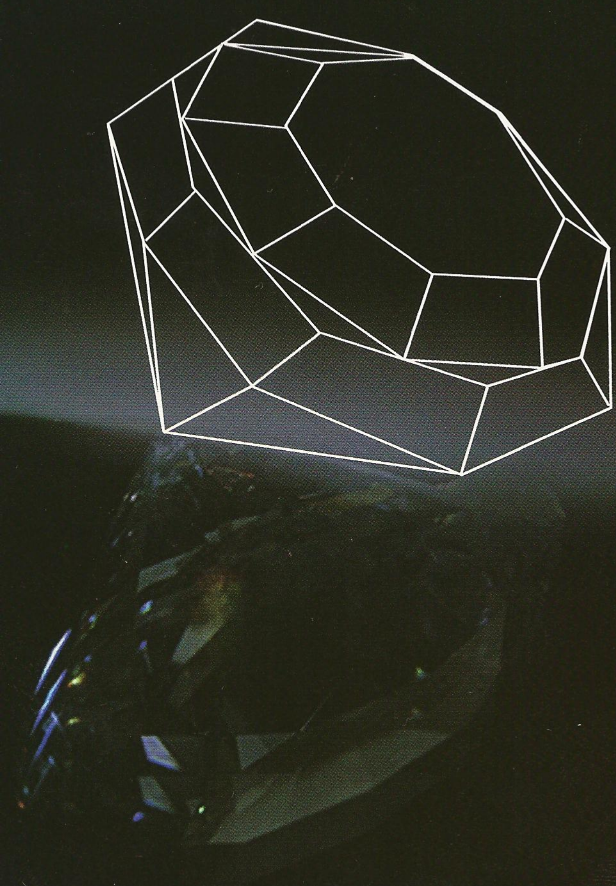
تجربهٔ توپولوژی

فولکر رُنده

مترجمان: علیرضا مدقالچی، سیّد محمد طباطبایی

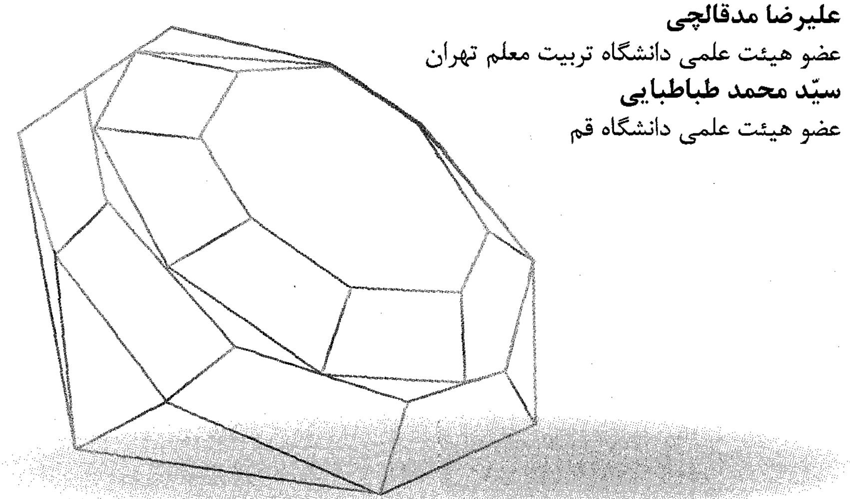


انتشارات فاطمی

تجربهٔ توپولوژی

فولکر رُنده

مترجمان:
علیرضا مدقالچی
عضو هیئت علمی دانشگاه تربیت معلم تهران
سیّد محمد طباطبایی
عضو هیئت علمی دانشگاه قم



انتشارات فاطمی

به‌نام خدا

فهرست مطالب

فهرست نمادها

دیباچه

اگر ریاضیات را به زبان تشبیه کنیم، گرفتن درس توپولوژی در دورهٔ کارشناسی، فراگیری واژگان و به‌خاطر سپردن فعل‌های بی‌قاعده است: تمرینی کسالت‌بار که برای خواندن آثار بزرگ ادبی به زبان اصلی لازم است، و البته زیبایی آن آثار در نهایت همهٔ زحمت‌های گذشته را جبران می‌کند.

تأثیر توپولوژی عمومی بر ریاضیات فقط به سبب قضایای قوی آن نیست (هر چند که قضیه‌هایی از این دست در آن وجود دارد)، بلکه بیشتر به سبب فراهم آوردن چارچوبی واحد برای بسیاری از پدیده‌ها در حوزه‌ای وسیع از دیسیپلین‌های ریاضی است. هر درس مقدماتی توپولوژی، ضرورتاً به لحاظ مفهومی سنگین است؛ طبیعت موضوع این را اقتضا می‌کند. اگر مربی بخواهد مفاهیم را با استفاده از مثال‌ها بیان کند، فوراً اشکالی در این درس دورهٔ کارشناسی پیش می‌آید: دانشجویان هنوز زمینهٔ ریاضی گسترده برای فهم مثال‌های «طبیعی» را، به صورتی که در آنالیز یا هندسه ظاهر می‌شوند، ندارند. بنابراین در چنین درسی بیشتر مثال‌ها مجعول به نظر می‌رسند: ساخته‌هایی نسبتاً پیچیده که به هیچ کار نمی‌آیند جز اینکه نشان دهند ویژگی XY قوی‌تر از ویژگی YX است و نه برعکس. خطری بسیار واقعی وجود دارد که دانشجویان با این اعتقاد درس توپولوژی را پشت سر بگذارند که ریاضیات ــ دست کم توپولوژی ــ چیزی نیست جز شعبده‌بازی با تعریف‌ها و مثال‌های ساختگی.

کتاب حاضر برگرفته از جزوه‌های درسی Math447 (توپولوژی عمومی) است که به عنوان درسی برای سال چهارم دورهٔ کارشناسی در نیمسال زمستانی ۲۰۰۴ در دانشگاه آلبرتا تدریس کردم. در ابتدا برنامه‌ریزی کرده بودم که از [SIMMONS 63] برای تدریس استفاده کنم، به این دلیل که این درس را از آن فرا گرفته‌ام. ولی به سبب اینکه می‌خواستم بعضی از موضوعات را که در [SIMMONS 63] مورد بحث قرار نگرفته است مطرح کنم، جزوه‌ای نوشتم و آن را از طریق وب در دسترس همگان قرار دادم، و سرانجام کتاب خودم را نوشتم. از دانشجویان سال دوم کارشناسی تا دانشجویان تحصیلات

تکمیلی در کلاس بودند، و از این رو پشتوانهٔ ریاضی آنها به‌طور اجتناب‌ناپذیر گوناگون بود. این امر، مفاد کتاب و به‌ویژه انتخاب مثال‌ها را تحت تأثیر قرار داده است. کوشش من این بود که مثال‌هایی بیاورم که اولاً تک‌منظوره نباشند، و ثانیاً برای دانشجویانی که زمینه‌ای در حساب دیفرانسیل و انتگرال و جبر مقدماتی (و نه لزوماً در آنالیز حقیقی و مختلط) دارند، قابل درک باشند. روشن است که هر کتاب مقدماتی توپولوژی مجالی محدود برای ارائهٔ تازه‌ها فراهم می‌آورد. بیشتر مباحث این کتاب را می‌توان در کتاب‌های دیگرِ همین زمینه نیز یافت. با این وجود تلاش کرده‌ام که کتاب حاضر تا حد امکان بحث‌هایی جدید را شامل شود و قابل درک باشد، ولی اینکه تا چه اندازه موفق شده‌ام بستگی بسیار به ذائقهٔ خوانندگانم دارد. به‌علاوه، فی‌الجمله ــ دست کم تا جایی که من می‌دانم ــ کتاب چند مورد را به گونه‌ای متفاوت با کتاب‌های دیگرِ این زمینه مطرح می‌کند.

- قضیهٔ بئر از قضیهٔ میتاگ ـ لفلر بورباکی به‌دست آمده است؛
- تورها به‌طور وسیع به کار رفته‌اند، و به‌ویژه برهانی نزدیک به شهودی ــ با استفاده از تورها ــ برای قضیهٔ تیخونوف ارائه داده‌ایم که برگرفته از پاول چرنوف [CHRNOFF 92] است؛
- قضیهٔ استون ـ وایرشتراس مختلط با رهیافتی کوتاه و ظریف از سیلویو ماکادو به‌دست آمده است [MACHADO 77].

با برنامهٔ درسی مشخص و زمان محدود کلاس، هر مربی در هر درسی باید چیزهایی را برای ارائه و یا حذف انتخاب کند. این انتخاب‌ها همواره، به ویژه هنگامی که در پی حذف کردن بر می‌آید، ذائقه و تمایلات وی را منعکس می‌کند. مباحثی که جای خالیشان در این کتاب به چشم می‌آید عبارت‌اند از پالایه‌ها و فضاهای یکنواخت. هنگام بحث در مورد همگرایی، من تورها را، با همهٔ مشابهت‌هایی که بین آنها و دنباله‌ها وجود دارد، واقعاً بسیار شهودی‌تر از پالایه‌ها یافتم (شاید دیگران مخالف باشند). بحث کردن در مورد فضاهای یکنواخت در درسی مقدماتی هم، به دلیل عدم وجود مثال‌های طبیعی و مقدماتی که فضای متریک نباشند، مشکل است.

هر کتابی تا حدی نتیجهٔ کار افرادی متعدد است حتی اگر نام یک نویسنده بر جلد آن باشد. این کتاب هم مستثنی نیست و تمایل دارم از اوا ماریا کراوس به سبب خواندن دقیق تمام متن تایپ شدهٔ کتاب تشکر کنم. البته این کتاب بدون ابراز نظر و اشتیاق دانشجویان نوشته نمی‌شد. امیدوارم انتخاب این درس برای دانشجویان به همان اندازه جذاب باشد که تدریس آن برای من جذاب بود و طعمی از توپولوژی بچشند که اشتهای آنها را برای ریاضیات سال‌های بعد زیادتر کند.

مقدمه

کتاب حاضر مقدمه‌ای بر توپولوژی عمومی (و اندکی توپولوژی جبری) است.

پیش‌نیازهای این کتاب برای خواننده‌ای که می‌خواهد از آن استفاده کند نسبتاً کم است. پیش از هر چیز آشنایی مقدماتی‌ای با اصطلاحات نظریهٔ مجموعه‌ها لازم است. همچنین داشتن مایه‌ای خوب، البته نه خیلی زیاد، در حساب دیفرانسیل و انتگرال (یک و چند متغیره) مفید است، نه به این دلیل که بر نتیجه‌هایی از حساب دیفرانسیل و انتگرال تکیه می‌کنیم، بلکه بیشتر به این سبب که درک مفهومی خاص (مانند پیوستگی) در چارچوب نسبتاً واقعی حساب دیفرانسیل و انتگرال آسان‌تر از درک آن مفهوم در محیط مجرّدتر و کمتر شهودیِ توپولوژی عمومی خواهد داشت. همچنین برای بعضی از مثال‌ها و تمرین‌ها و نیز برای دو فصل پایانی، اندکی آشنایی با تعریف مفهوم‌های مقدماتی جبر ــ حلقه‌ها، ایده‌آل‌ها، گروه‌ها، و مانند آن ــ لازم است.

فصل یک مقدمه‌ای سریع بر بخشی از نظریهٔ مجموعه‌ها است که برای چهار فصل بعد مورد نیاز است. چون فرض بر آن است که خواننده پیشتر با مفهوم‌های اساسی نظریهٔ مجموعه‌ها (مجموعه، عضو، زیرمجموعه، و مانند آن) روبه‌رو شده است، تصمیم گرفتیم که این فصل را کوتاه‌تر کنیم. ساختارهای نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها مانند اجتماع‌ها، اشتراک‌ها، تعریف تابع‌ها، و بحث عددهای اصلی را بر مبنای مفهوم طبیعی مجموعه بنا کرده‌ایم. لم زرن را به کار می‌بریم تا اصل انتخاب را نتیجه بگیریم. در این فصل دقتی کمتر از سایر فصل‌های این کتاب صورت گرفته است: هرگز دستگاه اصول موضوعهٔ معمول نظریهٔ مجموعه‌ها را نمی‌آوریم. از آنجا که هدف اصلی، ارائهٔ مقدمه‌ای بر توپولوژی است، تنظیم این فصل با استانداردهای دقیق بقیهٔ کتاب، فضای بسیار زیادی اشغال می‌کرد.

در فصل‌های دو تا چهار، دربارهٔ توپولوژی عمومی بحث کرده‌ایم. تسامحاً، توپولوژی عمومی در پی فراهم کردن چارچوبی مفهومی برای بیان معنی‌دار پیوستگی است: مجموعه‌ها را به ساختاری

کافی مجهز می‌کنیم که بحث دربارهٔ پیوستگی نگاشت‌های بین آنها بامعنی باشد. عمومیت مفهوم‌ها و نتیجه‌های توپولوژی عمومی به گونه‌ای است که هر مطالعهٔ نسبتاً عمیق در شاخه‌ای از آنالیز یا هندسه، مستلزم فراگیری آن است.

در فصل دو فضاهای متریک را معرفی کرده‌ایم، در مورد مفهوم‌های توپولوژیک در محیط متریک بحث کرده‌ایم، و بالاخره پیوستگی و انواعی خاص از فشردگی در فضاهای متریک را مورد بحث قرار داده‌ایم. در این فصل چندین مفهوم و نتیجه وجود دارد که در واقع، نه فقط دربارهٔ فضاهای متریک، بلکه دربارهٔ فضاهای توپولوژیک هستند. بنابراین برخی مطالب فصل دو در فصل سه تکرار می‌شوند. از دیدگاه آموزشی، بهتر است که (برخی) مفهوم‌های توپولوژیک ابتدا در حالت نسبتاً خاص فضاهای متریک مورد بحث قرار گیرند و نه مستقیماً در حالت کلی. هرگاه نتیجه‌ای در فصل دو برای فضاهای توپولوژیک برقرار باشد، برهانی برای آن ارائه می‌شود که تا حد امکان توپولوژیک، یعنی بدون ارجاع مستقیم به متریک‌ها است، از این رو هنگامی که بعداً این نتیجه در حالتی کلی‌تر نمایان می‌شود، ارجاع ساده به برهان آن در حالت متریک کافی است. قضیهٔ بئر با روشی تا حدی غیرمعمول، یعنی به عنوان کاربردی از قضیهٔ میتاگ ـ لفلرِ بورباکی، به‌دست آمده است.

فضاهای توپولوژیک کلی را در فصل سه معرفی می‌کنیم. فضاهای توپولوژیک را با اصل موضوعی کردن مفهوم مجموعهٔ باز تعریف می‌کنیم، ولی رهیافت‌های دیگر ــ وسیلهٔ همسایگی‌ها یا عمل بستار ــ را نیز پوشش داده‌ایم. سپس اقدام به تعریف پیوستگی کرده‌ایم: چون دنباله‌ها ابزاری نامناسب برای مطالعهٔ فضاهای توپولوژیک هستند، در ابتدا تعریفی از پیوستگی را با اجتناب از هرگونه مفهوم همگرایی ارائه می‌دهیم. بعد تورها را معرفی می‌کنیم و از آنها برای سرشت‌نمایی پیوستگی و پدیده‌های توپولوژیک متنوع استفاده می‌کنیم. به سبب همسویی‌های معمول بین تورها و دنباله‌ها، این کار رهیافتی به فضاهای توپولوژیک کلی فراهم می‌کند که باز هم در حد معمول مشابه حالت متریک است.

استفاده از تورها به‌طورویژه این امکان را می‌دهد که برهانی نسبتاً ساده از قضیهٔ تیخونوف برگرفته از پاول آر. چرنوف [CHERNOFF 92] ارائه بدهیم. در مورد همبندی، مسیری‌همبند بودن، و صورت‌های موضعی آنها بحث می‌کنیم. این فصل با نگاهی به ویژگی‌های تفکیک‌پذیری، از T_0 تا نرمال بودن، به پایان می‌رسد.

در فصل چهار به مطالعهٔ دلیل وجودی فضاهای توپولوژیک: مطالعهٔ تابع‌های پیوسته (در اینجا، با مقدارهای در $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$)، پرداخته‌ایم. لم اوریسون همراه با نتیجه‌های آن ــ قضیهٔ متریک‌سازی اوریسون و قضیهٔ توسیع تیتسه ــ را آورده‌ایم، و سپس فشرده‌سازی استون ـ چخ فضای کاملاً منظم معرفی شده است. این فصل با بحثی پیرامون قضیه‌های استون ـ وایرشتراس مختلط و حقیقی بر فضاهای فشرده و فشردهٔ موضعی پایان می‌یابد؛ این برهان متکی به رهیافتی ظریف و کوتاه از سیلویو ماکادو [MACHADO 77] است.

اگرچه توپولوژی عمومی و توپولوژی جبری، هر دو توپولوژی نامیده شده‌اند، اشتراکی نسبتاً اندک دارند. اشیای مورد مطالعه در هردوی آنها فضاهای توپولوژیک‌اند، و پیش از یادگیری توپولوژی جبری، آشنایی با توپولوژی عمومی قطعاً لازم است، ولی شگفت‌آور اینکه این نیاز اندک است: بیشتر توپولوژی جبری را می‌توان به خوبی، بدون بهره‌گیری از قضیهٔ تیخونوف، اصل‌های تفکیک‌پذیری، و لم اوریسون با همهٔ نتیجه‌های آن، پیش رفت. توپولوژی جبری به مطالعهٔ پایاهای جبری فضاهای توپولوژیک می‌پردازد: به هر فضای توپولوژیک مفروض، شیئی جبری (اغلب گروه) نسبت داده می‌شود که اگر این فضاها بتوانند یکی شوند، اشیای جبری متناظر را هم می‌توان یکی گرفت. چون ابزارهای جبر عموماً قوی‌تر هستند می‌توان از تمایز پایاهای جبری دو فضا، تمایز آن دو فضا را نتیجه گرفت.

در فصل پنج نگاهی مختصر به یکی از آن پایاها: گروه بنیادی انداخته‌ایم. مفهوم‌های هوموتوپی و هوموتوپی مسیری را معرفی می‌کنیم، و گروه بنیادی فضای توپولوژیک در یک نقطهٔ پایه را تعریف می‌کنیم. گروه بنیادی زیرمجموعه‌های محدب فضاهای نرم‌دار (بدیهی) و دایرهٔ واحد در $\mathbb{R}^2$ (یعنی $\mathbb{Z}$) را به‌دست می‌آوریم. چون گروه‌های بنیادی فضاهای هم‌ارز هوموتوپیک یکریخت هستند، قرص واحد بسته و دایرهٔ واحد ــ یا به طور کلّی، هر طوق بسته ــ در $\mathbb{R}^2$ نمی‌توانند هم‌ارز هوموتوپیک باشند (تنها همسان‌ریخت‌اند). برای اینکه گروه بنیادی دایرهٔ واحد را با $\mathbb{Z}$ یکی بگیریم، نگاهی مختصر به مفهوم فضاهای پوششی می‌اندازیم. نشان می‌دهیم که مسیرهای موجود در فضاهای توپولوژیک را می‌توان طوری به فضایی پوششی ارتقا داد که هوموتوپی‌های مسیری حفظ شوند.

