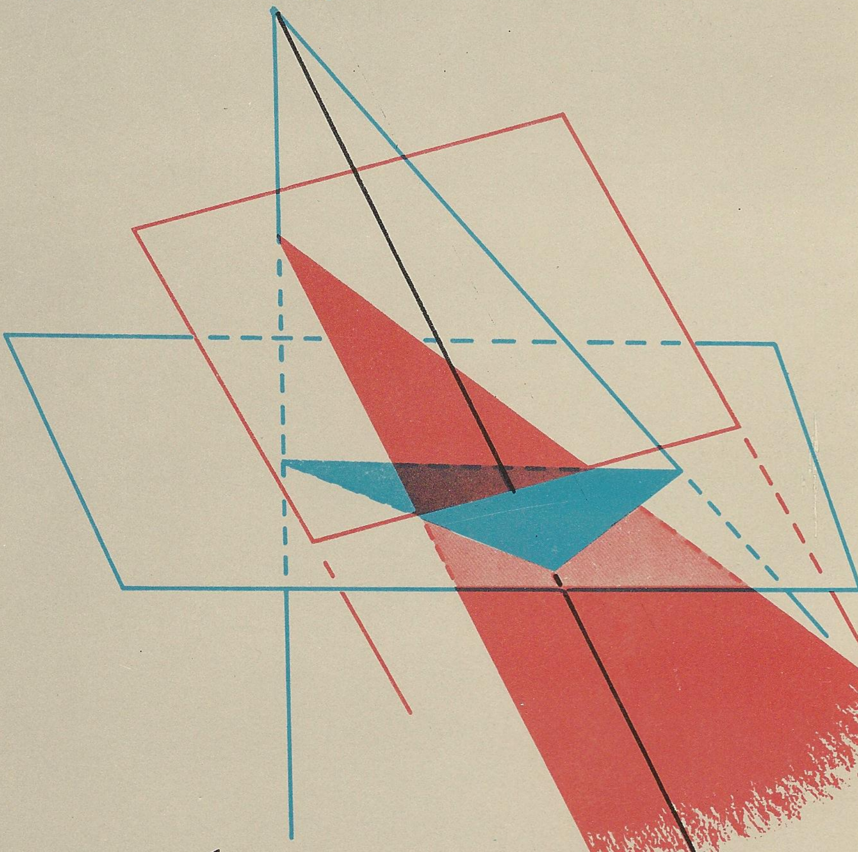
تبدیلهای هندسی

جلد سوم

ای. م. یاگلم

ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها



(ریاضیات پیش‌دانشگاهی - ۲۴)

تبدیلهای هندسی

جلد سوم

(ریاضیات پیش‌دانشگاهی ـ ۲۴)

ای. م. یاگلم

ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

مرکز نشر دانشگاهی
۵۲۴

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۶۳

Geometric *Transformations* III
New Mathematical Library (24)
I.M. Yaglom
Random House, 1973

تبدیلهای هندسی
جلد سوم
تألیف ای. م. یاگلم
ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها
ویراستهٔ عبدالحسین مصحفی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۶۹
چاپ دوم ۱۳۷۷
تعداد ۳۰۰۰
حروفچینی : عبدی
لیتوگرافی : بهزاد
چاپ : رشد

فهرستنویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

یاگلم، ایساک مویسی یویچ، ۱۹۲۱ ـ Yaglom Issac Moiseevich
تبدیلهای هندسی / ای. ام. یاگلم؛ ترجمهٔ عمید رسولیان. ــ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۹ ـ ۱۳۷۷.
۳ ج. : مصور، نمودار. ــ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۵۳۲، ۵۳۷، ۵۲۴. ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۶۶، ۶۸، ۶۳) (ریاضیات پیش دانشگاهی؛ ۸۰، ۲۱، ۲۴)
ISBN 964-01-8001-7 (دوره)
ISBN 964-01-0524-4 (ج. ۳)
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
عنوان اصلی: Geometricheskie preobra zovanita = Geometric transformations.
کتاب حاضر از سری کتابهای New mathematical library است که در سری فارسی ریاضیات پیش‌دانشگاهی خوانده می‌شود.
مترجم جلد دوم: محمد باقری.
مترجم جلد سوم: محمدهادی شفیعیها.
ج. ۳ (چاپ دوم: ۱۳۷۷).
۱. تبدیلهای ریاضی. الف. رسولیان، عمید، مترجم. ب. باقری، محمد، ۱۳۲۹ـ ، مترجم. ج. شفیعیها، محمدهادی، ۱۲۹۸ـ ، مترجم. د. مرکز نشر دانشگاهی. هـ. عنوان.
QA۶۰۱/ت۲ی۲ ۵۱۶/۱
۱۳۶۹
۲۹۹۴ ـ ۷۰ م*

فهرست

عنوان	صفحه
سخنی باخواننده	پنج
پیشگفتار مترجم (انگلیسی)	۱
از پیشگفتار مؤلف	۳
هندسه چیست؟ (بررسی نهایی)	۵
فصل اول، تبدیلهای آفین و تصویری	۱۵
۱. تصویرموازی یک‌صفحه بریک صفحه. تبدیلهای آفین صفحه	۱۵
۲. تصویر مرکزی یک‌صفحه بریک صفحه. تبدیل تصویری یک‌صفحه.	۲۹
۳. تصویرمرکزی که یک‌دایره را به‌دایره‌بدل می‌کند. تصویر گنجنگاشتی	۷۱
۴. قطب و قطبی در صفحه. اصل دوگانی	۸۴
۵. تبدیل تصویری یک‌خط و یک دایره. ترسیم به‌کمک ستاره	۱۱۲
پیوست. هندسهٔ نااقلیدسی لباچفسکی - بویوئی (هندسهٔ هذلولوی)	۱۳۲
حل مسائل. فصل اول. تبدیلهای آفین و تصویری	۱۷۵
پیوست (هندسهٔ هذلولوی)	۲۸۶

بسم الله الرحمن الرحیم

سخنی با خواننده

ارتباط بین استادان برجستهٔ دانشگاهها و دانش‌آموزان دوره‌های پیش‌دانشگاهی، از مؤثرترین وسیله‌هایی‌است که به کشف و پرورش استعدادها کمك می کند و زمینه را برای‌تربیت دانشمندان آینده فراهم‌می‌سازد. در بین‌شخصیتهای علمی تراز اول، که پژوهندگان یك علم را در بالاترین سطح ممکن آمـوزش می‌دهند و راهنمایی می کنند، عدهٔ کمی این‌توانایی را دارند که در آن زمینهٔ‌علمی، و با رعایت همهٔ دقتها و نکته‌ها، کتابهایی تألیف‌کنند که برای قشر وسیعی از دانش‌آموزان دبیرستانی، و گاه برای افراد عادی، آموزنده وقابل درك باشد. این شخصیتها، که درهر کشور انگشت شمارند، از این راه، ارتباطی بین خود وجوانان برقرارمی‌سازند. دسترسی دانش‌آموزان به‌چنین‌کتابهایی، پشتوانه‌ای برای تأمین آیندهٔ علمی جامعه است.

جـامعهٔ ریاضـی آمریـکا مجموعه‌ای از ایـن‌گونه کتابها را زیـر عنوان New Mathematical Library فراهم‌آورده و تاکنون بیش از سی جلد ازآنها را منتشر کرده است‌که بعضی از آنها مستقیماً به زبان انگلیسی تألیف شده و بعضی دیگر از زبانهای مختلف به‌انگلیسی ترجمه شده‌اند. این‌کتابها تاکنون به بسیاری از زبانهای دیگر ترجمه‌شده و هر کدام، چه در آمریکا وچه در کشورهای‌دیگر، بارها تجدیدچاپ شده است.

گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر مرکز نشر دانشگاهی، به حکم وظیفه‌ای که برای‌گسترش دانش‌ریاضی به‌عهده دارد، به‌ترجمهٔ این‌کتابها از انگلیسی به‌فارسی، و ویرایش‌آنها پرداخته‌است. مترجمان و ویراستاران ازافرادخبره برگزیده شده‌اند وکوشش لازم به‌عمل آمده است تا، ضمن رعایت امانت‌کامل‌در‌ترجمه، متن فارسی روان و خالی از ابهام باشد. کتابها به‌ترتیبی‌که ترجمهٔ آنها آماده شود زیر عنوان **ریاضیات پیش‌دانشگاهی** منتشر می‌شوند.

این مجموعه کتابها را می‌توان دو دسته کرد. یك دسته شامل کتابهایی است که مباحثی از ریاضیات را به زبان ساده تشریح می‌کنند و می‌توانند برای درسهای ریاضیات عمومی دانشگاه نیز جنبهٔ کمك درسی داشته باشند. ویراستاران متن اصلی این کتابها در پیشگفتار خود از جمله نوشته‌اند:

مطالب کتابهای این مجموعه در برنامهٔ ریاضیات دبیرستانی یا گنجانیده نشده یا به‌اجمال بیان شده است. میزان دشواری آنها متفاوت است و حتی در یك کتاب هم، مطالعهٔ بعضی از بخشها به‌تمرکز حواس بیشتری نیاز دارد. خواننده برای فهم مطالب اغلب این کتابها، هرچند به‌اطلاعات ریاضی چندانی نیاز ندارد، ولی باید تلاش فکری فراوانی به‌عمل آورد. کتاب ریاضی را نمی‌توان به‌سرعت خواند، و نباید توقع داشت که با یك بار مطالعه، تمام بخشهای آن فهمیده شود. می‌توان بدون معطل ماندن روی بخشهای پیچیده از آنها گذشت و بعد، برای مطالعهٔ عمیق به آنها بازگشت، زیرا بسیار پیش می‌آید که مطلبی در مبحث بعدی روشن می‌شود. از سوی دیگر، می‌توان بخشهایی را که مطالب آنها کاملا آشناست خیلی سریع مطالعه کرد. بهترین راه فراگرفتن ریاضیات، حل مسأله‌های آن است. هر کتاب شامل مسأله‌هایی است که حل برخی از آنها ممکن است مستلزم تأمل قابل ملاحظه‌ای باشد. پاسخها یا راهنماییهای مربوط به حل این مسأله‌ها، غالباً در پایان کتاب آمده‌اند. به خواننده توصیه می‌شود که کوشش کند هرمسأله را خود حل کند وفقط برای اطمینان از درستی راه‌حل خود به بخش پاسخها مراجعه نماید. بدین‌طریق، مطلب رفته‌رفته برایش پرمعناتر خواهد شد.

دستهٔ دیگر کتابها، شامل مجموعه‌هایی غنی از مسأله‌ها یا پرسشهای جالب چندگزینه‌ای است که در مسابقه‌های معروف ریاضی مطرح شده‌اند. در این کتابها، راه‌حل دقیق مسأله‌ها آمده است. درمورد پرسشها به‌ذکر پاسخ درست اکتفا نشده، بلکه حل کامل آنها نیز عرضه شده‌است.

نظرات و پیشنهادهای خوانندگان ما را به‌ادامهٔ کار و گسترش این گونه فعالیتها تشویق خواهد کرد.

گروه ریاضی، آمار، وکامپیوتر
مرکز نشر دانشگاهی

پیشگفتار مترجم (انگلیسی)

مجلدی که‌در دست‌دارید ترجمهٔ نخستین‌فصل از دوفصلی‌است که جلدسوم تبدیلهای هندسی، اثر ای. م. یاگلم[1] را تشکیل می‌دهد. جلدهـای اول و دوم آن به‌صورت مجلدات ۸ و ۲۱ مجموعهٔ «NML»[2] [که درفارسی ریاضیات پیشدانشگاهی ترجمه شده ـــ مقدمه،سخنی باخواننده][3] به‌انگلیسی‌موجودند. فصل دوم،از جلدسوم، که‌هنوز به‌انگلیسی ترجمه نشده است، به‌انعکاس یعنی به تبدیلهـایی از صفحه می‌پردازد کـه دوایر را (به‌انضمام خطهایی‌که ممکن‌است به‌صورت‌دایره‌هایی به‌شعاع بینهایت تلقی شوند) به‌دوایر بدل می‌کنند، بی‌آنکه لازم باشد خطها را به‌خطها بدل کنند؛ و نیز با تبدیلهایی از صفحه سروکار دارد کـه دوایر را (به‌انضمام نقطه‌ها کـه ممکن است دایره‌هایی به‌شعاع صفر تلقی شوند) به‌دوایر بدل‌می‌کنند، بی‌آنکه لازم باشد نقطه‌ها را به‌نقطه‌هـا بدل کنند. فصل‌دوم، همانند فصل اول، به‌یك پیوست دربـارهٔ هندسهٔ هذلولوی ختم می‌شود. به‌دلایل فنی ممکن نشدکه هر دوفصل متن اصلی روسی جلد سوم در تنها یك‌مجلداز این‌مجموعه گنجانده‌شود. امیداست که‌فصل باقیمانده به‌انگلیسی ترجمه شود و به‌صورت مجلدی جداگانه درآینده به‌چاپ برسد.

مجلدحاضر از تبدیلهای آفین[4] و تصویری درصفحه‌بحث‌می‌کند. مانندمجلدهای اول و دوم، تعداد ۱۱۲ مسأله‌ای هم‌که درسراسر متن‌پخش‌شده‌اند جزء قسمت‌اصلی این‌کتاب به‌شمار می‌آیند، وحل مشروح آنها نیز گنجانده شده است.

مترجم میل دارد از استاد یاگلم به‌خاطر کمك ارزشمندش در تهیهٔ این متن آمریکایی تشکر کند. مشارالیه پیشنویس ترجمه را بررسی کـرده، در چندین جـا

---

1. I. M. Yaglom 2. New Mathematical Library

۳. درهمه‌جا مطالب داخل‌کروشه افزودهٔ مترجم است.ـــم.

4. affine transformation

چیزهایی افزوده و اصلاحاتی به‌عمل آورده، و تعدادی مسأله که در متن روسی آن نبوده، برای ترجمه فراهم کرده است.

درهمهٔ قسمتهای این ترجمه سعی شده است اصطلاحات واحدی به‌کار برده شود. تنها یك استثنا هست که باید خاطرنشان سازم: ترکیب دو تبدیل دراین مجلد حاصلضرب،ولی درجلدهای‌اول ودوم تبدیلها حاصلجمع نامیده‌شده‌است(← پانوشت مترجم در اواخر بخش تجانس از جلد دوم).

آ به شنیتسر

از پیشگفتار مؤلف

این‌جلد از تبدیلهای هندسی به‌بررسی‌تبدیلهایی ازصفحه تخصیص داده شده که‌خط را به‌خط بدل می‌کنند. این تبدیلها که به تبدیلهای آفین و تصویری، یا تبدیلهای همخطی، معروف‌اند در اتحاد جماهیرشوروی سوسیالیستی در دانشگاه تدریس می‌شوند. ولی، کتاب‌حاضر در وهلهٔ اول توجه به‌خوانندگانی دارد که با ریاضیات دبیرستانی‌سروکار دارند: دانش‌آموزان و دبیران، و نیز دبیران آینده واستادانشان. لـذا هدف اصلی این‌کتاب نشان‌دادن رابطهٔ نزدیك بین تبدیلهای آفین و تبدیلهای تصویری با هندسهٔ مقدماتی است.

چو مورد نظر درتألیف این‌کتاب موجب شده است‌که گفتگو ازنظریه‌های پیشرفته‌تر تبدیلهای هندسی تا حد زیادی‌کنار نهاده شود. یك پیوست که [دراین کتاب] بـه‌هندسهٔ هذلولوی اختصاص داده شده گشت وگذار قابل‌توجهی است در عرصهٔ «هندسهٔ عالی». ولی حتی دراینجا، تمام تلاش ما این بوده است که گفتار ما به‌صورت‌مقدماتی نگاه داشته شود به‌این‌امید که پیوست مذکور برای دانش‌آموزان ساعیتر دبیرستانها قابل‌استفاده بماند.

مسأله‌ها قسمت اساسی این‌کتاب را تشکیل می‌دهند. راه‌حل آنها درنیمهٔ دوم کتاب آمده است. درعین‌حال که متن‌اصلی کاملا مستقل از مسأله‌هاست مؤلف براین باور است‌که تلاشهای خواننده برای‌حل دست‌کم برخی ازآنها موجب عمیقترشدن درك وی از متن خواهد شد. همهٔ مسأله‌ها بـه هندسهٔ مقدماتی مربوط می‌شوند، جز مسأله‌هایی که به‌منظور آشنا ساختن خواننده با قضیه‌های مجرد هندسهٔ هذلولوی در پیوست آمده‌اند. (برای‌اینکه گفتار ماهم مختصر وهم مقدماتی باشد، مؤلف از ورود به‌مفهوم «قطع مخروطی» اجتناب ورزیده است. همین امر، پرداختن به‌مسألهٔ طبیعی تأثیر تبدیلهای آفین وتصویری بردایره‌ها را غیرممکن ساخته‌است). برخی ازمسأله‌ها

متضمن یادداشتهای کلی در باب استفاده از تبدیلهای مورد بحث است.

این جلد از تبدیلهای هندسی اساساً مستقل از دوجلد پیش است. (در چندموردی که به آنها ارجاع داده شده، می‌توان به یك کتاب درسی هندسهٔ مسطحه که مشروح و مناسب باشد مراجعه کرد). مع‌هذا بین مقدمه و پیوست این جلد، و مقدمهٔ دوجلد قبل رابطه‌ای مستقیم وجود دارد. جز یك استثنای مهم که در پیشگفتار مترجم برمجلد حاضر ذکر شده است، اصطلاحاتی که درهرسه‌مجلد به‌کار برده شده‌اند یکی هستند.

خواننده می‌تواند درآغاز، مقدمه و پیوست را رها کند (ولی مؤلف متأسف خواهد شد اگر خواننده‌ای این دوقسمت را باهم رها کند). عین‌همین تذکر برای آخرین بخش (بخش‌پنجم)، که ارتباطی دقیق با بقیهٔ کتاب دارد، نیز صادق است.

ای. م. یاگلم

مقدمه

هندسه چیست؟ (بررسی نهایی)

در مقدمهٔ جلداول* هندسه را نظامی مربوط به آن ویژگیهایی از شکلها تعریف کردیم که براثر حرکات پایا می‌مانند. درمقدمهٔ جلد دوم، تعریف تـازه‌ای از هندسه دادیم و آن را نظامی مربوط به آن ویژگیهایی از شکلها تعریف کردیم که براثر تشابهات پایا می‌مانند. طبیعی است پرسیده شود که آیا این تعریفها کاملا هم‌ارزند یا نه، یعنی آیا این‌دو، تعریفهای متفاوتی از یك نظام‌اند، یا اینکه دوهندسهٔ مختلف وجود دارند: یکی که درمقدمهٔ جلداول از آن صحبت کردیم، و دیگری که تعریف آن را درمقدمهٔ جلددوم دادیم. نشان خواهیم داد کـه حالت‌دوم درست است، یعنی این دوهندسه، درعین اینکـه ارتباط نزدیکی بین آنها برقرار است، باهم تفاوت دارند. در واقع هندسه‌های گوناگون زیادی وجود دارند. یکی ازجالبترین آنها هندسهٔ نااقلیدسی لباچفسکی - بویویی است، که هندسهٔ هذلولوی هم نامیده می‌شود؛ این هندسه اساساً باهندسهٔ معمولی‌متفاوت‌است و در پیوست پایان این کتاب از آن صحبت‌شده‌است.**

---

* در این کتاب، منظورمـا از جلدهای اول و دوم، همان مجلدات اول و دوم تبدیلات هندسی یامجلدات هشتم و بیست‌ویکم این مجموعه است.ـم.

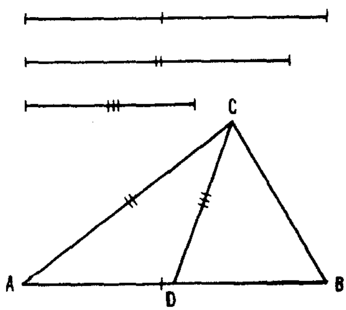
** همچنین مراجعه‌کنید به‌ضمیمهٔ کتاب

I. M. Yaglom, *Complex Numbers in Geometry* (Academic Press, N. Y., 1968).

دراینجا ۸ هندسهٔ‌مسطحهٔ نااقلیدسی، به‌انضمام‌هندسهٔ هذلولوی مورد بحث قرارگرفته‌اند.

در مقدمهٔ جلددوم اشاره کردیم که تعریف پیشین ما از هندسه به‌عنوان مطالعهٔ آن ویژگیهایی از شکلها که براثر حرکات پایا می‌مانند، به‌مصلحت نبوده است. از این ادعا چنین طرفداری کردیم که: حرکات تبدیلهایی از صفحه‌اند که فاصلهٔ بین هردو نقطه را ثابت نگاه‌می‌دارند. ولی،عدد مبین فاصله بدانتخاب واحد اندازه‌گیری بستگی دارد. از آنجا که یك گزارهٔ هندسی نمی‌تواند به‌انتخاب واحد طول بستگی داشته باشد، نتیجه می‌گیریم که قضیه‌های هندسی باید برحسب نسبت طولهای پاره‌خطها بیان شوند، نه‌خود طولهای پاره‌خطها. راه‌دیگر بیان این مطلب این است که ما در هندسه بین شکلهای متشابه تفاوتی نمی‌گذاریم. خلاصه بگوییم، اگر قضیه‌ای برای یك شکلبندی درست باشد، برای هرشکلبندی مشابه با آن نیز درست است.

درعین اینکه این استدلال برای همهٔ قضیه‌های هندسهٔ مقدماتی معتبر است، برای‌مثال همهٔ ترسیمهای‌هندسی معتبر نیست. اگر دریك ترسیم‌هندسی طول پاره‌خطی به‌ما داده شده باشد، این‌طول به‌وسیلهٔ یك عدد داده نمی‌شود، بلکه به‌وسیلهٔ پاره‌خط مفروضی داده می‌شود. مثلا اگر از ما خواسته شده باشد که یك‌مثلث ABC را با معلوم بودن طولهای دوضلع AB و AC و میانهٔ CDی آن رسم کنیم، منظور این است که پاره‌خطهایی قابل انطباق با[1] AB و AC و CD (شکل ۱) برای‌مامعلوم‌اند. آنچه در اینجا دخالت دارد طولهای پاره خطهاست، نه‌نسبتهای این‌گونه طولها، و معنی آن این است که همهٔ مثلثهای متشابه نمی‌توانند جوابهایی پذیرفتنی باشند.



شکل ۱

۱. دراین مجلد، درهمه‌جا اصطلاح «قابل‌انطباق با...» ترجمهٔ واژهٔ Congruent یعنی «تساوی هندسی» گرفته شده است.ـــم.

اگر یکی از این مثلثها یک جواب مسأله باشد، مثلثهای دیگر (غیر قابل انطباق با آن) جواب نیستند. ملاحظه می کنیم که، درعین اینکه تعریف هندسه، که در مقدمهٔ جلددوم داده شده، همهٔ قضایای هندسهٔ مقدماتی را در بر می گیرد، نمی‌توانند همهٔ مسأله‌های ترسیمی را (که به‌نحوی اصولی مبتنی بر تعریفی از هندسه که درمقدمهٔ جلد اول آورده‌ایم) شامل‌شود. به‌همین‌دلیل است که کتاب‌درسی کیسلیوف* براساس تعریف پیشین ما عرضه‌شده،و ازاین رو با قضایای مربوط به‌قابلیت‌انطباق مثلثها باهم، آغاز می‌شود. این‌گونه قضایا، اگر مثلثهای متشابه را متفاوت ازهم نگیریم، عاری ازمحتوا خواهند بود زیرا دراین‌صورت خود مفهوم‌قابلیت‌انطباق بیمعنی خواهدشد.

بدین‌ترتیب ما به‌این نتیجه رسیده‌ایم که هندسه‌هایی که درمقدمه‌های جلدهای اول و دوم تعریف شده‌اند باهم متفاوت‌اند. وانگهی همهٔ ویژگیهای شکلها درهندسهٔ دوم (که برای سادگی آن‌را هندسهٔ تشابهات می‌نامیم) ویژگیهای شکلهای هندسهٔ اول (هندسهٔ حرکات) نیز هستند؛ زیرا هرویژگی از یك شکل که براثر تشابهات محفوظ بماند، مطمئناً براثر حرکات نیز محفوظ می‌ماند. عکس‌این ادعا غلط است. ویژگیهای هندسهٔ حرکات از ویژگیهای هندسهٔ تشابهات بیشترند. (درهندسهٔ‌حرکات، محفوظ ماندن فاصلهٔ بین دونقطه ازیك‌شکل یکی از ویژگیهای هندسی آن است، درحالی‌که درهندسهٔ تشابهات تنهانسبت فواصل دارای اهمیت است.) این امرنشان می‌دهد که چرا هندسهٔ تشابهات به‌مراتب کمتر از هندسهٔ حرکات مسأله‌های ترسیمی دارد.**

یادآوری کنیم که چگونه به‌این دو تعریف خود رسیدیم. هندسهٔ حرکات را مطالعهٔ آن ویژگیهایی از شکل تعریف کردیم که براثر حرکات محفوظ می‌مانند. به‌عبارت دیگر، دراین هندسه دو شکل را که بتوانند براثر یك حرکت به‌هم بدل شوند، یعنی دوشکل قابل‌انطباق باهم را، تمیز ناپذیر می گیریم. هندسهٔ تشابهات را مطالعهٔ آن ویژگیهایی از شکلها تعریف کردیم که براثر تشابهات محفوظ می‌مانند.

---

* کتاب‌درسی رسمی هندسه در روسیهٔ شوروی.

** درهندسهٔ تشابهات تنها ویژگیهای هندسی یك‌شکل،زاویه‌ها ونسبتهای‌فواصل‌هستند. لذا دراین هندسه تنها مسأله‌های ترسیمی ممکن، متضمن زاویه‌های بین خطهای شکل و نسبتهای فاصله‌های بین نقطه‌های آن است. مثلا: مطلوب رسم مثلث ABC است با معلوم‌بودن زاویهٔ A ونسبت طولهای نیمساز وارتفاع‌رأس B.حل‌این‌مسأله یعنی‌پیداکردن یکی از مثلثهای متشابهی است که اندازهٔ زاویهٔ یك رأس و نسبت طول نیمساز به‌طول ارتفاع رأس دیگر آن معلوم باشند.

به‌عبارت دیگر ما در این هندسه دوشکلی را که با یك تشابه بتوانند به‌هم بدل شوند تمیزناپذیر می‌گیریم. خلاصه بگوییم در اینجا به‌جای «قابل انطباق با»[1]، «متشابه» گذاشته شده است. به‌پیروی از این برداشت و بنا بر تعریف، دوشکل را نسبت به‌یك ردهٔ معین از تبدیلها هم‌ارز گوییم، هرگاه بتوانند با تبدیلی از همان رده به‌هم بدل شوند.* مطالعهٔ آن ویژگیهایی از شکلها که براثر تبدیلهای رده‌ای از تبدیلهای مورد نظر محفوظ بمانند، به‌عنوان هندسهٔ نظیر آن رده تعریف می‌شود.

اکنون به‌پاسخ نهایی به‌این پرسش که هندسه چیست نزدیك می‌شویم. برای اینکه تعریف کاملی از هندسه (دقیقتر از تمامی هندسه‌های مختلف) به‌دست دهیم، باز باید ببینیم چه‌شرطهایی را، درصورت وجود باید بر ردهٔ تبدیلهای موجود در زیربنای یك‌هندسهٔ خاص تحمیل کنیم.

نیاز به‌تحمیل بعضی شرطها نسبتاً آشکار است. فرض کنیم، مثلاً، سعی کرده باشیم «هندسهٔ تقارن محوری» [2] را مطالعهٔ آن و تنها آن ویژگیهایی از شکلها تعریف کنیم که براثر تقارن نسبت به‌یك خط محفوظ می‌مانند. در این هندسهٔ فرضی، دوشکل F و F' (شکل ۲) متقارن نسبت به‌خط l به یك‌رده تعلق دارند، و چون F'' قرینهٔ F نسبت به‌خط m است، F و F'' به‌یك‌رده تعلق‌خواهند داشت؛ ولی F'وF'' نسبت به‌هیچ‌خطی قرینهٔ یکدیگر نیستند.** از این‌رو مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی مفیدی را درهندسهٔ فرضی‌خود واردنکرده‌ایم. F' و F''، با اینکه هردو به‌همان ردهٔ F تعلق دارند، دریك‌رده نیستند!

برای اینکه ببینیم چه شرایطی را باید بر یك رده از تبدیلها، که به‌عنوان مبنا برای یك‌هندسه به‌کار می‌روند، تحمیل کنیم رابطهٔ هم‌ارزی شکلها را دقیقتر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تجربهٔ ما از رابطه‌های هم‌ارزی در ریاضیات، درنظامهای دیگر ودر زندگی

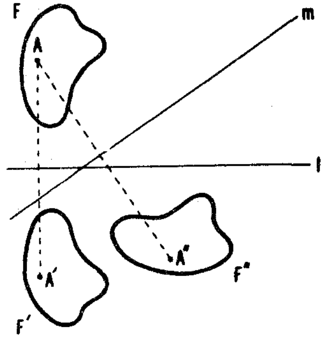
---

۱. فراموش نشود که واژهٔ «قابل انطباق با» ترجمهٔ واژهٔ congruent، که همان «تساوی هندسی» است گرفته شده‌است.ـ م.

* درآنچه بعداً خواهدآمد، رده‌هایی ازتبدیلها را که‌کلیتر از رده‌های تشابهات هستند وارد خواهیم کرد.

2. reflection

** این نکته، مثلاً، از این واقعیت نتیجه می‌شودکه دو شکل متقارن نسبت به‌یك خط، همواره معکوساً باهم قابل‌انطباق‌اند، درحالی‌که F' و F'' مستقیماً باهم قابل انطباق‌اند (←جلد اول).



شکل ۲

روزانه، نشان می‌دهد که شکلهای هم‌ارز باید در شرایط زیر صدق کنند:

۱. هرشکل باخودش هم‌ارز باشد.

۲. اگر یك شکل F با یك شکل F' هم‌ارز است، بعکس F' هم با F هم‌ارز باشد.

۳. اگر یك شکل F با یك شکل F_1 هم‌ارز است و F_1 هم با یك شکل F'، آنگاه F هم با F' هم‌ارز باشد.

این شرطها مسلماً صادق خواهند بود هرگاه ردهٔ تبدیلهای Gی ما دارای ویژگیهای زیرین باشد:

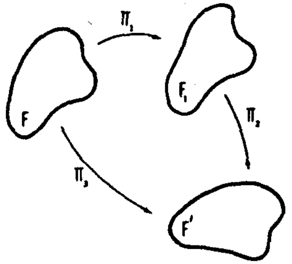
۱. G شامل تبدیل همانی‌باشد (شامل تبدیلی باشد که تمام نقطه‌های شکل را ثابت نگاه می‌دارد).

۲. اگر G شامل یك تبدیل Π باشد که یك‌شکل F را به‌یك شکل F' بدل می‌کند، آنگاه باید شامل یك تبدیل P (عکس Π) باشد که F' را به F بدل کند (شکل ۳ الف).

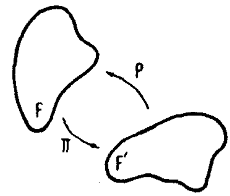
۳. اگر G شامل یك‌تبدیل Π_1 باشد که یك‌شکل F را به‌یك شکل F_1 بدل می‌کند، و یك تبدیل Π_2 کــه F_1 را بــه F'، آنگاه باید شامل تبدیلی مانند Π_3 («حاصلضرب»* دو تبدیل) نیز باشد که F را به F' بدل می‌کند (شکل ۳ ب).

---

* ترکیب $\Pi_3 = \Pi_2 . \Pi_1$ از تبدیلهای Π_1 و Π_2، یعنی $\Pi_3(F) = \Pi_2[\Pi_1[(F)]]$، معمولا «حاصلضرب» Π_1 و Π_2 نامیده می‌شود، ولی در جلدهــای اول و دوم تبدیلهای هندسی «حاصلجمع» نامیده شده بود.



شکل ۳ ب



شکل ۳ الف

یك ردهٔ G از تبدیلها با ویژگیهای ۱ و ۲ و ۳، یك گروه تبدیلها نامیده می‌شود. لذا، مثلاً، همهٔ حرکات ونیز همهٔ تشابهات یك گروه تشکیل می‌دهند. همهٔ دورانهای یك‌صفحه پیرامون یك نقطهٔ ثابت O نیز یك گروه تشکیل می‌دهند. زیرا،

۱. تبدیل همانی دورانی است پیرامون O به‌زاویهٔ $0°$ (یا هرمضربی از $360°$).

۲. عکس یك دوران پیرامون O به‌زاویهٔ α دورانی است پیرامون O به‌همان زاویهٔ α درجهت مخالف.

۳. حاصلضرب یك دوران پیرامون O به زاویهٔ α و یك دوران پیرامون O به‌زاویهٔ β، دورانی است پیرامون O به‌زاویهٔ $\alpha+\beta$.

برخلاف دورانهای پیرامون یك نقطه، ردهٔ همهٔ دورانهای یك‌صفحه تشکیل گروه نمی‌دهند؛ حاصلضرب دو دوران ممکن است به‌یك انتقال بدل شود و نه به‌یك دوران (← فصل ۱، بخش ۲ از جلد اول). کلیهٔ تقارنهای یك‌صفحه نسبت به‌همهٔ خطوط آن نیز تشکیل یك گروه نمی‌دهند؛ دراینجا هیچ‌یك ازشرطهای ۱ و ۳ی تعریف یك گروه دیده نمی‌شود (حاصلضرب دو تقارن محوری عموماً یك تقارن نسبت به‌یك خط نیست، ← فصل ۲، بخش ۱ از جلد اول؛ تبدیل همانی نمی‌تواند به‌صورت یك تقارن نسبت به‌یك خط نشان داده‌شود.)

اکنون می‌توانیم یك هندسه را چنین تعریف کنیم: یك هندسه نظامی است که سر و کارش با آن ویژگیهایی از شکلهاست که بر اثر تبدیلهای یك‌گروه از تبدیلها تغییر نکنند. این تعریف تأکیدی است براین‌که نه‌فقط یك هندسه، بلکه هندسه‌های زیادی وجود دارند؛ و برای به‌دست آوردن یك‌هندسه تنها نیاز به‌انتخاب یك گروه از تبدیلها داریم. هندسهٔ حرکات وهندسهٔ تشابهات دومورد از هندسه‌هایی هستند که در دبیرستان دیده‌ایم. درپیوست این کتاب نشان خواهیم داد که هندسهٔ هذلولوی هم

می‌تواند با این تعبیر جدید به‌مثابهٔ یك‌هندسه نگریسته شود.

تعریف يك هندسه به‌صورت مطالعهٔ آن ویژگیهای شکلها که بر اثر تبدیلهای متعلق به‌يك گروه خاص عوض نمی‌شوند به‌ریاضیدان آلمانی ف. کلاین منسوب است. با اینکه این تعریف کلیترین تعریف نیست (برخی از زمینه‌های مهم هندسه را دربر نمی‌گیرد)، ثابت شده است که بسیار مفید بوده ونقش مهمی در بسط دانش داشته است. به‌ویژه مفهوم يك گروه از تبدیلها، اکنون یکی از مهمترین مفاهیم ریاضیات جدید شده است.*

هندسهٔ مسطحهٔ مقدماتی خود تاحد زیادی باشکلهایی سروکار داردکه از خط و دایره درست شده‌اند. می‌توان نشان داد (← جلد دوم) که تشابهات را می‌توان به‌عنوان‌تبدیلهایی ازصفحه تعریف‌کرد که خط را به‌خط بدل‌می‌کنند و دایره را به‌دایره. تبدیلهایی از صفحه که خطها را حفظ می‌کنند (یعنی خط را به‌خط بدل می کنند) بی‌آنکه الزاماً دایره‌ها را حفظ‌کنند به تبدیلهای آفین معروف هستند و يك گروه تشکیل می‌دهند** که‌مبنای هندسهٔ آفین است. تبدیلهای صفحهٔ تصویری (← ص ۵۴) که خط را حفظ می‌کنند (← زیرنویس ص۶۷) بی‌آنکه الزاماً دایره را حفظ کنند به تبدیلهای تصویری معروف‌اند و تشکیل يك گروه می‌دهند که مبنای هندسهٔ تصویری است.*** تبدیلهایی از صفحه که دایره را حفظ می‌کنند (با درنظر گرفتن خطوط

---

* دوکتاب مقدماتی بسیارخوب در نظریهٔ گروهها کتابهای زیر هستند که دومین کتاب، مجلد شمارهٔ ۱۴ی این مجموعه است:

An Introduction to the Theory of Groups, Hafner Publishing Co., New York, 1959, and I. Grossman and W. Magnus, *Groups and Their Graphs*, Random House, New York, 1964, NML, 14 of this series.

** روشن است که‌هرگاه يك تبدیل Π خط را به‌خط بدل کند، عکس آن نیز خط را به‌خط بدل خواهدکرد. اگر دو تبدیل Π_1 و Π_2 خط را به‌خط بدل‌کنند، حاصلضرب آنها، Π_3، نیز خط را به‌خط بدل خواهدکرد، و تبدیل همانی، خط را حفظ می کند. تبدیلهایی ازصفحه که حافظ خط هستند يك‌گروه تشکیل می‌دهند.

*** هندسهٔ‌تصویری معمولا در دانشگاه تدریس می‌شود. دوکتاب مقدماتی زیر (به‌زبان انگلیسی) دراین موضوع مناسب‌اند:

H. S. M. Coxeter, *Projective Geometry*, Blaisdell Publ. Co.,

→

به‌صورت دوایری به‌شعاع بینهایت) به‌تبدیلهای مستدیر معروف‌اند و تشکیل گروهی می‌دهند که مبنای هندسهٔ انعکاسی است.*

هنگامی که در کتاب حاضر از تبدیلهای آفین و تصویری صحبت می‌شود، منظور این نیست که آنها را به‌عنوان مدخلی برای هندسه‌های جالب و مهم مربوط به‌این گروههای تبدیل به‌کار بریم؛ بلکه هدف ما بیشتر اثبات این مطلب است که وجود هندسه‌های مختلف می‌تواند کارایی بسیار داشته باشد، حتی اگر از هندسهٔ مقدماتی پا فراتر نگذاریم. اگر بدانیم که یك قضیهٔ خاص اساساً قضیه‌ای از، مثلاً، هندسهٔ تصویری است (یعنی سروکار این قضیه با ویژگیهایی است که براثر تبدیلهای تصویری محفوظ می‌مانند)، آنگاه بیشتر اوقات می‌توانیم اثبات آن را ساده کنیم. مثلا فرض کنید که از ما خواسته شده باشد متقارب بودن سه‌خط l_1 و l_2 و l_3 را ثابت کنیم. اگر شکل قضیه را در معرض یك تبدیل تصویری قرار دهیم، آنگاه خطهای l_1 و l_2 و l_3 به‌خطهای l'_1 و l'_2 و l'_3 بدل می‌شوند که متقارب‌اند اگر l_1 و l_2 و l_3 متقارب باشند. اکنون ممکن است که انتخاب داهیانه‌ای از تبدیل تصویری انجام گیرد که اثبات تقارب در l'_1 و l'_2 و l'_3 در آن آسانتر از اثبات تقارب در خطهای l_1 و l_2 و l_3 میسر باشد. این روش اثبات در این کتاب ضمن مثالهای مختلف ومتعدد تشریح خواهد شد.

یادآوری می‌کنیم که خواننده در حل مسائل این کتاب با تکنیکهایی برخورد می‌کند که با تکنیکهای جلدهای اول و دوم تفاوت دارند. در آنجاها حرکات و تشابهات را برای تبدیل قسمت معینی از نمودار یك مسأله به‌کار می‌بردیم، درحالی که در این کتاب بسیاری اوقات تمامی نمودار یك‌مسأله را تبدیل می‌کنیم. علت این تفاوت روشن آشکار است. وقتی حرکتی را برای تمامی نموداری به‌کاربریم نمودار تغییر نمی‌کند (درهندسهٔ مقدماتی بین شکلهایی که تنها ازلحاظ وضع اختلاف دارند تفاوتی نمی‌گذاریم) و درنتیجه ساده‌نمی‌شود. ازسوی دیگر دراثبات یك‌قضیهٔ هندسهٔ مقدماتی، که اصلا قضیه‌ای ازهندسهٔ تصویری یا انعکاسی‌است، ممکن است پی ببریم که تبدیلی از تمامی شکل قضیه مزایای قابل توجهی دارد.

درست همان گونه که تکنیکهای حل مسائل در این کتاب با تکنیکهای حل آنها در جلدهای اول و دوم تا اندازه‌ای متفاوت است، مشخصات مسائل آنها نیز چنین

←

New York, 1964, and A. Seidenberg. *Lectures in Projective Geometry*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1962.

* Cf. Ch. 8 of A. Tuller, *A Modern Introduction to Geometries*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1967.

است. درحالی‌که در جلدهای اول و دوم بیشتر از خواننده خواسته شده است که ترسیمات مختلفی را انجام دهد، در این کتاب معمولا از او خواسته شده است که قضیه‌هایی را اثبات کند. ولی باید اشاره کنیم که تبدیلهای تصویری یاانعکاس اغلب می‌توانند، چنانکه در سه مسألهٔ جالب زیر نشان داده شده است، در مسائل ترسیمی کارا باشند:

الف) در یك دایره یك n ضلعی محاط کنید که اضلاع آن از n نقطهٔ مفروض صفحه بگذرند (← مسألهٔ ۸۴ الف)، بخش ۵، ص ۱۲۳).

ب) بر دایرهٔ مفروض یك n ضلعی محیط کنید که رأسهای آن بر n خط مفروض واقع باشند (← مسألهٔ ۸۴(ب) بخش ۵، ص ۱۲۴).

ج) در n ضلعی مفروض یك n ضلعی محاط کنید که اضلاعش از n نقطهٔ مفروض واقع درصفحه بگذرند (← مسألهٔ ۹۰، بخش ۵، ص ۱۲۷).

حل اولین مسأله از این سه مسأله بی‌استفاده از تبدیلهای تصویری یا مستدیر، پیچیده است.* اما برای مسأله‌های دوم و سوم، هیچ راه‌حل ساده‌ای بدون استفاده از این تبدیلها به‌دست نیامده است.

بالاخره، اشاره می‌کنیم که استفاده از تبدیلهای تصویری و مستدیر به‌ما امکان می‌دهد که به‌مسألهٔ امکان رسم باستاره (← بخش ۵) وامکان رسم با پرگار (← فصل ۲)** جواب بدهیم.

---

* رجوع کنید، به:

L. I. Golovina and I. M. Yaglom, *Induction in Geometry*. D. C. Heath and Co., Boston, 1963, pp. 49-52.

** ارجاع به‌مبحث ترجمه نشدهٔ آن است.

فصل اول

تبدیلهای آفین و تصویری

۱. تصویر موازی یك‌صفحه بریك صفحه
تبدیلهای آفین صفحه

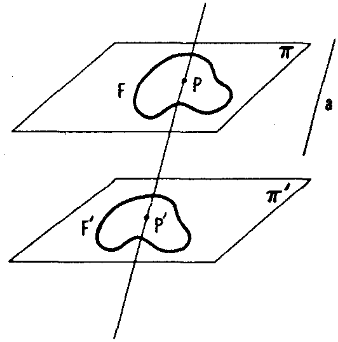
گیریم π و π' دو صفحهٔ متمایز (موازی یا متقاطع) باشند. منظور از تصویر موازی π بر π' در امتداد a نگاشتی است از π بر π' که به‌هر نقطهٔ P از π، یك نقطهٔ P' از π' را به گونه‌ای مربوط کند کـه خط PP' به موازات a باشد. (شکل ۴ (الف) و (ب))*. این نگاشت هر شکل F از صفحهٔ π را بـه‌شکلی مـانند F' در π' بدل می‌کند. نگارهٔ (سایهٔ) یك‌پنجره برکف اطاق، براثر تابش نورخورشید (شکل ۵) می‌تواند به‌عنوان نتیجهٔ یك تصویر موازی انگاشته شود.**

هرگاه صفحات π و π' موازی باشند، تصویر موازی، یك‌شکل واقع در صفحهٔ π را به‌شکلی قابل‌انطباق با آن در π' بدل‌می‌کند (دراین حال تصویر موازی به‌یك

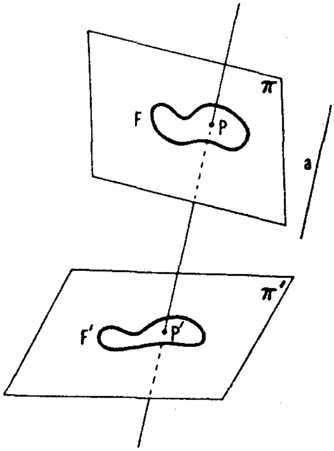
---

* روشن است که خط a که مشخص‌کنندهٔ تصویر موازی صفحهٔ π برصفحهٔ π' است نباید با π یا π' موازی باشد. از این به‌بعد ما برقراری این شرط را مسلم می‌گیریم.

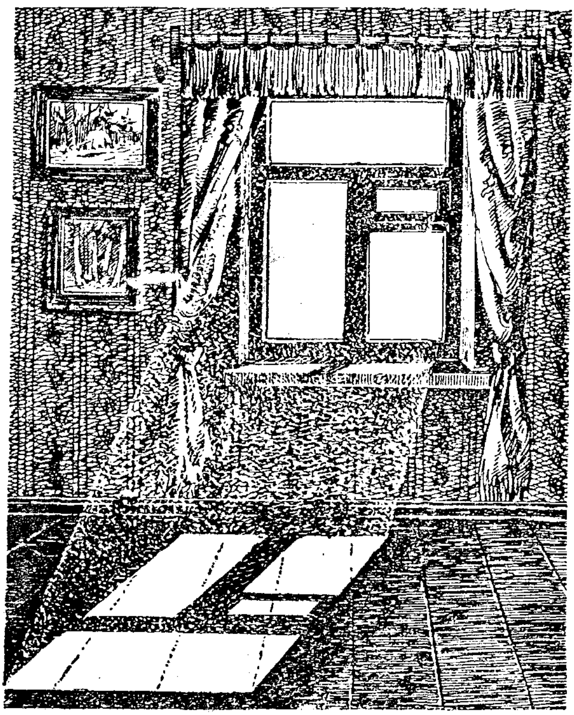
** به‌دلیل فاصلهٔ زیاد خورشید می‌توانیم اشعهٔ آن را موازی فرض کنیم.



شکل ۴ (الف)



شکل ۴ (ب)



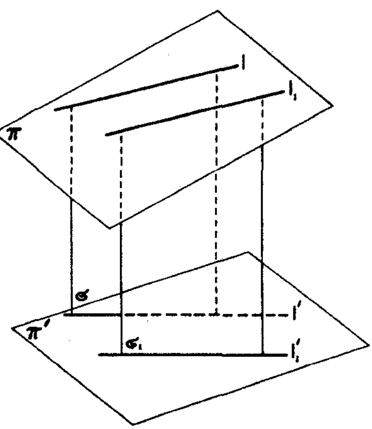
شکل ۵

انتقال درامتداد خط a درفضا بدل می‌شود؛ ← شکل۴ (الف))*. اگر صفحات π و π' موازی نباشند، تصویرموازی، شکل اصلی شکلها را بیقواره‌می کند (← شکل۴(ب)؛ توجه خواننده را به بیقوارگی سایه‌های اجسام به‌هنگام طلوع و غروب خورشید جلب می کنیم).

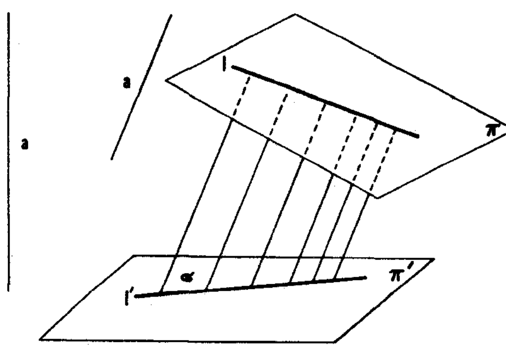
اغلب می‌توان باانتخاب تصویرموازی‌مناسب ودرنظر گرفتن نگارهٔ پیکربندیها براثر آن، حل‌مسائل هندسی را ساده کرد. این بخش به‌این تکنیك حل‌مسائل تخصیص داده شده‌است. ولی، ابتدا باید ویژگیهای بنیادی تصویرموازی را بررسی کنیم.

الف) در تصویر موازی، خطوط صفحهٔ π برخطوط صفحهٔ π' نگاشته می‌شوند. زیرا خطوط موازی با a که از نقاط یك‌خط l ازصفحهٔ π رسم شوند، یك صفحهٔ σ (ماربر l و موازی با a) تشکیل می‌دهند. در نتیجه نگارهٔ l بر اثر تصویر موازی، خط l' فصل مشترك صفحهٔ σ با π' خواهد بود(شکل۶). بعکس، هرخط در π' نگارهٔ خطی از صفحهٔ π است.

ب) در تصویر موازی، خطوط موازی به‌خطوط موازی بدل می‌شوند. زیرا هرگاه l و l_1 دو خط موازی واقع درصفحهٔ π باشند، صفحات σ و σ_1 موازی با a و ماربر l و l_1 موازی‌اند. در نتیجه l' و l_1'، فصل مشترکهای σ و σ_1 با π'، موازی می‌شوند (شکل ۷).



شکل ۷



شکل ۶

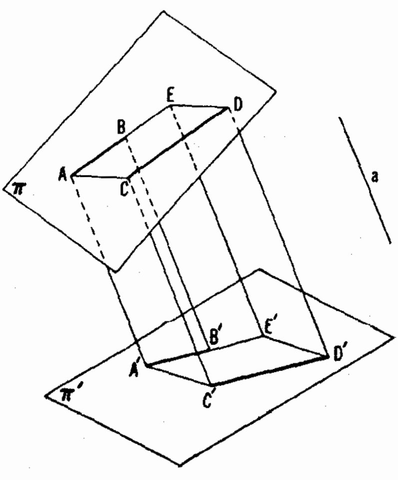
* انتقال درفضامشابه انتقال‌درصفحه تعریف‌می‌شود (← جلد اول، بخش۱ ازفصل۱).

ج) درتصویر موازی، نسبت طولهای دوپاره‌خط هم‌خط محفوظ می‌ماند. این، نتیجهٔ بلافصل این‌قضیه است که: خطوط موازی، از اضلاع یك زاویه پاره‌خطهای متناسب جدا می‌کنند. (← شکل ۸ (الف)؛ که $AB/BC = A'B'/B'C'$).

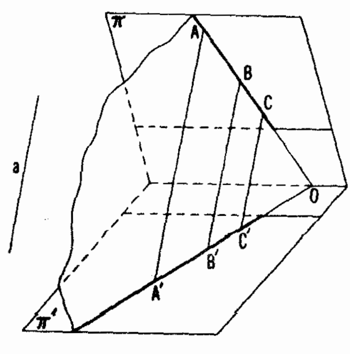
در تصویر موازی، نسبت طولهای دوپاره خط واقع بردو خط موازی نیز محفوظ می‌ماند. زیرا فرض می‌کنیم AB و CD دوپاره‌خط درصفحهٔ π باشند به‌طوری که $AB||CD$، وفرض می‌کنیم E نقطه‌ای باشد بر AB چنانکه $ED||AC$ (شکل۸ب). یك تصویر موازی متوازی‌الاضلاع $ACDE$ را به متوازی‌الاضلاع $A'C'D'E'$ بدل‌می‌کند (زیرا پاره‌خط AB به پاره‌خط $A'B'$، وخطوط موازی به‌خطوط موازی بدل می‌شوند). لذا (با توجه به اینکه در تصویر موازی نسبت طولهای دوپاره‌خط همخط محفوظ می‌ماند) می‌بینیم که

$$\frac{CD}{AB}=\frac{AE}{AB}=\frac{A'E'}{A'B'}=\frac{C'D'}{A'B'}$$

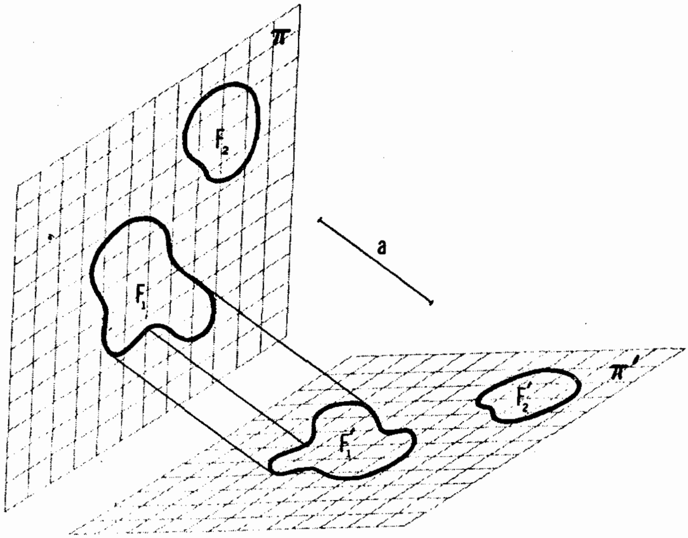
د) در تصویر موازی، نسبت بین مساحتهای دو شکل مسطح محفوظ می‌ماند. برای اثبات این‌حکم، درصفحهٔ π شبکه‌ای ازمربعهای قابل‌انطباق باهم رسم‌می‌کنیم. ویژگیهای (ب) و (ج) ایجاب می‌کنند کــه تصویرموازی، این شبکه از مربعهــا را به‌شبکه‌ای از متوازی‌الاضلاعهای قابل‌انطباق باهم، واقع در π' بدل کند (شکل ۹).



شکل ۸ (ب)



شکل ۸ (الف)



شکل ۹

گیریم F_1 و F_2 دوشکل در π و F_1' و F_2' نگاره‌های آنها در π' بر اثر یك تصویر موازی باشند. اگر مربعهای شبکه به‌قدرکافی ریز باشند، تفاوت نسبت تعداد مربعهای داخل F_1 به تعداد مربعهای داخل F_2 با نسبت S_1/S_2ی مساحتهای شکلهای F_1 و F_2 ازهرعدد دلخواهی کوچکتراست* و نیز تفاوت نسبت تعداد متوازی‌الاضلاعهای داخل F_1' به‌تعداد متوازی‌الاضلاعهای داخل F_2' بانسبت S_1'/S_2'ی مساحتهای F_1'و F_2' از هر عدد دلخواهی کوچکتر است. چون تعداد مربعهای F_1 با تعداد متوازی‌الاضلاعهای F_1' برابر است وتعداد مربعهای S_2 باتعداد متوازی‌الاضلاعهای F_2'، در نتیجه $S_1/S_2=S_1'/S_2'$، و حکم ثابت می‌شود.

اکنون به‌اثبات قضیهٔ بنیادی تصاویر موازی می‌پردازیم.

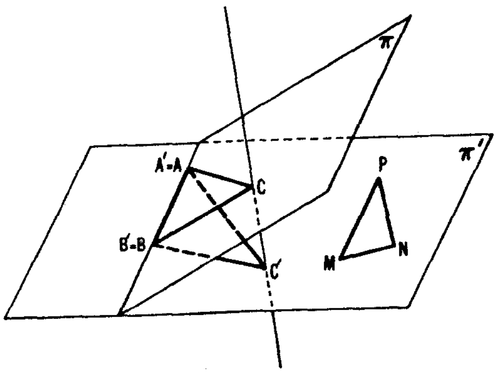
قضیهٔ ۱۰ گیریم A و B و C سه‌نقطهٔ ناهمخط دریك صفحهٔ π باشند و M و N و P

---

* S_1/S_2 حد نسبت تعداد مربعهای F_1 است به‌تعداد مربعهای F_2 وقتی ضلع یك مربع درشبکه بینهایت کوچك شود.

سه‌نقطهٔ ناهمخط دریك‌صفحهٔ π'، صفحات π و π' را می‌توان درفضا چنان قرار داد که براثر تصویری موازی از π بر π'، مثلث ABC به‌مثلث $A'B'C'$ متشابه بامثلث MNP بدل شود.

صفحات π و π' را چنان قرار می‌دهیم کــه فصل مشترك آنها بر AB قرار گیرد. حال‌درصفحهٔ π'یك‌نقطهٔ C'طوری‌اختیارمی‌کنیم که $\triangle ABC' \sim \triangle MNP$. لذا تصویر موازی مطلوب با خط CC' مشخص خواهد شد (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

۱. ثابت‌کنیدکه سه‌میانهٔ مثلث‌متقارب‌اند (یعنی هرسه دریك نقطه یکدیگر را می‌برند).

۲. ثابت‌کنید کــه خط واصل بین نقطهٔ تلاقی امتدادهــای ساقهای ذوزنقه و نقطهٔ تلاقی قطرهای آن، قاعدهٔ ذوزنقه را نصف می‌کند.

۳. فرض می‌کنیم l و l_1 دوخط موازی دریك صفحه باشند.

الف) تنها با استفاده از ستاره، پاره‌خط AB واقع بر l را به‌دو قطعهٔ مساوی تقسیم کنید.

ب) بــا استفاده از ستارهٔ تنها، از نقطهٔ مفروض M خطی به‌موازات l و l_1 رسم کنید.

یك تعمیم مسألهٔ ۳ (الف)، (مسألهٔ ۳۲ (ب) بخش‌بعد، ص ۵۷) است.

۴. گیریم سه‌نقطهٔ M و N و P بترتیب برضلعهای AB و BC و AC از مثلث

ABC باشند به‌قسمی که $AM/MB=BN/NC=CP/PA$. نشان دهید که:

الف) نقطهٔ تلاقی میانه‌های $\triangle MNP$ بر نقطهٔ تلاقی میانه‌های $\triangle ABC$ منطبق است.

ب) نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث حاصل از خطوط AN و BP و CM بر نقطهٔ تلاقی میانه‌های $\triangle ABC$ منطبق است.

۵. مثلث ABC داده‌شده است. نقطهٔ M را در داخل مثلث ABC چنان پیدا کنید که مثلثهای ABM و BCM و CAM مساحتهای مساوی داشته باشند.

۶. نقطه‌های A_1 و B_1 و C_1 بترتیب برضلعهای BC و CA و AB از یك‌مثلث ABC واقع‌اند به‌طوری که

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}=k$$

بعلاوه نقطه‌های A_2 و B_2 و C_2 بترتیب براضلاع B_1C_1 و C_1A_1 و A_1B_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ واقع‌اند به‌طوری که

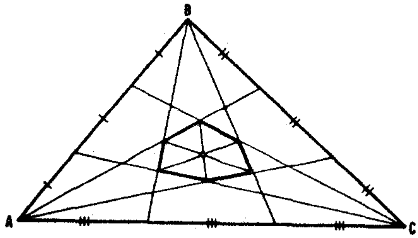
$$\frac{C_1A_2}{A_2B_1}=\frac{A_1B_2}{B_2C_1}=\frac{B_1C_2}{C_2A_1}=k$$

نشان دهید که مثلث ABC با مثلث $A_2B_2C_2$ متشابه است.

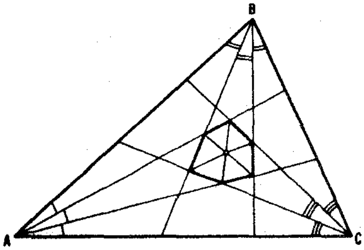
۷. نقطه‌های K و L و M براضلاع مثلث ABC به‌مساحت ۱ واقع‌اند چنانکه این‌اضلاع را به‌نسبتهای مفروض k_1 و k_2 و k_3 تقسیم می‌کنند. نشان دهید که‌مساحت مثلث KLM فقط به‌اعداد k_1 و k_2 و k_3 بستگی دارد و نه به‌این‌که کدام‌ضلع به‌چه نسبتی تقسیم شده است.

۸. از هریك از رئوس $\triangle ABC$ دوخط چنان رسم می‌کنیم که ضلع روبه‌رو را به‌سه‌قسمت مساوی تقسیم کنند. این شش خط یك شش‌ضلعی پدید می‌آورند. (شکل ۱۱ الف) ثابت‌کنید قطرهایی که رأسهای روبه‌رو از این شش ضلعی را به‌هم وصل می‌کنند دریك نقطه متقارب‌اند.

در مسألهٔ ۸ فرض‌کردیم که‌از هررأس $\triangle ABC$ دوخط رسم شده‌اند که ضلع مقابل را به سه قسمت مساوی تقسیم‌کرده‌اند. اگر به جای آن، فرض‌کنیم این خطها زاویه‌های هررأس را به سه قسمت مساوی تقسیم‌کرده‌اند، صورت جالبی ازقضیهٔ موجود در مسألهٔ ۸ به دست‌می‌آید (شکل ۱۱ ب). (یك‌برهان سادهٔ خاص برای‌آن را می‌توانید درآشنایی با



شکل ۱۱ الف

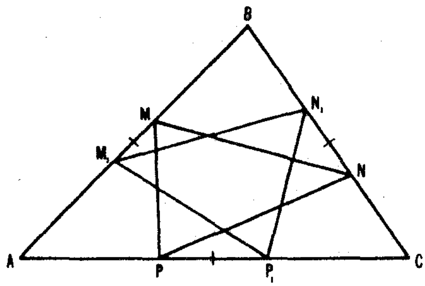


شکل ۱۱ ب

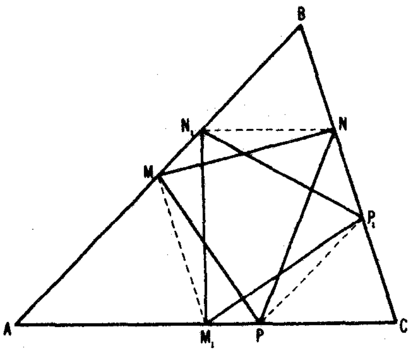
هندسه، اثر کاکستر، (چاپ دوم)(صص ۲۵، ۴۲۳ (تمرین ۱)، یا در مجلد نوزدهم این مجموعه، بخش ۹.۲ (تمرین ۱) پیدا کنید.

۹. نقطه‌های M و N و P بترتیب بر اضلاع* AB و BC و AC از مثلث ABC واقع‌اند، نشان دهید که

الف) هرگاه M_1 و N_1 و P_1 بترتیب قرینه‌های M و N و P نسبت به‌وسطهای اضلاع AB و BC و AC باشند (شکل ۱۲ الف)، مثلثهای MNP و $M_1N_1P_1$



شکل ۱۲ الف



شکل ۱۲ ب

---

* در این مسأله و مسألهٔ ۱۰، «ضلع» یک مثلث به‌معنی تمامی خطی است که از دو رأس می‌گذرد، نه‌فقط پاره‌خط واصل بین آنها.

مساحتهای مساوی دارند (بویژه، اگر نقطه‌های M و N و P همخط باشند، نقطه‌های M_1 و N_1 و P_1 نیز همخط اند).

ب) اگر M_1 و N_1 و P_1 بترتیب براضلاع AC و BA و CB از مثلث ABC چنان باشند که $MM_1 \| BC$ و $NN_1 \| CA$ و $PP_1 \| AB$ (شکل ۱۲ ب)، مثلثهای MNP و $M_1N_1P_1$ مساحتهای مساوی دارند (بویژه هرگاه نقطه‌های M و N و P، همخط باشند، نقطه‌های M_1 و N_1 و P_1 نیز، همخطاند).

۱۰. نقطه‌های M و N و P و M_1 و N_1 و P_1 مانند مسألهٔ ۹(الف) انتخاب شده‌اند. نشان دهید که مساحت مثلثی به‌اضلاع AN و BP و CM با مساحت مثلثی به اضلاع AN_1 و BP_1 و CM_1 برابر است. (بویژه، هرگاه خطوط AN و BP و CM متقارب باشند، خطوط AN_1 و BP_1 و CM_1 نیز متقارب‌اند).

۱۱. الف) خط l بر M، نقطهٔ تلاقی سه میانهٔ مثلث ABC، می گذرد و ضلعهای آن را در نقاط R و S و T می‌برد (R و S دریک طرف M قرار دارند). نشان دهید که

$$\frac{1}{MR}+\frac{1}{MS}=\frac{1}{MT}$$

ب) خط l بر رأس M از متوازی‌الاضلاع $MNPQ$ می گذرد وخطهای NP و PQ و NQ را بترتیب درنقاط R و S و T می‌برد. نشان دهید که

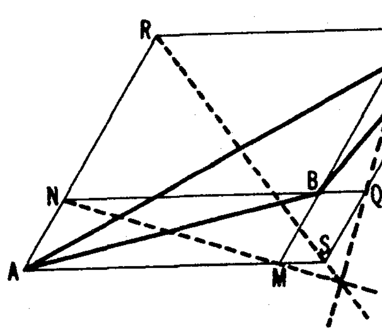
$$\frac{1}{MR}+\frac{1}{MS}=\frac{1}{MT}$$

۱۲. درمثلث ABC مستطیلی به‌مساحت σ محاط کنید که دو رأس آن برضلع AB واقع باشند و دو رأس دیگر براضلاع CA و CB.

۱۳. اضلاع مثلث ABC قطرهای سه متوازی‌الاضلاعی هستند که ضلعهای آنها بریك امتدادند (شکل ۱۳). نشان‌دهید که قطرهای دیگر این متوازی‌الاضلاعها متقارب‌اند.

۱۴. نشان‌دهید که خط واصل بین وسطهای قطرهای یك چهارضلعی $ABCD$ پاره‌خط واصل بین‌نقاط تلاقی‌اضلاع مقابل چهارضلعی را نصف‌می‌کند (شکل۱۴). (روشن است که برای متقاطع بودن اضلاع مقابل لازم است که چهارضلعی متوازی‌الاضلاع، یا ذوزنقه نباشد.)

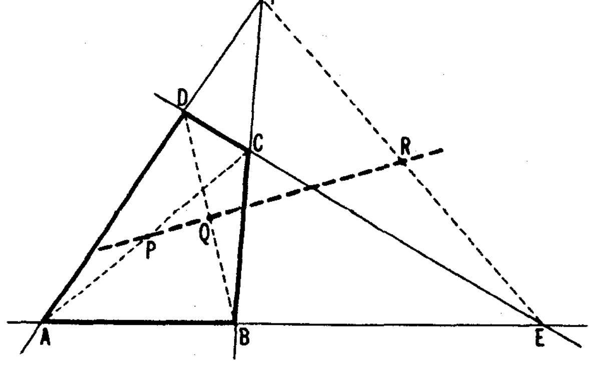
صورت قضیهٔ مسألهٔ ۱۴ اغلب به‌گونهٔ دیگری بیان می‌شود. شکلی مسطح،



شکل ۱۳

تشکیل شده از چهار خط که، هیچ سه‌تایی از آنها متقارب و، هیچ دوتایی از آنها موازی نباشند چهارضلعی کامل نامیده‌می‌شود. شش نقطهٔ تلاقی دو به‌دوی این چهار خط (اضلاع چهارضلعی کامل) رأسها، و خطهـای واصل بین رأسهای مقابل (یعنی، بین رأسهای نـاواقع بریك ضلع)، قطرهای چهار ضلعی نام دارند. بـا استفاده از این اصطلاحات می‌توانیم مسألهٔ ۱۴ را چنین بیان کنیم: وسطهای قطرهای یك چهارضلعی کامل همخط‌اند (قضیهٔ گاوس یا قضیهٔ چهارضلعی کامل).

۱۵. الف) نقطه‌های A_1 و B_1 و C_1 و D_1 بترتیب بـر اضلاع CD و DA و AB و BC از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ چنان واقع‌اند که



شکل ۱۴

$$\frac{CA_1}{CD}=\frac{DB_1}{DA}=\frac{AC_1}{AB}=\frac{BD_1}{BC}=\frac{1}{3}$$

نشان دهید کـه مساحت چهارضلعی حاصل از خطوط AA_1 و BB_1 و CC_1 و DD_1 برابر یك سیزدهم مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است.

ب) نقطه‌هـای A_1 و B_1 و C_1 بترتیب براضلاع BC و CA و AB از مثلث ABC هستند چنانکه

$$\frac{BA_1}{BC}=\frac{CB_1}{CA}=\frac{AC_1}{AB}=\frac{1}{3}$$

نشان دهید که مساحت مثلث حاصل ازخطوط AA_1 و BB_1 و CC_1 برابر است بـا یك‌هفتم مساحت مثلث ABC.

۱۶. قضیهٔ سوا را ثابت کنید: اگر نقطه‌های M و N و P بترتیب براضلاع AB و BC و CA از مثلث ABC (ولی نه برامتدادشان) واقع باشند، و اگر

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$$

آنگاه خطوط AN و BP و CM متقارب‌اند.

مسألهٔ ۲۷ (ب) از فصل ۱، بخش ۱ (⟵ جلددوم این‌کتاب) و مسألهٔ ۳۴ (ب) در بخش ۲ی همین کتاب، برهانی از یك صورت کاملتر قضیهٔ سوا به‌ما می‌دهند؛ و نیز بخش ۲ متضمن کاربردهای زیاد این‌قضیهٔ مهم است.

تاکنون همواره فرض کرده‌ایم که دو صفحهٔ π و π' متمایزند. به‌همین دلیل است که در این بخش از نگاشتهای یك صفحهٔ π بریك صفحهٔ π' صحبت کردیم، نه‌از تبدیلهای یك‌صفحه برروی خودش (که مثالهایی از طولپایی‌ها و تشابهات هستند که در جلدهای اول و دوم مورد مطالعه قرار گرفته‌اند).

حال تبدیلی ازصفحهٔ π برخودش را درنظر می گیریم که ازحرکت π درفضا و نگاشت آن براثر تصویری موازی بر وضعیت اول خود نتیجه می‌شود. این تبدیل را یك نگاشت موازی صفحه برخودش می‌نامیم. هر طولپایی حالت خاصی از این تبدیل صفحه است. یك تصویر موازی صفحه برخودش یك طولپایی است به‌شرطی که وضع جدید صفحه در فضا با وضع اولیه‌اش موازی باشد.

ویژگی (الف) از تصویر موازی ایجاب می‌کند کــه بر اثر تصویرموازی یك صفحه برخودش خط به‌خط بدل شود. یك تبدیل یك‌به‌یك از صفحه برخودش که خط را بــه‌خط بدل کند یك تبدیل آفین نامیده می‌شود. طولپایی‌ها و تشابهات یك‌صفحه ساده‌تــرین مثال برای تبدیل آفین هستند. تصویر موازی یك صفحه برخودش تبدیل آفینی کلیتر از طولپایی‌ها وتشابهات است. زیرا نیاز به‌حفظ نسبت طولهای پاره‌خطها ندارد و ازاین‌رو، درحالت کلی ریخت یك‌شکل را دگرگون می‌کند.

از اینجا نتیجه می‌شود که هر تبدیل آفین از یك‌صفحه اساساً یك‌تصویرموازی از آن صفحه است برخودش. زیراکه قضیهٔ زیر صادق است:

قضیهٔ ۲. هرتبدیل آفین ازیك صفحه‌می‌تواند براثر یك تصویرموازی ازصفحه‌برخودش و متعاقب آن یك‌تشابه تحقق یابد.

این قضیه نشان می‌دهد که مطالعهٔ ویژگیهای تبدیل آفین با مطالعهٔ ویژگیهای مشترك بین تصویرموازی یك‌صفحه برخودش و تشابهات مترادف است*؛ بویژه این امر ایجاب می‌کند کــه تبدیلهای آفین یك‌صفحه ویژگیهای (ب) و (ج) و (د) را داشته باشند (← ص ۱۷ـ۱۸)، زیرا اینها ویژگیهایی‌هستندکه بین تصاویر موازی یك صفحه برخودش و تشابهات مشترك‌اند. و نیز قضیهٔ ۲ ماهیت حاصلضرب دو یا چندتصویرموازی صفحه برخودش را روشن می‌سازد؛ یعنی نشان می‌دهد که یك‌چنین حاصلضربی‌مجدداً یك تصویرموازی صفحه برخودش و احتمالا متعاقب آن یك‌تشابه است (زیرا چنین حاصلضربی، روشن است که یك تبدیل آفین ازصفحه است).

قضیهٔ ۲ نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱ و قضیهٔ زیر است:

قضیهٔ ۳. یك تبدیل آفین منحصر به‌فرد از صفحه وجــود دارد کــه ۳ نقطهٔ ناهمخط A و B و C را به‌سه‌نقطهٔ ناهمخط A' و B' و C' بدل می‌کند.

اگر قضیهٔ ۳ را اثبات شده فرض کنیم، قضیهٔ ۲ بلافاصله ازآن نتیجه مــی‌شود. زیرا، چون فقط یك تبدیل‌آفین، وجودداردکه مثلث‌مفروض ABC را به‌مثلث مفروض $A'B'C'$ بدل می‌کند، این تبدیل باید با تصویرموازی صفحه برخودش و تشابه بعدی که مثلث ABC را به مثلث $A'B'C'$ بدل می‌کند منطبق باشد (این نکته کــه یك تصویر

---

* قضیهٔ ۲ ایجاب می‌کند که یك تبدیل آفین بتواند به عنوان یك تصویرموازی از یك صفحه برخودش و به‌دنبال آن یك‌تشابه تعریف شود (←جلد اول).

موازی و یک‌تشابه وجود دارد از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود). می‌ماند اثبات قضیهٔ ۳.*

روش اثبات به‌قرار زیر است. فرض کنید که در یک تبدیل آفین، سه‌نقطهٔ A و B و C به‌سه‌نقطهٔ مفروض A' و B' و C' بدل شده‌است. باید نشان‌دهیم که این تبدیل آفین، M' نگارهٔ یک‌نقطهٔ دلخواه M ازصفحه را مشخص‌می‌کند. ابتدا باید یک‌عده نقطه‌هایی را که نگاره‌هاشان‌را می‌توانیم پیدا کنیم، به‌دست آوریم؛سپس از این‌گونه نقطه‌ها بیشتر و بیشتر و بازهم بیشتر، پیدا خواهیم‌کرد. بدین‌طریق در صفحه یک‌مجموعهٔ چگال از نقطه‌ها به‌دست خواهیم آورد که نگاره‌های آنها را بر اثر تبدیل آفین مورد نظر می‌توانیم بسازیم. از این‌رو به‌ازای هر نقطهٔ M از صفحه نقطه‌هایی از این مجموعه به‌قدر دلخواه نزدیک به‌M وجود خواهند داشت. وانگهی می‌توانیم هر نقطهٔ M را در داخل یک چندضلعی به‌دلخواه کوچک بگنجانیم که رأسهایش‌متعلق به‌مجموعه نقطه‌هایی‌باشند که نگاره‌هاشان معین شده‌اند. درنتیجه هرچندضلعی از این‌گونه به‌چندضلعی معینی بدل، و از آنجا نتیجه می‌شود که M'، نگارهٔ نقطهٔ M، هم‌معین می‌شود.** و این همان‌چیزی است که

---

* دقیقاً بگوییم، قضیه‌های ۱ و ۳ تنها ایجاب می‌کنند که هر تبدیل آفین از صفحه که می‌تواند دست‌کم یک‌سه‌تایی ازنقطه‌های ناهمخط A و B و C را به‌یک‌سه‌تایی ناهمخط A' و B' و C' بدل کند می‌تواند به‌عنوان حاصلضرب یک تصویرموازی صفحه برخودش و یک‌تشابه به تحقق یابد. ولی به‌آسانی دیده می‌شود که نمی‌توانیم یک تبدیل آفین داشته باشیم که هرسه‌تایی از نقطه‌ها را به‌یک سه‌تایی از نقطه‌های همخط بدل کند. زیرا اگر هرسه‌تایی از نقطه‌های A و B و M، با A و Bی ثابت وM دلخواه، قرار باشد به‌یک سه‌تایی همخط A' و B' و M' بدل شود، آنگاه همهٔ نقطه‌های‌صفحه‌می‌بایستی به‌نقطه‌های خط $A'B'$ بدل شوند، که مخالف تعریف تبدیل‌آفین از یک‌صفحه است (← ص ۲۶).

** درعین حالی که این ملاحظات قضیهٔ ۳ را موجه می‌سازند، ولی برهانی دقیق برای آن نیستند. صرف این واقعیت که یک‌مجموعهٔ دلخواه چگال از نقطه‌هایی داریم که نگاره‌هاشان برما معلوم‌اند، ایجاب نمی‌کند که هر نقطه دراین مجموعه گنجیده باشد (مثلا هیچ مجموعه‌ای ازنقطه‌های گویا برمحور xها، ولی چگال،شامل نقطه‌ای به‌مختص $x=\sqrt{2}$نخواهد شد). از این‌رو ممکن است نقطه‌ای مانند M وجود داشته باشد که نگاره‌اش برما معلوم‌نباشد، ولو اینکه نگاره‌های نقاط به‌قدر دلخواه نزدیک به‌M برما معلوم باشند. برای اینکه برهان فوق را به‌برهانی‌دقیق بدل کنیم باید ملاحظات دیگری به‌کار بریم‌که دراینجا وارد آنها نمی‌شویم. دراین رابطه، مثلا به‌کتاب زیر مراجعه‌کنید

H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, J. Wiley and Sons, Inc., New York 1961.

به‌اثباتش پرداخته بودیم.

اکنون نشان خواهیم داد که چگونه باید مجموعه نقاط مذکور در بالا را بسازیم. از ویژگی زیر از تبدیل آفین استفاده می‌کنیم: **یك تبدیل آفین خطهای موازی را به‌خطهای موازی بدل می‌کند.** اگر بعکس، نگاره‌های دوخط موازی l و m دوخط متقاطع باشند، آنگاه پیشنگارهٔ* نقطهٔ‌تلاقی آنها می‌باید به‌هردوخط l و m متعلق باشد که غیرممکن است.**

گیریم l_1 معرف خط AB باشد و l_2 معرف خط AC. تبدیل ما l_1 را به l'_1 بدل می‌کند که‌از نقطه‌های A' و B' می‌گذرد و l_2 را به l'_2، که‌از نقطه‌های A' و C' می‌گذرد. فرض‌می‌کنیم خط CD بر C بگذرد و با l_1 موازی باشد و خط BD بر B بگذرد و با l_2 موازی‌باشد (شکل ۱۵ الف). چون دریك تبدیل آفین خطهای موازی به‌خطهای موازی بدل می‌شوند، CD به‌خطی بدل می‌شود کــه از C' می‌گذرد و با l'_1 مــوازی است، BD به‌خطی بدل می‌شود که از B' می‌گذرد و با l'_2 موازی است، و D به نقطهٔ تقاطع این دو خط، D' بدل می‌شود. لذا متوازی‌الاضلاع $ABCD$ درشکل ۱۵ الف، به‌متوازی‌الاضلاع $A'B'C'D'$ بدل می‌شود، و نقطهٔ O محل تلاقی قطرهای AD و BC از متوازی‌الاضلاع $ABCD$، به‌نقطهٔ O' محل‌تلاقی‌قطرهای $A'D'$ و $B'C'$ از $A'B'C'D'$. حال‌میانخطهای چهار ضلعی $ABCD$ ــ خطهایی که از O به‌موازات l_1 و l_2 رسم مــی‌شوند ــ را در نظر می‌گیریم. نگاره‌های آنها خطهایی هستند‌که از O' به‌موازات l'_1 و l'_2 می‌گذرند، یعنی میانخطهای $A'B'C'D'$ هستند. به‌عبارت دیگر نقطه‌های تلاقی میانخطهای $ABCD$ بــا l_1 و l_2 به‌نقطه‌های وسط اضلاع $A'B'C'D'$ بدل می‌شوند.

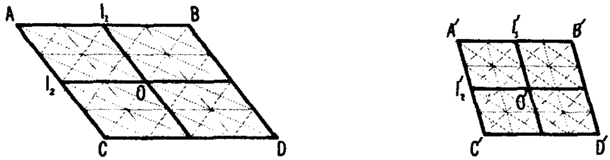
بعد باهریك ازچهار متوازی‌الاضلاعی‌که از میانخطهای متوازی‌الاضلاع $ABCD$ پدید می‌آید همان‌گونه عمل می‌کنیم‌که با $ABCD$ عمل کردیم. با ادامهٔ این‌عمل (شکل ۱۵ الف) یك شبکهٔ متوازی‌الاضلاع در داخل $ABCD$ پدیدمی‌آید‌که تبدیل آفین مورد بحث‌آن را به‌یك شبکهٔ متوازی‌الاضلاع در داخل $A'B'C'D'$ بدل می‌کند، و نقاط شبکهٔ $ABCD$ را به‌نقاط شبکهٔ‌متناظرش در $A'B'C'D'$ بدل‌می‌کند. با تکرار این‌عمل، به‌قدر کافی زیاد، می‌توانیم اضلاع متوازی‌الاضلاع شبکهٔ خود را به‌دلخواه کوچك، و لذا شبکه را به‌دلخواه چگال کنیم.

حال ازنقاط A و D خطهایی به‌موازات BC و از نقاط B و C خطهایی به‌موازات

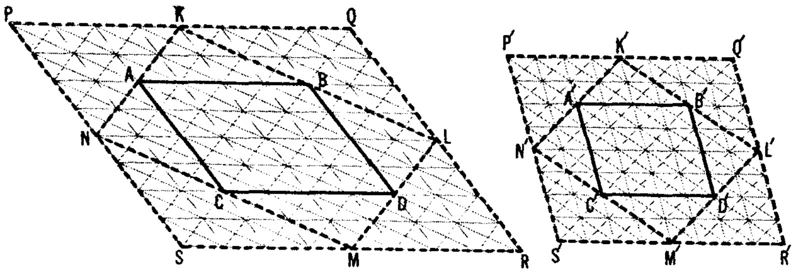
---

* اگر نقطهٔ A' نگارهٔ نقطهٔ A باشد، A را پیشنگارهٔ A' گویند.ــم.

** باید توجه داشت کــه دریك تبدیل آفین خطهای متقاطع به‌خطهای متقاطع بــدل می‌شوند.



شکل ۱۵ الف



شکل ۱۵ ب

AD رسم می‌کنیم. نگاره‌های آنها براثر تبدیل آفین موردبحث خطهایی هستند که از A' و D' بـه‌موازات $B'C'$ و از نقطه‌هـای B' و C' بـه‌موازات $A'D'$ رسم می‌شوند. بدین‌ترتیب یك متوازی‌الاضلاع $KLMN$ به‌دست می‌آوریم که مساحتش دو برابر مساحت $ABCD$ است، و نگارهٔ آن، متوازی‌الاضلاع‌معلوم $K'L'M'N'$ است. با تکرار این‌شیوهٔ عمل، یك‌متوازی‌الاضلاع $PQRS$ به‌دست‌می‌آوریم‌که مساحتش‌چهار برابر مساحت $ABCD$ است و اضلاعش با اضلاع $ABCD$ موازی‌اند (شکل ۱۵ ب)، و نگاره‌اش متوازی‌الاضلاع $P'Q'R'S'$ است، و غیره.

از ترکیب‌این دوشیوهٔ عمل خود (رسم متوازی‌الاضلاعهایی بزرگتر و بزرگتر، و متوازی‌الاضلاعهایی کوچکتر و کوچکتر، که‌نگاره‌ها در داخل آنهامعلوم‌اند) می‌توانیم براثر تبدیل‌آفین‌خود یك‌مجموعهٔ‌چگال ازنقاط‌صفحه با نگاره‌های معلوم به‌دست‌آوریم، همان‌گونه‌که ازآغاز شروع کرده بودیم.

۰۲ تصویر مرکزی یك‌صفحه بریك صفحه
تبدیل تصویری یك صفحه

فرض می‌کنیم π و π' دو صفحه درفضا باشند. یك نقطهٔ O که بر هیچ یك از این‌دو نباشد انتخاب و از این نقطه صفحهٔ π را برصفحهٔ π' تصویر می‌کنیم، یعنی به‌هر نقطهٔ

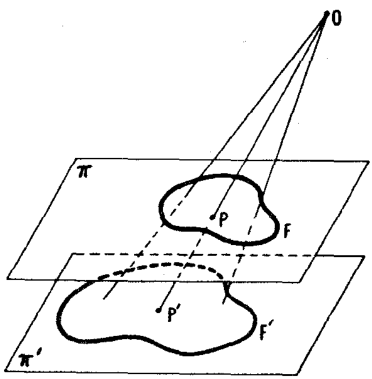
P در π نقطهٔ P' واقع بر π' را چنان مربوط می‌کنیم که P' بر OP واقع باشد (شکل ۱۶، الف و ب).

نگاشتی کــه چنین تعریف کردیم تصویر مرکزی (π بر π') به‌مرکز O نامیده می‌شود. براثر تصویر مرکزی، نگارهٔ یک‌شکل F از π، شکل F' از π' است(مثلاً، سایه‌ای را مجسم کنید که درشب از چارچوب پنجرهٔ یک‌اطاق بسیار روشن برخیابان افتاده است؛ شکل ۱۷).

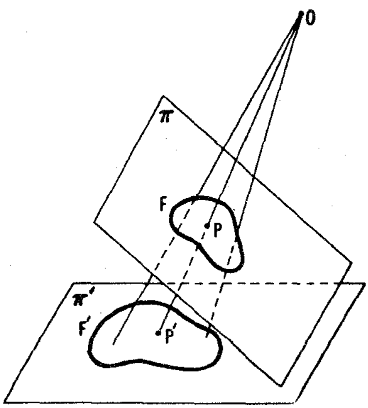
اگر صفحات π و π' موازی باشند، یک‌تصویر مرکزی از π بر π' هرشکل F از π را به‌شکل مشابهش F' در π' بدل می‌کند (دراین‌حالت یک تجانس به‌مرکز O پدید می‌آورد.* ← شکل ۱۶ الف.) در نتیجه قبل از همه سروکار ما با حالتی است که π و π' موازی نباشند (شکل ۱۶ ب).

ملاحظه می‌کنیم که درحالت اخیر در π خطی وجود داردکه نقطه‌هــای آن نگاره‌ای در π' ندارند، وآن‌خط x فصل‌مشترک π باصفحه‌ای‌است‌که بر O می‌گذرد و با π' موازی است (شکل ۱۸ الف). و نیز در π' خطی وجود داردکه نقطه‌های آن پیشنگاشتی درصفحهٔ π ندارند، وآن خط y' فصل مشترک π' با صفحه‌ای است که بر O می‌گذرد و با π موازی است (شکل ۱۸ ب).

بنابراین در تصویر مرکزی یک صفحهٔ π بر یک صفحهٔ π'، دو خط استثنایی (یکی در π و دیگری در π') وجود دارند کــه آنها را خطهای خاص صفحات

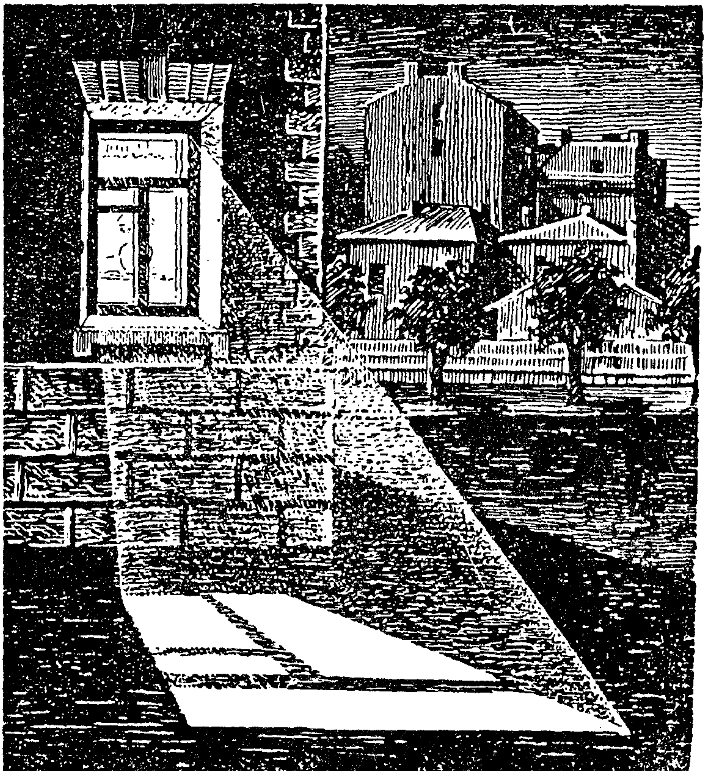


شکل ۱۶ الف



شکل ۱۶ ب

* به‌مبحث تجانس ازجلد دوم این کتاب مراجعه کنید.



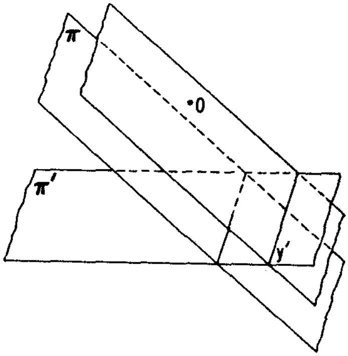
شکل ۱۷

π و π' می‌نامیم.*

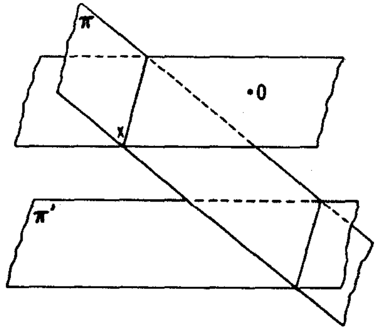
در تصویر مرکزی، خیلی بیشتر از تصویر موازی، ریخت شکلها تغییر می‌کند. نگارهٔ یک پاره‌خط بر اثر تصویر مرکزی ممکن است یک پاره‌خط، یا دو نیمخط (شکل ۱۹)، و نگاره‌های یک مثلث ممکن است یکی از شکلها در شکل ۲۰ الف ـ ه باشد.

اغلب ممکن است یک نمودار پیچیده را به‌وسیلهٔ یک تصویر مرکزی مناسب ساده کرد و بدین ترتیب حل بعضی مسائل مربوط به آن نمودار را آسانتر نمود. در

* روشن است که x با x' موازی و هردو با فصل مشترک صفحات π و π' موازی‌اند.



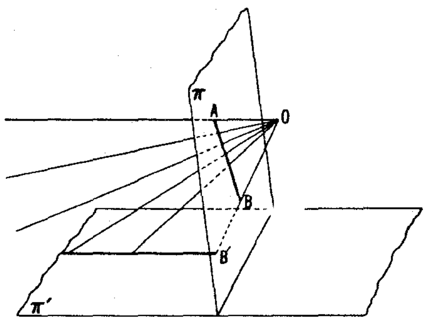
شکل ۱۸ ب



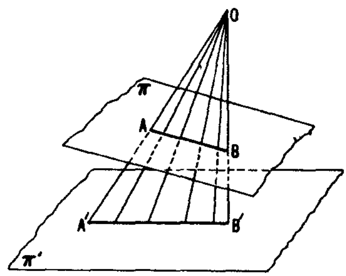
شکل ۱۸ الف

این‌گونه موارد از ویژگیهای تصویر مرکزی به‌شرح زیر استفاده خواهیم‌کرد.

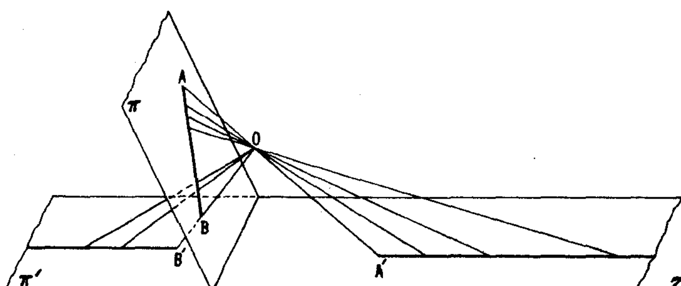
الف) در تصویر مرکزی خطهای صفحهٔ π به‌خطهای صفحهٔ π' بدل می‌شوند (به‌استثنای خط خاص x در صفحهٔ π که نقطه‌هایش، چنانکه قبلا اشاره شد، به‌هیچ یك از نقطه‌های π' بدل نمی‌شوند).



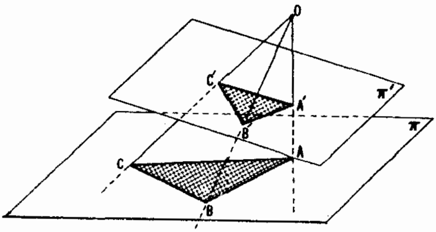
شکل ۱۹ ب



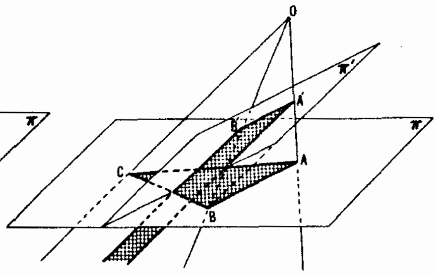
شکل ۱۹ الف



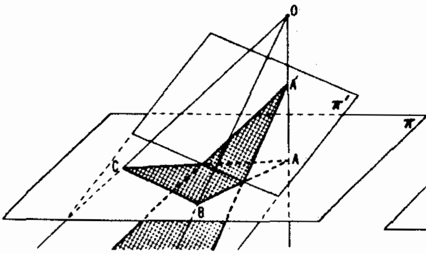
شکل ۱۹ ج



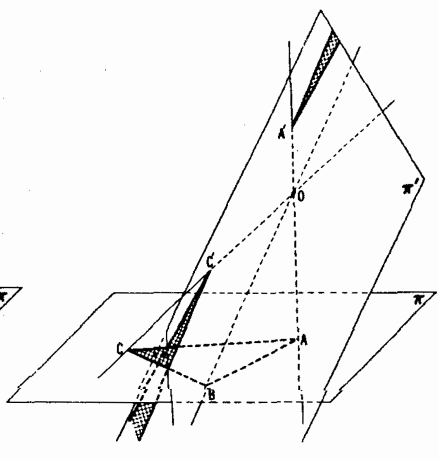
شکل ۲۰ الف



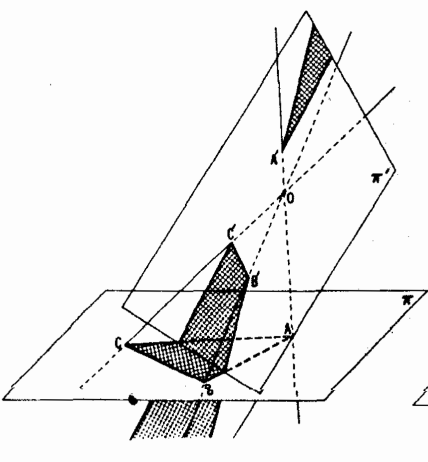
شکل ۲۰ ب



شکل ۲۰ ج

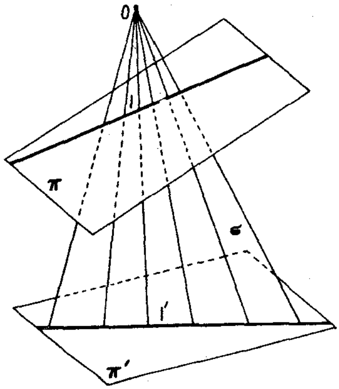


شکل ۲۰ د



شکل ۲۰ ه

زیرا، خطهای واصل بین نقطهٔ O و نقطه‌هـای خط l ازصفحهٔ π، یك صفحهٔ σ پدیدمی‌آورند. تصویر به‌مرکز O خط l را به‌خط l'، فصل‌مشترك σ و π'، بدل‌می‌کند (شکل ۲۱).



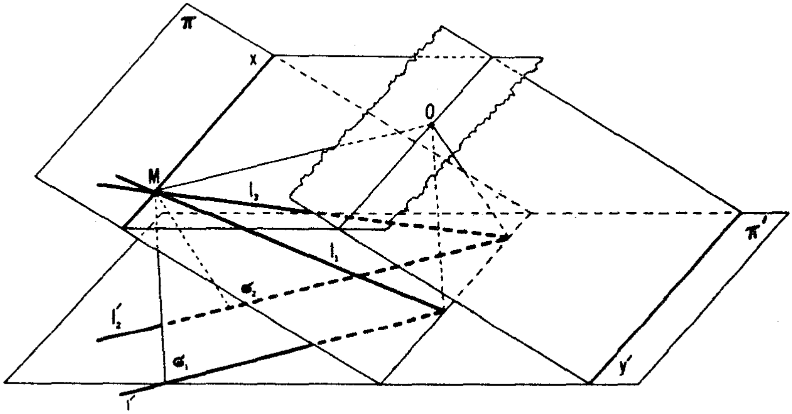
شکل ۲۱

بعکس، هرخط l' ازصفحهٔ π' (به‌استثنای خط خـاص y') نگارهٔ یك خط l ازصفحهٔ π است.

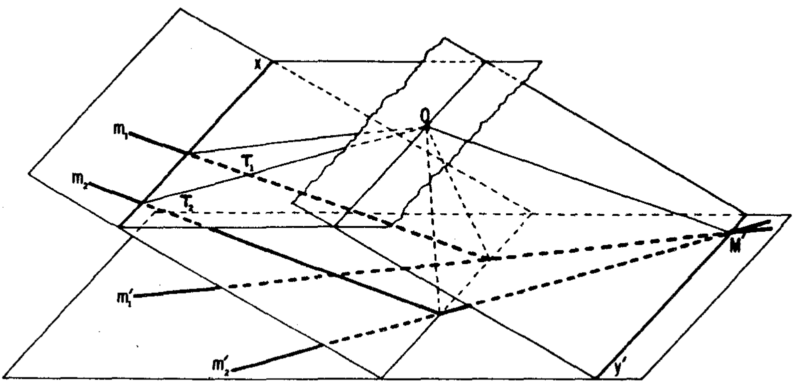
ب) گیریم کـه خطهای l_1 و l_2 از صفحهٔ π یکـدیگر را دریك نقطهٔ M روی خط خاص x ببرند. دراین‌حالت نگارهٔ آنها براثر یك تصویر مرکزی، دو خط موازی l'_1 و l'_2 از π' خواهد شد.

زیرا در این‌حال صفحات σ_1 و σ_2 که از نقطهٔ O و خطهای l_1 و l_2 تشکیل می‌شوند یکدیگر را در OM که موازی π' است می‌برند. از آنجا نتیجه می‌شود که l'_1 و l'_2، نگاره‌های l_1 و l_2، خطهایی‌موازی درصفحهٔ π' هستند (شکل ۲۲ الف).

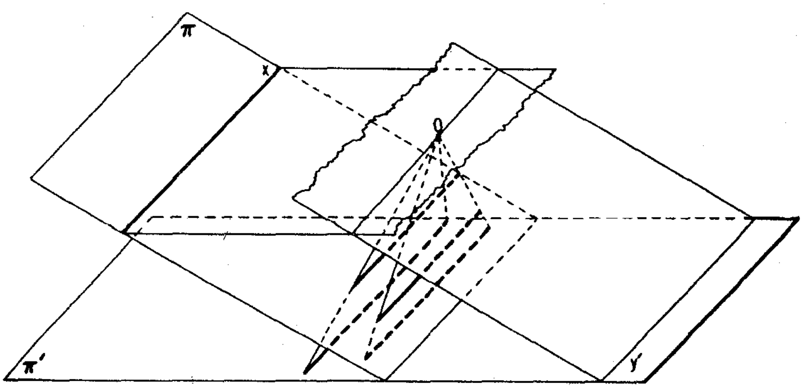
در تصویر مرکزی،دوخط موازی m_1 و m_2 از π به‌دوخط متقاطـع m'_1 و m'_2 از π' بدل می‌شوند که نقطهٔ تلاقی آنها M'، برخط خاص y' واقـع است. این نکته از این واقعیت نتیجه می‌شود که صفحات τ_1 و τ_2 که بترتیب از O وخطهای m_1 و m_2 تشکیل می‌شوند یکدیگر را درخط OM' قطع می‌کنند که با π موازی است و π' را دریك نقطهٔ M' واقـع برخط خاص y' تلاقی می‌کند (شکل ۲۲ب). استثنا براین قاعده خطهای موازی با x هستند؛این‌خطها برخطهای موازی با y' نگاشته می‌شوند (شکل ۲۳).



شکل ۲۲ الف



شکل ۲۲ ب



شکل ۲۳

بـا استفاده از ویژگیهای الف و ب از تصویر مـرکزی، می‌توانیم یك عده قضیه‌های جالب را اثبات کنیم. (ملاحظه می‌کنیم که احکام برخی از این قضیه‌ها متضمن برخی اشتباهات است که بعداً به آنها پرداخته خواهد شد (← ص ۴۹ و بعد).)

۱۷. الف) در یك صفحه، دو خط l_1 و l_2 و یك نقطهٔ P ناواقع بر هیچ یك از آنها داده شده‌اند. از P دو خط می‌گذرانیم که یکی از آنها l_1 و l_2 را در نقطه‌های A و B ببرد و دیگری آنها را در نقاط C و D (شکل ۲۴ الف). نشان دهید که

(i) مکان هندسی نقطهٔ تلاقی AD و BC (به‌ازای کلیهٔ جفت خطهایی که از P می‌گذرند) یك خط p است.

(ii) به‌ازای l_1 ناموازی بـا l_2، خط p از نقطهٔ Q، محل تلاقی l_1 و l_2، می‌گذرد، و

(iii) p تغییر نمی‌کند هرگاه به‌جای P یك نقطهٔ P_1 از خط PQ را قرار دهیم.

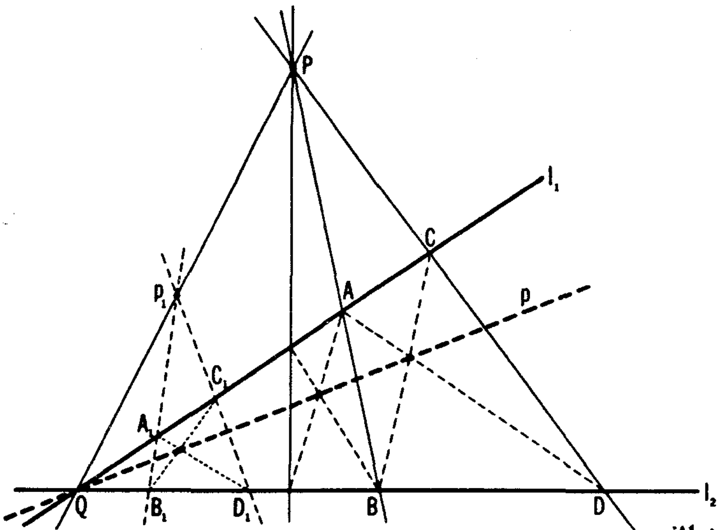
ب) خط q و دو نقطهٔ A و B ناواقع بر q در یك صفحه داده شده‌اند. فرض می‌کنیم U و V دو نقطه بر q، M نقطهٔ تلاقی خطهای UA و VB، و N نقطهٔ تلاقی خطهای UB و VA باشد (شکل ۲۴ ب). به‌ازای هر انتخاب نقاط U و V بر q، یك خط MN پدید می‌آید. نشان دهید که همهٔ این خطها در یك نقطهٔ Q واقع بر خط AB متقاطع‌اند؛ همچنین نشان دهید که هرگاه به‌جای q یك خط q_1 قرار دهیم که بر P، نقطهٔ تلاقی q و AB، بگذرد نقطهٔ Q عوض نمی‌شود.

خط p درمسألهٔ ۱۷ (الف) قطبی نقطهٔ P نسبت به‌دوخط l_1 و l_2 نامیده می‌شود (این مفهوم را با مفهوم قطبی یك نقطه نسبت به یك دایره در بخش ۴ این کتاب مقایسه کنید). نقطهٔ Q درمسألهٔ ۱۷ (ب) قطب خط q نسبت به‌دو نقطهٔ A و B نام دارد.

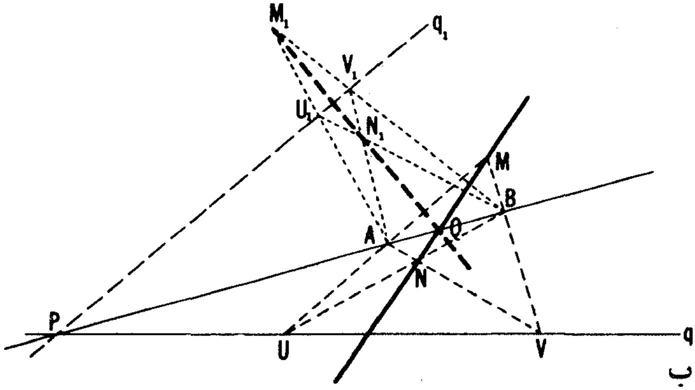
۱۸. الف) M نقطه‌ای در یك صفحه، و l_1 و l_2 دو خط در آن صفحه‌اند که در یك نقطهٔ غیرقابل دسترسی یکدیگر را می‌برند (← مسألهٔ ۱۹، بخش ۱، فصل اول از جلد دوم این کتاب). با استفاده از ستارهٔ تنها، از نقطهٔ M خطی رسم کنید که از نقطهٔ تلاقی l_1 و l_2 بگذرد (شکل ۲۵ الف).

ب) یك خط غیرقابل دسترس l در یك صفحه به‌وسیلهٔ دوجفت خط p_1 و p_2، و q_1 و q_2 که در نقطه‌هـای P و Q واقع بر l یکدیگر را می‌برند مشخص شده است (شکل ۲۵ ب). فرض مـی‌کنیم M و m بترتیب خط و نقطه‌ای مفروض باشند. بـا استفاده از ستارهٔ تنها، از M خطی رسم کنید که از نقطهٔ تلاقی m و l بگذرد.

ج) با استفاده از ستارهٔ تنها خطی مانند l رسم کنید کـه از دونقطهٔ غیرقابل



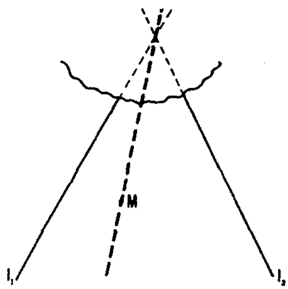
شکل ۲۴ الف



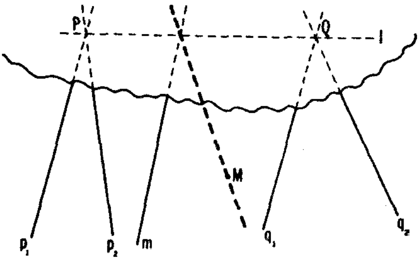
شکل ۲۴ ب

دسترس P و Q که به‌وسیلهٔ دوجفت خط p_1 و p_2، q_1 و q_2 مشخص شده‌اند بگذرد (شکل ۲۵ ج).

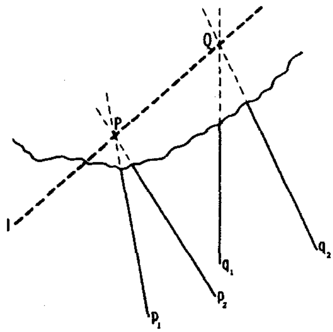
د) هریک از دوخط غیرقابل‌دسترس l_1 و l_2 در یک‌صفحه (شکل ۲۵ د) به‌وسیلهٔ دوجفت خط، به‌گونهٔ خط l در مسألهٔ ۱۸ (ب) مذکور در بالا، مشخص شده است. با استفاده از ستارهٔ تنها، از یک نقطهٔ مفروض M خطی رسم کنید که از نقطهٔ L، محل



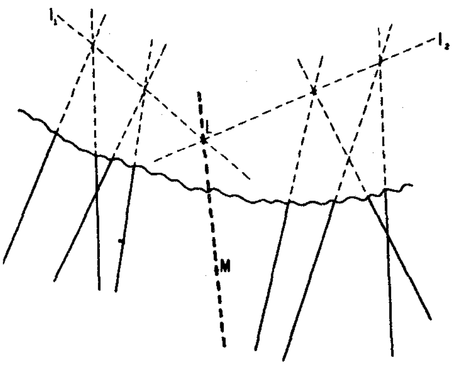
شکل ۲۵ الف



شکل ۲۵ ب



شکل ۲۵ ج



شکل ۲۵ د

تلاقی l_1 و l_2، بگذرد.

