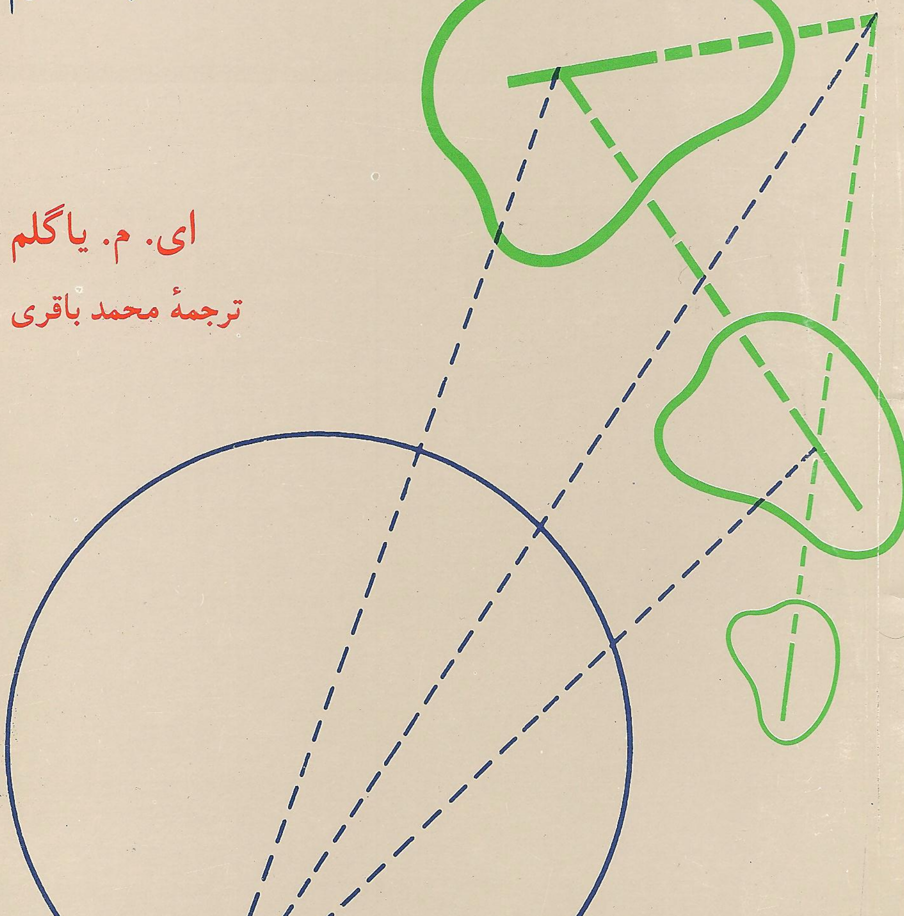
تبدیلهای هندسی

جلد دوم



ای. م. یاگلم

ترجمهٔ محمد باقری

(ریاضیات پیش‌دانشگاهی ـ ۲۱)

تبدیلهای هندسی

جلد دوم

(ریاضیات پیش‌دانشگاهی ـ ۲۱)

ای. م. یاگلم

ترجمهٔ محمد باقری

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

Geometric Transformations II
New Mathematical (21)
I. M. Yaglom
Random House, 1968

تبدیلهای هندسی
جلد دوم
تألیف ای. م. یاگلم
ترجمهٔ مهندس محمد باقری
ویراستهٔ دکتر محمدهادی شفیعیها
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۶۹
چاپ دوم ۱۳۸۳
تعداد ۱۰۰۰
حروفچینی: عبدی
لیتوگرافی: بهزاد
چاپ و صحافی: هورخش

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

یاگلم، ایساک موئیسئیویچ ۱۹۲۱ـ Yaglom, Isaak Moiseevich
تبدیلهای هندسی / ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها... [و دیگران]
۳ ج.

ISBN 964-01-0532-5 (ج ۱)
ISBN 964-01-0537-6 (ج ۲)
ISBN 964-01-0524-4 (ج ۳)
ISBN 964-01-8001-7 (دوره)
عنوان اصلی: Geometric transformations
۱. تبدیلهای ریاضی. الف. شفیعیها، محمدهادی، ، مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.
QA۶۰۱ ۵۱۶/۱

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

سخنی با خواننده

ارتباط بین استادان برجستهٔ دانشگاهها و دانش‌آموزان دوره‌های پیش‌دانشگاهی، از مؤثرترین وسیله‌هایی‌است که به‌کشف و پرورش استعدادها کمك می کند و زمینه را برای‌تربیت دانشمندان‌آینده فراهم‌می‌سازد. در بین‌شخصیتهای علمی تراز اول، که پژوهندگان یك علم را در بالاترین سطح ممکن آمــوزش می‌دهند و راهنمایی می کنند، عدهٔ‌کمی این‌توانایی را دارند که درآن زمینهٔ‌علمی، و با رعایت همهٔ دقتها ونکته‌ها، کتابهایی تألیف‌کنند که برای قشر وسیعی از دانش‌آموزان دبیرستانی، وگاه برای افراد عادی، آموزنده وقابل درك باشد. این شخصیتها، که درهر کشور انگشت شمارند، از این راه، ارتباطی‌بین‌خود وجوانان برقرارمی‌سازند. دسترسی دانش‌آموزان به‌چنین‌کتابهایی، پشتوانه‌ای برای تأمین آیندهٔ علمی جامعه است.

جــامعهٔ ریاضــی آمریــکا مجموعه‌ای از ایــن‌گونه کتابها را زیــر عنوان New Mathematical Library فراهم‌آورده و تاکنون بیش از سی جلد ازآنها را منتشرکرده است‌که بعضی از آنها مستقیماً به زبان انگلیسی تألیف شده و بعضی دیگر از زبانهای مختلف به‌انگلیسی ترجمه شده‌اند. این‌کتابها تاکنون به بسیاری از زبانهای دیگر ترجمه‌شده‌وهرکدام، چه درآمریکا وچه درکشورهای‌دیگر، بارها تجدیدچاپ شده است.

گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر مرکز نشر دانشگاهی، به حکم وظیفه‌ای که برای‌گسترش دانش‌ریاضی به‌عهده دارد، به‌ترجمهٔ این‌کتابها از انگلیسی به‌فارسی، و ویرایش‌آنها پرداخته‌است. مترجمان و ویراستاران ازافرادخبره برگزیده شده‌اند وکوشش لازم به‌عمل‌آمده است تا، ضمن رعایت امانت‌کامل‌درترجمه، متن فارسی روان و خالی از ابهام باشد. کتابها به‌ترتیبی‌که ترجمهٔ آنها‌آماده شود زیر عنوان **ریاضیات پیش‌دانشگاهی** منتشر می‌شوند.

این مجموعه کتابها را می‌توان‌دو دسته‌کرد. یك دسته شامل کتابهایی است که مباحثی از ریاضیات را به زبان ساده تشریح می‌کنند و می‌توانند برای درسهای ریاضیات عمومی دانشگاه نیز جنبهٔ کمك درسی داشته باشند. ویراستاران متن‌اصلی این کتابها در پیشگفتار خود ازجمله نوشته‌اند:

مطالب کتابهای‌این‌مجموعه در برنامهٔ ریاضیات دبیرستانی یا گنجانیده نشده یا به‌اجمال بیان شده است. میزان دشواری آنها متفاوت است و حتی دریك کتاب هم، مطالعهٔ بعضی از بخشها به‌تمرکز حواس بیشتری‌نیاز دارد. خواننده برای‌فهم‌مطالب اغلب این کتابها، هرچند به‌اطلاعات ریاضی‌چندانی نیاز ندارد، ولی باید تلاش فکری فراوانی به‌عمل آورد. کتاب ریاضی را نمی‌توان به‌سرعت خواند، و نباید توقع داشت که با یك بار مطالعه، تمام بخشهای آن فهمیده شود. می‌توان بدون معطل‌ماندن روی‌بخشهای پیچیده از آنها گذشت وبعد، برای مطالعهٔ عمیق به‌آنها بازگشت، زیرا بسیار پیش‌می‌آید که مطلبی در مبحث بعدی روشن می‌شود. از سوی دیگر، می‌توان بخشهایی راکه مطالب آنها کاملا آشناست خیلی سریع‌مطالعه‌کرد. بهترین‌راه فراگرفتن ریاضیات، حل مسأله‌های‌آن است. هر کتاب شامل مسأله‌هایی است که حل برخی از آنها ممکن است مستلزم تأمل قابل‌ملاحظه‌ای باشد. پاسخها یا راهنماییهای مربوط به حل این مسأله‌ها، غالباً در پایان کتاب آمده‌اند. به خواننده توصیه می‌شود که‌کوشش کند هرمسأله را خودحل کند وفقط برای اطمینان از درستی راه‌حل خود به بخش پاسخها مراجعه نماید. بدین‌طریق، مطلب رفته‌رفته برایش پرمعناتر خواهد شد.

دستهٔ دیگر کتابها، شامل مجموعه‌هایی غنی از مسأله‌ها یا پرسشهای جالب چندگزینه‌ای است‌که در مسابقه‌های معروف ریاضی مطرح شده‌اند. دراین کتابها، راه‌حل دقیق مسأله‌ها آمده است. درمورد پرسشها به‌ذکر پاسخ درست اکتفا نشده، بلکه حل‌کامل آنها نیز عرضه شده‌است.

نظرات وپیشنهادهای خوانندگان ما را به‌ادامهٔ‌کار وگسترش این‌گونه‌فعالیتها تشویق خواهد کرد.

گروه ریاضی، آمار، وکامپیوتر
مرکز نشر دانشگاهی

مقدمهٔ مترجم انگلیسی

کتاب حاضر بخش دوم از تبدیلهای هندسی اثر ای.م. یاگلم است. ترجمهٔ انگلیسی بخش اول قبلا دراین سری منتشر شده‌است. در ویرایش اصلی روسی(۱۹۵۵) این دو بخش دریك جلد و بخش‌سوم به‌صورت مجلدی جداگانه انتشار یافته بود. ترجمهٔ انگلیسی بخش سوم هم در دست انتشار است.

این کتاب یك متن درسی در هندسهٔ مسطحه نیست؛ بلکه بعکس، مؤلف فرض را بر آن گذاشته که خواننده کم و بیش با موضوع آشنایی قبلی دارد. بخش دوم با شکلهای متشابه و با تبدیلهایی که تشابه را حفظ می‌کنند سروکار دارد.

دراینجا هم مثل بخش اول، مسأله‌هـا قسمت اصلی کتاب را تشکیل می‌دهند. روی هم‌رفته هشتاد و سه مسأله عرضه شده که خواننده باید، پیش ازآنکه به‌راه حل آنها در نیمهٔ دوم کتاب مراجعه کند، خود به‌حل آنها بپردازد. شماره‌گذاری مسائل درترجمهٔ انگلیسی با متن اصلی روسی یکی نیست. در متن روسی مسائل متوالیاً از ۱ تـا ۱۰۶ شماره‌گذاری شده‌اند (مسائل ۱ تا ۴۷ در بخش اول، و مسائل ۴۸ تا ۱۰۶ در بخش دوم). در ترجمهٔ انگلیسی شماره‌گذاری مسائل بخش دوم مجدداً از یك شروع شده‌است. درآغاز کتاب جدولی برای‌مقایسهٔ شماره‌گذاریهای متن روسی و ترجمهٔ انگلیسی ضمیمه شده‌است، زیرا دربخش اول بارها به‌مسائلی دربخش دوم ارجاع داده شده‌است و این ارجاعها براساس شماره‌گذاری متن‌اصلی روسی‌است.*

تعدادی از پانویسها در متن اصلی روسی بوده (یا خود مؤلف برای افزودن به‌ترجمهٔ انگلیسی کتاب عرضه کـرده است) و تعدادی دیگر را مترجم انگلیسی از خود افزوده است.

---

* چون ترجمهٔ فـارسی از روی ترجمهٔ انگلیسی صورت‌گرفته، شماره‌گذاری مسائل هم عیناً مانند متن انگلیسی است.

مترجم مایـل است از پروفسور یـاگلم به خاطـر یاریهای ارزنده‌اش در آماده‌سازی ترجمهٔ انگلیسی کتاب که در آمریکاصورت گرفته تشکر کند. ایشان دستنوشتهٔ ترجمه را خوانـده و اضافات و تصحیحاتی درآن وارد کرده است. ایشان همچنین ۱۹ مسألهٔ جدید برای افزودن به‌این ترجمه عرضه کرده است (این مسائل در جدول تطبیق شماره‌گذاریها مشخص شده‌اند).

آلن شیلدز

از پیشگفتار مؤلف

این کتاب کـه در سه بخش تدوین شده به‌هندسهٔ مقدماتی اختصاص داده شده است. مقدار زیادی مطالب مربـوط به هندسهٔ مقدماتی، بخصوص در سدهٔ نوزدهم تهیه و گردآوری شده بودنـد. بسیاری قضایای زیبا و غیرمنتظره درمورد دایره‌ها، مثلثها، چند ضلعیها و غیره اثبات شده بودنـد. در درون هندسهٔ مقدمـاتـی «مباحث» کاملا جداگانه‌ای همچون هندسهٔ مثلثها یا هندسهٔ چهاروجهی‌ها پدیدار شدند کـه هر یك به‌صورت مبحثی گسترده، مسائل‌خاص خود و روشهای خاص خود را درحل مسائل داشتند.

درکتاب حاضر هدف آن نیست که خواننده را با یك رشته قضیه‌که برای او تازگی دارند آشنا کنیم. به‌نظر ما، آنچه دربالا ذکر شد، به‌خودی خود نمی‌تواند پیدایش یك تکنگاری خاص ویژهٔ هندسهٔ مقدماتی‌را توجیه‌کند، زیرا بیشترقضیه‌های هندسهٔمقدماتی که‌ازحدود دروس‌دبیرستانی فراتر می‌روند، صرفاً موشکافی‌هایی‌هستند کـه هیچ کاربرد خاصی ندارند و ازجریان اصلی گسترش ریاضیات برکنارند. با این حال، علاوه برقضیه‌های مشخص، در هندسهٔ مقدماتی دو اندیشهٔ‌کلی مهم وجـود دارد‌که اساس همهٔ گسترشهای آتی هندسه را تشکیل می‌دهند و اهمیت آنها ازاین حدود‌گسترده هم فراتر می‌رود. منظور مـا روش قیاسی و پی‌ریزی اصل موضوعی هندسه از یکسو و تبدیلهای هندسی و نقش بنیادی نظریهٔ‌گروهها درهندسه، از سوی دیگر است. این اندیشه‌ها بسیار پربار بوده‌اند و گسترش هریك از آنها به‌پیدایش هندسهٔ نااقلیدسی‌می‌انجامد. تشریح یکی ازاین اندیشه‌ها یعنی اندیشهٔ پی‌ریزی‌نظریهٔ گروهی درهندسه، هدف اصلی این‌کتاب است...

بجاست کـه بازهم چند‌کلمه‌ای در بـارهٔ ویژگیهای این‌کتاب صحبت‌کنیم. مخاطب‌این‌اثر ردهٔ نسبتاً وسیعی ازخوانندگان هستند؛ در چنین مواردی همیشه لازم می‌آید‌که منافع برخی‌ازخوانندگان فدای منافع عده‌ای دیگرشود. مؤلف هم منافع

آن دسته از خوانندگان را که آمادگی بیشتری دارنـد زیر پا نهاده و سعی بیشتر وی به‌سادگی و روشنی‌مطلب معطوف بوده تا به‌استحکام و دقت منطقی‌آن. ازاین‌رو، مثلا در این کتاب مفهوم کلی تبدیـل هندسی را تعریـف نمی‌کنیم زیـرا تعریـف اصطلاحهایی که به‌طور حسی روشن‌هستند همیشه برای‌خوانندگان کم‌تجربه مشکلاتی در پی دارد. به‌همین علت لازم بود که از به‌کاربردن زاویه‌های جهت‌دار خودداری، ومعرفی پاره‌خطهای جهت‌دار را به‌فصل دوم موکول کنیم، ولو اینکه این‌کار موجب می‌شدکه درمتن اصلی و در راه‌حلهای مسائل برخی استدلالها در واقع نتوانندکامل قلمداد شوند... . در همهٔ این موارد به‌نظر مـا چنین رسیدکـه خوانندهٔ کاملا آشنا به‌موضوع، خود می‌تواند اثبات را کامل‌کند و فقدان استحکام، مشکلی برای‌خوانندهٔ با آمادگی‌کمتر، پدید نمی‌آورد....

همین ملاحظات درانتخاب اصطلاحها نیز نقش چشمگیری داشته‌است. مؤلف براساس تجربهٔ شخصی‌که از دوران تحصیل خود داشته به‌این نتیجه رسیده‌است‌که وجود تعداد زیادی اصطلاحهای ناآشنا تا حد زیادی بردشواری‌کتاب می‌افزاید و به‌همین علت حداکثر صرفه‌جویی را ازاین‌لحاظ مراعات‌کرده‌است. دربرخی‌موارد این امر سبب شده که برخی اصطلاحها را که می‌توانستند مناسب باشند به‌کار نبرد و بدین‌ترتیب بازهم منافع خوانندهٔ باسابقه را زیر پا بگذارد... .

مسأله‌ها برای‌خواننده فرصتی پدید می‌آورند تا ازمیزان تسلط خود برمطالب نظری‌آگاه شود. البته لزومی ندارد همهٔ مسائل را بترتیب موجود حل‌کند ولی‌حتماً باید دست‌کم یك مسأله (یا چه بهتر که چند مسأله) از هرگروه مسائل را حل کند؛ ساختمان‌کتاب طوری‌است‌که با این‌شیوهٔ‌کار، خواننده هیچ‌بخش اساسی ازمحتوای کتاب را از دست نخواهد داد. پس‌ازحل هرمسأله (یا تلاش برای‌حل‌آن) خواننده باید راه‌حلی را که درپایان‌کتاب آمده مطالعه‌کند.

صورت‌مسأله‌ها معمولا با متن‌کتاب مرتبط نیست؛ اما در راه‌حلها مباحث‌اصلی به‌کارگرفته شده و برای هندسهٔ مقدماتی ازتبدیلها استفاده شده‌است. روشها بیش از نتایج مورد توجه بوده‌اند؛ بنابراین یك مسألهٔ خاص احیاناً درجاهای مختلفی آمده است؛ زیرا مقایسهٔ روشهای مختلف حل یك مسأله، همواره آموزنده‌است.

تعدادزیادی‌هم مسألهٔ ترسیمی‌عرضه شده‌است. درحل این‌مسأله‌ها «ساده‌ترین» ترسیم (به‌یك تعبیر) موردنظر ما نبوده است بلکه مؤلف معتقد بوده کـه این مسائل ارزش منطقی دارند و خود را پای‌بند ترسیم عملی آنها نکرده است.

ازقضیه‌های [فضای] سه‌بعدی ذکری به‌میان نیامده‌است؛ این محدودیت تأثیر جدی براندیشه‌های‌اساسی‌کتاب ندارد. البته وجود بخشی‌شامل مسائل هندسهٔ‌فضایی

می‌توانست برفایدهٔ کتاب بیفزاید، ولی باید توجه داشت کــه مسأله‌های این کتاب بیشتر جنبهٔ مثالی دارند و به‌هیچ‌وجه به‌منزلهٔ ختم موضوع نیستند.

دستنوشتهٔ این کتاب را مؤلف در انستیتوی تعلیم و تربیت ارخوو-زوئو... در ارتباط با کاری تهیه دیده‌است که در بخش هندسهٔ سمینار مربوط به‌ریاضیات دبیرستانی در دانشگاه دولتی مسکو برعهده داشته‌است.

ای. م. یاگلم

هندسه چیست؟

در مقدمهٔ جلد اول، هندسه را بــه عنوان مطالعهٔ خواصی از شکلها که بر اثر حرکت تغییر نمی‌کنند تعریف کردیم؛ حرکت را هم به‌عنوان تبدیلی تعریف کردیم که فاصلهٔ بین هیچ دونقطه‌ای ازشکل را تغییر ندهد. از اینجا بلافاصله نتیجه می‌شود که‌مهمترین ویژگی هندسی هرشکل را بایــد در بطن فاصلهٔ بین نقاط مختلف آن جستجو کرد، پس مفهوم فاصلهٔ بین نقاط ــ کــه طول پاره خطی است ــ ظاهراً مهمترین مفهوم در سراسرهندسه است. اما اگر همهٔ قضیه‌های هندسهٔ مقدماتی را به‌صورتی‌که در کتاب کیسلیوف Kiselyov* عرضه شده به‌دقت بررسی کنیم، می‌بینیم که مفهوم فاصلهٔ بین نقاط دراین‌قضایا بندرت به‌چشم می‌خورد. همهٔ قضیه‌های مربوط به‌خطهای متوازی و عمود برهم (مثلا این قضیه‌ها کــه «اگر دو خط متوازی را خط سومی قطع کند، زاویه‌های متناظر برابرند» یا «از هرنقطهٔ ناواقع برخط مفروض، یك و تنها یك‌خط عمود برآن خط می‌توان رسم کــرد»)، اغلب قضایای مربوط به‌دایره‌ها (مثلا، «از سه‌نقطهٔ ناواقع بریك خط راست، یك و تنها یك دایره می‌توان گذراند»)، و بسیاری از قضیه‌های مربوط به‌مثلثها و چندضلعیها (مثلا، «مجموع زاویه‌های هرمثلث برابر است با یك زاویهٔ نیم صفحه»، یا «قطرهای لوزی برهم عمودند و زاویه‌های لوزی را نصف می‌کنند») هیچ‌گونه ارتباطی با مفهوم فاصله ندارند. حتی درقضیه‌هایی‌که صورتشان شامل مفهوم طول یك پاره خط است (مثلا، «نیمساز هرزاویهٔ مثلث، ضلع رو به‌رو را به‌قطعاتی متناسب با ضلعهای مجاور آن تقسیم می‌کند»؛ «در یك دایــرهٔ مفروض، یا در دایره‌های متساوی، وتر درازتر به‌مرکز دایره نزدیکتر است» یا حتی

---

* کتاب درسی رایج دراتحاد شوروی برای هندسهٔ مسطحه

قضیهٔ فیثاغورس که طبق آن «اگر ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای با یك واحد اندازه‌گیری شده باشند، آنگاه مجذور طول وتر با مجموع مجذورهای طولهای ساقهای آن برابر می‌شوند»)‌ در واقع طول فلان یا بهمان پاره‌خط نیست که نقشی دارد، بلکه تنها نسبت طولهای دو یا چند پاره‌خط مورد نظر است. اگر به‌محتوای این قضیه‌ها بیندیشیم، به‌آسانی می‌توانیم خود را به‌این مطلب متقاعد سازیم. مثلاً، اهمیت قضیهٔ فیثاغورس، در طول واقعی ضلعهای مثلث نیست بلکه تنها نسبت طول ساقها به‌طول وتر در آن مهم است: طبق این قضیه اگر طول ساقهای مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برابر b و c و ضمناً k و l معرف نسبت این طولها به‌طول وتر (a) باشند (یعنی $k=b/a$ ، $l=c/a$)، آنگاه $k^2+l^2=1$.

پی بردن به‌آن به‌اصل کلی که در پس این موضوع نهفته است دشوار نیست. مفهوم طول پاره‌خط اساساً متکی است بر وجود واحد اندازه‌گیری ثابتی برای طول؛ اگر پاره‌خط را برحسب سانتی‌متر، یا کیلومتر، یا اینچ اندازه بگیریم، اعدادی که برای بیان طول یك پاره‌خط معین به‌دست می‌آیند متفاوت خواهند بود. اما محتوای قضیه‌های هندسی نمی‌تواند به‌واحد اندازه‌گیری خاصی که اختیار شده‌است وابسته باشد. بنابراین خود طولها مستقلا در قضیه‌های هندسه ظاهر نمی‌شوند، بلکه تنها با نسبت طولهای دو یا چند پاره‌خط می‌توانیم برخورد کنیم (این نسبتها به‌انتخاب واحد اندازه‌گیری بستگی ندارند). مثلا صورت پیشین قضیهٔ فیثاغورس که با عبارت: «اگر ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای با یك واحد اندازه‌گیری شده باشند، آنگاه...» آغاز می‌شود، حاکی از آن است که این قضیه از نسبت طولهای ضلعهای مثلث صحبت می‌کند. اگر بدانیم که طولهای چند پاره‌خط برحسب یك واحد اندازه‌گیری شده‌اند، اما اندازهٔ واقعی واحد اندازه‌گیری را ندانیم، تنها می‌توانیم نسبت طولهای این پاره‌خطها را در نظر بگیریم. البته، بی‌فایده است که در فرض قضیه بخواهیم که پاره خط با واحد اندازه‌گیری معینی، مثلا متر، اندازه‌گیری شود؛ روشن است هیچ قضیه‌ای نمی‌تواند فقط وقتی پاره‌خط برحسب سانتی‌متر اندازه‌گیری می‌شود درست باشد و وقتی مثلا، برحسب اینچ اندازه‌گیری می‌شود، غلط باشد.

موضوع فوق مرتبط است با این امر که از دیدگاه هندسه همهٔ پاره‌خطها مثل هم هستند و هیچ‌یك به‌هیچ صورت تمایز یا برتری بر دیگری ندارد؛ بنابراین همهٔ تعریفهای واحد طول از دیدگاه هندسی خصلت کاملا اختیاری دارند. مثلا، متر به‌صورت طول میله‌ای ازجنس پلاتین-ایریدیوم موجود در دفتر اوزان و مقادیر در پاریس تعریف می‌شود؛ تعریف دیگر آن ۱۵۵۲۷۳۴٫۸۳ برابر طول موج خط

قرمز تابش کادمیوم تحت‌شرایط استاندهٔ معینی است. مثال دیگر، یارد انگلیسی است که اصلا به‌عنوان فاصلهٔ نوك بینی هانری اول پادشاه انگلستان از نوك انگشت میانی دست وی در حالت کشیده در امتداد شانه، درنظر گرفته شده بـود. بنابراین طبیعی است کـه درصورت قضیه‌های هندسه، باید طولهای پاره‌خطها به‌کار گرفته نشوند، و تنها نسبت طولها که کمیتهایی مستقل از انتخاب واحد اندازه‌گیری هستند موردنظر باشد.*

پس مفهوم فاصلهٔ بین‌نقاط که طبق تعریف ما ازهندسه باید نقشی اساسی داشته بـاشد، عملا به‌طور مستقیم درقضیه‌های هندسه ظاهر نمی‌شود. ف. کلاین، نخستین فردی کـه تعریف دقیقی برای هندسه داد، به‌این وضعیت اشاره کرده است. تعریف کلاین درحقیقت با تعریفی که درمقدمهٔ جلد اول بیان‌شده قدری‌تفاوت دارد. تعریف او چنین است: هندسه علمی است که به‌مطالعهٔ خواص ازشکلهای هندسی‌می‌پردازد کـه بر اثر تبدیلهای تشابهی تغییر نمی‌کنند. تبدیلهای تشابهی را می‌توان به‌عنوان تبدیلهایی تعریف کرد که نسبت فواصل بین زوجهای نقاط را تغییرنمی‌دهند؛ به‌جای این تعریف انتزاعی ازتبدیل تشابهی، می‌توان توصیف کاملی ازهمهٔ این گونه تبدیلها عرضه‌کرد. این تعریف درفصل اول، بخش ۲، همین‌کتاب داده خواهد شد. تعریف کلاین حاکی از آن است که، به‌تعبیری، هندسه نه تنها بین‌شکلهای قابل انطباق باهم تمایزی نمی‌گذارد، بلکه حتی بین شکلهای متشابه نیز تفاوتی قائل‌نیست؛ زیرا، برای حکم به‌اینکه دو مثلث باهم قابل انطباق‌اند و نه صرفاً متشابه، بایـد یك بار برای همیشه واحد اندازه‌گیری ثابتی درنظر بگیریم، که با همان یك واحد همهٔ ضلعهای دو مثلث را اندازه بگیریم. براساس همین «تمایزناپذیری» شکلهای متشابه است که می‌توانیم شکلهای با ابعاد بزرگ را در یك تصویر نشان دهیم؛ معلم هم با استفاده ازهمین اصل است که ازشاگردان می‌خواهد شکلی راکه خود او روی تخته سیاه می‌کشد «عیناً» در دفترهایشان بکشند، که البته بدون کوچك کردن ابعاد احتمالا در

---

* توجه‌کنید که برخلاف‌طولهای پاره‌خطها، اندازه‌های زاویه‌ها اغلب درصورت‌قضیه‌های هندسی ظاهر می‌شوند. علت این است کـه واحد اندازه‌گیری زاویه را می‌توان به‌طور هندسی خالص تعریف‌کرد: رادیان طبق تعریف برابر است با زاویـهٔ مرکزی رو به‌رو به‌کمانی از دایره‌که طولش برابراست با شعاع دایره، و زاویهٔ‌قائمه طبق‌تعریف‌زاویه‌ای است‌که با مکمل خودش برابر است. تفاوت بین دومفهوم طول پاره‌خط و اندازهٔ زاویه، مثلا دراین قضیه مجسم می‌شود: در مثلث قائم‌الزاویه‌ای کـه یك زاویهٔ حاده‌اش ۳۰° باشد، نسبت طول کوتاهترین ضلع به‌وتر مساوی ۱:۲ است.

دفتر آنها جا نخواهد گرفت.*

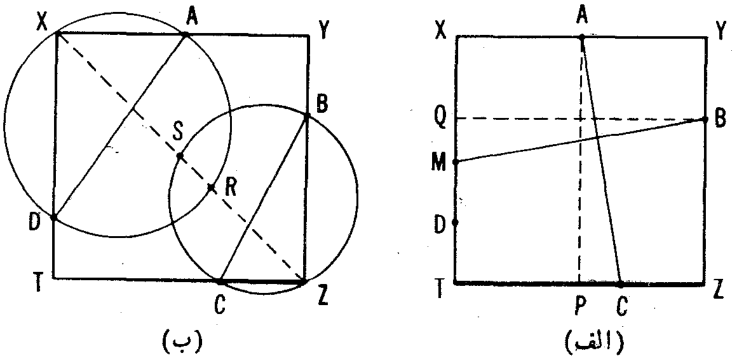
پس می‌بینیم که در هندسهٔ مقدماتی نقش اصلی را در واقع تبدیلهای تشابهی دارند؛ بنابراین لازم است آنها را مورد مطالعهٔ خاص قرار دهیم. بررسی تبدیلهای تشابهی علاوه برآنکه از لحاظ نظری ارزش زیادی دارد، درحل بسیاری از مسائل گوناگون نیز خیلی مفید واقع می‌شود؛ لذا، اهمیت تبدیلهای تشابهی از این لحاظ کمتر از تبدیلهای طولپای نیست. به‌عنوان مثال می‌توان مسألهٔ ترسیم یك چهارضلعی متشابه با چهارضلعی‌مفروض را که ضلعهایش ازچهارنقطهٔ مفروض می‌گذرند درنظر گرفت [مسألهٔ ۵۵ (ب) ازبخش ۱ فصل ۲]. این مسألـه تعمیمی است از سه مسألهٔ معروف زیر کـه معمولا با استفاده از ویژگیهای خاص مربع، مستطیل و لوزی حل می‌شوند:

الف) مربعی رسم‌کنید که ضلعهایش ازچهارنقطهٔ مفروض بگذرند.

ب) مستطیلی رسم‌کنید کـه اضلاعش از چهارنقطهٔ مفروض بگذرند و نسبت اضلاعش برابر مقدار معلومی باشد.

ج) یك لوزی با زوایای مفروض رسم‌کنید که اضلاعش ازچهارنقطهٔ مفروض بگذرند.

اولین مسأله ازاین سه‌مسأله را، چنین حل می‌کنیم: اگـر نقاط A، B و C برضلعهای XY، YZ و ZT ازمربع $XYZT$ واقع باشند (شکل ۱ الف)، واگر



شکل ۱

* تصادفاً، در برخی موارد، تعریفی که در جلد اول برای هندسه آورده‌ایم از تعریفی که دراینجا آمده بهتر است. درمقدمهٔ جلد سوم به‌طور کاملتر به‌این مسأله پرداخته‌ایم.

خطی که از B عمود بر AC رسم می‌شود خط XT را در نقطهٔ M قطع کند، آنگاه $BM = AC$، زیرا مثلثهای ACP و BMQ درشکل ۱ (الف) باهم قابل‌انطباق‌اند. بنابراین اگر چهار نقطهٔ A، B، C و D واقع بر ضلعهای مربع معلوم باشند، می‌توانیم نقطهٔ دیگری مانند M را هم برضلع TX (یا امتداد آن) پیدا کنیم و خط TX را که از دونقطهٔ D و M می‌گذرد رسم کنیم (فرض‌می‌کنیم $M \neq D$).

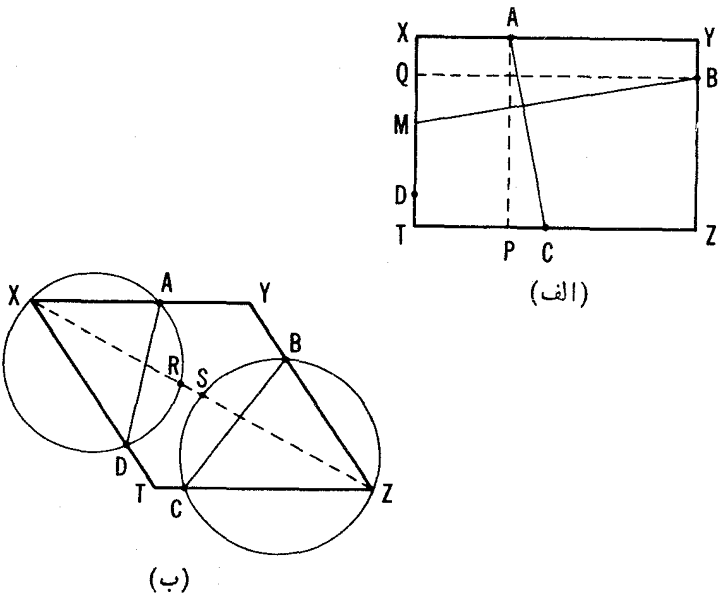
همین مسأله را می‌توان از راه دیگری حل کرد. این بارهم، فرض کنید A، B، C، و D نقاطی بر ضلعهای XY، YZ، ZT، TX از مربع باشند. دایرهٔ به‌قطر AD از نقطهٔ X می‌گذرد؛ فرض کنید R نقطهٔ برخورد دیگر قطر XZ با این دایره باشد. به‌همین ترتیب، دایرهٔ به‌قطر BC از Z می‌گذرد؛ نقطهٔ برخورد دیگر قطر XZ با این دایره را S می‌نامیم (شکل ۱ ب). چون XZ زاویهٔ رأس X را نصف می‌کند، نقطهٔ R وسط کمان مستدیر ARD است؛ به‌همین ترتیب S وسط کمان BSC است. پس خط XZ را که ازاین دو نقطهٔ R و S می‌گذرد (اگر $R \neq S$) می‌توان رسم کرد. نقاط برخورد دیگر این‌خط با دو دایرهٔ موجود، رأسهای مطلوب X و Z هستند.

راه حل اول فوق‌الذکر را می‌توان به طور طبیعی برای حل مسألهٔ دوم یعنی (ب) تعمیم داد، که دراین مورد $AC : BM = AP : BQ = TX : XY$ نسبتهای معلوم‌هستند (← شکل ۲ الف). راه‌حل دوم مسألهٔ ترسیم مربع را بخوبی می‌توان برای حل مسألهٔ سوم یعنی (ج)، تعمیم داد؛ اما دراین‌حالت، کمانهای دایره را باید روی پاره‌خطهای AD و BC طوری رسم کرد که این پاره‌خطها در خود زاویهٔ داده شدهٔ لوزی باشند. دراین‌صورت XZ را می‌توان مثل قبل از رسم خطی که از نقاط R و S، وسطهای کمانهای دو دایره، می‌گذرد به‌دست‌آورد (شکل ۲ ب).

گرچه این راه حلها برای سه مسألهٔ (الف)، (ب)، و (ج) بسیار زیبا هستند، ولی تا حدی غیرطبیعی‌اند و گیرآوردن چنین برهانهایی به‌وسیلهٔ خود شخص کار چندان آسانی نیست. به‌کمك ملاحظات کلی براساس تبدیلهای تشابهی می‌توانیم راه‌حلی طبیعی‌تر برای مسألهٔ‌ای کلی‌تر [۵۵ (ب)] که این سه مسأله حالات خاصی از آن هستند بیابیم.

خواننده خود می‌تواند مسائل فراوان دیگری بیابدکه با استفاده از تبدیلهای تشابهی قابل حل‌اند.

همچنین باید توجه داشت که چون طولپایی‌ها حالت خاصی از تبدیلهای تشابهی هستند، در حل بسیاری از مسائل که با استفاده از طولپایی حل می‌شوند اگر به‌جای طولپایی ازتبدیلهای تشابهی استفاده شود می‌توان تا حد زیادی آنها را تعمیم داد.



شکل ۲

مثلاً، مسألهٔ ترسیم یك چندضلعی با داشتن جای رئوس مثلثهای متساوی‌الساقینی که قاعده‌های آنها بر اضلاع آن واقع‌اند و زاویه‌های رئوس آنها معلوم‌اند (از این مسأله درمقدمهٔ جلد اول صحبت کردیم) می‌تواند به‌صورت زیر تعمیم یابد.

n نقطه در صفحه داریم؛ این نقاط رأسهای مثلثهایی هستندکه براضلاع یك nضلعی و بیرون آن بنا شده‌اند (اضلاع این n ضلعی قاعده‌های آنها هستند) و با n مثلث مفروض متشابه‌اند. n ضلعی‌را رسم کنید (← مسألهٔ ۳۷ ازبخش ۲ فصل ۱).

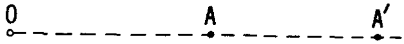
خواننده درفصل ۱ مثالهای متعدد دیگری ازاین نوع خواهد یافت.

فصل اول

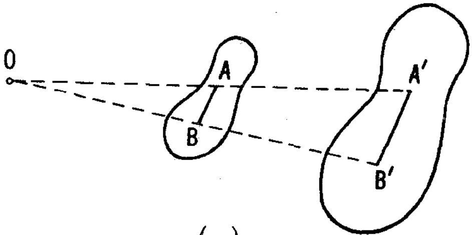
رده‌بندی تبدیلهای تشابهی

۱. تجانس (تشابه مرکزدار)

می‌گوییم نقطهٔ A' از نقطهٔ A براثر یك تجانس (یا براثر یك تشابه مرکزی) به‌مرکز O و نسبت تجانس k به‌دست آمده است، اگر A' برخط OA و درهمان طرف نقطهٔ O که A هست، واقع باشد وداشته‌باشیم $OA'/OA=k$ (شکل ۳الف). تبدیلی از صفحه که هر نقطهٔ A را به A' می‌برد که مجانس A نسبت به مرکز



(الف)

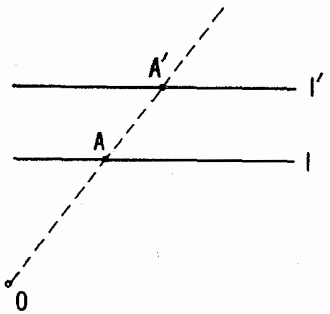


(ب)

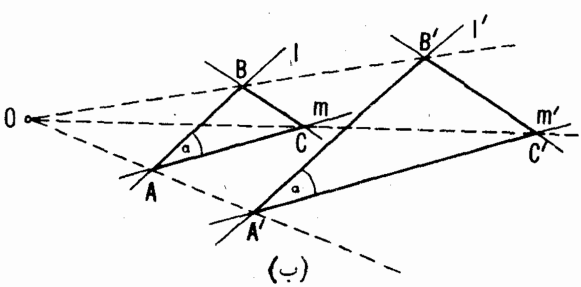
شکل ۳

تجانس O و با نسبت k است، یك تجانس (یا تشابه مرکزی یا انبساط) خوانده می‌شود؛ نقطهٔ O مرکز و عدد k نسبت تجانس نام دارد. نقطهٔ A' نگارهٔ A بر اثر این تبدیل است. نگاره‌های همهٔ نقاط شکل F، شکل F' را پدید می‌آورند که مجانس F (نسبت به مرکز تجانس O و با نسبت تجانس k) خوانده می‌شود (شکل ۳ ب). روشن است که شکل F هم به‌نوبهٔ خود مجانس F' (نسبت به‌همان مرکز تجانس و با نسبت $1/k$) خواهد بود؛ بر این اساس می‌توان از زوج شکلهای مجانس سخن گفت. همچنین می توان گفت که شکلهای F و F' متشابه‌اند* یا به‌طور مشابه قرار گرفته‌اند.

هر تجانس خط l را به‌خط l' که با l موازی است، می‌برد؛ برای ترسیم l'



(الف)

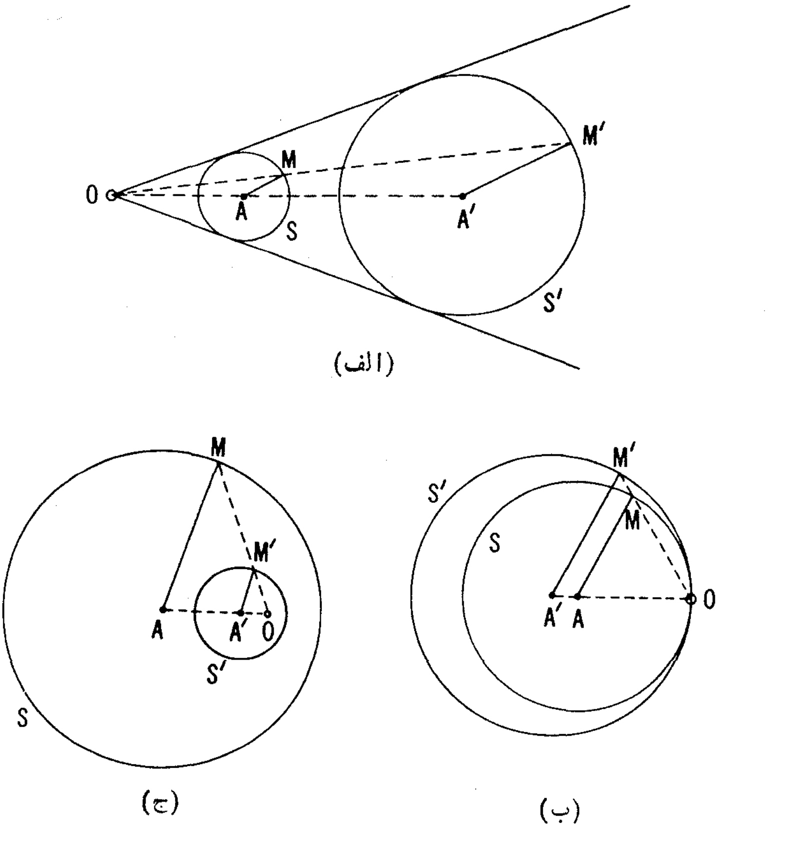


(ب)

شکل ۴

* تجانس به‌تعبیر تعریفی که درمقدمه داده شد، یك تبدیل تشابهی است، زیرا دراین تبدیل طول همهٔ پاره‌خطها درعدد ثابت‌مشترکی (k) ضرب می‌شود (← پایین صفحهٔ ۳۲).

کافی است نقطهٔ A' را که نگارهٔ یك نقطهٔ A واقع بر l بر اثر تجانس است پیدا کنیم و از A' خطی موازی با l رسم کنیم (شکل ۴ الف). اگر دو خط l و m با یکدیگر زاویهٔ α بسازند، نگاره‌های آنها، l' و m' نیز با یکدیگر زاویهٔ α می‌سازند؛ پس مثلث $A'B'C'$ که مجانس مثلث مفروض ABC است دارای زوایایی برابر با زوایای مثلث ABC است، یعنی دو مثلث متشابه‌اند (شکل ۴ ب). دایرهٔ S به‌مرکز A و به‌شعاع r براثر تجانس به‌دایرهٔ جدید S' برده می‌شود که مرکزش A' نگارهٔ A است و شعاعش (r') برابرست با kr؛ که در آن k نسبت تجانس است (شکل ۵). در واقع از تشابه مثلثهای OAM و $OA'M'$ (که در آن M

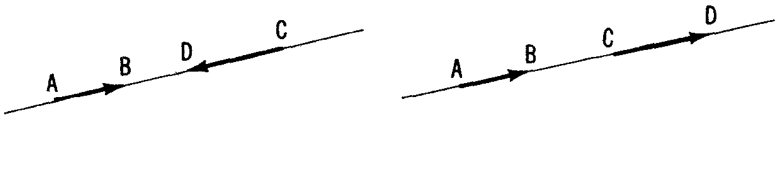


شکل ۵

نقطهٔ دلخواهی از S و M' نگارهٔ آن است) نتیجه می‌شود که $A'M'/AM=k$ یعنی $A'M'=kr$؛ پس معلوم می‌شود که S به‌دایره‌ای به‌مرکز A' و به‌شعاع kr برده می‌شود.

بدیهی است هردو دایرهٔ غیرقابل انطباق با هم S و S' به‌شعاعهای r و r' و به‌مرکزهای A و A' را می‌توان مجانس یکدیگر گرفت؛ برای این منظور کافی است مرکز تجانس را نقطهٔ O واقع برخط AA' و بیرون پاره‌خط AA' بگیریم به‌طوری که $OA'/OA=r'/r$ و نسبت تجانس را نسبت r'/r اختیار کنیم (شکل ۵). نقطهٔ O مرکز تجانس بیرونی دایره‌های S و S' خوانده می‌شود (درمقابل مرکز تجانس درونی که بعداً از آن صحبت می‌کنیم). برای پیدا کردن مرکز تجانس بیرونی (O) برای دو دایرهٔ نامتساوی S و S'، کافی است در این دو دایره دو شعاع دلخواه AM و $A'M'$ را موازی و هم‌جهت با یکدیگر رسم کنیم و M و M' را به‌هم وصل کنیم؛ O نقطهٔ برخورد AA' و MM' است. اگر دایرهٔ کوچکتر درون دایرهٔ بزرگتر واقع نباشد، مرکز تجانس بیرونی را از برخورد مماسهای مشترك بیرونی نیز می‌توان به‌دست آورد (شکل ۵ الف)؛ اگر S و S' مماس درونی باشند، مرکز تجانس آنها برنقطهٔ تماس منطبق است (شکل ۵ ب).

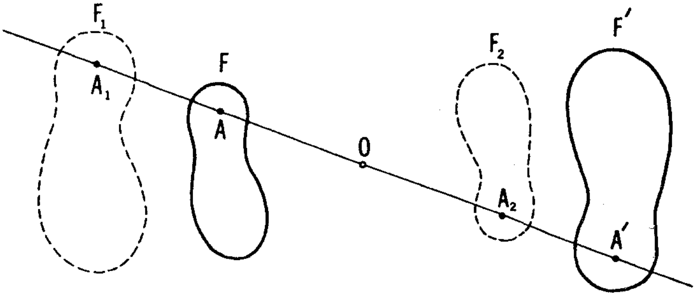
معمولاً مناسبتر آن است که نسبت دو پاره‌خط AB و CD واقع بر یك خط، دارای علامت معینی باشد: نسبت AB/CD مثبت خوانده می‌شود هرگاه جهتهای پاره‌خطهای AB و CD (یعنی جهتهای از A به B و از C به D) یکی باشند (شکل ۶ الف)، و منفی خوانده می‌شود هرگاه این جهت‌ها مخالف باشند (شکل ۶ ب). بدیهی است که ترتیب نوشتن دو سر هر بازه مهم است؛ ازاین‌رو مثلا داریم $BA/CD=-AB/CD$. این قرارداد در مورد علامت بازه‌ها برای بسیاری از



(ب) (الف)

شکل ۶

مباحث هندسه مناسب است؛ ما نیز بعداً آن را به‌کار خواهیم گرفت.* اگر این قرارداد را بپذیریم، نسبت تجانس دو شکل متجانس می‌تواند مثبت یا منفی باشد. به‌عبارت دیگر، دوشکل F و F' به‌مرکز تجانس O و نسبت‌تجانس (منفی!) $k-$ مجانس یکدیگر خوانده می‌شوند، اگر هر دونقطهٔ متناظر A و A' ازاین شکلها در دوطرف O برخطی که از O می‌گذرد واقع باشند، و نسبت طولهای دو پاره‌خط OA' و OA برابر با k باشد (شکل ۷)؛ این شرط را می‌توان به صورت $OA'/OA=-k$ نوشت. تجانس به مرکز O و نسبت تجانس منفی $k-$ همان تبدیلی است که ازانجام یك تجانس به‌مرکز O و نسبت عدد مثبت k (که F را



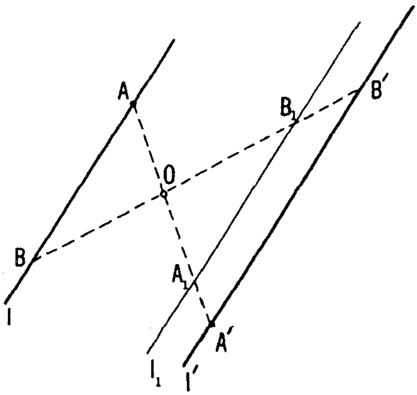
شکل ۷

* این تعریف علامت جبری نسبت دو بازه را، چنین می‌توان توضیح داد: برخط، جهتی را به‌عنوان جهت مثبت در نظر می‌گیریم (این جهت را می‌توان با گذاشتن پیکانی روی خط نشان داد)؛ بازهٔ AB روی این خط مثبت در نظرگرفته می‌شود اگر جهت آن (از A به B) مثبت باشد، درغیراین‌صورت منفی محسوب می‌شود (← نوشته‌های با حروف ریز، فصل ۱، انتهای بند ۱، جلد اول). پس نسبت دو پاره خط می‌تواند مثبت یا منفی باشد و بسادگی پیداست که این موضوع مستقل ازجهت خاصی است که برخط به‌عنوان جهت مثبت اختیار شده است؛ نسبت AB/CD مثبت است اگر پاره‌خطهای AB و CD دارای یك علامت باشند (یعنی، یا هردو مثبت و یا هردو منفی باشند)، و این نسبت منفی است اگر علامتهای پاره خطها مخالف باشند (یعنی یکی از پاره‌خطها مثبت و دیگری منفی باشد).

اگر به‌زبان بردار سخن بگوییم، تعریف فوق‌الذکر برای نسبت پاره خطها با در نظرگرفتن یك علامت معین را می‌توان چنین بیان کرد: $AB/CD=k$ ، که درآن k عددی مثبت یا منفی است چنان‌که $AB=kCD$.

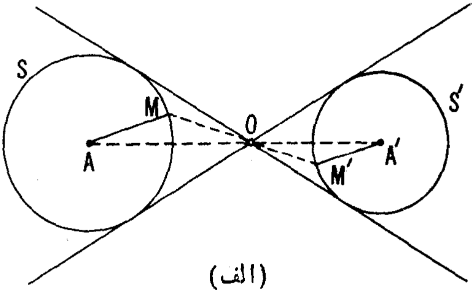
به F_1 می‌برد؛ ← شکل ۷) اول، و سپس یك نیمدور حول O (که F_1 را به F' می‌برد) به‌دست می‌آید؛ یا نیمدور حول O می‌تواند اول انجام شود (که شکل F را به F می‌برد؛ ← شکل ۷) و سپس تجانس به مرکز O و نسبت تجانس مثبت k (که F_2 را به F' می‌برد). پس یك تجانس با نسبت منفی $-k$ عبارتست از حاصلضرب* یك تجانس به‌همان مرکز و با نسبت مثبت k و یك نیمدور حول O، به‌یکی از دو ترتیب. ازاین به‌بعد، در گفتگو از تجانس همیشه منظور ما تجانسی است که نسبت آن می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

هر تجانس با نسبت تجانس منفی $-k$ نیز خط l را به‌خط l' که با آن موازی است می‌برد (اما دراین‌حالت مرکز تجانس بین دوخط l و l' قرار می‌گیرد؛ ← شکل ۸)، و دایرهٔ S را به‌دایرهٔ دیگر S' می‌برد (A' مرکز دایرهٔ S' مجانس A مرکز دایرهٔ S است با نسبت تجانس منفی $-k$ و نسبت شعاعها یعنی r'/r برابرست با k؛ ← شکل ۹). هردو دایرهٔ S و S' مجانس یکدیگرند با نسبت تجانسی برابر با $-r'/r$ (که درآن r و r' شعاعهای دو دایره‌اند)، و مرکز تجانس آنها (O) بر خط AA' واصل بین دو مرکز واقع است به‌طوری که $OA'/OA=-r'/r$. نقطهٔ O درون پاره‌خط AA' قرار دارد و مرکز تجانس درونی دایره‌های S و S' خوانده می‌شود. برای یافتن مرکز تجانس درونی دو دایرهٔ S و S' کافی است دوشعاع دلخواه متوازی و مختلف‌الجهت AM و $A'M'$

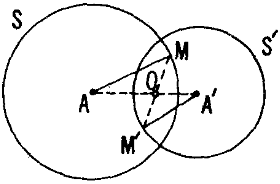


شکل ۸

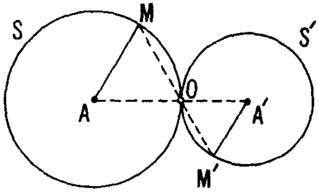
* وقتی به‌دنبال‌تبدیل $f: A \to A'$ تبدیل دیگر $g: A' \to A''$ بیاید، حاصل‌عبارتست ازتبدیل مرکب $g\circ f: A \to A''$؛ معمولا $g\circ f$ را حاصلضرب f و g می‌نامند.



(الف)



(ج)



(ب)

شکل ۹

را دراین دو دایره رسم کنیم؛ O نقطهٔ برخورد AA' و MM' است (شکل ۹). اگر S و S' متقاطع نباشند، مرکز تجانس درونی آنها را با یافتن نقطهٔ برخورد مماسهای مشترك درونی‌شان نیز می‌توان معین کرد (شکل ۹ الف). اگر S و S' مماس بیرونی باشند، O همان نقطهٔ تماس آنهاست (شکل ۹ ب). پس هردو دایرهٔ نامتساوی را می‌توان به‌دو طریق مجانس یکدیگر دانست: نسبت تجانس می‌تواند برابر با r'/r یا برابر با $-r'/r$ اختیار شود. دو دایرهٔ متساوی تنها به‌یك‌طریق مجانس یکدیگرند و نسبت تجانس‌شان ۱ — است. در دایره‌های هم‌مرکز (و فقط در این دایره‌ها) مرکز تجانسهای بیرونی و درونی بر یکدیگر و برمرکز مشترك دو دایره منطبق‌اند.

تنها نقطهٔ ثابت در هر تجانس (غیر از تبدیل همانی، که می‌توان آن را حالت خاصی از تجانس با نسبت $k=1$ به‌شمار آورد) نقطهٔ O است؛ خطهای ثابت هم عبارتند ازهمهٔ خطهائی که از O می‌گذرند.

اگر نسبت تجانس ۱ — باشد، آنگاه تبدیل نیمدوری است حول مرکز تجانس؛ پس یك نیمدور حول یك نقطه، حالت خاص تجانس است. با استفاده از این نکته

می‌توانیم مسأله‌های ۹ تا ۱۱ جلد اول را که در حل آنها نیمدور به‌کار می‌رود، تعمیم دهیم؛ برای حل مسائل کلیتر، باید از تجانس کلیتر استفاده کرد. مثلا در مسألهٔ ۹ می‌توان این شرط را خواست که پاره‌ای از خط مطلوب که بین خط مفروض و دایره قرار می‌گیرد در نقطهٔ A به‌نسبت مفروض m/n تقسیم شود؛ در مسألهٔ ۱۰ (الف) این شرط را می‌توان خواست که نسبت طول وترهایی که خط مطلوب در دو دایره پدید می‌آورد مقدار مفروض m/n باشد؛ درمسألهٔ ۱۰ (ب) می‌توان این شرط را خواست که وقتی طولهای وترهایی که خط مطلوب در دو دایرهٔ S_1 و S_2 پدید می‌آورد در اعداد معلوم m و n ضرب شود، تفاضل این حاصلضربها مقدار مفروضی باشد؛ در مسألهٔ ۱۱ این شرط را می‌توان خواست که نقطهٔ J قطعهٔ EF از وتر CD را به نسبت m/n تقسیم کند. راه‌حل این مسأله‌های جدید مشابه راه‌حلهای مسائل ۹ تا ۱۱ است؛ خواننده می‌تواند این حلها را خود انجام دهد.

۱. دوخط l_1 و l_2 و نقطهٔ A مفروض‌اند. بر A خطی مانند l بگذرانیدکه پاره‌خط BC که l_1 و l_2 بر l جدا می‌کنند چنان باشدکه $AB:AC=m:n$.

۲. الف) دایرهٔ S و نقطهٔ A بر آن مفروض‌اند. مکان هندسی وسطهای همهٔ وترهای مرسوم از A را بیابید.

ب) دایرهٔ S وسه نقطهٔ A، B، و C بر آن مفروض‌اند. وتر AX را چنان رسم کنیدکه وتر BC آن را نصف کند.

۳. دو دایرهٔ مماس R و S مفروض‌اند. فرض‌کنید l خطی است که از نقطهٔ تماس M رسم شده‌است و R را در نقطهٔ دیگر A و S را در نقطهٔ دیگر B قطع کرده است. نشان دهید که مماس بر R در A با مماس بر S در B موازی است.

۴. R و S دو دایرهٔ متخارج هستند. m و n را مماسهای مشترك بیرونی R و S و M را نقطهٔ تقاطع آنها فرض می‌کنیم. از M خطی مانند l رسم می‌کنیم که دایرهٔ R را در نقاط A و B و دایرهٔ S را در نقاط C و D قطع کند. فرض می‌کنیم E نقطهٔ تماس m با R باشد و F نقطهٔ تماس m با S. ثابت کنیدکه:

الف) مثلث ABE با مثلث CDF متشابه است.

ب) نسبت مساحت مثلث ABE به‌مساحت مثلث CDF برابر است بامجذور نسبت شعاعهای R و S.

ج) خط واصل بین نقاط برخورد میانه‌های دومثلث ABE و CDF ازنقطهٔ M می‌گذرد.

۵. فرض می‌کنیم $ABCD$ ذوزنقه‌ای باشد که نقطهٔ M محل تلاقی امتدادهای ساقهای AD و BC ی آن است و N نقطهٔ برخورد قطرهای AC و BD ی آن. ثابت کنید که:

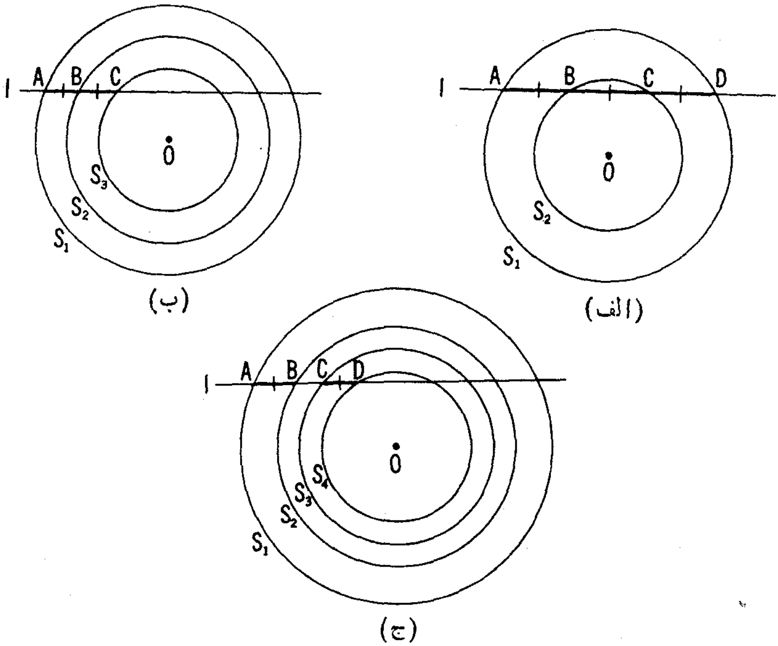
الف) R و S، دایره‌های محیطی مثلثهای ABM و DCM، برهم مماسند.
ب) R_1 و S_1، دایره‌های محیطی مثلثهای ABN و CDN، برهم مماسند.
ج) نسبت شعاعهای R_1 و S_1 با نسبت شعاعهای R و S برابر است.

۶. الف) با استفاده ازقاعده‌های موازی AB و CD از ذوزنقهٔ $ABCD$ مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABE و CDF را رسم می‌کنیم. این مثلثها باید هردو در یك طرف قاعده باشند (یعنی، اگر AB و CD را افقی فرض کنیم، یا هردو مثلث در بالای قاعده یا هردو درپایین قاعده باید رسم شوند). ثابت کنید که خط EF ازنقطهٔ تقاطع ساقهای ذوزنقه می‌گذرد.
ب) برضلعهای متوازی AB و CD از ذوزنقه، مربعهایی دربیرون ذوزنقه بنا می‌کنیم. ثابت کنید که خط واصل بین مرکزهای آنها ازنقطهٔ برخورد قطرهای ذوزنقه می‌گذرد.

۷. ثابت کنید که درهر ذوزنقه خط واصل بین نقاط وسط دو قاعده از نقطهٔ برخورد امتداد دو ساق و همچنین ازمحل برخورد قطرها می‌گذرد.

تذکر: ← مسألهٔ ۱۰۸ دربخش اول ازفصل اول، جلد سوم.

۸. الف) دو دایرهٔ هم‌مرکز S_1 و S_2 مفروض‌اند. خطی مانند l رسم کنید که دو دایره را در نقاط متوالی A، B، C و D چنان قطع کند که $AB = BC = CD$ (شکل ۱۰ الف).
ب) سه دایرهٔ هم‌مرکز S_1، S_2 و S_3 مفروض‌اند. خطی مانند l رسم کنید که سه دایره را در نقاط متوالی A، B و C چنان قطع کند که $AB = BC$ (شکل ۱۰ ب).
ج) چهاردایرهٔ هم‌مرکز S_1، S_2، S_3، و S_4 مفروض‌اند. خطی مانند l رسم کنید که S_1، S_2، S_3 و S_4 را بترتیب در نقاط A، B، C، D قطع کند به‌طوری که $AB = CD$ (شکل ۱۰ ج).



شکل ۱۰

۹. الف) درمثلث مفروض ABC مربعی محاط کنیدکه دو رأس آن برقاعدهٔ AB و دو رأس دیگرش برضلعهای AC و BC قرار گیرند.

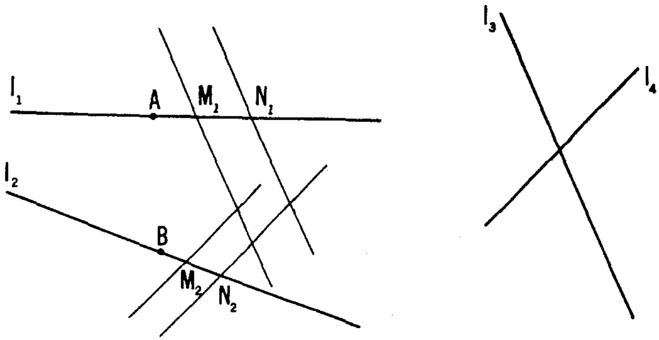
ب) درمثلث مفروض ABC مثلثی محاط کنیدکه اضلاعش با سه‌خط مفروض l_1، l_2 و l_3 موازی باشند.*

مسألهٔ ۱۰ (ج) تعمیم مسألهٔ ۹ (ب) است.

۱۰. الف) دو خط l_1 و l_2 و نقطه‌های A و B بترتیب واقع بر l_1 و l_2 مفروض‌اند. بر l_1 و l_2 پاره‌خطهای AM_1 و BM_2 را با نسبت مفروض

---

* منظور از «محاط» بودن یك چندضلعی درچندضلعی مفروض این است که همهٔ رأسهای چندضلعی برضلعهای چندضلعی مفروض (با حداقل یك رأس بر هرضلع) یا بر امتداد آنها قرار گیرند.



شکل ۱۱

$AM_1/BM_2=m$ رسم می‌کنیم، و ازنقاط M_1 و M_2 خطهایی موازی با دوخط مفروض l_3 و l_4 رسم می‌کنیم (شکل ۱۱). مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ برخورد این خطها.

ب) چندضلعی $A_1A_2 \ldots A_n$ چنان تغییر می‌کند که ضلعهایش با راستاهای مفروضی موازی می‌مانندو رأسهای A_1، A_2، ... و A_{n-1} برخطهای مفروض l_1، l_2، ...، و l_{n-1} حرکت می‌کنند. مطلوب است مکان هندسی رأس A_n.

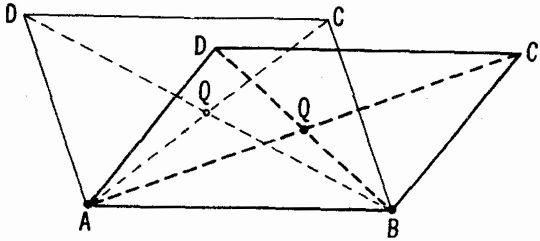
ج) درچندضلعی مفروضی چندضلعی دیگری محاط کنید که ضلعهایش با خطهای مفروضی موازی باشند.

مسألهٔ ۱۸۹ دربخش ۵، فصل اول جلد سوم تعمیم اساسی مسألهٔ ۱۰ (ج) است.

۱۱. «لولایی» به‌صورت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. طولهای اضلاع و رأسهای A و B از آن ثابت هستند ولی رأسهای C و D متحرك (شکل ۱۲). ثابت کنید کــه وقتی C و D حرکت کنند، Q نقطهٔ برخورد قطرهــا بریك دایــره حرکت می‌کند.

۱۲. الف) فرض می‌کنیم D نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC، S، با ضلع BC باشد، و E نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی خارجی نظیر به ضلع BC با ضلع BC. ثابت کنید کــه D_1، محل برخورد AE و S، نسبت به D متقاطر است (D_1 و D دوسر یك قطرند).

ب) مثلث ABC را بــا داشتن شعاع دایــرهٔ محاطی، r، ارتفاع $h=AP$



شکل ۱۲

وارد برضلع BC، و $b-c$، تفاضل دوضلع دیگر، رسم کنید.

۱۳. دایره‌ای مانند S رسم کنید که

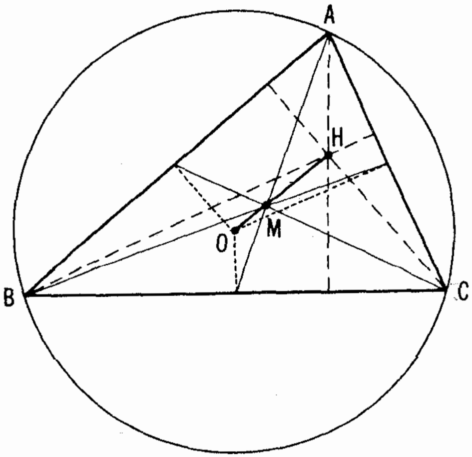
الف) بردوخط مفروض l_1 و l_2 مماس باشد و ازنقطهٔ مفروض A بگذرد.

ب) از دونقطهٔ مفروض A و B بگذرد و برخط مفروض l مماس باشد.

ج) بردوخط مفروض l_1 و l_2 و دایرهٔ مفروض S مماس باشد.

← مسألهٔ ۲۲ که در زیر می‌آید، ومسائل ۲۳۲(الف)، (ب)؛ ۲۳۷ دربخش ۲؛ ۲۴۷ دربخش ۳؛ ۲۷۱ دربخش ۵، فصل دوم ازجلد سوم.

۱۴. الف) ثابت کنید که M نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC، O مرکز

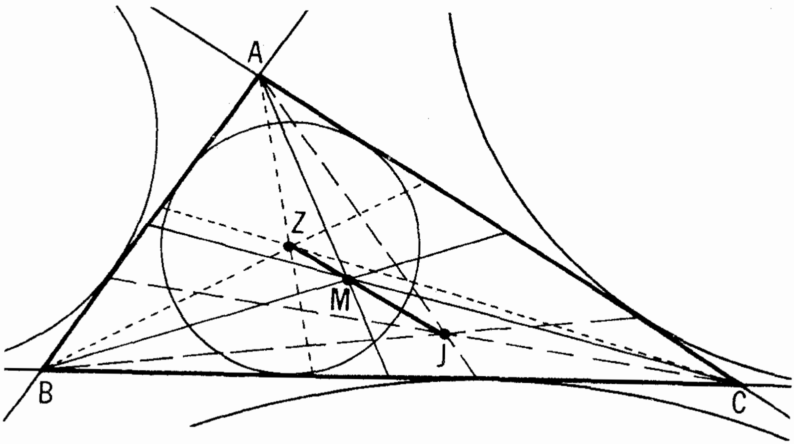


شکل ۱۳ (الف)

دایرهٔ محیطی، و H نقطهٔ برخورد ارتفاعها بر یك خط واقع‌اند*، و داریم $HM/MO = ۲/۱$ (شکل ۱۳ الف).

ب) ثابت کنید که سه خطی که از نقاط وسط اضلاع یك مثلث و موازی با نیمسازهای زاویه‌های روبرو رسم می‌شوند دریك نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

ج) ثابت کنید که خطوط واصل از رأسهای مثلث ABC به‌نقاط تماس ضلع مقابل به‌هر رأس با دایرهٔ محاطی بیرونی نظیر به‌آن ضلع، دریك‌نقطهٔ واحد J یکدیگر را قطع می‌کنند. این‌نقطه با نقطهٔ M محل برخورد میانه‌ها و Z مرکزدایرهٔ‌محاطی بر یك راستاست و داریم $JM/MZ = ۲/۱$ (شکل ۱۳ ب).



شکل ۱۳(ب)

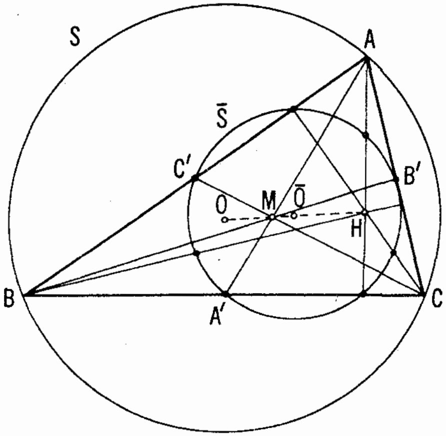
۱۵. در دایرهٔ مفروض S مثلثی محاط کنید که رأس A و H نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع آن داده شده باشد.

۱۶. دایرهٔ S مفروض است. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقاط برخورد (الف) میانه‌ها، (ب) ارتفاعهای همهٔ مثلثهای‌حادالزوایا، منفرج‌الزاویه، وقائم‌الزاویهٔ محاط در آن.

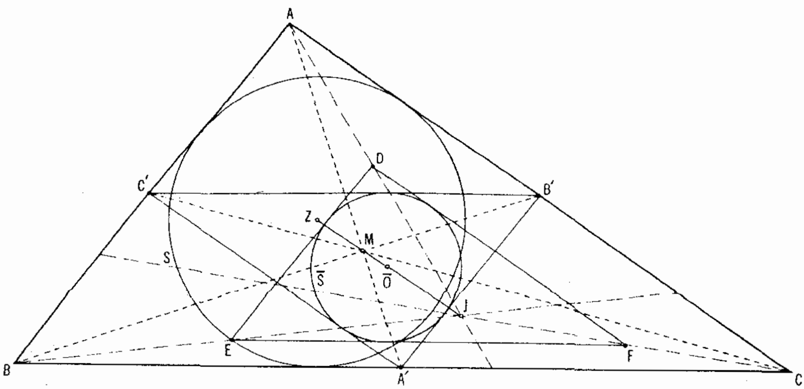
۱۷. الف) فرض کنید H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC و M نقطهٔ برخورد میانه‌های آن باشد. ثابت کنید که دایرهٔ $\bar{S}$، مجانس دایرهٔ محیطی S به‌مرکز

* این خط راخط اویلر مثلث ABC می‌نامند.

تجانس H ونسبت تجانس ۱/۲، با مجانس S به‌مرکز تجانس M و نسبت تجانس ۱/۲ — مجانس است. این دایره $(\bar{S})$ از A' و B' و C'، وسطهای اضلاع مثلث، از پاهای ارتفاعها و از وسطهای پاره‌خطهای HA ، HB و HC می‌گذرد(شکل ۱۴ الف).*



شکل ۱۴(الف)



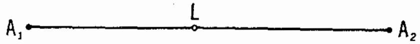
شکل ۱۴(ب)

---

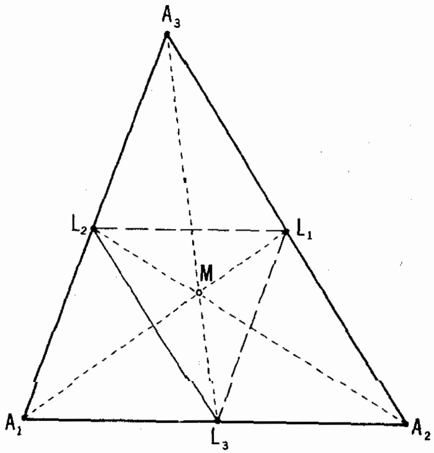
* این دایره $(\bar{S})$ دایرهٔ اویلر یا دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC خوانده می‌شود.

ب) فرض کنید J نقطهٔ برخورد خطهای واصل از رأسهای مثلث ABC به‌نقاط تماس ضلعهای روبروی آنها با دایرهٔ محاطی بیرونی مربوط به‌آن ضلع باشد [←مسألهٔ ۱۴ (ج)] و M را نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث می‌گیریم. ثابت کنید که دایرهٔ $\bar{S}$ مجانس دایرهٔ محاطی داخلی S به‌مرکز تجانس J و نسبت تجانس ۱/۲، با مجانس S به‌مرکز تجانس M و نسبت تجانس ۱/۲ — نیز مجانس است. این دایره برخطهای $A'B'$ ، $B'C'$ ، $C'A'$ که وسطهای ضلعهای مثلث ABC را به‌هم وصل می‌کنند و نیز بر سه‌خطی که نقاط D ، E و F یعنی وسطهای پاره‌خطهای JA ، JB و JC را به‌هم وصل می‌کنند مماس است (شکل ۱۴ ب).

۱۸. الف) مرکز هندسی یك چندضلعی. منظور از مرکز هندسی یك پاره‌خط، نقطهٔ وسط آن است (شکل ۱۵ الف). مرکزهای هندسی اضلاع هرمثلث، مثلث جدیدی می‌سازند که مجانس مثلث اولیه است با نسبت تجانس ۱/۲ — و مرکز تجانس نقطهٔ برخورد میانه‌ها، که نقطهٔ اخیر مرکز هندسی مثلث نیز خوانده می‌شود (شکل ۱۵ ب). ثابت کنید که مرکزهای هندسی چهارمثلثی که رأسهای آنها بر رأسهای چهارضلعی دلخواه مفروضی منطبق‌اند چهارضلعی جدیدی می‌سازند که مجانس



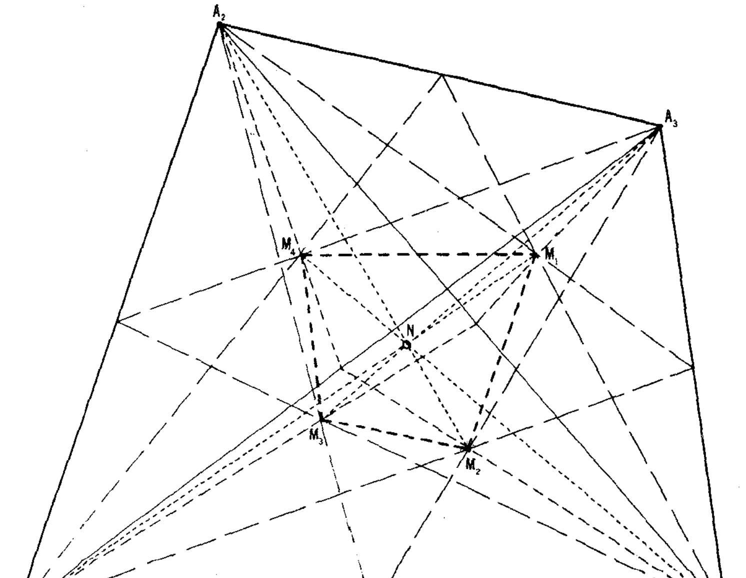
شکل ۱۵ (الف)



شکل ۱۵ (ب)

چهارضلعی اولیه است با نسبت تجانس ۱/۳ — است؛ دراین‌حال نقطهٔ N ، مرکز تجانس (← شکل ۱۵ ج)، مرکزهندسی چهارضلعی خوانده می‌شود. به‌همین ترتیب، مرکزهای هندسی پنج چهارضلعی که رأسهای آنها بر رأسهای یك پنج‌ضلعی دلخواه مفروض منطبق‌اند پنج‌ضلعی جدیدی می‌سازند که مجانس پنج‌ضلعی مفروض است با نسبت تجانس ۱/۴ — و مرکز تجانس نقطه‌ای موسوم به مرکز هندسی پنج ضلعی؛ مرکزهای هندسی شش پنج‌ضلعی که رأسهای آنها بررأسهای یك شش‌ضلعی دلخواه مفروض منطبق‌اند، شش‌ضلعی جدیدی می‌سازند که مجانس شش‌ضلعی مفروض است با نسبت تجانس ۱/۵ — و مرکز تجانس نقطه‌ای که مرکزهندسی شش‌ضلعی خوانده می‌شود، و به‌همین قیاس.*

[به‌عبارت دیگر، سه خط واصل رأسهای هر مثلث به‌مراکز هندسی اضلاع



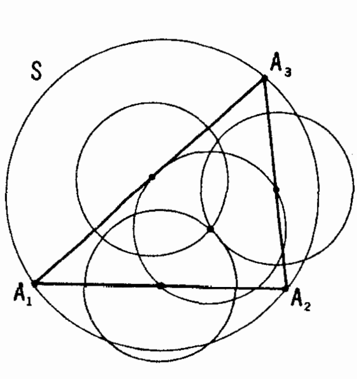
شکل ۱۵(ج)

* به‌آسانی می‌توان ثابت‌کرد که مرکز هندسی که بدین‌گونه برای هر n ضلعی تعریف شد، بر مرکز هندسی مادی یا گرانیگاه (مرکز ثقل) n جرم متساوی واقع در رأسهای آن منطبق است.

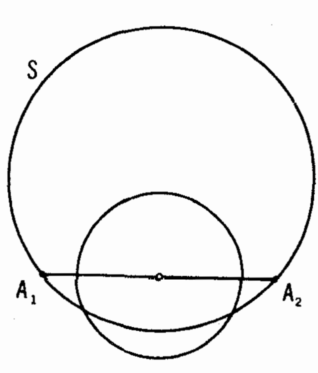
روبه‌رو در یك نقطه ــ مرکز هندسی مثلث ــ به‌هم می‌رسند و توسط این نقطه به‌نسبت ۱ : ۲ (ابتدا از رأس) تقسیم می‌شوند؛ چهارخط واصل از رأسهای هرچهارضلعی به‌مرکز هندسی مثلث حاصل از سه‌رأس دیگر در یك نقطه ــ مرکزهندسی چهارضلعی ــ به‌هم می‌رسند و توسط این نقطه به نسبت ۱ : ۳ (ابتدا از رأسها) تقسیم می‌شوند، به‌همین قیاس].