هر بخش از هر فصل با چند تمرین پایان می‌پذیرد، که هدف آنها کمک به تعمیق فهم خواننده از مطالب است. در هر بخش به تمرین‌های آن بخش با شمارهٔ تمرین ارجاع می‌شود؛ برای ارجاع به تمرین‌های بخش‌های دیگر از شمارهٔ بخش و تمرین استفاده می‌شود. مثلاً به تمرین ۴ بخش ۲.۳، در طی بخش ۲.۳ به شکل تمرین ۴، و در جاهای دیگر به شکل تمرین ۴.۲.۳ ارجاع می‌شود.

هر فصل در انتها دارای بخش بدون شمارهٔ ملاحظه‌ها است. این بخش‌ها مشتمل بر توضیحات تاریخی، منظری فراتر از مطالب آمده در فصل، و پیشنهاداتی برای مطالعهٔ بیشتر هستند.

سه پیوست وجود دارد. مطالب آنها را می‌توانستیم در پنج فصل کتاب قرار بدهیم (پیوست آ در بخش ۴.۲، پیوست ب در بخش ۵.۲، و پیوست پ در بخش ۳.۳). مطالب هر سه پیوست تحلیلی‌تر از بحث‌های توپولوژیک است، و به‌علاوه پیوست آ به معلوماتی از نظریهٔ تابع‌های تمام‌ریخت نیاز دارد.

۱

نظریهٔ مجموعه‌ها

اگر مقدمه‌ای بر توپولوژی را یادگیری واژگان اساسی زبان ریاضیات بدانیم، نظریهٔ مجموعه‌ها الفبایی را فراهم می‌آورد که این واژگان با آن بیان می‌شوند.

۱.۱ مجموعه‌ها و تابع‌ها

با توجه به اینکه موضوع اصلی این کتاب توپولوژی است و نه نظریهٔ مجموعه‌ها، روشی کاملاً طبیعی برای معرفی مجموعه‌ها اختیار می‌کنیم.

«تعریف» ۱.۱.۱ هر مجموعه، گردایه‌ای از اشیاء معینی است که به‌صورت یک کل در نظر گرفته می‌شوند.

البته این «تعریف» را نمی‌توان تعریفی دقیق شمرد (و به همین خاطر است که در دو طرف کلمه گیومه قرار داده‌ایم): «گردایه» چیست؟ منظور از «اشیای معین» چیست؟ و در نظر گرفتن یک گردایه از اشیاء معین ــ بدون توجه به ماهیت آنها ــ «به‌صورت یک کل» به چه معنی است؟ به جای پرداختن به بسط این پرسش‌ها (و صورت‌گرایی بیش از حد)، به تجسم مفهوم مجموعه با چند مثال قناعت می‌کنیم.

مثال ۲.۱.۱ گردایهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت (به استثنای صفر) مجموعه‌ای است که آن را با $\mathbb{N}$ نشان می‌دهیم. همچنین اعداد صحیح نامنفی (به انضمام صفر)، اعداد صحیح، اعدادِ طبیعی، اعداد حقیقی، و اعداد مختلط مجموعه‌هایی را تشکیل می‌دهند که به‌ترتیب با نمادهای $\mathbb{N}_0$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ نشان داده می‌شوند.

گردایه‌ای را که شامل هیچ چیزی نیست نیز مجموعه در نظر می‌گیریم: این مجموعه را تهی می‌نامیم و آن را با $\varnothing$ نشان می‌دهیم.

اگر x در زمرهٔ اشیای مجموعهٔ S باشد، می‌گوییم x عضو S است و می‌نویسیم $x \in S$ (در ادامه، از عبارت‌های «x در S است» و یا «x در S قرار می‌گیرد» نیز استفاده می‌کنیم)؛ اگر x عضوی از S نباشد می‌نویسیم $x \notin S$.

مثال ۳.۱.۱ $\sqrt{۲} \in \mathbb{R}$، ولی $\sqrt{۲} \notin \mathbb{Q}$.

اگر T و S مجموعه باشند، می‌گوییم T زیرمجموعهٔ S است (و می‌نویسیم $T \subset S$) هرگاه هر عضو T عضوی از S نیز باشد (با پذیرفتن خطر ابهام، در ادامه از عبارت «T در S است» نیز استفاده می‌کنیم).

مثال ۴.۱.۱ آ) واضح است که

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_۰ \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

ب) چون $\varnothing$ هیچ عضوی ندارد، زیرمجموعهٔ هر مجموعه است.

اگر $S \subset T$ و $T \subset S$، می‌گوییم دو مجموعهٔ S و T با هم برابرند و می‌نویسیم $S = T$. در حالتی که $T \subset S$ ولی $S \neq T$، نماد $T \subsetneq S$ را به کار می‌بریم؛ در این حالت می‌گوییم زیرمجموعهٔ T از S سره است.

مثال ۵.۱.۱ آشکار است که

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_۰ \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

فرض کنید S مجموعه باشد، و P ویژگی‌ای که عضوی از S در آن صدق کند و یا صدق نکند. دراین‌صورت مجموعهٔ

$$\{x \in S : \text{صدق می‌کند } P \text{ در } x\}$$

گردایهٔ همهٔ عضوهای S است که در P صدق می‌کنند و زیرمجموعهٔ S است.

مثال ۶.۱.۱ آ) مجموعهٔ اعداد زوج، یعنی

$$\{x \in \mathbb{Z} : \text{بخش‌پذیر است ۲ بر } x\}$$

زیرمجموعهٔ $\mathbb{Z}$ است.

ب) فرض کنید $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ و $a \leq b$. دراین‌صورت بازهٔ باز

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

بازهٔ بستهٔ

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

و نیز بازه‌های نیم‌باز

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \qquad (a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ هستند. توجه کنید که تساوی a و b مجاز است. بنابراین، $\varnothing = [a, a) = (a, a] = (a, a)$، و $[a, a]$ (که $\varnothing$ است اگر a، $-\infty$ یا ∞ باشد و مجموعه‌ای تک‌عضوی شامل a است اگر $a \in \mathbb{R}$) هم بازه هستند؛ چنین بازه‌هایی را تباهیده می‌نامیم.

چون خود مجموعه‌ها هم «اشیایی معین» هستند، گردایه‌ای از مجموعه‌ها هم باید مجموعه باشد.

مثال ۷.۱.۱ اگر S مجموعه باشد، $\mathfrak{P}(S)$، مجموعهٔ توانی S، گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های S تعریف می‌شود. به عنوان مثال $S \in \mathfrak{P}(S)$ و $\varnothing \in \mathfrak{P}(S)$.

به‌ازای متناهی شیء داده‌شدهٔ متمایز $x_۱$، ...، x_n، مجموعهٔ ساخته شده با این اشیاء را با $\{x_۱, \ldots, x_n\}$ نشان می‌دهیم. همچو مجموعه‌هایی را متناهی می‌گوییم، و می‌گوییم n عدد اصلی مجموعهٔ S است یا می‌گوییم S دارای n عضو است. به مجموعه‌های با عدد اصلی یک (یعنی مجموعه‌هایی که تنها یک عضو دارند) با عنوان مجموعه‌های تک‌عضوی اشاره می‌شود. ترتیب عضوهای $x_۱$، ...، x_n هیچ تأثیری بر مجموعهٔ $\{x_۱, \ldots, x_n\}$ ندارد؛ به عنوان مثال $\{۱, ۲, ۳\} = \{۲, ۱, ۳\} = \{۳, ۱, ۲\} = \ldots$.

قضیهٔ ۸.۱.۱ فرض کنید S مجموعه‌ای n عضوی است. دراین‌صورت عدد اصلی $\mathfrak{P}(S)$، ۲^n است.

برهان. اگر $n = ۰$ آنگاه $S = \varnothing$ و لذا $\mathfrak{P}(S) = \{\varnothing\}$؛ یعنی $\mathfrak{P}(S)$، $۲^۰ = ۱$ عضو دارد.

فرض کنید که این ادعا به‌ازای $n \in \mathbb{N}_۰$ برقرار است و S دارای $n + ۱$ عضو است؛ یعنی $S = \{x_۱, \ldots, x_n, x_{n+۱}\}$. فرض کنید $T := \{x_۱, \ldots, x_n\}$. از این رو، هر زیرمجموعهٔ S یا

باید زیرمجموعه‌ای از T و یا شامل x_{n+1} باشد. بنابراین

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های } S = \text{تعداد زیرمجموعه‌های } T + \text{تعداد زیرمجموعه‌های } S \text{ که شامل } x_{n+1} \text{ هستند}$$

بنابر فرض استقرا، T دارای 2^n زیرمجموعه است. به‌ازای هر زیرمجموعه مثل A از S که شامل x_{n+1} است می‌توان زیرمجموعهٔ $A' := \{x \in A : x \neq x_{n+1}\}$ از T را تعریف کرد. آشکارا، هر چنین زیرمجموعهٔ Aیی از S یک زیرمجموعهٔ یکتای A' از T را فراهم می‌آورد. به‌علاوه، اگر B زیرمجموعه‌ای از T باشد می‌توان زیرمجموعهٔ یکتای $\tilde{B}$ از S را به‌صورت

$$\tilde{B} := \{x \in S : \quad x = x_{n+1} \text{ یا } x \in B\}$$

تعریف کرد. آشکار است که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ A از S شامل x_{n+1} باید $A = \widetilde{(A')}$، و به‌ازای هر زیرمجموعهٔ B از T نیز $(\tilde{B})' = B$. بنابراین به تعداد زیرمجموعه‌های T، زیرمجموعه از S داریم که شامل x_{n+1} اند. باز هم بنابر فرض استقرا درمی‌یابیم که 2^n زیرمجموعه از S وجود دارد که شامل x_{n+1} است. سرانجام، همان‌گونه که ادعا کرده بودیم

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های } S = 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

■

ساختن مجموعه‌هایی از مجموعه‌ها می‌تواند خطرناک باشد.

مثال ۹.۱.۱ (پارادوکس راسل) چون گردایه‌هایی از مجموعه‌ها مجموعه‌اند، گردایهٔ همهٔ مجموعه‌ها نیز باید مجموعه باشد. هر مجموعهٔ S، خود را به عنوان یک عضو در بر دارد و یا در بر ندارد. این ویژگی یک مجموعه که خود را به عنوان یک عضو در بر داشته باشد، عجیب به نظر می‌رسد؛ هیچ‌یک از مجموعه‌هایی که به‌طور طبیعی با آنها سروکار داریم، این ویژگی را ندارند، ولی موضوع این نیست: این ویژگی، یک ویژگی پذیرفتنی برای مجموعه‌ها است که مجموعه‌ها ممکن است آن را داشته یا نداشته باشند. بنابراین می‌توان زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها را به‌صورت زیر تشکیل داد

$$U := \{S : \text{مجموعه‌ای است که خود را به عنوان عضو در بر ندارد } S\}.$$

آیا مجموعهٔ U خود را به عنوان یک عضو در بر دارد؟ اگر چنین است دراین‌صورت (طبق تعریف) U نباید در خودش باشد، که بی‌معنی است. از سوی دیگر اگر U در خودش نباشد، آنگاه تعریف آن باز هم خلاف این امر را ایجاب می‌کند. چنین چیزی کاملاً بی‌معنی است.

مشکل مثال ۹.۱.۱ کجاست؟ ظاهراً نمی‌توانیم به‌سادگی گردایه‌ای دلخواه از اشیاء را تشکیل بدهیم و آن را مجموعه بشماریم. تسامحاً، گردایهٔ همهٔ مجموعه‌ها برای مجموعه بودن خیلی «بزرگ» (به هر معنای دقیق) است. پس باید محدودیت‌هایی را اعمال کنیم. با توجه به اینکه بحث اصلی این کتاب توپولوژی مقدماتی است و نه نظریهٔ مجموعه‌ها، به این نحو ساده خود را از گرفتاری پارادوکس راسل رها می‌کنیم که: فرض می‌کنیم همهٔ مجموعه‌هایی که با آنها مواجه می‌شویم زیرمجموعه‌هایی از یک مجموعهٔ بسیار بزرگ، به نام مجموعهٔ جهانی، هستند که به اندازهٔ کافی بزرگ است که هر چه را که برای کارکردن در توپولوژی نیاز داریم (مانند تشکیل مجموعه‌های توانی) دارا است، ولی در برابرِ هیولایی مانند «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها» بسیار کوچک است.

اکنون نخستین تعریف رسمی خود را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید S یک مجموعه است و $A, B \subset S$. دراین‌صورت:

(i) $A \cup B$، اجتماع A و B مجموعهٔ همهٔ عضوهایی از S است که در A یا در B قرار دارند.

(ii) $A \cap B$، اشتراک A و B مجموعهٔ همهٔ عضوهایی از S است که در هر دو مجموعهٔ A و B قرار دارند. اگر $A \cap B = \varnothing$ می‌گوییم A و B جدا از هم هستند.

(iii) تفاضل A و B، یعنی $A \backslash B$، مجموعهٔ همهٔ عضوهایی از S است که عضو A هستند ولی عضو B نیستند. $S \backslash A$ را متمم A در S می‌نامیم.

مثال ۱۱.۱.۱ آ) به عنوان مثال،

$$(-۲, \pi) \cup (\pi, ۷] = (-۲, ۷] \backslash \{\pi\}.$$

ب) فرض کنید A مجموعهٔ اعداد اول، و B مجموعهٔ اعداد زوج است. دراین‌صورت، $\{۲\} = A \cap B$.

پ) مجموعهٔ $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ از همهٔ اعداد گنگ تشکیل شده است.

ت) به ازای هر مجموعهٔ S و هر $A, B \subset S$، $(A \backslash B) \cap B = \varnothing$.

تعریف‌های ۱۰.۱.۱ (i) و (ii) را به‌سادگی می‌توان به خانواده‌های دلخواه از مجموعه‌ها تعمیم داد. اجتماع گردایهٔ $\mathcal{S}$ از مجموعه‌ها(یی که همهٔ آنها زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ داده‌شده‌اند) به‌صورت

$$\bigcup\{S : S \in \mathcal{S}\} := \{x : \text{در یکی از مجموعه‌های } S \in \mathcal{S} \text{ است } x\},$$

و اشتراک آنها به‌صورت

$$\bigcap\{S : S \in \mathcal{S}\} := \{x : \text{در همهٔ مجموعه‌های } S \in \mathcal{S} \text{ است } x\},$$

تعریف می‌شود. اغلب، مجموعه‌های موجود در گردایهٔ $\mathcal{S}$ با مجموعهٔ دیگری، مانند $\mathbb{I}$، اندیس‌گذاری می‌شوند، که مجموعهٔ اندیس‌گذار نامیده می‌شود. به‌طور غیر رسمی یعنی هر $S \in \mathcal{S}$ اندیسی مانند $i \in \mathbb{I}$ به‌دست می‌آورد که به عنوان برچسبی به آن الصاق می‌شود، بنابراین می‌توان آن را به‌صورت S_i نشان داد. پس، در صورتی که در مورد $\mathbb{I}$ بیم ابهام نرود، $\mathcal{S}$ را می‌توانیم به‌صورت $(S_i)_{i\in\mathbb{I}}$ و یا $(S_i)_i$ بنویسیم. در این حالت، به‌جای $\bigcup\{S : S \in \mathcal{S}\}$ و $\bigcap\{S : S \in \mathcal{S}\}$ به‌ترتیب از نمادهای $\bigcup_{i\in\mathbb{I}} S_i$ و $\bigcap_{i\in\mathbb{I}} S_i$ (و اگر بیم ابهام نرود به‌طور ساده از نمادهای $\bigcup_i S_i$ و $\bigcap_i S_i$) استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۲.۱.۱ آ) واضح است که

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n, n] = \mathbb{R}, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \{0\}.$$

ب) هر مجموعهٔ S با اجتماع زیرمجموعه‌های تک‌عضوی خود برابر است:

$$S = \bigcup_{x\in S}\{x\}.$$

پ) به‌ازای $n \in \mathbb{N}$، فرض کنید

$$S_n := \mathbb{Q} \cap \left[\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n}\right].$$

چون $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$، $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \varnothing$.

فضای دو بعدی اقلیدسی $\mathbb{R}^2$، صفحهٔ دو بعدی هندسی است. هر نقطهٔ صفحه با یک زوج مرتب (x, y) مشخص می‌شود که در آن $x, y \in \mathbb{R}$، x مختص اول و y مختص دوم این نقطه است. زوج مرتب (x, y) نباید با مجموعهٔ $\{x, y\}$ اشتباه شود: داریم $\{2, 1\} = \{1, 2\}$، ولی $(2, 1) \neq (1, 2)$.

با استفاده از عبارت‌های رسمی، تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنید S و T دو مجموعه هستند. دراین‌صورت حاصل‌ضرب دکارتی S و T به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S \times T := \{\{x, \{x, y\}\} : x \in S, y \in T\}.$$

به‌ازای $x \in S$ و $y \in T$، $\{x, \{x, y\}\} \in S \times T$ را با (x, y) نشان می‌دهیم و آن را زوج مرتب با مختص اول x و مختص دوم y می‌نامیم. به جای $S \times S$ می‌نویسیم S^2.

تعریف بعدی ما نیز تلاشی برای صورت‌بندی مفهومی است که از پیش با آن آشنایید.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنید S و T دو مجموعه هستند. تابع (یا نگاشت) f از S به T، زیرمجموعه‌ای از $S \times T$ با ویژگی‌های زیر است:

آ) به‌ازای هر $x \in S$، $y \in T$ای موجود است که $(x, y) \in f$؛

ب) اگر $(x, y_1), (x, y_2) \in f$، آنگاه $y_1 = y_2$.

مجموعهٔ S را دامنهٔ f می‌نامیم.

به‌نظر می‌رسد که این تعریف، یک دنیا از مفهوم شهودی تابع به عنوان چیزی که مقدارهایی در بردش را به نقطه‌هایی در دامنه نسبت می‌دهد دور است. در واقع، چنین نیست: این تعریف صرفاً صورت دقیق همان مفهوم شهودی است. بنابر تعریف ۱۴.۱.۱ (آ)، به‌ازای هر $x \in S$ داده‌شده، $y \in T$ای موجود است که $(x, y) \in f$، و بنابر تعریف ۱۴.۱.۱ (ب) این y به‌طور یکتا تعیین می‌شود. از این رو می‌توانیم این y ویژه را با $f(x)$ نشان دهیم و بگوییم «f، x را به $f(x)$ می‌نگارد». برای نشان دادن اینکه f تابعی از مجموعهٔ S به مجموعهٔ T است، می‌نویسیم $f : S \to T$، و به‌جای $(x, y) \in f$، نماد $y = f(x)$ را به‌کار می‌بریم. از عبارت

$$f : S \to T, \qquad x \mapsto f(x)$$

به‌جای $\{(x, f(x)) : x \in S\} \subset S \times T$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۵.۱.۱ آ) فرض کنید S و T دو مجموعه هستند. دراین‌صورت

$$S \times T \to S, \qquad (x, y) \mapsto x$$

تصویر مختصی بر S است. تصویر مختصی بر T، به روش مشابه تعریف می‌شود.