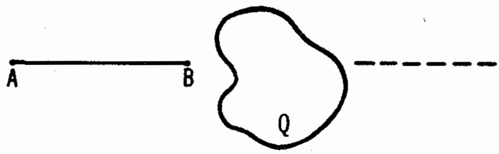
در جلد دوم این کتاب که اول بار با رسم عناصری که در دسترس نبودند («ترسیمات در یك جزء محدود صفحه») مواجه شدیم، اهمیت آنها را در کار زمینسنجی ذکر کردیم (← پانویس بعد از مسألهٔ ۱۸ از جلد دوم این کتاب). در این رابطه باید اشاره کنیم که چون در کار زمینسنجی استفاده از پرگار مجاز نیست، ترسیم به‌وسیلهٔ ستارهٔ تنها ارزش خاصی دارد.* مسأله‌های ۱۸ (الف)-(د) دقیقاً از

---

* دقیقاً بگوییم، برگردان هندسی ترسیمهای زمینسنجی، رسمهای باستاره و نقاله است؛ زیرا ابزارهای زمینسنجی به‌ما امکان می‌دهند خطهایی رسم کنیم وزاویهٔ مفروضی را در یك نقطهٔ مفروض از خط مفروضی بسازیم. ترسیمهای باستارهٔ تنها ساده‌ترین ترسیمهای زمینسنجی عملی است.

این نوع هستند.

۱۹. پاره‌خط AB ویك ناحیهٔ Q همصفحه با آن را در نظر می‌گیریم (شکل ۲۶). با استفاده از ستارهٔ تنها چگونه می‌توانیم پاره‌خط AB را به سمت راست ناحیهٔ Q امتداد دهیم بی‌آنکه خطی در درون Q رسم کنیم؟ (تعبیر این مسأله چنین است: خطی را بر روی زمین بـه سوی دیگر جنگل، مثلا به سمتی کـه از اینجا امتداد مفروض نمی‌تواند دیده شود، امتداد دهید.)

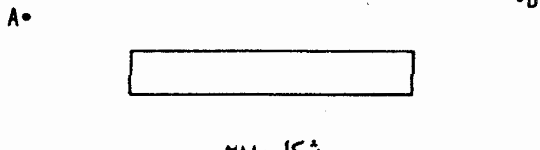


شکل ۲۶

۲۰. دونقطهٔ A و B را در یك صفحه در نظر می‌گیریم. چگونه می‌توانیم آنها را با یك خط به‌هم وصل کنیم درصورتی که فقط یك ستاره کوتاهتر از فاصلهٔ AB در دست داشته باشیم (شکل ۲۷)؟

در حل مسائل ترسیمی معمولا فرض می‌کنند که هر دو نقطه را می‌توان با یك خط به‌هم وصل کرد. یعنی کسی که مسأله را حل می‌کند ستاره‌ای با طول بینهایت در اختیار دارد. البته خطکشهای واقعی کاملا کوتاه‌اند. اهمیت حل مسألهٔ ۲۰ در این است که نشان می‌دهد همهٔ ترسیمهایی که می‌توانند با یك ستارهٔ نامتناهی انجام‌گیرند می‌توانند با یك ستاره با طول متناهی (در واقع با یك ستارهٔ به‌دلخواه کوتاه) نیز صورت پذیرند.

همچنین اتفاقاً ملاحظه می‌کنیم که فرجهٔ محدود پرگار موجب تقلیل ردهٔ ترسیمهای ممکن نمی‌شود؛ یعنی در بخش ۵ نشان خواهیم داد که هر ترسیمی را که بتوان باستاره و



شکل ۲۷

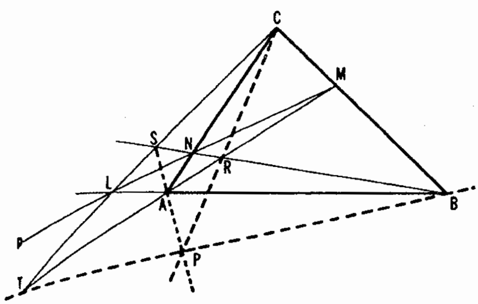
پرگار رسم کرد، باستاره و پرگار بافرجهٔ ثابت نیز می‌توان انجام داد (و بعلاوه پرگار می‌تواند حداکثر یك‌بار به‌کار برده شود).

۲۱. الف) خط p اضلاع AB و BC و CA ازمثلث ABC (یا امتدادآنها) را درنقطه‌های L و M و N بریده است. مانند شکل ۲۸ (الف) نقطهٔ برخورد AM و BN را به R، نقطهٔ برخورد BN و CL را به S ونقطهٔ برخورد AM و CL را به T نشان می‌دهیم. نشان دهید که خطهای AS و BT و CR متقارب‌اند.

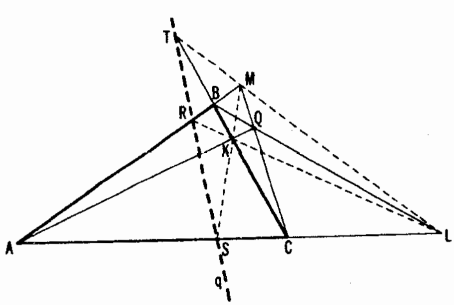
ب) مثلث ABC ویك نقطهٔ Q مفروض‌اند. مانند شکل ۲۸ (ب)، نقطه‌های برخورد خطهای QA و QB و QC را با اضلاع‌مثلث ABC (یا امتداد آنها) به K و L و M نشان می‌دهیم ونقطه‌های تلاقی جفتهای خطهای KL و AB، KM و AC، LM و BC را به R و S و T. نشان دهید که نقطه‌های R و S و T همخط‌اند.

نقطهٔ P، محل برخورد AS و BT و CR درمسألهٔ ۲۱(الف)، اغلب قطب‌سه‌خطی خط p نسبت به‌مثلث ABC، وخط q، درمسألهٔ ۲۱ (ب)، که R و S و T بر آن قرار دارند، قطبی سه‌خطی نقطهٔ Q نسبت به‌مثلث ABC نامیده می‌شوند.

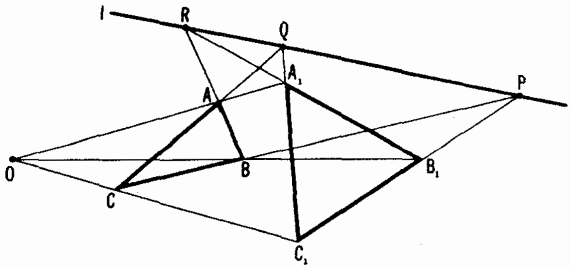
۲۲. قضیهٔ دزارگ. ثابت کنید که هرگاه دومثلث ABC و $A_1B_1C_1$ درصفحه



شکل ۲۸ الف



شکل ۲۸ ب



شکل ۲۹

چنان باشند که خطهای AA_1 و BB_1 و CC_1 متقارب باشند، آنگاه نقطه‌های برخورد خطهای AB و A_1B_1، AC و A_1C_1، BC و B_1C_1، همخط‌اند (شکل ۲۹)· بعکس، اگـر نقطه‌های برخوردخطهای AB و A_1B_1، AC و A_1C_1، BC و B_1C_1، همخط باشند، آنگاه خطهای AA_1 و BB_1 و CC_1 متقارب‌اند.

مثلثهایی که در مفروضات‌قضیهٔ دزارگ صدق می‌کنند مثلثهای منظری نامیده می‌شوند. نقطهٔ تقارب خطهای واصل به‌رأسهای متناظر آنها، O، مرکز تصویر منظری و خطی که شامل نقطه‌های برخورد جفتهای اضلاع متناظر آنها باشد محور تصویر منظری، نام دارد.

ملاحظه می‌کنیم که قضیهٔ دزارگ مبین یك‌ویژگی مشترك خطها و نقطه‌هـای یك صفحه است که الزاماً به‌یك جفت مثلث بستگی ندارند. تکیه‌ای کـه بر برخی عناصر شکل ۲۹ شده است، به‌خاطرسپردن قضیه را آسانتر می‌سازد ولی تقارن آن را از نظر می‌پوشاند، زیرا این واقعیت راکه، همهٔ خطها و نقطه‌های قضیهٔ دزارگ همسنگ هستند، از نظر پنهان می‌سازد. از این‌رو، مثلا در شکل ۲۹، خط OCC_1 ممکن است به‌عنوان محور تصویر منظری (برای مثلثهـای PBB_1 و QAA_1) درنظر گرفته شود، و نقطهٔ B به‌عنوان مرکز تصویر منظری (برای مثلثهای PRB_1 و CAO). این گونه ملاحظات را می‌توان برای مسأله‌های ۲۱ (الف) و (ب)، ۲۵، ۲۶، ۲۷، و ۲۸ نیز ذکر کرد.*

قضیه‌هـای (الف) و (ب) از مسألهٔ ۲۱، موارد خاصی از قضیهٔ دزارگ هستند؛

---

* دراین رابطه به‌فصل‌سوم کتاب بسیار جالب زیر رجوع کنید:

Geometry and the Imagination, D.Hilbert and S. Cohn - Vossen, Chelsea New York, 1952.

درشکل۲۸ (الف)، مثلثهای STR و ABC نسبت به‌محور p، ودرشکل ۲۸ (ب)مثلثهای KML و ABC نسبت به‌مرکز Q، مثلثهای منظری هستند.

۲۳. چهارضلعی $EFGH$ درچهارضلعی $ABCD$ محاط شده‌است (E بر AB و F بر BC، وغیره). نشان دهید که اگر نقطهٔ برخورد اضلاع EF و HG برقطر ACی $ABCD$ باشد، نقطهٔ برخورد EH و FG برقطر BDی آن است.

۲۴. الف) مثلث ABC و سه نقطهٔ همخط P و Q و R داده شده‌اند. در این مثلث یك مثلث XYZ چنان محاط کنید که اضلاعش بترتیب از نقطه‌های P و Q و R بگذرند.*

ب) دریك n ضلعی $A_1A_2 \ldots A_n$، n ضلعی دیگری محاط کنید که اضلاعش از n نقطهٔ همخط مفروض بگذرند.**

ج) سه‌خط متقارب l_1 و l_2 و l_3 وسه نقطهٔ A و B و C در یك صفحه داده شده‌اند. مثلثی مانند XYZ چنان رسم کنید که اضلاعش از نقطه‌های A و B و C بگذرند و رأسهایش برخطهای l_1 و l_2 و l_3 واقع باشند.

توجه کنید که مسألهٔ ۲۴ (الف) حالت‌خاص مسألهٔ ۲۴ (ب) است، مسألهٔ ۲۴(ج) حالت خاص مسألهٔ ۶۱؛ و هرچهارمسأله حالتهای خاص مسألهٔ ۹۵ هستند.

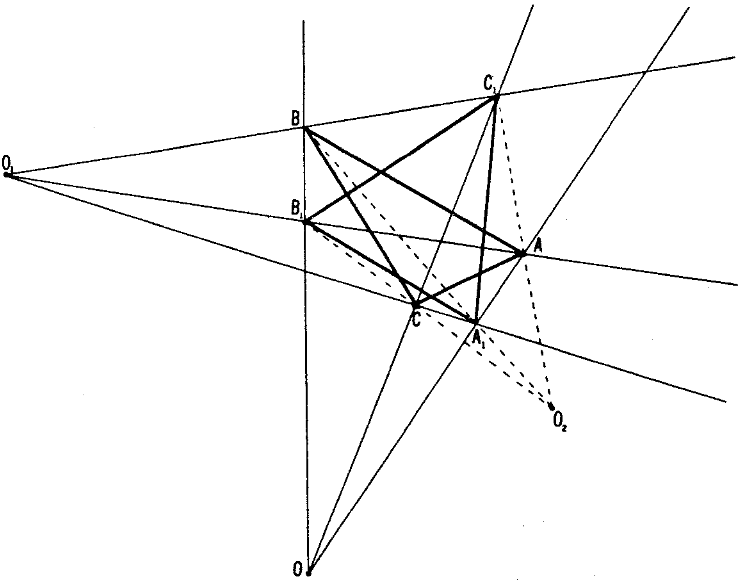
۲۵. قضیه دربارهٔ مثلثهای منظری دوگانه. مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ چنان داده شده‌اند که خطهای AA_1 و BB_1 و CC_1 یکدیگر را در یك نقطهٔ O می‌برند و خطهای AB_1 و BC_1 و CA_1 دریك نقطهٔ O_1 (شکل ۳۰). ثابت‌کنید که خطهای AC_1 و BA_1 و CB_1 نیز یکدیگر را دریك نقطهٔ O_2 می‌برند؛ به‌عبارت دیگر دو مثلث منظری دوگانه (به‌تعبیرحکم مسألهٔ ما) در واقع منظری سه‌گانه‌اند.

[بامسلم انگاشتن وجود مثلثهای منظری دوگانه، قضیهٔ مسألهٔ ۲۵ مدعی وجود سه‌مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ و OO_1O_2 است که دوبه‌دو منظری‌سه‌گانه‌اند، سه‌مرکز تصویر منظری، در هرحالت رأسهای سومین مثلث هستند.]

---

* معنی این‌مسأله این است‌که مثلثی مانند XYZ رسم‌کنید که رأسهای آن براضلاع $\triangle ABC$ یا برامتداد آنها واقع باشند، و اضلاع آن، یا امتداد آنها، از نقطه‌های مفروضی بگذرند.

** اصطلاح «محاط کنید» را با زیرنویس قبلی مطابقت دهید.

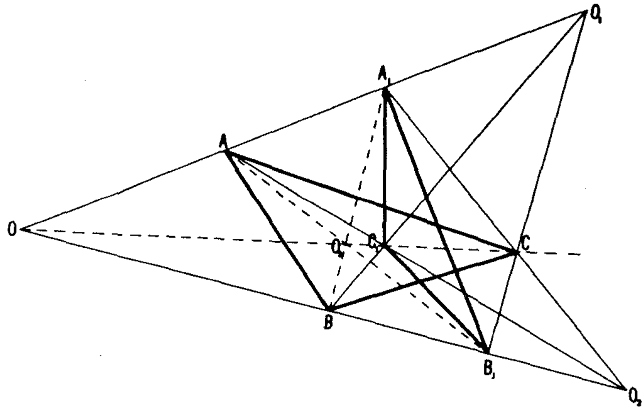


شکل ۳۰

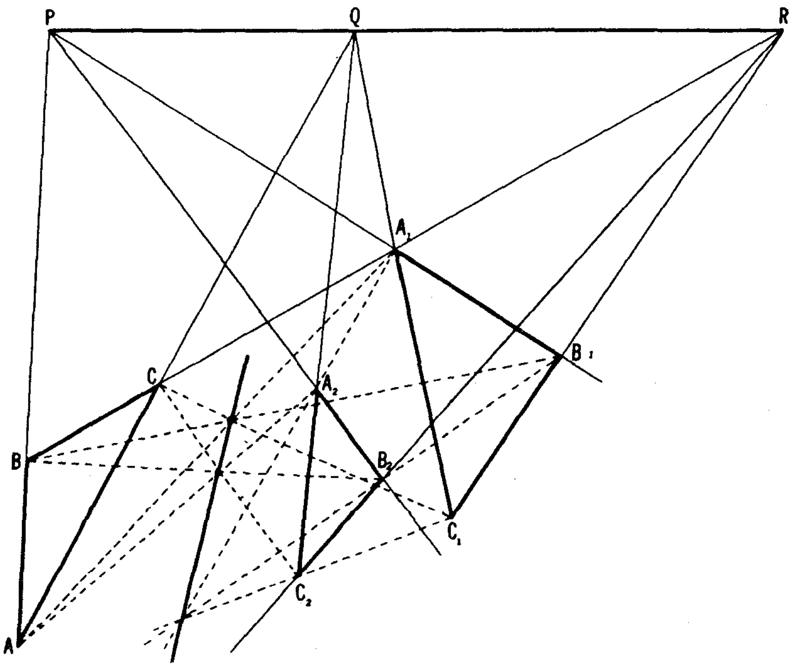
۲۶. قضیه در باب مثلثهای منظری سه‌گانه. فرض می‌کنیم مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ چنان باشند که AA_1 و BB_1 و CC_1 در نقطهٔ O، خطهای AA_1 و BC_1 و CB_1 در O_1، و خطهای AC_1 و BB_1 و CA_1 در نقطهٔ O_2 یکدیگر را ببرند (شکل ۳۱). ثابت کنید که خطهای AB_1 و BA_1 و CC_1 نیز در یك نقطهٔ O_3 متقارب‌اند (به‌عبارت دیگر، دومثلث منظری سه گانه، به‌تعبیر مسألهٔ ما الزاماً منظری چهارگانه‌اند.)

۲۷. سه مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ داده شده‌اند به‌قسمی که خطهای AB و A_1B_1 و A_2B_2 در یك نقطهٔ P، و خطهای AC و A_1C_1 و A_2C_2 در یك نقطهٔ Q، و خطهای BC و B_1C_1 و B_2C_2 در یك نقطهٔ R یکدیگر را می‌برند و P و Q و R، همخط‌اند. به‌موجب قضیهٔ دزارگ (مسألهٔ ۲۲)، در هریك از سه تاییهای AA_1 و BB_1 و CC_1؛ AA_2 و BB_2 و CC_2؛ A_1A_2 و B_1B_2 و C_1C_2، خطها در یك نقطه همدیگر را می‌برند. ثابت کنید که این سه‌نقطه همخط‌اند (شکل ۳۲).

[قضیهٔ مسألهٔ ۲۷ ممکن‌است به‌صورت زیر بیان‌شود: درسه مثلث دو به‌دو منظری،



شکل ۳۱



شکل ۳۲

اگر سه‌محور تصویر منظری منطبق باشند، سه‌مرکز تصویر منظری هم‌خط‌اند.]

۲۸. قضیهٔ پاپوس. نشان دهید که اگر یك خط EF چهارضلعی $ABCD$ را به‌دو چهارضلعی $AEFD$ و $BCFE$ (شکل ۳۳) تقسیم کند، آنگاه نقطه‌های برخورد قطرهای سه چهارضلعی $ABCD$ و $AEFD$ و $BCFE$ هم‌خط‌اند.

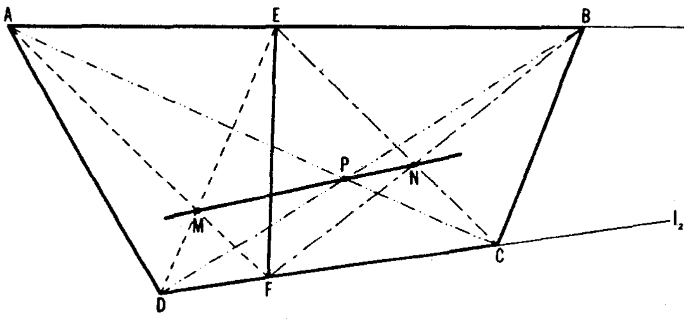
یادآور می‌شویم که مسألهٔ ۲۸ می‌تواند به‌دو طریق زیر نیز بیان شود (← شکل ۳۳):

الف) هرگاه رأسهای A و E و B ازشش ضلعی $AFBDEC$ (که ممکن‌است نامحدب وحتی خود-متقاطع باشد) بریك خط l_1، و رأسهای D و F و C بریك‌خط l_2 واقع باشند، آنگاه نقطه‌های برخورد اضلاع مقابل این شش‌ضلعی هم‌خط‌اند.

ب) هرگاه اضلاع AB و CN و DM از شش‌ضلعی $ABNCDM$ (که ممکن‌است نامحدب یا حتی‌خود-متقاطع باشد) دریك‌نقطهٔ E، و اضلاع CD و BN و AM در یك‌نقطهٔ F متقاطع باشند، قطرهای AC و BD و MN از این‌شش‌ضلعی نیز متقارب‌اند.

این دوصورت مختلف مسألهٔ ۲۸ شباهت بسیار نزدیکی به‌مسأله‌های ۴۶ و ۴۷ بخش ۳ دارند (ونیز ← به‌جوابهای مسأله‌های ۷۵ و ۸۰، بخش ۵).*

۲۹. درشکل ۳۳، صفحهٔ π را بریك صفحهٔ جدید π' تصویر کنید به‌قسمی که



شکل ۳۳

* این تشابه تصادفی نیست. برای بیان کامل آن لازم است نظریهٔ کلی مقاطع مخروطی را دخالت دهیم (← کتاب مذکور در زیرنویس‌صفحهٔ ۴۱). به‌علت محدودیتهای مکانی از عرضهٔ این نظریه دراین‌کتاب صرفنظر کرده‌ایم.

(i) خط AB خط خاص π باشد؛
(ii) خط AD خط خاص π باشد.
صورت جدید مسألهٔ ۲۸ چه‌خواهد شد؟

۳۰. در صفحه‌ای چهارخط چنان داده شده‌اند که هیچ دو تا از آنها باهم موازی و، هیچ سه‌تا از آنها متقارب نیستند. ثابت کنید که در چهارمثلث حاصل از این خطها، نقطه‌های برخورد ارتفاعها همخط‌اند.

مسألهٔ ۳۰ به‌مناسبت دیگری در جلد دوم این کتاب (← مسألهٔ ۶۳) آمده است.

۳۱. صفحهٔ πی چهارضلعی $ABCD$ درمسألهٔ ۲۳ (ص۴۲) را برصفحهٔ جدید π' تصویر کنید به‌قسمی که
(i) ضلع AB خط خاص π باشد؛
(ii) قطر AC خط خاص π باشد.
صورت جدید مسألهٔ ۲۳ چگونه خواهد شد؟

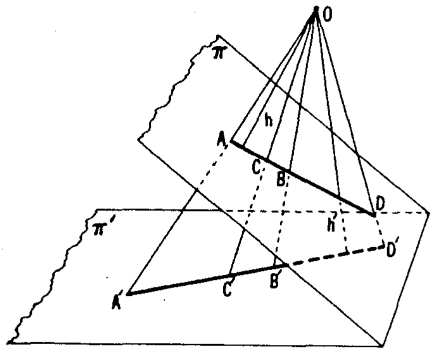
ویژگیهای (الف) و (ب)ی تصویر مرکزی تا حدی با ویژگیهای (الف) و (ب)ی تصویر موازی مشابه‌اند (← ص۱۷). حال سعی می‌کنیم یك مشابهت جزئی برای ویژگی (ج) درآنها پیدا کنیم (← ص ۱۸).

اثر تصویر مرکزی را برطول یك پاره‌خط درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم AB پاره‌خطی‌درصفحهٔ π و $A'B'$ نگارهٔ آن بر یك‌صفحهٔ π' براثر یك‌تصویرمرکزی به‌مرکز O باشد (شکل ۳۴). یادآور می‌شویم که نسبت مساحتهای دومثلثی که یك زاویهٔ مشترك دارند مساوی است بانسبت حاصلضربهای اضلاع این دو زاویه. (این مطلب،مثلا ازفرمول‌معروف $S=(۱/۲)ab\sin C$ برای‌مساحت‌مثلث ABC نتیجه می‌شود.) بنابراین اگر فاصله‌های نقطهٔ O را از اضلاع AB و $A'B'$ بترتیب به h و h' نشان دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{\text{مساحت } \triangle OA'B'}{\text{مساحت } \triangle OAB}=\frac{h'.A'B'}{h.AB}=\frac{OA'.OB'}{OA.OB}$$

یا

$$A'B'=AB\cdot\frac{OA'\cdot OB'}{OA\cdot OB}\cdot\frac{h}{h'}$$



شکل ۳۴

حال اگر A و B و C سه‌نقطه بریك خط l از π، و A' و B' و C' نگاره‌های آنها براثر تصویر بر π' باشند، آنگاه از استدلال فوق چنین برمی‌آید که

$$\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{AC[(OA'\cdot OC')/(OA\cdot OC)](h/h')}{BC[(OB'\cdot OC')/(OB\cdot OC)](h/h')}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{OA'/OA}{OB'/OB} \quad (*)$$

این رابطه نشان می‌دهد که دراینجا برخلاف تصویر موازی، نسبتهای $A'C'/B'C'$ و AC/BC درحالت کلی نامساوی‌اند. ولی اگر نسبت دو نسبت حاصل از تقسیم پاره‌خط AB به‌وسیلهٔ دو نقطهٔ C و D را (شکل ۳۴) تشکیل دهیم، آنگاه روشن است که

$$\frac{A'C'}{B'C'}\bigg/\frac{A'D'}{B'D'}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{OA'/OA}{OB'/OB}\bigg/\frac{AD}{BD}\cdot\frac{OA'/OA}{OB'/OB}=\frac{AC}{BC}\bigg/\frac{AD}{BD}$$

عبارت

$$\frac{AC}{BC}\bigg/\frac{AC}{BD}$$

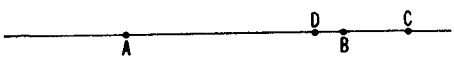
نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A و B ؛ C و D نامیده می‌شود.

خلاصه کنیم:

ج) در تصویر مرکزی نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A و B؛ C و D واقع بر یك خط محفوظ می‌ماند.

نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ (همخط)، نسبت دو نسبت سادهٔ AC/BC و AD/BD است. از آنجا که نسبتهای ساده می‌توانند مثبت یا منفی باشند (← جلد دوم همین کتاب)، طبیعی است که یك علامت مثبت یا منفی به نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ همخط تخصیص دهیم. روشن است که نسبت ناهمساز $(AC/BC)/(AD/BD)$ برای چهار نقطهٔ A و B؛ C و D مثبت است اگر C و D هردو در داخل یا هر دو درخارج پاره‌خط AB باشند (زیرا دراین‌صورت نسبتهای سادهٔ AC/BC و AD/BD دارای یك علامت‌اند)، و منفی است اگر یکی از نقطه‌های C و D در داخل AB و دیگری درخارج آن واقع باشد (زیرا در این‌صورت نسبتهای سادهٔ AC/BC و AD/BD علامتهای مختلف دارند). به‌عبارت دیگر، می‌توانیم بگوییم که نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A و B؛ C و D منفی است اگر جفتهای A و B، C و D جداساز یکدیگر باشند (شکل ۳۵ الف)، ومثبت است اگر این جفتها جداساز یکدیگر نباشند (شکل ۳۵ ب). از اینجا نتیجه می‌شود که تصویر مرکزی علامت نسبت ناهمساز را حفظ می‌کند، یعنی ویژگی (ج) معتبر است حتی اگر علامت نسبت ناهمساز را درنظر بگیریم. برای اثبات این حکم، ملاحظه می‌کنیم که اگر جفتهای نقطه‌های A، B و C، D جداساز یکدیگر باشند (نباشند)، آنگاه جفتهای خطهای OA، OB و OC، OD جداساز یکدیگر هستند (نیستند)؛ اما دراین صورت جفتهای نقطه‌های A'، B' و C'، D'، نگاره‌های A، B و C، D براثر تصویر به‌مرکز O، جداساز یکدیگر هستند (نیستند).*

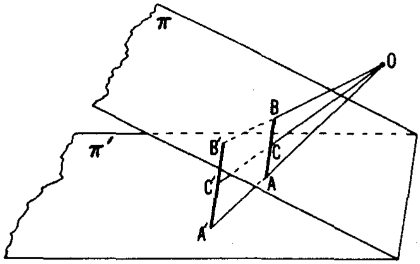
متذکر می‌شویم که‌هرگاه AB باخط خاص صفحهٔ π (یعنی بافصل مشترك π و π') موازی باشد (شکل ۳۶)، آنگاه واضح است که $AB||A'B'$ و $OA'/OA=OB'/OB$.



شکل ۳۵ الف

شکل ۳۵ ب

* همچنین یادآور می‌شویم که، تصویر موازی سه‌نقطهٔ همخط A و B و C، نه‌تنها اندازهٔ نسبت سادهٔ AC/BC بلکه علامت آن را نیز حفظ می‌کند.



شکل ۳۶

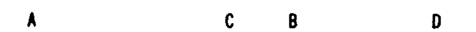
لذا دراین‌مورد دستور (*) خواهد داد

$$\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{AC}{BC}$$

به‌عبارت دیگر، در تصویر مرکزی نسبت سادهٔ دوپاره‌خط از یك خط موازی باخط خاص صفحه، محفوظ می‌ماند.

در تصویر مرکزی، ویژگی (ج) نسبتاً پیچیده است، در گفتار مقدماتی ما نقش مهمی بازی خواهد کرد (← بویژه، بخش آخر) و در کتابهای پیشرفته‌ای که با تصویر مرکزی سروکار دارند نقش قاطعی ایفا می‌کند.

نسبت AC/BC را در نظر می‌گیریم که در آن C نقطه‌ای است که پاره‌خط AB را تقسیم می‌کند. حالتی که C وسط AB باشد، یعنی وقتی AC و BC طولهای مساوی وجهتهای مختلف داشته باشند به‌قسمی‌که $AC/BC=-1$، موردعلاقهٔ خاص ماست؛ همچنین وقتی برای چهار نقطهٔ A و B ؛ C و D نسبت ناهمساز $(AC/BC)/(AD/BD)$ را درنظر می‌گیریم. حالت $(AC/BC)/(AD/BD)=-1$ رامجزا می‌کنیم. دراین‌حالت یکی از دو نقطهٔ C و D داخل پاره‌خط AB و دیگری بیرون آن است، همچنین نسبتهای AC/BC و AD/BD از لحاظ قدرمطلق مساوی‌اند (شکل ۳۷). برای تشخیص این‌وضعیت گوییم نقطه‌های C و D پاره‌خط AB را بـه نسبت همساز (= نسبت توافقی) تقسیم می‌کنند



شکل ۳۷

(یا، نقطه‌های C و D مزدوجهای همساز نقطه‌های A و B هستند).

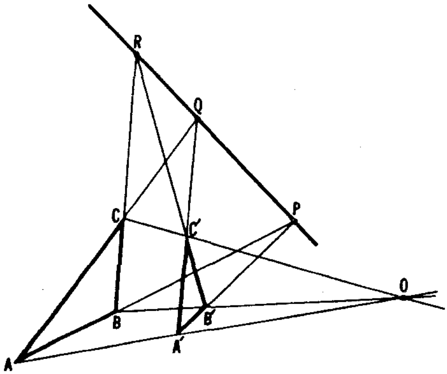
درپیش دیدیم‌که درمسائل متضمن تصاویرموازی، مراکز پاره‌خطها به‌نحو بارزی مجسم می‌شوند (← مثلا مسائل ۱ و ۲ و ۳ (الف)، و ۴ و ۹ (الف) و ۱۴ وجوابهای **مسائل۳ (ب) و۸و۹(ب) وبرهان قضیهٔ ۳ در صفحات ۲۶، ۲۷و۲۸، که درآنهاخطهای** واصل بین وسطهای اضلاع مقابل برخی متوازی‌الاضلاعها و غیره نقش اساسی بازی می‌کردند). همچنین در مسأله‌هایی که تصاویر موازی را دربر دارند، اغلب جفتهای نقطه‌هایی پیدا می‌شوند که برخی پاره‌خطها را به‌نسبت همساز تقسیم می‌کنند. بدین ترتیب، مثلا مکان هندسی مسألهٔ ۱۷ (الف)ــ قطبی یك نقطهٔ P نسبت به یك جفت خط l_1 و l_2ــ می‌توانند به عنوان مکان نقطه‌هایی مانند M تعریف شود که نقاط P و M پاره‌خط PM را، که دوسرش بر l_1 و l_2 هستند، به‌توافق تقسیم می‌کنند؛ نقطهٔ Q از مسألهٔ ۱۷ (ب) نقطه‌ای است از خط AB که P و Q پاره‌خط AB را به توافق تقسیم می‌کنند* و غیره. کلیهٔ این احکام بلافاصله از روی ویژگی (ج) مربوط به تصویر مرکزی اثبات می‌شوند.

اکنون برخی از بی‌دقتیهای گفتارخود را اصلاح می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که وقتی یك‌صفحهٔ π بر یك‌صفحهٔ π' تصویر می‌شود، هریك از دوصفحه خط خاصی پیدا می‌کند؛ نقطه‌های خط خاص صفحهٔ π نگاره‌ای در π' ندارند و نقطه‌های خط خاص‌صفحهٔ π' نگاره‌های‌هیچ نقطه‌ای از π نیستند. به‌همین‌دلیل صورت گزاره‌هایی که متضمن تصاویر مرکزی هستند همواره حالتهای خاص را باید دربر گیرند. بی‌دقتیهایی که هم‌اکنون‌متذکرشدیم ناشی ازاین واقعیت‌بود که‌تاکنون، علی‌الاصول، چنین حالتهای خاص را نادیده می‌گرفتیم. از این‌رو، مثلا، حکم قضیهٔ دزارگ (← مسألهٔ ۲۲)، دقیق بگوییم نادرست است، زیرا این امکان را که یك تصویر مرکزی ممکن است خطهای متقارب (مثل AA_1 و BB_1 و CC_1 یا AB و A_1B_1 و PQ، شکل ۲۹) را یا به‌خطهای متقارب و یا به‌خطهای موازی بدل کند، در نظر نمی‌گیرد. یك بیان دقیق قضیهٔ دزارگ بدین صورت است: اگر دو مثلث همصفحه چنان باشندکه خطهای واصل به‌رأسهای متناظر متقارب یا موازی باشند، آنگاه یا

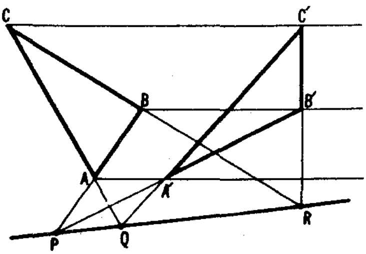
---

* این واقعیت که نقطه‌های P و Q درمسألهٔ ۱۷ (ب) پاره‌خط AB را به‌نسبت توافقی تقسیم می‌کنند، اغلب چنین بیان می‌شود: هر دو قطر یك چهار ضلعی کامل، قطر سوم را به‌نسبت توافقی تقسیم می‌کنند. اثبات اینکه این قضیه باحکم ما، هم‌ارز است، به‌خواننده واگذار می‌شود.

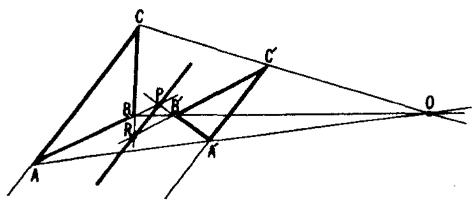
نقطه‌های تلاقی اضلاع متناظر مثلثها همخط‌اند (شکل ۳۸ (الف)و (ب))، یا یک جفت از ضلعهای متناظر باخط واصل به‌نقطه‌های برخورد دوجفت ضلع دیگر موازی هستند. (شکل ۳۸ (ج) و (د))، بالاخره یا اینکه اضلاع متناظر دومثلث موازی‌اند (شکل ۳۸ (ه)، (ز)) و بعکس. ملاحظه می‌کنیم که وقتی صورت قضیه دقیق بیان



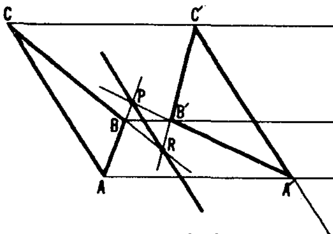
شکل ۳۸ الف



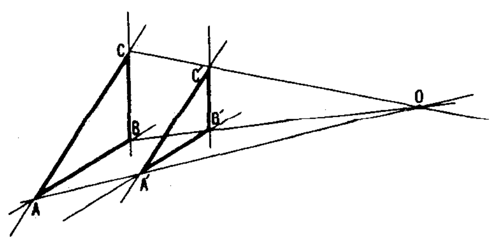
شکل ۳۸ ب



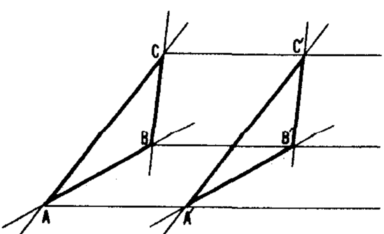
شکل ۳۸ ج



شکل ۳۸ د



شکل ۳۸ ه



شکل ۳۸ و

شود ظرافتش را از دست می‌دهد و درك آن دشوار می‌شود. این گفته برای بسیاری از قضیه‌های دیگر نیز صحیح است.

برای از بین برداشتن پیچیدگیهای ناشی از ماهیت استثنایی خطهای خاص، باید بگوییم که خط خاص x در صفحهٔ π بر «خط بینهایت» صفحهٔ π' تصویر شده‌است، و «خط بینهایت» صفحهٔ π برخط خاص y' از π' تصویر می‌شود. تأکید می کنیم که این اصطلاح موضوعی است قراردادی؛ عبارت «خط x بر خط بینهایت تصویر می‌شود» با عبارت «خط x برچیزی تصویر نمی‌شود» هم‌ارز است. ما از هر نقطهٔ خاص X از خط خاص x صحبت خواهیم کرد که به یك «نقطهٔ بینهایت» از صفحهٔ π' تصویر شده‌است. ما از ردهٔ خطهای موازی حاصل از تصویر ردهٔ خطهای مار بر X (← شکل ۳۹)، به عنوان ردهٔ خطهایی که «در یك نقطهٔ بینهایت تلاقی می کنند» صحبت خواهیم کرد.* لذا هرخط l یك نقطه در بینهایت دارد** که «نقطهٔ تلاقی» l با هر خط موازی با آن است. کلیهٔ نقطه‌های واقع در بینهایت خطهای یك صفحه، «خط بینهایت» آن صفحه را تشکیل می‌دهند.

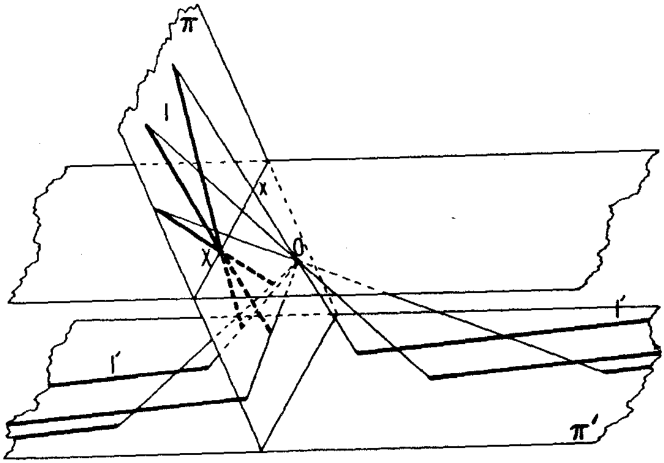
حال به‌توجیه این اصطلاح می‌پردازیم. هرگاه یك‌نقطهٔ M برخط l به‌نقطهٔ X، محل برخورد l و x، نزدیك شود تصویرش برخط l' ازصفحهٔ π' [در یك‌امتداد، بسته به‌امتدادی که M در آن به X نزدیك می‌شود (← شکل ۴۰)] بینهایت دور می‌شود. همچنین اگر M در یکی از دوجهت بر l بینهایت دور شود، تصویرش به نقطهٔ Y'، محل برخورد l' و y'، نزدیك می‌شود (←شکل ۴۰).

واردکردن نقطه‌های بینهایت ما را ملزم می‌سازد که تعریف نسبت ناهمساز چهارنقطهٔ همخط را تکمیل کنیم. اشاره می کنیم که اگر D نقطهٔ بینهایت خط AB باشد، مساوی قراردادن نسبت AD/BD با یك، طبیعی خواهد بود. (زیرا نسبت AM/BM وقتی نقطهٔ M به‌نقطهٔ بینهایت D نزدیك شود، یعنی وقتی M در یکی از دوجهت بر AB بینهایت دورشود، به‌حدیك نزدیك‌می‌شود). لذا اگر D نقطه‌ای

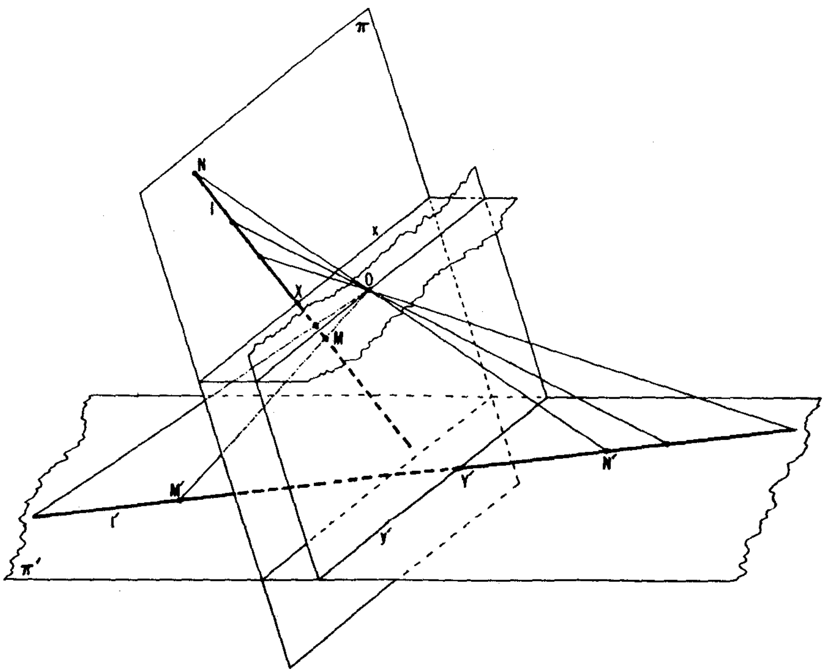
---

* این واقعیت که به‌هرنقطهٔ بینهایت یك‌رده ازخطهای موازی مربوط می‌شود «که از آن نقطه می گذرند»، به‌ما امکان‌می‌دهد که نقطه‌های بینهایت را با امتدادهای صفحه مشخص کنیم. مثلا عبارت، «خطی که نقطهٔ‌مفروض A را به‌نقطهٔ مفروض B واقع دربینهایت‌وصل می کند» به‌معنی خطی است که از A در امتداد متناظر به‌نقطهٔ بینهایت B رسم می‌شود و همینطور برای نقطه‌های دیگر

** برخلاف آنچه که احساس می کنیم، چنین برمی‌آید که تخصیص یك‌نقطهٔ تکین در بینهایت به‌یك خط امری است بجا.



شکل ۳۹



شکل ۴۰

در بینهایت باشد، نسبت ناهمساز $(AC/BC)/(AD/BD)$ با نسبت سادهٔ AC/BC یکی خواهد شد. به‌آسانی دیده می‌شود که ویژگی (ج) مربوط به‌تصویر مرکزی، حتی اگر یکی از نقطه‌های A و B و C و D، یا تصویرش، نقطه‌ای در بینهایت باشد باز صادق خواهد بود.

واردکردن خط ونقطه‌های بینهایت به‌ما امکان‌می‌دهد که یك‌عده از گزاره‌های خاص را، که‌همه به‌طریق مشابهی قابل اثبات هستند، دریك گزارهٔ واحد بگنجانیم. علت آن این است که تا آنجا که به‌تصاویرمرکزی مربوط است، نقطه‌های فرضی در بینهایت بانقطه‌های واقعی موقعیتی یکسان دارند. نقطه‌هـای یك‌نوع را می‌توان به نقطه‌های‌نوع دیگر بدل‌کرد. مثلا حالتهای ویژهٔ قضیهٔ دزارگ، که قبلا برشمردیم، همه درحکم اصلی آن گنجانده شده‌اند (مسألهٔ ۲۲) به‌شرطی‌که نقطهٔ تقاطع خطهای AA_1 و BB_1 و CC_1 و همچنین نقطه‌های تقاطع ضلعهای متناظر مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ نقاط معمولی یا نقاط بینهایت تعبیر شوند.

صفحه‌ای‌که بدین‌ترتیب باافزودن نقاط‌فرضی وخط فرضی دربینهایت تکمیل شده است صفحهٔ تصویری نام دارد.

می‌خواهیم به‌یك‌تفاوت‌اساسی بین دو استفاده‌ای که‌ازنقطه‌های‌بینهایت‌کرده‌ایم اشاره کنیم: ۱. اصطلاح مناسبی برای بیان برخی حقایق مربوط به‌تصاویر مرکزی ایجاد کنیم (← مطالب مذکور درقبل)، ۲. صفحهٔ تصویری را ایجادکنیم.

مفهوم صفحهٔ تصویری گامی است فراتر از اصطلاح تنها. گامی است درراه تجرید ریاضی‌که به‌یك مفهوم جدید ریاضی منجرمی‌شود: صفحه‌ای‌که علاوه‌برنقاط معمولی هندسهٔ دبیرستانی دارای نقاط اضافی دیگـر یعنی نقاط بینهایت است. (در این‌صفحه نقاط بینهایت بانقاط دیگر همترازند، زیرا تصویر مرکزی می‌تواند نقاط یك‌نوع را به‌نقاط نوع‌دیگربدل‌کنند.) باید تأکیدکنیم‌که یك صفحهٔ تصویری همان اعتبارصفحهٔ «اقلیدسی» معمولی (یا «صفحهٔ‌انعکاسی» مذکور درفصل‌دوم)* را دارد. روی هم رفته، مفهوم صفحهٔ اقلیدسی یا خطوطی که می‌توانند تا بینهایت ادامه داده شوند، تجریدی است ریاضی بی‌آنکـه همتایی در واقعیت فیزیکی داشته باشد، و توصیف مناسب آن به‌وسیلهٔ مجموعه‌ای از اصل موضوعها **، کـه هندسهٔ مسطحهٔ اقلیدسی را مـی‌سازند، انجام گرفته است. تعبیرهـای متفاوت از مـفهوم «صفحه»

---

* فصلی که هنوز از روسی ترجمه نشده است.

** این‌کلمه، برای هماهنگی باسایر کتابهای این مجموعه، به‌جای پنداشت آورده شده است. ـــ م.

به انتخابهای متفاوت اصل موضوعها منجر می‌شود. مثلا اصل موضوع زیر، که در صفحهٔ اقلیدسی معتبر نیست، در صفحهٔ تصویری صادق است: «هردو خط (متمایز) یکدیگر را در یك نقطهٔ منحصر می برند» (در واقع، دوخط موازی به‌تعبیر اقلیدسی در یك نقطهٔ واقع در بینهایت درصفحهٔ تصویری یکدیگر را می برند، ویك خط‌معمولی وخط واقع در بینهایت، یکدیگر را درنقطهٔ بینهایت خط معمولی). هریك از راههای متفاوت پذیرفتنی نزدیك شدن به‌مفهوم صفحه با یك انتخاب خاص اصل موضوعها مشخص می‌شود. بسته به‌نوع مسائلی که‌حل آنها را مطرح می کنیم، ممکن است تعبیر اصطلاح «صفحه» را به‌یکی از راهها مناسب بدانیم. یك‌مورد‌مناسب مطالعهٔ انعکاسهایی است که در فصل‌دوم صورت گرفته‌است*، وما درآنجا از «نقاط بینهایت» به‌طریقی متفاوت‌با طریق معمول درصفحهٔ تصویری، استفاده می کنیم. «صفحهٔ» حاصل با هردو صفحهٔ اقلیدسی‌و‌تصویری، متفاوت است ولی «برتر»یا«پایینتر» ازیکی آنها نیست.

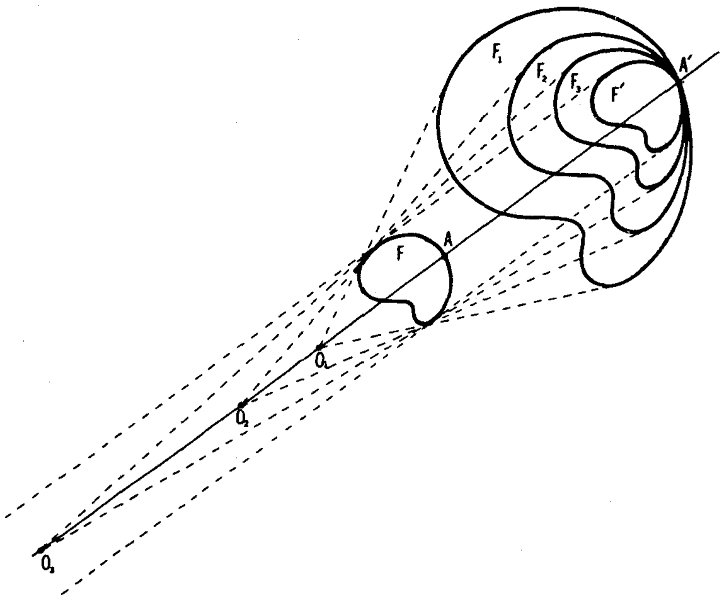
بجاست اشاره کنیم که واردکردن نقطه‌ها وخطهای «بینهایت دور» ممکن است درحل مسأله‌هایی که تصاویر مرکزی درآنها دخالتی ندارند مفید باشد. مثلا به‌سهولت می‌توانیم انتقال را تجانسی بگیریم که مرکزش نقطهٔ بینهایت دور در امتداد محور انتقال و نسبت آن ۱ باشد. [برای دیدن این‌نکته، یك‌رشته تجانس درنظر می‌گیریم کـه یك شکل F را به شکلهای F_1وF_2وF_3 و . . . و نقطه‌ای مـانند A از F را به‌نقطهٔ A' بدل می‌کند؛ دراین‌حال‌وقتی O_i $(i=1,2,3,\dots)$،مرکزهای این‌تجانسها، درامتداد AA' بینهایت دور می‌شوند نسبتهای

$$\frac{O_iA'}{O_iA} \quad (i=1,2,3,\dots)$$

به‌مقدار ۱، و شکلهای F_i به‌یك شکل F' نزدیك می‌شوند که از شکل F براثر انتقال با بردار AA' حاصل شده است (← شکل ۴۱).] درنتیجهٔ این شناسایی دیگرلازم‌نیست حالات خاصی را که درعده‌ای ازقضیه‌های متضمن اشکال مجانس‌پیدا می‌شوند، جداکنیم. مثلا، بگوییم که هردو دایره به‌دوطریق مجانس یکدیگرند (← فصل ۱، بخش ۱،جلد دوم). حاصلضرب دوتجانس باز یك‌تجانس است (با مرکزی‌درفاصلهٔ‌متناهی یا نامتناهی؛ رجوع شود به فصل ۱، بخش ۱ جلد ۱؛ و فصل ۱، بخش ۱، جلد دوم). قضیهٔ درباب سه مرکز تجانس (جلد دوم) نیز حالا مـی‌تواند به‌صورت خلاصهٔ زیر بیان شود: سه‌مرکز تجانس سه‌جفت شکل متجانس همخط‌اند. این‌قضیه شامل‌حالتی است‌که یکی از مرکزها

---

* که هنوز ازروسی ترجمه نشده است.



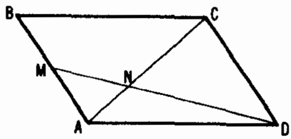
شکل ۴۱

نقطه‌ای در بینهایت است (دوشکل از سه شکل قابل انطباق‌اند)، شامل حالتی است که هرسه مرکز (تجانس) نقطه‌هایی واقع در بینهایت‌اند و محور (تجانس) خطی در بینهایت است (هرسه شکل دوبه‌دو قابل انطباق‌اند)، و سرانجام، شامل حالتی است که هرسه‌مرکز برهم منطبق‌اند. اگر دیدگاه فعلی خود را حفظ کنیم، سه‌دایره همواره شش‌مرکز تجانس‌دارند که درمجموعه‌های سه‌تایی برچهارمحورتجانس قرار دارند (برای حالتهای خاصی که این قضیه را می‌پوشانند ← جلد دوم، فصل ۱، بخش ۱). اکنون قضیهٔ ۲، فصل ۱، بخش ۲، جلد دوم نیز شکل ساده‌تری به‌خود می‌گیرد، زیرا می‌توانیم به‌تقارن لغزه‌ای (یا لغزه) به‌صورت حالت یك‌تقارن تجانسی[1] (یا تجانس) بنگریم، ولذا حالتی که F براثر یك تقارن لغزه‌ای بر F' نگاشته می‌شود، مستلزم ملاحظات جداگانه نیست. از دیدگاه فعلی‌ما قضیهٔ ۲، فصل۲، بخش ۲ی جلد اول، یك‌حالت خاص قضیهٔ۲،

1. Dilative reflection (Dilatation)

فصل ۱، بخش ۲ی جلد دوم است (که بیانگر شباهت نزدیك در احکام و براهین این‌دو قضیه است). بعضی اوقات هم‌مناسب است که انتقال را دورانی تلقی کنیم که مرکزش در بینهایت باشد و امتدادش عمود برامتداد انتقال درمسأله. دراین‌صورت همهٔ قضایای حاصلضربهای مستقیم حرکات (یعنی دوران و انتقال؛ ← جلداول) زیر پوشش یك‌قضیهٔ تنها درمی‌آیند.

۳۲. الف) متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داده شده است. ثابت کنید که هرگاه خط DM از ضلع AB پاره‌خط $AM=AB/n$ را جدا کند، از قطر AC پاره‌خط $AN=AC/(n+۱)$ را جداخواهدکرد (شکل ۴۲ حالت $n=۲$ را نشان‌می‌دهد). اگر صفحهٔ شکل را بریك صفحهٔ دیگر چنان تصویر کنیم که خط AB با خط خاص آن صفحه موازی باشد، این گزاره به‌چه‌شکلی درخواهد آمد؟



شکل ۴۲

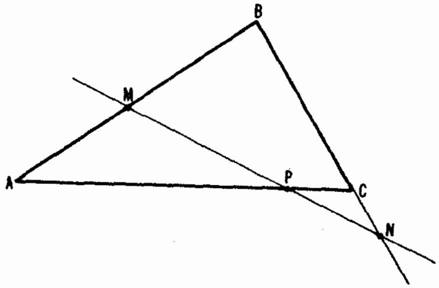
ب) دو خط موازی l و $l_۱$ و پاره‌خط AB بر l داده شده‌اند. پاره خط AB را به‌وسیلهٔ ستارهٔ تنها به n جزء مساوی تقسیم کنید.

۳۳. قضیهٔ چهارضلعی کامل (← مسألهٔ ۱۴ و شرح پس‌از آن) به‌چه‌شکلی درخواهد آمد هرگاه شکل ۱۴ را طوری تصویر کنیم که خط ABE خط‌خاص آن باشد؟

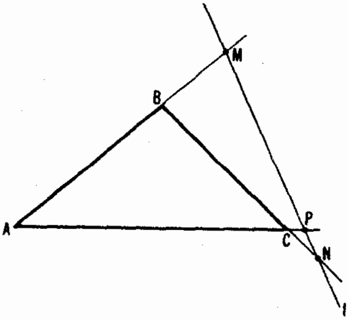
۳۴. الف) قضیهٔ منلائوس را ثابت کنید: سه‌نقطهٔ M و N و P بترتیب واقع براضلاع AB وBC وCA (یا برامتدادآنها، ← شکل ۴۳) ازمثلث ABC، همخط‌اند اگر و فقط اگر

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=۱$$

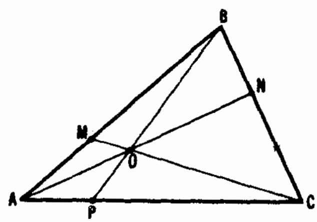
ب) قضیهٔ سوا را ثابت کنید: سه‌خط AN و BP و CM که نقاط MوNوP، بترتیب براضلاع AB و BC و CA (یا برامتداد آنها ← شکل ۴۴) از مثلث



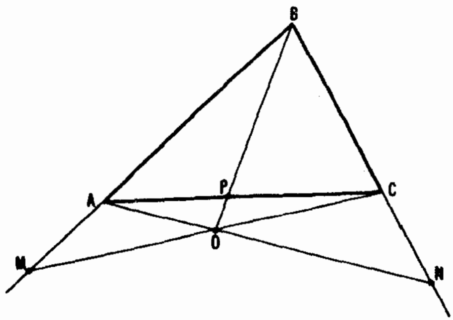
شکل ۴۳الف



شکل ۴۳ب



شکل ۴۴ الف



شکل ۴۴ ب

ABC قرار دارند، متقارب یا موازی‌اند اگر، و تنها اگر

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=-۱$$

و نیز به‌مسأله‌های ۲۷ (الف) و (ب) درفصل ۱، بخش ۱، جلددوم ومسألهٔ ۱۶ در همین کتاب مراجعه کنید. برای ارتباط بین قضیه‌های منلائوس و سوا، مسألهٔ ۶۶ در بخش ۴ این کتاب را ببینید.

به‌آسانی دیده می‌شود که هرگاه نقطه‌های M و N و P هم‌خط باشند، آنگاه

به‌ازای هر مثلث ABC، یا دونقطه از این سه نقطه برضلعهای مثلث قرار دارند و یا هرسه نقطه برامتداد ضلعها واقع‌اند (شکل۴۳، (الف) و (ب)). بنا براین ازسه‌نسبت AM/BM و BN/CN و CP/AP یا دو تا از آنها منفی‌اند یا هیچ یك منفی نیست؛ لذا حاصلضرب هرسه نسبت الزاماً مثبت خواهد بود. همچنین اگر خطهای AN و BP و CM متقارب یا موازی باشند (شکل ۴۴ (الف) و (ب))، آنگاه از سه‌نقطهٔ M و N و P یا هرسه براضلاع مثلث واقع‌اند یاتنها یکی ازآنها. بنابراین از سه‌نسبت AM/BM و BN/CN و CP/AP یا دوتا مثبت‌اند یا هیچیك مثبت نیست. لذا حاصلضرب سه‌نسبت منفی می‌شود.

قضیه‌های منلائوس و سوا اغلب زمانی به‌کار برده می‌شوند که اثبات همخطی سه‌نقطه یا تقارب سه‌خط مطلوب باشد. بااستفاده از قضیهٔ منلائوس می‌توان مسأله‌های ۱۶و۱۷ و ۶۱ (جلد دوم)، ۱۴ و ۲۱ (ب) و ۲۲ و ۲۷ و ۲۸ و ۳۸ (ب) و ۴۵ و ۴۶ و ۶۸ و ۷۱ و ۷۳ (الف)، (ب) و مسأله‌های‌دیگر این‌کتاب‌را حل‌کرد. با استفاده از قضیهٔ‌سوا می‌توان مسائل‌تقارب میانه‌ها، ارتفاعها، نیمسازهای‌مثلث و نیز مسأله‌های ۴۳ (الف)، (ب) (جلد اول) و ۱۴ (ب)، (ج) (جلد دوم)، و ۸ و ۱۳ و ۲۱ (الف) و ۲۲ و ۲۵ و ۲۶ و ۳۸ (الف) و ۳۹ (الف)، (ب) و ۴۰ (الف)، (ب)و ۴۷ و ۵۰ و ۵۷ و ۷۰ و مسأله‌های دیگر را حل‌کرد. (همچنین، بسیاری از قضیه‌هایی‌که بیان صورت‌آنها درمسائل ۶۰ و ۶۲-۶۴ و ۶۹-۷۴ موردنیاز است می‌توانند بااستفاده از قضیه‌های سوا و منلائوس حل شوند. به‌خوانندگان توصیه می‌کنیم که سعی‌کنند با استفاده از این قضیه‌ها، قضایای مختلف را ثابت کنند.)

۳۵. نشان دهیدکه‌هرگاه E و F نقطه‌های برخورد ضلعهای‌مقابل ABوCD، AD و BC ازیك چهارضلعی (دلخواه) باشند، آنگاه

$$\frac{AE.CE}{BE.DE}=\frac{AF.CF}{BF.DF}$$

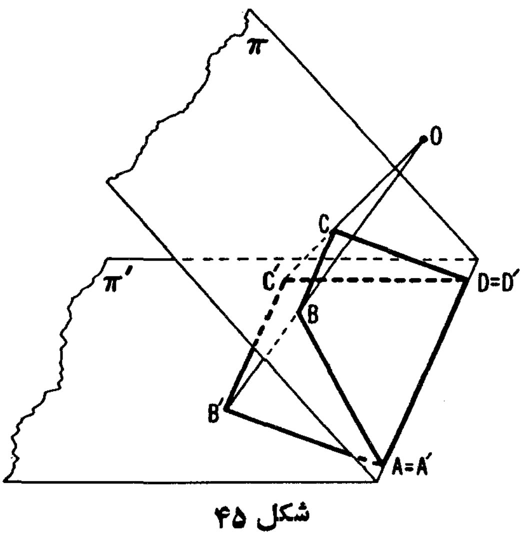
حال قضیهٔ مهم زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. گیریم AوBوCوD چهارنقطه دریك صفحهٔ π چنان باشندکه‌هیچ سه‌تایی از آنهـا همخط نباشند، و M و N و P و Q چهارنقطه در صفحهٔ π' چنانکه هیچ سه‌تایی‌ازآنها همخط نباشند. π و π' را می‌توان‌طوری قرارداد که‌یك تصویرمرکزی (یا موازی) از π به π' وجود داشته باشد که چهارضلعی $ABCD$ را به‌چهارضلعی

$A'B'C'D'$ که مشابه با $MNPQ$ است، بدل کند*.

ما نخست این قضیه را درحالت خاصی که چهار ضلعیهای $ABCD$ و $MNPQ$ ذوزنقه هستند، $AD\|BC$ و $MQ\|NP$، ثابت می‌کنیم. درصفحهٔ π' یك ذوزنقهٔ $A'B'C'D'$ متشابه بـا $MNPQ$ چنان وارد می‌کنیم کـه $AD=A'D'$. سپس صفحهٔ π را درفضا طوری حرکت می‌دهیم که پاره‌خطهای AD و $A'D'$ برهم‌منطبق شوند و نقاط B و C بیرون‌صفحهٔ π' بمانند (شکل ۴۵). حال B را به B' و C را به C' وصل می‌کنیم. خطوط BB' و CC' هم‌صفحه‌اند، زیرا $BC\|AD$ و $AD\|B'C'$ ایجاب می‌کنند که BC و $B'C'$ موازی و در نتیجه هم‌صفحه باشند. اگر O نقطهٔ برخورد خطوط BB' و CC' باشد، تصویر مرکزی به‌مرکز O چهارضلعی $ABCD$ را به‌چهار ضلعی $A'B'C'D'$ بدل می‌کند؛ اگر $BB'\|CC'$، آنگاه تصویر موازی در امتدادی که به‌وسیلهٔ این خطوط مشخص می‌شود $ABCD$ را به $A'B'C'D'$ بدل می‌کند.

حال نشان می‌دهیم که حالت کلی را می‌توانیم به‌حالت خاصی که هم‌اکنون

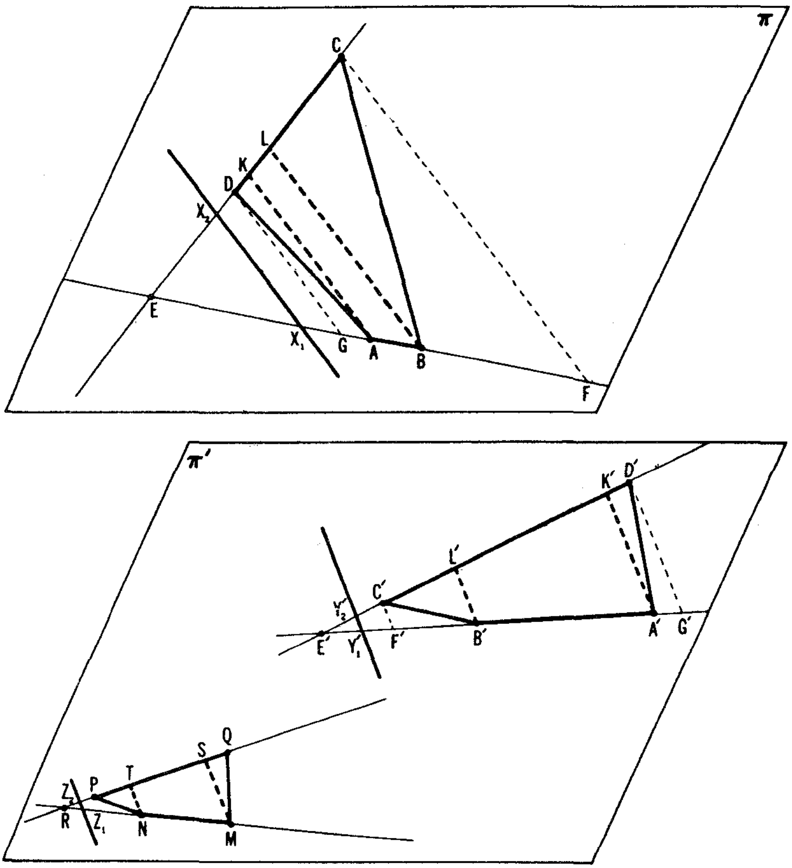


شکل ۴۵

---

* صحیحتر بگوییم، رأسهای چهارضلعی $ABCD$ را مـی‌توان بـر رأسهـای چهارضلعی $A'B'C'D'$ متشابه با $MNPQ$ نگاشت (← پانویس صفحهٔ ۲۰۴).

ملاحظه کردیم بدل کنیم. پس فرض می‌کنیم $ABCD$ و $MNPQ$ دو چهارضلعی در π و π' باشند (شکل ۴۶)*. فرض می‌کنیم که یك تصویر مرکزی (یاموازی) از π به π' چهارضلعی $ABCD$ را به چهارضلعی $A'B'C'D'$، متشابه با $MNPQ$، بدل



شکل ۴۶

* چهار ضلعیهای $ABCD$ و $MNPQ$ در شکل ۴۶ کوژند. ولی هرگاه یك یــا هردو چهارضلعی ناکوژ باشند، بازهم استدلال عوض نمی‌شود.

کنند. نشان خواهیم داد که $ABCD$ و $MNPQ$ خط خـاص صفحهٔ π را مشخص می‌کنند. برای این امر، فرض می‌کنیم E و E' و R نقاط برخورد اضلاع AB و CD، $A'B'$ و $C'D'$، MN و PQ از چهار ضلعیهای $ABCD$ و $A'B'C'D'$ و $MNPQ$ باشند. به‌موجب ویژگی (الف) از تصویر مرکزی، نگـارهٔ نقطهٔ E نقطهٔ E' است. اگر X'_1 نقطهٔ بینهایت $A'B'$ باشد، آنگاه به‌موجب ویژگی (ج) از تصویر مرکزی، این نقطه نگارهٔ یك نقطهٔ X_1 از AB است به‌طوری که

$$\frac{AE/BE}{AX_1/BX_1}=\frac{A'E'/B'E'}{A'X'_1/B'X'}=\frac{A'E'}{B'E'}=\frac{MR}{NR}$$

(زیرا $A'X'_1/B'X'_1=1$ ← ص۵۲). از این روابط‌ می‌توانیم نسبت AX_1/BX_1 را (از لحاظ اندازه و علامت!) تعیین، و لذا X_1 را پیدا کنیم. همچنین رابطهٔ

$$\frac{CE/DE}{CX_2/DX_2}=\frac{C'E'}{D'E'}=\frac{PR}{QR}$$

نقطهٔ X_2 از DC را معین می‌کند که بر نقطهٔ بینهایت X'_2 از $D'C'$ نگاشته‌می‌شود.* خط X_1X_2 خط خاص π، و خط موردنظر ماست. باید توجه کنیم که X_1 و X_2 را می‌توان از روی چهار ضلعیهای مفروض $ABCD$ و $MNPQ$ پیدا کرد. یك برهان مشابه به‌ما امکان می‌دهد خط خـاص $Y'_1Y'_2$ در π' را معین کنیم (← شکل ۴۶). نقطه‌های Y'_1 و Y'_2 از روابط زیر مشخص می‌شوند

$$\frac{AE}{BE}=\frac{A'E'/B'E'}{A'Y'_1/B'Y'_1} \quad \text{و} \quad \frac{CE}{DE}=\frac{C'E'/D'E'}{C'Y'_2/D'Y'_2}$$

حال از نقاط A و B خطوطی موازی خط X_1X_2 رسم می‌کنیم ونقاط برخورد آنها را با CD بترتیب K و L می‌نامیم. به‌موجب‌ویژگی (ب) از تصویر مرکزی، خطوط مـوازی AK و BL به‌خطوط موازی بدل می‌شوند. تعبیر آن این است کـه

---

* اگر نقطهٔ E بر نقطهٔ بینهایت $A'B'$ نگاشته شده بـاشد (یعنی اگر $A'B'\|C'D'$)، به‌جـای AB و CD مـی‌توانیم AD و BC را درنظر بگیریم. اگر E و نقطهٔ I، نقطهٔ برخورد AD و BC، بر نقاط بینهایت نگاشته‌شوند (یعنی اگر $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاع باشد)، آنگاه EI خط‌خاص π می‌شود. در این حالت قضیهٔ ۱ را بدون محاسبهٔ نسبتهای پاره‌خطها می‌توان اثبات کرد. (انجام این‌عمل برای خوانندگان آموزنده خواهد بود.)

تصویر مرکزی‌ما ذوزنقهٔ $ABLK$ را به‌ذوزنقهٔ $A'B'L'K'$ $(A'K'\|B'L'\|Y'_1Y'_2)$ بدل می‌کند. حال می‌توانیم از چهارضلعیهای $ABCD$ و $MNPQ$ برای یافتن ذوزنقهٔ $ABLK$ و ذوزنقهٔ $MNTS$ که با $A'B'L'K'$ متشابه باشد استفاده کنیم. دراینجا باید نقاط Z_1 و Z_2 را برخطوط MN و PQ چنان پیداکنیم که

$$\frac{MR/NR}{MZ_1/NZ_1}=\frac{A'E'/B'E'}{A'Y'_1/B'Y'_1}=\frac{AE}{BE},$$

$$\frac{PR/QR}{PZ_2/QZ_2}=\frac{C'E'/D'E'}{C'Y'_2/D'Y'_2}=\frac{CE}{DE}$$

و بعد سه‌خط Z_1Z_2 و NT و MS را موازی باهم رسم کنیم.

حالت خاص قضیهٔ ۱ که در بالا اثبات شد، مجوز وجود یك تصویر مرکزی (یا موازی) است که ذوزنقهٔ $ABLK$ را به‌ذوزنقهٔ $A'B'L'K'$ متشابه با $MNTS$ بدل کند. برای اثبات این قضیه، باید نشان دهیم که این تصویر، $ABCD$ را به $A'B'C'D'$ یعنی، نقطه‌های C و D را به‌نقطه‌های C' و D'، بدل می‌کند.

ملاحظه‌می‌کنیم که خط‌خاص π نسبت به‌تصویرما خط X_1X_2 است که در بالا پیدا کردیم. زیرا خط خاص با AK و BL موازی است (ویژگی (ب)ی تصویر مرکزی*) و از X_1 می‌گذرد (زیرا E، نقطهٔ برخورد AB و KL، به E'، نقطهٔ برخورد $A'B'$ و $K'L'$، ونقطهٔ X_1 که در رابطهٔ

$$(AE/BE)/(AX_1/BX_1)=A'E'/B'E'$$

صدق می‌کند به‌یك‌نقطه دربینهایت، نگاشته می‌شود). و به‌همین طریق نشان می‌دهیم که خط‌خاص π' خط $Y'_1Y'_2$ است. چون E و X_2 ونقطهٔ بینهایت KL بترتیب بر E' ویك‌نقطه در بینهایت و نقطهٔ Y'_2 از $K'L'$ نگاشته شده‌اند، به‌موجب ویژگی (ج) تصویر مرکزی نتیجه‌می‌گیریم که نگارهٔ‌نقطهٔ C نقطهٔ $\bar{C}$ ازخط $K'L'$ است به‌طوری که

$$\frac{EX_2/CX_2}{1}=\frac{1}{E'Y'_2/\bar{C}Y'_2}$$

بنابراین

---

* باتوجه به‌چگونگی ساختن‌تصویر مرکزی (یا موازی) که یك ذوزنقه را به‌یك ذوزنقه بدل می‌کند، نیز می‌توان به‌این نتیجه رسید.

$$\bar{C}Y'_2 = E'Y'_2 \cdot \frac{EX_2}{CX_2}$$

می‌ماند نشان دهیم که $\bar{C}$ بر C' منطبق است. برای این‌منظور ذوزنقهٔ $CDGF$ در شکل ۴۶ را (با $CF\|DG\|X_2X_1$) به‌وسیلهٔ تصویر مرکزی (یاموازی) و به‌دنبال آن یك تشابه، به ذوزنقهٔ $C'D'G'F'$ (بـا $C'F'\|D'G'\|Y'_1Y'_2$) بـدل می‌کنیم. به‌موجب قضیه‌ای که در بالا ثابت کردیم این‌امر ممکن است. این نگاشت E را به E'، نقطهٔ X_2 از CD را به نقطهٔ بینهایت X'_2 از $C'D'$، و نقطهٔ بینهایت Y_2 از CD را بـه‌نقطـهٔ Y'_2 بـدل مـی‌کنـد [زیـرا بنـا بـر تعریف نقـاط X_2 و Y'_2 داریـم $(CE/DE)/(CX_2/DX_2)=C'E'/D'E'$ و

$$[CE/DE=(C'E'/D'E')/(C'Y'_2/D'Y'_2)$$

بنا براین به‌موجب ویژگی (ج) از تصویرمرکزی داریم:

$$\frac{EX_2/CX_2}{1}=\frac{1}{E'Y'_2/C'Y'_2}$$

لذا

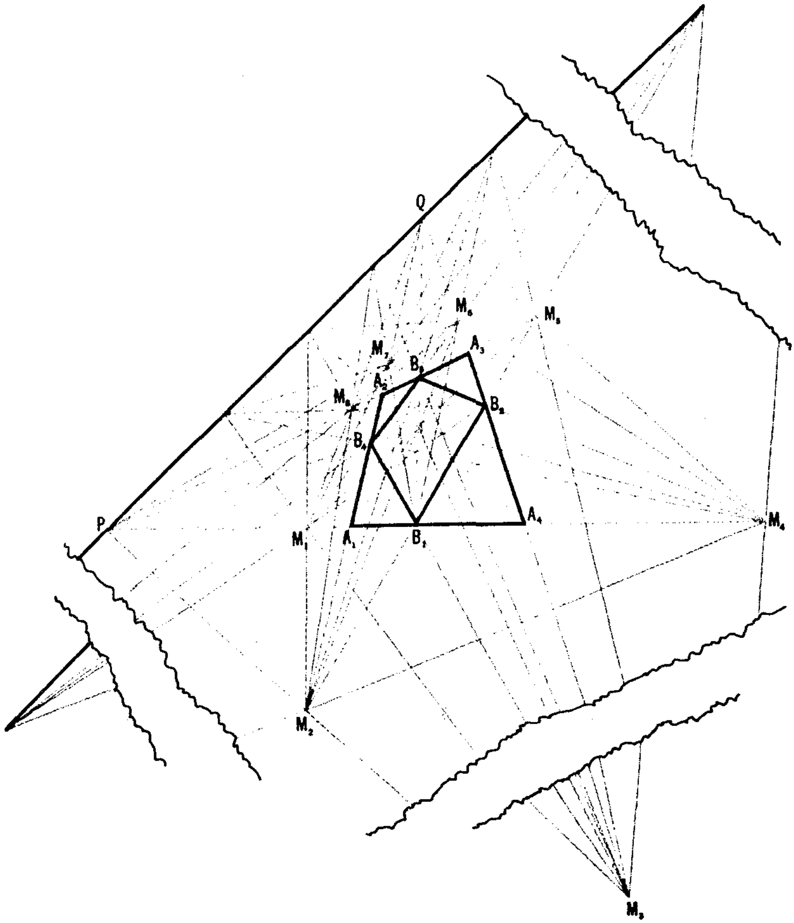
$$C'Y'_2=E'Y'_2\cdot\frac{EX_2}{CX_2}.$$

از اینجا نتیجه می‌شود که C بر C' منطبق‌است. عیناً به‌همین‌طریق ثابت می‌کنیم که این تصویرمرکزی (یا موازی) که $ABLK$ را به $A'B'L'K'$ بدل می‌کند، D را به D' می‌نگارد. حال می‌بینیم کـه تصویر ما چهارضلعی $ABCD$ را به‌چهارضلعی $A'B'C'D'$ بدل کرده است، همان‌گونه‌که ادعا کرده بودیم.

وقتی بعضی از نقطه‌های A و B و C و D یا A' و B' و C' و D' در بینهایت باشند برهان قضیهٔ ۱ را به‌آسانی می‌توان اصلاح کرد.

۳۶. در چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ فرض‌می‌کنیم N نقطهٔ برخورد قطرها، و P و Q نقطه‌هـای برخورد اضلاع روبه‌رو و B_1 و B_2 و B_3 و B_4 نقطه‌هـای برخورد اضلاع چهارضلعی باخطهای NP و NQ باشند. گیریم اضلاع چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ اضلاع چهارضلعی $B_1B_2B_3B_4$، محاط درخود، را در نقاط M_1 و M_2 و M_3 و M_4 و M_5 و M_6 و M_7 و M_8، نظیر شکل ۴۷ ببرند. ثابت کنید که:

الف) خطهای M_1M_5 و M_2M_6 و M_3M_7 و M_4M_8 از N می‌گذرند.



شکل ۴۷

ب) خطهای M_2M_3 و M_6M_7 از P می گذرند وخطوط M_1M_8 وM_4M_5 از Q.

ج) خطهای M_1M_2 و M_3M_8 و M_4M_7 و M_5M_6 ازنقطهٔ برخورد PQ باقطر A_2A_4 می گذرند و M_3M_4 وM_2M_5 وM_1M_6 و M_7M_8 از نقطهٔ برخورد PQ و قطر A_1A_3.

د) خطهای هریك از چهارتاییهای:

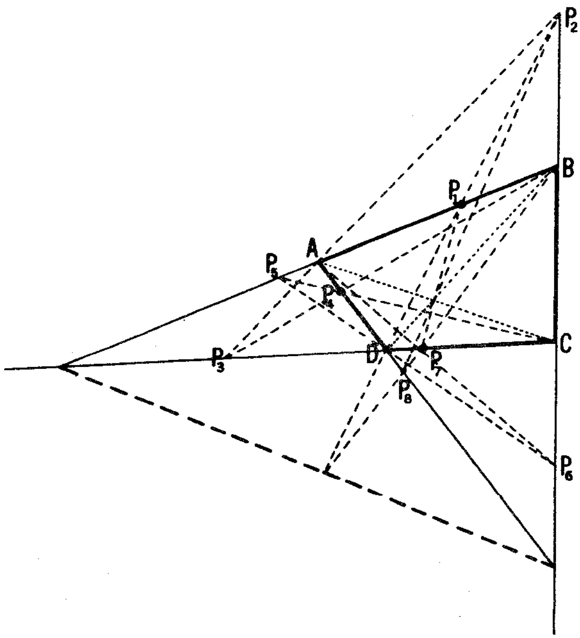
$M_۲M_۴,\ M_۶M_۸,\ B_۴M_۵,\ B_۲M_۱$; $\quad M_۱M_۳,\ M_۵M_۷,\ B_۴M_۴,\ B_۲M_۸$;

$M_۴M_۶,\ M_۲M_۸,\ B_۱M_۷,\ B_۳M_۳$; $\quad M_۳M_۵,\ M_۱M_۷,\ B_۱M_۶,\ B_۳M_۲$;

دریك نقطه یکدیگر را می‌برند و این چهارنقطهٔ حاصل برخط PQ واقع‌اند.

۳۷. فرض می‌کنیم $P_۱$ نقطه‌ای برضلع AB از چهارضلعی $ABCD$ باشد (شکل ۴۸). گیریم $P_۲$ تصویر $P_۱$ از مرکز D برخط BC باشد، $P_۳$ تصویر $P_۲$ از مرکز A برخط CD، $P_۴$ تصویر $P_۳$ از مرکز B برخط DA، و $P_۵$ تصویر $P_۴$ از مرکز C برخط AB، وقس‌علیهذا. ثابت کنید که:

الف) نقطهٔ $P_{۱۳}$ (که پس‌از سه‌بار دورزدن چهارضلعی) برضلع AB به‌دست آمده برنقطهٔ مفروض $P_۱$ منطبق است (و در نتیجه $P_{۱۴}$ برنقطهٔ $P_۲$ و $P_{۱۵}$ بر $P_۳$، وقس‌علیهذا).



شکل ۴۸

ب) خطوط P_1P_7 و P_2P_8 و P_3P_9 و غیره از نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی می‌گذرند.

ج) نقاط برخورد خطوط P_1P_2 و P_7P_8، P_2P_3 و P_8P_9، P_3P_4 و P_9P_{10}، وغیره، برخط واصل بین نقاط برخورد اضلاع مقابل چهارضلعی واقع‌اند.

۳۸. O نقطه‌ای است درصفحهٔ $\triangle ABC$، و A_1 و B_1 و C_1 نقاط برخورد خطهای AO و BO و CO با اضلاع رو به رو به‌رأسهای A و B و Cی مثلث هستند (شکل ۴۹). نقطه‌های A_2 و B_2 و C_2 را برضلعهای B_1C_1 و C_1A_1 و A_1B_1 از $\triangle A_1B_1C_1$ در نظر می‌گیریم. ثابت کنید که:

الف) اگر سه‌خط A_1A_2 و B_1B_2 و C_1C_2 متقارب باشند، خطهای AA_2 و BB_2 و CC_2 نیز متقارب‌اند (شکل ۴۹ الف).

ب) اگر نقطه‌های A_2 و B_2 و C_2 همخط باشند، نقطه‌های برخورد خطهای AA_2 و BB_2 و CC_2 بااضلاع مقابل $\triangle ABC$ نیز همخط‌اند (شکل ۴۹ ب).

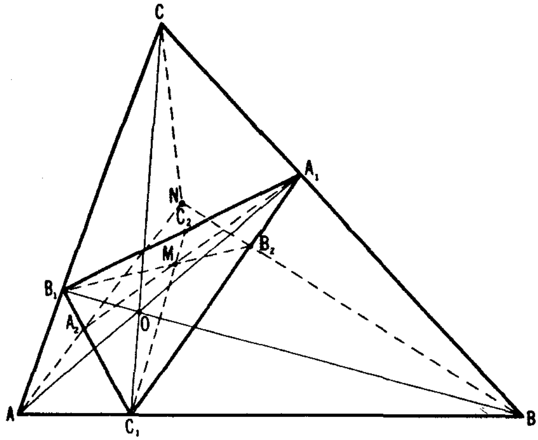
تاکنون فقط نگاشتهایی از یك صفحهٔ π برصفحهٔ دیگر π' را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. حال تبدیلی را که π را برخودش بدل کند درنظر می‌گیریم که به‌شرح زیر تعریف می‌شود: صفحهٔ π را درفضا به‌طریق دلخواهی حرکت می‌دهیم، و سپس آن را بروضع اولیه‌اش از مرکز O تصویر می‌کنیم. این تبدیل را تصویرمرکزی صفحهٔ π برخودش می‌نامیم. یك مورد این تبدیل تشابه است. تصویر مرکزی یك صفحه برخودش یك تشابه است اگر، وضع جدید صفحه درست پیش از تصویر با وضعیت اصلیش موازی باشد.

ویژگیهای تصویرمرکزی ایجاب می‌کنند که تصویرمرکزی صفحهٔ π برخودش، خط را به‌خط بدل کند به‌استثنای خط خاص، که به‌خط بینهایت بدل می‌شود. هرخط از یك قسمت صفحهٔ π که شامل خط خاص نباشد به‌یك خط بدل می‌شود.

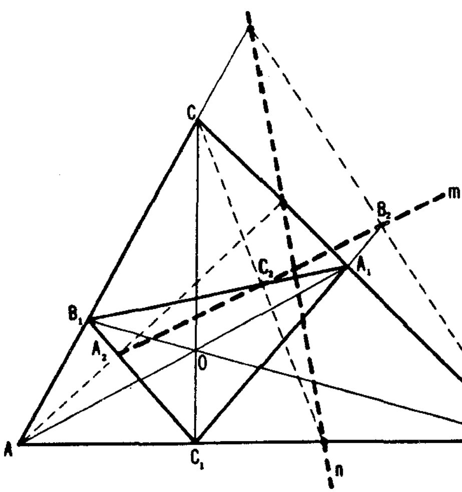
تبدیلی از صفحه که خطهای ماربر قسمت معینی از صفحه را به‌خط بدل کند، تبدیل تصویری* نامند. هر تبدیل آفین یك تبدیل تصویری است، ولی عکس آن درست نیست؛ مثلا تصویرمرکزی صفحه برروی خودش یك تبدیل تصویری است، ولی در حالت کلی، آفین نیست.

---

* یك تبدیل تصویری می‌تواند به‌صورت تبدیل یك به‌یك از صفحهٔ تصویری π برروی خودش تعریف شود (← ص ۵۴) که خط را به‌خط بدل می‌کند. این تعریف با تعریف یك تبدیل آفین (← ص ۲۶) متفاوت است از این لحاظ که دراینجا π معرف یك صفحهٔ تصویری است، نه یك صفحهٔ معمولی.



شکل ۴۹ الف



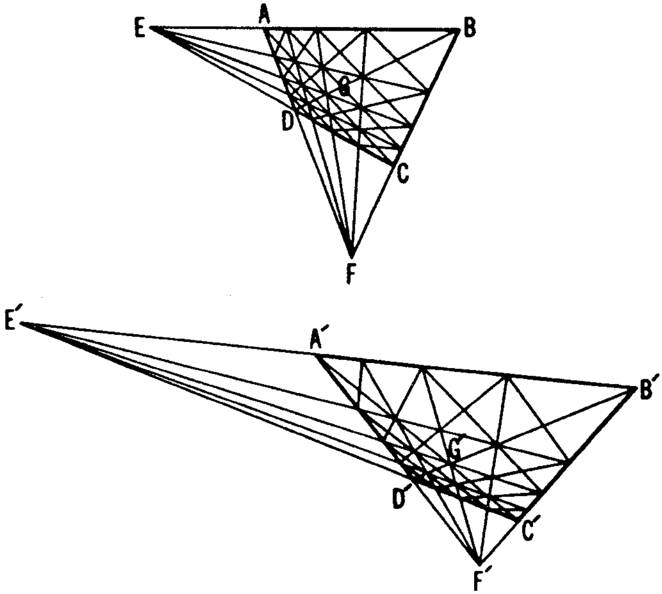
شکل ۴۹ ب

قضیهٔ بنیادی زیر ماهیت تبدیل تصویری صفحه را روشن می‌سازد.

قضیهٔ ۲ . هر تبدیل تصویری صفحه می‌تواند با یک تصویرمرکزی (یا موازی) صفحه برخودش و به‌دنبال آن یک تشابه تحقق یابد.

برهان قضیهٔ ۲ مشابه برهان قضیهٔ ۲ بخش ۱ است (← ص۲۶). برهانی که‌ما دراینجا برای این‌قضیه می‌آوریم برای حالتی است‌که قسمتی ازصفحه، کـه در تعریف تبدیل تصویری به‌آن‌اشاره شده‌بود، یك‌چهارضلعی محدب باشد (مثل صفحه‌ای ازیك‌دفتر یادداشت)*.

لذا فـرض می‌کنیم یك تبدیل تصویـری، چهار ضلعی $ABCD$ را به‌چهارضلعی $A'B'C'D'$ (شکل ۵۰) بدل‌کند. بنابر قضیهٔ ۱، براثر یك تصویرمرکزی (یاموازی) صفحه‌به‌خودش وسپس بایك‌تشابه،می‌توان $ABCD$ را به $A'B'C'D'$ بدل‌کرد. بنابراین هرگاه‌بتوانیم نشان‌دهیم که این تبدیل‌تصویری‌که $ABCD$ را به $A'B'C'D'$ بدل‌می‌کند منحصر به‌فرد است، قضیه ثابت خواهد شد.



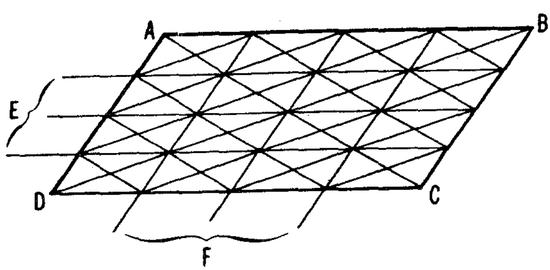
شکل ۵۰

---

* این فرض محدودیتی برای تعمیم قضیه نیست، زیرا در هـرناحیهٔ G ممکن است یك چهارضلعی (کوچك) $ABCD$ انتخاب کرد. هرخط کـه $ABCD$ را ببرد بـاید از G بگذرد. ولی در این‌صورت هرتبدیلی که‌خطهای ماربر G را به‌خط بدل‌کند، بایدخطوط متقاطع باچهارضلعی (محدب) $ABCD$ را به‌خط بدل کند.

این برهان کـه یك تبدیل تصویری بهوسیلهٔ نگارههای رأسهای یك چهارضلعی **مشخص میشود، شباهت نزدیکی به برهـان قضیهٔ ۳، بخش ۱ (← ص ۲۶) دارد، و** لذا ما فقط برهان مورد نیاز خود را طرحریزی میکنیم. گیریم E و F؛ E' و F' نقاط برخورد امتدادهـای اضلاع AB و CD، AD و BC؛ $A'B'$ و $C'D'$، $A'D'$ و $B'C'$ از چهارضلعیهای $ABCD$ و $A'B'C'D'$ بـاشند (برخی از نقاط برخورد ممکن است در بینهایت بـاشند)، و فرض میکنیم G و G' نقاط برخورد قطرهـا باشند. چون AB به $A'B'$ و CD به $C'D'$ بدل میشود، در نتیجه E به E' بدل خواهد شد، همچنین F به F' و G به G'. بنا بر این خطوط EG و FG بهخطوط $E'G'$ و $F'G'$ بدل میشوند.

خطوط EG و FG چهارضلعی $ABCD$ را بهچهارچهارضلعی کوچکتر تقسیم میکنند؛ هریك از اینها براثر تبدیل تصویری ما بهچهارضلعی معلومی بدل میشود. از وصل کردن نقاط برخورد اقطار چهارضلعیهای کوچکتر به E و F و ادامهٔ این روش، یك شبکه از خطوط در $ABCD$ بهدست میآوریم که نگارههای آنها را در $A'B'C'D'$ براثر تبدیل مذکور در دست داریم (← شکل ۵۰). این شبکه را مـیتوان بهدلخواه چگـال کرد. (بهآسانی دیده میشود که هرتصویر مرکزی ازصفحهٔ شکل ما برخودش، که EF را بهخط بینهایت بدل کند، شبکهٔ ما را بهیك شبکه از متوازیالاضلاعهایی که درشکل ۵۱ رسم شده و در برهان قضیهٔ ۳، بخش ۱ آمده بدل میکند. حال برهان منحصر بهفـرد بودن تبدیلی تصویری که $ABCD$ را به $A'B'C'D'$ بدل کند بهروش مشابه برهـان قضیهٔ ۳ی بخش ۱ دنبال میشود.)*



شکل ۵۱

* ماخود را بهتعیین نگارههای نقاط داخل چهارضلعی محدود کردیم، زیرا خود تعریف یك تبدیل تصویری سروکارش با قسمتی از صفحه است. ولی یادآوری میکنیم که ممکن است بههمان طریقی که در برهان قضیهٔ ۳ی بخش ۱ صورت گرفته بود، شبکهٔ خود را بهخارج چهارضلعی اصلی بسط دهیم.

۳. تصویر مرکزی‌که یك دایره را به‌دایره بدل می‌کند. تصویر گنجنگاشتی.

در بخش پیش بــه تعدادی مسألــه اشاره کردیم کــه راه‌حل آنها بر اثر تصویر مناسبی ازصفحهٔ شکل برصفحهٔ دیگر ساده شده‌بود. بدیهی است که باید محدودهٔ این طریقه را درنظر بگیریم. درهندسهٔ‌مقدماتی خواص اشکالی مورد مطالعه قرار می‌گیرد که از خطوط و دوایر درست شده‌اند. تصویر مرکزی خطوط را حفظ می‌کند ولی درحالت کلی دوایر را حفظ نمی‌کند. این مطلب ممکن است این احساس را پدید آورد که‌کاربرد تصویرمرکزی به ردهٔ نسبتاً کوچکی ازمسائل، که‌شامل دوایر نیستند، محدود می‌شود (همهٔ مسائـل بخش قبل در این گروه قرار می‌گیرند). این احساس درست‌نیست؛ در واقع دراین‌بخش می‌خواهیم‌نشان‌دهیم که تصاویرمرکزی چگونه می‌توانند برای حل مسائل متضمن دوایر نیز به‌کار روند. بدین‌منظور دو قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱ . گیریم S دایره‌ای‌درصفحهٔ π و Q نقطه‌ای در داخل S باشد. دراین‌صورت یك تصویر مرکزی از π بریك صفحهٔ π' چنان موجود است که S را به‌یك دایرهٔ S' در π' بدل می‌کند و Q را به Q' مرکز S'.

قضیهٔ ۱′ . گیریم S دایره‌ای درصفحهٔ π و l خطی در π باشدکه با S متقاطع نیست. دراین‌صورت یك تصویر مرکزی از π بر یك صفحهٔ مناسب π'موجود است چنانکه S را به‌یك دایره S' در π' بدل می‌کند و l را به‌یك خط بینهایت π'.

برای‌اثبات این‌قضیه‌ها راههای مختلفی‌وجود دارد. راه انتخابی ما ساده‌ترین راه نیست، ولی بینشی‌که به‌شخص مــی‌دهد ارزش تلاش اضافی را دارد.* این‌راه براساس مطالعهٔ تصویر گنجنگاشتی یك‌کره بر یك‌صفحه استوار شده است.

منظور از تصویر گنجنگاشتی یك‌کرهٔ σ برصفحهٔ π'، مماس بر σ دریك نقطهٔ

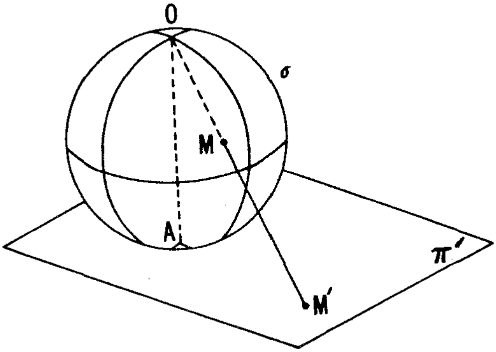
---

* برهان دیگری در فصل ۲۵ کتاب زیر آورده شده است

Rademacher and Toeplitz *The Enjoyment of Mathematics* (Princeton Uni. Press, 1957).

ونیز به‌کتاب زیر مراجعه‌کنید

H. Steinhaus, *Mathematical Snapshots*, second edition, Oxford, London, 1950.



شکل ۵۲

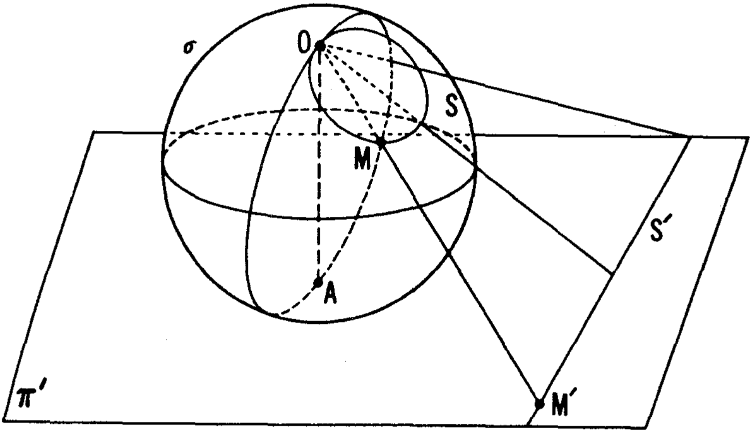
A، تصویر مرکزی σ است بر π' که O مـرکز تصویر، سر دیگر قطری از σ است که به A وصل مـی‌شود. لـذا نگارهٔ یك نقطهٔ M از σ ($M \neq O$) براثر تصویـر گنجنگاشتی، نقطهٔ M' محل برخورد OM است با صفحهٔ π' (شکل ۵۲). نقطهٔ Oی کره، براثر این تصویر گنجنگاشتی بر هیچ نقطهٔ صفحهٔ π' تصویر نمی‌شود.

مهمترین ویژگی تصویر گنجنگاشتی در قضیهٔ زیر بیان شده است.

قضیهٔ ۲ · تصویرگنجنگاشتی، هردایرهٔ واقع برکرهٔ σ را به‌یك‌دایره یایك خط‌درصفحهٔ π' بدل می‌کند، و بالعکس، پیشنگاشت یك‌خط یایك دایرهٔ صفحهٔ π' دایره‌ای است واقع‌بر σ.

برهان. روشن‌است که تصویر گنجنگاشتی، یك‌دایرهٔ S واقع بر کرهٔ σ مار بر O را به‌یك خط S' درصفحهٔ π' (شکل ۵۳) بدل می‌کند. بالعکس، پیشنگاشت یك خط در π' براثر تصویر گنجنگاشتی دایره‌ای است واقع بر σ ماربر O. حال فرض می‌کنیم S دایره‌ای بر σ باشد که از O نگذرد. S ممکن است به‌عنوان خم تماسی σ بامخروط محیطی K (شکل ۵۴ الف)، یـا با استوانهٔ محیطی Λ (شکل ۵۴ ب) انگاشته‌شود. فرض‌می‌کنیم P' محل برخورد π' باخط‌ماربر O و رأس Pی مخروط K، یا خط ماربر O موازی بامولدی از استوانهٔ Λ، باشد. نشان خواهیم داد کـه تصویر گنجنگاشتی، S را به‌یك دایرهٔ S' به‌مرکز P' در صفحهٔ π' بدل می‌کند.

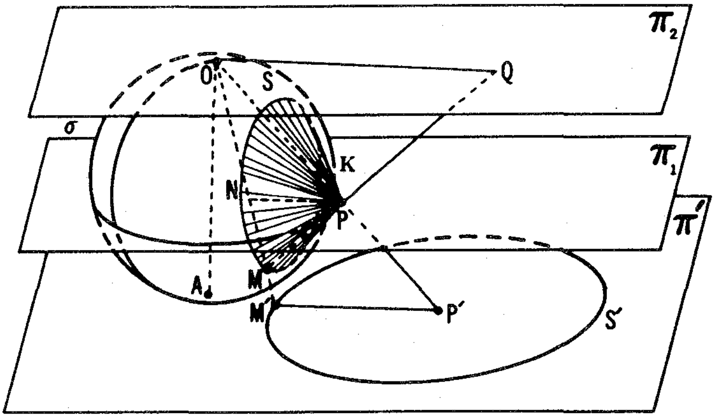
گیریم M نقطه‌ای بر S باشد و M' تصویر آن برصفحهٔ π'. باید نشان دهیم که فاصلهٔ $P'M'$ مستقل از انتخاب نقطهٔ M بر دایرهٔ S است (این، هـم‌ارز است بااینکه نشان دهیم مکان M' یك‌دایرهٔ S' به‌مرکز P' است). ابتدا حالتی را درنظر



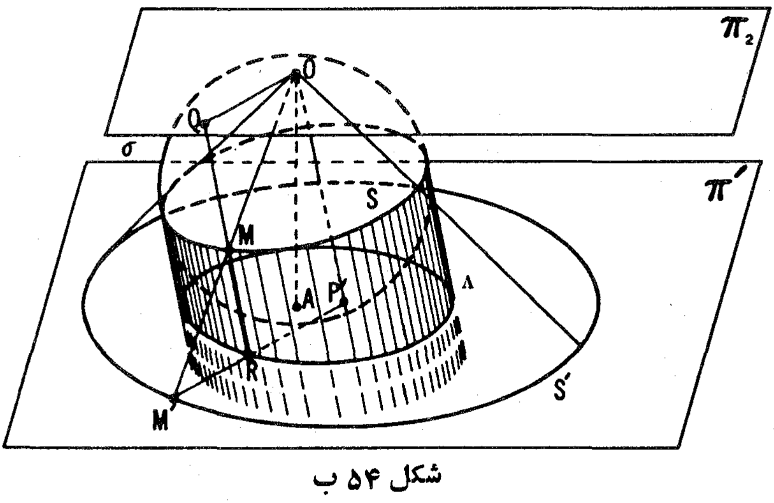
شکل ۵۳

می‌گیریم که S دایرهٔ تماسی مخروط K با کرهٔ σ باشد (شکل ۵۴ الف). صفحات π_1 و π_2 را از نقاط P و O به‌موازات π' رسم می‌کنیم ونقطهٔ برخورد OM را با π_1 به N ونقطهٔ برخورد PM را با π_2 به Q نشان می‌دهیم. سپس Q را به O وصل می‌کنیم. خطهای $P'M'$ و PN و QO باهم موازی‌اند، زیرا فصل‌مشترکهای صفحهٔ OPM بـا صفحات مـوازی π' و π_1 و π_2 هستند. از اینجـا نتیجه مـی‌شودکـه $\triangle MPN\sim\triangle MQO$ و $\triangle OPN\sim\triangle OP'M'$. از تشابه دو مثلث اول نتیجه می‌شود $PN/PM=QO/QM$. چون QOوQM مماسهای‌مرسوم‌از Q بر σ هستند (QO درصفحهٔ π_2 مماس بر σ قرار دارد و QM مولد مخروط محیطی σ است)، و $QO=QM$، ولذا $PM=PN$. این تساوی نشان می‌دهد که طول پاره‌خط PM مستقل از انتخاب M بر S است (طول PM بـه‌ازای جمیع نقاط M بر S ثابت است). وانـگهـی تشابـه دو مثلث دیگـر ایجـاب مـی‌کند کـه داشته بـاشیم $P'M'/PN=OP'/OP$. لذا $P'M'=PN(OP'/OP)=PM(OP'/OP)$. معنی این تساوی این است که $P'M'$ در واقع مستقل از انتخاب M است، و این همان چیزی است که ما می‌خواستیم ثابت کنیم.

اگر S دایرهٔ‌مماسی‌استوانهٔ Λ و کرهٔ σ باشد (شکل ۵۴ب)، مولد مار بر M از استوانه‌را رسم‌می‌کنیم ومحل برخوردآن‌را باصفحات π' و π_2 (که دربالا وارد کردیم) به Q و R نشان می‌دهیم. چون $MR\|OP'$، R برپـاره خط $M'P'$ واقع خواهد شد. Q را به O وصل مـی‌کنیم. و مـانند قسمت قبل نتیجه مـی‌گیریم کـه



شکل ۵۴ الف



شکل ۵۴ ب

$\triangle MQO \sim \triangle MRM'$. و از این‌مشابهت به‌تساوی $MR = RM'$ می‌رسیم (زیرا $QM = QO$ مماسهای مرسوم از Q بر σ هستند). اما از تشابه مثلثهای $OP'M'$ و MRM' نتیجه می‌گیریم $P'M' = P'O$، که معنی آن این است که در این‌حالت هم طول $P'M'$ به‌انتخاب نقطهٔ M بر S بستگی ندارد.

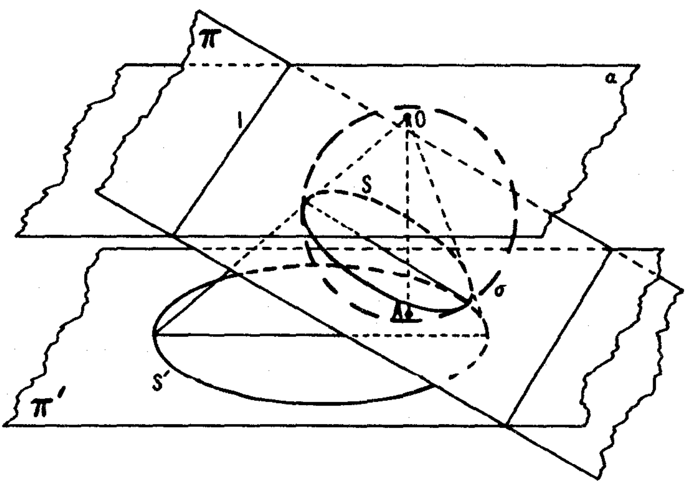
بعکس، گیریم S' دایره‌ای دلخواه به‌مرکز P' در صفحهٔ π'، و M' نقطه‌ای از S'، و M، نقطه‌ای از σ، پیشنگاشت M'، براثر تصویر گنجنگاشتی باشد. فرض

می‌کنیم P نقطهٔ برخورد خط OP' باصفحهٔ α، مماس بر σ در M، باشد (به‌شرطی که‌چنین نقطه‌ای‌موجود باشد). مانند حالت‌قبل ثابت‌می‌کنیم که P مستقل ازانتخاب M' بر S' است. ثابت می‌کنیم که مکان نقطهٔ M دایرهٔ S است، که یا دایرهٔ تماسی کرهٔ σ با مخروط Kی حاصل از مماسهای مرسوم براین‌کره از نقطهٔ P است، و یا دایرهٔ مماسی استوانهٔ Λی حاصل از مماسهای بر σ به‌موازات OP'.

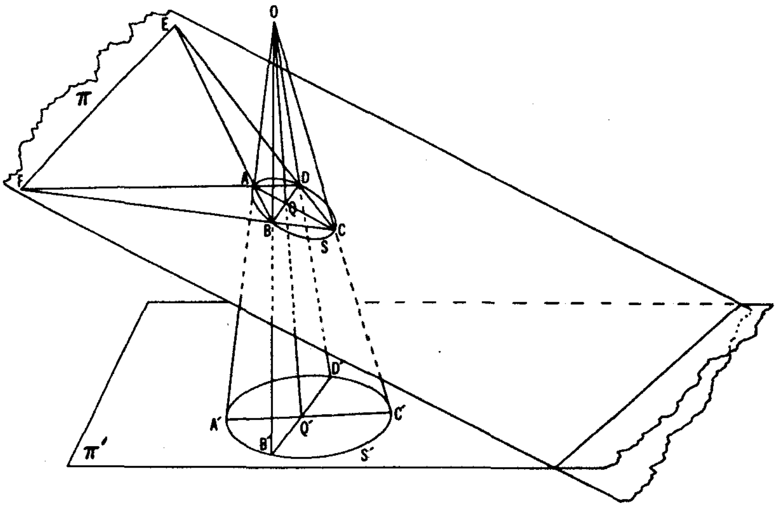
با استفاده از قضیهٔ ۲ بلافاصله می‌توانیم قضیه‌هـای بنیادی ۱ و ′۱ را ثابت کنیم.

برهان قضیهٔ ′۱. گیریم S دایره‌ای دریک صفحهٔ π و l خطی در π نامتقاطع با S باشد. کرهٔ دلخواه σ را بر S، و صفحهٔ α ماربر l و مماس بر σ دریک نقطهٔ O را رسم‌می‌کنیم. حال فرض می‌کنیم π' صفحه‌ای‌موازی α و مماس بر σ درنقطهٔ A، متقاطر O، باشد (شکل۵۵). تصویرمرکزی π از O بر π'، (به‌موجب قضیهٔ ۲) S را به‌یک‌دایرهٔ S' از صفحهٔ π'، و (بدیهی‌است که) l را به‌خط بینهایت π' بدل می‌کند.

برهان قضیهٔ ۱. گیریم S یک دایره و Q نقطه‌ای در داخـل آن باشد. فرض می‌کنیم AC و BD دو وتر مرسوم از Q باشند وچهارضلعی $ABCD$ (شکل ۵۶) را درنظرمی‌گیریم. نقاط تلاقی‌اضلاع مقابل این‌چهارضلعی را به E و F نشان‌می‌دهیم.



شکل ۵۵



شکل ۵۶

همهٔ خطوط مرسوم از E، یا S را (۱) دوبار برکمان AB، یا (۲) دوبار برکمان CD*، یا (۳) یك‌بار برکمان AD و یك بار برکمان BC، می‌برند یا (۴) نقطهٔ‌مشترکی با S ندارند. همچنین همهٔ خطهای مار بر F، یا S را (۱) دوبار برکمان AD، یا (۲) دوبار برکمان BC، یا (۳) یك‌بار برکمان AB و یك‌بار برکمان CD، می‌برند یا (۴) نقطهٔ‌مشترکی با S ندارند. خط EF باید به‌دستهٔ چهارم‌متعلق باشد زیرا، اگر به‌یکی ازسه‌دستهٔ دیگر نسبت به E متعلق‌باشد، شرایط بودن در یکی ازچهاردسته نسبت به F را نقض می‌کند.