ب) دایرهٔ اویلر چندضلعی محاط در دایره. منظور ما از دایرهٔ اویلر یك وتر از دایرهٔ S به‌شعاع R دایره‌ای‌است به‌شعاع $R/۲$ به‌مرکز وسط این وتر (شکل ۱۵ د). مرکزهای سه‌دایرهٔ اویلر سه‌ضلع هرمثلث (محاط دردایره‌ای به‌شعاع R) بر دایره‌ای به شعاع $R/۲$ (و به مرکز نقطهٔ برخورد این سه دایره)، موسوم به‌دایره اویلر مثلث مفروض، واقع‌اند (شکل ۱۵ ه را با شکل ۱۴ الف مقایسه‌کنید). ثابت‌کنید که مرکزهای چهار دایرهٔ اویلر چهارمثلثی که رأسهای آنها رأسهای یك چهارضلعی دلخواه محاط در دایرهٔ S به‌شعاع R است، بر دایره‌ای به‌شعاع $R/۲$ (و به‌مرکز نقطهٔ برخورد این چهار دایره) واقع‌اند؛ این دایره، دایرهٔ اویلر چهارضلعی مفروض خوانده می‌شود (شکل ۱۵ و). به‌همین ترتیب، مرکزهای دایره‌های اویلر پنج چهارضلعی که رأسهایشان رأسهای یك پنج‌ضلعی دلخواه محاط در دایرهٔ S به‌شعاع R هستند بر دایره‌ای به‌شعاع $R/۲$ (به مرکز نقطهٔ برخورد این پنج دایره) موسوم به‌دایرهٔ اویلر پنج‌ضلعی مفروض، واقع‌اند، و به‌همین قیاس.

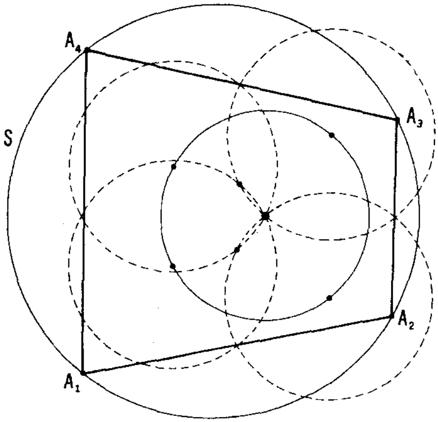
ج) ثابت‌کنید که مرکزهندسی هر n ضلعی محاط دردایره [←مسألهٔ (الف)] بر پاره‌خطی واقع است که مرکز دایرهٔ محیطی را به‌مرکز دایرهٔ اویلر وصل‌می‌کند [← مسألهٔ (ب)] و این پاره‌خط را به‌نسبت $(n-۲) : ۲$ تقسیم می‌کند.



شکل ۱۵ (ه)



شکل ۱۵ (د)



شکل ۱۵(و)

استفاده ازتجانس برای حل مسائل ترسیمی دربخش کراندار از صفحه مناسب است. در حل مسائل ترسیمی معمولا صفحه بی‌کران فرض می‌شود؛ و در نتیجه مثلا فرض می‌شود که هرخط را می‌توان از هردو سو تا بینهایت امتداد داد. اما درعمل همیشه ترسیمها درناحیهٔ دقیقاً کرانداری ازصفحه_برصفحهٔ کاغذ یا تخته سیاه_انجام می‌شود. بنابراین در حین ترسیم مثلا ممکن است نقطهٔ برخورد دوخط که در ترسیم وارد می‌شوند خارج ازمحدودهٔ شکل واقع شود یعنی قابل دسترس نباشد. این‌موارد موجب مطرح شدن مسائلی می‌شود که درآنها بخصوص ذکر می‌شود که ترسیم باید تماماً درون بخش کرانداری ازصفحه صورت گیرد.* با استفاده از تجانس می‌توانیم

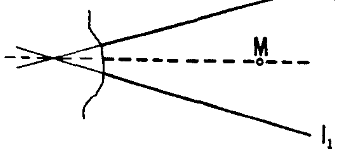
* باید توجه کرد که درهندسه اصراری نیست کـه در هرمسألهٔ ترسیمی شکل واقعاً کامل شود: همین‌که راه درست به‌سوی‌حل آن معلوم شود(یعنی اگر به‌گفتهٔ ی. اشتاینر هندسه‌دان آلمانـی (۱۷۹۶_۱۸۶۳) ترسیم «به‌کمک کلمات» انجام گیرد) مسأله حل شده قلمداد می‌شود. بنابراین، کراندار بودن شکل محدودیت واقعی برای‌حل مسائل‌ترسیمی به‌شمار نمی‌آید و درنتیجه ترسیمهای مقید به‌بخش کرانداری ازصفحه را باید در ردیف آن نوع مسائلی دانست کـه درصورت آنها شرط خاصی وجود دارد که امکانات ترسیم را محدود می‌کند (مثل ترسیمهایی کـه درآنها استفاده از خط‌کش مجاز نیست یا پرگار را نباید به‌کار گرفت؛ در مورد این‌گونـه ترسیمها، ← جلد سوم). در طراحـی مهندسی مسألهٔ
←

این نکتهٔ مهم را ثابت کنیم که هر ترسیمی که درصفحهٔ بیکران قابل انجام باشد، در هر بخشی ازصفحه، هرقدر هم که کوچك باشد، نیز قابل انجام است (← مسألهٔ ۲۰ در زیر).

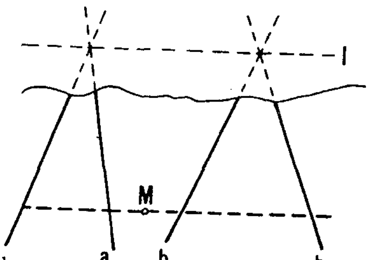
۱۹. الف) نقطهٔ مفروض M را به‌نقطهٔ تلاقی «خارج از دسترس» دوخط مفروض l_1 و l_2 (یا خط مفروض l و دایرهٔ S، یا دو دایرهٔ مفروض S_1 و S_2) وصل کنید. (← شکل ۱۶ الف).

ب) از نقطهٔ مفروض M خطی موازی با خط «خارج از دسترس» l که دو نقطه‌اش توسط نقاط برخورد دو جفت خط a_1، a_2 و b_1، b_2 مشخص می‌شود، رسم کنید (← شکل ۱۶ ب).

ج) دایره‌ای از سه نقطهٔ «خارج از دسترس» A، B، C که بر یك راستا نیستند و بترتیب توسط سه‌جفت خط a_1 و a_2، b_1 و b_2، c_1 و c_2 مشخص‌می‌شوند بگذرانید (شکل ۱۶ ج)؛ البته دراین مسأله تنها می‌خواهیم بخشی از دایره را که درناحیهٔ قابل دسترس صفحه قرار دارد رسم کنیم، یا مرکز و شعاع آن را مشخص کنیم. همچنین نگاه کنید به‌مسائل ۱۱۹ (الف)، (ب) و ۱۲۵ دربخش ۲، فصل اول از جلد سوم.

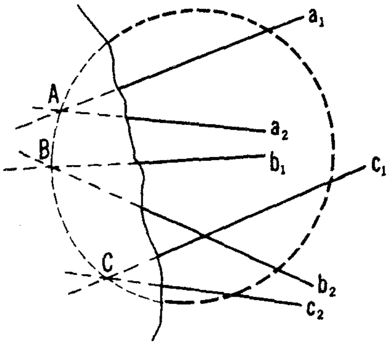


شکل ۱۶ (الف)



شکل ۱۶ (ب)

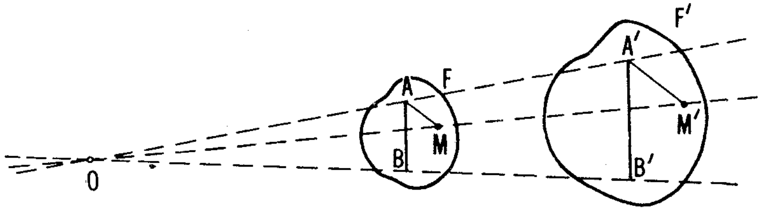
→ ترسیمهایی که در بخش کرانداری از صفحه انجام گیرند از اهمیت عملی برخوردارند. همچنین در زمینسنجی ــ علم ترسیم واندازه‌گیری درنواحی واقع برزمین ــ این‌گونه ترسیمها دارای منظور عملی جدی هستند؛ در این مورد حوزهٔ مجاز ترسیمها می‌توانند محدود به‌رودخانه، دریا، کوه، جنگل، مرداب و غیره باشد.



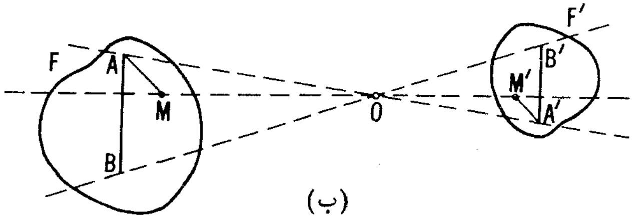
شکل ۱۶ (ج)

۲۰. ثابت کنید که به‌ازای هر توزیع مفروضی از نقاط در یك جزء کراندار $\mathcal{K}$ ازصفحه یا حتی خارج از آن، و به‌ازای هرمقداری ازفاصله‌های داده شده، هرمسألهٔ ترسیمی که درتمامی صفحه قابل حل باشد بدون خروج ازمرزهای $\mathcal{K}$ هم حل‌شدنی است. [دراین مورد، اگر یك‌نقطهٔ A که مفروض است یا باید از راه ترسیم پیدا شود خارج از محدودهٔ $\mathcal{K}$ قرار گیرد آن را به‌توسط دو خط واقع در محدوده که در A به‌هم می‌رسند مشخص می‌کنیم؛ خط دور از دسترس به‌توسط دو نقطه‌اش مشخص می‌شود و دایرهٔ دور از دسترس توسط مرکز و یك نقطه‌اش یا مرکز و شعاعش مشخص می‌شود.]

F و F' را دو شکل مجانس با نسبت تجانس k (مثبت یا منفی!) می‌گیریم. (← شکل ۱۷ الف و ب). دراین حالت پاره‌خطهای متناظر در دو شکل، موازی خواهند بود و نسبت طولهایشان به‌یکدیگر مقدار ثابت k خواهد بود؛ این نتایج از تشابه دو مثلث OAB و $OA'B'$ به دست می‌آید (با توجه به‌اینکه $OA'/OA=OB'/OB=\pm k$). اکنون قرار می‌گذاریم که نسبت دو پاره‌خط متوازی AB و $A'B'$ را مثبت یا منفی اختیار می‌کنیم بسته به‌اینکه هم‌جهت باشند (از A به B و از A' به B') یا جهات مختلف داشته باشند؛ این قرارداد مشابه قراردادی است که قبلا در مورد نسبت پاره‌خطهای واقع بر یك خط راست بیان کردیم. پس همیشه می‌توان گفت که در دوشکل متجانس پاره‌خطهای متناظرمتوازی‌اند و نسبتشان ثابت ومساوی با نسبت‌تجانس‌است. اکنون‌ثابت می‌کنیم که بعکس، اگر به‌هرنقطه ازشکل F بتوان نقطه‌ای ازشکل F' را نسبت‌داد چنان‌که پاره‌خطهای متناظر بااین‌نقاط دراین دوشکل متوازی ودارای نسبت ثابت (ازلحاظ اندازه و علامت) k،



(الف)



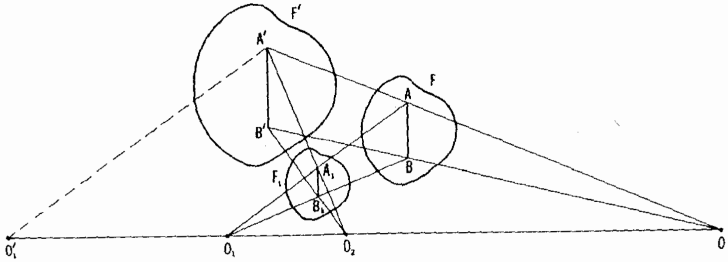
(ب)

شکل ۱۷

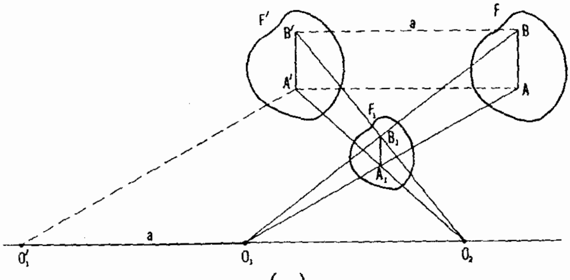
نامساوی با ۱، باشند، آنگاه F و F' مجانس‌اند.

برای اثبات، نقطهٔ دلخواه M را در F و نقطهٔ M' متناظر بـا آن را در F' اختیار و فـرض می‌کنیم A و A' یك زوج دلخواه دیگر از نقاط متناظر این دو شکل باشند، و O را نقطهٔ برخورد خطهای MM' و AA' می‌گیریم (← شکل ۱۷). چـون $MA \| M'A'$، مثلثهای OMA و $OM'A'$ متشابه‌انـد؛ بنا به‌فرض $M'A'/MA = k$ پس $OM'/OM = OA'/OA = k$. از اینجا نتیجه می‌شود که اولا نقطهٔ O به‌انتخاب زوج A و A' بستگی ندارد (نقطه‌ای‌است روی MM' که به‌ازای آن $OM'/OM = k$) و ثانیاً، هرزوج نقاط متناظر A و A' ازشکلهای F و F' مجانس یکدیگرند بـا مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و این همان حکمی‌است که می‌خواستیم ثابت‌کنیم. اگر k که همان نسبت پاره‌خطهای متناظر است $+1$ باشد، استدلال فوق معتبر نیست زیـرا دراین حالت خطهای MM' و AA' متقاطـع نیستند (بـا هم موازیند)؛ دراین حالت شکلهای F و F' مجانس نیستند بلکـه به توسط یك انتقـال از یکدیگر به دست می‌آیند (← فصل اول، بخش ۱، جلد اول).

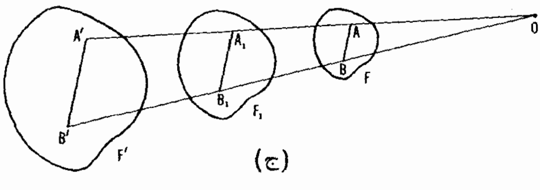
اکنون حاصلضرب تجانسها* را بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم شکل F_1 مجانس شکل F با مرکز تجانس O_1 و نسبت تجانس k_1 باشد و نیز F' مجانس F_1 با مرکز تجانس O_2 و نسبت تجانس k_2 باشد (← شکل ۱۸. در اینجا برای سادگی تجسم، حالتی با k_1 و k_2 مثبت را نشان داده‌ایم؛ در اثبات زیر k_1 و k_2 عملاً می‌توانند مثبت یا منفی اختیار شوند). دراین‌حالت پاره‌خطهای متناظر در F و



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۱۸

---

* درمتن اصلی «جمع تجانسها» نوشته شده است، ولی مطابق اصطلاح رایج درتبدیلات، مترجم آن را «حاصلضرب تجانسها» ترجمه‌کرده است.

F_1 موازی‌اند و نسبت‌شان مقدار ثابت k_1 است؛ پاره‌خطهای متناظر در F_1 و F' نیز موازی و دارای نسبت ثابت k_2 خواهند بود. از اینجا نتیجه می‌شود که پاره‌خطهای متناظر در F و F' موازی‌اند و نسبت‌شان مقدار ثابت k_1k_2 است (از ضرب معادله‌های $A_1B_1/AB=k_1$ و $A'B'/A_1B_1=k_2$ درهم نتیجه می‌شود $A'B'/AB=k_1k_2$). معنی این نتیجه‌گیری این است که F' مجانس شکل F است با نسبت تجانس k_1k_2 اگر $k_1k_2\neq 1$ و در صورتی که $k_1k_2=1$، F' به‌توسط یك انتقال از F به‌دست می‌آید. این نتیجه را چنین نیز می‌توان بیان کرد: حاصلضرب دو تجانس با نسبتهای k_1 و k_2 یك تجانس با نسبت k_1k_2 است اگر $k_1k_2\neq 1$ و یك انتقال است اگر $k_1k_2=1$.*

با داشتن مرکزهای O_1 و O_2 و نسبتهای k_1 و k_2 در دو تجانس اکنون نشان می‌دهیم چگونه می‌توان نقطهٔ O، مرکز تجانس حاصلضرب، را پیدا کرد (یا درحالت $k_1k_2=1$ چگونه می‌توان اندازه و راستای انتقالی‌را که حاصلضرب آنهاست پیدا کرد.** روشن است که اگر O_1 بر O_2 منطبق باشد، O نیز براین نقطه منطبق خواهد شد (شکل ۱۸ ج)؛ پس فرض می‌کنیم که مرکزهای O_1 و O_2 متفاوت باشند. تجانس اولی مرکز O_1 را در جای خود نگاه می‌دارد و تجانس دومی O_1 را به‌نقطهٔ O_1' واقع برخط O_2O_1 می‌برد چنان‌که $O_2O_1'/O_2O_1=K_2$ (شکل ۱۸ الف، ب). پس حاصلضرب این دوتبدیل O_1 را به O_1' می‌برد. از اینجا نتیجه می‌شود که اگر $k_1k_2=1$ (شکل ۱۸ ب)، آنگاه حاصلضرب این دوتبدیل انتقالی در راستای خط O_1O_1' است (یعنی در راستای خط O_2O_1، زیرا O_1' برخط O_1O_2 واقع است) به اندازهٔ طول $a=O_1O_1'$، وچون $O_2O_1'/O_2O_1=k_2$، پس a را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$a=O_2O_1'-O_2O_1=\frac{O_2O_1'-O_2O_1}{O_2O_1}O_2O_1=(k_2-1)O_2O_1$$

---

* صورت دیگر این قضیه چنین است: دو شکل F و F' که هر یك مستقلا مجانس یك شکل سوم F_1 هستند یا مجانس یکدیگرند و یا حاصل انتقال یکدیگر.

به‌خوانندگان توصیه می‌کنیم که با شروع از تعریف تجانس و بدون استفاده ازاین مطلب که، وقتی پاره‌خطهای متناظر در دو شکل موازی و نسبت طولهاشان ثابت باشد آنگاه آن دوشکل‌مجانس یکدیگرند، خود سعی‌کنید قضیهٔ ضرب مجانسها را اثبات کنید.

** برای اینکه استدلالی که به‌دنبال می‌آید مستقل از علامت و اندازهٔ نسبتهای تجانس k_1 و k_2 باشد، همه‌جا باید پاره‌خطها جهت‌دار در نظرگرفته شوند (← آخر بخش ۱، فصل اول، جلد اول که با حرف ریز آمده است).

اگر $k_1 k_2 \neq 1$ (شکل ۱۸ الف)، آنگاه مرکز مطلوب O روی خط $O_1O'_1$، یعنی برخط O_1O_2 واقع است و داریم $OO'_1/OO_1 = k_1k_2$. بیان مناسبتری هم برای موقعیت O می‌توان یافت. از رابطه‌های $O_2O'_1/O_2O_1 = k_2$ و $OO'_1/OO_1 = k_1k_2$ نتیجه می‌شود

$$\frac{O_1O'_1}{O_2O_1} = \frac{O_2O'_1 - O_2O_1}{O_2O_1} = k_2 - 1 \quad \text{و} \quad \frac{O_1O'_1}{OO_1} = \frac{OO'_1 - OO_1}{OO_1} = k_1k_2 - 1$$

اکنون از تقسیم معادلهٔ اول برمعادلهٔ دوم خواهیم داشت

$$OO_1 = \frac{k_2 - 1}{k_1k_2 - 1} O_2O_1 \quad \text{یا بالاخره} \quad \frac{OO_1}{O_2O_1} = \frac{k_2 - 1}{k_1k_2 - 1}$$

توجه کنید که طی این بحث، قضیهٔ مهم زیر را اثبات کرده‌ایم:*

قضیهٔ سه مرکز تجانس. فرض کنید شکل F_1 مجانس شکل F با مرکز تجانس O_1 باشد و در عین حال F_1 مجانس شکل F' با مرکز تجانس O_2 نیز باشد. اگر O_1 بر O_2 منطبق نباشد، خط O_1O_2 از نقطهٔ O مرکز تجانس شکلهای F و F' (شکل ۱۸ الف) می‌گذرد، یا موازی باراستای انتقالی است که F را به F' می‌برد (شکل ۱۸ ب). اگر O_1 بر O_2 منطبق باشد، O_1 مرکز تجانس F و F' نیز هست (شکل ۱۸ ج).

اگر O_1 غیر از O_2 باشد، خط O_1O_2 محور تجانس سه شکل F و F_1 و F' خوانده می‌شود؛ اگر O_1 بر O_2 منطبق باشد، این نقطه مرکز تجانس شکلهای F و F_1 و F' خوانده می‌شود.

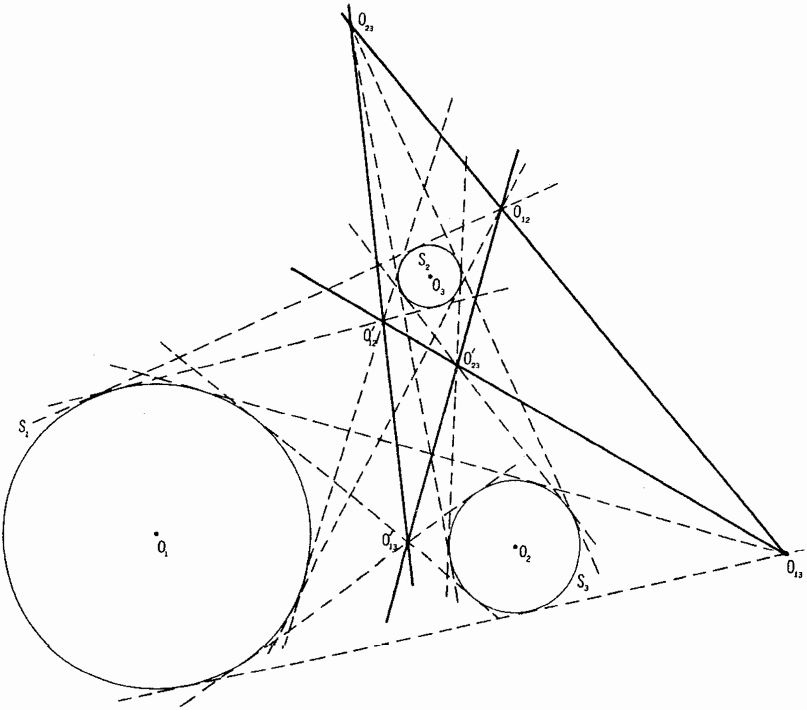
معمولاً قضیهٔ سه‌مرکز تجانس به‌صورتی که در زیر می‌آید و دقت کمتری دارد بیان می‌شود: سه مرکز تجانس سه شکل دو به دو متجانس بر یک خط راست واقع‌اند.**

---

* اثبات کاملاً متفاوتی برای این قضیه در آخرین پاراگراف فصل دوم ازجلد سوم عرضه شده است.

** حالتی که در آن سه مرکز تجانس برهم منطبق باشند دراین بیان قضیه که در همهٔ حالات وجود سه‌مرکز تجانس صادق است، می‌گنجد. اشارهٔ متن به کمتر بودن دقت به‌این نکته برمی‌گردد که دراینجا حالتی‌را که دوتا ازشکلهای F و F_1 و F' باهم قابل انطباق باشند (بر اثر انتقال از یکدیگر به‌دست آیند) نادیده‌گرفته‌ایم. در این مورد بخش ۲ از فصل اول جلد سوم را ببینید.

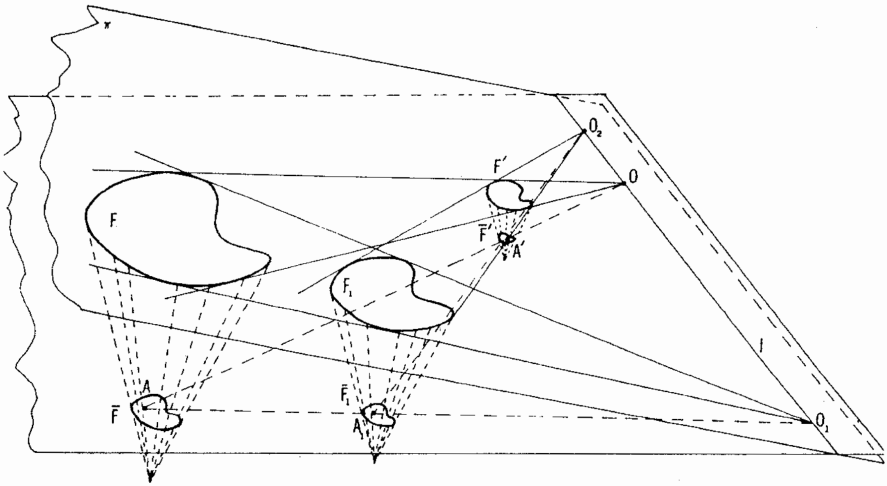
به‌عنوان مثال، حالتی با سه دایرهٔ S_1، S_2 و S_3 را در نظر می‌گیریم. در حالت کلی، هیچ دوتای آنها باهم قابل‌انطباق نیستند و هرزوج از دایره‌ها دومرکز تجانس دارند، یك مرکز تجانس بیرونی و یك مرکز تجانس درونی لذا روی‌هم رفته شش مرکز تجانس داریم که بر چهار محور تجانس قرار دارند (شکل ۱۹). اگر دوتا ازدایره‌ها باهم قابل‌انطباق باشند، مرکزتجانس بیرونی ندارند. ازاین‌رو پنج مرکز تجانس داریم کــه بر چهار محور تجانس قرار دارند؛ اگر هر سه دایره باهم قابل انطباق باشند، سه مرکز تجانس و سه محور تجانس داریم. همچنین اگر مرکزهای سه دایره بر یك خط نباشند، سه محور تجانس از یکدیگر متمایزند؛ اگر این سه مرکز بر یك راستا باشند، آنگاه همهٔ محورهای تجانس برهم منطبق‌می‌شود که در این حالت ممکن است سه‌مرکز تجانس برهم منطبق شوند به‌طوری که یکی



شکل ۱۹

از چهار محور تجانس سه دایره به‌صورت یك مرکز تجانس درآید.*

برهان جالبی با استفاده از هندسهٔ فضایی برای قضیهٔ مربوط به سه مرکز تجانس وجود دارد. صفحه‌ای را که سه شکل F، F_1 و F' درآن واقع‌اند با حرف π نشان می‌دهیم. شکلهای F، F_1 و F' را تصاویرمرکزی شکلهای فضایی $\bar{F}$، $\bar{F}_1$ و $\bar{F}'$ می‌گیریم که دو به دو مجانس یکدیگر باشند با همان مرکزهای تجانس O_1، O_2 و O (شکل ۲۰)**. اگر $\bar{F}'$ مجانس F نباشد بلکه به‌توسط انتقال از F به‌دست آمده باشد، آنگاه $\bar{F}'$ هم به‌توسط همان انتقال از $\bar{F}$ به‌دست آمده است. فرض‌کنید A نقطهٔ دلخواهی از $\bar{F}$ باشد که درصفحهٔ π واقع نیست و A_1 و A' نقاط متناظر آن در F_1 و F' باشند. دراین صورت خط A_1A از O_1 می‌گذرد، و A_1A' از O_2؛ و AA' از نقطهٔ O می‌گذرد(یا موازی با راستای انتقالی است که F را به F' می‌برد). پس اگر O_1 و O_2 برهم‌منطبق‌باشند، خطهای A_1A و $A'A_1$ نیز برهم منطبق‌می‌شوند؛ بنابراین خط AA' نیز بر AA_1 و A_1A' منطبق خواهد شد، یعنی نقطهٔ O که محل تقاطع آنها با صفحهٔ π است، بر O_1 و O_2 منطبق می‌شود. اگر $O_1 \neq O_2$، آنگاه صفحهٔ گذرنده از A،



شکل ۲۰

* خواننده لازم است این شکلها را خود رسم کند و همهٔ حالتهای ممکن را نشان دهد.
** تعریف وویژگیهای تجانس در فضا همانند تعریف وویژگیهای تجانس درصفحه‌است.

A_1 و A' صفحهٔ π را درخط l قطع می‌کند کــه از هر سه مرکز تجانس O_1، O_2 و O می‌گذرد، یاازO_1 و O_2 می‌گذرد و باراستای انتقالی کهF را به F' می‌برد موازی‌است.

۲۱. فرض‌کنید دایرهٔ S بر هریك از دو دایرهٔ S_1 و S_2 مماس است. ثابت کنید کــه خط واصل بین نقاط تماس از یکی از مراکز تجانس دوایــر S_1 و S_2 می‌گذرد (که مرکز تجانس بیرونی است، اگر S بر هر دو دایرهٔ S_1 و S_2 مماس درونی یا مماس بیرونی باشد؛ در غیراین‌صورت، مرکز تجانس درونی است).

این مسأله در بخش ۱ فصل دو، جلد سوم، از جنبهٔ دیگری آورده می‌شود (← مسألهٔ ۲۱۲).

۲۲. بااستفاده‌از قضیهٔ سه مرکز تجانس راه‌حل تازه‌ای برای مسألهٔ۱۳ ج بیابید.

۲۳. الف) S_1 و S_2 و S_3، سه دایــرهٔ دو به دو مماس بیرونی داده شده‌اند (شکل ۲۱ الف). نقطهٔ دلخــواه A_1 از S_1 را بــه M_1، نقطهٔ تماس S_1 و S_2، وصل می‌کنیم تا S_2 را درنقطهٔ دیگر A_2 ببرد؛ A_2 را به M_2، نقطهٔ تماس S_2 و S_3 وصل‌می‌کنیم تا S_3 را درنقطهٔ دیگر A_3 ببرد؛ خط A_3M_3 که A_3 را به M_3، نقطهٔ تماس S_3 و S_1 وصل می‌کند S_1 را در نقطهٔ دیگر A_4 می‌بــرد. ثابت کنید A_1 و A_4 بر دوسر قطری از S_1 قرار دارند.*

نتیجهٔ این تمرین را برای حالتی کــه تعداد فردی دایرهٔ دلخواه مماس برهم وجود داشته باشند تعمیم دهید.

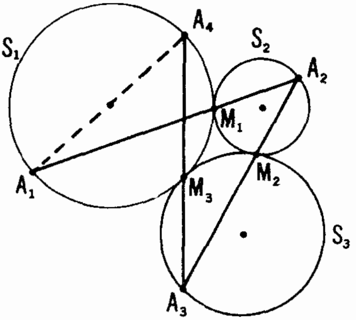
ب) S_1 و S_2 و S_3 و S_4 چهار دایرهٔ دو به دو مماس بیرونی داده شده‌اند (شکل ۲۱ ب). نقطهٔ A_1 از S_1 را به M_1، نقطهٔ تماس S_1 و S_2، وصل می‌کنیم تــا S_2 را در نقطهٔ دیگر A_2 ببرد؛ A_2 را به M_2، نقطهٔ تماس S_2 و S_3، وصل می‌کنیم تا S_3 را در نقطهٔ دیگر A_3 ببرد؛ A_3 را به M_3، نقطهٔ تماس S_3 و S_4، وصل می‌کنیم تا S_4 را در A_4 ببرد؛ اگــر A_5 نقطهٔ تلاقی A_4M_4، خط واصل بین A_4 و نقطهٔ تماس S_4 و S_1 یعنی M_1، با دایرهٔ S_1 باشد، ثابت کنید A_1 بر A_5 منطبق است.**

نتیجهٔ این مسأله را برای حالتی که تعداد زوجی از دایره‌های مماس بیرونی

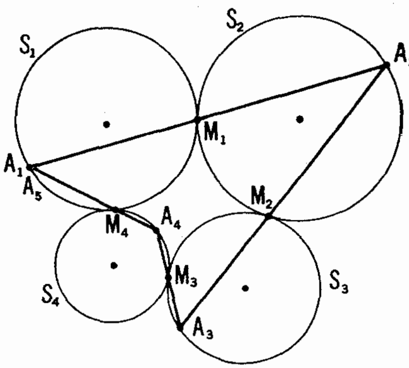
---

* مثلا اگر $A_2=M_2$، آنگاه به‌جای A_2M_2 بایــد مماس بر S_2 در M_2 را گذاشت به‌طوری‌که نقطهٔ A_3 نیز بر M_2 قرار خواهدگرفت.

** ← پانویس قبلی



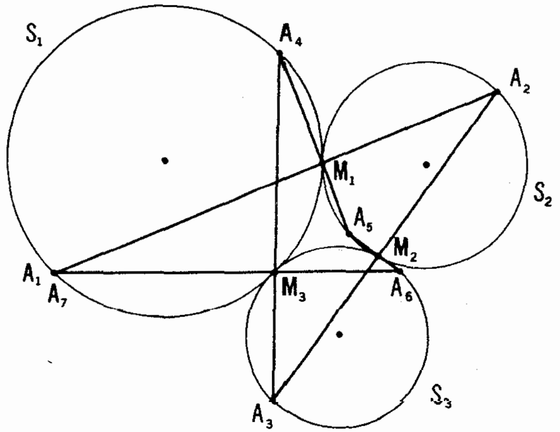
شکل ۲۱ (الف)



شکل ۲۱ (ب)

وجود داشته باشند تعمیم دهید.

ج) با قراردادهای بخش (الف) دومین نقطهٔ برخورد خط A_4M_1 با S_2 را A_5 می‌نامیم، و دومین نقطهٔ برخورد A_5M_2 بـا S_3 را A_6 و بالاخره دومین نقطهٔ برخورد A_6M_3 با S_1 را A_7 می‌نامیم (شکل ۲۱ ج). نشان دهید که A_7 بر A_1 منطبق است.*



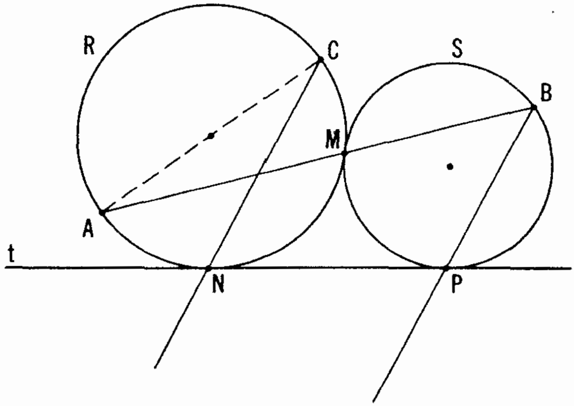
شکل ۲۱ (ج)

* ← پانویس صفحهٔ ۳۹.

این نتیجه را به‌حالتی با تعداد دلخواه دایره‌های مماس برهم تعمیم دهید.

د) اگر تأکید نکنیم که در هریك از حالتهای (الف)، (ب) و (ج) دایره‌ها حتماً باید بریکدیگر مماس بیرونی باشند، نتایج حاصل ازاین سه‌جزء به چه صورتی درخواهد آمد؟

۲۴. فرض می‌کنیم دایره‌های R و S درنقطهٔ M بر یکدیگر مماس بیرونی هستند و t را مماس مشترك بر این دو دایره و N و P را بترتیب نقطه‌های مماس t بـا دو دایره می‌گیریم (شکل ۲۲). A را نقطه‌ای دلخواه از R می‌گیریم و فرض می‌کنیم B دومین نقطهٔ برخورد AM بـا S باشد. از N خطی موازی بـا PB می‌کشیم تا R را در نقطهٔ C قطع کند. ثابت کنید که A و C دو نقطهٔ متقاطر از R هستند.



شکل ۲۲

۲۵. مثلث ABC مفروض است. فرض کنید k خطی موازی با BC باشد که ضلعهای AC و AB را بترتیب در نقاط K و L قطع کـرده است؛ فرض کنید m خطی موازی با CA باشد که ضلعهای BA و BC را در نقاط M و N قطع کرده است؛ همچنین p را خطی موازی با AB بگیرید کـه ضلعهای CB و CA را در نقاط P و Q قطع کند. ثابت کنید که نقاط برخورد AB و KN ، BC و MQ ، و همچنین CA و PL درصورتی که همه موجود باشند، بر یك خط قرار دارند.

۲۶. الف) P نقطهٔ دلخواهی است ازصفحه و K، L، M بترتیب قرینه‌های آن نسبت به‌نقاط D و E و F، وسطهای اضلاع AB و BC و CA ازمثلث مفروض

ABC، هستند. ثابت کنید پاره‌خطهای CK، AL و BM درنقطهٔ مشترك Q یکدیگر را قطع می‌کنند که وسط هر یك از آنهاست.

ب) فرض کنید نقطهٔ P در قسمت (الف) بر دایـرهٔ S حرکت کند. دراین صورت مکان نقطهٔ Q چه خواهد بود؟

۲۷. فرض می‌کنیم M، N و P بترتیب سه نقطهٔ واقع بر AB، BC و CA ازمثلث ABC (یا واقع برامتدادهای آنها) باشند. ثابت‌کنید که

الف) سه نقطهٔ M، N و P همخط‌اند اگر و تنها اگر

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1$$

(قضیهٔ منلائوس)؛*

ب) سه خط CM، AN و BP همرس (متقارب) یـا متوازی هستند اگر و تنها اگر

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=-1$$

(قضیهٔ سوا)؛*

قضایـای منلائوس و سوا به لحاظ دیگری در بخش ۲ فصل یك جلد سوم عرضه شده‌اند [← مسألهٔ ۱۳۴ (الف)، (ب)]؛ بسیاری ازکاربردهای این دوقضیهٔ مهم درآنجا عنوان شده است.

---

* توجه کنید کـه دو قضیه باید ثابت شود، ۱) اگر M، N و P روی یك خط باشند، آنگاه

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1$$

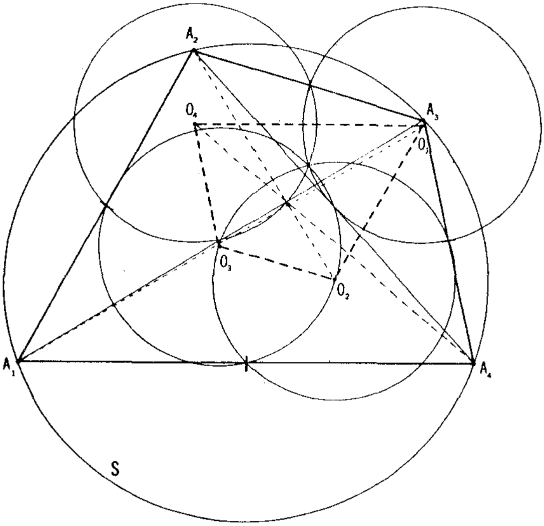
(شرط لازم) و ۲) اگر

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1$$

آنگاه نقاط M، N و P بر یك خط قرار می‌گیرند (شرط کافی)؛ مسألهٔ ۲۷ (ب) را هم باید به‌همین نحو تعبیر کرد. درمورد مفهوم علامتی‌که جلوی نسبت دوپاره‌خط گذاشته می‌شود، ← صفحهٔ ۱۶.

۲۸. الف) بـا استفاده از احکام مسائـل ۱۸ (الف) و ۱۴ (الف)، راه حل تازه‌ای برای مسألهٔ ۳۴ (الف) در بخش ۱ فصل دوم، جلد اول بیابید.

ب) A_1، A_2، A_3، A_4 چهارنقطه بر دایرهٔ S هستند؛ فرض می‌کنیم نقاط O_1، O_2، O_3 و O_4 مرکزهای دایره‌های اویلر [← مسألهٔ ۱۷ (الف)] مثلثهای $A_2A_3A_4$ و $A_1A_3A_4$ و $A_1A_2A_4$ و $A_1A_2A_3$ باشند. نشان دهید که چهارضلعی $O_1O_2O_3O_4$ مجانس چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ است و نسبت تجانس برابر ۱/۲ است (شکل ۲۳).



شکل ۲۳

[به عبارت دیگر، اگـر نقاط A_1، A_2، A_3 و A_4 همه بر یك دایـره باشند، چهار پاره‌خطی که هریك از این نقاط را به‌مرکز دایرهٔ اویلر مثلث حاصل از سه‌نقطهٔ دیگر وصل می‌کند در یك نقطـه متقارب‌انـد و در این نقطه به نسبت ۱ : ۲ تقسیم می‌شوند.]

۲۹. A_1، A_2، A_3 و A_4 چهارنقطه بر دایرهٔ S هستند و H_4، H_3، H_2 و H_1 بترتیب نقاط برخـورد ارتفاعهای چهار مثلث $A_1A_2A_3$، $A_1A_2A_4$، $A_1A_3A_4$ و $A_2A_3A_4$. ازاین هشت‌نقطه همهٔ سه‌تایی‌های ممکن با این‌ویژگی‌را که اندیسها یشان متمایزند انتخاب می‌کنیم و همهٔ مثلثهائی را که رأسهای آنها این سه‌تایی‌ها هستند

در نظر می‌گیریم (مثلا $\triangle A_1A_2A_4$ و $\triangle A_1H_2A_4$ قابل‌قبول‌اند، ولی $\triangle A_1A_3H_3$ قابل قبول نیست زیرا A_3 و H_3 اندیس واحدی دارند). تعداد این سه‌تاییها $32=6/(4\times6\times8)$ است. دایرهٔ اویلر هریك ازاین‌مثلثها را می‌توان رسم کرد [← مسألهٔ ۱۷ (الف)]. ثابت کنید که:

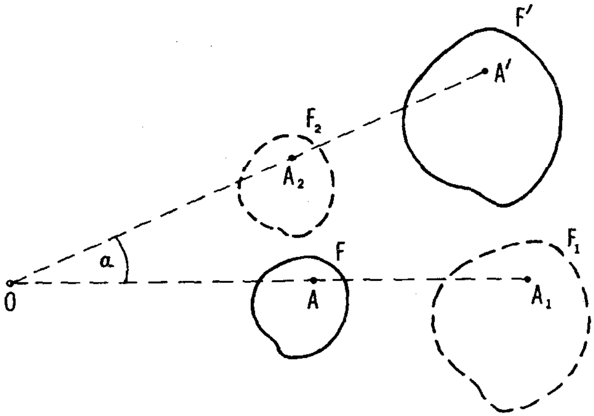
الف) تنها هشت دایره ازاین سی و دو دایره متمایزند.

ب) این هشت دایره همگی باهم قابل‌انطباق و دریك نقطه متقارب‌اند.

ج) این دایره‌ها را می‌توان به دو دستهٔ چهارتایی تقسیم کرد چنان که مراکز چهار دایرهٔ هردسته مجانس چهارنقطهٔ A_1، A_2، A_3، A_4 با نسبت تجانس $1/2$ و یا مجانس چهارنقطه H_1، H_2، H_3، H_4 با نسبت تجانس $1/2-$ باشند.

۴. تجانس مارپیچی[1] و قرینه‌یابی تجانسی[2]. شکلهای مشابه مستقیم[3] و مشابه معکوس[4]

فرض کنید شکل F_1 مجانس شکل F به مرکز O و نسبت تجانس مثبت k باشد. F_1 را به‌اندازهٔ زاویهٔ α حول نقطهٔ O دوران داده به‌وضعیت F' درمی‌آوریم (شکل ۲۴). تبدیلی که F را به F' ببرد تجانس مارپیچی خوانده می‌شود.* پس



شکل ۲۴

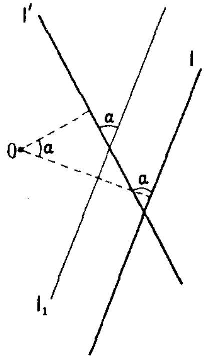
1. spiral similarity
2. dilative reflection
3. directly similar figures
4. oppositely similar figures

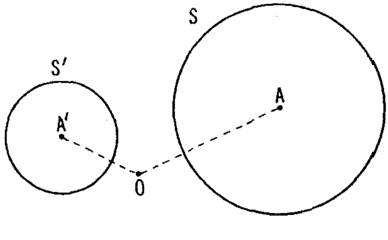
* این تبدیلها را گاهی تجانسهای دورانی می‌نامند (مثلا در بلورشناسی ریاضی، این اصطلاح متداول است).

تجانس مارپیچی با دو اندازه مشخص می‌شود: نسبت تجانس k و زاویهٔ دوران α. نقطهٔ O مرکز تجانس مارپیچی خوانده می‌شود.

تجانس‌های مارپیچی را به‌طریق زیر نیز می‌توان پدید آورد: ابتدا F را حول مرکز O به‌زاویهٔ α دوران داد تا به‌وضعیت F_2 درآید، سپس با انجام تجانسی به‌مرکز O و نسبت k، شکل F_2 را به F' برد. به‌عبارت دیگر، هرتجانس مارپیچی به مرکز O و زاویهٔ دوران α و نسبت تجانس k عبارتست از حاصلضرب* یك تجانس به‌مرکز O و نسبت‌تجانس k و یك‌دوران حول O به‌زاویهٔ α، به‌هرترتیبی که انجام شوند.** از اینجا نتیجه می‌شود که اگر F' از F بر اثر یك تجانس مارپیچی به‌مرکز O و زاویهٔ دوران α و نسبت تجانس k به‌دست آید، آنگاه بعکس می‌توان F را از F' با یك تجانس مارپیچی (به همان مرکز تجانس O و زاویهٔ دوران $-\alpha$ ونسبت تجانس $1/k$) به‌دست آورد؛ پس می‌توان از شکلهایی سخن گفت که به‌توسط تجانس‌های مارپیچی ازیکدیگر به‌دست می‌آیند.

تجانس مارپیچی هرخط l را به‌خط جدید l' بدل می‌کند (شکل ۲۵ الف).





شکل ۲۵

---

* درترجمه انگلیسی حاصلجمع نوشته شده است. ولی مترجم اصطلاح متداول حاصلضرب را برگزیده است. ـم.

** از اینجا نتیجه می‌شود که هرتجانس مارپیچی بنا به‌تعریفی که در مقدمهٔ این جلد (هندسه چیست) داده شده یك تبدیل تشابهی است، زیرا تجانس یك تبدیل تشابهی‌است و هر دوران یك طولپایی.

برای ترسیم l' باید ابتدا خط l_1 را مجانس l به‌مرکز تجانس O و نسبت k رسم کرد، سپس l_1 را با دوران حول O به‌زاویهٔ α به‌وضعیت l' درآورد. دو خط l و l' باهم زاویهٔ α می‌سازند (← جلد اول، ذیل شکل ۲۴ الف). هردایرهٔ S براثر تجانس مارپیچی به‌یك دایرهٔ جدید S' بدل می‌شود (شکل ۲۵ ب)؛ نقطهٔ A' مرکز دایرهٔ S' نگارهٔ نقطهٔ A مرکز دایـرهٔ S، براثر همان تجانس مارپیچی است، r' شعاع دایرهٔ S برابرست با kr که در آن r شعاع S و k نسبت تجانس است.

هر دوران حول یك نقطه حالت خاصی از تجانس مارپیچی است (با نسبت تجانس $k = 1$). براین اساس می‌توان برخی ازمسائل جلد اول را که درحل آنها از دوران استفاده می‌شد تعمیم داد؛ در حل مسأله‌های کلیتر بایـد به‌جای دوران از تجانس‌های مارپیچی استفاده‌کرد مثلا، با شرایط مسألهٔ ۱۸ در بخش ۲، فصل یك، جلد اول، می‌تـوان به جای مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلثی متشابه با مثلث نامشخص مفروضی راگذاشت؛ با شرایط مسألهٔ ۲۰ می‌توان خواست که وترهایی‌که دایره‌های S_1 و S_2 روی خطهای مطلوب l_1 و l_2 جدا می‌کنند دارای نسبت دلخواه مفروضی باشند. راه‌حل‌های این تعمیمهای مسائل ۱۸ و ۲۰ مشابـه راه‌حل‌های مسائل اصلی است؛ حل این مسائل را به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم.

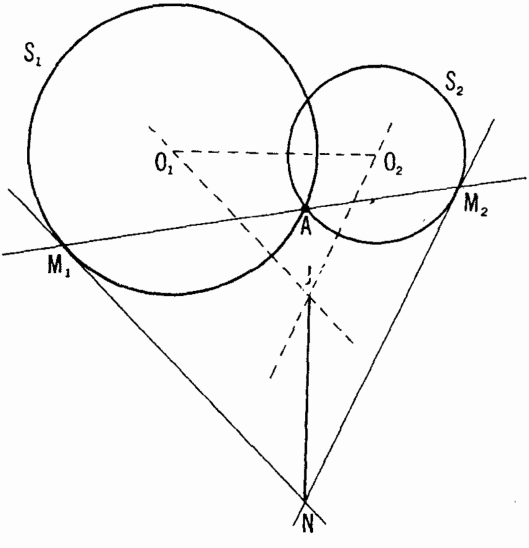
حالت خاص دیگر تجانس مارپیچی، تجانس است (تجانس با نسبت k یك تجانس‌مارپیچی به‌زاویهٔ $\alpha = 0°$ است اگر $k > 0$، و به‌زاویهٔ $\alpha = 180°$ است اگـر $k < 0$). براین اساس می‌توان بعضی ازمسائل بخش ۱ این فصل را تعمیم داد: در هنگام حل مسائل جدید باید به جای تجانس ازتجانس مارپیچی استفاده کرد. پس مثلا با شرایط مسأله ۱ می توان این شرط را برای نقاط B و C قائل شد که پاره خطهای AB و AC بر یك خط l واقع نباشند، بلکه بر دو خط l و m کـه از نقطهٔ A می گذرند قـرار گیرند و با یکدیگر زاویهٔ مفروض α بسازنـد (← و نیز مسألهٔ ۳۴ راکـه تعمیمی است از مسألهٔ ۱۳ (ج) در بخش ۱).

تنها نقطهٔ ثابت هرتجانس مارپیچی (غیر ازتبدیل همانی، که می‌توان آن‌را یك تجانس مارپیچی به‌زاویهٔ دوران $0°$ و نسبت تجانس ۱ در نظر گرفت) نقطهٔ O یعنی مرکز تجانس است. هرتجانس مارپیچی کـه تجانس مرکـزی نباشد (یعنـی هرتجانس مارپیچی به‌زاویهٔ دوران غیر از $0°$ و $180°$) هیچ خط ثابت ندارد.

۳۰. الف) درمثلث مفروض ABC مثلث PXY را که نقطهٔ P ی آن برضلع AB داده شده است) متشابه با مثلث مفروض LMN محاط کنید.

ب) درمتوازی‌الاضلاع $ABCD$ متوازی‌الاضلاعی متشابه با متوازی‌الاضلاع مفروض $KLMN$ محاط کنید.

۳۱. دو دایرهٔ متقاطع S_1 و S_2 مفروض‌اند و A یکی از نقاط تقاطع آنهاست؛ خطی از A رسم می‌کنیم تا S_1 و S_2 را بترتیب در M_1 و M_2 قطع کند؛ نقطهٔ برخورد خطهای مماس بر دو دایره در M_1 و M_2 را N می‌نامیم؛ از نقاط O_1 و O_2، مرکزهای دو دایره، خطوطی موازی با M_1N و M_2N رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را J می‌نامیم (شکل ۲۶). ثابت کنید که خط JN همواره از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد، و طول پاره‌خط JN همواره مقدار معینی است که به‌انتخاب خط M_1AM_2 بستگی ندارد.



شکل ۲۶

۳۲. الف) یك چهارضلعی $ABCD$ قابل محاط در یك دایره رسم کنید که طولهای اضلاعش معلوم باشند: $AB=a$، $BC=b$، $CD=c$ و $DA=d$.

ب) یك چهارضلعی $ABCD$ رسم کنید که در آن مجموع دو زاویهٔ روبه‌رو، B و D، معلوم باشد و طولهای ضلعهایش نیز داده شده باشند: $AB=a$، $BC=b$، $CD=c$ و $DA=d$.

مسألهٔ (الف) حالت خاصی ازمسألهٔ (ب) است.

۳۳. R و S دودایره‌متقاطع‌هستند و M یکی‌ازنقاط تقاطع آنهاست. l را خط دلخواهی می‌گیریم کـه از M بگذرد و دوایر R و S را درنقاط A و B ببرد.* مطلوب است مکان هندسی نقاط زیر وقتی l تغییر کند:

الف) نقطـهٔ Q کـه پاره‌خط AB را به‌نسبت مفروض $AQ/QB = m/n$ تقسیم کند؛

ب) رأس C ازمثلث متساوی‌الاضلاع ABC که روی پاره‌خط AB بنا شود؛

ج) نقطهٔ P انتهای پاره‌خط OP کـه از نقطهٔ ثابت O مساوی و موازی با پاره‌خط AB و همجهت با آن رسم شود.**

۳۴. دایرهٔ S را مماس بردو خط مفروض l_1 و l_2 طوری رسم‌کنید که دایرهٔ مفروض $\bar{S}$ را به‌زاویهٔ مفروض α قطع‌کند. [منظور از زاویهٔ بین دو دایره، زاویـهٔ بین خطوط مماس برآنها در نقطهٔ برخورد است. زاویـهٔ بین دایره‌های مماس برهم صفر است؛ دایره‌هایی‌که متقاطع نباشند، باهم زاویه‌ای نمی‌سازند.]

فرض می‌کنیم شکل F' ازشکل F بر اثر یك‌تجانس مارپیچی به‌زاویهٔ دوران α و نسبت تجانس k به‌دست آید (شکل۲۷). همچنین فرض می‌کنیم AB و $A'B'$ دوپاره‌خط متناظر دلخواه دراین‌دوشکل باشند. دراین‌حالت‌تساوی $A'B'/AB = k$ برقرار است (زیرا درشکل ۲۷، که درآن F_1 از F براثر دورانی به‌اندازهٔ زاویهٔ α به‌دست‌آمده و F' از F_1 براثر تجانسی با نسبت k به‌دست‌آمده است، داریم $A_1B_1 = AB$ و $A'B'/A_1B_1 = k$)، و زاویـهٔ بین پاره‌خطهای $A'B'$ و AB برابرست‌با α (زیرا زاویهٔ بین AB و A_1B_1 برابرست‌با α و داریم $A'B' \| A_1B_1$). پس پاره‌خطهای متناظر در شکلهای F' و F دارای نسبت ثابت k هستند و بـا یکدیگر زاویهٔ ثابت α می‌سازند. اکنون ثابت می‌کنیم که بعکس، اگر به‌هرنقطهٔ F نقطه‌ای از F' متناظر باشد چنان‌که پاره‌خطهای متناظر دراین‌شکلها دارای نسبت ثابت k باشند و باهم زاویهٔ ثابت α بسازند (پاره‌خطهای شکل F، اگر درجهت معینی به‌اندازهٔ زاویهٔ α دوران داده شوند، با پاره‌خطهای متناظرشان در F' موازی می‌شوند)، آنگاه F و F' به‌توسط یك‌تجانس مارپیچی به‌هم مرتبط‌اند. زیرا فرض می‌کنیم M و M' دو نقطهٔ متناظر دلخـواه از F و F' باشند (شکل ۲۷). روی پاره‌خط MM' مثلث $MM'O$ را طوری بنا می‌کنیم کـه $OM'/OM = k$ و

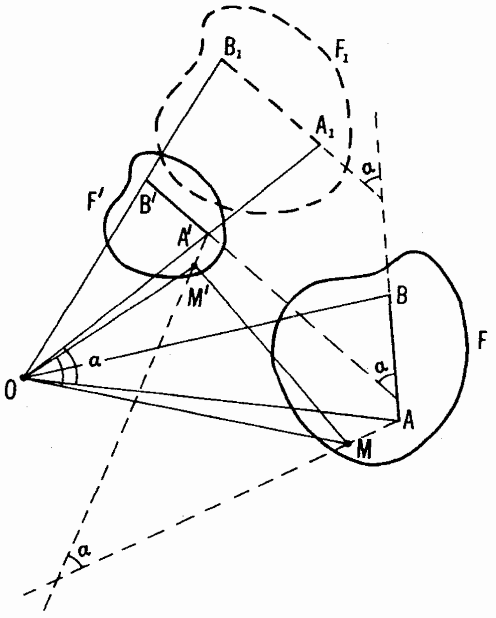
---

* اگرمثلا l مماس بر S باشد، آنگاه نقطهٔ $B = M$ (مقایسه‌شود با پانویس* درصفحهٔ ۳۹).

** بـه عبارت دیگر، در مسألـهٔ ۳۳ (ج) مطلـوب مکان هندسی انتهای بردارهـای $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ است‌که ازنقطهٔ ثابت O رسم می‌شوند.

$\measuredangle MOM'=\alpha$ *.

(اگر $\alpha>180^\circ$ آنگاه مثلث را با زاویهٔ $\measuredangle MOM'=360^\circ-\alpha$ رسم می‌کنیم.)



شکل ۲۷

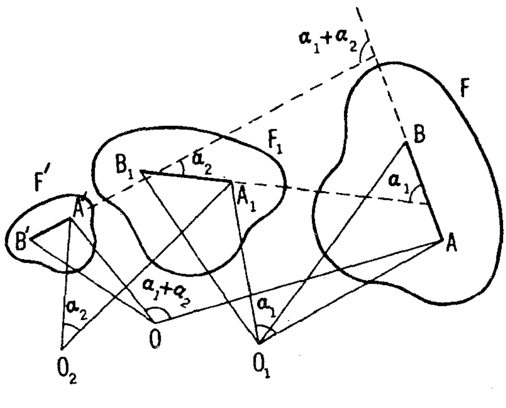
* برای این‌کار ابتدا باید مثلث کمکی T به‌زاویهٔ رأس α و نسبت اضلاع مجاورمساوی با k رسم شود. چون T با MOM' متشابه است، مثلث T اندازهٔ زاویه‌های مجاور به‌قاعدهٔ MM' را درمثلث MOM' مشخص می‌کند.

مثلث $MM'O$ درآن طرفی از پاره‌خط MM' رسم می‌شودکه دوران جهت‌داری به‌زاویهٔ α که خط OM را به‌خط OM' بدل می‌کند بردوران جهت‌داری به‌زاویهٔ α که پاره‌خطهای F را با پاره‌خطهای متناظرشان در F' موازی می‌سازد، منطبق شود.

نقطهٔ O را می‌توان از تلاقی قوسی از دایرهٔ حاوی زاویهٔ α که بر MM' رسم می‌شود با دایرهٔ دیگری که مکان هندسی نقاطی است که نسبت فواصلشان از دونقطهٔ M و M' برابربست با k، نیز به‌دست آورد (← مثلا کتاب «آشنایی باهندسه» *Introduction to Geometry* اثر ه.س.م کاکستر H.S.M. Coxeter، فصل ۶ دربارهٔ دایرهٔ آپولونیوس؛ همچنین ← مسألهٔ ۲۵۷، بخش ۴، فصل دو جلد سوم).

تجانس مارپیچی به‌مرکز O، و زاویهٔ دوران α و نسبت k، نقطهٔ M را به‌نقطهٔ M' بدل می‌کند؛ اکنون ثابت می‌کنیم که این تجانس هرنقطهٔ A از F را به‌نقطهٔ‌متناظرش A' در F' می‌برد. مثلثهای OMA و $OM'A'$ را درنظر می‌گیریم. دراین‌مثلثهاداریم $OM'/OM=M'A'/MA$ (زیرا بنا به‌ترسیم $OM'/OM=k$ و بنا به‌فرض $M'A'/MA=k$) و $\sphericalangle OMA=\sphericalangle OM'A'$ (زیرا زاویهٔ بین OM و OM' به‌موجب ترسیم برابر با α است و زاویهٔ بین MA و $M'A'$ بنا به‌فرض برابر با α است؛ ← دو صفحه پس از مسألهٔ ۲۰، جلد اول)؛ پس این دو مثلث متشابه‌اند. از اینجا نتیجه می‌شود که $OA'/OA=k$؛ همچنین $\sphericalangle AOA'=\sphericalangle MOM'=\alpha$ (زیرا $\sphericalangle AOM=\sphericalangle A'OM'$). این‌نتیجه به‌معنی آن است که تجانس مارپیچی فوق A را به A' می‌برد.

اکنون به‌آسانی می‌توان به‌این سؤال که: حاصلضرب دو تجانس مارپیچی چیست پاسخ گفت. فرض کنید شکل F_1 از شکل F بر اثر یك تجانس مارپیچی به‌مرکز O_1، و نسبت تجانس k_1 و زاویهٔ دوران α_1 به‌دست آمده باشد،* و شکل F' هم ازشکل F_1 براثر یك‌تجانس مارپیچی به‌مرکز O_2، و نسبت تجانس k_2 و زاویهٔ دوران α_2 حاصل شده باشد؛ AB، A_1B_1 و $A'B'$ را پاره‌خطهای متناظری در این سه شکل می‌گیریم (شکل ۲۸). در این صورت $A_1B_1/AB=k_1$، و



شکل ۲۸

* دراین مورد و مواردی‌که ازاین پس می‌آیند همه‌جا زاویهٔ دوران در یك جهت ثابت مثلا درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری می‌شود.

پاره‌خطهای AB و A_1B_1 باهم زاویهٔ α_1 می‌سازند؛ همچنین $A'B'/A_1B_1=k_2$، و پاره‌خطهای A_1B_1 و $A'B'$ باهم زاویهٔ α_2 می‌سازند. پس

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A_1B_1}{AB}\cdot\frac{A'B'}{A_1B_1}=k_1k_2$$

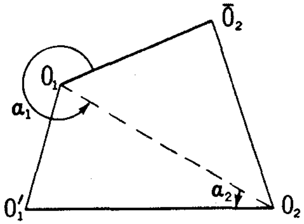
و پاره‌خطهای AB و $A'B'$ باهم زاویهٔ $\alpha_1+\alpha_2$ می‌سازند (← پانویس صفحهٔ مربوط به‌شکل ۲۶، جلد اول). بدین‌ترتیب پاره‌خطهای متناظر در شکلهای F و F' دارای نسبت ثابت k_1k_2 هستند و باهم زاویهٔ ثابت $\alpha_1+\alpha_2$ می‌سازند. بنا بر آنچه قبلا ثابت شد، این نتیجه به معنی آن است که شکل F' از F بر اثر یك تجانس مارپیچی با زاویهٔ دوران $\alpha_1+\alpha_2$ و نسبت تجانس k_1k_2 به دست می آید، یا، در حالتی که $\alpha_1+\alpha_2=360°$ و $k_1k_2=1$، براثر یك انتقال، به‌دست می آید. بنا براین، حاصلضرب دو تجانس مارپیچی با نسبت تجانس k_1 و k_2 و زاویهٔ دوران α_1 و α_2، تجانس مارپیچی جدیدی است بـا نسبت تجانس k_1k_2 و زاویهٔ دوران $\alpha_1+\alpha_2$؛ در حالت استثناء، یعنـی وقتی $k_1k_2=1$ و $\alpha_1+\alpha_2=360°$*، حاصلضرب دو تجانس مارپیچی یك انتقال است.**

اکنون می‌خواهیم نقطهٔ O مرکز تجانس مارپیچی (یا راستا و اندازهٔ انتقال) حاصلضرب دوتجانس مارپیچی‌را بیابیم. اگرمرکزهای آنها یعنی O_1 و O_2 برهم منطبق باشند، روشن است‌که O نیز براین نقطه منطبق است. حال فرض‌کنید‌که O_1 بر O_2 منطبق نباشد. حاصلضرب این دو تجانس مارپیچی، نقطهٔ O_1 را به نقطهٔ O'_1 می‌برد، و در واقع، دوران دوم به تنهایی O_1 را به‌این نقطه می‌برد (زیـرا دوران اول O_1 را ثابت نگاه می‌دارد)؛ پیدا کردن نقطـهٔ O'_1 دشوار نیست. حاصلضرب دوتبدیل، نقطه‌ای چون $\overline{O}_2$ را به‌نقطهٔ O_2 می‌برد، و درواقع، اولین دوران به‌تنهایی این‌نقطه را به O_2 می‌برد (زیرا دوران دوم O_2 را ثابت نگاه می‌دارد)؛ پیداکردن $\overline{O}_2$ آسان است. پس اگر $k_1k_2=1$ و $\alpha_1+\alpha_2=360°$، آنگاه پاره خطهای $O_1O'_1$ و $\overline{O}_2O_2$ متساوی و متوازی‌اند و جهت واحدی دارنـد (شکل ۲۹ الف)؛ هریك از این پاره‌خطها انـدازه و راستای انتقالی را کـه حاصلضرب دو تجانس

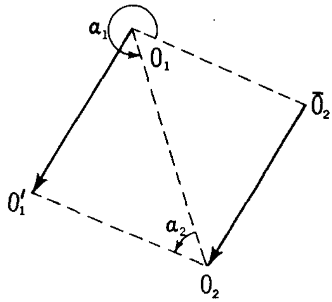
---

* به‌عبارت دقیق‌تر، $\alpha_1+\alpha_2$ مضربی از $360°$ است.

** از خواننده می‌خواهیم کـه خود اثبات مستقلی برای قضیهٔ مربوط به‌ضرب تجانس مارپیچی، تنها با استفاده ازتعریف این‌گونه تبدیلها بدون استفاده ازاین نکته‌که «اگر پاره‌خطهای متناظر در دو شکل نسبت ثابتی داشته باشند و زاویهٔ ثابتی باهم بسازنـد، براثر تجانس مارپیچی ازیکدیگر به‌دست می‌آیند پیدا کند.»



(ب)



(الف)

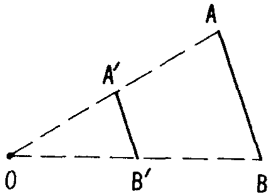
شکل ۲۹

مارپیچی فوق است، معین می‌کند. اگــر حاصلضرب دو تجانس مارپیچی، تجانس مارپیچی دیگری باشد، این تجانس مارپیچی جدید، پاره خط $O_1\bar{O}_2$ را به $O_1'O_2$ بدل می‌کند (شکل ۲۹ ب).

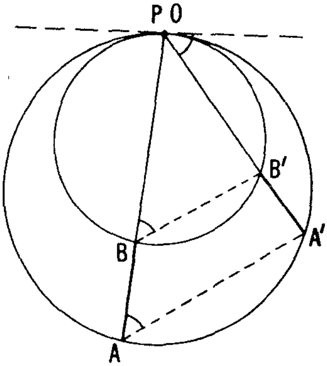
اکنون نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان نقطهٔ O مرکز یك تجانس مارپیچی را که پاره‌خط مفروض AB را به‌پاره‌خط مفروض دیگر $A'B'$ بدل می‌کند (در مورد فوق $O_1\bar{O}_2$ را به $O_1'O_2$ بدل می‌کند،* پیدا کرد). اگر زاویهٔ بین‌پاره‌خطها $180°$ یــا $360°$ بــاشد و پاره‌خطها متساوی نباشند، تجانس مارپیچی به‌صورت تجانس معمولی درمی‌آیــد؛ در این حالت O نقطهٔ برخــورد خطهای AA' و BB' است (شکل ۳۰ الف). اکنون فرض کنید که زاویهٔ بین پاره‌خطها مضربی از $180°$ نباشد، یعنی پاره‌خطهای AB و $A'B'$ متوازی نباشند؛ نقطهٔ برخورد AB و $A'B'$ را P می‌نامیم (شکل ۳۰ ب). دراین صورت دایره‌های محیطی مثلثهای $AA'P$ و $BB'P$ ازمرکز دوران O می‌گذرند: زیرا $\measuredangle AOA' = \measuredangle APA'$ (زاویهٔ دوران AOA' بــا زاویــهٔ APA'، بین پاره‌خطهای AB و $A'B'$ برابر است)؛ به‌همین ترتیب $\measuredangle BOB' = \measuredangle BPB'$.** بنابراین، مرکز O را می‌توان از دومین نقطهٔ برخورد دایره‌هــای محیطی مثلثهــای $AA'P$ و $BB'P$ به‌دست‌آورد (← شکل ۳۰ ب).

* برای یافتن مرکز O می‌تــوان از روش ترسیم یك مثلث کمکی کــه زاویهٔ رأسش $\alpha_1+\alpha_2$ [یــا $(\alpha_1+\alpha_2)-360°$] و نسبت اضلاع مجاورش k_1k_2 باشد نیز استفاده کرد، و بدین‌ترتیب زاویه‌های‌مجاور به‌قاعدهٔ مثلث $O_1'O_1O$ را معین کرد(← پانویس صفحهٔ ۴۹).

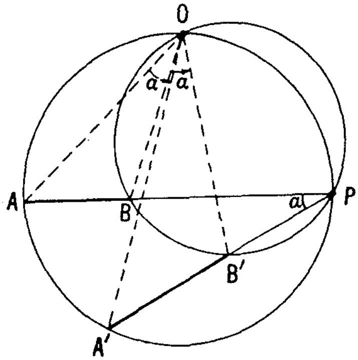
** ← پانویس مربوط گزارهٔ ۳، فصل دوم، جلد اول.



(الف)



(ج)



(ب)

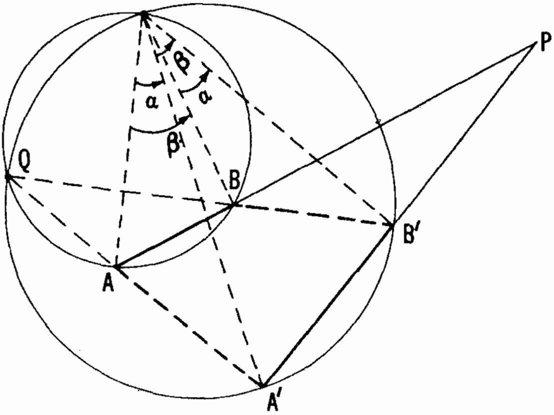
شکل ۳۰

اگر این دو دایره در P برهم مماس باشند (شکل ۳۰ ج) یعنی اگر $\measuredangle PAA' = \measuredangle PBB'$؛ (هردوی این‌زاویه‌ها با زاویهٔ بین خط $PA'B'$ و مماس مشترك دایره‌ها در نقطهٔ P مساوی‌اند)، دراین‌صورت $O = P$ (زیرا ازتشابه مثلثهای PAA' و PBB' داریم $PA'/PA = PB'/PB$).

به‌این‌نکته هم باید توجه داشت که مرکز آن تجانس مارپیچی که AB را به $A'B'$ بدل می‌کند برمرکز آن تجانس مارپیچی که AA' را به BB' بدل می‌کند منطبق است؛ زیرا اگر

$$OA'/OA = OB'/OB = k \quad \text{و} \quad \measuredangle AOA' = \measuredangle BOB' = \alpha$$

آنگاه $\measuredangle AOB = \measuredangle A'OB' = \beta$ (در شکل ۳۱ داریم $\beta = \alpha + \measuredangle A'OB$) و $OA/OB = OA'/OB' = l$. ازاینجا نتیجه می‌شود که مرکز O را می‌توان از نقطهٔ



شکل ۳۱

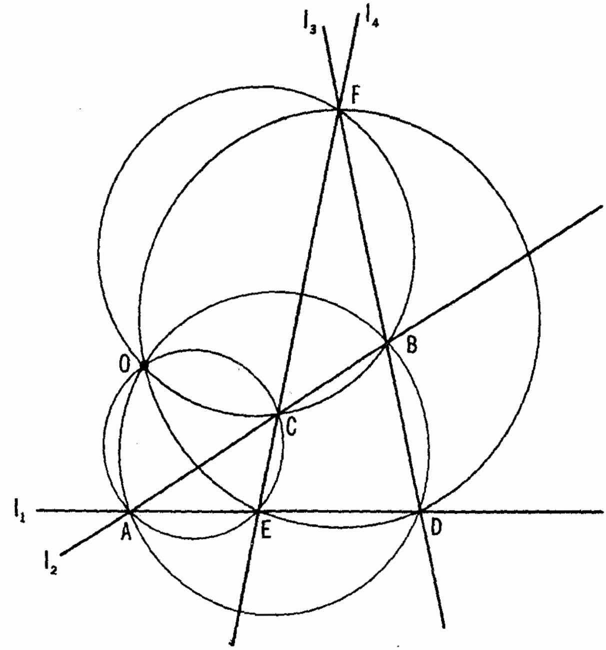
برخورددایره‌های محیطی مثلثهای ABQ و $A'B'Q$ که درآن Q نقطهٔ برخورد خطوط AA' و BB' است جدا کـرد (یا از نقطهٔ برخورد خطهای AB و $A'B'$ اگـر $AA'\|BB'$؛ حالت اخیر که در شکل ۳۰ ج نشان داده شده، وقتی برقرار است که دایره‌های محیطی برمثلثهای $AA'P$ و $BB'P$ در P برهم مماس باشند).

۳۵. چهارخط $l_۱$، $l_۲$، $l_۳$ و $l_۴$، که هیچ سه‌تای آنها متقارب و هیچ دوتای آنها متوازی نیستند درصفحه داده شده‌اند. ثابت کنید که دایره‌های محیطی چهارمثلث حاصل ازاین خطها در یك نقطه متقارب‌اند (شکل ۳۲).

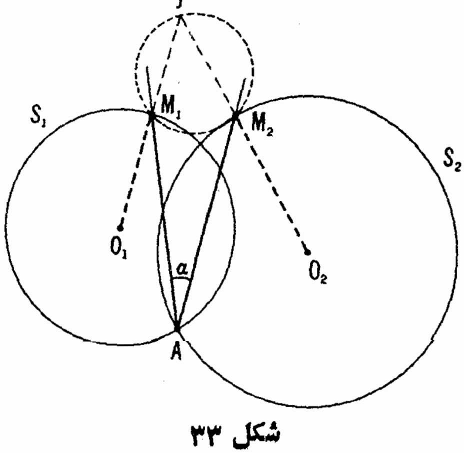
و نیز ← مسألهٔ ۶۲ (الف) در بخش ۱ فصل ۲ (صفحهٔ ۹۳). یك تعمیم مسألهٔ ۳۵ را، که در دسترس همه نیست، در مسألهٔ ۲۱۸ (الف) دربخش ۱ فصل ۲* جلد سوم می‌توان یافت.

۳۶. فرض می‌کنیم $S_۱$ و $S_۲$ دو دایره به‌مرکزهای $O_۱$ و $O_۲$ باشند کـه در نقطهٔ A یکدیگر را قطع کرده‌اند. زاویهٔ ثابت α به‌رأس A را در نظر می‌گیریم. نقاط برخورد اضلاع این‌زاویه با دایره‌های $S_۱$ و $S_۲$ را $M_۱$ و $M_۲$ ونقطهٔ برخورد خطهای $O_۱M_۱$ و $O_۲M_۲$ را J می‌نامیم (شکل ۳۳).

* فصلی که هنوز از روسی ترجمه نشده است.ـم.



شکل ۳۲



شکل ۳۳

الف) نشان دهید که وقتی این زاویه حول نقطهٔ A دوران کند، دایرهٔ محیطی مثلث M_1M_2J همواره از یك نقطهٔ ثابت O می گذرد.
ب) پیدا کنید مکان هندسی همهٔ نقـاط O در قسمت (الف) متناظر بـا همهٔ زاویه‌های ممکن α را.
۳۷. یك n ضلعی $A_1A_2\cdots A_n$ را با داشتن نقاط M_1، M_2، $\cdots$، M_n، رأسهای n مثلث مرسوم بر اضلاع آن به عنوان قاعده، و متشابه با n مثلث مفروض رسم کنید. در چه شرایطی مسأله جواب ندارد و چه موقع بیش از یك جواب دارد؟

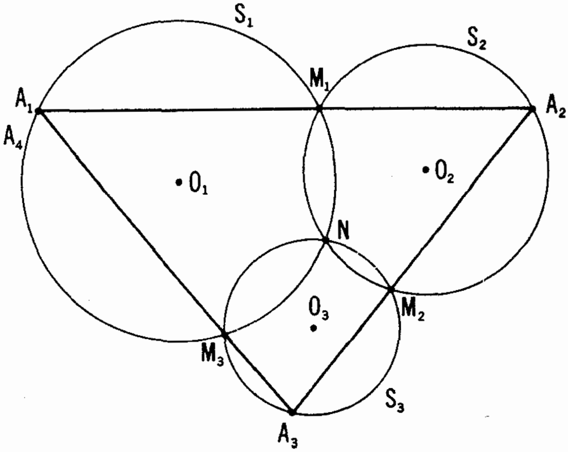
این مسأله تعمیم مسألهٔ ۲۱ بخش ۲، فصل یك از جلد اول است.

۳۸. S_1 و S_2 دو دایرهٔ متقاطع در نقاط M و N هستند. A را نقطه‌ای دلخواه بر S_1 می گیریم و دومین نقطهٔ برخورد خط AM با دایرهٔ S_2 را B، دومین نقطهٔ برخورد خط BN با S_1 را C، دومین نقطهٔ برخورد CM با S_2 را D، و بالاخره دومین نقطهٔ برخورد DN با S_1 را E می نامیم.*
الف) ثابت کنید که طول AE به انتخاب نقطهٔ اولیهٔ A بر S_1 بستگی ندارد بلکه فقط به وضع دو دایرهٔ S_1 و S_2 وابسته است.
ب) S_1 و S_2 چگونه باید قرار گیرند تا E بر A منطبق شود؟
۳۹. فرض می کنیم S_1، S_2 و S_3 سه دایره باشند که هریك دوتای دیگر را قطع می کند. A_1 را نقطه‌ای دلخواه بر S_1 می گیریم.
الف) فرض کنید کـه سه دایره یك نقطهٔ برخورد مشترك N دارند و دومین نقاط برخورد S_1 و S_2، S_2 و S_3، S_3 و S_1 را بترتیب M_1، M_2 و M_3 می نامیم (شکل ۳۴ الف). دومین نقطهٔ برخورد A_1M_1 با S_2 را A_2، دومین نقطهٔ برخورد A_2M_2 با S_3 را A_3 و بالاخره دومین نقطهٔ A_3M_3 با S_1 را A_4 نام می گذاریم.**

---

* حالتهای استثنایی متعددی ممکن است پیش بیایند. اولا، مثلا اگر $A=M$، به‌جای AM باید خط مماس بر S_1 درنقطهٔ M را گذاشت.

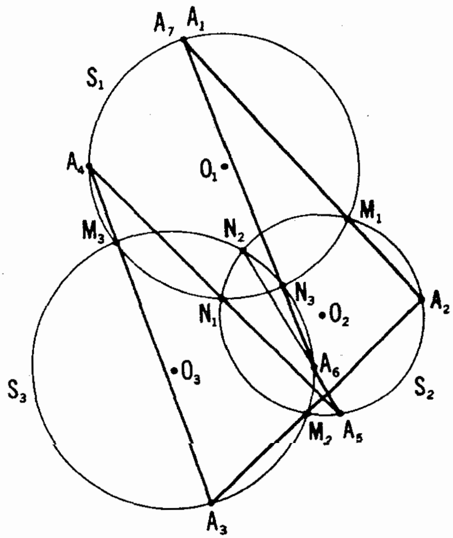
ثانیاً ، اگر A وضعی داشته باشد که AM بر S_2 مماس باشد پس B بر M منطبق می‌شود و به‌همین ترتیب C هم بر M منطبق‌می‌شود؛ که دراین صورت مثل حالت اول باید به‌جای CM خط مماس بر S_1 در نقطهٔ M را گذاشت. ← پانویس مسألهٔ ۲۳ (الف).
** اگر، مثلا A_1M_1 در M_1 بر S_2 مماس باشد، A_2 بر M_1 منطبق می‌شود؛ از سوی دیگر اگر نقطهٔ A_2 بر M_2 منطبق باشد، خط A_2M_2 همان مماس در نقطهٔ M_2 بر S_2 می‌شود (← پانویس مسألهٔ ۳۸).