ب) فرض کنید S مجموعه است. دراین‌صورت $\{(x, x) \in S^2 : x \in S\}$ با نگاشت همانی بر S، یعنی

$$\mathrm{id}_S : S \to S, \qquad x \mapsto x$$

یکی است (اگر در مورد S ابهامی نباشد، به‌طور ساده می‌نویسیم id).

پ) اگر S و T مجموعه باشند، $f : S \to T$ تابع باشد و $A \subset S$، دراین‌صورت تحدید f بر A به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$f|_A := \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

آشکار است که $f|_A : A \to T$ نیز تابع است.

ت) فرض کنید S مجموعه است. هر تابع از $\mathbb{N}$ به S دنباله‌ای در S نامیده می‌شود. اغلب به‌جای $x : \mathbb{N} \to S$ می‌نویسیم $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$. اگر دامنهٔ x، $\mathbb{N}$ نباشد بلکه زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}_۰$ به‌صورت $\{n : n \geq m\}$ باشد که در آن $m \in \mathbb{N}_۰$، باز هم از آن به عنوان دنباله یاد می‌کنیم و آن را با $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ نشان می‌دهیم. دنبالهٔ $(y_k)_{k=۱}^{\infty}$ را زیردنبالهٔ $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$ می‌گوییم اگر اعدادی مثل $\dots < n_۲ < n_۱$، در $\mathbb{N}$ موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $k \in \mathbb{N}$، $y_k = x_{n_k}$.

تعریف‌های زیر مفیدند.

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض کنید S و T مجموعه هستند، $f : S \to T$ تابع است، و فرض کنید $A \subset S$ و $B \subset T$.

آ) $f(A)$، نگارهٔ A تحت f، زیرمجموعهٔ $\{f(x) : x \in A\}$ از T است. به‌علاوه، نگارهٔ S تحت f، برد f نامیده می‌شود.

ب) $f^{-۱}(B)$، نگارهٔ وارون B تحت f، زیرمجموعهٔ $\{x \in S : f(x) \in B\}$ از S است.

مثال ۱۷.۱.۱ آ) فرض کنید

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^۲.$$

دراین‌صورت $f(\mathbb{R}) = [۰, \infty)$، $f([۲, ۳]) = [۴, ۹]$، $f^{-۱}(\mathbb{R}) = f^{-۱}([۰, \infty)) = \mathbb{R}$، $f^{-۱}((-\infty, ۲)) = f^{-۱}([۰, ۲)) = (-\sqrt{۲}, \sqrt{۲})$، $f^{-۱}([-\pi, -e]) = \varnothing$ و مانند آن.

ب) فرض کنید

$$f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x - y.$$

دراین‌صورت، به عنوان مثال،

$$f^{-۱}(\{۷\}) = \{(x + ۷, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

و

$$f([-۳, ۷] \times [۱۳, ۴۲)) = (-۴۵, -۶].$$

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض کنید S و T مجموعه هستند، و $f : S \to T$ تابع است. دراین‌صورت:

آ) می‌گوییم f یک‌به‌یک است اگر به‌ازای هر $x_۱, x_۲ \in S$ که $x_۱ \neq x_۲$، $f(x_۱) \neq f(x_۲)$.

ب) می‌گوییم f پوشا است اگر به‌ازای هر $y \in T$، $x \in S$ ی موجود باشد که $f(x) = y$.

پ) می‌گوییم f دوسویی است اگر یک‌به‌یک و پوشا باشد.

اینکه تابعی مشخص، یک‌به‌یک، پوشا و یا دوسویی (و یا هیچ‌کدام) باشد بستگی به مجموعه‌های S و T دارد.

مثال ۱۹.۱.۱ تابع

$$f : S \to T, \qquad x \mapsto x^۲$$

- دوسویی است اگر $S = T = [۰, \infty)$،
- یک‌به‌یک است ولی پوشا نیست اگر $S = [۰, \infty)$ و $T = \mathbb{R}$،
- پوشا است ولی یک‌به‌یک نیست اگر $S = \mathbb{R}$ و $T = [۰, \infty)$، و
- نه یک‌به‌یک و نه پوشا است اگر $S = T = \mathbb{R}$.

نگاشت‌های دوسویی، از اهمیتی ویژه برخوردارند.

تعریف ۲۰.۱.۱ فرض کنید R، S و T مجموعه، $g : R \to S$ و $f : S \to T$ تابع‌اند. دراین‌صورت $f \circ g$، ترکیب f و g، تابع زیر است

$$f \circ g : R \to T, \qquad x \mapsto f(g(x)).$$

قضیهٔ ۲۱.۱.۱ فرض کنید S و T مجموعه هستند. دراین‌صورت گزاره‌های زیر در مورد تابع $f : S \to T$ هم‌ارزند.

(i) f دوسویی است.

(ii) تابع $g : T \to S$ موجود است که $f \circ g = \mathrm{id}_T$ و $g \circ f = \mathrm{id}_S$.

در این حالت تابع g یکتا است و تابع وارون f نامیده (و با $f^{-۱}$ نشان داده) می‌شود.

برهان. $(i)\Longrightarrow(ii)$: تابع $g : T \to S$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. به‌ازای $y \in T$ داده شده، بنابر پوشا بودن f، $x \in S$ی موجود است که $f(x) = y$. یک‌به‌یک بودن f یکتایی x را محقق می‌کند. بنابراین، می‌توانیم g را به‌صورت $g(y) =: x$ تعریف کنیم. از این تعریف، آشکار است که $f(g(y)) = y$ و $g(f(x)) = x$.

$(ii)\Longrightarrow(i)$: فرض کنید $y \in T$. از فرضِ $x := g(y)$، نتیجه می‌شود $x \in S$ و $f(x) = y$. بنابراین f پوشا است. اگر $x_1, x_2 \in S$ وجود داشته باشند که $f(x_1) = f(x_2)$، آنگاه $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$ از این رو f یک‌به‌یک هم هست.

با توجه به اینکه تابع g در (ii) به هر $y \in T$، $x \in S$ی یکتا را نسبت می‌دهد به‌طوری که $f(x) = y$، آشکار است که g یکتا است. ∎

مثال ۲۲.۱.۱ آ) تابع

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty), \qquad x \mapsto x^2$$

دوسویی است با تابع وارون

$$f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty), \qquad x \mapsto \sqrt{x}.$$

ب) تابع تانژانت بر $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ یک‌به‌یک است. با توجه به اینکه نگارهٔ این بازه تحت تابع $\tan$ مجموعهٔ $\mathbb{R}$ است، تابع وارون $\arctan$ از $\mathbb{R}$ به $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ را به‌دست می‌آوریم.

بر اساس تعریف ۱۶.۱.۱ ممکن است این سؤال پیش بیاید که نشان دادن وارون تابع دوسویی f با نماد f^{-1} ایدهٔ خوبی است؟ معنی $f^{-1}(B)$ چیست؟ نگارهٔ وارون B تحت تابع f یا نگارهٔ B تحت f^{-1}؟ به‌طوری‌که معلوم خواهد شد، نماد f^{-1} در هر دو زمینه به یک معنی است (تمرین ۵ زیر).

تمرین‌ها

۱. قوانین دمورگن را ثابت کنید: به‌ازای خانوادهٔ $(S_i)_{i\in\mathbb{I}}$ از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ S، اتحادهای

$$S \setminus\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{I}} S_i\Big) = \bigcap_{i\in\mathbb{I}} (S\setminus S_i), \qquad S\setminus\Big(\bigcap_{i\in\mathbb{I}} S_i\Big) = \bigcup_{i\in\mathbb{I}}(S\setminus S_i)$$

برقرارند.

۲. فرض کنید S و T مجموعه هستند و $f : S \to T$ نگاشت است. ثابت کنید که f یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر به‌ازای هر زیرمجموعهٔ حداکثر دوعضوی A از S، $f|_A$ یک‌به‌یک باشد.

۳. فرض کنید S و T مجموعه هستند، و $f : S \to T$ تابع است. ثابت کنید

آ) f یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر به‌ازای هر زیرمجموعهٔ A از S، $A = f^{-۱}(f(A))$.

ب) f پوشا است اگر و تنها اگر به‌ازای هر زیرمجموعهٔ B از T، $B = f(f^{-۱}(B))$، و اگر و تنها اگر $f(S) = T$.

۴. فرض کنید f تابعی دوسویی با تابع وارون $f^{-۱}$ است. ثابت کنید که $f^{-۱}$ نیز دوسویی است.

۵. فرض کنید S و T مجموعه هستند، $f : S \to T$ دوسویی است و $B \subset T$. ثابت کنید که نگارهٔ B تحت $f^{-۱}$، با نگارهٔ وارون B تحت f برابر است.

۶. فرض کنید R، S، و T مجموعه، و $g : R \to S$ و $f : S \to T$ دوسویی هستند. ثابت کنید که $f \circ g$ دوسویی است. چگونه می‌توان $(f \circ g)^{-۱}$ را بر حسب $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ بیان کرد؟

۷. فرض کنید S و T مجموعه هستند و $f : S \to T$ یک تابع است. ثابت کنید

آ) f یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر تابع $g : T \to S$ موجود باشد که $g \circ f = \mathrm{id}_S$.

ب) f پوشا است اگر و تنها اگر تابع $g : T \to S$ موجود باشد که $f \circ g = \mathrm{id}_T$.

۲.۱ اعداد اصلی

کدام‌یک از مجموعه‌های $\{۱, ۲, ۳\}$ و $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ بزرگ‌تر است؟ البته دوّمی: مجموعهٔ دوّم، مجموعهٔ اوّل را به عنوان زیرمجموعه‌ای سره در بر دارد. اگر هیچ‌یک از دو مجموعه، جزء دیگری نباشد؛ مثلاً در مورد $\{۱, ۲, ۳\}$ و $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ چه می‌توان گفت؟ البته $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ از $\{۱, ۲, ۳\}$ بزرگ‌تر است: تعداد اعضای این مجموعه برابر است با عدهٔ اعضای $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$، که می‌دانیم بزرگ‌تر از $\{۱, ۲, ۳\}$ است. روی هم رفته به‌طور شهودی برای مجموعه‌های متناهی مفهوم یکی از دیگری بزرگ‌تر است و یا اینکه دوتا از آنها اندازه‌ای یکسان دارند روشن است، ولی مفهوم بزرگ‌تر بودن در مورد مجموعه‌هایی که متناهی نیستند، یعنی مجموعه‌های نامتناهی، چیست؟

با توجه به اینکه $\mathbb{N}$ زیرمجموعهٔ سرهٔ $\mathbb{N}_۰$ است، ممکن است تصوّر شود که $\mathbb{N}_۰$ «بزرگ‌تر» از $\mathbb{N}$ است. اما به‌سادگی می‌توان دید که نگاشت

$$\mathbb{N}_۰ \to \mathbb{N}, \qquad n \mapsto n + ۱$$

دوسویی است، بنابراین هر عضو $\mathbb{N}_\circ$ دقیقاً با یک عضو $\mathbb{N}$ متناظر است. پس $\mathbb{N}_\circ$ و $\mathbb{N}$ باید «یک تعداد عضو» و لذا اندازهٔ برابر داشته باشند. رهیافت دوم، روشی مناسب را برای بحث پیرامون «اندازه‌های» مجموعه‌های نامتناهی فراهم می‌آورد.

تعریف ۱.۲.۱ می‌گوییم عدد اصلی مجموعه‌های S و T یکسان است، می‌نویسیم $|S| = |T|$، اگر تابع دوسویی‌ای مانند $f : S \to T$ موجود باشد.

مثال ۲.۲.۱ آ) عدد اصلی دو مجموعهٔ متناهی یکسان است اگر و تنها اگر تعداد عضوهای آنها برابر باشد. به ویژه، عدد اصلی زیرمجموعهٔ T از مجموعهٔ متناهی S، با عدد اصلی S یکسان است اگر و تنها اگر $S = T$.

ب) اگر $|S| = |R|$ و $|T| = |S|$، آنگاه $|R| = |T|$.

پ) اگر چه $\mathbb{N}$ زیرمجموعهٔ سرهٔ $\mathbb{N}_\circ$ است، عدد اصلی مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $\mathbb{N}_\circ$ یکسان است.

ت) به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، فرض کنید $[x] \in \mathbb{Z}$ نشان دهندهٔ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x است. نگاشت

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \qquad n \mapsto (-۱)^n \left[\frac{n}{۲}\right]$$

دوسویی است، بنابراین $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

مثال اخیر نشان می‌دهد هنگامی که با اعداد اصلی مجموعه‌های نامتناهی سروکار داریم چیزهای عجیبی روی می‌دهند (در زیر نشان می‌دهیم که حتی $\mathbb{Q}$ عدد اصلی یکسان با $\mathbb{N}$ دارد). آیا عدد اصلی همهٔ مجموعه‌های نامتناهی یکسان است؟ چنین نیست.

قضیهٔ ۳.۲.۱ هیچ نگاشت پوشایی از $\mathbb{N}$ به $(\circ, ۱)$ وجود ندارد.

برهان. برای اثبات، به واقعیتی بنیادی در آنالیز نیازمندیم.

هر عدد $r \in (\circ, ۱)$، بسطی اعشاری به‌صورت $r = ٫\sigma_۱\sigma_۲\sigma_۳\ldots$ دارد؛ یعنی $r = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{\sigma_k}{۱\circ^k}$، که در آن به‌ازای هر $k \in \mathbb{N}$، $\sigma_k \in \{\circ, ۱, \ldots, ۹\}$.

برای نیل به تناقض، فرض می‌کنیم که نگاشتی پوشا مانند $r : \mathbb{N} \to (\circ, ۱)$ موجود است. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، عدد $r(n)$ بسطی اعشاری به‌صورت

$$r(n) = ٫\sigma_۱(n)\sigma_۲(n)\sigma_۳(n)\ldots$$

دارد. حال عدد $r \in (۰\,,۱)$ را با ارائهٔ بسط اعشاری آن، $r = ۰/\sigma_۱\sigma_۲\sigma_۳\ldots$، تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_k = \begin{cases} ۲, & \text{اگر } \sigma_k(k) \neq ۲ \\ ۳, & \text{اگر } \sigma_k(k) = ۲ \end{cases}$$

با توجه به اینکه $r(\mathbb{N}) = (۰\,,۱)$، باید $n \in \mathbb{N}$ی موجود باشد که $r = r(n)$، و در نتیجه $\sigma_n = \sigma_n(n)$، که با توجه به تعریف r ناممکن است. ∎

در اثبات قضیهٔ ۳.۲.۱ می‌توانیم به جای ۲ و ۳، از هر دو رقم دیگر از $\{۰\,,۱\,,\ldots\,,۸\}$ (هر رقمی غیر از ۹) استفاده کنیم.

نتیجهٔ ۴.۲.۱ عدد اصلی مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $(۰\,,۱)$ یکسان نیست.

بنابراین $\mathbb{N}$ و $(۰\,,۱)$ «اندازه‌هایی متفاوت» از بی‌نهایت را نمایان می‌کنند، و در نتیجه بند (پ) در تعریف زیر قطعاً مصداق دارد.

تعریف ۵.۲.۱ می‌گوییم مجموعهٔ S،

آ) شمارای نامتناهی است اگر عدد اصلی آن با عدد اصلی $\mathbb{N}$ یکسان باشد،

ب) شمارا است اگر متناهی یا شمارای نامتناهی باشد، و

پ) ناشمارا است اگر نامتناهی باشد ولی شمارا نباشد.

اگر مجموعه‌ای شمارای نامتناهی باشد، تابعی دوسویی موجود است که هر یک از عضوهای آن را با یک عدد صحیح مثبت یکتا متناظر می‌کند. بنابراین گاهی مجموعه‌های شمارا (حتی متناهی) را به‌صورت $\{x_۱, x_۲, x_۳, \ldots\}$ نشان می‌دهیم، با این شرط که اگر مجموعهٔ داده شده متناهی باشد، شمارش $x_۱$، $x_۲$، ... پس از مرحله‌ای پایان می‌پذیرد.

بلافاصله پس از تعریف مفهوم یکسان بودن عددهای اصلی دو مجموعهٔ دلخواه، به تعریف مفهوم کمتر بودن عدد اصلی یک مجموعه از عدد اصلی مجموعه‌ای دیگر می‌پردازیم.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید S و T مجموعه هستند. گوییم عدد اصلی S کمتر یا مساوی عدد اصلی T است، می‌نویسیم $|S| \leq |T|$ و یا $|T| \geq |S|$ اگر نگاشتی یک‌به‌یک از S به T موجود باشد. اگر $|S| \leq |T|$ ولی $|S| \neq |T|$ آنگاه می‌نویسیم $|S| < |T|$ و یا $|T| > |S|$.

اگر S و T مجموعه‌هایی متناهی باشند که $|T| \leq |S|$ و $|T| \geq |S|$، آنگاه بی‌درنگ در می‌یابیم که $|T| = |S|$. به گونه‌ای شگفت‌آور این موضوع برای مجموعه‌های دلخواه نیز برقرار است.

قضیهٔ ۷.۲.۱ (کانتور ـ برنشتاین) فرض کنید S و T مجموعه‌اند و $|T| \leq |S|$ و $|S| \leq |T|$. دراین‌صورت $|S| = |T|$.

برهان. فرض کنید $f : S \to T$ و $g : T \to S$ نگاشت‌هایی یک‌به‌یک هستند. حتی اگر f و g لزوماً دوسویی نباشند، اگر به عنوان نگاشت‌های $f : S \to f(S)$ و $g : T \to g(T)$ در نظر گرفته شوند، دوسویی خواهند بود، و لذا می‌توان از $f^{-1} : f(S) \to S$ و $g^{-1} : g(T) \to T$ سخن گفت.