حال شکل را بریك صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌طوری که S به یك دایرهٔ S' و EF به‌خط بینهایت π' بدل‌شود (که بنا برقضیهٔ ′۱ ممکن‌است). نگارهٔ چهارضلعی $ABCD$ یك متوازی‌الاضلاع $A'B'C'D'$ محاط در S'، یعنی یك مستطیل است. چون Q نقطهٔ تقاطع قطرهای $ABCD$ است، پس نگاره‌اش، Q'، نقطهٔ تقاطع قطرهای مستطیل $A'B'C'D'$، یعنی مرکز S' خواهد شد.

قضیه‌های ۱ و ′۱ به‌ما امکان می‌دهند که از تصاویر مرکزی برای حل بسیاری از

---

* اگر دونقطهٔ برخورد، بریك کمان یکی شوند خط موردنظر مماس می‌شود و برهان معتبر می‌ماند.

مسائل متضمن دوایر استفاده کنیم. تعدادی از این گونه مسائل در زیر می آیند. به خاطر سپردن این واقعیت که یك تصویر مرکزی که یك دایرهٔ S را به یك دایرهٔ S' بدل می کند، مماس بر S (یعنی خطی که با S تنها یك نقطهٔ مشترك دارد) را نیز به مماس بر S' بدل می کند، درحل مسائل اغلب تاحدی مفید واقع می‌شود. بدون استفاده از تصویرمرکزی، علی‌الاصول، حل این مسائل خیلی دشوار است.

۳۹. الف) ثابت کنید که درهر مثلث خطوط‌واصل از سه‌رأس به‌نقاط تماس اضلاع مقابل بادایرهٔ محاطی داخلی، متقارب‌اند (← شکل ۶۳ د).

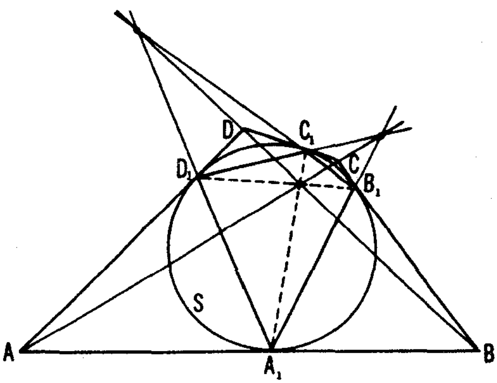
ب) گیریم ABC یك مثلث و S دایره‌ای باشدکه اضلاع AB، BC، CAی آن را بترتیب در M و N، P و Q، R و T مـی برد. فرض می کنیم C_1 و A_1 و B_1 بترتیب نقاط برخـورد مماسهای مـرسوم بر S در نقاط M و N، P و Q، R و T باشند. نشان دهیدکه خطوط AA_1 و BB_1 و CC_1 متقارب‌اند.

روشن است که مسألهٔ ۳۹ (الف) حالت حدی مسألهٔ ۳۹ (ب) است. بویژه وقتی که M بر N، P بر Q، و R بر T منطبق شوند، ۳۹ (ب) به‌۳۹ (الف) بدل می‌شود.

۴۰. اضـلاع چهارضلعی $ABCD$ در نقطه‌هـای A_1 و B_1 و C_1 و D_1 بریك دایرهٔ S مماس هستند (شکل ۵۷). نشان دهیدکه:

الف) نقاط تقاطع قطرهـای چهارضلعیهای $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ برهم منطبق‌اند.

ب) امتداد قطرهـای چهارضلعی $ABCD$ ازنقاط برخـورد اضلاع مقابـل



شکل ۵۷

چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ می‌گذرند.

۴۱. چهارضلعی $ABCD$ در یك دایرهٔ S محاط است و ضلعهای روبه‌رو در نقطه‌های P و Q، و قطرها درنقطهٔ O یکدیگر را قطع می‌کنند. ثابت کنید که:

الف) بینهایت مثلث محاط در S وجود دارندکه اضلاع آنها (یا امتدادشان) از نقاط P و Q و O می‌گذرند (دقیقتر بگوییم، اگر دوضلع از یك مثلث محاط در S از دوتا ازنقاط P و Q و O بگذرند، الزاماً ضلع‌سوم ازنقطهٔ‌سوم خواهدگذشت).

ب) بینهایت چهار ضلعی محاط در S وجود دارند که نقاط تلاقی اضلاع مقابل آنها بر P و Q منطبق‌اند (دقیقتر بگوییم، اگر دوضلع مقابل یك چهارضلعی محاط در S یکدیگر را در P ببرند و ضلع سوم از Q بگذرد، آنگاه ضلع مقابل به‌آن نیز از Q خواهد گذشت)، و نقاط تلاقی قطرهای همهٔ این نوع چهارضلعیها بر O منطبق‌اند.

ج) بینهایت چهارضلعی محاط در S وجود دارند که نقاط تقاطع قطرهای آنها بر O منطبق‌اند، یکی ازنقاط تلاقی اضلاع مقابل بر P منطبق است (دقیقتر بگوییم، اگر نقطهٔ تلاقی قطرهای یك چهارضلعی محاط در S بر O منطبق باشد و یك ضلع آن از P بگذرد، آنگاه ضلع مقابل به‌آن‌هم از P خواهد گذشت)، و دومین نقطهٔ تلاقی اضلاع مقابل (درهمهٔ این‌گونه چهارضلعیها) بر Q منطبق است.

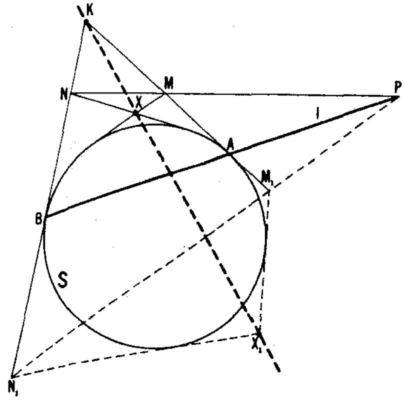
۴۲. S یك دایره و P نقطه‌ای درصفحهٔ S است. کلیهٔ قاطعهای S مار بر P را درنظرمی‌گیریم. هریك از این قاطعها یك‌جفت نقطه از S را مشخص می‌کند. به‌هر جفت از این نقاط، نقطهٔ تلاقی مماس درآنها بر دایره را مربوط می‌کنیم. مکان این نقاط تلاقی را پیدا کنید.

۴۳. دایرهٔ S ونقطهٔ P دریك صفحه مفروض‌اند. خط l بر P می‌گذرد و با S درنقاط A و B برخورد می‌کند. فرض می‌کنیم K نقطهٔ تلاقی مماسهای بر S در A و B باشد.

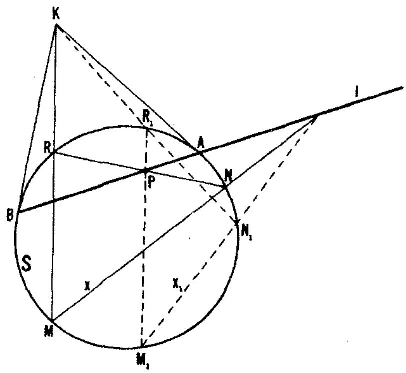
الف) یك خط متغیر مار بر P خطهای AK و BK را درنقاط M و N می‌برد (شکل ۵۸ (الف)). ثابت کنید که مکان X، نقطهٔ‌تقاطع دومین مماسهای بر S مرسوم از M و N، خطی است که بر K می‌گذرد (دقیقتر بگوییم، جزئی از این‌خط که در بیرون S قرار دارد).

ب) یك نقطهٔ متغیر R از دایرهٔ S را به‌نقاط P و K وصل می‌کنیم (شکل ۵۸ب). نشان‌دهید که x، خط واصل بین‌نقاط M و N دومین‌نقاط تقاطع خطوط RK و RP با S، از نقطهٔ ثابتی (مستقل‌از انتخاب R) واقع بر l می‌گذرد.

۴۴. در دایرهٔ مفروض یك چهارضلعی محاط کنیدکه



شکل ۵۸ الف

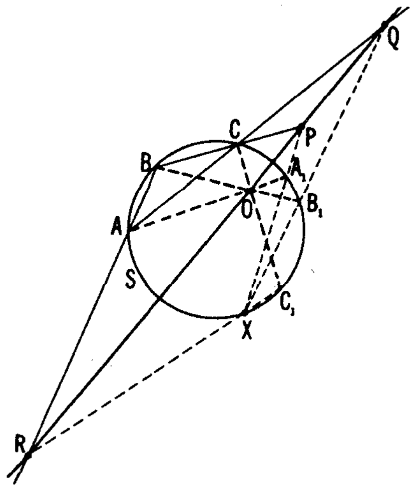


شکل ۵۸ ب

الف) نقطهٔ تلاقی قطرهای آن، M، و دو نقطهٔ K و L از دوضلع مقابل آن داده شده باشند.

ب) نقطهٔ تلاقی دوضلع مقابل و یک نقطه از هر یک از دوضلع دیگر داده شده باشد.

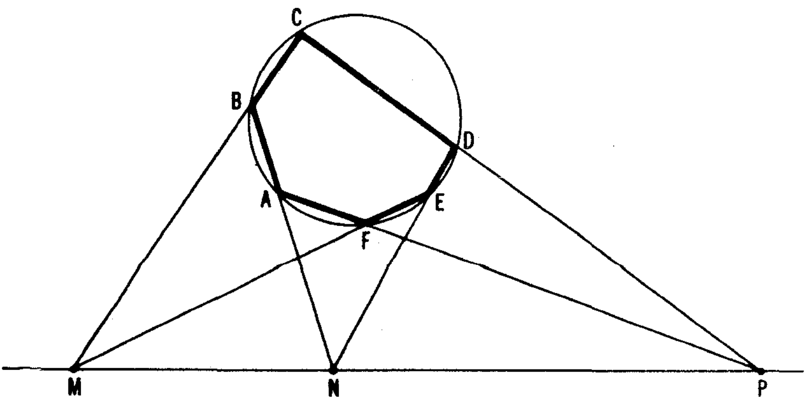
۴۵. گیریم سه وتر AA_1 و BB_1 و CC_1 از یک دایرهٔ S در یک نقطهٔ O متقاطع باشند و X نقطه‌ای دلخواه از S باشد. نشان دهید که P و Q و R، نقاط تلاقی خطوط XA_1 و XB_1 و XC_1 با اضلاع BC و CA و AB از مثلث ABC برخطی مار بر O واقع است (شکل ۵۹).



شکل ۵۹

۴۶. قضیهٔ پاسکال. نشان دهید که سه نقطهٔ تقاطع اضلاع مقابل یک شش‌ضلعی محاط در دایره همخط‌اند (شکل ۶۰).

قضیهٔ پاسکال یک بار دیگر (به‌شکل کلیتر) در بخش ۵ (← مسألهٔ ۸۰، ص ۱۱۹) آمده است.

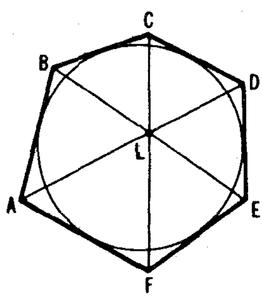


شکل ۶۰

۴۷. قضیهٔ بریانشن. ثابت کنید که سه قطر واصل به رأسهای مقابل یك شش‌ضلعی محیط بر یك دایره متقارب‌اند (شکل ۶۱).

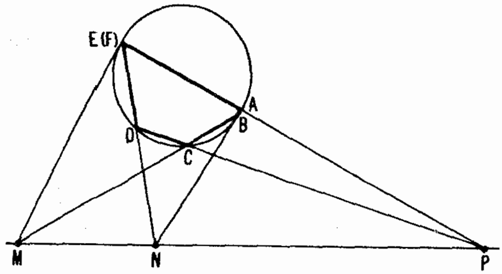
قضیهٔ بریانشن به‌مناسبت دیگری در بخش ۵، فصل ۲، مسألهٔ ۲۸۲* نیز آمده است. یك برهان نسبتاً جالب قضیهٔ بریانشن را در پیوست (← مسألهٔ ۹۸، ص ۱۵۲) پیدا خواهید کرد. برای ارتباط بین قضیه‌های بریانشن و پاسکال رجوع کنید به‌مسألهٔ ۶۳، بخش ۴، ص ۸۱.

برخی احکام‌مربوط به‌پنج‌ضلعیها، چهارضلعیها و سه‌ضلعیهای محیطی ومحاطی حالتهای خاص قضیه‌های بریانشن و پاسکال هستند. از این‌رو، مثلا فرض می‌کنیم که رأس F از شش‌ضلعی محاطی $ABCDEF$ بردایرهٔ‌محیطی آن حرکت کند و به‌نقطهٔ E نزدیك شود. در این صورت ضلع EF به‌سمت مماس بردایره در E میل می‌کند و درحالت حدقضیهٔ زیر به‌دست‌می‌آید: نقطهٔ تلاقی ضلع BC از پنج‌ضلعی $ABCDE$ محاط در یك دایره ومماس بر دایره در E، با نقاط تلاقی اضلاع AB و DE، CD و AE (شکل ۶۲الف) هم‌خط‌اند. همچنین اگر فرض کنیم که درشش‌ضلعی محاطی $ABCDEF$ رأس F بر E منطبق باشد ورأس D بر C، قضیهٔ زیر به‌دست می‌آید: نقطهٔ تلاقی اضلاع AB و CE از چهارضلعی محاطی $ABCE$ با نقطه‌ای که BC مماس بر دایره در E را می‌برد، و نقطه‌ای که AE مماس بر دایره در C را می‌برد سه نقطهٔ هم‌خط‌اند (شکل ۶۲ب). اگر درشش‌ضلعی انطباق رأسهای F و E، B و C، را فرض کنیم، بلافاصله‌می بینیم که نقطهٔ تلاقی مماسهای بر دایره در رأسهای

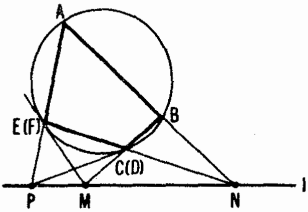


شکل ۶۱

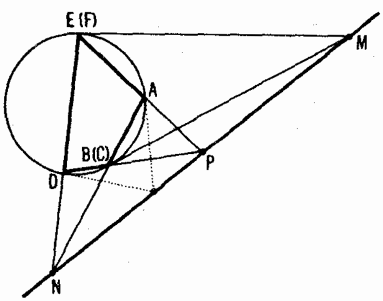
* عطف به‌مطالب فصل ۲ که هنوز از روسی ترجمه نشده است.



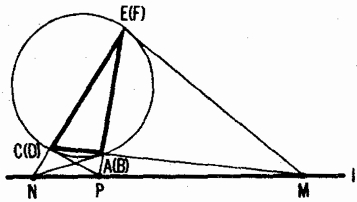
شکل ۶۲ الف



شکل ۶۲ ب



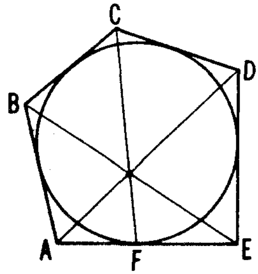
شکل ۶۲ ج



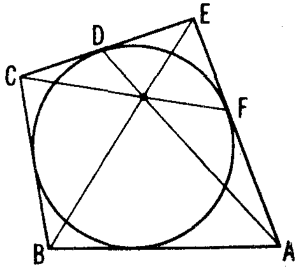
شکل ۶۲ د

E و B از یك چهارضلعی محاطی $ABDE$ با نقاط تلاقی اضلاع مقابل بریك خط واقع‌اند. روشن است که نقطهٔ تلاقی مماسهـای مرسوم بر دایره در نقاط A و D نیز برهمان خط قرار دارد (شکل ۶۲ ج). بالاخره فرض منطبق بودن رأسهای A و B، C و D، E و F، از یك شش‌ضلعی نتیجه مـی‌دهد کـه: نقاط تلاقی ضلعهای مثلث ACE با مماسهای مرسوم بر دایرهٔ محیطی آن در رأسهای مقابل، همخط‌اند (شکل ۶۲ د). می‌توانستیم همهٔ این قضایا را حالتهای خاص قضیهٔ پاسکال تلقی کنیم، کـه در آنها طولهای یك یا چند ضلع صفر شده‌اند وهمهٔ آنهـا را به‌روش قضیهٔ پاسکال ثابت کنیم (و در برخی موارد برهان بسیار ساده است).

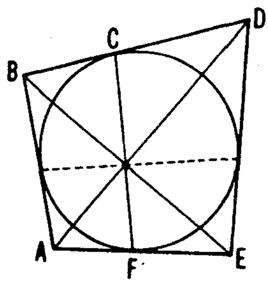
به‌همین طریق ممکن است تعدادی قضیهٔ تازه از قضیهٔ بریانشن استخراج کنیم. بدین‌منظور کافی است که فقط فرض کنیم شش‌ضلعی محیطی یك یا چند زاویهٔ 180° دارد. شکلهای ۶۳ الف ــ د احکام چندی را بـه‌ذهن القا می‌کنند که بیان آنها را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. (توجه دارید که قضیه‌های مندرج در شکلهای ۶۳ ج و



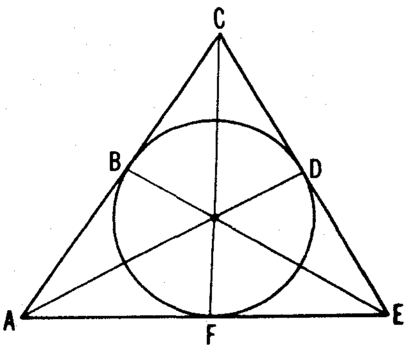
شکل ۶۳ الف



شکل ۶۳ ب



شکل ۶۳ ج



شکل ۶۳ د

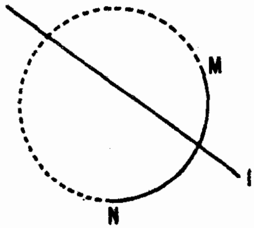
۶۳ د با قضیه‌های مسئله‌های ۴۰ (الف) و ۳۹ (الف) یکی هستند.)

۴۸. گیریم A نقطه‌ای بریک‌دایره باشد. با استفاده از ستارهٔ تنها مماسی بر این دایره در A رسم کنید.

این مسأله را با مسألهٔ ۵۴، بخش بعد ص ۹۰، مقایسه کنید.

۴۹. MN کمانی از یک‌دایرهٔ S و l خطی است که این کمان را در یک نقطه می‌برد (شکل ۶۴). نقطهٔ تقاطع دیگر l را با S، بااستفاده از ستارهٔ تنها، پیدا کنید.

این مسأله را با مسألهٔ ۵۵ بخش بعد، ص ۹۰ مقایسه کنید.



شکل ۶۴

۵۰. مثلث ABC و نقطهٔ Q داده‌شده‌اند. گیریم M و N و P محل تلاقی خطهای AQ و BQ و CQ بـا اضلاع BC و CA و AB باشند (شکل ۶۵). هرگاه S دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC و D' و E' و F' نقاط تماس آن با اضلاع BC و CA و AB باشند و مماسهای مرسوم از M و N و P بر S مثلث DEF را پدیـد آورند*، نشان دهید که سه‌خط واصل بین رأسهای متناظر در دومثلث DEF و $D'E'F'$ در Q متقارب‌اند.

۴. قطب و قطبی در صفحه
اصل دوگانی

قضیهٔ زیر درآنچه‌که بعداً خواهد آمد نقش مهمی دارد.

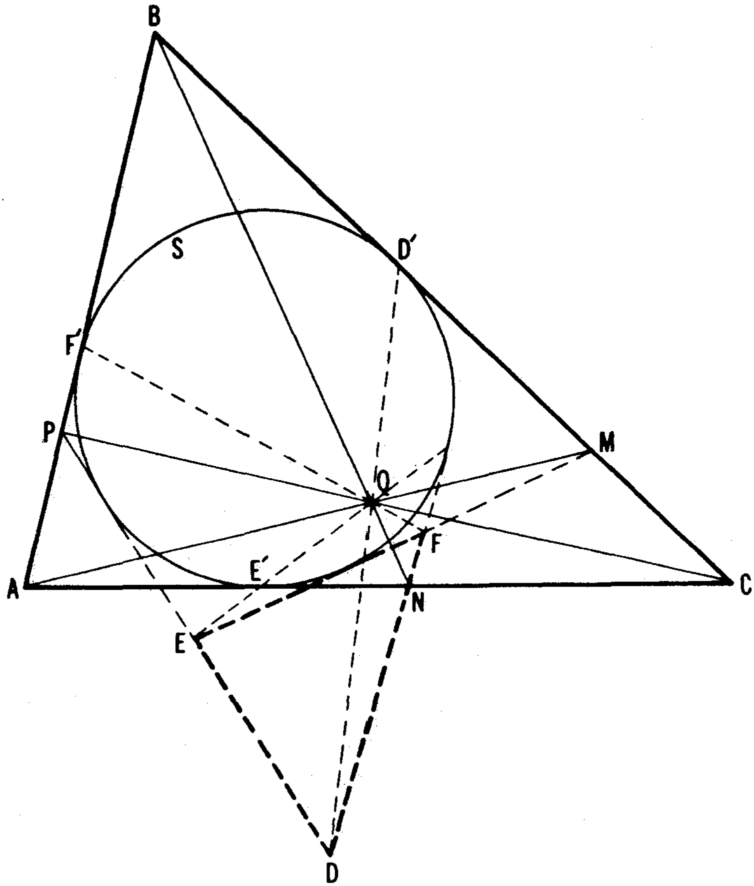
قضیهٔ ۱. اگر ازنقطهٔ P، ناواقـع بردایرهٔ S، همهٔ جفتهای قاطعهای ممکن را بردایره رسم‌کنیم و نقاط تلاقی آنها را با S به‌طور نمونه باحروف A و A_1، B و B_1، نشان دهیم،آنگاه نقاط تلاقی خطوط AB و A_1B_1 ونیز نقاط تلاقی خطوط AB_1 و A_1B همه بر یك خط p قرار دارند (شکل ۶۶ الف و ب).

خط p قطبی‌نقطهٔ P، ونقطهٔ P قطب‌خط p نسبت به‌دایرهٔ S نامیده می‌شود.**

---

* EF برمماس مرسوم از M، FD برمماس مرسوم از N، و DE برمماس مرسوم از P قرار دارد.

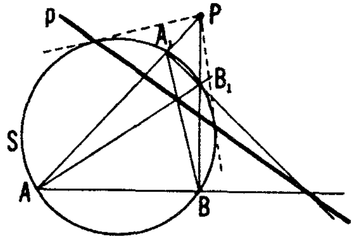
** قطبی یك نقطهٔ P نسبت به‌یك دایرهٔ S مکان مزدوجهای توافقی نقطهٔ P است نسبت به‌نقاط تلاقی قاطعهای ماربر P بادایرهٔ S (← دوتوضیحی که با خط ریزتر در صفحات ۴۹ و ۵۰ آمده است).



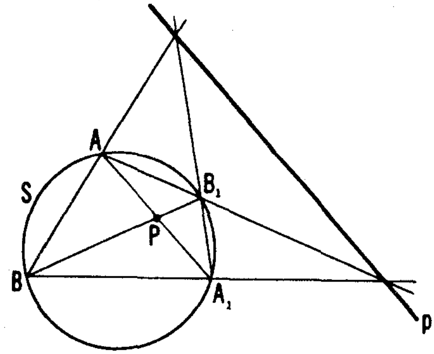
شکل ۶۵

در بدوامر ممکن است قضیهٔ ۱ چندان جالب به‌نظر نیاید، ولی نتایج ضمنی فوق‌العاده‌اش علت توجه ما را به‌آن کاملا توجیه خواهد کرد.

قضیه‌های ۱ و ′۱ بخش قبل به‌ما امکان می‌دهندکه برهان ساده‌ای برای قضیهٔ ۱ بیاوریم. زیرا اگر نقطهٔ P داخل دایرهٔ S باشد (شکل ۶۶ الف)، یك تصویرمرکزی مناسب می‌تواند S را به‌یك دایرهٔ S' و P را به‌مرکز آن بدل کند. (← قضیهٔ ۱، بخش ۳). در حالتی که P مرکز S باشد، قضیهٔ ۱ بدیهی است. زیرا دراین حالت

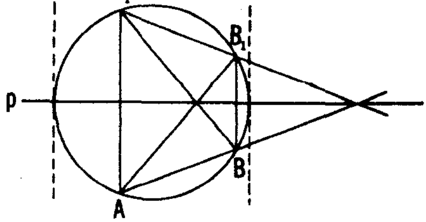


شکل ۶۶ ب

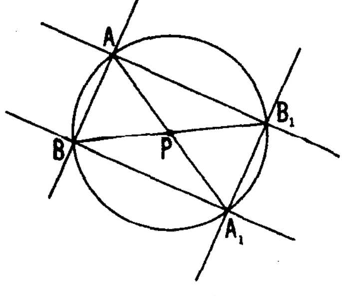


شکل ۶۶ الف

چهارضلعی ABA_1B_1 یك مستطیل می‌شود (همهٔ زوایـای آن روبه‌رو به‌قطرنـد)، $AB \| B_1A_1$ و $AB_1 \| BA_1$، و درنتیجه مکان مطلوب خط بینهایت صفحه خواهدشد (شکل ۶۷ الف). از اینجا نتیجه می‌گیریم که قضیهٔ ما باید به‌ازای هر نقطهٔ P در داخل S صادق‌باشد. اگر P بیرون S باشد (شکل ۶۶ ب)، آنگاه یك تصویرمرکزی مناسب یك‌خط ماربر P را، کـه بـا S متقاطع نیست، به‌خط بینهایت بـدل می‌کند (← قضیهٔ $1'$، بخش ۳)، و لذا P به‌یك نقطه دربینهایت بدل خواهد شد. ولی اگر P نقطه‌ای در بینهایت باشد، قضیهٔ ۱ بدیهی است. زیرا، دراین‌صورت چهارضلعی AA_1B_1B ذوزنقه‌ای است محاط‌دریك دایره (یعنی، ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین) که امتدادهای قاعده‌هایش ثابت‌اند (شکل ۶۷ ب)، ونقاط تلاقی اضلاع ABوA_1B_1،



شکل ۶۷ ب

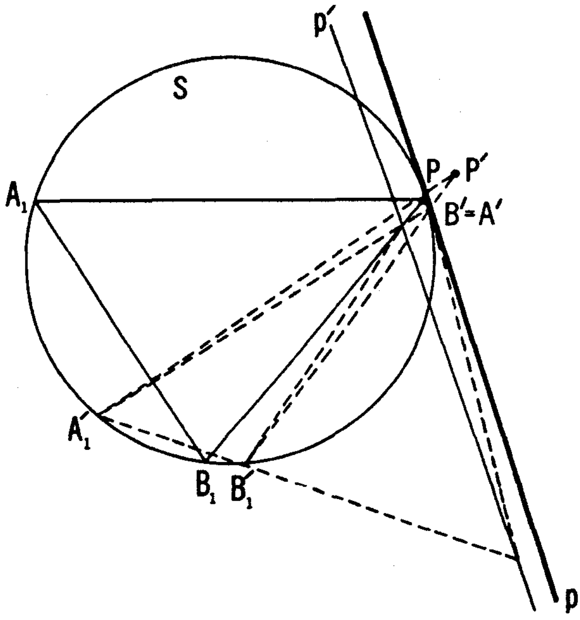


شکل ۶۷ الف

و اقطار A_1B و AB_1 برمحور تقارن ذوزنقه یعنی برقطری از S عمود برامتداد قاعده‌های آن واقع می‌شوند. این امر ایجاب می‌کند که قضیهٔ ۱ به‌ازای هر نقطهٔ P واقع در خارج S نیز صادق باشد.

اگر P بر S باشد، مکان قضیهٔ۱ بیمعنی می‌شود، زیرا در آن صورت نقاط A و B بر P منطبق‌اند، و چهارضلعی ABB_1A_1 به‌مثلث A_1B_1P بدل می‌شود، خطوط A_1B و B_1A در P تلاقی می‌کنند و خط AB نامعین می‌شود (شکل ۶۸). ولی، به‌آسانی دیده می‌شود که‌اگر یك‌نقطهٔ P' که بر S نیست، به‌هرطریقی به P نزدیك شود، p' قطبی P' به‌مماس بر S در P نزدیك می‌شود (← شکل ۶۸). بنابراین طبیعی است که قطبی نقطهٔ P واقع بر S (نسبت به S) را مماس p بر S در P تعریف کنیم.

اگر P درون S باشد، قطبی p نسبت به S تماماً بیرون S قرار می‌گیرد، و اگر P بیرون S باشد، قطبی آن، p، S را می‌برد (شکل ۶۶). به‌آسانی ثابت می‌شود که اگر نقطهٔ P بیرون‌دایرهٔ S باشد، قطبی‌آن p، خطی است‌که نقاط‌تماس مماسهای

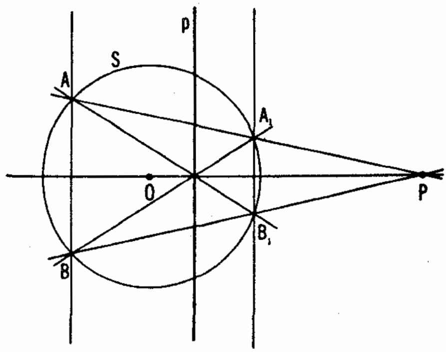


شکل ۶۸

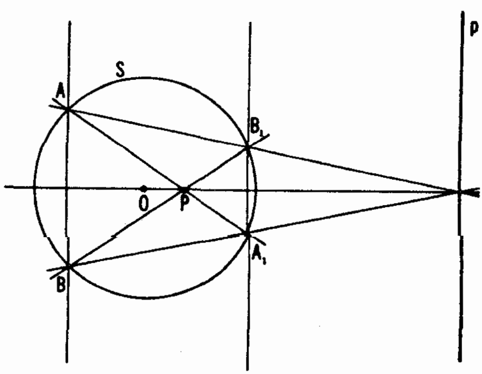
مرسوم از P بر S را بههم وصل می‌کند (شکل ۶۶ ب). برای اثبات این مطلب توجه داشته باشید که این حکم درست است وقتی P نقطه‌ای در بینهایت باشد (← شکل ۶۷ ب). اکنون نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود، زیرا یك تصویر مرکزی که P را به‌یك‌نقطهٔ P' و S را به‌یك‌دایرهٔ S' بدل کند، قطبی P نسبت به‌S را هم به‌قطبی P' نسبت به‌S' بدل می‌کند ومماسهای بر S را به‌مماسهای بر S'.

ملاحظه می‌کنیم که p، قطبی یك نقطهٔ P نسبت به‌یك دایرهٔ S، برخط واصل بین P و O، مرکز دایرهٔ S، عمود است. بعکس، P، قطب یك‌خط p، برعمودی واقع است که از O، مرکز S، بر p فرود آید. این مطلب، از توجه به‌تقارن نتیجه می‌شود (شکل ۶۹ الف و ب).

رسم قطبی یك‌نقطهٔ P و نیز تعیین قطب یك‌خط نسبت به‌یك‌دایرهٔ مفروضS، در تعاریف این‌مفاهیم مستتر است (← شکلهای ۶۶ (الف) و (ب)). این هردوعمل را می‌توان با ستارهٔ تنها انجام‌داد، موردی‌که ما بعداً عمل خواهیم‌کرد. قضیهٔ زیر مهمترین قضیه دربارهٔ قطب و قطبی است:



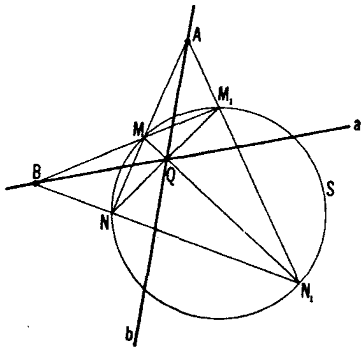
شکل ۶۹ الف



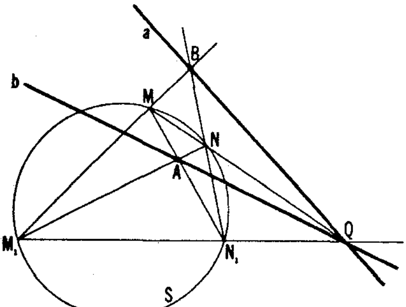
شکل ۶۹ ب

قضیهٔ ۲ · اگر نقطهٔ A برخط b، قطبی نقطهٔ B، قرار داشته باشد، B نیز بر خط a، قطبی نقطهٔ A، قرار دارد (شکل ۷۰).

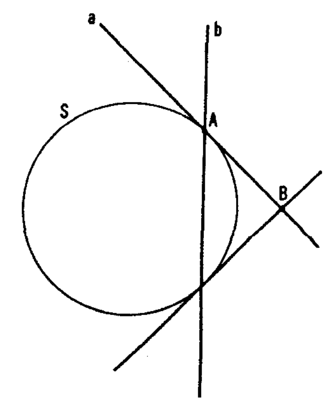
این ویژگی نتیجهٔ مستقیم تعریف است. زیرا اگر A نقطه‌ای در داخل دایرهٔ S باشد، B الزاماً بیرون S خواهد بود (شکل ۷۰ الف)؛ درغیر این‌صورت قطبی b تماماً بیرون S قرار خواهد گرفت، کــه مغایر این حقیقت است که نقطهٔ داخلی A بر b قرار دارد. چون A برقطبی B قرار دارد، دوقاطع مار بر B وجود دارند که S را درنقاط M و M_1، و N و N_1، می‌برند چنانکه A نقطهٔ تلاقی قطرهای چهارضلعی MM_1N_1N است. اما در این‌صورت قطبی A خط BQ است، که Q نقطهٔ تقاطع



شکل ۷۰ ب



شکل ۷۰ الف



شکل ۷۰ ج

MN و M_1N_1 است، و معنی این نکته این است که قطبی A از B مـی گذرد. یك استدلال‌مشابه به اثبات قضیهٔ ۲ را تمام‌می کند وقتی A بیرون S قرار داشته باشد (در آن‌حالت B یا می‌تواند درون S باشد ـ مثل شکل ۷۰ (الف)، کـه فقط کافی است جـای A و B را باهم عوض کنیم ـ یـا بیرون S است مثل شکل ۷۰ (ب). اگر A نقطه‌ای از S باشد، برهان قضیهٔ ۲ از شکل ۷۰ ج نتیجه می‌شود.

۵۱. ثابت‌کنید کـه اگر فاصلهٔ یك‌نقطهٔ A از O، مرکز دایرهٔ S به‌شعاع ۱، برابر d باشد، فاصلهٔ O از قطبی نقطهٔ A نسبت بـه S، یعنی ازخط a، مساوی $1/d$ خواهد بود.

۵۲. A و B دو نقطه‌اند، a و b قطبیهای آنها نسبت به‌یك دایرهٔ S به‌مرکز O؛ AP فاصلهٔ A از b، و BQ فاصلهٔ B از a است. نشان دهید که:

$$\frac{OA}{AP}=\frac{OB}{BQ}$$

۵۳. الف) گیریم $ABCD$ یك چهارضلعی محاط در دایرهٔ S بـاشد. نشان دهید کـه عمود مرسوم از مرکز S برخط واصل بین‌نقاط تلاقی اضلاع مقابل این چهارضلعی ازنقطهٔ تلاقی قطرهایش می گذرد.

ب) حکم بالا را بااین فرض که چهارضلعی $ABCD$ محیط بر S باشد ثابت کنید.

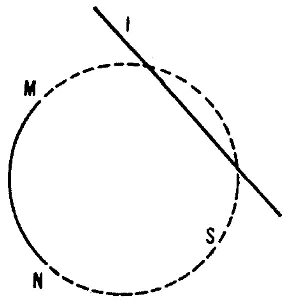
۵۴. گیریم A نقطه‌ای در بیرون دایرهٔ S باشد. بااستفاده ازیك‌ستارهٔ تنها، از A مماسهایی بردایرهٔ S رسم کنید.

این مسأله را بامسألهٔ ۴۸ بخش ۳، ص ۸۳ مقایسه کنید.

۵۵. گیریم MN قوسی‌ازیك‌دایرهٔ S باشد، و l خطی نامتقاطع با آن (شکل ۷۱). با استفاده از یك ستارهٔ تنها نقاط تقاطع l و S را پیدا کنید.

این مسأله را با مسألهٔ ۴۹ بخش ۳، ص ۸۳ مقایسه کنید.

۵۶. منظور از خطکش موازی خطکشی است با دولبهٔ موازی. چنین‌خطکشی را مـی‌توان برای رسم دوخط موازی l_1 و l_2 به‌کار برد که فاصلهٔ آنهـا a پهنای خطکش باشد و l_1 از دو نقطهٔ A و B بگذرد (شکل ۷۲ الف)، یا اینکه l_1 از A و

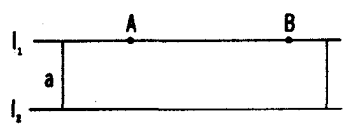


شکل ۷۱

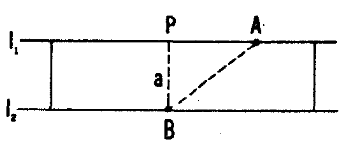
l_2 از B بگذرد (شکل ۷۲ ب)*. نشان‌دهید که فقط بااستفاده از یك خطکش موازی به‌پهنای a ممکن است نقاط تلاقی خط مفروض l را با دایرهٔ به‌مرکز مفروض A و شعاع a پیدا کرد، ولو اینکه دایره رسم نشده باشد.

خطکش موازی یك ابزار رسم بسیار متداول است، و می‌خواهیم تعیین کنیم که چه‌ترسیمهایی را می‌توان بااستفادهٔ تنها ازچنین خطکشی انجام داد. روشن است که همهٔ ترسیمهایی را کـه می‌توان بـه وسیلهٔ یك ستارهٔ تنها انجام داد با خطکش موازی نیز می‌توان انجام داد. ولـی عکس‌آن صحیح نیست. مثلا چنانچه خواهیم دید، دربخش۵، ممکن نیست از یك‌نقطهٔ M خطی‌موازی باخط مفروض l بااستفاده از ستارهٔ تنها رسم‌کرد (← ص ۱۲۷)؛ درعین‌حـال روشن است کـه ممکن است ترسیمهایی از این‌نوع را تنها بااستفاده از خطکش‌موازی انجام داد (← مسألهٔ ۳ (ب)، بخش۱، ص ۲۰).

به‌آسانی دیده می‌شود که همهٔ ترسیمهایی را که می‌توان با یك‌خطکش‌موازی



شکل ۷۲ الف



شکل ۷۲ ب

---

* روشن‌است که حالت اخیر فقط زمانی صادق است که $AB \geqslant a$.

انجام داد باستاره و پرگار نیز می‌توان انجام داد (زیرا با استفاده از این ابزارها می‌توان هردو ترسیمی را که درشکل ۷۲ (الف) و (ب) نشان داده‌شده‌اند رسم کرد؛ رسم خطهای l_1 و l_2 درشکل ۷۲ ب، بدل‌می‌شود به‌تعیین رأس P ازمثلث قائم‌الزاویهٔ ABP، که وتر AB وضلع $BP=a$ از آن داده شده‌است). در بخش ۵ نشان خواهیم داد که بعکس، همهٔ ترسیمهایی را که‌می‌توان باستاره و پرگار انجام داد،می‌توان با خطکش‌موازی تنها انجام داد. دراین ارتباط ترسیم موضوع‌مسألهٔ ۵۶ نقش اساسی دارد.

۵۷. نشان‌دهید که خطوط واصل بین‌رأسهای مثلث ABC ونقاط A'و B'و C'، قطبهای اضلاع مقابل به‌این رأسها نسبت به‌یك دایرهٔ S، متقارب‌اند.

قضیهٔ‌مسألهٔ ۵۷ را می‌توان به‌ترتیب‌زیر بیان کرد. دومثلث ABC و $A'B'C'$ را نسبت به‌یك‌دایره‌قطبی معکوس* یکدیگرگوییم هرگاه‌اضلاع $\triangle A'B'C'$ قطبیهای رأسهـای متناظر $\triangle ABC$ بـاشند و بعکس. قضیهٔ ۲ ایجاب می‌کند کـه اضلاع $\triangle ABC$ نیز قطبیهای رأسهای $\triangle A'B'C'$ باشند. لذا حکم قضیهٔ مسألهٔ ۵۷ این است که مثلثهای‌قطبی معکوس‌همواره تصویر منظری یکدیگرند (←مسألهٔ ۲۲،بخش ۲، و توضیحاتی که پس‌از آن آمده است، ص ۴۰). از اینجا نتیجه می‌شود که نقاط تلاقی اضلاع متناظر مثلثهای ABC و $A'B'C'$ همخط‌انـد (← مسألهٔ ۲۲). [احکام مسائل ۳۹ (الف) و (ب)ی بخش ۳ (ص ۷۷)، حالتهـای خاص قضیهٔ مسألهٔ ۵۷ هستند.]

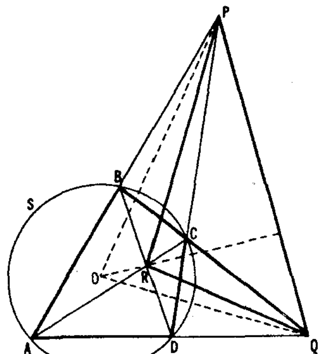
۵۸. دومثلث ABC و $A_1B_1C_1$ و یك‌دایرهٔ S داده‌شده‌اند. ثابت‌کنید که اگر خطهای واصل بین رأسهای متناظر این دو مثلث متقارب باشند، خطهای واصل بین قطبهای اضلاع $\triangle ABC$ (نسبت به S) وقطبهای متناظر به‌اضلاع $\triangle A_1B_1C_1$ نیز متقارب‌اند. (به‌عبارت دیگر اگر دومثلث تصویر منظری یکدیگر بـاشند، مثلثهای قطبی معکوس آنهـا نیز تصویر منظری یکدیگرند. شرحهای پس‌از مسألـهٔ قبل را مطالعه کنید.)

۵۹. مثلثی را نسبت به‌یك دایره قطبی معکوس خودش گویند هرگاه اضلاع آن‌قطبیهای رأسهای مقابلش‌باشند. ثابت‌کنید که به‌ازای‌هرمثلث منفرج‌الزاویهٔ ABC دایرهٔ منحصر به‌فـردی وجود دارد کـه این‌مثلث نسبت به‌آن قطبی معکوس خودش است؛ و نیز مرکز این دایره نقطهٔ برخورد ارتفاعهای $\triangle ABC$ است. یـك مثلث

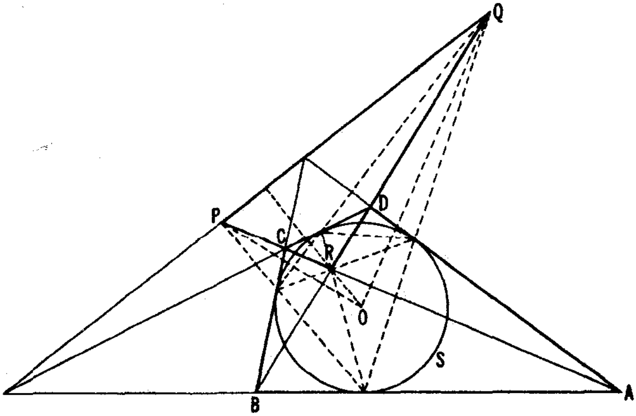
* اصطلاح «قطبی معکوس»، درمتن اصلی «قطبی» بوده‌است. انتخاب این‌اصطلاح به‌علت سابقهٔ کاربرد آن درکتابهای درسی ماصورت گرفته است. ـ م.

قائم‌الزاویه یا حادة‌الزاویه نسبت به‌هیچ دایره‌ای قطبی معکوس خودش نیست.

یادآوری می‌کنیم که قضیهٔ 1 ایجاب می‌کند که اگر یك چهارضلعی را در یك دایرهٔ S محاط کنیم، مثلثی که رأسهای آن نقاط برخورد قطرهای این چهارضلعی و نقاط برخورد اضلاع رو به روی آن هستند، نسبت به S قطبی معکوس خودش است (شکل ۷۳ الف). همچنین اگر یك چهارضلعی را بر یك دایرهٔ S محیط کنیم، مثلثی که دوضلعش برقطرهای این چهارضلعی و ضلع سومش برخط واصل بین نقاط تلاقی اضلاع مقابل آن واقع‌اند، نسبت به S قطبی معکوس خودش می‌باشد (شکل ۷۳ ب).



شکل ۷۳ الف



شکل ۷۳ ب

[اگر نقاط تماس اضلاع چهارضلعی محیط بردایرهٔ S درشکل ۷۳ (ب)، رأسهای چهارضلعی محاط در S شکل ۷۳ (الف) گرفته‌شوند، آنگاه $\triangle PQR$ درشکل ۷۳(ب) بر $\triangle PQR$ درشکل۷۳ (الف) منطبق‌می‌شود؛ اثبات این‌حکم به‌عهدهٔ خواننده گذارده می‌شود.] نتیجهٔ مسألهٔ ۵۹ ایجاب می‌کند که هردو مثلث مورد نظر منفرج‌الزاویه باشند و نقاط برخورد ارتفاعات آنها برمرکز S منطبق باشد.

مفهوم قطبی نقطه نسبت به‌دایره به‌ما اجازه می‌دهد که نوعی تبدیل ازصفحه را، کــه در اثبات بسیاری از قضایا مفیداست، تعریف کنیم. فرض می‌کنیم S دایرهٔ ثابتی باشد و F شکل مسطحی که ازنقاط وخطوط تشکیل شده است. شکل F' راکه هر نقطه‌اش قطب یك‌خط F و هرخطش قطبی‌یك‌نقطهٔ F نسبت به‌دایرهٔ S است‌در نظر می‌گیریم. تبدیلی‌که شکل F' را بــا شکل F متناظر می‌سازد قطبی معکوس‌سازی یا تبدیل قطب و قطبی* می‌نامیم. بعضی‌اوقات ما اصطلاح‌تبدیل قطبی را نیز به‌کار خواهیم برد.

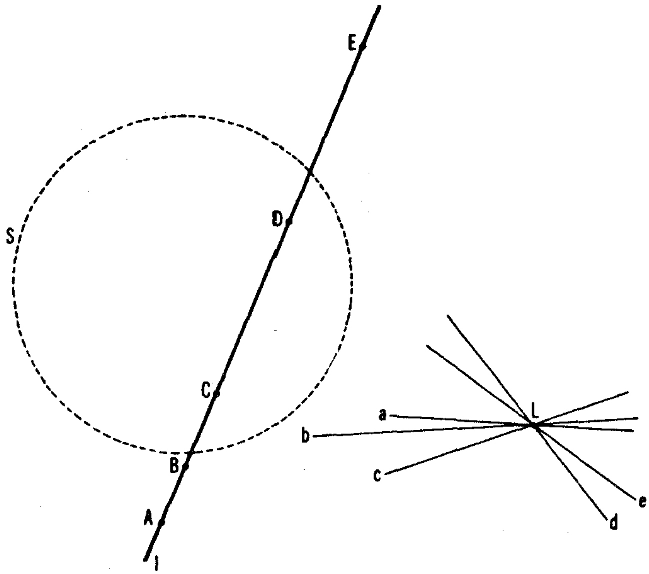
البته قطب و قطبی تبدیلی به‌معنایی‌که ما تاکنون به‌کار برده‌ایم یعنی، نگاشتی کــه نقاط را به‌نقاط بدل می‌کند (تبدیل نقطه‌ای) نیست. بنابر تعریف، قطب وقطبی نگاشتی است که خطها و نقطه‌ها را باهم عوض می‌کند. ازاین قرار، قطب و قطبی باهمهٔ تبدیلهایی که تاکنون دیده‌ایم (حرکات، تشابهات، تصاویر) تفاوت دارد. در آنچه که‌درزیر می‌آید (← بخش۵، فصل۲**)ما به‌موارد دیگری‌از تبدیلها برخواهیم خورد که تبدیلهای نقطه‌ای نیستند.

تعریفی‌که ازقطب وقطبی کردیم، تا آنجا که به‌مسائل زیرین مربوط می‌شود، کاملا رضایتبخش است. بعلاوه قطب و قطبی را باید تبدیل صفحه به‌خودش، یا بهتر بگوییم، تبدیلی درمجموعه‌ای از نقاط و خطوط صفحه بگیریم که هرنقطه را به‌یك خط وهرخط را به‌یك‌نقطه بدل می‌کند. بعلاوه، به‌موجب قضیهٔ ۲، نقاطی‌که بریك خط l قرار دارند به‌خطوطی بدل می‌شوند‌که از یك نقطهٔ L، نگارهٔ‌خط l، می‌گذرند (شکل ۷۴ الف). در

---

* معهذا «قطب و قطبی» اغلب معرف تبدیل کلیتری است (← ص۹۶) که در آن یا نقاط واقع برقطبیهایشان به‌جای یك دایره یك قطع مخروطی تشکیل می‌دهند و یا اصلا چنین نقاطی وجود ندارند. «تبدیل قطب و قطبی» در این‌کتاب با «قطبی معکوس‌سازی» مترادف گرفته شده است.

** فصلی‌که از روسی ترجمه نشده است.



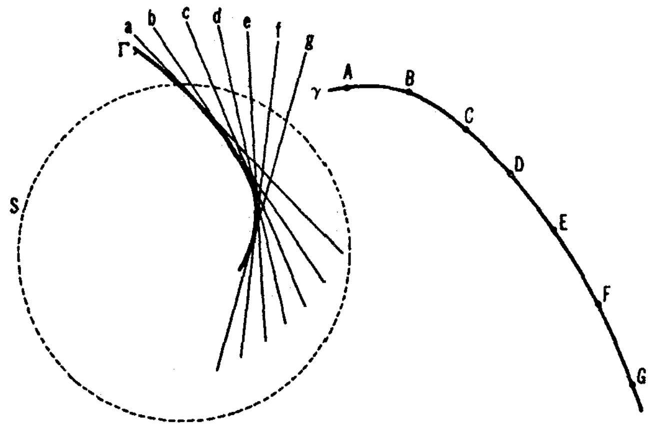
شکل ۷۴ الف

قطب و قطبی، یك منحنی γ، که به‌عنوان مجموعه‌ای از نقاطش تلقی می‌شود، به‌یك منحنی جدید Γ بدل می‌شود که باید پوش مماسهایش انگاشته شود (شکل ۷۴ ب)*.

---

* این یك مثال مناسب و جالبی است. روشن است که قطب وقطبی نسبت به‌یك دایرهٔ S به‌مرکز O و شعاع ۱، یك دایرهٔ s به‌مرکز O وشعاع r را به‌یك دایرهٔ s' به‌شعاع $1/r$ بدل‌می‌کند، که s مجموعهٔ نقاط آن و s' مجموعهٔ‌مناسبی ازمماسهای آن انگاشته می‌شود، یا بعکس (یك نقطهٔ A به‌فاصلهٔ r از O به‌خط a به‌فاصلهٔ $1/r$ از O بدل می‌شود. (← مسألهٔ ۵۱ در بالا). حال فرض می‌کنیم B مرکز دایرهٔ s (که در این مقام مناسب است آن را بامجموعهٔ مماسهای a یکی بگیریم) بر O منطبق نباشد (مانند قبل، شعاع s برابر r گرفته شده است). اگر b و A بترتیب نگاره‌های B و a براثر قطب و قطبی نسبت به S باشند، آنگاه به‌موجب نتیجهٔ مسألهٔ ۵۲ داریم $OA/AP = OB/BQ (= OB/r)$، که AP فاصلهٔ A از b و $BQ = r$ فاصلهٔ B از a است. بنابراین‌مجموعهٔ خطوط a (یعنی دایرهٔ s) به‌مجموعهٔ («مکانها») s' از نقاط A بدل می‌شود به‌طوری که

←



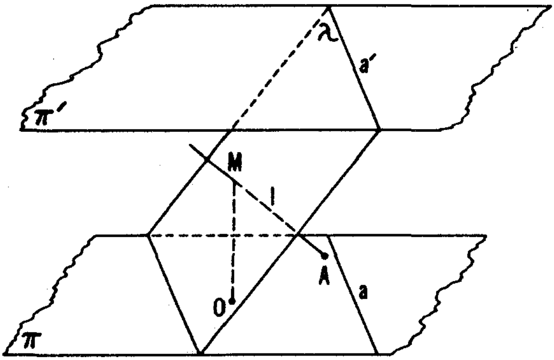
شکل ۷۴ ب

یادآوری می‌کنیم که تبدیل قطب و قطبی یك صفحه به‌خودش را مـی‌توان بدون توسل به‌قضیهٔ ۱، بااستفاده از ترسیم گنجسنجی به‌شرح زیر، تعریف‌کرد: گیریم π و π' دوصفحهٔ موازی‌باشند و M نقطه‌ای متساوی‌الفاصله از هردو (شکل ۷۵). به‌هرنقطهٔ A از π (بجز O، پای عمود مرسوم از M)، یك‌خط a را که به‌طریق زیر به‌دست می‌آید مربوط‌می‌کنیم: برنقاط M و A خط l را می‌گذرانیم؛ ازنقطهٔM صفحهٔ λ را بر l عمود می‌کنیم، فصل مشترك صفحهٔ λ و π' را a' می‌نامیم. حال π' را برصفحهٔ π «می‌چکانیم»

→

$$OA/AP = \text{مقدار ثابت}\ (=OB/r)$$

یعنی به مکان نقاط A بـدل می‌شود کـه نسبت فواصلش از O و b ثابت (و مساوی OB/r) است. اما چنانکه می‌دانیم این‌مکان یك بیضی است (اگر $OB/r<1$، یعنی اگر O داخل s باشد)، یك سهمی است (اگر $OB/r=1$، یعنی اگر O بر s باشد)، یا هذلولی است (اگــر $OB/r>1$، یعنی اگر O خارج s باشد). از اینجا نتیجه می‌شود که درقطب و قطبی، یك‌دایرهٔ s یا به‌یك دایره (حالتی که مرکز s بر مرکز دایرهٔ S منطبق است)، یا به‌یك بیضی، سهمی، یـا هذلولی بـدل می‌شود.[← بازنگری درهندسه، مجلد ۱۹ از این مجموعه] این واقعیت بسیاری‌از ویژگیهای‌مقاطع مخروطی را ایجاب می‌کند.



شکل ۷۵

(یعنی تصویر قائم π' را برصفحهٔ π به‌دست می‌آوریم)، بدین‌ترتیب a' را به‌خط a در صفحهٔ π بدل‌می‌کنیم. به‌آسانی می‌توان نشان‌داد که تبدیلی که‌خط a را با نقطهٔ A متناظر مـی‌سازد، قطب و قطبی نسبت به‌دایرهٔ بـه‌مرکز O و شعاع OM است. دراینجا فرصتی نیست که‌ما از این‌نتیجه استفاده کنیم و اثبات آن‌را به‌عهدهٔ خواننده‌می‌گذاریم. به‌آسانی می‌توان همهٔ ویژگیهای قطب و قطبی را از تعریفی‌که هم‌اکنون کردیم استخراج کنیم؛ توصیه می‌کنیم‌که خواننده سعی‌کند خود آن را آزمایش کند.

تبدیل قطب و قطبی اغلب می‌تواند یك مسأله را به‌مسألهٔ ساده‌تری بـدل‌کند (مثلاً مسألهٔ ۶۷ و ۶۸ کـه در زیر آمده‌اند). واقعیت مهمتر اینکـه قطب و قطبی به‌عنوان وسیله‌ای برای به‌دست‌آوردن نتایجی تازه از نتایج قدیم به‌کـار می‌رود. برای روشن‌ساختن این‌مطلب، اشاره می‌کنیم‌که وقتی ما تصاویرمرکزی یا موازی را برای حل مسائل در بخشهای پیشین به‌کار بردیم، منظور ما تبدیل یك مسألهٔ مفروض به‌حالت خاص‌ساده‌ای از همان مسأله‌بود (مثلاً، دربخش ۱ به‌جای‌یك مثلث دلخواه یك‌مثلث متساوی‌الاضلاع گذاشتیم، و دربخشهای ۲ و ۳ به‌جای دوخط‌دلخواه دوخط موازی گذاشتیم). وقتی ما از قطب و قطبی استفاده می‌کنیم، معمولاً به‌حالت خاصی ازمسألهٔ مفروض نمی‌رسیم؛ زیرا تبدیل قطب و قطبی با گذاردن خط به‌جای نقطه، و نقطه به‌جای‌خط، یك‌شکل را به‌شکل کاملاً متفاوتی بدل می‌کند. ازاینجا نتیجه‌می‌شود که هرگاه تبدیل قطب و قطبی را برای شکلی کـه به‌گزاره‌ای مربوط می‌شود به‌کار بریم، شکلی به‌دست می‌آوریم که به‌گزارهٔ تازه‌ای مربوط می‌شود. این‌گزارهٔ تازه

ممکن است از گزارهٔ اصلی ساده‌تر باشد و با اثبات آن، گزارهٔ اصلی را نیز ثابت کرده باشیم. اگر گزارهٔ تازه ساده‌تر از گزارهٔ اصلی نباشد، بازهم استفاده می‌کنیم، زیرا یك برهان برای یکی ازآن گزاره‌ها، برهانی معتبر برای دیگری نیز هست.

هر دو قضیهٔ حاصل از یکدیگر به‌کمك قطب و قطبی قضایای دوگان نامیده می‌شوند. وجود جفتهای قضایایی کــه هریك از آنها دوگـــان دیگری است به اصل دوگانی معروف است، که ما بعداً به‌وسیلهٔ مثالهای زیادآن را نشان خواهیم داد.

اصل دوگانی، که براساس مفهوم قطب و قطبی در صفحه نهاده شده، به‌مـــا امکان می‌دهدکه باتعویض واژه‌هـــای «نقطه» و «خط»، ازیك قضیه قضیهٔ تازه‌ای به‌دست آوریم. درآغاز این‌بخش در تعریف قطب و قطبی ازقضیهٔ ۱ استفاده کردیم. اهمیت آن آنقدرها دراین نیست‌که به‌ما امکان می‌دهد باهرنقطه یك خط معین و بـــا هرخط نقطهٔ معینی را متناظر سازیم ــ این‌گونه تناظرها کاملا عادی هستند (مثلا ما می‌توانیم به یك نقطهٔ P محور تقارن p را که با P و نقطهٔ ثابتی چون O معین می‌شود، مربوط کنیم، با O مثلا خط بینهایت را، و بایك نقطه در بینهایت خط ماربر O، عمود براَمتدادی را کـــه نقطهٔ بینهایت به‌وسیلهٔ آن معین‌می‌شود مربوط سازیم) ــ بلکه دراین‌است‌که به‌ما اجازه‌می‌دهد به‌یك نقطهٔ واقع بریك خط، خطی ماربر نقطهٔ متناظرش را مربوط کنیم (ـــ← قضیهٔ ۲، ص ۸۹). ازآنجا نتیجه می‌شودکه هر تناظری ازنوع اخیر، یعنی هرتناظری که به‌یك نقطه (خط) یك خط (نقطهٔ) منحصر به‌فرد، و به‌یك نقطه وخط ماربرآن یك‌خط و یك نقطه واقع برآن را مربوط سازد می‌تواند به‌وسیلهٔ یك تبدیل قطب و قطبی نسبت به‌یك دایرهٔ S، و احتمالا یك تصویرمرکزی صفحه برروی خودش، یا یك‌نیمدور و یك تصویرمرکزی تحقق یابد.*

یك توضیح دیگر. ماممکن‌است این‌اثر را برخواننده گذاشته باشیم‌که تبدیلهای قطب و قطبی اصولا وسیله‌ای برای به‌دست‌آوردن قضایای جدید از قضایای قدیم‌اند، در حالی‌که تصویرهای موازی و مرکزی منحصراً به‌عنوان تکنیکهایی برای اثبات‌حکمهای هندسی به‌کارمی‌روند. این‌تشخیص کاملا درستی نیست، زیرا چنانکه دربالا متذکر شدیم، تبدیلهای قطب و قطبی‌می‌توانند اغلب برای‌اثبات حکمهای‌هندسی مفروض مورداستفاده قـــرارگیرنـــد و چنانکه توضیح خواهیم داد، تصاویـــر مرکزی و موازی تصادفاً برای

---

* دراین ارتباط به‌فصل ۸ کتاب زیر مراجعه کنید:

H. S. M. Coxeter's *Projective Geometry*, Blaisdell Publishing Co., New York, 1964.

به‌دست‌آوردن قضیه‌های جدید از قضیه‌های قدیم به‌کار می‌روند: با استفاده از یك تصویر مرکزی یا موازی برای نمودار یك قضیه، اغلب به قضیهٔ تازه‌ای هدایت می‌شویم. قضیه‌ای را در نظر بگیرید که فقط متضمن مفاهیمی باشد که بر اثر تصاویر موازی محفوظ می‌مانند (مثلاً، قضیه‌ای از هندسهٔ آفین؛ ← پیشگفتار این کتاب). روشن است که به‌کار بردن تصویر موازی برای چنین قضیه‌ای نمی‌تواند قضیهٔ تازه‌ای به‌دست دهد (درست مانند حرکت، که وقتی برای نمودار یك قضیه به‌کار برده می‌شود، هرگز ما را به قضیهٔ تازه‌ای هدایت نمی‌کند. برای بحث مفصلتر در این موضوع، به پیشگفتار جلد اول کتاب مراجعه کنید) ولی ممکن است ما را به حالت خاص ساده‌ای از همین قضیه هدایت کند؛ مثالهای مناسب بسیاری از این نوع در بخش ۱ داده شده‌اند. ازسوی دیگر، استعمال یك تصویر موازی برای نمودار قضیه‌ای که شامل مفاهیمی غیر از مفاهیم آفین باشد، ممکن است قضیهٔ تازه‌ای بدهد؛ مثلاً، از تصویر یك مثلث قائم‌الزاویه بر یك مثلث متساوی‌الاضلاع، می‌توانیم از هر قضیه‌ای که به یك مثلث قائم‌الزاویه مربوط می‌شود، قضیهٔ تازه‌ای به‌دست آوریم. همچنین استفاده از تصویر مرکزی برای قضایای آفین ممکن است ما را به قضیه‌های تازه‌ای سوق دهد؛ مثالهای مناسب قبلاً داده‌شده‌اند (← مسائل ۲۹ و ۳۱ و ۳۲ (الف) و ۳۳ در بخش ۱). روی‌هم رفته، بهتر است بگوییم که تصاویر موازی و مرکزی بیشتر اوقات برای اثبات قضایا به‌کار می‌روند، و تبدیلهای قطب و قطبی برای به‌دست‌آوردن قضایای جدید از قضایای قدیم.

نکتهٔ مهمی که باید به‌آن اشاره کنیم این‌است که اصل دوگانی فقط در صفحهٔ تصویری، یعنی درصفحه‌ای که با «عناصر بینهایت» تکمیل شده صدق می‌کند (تبدیل قطب و قطبی نسبت به یك دایرهٔ S، مرکز S را به خط بینهایت وقطرهای آن را به نقاط بینهایت بدل می‌کند). علت آن این است که اصل دوگانی به‌ما اجازه می‌دهد در گزاره‌های هندسی نقاط وخطوط را باهم عوض کنیم و بنابراین، به‌تعبیری، هم‌ارزی نقاط و خطوط را پدید می‌آورد. پیش‌از معرفی عناصر بینهایت، نقاط و خطوط به هیچ‌وجه هم‌ارز نبودند، زیرا اگر هم‌ارز بودند، وجود خطهای موازی (خطهای بدون نقطهٔ مشترك) وجود نقاط «موازی»، (نقاطی بدون یك «خط مشترك»، یعنی نقاطی بی آنکه خطی بر آنها بگذرد)، را موجب می‌شد وچنین نقاطی وجود ندارند. واردکردن عناصر بینهایت، حالت خاص خطهای موازی را از بین می‌برد؛ درصفحهٔ تصویری دوخط همواره دریك نقطهٔ منحصر به‌فرد (یك نقطهٔ معین یا یك نقطهٔ بینهایت) اشتراك دارند، و دونقطه همواره خط منحصر به‌فردی‌را مشخص می‌کنند که برهردوی آنها می‌گذرد (← ص ۵۰ و بعد).

می‌توان نشان داد که تقارن ویژگیهای اساسی نقاط و خطوط صفحهٔ تصویری که در بالا ذکر شد، اصل دوگانی، یعنی امکان به‌دست‌آوردن یك قضیهٔ جدید (دوگان) از یك قضیهٔ قدیمی را، با تعویض اصطلاحات «نقطه» و «خط» و اصطلاحات «قرارداد بر» و «می‌گذرد بر» ایجاب می‌کند. زیرا در اثبات یك قضیهٔ هندسی، آن را به‌قضیهٔ ساده‌تری بدل‌می‌کنیم که، به‌نوبهٔ‌خود، باز به‌قضیهٔ ساده‌تری بدل‌می‌شود و هکذا تااینکه به‌ساده‌ترین گزاره‌های هندسی، یعنی اصول موضوعه، که بدون اثبات مسلم گرفته شده‌اند می‌رسیم. اما درصفحهٔ تصویری ویژگیهای‌اساسی نقاط و خطوط کاملا هم‌ارزند، یعنی، اگر دراصل موضوع مفروضی اصطلاحات «نقطه» و «خط» و اصطلاحات «قرارداد بر» و«می‌گذرد بر» را با هم عوض کنیم، گزارهٔ معتبری به‌دست می‌آوریم، شایسته است که این گزاره‌ها را در عداد اصول موضوع بگذاریم. وقتی فهرست حاصل از اصول موضوع طولانی باشد، خود- دوگان نیز هست. ولی در آن صورت دوگان هرقضیهٔ (معتبر) یك‌قضیهٔ جدیدی است معتبر، عیناً مثل قضیهٔ اصلی قابل‌اثبات است جزاینکه حالا فرایند برهان به‌اصول موضوع‌دوگان، به‌آن‌اصول موضوعی که دربرهان قضیهٔ اصلی‌به‌آنها رسیده‌ایم، برمی‌گردد. (برای شرح جزئیات، مراجعه‌کنید بـه‌فصل۳، کتاب **هندسهٔ تصویری**، تألیف کاکستر، که درپانویس صفحهٔ ۹۸ آمده است.)

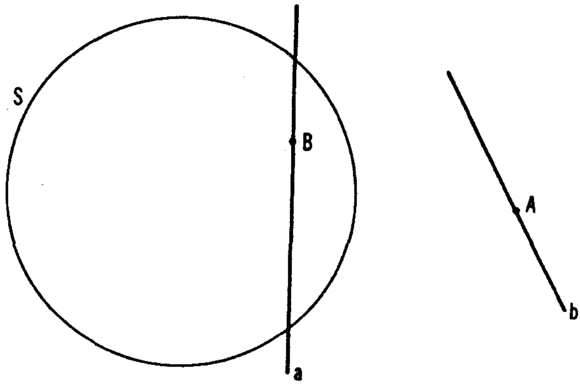
یك توضیح دیگر. وقتی از تبدیلهای قطب و قطبی استفاده کنیم، بیشتراز موقعی که از قضایـای هم‌ارزی ویـژگیهای‌اساسی‌نقاط و خطوط استفاده مـی‌کنیم، می‌توانیم به‌قضایای دوگان دست‌یابیم، زیرا استفاده ازاین هم‌ارزی (کـه در وجود جفتهای اصول موضوع دوگان نهاده شده) به‌منظور به‌دست‌آوردن قضیه‌های دوگـان به‌قضایایی محدود شده است‌که متضمن زاویه یافاصله نیستند (زیرا این مفاهیم دوگان ندارند)*. از سوی دیگر، ویژگیهای (ب) و (ج) تبدیل قطب و قطبی‌کـه بعداً داده خواهدشد به‌مـا امکان می‌دهند که اصل دوگانی را برای ردهٔ بیشتری از قضایا به‌کار بریم.

اکنون برخی از ویژگیهای تبدیل قطب وقطبی را درنظر می‌گیریم. مهمترین آنها عبارت است از:

الف) تبدیل قطب و قطبی، یك‌نقطهٔ A و یك خط b ماربر A را به‌یك خط a ویك نقطهٔ B واقع بر a بدل می‌کند (شکل ۷۶).

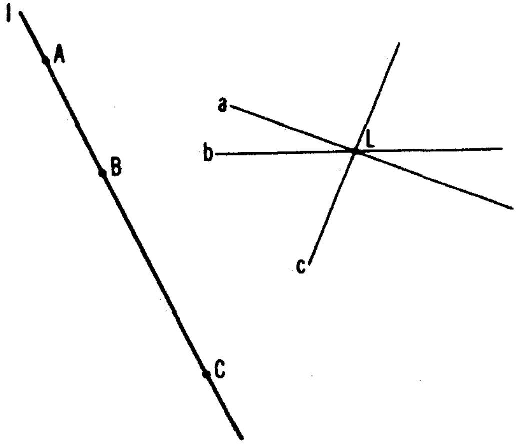
---

* به‌عبارت دیگـر، هم‌ارزی ویژگیهای اصلی‌نقاط و خطوط صفحهٔ تصویری به‌مـا اجازه می‌دهد اصل دوگانی را فقط برای قضایـای هندسهٔ تصویری به‌کار بریم (← پیشگفتار این کتاب).



شکل ۷۶

این ویژگی تبدیل قطب و قطبی، یک نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ ۲ است.
ویژگی (الف) ایجاب می‌کند که تبدیل قطب و قطبی، سه نقطهٔ A و B و C واقع بر یک خط l را به سه خط a و b و c مار بر یک نقطهٔ L بدل کند (شکل ۷۷؛ ← و نیز شکل ۷۴ الف) و بعکس، سه خط متقارب (مار بر یک نقطهٔ معین یا یک نقطه در بینهایت)



شکل ۷۷

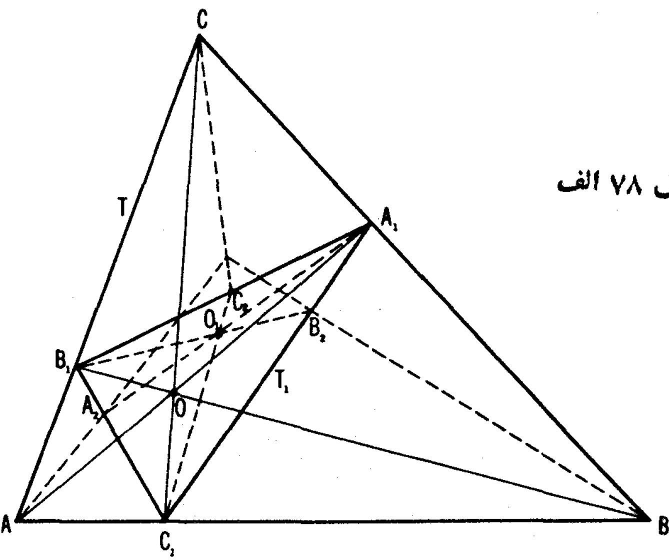
را به‌سه‌نقطهٔ همخط بدل می‌کند. این واقعیت به‌ما اجازه می‌دهد که قضایای تازه‌ای ازقضایای مفروض به‌دست آوریم. مثلا قضیهٔ مسألهٔ ۳۸ (الف)، ص ۶۷ را درنظر می‌گیریم: هرگاه A_1 و B_1 و C_1 نقاطی براضلاع $\triangle ABC$ (که‌آن را برای اختصار با $\triangle T$ می‌نماییم) باشند، چنانکه خطوط AA_1 و BB_1 و CC_1 در یك نقطهٔ O متقارب باشند و هرگاه A_2 و B_2 و C_2 نقاطی براضلاع $\triangle A_1B_1C_1$ ($\triangle T_1$) باشند به‌طوری که خطوط A_1A_2 و B_1B_2 و C_1C_2 در O_1 متقارب باشند، آنگاه خطوط AA_2 و BB_2 و CC_2 هم دریك نقطه متقارب خواهند بود (شکل ۷۸ (الف)). مایك تبدیل قطب و قطبی براین قضیه اعمال می‌کنیم. در این‌حال مثلث T به‌یك مثلث t بدل می‌شود که اضلاع a و b و cی آن قطبیهای رأسهای مثلث T هستند؛ نقطهٔ O به‌یك خط o بدل می‌شود. و مثلث T_1 به یك مثلث t_1 که اضلاعش، a_1 و b_1 و c_1، خطوط واصل بین رأسهای مثلث t و نقاط تلاقی o با اضلاع مقابل مثلث t هستند؛ نقطهٔ O_1 به خط o_1 بدل می‌شود، و نقاط A_2 و B_2 و C_2 به‌خطوط a_2 و b_2 و c_2، واصل بین رأسهای t_1 و نقاط تلاقی o_1 بااضلاع مقابل مثلث t_1 (شکل ۷۸ب).

چون طبق قضیهٔ مسألهٔ ۳۸ (الف) خطوط AA_2 و BB_2 و CC_2 متقارب‌اند، ازآنجا نتیجه می‌گیریم که نقاط برخورد جفتهای خطوط a و a_2، b و b_2، c و c_2 همخط‌اند. لذا به‌قضیهٔ زیر هدایت می‌شویم:

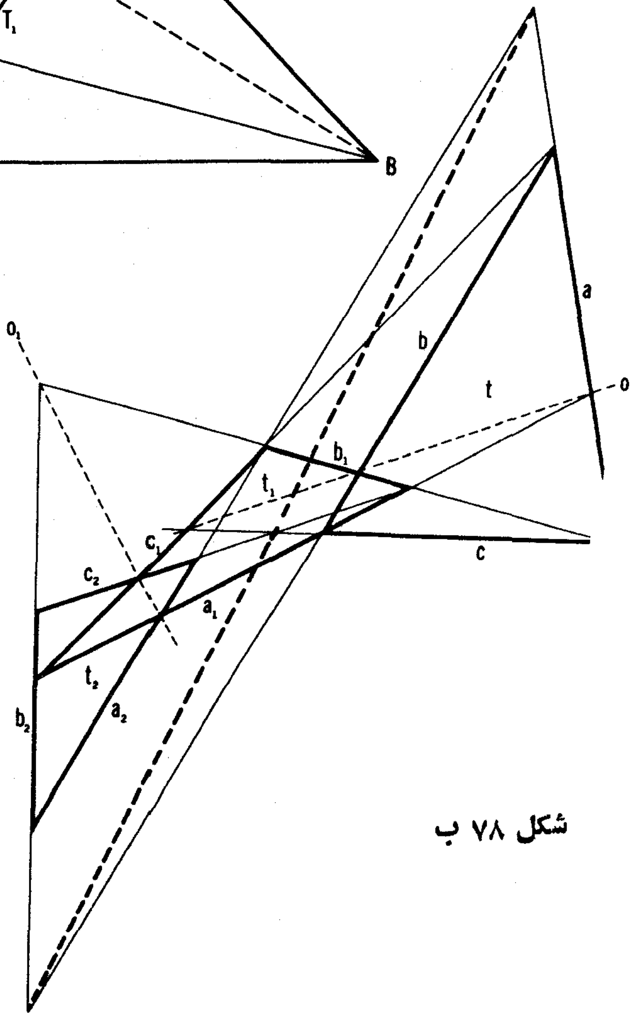
اگر t_1 مثلثی باشدکه اضلاعش برخطوط واصل بین رأسهای مثلث t و محل برخورد یك‌خط o بااضلاع‌مقابل t قرار داشته‌باشند، و t_2 مثلثی‌که اضلاعش برخطوط واصل بین رأسهای مثلث t_1 و نقاط برخورد یك خط o_1 با اضلاع مقابل t_1 واقع باشند، آنگاه نقاط برخورد اضلاع متناظر مثلثهای t و t_2، همخط‌اند. این قضیه، قضیه‌ای است کاملا تازه‌که بایك نمودار تازه شرح داده شده است، ولی ما به‌ارائهٔ برهان مستقلی برای اثبات آن نیاز نداریم؛ صحت آن از قضیهٔ مسألهٔ ۳۸ (الف) و ویژگی (الف) از تبدیل قطب وقطبی نتیجه می‌شود.*

---

* خاطرنشان می‌کنیم، که اگر بخواهیم دقیق بگوییم، استنتاج از قضایای تازه براثر تبدیلهای قطب وقطبی به‌دو کاربرد ازیك تبدیل قطب وقطبی‌نیاز دارد. این‌مطلب زمانی روشن می‌شودکه درباب مثالی که هم‌اکنون زدیم تأمل بیشتری بکنیم. استفاده ازیك تبدیل قطب وقطبی برای یك‌قضیهٔ مفروض (درمورد ما،قضیهٔ مسألهٔ ۳۸ (الف)) به‌بیان قضیهٔ تازه‌ای منجر می‌شود. ما نمی‌توانیم مطلقاً مطمئن باشیم که قضیهٔ تازه درهمهٔموارد درست‌است (نمی‌توانیم ادعا کنیم‌که شکل ۷۸ ب، وقتی t و t_1 و o_1 کاملا اختیاری‌باشند می‌تواند از به‌کاربردن یك تبدیل قطب و قطبی برای شکل ۷۸ (الف) به‌دست آید)؛ برای اثبات قضیهٔ حاصل ما باید آن را به‌وسیلهٔ یك‌تبدیل قطب و قطبی دیگر به‌قضیهٔ اصلی برگردانیم.



شکل ۷۸ الف



شکل ۷۸ ب

۶۰. از به‌کاربردن تبدیل قطب و قطبی برای قضایای مسائل ۱۷ (الف) و (ب)؛ ۲۱ (الف) و (ب)؛ ۲۲؛ ۲۵؛ ۲۶؛ ۲۷؛ ۲۸ چه قضایایی به‌دست می‌آیند؟

۶۱. n خط متقارب l_1 و l_2 و... و l_n و n نقطهٔ M_1 و M_2 و M_3 و... و در یك صفحه داده‌شده‌اند. یك n ضلعی $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ رسم کنید که رأسهایش بر خطوط l_1 و l_2 و... و l_n واقع باشند و اضلاعش از نقاط M_1 و M_2 و ... و M_n بگذرند.

مسألهٔ ۹۰ دربخش ۵، ص۱۲۷، معرف تعمیم شایان توجهی از مسألهٔ ۶۱ است.

۶۲. از به‌کاربردن تبدیل قطب‌وقطبی برای قضیه‌های مسائل ۳۶(الف)-(د)؛ ۳۷ (الف)-(ج)؛ ۳۸ (ب)، چه قضیه‌هایی به‌دست می‌آید؟

۶۳. از مسأله‌های ۳۹ (الف) و (ب)؛ ۴۰ (الف) و (ب)؛ ۴۱؛ ۴۳ (الف) و (ب)؛ ۴۵؛ ۴۶؛ ۴۷؛ ۵۰ به‌وسیلهٔ تبدیل قطب و قطبی نسبت به‌دوایری که درصورت این مسائل آمده‌اند چه‌قضیه‌هایی به‌دست می‌آید؟

۶۴. چه‌قضیه‌ای از مسألهٔ ۴۲ به‌دست می‌آید اگر تبدیل قطب و قطبی نسبت به‌دایرهٔ S را به‌کار بریم؟

۶۵. دایرهٔ S و سه‌خط l و l_1 و l_2 مفروض‌اند. بر S چهارضلعی $ABCD$ را چنان محیط کنید که A و C بر l، و B بر l_1 و D بر l_2 واقع باشند.

این مسأله تعمیم مسألهٔ ۸۴ (ب)، بخش ۵، ص ۱۲۳ است.

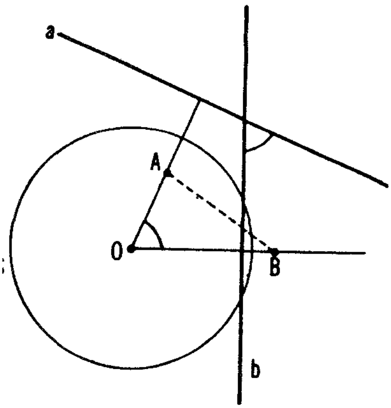
۶۶. با استفاده از تبدیل قطب‌وقطبی، قضیهٔ سوا (← مسألهٔ ۳۴ (ب)، بخش ۲، ص ۵۷) را از قضیهٔ منلائوس (مسألهٔ ۳۴ (الف)) و، بعکس قضیهٔ منلائوس را از قضیهٔ سوا به‌دست آورید.

حال ویژگیهای دیگر تبدیلهای قطب وقطبی را درنظر می‌گیریم:

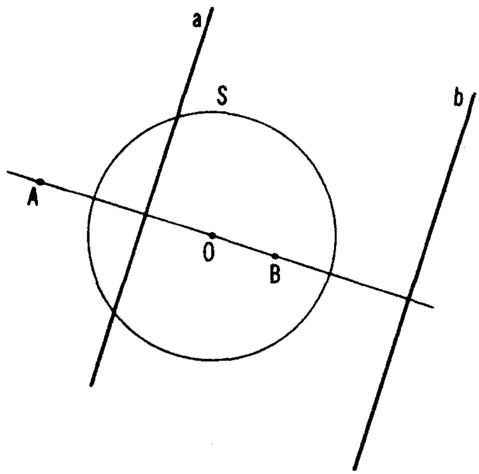
ب) تبدیل قطب وقطبی نسبت به‌دایرهٔ S، خطوط موازی را به‌نقاط همخط با مرکز Oی S بدل می‌کند، و بعکس، نقاط همخط با O، مرکز S، را به‌خطوط موازی بدل می‌کند (شکل ۷۹).

این‌ویژگی نتیجهٔ مستقیم این‌واقعیت است که قطب یك‌خط a، برخط مسار بر مرکز S و عمود بر a واقع است (← ص ۸۸).

ج) هرگاه A و B دو نقطه، a و b نگاره‌های آنها براثر تبدیل قطب و قطبی نسبت به‌دایرهٔ S به‌مرکز O باشند، آنگاه زاویهٔ بین دوخط a و b با زاویهٔ AOB (یا با مکمل آن) برابر است.



شکل ۸۰



شکل ۷۹

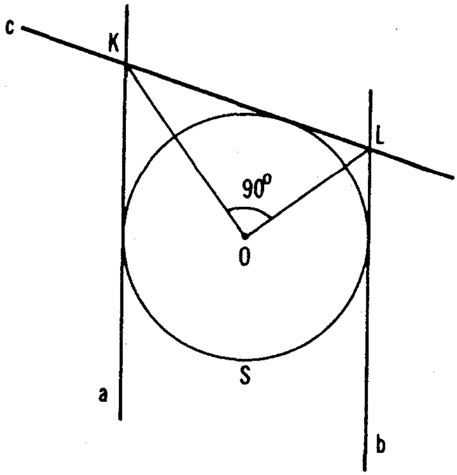
این ویژگی از اینجا نیز نتیجه می‌شود کــه ضلعهای زاویهٔ AOB و ضلعهای زاویه‌ای که a و b باهم می‌سازند نظیر به‌نظیر برهم عمودند (شکل ۸۰).

ویژگیهای (ب) و (ج) در تبدیل قطب وقطبی به‌ماامکان می‌دهندکه قضایای تازه‌ای را ازبسیاری ازقضایای هندسهٔ مقدماتی به‌دست‌آوریم. مثلا گزارهٔ هرزاویهٔ محاطی مقابل به‌قطر یك قائمه است (شکل ۸۱ (الف)) را درنظر می‌گیریم. یك تبدیل قطب و قطبی نسبت به‌دایرهٔ مـوردبحث، S، نقاط A و B و C را به‌مماسهای a و b و c بر S بدل می‌کند. بویژه هرگاه A و B دو سر قطری از S باشند، آنگاه مماسهای a و b موازی می‌شوند (← ویژگی (ب)ی تبدیل قطب و قطبی).

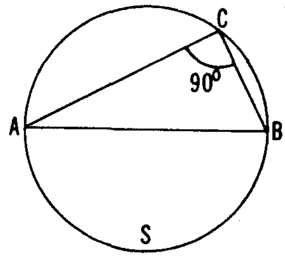
باتوجه به‌ویژگی (ج) از تبدیل قطب وقطبی، اکنون می‌توانیم بیان‌کنیم‌که:

هرگاه S دایره‌ای به‌مرکز O باشد و دومماس موازی بر S مماس سوم برآن را درنقاط K و L ببرند، آنگاه زاویهٔ KOL قائمه است (شکل ۸۱ (ب)).

یك‌مثال پیچیده‌تر دیگر. تقریباً واضح است کـه یك چهار ضلعی‌که رأسهایش وسطهای اضلاع یك متوازی‌الاضلاع باشند، یك‌متوازی‌الاضلاع است (شـکـل ۸۲ (الف). ← مسألهٔ ۱۶ (الف) جلد اول). ببینیم ازبه‌کاربردن تبدیل قطب وقطبی برای این‌قضیه چه‌گزاره‌ای می‌توانیم به‌دست آوریم.



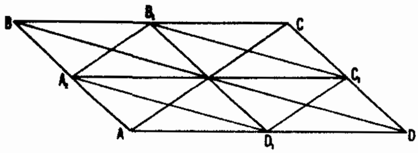
شکل ۸۱ ب



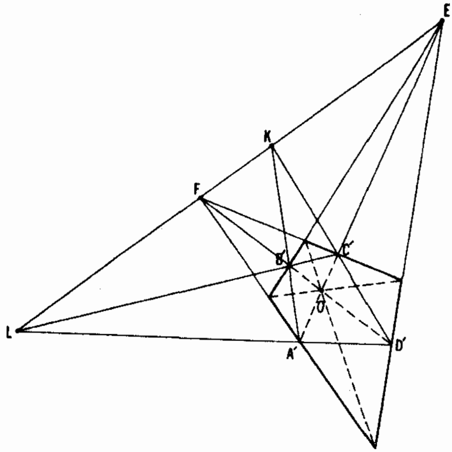
شکل ۸۱ الف

نخست باید نقطه‌های وسط اضلاع یك متوازی‌الاضلاع را برحسب موجوداتی که نگاره‌های آنها براثر تبدیل قطب وقطبی معلوم‌اند تعریف کنیم (زیرا نگارهٔ وسط یك پاره‌خط دریك تبدیل قطب و قطبی برما معلوم نیست). تعریف زیر یکی از این تعاریف است: **وسطهای اضلاع یك متوازی‌الاضلاع نقطه‌های برخورد اضلاع و میانخطهای آن است ـ میانخطها خطهایی هستند که از نقطهٔ برخورد قطرها به‌موازات اضلاع کشیده می‌شوند** ـ این تعریف، تعریفی است که ما می‌پذیریم.

به‌موجب ویژگی (ب)ی تبدیل قطب و قطبی، متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به‌یك چهارضلعی $A'B'C'D'$ بدل می‌شود که محل برخورد قطرهایش بر O، مرکز S، منطبق است (← شکل ۸۲ (ب)؛ S درشکل نشان‌داده نشده‌است). رأسهای مقابل متوازی‌الاضلاع به‌اضلاع مقابل چهارضلعی $A'B'C'D'$ بدل می‌شود، قطرهای متوازی‌الاضلاع به‌نقاط K و L، محل برخورد جفتهای اضلاع مقابل چهارضلعی، و نقطهٔ تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع به‌خط KL. به‌موجب ویژگیهای (ب) و (ج) از یك تبدیل قطب و قطبی، میانخطهای متوازی‌الاضلاع به‌نقاط E و F، محل تلاقی خط KL باقطرهای $A'C'$ و $B'D'$ از چهارضلعی $A'B'C'D'$ بدل می‌شود. این نکات ایجاب می‌کنند که وسطهای اضلاع متوازی‌الاضلاع به‌خطهای EB' و ED'، FA' و FC' بدل شوند ولذا گزارهٔ اصلی مایهٔ پیدایش گزارهٔ دوگان آن به‌شرح زیر می‌شود: **نقطهٔ تلاقی قطرهای چهارضلعیی که**



شکل ۸۲ الف



شکل ۸۲ ب

اضلاعش برخطوط FA' و EB' و FC' و ED' واقع‌اند، برنقطهٔ تلاقی‌قطرهای چهارضلعی $A'B'C'D'$ منطبق است (شکل ۸۲ ب).

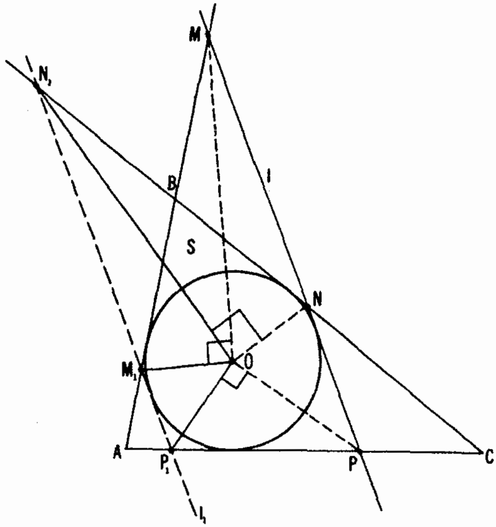
این‌گزارهٔ جدید نه‌مسلم است و نه ساده. اثبات مستقیم آن تا حدی پیچیده است.

۶۷. از ویژگی (ب)ی تبدیل قطب وقطبی برای اثبات قضیهٔ دزارگ استفاده کنید (مسألهٔ ۲۲، بخش ۲، ص ۴۰).

۶۸. دایرهٔ S درمثلث ABC محاط شده است. خط l بردایرهٔ S مماس است و ضلعهای مثلث را در نقاط M و N و P قطع می‌کند (شکل ۸۳). از O، مرکز S، عمودی برخطوط OM و ON و OP اخراج مـی‌کنیم ونقاط تلاقی آنهـا را با اضلاع متناظر مثلث، M_1 و N_1 و P_1 نام می‌گذاریم. ثابت‌کنیدکه نقاط M_1 و N_1 و P_1 بریك خط قرار دارند.

۶۹. قضیهٔ حـاصل از کاربـرد قطب و قطبی را برای قضیهٔ زیر بیان کنید: زاویه‌های محاط دریك دایره و متقابل به‌یك کمان باهم برابرند.

۷۰. قضیه‌ای را که از کاربرد تبدیل قطب و قطبی برای قضیهٔ مربوط به‌خط



شکل ۸۳

سیمسون (مسألهٔ ۶۱، فصل ۲، بخش ۱، جلد دوم) نتیجه می‌شود بیان کنید.

۷۱. قضیهٔ حاصل از کاربرد قطب و قطبی را برای این قضیه که «سه‌میانهٔ مثلث متقارب‌اند»، وقتی S دایرهٔ محیطی مثلث باشد، بیان کنید.

۷۲. قضیهٔ حاصل از کاربرد قطب و قطبی را برای قضیهٔ زیر بیان کنید: اگر قطرهای متوازی‌الاضلاعی برهم عمود باشند، زاویه‌های رأسها را نصف می‌کنند.

۷۳. قضایای حاصل از کاربرد تبدیل قطب وقطبی را برای قضایای زیر بیان کنید:

الف) سه ارتفاع یك مثلث متقارب‌اند..

ب) نیمسازهای یك مثلث متقارب‌اند.

۷۴. مثالهایی برای جفتهای قضایای دوگان بیاورید.

تبدیلهای قطبی علاوه‌بر ویژگیهای (الف) ــ (ج)، ویژگیهای دیگری نیز دارند؛ این ویژگیها که در مسأله‌های ۵۱ و ۵۲ (ص۹۰) به‌آنها برخوردیم در به‌دست‌آوردن

قضیه‌های جدید از قضیه‌های قدیم مفیدند.* از این‌رو، مثلا، اگر از ویژگی (ج) و قضیهٔ مسألهٔ ۵۱ استفاده کنیم، آنگاه به‌آسانی می‌توانیم نشان دهیم که، بر اثر یك تبدیل قطب و قطبی از قضیهٔ مسألهٔ ۸۱ (الف) در فصل ۲، بخش ۲، جلد دوم، قضیهٔ زیر به‌دست می‌آید: اگر p_1 و p_2 و p_3 فواصل اضلاع مثلث ABC از یك نقطهٔ O باشند و اضلاع مثلث از O به‌زاویه‌های مساوی (یا مکمل) دیده شوند** آنگاه از عددهای $1/p_1$ و $1/p_2$ و $1/p_3$، آن یك که بزرگتر است از مجموع دو عدد دیگر بزرگتر نیست. و نیز، به‌کمك مسألهٔ ۵۲ ممکن است از مسأله‌های ۲۵۴ (الف) و (ب)، در بخش ۴، فصل ۲***، قضایای زیر را به‌دست آوریم:

اگر دایرهٔ S در $2n$ ضلعی $A_1A_2\ldots A_{2n}$ محاط باشد و l مماس بر S، حاصلضرب فواصل رأسهای با اندیس زوج $2n$ ضلعی از l، مساوی است با حاصلضرب فواصل رأسهای با اندیسهای فرد آن از l.

اگر دایرهٔ S در n ضلعی $A_1A_2\ldots A_n$ محاط باشد و l خطی مماس بر S، حاصلضرب فواصل رأسهای n ضلعی از l مساوی است با حاصلضرب فواصل نقاط

---

* مسألهٔ ۵۱ ایجاب می‌کند که تبدیل قطب و قطبی نسبت به‌یك دایرهٔ S به‌مرکز O و شعاع ۱، یك نقطهٔ A به‌فاصلهٔ d از O را به‌یك خط a به‌فاصلهٔ $1/d$ از O بدل کند، و دو نقطهٔ A و B به‌فاصلهٔ d از یکدیگر را به‌دو خط a و b بدل کند به‌طوری که $A'B'/(OA'\cdot OB')=d$. دراینجا A' و B' تصاویر O بر a و b هستند. مسألهٔ ۵۲ ایجاب می‌کند که همان تبدیل قطب و قطبی، یك نقطهٔ A و یك خط b به‌فاصلهٔ d از A را به‌یك خط a و یك نقطهٔ B به‌فاصلهٔ $d.OB/OA$ از a بدل کند. برای کاربردهای این احکام، به‌پانویس ص ۹۵ رجوع کنید.

** اگر همهٔ زاویه‌های مثلث ABC کمتر از $120°$ باشند، لذا O نقطه‌ای است در داخل مثلث و زاویه‌های موردنظر همه مساوی $120°$ هستند. اگر یکی از زاویه‌های مثلث بزرگتر از $120°$ باشد، آنگاه نقطه‌ای وجود ندارد که برای آن زوایای موردنظر همه مساوی باشند. لذا O درخارج مثلث واقع می‌شود، دو تا از زوایای موردنظر $60°$ و زاویهٔ سوم متناظر با بزرگترین ضلع مثلث $120°$ است. بالاخره اگر یکی از زوایای مثلث $120°$ باشد، نقطهٔ O بر رأس آن زاویه منطبق است و قضیه بیمعنی است.

نقطهٔ O ویژگیهای قابل‌ملاحظه‌ای دارد (که برخی از آنها را درفصل ۲، بخش ۲، جلد دوم دیده‌ایم)، این نقطه اغلب نقطهٔ توریچلی مثلث نامیده می‌شود.

*** عطف به‌فصل ترجمه نشده از روسی.

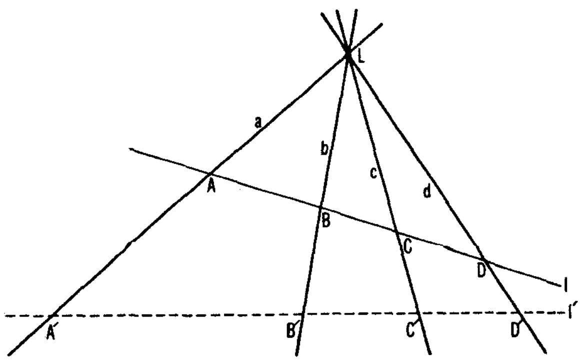
تماس n ضلعی از l.

گیریم S دایره‌ای محاط در nضلعی منتظم $A_1A_2\ldots A_n$ باشد و l مماسی بر S. هرگاه d_0 و d_1 و … و d_{n-1} فاصله‌های رأسهای n ضلعی از l باشند و d_0 کوچکترین این فاصله‌ها باشد، آنگاه

$$\frac{1}{d_0}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\ldots+\frac{1}{d_{n-1}}$$

به‌دست‌آوردن این نتایج را با استفاده از قطبی معکوس به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

یك‌ویژگی دیگر تبدیل قطب‌وقطبی را که نقش‌اساسی درکارهای پیشرفته‌تر شامل این تبدیلها دارد نیز متذکر می‌شویم. برای بیان این ویژگی نخست باید مشابه نسبت ناهمساز چهارنقطهٔ همخط (← ص ۴۸)، نسبت ناهمساز چهار خط متقارب aوbوc وd را وارد، و به‌صورت‌نسبت ناهمساز A و B؛ C و Dی نقاط تلاقی‌چهارخط‌متقارب مفروض با یك‌خط پنجم l (که‌از نقطهٔ مشترك چهارخط مفروض نمی‌گذرد؛ ← شکل ۸۴) تعریف کنیم. روشن است‌که نسبت ناهمساز چهارخط a و b؛ c و d مستقل از انتخاب خط l است؛زیرا اگر یك خط l' خطوط a و b و c و d را درنقاط A' و B' و C' و D' ببرد، آنگاه نسبت ناهمساز نقاط A' و B'؛ C' و D' مساوی‌است‌با نسبت ناهمساز نقاط AوB؛



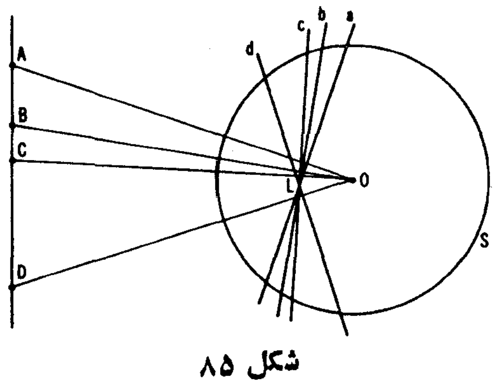
شکل ۸۴

C و D (به‌موجب ویژگی (ج) تصویر مرکزی؛ ← شکل ۸۴ و شکل ۳۴)*.

اکنون می‌توانیم ویژگی دیگری از تبدیل قطب و قطبی را بیان کنیم:

د) اگر یك تبدیل قطب وقطبی چهارنقطهٔ A و B و C و D واقع بر یك‌خط l را به‌چهارخط a و b و c و d (که بـه‌موجب ویژگی (الف) تبدیلهای قطب و قطبی دریك‌نقطهٔ L متقارب‌اند) بدل کند، آنگاه نسبت نـاهمساز چهارخط a و b؛ c و d با نسبت ناهمساز چهارنقطهٔ A و B؛ C و D مساوی است.

اثبات ویژگی (د) کاملا ساده است. چهارنقطهٔ A و B و C و D واقع بر یك‌خط و قطبیهای آنها a و b و c و d نسبت به‌یك‌دایرهٔ S را درنظر مـی‌گیریم (شکل ۸۵). تعریف نسبت ناهمساز چهارخط ایجاب می‌کندکه نسبت ناهمساز نقاط A و B؛ C و D بـا نسبت ناهمساز خطوط OA و OB؛ OC و OD، (O مرکز S)، مساوی باشد. چون قطبی یك نقطه نسبت به یك دایرهٔ S برخط واصل بین آن نقطه و مرکز S عمود است (← ص ۸۸)، لذا خطوط OA و OB و OC و OD بترتیب برخطوط a و b و c و d عمود می‌شوند. ازاینجا نتیجه می‌گیریم که دوچهارخطی aوbوcوd، OAوOBوOCوOD می‌توانند با یك حرکت مناسب برهم منطبق شوند؛ زیرا این‌عمل را می‌توان ابتدا با انتقال خطوط OA و OB و OC و OD به‌طوری‌که O بر L منطبق شود، وسپس دوران این خطوط به زاویهٔ $90°$ حول L، انجام داد. از اینجا نتیجه می‌شود که نسبت ناهمساز



شکل ۸۵

* می‌توان نشان داد که نسبت ناهمساز چهارخط a و b؛ c و d مساوی است با

$$\frac{\sin\sphericalangle(a, c)}{\sin\sphericalangle(b, c)}\Big/\frac{\sin\sphericalangle(a, d)}{\sin\sphericalangle(b, d)}$$

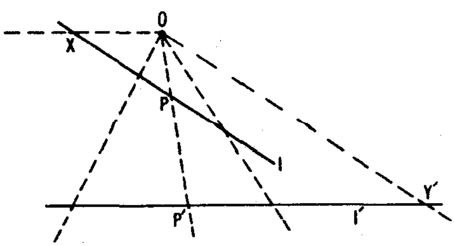
که $\sphericalangle(x, y)$ معرف زاویهٔ بین خطوط x و y است.

چهارخط OA و OB؛ OC و OD با نسبت ناهمساز چهارخط a و b؛ c و d مساوی است؛ اما در این حالت نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A و B؛ C و D نیز با نسبت ناهمساز چهارخط a و b؛ c و d مساوی است، و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

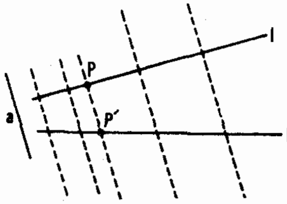
۵. تبدیل تصویری یك‌خط و یك دایره. ترسیم به‌کمك ستاره.

در یك صفحه دو خط متمایز l و l' و یك نقطهٔ O ناواقع بـر آن دو خط را درنظر می‌گیریم. l را از نقطهٔ O بر l' تصویر می‌کنیم، یعنی به‌هر نقطهٔ P واقع بر l یك نقطهٔ P'، محل تلاقی OP با l'، را مربوط می‌کنیم (شکل ۸۶). ملاحظه می‌کنیم که اگر l با l' موازی نباشد، نقطهٔ X، محل برخورد l با خطی‌که از O به‌موازات l' رسم می‌شود، بر هیچ نقطهٔ l' تصویر نمی‌شود. برای اینکه نقطهٔ X را با نقاط دیگر همپایه قرار دهیم، می‌گوییم کـه این نقطه بر نقطهٔ بینهایت l' تصویر شده است. به‌همین طریق نقطهٔ Y'، محل برخورد l'با خطی‌راکه از O به‌موازات l رسم می‌شود نگارهٔ نقطهٔ بینهایت l بر اثر این تصویر گوییم. اگر خطوط l و l' موازی باشند (شکل ۸۷ (الف))، گوییم که این تصویر نقطهٔ بینهایت l را به نقطهٔ بینهایت l' بدل می‌کند. عین‌همین اصطلاح،هرگاه تصویر از l بر l' یك تصویرموازی باشد (شکل ۸۷(ب)) نیز به‌کار برده می‌شود.

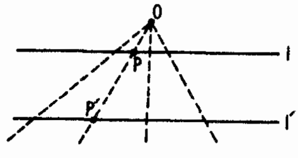
تصویرمرکزی (یا موازی) تبدیلی از یك‌خط برخودش نیست، بلکه نگاشتی است از یك خط برخط‌دیگر. حال یك‌خط l را ازیك نقطهٔ O بریك خط l_1 تصویر می‌کنیم، سپس l_1 را ازیك نقطهٔ O_1 برخط l_2، بعد l_2 را ازیك نقطهٔ O_2 بریك خط l_3، و این عمل را همین‌گونه ادامه می‌دهیم تـا بالاخره خط l_n را ازنقطهٔ O_n بر l



شکل ۸۶

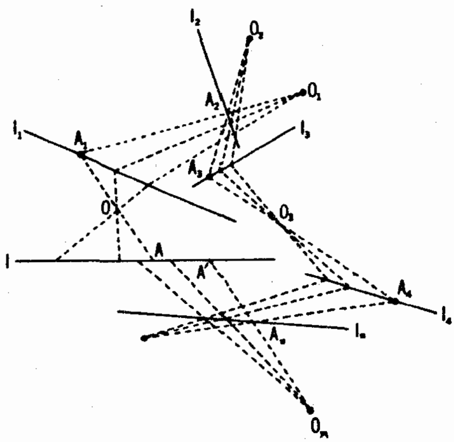


شکل ۸۷ ب



شکل ۸۷ الف

برمی‌گردانیم (شکل ۸۸). این رشته تصاویر، یک نقطهٔ A از l را به یک نقطهٔ A_1 از l_1، و سپس به‌یک نقطهٔ A_2 از l_2، و بعد به‌یک نقطهٔ A_3 از l_3 و ...، و سرانجام به‌یک نقطهٔ A' ازخط اولی l بدل می‌کند. بدین‌ترتیب این‌رشته از تصاویرمرکزی معرف تبدیلی است از l بر روی خودش کـه نقطهٔ A را به‌نقطهٔ A' بدل می‌کند. این‌چنین تبدیل از یک خط را یک تبدیل تصویری می‌نامیم. و نیز در این رشته تصاویر وقتی یک یا چند تصویر، به‌جای تصویر مرکزی، تصویرموازی باشند، بازهم آن‌را تبدیل تصویری خواهیم گفت.*



شکل ۸۸

* همینکه مفهوم نقطهٔ بینهایت یک‌صفحه را واردکردیم (← ص ۵۲)، می‌توانیم تصویر موازی‌یک‌خط برروی یک‌خط را یک تصویرمرکزی به‌مرکز واقع دربینهایت بینگاریم.

ویژگی زیر یک‌ویژگی بنیادی تبدیلهای تصویری است: تبدیل تصویری یک خط، نسبت ناهمساز چهارنقطه را حفظ می‌کند. زیرا تصویرمرکزی یک‌خط برخط دیگر نسبت ناهمساز چهارنقطه را حفظ می‌کند (← ویژگی (ج) از تصویر مرکزی، ص ۴۸). همچنین تصویرموازی یک‌خط بریک خط، نسبت ناهمساز چهارنقطه (حتی نسبت سادهٔ AC/BC از سه‌نقطهٔ A و B و C) را حفظ می‌کند. از اینجا نتیجه می‌شود که تبدیل تصویری یک‌خط (که براثر یک‌رشته تصاویر حاصل می‌شود) چهار نقطه را به‌چهار نقطه با همان نسبت ناهمساز بدل می‌کند.

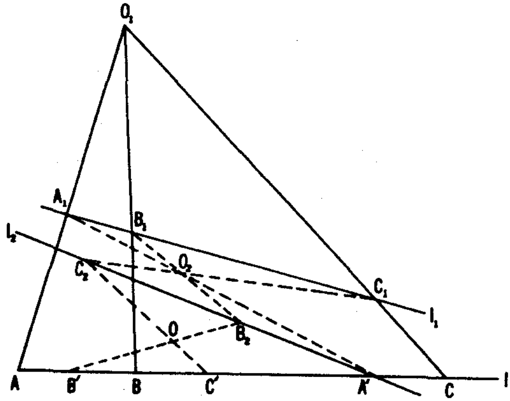
این‌ویژگی بنیادی‌ایجاب می‌کند که تبدیل تصویری یک خط با نگاره‌های سه نقطه‌اش کاملا معین شود. زیرا اگر نگاره‌های سه‌نقطهٔ A و B و C ازخطی براثر یک تبدیل تصویری، سه‌نقطهٔ معلوم A' و B' و C' باشند، آنگاه نگارهٔ هرنقطهٔ M ازاین خط نقطه‌ای است مانند M' به‌طوری که

$$\frac{AC}{BC}\Big/\frac{AM}{BM}=\frac{A'C'}{B'C'}\Big/\frac{A'M'}{B'M'} \tag{*}$$

که این رابطه موضع نقطهٔ M' را به‌گونهٔ منحصری مشخص می‌کند.

