیرمیان آنهارا رسم کنیم.

پس ترسیم زیر به‌دست می‌آید: از نقطهٔ A پاره خط AL' را به‌طولی برابر پهنای رودخانهٔ اول وعمود بر آن، ومتوجه به‌آن رسم می‌کنیم، از نقطهٔ L' پاره خط $L'N'$ را به‌طولی مساوی پهنای دومین رودخانه، عمود بر آن، ومتوجه به‌آن رسم می‌کنیم. نقاط N' و B را به‌هم وصل می‌کنیم؛ گیریم N نقطهٔ تقاطع این خط با نزدیکترین لبهٔ رودخانهٔ دومی به B باشد. پل رودخانهٔ دومی باید در N بنا شود. گیریم نقطهٔ M انتهای دیگر این پل باشد. خطی از نقطهٔ M موازی خط $N'B$ می‌گذرانیم، وفرض می‌کنیم L نقطهٔ تقاطع این‌خط با نزدیکترین لبهٔ رودخانهٔ اولی به M باشد. پل رودخانهٔ اولی باید در L ساخته شود.

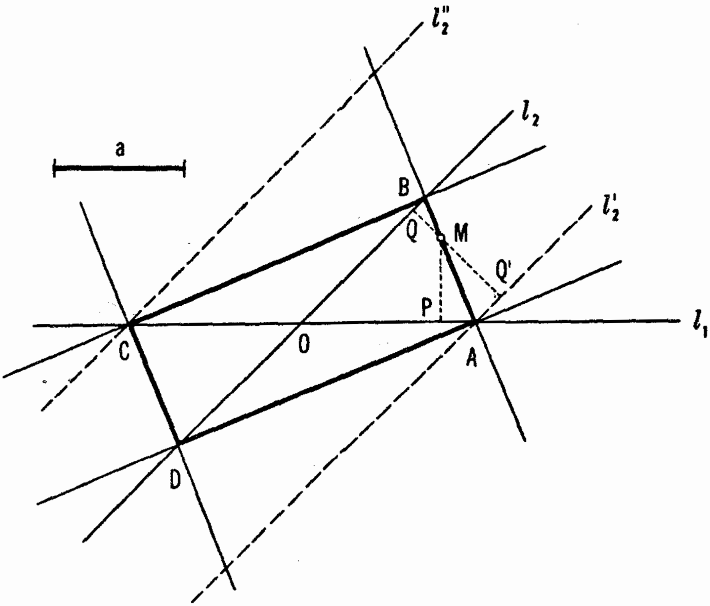
۰۳ الف) گیریم M نقطه‌ای درصفحه چنان باشدکه $MP+MQ=a$، که درآن P و Q به‌ترتیب پاهای عمودهای مرسوم از M برخطوط l_1 و l_2 هستند (شکل ۶۲ الف). خط l_2 را به‌طول a درراستای QM انتقال‌می‌دهیم. اگر l'_2 خط جدیدحاصل ازاین‌انتقال باشد، واضح است که طول MQ'، فاصلهٔ نقطهٔ M ازخط l'_2، مساوی‌است با $MP=a-MQ$. درنتیجه، M بر نیمساز یکی از زاویه‌های بین خطهای l_1 و l'_2 واقع است.

با توجه به‌این نکته دیده می‌شودکه همهٔ نقاط مکان‌مطلوب بر نیمسازهای‌زوایای حاصل ازخط l_1 با خطوط l'_2 و l''_2، که ازانتقال l_2 درامتداد عمود بر l_2 و به‌طول a به‌دست می‌آیند، قراردارند. البته همهٔ نقاط این چهارنیمساز نقاط موردنظرما نیستند، بلکه با توجه به‌شکل ۶۲ الف به‌آسانی دیده می‌شودکه فقط نقاط واقع بر مستطیل $ABCD$، متشکل ازچهارنیمساز، نقاط مطلوب خواهندبود.

ب) گیریم M نقطه‌ای ازصفحه چنان باشدکه دریکی‌از دومعادلهٔ زیرصدق کند:

$$MP-MQ=a \qquad \text{یا} \qquad MQ-MP=a$$

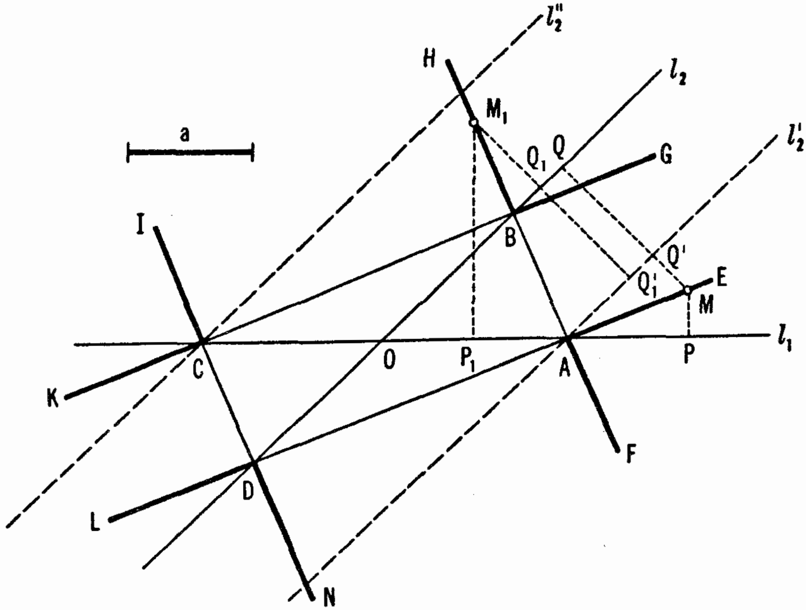
ـP و Q پاهای عمودهای مرسوم از M برخطوط l_1 و l_2 هستندـ (درشکل ۶۲ب،



شکل ۶۲ الف

نقطهٔ M درمعادلهٔ دومی صدق می‌کند). خط l_2 را درراستای QM به‌طول a انتقال می‌دهیم، و فرض می‌کنیم l'_2 خط جدید باشد. عیناً مانند قسمت (الف) می‌توان نشان داد که M از l'_1 و l'_2 به‌یك فاصله‌است (← شکل ۶۲ ب)، که‌در آن $MQ-MP=a$ و $M_1P_1-M_1Q_1=a$). ازاینجا نتیجه می‌شود که مکان هندسی نقاط مطلوب نیمسازهای چهار زاویهٔ حاصل از خط l_1 باخطوط l'_2 و l''_2 هستند، ولی دراین‌حالت فقط نقاط واقع بر امتداد اضلاع مستطیل $ABCD$ نقاط مطلوب هستند (معادلهٔ $MP-MQ=a$ برای نقاط واقع بر HBG و LDN صادق است، درحالی‌که معادلهٔ $MQ-MP=a$ برای نقاط واقع بر EAF و ICK).

۴. ملاحظه می‌کنیم که مثلث DAF ازانتقال مثلث BDE (درراستای AB و به‌طول AD) به‌دست می‌آید. در نتیجه پاره‌خطهای واصل بین نقاط متناظر این دوشکل دو



شکل ۶۲ ب

به‌دو مساوی وموازی یکدیگرند. پس

$$O_1O_2 = Q_1Q_2, \qquad O_1O_2 \parallel Q_1Q_2 .$$

به‌طریق مشابه داریم

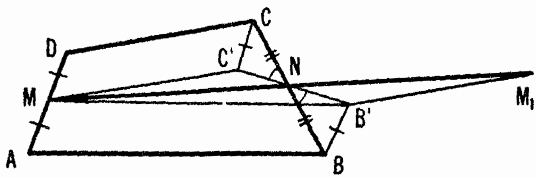
$$O_2O_3 = Q_2Q_3, \qquad O_2O_3 \parallel Q_2Q_3 .$$

و

$$O_3O_1 = Q_3Q_1, \qquad O_3O_1 \parallel Q_3Q_1 .$$

بنا بر این مثلثهای $O_1O_2O_3$ و $Q_1Q_2Q_3$ باهم قابل انطباق‌اند (زیرا، اضلاع متناظر موازی‌اند، یعنی، یك مثلث ازانتقال مثلث دیگر به‌دست‌می‌آید. ← صفحات ۱۸ و ۱۹).

۵. اضلاع AB و DC ازچهارضلعی $ABCD$ را باانتقال به‌وضعهای جدید MB'



شکل ۶۳

و MC' می‌بریم (شکل ۶۳). دو چهارضلعـی حاصل، $AMB'B$ و $DMC'C$، متوازی‌الاضلاع هستند و بنابراین

$$BB' = AM \quad \text{و} \quad BB' \parallel AM$$

$$CC' = DM \quad \text{و} \quad CC' \parallel DM$$

اما $AM = MD$ (نقطهٔ M وسط ضلع AD است)؛ پس پاره خطهای BB' و CC' مساوی وموازی‌اند. به‌علاوه چون تساوی $BN = NC$ نیز برقرار است، پس نتیجه می‌شود که

$$\Delta BNB' \cong \Delta CNC'$$

بنابراین $B'N = NC'$ و $\measuredangle BNB' = \measuredangle CNC'$، یعنی پـاره خطهای $B'N$ و NC' درامتداد یکدیگر قرار دارند.

بدین ترتیب مثلث $MB'C'$ را رسم کرده‌ایم کـه درآن، بـا توجه به‌شرایط مسأله، میانهٔ MN مساوی نصف مجموع اضلاع مجاور MB' و MC' است(چون $MB' = AB$، $MC' = DC$).اگرمیانهٔ MN را ازنقطهٔ N به‌طول $NM_1 = MN$ امتداد دهیم، مثلث MM_1B' را به‌دست می‌آوریم که درآن‌ضلع $MM_1 = 2MN$ مساوی است بـا مجموع اضلاع MB' و $MC' = B'M_1$، کـه غیرممکن است. درنتیجه نقطهٔ B باید برپاره خط MM_1 باشد. اما این بدین معنی است که

$$MB' \parallel MN \parallel MC'$$

بنابراین

$$DC \parallel MN \quad \text{و} \quad AB \parallel MN$$

یعنی چهارضلعی $ABCD$ ذوزنقه است.

۶. فرض کنید مسأله حل شده است. پاره خط AX را درراستای خط CD و به‌طول $EF=a$ انتقال می‌دهیم و فرض می‌کنیم $A'X'$ وضع جدید آن باشد (شکل ۶۴). واضح است که $A'X'$ از نقطهٔ F می‌گذرد. به‌علاوه چون

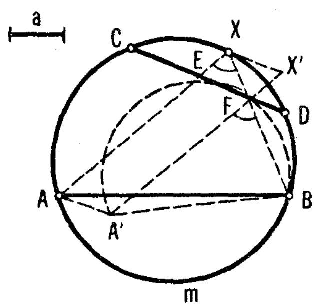
$$\sphericalangle A'FB=\sphericalangle AXB=\frac{۱}{۲}\ AmB^{*}$$

پس می‌توانیم زاویهٔ $A'FB$ را معلوم بگیریم.

بنابراین ترسیم زیر را داریم: نقطهٔ A را در راستای وتر CD و بـه‌طول a انتقال داده موقعیت جدیدش را A' می‌نامیم. با استفاده از پاره خط $A'B$ به‌عنوان یك وتر، کمان درخور** زاویهٔ $\sphericalangle AXB$ را بر روی آن رسم می‌کنیم (یعنی، اگر Y نقطه‌ای روی این کمان باشد، آنگاه $\sphericalangle A'YB=\sphericalangle AXB=\frac{۱}{۲}AmB$).

اگر این کمان وتـر CD را در دونقطه قطع کند، یکی از آن دونقطه می‌تواند نقطهٔ F اختیارشود، و X می‌تواند ازتقاطع دایرهٔ اولی با خط BF به‌دست آید. در این حالت مسأله دوجواب دارد.

اگر این کمان بر CD مماس باشد، نقطهٔ F باید نقطهٔ تماس گرفته شود ومسأله



شکل ۶۴

---

* منظور از AmB، کمان AmB است.

** برای جزئیات این ترسیم، (← کتاب: مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان (۱)، مسألهٔ ۱۸۹۵/۲، ریاضیات پیشدانشگاهی ـ ۱۱، یادداشت صفحهٔ ۳۰).

دراین حالت فقط یك جواب دارد.

اگر کمان اصلا CD را قطع نکند، مسأله جواب ندارد.

اگر فرض کنیم که CD امتدادهای وترهای AX و BX را قطع کند (و نقاط E و F درخارج دایره بر امتداد وتر CD واقع باشند)، مسأله می‌تواند تا چهار جواب داشته باشد (این امر ناشی از این واقعیت است که A می‌تواند درهر دو جهت انتقال یابد.)*

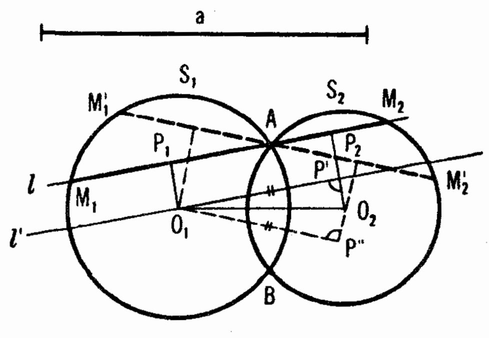
۰۷ الف) فرض کنید مسأله حل شده است، یعنی $M_1M_2=a$ (شکل ۶۵). از نقاط O_1 و O_2، مراکز دایره‌های S_1 و S_2، عمودهای O_1P_1 و O_2P_2 را برخط l وارد می‌کنیم، پس

$$AP_1=\frac{1}{2}AM_1 \qquad\qquad AP_2=\frac{1}{2}AM_2$$

ودر نتیجه

$$P_1P_2=\frac{1}{2}(AM_1+AM_2)=\frac{1}{2}M_1M_2=\frac{1}{2}a$$

خط l را با انتقال به‌خط l' که از نقطهٔ O_1 می‌گذرد بدل می‌کنیم؛ گیریم P' نقطهٔ تقاطع l' با خط O_2P_2 باشد. چون چهارضلعی $P_1O_1P'P_2$ یك مستطیل است، پس



شکل ۶۵

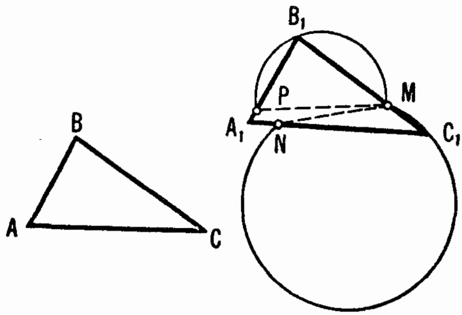
* مطالب فوق مربوط به‌تعداد جوابها، درترجمه افزوده شده است.

$$O_1P' = P_1P_2 = \frac{1}{2}a$$

لذا ترسیم زیر به‌دست می‌آید: مثلث قائم‌الزاویهٔ O_1O_2P' با وتر O_1O_2، و ضلع $O_1P' = a/2$ را رسم می‌کنیم. خط مطلوب، l، موازی خط O_1P' خواهد بود.

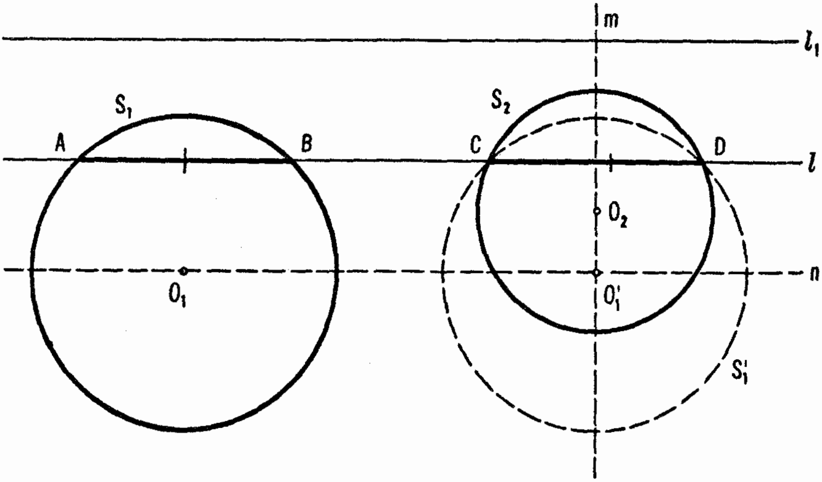
اگر $O_1O_2 > a/2$، مسأله دوجواب دارد (طرز رسم دومین جواب به‌صورت خط چین درشکل ۶۵ نشان داده شده است)؛ اگر $O_1O_2 = a/2$، مسأله یك جواب دارد؛ و اگر $O_1O_2 < a/2$، مسأله جواب ندارد.

ب) فرض می‌کنیم M، N، و P سه نقطهٔ داده شده و ABC مثلث مفروض باشد (شکل ۶۶). بر پاره خطهای MN و MP به‌ترتیب کمان درخور زوایای $\measuredangle ACB$ و $\measuredangle ABC$ را رسم می‌کنیم. اکنون مسألهٔ زیر را پیش‌رو داریم: خط B_1C_1 را از نقطهٔ M چنان رسم کنیم که پاره‌خط محصور بین این دو کمان دارای طول BC باشد، یعنی، به‌قسمت (الف) مسأله رسیده‌ایم. مسأله ممکن‌است دوجواب، یا یك جواب داشته باشد، ویا اصلا جواب نداشته باشد (بسته به‌این‌که کدام یك از اضلاع مثلث می‌بایست از هریك از این سه نقطهٔ مفروض بگذرد).



شکل ۶۶

۸. الف) فرض‌کنید مسأله حل شده وخط l دایره‌های S_1 و S_2 را در نقاط A، B وC، D قطع کرده است (شکل ۶۷ الف). دایرهٔ S_1 را به‌طول AC درراستای خط l انتقال داده، فرض می‌کنیم S'_1 وضع جدیدآن باشد. چون $AB = CD$، پس پاره خط AB بر CD منطبق خواهد شد، ودرنتیجه O_2 و O'_1، مراکز دوایر S_2 و S'_1، هردو برعمود منصف پاره خط CD قرارمی‌گیرند.



شکل ۶۷ الف

پس ترسیم زیر بــه‌دست می‌آید: گیریم m خط عمود بر l_1 مار بر O_2، مرکز دایرهٔ S_2، بــاشد. گیریم n خط موازی l_1 مار بر O_1، مرکز دایرهٔ S_1، باشد؛ فرض می‌کنیم O'_1 نقطهٔ تقــاطع این دوخط باشد. S_1 را به‌وضع جدید S'_1 به‌مرکز O'_1 انتقال می‌دهیم. خط ماربر نقاط تقاطع S_2 و S'_1 جواب مسأله است.

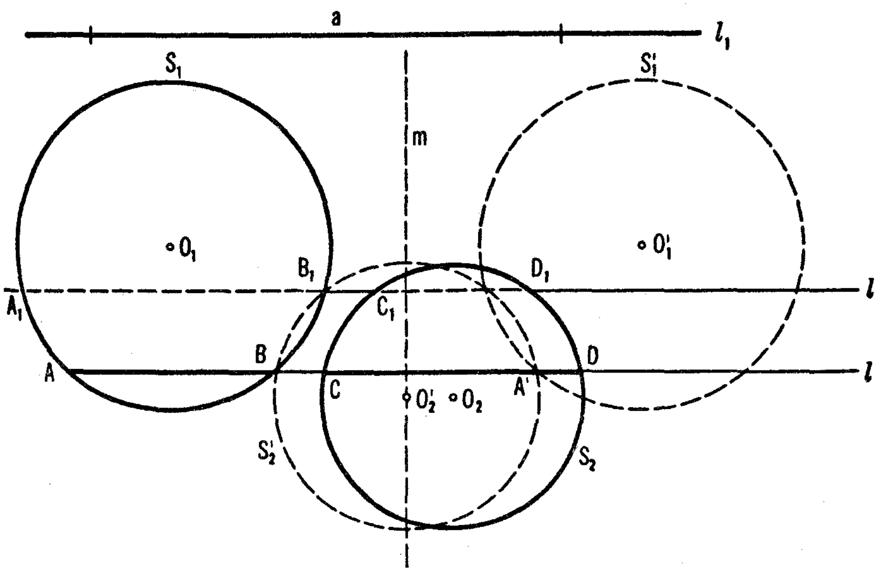
مسأله ممکن است، یك جواب داشته باشد، ویا اصلا جواب نداشته باشد.

ب) فرض کنید مسأله حل شده وخط l دایره‌های S_1 و S_2 را درنقاط A، B، C، و D قطع کرده‌است. پس $AB+CD=a$ (شکل ۶۷ ب). دایرهٔ S_1 را در راستای l به‌طول a انتقال داده، وضع جدیدش را با S'_1 نشان می‌دهیم. پس

$$AA'=a=AB+CD$$

یعنی $BA'=CD$. بنابراین، اگر دایــرهٔ S_2 درراستای l به‌وضع جدید S'_2 چنان انتقال داده شود که مرکز آن O'_2 برعمود منصف m از پاره خط $O_1O'_1$ قرارگیرد (O_1 و O'_1 مراکز دایره‌هــای S_1 و S'_1 هستند)، وتـر CD از دایرهٔ S_2 به BA' منتقل می‌شود.

پس ترسیم زیر بــه‌دست می‌آید: دایرهٔ S_1 را بــه‌طول a درراستای خط l_1



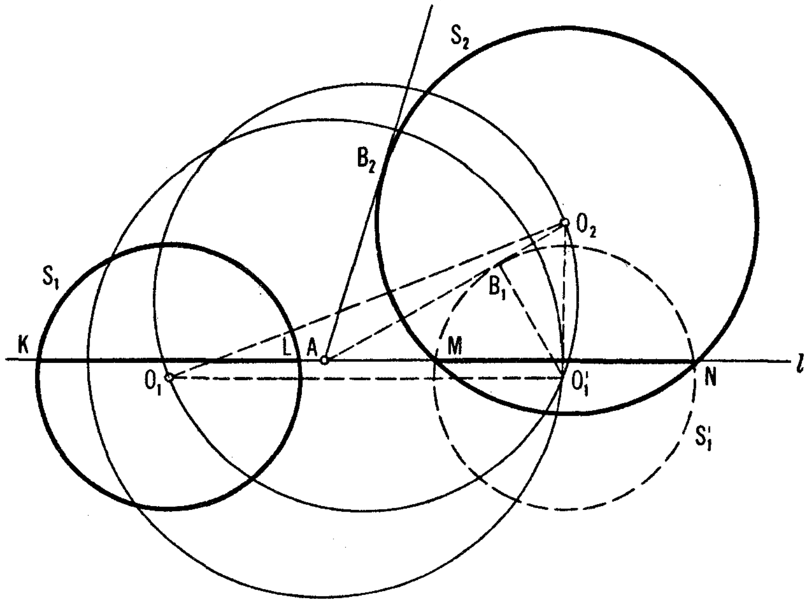
شکل ۶۷ ب

انتقال داده وضع جدیدش را $S'_۱$ می‌نامیم؛ سپس $S_۲$ را درراستای $l_۱$ به‌وضع‌جدید $S'_۲$ چنان انتقال می‌دهیم که مرکز آن برخط m، عمود منصف پاره خط $O_۱O'_۱$،قرار گیرد. نقاط تقاطع دایره‌های $S_۱$ و $S'_۲$ (که درنمودار، نقاط B و $B_۱$ هستند) خطوط مطلوب را مشخص می‌کنند. مسأله حداکثر دوجواب دارد؛ تعداد جوابها بستگی به تعداد نقاط تقاطع دایره‌های $S_۱$ و $S'_۲$ دارد (حالتی‌که دوجواب l و l' وجود دارند درشکل ۶۷ ب نشان داده شده است).