می‌گوییم عضو $x \in S$ نیای درجهٔ صفر خود است. اگر $x \in g(T)$، می‌گوییم $g^{-1}(x)$ نیای درجهٔ یک x است. اگر $g^{-1}(x) \in f(S)$، آنگاه $f^{-1}(g^{-1}(x))$ را نیای درجهٔ دوی x می‌گوییم، و اگر $f^{-1}(g^{-1}(x)) \in g(T)$، گوییم $g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x)))$ نیای درجهٔ سهٔ x است. این الگو را می‌توان به‌طور نامتناهی ادامه داد و یا اینکه در نقطه‌ای متوقف می‌شود. به هر حال می‌توانیم درجهٔ هر عضو را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$\deg(x) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : \text{نیایی از درجهٔ } n \text{ دارد } x\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}.$$

فرض کنید

$$S_\infty := \{x \in S : \deg(x) = \infty\},$$
$$S_{\text{زوج}} := \{x \in S : \text{عددی زوج است } \deg(x) \in \mathbb{N}_0\},$$

و

$$S_{\text{فرد}} := \{x \in S : \text{عددی فرد است } \deg(x) \in \mathbb{N}_0\}.$$

آشکارا، هر عضو x دقیقاً در یکی از مجموعه‌های S_∞، $S_{\text{زوج}}$ یا $S_{\text{فرد}}$ قرار دارد. با بحثی مشابه بالا می‌توان افرازی به‌صورت T_∞، $T_{\text{زوج}}$ ، و $T_{\text{فرد}}$ برای T به‌دست آورد.

تساوی‌های $f(S_\infty) = T_\infty$، $f(S_{\text{زوج}}) = T_{\text{فرد}}$ ، و $g^{-1}(S_{\text{فرد}}) = T_{\text{زوج}}$ به آسانی ثابت می‌شوند. از این رو می‌توانیم $h : S \to T$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & x \in S_\infty \cup S_{\text{زوج}} \\ g^{-1}(x), & x \in S_{\text{فرد}} \end{cases}$$

ادعا می‌کنیم که h دوسویی است.

برای اثبات پوشا بودن h، فرض کنید $y \in T$. باید نشان دهیم $x \in S$ ی موجود است که $h(x) = y$.

حالت ۱. $y \in T_\infty$. چون $f(S_\infty) = T_\infty$، $x \in S_\infty$ ی موجود است که $f(x) = y$. از تعریف h نتیجه می‌شود که $h(x) = f(x) = y$.

حالت ۲. $y \in T_{\text{زوج}}$. چون $g^{-1}(S_{\text{فرد}}) = T_{\text{زوج}}$، $x \in S_{\text{فرد}}$ ی موجود است که

$$h(x) = g^{-1}(x) = y$$

حالت ۳. $y \in T_{\text{فرد}}$. چون $f(S_{\text{زوج}}) = T_{\text{فرد}}$، $x \in S_{\text{زوج}}$ ی موجود است که

$$h(x) = f(x) = y$$

برای اثبات یک‌به‌یک بودن h، فرض کنید $x_1, x_2 \in S$ چنان هستند که $h(x_1) = h(x_2)$. با توجه به این که $h(S_\infty) = T_\infty$، $h(S_{\text{زوج}}) = T_{\text{فرد}}$ و $h(S_{\text{فرد}}) = T_{\text{زوج}}$ و چون T_∞، $T_{\text{زوج}}$ و $T_{\text{فرد}}$ دوبه‌دو جدا از هم هستند، نتیجه می‌گیریم که، $x_1, x_2 \in S_\infty$، یا $x_1, x_2 \in S_{\text{زوج}}$، یا $x_1, x_2 \in S_{\text{فرد}}$. چون f و $g^{-1}|_{S_{\text{فرد}}}$ یک‌به‌یک هستند، بنابر تعریف h نتیجه می‌شود که $x_1 = x_2$.
■

مثال ۸.۲.۱ آ) فرض کنید S و T دو مجموعهٔ شمارا هستند. اگر S یا T متناهی باشند به آسانی می‌توان دید که $S \times T$ شمارا است. از این رو فرض می‌کنیم که S و T شمارای نامتناهی هستند. فرض کنید $f : \mathbb{N} \to S$ و $g : \mathbb{N} \to T$ دوسویی هستند. به‌ازای $y \in T$ ثابت، نگاشت

$$\mathbb{N} \to S \times T, \qquad n \mapsto (f(n), y)$$

یک‌به‌یک است. از سوی دیگر، نگاشت

$$S \times T \to \mathbb{N}, \qquad (x, y) \mapsto 2^{f^{-1}(x)} 3^{g^{-1}(y)}$$

نیز یک‌به‌یک است (بنابر یکتایی تجزیه به عامل‌های اول در $\mathbb{N}$). از این رو، بنابر قضیهٔ کانتور-برنشتاین، $S \times T$ نیز شمارای نامتناهی است.

ب) نگاشت

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \qquad (n, m) \mapsto \frac{n}{m}$$

پوشا است. لذا بنابر تمرین ۱ زیر و مثال بالا، $|\mathbb{Q}| \le |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. آشکار است که $|\mathbb{N}| \le |\mathbb{Q}|$، بنابراین $\mathbb{Q}$ شمارای نامتناهی است.

پ) تابع

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \frac{۱}{\pi}\left(\arctan t + \frac{\pi}{۲}\right)$$

$\mathbb{R}$ را به‌طور یک‌به‌یک به روی $(۰\,,۱)$ می‌نگارد. بنابراین عدد اصلی $\mathbb{R}$ و $(۰\,,۱)$ یکسان است. با توجه به مثال بالا و قضیهٔ ۳.۲.۱ نتیجه می‌شود که $|\mathbb{R}| > |\mathbb{Q}|$.

دو مجموعهٔ متناهی عدد اصلی یکسان دارند اگر و تنها اگر تعداد عضوهای آنها برابر باشد: به‌ازای هر مجموعهٔ متناهی داده شده، ردهٔ ــ و نه مجموعهٔ! ــ همهٔ مجموعه‌هایی را که دوسویی به روی آن نگاشته می‌شوند با یک عدد صحیح مثبت، یعنی همان تعداد عضوهای آن مجموعه، نمایش می‌دهند. به‌طور مشابه، به‌ازای هر مجموعه، ردهٔ همهٔ مجموعه‌هایی که عدد اصلی آنها با آن مجموعه یکسان است به عنوان عدد اصلی تعریف می‌شود. پس اعداد طبیعی چیزی غیر از اعداد اصلی ویژه نیستند؛ با توجه به اینکه آنها به وسیلهٔ مجموعه‌های متناهی نمایش داده می‌شوند، اعداد اصلی متناهی نامیده می‌شوند؛ همهٔ اعداد اصلی دیگر، نامتناهی نامیده می‌شوند. اعداد اصلی معمولاً با حروف میانی الفبای یونانی، مانند κ و λ، نشان داده می‌شوند. معمولاً عدد اصلی $\mathbb{N}$ با $\aleph_۰$ ($\aleph$ که الف خوانده می‌شود، اولین حرف الفبای عبری است) نشان داده می‌شود و $\mathfrak{c}$ (حرف اول continuum، به معنی پیوستار) علامت $|\mathbb{R}|$ است. اگر κ عدد اصلی مجموعهٔ S باشد، آنگاه عدد اصلی مجموعهٔ توانی آن با ۲^κ نمایش داده می‌شود (که با توجه به قضیهٔ ۸.۱.۱ بامعنی است).

بنابر قضیهٔ ۳.۲.۱ و تمرین ۲ زیر، آشکارا، $\mathfrak{c} > \aleph_۰$ و $۲^{\aleph_۰} > \aleph_۰$. ولی بیش از این نیز درست است.

قضیهٔ ۹.۲.۱ $\mathfrak{c} = ۲^{\aleph_۰}$.

برهان. به‌ازای هر $S \subset \mathbb{N}$، $(\sigma_n(S))_{n=۱}^{\infty}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که $\sigma_n(S) = ۱$ اگر $n \in S$ و $\sigma_n(S) = ۲$ اگر $n \notin S$، و فرض می‌کنیم که $r(S) := \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sigma_n(S)}{۱۰^n}$. دراین‌صورت تابع

$$\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to (۰\,,۱), \qquad S \mapsto r(S)$$

یک‌به‌یک است و لذا $\mathfrak{c} \leq ۲^{\aleph_۰}$.

برای اثبات نامساوی عکس، از این واقعیت استفاده می‌کنیم که هر $r \in (۰\,,۱)$ نه تنها یک بسط اعشاری دارد بلکه یک بسط دودویی به‌صورت $r = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sigma_n(r)}{۲^n}$ نیز دارد که در آن به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\sigma_n(r) \in \{۰\,,۱\}$. بنابراین، هر عدد در $(۰\,,۱)$ را می‌توان با رشته‌ای از صفرها و یک‌ها نمایش داد. گرچه این نمایش منحصر به فرد نیست: به عنوان مثال، $۱۰۰۰۰۰\cdots$ و $۰۱۱۱۰۰۰\cdots$ هر دو

عدد $\frac{۱}{۲}$ را نمایش می‌دهند. ولی این تنها ابهامی است که روی می‌دهد. بنابراین هرگاه نمایش دودویی $r \in (۰, ۱)$ از جایی به بعد فقط از رقم ۱ تشکیل شده باشد، بسط دودویی نامتناوب آن را در نظر می‌گیریم. به این ترتیب به هر $r \in (۰, ۱)$، دنبالهٔ یکتای $(\sigma_n(r))_{n=۱}^{\infty}$ در $\{۰, ۱\}$ را نسبت می‌دهیم. در نتیجه نگاشت

$$(۰, ۱) \to \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \qquad r \mapsto \{n \in \mathbb{N} : \sigma_n(r) = ۱\}$$

یک‌به‌یک است و بنابراین $\mathfrak{c} \geq ۲^{\aleph_۰}$. ∎

تمرین‌ها

۱. فرض کنید S و T مجموعه هستند. ثابت کنید $|T| \leq |S|$ اگر و تنها اگر نگاشتی پوشا از T به روی S موجود باشد.

۲. فرض کنید S مجموعه است. ثابت کنید $|S| < |\mathfrak{P}(S)|$. (راهنمایی: فرض کنید نگاشت پوشای $f : S \to \mathfrak{P}(S)$ موجود است، و مجموعهٔ $\{x \in S : x \notin f(x)\}$ را در نظر بگیرید.)

۳. فرض کنید $(S_n)_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های شمارا است. ثابت کنید $\bigcup_{n=۱}^{\infty} S_n$ شمارا است.

۴. عدد حقیقی x جبری نامیده می‌شود هرگاه چندجمله‌ای ناصفر p، با ضریب‌های گویا، موجود باشد به‌طوری‌که $p(x) = ۰$، و در غیراین صورت متعالی نامیده می‌شود (به عنوان مثال $\sqrt{۲}$ جبری، ولی π متعالی است). ثابت کنید مجموعهٔ عددهای جبری شمارا است و نتیجه بگیرید که تعداد ناشمارا عدد متعالی وجود دارد.

۵. ثابت کنید به‌ازای هر عدد اصلی نامتناهی κ، $\aleph_۰ \leq \kappa$.

۶. فرض کنید κ عددی اصلی است که $\kappa < \aleph_۰$. ثابت کنید κ متناهی است.

۳.۱ حاصل‌ضرب‌های دکارتی

در مثال ۱۳.۱.۱، حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه را به‌طور رسمی تعریف کردیم. به‌سادگی می‌توان تعریف ۱۳.۱.۱ را به حاصل‌ضرب تعدادی متناهی مجموعه مانند $S_۱$،...،S_n تعمیم داد: به استقرا روی n تعریف می‌کنیم

$$S_۱ \times S_۲ \times \cdots \times S_n := (S_۱ \times \cdots \times S_{n-۱}) \times S_n,$$

(اگر $S_1 = S_2 = \cdots = S_n =: S$، می‌نویسیم S^n). بنابراین عضوهای $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ عبارتند از nـ تایی‌های مرتب $(x_1, \ldots, x_n)$ بامختص‌های $x_j \in S_j$ که به‌صورت استقراییِ

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) := ((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n) \qquad (x_j \in S_j,\, j = 1, \ldots, n),$$

تعریف می‌شوند.

اکنون فرض کنید که $\mathcal{S}$ گردایه‌ای دلخواه (و احتمالاً نامتناهی) از مجموعه‌ها است. حاصل‌ضرب دکارتی آنها، $\prod\{S : S \in \mathcal{S}\}$، چگونه تعریف می‌شود؟ برای پاسخ به این پرسش ابتدا نگاهی دقیق به حاصل‌ضرب دکارتی تعدادی متناهی از مجموعه‌ها می‌اندازیم.

مثال ۱.۳.۱ فرض کنید S_1، ...، S_n مجموعه هستند. چون فرض کرده‌ایم که همهٔ مجموعه‌هایی که با آنها مواجه می‌شویم زیرمجموعه‌هایی از یک مجموعهٔ جهانی عظیم‌الجثه‌اند، می‌توانیم اجتماع $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ را تشکیل دهیم. فرض کنید تابع $f : \{1, \ldots, n\} \to S_1 \cup \cdots \cup S_n$ چنان است که به‌ازای هر $j = 1, \ldots, n$، $f(j) \in S_j$. دراین‌صورت $(f(1), \ldots, f(n))$ عضوی از $S_1 \times \cdots \times S_n$ است. برعکس، اگر $(x_1, \ldots, x_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ آنگاه تابع

$$f : \{1, \ldots, n\} \to S_1 \cup \cdots \cup S_n, \qquad j \mapsto x_j$$

به‌ازای هر $j = 1, \ldots, n$ در $f(j) \in S_j$ صدق می‌کند. بنابراین، روش دیگر توصیف $S_1 \times \cdots \times S_n$، این است که آن را مجموعهٔ همهٔ تابع‌هایی مانند f از $\{1, \ldots, n\}$ به $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ بگیریم که به‌ازای هر $j = 1, \ldots, n$، $f(j) \in S_j$.

این مثال، انگیزهٔ تعریف زیر است.

تعریف ۲.۳.۱ فرض کنید $\mathcal{S}$ گردایه‌ای ناتهی از مجموعه‌ها است. حاصل‌ضرب دکارتی $\prod\{S : S \in \mathcal{S}\}$ را گردایهٔ همهٔ تابع‌های $f : \mathcal{S} \to \bigcup\{S : S \in \mathcal{S}\}$ تعریف می‌کنیم که به‌ازای هر $S \in \mathcal{S}$، $f(S) \in S$.

اگر مجموعه‌های در $\mathcal{S}$ با $\mathbb{I}$ اندیس‌گذاری شوند، یعنی $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in \mathbb{I}}$، آنگاه حاصل‌ضرب دکارتی آنها را با $\prod_{i \in \mathbb{I}} S_i$ (و اگر بیم ابهام نرود با $\prod_i S_i$) نشان می‌دهیم. اگر به‌ازای هر $i \in \mathbb{I}$، $S_i = S$، به‌جای $\prod_{i \in \mathbb{I}} S$ می‌نویسیم $S^{\mathbb{I}}$، که چیزی جز مجموعهٔ همهٔ تابع‌های از $\mathbb{I}$ به S نیست.

هرگاه $\mathcal{S}$ متناهی باشد و به‌ازای هر $S \in \mathcal{S}$، $S \neq \varnothing$ آنگاه بی‌درنگ می‌توان دید که $\prod\{S : S \in \mathcal{S}\} \neq \varnothing$. (هرگاه $\mathcal{S}$ شمارا باشد نیز می‌توان چنین حکمی را نشان داد؛ تمرین

۲ زیر را نگاه کنید). اما اینکه به‌ازای هر گردایه ناتهی دلخواه مانند $\mathcal{S}$ از مجموعه‌های ناتهی، $\prod\{S : S \in \mathcal{S}\} \neq \varnothing$، به‌گونه‌ای شگفت‌آور پیچیده است. در نگاه اول، بی‌درنگ این پاسخ به ذهن می‌آید: نیاز به تعریف تابع انتخاب داریم، تابع $f : \mathcal{S} \to \bigcup\{S : S \in \mathcal{S}\}$، که به‌ازای هر مجموعهٔ $S \in \mathcal{S}$، عضو $f(S)$ از S را انتخاب می‌کند. اگر $\mathcal{S}$ متناهی باشد، مثلاً $\mathcal{S} = \{S_۱, \ldots, S_n\}$، این فرایند ساده است: ابتدا چون $S_۱ \neq \varnothing$ می‌توانیم $f(S_۱) \in S_۱$ را انتخاب کنیم، سپس $f(S_۲) \in S_۲$ را انتخاب می‌کنیم، و این روند را ادامه می‌دهیم تا $f(S_n) \in S_n$ انتخاب شود. اما اگر $\mathcal{S}$ دلخواه باشد، چنین فرایندی که به ما اجازهٔ انتخاب تابع انتخاب بدهد وجود ندارد. با این وجود، هنوز ناتهی بودن $\prod\{S : S \in \mathcal{S}\}$ موجّه به‌نظر می‌رسد؛ عضوی در هر $S \in \mathcal{S}$ وجود دارد و از این رو باید روشی برای انتخاب عضوی از هر مجموعهٔ S وجود داشته باشد. با این وجود، رفتن به دنبال اثبات این حکم به ابزارهایی از نظریهٔ مجموعه‌ها نیاز دارد که قوی‌تر از آن‌هایی که تاکنون دیده‌ایم هستند.

منظور از رابطهٔ $\mathcal{R}$ بر مجموعهٔ S، زیرمجموعه‌ای از $S^۲$ است.

تعریف ۳.۳.۱ رابطهٔ $\mathcal{R}$ بر مجموعهٔ S، ترتیب نامیده می‌شود اگر گزاره‌های زیر برقرار باشند.

آ) به‌ازای هر $x \in S$، $(x, x) \in \mathcal{R}$؛

ب) اگر $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R}$ آنگاه $(x, z) \in \mathcal{R}$؛

پ) اگر $(x, y), (y, x) \in \mathcal{R}$ آنگاه $x = y$.

به‌جای $(x, y) \in \mathcal{R}$ می‌نویسیم $x \preceq y$، و از نماد $\preceq$ برای نمایش رابطهٔ ترتیب $\mathcal{R}$ استفاده می‌کنیم. مجموعهٔ S مجهز به ترتیب $\preceq$ را مرتب می‌نامیم؛ اگر به‌ازای هر $x, y \in S$، یکی از $x \preceq y$ یا $y \preceq x$ برقرار باشد، می‌گوییم S کلاً مرتب است.

مثال ۴.۳.۱ آ) مجموعهٔ اعداد حقیقی همراه با ترتیب معمولی کلاً مرتب است.

ب) فرض کنید S مجموعه است. به‌ازای $A, B \subset S$ تعریف می‌کنیم

$$A \preceq B \quad :\Longleftrightarrow \quad A \subset B.$$

این رابطه، $\mathfrak{P}(S)$ را به مجموعه‌ای مرتب تبدیل می‌کند، که اگر S بیش از یک عضو داشته باشد، کلاً مرتب نیست.

تعریف ۵.۳.۱ فرض کنید S مجموعه‌ای مرتب است.

آ) عضو $x \in S$ کران بالا برای $T \subset S$ نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر $y \in T$، $y \preceq x$.

ب) عضو $x \in S$، ماکسیمال نامیده می‌شود اگر هیچ $y \in S$ای وجود نداشته باشد که $x \neq y$ و $x \preceq y$.

اکنون می‌توانیم لم زُرن را صورت‌بندی کنیم.