ازسوی دیگر یک تبدیل تصویری ازخط وجود دارد که سه‌نقطهٔ مفروض A و B و C را برسه‌نقطهٔ قبلا مشخص‌شدهٔ A' و B' و C' ببرد. برای تحقق بخشیدن به‌چنین تبدیلی، اول این‌خط را بریک خط اختیاری l_1 تصویر می‌کنیم به‌طوری‌که نقاط A و B و C به‌نقاط A_1 و B_1 و C_1 واقع بر l_1 بدل شوند؛ سپس خط l_1 را بریک خط l_2 که‌خط l را در A' می‌برد تصویر می‌کنیم به‌طوری‌که A_1 به A' و نقاط B_1 و C_1 به‌نقاط B_2 و C_2 واقع بر l_2 بدل‌شوند. بالاخره l_2 را با استفاده از O، نقطهٔ‌برخورد خطوط $B'B_2$ و $C'C_2$، به‌عنوان مرکزتصویر (شکل ۸۹) برخط l تصویرمی‌کنیم. مطابق معمول، O ممکن است نقطه‌ای در فاصلهٔ متناهی یا نقطه‌ای دربینهایت باشد.

حال به‌آسانی می‌توان نشان دادکه هر تبدیلی از یک خط که نسبت ناهمساز چهارنقطهٔ واقع‌بر آن را حفظ‌کند، تبدیلی است تصویری (یعنی‌می‌تواند به‌وسیلهٔ یک رشته ازتصاویر تحقق یابد). زیرا تبدیلی ازیک خط را درنظر بگیرید که نسبت ناهمساز هرچهار نقطه‌ای را حفظ کند وفرض‌کنیدکه سه‌نقطهٔ A و B و C را به‌نقاط A' و B' و C' بدل کند. می‌دانیم که یک تبدیل تصویری وجود داردکه A و B و C را به A' و B' و C' بدل می‌کند. ولی اگر دوتبدیل از یک خط، که هردو حافظ نسبت ناهمساز چهارنقطه هستند، دریک مجموعهٔ سه‌نقطه‌ای ازیک خط تطابق داشته باشند، آنگاه هردو یک‌نقطهٔ چهارم M را به‌یک نقطهٔ M' بدل می‌کنند (که وضعش



شکل ۸۹

از فرمول (*) صفحهٔ قبل مشخص می‌شود)، یعنی هردو تبدیل یکی‌هستند.

۷۵. با استفاده از ویژگیهای تبدیل تصویری یك‌خط، قضیهٔ پاپوس را ثابت کنید (← مسألهٔ ۲۸، بخش ۲).

۷۶. بااستفاده از ویژگیهای تبدیل‌تصویری یك خط، قضیهٔ مسألهٔ ۳۷ (الف) بخش ۲ را ثابت‌کنید.

۷۷. یك‌نقطهٔ M_1 واقع برضلع A_1A_2 ازیك n ضلعی منتظم $A_1A_2\ldots A_n$، از نقطهٔ A_n بریك نقطهٔ M_2 ازضلع A_2A_3 تصویر شده است. سپس M_2 از A_1 بریك نقطهٔ M_3 از ضلع A_3A_4 تصویر شده‌است. بعد M_3 ازنقطهٔ A_2 به‌یك نقطهٔ M_4 از ضلع A_4A_5 تصویر شده است و این عمل به‌همین نحو ادامه یافته است. ثابت‌کنید:

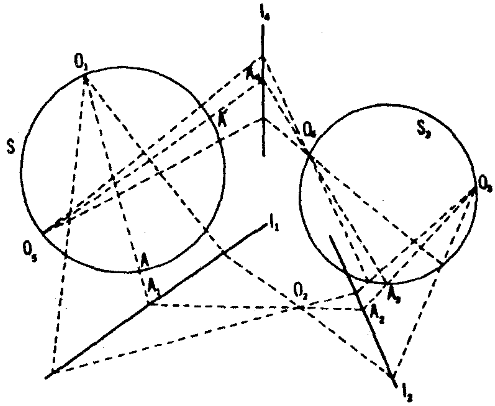
الف) اگر $n=4$، آنگاه نقطهٔ M_{13}، کـه پس‌از ۳ دور تکرار عمل روی nضلعی به‌دست‌آمده‌است، برنقطهٔ اولیهٔ M_1 منطبق است (وبنابراین، M_{14} بر M_2 منطبق است و M_{15} بر M_3 وهکذا . . .).

ب) اگر $n=6$، آنگاه نقطهٔ M_{13}، کـه پس از دو دور تکراز عمل روی nضلعی به‌دست‌آمده است،برنقطهٔ اولیهٔ M_1 منطبق است (و بنابراین، M_{14} بر M_2 منطبق است، M_{15} بر M_3 وغیره ...).

ج) اگر $n=15$، آنگاه نقطهٔ M_{11} که پس از یك‌دور عمل روی n ضلعی به‌دست آمده است، برنقطهٔ اولیهٔ M_1 منطبق است (و بنابراین، M_{12} بر M_2 منطبق است، M_{13} بر M_3 و هکذا . . .).

حال یک‌رشته از تصاویر را که شامل خطوط و دوایر باشند درنظر می‌گیریم. مثلا یک دایرهٔ S را، از یک‌نقطهٔ O_1 واقع بر S، بریک‌خط l_1 تصویر می‌کنیم؛ سپس l_1 را از یک‌نقطهٔ O_2 بریک خط l_2؛ بعد l_2 را از یک‌نقطهٔ O_3 واقع‌بر یک دایرهٔ S_3 برآن دایره تصویر می‌کنیم؛ بعد S_3 از یک نقطهٔ دیگر O_4 واقع‌بر S_3 بـریک خط l_4؛ وسرانجام l_4 را ازیک نقطهٔ O_5 از S بردایرهٔ S (شکل ۹۰) تصویر می‌کنیم.* نخستین‌تصویر، یک‌نقطهٔ A از S را به‌یک‌نقطهٔ A_1 از l_1 بدل خواهدکرد، تصویردوم A_1 را به‌یک‌نقطهٔ A_2 از l_2، تصویر سوم A_2 را به‌یک نقطهٔ A_3 از S_3، تصویرچهارم A_3 را به‌یک‌نقطهٔ A_4 از l_4، و بالاخره آخرین‌تصویر نقطهٔ A_4 را به‌یک‌نقطهٔ A' از S بدل می‌کند.

بدین ترتیب این رشته تصاویـر یک تبدیل از دایرهٔ S برخودش را مشخص می‌کندکه A رابه A' بدل‌می‌کند. تبدیلی ازیک‌دایره راکه‌بتواند با یک‌رشته تصاویر



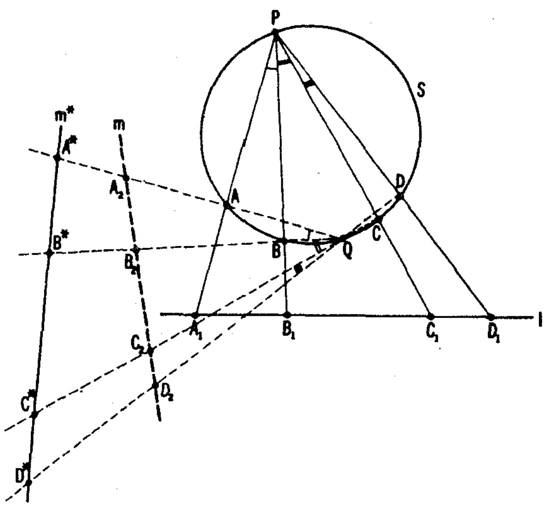
شکل ۹۰

---

* یک دایره بایدازیک‌نقطهٔ O واقع‌برهمان‌دایره‌تصویرشود؛ زیرااگر O درداخل دایره باشد، دونقطه از دایره بریک نقطه ازخط تصویر خواهند شد، واگر O در خارج دایره باشد، بعضی نقاط واقع بر خط دو پیشنگـار خـواهند داشت، و برخی، هیچ پیشنگـار نخواهند داشت.

ازنوع مذکور در بالا تحقق یابد، یك تبدیل تصویری (روی دایرهٔ مفروض) می‌نامیم.

منظور از نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A و B؛ C و D واقع بر یك دایرهٔ S، نسبت ناهمساز نگاره‌های این چهار نقطه، A_1 و B_1؛ C_1 و D_1، است که بر اثر تصویر از یك نقطهٔ P از S بر یك خط l به دست آمده‌اند (شکل ۹۱). به آسانی می‌توان نشان داد که نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ واقع بر یك دایرهٔ S، مستقل از انتخاب نقطهٔ P بر S و مستقل از خط l است؛ یعنی مقدارش به‌وسیلهٔ چهار نقطهٔ A و B و C و D کاملا معین می‌شود. زیرا فرض می‌کنیم A_1 و B_1 و C_1 و D_1 نگاره‌های نقاط A و B و C و D بر اثر یك تصویر S از نقطهٔ P بر خط l باشند، و A_2 و B_2 و C_2 و D_2 نگاره‌های همان نقاط بر اثر یك تصویر S از نقطهٔ Q از S بر خطی مانند m (شکل ۹۱). به‌موجب یك ویژگی کاملا معروف مربوط به زوایای محاطی، زاویه‌هایی که خطوط PA و PB و PC و PD باهم می‌سازند برابر (یا مکمل) زاویه‌هایی هستند که خطوط QA و QB و QC و QD باهم می‌سازند. حال برخطوط QA و QB و QC و QD پاره‌خطهای $QA^* = PA_1$ و $QB^* = PB_1$ و $QC^* = PC_1$ و $QD^* = PD_1$ را جدا می‌کنیم. شکلهای $PA_1B_1C_1D_1$ و $QA^*B^*C^*D^*$ قابل انطباق‌اند (می‌توان با یك حرکت آنها را برهم منطبق کرد: Q را به P منتقل می‌کنیم و نیمخطهای QA^* و QB^*



شکل ۹۱

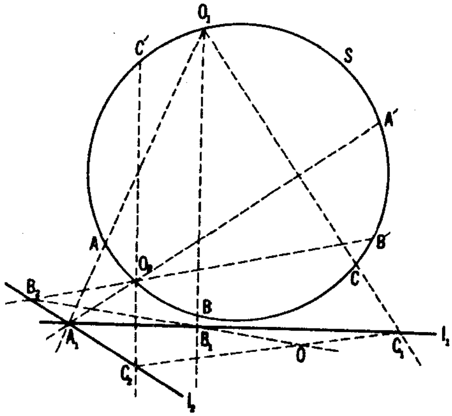
را بر امتداد نیمخطهای PA_1 و PB_1 قرار می‌دهیم). این عمل ایجاب می‌کند که نقاط A^* و B^* و C^* و D^* بر یك خط m^* واقع باشند، و نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A^* و B^*؛ C^* و D^* با نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A_1 و B_1؛ C_1 و D_1 یکی باشد. ازسوی دیگر A^* و B^* و C^* و D^* نگاره‌های A_2 و B_2 و C_2 و D_2 بر اثر تصویر خط m، به‌مرکز Q، برروی خط m^* هستند. بنابراین نسبتهای ناهمساز A^* و B^*؛ C^* و D^*، و A_2 و B_2؛ C_2 و D_2 مساوی‌اند، و از آنجا تساوی نسبتهای ناهمساز A_2 و B_2؛ C_2 و D_2، با A_1 و B_1 ؛ C_1 و D_1 نتیجه می‌شود.

چون تصویر یك خط برروی یك‌دایره (یا یك‌دایره برروی یك‌خط) نسبت ناهمساز چهارنقطه را حفظ می‌کند، ملاحظه می‌کنیم که تبدیل تصویری برروی یك دایره نسبت ناهمساز چهارنقطه را حفظ می‌کند. چنانکه درمورد تبدیل تصویری یك خط دیدیم، حال می‌توانیم بگوییم که یك تبدیل تصویری برروی یك‌دایره با نگاره‌های سه نقطه‌اش کاملا معین می‌شود. بالاخره به‌آسانی می‌توان نشان داد که هر تبدیل از یك دایره که نسبت ناهمساز چهارنقطه را حفظ کند، یك تبدیل تصویری است (یعنی می‌تواند با یك رشته از تصاویر عملی شود). برای این‌منظور کافی است نشان دهیم که یك تبدیل تصویری وجود دارد که سه‌نقطهٔ مفروض A و B و C از دایرهٔ S را به‌سه نقطهٔ قبلامشخص شدهٔ A' و B' و C' از آن دایره بدل کند(←ص۱۱۴). برای تحقق بخشیدن به‌چنین تبدیلی، S را از یك نقطهٔ O_1 برروی یك‌خط l_1 تصویر می‌کنیم و نگاره‌های نقاط A و B و C را به A_1 و B_1 و C_1 نشان می‌دهیم؛ از نقطهٔ O_2، محل تلاقی مجدد خط ماربر A' و A_1 با S، S را بریك خط l_2 ماربر A_1 تصویر می‌کنیم و نگاره‌های A' و B' و C' را به A_1 و B_2 و C_2 نشان می‌دهیم. بالاخره l_1 را بر l_2 چنان تصویر می‌کنیم که A_1 و B_1 و C_1 به‌نقاط A_1 و B_2 و C_2 بدل شوند (شکل ۹۲)؛ مرکز این تصویر را به O نشان می‌دهیم. روشن است که رشته تصاویر: S برروی l_1 از O_1؛ l_1 برروی l_2 از O، و l_2 برروی S از O_2، نقاط A و B و C را به‌نقاط A' و B' و C' بدل می‌کند، همان‌گونه که می‌خواستیم.

۷۸. الف) فرض مـی‌کنیم O وسط وتر AB از یك‌دایرهٔ S باشد و MN و PQ دو وتر باشند که بر O می‌گذرند. اگر E و F نقاط برخورد MP و NQ با AB باشند، نشان دهید که O وسط پاره‌خط EF است (شکل ۹۳).

ب) فرض می‌کنیم O پای عمود وارد از مرکز دایرهٔ S بریك خط l، و MN و PQ وترهایی از S باشند که l را در نقاط C و D می‌برند به‌طوری که $OC = OD$. هرگاه E و F نقاط تلاقی MP و NQ با l باشند، نشان دهید که O وسط وتر EF است.

۷۹. بـا استفاده از ویژگیهای تبدیل تصویری یك‌دایره، قضایای مسائل ۴۱

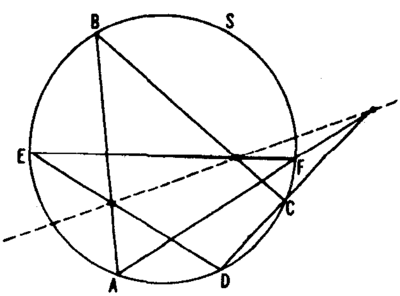


شکل ۹۲

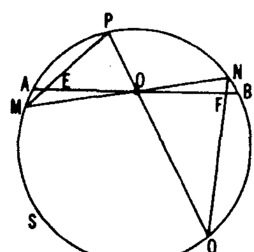
(الف)ـ(ج)، بخش ۳ را ثابت کنید.

۸۰. با استفاده از ویژگیهای تبدیل تصویری برروی یك دایره، قضیهٔ پاسکال را ثابت کنید: اگر A و B و C و D و E و F شش نقطه بریك دایره باشند، نقاط تلاقی AB و DE، BC و EF، و CD و FA همخطاند (شکل ۹۴؛ ← مسألهٔ ۴۶، بخش ۳).

اشاره می‌کنیم که قضیهٔ مذکور درمسألهٔ ۸۰ قویتر از قضیهٔ مسألهٔ ۴۶ است، که درآن شش ضلعی $ABCDEF$ محاط دریك دایره، محدب فرض شده بود؛ در حالی که در مسألهٔ ۸۰، شش‌ضلعی $ABCDEF$ ممکن است خود-متقاطع باشد



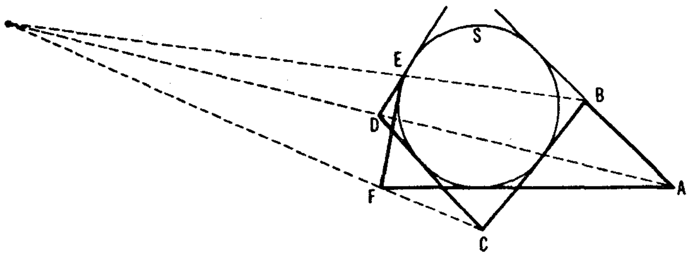
شکل ۹۴



شکل ۹۳

به‌ازای هر شش‌ضلعی که درمسألهٔ ۴۶ درنظر گرفتیم ۶۰ شش‌ضلعی باهمان رأسهای مسألهٔ ۸۰ وجود دارند که به‌۶۰ جایگشت ممکن رأسها مربوط می‌شوند* و درنتیجه به ۶ نقطهٔ واقع بر یك دایره، ۶۰ «خط پاسکال» مربوط می‌شوند.**

ملاحظه می‌کنیم که چون قضیهٔ بریانشون (← مسألهٔ ۴۷، بخش ۳، ص ۸۱) می‌تواند از قضیهٔ پاسکال استخراج شود (← حل مسألهٔ ۶۳، بخش ۴)، قضیهٔ مسألهٔ ۸۰ ایجاب می‌کند که قضیهٔ بریانشون به‌علت خود ـ متقاطع بودن شش‌ضلعی (شکل ۹۵) صادق باشد.



شکل ۹۵

---

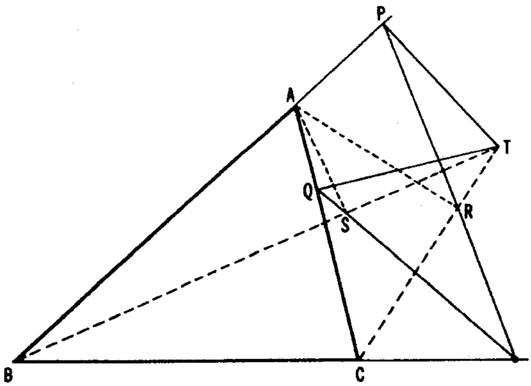
* ۶۰ شش‌ضلعی وجود دارد که رأسهای آنها ۶ نقطهٔ مفروضی باشند. زیرا، باشروع از هریك از رأسها می‌توانیم رأس دوم را به‌۵ طریق، رأس سوم را به‌۴ طریق، رأس چهارم را به‌سه‌طریق، رأس پنجم‌را به‌دوطریق انتخاب کنیم و رأس آخر به‌طریق منحصری تعیین می‌شود. عدد حاصل $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$، است که به‌موجب این واقعیت که هر شش‌ضلعی‌دوبار (به‌دلیل‌دونحوهٔ ممکن‌عبور ازآنها) درنظر گرفته‌شده، این‌تعداد بایستی نصف شود.

** مجموعهٔ ۶۰ خط‌حاصل به‌روش مذکور، ویژگیهای بسیارجالبی‌داردکه موردمطالعهٔ هندسه‌دانان سدهٔ اخیر قرار گرفته‌است. بدین‌ترتیب‌که، مثلا، این ۶۰خط در ۴۵ نقطه درگروههای چهارتایی یکدیگر را می‌برند (هرخط پاسکال‌سه‌نقطه ازاین‌نقاط را برخود دارد) ودر ۸۰ نقطه درگروههای‌سه‌تایی (هرخط‌پاسکال ۴تا ازاین‌نقاط را برخود دارد). این ۸۰ نقطهٔ اخیر، علاوه برخطوط‌پاسکال، در ۲۰خط جدید که‌به‌نوبهٔ خود درگروههای ۴ تایی در۱۵ نقطهٔ جدید یکدیگر را می‌برند وهکذا. همهٔ این‌نتایج را می‌توان به‌نحو نسبتاً ساده‌ای از قضایای دزارگ (مسألهٔ ۲۲، بخش ۲)، پاسکال و بریانشون، استخراج کرد. ولی اثبات آنها ما را از زمینهٔ اصلی خیلی دور می‌سازد.

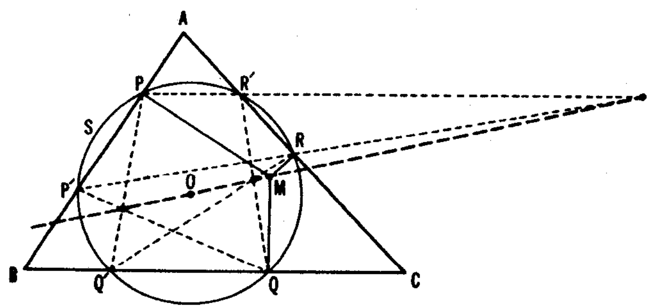
۸۱. الف) از قضیهٔ پاسکال حکم مسألـهٔ ۴۵، بخش ۳، (ص۷۹) را نتیجه بگیرید.

ب) ازیك نقطهٔ T درصفحهٔ یك مثلث ABC عمودهای TP و TQ را براضلاع AB و AC وارد می کنیم، سپس T را به رأسهای B و C وصل وعمودهای AR و AS را برخطوط TC و TB واردمی کنیم (شکل ۹۶). نشان دهید که نقطهٔ تقاطع خطوط PR و QS برخط BC واقع است.

ج) فرض مـی کنیم MP و MQ و MR عمودهـای مرسوم ازیك نقطهٔ M براضلاع مثلث ABC باشند و P' و Q' و R' دومین نقاط تلاقی اضلاع مثلث با دایرهٔ S ماربر P و Q و R (شکل ۹۷). نشان دهید که نقاط تلاقی PQ' و $P'Q$؛ PR' و



شکل ۹۶

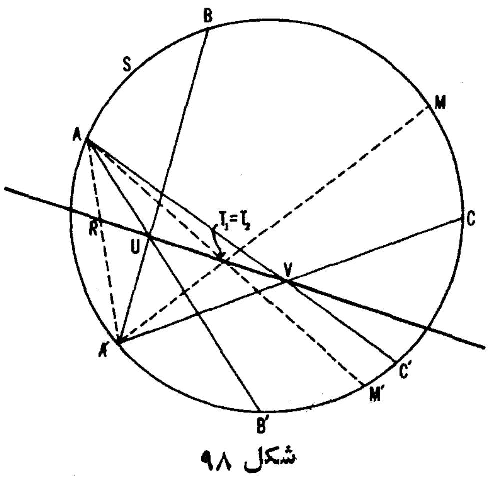


شکل ۹۷

$P'R$؛ QR' و $Q'R$ برخط OM قرار دارند، O مرکز S است.

تعیین نقاط ثابت یك تبدیل تصویری دریك دایره، یعنی پیداکردن نقاطی که براثر تبدیل مفروض به‌خود بـدل می‌شوند، غالباً لازم می‌آید. فرض می‌کنیم کـه تبدیل تصویری بـااین شرط مشخص شده باشد که سه‌نقطهٔ A و B و C واقع بر S را به‌سه‌نقطهٔ معلوم A' و B' و C' واقع بر S بدل کند. می‌توانیم فرض کنیم کـه نقاط A و B و C بر A' و B' و C' منطبق نباشند، چون، درغیراین‌صورت تبدیل تصویری یك همانی خواهدشد، وهمهٔ نقاط دایره‌نقاط ثابت‌خواهند شد.* بنا براین، فرض‌می‌کنیم، مثلاً، A' با A یکی نباشد، سپس فرض می‌کنیم M نقطه‌ای از دایرهٔ S باشد و M' نگارهٔ آن براثر تبدیل‌تصویری (شکل۹۸). می‌خواهیم نشان دهیم‌که خطوط AM' و $A'M$ روی خطی یکدیگر را مـی‌برند که بر U، نقطهٔ تلاقی AB' و $A'B$، و بر V، نقطهٔ تلاقی AC' و $A'C$، می‌گذرد.

فرض می‌کنیم‌که چنین نباشد، ونقاط تلاقی $A'M$ و AM' و AA' با UV را بترتیب T_1 و T_2 و R می‌گیریم. ازتصویر S برروی UV ابتدا از A' وسپس از A، ملاحظه می‌کنیم که نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A و B؛ C و M روی S مساوی نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ R و U؛ V و T_1 روی UV است، ونسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A' و B'؛



شکل ۹۸

* زیرا یك تبدیل تصویری دریك دایـره منحصراً به‌وسیلهٔ نگاره‌هـای سه‌نقطه مشخص می‌شود. تبدیلی‌که سه‌نقطه را ثابت نگاه دارد لزوماً باید یك همانی باشد.

C' و M' روی S مساوی نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ R و U؛ V و $T_۲$، روی UV است. اما به‌موجب وجود یك تبدیل تصویری که A و B و C و M را به A' و B' و C' و M' بدل می‌کند، نسبت ناهمساز این دو چهارتایی از نقاط بایستی مساوی باشند. این مطلب تساوی نسبت ناهمساز R و U؛ V و $T_۱$، با نسبت ناهمساز R و U؛ V و $T_۲$، و درنتیجه یکی بودن $T_۱$ و $T_۲$ را ایجاب می‌کند. همان‌که ادعا شده بود. . . .

اکنون می‌بینیم که برای به‌دست آوردن نقطهٔ M'، نگارهٔ یك نقطهٔ مفروض M، بر اثر تبدیل تصویری باید A را به T، نقطهٔ تلاقی $A'M$ با UV، (در اینجا U نقطهٔ تلاقی AB' و BA' است و V نقطهٔ تلاقی AC' و $A'C$) وصل کنیم. در این حال M' نقطهٔ تلاقی خط AT با S خواهد شد. این ترسیم ایجاب می‌کند که نقاط ثابت یك تبدیل تصویری در یك دایره، نقاط تلاقی خط UV با S باشند. از آنجا نتیجه می‌شود که این تبدیل دارای دو نقطهٔ ثابت یا دارای یك نقطهٔ ثابت است و یا هیچ نقطهٔ ثابت ندارد برحسب اینکه UV دایرهٔ S را در دو نقطه ببرد (حالتی که در شکل ۹۸ اختیار شده است) یا بر آن مماس باشد و یا کاملا درخارج آن قرار گیرد.

ملاحظه می‌کنیم که تعیین نقطهٔ ثابت یك تبدیل تصویری در یك دایرهٔ S که سه نقطهٔ A و B و C را به سه نقطهٔ A' و B' و C' بدل می‌کند، می‌تواند به‌وسیلهٔ یك ستارهٔ تنها انجام گیرد.

۸۲. فرض می‌کنیم S یك دایره و AB و CD دو وتر آن باشند. بر S نقطه‌ای مانند X چنان تعیین کنید که خطوط AX و BX بر وتر CD

الف) پاره‌خطی را به‌طول a مشخص سازند؛

ب) پاره خطی را مشخص سازند که وسطش نقطهٔ مفروض E بر CD باشد.

مسأله‌های ۸۲ (الف) و (ب) در ارتباط دیگری در جلد اول آمده‌اند (← مسألهٔ ۶، بخش ۱، و مسألهٔ ۱۱، بخش ۲).

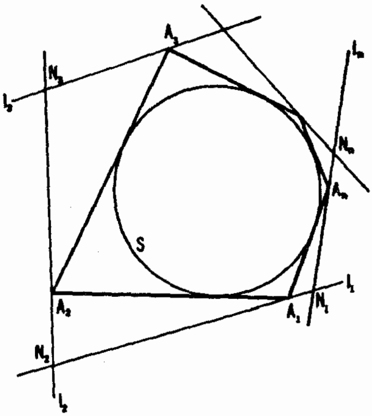
۸۳. الف) فرض می‌کنیم l یك خط و P نقطه‌ای نـاواقع بر آن باشد. بر l پاره‌خطی مانند XY پیدا کنید که از P به‌زاویهٔ معین α دیده شود.

ب) گیریم $l_۱$ و $l_۲$ دو خط باشند، و P و Q دو نقطه‌ ناواقع بر این خطوط. بر $l_۱$ نقطه‌ای مانند X و بر $l_۲$ نقطه‌ای مانند Y چنان تعیین کنید که پاره‌خط XY از نقطهٔ P به‌زاویهٔ مفروض α، و از Q به‌زاویهٔ مفروض β دیده شود.

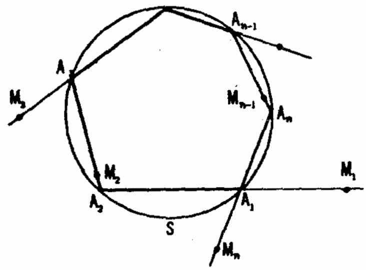
۸۴. الف) در یك دایره یك n ضلعی چنان محاط کنید که هر ضلعش بر یکی از n نقطهٔ $M_۱$ و $M_۲$ و ... و M_n (شکل ۹۹ (الف)) بگذرد، یا برخی از اضلاعش از

نقاط مفروضی بگذرند و بقیهٔ اضلاع آن باخطوط مفروضی موازی باشند.

ب) یك n ضلعی بریك دایره محیط کنید که رأسهایش بر nخطمفروض $l_۱$و$l_۲$ و...و l_n (شکل ۹۹ ب) واقع باشند.



شکل ۹۹ ب



شکل ۹۹ الف

[مسائل ۸۴ (الف) و (ب) به‌صورت‌زیر نیز بیان می‌شوند:

الف) یك n ضلعی‌رسم کنید که در دایرهٔمفروض S محاط و بر n ضلعی‌مفروض $M_۱M_۲...M_n$ محیط باشد (← پانویس ص ۴۲).

ب) یك n ضلعی‌رسم کنید که در یك n ضلعی مفروض $N_۱N_۲...N_n$ محاط و بریك دایرهٔ مفروض S محیط باشد.]

حالتهای خاص مسألهٔ ۸۴، مسائل ۴۱ (الف) و (ب) درجلداول کتاب و مسألهٔ ۴۴ ب، بخش ۳ از کتاب فعلی هستند.مسألهٔ ۸۴ (الف) در زمینه‌های‌متفاوتی در بخشهای ۲ و ۴ فصل ۲ آمده است(← مسائل (۲۳۱ و ۲۵۹) و مسألهٔ ۸۴ (ب)، در بخش ۵ (مسألهٔ ۲۸۳) درهمان فصل.*

۸۵. الف) در دایرهٔمفروض S یك‌مثلث ABC محاط کنید که‌از آن، ضلع AB،

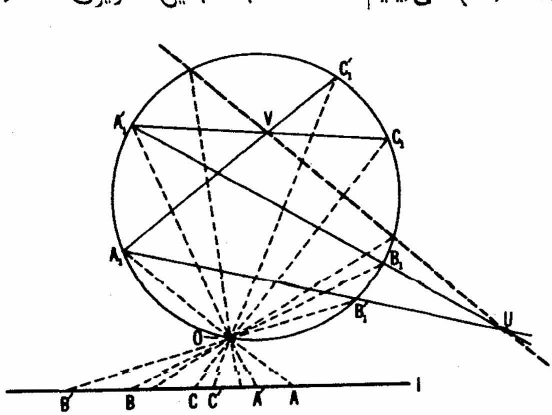
* عطف به‌فصلی که هنوز از روسی به‌انگلیسی ترجمه نشده است.

امتداد ضلع BC و یک نقطه از ضلع AC معلوم باشند.

ب) در دایرهٔ مفروض S یک چهارضلعی $ABCD$ محاط کنید که دو نقطه از دو ضلع مقابل آن و طولهای دوضلع دیگر آن معلوم باشند.

اکنون می‌خواهیم یک تبدیل تصویری ازیک خط l رادر نظر بگیریم که سه نقطهٔ مفروض A و B و C (واقع بر l) را به سه نقطهٔ مفروض A' و B' و C' (واقع بر l) بدل کند، بدین‌منظور که نقطه‌های ثابت این تبدیل را پیدا کنیم.

برای حل این مسأله یک دایرهٔ کمکی S می گیریم و l را از یک نقطهٔ O واقع بر S، بر S تصویرمی کنیم (شکل ۱۰۰). به‌هر تبدیلی ازخط که یک نقطهٔ M را به‌یک نقطهٔ M' بدل کند، از راه تصویر l بر S یک تبدیل از دایره نظیرمی‌شود که M_1، نگارهٔ نقطهٔ M، را بر اثرتصویر به M_1'، نگارهٔ M' بر اثر این تصویر، بدل می کند. اگر تبدیل l تصویری باشد، یعنی اگر نسبت ناهمساز را محفوظ بدارد، آنگاه S، تبدیل نظیر به‌آن نیز تصویری است (زیرا نسبت ناهمساز چهارنقطهٔ واقع بر S با نسبت ناهمساز چهارنقطهٔ متناظرش بر l مساوی است). حال فرض می کنیم A و B و C؛ A' و B' و C' نقاطی بر l و A_1 و B_1 و C_1؛ A_1' و B_1' و C_1' تصاویر آنها در S باشند (شکل ۱۰۰). برگردان تبدیل تصویری l، که A و B و C را بـه A' و B' و C' بدل‌می کند تبدیل‌تصویری S است که A_1 و B_1 و C_1 را به A_1' و B_1' و C_1' بدل می کند. نقاط ثابت دو تبدیل‌تصویری براثر تصویر از l بر S متناظر یکدیگر مـی‌شوند. بـا توجه به‌چگونگی پیداکردن نقاط ثابت تبدیل تصویـری یک دایره (← شکل ۸۹ در بالا)، می بینیم که نقاط ثابت تبدیل تصویری خط l نقاط برخوردl



شکل ۱۰۰

باخطهایی هستند که از O به نقاط برخورد دایرهٔ S باخط UV وصل می‌شوند، U نقطهٔ برخوردخطوط $A_1B'_1$ و A'_1B_1 است، و V نقطهٔ برخورد خطوط $A_1C'_1$ و A'_1C_1 (دراینجا فرض می‌کنیم که A و A'، و درنتیجه A_1 و A'_1 متمایزند؛ هرگاه A' و B' و C' بر A و B و C منطبق باشند، تمام نقاط l نقاط ثابت هستند). یك تبدیل تصویری از یك خط (که همانی نباشد) می‌تواند دو یا یك نقطهٔ ثابت داشته باشد، یا هیچ نقطهٔ ثابتی نداشته باشد. باید توجه کرد که یك نقطهٔ ثابت می‌تواند نقطه‌ای در بینهایت باشد؛ این حالت زمانی رخ می‌دهد که خط واصل بین نقطهٔ O و یك نقطهٔ ثابت تبدیل تصویری در دایره، با l موازی باشد.

ملاحظه می‌کنیم که اگر دایرهٔ S داده‌شده باشد، می‌توانیم نقطه‌های ثابت یك تبدیل تصویری از یك خط را که نقاط A و B و C را به‌نقاط A' و B' و C' بدل می‌کند به‌وسیلهٔ ستارهٔ تنها پیدا کنیم.

۸۶. دوخط l_1 و l_2 و دو نقطهٔ A و B نــاواقع برآنها داده شده‌اند. نقطه‌ای مانند X بر l_1 چنان پیدا کنید که پاره‌خطی کــه بر l_2 به‌وسیلهٔ خطوط AX و BX مشخص می‌شوند.

الف) دارای طول مفروض a باشد؛

ب) نقطهٔ مفروض E واقع بر l_2 وسط آن باشد.

این مسالهٔ را بامسألهٔ ۸۲ (ص۱۲۳) مقایسه کنید.

۸۷. دوخط l_1 و l_2 ویك نقطهٔ A بر l_1 ویك نقطهٔ B بر l_2 ویك نقطهٔ P ناواقع بر l_1 و l_2 داده شده‌اند. از P خطی رسم کنید کــه l_1 و l_2 را در نقاط X و Y ببرد به‌طوری که:

الف) AX/BY برابر بانسبت معلوم m/n باشد.

ب) $AX \cdot BY = k^2$، که k داده شده است.

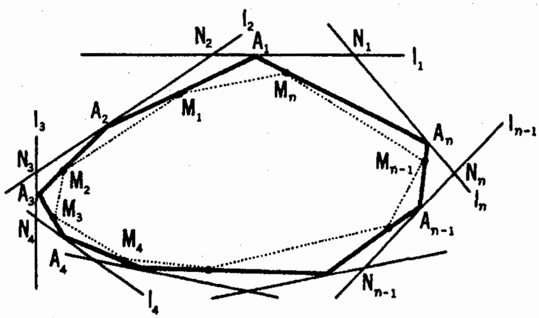
مسألهٔ ۸۷ (الف) در ارتباط دیگری در جلداول کتاب، مسألهٔ ۴۵ (ب)، آورده شده است؛ همچنین به‌شرح مربوط به‌آن مسأله در جلددوم، رجوع کنید.

۸۸. سه‌خط l_1 و l_2 و l_3 و یك نقطهٔ P دریك صفحه مفروض‌اند. از P خطی رسم کنید که آن‌سه‌خط را بترتیب درنقاط XوZوY ببرد، به‌طوری که $XZ = ZY$.

۸۹. دوخط l_1 و l_2 ونقطهٔ P ناواقع برآنها مفروض‌اند. از نقطهٔ P دوخط

رسم کنید که پاره‌خطهای X_1Y_1 و X_2Y_2 را بر l_1 و l_2 جدا کنند و طولهای این پاره‌خطها مقادیرمفروضی باشند، مثلا $X_1Y_1=a_1$ و $X_2Y_2=a_2$.

۹۰. n خط l_1 و l_2 و... و l_n به‌انضمام n نقطهٔ M_1 و M_2 و... و M_n دریك‌صفحه داده شده‌اند (شکل ۱۰۱). یك n ضلعی رسم کنید که رأسهایش بر این خطوط واقع باشند و اضلاعش از آن نقطه‌ها بگذرند (یا برخی از اضلاعش از بعضی از آن‌نقاط بگذرند و بقیهٔ اضلاع با امتدادهای معینی‌موازی باشند).



شکل ۱۰۱

[این‌مسأله به‌صورت‌زیر نیزممکن‌است بیان‌شود: دریك n ضلعی، یك nضلعی محاط کنید که اضلاعش از n نقطهٔ مفروض بگذرند (یا برخی از اضلاعش ازنقاط مفروضی بگذرند و بقیهٔ اضلاع امتدادهای قبلا معین شده‌ای داشته باشند)؛ یا باز به‌شکلی دیگر به‌صورت‌زیر: یك nضلعی‌محاط دریك nضلعی مفروض $N_1N_2...N_n$ و محیط بر nضلعی مفروض دیگر $M_1M_2...M_n$ رسم کنید.]

مسائل زیر حالتهای خاص مسألهٔ ۹۰ هستند: مسائل ۹ (ب) و ۱۰ (ج) جلددوم کتاب؛ ۲۴ (الف)ـ(ج)، بخش ۲ کتاب حاضر (ص ۴۲)، و بالاخره مسألهٔ ۶۱، بخش ۴ کتاب حاضر (ص ۱۰۴).

بین‌مطالب‌این‌بخش ازکتاب ومسألهٔ ترسیم به‌وسیلهٔ ستارهٔ تنها رابطهٔ نزدیکی وجود دارد. ترسیمهای هندسی معمولی ترسیمهای ستاره‌ای وپرگاری هستند. ولی معلوم‌می‌شود که، اگر خود را فقط به‌یکی‌ازاین دوابزار مقید کنیم، ظرفیت‌ترسیمات

ممکن چندان کم نمی‌شود؛ زیرا در بخش ۲، فصل بعد*، نشان خواهیم داد کـه کلیهٔ مسائل ترسیمی که می‌توانند باستاره و پرگار حل شوند، با پرگار تنها ممکن است حل‌شوند. در این‌مقام ترسیمهایی را در نظر می‌گیریم که باستارهٔ تنها انجام‌پذیرند.

به‌آسانی دیده می‌شود کـه همهٔ ترسیمهای پرگـاری و ستاره‌ای را نمی‌توان باستارهٔ تنها رسم کـرد. مثلا نشان خواهیم دادکـه باستارهٔ تنها ممکن نیست از نقطهٔ مفروض P خطی به‌موازات‌خط‌مفروض l رسم کرد. زیرا فرض‌می‌کنیم رسم‌چنین خطی، مانند m، از راه ترسیمی‌که فقط رسم‌خطوط در آن دخالت دارد میسر باشد. نمودار فرضی خـود در صفحهٔ π (متشکل ازخطوط تنها) را بریك صفحـهٔ π' چنان تصویر می‌کنیم‌که خطهای‌موازی l و m به‌خطهای متقاطع l' و m' بدل‌شوند. این‌عمل نشان می‌دهدکه ترسیم فرضی‌ما برای‌تعیین خط m که در π' انجام‌گرفته ودرآن l' نقش l را بازی می‌کند، یـك خط m' ناموازی با l' به‌دست مـی‌دهد. بنابراین ترسیم موردنظر همواره خطی‌موازی باخط مفروض به‌دست نمی‌دهد.

می‌توان نشان‌دادکه درتمام‌ترسیمات هندسهٔ مقدماتی احتیاج داریم از پرگار تنها یك‌بار استفاده‌کنیم. وقتی ازآن برای‌رسم یك‌دایرهٔ دلخواه استفاده‌کردیم، نیاز نداریم که دوباره آن را برای ترسیم بعدی به‌کار بریم. به‌عبارت دیگر ازیك دایرهٔ S به مرکز معلوم O در صفحه، می‌توانیم برای ترسیم بـا ستاره و پرگـار از ستارهٔ تنها استفاده کنیم. هدف بقیهٔ مسائل این‌بخش اثبات این گزاره است.

کلیهٔ ترسیمهای بـا پرگار و ستاره به‌ترسیم یك‌عده‌خط ودایره بدل می‌شوند. درنمودار، هرخط با دو نقطه، و هردایره بایك نقطهٔ معلوم، مرکزش، ویك پاره‌خط معلوم، شعاعش، مشخص می‌شود. نقاطی کـه دراین ترسیمها ظاهر می‌شوند یا نقاطی هستندکه از اول داده شده‌اند، و یا نقاط تقاطع خطوط و دوایر کمکی هستند. لذا، هرترسیم باستاره و پرگار به‌ترکیبی از ترسیمهای اساسی زیر بدل می‌شود:

الف) گذرانیدن یك‌خط از دونقطهٔ مفروض.

ب) رسم دایره‌ای به‌مرکز و شعاع معلوم.

ج) تعیین نقطهٔ تلاقی دوخط مفروض.

د) تعیین یکی ازنقاط تلاقی خط‌مفروض بادایرهٔ مفروض.

ه) تعیین یکی ازنقاط تلاقی دودایرهٔ مفروض.

ترسیمهای (الف) و (ج) را می‌توان باستارهٔ تنها انجام داد. درمورد ترسیم (ب)، بدیهی است کـه‌آن را نمی‌توان باستارهٔ تنها انجام داد. ولـی، اگر یك‌دایرهٔ

---

* فصل ترجمه نشده از روسی.

کمکی داده‌شده باشد، می‌توان نقاط دلخواه زیادی از یك دایرهٔ به‌مرکز وشعاع مفروض را باستارهٔ تنها تعیین کرد. (← مسألهٔ ۹۲ در زیر؛ این درست معنی دقیق این حکم نسبتاً کلی است که اگر یك دایرهٔ کمکی داده شده باشد، همهٔ ترسیمهای با پرگار و ستاره را می‌توان با استفاده از ستارهٔ تنها انجام داد). همچنین به کمك یك دایرهٔ کمکی می‌توان ترسیمهای (د) و (ه) را (← مسائل ۹۳ و ۹۴) تحقق بخشید. روی‌هم‌رفته، یك دایرهٔ کمکی و یك ستاره به‌ما امکان می‌دهند که کلیهٔ ترسیمهای با پرگار و ستاره را انجام دهیم، به‌شرطی که رسم یك دایرهٔ به‌مرکز و شعاع مفروض را به‌عنوان تعیین بسیاری از نقاط دلخواه آن تلقی کنیم.

درمسائل ۹۱-۹۴ فرض براین است که یك دایرهٔ ثابت S بامرکز معلوم O به‌ما داده شده‌است. همهٔ ترسیمها می‌بایستی به‌کمك ستارهٔ تنها انجام گیرند. درحل این مسائل از این واقعیت کمك گرفته می‌شود که قطب یك خط و قطبی یك نقطه نسبت به‌یك دایرهٔ معلوم را می‌توان بدون استفاده از پرگار رسم کرد (← بخش ۴، ص۸۸).

۹۱. الف) ازنقطهٔ مفروض P خطی به‌موازات یك خط مفروض l رسم کنید.

ب) از نقطهٔ مفروض M پاره‌خط MN را چنان رسم کنید که با پاره‌خط مفروض AB مساوی و موازی باشد.

ج) از نقطهٔ مفروض P عمودی برخط مفروض l وارد کنید.

۹۲. چگونه می‌توان هر تعداد دلخواه نقطه از یك دایره را پیدا کرد، در صورتی که مرکز A وشعاع آن داده شده باشد؟

۹۳. نقاط برخورد خط‌مفروض l و یك‌دایرهٔ S را پیدا کنید، درصورتی که مرکز A وشعاع BC از آن معلوم باشد.

۹۴. نقاط تلاقی دو دایرهٔ S_1 و S_2 را پیدا کنید، درصورتی که مراکز آنها، A_1 و A_2، و شعاعهای آنها، B_1C_1 و B_2C_2، مفروض باشند.

اشاره‌می‌کنیم که هرگاه‌به‌جای دایرهٔ کمکی S، یك‌قوس کوچك‌دلخواه MN از S و مرکز آن، O، داده شده باشد، بازهم می‌توانیم همهٔ ترسیمهای با پرگار و ستاره را باستارهٔ تنها انجام دهیم. علت آن این است که نقاط تقاطع یك‌خط l ویك دایرهٔ S را می‌توان با ستارهٔ تنها تعیین کرد، به‌شرطی که یك قوس MN از S به‌ما داده شده باشد (← مسألهٔ ۴۹، بخش۳، و مسألهٔ ۵۵، بخش ۴).

O مرکز دایرهٔ کمکی S (یاقوس کمکی MN) حتماً باید داده شده باشد. می‌توانیم به‌طور نسبتاً ساده‌ای نشان‌دهیم که اگرمرکز S داده نشده باشد، نمی‌توانیم بدون پرگار آن را تعیین کنیم. برای اثبات این‌حکم‌عیناً همان راهی را می‌رویم

که برای اثبات اینکه «در رسم خطی موازی با یك خط مفروض، رسم با ستارهٔ تنها وجود ندارد» رفته بودیم. فرض کنید که یك ترسیم باستارهٔ تنها برای تعیین O، مرکز یك دایرهٔ S، وجود داشته باشد. نمودار این ترسیم فرضی دستگاهی ازخطوط است که به نحوی با دایرهٔ S مربوط است، و دوتا ازاین خطوط در O، مرکز S، یکدیگر را می برند. صفحهٔ πی نمودار خود را بریك صفحهٔ جدید π' تصویر می کنیم به طوری که S به یك دایرهٔ S'، و مرکز Oی آن به یك نقطهٔ O'، که مرکز S' نیست بدل شود. انجام این عمل به وسیلهٔ نتایج بخش ۳ ممکن است (← بویژه، قضیهٔ ۱، ص ۷۱). نمودار در π' کاملا مشابه نمودار در π است جز اینکه نقطهٔ O' مرکز S' نیست. این نشان می دهد که ترسیم باستارهٔ تنها برای تعیین مرکز یك دایرهٔ دلخواه وجود ندارد. خلاصه اینکه: اگر مرکز دایرهٔ کمکی S داده نشده باشد، نمی توانیم همهٔ ترسیمهای با ستاره و پرگار را به کمك ستارهٔ تنها انجام دهیم (بویژه ممکن است مرکز S را با ستاره و پرگار تعیین کرد ولی نه باستارهٔ تنها).

بعلاوه، حتی اگر دو دایرهٔ نامتقاطع با مراکز نامعلوم درصفحه داده شده باشند، تعیین این مراکز باستارهٔ تنها میسر نیست* (جز وقتی که بدانیم دوایر هم مرکز ند؛ ← مسألهٔ ۹۵ (ج) در ذیل). آنچه که می توان نشان داد این است که ترسیمهای باستارهٔ تنها برای تعیین مراکز دو دایرهٔ متقاطع یا مماس (← مسائل ۹۵ (الف)، (ب))، یا سه دایرهٔ غیرمشخص که به یك دسته دایره متعلق نباشند، وجود ندارد.**

۹۵. فرض می کنیم دودایرهٔ S_1 و S_2 داده شده باشند. یك ترسیم با ستارهٔ تنها برای تعیین مراکز آنها پیدا کنید، هرگاه دو دایره، (الف) متقاطع؛ (ب) مماس؛ (ج) هم مرکز، باشند.

اکنون می توانیم قضیهٔ مربوط به ترسیم با خطکش موازی، مذکور در بخش ۴ (ص ۹۱) را ثابت کنیم. از آنجا که نقاط تلاقی یك خط l با یك دایرهٔ S را، که

---

* رجوع کنید، مثلا به صفحات ۱۷۷ و ۱۸۸ کتاب
Rademacher and Toeplitz, *The Enjoyment of Mathematics*, (Princeton Un. Press, 1957) pp. 177–187.

** ← بخش ۳، فصل ۲ (که هنوز از روسی ترجمه نشده است).

مرکزش A و شعاعش a معلوم‌اند، می‌توان با خطکش موازی تنها معین کرد (← مسألهٔ ۵۶، بخش ۴، ص ۹۰)، مطمئناً همهٔ مسائلی را که ممکن است باستارهٔ تنها رسم کرد، یعنی همهٔ‌مسائلی را که باستاره و پرگار حلپذیرند، می‌توان با یك خطکش‌موازی نیز حل کرد، به‌شرطی که یك‌دایرهٔ کمکی به‌مرکز معلوم در صفحه داده شده باشد.

پیوست

هندسهٔ نااقلیدسی لباچفسکی-بویوئی
(هندسهٔ هذلولوی)

در پیشگفتار یادآور شدیم که به‌هر گروه از تبدیلها یك هندسه مربوط می‌شود که سروکارش با آن ویژگیهایی ازشکلهای‌هندسی است که براثر تبدیلهای گروه‌مذکور تغییر نمی‌کنند. از این‌رو هندسهٔ اقلیدسی کلاسیك، که در دبیرستانها تدریس‌می‌شود، تنها هندسهٔ ممکن‌نیست؛ باانتخاب یك گروه از تبدیلها، غیر ازگروه حرکات (یا گروه تشابهات که به‌هندسه‌ای‌منجر می‌شودکه ارتباط بسیار نزدیکی باهندسهٔ اقلیدسی دارد)، به‌یك‌هندسهٔ جدید «نااقلیدسی» هدایت می‌شویم. یك مورد از این‌گونه «هندسه‌های نااقلیدسی» هندسهٔ تصویری است، که سروکارش باآن ویژگیهایی ازشکلهاست که براثر تبدیلهای تصویری عوض نمی‌شوند. هندسهٔ تصویری تنها یك هندسهٔ اقلیدسی نیست، بلکه هندسه‌ای‌است «خیلی‌زیاد نااقلیدسی». مثلا، فاصلهٔ بین نقاط یك‌ویژگی تصویری‌نیست، زیرا براثر یك‌تبدیل‌تصویری می‌توان هرپاره‌خطی را به‌هرپاره‌خط دیگر بدل‌کرد؛ به‌عبارت دیگر، در هندسهٔ تصویری‌همهٔ پاره‌خطها «قابل‌انطباق»اند. همهٔ‌زاویه‌ها نیز باهم‌قابل‌انطباق‌اند، به‌طوری‌که‌مفهوم‌معمولی‌زاویهٔ بین‌خطها‌درهندسهٔ تصویری بیمعنی است. همچنین هردو چهارضلعی در صفحه به‌معنی هندسهٔ تصویری «قابل‌انطباق»اند (← دراین ارتباط، قضیهٔ ۱، بخش۲، ص ۵۹) به‌طوری‌که‌صحبت از رده‌های مختلف چهارضلعیها (از قبیل متوازی‌الاضلاع، ذوزنقه، و غیره) معنی

پیدا نمی‌کند. باز، هر دو مثلث «قابل انطباق»اند؛ زیرا یك مثلث T_1 را می‌توان بر اثر یك تبدیل تصویری برمثلث دیگر T_2 نگاشت به‌طریقی که یك نقطهٔ مفروض در داخل T_1 به‌یك نقطهٔ مفروض در داخل T_2 بدل شود. این امر برای «نقاط استثنایی مثلث» صدق نمی‌کند (در یك مثلث همهٔ نقاط ازجنبهٔ تصویری هم‌ارزند).

خلاصه اینکه، باید بگوییم که مطالعهٔ مثلثها و چهارضلعیها، با آن اهمیتی که درهندسهٔ دبیرستانی صورت می‌گرفت، درهندسهٔ تصویری صورت نمی‌گیرد، و مطالعهٔ چندضلعیها از پنج‌ضلعیهایی آغاز می‌شود که می‌توانیم ملاکهای «قابلیت انطباق» و رده‌بندی معنی‌داری برای آنها قائل شویم.

همهٔ این جنبه‌های غیرعادی هندسهٔ تصویری معلول این واقعیت هستند که ردهٔ تبدیلهای تصویری خیلی دامنه دارتر از ردهٔ حرکات است (حرکات حالتهای خیلی خاص تبدیلهای تصویری‌اند). درنتیجه، ویژگیهای‌هندسی درهندسهٔ تصویری خیلی کمتراز ویژگیهای هندسی هندسهٔ اقلیدسی هستند. بیشترین ویژگیهای پایا براثر حرکات (مثل طول یك پاره‌خط، اندازهٔ یك‌زاویه، ویژگی متوازی‌اضلاع بودن، و غیره) براثر تبدیلهای تصویری پایا نیستند. برای اینکه هندسه‌ای به‌دست آوریم که بیش‌از هندسهٔ تصویری ویژگیهای پایا داشته باشد، باید زیر مجموعه‌ای از ردهٔ تبدیلهای تصویری انتخاب کنیم؛ این زیرمجموعه البته باید یك گروه تشکیل دهد. انتخاب زیرمجموعهٔ حرکات به هندسهٔ اقلیدسی منجر می‌شود. ولی ممکن است زیرگروههایی (یعنی،زیرمجموعه‌هایی که یك گروه تشکیل‌می‌دهند)دیگر نیز انتخاب کرد که به‌هندسه‌های تازهٔ جالبی منجر شوند.

راه‌زیر راهی است بسیارساده برای انتخاب یك‌گروه به‌قدر کافی کوچك از تبدیلهای تصویری که به‌هندسه‌ای با ویژگیهای هندسی پربار منتهی می‌شود. کلیهٔ تبدیلهای تصویری در یك‌صفحه را درنظر بگیرید که یك‌قرص‌مفروض $\mathbf{K}$ را به‌خودش بدل کند. روشن‌است که این تبدیلها یك گروه تشکیل می‌دهند: اگر دو تبدیل قرص $\mathbf{K}$ را به‌خودش بدل کنند، حاصلضرب آنها نیز $\mathbf{K}$ را به‌خودش بدل خواهد کرد. بقیهٔ شرایط گروهی را هم به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد. تبدیلهای این‌گروه را حرکات هذلولوی، و هندسه‌ای را که موضوع آن‌مطالعهٔ ویژگیهای پایای شکلها براثر این حرکات است هندسهٔ هذلولوی می‌نامیم.

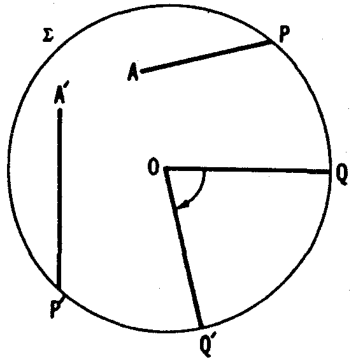
درابتدا ممکن‌است فکر کنید که گروه حرکات‌هذلولوی انتخاب خیلی‌خوبی نیست. دیدیم که پردامنه‌بودن گروه تبدیلهای تصویری، به‌علت مطرح نبودن مفهوم طول یك پاره‌خط درهندسهٔ تصویری، عیب‌بزرگی برای‌آن است. اما کوچك بودن گروه حرکتهای هذلولوی نیز ظاهراً مشکلاتی به‌بار می‌آورد. بویژه، چون‌حرکتی

هذلولوی کــه یك‌نقطه از قرص $\mathbf{K}$ را به‌یك نقطهٔ خارج $\mathbf{K}$ بدل کند وجود ندارد، ممکن است فکر کنید که در این هندسه هم تصوری از طول پاره خط نداریم (زیرا همهٔ پاره‌خطها باهم قابل‌مقایسه‌نیستند). برای رفع این‌دشواری نقاط‌هندسهٔ هذلولوی را نقاط داخل قرص $\mathbf{K}$، و خطوط هندسهٔ هذلولوی را پاره‌خطهای* واقع در داخل $\mathbf{K}$ می‌گیریم. حال در این‌هندسه همهٔ‌نقاط هم‌ارزند؛ به‌آسانی دیده‌می‌شود که همواره یك‌حرکت هذلولوی وجود دارد که یك‌نقطهٔ درونی A از $\mathbf{K}$ را به‌یك نقطهٔ درونی دیگر A' از $\mathbf{K}$ بدل کند (← قضیهٔ ۱، بخش ۳، ص ۷۱). بعلاوه می‌توان نشان داد که‌اگر AP و $A'P'$ دو نیمخط باشند (منظور ما از یك نیمخط به‌مبدأ A، پاره‌خطی است که ازیك‌سر به‌نقطهٔ A محدود است واز سر دیگر به‌مرز Σ ازقرص $\mathbf{K}$ ←شکل ۱۵۲)، آنگاه یك حرکت هذلولوی وجود دارد که A را به A' بدل می‌کند و نیمخط AP را به‌نیمخط $A'P'$. برای اثبات، ملاحظه‌می‌کنیم که به‌موجب قضیهٔ ۱، بخش ۳، حرکتهای هذلولوی M_1 و M_2 وجود دارند کــه بترتیب A و A' را به O، مرکز قرص $\mathbf{K}$، بدل می‌کنند. نگاره‌هــای نیمخطهــای AP و $A'P'$ براثر M_1 و M_2 را بترتیب به OQ و OQ' نشان می‌دهیم و حرکتی هذلولوی را کــه عکس M_2 است به M_2^{-1} نشان مــی‌دهیم (M_2^{-1} نیمخط OQ' را به‌نیمخط $A'P'$ بــدل می‌کند و وجودش‌از ویژگیهای گروهی‌حرکتهای‌هذلولوی ناشی‌می‌شود). حال‌رشته‌حرکتهای هذلولوی مرکب از M_1، و دوران $\mathcal{R}$ روی $\mathbf{K}$ به‌زاویهٔ QOQ'، و M_2^{-1} را در نظر می‌گیریم. اولی AP را به OQ بــدل می‌کند، و دومی OQ را به OQ'، و سومی OQ' را به $A'P'$. لذا حاصلضرب این سه‌حرکت نااقلیدسی AP را به $A'P'$ بدل می‌کند و حکم اثبات می‌شود.

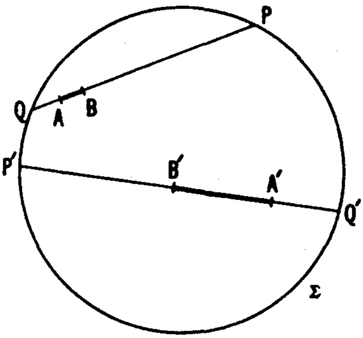
چنانچه هم‌اکنون دیدیم در هندسهٔ هذلولوی هر نقطه به هر نقطهٔ دیگر و هر نیمخط به‌هر نیمخط دیگر می‌تواند بدل‌شود. طبیعی است که بپرسیم آیا هر پاره‌خط AB می‌تواند به‌هر پاره‌خط دیگر $A'B'$ بدل شود یا نه. ثابت می‌شود کــه این امر غیرممکن است. زیرا، اگر یك‌حرکت هذلولوی پاره‌خط AB را به‌پاره‌خط $A'B'$ بدل کند (شکل ۱۵۳). تمام‌خط هذلولوی AB را از A تا B به‌خط هذلولوی $A'B'$ بدل‌خواهد کرد. وچون هرحرکت هذلولوی‌دایرهٔ Σ، مرزقرص $\mathbf{K}$ را، به‌خودش بدل می‌کند، نقاط P و Q، محل تلاقی AB با Σ، را به‌نقاط P' و Q'، محل تلاقی $A'B'$ با Σ بدل خواهد کرد. لذا آن حرکت هذلولوی چهار نقطهٔ A و B و P و Q را به چهارنقطهٔ A' و B' و P' و Q' بدل خواهد کرد. حرکتهــای هذلولوی، مــانند همهٔ

---

* بهتر بود که به‌جای پاره‌خطهای واقع در داخل $\mathbf{K}$، وترهای باز $\mathbf{K}$ گفته می‌شد.—م.



شکل ۱۰۲



شکل ۱۰۳

تبدیلات تصویری، نسبت ناهمساز چهار نقطه را حفظ می‌کنند (←ص ۴۸)، واین مطلب تساوی

$$\frac{AP/BP}{AQ/BQ}=\frac{A'P'/B'P'}{A'Q'/B'Q'}$$

را ایجاب می‌کند. اگر این تساوی برقرار نباشد، هیچ حرکت هذلولوی وجود ندارد که پاره‌خط AB را به‌پاره‌خط $A'B'$ بدل کند.*

بدین‌ترتیب‌نشان داده‌ایم که اگر ممکن باشد پاره‌خط AB را براثر یك‌حرکت هذلولوی به‌پاره‌خط $A'B'$ بدل‌کنیم، باید داشته باشیم

---

* یك نتیجهٔ این تساوی این است که اگر ترتیب نقاط برخطوط (اقلیدسی) به‌صورت Q، A، B، P و Q'، A'، B'، P' باشد،آنگاه حرکتی هذلولوی‌که پاره‌خط AB را به‌پاره‌خط $A'B'$ بدل می‌کند باید P را به P' و Q را به Q' (نه P را به Q' و Q را به P') بدل کند. زیرا، نسبتهای ناهمساز $(AP/BP)/(AQ/BQ)$ و $(A'P'/B'P')/(A'Q'/B'Q')$هردو بزرگتر از ۱ هستند ($AQ/BQ<1$ و $AP/BP>1$) در حالی‌که نسبت ناهمساز $(A'Q'/B'Q')/(A'P'/B'P')$ کوچکتر از ۱ است ($A'Q'/B'Q'<1$ و $A'P'/B'P'>1$)؛ که وجود تساوی

$$(AP/BP)/(AQ/BQ)=(A'Q'/B'Q')/(A'P'/B'P')$$

را مردود می‌سازد.

$$\frac{AP/BP}{AQ/BQ}=\frac{A'P'/B'P'}{A'Q'/B'Q'} \qquad (*)$$

حال نشان می‌دهیم که برعکس، اگر تساوی (*) برقرار باشد، آنگاه یك حرکت هذلولوی وجود دارد که پاره‌خط AB را به پاره‌خط $A'B'$ بدل می‌کند. بدین‌منظور A را به A' بدل می‌کنیم به‌طوری که نیمخط AB به نیمخط $A'B'$ بدل شود (قبلا نشان دادیم که این عمل همواره شدنی است)؛ این حرکت Q را به Q' بدل خواهد کرد. فرض می‌کنیم B_1 معرف نگارهٔ B باشد. چون تبدیل تصویری، نسبت ناهمساز چهار نقطه را حفظ می‌کند، باید داشته باشیم

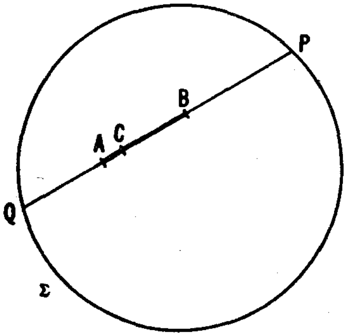
$$\frac{AP/BP}{AQ/BQ}=\frac{A'P'/B_1P'}{A'Q'/B_1Q'}$$

از این رابطه و رابطهٔ (*) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{A'P'/B_1P'}{A'Q'/B_1Q'}=\frac{A'P'/B'P'}{A'Q'/B'Q'}$$

که نشان می‌دهد B_1 باید بر B' منطبق باشد، یعنی این حرکت هذلولوی، چنانکه ادعا کرده بودیم، پاره‌خط AB را به پاره‌خط $A'B'$ بدل کرده است.

می‌دانیم که نسبت ناهمساز $(AP/BP)/(AQ/BQ)$ «طول هذلولوی» پاره‌خط AB را مشخص می‌کند، بدین‌معنی که از دیدگاه هندسهٔ هذلولوی دو پاره‌خط AB و $A'B'$ باهم قابل انطباق‌اند اگر و فقط اگر نسبتهای ناهمساز $(AP/BP)/(AQ/BQ)$ و $(A'P'/B'P')/(A'Q'/B'Q')$ مساوی باشند. ولی، این واقعیت به‌تنهایی نسبت ناهمساز $(AP/BP)/(AQ/BQ)$ را به‌عنوان «طول هذلولوی» پاره‌خط AB، کاملا توجیه نمی‌کند. روی‌هم‌رفته، در هندسهٔ اقلیدسی هر تابع عکسپذیر از طول، (مثلا، مربع طول یا ریشهٔ سوم طول) نیز پاره‌خطهایی قابل‌انطباق را مشخص می‌کند. بعلاوه آنچه که برای ما عادی است این است که، اگر نقطه‌ای مانند C یك پاره‌خط AB را به‌دو پاره‌خط کوچکتر AC و CB (شکل ۱۰۴ (الف)) تقسیم‌کند، آنگاه طول AB مساوی مجموع طولهای پاره‌خطهای AC و CB است. ولی این موضوع، به‌عنوان یك اندازهٔ بالقوهٔ طول هذلولوی، برای نسبت ناهمساز صادق نیست؛ زیرا اگر نقطهٔ C پاره‌خط AB را به‌دو قطعهٔ کوچکتر AC و CB (شکل ۱۰۴ ب) تقسیم کند، آنگاه، روشن است که داریم:



شکل ۱۰۴ ب

شکل ۱۰۴ الف

$$\frac{AP/BP}{AQ/BQ}=\left(\frac{AP/CP}{AQ/CQ}\right)\cdot\left(\frac{CP/BP}{CQ/BQ}\right)$$

یعنی نسبت ناهمساز $(AP/BP)/(AQ/BQ)$ به‌جای اینکه مساوی حاصلجمع نسبتهای ناهمساز $(AP/CP)/(AQ/CQ)$ و $(CP/BP)/(CQ/BQ)$ باشد، برابر حاصلضرب آنهاست. اما ملاحظه می‌کنیم* که

$$\log\left(\frac{AP/BP}{AQ/BQ}\right)=\log\left(\frac{AP/CP}{AQ/CQ}\right)+\log\left(\frac{CP/BP}{CQ/BQ}\right),$$

زیرا لگاریتم یك حاصلضرب، مساوی مجموع لگاریتمهای عوامل آن است. این مطلب ما را به این‌فکر می‌اندازد که $\log (AP/BP)/(AQ/BQ)$ را طول هذلولوی پاره‌خط AB تعریف کنیم. این‌طول را با d_{AB} نشان می‌دهیم.

$$\log\frac{AP/BP}{AQ/BQ}=d_{AB} \qquad (**)$$

که مانند همیشه P و Q نقاط تلاقی خط AB و دایرهٔ Σ هستند؛ زیرا دراین صورت

---

* اشاره می‌کنیم که شرط ما دربارهٔ ترتیب نقاط برخط AB (← پانویس ص ۱۳۵) تضمین‌می‌کند که‌نسبت ناهمساز $(AP/BP)/(AQ/BQ)$ بزرگتراز ۱ باشد، و بنابراین لگاریتم آن مثبت است. عین‌همین توضیح برای دونسبت ناهمساز دیگرنیز صادق است.

داریم

$$d_{AB}=d_{AC}+d_{CB}$$

این ویژگی جمعی، و این نتیجه که تساوی $d_{AB}=d_{A'B'}$ وقتی و فقط وقتی برقرار است که پاره‌خطهای AB و $A'B'$ به‌معنی هندسهٔ فعلی باهم قابل‌انطباق باشند، وجه تسمیهٔ فوق‌را، که‌عدد(**)را طول‌هذلولوی‌پاره‌خط AB خوانده‌ایم، توجیه می کند.*

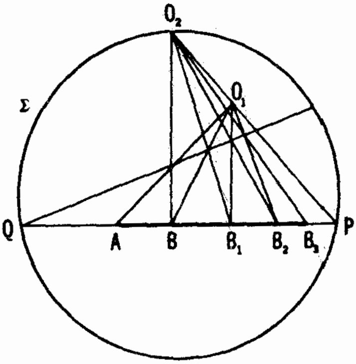
ملاحظه می کنیم که اگر نقطهٔ B برخط AP به‌سمت نقطهٔ P حرکت‌کند، آنگاه نسبت ناهمساز $(AP/BP)/(AQ/BQ)$ بیش‌از حد زیادمی‌شود ($BP \to ۰$)؛ در نتیجه d_{AB}، طـول هذلولوی پاره‌خط AB، نیز بیش ازحد زیـاد می‌شود. این امر ایجاب مـی‌کند کـه طول هذلولوی نیمخط AP (و همچنین طول تمام خط PQ)، علیرغم این واقعیت که تمام خط هذلولوی با یك پاره‌خط با طول متناهی اقلیدسی نشان داده می‌شود، بینهایت باشد.

نامتناهی‌بودن خط‌هذلولوی را می‌توان بدون ارجاع به‌نسبت ناهمساز اثبات کرد. ترسیمهای مربوطه درشکل ۱۰۵ نشان داده شده‌اند؛ شکل ۱۰۵ (الف) نشان می‌دهدکه چگونه باید پاره‌خط AB از خط هذلولوی PQ را دوبرابر کرد، وشکل ۱۰۵ (ب) نشان‌می‌دهدکه فرایند جداکردن یك‌رشته‌پاره‌خطهایی مساوی با پاره‌خط AB بر نیمخط AP (ابتدا از A) می‌تواند بـدون رسیدن به‌نقطهٔ P بینهایت ادامـه یابد. اینك جزئیات «دو برابر کردن» را کـه درشکل ۱۰۵ (الف) نشان داده شده است روشن مـی‌کـنیم. نـسبتـهـای نـاهـمساز $(AP/BP)/(AQ/BQ)$ و $(\bar{A}\bar{P}/\bar{B}\bar{P})/(\bar{A}Q/\bar{B}Q)$ مساوی‌اند، زیرا چهارتاییهای A و B و P و Q، و $\bar{A}$ و $\bar{B}$ و $\bar{P}$ و Q تصویـر منظری از $O_۱$ هستند و نسبتهـای $(\bar{A}\bar{P}/\bar{B}\bar{P})/(\bar{A}Q/\bar{B}Q)$ و $(BP/B_۱P)/(BQ/B_۱Q)$ برابرند، زیرا چهارتاییهای $\bar{A}$ و $\bar{B}$ و $\bar{P}$ و Q، و B و $B_۱$ و P و Q تصویر منظری از $O_۲$ هستند. بنابراین داریم:

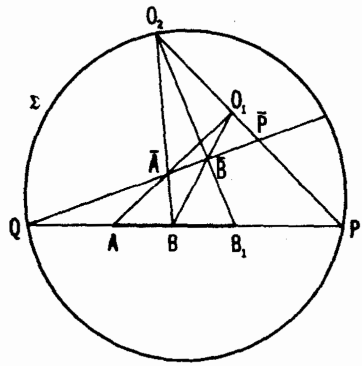
$$\frac{AP/BP}{AQ/BQ}=\frac{BP/B_۱P}{BQ/B_۱Q}$$

---

* می‌توانستیم طول هذلولوی‌پاره‌خط AB را باعدد $k\log[(AP/BP)/(AQ/BQ)]$، که k ثابت مثبت دلخواهی است تعریف کنیم. انتخاب یك kی خاص به‌معنی انتخاب یك واحد طول خاص در هندسهٔ هذلولوی است. این توصیف نشان می‌دهد کـه انتخاب یك مبنای لگاریتم خاص در فرمول (**)، اهمیت زیادی ندارد، چه، یـك تغییر مبنا در لگاریتم با ضرب همهٔ «طولهای» d_{AB} دریك مقدارثابت هم‌ارز است.



شکل ۱۰۵ ب



شکل ۱۰۵ الف

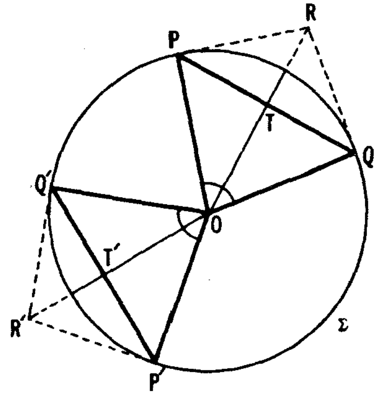
و یا هم‌ارز با آن

$$d_{AB}=d_{BB_1}$$

این تساوی، قابلیت انطباق (به‌معنی هندسهٔ هذلولوی) پاره‌خطهای AB و BB_1 را ایجاب می‌کند. در شکل ۱۰۵ (ب) فقط از ترسیم مذکور درشکل ۱۰۵ (الف) ابتدا برای AB (که BB_1 را به‌دست می‌دهد) و سپس برای BB_1 (که B_1B_2 را می‌دهد) استفاده شده است وهکذا.

حال‌مسألهٔ زاویه‌های بین خطها را در هندسهٔ هذلولوی بررسی‌می‌کنیم. ابتدا حالتی را درنظر می‌گیریم که دو جفت نیمخطهای OP، OQ و OP'، OQ' از O، مرکز قرص $\mathbf{K}$، خارج شده‌اند. روشن است که اگر زاویه‌های معمولی (اقلیدسی) POQ و $P'OQ'$ مساوی باشند (شکل ۱۰۶)، یك‌حرکت هذلولوی وجود دارد که زاویهٔ POQ را به‌زاویهٔ $P'OQ'$ بدل می‌کند: حرکت مطلوب دورانی‌است پیرامون مرکز O (یك دوران پیرامون O یك حرکت هذلولوی است، زیرا تبدیلی است تصویری که قرص $\mathbf{K}$ را به‌خودش بدل می‌کند)*. نشان خواهیم داد که، بعکس،

* زاویه‌های POQ و $P'OQ'$ را (به‌فرض مساوی بودن، به‌معنی اقلیدسی) می‌توان به‌وسیلهٔ یك‌حرکت هذلولوی از راه‌انطباق OP بر OP' و OQ بر OQ' (به‌جای‌انطباق OP بر OQ' و OQ بر OP') برهم منطبق‌کرد. برای این‌منظور کافی است‌که قرص $\mathbf{K}$ را پیرامون O به‌زاویهٔ POP' دوران دهیم و سپس درصورت نیاز قرینهٔ $\mathbf{K}$ نسبت به OP را پیدا کنیم (تقارن نسبت به‌یك قطر $\mathbf{K}$، حرکتی است هذلولوی).



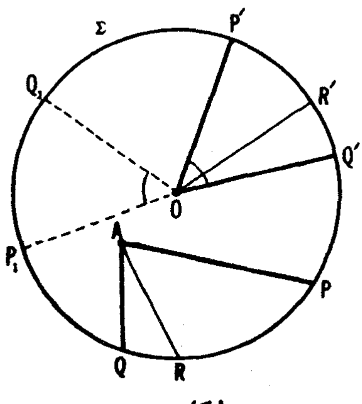
شکل ۱۰۶

اگر یك حرکت هذلولوی موجود باشد که زاویهٔ POQ را به زاویهٔ $P'OQ'$ بدل کند، زاویه‌های (معمولی، یعنی اقلیدسی) POQ و $P'OQ'$ قابل انطباق اند. زیرا یك چنین تبدیل تصویری از صفحه که $\mathbf{K}$ را به‌خودش بدل کند، نقاط P و Q را به‌نقاط P' و Q' و بنابراین خط PQ را به‌خط $P'Q'$ بدل می کند؛ این حرکت مماسهای PR و QR بر دایرهٔ Σ در نقاط P و Q را به مماسهای $P'R'$ و $Q'R'$ در نقاط P' و Q' بدل می کند (زیرا هر حرکت هذلولوی، Σ را به‌خودش بدل می کند ومماسهای بر Σ را به مماسهای بر Σ؛ ← ص ۷۷). بعلاوه، خط OR را به خط OR' ونقطهٔ T، نقطهٔ برخورد PQوOR، را به T'، نقطهٔ برخورد $P'Q'$ و OR'، بدل می کند (شکل ۱۰۶). لذا حرکت هذلولوی، پاره‌خط OT را به پاره‌خط OT' بدل می کند، و معنی آن این است که این دو پاره‌خط به‌معنی هندسهٔ هذلولوی قابل انطباق اند. ولی این قابلیت انطباق مستلزم قابلیت انطباق آنها به‌معنای هندسهٔ اقلیدسی است؛ زیرا اگر پاره‌خط OT، مثلاً، کوچکتر ازپاره‌خط OT' بود، آنگاه می توانستیم پاره‌خط OT را با یك دوران پیرامون O (که یك حرکت هذلولوی است) به‌یك جزء از پاره‌خط OT' بدل کنیم و این، نشان می‌داد که طولهای هذلولوی دو پاره‌خط متفاوت اند، که مغایر قابلیت انطباق هذلولوی اثبات‌شدهٔ این پاره‌خطهاست. ازطرفی تساوی $OT=OT'$ تساوی $\sphericalangle POQ=\sphericalangle P'OQ'$ را ایجاب می کند، زیرا $OT=r\cos(۱/۲)\sphericalangle POQ$ و $OT'=r\cos(۱/۲)\sphericalangle P'OQ'$ که r شعاع قرص $\mathbf{K}$ است.

چنانکه‌می بینیم، همان گونه که نسبت ناهمساز $(AP/BP)/(AQ/BQ)$ طول

هذلولوی یك پـاره‌خط AB را مشخص مـی‌کرد اندازهٔ زاویهٔ POQ نیز «زاویهٔ هذلولوی» بین OP و OQ را مشخص می‌کند؛ همچنین اگر نیمخط OU، مرسوم در داخل زاویـهٔ POQ، آن را بـه‌زاویـه‌هـای POU و UOQ تـقسیم کند، آنگاه $\sphericalangle POQ = \sphericalangle POU + \sphericalangle UOQ$. (اندازهٔ مجموع دو زاویه بامجموع اندازه‌های آنها مساوی است). بنابراین بجا می‌دانیم کـه δ_{POQ}، اندازهٔ زاویـهٔ هذلولوی بین دونیمخط OP و OQ، را که اضلاع آن از O، مرکزقرص $\mathbf{K}$، خارج شده‌اند همان اندازهٔ اقلیدسی زاویهٔ POQ تعریف کنیم.

اکنون، زاویهٔ PAQ به‌رأس یك‌نقطهٔ دلخواه A ازقرص $\mathbf{K}$ (شکل ۱۰۷) را درنظر می‌گیریم. دریك حرکت هذلولوی که A را به O، مرکز $\mathbf{K}$، بدل کند زاویهٔ PAQ به‌زاویهٔ $P'OQ'$ بـدل می‌شود. البته برای انتخاب چنین حرکتی راههـای زیادی وجود دارد (← ص۱۳۴)؛ به‌هرحال، اگر M_1 و M_2 دو حرکتی باشند که زاویهٔ PAQ را به‌دو زاویهٔ مرکزی $P'OQ'$ و P_1OQ_1 بدل کنند، آنگاه M_1^{-1}، عکس حرکت M_1، زاویـهٔ $P'OQ'$ را به‌زاویـهٔ PAQ بـدل می‌کند، و بنابراین حاصلضرب حرکتهای هذلولوی M_1^{-1} و M_2، زاویهٔ $P'OQ'$ را به‌زاویهٔ P_1OQ_1 بدل می‌کند. این‌نکته نشان می‌دهد که زاویه‌های $P'OQ'$ و P_1OQ_1 به‌معنی هندسهٔ هذلولوی، ودرنتیجه‌به‌معنی‌معمولی (اقلیدسی)، هم‌قابل‌انطباق‌اند. از این‌رومی‌توانیم اندازهٔ δ_{PAQ}، زاویهٔ هذلولوی بین دو نیمخط AP و AQ، را اندازهٔ اقلیدسی هرزاویهٔ مرکزی $P'OQ'$ ازقرص $\mathbf{K}$ تعریف‌کنیم‌که ممکن‌است زاویهٔ PAQ را براثر یك‌حرکت هذلولوی به‌آن بـدل کنیم. روشن است کـه این‌اندازهٔ نااقلیدسی زاویه‌هـا واجد



شکل ۱۰۷

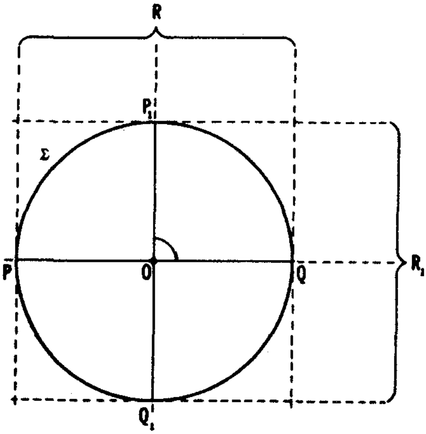
ویژگیهای اساسی اندازهٔ زاویه‌های معمولی اقلیدسی است؛ یعنی برای هردو زاویه یکی است، اگر و تنها اگر یك‌حرکت هذلولوی وجـود داشته باشد کـه یکی را به‌دیگری بدل کند؛ و هر گاه نیمخطی مـانند AR در داخل زاویهٔ PAQ رسم شده باشد، آنگاه $\delta_{PAQ}=\delta_{PAR}+\delta_{RAQ}$.

چون حرکات هذلولوی خط را به‌خط بـدل می‌کنند، لـذا اندازهٔ یك‌زاویهٔ نیمصفحه درهر نقطهٔ A با اندازهٔ یك‌زاویهٔ نیمصفحه‌درنقطهٔ O، یعنی با اندازهٔ اقلیدسی یك زاویهٔ نیمصفحه یکی می‌شود. به‌عبارت دیگر درهندسهٔ هذلولوی مـانند هندسهٔ اقلیدسی، یك‌زاویهٔ نیمصفحه برابر 180° است. و نیز درهندسهٔ‌هذلولوی مانند هندسهٔ اقلیدسی، یك زاویهٔ تمام صفحه، همواره بادو زاویهٔ نیمصفحه، و بنابراین با 360° مساوی است. یك زاویهٔ قائمه، یعنی یك‌زاویهٔ قابل انطباق با مکملش، با نصف زاویهٔ نیمصفحه، یعنی با 90° مساوی است. ولی دوخط عمودبرهم (که یك‌زاویهٔ قائمه با هم می‌سازند) درهندسهٔ هذلولوی، درحـالت کلی، به‌معنی معمولی (اقلیدسی) عمود نیستند. این مسأله که دوخط هذلولوی PQ و P_1Q_1 درچـه مواقعی به‌معنی هندسهٔ هذلولوی برهم عمودند بعداً بررسی خواهد شد.

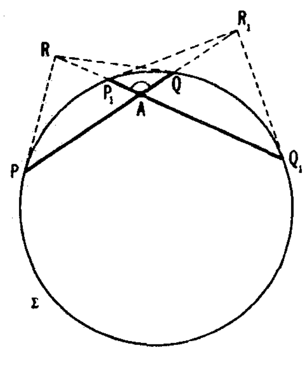
اگر دوخط PQ و P_1Q_1 در O، مرکز $\mathbf{K}$، متقاطع باشند، آنگاه برای اینکه به‌معنی هندسهٔ هذلولوی برهم‌عمود باشند بایدبه‌معنی معمولی (اقلیدسی) عمودباشند. لذا، دراین‌حال مماسهای‌مرسوم بردایرهٔ Σ درنقاط P و Q باید باخط P_1Q_1 موازی باشند (شکل ۱۰۸ (الف)). دراصطلاح تصویری، دو مماس وخط P_1Q_1 باید همه در صفحهٔ تصویری از یك نقطه دربینهایت بگذرند. براثر یك حرکت هذلولوی که نقطهٔ O را به‌یك نقطهٔ A بـدل می‌کند، نمودار شکل ۱۰۸ (الف) به نمودار شکل ۱۰۸ (ب) بدل‌خواهد شد، و براثر تبدیل عکس، که A را به O بدل‌می‌کند، نمودار شکل ۱۰۸ (ب) به‌نمودار شکل ۱۰۸ (الف) بدل‌خواهدشد. ازآنجا نتیجه‌می‌شود که دوخط هذلولوی PQ و P_1Q_1 تنها وتنها وقتی‌برهم عمودندکه امتداد خط P_1Q_1 دربیرون‌قرص $\mathbf{K}$ از نقطهٔ برخورد مماسهای‌مرسوم بر Σ درنقاط P و Q بگذرند (شکل ۱۰۸ (ب))*. بویژه هرگاه خط PQ قطری از قرص $\mathbf{K}$ باشد (شکل ۱۰۸ (ج))،

* به‌عبارت دیگر خط P_1Q_1 وقتی برخط PQ عمود است کـه امتدادآن، در بیرون قرص $\mathbf{K}$، ازقطب خط PQ نسبت به‌دایرهٔ Σ بگذرد (← بخش ۴، ص ۸۸)؛ اگر این شرط برقرار بـاشد، به‌موجب قضیهٔ ۲، بخش ۴، ص ۸۹، امتداد خط PQ نیز از قطب خط نسبت Q_1P_1 به Σ، یعنی از نقطهٔ تلاقی مماسهای مرسوم بر Σ در Q_1 و P_1، خواهد گذشت. این مطلب ایجاب می‌کند که در هندسهٔ هذلولوی (مانند هندسهٔ اقلیدسی) نسبت

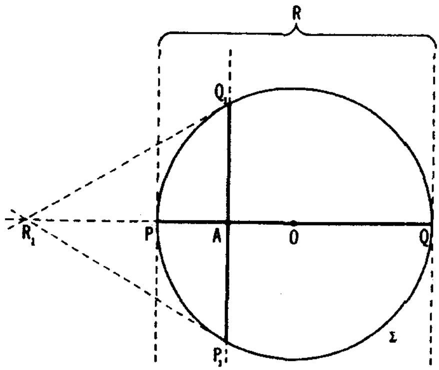
←



شکل ۱۰۸ الف



شکل ۱۰۸ ب



شکل ۱۰۸ ج

مماسهای بر Σ در P و Q با یکدیگر موازی و (به‌معنای اقلیدسی) بر آن قطر عمودند. ازاینجا نتیجه‌می‌شود که یک‌خط P_1Q_1 که بر یک‌قطر PQ به‌معنی هندسهٔ نااقلیدسی عمود است به‌معنی اقلیدسی نیز بر آن عمود خواهد بود (خواه‌خط P_1Q_1 از مرکز قرص **K** بگذرد، خواه نگذرد). روشن است که در هندسهٔ هذلولوی از یک نقطهٔ B

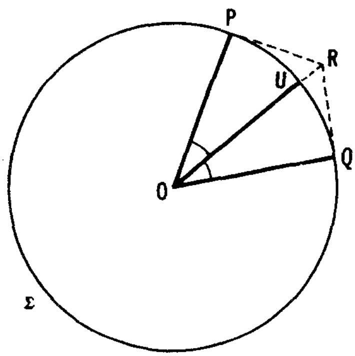
⟵

تعامد خطوط، نسبتی متقارن باشد، اگر $PQ \perp P_1Q_1$، آنگاه $P_1Q_1 \perp PQ$
(←همچنین به‌شکل ۱۰۸ (الف)).

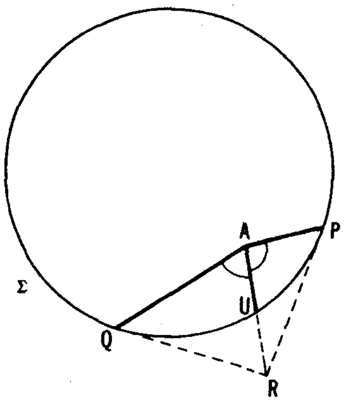
منحصراً یك‌عمود می‌توان بریك خط PQ رسم کرد. برای رسم آن کافی است نقطهٔ B را به نقطهٔ برخورد مماسهای مرسوم بر Σ در نقاط P و Q وصل کنیم. پای این عمود را طبعاً تصویر نقطهٔ B بر خط PQ می‌نامیم. اگر B تصادفاً بر PQ باشد، ترسیم بالا چگونگی اخراج عمود برخط مفروض از نقطهٔ مفروض واقع بر آن را مشخص می‌کند.

اکنون نشان می‌دهیم که درهندسهٔ هذلولوی یك‌زاویه را چگونه باید نصف کنیم. اگر زاویه، زاویهٔ مرکزی باشد، زمانی یك‌خط OU به‌معنی نااقلیدسی آن‌را نصف می‌کند که به‌معنی معمولی (اقلیدسی) آن را نصف کند (شکل ۱۰۹ (الف))، یعنی اگر امتداد آن از R، نقطهٔ تلاقی مماسهای بر Σ در P و Q بگذرد. این‌مطلب ایجاب می‌کند که یك‌خط AU زاویهٔ نااقلیدسی PAQ را (که رأسش در یك‌نقطهٔ غیرمشخص A از صفحهٔ هذلولوی است) زمانی نصف‌کند که امتدادش از R، نقطهٔ تلاقی مماسهای بر Σ در P و Q بگذرد (شکل ۱۰۹ (ب))*.

برای‌رسم یك زاویهٔ مرکزی $P'OQ'$ ازقرص K قابل‌انطباق با یك‌زاویهٔ مفروض PAQ، روش‌ساده‌ای‌وجود دارد (شکل ۱۱۰ (الف). درسراسر این بحث، قابلیت‌انطباق

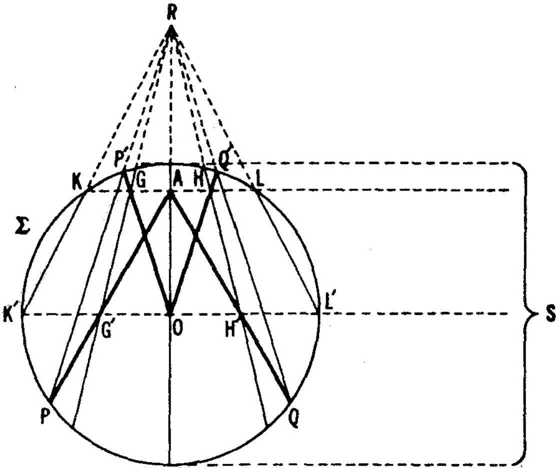


شکل ۱۰۹ الف

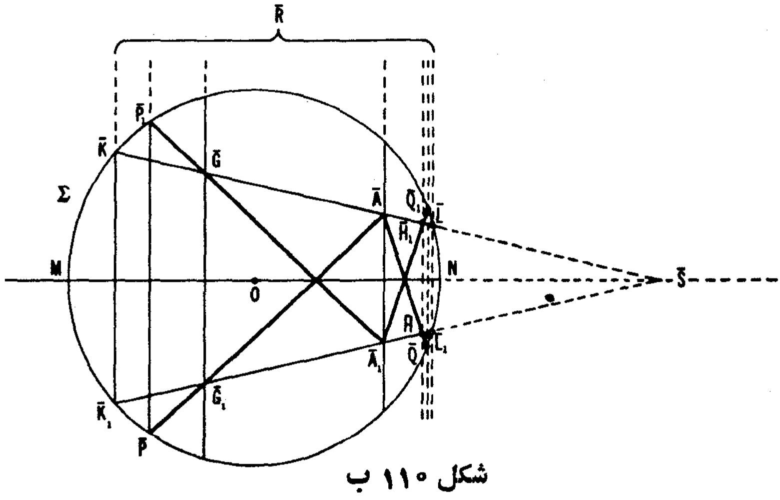


شکل ۱۰۹ ب

* یعنی اگر امتداد AU از قطب خط PQ نسبت به‌دایرهٔ Σ بگذرد (← پانویس ص ۱۴۲)، بویژه اگر PAQ یك‌زاویهٔ نیمصفحه باشد، دیده می‌شود که رسم نیمساز زاویه، با اخراج عمود برخط PQ درنقطهٔ مفروض A ازآن یکی است.



شکل ۱۱۰ الف



شکل ۱۱۰ ب

پاره‌خطها و زاویه‌ها به‌معنی قابلیت انطباق هندسهٔ هذلولوی است). دو زاویهٔ $\overline{P}\overline{A}\overline{Q}$ و $\overline{P}_1\overline{A}_1\overline{Q}_1$ متقارن (به‌معنی‌معمولی) نسبت به‌یک‌قطر MN ازقرص K را درنظرمی‌گیریم (شکل ۱۱۰ ب)، به‌طوری که زاویه‌های $\overline{A}_1\overline{A}\overline{P}$ و $\overline{A}_1\overline{A}\overline{Q}$ با زاویه‌های OAP و OAQ

قابل‌انطباق باشند (که در نتیجه زاویه‌های PAQ و $\bar{P}\bar{A}\bar{Q}$ قابل‌انطباق شوند) و فاصلهٔ $d_{\bar{A}\bar{A}_1}$ بافاصلهٔ d_{AO} مساوی باشد. زاویه‌های $\bar{P}\bar{A}\bar{Q}$ و $\bar{P}_1\bar{A}_1\bar{Q}_1$ قطعاً قابل‌انطباق‌اند، چه می‌توانند با یك حرکت هذلولوی، یعنی قرینه‌یابی نسبت به‌قطر MN، به‌یکدیگر بدل شوند. آن حرکت هذلولوی که پاره‌خط $\bar{A}\bar{A}_1$ را به‌پاره‌خط AO بدل کند، زاویهٔ $\bar{P}\bar{A}\bar{Q}$ را نیز به‌زاویهٔ PAQ (به‌همین دلیل ما به‌قابل‌انطباق بودن زاویه‌های $\bar{A}_1\bar{A}\bar{P}$، OAP و $\bar{A}_1\bar{A}\bar{Q}$، OAQ احتیاج داشتیم)، و زاویهٔ $\bar{P}_1\bar{A}_1\bar{Q}_1$ را به زاویهٔ مرکزی $P'OQ'$، قابل انطباق با زاویهٔ PAQ، بدل خواهد کرد (هرحرکت هذلولوی زاویه‌های قابل انطباق را به‌زاویه‌های قابل انطباق بدل می‌کند). مسأله‌این است که نشان دهیم وقتی زاویهٔ PAQ داده شده باشد چگونه باید زاویهٔ $P'OQ'$ را رسم کنیم.

برای وضوح بیشتر، فرض می‌کنیم که زاویه‌های PAO و QAO حاده باشند. عمودهای‌هذلولوی KL و $K'L'$ را در نقطه‌های A و O بر AO اخراج می‌کنیم (چون AO قطر دایره است، KL و $K'L'$ عمودهای اقلیدسی بر AO نیز هستند؛ ← شکل ۱۰۸ ج) و نقطه‌های تلاقی اضلاع زاویه‌های $P'OQ'$ و PAQ را باخطهای KL و $K'L'$، چنانکه در شکل ۱۱۰ الف نشان داده شده، با G و H؛ و G' و H' نشان می‌دهیم. همچنین در نقطه‌های $\bar{A}$ و $\bar{A}_1$ عمودهای هذلولوی $\bar{K}\bar{L}$ و $\bar{K}_1\bar{L}_1$ را بر $\bar{A}\bar{A}_1$ اخراج می‌کنیم و نقطه‌های تلاقی اضلاع زاویه‌های $\bar{P}_1\bar{A}_1\bar{Q}_1$ و $\bar{P}\bar{A}\bar{Q}$ را باخطهای $\bar{K}\bar{L}$ و $\bar{K}_1\bar{L}_1$، همان‌گونه که در شکل ۱۱۰ ب نشان داده شده، با $\bar{G}$ و $\bar{H}$؛ $\bar{G}_1$ و $\bar{H}_1$ نشان می‌دهیم. از شکل ۱۱۰ ب پیداست که خطهای اقلیدسی $\bar{K}\bar{K}_1$ و $\bar{G}\bar{G}_1$ و $\bar{H}\bar{H}_1$ (و $\bar{A}\bar{A}_1$) همه در یك نقطهٔ $\bar{R}$ در بینهایت یکدیگر را می‌برند. ازآنجا که نمودار شکل ۱۱۰ الف از نمودار شکل ۱۱۰ ب بر اثر یك حرکت هذلولوی به‌دست آمده است، خطهای KK' و LL' و GG' و HH' (و AO) نیز همه دریك نقطهٔ R یکدیگر را می‌برند.

این، نحوهٔ ترسیم زاویهٔ $P'OQ'$ را نشان می‌دهد؛ یعنی، برای اینکه رأس A از زاویهٔ PAQ را بر اثر یك حرکت هذلولوی به O، مرکزقرص $\mathbf{K}$، بدل‌کنیم، عمودهای (معمولی) KL و $K'L'$ را درنقطه‌های A و O برقطر AO اخراج می‌کنیم (K، L و K'، L' نقطه‌های تلاقی این‌عمودها بادایرهٔ Σ هستند و K و K' دریك طرف OA قرار دارند) و G' و H' نقطه‌های‌تلاقی AP و AQ را با $K'L'$ به R، نقطهٔ (درخارج $\mathbf{K}$) تلاقی خطهای KK' و LL'، وصل می‌کنیم. اگر G و H نقاط برخورد خطهای RG' و RH' باخط KL باشند، آنگاه $\delta_{G'AH'}=\delta_{GOH}$*. اما چون $\delta_{GOH}=\sphericalangle GOH$؛

* همچنین می‌توان P و Q را به R وصل کرد. در این‌حال خطهای RP و RQ دایرهٔ Σ را در نقطه‌های P'وQ' می‌برند (← شکل ۱۱۰، الف و ب).

(δ_{GOH} معرف اندازهٔ هذلولوی‌زاویهٔ بین OG و OH است و $\sphericalangle GOH$ اندازهٔ اقلیدسی آن زاویه)، بالاخره به‌دست می‌آوریم

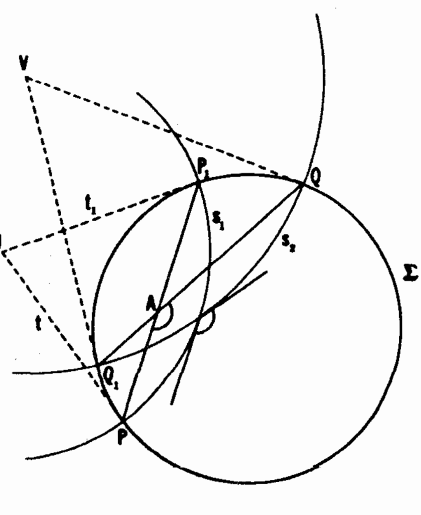
$$\delta_{PAQ}=\sphericalangle GOH$$

همچنین این واقعیت، ناشی از شکل ۱۱۰ الف، را یادآور می‌شویم که اگر $A\neq O$، آنگاه

$$\delta_{PAQ}=\sphericalangle GOH<\sphericalangle PAQ$$

(زیرا $AG<OG'$ و $AH<OH'$ ولذا $\sphericalangle GOA<\sphericalangle G'AO$ و $\sphericalangle HOA<\sphericalangle H'AO$).

یك ترسیم (ساده‌تر) دیگر زاویهٔ هذلولوی بین خطهای PP_1 و QQ_1، متقاطع در A در صفحهٔ هذلولوی، شکل ۱۱۰ ج است: گیریم t و t_1 مماسهای مرسوم بردایرهٔ Σ درنقاط P و P_1، دو سر وتر PP_1، باشند و t و t_1 یکدیگر را درنقطهٔ U ببرند؛ فرض می‌کنیم s_1 کمانی از دایرهٔ به‌مرکز U و شعاع $UP=UP_1$ در $\mathbf{K}$ باشد (اگر $t\|t_1$، وتر PP_1 از $\mathbf{K}$ نقش s_1 را بازی می‌کند)؛ همچنین فرض می‌کنیم s_2 کمانی از دایرهٔ به‌مرکز V وشعاع $VQ=VQ_1$ باشد، که V محل برخوردمماسهای QV و Q_1V بر Σ است. در این‌صورت زاویهٔ معمولی (اقلیدسی) بین کمانهای s_1 و s_2 (یعنی زاویهٔ بین



شکل ۱۱۰ ج

مماسهای براین کمانها در نقطهٔ برخوردشان، شکل ۱۱۰ ج) بازاویهٔهذلولوی PAQ مساوی است. اثبات بسیارسادهٔ این حقیقت در الگویی از هندسهٔ هـذلولـوی به نـام «الگوی پوانکاره» صورت می‌گیرد و درفصل دوم آورده شده است.[1]

حال می‌خواهیم هندسهٔ نااقلیدسی لباچفسکی - بویوئی را با هندسهٔ اقلیدس، که‌در دبیرستان خوانده‌می‌شود، مقایسه‌کنیم. شخص ازدیدن این‌همه چیزهای‌مشترك میان این دوهندسه در وهلهٔ اول متحیر می‌شود. درهر دو هندسه دونقطه،خط منحصر به‌فـردی را مشخص می‌کنند، و دوخط حداکثر دریك نقطه می‌توانند مشترك باشند (این واقعیت از اینجا ناشی مـی‌شود کـه خطهای هندسهٔ هذلولوی پاره‌خطهایی از خطهای صفحه‌هستند). وانگهی درهر دوهندسه می‌توان یك‌نقطه و یك نیمخط مرسوم ازآن را بـایك حرکت، به‌یك نقطهٔ دلخواه دیگر و نیمخطی کـه قبلا مشخص و از نقطهٔاخیر رسم شده‌است بدل کرد. طول هذلولوی یك پاره‌خط و اندازهٔ هذلولوی یك‌زاویه ویژگیهای مشترکی بانظیر اقلیدسی خود دارند؛ مثلا در هردو هندسه‌طول مجموع دو پاره‌خط مساوی مجموع طولهای آنهاست، و اندازهٔ مجموع دو زاویه مساوی است بامجموع اندازه‌های آنها.

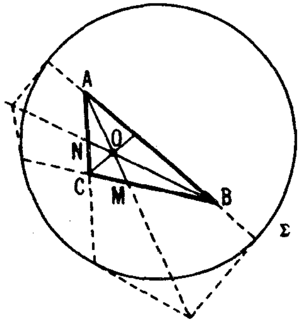
در هندسهٔ هذلولوی، عیناً مثل هندسهٔ معمولی اقلیدس، مـی‌توان از یك‌نقطهٔ واقع بریك خط، دریکی از دوجهت، پاره‌خطی به‌طول دلخواه روی آن جدا کرد (دراینجا واقعیت مهم این‌است که‌طول خط هذلولوی نامتناهی‌است. ← ص ۱۳۸)؛ همچنین ازیك‌نقطه واقع بر یك‌خط و دریکی از دوطرف آن می‌توان یك‌زاویهٔمعلوم جدا کرد. این امر ایجاب می‌کند کـه‌همهٔ قضیه‌های آشنای هندسهٔ دبیرستانی، کـه اثبات آنها برگزاره‌های سادهٔ (بنداشتها) هندسهٔ اقلیدسی، که هم‌اکنون یادکردیم، مبتنی‌است، بی‌اندك تغییری درهندسهٔ هذلولوی صادق‌باشند. مثلا درهندسهٔ هذلولوی قضیه‌های مربوط به‌زاویه‌های مکمل و متقابل به‌رأس (و این‌قضیه‌ها که نیمسازهای زاویه‌هـای متقابل به‌رأس بریك استقامت‌اند و نیمسازهای زاویه‌های مکمل برهم عمودند) به‌قوت‌خود باقی‌هستند؛همچنین‌همهٔ ملاکهای‌قابلیت‌انطباق مثلثها (به‌انضمام ملاکهای قابلیت انطباق مثلثهای قـائم‌الزاویـه)؛ قضیه‌های مربوط بـه‌ویژگیهای مثلثهای متساوی‌الساقین؛ مربوط به‌ویژگی عمودمنصف یك‌پاره‌خط و ویژگی نیمساز یك‌زاویه؛ قضیهٔ‌مربوط به‌تقارب نیمسازهای‌یك مثلث، ونظایر اینها. ازروی‌ملاکهای قابلیت‌انطباق مثلثها باهم می‌توان، به‌روش معمولی، قضیهٔ مربوط بـه‌زاویهٔ خارجی

---

[1] . همان‌فصلی که از روسی ترجمه نشده است.

در یک‌مثلث را (که بزرگتر است ازهریك از زوایای داخلی غیر مجاورش) نتیجه گرفت، که خود این قضیه به‌نوبهٔ خود روابط بین اضلاع و زاویه‌ها در یك مثلث و این قضیه را که طول هرضلع دریك مثلث از مجموع طولهای دوضلع دیگر کوچکتر است، ایجاب می‌کند. از این نتایج می‌توانیم قضایای مربوط به‌مقایسهٔ طولهای پاره‌خطهای عمود و مایل مرسوم ازیك نقطه بریك خط (که تعریف فاصلهٔ یك نقطه از یك‌خط را به‌عنوان طول‌عمود مرسوم از آن نقطه‌برخط توجیه می‌کند)، و این‌قضیه را که یك پاره‌خط کوچکتر از هرخط شکسته‌ای است که دوسر پاره‌خط را به‌هم وصل می‌کند، استخراج کنیم. حال اگر طول یك‌خم را به‌مثابهٔ حدطول خط‌شکسته‌ای محاط‌در آن تعریف کنیم، می‌توانیم نتیجه بگیریم که درهندسهٔ‌هذلولوی، و نیز در هندسهٔ اقلیدسی، خم با کمترین طولی که دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند پاره‌خطی است که با آن دو نقطه مشخص می‌شود. این مطلب به‌ما اجازه می‌دهد که فاصلهٔ‌بین دونقطه را به‌عنوان طول‌پاره‌خطی که‌آن دو را به‌هم وصل می‌کند تعریف کنیم. همهٔ این گزاره‌ها مؤید مشابهت بین این دوهندسه هستند.

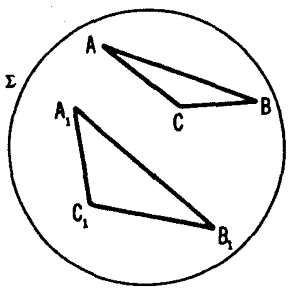
برسبیل‌مثال دوقضیه‌ای راکه‌هم‌اکنون‌نام بردیم ثابت‌می‌کنیم. برهان‌نخستین ملاك قابلیت انطباق مثلثها، در هندسهٔ هذلولوی. گیریم ABC و $A_1B_1C_1$ دومثلث باشند چنانکه $d_{AB}=d_{A_1B_1}$ و $d_{AC}=d_{A_1C_1}$ و $\delta_{BAC}=\delta_{B_1A_1C_1}$. برای اثبات قابلیت انطباق این مثلثها (شکل ۱۱۱)، با یك حرکت هذلولوی، A را به A_1 بدل می‌کنیم به‌طوری‌که نگارهٔ ضلع AC با A_1C_1 بریك‌خط قرار گیرند. به‌موجب تساوی $d_{AC}=d_{A_1C_1}$ نقطهٔ C بر C_1 منطبق می‌شود، وچون زاویهٔ A با زاویه A_1 قابل انطباق است نگارهٔ ضلع AB با A_1B_1 بریك خط قرار می‌گیرد؛



شکل ۱۱۱

به‌موجب تساوی $d_{AB}=d_{A_1B_1}$، نقطهٔ B بر نقطهٔ B_1 منطبق، و بنا بـراین ضلع CB بـرضلع C_1B_1 منطبق می‌شود (دونقطه، خط منحصر به‌فردی را مشخص می‌کنند)؛ بدین ترتیب دو مثلث برهم قرار می‌گیرند و لذا باهم قابل انطباق‌اند.* این برهان، تکرار جزء به جزء اثبات نخستین‌ملاك قابلیت انطباق مثلثهاست که درکتاب‌درسی کیسلیوف آمده است. ولی البته درحالت کنونی چگونگی عمل به‌کلی‌متفاوت است.