قسمت دیگر مسأله راکه مربوط به‌معلوم بودن تفاضل طولهای وترهایی است که $S_۱$ و $S_۲$ روی خط l پدید می‌آورند، می‌توان به‌طریقی مشابه حل کرد.

ج) فرض کنید مسأله حل شده است. دایرهٔ $S_۱$ را در راستای خط KN چنان انتقال می‌دهیم که پاره خط KL بر MN منطبق شود؛ دایرهٔ جدید حاصل را با $S'_۱$ نشان می‌دهیم (← شکل ۶۸). پس دایره‌های $S_۲$ و $S'_۱$ در وتر MN مشترك هستند. گیریم $AB_۱$ و $AB_۲$ بـه‌ترتیب مماسهای مرسوم از نقطهٔ A بردایره‌های $S'_۱$ و $S_۲$ باشند (نقاط تماس به‌ترتیب $B_۱$ و $B_۲$ هستند). پس

$$(AB_۱)^۲ = AM \cdot AN \qquad (AB_۲)^۲ = AM \cdot AN$$



شکل ۶۸

و بنا بر این

$$(AB_1)^2=(AB_2)^2$$

حال می‌توانیم AO_1' را تعیین کنیم (O'_1 مرکز S'_1 است).

$$AO'_1=\sqrt{(O'_1B_1)^2+(AB_1)^2}=\sqrt{r_1^2+(AB_2)^2}$$

که در آن r_1 شعاع S_1 است؛ افزون بر این، می‌دانیم که $\angle O_1O'_1O_2$ یك زاویهٔ قائمه است، زیرا خط O'_1O_2 مار بر مراکز S'_1 و S_2 بر وتر مشترك آنها، MN، و بنا بر این بر $O_1O'_1$ که موازی با l است نیز عمود می‌شود. با توجه به این امر می‌توانیم انتقالی که S_1 را به S'_1 بدل می‌کند مشخص کنیم.

از ترسیم زیر استفاده می‌کنیم. دایره‌ای به شعاع

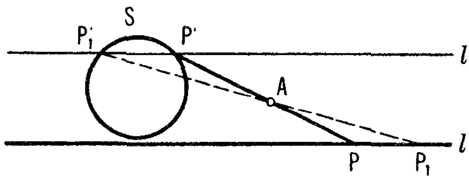
$$\sqrt{r_1^2+(AB_2)^2}$$

و به‌مرکز A رسم‌می‌کنیم؛ دایرهٔ دیگری رسم می‌کنیم که O_1O_2 قطر آن باشد. از تقاطع این دودایره جای O'_1، مرکز دایرهٔ S'_1 با شعاع r_1، مشخص می‌شود. حال M و N نقاط تقاطع دایره‌های S_2 و S'_1 را مشخص کرده وخط MN را رسم می‌کنیم، که جواب مسأله خواهد بود. درواقع، نقطهٔ A برخط MN قراردارد؛ زیرا درغیر این صورت معادلهٔ $(AB_1)^2 = (AB_2)^2$ نمی‌تواند برقرار باشد [اگرخط AM دایره‌های S_2 و S'_1 را درنقاط متمایز N_2 و N_1 قطع کند، آنگاه داریم $(AB_2)^2 = AM \cdot AN_2$ و $(AB_1)^2 = AM \cdot AN_1$]. همچنین $O_2O'_1$ بر MN عمود است و $O_1O'_1$ بر $O_2O'_1$؛ پس $O_1O'_1 \| MN$، یعنی وترهای KL و MN از دایره‌های S_1 و S'_1 به‌یك فاصله ازمراکز O_1 و O'_1 قرار دارند. اما این بدان‌معنی است که طول وترهای KL و MN مساوی‌اند، که همان حکمی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

مسأله حداکثر دوجواب دارد.

۹. خط l' راکه ازیك‌نیمدورخط l حول نقطهٔ A به‌دست آمده، رسم می‌کنیم (شکل ۶۹). گیریم P' یکی ازنقاط تقاطع این خط با دایرهٔ S باشد. پس خط $P'A$ یك جواب مسأله است، زیرا P، نقطهٔ تقاطع این خط با خط l، ازیك نیمدور P' حول A به‌دست می‌آید، وبنابراین $P'A = AP$.

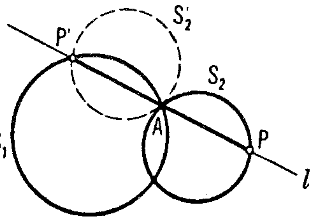
این مسأله حداکثر دوجواب دارد.



شکل ۶۹

۱۰. الف) دایرهٔ S'_2 را، که از یك نیمدور S_2 حول نقطهٔ A به‌دست می‌آید، رسم می‌کنیم (شکل ۷۰ الف). دایره‌های S_1 و S'_2 درنقطهٔ A متقاطع‌اند؛ گیریم P' نقطهٔ دیگر تقاطع آنها باشد. پس خط $P'A$ جواب مسأله خواهد بود، زیرا نقطهٔ P، که محل تقاطع این خط بادایرهٔ S_2 است، از یك نیمدور P' حول A به‌دست می‌آید، وبنابراین $P'A = AP$.

اگر دایره‌های S_1 و S_2 دردونقطه متقاطع باشند، مسأله دقیقاً یك جواب



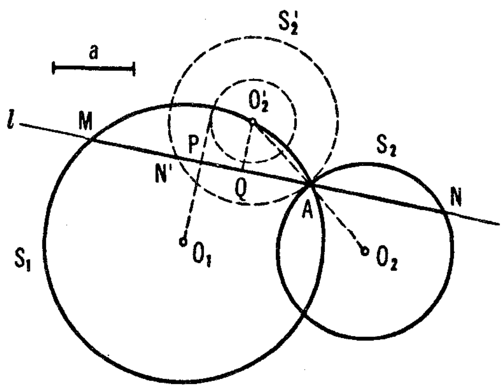
شکل ۷۰ الف

دارد؛ اگرمماس باشند، درصورتی که شعاعها متفاوت باشند، جوابی وجود ندارد، واگر شعاعها مساوی باشند، مسأله بینهایت جواب دارد.

تذکر: این مسأله حالت خاصی از مسألهٔ ۸ (ج) است وراه حل خیلی ساده‌تری دارد.

ب) دایرهٔ $S'_۲$ را، که از نیمدور $S_۲$ حول نقطهٔ A به‌دست می‌آید، رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم مسأله حل شده است وخط MAN جواب آن است (شکل ۷۰ ب). گیریم N' نقطهٔ تقاطع این خط با دایره $S'_۲$ باشد. پس $MN'=a$. عمودهای $O_۱P$ و $O'_۲Q$ را از نقاط $O_۱$ و $O'_۲$، مراکز دایره‌های $S_۱$ و $S'_۲$، برخط MAN رسم می‌کنیم، پس

$$QA=\frac{۱}{۲}\,N'A \quad \text{و} \quad PA=\frac{۱}{۲}\,MA$$



شکل ۷۰ ب

و

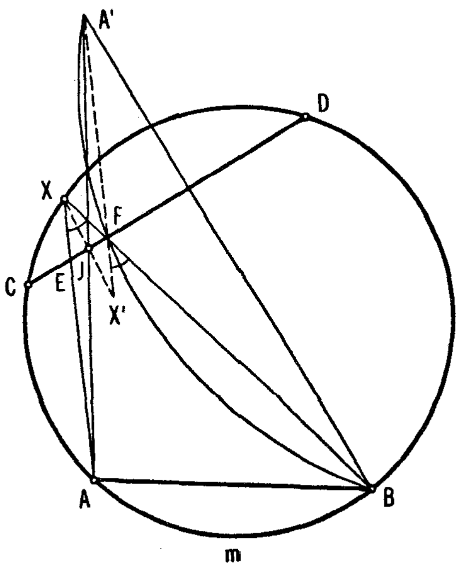
$$PQ = PA - QA = \frac{1}{2}(MA - N'A) = \frac{1}{2}a$$

پس فاصله نقطهٔ O'_2 ازخط O_1P مساوی $a/2$ است، یعنی خط O_1P بر دایرهٔ به‌مرکز O_2 و شعاع $a/2$ مماس است. با توجه به این امر می‌توانیم خط O_1P را، بدون این فرض که جواب کامل مسأله قبلا بر ما معلوم است، پیدا کنیم. پس از یافتن O_1P اکنون می‌توانیم به‌آسانی $MAN \perp O_1P$ را رسم کنیم.

مسأله حداکثر دوجواب دارد.

۱۱۰ فرض کنید مسأله حل شده است (شکل ۷۱)، و $A'X'$ پاره خط حاصل از یك نیمدور AX حول نقطهٔ J باشد. چون AX از E می‌گذرد، $A'X'$ از F خواهد گذشت. چون $AX \| X'A'$، می بینیم که

$$\sphericalangle X'FB = \sphericalangle AXB = \frac{1}{2} AmB$$



شکل ۷۱

بنا بر این، $\sphericalangle X'FB$ — $\sphericalangle A'FB = ۱۸۰^\circ$ ودر نتیجه می‌توانیم

$$\sphericalangle A'FB = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲} AmB$$

را معلوم بگیریم.

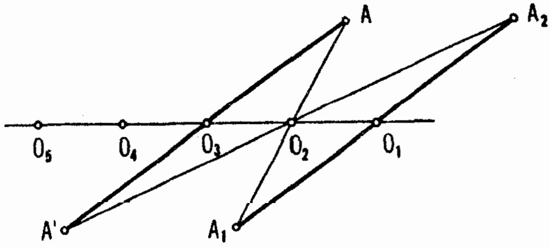
پس ترسیم زیر به‌دست می‌آید: گیریم A' نقطهٔ حاصل از یك نیمدور A حول J باشد. بر پاره خط $A'B$ کمانی درخور زاویهٔ

$$۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲} AmB$$

رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع این کمان با وتر CD نقطهٔ F، ونقطهٔ تقاطع دیگر خط BF با دایره، نقطهٔ مطلوب X است.

مسأله یك جواب یکتا دارد؛ اما اگر فرض کنیم که CD امتدادهای وترهای AX و BX را قطع می‌کند، دراین صورت مسأله ممکن است دوجواب داشته‌باشد (← حل مسألهٔ ۶).

۱۲۰ فرض کنید شکل F دومرکز تقارن، $O_۱$ و $O_۲$، دارد (شکل ۷۲). پس نقطهٔ $O_۳$ که از یك نیمدور $O_۱$ حول $O_۲$ به‌دست می‌آید نیز یك مرکز تقارن F است. زیرا، اگر A نقطه‌ای ازشکل F باشد، آنگاه نقاط $A_۱$، $A_۲$، و A' که درآن $A_۱$ از یك نیمدور A حول $O_۲$، و $A_۲$ از یك نیمدور $A_۱$ حول $O_۱$، و A' ازیك نیمدور $A_۲$ حول $O_۲$ به‌دست می‌آیند، نیز نقاطی از F خواهند بود (چون $O_۱$ و $O_۲$ مراکز تقارن هستند). اما نقطهٔ A' نیز ازیك نیمدور A حول $O_۳$ به‌دست آمده است؛ چراکه پاره



شکل ۷۲

خطهای $AO_۳$ و $A_۱O_۱$، $A_۱O_۱$ و $A_۲O_۱$، $A_۲O_۱$ و $A'O_۳$ مساوی، موازی و مختلف‌الجهت‌اند و درنتیجه پاره خطهای $AO_۳$ و $O_۳A'$ نیز مساوی، موازی و مختلف‌الجهت هستند.

بنابراین اگر A نقطه‌ای از F باشد، نقطهٔ متقارن A' که ازیك نیمدور A حول $O_۳$ به‌دست‌آمده نیز نقطه‌ای از F است، یعنی، $O_۳$ مرکز تقارن F است.

به همین طریق می‌توان نشان داد نقطهٔ $O_۴$، که ازیك نیمدور $O_۲$ حول $O_۳$ به دست آمده، و نقطهٔ $O_۵$ که از یك نیمدور $O_۳$ حول $O_۴$ به‌دست آمده، ...، مراکز تقارن هستند. پس می‌بینیم که اگر یك شکل F دومرکز تقارن متمایز داشته باشد، بینهایت مرکز تقارن خواهد داشت.

۱۳. الف) پاره خط A_nB_n از n نیمدور پیاپی AB حول نقاط $O_۱$، $O_۲$، ...، O_n (n زوج) به‌دست آمده است. اما مجموع دونیمدورحول $O_۱$ و $O_۲$ یك انتقال است، همچنین است مجموع دونیمدورحول $O_۳$ و $O_۴$، مجموع دونیمدورحول $O_۵$ و $O_۶$، ...، بالاخره مجموع دونیمدور حول $O_{n-۱}$ و O_n. پس A_nB_n، از $n/۲$ انتقال متوالی AB بدست آمده است. چون مجموع هرتعدادی انتقال باز یك انتقال است، پس پاره خط A_nB_n از انتقال AB به‌دست آمده است، وبنابراین $AA_n=BB_n$.

اگر n فرد باشد حکم مسأله درست نیست، زیرا مجموع تعداد فردی نیمدور برابر یك انتقال به اضافهٔ یك نیمدور، یا به‌عبارت دیگر، یك نیمدورحول یك نقطهٔ دیگراست(←صفحهٔ ۳۵): پس درحالات کلی $AA_n \neq BB_n$ (اگرچه $AB_n=BA_n$).

ب) چون مجموع تعداد فردی نیمدور باز یك نیمدوراست [←راه‌حل قسمت (الف) مسأله]، نقطهٔ A_n که از n نیمدورمتوالی A حول نقاط $O_۱$،$O_۲$،...،O_n به‌دست آمده است، نیزمی‌تواند از تنها یك نیمدور A حول یك نقطهٔ O به‌دست‌آید. نقطهٔ $A_{۲n}$ که‌ازهمین n نیمدور A_n به‌دست‌می‌آید نیزمی‌تواند ازتنها یك‌نیمدور A_n حول نقطهٔ O به‌دست‌آید. اما این بدان معنی است که $A_{۲n}$ بر A منطبق است.

اگر n زوج باشد، A_n ازیك انتقال A به‌دست می‌آید، و $A_{۲n}$ نیز با همان انتقال از A_n بدست می‌آید؛ بنابراین $A_{۲n}$ درحالت کلی بر A منطبق نخواهد بود (اگر این انتقال، انتقالی به‌طول صفر یعنی تبدیل همانی باشد، آنگاه $A_{۲n}$ بر A منطبق می‌شود).*

۱۴. الف) مجموع دونیمدور حول نقاط $O_۱$ و $O_۲$ یك انتقال است(← صفحهٔ ۲۵)

---

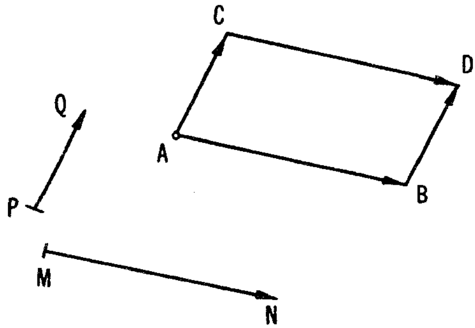
* این جمله درترجمه افزوده شده بود.

ومجموع دو نیمدور حول نقاط $O_۳$ و $O_۴$ انتقال دیگــری است (که درحالت کلی با اولی متفاوت است). پس «اولین» نقطهٔ $A_۴$ از ترکیب دوانتقال متوالی A به‌دست می‌آید؛ «دومین» نقطه (که آن‌را با $A'_۴$ نشان می‌دهیم) از ترکیب همان دوانتقال A اما به‌ترتیب عکس به‌دست می‌آید. ولی مجموع دو انتقال مستقل از ترتیب آنهاست. (برای اثبات این مطلب کافی است که شکل ۷۳ را درنظر بگیریم، که در آن نقاط B و C از انتقالهــای نقطهٔ A به‌ترتیب در راستای پاره خطهای MN و PQ به‌دست آمده‌اند. نقطهٔ D ازانتقال نقطهٔ B در راستای PQ به‌دست می‌آید و D نیز باانتقال C در راستای MN. ازاین مطلب حکم قضیه نتیجه می‌شود).

ب) این مسأله عیناً نظیر مسألهٔ ۱۳ــب (به ازای $n = ۵$) است، زیرا مسألهٔ ۱۳ــب به‌ما می‌گوید که نقطهٔ $A_۵$ که از پنج نیمدور پیاپی نقطهٔ A حول نقاط $O_۱$، $O_۲$، $O_۳$، $O_۴$، $O_۵$ به‌دست می‌آید، باز باهمین پنج نیمدور و به‌همان ترتیب به‌نقطهٔ A بازمی‌گردد.

ج) وقتی‌که n فرد باشد، جای‌نهایی یکی خواهدبود (← مسألهٔ ۱۳).

[دونقطهٔ حاصل از n نیمدور درحالتی که $n = ۲k$ عددی زوج باشد، بــرهم منطبق می‌شوند. یك kــ ضلعی $M_۱M_۲ \dots M_k$ وجود داردکه اضلاع آن $M_۱M_۲$، $M_۲M_۳$، ...، $M_kM_۱$ با پاره‌خطهای $O_۱O_۲$، $O_۳O_۴$، ...، $O_{n-۱}O_n$ مساوی، موازی ومتحدالجهت هستند (دراین حالت مجموع n نیمدور حول نقاط $O_۱$، $O_۲$، ...، O_n، به‌همین ترتیب یا به ترتیب عکس، «انتقالی است به‌طول صفــر»، یعنی یك تبــدیل همانی).]

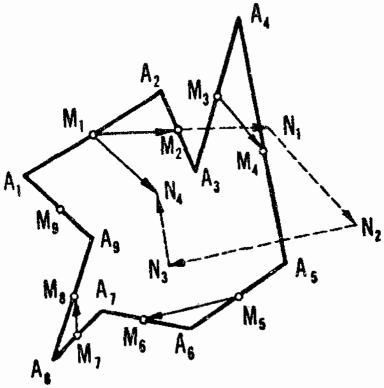


شکل ۷۳

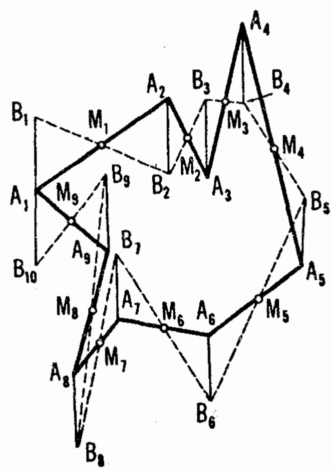
۱۵. راه حل اول. فرض کنید مسأله حل شده‌است و

$$A_1A_2\cdots A_9$$

نه‌ضلعی مطلوب، و نقاط M_1، M_2، ...، M_9 وسطهای اضلاع آن باشند (شکل ۷۴ الف؛ دراینجا $n=9$ گرفته شده‌است). گیریم B_1 نقطه‌ای ازصفحه و B_2 نقطهٔ حاصل از یك نیمدور آن حول M_1 باشد، و B_3 از یك نیمدور B_2 حول M_2 به‌دست آمده باشد. این عمل را به‌همین نحو ادامه می‌دهیم تا بالاخره B_{10} از یك نیمدور B_9 حول M_9 به‌دست آید. چون هریك از پاره خطهای A_2B_2، A_3B_3، ...، A_1B_{10} از یك نیمدور پاره خط قبل از خود به‌دست می‌آید، پس همگی موازی، و دارای یك طول هستند، وهرکدام جهتی مخالف جهت پاره‌خط قبل‌ازخود را دارند. بنابراین A_1B_1 و A_1B_{10} مساوی و موازی، و مختلف‌الجهت هستند، که تعبیر آن این است که نقطهٔ A_1 وسط پاره‌خط B_1B_{10} است. چون، با شروع از یك نقطهٔ دلخواه B_1 می‌توانیم B_{10} را بیابیم، پس A_1 را نیز می‌توانیم مشخص کنیم. سپس رئوس باقیماندهٔ A_2، A_3، ...، A_9 از نیمدورهای متوالی حول M_1، M_2، ...، M_9 پیدا می‌شوند.



(ب)



(الف)

شکل ۷۴

مسأله همیشه یك جواب یکتا دارد؛ اما به‌محدب بودن نه‌ـضلعی‌حاصل نیازی نیست ومی‌تواند خودش را قطع کند.

اگر n زوج باشد واگرهمان استدلال قبلی را تکرار، یعنی، فرض کنیم مسأله حل شده‌است، می‌بینیم که A_1B_{n+1} و A_1B_1 مساوی، موازی و دریك جهت هستند، یعنی برهم منطبق می‌شوند. پس اگر B_{n+1} بر B_1 منطبق نشود، مسأله جواب ندارد. اگر B_{n+1} بر B_1 منطبق شود، نقطهٔ A_1 هرطورانتخاب‌شده‌باشد A_1B_1 بر A_1B_{n+1} منطبق خواهدشد. دراین حالت بینهایت جواب وجود دارد؛ هرنقطهٔ صفحه می‌تواند رأس A_1 اختیارشود.

راه حل دوم. رأس A_1 از n ـ ضلعی‌مطلوب توسط مجموع نیمدورهایی‌حول نقاط M_1، M_2، ...، M_n روی خودش برده می‌شود، یعنی A_1 یك‌نقطهٔ ثابت‌مجموع این n نیمدور است (← شکل ۷۴ ب، که درآن، حالت $n = 9$ نشان‌داده‌شده‌است). اگرnزوج بود، مجموعn ــ نیمدور یك‌انتقال می‌شد (← حل‌مسألهٔ ۱۳ الف). چون انتقال نقطهٔ ثابت ندارد، نتیجه می‌شودکه به‌ازای n زوج، مسأله درحالت کلی‌جواب ندارد. تنها استثنا، حالتی است که مجموع n نیمدور، یك تبدیل همانی (یك‌انتقال با طول صفر) باشد، یعنی تمام نقاط صفحه را ثابت نگه دارد؛ مسأله، در این حالت بینهایت جواب دارد؛ در این حالت هرنقطهٔ صفحه‌می‌تواند رأس A_1 باشد.* اگر n فرد (مثلا $n = 9$) باشد مجموع n نیمدور یك نیمدور خواهدبود. چون یك نیمدور دقیقاً یك نقطهٔ ثابت به‌نام مرکز تقارن دارد، از اینجا نتیجه می‌شود که رأس A_1 از نه ـ ضلعی مطلوب باید بر مرکز تقارن منطبق باشد؛ در این حالت مسأله تنها یك جواب دارد.

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه باید مرکز تقارن مجموع نه‌نیمدور حول نقاط M_1، M_2، ...، M_9 را پیداکنیم. مجموع دونیمدور حول M_1 وM_2 انتقالی است در راستای M_1M_2 با طولی برابر $2M_1M_2$؛ مجموع دونیمدورحول M_3 و M_4 انتقالی است در راستای M_3M_4 به‌طولی برابر $2M_3M_4$، و همین‌طور الی‌آخر. بنابراین مجموع هشت نیمدور اول به‌ترتیب‌مساوی مجموع چهارانتقال‌درراستاهای M_1M_2(یا M_1N_1)، $M_3M_4(\| N_1N_2)$، $M_5M_6(\| N_2N_3)$، و$M_7M_8(\| N_3N_4)$ و به‌ترتیب با طولهایی برابر $2M_1M_2(= M_1N_1)$ ، $2M_3M_4(= N_1N_2)$ ، $2M_5M_6(= N_2N_3)$، و$2M_7M_8(= N_3N_4)$ خواهدبود(← شکل ۷۴ ب) که

---

* تذکرآخرحل مسألهٔ ۱۶ــ ب برای‌توضیح شرطهایی‌که‌نقاط M_1، M_2، ...، M_n باید دراین‌حالت داشته باشند.