اصل ۶.۳.۱ (لم زُرن) فرض کنید S مجموعه‌ای ناتهی و مرتب، با این ویژگی است که هر زیرمجموعهٔ کلاً مرتب ناتهی S کران بالا دارد. دراین‌صورت، S عضو ماکسیمال دارد.

برچسب «لم» برای لم زرن بسیار فریبنده است: این یک لم نیست بلکه اصلی در نظریهٔ مجموعه‌ها است که بدون فرض‌های نابدیهی نمی‌توان آن را ثابت کرد.

منصفانه است که بگوییم لم زرن چندان شهودی نیست. با وجود این به کمک آن می‌توان قضیهٔ زیر را ثابت کرد:

قضیهٔ ۷.۳.۱ فرض کنید $(S_i)_{i\in\mathbb{I}}$ خانواده‌ای ناتهی از مجموعه‌های ناتهی است. دراین‌صورت $\prod_{i\in\mathbb{I}} S_i$ ناتهی است.

برهان. فرض کنید $\mathcal{P}$ گردایهٔ همهٔ زوج‌مرتب‌هایی مانند $(\mathbb{J}_f, f)$ است که $\varnothing \neq \mathbb{J} \subset \mathbb{I}$، و $f : \mathbb{J}_f \to \bigcup_{j\in\mathbb{J}_f} S_j$ به‌طوری‌که به‌ازای هر $j \in \mathbb{J}_f$، $f(j) \in S_j$. آشکارا، $\mathcal{P}$ ناتهی است: $i \in \mathbb{I}$ را ثابت بگیرید و فرض کنید $x \in S_i$، و $f : \{i\} \to S_i$ را با $f(i) = x$ تعریف کنید؛ آشکارا، $(\{i\}, f) \in \mathcal{P}$.

رابطه‌ای ترتیبی را بر $\mathcal{P}$ به این صورت تعریف می‌کنیم که به‌ازای هر $(\mathbb{J}_f, f), (\mathbb{J}_g, g) \in P$،

$$(\mathbb{J}_f, f) \preceq (\mathbb{J}_g, g) \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathbb{J}_f \subset \mathbb{J}_g \text{ و } g|_{\mathbb{J}_f} = f$$

فرض کنید $\mathcal{Q}$ زیرمجموعه‌ای کلاً مرتب و ناتهی از $\mathcal{P}$ است. فرض کنید

$$\mathbb{J}_g := \bigcup\{\mathbb{J}_f : (\mathbb{J}_f, f) \in \mathcal{Q}\},$$

و $g : \mathbb{J}_g \to \bigcup_{j\in\mathbb{J}_g} S_j$ را به این شکل تعریف می‌کنیم: به‌ازای هر $j \in \mathbb{J}_g$، $(\mathbb{J}_f, f) \in \mathcal{Q}$ای وجود دارد که $j \in \mathbb{J}_f$؛ قرار می‌دهیم $g(j) = f(j)$. چون $\mathcal{Q}$ کلاً مرتب است، به آسانی دیده می‌شود که g خوش‌تعریف است؛ یعنی مقدار $g(j)$ به انتخاب $(\mathbb{J}_f, f) \in \mathcal{Q}$ که در آن $j \in \mathbb{J}_f$ بستگی ندارد. آشکارا، $(\mathbb{J}_g, g) \in \mathcal{P}$ یک کران بالای $\mathcal{Q}$ است.

بنابر لم زرن عضو ماکسیمال $(\mathbb{J}_{\max}, f_{\max})$ در $\mathcal{P}$ وجود دارد. فرض کنید $\mathbb{J}_{\max} \neq \mathbb{I}$ (در واقع، این فرض یعنی $i_\circ \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{J}_{\max}$ ای موجود است). $x_\circ \in S_{i_\circ}$ را ثابت بگیرید و تابع $\tilde{f} : \mathbb{J}_{\max} \cup \{i_\circ\} \to \bigcup_{j \in \mathbb{J}_{\max}} S_j \cup S_{i_\circ}$ را به‌صورت

$$\tilde{f}(j) := \begin{cases} f_{\max}(j), & j \in \mathbb{J}_{\max} \\ x_\circ, & j = i_\circ \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در نتیجه، $(\mathbb{J}_{\max} \cup \{i_\circ\}, \tilde{f}) \in \mathcal{P}$ و $(\mathbb{J}_{\max}, f_{\max}) \preceq (\mathbb{J}_{\max} \cup \{i_\circ\}, \tilde{f})$، ولی $(\mathbb{J}_{\max}, f_{\max}) \neq (\mathbb{J}_{\max} \cup \{i_\circ\}, \tilde{f})$، که این با ماکسیمال بودن $(\mathbb{J}_{\max}, f_{\max})$ در تناقض است. بنابراین $\mathbb{J}_{\max} = \mathbb{I}$ و در نتیجه $f_{\max} \in \prod_i S_i$. ■

در ظاهر، حکم قضیهٔ ۷.۳.۱ بسیار موجّه‌تر از لم زرن به نظر می‌رسد و لذا وسوسه می‌شویم که بپرسیم آیا برای اثبات قضیهٔ ۷.۳.۱ واقعاً به لم زرن نیاز داریم؟ آری نیاز داریم. در واقع می‌توان ادعای قضیهٔ ۷.۳.۱ را ــ که اصل انتخاب نامیده می‌شود ــ راست فرض کرد و سپس لم زرن را از آن نتیجه گرفت.

تمرین‌ها

۱. فرض کنید $S \neq \varnothing$ مجموعه است. رابطهٔ $\mathcal{R}$ بر S، رابطهٔ هم‌ارزی نامیده می‌شود اگر

(i) انعکاسی باشد (یعنی به‌ازای هر $x \in S$، $(x, x) \in \mathcal{R}$)،

(ii) متقارن باشد (یعنی به‌ازای هر $x, y \in S$، اگر $(x, y) \in \mathcal{R}$ آنگاه $(y, x) \in \mathcal{R}$) و

(iii) متعدی باشد (یعنی اگر $x, y, z \in S$ و $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R}$، آنگاه $(x, z) \in \mathcal{R}$).

(اغلب به‌جای $(x, y) \in \mathcal{R}$ از نمادهای $x \sim y$، $x \approx y$ و مانند آن استفاده می‌کنیم.) به‌ازای $x \in S$ داده شده، ردهٔ هم‌ارزی x (مرتبط با یک رابطهٔ هم‌ارزی $\mathcal{R}$) را مجموعهٔ همهٔ $y \in S$هایی که $(x, y) \in R$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که دو ردهٔ هم‌ارزی یا از هم جدا و یا باهم برابرند.

۲. فرض کنید $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های ناتهی است. بدون استفاده از لم زرن ثابت کنید که $\prod_{n=1}^{\infty} S_n$ ناتهی است.

۳. پایهٔ هامِل فضای برداری (احتمالاً با بعد نامتناهی و روی میدانی دلخواه) عبارت است از زیرمجموعه‌ای مستقل خطی که پدید آمدهٔ خطی آن برابر با کل فضا است. با استفاده از لم زرن ثابت کنید که هر فضای برداری ناصفر پایهٔ هامل دارد.

۴. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی با عضو همانی ۱ است. ایده‌آل $\mathfrak{m}$ ماکسیمال نامیده می‌شود هرگاه $R \subsetneq \mathfrak{m}$ و به‌ازای هر ایده‌آل I از R که $\mathfrak{m} \subset I \subset R$، $I = \mathfrak{m}$ یا $I = R$. با استفاده از لم زرن ثابت کنید که هر ایده‌آل سرهٔ R (یعنی ایده‌آلی که با R برابر نیست) جزء یکی از ایده‌آل‌های ماکسیمال R است.

ملاحظه‌ها

این روزها که به سختی می‌توان کار با ریاضیاتِ بدون نظریهٔ مجموعه‌ها را تصور کرد، بیان ریاضیات با عبارت‌های نظریهٔ مجموعه‌ها کاملاً طبیعی به نظر می‌رسد. با این وجود نظریهٔ مجموعه‌ها تا پیش از نیمهٔ دوم قرن نوزدهم وارد صحنهٔ ریاضیات نشد و هنگامی هم که وارد شد کسی هلهله‌کنان سلامش نگفت.

نظریهٔ مجموعه‌ها، زادهٔ اندیشهٔ گئورگ کانتور است. او در سال ۱۸۴۵ از پدری آلمانی و مادری روسی، در سن پترزبورگ، پایتخت روسیه، متولد شد. ریاضیات را در آلمان و سوئیس آموخت و در سال ۱۸۶۷ دکترای خود را در زمینهٔ نظریهٔ اعداد از برلین دریافت کرد. وی سپس از نظریهٔ اعداد به آنالیز تغییر گرایش داد و تحقیق پیرامون همگرایی سری‌های فوریه، او را به توسعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها رهنمون کرد. کانتور در اوایل دههٔ ۱۸۷۰ شمارا بودن اعداد جبری و ناشمارا بودن اعداد حقیقی را ثابت کرده بود. وی از اواخر دههٔ ۱۸۷۰ تا اواسط دههٔ ۱۸۸۰، به شکل سازمان‌یافته‌ای مبانی نظریهٔ مجموعه‌ها را در یک سری از مقالات ارائه کرد.

رهیافت کانتور در ارائهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها روشی کاملاً «طبیعی» بود، بدین‌معنی که از «تعریف» ۱.۱.۱ برای مجموعه استفاده می‌کرد که شهودی است، اما دقت کافی ندارد. بعدها خود کانتور اولین پارادوکس را، که مشوّش‌کنندهٔ ساخته‌های فکرش بود، کشف کرد.

نام پارادوکس راسل، از سال ۱۹۰۱ برگرفته از نام ریاضیدان و فیلسوف، برندهٔ جایزهٔ نوبل ادبیات و فعال سیاسی اهل انگلستان، برتراند راسل است.

تناقض‌های موجود در نظریهٔ مجموعه‌های کانتور سرانجام به کمک اصول موضوعی دقیق برطرف شدند. این اصول محدودیت‌هایی را بر چگونگی شکل‌گیری مجموعه‌ها با استفاده از مجموعه‌های دیگر تحمیل می‌کنند، اما هنوز آزادی عمل کافی را برای کار ریاضیِ روزمره می‌دهند. دستگاه اصول موضوعی که امروزه معمولاً متخصصان نظریهٔ مجموعه‌ها از آن استفاده می‌کنند، نظریهٔ زرملو ـ فرانکل (وگاهی نظریهٔ مجموعه‌های زرملو ـ فرانکل ـ اسکولم) نامیده می‌شود که برگرفته از اسامی پدیدآورندگان

آن و مخفف آن ZF است. امروزه اغلب ریاضی‌دانان در چارچوب ZF کار می‌کنند، هرچند که غالب ایشان احتمالاً در یک آزمون کوتاه در مورد اینکه اصول آن چه چیزهایی‌اند رفوزه می‌شوند. برای دریافت مقدمات کاملاً دست‌یافتنی از نظریهٔ مجموعه‌های با اصول موضوع ZF، مرجع [HALMOS 74] را نگاه کنید؛ نظریهٔ مجموعه‌های موجود در این کتاب، برخلاف عنوان آن، به هیچ وجه طبیعی نیست.

در اوایل قرن بیستم، نظریهٔ مجموعه‌ها مورد پذیرش اغلب ریاضی‌دانان قرار گرفت. دیوید هیلبرت این مطلب را به گونه‌ای به‌یادماندنی، چنین بیان می‌کند: «هیچ‌کس نمی‌تواند ما را از بهشتی که کانتور برایمان آفریده است بیرون کند.»

اصل انتخاب (AC) مستقل از ZF است: هم ZF+AC (ZFی که اصل انتخاب به اصول موضوع آن افزوده شده است) و هم ZF + ¬AC (که در آن نقیضِ AC به عنوان یک اصل به اصول ZF اضافه می‌شود) عاری از تناقض هستند. *اصل انتخاب و لم زرن (ZL) هم‌ارز هستند* به این معنی که قضیه‌هایی که می‌توان در ZF+AC و ZF+ZL ثابت کرد دقیقاً باهم یکسان هستند. گزارهٔ سومی که با اصل انتخاب و لم زرن هم‌ارز است، اصل خوش‌ترتیبی است. رابطهٔ خوش‌ترتیب بر مجموعهٔ S، ترتیبی کلّی است که با آن هر زیرمجموعهٔ ناتهی S عضو مینیمال دارد؛ به عنوان مثال ترتیب معمولی روی $\mathbb{N}$ خوش‌ترتیبی است. اصل خوش‌ترتیبی می‌گوید:

روی هر مجموعهٔ ناتهی، یک رابطهٔ خوش‌ترتیب وجود دارد.

برای اثبات اینکه AC، ZL و اصل خوش‌ترتیبی را می‌توان از یکدیگر نتیجه گرفت، [HALMOS 74] را نگاه کنید.

اکثر ریاضی‌دانان بنا به دلایل عمل‌گرایانه اصل انتخاب/لم زرن/اصل خوش‌ترتیبی را می‌پذیرند: با استفاده از این اصل می‌توانند قضیه‌های مفیدی را در حوزهٔ کاریِ خود ثابت کنند. به عنوان مثال، یکی از مهم‌ترین قضیه‌ها در توپولوژی عمومی، قضیهٔ تیخونوف (قضیهٔ ۲۱.۳.۳ این کتاب) است که لم زرن برای اثبات آن ضروری است. احتمالاً اغراق آمیز نیست اگر بگوییم بدون اصل انتخاب عمدهٔ آنالیز تابعی و جبر مجرد فرو خواهد ریخت.

کانتور که نامساوی $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ را ثابت کرده بود، خود، این پرسش را طرح کرد که آیا عددی اصلی به‌طور اکید بین $\aleph_0$ و $\mathfrak{c}$ وجود دارد یا نه. این اعتقاد که چنین عدد اصلی‌ای وجود ندارد، فرض پیوستار نامیده می‌شود. ناتوانی کانتور در اثبات آن، وی را سخت آشفته ساخت. دیوید هیلبرت در سال ۱۹۰۰ سخنرانی مشهور خود را در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات پاریس ارائه داد و در آن ۲۳ مسئلهٔ حل نشده را به عنوان محور تحقیقات ریاضی برای قرن آینده مشخص کرد؛ در میان آنها این پرسش وجود داشت که آیا اصل پیوستار درست است یا نه. بیش از نیم قرن بعد، این مسئله به روشی خاص به وسیلهٔ

ریاضی‌دانی آمریکایی با نام پُل کوهِن حل شد. اصل پیوستار همان ارتباطی را با ZF+AC دارد که AC با ZF دارد: آنها مستقل از هم هستند. کوهن به سبب این کشف در سال ۱۹۶۶ مدال فیلدز را دریافت کرد.

کانتور از اواخر سومین دههٔ عمرش به بعد دچار افسردگی شد. جدل‌های گاه تند و تیزی که در اطراف ایده‌های ریاضی او وجود داشت هم کمکی به او نکرد. او در سال‌های آخر زندگی خود چندین‌بار به علت افسردگی در بیمارستان بستری شد؛ و در سال ۱۹۱۸ در حالی که در آسایشگاه بستری بود بر اثر حملهٔ قلبی درگذشت.

۲

فضاهای متریک

کمترین ساختار مورد نیاز برای یک مجموعه چیست تا بتوان از پیوستگی صحبت کرد؟

اگر f تابعی باشد که بر زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ ــ یا کلی‌تر، بر زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ ــ تعریف شده است، می‌گوییم f در نقطهٔ $x_۰$ پیوسته است اگر «با میل کردن x به $x_۰$، $f(x)$ به $f(x_۰)$ میل کند». با ϵ و δ، می‌توان این گزاره را برای هدف‌های ریاضی، به اندازهٔ کافی دقیق کرد.

به‌ازای هر $\epsilon > ۰$، $\delta > ۰$ی وجود دارد که به‌ازای هر x، اگر $|x - x_۰| < \delta$ آنگاه $|f(x) - f(x_۰)| < \epsilon$.

از این رو به نظر می‌رسد اینکه بتوانیم فاصلهٔ بین دو عدد حقیقی (یا بلکه دو بردار در فضای n بعدی اقلیدسی) را اندازه بگیریم، در تعریف پیوستگی اساسی است.

اگر بخواهیم در مورد پیوستگی تابع‌هایی سخن بگوییم که بر مجموعه‌های عمومی‌تر تعریف شده‌اند، باید رهیافتی معنی‌دار در مورد فاصلهٔ دو نقطهٔ این مجموعه‌ها داشته باشیم: این، به اختصار، ایده‌ای است که در ورای فضاهای متریک قرار دارد.

۱.۲ تعریف‌ها و مثال‌ها

در فضای دو بعدی اقلیدسی، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $(x_۱, x_۲)$ و $(y_۱, y_۲)$ به‌صورت $\sqrt{(x_۱ - y_۱)^۲ + (x_۲ - y_۲)^۲}$ تعریف می‌شود. به‌طور کلی، در فضای n بعدی اقلیدسی $\mathbb{R}^n$، فاصلهٔ بین $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ و $y = (y_۱, \ldots, y_n)$ با

$$d(x, y) := \sqrt{\sum_{j=۱}^{n} (x_j - y_j)^۲}$$

تعریف می‌شود. این فاصلهٔ اقلیدسی دارای ویژگی‌های زیر است.

۱. به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$، $d(x, y) \geq \circ$ و $d(x, y) = \circ$ اگر و تنها اگر $x = y$؛

۲. به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$، $d(x, y) = d(y, x)$؛

۳. به‌ازای هر $x, y, z \in \mathbb{R}^n$، $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

در تعریف فضای متریک، این سه ویژگی فاصلهٔ اقلیدسی اصل موضوع شده‌اند.

تعریف ۱.۱.۲ فرض‌کنید X مجموعه است. هر متریک بر X عبارت است از تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}$ با ویژگی‌های زیر:

آ) به‌ازای هر $x, y \in X$، $d(x, y) \geq \circ$ و $d(x, y) = \circ$ اگر و تنها اگر $x = y$ (مثبت معین بودن)؛

ب) به‌ازای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = d(y, x)$ (تقارن)؛

پ) به‌ازای هر $x, y, z \in X$، $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (نامساوی مثلثی).

هر مجموعهٔ مجهز به متریک، فضای متریک نامیده می‌شود.

اغلب، فضای متریک X را که متریک آن d است با (X, d) نشان می‌دهیم؛ گاهی هم که متریک آشکار و یا بی‌ربط است می‌توان به‌طور ساده X نوشت.

مثال ۲.۱.۲ آ) $\mathbb{R}^n$ با فاصلهٔ اقلیدسی، فضای متریک است.

ب) فرض کنید (X, d) فضای متریک و Y زیرمجموعه‌ای از X است. دراین‌صورت تحدید d بر $Y \times Y$، Y را به فضای متریک تبدیل می‌کند. فضای متریک $(Y, d|_{Y\times Y})$، زیرفضای X نامیده می‌شود. به‌طور خاص، هر زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^n$ با فاصلهٔ اقلیدسی، زیرفضای $\mathbb{R}^n$ است.