برهان قضیهٔ: نیمسازهـا دریك مثلث متقارب‌اند. چنانکـه قبلا اشاره کردیم قضیهٔ هر نقطه از نیمساز یك زاویه از دوضلع زاویه به‌یك فاصله است و بعکس، در هندسهٔ هذلولوی صادق است (آن‌را ثابت کنید!). حال AM و BN نیمسازهـای زاویه‌هـای A و B از مثلث ABC را درنظر می‌گیریم (شکل ۱۱۲). روشن است که این دونیمساز باید دریك‌نقطهٔ Q در داخل مثلث یکدیگر را ببرند. چون Q نقطهٔ مشترك نیمسازهای AM و BN است، پس فواصل آن از اضلاع BA و BC و نیز از اضلاع AB و AC، و درنتیجه از اضلاع AC و BC یکی خواهد شد. لـذا Q نقطه‌ای‌از نیمساز زاویهٔ C می‌شود، که تقارب نیمسازهادریك‌مثلث را اثبات‌می‌کند،



شکل ۱۱۲

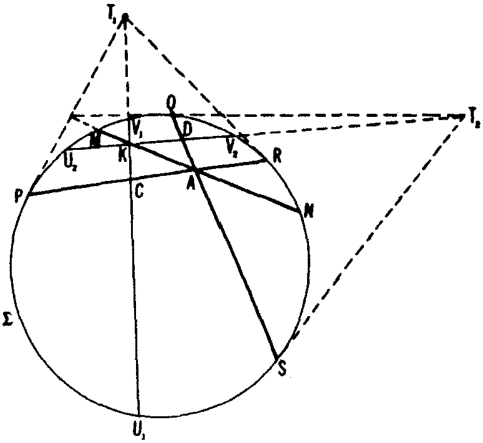
---

* حرکتی نااقلیدسی که A را بـه A_1 و نیمخط AC را به‌نیمخط A_1C_1 بـدل می‌کند می‌تواند یا به‌شرح صفحهٔ ۱۳۳ و یا به‌روش زیر تحقق‌یابد: ابتدا حرکت M_1 را اجرا می‌کنیم که A را به O بدل‌کند، سپس یك‌دوران $\mathcal{R}$ پیرامون O را، بعد (محتملا) حرکت $\mathcal{F}$، عمل قرینه‌یابی قرص K نسبت به‌قطر OQ'، را کـه نیمخط AC براثر دو حرکت اول به آن بدل شده است، و سپس یك حرکت M_2^{-1} راکه O را به A_1 بدل کند. اگر $\delta_{BAC}=\delta_{B_1A_1C_1}$، یکی از این دوحرکت هذلولوی که نیمخط AC را به‌نیمخط A_1C_1 بدل می‌کند اجباراً نیمخط AB را به‌نیمخط A_1B_1 بدل خواهد کرد.

چنانکه ادعا کرده بودیم. بازهم این برهان واقعاً تکرار برهانی است که در کتاب درسی کیسلیوف دیده می‌شود. توصیهٔ ما به‌خواننده این است که سعی کند براهینی برای قضیه‌های مختلف مذکور در بالا ارائه نماید.

اشاره می‌کنیم که‌هر قضیه از هندسهٔ‌هذلولوی را می‌توانیم به‌صورت قضیه‌ای از هندسهٔ اقلیدسی، مربوط به وترها و نقـاط قرص $\mathbf{K}$، بیان کنیم. مثلا قضیهٔ هندسهٔ هذلولوی کـه حکم می‌کند نیمساز یك زاویه مکان نقاطی است متساوی الفاصله از دوضلـع زاویه، دارای معنی «اقلیدسی» زیر است. فرض می‌کنیم PR وQS وMN سه‌وتر از یك‌دایرهٔ Σ باشند که بریك نقطهٔ A می‌گذرند، و فرض می‌کنیم که امتداد MN از نقطهٔ تلاقی مماسهـای مرسوم بر Σ درنقاط P و Q بگذرد (MN نیمساز هذلولوی زاویهٔ PAQ است؛ شکل ۱۱۳). نقطهٔ K از وتر MN را به T_1 و T_2، نقاط تلاقی مماسهای مرسوم بر Σ درنقاط P و R، و Q و S وصل می‌کنیم (یعنی، عمودهایی هذلولوی از K برخطوط PR وQS وارد می‌کنیم). گیریم U_1V_1 وتری برخط T_1K و C نقطهٔ تقاطعش با PR باشد. همچنین فرض می‌کنیم U_2V_2 وتری برخط T_2K باشد و D نقطهٔ تلاقیش با QS. دراین‌صورت نسبت ناهمسازچهارنقطهٔ K، C؛ U_1 و V_1 مساوی است با نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ K، D؛ V_2، U_2.

ارتباط بین قضایای هندسهٔ هذلولوی و هندسهٔ اقلیدسی به‌ما امکان می‌دهد که برهان هر قضیه از هندسهٔ هذلولوی را به‌برهان قضیه‌ای متضمن نقاط و وترهای $\mathbf{K}$ بـدل کنیم، یعنی، روشی کلی برای مطالعهٔ مشروح هندسهٔ هذلولوی را در هندسهٔ



شکل ۱۱۳

اقلیدسی به‌دست مـی‌دهد (← مسألهٔ ۹۹ در زیر، و نیز مسألـه‌های ۱۰۰–۱۱۲). جنبهٔ دیگر این ارتباط این است که برهان یك قضیه از هندسهٔ هذلولوی خود به خود برهانی از قضیهٔ متناظرش را درهندسهٔ اقلیدسی به‌ما می‌دهد. یك مثال خوب از این دست، مثالی است که هم‌اکنون بررسی کردیم، مثالی که در آن درستی قضیهٔ مربوط به‌نیمسازهای زاویه‌ها درهندسهٔ هذلولوی مستلزم تساوی

$$\frac{KU_1/CU_1}{KV_1/CV_1}=\frac{KV_2/DV_2}{KU_2/DU_2}$$

است (شکل ۱۱۳)، که اثبات مستقیم آن تـاحدی پیچیده است. این نحوهٔ استفاده از هندسهٔ هذلولوی برای اثبات قضایای هندسهٔ اقلیدسی، اغلب مـی‌تواند به‌نتایج جالبی منجر شود.

۹۶. ثابت کنید آن قضیه از هندسهٔ هذلولوی که بیان مـی‌کند نیمسازهـای زاویه‌های‌متقابل به‌رأس بریك استقامت‌اند باقضیهٔ اقلیدسی مسألهٔ ۴۰ (الف)، بخش ۳، ص ۷۷ ، هم‌ارز است.

۹۷. هم‌ارز اقلیدسی این‌قضیه ازهندسهٔ هذلولوی که بیان می‌کندنیمسازهای دو زاویهٔ مکمل مجاور برهم عمودند چیست؟

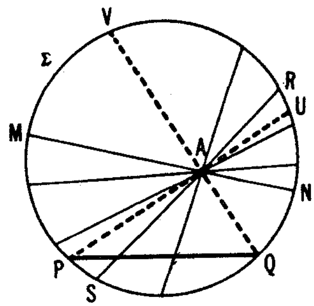
۹۸. نشان دهیدکه این قضیهٔ هندسهٔ هذلولوی که می‌گوید نیمسازهـای یك مثلث متقارب‌اند با قضیهٔ بریانشون از هندسهٔ اقلیدسی هم‌ارز است.

۹۹. بااستفاده از عبارت طول هذلولوی یك پاره‌خط، مستقیماً اثبات‌کنیدکه در هندسهٔ هـذلولـوی طـول هرضلع یك مثلث از مجموع طولهای دو ضلع دیگر کوچکتر است.

تاکنون برمشابهتهای بین هندسهٔمعمولی (اقلیدسی) و هندسهٔ هذلولوی تأکید داشته‌ایـم. حال مـی‌خواهیم به تفاوت شدید بین آنهـا بپردازیم. ابتدا در هندسهٔ هذلولوی حالت به‌اصطلاح بنداشت موازیها را درنظر می‌گیریم:

اگر a یك‌خط و A نقطه‌ای ناواقع برآن باشد، درست‌یك‌خط از A می‌گذرد که a را نمی‌برد.

این بنداشت شامل دوحکم‌است: وجود خطی‌که بر A می‌گذرد (که درهندسهٔ هذلولوی محفوظ می‌ماند)، و منحصر به‌فرد بودن آن. آنچه در هندسهٔ هذلولوی از بین می‌رود جزء منحصربه‌فرد بودن بنداشت موازی است. زیرا درهندسهٔ هذلولوی دوخط زمانی متقاطع‌اند که دریك نقطه در داخل قرص $\mathbf{K}$ یکدیگر را ببرند (شکل ۱۱۴). زیرا نقاط‌بیرون $\mathbf{K}$ و نقاط مرزی $\mathbf{K}$ (نقاط دایرهٔ Σ) نقاط‌صفحهٔ هذلولوی به‌شمار نمی‌آیند. این‌امر ایجاب می‌کندکه بتوان ازیك نقطهٔ A ناواقع بر یك‌خط،



شکل ۱۱۴

بینهایت خط رسم کرد که PQ را نبرد (یکی از این گونه خطها، خط MN درشکل ۱۱۴ است). از این رو بنداشت موازیها در هندسهٔ هذلولوی صادق نیست. این بدان معنی است که همهٔ آن قضیه‌هایی از هندسهٔ دبیرستانی که در برهان آنها از بنداشت موازیها استفاده می‌شود (یعنی بخش اعظم قضیه‌های هندسهٔ دبیرستانی) وقتی به‌عنوان قضیه‌هایی از هندسهٔ هذلولوی نگریسته شوند ممکن است درست باشند (← مسائل ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴) یاممکن‌است درست نباشند (مثلا، مسائل ۱۰۰ (الف) و (ب)، ۱۰۸–۱۱۲).*

خطهای UP و QP که در یك‌نقطهٔ P از دایرهٔ Σ یکدیگر را می‌برند (شکل ۱۱۴) خطهای موازی هندسهٔ هذلولوی نامیده می‌شوند. خطهای موازی یکدیگر را نمی‌برند، زیرا نقطه‌های Σ نقطه‌های صفحهٔ هذلولوی تلقی نمی‌شوند. از سوی دیگر خطوط نامتقاطعی هم‌وجود دارند که موازی‌نیستند. لذا تعریف معمولی خطهای موازی به‌عنوان خطهایی که یکدیگر را نمی‌برند با تعریف بالا از خطهای‌موازی در هندسهٔ هذلولوی، هم‌ارز نیستند.

چنانکه‌از شکل ۱۱۴ برمی‌آید، خطهای AU و AV که‌موازی با PQ هستند، خطهای مرسوم از A را به‌دو دستهٔ مجزا تقسیم‌می‌کنند: آنهایی که PQ را می‌برند وآنهایی‌که آن را نمی‌برند. بنابراین می‌توانیم خطهای AU و AV مرسوم از A به

---

* این‌واقعیت که بنداشت موازی دربرهانی از یك قضیهٔ خاص به‌کار برده‌می‌شود ایجاب نمی‌کند که برهانی برای آن قضیه‌وجود نداشته‌باشد که‌درآن استفاده از بنداشت‌موازی موقوف باشد. بنابراین صادق‌نبودن‌برهانی از یك قضیه که به‌هندسهٔ هذلولوی برده‌می‌شود ایجاب نمی‌کند که قضیهٔ موردنظر درآن هندسه نادرست باشد.

موازات PQ را چنین تعریف کنیم که PQ را نمی‌برند وچنان هستند که‌همهٔ خطهای مار بر A واقع در داخل زاویهٔ UAV خط PQ را می‌برند. شایان تذکر است که این تعریف «نااقلیدسی» موازیها در هندسهٔ اقلیدسی صادق است جز آنکه در آنجا خطهای AU و AV بر هم منطبق‌اند و زاویهٔ UAV یك‌زاویهٔ نیمصفحه‌است. این‌حقیقت دلیل تعریف خطهای AU و AV به‌عنوان خطهایی موازی PQ است، و این خود برمشابهتهای زیاد بین موازیهای هذلولوی و اقلیدسی اشاره دارد.

در هندسهٔ هذلولوی خطهایی که نه‌موازی‌اند و نه متقاطع، فراموازی و اغلب «واگرا» نامیده‌می‌شوند؛ زیرا هنگامی که درطول‌چنین‌خطهایی درهر یك از دوجهت حرکت کنیم، فاصلهٔ بین آنها ازهم بیش‌از حد افزایش می‌یابد (← مسألهٔ ۱۰۰ (ج) در زیر).

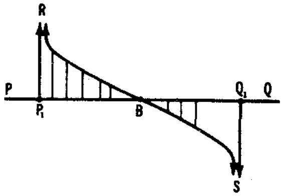
۱۰۰. الف) فرض می‌کنیم PQ و RS دوخط از صفحهٔ هذلولوی دریك‌نقطهٔ B متقاطع باشند. ثابت‌کنید که فاصله‌های نقطه‌های خط RS ازخط PQ در هریك از دوطرف B بیحد زیاد می‌شوند. همچنین پاهای عمودهای مرسوم از نقاط خط RS بر PQ، یعنی، تصاویر نقطه‌های‌خط RS برخط PQ، فقط‌یك‌قطعهٔ متناهی P_1Q_1 را برخط PQ می‌پوشانند؛ به‌عبارت دیگر تصویر RS برروی PQ پاره‌خط متناهی P_1Q_1 بر PQ است. عمودهای مرسوم بر PQ در نقطه‌های P_1 و Q_1 با RS موازی‌اند.

تمامی این جنبه‌های خطوط متقاطع PQ و RS به‌صورت خلاصه در شکل ۱۱۵ الف، که درآن خم RBS معرف «خط هذلولوی» RS است، نشان داده شده‌است. خطهای P_1R و Q_1S که با RS موازی‌اند چنان نشان داده شده‌اند که به RS نزدیك‌می‌شوند. این‌جنبهٔ نمودار برپایهٔ جزء (ب) از این مسأله نهاده‌شده است.

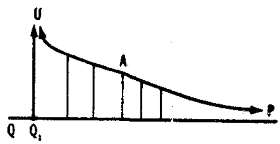
ب) فرض‌می‌کنیم PQ و UP دوخط‌موازی درصفحهٔ هذلولوی باشند. نشان دهید که فاصله‌های نقطه‌های خط UP ازخط PQ در امتداد نیمخط AP بی‌اندازه کاهش می‌یابند (A نقطهٔ دلخواهی است بر UP) و درامتداد نیمخط AU بی‌اندازه افزایش پیدا می‌کنند. تصویر UP بر PQ نیمخط Q_1P است؛ و نیز عمود مرسوم بر PQ در Q_1 با UP موازی است.

تمام این جنبه‌های خطهای موازی PQ و UP در شکل ۱۱۵ ب نشان داده شده‌اند.

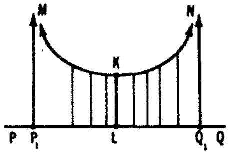
ج) ثابت‌کنید که خطهای‌فراموازی PQ و MN درصفحهٔ هذلولوی‌یك‌عمود مشترك (یکتا) KL دارند، و بعکس، دوخط که یك عمود مشترك (یکتا) داشته باشند فراموازی‌اند. فاصله‌های نقطه‌های خط MN از خط PQ در هریك ازدوطرف نقطهٔ



شکل ۱۱۵ الف



شکل ۱۱۵ ب



شکل ۱۱۵ ج

K، پای عمود مشترک، بیحد افزایش پیدا می‌کنند. تصویر MN بر PQ پاره‌خط متناهی P_1Q_1 است؛ عمودهای مرسوم بر PQ در نقطه‌های P_1 و Q_1 با MN موازی‌اند.

جنبه‌های خطهای فراموازی PQ و MN به‌صورت خلاصه درشکل ۱۱۵ ج نشان داده شده‌اند.

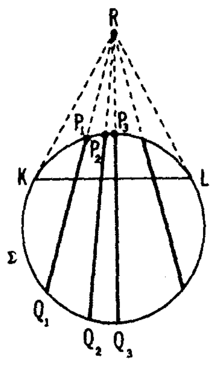
چون ازمیان همهٔ فواصل یک نقطهٔ A واقع بر خط MN، از یک خط PQ، کوتاهتر از همه طول عمود مرسوم از A برخط PQ است (قضیهٔ اقلیدسی مربوط به‌آن درهندسهٔ هذلولوی صادق است؛ ← توضیحات ص ۱۱۱)، و چون فاصله‌های نقطه‌های خط MN از یک خط PQ، فراموازی با MN، درهر دوطرف K، پای عمودمشترک این خطوط یعنی KL، بینهایت افزایش می‌یابد (← مسألهٔ ۱۰۰ (ج))، از آنجا معلوم می‌شود که طول KL کوتاهترین فاصلهٔ بین آنهاست، این امر علت نامگذاری پاره‌خط KL را به‌عنوان فاصلهٔ بین خطهای فراموازی PQ و MN موجه می‌سازد. در هندسهٔ هذلولوی، برخلاف هندسهٔ اقلیدسی، مفهومی محسوس از فاصلهٔ بین خطهای موازی وجود ندارد (می‌توان نشان داد که هر دوخط موازی در صفحهٔ هذلولوی را می‌توان با یک حرکت هذلولوی به‌هردو خط موازی دیگر درصفحه بدل کرد).

چون درصفحهٔ هذلولوی دوخط متقاطع یاموازی عمود مشترکی ندارند، و از آنجا که دوخط فراموازی درست یک عمود مشترک دارند (← مسألهٔ ۱۰۰ (ج))، از اینجا نتیجه‌می‌شود که درهندسهٔ هذلولوی دوخط نمی‌توانند دوعمود مشترک داشته باشند؛ به‌عبارت دیگر در هندسهٔ هذلولوی مستطیل (چهارضلعی با چهار زاویهٔ قائمه)

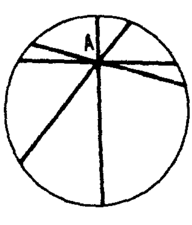
وجود ندارد (ـــه مسألهٔ ۱۵۸ (ب) ص۱۵۹).

مسألهٔ ۱۰۰، (ج)، به‌مسألهٔ دیگری اشاره دارد: در هندسهٔ اقلیدسی دوخط عمود برخط سوم باهم موازی‌اند. بعکس، دو (یا چند) خط موازی همواره می‌توانند عمود بریك خط تنها انگاشته شوند. از سوی دیگر، درهندسهٔ هذلولوی دوخط عمود بریك خط نمی‌توانند مـوازی باشند؛ لازمهٔ مسألهٔ ۱۰۰ (ج) فراموازی بودن این گونـه خطهاست. ماهیت یك مجموعه از سه یاچندخط فراموازی (یعنی، سه یاچندخط عمود بریك خط) زمانی روشن می‌شود که توجه کنیم هر گاه خطهای P_1Q_1 و P_2Q_2 و P_3Q_3 و . . . در صفحهٔ هذلولوی عمود بریك خط KL باشند، آنگاه امتدادهـای وترهـای P_1Q_1 و P_2Q_2 و P_3Q_3 و . . . دربیرون قرص $\mathbf{K}$ باید از یـك نقطهٔ R بگذرند که همان نقطهٔ تلاقی مماسهای مرسوم بردایرهٔ Σ درنقاط K و L است (شکل ۱۱۶ الف). لذا، وترهای قرص $\mathbf{K}$ کـه در یك نقطهٔ A درون قرص $\mathbf{K}$ متقاطع‌اند یك دسته خط متقاطع ازصفحهٔ هذلولوی را تشکیل می‌دهند (شکل ۱۱۶ب)؛ وترهای متقاطع دریك نقطهٔ P از دایرهٔ Σ، یك دسته خط موازی (شکل ۱۱۶ ج)، و وترهایی که امتداد آنها دریك نقطهٔ R بیرون $\mathbf{K}$ متقاطع‌اند یك دسته خط فراموازی تشکیل می‌دهند (شکل ۱۱۶ الف).

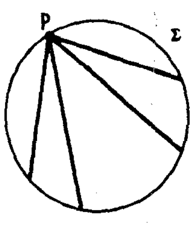
حال به‌تشریح جنبه‌های غیرعادی وضعیت نقطه‌ها و خطهای هندسهٔ هذلولوی ادامه‌می‌دهیم. گیریم PAQ زاویهٔ هذاولوی‌حاصل از دونیمخط AP و AQ باشد. پس خط PQ در داخل زاویهٔ PAQ، با AP و AQ موازی است و نقطه‌هایی راکه می‌توان از آنها خطهایی رسم کرد که هر دو ضلع زاویه را ببرند و نقاطی را کـه نمی‌توان از آنها خطهایی را رسم کرد از هم جدا مـی‌سازد (شکل ۱۱۷ الف؛



شکل ۱۱۶ الف



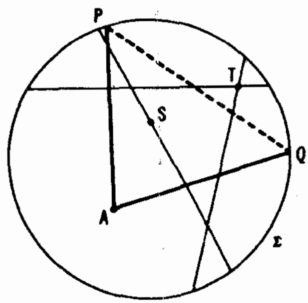
شکل ۱۱۶ ب



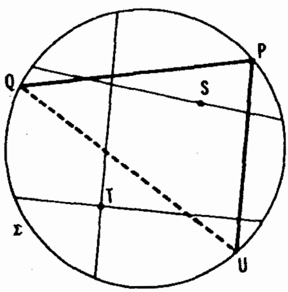
شکل ۱۱۶ ج

یادآوری می‌کنیم کـــه در هندسهٔ اقلیدسی همواره ممکن است از یك نقطهٔ دلخواه داخل یك زاویه خطی رسم کرد کـــه هردوضلع زاویه را ببرد). به‌طریق مشابه اگر QP و UP دوخط‌موازی درصفحهٔ هذلولوی باشند، آنگاه خط UQ، واقع‌در داخل نوار محصور بین این دوخط مفروض، بااین خطها موازی است، ونقطه‌هایی را که می‌توان از آنها خطهایی رسم کرد که هم QP را ببرند وهم UP را؛ و نقطه‌هایی راکه نمی‌توان از آنها چنین خطهایی را رسم کرد، ازهم جدا می‌سازد (شکل ۱۱۷ ب). بالاخره در مـــورد دوخط فراموازی PQ و MN، دوخط MP و NQ وجود دارند که نقاطی را که می‌توان از آنها خطهایی رسم کرد که هردوخط PQوMN راببرند ونقاطی راکه ازآنها نمی‌توان چنین‌خطهایی را رسم کرد،ازهم‌جدامی‌سازند؛ و نیز هریك از خطهای MP و NQ بـــا خطهای PQ و MN موازی است (شکل ۱۱۷ ج). همهٔ ایـــن جنبه‌های غیرعادی هندسهٔ هذلولوی به‌طور مجسم در شکلهای ۱۱۸، الف‌ـ‌ج، نشان داده شده است.

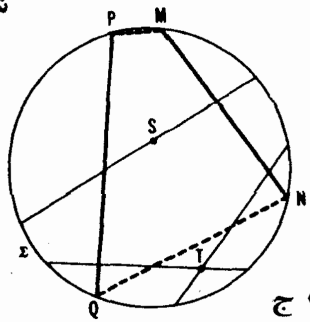
۱۵۱. الف) ثابت کنید که دوخط l_1 و l_2 از صفحهٔ هذلولوی‌همواره یك‌محور تقارن l دارند (تقارن نسبت به‌یك‌خط درهندسهٔ هذلولوی عیناً مانند تقارن درهندسهٔ اقلیدسی تعریف می‌شود؛ ← اول فصل ۲، بخش ۱، جلد اول). همچنین l_1و l_2و l



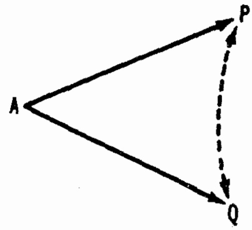
شکل ۱۱۷ الف



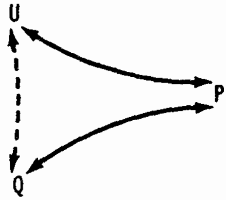
شکل ۱۱۷ ب



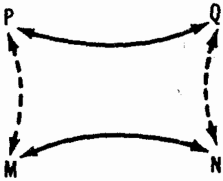
شکل ۱۱۷ ج



شکل ۱۱۸ الف



شکل ۱۱۸ ب



شکل ۱۱۸ ج

به‌یک‌دسته خط متعلق‌اند (یعنی، یا متقارب‌اند، یا موازی‌اند، یا عمود بریك خط‌اند؛ ← ص ۱۵۶).

ب) نشان‌دهید که هر گاه خطهای l_1 و l_2 و l از صفحهٔ‌هذلولوی به‌یك‌دسته‌خط متعلق باشند و هر گاه l محور تقارن نقطه‌های A_1 و A_2 واقع بر l_1 و l_2 باشد، آنگاه l محور تقارن خطهای l_1 و l_2 است.

۱۰۲. منظور از یك متوازی‌الاضلاع هذلولوی یك چهارضلعی در صفحهٔ هذلولوی است که قطرهایش در نقطهٔ تلاقی یکدیگر را نصف کنند. ثابت کنید که:

الف) اضلاع مقابل یك متوازی‌الاضلاع هذلولوی باهم قابل انطباق‌اند.

ب) زاویه‌های مقابل یك متوازی‌الاضلاع هذلولوی باهم قابل انطباق‌اند.

ج) اگر قطرهای یك متوازی‌الاضلاع هذلولوی متعامد باشند، هرچهارضلع آن باهم قابل انطباق‌اند و قطرها نیمسازهای زاویه‌های رأسها هستند. چنین متوازی‌الاضلاعی یك لوزی هذلولوی نامیده می‌شود.

د) هرگاه قطرهای یك متوازی‌الاضلاع هذلولوی باهم قابل‌انطباق باشند، آنگاه همهٔ زاویه‌های آن باهم قابل انطباق‌اند؛ این متوازی‌الاضلاع را می‌توان مستطیل هذلولوی نامید (← ص ۱۵۶).

ه) اگر قطرهای یك متوازی‌الاضلاع هذلولوی قابل‌انطباق و متعامد باشند، آنگاه‌همهٔ‌اضلاع آن باهم قابل‌انطباق‌اند وهمهٔ زاویه‌های آن‌باهم. این‌متوازی‌الاضلاع را می‌توان مربع هذلولوی نامید.

۱۰۳. آیا اضلاع مقابل یك متوازی‌الاضلاع هذلولوی (← مسألهٔ قبل) موازی‌اند؟

۱۰۴. ثابت کنید که‌درهندسهٔ‌هذلولوی‌ارتفاعهای‌مثلث‌حادالزوایا متقارب‌اند. آیا این قضیه برای‌مثلث منفرج‌الزاویه صادق است؟

۱۰۵. ثابت کنید که در هندسهٔ هذلولوی میانه‌های یك مثلث متقارب‌اند.

۱۰۶. آیا گزارهٔ اقلیدسی: نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث هرمیانه را (ابتدا از رأس) به‌نسبت ۲ و ۱ تقسیم می‌کند، در هندسهٔ هذلولوی صادق است؟

۱۰۷. نشان‌دهید که درهندسهٔ هذلولوی عمودمنصفهای اضلاع یك‌مثلث به‌یك دسته خط تعلق دارند (یعنی، یا متقارب‌اند، یا موازی، و یا عمود بریك خط؛ ← ص ۱۵۶).

۱۰۸. الف) نشان دهید که درهندسهٔ هذلولوی مجموع سه‌زاویهٔ مثلث کمتر از 180° است.*

ب) نشان دهید که مجموع زاویه‌های یك nضلعی درصفحهٔ هذلولوی همواره از $180^\circ(n-2)$ کمتر است.

۱۰۹. نشان دهید که مساحت یك nضلعی در صفحهٔ هذلولوی با تفاضل $180^\circ(n-2)$ و مجموع زاویه‌های nضلعی متناسب است؛ بویژه‌مساحت مثلثی به زاویه‌های A و B و C برابراست با $k(180^\circ-\sphericalangle A-\sphericalangle B-\sphericalangle C)$، که ضریب k به‌انتخاب واحد مساحت بستگی دارد.

اختلاف بین $180^\circ(n-2)$، (مجموع زاویه‌های یك n ضلعی در هندسهٔ اقلیدسی)، و مجموع زاویه‌های یك n ضلعی در صفحهٔ هذلولوی، کاستی زاویه‌ای آن چندضلعی نامیده می‌شود. لذا قضیهٔ مسألهٔ ۱۰۹ را می‌توان بدین‌صورت بیان کرد: مساحت یك n ضلعی درصفحهٔ هذلولوی باکاستی زاویه‌ای آن متناسب است. بویژه، از اینجا نتیجه می‌شود که مجموع زاویه‌های یك nضلعی که مساحتش کوچك باشد نزدیك به $180^\circ(n-2)$ است.

۱۱۰. چهارمین ملاك قابلیت انطباق مثلثها را در هندسهٔ هذلولوی ثابت کنید: دومثلث با هم قابل انطباق‌اند هرگاه سه زاویهٔ یکی با سه‌زاویهٔ دیگری نظیر به‌نظیر قابل‌انطباق باشند.

یکی از نتایج‌مسألهٔ ۱۱۰ واقعیتی‌است بااهمیت بنیادی: در هندسهٔ هذلولوی مثلثهای متشابه وجود ندارند. چنانکه در مقدمهٔ جلددوم اشاره شد، قضیه‌های هندسهٔ

---

* می‌توان نشان داد که به‌ازای هرانتخابی برای زاویه‌های A و B و C، که مجموعشان کمتراز 180° باشد، یك مثلث هذلولوی با زاویه‌های A و B و C وجود دارد. نتایج شگفت‌انگیز مسائل ۱۰۹ و ۱۱۰ مربوط به‌همین واقعیت هستند. در هندسهٔ اقلیدسی معلوم بودن سه‌زاویهٔ یك‌مثلث، هم‌ارز بامعلوم بودن دوتا ازآنهاست (زیرا زاویهٔ سوم از روی دو زاویهٔ دیگر معین می‌شود)، و لذا مثلث منحصر به‌فردی را مشخص نمی‌کنند. در حالی‌که در هندسهٔ هذلولوی سه‌زاویه سه‌عنصر مستقل از یك‌مثلث هستند، و مثلث را مشخص می‌سازند.

اقلیدسی در واقع قضیه‌های هندسهٔ تشابهات اند، یعنی سروکار آنها با آن ویژگیهایی از شکلهای هندسی است که بر اثر تشابه محفوظ می‌مانند. این مربوط به این واقعیت است که، هیچ یك از قضیه‌های هندسهٔ اقلیدسی نمی‌تواند به انتخاب یك واحد طول بستگی داشته باشد؛ از این‌رو هیچ قضیه‌ای را نمی‌توان به طول یك پاره‌خط مربوط ساخت، بلکه باید به نسبتهای طولها مربوط ساخت. ولی در هندسهٔ هذلولوی شکلهای متشابه و در عین حال غیرقابل انطباق باهم وجود ندارند، و در نتیجه، هیچ تبدیلی (جز حرکتهای هذلولوی) که بتواند «تشابهات هذلولوی» نامیده شود وجود ندارد. به‌علت تجربهٔ طولانی ما از هندسهٔ اقلیدسی، این اختلاف به‌خصوص ممکن است ما را شگفت‌زده سازد. به‌همین دلیل می‌خواهیم این موضوع را بیشتر مورد بحث قرار دهیم.

اشاره می‌کنیم که قضیه‌های هندسهٔ اقلیدسی ممکن است به‌انتخاب یك واحد اندازه‌گیری برای زاویه‌ها بستگی داشته باشند. مثلا قضیهٔ «مجموع سه‌زاویهٔ یك مثلث مساوی ۱۸۰° است»، اگر درجه را به‌جای ۱/۹۰ یك زاویهٔ قائمه، ۱/۱۰۰ زاویهٔ قائمه بگیریم، آشکارا تغییر خواهد کرد.* این تفاوت بین فاصله‌ها و اندازه‌های زاویه، در هندسهٔ اقلیدسی، ناشی از دادن یك‌تعریف هندسی محض برای واحد اندازه‌گیری زاویه‌است (یك‌چنین واحد یکی زاویهٔ قائمه است، که زاویه‌ای قابل‌انطباق بامجانبش تعریف شده‌است، یا جزء معینی ازیك زاویهٔ قائمه. یکی دیگر رادیان است که یك زاویهٔ مرکزی است مقابل به‌کمانی که طولش مساوی شعاع دایره باشد)، در حالی که هیچ ملاحظات هندسی له یك واحد طول خاص وجود ندارد. در مقابل، درهندسهٔ هذلولوی می‌توان برای واحد طول یك‌تعریف هندسی محض داد؛ مثلا می‌توان یك‌ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به‌زاویهٔ ۴۵° را (به‌موجب مسألهٔ ۱۱۰، این پاره‌خطی است کاملا معین) واحد طول اختیار کرد. این بدین‌معنی است که صورت یك قضیه درهندسهٔ هذلولوی ممکن است به‌انتخاب واحد طول

---

* به‌عبارت دیگر درهندسهٔ اقلیدسی یك‌قضیه ممکن است به‌اندازهٔ یك زاویه و نسبتهای اندازه‌های پاره‌خطها بستگی داشته‌باشد، نه به‌اندازهٔ زاویه و اندازهٔ پاره‌خطها (← مثلا به‌روابط بین طولها و زاویه‌ها درقضیهٔ زیر: دریك مثلث قائم اگر یك‌زاویهٔ ۳۰° باشد، ضلع‌مقابل به‌آن نصف وتر خواهد بود). به‌همین دلیل بود که مثلا قبول دستگاه متریك ازسوی روسیه در ۱۹۱۸، نیاز به‌تغییری درکتاب درسی کیسلیوف درآن زمان نداشت. اگر تغییری در واحد اندازه‌گیری زاویه‌ها صورت گرفته بود، لازم می‌آمد که احکام بسیاری از قضایا را عوض کنیم.

بستگی داشته باشد.

یادآورمی‌شویم که مسائل ۱۰۹ و ۱۱۰ ایجاب می کنند که‌درهندسهٔ‌هذلولوی بتوان یك‌تعریف هندسی برای واحد مساحت‌داد، به‌شرطی که‌قید‌کنیم، مثلا، مساحت یك nضلعی مساوی‌است باکاستی زاویه‌ای آن، یا اینکه‌واحد مساحت، مساحت مثلثی است که زاویه‌های آن قبلا معین شده باشد.

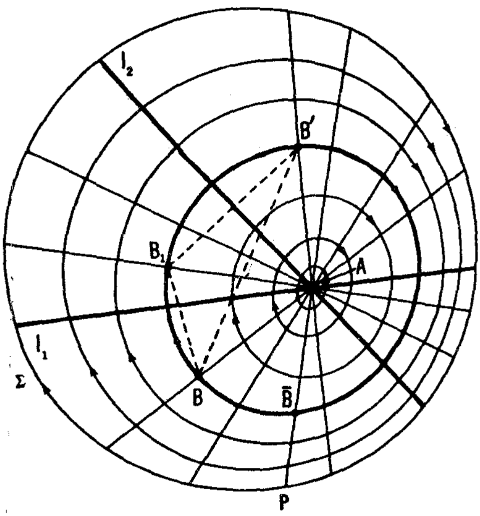
آخرین موضوعی که می‌خواهیم در باره‌اش بحث کنیم، رده‌بندی حرکتهای صفحهٔ هذلولوی‌است. در جلداول تبدیلات هندسی دیدیم که دوشکل هندسهٔ‌اقلیدسی را که مستقیماً با هم قابل انطباق باشند می‌توان به‌وسیلهٔ دو تقارن نسبت به یك‌خط برهم منطبق کرد (← فصل ۲، بخش ۲، جلداول بویژه مطالبی‌که باخطوط ریزتر درمتن نوشته شده‌اند). عیناً به‌همان‌طریق ثابت می‌کنیم که در هندسهٔ هذلولوی دو شکل را که‌مستقیماً باهم‌قابل‌انطباق‌اند می‌توان به‌وسیلهٔ دوتقارن نسبت به‌یك خط برهم منطبق کرد. تعریفهای تقارن نسبت به‌یك خط، قابلیت انطباق مستقیم، و قابلیت انطباق‌معکوس در هندسهٔ‌هذلولوی عیناً‌مثل‌هندسهٔ اقلیدسی هستند (← آغاز بخشهای ۱ و ۲، فصل ۲، جلد اول)*. اما، در هندسهٔ اقلیدسی در حالی‌که دوخط به‌دو طریق اساسی مختلف‌می‌توانند باهم مرتبط باشند، یعنی می‌توانند موازی یا متقاطع باشند، درهندسهٔ‌هذلولوی دوخط می‌توانند به‌سه‌طریق باهم مرتبط باشند: متقاطع، موازی، و فراموازی. این‌امر بیانگر آن است‌که چرا تعداد انواع حرکتهای مستقیم (تغییر مکانها) درهندسهٔ‌اقلیدسی دو است (دوران وانتقال، یعنی‌حاصلضرب‌تقارنهای‌محوری نسبت به‌دوخط متقاطع، و حاصلضرب تقارنها نسبت به‌دو خط موازی)، درحالی که تعداد انواع حرکتهای مستقیم در هندسهٔ هذلولوی سه است. بحثی از این سه‌نوع حرکت مستقیم درزیر می‌آید.

۱) حاصلضرب تقارنهای محوری نسبت به‌خطهای l_1 و l_2 که در نقطهٔ A متقاطع‌اند (شکل ۱۱۹ الف). دراین حرکت نقطهٔ A ثابت می‌ماند، لذا دسته خط

---

* به‌خواننده توصیه می‌کنیم که این تعاریف و نیز براهینی را که به‌خط ریز در متن بخش ۲ جلد اول آمده تحقیق کند و بدون‌تغییر به‌هندسهٔ هذلولوی منتقل سازد.

با برهانی مشابه برهانی که در هندسهٔ اقلیدسی به‌کار رفته است می‌توان نشان دادکه دوشکل معکوساً قابل انطباق باهم را می‌توان به‌وسیلهٔ سه‌تقارن نسبت به‌یك خط برهم منطبق نمود.



شکل ۱۱۹ الف

Π_1 ماربر A به‌خودش تبدیل می‌شود؛ یعنی هر خط از این‌دسته به‌خطی از همین دسته بدل‌می‌شود. حال فرض‌می‌کنیم B نقطه‌ای‌درصفحهٔ‌هذلولوی باشد، گیریم B_1 نگارهٔ B براثر تقارن نسبت به l باشد، و B' نگارهٔ B براثر حاصلضرب تقارنهای محوری نسبت به l_1 و l_2. پس B_1 قرینهٔ B نسبت به l_1 وقرینهٔ B' نسبت به l_2 است. به‌آسانی دیده می‌شود که B' قرینهٔ B است نسبت به‌محور تقارن خطهای BA و $B'A$. زیرا، به‌موجب قضیهٔ مسألهٔ ۱۰۷ (وقتی برای مثلث BB_1B' به‌کار برده شود) محور تقارن نقطه‌های B و B' به‌دسته خط Π_2 متعلق‌است که l_1 و l_2 را شامل‌می‌شود. اما، دراین صورت به‌موجب نتیجهٔ مسألهٔ ۱۵۱ (ب)، محور تقارن نقطه‌های B و B' برمحور تقارن خطهای BA و $B'A$ منطبق می‌شود، چنانکه ادعا کرده بودیم.

برهرخط AP ازدسته‌خط Π_1 نقطهٔ $\bar{B}$، قرینهٔ B نسبت به‌محور تقارن خطهای AP و AB، را به‌دست می‌آوریم و مکان نقطه‌های $\bar{B}$ را یك دایرهٔ هذلولوی به‌مرکز A مــی‌نامیم. اکنون می‌توانیم به‌اختصار بگوییم کــه براثر حرکت (۱) یك‌نقطه و نگاره‌اش به‌یك دایره به‌مرکز A متعلق‌اند (شکل ۱۱۹ الف).

یك دایره به‌مرکز A را مــی‌توان خیلی ساده‌تر، به‌عنوان مکان نقطه‌های

همفاصله از A* تعریف کرد، زیرا حرکتی که A را ثابت نگهدارد، فاصلهٔ یك نقطهٔ متحرك را از A هم ثابت نگاه می‌دارد. یك حرکت هذلولوی از نوع (۱) با یك نقطهٔ ثابت A را می‌توان یك دوران هذلولوی حول A نامید.

۲) حاصلضرب تقارنهای محوری نسبت به دوخط فراموازی l_1 و l_2 عمود بر یك خط MN (شکل ۱۱۹ ب). بر اثر این حرکت خط MN ثابت می‌ماند، و این بدان معنی است که دسته‌خط Π_2 مرکب از خطهای فراموازی عمود بر MN، به‌خود بدل‌می‌شود (هرخط Π_2 به‌خطی از Π_2 بدل‌می‌شود). حال فرض‌می‌کنیم B نقطه‌ای در صفحهٔ هذلولوی باشد، اگر B_1 نگارهٔ B در تقارن محوری نسبت به l_1 باشد و B' نگارهٔ B بر اثر حاصلضرب تقارنهای‌محوری نسبت به l_1 و l_2، آنگاه B_1 قرینهٔ B نسبت به l_1 و قرینهٔ B' نسبت به l_2 خواهد شد. به‌آسانی دیده می‌شود که B' قرینهٔ B است نسبت به‌محور تقارن خطهای BQ و $B'Q'$ از دسته‌خط Π_2. زیرا، به‌موجب قضیهٔ مسألهٔ ۱۰۷ (که برمثلث BB_1B' اعمال شده است)، محور تقارن نقاط B و B' متعلق است به‌دسته خط Π_2 که شامل خطهای l_1 و l_2 است. اما دراین صورت، به‌موجب نتیجهٔ مسألهٔ ۱۰۱ (ب)، محور تقارن B و B' برمحور تقارن خطهای BQ و $B'Q'$ منطبق می‌شود، همان‌گونه که ادعا کرده بودیم.

برهرخط ازدسته خط Π_2 نقطهٔ $\bar{B}$ را قرینهٔ B نسبت به‌محور تقارن‌آن خط و خط BQ اختیار می‌کنیم. مکان‌هندسی نقاط $\bar{B}$ را خم همفاصله وخط MN را محور آن می‌نامیم. لذا براثر حرکت (۲) یك‌نقطه ونگاره‌اش بریك خم همفاصله بامحور MN قرار می‌گیرند (شکل ۱۱۹ ب).

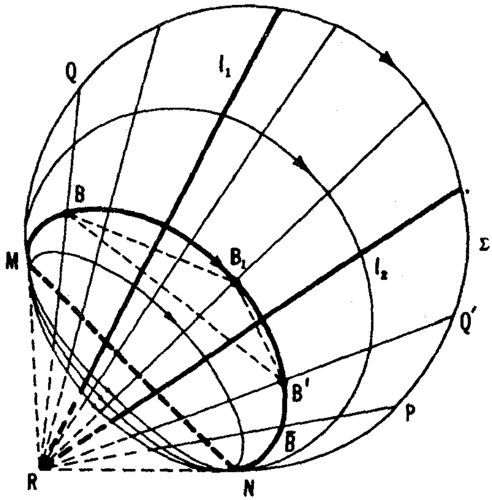
یك خم همفاصله را که محورش MN باشد می‌توان به‌گونه‌ای ساده‌تر، به‌عنوان مکان نقاط همفاصله از خط MN، و واقع دریك‌طرف MN تعریف کرد. علت‌درستی‌این‌تعریف این‌است که حرکتی‌که خطی را ثابت‌نگهدارد، فاصلهٔ‌یك‌نقطهٔ متحرك را از آن‌خط ثابت‌نگاه‌می‌دارد.** یك‌حرکت‌از نوع(۲) راکه‌باوجود خط ثابت

---

* همفاصله به‌معنی هذلولوی. از دیدگاه هندسهٔ اقلیدسی مکان موردنظر البته یك‌دایره نیست. می‌توان ثابت کرد که خمهای موردنظر (و نیز خمهای معرف خمهای همفاصله و خمهای زمانی صفحهٔ هذلولوی، که بعداً خواهد آمد) با بیضیهای اقلیدسی نشان داده می‌شوند.

** از این‌رو نام «خم همفاصله» به‌آن داده شده‌است. بایدتوجه داشت که به‌موجب‌نتایج مسائل ۱۰۰ (الف‌ـج)، مکان نقطه‌های همفاصله از یك‌خط مفروض MN (و واقع در

←



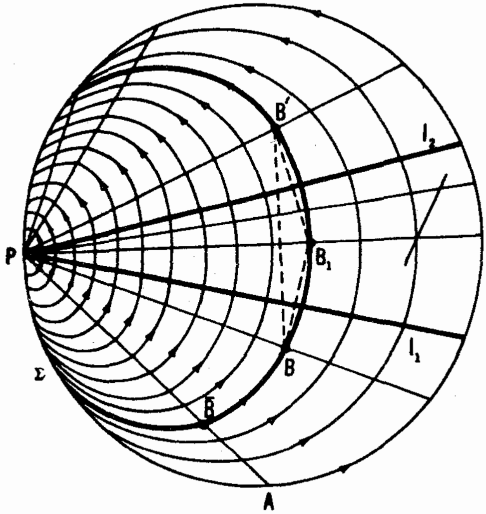
شکل ۱۱۹ ب

MN (که برخودش می‌لغزد) مشخص‌می‌شود، می‌توان یك انتقال هذلولوی‌درطول خط MN نام گذارد.

۳) حاصلضرب تقارنهای‌محوری نسبت به‌دوخط‌موازی l_1 و l_2 (شکل ۱۱۹ ج). این حرکت دسته خط Π_3ی خطهای موازی با l_1 و l_2 را به‌خود آن دسته خط بدل می‌کند. قرینهٔ محوری یك‌خط از Π_3 نسبت به‌یکی ازخطهای l_1 و l_2 آن را به‌خطی از Π_3 بدل‌می‌کند، وعین این‌مطلب برای حاصلضرب این تقارنها نیز صحیح است. حال فرض مـی‌کنیم B نقطه‌ای درصفحهٔ هذلولوی باشد. اگر B_1 نگارهٔ B براثر تقارن نسبت به l_1 باشد و B' نگارهٔ B براثر حاصلضرب تقارنهای محوری نسبت به l_1 و l_2، آنگاه B_1 قرینهٔ B است نسبت به l_1 و قرینهٔ B' است نسبت بـه l_2. به‌آسانی دیده می‌شود که B' قرینهٔ B است. نسبت به‌محور تقارن خطهای BP و

$\overrightarrow{}$
یك‌طرف MN) نمی‌تواند یك خط باشد.

اشاره می‌کنیم که در کتابهای مربوط به‌هندسهٔ هذلولوی، یك خم همفاصله گاهی مکان نقطه‌هایی تعریف می‌شود که فاصله‌هـای آنها از یك‌خط MN مقدار ثابتی باشد. لذا این تعریف این‌قید راکه نقاط مکان دریك طرف MN هستند نقض می‌کند.



شکل ۱۱۹ ج

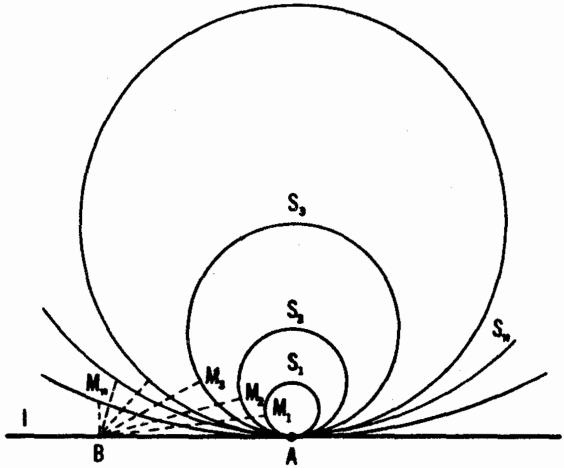
$B'P$. زیرا، به‌موجب قضیهٔ مسألهٔ ۱۵۷، محور تقارن نقطه‌های B و B' تعلق دارد به‌دسته خط Π_3 که شامل خطهای l_1 و l_2 است. اما، دراین‌صورت به‌موجب نتیجهٔ مسألهٔ ۱۵۱ (ب) محور تقارن نقطه‌های B و B'، چنانکه ادعا شده‌بود، همان محور تقارن خطهای BP و $B'P$ خواهد شد.

برهرخط AP از دسته‌خط Π_3 نقطهٔ $\bar{B}$ را قرینهٔ B نسبت به‌محور تقارن خطهای AP و BP می‌گیریم. مکان نقطه‌های B را دایرهٔ زمانی می‌نامیم. لذا براثر یک حرکت از نوع (۳)، یک نقطه بریک دایرهٔ زمانی (شکل ۱۱۹ ج) حرکت می‌کند.

درهندسهٔ اقلیدسی یک‌رشته دایره که از یک نقطهٔ A بگذرند و دراین نقطه بریک خط مفروض l مماس باشند، هنگامی که شعاعهای آنها به‌سمت بینهایت میل کنند، به‌سمت خط l میل می‌کنند. به‌همین دلیل اغلب می‌گویند «خط دایره‌ای است به‌شعاع بینهایت» (شکل ۲۰ الف)*. ولـی در هندسهٔ هذلولوی وضع متفاوت است. در اینجا، چنانکه

---

* منظور ما از فاصلهٔ یک نقطهٔ B از یک خم Γ، مینیمم فاصله‌های نقطهٔ B از نقاط Γ است. لذا اگر Γ یک‌خط l باشد، فاصلهٔ B از l مساوی طول‌عمود وارد از B بر l است، و اگر Γ یک‌دایرهٔ S به‌مرکز O باشد، فاصلهٔ B تا S طول کوچکتر از دو قطعهٔ $\overleftarrow{BM}$ و

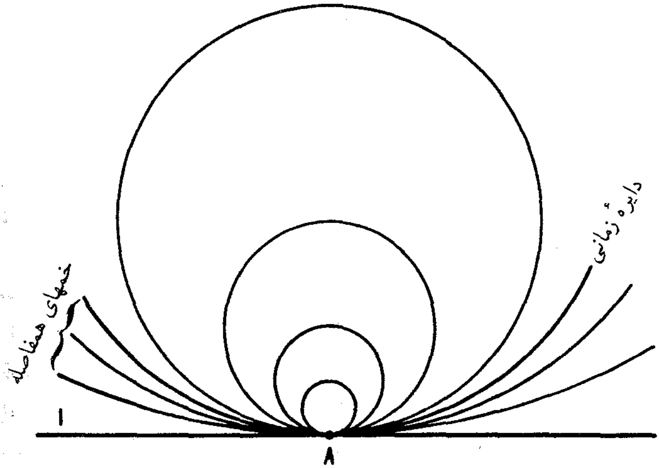


شکل ۱۲۰ الف

به‌آسانی دیده می‌شود، یک‌رشته دایره که ازیک نقطهٔ A می‌گذرند و در این نقطه برخط مفروض l مماس‌اند، هنگامی که شعاعهای آنها به‌سمت بینهایت میل کنند، به‌سمت دایرهٔ زمانی‌ماربر A مماس‌بر l میل‌می‌کنند، یعنی دراینجا، یک‌دایره به‌شعاع بینهایت به‌جای اینکه یک‌خط باشد یک‌دایرهٔ زمانی‌است (به‌همین‌دلیل دوایر زمانی اغلب «دوایرحدی» نامیده مـی‌شوند). از سوی دیگر، یک‌رشته از خمهای همفاصلهٔ ماربر A و مماس در A بر l، برحسب اینکه عرضهای خمهای‌همفاصله به‌سمت بینهایت یا به‌سمت صفر میل‌کنند، به‌سمت دایرهٔ زمانی مذکور درفوق در A، یا به‌سمت خط l میل می‌کنند (پهنای یک‌خم همفاصله عبارت است از فاصلهٔ نقطه‌های آن تا محورش، شکل ۱۲۰ ب).

هریـک از سه‌خم، یک دایره، یک دایرهٔ زمـانی، و یک خم همفاصله را می‌توان

$\overrightarrow{BN}$ است، که M و N نقطه‌های برخورد خط BO با S هستند. ادعای ما این است کـه اگرشعاعهای‌دوایر S_1 و S_2 و S_3 و ... که‌برخط l در A مماس هستند به‌سمت بینهایت میل‌کنند، فاصله‌های نقطهٔ اختیاری B واقع‌بر l از دایره‌های S_1 و S_2 و S_3 و ...، یعنی طولهای BM_1 و BM_2 و BM_3 و... به‌سمت صفرمیل‌می‌کنند (شکل ۱۲۰ الف). احکام بعدی هندسهٔ‌هذلولوی باید به‌طریقی مشابه تعبیر شوند.



شکل ۱۲۰ ب

به‌عنوان خمی عمود برخطهای یك دسته خط تعریف کرد.* درمورد یك‌دایره، این دسته‌خط دسته‌ای از خطهای متقاطع است، درمورد دایرهٔ زمانی این‌دسته خط دسته‌ای از خطهای موازی است، و درمورد یك‌خم همفاصله این دسته‌خط، دسته‌ای از خطهای فراموازی است.

۱۱۱. نشان دهید که دریك صفحهٔ هذلولوی می‌توان یك دایره، یك دایرهٔ زمانی، یا یك‌خم همفاصله را بریك مثلث مفروض محیط کرد.

یادآوری می‌کنیم که چون نقطهٔ تلاقی نیمسازهای یك‌مثلث از اضلاع آن به‌یك فاصله است، همواره می‌توان یك‌دایره در یك‌مثلث محاط کرد.

۱۱۲. نشان دهید که در هندسهٔ هذلولوی نسبت محیط دایره به‌شعاعش ثابت نیست.

مسألهٔ ۱۱۲ نشان می‌دهد که در هندسهٔ هذلولوی دایره‌های غیر قابل‌انطباق،

---

* منظور از زاویهٔ بین دوخم در یك نقطهٔ تقاطع، زاویهٔ بین‌مماسهای مرسوم براین خمها دراین نقطه است.

متشابه نیستند (← ص ۱۵۹)*.

اکنون به‌پایان بررسی هندسهٔ هذلولوی‌خود رسیده‌ایم. این بررسی برمبنای تعریف ص ۱۳۳ صورت گرفته بود. همهٔ قضیه‌هـای هندسهٔ هذلولوی به قضایـای معمولی درباب نقطه‌ها (ووترها)ی‌یك‌قرص K مبدل‌شدند، و بررسی‌هندسهٔ‌هذلولوی عبارت شد از جدا کردن آن ویژگیهایی از قرص K (و از شکلهای درون آن) که براثر تبدیلهای تصویری، که K را برخودش مـی‌نگارند، محفوظ می‌مانند. ولـی برداشت دیگری هم برای بررسی هندسهٔ هذلولوی (و نیز هر هندسهٔ دیگر) وجود دارد. این برداشت، که قبلا درصص ۱۴۹ و ۱۵۰ به‌آن‌اشاره شد (← برهان نخستین ملاك قابلیت انطباق مثلثها بـاهم، و برهان قضیهٔ مربوط به‌تقارب نیمسازهـا دریك مثلث)، عبارت است از پایه‌گذاری قضیه‌های هندسهٔ نـااقلیدسی برمبنای عده‌ای از اصول موضوع، و کاملا مشابه با بسط هندسهٔ اقلیدسی است که در دبیرستانها مورد مطالعه قرارمی‌گیرد. وقتی‌هندسهٔ هذلولوی را از اصول‌موضوع استخراج می‌کنیم، فقط به‌تغییر یکی از اصول موضوع هندسهٔ اقلیدسی، یعنی اصل توازی، نیازداریم. به‌جـای این اصل، این اصل گذاشته می‌شود کـه اگر A نقطه‌ای نـاواقع برخط l باشد، خطهای‌زیادی وجود دارند که از A می‌گذرند و l را نمی‌برند. دراین نحوهٔ پرداختن به‌هندسهٔ هذلولوی، ارتباط آن بـا نقطه‌ها و وترهای قرص K برای مـا مطرح نیست. بلکه به‌جای نمودارهایی که کیفیات قرص را عرضه می‌کنند، اوضاع مختلف را به‌وسیلهٔ نمودارهای تجسمی خلاصه شده، مشابه با شکلهای ۱۱۵، ۱۱۸ یا ۱۲۰ (ب)، نمایش می‌دهیم.

از لحاظ‌تاریخی، هندسهٔ‌هذلولوی نخستین بار برپایه‌ای اصل موضوعی‌تکامل

---

* نتیجهٔ‌دیگر این است که‌تعریف معمولی‌اندازهٔ یك زاویهٔ α برحسب رادیان (به‌صورت نسبت طول قوسی از دایره متناظر با زاویهٔ مرکزی α به‌شعاع دایره) به‌هندسهٔ هذلولوی منتقل نمی‌شود، زیرا دراینجا این نسبت، علاوه بر α به‌اندازهٔ شعاع هم‌بستگی دارد. در هندسهٔ هذلولوی، اندازهٔ یك زاویه را برحسب رادیان می‌توان باروش صوری محض از راه تعیین عدد ... ۳٫۱۴۱۵۹ = π به‌عنوان زاویـهٔ نیمصفحه، یا از راه رسم هندسی پیچیدهٔ زیر وارد کرد: اندازهٔ یك زاویهٔ α برحسب رادیان، به‌صورت حدنسبت طول‌قوس دایره‌ای مقابل به‌زاویـهٔ مرکزی α، بـه‌شعاع دایره، وقتی شعاع به سمت صفر میل کند تعریف می‌شود.

یافت، و درنتیجهٔ تلاشی برای اثبات اصل موضوع توازی از روی اصول دیگر پدید آمد. مدتهای مدید این گمان‌وجود داشت که‌می‌شود این اصل را از بقیهٔ اصول هندسهٔ اقلیدسی استخراج کرد. در تلاشهایی که برای این اصل به‌عمل می‌آمد، ریاضیدانان از برهان «خلف» استفاده می‌کردند، یعنی فرض می‌کردند که اصل توازیها غلط باشد، وسعی می‌کردند تناقضی براساس این‌فرض به‌دست آورند. همهٔ این تلاشها بی‌ثمر بودند. حقیقت این بود که، قضایای حاصل از نفی اصل موضوع توازی عجیب به‌نظر می‌آمدند ولی با یکدیگر متناقض نبودند. مسأله زمانی حل شد که ك. ف. گاوس، ن. ای. لباچفسکی، و ی. بویوئی برای‌اول‌بار صراحتاً بیان‌کردند که از نفی اصل توازی به‌هندسهٔ تازه‌ای می‌توان رسید که مانند هندسهٔ معمولی (اقلیدسی) سازگار است.* لباچفسکی و بویوئی هندسهٔ جدید را به حدی تکامل بخشیدند که باهندسهٔ اقلیدسی از لحاظ‌محتوا و پیوستگی منطقی برابر شد. پیشرفت هندسهٔ هذلولوی (حدود ۱۸۲۹، که‌نخست لباچفسکی کشف خودرا منتشرکرد) ثابت کرد که اصل موضوع توازی نمی‌تواند از اصول موضوع دیگر هندسهٔ اقلیدسی استنتاج شود.

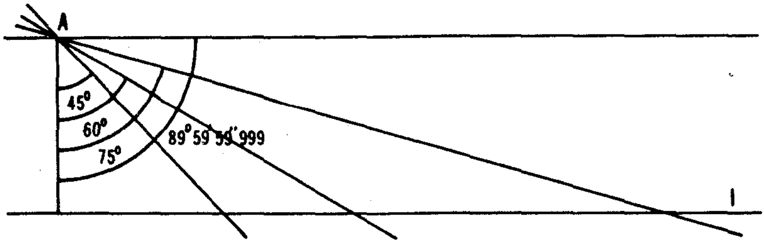
در بالا گفتیم که هندسهٔ هذلولوی عیناً مانند هندسهٔ اقلیدسی سازگار است. ولی وقتی به‌فضای معمولی می‌رسیم، به‌نظر می‌آید تنها یکی از این هندسه‌ها قابل استفاده است؛ زیرا از دیدگاه فضای معمولی بدیهی به‌نظر می‌رسد که تنها هندسهٔ «درست» همان هندسهٔ اقلیدسی است.** ولی موضوع ارتباط این یا آن هندسه با

---

* یك‌گزارش بسیار خوب از داستان خیلی جالب کشف هندسهٔ هذلولوی به‌وسیلهٔ ن. ای. لباچفسکی و ی. بویوئی و مساهمت ك. ف. گاوس را، که مستقلا به‌مفاهیم‌هندسهٔ هذلولوی رسیدند، درکتاب زیر می‌توان یافت:

R. Bonola, *Non-Euclidean Geometry*, Dover Publications, New York, 1955.

** دقیقتر این بود که بگوییم ازدوهندسه، ظاهراً هندسهٔ اقلیدسی ویژگیهای فضای‌عادی را دقیقتر منعکس می‌کند. زیرا، بجا نیست که بپرسیم کدام‌هندسه‌درفضای‌معمولی صادق است، زیرا موجودات اساسی هندسه ــ نقطه و خط وغیره ــ اشیایی نیستند که به‌طور فیزیکی‌تحقق‌پذیر باشند، بلکه فقط تصوراتی از ویژگیهای اشیاء پیرامون‌ما‌هستند. به همین‌دلیل است که هندسه نمی‌تواند درشمارعلوم طبیعی ازقبیل‌فیزیك، شیمی یا بیولوژی، که احکام آنها تابع تحقیقات تجربی هستند، درآید. تنها چیزی که می‌توانیم بگوییم این است که ببینیم دربارهٔ ویژگیهای اجزاء بسیار کوچك‌فضا که‌آنها را نقطه می‌گیریم، و مسیرهای اشعهٔ نورانی، که آنها را خط می‌گیریم، کدام هندسه توضیح دقیقتری را در اختیار ما می‌گذارد.



شکل ۱۲۱

واقعیت‌فیزیکی عملا خیلی پیچیده‌تر است. هیچ آزمون مستقیمی نمی‌تواند درباب درستی یا نادرستی اصل توازی‌نظر قطعی بدهد، بدیهی‌است که ممکن نیست از راه تجربه نشان داد که فقط یك خط وجود دارد که ازیك نقطهٔ مفروض A رسم شود و خط ثابت l را نبرد. توسل به‌شهود هندسی نیز بی‌نتیجه است. روشن است که اگر A به l نزدیك باشد، خطی‌که بر A می‌گذرد و با عمود مرسوم از A بر l، زاویه‌ای «به‌قدرکافی کوچك» (مثلا، °۴۵، °۶۰، یـا °۷۵؛ ← شکل ۱۲۱) می‌سازد به‌طور قطع l را می‌برد، ولی معلوم نیست که این مطلب برای خطی‌که با عمود مرسوم از A بر l زاویـه‌ای مثلا برابر ″۸۹°۵۹′۵۹٫۹۹۹ (عملا یك‌زاویهٔ قائمه) مـی‌سازد درست باشد. حتی‌توسل جستن به‌شهود هندسی، وقتی فاصلهٔ A تا l خیلی زیاد، حتی بزرگتر از فاصلهٔ زمین تا خورشید باشد، کمتر معنی دارد. البته می‌توان سعی کرد کـه مسألهٔ مجموع زوایای یك‌مثلث را به‌طور تجربی سروصورت داد (← مسألهٔ ۱۰۸)؛ این برداشت برای حل مسألهٔ مـاهیت هندسی فضا، به‌وسیلهٔ گاوس و نیز به‌وسیلهٔ لباچفسکی عنوان شد. گاوس سعی‌کرد مجموع زاویه‌هـای یك‌مثلث بسیار بزرگ را که رأسهایش سه‌قلهٔ کوه، به‌فواصل بسیار زیاد از هم بودند با استفاده از اندازه‌گیریهای زمینسنجی تعیین کند. لباچفسکی سعی کرد مجموع زاویه‌هـای یك مثلث بسیار بزرگ را که رأسهای آن را سه‌ستاره تشکیل می‌دادند، براساس داده‌های نجومی تعیین کند.* مشکل کار در اینجا این است که‌همهٔ اندازه‌گیریهای ما از دقت

---

* یادآوری می‌کنیم که به‌موجب نتیجهٔ مسألهٔ ۱۰۹ ، هرچه مساحت یك مثلث هذلولوی بزرگتر باشد، تفاضل مجموع زاویه‌های مثلث و °۱۸۰ به‌همان نسبت بیشتر است.

محدودی برخوردارند که از ویژگیهای ابزارهـای اندازه‌گیری ما ناشی می‌شود. تنها چیزی که براساس یك تجربه می‌توانیم بگوییم، این است که مجموع زوایا در یك مثلث تقـریباً مساوی بـا چنین و چنان اندازه‌ای است کـه برآوردی از خطـا به‌همراه دارد. بنابراین یك تجربه از این‌نوع مآلا نمی‌تواند ثابت کند که مجموع زوایا دریك مثلث مساوی °۱۸۰ است. ولی‌می‌شود تصور کرد که یك‌تجربه بتواند نشان دهد که مجموع زاویه‌هـای یك‌مثلث مساوی °۱۸۰ نیست، و درنتیجه هندسهٔ اقلیدسی ویژگیهای فضا را دقیقاً منعکس‌نمی‌کند. آنچه در این‌رابطه می‌توان گفت این است که درهمهٔ اندازه‌گیریها تفاوت محسوس بین مجموع زاویه‌های یك مثلث و °۱۸۰ از مرز خطاهای تجربی تجاوز نمی‌کند.

ازاین‌رو می‌بینیم که‌مادامی که‌مسألهٔ‌هندسهٔ‌واقعی‌فضا براثر تجربهٔ‌پالایش‌شده‌ای حل نشود، هردو هندسهٔ مـا در مطالعهٔ قوانین فیزیکی به‌یك اندازه سودمندند.* تلاش برای بیان اینکه کدام دستگاه هندسی ممکن (غیراز هندسه‌هـای اقلیدسی و هذلولوی هندسه‌هـای دیگری از این‌دست نیز وجود دارند؛ بحثی را کـه درزیر می‌آید مطالعه‌کنید) برای ویژگیهای فضای فیزیکی بیشتر مناسب است، پیشرفتهای فیزیکی را به‌نحو قابل‌ملاحظه‌ای به‌جلو رانده است. جالبترین دستاورد در این‌زمینه نظریهٔ‌موسوم به‌نسبیت اینشتین‌است** («نظریهٔ نسبیت خاص» ــ آ. اینشتین، ۱۹۰۵؛ «نظریهٔ‌نسبیت عام» ــ آ. اینشتین، ۱۹۱۶). که اصول تصورات ما را درباب هندسهٔ

---

* این واقعیت کـه درمطالعهٔ هندسهٔ هذلولوی بایستی نمودارهـای بیقواره‌ای مـانند نمودارهای شکل ۱۱۵ و شکل ۱۱۸ به‌کار بریم، به‌اینکه آیا هندسهٔ هذلولوی هندسهٔ «واقعی» فضا هست یا نیست، ارتباطی ندارد. علت این واقعیت کـه در هندسهٔ اقلیدسی ما می‌توانیم شکلهای دقیقی به‌کاربریم، وجود تبدیلات تشابهی‌است که به‌ما امکان می‌دهد مقیاسی خیلی‌کوچك از یك ناحیهٔ وسیع صفحه را نشان دهیم (← ص۱۵۹)، لذا وقتی ناحیه‌هایی بزرگ را بریك صفحهٔ‌کاغذ نمایش می‌دهیم بایستی از نمودارهای بیقواره‌ای استفاده کنیم (خطها را به‌صورت منحنی وغیره نشان دهیم).

** یك مدخل مقدماتی بر برخی از جنبه‌های نسبیت را می‌توان ازکتاب زیر به‌دست آورد:

J. T. Schwartz, *Relativity in Illustrations*, N. Y. U. Press, N. Y. 1962.

مدخل‌دیگری که از دیدگاهی‌دیگر نوشته شده است، کتاب «از فیثاغورس تا اینشتین»، مجلد۱۶ از این مجموعه است.

نواحی بزرگ فضا دگرگون‌ساخته و مسألهٔ درست یا نادرست‌بودن هندسهٔ هذلولوی را، به‌شکلی که این مسأله اصلا صورتبندی شده بود، به‌کلی رد کرده است. متأسفیم که نمی‌توانیم دراینجا عمیقتر وارد این‌نظریه بشویم، هرچند که ارتباط نزدیکی با موضوع این‌کتاب دارد.

عظمت‌کار ك.ف. گاوس و ن.ای. لباچفسکی‌و ی. بویوئی‌دراین‌است‌که‌اینان نخستین‌کسانی بودند که این تصور را که هندسهٔ‌اقلیدسی بی‌نظیر است و چیزی را نمی‌توان جایگزین آن‌کرد، فرو ریختند. درعین اینکه درست است که گاوس و لباچفسکی و بویوئی هندسهٔ‌خود را بی‌آنکه به‌تناقضی بربخورند به‌نحو دامنه‌داری تکمیل کردند، مع‌هذا این‌سؤال را که آیا هندسهٔ‌آنان اساساً عاری از تناقض است یا نه بلاجواب گذاردند.*

در این زمینه کار ا. بلترامی از اهمیت زیادی برخوردار بود. او در ۱۸۶۸ نشان‌داد که‌هندسهٔ هذلولوی‌می‌تواند دربرخی‌از رویه‌های‌جالب معمولی (اقلیدسی) فضا تحقق پذیرد (به‌شرط اینکه فاصلهٔ بین دونقطهٔ A و B واقع بر رویه را طول کوتاهترین خم واصل بین این دو نقطه برآن سطح تعریف کنیم؛ این «کوتاهترین» خمها نقش خطهای هندسهٔ مسطحه را بازی می‌کنند). این کشف، هندسهٔ هذلولوی را درهمان‌جایگاه هندسهٔ‌اقلیدسی قرارداد بدین‌معنی‌که وی‌نشان داد که اگر هندسهٔ اقلیدسی عاری از تناقض باشد، هندسهٔ هذلولوی نیز عاری از تناقض است.

دو سال پس‌از انتشار اثر بلترامی، ف. کلاین نخستین نوشته‌های خود را در زمینهٔ هندسهٔ نااقلیدسی منتشر کرد. وجود دوهندسهٔ مختلف کلاین را برآن داشت که این پرسش را موردبررسی قرار دهد که «منظور از یك‌هندسه چیست»؟ پاسخ وی به‌این پرسش درمقدمهٔ کتاب حاضر آورده شده است. کلاین از آغاز، هندسهٔ هذلولوی را درهمان جایگاه هندسهٔ اقلیدسی قرار داد. او باید به‌خاطر تعریف هندسهٔ هذلولوی، که در ص ۱۳۳ آورده شده، به‌دیدهٔ احترام نگریسته شود. امکان ضمنی تحقق‌یافتن هندسهٔ هذلولوی در داخل یك قرص K ازصفحهٔ اقلیدسی معمولی

---

* گاوس ولباچفسکی آنچنان سخت به‌سازگاری این هندسهٔ تازه عقیده داشتند که کل این مسأله برای آنها مهم نبود. از سوی دیگر، بویوئی به‌شدت تحت تأثیر این سؤال قرار گرفته‌بود. بینش عمیق‌وی به‌کل مسائل پیچیدهٔ‌مربوط به‌هندسهٔ هذلولوی به‌راستی شگفت‌انگیز است. بویوئی سخت کوشید تا ثابت کندکه هندسهٔ هذلولوی سازگار است، ولی موفق نشد، زیرا پرورش ریاضی وی از پرورش ریاضی گاوس ولباچفسکی خیلی پایینتر بود.

(که‌قبلا بلترامی به‌آن اشاره کرده بود) همچنین نشان می‌دهد که این هندسه عاری از تناقض‌است، یعنی نشان می‌دهد که اصل‌توازی نمی‌تواند از اصول دیگر هندسهٔ اقلیدسی استخراج شود. کلاین پا را از این حد نیز فراتر گذاشت؛ یعنی باانتخاب گروههای مختلف تبدیلات تصویری به‌قدرکافی کوچك، به‌یك عده (دقیقاً نه تا) از گروههای هندسهٔ مسطحه دست یافت که در هریك از آنهـا یك مفهوم طبیعی برای فاصلهٔ بین‌نقاط و زاویهٔ بین‌خطها وجود دارد.* امروزه به‌همهٔ هندسه‌ها غیراز هندسهٔ اقلیدسی‌هندسهٔ نااقلیدسی گفته می‌شود، واین امر هندسهٔ هذلولوی را درشمار یکی ازچند هندسهٔ نااقلیدسی قرار می‌دهد.**

یادآوری می‌کنیم کـه براهین بلترامی وکلاین درباب سازگـاری هندسهٔ هذلولوی تنها براهین‌ممکن‌نیستند. درفضای‌اقلیدسی می‌توان برای هندسهٔ‌هذلولوی الگویی سوای الگوی بلترامی (نقطه‌های یك رویهٔ خاص که فاصلهٔ آنهـا بررویه

---

* مراجعه کنید، مثلا به‌کتاب:

I. M. Yaglom, *Complex Numbers in Geometry*, Academic Press, New York 1968.

** در میان هندسه‌های نااقلیدسی، هندسهٔ هذلولوی استثنایی است، از این لحاظ کـه همهٔ اصول‌هندسهٔ اقلیدسی بجز اصل‌توازی، درآن صادق‌اند. هندسه‌های نااقلیدسی دیگر اساساً تفاوت بیشتری باهندسهٔ اقلیدسی دارند؛ دربرخی آنهـا نمی‌توان یك‌پاره‌خط را از دوطرف تـا بینهایت امتداد داد، و دربعضی همواره نمی‌توان دونقطه را به‌وسیلهٔ یك خط به‌هم‌وصل کرد [درزمینهٔ این‌هندسهٔ نـااقلیدسی، یعنی‌ریمانی، ← پیوست‌فصل ۲ (ترجمه نشده‌از روسی)] این توضیحات‌مستلزم‌اصل موضوعی کردن «سنتی» هندسهٔ اقلیدسی بوده که هیلبرت درمبانی هندسه‌اش (۱۸۹۹) انجام داده است. قبول راهـی متفاوت برای رسیدن به‌مفهوم صفحهٔ اقلیدسی ممکن است به «نزدیك‌کردن» نسبی یك دستگاه هندسی مفروض به‌هندسهٔ اقـلیدسی اثر گـذارد. مثلا از دیدگـاه «برداری» (یعنی برمبنـای مفهوم‌بردار)، اصل موضوعی‌کردن هندسهٔ‌اقلیدسی، که‌ظاهراً به‌دست‌هرمان‌وایل (۱۹۱۸) صورت گرفته، نزدیکترین «هندسهٔ نـااقلیدسی» به هندسهٔ اقلیدسی، هندسهٔ (دوبعدی) موسوم به «هندسهٔ مینکوفسکی» است کـه مبنای نظریهٔ نسبیت (خـاص) است. درهمین چارچوب‌یك‌هندسهٔ خیلی دور از هندسهٔ‌اقلیدسی هندسهٔ‌هذلولوی است که مطلقاً ازمفهوم بردار استفاده نمی‌کند.

اندازه‌گرفته می‌شود) یا الگوی کلاین (نقطه‌های یك‌قرص **K** که فاصله برروی‌آن غیراز فاصلهٔ معمولی اندازه گرفته می‌شود) نیز درست کرد.* یك الـگوی جالب دیگر الگوی پوانکاره است که در پیوست فصل ۲ بدان اشاره شده است.**

---

* ما دراینجا نمی‌توانیم توضیح بدهیم که الگوی بلترامی چه نقایصی داشته که‌موجب شده است کـه الگوی کلاین اولین برهـان قابل‌قبول برای سازگاری هندسهٔ هذلولوی به‌شمار آید. در این‌مورد باید اشاره‌کنیم که مع‌هذا بلترامی اولین کسی بود کـه این سازگاری را ثابت کرد، زیرا مقالهٔ وی ذاتاً متضمن الگوی هندسهٔ هذلولوی مذکور در این پیوست بود و امروزه به‌نام «الگوی کلاین» یا الگوی «بلترامی - کلاین» معروف است. (کلاین آن‌رامستقلا کشف کرد. معاصران‌بلترامی چنان تحت‌تأثیر نخستین برهان سازگاری هندسهٔ هذلولوی وی، که اصلا نادرست بود، قرارگرفته بودندکه اصلا برهان دومی را که برهانی صحیح و درضمن همان‌مقاله آمده بود نادیده گرفتند.)

** عطف به‌مطالب روسی ترجمه‌نشده. برای بحث دربارهٔ الگوی پوانکاره‌به‌زبان انگلیسی به‌کتابهای زیر مراجعه کنید:

H. Meschkowski, *Noneuclidean Geometry*, Academic Press, New York 1964,

یا

E. E. Moise, *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, Addison Wesley 1963, Ch. 25 (pp. 348–366),

یا

D. Pedoe, *A Course of Geometry for Colleges and Universities*, Cambridge Univ. Press 1970, Ch. 6 (pp. 206–241).

حل مسائل

فصل اول. تبدیلهای آفین و تصویری

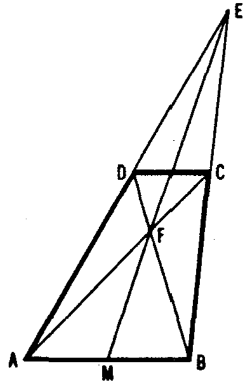
بخش ۱

۱. فرض مـی‌کنیم ABC مثلثی دلخواه درصفحهٔ π باشد. براثر یك تصویر موازی مناسب π بریـك صفحهٔ π'، نگارهٔ مثلث ABC یك مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ خواهد شد. به‌موجب ویژگی (ج) از تصویرموازی، نگاره‌های وسطهای اضلاع‌مثلث ABC وسطهای‌اضلاع‌مثلث $A'B'C'$ خواهند شد. چون‌مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است، میانه‌ها نیمسازهای مثلث‌اند و لذا در یك نقطه، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی،متلاقی‌اند. پس میانه‌های مثلث اصلی ABC متقارب‌اند.*

۲. فرض مـی‌کنیم $ABCD$ یك ذوزنقه باشد، E نقطهٔ تقاطع (امتدادهای) ساقهای آن، و F نقطهٔ تلاقی قطرهای آن. براثر یك تصویر موازی مناسب صفحهٔ ذوزنقه بریـك صفحـهٔ π'، نگارهٔ مثلث ABE مثلث متساوی‌الساقین $A'B'E'$ می‌شود. درعین حال به‌موجب ویژگی (ب)ی تصویرموازی، ذوزنقهٔ $ABCD$ بـه ذوزنقهٔ $A'B'C'D'$ بدل می‌شود (شکل ۱۲۲). روشن است کـه $E'F'$ نگارهٔ خط

---

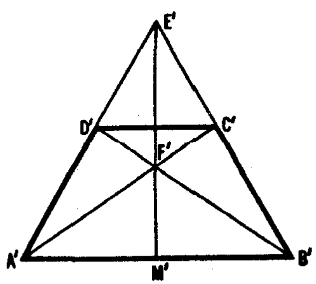
* تقارب نیمسازهای یك مثلث مستقیماً نتیجهٔ این واقعیت است کـه نیمساز یك زاویه مکان هندسی نقطه‌های متساوی‌الفاصله از دوضلع آن زاویه است. برهان معمولی تقارب میانه‌های یك مثلث مستلزم رسمهای کمکی است که ذکر آنها دراینجا بیفایده است.



شکل ۱۲۲ الف

EF محور تقارن مثلث متساوی‌الساقین $A'B'E'$ است، و لذا قاعده‌های $A'B'$ و $C'D'$ ازذوزنقهٔ $A'B'C'D'$ را نصف می‌کند. به‌موجب‌ویژگی (ج)مربوط به‌تصویر موازی، این مطلب ایجاب می‌کند که خط EF قاعده‌های AB و CD از ذوزنقهٔ اصلی $ABCD$ را نصف کند.

یادآور می‌شویم که بدین‌طریق‌می‌توانیم عکس قضیهٔ بالا را هم ثابت‌کنیم، هرگاه یك‌نقطهٔ F از میانهٔ EM از مثلث ABE را به‌رأسهای A ـ B وصل کنیم تا اضلاع مثلث را درنقطه‌های D و C ببرند، خط CD موازی AB است (شکل ۱۲۲ ب نشان می‌دهد که وقتی مثلث ABE متساوی‌الساقین باشد، CD موازی AB می‌شود).

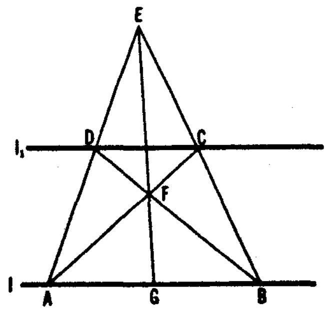


شکل ۱۲۲ ب

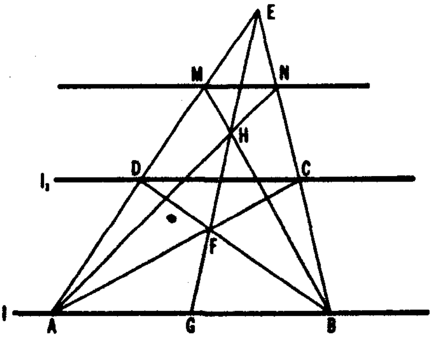
۳. الف) درصفحه‌یک‌نقطهٔ E راناواقع بر l یا l_1 می گیریم وآن‌را به‌نقطه‌های A و B واقع‌بر l وصل می کنیم. گیریم C و D نقطه‌های تلاقی خطهای EA و EB باخط l_1 باشند و F نقطهٔ‌تلاقی خطهـای AC و BD (شکل ۱۲۳ الف). خط EF پاره‌خط AB را نصف می‌کند (← مسألهٔ ۲).

ب) دونقطهٔ A و B را بر l انتخاب، و نقطهٔ G وسط پـاره‌خط AB را پیدا می‌کنیم (← قسمت (الف)). گیریم E نقطـه‌ای برخط AM باشد، H نقطهٔ تلاقی خطهای EG و BM، و N نقطهٔ‌تلاقی‌خطهای AH و BE (شکل۱۲۳ب) باشند. خط MN موازی مطلوب با l است (← توضیح پس‌از جواب مسألهٔ ۲).

[در ترسیم‌فوق، مناسب‌است که‌برای پیداکردن‌وسط AB و رسم خط‌موازی با l، از همان مثلث ABE استفاده شود].

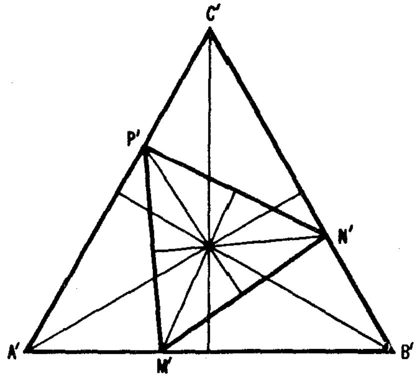


شکل ۱۲۳ الف



شکل ۱۲۳ ب

۴. الف) یك‌تصویر موازی مناسب، مثلث ABC را برمثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ در یك‌صفحهٔ π' می‌نگارد. و نیز بـه‌موجب ویژگی (ج) از یـك تصویر موازی، این نگاشت نقـاط M و N و P را بـه‌نقاط M' و N' و P' بـدل می‌کند بـه‌طـوری کـه $A'M'/M'B'=B'N'/N'C'=C'P'/P'A'$ (شکل ۱۲۴). دوران‌مثلث $A'B'C'$ حول مرکزش‌به‌زاویهٔ $120°$، اضلاع $A'B'$ و $B'C'$ و $C'A'$ را به‌ترتیب به‌اضلاع $B'C'$ و $C'A'$ و $A'B'$ بدل می‌کند، ونقاط M' و N' و P' را به‌ترتیب به‌نقاط N' و P' و M'. بنـابراین دوران مثلث $A'B'C'$ حـول مرکزش به‌زاویهٔ $120°$، مثلث $M'N'P'$ را به‌خودش بدل می‌کند؛ اما این بدین‌معنی است کـه مثلث اخیر متساوی‌الاضلاع است و مرکزش برمرکز $\triangle A'B'C'$ منطبق است.



شکل ۱۲۴

به‌عبارت‌دیگر، نقطهٔ تلاقی میانه‌های $\triangle M'N'P'$ بر نقطهٔ تلاقی میانه‌های $\triangle A'B'C'$ منطبق است. چون یك تصویر موازی میانه‌های یك مثلث را به‌میانه‌های نگاره‌اش بدل می‌کند، نقطهٔ تلاقی میانه‌های $\triangle MNP$ بر نقطهٔ تلاقی میانه‌های $\triangle ABC$ منطبق می‌شود.*

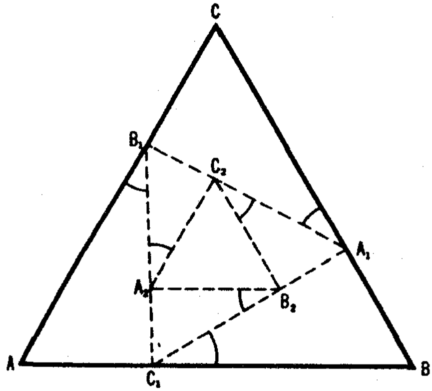
ب) برهان مشابه باحل قسمت (الف).

۵. اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، روشن است که نقطهٔ مطلوب M باید از اضلاع $\triangle ABC$ به‌یك فاصله باشد؛ یعنی M مرکز دایرهٔ محاطی داخلی

* مرکز یك مثلث متساوی‌الاضلاع، با نقطهٔ تلاقی نیمسازهای آن (مرکز دایرهٔ محاطی داخلی)، و نقطهٔ تلاقی عمودمنصفهای اضلاع آن (مرکز دایرهٔ محیطی)، و نقطهٔ تلاقی ارتفاعات آن (مرکز ارتفاعی)، و بالاخره نقطهٔ تلاقی میانه‌های آن (مرکز ثقل) یکی است. ولی البته، انطباق نقطهٔ تلاقی نیمسازهای $\triangle A'B'C'$ بر نقطهٔ تلاقی نیمسازهای $\triangle M'N'P'$ ایجاب نمی‌کند که احکام مشابهی برمثلثهای ABC و MNP جاری باشند (تصویر موازی درحالت کلی نیمسازها را به‌نیمسازها بدل نمی‌کند)؛ ونمی‌توان ادعا کرد که‌مثلثهای ABC و MNP یك‌مرکز ارتفاعی دارند، یااینکه‌مراکز دوایرمحیطی آنها برهم منطبق است. آنچه می‌توان گفت این است که نقاط تلاقی میانه‌های این مثلثها برهم منطبق‌اند، زیرا یك تصویر موازی، میانه‌های یك مثلث را به‌میانه‌های مثلث نگاره‌اش بدل می‌کند.

مثلث ABC، یا به‌گونهٔ دیگر نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث ABC باشد. از آنجا نتیجه می‌شود که در یك مثلث دلخواه ABC نقطهٔ مطلوب M باید بر نقطهٔ تلاقی میانه‌های آن منطبق باشد (← پانویس همراه حل مسألهٔ ۴ (الف)).

۶. اگر ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد (شکل ۱۲۵)، اضلاع مثلثهای ABC و $A_۲B_۲C_۲$ موازی اند(چرا؟)، یعنی این مثلثها متجانس‌اند (← جلددوم کتاب). از آنجا نتیجه‌می‌شود که‌درحالت کلی‌مثلثهای ABC و $A_۲B_۲C_۲$ مجانس یکدیگر* و بنابراین متشابه‌اند.



شکل ۱۲۵

۷. معلوم است که قضیه برای یك مثلث متساوی‌الاضلاع درست است. از اینجا نتیجه‌می‌شود که برای‌یك‌مثلث دلخواه نیز درست‌است (← مثلا حل مسألهٔ۱).

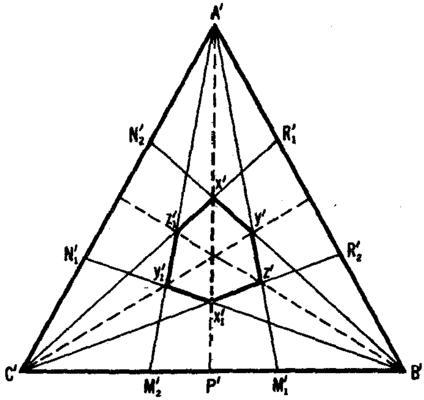
۸. کافی است که حکم خود را برای یك‌مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ ثابت‌کنیم (← راه‌حلهای مسائل ۱ و ۴). چون

$$A'R'_۱=\frac{۱}{۳}(A'B') \quad \text{و} \quad A'N'_۲=\frac{۱}{۳}A'C'$$

(شکل ۱۲۶)، پس خطهای $C'R'_۱$ و $B'N'_۲$ نسبت به‌محور تقارن $A'P'$ از

---

* باید توجه داشت که‌تصویر موازی شکلهای‌مجانس را به‌شکلهای‌مجانس بدل می‌کند، بی‌آنکه الزاماً شکلهای‌مشابه را به شکلهای مشابه بدل‌کند. به‌همین دلیل‌است‌که ما از برهان خود «منحرف شدیم».

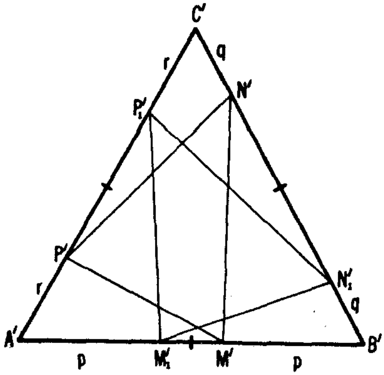


شکل ۱۲۶

$\triangle A'B'C'$ قرینه‌هستند،و بنا بر این X'، نقطهٔ تقاطع این خطها، بر $A'P'$ قرار دارد. و نیز از تساویهای $B'R'_{۲}=(۱/۳)B'A'$ و $C'N'_{۱}=(۱/۳)C'A'$ نتیجه‌می گیریم که $X'_{۱}$، نقطهٔ تقاطع خطهای $B'N'_{۱}$ و $C'R'_{۲}$ هم بر آن محور قرار دارد. لذا قطر $X'X'_{۱}$ از شش‌ضلعی ما برمحور تقارن $A'P'$ از مثلث $A'B'C'$ منطبق است. به‌همین‌طریق ثابت می کنیم که قطرهای $Y'Y'_{۱}$ و $Z'Z'_{۱}$ از شش‌ضلعی ما بر دومحور تقارن دیگر مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ منطبق‌اند. امادر آن صورت‌سه‌قطر موردنظر بایستی دریك نقطه، مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع، متلاقی باشند. از آنجا نتیجه می‌شود که قطرهای $XX_{۱}$ و $YY_{۱}$ و $ZZ_{۱}$ شش‌ضلعی دریك‌نقطه متلاقی‌اند.

توجه: راه‌حل ما نشان می‌دهد که‌خطهای $XX_{۱}$ و $YY_{۱}$ و $ZZ_{۱}$ میانه‌های مثلث ABC هستند ونقطهٔ تقاطع آنها نقطهٔ تقاطع میانه‌هاست.

۹. الف) به‌موجب ویژگیهای (ج) و (د) از تصویرموازی و قضیهٔ ۱ صفحهٔ ۱۹، کافی است قضیه را برای یك‌مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ ثابت‌کنیم (شکل ۱۲۷ الف. رك. راه‌حلهای مسائل ۱ و ۴). فرض می کنیم p معرف اندازهٔپاره‌خطهای $B'M'$ و $A'M'_{۱}$، r معرف‌اندازهٔ پاره‌خطهای $A'P'$ و $C'P'_{۱}$، q اندازهٔپاره‌خطهای $C'N'$ و $B'N'_{۱}$، و a اندازهٔیك‌ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ باشد. مساحت



شکل ۱۲۷ الف

$\triangle XYZ$ را با S_{XYZ} نشان می‌دهیم. پس

$$S_{A'B'C'}-S_{M'N'P'}=S_{A'P'M'}+S_{B'M'N'}+S_{C'N'P'}$$

$$=\frac{1}{2}\sin 60^\circ\,[r(a-p)+p(a-q)+q(a-r)]$$

$$=\frac{1}{2}\sin 60^\circ\,[a(p+q+r)-(pq+qr+rp)]$$

و

$$S_{A'B'C'}-S_{M'_1N'_1P'_1}=S_{A'P'_1M'_1}+S_{B'M'_1N'_1}+S_{C'N'_1P'_1}$$

$$=\frac{1}{2}\sin 60^\circ\,[(a-r)p+(a-p)q+(a-q)r]$$

$$=\frac{1}{2}\sin 60^\circ\,[a(p+q+r)-(pq+qr+rp)].$$

بنابراین

$$S_{M'N'P'} = S_{M'_1 N'_1 P'_1}$$

ب) عیناً نظیر قسمت(الف)، کافی است حکم‌را برای مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ (شکل ۱۲۷ ب) اثبات کنیم. چون $M'M'_1 \| B'C'$ و $N'N'_1 \| C'A'$ و $P'P'_1 \| A'B'$، از اینجا نتیجه می‌شود

$$A'M' = A'M'_1\,,\ B'N' = B'N'_1\,,\ C'P' = C'P'_1$$

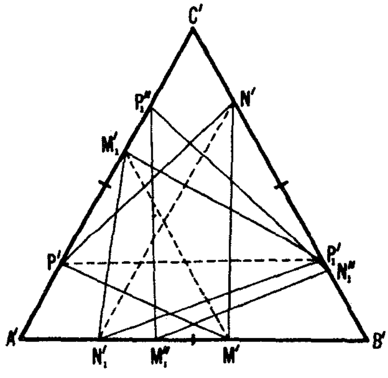
مثلث $A'B'C'$ را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول خودش به‌زاویهٔ °۱۲۰ دوران‌می‌دهیم. این‌دوران $\triangle A'B'C'$ را به‌خودش بدل می‌کند. و به‌موجب تساویهای بالا این‌دوران $\triangle M'_1N'_1P'_1$ را به $\triangle M''_1N''_1P''_1$ بدل می کند که رأسهای آن قرینه‌های رأسهای $\triangle M'N'P'$ نسبت به‌وسطهای اضلاع هستند. این واقعیت و نتیجه‌ای که درقسمت (الف) دربالا استخراج کردیم ایجاب می‌کنند که داشته باشیم:

$$S_{M''_1 N''_1 P''_1} = S_{M'N'P'}$$

و لذا

$$S_{M'_1 N'_1 P'_1} = S_{M'N'P'}$$

تساوی مساحتهای مثلثهای $M'N'P'$ و $M'_1N'_1P'_1$ را از راه محاسبهٔ مستقیم، مانند راه حل قسمت (الف)، می‌توانیم به آسانی ثابت‌کنیم.



شکل ۱۲۷ ب

۱۰. راه حل این مسأله شبیه راه‌حل مسألهٔ ۹ (الف) است و به‌عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود.

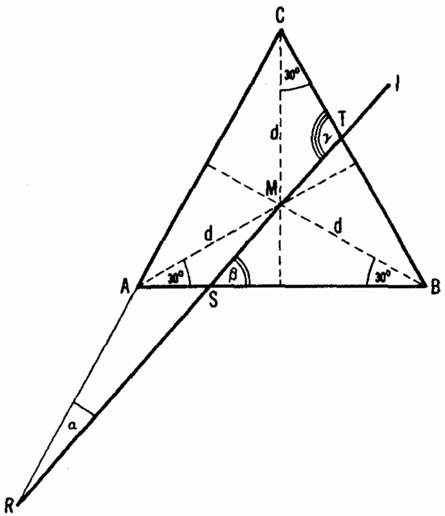
۱۱. الف) فرض می‌کنیم ABC مثلثی‌متساوی‌الاضلاع باشد. شکل ۱۲۸ الف را درنظر می‌گیریم. بااستفاده ازقانون سینوسها درمثلثهای AMR و BMS و CMT (و با توجه به‌اینکه d برابر ۲/۳ میانهٔ $\triangle ABC$ است) می‌بینیم که

$$\frac{d}{MR}=\frac{\sin\alpha}{\sin 150^\circ}=2\sin\alpha,\qquad \frac{d}{MS}=\frac{\sin\beta}{\sin 30^\circ}=2\sin\beta,$$

$$\frac{d}{MT}=\frac{\sin\gamma}{\sin 30^\circ}=2\sin\gamma$$

لذا

$$\frac{1}{MT}=\frac{2}{d}\sin\gamma \text{ و } \frac{1}{MR}+\frac{1}{MS}=\frac{2}{d}(\sin\alpha+\sin\beta)$$



شکل ۱۲۸ الف

روشن است* که $\alpha=۱۲۰^\circ-\gamma$ و $\beta=\gamma-۶۰^\circ$. بنابراین

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta&=\sin(۱۲۰^\circ-\gamma)+\sin(\gamma-۶۰^\circ)\\&=\sin(۱۲۰^\circ-\gamma)-\sin(۱۲۰^\circ+\gamma)\\&=-۲\cos ۱۲۰^\circ\sin\gamma=\sin\gamma;\end{aligned}$$

یعنی در یك مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داریم $۱/MR+۱/MS=۱/MT$.

برای اینکه ببینیم آیا این رابطه برای یك مثلث دلخواه ABC صحیح است یا نه، ملاحظه می کنیم که رابطهٔ اخیر با رابطهٔ $MT/MR+MT/MS=۱$، هم‌ارز است وهمواره می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاعی را به‌وسیلهٔ یك تصویر موازی خاص و مشابهت به هر مثلث قبلا مشخص شده‌ای بدل کرد.

با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد که هرگاه به‌جای M، مثلا، نقطهٔ N وسط میانهٔ AD را بگذاریم، رابطهٔ فوق به‌رابطهٔ مشابهی با $۱/MX$ (X معرف نقطهٔ سه‌گانهٔ R و S و T مربوط به‌ضلع BC از مثلث ABC است) بدل می‌شود که به‌جای آن $۲/NX$ (و به‌جای $۱/MY$ و $۱/MZ$ مقادیر $۱/NY$ و $۱/NZ$) نهاده شده است.

ب) فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع $MNPQ$ یك مربع‌واحد (شکل ۱۲۸ ب) باشد. پس در مثلثهای MRN و MSQ و MTQ داریم

$$\frac{۱}{MR}=\sin\alpha,\quad \frac{۱}{MS}=\cos\alpha,\quad \frac{۱}{MT}=\frac{\sin(۱۳۵^\circ-\alpha)}{\sin ۴۵^\circ}$$

$$=\sqrt{۲}\sin(۱۳۵^\circ-\alpha)$$

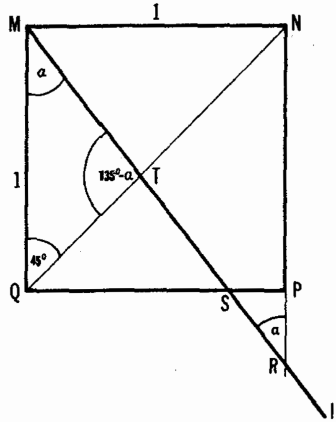
چون

$$\sin(۱۳۵^\circ-\alpha)=\sin(۴۵^\circ+\alpha)=\sin۴۵^\circ\cos\alpha+\cos۴۵^\circ\sin\alpha$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

---

* برای اینکه راه‌حل مسأله مستقل از نمودار باشد، لازم است زاویه‌های جهتدار را دخالت دهیم (← پانویس مربوط به‌گزارهٔ ۲، بخش ۱، فصل دوم، جلد اول).



شکل ۱۲۸ ب

پس

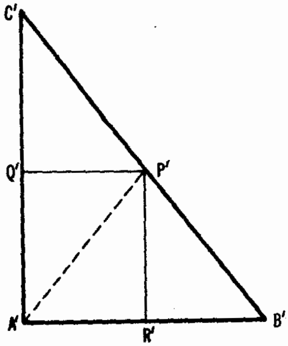
$$\frac{1}{MT}=\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha+\cos\alpha)\right]=\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{MR}+\frac{1}{MS}$$

یعنی برای یك مربع $MNPQ$ داریم

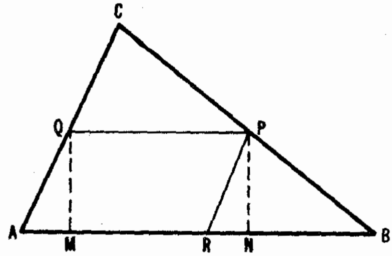
$$\frac{1}{MR}+\frac{1}{MS}=\frac{1}{MT}$$

برای اینکه درستی این رابطه را برای یك متوازی‌الاضلاع دلخواه ببینیم، ملاحظه‌می‌کنیم که این‌رابطه با رابطهٔ $MT/MR+MT/MS=1$ هم‌ارز است و همواره می‌توان هر متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را بر اثر یك تصویرموازی مناسب به‌یك مربع بدل کرد (برای‌این امرکافی است $\triangle ABC$ را به‌یك مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین بدل کنیم).

۱۲. مسألهٔما با مسألهٔ زیر هم‌ارز است: متوازی‌الاضلاع $ARPQ$ به‌مساحت معین σ را درمثلث مفروض ABC محاط کنید به‌طوری‌که هردو شکل در یك‌رأس A مشترك باشند و رأسهای دیگر متوازی‌الاضلاع بر اضلاع AC و BC و ABی مثلث قرار داشته باشند. این مسأله بلافاصله از شکل ۱۲۹ الف نتیجه می‌شود، که‌درآن متوازی‌الاضلاع $ARPQ$ ومستطیل $MNPQ$ دیده می‌شوند که مساحتهای



شکل ۱۲۹ ب



شکل ۱۲۹ الف

مساوی دارند (زیرا هردو درقاعدهٔ PQ و ارتفاع QM مشترک‌اند). به‌عبارت دیگر اگر بتوانیم متوازی‌الاضلاع $ARPQ$ را رسم کنیم، آنگاه می‌توانیم مستطیل $MNPQ$ را نیز بسازیم.

اگر یك تصویرموازی، $\triangle ABC$ ازصفحهٔ π را بر یك‌مثلث $A'B'C'$ ازصفحهٔ π' بنگارد، آنگاه متوازی‌الاضلاع $ARPQ$ محاط در مثلث ABC بر یك‌متوازی‌الاضلاع $A'R'P'Q'$ محاط در یك مثلث $A'B'C'$ نگاشته می‌شود. [به‌همین‌دلیل است که ما رسم‌مستطیل $MNPQ$ را با رسم متوازی‌الاضلاع $ARPQ$ معاوضه کردیم: یك تصویرموازی، درحالت کلی، یك‌مستطیل را بر یك مستطیل نمی‌نگارد، و این امر، استفاده از یك تصویرموازی را برای حل مسألهٔ اصلی دشوار می‌سازد.] فرض می‌کنیم که متوازی‌الاضلاع $ARPQ$ محاط شده‌باشد. مثلث ABC را براثر یك تصویرموازی مناسب بر یك‌مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $A'B'C'$ می‌نگاریم (شکل ۱۲۹ ب). می‌توانیم فرض کنیم که مثلثهای ABC و $A'B'C'$ یك مساحت دارند (این کار را همواره می‌توان با استفاده از یك تشابه مناسب برای نگارهٔ $\triangle ABC$ انجام داد)؛ پس‌متوازی‌الاضلاع $ARPQ$ و $A'R'P'Q'$ (که‌البته، چهارضلعی دومی یك‌مستطیل است) یك‌مساحت σ دارند. اگر S مساحت $\triangle ABC$ باشد، آنگاه مساحت مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $B'R'P'$ و $C'P'Q'$ برابر است با $S-\sigma$. چون

$$S_{C'P'Q'}=\frac{1}{2}Q'P'^{2} \quad \text{و} \quad S_{B'R'P'}=\frac{1}{2}R'P'^{2}$$

پس خواهیم داشت:

$$R'P'^{2}+Q'P'^{2}=2(S-\sigma)$$

یا چون $R'P'^{2}+Q'P'^{2}$ برابر مربع قطر $A'P'$ از مستطیل $A'R'P'Q'$ است، خواهیم داشت $A'P'=\sqrt{2(S-\sigma)}$.

این تحلیل، ترسیم زیر را از مستطیل $MNPQ$ به‌ذهن متبادر می‌سازد: مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $A'B'C'$ با مساحت S، مساوی مساحت مثلث مفروض ABC، را رسم می‌کنیم (ضلع $A'B'$ در این مثلث برابر واسطهٔ هندسی قاعده وارتفاع $\triangle ABC$ است). سپس، بر وتر $B'C'$ نقطهٔ P' را چنان انتخاب می‌کنیم که $A'P'=\sqrt{2(S-\sigma)}$. بالاخره ضلع BC از مثلث مفروض ABC را به‌نسبت $BP/PC=B'P'/P'C'$ تقسیم می‌کنیم (ویژگی (ج) از تصویر موازی). مستطیل $MNPQ$ (با رأس Q بر ضلع AC و رأسهای M و N بر ضلع AB) مستطیل مطلوب است.

مسأله ممکن است یك یا دوجواب داشته باشد، یا اصلا جوابی نداشته باشد.

۱۳. گیریم π صفحهٔ شکل ۱۳ درمتن باشد. گوییم که π می‌تواند بر اثر یك تصویر موازی برصفحهٔ π' نگاشته شود به‌طوری که زاویه‌های AMN و ARS در شکل ۱۳ به‌زاویه‌های مساوی $A'M'N'$ و $A'R'S'$ بدل شوند و $R'A'M'$ قائمه باشد. در واقع، برای اینکه نگاره‌های مثلثهای $A'M'N'$ و $A'R'S'$ (مشترك در زاویهٔ A') متشابه باشند (یعنی برای اینکه $\sphericalangle A'R'S'=\sphericalangle A'M'N'$)، کافی است که اضلاع آنها متناسب باشند:

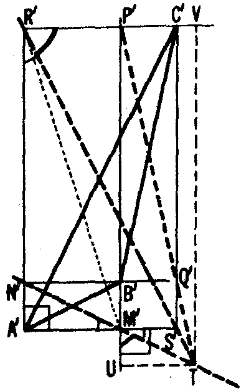
$$\frac{A'M'}{A'N'}=\frac{A'R'}{A'S'} \qquad (*)$$

چون نسبتهای

$$\frac{A'N'}{A'R'}=\frac{AN}{AR}=\beta \quad \text{و} \quad \frac{A'S'}{A'M'}=\frac{AS}{AM}=\alpha$$

معلوم‌اند، شرط کافی (*) با

$$\frac{A'M'}{\beta\, A'R'}=\frac{A'R'}{\alpha\, A'M'} \quad \text{یا} \quad \frac{A'M'}{A'R'}=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$



شکل ۱۳۰

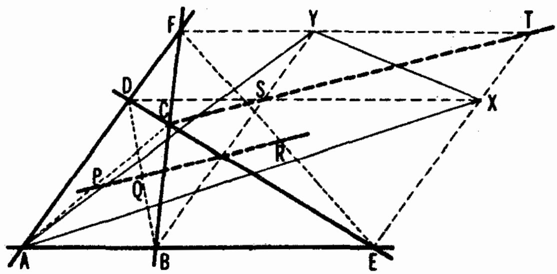
هم‌ارز است. به‌موجب قضیهٔ ۱ (ص ۱۹) می‌توانیم $\triangle AMR$ را بر یك مثلث $A'M'R'$ تصویر کنیم چنانکه $A'M'/A'R'=\sqrt{\beta/\alpha}$، و $R'A'M'$ یك زاویهٔ قائمه باشد؛ ودر نتیجه حکم ما ثابت می‌شود. این مطلب مارا به‌شکل ۱۳۰ می‌کشاند که باید ثابت کنیم T، نقطهٔ تلاقی $M'N'$ و $R'S'$، بر $P'Q'$ قرار دارد. این کار را بعداً انجام خواهیم داد.

از تشابه مثلثهای $M'S'T$ و $R'N'T$ (که زاویه‌های مساوی دارند) به‌تساوی $M'T/R'T=M'S'/R'N'$ می‌رسیم و از تشابه مثلثهای TUM' و TVR'، که U و V پاهای عمودهای مرسوم از T بر $P'M'$ و $P'R'$ هستند، (دراین مثلثهای قائم‌الزاویه $\sphericalangle TM'U=90^\circ-\sphericalangle TM'S'=90^\circ-\sphericalangle TR'N'=\sphericalangle TR'V$) خواهیم داشت $TU/TV=M'T/R'T$. بنابراین

$$\frac{TU}{TV}=\frac{M'T}{R'T}=\frac{M'S'}{R'N'}=\frac{Q'B'}{Q'C'}$$

که تساوی $TU/TV=Q'B'/Q'C'$ ثابت می‌کند T برخط $P'Q'$ قرار دارد.