شکل ۳۴ (الف)

ثابت کنید که A_4 بر A_1 منطبق است.

ب) اکنون فرض کنید که این سه دایره نقطهٔ برخورد مشترکی ندارند و دایره‌های S_1 و S_2 در نقاط M_1 و N_1، S_2 و S_3 در نقاط M_2 و N_2، S_3 و S_1 در نقاط M_3 و N_3 متقاطع‌اند (شکل ۳۴ ب). فرض کنید A_2 دومین نقطهٔ برخورد A_1M_1



شکل ۳۴ (ب)

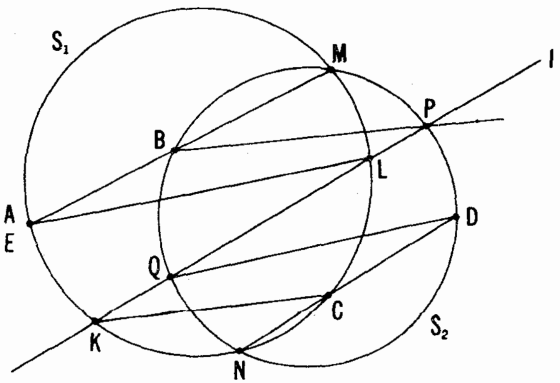
با S_2، A_3 دومین نقطهٔ برخورد A_2M_2 با S_3، A_4 دومین نقطهٔ برخورد A_3M_3 با S_1، A_5 دومین نقطهٔ برخورد A_4N_1 با S_2، A_6 دومین نقطهٔ برخورد A_5N_2 با S_3 و بالاخره A_7 دومین نقطهٔ برخورد A_6N_3 با S_1 باشد.* ثابت کنید که A_7 بر A_1 منطبق است.

نتایج مسألههای ۳۹ (الف) و (ب) را برای حالتی که تعداد دایرههای دو به‌دو متقاطع دلخواه باشد تعمیم دهید.

۴۰. S_1 و S_2 دو دایرهٔ متقاطع در نقاط M و N هستند، l را یك خط و A را نقطه‌ای دلخواه بر S_1 فرض می‌کنیم.

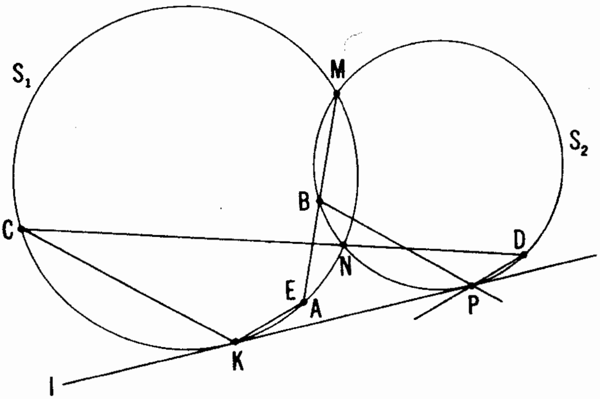
الف) فرض کنید خط l دایرهٔ S_1 را درنقاط K و L و S_2 را درنقاط P و Q قطع می‌کند (شکل ۳۵ الف). دومین نقطهٔ برخورد خط AM با دایرهٔ S_2 را B. دومین‌نقطهٔ برخورد خط KC، مرسوم از K به‌موازات BP را با دایرهٔ S_1، C، دومین نقطهٔ برخورد خط CN بـا S_2 را D، و بالاخره دومین نقطهٔ برخورد خط LE، مرسوم از L به‌موازات DQ را با S_1، E می‌نامیم.* ثابت کنید که E بر A منطبق است.

ب) فرض‌کنید خط l بر S_1 و S_2 درنقاط K و P مماس باشد(شکل ۳۵ ب). دومین نقطهٔ برخـورد خط AM بـا S_2 را B و دومین نقطهٔ برخورد خط KC، مرسوم از K به‌موازات BP را با S_1، C، دومین نقطهٔ برخورد CN با S_2 را D



شکل ۳۵(الف)

* ← پانویس مسألههای ۳۸ و ۳۹ (الف).



شکل ۳۵(ب)

و دومین نقطهٔ برخورد خط KE مرسوم از K به‌موازات DP را بـا S_1 را E می‌نامیم.* ثابت کنید که A و E برهم منطبق‌اند.

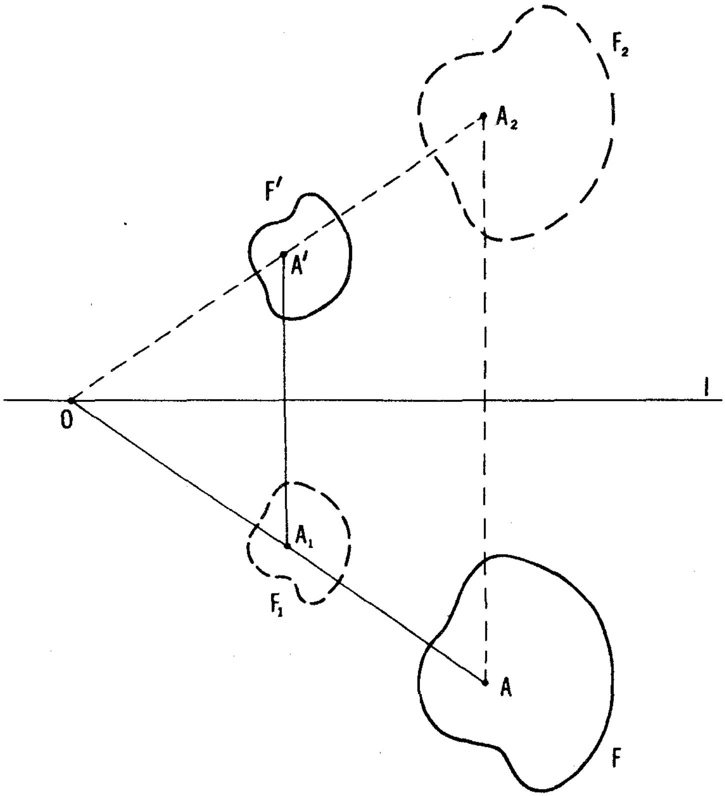
فرض می‌کنیم شکل F_1 مجانس شکل F به‌مرکز تجانس O و ضریب تجانس (مثبت!) k باشد؛ قرینهٔ محوری F_1 را نسبت به l، خطی که از O می‌گذرد، F' می‌نامیم (←شکل ۳۶). در این حالت می‌گوییم که F' از F بر اثر یك قرینه‌یابی تجانسی با نسبت تجانس k به‌دست آمـده است؛ نقطهٔ O و خط l بترتیب مرکز و محور این قرینه‌یابی تجانسی به‌شمار می‌آیند. همین قرینه‌یابی تجانسی را می‌تـوان بـه‌روش دیگری انجام داد: ابتدا F_2 قرینهٔ محوری F نسبت به‌خط l را به‌دست آورد و سپس F' مجانس F_2 به‌مرکز O و نسبت k را که F_2 را به F' می‌برد. به‌عبارت دیگر، قرینه‌یابی تجانسی عبارت است از حاصلضرب یك تجانس به‌مرکز O و یك تقارن محوری نسبت به l، خطی کـه از O می‌گذرد، و ترتیب انجام این دو عمل اهمیتی ندارد.**

روشن است کـه اگر شکل F' بر اثر یك قرینه‌یابی تجانسی از F به‌دست آید، آنگاه بعکس، F را نیز می‌توان بر اثر یك قرینه‌یابی تجانسی از F' به‌دست آورد (بـا همان مرکز O و همان محور l ولـی بـا نسبت $1/k$)؛ بر این اساس

---

* ← پانویس مسائل ۳۸ و ۳۹ (الف).

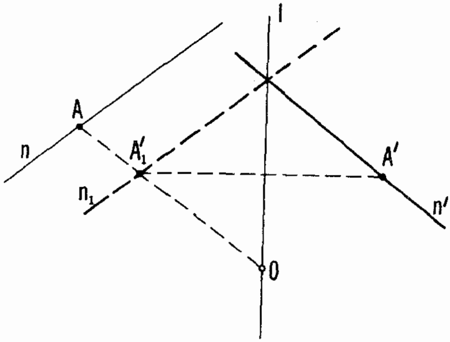
** نتیجه می‌شود که هر قرینه‌یابی تجانسی طبق تعریفی که درمقدمهٔ این مجلد آمده یك تبدیل تشابهی است (زیرا حاصلضرب یك تبدیل تشابهی در یك طولپایی است).



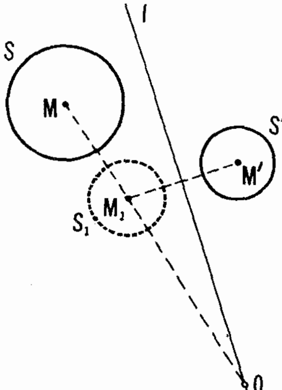
شکل ۳۶

می‌توان از شکلهایی سخن گفت که بر اثر قرینه‌یابی‌های تجانسی از یکدیگر به‌دست می‌آیند. هرقرینه‌یابی تجانسی، خط n را به‌خط جدید n' (شکل ۳۷ الف) و دایرهٔ S را به‌دایرهٔ جدید S' بدل می‌کند (شکل ۳۷ ب).

تنها نقطهٔ ثابت هرقرینه‌یابی تجانسی (که صرفاً قرینه‌یابی نسبت به‌خط l نیست که بتواند به‌عنوان قرینه‌یابی تجانسی با نسبت تجانس $k = 1$ تلقی شود) نقطهٔ O مرکز تبدیـل است. تنها خطوط ثابت هرقرینه‌یابی تجانسی (کـه تقارن محوری نباشد) خط l محور تبدیل و خط عمود بر l در نقطهٔ O، هستند.



شکل ۳۷ (الف)



شکل ۳۷ (ب)

۴۱. یك خط l، نقطهٔ A بر آن، و دو دایرهٔ $S_۱$ و $S_۲$ مفروض‌اند. یك مثلث ABC رسم کنید که در آن، خط l نیمساز زاویهٔ A باشد، رأسهای B و C بترتیب بر دایره‌های $S_۱$ و $S_۲$ قرار گیرند و نسبت ضلع AB به‌ضلع AC مقدار مفروض $m:n$ باشد.

۴۲. چهارضلعی $ABCD$ راکه قطر آن، AC، زاویهٔ A را نصف می‌کند، با معلومات زیر رسم کنید:

الف) ضلعهای AB و AD، قطر AC و تفاضل زاویه‌های B و D؛

ب) ضلعهای BC و CD، نسبت ضلعهای AB و AD و تفاضل زاویه‌های B و D؛

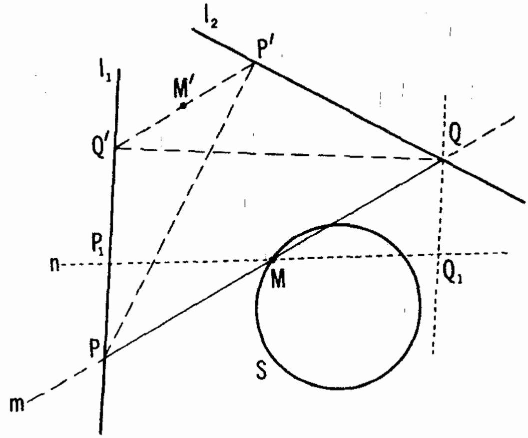
ج) ضلعهای AB و AD، قطر AC و نسبت ضلعهای BC و CD.

۴۳. مسألهٔ ۴۲ را بدین‌صورت حل کنید که به‌جای شرط نیمساز بودن قطر AC برای زاویهٔ A، شرط کلیتر تفاضل زاویه‌های BAC و DAC مساوی مقدار مفروض γ است را قرار دهید.

۴۴. دوخط l_1 و l_2 درصفحه مفروض‌اند. به‌هر نقطهٔ M ازصفحه، نقطهٔ جدید M' را به‌روش زیر مربوط می‌کنیم:

الف) از M خطی مانند m رسم می‌کنیم که خطهای l_1 و l_2 را بترتیب در نقاط P و Q ببرد و نقطهٔ M وسط PQ باشد.* تصویر قائم P بر l_2 را P' و تصویر قائم Q بر l_1 را Q' و نقطهٔ M' را وسط $P'Q'$ می‌گیریم (شکل ۳۸ الف).

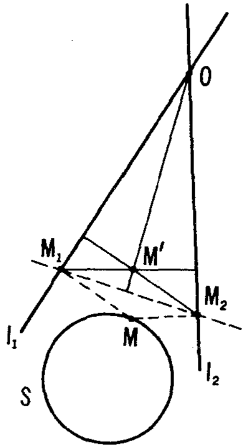
ب) نقطهٔ برخورد l_1 و l_2 را O، تصویرهای قائم M بر l_1 و l_2 را M_1 و M_2، و نقطهٔ برخورد ارتفاعها (یعنی مرکز ارتفاعی) مثلث OM_1M_2 را M' می‌نامیم (شکل ۳۸ ب).



شکل ۳۸ (الف)

---

* برای ترسیم m کافی است خط دلخواه n را از M بگذرانیم تا l_1 را در P_1 قطع کند و سپس MQ_1 را قابل‌انطباق با MP_1 جدا می‌کنیم؛ دراین صورت Q_1Q موازی l_1 است (شکل ۳۸ الف).



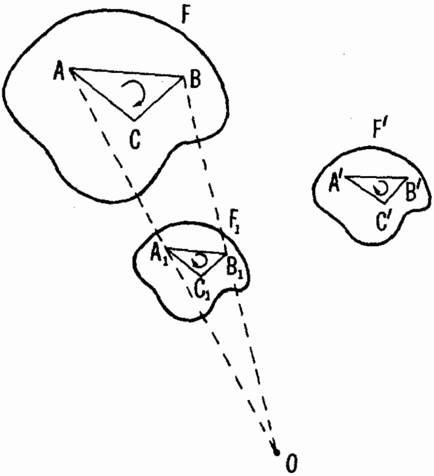
شکل ۳۸ (ب)

اکنون فرض می‌کنیم که M یك دایرهٔ S را بپیماید؛ مکان هندسی نقطهٔ M' چه خواهد بود؟

همان‌گونه‌که بین شکلهای مستقیماً قابل انطباق باهم و معکوساً قابل انطباق باهم تفاوت قائل شدیم (→ جلد اول، بخش ۲، مطالب پیش از قضیهٔ ۱)، بین دونوع شکلهای متشابه درصفحه هم تفاوت قائل می‌شویم. دو شکل متشابه F و F' مستقیماً متشابه خوانده می‌شوند اگر شکل F_1 که مجانس F با نسبت تجانسی مساوی با نسبت پاره‌خطهای متناظر در F و F'، مستقیماً قابل انطباق با F' باشد (شکل ۳۹ الف)؛ ازسوی دیگر، اگر F_1 معکوساً با F' قابل انطباق باشد، می‌گوییم که F و F' معکوساً متشابه‌اند (شکل ۳۹ ب). تنها وقتی‌که مستقیم یا معکوس بودن تشابه اهمیتی نداشته باشد، دو شکل را متشابه می‌خوانیم بی‌آنکه توضیح بیشتری بدهیم. برای اینکه مستقیماً یا معکوساً متشابه‌بودن دوشکل F و F' را تشخیص دهیم، کافی است سه نقطهٔ A، B، C ناهمخط در F و نقاط متناظرشان A'، B' و C' در F' را در نظر بگیریم. اگر F و F' مستقیماً متشابه باشند، مثلثهای (متشابه) ABC و $A'B'C'$ همسو و در غیراین‌صورت ناهمسو هستند (→ شکلهای ۳۹ الف و ب).

اکنون دو قضیهٔ مهم زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. هردو شکل مستقیماً متشابه درصفحه را می‌توان به‌وسیلهٔ یك تجانس مارپیچی

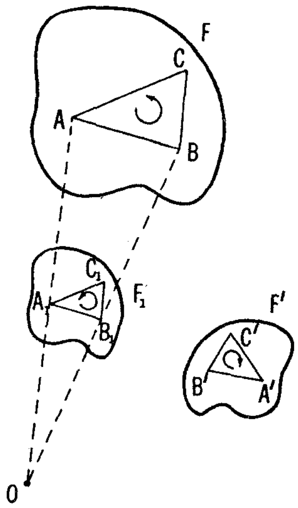


شکل ۳۹ (الف)

یا یك انتقال برهم قرار داد.*

برهان این‌قضیه تفاوت چندانی با برهان قضیهٔ ۱ بخش ۲، فصل دو، جلد اول ندارد: ابتدا بسادگی نشان داده می‌شود که هردو قطعهٔ AB و $A'B'$ را با یك‌تجانس‌مارپیچی با زاویهٔ دورانی مساوی با زاویهٔ بین پاره‌خطها و نسبت‌تجانسی مساوی با نسبت پاره‌خطها می‌توان برهم قرار داد؛ تنها استثنا وقتی پیش می‌آید که پاره‌خطها متساوی، متوازی و همجهت باشند، کــه دراین‌صورت می‌توان آنها را با یك انتقال بریکدیگر قرار داد (← صفحهٔ ۵۵ و جلد اول، صفحات پس از مسألهٔ۸، که درآنجا حکمی‌کلیتر در مورد شکلهای دلخواه اثبات شده‌است). اکنون به‌وسیلهٔ تجانس مارپیچی یا انتقال، پاره‌خط AB ازشکل F را به‌پاره‌خط متناظر آن $A'B'$ درشکل F' که مستقیماً متشابه با F است بدل‌می‌کنیم. به‌آسانی می‌توان نشان دادکه تمامی شکل F به F' بدل شده‌است؛ اثبات این مطلب کاملا شبیه بخش آخر اثبات قضیهٔ ۱، بخش ۲ فصل ۲ از جلد اول است.

* ازاین قضیه نتیجه می‌شود که هردو شکل مستقیماً متشابه ولی غیرقابل‌انطباق باهم در صفحه را می‌توان به‌کمك یك تشابه مارپیچی برروی هم قــرار داد (زیرا اگــر بتوان شکلها را با یك انتقال برهم قرار داد، الزاماً باهم قابل‌انطباق می‌شوند).



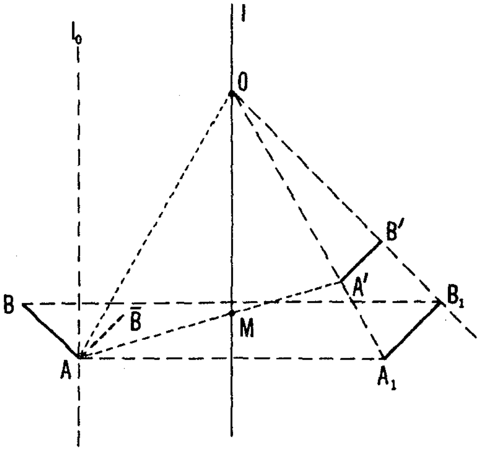
شکل ۳۹ (ب)

اگر F و F' را بتوان با تجانس‌مارپیچی به‌مرکز O برهم قرار داد، آنگاه O مرکز دوران (یا گاهی مرکز تجانس) F و F' خوانده می‌شود. برای یافتن مرکز دوران دوشکل مستقیماً متشابه F و F'، باید یک زوج پاره‌خطهای متناظر AB و $A'B'$ دراین‌شکلها اختیار کرد. اگر خطهای AB و $A'B'$ درنقطهٔ P متقاطع باشند و اگر AA' و BB' درنقطهٔ Q یکدیگر را قطع کنند، آنگاه O عبارتست‌از دومین نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای PAA' و PBB'، یا دومین نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای QAB و $QA'B'$ (← صفحه‌های ۵۳ و ۵۴). اگر $AB||A'B'$، O بر Q منطبق است؛ اگر $AA'||BB'$، O بر P منطبق‌است. بالاخره اگر $AB||A'B'$ و $AA'||BB'$، پاره‌خطهای AB و $A'B'$ متساوی، متوازی و همجهت‌اند؛ دراین حالت شکلهای F و F' با یک انتقال به‌یکدیگر بدل می‌شوند و مرکز دورانی وجود نخواهد داشت.

قضیهٔ ۲. هردو شکل معکوساً متشابه در صفحه را با یک قرینه‌یابی تجانسی یا با یک

لغزه (قرینه‌یابی لغزه‌ای)[1] می‌توان برهم قرار داد.*

برهان این قضیه خیلی شبیه برهان قضیهٔ ۲ بخش ۲ فصل دو جلد اول است. فرض کنید A و B دو نقطهٔ دلخواه از F باشند و نقاط متناظر آنها را در شکل F' که معکوساً متشابه با F است، A' و B' می‌نامیم. ثابت می‌کنیم که یك قرینه‌یابی تجانسی (یا یك لغزه) وجود دارد که پاره‌خط AB را به پاره‌خط $A'B'$ بدل می‌کند. زیرا فرض می‌کنیم l محور یك قرینه‌یابی تجانسی (یا محور یك لغزه) باشد که AB را به $A'B'$ بدل می‌کند (شکل ۴۰). $A'B'$ را با انتقال به وضعیت جدید $A\bar{B}$ درمی‌آوریم. پاره‌خط A_1B_1، قرینهٔ محوری AB نسبت به l، مجانس $A'B'$ است یا از $A'B'$ بر اثر یك انتقال به‌دست آمده است؛ درنتیجه، پاره‌خطهای A_1B_1 و $A\bar{B}$ با $A'B'$ موازی‌اند. چون A_1B_1 قرینهٔ‌محوری AB نسبت به l است و با $A\bar{B}$ موازی است، نتیجه می‌شود که l با خط l_0، نیمساز زاویهٔ $\bar{B}AB$، موازی است.



شکل ۴۰

1. glide reflection

* ازاین قضیه، بخصوص نتیجه می‌شود که هردوشکل معکوساً متشابه و نامتساوی درصفحه را می‌توان به‌وسیلهٔ یك قرینه‌یابی تجانسی از یکدیگر به‌دست آورد (زیرا اگر شکلها را بتوان با یك لغزه (قرینه‌یابی لغزه‌ای) برهم قرار داد، الزاماً با یکدیگر قابل انطباق خواهند بود).

بعلاوه، فرض می کنیم که $A'B' \neq AB$، و O مرکز قرینه‌یابی تجانسیی باشد که AB را به $A'B'$ بدل می کند. دراین‌صورت l نیمساز زاویه‌ای ازمثلث AOA_1 و بنابراین نیمساز زاویه‌ای از مثلث AOA' است. پس AA' خط l را در نقطه‌ای مانند M قطع می کند به‌طوری که

$$\frac{A'M}{MA}=\frac{OA'}{OA}=\frac{OA'}{OA_1}=\frac{A'B'}{A_1B_1}$$

یا

$$\frac{A'M}{MA}=\frac{A'B'}{AB}$$

پس اگر پاره‌خطهای AB و $A'B'$ معلوم باشند، می‌توانیم خط l را رسم کنیم: این خط بـا نیمساز زاویهٔ $\bar{B}AB$ موازی است و پاره‌خط AA' را به‌نسبت $A'B'/AB$ تقسیم می کند. [این ترسیم حتی وقتی که $AB = A'B'$ عملی است ــ برهان قضیهٔ ۲، بخش ۲، فصل ۲، جلد اول.] بـا یافتن قرینهٔ محوری پاره خط AB نسبت به l پاره‌خط A_1B_1 به‌دست می‌آید که با $A'B'$ موازی است. A_1B_1 را بـا تجانسی به مرکز O، نقطهٔ برخورد $A'A_1$ و l (زیرا $\frac{OA'}{OA_1}=\frac{OA'}{OA}=\frac{A'M}{MA}=\frac{A'B'}{AB}$)، یا با انتقـالی در جهت خط l می‌توان به $A'B'$ بدل کرد. پس بدین‌ترتیب قرینه‌یـابی تجانسی (یا لغزهٔ) مطلوب راکه می‌خواستیم وجودش را نشان دهیم یافته‌ایم. بخش آخر برهان قضیهٔ ۲ تقریباً کلمه به‌کلمه نظیر بخش آخر قضیهٔ ۲ در فصل دو، جلد اول است و به‌همین‌علت در اینجا از ذکر آن خودداری می کنیم.

نتایج قضیه‌های ۱ و ۲ را می‌توانیم به‌صورت حکم کلی زیر بیان کنیم:

هردو شکل متشابه درصفحه را می‌توان به‌وسیلهٔ یك تجانس مارپیچی، یا یك قرینه‌یابی تجانسی یا یك انتقال یا یك لغزه به‌یکدیگر بدل کرد.*

ایـن حکم‌را می‌توان مبنایی برای تعریف تبدیل تشابهی در صفحه قرار داد

---

* بخصوص، هردو شکل متشابه ولی غیرقابل انطباق با هم را می‌توان بـا یك تجانس مارپیچی یا یك قرینه‌یابی تجانسی به‌یکدیگر بدل کرد.

(← دوصفحهٔ بعدازتمرین ۴۷). به‌عبارت دیگر، تبدیل تشابهی تبدیلی است که جزو یکی‌از چهار نوع زیر باشد:

۱) تجانس مارپیچی (ازجمله تجانس و دوران حول نقاط)؛

۲) قرینه‌یابی تجانسی؛

۳) انتقال،

۴) لغزه، (از جمله قرینه‌یابی نسبت به‌خط)؛

طبیعی‌است که می‌توانیم تبدیلهای‌نوع ۱) و ۳) را تشابه‌های مستقیم بنامیم (زیرا شکلهای متشابه را مستقیماً به‌یکدیگر بدل می‌کنند)، و تبدیلهای نوع ۲) و ۴) را تبدیلهای معکوس (که شکلهای‌متشابه را معکوساً به‌یکدیگر بدل می‌کنند).

به‌کمك‌قضیه‌های ۱ و ۲ می‌توانیم مسأله‌های ۴۵–۴۷ بخش ۲ فصل ۲، جلد اول‌را تعمیم‌دهیم. برای این منظورکافی‌است به‌جای شرط قابلیت‌انطباق پاره‌خطهای AX و BY باهم در مسألهٔ ۴۵، و AX و BY و CZ در مسألهٔ ۴۶، و BP و PQ و QC در مسألهٔ ۴۷، شرط نسبت آنها به‌یکدیگر برابر مقدار مفروضی باشد را بگذاریم. راه‌حلهای این مسائل کلیتر، مشابه راه‌حل مسأله‌های اصلی است؛ حل این مسائل را به‌خود خواننده توصیه می‌کنیم.

از قضیه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که خواص مشترك همهٔ تبدیلهای تشابهی دقیقاً همان خواص‌مشترك تجانس‌های مارپیچی، قرینه‌یابیهای‌تجانسی، انتقالها و لغزه‌ها هستند (← تعریف تبدیل تشابهی در فوق). پس مثلا می‌توان گفت‌که، هرتبدیل تشابهی خط را به‌خط و دایره را به دایره بدل می‌کند.* و نیز، هرتبدیل تشابهی دارای یك نقطهٔ

---

* ضمناً، این ویژگی تبدیلهای تشابهی‌را ازتعریف آنها به‌عنوان تبدیلهایی ازصفحه‌که نسبت فواصل بین نقاط را محفوظ نگاه می‌دارند نیز می‌توان نتیجه گرفت. زیرا خط AB را عملا می‌توان به‌عنوان مجموعهٔ نقاطی مانند M تعریف کرد که بین سه مسافت AM و BM و AB بزرگترین‌شان مساوی بامجموع دوتای دیگر باشد یکی‌از سه رابطهٔ زیر برقرار باشد (شکل ۴۱–الف)

$$\frac{AM}{AB}+\frac{BM}{AB}=1 \quad \text{یا} \quad \frac{BM}{AM}+\frac{AB}{AM}=1 \quad \text{یا} \quad \frac{AM}{BM}+\frac{AB}{BM}=1$$

اماهرتبدیل تشابهی‌که A و B را به‌نقاط A'وB' بدل کند مجموعهٔ نقاط فوق‌الذکر M را به‌مجموعهٔ نقاط M' بدل می‌کندکه یکی‌از سه رابطهٔ زیر برقرار است

←

ثابت یا یك خط ثابت است، زیرا از این چهار نوع تبدیل تشابهی که نام بردیم تنها تبدیلهای انتقال و لغزه نقطهٔ ثابت ندارند ولی در عوض خطهای ثابت دارند. بالاخره، **هرتبدیل تشابهی معکوس، حداقل یك خط ثابت دارد.** درواقع، هر قرینه‌یابی تجانسی دقیقاً دوخط ثابت دارد درصورتی که هر لغزه دقیقاً یك خط ثابت دارد مگر اینکه این لغزه به یك قرینه‌یابی نسبت به یك خط بدل شود که در آن صورت به تعداد نامتناهی خط ثابت دارد.

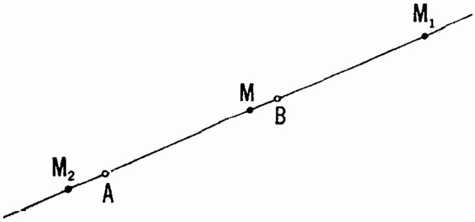
جالب توجه اینکه نخستین ویژگی از ویژگیهای فوق‌الذکر، **وجه مشخصهٔ** تبدیلهای تشابهی است یعنی می‌توان آن را به عنوان مبنائی برای تعریف (توصیفی!) آنها به‌کارگرفت:* **تبدیلی درصفحه‌که هرخط را به‌خط و هردایره را به‌دایره بدل کند**

$\longrightarrow$

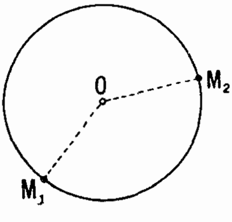
$$\frac{A'M'}{A'B'}+\frac{B'M'}{A'B'}=1 \quad \text{یا} \quad \frac{B'M'}{A'M'}+\frac{A'B'}{A'M'}=1 \quad \text{یا} \quad \frac{A'M'}{B'M'}+\frac{A'B'}{B'M'}=1$$

یعنی خط AB به‌خط $A'B'$ بدل شده است.

به‌همین ترتیب، دایره‌ای به‌مرکز O را می‌توان به‌عنوان مجموعهٔ نقاطی مانند S تعریف کرد با این ویژگی که اگر M_1 و M_2 دو نقطهٔ دلخواه از S باشند، آنگاه $OM_1=OM_2$ یعنی $OM_1/OM_2=1$ (شکل ۴۱ ب) اما هر تبدیل تشابهی که نقطهٔ O را به‌نقطهٔ O' بدل کند مجموعهٔ فوق‌الذکر S را نیز به‌مجموعهٔ نقاط S' بدل می‌کند با این ویژگی که اگر M'_1 و M'_2 دو نقطهٔ دلخواه از S' باشند، آنگاه $OM'_1/OM'_2=1$. به عبارت دیگر، این تبدیل دایرهٔ به‌مرکز O را به‌دایرهٔ به‌مرکز O' بدل می‌کند.



شکل ۴۱ (الف)



شکل ۴۱ (ب)

* ← دو صفحهٔ بعداز تمرین ۴۷، جلد اول.

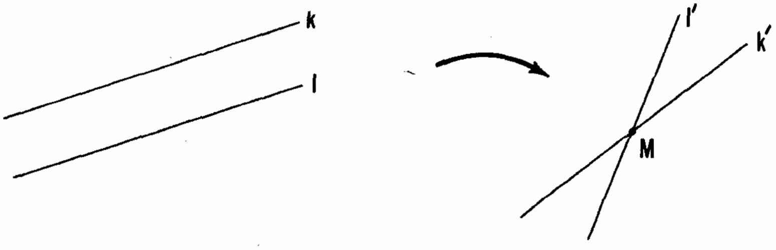
الزاماً یک تبدیل تشابهی است. به‌عبارت دیگر هر تبدیلی ازاین‌نوع، الزاماً نسبت فواصل بین نقاط را ثابت نگاه می‌دارد: اگر نقاط A، B، C، D براثر تبدیل به نقاط A'، B'، C'، D' بدل شوند، آنگاه

$$\frac{C'D'}{A'B'}=\frac{CD}{AB}$$

این مطلب تاکیدی برنقش اساسی تبدیلهای تشابهی در هندسهٔ مقدماتی است که موضوع آن مطالعهٔ ویژگیهای خطوط، دایره‌ها و شکلهائی است که مرزهای آنها خطها وکمانهائی از دایره هستند.

برای اثبات حکمهای فوق که باحروف ایرانیک چاپ شده‌اند* باید ثابت کنیم هر تبدیلی که خط راست را به خط راست و دایره را به‌دایره بدل می‌کند، هردو نقطهٔ A و B به‌فاصله d واحد را نیز به‌دو نقطهٔ A' و B' به‌فاصلهٔ d' واحدی بدل می‌کند که در اینجا d' تنها به d بستگی دارد، نه به‌انتخاب خاص نقاط A و B! این مطلب‌را مثلا با استدلال زیر می‌توان نشان داد.

ابتدا به‌این‌نکته توجه می‌کنیم‌که تبدیلی ازصفحه برروی خودش‌که خط را به‌خط بدل می‌کند الزاماً باید خطهای متوازی را به‌خطهای متوازی بدل‌کند. زیرا، اگر تبدیل‌موردنظر بخواهددوخط‌متوازی k و l را به‌دوخط k' و l' که‌درنقطهٔ M متقاطع‌اند بدل‌کند (شکل ۴۲)، پس نقطه‌ای‌که به M بدل شده باید برهردوخط k و l واقع باشد، و چنین نقطه‌ای وجود ندارد.



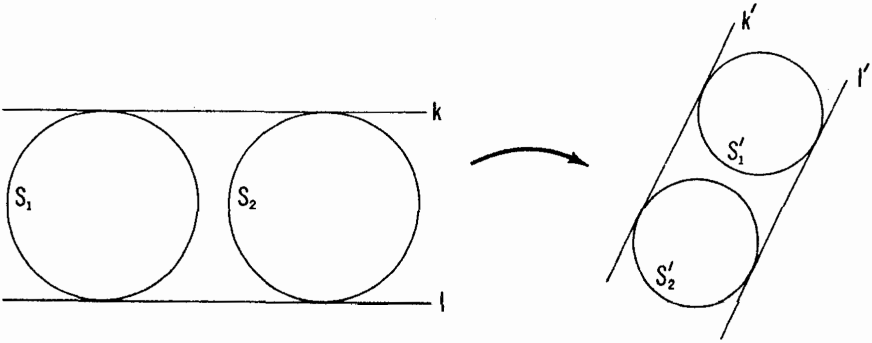
شکل ۴۲

---

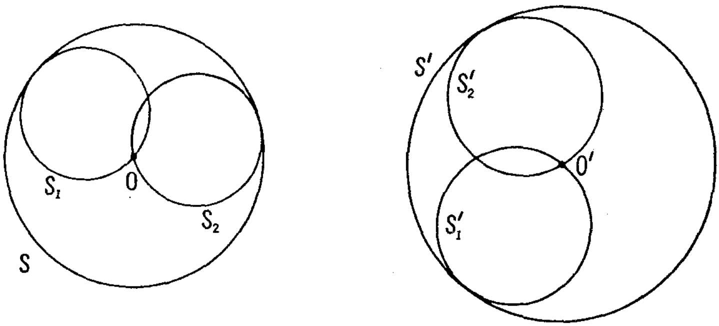
* و نیز ← بخش ۴ فصل دو، جلد سوم.

به‌علاوه، روشن است که اگر تبدیلی خط را به‌خط و دایره را به‌دایره بدل کند، آنگاه دو دایرهٔ متقاطع یا یك خط و یك دایرهٔ متقاطع را به‌دو دایرهٔ متقاطع یا به یك خط و یك دایرهٔ متقاطع بدل می‌کند. همچنین دو دایره مماس برهم یا یك دایره و یك خط مماس بر آن‌را، به‌دو دایرهٔ مماس یا به‌یك دایره و یك خط مماس بر آن بدل‌می‌کند. بالاخره، دو دایره یا دایره و خطی را که هیچ نقطهٔ مشترك ندارند به‌دو دایره یا دایره و خطی که هیچ نقطهٔ مشترك ندارند بدل می‌کند. از همهٔ اینها نتیجه می‌شود که دو دایرهٔ قابل انطباق با هم یعنی دو دایره که مماسهای مشترك موازی دارند، به دایره‌های قابل انطباق با هم بدل می‌شوند (شکل ۴۳). بعلاوه، اگر تبدیل مورد نظر دایر S را به‌دایره S' بدل کند، آنگاه باید نقطهٔ O مرکز S را به نقطهٔ O' مرکز S' بدل کند. زیرا نقطهٔ O دارای این وجه مشخصه است که هردو دایره که از O بگذرند و بر S مماس باشند، باهم قابل انطباق‌اند. به همین ترتیب، وجه مشخصهٔ O' این است که دو دایره‌که ازآن بگذرند و بر S' مماس باشند، باهم قابل انطباق‌اند (شکل ۴۴). ولی قبلا دیده‌ایم که دایره‌های قابل انطباق باهم به دایره‌های قابل انطباق با هم بدل می‌شوند و دایره‌های مماس برهم به‌دایره‌های مماس برهم، بنابراین O باید به O' بدل شود.

ولی اکنون روشن‌است‌که اگر فواصل AB و CD مساوی باشند، یعنی اگر دایرهٔ S_1 به‌مرکز A و به‌شعاع AB و دایرهٔ S_2 به‌مرکز C و شعاع CD با هم قابل انطباق باشند، آنگاه تبدیل باید نقاط A، B، C، D را به نقاط A'، B'، C'، D' بدل کند چنان‌که دایرهٔ S'_1 به‌مرکز A' و به‌شعاع $A'B'$ ودایرهٔ S'_2 به‌مرکز C' وبه شعاع $C'D'$



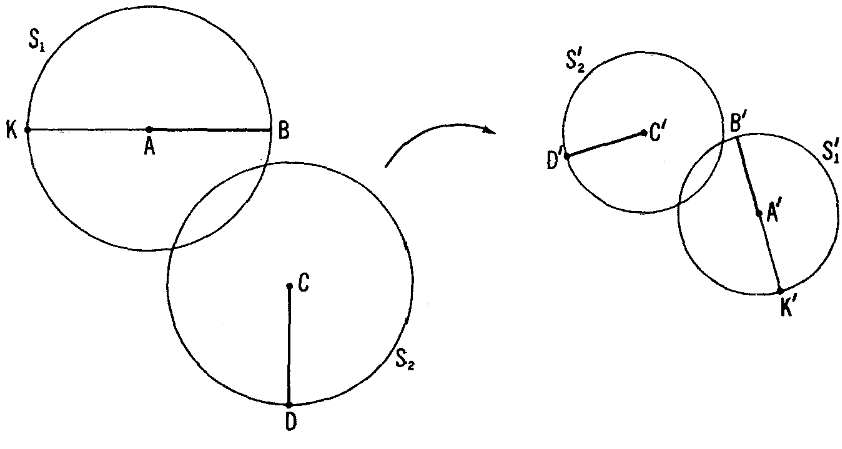
شکل ۴۳



شکل ۴۴

باهم قابل‌انطباق باشند (شکل ۴۵). بنابراین، اگر پاره‌خطهای AB، CD دارای طول متساوی باشند، طولهای پاره خطهای $A'B'$ و $C'D'$ حاصل از تبدیل هم با یکدیگر متساوی‌اند و این همان چیزی است که خواستیم ثابت کنیم.

بخش آخر این برهان کم و بیش به‌روال متعارف صورت می‌گیرد. درهندسه اغلب به‌این گونه استدلالها برمی‌خوریم. ابتدا باید توجه داشت که اگر سه‌نقطهٔ K، A، B بر یك‌خط چنان‌باشند که $KA=AB$، آنگاه تبدیل موردنظر آنهارا به‌سه‌نقطهٔ K'، A'، B'



شکل ۴۵

واقع بریك خط بدل خواهد کرد، چنان که $K'A'=A'B'$ — این حکم از آنجا ناشی می‌شود که اگر دو پاره‌خط متساوی باشند، تبدیل مورد نظر آنها را به‌دو پاره‌خط متساوی بدل می‌کند (← شکل ۴۵) . از اینجا بلافاصله نتیجه می‌شود که اگر نسبت $CD/AB=m/n$ گویا باشد (m و n اعداد صحیح مثبت‌اند)، تبدیل مورد نظر، نقاط A، B، C، D را به‌نقاط A'، B'، C'، D' بدل می‌کند چنان‌که

$$\frac{C'D'}{A'B'}=\frac{CD}{AB}\left(=\frac{m}{n}\right)$$

درواقع، شرط $CD/AB=m/n$ هم‌ارز است با وجود $n-1$ نقطهٔ A_1، A_2، ...، A_{n-1} برخط AB و $m-1$ نقطهٔ C_1، C_2، ...، C_{m-1} برخط CD چنان‌که

$$AA_1=A_1A_2=\ldots=A_{n-1}B=CC_1=C_1C_2=\ldots=C_{m-1}D$$

ولی روشن است که تبدیل مورد نظر این نقاط را به نقاط A'_1، A'_2، ...، A'_{n-1}، B'_1، B'_2، ...، B'_{m-1} بدل می‌کند که $n-1$ تای اول آنها بر خط $A'B'$ و $m-1$ تای آخر آنها برخط $C'D'$ واقع‌اند چنان‌که (شکل ۴۶ الف)

$$A'A'_1=A'_1A'_2=\ldots=A'_{n-1}B'=C'C'_1=C'_1C'_2=\ldots=C'_{m-1}D'$$

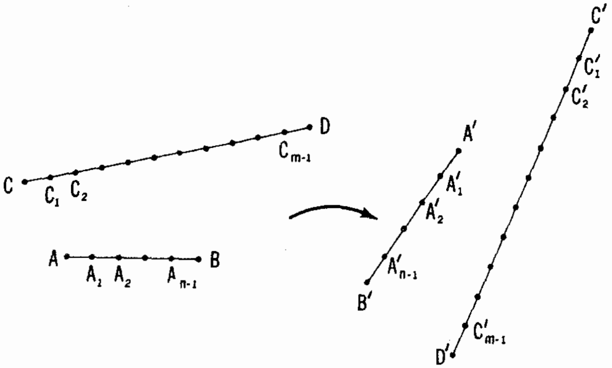
بعلاوه، تنها کافی است توجه کنیم که اگر $MN>PQ$، آنگاه N خارج دایرهٔ S به‌مرکز M و به‌شعاع PQ قرار می‌گیرد، یعنی از N دو مماس بر S می‌توانیم رسم کنیم؛ ازاینجا نتیجه می‌شود که تبدیل موردنظر، نقاط M، N، P، Q با شرط $MN>PQ$ را به‌نقاط M'، N'، P'، Q' می‌برد چنان‌که $M'N'>P'Q'$ (شکل ۴۷). بنا براین اگر نسبت فواصل AB و CD گویا نباشد و اگر

$$\frac{m}{n}<\frac{CD}{AB}<\frac{m+1}{n}$$

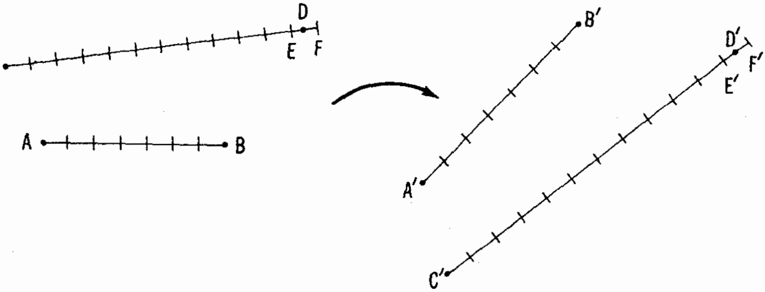
که درآن m و n اعداد صحیح مثبت‌اند، آنگاه نقاطی مانند E و F برخط C موجودند چنان‌که

$$\frac{CE}{AB}=\frac{m}{u},\quad \frac{CF}{AB}=\frac{m+1}{n} \text{ و } CE<CD<CF$$

پس تبدیل مورد نظر نقاط A، B، C، D، E، F را به‌نقاط A'، B'، C'، D'، E'، F' بدل می‌کند چنان‌که E و F' برخط $C'D'$ قرار می‌گیرند (شکل ۴۶ ب) و



شکل ۴۶ (الف)



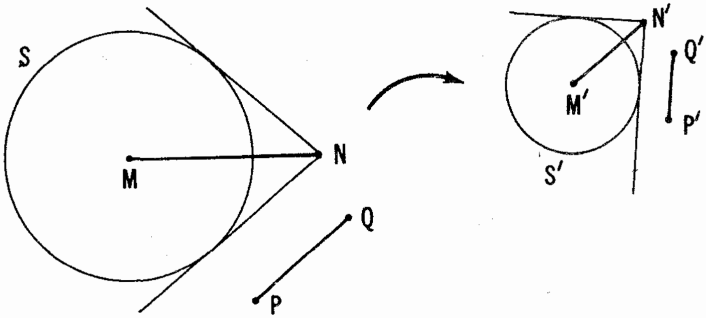
شکل ۴۶ (ب)

$$\frac{C'E'}{A'B'}=\frac{m}{n},\quad \frac{C'F'}{A'B'}=\frac{m+1}{n} \text{ و } C'E'<C'D'<C'F'$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\frac{m}{n}<\frac{C'D'}{A'B'}<\frac{m+1}{n}$$

در این نامساوی و در نامساوی مربوط بــه CD/AB مخرج n را می‌تــوان به اندازهٔ دلخواه بزرگ اختیار کرد؛ نتیجه می‌گیریم که $C'D'/A'B'=CD/AB$.



شکل ۴۷

۴۵. الف) $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ دومربع دلخواه هستند. فرض می‌کنیم که محیط دو مربع را دریك جهت می‌پیماییم، یعنی از A به B سپس به C وبعد به D می‌رویم، واز A' به B' سپس به C' وبعدبه D' می‌رویم، پس یا محیط هردومربع درجهت‌حرکت عقربه‌های ساعت ویا هردو درخلاف جهت‌حرکت عقربه‌های‌ساعت پیموده می‌شود. ثابت کنید که وسطهای پاره‌خطهای AA_1، BB_1، CC_1، و DD_1 نیز یا تشکیل مربع می‌دهند، یا همه بریکدیگر منطبق‌اند.

اگر محیط دومربع در جهتهای مخالف پیموده شوند، آیا بازهم نتیجهٔ فوق همچنان درست خواهد بود؟

ب) فرض‌می‌کنیم ABC و $A_1B_1C_1$ دومثلث‌متساوی‌الاضلاع باشند. مثلثهای متساوی‌الاضلاعی به قاعده‌های AA_1، BB_1 و CC_1 رسم می‌کنیم و آنها را AA_1A^*، BB_1B^* و CC_1C^* می‌نامیم. فرض می‌کنیم که محیط پنج مثلث ABC، $A_1B_1C_1$، AA_1A^*، BB_1B^* و CC_1C^* همه در یك جهت (یا درجهت حرکت عقربه‌های ساعت یا خلاف آن) پیموده شوند. ثابت‌کنیدکه سه نقطهٔ A^*، B^* و C^* یا رأسهای یك مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل می‌دهند یا هرسه برهم منطبق‌اند.

اگر شرط پیمایش در یك جهت ذکر نشود، آیا باز هم نتیجهٔ فوق همچنان درست خواهد بود؟

۴۶. الف) فرض‌کنید $ABCD$ و $MNPQ$ دومربع باشند. ثابت‌کنیدکه‌اگر محیطهای این دومربع دریك جهت پیموده شوند، آنگاه

$$AM^2+CP^2=BN^2+DQ^2$$

اگر به‌جای دومربع، دومستطیل متشابه بگذاریم آیا بازهم این‌نتیجه همچنان صادق خواهد بود؟ اگر شرط پیمایش محیطها در یك جهت خواسته نشود چطور؟

ب) فرض کنید $ABCDEF$ و $MNPQRS$ دو شش‌ضلعی‌منتظم باشند. ثابت کنیدکه اگر محیطهای آنها دریك‌جهت پیموده شوند، آنگاه

$$AM^{2}+CP^{2}+ER^{2}=BN^{2}+DQ^{2}+FS^{2}$$

۴۷. الف) مستطیلی رسم کنیدکه طول قطرش معلوم باشد و ضلعهایش ازچهار نقطهٔ مفروض A، B، C و D بگذرند.

ب) چهارضلعی $ABCD$ را با معلوم بودن زاویه‌ها و قطرهایش رسم کنید.

ج) چهارخط که از نقطهٔ معلومی گذشته‌اند مفروض‌اند. متوازی‌الاضلاعی‌رسم کنیدکه طولهای‌اضلاعش‌مقادیر مفروضی باشند وراسهایش برچهارخط قرار گیرند.

۴۸. الف) نقطهٔ M و دوخط l_1 و l_2 در صفحه مفروض‌اند. مثلث ABC را طوری‌رسم کنیدکه M ضلع AB را به‌نسبت مفروض $BM/AM=k$ تقسیم کند و l_1 و l_2 عمود منصفهای BC و CA باشند.

ب) دونقطهٔ M و N و خط l در صفحه مفروض‌اند. مثلث ABC را طوری رسم کنیدکه M و N ضلعهای AB و BC را به‌نسبتهای مفروض $BM/MA=k_1$ و $CN/NB=k_2$ تقسیم کنند و l عمود منصف AC باشد.

فصل دوم

کاربردهای دیگر طولپایی‌ها و تشابه‌ها

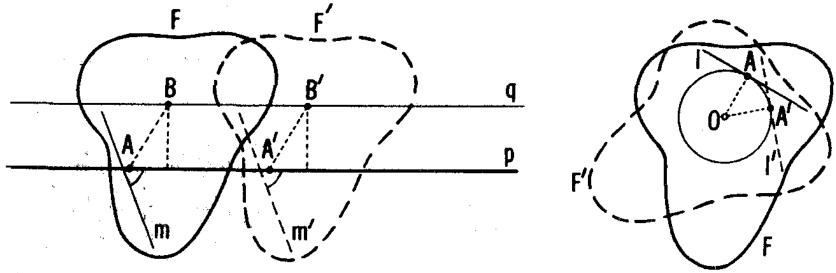
۱. دستگاههای اشکال دو به‌دو متشابه

در ایــن بخش دستگاههایی از شکلهای متقابلا متشابه را کــه خواص جالبی دارند بررسی می‌کنیم. ابتدا به‌دستگــاههای شکلهای قابل انطباق بــا هم که ساده‌ترند می‌پردازیم.

فرض کنید F و F' دوشکل قابل‌انطباق باهم درصفحه باشند. در بخش ۲ از فصل دو، جلد اول نشان دادیم که این شکلها را می‌توان به‌کمك یك دوران یا یك انتقال برهم منطبق کرد و براین اساس گفتیم که حرکتهای صلب درصفحه منحصر به دوران و انتقال هستند.* اما در آنجا به‌مواضع میانی کــه شکلی در جریان حرکت اختیار می‌کند نپرداختیم، بلکه تمام تــوجه خود را به‌وضعیتهای ابتدایی و انتهایی معطوف داشتیم. ولی دراینجا مواضع میانی یك‌شکل متحرك موردتوجه ما خواهند

---

* در اینجا و در آنچه بعداً می‌آید همواره منظور ما از شکلهای قابل انطباق با هم، «شکلهای مستقیماً قــابل انطباق با هم» خواهد بود (← جلد اول ، فصل ۲، بخش ۲، صفحهٔ پیش‌از قضیهٔ ۱)؛ دوشکل معکوساً قابل‌انطباق باهم را معمولا نمی‌توان باحرکت صلبی که تماماً درون صفحه انجام می‌شود، بریکدیگر منطبق کرد.



شکل ۴۸

بود؛ این موضعها دستگاهی از شکلهای دو بهدو متشابه پدید می‌آورند.* به تعداد بینهایت از این نوع دستگاهها، متناظر با راههای گوناگون ممکن برای حرکت دادن شکلی از وضعیت F به‌وضعیت F'، وجود دارد. در اینجا تنها برخی نمونه‌های سادهٔ این گونه دستگاهها را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید شکل F حول نقطهٔ O دوران می‌کند؛ یعنی طوری حرکت می‌کند که نقطهٔ خاص O، که آن را جزو شکل به‌شمار می‌آوریم، ثابت می‌ماند (شکل ۴۸ الف). در این حالت هر نقطهٔ A از F دایره‌ای به‌مرکز O می‌پیماید (زیرا فاصلهٔ OA ثابت می‌ماند)؛ هرخط l از F یا همواره بردایره‌ای به‌مرکز O مماس است، یا همیشه از O می‌گذرد (زیرا فاصلهٔ O تا l ثابت می‌ماند). نقطهٔ O برای هر دو وضعیت دلخواه شکل درحکم مرکز دوران است.

اکنون انتقال شکلی را در راستای خط مفروض p در نظر می‌گیریم (شکل ۴۸ ب)، یعنی حرکتی ازشکل را که درآن خط p ثابت می‌ماند (برخودش می‌لغزد). در این صورت هر نقطهٔ B از شکل خطی موازی با p را می‌پیماید (زیرا فاصلهٔ B تا p ثابت می‌ماند)؛ هرخط m که با p موازی نباشد، چنان حرکت می‌کند که با وضعیت اولیه‌اش موازی می‌ماند (زیرا زاویهٔ بین m و p تغییر نمی‌کند)؛ هرخط

---

* تأکیدمی‌کنیم که‌تنهامجموعهٔمواضع‌مختلف‌شکلهای‌متحرك مورد توجه ماست نه‌خودعمل حرکت؛ بنابراین به‌هیچ‌وجه‌کاری به‌سرعت یا شتاب یکایك نقاط نداریم. گرچه برخی نکات علم مکانیك اغلب موجب ساده‌شدن برهان قضیه‌های هندسه می‌شود، ولی قد اینجا جای آن نیست‌که به‌این مبحث خاص هندسه (که هندسهٔ حرکتی یا هندسهٔ سینماتیك نامیده می‌شود) بپردازیم. [مثلا قضیه‌های ۱ و ۲ در این بخش را با روشهای مکانیکی هم می‌توان اثبات کرد].

q موازی با p درامتداد خودش می‌لغزد (زیرا فاصله‌اش تا p تغییر نمی‌کند). هردو وضعیتی از F را می‌توان با انتقالی در راستای p از یکدیگر به‌دست آورد.

اگر شکل F درصفحه طوری حرکت کندکه درسراسر حرکت، دوخط متوازی p و q همیشه از دونقطهٔ مفروض A و B ازصفحه بگذرند، آنگاه خط p برخودش می‌لغزد (زیرا زاویهٔ بین p وپاره‌خط AB تغییرنمی‌کند:سینوس این‌زاویه برابرست با فاصلهٔ بین p و q تقسیم برطول پاره‌خط AB).* بدین‌ترتیب با انتقالی ازشکل که قبلا بررسی شد سروکار پیدامی‌کنیم (← شکل ۴۸ ب). اگر دوخط ناموازی ازشکل، همیشه از دونقطهٔمفروض بگذرند وضع پیچیده‌تر خواهد بود؛ چنین‌حرکتی به‌صورت زیر می‌تواند پدید آید: دو سنجاق در صفحه نصب کنید و زاویه‌ای به شکل بچسبانید؛ سپس زاویه‌را طوری حرکت دهیدکه دوضلع آن همیشه باسنجاقها درتماس باشند. در اینجا قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۱: اگر شکل F درصفحه طوری حرکت داده شودکه دو خط ناموازی p و q از F همواره از دو نقطهٔ مفروض A و B درصفحه بگذرند، آنگاه هرخط دیگری از F یا همیشه ازنقطهٔمفروضی درصفحه‌می‌گذرد یا همیشه بردایرهٔخاصی ازصفحه مماس‌است.

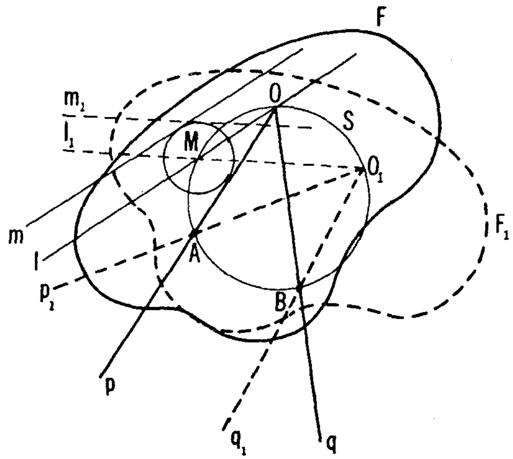
برهان. فرض کنید F و F_1 دو وضعیت از F باشند، وضعیتهای‌متناظر خطهای pوq را، p_1 و q_1 می‌نامیم ونقاط برخورد p و q، p_1 و q_1 را O و O_1 می‌نامیم (شکل ۴۹ الف). نقاط O و O_1 برکمانی ازدایرهٔ S واقع‌اندکه‌بر وتر AB بناشده و حاوی زاویه‌ای برابربازاویهٔ بین pوq باشد.** وضع جدید خطی چون l راکه از نقطهٔ O می‌گذرد l_1 می‌نامیم کـه از O_1 می‌گذرد، و فرض می‌کنیم M و M_1 نقاط برخورد l و l_1 بامحیط S باشند. چون $\measuredangle M_1O_1A = \measuredangle MOA$، (زیرا زاویهٔ‌بین خطهای l و p تغییر نمی‌کند)، نتیجه می‌شود که (کمان AM_1)$=$(کمان AM)، یعنی $M_1 = M_2$. پس نشان داده‌ایم که خط l درهروضعیتی که باشد ازیك نقطهٔ M می‌گذرد.

اکنون m را خطی‌بگیریدکه از O نمی‌گذرد. خط l را ازنقطهٔ O به‌موازات m رسم می‌کنیم. همان‌طورکه دیده‌ایم خط l در هروضعی که باشد از یك نقطهٔ M می‌گذرد. چون فاصلهٔ بین خطهای m و l ثابت می‌ماند، خط l درهروضعی که باشد

---

* در اینجا اصل براین است که شکل F و خطوط p و q برصفحه می‌لغزند ولی نقاط زمینهٔ صفحه ازجمله A و B حرکت نمی‌کنند.

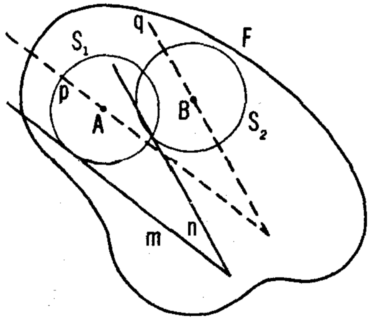
** ← پانویس (**) مربوط به‌قضیهٔ ۳، فصل ۲، جلد اول.



شکل ۴۹ (الف)

باید بردایره‌ای به‌مرکز M و به‌شعاعی برابر بافاصلهٔ l تا m مماس باشد. این نتیجه برهان قضیه راکامل می‌کند.

اکنون فرض می‌کنیم کــه شکل F در صفحه طوری حرکت‌کندکه دوخط ناموازی m و n از شکل همواره بردو دایرهٔ مفروض S_1 و S_2 مماس باشند (شکل ۴۹ ب). از نقاط A و B، مراکز دایره‌های S_1 و S_2، خطوط p و q را بترتیب موازی با m و



شکل ۴۹ (ب)

و n می‌گذرانیم. فاصلهٔ بین m و p برابرست با شعاع S_1؛ زیرا ایـن فاصله طی حرکت‌شکل تغییر نمی‌کند، و خط l همواره از نقطهٔ ثابت A می‌گذرد. به‌طورمشابه، خط q همواره از B می‌گذرد. بنابراین، قضیهٔ ۱ را می‌توانیم در اینجا به‌کاربریم؛ ونیز می‌بینیم که در چنین حرکتیِ هرخط از شکل F یا همواره بردایرهٔ ثابتی مماس است، یا همواره از نقطهٔ مفروضی می‌گذرد.

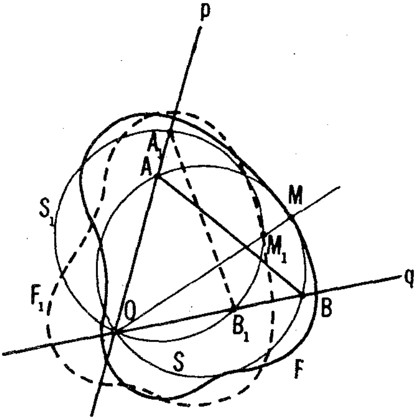
اگر شکل F درصفحه چنان حرکت کند که دونقطهٔ مفروض A و B در شکل، خطوط متوازی p و q را بپیمایند، پس پاره‌خط AB در تمام وضعیتها بـا خودش موازی است (زیرا سینوس زاویهٔ بین AB و p تغییر نمی‌کند : مقدارش برابرست با نسبت فاصلهٔ بین p و q با طول پاره‌خط AB). پس هردو وضعیت دلخواه شکل را می‌توان با انتقالی در راستای p از یکدیگر به‌دست آورد، بنابراین انتقالی از شکل در دست است، که این حالت‌را قبلا مطالعه کردیم (← شکل ۴۸ ب). اگـر پاره‌خط مفروضی ازشکل طوری حرکت کند که دوسرش همواره بردوخط ناموازی باشد، وضع پیچیده‌تر خواهد شد. دراین مورد قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۲. اگر شکل F درصفحه چنان حرکت‌کندکه دونقطهٔ A و B از آن خطوط p و q، متقاطـع درنقطهٔ O را بپیمایند، آنگاه یك دایرهٔ S متصل به‌شکل F وجود داردکه همهٔ نقاطش خطهائی راکه از O می‌گذرند می‌پیمایند.

برهان. فرض‌کنیدF و F_1 دووضعیت ازشکل F باشند و AB و A_1B_1 دووضعیت متناظر ازیك پاره‌خط AB (شکل ۵۰). دایره‌ای راکه ازنقاط A، B و O می‌گذرد رسم می‌کنیم. ایـن دایره را چسبیده به‌شکل F در نظر می‌گیریم و S_1 را معرف وضعیت این دایره هنگامی که F به‌وضعیت F_1 درآمده باشد: روشن است کـه S_1 از O نیز می‌گذرد (زیراکمان AB از دایرهٔ S برابر است باکمان A_1B_1 ازدایرهٔ S_1 که مساوی با $AOB \measuredangle$ ۲ است).* فرض‌می‌کنیم M نقطهٔ دلخواهی از S باشد و نقطهٔ متناظر آن در S_1 را M_1 می‌نامیم. ازقابلیت انطباق شکلهای F و F_1 باهم نتیجه می‌شودکه‌کمانهای AM و A_1M_1 متساویند؛ یعنی زاویه‌های محاطی AOM و A_1OM_1 روبه‌رو به‌این‌کمانها نیز متساویند. اما این‌بدان‌معنی‌است‌که خط OM_1 برخط OM منطبق است. درنتیجه، همان‌طورکه می‌خواستیم ثابت‌کنیم، هرنقطهٔ M از دایرهٔ S، برطول خطی‌که از O می‌گذرد حرکت می‌کند.

---

* ← پانویس (**) مربوط به‌قضیهٔ ۳، فصل ۲، جلد اول.



شکل ۵۰

همچنین یادآوری می‌کنیم کــه نقطهٔ N مرکز S بردایره‌ای به‌مرکز O و به شعاعی برابر با R، شعاع دایرهٔ S، حرکت می‌کند؛ این‌حکم از آنجا ناشی‌می‌شود که S درهروضعی که باشد از نقطهٔ O می‌گذرد و بنابراین فاصلهٔ ON همیشه مساوی با R باقی می‌ماند.

۴۹. مثلثی قابل‌انطباق با مثلث مفروضی رسم‌کنید که اضلاعش (الف) از سه نقطهٔ مفروض بگذرند؛ (ب) برسه دایرهٔ مفروض مماس باشند.

ایــن مسأله به لحاظ دیگری در جلد اول، فصل یك ، بخش ۱ مطرح شده است [← مسألهٔ ۷ (ب)].

۵۰. الف) وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای طوری می‌لغزد که دو سرش همواره بر دوخط عمود برهم حرکت می‌کند. مکان هندسی رأس قائمهٔ آن‌را بیابید.

ب) بزرگترین ضلع‌مثلث متساوی‌الساقینی به‌زاویهٔ رأس ۱۲۰° چنان‌می‌لغزد که دوسرش‌همواره براضلاع یك زاویهٔ ۶۰° قراردارند. پیداکنید مکان‌هندسی‌رأسی راکه زاویه‌اش ازهمه بزرگتر است.

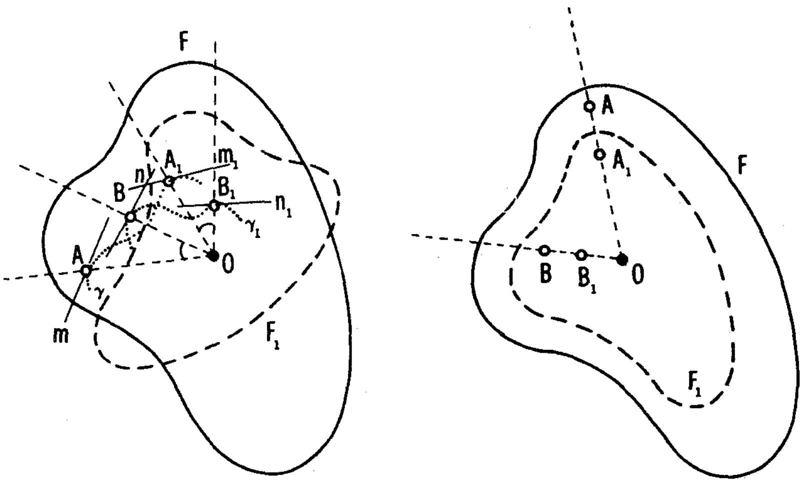
۵۱. دوخط متعامد l_1 و l_2 و دایرهٔ S درصفحه‌مفروض‌اند. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را با معلوم‌بودن یك زاویهٔ حادهٔ آن α چنان رسم‌کنید کــه راسهای A و B بر l_1 و l_2 واقع باشند و رأس قائمهٔ C بر S واقع باشد.

اکنون فرض می‌کنیم F و F_1 دوشکل متشابه درصفحه باشند.* در فصل یك بخش ۲ دیدیم که F را می‌توان بایك تجانس مارپیچی به F' بدل کرد؛ ولی در آنجا وضعیتهای میانی حاصل، درحین‌حرکت ازوضعیت F به‌وضعیت F' را بررسی نکردیم. اکنون دستگاه شکلهای دو بدو متشابه حاصل از کلیهٔ وضعیتهای شکل را هنگام حرکت از وضعیت F به وضعیت F' به‌طوری که همواره با وضعیت اولیه متشابه بمانند، درنظر می‌گیریم.

ابتدا فرض می‌کنیم که F طوری حرکت کندکه همواره با وضعیت اولیه‌اش متشابه بماند و بعلاوه، یك نقطهٔ O ازشکل به‌هیچ‌وجه حرکت نکند. اگر درهمین‌حال، نقطهٔ دیگری ازشکل مثلا A، دایره‌ای به‌مرکز O را بپیماید، آنگاه فاصلهٔ بین O و A تغییر نمی‌کند. در نتیجه F همواره قابل انطباق (ونه صرفاً متشابه) با وضعیت اولیه‌اش باقی می‌ماند و همهٔ نقاط F دایره‌هایی به مرکز O می‌پیمایند (← شکل ۴۸ الف صفحهٔ ۷۸). اگر نقطهٔ A خطی راکه از O می‌گذرد بپیماید، هر نقطهٔ دیگر مثلا B نیز خطی را می‌پیماید که از O می‌گذرد (زیرا وقتی F متشابه با وضعیت اولیه‌اش باقی بماند، زاویهٔ BOA نمی‌تواند تغییر کند)؛ معنی این‌حرکت شکل آن است که‌همواره‌می‌توان آن‌را بایك‌تجانس به‌مرکز O، به‌وضعیت‌اولیه‌اش برگرداند (شکل ۵۱ الف). اکنون فرض می‌کنیم که نقطهٔ A از شکل F یك منحنی دلخواه γ را بپیماید؛ نشان خواهیم دادکه دراین صورت هرنقطهٔ دیگر B (بجز نقطهٔ O) یك منحنی متشابه با γ را می‌پیماید (شکل ۵۱ ب). زیرا فرض می‌کنیم F وضعیت اولیه و F_1 وضع‌غیرمشخص دیگری‌ازشکل F باشد. A_1، B_1 را وضعیتهای متناظر نقاط A و B بگیرید. چون همهٔ وضعیتهای شکل با وضعیت اولیه متشابهند و چون نقطهٔ O حرکت نمی‌کند، نتیجه می‌گیریم که مثلثهای OAB و OA_1B_1 متشابهند، بنابراین $\measuredangle BOA = \measuredangle B_1OA_1$ و $OB_1/OA_1 = OB/OA$ زاویهٔ BOA را مساوی α و نسبت OB/OA را مساوی k می‌گیریم؛ معادله‌های اخیر نشان می‌دهند که یك تجانس مارپیچی به‌مرکز O، نسبت تجانس k، و زاویهٔ دوران α نقطهٔ B_1 را به A_1 بدل می‌کند. چون F_1 وضعیت دلخواهی ازشکل بود، این بدان‌معنی‌است که این تجانس مارپیچی تمامی منحنی γ' راکه نقطهٔ B پیموده است به‌منحنی γ که A پیموده است بدل می‌کند. حال اگر دو منحنی را بتوان با یك تبدیل مارپیچی به یکدیگر بدل کرد، آن‌دو متشابه‌اند واین‌همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

---

* در اینجا و از این پس منظور از واژهٔ «متشابه» همان «مستقیماً متشابه» است (← صفحهٔ ۶۳).



(ب) (الف)

شکل ۵۱

به‌همین ترتیب می‌توان نشان داد که اگـر یك خط m از شکل F کـه از O نمی‌گذرد، همواره بریك منحنی γ مماس باشد، آنگاه هرخط n از شکل (که از O نگذرد) همواره بریك منحنی متشابه با γ مماس است (← شکل ۵۱ ب). این منحنی براثر یـك تجانس مارپیچی به مرکز O که m را به n بدل می‌کند از منحنی γ به دست می‌آید. بخصوص اگر یك خط m ازشکل F که از O نمی‌گذرد همیشه ازنقطهٔ مفروض M بگذرد، آنگاه هرخط دیگر n از شکل (که از O نمی‌گـذرد) همواره از نقطهٔ ثابتی خواهد گذشت (این نقطه برای همهٔ خطها یکی نیست).

همچنین یادآوری می‌کنیم که اگر شکل F طوری حرکت کند که یکی از نقاط آن (O) ثابت بماند، آنگاه O مرکـز دوران هردو وضعیت دلخواه از ایـن شکل است. زیـرا از تشابه مثلثهای AOB و A_1OB_1 (شکل ۵۱ ب) نتیجه می‌شود کـه مثلثهـای AOA_1 و BOB_1 نیـز متشابـه‌انـد ($\sphericalangle AOA_1 = \sphericalangle BOB_1$ زیـرا $\sphericalangle AOA_1 = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOA_1$ و $\sphericalangle BOB_1 = \sphericalangle A_1OB_1 + \sphericalangle BOA_1$؛ بعلاوه $OA_1/OA = OB_1/OB$ زیرا $OB_1/OA_1 = OB/OA$). ولی این بدان‌معنی است که شکل F_1 براثر یك تجانس مـارپیچی به‌مرکز O، و زاویهٔ دوران A_1OA و نسبت تشابه OA_1/OA از شکل F به‌دست می‌آید.

بعکس، اگر F طوری حرکت کند که همیشه با وضعیت اولیه‌اش متشابه بماند

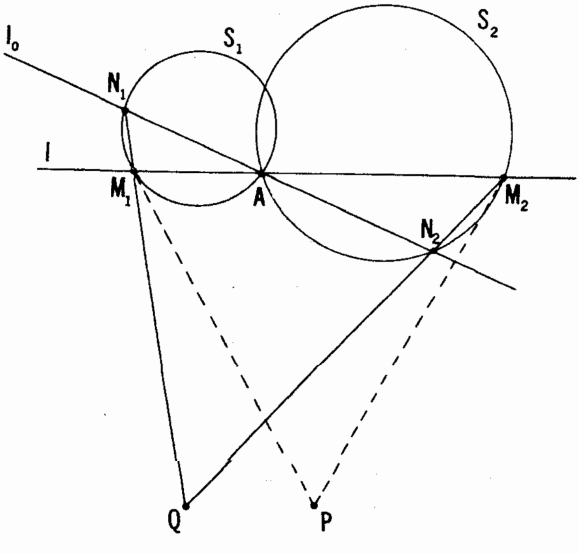
وچنان‌که هردو وضعیت غیرمشخص F دارای یك‌مرکز دوران O باشند، آنگاه‌نقطهٔ O کــه نقطه‌ای از F تلقی می‌شود حرکت نمی‌کند (زیــرا مرکز دوران در تبدیل تجانسی نقطهٔ ثابتی است).

۵۲. فرض می‌کنیم A یکی از نقاط برخورد دو دایرهٔ S_1 و S_2 باشد. از A یك خط دلخواه l ویك خط ثابت l_0 را رسم می‌کنیم تا دایره‌های S_1 و S_2 را در نقــاط دیگــر M_1، M_2 و N_1، N_2 ببرند؛ M_1M_2P را مثلث متساوی‌الاضلاعی می‌گیریم کــه برپاره‌خط M_1M_2 بنا شده است و نقطهٔ برخورد خطهای M_1N_1 و M_2N_2 را Q می‌نامیم (شکل ۵۲). ثابت‌کنیدکه وقتی خط l حول A دوران کند

الف) رأس P از مثلث M_1M_2P یك‌دایرهٔ $\sum$ را می‌پیماید وضلعهای M_1P و M_2P حول‌نقاط ثابتی مانند I_1 و I_2 دوران می‌کنند (M_1P از I_1 می‌گذرد، و M_2P از I_2)؛

ب) Q دایرهٔ Γ را می‌پیماید. پیداکنید مکان هندسی مرکــز دایرهٔ Γ را وقتی خط مفروض l_0 وضعیتهای مختلفی اختیارکند.

۵۳. فرض‌می‌کنیم l خط‌دلخواهی باشدکه‌از رأس A ازمثلث ABCمی‌گذرد و قاعدهٔ BC را درنقطهٔ M قطع می‌کند؛ مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای ABM و



شکل ۵۲

ACM را O_1 و O_2 می‌نامیم. مطلوب است مکان هندسی وسط پاره‌خط O_1O_2 وقتی l همهٔ وضعیتهای ممکن را اختیار کند.

۵۴. مثلث ABC و نقطهٔ O مفروض‌اند. سه‌خط l_1، l_2، l_3 از O رسم‌شده‌اند چنان‌که زاویه‌های بین آنها با زاویه‌های مثلث مساویند (با درنظر گرفتن جهت زاویه‌ها)؛ فرض کنید $\bar{A}$، $\bar{B}$ و $\bar{C}$ نقاط برخورد این خطها با ضلعهای متناظر در $\triangle ABC$ باشند (شکل ۵۳).

الف) ثابت کنید که اگر O

۱. مرکز دایرهٔ محیطی؛

۲. مرکز دایرهٔ محاطی؛

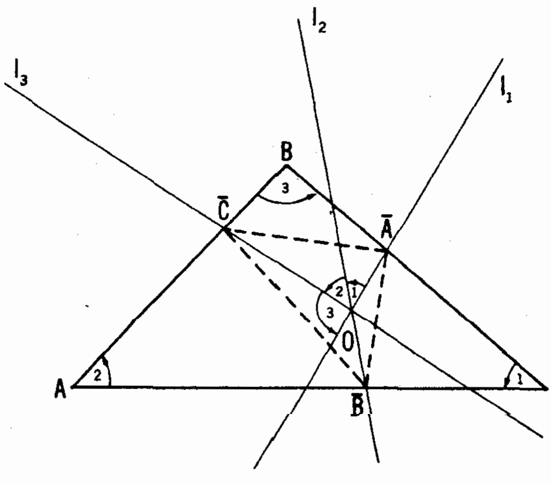
۳. نقطهٔ برخورد ارتفاعها (مرکز ارتفاعی)؛ درمثلث ABC باشد آنگاه، O

۱. برمرکز ارتفاعی؛

۲. برمرکز دایرهٔ محیطی

۳. برمرکز دایرهٔ محاطی مثلث $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ منطبق خواهد بود.

ب) فرض کنید O نقطهٔ دلخواهی است وخطهای l_1، l_2 و l_3 حول O دوران می‌کند. مطلوب است تعیین مکان هندسی



شکل ۵۳

۱. مرکزهای دایره‌های محیطی؛
۲. مرکزهای دایره‌های محاطی؛
۳. مرکزهای ارتفاعی مثلثهای $\overline{ABC}$.

اکنون برمی‌گردیم به قضیه‌هایی که اثبات آنها هدف اصلی این بخش را تشکیل می‌دهد.

قضیهٔ ۳. اگر شکل F طوری حرکت کندکه همهٔ وضعیتهایش باوضعیت‌اولیهٔآن متشابه باشند و سه نقطهٔ A و B و C ازشکل سه خط غیرمتقارب‌را بپیمایند، آنگاه هرنقطه از شکل یك‌خط راست را می‌پیماید.

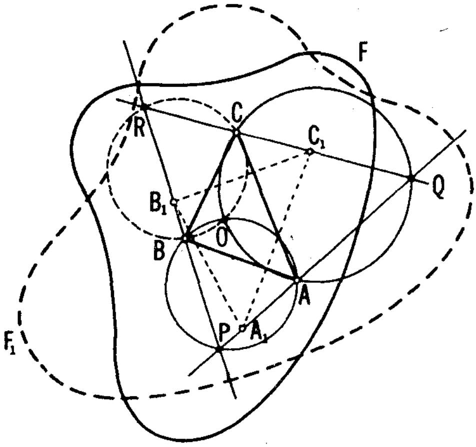
قضیهٔ ۴. اگر شکل F طوری حرکت کند که همهٔ وضعیتهایش باوضعیت اولیه متشابه باشند وسه خط غیرمتقارب l، m و n از F همواره از سه نقطهٔ مفروض بگذرند،آنگاه هرخط از F همواره ازیك نقطهٔ ثابت‌می‌گذرد و هرنقطه از F یك‌دایره را می‌پیماید.

برهان قضیهٔ ۳. نشان‌می‌دهیم‌که هردو وضعیت از F دارای یك‌مرکز دوران O هستند (یعنی، یك نقطهٔ O از F طی حرکت F ثابت می‌ماند). از اینجا نتیجه خواهدشد که همهٔ نقاط F منحنی‌هایی‌می‌پیمایندکه باخمی‌که A می‌پیمایدمتشابه‌اند، یعنی خطوط راست هستند؛ واین همان چیزی خواهد بود‌که می‌خواهیم ثابت‌کنیم.