پ) فرض کنید E فضای خطی (بر $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) است. یک نُرم بر E، تابعی مانند $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ است که: (i) به‌ازای هر $x \in E$، $\|x\| \geq \circ$، و $\|x\| = \circ$ اگر و تنها اگر $x = \circ$؛ (ii) به‌ازای هر $\lambda \in \mathbb{F}$ و $x \in E$، $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$؛ (iii) به‌ازای هر $x, y \in E$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (فضای خطیِ مجهز به نرم، فضای نرم‌دار نامیده می‌شود). به‌ازای هر $x, y \in E$، تعریف می‌کنیم

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

این تعریف، E را به فضای متریک تبدیل می‌کند. به عنوان مثال فرض کنید E، $C([0,1],\mathbb{F})$ (فضای همهٔ تابع‌های $\mathbb{F}$ ـ مقدار پیوسته بر $[0,1]$) است. دراین‌صورت چندین نرم بر E وجود دارد؛ مثلاً $\|\cdot\|_1$ که به‌صورت

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\,dt \qquad (f \in E)$$

تعریف می‌شود، یا $\|\cdot\|_\infty$ که به‌صورت

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\} \qquad (f \in E)$$

تعریف می‌شود. هر یک از این نرم‌ها E را به فضای نرم‌دار تبدیل می‌کند.

ت) فرض کنید $S \neq \varnothing$ یک مجموعه، و (Y,d) فضای متریک است. می‌گوییم تابع $f : S \to Y$ کران‌دار است اگر

$$\sup_{x,y \in S} d(f(x), f(y)) < \infty.$$

مجموعهٔ

$$B(S,Y) := \{f : S \to Y : \text{کران‌دار است } f\}$$

با D که با

$$D(f,g) := \sup_{x \in S} d(f(x), g(x)) \qquad (f,g \in B(S,Y))$$

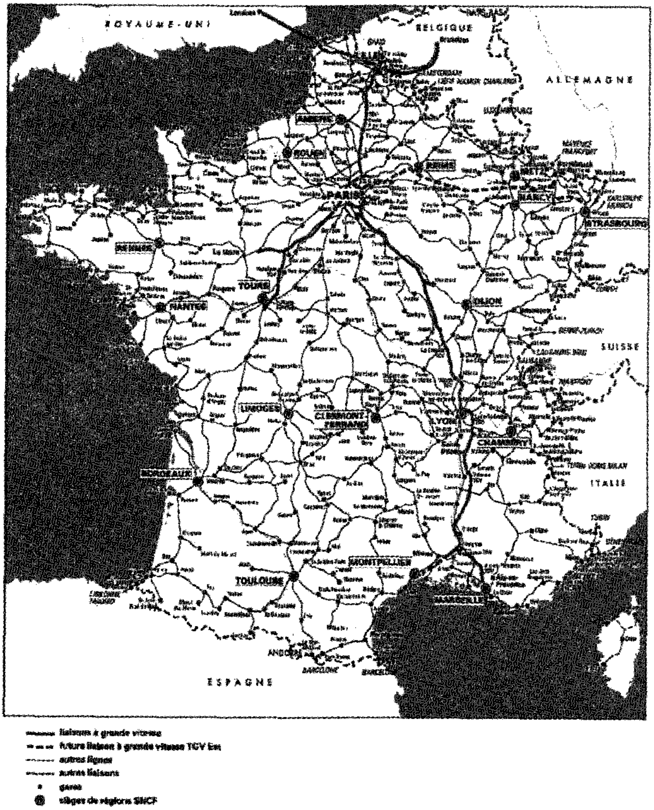
تعریف می‌شود فضای متریک است.

ث) فرانسه کشوری مرکزگرا است: هر قطار که از شهری به شهر دیگر می‌رود باید از پاریس بگذرد. همان‌طورکه نقشهٔ صفحهٔ بعد نشان می‌دهد، این سخن اندکی ولی نه خیلی زیاد، اغراق آمیز است.

این انگیزه‌ای برای نهادن نام متریک راه‌آهن فرانسه بر متریک زیر است. فرض کنید (X,d) فضایی متریک («فرانسه») است و $p \in X$ («پاریس») را ثابت بگیرید. متریک جدید d_p را بر X به این صورت تعریف می‌کنیم که به‌ازای هر $x,y \in X$،

$$d_p(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ d(x,p) + d(p,y) & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

دراین‌صورت (X,d_p) نیز فضای متریک است.



شکل ۱.۲ نقشهٔ شبکهٔ راه‌آهن فرانسه

ج) فرض کنید (X,d) فضای متریک دلخواهی است، و $\tilde{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ را به‌صورت

$$\tilde{d}(x,y) := \frac{d(x,y)}{۱ + d(x,y)} \qquad (x,y \in X)$$

تعریف کنید. ادعا می‌کنیم که $\tilde{d}$ هم متریکی بر X است. آشکارا $\tilde{d}$ مثبت معین و متقارن است؛ بنابراین تنها چیزی که لازم است نشان دهیم برقراری نامساوی مثلثی است. ابتدا توجه کنید که تابع

$$[۰,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \frac{t}{۱+t} \qquad (*)$$

صعودی است (این را می‌توان مثلاً با مشتق‌گیری تحقیق کرد). با فرض $x, y, z \in X$،

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(x,z) &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \\
&\le \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \qquad \text{زیرا } (*) \text{ صعودی است} \\
&= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\
&\le \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} \\
&= \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z).
\end{aligned}$$

در نتیجه، $\tilde{d}$ هم متریکی بر X است.

چ) نیم‌متریک d بر مجموعهٔ X، با یک استثنا، در اصل‌های متریک صدق می‌کند: ممکن است به‌ازای هر $x,y \in X$ی که $x \neq y$، $d(x,y) = 0$. اگر d نیم‌متریک باشد آنگاه $\tilde{d}$ که در مثال پیش ساخته شد هم نیم‌متریک است. فرض کنید X به دنبالهٔ $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ از نیم‌متریک‌ها مجهز است به‌طوری‌که به‌ازای هر $x,y \in X$ با شرط $x \neq y$، $n \in \mathbb{N}$ی موجود است که $d_n(x,y) > 0$. دراین‌صورت $d : X \times X \to \mathbb{R}$ با تعریف

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)} \qquad (x,y \in X)$$

متریک است. آشکارا d متقارن است و در نامساوی مثلثی صدق می‌کند، و اگر $x,y \in X$ با شرط $x \neq y$، آنگاه $n \in \mathbb{N}$ی موجود است که $d_n(x,y) > 0$، و لذا $d(x,y) \ge \frac{1}{2^n}\frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)} > 0$.

ح) مثال پیش را می‌توان به کار گرفت، و حاصل‌ضرب دکارتی X از تعدادی شمارا فضای متریک مانند $((X_n,d_n))_{n=1}^{\infty}$ را به فضایی متریک تبدیل کرد. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، نگاشت

$$\delta_n : X \times X \to [0,\infty), \qquad ((x_1,x_2,x_3,\ldots),(y_1,y_2,y_3,\ldots)) \mapsto d_n(x_n,y_n)$$

نیم‌متریک است. به‌علاوه اگر $x = (x_1,x_2,x_3,\ldots)$ و $y = (y_1,y_2,y_3,\ldots)$ نقطه‌هایی متمایز در X باشند، حداقل یک موضع $n \in \mathbb{N}$ موجود است که $x_n \neq y_n$، و لذا

$\delta_n(x,y) = d_n(x_n, y_n) > \circ$. به‌ازای $x = (x_۱, x_۲, x_۳, \ldots)$ و $y = (y_۱, y_۲, y_۳, \ldots)$ در X، فرض کنید

$$d(x,y) := \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^n} \frac{\delta_n(x,y)}{۱+\delta_n(x,y)} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{۱+d_n(x_n,y_n)}.$$

دراین‌صورت d متریکی بر X است.

خ) فرض کنید X مجموعه است. به‌ازای $x, y \in X$ تعریف می‌کنیم

$$d(x,y) := \begin{cases} \circ, & x = y \\ ۱, & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

دراین‌صورت به آسانی دیده می‌شود که (X,d) فضای متریک است (فضاهای متریکِ به این شکل، گسسته نامیده می‌شوند.)

تمرین‌ها

۱. فرض کنید S مجموعه، و X مجموعهٔ زیرمجموعه‌های متناهی S است. ثابت کنید

$$d : X \times X \to [\circ, \infty), \qquad (A,B) \mapsto |(A \backslash B) \cup (B \backslash A)|$$

متریکی بر X است.

۲. جزئیات مثال ۲.۱.۲ (ت) را تحقیق کنید.

۳. فرض کنید $S \neq \varnothing$ مجموعه، و E فضایی نرم‌دار است. ثابت کنید

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\| : x \in S\} \qquad (f \in B(S,E))$$

نرمی بر $B(S,E)$ تعریف می‌کند. رابطهٔ $\|\cdot\|_\infty$ و Dی تمرین پیش چگونه است؟

۴. فرض کنید $(E, \|\cdot\|)$ فضایی نرم‌دار است، و $|||\cdot||| : E \to [\circ, \infty)$ با

$$|||x||| := \frac{\|x\|}{۱+\|x\|} \qquad (x \in E)$$

تعریف شده است. آیا $|||\cdot|||$ نرمی بر E است؟

۵. فرض کنید X مجموعه، و $d : X \times X \to [0, \infty)$ نیم‌متریک است. به‌ازای $x, y \in X$ تعریف می‌کنیم $x \approx y$ اگر و تنها اگر $d(x, y) = 0$.

آ) ثابت کنید $\approx$ رابطه‌ای هم‌ارزی بر X است.

ب) به‌ازای $x \in X$، فرض کنید که $[x]$ ردهٔ هم‌ارزی آن نسبت به $\approx$، و $X/\approx$ گردایهٔ همهٔ $[x]$هایی است که $x \in X$. ثابت کنید

$$(X/\approx) \times (X/\approx) \to [0, \infty), \qquad ([x], [y]) \mapsto d(x, y)$$

متریکی بر $X/\approx$ تعریف می‌کند.

۲.۲ مجموعه‌های باز و بسته

با تعریف گوی باز در فضای متریک آغاز می‌کنیم:

تعریف ۱.۲.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک است، $x_0 \in X$، و $r > 0$. گوی باز به مرکز x_0 و شعاع r به‌صورت

$$B_r(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

تعریف می‌شود.

البته این تعریف در فضای دوبعدی یا سه‌بعدی اقلیدسی، بر تعریف شهودی معمولی منطبق است. با این وجود، حتی اگر گوی‌های باز با مفاهیم شهودی‌ای که از فضای اقلیدسی در ذهن هست تعریف شوند، ممکن است موردهایی پیش بیایند که به‌طور شگفت‌آوری نقض کنندهٔ شهود هستند:

مثال ۲.۲.۲ آ) فرض‌کنید (X, d) فضای متریک گسسته است، $x_0 \in X$، و $r > 0$. دراین صورت

$$B_r(x_0) = \begin{cases} \{x_0\}, & r \leq 1 \\ X, & r > 1. \end{cases}$$

یعنی هر گوی باز، زیرمجموعه‌ای تک‌عضوی و یا کل فضا است.

ب) فرض کنید (X, d) فضای متریک، $p \in X$، و d_p متریک راه‌آهن فرانسهٔ متناظر با آن است. به‌ازای $x_0 \in X$ و $r > 0$، برای تمایز گوی‌های باز در (X, d) و (X, d_p)، آنها را به‌ترتیب با

$B_r(x_\circ;d)$ و $B_r(x_\circ;d_p)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $x_\circ \in X$ و $r > \circ$. چون به‌ازای هر $x \in X$ که $x \neq x_\circ$،

$$d_p(x,x_\circ) = d(x,p) + d(p,x_\circ) < r \iff d(x,p) < r - d(p,x_\circ),$$

تساوی دو حالتی زیر برقرار است:

$$B_r(x_\circ;d_p) = \begin{cases} \{x_\circ\}, & r \leq d(p,x_\circ) \\ B_{r-d(p,x_\circ)}(p;d) \cup \{x_\circ\}, & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

مفهوم مجموعهٔ باز نیز، مانند گوی باز، از فضای اقلیدسی به فضاهای متریک دلخواه تعمیم پیدا می‌کند.

تعریف ۳.۲.۲ فرض کنید (X,d) فضای متریک است. می‌گوییم مجموعهٔ $U \subset X$، باز است اگر به‌ازای هر $x \in U$، $\epsilon > \circ$ی موجود باشد که $B_\epsilon(x) \subset U$.

برای بامعنی بودن اصطلاح انتخاب شده بهتر است که در فضای متریک، گوی باز مجموعه‌ای باز باشد. در واقع چنین است.

مثال ۴.۲.۲ فرض کنید (X,d) فضای متریک است، $x_\circ \in X$ و $r > \circ$. به‌ازای $x \in B_r(x_\circ)$، $\epsilon := r - d(x,x_\circ) > \circ$ را انتخاب می‌کنیم. بنابراین به‌ازای هر $y \in B_\epsilon(x)$،

$$d(y,x_\circ) \leq d(y,x) + d(x,x_\circ) < \epsilon + d(x,x_\circ) = r - d(x,x_\circ) + d(x,x_\circ) = r.$$

در نتیجه $B_\epsilon(x) \subset B_r(x_\circ)$.

در گزارهٔ زیر، ویژگی‌های اساسی مجموعه‌های باز فهرست شده‌اند.

گزارهٔ ۵.۲.۲ فرض کنید (X,d) فضای متریک است. دراین‌صورت:

(i) $\varnothing$ و X باز هستند؛

(ii) اگر $\mathcal{U}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های باز X باشد آنگاه $\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$ باز است؛

(iii) اگر U_1 و U_2 زیرمجموعه‌های باز X باشند آنگاه $U_1 \cap U_2$ باز است.

برهان. (i) آشکار است.

برای (ii)، فرض کنید $\mathcal{U}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های باز در X است، و $x \in \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$.
دراین‌صورت $U_\circ \in \mathcal{U}$ی وجود دارد که $x \in U_\circ$، و چون $U_\circ$ باز است، $\epsilon > \circ$ی وجود دارد که

$$B_\epsilon(x) \subset U_\circ \subset \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}.$$

بنابراین $\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$ باز است.

فرض کنید $U_۱, U_۲ \subset X$ باز هستند، و $x \in U_۱ \cap U_۲$. بنابر باز بودن $U_۱$ و $U_۲$، $\epsilon_۱, \epsilon_۲ > \circ$ وجود دارند که به‌ازای $j = ۱, ۲$، $B_{\epsilon_j}(x) \subset U_j$. فرض کنید $\epsilon := \min\{\epsilon_۱, \epsilon_۲\}$. دراین‌صورت بی‌درنگ $B_\epsilon(x) \subset U_۱ \cap U_۲$. این (iii) را ثابت می‌کند. ∎

ممکن است گزارهٔ ۵.۲.۲ (i) در نگاه اول عجیب به نظر بیاید. بازهٔ یکهٔ بسته در $\mathbb{R}$ زیرفضایی از $\mathbb{R}$ است، پس اصالتاً فضای متریک است، و در نتیجه بنابر قضیهٔ ۵.۲.۲ (i) باز است. ولی البته می‌دانیم که $[\circ, ۱]$ باز نیست. چگونه چنین چیزی ممکن است؟ پاسخ این است که باز بودن (همانند همهٔ مفهوم‌هایی که از آن گرفته می‌شوند) به فضای متریک داده شده بستگی دارد. پس $[\circ, ۱]$ در $[\circ, ۱]$ باز است، ولی در $\mathbb{R}$ باز نیست.

مثال ۶.۲.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک گسسته است و $S \subset X$. دراین‌صورت

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\} = \bigcup_{x \in S} B_۱(x)$$

باز است؛ یعنی همهٔ زیرمجموعه‌های X باز هستند.

مفهومی که رابطه‌ای نزدیک با مجموعه‌های باز دارد، مفهوم همسایگی نقطه است.

تعریف ۷.۲.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک است و $x \in X$. زیرمجموعهٔ N از X، همسایگی x نامیده می‌شود اگر زیرمجموعهٔ باز U از X موجود باشد که $x \in U \subset N$. گردایهٔ همهٔ همسایگی‌های x با $\mathcal{N}_x$ نشان داده می‌شود.

قضیهٔ ۸.۲.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک است و $x \in X$. دراین‌صورت:

(i) زیرمجموعهٔ N از X، در $\mathcal{N}_x$ است اگر و تنها اگر $\epsilon > \circ$ی موجود باشد که $B_\epsilon(x) \subset N$؛

(ii) اگر $N \in \mathcal{N}_x$ و $M \supset N$ آنگاه $M \in \mathcal{N}_x$؛

(iii) اگر $N_۱, N_۲ \in \mathcal{N}_x$ آنگاه $N_۱ \cap N_۲ \in \mathcal{N}_x$.

به‌علاوه، زیرمجموعهٔ U از X باز است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $y \in U$، $U \in \mathcal{N}_y$.

برهان. فرض کنید $N \subset X$ چنان است که $\epsilon > \circ$ی موجود است که $B_\epsilon(x) \subset N$. چون $B_\epsilon(x)$ باز است، $N \in \mathcal{N}_x$. برعکس، فرض کنید $N \in \mathcal{N}_x$. دراین‌صورت زیرمجموعهٔ بازی مانند U از N موجود است که $x \in U$. بنابر تعریف باز بودن، $\epsilon > \circ$ی وجود دارد که $B_\epsilon(x) \subset U \subset N$. این (i) را ثابت می‌کند.

(ii) آشکار است، و (iii) بی‌درنگ از گزارهٔ ۵.۲.۲ (iii) نتیجه می‌شود.

فرض کنید $U \subset X$ باز است. دراین‌صورت آشکارا U همسایگی هر نقطهٔ خود است. برعکس، فرض کنید $U \subset X$ مجموعه‌ای با این خاصیت است. بنابر تعریف همسایگی، به‌ازای هر $y \in U$، زیرمجموعهٔ باز U_y از U موجود است که $y \in U_y$. چون $U = \bigcup_{y \in U} U_y$، از گزارهٔ ۵.۲.۲ (ii) نتیجه می‌شود که U باز است. ∎

همانند فضای اقلیدسی، مجموعه‌ای را بسته می‌گوییم که متمم آن باز باشد.

تعریف ۹.۲.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک است. زیرمجموعهٔ F از X را بسته می‌گوییم اگر $X \backslash F$ باز باشد.