انتقالی است در راستای M_1N_4 و به‌طولی برابر M_1N_4. نقطهٔ A_1 مرکز تقارن نیمدوری است که مجموع یك انتقال در راستای M_1N_4 و به‌طولی برابر M_1N_4 است با نیمدوری حول نقطهٔ M_9. برای یافتن A_1 کافی است یك پاره‌خط M_9A_1 را با شروع از M_9، موازی N_4M_1 و به‌طول $M_1N_4/2$ رسم کنیم (شکل ۷۴ ب، این را با شکل ۱۸ مقایسه کنید). با یافتن A_1، دیگر مشکلی برای یافتن بقیهٔ رئوس نه ـ ضلعی نداریم.

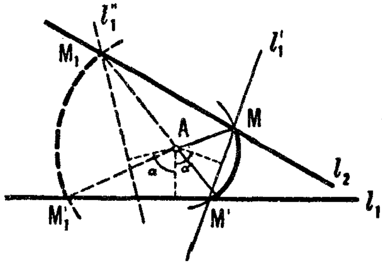
۱۶. الف) اگر نقاط M، N، P، و Q وسطهای اضلاع چهار ضلعی $ABCD$ باشند (← شکل ۲۲ الف)، چهار نیمدوری که به‌ترتیب حول نقاط M، N، P، و Q انجام می‌شوند نقطهٔ A را روی خودش می‌برند (← راه‌حل مسألهٔ ۱۵). اما این امر فقط زمانی امکان دارد که مجموع چهار نیمدور حول نقاط M، N، P، و Q که به‌ترتیب مساوی مجموع دو انتقال در راستاهای MN و PQ و به‌طولهای $2MN$ و $2PQ$ است، تبدیل همانی باشد. ولی این به‌معنای آن است که پاره خطهای MN و PQ موازی، مساوی (از لحاظ طول) و مختلف‌الجهت هستند، یعنی چهارضلعی $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع است.

ب) درست مانند قسمت (الف)، نتیجه می‌گیریم که مجموع سه انتقال در راستاهای M_1M_2، M_3M_4، و M_5M_6 به طولهای $2M_1M_2$، $2M_3M_4$، و $2M_5M_6$ یك تبدیل همانی است. بنابراین مثلثی وجود دارد که اضلاعش با M_1M_2، M_3M_4، و M_5M_6 موازی وطولهای اضلاعش مساوی $2M_1M_2$، $2M_3M_4$، و $2M_5M_6$ باشند؛ اما این بدان معنی است که مثلثی وجود دارد که اضلاعش موازی ومساوی با پاره‌خطهای M_1M_2، M_3M_4، و M_5M_6 هستند.

عیناً به‌همین طریق می‌توان ثابت کرد که مثلثی وجود دارد که اضلاعش مساوی وموازی با پاره‌خطهای M_2M_3، M_4M_5، و M_6M_1 هستند.

تذکر: با استفاده ازروشی که درحل مسألهٔ ۱۶ ـ ب به‌کار بردیم می‌توان نشان داد که مجموعهٔ $2n$ نقطهٔ M_1، M_2، ...، M_{2n} وسطهای اضلاع یك $2n$ ــ ضلعی خواهند بود اگر، وتنها اگر، یك n ــ ضلعی وجود داشته باشد که اضلاعش مساوی و موازی با پاره‌خطهای M_1M_2، M_3M_4، ...، $M_{2n-1}M_{2n}$ باشند، یا یك n ــ ضلعی وجود داشته باشد که اضلاعش موازی ومساوی با پاره‌خطهای M_2M_3، M_4M_5، ...، $M_{2n}M_1$ باشند.

۱۷. خط l_1 را حول نقطهٔ A به زاویهٔ α دوران می‌دهیم، و فرض می کنیم l'_1 معرف وضع جدید آن باشد. گیریم M نقطهٔ تقاطع l'_1 باخط l_2 باشد(شکل ۷۵). دایرهٔ به‌مرکز A ومار بر نقطهٔ M جواب مسأله خواهد بود، زیرا نقطهٔ تقاطع این دایره با

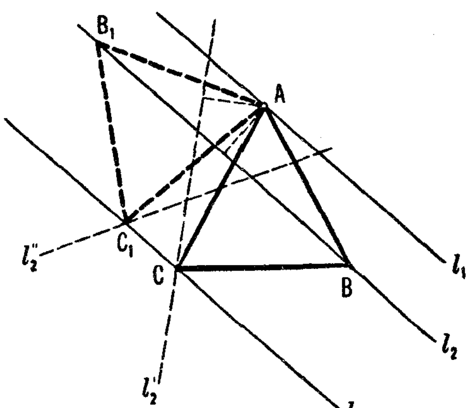


شکل ۷۵

خط l_1، M'، بادوران به‌نقطهٔ M برده خواهدشد(یعنی،زاویهٔمرکزی MAM' $= \alpha$).

مسأله دو جواب دارد (بسته به‌دوران در دو جهت)، به‌شرطی‌که هیچ یك از زاویه‌های بین‌خطوط l_1 و l_2 مساوی α نباشند؛ اگریکی‌از زوایای بین‌خطوط l_1 و l_2 مساوی α باشد، مسأله دقیقاً یك جواب یا بینهایت جواب دارد؛ اگر l_1 و l_2 برهم عمود باشند و $\alpha = 90^\circ$ ، مسأله یا اصلا جواب ندارد یا بینهایت جواب دارد.

۱۸. فرض کنید مسأله حل شده است و ABC مثلث مطلوب است که رئوسش بر برخطهای مفروض l_1، l_2، و l_3 هستند (شکل ۷۶). خط l_2 را حول نقطهٔ A به‌زاویهٔ



شکل ۷۶

60° درجه درجهت از B به C دوران می‌دهیم؛ این دوران، نقطهٔ B را به‌نقطهٔ C می‌برد.

پس ترسیم زیـر را به‌دست می‌آوریم: نقطهٔ دلخواه A را برخط l_1 انتخاب کرده l_2 را حول A به اندازهٔ 60° دوران می‌دهیم. نقطهٔ تقاطع خط جدیدl'_2 با l_3 رأس Cی مثلث مطلوب است. مسأله دوجواب دارد، زیرا l_2 می‌تواندبه‌زاویهٔ 60° در دوجهت دوران کند؛ ولی این دوجواب با هم قابل انطباق‌اند.

مسألهٔ ترسیم مثلث متساوی‌الاضلاعی‌که رئوسش برسه دایرهٔ متحدالمرکز واقع باشند به‌روش مشابه حل می‌شود.

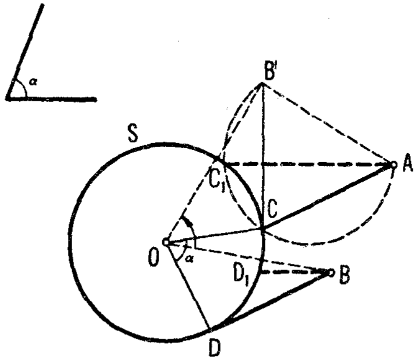
تذکر: اگر به‌جای A نقطهٔ دیگر A' را برخط l_1 انتخاب کـرده بودیم، مثلث جدیدی ازشکل ۷۶ براثر یك طولپایی (یا دقیقتر، براثرانتقالی درامتداد l_1 و به‌طول AA') به‌دست‌می‌آمد. اما درهندسه بین‌این‌گونه شکلها تفاوتی‌قائل نمی‌شویم(←مقدمه). به‌این دلیل حل‌مسأله به‌جای نقطهٔ A در روی l_1 بستگی ندارد، اگرسه‌خط l_1، l_2، و l_3 موازی نبودند، بازمسأله عیناً به‌همین روش‌حل می‌شد؛ اما این‌بار برحسب‌راههای‌مختلف انتخاب نقطهٔ A بـر l_1، جوابهای مختلف بسیار زیادی پیدا می‌کردیم (زیـرا مثلثهای به‌دست‌آمده دیگر باهم قابل انطباق نبودند).

مسألهٔ رسم یك مثلث متساوی‌الاضلاع ABC که رئوسش برسه دایرهٔ متحدالمرکز S_1، S_2، وS_3 واقع باشند نیز عیناً به همین طریق می‌تواند حداکثر چهار جواب داشته باشد (دراینجا شکلهای به‌دست‌آمده از انتخابهای متفاوت نقطهٔ A بردایرهٔ S_1 نیزیکی هستند ــ هریك ازآنها، از دیگری براثر دوران حول مرکزمشترك سه‌دایرهٔ S_1، S_2، و S_3 به‌دست می‌آید). ازطرف دیگر، اگردایره‌های S_1، S_2، وS_3 متحدالمـرکز نباشند مسأله می‌تواند بینهایت جواب داشته باشد (انتخابهای متفاوت نقطهٔ A بـردایـرهٔ S_1 اساساً جوابهای متفاوتی خواهد داد).

۱۹. فرض می‌کنیم کمان CD پیدا شده باشد (شکل ۷۷). پاره‌خط BD را حول نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ S، به‌زاویهٔ α دوران می‌دهیم؛ این پاره خط، به پاره‌خط جدید $B'C$ بدل خواهد شدکه با پاره‌خط AC زاویهٔ $ACB' = \alpha$ می‌سازد.

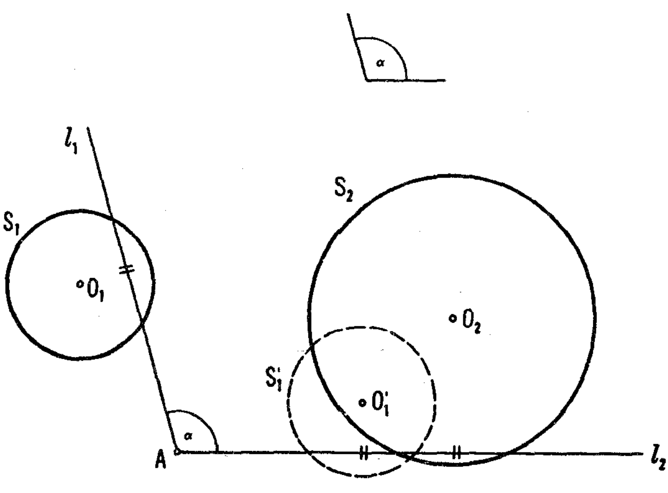
پس ترسیم زیر به‌دست می‌آید: نقطهٔ B را حول O به‌زاویهٔ α دوران‌می‌دهیم تا به‌وضع جدید B' درآید. برنقاط A وB' کمان درخور زاویهٔ α را رسم می‌کنیم (یعنی اگر C نقطه‌ای بر کمان مذکور باشد، آنگاه $\measuredangle ACB' = \alpha$). ازتقاطع این کمان با دایرهٔ S نقطهٔ C مشخص می‌شود.

مسأله می‌تواند تا چهارجواب داشته‌باشد (این‌کمان ممکن است دایره را در دونقطه قطع کند، ونقطهٔ B می‌تواند حول‌نقطهٔ O در دوجهت دوران‌کند).



شکل ۷۷

۲۰. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد. دایرهٔ S_1 را حول نقطهٔ A به زاویهٔ α دوران می‌دهیم تا به S'_1 تبدیل شود (شکل ۷۸). دایره‌های S_2 و S'_1 روی خط l_2 وترهای مساوی جدا می‌کنند. پس مسأله به‌مسألهٔ ۸ ـ ج برمی‌گردد. به عبارت دیگر،



شکل ۷۸

باید بر نقطهٔ A خطی‌مانند l_2 چنان مروردهیم که S'_1 و S_2 برروی آن‌وترهای مساوی جدا کنند. سپس l_1 می‌تواند از دوران l_2 حول A به زاویهٔ α به‌دست آید، و S_1 پاره‌خط مطلوب را روی l_1 جدا می‌کند.

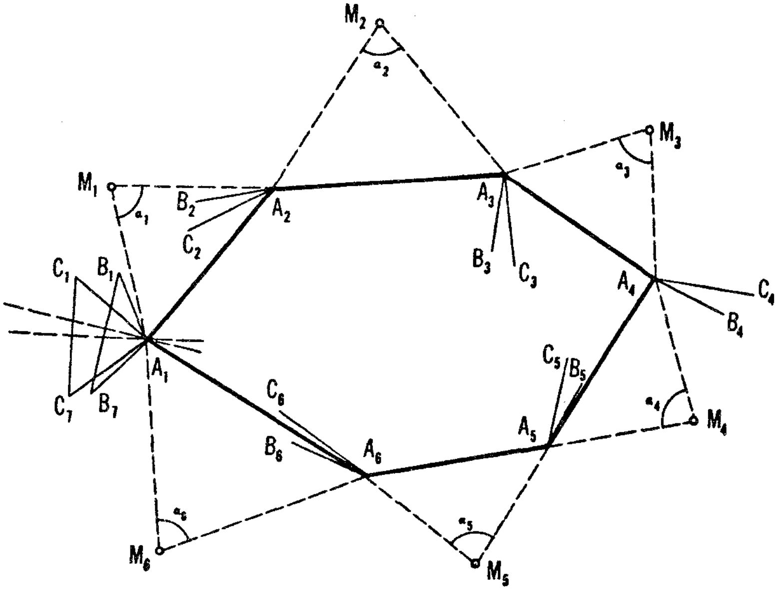
مسأله می‌تواند تا چهارجواب داشته‌باشد. (چون S_1 می‌تواند حول A دردو جهت دوران‌کند، پس دوراه برای تبدیل مسأله به‌مسألهٔ ۸ــج وجوددارد که‌هرکدام ممکن است دوجواب داشته باشد).

۲۱. راه حل اول (با راه حل اول مسألهٔ ۱۵ مقایسه شود). فرض‌می‌کنیم مسأله حل شده و $A_1A_2 \ldots A_n$ nــ ضلعی‌مطلوب باشد (←شکل ۷۹، با $n=6$). نقطهٔ دلخواه B_1 را در صفحه انتخاب می‌کنیم. یك رشته دوران نخست حول M_1 به‌زاویهٔ α_1، سپس حول M_2 به‌زاویهٔ α_2، ...، و بالاخره حول M_n به‌زاویهٔ α_n، پاره‌خط A_1B_1 را نخست به‌پاره‌خط A_2B_2، سپس A_2B_2 را به‌پاره‌خط A_3B_3 ... وبالاخره A_nB_n را به A_1B_{n+1} بدل می‌کند. همهٔ این پاره‌خطها با هم مساوی‌اند و ازاین‌رو A_1، رأس nــ ضلعی، از نقاط B_1 و B_{n+1} (که B_{n+1} ازاین n دوران B_1 به‌دست آمده) همفاصله است. حال نقطهٔ دوم C_1 را درصفحه انتخاب می‌کنیم، ومرتباً آن را حول نقاط M_1، M_2، ...، M_n به‌زوایای α_1، α_2، ...، α_n دوران می‌دهیم. بدین‌ترتیب یك‌جفت نقطهٔ دوم C_1 و C_{n+1} متساوی‌الفاصله از A_1 به‌دست می‌آوریم. پس رأس A_1 از nــ ضلعی، می‌تواندمحل‌تقاطع عمودمنصفهای پاره‌خطهای B_1B_{n+1} و C_1C_{n+1} باشد. پس‌از یافتن A_1، A_2 را می‌توان ازدوران A_1 حول M_1 به‌زاویهٔ α_1 به‌دست آورد؛ A_3 را از دوران A_2 حول M_2 به زاویهٔ α_2 و... وهمینطور الی‌آخر. اگر عمودمنصفهای B_1B_{n+1} و C_1C_{n+1} یکدیگررا قطع‌کنند (یعنی‌پاره‌خطهای B_1B_{n+1} و C_1C_{n+1} موازی نباشند) مسأله یك جواب یکتا دارد. اگراین عمودمنصفها موازی باشند، مسأله جواب ندارد، واگر برهم منطبق باشند مسأله بینهایت جواب دارد.

چندضلعی جواب این مسأله لــزومی نداردکه محدب باشد وحتی ممکن است خودش را قطع‌کند.

راه حل دوم (با راه حل دوم مسألهٔ ۱۵ مقایسه شود). رأس A_1 نقطهٔ ثــابتی برای مجموع n دوران به‌مراکز M_1، M_2، ...، M_n به‌زوایای α_1، α_2، ...، α_n است (این دورانها A_1 را به A_2، A_2 را به A_3، A_3 را به A_4، ...، وبالاخره A_n را به A_1 می‌برند). اما مجموع n دوران به‌زوایای α_1، α_2، ...، α_n دورانی است به زاویه

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$$



شکل ۷۹

به‌شرط اینکه $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$ مضربی از 360° نباشد. در غیراین‌صورت این n- دوران یك انتقال خواهد بود (این نتیجه‌گیری ازقضیهٔ مجموع دو دوران حاصل می‌شود). تنها نقطهٔ ثابت یك دوران مرکز دوران است. پس اگر

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$$

مضربی‌از 360° نباشد،آنگاه A_1 به‌صورت مرکزدوران حاصل ازمجموع دورانهای حول نقاط M_1، M_2، ...، M_n به‌زوایای α_1، α_2،...، α_n پیدا خواهد شد. درعمل برای پیداکردن A_1 می‌توان روش مذکور برای یافتن مرکزمجموع دو دوران را مکرراً به‌کاربرد.*

انتقال نقطهٔ ثابت ندارد. پس اگر

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$$

* ممکن‌است هنگام رسم بخواهیم مرکز دورانی راکه مجموع یك انتقال و یك دوران است‌بیابیم. دراین‌رابطه‌می‌توان به‌متن‌کتاب که به‌حروف ریزتر درصفحهٔ۳۷یا صفحهٔ ۵۳ چاپ شده مراجعه نمود.

مضربی از 360° باشد، مسأله درحالت کلی جواب ندارد. ولی درحالت خاص وقتی مجموع دورانها حول نقاط M_1، M_2، ...، M_n به‌زوایای α_1، α_2، ...، α_n (که در آن مجموع $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ مضربی از 360° است) یك تبدیل همانی باشد، مسأله بینهایت جواب خواهد داشت (هر نقطهٔ صفحه می‌تواند رأس A_1 انتخاب شود).

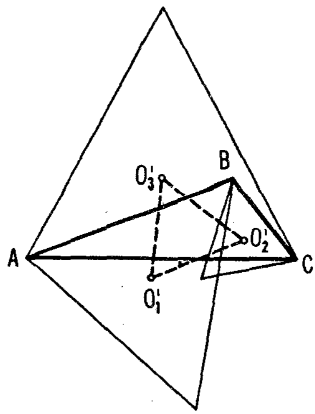
همچنین اگر $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=180^\circ$ (این حالتی‌است که درمسألهٔ ۱۵ بررسی شد)، مسأله وقتی n فرد باشد یك جواب یکتا دارد، ووقتی زوج باشد یا جواب ندارد یا بینهایت جواب دارد.

۴۲. الف) سه دوران پشت‌سرهم، هریك به‌زاویهٔ 120°، به‌ترتیب حول نقاط O_1، O_2، O_3 را درنظرمی‌گیریم (← شکل ۳۱ متن). نخستین‌دوران A را به B، دومی B را به C، وسومی C را به A می‌برد.

پس نقطهٔ A نقطهٔ ثابت مجموع این سه دوران است. اما مجموع سه دوران با زاویهٔ 120°، درحالت کلی، یك انتقال است وبنابراین نقطهٔ ثابتی ندارد. از این مطلب که A نقطهٔ ثابت است به‌این نتیجه می‌رسیم که مجموع این سه دوران باید یك تبدیل همانی (انتقال به‌طول صفر) باشد. مجموع دو دوران اول، دورانی به‌زاویهٔ 240° حول نقطهٔ O، محل برخورد دوخط است‌که یکی از O_1 می‌گذرد و دیگری از O_2، وهر یك زاویهٔ 60° با O_1O_2 می‌سازد. پس O_1O_2O مثلثی متساوی‌الاضلاع است. چون مجموع این دوران ودوران حول O_3 به زاویهٔ 120° یك تبدیل همانی است، نقطهٔ O باید بر O_3 منطبق باشد. پس مثلث $O_1O_2O_3$ متساوی‌الاضلاع است، واین همان چیزی است‌که می‌خواستیم ثابت‌کنیم.

به‌همین طریق می‌توان‌نشان دادکه مراکز O'_1، O'_2، O'_3ی مثلثهای متساوی الاضلاعی که براضلاع مثلث مفروض ABC و در داخل آن بنامی‌شوند، نیز مثلثی متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند (شکل ۸۰).

ب) راه حل این‌مسأله مشابه راه حل قسمت (الف) است. چون نقطهٔ A براثر مجموع سه دوران به‌زوایای β، α، و γ $(\beta+\alpha+\gamma=360^\circ)$ حول مراکز B_1، A_1، و C_1 بـه‌خودش بدل می‌شود، پس مجموع سه دوران یك تبدیل همانی است. اما این تنها زمانی ممکن‌است‌که C_1 برمرکز دورانی‌که مجموع دودوران به‌زوایای β و α حول مراکز B_1 و A_1 است، منطبق باشد، یعنی وقتی‌که C_1 نقطهٔ تقاطع دو خطی باشدکه از B_1 و A_1 می‌گذرند و زوایای $\beta/2$ و $\alpha/2$ با خط B_1A_1 می‌سازند. از این مطلب حکم مسأله نتیجه می‌شود.

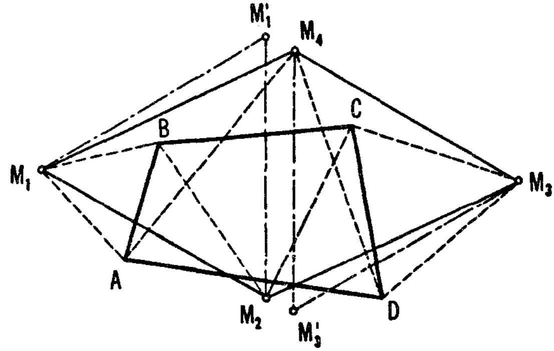


شکل ۸۰

بــه‌همین طریق می‌توان نشان دادکــه رئوس A'_1، B'_1، و C'_1 ازمثلثهای متساوی‌الساقین ABC'_1، BCA'_1، و ACB'_1 به ترتیب بـا زوایای رأس α، β، و γ ($\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$)، که بر اضلاع مثلث مفروض ABC اما درطرف داخل ABC رسم شده‌اند، نیز مثلثی به زوایای $\alpha/2$، $\beta/2$، و $\gamma/2$ می‌سازند.

۲۳. توالی سه‌دوران دریك جهت به‌زوایای 60°، 60°، و 240° حول نقاط A_1، B_1، و M نقطهٔ B را به‌خودش بدل می‌کند (←شکل ۳۲ متن). بدین‌جهت مجموع این سه دوران تبدیلی است همانی، و بنا براین مجموع دودوران اولی، دورانی بـه مرکز M است. ازاینجا حکم مسأله‌نتیجه می‌شود (با راه حل‌مسألهٔ ۲۲ مقایسه شود).