نقاط برخورد خطوطی راکه مسیر حرکت نقاط A، B و C هستند با حروف P، Q و R نشان می‌دهیم (شکل ۵۴ الف).* فرض می‌کنیم F و F_1 دو وضعیت‌از شکل F باشند؛ وضعیتهای متناظر سه نقطهٔ موردنظر را به A، B، C و A_1، B_1، C_1 نشان می‌دهیم. نقطهٔ O مرکز دوران شکلهای F و F_1 مرکز دوران پاره خطهای AB و A_1B_1، AC و A_1C_1 نیز هست. ولی همان‌طورکه درصفحهٔ ۵۴ نشان‌داده شده (← شکل ۳۱) مرکز دوران پاره‌خطهای AB و $A'B'$ روی دایره‌های‌محیطی مثلثهای ABQ و $A'B'Q$ قرار می‌گیرد‌که در اینجا Q نقطهٔ برخورد AA' و BB' است؛ در حالت فعلی این بدان معنی است‌که O باید روی دایرهٔ محیطی $\triangle ABP$ (وروی دایرهٔ‌محیطی $\triangle A_1B_1P$) قرار گیرد. به‌همین‌ترتیب‌مرکز دوران پاره‌خطهای AC و A_1C_1 روی دایرهٔ محیطی مثلث ACQ (و روی دایرهٔ محیطی $\triangle A_1C_1Q$)

---

* فرض می‌کنیم‌که هیچ دوتایی ازاین سه‌خط موازی‌نیستند. تحلیل حالتهای استثنایی، یعنی وقتی دوخط یا هرسه خط موازی باشند به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.



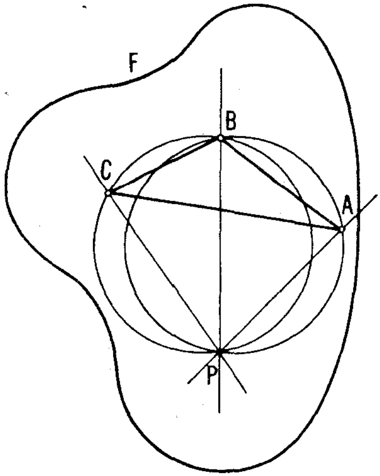
شکل ۵۴ (الف)

قرار می‌گیرد. پس مرکز دوران شکلهای F و F_1 همان نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای ABP و ACQ می‌شود و بنابراین به‌وضعیت خاص F_1 از شکل بستگی ندارد. اما تعبیر این مطلب این است که هردو وضعیت دلخواه از شکل، یك مرکز دوران دارند و بدین ترتیب برهان کامل می‌شود.

اگر خطهائی که نقاط A، B و C می‌پیمایند ازیك نقطهٔ‌مشترك P بگذرند (شکل ۵۴ ب)، آنگاه حالت کلی حکم قضیهٔ فوق همچنان معتبر خواهد ماند. برهان آن‌هم با آنچه گفته شد تفاوتی نخواهد داشت؛ مرکز تجانس مشترك برای همهٔ وضعیتها اولا باید برنقطهٔ برخورد دایره‌های ABP و BCP، یعنی بر P منطبق باشد (که دراینجا A، B وC وضعیتهای سه نقطهٔ موردنظر از F در یك لحظهٔ خاص هستند). تنها استثنا دراین مورد حالتی است که درآن دایره‌های ABP و BCP برهم منطبق باشند، یعنی نقاط A، B، C با نقطهٔ P روی دایرهٔ مشترکی قرارگیرند، یا به‌بیان دیگر وقتی که

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle ACB = 180^\circ$$

و نقاط P و C در دو طرف خط AB واقع باشند یا $\sphericalangle APB = \sphericalangle ACB$ و C و P در یك طرف AB باشند. دراین‌حالت لزومی ندارد حکم قضیه معتبر باشد.



شکل ۵۴ (ب)

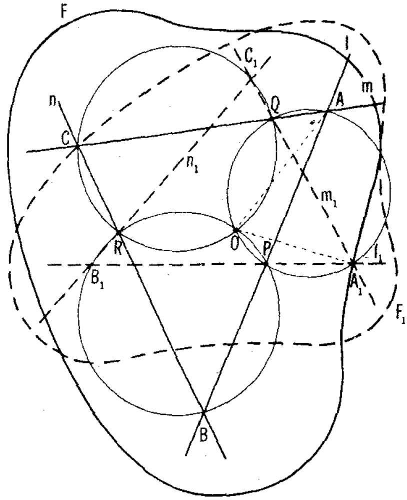
برهان قضیهٔ ۴. نشان می‌دهیم که هردو وضعیت F یك مرکز دوران O دارند و هرنقطهٔ دلخواه A از F یك دایره می‌پیماید. دراین‌صورت بنابرآنچه در صفحهٔ ۸۴ گفته شد نتیجه می‌شود که هرخط F همواره ازنقطهٔ ثابتی می‌گذرد (زیرا خط l ازنقطهٔ ثابتی می‌گذرد) وهرنقطهٔ F دایره‌ای را می‌پیماید (زیرا A دایره‌ای را می‌پیماید).

نقاط برخورد خطهای l، m و n را با حروف A، B و C* و نقاط مفروضی راکه این خطها همیشه از آنها می‌گذرند بـا حروف P، Q و R نمایش می‌دهیم (شکل ۵۵). اولا روشن است که A یك‌دایره را می‌پیماید، زیرا اندازهٔ زاویهٔ QAP باید طی حرکت محفوظ بماند. (زاویهٔ بین خطهای l و m درشکل نمی‌تواند تغییر کند زیرا F باوضعیت اولیه‌اش متشابه می‌ماند.)** بعلاوه، فرض می‌کنیم F و F_1 دو وضعیت از شکل باشند و l، m، n و l_1، m_1، n_1 وضعیتهای متناظر سه خط مورد

---

* ← پانویس صفحهٔ ۸۷.

** در این استدلال فرض برآن است کـه نقطهٔ A از خط l طی حرکت خود از نقطهٔ مفروض P (یا نقطهٔ‌مفروض Q) نمی‌گذرد؛ درغیراین‌صورت زاویهٔ QAP به‌زاویهٔ مکمل خود تبدیل می‌شود (← پانویس (**) مربوط به‌قضیهٔ ۳، فصل ۲، جلد اول).



شکل ۵۵

نظر باشند؛ همچنین فرض می‌کنیم A، B، C و A_1، B_1، C_1 وضعیتهای متناظر نقاط A، B و C باشند. اگر O مرکز دوران F و F_1 باشد، آنگاه‌زاویهٔ AOA_1 بازاویهٔ دوران تجانس مارپیچی‌که F را به F_1 بدل می‌کند و درنتیجه بازاویهٔ بین l و l_1 یا زاویهٔ بین m و m_1 برابراست. بنابراین $\sphericalangle AQA_1 = \sphericalangle APA_1 = \sphericalangle AOA_1$ یعنی O بردایره‌ای‌قرارمی گیرد که ازنقاط A، A_1، P و Q می گذرد. به‌همین‌ترتیب ثابت می‌شودکه O بردایره‌ای‌که از B، B_1، P و R می گذرد، واقع است. ازاینجا معلوم می‌شود کـه نقطهٔ O مرکز دوران F و F_1 نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای APQ و BPR است و بنابراین به‌وضعیت خاص F_1 ازشکل متحرك بستگی ندارد اما تعبیر آن این‌است که مرکز دوران هردووضعیت دلخواه از F یکی است.

اگرخطهای l، m و n از شکل F همگی ازیك نقطهٔ مشترك A بگذرند، لزومی به‌درستی حکم مطرح‌شده در قضیهٔ ۴ نیست.

۵۵. یك چهارضلعی $ABCD$ متشابه با چهار ضلعی مفروض (مثلا یك‌مربع) رسم کنید که:

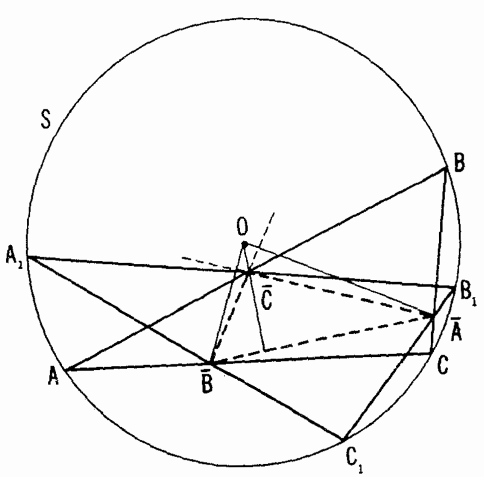
الف) رأسهایش برچهار خط مفروض باشند.
ب) ضلعهایش از چهار نقطهٔ مفروض بگذرند.
ج) ضلعهای BC و CD و قطر BDی آن ازسه نقطهٔ مفروض بگذرند ورأس A ازآن بر دایرهٔ مفروضی واقع باشد.

مسائل ۵۵ (الف و ب) را به‌صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد.
الف) در چهارضلعی مفروض یك چهارضلعی محاط کنید که باچهارضلعی مفروض دیگر (مثلا یك مربع) متشابه باشد.
ب) برچهارضلعی مفروض یك چهارضلعی محیط کنید کــه با چهارضلعی مفروض دیگر (مثلا یك مربع) متشابه باشد.

۵۶. چهار خط l_1، l_2، l_3، l_4 مفروض‌اند. خطی مانند l رسم کنید که نسبت سه پاره‌خطی که چهار خط مفروض بر آن جدا می‌کنند برابر مقدار مفروضی باشد.
۵۷. هرضلع مثلث ABC را حول نقطهٔ وسط همان ضلع به اندازه زاویهٔ ثابتα دوران می‌دهیم (درهمهٔ موارد در یك جهت)؛ فرض می کنیم $A'B'C'$ مثلث جدید حاصل از دوران اضلاع باشد. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطهٔ برخورد ارتفاعها، نقطهٔ برخورد نیمسازهای‌داخلی، و نقطهٔ برخورد میانه‌های‌مثلث $A'B'C'$ وقتی زاویهٔ α مقادیر مختلفی اختیار کند. ثابت کنید که مرکزهای دایره‌های محیطی همهٔ این مثلثها برهم منطبق‌اند.
۵۸. فرض می کنیم M، K و L سه‌نقطه برضلعهای AB، BC و AC ازمثلث ABC باشند. ثابت کنید که:
الف) S_1، S_2 و S_3، دایره‌های‌محیطی برمثلثهای LMA، MKB و KLC، در یك نقطه متقاطع‌اند.
ب) مثلث حاصل از وصل کردن مرکزهای دایره‌های S_1، S_2 و S_3 با مثلث ABC متشابه است.

حکم مذکور در مسألهٔ ۵۸ (الف) رامی‌توان تاحدزیادی تعمیم‌داد؛ ⟵ مسألهٔ ۲۱۸ (ب)، بخش ۱، فصل ۲، جلد سوم. به‌همین ترتیب می‌توان مسألهٔ ۵۸ (ب) را تعمیم‌داد؛ البته ما دراینجا این‌کار را نخواهیم‌کرد.

۵۹. دومثلث مستقیماً متساوی (⟵ پیش‌ازقضیهٔ ۱، بخش ۲، جلد ۲) ABC



شکل ۵۶

و $A_1B_1C_1$ در دایرهٔ S محاط شده‌اند؛ نقطهٔ برخورد ضلعهای متناظر آنهارا $\bar{A}$، $\bar{B}$ و $\bar{C}$ می‌نامیم (شکل ۵۶) ثابت کنید که

الف) مثلث $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ با مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ متشابه است.

ب) نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ برمرکز دایرهٔ S منطبق است.

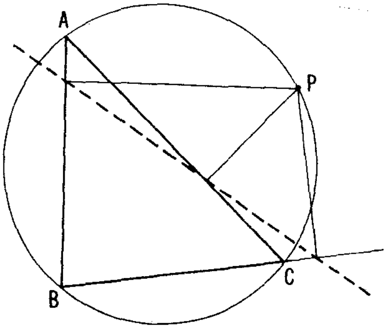
۶۰. فرض می‌کنیم l خط دلخواهی درصفحه باشد و l_1، l_2 و l_3 قرینه‌های آن نسبت به اضلاع مثلث (غیرقائم‌الزاویهٔ) مفروض ABC باشند؛ مثلث حاصل از خطهای l_1، l_2 و l_3 را T می‌نامیم ثابت کنید که:

الف) همهٔ مثلثهای T، متناظر با وضعیتهای گوناگون خط اولیهٔ l، با یکدیگر متشابه‌اند.

ب) همهٔ خطهای l که به‌ازای آنها l_1 و l_2 و l_3 همگی دریك نقطهٔ مشترك P متقاطع‌اند، از نقطهٔ H، محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC، می‌گذرند؛ مکان هندسی نقاط P، محل برخورد l_1، l_2، l_3، دایرهٔ محیطی بر مثلث ABC است.

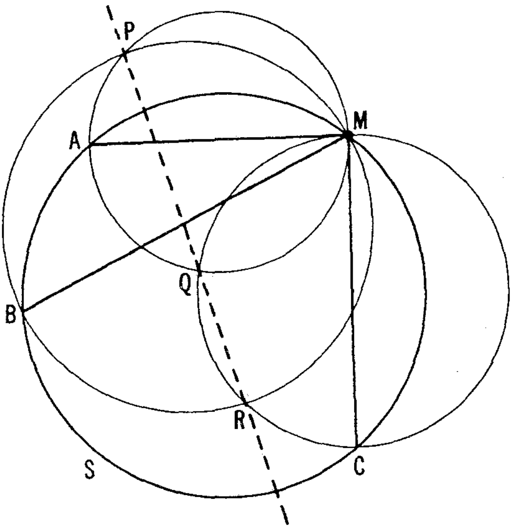
ج) همهٔ خطهای l چنان که مساحت مثلث T مقدار مفروضی باشد بریك دایره به‌مرکز H مماس‌اند.

۶۱. ثابت کنید که شرط لازم وکافی برای اینکه پای ارتفاعهای وارد از یك نقطهٔ P برضلعهای مثلث ABC همه بر یك خط واقع باشند (خط سیمسون، شکل ۵۷) این است که نقطهٔ P بردایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ واقع باشد.



شکل ۵۷

۶۲. از نتیجهٔ مسألهٔ ۶۱ براهینی برای قضایای زیر به‌دست آورید:
الف) چهار دایرهٔ محیطی بر چهار مثلث حاصل از چهار خط دلخواه درصفحه (که هیچ سه‌تای آنها متقارب وهیچ‌دوتای آنها متوازی نیستند) از یك نقطه‌می‌گذرند.
ب) فرض می‌کنیم دایرهٔ S و سه وتر آن MA، MB و MC مفروض‌اند. سه‌دایره به‌قطرهای این وترها رسم‌می‌کنیم. هرجفت از این سه‌دایره درنقطهٔ‌دیگری



شکل ۵۸

غیر از M متقاطع‌اند؛ ثابت کنید که همهٔ این نقاط بریك خط واقع‌اند (شکل ۵۸)

ج) اگر a، b، c، و d طول‌های ضلعهای متوالی یك چهارضلعی محاطی $ABCD$ و e و f طول‌های قطرهای آن باشند، آنگاه

(قضیهٔ بطلمیوس) $$ac+bd=ef$$

مسألهٔ ۶۲ (الف) قبلا به لحاظ دیگری در فصل ۱ بخش دو از این مجلد عرضه شده بود (← مسألهٔ ۳۵ و بخصوص شکل ۳۲). قضیهٔ بطلمیوس به مناسبت دیگری در فصل ۲ ازجلد سوم مطرح خواهد شد (← مسأله‌های ۲۵۸ و ۲۶۹، بخش ۴)؛ درآنجا عکس قضیهٔ بطلمیوس (← مسألهٔ ۲۶۹) و نیز قضیه‌ای عرضه خواهد شد که می‌توان آن را تعمیمی ازقضیهٔ بطلمیوس دانست (← مسألهٔ ۲۶۱، بخش ۴، ومسألهٔ ۲۷۳، بخش۵) که در دسترس همه نیست.

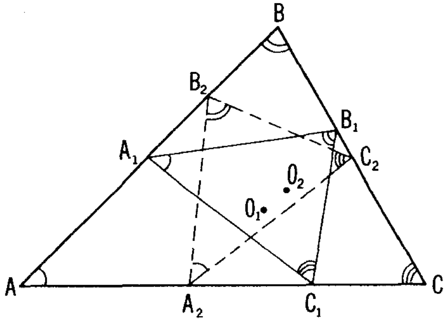
۶۳. چهار خط که هیچ سه‌تای آنها از نقطهٔ مشترکی نمی‌گذرند وهیچ‌دوتای آنها متوازی نیستند در صفحه داده شده‌اند. ثابت کنید که نقاط برخورد ارتفاعهای چهار مثلث حاصل از این خطها بریك خط واقع‌اند.

این مسأله به‌مناسبت دیگری در بخش ۲، فصل یك، جلد سوم مطرح خواهد شد [← مسألهٔ ۱۳۰ (ب)].

۶۴. مطلوب‌است تعیین مکان هندسی نقاطی مانند M چنان‌که نسبت‌طولهای مماسهای مرسوم از M بردو دایرهٔ متقاطع S_1 و S_2 برابر مقدار مفروضی باشد.

و نیز ← مسألهٔ ۲۵۰ (ب) دربخش ۳، و مسألهٔ ۲۶۰، دربخش ۴ فصل دوم از جلد سوم.

در مثلث مفروض ABC مثلث دیگر $A_1B_1C_1$ را متشابه بـا ABC محاط کنید (ترتیب حـروف نشانهٔ ضلعهای متناظر است) چنان‌که رأس A_1 برضلع AB، رأس B_1 برضلع BC و رأس C_1 برضلع CA واقع باشد (شکل ۵۹). به‌تعداد بینهایت از ایـن مثلثهای $A_1B_1C_1$ موجودند که درشرایط مذکور صدق می‌کنند ــ امتداد یکی از ضلعها یا وضعیت یکی از رأسهای مثلث $A_1B_1C_1$ را به‌روش دلخواهی می‌توان انتخاب کـرد [← مسألهٔ ۹ (ب) بخش ۱، و مسألهٔ ۳۰ (الف) بخش ۲، فصل یك]. همهٔ این مثلثهای



شکل ۵۹

$A_1B_1C_1$ را می‌توان نگاره‌های $\triangle ABC$ بر اثر تجانسهای مارپیچی با یک مرکز دوران O_1 دانست (← برهان قضیهٔ ۳). نقطهٔ O_1 اولین مرکز دوران مثلث ABC خوانده می‌شود. منظور از O_2 دومین مرکز دوران مثلث ABC همان مرکز دوران مشترک $\triangle ABC$ و مثلثهای متشابه $A_2B_2C_2$ است (ترتیب حرفها معرف ضلعهای متناظر است) که در اینجا مثلث $A_2B_2C_2$ چنان در مثلث ABC محاط شده است که A_2 برضلع CA، B_2 برضلع AB و C_2 برضلع BC قرار دارد.

۶۵. فرض می‌کنیم $A'B'C'$ مثلثی متشابه با $\triangle ABC$ باشد (ترتیب حروف معرف ترتیب تناظر اضلاع است) به طوری که A' بر ضلع BC قرار داشته باشد و B' بر ضلع AC و C' بر ضلع AB. ثابت کنید که O مرکز دوران مثلثهای ABC و $A'B'C'$، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است.

۶۶. فرض می‌کنیم O_1 و O_2 اولین و دومین مرکز دوران مثلث ABC باشند و O را مرکز دایرهٔ محیطی می‌گیریم. ثابت کنید که:

الف)

$$\sphericalangle O_1AB = \sphericalangle O_1BC = \sphericalangle O_1CA = \sphericalangle O_2BA = \sphericalangle O_2CB = \sphericalangle O_2AC$$

(شکل ۶۰)؛ و بعکس، اگر، مثلا

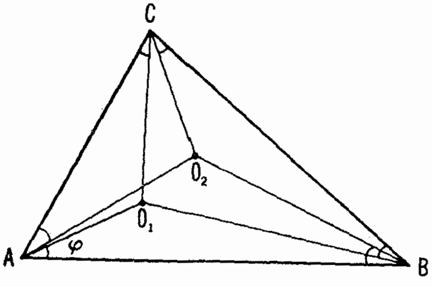
$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBC = \sphericalangle MCA$$

آنگاه نقطهٔ M بر O_1 منطبق است.

ب) O_1 بر O_2 منطبق است، اگر و تنها اگر ABC مثلث متساوی‌الاضلاع باشد؛

ج) O_1 و O_2 از O به یک فاصله‌اند: $O_1O = O_2O$؛

د) مقدار مشترک (φ) زاویه‌های O_1AB، O_1BC، O_1CA، O_2BA، O_2CB، O_2AC (← قسمت الف) از 30° بیشتر نیست؛ $\varphi = 30^\circ$، اگر و تنها اگر ABC

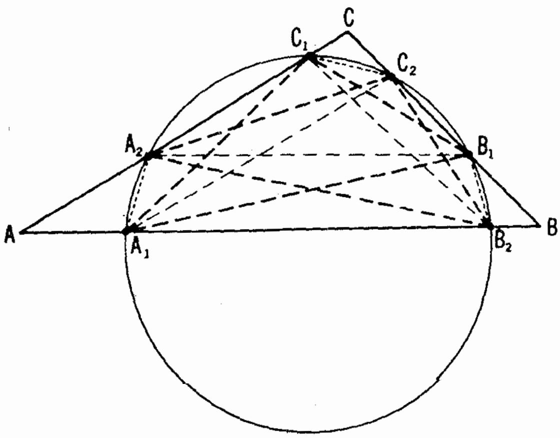


شکل ۶۰

مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

۶۷. نقاط O_1 و O_2 مراکز دوران مثلث مفروض ABC را پیدا کنید.

۶۸. فرض کنید $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ دو مثلث محاط دریك مثلث ABC و متشابه با آن باشند (ترتیب رأسها، ترتیب ضلعهای متناظر را نشان می‌دهد)، و چنان باشند که نقاط A_1، B_1 و C_1 بترتیب برضلعهای AB، BC و CA ازمثلث ABC و نقاط A_2، B_2 و C_2 بترتیب برضلعهای CA، AB و BC از این مثلث قرار گیرند. بعلاوه، فرض کنید که ضلعهای A_1B_1 و A_2B_2 از مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ با ضلع AB از مثلث ABC زاویه‌های متساوی بسازند (شکل ۶۱). ثابت کنید که:



شکل ۶۱

الف) مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ باهم قابل انطباق‌اند؛
ب) خطهای B_2C_1، C_2A_1 و A_2B_1 با ضلعهای BC، CA و AB موازی هستند وخطهای A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2 با این ضلعها پاد موازی.*
ج) شش نقطهٔ A_1، B_1، C_1، A_2، B_2، C_2 بریك دایره واقع‌اند.

۶۹. الف) فرض کنید A_1، B_1، C_1، A_2، B_2، C_2 تصویرهای اولین ودومین مرکز دوران مثلث ABC برضلعهای مثلث باشند. ثابت کنیدکه مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ هردو با مثلث ABC متشابه و با یکدیگر قابل انطباق‌اند و شش نقطهٔ A_1، B_1، C_1، A_2، B_2، C_2 بردایره‌ای واقع‌اند که مرکزش وسط پاره‌خط واصل بین اولین و دومین مرکز دوران مثلث ABC است (شکل ۶۲ الف).
ب) ثابت کنیدکه در مثلث مفروض ABC می‌توان دو مثلث $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ محاط کرد به‌طوری‌که ضلعهای این‌مثلثها برضلعهای‌مثلث ABC عمودباشند؛ بعلاوه این دو مثلث با یکدیگر قابل انطباق‌اند و سه پاره‌خط واصل بین رأسهای متناظر این دومثلث با یکدیگر برابرند ودر نقطهٔ مشترکی‌که وسط هریك‌از آنهاست یکدیگر را قطع می کنند (شکل ۶۲ ب).

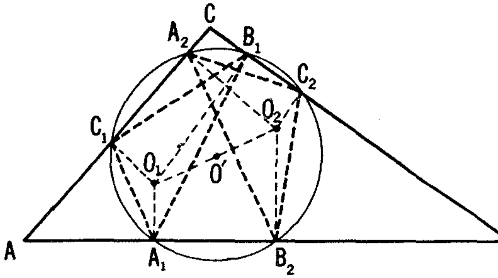
۷۰. فرض کنید O_1 یکی از مراکز دوران مثلث ABC باشد؛ نقاط برخورد خطهای AO_1، BO_1، CO_1 بادایرهٔ‌محیطی برمثلث ABC را A'، B'، C' می‌نامیم. ثابت کنیدکه
الف) مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC قابل‌انطباق است؛
ب) شش مثلث حاصل از تقسیم‌بندی شش ضلعی $AC'BA'CB'$ به توسط خطهای واصل بین رئوس این شش‌ضلعی و نقطهٔ O_1، همه بامثلث ABC متشابه‌اند.

۷۱. فرض کنید M نقطهٔ دلخواهی درون مثلث ABC باشد. ثابت کنیدکه حداقل یکی از زاویه‌های MAB، MBC، MCA و حداقل یکی از زاویه‌های MAC، MCB، MCA از 30° بیشتر نیست.

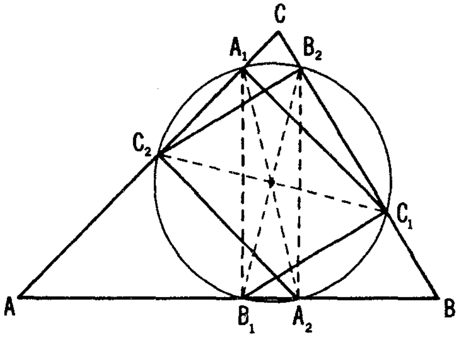
برای پایان‌بخشیدن به این بخش، برخی از ویژگیهای سه شکل متشابه F_1، F_2، F_3 را بررسی می‌کنیم. فرض کنید O_3، O_2 و O_1 معرف مرکزهای دوران هریك از زوجهای متوالی این شکلها باشند. مثلث $O_1O_2O_3$ مثلث تشابهی خوانده می‌شود و دایرهٔ محیطی براین مثلث دایرهٔ تشابهی شکلهای F_1، F_2 و F_3

---

* خطی‌که ضلعهای AB و AC از مثلث ABC را بترتیب در نقاط P و Q قطع می‌کند با ضلع BC پادموازی خوانده‌می‌شود اگر $\measuredangle APQ=\measuredangle ACB$ و $\measuredangle AQP=\measuredangle ABC$ (پاره‌خط PQ باضلع BC موازی‌است اگر $\measuredangle APQ=\measuredangle ABC$ و$\measuredangle AQP=\measuredangle ACB$).



(الف)



(ب)

شکل ۶۲

نام دارد.* درحالتی‌که نقاط O_1، O_2 و O_3 همگی بریك خط قرارگیرند یا برهم منطبق باشند، دایرهٔ تشابهی به‌یك خط ــ محور تشابهی ــ یا یك‌نقطه ــ مرکز تشابهی ــ تبدیل می‌شود. [اگر F_1، F_2 و F_3 دوبدو مجانس باشند، آنگاه دایرهٔ تشابهی به یك‌خط یا یك‌نقطه تبدیل می‌شود؛ ← قضیهٔ مربوط به‌سه‌مرکز تجانس، (صفحهٔ ۳۶)].

در مسأله‌های ۷۲ و ۷۳ فرض براین‌است‌که دایرهٔ تشابهی سه‌شکل F_1، F_2 و F_3 به‌خط یا نقطه تبدیل نمی‌شود.

---

* مفهوم مرکز دوران دو شکل مستقیماً متشابه، تعمیمی است از: ۱) مرکز دوران دو شکل مستقیماً قابل انطباق باهم؛ ۲) مرکز تجانس دو شکل مجانس. بنابراین استفاده از هردو نام «مرکز دوران» یا «مرکز تجانس» شکلها برای‌نقطهٔ موردنظر به‌یك‌اندازه معقول است. درمسائلی‌که درپایان این بخش به‌آنها پرداخته‌ایم نام دوم مناسبتر است؛ پس می‌گوییم: مرکزهای تجانس زوجهای متوالی از سه شکل مستقیماً متشابه، مثلث تشابهی این شکلها را پدید می‌آورند. ولی اصطلاح «مرکز دوران» در نوشته‌ها بیشتر رایج است.

۷۲. سه‌شکل متشابه F_1، F_2، F_3 در صفحه مفروض‌اند. فرض کنید A_1B_1، A_2B_2 و A_3B_3 سه پاره‌خط متناظر در این شکلها باشند و $D_1D_2D_3$ مثلثی باشد که ضلعهایش خطوط A_1B_1، A_2B_2 و A_3B_3 هستند (شکل ۶۳). ثابت کنید که

الف) D_1O_1، D_2O_2 و D_3O_3 دریك نقطهٔ U که روی دایرهٔ تشابهی شکلهای F_1، F_2 و F_3 واقع است یکدیگر را قطع می‌کنند (شکل ۶۳ الف)؛

ب) دایره‌های محیطی مثلثهای $A_1A_2D_3$ و $A_1A_3D_2$ و $A_2A_3D_1$ در نقطهٔ V که روی دایرهٔ تشابهی شکلهای F_1، F_2 و F_3 واقع است متقارب‌اند (شکل ۶۳ ب)؛

ج) فرض کنید $D'_1D'_2D'_3$ مثلثی غیر از $D_1D_2D_3$ باشد که ضلعهایش سه خط متناظر از شکلهای F_1، F_2 و F_3 هستند. در این صورت مثلثهای $D_1D_2D_3$ و $D'_1D'_2D'_3$ مستقیماً متشابه‌اند و نقطهٔ O مرکز تجانس این دو مثلث روی دایرهٔ تشابهی F_1، F_2 و F_3 قرار دارد (شکل ۶۳ ج).

۷۳. فرض کنید F_1، F_2 و F_3 سه شکل متشابه باشند و l_1، l_2 و l_3 خطهای متناظری در این شکلها و فرض کنید که l_1، l_2، l_3 دریك نقطهٔ مشترك W متقارب‌اند (شکل ۶۴). ثابت کنید که

الف) W روی دایرهٔ تشابهی F_1، F_2 و F_3 واقع است؛

ب) l_1، l_2 و l_3 از سه نقطهٔ ثابت J_1، J_2 و J_3 (یعنی مستقل از انتخاب خطوط l_1، l_2 و l_3) که روی دایرهٔ تشابهی F_1، F_2 و F_3 واقع‌اند، می‌گذرند.

علاوه بر قضایایی که محتوای مسأله‌های ۷۲ و ۷۳ را تشکیل می‌دهند؛ بسیاری ویژگیهای جالب دیگر را درسه شکل‌متشابه به F_1، F_2 و F_3 می‌توان ذکر کرده در اینجا به‌تعدادی از ویژگیهای مزبور اشاره می‌کنیم.

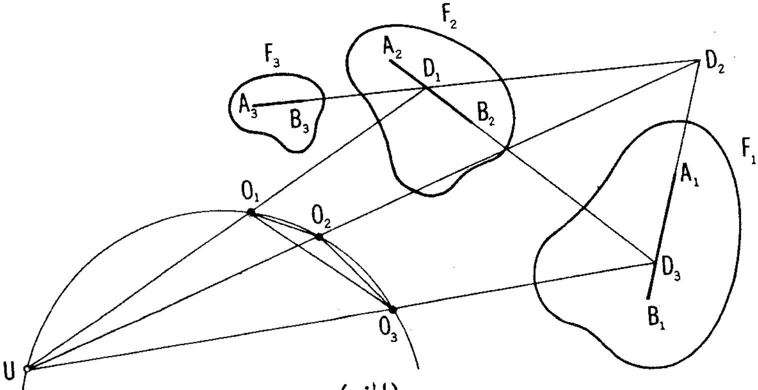
یك ــ مثلث $J_1J_2J_3$ [← مسألهٔ ۷۳ (ب)] با مثلث $D_1D_2D_3$ که اضلاعش سه خط متناظر دلخواه از شکلهای F_1، F_2 و F_3 هستند معکوساً متشابه است.

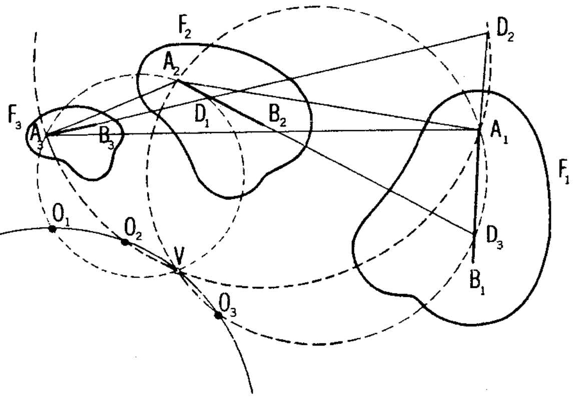
دو ــ خطهای J_1O_1، J_2O_2 و J_3O_3 در یك نقطهٔ T متقاطع‌اند.

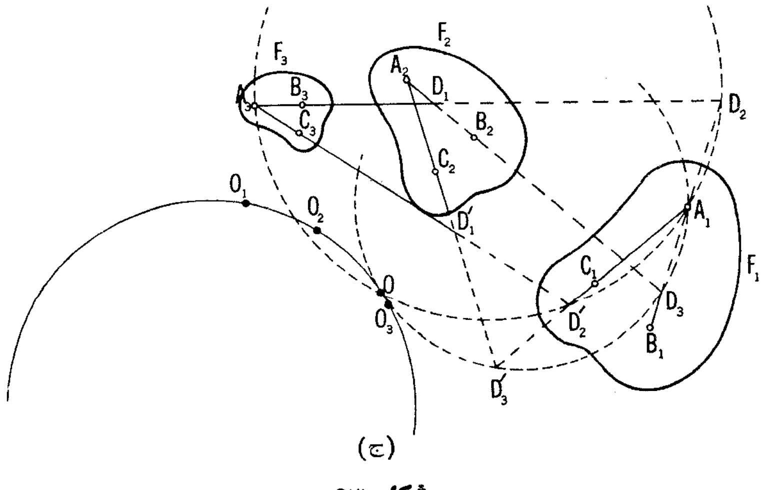
سه ــ اگر سه نقطهٔ متناظر A_1، A_2 و A_3 از F_1، F_2 و F_3 بر یك خط l واقع باشند آنگاه این‌خط ازیك نقطهٔ ثابت T (همان‌نقطهٔ‌مذکور در «دو») می‌گذرد. بعکس، هر خطی که از T می‌گذرد، متضمن سه نقطهٔ متناظر از F_1، F_2 و F_3 است.

چهار ــ اگر A_1، A_2 و A_3 سه‌نقطهٔ متناظر ازشکلهای F_1، F_2 و F_3 باشند، آنگاه دایره‌های محیطی مثلثهای $A_1O_2O_3$، $A_2O_1O_3$ و $A_3O_1O_2$ در یك نقطه مشترك‌اند.

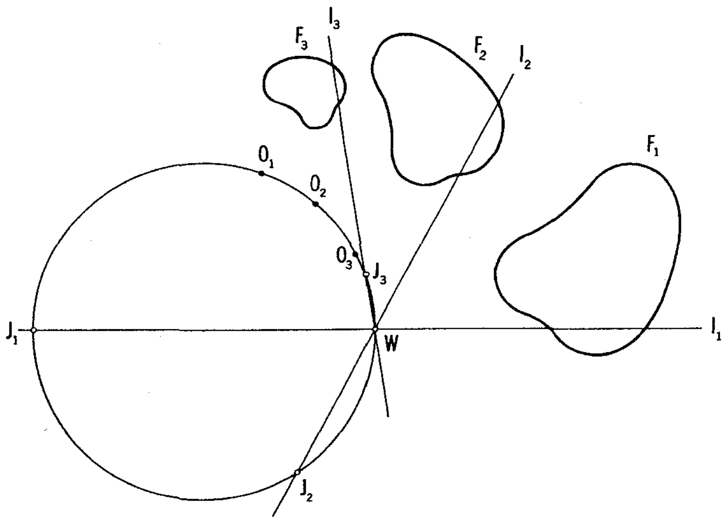
پنج ــ منظور از مثلث اصلی نقطهٔ A_1 در شکل F_1 همان مثلث $A_1A_2A_3$ است که‌درآن A_2 و A_3 نقاطی از F_2 و F_3 هستند که‌با نقطهٔ A_1 از F_1 متناظرند. دراین‌صورت،


F2
F3
A2
D1
D2
A3
B3
B2
F1
A1
O1
O2
D3
O3
B1
U
(الف)


F2
D2
A2
F3
A3
B3
D1
B2
A1
F1
O1
O2
V
D3
B1
O3
(ب)


F2
F3
A2
A3
B3
D1
D2
C3
B2
C2
O1
O2
D'1
A1
C1
F1
O
D3
O3
D'2
B1
D'3
(ج)

شکل ۶۳



شکل ۶۴

الف) مکان‌هندسی نقاط A_1 در F_1 چنان‌که درمثلث‌اصلی متناظربه A_1 اندازهٔ زاویهٔ $A_2A_1A_3$ (یا زاویهٔ $A_1A_2A_3$ یا زاویهٔ $A_1A_3A_2$) مقدار مفروضی باشد، یک دایره است؛

ب) مکان‌هندسی نقاط A_1 چنان‌که درمثلث اصلی $A_1A_2A_3$ طول‌ضلع A_2A_3 (یا ضلع A_1A_3 یا ضلع A_2A_1) مقدار مفروضی باشد یك دایره است.

ج) مکان هندسی نقاط A_1 چنان کــه در مثلث اصلی $A_1A_2A_3$ نسبت ضلعهای A_1A_2/A_1A_3 (یا ضلعهای A_1A_2/A_2A_3 یا ضلعهای A_1A_3/A_2A_3) مقدار مفروضی باشد یك دایره است.

د) مکان هندسی نقاط A_1 چنان‌که مساحت مثلث اصلی $A_1A_2A_3$ مقدارمفروضی باشد یك دایره است.

یافتن برهان حکمهای فوق را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

۲. کاربردهای طولپایی‌ها و تبدیلهای تشابهی درحل مسائل ماکزیمم و مینیمم

این بخش نسبتاً کوتاه بــا بقیهٔ کتاب پیوند نزدیك ندارد. در این بخش تعدادی از

مسائل مربوط به‌یافتن کـوچکترین و بزرگترین مقادیر کمیتهای گوناگـون هندسی گردآوری شده‌اند. این مسأله‌ها به‌روشهای مختلفی حل شده‌اند که در بیشتر موارد با استفاده از کاربرد طولپایی‌ها و تبدیلهای تشابهی بوده است؛ علت گنجاندن ایـن بخش دراین کتاب وجود مبحث اخیر است.

۷۴. الف) خط l و دونقطهٔ A، B در یك طرف آن مفروض‌اند. نقطهٔ X را روی l چنان بیابیدکه مجموع فواصل AX و BX کمترین مقدار ممکن باشد.

ب) خط l و دو نقطهٔ A و B در دو طرف l مفروض‌اند. نقطهٔ X را روی l چنان بیابیدکه تفاضل فاصله‌های AX و BX بیشترین مقدار ممکن باشد.

۷۵. الف) درمثلث مفروض ABC مثلث دیگری محاط کنیدکه یك رأس آن برنقطهٔ مفروض P ازضلع AB منطبق و اندازهٔ محیطش کمترین مقدار ممکن باشد.

ب) درمثلث‌مفروض ABC مثلثی محاط کنیدکه محیطش دارای‌کمترین مقدار ممکن باشد.

۷۶. در چهارضلعی مفروض $ABCD$ یك چهارضلعی محاط‌کنیدکه محیطش کمترین مقدار ممکن باشد. ثابت‌کنیدکه این مسأله درحالت‌کلی دارای‌جواب‌حقیقی (یعنی جوابی به‌صورت‌چهارضلعی ناتبهگون) نیست. اما، اگر چهارضلعی $ABCD$ محاطی باشد، مسأله بینهایت جواب دارد، یعنی بینهایت چهارضلعی با یك محیط و محاط در$ABCD$ وجود دارندکه محیطشان ازهرچهارضلعی دیگرمحاط در $ABCD$ کمتر است.

در اینجا می‌توان مسألهٔ کلیتر زیر را بیان‌کرد: در n ضلعی مفروض یـك n ضلعی محاط کنیدکه اندازهٔ محیطش کمترین مقدار باشد. با روشهایی مشابه راه‌حل مسأله‌های ۷۵ (ب) و ۷۶ می‌توان نشان دادکه اگر n فرد باشد، مسأله درحالت‌کلی جوابی یکتا دارد، درحالی کـه اگر n زوج باشد یا هیچ جوابی ندارد یا بینهایت جواب دارد.

۷۷. درمثلث مفروض ABC مثلثی محاط کنیدکه ضلعهایش برشعاعهای OA، OB، OC از دایرهٔ محیطی عمود باشند. از این ترسیم راه‌حل دیگری بـرای مسألهٔ ۷۵ (ب) درمورد مثلثهای حادالزوایا به‌دست آورید.

۷۸. در مثلث مفروض ABC مثلثی مـانند DEF محـاط کنید کـه کمیت $a.EF+b.FD+c.DE$، که درآن a، b، c اعداد مثبت مفروضی هستند، کمترین مقدار ممکن را دارا باشد.

۷۹. درصفحهٔ مثلث ABC نقطه‌ای مانند M بیابید که مجموع فواصلش تـا رأسها کمترین مقدار باشد.

۸۰. الف) بر مثلث مفروض ABC مثلث متساوی‌اضلاعی محیط کنید که عمودهای مرسوم از نقاط A، B، C بر اضلاع آن دریك نقطهٔ متقارب باشند. ازاین ترسیم راه‌حل دیگری برای مسألهٔ ۷۹ به‌دست آورید.

ب) درمثلث مفروض ABC مثلث متساوی‌الاضلاعی محاط کنید که عمودهای مرسوم ازنقاط A، B، C برضلعهای آن در یك نقطه متقارب باشند. از این ترسیم بازهم راه‌حل دیگری برای مسألهٔ ۷۹ به‌دست آورید.

۸۱. الف) فرض می‌کنیم ABC مثلث متساوی‌الاضلاعی باشد و OM نقطه‌ای دلخواه‌در صفحهٔ آن. ثابت کنید که $MA+MC \geqslant MB$. تساوی $MA+MC=MB$ چه موقع برقرار است؟

ب) ازحکم‌مسألهٔ (الف) بازهم راه‌حل‌دیگری برای‌مسألهٔ ۷۹ به‌دست آورید.

۸۲. فرض کنید ABC مثلث‌متساوی‌الساقینی باشد که در آن $AC=BC \geqslant AB$. نقطهٔ M درکجای صفحهٔ مثلث باشد تا، مجموع فاصله‌های M تا A و M تا B، منهای فاصلهٔ M تا C یعنی‌کمیت $MA+MB-MC$ کمترین مقدار باشد؟

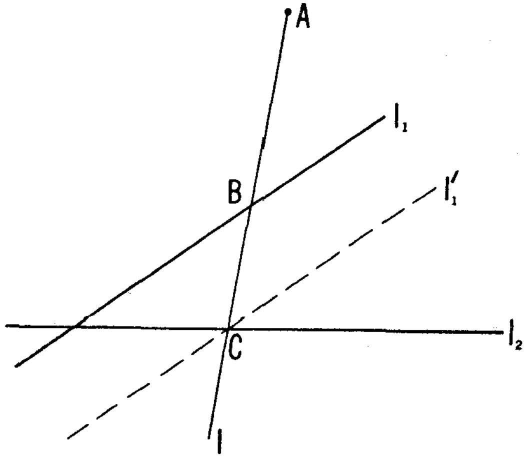
۸۳. در صفحهٔ مثلث مفروض ABC نقطه‌ای مانند M بیابید که کمیت $a.MA+b.MB+c.MC$، که درآن a، b، c اعداد مثبت معلومی هستند، کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

در مسألهٔ ۸۳ می‌توان برخی از اعداد a، b، c را منفی اختیار کرد؛ اما در این صورت برای حل باید حالتهای متمایز متعددی‌را درنظرگرفت (مقایسه شود با راه‌حل مسألهٔ ۸۲).

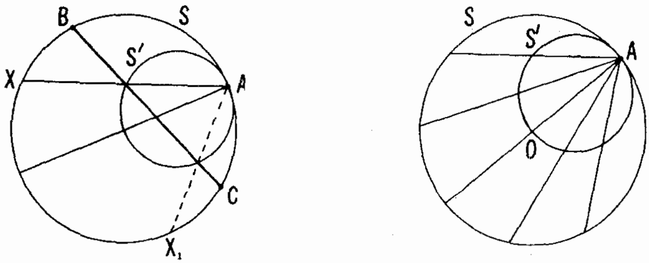
راه‌حلهای مسائل

فصل اول. رده‌بندی تبدیلهای تشابهی

۱. فرض کنید که خط l یافته شده‌است(شکل ۶۵). بنا به‌فرض نقطهٔ C مجانس نقطهٔB به مرکز تشابه به A و نسبت تجانسn/mاست؛ بنا براین برخط l'_1، مجانس l_1 به مرکز A و نسبت n/m قرار می‌گیرد و می‌توان آن‌را از نقطهٔ برخورد خطهای l_2 و l'_1 به‌دست آورد. اگر l_1 با l_2 موازی نباشد، مسأله جوابی منحصر به فرد دارد؛



شکل ۶۵



(ب) (الف)

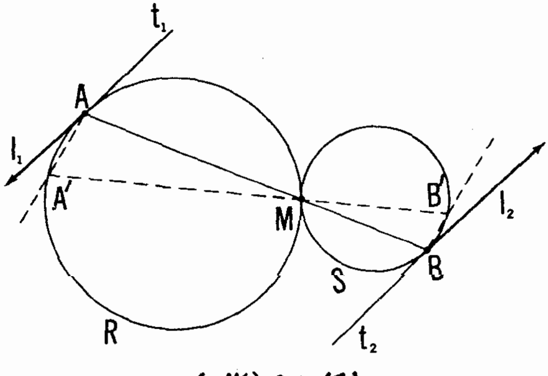
شکل ۶۶

اگر $l_2 || l_1$، آنگاه l'_1 یا با l_2 موازی و یـا برآن منطبق است و در نتیجه یا مسأله جوابی ندارد و یا جواب آن نامعین است.

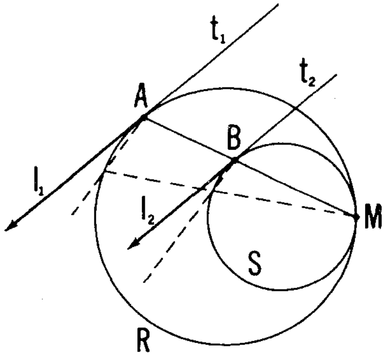
۲. الف) مکان هندسی مطلوب از دایرهٔ S براثر یـك تجانس به مرکز A و نسبت تجانس ۱/۲ به‌دست می‌آید؛ درنتیجه این مکان دایره‌ای است به‌قطر AO که درآن O مرکز S است (شکل ۶۶ الف).

ب) دایرهٔ S' را به‌قطر AO رسم می‌کنیم (O مرکـز S است). از برخورد S' با وتر BC، وتر مطلوب S به‌دست می‌آید(شکل ۶۶ ب)، زیرا S' مکان‌هندسی وسط همهٔ وترهایی از S است که از A می‌گذرند [← قسمت (الف)]. این مسأله می‌تواند دارای دوجواب یا یك جواب باشد، و یا جوابی نداشته باشد.

۳. تجانس به‌مرکز M و نسبت $\mp r_2/r_1$ را در نظر می‌گیریم کـه در آن r_1 و r_2 بترتیب شعاع دایره‌های R و S هستند و علامت منفی بـرای حالت تماس بیرونی دو دایـره (شکل ۶۷ الف) و علامت مثبت بـرای حالت تماس درونی دو



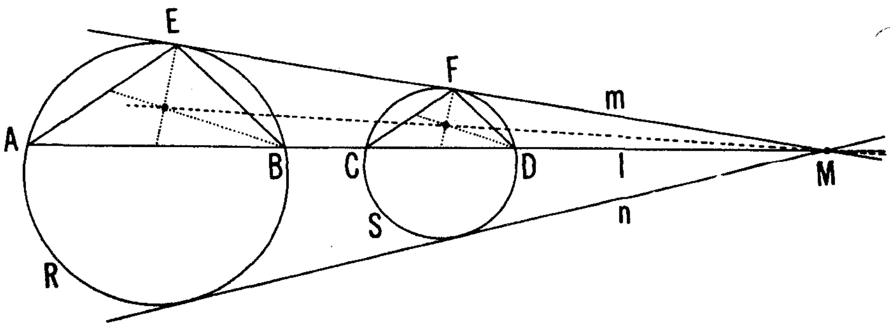
شکل ۶۷ (الف)



شکل ۶۷ (ب)

دایره (شکل ۶۷ ب) اختیار می‌شود. این تبدیل دایرهٔ R به‌شعاع r_1 را به دایره‌ای به شعاع r_2 بدل می‌کند که در نقطهٔ M بر R مماس است؛ یعنی R را به S بدل می‌کند. نقطهٔ A از دایرهٔ R براثر این تبدیل به‌نقطهٔ B از دایرهٔ S، وخط t_1 مماس بر R در A به‌خط t_2 مماس بر S در B بدل می‌شود. چون خط t_2 از t_1 براثر یك تجانس به‌دست می‌آید، پس این دوخط موازی‌اند.

۴. تجانس به مرکز M و نسبت $k=r_2/r_1$ را درنظر می‌گیریم که در آن r_1 و r_2 بترتیب شعاع دایره‌های R و S هستند. ایـن تبدیل خطهای m و n را به خودشان بدل می‌کنند و دایرهٔ R مماس بر m و n به‌شعاع r_1 را به‌دایره‌ای مماس‌بر m و n به‌شعاع r_2؛ یعنی R را به S بدل می‌کند (شکل ۶۸). خط l نیز به خودش



شکل ۶۸

و پاره‌خط AB به CD، نقطهٔ E بـه F و بالاخره مثلث ABE به‌مثلث CDF بدل می‌شود. از اینجا نتیجه‌می‌شود که این‌مثلثها مجانس یکدیگرند [حکم قسمت (الف)] و نسبت تجانس $k=r_2/r_1$ است؛ بنـابراین، نسبت مساحت $\triangle CDF$ به مساحت $\triangle ABE$ برابر است با $k^2=(r_2/r_1)^2$ [حکم قسمت (ب)]. بالاخره از آنجا که مثلث CDF از مثلث ABE براثـر تجانسی به مرکـز M به دست می‌آید، نتیجه می‌گیریم که خط واصل بین دو نقطهٔ متناظر، مثلا دو مرکز هندسی، این مثلثها (محل برخورد میانه‌های آنها) از نقطهٔ M می‌گذرد [حکم قسمت (ج)].

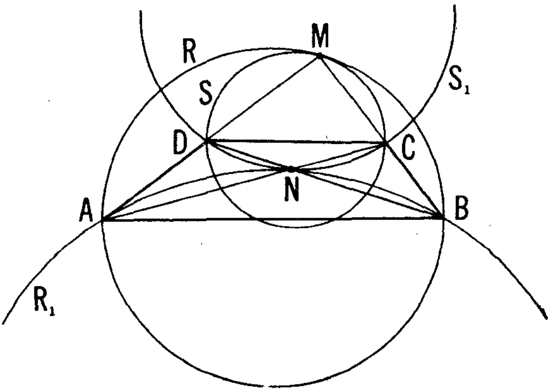
۵. الف) تجانس به‌مرکز M و نسبت

$$k=\frac{DC}{AB}=\frac{MD}{MA}=\frac{MC}{MB}$$

(شکل ۶۹) مثلث MAB را به مثلث MDC و دایرهٔ R محیط برمثلث MAB را به‌دایرهٔ S محیط بر مثلث MDC بدل می‌کند. چون S از R براثر یك تجانس به دست می‌آید که مرکز آن نقطهٔ M روی R واقع است، نتیجه می‌شود کـه R و S در M برهم مماس‌اند.

ب) تجانس به‌مرکز N و نسبت

$$k_1=\frac{CD}{AB}=\frac{NC}{NA}=\frac{ND}{NB}$$



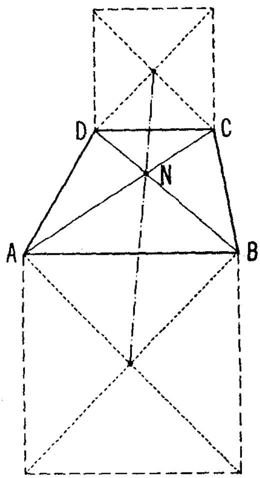
شکل ۶۹

(دراینجا نسبت پاره‌خطهای جهت‌دار را در نظر می‌گیریم، به‌طوری که k_1 منفی‌است) مثلث NAB را به‌مثلث NCD و دایرهٔ R_1 محیط بر مثلث NAB را به دایرهٔ S_1 محیط بر مثلث NCD بدل‌می‌کند. چون‌نقطهٔ N مرکز تجانس روی R_1 واقع‌است، پس دو دایره در N بریکدیگر مماس‌اند.

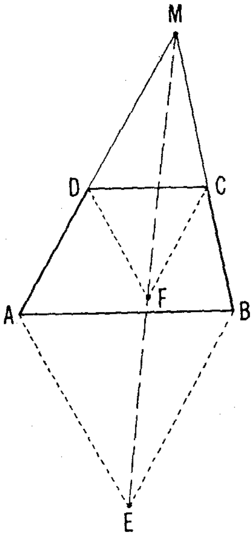
ج) نسبت شعاعهای R و S برابر است با $k = DC/AB$ [زیرا مثلثهای MAB و MDC متشابه‌اند؛ ← قسمت (الف)]. نسبت شعاع دایره‌های S_1 و R_1 برابر است با $|k_1| = |CD/AB|$ [← راه‌حل قسمت (ب)]. اما روشن است که $|CD/AB| = DC/AB$ که همان حکم قسمت (ج) است.

۶. الف) اگر M نقطهٔ برخورد دوساق AD و BC از ذوزنقه باشد (شکل ۷۰ الف)، آنگاه تجانس به‌مرکز M و نسبت DC/AB پاره‌خط AB را به DC و $\triangle ABE$ را به $\triangle CDF$ بدل‌می‌کند [این راه‌حل‌را باراه‌حل مسألهٔ ۵ (الف)، مقایسه‌کنید]. حکم مسأله از اینجا به‌دست می‌آید.

ب) اگر N نقطهٔ برخورد قطرهای AC و BD از ذوزنقهٔ $ABCD$ باشد (شکل ۷۰ ب)، آنگاه تجانس به مرکز N و ضریب (منفی!) CD/AB پاره‌خط

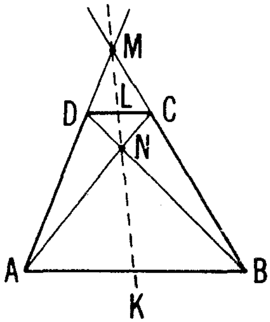


(ب)



(الف)

شکل ۷۰



شکل ۷۱

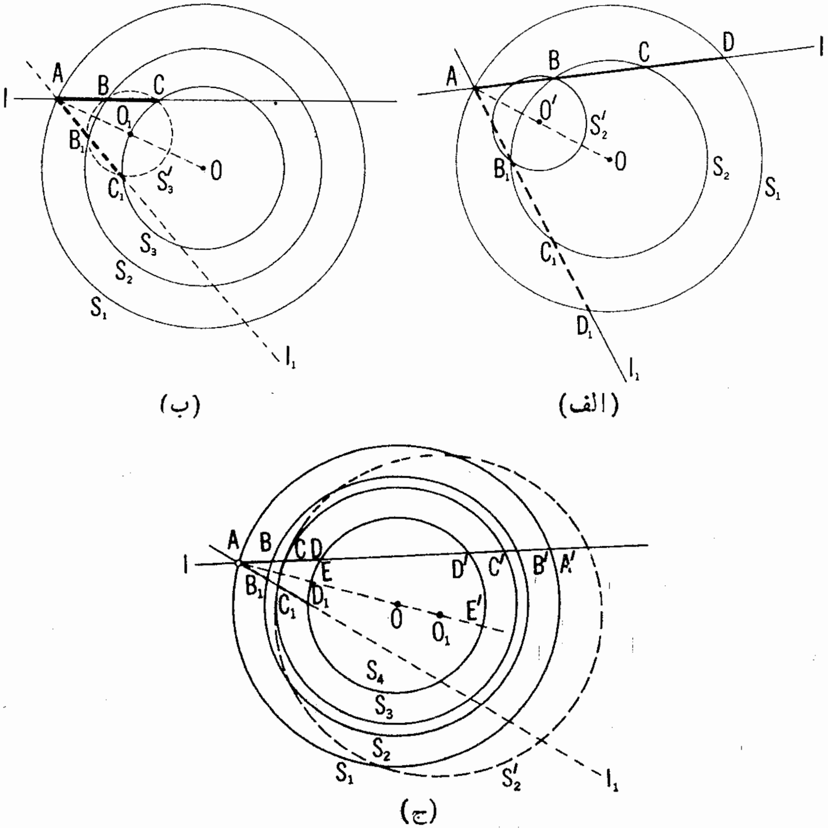
AB را به CD و یکی ازمربعها را به دیگری بدل می‌کند [این راه حل‌را باراه‌حل مسألهٔ ۵ (ب) مقایسه‌کنید]. حکم مسأله از اینجا به‌دست می‌آید.

۷. تجانس به‌مرکز M، نقطهٔ برخوردساقهای AD و BC از ذوزنقهٔ $ABCD$، وبا نسبت DC/AB پاره‌خط AB را به‌پاره‌خط DC و نقطهٔ K وسط AB را به‌نقطهٔ L وسط ضلع DC بدل می‌کند [مقایسه کنید بـا راه‌حل مسألهٔ ۶ (الف)]. بنا براین خط KL از نقطهٔ M مرکز تجانس می‌گذرد (شکل ۷۱). نقطهٔ K نیز براثر تجانسی به مرکـز N، نقطهٔ برخورد قطرهای AC و BD از ذوزنقه، و بـا ضریب (منفی) CD/AB به‌نقطهٔ L بدل می‌شود. این تبدیل پاره‌خط AB را به CD بـدل می‌کند [مقایسه شود با راه‌حل مسألهٔ ۶ (ب)]. بنا براین خط KL نیز از N می‌گذرد.

۸. الف) فـرض کنید کـه خط مطلوب l رسم شده است، به‌طـوری کـه $AB/AC=۱/۲$ (شکل ۷۲ الف). دراین‌صورت به‌راه حل زیر هدایت‌می‌شویم. دایرهٔ $S'_۲$ را مجانس مرکزی با $S_۲$ به مرکز تجانس نقطهٔ دلخواه A از دایـرهٔ $S_۱$ وبا نسبت تجانس ۲ رسم می‌کنیم. نقطهٔ A و یکی از نقاط برخورد دایره‌های $S_۲$ و $S'_۲$ خط مطلوب‌را مشخص‌می‌کنند. (با توجه به‌انتخاب A ممکن است بااین‌شرایط دوخط، یا دقیقاً یك خط موجود باشد ویا اصلا خطی موجود نباشد.)

ب) دایرهٔ $S'_۳$ را مجانس با $S_۳$ به‌مرکز تجانس نقطهٔ دلخواه A از دایرهٔ $S_۱$ وبا نسبت تجانس ۱/۲ رسم‌می‌کنیم. نقطهٔ A و یکی‌از نقاط برخورد دایره‌های $S_۲$ و $S'_۳$ خط‌مطلوب‌را مشخص می کنند. (با توجه به‌انتخاب A ممکن‌است بااین‌شرایط دوخط یا یك خط موجود باشد یا اصلا هیچ خطی‌موجود نباشد.)

ج) فرض می‌کنیم که خط l را پیداکرده باشیم و چهار نقطهٔ برخورد آن را



شکل ۷۲

بادایره‌های S_1، S_2، S_3 و S_4 بترتیب A'، B'، C' و D' می‌نامیم (شکل ۷۲ ج).
روشن است که $AB=D'C'$. بنابراین

$$AD'=AB+BC'-C'D'=BC$$

و از اینجا داریم

$$\frac{AD}{BC}=\frac{AD.AD'}{BC.BC'}$$

کمیت $AD.AD'$ به‌وضع D و D' نقاط برخورد خطی که از A می‌گذرد با دایرهٔ $S_۴$، بستگی ندارد و برابراست با $AE.AE'$ که در آن E و E' نقاط برخورد خط AO است (O مرکز هر چهار دایره) با دایرهٔ $S_۴$، یعنی برابر است با $(r_۱-r_۴).(r_۱+r_۴)$ که در آن $r_۱$ و $r_۴$ شعاعهای $S_۱$ و $S_۴$ هستند. با استدلالی مشابه داریم $BC.BC'=(r_۲-r_۳).(r_۲+r_۳)$ که در آن $r_۲$ و $r_۳$ شعاعهای $S_۲$ و $S_۳$ هستند. پس

$$\frac{AD}{BC}=\frac{r_۱^۲-r_۴^۲}{r_۲^۲-r_۳^۲}$$

بعلاوه،

$$AD=AB+BC+CD=۲AB+BC$$

در نتیجه،

$$\frac{AD}{BC}=۲\frac{AB}{BC}+۱$$

و از آنجا

$$\frac{AB}{BC}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{r_۱^۲-r_۴^۲}{r_۲^۲-r_۳^۲}-۱\right)=\frac{r_۱^۲-r_۲^۲+r_۳^۲-r_۴^۲}{۲(r_۲^۲-r_۳)^۲}$$

و بالاخره

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB+BC}{AB}=۱+\frac{BC}{AB}=۱+\frac{۱}{AB/BC}=\frac{r_۱^۲+r_۲^۲-r_۳^۲-r_۴^۲}{r_۱^۲-r_۲^۲+r_۳^۲-r_۴^۲}$$

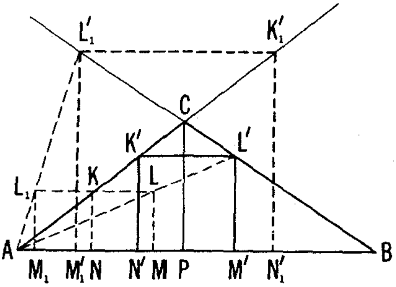
که به‌این ترتیب کمیت AC/AB را می‌توان معلوم به‌شمار آورد.

براین اساس، ترسیم زیر به دست می‌آید. یك تجانس به مرکز A، نقطهٔ دلخواهی از دایرهٔ $S_۱$، و با نسبت k تشکیل می‌دهیم که در آن

$$k=\frac{r_۱^۲+r_۲^۲-r_۳^۲-r_۴^۲}{r_۱^۲-r_۲^۲+r_۳^۲-r_۴^۲}$$

با این تبدیل، دایرهٔ $S_۲$ را به‌دایرهٔ $S'_۲$ بدل می‌کنیم. نقطهٔ A و یکی‌ازنقاط برخورد دایره‌های $S'_۲$ و $S_۳$ خط مطلوب را مشخص می‌کنند (با انتخاب A ممکن است با این شرایط دو خط یا یك خط موجود باشد یا هیچ خطی موجود نباشد).

۹. الف) مربع $KLMN$ را طوری رسم می‌کنیم که K برضلع AC و MN



شکل ۷۳

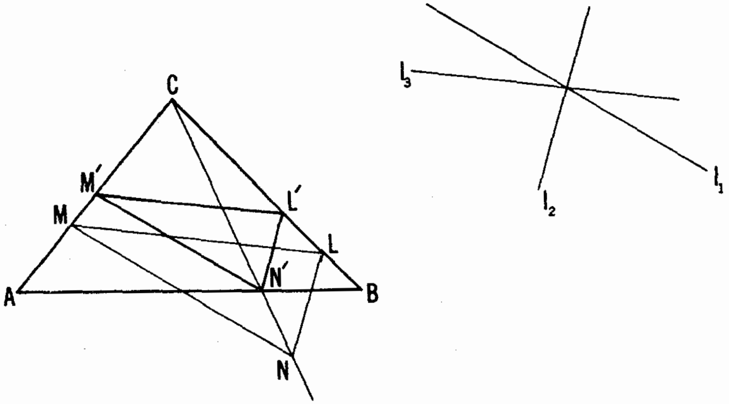
برقاعدهٔ AB قرار گیرد (شکل ۷۳)؛ اگر L' نقطهٔ برخورد خط AL با BC باشد، تجانس به مرکز A و نسبت $k=AL'/AL$ مربع $KLMN$ را به مربع مطلوب $K'L'M'N'$ بدل می‌کند.

[اگر بخواهیم که مربع مطلوب حتماً همهٔ رأسهایش برخود ضلعهای مثلث ABC و نه برامتداد آنها قرار گیرد، مسأله طبعاً برای حالتی که هردو زاویهٔ A و B کمتراز $90°$ باشند یا یکی‌از آنها مساوی $90°$ باشد جواب یکتایی دارد و اگر یکی از این زاویه‌ها از $90°$ بیشتر باشد، هیچ جوابی نخواهد داشت. اگر مجاز باشیم که رأسهای مربع‌را برامتداد ضلعهای‌مثلث ABC بگیریم [← پانویس مربوط به‌حکم مسألهٔ ۱۰ (ج)] درحالت کلی مسأله دوجواب خواهدداشت که به‌صورت دو مربع $K'L'M'N'$ و $K'_1L'_1M'_1N'_1$ درشکل۷۳ نشان‌داده شده‌است. تنها درحالتی که $AL_1||BC$ (باتوجه به‌حروف شکل ۷۳) مسأله جوابی‌یکتا دارد. اکنون‌فرض کنید درشکل ۷۳ داریم $K=C$، لذا ارتفاع مثلث، CP، یك‌ضلع مشترك دومربع $KLMN$ و KL_1M_1N، یعنی ضلع KN خواهد شد. در این صورت به‌آسانی می‌توانیم بپذیریم که مسأله جواب یکتایی دارد یعنی $AL_1||BC$، اگر و تنها اگر ارتفاع CP در مثلث ABC با قاعدهٔ AB مساوی باشد.*]

* این نتیجه را از قضیهٔ بسیار جالب زیر هم که اثبات‌آن‌را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم می‌توان به‌دست آورد:

اگر $K'L'=m$ و $K'_1L'_1=n$ دو ضلع از دو مربع $K'L'M'N'$ و $K'_1L'_1M'_1N'_1$ محاط درمثلث ABC طبق شرایط‌مسألهٔ ۹ (الف) باشند، و اگر $CP=h$ ارتفاع‌مثلث ABC باشد، آنگاه پاره‌خط h میانگین همساز m و n است یعنی

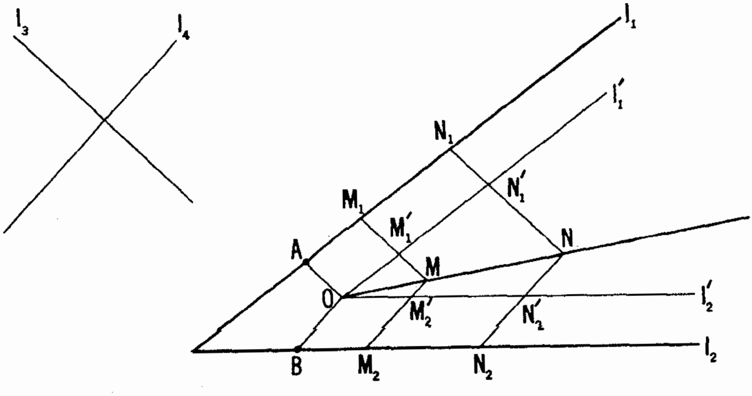
$$\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right) \quad \text{یا} \quad h=\frac{2mn}{m+n}$$



شکل ۷۴

ب) یك مثلث LMN رسم کنید که ضلعهایش موازی با l_1، l_2 و l_3 باشد و L روی BC و M روی CA قرار گیرد. اگر N' نقطهٔ برخورد خطهای CN و AB باشد آنگاه تجانس به‌مرکز C و نسبت $k=CN'/CN$ مثلث LMN را به مثلث مطلوب $L'M'N'$ بدل می‌کند (شکل ۷۴).

۱۰. الف) از A و B خطهائی بترتیب موازی با l_3 و l_4 رسم می‌کنیم و از نقطهٔ O محل برخورد آنها خطهای l'_1 و l'_2 را موازی با l_1 و l_2 می‌کشیم (شکل ۷۵).



شکل ۷۵

دو زوج نقطهٔ M_1، M_2 و N_1، N_2 راکه درفرضهای مسأله صدق می‌کنند انتخاب می‌کنیم: M_1 و N_1 بر l_1 واقع‌اند، M_2 و N_2 بر l_2، و

$$\frac{AM_1}{BM_2}=\frac{AN_1}{BN_2}=m$$

نقاط برخورد خطهائی راکه از نقاط M_1، N_1 به‌موازات l_3 رسم می‌شوند، با خط l'_1، M'_1 و N'_1 و نقاط برخوردخطهائی که از M_2، N_2 به‌موازات l_3، رسم می‌شوند با خط l'_2 را M'_2 و N'_2 می‌نامیم. دراین‌صورت

$$\frac{OM'_1}{OM'_2}=\frac{ON'_1}{ON'_2}(=m) \quad \text{یا} \quad \frac{OM'_1}{ON'_1}=\frac{OM'_2}{ON'_2}$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که دو خط $M_1M'_1$ و $M_2M'_2$ مجانس دوخط $N_1N'_1$ و $N_2N'_2$ بـا مرکـز تجانس O هستند. بنابـراین، نقطهٔ M محل برخورد خطهای $M_1M'_1$ و $M_2M'_2$، مجانس‌نقطهٔ N محل برخورد خطهای $N_1N'_1$ و $N_2N'_2$ است به‌مرکز تجانس O؛ به‌عبارت دیگر، هردو نقطه از مکان مطلوب بریک‌خط واقع‌اند که از O می‌گذرد. بنابراین مکان مطلوب یک‌خط است؛ برای ترسیم آن‌کافی است توجه‌کنیم که این‌خط از نقطهٔ O ویک نقطهٔ دلخواه M که درشرایط مسأله صدق‌کند می‌گذرد.

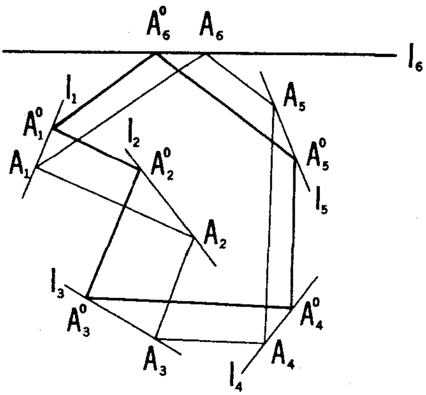
ب) فرض‌کنید $A_1^\circ A_2^\circ \dots A_n^\circ$ وضعیت ثابتی از چند ضلعی مـورد نظر باشد (← شکل ۷۶، در اینجا $n=6$). چون ضلعهای چند ضلعی اصلی همیشه با اضلاع متناظر $A_1^\circ A_2^\circ \dots A_n^\circ$ مـوازی‌اند ورأسهای A_1، A_2، $\dots$، A_{n-1} روی خطهای l_1، l_2، $\dots$، l_{n-1} می‌لغزند، از اینجا نتیجه می‌شودکه نسبتهای

$$\frac{A_1^\circ A_1}{A_2^\circ A_2},\quad \frac{A_2^\circ A_2}{A_3^\circ A_3},\quad \dots,\quad \frac{A_{n-2}^\circ A_{n-2}}{A_{n-1}^\circ A_{n-1}}$$

ثابت می‌مانند، پس نسبت

$$\frac{A_1^\circ A_1}{A_{n-1}^\circ A_{n-1}}=\frac{A_1^\circ A_1}{A_2^\circ A_2}\cdot\frac{A_2^\circ A_2}{A_3^\circ A_3}\cdots\frac{A_{n-2}^\circ A_{n-2}}{A_{n-1}^\circ A_{n-1}}$$

نیز ثابت می‌ماند. با توجه به‌قسمت (الف) این بدان معنی است کـه رأس A_n نیز برخط l_n (که با دو وضعیت دلخواه ازاین رأس مشخص می‌شود) حرکت می‌کند.



شکل ۷۶

ج) فرض کنید l_1، l_2، . . .، l_n خطهایی باشند که ضلعهای چند ضلعی مفروض روی آنها واقع‌اند. نقطهٔ دلخواه A_1 را برخط l_1 انتخاب و یك چند ضلعی مانند $A_1A_2\dots A_n$ رسم می‌کنیم که ضلعهایش با خطهای مفروض موازی و رأسهای آن برخطهای l_2، . . .، l_{n-1} واقع باشند. اگر رأسهای A_1، A_2، . . .، A_{n-1} از این چند ضلعی برخطهای l_1، l_2، . . .، l_{n-1} بلغزند به‌طوری‌که ضلعها با خطهای مفروض موازی بمانند، آنگاه با توجه به‌قسمت (ب)، رأس A_n نیز بریك خط m می‌لغزد که با دو وضعیت دلخواه از رأس A_n مشخص می‌شود. پس وضعیت رأس $\overline{A}_n$ از چند ضلعی مطلوب $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\dots\overline{A}_n$ از برخورد خط m باخط l_n مشخص می‌شود.

اگر l_n با m موازی‌نباشد، مسأله جوابی‌یکتادارد؛ اگر $l_n \| m$ ولی $l_n \neq m$، مسأله جواب ندارد؛ اگر $l_n = m$، مسأله نامعین است.

۱۱. چون‌طول‌ضلع BC تغییر نمی‌کندو B ثابت‌است، باحرکت‌متوازی‌الاضلاع «لولایی»، نقطهٔ C بردایره‌ای به‌مرکز B حرکت می‌کند. ولی Q از C بر اثر یك تجانس به‌مرکز نقطهٔ ثابت A و با نسبت ۱/۲ به دست می‌آید. پس Q بردایره‌ای حرکت می‌کند که بر اثر این تبدیل از دایره‌ای که C برآن حرکت می‌کند، به‌دست می‌آید.

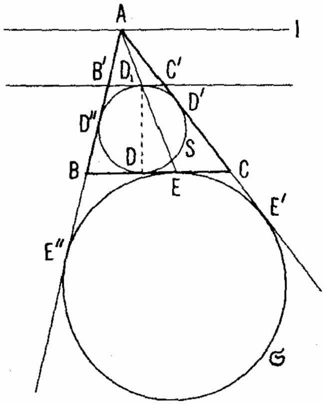
۱۲. الف) فرض می‌کنیم r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی درمثلث ABC، S، و ρ شعاع دایرهٔ محاطی بیرونی آن σ باشد (شکل ۷۷). تجانس به‌مرکز A و نسبت

r/ρ دایرهٔ σ را به S بدل می‌کند و خط BC مماس بر σ در E را به خط $B'C'$ مماس در D_1 بر S. چون D_1 از E براثر یك تجانس به‌مرکز A به‌دست می‌آید، خط ED_1 از A می‌گذرد. چون دوخط‌مماس BC و $B'C'$ بر S با یکدیگرموازی‌اند، نقاط تماس آنها D و D_1 با S باید دوسر یك قطر باشند، که حکم مسأله را ثابت می‌کند.

ب) فرض می‌کنیم ضلعهای BC، CA و AB ازمثلث ABC بترتیب درنقاط D، D' و D'' بر دایرهٔ محاطی داخلی S مماس باشند و نقاط تماس دایرهٔ محاطی بیرونی σ با این ضلعها (یا امتدادشان) بترتیب نقاط E، E' و E'' باشند (در اینجا صحبت از دایرهٔ محاطی بیرونی مماس بر ضلع BC و امتداد دوضلع دیگراست که اصطلاحاً دایرهٔ محاطی بیرونی روبه‌رو به‌زاویهٔ A می‌گوییم، ← شکل ۷۷). ضلعهای مثلث ABC را با $BC=a$، $CA=b$، $AB=c$ نشان می‌دهیم. دوباره خط مماس بریك دایره، مرسوم از نقطه‌ای واقع در خارج آن، طولهای متساوی دارند. بنابراین

$$CD+CD'=(a-BD)+(b-AD')=a-BD''+b-AD''$$
$$=a+b-AB=a+b-c$$

چون $CD=CD'$، داریم



شکل ۷۷

$$CD=\frac{1}{2}(a+b-c)$$

به‌همین ترتیب داریم

$$AE'+AE''=(b+CE')+(c+EE'')=b+CE+c+BE$$
$$=b+c+BC=a+b+c$$

و چون $AE'=AE''$

$$AE'=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

همچنین

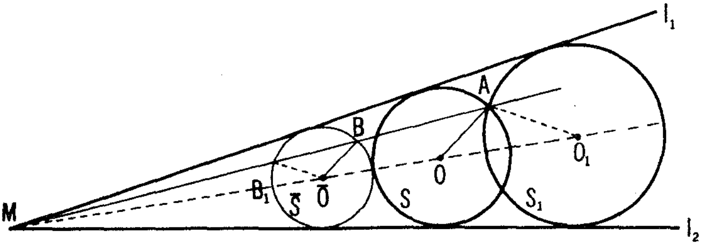
$$CE=CE'=AE'-AC=\frac{1}{2}(a+b+c)-b=\frac{1}{2}(a-b+c)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$ED=CD-CE=\frac{1}{2}(a+b-c)-\frac{1}{2}(a-b+c)=b-c$$

برای ترسیم مثلث ABC با داشتن کمیتهای r، h و $b-c$ ابتدا مثلث قائم‌الزاویهٔ EDD_1 را با معلوم بودن دوضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه $ED=b-c$ و $DD_1=2r$ رسم می‌کنیم (شکل ۷۷). سپس دایرهٔ S را به‌قطر DD_1 رسم می‌کنیم. خط l را به‌فاصلهٔ h ازخط ED به‌موازات آن می‌کشیم. خط ED_1 خط l را در رأس A ازمثلث مطلوب قطع می‌کند. دو رأس دیگر B و C از برخورد خط ED بامماسهای AD'' و AD' مرسوم از A بر دایرهٔ S، به‌دست می‌آیند.

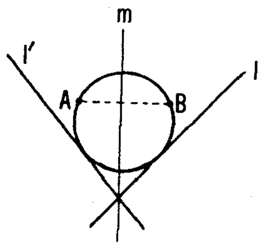
۱۳. الف) اگر l_1 و l_2 موازی باشند، مسأله جوابی یکتا دارد. اگر l_1 و l_2 موازی نباشند و M محل برخورد آنها باشد ناحیهٔ زاویه‌ای l_1Ml_2 را که شامل A است در نظر می‌گیریم. دایرهٔ دلخواه $\bar{S}$ را در زاویهٔ l_1Ml_2 محاط می‌کنیم (شکل ۷۸ الف). نقطهٔ برخورد خط MA با دایرهٔ $\bar{S}$ را B می‌نامیم. دایرهٔ مطلوب S مجانس $\bar{S}$ به مرکز تجانس M و نسبت تجانس MA/MB خواهد بود؛ با معلوم بودن مرکز ونسبت تجانس براحتی می‌توانیم S را رسم کنیم. اگر A بر l_1 یا بر l_2 واقع نباشد، مسأله دو جواب پیدا می‌کند.