مثال ۱۰.۲.۲ آ) فرض کنید (X, d) فضای متریک است، $x_\circ \in X$ و $r > \circ$. یک گوی بسته به مرکز $x_\circ$ و شعاع r به‌صورت

$$B_r[x_\circ] := \{x \in X : d(x, x_\circ) \leq r\}$$

تعریف می‌شود. ادعا می‌کنیم که $B_r[x_\circ]$ بسته است. برای اثبات، فرض کنید $x \in X \backslash B_r[x_\circ]$، یعنی $d(x, x_\circ) > r$. فرض کنید $\epsilon := d(x, x_\circ) - r > \circ$، و $y \in B_\epsilon(x)$. چون $d(x, x_\circ) \leq d(x, y) + d(y, x_\circ)$،

$$\begin{aligned} d(y, x_\circ) \geq d(x, x_\circ) - d(x, y) &> d(x, x_\circ) - \epsilon \\ &= d(x, x_\circ) - (d(x, x_\circ) - r) \\ &= r. \end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد که $B_\epsilon(x) \subset X \backslash B_r[x_\circ]$. از این رو $X \backslash B_r[x_\circ]$ باز، و در نتیجه $B_r[x_\circ]$ بسته است.

ب) در فضای متریک گسسته، هر زیرمجموعه باز و بسته است.

آنچه در پی می‌آید نتیجهٔ مستقیم گزارهٔ ۵.۲.۲ است.

گزارهٔ ۱۱.۲.۲ فرض کنید (X,d) فضای متریک است. دراین‌صورت:

(i) $\varnothing$ و X بسته هستند؛

(ii) اگر $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های بستهٔ X باشد آنگاه $\bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\}$ بسته است؛

(iii) اگر F_1 و F_2 زیرمجموعه‌های بستهٔ X باشند آنگاه $F_1 \cup F_2$ بسته است.

البته در اغلب فضاهای متریک مجموعه‌های بسیاری وجود دارند که نه باز هستند و نه بسته. با وجود این می‌توانیم تعریف زیر را ارائه بدهیم.

تعریف ۱۲.۲.۲ فرض کنید (X,d) فضای متریک است. به‌ازای هر $S \subset X$، بستار S به‌صورت

$$\overline{S} := \bigcap\{F : \text{بسته و شامل } S \text{ است } F \subset X\}$$

تعریف می‌شود.

بنابر گزارهٔ ۱۱.۲.۲(ii)، بستار هر مجموعه بسته است. آنچه در پی می‌آید وصفی دیگر از بستار است.

گزارهٔ ۱۳.۲.۲ فرض کنید (X,d) فضای متریک است و $S \subset X$. دراین‌صورت:

$$\begin{aligned}\overline{S} &= \{x \in X : N \cap S \neq \varnothing \text{ ،} N \in \mathcal{N}_x \text{ به‌ازای هر}\}\\ &= \{x \in X : B_\epsilon(x) \cap S \neq \varnothing \text{ ،} \epsilon > 0 \text{ به‌ازای هر}\}.\end{aligned}$$

برهان. هر گوی باز، همسایگی مرکز خود، و هر همسایگی هر نقطه، شامل گوی بازی به مرکز آن نقطه است؛ بنابراین

$$\begin{aligned}&\{x \in X : N \cap S \neq \varnothing \text{ ،} N \in \mathcal{N}_x \text{ به‌ازای هر}\}\\ &\qquad = \{x \in X : B_\epsilon(x) \cap S \neq \varnothing \text{ ،} \epsilon > 0 \text{ به‌ازای هر}\}.\end{aligned}$$

این مجموعه را با $\mathrm{cl}(S)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید $x \in \overline{S}$، و $N \in \mathcal{N}_x$. دراین‌صورت زیرمجموعهٔ باز U از X موجود است که در N است و $x \in U$. اگر $N \cap S = \varnothing$ آنگاه $U \cap S = \varnothing$ (یعنی $S \subset X\backslash U$). چون $X\backslash U$ بسته است، $\overline{S} \subset X\backslash U$، و از این رو $x \in X\backslash U$، که تناقض است. در نتیجه $x \in \mathrm{cl}(S)$.

برعکس، فرض کنید $x \in \mathrm{cl}(S)$، و $x \notin \overline{S}$. دراین‌صورت $U := X \backslash \overline{S}$ مجموعهٔ بازی شامل x (و در نتیجه متعلق به $\mathcal{N}_x$) است که اشتراک آن با S تهی است. این با $x \in \mathrm{cl}(S)$ در تناقض است. ∎

مثال ۱۴.۲.۲ آ) هر بازهٔ باز در $\mathbb{R}$ شامل عددی گویا است. بنابراین $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

ب) فرض کنید (X, d) فضایی متریک است. آشکار است که به‌ازای هر $x_\circ \in X$ و $r > \circ$، $\overline{B_r(x_\circ)} \subset B_r[x_\circ]$. تساوی لزوماً همواره برقرار نیست. اگر (X, d) گسسته باشد و بیش از یک عضو داشته باشد، به‌ازای هر $x_\circ \in X$،

$$\overline{B_\text{۱}(x_\circ)} = \overline{\{x_\circ\}} = \{x_\circ\} \subsetneq X = B_\text{۱}[x_\circ].$$

پ) فرض کنید E فضایی نرم‌دار است، $x_\circ \in E$، و $r > \circ$. ادعا می‌کنیم که (در این وضعیت ویژه) $\overline{B_r(x_\circ)} = B_r[x_\circ]$. با توجه به مثال پیش، کافی است که $B_r[x_\circ] \subset \overline{B_r(x_\circ)}$ را ثابت کنیم. فرض کنید $x \in B_r[x_\circ]$، و $\epsilon > \circ$. $\delta \in (\circ, \text{۱})$ را طوری انتخاب کنید که $\delta\|x - x_\circ\| < \epsilon$، و فرض کنید

$$y := x_\circ + (\text{۱} - \delta)(x - x_\circ) = (\text{۱} - \delta)x + \delta x_\circ,$$

لذا

$$\|y - x_\circ\| = (\text{۱} - \delta)\|x - x_\circ\| \leq (\text{۱} - \delta)r < r;$$

یعنی $y \in B_r(x_\circ)$. به‌علاوه،

$$\|y - x\| = \|(\text{۱} - \delta)x + \delta x_\circ - x\| = \delta\|x - x_\circ\| < \epsilon,$$

و از این رو $y \in B_\epsilon(x)$. بنابر قضیهٔ ۱۳.۲.۲، $x \in \overline{B_r(x_\circ)}$.

بستار مجموعه در ارتباط با دو مفهوم توپولوژیک دیگر اهمیت پیدا می‌کند: چگالی و مرز.

تعریف ۱۵.۲.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک است.

آ) می‌گوییم زیرمجموعهٔ D از X، در X چگال است اگر $\overline{D} = X$.

ب) اگر X زیرمجموعه‌ای شمارا و چگال داشته باشد، می‌گوییم X تفکیک‌پذیر است.

مثال ۱۶.۲.۲ آ) $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است. به ویژه، $\mathbb{R}$ تفکیک‌پذیر است.

ب) زیرمجموعهٔ S از فضای متریک گسستهٔ (X, d) در X چگال است اگر و تنها اگر $S = X$. به ویژه، X تفکیک‌پذیر است اگر و تنها اگر شمارا باشد.

موروثی بودن ویژگی تفکیک‌پذیری تا حدی جالب و بسیار مفید است.

قضیهٔ ۱۷.۲.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک تفکیک‌پذیر، و Y زیرفضایی از X است. دراین‌صورت Y نیز تفکیک‌پذیر است.

برهان. فرض کنید $C = \{x_۱, x_۲, x_۳, \ldots\}$ زیرمجموعهٔ چگال شمارای X است. ممکن است تصور شود که باید از $Y \cap C$ به عنوان زیرمجموعهٔ چگال (و مطمئناً شمارای) Y استفاده کرد، اما ممکن است این مجموعه به کار نیاید: مثلاً هنگامی که $C \neq X$، و $Y = X \backslash C$.
فرض کنید

$$\mathbb{A} := \left\{ (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : d(y, x_n) < \frac{۱}{m} \text{ که دارد وجود ای} y \in Y \right\}.$$

به‌ازای هر $(n, m) \in \mathbb{A}$، $y_{n,m} \in Y$ای را انتخاب می‌کنیم که $d(y_{n,m}, x_n) < \frac{۱}{m}$. دراین‌صورت $C_Y := \{y_{n,m} : (n, m) \in \mathbb{A}\}$ زیرمجموعهٔ شمارایی از Y است. ادعا می‌کنیم که C_Y در Y چگال هم هست. فرض کنید $y \in Y$، و $\epsilon > ۰$. $m \in \mathbb{N}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\frac{۱}{m} \leq \frac{\epsilon}{۲}$. چون C در X چگال است، $n \in \mathbb{N}$ی موجود است که $d(y, x_n) < \frac{۱}{m}$. بنابر تعریف $\mathbb{A}$، این یعنی $(n, m) \in \mathbb{A}$. در نتیجه

$$d(y, y_{n,m}) \leq d(y, x_n) + d(x_n, y_{n,m}) < \frac{۲}{m} \leq \epsilon.$$

بنابر گزارهٔ ۱۳.۲.۲ این یعنی اینکه y عضو بستار C_Y در Y است. ■

مثال ۱۸.۲.۲ آ) مجموعهٔ اعداد گنگ، زیرفضای تفکیک‌پذیر $\mathbb{R}$ است.

ب) فرض کنید $X = B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$، به متریک مثال ۲.۱.۲ (ت) مجهز است؛ یعنی

$$d(f, g) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(n) - g(n)| \qquad (f, g \in X).$$

ادعا می‌کنیم که X تفکیک‌پذیر نیست. برای رسیدن به تناقض، فرض کنید که X تفکیک‌پذیر است. فرض کنید Y زیرفضایی از X است که از همهٔ تابع‌های $\{۰, ۱\}$ـ مقدار تشکیل شده

است. در نتیجه، بنابر قضیهٔ ۱۷.۲.۲، Y نیز تفکیک‌پذیر است. چون به‌ازای هر $f, g \in Y$،

$$d(f,g) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(n) - g(n)| = \begin{cases} ۰, & f = g \\ ۱, & f \neq g, \end{cases}$$

پس Y فضای متریک گسسته است و بنابراین باید شمارا باشد. در حالی که نگاشت

$$Y \to [۰, ۱], \qquad f \mapsto \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{f(n)}{۲^n}$$

پوشا است، و $[۰, ۱]$ شمارا نیست. این تناقض است.

برای اینکه انگیزه‌ای برای تعریف مفهوم مرز به وجود بیاوریم، نخست مثال زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال ۱۹.۲.۲ فرض کنید $(E, \|\cdot\|)$ فضایی نرم‌دار است، $x_۰ \in E$، و $r > ۰$. دراین‌صورت می‌توان کرهٔ

$$S_r[x_۰] := \{x \in E : \|x - x_۰\| = r\}$$

را به عنوان مرز گوی باز $B_r(x_۰)$ در نظر گرفت. فرض کنید $x \in S_r[x_۰]$، و $\epsilon > ۰$. $\delta \in (۰, ۱)$ را طوری بگیرید که $\delta\|x - x_۰\| < \epsilon$، و فرض کنید $y := x_۰ + (۱ - \delta)(x - x_۰)$. مانند مثال ۱۴.۲.۲ (پ)، نتیجه می‌شود که $y \in B_\epsilon(x) \cap B_r(x_۰)$، و در نتیجه

$$B_\epsilon(x) \cap (E \backslash B_r(x_۰)) \neq \varnothing, \qquad B_\epsilon(x) \cap B_r(x_۰) \neq \varnothing. \qquad (**)$$

از سوی دیگر، چون $B_r(x_۰)$ و $E \backslash B_r[x_۰]$ باز هستند، هر عضو x از E که به‌ازای هر $\epsilon > ۰$ در $(**)$ صدق کند، باید در $S_r[x_۰]$ قرار بگیرد.

با توجه به این مثال، تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف ۲۰.۲.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک است، و $S \subset X$. دراین‌صورت مرز S با

$$\partial S := \{x \in X : \text{به‌ازای هر } \epsilon > ۰،\ B_\epsilon(x) \cap (X \backslash S) \neq \varnothing \text{ و } B_\epsilon(x) \cap S \neq \varnothing\}$$

تعریف می‌شود.

با بحثی شبیه شروع برهان قضیهٔ ۱۳.۲.۲، واضح است که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ S از فضای متریک X،

$$\partial S = \{x \in X : \text{به‌ازای هر } N \in \mathcal{N}_x\text{،}\ N \cap (X\backslash S) \neq \varnothing \ \text{و}\ N \cap S \neq \varnothing\}.$$

گزارهٔ ۲۱.۲.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک است، و $S \subset X$. دراین‌صورت:

(i) $\partial S = \partial(X\backslash S)$؛

(ii) ∂S بسته است؛

(iii) $\overline{S} = S \cup \partial S$

برهان. (i) بدیهی است.

برای (ii)، فرض کنید $x \in X\backslash\partial S$؛ یعنی $N \in \mathcal{N}_x$ی وجود دارد که $N \cap S = \varnothing$ یا $N \cap (X\backslash S) = \varnothing$. فرض کنید $U \subset N$ باز است و $x \in U$. در نتیجه $U \cap S = \varnothing$ یا $U \cap (X\backslash S) = \varnothing$. چون U همسایگی هر نقطهٔ خود است، $U \subset X\backslash\partial S$. بنابراین $X\backslash\partial S$ یک همسایگی x است. چون x دلخواه بود، $X\backslash\partial S$ باز است.

برای (iii)، توجه کنید که بنابر گزارهٔ ۱۳.۲.۲، $\partial S \subset \overline{S}$، و در نتیجه $S \cup \partial S \subset \overline{S}$. برعکس، فرض کنید $x \in \overline{S}$، و $x \notin S$. به‌ازای هر $N \in \mathcal{N}_x$، آشکارا $N \cap (X\backslash S) \neq \varnothing$، و نیز بنابر گزارهٔ ۱۳.۲.۲، $N \cap S \neq \varnothing$. ∎

بنابر تعریف، بستار مجموعه، کوچک‌ترین مجموعهٔ بستهٔ شامل آن مجموعه است. به‌طور مشابه، بزرگ‌ترین مجموعهٔ بازی که در مجموعه است، نیز تعریف می‌شود.

تعریف ۲۲.۲.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک است. به‌ازای هر $S \subset X$، درون S، با

$$S^\circ := \bigcup\{U : \ U \subset X \text{ باز و در } S \text{ است}\}$$

تعریف می‌شود.

گزارهٔ زیر، درون مجموعه را سرشت‌نمایی می‌کند.

گزارهٔ ۲۳.۲.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک است، و $S \subset X$. دراین‌صورت

$$S^\circ = \{x \in X : \ S \in \mathcal{N}_x\} = S\backslash\partial S.$$

برهان. فرض کنید $x \in S^\circ$. پس زیرمجموعهٔ باز U از S موجود است که $x \in U$، و در نتیجه $S \in \mathcal{N}_x$. برعکس، اگر $S \in \mathcal{N}_x$ آنگاه زیرمجموعهٔ باز U از X موجود است که $x \in U \subset S$، و از این رو $x \in S^\circ$.

با فرضِ $x \in S^\circ$، بنا بر بحث بالا، $S \in \mathcal{N}_x$. چون آشکارا $S \cap (X\backslash S) = \varnothing$، درمی‌یابیم که $x \notin \partial S$. برعکس، فرض کنید $x \in S\backslash\partial S$. دراین‌صورت $N \in \mathcal{N}_x$ی وجود دارد که $N \cap (X\backslash S) = \varnothing$. فرض کنید $U \subset N$ در X باز است و $x \in U$. از این رو $U \cap (X\backslash S) = \varnothing$، و $U \subset S$. در نتیجه $x \in U \subset S^\circ$. ■

تمرین‌ها

۱. ثابت کنید زیرمجموعه‌های متناهی فضای متریک بسته هستند.

۲. فرض کنید $(E, \|\cdot\|)$ فضایی نرم‌دار است، $U \subset E$ باز است، و $S \subset E$. ثابت کنید که $S + U := \{x + y : x \in S, y \in U\}$ در E باز است.

۳. فرض کنید $U \subset \mathbb{R}$ باز است.

آ) فرض کنید به‌ازای هر $x \in U$، I_x اجتماع همهٔ بازه‌های بازی است که در U و شامل x هستند. ثابت کنید که I_x بازه‌ای باز (و احتمالاً بی‌کران) است.

ب) به‌ازای $x, y \in U$، ثابت کنید که $I_x = I_y$ یا $I_x \cap I_y = \varnothing$.

پ) نتیجه بگیرید که U اجتماع شمارایی از بازه‌های باز دوبه‌دو جدا از هم است.

۴. فرض کنید (X, d) فضای متریک است، و $S \subset X$. فاصلهٔ $x \in X$ تا S، به‌صورت

$$\operatorname{dist}(x, S) := \inf\{d(x, y) : y \in S\}$$

تعریف می‌شود (که در آن اگر $S = \varnothing$، $\operatorname{dist}(x, S) = \infty$). ثابت کنید

$$\overline{S} = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, S) = \circ\}.$$

۵. فرض کنید Y زیرفضایی از $B(\mathbb{N}, \mathbb{F})$ شامل دنباله‌های همگرا به صفر است. ثابت کنید Y تفکیک‌پذیر است.

۶. فرض کنید (X, d) فضایی متریک، و Y زیرفضای X است. ثابت کنید $U \subset Y$ در Y باز است اگر و تنها اگر $V \subset X$ی باز در X موجود باشد که $U = Y \cap V$.

۳.۲ همگرایی و پیوستگی

مفهوم همگرایی در $\mathbb{R}^n$، را می‌توان تقریباً کلمه‌به کلمه به فضاهای متریک منتقل کرد.

تعریف ۱.۳.۲ فرض کنید (X,d) فضای متریک است. می‌گوییم دنبالهٔ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ به $x \in X$ همگرا است اگر به‌ازای هر $\epsilon > 0$، $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ی موجود باشد که به‌ازای هر $n \geq n_\epsilon$، $d(x_n, x) < \epsilon$. دراین‌صورت می‌گوییم x حد $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ است و می‌نویسیم $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ یا $x_n \to x$.

به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که در فضایی متریک، دنبالهٔ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ به x همگرا است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $N \in \mathcal{N}_x$، $n_N \in \mathbb{N}$ی موجود باشد که به‌ازای هر $n \geq n_N$، $x_n \in N$.

مثال ۲.۳.۲ آ) فرض کنید (X,d) فضای متریک گسسته، و $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در X است که به x همگرا است. دراین‌صورت $n_1 \in \mathbb{N}$ی وجود دارد که به‌ازای هر $n \geq n_1$، $d(x_n, x) < 1$؛ یعنی به‌ازای هر $n \geq n_1$، $x_n = x$. بنابراین، در فضای متریک گسسته، هر دنبالهٔ همگرا در نهایت ثابت است.