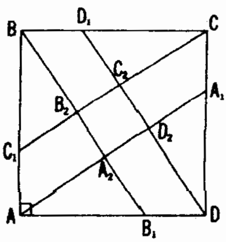
۰۱۴ گیریم P و Q و R به‌ترتیب وسطهای AC و BD و EF باشند (شکل ۱۳۱). تجانس به‌مرکز A و نسبت ۲، نقطه‌های P و Q و R را بر نقاط C و S و T می‌نگارد ($ABSD$ و $AFTE$ متوازی‌الاضلاع هستند). بنابراین برای اثبات همخطی



شکل ۱۳۱

P و Q و R کافی است همخطی C و S و T و یا هم‌ارز با آن، گذشتن خط TS از نقطهٔ C، محل تلاقی ED و BF را اثبات کنیم. نتیجهٔ اخیر نتیجهٔ مستقیم مسألهٔ ۱۳ است. زیرا ملاحظه می‌کنیم که در شکل ۱۳۱، $ADXE$ و $XTYS$ و $YFAB$ متوازی‌الاضلاعهایی هستند که اضلاعشان دارای یك امتدادند و هر ضلع $\triangle AXY$ قطری ازیکی از این متوازی‌الاضلاعهاست. پس قطرهای دیگر ED و TS و BF متقارب‌اند.

۱۵. الف) بدون تردید کافی است حالتی را درنظر بگیریم که $ABCD$ یك مربع واحد باشد (← حل مسألهٔ ۱۱(ب)). چهارضلعی $A_2B_2C_2D_2$ که ازچهارخط AA_1 و BB_1 و CC_1 و DD_1 تشکیل شده (← شکل ۱۳۲) یك مربع است. دلیل آن این است که ملاحظه می‌کنیم که یك دوران به‌زاویهٔ $90°$ حول مرکز مربع، نمودار را برخودش منطبق می‌کند، وهمین ایجاب می‌کند که چهارضلعی $A_2B_2C_2D_2$ منتظم باشد. (درضمن، این‌امر ایجاب می‌کند که اگر $ABCD$ یك متوازی‌الاضلاع است $A_2B_2C_2D_2$ هم یك‌متوازی‌الاضلاع باشد.) مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABB_1 و



شکل ۱۳۲

$ABA_۲$ متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها k، برابر نسبت وترهای آنهاست:

$$k=\frac{BB_۱}{AB}=\frac{\sqrt{۱+(۲/۳)^۲}}{۱}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$$

چون

$$S_{ABB_۱}=\frac{۱}{۲}\times ۱\times\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

داریم

$$S_{ABA_۲}=\frac{\frac{۱}{۳}}{k^۲}=\frac{۳}{۱۳}$$

بنابراین

$$S_{A_۲B_۲C_۲D_۲}=S_{ABCD}-S_{ABA_۲}-S_{BCB_۲}-S_{CDC_۲}-S_{DAD_۲}$$
$$=S_{ABCD}-۴S_{ABA_۲}=۱-\frac{۱۲}{۱۳}=\frac{۱}{۱۳}$$

یعنی

$$\frac{S_{A_۲B_۲C_۲D_۲}}{S_{ABCD}}=\frac{۱}{۱۳}$$

ب) راه حل اول. کافی است مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به‌ضلع ۱ را درنظر بگیریم. مثلث $A_۲B_۲C_۲$ (متشکل از خطهای $AA_۱$ و $BB_۱$ و $CC_۱$) متساوی‌الاضلاع است، زیرا یك دوران $\triangle ABC$ به زاویهٔ $۱۲۰°$ حول مرکزش، $\triangle A_۲B_۲C_۲$ را به‌خودش بدل می‌کند. برای یك مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، مثلثلهای $CB_۱C_۲$ و $CAC_۱$ (رك. شکل۱۳۳، که‌مطابق‌راه‌حل‌دوم تکمیل‌شده است) متشابه‌اند و k نسبت تشابه آنها برابر است با

$$k=\frac{CB_1}{CC_1}=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{CK^2+KC_1^2}}=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{CA^2-AK^2+KC_1^2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-(1/2)^2+(1/6)^2}}=\frac{1}{\sqrt{7}}$$

چون $S_{CAC_1}=\frac{1}{3}S_{ABC}$، پس داریم

$$S_{CB_1C_2}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot k^2=\frac{1}{21}S_{ABC}$$

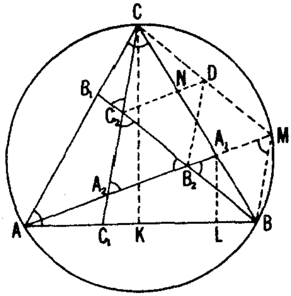
بنابراین

$$\begin{aligned}S_{A_2B_2C_2}&=S_{ABC}-S_{CAC_1}-S_{ABA_1}-S_{BCB_1}\\&\quad+S_{CB_1C_2}+S_{AC_1A_2}+S_{BA_1B_2}\\&=S_{ABC}-3S_{CAC_1}+3S_{CB_1C_2}\\&=S_{ABC}-3\cdot\frac{1}{3}S_{ABC}+3\cdot\frac{1}{21}S_{ABC}=\frac{1}{7}S_{ABC}\end{aligned}$$

یعنی

$$\frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{ABC}}=\frac{1}{7}$$

راه‌حل دوم. کافی است یك‌مثلث متساوی‌الاضلاع ABC درنظر بگیریم. چنانکه در راه‌حل اول نشان دادیم مثلث $A_2B_2C_2$، که از خطهای AA_1 و BB_1 و CC_1 تشکیل می‌شود، متساوی‌الاضلاع است. فرض می‌کنیم S دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ باشد و M نقطهٔ تلاقی S و AA_1 (شکل ۱۳۳). تساوی $\sphericalangle BMA=\sphericalangle BCA$ (مقابل به یك کمان) ایجاب می‌کند که $\triangle BMB_2$ هم متساوی‌الاضلاع باشد ($\sphericalangle BMB_2=\sphericalangle BB_2M=60^\circ$) و $BM\|C_1C$. همچنین $BM=BB_2$ و $BB_2=CC_2$ ($\triangle BB_2A_1\cong\triangle CC_2B_1$) ایجاب می‌کنند که $BM=C_2C$، و لذا چهارضلعی $BMCC_2$ متوازی‌الاضلاع باشد. حال از C_2 خطی به موازات MA_1 رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن را با BC به N نشان می‌دهیم. چون



شکل ۱۳۳

$\triangle BMA_1 \cong \triangle CC_2N$ *، ازآنجا نتیجه می‌شود $BA_1 = NC$. این تساوی واین واقعیت که $BA_1 = (1/3)BC$، به ما اجازه می‌دهند که نتیجه بگیریم $BA_1 = A_1N = NC$. برابری $B_1A_1 = A_1N$، برابری $BB_2 = B_2C_2$را ایجاب می‌کند و بالاخره $\triangle BB_2M \cong \triangle A_2B_2C_2$.

اکنون می‌توانیم به‌آسانی مساحت $\triangle A_2B_2C_2$ را حساب کنیم. زیرا، اگر B_2D میانخط متوازی‌الاضلاع $BMCC_2$ باشد، آنگاه

$$S_{B_2BM} = \frac{1}{2} S_{B_2BMD} = \frac{1}{4} S_{C_2BMC}$$

وچون $S_{BC_2C} = \frac{1}{2} S_{BMCC_2}$، پس

$$S_{A_2B_2C_2} = S_{B_2BM} = \frac{1}{2} S_{BC_2C}$$

اما

$$S_{ABC} = S_{BCC_2} + S_{CAA_2} + S_{ABB_2} + S_{A_2B_2C_2}$$
$$= 3S_{BCC_2} + S_{A_2B_2C_2} = 7S_{A_2B_2C_2}$$

---

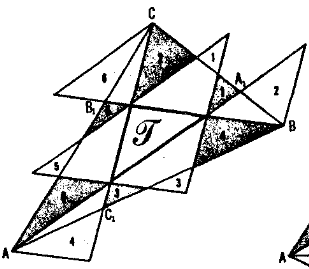
* علامت $\cong$، علامت قابلیت انطباق دومثلث باهم است.ـــ م.

و در نتیجه

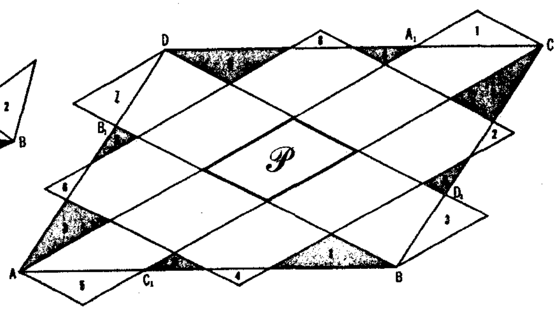
$$S_{A_2B_2C_2}=\frac{1}{7}S_{ABC}$$

که همین را می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشت. ملاحظه می‌کنیم که رابطه‌های $BB_2=B_2C_2$ ، $CC_2=C_2A_2$، $AA_2=A_2B_2$ که درمثلث متساوی‌الاضلاع صحیح است، باید مشابه‌هایی در هر مثلث ABC داشته باشد.



ب



الف

یادداشتهای ویراستار: راه‌حلهای زیرین برای قسمتهای (الف) و (ب)ی مسألهٔ ۱۵، پس‌از خواندن این نوشته به‌نظر پروفسور ب. گوردون رسیده است:
درشکلهای بالا هرناحیهٔ «بیرونی» با ناحیهٔ سایه‌زدهٔ «درونی»، که باهمان عدد شماره‌گذاری شده است، قابل‌انطباق‌است. مساحت سایه نخورده درشکل اول، به‌روشنی دیده می‌شود که۱۳ برابر مساحت‌سایه‌نخوردهٔ متوازی‌الاضلاع $\mathscr{P}$ است، درحالی که‌مساحت سایه‌زده نشده درشکل دوم ۷ برابر مساحت سایه‌نخوردهٔ مثلث $\mathscr{T}$ است.

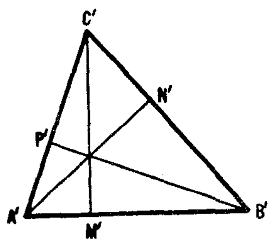
۱۶. در درسهای هندسهٔ دبیرستانی ثابت می‌کنند که در یك مثلث میانه‌ها، ارتفاعات و نیمسازها، سه‌تاییهای متقارب تشکیل می‌دهند.
مسألهٔ ما زمانی حل‌می‌شود که بتوانیم‌صفحهٔ مثلث ABCرا با یك‌تصویرموازی برصفحهٔ دیگر بنگاریم به‌طوری که‌خطهای AN و BP و CM به‌سه میانه، سه‌نیمساز

یا سه ارتفاع مثلث $A'B'C'$، نگارهٔ مثلث ABC، بدل شوند. روشن است که خطهای AN و BP و CM نمی‌توانند به‌وسیلهٔ یك تصویر موازی بر میانه‌های یك مثلث نگاشته شوند، مگر اینکه خود آنها میانه‌های $\triangle ABC$ باشند. باز، همیشه ممکن نیست خطهای AN و BP و CM را بر نیمسازهای یك مثلث نگاشت.* مانده است که نگاشت خطهای AN و BP و CM را براثر تصویر موازی بر ارتفاعات یك مثلث، امتحان کنیم.

ثابت می کنیم که هر گاه $A'N'$ و $B'P'$ و $C'M'$ ارتفاعات یك مثلث $A'B'C'$ باشند (شکل ۱۳۴ الف)، آنگاه

$$\frac{A'M'}{M'B'}\cdot\frac{B'N'}{N'C'}\cdot\frac{C'P'}{P'A'}=۱$$

چون از تشابه مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $A'N'C'$ و $B'P'C'$ خواهیم داشت $C'P'/N'C'=a/b$ که $a=B'C'$ و $b=A'C'$. عیناً به‌همین‌طریق می‌توان نشان داد که $B'N'/M'B'=c/a$ و $A'M'/P'A'=b/c$ و $c=A'B'$. از ضرب این سه تساوی نتیجه می گیریم



شکل ۱۳۴ الف

---

* می‌توان نشان داد (مصراً ازخواننده‌می‌خواهیم سعی کند آن‌را اثبات کند) که سه‌خط AN و BP و CM که از رأسهای یك مثلث ABC می گذرند و در نقطهٔ O درداخل مثلث یکدیگر را می‌برند، می‌توانند به وسیلهٔ یك تصویر موازی برنیمسازهای $A'N'$ و $B'P'$ و $C'M'$ از یك‌مثلث $A'B'C'$ نگاشته شوند، اگر وفقط اگر، نقطهٔ O در داخل مثلث کوچکی به‌اضلاع میانخطهای $\triangle ABC$ واقع باشد.

$$\frac{A'M'}{M'B'}\cdot\frac{B'N'}{N'C'}\cdot\frac{C'P'}{P'A'}=\frac{A'M'}{P'A'}\cdot\frac{B'N'}{M'B'}\cdot\frac{C'P'}{N'C'}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=۱$$

حال يك مثلث $A'B'C'$ می‌سازیم چنانکه پاهـای ارتفاعات آن، N' و M' و P'، اضلاع مثلث‌را به‌نسبتهای مفروض زیر تقسیم کنند

$$\frac{A'M'}{M'B'}=\frac{AM}{MB}\ ,\ \frac{B'N'}{N'C'}=\frac{BN}{NC}\ ,\ \frac{C'P'}{P'A'}=\frac{CP}{PA}$$

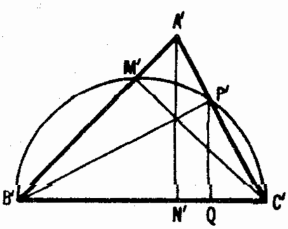
يك پاره‌خط دلخواه $B'C'$ را به‌نسبت $B'N'/N'C'=BN/NC$ تقسیم می کنیم. در N' عـمـودی بـر $B'C'$ اخـراج، و سپس پـاره‌خـط $C'N'$ را بـه نسبت $C'Q/QN'=CP/PA$ تقسیم مـی کنیم. در Q عمودی بـر $C'B'$ اخراج (شکل ۱۳۴ب) و فرض می کنیم P' نقطهٔ تلاقی این عمود با نیمدایرهٔ به‌قطر $C'B'$ باشد و A' نقطهٔ تلاقی $C'P'$ بـاعمود مـرسوم بر $C'B'$ در N'. می گوییم $A'B'C'$ مثلث مطلوب است. زیرا $A'N'$ و $B'P'$ دوارتفاع این‌مثلث هستند، و اگر $C'M'$ سومین ارتفاع آن باشد، چون داریم

$B'N'/N'C'=BN/NC$ و $C'P'/P'A'=C'Q/QN'=CP/PA$ و

$$\frac{A'M'}{M'B'}\cdot\frac{B'N'}{N'C'}\cdot\frac{C'P'}{P'A'}=۱=\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}$$

آنگاه نتیجه می‌شود $A'M'/M'B'=AM/MB$.

حـال $\triangle ABC$ را بـه‌وسیلهٔ یـك تصویـرموازی برروی مثلثی متشابه بـا $\triangle A'B'C'$ می‌نگاریم. به‌موجب ویژگی (ج) ازیك تصویرموازی، نقطه‌های N و M و P برپاهـای ارتفاعات نگارهٔ $\triangle ABC$ نگاشته مـی‌شوند، وخطهای AN و



شکل ۱۳۴ ب

BP و CM برارتفاعات آن. چون سه ارتفاع یك مثلث متقارب اند، پس خطهای AN و BP و CM نیز متقارب خواهند شد.

یادداشت. اکنون به آسانی می توانیم عکس این گزاره را اثبات کنیم: اگر سه خط که بر رأسهای مثلثی می گذرند متقارب باشند، آنگاه N و P و M، نقاط تلاقی این خطها با اضلاع $\triangle ABC$، اضلاع را طوری تقسیم می کنند که

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$$

زیرا فرض کنیم P_1 نقطه ای برضلع AC چنان باشد که

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP_1}{P_1A}=1$$

لذا خطهای AN و BP_1 و CM متقارب اند، یعنی BP_1 از نقطهٔ تلاقی AN و CM می گذرد. ولی این امر فقط زمانی ممکن است که BP_1 بر BP، یعنی P بر P_1 منطبق باشد.

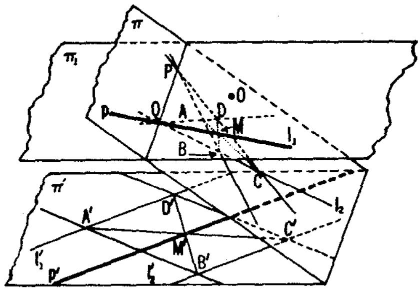
بدین ترتیب به قضیهٔ زیر، که اغلب قضیهٔ سوا نامیده می شود می رسیم: گیریم N و P و M نقاطی بر اضلاع $\triangle ABC$ (نه برامتدادشان) باشند. شرط لازم و کافی برای اینکه خطهای AN و BP و CM متقارب باشند این است که داشته باشیم.

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$$

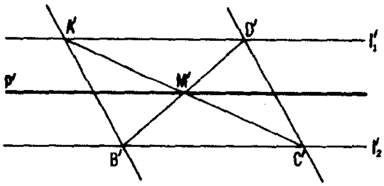
بخش ۲

۱۷. الف) فرض می کنیم Q نقطهٔ تلاقی خطهای l_1 و l_2 باشد. صفحهٔ π ی شکل ۲۴ الف را بریك صفحهٔ π' تصویر می کنیم به طوری که PQ خط خاص صفحهٔ π باشد. برای این کار کافی است بر QP صفحهٔ دلخواهی مانند π_1، غیر از π، بگذرانیم و π را ازیك نقطهٔ O ی π_1 بریك صفحهٔ π' موازی π_1 تصویر کنیم (ــه شکل ۱۳۵ الف). در این صورت شکل ۲۴ الف (در صفحهٔ π) به شکل ۱۳۵ ب (درصفحهٔ π') بدل می شود و مکان نقطه های M، نقطهٔ برخورد خطهای AC و BD، به یك خط p' موازی با l'_1 و l'_2 ومتساوی الفاصله از آن دو بدل می شود. از ویژگی (الف) تصویر مرکزی نتیجه می شود که مکان نقطه های M یك خط است.

اگر $l_1 \| l_2$، آنگاه از راه تصویر صفحهٔ π بریك صفحهٔ π' زمانی به شکل ۱۳۵ ب می رسیم، که خط ماربر P موازی l_1 و l_2 خط خاص π باشد.



شکل ۱۳۵ الف



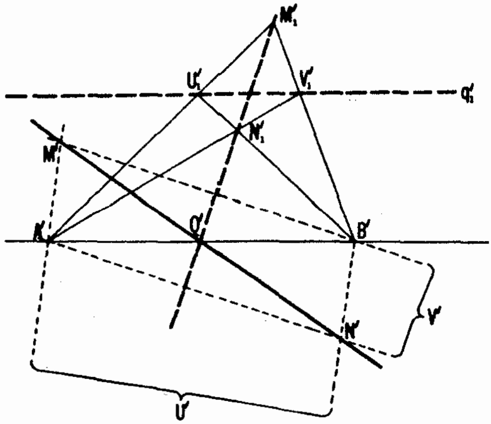
شکل ۱۳۵ ب

از ویژگی (ب)ی تصویر مرکزی بلافاصله نتیجه می‌شود کــه هرگاه l_1 و l_2 دریك نقطهٔ Q متقاطع باشند، آنگاه p از Q می‌گذرد و اگر $l_2 || l_1$، آنگاه p با l_1 و l_2 موازی است.

و اگر P_1 نقطهٔ دلخواهی از خط PQ باشد آنگاه، بر اثر تصویر مرکزی ما، خطهای متقاطع در P_1 به‌خطهای موازی بدل می‌شوند و مکان نقطه‌های M_1، محل تلاقی خطهای A_1C_1 و B_1D_1، به‌خط p' بدل می‌شود. ازاینجا نتیجه می‌شود که مکان نقطه‌های M_1 بر p منطبق است. (همچنین اگر $l_1 || l_2$ و بنابراین $PP_1 || l_1$، آنگـاه P و P_1 همان خط p را مشخص می‌کنند.)

ب) صفحهٔ πی شکل ۲۴ ب را بر یك‌صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌طوری کــه خط q خط خاص π باشد. دراین‌صورت خطهای UA و UB، VA و VB به‌خطهای موازی بدل مـــی‌شوند (شکل ۱۳۶)؛ خط MN به‌قطر $M'N'$ از متوازی‌الاضلاع $M'A'N'B'$ بدل می‌شود و قطر دیگر $A'B'$ را در Q' نصف می‌کند. بنابراین، به‌ازای هرانتخاب U و V، خط MN به‌یك خط $M'N'$ بدل می‌شود که $A'B'$ را درهمان‌نقطهٔ Q' می‌برد؛ از آنجـا نتیجه می‌شود که‌همهٔ خطهای MN، خط AB را دریك نقطهٔ Q می‌برند.

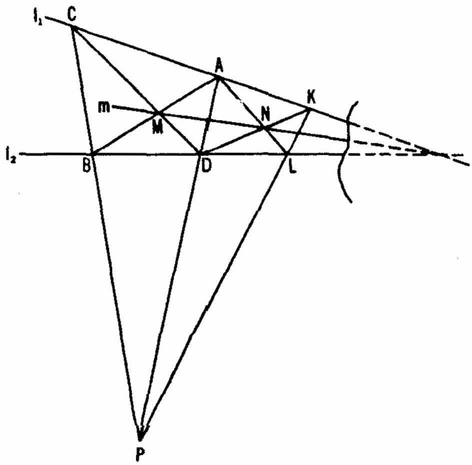
حال فرض می‌کنیم q_1 خط دیگری باشدکه AB را در نقطهٔ P ببرد. براثر تصویر مـــا، q_1 به‌یك‌خط q'_1 مـــوازی بـــا $A'B'$، چهارضلعی ABV_1U_1 به‌ذوزنقهٔ $A'B'V'_1U'_1$، و خط M_1N_1 به‌خط $M'_1N'_1$، واصل بین نقطهٔ تلاقی قطرهـــا و نقطهٔ تلاقی اضلاع مقابل ذوزنقه، بدل‌می‌شوند (شکل ۱۳۶). اما دراین صورت $M'_1N'_1$ قاعدهٔ $A'B'$ از ذوزنقه رادرنقطهٔ Q' وسط آن خواهد برید (← مسألهٔ ۲، بخش ۱،



شکل ۱۳۶

ص ۲۰) که دومین حکم مسألهٔ ما را ایجاب می‌کند.

۱۸. الف) از نقطهٔ M یك جفت خط رسم می‌کنیم که l_1 و l_2 را درنقطه‌های A و C، و B و D (شکل ۱۳۷) ببرند. سپس‌از P، نقطهٔ تلاقی خطهای AD و BC، خطی مرور می‌دهیم که خطهای l_1 و l_2 را به‌ترتیب در K و L ببرد. ازقضیهٔ مسألهٔ



شکل ۱۳۷

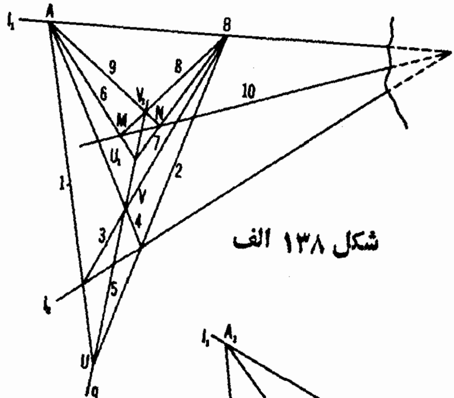
۱۷ نتیجه می‌شود کــه خط m، واصل بین M و نقطهٔ تلاقی AL و DK، از نقطهٔ برخورد l_1 و l_2 می‌گذرد.

یادداشت ۱. اشاره به این نکته کــه اگر $l_1 \| l_2$ (پس نقطهٔ تلاقی آنها غیرقابــل وصول است، بدین معنی که وجود ندارد)، آنگاه ترسیمها به‌ترسیم مسألهٔ ۳ (ب) یعنی رسم خطی به‌موازات دوخط مفروض از نقطهٔ مفروض M با استفاده از ستارهٔ تنها، بدل می‌شود که مورد توجه ما نیست. این، اتفاقی نیست، بلکه نتیجهٔ ویژگیهای تصاویر مرکزی است که به‌ما امکان می‌دهد مسألهٔ ۳ (ب) را حالت خاص مسألهٔ ۱۸ (الف) درنظر بگیریم. (← ص ۴۹ و بعد). باز ترسیمهای مسائل ۱۸ (ب)ـ(د) روشهایی برای رسم خطهــای موازی بااستفاده از ستارهٔ تنها دراختیار ما قرار می‌دهند. به‌خوانندگان توصیه می‌کنیم که این ترسیمها را انجام دهند.

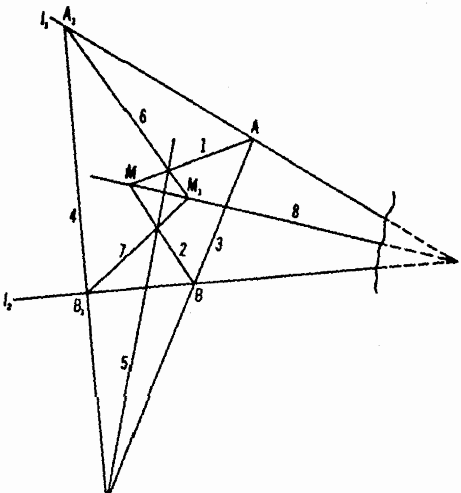
یادداشت ۲. راه‌حل بالا برای مسألهٔ ۱۸ (الف)، کــه مبتنی بر قضیهٔ مسألهٔ ۱۷ (الف) بود، تنها راه حــل ممکن نیست. یك راه‌حل براساس قضیهٔ مسألهٔ ۱۷ (ب) در شکل ۱۳۸ الف طرح شده است. (دراینجــا خطهای l_2 و MN، خط l_1 را دریك نقطه می‌برند؛ اعدادی که پهلوی خطها گذاشته‌شده‌اند ترتیب ترسیم‌خطها را نشان می‌دهند.) شکل ۱۳۸ ب معرف راه‌حلی است بــراساس قضیهٔ مسألــهٔ ۲۲. (مثلثهــای ABM و $A_1B_1M_1$ مثلثهای منظری هستند. تصادفاً ترسیم مــا به‌کمك قضیهٔ دزارگ نیز اثبات می‌شود. زیــرا مثلثهای CDK و BAL در شکل ۱۳۷ تصویــر منظری هستند.) شکل ۱۳۸ ج معرف ترسیمی است بــراساس قضیهٔ مسألهٔ ۲۸ (الف) (رأسهــای شش‌ضلعــی $ABCDEF$ یك درمیان برخطهای m_1 و m_2 قــرار دارند). این ترسیم نیز مــی‌توانند به‌وسیلهٔ قضیهٔ‌مسألهٔ ۲۸ (ب) اثبات شود (اضلاع شش‌ضلعی $AMDBNE$ یك درمیان از نقطه‌های F و C می‌گذرند). راه‌حلهای دیگری هم برای مسألهٔ ۱۸ (الف) وجود دارد. همچنین درستی ترسیمی که دربالا ذکر شد از راههای زیادی اثبات می‌شود.

همچنین، راه‌حلهای مسائل ۱۸ (ب)ـ(د)، و ۱۹ و ۲۰ که درزیر داده شده‌اند، تنها راههای ممکن‌نیستند. توصیه می‌کنیم کــه خواننده سعی‌کند راههای ترسیم دیگری بیابد.

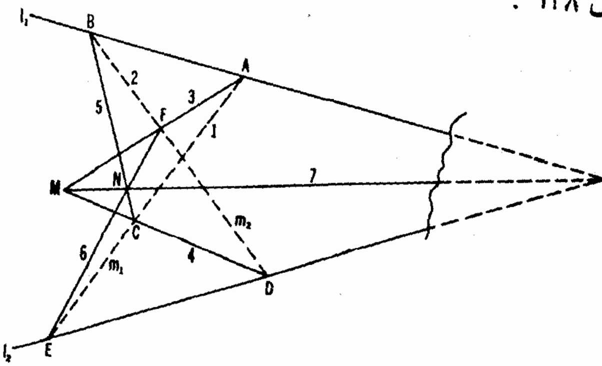
ب) یك‌راه ترسیم ممکن: نقطهٔ M و دو نقطهٔ اختیاری A و B واقع بر m را به نقطه‌های نادسترس P و Q وصل می‌کنیم (← راه حل قسمت (الف)). خطهای AP و BQ در نقطهٔ C، خطهای AQ و BP در D، خطهای MQ و CD در E، و



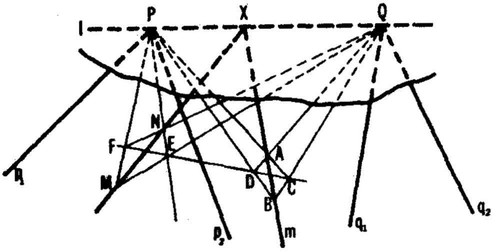
شکل ۱۳۸ الف



شکل ۱۳۸ ب



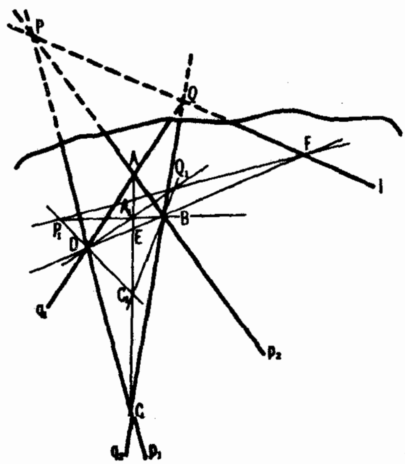
شکل ۱۳۸ ج



شکل ۱۳۹

خطهای MP و CD در نقطهٔ F برخورد می‌کنند (شکل ۱۳۹). E را به P و F را به Q وصل و فرض مـی‌کنیم N نقطهٔ تلاقی FQ و EP باشد. از قضیهٔ مسألهٔ ۱۷ (ب) نتیجه می‌شود که‌خطهای MN و PQ و m دریك نقطهٔ X متقاطع‌اند (درشکل ۱۳۹، C و D، E و F دوجفت نقطه از یك خط‌اند.)

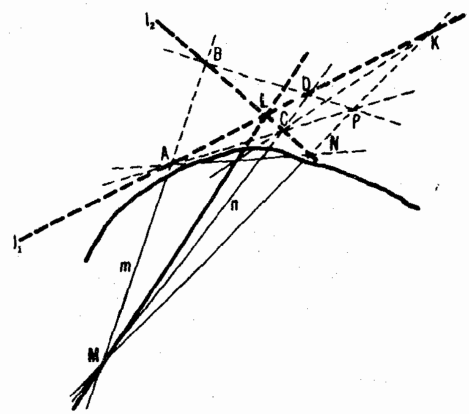
ج) یك‌راه ترسیم ممکن: فرض می‌کنیم خطهای p_1 و p_2، q_1 و q_2 در نقاط A و B و C و D یکدیگر را ببرند (← شکل ۱۴۰). (اگر این خطها در محدودهٔ صفحهٔ رسم متقاطع نباشند، می‌توانیم به‌جای آنها خطهایی بگذاریم که از نقطه‌های



شکل ۱۴۰

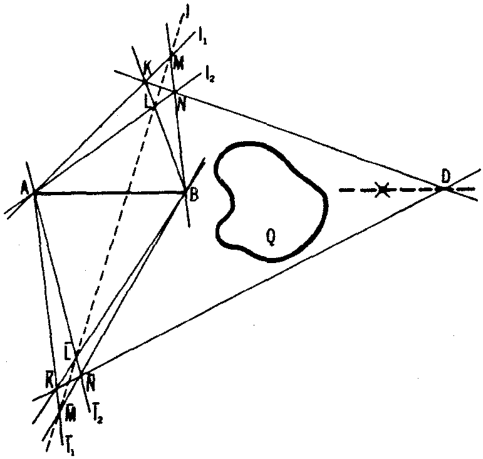
P و Q بگذرند؛ ← مسألهٔ ۱۸ (الف)). برخط AC (یا بر هر خط دیگر که BD را درهمان نقطهٔ E ببرد) دونقطهٔ A_1 و C_1 را چنان انتخاب می کنیم که خطهای A_1B و C_1D، A_1D و C_1B در حدود صفحهٔ رسم در نقطه‌های P_1 و Q_1 یکدیگر را ببرند. به‌موجب قضیهٔ مسألهٔ ۱۷ (ب) خط P_1Q_1 از F، نقطهٔ تلاقی BD و PQ می گذرد. مانده‌است که F را به‌نقطهٔ نادسترس P وصل کنیم (← مسألهٔ ۱۸ (الف)).

د) یك‌راه ترسیم ممکن: فرض می کنیم m و n دوخط دلخواه ماربر نقطهٔ M باشند (شکل ۱۴۱). می‌دانیم که چگونه باید از نقطه‌های نادسترس AوBوC و D، محل تلاقی l_1 و l_2 با m و n، خطهایی‌رسم کنیم (مسألهٔ ۱۸ (ب)). همچنین‌می‌دانیم که چگونه A را به C و B را به D وصل کنیم (مسألهٔ ۱۸ (ج)). حال M را به P، نقطهٔ تلاقی AC و BD، وصل (مسألهٔ ۱۸ (الف)) و فرض می کنیم MP خطهای l_1 و l_2 را در K و N ببرد. به‌موجب قضیهٔ مسألهٔ ۱۷ (الف)، نقطهٔ تلاقی خطهای KC و NA (که‌می‌توان آنهارا پیدا کرد؛ ← مسائل۱۸ (ب) و (ج)) برخط‌مطلوب واقع است.



شکل ۱۴۱

۱۹. یك‌راه رسم ممکن: از A دوخط l_1 و l_2 را که از ناحیهٔ Q نگذرند، و از B دوخط که l_1 و l_2 را در نقطه‌های K و L، M و N ببرند، رسم می کنیم. خط ML را با l نشان می‌دهیم (شکل ۱۴۲). بعد، از A دوخط دیگر l_1 و l_2 مرور می‌دهیم که l را درنقطه‌های M و L ببرند. فرض‌می کنیم BL و BM خطهای l_1 و l_2



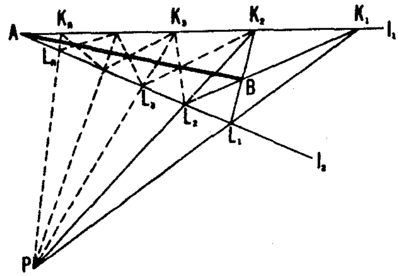
شکل ۱۴۲

را در نقطه‌هـای K و N ببرند. از قضیهٔ مسألهٔ ۱۷ (ب) نتیجه می‌شود که D، نقطهٔ تلاقی خطهای KN و KN، برخط AB قرار دارد. با تکرار این‌روش نقطهٔ دیگری از خط AB در طـرف راست نـاحیهٔ Q پیدا می‌کنیم. باداشتن این دونقطه امکان امتداددادن AB را فراتر از ناحیهٔ Q به‌دست می‌آوریم.

۲۰. یك‌راه‌حل ممکن: ازنقطهٔ A دوخط l_1 و l_2 رسم می‌کنیم‌که باهم زاویهٔ کوچکی بسازند که B درون آن واقع شود. باید توجه داشت‌کـه کوتاهی ستاره مـانع از این نیست‌کـه یك قطعه از یـك‌خط را امتداد بـدهیم. بعد، دوخط از B می‌گذرانیم‌که l_1 و l_2 را در نقطه‌های K_1 و K_2، L_1 و L_2 قطع کنند. فرض‌می‌کنیم P نقطهٔ تلاقی K_1L_1 و K_2L_2 بـاشد. حال از P تعدادی خط رسم می‌کنیم کـه l_1 و l_2 را در نقطه‌هـای K_3 و K_4 و ... و K_n، L_3 و L_4 و... و L_n قـطع کنند (شکل ۱۴۳).

قضیهٔ مسألهٔ ۱۷ (الف) ایجاب می‌کند که نقطه‌های تقاطع K_2L_3 و K_3L_2، K_3L_4 و K_4L_3 و ... برخط AB واقـع باشند. بدین‌طریق مـی‌توان نقاط نزدیك دلخواهی ازخط AB را پیدا کرد که بتوانندبایك ستارهٔ‌کوتاه به‌هم وصل‌شوند.

۲۱. الف) بااستفاده ازیك تصویرمـرکزی، صفحهٔ πی (شکل ۲۸ الف) را



شکل ۱۴۳

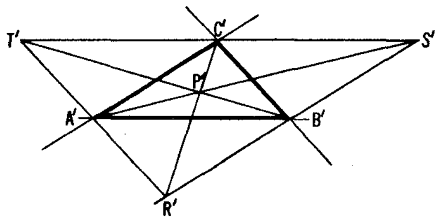
برصفحهٔ π' می‌نگاریم به‌طوری که p خط خاص π باشد. دراین‌صورت خطهای AM و BC به‌خطهای موازی $A'M'$ و $B'C'$، خطهای ACوBN به‌خطهای‌موازی $B'N'$ و $A'C'$، و خطهای CLوAB به‌خطهای‌موازی $C'L'$ و $A'B'$ بدل‌می‌شوند. خطهای AS و BT و CR به‌میانه‌های $A'S'$ و $B'T'$ و $C'R'$ از مثلث $A'B'C'$ (شکل ۱۴۴) بدل می‌شوند ولذا بـاید یکدیگر را در یك نقطهٔ P' ببرند. از اینجا نتیجه می‌شود که AS و BT و CR دریك نقطهٔ P یکدیگر را می‌برند.*

---

* اشاره می‌کنیم که یك‌مثلث ABD، براثر یك‌تصویرمرکزی ازیك‌صفحهٔ π به‌یك‌صفحهٔ π'، لزومی ندارد به‌یك مثلث $A'B'C'$ بدل شود. مثلا، یکی ازاین موارد مطمئناً هنگامی است که p ازداخل‌مثلث نمی‌گذرد. براثریك تصویر مرکزی، یك‌مثلث‌می‌تواند به‌شکلهای پیچیده‌ای بدل شود؛ (← شکل ۲۰). ولی سه‌نقطهٔ A و B و C به‌سه‌نقطهٔ A' و B' و C' بدل‌می‌شوند، وخطهایی‌که نقطه‌های A و B و C را دوبه‌دو به‌هم وصل‌می‌کنند به‌خطهایی که نقطه‌هایA' و B' و C' را دوبه‌دو به‌هم وصل می‌کنند مبدل می‌شوند، این ادعـا را که می‌گوییم، شکل۲۸ الف بر اثر یك تصویر به شکل ۱۴۴ بدل می‌شود بـاید بدین معنی بگیریم. مابرای‌سادگی، خطوط AB و BC وغیره‌را رسم‌نمی‌کنیم وخطهای$A'B'$ و $B'C'$ وغیره را در شکلهای ۲۸ الف و ۱۴۴ تمـام وکمال نشان نمی‌دهیم، بلکه شکل را به‌قطعاتی از این خطها محدود می‌کنیم. ولی، راه‌حل مسألهٔ ما براساس این واقعیت نشان داده شده است که مثلا خط AB به خط $A'B'$ بدل می‌شود. این ادعا که پاره‌خط AB باید به‌پاره‌خط $A'B'$ بدل شود ممکن است تاحدی غلط از آب درآید. این تذکر شامل راه‌حلهای بسیاری از مسائل که بعداً می‌آیند نیز می‌شود.

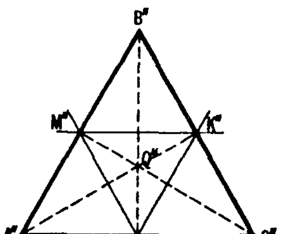
بعلاوه یك بی‌دقتی‌اساسی در استدلال ماوجود دارد. نقطهٔ P' ازشکل ۱۴۴ ممکن است برخط خاص صفحهٔ π' واقـع‌شود. در این‌حال خطهای AS، BT، CR دریك نقطه

←

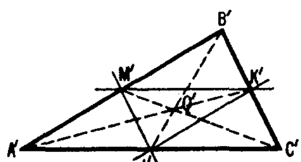


شکل ۱۴۴

ب) با استفاده از یك تصویر مرکزی صفحهٔ πی شکل ۲۸ب را بر صفحهٔ دیگر π' می‌نگاریم به‌طوری که RS خط خاص صفحهٔ π شود. در π' داریم $K'L'||A'B'$ و $K'M'||A'C'$ (شکل ۱۴۵ الف). حال از یك تصویر موازی استفاده می‌کنیم و $\triangle A'B'C'$ را بر یك مثلث متساوی‌الاضلاع $A''B''C''$ می‌نگاریم (شکل ۱۴۵ ب). در این صورت خطهای $A''K''$ و $B''L''$ بر $C''D$، محور تقارن $\triangle A''B''C''$، یکدیگر را می‌برند* و خطهای $A''K''$ و $C''M''$ بر $B''E$ محور تقارن مثلث ما متقاطع می‌شوند. از اینجا نتیجه می‌شود که Q''، نقطهٔ تقاطع خطهای $A''K''$ و $C''M''$ و $B''L''$، نقطهٔ تلاقی دو محور تقارن یعنی مرکز ثقل مثلث است؛ وخطهای $L''K''$ و $K''M''$ و $M''L''$ میانخطهای مثلث اند. بنا براین $L''M''||B''C''$. ویژگی (ب)ی یك تصویر موازی ایجاب می‌کند که داشته باشیم $L'M'||B'C'$.



شکل ۱۴۵ ب



شکل ۱۴۵ الف

←

متقاطع نمی‌شوند، بلکه موازی‌می‌شوند. بی‌دقتیهایی از این‌نوع را باید در بیشتر مسائلی که بعداً می‌آیند پیدا کرد. این‌مطلب در صفحهٔ ۵۰ وصفحات بعدمورد بحث‌قرار گرفته‌است.

* که براثر تقارن‌نسبت به $C''D$ باهم عوض شده‌اند.

بعلاوه ویژگی (ب) ایجاب می‌کند که T، نقطهٔ تقاطع LM و BC، نیز برخط خاص صفحهٔ π واقع باشد، یعنی R و S و T همخط باشند.

۲۲. اول ثابت می‌کنیم که هرگاه خطهای AA_1 و BB_1 و CC_1 متقارب باشند، آنگاه P و Q و R، نقطه‌های تلاقی خطهای BC و B_1C_1، CA و C_1A_1، AB و A_1B_1، همخط‌اند. برای اثبات این مطلب، صفحهٔ πی شکل ۲۹ را بریك صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌طوری که QR خط خاص π باشد. دراین‌صورت به‌موجب ویژگی (ب)ی تصویر مرکزی داریم $A'B'||A_1'B_1'$ و $A'C'||A_1'C_1'$. از $C'A'||C_1'A_1'$ نتیجه می‌گیریم که $O'C'/O'C_1'=O'A'/O'A_1'$ و از $A'B'||A_1'B_1'$ نتیجه می‌گیریم $O'A'/O'A_1'=O'B'/O'B_1'$؛ یعنی $O'B'/O'B_1'=O'C'/O'C_1'$. بنابراین خطهای $B'C'$ و $B_1'C_1'$ موازی‌اند و P، نقطهٔ تقاطع BC و B_1C_1 برخط خاص صفحهٔ π قرار دارد، یعنی نقطه‌های P و Q و R همخط‌اند.

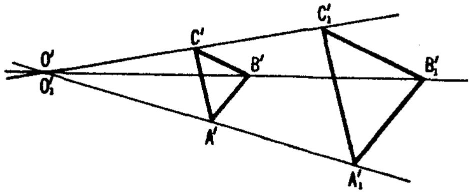
حال عکس آن را ثابت می‌کنیم. بدین منظور صفحهٔ πی شکل ۲۹ را بریك صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم چنانکه خطی که شامل P و Q و R است خط خاص π باشد. براثر این تصویر مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ به‌مثلثهای متشابه $A'B'C'$ و $A_1'B_1'C_1'$ که اضلاع متناظرشان موازی‌اند بدل می‌شوند (شکل ۱۴۶). فرض می‌کنیم O' نقطهٔ تلاقی $A'A_1'$ و $B'B_1'$ باشد و O_1' نقطهٔ تلاقی $A'A_1'$ و $C'C_1'$. داریم $O'A'/O'A_1'=AB'/A_1'B_1'$ و $O_1'A'/O_1'A_1'=A'C'/A_1'C_1'$. از سوی دیگر از تشابه مثلثهای $A'B'C'$ و $A_1'B_1'C_1'$ نتیجه می‌گیریم که

$$A'B'/A_1'B_1'=A'C'/A_1'C_1'$$

بنابراین $O'A'/O'A_1'=O_1'A'/O_1'A_1'$؛ یعنی دو نقطهٔ O' و O_1' برهم منطبق‌اند. چون خطهای $A'A_1'$ و $B'B_1'$ و $C'C_1'$ متقارب‌اند، پس خطهای AA_1 و BB_1 و CC_1 نیز متقارب‌اند.

یادآوری می‌کنیم که حکم دوم مسألهٔ ۲۲ از حکم اول لازم آمده است. زیرا، فرض می‌کنیم که نقطه‌های P و Q و R در شکل ۲۹ همخط باشند. معنی این فرض این است که خطهای PQ و B_1A_1 و BA، واصل بین رأسهای مثلثهای PB_1B و QA_1A در نقطهٔ R متلاقی‌اند. به موجب حکم اول در مسألهٔ ۲۲، C_1 و C و O، نقطه‌های تلاقی اضلاع متناظر دو مثلث همخط‌اند. (در اینجا O نقطهٔ تلاقی خطهای AA_1 و BB_1 است.) ولی معنی این گفته این است که CC_1 از O می‌گذرد، یعنی سه خط AA_1 و BB_1 و CC_1 متقارب‌اند.

حکم اول قضیهٔ دزارگ را می‌توان به طریق مشابه از حکم دوم استخراج کرد.

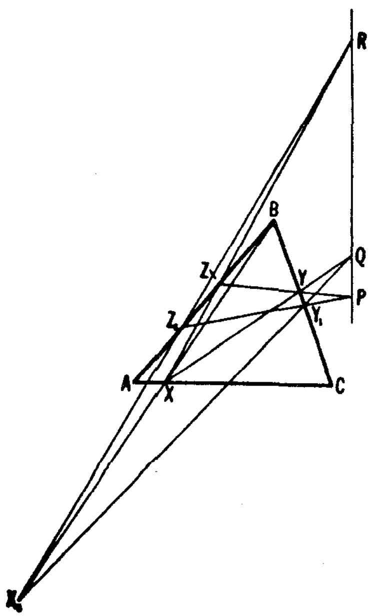


شکل ۱۴۶

۲۳. حکم مسأله فقط شکل دیگر قضیهٔ دزارگ است (مسألهٔ ۲۲؛ $\triangle AEH$ و $\triangle CFG$ مثلثهای منظری هستند).

۲۴. الف) از P خطی رسم می‌کنیم و نقطه‌های تقاطعش را با اضلاع AB و BCی $\triangle ABC$ به Z_1 و Y_1 نشان می‌دهیم، و نقطهٔ برخورد خطهای QY_1 و RZ_1 را به X_1 (شکل ۱۴۷ الف).

اکنون فرض می‌کنیم که مسألهٔ ما حل شده باشد، یعنی مثلث مطلوب XYZ

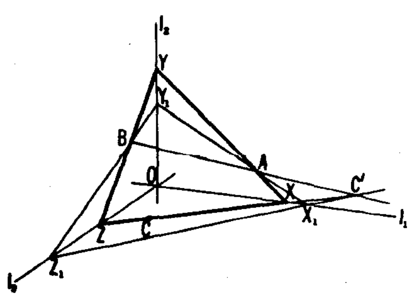


شکل ۱۴۷ الف

رسم شده باشد، یادآوری می‌کنیم کـه در این‌حالت $\triangle X_1Y_1Z_1$ و $\triangle XYZ$ مثلثهای منظری هستند (P و Q و R نقطه‌های تلاقی اضلاع دومثلث، همخط‌اند). از اینجا نتیجه مـی‌شود کـه خطهای XX_1 و YY_1 و ZZ_1 دریك نقطه متقارب‌انـد (← مسألهٔ ۲۲) و B نقطهٔ تقارب آنهاست. ازوصل B به X_1 وپیداکردن نقطهٔ تلاقی BX_1 و AC، رأس X ازمثلث مطلوب را به‌دست می‌آوریم. اکنون پیداکردن بقیهٔ رأسها دیگر اشکالی ندارد.

ب) ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر یك n ضلعی چنان تغییرکند که اضلاعش از n نقطهٔ ثابت واقع بر یك خط l بگذرند و $(n-1)$ رأس آن بر $(n-1)$ خط‌مفروض حرکت کنند، آنگاه‌مکان رأس nام آن یك‌خط است. برای اثبات این مطلب، شکل خود را بر یك صفحهٔ جدید π' تصویر می‌کنیم به طوری‌که l خط خاص π باشد، و از قضیه‌ای کـه در مسألهٔ ۱۵ (ب)، جلد دوم ثـابت کرده بودیم استفاده مـی‌کنیم (← مثلا، راه حل مسألهٔ ۱۷ (الف)). امـا، ترسیم مطلوب را می‌توانیم به‌طریقی مشابه باترسیم مسألهٔ ۱۵ (ج)، جلد دوم، انجام دهیم.

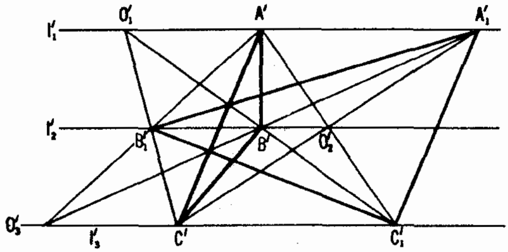
ج) از A خطی مرور می‌دهیم که خطهای l_1 و l_2 را به‌ترتیب درنقطه‌های X_1 و Y_1 ببرد. Z_1، نقطهٔ تلاقی‌خطهای Y_1B و l_3، را به X_1 وصل‌می‌کنیم. حال فرض می‌کنیم که مسأله حل شده، یعنی $\triangle XYZ$ رسم شده باشد (شکل ۱۴۷ ب). چون خطهای XX_1 و YY_1 و ZZ_1 در O متقارب‌اند، مثلثهای XYZ و $X_1Y_1Z_1$ مثلثهای منظری‌می‌شوند، و نقطه‌های تلاقی خطهای X_1Y_1 و XY (یعنی، نقطهٔ A)، Y_1Z_1 و YZ (یعنی نقطهٔ B)، و Z_1X_1 و ZX همخط‌اند. حال مـی‌توانیم به آسانی C'، نقطهٔ تلاقی ZX و Z_1X_1، را پیدا کنیم، زیرا بر نقطهٔ تلاقی خطهای Z_1X_1 و AB منطبق است. ضلع ZX از مثلث مطلوب برخط واصل بین نقطه‌های C و C' واقع است.



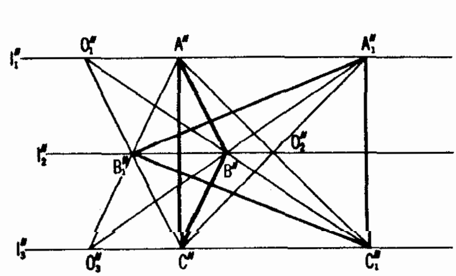
شکل ۱۴۷ ب

۲۵. تفاوت این قضیه با قضیهٔ مسألهٔ ۲۳ فقط درشکل بیان است؛ نقطه‌های C و B_1 و نقطهٔ O_2، محل تلاقی A_1B و AC_1، نقطه‌های تلاقی قطرهـای چهـارضلعیهای $A_1OO_1C_1$ و OO_1BA و A_1C_1BA هستند.

۲۶. از تصویر مرکزی استفاده می‌کنیم تـا نگاشت صفحهٔ πی شکل ۳۱ را بریك صفحهٔ π' به‌دست آوریم به‌طوری که خط خاص π خط واصل بین O و نقطهٔ تلاقی AC و A_1C_1 باشد. به‌وسیلهٔ این نگاشت، مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ به‌مثلثهای $A'B'C'$ و $A'_1B'_1C'_1$ بـدل می‌شوند با $A'A'_1\|B'B'_1\|C'C'_1$ و $A'C'\|A'_1C'_1$. خطهای $A'A'_1$ و $B'C'_1$ و $C'B'_1$ در یك نقطهٔ O'_1 متقارب اند و خطهای $A'C'_1$ و $B'B'_1$ و $C'A'_1$ در نقطهٔ O'_2 (شکل ۱۴۸ الف). خطهـای موازی $A'A'_1$ و $B'B'_1$ و $C'C'_1$ را به l'_1 و l'_2 و l'_3 نشان می‌دهیم. چون $A'C'_1$ و $C'A'_1$ قطرهای متوازی‌الاضلاع $A'C'A'_1C'_1$ هستند، و چون $B'B'_1$ از نقطهٔ تلاقی این قطرها می‌گذرد، نتیجه می‌گیریم که خط $B'B'_1$ (یعنی l'_2) از l'_1 و l'_3 همفاصله است. باید نشان دهیم کـه $A'B'_1$ و $B'A'_1$ و $C'C'_1$ متقارب اند. نتیجهٔ آن این است که AB_1 و BA_1 و CC_1 متقارب اند.



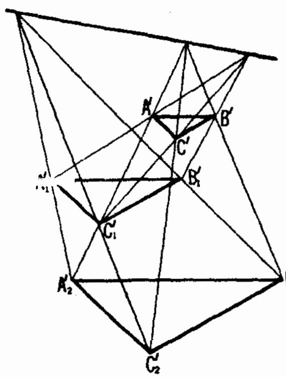
شکل ۱۴۸ الف



شکل ۱۴۸ ب

حال از یك تصویر موازی برای نگاشت صفحهٔ π' بر یك صفحهٔ π'' استفاده می‌کنیم تا $\triangle A'C'C'_1$ را به یك مثلث قائم‌الزاویهٔ $A''C''C''_1$ بدل کنیم.* در این صورت شکل ۱۴۸ الف به شکل ۱۴۸ ب بدل می‌شود که l''_2 محور تقارن شکل شده‌است. از اینجا نتیجه‌می‌شود که‌خطهای $A''B''_1$ و $B''A''_1$ در نقطهٔ O''_2 واقع بر خط $C''C''_1$، که قرینهٔ O''_1 نسبت به l''_2 است، متقاطع می‌شوند. در نتیجه، خطهای $A'B'_1$ و $B'A'_1$ و $C'C'_1$ از شکل ۱۴۸ الف در یك نقطهٔ O'_2 متقاطع خواهند شد. (O'_2 آن نقطه از π' است که بر اثر تصویر موازی ما بر روی O''_2 نگاشته شده است.)

۲۷. صفحهٔ πی سه‌مثلث را بر یك‌صفحهٔ π' تصویر کنید به‌طوری که PQR خط‌خاص π باشد. بر اثر این تصویر مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ به‌مثلثهای دوبه‌دو متجانس $A'B'C'$ و $A'_1B'_1C'_1$ و $A'_2B'_2C'_2$ بدل می‌شوند (رك. راه حل مسألهٔ ۲۲)، و نقطهٔ تقاطع خطهای AA_1 و BB_1 و CC_1؛ AA_2 و BB_2 و CC_2؛ A_1A_2 و B_1B_2 و C_1C_2 به‌مرکزهای تجانس این مثلثها بدل می‌شوند. به‌موجب قضیهٔ‌سه‌مرکز تجانس (← مسألهٔ ۲۵، جلد دوم)، این سه‌نقطه همخط‌اند (شکل ۱۴۹).



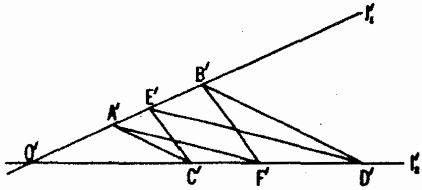
شکل ۱۴۹

---

* اگر از قضیهٔ ۱ (ص ۵۹) استفاده کنیم، می‌توانیم، به‌جای دو تصویری که ما در این مسأله به‌کار بردیم (یك تصویر مرکزی و به‌دنبال آن یك تصویر موازی) یك تصویر مرکزی تنها بگذاریم تا چهارضلعی ACC_1A_1 را به‌یك مستطیل (مثلا یك‌مربع)، که ما می‌خواهیم، بدل کند.

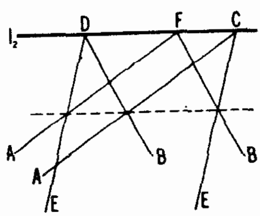
در نتیجه، پیشنگاره‌های این نقطه‌ها نیز بر اثر تصویر ما همخط‌اند.

۲۸. فرض می‌کنیم M و N و P نقطه‌های تقاطع خطهای AF و ED؛ EC و BF؛ AC و BD، به‌ترتیب باشند؛ و O نقطهٔ تقاطع AB و CD باشد. صفحهٔ πی شکل ۳۳ را بر یک صفحهٔ π' چنان تصویر می‌کنیم که MN خط خاص π باشد. بر اثر این نگاشت شکل ۳۳ به‌شکل ۱۵۰ بدل می‌شود، که در آن $A'F'\|D'E'$ و $B'F'\|C'E'$. توازی خطهای $A'F'$ و $D'E'$ ایجاب می‌کند که داشته باشیم $O'A'/O'E'=O'F'/O'D'$، و توازی خطهای $B'F'$ و $C'E'$ ایجاب می‌کند که $O'E'/O'B'=O'C'/O'F'$. از ضرب این دو تساوی به‌دست می‌آوریم $O'A'/O'B'=O'C'/O'D'$. از این تساوی نتیجه می‌شود که خطهای $A'C'$ و $B'D'$ موازی‌اند، یعنی P برخط خاص MN ازصفحهٔ π واقع است. [بررسی حالت (ساده‌تر) $l'_1\|l'_2$ به‌عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود (قراردادها همان قرارداد شکل ۱۵۰ است).]



شکل ۱۵۰

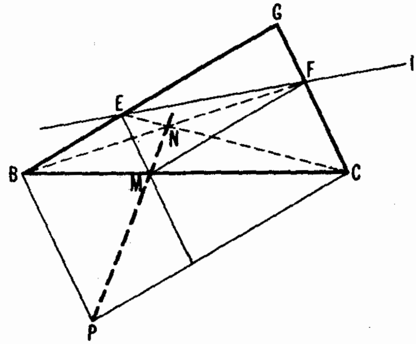
۲۹. ۱) گیریم D و F و C سه‌نقطه برخط l باشند. از این نقطه‌ها خطهای $DB\|FB$ و $DE\|CE$ و $FA\|CA$ را رسم می‌کنیم (شکل ۱۵۱ الف. در اینجا A و B و E نقطه‌هایی در بینهایت هستند.) نقطه‌های تقاطع DE و FA؛ DB و CA؛



شکل ۱۵۱ الف

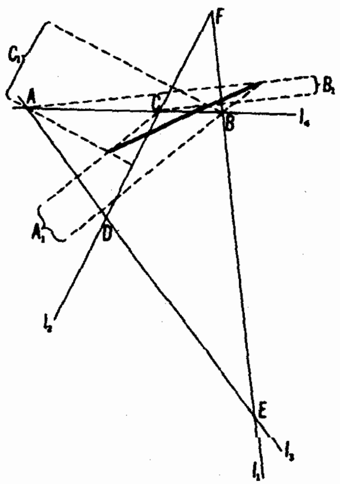
FB و CE همخط‌اند (چرا؟).

۲) هر گاه خط l ضلعهای BG و CG از $\triangle BCG$ را در E و F ببرد (شکل ۱۵۱ ب)، آنگاه N، نقطهٔ تلاقی قطرهای چهارضلعی $BCEF$، و رأسهای P و M از متوازی‌الاضلاعهای $BGCP$ و $EGFM$ همخط‌اند (چرا؟).



شکل ۱۵۱ ب

۳۵. فرض می‌کنیم l_1 و l_2 و l_3 و l_4 چهار خط مفروض، و A و B و C و D و



شکل ۱۵۲

E و F نقطه‌های تلاقی آنها باشند (← شکل ۱۵۲).

حال سه‌مثلث از چهارمثلثی را که آنها تشکیل می‌دهند، مثل ABE، ACD، وBCF را درنظر می‌گیریم. نقطه‌های تلاقی ارتفاعات درهریك ازاین‌مثلثها نقطه‌های تلاقی خطهای $AB_1 \perp l_1$ و $BA_1 \perp l_3$؛ $AC_1 \perp l_2$ و $CA_1 \perp l_3$ و $BC \perp l_2$ و $CB_1 \perp l_1$ هستند. از نتیجهٔ قسمت (۱) مسألهٔ قبل نتیجه می‌شود که این نقطه‌ها همخط‌اند. حکمی مشابه این حکم را می‌توان بر هر مثلث از چهار مثلث جاری دانست. بنابراین هرچهار نقطهٔ موردنظر همخط‌اند.

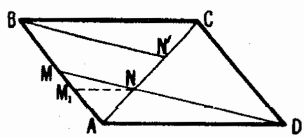
۳۱. چون مسألهٔ ۲۳ باقضیهٔ دزارگ هم‌ارز است (مسألهٔ ۲۲)، مسائل ۳۱ (i) و (ii) با بعضی از حالات خاص قضیهٔ دزارك در صفحهٔ ۴۵ هم‌ارزند. تشخیص چگونگی عملیات موردنیاز وبیان‌صورت جدیدرا به‌عهدهٔ خواننده می گذاریم.

۳۲. الف) از رأس Bی متوازی‌الاضلاع، خطی موازی MD رسم می‌کنیم تا قطر AC را در N' قطع کند (←شکل ۱۵۳ الف). چون $NM \| N'B$، لذا $AN'/AN = AB/AM = n$. بعدهم، قابلیت انطباق مثلثهای ADN و CBN' ایجاب می کند که $AN = CN'$ ازاینجا نتیجه می‌شودکه

$$\frac{AC}{AN} = \frac{AN' + N'C}{AN} = n + 1$$

که همان چیزی است که ما می‌خواستیم ثابت کنیم.

اگر شکل ۱۵۳ الف را برصفحهٔ دیگری چنان تصویر کنیم که AB موازی با خط خاص صفحه تصویر شود، آنگاه‌نسبت پاره‌خطهای واقع بر خط AB محفوظ می‌ماند (← ص ۴۹). ولی این تصویر نسبت پاره‌خطهای واقع بر قطر AC را حفظ نمی‌کند. بنابراین برای به‌دست‌آوردن صورت دیگری از قضیه‌ای که هم‌اکنون ثابت کردیم، بایدآن را طوری‌بیان‌کنیم که‌نسبت پاره‌خطهای واقع بر AC حذف‌شوند، و فقط نسبت پاره‌خطهای واقع بر AB باقی بمانند. این‌کار، بسیار ساده به‌صورت زیر انجام‌می‌گیرد: از N خطی‌موازی AD رسم می‌کنیم تاضلع AB را



شکل ۱۵۳ الف

در $M_۱$ قطع کند. قضیه‌ای که هم‌اکنون ثابت کردیم ایجاب می‌کند که اگر $AM=(۱/n)\ AB$، آنگاه

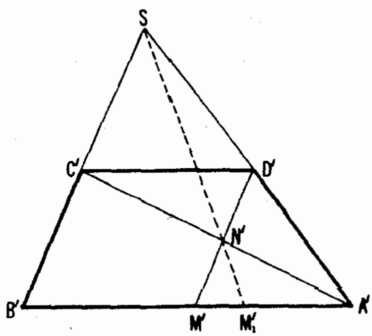
$$AM_۱=\frac{۱}{n+۱}\ AB$$

اکنون روشن است که تصویر ما به‌نتیجهٔ زیر منجر می‌شود: اگر نقطهٔ M' قاعدهٔ $A'B'$ ازذوزنقهٔ $A'B'C'D'$ را به‌نسبت $A'M'/A'B'=۱/n$ تقسیم کند، آنگاه خط SN' واصل بین S، نقطهٔ تلاقی اضلاع (ناموازی) ذوزنقه، و N'، نقطهٔ تلاقی $D'M'$ باقطر $A'C'$، یك‌نقطهٔ $M'_۱$ را بر $A'B'$ مشخص‌می‌کند به‌طوری که

$$A'M'_۱=\frac{۱}{n+۱}A'B'$$

(شکل ۱۵۳ ب). [چون‌خطهای AB و CD باخط‌خاص‌صفحه موازی‌اند، نگاره‌های آنها براثراین‌تصویر، موازی‌باقی‌می‌مانند. این‌مطلب ایجاب‌می‌کند که‌متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به‌یك‌ذوزنقهٔ $A'B'C'D'$ بدل‌شود. خطهای موازی AD، BC و $M_۱N$ به‌خطهای $A'D'$، $B'C'$ و $M'_۱N'$ بدل می‌شوند که یکدیگر را دریك نقطهٔ S می‌برند. نسبت‌پاره‌خطهای واقع برخط AB، موازی با خط خاص صفحه، براثر یك تصویر محفوظ می‌ماند.]

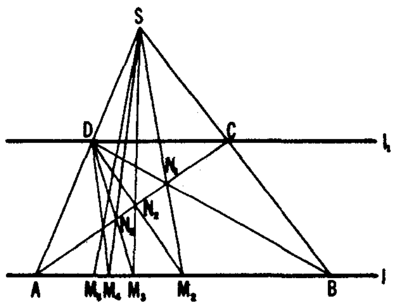
ب) یك نقطهٔ‌اختیاری S ازصفحه را به‌نقطه‌های A و B وصل، وفرض‌می‌کنیم C و D نقطه‌های‌تلاقی خطهای SA و SB با $l_۱$ باشند. اگر $N_۱$ نقطهٔ تلاقی DB و



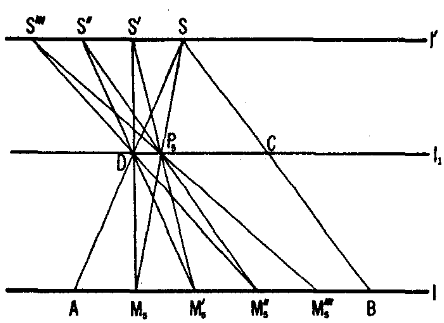
شکل ۱۵۳ ب

AC باشد، آنگاه $SN_۱$ خط AB را دریك نقطهٔ $M_۲$ می برد به‌طوری که $AM_۲=(۱/۲)AB$ (⟵ راه حل مسألهٔ ۲). بعد اگر $DM_۲$ خط AC را دریك نقطهٔ $N_۲$ ببرد، آنگاه $SN_۲$ خط AB را در یك نقطهٔ $M_۳$ می برد به‌طوری که $AM_۳=(۱/۳)AB$؛ اگر $DM_۳$ خط AC را دریك نقطهٔ $N_۳$ ببرد، آنگاه $SN_۳$ خط AB را دریك نقطهٔ $M_۴$ می برد به‌طوری که $AB(۱/۴)=AM_۴$ و هکذا (شکل ۱۵۴ الف، ⟵ راه حل مسألهٔ ۳۲ (الف)).

[وقتی نقطهٔ M_n با تساوی $AM_n=(۱/n)AB$ معین شد، به‌آسانی می‌توان بقیهٔ نقاطی را که پاره‌خط AB را به n قسمت مساوی تقسیم می کنند پیدا کرد. زیرا کافی است، خط l' را از S به موازات l و $l_۱$ رسم کنیم (⟵ مسألهٔ ۳ (ب)). حال، اگر SM_n خط DC را در یك نقطهٔ P_n ببرد، M_nD خط l' را دریك نقطهٔ S' می بردو $S'P_n$ خط AB را دریك نقطهٔ M'_n. پس $AM_n=M_nM'_n$، لذا $AM'_n=(۲/n)\ AB$



شکل ۱۵۴ الف



شکل ۱۵۴ ب

و هکذا؛ ← شکل ۱۵۴ ب، که ۵ $=n$.]

۳۳. صفحهٔ πی شکل ۱۴ را بر یك صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌طوری که خط ABE خط خاص صفحهٔ π شود. پس شکل ۱۴ به‌شکل ۱۵۵ بدل شده‌است. قطرهای CA و DB و FEی چهارضلعی کامل به‌خطهای $F'D' \| C'A'$ و $F'C' \| D'B'$ و $F'E' \| D'C'$ بدل می‌شوند. نقاط تقاطع این خطها را با C_1 و D_1 و F_1 نشان می‌دهیم (شکل ۱۵۵). روشن است که نقطه‌های C' و D' و F' وسطهای اضلاع مثلث $C_1D_1E_1$ هستند.

حال نگاره‌های P و Q و R، وسطهای قطرهای چهارضلعی کامل، را تعیین می‌کنیم. نقطهٔ P، وسط CA، نقطه‌ای است که $AP/CP = -1$. اگر نقطهٔ بینهایت خط CA را به P_1 نشان دهیم، آنگاه می‌توانیم بنویسیم

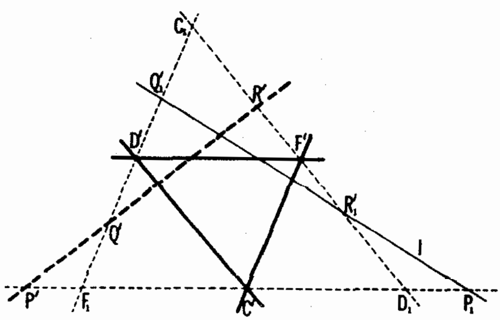
$$\frac{AP/CP}{AP_1/CP_1} = -1$$

به‌موجب ویژگی (ج) از تصویر مرکزی داریم

$$\frac{A'P'/C'P'}{A'P'_1/C'P'_1} = -1$$

که P'_1 نگارهٔ نقطهٔ بینهایت P_1 است، یعنی نقطهٔ تلاقی $C'A'$ با خط خاص l از صفحهٔ π. تساوی خود را بار دیگر به‌صورت

$$\frac{C'P'_1/C'P'}{A'P'_1/A'P'} = -1$$



شکل ۱۵۵

می‌نویسیم؛ یا، چون $A'P'_1/A'P' = 1$، (A' نقطه‌ای است در بینهایت)،

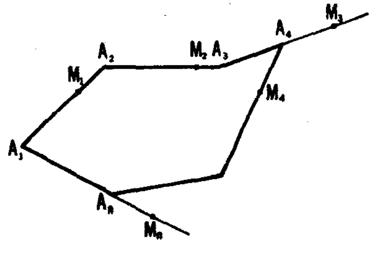
$$\frac{C'P'_1}{C'P'} = -1$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که C' وسط پاره خط $P'P'_1$ است، یعنی، P' قرینهٔ P'_1 (نقطهٔ تلاقی خط D_1F_1 با l) است نسبت به C'، وسط ضلع D_1F_1 از مثلث $C_1D_1F_1$.

به گونه‌ای مشابه می‌توانیم ثابت کنیم که نقطه‌های Q و R، وسطهای قطرهای DB و FE از چهارضلعی کامل، بر نقطه‌های Q' و R' قرینه‌های نقطه‌های Q'_1 و R'_1، نقطه‌های تلاقی خط خاص l با اضلاع C_1F_1 و C_1D_1 از مثلث $C_1D_1F_1$، نسبت به D' و F'، وسطهای این اضلاع، هستند. از اینجا قضیهٔ مربوط به چهارضلعی کامل (که می‌گوید نقطه‌های P و Q و R همخط‌اند) به‌شکل زیر درمی‌آید: فرض می‌کنیم P'_1 و Q'_1 و R'_1 نقطه‌های تلاقی یک خط l به‌ترتیب با اضلاع F_1D_1 و C_1D_1 و C_1F_1 از مثلث $C_1D_1F_1$ باشند. دراین‌صورت نقطه‌های P' و Q' و R' قرینه‌های P'_1 و Q'_1 و R'_1 به‌ترتیب نسبت به‌وسطهای اضلاع F_1D_1 و C_1D_1 و C_1F_1، همخط‌اند. این قضیه حالت خاص قضیهٔ مسألهٔ ۹ (الف) (ص ۲۲) است و می‌تواند برای استخراج قضیهٔ مربوط به‌چهارضلعی کامل به‌کار رود.

۳۴. نشان خواهیم داد که قضایای منلائوس و سوا نتایج مستقیم قضیهٔ زیر هستند که ماقبل ازحل مسألهٔ ۳۴ آن را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم $A_1A_2\ldots A_n$ چند ضلعی دلخواهی باشد و M_1، M_2، ...، M_n نقطه‌هایی براضلاع یا برامتداد اضلاع آن باشند (شکل ۱۵۶). نشان می‌دهیم که‌حاصلضرب

$$\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\cdot\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\cdot\frac{A_3M_3}{A_4M_3}\cdot\ldots\cdot\frac{A_nM_n}{A_1M_n} \qquad (\#)$$



شکل ۱۵۶

براثر یك تصویر مرکزی عوض نمی‌شود. زیرا اگر A'_1، A'_2، ...، A'_n؛ و M'_1، M'_2، ...، M'_n نگاره‌های نقطه‌های A_1، A_2، ...، A_n؛ M_1، M_2، ...، M_n براثر یك تصویر مرکزی به‌مرکز O باشند، لذا طبق‌دستور (*) ص ۴۷ داریم

$$\frac{A'_1M'_1}{A'_2M'_1}=\left(\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\right)\left(\frac{OA'_1}{OA_1}\right)\Big/\left(\frac{OA'_2}{OA_2}\right)$$

$$\frac{A'_2M'_2}{A'_3M'_2}=\left(\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\right)\left(\frac{OA'_2}{OA_2}\right)\Big/\left(\frac{OA'_3}{OA_3}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{A'_nM'_n}{A'_1M'_n}=\left(\frac{A_nM_n}{A_1M_n}\right)\left(\frac{OA'_n}{OA_n}\right)\Big/\left(\frac{OA'_1}{OA_1}\right)$$

ازضرب این تساویها به‌دست می‌آوریم

$$\frac{A'_1M'_1}{A'_2M'_1}\cdot\frac{A'_2M'_2}{A'_3M'_2}\cdot\ldots\cdot\frac{A'_nM'_n}{A'_1M'_n}=\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\cdot\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\cdot\ldots\cdot\frac{A_nM_n}{A_1M_n}$$

یعنی همان‌چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

این قضیه را می‌توان تعمیم ویژگی (ج) از یك تصویر مرکزی انگاشت. (هرگاه چندضلعی $A_1A_2\ldots A_n$ به‌صورت دوضلعی تباهیدهٔ ABA درآید، آنگاه این قضیه به‌ویژگی (ج) بدل می‌شود). اکنون نشان می‌دهیم که چگونه قضیه‌های منلائوس و سوا نتیجه می‌شوند.

الف) صفحهٔ πی مثلث ABC را بر یك صفحهٔ π' چنان تصویر می‌کنیم که خط MN به خط خاص π بدل شود. اگر نقطه‌های M و N و P بر یك خط l واقع باشند، این‌خط به خط بینهایت بدل‌می‌شود و M و N و P به‌نقاط M'وN'وP' بدل می‌شوند که‌نقطه‌هایی در بینهایت بر $A'B'$ و $B'C'$ و $C'A'$ هستند. بنابراین

$$\frac{A'M'}{B'M'}=1,\ \frac{B'N'}{C'N'}=1,\ \frac{C'P'}{A'P'}=1\ \text{و}\ \frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'}=1$$

اما به‌موجب آنچه‌که دربالا ثابت کردیم مقدار حاصلضرب

$$(AM/BM)(BN/CN)(CP/AP)$$

برابر یك است.

بعکس، گیریم $(AM/BM)(BN/CN)(CP/AP)=1$، چون تصویر فوق M و N را به نقطه‌های بینهایت M' و N' بدل می‌کند، پس $B'N'/C'N'=1$، $A'M'/B'M'=1$ به‌موجب قضیه‌ای که در بالا ثابت کردیم باید داشته باشیم

$$(A'M'/B'M')(B'N'/C'N')(C'P'/A'P')=1$$

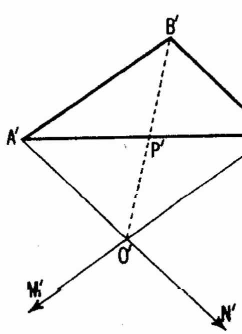
و بنابراین $C'P'/A'P'=1$. معنی این تساوی این است که P' نقطهٔ بینهایت خط $A'C'$ است. اما در این صورت P باید برخط خاص π قرار گیرد. یعنی همخط بودن M و N و P ثابت می‌شود.

تبصره: بااستفاده از استدلالی مشابه، می‌توان قضیهٔ کلیتر زیررا ثابت کرد: اگر M_1، M_2، …، M_n نقطه‌های تقاطع یك n ضلعی $A_1A_2\ldots A_n$ با یك خط l باشند، آنگاه

$$\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\cdot\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\cdot\frac{A_3M_3}{A_4M_3}\cdots\frac{A_nM_n}{A_1M_n}=1$$

ولی، به‌ازای $n>3$، عکس این قضیه درست نیست، یعنی این تساوی همخطی نقطه‌های M_1، M_2، …، M_n را ایجاب نمی‌کند.

ب) صفحهٔ πی مثلث ABC را بریك صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌طوری که MN خط خاص π شود. اگر خطهای AN و BP و CM موازی یا دریك نقطهٔ O متقاطع باشند، آنگاه شکل ۴۴ درصفحهٔ π به‌شکل ۱۵۷ بدل می‌شود، و $C'M'\|B'A'$ و $B'C'\|A'N'$. بنابراین P' وسط $A'C'$ است (زیرا نقطهٔ تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع $A'B'C'O'$ است). از این‌رو داریم $A'M'/B'M'=1$ و



شکل ۱۵۷

$B'N'/C'N' = 1$ (زیرا M' و N' نقطه‌های بینهایت هستند) و $C'P'/A'P' = -1$.
از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'}=-1$$

و لذا به‌موجب قضیه‌ای که در بالا ثابت کردیم

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=-1$$

بعکس، فرض می‌کنیم که تساوی اخیر برقرار باشد. چون نقطه‌های M و N براثر تصویر ما به‌نقطه‌های بینهایت بدل می‌شوند، داریم $A'M'/B'M' = 1$ و $B'N'/C'N' = 1$. و از آنجا نتیجه می‌شود $C'P'/A'P' = -1$، یعنی نقطهٔ P' وسط $A'C'$ است. اما دراین‌حال خطهای $A'N' \| B'C'$ و $C'M' \| B'A'$ و $B'P'$ دریك نقطهٔ O' متلاقی‌اند (← شکل ۱۵۷). بنابراین خطهای AN و CM و BP یا متقارب‌اند یاموازی.

۳۵. باید نشان دهیم (← شکل ۱۵۸) که

$$\frac{AE}{BE}\cdot\frac{BF}{CF}\cdot\frac{CE}{DE}\cdot\frac{DF}{AF}=1$$

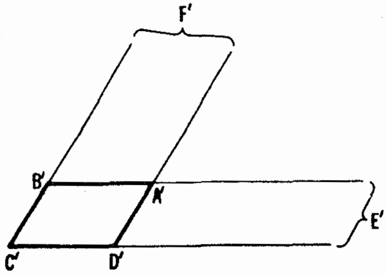
ملاحظه می‌کنیم که‌عبارت سمت چپ‌را می‌توان به‌عنوان حالت خاص عبارت (#) درصفحهٔ ۲۱۷ گرفت که چهارضلعی $ABCD$ نقش n ضلعی $A_1A_2\ldots A_n$ را بازی می‌کند و نقطه‌های E و F و E و F (به‌همان‌ترتیب) نقش نقطه‌های M_1، M_2، …، M_n را در شکل ۱۵۶. ازاینجا نتیجه می‌شود که عبارت

$$(AE/BE)(BF/CF)(CE/DE)(DF/AF)$$

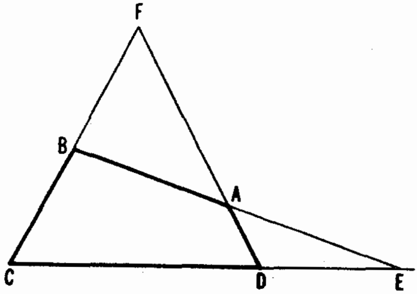
براثر تصویرمرکزی پایا می‌ماند. ملاحظه می‌کنیم که تصویری از صفحهٔ πی شکل ۱۵۸ الف، که EF خط‌خاص آن باشد، شکل ۱۵۸ الف را به‌شکل ۱۵۸ ب بدل می‌کند. چون E' و F' نقطه‌هایی در بینهایت‌اند، پس

$$\frac{A'E'}{B'E'}=\frac{B'F'}{C'F'}=\frac{C'E'}{D'E'}=\frac{D'F'}{A'F'}=1$$

بنابراین



شکل ۱۵۸ ب



شکل ۱۵۸ الف

$$\frac{A'E'}{B'E'}\cdot\frac{B'F'}{C'F'}\cdot\frac{C'E'}{D'E'}\cdot\frac{D'F'}{A'F'}=1\left(=\frac{AE}{BE}\cdot\frac{BF}{CF}\cdot\frac{CE}{DE}\cdot\frac{DF}{AF}\right)$$

این تساوی قضیهٔ ما را ثابت می‌کند.

۳۶. چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ را بر یک مربع $A'_1A'_2A'_3A'_4$ تصویر می‌کنیم (← قضیهٔ ۱، ص ۵۹). بر اثر این تصویر نقطه‌های P و Q به نقطه‌های بینهایت امتدادهای اضلاع مربع بدل می‌شوند و خطهای PN و QN به میانخطهای آن. نقطه‌های B_1، B_2، B_3 و B_4 به وسطهای B'_1، B'_2، B'_3 و B'_4 از اضلاع مربع و نقطه‌های M_1، M_2، ...، M_8 به نقطه‌های M'_1، M'_2، ...، M'_8 (شکل ۱۵۹) بدل می‌شوند. احکام قضیهٔ مورد بحث از ملاحظات نسبتاً بدیهی زیر ناشی می‌شوند:

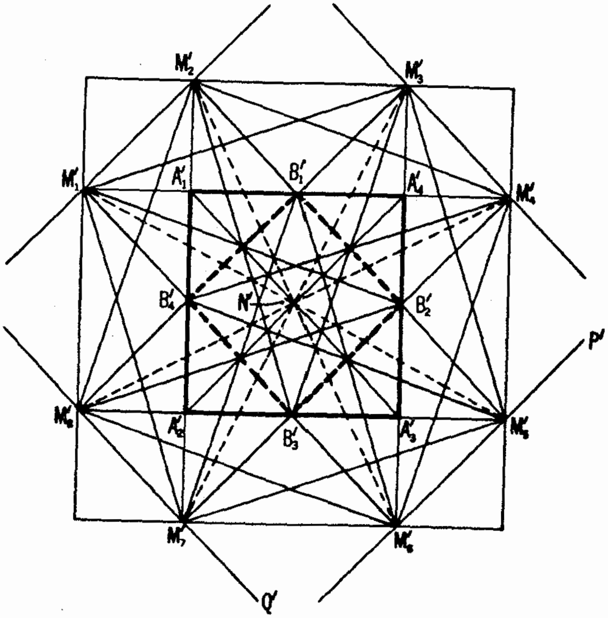
الف) نقطه‌های M'_1 و M'_5، M'_2 و M'_6، M'_3 و M'_7، M'_4 و M'_8 نسبت به N'، مرکز مربع، قرینه هستند. در نتیجه خطهای $M'_1M'_5$ و $M'_2M'_6$ و $M'_3M'_7$ و $M'_4M'_8$ در N' یکدیگر را می‌برند.

ب) خطهای $M'_2M'_3$ و $M'_6M'_7$ با $A'_2A'_3$ موازی‌اند؛ و خطهای $M'_1M'_8$ و $M'_4M'_5$ با $A'_1A'_2$.

ج) $M'_1M'_2$، $M'_3M'_8$، $M'_4M'_7$، و $M'_5M'_6$ با قطر $A'_2A'_4$ مربع، و خطهای $M'_3M'_4$ و $M'_2M'_5$ و $M'_1M'_6$ و $M'_7M'_8$ با قطر $A'_1A'_3$ی مربع موازی‌اند.

د) $M'_1M'_3\|M'_5M'_7\|B'_4M'_4\|B'_2M'_8$: $M'_2M'_4\|M'_6M'_8\|B'_4M'_5\|B'_2M'_1$؛
$M'_3M'_5\|M'_1M'_7\|B'_1M'_6\|B'_3M'_2$؛ $M'_4M'_6\|M'_2M'_8\|B'_1M'_7\|B'_3M'_3$.

۳۷. چهارضلعی $ABCD$ را بر یک مربع $A'B'C'D'$ تصویر، و فرض می‌کنیم



شکل ۱۵۹

نقطه‌های $P_۱$ و $P_۲$ و $P_۳$ و... به‌نقطه‌های $P'_۱$ و $P'_۲$ و $P'_۳$ و... بدل‌شوند (شکل ۱۶۰). این نقطه‌ها بر اضلاع مربع نسبتهایی پدید می‌آورند که با

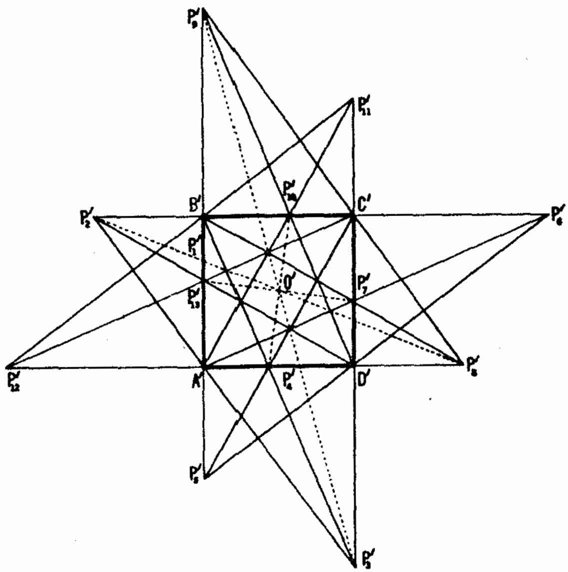
$$\lambda_۱=\frac{A'P'_۱}{B'P'_۱} \qquad \lambda_۲=\frac{B'P'_۲}{C'P'_۲} \qquad \lambda_۳=\frac{C'P'_۳}{D'P'_۳}$$

نشان می‌دهیم. خاطرنشان می‌کنیم که این اعداد می‌توانند مثبت یا منفی باشند. از تشابه مثلثهای $A'D'P'_۱$ و $B'P'_۲P'_۱$ (شکل ۱۶۰) نتیجه می‌شود

$$\frac{D'A'}{B'P'_۲}=-\frac{A'P'_۱}{B'P'_۱}$$

و لذا

$$\frac{C'P'_۲}{B'P'_۲}=\frac{C'B'+B'P'_۲}{B'P'_۲}=\frac{C'B'}{B'P'_۲}+۱=\frac{D'A'}{B'P'_۲}+۱=-\frac{A'P'_۱}{B'P'_۱}+۱$$



شکل ۱۶۰

از این‌رو

$$\frac{۱}{\lambda_۲}=-\lambda_۱+۱$$

یا

$$\lambda_۲=\frac{۱}{۱-\lambda_۱} \qquad (*)$$

به‌آسانی می‌توان تحقیق‌کرد که هرگاه نقطهٔ $P'_۱$ برامتداد $A'B'$ درسمت‌چپ A' یاسمت راست B' قرار گیرد، دستور (*) صحیح باقی می‌ماند.

با استفاده از دستور (*)، پیدا می‌کنیم:

$$\lambda_۲=\frac{۱}{۱-\lambda_۱}\ ,\ \lambda_۳=\frac{۱}{۱-\lambda_۲}=۱-\frac{۱}{\lambda_۱}\ ,\ \lambda_۴=\frac{۱}{۱-\lambda_۳}=\lambda_۱\ ,$$

$$\lambda_5=\frac{1}{1-\lambda_4}=\lambda_2,\ \ \lambda_6=\frac{1}{1-\lambda_5}=\lambda_3,\dots$$

یعنی

$$\lambda_1=\lambda_4=\lambda_7=\lambda_{10}=\lambda_{13}=\lambda_{16}=\dots$$

$$\lambda_2=\lambda_5=\lambda_8=\lambda_{11}=\lambda_{14}=\lambda_{17}=\dots=\frac{1}{1-\lambda_1}$$

$$\lambda_3=\lambda_6=\lambda_9=\lambda_{12}=\lambda_{15}=\lambda_{18}=\dots=1-\frac{1}{\lambda_1}$$

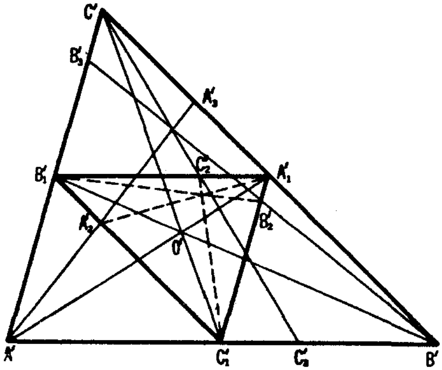
حال احکام قضیهٔ ما بلافاصله نتیجه می‌شود:

الف) $\lambda_1=\lambda_{13}$ ایجاب می‌کند که نقطهٔ P'_{13} بر نقطهٔ P'_1 منطبق باشد. از ماهیت یك به یك بودن یك تصویر مرکزی نتیجه می‌شود که P_{13} بر P_1 منطبق است.

ب) $\lambda_1=\lambda_7$ و $\lambda_2=\lambda_8$ و $\lambda_3=\lambda_9$ وغیره ایجاب می‌کنند که P'_1 و P'_7، P'_2 و P'_8، P'_3 و P'_9، نسبت به‌مرکز O' مربع متقارن باشند، یعنی خطهای $P'_1P'_7$ و $P'_2P'_8$ و $P'_3P'_9$ و غیره در O' متقاطع باشند. در نتیجه، به‌موجب ویژگیهای تصویر مرکزی، خطهای P_1P_7، P_2P_8، P_3P_9 و غیره، از نقطهٔ تلاقی قطرهای چهارضلعی $ABCD$ می‌گذرند.

ج) خطهای $P'_1P'_2$ و $P'_7P'_8$، $P'_2P'_3$ و $P'_8P'_9$، $P'_3P'_4$ و $P'_9P'_{10}$، وغیره نسبت به O'، مرکز مربع، قرینه هستند (← (ب) در بالا) و بنابراین موازی‌اند. به‌موجب ویژگیهای یك تصویر مرکزی، نتیجه می‌شود که خطهای P_1P_2 و P_7P_8، P_2P_3 و P_8P_9، P_3P_4 و P_9P_{10}، دو به دو برخط واصل بین نقطه‌های S و S_1، محل تلاقی اضلاع مقابل چهارضلعی $ABCD$، بگذرند (براثر تصویر بالا خط SS_1 به‌خط بینهایت بدل شده است).

۳۸. از یك تصویر مرکزی برای نگاشت چهارضلعی $ABCO$ بر یك چهارضلعی $A'B'C'O'$ استفاده می‌کنیم به‌طوری که O' نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث $A'B'C'$ باشد. امکان انجام این عمل از قضیهٔ ۱ ناشی می‌شود (ص ۵۹). براثر این تصویر اضلاع $\triangle A'_1B'_1C'_1$ بـا اضلاع $\triangle A'B'C'$ (شکل ۱۶۱) موازی می‌شوند. اگر نقاط تقاطع خطهای $A'A'_2$ و $B'B'_2$ و $C'C'_2$ را با اضلاع مقابل $\triangle A'B'C'$ به A'_3 و



شکل ۱۶۱

B'_3 و C'_3 نشان دهیم، نتیجه می گیریم که

$$\frac{A'C'_3}{B'C'_3}=\frac{B'_1C'_2}{A'_1C'_2}\ ,\ \frac{B'A'_3}{C'A'_3}=\frac{C'_1A'_2}{B'_1A'_2}\ ,\ \frac{C'B'_3}{A'B'_3}=\frac{A'_1B'_2}{C'_1B'_2}$$

حال فرض می کنیم

$$\frac{A'_1C'_2}{B'_1C'_2}\cdot\frac{B'_1A'_2}{C'_1A'_2}\cdot\frac{C'_1B'_2}{A'_1B'_2}=\pm 1$$

(به موجب قضیهٔ سوا و منلائوس ← مسألهٔ ۳۴)، معنی این فرض این است که خطهای $A'_1A'_2$ و $B'_1B'_2$ و $C'_1C'_2$ متقارب اند، یا اینکه نقاط A'_2 و B'_2 و C'_2 همخط اند.) لذا از اینجا نتیجه می شود که

$$\frac{A'C'_3}{B'C'_3}\cdot\frac{B'A'_3}{C'A'_3}\cdot\frac{C'B'_3}{A'B'_3}=\pm 1$$

ولی طبق همان قضیه‌ها معنی این تساویها این است کـه خطهای $A'A'_3$ و $B'B'_3$ و $C'C'_3$ متقارب اند، یا اینکه نقطه‌های A'_3 و B'_3 و C'_3 همخط اند، برحسب اینکه مقدار حاصلضرب بالا ۱ — یا ۱ + باشد.

بخش ۳

۳۹. الف) راه‌حـل اول (براساس قضیهٔ ۱). گیریم D و E و F نقطه‌هـای تماس دایرهٔ محاطی داخلی S با اضلاع $\triangle ABC$ بـاشند (شکل ۱۶۲ الف). O،

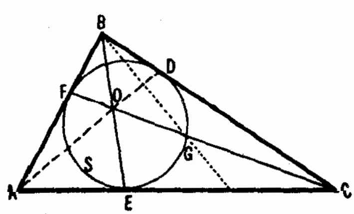
نقطهٔ تـلاقی BE و CF، درون دایرهٔ S قرار دارد. (خط BG، کـه G دومین نقطهٔ برخورد CF با دایرهٔ S است، پاره‌خط EC از خط AC را می‌برد. لذا BE وتر FG از S را می‌برد.)

حـال صفحهٔ شکل را بر یك صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌طوری کـه S به‌یك دایرهٔ S' و O به‌نقطهٔ O'، مرکز دایرهٔ S'، بدل‌شود. براثر این تصویر شکل ۱۶۲ الف بـه‌شکل ۱۶۲ ب بدل شده است. به‌آسانـی دیده می‌شود که خطهای $B'E'$ و $C'F'$ هم‌نیمسازها وهم ارتفاعات $\triangle A'B'C'$ هستند. از اینجا نتیجه می‌شود که $A'B'=B'C'$ و $C'A'=B'C'$. پـس مثلث $A'B'C'$ مثلثی متساوی‌الاضـلاع است و لذا خط $A'D'$ از O' می‌گذرد. تقارب $A'D'$ و $B'E'$ و $C'F'$ تقـارب AD و BE و CF را ایجاب می‌کند.

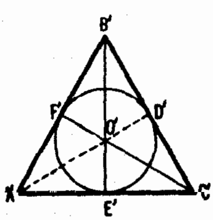
راه‌حل دوم (براساس قضیهٔ ۱'؛ نمادهـا همان نمادهای راه‌حل قبلی هستند). برامتداد AB نقطهٔ F_1 را چنان تعیین مـی‌کنیم کـه $F_1A/F_1B=-FA/FB$ (شکل ۱۶۳ الف). خط CF_1 بیرون مثلث ABC و بنابراین بیرون S قـرار دارد. صفحهٔ شکل را بریك صفحهٔ π' تصویرمی‌کنیم به‌طوری‌که S به‌یك‌دایرهٔ S' و خط CF_1 به‌خط بینهـایت صفحهٔ π' بدل شود. پس شکل ۱۶۳ الف به‌شکل ۱۶۳ ب بدل می‌شود، کـه $A'E'||B'D'||F'C'$. ملاحظه می‌کنیم کـه F' وسط پاره‌خط $A'B'$ است. [دلیل آن این است که، به‌موجب ویژگی (ج) از یك تصویر مرکزی داریم

$$\frac{F'_1A'/F'_1D'}{F'A'/F'B'}=-1\ ,\quad \frac{F'A'}{B'F'}=\frac{F'_1A'}{F'_1B'}$$

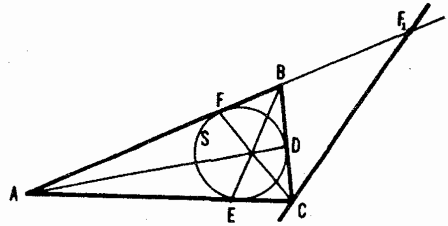
دراینجا F'_1 نقطهٔ بینهایت برخط $A'B'$ است چنانکه $F'A'/B'F'=1=F'_1A'/F'_1B'$.]



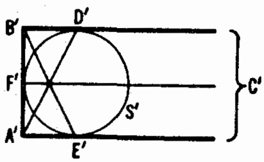
شکل ۱۶۲ الف



شکل ۱۶۲ ب



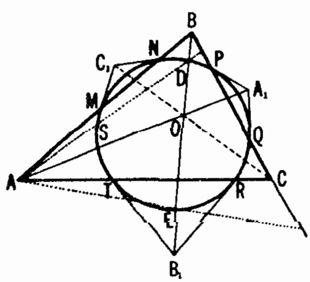
شکل ۱۶۳ الف



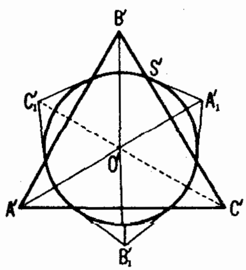
شکل ۱۶۳ ب

چون $|B'F'|=|A'F'|$، پس نتیجه می‌شود که $F'C'$ یک‌محور تقارن شکل‌حاصل است؛ و، واضح است که، نقطهٔ تلاقی خطهای $A'D'$ و $B'E'$ بر $F'C'$ قرار دارد. چون $A'D'$، $B'E'$ و $C'F'$ متقارب‌اند، این حکم برخطهای AD و BE و CF نیز جاری است.

ب) ملاحظه می‌کنیم که O نقطهٔ تقاطع خطهای AA_1 و BB_1 درون دایرهٔ S قرار دارد. زیرا AA_1 و BB_1 وترهای PQ و TR از دایرهٔ S را قطع می‌کنند (شکل ۱۶۴ الف). چون خطهای AD و AE، که D و E نقطه‌های تقاطع BB_1 با S هستند، BC را بیرون پاره‌خط PQ، و در دوطرف آن می‌برند، از آنجا نتیجه می‌شود که AA_1 وتر DE را می‌برد. حال صفحهٔ شکل ۱۶۴ الف را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌طوری که S به‌یک دایرهٔ S' بدل شود و O به O'، مرکز S'. لذا شکل ۱۶۴ الف به‌شکل ۱۶۴ ب بدل می‌شود. چون $A'A_1'$ و $B'B_1'$ از نقطهٔ O' می‌گذرند، درنتیجه $A'A_1' \perp B'C'$ و $B'B_1' \perp A'C'$. بنابراین $A'A_1'$ و $B'B_1'$ دو ارتفاع $\triangle A'B'C'$ خواهند بود، و O' نقطهٔ تلاقی آنها. از اینجا



شکل ۱۶۴ الف



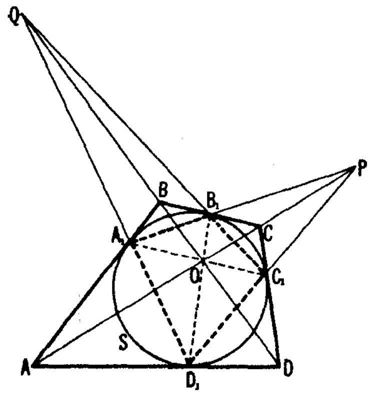
شکل ۱۶۴ ب

نتیجه می‌شود که $C'C'_1$ سومین ارتفاع $\triangle A'B'C'$ خواهد شد. روشن است که عمودهای مرسوم از O'، مرکز S'، بر ضلع $A'B'$ از $\triangle A'B'C'$ باید از C'_1 بگذرد. لذا خطهای $A'A'_1$ و $B'B'_1$ و $C'C'_1$ در O' متقارب می‌شوند. از اینجا نتیجه می‌شود که AA_1 و BB_1 و CC_1 نیز در O یکدیگر را می‌برند.

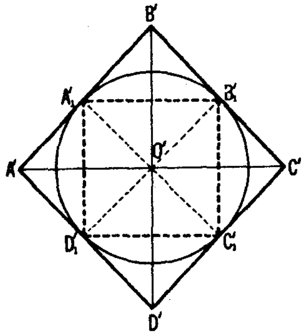
۴۰. صفحهٔ شکل ۱۶۵ الف را بریك صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌طوری که S به‌دایرهٔ S' و O، نقطهٔ تلاقی قطرهای چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$، به‌نقطهٔ O'، مرکز دایرهٔ S'، بدل شوند. لذا شکل ۱۶۵ الف به شکل ۱۶۵ ب بدل می‌شود که $A'B'\|C'D'\perp A'_1C'_1$ و $B'C'\|A'D'\perp B'_1D'_1$. در نتیجه $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاعی می‌شود که بریك دایره محیط است، یعنی یك لوزی است.

الف) می‌دانیم که نقطهٔ تقاطع قطرهای لوزی $A'B'C'D'$ بر مرکز دایرهٔ محاطی‌اش منطبق است. لذا نقاط تلاقی قطرهای چهارضلعیهای $A'B'C'D'$ و $A'_1B'_1C'_1D'_1$ برهم منطبق‌اند، و همین امر برای نقاط تلاقی قطرهای چهارضلعیهای $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ نیز صادق است.

ب) با توجه به‌ویژگی تقارن روشن است که $A'_1B'_1\|D'_1C'_1\|A'C'$ و $B'_1C'_1\|A'_1D'_1\|B'D'$. بنابراین AC باید از P بگذرد و BD از Q.

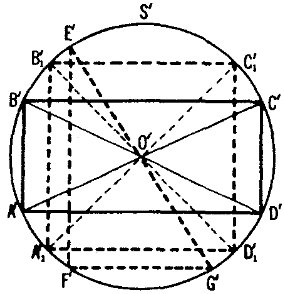


شکل ۱۶۵ الف



شکل ۱۶۵ ب

۴۱. صفحهٔ نمودار مسأله را بریك صفحهٔ جدید π' تصویر می‌کنیم به‌طوری که دایرهٔ S به‌یك دایرهٔ S' بدل شود ونقطهٔ O به O'، مرکز دایرهٔ S'. براثر این



شکل ۱۶۶

تصویر، چهارضلعی $ABCD$ به‌یك مستطیل $A'B'C'D'$ بدل‌می‌شود (زیرا قطرهای $A'B'C'D'$ درمرکز دایرهٔ محیطی S' متقاطع‌اند). بنابراین نقطه‌های P و Q به P' و Q'، نقاط بینهایت امتدادهای اضلاع مستطیل، بدل می‌شوند (شکل ۱۶۶).

الف) اگر اضلاع $E'F'$ و $F'G'$ از $\triangle E'F'G'$، محاط در S'، به‌ترتیب از نقطه‌های بینهایت P' و Q' بگذرند، یعنی هرگاه $E'F' \| A'B'$ و $F'G' \| B'C'$، آنگاه ضلع $E'G'$ از O'، مرکز S'، می‌گذرد (ضلع $E'G'$ مقابل به‌زاویهٔ قائمهٔ $E'F'G'$ محاط در S' است). اگر ضلع $E'G'$ ازمرکز O' بگذرد و $E'F'$ از نقطهٔ P'، یعنی اگر $E'F' \| A'B'$، آنگاه $F'G' \| B'C'$، یعنی $F'G'$ از نقطهٔ Q' می‌گذرد (زیرا زاویهٔ محاطی مقابل به‌قطر، قائمه است). حکم قسمت (الف) مسألهٔ ۴۱ نتیجه می‌شود.

ب) اگر اضلاع $A'_1B'_1$ و $D'_1C'_1$ از مستطیل $A'_1B'_1C'_1D'_1$، محاط در دایرهٔ S'، از نقطهٔ P' بگذرند و ضلع $B'_1C'_1$ از Q' بگذرد (یعنی، $A'_1B'_1 \| D'_1C'_1 \| A'B'$ و $B'_1C'_1 \| B'C'$)، آنگاه $A'_1D'_1 \| B'C' \| A'D'$، و قطرهای $A'_1C'_1$ و $B'_1D'_1$ در O'، مرکز S'، یکدیگر را می‌برند. از اینجا حکم قسمت (ب) نتیجه می‌شود.

ج) اگر قطرهای $A'_1C'_1$ و $B'_1D'_1$ از چهارضلعی محاطی $A'_1B'_1C'_1D'_1$ در مرکز O' از دایرهٔ S' یکدیگر را ببرند، و اگر ضلع $A'_1B'_1$ از نقطهٔ P' بگذرد (یعنی اگر $A'_1B'_1 \| A'B'$)، آنگاه $D'_1C'_1 \| A'B'$ و $B'_1C'_1 \| A'_1D'_1 \| B'C'$؛ وحکم قسمت (ج) نتیجه می‌شود.

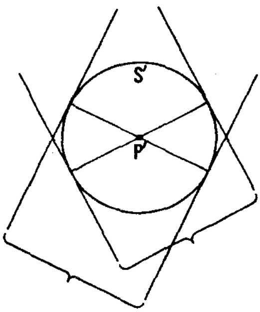
۴۲. دوحالت درنظر می‌گیریم.

۱. P نقطه‌ای است درخارج S. صفحهٔ نمودار مسأله را بریك صفحهٔ π'

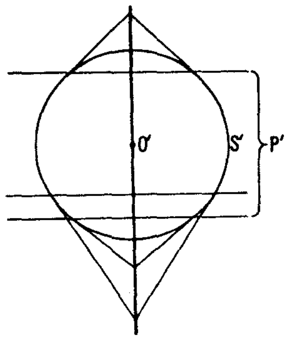
تصویر می کنیم به‌طوری کـه دایرهٔ S به یك دایرهٔ S'، و P به‌نقطهٔ بینهایت P' از π' بدل شوند. بر اثر این تصویر مکان مطلوب به‌یك‌خط، یعنی به‌قطری از S' عمود بر امتدادی که به‌وسیلهٔ نقطهٔ بینهایت P' مشخص می‌شود، بدل می گردد (شکل۱۶۷ الف) از آنجا نتیجه می‌شود که مکان مطلوب یك‌خط است.*

۲. P نقطه‌ای است در داخل S. صفحـهٔ نمودار مسأله را بر یك صفحهٔ π' تصویر مـی کنیم به‌طوری که S به‌یك دایرهٔ S' بـدل شود و P به P'، مرکز S'. روشن است کـه مکان مطلوب در این‌صورت به‌خط بینهایت π' بدل می‌شود (شکل ۱۶۷ب) از اینجا نتیجه می‌شود که مکان مطلوب یك‌خط است.

ملاحظه می کنیم که اگر P نقطه‌ای بر S باشد، آنگاه مکان‌مطلوب، مماس بر S در P خواهد شد.**



شکل ۱۶۷ ب



شکل ۱۶۷ الف

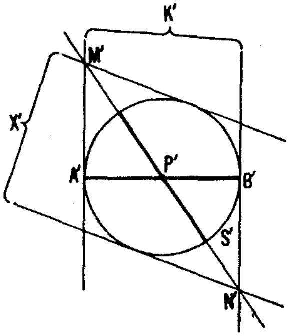
۴۳. الف) دوحالت درنظر می گیریم.

۱. P نقطه‌ای است در خارج S (← شکل۵۸ الف). صفحهٔ نمودار مسألـه را بر یك صفحهٔ π' تصویر می کنیم به‌طوری که S به‌یك دایرهٔ S' و P به P'، نقطهٔ بینهایت π'، بدل‌شوند. در این‌حال‌خطهای AB و MN به‌خطهای $A'B'$ و $M'N'$ بدل می‌شوند (شکل ۱۶۸ الف). با توجه به ملاحظات تقارن، نتیجه می‌شود کـه نقطه‌هـای K' و X' (شکل ۱۶۸ الف) برقطری از S' عمود برخط l'، نگارهٔ l،

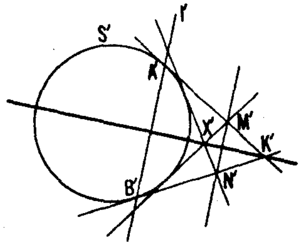
---

* دقیقتر بگوییم قسمتی ازیك خط دربیرون S.