شکل ۷۸ (الف)

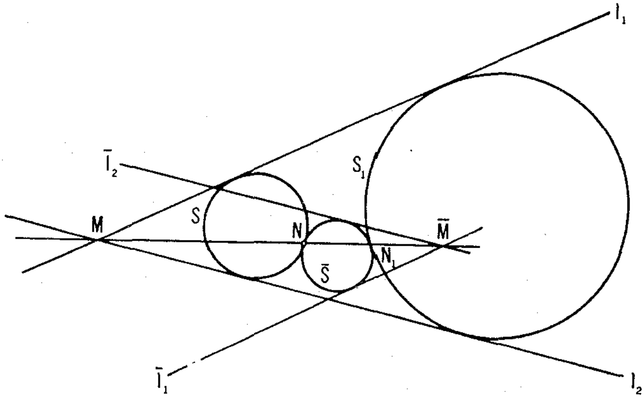
ب) فرض می‌کنیم m عمود منصف پـاره‌خط AB و l' قرینهٔ l نسبت به m باشد (شکل ۷۸ ب). دایرهٔ‌مطلوب S باید برخط l' مماس باشد. پس به‌همان قسمت (الف) رسیده‌ایم: تـرسیم دایره‌ای مماس بردو خط مفروض l و l' کـه از نقطهٔ مفروض A بگذرد.

ج) نقطهٔ برخورد خطهای l_1 و l_2 را M و دایرهٔ مطلوب را S می‌نامیم (شکل ۷۹ الف).* N نقطهٔ تماس دایره‌های $\bar{S}$ و S مرکز تجانس آنهاست. تجانسی که S را به $\bar{S}$ بدل می‌کند، خطهای l_1 و l_2 را به‌خطهای $\bar{l}_1$ موازی با l_1 و $\bar{l}_2$ موازی l_2 و مماس بر $\bar{S}$ بـدل می‌کند و نقطهٔ M را نیز به‌نقطهٔ $\bar{M}$ محل برخورد $\bar{l}_1$ و $\bar{l}_2$. پس N را می‌تـوان از تلاقی خط $M\bar{M}$ بـا دایرهٔ $\bar{S}$ به‌دست آورد و سپس S را بسادگی رسم کرد (تجانس به‌مرکز N خط $\bar{l}_1$ را به l_1 بدل می‌کند و نیز دایرهٔ $\bar{S}$ را به S).

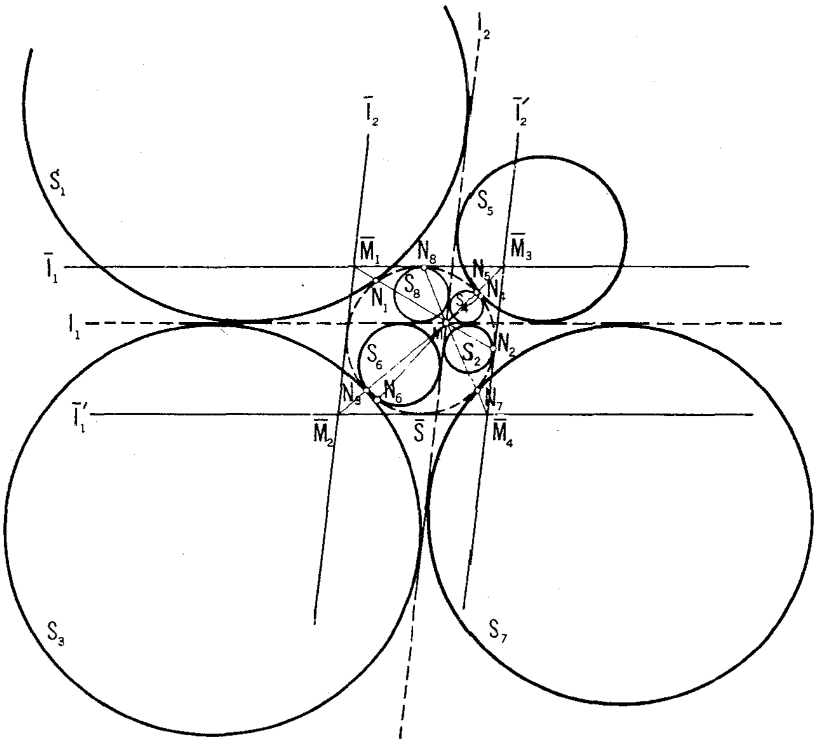


شکل ۷۸ (ب)

* اگر $l_1 \| l_2$، مسأله براحتی حل‌می‌شود، زیرا دراین‌صورت شعاع S مستقیماً تعیین‌می‌شود.



شکل ۷۹ (الف)

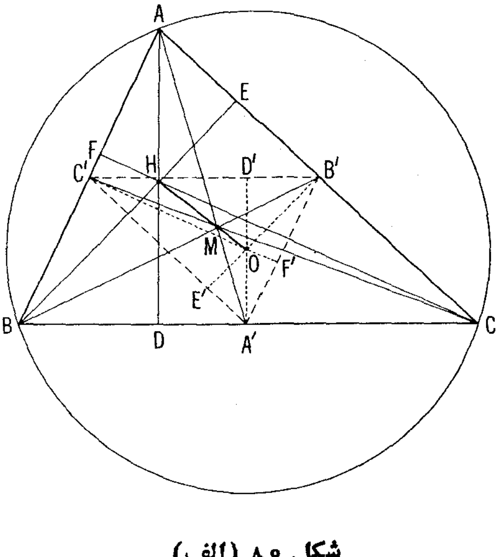


شکل ۷۹ (ب)

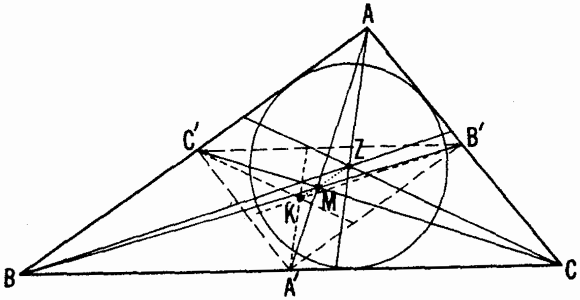
هریك از خطهای $\overline{l}_1$ و $\overline{l}_2$ را به‌دوطریق می‌توان انتخاب کرد؛ خط واصل از M به نقطهٔ برخورد آنها ممکن است دایرهٔ $\overline{S}$ را در دو نقطه قطع کند. پس تعداد جوابهای مسأله می‌تواند تا هشت برسد (← مثلا شکل ۷۹ ب).

۱۴. الف) براساس ویژگی معروف میانه‌ها، مثلث $A'B'C'$ حاصل از وصل کردن وسطهای اضلاع مثلث ABC به‌هم، مجانس ABC است بامرکز تجانس M (مرکز هندسی $\triangle ABC$) و نسبت تجانس $-۱/۲$ (شکل ۸۰ الف). ارتفاعهای AD، BE و CF از $\triangle ABC$ متناظر خواهند بود با ارتفاعهای $A'D'$، $B'E'$ و $C'F'$ از $\triangle A'B'C'$ و نقاط برخورد ارتفاعها (مرکز ارتفاعی) در $\triangle ABC$ متناظر خواهد بود بامحل برخورد ارتفاعهای $\triangle A'B'C'$، یعنی نقطهٔ O (زیرا ارتفاعهای $\triangle A'B'C'$ عمود منصفهای اضلاع $\triangle ABC$ هستند). پس نقاط H و O مجانس یکدیگرند با مرکز تجانس M و نسبت $-۱/۲$، یعنی بریك خط واحدکه از M می‌گذرد واقع‌اند و M پاره‌خط HO را به‌نسبت $HM/MO=۲$ تقسیم می‌کند.

ب) برهان این قسمت شبیه به برهان راه‌حل قسمت (الف) و مبتنی بر این نکته است که خطهائی که از وسطهای اضلاع مثلث موازی با نیمسازهای زاویه‌ها رسم می‌شوند با نیمسازهای مثلث مجانس‌اند و مرکز تجانس آنها M و ضریب تجانس



شکل ۸۰ (الف)



شکل ۸۰ (ب)

۱/۲ — است (شکل ۸۰ ب)؛ بنابراین در یك نقطهٔ مشترك K به‌هم می‌رسند (که تصویر Z نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌هاست).

ج) فرض کنید A'، B'، C' نقاط وسط ضلعهای مثلث ABC باشند؛ نقاط تماس اضلاع را با دایرهٔ محاطی بیرونی روبه‌رو به زاویهٔ A و با دایرهٔ محاطی داخلی بترتیب K، K_1، K_2 و P، Q، R می‌نامیم (شکل ۸۱). اثبات‌می‌کنیم که $AK||ZA'$. ضلعهای مثلث ABC را با حروف a، b و c، محیط آن‌را با $2p$، ارتفاع $A\overline{P}$ وارد بر ضلع BC را با h_a، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی‌را با r ومساحت مثلث‌را با S نشان‌می‌دهیم. از آنجاکه $ah_a = 2pr(= 2S)$، داریم $h_a/r = 2p/a$. بنابراین

$$\frac{A\overline{P}}{ZP}=\frac{2p}{a}$$

نشان خواهیم دادکه نسبت $K\overline{P}/A'P$ با این مقدار مساوی است.
درواقع

$$BP=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

زیرا $b^2=a^2+c^2-2aB\overline{P}$؛ از سوی دیگر

$$BK=BK_1=AK_1-AB=p-c=\frac{a+b-c}{2}$$

زیرا

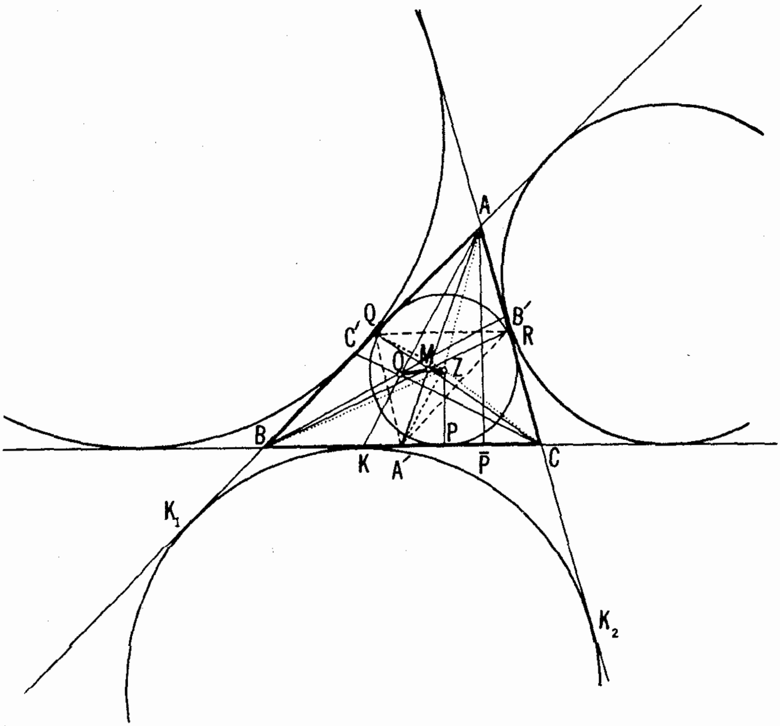
$$AK_۱=\frac{۱}{۲}(AK_۱+AK_۲)=\frac{۱}{۲}(AB+BK_۱+AC+CK_۲)$$

$$=\frac{۱}{۲}(AB+BK+AC+CK)=\frac{۱}{۲}(a+b+c)=p$$

درنتیجه، مثلا درمورد حالتی‌که در شکل ۸۱ دیده می‌شود،

$$K\overline{P}=B\overline{P}-BK=\frac{a^۲+c^۲-b^۲}{۲a}-\frac{a+b-c}{۲}$$

$$=\frac{a^۲+c^۲-b^۲-a^۲-ab+ac}{۲a}=\frac{(c-b)(c+b+a)}{۲a}=\frac{p(c-b)}{a}$$



شکل ۸۱

بعلاوه

$$BP=\frac{۱}{۲}(BP+BQ)=\frac{۱}{۲}(BC-CP+BA-AQ)$$

$$=\frac{۱}{۲}(BC+BA-CR-AR)=\frac{۱}{۲}(a+c-b)=p-b$$

و در نتیجه

$$A'P=BP-BA'=p-b-\frac{a}{۲}=\frac{c-b}{۲}$$

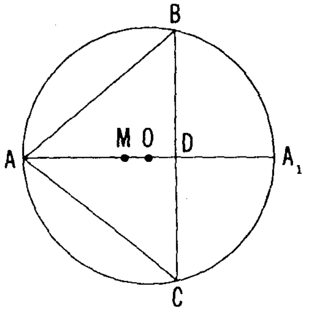
و بدین ترتیب داریم

$$\frac{K\overline{P}}{A'P}=\frac{p(c-b)}{a}\div\frac{c-b}{۲}=\frac{۲p}{a}=\frac{A\overline{P}}{ZP}$$

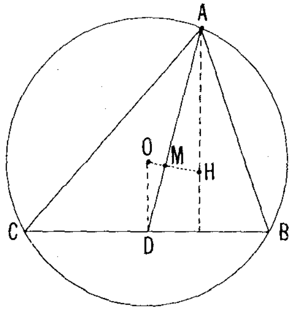
بنا براین مثلثهای $A\overline{P}K$ و ZPA' مشابه‌اند و در نتیجه خطهای AK و ZA' متوازی‌اند.

بعلاوه، به‌طریقی کاملا مشابه با راه‌حل تمرینهای قبلی می‌توان نشان داد که سه‌خط مرسوم ازرأسهای مثلث به‌موازات خطهای $A'Z$، $B'Z$ و $C'Z$ (این‌خطوط، چنانکه نشان داده‌ایم، خطهای واصل ازرأسهای مثلث به‌نقاط تماس ضلعهای روبه‌رو با دایره‌های محاطی بیرونی‌هستند) دریك‌نقطهٔ J به‌هم می‌رسندکه این‌نقطه مجانس Z است با مرکز تجانس M و نسبت تجانس ۲ — .

۱۵. فرض کنید O مرکز S، دایرهٔ محیطی مثلث مطلوب ABC، باشد (شکل ۸۲). با توجه به‌نتیجهٔ مسألهٔ ۱۴ (الف) نقطهٔ M مرکز هندسی این‌مثلث بر پاره‌خط OH واقع است و این پاره‌خط را به‌نسبت $OM : MH = ۱:۲$ تقسیم می‌کند؛ لذا می‌توانیم Mرا به‌دست آوریم. بعد، نقطهٔ M میانهٔ AD ازمثلث ABC را به‌نسبت $AM : MD = ۲:۱$ تقسیم می‌کند؛ پس می‌توانیم نقطهٔ D وسط ضلع BC را پیدا کنیم. این نقطهٔ D را به O، مرکز دایرهٔ S، وصل می‌کنیم؛ چون OD وتر مطلوب BC از دایرهٔ S به مرکز O را نصف می‌کند از اینجا، نتیجه می‌شود که $OD\perp BC$. بنا براین‌می‌توانیم وتر BC را عمودبر OD رسم و ترسیم مثلث ABC را کامل کنیم.



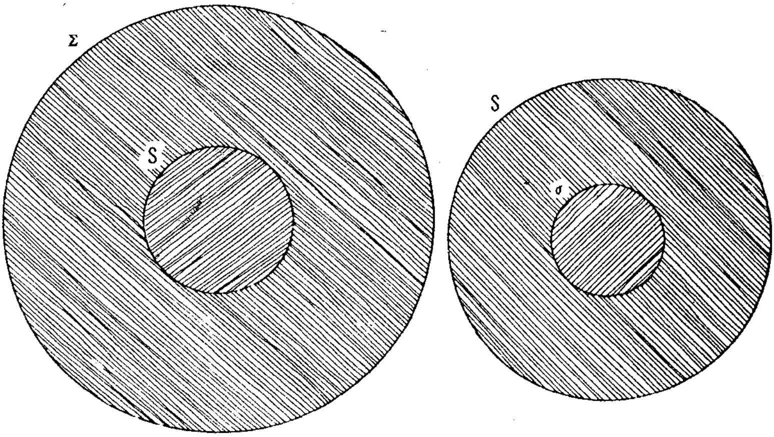
شکل ۸۳



شکل ۸۲

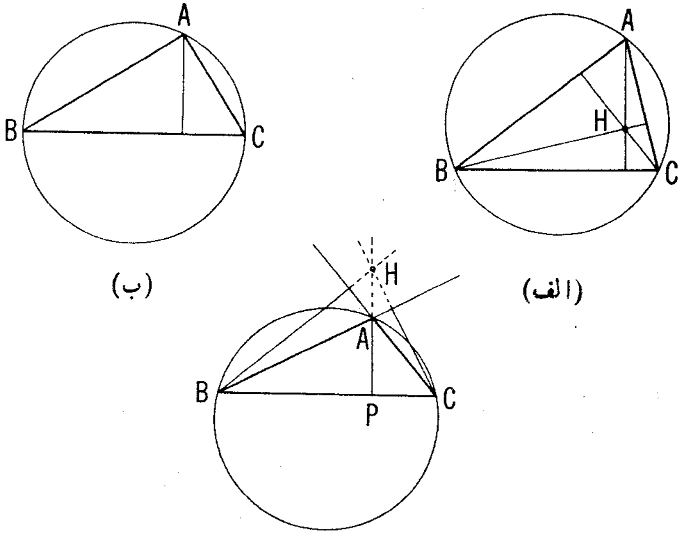
۱۶. ابتدا باید توجه کرد که نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC، محاط در دایرهٔ S، درون $ABC\triangle$ و بنا براین درون دایرهٔ S قرار می‌گیرد. از سوی دیگر، به‌ازای هرنقطهٔ M در داخل S می‌توانیم یك مثلث ABC در S محاط کنیم که M مرکز هندسی آن باشد. برای این‌کار کافی است یك نقطهٔ D برقطر AA_1 که از M می‌گذرد انتخاب کنیم (که در آن $AM \leqslant MA_1$) به‌طوری که $AM:MD=2:1$ (شکل ۸۳) و سپس وتر BC متعلق به‌دایره را طوری از D بگذرانیم که BC بر OD عمود باشد. پس مکان هندسی مرکز هندسی همهٔ مثلثهای محاط در دایرهٔ S دقیقاً مجموعهٔ kی همهٔ نقاطی است‌که درون S واقع‌اند (شکل ۸۴ الف). باتوجه به‌نتیجهٔ مسألهٔ ۱۴ (الف) اگر H مرکز ارتفاعی $ABC\triangle$ محاط در دایرهٔ S به مرکز O باشد و M مرکز هندسی آن، آنگاه $OH:OM=3:1$. از اینجا نتیجه می‌شود که مکان هندسی مرکز ارتفاعی همهٔ مثلثهای محاط در دایرهٔ S برمجموعهٔ Kی همهٔ نقاط واقع در داخل دایرهٔ Σ هم‌مرکز با S، وبا شعاعی سه برابر شعاع S منطبق است (شکل ۸۴ ب).

اکنون کافی است یادآور شویم که مرکز ارتفاعی مثلث حادالزوایای ABC درون مثلث و در نتیجه درون S قرار دارد (شکل ۸۵ الف). مرکز ارتفاعی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC محاط در دایرهٔ S و قائمه در رأس A بر A منطبق است، و بنا براین بر S واقع است (شکل ۸۵ب). سرانجام، مرکزارتفاعی مثلث‌منفرج‌الزاویهٔ ABC محاط در S وبا زاویهٔ منفرجه در رأس A، برامتداد ارتفاع AP ازطرف A واقع است، و بنا براین بیرون از S واقع می‌شود (شکل ۸۵ ج). بنا براین، مکان هندسی مرکز ارتفاعی همهٔ مثلثهای حادالزوایای محاط در S منطبق است بر مجموعهٔ kی همهٔ نقاطی که درون S واقع‌اند؛ این مکان هندسی برای مثلثهای قائم‌الزاویهٔ



(ب) (الف)

شکل ۸۴



(ب) (الف)

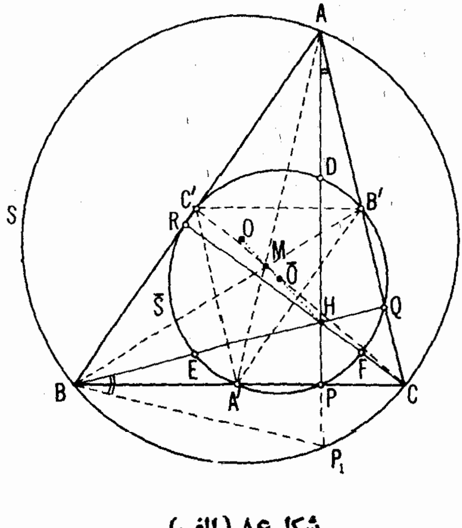
(ج)

شکل ۸۵

محاط در S، بردایرهٔ S منطبق‌است، وبرای‌مثلثهای منفرج‌الزاویهٔ محاط در S متشکل است ازنقاط واقع‌بر طوق بین دو دایرهٔ هم‌مرکز S و Σ (شکل ۸۴ ب).

سرانجام، چون مرکز هندسی مثلث ABC محاط در S از مرکز ارتفاعی آن بر اثر یك تجانس به مرکز O، مرکز S و با نسبت ۱/۳ به دست می‌آید، از اینجا نتیجه می‌شود که مکان هندسی مرکز هندسی همهٔ مثلثهای حادالزوایای محاط در S برمجموعهٔ kی همهٔ نقاطی منطبق است که درون دایرهٔ σ هم‌مرکز با S و با شعاعی برابر با ۱/۳ شعاع S، قرار دارند. به همین ترتیب، مکان هندسی مرکز هندسی همهٔ مثلثهای قائم‌الزاویهٔ محاط در S بردایرهٔ σ منطبق است ومکان هندسی مرکز هندسی همهٔ مثلثهای منفرج‌الـزاویهٔ محاط در S برمجموعهٔ نقاط واقع در طـوق بین σ و S (شکل ۸۴ الف).

۱۷. الف فرض می‌کنیم AP، BQ و CR ارتفاعهای مثلث ABC بـاشند؛ وسطهای ضلعهای مثلث را A'، B'، C' و وسطهای پاره‌خطهای HA، HB و HC را بترتیب D، E، F می‌نامیم (شکل۸۶ الف). واضح است کـه D، E و F روی دایرهٔ $\bar{S}$ واقع‌اند. اکنون نشان‌می‌دهیم که‌نقاط P، Q و R هم روی‌همین‌دایره‌هستند. ارتفاع AP رااز‌سمت P ادامه می‌دهیم تا S را در نقطهٔ P_1 قطع کند و P_1



شکل۸۶ (الف)

را به‌نقطهٔ B وصل می‌کنیم. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ APC و BQC،

$$\measuredangle CBQ = \measuredangle CAP (= ۹۰^\circ - \measuredangle BCA)$$

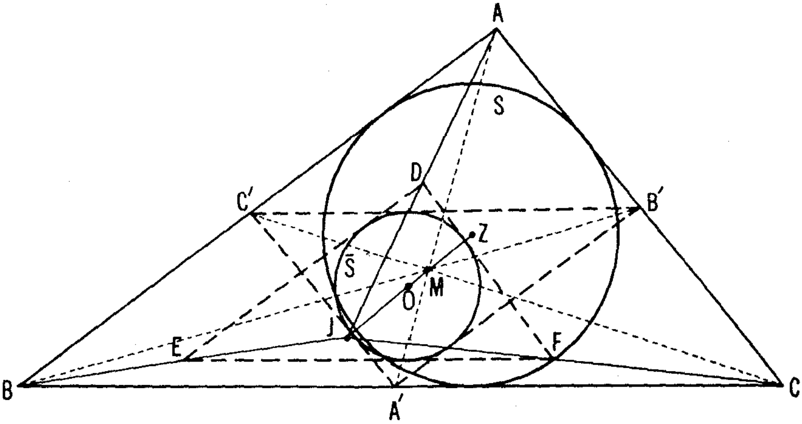
بعلاوه، $\measuredangle CAP = \measuredangle CBP_۱$ (زیرا هردو روبه‌رو به‌یك کمان هستند). درنتیجه، $\measuredangle HBP = \measuredangle PBP_۱$ لذامثلث $HBP_۱$متساوی‌الساقین‌است و $HP = ۱/۲ HP_۱$؛ بنابراین، نقطهٔ $P_۱$ براثر تجانس به‌مرکز H و نسبت ۱/۲ به‌نقطهٔ P بدل می‌شود، درست به‌همین‌طریق ثابت می‌شود که نقاط Q و R مجانس نقاطی از دایرهٔ محیطی با مرکز تجانس H و نسبت ۱/۲ هستند.

بعلاوه، روشن‌است‌که نقاط A'، B' و C' بردایرهٔ S' قرار دارندکه مجانس S است بامرکز تجانس M ونسبت ۱/۲ —. نشان‌می‌دهیم که S' بر $\bar{S}$ منطبق‌است. شعاع $\bar{S}$ برابراست با $r/۲$ (rکه همان‌شعاعS است) ومرکز آن $\bar{O}$ دروسط پاره‌خط HO واقع است (O مرکز S است) (شکل ۸۶ الف). شعاع دایرهٔ S' نیز برابربا $r/۲$ است و نقطهٔ O' مرکز این دایره بر خط MO واقع است و داریم $MO'/MO = ۱/۲$. باتوجه‌به‌نتیجهٔ مسألهٔ ۱۴ (الف) نقاط O،H و M بریك‌خط واقع‌اند و $HM = ۲MO$؛ از اینجا بلافاصله نتیجه می‌شودکه نقاط $\bar{O}$ و O' و در نتیجه دایره‌های $\bar{S}$ و S' برهم منطبق‌اند و این همان حکم مسأله است.

ضمناً توجه می‌کنیم‌که نقاط A' و D، B' و E، C' و F نقاطی دوبه‌دو متقاطر بر دایرهٔاویلرهستند (زیرا، مثلا، زاویهٔ $A'PD$ محاط دراین‌دایره و روبه‌رو به‌وتر $A'D$، قائمه است). بنابراین مثلثهای $A'B'C'$ و DEF نسبت به‌مرکز این دایره متقارن و در نتیجه باهم مساوی‌اند.

ب) اولا روشن است کـه مثلث DEF مجانس مثلث ABC است با مرکز تجانس J و نسبت ۱/۲ (شکل ۸۶ ب). از اینجا نتیجه می‌شود که دایرهٔ $\bar{S}$، محاط درمثلث DEF مجانس دایرهٔ S محاط در مثلث ABC است، بامرکز تجانس J و نسبت ۱/۲. بعلاوه، دایرهٔ S' محاط در مثلث $A'B'C'$ مجانس دایـرهٔ S است با مرکز تجانس M ونسبت ۱/۲ —. اما باتوجه به‌نتیجهٔ مسألهٔ ۱۴ (ج) نقطهٔ O وسط پاره‌خط JZ (مرکز $\bar{S}$) بر نقطهٔ O' مرکز دایرهٔ S' که روی خط MZ واقع‌است قرار دارد و داریم $MO'/MZ = -۱/۲$ (مقایسه‌شود باراه‌حل قسمت (الف)). بنابراین دایره‌های $\bar{S}$ و S' برهم منطبق‌اند و حکم مسأله ثابت شده است.

همچنین باید توجه کـرد که خطهای $A'B'$ و DE، $B'C'$ و EF، $C'A'$ و FD



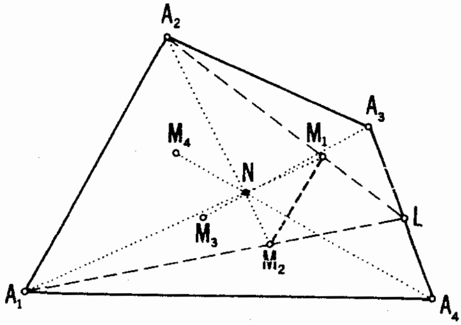
شکل ۸۶ (ب)

در دو سر قطرهایی از دایرهٔ $\bar{S}$ بر این دایره مماس‌اند (زیرا $A'B'\|AB\|DE$، $B'C'\|BC\|EF$، $C'A'\|CA\|FD$)، و بنابراین مثلثهای DEF و $A'B'C'$ نسبت به مرکز $\bar{S}$ متقارن و در نتیجه با یکدیگر متساوی‌اند.

۱۸. الف) چهارضلعی دلخواه $A_1A_2A_3A_4$ را درنظر می‌گیریم و مرکزهای هندسی مثلثهای $A_1A_2A_3$، $A_1A_2A_4$، $A_1A_3A_4$ و $A_2A_3A_4$ را بترتیب M_4، M_3، M_2 و M_1 می‌نامیم (شکل ۸۷ الف). کافی است ثابت کنیم که پاره‌خطهای A_1M_1، A_2M_2، A_3M_3 و A_4M_4 دوبه‌دو در نقطهٔ برخوردشان به‌نسبت ۳:۱ تقسیم می‌شوند؛ زیرا در این صورت نتیجه می‌شود که همهٔ این پاره‌خطها در نقطهٔ منحصر به فردی متقاطع‌اند. نقطهٔ برخورد A_1M_1 و A_2M_2 را N می‌نامیم و نقطهٔ وسط A_3A_4 را L. دراین‌صورت

$$\frac{A_1M_2}{M_2L}=\frac{A_2M_1}{M_1L}=\frac{2}{1}$$

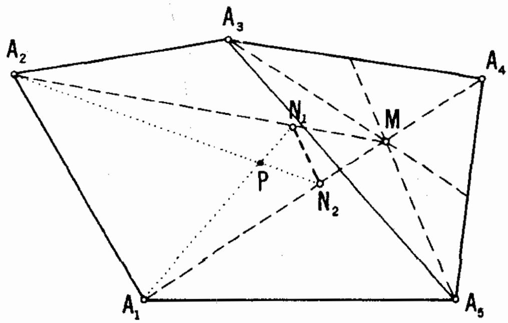
در نتیجه، مثلثهای A_1LA_2 و M_2LM_1 متشابه‌اند و $M_1M_2\|A_1A_2$ و $A_1A_2/M_2M_1=3/1$. اکنون دیده می‌شود که مثلثهای A_1NA_2 و M_1NM_2 متشابه‌اند؛ بنابراین $A_1N/NM_1=A_2N/NM_2=3/1$ که همان حکم مسأله است.



شکل ۸۷ (الف)

این قضیه را می‌توان به‌شیوهٔ مشابهی برای هرچند ضلعی دلخواه نیز اثبات کرد. مثلاً، اگر N_1 و N_2 مرکز هندسی چهارضلعی‌های $A_2A_3A_4A_5$ و $A_1A_3A_4A_5$ باشند، M مرکز هندسی مثلث $A_3A_4A_5$ باشد و اگر P نقطهٔ برخورد A_1N_1 و A_2N_2 باشد (شکل ۸۷ ب)، آنگاه $A_1N_2/N_2M = A_2N_1/N_1M = ۳/۱$ بنابراین مثلثهای A_1MA_2 و N_2MN_1 متشابه‌اند، پس $N_2N_1 \| A_1A_2$ و $A_1A_2/N_2N_1 = ۴/۱$. از اینجا نتیجه می‌شود که مثلثهای A_1PA_2 و N_1PN_2 متشابه‌اند و $A_1P/PN_1 = A_2P/PN_2 = ۴/۱$.

بدین‌ترتیب، هردو پاره‌خط واصل بین رأسهای یك پنج‌ضلعی و مرکز هندسی چهارضلعی‌های حاصل از چهار رأس باقیمانده، در نقطهٔ برخورد به‌نسبت ۴:۱ تقسیم



شکل ۸۷ (ب)

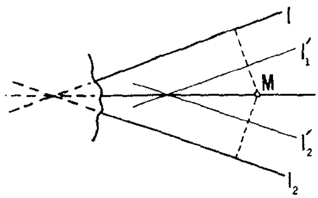
می‌شوند و براین اساس حکم مربوط به‌پنج‌ضلعیها بلافاصله ثابت می‌شود.

(ب)و(ج) از قسمت (الف) نتیجه می‌شود که مراکز هندسی چهارمثلثی که رأسهای آنها رأسهای یك چهارضلعی محاط در دایرهٔ S هستند بر یك دایرهٔ S' به شعاع $R/۳$ واقع‌اند؛ براساس حکم مسألهٔ ۱۷ (الف) می‌توان نتیجه گرفت که مراکز دایره‌های‌اویلر این‌مثلثها مجانس مرکزهای‌هندسی آنها هستند بامرکز تجانس O، مرکز دایرهٔ S، وبانسبت تجانس $۳/۲$؛ بنابراین مراکز این‌دایره‌ها روی دایرهٔ $\bar{S}$ به‌شعاع $R/۲ = (۳/۲)(R/۳)$ واقع‌اند وازاینجاحکم (ب) درمورد چهارضلعیها نتیجه می‌شود. بعلاوه، اگر N مرکز هندسی چهارضلعی باشد، O' مرکز دایرهٔ S' و $\bar{O}$ مرکزدایرهٔ $\bar{S}$، آنگاه O و N و O' بر یك‌خط واقع‌اند و $ON{:}NO' = ۳{:}۱$، همچنین O، O' و $\bar{O}$ بر یك خط واقع‌اند و $O\bar{O}{:}OO' = ۳{:}۲$. پس O، N و $\bar{O}$ بر یك‌خط واقع‌اند و $ON{:}N\bar{O} = ۲{:}۲$، چیزی که می‌خواستیم درقسمت (ج) برای‌چهارضلعیها ثابت کنیم. حال باهمین نحوهٔ استدلال می‌توان حکمهای (ب) و (ج) را برای پنج‌ضلعیها وغیره ثابت کرد؛ این‌کار را به‌خواننده واگذار می‌کنیم که آن را برای خودش انجام دهد.

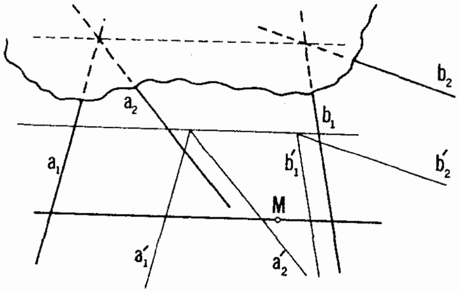
۱۹. الف) ابتدا یك تجانس به‌مرکز M و نسبت تجانسی به‌اندازهٔ کافی کوچك(k) انجام می‌دهیم تا خطهای $l'_۱$ و $l'_۲$، حاصل ازعمل تجانس بر $l_۱$ و $l_۲$، در محدودهٔ شکل موجود یکدیگر را قطع کنند (شکل ۸۸ الف) خطی که نقطهٔ M را به‌محل برخورد $l'_۱$ و $l'_۲$ وصل می‌کند خط مطلوب است.

درحالی‌که نقطهٔ دسترسی ناپذیرنه از تلاقی دوخط بلکه از تلاقی یك‌خط و یك‌دایره یا ازتلاقی دو دایره (که‌خارج ازتصویر یکدیگر را قطع می‌کنند) حاصل شده باشد نیز مسأله عیناً به‌همین‌طریق حل می‌شود.

ب) یك‌تجانس به‌مرکز M و نسبت kی به‌قدر کافی کوچك انجام می‌دهیم تا خطهای $a_۱$، $a_۲$ و $b_۱$،$b_۲$ به‌خطهای $a'_۱$، $a'_۲$، و $b'_۱$، $b'_۲$ بدل شوند به‌طوری که خط واصل بین نقاط برخورد $a'_۱$ و $a'_۲$، $b'_۱$ و $b'_۲$ در محدودهٔ شکل واقع شوند (شکل



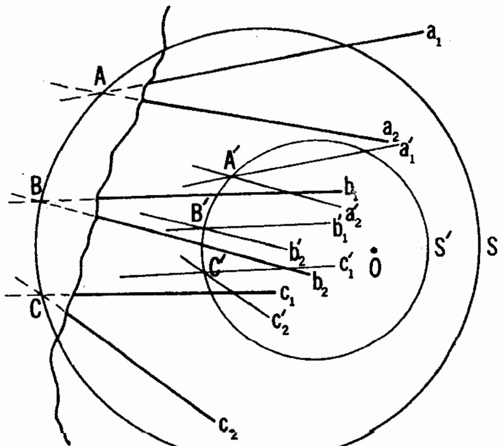
شکل ۸۸ (الف)



شکل ۸۸(ب)

۸۸ ب). خطی که از M به‌موازات این‌خط رسم شود همان خط مطلوب است.

ج) یك تجانس به‌مرکز نقطهٔ دلخواه O که در دسترس ماست و با نسبت k که به‌قدر کافی کوچك است، انجام می‌دهیم تا نقاط A، B، C به‌نقاط A'، B'، C' که در محدودهٔ تصویرما واقع‌انـد، بدل شوند (شکل ۸۸ ج). دایرهٔ محیطی مثلث $A'B'C'$ را S' مـی‌نامیم. دایرهٔ مطلوب S مجانس S' است با مرکز تجانس O و



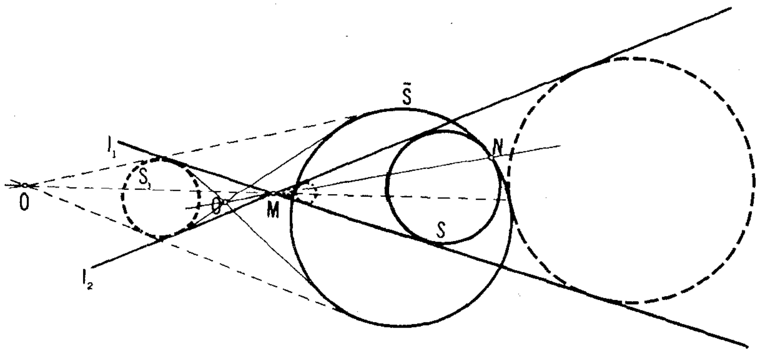
شکل ۸۸(ج)

نسبت $k/1$؛ بدین‌ترتیب می‌توانیم مرکز و شعاع آن را پیدا کنیم.

۲۰. فرض کنیدمی‌خواهیم دربخش محدودی ازصفحه که آن را κ می‌نامیم، ترسیمی انجام دهیم و فرض کنیدکه شکل T که برای تکمیل این ترسیم لازم است بتمامی درون κ نگنجد. یك تجانس به مرکز نقطهٔ دلخواه O در κ و با نسبت k که به‌اندازهٔ کافی کوچك است انجام می‌دهیم تا شکل تبدیل یافتهٔ T' تماماً در κ قرار گیرد. در این‌صورت T' را می‌توان رسم کرد. اکنون T را هم می‌توان به‌دست آمده تلقی کرد زیرا مجانس شکل کامل شدهٔ T' بامرکز تجانس O و نسبت $1/k$ است. (اگر یك‌نقطهٔ A از T مجانس نقطهٔ A' از T' باشد، و اگر A درمحدودهٔ مفروض از صفحه واقع نباشد، می‌توان آن را به وسیلهٔ دوخط l_1 و l_2 تعریف کرد که مجانس دوخط l'_1 و l'_2 هستندکه از A' می‌گذرند؛ بعلاوه l'_1 و l'_2 را همیشه می‌توان طوری اختیار کردکه l_1 و l_2 از قسمتی از شکل موجود بگذرند: برای این کار، مثلا کافی است‌که فاصلهٔ خطهای l'_1 و l'_2 از مرکز تجانس O به قدر کافی کوچك باشد.)

۲۱. این‌قضیه حالت‌خاصی‌از قضیهٔ مربوط به‌سه مرکزتجانس است (← قضیهٔ سه‌مرکز تجانس، درمسألهٔ ۲۰، فصل یك همین‌جلد).

۲۲. دایرهٔ مطلوب را S می‌نامیم؛ دایرهٔ دلخواه S_1 را مماس بر l_1 و l_2 رسم می‌کنیم (شکل ۸۹؛ دراین شکل حالت $l_1 \| l_2$ را که درآن حل مسأله خیلی ساده‌تر است درنظر نمی‌گیریم). مرکز تجانس دایره‌های S و S_1 نقطهٔ M، محل برخورد l_1 و l_2، است، مرکزتجانس دایره‌های S_1 و $\bar{S}$ را می‌توان پیدا کرد؛ مرکز تجانس



شکل ۸۹

دایره‌های $\bar{S}$ و S نقطهٔ N، یعنی نقطهٔ تماس آنهاست. بنا برقضیهٔ مذکور دربارهٔ سه مرکز تجانس (← صفحهٔ ۳۶) نقاط M، O و N بر یك‌خط واقع‌اند، یعنی N یك نقطهٔ برخورد خط OM با دایرهٔ $\bar{S}$ است. با یافتن N مشکلی‌در راه ترسیم دایرهٔ S وجود نخواهد داشت.

نقطهٔ O مرکز تجانس دایره‌های $\bar{S}$ و $S_۱$ را به‌دو طریق می‌توان انتخاب کرد؛ هر یك ازدوخط OM که از این‌روش به‌دست می‌آید می‌تواند $\bar{S}$ را در دونقطه‌قطع کند؛ پس تاچهاردایره می‌توان‌رسم کرد که همگی‌درشرایط مسأله صدق کنند؛ مراکز این دایره‌ها بریکی از دونیمساز دوزاویهٔ مجاوری که از برخورد $l_۱$ و $l_۲$ پدید می‌آیند قرار دارند (مرکز دایرهٔ $S_۱$ روی این نیمساز واقع است). اگر مرکز دایرهٔ $S_۱$ را نقطه‌ای واقع بر نیمساز زاویهٔ دیگر اختیار کنیم، می‌توانیم تا چهار جواب‌دیگر نیز به‌دست آوریم. پس این‌مسأله روی‌هم رفته هشت جواب می‌تواند داشته باشد.

۲۳. حالت کلی n دایره را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم دایره‌های $S_۱$ و $S_۲$ در $M_۱$ برهم‌مماس (بیرونی یا درونی) باشند، $S_۲$ و $S_۳$ در $M_۲$، ...، $S_{n-۱}$ و S_n در $M_{n-۱}$ و S_n و $S_۱$ در M_n. نقطهٔ دلخواهی از $S_۱$ را $A_۱$ می‌نامیم و دومین نقطهٔ‌برخورد $A_۱M_۱$ با $S_۲$ را $A_۲$، ودومین‌نقطهٔ برخورد $A_۲M_۲$ با $S_۳$ را $A_۳$، ...، دومین نقطهٔ برخورد $A_{n-۱}M_{n-۱}$ با S_n را A_n و بالاخره دومین نقطهٔ برخورد A_nM_n با $S_۱$ را $A_{n+۱}$ نام می‌گذاریم (مقایسه‌شود باشکلهای ۲۱ الف، ب). فرض می‌کنیم $r_۱$، $r_۲$، ...، $r_{n-۱}$، r_n بترتیب‌شعاع دایره‌های $S_۱$، $S_۲$، ...، $S_{n-۱}$، S_n باشند. تجانس به‌مرکز $M_۱$ و نسبت $k_۱ = \mp r_۲/r_۱$ دایرهٔ $S_۱$ را به $S_۲$ و نقطهٔ $A_۱$ را به $A_۲$ بدل می‌کند (علامت منفی وقتی اختیار می‌شود که $S_۱$ و $S_۲$ مماس بیرونی باشند و علامت مثبت مربوط به‌حالت تماس درونی است)؛ تجانس به‌مرکز $M_۲$ و نسبت $k_۲ = \mp r_۳/r_۲$ دایرهٔ $S_۲$ را به $S_۳$ و نقطهٔ $A_۲$ را به $A_۳$ (علامت منفی برای تماس بیرونی و مثبت برای تماس درونی است)؛...؛ تجانس به‌مرکز $M_{n-۱}$ و نسبت $k_{n-۱} = \mp r_n/r_{n-۱}$ دایرهٔ $S_{n-۱}$ را به S_n و نقطهٔ $A_{n-۱}$ را به A_n، و سرانجام، تجانس به‌مرکز M_n و نسبت $k_n = \mp r_۱/r_n$ دایرهٔ S_n را به $S_۱$ و نقطهٔ A_n را به $A_{n+۱}$ بدل می‌کند. از آنجا که

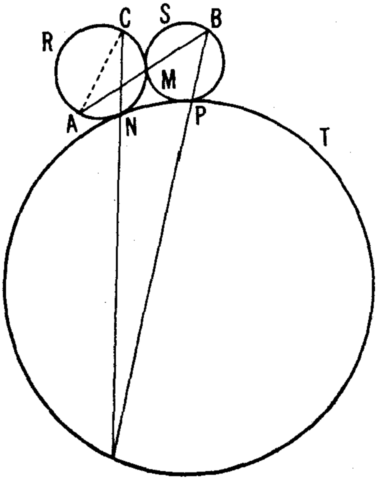
$$k_۱k_۲\cdots k_{n-۱}k_n = \left(\mp\frac{r_۲}{r_۱}\right)\left(\mp\frac{r_۳}{r_۲}\right)\cdots\left(\mp\frac{r_n}{r_{n-۱}}\right)\left(\mp\frac{r_۱}{r_n}\right) = \mp ۱$$

حاصلضرب همهٔ این تجانسها یایك انتقال موازی است (که می‌تواند به‌مسافت صفر،

یعنی تبدیل‌همانی باشد) یا یك‌تجانس با نسبت ۱ — یعنی یك‌نیمدور (← جلد اول، فصل یك؛ بخش ۲). اما این را هم‌می‌دانیم‌که حاصلضرب این تجانسها دایرهٔ S_1 را به‌خودش بدل می‌کند، و بنابراین حاصلضرب این تبدیلها یا باید تبدیل همانی باشد یا یك نیمدورحول‌مرکز S_1. حالت اول‌زمانی پیش می‌آید که $k_1k_2...k_n = +1$، و این مربوط به‌وقتی است که تعداد تماسهای بیرونی زوج باشد، بخصوص وقتی همهٔ تماسها بیرونی باشند و تعداد کل دایره‌ها زوج باشد. حالت دوم وقتی پیش می‌آید که تعداد تماسهای بیرونی فرد باشد، بخصوص وقتی همهٔ تماسها بیرونی باشند و تعداد کل دایره‌ها فرد باشد. بدین ترتیب حکمهای (الف)، (ب) و (ج) ثابت می‌شود.

روشن است که اگر دوباره همهٔ این تبدیلها را با‌همان‌ترتیب انجام دهیم به‌تبدیل همانی می‌رسیم. پس اگر A_{2n+1} نقطه‌ای از S_1 باشد که از A_{n+1} به‌دست آمده است، به‌همان نحوی که A_{n+1} از A_1 به‌دست آمده است، آنگاه A_{2n+1} همیشه‌بر A_1 منطبق خواهد شد. حکم (ج) هم بدین ترتیب ثابت می‌شود.

۲۴. ابتدا سه‌دایرهٔ R، S و T را درنظرمی‌گیریم که R و S در M مماس بیرونی‌اند، S و T در P، و T و R در N (شکل ۹۰). همچنین فرض‌می‌کنیم که شعاع T خیلی بزرگتر ازشعاعهای R و S است. اگرشعاع T به‌طور نامحدودبزرگ

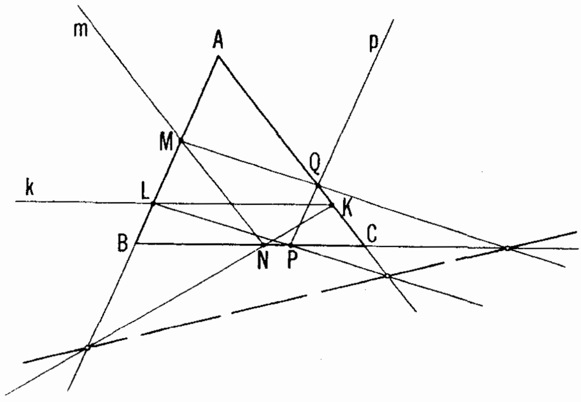


شکل ۹۰

شود، شکل ۹۰ رفته‌رفته به‌شکل ۲۲ شبیه‌تر می‌شود. درحالت حدی شکل ۹۰ به‌صورت شکل ۲۲ در می‌آید و حکم (الف) مسألهٔ ۲۳ همان نتیجهٔ مطلوب این مسأله خواهد بود.

۲۵. روشن است که سه‌مثلث ALK، MBN، QPC که ضلعهای متناظرشان متوازی‌اند با یك تجانس از یکدیگر نتیجه می‌شوند. مرکز تجانس مثلثهای ALK و MBN نقطهٔ برخورد AB و KN است، مرکز تجانس MBN و QPC نقطهٔ برخورد BC و MQ است، و مرکز تجانس QPC و ALK نقطهٔ برخورد CA و PL (شکل ۹۱). اکنون حکم مطلوب از اینجا و از قضیهٔ مربوط به‌سه مرکز تجانس اثبات می‌شود (← صفحهٔ ۳۶).

بیان دقیق قضیهٔ مربوط به سه مرکز تجانس اصلاح حکم مذکور در مسألهٔ ۲۵ را میسر می‌سازد، یا نقاط برخورد AB و KN، BC و MQ، و CA و PL بر یك خط واقع‌اند، یا دقیقاً یکی ازاین نقاط برخورد وجود ندارد و دوخط موازی مربوط به‌آن با خط واصل بین دونقطهٔ برخورد دیگر موازی‌اند، مثلا $AB\|KN\|UV$، که درآن U نقطهٔ برخورد BC و MQ است و V نقطهٔ برخورد CA و PL؛ یا هیچ یك از نقاط برخورد وجود ندارند، یعنی $AB\|KN$، $BC\|MQ$ و $CA\|PL$.



شکل ۹۱

۲۶. الف) مثلث EFD از مثلث مفروض ABC براثر تجانسی که مرکزش

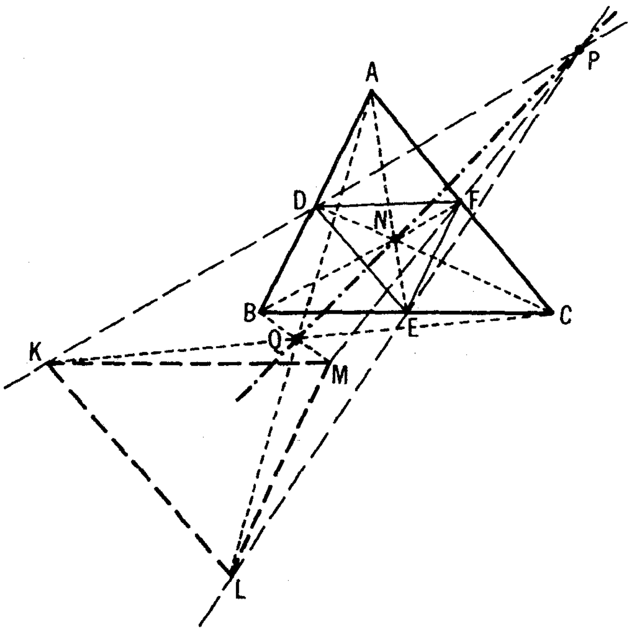
مرکز هندسی ΔABC و نسبت آن $k_{\text{۱}}=-\text{۱}/\text{۲}$ است به‌دست می‌آید [مقایسه شود با راه حل مسألهٔ ۱۴ (الف)، (ج)]، و ΔLMK براثر تجانسی به‌مرکز P و نسبت $k_{\text{۲}}=\text{۲}$ (شکل ۹۲). چون $k_{\text{۱}}k_{\text{۲}}=-\text{۱}/\text{۲}\times\text{۲}=-\text{۱}$، مثلث LMK از مثلث ABC براثر تجانسی بانسبت $k=-\text{۱}$ یعنی از یك نیمدور حول نقطه‌ای به‌نام Q به‌دست می‌آید؛ بدین ترتیب برهان کامل می‌شود.

ب) باتوجه به‌فرمولی که درصفحهٔ ۳۶ به‌دست آوردیم، داریم

$$O_{\text{۱}}O=\frac{k_{\text{۲}}-\text{۱}}{k_{\text{۱}}k_{\text{۲}}-\text{۱}}O_{\text{۱}}O_{\text{۲}}$$

بافرض

$$O_{\text{۱}}=N,\ O_{\text{۲}}=P,\ O=Q \qquad \text{و} \qquad k_{\text{۱}}=-\frac{\text{۱}}{\text{۲}},k_{\text{۲}}=\text{۲}$$



شکل ۹۲

خواهیم داشت:

$$NQ = \frac{۲-۱}{-۱-۱}NP = -\frac{۱}{۲}NP$$

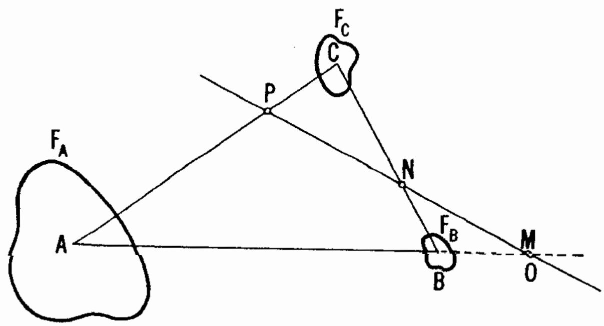
یعنی، Q از P بر اثر یک تجانس به‌مرکز N و نسبت ۱/۲ — به‌دست می آید. بنا بر این وقتی P دایرهٔ S را بپیماید، Q نیز دایره‌ای را می‌پیماید که بر اثر تجانس فوق از S به‌دست می آید

۲۷. الف) فرض کنید F_A شکلی باشد شامل رأس A از مثلث؛ و F_C از F_A بر اثر تجانسی به‌مرکز P و نسبت $k_۱ = PC/PA$ به‌دست آید و F_B از F_C بر اثر تجانسی به‌مرکز N و نسبت $k_۲ = NB/NC$ (شکل ۹۳ الف). روشن است که نقطهٔ A ازشکل F_A با نقطهٔ C از شکل F_C متناظر است که به‌نوبهٔ خود متناظر است با نقطهٔ B ازشکل F_B. بنا به‌قضیهٔ مربوط به‌ضرب تجانسها، F_B از F_A بر اثر تجانسی به‌مرکز O و نسبت k به‌دست می‌آید. همچنین O برخط BA (زیرا B و A نقاط متناظری از دوشکل F_B و F_A هستند) و نیز برخط PN واقع است (بنا به‌قضیهٔ مربوط به‌سه مرکز تجانس)؛ و داریم:

$$k = k_۱k_۲ = \frac{PC}{PA} \cdot \frac{NB}{NC}$$

اگر $k_۱k_۲ = ۱$، آنگاه F_B از F_A بایك انتقال به‌دست می‌آید.

اگر $AM/BM \cdot BN/CN \cdot CP/AP = ۱$، آنگاه



شکل ۹۳ (الف)

$$\frac{MB}{MA}=\frac{PC}{PA}\cdot\frac{NB}{NC}=k_۱k_۲=k$$

چون $OB/OA=k$، پس M بر O منطبق است و بنابراین بر خط PN قرار دارد. بعکس، اگر نقاط M، N و P بریك راستا باشند، M نقطهٔ برخورد خطهای AB و PN است و لذا بر O منطبق خواهد بود؛ پس می‌توان نوشت

$$\frac{MB}{MA}=\frac{OB}{OA}=k=k_۱k_۲=\frac{PC}{PA}\cdot\frac{NB}{NC}$$

و بنابراین

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=۱$$

تذکر ۱. توجه کنید که درحل مسألهٔ ۲۷ (الف) کافی بود که تنها لزوم یا کفایت شرایط مسأله را ثابت کنیم؛ در این‌صورت نیمهٔ دیگر برهان از آنچه ثابت شده به‌دست می‌آمد. زیرا، مثلا فرض کنید ثابت کرده‌ایم که اگر

$(AM/BM)(BN/CN)(CP/AP)=۱$،

نقاط M، N و P بریك خط واقع‌اند. برای رسیدن به‌عکس آن فرض می‌کنیم M، N و P همخط باشند و دراین صورت باید ثابت کنیم که $(AM/BM)(BN/CN)(CP/AP)=۱$ برای این کار فرض می‌کنیم $\bar{M}$ نقطه‌ای از خط AB باشد چنان که

$$(A\bar{M}/B\bar{M})(BN/CN)(CP/AP)=۱$$

در این‌صورت بنا به قضیه‌ای کــه فرض مــی‌کنیم قبلا ثابت شده است، نقاط $\bar{M}$، N و P همخط‌اند؛ از اینجا نتیجه می‌شود که $\bar{M}$ بر M منطبق است و بنابراین

$$(AM/BM)(BN/CN)(CP/AP)=۱$$

به‌طریق مشابه می‌توان کفایت شرط را از لــزوم آن استنتاج کــرد؛ این‌کار را به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم.

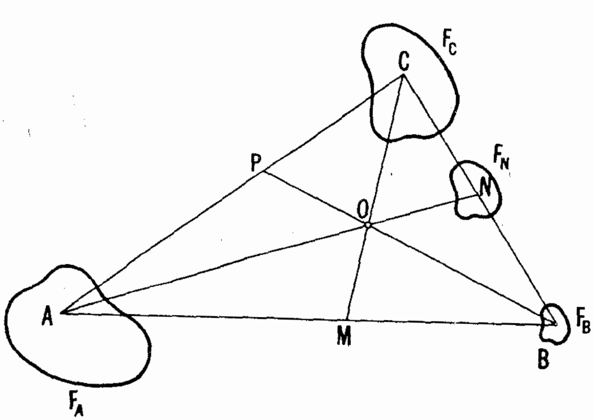
تذکر ۲. قضیهٔ منلائوس را می‌توان با تعمیم زیر ازمسألهٔ ۱۵ بخش ۲، فصل اول، جلد اول مرتبط دانست: یك n ضلعی $A_۱A_۲\ldots A_n$ رسم کنید کــه درآن نقاط $M_۱$، $M_۲$، $M_۳$، ...، M_n، که اضلاع را به نسبتهای (مثبت یامنفی) مفروضی تقسیم می‌کنند، معلوم باشند: $A_۱M_۱/A_۲M_۱=k_۱$، $A_۲M_۲/A_۳M_۲=k_۲$، ...، $A_nM_n/A_۱M_n=k_n$ (دراینجا لزومی ندارد که تعداد ضلعهای n ضلعی را فردفرض کنیم). درست مانند آنچه درراه‌حل دوم

مسألهٔ ۱۵ آمد، می‌توان ثابت کرد که اگر $k_1k_2\dots k\neq 1$، مسأله همواره جوابی یکتا دارد. اگر $k_1k_2\dots k_n=1$، درحالت کلی مسأله جوابی ندارد و به‌ازای برخی مواضع خاص M_1،M_2،... و M_n جواب مسأله نامعین خواهد بود. از اینجانتیجه می‌شود که اگر $k_1k_2\dots k_n\neq 1$، توزیع نقاط M_1، M_2، ...، M_n در صفحه به‌دلخواه خواهد بود؛ از سوی دیگر، اگر

$$k_1k_2\cdots k_n=\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\,\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\dots\frac{A_nM_n}{A_1M_n}=1$$

آنگاه این توزیع باید درشرایط خاصی صدق کند. به‌ازای $n=3$ بنا به‌قضیهٔ مربوط به سه‌مرکز تجانس، این شرایط خاص منتهی می‌شوند به‌این شرط لازم که M_1، M_2 و M_3 باید بریك خطراست باشند؛ از اینجا قضیهٔ منلائوس به‌دست می‌آید.

ب) فرض می‌کنیم خطهای CM، AN و BP دریك نقطهٔ‌مشترك O متقاطع‌اند (شکل ۹۳ ب). شکل‌دلخواه F_A را که‌شامل نقطهٔ A است درنظرمی‌گیریم وفرض می‌کنیم تجانس به‌مرکز تجانس O و نسبت $k=ON/OA$، این شکل را به‌شکل F_N بدل می‌کند (نقطهٔ A از شکل F_A متناظر است با نقطهٔ N ازشکل F_N)؛ فرض می‌کنیم تجانس به‌مرکز B وضریب $k_1=BC/BN$ شکل F_N را به F_C بدل می‌کند (نقطهٔ N ازشکل F_N متناظراست با نقطهٔ C ازشکل F_C)؛ تجانس به‌مرکز C و نسبت $k_2=CB/CN$ شکل F_N را به F_B بدل‌می‌کند (نقطهٔ N ازشکل F_N متناظراست



شکل ۹۳(ب)

با نقطهٔ B ازشکل F_B). بنا به‌قضیهٔ مربوط به‌حاصلضرب تجانسها، شکل F_C مجانس F_A است؛ همچنین مرکز تجانس هم برخط CA (C و A نقاط متناظر شکلهای F_C و F_A هستند) و هم برخط BO قرار دارد (بنـا به‌قضیهٔ مربوط به‌سه‌مرکز تجانس) یعنی بر P منطبق است و نسبت تجانس برابر است با $k_1k_2=(ON/OA)(BC/BN)$. به طورمشابه نشان داده‌می‌شود که F_B و F_A مجانس یکدیگرند به‌مرکز M و نسبت $k_1k_2=(ON/OA)(CB/BN)$. بنابراین داریم

$$\frac{PC}{PA}=\frac{ON}{OA}\cdot\frac{BC}{BN}\quad,\quad\frac{MB}{MA}=\frac{ON}{OA}\cdot\frac{CB}{CN}$$

با تقسیم معادلهٔ اول بردومی داریم:

$$\frac{PC}{PA}\cdot\frac{MA}{MB}=-\frac{CN}{BN}\quad\text{یا}\quad\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{PC}{PA}=-1$$

یعنی همان چه خواستیم اثبات کنیم.

اکنون فرض می‌کنیم که $(MA/MB)(NB/NC)(PC/PA)=-1$، ومثلا، خطهای AN و BP در نقطهٔ O متقاطع‌اند. اگر $\overline{M}$ نقطهٔ برخورد CO با AB باشد، بنابرآنچه در بالا ثابت شد $(\overline{M}A/\overline{M}B)(NB/NC)(PC/PA)=-1$، یعنی $\overline{M}$ بر M منطبق است. پس می‌بینیم که $(MA/MB)(NB/NC)(PC/PA)=-1$، پس یا AN، BP و CM متقارب‌اند یا موازی.

سرانجام، فرض می‌کنیم که AN، BP و CM همگی موازی باشند؛ $\overline{M}$ را نقطه‌ای برخط AB می‌گیریم چنان که

$$(\overline{M}A/\overline{M}B)(NB/NC)(PC/PA)=-1$$

در این‌حالت $C\overline{M}$ نمی‌تواند AN یا BP را قطع کند (زیرا درغیر این‌صورت هر سه‌خط AN، BP و $C\overline{M}$ متقارب می‌بودند)؛ پس $\overline{M}$ بر M منطبق است و داریم $(MA/MB)(NB/NC)(PC/PA)=-1$.

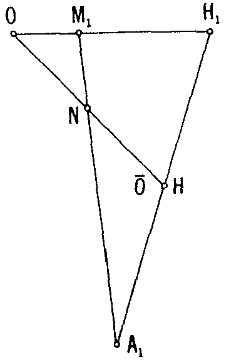
تذکر: بسادگی می‌توان دید که برهانهای مختلف قضیهٔ سوا درکل عبارت‌اند از دوکاربرد قضیهٔ منلائوس، ابتدا درموردمثلث ANC (که نقاط واقع برضلعها P، O و B هستند) و سپس درمورد ANB (باتوجه به‌اینکه نقاط واقع براضلاع، نقاط M و O و C هستند).

۲۸. الف) بنا به‌قضیهٔ مسأله ۱۸ (الف) چهارضلعی‌های $A_1A_2A_3A_4$ و $M_1M_2M_3M_4$ که در آن M_1، M_2، M_3 و M_4 مرکزهای هندسی مثلثهای $A_2A_3A_4$، $A_1A_3A_4$،$A_1A_2A_4$ و $A_1A_2A_3$ هستند، مجانس یکدیگرند با نسبت تجانس $-1/3$ (و مرکز تجانس آنها نقطهٔ N مرکز هندسی چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ است). بعلاوه، طبق نتیجهٔ مسألهٔ ۱۴ (الف) چهارضلعیهای $M_1M_2M_3M_4$ و $H_1H_2H_3H_4$ که در آن H_1، H_2، H_3، H_4 مرکز ارتفاعی همان مثلثها هستند، مجانس یکدیگرند با مرکز تجانس O، مرکز دایرهٔ S، و با نسبت تجانس $3/1$. پس چهارضلعی $H_1H_2H_3H_4$ را می‌توان از $A_1A_2A_3A_4$ بر اثر دو تجانس پیاپی با نسبتهای $k_1=-1/3$ و $k_2=3$ به‌دست آورد؛ اما حاصلضرب این دو تجانس، تجانسی است با نسبت $k_1k_2=-1$ یعنی قرینه نسبت به‌یك نقطه و به‌این ترتیب به‌حکم مسألهٔ ۳۳ (الف) ازجلد اول می‌رسیم

تذکر: ازقضیهٔ مربوط به‌سه‌مرکز تجانس نتیجه می‌شود که نقطهٔ H در مسألهٔ ۳۴ (الف) جلد اول، با نقطهٔ N مرکز هندسی، ونقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی، بریك خط واقع اند؛ بسادگی می‌توان نشان داد که N وسط OH است (← مثلا صفحهٔ ۳۶).

ب) راه‌حل قسمت (ب) شبیه راه‌حل قسمت (الف) است. دراینجا باید از این موضوع استفاده کرد که نقطهٔ $\bar{O}$ مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث، نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی، و H مرکز ارتفاعی آن سه‌نقطه‌اند واقع بریك خط، و $O\bar{O}/OH = 1/2$ (راه‌حل مسألهٔ ۱۷ (الف)).

۲۹. الف) چهارنقطهٔ A_1، A_2، A_3 و H_4 را درنظر می‌گیریم. با این نقاط می‌توان چهار مثلث $A_1A_2A_3$، $A_1A_2H_4$، $A_1A_3H_4$ و $A_2A_3A_4$ ساخت. نشان خواهیم‌داد که دایره‌های اویلر این‌مثلثها همه بریکدیگرمنطبق‌اند. در واقع‌شعاعهای دایره‌های اویلر مثلثهای $A_1A_2A_3$ و $A_2A_3H_4$ برابرند با نصف شعاع دایره‌های محیطی این‌مثلثها؛ پس بایکدیگر برابرند زیرا دایره‌های محیطی مثلثهای $A_1A_2A_3$ و $A_2A_3H_4$ نسبت به‌خط A_2A_3 متقارن‌اند [← راه‌حل مسألهٔ ۳۳ (ب) جلد اول]. بعلاوه، مرکز اولین دایرهٔ اویلر در وسط پاره‌خط H_4O واقع است که درآن O مرکز S است؛ مرکز دایرهٔ دوم در وسط پاره‌خط A_1O_1 واقع است که در آن O_1 مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A_2A_3H_4$ است (زیرا A_1 مرکز ارتفاعی $\Delta A_2A_3H_4$ است). چون نقاط وسط این پاره‌خطها برهم منطبق‌اند [چهار ضلعی $A_1H_4O_1O$ متوازی‌الاضلاع است؛← راه‌حل مسألهٔ ۳۳ (ج)، جلداول]، نتیجه‌می‌شود که‌مرکزهای



شکل ۹۴

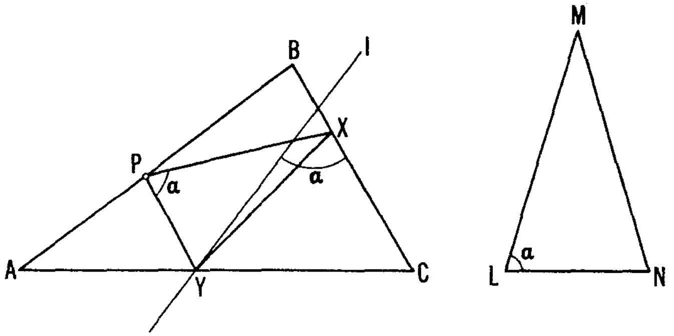
دایره‌های اویلر و درنتیجه خوداین دایره‌ها برهم منطبق‌اند. به‌همین‌ترتیب می‌توان نشان‌داد که‌دایره‌های‌اویلرمثلثهای $A_۱A_۲H_۴$، $A_۱A_۳H_۴$ و $A_۱A_۲A_۳$ برهم‌منطبق‌اند.

به‌شیوهٔ‌مشابه می‌توان‌نشان داد که‌هریك از ۳۲ دایرهٔ اویلر مورد نظر بردایرهٔ اویلر یکی از مثلثهای $A_۱A_۲A_۳$، $A_۱A_۲A_۴$، $A_۱A_۳A_۴$، $A_۲A_۳A_۴$، $H_۱H_۲H_۳$، $H_۱H_۲H_۴$، $H_۱H_۳H_۴$ و $H_۲H_۳H_۴$ منطبق است.

ب) قابلیت انطباق همهٔ این دایره‌های اویلر از نتایج مسألهٔ ۱۸ (ب) این جلد و مسألهٔ ۳۴ (الف) جلد اول ناشی می‌شود. بنابر مسألهٔ ۱۸ (ب) چهارتای این دایره‌ها درنقطهٔ مشترك $\bar{O}$ و چهارتایشان درنقطهٔ $\bar{O}'$ به‌هم می‌رسند. بعلاوه، نقاط $\bar{O}$ و $\bar{O}'$ نسبت به‌نقطهٔ H که‌وسط پاره‌خط $A_۱H_۱$ است متقارن‌اند [← مسألهٔ ۳۴ (الف) جلد اول]؛ $\bar{O}$ بر امتداد ON ازطرف نقطهٔ N قرار دارد به‌طوری که $ON=N\bar{O}$ [N نقطه‌ای‌است که پاره خط $A_۱M_۱$ رابه‌نسبت ۱:۳ $=A_۱N:NM_۱$ تقسیم می‌کند، که در آن $M_۱$ مرکز هندسی مثلث $A_۱A_۲A_۳$ است؛ ← مسألهٔ ۱۸ (ج)را ببینید]. ازاینجا و با توجه به‌اینکه۲ : ۱ $=OM_۱:M_۱H_۱$ [←مسألهٔ۱۴(الف)] نتیجه می‌شود که $\bar{O}$ بر H منطبق است (شکل ۹۴ را ببینید) و بنابراین $\bar{O}'$ بر $\bar{O}$ منطبق است.

(ج) این حکم از نتایج مسألهٔ ۳۴ (الف) جلد اول و ۲۸ (ب) این جلد بسادگی به‌دست می‌آید.

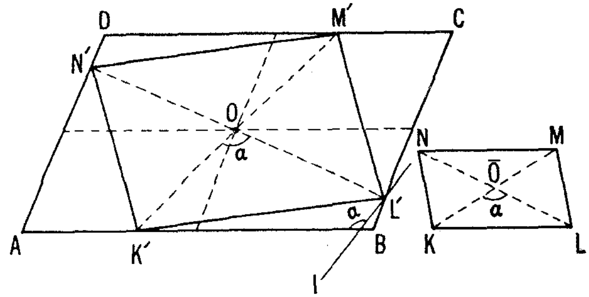
۳۵ الف) فرض‌کنید مثلث PXY را رسم کرده‌ایم (شکل ۹۵ الف). نقطهٔ



شکل ۹۵ (الف)

Y از X براثر یك تجانس مارپیچی به مرکز دوران P، زاویهٔ دوران α مساوی بـا زاویهٔ L از مثلث LMN و نسبت تجانس k مساوی بـا نسبت ضلعهـای LN/LM از این مثلث، به‌دست می‌آید. از اینجا نتیجه می‌شود کـه Y برخط l واقع است کـه از BC براثر یك تجانس مارپیچی به‌مرکز P و زاویهٔ α و نسبت k به‌دست می‌آید، و چون این نقطه برضلع AC قرار دارد، Y نقطهٔ برخورد l و CA است. اگر l با CA موازی باشد، مسأله جواب ندارد؛ اگر l بر CA منطبق باشد، جواب نامعین است.

ب) توجه کنید که اگر متوازی‌الاضلاع $K'L'M'N'$ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ محاط باشد (شکل ۹۵ ب)، نقاط برخورد قطرها (مرکزها) یعنی O' و O در دومتوازی‌الاضلاع بر یکدیگر منطبق مـی‌شوند: زیرا وسطهای قطرهـای $K'M'$ و



شکل ۹۵ (ب)

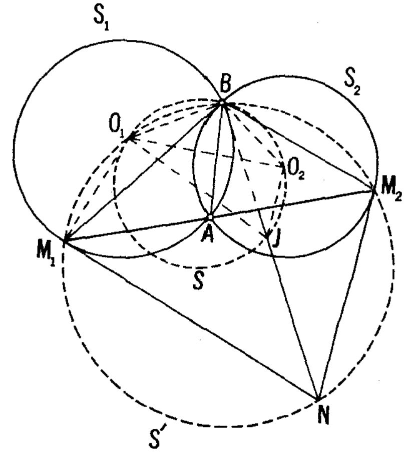
$L'N'$ برهردومیانخط* متوازی‌الاضلاع $ABCD$ واقع، یعنی برمرکز O منطبق‌اند.

اکنون فرض می‌کنیم که $K'L'M'N'$ متوازی‌الاضلاع مطلوب باشد؛ دراین حالت مثلث $K'O'L'$ متشابه است بـا مثلث $K\bar{O}L$ که درآن $\bar{O}$ مرکز $KLMN$ است. تجانس مارپیچی به‌مرکز O، وزاویهٔ دوران $K\bar{O}L$ ونسبت‌تجانس $\bar{O}L/\bar{O}K$ ضلع AB از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را به‌خط l بدل می‌کندکه نقطهٔ برخوردش باخط BC رأس L' از متوازی‌الاضلاع مطلوب را معین می‌کند [با راه‌حل قسمت (الف) مقایسه شود].

۳۱. نقطهٔ B، دومین نقطهٔ برخورد S_1 و S_2، را به‌نقاط M_1 و M_2، O_1 و O_2 وصل کنید (شکل ۹۶). مثلث BM_1M_2 بامثلث BO_1O_2 متشابـه است (زیـرا $\sphericalangle BO_1O_2 = 1/2 \sphericalangle BO_1A = \sphericalangle BM_1A$ و

$$(\sphericalangle BO_2O_1 = 1/2 \sphericalangle BO_2A = \sphericalangle BM_2A$$

بنابراین، ΔBM_1M_2 از ΔBO_1O_2 براثر یك تجانس مارپیچی به‌مرکز B وزاویهٔ دوران α مساوی با $\sphericalangle M_1BO_1$ و نسبت تجانس $k = BM_1/BD_1$ به‌دست می‌آید.



شکل ۹۶

* میانخط متوازی‌الاضلاع خطی‌است که نقاط وسط دوضلع روبرو را به‌هم وصل‌می‌کند.

S و S' دایره‌های محیطی مثلثهای $BO_۱O_۲$ و $BM_۱M_۲$ را رسم می‌کنیم؛ از آنجا که

$$\measuredangle BM_۱N + \measuredangle BM_۲N$$
$$= (\measuredangle BM_۱M_۲ + \measuredangle BM_۲M_۱) + (\measuredangle NM_۱M_۲ + \measuredangle NM_۲M_۱)$$
$$= (\measuredangle BM_۱M_۲ + \measuredangle BM_۲M_۱) + (\measuredangle M_۱BA + \measuredangle M_۲BA)$$
$$= \measuredangle BM_۱M_۲ + \measuredangle BM_۲M_۱ + \measuredangle M_۱BM_۲ = ۱۸۰^\circ$$

ملاحظه می‌کنیم که S' از نقطهٔ N می‌گذرد؛ و چون

$$\measuredangle O_۱BO_۲ + \measuredangle O_۱JO_۲ = \measuredangle M_۱BM_۲ + \measuredangle M_۱NM_۲ = ۱۸۰^\circ$$

می بینیم که S ازنقطهٔ J می‌گذرد. بعلاوه، داریم

$$\measuredangle NBM_۱ = \measuredangle NM_۲M_۱, \quad \measuredangle JBO_۱ = \measuredangle JO_۲O_۱$$

پس تفاضل‌زاویه‌های $NBM_۱$ و $JBO_۱$ با تفاضل‌زاویه‌های $NM_۲M_۱$ و $JO_۲O_۱$ برابر است. این تفاضل با توجه به‌توازی $M_۲N$ و $O_۲J$ برابراست با زاویهٔ بین پاره‌خطهای $M_۲M_۱$ و $O_۲O_۱$ که باتجانس مارپیچی فوق‌الذکر به‌یکدیگر مربوط می‌شوند. بنابراین تفاضل زاویه‌های $NBM_۱$ و $JBO_۱$ برابر است با زاویهٔ بین $M_۲M_۱$ و $O_۲O_۱$، یعنی زاویهٔ دوران α. اما باتوجه به‌اینکه

$$\measuredangle NBM_۱ - \measuredangle JBO_۱ = \alpha = \measuredangle M_۱BO_۱$$

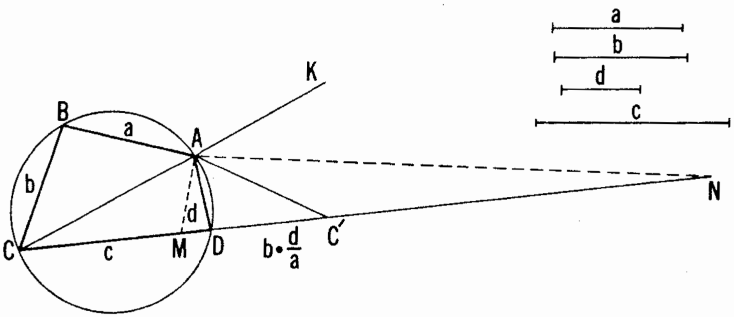
نتیجه می گیریم که خط NJ از B می گذرد یعنی حکم اول اثبات می‌شود.

برای اثبات حکم دوم کافی است توجه‌کنیم کــه $JO_۱ \| NM_۱ \perp O_۱M_۱$ و $\measuredangle JNM_۱ = \measuredangle M_۱M_۲B = \measuredangle O_۱O_۲B$؛ بنابراین ملاحظه می کنیم که پاره خط JN با خط $O_۱M_۱$ زاویهٔ $۹۰^\circ - \measuredangle O_۱O_۲B$ تشکیل مـی‌دهد وتصویر قائم JN روی این‌خط پاره‌خط $O_۱M_۱$ باطول ثابت $r_۱$ است ($r_۱$ شعاع $S_۱$ است). بنابراین

$$JN = r_۱ \cos(۹۰^\circ - \measuredangle O_۱O_۲B) = r_۱ \sin \measuredangle O_۱O_۲B$$

و روشن است که این‌امر بستگی به‌انتخاب خط $M_۱AM_۲$ ندارد.

۳۲. الف) فرض کنید کــه چهارضلعی $ABCD$ رسم شده است (شکل ۹۷ الف). تجانس مــارپیچی به‌مرکز A، نسبت تجــانس d/a و زاویهٔ دوران BAD



شکل ۹۷ (الف)

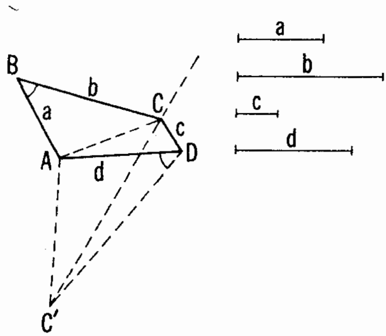
مثلث ABC را به‌مثلث ADC' بدل‌می‌کند که درآن C' برامتداد CD واقع است (زیـرا $\measuredangle ADC + \measuredangle ABC = ۱۸۰^\circ$). در مثلث ACC' پاره‌خطهـای $CD = c$، $DC' = bd/a$، $DA = d$ ونسبت ضلعهای $AC'/AC = d/a$ معلوم‌اند؛ لذا مثلث را می‌توان رسم کرد. [پاره‌خط CC' را جدامی‌کنیم. نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی مثلث ACC' در رأس A خط CC' را در نقاط M و N قطع مـی‌کنند به‌طوری که $C'M/CM = C'N/CN = d/a$؛ این نقاط را مـی‌توان به‌دست آورد. چون $\measuredangle MAN = ۹۰^\circ$، ازآنجا نتیجه می‌شود که A نقطهٔ برخـورد دایرهٔ به‌قطر MN با دایرهٔ به‌مرکز D و شعاع d است.] با ترسیم مثلث ABC به‌اضلاع $AB = a$ و $CB = b$ روی پاره‌خط AC، چهارضلعی مطلوب به‌دست می‌آید.