۲۴. الف) مجموع چهار دوران به‌مراکز M_1، M_2، M_3، و M_4 هریك به‌زاویهٔ 60°، که درآن جهت اولی وجهت سومی مخالف جهت‌های دومی وچهارمی است، رأس Aی چهارضلعی‌را به‌خودش بدل‌می‌کند(←شکل ۳۳ الف، درمتن). امامجموع دو دوران حول M_1 و M_2 انتقالی است به طول $M_1M'_1$ که درآن M'_1 رأس مثلـث متساوی‌الاضـلاع $M_1M_2M'_1$ است ($M_2M_1 = M_2M'_1$، $\measuredangle M_1M_2M'_1=60^\circ$، وجهت دوران از M_2M_1 به $M_2M'_1$ بر جهت دوران از M_2B به M_2C منطبق‌است؛←شکل ۸۱ الف، و۲۸ ب، درمتن). همچنین‌مجموع دو دوران حول M_3 و M_4 یك انتقال درراستای پـاره خط $M_3M'_3$ است، کـه $M_3M_4M'_3$ مثلثی‌متساوی‌الاضلاع است (وجهت دوران از M_4M_3 به $M_4M'_3$



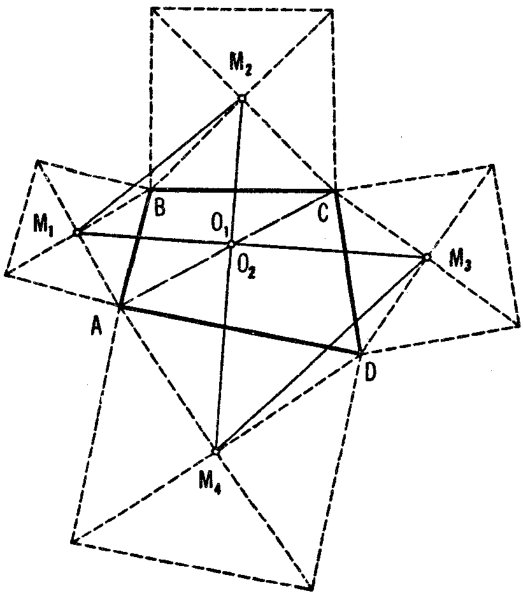
شکل ۸۱ الف

همـان جهت دوران از $M_۴D$ به $M_۴A$ است). پس مجموع دو انتقال ـ که با پاره‌خطهای $M_۱M'_۱$ و $M_۳M'_۳$ مشخص شده‌است ـ نقطهٔ A را به‌روی‌خودش می‌برد. اما اگر مجموع دوانتقال حتی یك نقطه را ثابت نگه دارد، آنگاه این مجموع باید تبدیل‌همانی باشد، یعنی دوپاره خطی‌که این دوانتقال‌را مشخص می‌کنند باید مساوی، موازی ومختلف‌الجهت باشند. امـا اگر مثلثهای متساوی‌الاضلاع $M_۱M_۲M'_۱$ و $M_۳M_۴M'_۳$ چنان باشند که

$$M_۱M'_۱ = M_۳M'_۳ \qquad و \qquad M_۱M'_۱ || M_۳M'_۳$$

و $M_۱M'_۱$ و $M_۳M'_۳$ مختلف‌الجهت بـاشند، آنگاه اضلاع $M_۱M_۲$ و $M_۳M_۴$ نیز مساوی، مـوازی، و مختلف‌الجهت هستند، که از آنجا نتیجه می‌شود چهـارضلعی $M_۱M_۲M_۳M_۴$ متوازی‌الاضلاع است (← شکل ۸۱ الف).

ب) واضح است که مجموع چهاردوران حول نقاط $M_۱$، $M_۲$، $M_۳$، و $M_۴$ هریك به‌زاویهٔ ۹۰°، رأس A ی چهارضلعی را به‌روی خودش می‌برد. از این‌مطلب نتیجه می‌شودکه مجموع این چهار دوران یك تبدیل همانی است [با راه حل قسمت (الف) مسأله مقایسه شود]. اما مجموع دو دوران حول $M_۱$ و $M_۲$ نیمدوری است حـول نقطـهٔ $O_۱$، رأس مثلث قـائم‌الزاویـهٔ متساوی‌الساقین $O_۱M_۱M_۲$، (چـون $\measuredangle O_۱M_۱M_۲ = \measuredangle O_۱M_۲M_۱ = ۴۵^\circ$ شکـل ۸۱ ب بـا شکل ۲۸ الف درمتن مقایسه شود). همچنین‌مجموع دودوران حول $M_۳$ و $M_۴$ نیمدوری‌است حول رأس $O_۲$ ازیك مثلث قائم‌الزاویـهٔ متساوی‌الساقین $O_۲M_۳M_۴$. با توجه به‌این مطلب کـه مجموع دونیمدورحول $O_۱$ و $O_۲$ یك تبدیل همانی است، به‌آسانی نتیجه می‌شود که

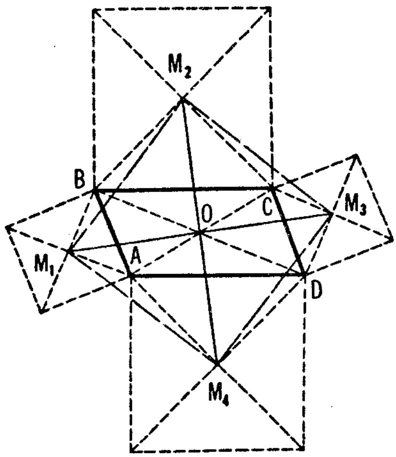


شکل ۸۱ ب

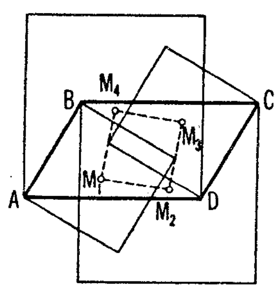
این دو نقطه برهم منطبق‌اند. امـا معنی این مطلب این است که مثلث $O_1M_1M_3$ از مثلث $O_1M_2M_4$ با دورانی به‌زاویهٔ 90° حول نقطهٔ $O_1 = O_2$ به‌دست آمده است، و بنابراین پاره خطهای M_1M_3 و M_2M_4 مساوی ومتعامدند.

ج) به‌موجب آنچه که قبلا ثابت شده بود [← قسمت (ب) ی مسأله]، قطرهای M_1M_3 و M_2M_4 ازچهارضلعی $M_1M_2M_3M_4$ مساوی ومتعامدند. افزون براین، چون نقطهٔ O محل تقاطع قطرهای متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مرکز تقارن آن نیز هست، پس مرکز تقارن کل شکل ۸۱ ج، بالاخص مرکز تقارن چهارضلعی $M_1M_2M_3M_4$ نیز هست (که درنتیجه باید متوازی‌اضلاع باشد ـ چون متوازی‌الاضلاع، تنها چهار ضلعیی است که مرکز تقارن دارد). اما متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش مساوی ومتعامد باشند، مربع است.

به‌همین طریق می‌توان نشان داد که مرکزهای تقارن چهارمربعی که در داخل متوازی‌الاضلاع بنا می‌شوند، یك مربع می‌سازند (شکل ۸۱ د).



شکل ۸۱ ج



شکل ۸۱ د

فصل دوم: تقارن

۲۵. الف) فرض می‌کنیم نقطهٔ X پیدا شده است. یعنی

$$\sphericalangle AXM = \sphericalangle BXN$$

(شکل ۸۲ الف). گیریم B' قرینه B نسبت به‌خط MN باشد؛ پس

$$\sphericalangle B'XN = \sphericalangle BXN = \sphericalangle AXM$$

یعنی نقاط A، X، و B' بر یك امتدادنـد. از اینجا نتیجه می‌شود که X نقطهٔ تقاطع خطوط MN و AB' است.

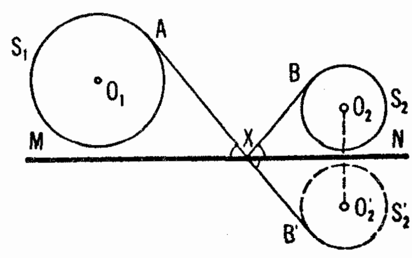
ب) فرض می‌کنیم نقطهٔ X پیدا شده و S'_2 قرینه دایرهٔ S_2 نسبت به‌خط MN باشد (شکل ۸۲ ب).

اگر XA، XB، و XB' مماسهای مرسوم از نقطهٔ X بر دایره‌های S_1، S_2، و S'_2 باشند، آنگاه

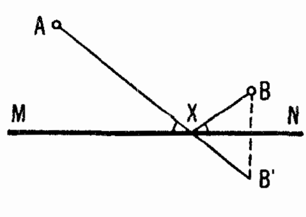
$$\sphericalangle B'XN = \sphericalangle BXN = \sphericalangle AXM$$

یعنی، نقاط A، X، و B' بر یك امتدادند. پس X نقطهٔ تقاطع خط MN با AB'، مماس مشترك دودایرهٔ S_1 و S'_2، است. مسأله ممکن‌است حداکثر چهار جواب داشته باشد (دودایره حداکثر چهار مماس مشترك دارند).

ج) راه حل اول. فرض می‌کنیم X پیدا شده است. گیریم B' قرینهٔ B نسبت به MN باشد و XC امتداد پاره‌خط AX که بر X می‌گذرد (شکل ۸۳ الف). پس

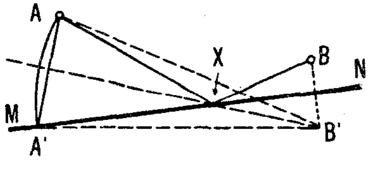


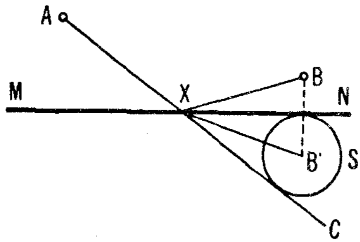
(ب)



(الف)

شکل ۸۲





شکل ۸۳

$$\sphericalangle CXN = ۲ \sphericalangle BXN = ۲ \sphericalangle B'XN$$

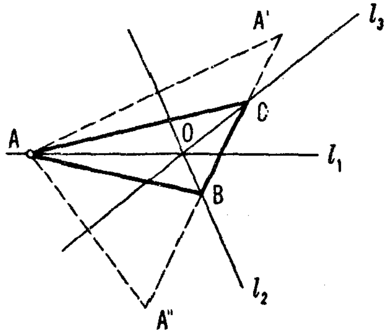
وبنابراین خط XB' زاویهٔ NXC را نصف می‌کند. پس خط AXC بردایرهٔ S به مرکز B'، که بر MN مماس است، مماس می‌شود؛ درنتیجه نقطهٔ X محل تقاطع خط MN ومماس مرسوم از A بردایرهٔ S است.

راه حل دوم. بازفرض می‌کنیم X پیدا شده است. گیریم A' قرینهٔ A نسبت به خط $B'X$ باشد (همان قراردادهای راه حل اول را به‌کارمی‌بریم). $B'X$ زاویهٔ AXM را نصف می‌کند؛ پس A' برخط XM واقع است و $B'A = B'A'$ (شکل ۸۳ ب). بنابراین A' می‌تواند ازتقاطع خط MN با دایرهٔ به‌مرکز B' وشعاع $B'A$ مشخص شود. لذا نقطهٔ X محل تقاطع خط MN با عمود مرسوم از B' بر AA' است.

۴۶. الف) فرض می‌کنیم مثلث ABC رسم شده، و $l_۲$ زاویهٔ B، و $l_۳$ زاویهٔ C را نصف کرده‌اند (شکل ۸۴ الف). پس خطوط BA و BC قرینه‌های یکدیگر نسبت به $l_۲$، وخطوط BC و AC قرینه‌های یکدیگرنسبت به $l_۳$ هستند، وبنابراین نقاط A' و A''، که از A براثر تقارن نسبت به‌خطوط $l_۲$ و $l_۳$ به‌دست آمده‌اند، برخط BC واقع‌اند.

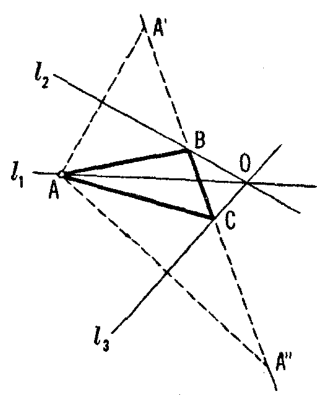
پس ترسیم زیر به‌دست می‌آید: قرینه‌های نقطهٔ A را نسبت به‌خطوط $l_۲$ و $l_۳$ پیدا می‌کنیم تا نقاط A' و A'' به‌دست آیند. نقاط تقاطع خط $A'A''$ با خطوط $l_۲$ و $l_۳$، رئوس B و C هستند.

اگر $l_۲$ و $l_۳$ متعامد باشند، خط $A'A''$ از نقطهٔ تقاطع سه‌خط مفروض‌می‌گذرد

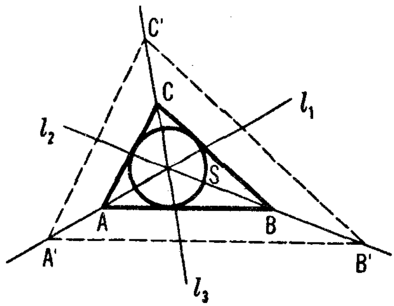


شکل ۸۴ الف

ومسأله جوابی ندارد؛ اگر l_1 بریکی ازخطوط l_2 و l_3 عمود باشد، $A'A''$ با خط دیگر موازی خواهد شد و در این حالت نیز مسأله جواب ندارد. در حالتی که هیچ دوخطی از سه خط مفروض متعامد نباشند مسأله جوابی یکتا دارد. درصورتی که هر یک از سه خط مفروض درداخل زاویهٔ منفرجه متشکل ازدوخط دیگر باشد، سه خط زوایای درونی مثلث ABC را نصف خواهندکرد؛ ولی اگر، مثلا l_1 درداخل زاویهٔ حادهٔ حاصل از l_2 و l_3 باشد، این دوخط اخیر زوایای خارجی مثلث را نصف می کنند (شکل ۸۴ ب). اثبات این حکم را به‌خواننده واگذارمی کنیم.



شکل ۸۴ ب



شکل ۸۵

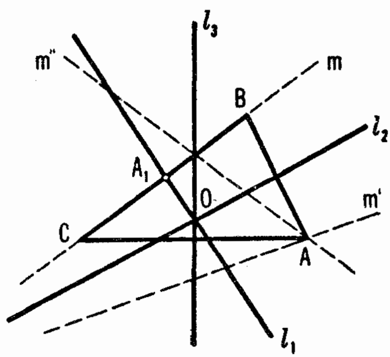
ب) نقطهٔ دلخواه A' را بر یکی از خطوط انتخاب ومثلث $A'B'C'$ راکه در آن‌سه‌خط l_1، l_2، و l_3 نیمسازهای زوایای درونی آن‌هستند، رسم‌می‌کنیم [←قسمت (الف) همین مسأله]. بر Sمماسهایی به موازات اضلاع مثلث $A'B'C'$ رسم می‌کنیم (شکل ۸۵). مثلثی که به‌دست می‌آیـد جواب مسأله است. اگرهریك ازسه خط l_1، l_2، و l_3 درزاویهٔ منفرجه متشکل از دوتای دیگر واقع شده باشد، مسأله یك جواب یکتا دارد؛ اگر یکی از آنها درداخل زاویهٔ حاده متشکل از دوتای دیگر واقع باشد، دایرهٔ مفروض دایرهٔ محاطی خارجی مثلث خواهد شد.*

ج) فرض کنیم مثلث ABC پیدا شده‌است (شکل۸۶). چون‌نقطهٔ A قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به خط l_2 است، پس باید برقرینهٔ BC نسبت به l_2 واقع باشد؛ وچون A قرینهٔ C نسبت به l_3 است، باید برقرینه BC نسبت به l_3 نیز واقع باشد.

پس راه ترسیم زیر به‌دست می‌آید: خط m را بر A_1 وعمود بر l_1 می‌گذرانیم، سپس خطوط m' و m'' را ازقرینه‌های m نسبت به‌خطوط l_2 و l_3 به‌دست‌می‌آوریم. نقطهٔ تقاطع m' و m'' رأس Aی مثلث مطلوب خواهدبود؛ رئوس B و C قرینه‌های این رأس نسبت به‌خطوط l_2 و l_3 هستند (شکل ۸۶).

اگر خطوط l_2 و l_3 متعامد باشند، آنگاه یا خطوط m' و m'' که ازقرینه‌های m نسبت به l_2 و l_3 به‌دست می‌آیند، موازی هستند (به شرطی که نقطهٔ A_1 بر O،

* هرمثلث یك دایره محاطی داخلی وسه دایرهٔ محاطی خارجی دارد. هر دایرهٔ محاطی خارجی بر امتداد دوضلع مثلث وضلع‌سوم (دربیرون مثلث) مماس‌است. مرکز هردایرهٔ محاطی‌خارجی محل تقاطع یك‌نیمساز زاویهٔ داخلی و نیمسازهای زوایای خارجی دورأس دیگر است.



شکل ۸۶

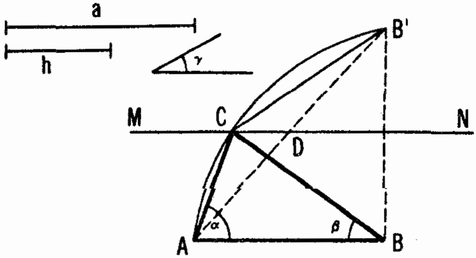
محل تقاطع سه خط l_1 و l_2 و l_3، منطبق نباشد) یا برهم منطبق‌اند (اگر A_1 بر O منطبق باشد). درحالت اول مسأله جواب ندارد، درصورتی که درحالت دوم جواب به‌طور یکتا تعیین نمی‌شود. درکلیهٔ حالات دیگر جواب یکتاست.

۲۷. الف) فرض کنید مسأله حل شده است. از رأس C خط MN را موازی AB می‌گذرانیم، وفرض‌می‌کنیم B' قرینهٔ B نسبت به‌خط MN باشد (شکل ۸۷). گیریم α و β زاویه‌های مجاور به‌قاعدهٔ AB باشند (فرض می‌کنیم $\alpha > \beta$). بنابراین

$$\sphericalangle ACN = ۱۸۰^\circ - \alpha \qquad \sphericalangle B'CN = \sphericalangle BCN = \beta$$

$$\sphericalangle ACB' = (۱۸۰^\circ - \alpha) + \beta = ۱۸۰^\circ - (\alpha - \beta) = ۱۸۰^\circ - \gamma$$

پس ترسیم زیررا داریم: پاره خط $AB = a$ را رسم می‌کنیم وخط MN را موازی



شکل ۸۷

AB به‌فاصلهٔ h از آن می‌کشیم. گیریم B' قرینهٔ B نسبت به‌خط MN باشد. بر پاره‌خط AB' کمان درخور زاویهٔ $\gamma - {}^\circ۱۸۰$ رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع این کمان با خط MN رأس C ی مثلث است. مسأله یك جواب یکتا دارد.

ب) فرض کنید مسأله حل شده است وخط MN و نقطهٔ B' را همانند قسمت (الف) مشخص کنید (شکل ۸۷).

چون

$$\measuredangle ACB' = ۱۸۰^\circ - \gamma$$

می‌توانیم مثلث ACB' را بـا دردست داشتن دوضلع AC و $CB' = BC$ و زاویهٔ بینشان $\gamma - {}^\circ۱۸۰$، رسم کنیم. MN بـرمیانـهٔ CD ی این مثلث منطبق است (زیرا MN «میانخط» مثلث ABB'، یعنی موازی قـاعدهٔ AB است وفـاصله‌اش از AB مساوی فاصلهٔ B' از آن است). بـالاخره، رأس B از قرینهٔ B' نسبت به‌خط MN به‌دست می‌آید، مسأله یك جواب یکتا دارد.

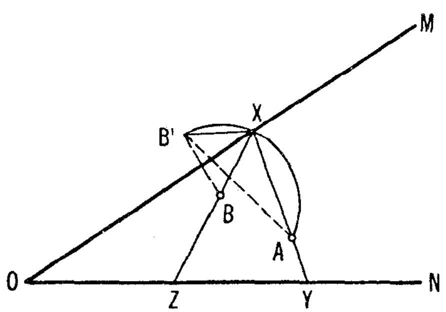
۲۸. فرض کنید مسألـه حل شده است و B' قـرینهٔ B نسبت بـه OM است (شکل ۸۸). داریم:

$$\measuredangle B'XA = \measuredangle B'XB + \measuredangle YXZ$$

اما

$$\measuredangle B'XB = ۲ \measuredangle OXZ = ۲(\measuredangle XZY - \measuredangle MON)$$

(زیرا $\measuredangle XZY$ زاویهٔ خارجی مثلث XOZ است). درنتیجه



شکل ۸۸

$$\measuredangle B'XA = ۲\measuredangle XZY - ۲\measuredangle MON + \measuredangle YXZ$$
$$= \measuredangle XZY + \measuredangle XYZ + \measuredangle YXZ - ۲\measuredangle MON$$
$$= ۱۸۰^\circ - ۲\measuredangle MON$$

پس $\measuredangle B'XA$ معلوم است. درنتیجه X می‌تواند از تقاطع خط OM باکمان در خورزاویهٔ $۱۸۰^\circ - ۲\measuredangle MON$ مرسوم بروتر AB' مشخص‌شود. مسأله یك‌جواب یکتا دارد.

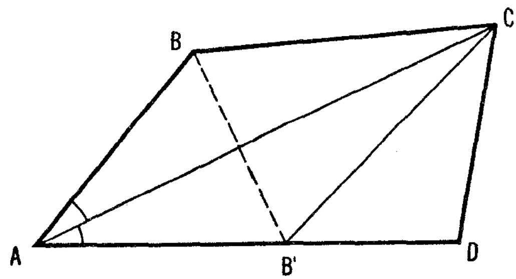
۲۹. الف) فرض‌کنید چهارضلعی $ABCD$ بنا شده و B' قرینهٔ B نسبت به‌قطر AC است (شکل ۸۹). چون $\measuredangle BAC = \measuredangle DAC$ ، نقطهٔ B' برخط AD قرار دارد. سه ضلع مثلث $B'DC$ معلوم‌اند:

$$DB' = AD - AB' = AD - AB \quad و \quad B'C = BC \quad و \quad DC$$

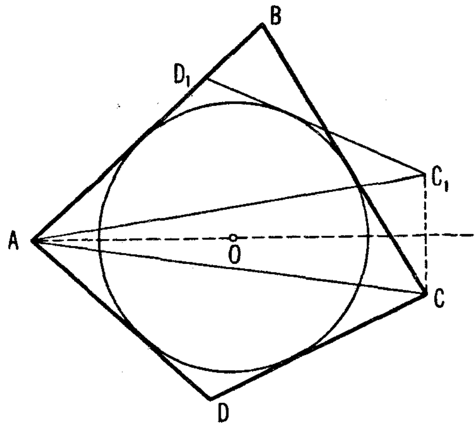
این مثلث را رسم ورأس A را مشخص می‌کنیم (این‌کارممکن است زیرا طول AD معلوم است). پس رأس B می‌تواند ازقرینهٔ B' نسبت به‌خط AC به‌دست‌آید. اگر $AD \neq AB$ ، مسأله یك جواب یکتا دارد؛ اگر $AD = AB$ و $CD \neq CB$، مسأله جوابی ندارد؛ اگر $AD = AB$ و $CD = CB$، مسأله بیش ازیك جواب دارد.

ب) فرض‌کنید مسأله حل‌شده (شکل ۹۰)، ومثلث AD_1C_1 قرینهٔ‌مثلث ADC نسبت به‌خط AO باشد (O مرکز دایرهٔ محاطی‌چهارضلعی است). واضح‌است‌که نقطهٔ D_1 برخط AB واقع‌است، وضلع D_1C_1 بردایرهٔ محاطی‌چهارضلعی $ABCD$ مماس است.