** مکان موردنظر برقطبی P نسبت به S منطبق است (← بخش ۴، ص ۸۷).



شکل ۱۶۸ ب



شکل ۱۶۸ الف

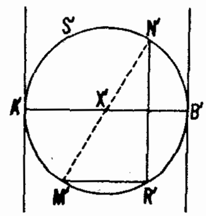
قرار دارند. بنابراین‌مکان X' خطی است مار بر K' و عمود بر l'. درنتیجه مکان X خطی می‌شود که بر K می‌گذرد.

۲. P نقطه‌ای است در داخل S. صفحهٔ نمودار را بریك صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌طوری که S به‌دایرهٔ S' و P به P'، مرکز S' بدل شوند (شکل ۱۶۸ ب). در این‌صورت‌خطهای $A'B'$ و $M'N'$ قطرهای S' هستند. بنابراین مماسهای $A'K'$ و $B'K'$ بر S' در A' و B' موازی‌اند. بنابراین مماسهای دوم بر S' از M' و N' نیز موازی‌اند. ملاحظه می‌کنیم کــه در این‌حــالت مکان X' خط بینهایت π' است. نقطهٔ K' نیز بر این خط است. لذا مکان X خطی است که بر K می‌گذرد.

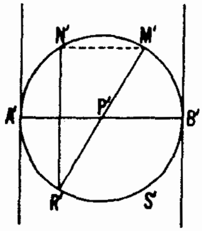
روشن‌است که شرایط مسأله حالتی را که P بر S است مستثنی می‌کند. (اگر P بر A منطبق بــاشد، M نیز بر A منطبق است، و در آن فقط یك مماس تنهــا بر S وجود دارد که همان‌خط AK است.)

ب) اگر P بر S باشد، روشن است که حکم مسأله صحیح است. (چون، اگر P بر A منطبق باشد، آنگــاه N نیز بر A منطبق است و نقطهٔ ثابت X بر A منطبق می‌شود.) بنابراین باید مسأله را برای دوحالت درنظر بگیریم.

۱. P نقطه‌ای است درخــارج S. صفحهٔ نمودار مسأله را بــریك صفحهٔ π' تصویرمی‌کنیم به‌قسمی کــه S به‌یك دایرهٔ S' بدل شود، و PK به‌خط بینهایت π' (شکل ۱۶۹ الف). پس AB به‌یك قطر $A'B'$ از S' بدل می‌شود، و خطهای AK و BK به مماسهای بردایره در نقطه‌های A' و B'. به‌آسانی دیده‌می‌شود که $R'M'$ و $R'N'$ برهم‌عمودند وبنابراین $M'N'$ قطری‌است از S'. لذا به‌ازای هرانتخاب نقطهٔ R'، خط $M'N'$ از X'، مرکز S'، می‌گذرد؛ و حکم نتیجه می‌شود.



شکل ۱۶۹ الف



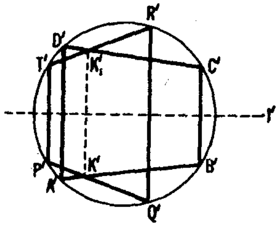
شکل ۱۶۹ ب

۲. P نقطه‌ای‌است در داخل S (رك. شکل ۵۸ ب). صفحهٔ نمودار مسأله را بریك صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌طوری که دایرهٔ S به‌یك دایرهٔ S' بدل شود و P به P'، مرکز S' (شکل ۱۶۹ ب). لذا AB به‌قطر $A'B'$ از دایرهٔ S'، و K به‌نقطهٔ بینهایت K' از قطر عمود بر $A'B'$ بدل می‌شوند. چون $R'N' \perp A'B'$ و $M'N' \perp R'N'$، از اینجا نتیجه‌می‌شود که $M'N' \| A'B'$؛ یعنی به‌ازای‌هر انتخاب نقطهٔ R'، خطهای $M'N'$ و $A'B'$ در نقطهٔ بینهایت X' از $A'B'$ تلاقی می‌کنند، و حکم نتیجه می‌شود.

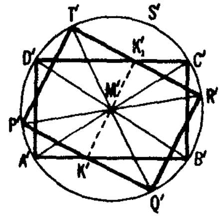
۴۴. الف) فرض می‌کنیم چهارضلعی مطلوب $ABCD$ رسم شده و نقطهٔ مفروض M نقطهٔ تقاطع قطرهای آن باشد، و AB و CD از نقطه‌های مفروض K و L بگذرند. صفحهٔ نمودار مسأله را بریك صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌گونه‌ای که دایرهٔ محیطی آن S به‌یك دایرهٔ S' بدل شود و M به‌نقطهٔ M'، مرکز S'. دراین حال $ABCD$ به‌یك‌مستطیل $A'B'C'D'$ بدل می‌شود.

حال اگر $P'Q'R'T'$ یك چهارضلعی محاط در S' باشد که قطرهایش در مرکز M' متلاقی باشند (که مستطیل بودن آن را ایجاب می‌کند) وضلع $P'Q'$ آن از K' بگذرد، آنگاه ضلع $R'T'$ باید از K'_1 قرینهٔ K' نسبت به M' بگذرد (شکل ۱۷۰ الف). بدین‌ترتیب اضلاع $R'T'$ درهمهٔ چهار ضلعیهای محاط در S' که اقطارشان در M' متلاقی‌اند واضلاع $P'Q'$ آنها از K' می‌گذرند، از نقطهٔ ثابت K'_1 می‌گذرند. از اینجا نتیجه می‌شود که اضلاع RTی همهٔ چهارضلعیهای $PQRT$ محاط در S که قطرهای آنها در یك نقطهٔ M متلاقی‌اند و اضلاع PQی آنها از K می‌گذرند، از نقطهٔ ثابت K_1 می‌گذرند. برای تعیین K_1 کافی است که دوتا ازاین چهارضلعیها را رسم کنیم. ضلع CDی چهارضلعی مطلوب $ABCD$ از وصل K_1 به L به‌دست می‌آید.

اگر K_1L با S متقاطع و K_1 غیراز L باشد مسأله‌جوابی‌منحصر به‌فرد دارد.



شکل ۱۷۰ ب



شکل ۱۷۰ الف

اگر K_1L دایرهٔ S را نبرد، مسأله جواب ندارد. اگر K_1 بر L منطبق باشد، مسأله بینهایت جواب دارد.

ب) فرض می‌کنیم $ABCD$ چهارضلعی مطلوب محاط در دایرهٔ S باشد که اضلاع BC و ADی آن در یک نقطهٔ مفروض M متلاقی باشند و اضلاع AB و CDی آن به‌ترتیب از نقطه‌های مفروض K و L بگذرند. صفحهٔ نمودار را بر یک صفحه π' تصویر می‌کنیم به‌گونه‌ای که S به‌یک دایرهٔ S' بدل شود و M به‌یک نقطهٔ بینهایت M' از π'. در این صورت چهارضلعی $ABCD$ به یک ذوزنقهٔ $A'B'C'D'$ به قاعده‌های $B'C'$ و $D'A'$ بدل می‌شود (← شکل ۱۷۰ ب). چون ذوزنقهٔ محاط دریک دایره است، پس متساوی‌الساقین است.

یک چهارضلعی $P'Q'R'T'$، محاط در دایرهٔ S'، که اضلاع $Q'R'$ و $T'P'$ آن در نقطهٔ بینهایت M' متلاقی باشند، ذوزنقه‌ای است متساوی‌الساقین که محور تقارنش قطر l' از دایرهٔ S' عمود بر امتدادی است که با M' معین می‌شود. بنابراین، هرگاه ضلع $P'Q'$ از چهارضلعی از نقطه‌ای مانند K' بگذرد؛ آنگاه ضلع $R'T'$ از نقطهٔ K'_1، قرینهٔ K' نسبت به l'، خواهد گذشت. از آنجا نتیجه می‌شود که اضلاع RT در همهٔ چهارضلعیهای محاطی $PQRT$، که اضلاع QR و PTی آنها در M متلاقی‌اند و اضلاع PQی آنها از K می‌گذرند، از نقطهٔ ثابت K_1 می‌گذرند. برای پیدا کردن K_1 کافی است دوتا از این چهارضلعیها را رسم کنیم. از وصل کردن K_1 به L، ضلع CDی چهارضلعی مطلوب به‌دست می‌آید.

اگر K_1 از L متمایز باشد، مسأله (بسته به‌اینکه خط K_1L دایره را ببرد یا نبرد) یا یک جواب منحصربه‌فرد دارد و یا جوابی ندارد. اگر K_1 و L برهم منطبق باشند، آنگاه مسأله بینهایت جواب پیدا می‌کند.

۴۵. اگر O بر S منطبق باشد، مسأله بیمعنی است. مانده است دوحالت زیر

را بررسی کنیم.

۱. O نقطه‌ای است در خارج S. صفحهٔ نمودار را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌گونه‌ای که دایرهٔ S به‌یک دایرهٔ S' بدل شود، و O به‌یک نقطهٔ بینهایت O' از π'. براثر این تصویر، شکل ۵۹ به‌شکل ۱۷۱ الف بدل می‌شود که

$$A'A'_1 \| B'B'_1 \| C'C'_1$$

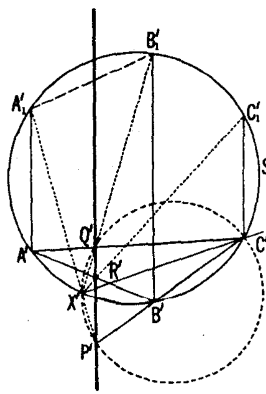
نشان می‌دهیم که $P'Q' \| A'A'_1$. ذوزنقهٔ $A'B'B'_1A'_1$ محاط در S' متساوی‌الساقین است، $A'B' = A'_1B'_1$. بنابراین $\overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{A'_1B'_1}$ و $\sphericalangle A'C'B' = \sphericalangle A'_1X'B'_1$ ولی این تساویها ایجاب می‌کنند که نقطه‌های X' و C' و P' و Q' بر یک دایره قرار داشته باشند. بنابراین $\sphericalangle X'P'Q' = \sphericalangle X'C'Q' = \sphericalangle X'C'A'$. ولی $\sphericalangle X'C'A' = \sphericalangle X'A'_1A'$، لذا $\sphericalangle X'P'Q' = \sphericalangle X'A'_1A'$ و، بالاخره $P'Q' \| A'A'_1$.

به‌طریقی مشابه ثابت می‌کنیم که $Q'R' \| B'B'_1$. پس داریم

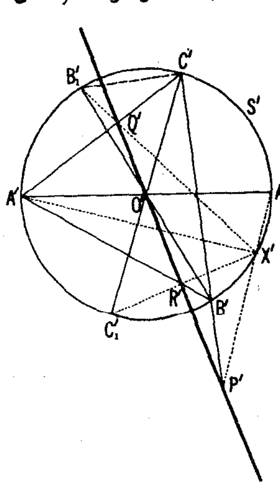
$$P'Q' \| Q'R' \| A'A'_1$$

که بدین معنی است که P' و Q' و R' بر خطی قرار دارند که بر نقطهٔ بینهایت O' می‌گذرد. از آنجا نتیجه می‌شود که نقطه‌های P و Q و R، شکل ۵۹، بر یک خط واقع‌اند که بر O می‌گذرد.

۲. O نقطه‌ای است در داخل S. صفحهٔ شکل ۵۹ را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌گونه‌ای که S به‌یک‌دایرهٔ S' بدل شود و O به O'، مرکز S' (شکل ۱۷۱ ب).



شکل ۱۷۱ الف



شکل ۱۷۱ ب

ثابت می‌کنیم که $P'Q'$ از O' می‌گذرد. بدین‌منظور اول ثابت می‌کنیم که

$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{P'O'B'}}=\frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B'_1}} \qquad (*)$$

که S_{XYZ} معرف مساحت $\triangle XYZ$ است.

حال اگر XY یك‌خط‌باشد، پاره‌خط مرسوم‌از O' و عمودبر XY، یاطول آن را، (که معنی موردنظر ازمتن پیدا خواهد شد) به h_{XY} نشان می‌دهیم. پس

$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{P'O'B'}}=\frac{P'A'_1\cdot h_{X'A'_1}}{P'B'\cdot h_{B'C'}}\,,\ \frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B'_1}}=\frac{Q'A'\cdot h_{C'A'}}{Q'B'_1\cdot h_{X'B'_1}} \qquad (**)$$

یادآور می‌شویم که $h_{X'A'_1}$ میانخط $\triangle X'A'_1A'$ است، بنابراین $h_{X'A'_1}=(۱/۲)X'A'$. همچنین $h_{B'C'}=(۱/۲)B'_1C'$. بساز از تشابه مثلثهای $A'Q'X'$ و $B'_1Q'C'$ نتیجه می‌شود که

$$\frac{h_{X'A'_1}}{h_{B'C'}}=\frac{X'A'}{B'_1C'}=\frac{Q'A'}{Q'B'_1} \quad \text{و لذا} \quad \frac{A'X'}{B'_1C'}=\frac{Q'A'}{Q'B'_1}$$

همچنین، با استدلالی مشابه به‌دست می‌آوریم

$$\frac{h_{C'A'}}{h_{X'B'_1}}=\frac{P'A'_1}{P'B'}$$

از قراردادن این روابط در تساویهای (**)، به‌رابطهٔ (*) می‌رسیم.

حال نقطهٔ تلاقی $P'Q'$ را باضلع $A'C'$ از $\triangle A'B'C'$ به Q'_1 نشان می‌دهیم. همچنین فرض می‌کنیم h_1 و h_2 و h_3 و h_4 طولهای عمودهـای مرسوم از نقطه‌هـای A'_1 و B' و A' و B'_1 برخط $P'O'Q'_1$ باشند. چون $O'A'=O'A'_1$، از آنجا نتیجه می‌شود که $h_1=h_3$ و به‌طریق مشابه $h_2=h_4$. بنابراین

$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{Q'_1O'A'}}=\frac{P'O'}{Q'_1O'}\,,\ \frac{S_{P'O'B'}}{S_{Q'_1O'B'_1}}=\frac{P'O'}{Q'_1O'}$$

و بنابراین

$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{Q'_1O'A'}}=\frac{S_{P'O'B'}}{S_{Q'_1O'B'_1}}$$

یا

$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{P'O'B'}}=\frac{S_{Q_1'O'A'}}{S_{Q_1'O'B'_1}} \qquad (***)$$

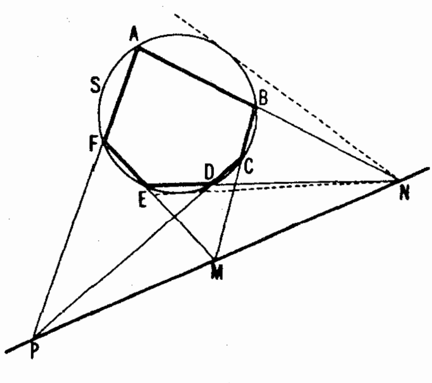
از مقایسهٔ تساویهای (***) و (*) نتیجه می گیریم

$$\frac{S_{Q'_1O'A'}}{S_{Q'_1O'B'_1}}=\frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B'_1}}$$

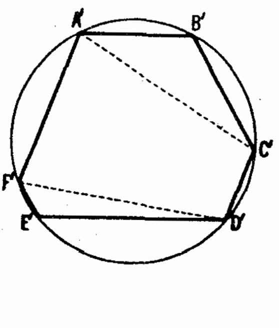
از اینجا نتیجه می‌شود که Q'_1 بر Q' منطبق است.

استدلالی مشابه، نشان می‌دهد که R' بر خط $O'P'$ قرار دارد. لذا، P' و Q' و R' بر یك خط مار بر O' واقع‌اند، و حکم مسأله نتیجه می‌شود.

۴۶. فرض مــی کنیم M و N و P نقطه‌هــای تلاقی اضلاع مقابل شش‌ضلعی محاطی $ABCDEF$ بــاشد (← شکل ۶۰ و شکل ۱۷۲ الف) . چون نقاط تماس مماسهــای مــرسوم از N بر S بر کمانهای $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{DE}$ قرار دارند، از اینجا نتیجه می‌شود که NM دایرهٔ S را نمی بــرد. بنابراین مــی توانیم صفحهٔ شکل ۱۷۲ الف را بر یك صفحهٔ π' تصویر کنیم به‌گونه‌ای که S به‌یك دایرهٔ S' بدل شود، و NM بــه‌خط بینهــایت π'. پس شکل ۱۷۲ الف بــه‌شکل ۱۷۲ ب بــدل مــی‌شود کــه $A'B'\|E'D'$ و $B'C'\|E'F'$. در نــتیجــه $\sphericalangle A'B'C'=\sphericalangle D'E'F'$ یــعــنــی $\overset{\frown}{A'B'C'}=\overset{\frown}{D'E'F'}$. از اینجا نتیجه می‌شود که



شکل ۱۷۲ الف



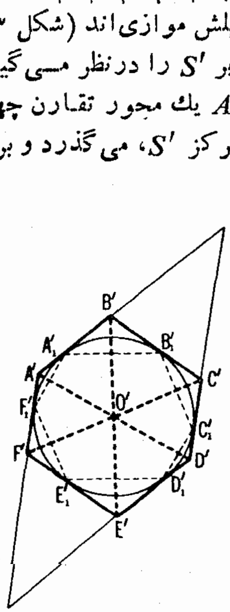
شکل ۱۷۲ ب

$$\sphericalangle F'A'C' + \sphericalangle D'C'A' = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{C'D'} + \overset{\frown}{D'E'F'}) + \frac{1}{2}(\overset{\frown}{F'A'} + \overset{\frown}{D'E'F'})$$

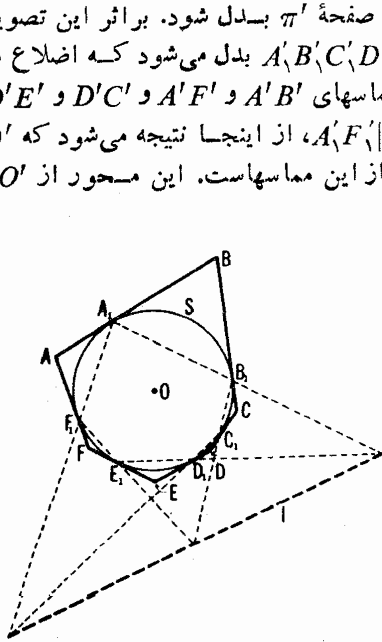
$$= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{C'D'} + \overset{\frown}{D'E'F'} + \overset{\frown}{F'A'} + \overset{\frown}{A'B'C'}) = 180^\circ$$

بنا براین $A'F' \| C'D'$، یعنی، خطهـای $A'F'$ و $D'C'$ دریـك نقطه در بینهـایت یکدیگر را می برند. لـذا، P' و M' و N'، نقاط تقاطع اضلاع مقابل شش ضلعی $A'B'C'D'E'F'$ همخط اند ــ بر یك خط بینهایت صفحهٔ π' قرار دارند. در نتیجه، نقطه‌های P و M و N در شکل ۱۷۲ الف نیز همخط اند.

۴۷. شش‌ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ شکل ۱۷۳ الف در دایرهٔ S محاط شده است و لذا در شرایط قضیهٔ پاسکال (مسألهٔ ۴۶) صدق می‌کند. صفحهٔ شکل ۱۷۳ الف را بر یك صفحهٔ π' تصویر می کنیم به‌گونه‌ای که S به‌یك دایرهٔ S' بدل شود وخط l، که نقاط تلاقی اضلاع مقابل شش‌ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ را برخود دارد، به‌خط بینهایت صفحهٔ π' بـدل شود. براثر این تصویر، $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ به شش‌ضلعی $A'_1B'_1C'_1D'_1E'_1F'_1$ بدل می‌شود کـه اضلاع مقابلش موازی‌اند (شکل ۱۷۳ ب). حـال مماسهای $A'B'$ و $A'F'$ و $D'C'$ و $D'E'$ بر S' را درنظر مـی گیریم. چون $A'_1F'_1 \| C'_1D'_1$، از اینجـا نتیجه می‌شود که $A'D'$ یك محور تقـارن چهـارضلعی حاصل از این مماسهاست. این مـحور از O'، مرکز S'، می گذرد و بر $A'_1F'_1$ و



شکل ۱۷۳ ب

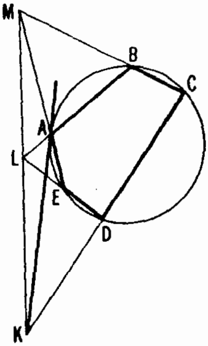


شکل ۱۷۳ الف

$C'_1D'_1$ عمود است. به طریقی کاملاً مشابه می‌توانیم ثابت کنیم کـه خطهای $B'E'$ و $C'F'$ از O' می‌گذرند. از اینجا نتیجه می‌شود کـه خطهای AD و BE و CF متقارب‌اند.

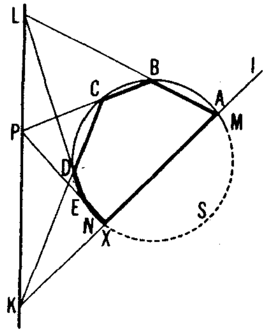
۴۸. پنج‌ضلعی $ABCDE$ محاط در دایرهٔ مفروض S را درنظر می‌گیریم (B و C و D و E نقاطی هستند دلخواه بردایره). از قضیهٔ پاسکال نتیجه می‌شود که K، نقطهٔ تقاطع مماس بر S در A با ضلع CD، برخط واصل بین L و M، قراردارد که به‌ترتیب نقطه‌های تقاطع AB و DE، AE و BC هستند (← شکل ۱۷۴ و شکل ۶۲ الف). بنابراین K می‌تواند باستارهٔ تنها مشخص شود (زیرا کـه نقطهٔ تقاطع CD و LM است). خط واصل بین A و K مماس مطلوب است.

یادآوری: یادآور می‌شویم که این ترسیم‌را ممکن است به‌رسم قوس کوچک دلخواهی که‌شامل A است محدود کرد (نقطه‌های C و D و E و F را می‌توان بر آن کمان اختیار کرد). این امر در آنچه که بعداً خواهد آمد مورد استفاده قرار خواهد گرفت.



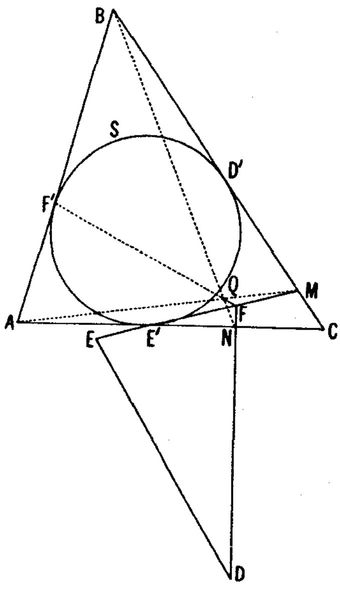
شکل ۱۷۴

۴۹. شش‌ضلعی $ABCDEX$ محاط در دایرهٔ S را، کـه A و X نقطه‌های تلاقی خط l با S، و B و C و D و E نقطه‌های اختیاری از کمان MN (شکل ۱۷۵) هستند درنظر می‌گیریم. به‌موجب قضیهٔ پاسکال (← مسألهٔ ۶۴)، K و L و P، نقطه‌های تلاقی خطهای AX (یعنی، خط l) و CD، AB و DE، BC و EX، همخط‌اند. بنابراین بااستفاده از ستارهٔ تنها، می‌توانیم اول P را (به‌صورت نقطهٔ تلاقی BC و KL) و سپس X را (به‌صورت نقطهٔ تلاقی PE و l) پیدا کنیم.



شکل ۱۷۵

۵۰. شش‌ضلعی (تباهیدهٔ) $AF'BMFN$ (شکل ۶۵) را درنظر می‌گیریم. از قضیهٔ بریانشون نتیجه می‌شود که خط FF' از نقطهٔ تلاقی خطهای AM و BN، یعنی Q، می‌گذرد (شکل ۱۷۶). بـا درنظر گرفتن شش ضلعیهای مناسب، به‌طریق



شکل ۱۷۶

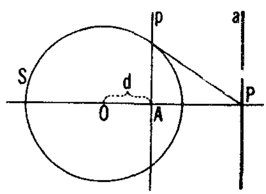
مشابه نشان می‌دهیم که خطهای DD' و EE' هم از Q می‌گذرند.

بخش ۴

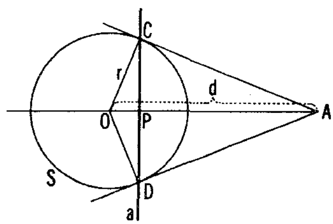
۵۱. اگر A در بیرون دایرهٔ S $(d>1)$ باشد و AC و AD مماسهای مرسوم از A بر S باشند، آنگاه a، قطبی نقطهٔ A، بر CD منطبق است و $a \perp OA$ (→ ص ۸۸). فرض می‌کنیم P نقطهٔ تلاقی CD و OA باشد (شکل ۱۷۷ الف). چون مثلثهای OCA و OPC متشابه‌اند $OA/OC = OC/OP$ یا $OP = OC^2/OA = 1/d$، که همان‌چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

اگر A بر S $(d=1)$ باشد، قضیه بدیهی‌است. اگر A در داخل S $(d<1)$ باشد، p خطی است مار بر A و عمود بر OA، و P قطب p است، پس P برخط OA در بیرون S واقع است (شکل ۱۷۷ ب). مانند فوق نتیجه می گیریم که $OA = 1/OP$ یا $OP = 1/OA = 1/d$. a، قطبی A، عمودی است که از P بر OA رسم می‌شود (→ قضیهٔ ۲، ص ۸۹). بنابراین OP برابر فاصلهٔ O از a است؛ اما این فاصله درست $1/d$ است.

یادداشت. به‌همین طریق، می‌توانیم ثابت‌کنیم که، اگر فاصلهٔ A از O برابر d و شعاع دایره r باشد، فاصلهٔ a، قطبی A، از O برابر r^2/d است.

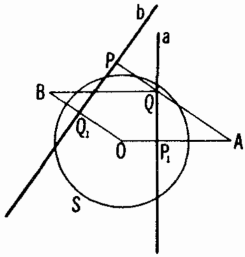


شکل ۱۷۷ ب



شکل ۱۷۷ الف

۵۲. فرض می‌کنیم P_1 نقطهٔ تلاقی OA و a باشد، و Q_1 نقطهٔ تلاقی OB و b (شکل ۱۷۸). ذوزنقه‌های قائم‌الزاویهٔ $OAPQ_1$ و $OBQP_1$ با $\sphericalangle AOQ_1 = \sphericalangle BOP_1$ را در نظر می گیریم. به‌موجب مسألهٔ ۵۱، داریم $OA \cdot OP_1 = OB \cdot OQ_1 = r^2$ (r شعاع دایرهٔ S)، لذا $OA/OB = OQ_1/OP_1$. از اینجا نتیجه می‌شود که ذوزنقه‌ها متشابه‌اند. ($OAPQ_1$ براثر یك تجانس به‌مرکز O و نسبت تجانس $k = OA/OB = OQ_1/OP_1$، و به‌دنبال آن یك تقارن نسبت به‌نیمساز زاویهٔ AOB از $OBQP_1$ به‌دست آمده است.) بنابراین $OA/AP = OB/BQ$ (OA و OB،



شکل ۱۷۸

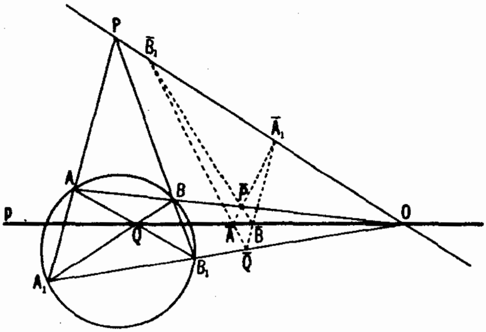
AP و BQ جفتهای اضلاع متناظر ذوزنقه‌ها هستند)، که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۵۳. الف) فرض می کنیم P و Q نقطه‌های تلاقی اضلاع چهارضلعی محاط در S باشند، و R نقطهٔ تلاقی قطرهای آن. از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که R قطب PQ است (← شکل ۷۳ الف) که این امر قضیهٔ ما را ایجاب می کند (← ص ۹۰).

ب) اگر A_1 و B_1 و C_1 و D_1، نقطه‌های تماس اضلاع چهارضلعی $ABCD$ محیط بر دایرهٔ S (شکل ۵۷) باشد، آنگاه نقطه‌های تلاقی قطرهای چهارضلعی $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ برهم منطبق‌اند (← مسألهٔ ۴۰ (الف)، بخش ۳). همچنین خطهای واصل بین نقطه‌های تلاقی اضلاع مقابل چهارضلعیها برهم منطبق‌اند (روش اثبات، شبیه به‌روش اثبات مسألهٔ ۴۰ (الف) است). قضیهٔ مورد بحث از قسمت (الف) نتیجه می‌شود.

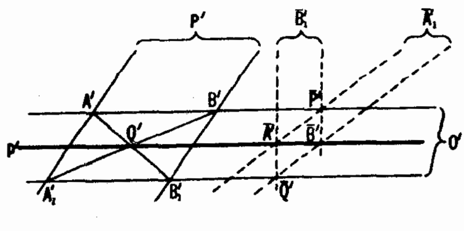
۵۴. نقطه‌های تماس دومماس مرسوم از A بر دایرهٔ S باخط واصل بین نقطه‌های تلاقی S با a، قطبی A، برهم منطبق‌اند (←ص ۶۸). حال a می‌تواند به‌آسانی با استفاده از ستارهٔ تنها رسم شود (← شکل ۶۶ ب). برای رسم مماسها، A را به نقطه‌های تلاقی a و S وصل می کنیم.

۵۵. فرض می کنیم که ABB_1A_1 یك چهارضلعی محاطی در یك دایرهٔ S باشد. اگر اضلاع AA_1 و BB_1 در P متقاطع باشند، و اضلاع AB و A_1B_1 در O، وقطرهای AB_1 و BA_1 در Q، آنگاه p، قطبی P، خط OQ خواهدشد (شکل ۱۷۹ الف). از اینجا نتیجه می‌شود که p قطبی P نسبت به‌دوخط AB و A_1B_1 است (← مسألهٔ ۱۷ (الف)، بخش ۲). لذا p قطبی هر نقطه از خط OP نسبت به‌خطهای AB و A_1B_1 است (← مسألهٔ ۱۷ (الف)). به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که قطبی

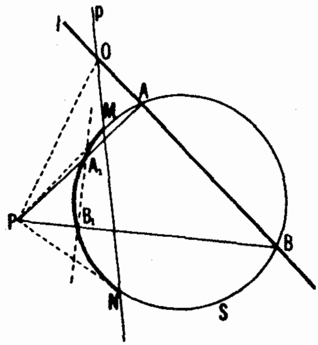


شکل ۱۷۹ الف

هر نقطهٔ AB نسبت به‌خطهای OP و p است. [برای اثبات، چهار خط AB و A_1B_1 و OP و p از صفحهٔ π را بر یك صفحهٔ جدید π' تصویر می‌کنیم بـه گونه‌ای کـه OP خط خاص π باشد. در این‌صورت AB و A_1B_1 به‌خطهای مـوازی $A'B'$ و $A_1'B_1'$، و OP به $O'P'$، خط بینهایت‌صفحهٔ π'، و p به‌میانخط p' از نوارحاصل به‌وسیلهٔ $A'B'$ و $A_1'B_1'$ (شکل ۱۷۹ب) بدل می‌شوند. بنا بر تعریف قطبی یك نقطه نسبت به‌دوخط، $A_1'B_1'$ قطبی هر نقطهٔ P' واقع برخط $A'B'$ است نسبت به‌خطهای p' و $O'P'$ (← راه‌حل مسألهٔ ۱۷(الف)). اما در این‌صورت A_1B_1 قطبی پیشنگار نقطهٔ P، واقع برخط AB، نسبت به‌خطهای p و OP است.] بنابراین، وقتی خطهای OP و p و AB داده شده باشند، مـی‌توانیم خط A_1B_1 را به‌وسیلهٔ ستارهٔ تنها رسم کنیم، یعنی دوخط $\bar{P}\bar{A}\bar{A}_1$ و $\bar{P}\bar{B}\bar{B}_1$ متقاطع در $\bar{P}$ بر AB را رسم مـی‌کنیم ($\bar{A}$ و $\bar{B}$ بر p واقع‌اند، درحالی‌که $\bar{A}_1$ و $\bar{B}_1$ بر OP واقع‌اند)، و $\bar{Q}$، نقطهٔ تلاقی خطهای $\bar{A}\bar{B}_1$ و $\bar{B}\bar{A}_1$ را به O، نقطهٔ تلاقی خطهای p و AB، وصل می‌کنیم.



شکل ۱۷۹ ب



شکل ۱۸۰

اکنون به‌حل مسألهٔ خود باز می گردیم. فرض می کنیم p خطی اختیاری باشد که l را در نقطه‌ای مانند O، وکمان مفروض را در نقطه‌های M و N بریده است. (نقطه‌های تلاقی p باکمان مفروض می‌تواند بردو سرکمان منطبق باشد. آنچه که مامی‌خواهیم این‌است که‌خط p موازی با l نباشد وکمان MN کمتراز یك‌نیمدایره باشد.) قطب Pی p نسبت به S، نقطهٔ تلاقی مماسهای بر S درنقاط MوN است، و می‌تواند به‌وسیلهٔ ستارهٔ تنها رسم شود (← مثلا، مسألهٔ ۴۸، بویژه یادداشت انتهای راه‌حل این‌مسأله؛ می‌توان از قضیهٔ ۱،ص۸۴، نیز استفاده کرد).حال فرض می کنیم که l دایرهٔ S را در نقاط A و B (که می‌خواهیم تعیین کنیم) ببرد. خطهای PA و PB دایرهٔ S را در دونقطهٔ دیگر A_1 و B_1 می برند (شکل ۱۸۰). چنانچه در بالا نشان دادیم، وقتی خطهای AB (یعنی l) و p داده شده باشند، مـی‌توانیم A_1B_1 را با ستارهٔ تنها رسم کنیم. یادآور می‌شویم که اگر l درخارج زاویهٔ MOP بـاشد (که دراین‌حال، l دایرهٔ S را می‌برد ولی‌کمان MN را نمی‌برد)، آنگـاه A_1B_1 از داخل‌زاویهٔ MOP می گذرد و درنتیجه، یا S رانمی برد (دراین‌صورت l دایرهٔ S را نمی‌برد، و نقطه‌های A و B وجودندارند). یـاکمان MN را در نقاط A_1 و B_1 می‌برد. نقاط‌تقاطع PA_1 و PB_1 بـا l، نقاط‌مطلوب‌اند.

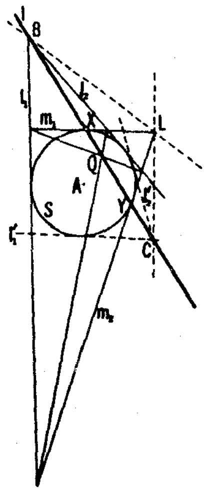
بررسی مشروح‌حالتی که A_1 و B_1 برهم منطبق‌اند، یعنی خط A_1B_1 بر S در A_1 مماس است، به‌عهدهٔ خواننده گذاشته مـی‌شود. دراین‌حال l بر S در A، نقطـهٔ تقاطع PA_1 و l، مماس است، p قطبی P نسبت به‌خطهای OA و OA_1 است.

۵۶. در شکل ۷۲ (ب) خط l_2 مماسی‌است که از B بر دایرهٔ S به‌مرکز A و

شعاع a مماس شده است. بنا براین می‌توانیم به‌وسیلهٔ یك خطکش موازی از یك نقطهٔ اختیاری B دومماس l_1 و l_2 را بدون رسم S، بر S رسم کنیم (شکل ۱۸۱؛ طبیعی است که باید B خارج S باشد). حال فرض می‌کنیم B نقطه‌ای از l باشد، L قطب l نسبت به S، و m_1 و m_2 مماسهای مرسوم از L بر S باشند. Q، نقطهٔ تقاطع قطرهای چهارضلعی حاصل از خطهای l_1 و l_2 و m_1 و m_2، بر l واقع است (→ مسألهٔ ۴۰، بخش ۳). از اینجا نتیجه‌می‌شود کـه BQ (یعنی l) قطبی L است نسبت به‌خطهای l_1 و l_2، و BL قطبی Q است نسبت‌به l_1 و l_2 (→ مسألهٔ ۱۷ (الف)، بخش ۲). پس BL قطبی هر نقطهٔ l است نسبت‌به l_1 و l_2 (→ مسألهٔ ۱۷ (الف))، چون l داده شده است و l_1 و l_2 را می‌توان رسم کرد، خط BL را می‌توان به‌وسیلهٔ ستارهٔ تنها رسم نمود.

به‌روشی مشابه می‌توانیم خط CL را پیداکنیم، که C نقطهٔ دیگری است از l درخارج S. پس L نقطهٔ تلاقی BL و CL است. مماسهای m_1 و m_2 مرسوم از L بر S، که می‌توانند به وسیلهٔ یك خطکش موازی رسم شوند، l را درنقطه‌هـای مطلوب X و Y می‌برند.

[اگر l دایرهٔ S را نبرد، آنگاه L در داخل S واقع است، ونمی‌توان مماسی از L بر S رسم کرد.]

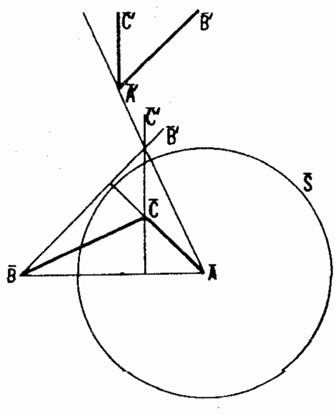


شکل ۱۸۱

۵۷. گیریم a قطبی A نسبت به‌دایرهٔ S باشد. اگر از یك تصویر مرکزی برای تصویر S بر یك دایرهٔ $\bar{S}$ و تصویر A بر یك نقطهٔ $\bar{A}$ استفاده کنیم، آنگاه خط a به‌خط $\bar{a}$، قطبی $\bar{A}$ نسبت به $\bar{S}$، بدل خواهد شد. به‌طریق مشابه، یك خط b، قطبی B نسبت به S، براثر این تصویر به‌خط $\bar{b}$، قطبی $\bar{B}$ نسبت به $\bar{S}$، بدل می‌شود، که $\bar{b}$ نگارهٔ b است. حال اوضاع مختلف وممکن مثلثهای ABC و $A'B'C'$ را نسبت به S درنظر می‌گیریم.

۱. فرض می‌کنیم دست کم یکی از رأسهای $\triangle ABC$، مثلاً A، در داخل دایرهٔ S باشد. صفحهٔ πی نمودار را بر یك صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به گونه‌ای که S به یك دایرهٔ $\bar{S}$ بدل شود و A به $\bar{A}$، مرکز $\bar{S}$. براثر این تصویر نمودار ما به‌نمودار شکل ۱۸۲ بدل می‌شود، که در آن $\bar{A}'$ قطب $\bar{B}\bar{C}$ است؛ B' و C'، قطبهای AC و AB، به‌قطبهای قطرهای $\bar{A}\bar{C}$ و $\bar{A}\bar{B}$ از دایرهٔ $\bar{S}$، یعنی به‌نقطه‌های بینهایت $\bar{B}'$ و $\bar{C}'$ مربوط به‌امتدادهای عمود بر $\bar{A}\bar{C}$ و $\bar{A}\bar{B}$ بدل می‌شوند (← شکل ۱۸۲ وشکل ۶۷ ب). از اینجا نتیجه‌می‌شود که $\bar{B}\bar{B}'$ و $\bar{C}\bar{C}'$ ارتفاعهای $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ هستند. چون $\bar{A}\bar{A}'$ سومین ارتفاع $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ است ($\bar{A}'$ قطب $\bar{B}\bar{C}$ برعمود مرسوم از $\bar{A}$، مرکز $\bar{S}$، برخط $\bar{B}\bar{C}$ واقع است)، خطهای $\bar{A}\bar{A}'$ و $\bar{B}\bar{B}'$ و $\bar{C}\bar{C}'$ متقارب‌اند. درنتیجه AA' و BB' و CC' متقارب هستند.

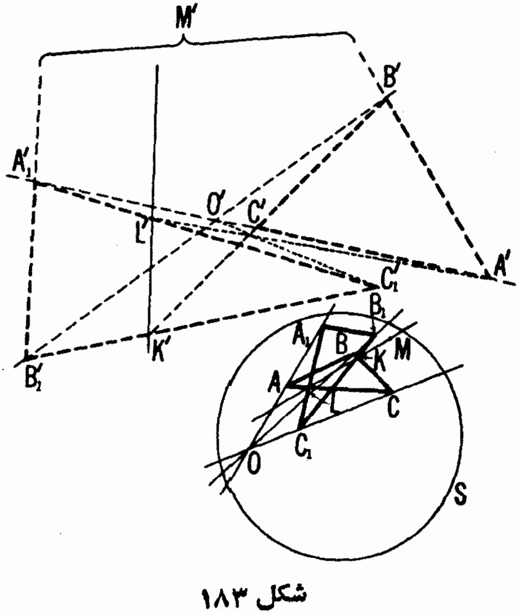
۲. فرض می‌کنیم دست کم یکی از اضلاع مثلث ABC دایرهٔ S را نبرد. در این حال رأسهای مربوط به $\triangle A'B'C'$ در داخل S قرار دارند، و می‌توانیم همان برهانی را که درحالت ۱ آوردیم، برای $\triangle A'B'C'$ بیاوریم.



شکل ۱۸۲

۳. بالاخره فرض مـی‌کنیم همهٔ رأسهای $\triangle ABC$ در خارج S بـاشند و هیچ‌یك از اضلاع کاملا درخارج S نباشند. در این‌حالت قضیهٔ ما به‌قضیهٔ‌مسألهٔ ۳۹(ب) بدل می‌شود.

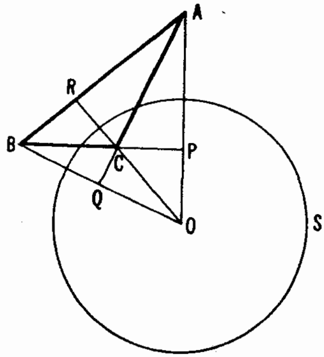
۵۸. گیریـم A' و B' و C' قطبهـای اضلاع $\triangle ABC$ و A'_1 و B'_1 و C'_1 قطبهای اضلاع $\triangle A_1B_1C_1$ نسبت به‌دایرهٔ S باشند (شکل ۱۸۳). به‌مـوجب قضیهٔ ۲، $B'C'$ قطبی A است و K'، نقطهٔ‌تلاقی $B'C'$ و $B'_1C'_1$، قطب‌خط AA_1. به‌طریق مشابه، L' و M'، نقطه‌های‌تلاقی خطهای $A'C'$ و $A'_1C'_1$، $A'B'$ و $A'_1B'_1$، قطبهای خطهای BB_1 و CC_1 هستند. بنابراین $K'L'$ قطبی O، نقطهٔ تـلاقی AA_1 و BB_1، خواهد شد. چون، بنابرفرض، CC_1 از O می گذرد M'، قطب CC_1 برخط $K'L'$ قرار دارد. از این‌رو نقطه‌های K' و L' و M' همخطانـد، و لـذا، به‌موجب قضیهٔ دزارگ (مسألهٔ ۲۲، بخش۲)، خطهای $A'A'_1$ و $B'B'_1$ و $C'C'_1$ متقارب‌اند، که‌همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.



شکل ۱۸۳

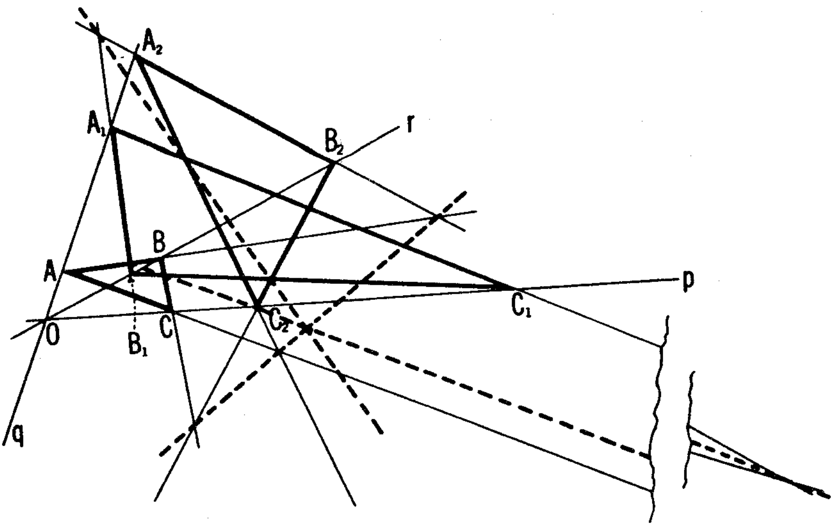
۵۹. مثلث ABC را، که‌قطبی معکوس خود نسبت به‌دایرهٔ S به‌مرکز O است،

در نظر می گیریم (شکل۱۸۴). چون BC، قطبی A، بر OA عمود است، O بر ارتفاع AP از $\triangle ABC$ واقع است. همچنین O بردو ارتفاع دیگر BQ و CR نیز واقع است. بنابراین O محل تلاقی سه ارتفاع $\triangle ABC$ است. بعلاوه، چون هر سه جفت از نقطه‌های A و P، B و Q، C و R در یك طرف O قرار دارند، $\triangle ABC$ منفرج الزاویه است. منحصر به فرد بودن دایرهٔ S، که مثلث منفرج الزاویهٔ T نسبت به آن قطبی معکوس خود است، از این امر ناشی می‌شود که مرکزش O نقطهٔ تلاقی ارتفاعات T است، وشعاعش با رابطهٔ $r^{2}=OA.OP=OB.OQ=OC.OR$ مشخص مـی‌شود (← مسألهٔ ۵۱). [تساوی سه حاصلضرب اخیر از تشابه مثلثهای OAQ و OBP، OAR و OCP نتیجه‌می‌شود. می توان به‌آسانی تحقیق کرد که $r=2R\sqrt{\cos A\cos B\cos C}$، که R شعاع دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ است.]



شکل ۱۸۴

۶۰. بر اثر تبدیل قطب و قطبی قضایای مسائل ۱۷ (الف) و ۱۷ (ب) به‌یکدیگر بدل می‌شوند (و، در نتیجه کافی است فقط یکی از آنها را ثابت کنیم). قضایای مسائل ۲۱ (الف) و ۲۱ (ب) نیز به‌همدیگر بدل می‌شوند. قضیهٔ مسألهٔ ۲۲ و عکسش به‌هم بدل می‌شوند. در اینجا استفاده از یك تبدیل قطب و قطبی به‌هیچ نتیجهٔ تـازه‌ای منجر نمی‌شود؛ زیرا دوحکم هم ارزند (← تبصرهٔ پس از راه‌حل مسألهٔ ۲۲). قضیهٔ مسألهٔ ۲۳ نیز به‌یك قضیهٔ هم ارز بـدل می‌شود (چـون این قضیه در واقع عیناً مثل قضیهٔ مسألهٔ ۲۲ است؛ به راه‌حل مسألهٔ ۲۳ مراجعه کنید). همچنین، کاربرد تبدیلات قطب



شکل ۱۸۵

و قطبی در قضایای مسائل ۲۵ و ۲۶ به‌نتایج جدیدی منجر نمی‌شود؛ براثر تبدیل قطب و قطبی این قضایا به‌خود بدل‌می‌شوند (جز اینکه در بیان‌قضایای جدید حاصل براثر دوگانی‌کردن قضایای مذکور در بخش ۲، اصطلاح «مثلثهای منظری» به‌معنی مثلثهای منظری ازیك خط است نه ازیك نقطه؛ این‌مطلب که این تغییر تعبیر به‌اثبات قضایا لطمه‌ای نمی‌زند، از قضیهٔ دزارگ، که هم ارزی دو مفهوم را ثابت می کند، ناشی می‌شود).

قضیهٔ مسألهٔ ۲۷ براثریك تبدیل قطب وقطبی به‌قضیهٔ زیر بدل می‌شود: اگر سه مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ واقع دریك صفحه، چنان باشند که A و A_1 و A_2 بریك خط q، و B و B_1 و B_2 بریك خط r، و C و C_1 و C_2 بریك خط p واقع، و خطوط p، q، و r متقاطع باشند (شکل ۱۸۵)، آنگاه سه‌خطی که به‌موجب قضیهٔ دزارگ نقطه‌های تلاقی اضلاع متناظر مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$، ABC و $A_2B_2C_2$، $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ را بر خود دارند متقارب‌اند. به عبارت دیگر: اگر مراکز تصویر منظری سه زوج مثلث منظری منطبق باشند، محورهای تصویر منظری آنها متقارب‌اند.

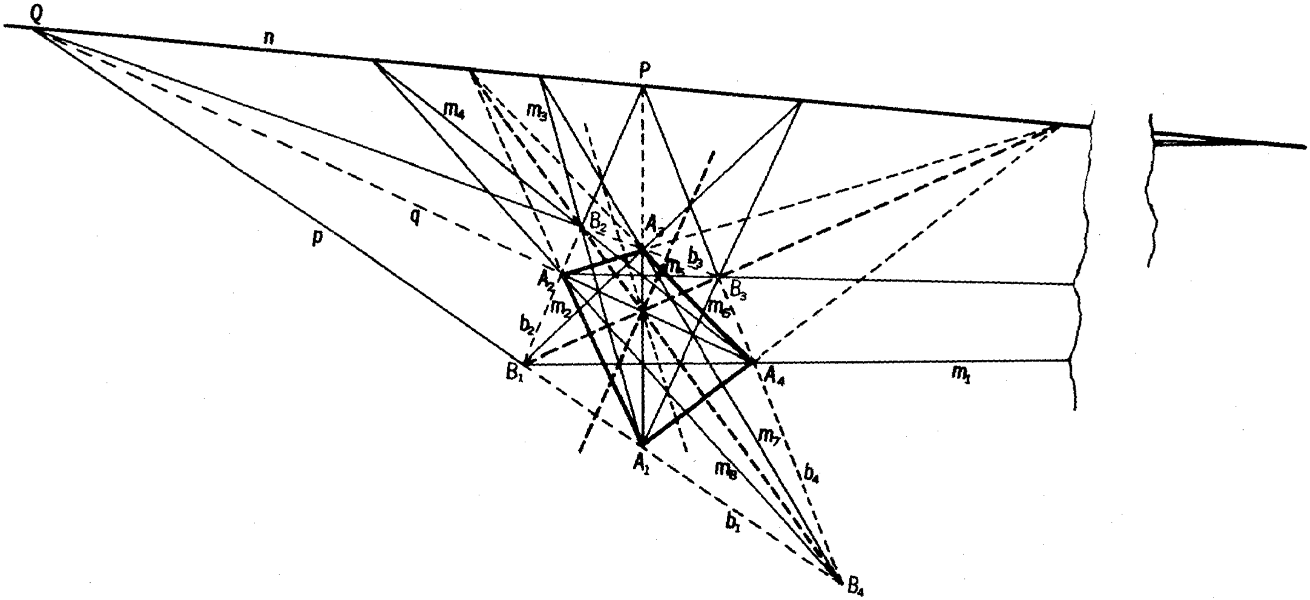
قضیهٔ مسألهٔ ۲۸ به‌یك قضیهٔ هم‌ارز آن بدل می‌شود (که خواننده باید سعی

کند آن‌را بیان نماید). یك راه‌پرداختن به آن، توجه به‌این امر است که دوشق متفاوت از بیان مسألهٔ ۲۸ که از احکام آنها نتیجه می‌شوند، دوگان یکدیگرند.

۶۱. این مسأله دوگان‌مسألهٔ ۲۴ (ب)، بخش ۲ است. بنابراین یك راه حل آن به‌کاربردن یك تبدیل قطب و قطبی (نسبت به‌یك دایرهٔ S) برای n خط و n نقطه است. خطهای l_1 و l_2 و ... و l_n به n نقطهٔ همخط L_1 و L_2 و ... و L_n بدل می‌شوند، و n نقطهٔ M_1 و M_2 و ... و M_n به n خط m_1 و m_2 و ... و m_n. اما می‌دانیم (مسألهٔ ۲۴ (ب)) که چگونه در یك n ضلعی حاصل از خطهای m_1 و m_2 و ... و m_n یك nضلعی $B_1B_2 \ldots B_n$ محاط کنیم که اضلاعش از نقطه‌های L_1وL_2 و ... و L_n بگذرند. پس nضلعی مطلوب $A_1A_2 \ldots A_n$ از nضلعی $B_1B_2 \ldots B_n$ براثر تبدیل قطب و قطبی نسبت به‌یك دایرهٔ S به‌دست می‌آید.

این‌مسأله را از راه دیگری که به‌رسم nضلعی کمکی $B_1B_2 \ldots B_n$ نیازی نباشد نیز می‌توان حل کرد. یعنی، وقتی مسألهٔ ۲۴ (ب) را حل می‌کردیم ثابت کردیم که اگر $(n-1)$ رأس یك nضلعی بر $(n-1)$ خط ثابت قرار داشته باشند، و اضلاعش از n نقطهٔ ثابت همخط بگذرند، آنگاه nامین رأس آن بریك خط معین l قرار خواهد گرفت. این خط را می‌توان با رسم دوتا از این n ضلعیها پیدا کرد. اصل دوگانی به‌ما امکان می‌دهد که چنین نتیجه بگیریم که اگر $n-1$ ضلع یك n ضلعی از $(n-1)$ نقطهٔ M_1 و M_2 و ... و M_{n-1} بگذرند ورأسهای آن بر n خط متقارب l_1 و l_2 و ... و l_n قرار داشته باشند، آنگاه nامین ضلع آن از یك نقطهٔ ثابت M می‌گذرد. (M یا یك نقطهٔ معمولی است، یا نقطه‌ای است در بینهایت). نقطهٔ M را می‌توان با رسم دوتا از این nضلعیها پیدا کرد. از وصل M به M_n ضلع A_1A_n از n ضلعی مطلوب $A_1A_2 \ldots A_n$ به‌دست می‌آید. تعیین بقیهٔ اضلاع nضلعی دیگر اشکالی ندارد. اگر M نقطه‌ای معمولی باشد و بر M_n منطبق نباشد، مسأله یك جواب منحصر به‌فرد دارد. اگر M بر M_n منطبق باشد، مسأله نامعین است. اگر M_n نقطه‌ای در بینهایت باشد، آنگاه مسأله یك جواب منحصر به‌فرد دارد اگر امتدادی که به‌وسیلهٔ M_n مشخص می‌شود موازی با l_1 یا l_n نباشد، درغیر این‌صورت مسأله جوابی ندارد.

۶۲. فرض می‌کنیم $A_1A_2A_3A_4$ یك چهارضلعی به قطرهای p و q باشد و n، خط واصل بین نقطه‌های تلاقی اضلاع مقابل آن، و P و Q نقاط تقاطع قطرهای p و q با n باشند. خطهای واصل بین رأسها و نقطه‌های P و Q را با b_1وb_2وb_3وb_4 نشان می‌دهیم. و فرض می‌کنیم که m_1 و m_2 و m_3 و m_4 و m_5 و m_6 و m_7 و m_8 خطهای واصل بین رأسهای چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ و رأسهای چهارضلعی $B_1B_2B_3B_4$، حاصل از خطهای b_1 و b_2 و b_3 و b_4، باشند (← شکل ۱۸۶). قضایای مسألهٔ ۳۶



شکل ۱۸۶

(الف) ـ (د)، به‌موجب اصل دوگانی، ایجاب می‌کنند که:

الف) نقطه‌های تلاقی m_1 و m_5، m_2 و m_6، m_3 و m_7، m_4 و m_8 بر n واقع باشند.

ب) نقطه‌هـای تلاقی m_2 و m_3، m_6 و m_7، بر q باشند و نقطه‌هـای تلاقی m_1 و m_8، m_4 و m_5 بر p.

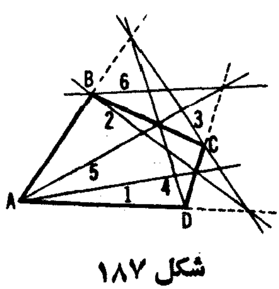
ج) نقطه‌های تلاقی m_1 و m_2، m_3 و m_8، m_4 و m_7، m_5 و m_6 برخط واصل بین نقطهٔ تقاطع قطرهای A_1A_3 و A_2A_4، و نقطهٔ تقاطع اضلاع A_1A_4 و A_2A_3 واقع باشند؛ نقطه‌هـای تقاطع m_1 و m_6، m_7 و m_8، m_3 و m_4، m_2 و m_5 برخط واصل بین نقطهٔ تقاطع قطرهای A_1A_3 و A_2A_4 و نقطهٔ تقاطع اضلاع A_1A_2 و A_3A_4 قرار داشته باشند.

د) نقطه‌هـای تلاقی m_1 و m_3، m_5 و m_7، b_4 و m_2، b_2 و m_6؛ m_2 و m_4، m_6 و m_8، b_4 و m_3، b_2 و m_7؛ m_3 و m_5، m_1 و m_7، b_1 و m_4، b_3 و m_8؛ m_4 و m_6، m_2 و m_8، b_1 و m_5، b_3 و m_1 بر چهارخط ماربر نقطـهٔ تلاقی قطرهـا قرار داشته باشند.

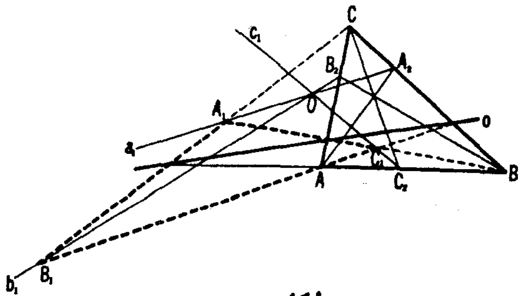
قضایای مسائل ۳۷ (الف) ـ (ج)، به‌موجب اصل دوگـانی، قضایای زیر را ایجاب می‌کنند. فرض می‌کنیم $ABCD$ یك چهارضلعی باشد، ۱ خطی دلخواه ماربر رأس A، ۲ خط واصل بین B و نقطهٔ تلاقی CD باخط ۱ باشد، ۳ خط واصل بین C و نقطهٔ تلاقی DA با خط ۴،۲ خط واصل بین D ونقطهٔ تلاقی AB باخط ۳ باشد، و هکذا (شکل ۱۸۷). در این‌صورت:

الف) خط ۱۳، حاصل از سه‌بار دورزدن همهٔ رأسهـای چهارضلعی، برخط اولیهٔ ۱ منطبق‌است (روشن‌است که این‌قضیه باقضیهٔ مسألهٔ ۳۷ (الف) هم‌ارز است).

ب) نقطه‌هـای تقاطع خطهای ۱ و ۷، ۲ و ۸، ۳ و ۹، وغیره، برخط واصل بین نقاط تلاقی اضلاع مقابل چهارضلعی قرار دارند.



شکل ۱۸۷



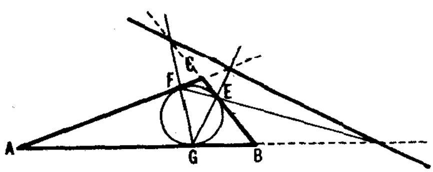
شکل ۱۸۸

ج) خطهای واصل بین نقطه‌های تقاطع خطهای ۱ و ۲، ۷ و ۸؛ ۲ و ۳، ۸ و ۹؛ ۳ و ۴، ۹ و ۱۰؛ وغیره، از نقاط تلاقی قطرهای چهارضلعی می گذرند.

قضیهٔ مسألهٔ ۳۸ (ب) به‌قضیهٔ زیر بدل می‌شود. نقطه‌های تلاقی یك خط غیرمشخص o را با اضلاع مثلث ABC به‌رأسهای مقابل وصل می‌کنیم. فرض می کنیم $A_1B_1C_1$ مثلث حاصل ازاین سه‌خط باشد. اگر O یك نقطهٔ دلخواه و a_1 و b_1 و c_1 خطهای واصل از O به‌رأسهای مثلث باشند، و A_2 و B_2 و C_2 نقطه‌های تلاقی خطهای a_1 و b_1 و c_1 بااضلاع متناظر $\triangle ABC$ (شکل ۱۸۸)، آنگاه خطهای AA_2 و BB_2 و CC_2 دریك نقطه تلاقی می‌کنند.

۶۳. براثر تبدیل قطب‌وقطبی، قضیهٔ‌مسألهٔ ۳۹ (الف) به‌قضیهٔ‌زیر بدل می‌شود. نقطه‌های تلاقی اضلاع یك مثلث ABC با اضلاع مثلث EFG، حاصل از نقطه‌های تماس اضلاع مثلث ABC با دایرهٔ محاطی‌اش، همخطاند (شکل ۱۸۹).

قضیهٔ مسألهٔ ۳۹ (ب) به‌قضیهٔ زیر بدل‌می‌شود. فرض می کنیم ABC یك‌مثلث باشد، و S دایره‌ای‌که اضلاع AB و AC و BC را بریده است. اگر a_1 و b_1 و c_1 خطهای واصل بین نقطه‌های تماس مماسهای مرسوم بر S، به‌ترتیب از A و B و C

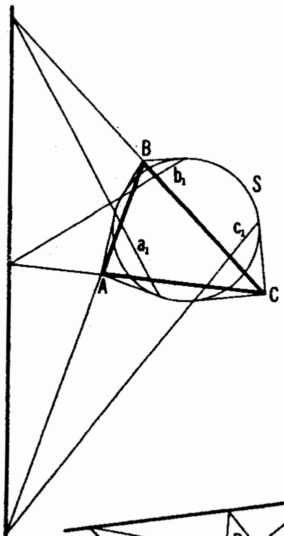


شکل ۱۸۹

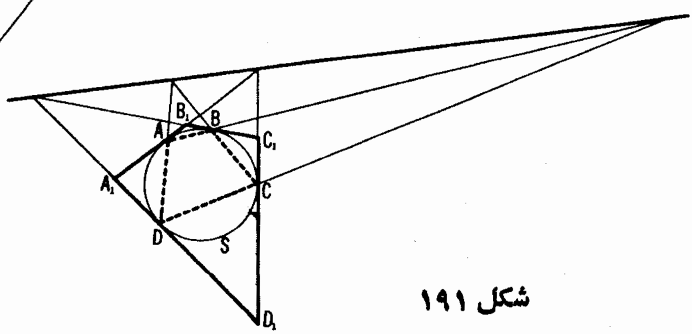
باشند(شکل ۱۹۰)، آنگاه نقطه‌های تلاقی a_1 و b_1 و c_1 با اضلاع متناظر مثلث ABC همخط اند.*

قضیهٔ مسألهٔ ۴۰ (الف) به‌قضیهٔ زیر بـدل می‌شود. گیریم $A_1B_1C_1D_1$ یك چهارضلعی محیط بریك دایرهٔ S باشد، و A و B و C و D نقطه‌هـای تماس اضلاع آن با S (شکل ۱۹۱). در این‌صورت نقطه‌هـای تـلاقی اضلاع مقابل چهارضلعی $ABCD$ برخط واصل بین‌نقاط تقاطع اضلاع $A_1B_1C_1D_1$ واقع‌اند. براثر تبدیل قطب و قطبی قضیهٔ مسألهٔ ۴۰ (ب) به‌خودش بدل می‌شود.

قضایای مسائل ۴۱ (الف) ـ (ج) به‌قضایای زیر بدل‌می‌شوند. فرض می‌کنیم



شکل ۱۹۰



شکل ۱۹۱

---

* به‌مـوجب قضیهٔ دزارگ، قضایای حاصل از قضایـای مسائل ۳۹ (الف و ب) براثر تبدیل قطب و قطبی، با قضایایی که دراین مسائل ذکرشده‌اند هم‌ارزند.

l خط واصل بین نقطه‌های تلاقی اضلاع مقابل یك چهارضلعی $ABCD$ محیط بر یك دایرهٔ S باشد، و m و n خطهای حاصل از قطرهای این چهارضلعی. پس:

الف) هرگاه دو رأس از یك مثلث محیط بر S بر دو خط از سه خط l و m و n قرار داشته باشند، رأس سوم آن برخط سوم از این سه خط واقع است.

ب) بینهایت چهارضلعی محیط بر S وجود دارند که قطرهای آنها برخطهای m و n قرار دارند. خطهای واصل بین نقطه‌های تلاقی اضلاع مقابل همهٔ این گونه چهارضلعیها بر l منطبق‌اند.

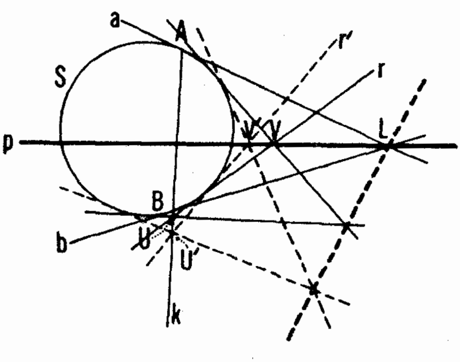
ج) بینهایت چهارضلعی محیط بر S وجود دارند که یك قطرشان بر m قرار دارد و خط واصل بین نقاط تلاقی اضلاع مقابل آنها خط l است. قطر دوم این گونه چهارضلعیها بر n قرار دارد.

قضیه‌های مسائل ۴۳ (الف) و (ب) به‌قضایای زیر بدل می‌شوند. دایرهٔ S، یك نقطهٔ L خارج S، و یك خط p مار بر L داده شده‌اند؛ k معرف خط واصل بین A و B، نقطه‌های تماس مماسهای مرسوم از L بر S، است. در این صورت:

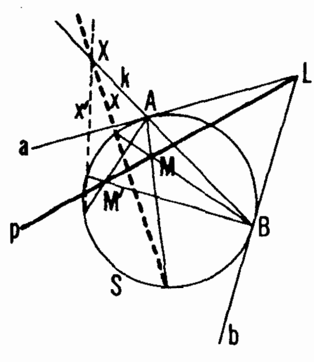
الف) اگر M نقطهٔ متغیری بر p باشد، آنگاه دومین نقطه‌های تلاقی هرجفت از خطهای واصل از M به A و B با دایرهٔ S یك خط x را مشخص می‌سازند، و همهٔ این خطها k را در یك نقطهٔ ثابت X می‌برند (شکل ۱۹۲ الف).

ب) اگر یك مماس r بر دایرهٔ S، p و k را در نقطه‌های V و U قطع کند، آنگاه نقطهٔ تلاقی دومین مماسهای مرسوم بر S از V و U برخط ثابتی مار بر L قرار دارد (شکل ۱۹۲ ب).

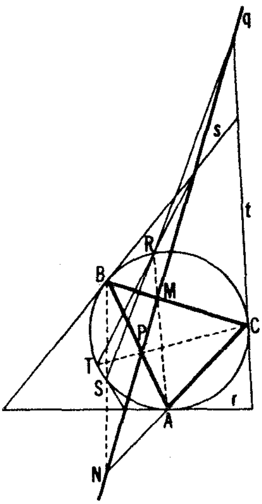
قضیهٔ مسألهٔ ۴۵ به‌قضیهٔ زیر بدل می‌شود. فرض می‌کنیم a و a_1، b و b_1،



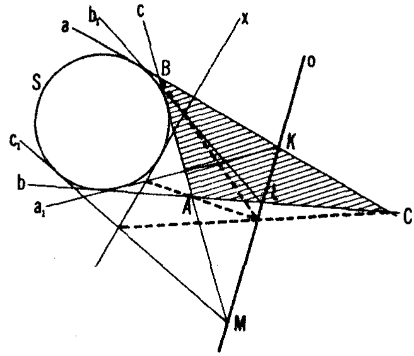
شکل ۱۹۲ ب



شکل ۱۹۲ الف



شکل ۱۹۴



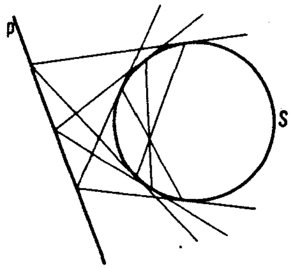
شکل ۱۹۳

c و c_1 مماسهای مرسوم بریك دایرهٔ S از نقطه‌های K و L و M واقع بر یك‌خط o باشند، و x مماسی دلخواه بر S. در این‌صورت خطهای واصل بین رأسهای مثلث حاصل از a و b و c (کـه در شکل ۱۹۳ سایه زده شده است) و نقاط متناظر تقاطع x و خطهای a_1 و b_1 و c_1 در یك‌نقطه واقع بر o متلاقی‌اند.

یك تبدیل قطب و قطبی قضایای مسائل ۴۶ و ۴۷ را به‌یکدیگر بدل می‌کند.

قضیهٔ مسألهٔ ۵۰ به‌قضیهٔ زیر بدل می‌شود. فرض می‌کنیم r و s و t مماسهای مرسوم بردایرهٔ محیطی مثلث ABC در رأسهای A و B و C بـاشند، و M و N و P سه‌نقطه براضلاع BC و CA و AB واقع بریك خط q. اگر دومین نقطه‌های تلاقی خطهای AM و BN و CP را بـادایرهٔ محیطی به‌ترتیب بـا R و S و T نشان دهیم، آنگاه نقطه‌هـای تلاقی خطهای RS و t، ST و r، TR و s بر q واقع‌انـد (شکل ۱۹۴).

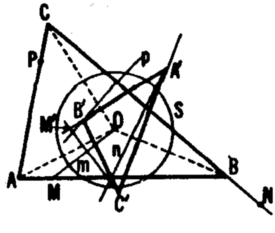
۶۴. براثر تبدیل قطب و قطبی، قضیهٔ مسألـهٔ ۴۲ به‌قضیهٔ زیر بـدل می‌شود: اگر p یك‌خط و S یـك‌دایره باشد، هرجفت از مماسهـای مرسوم بر S از یك‌نقطهٔ واقع بر p یك‌وتر از دایره‌را مشخص می‌کند. همهٔ این وترها از یك‌نقطه می‌گذرند (شکل ۱۹۵).



شکل ۱۹۵

۶۵. این مسأله، دوگان مسألهٔ ۴۴ در بخش قبل است. (حالتی که خط دایرهٔ S را نبرد به‌مسألهٔ ۴۴ (الف) مربوط می‌شود، و حالتی که S را می‌برد به‌مسألهٔ ۴۴(ب)). بنا بر این، این‌مسأله را می‌توان چنین حل کرد: یك تبدیل قطب و قطبی نسبت به‌دایرهٔ مفروض، ما را به‌مسألهٔ ۴۴ هدایت می‌کند. پس از حل آن مسأله یك چهارضلعی به‌دست می‌آوریم که چهارضلعی مطلوب ما از راه تبدیل قطب و قطبی از آن به‌دست می‌آید. ولی، در حالت کنونی ما نیاز نداریم که اول مسألهٔ ۴۴ را، که راه حلش مبتنی بر گزاره‌ای است که بر اثر تبدیل قطب‌وقطبی به‌مسألهٔ زیرین بدل می‌شود، حل کنیم: اگر رأسهای A و C از یك چهارضلعی $ABCD$، که بر دایره‌ای محیط شده است، بر یك خط l واقع باشند و رأس Bی آن بر یك خط l_1، آنگاه رأس Dی آن بر خط ثابت m قرار خواهد گرفت. به‌کمك این گزاره مسألهٔ ما به‌آسانی حل می‌شود (← راه حلهای مسائل ۴۴(الف) و (ب)).

۶۶. فرض می‌کنیم M و N و P سه‌نقطه واقع بر اضلاع AB و BC و CA، یا بر امتداد آنها، از یك مثلث ABC باشند (شکل ۱۹۶). در نتیجهٔ تبدیل قطب‌وقطبی



شکل ۱۹۶

مثلث ABC به یك مثلث $A'B'C'$، که اضلاع a و b و c ی آن قطبیهای نقطه‌هـای A و B و C هستند، بدل می‌شود و نقطه‌های M و N و P به‌خطهای m و n و p ماربر نقطه‌های C' و A' و B'. فرض مـی‌کنیم M' و N' و P' نقطه‌هـای تلاقی خطهای m و n و p با اضلاع $\triangle A'B'C'$ باشند. سعی می‌کنیم بین عبارتهای

$$\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'} \quad و \quad \frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}$$

رابطه‌ای برقرار کنیم.

ملاحظه مـی‌کنیم کـه نسبت $A'M'/B'M'$ مساوی است بـا خارج قسمت $(A'M'/C'M')/(B'M'/C'M')$. مطابق قانون سینوسها داریم

$$\left|\frac{B'M'}{C'M'}\right|=\frac{\sin\sphericalangle B'C'M'}{\sin\sphericalangle C'B'M'} \quad و \quad \left|\frac{A'M'}{C'M'}\right|=\frac{\sin\sphericalangle A'C'M'}{\sin\sphericalangle C'A'M'}$$

از اینجا نتیجه می‌شود $A'M'/B'M'$ از لحاظ قدرمطلق برابر است با

$$\frac{\sin\sphericalangle A'C'M'}{\sin\sphericalangle C'A'M'}\Big/\frac{\sin\sphericalangle B'C'M'}{\sin\sphericalangle C'B'M'}=\frac{\sin\sphericalangle C'B'M'}{\sin\sphericalangle C'A'M'}\Big/\frac{\sin\sphericalangle B'C'M'}{\sin\sphericalangle A'C'M'}$$

می‌دانیم که قطبی A بر OA عمود است، که O مرکز دایرهٔ S در تبدیل قطب وقطبی‌است. (← ص ۸۸). بنابراین $C'B'\perp OA$ و $C'A'\perp OB$ و $A'B'\perp OC$ و در نتیجه:

$$\sin\sphericalangle C'A'M'=\sin\sphericalangle BOC \quad و \quad \sin\sphericalangle C'B'M'=\sin\sphericalangle AOC$$

(زاویه‌های $C'B'M'$ و AOC و نیز زاویه‌های $C'A'M'$ و BOC اضلاعشان برهم عمودند، و بنابراین مساوی یا مکمل‌اند، ولذا دارای سینوسهای مساوی هستند). از این‌دو داریم:

$$\frac{\sin\sphericalangle C'B'M'}{\sin\sphericalangle C'A'M'}=\frac{\sin\sphericalangle AOC}{\sin\sphericalangle BOC}$$

چون $C'M'\perp OM$، همچنین داریم

$$\frac{\sin\sphericalangle B'C'M'}{\sin\sphericalangle A'C'M'}=\frac{\sin\sphericalangle AOM}{\sin\sphericalangle BOM}$$

حال عبارت اخیر را تبدیل می‌کنیم. برای این‌منظور مساحتهای مثلثهای AOM و BOM را از دو راه حساب، و نسبت آنها را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{S_{AOM}}{S_{BOM}}=\left|\frac{\frac{1}{2}AO\cdot OM\cdot\sin\sphericalangle AOM}{\frac{1}{2}BO\cdot OM\cdot\sin\sphericalangle BOM}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}AM\cdot h_{AB}}{\frac{1}{2}BM\cdot h_{AB}}\right|$$

(در اینجا h_{AB} ارتفاع مشترک مثلثهای AOM و BOM است). از تساوی اخیر بلافاصله به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin\sphericalangle AOM}{\sin\sphericalangle BOM}=\left|\frac{OB}{OA}\cdot\frac{AM}{BM}\right|$$

بنابراین نسبت $A'M'/B'M'$ از لحاظ قدرمطلق برابر است با

$$\frac{\sin\sphericalangle AOC}{\sin\sphericalangle BOC}\Big/\left(\frac{OB}{OA}\cdot\frac{AM}{BM}\right)=\frac{1}{AM/BM}\cdot\left(\frac{\sin\sphericalangle AOC}{\sin\sphericalangle BOC}\cdot\frac{OA}{OB}\right)$$

با استدلالی مشابه نشان داده می‌شود که نسبتهای $B'N'/C'N'$ و $C'P'/A'P'$ از لحاظ قدرمطلق به‌ترتیب برابرند با

$$\frac{1}{CP/AP}\cdot\frac{\sin\sphericalangle COB}{\sin\sphericalangle AOB}\cdot\frac{OC}{OA}\text{ و }\frac{1}{BN/CN}\cdot\frac{\sin\sphericalangle BOA}{\sin\sphericalangle COA}\cdot\frac{OB}{OC}$$

از ضرب این سه‌عبارت در یکدیگر معلوم می‌شود که قدرمطلقهای عبارتهای

$$\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'}\text{ و }\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}$$

عکس یکدیگرند.

مانده است که علامتهای آنها را با هم مربوط کنیم. برای سادگی، فرض می‌کنیم که O، مرکز S، در داخل $\triangle ABC$ باشد. داریم $OA\perp B'C'$، $OB\perp A'C'$ و $OM\perp C'M'$. این روابط ایجاب می‌کنند که اگر OM بین OA و OB باشد، آنگاه $C'M'$ درخارج زاویهٔ $A'C'B'$ باشد، و اگر OM خارج زاویهٔ AOB باشد، آنگاه $C'M'$ بین $C'A'$ و $C'B'$ باشد (← وضع خطها در شکل ۱۹۶).

از آنجا نتیجه می‌شود که نسبتهای AM/BM و $A'M'/B'M'$ علامتهایشان مخالف یکدیگرند. عیناً به‌همین طریق نشان داده می‌شود که نسبتهای BN/CN و $B'N'/C'N'$، CP/AP و $C'P'/A'P'$، مختلف العلامه هستند. این مطلب نتیجه گیری ما را که عبارتهای

$$\frac{A'M'}{B'M'} \cdot \frac{B'N'}{C'N'} \cdot \frac{C'P'}{A'P'} \text{ و } \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP}$$

مختلف العلامه هستند، موجه می‌سازد.* روی‌همرفته داریم

$$\frac{A'M'}{B'M'} \cdot \frac{B'N'}{C'N'} \cdot \frac{C'P'}{A'P'} = -\frac{1}{\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP}} \qquad (*)$$

به‌موجب ویژگی (الف) از تبدیل قطب و قطبی خطهای $A'N'$ و $B'P'$ و $C'M'$ در یک نقطه متقاطع (یا موازی) هستند اگر و فقط اگر، M و N و P همخط باشند. این امر و فورمول (*) ایجاب می‌کنند که بر اثر تبدیل قطب و قطبی، قضیه‌های سوا و منلائوس به‌یکدیگر بدل شوند. از اینجا نتیجه‌می‌شود که کافی است فقط یکی از آنها را ثابت کنیم.

۶۷. گیریم ABC و $A_1B_1C_1$ دومثلث منظری از O، نقطه تقاطع AA_1 و BB_1 و CC_1 باشند (← ص ۴۱). تبدیل قطب و قطبی Π نسبت به یک دایرهٔ S به‌مرکز O را درنظرمی گیریم. به‌موجب ویژگی (ب) از تبدیل قطب و قطبی، Π مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ را به‌مثلثهایی که اضلاعشان دوبه‌دو موازی هستند بدل می کند. این گونه مثلثها با یک انتقال یا یک تجانس به‌هم مربوط‌می‌شوند (← فصل اول، اواخر بخش ۱، جلد اول و مسألهٔ ۱۷، جلد دوم). ولی دراین صورت خطهای واصل به‌رأسهای این مثلثها متقارب یا موازی هستند. اما ویژگی (الف) تبدیل قطب‌وقطبی به‌ما اجازه می‌دهد که نتیجه بگیریم که نقطه‌های تقاطع اضلاع متناظر مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ همخط‌اند.

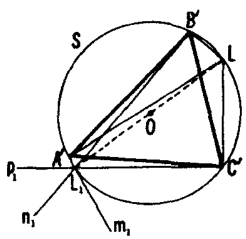
قسمت دوم قضیهٔ دزارگ که می گوید اگر دومثلث به‌جای اینکه تصویر منظری از یک‌نقطه باشند، تصویر منظری از یک‌خط باشند، از قسمت اول بر اثر اصل

---

* می توان نشان داد که این نتیجه، وقتی هم که مرکز S در بیرون $\triangle ABC$ باشد برقرار است. بحث دربارهٔ جمیع حالات ممکن، به‌عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود.

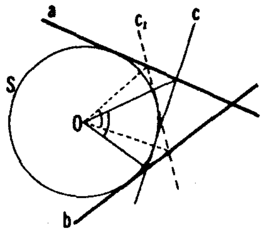
دوگانی نتیجه می‌شود (برای اینکه این‌را نشان دهیم، یك تبدیل قطب و قطبی نسبت به‌یك دایرهٔ دلخواه را برای نمودار مربوط به‌قسمت اول قضیه به‌کار می‌بریم. ← مسألهٔ ۶۵).

۶۸. تبدیل‌قطب وقطبی نسبت به‌دایرهٔ S را به‌کار می‌بریم. اضلاع CA و BC و ABی $\triangle ABC$ به‌نقطه‌های A' و B' و C' واقع بر S بدل‌می‌شوند ومثلث‌محیطی ABC به مثلث محاطی $A'B'C'$ بدل می‌شود (یعنی اضلاع $\triangle ABC$ به رأسهای $\triangle A'B'C'$ بدل‌می‌شود و بعکس). مماس l به‌یك‌نقطهٔ L واقع بر S بدل می‌شود؛ نقطه‌های M و N و P به‌خطهای LA' و LB' و LC' بدل می‌شوند، ونقطه‌های M_1 و N_1 و P_1 به‌خطهای m_1 و n_1 و p_1 مار بر A' و B' و C' و عمود بر $A'L$ و $B'L$ و $C'L$؛ نتیجه‌گیری اخیر از ویژگی (ج) مربوط به‌تبدیلات قطب و قطبی حاصل می‌شود (شکل ۱۹۷). قضیه‌ای که درمسأله بیان شده‌است به‌قضیهٔ زیر بدل می‌شود: خطهای m_1 و n_1 و p_1 دریك نقطه از S متلاقی‌اند. کافی‌است یکی ازاین دوقضیه را اثبات کنیم. اما این مطلب که خطهای m_1 و n_1 و p_1 در نقطه‌ای از S متلاقی‌اند کاملا روشن است. زیرا $m_1 \perp A'L$ ایجاب‌می کند که m_1 دایرهٔ S را درنقطهٔ L_1، متقاطر L، ببرد. همچنین، خطهای n_1 و p_1 هم باید از L_1 بگذرند. [اشاره می‌کنیم که چون L و L_1 متقاطر نسبت به‌S هستند، نتیجه می‌شود که در شکل ۸۳ $l \| l_1$؛ رك. ویژگی (ب) ازیك تبدیل قطب و قطبی.]



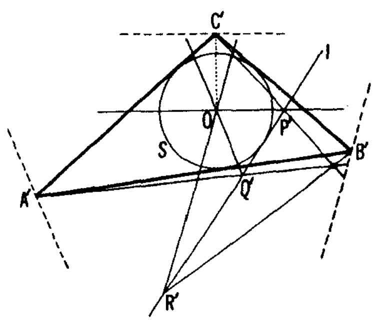
شکل ۱۹۷

۶۹. قطعه مماسی که به‌وسیلهٔ دومماس ثابت a و b از یك مماس متغیر سوم بردایره جدا می‌شود، از مرکز دایره به‌زاویهٔ ثابتی دیده می‌شود (شکل ۱۹۸؛ ←شکل ۸۱ ب).



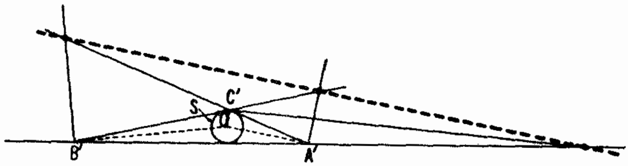
شکل ۱۹۸

۷۰. بر اثر تبدیل قطب و قطبی نسبت به یك دایرهٔ S، یك مثلث محاطی ABC به یك مثلث محیطی $A'B'C'$ بدل می‌شود، یك نقطهٔ L از S به یك مماس l، و P، پای ارتفاع مرسوم از L بر AB، به خط $C'P'$ بدل می‌شود که P' نقطه‌ای است از l به طوری که $\sphericalangle C'OP' = 90°$ یعنی P' نقطهٔ تلاقی l و خط مار بر O به موازات نیمساز زاویهٔ خارجی در رأس C' است (OC' نیمساز زاویهٔ داخلی، شکل ۱۹۹). بنابراین به قضیهٔ زیر می‌رسیم: خطهای واصل از رأسهای یك مثلث $A'B'C'$ به نقطه‌های تلاقی یك مماس l بر دایرهٔ محاطیش S، با خطهای مار بر O، مرکز S، و موازی با نیمسازهای زاویه‌های خارجی در این رأسها، متقارب‌اند (شکل ۱۹۹).



شکل ۱۹۹

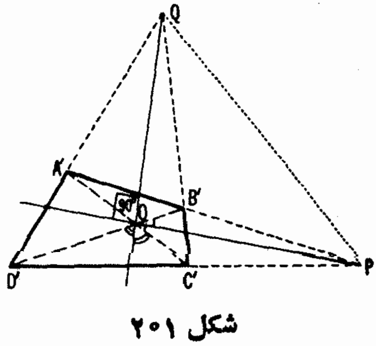
۷۱. بر اثر یك تبدیل قطبی نسبت به S، دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$، این مثلث به یك مثلث $A'B'C'$ محیط بر S بدل می‌شود؛ نقطه‌های وسط اضلاع $\triangle ABC$ به خطهای مار بر A' و B' و C' و عمود بر نیمسازهای OA' و OB' و OC' (O مرکز S) یعنی به نیمسازهای زاویه‌های خارجی $\triangle A'B'C'$ بدل می‌شوند، و میانه‌های



شکل ۲۰۰

$\triangle ABC$ به‌نقطه‌های تلاقی نیمسازهـای زاویه‌های خارجی $\triangle A'B'C'$ با اضلاع مقابلش (شکل ۲۰۰). بنابراین به‌قضیهٔ زیر هدایت‌می‌شویم: «دریك مثلث نقطه‌های تلاقی نیمسازهای زاویهٔ خارجی با اضلاع مقابل همخطاند.

۷۲. بـر اثر تبدیل قطب و قطبی نسبت به‌یك دایرهٔ S، یـك‌متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به‌یك چهارضلعی $A'B'C'D'$ بـدل می‌شود کـه O، مرکز S، نقطهٔ تلاقی قطرهای آن‌است (← ویژگی (ب)ی تبدیل قطب وقطبی). P و Q، نقطه‌های تلاقی اضلاع مقابل چهارضلعی $A'B'C'D'$، بـا قطرهای AC و BDی متوازی‌الاضلاع $ABCD$ متناظر می‌شود. اگر قطرهای‌متوازی‌الاضلاع برهم عمودباشند (یعنی اگر متوازی‌الاضلاع یك لوزی باشد)، پاره‌خط PQ از O به‌زاویهٔ قائمه رؤیت می‌شود (شکل ۲۰۱؛ رك. ویـژگی (ج) ازتبدیل قطب و قطبی). براثر تبدیل قطب و قطبی قضیهٔ مـذکور در مسأله به‌قضیهٔ زیر بدل می‌شود: اگـر پاره‌خط واصل بین P و Q، نقطه‌های تقاطـع اضلاع مقابل یـك چهارضلعی $A'B'C'D'$، از O، محل تلاقی قطرهایش، به زاویهٔ قائمهٔ دیده شود، آنگاه OP و OQ نیمسازهای زاویه‌های بین قطرهای آن خواهد شد.



شکل ۲۰۱

۷۳. الف) بر اثر تبدیل قطب و قطبی نسبت به یک دایرهٔ S به مرکز O، یک مثلث ABC به یک مثلث $A'B'C'$ بدل می‌شود، و ارتفاعات $\triangle ABC$ به نقطه‌های P' و Q' و R'، واقع بر اضلاع $\triangle A'B'C'$ بدل می‌شوند به‌طوری که

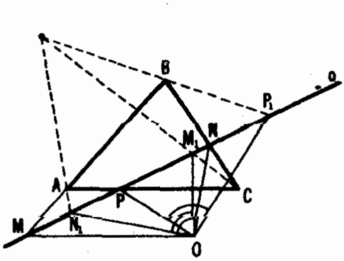
$$\measuredangle A'OP' = \measuredangle B'OQ' = \measuredangle C'OR' = ۹۰^\circ$$

(شکل ۲۰۲ (الف)؛ ← ویژگی (ج) از تبدیل قطب و قطبی). لذا به قضیهٔ زیر هدایت می‌شویم: گیریم O نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC باشد. نقطه‌های تلاقی خطهای مار بر O و عمود بر OA و OB و OC با اضلاع متناظر آن همخط‌اند.

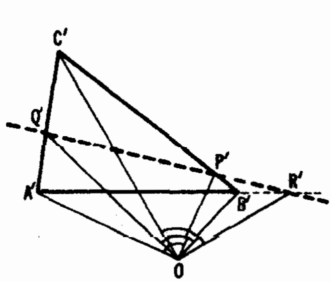
یادداشت. استفاده از تبدیل قطب و قطبی برای شکل ۲۰۲ (الف) به قضیهٔ جالب زیر منجر می‌شود: گیریم o یک خط و O یک نقطه در صفحهٔ مثلث ABC باشند و M و N و P نقطه‌های تلاقی خط o با اضلاع AB و BC و CA از مثلث. اگر $M_۱$ و $N_۱$ و $P_۱$ سه نقطه بر o چنان باشند که $\measuredangle MOM_۱ = \measuredangle NON_۱ = \measuredangle POP_۱ = ۹۰^\circ$، آنگاه خطهای $AN_۱$ و $BP_۱$ و $CM_۱$ متقارب‌اند (شکل ۲۰۲ ب).

به نوبهٔ خود، می‌توان یک تبدیل قطب و قطبی (نسبت به یک دایرهٔ دلخواه به مرکز $O_۱ = O$) برای این قضیه به کار برد و بدین ترتیب قضیهٔ تازه‌ای (نسبتاً پیچیده) به‌دست آورد ...

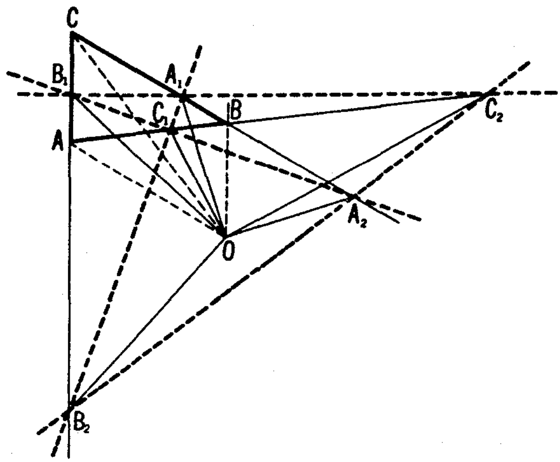
ب) گیریم l نیمساز یکی از زوایای حاصل از خطهای m و n باشد. بر اثر تبدیل قطب و قطبی نسبت به یک دایرهٔ S به‌مرکز O، خطهای l و m و n به نقطه‌های همخط M و N و L بدل می‌شوند به‌طوری که پاره‌خطهای ML و NL به‌دو زاویهٔ مساوی یا مکمل در O مقابل‌اند (ویژگی (ج) از تبدیل قطبی)؛ به‌عبارت دیگر، L نقطهٔ تلاقی MN است با نیمساز یکی از دو زاویهٔ حاصل از خطهای OM و ON.



شکل ۲۰۲ ب



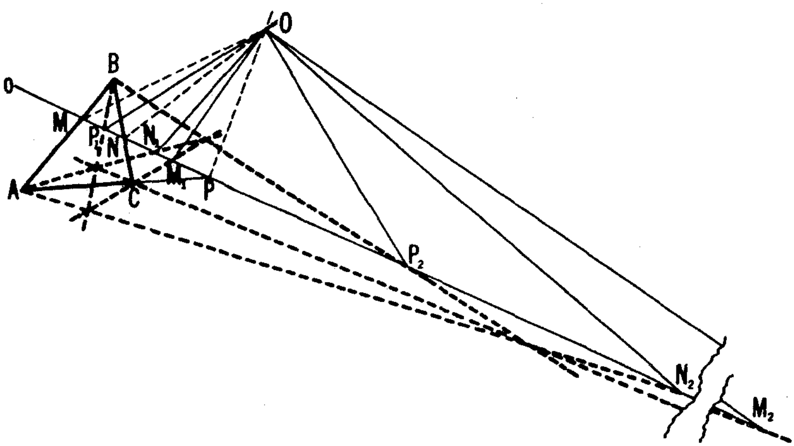
شکل ۲۰۲ الف



شکل ۲۰۳ الف

چون نمی‌دانیم که L روی کدام یك از این دونیمساز واقع است، هردو نیمساز زاویه‌های حاصل از خطهای m و n را درنظرمی گیریم. این‌خطها به‌نقطه‌های تلاقی MN با نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور حاصل از OM و ON بدل می‌شوند. بنابراین بجاست‌که نیمسازهای خارجی $\triangle ABC$ را هم درنظر بگیریم و قضیهٔ مربوط به نقطه‌های‌تلاقی نیمسازها را چنین تنظیم‌کنیم: شش‌نیمساز زاویه‌های داخلی‌وخارجی یك مثلث ABC سه‌به‌سه در چهارنقطه متقارب‌اند. براثر تبدیل قطب و قطبی، این قضیه به‌قضیهٔ زیر بدل می‌شود: گیریم A و B و C و O، چهارنقطه باشند که هیچ سه‌تایی از آنها بریك خط نباشند. نقطه‌های تلاقی شش نیمساز زاویه‌های حاصل از خطهای OA و OB، OB و OC، OC و OA، با اضلاع متناظر مثلث ABC سه‌به‌سه برچهارخط قراردارند (شکل ۲۰۳ الف).

یادداشت: استفاده از تبدیل قطب وقطبی برای شکل ۲۰۳ الف به قضیهٔ زیر منجر می‌شود: گیریم o یك خط، و O نقطه‌ای درصفحهٔ یك‌مثلث ABC باشد، و M و N و P نقطه‌های تلاقی خط o با اضلاع AB و BC و CA. اگر M_1 و M_2، N_1 و N_2، P_1 و P_2 نقطه‌های تلاقی o با نیمسازهای زاویه‌های حاصل از ON و OP، OP و OM، OM و ON باشند، آنگاه سه‌خط AN_1 و AN_2، BP_1 و BP_2،

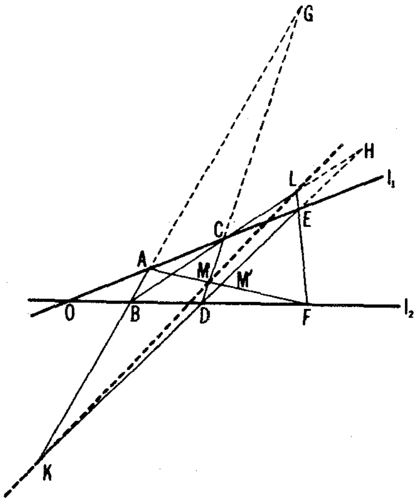


شکل ۲۰۳ ب

CM_1 و CM_2، سه به سه درچهار نقطه متقارب‌اند (شکل ۲۰۳ ب؛ ← یادداشت پس از مسألهٔ قبل).

بخش ۵

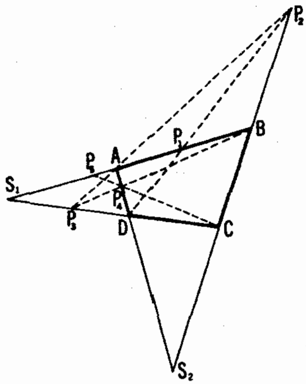
۷۵. ازسه‌صورت قضیهٔ پاپوس که در مسألهٔ ۲۸ صفحهٔ ۴۵ بیان شده است، صورت (الف) را ثابت می‌کنیم. نقطه‌های واقع بر l_1 و l_2 را به‌ترتیب با A و C و E، B و D و F نشان می‌دهیم؛ نقطه‌های تلاقی خطهای AB و ED، CD و AF، EF و CB را با K و M و L، و نقطه‌های تلاقی خطهای AB و CD، CB و ED، l_1 و l_2 را هم با G و H و O نشان می‌دهیم، و نقطهٔ تلاقی KL و CD را با M' (شکل ۲۰۴؛ قراردادهایی که در اینجا به‌کاربردیم با قراردادهایی که در مسألهٔ ۲۸ به‌کار بردیم متفاوت‌اند، ولی مقایسهٔ راه حل فعلی را با راه حل مسألهٔ ۸۰ آسان می‌کند). [ممکن است اتفاقاً بعضی نقطه‌ها در بینهایت باشند.] باید نشان دهیم که M' بر M منطبق است. تصویر CD از مرکز A برخط l_2 نقطه‌های C و G و D و M را به نقطه‌های O و B و D و F بدل می‌کند، و تصویر l_2 از مرکز E برخط CB نقطه‌های O و B و D و F را به C و B و H و L. تصویر مجدد CB از مرکز K برخط CD، نقطه‌های C و B و H و L را به نقطه‌های C و G و D و M' بدل می‌کند. حاصلضرب



شکل ۲۰۴

این سه تصویر متوالی، تبدیلی است تصویری از خط CD که نقطه‌های C و G و D و M را به‌نقطه‌های C و G و D و M' بدل می‌کند. به‌موجب یك‌ویژگی بنیادی از تبدیلات تصویری (رك. ص ۱۱۴) یك تبدیل تصویری از یك‌خط که سه نقطهٔ آن را ثابت نگهدارد (که درمورد مسألهٔ ما نقطه‌های C و G و D است) یك‌تبدیل همانی‌است. از اینجا نتیجه می‌شود که نقطه‌های M و M' برهم منطبق‌اند.

۷۶. نقطه‌های تلاقی اضلاع مقابل چهارضلعی $ABCD$ را با S_1 و S_2 نشان می‌دهیم (شکل ۲۰۵). تصویر AB از مرکز D برخط BC، نقطه‌های S_1 و A و B را به C و S_2 و B بدل می‌کند، و تصویر BC ازمرکز A برخط DC نقطه‌های Cو S_2 و B را به C و D و S_1. تصویر DC ازمرکز B بر DA نقطه‌های C و D و S_1 را به‌نقطه‌های S_2 و D و A بدل می‌کند، و تصویر DA ازمرکز C بر AB نقطه‌های S_2 و D و A رابه B و S_1 و A. حاصلضرب این چهارتصویر تبدیلی است تصویری از خط AB که S_1 و A و B رابه B و S_1 و A بدل می‌کند. مربع این تبدیل S_1 و A و B رابه A و B و S_1 بدل می‌کند، و مکعب آن S_1 و A و B رابه S_1 و A و B، و لذا بایستی این تبدیل، تبدیل همانی باشد. از اینجانتیجه می‌شود که پس‌از سه‌بار

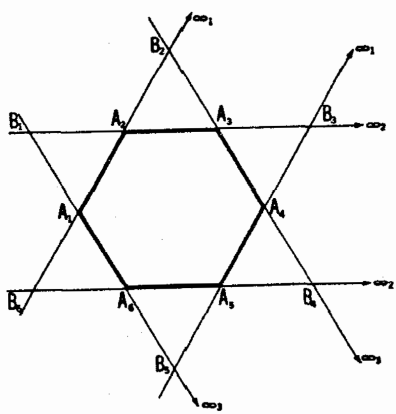


شکل ۲۰۵

دورزدن اضلاع چهارضلعی، همواره به‌نقطهٔ آغاز می‌رسیم؛ بویژه، نقطه‌های P_1 و P_{13} برضلع AB منطبق‌اند.

۷۷. الف) این مسأله یك‌حالت خاص مسألهٔ قبل است.

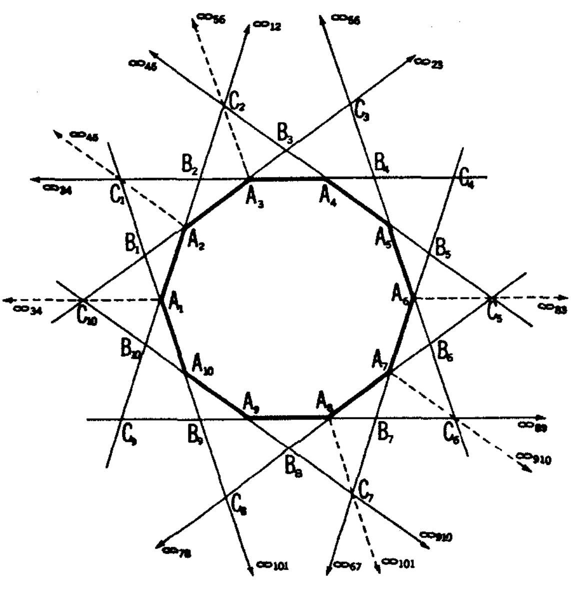
ب) نقطه‌های تلاقی امتدادهای اضلاع شش‌ضلعی را با B_1 و B_2 و B_3 و B_4 و B_5 و B_6 نشان می‌دهیم (شکل ۲۰۶ الف)، و نقطه‌های بینهایت متناظر به‌امتدادهای



شکل ۲۰۶ الف

A_1A_2 و A_2A_3 و A_3A_4 را به ∞_1 و ∞_2 و ∞_3. تصویر خط A_1A_2 از مرکز A_6 بر خط A_2A_3 نقطه‌های A_1 و A_2 و B_6 و ∞_1 را به نقطه‌های B_1 و A_2 و ∞_2 و A_3 بدل می‌کند، و تصویر A_2A_3 از مرکز A_1 بر A_3A_4 نقطه‌های B_1 و A_2 و ∞_2 و A_3 را به ∞_3 و B_2 و A_4 و A_3. با استفاده از تصاویر مناسب، متوالیاً از نقطه‌های ∞_3 و B_2 و A_4 و A_3 بر خط A_3A_4 به نقطه‌های A_5 و ∞_1 و A_4 و B_3 بر A_4A_5؛ بعد به نقطه‌های A_5 و A_6 و B_4 و ∞_2 بر خط A_5A_6؛ سپس به نقطه‌های B_5 و A_6 و ∞_3 و A_1 بر A_6A_1؛ بالاخره به نقطه‌های ∞_1 و B_6 و A_2 و A_1 برخط اولیهٔ A_1A_2 می‌رسیم. حاصلضرب این شش تصویر معرف یک تبدیل تصویری است از A_1A_2 که A_1 و A_2 و B_6 و ∞_1 را به ∞_1 و B_6 و A_2 و A_1 بدل می‌کند، و مربع این تبدیل A_1 و A_2 و B_6 و ∞_1 را به A_1 و A_2 و B_6 و ∞_1؛ و لذا تبدیلی است همانی برخط A_1A_2 (برای اثبات درستی این نتیجه کافی است بدانیم که تبدیل مورد بحث سه نقطه را ثابت نگاه می‌دارد؛ ← راه‌حل مسألهٔ ۷۶).

ج) نقطه‌های تلاقی امتدادهای اضلاع ده‌ضلعی را به B_1 و B_2 و .. و B_{10}؛ C_1 و C_2 و .. و C_{10}، همان گونه که در شکل ۲۰۶ ب نشان داده شده، نشان می‌دهیم، و



شکل ۲۰۶ ب

نقطه‌های بینهایت خطهای A_1A_2 و A_2A_3 وغیره را به ∞_{12} و ∞_{23} وغیره. تصویر از مرکز A_{10} نقطه‌های A_1 و A_2 و B_{10} برخط A_1A_2 را به‌نقطه‌های B_1 و A_2 و C_{10} بر A_2A_3، بدل می کند. تصاویر متوالی از مراکز A_1 و A_2 و ... و A_9 این نقاط را بـه C_1 و B_2 و ∞_{34} برخط A_3A_4؛ سپس به ∞_{45} و C_2 و A_5 برخط A_4A_5؛ بعد بـه A_6 و ∞_{56} و A_5 برخط A_5A_6؛ سپس به A_6 و A_7 و B_5 برخط A_6A_7؛ بعد به B_6 و A_7 و C_5 برخط A_7A_8؛ بعدبه C_6 و B_7 و ∞_{89} برخط A_8A_9؛ سپس به $\infty_{9,10}$ و C_7 و A_{10} برخط A_9A_{10}؛ بعد به A_1 و $\infty_{10,1}$ و A_{10} برخط $A_{10}A_1$؛ بعدبه A_1 و A_2 و B_{10} برخط اولیهٔ A_1A_2 بدل می کند. حاصلضرب این ده‌تصویر معرف تبدیلی است تصویری از خط A_1A_2 که سه‌نقطهٔ A_1 و A_2 و B_{10} را ثابت نگاه می‌دارد، و بنا براین باید تبدیل همانی ازآن خط باشد (← راه‌حل قسمت (ب))

۷۸. الف) تصویر دایرهٔ S برخط AB از M، نقطه‌های A و B و N و P بر دایره را به A و B و O و E برآن خط بـدل می کند. تصویر S بر AB از Q همین چهار نقطه‌را به A و B و F و O بدل‌می کند. ازآنجانتیجه‌می‌شود که‌نسبتهای ناهمساز چهار نقطهٔ A و B؛ O و E، و A و B؛ F و O مساوی‌اند، یعنی

$$\frac{AO/BO}{AE/BE}=\frac{AF/BF}{AO/BO}=\frac{BO/AO}{BF/AF}$$

این رابطه، تساوی‌نسبتهای ناهمساز چهارتاییهای A و B؛ O و E، و B و A؛ O و F را ایجاب می کند. حال قرینهٔ چهارتایی A و B و O و E را نسبت بـه O، مرکز وتر AB، پیدا می کنیم، و این‌عمل چهارتایی ما را به B و A و O و F_1 بدل می کند که F_1 قرینهٔ E نسبت‌به O است. ولی‌در این‌صورت نسبتهای ناهمساز چهارتاییهای A و B؛ OوF، و B و A؛ O و F_1 مساوی‌اند که‌تساوی $F=F_1$ را ایجاب‌می کند، یعنی همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشت: یك راه حل دیگر این مسأله استفاده از قضیهٔ ۱، بخش ۳ (ص ۷۱) است. بویژه شکل۹۳ را بریك صفحهٔ π' تصویر می کنیم به‌طوری‌که دایرهٔ S به‌یك‌دایرهٔ S' بدل شود، و نقطهٔ O به‌مرکز O' از S'. سپس بااستفاده از ویژگی (ج) ازیك تصویر مرکزی (رك. ص ۴۸)، به‌آسانی می‌توان تساوی نسبتهای ناهمساز چهارتاییهای AوB؛ E و O؛ و B و A؛ O و F را نشان داد.

ب) این تعمیم‌قسمت (الف)است. استدلال، که‌شبیه به‌استدلال قسمت (الف)

است، به‌عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود.

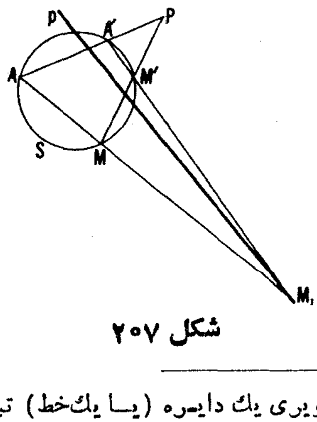
۷۹. گیریم P یك نقطه‌و S یك دایره‌باشد. منظور ازتصویرِS برخودش از P، تبدیلی است کــه یك نقطهٔ M بر S را به M'، دومین نقطهٔ تقاطع PM و S، بدل می‌کند (شکل ۲۰۷). این تبدیل، تبدیلی‌است تصویری. زیرا فرض می‌کنیم A و A' یك‌جفت نقطهٔ متناظر باشند، و M و M' یك جفت‌دیگر. به‌موجب قضیهٔ ۱ ازبخش ۴ (ص۸۴)، M_1، نقطهٔ تقاطع AM و $A'M'$، برخط ثابت p، قطبی P نسبت‌به S قرار دارد. این نشان‌می‌دهد که تبدیلی که M را به M' بدل می‌کند، می‌تواند ابتدا به‌وسیلهٔ تصویر S از A برخط p (که M را به M_1 بدل‌می‌کند، شکل ۲۰۷) تحقق یابد. بنابراین، تبدیل از M به M' تبدیلی‌است تصویری، همان‌گونه‌که ادعا کرده بودیم.