مسأله یا دقیقاً یك‌جواب دارد یا اصلا جوابی ندارد.

ب) راه‌حـل ایـن‌قسمت شبیه قسمت (الف) است. فـرض کنید چهارضلعی $ABCD$ رسم شده‌است (شکل ۹۷ ب)؛ تجانس مارپیچی به‌مرکز A، نسبت تجانس d/a و زاویهٔ‌دوران BAD مثلث ABC را به‌مثلث ADC' بدل می‌کند که درآن نقطهٔ C' با توجه به‌تساویهای $\measuredangle CDC' = \measuredangle B + \measuredangle D$ و $DC' = b \cdot d/a$ معین می‌شود. بارسم مثلث CDC' می‌توانیم A را از برخورد دایره‌ای به‌قطر پـاره‌خط MN (که درآن M و N نقاطی ازخط CC' هستند چنان که

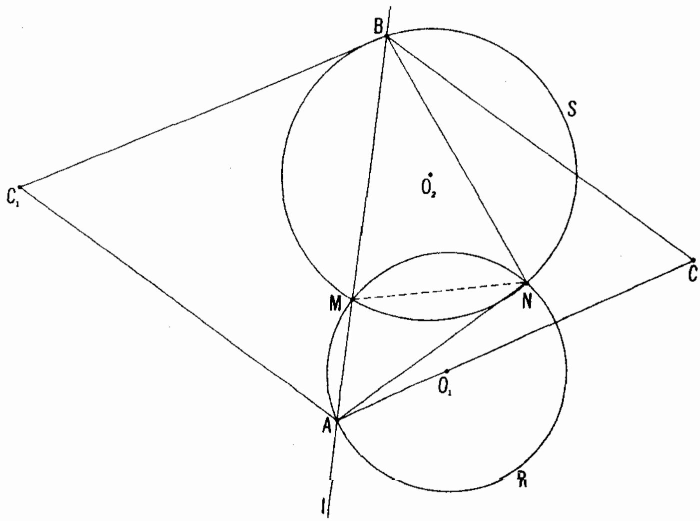
$$(C'M/CM) = C'N/CN = d/a$$

و دایرهٔ به‌مرکز D وشعاع d به‌دست آوریم.



شکل ۹۷ (ب)

۳۳. دومین نقطهٔ برخورد دایره‌های R و S را با N نشان‌می‌دهیم و N را به A و به B وصل می‌کنیم (شکل۹۸). ملاحظه می‌کنیم کــه $\measuredangle BAN$ و $\measuredangle ABN$ به‌انتخاب خط l بستگی ندارند: در واقع $\measuredangle MAN = \measuredangle BAN$ و زاویهٔ BAN با وتر ثابت MN مشخص‌می‌شود؛ همچنین داریم $\measuredangle MBN = \measuredangle ABN$. بنابراین



شکل ۹۸

سومین زاویـهٔ مثلث ABN یعنی $\measuredangle ANB=\phi$ بـه‌انتخاب l بستگی ندارد. (این استدلال کامل نیست. روی شکل تنها حالتی را درنظر گرفته‌ایم که M بین A و B باشد. امـا اگر A درطرف دیگر MN قرار داشت، A بین B و M واقع می‌شد؛ اگر B درطرف دیگر MN بود، B بین A و M واقع می‌شد. تکمیل استدلال را با درنظرگرفتن این دو حالت به‌خواننده وا می‌گذاریم.) توجه داریم که زاویهٔ ϕ را می‌توان برحسب α، زاویهٔ بین دودایرهٔ R و S، به‌دست آورد (برای تعریف زاویهٔ بین دو دایره، ← حکم مسألهٔ ۳۴ درصفحهٔ ۴۸). در واقع چـون زاویه‌هـا به‌انتخاب خط l بستگی ندارند، l را عمودبر MN اختیار می‌کنیم. دراین‌صورت NA و NB برقطرهای NO_1A و NO_2B منطبق مـی‌شوند (O_1، O_2 مرکز R و S) وبنابراین یا $\phi=\measuredangle O_1NO_2=\alpha$، یا $\phi=180^\circ-\alpha$.

بـعلاوه، چون زاویـه‌هـای ΔANB به‌انتخاب l بستگی ندارنـد، نسبت $NB/NA=k$ نیز بـه‌آن بستگی نخواهد داشت. پس، B از A بر اثر یك تشابه مارپیچی به مرکز N، زاویهٔ دوران ϕ، و نسبت تجانس k به‌دست می‌آید. (بسادگی می‌توان دیدکه نسبت تجانس $k=NB/NA$ برابرست با r_2/r_1، نسبت شعاعهای RوS: زیرا اگر l راعمودبر MN اختیار کنیم، داریم $NB=2r_2$ و$NA=2r_1$. دلیل دیگری برای این‌امر آن‌است‌که تجانس مارپیچی بانسبت k دایرهٔ R به‌شعاع r_1 را به‌دایرهٔ S به‌شعاع r_2 بدل می‌کند.)

اکنون روشن است کـه اگـر نقطهٔ Q پـاره‌خط AB را بـه‌نسبت ثـابت $AQ/QB=m/n$ تقسیم کند، شکل مثلث ANQ بـه انتخـاب خط l بستگی پیدا نمی‌کند؛ به‌عبارت‌دیگر، نه زاویهٔ $\measuredangle ANQ=\phi_1$ ونه نسبت $NQ/NA=k_1$ هیچ یك به l بستگی ندارند. بنابراین Q از A براثر یك تجانس مارپیچی به‌مرکز N، زاویـهٔ دوران ϕ_1 و نسبت تجانس k_1 به‌دست مـی‌آید. بنابراین مکان هندسی همهٔ این نقاط Q دایره‌ای است کـه از دایرهٔ R (مـکان هندسی نقطهٔ A) براثر تجانس مذکور به‌دست می‌آید.

مسألهٔ مکان هندسی‌رأس C از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را هم‌که برقاعدهٔ AB بناشود و همیشه دریك طرف l باشد، کم‌و بیش به‌همین روش مـی‌توان حل کرد (مثلث ABC یا همیشه‌درهمان‌طرف l که N هست قرار دارد یا همیشه نسبت به N درطرف دیگر l واقع است). دراینجا هم شکل ΔANC به‌انتخاب l بستگی ندارد. بنابراین، مکان هندسی مطلوب یك دایره است‌که براثر تجانسی مارپیچی از دایرهٔ R به‌دست می‌آید. اگر، همان‌طورکه درصورت مسأله آمده، لازم ندانیم که نقطهٔ C همیشه در یك‌طرف l باشد، آنگاه مـکان‌هندسی مطلوب متشکل از دو دایره

خواهد بود: یکی از آنها مکان آن‌دسته از نقاط C است که با N در یک طرف l واقع‌اند، و دیگری مکان هندسی نقاط C_1 است که با N در دوطرف l واقع‌اند (← شکل ۹۸). (اگر دایره‌های R و S متساوی باشند و اگر $\measuredangle O_1NO_2=60^\circ$، آنگاه دایره‌ای که توسط C_1 پیموده می‌شود به‌نقطهٔ N بدل می‌شود.)

قسمت (ج)، هم به‌روش مشابهی حل می‌شود. پاره‌خط NP_1 را موازی با AB و هم‌طول و همجهت با AB رسم می‌کنیم. بدیهی است که‌زاویه $\measuredangle ANP_1=\phi_2$ و نسبت $NP_1/NA=k_2$ به‌انتخاب l بستگی ندارند. پس‌مکان‌هندسی این نقاط P_1 دایره‌ای است که از R براثر تجانس مارپیچی به‌مرکز N، زاویهٔ چرخش ϕ_2 و ضریب تجانس k_2 به‌دست می‌آید. این دایره قابل‌انطباق است با دایرهٔ به‌شعاع OP حاصل از جداکردن پاره‌خط OP به‌موازات AB، مساوی و همجهت با آن، از نقطهٔ ثابت دلخواه O و در نظر گرفتن مکان هندسی نقاط P که بدین‌ترتیب به‌دست می‌آیند.

تذکر: نکتهٔ اصلی درحل مسألهٔ ۳۳ (الف) تا (ج) این بودکه دایره‌های R و S ازیکدیگر براثر یك تجانس مارپیچی به‌دست‌می‌آمدند که نقطهٔ A از R را به‌نقطهٔ B از S بدل می‌کرد. به‌همین روش می‌توان نشان داد که اگر R شکل دلخواهی باشد و اگر S از R براثر یك‌تجانس مارپیچی به‌دست‌آیدکه نقطهٔ A_1 از R را به‌نقطهٔ B_1 از S بدل می‌کند، آنگاه مکان هندسی

الف) نقاط Q که پاره خط AB را به نسبت مفروض $AQ:QB=m:n$ تقسیم می‌کنند؛

ب) رأسهای C ازمثلثهای‌متساوی‌الاضلاع ABC، مرسوم برپاره‌خط AB، که هم اندازهٔ زاویهٔ $\measuredangle BAC$ از آنها مقدار ثابت 60° است وهم‌جهت دوران آنها (از نیمخط AB به‌نیمخط AC) ثابت است؛

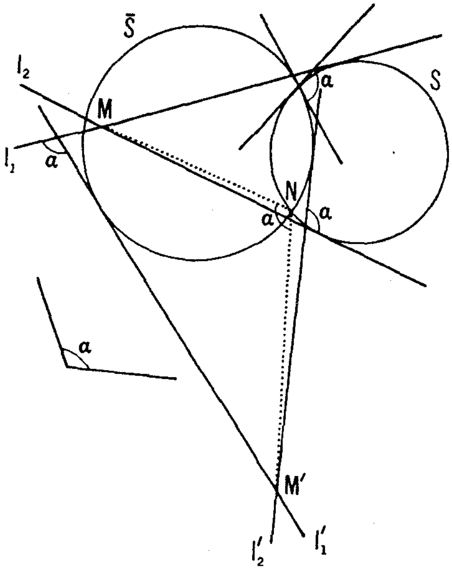
ج) نقاط P، منتهای پاره‌خطهای OP که از نقطهٔ‌ثابت O به‌موازات پاره‌خط AB و مساوی و همجهت با آن جدا می‌شوند، شکلی است متشابه با R و S.*

برهان این قضیه درست مانند راه‌حل مسألهٔ ۳۳ است. ما از این تذکر بعداً استفاده خواهیم کرد.

۳۴. فرض می‌کنیم که مسأله حل‌شده است (شکل ۹۹). تجانس مارپیچی

---

* یا به‌یك نقطه بدل می‌شود.



شکل ۹۹

به‌مرکز N، نقطهٔ برخورد $\bar{S}$ با S، زاویهٔ دوران α، و نسبت تجانسی برابر بانسبت شعاعهای دودایرهٔ $\bar{S}$ و S، دایرهٔ S را به $\bar{S}$ بدل می‌کند. براثر این تبدیل l_1 و l_2 به خطهای l'_1 و l'_2 بدل می‌شوند کــه بر $\bar{S}$ مماس‌اند و زاویهٔ بین l'_1 و l_1 مساوی α وزاویــهٔ بین l'_2 و l_2 مساوی α است؛ M نقطــهٔ بــرخورد l_1 و l_2، به M'، نقطهٔ برخورد l'_1 و l'_2، بدل می‌شود.* درنتیجه $\sphericalangle MNM' = \alpha$.

سرانجام به‌این ترسیم می‌رسیم: مماسهای l'_1 و l'_2 بر $\bar{S}$ را کــه بترتیب بــا l_1 و l_2 زاویهٔ α می‌سازند رسم می‌کنیم؛ نقطهٔ برخورد l'_1 و l'_2 را M' می‌نامیم و نقطهٔ برخورد $\bar{S}$ را بــا دایرهٔ دیگر ماربر دونقطهٔ M و M' و حاوی زاویهٔ α، N

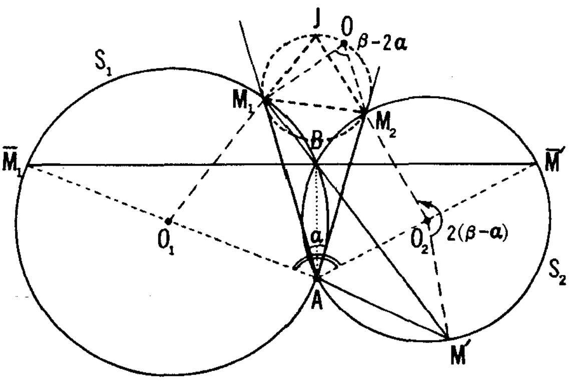
---

* اگر $l_1 \| l_2$؛ حل مسألــه خیلی ساده‌تر می‌شود، زیرا دراین‌صورت می‌توانیم اندازهٔ r شعاع دایرهٔ مطلوب را مستقیماً به‌دست‌آوریم؛ مرکز دایرهٔ به‌شعاع r که S را به‌زاویهٔ α قطع می‌کند روی یکی از دو دایرهٔ کاملا مشخص هم‌مرکز با $\bar{S}$ واقع است. در این‌حالت مسأله تا چهارجواب می‌تواند داشته‌باشد.

می‌نامیم. تجانس‌مارپیچی به‌مرکز N، وزاویهٔ‌دوران α ونسبت‌تجانس NM'/NM دایرهٔ $\bar{S}$ را به‌دایرهٔ مطلوب S بدل‌می‌کند. مسأله می‌تواند تاهشت جواب داشته‌باشد.

۳۵. نقاط برخورد خطهای موردنظر را A، B، C، D، E، F می‌نامیم (← شکل ۳۲متن). نقطهٔ O مرکزتجانس مارپیچی که AB را به EF بدل می‌کند از برخورد دایره‌های محیطی‌مثلثهای AEC و BFC، یا برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای ABD و EFD یافته می‌شود (←شکل۳۰ب و ۳۱ صفحات ۵۳و۵۴). از اینجا نتیجه می‌شود که این چهار دایره درنقطهٔ مشترکی یکدیگر را قطع می‌کنند.

۳۶. الف) چگونگی‌به‌دست‌آوردن نقطهٔ M_2 ازنقطهٔ M_1 را نشان می‌دهیم. M_1 را به B، نقطهٔ برخورد دوم S_1 و S_2، وصل می‌کنیم؛ نقطهٔ برخورد M_1B و S_2، را M' می‌نامیم (شکل ۱۰۰). صرفنظراز جای زاویهٔ مفروض α، M' همیشه از M براثر تجانس مارپیچی ثابتی به‌دست می‌آید؛ زیرا شکل مثلث M_1AM' به‌جای M_1 بستگی ندارد (زاویهٔ AM_1M' نصف کمان AB از دایرهٔ S_1 است و زاویهٔ $AM'M_1$ نصف‌کمان AB از دایرهٔ S_2). با ترسیم $\bar{M}_1\bar{M}' \perp AB$ (که درآن $A\bar{M}_1$ و $A\bar{M}'$ قطرهایی از دو دایره‌اند)، به‌آسانی‌می‌توان دیدکه مقدار β، زاویهٔ دوران این تجانس مارپیچی، برابر است با $\measuredangle O_1AO_2$ و نسبت تجانس آن AO_2/AO_1 است. بعلاوه $\measuredangle M'AM_2=\beta-\alpha$* و $\measuredangle M'O_2M_2=2(\beta-\alpha)$. پس M_2 از M_1 براثر یك تجانس مارپیچی به‌مرکز A، زاویهٔ دوران β و نسبت



شکل ۱۰۰

* یا $\alpha-\beta$ (← پانوشت اول مربوط به‌قضیهٔ ۳، فصل سوم، جلد اول).

تجانس k (که M_1 را به M' بدل می‌کند) و به‌دنبال آن، دورانی به‌مرکز O_2 و زاویهٔ دوران $2(\beta-\alpha)$ (که M' را به M_2 بدل می‌کند) به‌دست می‌آید. اما مجموع این دوتبدیل، یك تجانس مارپیچی است به‌مرکز O، با نسبت تجانس k و زاویهٔ دوران $-\beta+2(\beta-\alpha)=\beta-2\alpha$ (درشکل ۱۰۰ جهت دوران از AM_1 به AM' و از Q_2M' به O_2M_2 خلاف یکدیگر است). اکنون تنها کافی است توجه کنیم که

$$\sphericalangle M_1JM_2=\sphericalangle AM_1M_2+\sphericalangle AM_2M_1=\sphericalangle O_1M_1A+O_2M_2A-180^\circ$$
$$=(180-\sphericalangle M_1AM_2)+(\sphericalangle O_1AM_1+\sphericalangle O_2AM_2)-180^\circ$$
$$=(180^\circ-\alpha)+(\beta-\alpha)-180^\circ=\beta-2\alpha$$

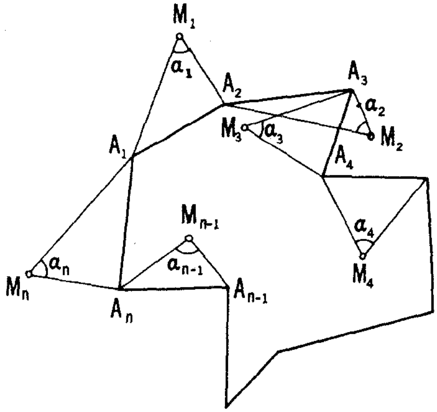
و در نتیجه، دایرهٔ محیطی ΔM_1M_2J از O می‌گذرد.

ب) تجانس مارپیچی به‌مرکز A و زاویهٔ دوران $\beta=\sphericalangle O_1AO_2$ و نسبت تجانس $k=AO_2/AO_1$ نقطهٔ O_1 را به O_2 بدل می‌کند؛ دورانی دیگر حول O_2 و به اندازهٔ زاویهٔ $2(\beta-\alpha)$ نقطهٔ O_2 را ثابت نگاه می‌دارد. بنابراین

$$\sphericalangle O_1OO_2=\beta-2\alpha \qquad \text{و} \qquad OO_2/OO_1=AO_2/AO_1$$

[$\leftarrow$ راه‌حل قسمت (الف)]. چون نسبت $OO_2/OO_1=AO_2/AO_1$ ثابت است، مکان هندسی نقاط O یك دایره است ($\leftarrow$ پانویس صفحهٔ ۴۹)؛ این دایره از نقاط A (که در حالت $\alpha=\beta$، بر O منطبق است) و B (که درحالت $\alpha=0$، بر O منطبق است) می‌گذرد.

۳۷. فرض می‌کنیم $A_1A_2\ldots A_n$، n ضلعی مطلوب باشد (شکل ۱۰۱). بنابر فرضهای مسأله، نقاط M_1، M_2، ...، M_n داده شده‌اند، اندازه‌های زاویه‌های $A_1M_1A_2=\alpha_1$، $A_2M_2A_3=\alpha_2$، ...، $A_nM_nA_1=\alpha_n$ و نیز نسبتهای $M_1A_2/M_1A_1=k_1$، $M_2A_3/M_2A_2=k_2$، ...، $M_nA_1/M_nA_n=k_n$ معلوم‌اند. اکنون تبدیلهای زیر را به‌دنبال هم انجام می‌دهیم: تجانس مارپیچی به‌مرکز M_1، زاویهٔ دوران α_1 و نسبت تجانس k_1، تجانس‌مارپیچی به‌مرکز M_2، زاویهٔ دوران α_2 و نسبت تجانس k_2 وقس علیهذا، و در پایان تجانس مارپیچی به‌مرکز M_n، زاویهٔ دوران α_n و نسبت k_n. بر اثر این تبدیلها نقطهٔ A_1 متوالیاً درمواضع A_2، A_3، ...، A_n ونهایتاً در A_1 قرار می‌گیرد. پس A_1 نقطهٔ ثابتی است برای حاصلضرب n تجانس مارپیچی به‌مرکزهای M_1، M_2، ...، M_n، به‌زاویه‌های دوران α_1، α_2، ...، α_n وبا نسبتهای تجانس k_1، k_2، ...، k_n.



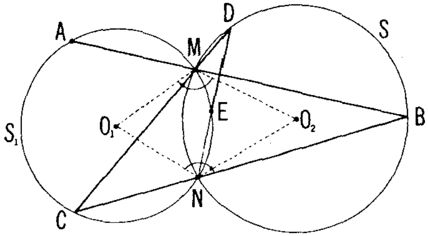
شکل ۱۰۱

این حاصلضرب تجانسهای مارپیچی در کل بیانگر یك تجانس مارپیچی جدید (به‌زاویهٔ دوران $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$ و ضریب تجانس $k_1k_2\dots k_n$) است. چون تنها نقطهٔ ثابت هر تجانس‌مارپیچی مرکز آن‌است، نتیجه می گیریم که A_1 باید مرکز تجانس مارپیچی براینده باشد. برای یافتن آن می‌توان $n-1$ بار مرکز تجانس مارپیچی داده شده به‌صورت حاصلضرب دو تجانس مارپیچی معلوم را به‌دست آورد (← صفحات ۵۲ و ۵۳). حتی ساده‌تر آن است که پاره خط $B'C'$ حاصل از پاره‌خط دلخواه BC براثر حاصلضرب n تجانس‌مارپیچی دلخواه را بیابیم و سپس مرکز تجانس مارپیچی که BC را به $B'C'$ بدل می کند پیدا کنیم (← صفحات ۵۳ و ۵۴). با داشتن A_1 براحتی می‌توان مابقی n ضلعی را پیدا کرد.

اگر $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$ مضربی از 360° باشد و اگر $k_1k_2\dots k_n=1$، آنگاه حاصلضرب این تجانسهای مارپیچی یك انتقال است. چون هر انتقال فاقد نقاط ثابت است، مسأله در این‌حالت جوابی ندارد.

ممکن است درحالتی حاصلضرب تجانسهای مارپیچی یك‌تبدیل همانی شود (انتقالی به‌مسافت‌صفر). دراین حالت مسأله نامعین است؛ در نتیجه هر نقطهٔ دلخواه از صفحه را می‌توان رأس A_1 از nضلعی مطلوب درنظر گرفت.

۳۸. الف) نقطهٔ B از نقطهٔ A براثر یك تجانس مارپیچی به‌مرکز N، نسبت تجانس $k_1=r_2/r_1$، (r_1 و r_2 شعاعهای دایره‌های S_1 و S_2) و با زاویهٔ دوران $\measuredangle O_1NO_2$ که‌درآن O_1 و O_2 مرکزهای‌دایره‌های S_1 و S_2 هستند به‌دست‌می‌آید

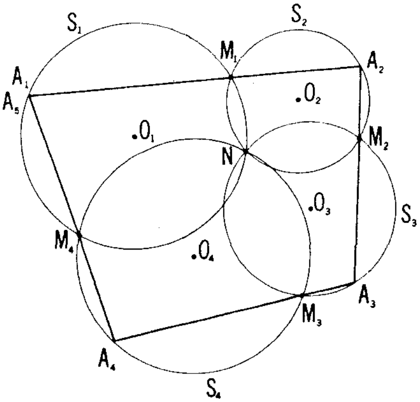


شکل ۱۰۲

(← راه‌حل مسألهٔ ۳۳). به‌همین ترتیب، نقطهٔ C از B بر اثر یك تجانس مارپیچی با مرکز M، نسبت $k_2=r_1/r_2$ و زاویهٔ دوران $\sphericalangle O_2MO_1$ به دست می‌آید (شکل ۱۰۲). حاصلضرب این دو تبدیل تجانسی A را به C بدل می‌کند، اما حاصلضرب دو تجانس مارپیچی نیز یك تجانس مارپیچی است با نسبت $k=k_1k_2=(r_2/r_1)(r_1/r_2)=1$ وزاویهٔ دوران $\sphericalangle O_1NO_2+\sphericalangle O_2MO_1=2\sphericalangle O_1NO_2$ $(\sphericalangle O_2MO_1=\sphericalangle O_1NO_2)$ زیرا M و N نسبت به خط O_1O_2 قرینه هستند). این تجانس مارپیچی درواقع یك دوران معمولی است زیرا نسبت تجانس آن $k=1$؛ مرکز این دوران نقطهٔ O_1 مرکز S_1 است زیرا این دوران نقطهٔ دلخواه A از S_1 را به‌یك نقطهٔ C از S_1 بدل می‌کند، یعنی S_1 را به‌خودش بدل می‌کند. سرانجام، درست همان‌طور که C از A بر اثر دورانی حول O_1 به زاویهٔ $2\sphericalangle O_1NO_2$ به‌دست آمد، نقطهٔ E هم از C بر اثردورانی حول O_1 به زاویهٔ $2\sphericalangle O_1NO_2$ به دست می‌آید. پس E از A بر اثردورانی حول O_1 به‌زاویهٔ $4\sphericalangle O_1NO_2$ به‌دست می‌آید. حکم قسمت (الف) از اینجا نتیجه می‌شود که زاویهٔ $4\sphericalangle O_1NO_2$ به‌محل A بستگی ندارد.

ب) اگر $4\sphericalangle O_1NO_2=360°$، یعنی اگر $\sphericalangle O_1NO_2=90°$، آنگاه E بر A منطبق خواهد شد. به‌عبارت دیگر، E بر A منطبق است اگر دو دایرهٔ S_1 و S_2 متعامد باشند، یعنی اگر زاویهٔ بین S_1 و S_2، $90°$ باشد.

۳۹. الف) A_2 از A_1 بر اثر یك تجانس مارپیچی به مرکز N، نسبت $k_1=r_2/r_1$، و زاویهٔ دوران $\sphericalangle O_1NO_2$ به‌دست می‌آید؛ A_3 از A_2 بر اثر یك تجانس مارپیچی به‌همان مرکز و نسبت $k_2=r_3/r_2$ و زاویهٔ دوران $\sphericalangle O_2NO_3$ به‌دست‌می‌آید؛ A_4 از A_3 بر اثر یك تجانس‌مارپیچی به‌مرکز N، نسبت $k_3=r_1/r_3$ و زاویهٔ دوران $\sphericalangle O_3NO_1$ به‌دست می‌آید؛ در اینجا O_1، O_2 و O_3 مرکزهای دایره‌های S_1، S_2 و S_3، و r_1، r_2، r_3 شعاعهای آنها هستند (← راه حل مسألهٔ ۳۳). حاصلضرب این سه تجانس مارپیچی یك انتقال است، زیرا



شکل ۱۰۳

$$k_۱k_۲k_۳=\frac{r_۲r_۳r_۱}{r_۱r_۲r_۳}=۱ \quad \text{و} \quad \sphericalangle O_۱NO_۲+\sphericalangle O_۲NO_۳+\sphericalangle O_۳NO_۱=۳۶۰^\circ$$

بعلاوه، چون این انتقال هر نقطهٔ $A_۱$ از دایرهٔ $S_۱$ را به‌یك نقطهٔ $A_۴$ از همان دایره بدل می‌کند، یعنی $S_۱$ را به‌خودش بدل می‌کند، باید تبدیل همانی باشد. پس $A_۴$ از $A_۱$ براثر تبدیل همانی به‌دست می‌آید، یعنی $A_۴=A_۱$.

روشن است که نتیجهٔ این مسأله را می‌توان برای تعداد دلخواهی از دایره‌ها که در یك نقطهٔ مشترك متقاطع‌اند، تعمیم داد. مثلاً، درشکل ۱۰۳ چهاردایره نشان داده‌شده که در یك نقطهٔ‌مشترك متقاطع‌اند. نقطهٔ $A_۵$ از نقطهٔ $A_۱$ براثر چهار تجانس مارپیچی به‌دست می‌آید؛ اما این حاصلضرب یك تبدیل همانی است و بنابراین $A_۵=A_۱$.

ب) فرض می‌کنیم O_i معرف مرکز دایرهٔ S_i باشد و r_i معرف شعاع آن، که درآن اندیس i می‌تواند هریك ازسه مقدار ۱، ۲، ۳ را اختیار کند. نقطهٔ $A_۲$ از $A_۱$ براثر یك تجانس مارپیچی به‌مرکز $N_۱$، نسبت $k_۱=r_۲/r_۱$، و زاویهٔ دوران $\sphericalangle O_۱N_۱O_۲$ به‌دست می‌آید (← راه‌حل مسألهٔ ۳۳). به‌همین ترتیب، نقاط $A_۳$ از $A_۲$، $A_۴$ از $A_۳$، $A_۵$ از $A_۴$، $A_۶$ از $A_۵$ و $A_۷$ از $A_۶$ براثر یك تجانس‌مارپیچی به‌مرکز $N_۲$، نسبت $k_۲=r_۳/r_۲$، زاویهٔ دوران $\sphericalangle O_۲NO_۳$؛ به‌مرکز $N_۳$، نسبت $k_۳=r_۱/r_۳$، زاویهٔ‌دوران $\sphericalangle O_۳N_۳O_۱$؛ به‌مرکز $M_۱$، نسبت $k_۴=r_۲/r_۱(=k_۱)$، و زاویهٔ دوران $\sphericalangle O_۱M_۱O_۲$؛ به مرکز $M_۲$، نسبت $k_۵=r_۳/r_۲(=k_۲)$، زاویهٔ

دوران $\sphericalangle O_۲M_۲O_۳$؛ بـه مرکز $M_۳$، نسبت $k_۶ = r_۱/r_۳ (= k_۳)$، زاویـهٔدوران $\sphericalangle O_۳M_۲O_۱$ بهدست می‌آیند. پس $A_۷$ از $A_۱$ براثر شش تجانس مارپیچی متوالی بهدست می‌آید.

حاصلضرب سه‌تای اول اینها یک‌دوران معمولی است زیرا

$$k_۱k_۲k_۳ = \frac{r_۲}{r_۱}\,\frac{r_۳}{r_۲}\,\frac{r_۱}{r_۳} = ۱$$

این دوران نقطهٔ دلخواه $A_۱$ از دایرهٔ $S_۱$ را به‌نقطهٔ $A_۴$ از همان دایره بدل می‌کند، یعنی $S_۱$ را به‌خودش بدل‌می‌کند. پس‌حاصلضرب سه‌تجانس‌مارپیچی اول دورانی است حول $O_۱$، به‌زاویهٔ

$$\alpha = \sphericalangle O_۱N_۱O_۲ + \sphericalangle O_۲N_۲O_۳ + \sphericalangle O_۳N_۳O_۱$$

به‌همین ترتیب حاصلضرب سه تجانس مـارپیچی آخر نیز دورانـی است حول $O_۱$ به‌زاویهٔ

$$\beta = \sphericalangle O_۱M_۱O_۲ + \sphericalangle O_۲M_۲O_۳ + \sphericalangle O_۳M_۳O_۱$$

حاصلضرب شش‌تجانس مارپیچی اولیه همان حاصلضرب این دو دوران است حول $O_۱$، وبنابراین خودنیز دورانی‌است حول $O_۱$ به‌زاویهٔ $\alpha + B$. اکنون‌نشان‌می‌دهیم که $\alpha + \beta = ۰$. درواقع

$$\sphericalangle O_۱N_۱O_۲ = -\sphericalangle O_۱M_۱O_۲$$

$$\sphericalangle O_۲N_۲O_۳ = -\sphericalangle O_۲M_۲O_۳$$

$$\sphericalangle O_۳N_۳O_۱ = -\sphericalangle O_۳M_۳O_۱$$

و بنابراین $\alpha = -\beta$ (← شکل ۳۵ ب).

بنابراین حاصلضرب شش تجانسی مارپیچی فوق، دورانی حول $O_۱$ به‌زاویهٔ صفر، یعنی تبدیل همانی است. چون‌این تبدیل $A_۱$ را به $A_۷$ بدل می‌کنیم، پس نشان داده‌ایم که $A_۱ = A_۷$.

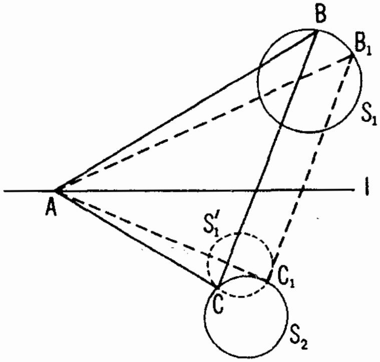
نتیجهٔاین مسأله را می‌توان‌برای حالت مربوط به‌تعداد دلخواهی ازدایره‌های دو به‌دو متقاطع تعمیم داد.

۴۰. الف) ابتدا فرض مـی‌کنیم l دایره‌ای باشد باشعاعی بسیار بزرگتر از شعاع دایره‌های $S_۱$ و $S_۲$، و نتیجهٔ مسألهٔ ۳۹ (ب) را اعمال می‌کنیم. اگر شعاع l را به‌طور نامحدود بزرگتر و بزرگتر کنیم به‌طوری کـه l بتدریج به‌صورت خط

راستی متقاطع با دایره‌های S_1 و S_2 درآید، درحالت حدی‌نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید (⟵ راه‌حل مسأله ۲۴).

ب) نتیجهٔ بخش (الف) به‌صورت نتیجهٔ بخش (ب) درمی‌آید اگرخط l را طوری حرکت دهیم که نقاط K و L برهم و نقاط P و Q برهم منطبق شوند، یعنی اگر l را طوری حرکت دهیم که به مماس مشترك دایره‌های S_1 و S_2 بدل شود.

۴۱. فرض‌می‌کنیم که ΔABC رسم شده است (شکل ۱۰۴). نقطهٔ B براثر قرینه‌یابی تجانسی به‌مرکز A، محور l و نسبت‌تجانس n/m، به‌نقطهٔ C بدل می‌شود. بنابراین C هم‌روی دایرهٔ S_2 وهم‌روی دایرهٔ S_1' حاصل از S_1 براثر این‌قرینه‌یابی تجانسی قراردارد (شکل ۱۰۴). مسأله می‌تواند دارای دوجواب، یك جواب، یا بی‌جواب باشد.



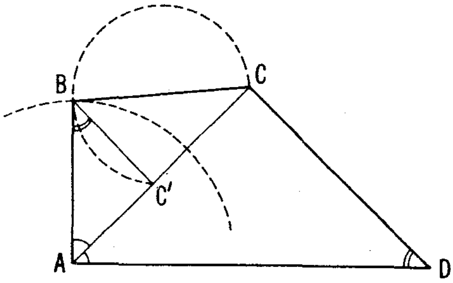
شکل ۱۰۴

۴۲. فرض کنید که چهارضلعی $ABCD$ رسم شده است. قرینه‌یابی تجانسی به‌مرکز A، محور AC و نسبت تجانس AB/AD مثلث ADC را به‌مثلث ABC' بدل می‌کند (شکل ۱۰۵).

الف) AC و $AC' = AC(AB/AD)$ معلوم‌اند؛ در نتیجه می‌توانیم این پاره‌خطها را روی خطی جداکنیم. بعلاوه، $\measuredangle ADC = \measuredangle ABC'$؛ بنابراین زاویهٔ

$$\measuredangle C'BC = \measuredangle ABC - \measuredangle ADC = \measuredangle B - \measuredangle D$$

معلوم است؛ بنابراین B را می‌توان از برخورد کمان‌دایرهٔ درخور زاویهٔ $\measuredangle B - \measuredangle D$



شکل ۱۰۵

مرسوم بر وتر CC'* با دایرهٔ به‌مرکز A و به‌شعاع AB به‌دست آورد.

اکنون به‌راحتی‌می‌توان رأس D را به‌دست آورد. مسأله حداکثر یك جواب دارد.

ب) چون ضلعهای BC و $BC'=DC\,(AB/AD)$ و زاویهٔ

$$\measuredangle C'BC=\measuredangle B-\measuredangle D$$

از $\Delta CBC'$ معلوم‌اند، این مثلث را می‌توان رسم کرد. رأس A را می‌توان به‌عنوان نقطه‌ای‌واقع برخط CC' یافت که به‌ازای آن $AC'/AC=AB/AD$. مسأله‌دارای جوابی یکتاست.

ج) دراین‌حالت نسبتهای زیر را داریم

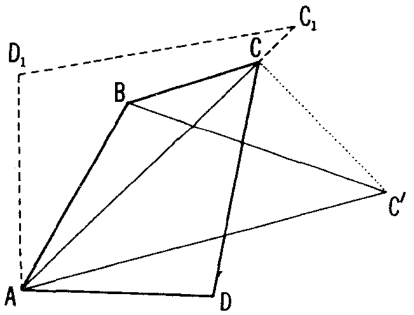
$$\frac{BC}{BC'}=\frac{BC}{CD\,.\,(AB/AD)}=\frac{BC}{CD}\cdot\frac{AD}{AB}$$

نقطهٔ B را می‌توان از برخورد مکان هندسی نقاطی‌که نسبت فاصله‌هاشان از C و C' مقدار معلوم $(BC/CD)(AD/AB)$ است (← پانویس صفحهٔ ۴۹)، با دایره‌ای‌به‌مرکز A وشعاع AB، به‌دست آورد و مسأله حداکثر می‌تواند یك‌جواب داشته باشد.

۴۳. قرینه‌یابی تجانسی به‌مرکز A، محور AC و نسبت تجانس AB/AD و

---

* برای جزئیات ترسیم این کمان، مثلا ← مسائل‌مسابقه‌های ریاضی‌مجارستان(۱). ریاضیات پیشدانشگاهی ۱۱، مسألهٔ ۱۸۹۵/۲، یادداشت، صفحهٔ ۳۰.

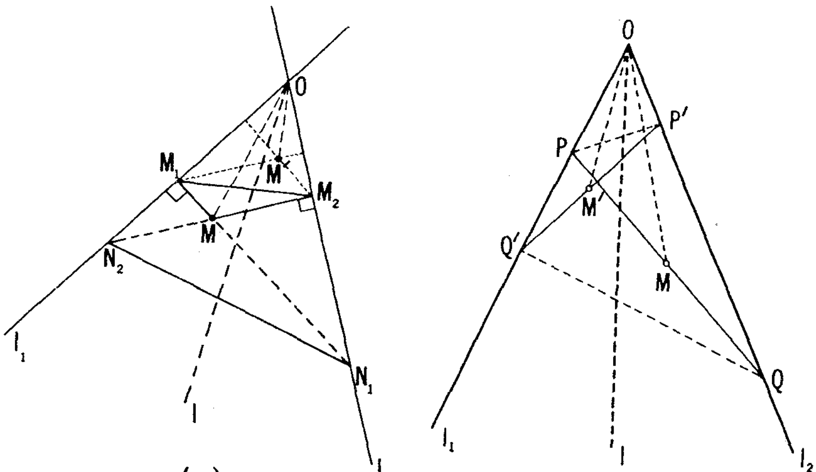


شکل ۱۰۶

به‌دنبال آن دورانی به‌مرکز A و زاویهٔ دوران γ، مثلث ADC را به‌مثلث ABC' بدل می‌کند، (← شکل ۱۰۶). بقیهٔ کار ترسیم شبیه آن است که درحل مسألهٔ ۴۲ گفته شد. [درحل مسأله به‌روشی مشابه به مسألهٔ ۴۲ (ب)، رأس A از برخورد مکان هندسی نقاطی که نسبت فاصله‌هایشان از C و C' مقدار ثابت AB/AD است و کمان درخور زاویهٔ α مرسوم بروتر CC' به‌دست می‌آید.]

۴۴. الف) فرض می‌کنیم $l_۱$ و $l_۲$ یکدیگر را در O قطع کنند و دراین نقطه باهم زاویهٔ α بسازند (شکل ۱۰۷ الف). [اگر $l_۲ || l_۱$، مسأله بی‌معنی است: در این‌حالت پاره‌خط PQ تنها وقتی وجود دارد که نقطهٔ M از $l_۱$ و $l_۲$ به‌یك فاصله باشد و بنابراین M نمی‌تواند دایره‌ای را بپیماید.] مثلثهای OPP' و OQQ' متشابه‌اند (مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین)؛ درنتیجه $OP/OP' = OQ/OQ'$. بنابراین $OP/OQ = OP'/OQ'$، یعنی مثلثهای OPQ و $OP'Q'$ نیز متشابه‌اند؛ پس مثلثهای OPM و $OP'M'$ متشابه‌اند (OM و OM' میانه‌های مثلثهای OPQ و $OP'Q'$ هستند). به‌عبارت دیگر نسبت $OM'/OM = OP'/OP = \cos\alpha$ به‌انتخاب نقطهٔ M بستگی ندارد و $\measuredangle MOP = \measuredangle M'OP'$، یعنی OM و OM' باخط l، نیمساز زاویهٔ POQ، زاویه‌های متساوی می‌سازند. پس M' از M براثر یك قرینه‌یابی تجانسی به‌مرکز O، محور l و نسبت $k = \cos\alpha$ به‌دست می‌آید؛ پس وقتی M دایرهٔ S را می‌پیماید، M' دایرهٔ S'، نگارهٔ S، را طی می‌کند.

ب) اولا روشن است که اگر $\measuredangle M_۱OM_۲ = \alpha = ۹۰^\circ$، هر نقطهٔ M ازصفحه به‌همان نقطهٔ $M' = O$ بدل می‌شود؛ پس تنها حالت جالب وقتی است که $\alpha \neq ۹۰^\circ$.



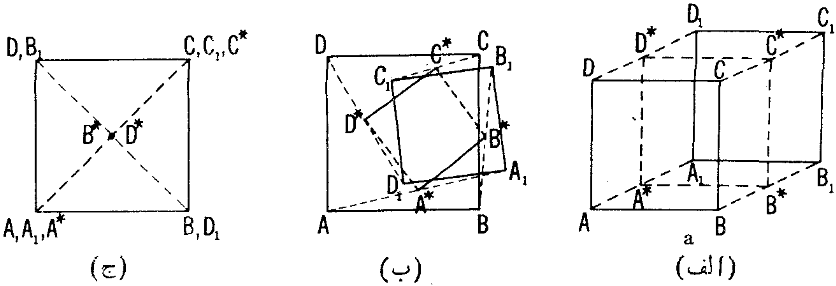
(ب) (الف)

شکل ۱۰۷

نقطهٔ برخورد MM_1 با l_2 را به N_1 و نقطهٔ برخورد MM_2 با l_1 را به N_2 نشان می‌دهیم (شکل ۱۰۷ ب). مانند راه‌حل قسمت (الف) نشان می‌دهیم که مثلثهای OM_1M_2 و ON_1N_2 متشابه‌اند با نسبت تشابه $k=OM_1/ON_1=\cos\alpha$ [اگر M_1 و M_2 را نقاط P و Q در قسمت (الف) بگیریم، نقطه‌های P' و Q' آن بخش بترتیب درحکم N_1 و N_2 خواهند بود]. چون M و M' نقاط برخورد ارتفاعهای دو مثلث متشابه ON_1N_2 و OM_1M_2 هستند، نتیجه می‌شود که $OM'/OM=k=\cos\alpha$ و $\sphericalangle M'OM_1=\sphericalangle MOM_2$. ازاینجا نتیجه می‌شود که خطهای OM و OM' نسبت به‌خط l، نیمساز زاویهٔ M_1OM_2، قرینه‌اند.

پس نقطهٔ M' قسمت (ب) ازنقطهٔ M براثر همان قرینه‌یابی تجانسی به‌دست می‌آید که نقطهٔ M' در قسمت (الف) را معین می‌کرد؛ اگر M دایرهٔ S را بپیماید، M' نگارهٔ آن راکه دایرهٔ S' است می‌پیماید.

۴۵. الف) اگر پیرامون دومربع $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ درجهت یکسان پیموده شوند، یعنی اگر این دومربع مستقیماً متشابه باشند، آنگاه $A_1B_1C_1D_1$ از $ABCD$ یا براثر یك تجانس مارپیچی و یا براثر یك انتقال به‌دست می‌آید (← قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۶۳). اگر $A_1B_1C_1D_1$ از $ABCD$ براثر یك انتقال به‌دست آید و اگر



شکل ۱۰۸

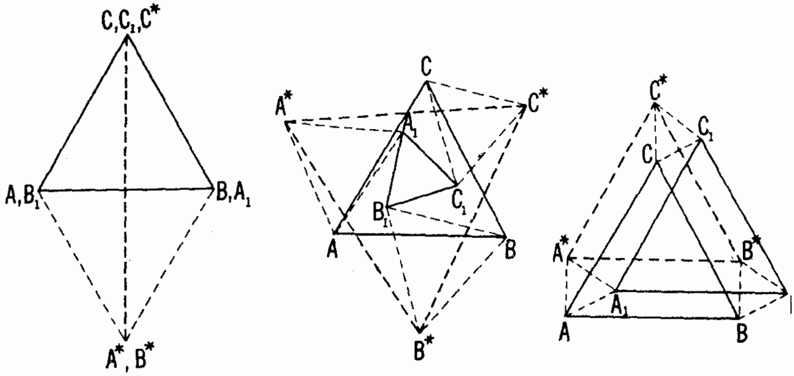
نقاط A^*، B^*، C^*، D^* وسطهای پاره‌خطهای AA_1، BB_1، CC_1، DD_1 باشند، آنگاه $A^*B^*C^*D^*$ نیز از $ABCD$ براثر انتقالی درهمان راستا و به‌اندازهٔ نصف مسافت آن به‌دست می‌آید (شکل ۱۰۸ الف).

ازسوی دیگر، اگر $A_1B_1C_1D_1$ از $ABCD$ براثر یك تجانس‌مارپیچی که نیمدور نباشد به‌دست آید (در این‌حالت همهٔ نقاط وسط یعنی A^*، B^*، C^*، D^* برمرکز دوران منطبق می‌شوند)، آنگاه این‌نقاط وسط، رأسهای یك‌مربع خواهند بود (شکل ۱۰۸ ب) وعلت این‌امر درتذکری است‌که در پس حل‌مسألهٔ ۳۳ آمده است.

اما، اگر پیرامون مربعهای $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ در جهتهای مخالف پیموده شوند، نتیجهٔ فوق دیگر صادق نیست؛ مثلا می‌توان حالتی را در نظرگرفت که درآن، نقاط $A_1=A$، $C_1=C$، $B_1=D$، و $D_1=B$ (شکل ۱۰۸ ج).

ب) این مسأله را هم می‌توان براساس قضیهٔ ۱ و تذکری که به‌دنبال راه‌حل مسألهٔ ۳۳ آمده حل کرد (شکل ۱۰۹ الف، ب)؛ اما حالتی (ساده‌تر!) که در آن $A_1B_1C_1$ از ABC براثر یك تبدیل به‌دست می‌آید نیازمند توجه خاصی است. در این‌حالت $A^*B^*C^*$ از ABC براثر انتقالی به‌همان مسافت ولی درجهت AA^* به‌دست می‌آید (شکل ۱۰۹ الف).

اگر جهت پیمایش پیرامونهای ABC و $A_1B_1C_1$ با یکدیگر یکسان و با جهت پیمایش سه پیرامون AA_1A^*، BB_1B^*، و CC_1C^* مخالف باشد، حکم‌مسأله همچنان صادق است. اما، درحالت کلی این‌حکم بدون وجود فرضی در مورد جهت پیمایش پیرامونها صادق نیست؛ ← مثلا شکل ۱۰۹ ج.



(ج) (ب) (الف)

شکل ۱۰۹

۴۶. الف) چون این دو مربع شکلهایی مستقیماً متشابه‌اند، از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که $MNPQ$ از $ABCD$ یا بر اثر یك انتقال یا بر اثر یك تجانس مارپیچی به‌دست می‌آید. حکم مسأله درمورد انتقال بدیهی است، زیرا در این‌صورت، چهار پاره‌خط‌موردنظر AM، BN، CP و DQ همگی یك طول دارند. پس فرض می‌کنیم که $MNPQ$ از $ABCD$ بر اثر یك تجانس مارپیچی به‌دست می‌آید.

ازیك نقطهٔ O پاره‌خطهای OT، OU، OV و OW را مـوازی ومساوی و همجهت با پاره‌خطهای AM، BN، CP وDQ جدا می‌کنیم. چهار نقطهٔ T، U، V وW، به‌موجب تذکری که در پی راه‌حل مسألهٔ ۳۳ آمده است، رأسهای یك مربع خواهند بـود (شکل ۱۱۰ الف). فرض کنید Z مـرکزمربع $TUVW$ باشد. اگر قانون کسینوسها را در مثلثهای OTZ و OVZ بنویسیم، داریم:

$$OT^2 = OZ^2 + ZT^2 - 2OZ \cdot ZT \cos \sphericalangle OZT$$

و

$$OV^2 = OZ^2 + ZV^2 - 2OZ \cdot ZV \cos \sphericalangle OZV$$

$$= OZ^2 + ZT^2 + 2OZ \cdot ZT \cos \sphericalangle OZT$$

که از آنجا نتیجه می‌شود

$$OT^2 + OV^2 = 2OZ^2 + 2ZT^2$$

فرمول زیرهم درست به‌همین روش به‌دست می‌آید

$$OU^{۲}+OW^{۲}=۲OZ^{۲}+۲ZU^{۲}$$

پس چون داریم $ZT=ZU$، بنابراین

$$OT^{۲}+OV^{۲}=OU^{۲}+OW^{۲}$$

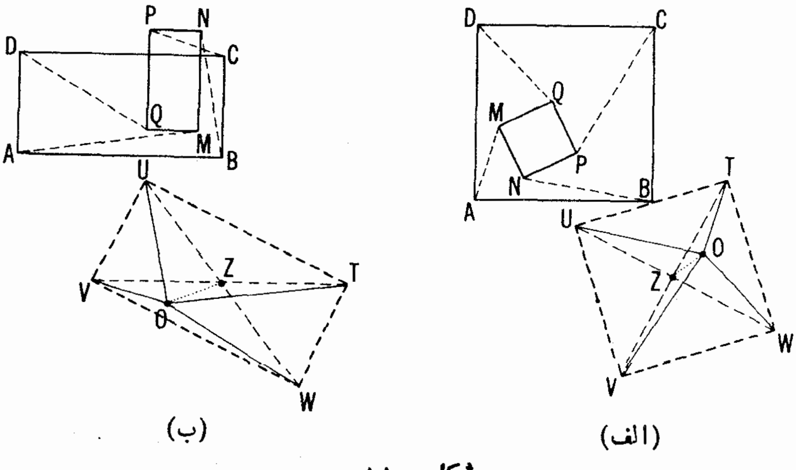
یعنی

$$AM^{۲}+CP^{۲}=BN^{۲}=DQ^{۲}$$

بسادگی می‌توان دید که این استدلال برای حالتی‌هم که $ABCD$ و $MNPQ$ دو مستطیل مستقیماً متشابه دلخواه باشند صادق است (شکل ۱۱۰ ب). امـا نتیجهٔ فوق‌را نمی‌توان برای حالتی‌که $ABCD$ و $MNPQ$ مستطیلها یا مربعهای معکوساً متشابه‌هستند تعمیم‌داد. پس مثلا با علامتهای شکل ۱۰۸ ج داریم $AA_{۱}=CC_{۱}=۰$ ولی $BB_{۱}=DD_{۱}\neq ۰$ و بنابراین $AA_{۱}^{۲}+CC_{۱}^{۲}\neq BB_{۱}^{۲}+DD_{۱}^{۲}$.

ب) دراینجا هم مطابق قسمت (الف) عمل می‌کنیم. شش‌ضلعی منتظم دوم از اولی براثر یك‌انتقال یاتجانس مارپیچی به‌دست می‌آید. حکم مسأله درمورد انتقال بدیهی‌است، پس فرض‌می‌کنیم که شش‌ضلعی‌دوم از اولی براثر یك‌تجانس‌مارپیچی حاصل می‌شود.

اکنون ازیك‌نقطهٔ‌دلخواه O پاره‌خطهای OT، OU، OV، OW، OX، و OY



شکل ۱۱۰

را مساوی، موازی و همجهت با پاره‌خطهای AM، BN، CP، DQ، ER و FS جدا می‌کنیم. حال طبق تذکری که پس از مسألهٔ ۳۳ آمده، شش نقطهٔ T، U، V، W، X، Y رأسهای یك شش‌ضلعی منتظم هستند (شکل ۱۱۱). فرض کنید نقطهٔ K وسط پاره‌خط TV باشد و نقطهٔ Z مرکز شش‌ضلعی $TUVWXY$، لـذا Z مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع TVX نیز هست. روشن است که داریم $XZ:ZK=2:1$ بازهم مثل راه‌حل قسمت (الف) ثابت می‌کنیم که

$$OT^2+OV^2=2\,OK^2+2KT^2$$

بعلاوه، با اعمال قانون کسینوسها در مثلثهای OZX و OZK داریم:

$$OX^2=OZ^2+ZX^2-2OZ\,.\,ZX\cos\sphericalangle OZX$$

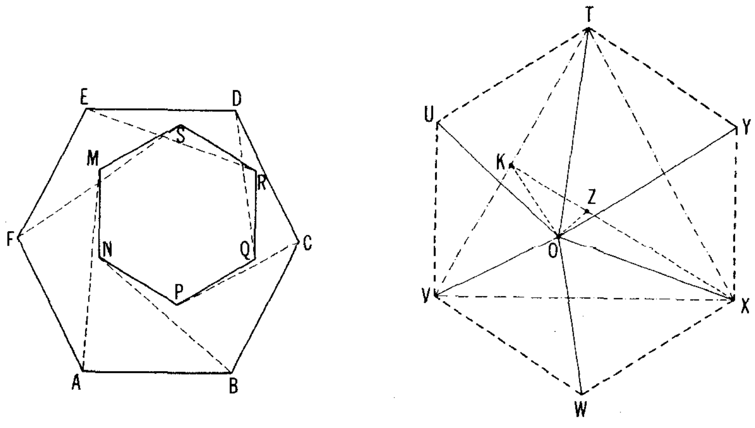
و

$$OK^2=OZ^2+ZK^2-2OZ\,.\,ZK\cos\sphericalangle OZK$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}OT^2+OV^2&=2OK^2+2KT^2\\&=2OZ^2+2ZK^2-4OZ\,.\,ZK\cos\sphericalangle OZK+2KT^2\end{aligned}$$

ولی $ZK=(1/2)ZX$ و $\cos\sphericalangle OZK=-\cos\sphericalangle OZX$؛ بنابراین



شکل ۱۱۱

$$۴OZ\ .\ ZK\cos\sphericalangle OZK=-۲OZ\ .ZX\cos\sphericalangle OZX$$

و بنابراین

$$OT^۲+OV^۲+OX^۲=۳OZ^۲+۲ZK^۲+۲KT^۲+ZX^۲$$
$$=۳OZ^۲+۳ZT^۲$$

که در آن، تساوی اخیر از اینجا ناشی می‌شود که

$$۲(ZK^۲+KT^۲)+ZX^۲=۲ZT^۲+ZX^۲=۳ZT^۲$$

به‌همین‌طریق می‌توان نشان داد که

$$OU^۲+OW^۲+OY^۲=۳OZ^۲+۳ZU^۲=۳OZ^۲+۳ZT^۲$$

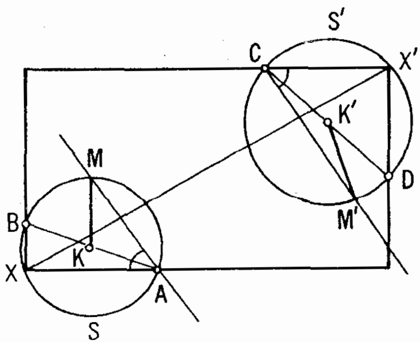
که از آن نتیجه می‌شود

$$OT^۲+OV^۲+OX^۲=OU^۲+OW^۲+OY^۲$$

یا

$$AM^۲+CP^۲+ER^۲=BN^۲+DQ^۲+FS^۲$$

۴۷. الف) اگر X و X' رأسهای رو بروی مستطیل مطلوب باشند (شکل ۱۱۲) در این‌صورت بترتیب روی دایره‌های S و S' به‌قطرهای AB و CD قراردارند. این دایره‌ها رامی توان شکلهای مستقیماً متشابه بانقاط متناظر X و X' دانست. طبق



شکل ۱۱۲

قضیهٔ ۱ (صفحهٔ ۶۳) یك تجانس مارپیچی (یا انتقال) وجود دارد که S را به S' و نقطهٔ X را به نقطهٔ X' می‌برد. این تجانس مارپیچی را به‌شیوهٔ زیر می‌توان مشخص کرد. از نقاط A و C یك جفت خط دلخواه به‌مـوازات یکدیگر می‌گذرانیم تـا دایره‌های S و S' را بترتیب‌در M و M' قطع کنند. زاویه‌های MAX و $M'CX'$ متساوی‌اند زیرا اضلاعی‌موازی دارند؛ پس‌اندازهٔ زاویه‌ای کمان MX از دایرهٔ S برابرست با اندازهٔ زاویه‌ای کمان $M'X'$ از دایرهٔ S'. دراینجا نتیجه می‌گیریم که تجانس‌مارپیچی موردنظر نقطهٔ M را به M' می‌برد؛ و چون نقطهٔ K، مرکز دایرهٔ S، را به‌نقطهٔ K' مرکز دایرهٔ S' می‌برد، مسأله منجر می‌شود به یافتن آن تجانس مارپیچی (یا انتقال) که‌پاره‌خط معلوم KM را به‌پاره‌خط‌معلوم $K'M'$ بدل‌می‌کند (← صفحات ۵۲ و ۵۳).

اگر نقطهٔ O مرکز، α زاویهٔ دوران و k نسبت تجانس این تجانس مارپیچی باشد، آنگاه

$$\triangle OMM' \sim \triangle OXX'$$

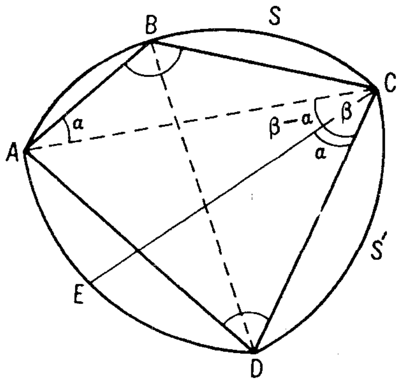
زیرا $\sphericalangle MOM' = \sphericalangle XOX' = \alpha$ و $OM'/OM = OX'/OX = k$. چون ضلع XX' از مثلث OXX' معلوم است، ضلع OX را می‌توانیم بیابیم، ونقطهٔ X را می‌توان از نقطهٔ برخورد دایرهٔ S بادایره‌ای به‌مرکز O و به‌شعاع OX به‌دست آورد. مسأله می‌تواند دارای دوجواب، یك‌جواب یـا فاقد جواب باشد؛ نقاط A، B، C، D براضلاع مستطیل مرسوم یا بر امتداد آنها واقع می‌شوند.

یك حالت خاص‌وقتی پیش‌می‌آیدکه پاره‌خط KM براثر یك‌انتقال‌به‌پاره‌خط $K'M'$ بدل شود (یـا به‌عبارت دیگر، وقتی کـه پاره‌خطهای AB و CD مساوی، موازی و همجهت باشند). در این‌حالت، اگر اندازهٔ انتقال مساوی باطول مفروض قطر مستطیل نباشد، مسأله جـواب ندارد و درغیر این صورت مسأله نامعین است (هرنقطه‌ای از دایرهٔ S را می‌توان رأس X از مستطیل مطلوب اختیار کرد).

ب) فرض کنید چهارضلعی مـوردنظر رسم شده است (شکل ۱۱۳ الف). رأسهای B و D ازآن، برقوسهایی از دوایر S و S'، حاوی زوایای مفروض B و D، قرار دارندکه برقطر AC رسم شده‌اند. زاویهٔ BAC را به α و زاویهٔ DCA را به β نشان می‌دهیم. اکنون در مثلث ABC داریم

$$\alpha + \sphericalangle B + \sphericalangle C - \beta = ۱۸۰^\circ$$

و بنابراین



شکل ۱۱۳ (الف)

$$\beta-\alpha=\measuredangle B+\measuredangle C-۱۸۰^\circ$$

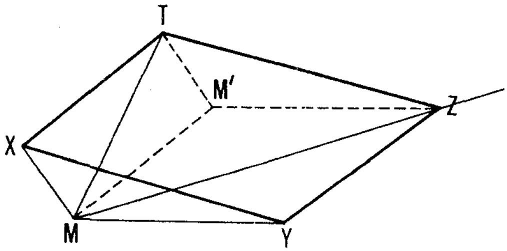
یعنی، کمیت $\beta-\alpha$ معلوم است. برای قطعیت فرض می‌کنیم $\beta-\alpha>۰$؛ از نقطهٔ C خطی رسم می‌کنیم که زاویهٔ بین آن و قطر CA برابر با $\beta-\alpha$ باشد. نقطهٔ برخورد این‌خط با کمان S' را E می‌نامیم؛ در این‌صورت

$$\measuredangle DCE=\beta-(\beta-\alpha)=\alpha\text{، یعنی }\measuredangle DCE=\measuredangle BAC$$

و بنابراین، کمان $BC=$ کمان DE.

از اینجا ترسیم زیرمشابه با راه‌حل قسمت (الف) به‌دست می‌آید. بر پاره‌خط مفروض AC دایره‌ای حاوی‌زاویهٔ مفروض B، و درطرف دیگر آن دایره‌ای حاوی زاویهٔ مفروض D رسم می‌کنیم. از نقطهٔ C خطی می‌گذرانیم که باخط AC زاویهٔ $\beta-\alpha=\measuredangle B+\measuredangle C-۱۸۰^\circ$ بسازد و کمان S' را در نقطهٔ E قطع کند. اکنون تنها کافی است مسألهٔ زیر را که قسمت (الف) هم به‌آن منتهی شد حل کنیم: بر دو دایرهٔ S و S' دونقطهٔ C و E مفروض‌اند؛ نقاط B و D را روی آنها طوری بیابیدکه اندازهٔ زاویه‌ای کمانهای CB و ED مساوی و طول پاره‌خط DB برابر مقدار مفروضی باشد.

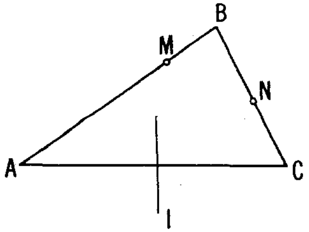
ج) متوازی‌الاضلاع مطلوب را $XYZT$ می‌نامیم؛ MX، MY، MZ، MT چهارخط‌مفروض‌اند (شکل ۱۱۳ب). اکنون $\triangle XMY$ را در امتداد YZ به‌اندازهٔ مسافتی برابر باطول YZ انتقال می‌دهیم تا پاره‌خط XY بر پاره‌خط TZ منطبق شود. اگر M' وضعیت جدید M باشد، آنگاه‌در چهارضلعی $MZM'T$ قطرهای

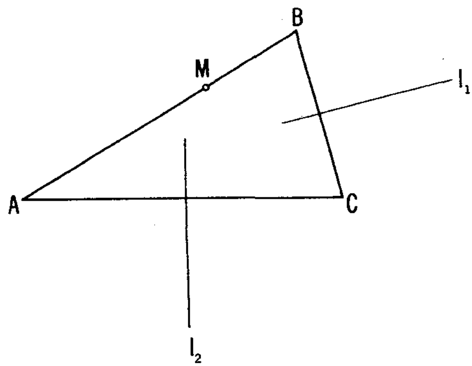


شکل ۱۱۳ (ب)

ZT و $MM'=YZ$ و زاویه‌های $\measuredangle ZMT$، $\measuredangle ZM'T=\measuredangle YMX$، $\measuredangle MTM'=\measuredangle XMT$، $\measuredangle MZM'=\measuredangle YMZ$ معلوم‌اند. پس این مسأله به‌همان حالت قسمت (ب) بدل می‌شود.

۴۸. الف) فرض می‌کنیم $\triangle ABC$ رسم شده است (شکل ۱۱۴ الف). تبدیلهای زیر را پشت سرهم انجام می‌دهیم: تجانسی به‌مرکز M و نسبت $k-$ و دو قرینه‌یابی محوری یکی نسبت به‌خط l_1 و دیگری نسبت به‌خط l_2؛ ابتدا نقطهٔ A به B برده می‌شود، سپس B به C وسرانجام C به A. پس A یك‌نقطهٔ ثابت این تجانس و دو قرینه‌یابی نسبت به‌خطهای مذکور است. این حاصلضرب تبدیلی است که هرشکل F را به‌شکل F'، مشابه مستقیم با F، بدل می‌کند و طبق قضیهٔ ۱ یك تجانس مارپیچی است. تعیین‌محل نقطهٔ O مرکز این‌تجانس‌مارپیچی دشوار نیست؛





شکل ۱۱۴

برای این کار کافی است پاره‌خط $P'Q'$، نگارهٔ پاره‌خط دلخواه PQ از صفحه براثر حاصلضرب این سه تبدیل، را رسم کنیم و سپس مرکز دوران این دو پاره‌خط را بیابیم (← صفحات ۵۲ و ۵۳). رأس A باید بر نقطهٔ O منطبق باشد (زیرا تنها نقطهٔ ثابت تجانس مارپیچی مرکز آن است)؛ از این پس براحتی می‌توان دو رأس دیگر B و C ازمثلث مطلوب رایافت. اگر $k=1$ و $l_1 \perp l_2$، مسأله یا ناممکن و یا نامعین است؛ درهمهٔ حالات دیگر تنها یك جواب وجود دارد (← راه حل مسألهٔ ۳۷).

ب) فرض می‌کنیم که مثلث ABC ترسیم شده‌است (شکل ۱۱۴ ب). تبدیلهای زیررا به‌طور متوالی انجام می‌دهیم: دو تجانس به‌مرکز M و N و بانسبت $-k_1$ و $-k_2$ و یك قرینه‌یابی نسبت به‌خط l. حاصلضرب این تبدیلها نقطهٔ A رابه‌خودش بدل می‌کند و بنابراین A یك نقطهٔ ثابت این حاصلضرب است. این حاصلضرب مسلماً هرشکل F را به‌شکل F' که معکوساً متشابه F است بدل می‌کند و بنابراین طبق قضیهٔ ۲ یك قرینه‌یابی تجانسی است. اکنون براحتی می‌توان محور ونقطهٔ O مرکز این تبدیل را یافت. برای این کار بایدپاره‌خط $P'Q'$، نگارهٔ پاره‌خط دلخواه PQ درصفحه براثر این تبدیل، را بیابیم (← صفحات ۶۵ و ۶۶ و بخصوص شکل ۴۰). در این‌صورت داریم $A=O$. باترسیم A براحتی می‌توان دو رأس دیگر B و C از مثلث مطلوب را پیدا کرد.

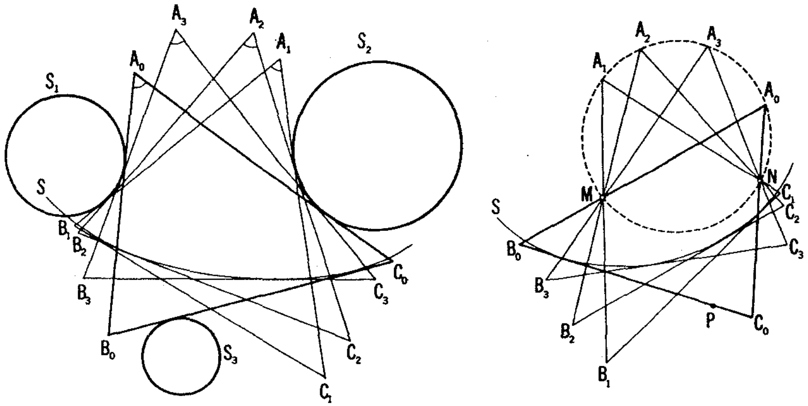
اگر $k_1k_2=1$، حاصلضرب تبدیلهای‌مذکور یك قرینه‌یابی لغزه‌ای (یاصرفاً قرینه‌یابی نسبت به‌یك خط) است؛ در این‌حالت مسأله یا جواب ندارد و یا نامعین است. درهمهٔ حالات دیگر مسأله جوابی یکتا دارد.

فصل دوم. کاربردهای دیگر طولپایی‌ها و تجانسها

۴۹. الف) مثلثهای زیادی‌مانند $A_1B_1C_1$ می‌توان‌رسم کرد که بامثلث‌مفروض ABC قابل انطباق وچنان باشند که اضلاع A_1B_1 و A_1C_1 ازدونقطهٔ مفروض M و N بگذرند. طبق قضیهٔ ۱ (صفحهٔ ۷۹) ضلع B_1C_1 از هر مثلثی از این قبیل باید بر یك دایرهٔ ثابت S مماس باشد که سه‌مثلث $A_1B_1C_1$، $A_2B_2C_2$ و $A_3B_3C_3$ از این گونه می‌توان رسم کرد (شکل ۱۱۵ الف). پس از این رسم کافی است از نقطهٔ مفروض P مماسی بر S رسم کنیم: ضلع B_0C_0 از مثلث مطلوب $A_0B_0C_0$ روی این مماس واقع خواهدشد.

مسأله می‌تواند دارای دوجواب یا یك‌جواب یا بی‌جواب باشد.

ب) این‌مسأله خیلی شبیه‌قسمت (الف) است. مثلثهای زیادی نظیر $A_1B_1C_1$، می‌توان رسم کرد که بامثلث مفروض ABC قابل انطباق وچنان باشند که A_1B_1



شکل ۱۱۵

بردایرهٔ مفروض S_1 و A_1C_1 بردایرهٔ مفروض S_2 مماس باشد. ضلع سوم همهٔ این مثلثها بریک‌دایرهٔ S مماس خواهد بود (صفحهٔ ۸۱). این دایره را می‌توان با ترسیم سه تا از این مثلثها ، یعنی $A_1B_1C_1$، $A_2B_2C_2$ و $A_3B_3C_3$ براحتی به‌دست‌آورد (شکل ۱۱۵ ب). از این پس تنها کافی است مماس مشترك دایرهٔ S و دایرهٔ مفروض S_3 را رسم کنیم؛ ضلع B_0C_0 ازمثلث‌مطلوب $A_0B_0C_0$ براین‌خط واقع‌خواهدبود.

دایره‌های S و S_3 درحالت‌کلی چهار مماس مشترك خواهند داشت. بعلاوه، مثلث $A_1B_1C_1$ (وبنابراین $A_2B_2C_2$ و $A_3B_3C_3$) رامی‌توان به‌چهار روش‌اساساً متمایز زیر ترسیم کرد:

°۱. دایـرهٔ S_1 و نقطهٔ C_1 در دوطرف خط A_1B_1، دایرهٔ S_2 و نقطهٔ B_1 در دوطرف A_1C_1 واقع‌اند (شکل ۱۱۵ ب).

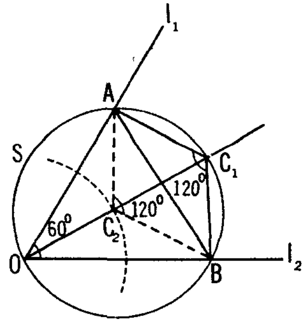
°۲. دایرهٔ S_1 و نقطهٔ C_1 در دوطرف A_1B_1؛ S_2 و B_1 دریك طرف A_1C_1 قرار دارند.

°۳. S_1 و C_1 دریك طرف A_1B_1 واقع‌اند؛ S_2 و B_1 در دوطرف متقابل‌از A_1C_1.

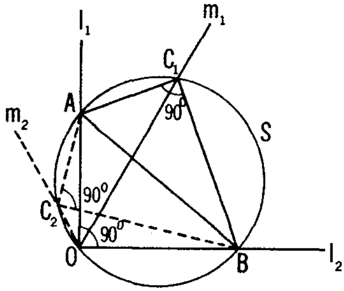
°۴. S_1 و C_1 دریك‌طرف A_1B_1 واقع‌اند، S_2 و B_1 دریك طرف A_1C_1.

پس مسأله می‌تواند حداکثر تا شانزده جواب داشته باشد.

۵۰. الـف) نقاط C_1 و C_2 درشکل ۱۱۶ (الف) بر دایـرهٔ محیطی مثلث ABO واقع‌اند. طبق قضیهٔ ۲ وقتی‌پاره‌خط AB طوری بلغزد که دوسرش براضلاع



(ب)



(الف)

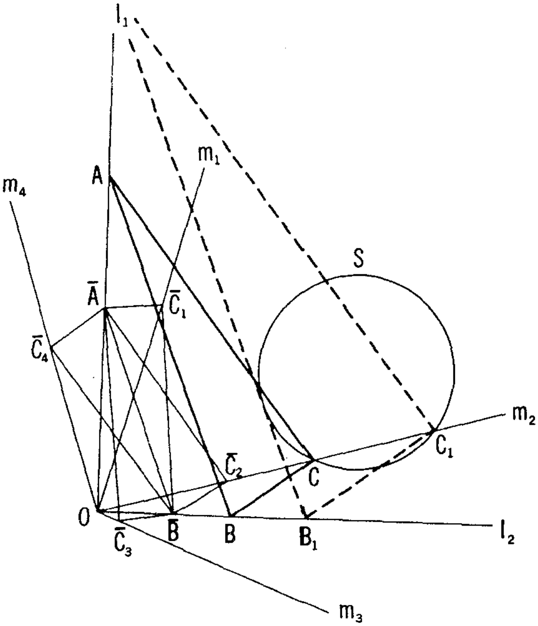
شکل ۱۱۶

زاویهٔ l_1Ol_2 باشند، رأسهای C_1 و C_2 از مثلث ABC_1 و ABC_2 خطهای m_1 و m_2 راکه از O می‌گذرند می‌پیمایند. [دقیقتر بگوییم، پاره‌خطهایی از این خطوط را می‌پیمایند. تعیین طول این پاره‌خطها به‌خواننده واگذار می‌شود.]

ب) نقطهٔ C_1 درشکل ۱۱۶ ب بر S، دایرهٔ محیطی مثلث ABO، واقع است؛ نقطهٔ C_2 مرکزاین‌دایره است. وقتی‌پاره‌خط AB طوری بلغزدکه دوسرش بر اضلاع زاویهٔ l_1Ol_2 واقع باشد، رأس C_2 از مثلث ABC_2 دایره‌ای به‌مرکز O رامی‌پیماید (← صفحات ۸۱ و ۸۲).[به‌بیان دقیقتر، C_1 پاره‌خطی ازاین‌خط را می‌پیماید، و C_2 کمانی از دایره را.]

۵۱. فرض می‌کنیم مثلث ABC رسم شده‌است و $\Delta\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ را با طول ثابت وتر آن $\bar{A}\bar{B}=\alpha$ و مجانس بـا ΔABC بامرکز تجانس O، محل برخورد خطهای l_1 و l_2 درنظر می‌گیریم. ازراه‌حل مسألهٔ ۵۰ (الف) نتیجه می‌شودکـه رأس $\bar{C}$ بر یکی‌ازخطهای m_1، m_2، m_3 و m_4 که بسادگی‌قابل‌ترسیم‌اند واقع‌است (← شکل ۱۱۷). (برای ترسیم این خطها کافی است مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $\bar{A}\bar{B}\bar{C}_1$، $\bar{A}\bar{B}\bar{C}_2$، $\bar{A}\bar{B}\bar{C}_3$ و $\bar{A}\bar{B}\bar{C}_4$ را بازاویهٔ حادهٔ‌مفروض α طوری رسم کنیم که‌رأسهای‌زاویه‌های حاده نقاط دلخواهی از خطهای l_1 و l_2 باشند.) مسلماً C نیز روی همین‌خط‌واقع خواهد شد. پس C از برخورد یکی از خطوط m_1، m_2، m_3 و m_4 بـا دایرهٔ S یافته می‌شود.

مسأله می‌تواند حداکثر تا هشت جواب داشته باشد.



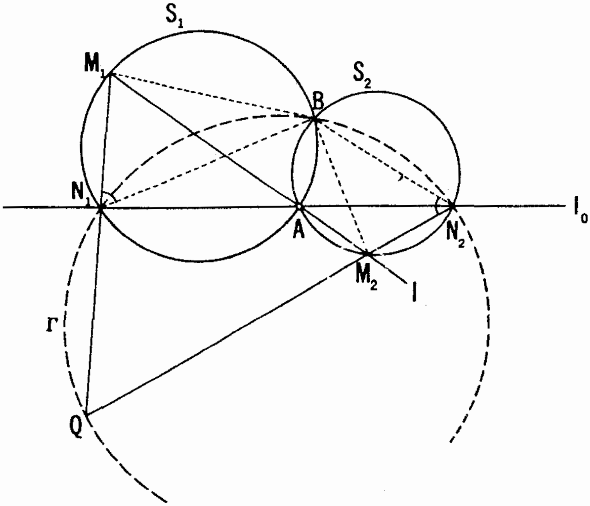
شکل ۱۱۷

۵۲. الف) چهارضلعی BM_1M_2P را در نظر می گیریم که در آن B دومین نقطهٔ برخورد S_1 و S_2 است. وقتی M_1M_2 حول A دوران داده شود، مثلث BM_1M_2 متشابه باخودش باقی‌می‌ماند (← راه‌حل مسألهٔ ۳۱)؛ بنابراین چهارضلعی BM_1M_2P نیز متشابه با خودش باقی می‌ماند. اکنون همهٔ حکمهای مسأله را می‌توان با توجه به‌این‌نکات نتیجه گرفت که نقطهٔ B از این چهارضلعی ثابت‌می‌ماند، رأسهای M_1 و M_2 دایره‌های S_1 و S_2 را می‌پیمایند و ضلع M_1M_2 همیشه از نقطهٔ ثابت A می‌گذرد (← صفحهٔ ۸۴). (فرض می کنیم مثلث M_1M_2P با ضلع معین M_1M_2 رسم شده است—یا درهمان طرفی که مثلث BM_1M_2 واقع است و یا درطرف مقابل آن؛ درغیر این‌صورت باید فرض شود P بردو دایره حرکت می‌کند و بایدتغییرات مربوط به‌آن را درمورد خطهای M_1P و M_2P درصورت مسأله وارد کرد.)

ب) چون $\Delta BM_1M_2 \sim \Delta BN_1N_2$ [← راه‌حل قسمت (الف)]، نتیجه

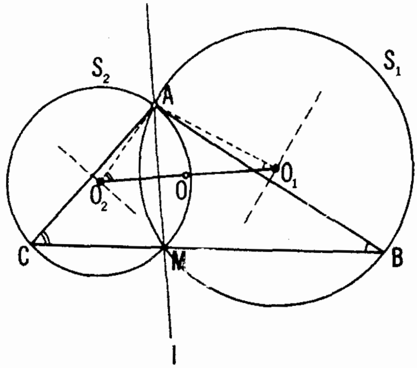
مـی‌شود کـه $\Delta M_{۱}N_{۱} \sim \Delta BM_{۲}N_{۲}$؛ در نتیجـه $\measuredangle BN_{۱}M_{۱} = \measuredangle BN_{۲}M_{۲}$ و بنابراین می‌توان دایره‌ای برچهارضلعی $BN_{۱}QN_{۲}$ محیط کرد. اما این بدان معنی است که مکان‌هندسی نقاط Q دایرهٔ Γ (شکل ۱۱۸) محیط برمثلث $BN_{۱}N_{۲}$ است.

وقتی $l_{۰}$ حول A دوران کند، مثلث $BN_{۱}N_{۲}$ تغییر می‌کند ولی‌همیشه متشابه به باوضع اولیه‌اش باقی‌می‌ماند [← راه‌حل مسألهٔ (الف)]. چون درعین‌حال نقطهٔ B ثابت می‌ماند و نقاط $N_{۱}$ و $N_{۲}$ دایره‌های $S_{۱}$ و $S_{۲}$ را می‌پیمایند، نتیجه مـی‌شود که مرکز دایرهٔ Γ، دایرهٔ محیطی این مثلث، دایره‌ای را می‌پیماید.