پس‌ترسیم زیررا داریم: بریك‌خط دلخواه پاره خطهای AB و $AD_1 = AD$



شکل ۸۹



شکل ۹۰

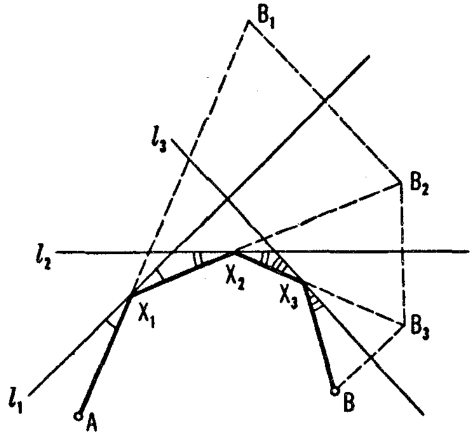
راجدا می‌کنیم. چون $\measuredangle ABC$ و $\measuredangle ADC = \measuredangle AD_1C_1$ معلوم‌شده‌اند، می‌توانیم خطوط BC و D_1C_1 را رسم کنیم(اگرچه هنوز جای نقاط C و C_1 را براین خطوط نمی‌دانیم). اکنون می‌توانیم دایرهٔ محاطی را، چون مماس برسه خط AB، BC، و D_1C_1 است،رسم کنیم. بالاخره ضلع AD وخط DC از قرینه‌های AD_1 و D_1C_1 نسبت به‌خط AO به‌دست می‌آیند. (C نقطهٔ تقاطع‌خط BC با قرینهٔ‌خط D_1C_1است).

اگر $\measuredangle ABC \neq \measuredangle ADC$ ، مسأله یك جواب یکتا دارد؛ اگر $AD \neq AB$ و $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$ مسأله اصلا جواب ندارد؛ اگر $AD = AB$ و $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$ ، مسأله بیش ازیك جواب دارد.

۳۰. الف) فرض کنید مسأله حل شده‌است، یعنی‌نقاط X_1، X_2، ...، X_n برخطهای l_1، l_2، ...، l_n چنان مشخص شده‌اند که

$$AX_1X_2 \dots X_nB$$

مسیر یك توپ بیلیارد باشد (درشکل ۹۱ حالت $n = 3$ نشان داده شده است). به آسانی دیده می‌شودکه X_n نقطهٔ تقاطع خط l_n با خط $X_{n-1}B_n$ است، که درآن B_n قرینهٔ B نسبت‌به l_n است [← راه‌حل مسأله ۲۵-الف]، یعنی‌نقاط B_n، X_n، X_{n-1} بر یك خط قرار دارند. همچنین نقطهٔ X_{n-1} نقطهٔ تقاطع خط l_{n-1} با خط $X_{n-2}B_{n-1}$ است، که B_{n-1} قرینهٔ B_n نسبت به l_{n-1} است. به‌طریق‌مشابه‌می‌توان نشان دادکه نقطهٔ X_{n-2} محل تقاطع خطوط l_{n-2} و $X_{n-3}B_{n-2}$ است که B_{n-2} قرینهٔ



شکل ۹۱

B_{n-1} نسبت به l_{n-2} است؛ X_{n-3} نقطهٔ تقاطع خطهای l_{n-3} و $B_{n-3}X_{n-4}$ است، که در آن B_{n-3} قرینهٔ B_{n-2} نسبت به l_{n-3} است و الی آخر.

پس ترسیم زیر را در اختیار داریم: قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به l_n به‌دست می‌آوریم تا نقطه B_n به‌دست آید، حال قرینهٔ B_n را نسبت به l_{n-1} پیدا می‌کنیم تا B_{n-1} به‌دست آید، وعمل را همین طور ادامه می‌دهیم، تا قرینهٔ نقطهٔ B_2 نسبت به l_1، یعنی نقطهٔ B_1 به‌دست آید. نقطهٔ X_1 که جهتی را مشخص می‌کند که توپ بیلیارد در A به میز می‌خورد، از تقاطع خط l_1 با خط AB_1 به‌دست می‌آید. سپس به‌آسانی می‌توان نقاط X_2، X_3، ...، X_n را به‌کمك نقاط B_2، B_3، ...، B_n و X_1 به‌دست آورد.

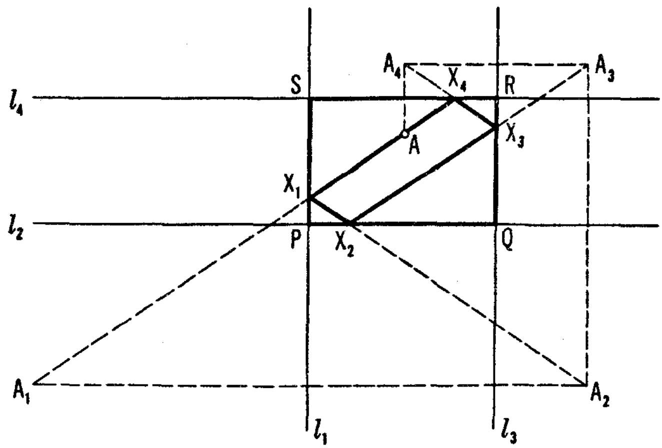
ب)* بادنبال کردن روش قسمت (الف)، نخست قرینهٔ نقطه A رانسبت به l_4 به‌دست می‌آوریم تا A_4 به‌دست آید، سپس قرینهٔ A_4 رانسبت به l_3 به‌دست‌می‌آوریم تا A_3 به‌دست آید، و همین‌طور الی آخر، تا اینکه به A_1 برسیم (← شکل ۹۲). به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که تقارن نسبت به l_4 و درپی آن، تقارن نسبت به l_3، هم‌ارز با یك نیمدورحول R، نقطهٔ تقاطع این‌دوخط، است.** به‌طریق‌مشابه، دو تقارن بعدی هم‌ارز بـا یك نیمدورحول نقطهٔ P است. از این‌روچهار تقارن با مجموع دو نیمدور حول R و P هم‌ارزند. امـا چنانکه می‌دانیم (← شکل ۱۷) این، هم‌ارز با انتقالی‌است درراستای PR به‌طول دوبرابر PR.

پس AA_1 دوبرابر قطر PR و موازی با آن است. بـا درنظر گرفتن زاویه‌ها

---

* این راه حل را مترجم (روسی به‌انگلیسی) به‌جای راه حل اصلی آورده است.

** ← صفحهٔ ۵۱.

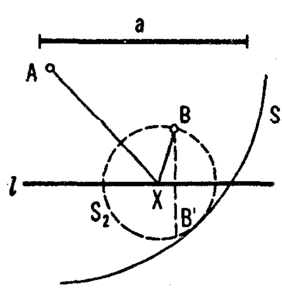


شکل ۹۲

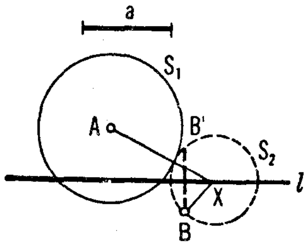
به آسانی دیده می‌شود کــه مسیر $AX_1X_2X_3X_4A$ متوازی‌الاضلاعی (اضلاع مقابل موازی‌اند) است که اضلاع آن موازی قطرها هستند. پس اگر توپ وقتی که به نقطهٔ A بازمی‌گردد از حرکت نایستد یك‌بار دیگر دقیقاً همان مسیر را خواهد پیمود.

بالاخره درشکل دیده می‌شود که طول کل‌مسیر مساوی AA_1، یعنی دو برابر طول قطر است.

۳۱. الف) فرض‌کنیم مسأله حل شده است. دایرهٔ S_1 به‌مرکز A وشعاع a، ودایرهٔ S_2 به مرکز X وشعاع XB را رسم می‌کنیم (شکل ۹۳ الف). واضح است که این دو دایره در نقطه‌ای واقع برخط AX برهم مماس‌اند. چون S_2 از نقطهٔ B می‌گذرد،



شکل ۹۳ الف



شکل ۹۳ ب

باید از نقطهٔ B'، قرینهٔ B نسبت به‌خط l، نیز بگذرد، پس مسأله به‌رسم یك دایرهٔ $S_۲$ که از دونقطهٔ مفروض B و B' بگذرد و بر دایـرهٔ مفروض $S_۱$ مماس باشد، یعنی به مسأله ۴۹ (ب) جلد ۲ بـدل می‌شود. X، مرکز دایرهٔ $S_۲$، نقطهٔ مطلوب است. این مسأله حداکثر دوجواب دارد؛ ممکن است یك جواب داشته بـاشد یا اصلا جوابی نداشته باشد.

ب) فرض‌کنید مسأله حل شده است، و $S_۱$ دایرهٔ به‌مرکز A وشعاع a باشد، و $S_۲$ دایرهٔ به‌مرکز X وشعاع BX (شکل ۹۳ ب). دایره‌های $S_۱$ و $S_۲$ درنقطه‌ای واقع برخط AX برهم مماس‌اند. بـه‌علاوه $S_۲$ ازنقطهٔ B'، قرینهٔ B نسبت به‌خط l، می‌گذرد. پس‌مسأله نیز به‌مسأله ۴۹ (ب) جلد ۲ بدل‌می‌شود. مسأله حداکثردوجواب دارد.

۳۴. الف)گیریم $H_۱$ قرینهٔ H نسبت به‌ضلع BC (شکل ۹۴)، و P، Q، R پاهای ارتفاعها باشند. داریم

$$\sphericalangle BH_۱C = \sphericalangle BHC \qquad (\text{زیرا } \triangle BH_۱C \cong \triangle BHC)$$

اما

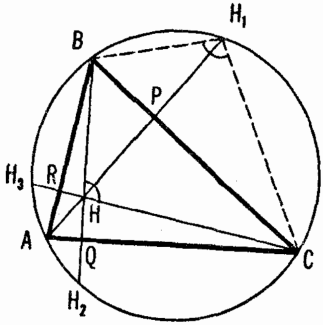
$$\sphericalangle BHC = \sphericalangle RHQ$$

و

$$\sphericalangle RHQ + \sphericalangle RAQ = \sphericalangle BH_۱C + \sphericalangle RAQ = ۱۸۰^\circ$$

پس $\sphericalangle BH_۱C + \sphericalangle BAC = ۱۸۰^\circ$ ، واز اینجا نتیجه می‌شودکه $H_۱$ بردایره‌ای قرار دارد کــه برسه نقطهٔ A، B، و C می‌گذرد. به‌طریق مشابه ثـابت می‌شودکه قرینه‌های H نسبت به‌اضلاع AB و AC بردایرهٔ مذکور قرار دارند.

ب) فرض‌کنیم مثلث ABC رسم شده است ونقاط $H_۱$، $H_۲$، و $H_۳$ بردایرهٔ



شکل ۹۴

محیطی واقع‌اند [← قسمت (الف) مسأله]. چون

$$\sphericalangle BRC = \sphericalangle BQC (= ۹۰^\circ)$$

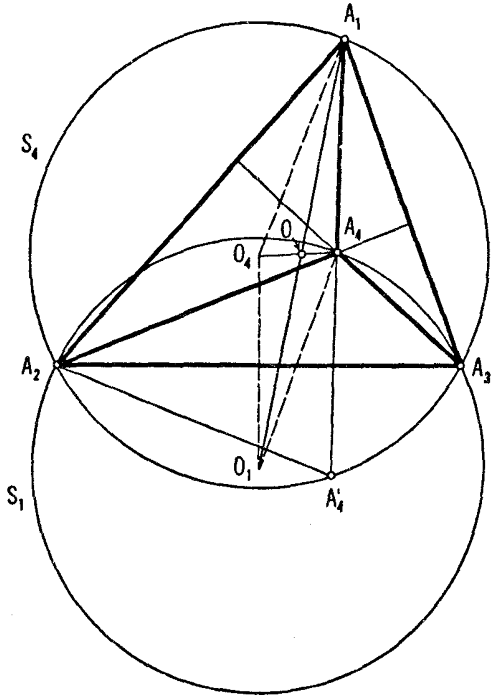
و $\sphericalangle BHR = \sphericalangle CHQ$ ، از اینجا نتیجه می‌شود که $\sphericalangle RBH = \sphericalangle QCH$. یعنی کمان $AH_۳$ با کمان $AH_۲$ مساوی است. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که کمانهای $BH_۱$ و $BH_۳$ و نیز کمانهای $CH_۱$ و $CH_۲$ مساوی‌اند. از اینجا نتیجه می‌شود که A، B، C، رأسهای مثلث، وسطهای کمانهای $H_۲H_۳$، $H_۳H_۱$، و $H_۱H_۲$ از دایره‌ای هستند که بر نقاط $H_۱$، $H_۲$، و $H_۳$ می‌گذرد. مسأله یك جواب یکتا دارد مگر اینکه نقاط $H_۱$، $H_۲$، و $H_۳$ بر یك امتداد باشند، که در این حالت مسأله اصلا جوابی ندارد.

۳۳. الف) واضح است که مثلا، ارتفاعهای مثلث $A_۲A_۳A_۴$ خطوط

$$A_۱A_۴ \perp A_۲A_۳ \quad , \quad A_۱A_۳ \perp A_۲A_۴ \quad , \quad A_۱A_۲ \perp A_۳A_۴$$

هستند که $A_۱$ نقطه تقاطع آنهاست.

ب) گیریم $A'_۴$ قرینهٔ $A_۴$ نسبت به خط $A_۲A_۳$ باشد (شکل ۹۵). این نقطه بر $S_۴$ دایرهٔ محیطی مثلث $A_۱A_۲A_۳$، واقع است (← مسألهٔ ۳۲-الف) پس دایرهٔ محیطی مثلث $A_۲A'_۴A_۳$ بر $S_۴$ منطبق است، از اینجا نتیجه می‌شود که $S_۱$ دایرهٔ محیطی مثلث $A_۲A_۳A_۴$، با $S_۴$ قابل انطباق است ($S_۱$ و $S_۴$ قرینه‌های یکدیگر نسبت به خط $A_۲A_۳$ هستند). به طریق مشابه می‌توان نشان داد که دایره‌های $S_۲$ و $S_۳$ نیز با $S_۴$ قابل انطباق‌اند.



شکل ۹۵

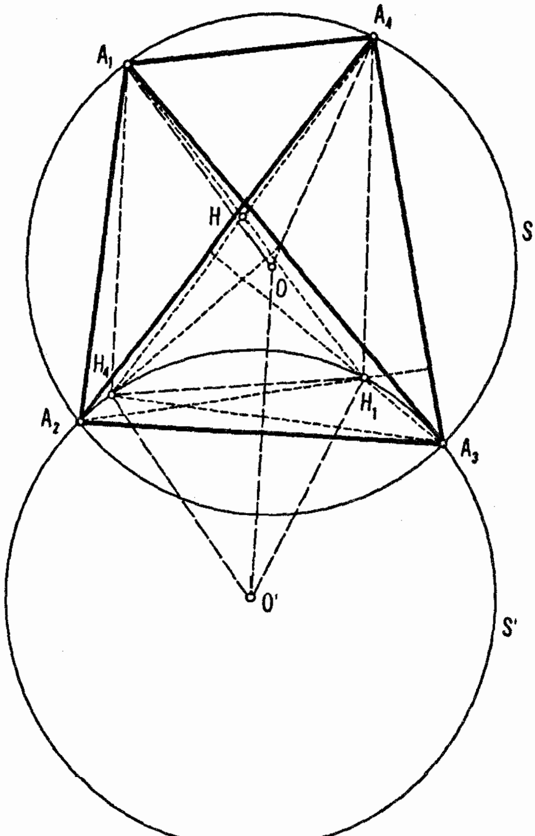
ج) حداقل یکی از مثلثهای $A_1A_2A_3$، $A_1A_2A_4$، $A_1A_3A_4$، و $A_2A_3A_4$ باید دارای زوایای حاده باشد؛ زیرا، اگر مثلث $A_2A_3A_4$ یك زاویهٔ منفرجه در A_4 داشته باشد آنگاه مثلث $A_2A_3A_1$ (که A_1 نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای مثلث $A_2A_3A_4$ است) دارای زاویههای حاده خواهد شد. پس فرض می‌کنیم که مثلث $A_1A_2A_3$ دارای زاویه‌های حاده است و نقطهٔ A_4 درداخل آن قرار دارد.

چهارضلعی $A_1A_4O_1O_4$ را درنظرمی‌گیریم. نقاط O_1 و O_4 مراکز دایره‌های S_1 و S_4 قرینه‌های یکدیگر نسبت بهخط A_2A_3 هستند (←شکل ۹۵ وراه حل قسمت (ب) همین مسأله). درنتیجه O_1 و O_4 قرینه‌های یکدیگر نسبت به A_2A_3 هستند، و بنابراین $O_1O_4 \perp A_2A_3$. پس درچهارضلعی $A_1A_4O_1O_4$ داریم

$$O_4O_1 \| A_1A_4 \quad , \quad O_1A_4 = O_4A_1 = R$$

(R شعاعهای دایره های S_1، S_2، S_3، و S_4 است). لـذا این چهار ضلعی یا متوازی‌الاضلاع است یاذوزنقهٔ متساوی‌الساقین. اماذوزنقهٔ متساوی‌الساقین نمی‌تواند باشد زیرا A_2A_3، عمودمنصف ضلع O_4O_1، ضلع A_1A_4 راقطع نمی‌کند. ازاین‌رو $A_1A_4O_1O_4$ متوازی‌الاضلاع است وقطرهای آن، A_1O_1 و A_4O_4، یکدیگر را در نقطهٔ O، که وسط هریك ازآنهاست قطع می‌کنند. بـه طریق مشابه می‌توان نشان داد که نقطهٔ O وسط A_2O_2 و A_3O_3 است.

۳۴. الف) گیریم O' قرینهٔ نقطهٔ O، مرکزدایرهٔ S، نسبت به‌خط A_2A_3 باشد(شکل



شکل ۹۶

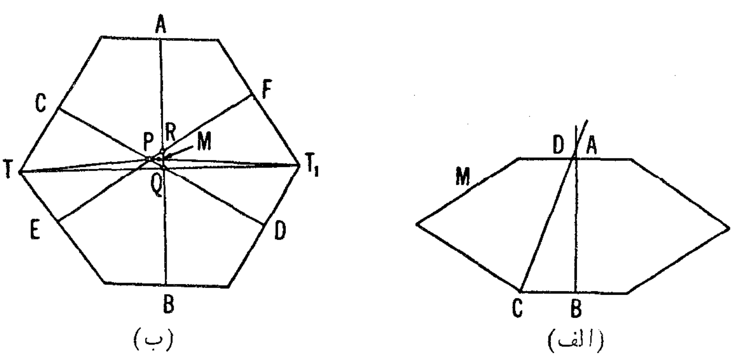
۹۶). چهارضلعیهای $OO'H_4A_1$ و $OO'H_1A_4$ متوازی‌الاضلاع هستند (← راه‌حل مسأله ۳۳-ج). پس

$$A_1H_4 = OO' = A_4H_1 \quad , \quad A_1H_4 \| OO' \| A_4H_1$$

ودرنتیجه $A_1H_4H_1A_4$ متوازی‌الاضلاع است. ازاینجا نتیجه‌می‌شود که پاره‌خطهای A_1H_1 و A_4H_4 در یك نقطهٔ H، که وسط هر دو است، مشترك‌اند. به‌همین طریق می‌توان نشان داد که نقطهٔ H وسط A_2H_2 و A_3H_3 نیز هست.

ب) ازمقایسهٔ شکل ۹۶ وشکل ۹۵ می‌توان دیدکه مثلا H_4 بردایرهٔ S' قرینهٔ S نسبت به خط A_2A_3 واقع است؛ H_1 نیز روی همین دایره است. پس A_2، A_3، H_1، و H_4 همگی بر دایره‌ای قابل انطباق با S واقع‌اند. بقیهٔ حکمهای قضیه به‌طریق مشابه ثابت می‌شوند.

۳۵. قبل از هرچیز واضح است که درهرچند ضلعی M، هردومحور تقارن AB و CD باید درداخل M یکدیگر را قطع کنند؛ زیرا اگرچنین نباشد (شکل ۹۷ الف) نمی‌توانند شکل را به‌دوقسمت با مساحتهای مساوی تقسیم کنند. حال نشان می‌دهیم که اگرمحورتقارن سومی‌مانند EF وجود داشته باشد، این محورنیز باید ازمحل تقاطع اولی ودومی بگذرد. فرض‌کنید چنین نباشد؛ پس این سه محورتقارن AB، CD، و EF یك‌مثلث PQR تشکیل می‌دهند (شکل ۹۷ ب). گیریم M نقطه‌ای درداخل این مثلث باشد. به‌آسانی دیده می‌شود که هر نقطهٔ صفحه در یك طرف حداقل یکی ازاین سه محور، درهمان طرفی که نقطهٔ M قراردارد، واقع شده‌است؛ گیریم T دورترین رأس چند ضلعی از نقطهٔ M است (اگر بیش از یك رأس وجود داشته باشد، T را



شکل ۹۷

یکی از آنها می‌گیریم)، و T و M در یک طرف محورتقارن AB قراردارند. پس اگر T_1 قرینهٔ T نسبت به AB (و در نتیجه T_1 رأس چند ضلعی باشد)، آنگاه $MT_1 > MT$ (زیرا تصویر MT_1 برروی TT_1 بزرگتر از تصویر MT برروی TT_1 است؛ ← شکل ۹۷ ب). با وجود این تناقض، قضیه ثابت می‌شود.

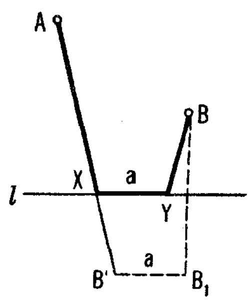
[به‌طریق مشابه می‌توان نشان داد که اگر هر شکل کرانداری (نه لزوماً یک چند ضلعی) چند محور تقارن داشته باشد همگی آنها باید از یک نقطهٔ مشترک بگذرند. برای شکلهای بیکران چنین نیست. مثلا نوار مابین دوخط موازی l_1 و l_2 بینهایت محور تقارن عمود بر l_1 و l_2 دارد که همگی موازی یکدیگرند.]

تذکر: حکم مسأله از دیدگاه مکانیک واضح است. مرکز گرانش یک جسم همگن چند ضلعی ـ شکل، که محورتقارنی دارد، باید روی این محورقرار گیرد. درنتیجه اگر درشکلی چند محورتقارن وجود داشته باشد، همگی باید ازمرکز گرانش بگذرند.

۳۶. چون طول پاره‌خط XY برابر a است، می‌بایست مینیمم مجموع $AX + BY$ را به‌دست آوریم. فرض کنیم که پاره خط XY پیدا شده است. یک لغزه در راستای محور l به طول a، B را به نقطهٔ جدید B' می‌برد، و Y را به X (شکل ۹۸)، پس $BY = B'X$ و بنابراین:

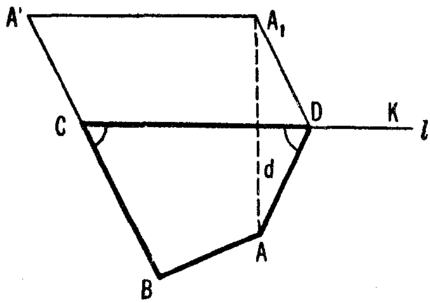
$$AX + BY = AX + B'X$$

پس می‌باید طول مسیر AXB' مینیمم باشد. از اینجا نتیجه می‌شود که X باید محل تقاطع خط l با AB' باشد.