اینك قضایای مسائل ۴۱ (الف) ـ (ج) را ثابت می‌کنیم.

الف) رشته‌تبدیلات‌تصویری از دایره را به‌شرح زیر درنظر می‌گیریم: دایره را ابتدا از P وسپس‌از Q، وبالاخره از O برخودش‌تصویر می‌کنیم. به‌آسانی دیده می‌شود که اثر این تبدیلات بر رأسهای چهارضلعی محاطی چنین است:

$A \to B \to C \to A$ و $B \to A \to D \to B$ و $C \to D \to A \to C$ و $D \to C \to B \to D$.

این نشان می‌دهد که‌تبدیل تصویری منتجه* چهار نقطهٔ ثابت دارد، ولذا تبدیلی است همانی (← راه‌حلهای مسائل ۷۶ و ۷۷؛ برای اثبات نتیجه‌گیری خــود کافی است سه‌نقطه از دایره پیدا کنیم که براثر این تبدیل ثابت بمانند). از اینجا نتیجه می‌شود



شکل ۲۰۷

* حاصلضرب تبدیلات تصویری یك دایـره (یـا یك‌خط) تبدیلی است تصویری (زیرا روشن است که چنین حاصلضربی برنسبت ناهمساز ۴ نقطه تأثیری نمی‌گذارد).

که اگر تصویر دایرهٔ S برخودش از P، یك‌نقطهٔ E از S را به F بدل کند، و تصویر از Q، F را به G، آنگاه تصویر از O، G را به E بدل می‌کند. اما معنی این‌مطلب این است که اگر دوضلع EF و FG ازیك مثلث محاطی از P و Q بگذرند، ضلع EG از O خواهد گذشت.

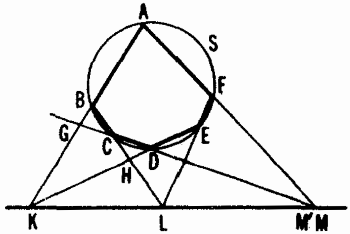
عیناً به‌همین‌طریق نشان می‌دهیم که رشته تصاویر دایره برخودش با مراکز تصویر O و P و Q تبدیلی‌است همانی (زیرا رأسهای چهارضلعی $ABCD$ را ثابت نگاه می‌دارد). از اینجا نتیجه می‌شود که اگر دوضلع یك‌مثلث محاطی از O و P بگذرند، ضلع سوم از Q خواهد گذشت.

ب) رشته تصاویر دایرهٔ S را برخودش، از P و Q، مجدداً از P، و باز از Q درنظر می‌گیریم. رأسهای چهارضلعی $ABCD$ چنین تبدیل می‌شوند:
$A\to B\to C\to D\to A$ ، $B\to A\to D\to C\to B$ و $C\to D\to A\to B\to C$ و $D\to C\to B\to A\to D$. از اینجا نتیجه‌می‌شود که‌تبدیل منتجه تبدیلی‌است همانی. لذا اگر تصویر دایرهٔ S برخودش از P، A_1 را به B_1 بدل کند، تصویر از Q، B_1 را به C_1، و تصویر از P، C_1 را به D_1، آنگاه تصویر از Q، D_1 را به A_1 بدل می‌کند. اما این بدین‌معنی است که‌هرگاه اضلاع A_1B_1 و C_1D_1 ازیك‌چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ محاط دریك دایره، از نقطهٔ P بگذرند، وضلع B_1C_1 از Q بگذرد، آنگاه ضلع D_1A_1 نیز از Q می‌گذرد.

گرفتن O، نقطهٔ‌تقاطع قطرهای‌چهارضلعی $ABCD$، به‌عنوان مرکز یك‌تصویر از دایره برخودش، باپیدا کردن رشته تصاویر دایره برخودش از P و Q هم‌ارز است. نقطهٔ تلاقی قطرهای چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ حاصل نیز همین ویژگی را دارد و بنابراین باید بر O منطبق باشد.

ج) برهان کاملامشابه برهان مسألهٔ ۴۱(ب) است، و آوردن‌آن به‌عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود.

۸۰. نقطه‌های تقاطع AB و DE، BC و EF، CD و FA، CD و KL، را به K و L و M و M' نشان می‌دهیم، و نقطه‌های تقاطع AB و CD، BC و DE، را با G و H (شکل ۲۰۸). باید نشان دهیم که M بر M' منطبق است. تصویر CD از A بر دایرهٔ S نقطه‌های GوCوDوMرا به‌نقطه‌های B و C و D و F بدل می‌کند، و تصویر این‌نقطه‌ها از E برخط BC آنها را به B و C و H و L. تصویر نقطه‌های اخیر از K برخط CD آنها را به G و C وDوM' بدل می‌کند، که دراین‌صورت M و M' برهم‌منطبق می‌شوند (← راه‌حل مسألهٔ ۷۵).

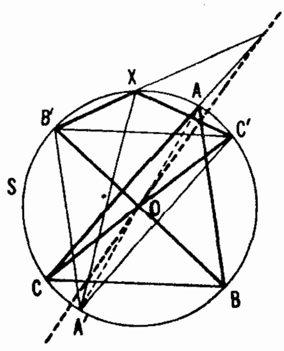


شکل ۲۰۸

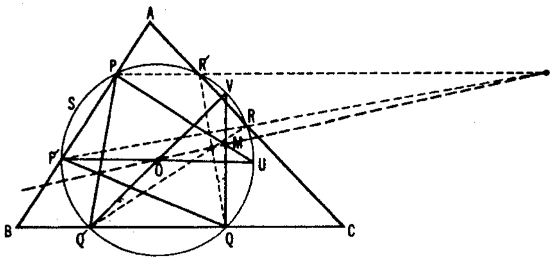
۸۱. الف) شش‌ضلعی $ABB'XC'C$ را درنظر می‌گیریم (شکل ۲۰۹؛ ترتیب رأسها را رعایت کنید!). به‌موجب قضیهٔ پاسکال نقطه‌های تلاقی اضلاع AB و XC'، AC و XB'، BB' و CC' (نقطهٔ O) همخط‌اند. یك استدلال مشابه نشان می‌دهد که نقطه‌های تقاطع AB و XC'، BC و XA'، و نقطهٔ O همخط‌اند، و حکم مسأله نتیجه می‌شود.

ب) شش‌ضلعی $APRTSQ$ (ترتیب رأسها را رعایت کنید!) محاط در دایرهٔ به‌قطر AT را درنظر می‌گیریم (شکل ۲۱۰ الف). به‌موجب قضیهٔ پاسکال نقطه‌های تلاقی اضلاع AP و ST، AQ و RT، RP و QS، همخط‌اند، که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

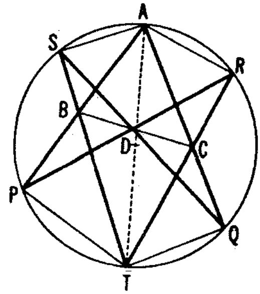
ج) گیریم U و V نقطه‌هـای تلاقی PM و $P'O$، QM و $Q'O$ باشند (شکل ۲۱۰ ب). چون داریم $\sphericalangle P'PM = \sphericalangle Q'QM = 90^\circ$، نقطه‌هـای U و V (کـه



شکل ۲۰۹



شکل ۲۱۰ ب

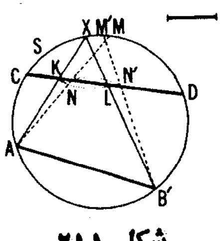


شکل ۲۱۰ الف

متقاطر P' و Q' هستند) بر S قرار دارند. حال شش‌ضلعی $P'QVQ'PU$، محاط در S را درنظر مـی‌گیریم (به‌ترتیب رأسهـا توجه‌کنید!). به مـوجب قضیهٔ پاسکال، نقطه‌های تقاطع اضلاع QV و PU، $Q'V$ و $P'U$، $P'Q$ و $Q'P$ یعنی نقطه‌های M و O، ونقطهٔ تقاطع $P'Q$ و $Q'P$ همخطند. استدلالی مشابه نشان می‌دهدکه نقطه‌های تقاطع $P'R$ و PR'، $Q'R$ و QR' برخط OM قرار دارند.

۸۲. الف) تبدیل تصویری‌دایرهٔ S به‌شرح‌زیر را درنظر می گیریم: نقطهٔ M متعلق به S، ازنقطهٔ A برخط CD تصویر شده است. نقطهٔ حاصل یعنی N، به‌اندازهٔ $NN'=a$ درطول خط CD منتقل شده‌است (یعنی‌تبدیل تضویری خط CD است)، و بالاخره نقطهٔ N' از B بر نقطهٔ M' واقع بر S (شکل ۲۱۱) تصویر شده است. نقطهٔ مطلوب X نقطهٔ ثابتی است از تبدیل تصویری بالا. برای تعیین آن مجبوریم نگاره‌های سه‌نقطهٔ دلخواه از دایرهٔ S را براثر تبدیل خود پیداکنیم. مسأله می‌تواند دویا یك جواب داشته باشد، یا جوابی نداشته باشد.

ب) راه‌حل آن با راه‌حل‌مسألهٔ (الف) فقط دراین نکته‌تفاوت داردکه به‌جای



شکل ۲۱۱

انتقال a درطول‌خط CD، باید ازحرکت نیمدور پیرامون نقطهٔ مفروض E استفاده کنیم (که یك تبدیل تصویری از CD نیز هست).

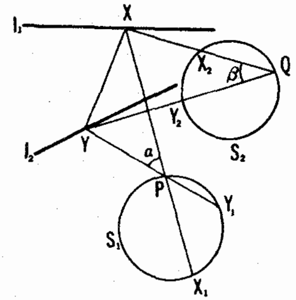
۸۳. الف) دایرهٔ S راکه بر P می‌گذرد در نظر می‌گیریم و فرض مـی‌کنیم که خطهای مطلوب PX و PY دایرهٔ S را درنقطه‌های X_1 و Y_1 ببرند (شکل ۲۱۲ الف). تبدیل تصویری از S به‌شرح زیر را درنظر مـی‌گیریم: دایرهٔ S از P بر l تصویر می‌شود، سپس l به‌اندازهٔ a در طول خودش انتقال داده می‌شود، بعد l از P بر S دوبـاره تصویر مـی‌شود، و بالاخره S حـول مرکزش بـه‌اندازهٔ 2α دوران داده می‌شود. جهت دوران طوری انتخاب می‌شود کـه موجب حرکت نقطهٔ تلاقی PM و l (M بر S) در امتدادی خلاف امتداد انتقال بالا شود. روشن است که اثر این تبدیل* بر نقطهٔ X_1 چنین است $X_1 \to X \to Y \to Y_1 \to X_1$ (به‌خاطر داشته باشید که $\widehat{X_1Y_1} = 2\sphericalangle X_1PY_1 = 2\alpha$)، لذا X_1 یك نقطهٔ ثابت است. اکنون سه‌نقطهٔ A و B و C را بر S انتخاب،و A' و B' و C'، نگاره‌های آنها را براثر این تبدیل تعیین می‌کنیم (← شکل ۲۱۲ الف): A_1 نقطهٔ تقاطع PA و l است، $A_1A_2 = a$، A_3 نقطهٔ تلاقی PA_2 و S است،و $\widehat{A_3A'} = 2\alpha$؛ B' و C' به‌طریق مشابه تعیین‌می‌شوند). نقطهٔ X_1 می‌تواند به‌عنوان یك‌نقطهٔ ثابت از تبدیل تصویری دایرهٔ S تعیین شود که A و B و C را به A' و B' و C' بدل کند.

مسأله ممکن است دویا یك جواب داشته باشد، و یا جوابی نداشته باشد.

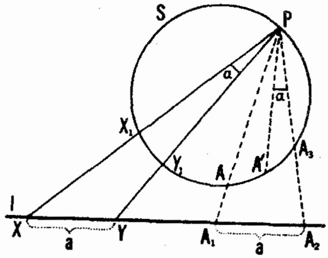
ب) دایره‌های S_1 و S_2 را که به‌ترتیب برنقطه‌های P و Q می‌گذرند رسم می‌کنیم. گیریم PX و PY دایرهٔ S_1 را درنقطه‌های X_1 و Y_1 ببرند، و QX و QY دایرهٔ S_2 را در نقطه‌هـای X_2 و Y_2 (شکل ۲۱۲ ب). تبدیل تصویری S_1 به‌شرح زیر را درنظرمی‌گیریم: S_1 ازم P بر l_1 تصویرشده‌است، سپس l_1 از Q بردایرهٔ S_2؛ بعد S_2 درحول مرکزش به‌زاویهٔ 2β دوران کرده است. آنگاه S_2 از Q بر l_2 تصویر شده‌است، بعد l_2 ازم P بر S_1؛ وسرانجام S_1 درحول‌مرکزش به‌زاویهٔ 2α دوران کرده است. اثراین‌تبدیل برنقطهٔ X_1 چنین‌است $X_1 \to X \to X_2 \to Y_2 \to Y \to Y_1 \to X_1$، لذا X_1 یك نقطهٔ ثـابت است. حال سه نقطهٔ A_1 و B_1 و C_1 را بـر S_1 انتخاب، و نگاره‌های آنها A'_1 و B'_1 و C'_1 را براثر تبدیل فـوق پیدا می‌کنیم. پس نقطهٔ X_1 ممکن است به‌عنوان یك‌نقطهٔ ثابت تبدیل تصویری S_1، که A_1 و B_1 و C_1 را به A'_1 و B'_1 و C'_1 بدل می‌کند، انتخاب شود.

---

* ملاحظه می‌کنیدکه تبدیل ما تصویری است؛ زیرا تبدیلات انفرادی نسبت ناهمساز را ثابت نگاه می‌دارند.



شکل ۲۱۲ ب



شکل ۲۱۲ الف

چون S_1 به‌دوطریق‌ممکن‌است به‌زاویهٔ 2α دوران داده شود، مسأله می‌تواند تا چهارجواب داشته باشد.

۸۴. الف) دایره را n بار پشت‌سرهم از نقطه‌های M_1وM_2و...وM_n برروی خودش تصویر می‌کنیم (← آغاز راه‌حل مسألهٔ ۷۹). در این‌صورت رأس A_1 از چندضلعی $A_1A_2 \dots A_n$ (← شکل ۱۹۹الف) متوالیاً به A_2 و A_3 و ... و A_n وبالاخره به A_1 بدل می‌شود، لـذا A_1 یك‌نقطهٔ ثابت از حاصلضرب این تصاویر است. حال A' و B' و C'، نگاره‌های سه‌نقطهٔ A و B و Cی دایره، را براثر این تبدیل پیدا، و A_1 را به‌عنوان یك‌نقطهٔ ثابت تبدیل‌تصویری دایره، که سه‌نقطهٔ A و B و C را به‌سه نقطهٔ A' و B' و C' بـدل می‌کند، تعیین مـی‌کنیم. تعیین بقیهٔ رئوس nضلعی دیگر اشکالی ندارد. مسأله ممکن است دارای دوجواب یا یك جواب باشد و یا جوابی نداشته باشد.درحالت خاص،وقتی‌حاصلضرب nتصویر یك تبدیل همانی‌باشد، مسأله ممکن‌است به‌صورت مسأله‌ای‌نامعین درآید (در ارتباط بااین‌گونه حالتهای خاص، ← مسائل ۴۱ (الف) و (ب)ی بخش۳، ونیز راه حل مسألهٔ۴۱ (الف) جلد اول). بجاست اشاره‌کنیم که این ترسیم، عیناً نظیر ترسیم مسألهٔ ۸۴ (ب)، ممکن است با ستارهٔ تنها انجام‌گیرد.

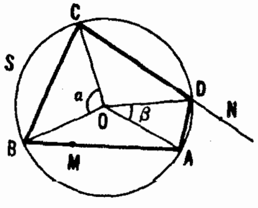
اگر بعضی از نقطه‌هـای M_1 و M_2 و ... و M_n دربینهایت باشند، یعنی اگر به‌جای نقطه‌هایی‌که اضلاع n ضلعی از آنهامی‌گذرند امتدادهای بعضی از اضلاع nضلعی مطلوب داده شده بـاشند، آنگـاه به‌جـای تصاویر مربوطهٔ دایره برخودش قرینه‌های آنها نسبت‌به قطرهای عمود برامتدادهای‌اضلاع مفروض قرار داده‌می‌شوند (رك. راه حل مسألهٔ ۴۱ (الف)، ازجلد اول که همهٔ نقطه‌های M_1 و M_2و...وM_n

نقطه‌های بینهایت‌اند).

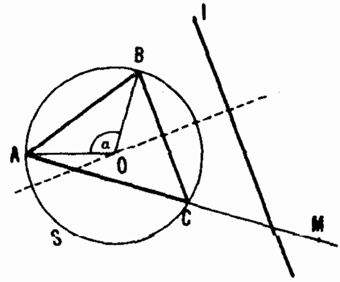
ب) بر اثر تبدیل قطبی نسبت به‌دایرهٔ مفروض S، خطهای $l_۱$ و $l_۲$ و ... و l_n به نقطه‌های $L_۱$ و $L_۲$ و ... و L_n بدل می‌شوند. اما می‌توانیم یك چندضلعی $A'_۱A'_۲...A'_n$ در S محاط کنیم که اضلاعش از $L_۱$ و $L_۲$ و ... و L_n بگذرند (← قسمت الف). ویژگی (الف) از یك تبدیل قطبی (← ص ۱۰۰) ایجاب می‌کند که چندضلعیی که اضلاعش $a_۱$ و $a_۲$ و ... a_n قطبیهای $A'_۱$ و $A'_۲$ و .. و A'_n هستند، شرایط مسألهٔ ما را بر آورده کند.

۸۵. الف) زاویهٔ مرکزی وتری به‌طول مفروض AB از دایرهٔ S را به α نشان می‌دهیم. سپس فرض می‌کنیم که خط l معرف امتداد ضلع BC باشد و M نقطه‌ای بر AC (شکل ۲۱۳ الف). تبدیل تصویری از S را به‌شرح زیر درنظر می‌گیریم: دوران S حول مرکزش به‌زاویهٔ α، سپس تقارن S نسبت به‌قطر عمود بر l، و بعدتصویر S برخودش از M (← اول مسألهٔ ۷۹). روشن است که A یك نقطهٔ ثابت این تبدیل است (داریم: $A \to B \to C \to A$). پس A می‌تواند به‌عنوان یك نقطهٔ ثابت از تبدیل معلومی معین شود (← راه حل مسائل ۸۲-۸۴). مسأله ممکن‌است دارای دو یا یك‌جواب باشد و یا جوابی نداشته باشد (به‌آسانی می‌توان نشان داد که تبدیل تصویری نمی‌تواند یك تبدیل همانی باشد).

ب) فرض می‌کنیم M و N نقطه‌های مفروض بر اضلاع AB و CD از چهارضلعی مطلوب باشند، و α و β زاویه‌های مرکزی‌دایره روبه‌رو به‌وترهای‌معلوم BC و AD (شکل ۲۱۳ ب). تبدیل‌تصویری‌از دایره‌به‌شرح زیررا درنظرمی‌گیریم: تصویر S از M برروی خودش، و بعد دوران S درحول مرکزش به زاویهٔ α، سپس تصویر S از نقطهٔ N بر روی خودش، و بالاخره دوران S حول مرکزش به



شکل ۲۱۳ب

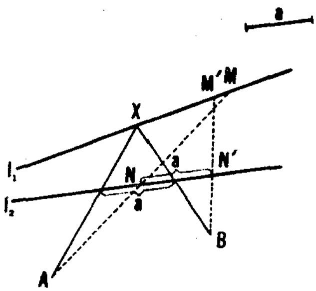


شکل ۲۱۳ الف

زاویهٔ β. روشن است که A یك نقطهٔ ثابت تبدیل است (داریم $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \leftarrow A$) و این کلید ترسیم است. مسأله ممکن است دوجواب یا یك جواب داشته باشد و یا جوابی نداشته باشد، و در موارد استثنایی ممکن است نامعین باشد.

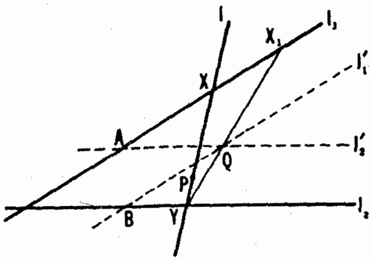
۸۶. الف) تبدیل تصویری خط l_1 به‌شرح زیر را درنظر مـی گیریم: تصویر یك نقطهٔ M واقع بر آن ازنقطـهٔ A برخط l_2، سپس انتقال نقطـهٔ حـاصل، یعنی N، به‌اندازهٔ $NN'=a$ در طول l_2، و سرانجام تصویر نقطهٔ N' برخط l_1 از نقطهٔ B و تعیین نقطهٔ M'، پای تصویر (شکل ۲۱۴). نقطهٔ مطلوب X نقطهٔ ثابت این تبدیل تصویری است و بدین‌عنوان می‌تواند معین شود(← راه‌حل مسألهٔ ۸۲ الف). مسأله ممکن‌است دارای دو یا یك جواب باشد، و یا جوابی نداشته باشد.

ب) تفاوت راه حل این‌قسمت با راه حل قسمت(الف) فقط دراین است که به‌جای انتقال بـه‌اندازهٔ a در طـول l_2، یك نیمدور خط l_2 در حـول نقطهٔ E را می گذاریم (← راه حل مسألهٔ ۸۲ (ب)).



شکل ۲۱۴

۸۷. الف) فرض می کنیم X و Y معرف نقطه‌های تلاقی خط مطلوب با l_1 و l_2 باشند (شکل ۲۱۵ الف). l_1 را از P بر l_2 تصویر مـی کنیم. سپس l_2 را بر l_1 منطبق می کنیم به‌طوری که، بویژه، B بر A منطبق شود، و سرانجام l_2 را تحت‌تأثیر یك تجانس به‌مرکز A و نسبت m/n قرار مـی‌دهیم. تبدیل نتیجهٔ l_1 تبدیلی است تصویری، زیرا حاصلضرب یك تصویر و یك تجانس است. X یك نقطهٔ ثابت این تبدیل است (داریم: $X \rightarrow Y \rightarrow X$)، ولـذا می‌تواند تعیین شود (راه حلهای مسائل ۸۲-۸۵).چون تجانس می‌تواند به‌نسبت m/n — نیز باشد، مسأله تا چهار جواب دارد. درحالت خاصی که تبدیل‌تصویری بالا به‌همانی بدل شود،مسأله نامعین است. (این‌حالت زمانی روی می‌دهد که خطهای l_1 و l_2 و نقطه‌های A و B براثر تجانس



شکل ۲۱۵ الف

به‌مرکز P ونسبت $\pm m/n$ متناظر یکدیگر شوند.)

ب) فرض می‌کنیم کـه $l_1 \neq l_2$، و l_1 را بر l_2 از P تصویر مـی‌کنیم. نقطهٔ مطلوب X بر l_1 به‌یك نقطهٔ Y بر l_2 بدل می‌شود. بعد l_2 را دوباره بر l_1 از نقطهٔ Q، نقطهٔ تقاطع خطهای $l'_1 \| l_1$ و $l'_2 \| l_2$ که‌از دونقطهٔ A و B می گذرند، تصویر می کنیم (شکل ۲۱۵ الف). گیریم این تصویر نقطهٔ Y از l_2 را به‌یـك نقطهٔ X_1 از l_1 بدل کند. از تشابـه مثلثهـای AQX_1 و BYQ داریـم: $AX_1/AQ = BQ/BY$، یعنی

$$AX_1 . BY = AQ . BQ = p^2$$

که p می‌تواند تعیین شود. حال اگر تجانس به‌مرکز A و نسبت k^2/p^2 را برای l_1 به‌کار بریم، نقطهٔ X_1 به‌یك نقطهٔ X' بدل می‌شود به‌طوری که

$$AX' = \frac{k^2}{p^2} AX_1 = \frac{k^2}{p^2} \cdot \frac{p^2}{BY} = \frac{k^2}{BY} = AX$$

یعنی X' بر X منطبق می‌شود. این نشان می‌دهد که X نقطهٔ ثابتی‌از تبدیل تصویری l_1 است و لذا می‌تواند معین شود. چون تجانس می‌تواند دارای نسبت $-k^2/p^2$ نیز باشد، مسأله می‌تواند تا چهارجواب داشته باشد (تبدیل تصویری ما نمی‌تواند به‌تبدیل همانی بدل شود).

اگر $l_1 \| l_2$، و B_1 نقطه تلاقی PA و l_2 باشد، آنگاه

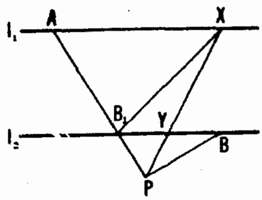
$$B_1Y = \frac{PB_1}{PA} \cdot AX$$

بنابراین شرط $AX . BY = k^2$ با شرط

$$BY \cdot B_1Y = \frac{PB_1}{PA} \cdot k^2$$

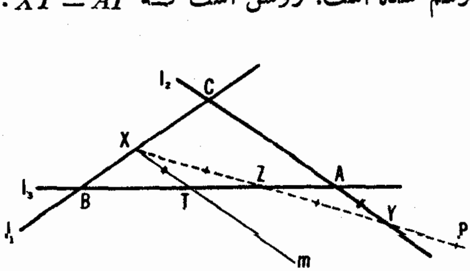
(شکل ۲۱۵ب) هم‌ارز است. چون، علاوه بر حاصلضرب پاره‌خطهای BY و B_1Y، BY . B_1Y، مجموع (یا تفاضل) آنها، BB_1، نیز داده شده است، این پاره‌خطها را بلافاصله می‌توانیم رسم کنیم.

یادداشت. به‌جای اینکه قید کنیم که خط مطلوب از نقطهٔ مفروض P می‌گذرد، می‌توانستیم قید کنیم که امتدادش معین است. دراین‌صورت در راه حل‌ما، کافی است به‌جای تصویر مرکزی به‌مرکز P، تصویرموازی بگذاریم.



شکل ۲۱۵ب

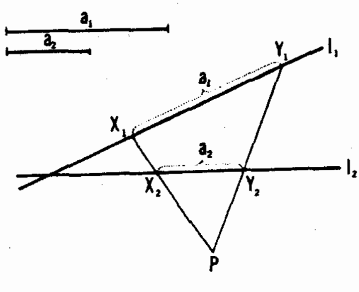
۸۸. گیریم l_1 و l_2 و l_3 دوبه‌دو یکدیگر را درنقطه‌های A و B و C ببرند، و X و Y و Z نقطه‌های تلاقی خط مطلوب l با l_1 و l_2 و l_3 باشند. بنا بر فرض $XZ = ZY$ (شکل ۲۱۶). فرض می‌کنیم که T نقطهٔ تلاقی l_3 با خط m باشد که از X موازی l_2 رسم شده است. روشن است که $XT = AY$. از تشابه مثلثهای



شکل ۲۱۶

XTB و CAB داریم $XB/XT=CB/CA$. اما $BX/YA=CB/CA$، و طرف راست تساوی معلوم است. پس مسأله برمی‌گردد به‌مسألهٔ رسم خطی از یک نقطهٔ P که دوخط مفروض l_1 و l_2 را درنقطه‌های X و Y ببرد به‌طوری‌که نسبت BX/YA مقدار معلومی باشد، یعنی مسألهٔ ۸۷ (الف). بررسی‌حالاتی‌را که دوخط از سه خط l_1 و l_2 و l_3 موازی باشند و یا هرسه موازی باشند به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۸۹. تبدیل تصویری خط l_1 به‌شرح زیر را درنظرمی‌گیریم: l_1 را بر l_2 از P تصویرمی‌کنیم،سپس l_2را به‌موازات خود به‌اندازهٔ a_2 انتقال می‌دهیم، بعد l_2را بر l_1 از P تصویرمی‌کنیم،و بعد l_1 را به‌موازات خود به‌فاصلهٔ a_1 انتقال می‌دهیم. روشن است که نقطهٔ مطلوب X_1 یک نقطهٔ ثابت این تبدیل است ($X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow Y_2 \rightarrow Y_1 \rightarrow X_1$، شکل ۲۱۷)، وبنابراین می‌توانند پیدا شود. (← راه‌حلهای‌مسائل‌قبل).چون انتقال برروی‌یک‌خط ممکن‌است در دوجهت صورت گیرد، مسأله ممکن است تا چهار جواب داشته باشد. درحالت‌استثنایی که‌تبدیل بالا به‌تبدیل‌همانی بدل می‌شود، مسأله ممکن است نامعین باشد (این حالت زمانی پیش می‌آید که خطهای l_1 وl_2 براثرتجانس به‌مرکز P ونسبت $\pm a_1/a_2$ متناظرشوند).



شکل ۲۱۷

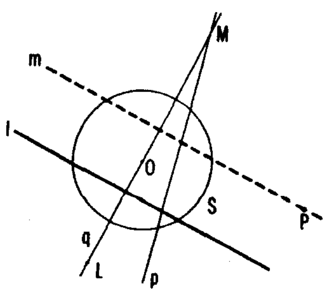
۹۰. l_1 را بر l_2 از M_1، سپس l_2 را بر l_3 از M_2، و بعد l_3 را بر l_4 از M_3 و... و بالاخره l_n را برl_1 از M_n، تصویرمی‌کنیم (شکل ۱۵۱). نقطه‌های ثابت حاصل از تبدیل تصویری l_1 رأسهای n ضلعی مطلوب‌اند (← راه‌حل مسألهٔ ۴۸ (الف)). مسأله ممکن است دو یا یک‌جواب داشته باشد، یا جوابی نداشته باشد. درحالت استثنایی که تبدیل تصویری خط l_1 به‌همانی بدل‌شود، مسأله نامعین است.

اگر برای بعضی از اضلاع nضلعی مطلوب به‌جای اینکه هر نقطه از آن ضلع داده شده باشد، امتداد آن ضلع داده شده باشد، به‌جای تصویر مرکزی متناظرش باید تصویر موازی گذاشته شود.

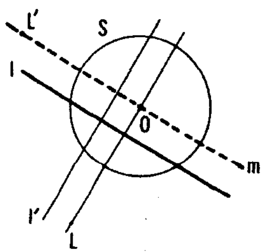
۹۱. الف) وضع خط مطلوب m (← شکل ۲۱۸ الف) به‌وسیلهٔ P و نقطهٔ بینهایت l معین می‌شود. از اینجا نتیجه می‌شود که M، قطب l نسبت به‌دایرهٔ مفروض S، نقطهٔ تلاقی خطوط p و q است که اولی قطبی P و دومی قطبی نقطهٔ بینهایت خط l است. رسم p با ستارهٔ تنها آسان است (← ص ۸۸). خط q بایستی ازقطب خط مفروض l، یعنی L که می‌تواند به‌وسیلهٔ ستارهٔ تنها به‌دست آید، و ازقطب خط بینهایت یعنی از O، مرکز دایرهٔ S، بگذرد. این نشان می‌دهد که M می‌تواند با ستارهٔ تنها معین شود. وقتی M معلوم باشد، قطبش m نسبت به S می‌تواند با ستارهٔ تنها رسم‌شود.

روشن است که وقتی l از O بگذرد این ترسیم ممکن نیست. ولی دراین‌حال از تقاطع l و S قطعه‌ای معین می‌شود که وسط آن نقطهٔ O معلوم است، وخطی از P به‌موازات l می‌تواند مانند راه حل‌مسألهٔ ۳(ب)ی بخش۱ رسم شود. ترسیم‌ما بازهم ممکن نیست، وقتی P بر O منطبق باشد. دراین صورت به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم: L، قطب‌خط مفروض l نسبت به S، را پیدا می‌کنیم؛ خط OL بر l عمود است. بعد یک خط l' موازی با OL رسم می‌کنیم و L'، قطب l' نسبت به S، را به‌دست می‌آوریم. پس OL' خط مطلوب است، زیرا بر L' عمود است و بنابراین با l موازی است (شکل ۲۱۸ ب).

ب) از M خطی به‌موازات AB می‌کشیم، و از B خطی به‌موازات AM.



شکل ۲۱۸ الف

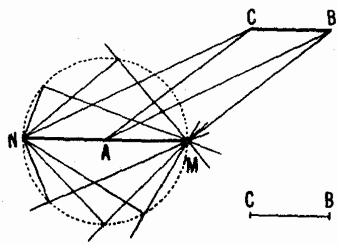


شکل ۲۱۸ ب

فرض می‌کنیم N نقطهٔ تلاقی این‌خطها باشد. روشن‌است که MN پاره‌خط مطلوب است.

ج) فرض‌می‌کنیم که L قطب l نسبت به S باشد. OL بر l عمود است. برای پیدا کردن خط مطلوب،کافی است از P خطی موازی OL رسم‌کنیم. اگر l از O، مرکز S، بگذرد این ترسیم ممکن نیست؛ ولی درآن صورت می‌توانیم یك خط l' موازی با l رسم‌کنیم و عمودی از P بر l' فرود آوریم.

۹۲. پاره‌خط BC را که طولش مساوی شعاع مفروض باشد رسم می‌کنیم. از A خطی موازی BC می‌کشیم و بر آن قطعات MA و AN را مساوی با پاره‌خط BC جدا می‌کنیم (← مسألهٔ ۹۱(ب)). پاره‌خط MN قطر دایرهٔ مطلوب‌است.حال خطی‌از M می‌گذرانیم و عمودی از N بر آن وارد می‌کنیم (← مسألهٔ ۹۱ (ج)). پای این‌عمود بردایرهٔ مطلوب واقع‌است. با تغییرخط ماربر M می‌توانیم نقطه‌های دلخواه زیادی از دایرهٔ مطلوب را به‌دست‌آوریم (شکل ۲۱۹).

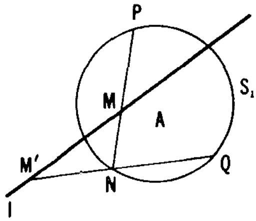


شکل ۲۱۹

۹۳. فرض می‌کنیم P و Q دونقطه بر S_1 باشند (شکل ۲۲۰). l را از P بر S_1 و S_1 را از Q بر l تصور می‌کنیم. روشن است که نقطه‌های تقاطع S_1 و l بر اثر تبدیل تصویری حاصل از l ثابت‌اند.* یك راه آسان برای پیدا کردن سه نقطهٔ R و S و T بر l، این است که سه نقطهٔ $\bar{R}$ و $\bar{S}$ و $\bar{T}$ از S_1 را اول از P بر l، برنقاط R و S و T، تصویر کنیم وسپس از Q برنقطه‌های R' و S' و T' (برای پیدا کردن پنج نقطهٔ P و Q و $\bar{R}$ و $\bar{S}$ و $\bar{T}$ از دایرهٔ S_1 از روش مسألهٔ ۹۲ استفاده

---

* این تبدیل، تصویری است، زیرا نسبت ناهمساز را حفظ می‌کند (رك. ص. ۱۱۸).

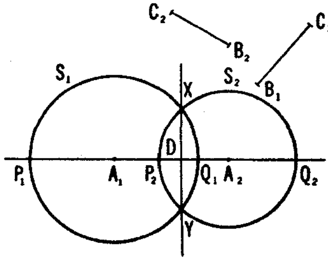


شکل ۲۲۰

می‌کنیم). بدین‌ترتیب، مسألهٔ ما بدل می‌شود به‌مسألهٔ تعیین نقاط ثـابت یك تبدیل تصویری با ستاره، از یك خط l، که به‌وسیلهٔ نقطه‌های R' و S' و T'، نگاره‌های R و S و T بر l، مشخص شده‌اند. اگر دایرهٔ S درصفحه داده شده باشد، این مسأله می‌تواند به‌کمك ستارهٔ تنها حل شود (← ص ۱۲۳).

۹۴. نخست باید $P_۱$ و $Q_۱$، $P_۲$ و $Q_۲$، نقطه‌های تقاطع خط‌المرکزین $A_۱A_۲$ را با $S_۱$ و $S_۲$ تعیین کنیم (شکل ۲۲۱، ← مسألهٔ ۹۳). روشن‌است که اگر پاره‌خطهای $P_۱Q_۱$ و $P_۲Q_۲$ یکی در بیرون دیگری، یا یکی در داخل دیگری بـاشد، $S_۱$ و $S_۲$ متقاطع نیستند. مانده است حالتی را درنظر گیریم که $P_۲$ درون پاره‌خط $P_۱Q_۱$ و $Q_۱$ درون پاره‌خط $P_۲Q_۲$ قرارداشته باشد.

حال D، نقطهٔ تقاطع خط‌المرکزین $A_۱A_۲$، را با XY، وترمشترك $S_۱$ و $S_۲$، تعیین می‌کنیم (X و Y نقطه‌هـای مطلوب تقاطع دوایر هستند). بـدین‌منظور تبدیل تصویری خط $A_۱A_۲$ را کـه یك‌نقطهٔ واقعی R را به‌نقطهٔ R' بـدل می‌کند چنانکه $\sphericalangle RXR' = ۹۰^\circ$، درنظر می‌گیریم. این تبدیل، تصویری است، زیرا می‌توانـد



شکل ۲۲۱

به‌ترتیب زیر به‌دست آید: A_1A_2 را از نقطهٔ X بریك دایرهٔ S مار بر X تصویر می‌کنیم، سپس S را درحول مرکزش به‌زاویه 180° دوران می‌دهیم، و سپس S را از X بر A_1A_2 تصویر می‌کنیم (← راه حل مسألهٔ ۸۳ (الف)). این تبدیل P_1 را به Q_1، و Q_1 را به P_1، و P_2 را به Q_2 بدل می‌کند، و لذا نگاره‌های این سه‌نقطه بر l به‌دست می‌آیند. با استفاده از ستارهٔ تنها می‌توانیم به‌آسانی نگارهٔ یك‌نقطهٔ قبلاً مشخص شدهٔ M بر l را بر اثر تبدیل تصویری خود تعیین کنیم؛ زیرا می‌توانیم تبدیل را با تصویر l برخط دیگر l_1، بعد با تصویر l_1 برخط دیگر l_2، و سپس تصویر دوبارهٔ l_2 بر l (← شکل ۸۹) تحقق بخشیم.* به ویژه نقطهٔ D می‌تواند به‌عنوان نگارهٔ نقطهٔ بینهایت خط l پیدا شود (این امر مستلزم رسم خطی‌است موازی با l، و این ترسیم می‌تواند به‌کمك ستارهٔ تنها انجام گیرد، ← مسألهٔ ۹۱ (الف)). خط XY در D بر A_1A_2 عمود است. بدین ترتیب می‌تواند مطابق راه حل مسألهٔ ۹۱ (ج) رسم شود. پس نقطه‌های X و Y به‌صورت نقطه‌های تقاطع XY با یکی از دایره‌های S_1 یا S_2 معین می‌شوند (← مسألهٔ ۹۳).

۹۵. الف) فرض می‌کنیم M و N نقطه‌های تلاقی دایره‌های S_1 و S_2 باشند (شکل ۲۲۲ الف). دونقطهٔ A و B از دایرهٔ S_1 را از M بر S_2 تصویر می‌کنیم، سپس نقطه‌های حاصل، A_1 و B_1، را از N بر S_1 تصویرمی کنیم و نقطه‌های A' و B' را بر S_1 به‌دست می‌آوریم. داریم $\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$ (زیرا

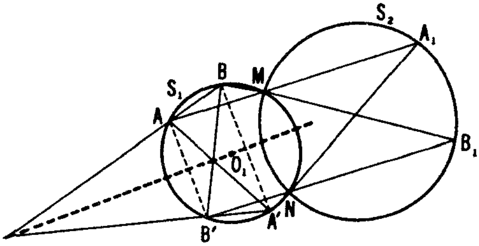
$$\sphericalangle AMB=\sphericalangle A'NB'$$

این زاویه‌ها بازاویه‌های A_1MB_1 و A_1NB_1 محاط در کمان $\widehat{A_1B_1}$ از S_2، مساوی‌اند). از آنجا نتیجه می‌شود که $AB'\|BA'$، و بنابراین خط واصل بین نقطه‌های تقاطع AB و $A'B'$، AA' و BB' قطری است از S_1 (این مطلب با توجه به تقارن روشن است؛ و نیز می‌توانیم چنین استدلال کنیم که خط مورد نظر قطبی نقطهٔ بینهایتی‌است که خطهای AB' و BA' بر آن تلاقی می‌کنند). به‌همین‌طریق می‌توانیم قطر دیگر S_1 را پیدا کنیم. پس مرکز S_1 نقطهٔ تقاطع این دوقطر است.

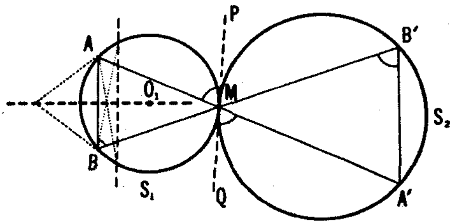
ب) فرض می‌کنیم M نقطهٔ تماس S_1 و S_2 باشد (شکل ۲۲۲ ب). دونقطهٔ A

---

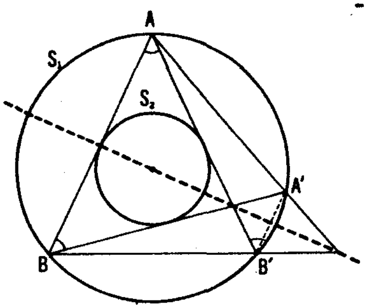
* همچنین می‌توانستیم P_1 و Q_1 و P_2 و Q_2 و M را از یك نقطهٔ دلخواه O از S بر نقطه‌های $\overline{P}_1$ و $\overline{Q}_1$ و $\overline{P}_2$ و $\overline{Q}_2$ و $\overline{M}$ از S تصویر کنیم. سپس با استفاده از ترسیم در شکل ۹۸، $\overline{M'}$ را که نگارهٔ $\overline{M}$ بر اثر تبدیل تصویری S است و $\overline{P}_1$ و $\overline{Q}_1$ و $\overline{P}_2$ را به $\overline{Q}_1$ و $\overline{P}_1$ و $\overline{Q}_2$ بدل می‌کند پیدا، و بالاخره $\overline{M'}$ را از نقطهٔ O دوباره بر l تصویر کنیم.



شکل ۲۲۲ الف



شکل ۲۲۲ ب



شکل ۲۲۲ ج

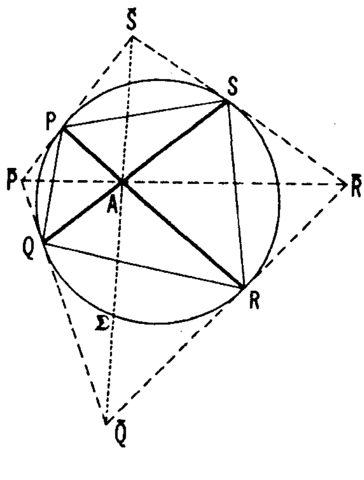
و B از دایرهٔ S_1 را از M بر S_2 تصویر می‌کنیم تا دونقطهٔ A' و B' را به‌دست آوریم. وترهای AB و $A'B'$ موازی‌اند (اگر PQ مماس مشترك S_1 و S_2 باشد، آنگاه $\sphericalangle ABM = \sphericalangle AMP$، زیرا اندازهٔ مشترك آنها نصف $\widehat{AM}$ است. همچنین $\sphericalangle A'B'M = \sphericalangle A'MQ$ و لذا $\sphericalangle ABM = \sphericalangle A'B'M$). اما با استفاده از ستارهٔ تنها می‌توانیم وتری از S_1 را موازی با AB رسم کنیم (← مسألهٔ ۳ (ب)ی بخش ۱)، وبدین‌ترتیب یك‌قطر از S_1 را پیدا کنیم. (← راه حل قسمت (الف)). یك ترسیم مشابه قطر دیگر را به دست می‌دهد، وتقاطع این دوخط مرکز مطلوب S_1 است.

ج) از یك نقطهٔ A از دایرهٔ S_1 مماسهای AB و AB' را بردایرهٔ دوم S_2 رسم می‌کنیم (← مسألهٔ ۵۴، بخش ۴)، و از B، نقطهٔ تلاقی مماس اول با S_1، مماس دوم BA' را بر S_2 می‌کشیم (شکل ۲۲۲ ج). روشن است که

$\sphericalangle ABA' = \sphericalangle A'B'A$ (به‌علت تقارن)، $\sphericalangle BAB' = \sphericalangle ABA'$ (مقابل به یك کمان). از آنجا نتیجه می‌شود که $\sphericalangle BAB' = \sphericalangle A'B'A$، وبنا براین $AB \| A'B'$. پس دراین صورت نقطه‌های تقاطع AA' و BB'، AB' و BA'، بریك‌قطر S_1 قرار دارند (← راه‌حل قسمت (الف)). به‌طریق مشابه می‌توانیم قطر دیگر S_1 و لـذا مرکز آن را تعیین کنیم.

پیوست

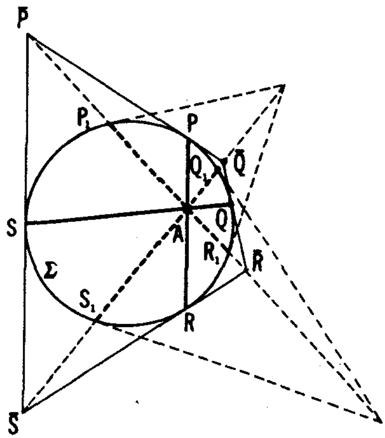
۹۶. فرض می‌کنیم PAQ و RAS دوزاویهٔ هذلولوی متقابل به‌رأس باشند، و $\bar{P}\bar{Q}\bar{R}\bar{S}$ یك‌چهارضلعی باشد که اضلاعش بردایرهٔ Σ در P و Q و R و S مماس‌اند (شکل ۲۲۳). خطهای $\bar{P}A$ و $\bar{R}A$ (دقیقتر بگوییم، پاره‌خطهایی از این خطها که در داخل قرص $\mathbf{K}$ قرار دارند) نیمسازهای زاویه‌های PAQ و RAS هستند. چـون نیمسازهای این زاویه‌ها خط واحدی تشکیل می‌دهند، $\bar{P}\bar{R}$، قطرچهارضلعی $\bar{P}\bar{Q}\bar{R}\bar{S}$، ازنقطهٔ تلاقی قطرهای $PQRS$ می‌گذرد، ولی‌این، درست‌حکم قضیهٔ مسألهٔ ۴۰(الف) بخش ۳ است. این‌حکم که نیمسازهای زاویه‌های متقابل به‌رأس‌خط واحدی تشکیل می‌دهند، درهندسهٔ اقلیدسی و نیز درهندسهٔ هذلولوی خیلی به‌سادگی اثبات می‌شود (از تساوی زیـر نـاشی می‌شود $\delta_{\bar{P}AP}+\delta_{PAS}+\delta_{SA\bar{R}}=\delta_{\bar{R}AR}+\delta_{RAQ}+\delta_{QA\bar{P}}$).



شکل ۲۲۳

بدین‌طریق یك راه حل سادهٔ تازه‌ای برای مسألهٔ ۴۰ (الف) به‌دست می‌آوریم.

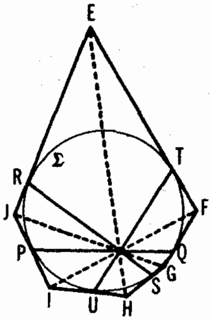
۹۷. فرض می‌کنیم چهارضلعی $\bar{P}\bar{Q}\bar{R}\bar{S}$ در نقطه‌های P و Q و R و S بر دایرهٔ Σ مماس باشد، و P_1R_1 و Q_1S_1 قطعاتی باشند که Σ از قطرهای آن جدا می‌کنند (این پاره‌خطها نیمسازهای هذلولوی زاویه‌های PAQ و QAR هستند، A نقطهٔ تلاقی PR و QS است، ← مسألهٔ قبل). بنابراین مماسهای مرسوم بر Σ در P_1 و R_1 روی خط $\bar{Q}\bar{S}$ متلاقی‌اند، و مماسهای مرسوم بر Σ در Q_1 و S_1 روی خط $\bar{P}\bar{R}$ شکل ۲۲۴).



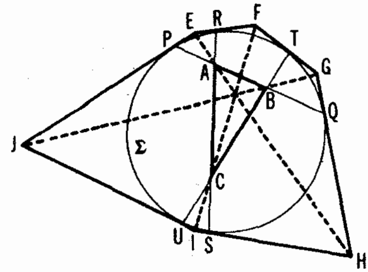
شکل ۲۲۴

۹۸. فرض می‌کنیم ABC مثلثی باشد که از خطهای هذلولوی PQ و RS و TU تشکیل شده‌است، و $EFGHIJ$ یك شش‌ضلعی باشد که در نقطه‌های P و R و T و Q و S و U بر Σ مماس است (شکل ۲۲۵). در این‌صورت خطهای EH و FI و GJ نیمسازهای زاویه‌های $\triangle ABC$ هستند (← مسألهٔ ۹۶). منظور از اینکه نیمسازهای زاویه‌های یك مثلث متقارب‌اند، این است که خطهای EH و FI و GJ متقارب‌اند؛ ولی این همان حکم قضیهٔ بریانشون است.

تبصره. راه حل بالا نشان می‌دهد که قضیهٔ بریانشون مستلزم تقارب نیمسازهای یك‌مثلث نااقلیدسی است. عکس این‌حکم–تقارب نیمسازها در یك مثلث نااقلیدسی مستلزم قضیهٔ بریانشون است–دقیقاً بگوییم، غلط است. موضوع این است که خطهای



شکل ۲۲۵ ب



شکل ۲۲۵ الف

PQ و RS و TU درشکـل ۲۲۵ الف ممکن است متقـارب بـاشند (شکل ۲۲۵ ب). دراین‌حالت، (که مسلماً استثنایی است)، ما مثلثی نداریم و قضیهٔ بریانشون نتیجهٔ قضیهٔ مربوط به‌تقارب نیمسازهـا دریك مثلث نیست، بلکه قضیهٔ ساده‌تر درباب نیمسازهـای زاویه‌های متقابل به‌رأس است (← شکل ۲۲۵ ب و شکل ۲۲۳).

۹۹. گیریم PQ و RS و TU خطهای نااقلیدسی باشند که یك‌مثلث ABC را مشخص می‌کنند. فرض می‌کنیم V نقطهٔ تقاطع PR و SQ باشد و A' و C' و D نقطه‌های تقاطع خط TU با خطهای VP و VS و VB (شکل ۲۲۶). پس

$$d_{AB}=\log\left(\frac{AQ/BQ}{AP/BP}\right),\quad d_{BC}=\log\left(\frac{BS/CS}{BR/CR}\right),$$

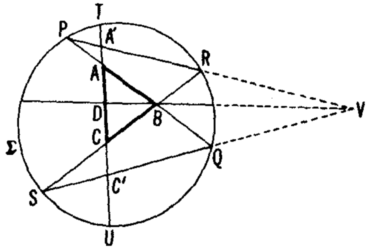
$$d_{AC}=\log\left(\frac{AU/CU}{AT/CT}\right)$$

باید نشان دهیم که

$$\log\left(\frac{AQ/BQ}{AP/BP}\right)+\log\left(\frac{BS/CS}{BR/CR}\right)>\log\left(\frac{AU/CU}{AT/CT}\right)$$

یعنی

$$\left(\frac{AQ/BQ}{AP/BP}\right)\left(\frac{BS/CS}{BR/CR}\right)>\left(\frac{AU/CU}{AT/CT}\right)$$



شکل ۲۲۶

داریم

$$\frac{AQ/BQ}{AP/BP}=\frac{AC'/DC'}{AA'/DA'}$$

زیرا نقطه‌های A و D؛ C' و A' از A و B؛ P و Q بر اثر تصویر PQ بر UT از مرکز V به‌دست آمده‌اند. همچنین

$$\frac{BS/CS}{BR/CR}=\frac{DC'/CC'}{DA'/CA'}$$

زیرا نقطه‌های D و C؛ C' و A' از B و C؛ S و R بر اثر تصویر RS از V بر UT به‌دست آمده‌اند. از آنجا نتیجه می‌شود که

$$\left(\frac{AQ/BQ}{AP/BP}\right)\left(\frac{BS/CS}{BR/CR}\right)=\left(\frac{AC'/DC'}{AA'/DA'}\right)\left(\frac{DC'/CC'}{DA'/CA'}\right)=\frac{AC'/CC'}{AA'/CA'}$$

چون $\frac{AC'}{CC'}>\frac{AU}{CU}$، (زیرا

$$\frac{AC'}{CC'}-\frac{AU}{CU}=\frac{AC'\cdot CU-CC'\cdot AU}{CC'\cdot CU}$$

$$=\frac{AC'(CC'+C'U)-CC'(AC'+C'U)}{CC'\cdot CU}$$

$$=\frac{C'U(AC'-CC')}{CC'\cdot CU}=\frac{C'U\cdot AC}{CC'\cdot CU}>0)$$

وچون $\frac{AT}{CT} < \frac{AA'}{CA'}$، (زیرا

$$\frac{AA'}{CA'} - \frac{AT}{CT} = \frac{AA' \cdot CT - CA' \cdot AT}{CA' \cdot CT}$$

$$= \frac{AA'(CA' + A'T) - CA'(AA' + A'T)}{CA' \cdot CT}$$

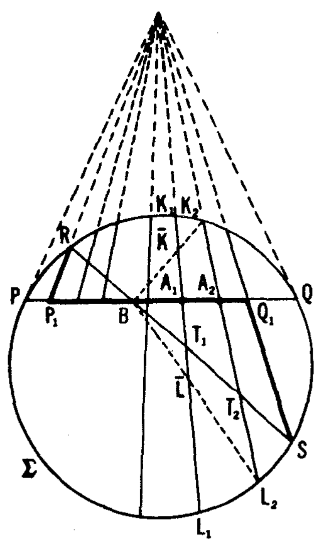
$$= \frac{A'T(AA' - CA')}{CA' \cdot CT} = \frac{A'T \cdot CA}{CA' \cdot CT} < 0 \Big)$$

نتیجه می گیریم که

$$\left(\frac{AQ/BQ}{AP/BP}\right)\left(\frac{BS/CS}{BR/CR}\right) = \frac{AC'/CC'}{AA'/CA'} > \frac{AU/CU}{AT/CT}$$

که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۰۰. الف) دومین حکم مساله، مستقیماً از شکل ۲۲۷ الف نتیجه مـی‌شود.



شکل ۲۲۷ الف

مانده است نشان دهیم که فاصله‌های نقطه‌های RS از خط PQ، وقتی این نقطه‌ها از B دور می‌شوند بی‌حد افزایش پیدا می‌کنند. با توجه به‌شکل ۲۲۷ الف اول نشان می‌دهیم که

$$\frac{A_1L_1/T_1L_1}{A_1K_1/T_1K_1}<\frac{A_2L_2/T_2L_2}{A_2K_2/T_2K_2} \quad \text{یا} \quad d_{A_1T_1}<d_{A_2T_2}$$

اما

$$\frac{A_2L_2/T_2L_2}{A_2K_2/T_2K_2}=\frac{A_1\bar{L}/T_1\bar{L}}{A_1\bar{K}/T_1\bar{K}}$$

(زیرا نقطه‌های A_1 و T_1؛ $\bar{K}$ و $\bar{L}$ از نقطه‌های A_2 و T_2؛ K_2 و L_2 براثر تصویر از مرکز B به‌دست آمده‌اند) و

$$\frac{A_1L_1}{T_1L_1}<\frac{A_1\bar{L}}{T_1\bar{L}} \quad \text{و} \quad \frac{A_1K_1}{T_1K_1}>\frac{A_1\bar{K}}{T_1\bar{K}}$$

(← راه‌حل مسألهٔ قبل). بنابراین

$$\frac{A_1L_1/T_1L_1}{A_1K_1/T_1K_1}<\frac{A_1\bar{L}/T_1\bar{L}}{A_1\bar{K}/T_1\bar{K}}=\frac{A_2L_2/T_2L_2}{A_2K_2/T_2K_2}$$

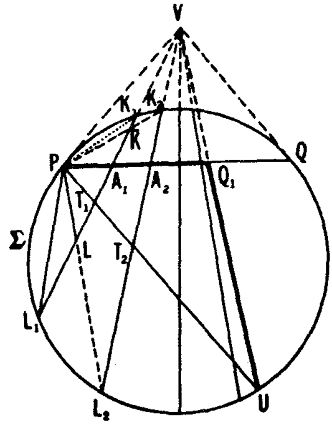
که همان چیزی است که می‌خواستیم اثبات کنیم. فاصلهٔ نقطه‌های خط RS تا خط PQ بیش از حد زیاد می‌شود، زیرا نیمخطهای P_1R و Q_1S بینهایت‌اند؛ رك. ص ۱۳۸.

ب) دومین حکم مسأله مستقیماً از شکل ۲۲۷ ب نتیجه می‌شود. حال نشان می‌دهیم که فاصله‌های نقطه‌های UP تا خط QP در امتداد PU افزایش پیدا می‌کند. به‌موجب نمادگذاری شکل ۲۲۷ ب باید نشان دهیم که

$$\frac{T_1K_1/A_1K_1}{T_1L_1/A_1L_1}<\frac{T_2K_2/A_2K_2}{T_2L_2/A_2L_2} \quad \text{یا} \quad d_{T_1A_1}<d_{T_2A_2}$$

اما

$$\frac{T_2K_2/A_2K_2}{T_2L_2/A_2L_2}=\frac{T_1\bar{K}/A_1\bar{K}}{T_1\bar{L}/A_1\bar{L}}$$



شکل ۲۲۷ ب

(نقطه‌های T_1 و A_1؛ $\bar{K}$ و $\bar{L}$ از نقطه‌های T_2 و A_2؛ K_2 و L_2، بر اثر تصویر از P به‌دست آمده‌اند)، و

$$\frac{T_1K_1}{A_1K_1}<\frac{T_1\bar{K}}{A_1\bar{K}}, \qquad \frac{T_1L_1}{A_1L_1}>\frac{T_1\bar{L}}{A_1\bar{L}}$$

(← راه‌حل مسالهٔ ۹۹). بنابراین

$$\frac{T_1K_1/A_1K_1}{T_1L_1/A_1L_1}<\frac{T_1\bar{K}/A_1\bar{K}}{T_1\bar{L}/A_1\bar{L}}=\frac{T_2K_2/A_2K_2}{T_2L_2/A_2L_2}$$

همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

فاصله‌های نقطه‌های خط PU تا PQ بیش‌از حد در امتداد PU زیاد می‌شوند زیرا طول نیمخط Q_1U بینهایت است (←ص ۱۳۸). ازسوی دیگر، فاصله‌های نقطه‌های PU تا PQ بیش از حد در امتداد UP کوچك‌می‌شود، زیرا نسبت A_1K_1/T_1K_1، وقتی A_1 به‌سمت P میل کند، به‌سمت ۱ میل خواهد کرد. (برای اینکه این‌را ببینیم ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{A_1K_1}{T_1K_1}=\frac{S_{PA_1K_1}}{S_{PT_1K_1}}=\frac{\frac{1}{2}PA_1\cdot PK_1\cdot\sin\sphericalangle A_1PK_1}{\frac{1}{2}PT_1\cdot PK_1\cdot\sin\sphericalangle T_1PK_1}$$

$$=\frac{PA_1}{PT_1}\cdot\frac{\sin\sphericalangle A_1PK_1}{\sin\sphericalangle T_1PK_1}=\frac{\sin\sphericalangle PT_1A_1}{\sin\sphericalangle PA_1T_1}\cdot\frac{\sin\sphericalangle A_1PK_1}{\sin\sphericalangle T_1PK_1}$$

$$=\frac{\sin\sphericalangle PT_1A_1}{\sin\sphericalangle T_1PK_1}\cdot\frac{\sin\sphericalangle A_1PK_1}{\sin\sphericalangle PA_1T_1}$$

اگر $A_1\to P$، آنگاه

$\sphericalangle PT_1A_1=\sphericalangle UT_1L_1\to 180^\circ-\sphericalangle UPV$ ، $\sphericalangle T_1PK_1\to\sphericalangle UPV$،

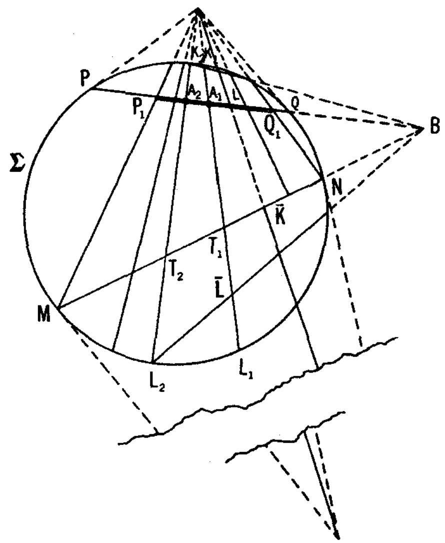
$\frac{\sin\sphericalangle PT_1A_1}{\sin\sphericalangle T_1PK_1}\to 1$ و $\sphericalangle A_1PK_1\to\sphericalangle QPV$ و

$\sphericalangle PA_1T_1=\sphericalangle QA_1K_1\to\sphericalangle QPV$ و $\frac{\sin\sphericalangle A_1PK_1}{\sin\sphericalangle PA_1T_1}\to 1$.)

نسبت A_1L_1/T_1L_1 بـه‌سمت یك میل می کند (استدلال، شبیه استدلالی است کـه هم‌اکنون کردیم). بنابراین

$\frac{A_1K_1/T_1K_1}{A_1L_1/T_1L_1}\to 1$ یعنی، $d_{A_1T_1}=\log\left(\frac{A_1K_1/T_1K_1}{A_1L_1/T_1L_1}\right)\to 0$.

ج) عمود مشترك دوخط درصفحهٔ هـذلولوی، خط واصل بین نقاط تـلاقی مماسهای بر Σ در P و Q، M و N (شکل ۲۲۷ ج)، یعنی خط واصل بین قطبهای خطهای PQ و MN نسبت به Σ است (← اول بخش ۴). این خط قطبی B، نقطهٔ تلاقی PQ و MN است (← قضیهٔ ۲، بخش ۴، ص ۸۸)؛ این خط Σ را می برد، اگروفقط اگر B درخارج Σ باشد. این‌مطلب مستلزم‌حکم اول مسأله است. آخرین حکم مستقیماً ازشکل ۲۲۷ ج نتیجه می‌شود. مـانده است نشان دهیم کـه فـواصل نقطه‌های MN ازخط PQ، وقتی این نقطه‌ها از پاهـای عمود مشترك MN و PQ دور می‌شوند، بیش از حد زیاد می‌شوند. طبق قرارداد شکل ۲۲۷ ج، اول بـاید نشان‌دهیم که $d_{T_1A_1}<d_{T_2A_2}$ یا



شکل ۲۲۷ ج

$$\frac{T_1K_1/A_1K_1}{T_1L_1/A_1L_1}<\frac{T_2K_2/A_2K_2}{T_2L_2/A_2L_2}$$

اما

$$\frac{T_2K_2/A_2K_2}{T_2L_2/A_2L_2}=\frac{T_1\bar{K}/A_1\bar{K}}{T_1\bar{L}/A_1\bar{L}}$$

(نقطه‌های A_1 و T_1؛ $\bar{K}$ و $\bar{L}$، از A_2 و T_2؛ K_2 و L_2 بر اثر تصویر از B به‌دست آمده‌اند)، و

$$\frac{T_1K_1}{A_1K_1}<\frac{T_1\bar{K}}{A_1\bar{K}},\qquad \frac{T_1L_1}{A_1L_1}>\frac{T_1\bar{L}}{A_1\bar{L}}$$

(← راه‌حل مسألهٔ ۹۹). بنابراین

$$\frac{T_1K_1/A_1K_1}{T_1L_1/A_1L_1}<\frac{T_1\bar{K}/A_1\bar{K}}{T_1\bar{L}/A_1\bar{L}}=\frac{T_2K_2/A_2K_2}{T_2L_2/A_2L_2}$$

که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

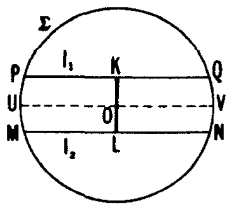
فواصل نقطه‌های خط MN از خط PQ بیش ازحد زیاد می‌شوند، زیرا نیمخطهای P_1M و Q_1N بینهایت هستند (← ص ۱۳۸).

۱۰۱. الف) اول فرض می‌کنیم l_1 و l_2 دوخط متقاطع درصفحهٔ هذلولوی باشند. نقطهٔ تلاقی آنها را با یك حرکت هذلولوی به O، مرکز قرص $\mathbf{K}$، می‌بریم (شکل ۲۲۸ الف). به‌آسانی دیده می‌شود که UV نیمساز (اقلیدسی و هذلولوی) زاویهٔ POR، حاصل از این‌خطها، محور تقارن هذلولوی آنهاست. زیرا تقارن محوری (اقلیدسی) نسبت به UV خط PQ را به RS بدل می‌کند؛ ولی این‌عمل، تقارن هذلولوی نسبت به خط UV نیز هست، زیرا عمودهای اقلیدسی برقطر UVی قرص $\mathbf{K}$، عمودهای هذلولوی بر UV نیز هستند.

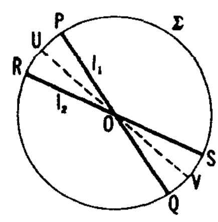
حال دوخط فراموازی l_1 و l_2 را درنظرمی گیریم. وسط عمود مشترك KL آنهارا (← مسألهٔ ۱۰۰ (ج)) بایك حرکت هذلولوی به O، مرکز قرص، می‌بریم (شکل ۲۲۸ ب). دراین صورت l_1 و l_2، به‌معنی اقلیدسی بر KL عمودند، و پاره‌خطهای OK و OL به معنی اقلیدسی قابل انطباق هستند (← ص ۱۴۰). عمود اقلیدسی و هذلولوی UV برخط KL در O، محور تقارن (اقلیدسی و هذلولوی) l_1 و l_2 است.

نشان دادن وجود محورتقارن برای موازیهای PQ و PT اندکی دشوار است. دراین‌حالت‌خط TQ را موازی با PT و PQ رسم می‌کنیم، وسپس‌خط PU را موازی با PQ و PT و عمود بر QT (شکل ۲۲۹ الف). خط PU محور تقارن مطلوب خطهای PQ و PT است. برای اثبات این‌مطلب، کافی است PU را با یك حرکت مناسب هذلولوی به‌یك قطر $\mathbf{K}$ بدل‌کنیم (شکل ۲۲۹ ب).

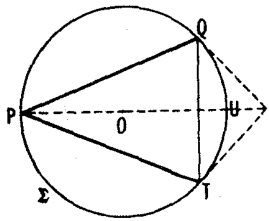
ب) تقارن‌نسبت به l، خط l_1 را به‌یك خط l_1'، مار بر A (چون l_1 از A_1 می‌گذرد) و متعلق به‌همان دسته خط l و l_1، بدل می‌کند. روشن‌است که چون‌چنین خطی منحصر به‌فرد است، پس l_1' بر l_2 منطبق است.



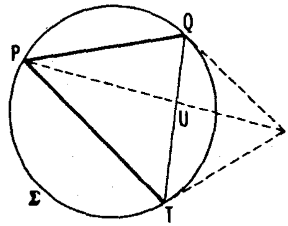
شکل ۲۲۸ ب



شکل ۲۲۸ الف



شکل ۲۲۹ ب



شکل ۲۲۹ الف

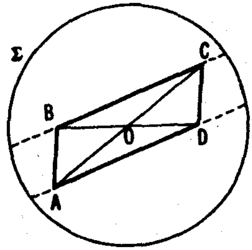
۱۰۲. فرض می‌کنیم $ABCD$ یك‌متوازی‌الاضلاع هذلولوی باشد. با یك حرکت هذلولوی نقطهٔ تقاطع قطرهای آن را به‌مرکز قرص $\mathbf{K}$ می‌بریم. چون طولهای هذلولوی پاره‌خطهای OA و OC (و پاره‌خطهای OB و OD) مساوی‌اند، پس طولهای اقلیدسی آنها نیز مساوی‌اند (← ص ۱۴۰) . این مطلب به‌ما امکان می‌دهد که نتیجه بگیریم چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع اقلیدسی است (شکل ۲۳۰ الف).

الف) $d_{AB}=d_{CD}$، زیرا پاره‌خطهای AB و CD با یك حرکت هذلولی، یعنی، نیمدور حول O، مرکز $\mathbf{K}$، به‌همدیگر مربوط می‌شوند. برهان تساوی $d_{AD}=d_{BC}$ مشابه برهانی است که هم‌اکنون آوردیم.

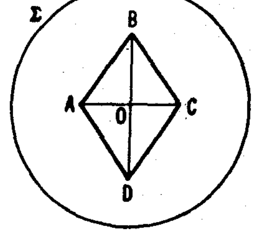
ب) $\delta_A=\delta_C$، زیرا زاویه‌های A و C با یك‌حرکت هذلولوی، یعنی، یك نیمدورحول O، به‌یکدیگرمربوط‌می‌شوند. به‌همین‌روش ثابت می‌شود که $\delta_B=\delta_D$.

ج) اگر قطرهای AC و BD به‌معنی هذلولوی برهم عمود باشند، به‌معنی اقلیدسی نیز برهم عمودند. ازاینجا نتیجه می‌شود که $ABCD$ یك‌لوزی اقلیدسی است (شکل ۲۳۰ ب). دراین‌حال $d_{AB}=d_{AD}$، زیرا پاره‌خطهای AB و AD با یك حرکت هذلولوی، یعنی تقارن نسبت به‌خط AC به‌هم مربوط می‌شوند؛ $\delta_{BAC}=\delta_{DAC}$، زیرا زاویه‌های BAC و DAC باهمان حرکت‌هذلولوی به‌هم‌مربوط می‌شوند.

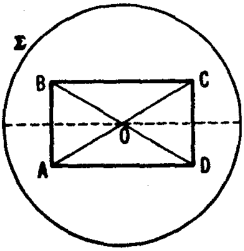
د) اگر $d_{OA}=d_{OB}$، آنگاه پاره‌خطهای OA و OB به‌معنی اقلیدسی قابل انطباق‌اند (← ص ۱۴۰)، و بدین‌ترتیب $ABCD$ یك مستطیل اقلیدسی است (شکل ۲۳۰ ج). دراین‌حال $\delta_A=\delta_B$، زیرا زاویه‌های A و B باحرکتی‌نااقلیدسی، یعنی تقارن نسبت به‌قطری از قرص $\mathbf{K}$ عمود (به‌معنی اقلیدسی و هذلولوی) بر AB



شکل ۲۳۰ الف



شکل ۲۳۰ ب



شکل ۲۳۰ ج

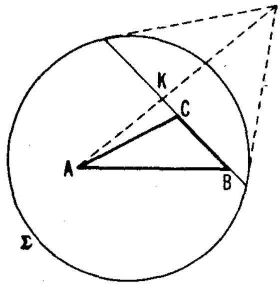
و DC، به‌هم مربوط می‌شوند.

ه)← قسمتهای (ج) و (د).

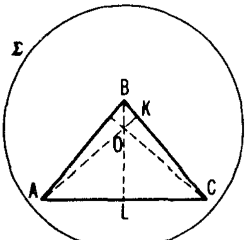
یادداشت. توصیهٔ ما به‌خواننده این است که قضایای مسائل (الف) تا (ه) را به‌عنوان مسائلی‌در هندسهٔ اقلیدسی، بدون استفاده از اصل توازی حل کند؛ این امر خود به‌خود ثابت می‌کند که این قضایا درهندسهٔ هذلولوی صحیح‌اند.

۱۰۳. نه. اینها فراموازی‌اند (←شکل ۲۳۰ الف).

۱۰۴. گیریم H نقطهٔ تقاطع ارتفاعهای AK و BL از مثلث حادةالزاویهٔ ABC باشد. [این ارتفاعهامتقاطع‌اند، زیرا هردوی آنها ازداخل $\triangle ABC$ می‌گذرند؛ زیرا اگرارتفاع مرسوم از A امتداد ضلع BC را بیرون C ببرد، آنگاه زاویهٔ C به‌موجب قضیهٔ زاویهٔ بیرونی یك مثلث، منفرج‌الزاویه خواهد بود که در هندسهٔ هذلولوی معتبر می‌ماند (← شکل ۲۳۱ الف)]. نقطهٔ H را با یك‌حرکت هذلولوی به O مرکز $\mathbf{K}$ بدل می‌کنیم (شکل ۲۳۱ ب). به‌معنی اقلیدسی تعامد داریم $BC \perp AK$ و $AC \perp BL$. از اینجا نتیجه‌می‌شود که O نقطهٔ‌تقاطع ارتفاعهای‌اقلیدسی $\triangle ABC$ است، لذا $AB \perp CO$. این امر که AB به‌معنی اقلیدسی بر قطر CO از $\mathbf{K}$ عمود است، ایجاب می‌کند که CO یك ارتفاع هذلولوی $\triangle ABC$ باشد. و این‌امر به‌نوبهٔ خود ایجاب می‌کند که سه‌ارتفاع (هذلولوی) یك‌مثلث حادةالزاویهٔ ABC متقارب باشند.

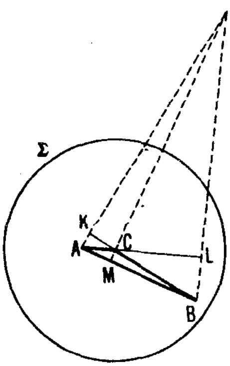


شکل ۲۳۱ الف

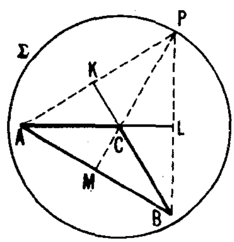


شکل ۲۳۱ ب

درحالتی‌که مثلث منفرج‌الزاویه باشد، موضوع فرق می‌کند. اگر دو ارتفاع AK و BL ازیك مثلث ABC دریك نقطهٔ H متقاطع باشند، ارتفاع سوم نیز از این نقطه‌می‌گذرد؛ اثبات این‌مطلب نظیر اثبات بالاست. حال‌فرض می‌کنیم‌که ارتفاعات AK و BL ازیك مثلث منفرج‌الزاویهٔ ABC (با زاویهٔ منفرجهٔ C) موازی باشند. با یك حرکت هذلولوی، رأس C را به‌مرکز **K** بدل می‌کنیم (شکل ۲۳۲ الف). پس $BC \perp AK$ و $AC \perp BL$، به‌معنی اقلیدسی. از اینجا نتیجه می‌شود که‌نقطهٔ P از Σ، محل‌تلاقی AK و BL، نقطهٔ تلاقی‌ارتفاعات اقلیدسی $\triangle ABC$ است، و CP به‌معنی اقلیدسی بر AB عمود است؛ اما دراین‌صورت CP نیزیك ارتفاع هذلولوی $\triangle ABC$ است. جمعبندی کنیم: اگر دو ارتفاع AK و BL ازیك مثلث منفرج‌الزاویهٔ ABC موازی باشند، آنگاه هرسه ارتفاع AK و BL و CM موازی‌اند (بیان قضیهٔ اقلیدسی متناظر مربوط به‌وتر **K** را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم).



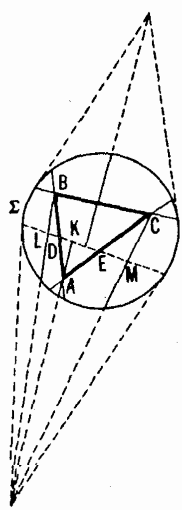
شکل ۲۳۲ ب



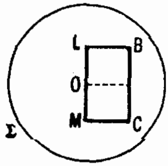
شکل ۲۳۲ الف

بالاخره فرض‌می‌کنیم که ارتفاعهای AK و BL ازیک‌مثلث ABC فراموازی باشند. به‌کمك یك‌حرکت‌هذلولوی C را به‌مرکز $\mathbf{K}$ بدل می‌کنیم (شکل ۲۳۲ ب). پس AK بر BC، و BL بر AC، به‌معنی اقلیدسی عمودند. R، نقطهٔ تلاقی‌خطهای AK و BL (که بیرون $\mathbf{K}$ است!)، نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای اقلیدسی $\triangle ABC$ است، لذا CR به‌معنی اقلیدسی بر AB عمود است. از اینجا نتیجه می‌شود که CR نیز یك ارتفاع هذلولوی $\triangle ABC$ است. جمعبندی‌کنیم: هرگاه ارتفاعهای AK و BL از یك مثلث منفرج‌الزاویهٔ ABC فراموازی باشند، هرسه ارتفاع AK و BL و CM فراموازی‌اند (← صص ۱۵۵–۱۵۶).

۱۰۵. اول‌ثابت‌می‌کنیم که درمثلث هذلولوی ABC میانخط DE، یعنی‌خط واصل بین وسطهای AB و AC، و عمودمنصف ضلع BC برهم عمودند. عمودهای AK و BL و CM را از رأسهای مثلث برمیانخط DE وارد می‌کنیم (شکل ۲۳۳ الف). ملاك قابلیت انطباق مثلثهای قائم‌الزاویه (که درهندسهٔ هذلولوی به‌قوت‌خود باقی است؛ ← ص ۱۴۸) ایجاب می‌کند کـه مثلثهای ADK و BDL و AEK و CEM باهم‌قابل‌انطباق‌باشند، لذا $d_{MC}=d_{AK}=d_{BL}$. وسط‌پاره‌خط LM را به‌وسیلهٔ یك حرکت هذلولوی به O مرکزقرص می‌بریم (شکل ۲۳۳ ب). لذا $OL=OM$ و $LM \perp BL$ و $LM \perp CM$ (به‌معنی‌اقلیدسی). اما تساوی $d_{LB}=d_{MC}$ ایجاب می‌کند



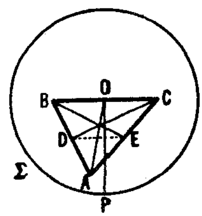
شکل ۲۳۳ الف



شکل ۲۳۳ ب

که پاره‌خطهای LB و MC به‌معنی اقلیدسی قابل‌انطباق باشند (درغیر این صورت تقارن نسبت به‌یك قطر $\mathbf{K}$، عمودبر LM، که حرکتی است هذلولوی، یکی از این پاره‌خطها را به‌دیگری بدل‌می‌کند)، لذا چهارضلعی $LMCB$ یك مستطیل اقلیدسی است. عموداقلیدسی در O برخط LM به‌معنی‌هذلولوی نیز براین‌خط عمود است. درعین‌حال، این‌خط عمودمنصف‌هذلولوی و اقلیدسی BC نیز هست، که حکم ما را ثابت می‌کند.

حال وسط ضلع BC ازیك مثلث دلخواه ABC را بر O مرکز $\mathbf{K}$ منطبق می‌گیریم (شکل ۲۳۴). عمود (اقلیدسی) OP بر BC به‌معنی هذلولوی نیز بر آن عمود است. میانخط DEی مثلث که بر OP به‌معنی هذلولوی عمود است، به‌معنی اقلیدسی نیز بر آن عمود است. ازاینجا نتیجه می‌شود که چهارضلعی $BCED$ یك ذوزنقهٔ اقلیدسی می‌باشد. به‌موجب قضیهٔ مسألهٔ ۲، بخش ۱، میانه‌های AO و BE و و CD از $\triangle ABC$ متقارب‌اند.

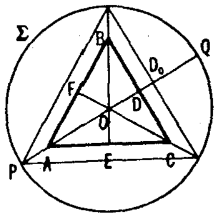


شکل ۲۳۴

۱۰۶. گزاره غلط است. برای اینکه این‌را بفهمیم، کافی است مثلث متساوی‌الاضلاعی‌که مرکزش بر O، مرکز قرص، منطبق باشد درنظربگیریم (شکل ۲۳۵). میانه‌های اقلیدسی این مثلث، میانه‌های هذلولوی نیز هستند. بعلاوه، $d_{OA} \neq ۲d_{OD}$، زیرا اگرطول هذلولوی‌یك‌ضلع $\triangle ABC$ بینهایت زیادشود (یعنی، رأسهای آن به دایرهٔ Σ نزدیك شوند)، آنگاه

$$d_{OD} \to d_{OD_\circ} = \log\left(\frac{OQ/D_\circ Q}{OP/D_\circ P}\right) = \log\left(\frac{۲}{۲/۳}\right) = \log ۳,$$

$$d_{OA} \to d_{OP} = \infty$$



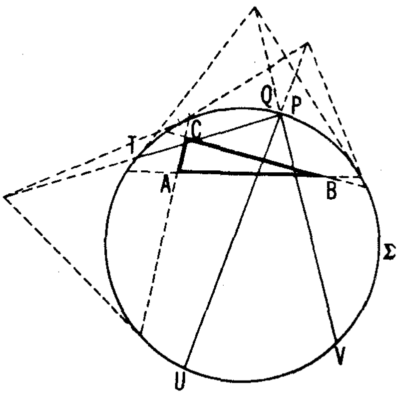
شکل ۲۳۵

یادداشت. برهانی که هم‌اکنون آوردیم نشان می‌دهد کـه حتی برای یك مثلث متساوی‌الاضلاع نسبت OA/OD، برای O، نقطهٔ تلاقی سه‌میانه، درمیانهٔ AD ثابت نیست، بلکه به‌طول ضلع مثلث بستگی دارد (علت این امـر این است کـه درهندسهٔ هذلولوی مثلثهای متساوی‌الاضلاع غیرقابل‌انطباق نامتشابه‌اند؛ ← متن پس‌از مسألهٔ ۱۱۰).

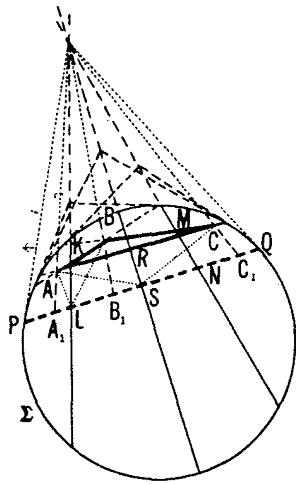
۱۰۷. اگر عمودمنصفهـای دوضلع یك مثلث دریك نقطهٔ O متقاطع بـاشند، عمودمنصف ضلع سوم‌نیز از O می گذرد؛ برهان این‌مطلب با برهان معمولی تفاوتی ندارد (← برهان تقارب نیمسازها در یك مثلث هذلولوی، ص ۱۵۰). حال فرض می‌کنیم که عمودمنصفهای KL و MN بر AB و BC فراموازی باشند، یعنی یك‌عمود مشترك PQ داشته‌باشند (شکل ۱۳۶ الف). پس، چنانکه نشان‌خواهیم‌داد، عمودمنصف سوم نیز بر PQ عمود است (این‌مطلب که RS، خط PQ را مـی برد، می‌توانـد مستقیماً از شکل ۲۳۶ الف دیده شود). عمودهای AA_1 و BB_1 و CC_1 را برخط PQ واردمی کنیم. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AKL و BKL قابل‌انطباق‌اند (ملاك ساقهای قابل‌انطباق)، لذا $AL=BL$، $\delta_{ALK}=\delta_{BLK}$، $\delta_{ALA_1}=\delta_{BLB_1}$. ازاینجا نتیجه‌می‌شود که مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ALA_1 و BLB_1 قابل‌انطباق‌اند (مـلاك وتر و زاویهٔ حاده). بنابراین $BB_1=AA_1$. یك‌برهـان مشابه نشان مـی‌دهد کـه $BB_1=CC_1$. پس $AA_1=CC_1$. بعد، مثلثهای قـائم‌الزاویهٔ ARS و CRS قـابل انطباق‌انـد (ملاك ساقهای قابل‌انطباق)، لذا $AS=CS$ و $\delta_{ASR}=\delta_{CSR}$. همچنین مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ASA_1 و CSC_1 قـابل انطباق‌اند (ملاك وتر وساق‌قابل انطباق)، لذا $\delta_{ASA_1}=\delta_{CSC_1}$. اما داریم:

$$\delta_{RSA_1}=\delta_{RSA}+\delta_{ASA_1}=\delta_{RSC}+\delta_{CSC_1}=\delta_{RSC_1}$$

معنی این تساوی این است که RS بر PQ عمود است.



شکل ۲۳۶ ب



شکل ۲۳۶ الف

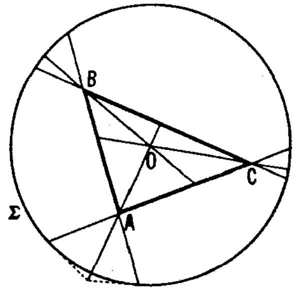
بالاخره حالتی را درنظر می‌گیریم کـه عمودمنصفهای اضلاع AB و BC، UP و VP، مـوازی باشند (← شکل ۲۳۶ ب). پس عمودمنصف سوم، QT، بـا UP و VP موازی‌است (زیرا اگر، مثلاخطهای UPو QT فراموازی بودند، آنگاه همان گونه که در بالا نشان دادیم، UPوVP فراموازی می‌شدند). از شکل ۲۳۶ ب پیداست که QTوUV نمی‌توانند برهم منطبق شوند. از اینجـا نتیجه می‌شود کـه در این حالت نیز، خطهای UP و VP و QT به‌یك دسته‌خط متعلق‌اند.

۱۰۸. الف) نقطهٔ تلاقی عمودمنصفهای $\triangle ABC$ را (← ص ۱۵۰) به O مرکز $\mathbf{K}$ می‌بریم (شکل۲۳۷). در این‌صورت زاویه‌های OAB و OAC و OBA و OBCوOCAوOCB به‌معنی اقلیدسی و هذلولوی حاده‌اند. بنابراین $\delta_A<\sphericalangle A$ و $\delta_B<\sphericalangle B$ و $\delta_C<\sphericalangle C$ (← تبصرهٔ آخر در ص ۱۴۶ که به‌خط ریز نوشته شده است). بنابراین

$$\delta_A+\delta_B+\delta_C<\sphericalangle A+\sphericalangle B+\sphericalangle C=180^\circ$$

که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

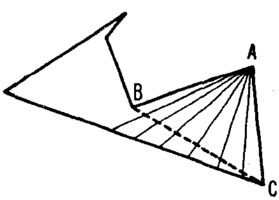
ب) قبل ازهمه ثابت می‌کنیم که هر n ضلعی را می‌توان بـه‌وسیلهٔ قطرهـای نامتقاطعش به‌$(n-2)$ مثلث تجزیه کرد. چون هر چندضلعی غیراقلیدسی یك چندضلعی



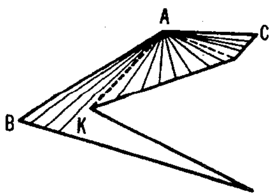
شکل ۲۳۷

است که‌در داخل یك‌قرص K قرار دارد، کافی‌است‌این‌حکم‌را برای‌کثیرالاضلاعهای اقلیدسی ثابت کنیم. (برهان برای چند ضلعیهای کوژ روشن است؛ ← شکل ۲۳۸ الف).

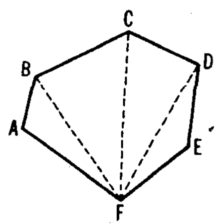
نشان خواهیم داد که هر nضلعی M ($n>۳$) را می‌توان به‌دو چندضلعی کوچکتر تجزیه کرد. فرض می‌کنیم A یك‌رأس M و AB و AC اضلاع مرسوم از A باشند. همهٔ پاره‌خطهایی راکه سرآنها A در داخل M باشد درنظر می‌گیریم (شکل ۲۳۸ ب و ج). اگر یکی از این‌پاره‌خطها تصادفاً یك قطر AK ازچندضلعی M باشد (شکل ۲۳۸ ب)، آنگاه این قطر، M را به‌دوقسمت کوچکتر تجزیه می‌کند. اگرقطعات موردبحث شامل یك‌قطر نباشند، یعنی اگر دوسر آنها به‌یك‌ضلع M متعلق باشند (شکل ۲۳۸ ج)، دراین‌صورت قطر BC همهٔ این پاره خطها را می‌برد و لذا کاملا در داخل M قرار دارد؛ اما در این‌صورت BC، M را به‌دو چندضلعی کوچکتر تجزیه می‌کند.



شکل ۲۳۸ ج



شکل ۲۳۸ ب



شکل ۲۳۸ الف

ملاحظه می‌کنیم که روندی که هم‌اکنون شرح دادیم بهما امکان می‌دهد که $\mathbf{M}$ را به‌مثلثهایی تجزیه کنیم. اگر تجزیهٔ $\mathbf{M}$ به‌مثلثها نیاز به‌استفاده از تعداد k قطر داشته باشد، آنگاه تعداد مثلثها $k+۱$ خواهد بود. این $k+۱$ مثلث $۳(k+۱)$ ضلع دارند، که n تا از آنها اضلاع $\mathbf{M}$ هستند و $۲k$ قطرها هستند (هرقطر یك‌ضلع مشترك دومثلث است). بنابراین

$$۳(k+۱)=n+۲k \quad , \quad k=n-۳$$

و این ایجاب می‌کند که $\mathbf{M}$ به $k+۱=n-۲$ مثلث تجزیه شود. چون مجموع زاویه‌های هریك از $(n-۲)$ مثلث کمتراز ۱۸۰° است (← قسمت الف)، ازاینجا نتیجه می‌شود که مجموع زوایای nضلعی کمتراز ۱۸۰° $(n-۲)$ باشد، که چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۰۹. فرض می‌کنیم $S(M)$ عددی نامنفی وابسته به‌یك چندضلعی $\mathbf{M}$ باشد. اگر $S(\mathbf{M})$ بخواهد مساحت چندضلعی $\mathbf{M}$ باشد، طبیعی است که بخواهیم درسه شرط زیر صدق کند*:

۱. اگرچندضلعیهای $\mathbf{M}_۱$و$\mathbf{M}_۲$قابل‌انطباق باشند، آنگاه $S(\mathbf{M}_۱)=S(\mathbf{M}_۲)$.

۲. اگر $\mathbf{M}$ اجتماع دو چندضلعی جدا ازهم $\mathbf{M}_۱$ و $\mathbf{M}_۲$ باشد (یعنی، اگر $\mathbf{M}$ به دو چندضلعی جزء $\mathbf{M}_۱$ و $\mathbf{M}_۲$ مجزا شده‌باشد بی‌آنکه‌آن‌دو، نقطهٔ مشترکی داشته باشند)، آنگاه $S(\mathbf{M})=S(\mathbf{M}_۱)+S(\mathbf{M}_۲)$.

۳. به‌ازای چندضلعیی مانند $\mathbf{M}_۰$، داشته باشیم $S(\mathbf{M}_۰)=۱$**.

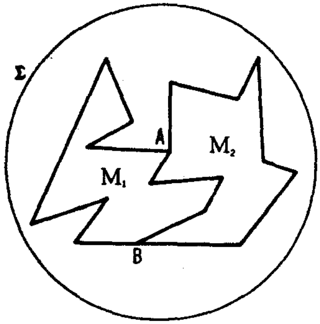
روشن است که‌کاستی زاویه‌ای یك‌چندضلعی هذلولوی (←ص۱۵۹) در شرط اول‌صدق می‌کند. نشان می‌دهیم که درشرط دوم‌نیزصدق می‌کند. زیرافرض می‌کنیم چندضلعی $\mathbf{M}$ به‌وسیلهٔ یك‌خط‌شکستهٔ AB به‌یك k ضلعی $\mathbf{M}_۱$ و یك l ضلعی $\mathbf{M}_۲$ تجزیه شده است (شکل ۲۳۹). ثابت می‌کنیم که‌کاستی زاویه‌ای $\mathbf{M}$ برابر مجموع کاستیهای زاویه‌ای $\mathbf{M}_۱$ و $\mathbf{M}_۲$ است. فرض می‌کنیم که خط شکستهٔ AB دارای m بندباشد (یعنی‌علاوه‌بر AوB، تعداد $m-۱$ رأس‌داخلی‌داشته باشد). فرض‌می‌کنیم، برای وضوح، که A بریك رأس $\mathbf{M}$ منطبق باشد و B بریك ضلع $\mathbf{M}$ (همهٔ موارد دیگر کاملا مشابه بااین یکی هستند). داریم

$$k+l=n+۲m+۱$$

---

* بعکس، اگر $S(\mathbf{M})$ درشرایط ۱ تا ۳ صدق کند، مساحتS وابسته به$\mathbf{M}$ خواهد بود.

** این شرط تعریف «واحد» مساحت است.



شکل ۲۳۹

زیرا، مجموع k رأس $\mathbf{M}_1$ و l رأس $\mathbf{M}_2$ شامل n رأس $\mathbf{M}$ و $2m+1$ رأس زاید است (هریك از رأسهای خط شکستهٔ AB و رأس B دوبار در مجموع $k+l$ وارد شده‌اند، و در n اصلا وارد نشده‌اند؛ رأس A دوبار درمجموع $k+l$ و یك بار در n وارد شده‌است). بعد، اگرمجموع زوایای چندضلعیهای $\mathbf{M}_1$ و $\mathbf{M}_2$ و $\mathbf{M}$ را با $\mathbf{A}_1$ و $\mathbf{A}_2$ و $\mathbf{A}$ نشان دهیم، آنگاه

$$\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2=\mathbf{A}+(2m-1)180^\circ$$

زیرا، مجموع $\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2$، علاوه برزوایای $\mathbf{A}$، شامل $m-1$ زاویهٔ 360° در رأسهای داخلی خط‌شکستهٔ AB ویك زاویهٔ 180° در رأس B است. اما

$$\begin{aligned}&[(k-2)180^\circ-\mathbf{A}_1]+[(l-2)180^\circ-\mathbf{A}_2]\\&=(k+l-4)180^\circ-(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2)\\&=(n+2m-3)180^\circ-\mathbf{A}-(2m-1)180^\circ=(n-2)180^\circ-\mathbf{A}\end{aligned}$$

همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

چون کاستی زاویه‌ای یك چندضلعی در شرایط ۱و۲ صدق می‌کند، باید باتابع مساحت در چندضلعیها متناسب باشد (اگر کاستی زاویه‌ای $\mathbf{M}_0$ برابر $1/k$ باشد، کاستی زاویه‌ای هرچند ضلعی برابر است با مساحت آن تقسیم‌بر k*).

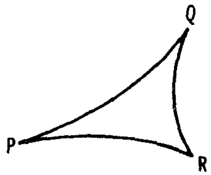
* این مطلب بدیهی نیست. برای‌پی‌بردن به‌برهان‌این قضیهٔ مشهور بویویی، رجوع کنید، مثلا به کتاب

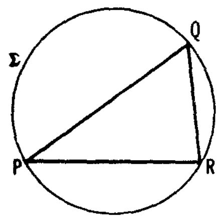
E. D. Moise, *Elemenltary Geometry from an Advanced Standpoint*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, 1963.

یادداشت ۱. برهان فوق نشان می‌دهد که مساحت یك مثلث هذلولوی نمی‌تواند به دلخواه زیاد شود (زیرا کاستی زاویه‌ای نمی‌تواند از ۱۸۰° تجاوز کند). مثلثهای با مساحت ماکسیمال (مساوی با ۱۸۰° k، k نسبت ثابت مسألهٔ ۱۰۹) «مثلثها»یی هستند که اضلاع آنها دوبه‌دو موازی‌اند (شکل ۲۴۰ الف؛ درشکل ۲۴۰ ب همان مثلث، به‌طور قیاسی، مانند شکل ۱۱۵ و شکل ۱۱۸ درمتن نشان داده شده است).

یادداشت ۲. برهان این امر که کاستی زاویه‌ای یك چند ضلعی بامساحت آن متناسب است، در هندسهٔ اقلیدسی اعتبار دارد. ولـی، در اینجا عـامل تناسب صفر است (کاستی زاویه‌ای یك nضلعی درهندسهٔ اقلیدسی صفر است، زیرامجموع زوایای آن $(n-2)180°$ است). از اینجا نتیجه می‌شود که بحث پیشین در هندسهٔ اقلیدسی ارزشی ندارد. در اینجا، به‌دست‌آوردن مساحت یـك چندضلعی از یـك راه خیلی پیچیده‌تـری صورت می‌گیرد. حتی برای مساحت مثلث دستوری که برحسب اندازهٔ اضلاع وزاویه‌هایش داده شده باشد، خیلی پیچیده‌تـر از نظیر هذلولویش است؛ و اما دربـارهٔ یك nضلعی به‌ازای $n>3$، دستور کلی صریحی درهندسهٔ اقلیدسی که مساحت nضلعی را برحسب اضلاع وزاویه‌هایش بیان کند، وجود ندارد.

بجاست اشاره‌کنیم که برهانی‌که در بالا آوردیم برهندسهٔ کروی نیز جاری است





شکل ۲۴۰ ب　　　　شکل ۲۴۰ الف

(که یك چندضلعی قطعه‌ای است ازکره که به‌کمانهایی از دوایر عظیمه محدود شده است؛ این گونه دایره‌ها در هندسهٔ کروی همان‌نقش خطها را در صفحه دارند). بـا توجه به‌این واقعیت که مثلثهایی کروی وجود دارند که سه‌زاویهٔ قائمه دارند، می‌توان پیشبینی کرد که کاستی زاویه‌ای دریك nضلعی کروی همواره منفی باشد. از اینجا نتیجه می‌شود که در هندسهٔ کروی نسبت ثابت (بین کاستی زاویه‌ای ومساحت) منفی است. می‌توانیم بگوییم که مساحت یك nضلعی کروی با تفاضل بین مجموع زاویه‌هـا و $(n-2)180°$ متناسب است. این تفاضل، فزونی nضلعی کـروی نـامیده می‌شود). همچنین رجوع کنید بـه ص ۳۴۳ و ص ۳۴۴، پیوست فصل ۲.*

---

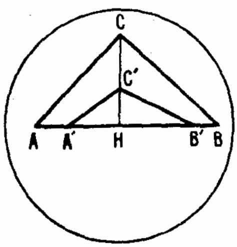
* ارجاع به‌مطالب ترجمه نشده از روسی.

۱۱۰. فرض می‌کنیم ABC و $A'B'C'$ دومثلث هذلولوی باشند که اضلاعشان دوبه‌دو قابل انطباق باشند، و فرض می‌کنیم که C و C' بزرگترین زاویه‌های این مثلثها باشند. هریك از ارتفاعهای CH و $C'H'$ در داخل مثلث مربوطه به‌خودش واقع می‌شود (زیرا، به‌موجب قضیهٔ مسألهٔ ۱۰۸ (الف) زاویه‌های A و A'، B و B' حاده‌اند؛ ← ابتدای راه حل مسألهٔ ۱۰۴). اگر می‌دانستیم که $AH=A'H'$، می‌توانستیم قابلیت انطباق مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AHC و $A'H'C'$ را نتیجه بگیریم (وتر یك زاویهٔ حاده)، و از اینجا به‌تساوی $CH=C'H'$، وقابلیت انطباق مثلثهای قائم‌الزاویهٔ BHC و $B'H'C'$ (وتر و یك زاویهٔ حاده) می‌رسیدیم، که به‌قابلیت انطباق‌مطلوب مثلثهای ABC و $A'B'C'$ منجر می‌شد. از این‌رو کافی است که فقط نشان دهیم فرض $AH\neq A'H'$ به‌یك تناقض منتهی می‌شود. برای روشنی مسأله، فرض می‌کنیم $AH>A'H'$. هردومثلث را، با یك‌حرکت‌هذلولوی، حرکت می‌دهیم تا نقطه‌های H و H' برمرکز K منطبق شوند، و خط AB برخط $A'B'$ منطبق‌می‌شود (شکل ۲۴۱). چون $AH>A'H'$ و $\delta_A=\delta_{A'}$، پس $\sphericalangle A>\sphericalangle A'$ (رك. ص ۱۴۸). اما در آن صورت خواهیم داشت

$$\sphericalangle HCA<\sphericalangle HC'A' \text{ و } HC>HC'$$

رابطهٔ اخیر ایجاب می‌کند که داشته باشیم $\delta_{HCA}<\delta_{HC'A'}$. اگر نامساوی $HB'>HB$ برقرار بود، می‌توانستیم به‌طریق مشابه نشان دهیم که $HC'>HC$، که با نامساوی $HC>HC'$ که در بالا به‌دست آمد مغایر می‌شد. پس $HB>HB'$، و مانند آنچه که در بالا گفتیم $\delta_{HCB}<\delta_{HC'B'}$. اما دراین حال

$$\delta_C=\delta_{HCA}+\delta_{HCB}<\delta_{HC'A'}+\delta_{HC'B'}=\delta_{C'}$$

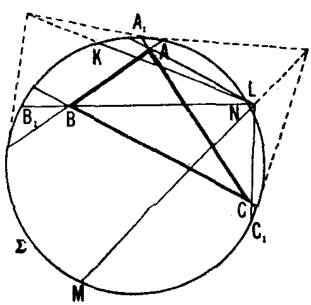


شکل ۲۴۱

که با تساوی $\delta_{C'}=\delta_C$ متناقض است.

۱۱۱. MN و KL، عمودمنصفهای اضلاع AB و AC از $\triangle ABC$ را رسم می‌کنیم، و خطهای AA_1 و BB_1 و CC_1 را که از رأسهای $\triangle ABC$ می‌گذرند و به‌همان‌دسته خطهای KL و MN متعلق هستند می‌کشیم (برحسب اینکه MN و KL متقاطع، فراموازی یا موازی باشند، خطهای AA_1 و BB_1 و CC_1 از نقطهٔ تلاقی آنها می‌گذرند، برعمود مشترك آنها عمودند و یا با آنها موازی‌اند؛ شکل ۲۴۲).
به‌موجب قضیهٔ مسألهٔ ۱۵۱ (ب)، KL محور تقارن خطهای AA_1 و BB_1، و MN محور تقارن خطها AA_1 و CC_1 هستند. این مطلب ایجاب می‌کند که همهٔ رأسهای مثلث ABC بریك‌دایره (یاخم همفاصله، یادایرهٔ زمانی) قرار داشته باشند که چنین مشخص می‌شودکه برهرخط l ازدسته خط حاصل از KL و MN، قرینهٔ A را نسبت به‌محور تقارن AA_1 و l به‌دست آوریم (←صص ۱۶۱-۱۶۵).
به‌آسانی می‌توان دید که همهٔ حالات ممکنی که دربحث قبل مورد بررسی واقع‌شد عملامی‌تواند روی‌دهد؛ روی‌هم‌رفته مثلثهای دلخواه بسیار زیادی می‌توان دریك دایره، یك‌خم همفاصله یا دایرهٔ زمانی،محاط کرد. [همچنین به‌آسانی می‌توان دیدکه این‌امکانات مانعةالجمع‌هستند. اگر رسم‌دایره‌ای محیط برمثلث ABC ممکن باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند O متساوی‌الفاصله از رأسها وجود دارد، و خطهای KLو MN باید عمود مشترکی داشته باشند، وبالاخره، اگر ممکن باشد یك دایرهٔ زمانی بر $\triangle ABC$ محیط کرد، آنگاه KL و MN باید موازی باشند.]

۱۱۲. دو دایرهٔ S_1 و S_2 به شعاعهای r_1 و r_2، یك شش‌ضلعی منتظم $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ محیط بر S_1 ویك شش‌ضلعی منتظم $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ محاط



شکل ۲۴۲

در $S_۲$ را درنظر می‌گیریم.* اگر $s_۱$ و $s_۲$ معرف محیطهای هذلولوی دایره‌ها و $p_۱$ و $p_۲$ محیطهای شش‌ضلعیها باشند، آنگاه

$$\frac{s_۱}{r_۱}<\frac{p_۱}{r_۱} \quad , \quad \frac{s_۲}{r_۲}>\frac{p_۲}{r_۲}$$

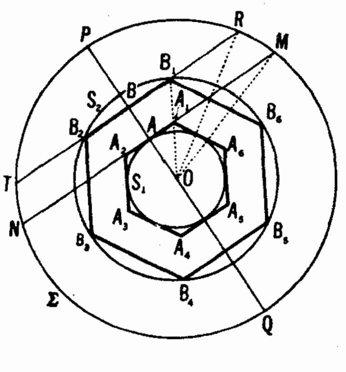
بنابراین اگر بتوانیم $r_۱$ و $r_۲$ را چنان انتخاب کنیم که $p_۱/r_۱<p_۲/r_۲$، آنگاه نتیجه می‌شود که $s_۱/r_۱<s_۲/r_۲$، و این، اثبات حکم مسأله است.

هرگاه مرکزهای $S_۱$ و $S_۲$ بر O مرکز $\mathbf{K}$ منطبق باشند، آنگاه این دوخم دایره‌های اقلیدسی می‌شوند (شکل ۲۴۳). فرض می‌کنیم $a_۱$ و $a_۲$ شعاعهای اقلیدسی آنها باشند (شعاع قرص $\mathbf{K}$ واحد طول اختیار شده است). آنگاه

$$r_۱=\log\left(\frac{OP}{AP}\Big/\frac{OQ}{AQ}\right)=\log\frac{AQ}{AP}=\log\frac{۱+a_۱}{۱-a_۱},\ r_۲=\log\frac{۱+a_۲}{۱-a_۲},$$

$$AA_۱=a_۱\sqrt{۳}/۳ \quad , \quad b_۱=AM=\sqrt{۱-a_۱^۲}$$

$$d_{AA_۱}=\log\left(\frac{AM}{A_۱M}\Big/\frac{AN}{A_۱N}\right)=\log\frac{A_۱N}{A_۱M}=\log\frac{b_۱+a_۱\sqrt{۳}/۳}{b_۱-a_۱\sqrt{۳}/۳},$$



شکل ۲۴۳

* تعریف یك شش‌ضلعی منتظم در هندسهٔ هذلولوی عیناً نظیر تعریف اقلیدسی آن است. اشاره می‌کنیم که در هندسهٔ هذلولوی همواره ممکن نیست کـه یك شش‌ضلعی منتظم بر دایره‌ای محیط کرد، و این‌امر محدودیتی برای اندازهٔ $r_۱$ ایجاد می‌کند.

$$p_۱=۱۲d_{AA}$$

و

$$BB_۱=a_۲/۲,\qquad OB=a_۲\sqrt{۳}/۲\quad,\quad b_۲=BR=\sqrt{۱-۳a_۲^۲/۴}$$

$$d_{BB_۱}=\log\left(\frac{BR}{B_۱R}\bigg/\frac{BT}{B_۱T}\right)=\log\frac{B_۱T}{B_۲T}=\log\frac{b_۲+a_۲/۲}{b_۲-a_۲/۲},p_۲=۱۲d_{BB_۱}$$

به‌ویژه، اگر $a_۱=۰٫۱$ و $a_۲=۰٫۹$، آنگاه

$$r_۱=\log(۱٫۱/۰٫۹)\approx۰٫۰۸۷۱۵,\ r_۲=\log(۱٫۹/۰٫۱)\approx۱٫۲۷۸۷۵,$$

$$a_۱\sqrt{۳}/۳\approx۰٫۰۵۷۷۴,\quad b_۱\approx۰٫۹۹۳۹۹,$$

$$d_{AA_۱}\approx\log(۱٫۰۵۲۷۳/۰٫۹۳۷۲۵)\approx۰٫۰۵۰۴۶,\quad p_۱\approx۰٫۶۰۵۵,$$

$$b_۲=۰٫۶۲۶۵,\quad d_{BB_۱}\approx\log(۱٫۰۷۶۵/۰٫۱۷۶۵)\approx۰٫۷۸۶۲۷,$$

$$p_۲\approx۹٫۴۳۵$$

بنا براین

$$\frac{s_۲}{r_۲}>\frac{p_۲}{r_۲}>۷\quad و\quad \frac{s_۱}{r_۱}<\frac{p_۱}{r_۱}<۷$$

یادداشت. می‌توان نشان داد که درهندسهٔ هذلولوی نسبت s/r، محیط یك دایره بر شعاعش r، با r افزایش پیدا می‌کند. به‌ویژه، اگر $r\to ۰$، آنگاه $s/r\to\pi=۳٫۱۴۱۵۹\ldots$، و اگر $r\to\infty$، آنگاه $s/r\to\infty$.