شکل ۱۱۸

۵۳. روشن است که $\measuredangle ABM = \measuredangle AO_{۱}O_{۲}$ (زیرا هریك از این دوزاویه بـا نصف کمـان AM از دایرهٔ $S_{۱}$ مساوینـد؛ ← شکل ۱۱۹)؛ همچنین داریـم $\measuredangle ACM = \measuredangle AO_{۲}O_{۱}$. بنابراین وقتی l حول A دوران کند، $\triangle AO_{۱}O_{۲}$ طوری تغییر می‌کند که همیشه با خودش (و با مثلث ABC) متشابه باقی بماند. چون نقطهٔ A ثابت است و نقاط $O_{۱}$ و $O_{۲}$ خطوطی‌را می‌پیمایند ـ عمودمنصفهای AB و AC را ـ نتیجه می‌گیریم که وسط $O_{۱}O_{۲}$ نیزیك خط را می‌پیماید.

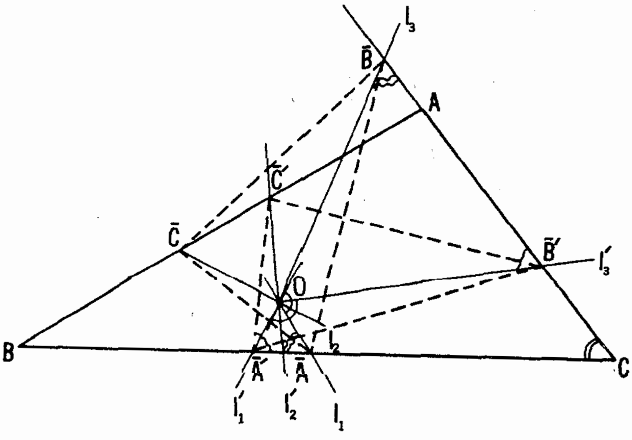


شکل ۱۱۹

۵۴. فرض می‌کنیم $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ و $\overline{A}'\overline{B}'\overline{C}'$ دو وضعیت دلخواه از $\triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ باشند (شکل ۱۲۰). چون زاویهٔ بین $O\overline{A}$ و $O\overline{B}$ ($O\overline{A}'$ و $O\overline{B}'$) با زاویهٔ بین $\overline{A}C$ و $\overline{B}C$ مساوی است، نتیجه می‌گیریم که

$$\sphericalangle \overline{A}O\overline{B}+\sphericalangle AC\overline{B}=\sphericalangle \overline{A}'O\overline{B}'+\sphericalangle \overline{A}'C\overline{B}'=۱۸۰^\circ$$

$$\sphericalangle O\overline{A}C+\sphericalangle O\overline{B}C=\sphericalangle O\overline{A}'C+\sphericalangle O\overline{B}'C=۱۸۰^\circ$$



شکل ۱۲۰

و نیز اینکه

$$\measuredangle O\bar{A}'\bar{A} + \measuredangle O\bar{B}'\bar{B} \text{ و } \measuredangle O\bar{A}\bar{A}' = \measuredangle O\bar{B}\bar{B}'$$

پس مثلثهای $O\bar{A}\bar{A}'$ و $O\bar{B}\bar{B}'$ متشابه‌اند؛ به‌همین‌طریق می‌توان نشان داد که مثلث $O\bar{C}\bar{C}'$ نیز با آنها متشابه است. از اینجا نتیجه می‌شود که $\triangle\bar{A}'\bar{B}'\bar{C}'$ از مثلث $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ به‌توسط یك‌تجانس مارپیچی به‌مرکز O به‌دست می‌آید. پس وقتی خطهای l_1، l_2، l_3 حول O دوران کنند، مثلث $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ تغییر می‌کند ولی با خودش متشابه باقی می‌ماند؛ مرکز دوران هر دو وضعیت از این مثلث همان نقطهٔ ثابت O است. از اینجا و با توجه به‌اینکه رأسهای‌مثلث برخط حرکت‌می‌کنند، نتیجه می‌شود که هریك از نقاط آن یك‌خط را می‌پیماید و همین پاسخگوی سؤال مطرح شده در قسمت (ب) است. وضعیت نقطهٔ O نسبت به‌همهٔ‌مثلثهای $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ یکی است؛ بنابراین برای پیدا کردن وضعیت آن در این مثلثها، کافی است یکی از آنها مثلا مثلث $\bar{A}_\circ\bar{B}_\circ\bar{C}_\circ$ را که از عمودهای وارد از O بر اضلاع ABC پدید می‌آید درنظر بگیریم.

۱. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ باشد، اضلاع $\triangle\bar{A}_\circ\bar{B}_\circ\bar{C}_\circ$ با اضلاع $\triangle ABC$ موازی‌اند (میانخطهای مثلث) و O محل برخورد ارتفاعهای $\triangle A_\circ B_\circ C_\circ$ است.

۲. اگر O مرکز دایرهٔ‌محاطی $\triangle ABC$ باشد، آنگاه $O\bar{A}_\circ = O\bar{B}_\circ = O\bar{C}_\circ$، و O مرکز دایرهٔ محیطی $\triangle A_\circ\bar{B}_\circ\bar{C}_\circ$ است.

۳. اگر O نقطهٔ‌برخورد ارتفاعهای $\triangle ABC$ باشد، آنگاه O نقطهٔ برخورد نیمسازهای‌مثلث $\bar{A}_\circ\bar{B}_\circ\bar{C}_\circ$ است ($\measuredangle O\bar{A}_\circ\bar{B}_\circ = \measuredangle OC\bar{B}_\circ$ زیرا این زاویه‌ها در دایرهٔ محیطی $O\bar{A}_\circ C\bar{B}_\circ$ روبه‌رو به یك‌کمان‌اند؛ به دلیل مشابه داریم

$$\measuredangle OA_\circ C_\circ = \measuredangle OB\bar{C}_\circ$$

و با توجه به‌تشابه مثلثهای $AC\bar{C}_\circ$ و $AB\bar{B}_\circ$ داریم $\measuredangle OC\bar{B}_\circ = \measuredangle OB\bar{C}_\circ$).

۵۵. الف) فرض می‌کنیم l_1، l_2، l_3، l_4 چهارخط مفروض باشند. همهٔ چهارضلعیهای $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ متشابه با چهارضلعی مفروض را که سه‌رأس $\bar{A}$، $\bar{B}$ و $\bar{C}$ی آنها بترتیب برخطهای l_1، l_2 و l_3 باشند درنظر می‌گیریم؛ با داشتن رأس $\bar{A}$ یا راستای ضلع $\bar{A}\bar{B}$ از این چهارضلعی آن را می‌توانیم رسم کنیم [← مسألهٔ ۳۵ (الف) در بخش ۲ و ۹ (ب) در بخش ۱]. از قضیهٔ ۳ (صفحهٔ ۸۷) نتیجه می‌شود

که رأسهای D درهمهٔ این چهارضلعیها برخط خاص l واقع‌اند که می‌توان آن‌را با یافتن دوموضع D بسادگی رسم کرد. نقطهٔ برخورد l و l_4 همان‌رأس D از چهارضلعی مطلوب $ABCD$ است؛ اکنون کافی است ترسیم مذکور در راه‌حل مسألهٔ ۳۰ (الف) را به‌کار بریم.

درحالت کلی مسأله جوابی یکتا دارد؛ حالت استثنا وقتی پیش می‌آید که $l \| l_4$ (که درآن صورت مسأله جواب ندارد)، یا وقتی $l_4 = l$ (که درآن حالت جواب مسأله نامعین است).

ب) چهارنقطهٔ مفروض را M_1، M_2، M_3، M_4 می‌گیریم. همهٔ چهارضلعیهای $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ را درنظر می‌گیریم که باچهارضلعی مفروض متشابه باشند و اضلاع $\bar{A}\bar{B}$، $\bar{B}\bar{C}$ و $\bar{C}\bar{D}$ آنها ازنقاط M_1، M_2 و M_3 بگذرند؛ چون رأسهای $\bar{B}$ و $\bar{C}$ ازاین چهارضلعیها برکمانهای حاوی‌زاویهٔ معلوم، مرسوم بر M_1M_2 و M_2M_3 واقع‌اند، تعداد زیادی از این چهارضلعیها را می‌توان رسم کرد. بنا بر قضیهٔ ۴ (صفحهٔ ۸۷) ضلع $\bar{D}\bar{A}$ی هریك ازاین چهارضلعیها ازیك نقطهٔ خاص M می‌گذرد که با ترسیم دوتا ازاین چهارضلعیهای $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ می‌توان آن‌را بسادگی یافت. خط ضلع DA از چهارضلعی مطلوب برخط MM_4 واقع خواهد بود. اگر M بر M_4 منطبق باشد درآن صورت جواب مسأله نامعین خواهد بود.

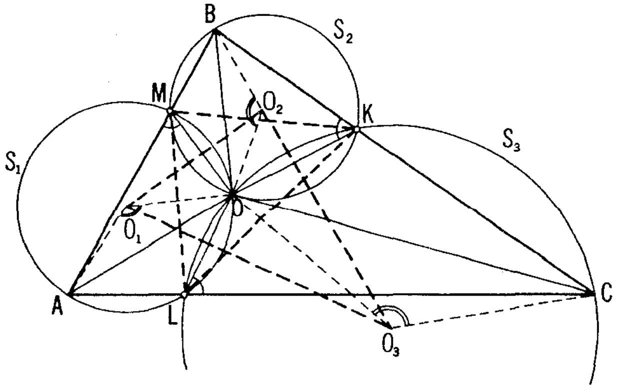
ج) رأس $\bar{A}$ از هرچهارضلعی $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ که با چهارضلعی مفروض متشابه باشد وضمناً اضلاع $\bar{B}\bar{C}$، $\bar{C}\bar{D}$ و $\bar{B}\bar{D}$ی آن بترتیب از نقاط مفروض M، N و P بگذرند طبق قضیهٔ ۴ بردایرهٔ خاص $\bar{S}$ قرار دارد (که‌ترسیم آن دشوار نیست، زیرا کافی‌است سه‌موضع $\bar{A}$ را بیابیم). هرنقطهٔ برخورد $\bar{S}$ و دایرهٔ مفروض S می‌تواند درحکم رأس A از چهارضلعی مطلوب باشد [← راه‌حل قسمت (ب)]. مسأله می‌تواند دارای دو یا یك‌جواب یافاقد جواب باشد؛ اگر $\bar{S}$ و S برهم منطبق باشند، جواب نامعین است.

۵۶. همهٔ خطهای $\bar{l}$ را درنظر می‌گیریم که نسبت پاره‌خطهای $\bar{A}\bar{B}$ و $\bar{B}\bar{C}$ که خطهای l_1، l_2 و l_3 برآن جدا می‌کنند برابر مقدار مفروض باشد؛ با انتخاب یك نقطهٔ دلخواه A برخط l_1 می‌توانیم $\bar{l}$ را رسم کنیم (← مسألهٔ ۱، بخش ۱). نقاط $\bar{D}$ برخطهای $\bar{l}$ چنان که پاره‌خطهای $\bar{A}\bar{B}$، $\bar{B}\bar{C}$ و $\bar{C}\bar{D}$ به‌نسبتهای مفروضی باشند، بریك خط m واقع‌اند (← قضیهٔ ۳)؛ این خط m را می‌توان با یافتن دوموضع از $\bar{D}$ بسادگی رسم کرد. نقطهٔ برخورد m و l_4 برخط مطلوب l واقع است؛ اکنون کافی است ترسیم مذکور در راه‌حل مسألهٔ ۱ را انجام دهیم. اگر $m \| l_4$ مسأله جوابی ندارد؛ اگر m بر l_4 منطبق باشد، جواب نامعین است [← راه‌حل مسألهٔ ۵۵ (الف)].

۵۷. وقتی زاویهٔ α تغییر کند، $\triangle A'B'C'$ تغییر می‌کند ولی باخودش (و با $\triangle ABC$) متشابه باقی می‌ماند. اضلاع آن همواره از نقاط ثابت خاصی کـه وسطهای اضلاع ABC هستند مـی گذرند؛ بنابراین هریك ازنقاط آن (وبخصوص نقطهٔ برخورد ارتفاعها، یا نیمسازها یا میانه‌های آن) دایره‌ای را می‌پیمایند. حکم دوم مسأله از اینجا به‌دست می‌آید کـه نقطهٔ O، مـرکز دوران همهٔ مواضع مثلث $A'B'C'$ (از جمله ABC که متناظر است با مقدار $\alpha = ۰$) بر مرکز دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ منطبق است؛ برای پی‌بردن به‌این مـوضوع کافی است توجه کنیم کـه به‌ازای $\alpha = ۹۰^\circ$ همهٔ خطهای موردنظر ازیك‌نقطهٔ منحصر O می گذرند.

۵۸. الف) اگر $\triangle KLM$ تغییر کند ومتشابه با خودش بماند، به‌طوری که رأسهـای K، L و M ازآن برضلعهای BC، CA و AB از $\triangle ABC$ حرکت کنند، آنگاه همهٔ مواضع $\triangle KLM$ دارای مرکز دوران مشترك O خواهند بود که بردایره‌های $S_۱$، $S_۲$، $S_۳$ واقع است (← برهان قضیهٔ۳، بخصوص شکل ۵۴الف، صفحهٔ۸۸). پس‌این سه‌دایره ازنقطهٔ مشترك O می گذرند (شکل ۱۲۱).

ب) مراکز دایره‌های $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ را $O_۱$، $O_۲$ و $O_۳$ و نقطهٔ مشترك آنها را O مـی‌نامیم (شکل ۱۲۱). چـون چهارضلعی $ALOM$ محاطی است، داریـم $\sphericalangle AMO + \sphericalangle ALO = ۱۸۰^\circ$ و در نتیجه $\sphericalangle AMO = \sphericalangle CLO$؛ به‌طور مشابه داریـم $\sphericalangle CLO = \sphericalangle BKO$. امـا تساوی $\sphericalangle AMO = \sphericalangle BKO = \sphericalangle CLO$ ایجاب می کند که داشته‌باشیم $\sphericalangle AO_۱O = \sphericalangle BO_۲O = \sphericalangle CO_۳O$؛ پس مثلثهای $OO_۱A$، $OO_۲B$ و $OO_۳C$ همه بایکدیگر متشابه‌اند و $\triangle O_۱O_۲O_۳$ را می‌توان با



شکل ۱۲۱

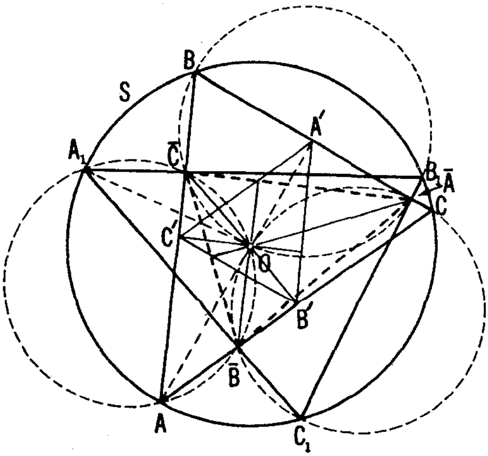
یك تجانس مارپیچی از $\triangle ABC$ به‌دست آورد (مرکز این تجانس مارپیچی نقطهٔ O، زاویهٔ دوران آن O_1OA و نسبت تجانس آن OO_1/OA است).

۵۹. الف) مثلث $A_1B_1C_1$ ازدوران مثلث ABC حول نقطهٔ O به‌اندازهٔ یك زاویهٔα به‌دست می‌آید. از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\measuredangle A\bar{B}A_1 = \measuredangle A\bar{C}A_1 = \measuredangle AOA_1 = \alpha$$

یعنی نقاط A، A_1، $\bar{B}$، $\bar{C}$ و O بریك دایره واقع‌اند (شکل ۱۲۲). به‌همین‌طریق می‌توان نشان داد که پنج نقطهٔ B، B_1، $\bar{A}$، $\bar{C}$، O بریك دایره و همچنین پنج‌نقطهٔ C، C_1، $\bar{A}$، $\bar{B}$، O بریك دایره قرار دارند.

مثلث $A'B'C'$ حاصل‌ازمیانخطهای $\triangle ABC$ را درنظرمی گیریم. این‌مثلث را طوری تغییر می‌دهیم که همیشه با وضعیت اولیه‌اش (یعنی با $\triangle ABC$) متشابه بماند، و ضمناً رأسهایش براضلاع $\triangle ABC$ حرکت کنند. همهٔ وضعیتهای مثلث یك مرکز دوران مشترك دارند که همان نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای $AB'C'$، $BA'C'$، $CA'B'$ [⟵ راه حل مسألهٔ ۵۸ (الف)] یعنی همان نقطهٔ O است. اکنون فرض می‌کنیم که یك رأس از مثلث متغیر $\bar{A}$ باشد؛ دو رأس دیگر آن را $\bar{B}'$ و $\bar{C}'$ می‌نامیم. دراین صورت $\bar{B}'$ با نقاط C، $\bar{A}$ و O بردایرهٔ مشترکی واقع‌خواهند بود (⟵ برهان‌قضیهٔ ۳)؛ از اینجا نتیجه می‌شود که $\bar{B}' = \bar{B}$. به‌همین روش می‌توان نشان دادکه رأس $\bar{C} = \bar{C}'$.



شکل ۱۲۲

ب) نقطهٔ O یک نقطهٔ ثابت مثلث متغیر $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ است؛ پس باید برای همهٔ وضعیتهای این مثلث با خودش متناظر باشد. چون O نقطهٔ برخورد ارتفاعهای $\triangle A'B'C'$ است لذا O نقطهٔ برخورد ارتفاعهای $\triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ نیز هست.

۶۰. الف) l_2 از l_1 بر اثر حاصلضرب دو قرینه‌یابی نسبت به اضلاع $\triangle ABC$ به‌دست می‌آید؛ پس زاویهٔ بین l_1 و l_2 دو برابر زاویهٔ بین این اضلاع مثلث است (← گزارهٔ ۳، جلد اول). پس زاویه‌های مثلث T به‌توسط زاویه‌های $\triangle ABC$ تعیین می‌شوند و به‌موضع l بستگی ندارند. (اگر $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه بود، دو خط از سه‌خط l_1، l_2، l_3 متوازی می‌شدند و درنتیجه l_1، l_2، l_3 مثلثی تشکیل نمی‌دادند.)

ب) فرض می‌کنیم که خط l حول یک‌نقطهٔ M درصفحه دوران کرده است. پس اضلاع مثلث T همیشه از نقاط M_1، M_2، M_3، قرینه‌های M نسبت به‌اضلاع $\triangle ABC$، می‌گذرند؛ به‌عبارت دیگر مثلث طوری تغییر می‌کند که متشابه به باخودش باقی می‌ماند و اضلاعش همیشهٔ از سه‌نقطهٔ ثابت می‌گذرند. در اثبات قضیهٔ ۴ (صفحات ۸۹ و ۹۰) نشان داده شد که دراین حالت مرکز دوران هردو وضعیت دلخواه از مثلث T نقطهٔ ثابت O است. اگر l_1 از O بگذرد (یعنی l ازنقطهٔ O'، قرینهٔ O نسبت به‌ضلع AB، بگذرد) در این‌صورت، و تنها دراین‌صورت، مثلث T به‌یك نقطه بدل می‌شود (و دراین‌حالت خطهای l_2 و l_3 نیز از O می‌گذرند).

پس می‌بینیم که درحالت کلی بین‌خطهایی که‌ازیك‌نقطهٔ مفروض M می‌گذرند تنها یك خط l وجود دارد که l_1، l_2 و l_3 دریك نقطه متقاطع باشند؛ اگر دو تا از این خطهاوجود داشت، معنایش این بود که همهٔ خطهای گذرنده از M این‌خاصیت را داشتند. اکنون فرض کنید M و N دونقطه باشند و l و $\bar{l}$ هم دوخط گذرنده از آنها، به‌طوری که‌سه‌خط l_1، l_2، l_3 وسه‌خط $\bar{l}_1$، $\bar{l}_2$، $\bar{l}_3$ متناظراً دریك نقطه یکدیگر را قطع کنند. اگر H نقطهٔ برخورد l و $\bar{l}$ باشد، به‌ازای هرخط گذرنده از H، خطهای متناظر l_1، l_2، l_3 دریك نقطه متقاطعند. (خطهای l و $\bar{l}$ نمی‌توانند متوازی باشند، زیرا اگر l_1، l_2 و l_3 دریك‌نقطهٔ O متقاطع باشند و اگر $l\|\bar{l}$، آنگاه‌خطهای $\bar{l}_1$، $\bar{l}_2$ و $\bar{l}_3$ باخطهای نظیرشان یعنی l_1، l_2 و l_3 موازی می‌شوند و فاصله‌شان از O مساوی بافاصلهٔ بین l و $\bar{l}$ خواهدشد؛ پس نمی‌توانند دریك نقطه یکدیگر را قطع کنند.) اگر l از H بگذرد آنگاه l_1 و l_2 از نقاط H_1 و H_2، قرینه‌های H نسبت به اضلاع مثلث ABC، می‌گذرند؛ همچنین، چون اندازهٔ زاویهٔ بین l_1 و l_2 معین است [← راه‌حل قسمت (الف)]، می‌بینیم کــه نقطهٔ P محل برخورد l_1 و l_2 یك دایرهٔ S رامی‌پیماید (که‌بردونقطهٔ H_1 و H_2 می‌گذرد وحاوی‌زاویهٔ‌معینی است*).

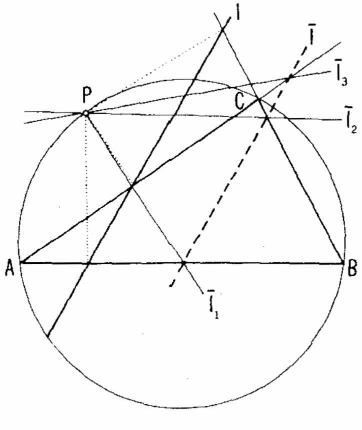
---

* ← پانویس (**) مربوط به‌گزارهٔ ۳، جلد اول.

پس وجود نقطهٔ H را، کــه به ازای هرخط گذرنده از آن خطهای متناظر l_1، l_2 و l_3 در یك‌نقطه متقاطع‌اند، نشان داده‌ایم. در این مورد دونقطهٔ G و H نمی‌توانند موجود باشند زیرا در چنین‌حالتی از هرنقطهٔ M دوخط MG و MH می‌گذرند که به‌ازای هریك از آنها سه‌خط متناظر l_1، l_2، l_3 در یــك‌نقطه متقاطع خواهندبود، و این‌شدنی‌نیست. برای این که‌ببینیم چرا H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای $\triangle ABC$ و S دایرهٔ محیطی آن است، کافی است توجه‌کنیم که l_1، l_2، l_3 خطهای متناظر با ارتفاعهای $\triangle ABC$، در رأسهای آن یکدیگر را قطع می‌کنند.

ج) فرض‌کنید l خط دلخواهــی باشد و $\bar{l}$ خطی‌مــوازی با آن‌کــه از H می‌گذرد. خطهای $\bar{l}_1$، $\bar{l}_2$، $\bar{l}_3$ دریك‌نقطهٔ P متقاطع‌اند؛ فاصله‌های خطهای l_1، l_2، و l_3 ازنقطهٔ P، همان‌طورکه در راه‌حل قسمت (ب) گفته‌شد، برابرست بــا فاصلهٔ بین $\bar{l}$ و l، یا به‌عبارت‌دیگر برابر بافاصلهٔ H از l. پس‌شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث T بافاصلهٔ H از l مساوی است؛ چون همهٔ مثلثهای T بایکدیگر متشابه‌اند، نتیجه می‌شود که مساحت T تنها به‌فاصلهٔ H از l بستگی دارد.

۶۱. راه‌حل اول. اگر پاهای‌عمودهای‌وارد از P براضلاع $\triangle ABC$ برخط l واقع باشند، آنگاه خطهای $\bar{l}_1$، $\bar{l}_2$ و $\bar{l}_3$، قرینه‌های $\bar{l}$ نسبت به‌اضلاع $\triangle ABC$، درنقطهٔ P یکدیگر را قطع می‌کنند، دراینجا $\bar{l}$ مجانس l بــا مرکز تجانس P و نسبت تجــانس ۲ است (شکل ۱۲۳). پس معلوم می‌شود که P باید بردایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ قرار گیرد [و $\bar{l}$ بــاید ازنقطهٔ H، محل برخورد ارتفاعهــای $\triangle ABC$



شکل ۱۲۳

بگذرد؛ ← مسألهٔ ۶۰ (ب)].

راه‌حل دوم. پاهای عمودهای مرسوم از P براضلاع AB، BC، CA ازمثلث ABC را بترتیب با N، L و M نشان می‌دهیم (شکل ۱۲۴). اکنون ثابت‌می‌کنیم کــه P مــرکز دوران همهٔ مثلثهای $L'M'N'$ متشابه بــامثلث LMN است کــه رأسهایشان براضلاع BC و CA و AB از$\triangle ABC$ واقع‌اند. در واقع، باتوجه به اینکه $\sphericalangle PMA = \sphericalangle PNA = 90^\circ$، نتیجه می‌شود که نقاط A، M، N و P بریك دایره واقع‌اند، یعنی P بردایرهٔ AMN واقع است. به‌همین طریق می‌توان نشان‌داد کــه P بردایره‌های BNL و CLM قرار دارد. اما نقطهٔ برخــورد این دایره‌ها مرکز دوران مطلوب نیز هست [← راه‌حل مسألهٔ ۵۸ (الف)].

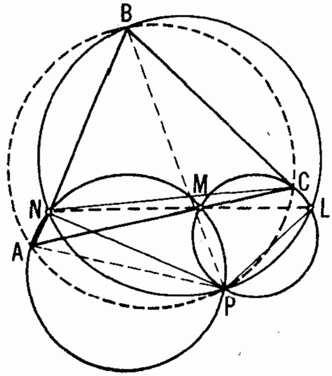
بعلاوه، مثلا درحالتی‌که درشکل ۱۲۴ دیده می‌شود*

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle APN + \sphericalangle NPB = \sphericalangle AMN + \sphericalangle NLB$$

زیرا زاویه‌های APN و AMN وهمچنین زاویه‌های NPB و NLB محاط در یك دایره و روبه‌رو به‌یك کمان هستند. اما

$$\sphericalangle AMN = \sphericalangle MCN + \sphericalangle MNC \quad \text{و} \quad \sphericalangle NLB = \sphericalangle NCB - \sphericalangle LNC$$

زیرا



شکل ۱۲۴

* ← پانویس (**) مربوط به‌گزارهٔ ۳، جلد اول.

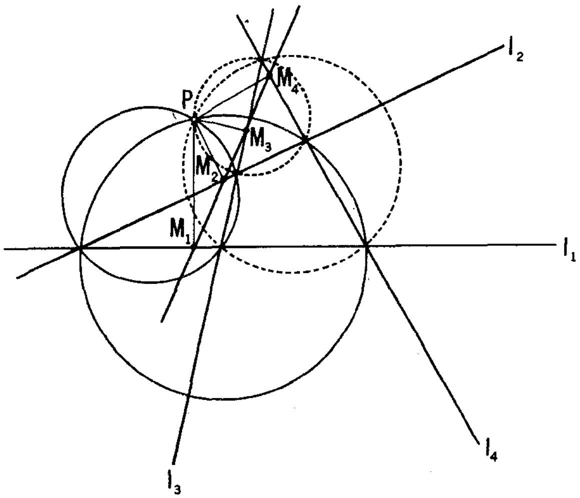
$$\sphericalangle AMN + \sphericalangle NLB = (\sphericalangle MCN + \sphericalangle NCB) + (\sphericalangle MNC - \sphericalangle LNC)$$
$$= \sphericalangle MCB + \sphericalangle MNL$$

ازمقایسهٔ این معادله با معادلهٔ قبلی، نتیجه می‌گیریم که

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle MCB + \sphericalangle MNL$$

به کمک این‌معادله می‌توانیم حکم مذکور در تمرین را ثابت‌کنیم. زیرا، اگر نقطهٔ P بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC واقع باشد، آنگاه $\sphericalangle APB = \sphericalangle ACB$ و $\sphericalangle MNL = 0$، یعنی نقاط M، N، L بریک‌خط واقع‌اند (شکل ۱۲۴). همچنین بعکس، اگر نقاط M، N، L بریک خط واقع باشند؛ آنگاه $\sphericalangle MNL = 0$ و $\sphericalangle APB = \sphericalangle ACB$؛ بنابراین، نقطهٔ P بر دایره‌ای واقع است، که از نقاط A، B و C می‌گذرد.

۶۲. الف) فرض کنید l_1، l_2، l_3، l_4 چهار خط‌مفروض باشند. دایره‌های محیطی مثلثهای حاصل از خطوط l_1، l_2، l_3 و l_1، l_2، l_4 را رسم می‌کنیم؛ نقطهٔ برخورد این دایره‌ها (غیراز نقطهٔ برخورد l_1 و l_2) را به P نشان می‌دهیم (شکل ۱۲۵). از P عمودهایی برخطوط l_1، l_2، l_3 و l_4 رسم می‌کنیم؛ پاهای این

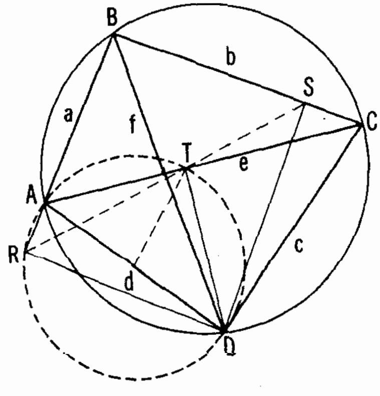


شکل ۱۲۵

عمودها را M_1، M_2، M_3، M_4 می‌نامیم. طبق نتیجهٔ مسألهٔ ۶۱ نقاط M_1، M_2 و M_3 بر یك خط واقع‌اند، و نقاط M_1، M_2 و M_4 نیز بر یك خط قرار دارند؛ در نتیجه، هر چهار نقطهٔ فوق بر یك خط واقع‌اند. از همان مسأله نتیجه می‌شود که M_1، M_3 و M_4 تنها وقتی بر یك خط واقع‌اند که P بر دایرهٔ محیطی مثلثی واقع باشد که اضلاع آن را خطوط l_1، l_3 و l_4 پدید می‌آورند. به‌همین شیوه می‌توان نشان داد که P بر دایرهٔ محیطی مثلثی واقع است که اضلاعش را خطوط l_2، l_3 و l_4 تشکیل می‌دهند.

ب) با علامت گذاریهای شکل ۵۸، داریم $MP\perp AB$ (زیرا زاویه‌های MPA و MPB رو برو و به‌قطرند)؛ به‌همین طریق داریم $MQ\perp AC$ و $ME\perp BC$. بنابراین، P، Q، و R پاهای عمودهای مرسوم از نقطهٔ M واقع بر S، دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$، بر اضلاع این مثلث است.

ج) فرض می‌کنیم $ABCD$ یك چهارضلعی محاطی باشد، و داشته باشیم $AB=a$، $BC=b$، $CD=c$، $DA=d$، $AC=e$، $BD=f$ (شکل ۱۲۶). از D عمودهای DR، DS و DT را بترتیب بر ضلعهای AB، BC و CA از $\triangle ABC$ فرود می‌آوریم؛ طبق نتیجهٔ مسألهٔ قبل نقاط R، S و T پاهای این عمودها، بر یك راستا واقع‌اند. روشن است که می‌توان دایره‌ای بر چهارضلعی $ATDR$ محیط کرد. پاره‌خط AD قطری از این دایره خواهد بود. از اینجا نتیجه می‌شود که



شکل ۱۲۶

$$TR = AD \sin \sphericalangle TDR = d \sin \sphericalangle TDR$$

اما داریم $\sphericalangle TDR = \sphericalangle BAC$ (اضلاعشان برهم عمودند)، و با توجه به $\triangle ABC$ نتیجه‌می‌شود که $\sin \sphericalangle BAC = BC/۲r = b/۲r$، که‌در آن r شعاع دایرهٔ محیطی چهارضلعی $ABCD$ است. پس داریم

$$TR = d\frac{b}{۲r} = \frac{bd}{۲r}$$

درست به‌همین‌طریق می‌توان روابط زیر را به‌دست آورد

$$TS = \frac{ac}{۲r} \text{ ، } RS = \frac{ef}{۲r}$$

بعلاوه، چون نقاط R، S و T بریك خط واقع‌اند (← شکل ۱۲۶)، داریم

$$RT + TS = RS$$

یا

$$\frac{bd}{۲r} + \frac{ac}{۲r} = \frac{ef}{۲r}$$

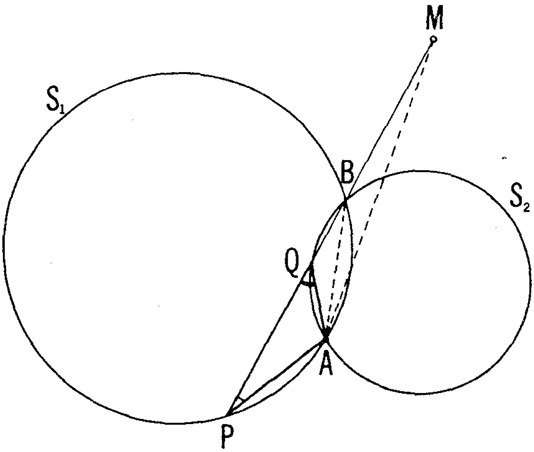
ازضرب طرفین این معادله در $۲r$ داریم

$$bd + ac = ef$$

و این‌همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۶۳. دایره‌های محیطی چهارمثلث حاصل از این چهارخط دریك‌نقطهٔ مشترك P متقاطع‌اند[مسأله‌های ۳۵، ۶۲ (الف)]؛ پاهای عمودهـای وارد از P برخطهای $l_۱$، $l_۲$، $l_۳$ و $l_۴$ بریك خط m واقع‌اند (مسألهٔ ۶۱). نقاط $H_۱$، $H_۲$، $H_۳$ و $H_۴$ محل برخورد ارتفاعهای چهارمثلث موردنظرمجانس نقاط برخورد خطهای $PH_۱$، $PH_۲$، $PH_۳$ و $PH_۴$ باخط m، بـا مرکز تجانس P و نسبت تجانس ۲ هستند (← راه‌حل اول مسألهٔ ۶۱)؛ درنتیجه‌برخطی که با m موازی باشد و ازنقطهٔ P'، قرینهٔ P نسبت به‌خط m بگذرد نیز قرار دارند.

۶۴. نقاط برخورد دایره‌های $S_۱$ و $S_۲$ را باحروف A و B نشان می‌دهیم؛ بعلاوه، نقاط برخورد خط MB را با دایره‌های $S_۱$ و $S_۲$ بترتیب P و Q می‌نامیم (شکل ۱۲۷). چـون نسبت m/n یـعنی نسبت طـول پاره‌خطهـای مماس از M



شکل ۱۲۷

بردایره‌های مفروض را داریم، نسبتهای زیرهم برای ما معلوم خواهند بود

$$\frac{MP}{MQ}=\frac{MP}{MQ}\cdot\frac{MB}{MB}=\frac{m^۲}{n^۲}$$

ازاین معادله نتیجه می‌شود که اگر $m=n$، نقاط P و Q برهم منطبق می‌شوند و M بر AB واقع است؛ بنابراین ازاینجا به‌بعد فرض می‌کنیم $m\neq n$.

اکنون $\triangle AQP$ را درنظر می‌گیریم. وقتی M حرکت کند این مثلث تغییر می‌کند؛ اما زاویهٔ APQ ثابت‌می‌ماند زیرا همیشه روبه‌رو به‌کمان ثابتی از دایرهٔ $S_۱$ است و همچنین زاویهٔ $\measuredangle AQP=۱۸۰^\circ-\measuredangle AQB$ ثابت می‌ماند زیرا $\measuredangle AQB$ روبه‌رو به‌کمان ثابتی از دایرهٔ $S_۲$ است. در نتیجه، این مثلث متشابه با خودش باقی می‌ماند. رأس A از این‌مثلث حرکت نمی‌کند و P دایرهٔ $S_۱$ را می‌پیماید؛ در نتیجه نقطهٔ M (که برضلع QP از مثلث قرار دارد و چنان است که $MP/MQ=m^۲/n^۲$) دایرهٔ S را می‌پیماید که از $S_۱$ براثر یك تجانس‌مارپیچی به‌مرکز A و زاویهٔ دوران PAM و نسبت تجانس AM/AP به‌دست می‌آید.

روشن است که دایرهٔ S ازنقطهٔ A می‌گذرد؛ اکنون نشان می‌دهیم که این دایره ازنقطهٔ B نیز می‌گذرد. برای این‌کارکافی است نقطهٔ C را روی دایرهٔ $S_۱$

طوری بیابیم که $\sphericalangle CAB = \sphericalangle PAM$؛ چون $\sphericalangle ACB = \sphericalangle APM$، مثلثهای ACB و APM متشابه‌خواهند بود ($AC/AB = AP/AM$)، و بنابراین تجانس فوق‌الذکر C را به B بدل می‌کند.

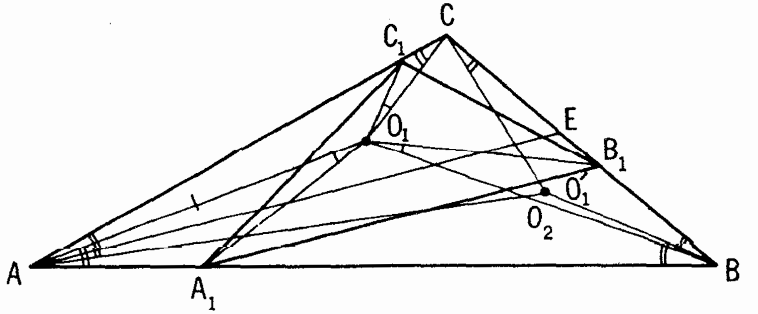
اکنون مکان هندسی مطلوب را به‌طریق‌زیر می‌توان رسم کرد. از یکی از دو نقطهٔ A یا B، محلهای برخورد دو دایرهٔ S_1 و S_2، خط دلخواهی می‌گذرانیم که S_1 و S_2 را درنقاط P و Q قطع کند. نقطهٔ M را براین خط طوری پیدا می‌کنیم که $MP/MQ = m^2/n^2$، که درآن m/n همان‌نسبت معلوم طول مماسهاست. دایره‌ای که از A، B و M می‌گذرد (یا دقیقتر بگوییم، کمانی از این دایره که خارج از S_1 و S_2 قرار دارد) همان‌کمان مطلوب است.

۶۵. همهٔ این‌گونه مثلثهای $A'B'C'$ با $\triangle ABC$ مرکز دوران مشترکی دارند که برنقطهٔ برخورد دایره‌های $AB'C'$ و $BA'C'$ منطبق است (← برهان قضیهٔ ۳). اکنون کافی است وضعیت خاصی از $\triangle A'B'C'$ را درنظر بگیریم که درآن نقاط A'، B' و C' وسطهای اضلاع $\triangle ABC$ هستند.

۶۶. الف) چون O_1 مرکز دوران مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ است، داریم (← شکل ۱۲۸)

$$\sphericalangle AO_1A_1 = \sphericalangle BO_1B_1 = \sphericalangle CO_1C_1 \ , \ \frac{O_1A}{O_1A_1}=\frac{O_1B}{O_1B_1}=\frac{O_1C}{O_1C_1} \qquad (*)$$

و بنابراین، مثلثهای AO_1A_1، BO_1B_1، CO_1C_1 همه بایکدیگر متشابه‌اند. ازاینجا می‌بینیم که



شکل ۱۲۸

$$\sphericalangle O_1AB = \sphericalangle O_1BC = \sphericalangle O_1CA \qquad (**)$$

به‌همین شیوه می‌توان نشان داد که

$$\sphericalangle O_2BA = \sphericalangle O_2CB = \sphericalangle O_2AC \qquad (***)$$

همچنین بعکس، اگر نقطهٔ O_1 چنان باشدکه شرط (**) در آن صدق کند، آنگاه این‌نقطه اولین مرکز دوران $\triangle ABC$ است. برای اثبات این گفته سه‌خط O_1A_1، O_1B_1، O_1C_1 را از نقطهٔ O_1 می‌گذرانیم تا اضلاع $\triangle ABC$ را درنقاط A_1، B_1، C_1 قطع کنند و با این‌اضلاع زاویه‌های متساوی بسازند. مثلثهای AO_1A_1، BO_1B_1 و CO_1C_1 (با توجه به‌تساوی زاویه‌ها) متشابه خواهند بود؛ بنابراین شرط (*) برقرار است و O_1 مرکز دوران مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ است، یعنی O_1 اولین مرکز دوران $\triangle ABC$ است. به‌همین طریق‌می‌توان نشان‌داد که نقطهٔ O_2 دومین مرکز دوران $\triangle ABC$ است اگر شرط (***) برقرار باشد.

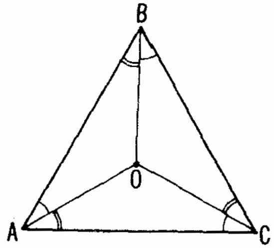
اکنون ثابت می‌کنیم که $\sphericalangle O_1AB = \sphericalangle O_2AC$. برای این‌کار قرینه‌های خطهای AO_1، BO_1 و CO_1 را نسبت به‌نیمسازهای زاویه‌های مربوطه رسم‌می‌کنیم و نشان‌می‌دهیم که این سه‌خط دریك‌نقطهٔ مشترك O'_1 متقاطع‌اند. فاصلهٔ O_1 ازاضلاع AB، BC و CA از $\triangle ABC$ را به m، n و p نشان می‌دهیم. خط AO_1 مکان هندسی نقاطی است‌که فاصله‌هاشان از اضلاع AB و AC از این مثلث به‌نسبت $p:m$ است (شکل ۱۲۸). به‌همین‌ترتیب، قرینهٔ خط BO_1 نسبت به‌نیمساز زاویهٔ B مکان هندسی نقاطی است‌که فاصله‌هاشان از BA و AC به‌نسبت $m:n$ است و قرینهٔ خط CO_1 نسبت به‌نیمساز زاویهٔ C مکان هندسی نقاطی است‌که فاصله‌هاشان از CA و CB به‌نسبت $p:n$ است. از اینجا نتیجه می‌شود که فاصلهٔ نقطهٔ O'_1، محل برخورد دو خط اخیر، ازاضلاع AB وAC به‌نسبت $m:p$ است، یعنی O'_1 به‌اولین خط از این سه‌خط نیز تعلق دارد.

از شرط (**) که نقطهٔ O_1 درآن صدق می‌کند، نتیجه می‌شود که O'_1 در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$\sphericalangle O'_1BA = \sphericalangle O'_1CB = \sphericalangle O'_1AC$$

[زیرا $\sphericalangle O_1AB = \sphericalangle O'_1AC$، $\sphericalangle O_1BC = \sphericalangle O'_1BA$، $\sphericalangle O_1CA = \sphericalangle O'_1CB$]. بنابراین O'_1 بر نقطهٔ O_2 دومین مرکز دوران مثلث ABC منطبق است، و لذا $\sphericalangle O_1AB = \sphericalangle O_2AC$.

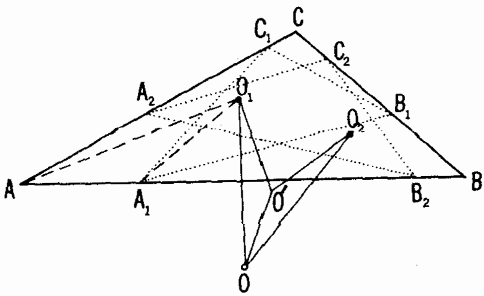
ب) فرض می‌کنیم نقطهٔ O هم اولین مرکز دوران و هم دومین مرکز دوران



شکل ۱۲۹

$\triangle ABC$ باشد (شکل ۱۲۹). چون O اولین مرکز دوران است، داریم $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBC = \sphericalangle OCA$؛ چون O دومین مرکز دوران نیز هست، همچنین داریم $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OCB = \sphericalangle OAC$. پس از اینجا بلافاصله نتیجه می‌شود که $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C$، یعنی $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع است.

ج) در اینجا بهتر این است که از نتایج مسألهٔ ۶۸ که بعداً می‌آید استفاده کنیم. طبق این نتایج نقاط O'_1 و O'_2 مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای قابل‌انطباق $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$، برهم منطبق‌اند. (در شکل ۱۳۰ این دومرکز برنقطهٔ O' منطبق‌اند). چون $\triangle A_1B_1C_1$ از $\triangle ABC$ بر اثر یك تجانس‌مارپیچی به‌مرکز O_1، زاویهٔ دوران α و یك نسبت k به دست می‌آید، داریم $\sphericalangle O'O_1O = \alpha$، $O_1O'/O_1O = k$؛ چون $A_2B_2C_2$ از ABC بر اثر تجانس مارپیچی به‌مرکز O_2، باهمان زاویهٔ دوران α (زیرا A_1B_1 و A_2B_2 با AB زاویه‌های‌متساوی‌می‌سازند)، وهمان نسبت تجانس k (زیرا مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ باهم قابل‌انطباق‌اند)



شکل ۱۳۰

به‌دست‌می‌آید، داریم $\alpha = O_۲O'O_۲O \sphericalangle$، $O_۲O'/O_۲O = k$. از اینجا نتیجه می‌شود که مثلثهـای $O_۱OO'$ و $O_۲OO'$ متشابه‌اند وچون یك ضلع مشترك OO' دارند، باهم قابل‌انطباق‌اند؛ پس $OO_۱ = OO_۲$.

توجه داشته باشید که از تشابه مثلثهای $O_۱OO'$ و $O_۱AA_۱$ نتیجه می‌شود که $\sphericalangle O_۱OO' = \sphericalangle O_۱AA_۱$ و بنابراین، $\sphericalangle O_۱OO_۲ = ۲\phi$ که در آن ϕ مقدار مشترك زاویه‌های $O_۱AB$، $O_۱BC$، $O_۱CA$، $O_۲AC$، $O_۲CB$، $O_۲BA$ است. ازاینجا وازنتیجهٔ قسمت(د) نتیجه می‌شود که $O_۱O_۲ \leqslant O_۱O = O_۲O$ (و علامت تساوی فقط برای‌مثلثهای متساوی‌الاضلاع صادق است که درآنها هرسه‌نقطهٔ $O_۱$، $O_۲$ و O برهم منطبق‌اند).

د) برای اثبات این قضیه از ترسیم مذکـور در مسألهٔ ۷۰ استفاده مـی‌کنیم (← شکل ۱۳۷، صفحهٔ۱۹۵). ابتدا مقدار حاصلضرب

$$AO_۱ \cdot O_۱A' = BO_۱ \cdot O_۱B' = CO_۱ \cdot O_۱C'$$

را برحسب شعاع دایرهٔ محیطی R و زاویـهٔ ϕ تعیین مـی‌کنیم. از تشابـه مثلثهای $AO_۱C'$ و $A'BO_۱$ [← مسألهٔ ۷۰ (ب)] بسادگی نتیجه می‌شود

$$\frac{AO_۱}{AC'} = \frac{A'B}{A'O_۱}$$

و بنابراین

$$AO_۱ \cdot O_۱A' = AC' \cdot A'B$$

ولی از آنجـا که $\widehat{AC'} = \widehat{A'B} = ۲\phi$، داریم $AC' = A'B = ۲R\sin\phi$. پس می‌توان نوشت $AO_۱ \cdot O_۱A' = ۴R^۲\sin^۲\phi$.

اما، ازسوی دیگر (← شکل ۱۳۷)، داریم

$$AO_۱ \cdot O_۱A' = MO_۱ \cdot O_۱N = (R - OO_۱)(R + OO_۱)$$
$$= R^۲ - OO_۱^۲ \leqslant R^۲$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$۴R^۲\sin^۲\phi \leqslant R^۲;\ \ \sin^۲\phi \leqslant \frac{۱}{۴}،\ \ \phi \leqslant ۳۰^\circ$$

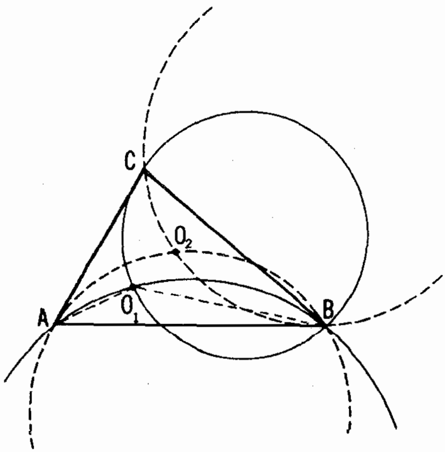
تنها وقتی داریم $\phi = ۳۰^\circ$ که $O_۱$ بر O منطبق باشد $(OO_۱ = O)$ و $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع [←قسمتهای (ج) و (د)].

۶۷. برای آنکه $O_۱$ اولین مرکز دوران $\triangle ABC$ باشد، لازم و کافی است که

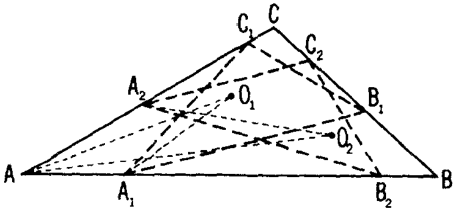
$$\measuredangle O_۱AB = \measuredangle O_۱BC = \measuredangle O_۱CA.$$

فرض می‌کنیم که اولین مرکز دوران یافته شده‌است و بر پاره‌خط AB دایره‌ای مرور می‌دهیم که از $O_۱$ بگذرد (شکل ۱۳۱).

چون $\measuredangle O_۱AB = \measuredangle O_۱BC$، نتیجه می‌شود که $\measuredangle O_۱BC$ با نصف‌اندازهٔ $\overset{\frown}{BO_۱}$ از دایره‌مساوی‌است؛ بنابراین خط BC بر دایرهٔ $BO_۱A$ مماس‌است. به‌همین طریق می‌توان نشان داد که اضلاع CA و AB ازمثلث بترتیب بر دایره‌ای که از نقاط B، C و $O_۱$ می‌گذرد ودایره‌ای که از نقاط C، A و $O_۱$ می‌گذرد‌دمماس‌اند. پس نقطهٔ $O_۱$، اولین مرکز دوران مثلث ABC، را مـی‌توان از برخورد دو دایره به‌دست‌آورد: یکی دایره‌ای که از A و B می‌گذرد و برضلع BC مماس است و دیگری دایره‌ای که از B و C می‌گذرد و بر CA مماس است. دومین مرکز‌دوران راهم به‌روش مشابهی می‌توان پیدا کرد.



شکل ۱۳۱



شکل ۱۳۲

۶۸. الف) مثلث $A_1B_1C_1$ را می‌توان از $\triangle ABC$ با دورانی حول O_1 به‌اندازهٔ زاویهٔ AO_1A_1 و به‌دنبال آن تجانسی با نسبت O_1A_1/O_1A به‌دست آورد؛ بنابراین زاویهٔ بین خطهای AB و A_1B_1 با زاویهٔ AO_1A_1 مساوی است (شکل ۱۳۲). به‌همین‌طریق می‌توان نشان داد که زاویهٔ بین خطهای AB و A_2B_2 با زاویهٔ AO_2A_2 مساوی است. پس با توجه به‌شرایط مسأله می‌توان دید که

$$\measuredangle AO_1A_1 = \measuredangle AO_2A_2$$

اما از مسألهٔ ۶۶ (الف) نتیجه می‌شود که $\measuredangle O_1AA_1 = \measuredangle O_2AA_2$. پس مثلثهای AO_1A_1 و AO_2A_2 متشابه‌اند و بنابراین

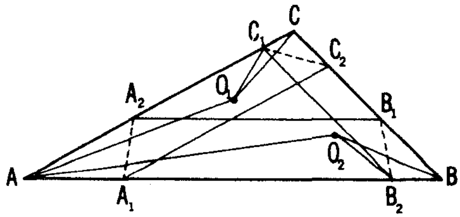
$$\frac{O_1A_1}{O_1A} = \frac{O_2A_2}{O_2A}$$

یعنی نسبت تشابه مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ مساوی با نسبت تشابه مثلثهای ABC و $A_2B_2C_2$ است. از اینجا نتیجه می‌شود که مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ باهم قابل انطباق‌اند.

ب) ابتدا ثابت می‌کنیم که $B_2C_1 \| BC$ (شکل ۱۳۳). از راه‌حلهای مسائل ۶۶ (الف) و ۶۸ (الف) نتیجه می‌شود که مثلثهای CO_1C_1 و BO_2B_2 متشابه‌اند و بنابراین

$$\frac{CC_1}{BB_2} = \frac{CO_1}{BO_2}$$

بعلاوه، از مسألهٔ ۶۶ (الف) نتیجه می‌شود که $\measuredangle O_1CA = \measuredangle O_2BA$ و $\measuredangle O_1AC = \measuredangle O_2AB$؛ بنابراین مثلثهای CO_1A و BO_2A متشابه‌اند و داریم



شکل ۱۳۳

$$\frac{CO_1}{BO_2}=\frac{AC}{AB}$$

و از اینجا داریم

$$\frac{CC_1}{BB_2}=\frac{AC}{AB}$$

که حکم موردنظر را ثابت می‌کند.

درست به‌همین طریق ثابت می‌شود که $C_2A_1 \| CA_1$، و $A_2B_1 \| AB$.

اکنون این را هم ثابت می‌کنیم که خط A_1A_2 با ضلع BC از $\triangle ABC$ پادموازی است. از تشابه مثلثهای AO_1A_1 و AO_2A_2 داریم

$$\frac{AA_1}{AA_2}=\frac{O_1A}{O_2A}$$

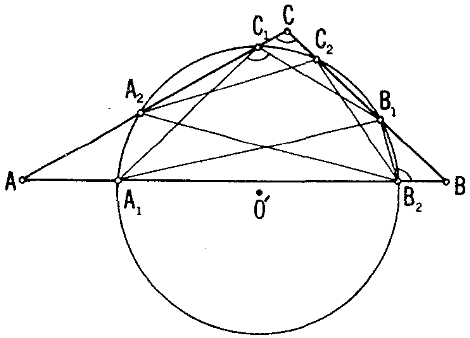
از تشابه مثلثهای CO_1A و BO_2A داریم

$$\frac{O_1A}{O_2A}=\frac{AC}{AB}$$

از مقایسهٔ دوتناسب فوق نتیجه می‌شود که

$$\frac{AA_1}{AA_2}=\frac{AC}{AB}$$

که از آن نتیجه می‌گیریم که مثلثهای AA_1A_2 و ACB متشابه‌اند و درنتیجه‌خطهای A_1A_2 و BC پادموازی‌اند. به‌همین‌طریق می‌توان نشان داد که B_1B_2 با CA



شکل ۱۳۴

پادموازی است و $C_۱C_۲$ با AB پادموازی است.

ج) چهارضلعی $B_۱C_۱A_۱B_۲$ را درنظر می‌گیریم. دراین چهارضلعی $\sphericalangle B_۱C_۱A_۱ = \sphericalangle C$، زیرا مثلثهای $A_۱B_۱C_۱$ و ABC متشابه‌اند؛ بعلاوه $\sphericalangle A_۱B_۲B_۱ = ۱۸۰^\circ - \sphericalangle B_۱B_۲B$ (← شکل ۱۳۴). اما چون $B_۱B_۲$ با ضلع CA از $\triangle ABC$ پادموازی است، لذا داریم $\sphericalangle B_۱B_۲B = \sphericalangle C$ و درنتیجه

$$\sphericalangle B_۱C_۱A_۱ + \sphericalangle A_۱B_۲B_۱ = ۱۸۰^\circ$$

ازاینجامی‌بینیم که $B_۲$ بردایرهٔ‌محیطی $\triangle A_۱B_۱C_۱$ واقع است. به‌همین‌طریق می‌توان نشان داد که $C_۲$ و $A_۲$ براین دایره قرار دارند.

۶۹. الف) چون در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $AA_۱O_۱$، $BB_۱O_۱$ و $CC_۱O_۱$ زاویه‌های $O_۱AA_۱$، $O_۱BB_۱$ و $O_۱CC_۱$ متساوی‌اند[← مسألهٔ ۶۶ (الف)]، همهٔ این مثلثها باهم متشابه‌اند (شکل ۱۳۵). بنابراین

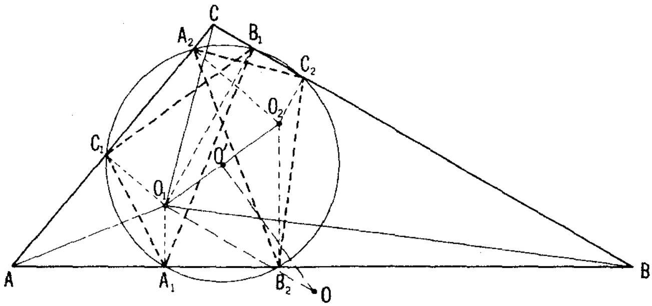
$$\sphericalangle AO_۱A_۱ = \sphericalangle BO_۱B_۱ = \sphericalangle CO_۱C_۱$$

و

$$O_۱A/O_۱A_۱ = O_۱B/O_۱B_۱ = O_۱C/O_۱C_۱؛$$

یعنی $\triangle A_۱B_۱C_۱$ را می‌توان از یک تجانس مارپیچی به‌مرکز $O_۱$ از $\triangle ABC$ به‌دست آورد. پس داریم $\triangle A_۱B_۱C_۱ \sim \triangle ABC$. به‌همین‌طریق می‌توان نشان‌داد که $\triangle A_۲B_۲C_۲ \sim \triangle ABC$.

مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $AA_۱O_۱$ و $AA_۲O_۲$ متشابه‌اند [← مسألهٔ ۶۶ (الف)]؛ درنتیجه، زاویه‌های $AO_۱A_۱$ و $AO_۲A_۲$ که بترتیب مثلثهای $A_۱B_۱C_۱$ و $A_۲B_۲C_۲$ را



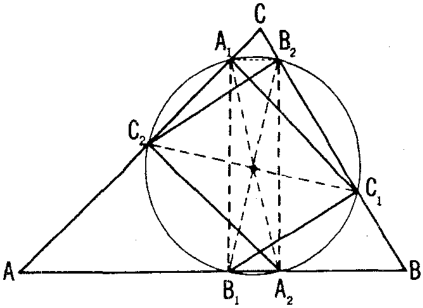
شکل ۱۳۵

به‌اندازهٔ آنها دوران داده بودیم، متساوی‌اند. بنابراین زاویه‌هایی که خطهای A_1B_1 و A_2B_2 با AB می‌سازند نیز متساوی‌اند و مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$، که در $\triangle ABC$ محاط‌اند در شرایط مسألهٔ ۶۸ صدق می‌کنند؛ بدین‌ترتیب همهٔ نتایج آن مسأله را می‌توان برای آنها به‌کار برد.

از تشابه مثلثهای O_1OO' و O_1AA_1، که در آنها O_1OO' مثلث مورد نظر در راه‌حل مسألهٔ ۶۶ (الف) است (← شکل ۱۳۵)، داریم $\measuredangle O_1O'O = \measuredangle O_1A_1A = 90^\circ$. از اینجا نتیجه می‌شود که نقطهٔ O'، مرکز مشترك دایره‌های محیطی مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ وسط O_1O_2 است.

ب) اگر رأسهای $\triangle A_1B_1C_1$، که اضلاعش با ارتفاعهای $\triangle ABC$ موازی‌اند، بر اضلاع مثلث ABC بترتیب مرسوم در شکل ۱۳۶ واقع باشند، آنگاه A_1B_1 می‌تواند با ارتفاع CF یا ارتفاع BE (ولی نه با ارتفاع AD!) موازی باشد. اگر $A_1B_1 \| CF$، آنگاه $B_1C_1 \| BE$؛ اگر $A_1B_1 \| BE$، آنگاه $A_1C_1 \| CF$. پس دو امکان برای محاط کردن مثلثی در مثلث مفروض ABC وجود دارد به‌قسمی که اضلاعش با ارتفاعهای مثلث ABC موازی باشند، یعنی دو مثلث محاط با این مشخصات وجود دارد [← مسألهٔ ۹ (ب)]. در شکل ۱۳۶ این مثلثها به‌نام $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ خوانده شده‌اند. این مثلثها با $\triangle ABC$ متشابه‌اند (رأسهای متناظر را با حروف واحدی نشان می‌دهیم). بسادگی می‌توان پی برد که همهٔ شرایط مسألهٔ ۶۸ در مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ برقرار است؛ پس این دو باهم قابل انطباق‌اند [← مسألهٔ ۶۸ (الف)].

اکنون چهارضلعی $A_1B_1A_2B_2$ را درنظر می‌گیریم. در این چهارضلعی داریم $A_1B_1 = A_2B_2$، $A_1B_1 \| A_2B_2$، و $A_1B_1 \perp B_1A_2$. درنتیجه این چهارضلعی



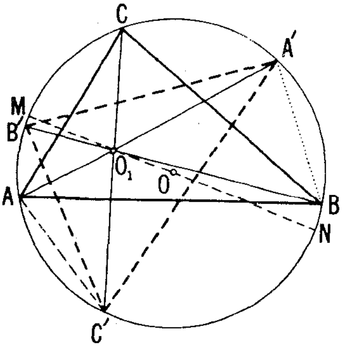
شکل ۱۳۶

مستطیل است وقطرهایش متساوی‌اند و یکدیگر را نصف می‌کنند. به‌همین‌طریق می‌توان نشان داد که پاره‌خطهای B_1B_2 و C_1C_2 متساویند و درنقطهٔ برخورد یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین هرسه‌پاره‌خط واصل بین رأسهای متناظر مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ متساوی‌اندو درنقطهٔ برخورد مشترکشان نصف می‌شوند. این نقطه مرکز دایره‌ای است که درعین حال هم برمثلث $A_1B_1C_1$ و هم برمثلث $A_2B_2C_2$ محیط است [مسألهٔ ۶۸ (ج)].

۷۰. الف) اندازهٔ $\sphericalangle A'AB$ را به ϕ نشان می‌دهیم. چون

$$\sphericalangle A'AB=\sphericalangle B'BC=\sphericalangle C'CA=\phi$$

خواهیم داشت $2\phi=(\text{کمان } AC')=(\text{کمان } CB')=(\text{کمان } BA')$ و مثلث



شکل ۱۳۷

$C'A'B'$ از $\triangle ABC$ بر اثر دورانی به‌زاویهٔ 2ϕ حول نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی، به‌دست می‌آید (شکل ۱۳۷).

ب) مثلا در مثلث AO_1C' داریم

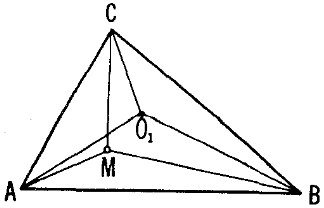
$$\measuredangle AO_1C' = \frac{\overset{\frown}{AC'} + \overset{\frown}{CA'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BA'} + \overset{\frown}{CA'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \measuredangle BAC$$

$$\measuredangle C'AO_1 = \frac{\overset{\frown}{C'B} + \overset{\frown}{BA'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{C'B} + \overset{\frown}{AC'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \measuredangle ACB$$

و بنابراین $\triangle AO_1C'$ با $\triangle ABC$ متشابه است. نحوهٔ اثبات برای پنج مثلث دیگر نیز همین است.

۷۱. نقطهٔ O_1 اولین مرکز دوران $\triangle ABC$ را به همهٔ رأسهای مثلث وصل می‌کنیم (شکل ۱۳۸). نقطهٔ M درداخل یکی ازمثلثهای ABO_1، BCO_1، CAO_1 قرار می‌گیرد. اگر مثلا M درون (یاروی مرز) $\triangle ABO_1$ قرار گیرد (شکل ۱۳۸)، آنگاه $\measuredangle MAB \leqslant \measuredangle O_1AB \leqslant 30^\circ$ [← مسألهٔ ۶۶ (د)]. به همین‌طریق اثبات می‌شود که حداقل یکی‌اززاویه‌های MAC، MBC، MBA مساوی 30° یابزرگتراز 30° است (علاوه برمثلثهای ABO_1، BCO_1، CAO_1، باید مثلثهای ACO_2، CBO_2، BAO_2 را نیز درنظر گرفت که درآنها O_2 دومین مرکز دوران مثلث است).

در واقع ازاین برهان نتیجه می‌شود کــه حداقل یکی از زاویه‌های MAB، MBC، MCA همیشه اکیداً کوچکتر از 30° است و تنها استثنا در این مــورد وقتی است کــه $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع و M مرکــز آن باشد (در این حالت $\measuredangle MAB = \measuredangle MBC = \measuredangle MCA = 30^\circ$).



شکل ۱۳۸

۷۲. الف)، ب). فرض می‌کنیم V نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای

$A_1A_2D_3$ و $A_1A_3D_2$، غیراز A_1، باشد (شکل ۱۳۹). دراین‌حالت اگرزاویه‌های مثلث $D_1D_2D_3$ را به D_1، D_2 و D_3 نشان دهیم داریم (شکل ۱۳۹)*

$$\sphericalangle A_1VA_3=180^\circ-\sphericalangle D_2 \quad \text{و} \quad \sphericalangle A_1VA_2=\sphericalangle D_3$$

و در نتیجه

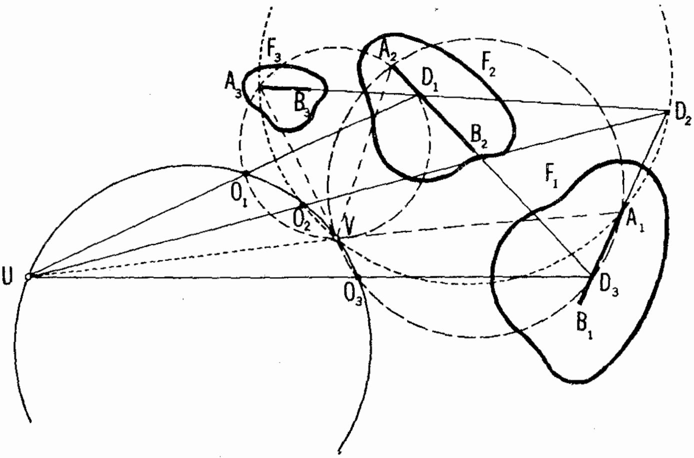
$$\sphericalangle A_2VA_3=\sphericalangle A_3VA_1-\sphericalangle A_2VA_1=180^\circ-\sphericalangle D_2-\sphericalangle D_3=\sphericalangle D_1$$

و بنابراین دایرهٔ محیطی $\triangle A_2A_3D_1$ از V نیز می‌گذرد.

باید توجه داشت که براساس نحوهٔ پیدا کردن مرکز دوران (← صفحهٔ ۵۳، شکل ۳۰ ب)، O_1 بر دایرهٔ محیطی $\triangle A_2A_3D_1$ قرار دارد، و O_2 بر دایرهٔ محیطی $\triangle A_1A_3D_2$، و O_3 بر دایـرهٔ محیطی $\triangle A_1A_2D_3$؛ بعلاوه، همان‌طور کـه ثابت کردیم همهٔ این دایره‌ها ازنقطهٔ مشترك V می‌گذرند.

اکنون نقطهٔ برخورد خطهای D_2O_2 و D_3O_3 را به U نشان می‌دهیم. دراین صورت داریم (← شکل ۱۳۹)*

$$\sphericalangle O_2VO_3=\sphericalangle D_2O_2V+\sphericalangle D_3O_3V-\sphericalangle O_2UO_3$$



شکل ۱۳۹

* ← پانویس مربوط به‌گزارهٔ ۳، جلد اول.

(برای اثبات کافی است چهارضلعی $O_۲VO_۳U$ را بهوسیلهٔ قطر UV به‌دومثلث تقسیم کنیم و قضیهٔ زاویه‌های خارجی را درهریك ازاین مثلثها به‌کار بریم). ازآنجا که نقاط $D_۲$، $O_۲$، V و $A_۱$ روی یك دایره واقع‌اند داریم

$$\sphericalangle D_۲O_۲V = ۱۸۰^\circ - \sphericalangle D_۲A_۱V$$

و به‌دلیل مشابه داریم

$$\sphericalangle D_۳O_۳V = ۱۸۰^\circ - \sphericalangle D_۳A_۱V$$

که ازآنها نتیجه می‌شود

$$\sphericalangle D_۲O_۲V + \sphericalangle D_۳O_۳V = ۱۸۰^\circ$$

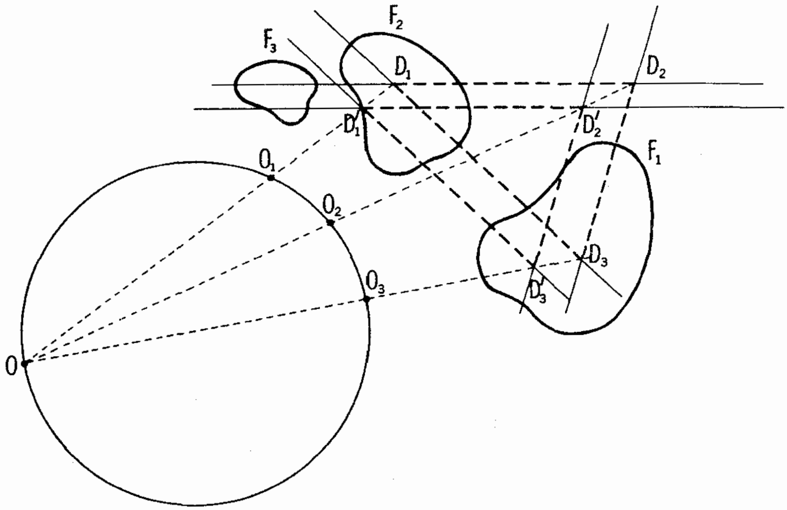
و بنابراین

$$\sphericalangle O_۲VO_۳ = ۱۸۰^\circ - \sphericalangle O_۲UO_۳$$

یعنی، نقاط $O_۲$، $O_۳$، U و V بریك دایره واقع‌اند.

نقطهٔ برخورد مشترك دایره‌های محیطی مثلثهای $B_۱B_۲D_۳$، $B_۱B_۳D_۲$ و $B_۲B_۳D_۱$ را $\bar{V}$ می‌نامیم. به‌روشی شبیه قسمت قبل نشان می‌دهیم که $O_۲$، $O_۳$، U و $\bar{V}$ بریك دایرهٔ مشترك واقع‌اند. پس می‌بینیم که پنج نقطهٔ $O_۲$، $O_۳$، V، $\bar{V}$ و U بریك دایره قرار دارند. به‌همین طریق می‌توان نشان دادکه نقاط $O_۱$، $O_۳$، V، $\bar{V}$ بریك دایره واقع‌انـد. اما با توجه به‌اینکه دو دستهٔ چهارتایی از نقاط $O_۱$، $O_۳$، V، $\bar{V}$ و $O_۲$، $O_۳$، V، $\bar{V}$ هرکدام به‌طور جداگانه بریك دایره واقع‌اند، ملاحظه می‌کنیم که این دو دایره بایـد بر یکدیگر و بر دایرهٔ تجانس شکلهای $F_۱$، $F_۲$، $F_۳$ منطبق باشند؛ به‌این ترتیب اثبات قسمت (ب) مسأله کامل می‌شود؛ بعلاوه، می‌بینیم کـه U، نقطهٔ برخورد $D_۲O_۲$ و $D_۳O_۳$ براین دایره قرار دارد. به‌عبارت دیگر، خط $D_۲O_۲$ از نقطـهٔ U (کـه متمایـز از $O_۳$ است) مـحل بـرخورد خط $D_۳O_۳$ بـا دایـرهٔ تجانس شکلهای $F_۱$، $F_۲$، $F_۳$ می‌گذرد؛ به‌همین طریق می‌توان نشان دادکـه خط $D_۱O_۱$ نیز از همان نقطه می‌گـذرد و بدین‌ترتیب برهان حکم قسمت (الف) کامل می‌شود.

ج) ابتدا فرض‌می‌کنیم که‌اضلاع $\triangle D'_۱D'_۲D'_۳$ بااضلاع‌متناظر $\triangle D_۱D_۲D_۳$ موازی‌اند (شکل ۱۴۰). از آنجا کـه $O_۳$ مرکز دوران شکلهای $F_۱$ و $F_۲$ است به‌سادگی نتیجه می‌شود که فاصله‌های خطهای $D'_۱D'_۳$ و $D'_۲D'_۳$ از $O_۳$ با فاصله‌های



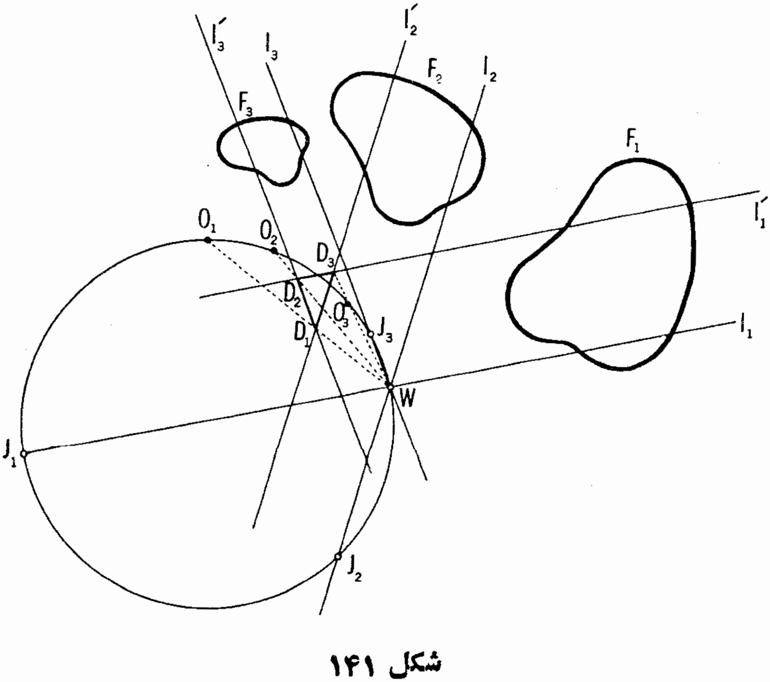
شکل ۱۴۰

D_2D_3 و D_1D_3 از O_3 متناسب‌اند. ازاینجا نتیجه می‌شود که D_3' برخط O_3D_3 واقع است. به‌همین‌طریق می‌توان نشان داد که D_2' بر O_2D_2 واقع است و D_1' بر O_1D_1. با توجه به نتیجهٔ قسمت (الف) معلوم می‌شود که D_1D_1'، D_2D_2' و D_3D_3' در یك نقطهٔ O متقاطع‌اند که طبعاً همان مرکز تجانس مثلثهای $D_1D_2D_3$ و $D_1'D_2'D_3'$ است؛ این نقطه بردایرهٔ تجانس شکلهای F_1، F_2، F_3 قرار دارد.

اکنون فرض می‌کنیم که اضلاع $\triangle D_1'D_2'D_3'$ موازی با اضلاع متناظر $\triangle D_1D_2D_3$ نیستند. پاره‌خطهای A_1B_1 و A_1C_1، A_2B_2 و A_2C_2، A_3B_3 و A_3C_3 را سه زوج پاره‌خط متناظر از شکلهای F_1، F_2 و F_3 می‌گیریم؛ همچنین $D_1D_2D_3$ و $D_1'D_2'D_3'$ را مثلثهایی می‌گیریم که اضلاع آنها به‌ترتیب ازخطهای A_1B_1، A_2B_2 و A_3B_3 و خطهای A_1C_1، A_2C_2 و A_3C_3 تشکیل شده‌اند (← شکل ۶۳ ج در متن). مثلثهای $D_1D_2D_3$ و $D_1'D_2'D_3'$ متشابه‌اند زیرا زاویهٔ بین خطهای A_1B_1 و A_1C_1 درشکل F_1 برابر است با زاویهٔ بین خطهای متناظر A_2B_2 و A_2C_2 درشکل F_2 و با زاویهٔ بین A_3B_3 و A_3C_3 درشکل F_3. مرکز دوران مثلثهای $D_1D_2D_3$ و $D_1'D_2'D_3'$ بردایره‌ای واقع است که از سه‌نقطهٔ D_3، D_3' و A_1 می‌گذرد (← نحوهٔ پیدا کردن مرکز دوران دوشکل، صفحهٔ ۵۲). اما چون $\measuredangle D_3A_1D_3' = \measuredangle D_3A_2D_3'$ این دایره از نقطهٔ A_2 هم می‌گذرد. پس

مرکز دوران مثلثهای $D_1D_2D_3$ و $D'_1D'_2D'_3$ بردایرهٔ محیطی $\triangle A_1A_2D_3$ قرار دارد. به‌دلیل مشابه، مرکز دوران، بردایره‌های محیطی مثلثهای $A_1A_3D_2$ و $A_2A_3D_1$ واقع است. با توجه به‌قسمت (ب)، نقطهٔ برخورد این دایره‌ها بردایرهٔ تجانس‌شکلهای F_1، F_2، F_3 قرار دارد (شکلهای ۶۳ ج و ۶۳ ب مقایسه شوند).

۷۳. الف) فرض‌کنید l_1، l_2، l_3 سه خط متناظر از شکلهای F_1، F_2 و F_3 باشند که در یك نقطهٔ W متقاطع‌اند؛ l'_1 را خطی از شکل F_1 موازی با l_1، و همچنین l'_2 و l'_3 را خطهای متناظر با l'_1 درشکلهای F_2 و F_3 می‌گیریم و فرض می‌کنیم $D_1D_2D_3$ مثلثی باشدکه اضلاعش را خطهای l'_1، l'_2 و l'_3 تشکیل داده‌اند (شکل ۱۴۱). بدیهی است که $l'_2 \| l_2$ و $l'_3 \| l_3$. بعلاوه، چون O_3 مرکز دوران F_1 و F_2 است، فاصلهٔ O_3 تا l_1 و l_2 با فاصلهٔ O_3 تا l'_1 و l'_2 متناسب است. از اینجا نتیجه می‌شود که خط O_3D_3 از W می‌گذرد. به‌همین طریق می‌توان نشان داد که خطهای O_2D_2 و O_1D_1 از W می‌گذرند. اکنون تنها کافی است نتیجهٔ مسألهٔ ۷۲ (الف) را به‌کار گیریم.



شکل ۱۴۱

ب) ابتدا توجه کنید که زاویهٔ D_1 ازمثلث $D_1D_2D_3$ (شکل ۱۴۱) به‌انتخاب خطهای l'_1، l'_2، l'_3 بستگی ندارد؛ این همان زاویهٔ دوران تجانس مارپیچی است که F_2 را به F_3 بدل می‌کند. بعلاوه، نسبت فاصله‌های خطوط l'_2 و l'_3 از نقطهٔ O_1 به‌انتخاب این خطها بستگی ندارد؛ این نسبت برابر است با نسبت تجانس شکلهای F_2 و F_3. از اینجا نتیجه می‌شود که‌زاویه‌های $O_1D_1D_2$ و $O_1D_1D_3$ اندازهٔ ثابتی دارند. حال اگر J_2 و J_3 نقاط برخورد l_2 و l_3 با دایرهٔ تجانس F_1، F_2 و F_3 باشند، آنگاه $\measuredangle O_1WJ_2 = \measuredangle O_1D_1D_3$ و $\measuredangle O_1WJ_3 = \measuredangle O_1D_1D_2$؛ کمانهای O_1J_2 و O_1J_3 اندازهٔ ثابتی دارند و در نتیجه J_2 و J_3 به انتخاب خطهای l_1، l_2 و l_3 بستگی ندارند. به‌همین ترتیب، l_1 نیز دایرهٔ تجانس F_1، F_2 و F_3 را درنقطهٔ ثابت J_1 قطع می‌کند.