شکل ۹۸

۳۷. الف) فرض کنید چهارضلعی $ABCD$ رسم شده است. گیریم A' قرینهٔ لغزه‌ای A نسبت به محور DC به‌طول DC باشد (شکل ۹۹)؛ پس $\measuredangle ADK = \measuredangle A'CD$



شکل ۹۹

(که در آن DK امتداد ضلع CD ابتدا از D است) زیرا اگر A_1 قرینهٔ A نسبت به DC باشد، آنگاه

$$\measuredangle A'CD = \measuredangle A_1DK = \measuredangle ADK$$

اما

$$\measuredangle ADK = ۱۸۰^\circ - \measuredangle D = ۱۸۰^\circ - \measuredangle C$$

درنتیجه $\measuredangle A'CD = ۱۸۰^\circ - \measuredangle C$، یعنی $A'CB$ یك خط مستقیم است. به‌علاوه

$$A'B = A'C + CB = AD + CB$$

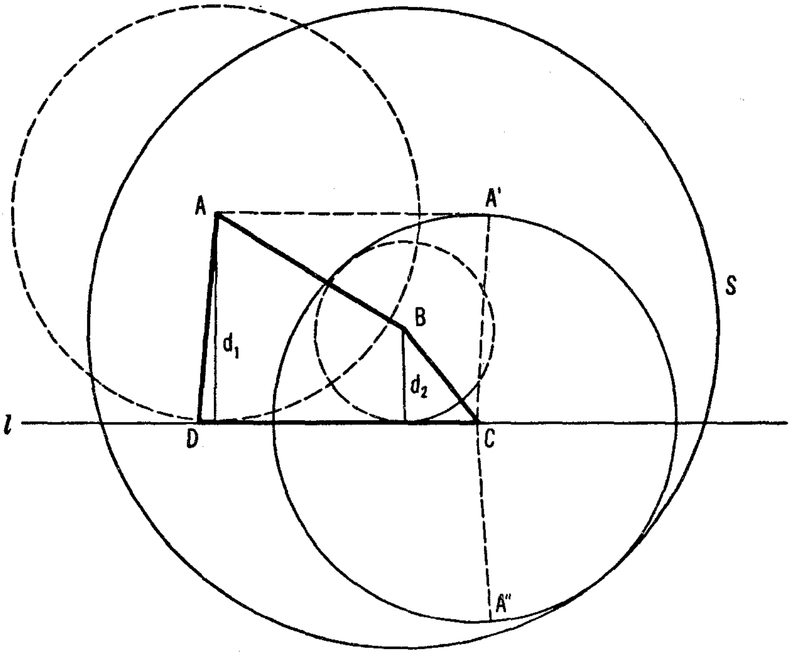
و d، فاصلهٔ A از CD، معلوم است.

پس راه ترسیم زیر به‌دست‌می‌آید: گیریم l یك خط دلخواه باشد، و A نقطه‌ای به‌فاصلهٔ d از l، و A' قرینهٔ لغزه‌ای A نسبت به‌خط l به‌طول CD. اکنون رأس Bی چهارضلعی را می‌توان پیداکرد، زیرا طولهای AB و

$$A'B = AD + BC$$

معلوم‌اند و رأس C نقطهٔ تقاطع پاره خط $A'B$ با خط l است، و رأس D، ازجدا کردن طول معلوم CD، ابتدا از نقطهٔ C برروی l به‌دست می‌آید. مسألـه می‌تواند یك یا دوجواب داشته باشد، یا اصلا جوابی نداشته باشد.

ب) پـاره خط AB را رسم می‌کنیم؛ خط l اکنون می‌تواند به‌صورت مماس مشترك دودایره به‌شعاعهای d_1 و d_2، به‌ترتیب بامراکز A و B مشخص شود (شکل ۱۰۰). باقی‌می‌ماندکه پاره خط DC را بر l چنان مشخص‌کنیم که مجموع طولهای



شکل ۱۰۰

$AD+BC$ مساوی مقدارمفروضی باشد (با مسألهٔ ۳۱ (الف) مقایسه‌کنید).

فرض‌کنید نقاط D و C پیدا شده‌اند و A' و A'' بـه‌ترتیب نگاره‌هـای A براثر انتقال به‌طول DC درامتداد خط l، وقرینهٔ لغزه‌ای نسبت به محور l وبه‌طول DC باشند. واضح‌است‌که دایرهٔ به‌مرکز C وشعاع AD ازنقاط A' وA'' می‌گذرد $(A'C=A''C=AD)$ وبر دایرهٔ S به‌مرکز B وشعاع

$$BC+CA''=BC+AD$$

مماس است. اما دایرهٔ S می‌تواند با توجه بـه‌داده‌ها رسم شود، وبنا براین تنها کافی است‌که دایره‌ای‌مماس بر S رسم کنیم که ازدو نقطهٔ معلوم A' وA'' بگذرد. [←مسأله ۴۹ (ب) جلد ۲].* مرکز این دایره رأس C است.

---

* تذکرمترجم (روسی به‌انگلیسی)

۳۸. راه حل اول. واضح است که تنها زمانی یك پرتو نوری پس‌از تابش به‌یك آینه در راستایی درست درجهت مخالف راستای تابش برمی‌گردد که مسیر (تابش) عمود بر آینه باشد. ازاین پس‌فرض خواهیم کرد که پرتو نوری باضلع اول زاویه (آینه‌ها) به‌زاویهٔ قائمه برخورد نمی‌کند. لـذا فرض می‌کنیم که پرتو MN، پس از دوبار انعکاس درداخل زاویهٔ ABC،درمسیر PQ درست درجهت‌مخالف MN برمی‌گردد (شکل ۱۰۱ الف). دراین حالت داریم:

$$\sphericalangle PNB+\sphericalangle NPB=۱۸۰^\circ-\sphericalangle NBP=۱۸۰^\circ-\alpha$$

$$\begin{aligned}۲(۱۸۰^\circ-\alpha)&=۲\sphericalangle PNB+۲\sphericalangle NPB\\&=\sphericalangle ANM+\sphericalangle PNB+\sphericalangle NPB+\sphericalangle CPQ\\&=۱۸۰^\circ-\sphericalangle MNP+۱۸۰^\circ-\sphericalangle NPQ\\&=۳۶۰^\circ-(\sphericalangle MNP+\sphericalangle NPQ)\end{aligned}$$

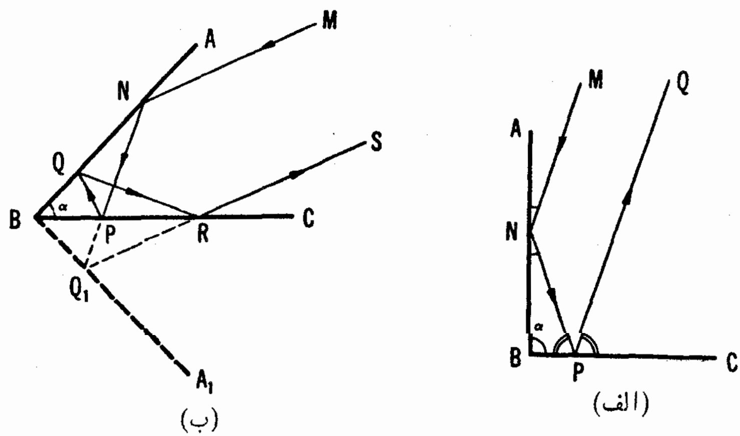
چون پرتوهای MN و PQ موازی ومختلف‌الجهت هستند، داریم

$$\sphericalangle MNP+\sphericalangle NPQ=۱۸۰^\circ$$

پس

$$\alpha=۹۰^\circ \quad و \quad ۲(۱۸۰^\circ-\alpha)=۳۶۰^\circ-۱۸۰^\circ$$

به‌عکس، اگر $\alpha=۹۰^\circ$، آنگاه $\sphericalangle MNP+\sphericalangle QPN=۱۸۰^\circ$، یعنی، راستای پرتوتابش PQ عکس راستای MN است.



شکل ۱۰۱

اکنون حالتی را درنظر می‌گیریم که پرتو تابش MN، پس‌ازچهار بار انعکاس دراضلاع زاویه، در راستای RS مخالف جهت MN برمی‌گردد (شکل ۱۰۱ ب؛ تنها راهی‌که پرتونوری می‌تواند درجهت عکس راستای تابش پس‌از دقیقاً سه بار انعکاس برگردد آن است‌که با دومین ضلع زاویه بــه زاویهٔ قائمه برخوردکند، این حالت نمی‌تواند برای هرپرتو تابش رخ دهد ـ زیرا، دراین حال، برای یك زاویهٔ مفروض α فقط یك‌زاویهٔ تابش وجود دارد). قرینهٔ خط AB ومسیر PQR را نسبت بــه خط BC پیدا می‌کنیم، خط $BA_۱$ نگارهٔ BA ونقطهٔ $Q_۱$ قرینهٔ Q نسبت به BC است. پس

$$\sphericalangle ABA_۱ = ۲\sphericalangle ABC = ۲\alpha$$

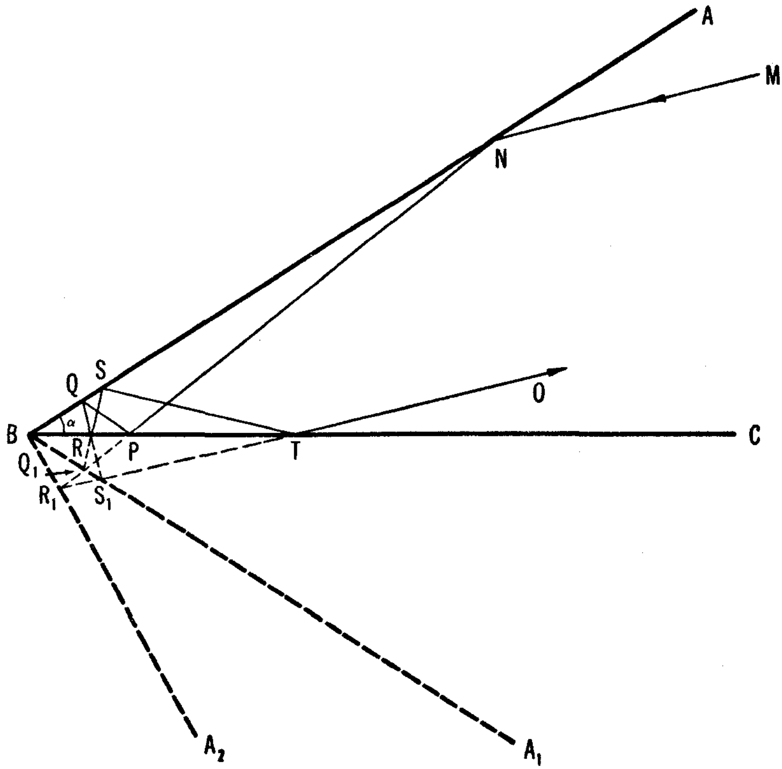
به‌علاوه

$$\sphericalangle QPB = \sphericalangle Q_۱PB = \sphericalangle NPC$$

بنابراین $NPQ_۱$ خط مستقیم است. به همین روش می‌توان نشان دادکه $Q_۱RS$ خط مستقیم است (زیــرا $\sphericalangle QRB = \sphericalangle Q_۱RB = \sphericalangle SRC$). بـالاخـره، $\sphericalangle BQ_۱P = \sphericalangle A_۱Q_۱R$، زیرا این زوایا به‌ترتیب‌مساوی زوایای BQP وAQR هستند،کــه مساوی‌اند. پس می‌بینیم‌که پرتو MN،کــه درنقاط N و $Q_۱$ بــه‌زاویهٔ $ABA_۱ = ۲\alpha$ منعکس‌شده‌است، درراستای $Q_۱S$ برمی‌گرددکه جهتش‌عکس راستای تابش است. امــا درآن صورت بنابرآنچه قبلا ثــابت شد $۲\alpha = ۹۰^\circ$، و بنابراین $\alpha = ۹۰^\circ/۲$. به‌عکس اگر $\alpha = ۹۰^\circ/۲$، آنگاه $\sphericalangle ABA_۱ = ۹۰^\circ$ و لــذا پرتو MN، پس از چهار بار انعکاس در اضلاع زاویهٔ ABC در راستایی عکس راستای تابش برمی‌گردد.

اینك فرض‌کنیم‌که پرتو تــابش MN شش‌بار در اضلاع زاویه منعکس شده، سپس درطول TO، خلاف جهت مسیرتابش، برمی‌گردد (شکل ۱۰۱ ج، درحــالت کلی یك پرتونوری نمی‌تواند پس‌از دقیقاً پنج بــار انعکاس درمسیری خلاف جهت مسیرتابش‌برگردد). قرینه‌های خط AB ومسیر $PQRST$ را نسبت به‌خط BC پیدا، و فرض می‌کنیم $BA_۱$ قرینه BA و $Q_۱$ و $S_۱$ قرینه‌های Q و S نسبت به‌خط BC باشند. درست مانند قبل می‌توانیم نتیجه بگیریم کــه $NPQ_۱$ خــط مستقیــم است ($\sphericalangle Q_۱PB = \sphericalangle QPB = \sphericalangle NPC$) و $S_۱TO$ خــط مستقیــم اســت ($\sphericalangle S_۱TB = \sphericalangle STB = \sphericalangle OTC$) و

$$\sphericalangle RQ_۱B = \sphericalangle PQ_۱A_۱,\quad \sphericalangle Q_۱RB = \sphericalangle S_۱RC,\quad \sphericalangle RS_۱B = \sphericalangle TS_۱A_۱$$



شکل ۱۰۱ ج

پس ملاحظه می‌کنیم که پرتو MN پس‌از انعکاسهای پیاپی درخطوط AB ، BA_1 ، BC و دوباره در BA_1 به‌ترتیب درنقاط N، Q_1، R، و S_1 در راستای S_1O که مخالف راستای تابش MN است، باز می‌گردد.

حال قرینه‌های خط BC ومسیر Q_1RS_1 را نسبت به‌خط BA_1 پیدا می‌کنیم؛ گیریم BA_2 نگارهٔ BC و R_1 نگارهٔ R نسبت به‌خط BA_1 باشد. پس NPQ_1R_1 یک خط مستقیم است (زیرا $\measuredangle R_1Q_1B = \measuredangle RQ_1B = \measuredangle PQ_1A_1$) ، همچنین R_1S_1TO خط مستقیم است (زیرا $\measuredangle R_1S_1B = \measuredangle RS_1B = \measuredangle TS_1A_1$)، و $\measuredangle Q_1R_1B = \measuredangle S_1R_1A_2$ (زیرا به‌ترتیب مساوی زوایای Q_1RB و S_1RC هستند، که با هم مساوی‌اند). پس ملاحظه می‌کنیم که پرتو MN پس از انعکاس در

اضلاع زاویهٔ $ABA_۲(=۳\alpha)$ درنقاط N و $R_۱$ درراستای $R_۱O$ برمی‌گردد که در جهت مخالف راستای تابش MN است. اما بنابر آنچه ثابت شد باید داشته باشیم $۳\alpha=۹۰^\circ$، یعنی $\alpha=۹۰^\circ/۳$. برعکس، اگر $\alpha=۹۰^\circ/۳$، آنگاه $\sphericalangle ABA_۲=۹۰^\circ$، و پرتو MN پس از شش‌بار انعکاس دراضلاع زاویهٔ ABC، در راستای مخالف راستای تابش برمی‌گردد.

بالاخره، فرض‌کنید که پس از $۲n$ بار انعکاس دراضلاع زاویهٔ $ABC=\alpha$، پرتونوری درراستای مخالف راستای پرتوتابش برمی‌گردد [درحالت کلی یك‌پرتو نوری نمی‌تواند پس از $(۲n-۱)$بار انعکاس در اضلاع زاویه، در راستای تابش برگردد].

همانند حالتهای‌قبل عمل می‌کنیم،* یعنی، اگر پرتوتابش به AB برخورد کند، قرینهٔ مسیر پرتو را نسبت به‌خط BC پیدا، وفرض می‌کنیم $BA_۱$ نگارهٔ AB پس‌از این قرینه‌یابی باشد. حال قرینهٔ BC را نسبت به خط $BA_۱$ پیدا می‌کنیم تا $BA_۲$ نگارهٔ BC پس‌از این‌قرینه‌یابی به‌دست آید. سپس‌قرینهٔ $BA_۱$ را نسبت به‌$BA_۲$ پیدا می‌کنیم تا $BA_۳$ به‌دست آید، و این‌عمل را همین‌طور ادامه می‌دهیم تااینکه پس از $n-۱$ بارقرینه‌یابی $BA_{n-۱}$ را داشته‌باشیم. اکنون زاویهٔ $ABA_{n-۱}$ برابر $n\alpha$ است.

سپس، ثابت می‌کنیم که پرتوتابش، وقتی براثر این‌تقارنهای خاص ادامه پیدا کند، خط مستقیمی‌تشکیل می‌دهد که پس‌از برخورد با $A_{n-۱}B$ منعکس‌می‌شود، سپس به BA برخورد می‌کند بـه طوری‌که در راستایی مخالف بـا راستای ورودی باز می‌گردد. پس‌بنا بر آنچه قبلا ثابت شده‌بود، نتیجه‌می‌گیریم که $n\alpha=۹۰^\circ$، وازاین‌رو

$$\alpha=\frac{۹۰^\circ}{n}$$

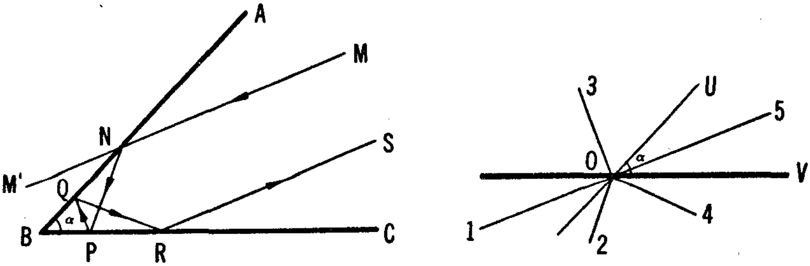
راه حل دوم. گیریم ABC زاویـهٔ مفروض باشد، و $MNPQ\ldots$ مسیر پرتو نوری (← شکل ۱۰۲ الف که در آن $n=۲$، $\alpha=۴۵^\circ$). تنها بـه‌راستاهای مسیر علاقه‌مندیم، وبنا براین مناسبتر آن‌است که مبدأ تمام این راستاهارا نقطهٔ منحصر به‌فرد O بگیریم (درشکل

$$O۱\|MN\quad,\quad O۲\|NP\quad,\quad O۳\|PQ$$

والی‌آخر). چون $\sphericalangle MNA=\sphericalangle PNB$، از اینجـا نتیجه می‌شود کـه پرتو $O۲$

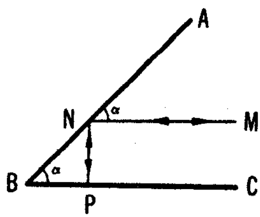
---

* درچاپ روسی این‌کتاب، جزئیات اثبات‌آمده‌است. ما دراینجاآنهارا حذف‌کرده‌ایم که هم درجا صرفه‌جویی شود وهم ازنمادهای پیچیده اجتناب‌گردد.



شکل ۱۰۲ الف

نگارهٔ $O۱$ است نسبت به‌خط $OU \| AB$ (برای اثبات این مطلب کافی است که به شکل ۱۰۲ الف توجه کنیم، NM' نگارهٔ NP است نسبت به NB). به‌طریق مشابه، پرتو $O۳$ نگارهٔ $O۲$ است نسبت به‌خط $OV \| BC$. لذا به موجب گزارهٔ ۳ صفحهٔ ۵۱ ، پرتو $O۳$ از پرتو $O۱$ بادوران به‌زاویهٔ $۲\measuredangle UOV = ۲\alpha$ به‌دست‌می‌آید. به‌همین‌منوال $O۵$ از پرتو $O۳$ بادورانی به‌زاویهٔ ۲α درهمان راستا به‌دست می‌آید؛ درنتیجه پرتو $O۵$ از پرتو $O۱$ با دورانی به زاویهٔ ۴α به‌دست می‌آید، وهمینطور الی‌آخر. بنابراین، اگر $\alpha = ۹۰^\circ/n$، آنگاه پرتو $O(۲n+۱)$ که راستایش همان راستای بازگشت پرتو نوری پس از n انعکاس در هر دو ضلع زاویه است، با پرتو $O۱$ زاویهٔ $n \times ۲\alpha = ۱۸۰^\circ$ تشکیل خواهد داد، که حکم مسأله را ثابت می‌کند. [دراینجا فرض می‌کنیم که $۰ < \measuredangle MNA < \alpha$؛ اگر $\measuredangle MNA > \alpha$، خط MN خط BC را قطع خواهد کرد، که بدین‌معنی است که پرتو نوری ورودی باید پیش از برخورد به‌ضلع BA، ازضلع BC منعکس‌شود. این مطلب گویای آن است که پرتوهای مربوط به‌راستاهای $O۱$، $O۳$، $O۵$، ... والی‌آخر، همگی به‌آینهٔ BA برمی‌خورند، درحالی که پرتوهای مربوط به راستاهای $O۲$، $O۴$، ... الی‌آخر، به آینهٔ BC برخورد می‌کنند. اگر $\measuredangle MNA = \alpha$ ، یعنی، اگر پرتوتابش MN موازی ضلع BC باشد،



شکل ۱۰۲ ب

جهت پرتو $O(2n)$ درجهت عکس $O1$ خواهد بود: در این حـالت پرتو نهایی در مسیری مخالف مسیر پرتوتـابش اولیه برمی‌گردد؛ ولی تعداد انعکاسها یکی کمتر از حالت کلی‌است؛ ← شکل۱۰۲ب، که درآن $\sphericalangle ABC=45^\circ$، $\sphericalangle MNA=45^\circ$].

این‌ملاحظات نشان‌می‌دهند که‌اگر $\alpha\neq 90^\circ/n$، هر پرتو تابشی بعدازانعکاسهای پیاپی دراضلاع، در راستای مخالف راستای پرتو اولیه برنخواهدگشت.

۳۹. الف) راه حل اول (← نیز راه حل‌اول مسأله‌های ۱۵ و ۲۱). گیریم n-ضلعی مورد نظر $A_1A_2\ldots A_n$ باشد و B_1 نقطه‌ای درصفحه. قرینه‌های پاره خط A_1B_1 را به‌ترتیب نسبت به‌خط

$$l_1 \quad ، \quad l_2 \quad ،\ldots ، \quad l_n$$

پیدا می‌کنیم تا پاره‌خطهای A_2B_2، A_3B_3، ...، A_nB_n، A_1B_{n+1} به‌دست آیند. چون این پاره‌خطها همگی بایکدیگر قابل انطباق‌اند، نتیجه می‌شود که $A_1B_1=A_1B_{n+1}$، یعنی، نقطهٔ A_1 ازنقاط B_1 و B_{n+1} به یك فاصله است، واز این رو برعمود منصف پاره خط B_1B_{n+1} قرار دارد.

حال‌نقطهٔ دیگر C_1 را درصفحه‌انتخاب وفرض‌می‌کنیم C_2،C_3،...،C_n،C_{n+1} نقاط حاصل ازقرینه‌یابی‌های پیاپی C_1 نسبت به l_1، l_2،...، l_{n-1}، l_n باشند. واضح است‌که رأس A_1 دراین n-ضلعی‌نیز از نقاط C_1 و C_{n+1} به‌یك فاصله‌است، وبنا براین برعمودمنصف C_1C_{n+1} قراردارد. پس A_1 می‌تواند به‌صورت فصل‌مشترك‌عمودمنصفهای پاره خطهای B_1B_{n+1} و C_1C_{n+1} مشخص‌شود (وقتی‌دونقطهٔ متمایز B_1وC_1 انتخاب شدند، پاره‌خطهای B_1B_{n+1} و C_1C_{n+1} را می‌توانیم رسم کنیم). ازقرینه‌یابی پیاپی A_1 نسبت به n خط مفروض، بقیهٔ راسهای n-ضلعی را به‌دست می‌آوریم.