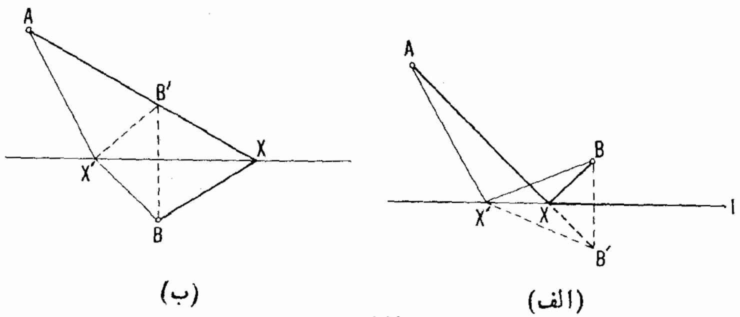
اثبات این‌مطلب‌را به‌خواننده واگذار می‌کنیم که، بعکس اگر U نقطهٔ دلخواهی بردایرهٔ تجانس F_1، F_2 و F_3 باشد، آنگاه خطهای UJ_1، UJ_2 و UJ_3 خطهای‌متناظری ازاین شکلها هستند.

۷۴. الف) قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به‌خط l را B' می‌نامیم (شکل ۱۴۲ الف). اگر X' نقطهٔ دلخواهی بر l باشد، آنگاه

$$AX' + X'B = AX' + X'B'$$

بنابراین، مجموع $AX' + BX'$ وقتی کمترین مقدار خـود را دارد کـه مجموع $AX' + B'X'$ حداقل باشد، یعنی وقتی‌که X' بر نقطهٔ X، محل برخورد AB' با l، منطبق باشد.

ب) قرینهٔ B نسبت به‌خط l را B' می‌نامیم (شکل ۱۴۲ ب). اگر X' نقطهٔ



شکل ۱۴۲

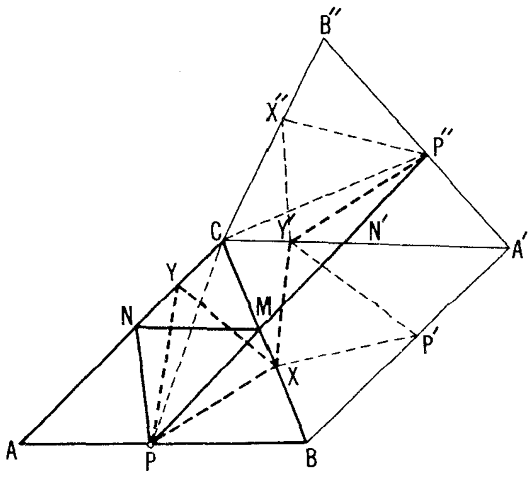
دلخواهی بر l باشد، آنگاه $AX'-B'X' \leqslant AB'$. و چون

$$AX'-BX'=AX'-B'X'$$

پس تفاضل $AX'-BX'$ وقتی حداقل می‌شود کـه X' بر نقطهٔ X، محل برخورد AB' با l، منطبق باشد.

۷۵. الف) راه‌حل اول. فرض کنید PXY مثلث دلخواهی‌محاط در $\triangle ABC$ باشدچنان که P یکی ازرأسهای آن باشد. قرینهٔ مثلث ABC را همراه با $\triangle PXY$ نسبت به‌خط BC می‌یابیم؛ قرینهٔ مثلث $A'BC$ را که به این طریق حاصل می‌شود همراه با $P'XY'$ کـه درآن محاط است نسبت به‌خط CA' پیدا می‌کنیم (شکل ۱۴۳). چون با علایم شکل ۱۴۳ داریـم $XY=XY'$ و $YP=YP''$، محیط $\triangle PXY$ برابر است با طول خط شکستهٔ $PXY'P''$.

اکنون دوحالت امکان‌پذیر است. اگر پاره‌خط PP'' خط BC را بین نقاط B و C (و بنابراین خط CA' را بین نقاط C و A') قطع کند، دراین صورت از هرخط شکستهٔ $PXY'P''$ دیگری کوتاهتر خواهد بود و مثلث مطلوب به‌دست آمده است (مثلث PMN در شکل ۱۴۳، که در آن M نقطهٔ برخورد PP'' با BC، و N قرینهٔ نقطهٔ N' نسبت به‌خط BC، و N' نقطهٔ برخورد PP'' با CA' است). اگر پاره‌خط PP'' خط BC را درخارج پاره‌خط BC قطع کند، آنگاه کوتاهترین



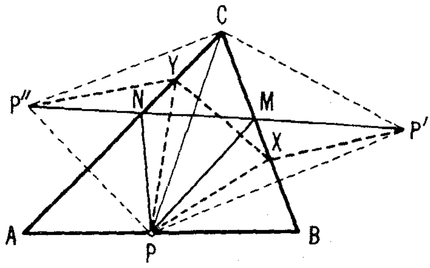
شکل ۱۴۳

خط شکستهٔ $PXY'P''$ خط شکسته‌ای است که به‌ازای آن X و Y' بر C منطبق باشند. در این‌صورت مثلث‌مطلوب به‌پاره‌خط PC که دوبار پیموده شود، بدل‌می‌شود.

اکنون مانده است مشخص‌کنیم که هریك ازاین حالتها چه موقع پیش می‌آید. برای این‌کار توجه می‌کنیم که $\triangle A'B''C$ از $\triangle ABC$ بر اثر دورانی حول C به‌اندازهٔ زاویه‌ای دو برابر زاویهٔ C به‌دست می‌آید (زیرا $A'B''C$ از ABC بر اثر دو قرینه‌یابی متوالی نسبت به‌خطهای BC و CA' که با هم زاویهٔ C می‌سازند به‌دست می‌آید؛ ← گزارهٔ ۳ بخش ۱، فصل ۲، جلد اول)؛ بنابراین $\measuredangle PCP'' = 2 \measuredangle C$. از اینجا بلافاصله نتیجه می‌شود که اگر $\measuredangle C < 90°$، آنگاه خط PP'' ضلع BCی مثلث را قطع می‌کند، ولی اگر $\measuredangle C \geqslant 90°$، PP'' خط BC را در C یا در نقطه‌ای واقع بر امتداد BC از طرف C قطع می‌کند.

راه‌حل دوم. بار دیگر PXY را مثلث دلخواهی‌محاط در $\triangle ABC$ می‌گیریم؛ قرینه‌های P نسبت به BC و CA را P' و P'' می‌نامیم (شکل ۱۴۴). چون $PX = P'X$ و $PY = P''Y$، محیط $\triangle PXY$ برابرست با طول خط شکستهٔ $P'XYP''$. پس اگر $P'P''$ دو ضلع AC و BC از $\triangle ABC$ را در نقاط M و N قطع کند، $\triangle PMN$ مثلث مطلوب است. اگر $P'P''$ پاره‌خطهای AC و BC را قطع نکند، مثلث مطلوب به‌پاره‌خط PC که دوبار پیموده شود بدل می‌شود. به‌طریقی مشابه آنچه در راه‌حل اول آمد، می‌توان نشان داد که حالت‌اول وقتی پیش می‌آید که زاویهٔ C از مثلث کمتر از $90°$ باشد و حالت دوم وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم $\measuredangle C \geqslant 90°$.

توجه دارید که راه‌حل دوم اساساً تفاوت زیادی با راه‌حل اول ندارد (شکلهای ۱۴۳ و ۱۴۴ مقایسه شوند).

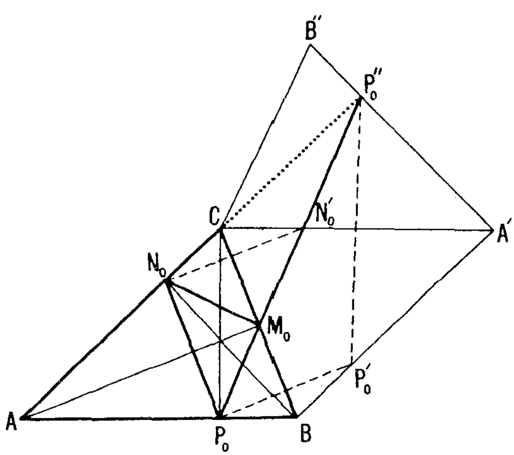


شکل ۱۴۴

ب) راه‌حل اول. فرض می‌کنیم که زاویهٔ رأس C درمثلث مفروض حاده است. P را نقطهٔ دلخواهی برضلع AB می گیریم؛ با استفاده از راه‌حل اول قسمت(الف) مثلث PMN را بـا کمترین محیط ممکن، برابر با طول پاره خط PP'' در مثلث ABC محاط می کنیم (← شکل ۱۴۳). اکنون کافی است نقطهٔ P را چنان انتخاب کنیم که پاره‌خط PP'' کوچکترین مقدار ممکن را داشته باشد. یادآوری می‌کنیم کـه $\sphericalangle PCP''=۲\sphericalangle C$ ، یعنی این زاویـه بـه انتخاب نقطهٔ P بستگی ندارد؛ بنا براین قاعدهٔ PP'' درمثلث متساوی‌الساقین PCP'' با زاویهٔ رأس معلوم $۲\sphericalangle C$ وقتی کمترین اندازه را دارد که ضلع CP کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. در اینجا باید دوحالت جداگانه را درنظر گرفت.

حالت اول. زاویه‌های رئوس A و B از مثلث ABC هردو حاده‌اند (مثلث حادالزوایاست). در این حالت وقتـی پاره‌خط CP کوتاهترین طـول ممکن را داراست که نقطهٔ P همان $P_\circ$ یعنی پای ارتفاع $CP_\circ$ درمثلث ABC باشد (شکل ۱۴۵). به‌سادگی می‌توان نشان داد کـه رأسهای $M_\circ$ و $N_\circ$ از مثلث $P_\circ M_\circ N_\circ$ حاصل از این انتخاب $P_\circ$ نیز پاهای ارتفاعهای مثلث ABC هستند. در واقـع از شکل ۱۴۵ نتیجه می‌شود که

$$\sphericalangle N_\circ P_\circ A=\sphericalangle CP_\circ A-\sphericalangle CP_\circ N_\circ$$
$$=۹۰^\circ-\sphericalangle CP''_\circ N'_\circ=۹۰^\circ-\frac{۱۸۰^\circ-۲\sphericalangle C}{۲}$$



شکل ۱۴۵

یعنی می‌توان دایره‌ای برچهارضلعی $BCN_\circ P_\circ$ محیط کرد و

$$\measuredangle BN_\circ C = \measuredangle CP_\circ B = ۹۰^\circ$$

به‌همین‌طریق می‌توان نشان داد که $BC \perp AM_\circ$.*

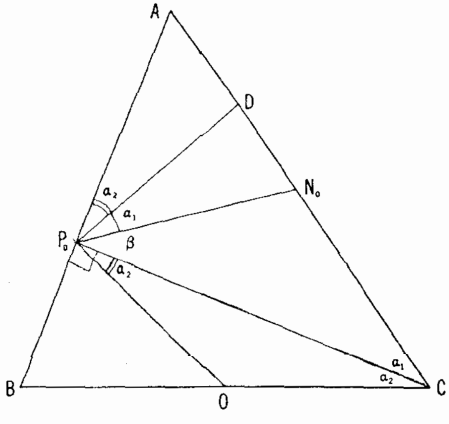
---

* محاسبه‌ای که در اینجا عرضه شده مبتنی بر این نکات است که در مثلث $CP_\circ P''_\circ$ داریم $\measuredangle P_\circ CP''_\circ = ۲ \measuredangle C$ و $\measuredangle CP_\circ P''_\circ = \measuredangle CP''_\circ P_\circ = \measuredangle CP''_\circ N'_\circ$ و بنابراین

$$۲ \measuredangle CP''_\circ N'_\circ = ۱۸۰^\circ - ۲ \measuredangle C$$

برای تحقیق اینکه می‌توان دایره‌ای برچهارضلعی $BCN_\circ P_\circ$ محیط کرد با دانستن اینکه $\measuredangle N_\circ P_\circ A = \measuredangle C$، بـه‌روش زیـر عمل می‌کنیم. پاره‌خط $CP_\circ$ زاویـهٔ C را به دو بخش تقسیم می‌کند. فرض می‌کنیم $\alpha_۱ = \measuredangle P_\circ CN_\circ$ و $\alpha_۲ = \measuredangle BCP_\circ$. از $P_\circ$ خطی می‌گذرانیم کـه با $P_\circ N_\circ$ زاویهٔ $\alpha_۱$ بسازد و نقطهٔ برخورد این خط با $AN_\circ$ را D می‌نامیم. پس داریم $\measuredangle DP_\circ A = \alpha_۲$ (←شکل ۱۴۶) . همچنین فـرض می‌کنیم $\beta = \measuredangle CP_\circ N_\circ$؛ پس $\alpha_۱ + \alpha_۲ + \beta = ۹۰^\circ$. نقطهٔ وسط BC را O می‌نامیم. چـون $\measuredangle CP_\circ B = ۹۰^\circ$ پاره‌خط BC قطر دایـرهٔ محیطی مثلث $CP_\circ B$ است و بنابراین O مرکز این دایره خواهد بود. پس $OC = OP_\circ$، زیرا این دوشعاع دایره‌اند و بنابراین $\measuredangle OP_\circ C = \measuredangle OCP_\circ = \alpha_۲$.

اکنون S، دایرهٔ محیطی مثلث $\triangle CP_\circ N_\circ$، را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم نشان



شکل ۱۴۶

←

حالت دوم. اگر مثلا، A زاویهٔ قائمه یا منفرجه باشد، آنگاه پاره‌خط CP وقتی حداقل است که P بر رأس A منطبق باشد. در این حالت مثلث مطلوب به ارتفاع $AM_{\circ}$ که دوبار پیموده شود تبدیل می‌شود.

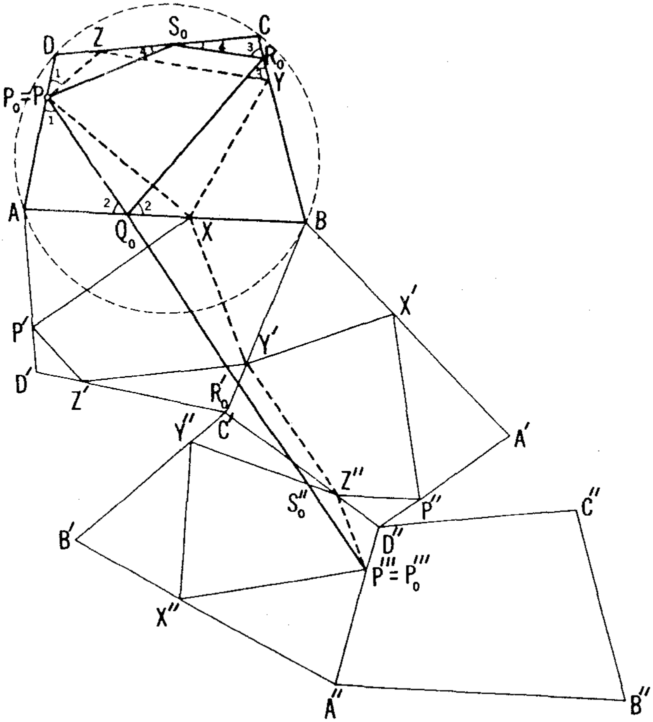
راه‌حل دوم. در حل قسمت (ب) می‌توان از راه‌حل دوم قسمت (الف) نیز آغاز کرد. چون محیط $\triangle MNP$ (← شکل ۱۴۴) برابر با $P'P''$ است و $CP'=CP''=CP$ و $P'CP''=2\measuredangle C$، مسأله تبدیل می‌شود به یافتن نقطهٔ P چنان که CP کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. بقیهٔ این راه‌حل مثل راه‌حل اول است.

۷۶. ابتدا به حل مسأله‌ای شبیه مسألهٔ ۷۵ (الف) می‌پردازیم، یعنی: با فرض اینکه نقطهٔ P برضلع AD از چهارضلعی $ABCD$ داده شده باشد، می‌خواهیم یك چهارضلعی باکمترین محیط پیدا کنیم که در $ABCD$ محاط و یك رأسش P باشد. این مسأله را می‌توان با روشی شبیه راه‌حل اول مسألهٔ ۷۵ (الف) حل کرد. برای این کار قرینهٔ چهارضلعی $ABCD$ را نسبت به‌ضلع AB پیدا می‌کنیم؛ سپس قرینهٔ چهارضلعی $ABC'D'$ را که به این طریق حاصل شده نسبت به ضلع BC' پیدا می‌کنیم؛ سرانجام قرینهٔ چهارضلعی‌حاصل، یعنی $A'BC'D''$ را نسبت به‌ضلع $C'D''$ پیدا می‌کنیم تا چهارضلعی $C'D''A''B'$ به‌دست آید (شکل ۱۴۷ الف).

فرض کنید که در این روش یك چهارضلعی محاطی دلخواه $PXYZ$ متوالیاً از وضعیتهای $P'XY'Z'$، $P''X'Y'Z''$ و $P'''X''Y''Z''$ بگذرد؛ محیط‌چهارضلعی $PXYZ$ به‌وضوح برابر است با طول خط شکستهٔ $PXY'Z''P'''$. از اینجا نتیجه

دهیم که مرکز S نقطهٔ O است. چون $\measuredangle P_{\circ}CN_{\circ}=\measuredangle DP_{\circ}N_{\circ}$، نتیجه می‌شود که $P_{\circ}D$ بر S مماس است. چون $\alpha_1+\alpha_2+\beta=90°$ نتیجه می‌شود که $P_{\circ}O$ باید شعاع دایرهٔ S در $P_{\circ}$ باشد. سرانجام، چون $OP_{\circ}=OC$ و C بر S واقع است، معلوم می‌شود که O باید مرکز S باشد یعنی همان حکمی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

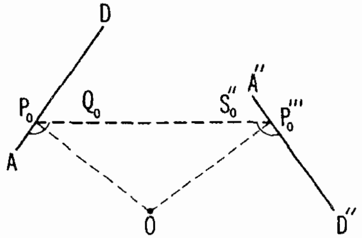
محاسبات فوق در این جهت بود که نشان دهیم وقتی $P_{\circ}$ به‌روش مذکور در راه‌حل مسأله اختیار شود، آنگاه $M_{\circ}$ و $N_{\circ}$ خودبخود پاهای عمودها خواهند بود. اثبات این مطلب چنین است. فرض کنید که، مثلا $N_{\circ}$ پای عمود وارد از B برضلع AC نباشد. در این صورت طبق استدلالی درست شبیه آنچه برای $P_{\circ}$ ذکر شد می‌بینیم که می‌توان یك مثلث محاطی با محیط کوچکتر به‌دست آورد. برای این کار باید رأس N را طوری اختیار کرد که در پای عمود واقع باشد و سپس دو رأس دیگر P و M را به‌روش مذکور درقسمت (الف) پیدا کرد. اما این کار ناممکن است زیرا قبلا دیده‌ایم که بهترین انتخاب برای P در $P_{\circ}$ است که همان پای عمود وارد از C است.



شکل ۱۴۷ (الف)

می‌شود که اگر خط PP''' اضلاع AB، BC' و $C'D''$ ازچهارضلعی‌های رسم‌شده را قطع کند، آنگاه نقاط برخورد، چهارضلعی مطلوب را مشخص می کنند؛ اگر PP''' همهٔ این پاره‌خطها را قطع نکند، چهارضلعی مطلوب تبهگون خواهد بود (یعنی مثلثی که یك رأسش بر یکی از رأسهای چهارضلعی $ABCD$ منطبق است، یا بدل به‌قطری ازچهارضلعی $ABCD$ می‌شود که دوبار پیموده شده‌است).

اکنون به‌سراغ راه‌حل مسألهٔ اصلی می‌رویم. بایـد نقطهٔ P را برضلع AD ازچهارضلعی $ABCD$ طوری بیابیم که پاره‌خط PP''' که در آن P''' نقطهٔ متناظر P روی ضلع $A''D''$ از چهارضلعی $A''B'C'D''$ است، دارای کمترین طول باشد [با راه‌حل مسألهٔ ۷۵ (ب) مقایسه شود]. چنان که در راه‌حل مسألهٔ ۷۵ (ب) دیدیم اگر پاره‌خطهای AD و $A''D''$ متوازی و همجهت نباشند، آنگاه نقطهٔ مطلوب پای



شکل ۱۴۷ (ب)

عمود وارد ازمرکـز دوران پاره‌خطهای AD و $A''D''$ برخط AD خواهد بـود (مشروط به‌اینکه این پای عمود روی پاره‌خط AD قرارگیرد) یا نقطهٔ مطلوب آن سر پاره‌خط AD خواهد بود کـه به‌پای این عمود نزدیکتر است (اگر پای عمود خارج از پاره‌خط AD قـرارگیرد). اگـر پاره‌خطهای AD و $A''D''$ متوازی و همجهت باشند، آنگاه فاصلهٔ هر نقطهٔ P ازضلع AD تا نقطهٔ متناظر P' ازپاره‌خط $A''D''$ ثابت است.

مسأله تنها درحالت اول دارای جوابی (یکتا) به‌معنی واقعی کلمه است، اگر در عین‌حال نقطهٔ P_0 پای عمود وارد از نقطهٔ O، مرکز دوران پاره‌خطهای AD و $A''D''$، برخط AD روی ضلع AD باشد، واگر خط $P_0P''_0$، که درآن P''_0 پای عمود وارد از O بر $A''D''$ است، سه پاره‌خط AB، BC' و $C'D''$ را قطع کند. در این حالت نقاط برخورد پاره‌خط $P_0P''_0$ با پـاره‌خطهای AB، BC'، $C'D''$ چهارضلعی مطلوب $P_0Q_0R_0S_0$ را مشخص می‌کنند (← شکل ۱۴۷ الف). بعلاوه، بسادگی می‌توان دید کـه $\measuredangle P_0P''_0D'' = \measuredangle P''_0P_0A$ (← شکل ۱۴۷ ب) کـه از اینجا نتیجه می‌شود کـه اضلاع P_0Q_0 و P_0S_0 از چهارضلعی مطلوب با ضلع AD از چهارضلعی $ABCD$ زوایای متساوی می‌سازنـد. بعلاوه، چون زاویه‌های متقابل به‌رأس‌حاصل ازتلاقی $P_0P''_0$ با خطوط AB، BC' و $C'D''$ متساوی‌اند، نتیجه می‌شودکه اضلاع P_0Q_0 و Q_0R_0 ازچهارضلعی $P_0Q_0R_0S_0$ باضلع AB ازچهارضلعی $ABCD$ زاویه‌های مساوی می‌سازند، و نیز اضلاع Q_0R_0 و R_0S_0 با ضلع BC و اضلاع R_0S_0 و S_0P_0 با ضلع CD.* بعلاوه با علامتگذاریهای

* پس نشان داده‌ایم‌که اگر $PQRS$ یك چهارضلعی با کمترین محیط محاط در $ABCD$ باشد، هردو ضلع متوالی آن بـا ضلعی از $ABCD$ که آن را قطع می‌کنند زاویه‌های

←

شکل ۱۴۷ الف، داریم

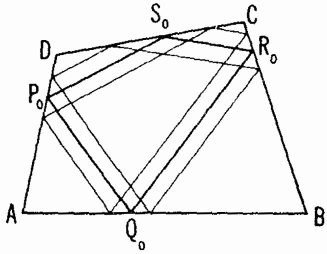
$$\measuredangle A+\measuredangle C=(۱۸۰^\circ-\measuredangle ۱-\measuredangle ۲)+(۱۸۰^\circ-\measuredangle ۳-\measuredangle ۴)$$
$$=۳۶۰^\circ-(\measuredangle ۱+\measuredangle ۲+\measuredangle ۳+\measuredangle ۴)$$
$$\measuredangle B+\measuredangle D=(۱۸۰^\circ-\measuredangle ۲-\measuredangle ۳)+(۱۸۰^\circ-\measuredangle ۴-\measuredangle ۱)$$
$$=۳۶۰^\circ-(\measuredangle ۱+\measuredangle ۲+\measuredangle ۳+\measuredangle ۴)$$
$$\measuredangle A+\measuredangle C=\measuredangle B+\measuredangle D=۱۸۰^\circ$$

پس مسأله تنها وقتی به‌معنی واقعی کلمه جواب دارد که چهارضلعی $ABCD$ قابل محاط شدن در دایره باشد.

اکنون فرض کنید که چهارضلعی $ABCD$ را بتوان در دایره‌ای محاط کرد (یعنی $\measuredangle B+\measuredangle D=۱۸۰^\circ$)؛ فرض می‌کنیم چهارضلعی $D''A''B''C''$ قرینهٔ $D''A''B'C'$ نسبت به $D''A''$ باشد. چون چهارضلعی $BC'D''A'$ از $ABCD$ بر اثر دورانی حول نقطهٔ B به اندازهٔ زاویهٔ $۲\measuredangle B$ به‌دست می‌آید [مقایسه شود با راه‌حل مسأله ۷۵ (الف)] و $D''A''B''C''$ از $D''A'BC'$ بر اثر دورانی حول D'' به‌اندازهٔ زاویهٔ $۲\measuredangle B$، و $۲\measuredangle B+۲\measuredangle D=۳۶۰^\circ$، نتیجه می‌گیریم که $A''B''C''D''$ از $ABCD$ بر اثر یك انتقال به‌دست می‌آید (← بخش ۲، فصل یك جلد اول). بنابراین اگر $ABCD$ را بتوان در دایره‌ای محاط کرد، آنگاه پاره‌خط $A''D''$ موازی و همجهت با AD است. پس فاصلهٔ بین نقطهٔ دلخواه P از AD و نقطهٔ متناظر P''' از $A''D''$ به‌موقعیت P بستگی ندارد، و بنابراین مسأله دارای مجموعه‌ای نامتناهی از جواب است که متناظر با همهٔ موقعیتهای P است به‌طوری که پاره‌خط PP''' پاره‌خطهای AB، BC' و $C'D''$ را قطع کند. روشن است که اضلاع همهٔ این چهارضلعیهای با کمترین محیط محاط در $ABCD$ با یکدیگر موازیند (← شکل ۱۴۸).

←

مساوی می‌سازند. این قضیه را می‌توان خیلی ساده‌تر هم ثابت کرد. در واقع اگر $\measuredangle SPD\neq\measuredangle QPA$، آنگاه بدون تغییر موقعیت رأسهای Q، R و S می‌توانیم موقعیت P را طوری تغییر دهیم که محیط چهارضلعی $PQRS$ کوچکتر شود [← راه‌حل مسألهٔ ۷۴ (الف)].



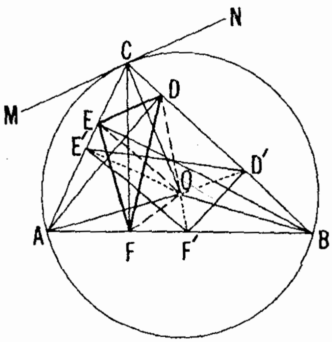
شکل ۱۴۸

۷۷. اگر D، E، F پاهای ارتفاعهای $\triangle ABC$ باشند، آنگاه

$$\triangle ABC \sim \triangle BCE$$

(←شکل ۱۴۹)؛ بنابراین $CE/CD = CB/CA$. در نتیجه $\triangle DEC$ $\triangle ABC$ و $\measuredangle CED = \measuredangle CBA$. فرض می‌کنیم MN بر دایرهٔ محیطی در نقطهٔ C مماس باشد. بدیهی است که $\measuredangle MCA = \measuredangle CBA (= \widehat{AC}/۲)$. پس $\measuredangle MCE = \measuredangle CED$ یعنی $ED \| MN \perp OC$. به‌همین طریق می‌توان نشان داد که $EF \perp OA$ و $DF \perp OB$ یعنی $\triangle DEF$ مثلث مطلوب است. [بسادگی می‌توان دید که هیچ مثلث دیگری محاط در $\triangle ABC$ جوابگوی مسأله نیست، زیرا هیچ مثلث محاطی دیگری نیست که اضلاعش با اضلاع $\triangle DEF$ موازی باشد.]

اگر $\triangle ABC$ حادالزوایا باشد، نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی درون آن واقع است (شکل ۱۴۹)؛ بنابراین



شکل ۱۴۹

$$\text{مساحت}(OEAF)+\text{مساحت}(ODCE)=\text{مساحت}(\triangle ABC)$$
$$+\text{مساحت}(OFBD)$$

ولی قطرهای هریك از این سه چهارضلعی اخیر برهم عمودند پس مساحت آنها برابراست بانصف حاصلضرب قطرهایشان. بنابراین

$$\text{مساحت}(\triangle ABC)=\frac{۱}{۲}OC\cdot DE+\frac{۱}{۲}OA\cdot EF+\frac{۱}{۲}OB\cdot FD$$

$$=\frac{۱}{۲}R(DE+EF+FD) \qquad (*)$$

که درآن، R شعاع دایرهٔ محیطی است.

اگر $F'D'E'$ مثلث دلخواهی محاط در ABC باشد، آنگاه

$$\text{مساحت}(OE'AF')+\text{مساحت}(OD'CE')=\text{مساحت}(\triangle ABC)$$
$$+\text{مساحت}(OF'BD')$$
$$=\frac{۱}{۲}OC\cdot D'E'\sin\gamma+\frac{۱}{۲}OA\cdot E'F'\sin\alpha$$
$$+\frac{۱}{۲}OB\cdot F'D'\sin\beta$$

کــه درآن، γ، α و β بترتیب زاویه‌های بین قطرهای چهارضلعیهای $OD'CE'$، $OE'AF'$ و $OF'BD'$ هستند؛ بنابراین

$$\text{مساحت}(\triangle ABC)\leqslant\frac{۱}{۲}R(D'E'+E'F'+F'D')$$

ازمقایسهٔ این معادله با معادلهٔ (*) درفوق، معلوم می‌شود که

$$DE+EF+FD\leqslant D'E'+E'F'+F'D'$$

پس بین همهٔ مثلثهای محاط درمثلث حادالزوایای مفروض، آنکه کمترین محیط را داراست همان است که رأسهایش پاهای ارتفاعهای مثلث مفروض باشند.

۷۸. ابتدا نقطه‌ای پیدا می‌کنیم که فاصله‌اش ازرأسهای A، B و C با اعداد

a، b و c متناسب باشد. یافتن این نقطه با استفاده از این قضیه که «مکان هندسی نقاطی که نسبت فاصله‌هایشان از دو نقطهٔ مفروض مقدار معلومی باشد، یك دایره است» به آسانی مقدور است (→ پانویس صفحهٔ ۴۹). بعلاوه می‌توان نشان داد که درحالت کلی دو نقطه با این ویژگی وجود دارد یکی درون دایرهٔ محیطی مثلث مفروض و دیگری بیرون آن. پس حتماً یکی از این نقاط دربیرون $\triangle ABC$ واقع است. اکنون دوحالت را باید درنظر بگیریم.

حالت اول. یکی از نقاط پیدا شده (که آن را O می‌نامیم) درون مثلث ABC واقع است (شکل ۱۵۰). در $\triangle ABC$ مثلث DEF را که اضلاعش بر پاره‌خطهای OA، OB و OC عمود ند محاط می‌کنیم [→ مسألهٔ ۹ (ب)، صفحهٔ ۲۲].

روشن است که داریم

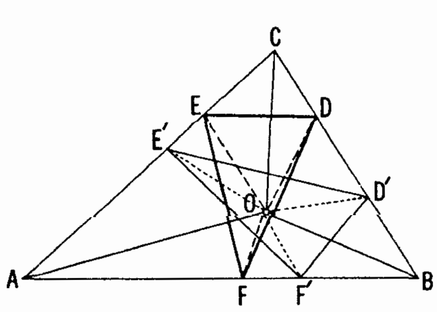
$$(\triangle ABC)\text{مساحت} = (OEAF)\text{مساحت} + (OFBD)\text{مساحت} + (ODCE)\text{مساحت}$$

چون $OA \perp EF$، $OB \perp FD$، $OC \perp DE$ و $OA = ak$، $OB = bk$، $OC = ck$ (به‌ازای مقداری برای عدد k)، داریم

$$(\triangle ABC)\text{مساحت} = \frac{1}{2} OA \cdot EF + \frac{1}{2} OB \cdot FD + \frac{1}{2} OC \cdot DE$$

$$= \frac{1}{2} k(a \cdot EF + b \cdot FD + c \cdot DE) \qquad (*)$$

اکنون $D'E'F'$ را مثلث دلخواهی محاط در ABC می‌گیریم و زاویهٔ بین



شکل ۱۵۰

قطرهـا را درچهارضلعیهای $OE'AF'$، $OF'BD'$، $OD'CE'$ بترتیب α، β، γ می‌نامیم. دراین حالت (مقایسه شود با راه‌حل مسألهٔ ۷۷) داریم

$$(\triangle ABC)\text{مساحت} = \frac{۱}{۲} OA \cdot E'F' \sin\alpha + \frac{۱}{۲} OB \cdot F'D' \sin\beta$$

$$+ \frac{۱}{۲} OC \cdot D'E' \sin\gamma$$

$$\leqslant \frac{۱}{۲} k(a \cdot E'F' + b \cdot F'D' + c \cdot D'E')$$

و بنابراین

$$a \cdot EF + b \cdot FD + c \cdot DE \leqslant a \cdot E'F' + b \cdot F'D' + c \cdot D'E'$$

یعنی DEF مثلث مطلوب است.

حالت دوم. اگـر نقطهٔ O مثلا روی ضلع AB از $\triangle ABC$ واقع باشد، مثلث مطلوب به‌ارتفاع وارد از C برضلع AB که دوبار پیموده شود بدل می‌گردد؛ اگر O در بیرون $\triangle ABC$ واقع باشد، مثلث مطلوب به‌ارتفاع دوبار پیموده شدهٔ وارد برضلعی از $\triangle ABC$ بدل می‌شود که O را از $\triangle ABC$ جدا می‌کند.* اثبات آن به‌خواننده واگذار می‌شود.

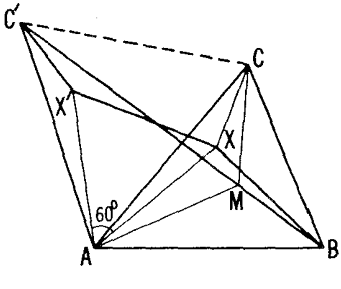
۷۹. نقطهٔ مطلوب M نمی‌تواند در بیرون $\triangle ABC$ باشد، زیرا در چنین حالتی بسادگی می‌توان یك نقطهٔ M' یافت چنان‌که

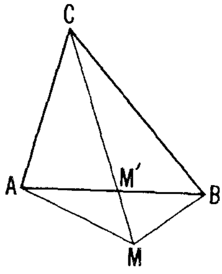
$$AM' + BM' + CM' < AM + BM + CM$$

(شکل ۱۵۱ الف). اکنون فرض می‌کنیم X نقطهٔ دلخواهی درون $\triangle ABC$ باشد (شکل ۱۵۱ ب). مثلث ACX را حول A به‌اندازهٔ زاویهٔ ۶۰° درجهت از B به C دوران می‌دهیم تـا در وضعیت جدید $AC'X'$ قرار گیرد. چون $AX = XX'$

---

* هرخط واقع درصفحه آن را به‌دو نیمصفحه تقسیم می‌کند؛ اگر نقاطی در نیمصفحه‌های متمایز باشند می‌گوییم توسط آن خط ازهم جدا شده‌اند. هرنقطه درخارج مثلث مفروض به‌توسط حداقل یك ضلع و حداکثر دوضلع مثلث (کـه به‌طور نامتناهی امتداد یابند) از نقاط داخلی مثلث جدا می‌شود. می‌توان نشان داد کـه در این مسأله، نقطهٔ O تنها توسط یك ضلع $\triangle ABC$ ازمثلث جدا شده‌است.





شکل ۱۵۱

(مثلث AXX' متساوی‌الاضلاع است) و $CX=C'X'$، معلوم می‌شود که مجموع فاصله‌های نقطهٔ X از رأسهای مثلث برابراست باطول خط شکستهٔ $BXX'C'$.
اکنون کافی است نقطهٔ M را طوری انتخاب کنیم که خط شکستهٔ $BMM'C'$ کمترین طول را داشته باشد.

دوحالت متمایز را درنظر می‌گیریم.

حالت اول. پاره‌خط $C'B$ ضلع AC از $\triangle ABC$ را قطع می‌کند؛ این حالت وقتی پیش می‌آید که $\sphericalangle BCC'<۱۸۰^\circ$، $\sphericalangle BAC'<۱۸۰^\circ$، یاچون داریم

$$\sphericalangle BCC'=\sphericalangle BCA+\sphericalangle ACC'=\sphericalangle BCA+۶۰^\circ$$

و

$$\sphericalangle BAC'=\sphericalangle BAC+\sphericalangle CAC'=\sphericalangle BAC+۶۰^\circ$$

وقتی زاویه‌های C و Aی مثلث کوچکتر از ۱۲۰° باشند. دراین‌حالت اگر یك نقطهٔ M را بتوان روی پاره خط $C'B$ طوری یافت که $\sphericalangle AMC'=۶۰^\circ$، آنگاه به‌ازای این نقطه داریم

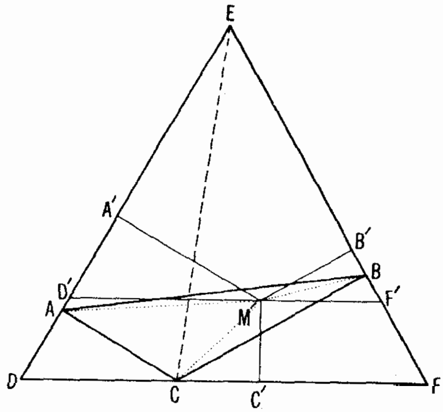
$$AM+MC+MB=C'B$$

و بنابراین، همان‌نقطه نقطهٔ مطلوب خواهد بود. به‌ازای این‌نقطهٔ M خواهیم داشت $\sphericalangle AMB=\sphericalangle CMB=\sphericalangle AMC=۱۲۰^\circ$ (M نقطه‌ای است که از آن همهٔ اضلاع مثلث به‌زاویه‌های مساوی دیده می‌شوند)؛ مسلماً برای آنکه نقطه‌ای مانند

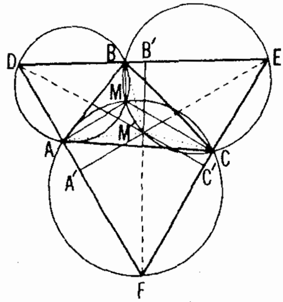
M با این شرط روی پاره خط $C'B$ موجود باشد لازم است که $\measuredangle CBA$ کوچکتر از $120°$ باشد. اگر زاویهٔ CAB ناکوچکتر از $120°$ باشد، نقطهٔ مطلوب رأس B از مثلث ABC خواهد بود.

حالت دوم. پاره‌خط $C'B$ ضلع AC از $\triangle ABC$ را قطع نمی‌کند؛ مثلا نقطهٔ C' درطرف دیگر خط BC از مثلث ABC قرار دارد ($\measuredangle C \geqslant 120°$). دراین حالت کوتاهترین خط شکستهٔ $C'X'XB$ همان خط $C'CB$ است و نقطهٔ مطلوب رأس C از $\triangle ABC$. به‌همین‌طریق، اگر $\measuredangle A \geqslant 120°$، آنگاه نقطهٔ مطلوب رأس A خواهد بود.

۸۰. (الف) اگر DEF مثلث متساوی‌الاضلاعی محیط بر $\triangle ABC$ باشد و AM، BM، CM براضلاع $\triangle DEF$ عمود باشند، بدیهی است که داریم $\measuredangle AMB = \measuredangle BMC = \measuredangle CMA = 120°$ (شکل ۱۵۲ الف). از اینجا نتیجه می‌شود که M نقطهٔ برخورد کمانهای مستدیر حاوی $120°$، مرسوم براضلاع $\triangle ABC$ است. با یافتن M می‌توانیم $\triangle DEF$ را براحتی رسم کنیم. نقطهٔ M داخل $\triangle ABC$ خواهد بود اگر هیچ‌یك از زاویه‌های $\triangle ABC$ بیش از $120°$ نباشد؛ اگر مثلا $\measuredangle C = 120°$، آنگاه $M = C$؛ اگر $\measuredangle C > 120°$، آنگاه M در بیرون $\triangle ABC$ واقع می‌شود. براین اساس می‌توانیم راه‌حل مسألهٔ ۷۹ را به‌دست آوریم.



(ب)



(الف)

شکل ۱۵۲

حالت اول را در نظر می‌گیریم. فرض کنید M' نقطهٔ دلخواهی درون $\triangle ABC$ باشد و $M'A'$ ، $M'B'$ ، $M'C'$ عمودهای وارد از M' براضلاع $\triangle DEF$ باشند. داریم

$$\text{مساحت}(\triangle EFM')+\text{مساحت}(\triangle DEM')=\text{مساحت}(\triangle DEF)$$
$$+\text{مساحت}(\triangle FDM')$$

یا، اگر a و h بترتیب ضلع و ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع DEF باشند، داریم

$$\frac{۱}{۲}ah=\frac{۱}{۲}a\cdot M'A'+\frac{۱}{۲}a\cdot M'B'+\frac{۱}{۲}a\cdot M'C'$$

یعنی

$$M'A'+M'B'+M'C'=h$$

اما $M'A\geqslant M'A'$ ، $M'B\geqslant M'B'$ ، $M'C\geqslant M'C'$ (زیرا فاصلهٔ عمودی کوتاهترین فاصله است)؛ بنابراین

$$M'A+M'B+M'C\geqslant h$$

و تساوی تنها وقتی برقرار است که M' بر M منطبق باشد. پس M همان نقطهٔ مطلوب است.

اگر $M=C$، آنگاه C نقطهٔ مطلوب است. سرانجام، اگر $\measuredangle C>۱۲۰^\circ$، آنگاه بازهم مجموع فاصله‌های رأس C از رأسهای دیگر مثلث کمتر از مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ دیگر تا رأسهای مثلث خواهد بود. برای اثبات این امر یک‌مثلث متساوی‌الساقین DEF بر $\triangle ABC$ طوری‌محیط می‌کنیم که $CA\perp DE$، $CB\perp EF$ (شکل ۱۵۲ ب). M' را نقطهٔ دلخواهی درون $\triangle ABC$ می‌گیریم و پاهای عمودهای وارد از M' بر اضلاع $\triangle DEF$ را A'، B'، C' می‌نامیم؛ فرض می‌کنیم مثلث $D'EF'$ مثلثی متشابه با DEF باشد که قاعدهٔ $D'F'$ آن از M' بگذرد. پس داریم

$$\text{مساحت}(\triangle CEF)+\text{مساحت}(\triangle CDE)=\text{مساحت}(\triangle DEF)$$

و بنابراین

$$CA+CB=h$$

که در آن h ارتفاع $\triangle DEF$ وارد بر یکی از اضلاع متساوی آن است. به‌طریق مشابهی نتیجه می گیریم

$$M'A'+M'B'=h'$$

که در آن $h'=kh$ ارتفاع مثلث $D'EF'$ است (k نسبت تشابه است، $k<1$).
ارتفاعهای مثلث DEF و $D'EF'$ وارد برقاعده‌های متناظر آنها را به H و $H'=kH$ نشان می‌دهیم. چون $\measuredangle E=180-\measuredangle C<60^\circ$ ، داریم $DF<DE$، $H>h$. بنابراین

$$\begin{aligned}M'A'+M'B'+M'C'&=h'+(H-H')=H-(H'-h')\\&=H-k(H-h)>H-(H-h)\\&=h=CA+CB\end{aligned}$$

روشن است که داریم

$$M'A'+M'B'+M'C'\leqslant M'A+M'B+M'C$$

و بنابراین

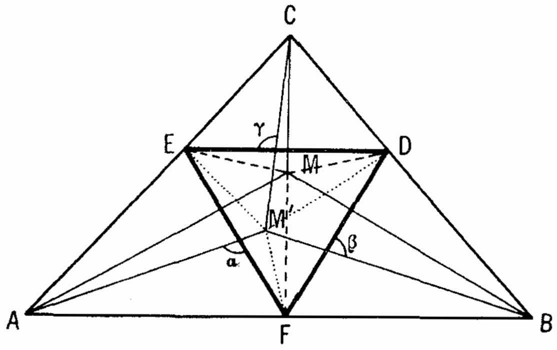
$$M'A+M'B+M'C>CA+CB$$

که همان حکمی است که باید ثابت می‌شد.
ب) اگر AM، BM و CM بر اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع DEF محاط در $\triangle ABC$ عمود باشند، روشن است که

$$\measuredangle AMB=\measuredangle BMC=\measuredangle CMA=120^\circ$$

(شکل ۱۵۳). پس برای حل مسأله باید یك نقطهٔ M بیابیم که از آن همهٔ اضلاع مثلث به‌زاویه‌های 120° دیده شوند، و سپس در $\triangle ABC$ یك‌مثلث DEF محاط کنیم که اضلاعش بر AM، BM و CM عمود باشند [← مسألهٔ ۹ (ب)، صفحهٔ ۲۲]. در عین‌حال، اگر همهٔ زاویه‌های $\triangle ABC$ کمتر از 120° باشند، رأسهای $\triangle DEF$ براضلاع $\triangle ABC$ واقع خواهند بود و نه برامتداد آنها.
فرض کنید که حالت اخیر برقرار است. دراین‌صورت

$$(MEAF)\text{مساحت}+(MDCE)\text{مساحت}=(\triangle ABC)\text{مساحت}$$



شکل ۱۵۳

$$+(MFBD)\text{مساحت}$$

$$=\frac{1}{2}DE\cdot MC+\frac{1}{2}EF\cdot MA+\frac{1}{2}FD\cdot MB$$

$$=\frac{1}{2}DE(MA+MB+MC)$$

اکنون M' را نقطهٔ دلخواهی درون $\triangle ABC$ می‌گیریم و زاویه‌های خطوط $M'A$، $M'B$ و $M'C$ را با اضلاع متناظر در $\triangle DEF$ بترتیب α، β، γ می‌نامیم. در این صورت

$$(\triangle ABC)\text{مساحت}=(M'DCE)\text{مساحت}+(M'EAF)\text{مساحت}$$

$$+(M'FBD)\text{مساحت}$$

$$=\frac{1}{2}DE\cdot M'C\sin\gamma+\frac{1}{2}EF\cdot M'A\sin\alpha$$

$$+\frac{1}{2}FD\cdot M'B\sin\beta$$

$$\leqslant\frac{1}{2}DE(M'A+M'B+M'C)$$

ازاینجا خواهیم داشت

$$MA+MB+MC\leqslant M'A+M'B+M'C$$

یعنی همان حکمی که باید ثابت می‌شد (مقایسه کنید با راه‌حل مسألهٔ ۷۷).

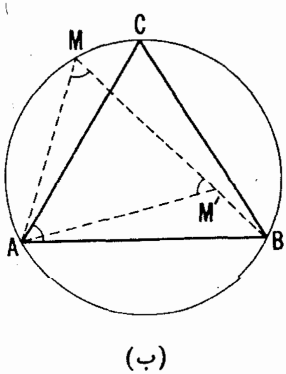
۸۱. الف) راه‌حل اول. مثلث CAM را به‌اندازهٔ 60° حول نقطهٔ A دوران می‌دهیم تا به‌وضع ABM' درآید (شکل ۱۵۴ الف). در این صورت داریم $MM'=AM'=AM$ و $CM=BM'$. اما $BM\leqslant BM'+MM'$ وبنابراین

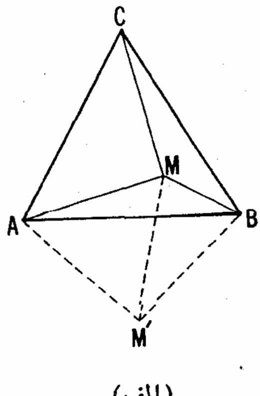
$$BM\leqslant AM+CM.$$

بعلاوه، تساوی $BM=BM'+MM'$ تنها زمانی برقرار است که M' بر پاره‌خط BM واقع باشد. چون $\measuredangle AMM'=60^\circ$ در این‌حالت داریم $\measuredangle AMB=60^\circ$؛ یعنی M روی کمان AC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC واقع است (← شکل ۱۵۴ ب).

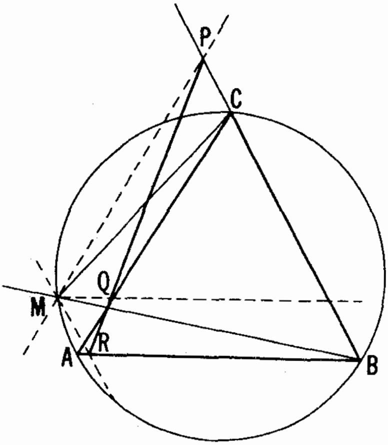
راه‌حل دوم. خطهای MP، MQ و MR را از نقطهٔ M به‌موازات اضلاع AC، AB و BC از $\triangle ABC$ رسم می‌کنیم (شکل ۱۵۵ الف). روشن است که چهارضلعیهای $MQAR$، $MPBR$، $MPCQ$ ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین هستند؛ در نتیجه $MA=QR$، $MB=PR$، $MC=PQ$. پس پاره‌خطهای MA، MB و MC طولهایی برابر با اضلاع $\triangle PQR$ دارند و بنابراین

$$MA+MC\geqslant MB.$$

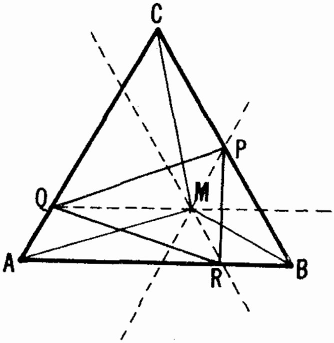




شکل ۱۵۴



(ب)



(الف)

شکل ۱۵۵

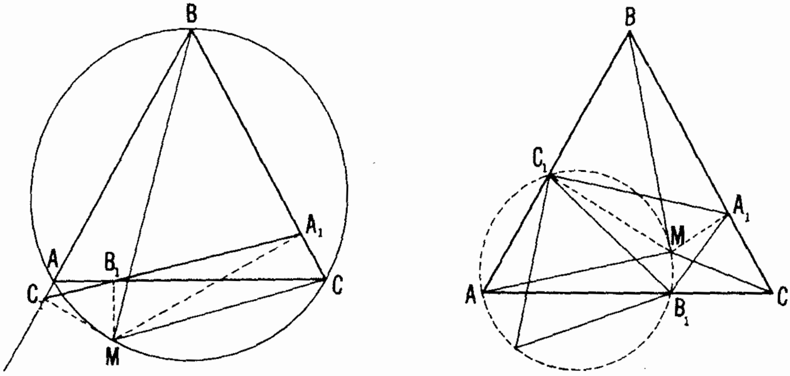
تساوی $MA+MC=MB$ تنها زمانی برقرار است که $RQ+QP=PR$، یعنی وقتی Q روی پاره‌خط PR باشد (شکل ۱۵۵ ب). در این حالت $\sphericalangle RMA=\sphericalangle RQA$، $\sphericalangle PMC=\sphericalangle PQC$؛ $\sphericalangle RQA=\sphericalangle PQC$ یعنی $\sphericalangle RMA=\sphericalangle CMP$، و بنابراین $\sphericalangle AMC=\sphericalangle RMP=۱۲۰^\circ$ و بنابراین M بر کمان AC از دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ واقع است.

راه‌حل سوم. عمودهای $MA_۱$، $MB_۱$ و $MC_۱$ را از M بر اضلاع $\triangle ABC$ فرود می‌آوریم (شکل ۱۵۶ الف). دایرهٔ به‌قطر AM بر چهارضلعی $AC_۱MB_۱$ محیط است؛ چون $\sphericalangle B_۱AC_۱=۶۰^\circ$ از اینجا نتیجه می‌شود که $B_۱C_۱$ ضلع یك مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در این دایره است. بنا بر این $B_۱C_۱=(\sqrt{۳}/۲)\cdot MA$؛ به‌همین ترتیب $A_۱B_۱=(\sqrt{۳}/۲)\cdot MC$ و $A_۱C_۱=(\sqrt{۳}/۲)\cdot MB$. امادرمثلث $A_۱B_۱C_۱$ داریم

$$A_۱C_۱\leqslant A_۱B_۱+B_۱C_۱$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$MB\leqslant MA+MC$$



(ب) (الف)

شکل ۱۵۶

بعلاوه اگر نقاط A_1، B_1 و C_1 بر یك خط باشند و B_1 بین A_1 و C_1 واقع باشد، داریم $MB=MA+MC$ (شکل ۱۵۶ ب). دراین حالت می‌گوییم M روی کمان AC ازدایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ واقع است. زیرا $\sphericalangle C_1MA=\sphericalangle C_1B_1A$ و $\sphericalangle A_1MC=\sphericalangle A_1B_1C$. امـا چون در این حالت $\sphericalangle A_1B_1C=\sphericalangle C_1B_1A$، داریـم $\sphericalangle C_1MA=\sphericalangle A_1MC$ و $\sphericalangle AMC=\sphericalangle C_1MA_1=120^\circ$ کـه به‌این‌ترتیب حکم موردنظر اثبات می‌شود.

اشاره می‌کنیم که به‌طور کلی، پاهای عمودهای وارد از نقطهٔ دلخواه M بر اضلاع یك مثلث دلخواه بر یك خط قرار دارند اگر M بردایرهٔ محیطی آن مثلث واقع باشد (← مسألهٔ ۶۱، بخش ۱).

راه‌حل چهارم. قضیهٔ بطلمیوس را برای چهارضلعی $MABC$ به‌کار می‌بریم (←مسألهٔ ۲۶۹، بخش چهار، فصل دو ازقسمت سوم چاپ روسی)*.

* این قضیه می‌گویـد کـه در هرچهارضلعی با رأسهای متوالی A، B، C، D مجموع حاصلضربهای اضلاع روبه‌رو دوبه‌دو، ناکوچکتر ازحاصلضرب قطرهاست، یعنی

$$AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC$$

و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که بتوان چهارضلعی را دردایره‌ای محاط کرد.

$$MB \cdot AC \leqslant MA \cdot CB + MC \cdot AB$$

و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که بتوان $MABC$ را در دایره‌ای محاط کرد. ولی داریم $AC = CB = AB$ و بنابراین

$$MB \leqslant MA + MC$$

یعنی حکم موردنظر ثابت شده‌است.

ب) برضلع BC ازمثلث‌مفروض ABC و در بیرون آن، مثلث متساوی‌الاضلاع BCA' را رسم می‌کنیم (شکل ۱۵۷) . فرض‌کنید X نقطهٔ دلخواهی از صفحه باشد. درمثلث XAA' داریم

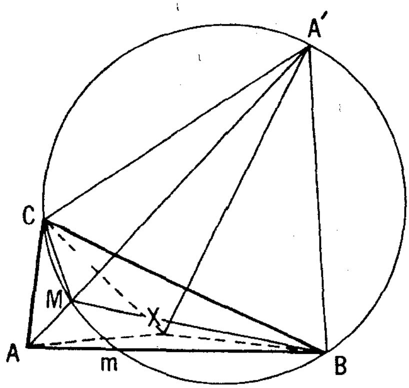
$$AA' \leqslant XA + XA'$$

و تساوی تنها وقتی برقرار است که X روی پاره‌خط AA' باشد. بعلاوه طبق حکم قسمت (الف)

$$XA' \leqslant XB + XC$$

و تساوی تنها وقتی برقرار است کــه X روی‌کمان CmB از دایــرهٔ محیطی مثلث BCA' واقع باشد.

ازاین روابط داریم



شکل ۱۵۷

$$AA' \leqslant XA+XB+XC$$

اگر M نقطهٔ برخورد AA' با دایرهٔ محیطی $\triangle A'BC$ باشد، آنگاه

$$AA'=MA+MB+MC$$

یعنی

$$MA+MB+MC \leqslant XA+XB+XC$$

و بنا براین M در شرایط مسألهٔ ۷۹ صدق می‌کند. یك محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که اگر یکی‌از زاویه‌های $\triangle ABC$ مساوی $120°$ باشد، آنگاه پاره‌خط AA' وکمان CmB در رأس این زاویه یکدیگر را قطع می‌کنند، ولی اگر یکی از زاویه‌های مثلث بزرگتر از $120°$ باشد، آنگاه پاره‌خط و کمان مزبور به‌هیچ‌وجه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. درحالت اخیر می‌توان نشان داد که رأس زاویهٔ منفرجه همچنان جواب مسألهٔ کمترین مقدار است.

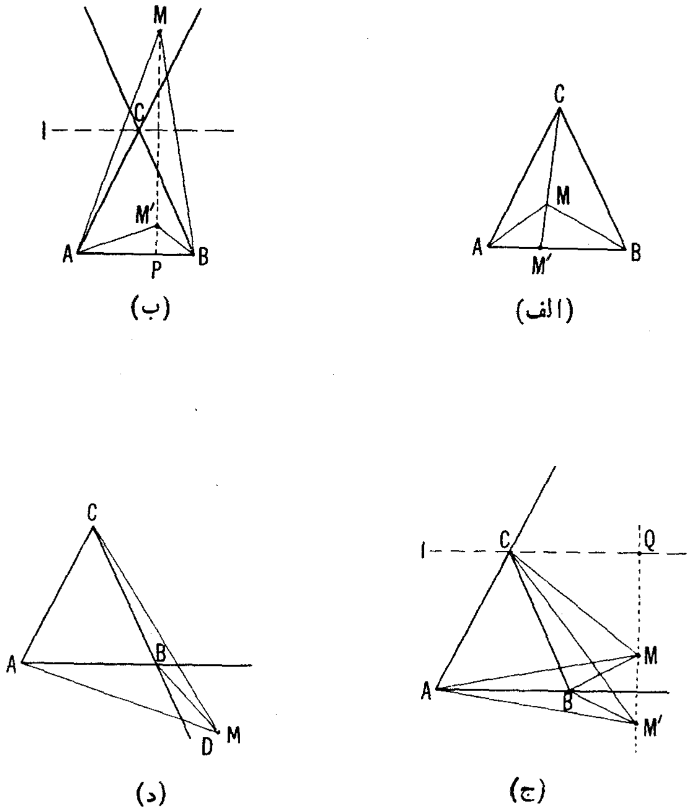
۸۲. ابتدا اشاره می‌کنیم که نقطهٔ مطلوب M باید در خارج $\triangle ABC$ و درون زاویهٔ ACB واقع باشد. زیرا فرض کنید که M نقطه‌ای در داخل $\triangle ABC$ باشد؛ محل برخورد خط CM با ضلع AB را M' می‌نامیم (شکل ۱۵۸ الف). دراین صورت $AM'+BM' < AM+BM$ و $CM' > CM$ لذا

$$AM'+BM'-CM' < AM+BM-CM$$

اکنون فرض کنید که M درون $\measuredangle ACB$ واقع نباشد. در این‌صورت چندین امکان برای M وجود دارد. ابتدا فرض کنید که M در زاویهٔ متقابل به‌رأس نسبت به‌زاویهٔ ACB قرار دارد و نقطهٔ M' قرینهٔ M را نسبت به‌خط l، که از C به‌موازات AB رسم شده‌است، به‌دست می‌آوریم (شکل ۱۵۸ ب). دراین‌صورت $M'C=MC$ و $M'A < MA$، $M'B < MB$ (این دونامساوی اخیر ازاینجا ناشی می‌شوند که با قرارداد شکل ۱۵۸ ب داریم $M'P < MP$) و بنابراین

$$AM'+BM'-CM' < AM+BM-CM$$

حال فرض‌کنید که M به‌زاویهٔ CAB تعلق دارد (ولی روی خط AB نیست!) و درون مثلث ABC واقع نشده‌است وقرینهٔ M را نسبت به‌خط AB، M' می‌نامیم (شکل ۱۵۸ ج). دراین صورت $AM'=AM$، $BM'=BM$ و $CM' > CM$ (نامساوی اخیر از اینجا نتیجه می‌شود که با نمادگذاری شکل ۱۵۸ ج داریم



شکل ۱۵۸

$(M'Q > MQ)$ و بنابراین

$$AM'+BM'-CM' < AM+BM-CM$$

به‌طور مشابه، این فرض که M به $\measuredangle CBA$ تعلق دارد ولی به $\triangle ABC$ متعلق نیست به‌تناقض می‌انجامد. سرانجام، فرض کنید که M در زاویه‌ای است که با $\measuredangle ABC$ متقابل به‌رأس است (یا روی خط AB است). دراین‌صورت $MC-MB<BC$ و $MA>BA$ [نامساوی اخیر از اینجا ناشی می‌شود که

$$\measuredangle MBA > \measuredangle DBA > 90^\circ$$

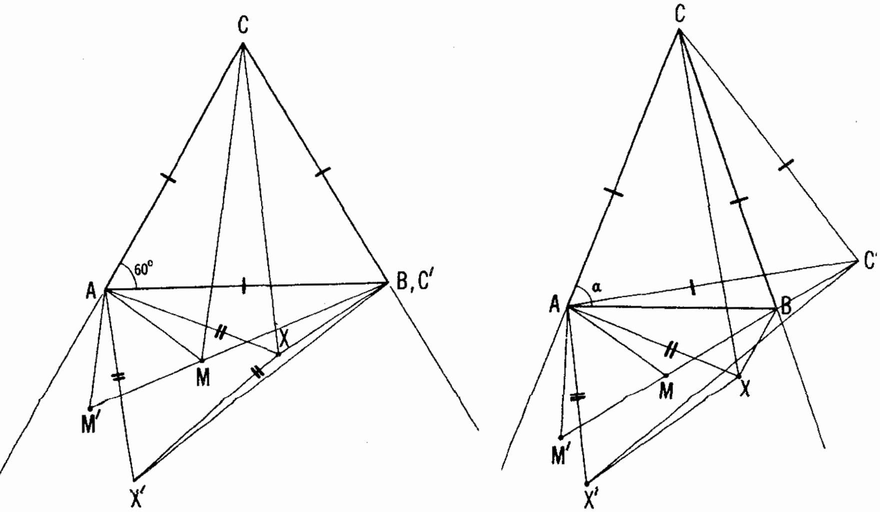
(شکل ۱۵۸د)] و بنابراین

$$MA+MB-MC=MA-(MC-MB)>BA-BC$$
$$=BA+BB-BC$$

به‌همین طریق می‌توان نشان داد کـه M نمی‌تواند در زاویه‌ای که با زاویهٔ BAC متقابل به‌رأس است قرار گیرد. پس این فرض که M درون زاویهٔ ACB نیست نیز به‌تناقض منتهی شده‌است.

اکنون فرض کنید X نقطهٔ دلخواهی از زاویهٔ ACB باشد کـه به $\triangle ABC$ تعلق نـدارد. مثلث ACX را به‌انـدازهٔ ۶۰° حول نقطهٔ A و در جهت از C به B دوران می‌دهیم تا به‌وضع $AC'X'$ قرار گیرد(شکل ۱۵۹ الف). چون $AX=XX'$ (زیرا مثلث AXX' متساوی‌الاضلاع است) و $CX=C'X'$، نتیجه می گیریم کـه $AX+BX-CX$ برابراست بـا $X'X+BX-C'X'$؛ پس بایـد نقطهٔ X را طوری اختیار کنیم کـه کمیت $BX+XX'-C'X'$ کمترین مقدار ممکن را دارا باشد. اما چون روشن است که

$$C'B+BX+XX'\geqslant C'X'$$



(ب) (الف)

شکل ۱۵۹

بنا براین همواره داریم

$$BX+XX'-C'X'\geqslant -C'B$$

پس می‌توانیم نقطهٔ M را طوری بیابیم که

$$C'B+BM+MM'=C'M' \text{ و } BM+MM'-C'M'=-C'B \quad (*)$$

که درآن M' از M به‌همان طریقی که X' از X به‌دست آمد به‌دست آمده است، پس M همان نقطهٔ مطلوب خواهد بود.

اکنون لازم است دوحالت را در نظر بگیریم.

حالت اول. $\sphericalangle A=\alpha>۶۰^\circ$ یعنی $AC=BC>AB$ و $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع نیست. دراین حالت C' بر B منطبق نیست و معادله‌های (*) به‌شرطی برقرارند که نقاط M و M' هر دو برخط $C'B$ واقع باشند (شکل ۱۵۹ الف). چون زاویهٔ C ازمثلث ABC برابراست با $۱۸۰^\circ-۲\alpha$، نتیجه می‌شود که زاویهٔ‌رأس C درمثلث BCC' برابراست‌با $۶۰^\circ-(۱۸۰^\circ-۲\alpha)=۲\alpha-۱۲۰^\circ$؛ بنا براین

$$\sphericalangle CC'B=\sphericalangle CBC'=۱۵۰^\circ-\alpha$$

و بنـا براین $\sphericalangle C'BA=\sphericalangle C'BC+\alpha=۱۵۰^\circ$. پس اگـر M طوری اختیار شود کـه $\sphericalangle C'BM=۱۸۰^\circ$، آنگـاه خواهیم داشت $\sphericalangle ABM=۳۰^\circ$. اگر علاوه براین M طوری اختیار شود که داشته باشیم

$$\sphericalangle BMM'=\sphericalangle BMA+۶۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

آنگاه $\sphericalangle BMA=۱۲۰^\circ$. ازاینجا نتیجه می‌شود که یك‌نقطهٔ M یکتا موجود است چنان‌که M و M' هردو برخط $C'B$ واقع باشند و داشته باشیم

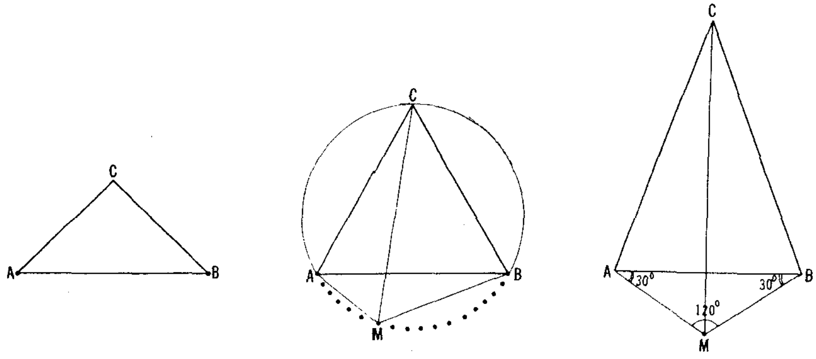
$$AM+BM-CM=BM+MM'-C'M=-C'B$$

این‌نقطه با شرط $\sphericalangle MBA=\sphericalangle MAB=۳۰^\circ$ مشخص‌می‌شود (شکل ۱۶۰ الف).

حالت دوم. $\sphericalangle A=۶۰^\circ$ یعنی $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع است؛ در این حالت $C'=B$ (شکل ۱۵۹ ب). همچنین داریم

$$BM+MM'-C'M'=-C'B(=۰)$$

اگرخط شکستهٔ BMM' عملا پاره‌ای‌ازیك‌خط باشد، وبنا براین $\sphericalangle BMA=۱۲۰^\circ$



(ج) (ب) (الف)

شکل ۱۶۰

(زیرا $\sphericalangle AMM' = ۶۰°$). همهٔ این نقاط M (← شکل ۱۶۰ ب) برکمان AB از دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ واقع‌اند؛ هرنقطه‌ای با این خصوصیات درشرایط مسأله صدق می‌کند [مقایسه کنید با راه‌حل مسألهٔ ۸۱ (الف)].

تذکر: راه‌حل فوق درحالتی‌که $AC = BC < AB$ و $\sphericalangle A = \alpha < ۶۰°$، قابل استفاده نیست. دراین‌حالت می‌توان نشان داد که کمترین مقدارعبارت $AM + BM - CM$ وقتی حاصل می‌شود کــه نقطهٔ M بررأس A یا رأس B از $\triangle ABC$ منطبق شود (شکل ۱۶۰ ج).

مسأله را می‌توان بدین صورت نیز مطرح کرد که درمثلث نامشخص ABC نقطهٔ M را چنان پیدا کنید که مقدارعبارت $MA + MB - MC$ حداقل ممکن را داشته باشد. در اینجا هم معادلـهٔ (*) برای یك نقطهٔ M واقع در زاویهٔ ACB، و نه در $\triangle ABC$، صادق است و بنابراین بسادگی معلوم می‌شود که اگر M در رابطهٔ

$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMC = ۶۰°$$

هم صدق کند، خواهیم داشت $\sphericalangle AMB = ۱۲۰°$، پس به‌ازای این نقطه، عبارت

$$MA + MB - MC (= -C'B)$$

کمترین مقدار ممکن را خواهد داشت. [دراینجا نقطهٔ C' از C براثر دورانی حول A به‌زاویهٔ $۶۰°$ درجهت AC به AB به‌دست می‌آید؛ این دوران، M را به‌نقطهٔ M' که در

معادله‌های (*) ظاهر می‌شود بدل می‌کند.] اما، بیان کامل شرایطی که در آن (*) امکان‌پذیر باشد درحالت کلی بسیار مشکل است.

۸۳. ابتدا حالتی را درنظر می‌گیریم که مجموع دو عدد کوچکتر از سه عدد a، b، c از عدد سوم تجاوز نکند؛ مثلا فرض کنید $a \geqslant b+c$. به‌ازای هر نقطهٔ X داریم

$$a \cdot XA+b \cdot XB+c \cdot XC \geqslant (b+c)XA+b \cdot XB+c \cdot XC$$

$$=b(XA+XB)+c(XA+XC) \geqslant b \cdot AB+c \cdot AC$$

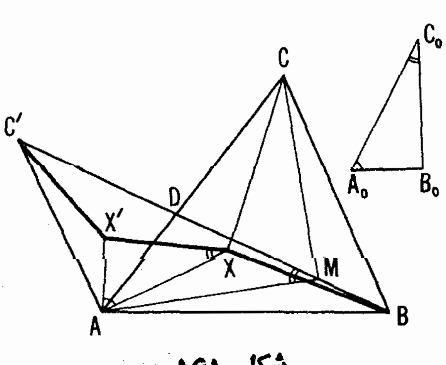
(زیرا $XA+XB \geqslant AB$، $XA+XC \geqslant AC$)، لذا مجموع

$$a \cdot XA+b \cdot XB+c \cdot XC$$

کمترین مقدار ممکن را وقتی اختیار می‌کند که نقطهٔ X بر نقطهٔ A منطبق باشد.

پس اکنون مانده است حالتی را درنظر بگیریم که مثلثی به‌اضلاع a، b و c وجود دارد. در این حالت می‌توانیم چهار مسیر را، نظیر راه‌حلهای مسأله‌های ۷۹، ۸۰ (الف)، ۸۰ (ب) و ۸۱ درنظر بگیریم.

راه‌حل اول. فرض کنید $A_\circ B_\circ C_\circ$ مثلثی باشد با اضلاع a، b و c و فرض کنید $\alpha=a/b$، $\gamma=c/b$؛ X را نقطهٔ دلخواهی در صفحه می‌گیریم. تجانس مارپیچی به‌مرکز A، و نسبت تجانس γ و زاویهٔ دورانی برابر با زاویهٔ $A_\circ$ از $\triangle A_\circ B_\circ C_\circ$ (دوران درجهت از B به C صورت می‌گیرد)، مثلث AXC را به $\triangle AX'C'$ بدل می‌کند (شکل ۱۶۱). مثلثهای $AX'X$ و $A_\circ B_\circ C_\circ$ متشابه‌اند،



شکل ۱۶۱

زیرا بنابر فرض

$$\frac{AX'}{AX}=\gamma=\frac{A_\circ B_\circ}{A_\circ C_\circ}, \qquad \sphericalangle XAX'=\sphericalangle B_\circ A_\circ C_\circ$$

از تشابه آنها داریم $XX'/AX=a/b=\alpha$ ؛ $XX'=\alpha AX$؛ بعلاوه با توجه به‌ترسیم، $C'X'=\gamma CX$. بنابراین

$$C'X'+X'X+XB=\gamma\cdot CX+\alpha\cdot AX+BX$$

$$=\frac{c\cdot CX+a\cdot AX+b\cdot BX}{b}$$

و بنابراین کمیت $a\cdot AX+b\cdot BX+c\cdot CX$ وقتی دارای کمترین مقدار است که‌خط شکستهٔ $BXX'C'$ کمترین طول را داشته باشد. دراینجا حالتهای زیرممکن است پیش بیاید.

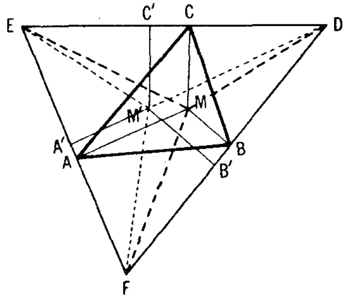
حالت اول. خط BC' ضلع AC از مثلث مفروض را در یك نقطهٔ D قطع می‌کند. در این حالت کوتاهترین خط شکستهٔ واصل بین نقاط B و C' که پاره‌خط AC را قطع کند، پاره‌خط BC' است. با توجه به‌اینکه زاویهٔ AXX' برابراست با زاویـهٔ $C_\circ$ از $\triangle A_\circ B_\circ C_\circ$، نقطهٔ M را بسادگی می‌تـوان یافت. برای این کار بر پاره‌خط AD، درهمان‌طرفی که نقطهٔ B قرار دارد، کمانی در خور زاویهٔ مذکور رسم می‌کنیم. اگر این کمان پاره‌خط BC' را قطع کند، نقطهٔ برخورد همان نقطهٔ مطلوب M خواهد بـود. اگر این کمان پاره‌خط BC' را قطع نکند، آنگاه نقطهٔ مطلوب M بر B منطبق خواهد بود.

حالت دوم. اگرخط BC' ضلع AC از $\triangle ABC$ را قطع نکند، کوتاهترین خط شکستهٔ $BXX'C'$ که ضلع ACرا قطع کند یا خط شکستهٔ BCC' خواهد بود و یا خط شکستهٔ BAC' روشن است کـه در حالت اول $M=C$ و در حالت دوم $M=A$.

راه‌حل دوم. اگر در $\triangle DEF$ داشته باشیم $EF:FD:DE=a:b:c$، آنگاه مجموع فاصله‌های اضلاع $\triangle DEF$ ازنقطهٔ دلخواه M که بترتیب دراعداد a، b و c ضرب شده باشند، ثابت است. زیرا، با توجه به‌شکل ۱۶۲ داریم

$$\text{مساحت}(\triangle DEF)=\text{مساحت}(\triangle MEF)+\text{مساحت}(\triangle MFD)$$

$$+\text{مساحت}(\triangle MDE)$$



شکل ۱۶۲

یا اگر $EF=ak$، $FD=bk$، $DE=ck$،

$$(\triangle DEF)\text{مساحت}=\frac{۱}{۲}MA\cdot ka+\frac{۱}{۲}MB\cdot kb+\frac{۱}{۲}MC\cdot kc$$

$$\text{مقدار ثابت}=\frac{۲\times(\triangle DEF)\text{مساحت}}{k}=a\cdot MA+b\cdot BM+c\cdot MC$$

دراینجا A، B و C پاهای عمودهای وارد از M براضلاع مثلث DEF هستند.

حال مثلث DEF را که نسبت اضلاعش برابر $a:b:c$ است برمثلث ABC چنان محیط می‌کنیم که عمودهای‌مرسوم ازنقاط A، B و C براضلاع DEF درنقطهٔ مشترك M یکدیگر را قطع کنند [این ترسیم شبیه ترسیم مسألهٔ ۸۰ (الف) است]. اگر M درون $\triangle ABC$ واقع باشد، همین M جواب مسألهٔ کمترین مقدار است؛ نحوهٔ اثبات این‌موضوع شبیه راه‌حل مسألهٔ ۸۰ (الف) است. اگر M خارج $\triangle ABC$ باشد، یکی از رأسهای مثلث جواب مسأله خواهد بود.

راه‌حل سوم. در مثلث مفروض ABC یك مثلث DEF محاط می‌کنیم که اضلاعش به‌نسبت $a:b:c$ باشند و عمودهای وارد ازرأسهای $\triangle ABC$ براضلاع $\triangle DEF$ دریك‌نقطهٔ مشترك M یکدیگر را قطع کنند [این‌ترسیم شبیه ترسیم مسألهٔ ۸۰ (ب) است].

درحالتی‌که $\triangle DEF$ به‌معنی عادی کلمه در $\triangle ABC$ محاط باشد (یعنی‌همهٔ رأسهایش براضلاع $\triangle ABC$ واقع باشند، نه برامتداد آنها)، همانند آنچه در راه‌حل مسألهٔ ۸۰ (ب) آمد می‌توان نشان دادکه M نقطهٔ مطلوب است. درغیراین صورت یکی از رأسهای $\triangle ABC$ جواب مسأله است.

راه‌حل چهارم. دراینجا ازگزارهٔ زیر که تعمیم نتیجهٔ مسألهٔ ۸۱ (الف) است استفاده می‌کنیم: اگر در $\triangle ABC$ داشته‌باشیم $BC : CA : AB = a : b : c$، آنگاه به‌ازای هر نقطهٔ M ازصفحه داریم

$$b \cdot MB \leqslant a \cdot MA + c \cdot MC$$

و تساوی وقتی برقرار است که M روی کمان متناظر از دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ واقع باشد. اثبات این‌قضیه [که می‌تواند از راههای مختلف، نظیر راه‌حلهای‌مسألهٔ ۸۱ (الف) صورت گیرد] به‌خواننده واگذار می‌شود.

حال بر ضلع BC از مثلث مفروض یك مثلث BCA' بنا می‌کنیم چنان که $BC : CA' : A'B = a : b : c$، و دایره‌ای براین‌مثلث محیط می‌کنیم. اگر X نقطهٔ دلخواهی ازصفحه باشد، ازمثلث XAA' نتیجه می‌شود که

$$AA' \leqslant XA + XA'$$

و تساوی تنها به‌ازای نقاط واقع بر پاره‌خط AA' صادق است. بعلاوه

$$a \cdot XA' \leqslant b \cdot XB + c \cdot XC$$

و تساوی تنها به‌ازای نقاط واقع برکمان BmC برقرار است.

اگر رابطهٔ اول را در a ضرب و نتیجه را به‌رابطهٔ دوم اضافه کنیم، خواهیم داشت

$$a \cdot AA' \leqslant a \cdot XA + b \cdot XB + c \cdot XC$$

و تساوی تنها به‌ازای نقطهٔ M محل برخوردکمان BmC با پاره‌خط AA' برقرار است:

$$a \cdot AA' - a \cdot MA + b \cdot MB + c \cdot MC$$

بنابراین

$$a \cdot MA + b \cdot MB + c \cdot MC \leqslant a \cdot XA + b \cdot XB + c \cdot XC$$

یعنی M جواب مسأله است.

اگر کمان BmC پاره‌خط AA' را قطع نکند، می‌توان نشان داد که یکی از رأسهای $\triangle ABC$ جواب مسأله است. □