درصورتی‌که پـاره خطهای B_1B_{n+1} و C_1C_{n+1} موازی نباشند (یعنی، اگر عمود منصفهای p و q در یـك نقطه متقاطع بـاشند) مسأله جوابی یکتا دارد؛ اگر $B_1B_{n+1}\|C_1C_{n+1}$، آنگاه اگر p و q متمایز باشند مسأله اصلا جواب ندارد، و اگر p و q منطبق باشند، مسأله بینهایت جواب دارد.

n-ضلعی حاصل از این راه حل ممکن است خودش را قطع کند.

اشکال این راه حل این‌است که به‌تفاوت‌اساسی موجود میان حالتهای n زوج و n فرد هیچ‌گونه اشاره‌ای ندارد (← راه حل دوم مسأله).

راه حل دوم. (← نیز راه حلهای دوم مسائل ۱۵ و ۲۱). گیریم n-ضلعی‌مورد نظر $A_1A_2\ldots A_n$ باشد (←شکل ۵۰ الف). اگرقرینه‌های رأس A_1 را مرتباً نسبت

به‌خطوط $l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, l_n$ پیدا کنیم نقاط $A_2, A_3, \dots, A_n$ وبالاخره دوباره A_1 را به‌دست خواهیم آورد. پس A_1 نقطهٔ ثابت مجموع تقارنها نسبت به خطوط $l_1, l_2, \dots, l_n$ است.

حال دوحالت جداگانه را درنظرمی‌گیریم.

حالت اول: n زوج. دراین حالت مجموع تقارنها نسبت به خطوط $l_1, l_2, \dots, l_n$ درحالت کلی، یك دوران حول یك نقطهٔ O است (← صفحهٔ ۵۷)، که می‌تواند با توجه به ترسیمی که درجمع تقارنها به‌کار رفته، به‌دست آید. نقطهٔ O تنها نقطهٔ ثابت دوران است. وبنا براین A_1 باید بر O منطبق باشد. با یافتن A_1 مشخص کردن بقیهٔ رئوس n-ضلعی آسان است. مسأله دراین حالت یك جواب یکتا دارد.

درحالت خاص، وقتی مجموع تقارنها نسبت به‌خطوط $l_1, l_2, \dots, l_n$ یك انتقال یا تبدیل همانی (یك دوران به‌زاویهٔ صفر درجه، یاانتقال به‌فاصلهٔ (صفر) باشد، مسأله یا اصلا جوابی ندارد (انتقال نقطهٔ ثابت ندارد) ویا بیش ازیك جواب دارد، زیرا هر نقطهٔ صفحه می‌تواند رأس A_1 اختیار شود (هر نقطه، یك نقطهٔ ثابت تبدیل همانی است).

حالت دوم: n فرد. دراین‌حالت مجموع تقارنها نسبت به‌خطوط $l_1, l_2, \dots, l_n$ درحالت کلی یك‌لغزه است (← صفحات ۵۷ و ۵۸) چون لغزه نقطهٔ ثابت‌ندارد درحالت کلی وقتی n فرد باشد، جوابی وجود ندارد. درحالت خاص، وقتی مجموع تقارنها نسبت به‌خطوط $l_1, l_2, \dots, l_n$ تقارنی نسبت به یك خط l باشد (این خط را می‌توان رسم کرد)، جواب به‌صورت یکتا تعیین نمی‌شود؛ هر نقطه ازخط l می‌تواند به‌عنوان رأس A_1 از n-ضلعی انتخاب شود (هر نقطه ازمحور تقارن، یك نقطهٔ ثابت تقارن نسبت به این خط است).

(پس، به ازای $n=3$ مسأله درحالت کلی جوابی ندارد؛ تنها حالتهای استثنا حالتهایی هستند که خطوط l_1, l_2, l_3 یکدیگر را دریك نقطه قطع می‌کنند [← مسألهٔ ۲۶ (ج)] یا با هم موازی‌اند؛ دراین حالتها مسأله بیش‌از یك جواب دارد [← گزارهٔ ۴، صفحهٔ ۵۵].

ب) این قسمت مسأله شبیه قسمت (الف) است. اگر n-ضلعی مورد نظر ما $A_1A_2\dots A_n$ باشد (← شکل ۵۰ ب)، خط A_nA_1 براثر تقارنهای پیاپی نسبت به به‌خطوط $l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, l_n$

$$A_1A_2 \ , \ A_2A_3 \ , \dots, \ A_{n-1}A_n$$

تبدیل شده، سرانجام به‌روی A_nA_1 برمی‌گردد. پس A_nA_1 خط ثابت مجموع تقارنها

نسبت به‌خطوط l_1، l_2، ...، l_n است. دوحالت را درنظر می‌گیریم.

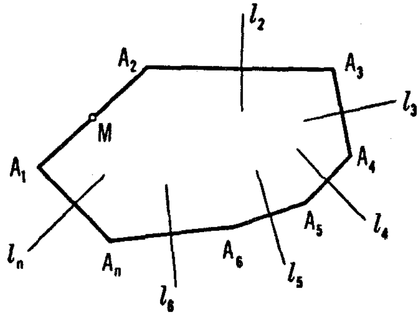
حالت اول: n زوج. دراین‌حالت مجموع تقارنها نسبت به‌خطوط l_1، l_2، ...، l_n، درحالت‌کلی، دورانی است حول یك نقطهٔ O، و بنابراین درحالت‌کلی خط ثابت ندارد. پس برای n زوج، درحالت‌کلی، مسأله جواب ندارد. درحالتهای خاص وقتی مجموع تقارنها یك نیمدورحول نقطهٔ O (دورانی به‌زاویهٔ ۱۸۰°)، یا یك‌انتقال یا یك تبدیل همانی باشد، مسأله بیش‌از یك جواب دارد. درحالت اول می‌توان هر خط دلخواهی راکه ازمرکز تقارن می‌گذرد خط A_1A_n اختیارکرد؛ درحالت دوم می‌توان هرخط موازی راستای‌انتقال را A_1A_n گرفت، درحالت سوم می‌توان هرخط صفحه را A_1A_n گرفت.

حالت دوم: n فرد. دراین‌حالت مجموع تقارنها نسبت‌به‌خطوط l_1، l_2، ...، l_n درحالت‌کلی، یك لغزه با محور l است، که این محور می‌توانند رسم شود. چون l تنها خط‌ثابت لغزه‌است، از اینجا نتیجه‌می‌شودکه‌ضلع A_1A_n از n-ضلعی مورد نظر بر l قرار دارد؛ از پیداکردن قرینه‌های پیاپی l نسبت به‌خطوط l_1، l_2، ...، l_{n-1} تمام اضلاع دیگر n-ضلعی را به‌دست می‌آوریم. پس برای n فرد، مسأله درحالت‌کلی جواب‌یکتا دارد. استثنا زمانی رخ‌می‌دهدکه مجموع تقارنها نسبت‌به‌خطوط مفروض، تقارنی نسبت به‌خط l باشد، دراین حالت مسأله بیش‌ازیك جواب دارد. برای ضلع A_1A_n، می‌توان خود خط l یا هرخط عمود برآن را درنظرگرفت.

(پس به‌ازای $n=۳$، مسأله درحالت‌کلی یك جواب یکتا دارد؛ خطوط l_1، l_2، l_3 یا همگی‌نیمسازهای زوایای خارجی‌مثلث هستند، یا دوتا ازآنها نیمسازهای زوایای داخلی هستند وسومی نیمساز زاویهٔ خارجی. تنها حالت استثنا وقتی است‌که سه خط l_1، l_2، و l_3 یکدیگر را دریك‌نقطه قطع‌کنند؛ دراین‌حالت مسأله بیش‌ازیك جواب دارد (←مسألهٔ ۲۶ الف)؛ خطوط l_1، l_2، l_3 نیمساز زوایای داخلی هستند، یا دوتا ازآنها نیمسازهای زوایای‌خارجی‌خواهند بود، وسومی‌نیمساز زاویهٔ داخلی).

یافتن جوابی مشابه راه حل اول قسمت (الف) برای قسمت (ب) را به خواننده واگذارمی‌کنیم.

۴۰. الف) فرض‌کنید مسأله حل شده‌است (شکل ۱۰۳). یك نیمدورحول نقطهٔ M رأس A_1 را به A_2 خواهد برد، یك تقارن نسبت به‌خط l_2 رأس A_2 را به A_3، و تقارن نسبت به l_3، A_3 را به A_4 و ... وبالاخره، تقارن نسبت به l_n، A_n را به A_1 خواهد برد. پس A_1 نقطهٔ ثابت مجموع یك نیمدورحول M وتقارنهای پیاپی نسبت به‌خطوط l_2، l_3، ...، l_n خواهد بود. یك نیمدورحول نقطهٔ M هم‌ارز بایك جفت تقارن نسبت به‌خطوط است. دوحالت جداگانه زیر را درنظرمی‌گیریم.



شکل ۱۰۳

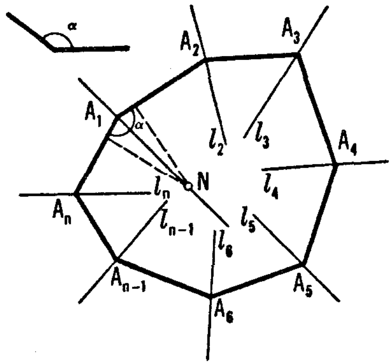
حالت اول: n فرد. دراین‌حالت مسأله به‌یافتن‌نقاط ثابت مجموع تعداد زوجی تقارن نسبت به‌خطوط بدل می‌شود. این مجموع، درحالت کلی، یك دوران حول یك نقطهٔ O است (که می‌توان بامعلوم بودن نقطهٔ M وخطوط l_2، l_3،...، l_n آن را پیدا کرد). بدین‌جهت، برای nفرد، مسأله درحالت کلی یك‌جواب یکتا دارد [←حالت اول حل‌مسألهٔ ۳۹ (الف)]. تنها حالتهای‌استثنا زمانی هستندکه مجموع تعداد زوجی تقارن نسبت به‌خطوط یا یك انتقال شود ـ که دراین‌حالت مسأله اصلا جواب ندارد؛ یا یك تبدیل همانی ـ که دراین صورت مسأله بینهایت جواب دارد.

حالت دوم: n زوج. دراین حالت مسأله برمی‌گردد به‌یافتن نقاط ثابت‌تعداد فردی تقارن نسبت به‌خطوط، درحالت‌کلی این مجموع یك‌لغزه است ومسأله جوابی ندارد (یك‌لغزه نقطهٔ‌ثابت ندارد). درحالت خاصی که مجموع‌تقارنها خود یك‌تقارن نسبت به‌یك خط باشد، مسأله می‌تواند چندین جواب داشته باشد (تقارن نسبت به‌یك خط بینهایت نقطهٔ ثابت دارد، یعنی تمامی نقاط محور l نقاط ثابت‌اند).

این ترسیم را می‌توان به‌طریقی مشابه با رسم اولین راه حل مسألهٔ ۳۹(الف) بیان‌کرد. چندضلعی‌حاصل که برای حل مسأله‌رسم‌شده ممکن‌است خودش راقطع‌کند.

ب) فرض‌کنید مسأله حل‌شده‌است(شکل۱۰۴). دورانی به‌زاویهٔ $\alpha - ۱۸۰^\circ$ حول نقطهٔ M، خط A_nA_1 را به‌خط A_1A_2 بدل می‌کند. تقارن نسبت به l_2 پاره‌خط A_1A_2 را به A_2A_3 می‌برد، تقارن نسبت به l_3، خط A_2A_3 را به A_3A_4 می‌برد. و... و، تقارن نسبت به l_n، $A_{n-1}A_n$ را به A_nA_1 می‌برد. پس A_nA_1 خط ثابت تبدیل حاصل ازمجموع دورانی به‌زاویهٔ $\alpha - ۱۸۰^\circ$ حول‌نقطهٔ M است (که‌می‌تواند جایگزین دوتقارن‌نسبت به‌خطوط شود) و $n - ۱$ تقارن نسبت به‌خطوط l_2،l_3،...،l_n.

دوحالت جداگانهٔ زیر را درنظرمی‌گیریم.



شکل ۱۰۴

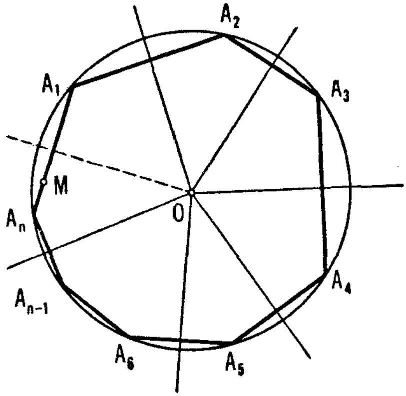
حالت اول : n زوج. مجموع تعداد فردی تقارن نسبت به‌خطوط درحالت کلی لغزه‌ای است که یك‌خط ثابت یکتا، یعنی یك محور تقارن دارد (که می‌تواند مشخص شود)، وبنا براین مسأله یك جواب یکتا دارد. درحالت خاصی که مجموع تقارنها، یك تقارن نسبت به‌یك خط باشد، مسأله بینهایت جواب دارد (زیرا تقارن نسبت به یك خط بینهایت خط ثابت دارد).

حالت دوم : n فرد. دراین حالت تبدیلی که داریم مجموع تعداد زوجی تقارن نسبت به‌خطوط است که، درحالت کلی، یك دوران است. دراین حالت مسأله جوابی ندارد. درحالتهای خاص ممکن است، مجموع این تقارنها یك نیمدورحول یك‌نقطه، یا یك انتقال، یا تبدیل همانی باشد. درهریك ازاین حالتها مسأله می‌تواند بیش‌ازیك جواب داشته باشد.

چند ضلعی حاصل که برای حل مسأله رسم شده، ممکن است خودش را قطع کند؛ خطوط $l_۲$، $l_۳$،...، l_n نیمسازهای زوایای داخلی یا خارجی خواهند بود.

این ترسیم نیزمی‌تواند به‌طریق‌مشابه با راه حل‌اول مسألهٔ ۳۹(الف) انجام گیرد.

۴۱. الف) گیریم $A_۱A_۲A_۳...A_n$ n-ضلعی موردنظر باشد(شکل ۱۰۵). قرینه‌های رأس $A_۱$ را مرتباً نسبت به‌خطوط مرسوم از O، مرکز دایره، وعمود براضلاع $A_۱A_۲$، $A_۲A_۳$...، $A_{n-۱}A_n$، $A_n A_۱$ از n-ضلعی پیدا می‌کنیم (این خطوط معلوم‌اند، چون راستاهای اضلاع n-ضلعی داده شده‌اند)؛ نخست رأس $A_۱$ به $A_۲$، سپس $A_۲$ به $A_۳$، ... وبعد $A_{n-۱}$ به A_n برده می‌شود، وسرانجام A_n به $A_۱$ بازگردانیده می‌شود. پس



شکل ۱۰۵

A_1 نقطهٔ ثـابت مجموع n تقارن نسبت به‌خطوط معلوم است. دوحالت جداگانه در نظر می‌گیریم.

حالت اول : n فرد. چون مجموع سه تقارن نسبت به‌سه خط متقارب، بازیك تقارن نسبت به خطی است کـه ازنقطهٔ تقارب می‌گذرد (←گزارهٔ ۴ صفحهٔ ۵۵) به‌آسانی دیده می‌شودکه مجموع تعداد فردی تقارن نسبت به‌خطوطی‌که همه از یك نقطه می‌گذرند، باز یك‌تقارن نسبت به‌خطی است‌که از این نقطه می‌گذرد. (نخست به‌جای سه تقارن اولی یك تقارن تنها می‌گذاریم، سپس بـه‌جای مجموع این تقارن و دوتقارن بعدی، همین‌کار را می‌کنیم، وهمین طور الی آخـر). پس مجموع این n تقارن، یك تقارن نسبت به‌خطی است‌که بر نقطهٔ O، مرکز دایره، می‌گذرد. دقیقاً دو نقطه بردایره وجود دارندکه براثر تقارن نسبت به l ثابت می‌مانند؛ این نقاط، نقاط تقاطع‌دایره با l هستند. اگریکی ازاینها به‌عنوان‌رأس A_1 ازچندضلعی‌مطلوب درنظر گرفته شود، رئوس دیگر با تقارنهای پیاپی این نقطه نسبت به n خط پیدا می‌شوند. مسأله دوجواب دارد.

حالت دوم : n زوج. مجموع هردوتقارن نسبت بـه دوخط‌که از یك نقطهٔ O می‌گذرند، دورانی‌است حول نقطهٔ O به‌یك زاویهٔ مشخص. از اینجا نتیجه می‌شودکه به‌جای مجموع تعداد زوجی، n، تقارن نسبت به‌خطوطی‌که بریك نقطهٔ O می‌گذرند می‌توان مجموع $n/۲$ دوران حول O را قـرار داد؛ از اینجا نتیجه می‌شود کـه این مجموع، خود دورانی حول O است. چون یك دوران حول O، در حالت‌کلی، نقطهٔ

ثابتی بر دایرهٔ به مرکز O ندارد، پس مسأله ما درحالت کلی جواب ندارد. استثنا زمانی است که مجموع n تقارن محوری بدل به یك تبدیل همانی شود؛ دراین حالت مسأله بینهایت جواب دارد ـ هر نقطه ازدایره می‌تواند رأس A_1 از n-ضلعی مطلوب باشد.

ب) فرض کنیم n-ضلعی رسم شده‌است (← شکل ۱۰۵). قرینه‌های رأس A_1 را مرتباً نسبت به $(n-1)$ خط عمود بر اضلاع A_1A_2، A_2A_3، ...، $A_{n-1}A_n$ که از O، مرکز دایره، می‌گذرند پیدا می‌کنیم (این خطوط معلوم‌اند، زیرا نقطهٔ O و امتدادهای اضلاع چند ضلعی داده شده‌اند)؛ این رشته عمل A_1 را به A_n می‌برد. دو حالت جداگانه درنظر می‌گیریم.

حالت اول: n فرد. دراین‌حالت مجموع $(n-1)$ تقارن نسبت به‌خطوطی که بر نقطهٔ O می‌گذرند، دورانی است حول O به‌زاویهٔ α (که می‌توان پیدا کرد). پس زاویهٔ $A_1O\,A_n=\alpha$ زاویه‌ای است معلوم، و بنابراین طول وتر A_1A_n وفاصله‌اش ازمرکز دردست‌اند. چون A_1A_n باید ازنقطهٔ مفروض M بگذرد، تنها کافی‌است که مماسهایی از M بر دایرهٔ به‌مرکز O وشعاعی مساوی فاصلهٔ وتر A_1A_n تا مرکز O، رسم کنیم. مسأله می‌تواند دو یا یك جواب داشته باشد یا اصلا جواب نداشته باشد.

حالت دوم: n زوج. دراین حالت مجموع $(n-1)$ تقارن نسبت به‌خطوطی که براین‌نقطهٔ مشترك می‌گذرند، تقارنی است نسبت به‌خط l که براین‌نقطه می‌گذرد. پس A_1 و A_n قرینه‌های یکدیگر نسبت به l هستند. چون A_1A_n باید ازنقطهٔ معلوم M بگذرد، پس می‌توان‌آن را به‌آسانی ازراه رسم عمود از M بر l به‌دست‌آورد. مسأله همواره یك جواب یکتا دارد.

۴۲. الف) چون مجموع سه تقارن نسبت به‌سه خط l_1، l_2، و l_3 متقارب دریك نقطهٔ O، یك تقارن نسبت به یك خط l است (که این خط نیز ازنقطهٔ O می‌گذرد)، از اینجا نتیجه می‌شود که نقطهٔ A_3 از A براثر تقارن نسبت به l به‌دست می‌آید. اما A_6 از A_3 با تقارن نسبت به l به‌دست می‌آید، وبنابراین A_6 بر A منطبق‌می‌شود.

این نتیجه برای هر تعداد فردی خط متقارب، معتبر است (با مسألهٔ ۱۳ مقایسه شود). اگرتعداد زوجی خط که بریك نقطهٔ O می‌گذرند داشته باشیم، آنگاه مجموع n تقارن نسبت به‌این خطوط، دورانی است حول نقطهٔ O به‌زاویهٔ α. وبنابراین نقطهٔ A_{2n} پس‌از $2n$ دوران تنها، درحالتی‌که α مضربی از 180° باشد، بر نقطهٔ اولیهٔ A منطبق خواهد شد.

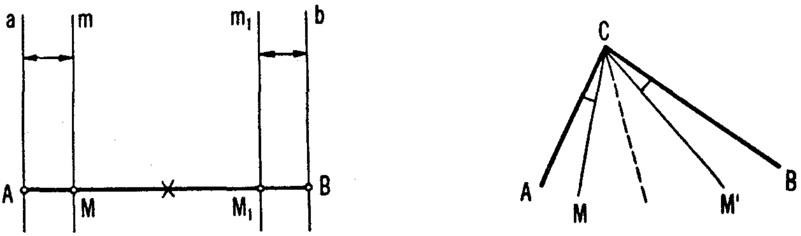
تذکر: نقطهٔ A_6 که با شش تقارن پیاپی نقطهٔ دلخواه A نسبت به خطوط l_1 و

l_2 و l_3، l_1، l_2، l_3 به‌دست می‌آید بر نقطهٔ اولیهٔ A منطبق خواهد شد، اگر و تنها اگر l_1، l_2، و l_3 متقارب یا همگی موازی باشند [اگر $l_1 \| l_2 \| l_3$، مجموع تقارنها نسبت به l_1، l_2، و l_3 تقارنی است نسبت به یك خط l، واستدلالی که درمسألهٔ ۴۲ (الف) به‌کار رفته می‌تواند کارساز باشد]. درهمهٔ حالتهای دیگر مجموع سه تقارن نسبت به l_1، l_2، و l_3 یك لغزه است، و بنابراین نقطهٔ A_6 از A بـا دولغزهٔ پیاپی درطول محور l، یعنی با انتقالی در راستای l، به‌دست می‌آید؛ پس A_6 نمی‌تواند بر A منطبق شود. [مجموع دو لغزهٔ (مانند هم) درطول یك محور l می‌تواند به صورت مجموع چهار تبدیل زیر نوشته شود: انتقال در طول l، تقارن نسبت به l، تقارن نسبت به l، و انتقال درطول l (← صفحهٔ ۴۹) یعنی، مجموع دو انتقال (مانند هم) درطول l.]

ب) این مسأله اساساً همان مسألهٔ قسمت (الف) است [و نیز ← مسألهٔ ۱۴ (ب)].

ج) مجموع دو تقارن نسبت بـه l_1 و l_2 دورانی است حول O، نقطهٔ تقاطع آنها، بزاویهٔ α؛ مجموع دو تقارن نسبت به l_3 و l_4 دورانی است حول O به‌زاویهٔ β. از اینجا نتیجه می‌شود (که این تقارنها به‌هر ترتیبی انجام شوند) نقطهٔ A_4 از A، با دورانی حول O بـه‌زاویهٔ $\beta+\alpha$ به‌دست می‌آید، که این همان چیزی است کـه می‌خواستیم ثابت کنیم [با مسألهٔ ۱۴ (الف) مقایسه کنید].

۴۳. الف) چون سه‌خط CM، AN، و BP دریك نقطه متقارب‌اند، نتیجه می‌شود که مجموع تقارنها نسبت به‌خطوط CM، AN، BP، CM، AN، BP یك‌تبدیل همانی است [← مسألهٔ ۴۲ (الف)]. برای اینکه نشان دهیم خطوط CM'، AN'، و BP' همدیگر را دریك‌نقطه قطع می‌کنند کافی است نشان دهیم که مجموع تقارنها نسبت به خطوط CM'، AN'، BP'، CM'، AN'، BP' نیز یك تبدیل همانی است [← تذکر بعدازحل مسألهٔ ۴۲ (الف)]. اما تقارن نسبت به‌خط CM' با مجموع سه تقارن نسبت به‌خطوط CB، CM، و CA کـه همه در نقطهٔ C متقاطع‌اند، یکی است. این مطلب ازاین واقعیت نتیجه می‌شود که دوران به‌زاویهٔ BCM' حول نقطهٔ C خط CM را بـه CA، وخط CB را به CM'، که قرینهٔ CM نسبت به‌نیمساز زاویهٔ BCA است، بدل‌می‌کند (شکل ۱۰۶ الف را باشکل ۴۷ ب مقایسه، واثبات نیمهٔ دوم‌گزارهٔ ۴ صفحهٔ ۵۵ را مطالعه‌کنید). به‌طریق مشابه، تقارن نسبت به AN' با مجموع سه تقارن نسبت به‌خطوط AC، AN، و AB، وتقارن نسبت به BP' با مجموع سه تقـارن نسبت بـه‌خطوط BA، BP، و BC یکی است. از اینجا نتیجه می‌شود که مجموع سه تقارن نسبت به CM'، AN'، و BP' بـا مجموع نه تقارن نسبت بـه‌خطوط زیـر یکی است: CB، CM، CA، $AC(=CA)$، AN، AB، $BA(=AB)$، BP، و BC. چون دوتقارن متوالی نسبت به‌یك‌خط یکدیگر را خنثی می‌کنند، پس این نه تقارن با مجموع پنج تقارن نسبت به‌خطوط CB، CM، AN،



(ب) (الف)

شکل ۱۰۶

BP، و BC یکی می‌شود. حال این تبدیل را دوبار انجام می‌دهیم، مجموع تقارنها نسبت به‌ده خط: CB، CM، AN، BP، BC، $CB(=BC)$، CM، AN، BP، و BC، را به‌دست می‌آوریم که بامجموع تقارنها نسبت به‌هشت خط CB، CM، AN، BP، CM، AN، BP، و BC یکی است. اما اگرمجموع تقارنها نسبت به شش خط «داخلی» تبدیل همانی باشد، مجموع هشت تقارن نسبت به هشت خط به‌مجموع دوتقارن نسبت به CB و $BC(=CB)$، یعنی به‌تبدیل همانی منجر می‌شود.

ب) خطوط عمود براضلاع AB، BC، و CA ازمثلث ABC، به‌ترتیب در نقاط M و M_1، N و N_1، P و P_1 را با m و m_1، n و n_1، p و p_1 نشان می‌دهیم. گیریم a و b خطوط عمود برضلع AB درنقاط A و B باشند. باید نشان‌دهیم که اگر مجموع تقارنها نسبت به‌خطوط m، n، p، m، n، p یک تبدیل همانی باشد، مجموع تقارنها نسبت به‌خطوط m_1، n_1، p_1، m_1، n_1، p_1 نیز یک‌تبدیل همانی است [با حل قسمت (الف) مسأله مقایسه‌کنید]؛ واضح است که عمودهای مرسوم بر دوضلع مختلف مثلث نمی‌توانند با یکدیگر موازی باشند. اما تقارن نسبت به m_1 با مجموع تقارنها نسبت به نقطهٔ A، نسبت به‌خط m، ونسبت به‌نقطهٔ B یکی است. به طریق مشابه، تقارن‌نسبت به n_1 برابر بامجموع تقارنها نسبت‌به B، n، و C است؛ وتقارن نسبت به p_1 برابرمجموع تقارنها نسبت به C، P، و A است. برای اثبات اولین حکم، ملاحظه می‌کنیم که تقارن نسبت به A برابر مجموع دوتقارن نسبت به AB و a است، وتقارن نسبت به B برابرمجموع دوتقارن نسبت به b و AB است؛ پس مجموع تقارنها نسبت به A، m، و B مساوی است با مجموع تقارنها نسبت به پنج خط AB، a، m، b، و AB. اما مجموع سه‌تقارن «داخلی» مساوی یک‌تقارن‌تنها نسبت به m_1 است ــ این مطلب از این واقعیت نتیجه می‌شود که انتقال دوخط a و m که خط m را به b بدل می‌کند، a را به m_1 بدل خواهد کرد (چون m_1 قرینهٔ

m نسبت به وسط پاره خط AB است؛ شکل ۱۰۶ ب را باشکل ۴۷ الف مقایسه کنید). پس مجموع پنج تقارن هم‌ارز است با مجموع سه تقارن نسبت به خطوط AB، m_1، و AB، یا هم‌ارز است یامجموع دوتقارن نسبت به M_1 و AB. تقارن نسبت به M_1 نیزمساوی مجموع تقارنها نسبت به m_1 و AB به‌همان ترتیب است. پس مجموع تقارنها نسبت به M_1 و AB مساوی است با مجموع تقارنها نسبت به m_1، AB و AB، که بایك تقارن تنها نسبت به m_1 برابر است.

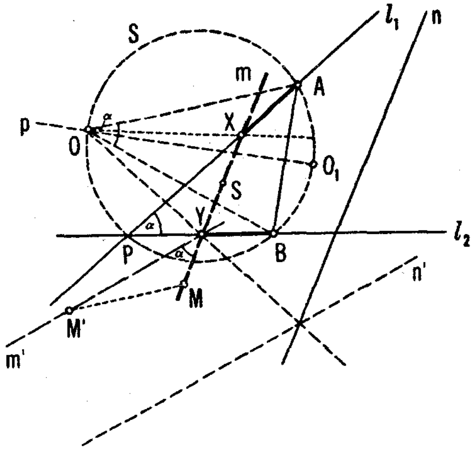
حال واضح است‌که مجموع تقارنها نسبت به‌شش خط m_1، n_1، p_1، m_1، n_1، p_1 مساوی مجموع تقارنها نسبت به‌نقاط وخطوط: A، m، B؛ B، n، C؛ C، P، A؛ A، m، B؛ B، n، C؛ C، p، A، یامجموع تقارنها نسبت به A، m، n، p، m، n، p، A است. پس، اگر مجموع شش تقارن «داخای» تبدیل همانی باشد، مجموع تمامی تقارنها (که دراین حالت بـه‌دوتقارن نسبت به نقطهٔ A بدل می‌شود) نیز یك تبدیل همانی است [با راه حل قسمت (الف) مقایسه‌کنید].

۴۴. اگرمجموع سه تقارن نسبت به‌سه خط درصفحه را دوبار درنظر بگیریم، یایك تبدیل همانی به‌دست می‌آوریم یایك‌انتقال [← راه حل مسألهٔ ۴۲ (الف) و بخصوص تذکری‌که درپی راه حل آمـده است]. پس «اولین» نقطهٔ A_{12} از A براثرمجموع دوانتقال (یك یا حتی هردوآنها ممکن است «انتقالی بدفاصلهٔ صفر باشند» یعنی‌تبدیل همانی) به‌دست می‌آید، «دومین»نقطه (که آن‌را A'_{12} می‌نامیم) از A براثرمجموع همان دوانتقال اما درجهت مخالف به‌دست می‌آید. پس حکم مسألـه از اینجا نتیجه می‌شود [با حل مسألهٔ ۱۴ (الف) مقایسه‌کنید].

۴۵. راه حل اول (برپایهٔ قضیهٔ ۱ صفحهٔ ۶۴). نخست فرض‌می‌کنیم خطوط l_1 و l_2 موازی نیستند (شکل ۱۰۷ الف). فرض‌کنید مسأله حل شده است. بنابرقضیهٔ ۱، پاره خط AX می‌تواند با یك دوران به‌پاره خط BY، قابل انطباق با خودش، بدل شود، پس A به B بدل می‌شود و X به Y (چون l_1 و l_2 موازی نیستند، AX نمی‌تواند باانتقال به BY بدل‌شود). α، زاویهٔ دوران، مساوی زاویهٔ بین l_1 و l_2 است؛ پس نقطهٔ O، مرکز دوران، می‌تواند نقطهٔ تقاطع خط p، عمود منصف پاره خط AB، با کمان درخور زاویـهٔ α مرسوم بروتر AB باشد (این کمان روی S، دایرهٔ محیطی مثلث ABP، واقع است و P نقطهٔ تقاطع l_1 و l_2 است).* فرض‌کنیم این دوران خط مورد نظر m را به‌خط m' بدل‌کند و از Y نیز بگذرد. حال قسمتهای (الف)،

---

* دایرهٔ S وعمود منصف p در دونقطهٔ O و O_1 متقاطع‌اند، این دونقطه به‌حالتهایی‌که X و Y دریك طرف یا در دوطرف خط AB واقع باشند، مربوط می‌شوند.



شکل ۱۰۷ الف

(ب)، (ج)، و (د) مسأله را جداگانه بررسی می‌کنیم.

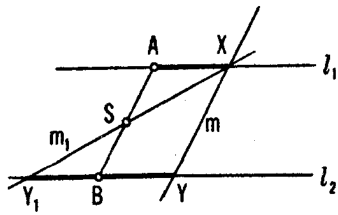
الف) خط n را حول مرکز O، که در بالا پیدا کردیم، به زاویهٔ α دوران می‌دهیم؛ خط حاصل را n' می‌نامیم. خط OY زوایای بین m و m'، و نیز n و n' را نصف خواهد کرد؛ از این رو Y می‌تواند از تقاطع l_2 با خط واصل از O به نقطهٔ تقاطع n و n' به دست آید. مسأله می‌تواند دو جواب داشته باشد.

ب) m' از نقطهٔ M' یعنی نگـارهٔ M بر اثر دوران به زاویهٔ α حول نقطهٔ O می‌گذرد؛ زاویهٔ بین m و m' مساوی α است. بدین جهت Y می‌تواند نقطهٔ تقاطع خط l_2 با کمان درخور زاویهٔ α که بر MM' بنا می‌شود، باشد. مسأله می‌تواند دو جواب داشته باشد.

ج) در مثلث متساوی‌الساقین OXY می‌دانیم کـه زاویهٔ رأس α، و قاعدهٔ XY مساوی a است. از این رو می‌توانیم فاصلهٔ OX را از نقطهٔ O تا نقطهٔ مجهول X پیدا کنیم. مسأله می‌تواند تا چهار جواب داشته باشد.

د) گیریم نقطهٔ S وسط XY باشد. چون زوایای مثلث متساوی‌الساقین OXY معلوم‌اند و نسبتهای زیر را نیز داریم

$$\text{زاویه } XOS = \frac{1}{2}\alpha \quad \text{و} \quad \frac{OS}{OX} = k$$



شکل ۱۰۷ ب

بنا بر این نقطهٔ S از X به‌کمك يك تجانس مـارپیچی به دست می‌آید (← جلد ۲، فصل ۱، بخش ۲).* نقطهٔ S از تلاقی‌خط r وخط l'_1، که از l_1 بر اثر تجانس‌مارپیچی به‌دست‌آمده است، پیدا می‌شود. خط مطلوب m عمود بر OS است. مسأله درحالت کلی دوجواب دارد؛ اگر l'_1 بر r منطبق باشد، جواب نامعین است.

اگر $l_1 \| l_2$، خط مطلوب m یا ازنقطهٔ S وسط پاره خط AB می‌گذرد، یا با AB موازی است (شکل ۱۰۷ ب). دراین‌حالتها مسأله ساده‌ترمی‌شود. ما فقط تعداد جوابها را مشخص می‌کنیم:

الف) اگر n با l_1 یـا AB موازی نباشد، يك جواب دارد، اگر $n \| l_1 \| l_2$ جوابی ندارد، اگر $n \| AB$ بینهایت جواب دارد.

ب) اگر M برخط AB یا برخط l_0، که به‌يك فاصله از l_1 و l_2 و موازی با آنهاست، نباشد دوجواب دارد. اگر M بر AB یا بر l_0 واقع باشد اما بر S واقع نباشد، يك جواب دارد، اگر M بر S واقع باشد، بینهایت جواب دارد.

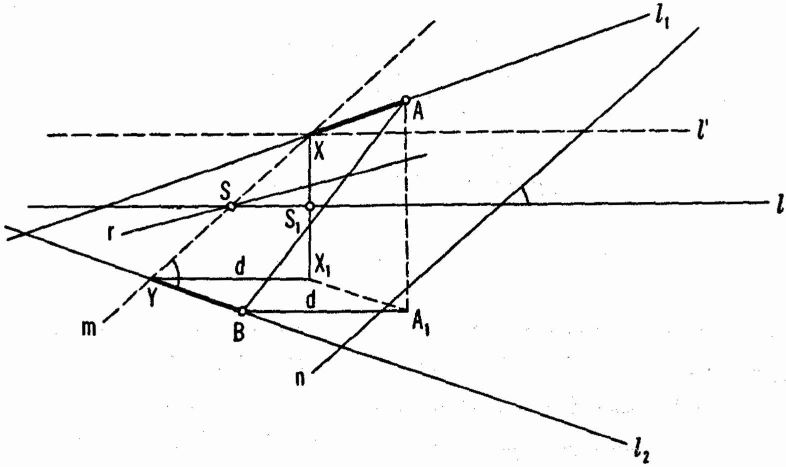
ج) اگر $a \neq AB$، و $a > d$ (d فاصلهٔ بین l_1 و l_2 است)، دوجواب دارد؛ اگـر $a = d$ اما $d \neq AB$، يك جواب دارد؛ اگـر $a < d$ جواب نـدارد؛ اگر $a = AB(\geqslant d)$، بینهایت جواب دارد.

د) اگر r موازی $l_1 \| l_2$ نباشد و از S نگذرد يك جواب دارد؛ اگر $r \| l_1$، اما از S نگذرد، جوابی ندارد، اگر r از S بگذرد بینهایت جواب دارد.

راه حل دوم قسمتهای (الف)، (ج)، (د) (براساس قضیهٔ ۲، صفحه ۶۶). بنا بر قضیهٔ ۲ پاره خط AX می‌تواند با تقارن لغزه‌ای (یا قرینهٔ معمولی نسبت به‌يك خط، که می‌تواند حالت خاص‌لغزه درنظرگرفته شود) به‌پاره خط قابل‌انطباق با BY بدل شود چنان‌که A به B برود و X به Y. همچنین محور لغزه، l، موازی نیمساززاویهٔ

---

* راه حل دوم بدین علت بهتر است که درآن ازمباحث جلد دوم استفاده نمی‌شود.



شکل ۱۰۸

بین l_1 و l_2 است واز وسط پاره‌خط AB می‌گذرد.* طول انتقال، d، مساوی A_1B است که A_1 قرینهٔ A نسبت به l است (شکل ۱۰۸). همچنین، گیریم X_1 قرینهٔ X نسبت به l باشد، دراین حالت

$$X_1Y=d \quad \text{و} \quad X_1Y\|l$$

حال سه حالت (الف)، (ج)، و (د) را جداگانه بررسی می‌کنیم.

الف) درمثلث XX_1Y ضلع $X_1Y=d$، ونیز $\measuredangle XYX_1$ (که‌مساوی زاویهٔ بین m و l است) معلوم‌اند، از این‌رو طول ضلع XX_1 را می‌توان پیداکرد. اما X می‌تواند نقطهٔ تقاطع خط l_1 و خط l' موازی با l به فاصلهٔ $XX_1/2$، باشد. در حالت کلی، وقتی l_1 موازی l_2 نیست، مسأله دوجواب دارد.

ج) درمثلث XX_1Y، وتر $XY=a$ وضلع $X_1Y=d$ معلوم‌اند؛ از این‌رو ضلع دیگر XX_1 می‌تواند پیدا شود. بقیهٔ ترسیم مشابه‌قسمت(الف) است؛ درحالت

---

* چون زوایای حاصل‌ازتقاطع l_1 و l_2 دو نیمسازدارند، لغزه‌ای‌که AX را به BY بدل می‌کند می‌تواند به دو روش مختلف پیدا شود (بسته به‌حالتهایی‌که X و Y دریك طرف یا در دوطرف خط AB باشند. اگر $l_1\|l_2$، آنگاه محور یکی ازاین لغزه‌ها موازی l_1 و l_2 است. درحالی‌که محور دیگرعمود برآنهاست. این حالت بیانگر نقش خاصی است که حالت توازی l_1 و l_2 در راه حل قسمتهای (الف)، (ج) و (د) بازی می‌کند.

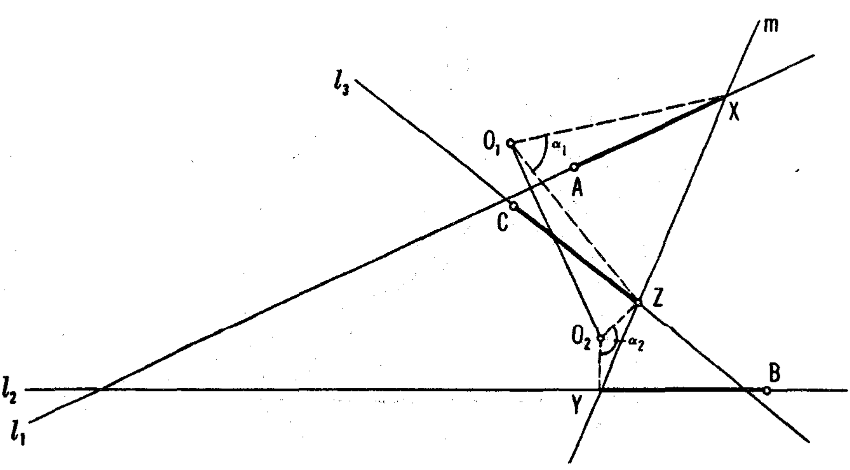
کلی مسأله دوجواب دارد.

د) نقطهٔ S، وسط پاره خط XY، باید برخط l، میانخط مثلث XX_1Y، واقع باشد. از این‌رو S نقطهٔ تقاطع l و r است. X اکنون می‌تواند از تقاطع l_1 با خط r، عمود بر l در نقطهٔ S_1، (که در آن $SS_1 = d/2$) به‌دست آید. درحالت کلی مسأله دوجواب دارد.

۴۶. فرض می‌کنیم که همهٔ خطوط l_1، l_2، و l_3 باهم موازی نیستند، مثلا l_3 موازی l_1 یا l_2 نیست. فرض می‌کنیم مسأله حل‌شده است(شکل ۱۰۹). بنا بر قضیهٔ ۱، دورانی وجود دارد که AX را به CZ بدل می‌کند ودورانی وجود دارد که BY را به CZ بدل می‌کند، زوایای دوران، α_1 و α_2، به‌ترتیب مساوی زوایای بین l_1 و l_3 و بین l_2 و l_3 هستند. مراکز دوران، O_1 و O_2، دقیقاً می‌توانند مانند راه حل اول مسألهٔ ۴۵ (الف)تا(د) پیدا شوند. ازمثلثهای متساوی‌الساقین O_1XZ و O_2YZ که زوایای O_1 و O_2 درآنها به‌ترتیب مساوی α_1 و α_2 هستند، نتیجه می‌شود:

$$\sphericalangle O_1ZX = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha_1 \quad , \quad \sphericalangle O_2ZY = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha_2$$

از اینجا نتیجه می‌شود که



شکل ۱۰۹

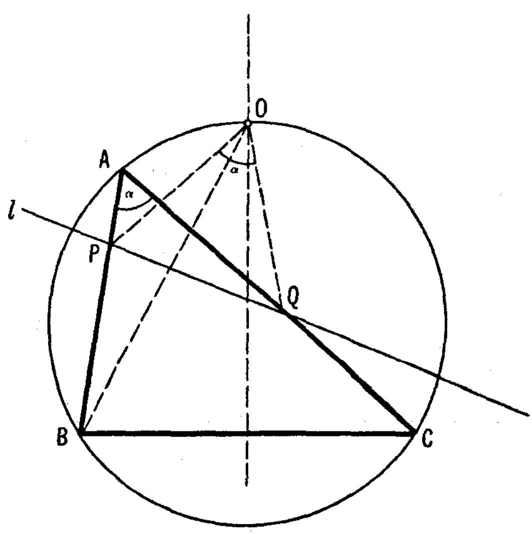
$$\measuredangle O_1ZO_2=\frac{1}{2}\,(\alpha_1\pm\alpha_2)$$

وبنا براین Z می‌تواند ازنقطهٔ تقاطع l_3 باکمان درخور زاویهٔ معلوم $(\alpha_1+\alpha_2)/2$ یا $(\alpha_1-\alpha_2)/2$ مرسوم بر پاره خط O_1O_2 پیدا شود.

هریك از زوایای α_1 و α_2، وهریك‌ازمراکز دوران O_1 و O_2 می‌تواند به‌دو روش متفاوت پیدا شود (با جواب مسأله قبلی مقایسه شود). از این‌رو حداکثر ۱۶ جواب برای این مسأله وجود دارد.

۴۷. فرض‌کنید مسأله حل شده‌است (شکل ۱۱۰). بنا برقضیهٔ ۱، دورانی وجود داردکه BP را به CQ بدل می‌کند، زاویهٔ دوران α مساوی زاویهٔ بین AB و AC است، ونقطهٔ O، مرکزدوران، دقیقاً مانند راه حل اول مسألهٔ ۴۵ (الف) تا (د) پیدا می‌شود. چون درمثلث متساوی‌الساقین OPQ زاویهٔ رأس O، یعنی α، معلوم است، پس نسبت

$$\frac{OP}{PQ}=k$$



شکل ۱۱۰

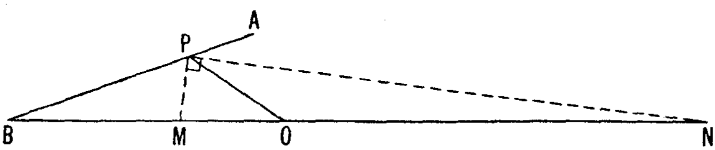
نیز برای‌ما معلوم است. اما بنا بر شرایط مسأله، $PQ = BP$، بنا براین

$$\frac{OP}{BP} = k$$

که با توجه به‌آن می‌توانیم P را از تقاطع ضلع AB با دایره‌ای پیدا کنیم که مکان نقاطی‌است که نسبت فاصله‌ها شان از O و B مساوی k است. این‌مکان هندسی، همان طور که دیده می‌شود یك دایره است، زیرا، مثلا معلوم است که نیمسازهای زوایای درونی و بیرونی زاویهٔ P ازمثلث OPB (← شکل ۱۱۱)، که در آن P نقطه‌ای‌است که برای‌آن $(OP/BP = k)$ قاعدهٔ OB را در نقاط ثابت (مستقل از P) M و N با شرایط

$$\frac{OM}{MB} = \frac{ON}{BN} = k = \frac{OP}{BP}$$

قطع می‌کنند، چرا که دونیمساز برهم عمودند و P بر دایرهٔ به‌قطر MN قرار دارد.*



شکل ۱۱۱

* صفحهٔ ۱۴، بخش ۱۱، کتاب زیر،

Nathan Altschiller-Court, *College Geometry*, Johnson Publishing Co., 1925, Richmond.