ب) فرض کنید $C([0,1],\mathbb{F})$ به متریک القا شده یا $\|\cdot\|_\infty$ مجهز است (مثال ۲.۱.۲ (پ)). ادعا می‌کنیم که با این متریک، دنبالهٔ $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ در $C([0,1],\mathbb{F})$ به $f \in C([0,1],\mathbb{F})$ همگرا است اگر و تنها اگر بر $[0,1]$ یکنواخت‌همگرا (به f) باشد. ابتدا فرض کنید $\|f_n - f\|_\infty \to 0$، و $\epsilon > 0$. دراین‌صورت $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ی وجود دارد که

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty < \epsilon \qquad (n \geq n_\epsilon,\ t \in [0,1]),$$

درنتیجه f_n بر $[0,1]$ به‌طوریکنواخت به f میل می‌کند. برعکس، فرض کنید $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ به f بر $[0,1]$ یکنواخت‌همگرا است، و $\epsilon > 0$. بنابر تعریف همگرایی یکنواخت، $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ی وجود دارد که

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad (n \geq n_\epsilon,\ t \in [0,1]),$$

و در نتیجه،

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(t) - f(t)| :\ t \in [0,1]\} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \qquad (n \geq n_\epsilon).$$

بنابراین، همگرایی نسبت به $\|\cdot\|_\infty$ را داریم.

در فضاهای متریک، مانند $\mathbb{R}^n$، حد دنباله یکتا است.

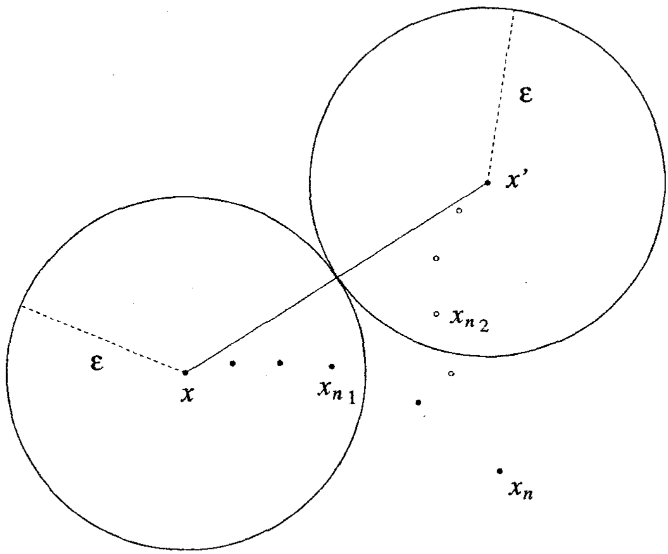
گزارهٔ ۳.۳.۲ فرض کنید (X, d) فضایی متریک، و $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در X است، و $x, x' \in X$ و $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ به x و x' همگرا است. دراین‌صورت x و x' برابرند.

برهان. فرض کنید $x \neq x'$، پس $\epsilon := \frac{1}{2}d(x, x') > 0$. چون $x_n \to x$، $n_1 \in \mathbb{N}$ی وجود دارد که به‌ازای هر $n \geq n_1$، $d(x_n, x) < \epsilon$، و چون $x_n \to x'$، $n_2 \in \mathbb{N}$ی موجود است که به‌ازای هر $n \geq n_2$، $d(x_n, x') < \epsilon$. اگر $n := \max\{n_1, n_2\}$،

$$d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x') < \epsilon + \epsilon = d(x, x'),$$

که بی‌معنی است. ∎

ایدهٔ برهان قضیهٔ ۳.۳.۲ در طرح ذیل نمایان است.



شکل ۲.۲ یکتایی حد

در فضاهای متریک، مانند $\mathbb{R}^n$، همگرایی را می‌توان برای سرشت‌نمایی زیرمجموعه‌های بسته به‌کار برد.

گزارهٔ ۴.۳.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک است، و $S \subset X$. دراین‌صورت $\overline{S}$ از نقاطی در X تشکیل شده است که حد دنباله‌ای در S هستند.

برهان. فرض کنید x حد دنبالهٔ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ در S است، و $\epsilon > 0$. بنابر تعریف همگرایی، $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ی وجود دارد که به‌ازای هر $n \geq n_\epsilon$، $d(x_n, x) < \epsilon$؛ یعنی به‌ازای هر $n \geq n_\epsilon$، $x_n \in B_\epsilon(x)$. به ویژه، $B_\epsilon(x) \cap S$ ناتهی است. چون $\epsilon > 0$ دلخواه است، بنابر گزارهٔ ۱۳.۲.۲ نتیجه می‌شود که $x \in \overline{S}$.

برعکس، فرض کنید $x \in \overline{S}$. بنابر گزارهٔ ۱۳.۲.۲، به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap S \neq \varnothing$؛ پس به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \in S$ی وجود دارد که $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. آشکارا، دنبالهٔ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ به x همگرا است. ∎

نتیجهٔ ۵.۳.۲ فرض کنید (X, d) فضایی متریک است. دراین‌صورت $F \subset X$ بسته است اگر و تنها اگر حد هر دنبالهٔ در F که در X همگرا است، در F باشد.

با در دست داشتن مفهوم همگرایی، می‌توان پیوستگی تابع را تعریف کرد.

تعریف ۶.۳.۲ فرض کنید (X, d_X) و (Y, d_Y) فضای متریک هستند، و $x_0 \in X$. می‌گوییم تابع $f : X \to Y$ در x_0 پیوسته است اگر به‌ازای هر دنبالهٔ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ در X و همگرا به x_0، $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

قضیهٔ سرشت‌نمایی زیر، برقرار است.

قضیهٔ ۷.۳.۲ فرض کنید (X, d_X) و (Y, d_Y) فضاهای متریک هستند، و $x_0 \in X$. دراین‌صورت در مورد $f : X \to Y$ حکم‌های زیر هم‌ارزند.

(i) f در x_0 پیوسته است.

(ii) به‌ازای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ی وجود دارد که به‌ازای هر $x \in X$ که $d_X(x, x_0) < \delta$، $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

(iii) به‌ازای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ی وجود دارد که $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$.

(iv) به‌ازای هر $N \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$، $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_{x_0}$.

برهان. (i) $\Longrightarrow$ (ii): فرض کنید چنین نیست؛ یعنی $\epsilon_0 > 0$ی وجود دارد که به‌ازای هر $\delta > 0$، $x_\delta \in X$ی موجود است که $d_X(x_\delta, x_0) < \delta$، ولی $d_Y(f(x_\delta), f(x_0)) \geq \epsilon_0$. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض کنید $x'_n := x_{\frac{1}{n}}$، لذا $d(x'_n, x_0) < \frac{1}{n}$، پس $x'_n \to x_0$. در حالی که چون به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ می‌دانیم که $d_Y(f(x'_n), f(x_0)) \geq \epsilon_0$، برقراری $f(x'_n) \to f(x_0)$ که برای پیوسته بودن f در x_0 لازم است، ناممکن است.

(iii) تنها بیان دیگری از (ii) است.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii): فرض‌کنید $N \in \mathcal{N}_{f(x_\circ)}$. بنابراین $\epsilon > \circ$ی وجود دارد که $B_\epsilon(f(x_\circ)) \subset N$.
بنابر (iii)، $\delta > \circ$ی وجود دارد که

$$B_\delta(x_\circ) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x_\circ))) \subset f^{-1}(N).$$

این نشان می‌دهد که $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_{x_\circ}$.

(i) $\Longrightarrow$ (iv): فرض کنید $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در X است که $x_n \to x_\circ$. فرض کنید $N \in \mathcal{N}_{f(x_\circ)}$، پس $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_{x_\circ}$. چون $x_n \to x_\circ$، $n_N \in \mathbb{N}$ی وجود دارد که به‌ازای هر $n \geq n_N$، $x_n \in f^{-1}(N)$؛ یعنی به‌ازای هر $n \geq n_N$، $f(x_n) \in N$. چون $N \in \mathcal{N}_{f(x_\circ)}$ دلخواه بود، $f(x_n) \to f(x_\circ)$. ∎

تعریف زیر نیز باید آشنا به نظر بیاید.

تعریف ۸.۳.۲ فرض‌کنید (X, d_X) و (Y, d_Y) فضای متریک هستند. می‌گوییم تابع $f : X \to Y$ پیوسته است اگر در هر نقطهٔ X پیوسته باشد.

مثال ۹.۳.۲ فرض‌کنید (X, d) فضای متریک است. نخست ادعا می‌کنیم که

$$|d(x,y) - d(x_\circ, y_\circ)| \leq d(x, x_\circ) + d(y, y_\circ) \qquad (x, x_\circ, y, y_\circ \in X). \qquad (***)$$

$x, x_\circ, y, y_\circ \in X$ را ثابت بگیرید، و توجه کنید که

$$d(x,y) \leq d(x, x_\circ) + d(x_\circ, y_\circ) + d(y_\circ, y)$$

و بنابراین

$$d(x,y) - d(x_\circ, y_\circ) \leq d(x, x_\circ) + d(y_\circ, y).$$

به‌ترتیب اگر نقش x و $x_\circ$، و y و $y_\circ$ را عوض کنیم نتیجه می‌شود

$$d(x_\circ, y_\circ) - d(x,y) \leq d(x, x_\circ) + d(y_\circ, y)$$

در مجموع، $(***)$ به‌دست می‌آید. مربع دکارتی X^2 با

$$\tilde{d}((x,y),(x',y')) := d(x,x') + d(y,y') \qquad ((x,x'),(y,y') \in X^2)$$

فضای متریک است. نامساوی $(***)$ بی‌درنگ نتیجه می‌دهد که $d : X^2 \to \mathbb{R}$ در $(X^2, \tilde{d})$ پیوسته است.

نتیجهٔ ۱۰.۳.۲ فرض کنید (X, d_X) و (Y, d_Y) فضای متریک هستند. در مورد تابع $f : X \to Y$ حکم‌های زیر هم‌ارزند.

(i) f پیوسته است.

(ii) به‌ازای هر زیرمجموعهٔ باز U از Y، $f^{-1}(U)$ در X باز است.

(iii) به‌ازای هر زیرمجموعهٔ بستهٔ F از Y، $f^{-1}(F)$ در X بسته است.

برهان. (ii) $\Longleftarrow$ (i): فرض کنید $U \subset Y$ باز است، پس به‌ازای هر $y \in U$، $U \in \mathcal{N}_y$ و از این رو، به‌ازای هر $x \in f^{-1}(U)$، $U \in \mathcal{N}_{f(x)}$. بنابر قضیهٔ ۷.۳.۲ (iv)، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $x \in f^{-1}(U)$، $f^{-1}(U) \in \mathcal{N}_x$؛ یعنی $f^{-1}(U)$ همسایگی هر نقطهٔ خود، و در نتیجه باز است.

(iii) $\Longleftarrow$ (ii): فرض کنید $F \subset Y$ بسته است، پس $Y \backslash F$ باز است. چون $X \backslash f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \backslash F)$، پس بنابر (ii) باز است، و در نتیجه $f^{-1}(F)$ بسته است.

(ii) $\Longleftarrow$ (iii) به روش مشابه ثابت می‌شود.

(i) $\Longleftarrow$ (ii): اگر f در (ii) صدق کند، آشکارا به‌ازای هر $x \in X$، در قضیهٔ ۷.۳.۲ (iii) نیز صدق می‌کند. ∎

اکنون مثالی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد نگاشت‌های پیوسته بین فضاهای متریک ممکن است با انتظارهای شهودی ما کاملاً متفاوت باشند.

مثال ۱۱.۳.۲ فرض کنید (X, d_X) و (Y, d_Y) فضای متریک هستند، (X, d_X) گسسته است، و $f : X \to Y$ دلخواه. فرض کنید $U \subset Y$ باز است. چون در فضای گسسته هر مجموعه باز است، $f^{-1}(U)$ باز است و در نتیجه، f پیوسته است.

همان گونه که دیده‌ایم، متریک‌های متفاوتی را می‌توان بر یک مجموعه قرار داد. برای بسیاری از کارها، مناسب است که بعضی از متریک‌ها یکسان به‌حساب بیایند.

تعریف ۱۲.۳.۲ فرض کنید X مجموعه است. دو متریک $d_۱$ و $d_۲$ بر X هم‌ارز نامیده می‌شوند اگر نگاشت همانی بر X، هم از $(X, d_۱)$ به $(X, d_۲)$، و هم از $(X, d_۲)$ به $(X, d_۱)$، پیوسته باشد.

بنابر نتیجهٔ ۱۰.۳.۲، دو متریک $d_۱$ و $d_۲$ بر مجموعهٔ X هم‌ارزند اگر و تنها اگر مجموعه‌های باز (یا به‌طور هم‌ارز، مجموعه‌های بستهٔ) یکسان داشته باشند.

مثال ۱۳.۳.۲ آ) متریک اقلیدسی روی $\mathbb{R}^n$ و متریک گسسته، هم‌ارز نیستند.

ب) به‌ازای $j = 1, \ldots, n$، فرض کنید (X_j, d_j) فضای متریک است. فرض کنید $X := X_1 \times \ldots \times X_n$، و به‌ازای $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$ در X، تعریف کنید

$$D_1(x,y) := \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j, y_j), \qquad D_\infty(x,y) := \max_{j=1,\ldots,n} d_j(x_j, y_j).$$

دراین‌صورت D_1 و D_∞ دو متریک بر X هستند که در

$$D_\infty(x,y) \leq D_1(x,y) \leq nD_\infty(x,y) \qquad (x, y \in X),$$

صدق می‌کنند. در نتیجه D_1 و D_∞ هم‌ارزند.

پ) فرض کنید (X, d) فضای متریک، $p \in X$، و d_p متریک راه‌آهن فرانسهٔ متناظر با آن است. چون

$$d(x,y) \leq d_p(x,y) \qquad (x, y \in X),$$

به آسانی دیده می‌شود که تابع همانی از (X, d_p) به (X, d) پیوسته است. از سوی دیگر، فرض کنید $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در X است که با متریک d، به $x \neq p$ همگرا است. اگر $x \neq x_n$، می‌دانیم که

$$d_p(x_n, x) = d(x_n, p) + d(p, x) \geq d(p, x),$$

پس برقراری $d_p(x_n, x) \to 0$، ایجاب می‌کند که $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ در نهایت ثابت باشد. بنابراین، به عنوان مثال، متریک اقلیدسی بر $\mathbb{R}^n$ و متریک راه‌آهن فرانسهٔ متناظر ـــ با صرف‌نظر از اینکه پاریس چگونه انتخاب شود ـــ هم‌ارز نیستند. از سوی دیگر، اگر (X, d) گسسته باشد، تابع همانی از (X, d) به (X, d_p) نیز پیوسته است، پس d و d_p هم‌ارزند.

ت) فرض کنید (X, d) فضای متریک، و $\tilde{d}$ متریک تعریف شده در مثال ۲.۱.۲ (ج) است. ادعا می‌کنیم که d و $\tilde{d}$ هم‌ارزند. تابع

$$f : [0, \infty) \to [0, 1), \qquad t \mapsto \frac{t}{1+t}$$

پیوسته و دوسویی با وارون پیوستهٔ

$$g : [0, 1) \to [0, \infty), \qquad s \mapsto \frac{s}{1-s}$$

است. چون $\tilde{d} = f \circ d$ (و در نتیجه، $d = g \circ \tilde{d}$)، d و $\tilde{d}$ هم‌ارزند.

ث) فرض کنید (X,d) فضای متریک، و $U \subset X$ باز است. تعریف کنید

$$d_U(x,y) := d(x,y) + \left|\frac{1}{\operatorname{dist}(x,X\backslash U)} - \frac{1}{\operatorname{dist}(y,X\backslash U)}\right| \quad (x,y\in U).$$

(اگر $X = U$، به‌طور صوری قرار می‌دهیم $\frac{1}{\operatorname{dist}(x,X\backslash U)} = \frac{1}{\operatorname{dist}(y,X\backslash U)} = \frac{1}{\infty} = 0$.) از تمرین ۴.۲.۲ نتیجه می‌شود که d_U بر $U \times U$ خوش‌تعریف است. ادعا می‌کنیم که d_U متریکی بر U است. آشکارا، d_U مثبت معین و متقارن است. با فرضِ $x,y,z \in U$،

$$\begin{aligned}
d_U(x,z) &= d(x,z) + \left|\frac{1}{\operatorname{dist}(x,X\backslash U)} - \frac{1}{\operatorname{dist}(z,X\backslash U)}\right| \\
&\leq d(x,y) + d(y,z) + \left|\frac{1}{\operatorname{dist}(x,X\backslash U)} - \frac{1}{\operatorname{dist}(y,X\backslash U)}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{\operatorname{dist}(y,X\backslash U)} - \frac{1}{\operatorname{dist}(z,X\backslash U)}\right| \\
&\leq d(x,y) + \left|\frac{1}{\operatorname{dist}(x,X\backslash U)} - \frac{1}{\operatorname{dist}(y,X\backslash U)}\right| \\
&\qquad + d(y,z) + \left|\frac{1}{\operatorname{dist}(y,X\backslash U)} - \frac{1}{\operatorname{dist}(z,X\backslash U)}\right| \\
&= d_U(x,y) + d_U(y,z).
\end{aligned}$$

ادعا می‌کنیم که تحدید d بر $U \times U$، و d_U هم‌ارزند. چون

$$d(x,y) \leq d_U(x,y) \quad (x,y\in U),$$

پیوستگی تابع همانی از (U,d_U) به (U,d) آشکار است. برای اثبات پیوستگی عکس این تابع همانی بر U، ابتدا توجه کنید که اگر $X = U$، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. پس بدون کاسته شدن ازکلیّت، می‌توان فرض کرد $U \subsetneq X$. فرض کنید $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در U است که با d، به $x \in U$ همگرا است؛ یعنی $d(x_n,x) \to 0$. بنابر تمرین ۳ی زیر، این امر مستلزم آن است که $\operatorname{dist}(x_n,X\backslash U) \to \operatorname{dist}(x,X\backslash U)$، و از این رو

$$d_U(x_n,x) = d(x_n,x) + \left|\frac{1}{\operatorname{dist}(x_n,X\backslash U)} - \frac{1}{\operatorname{dist}(x,X\backslash U)}\right| \to 0.$$

بنابراین $(x_n)_{n=1}^{\infty}$، با d_U نیز به x همگرا است.

تمرین‌ها

۱. فرض کنید $((X_k, d_k))_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از فضاهای متریک است، و $X := \prod_{k=1}^{\infty} X_k$ به متریک d در مثال ۲.۱.۲ (چ) مجهز است. ثابت کنید که همگرایی در X، همگراییِ مختصاتی است: دنبالهٔ $\left(\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ در X با متریک d، به $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in X$ همگرا است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $k \in \mathbb{N}$، $x_k^{(n)} \to x_k$.

۲. فرض کنید (X, d_X) و (Y, d_Y) فضای متریک، $p \in X$، و d_p متریک راه‌آهن فرانسهٔ متناظر بر X است. ثابت کنید که $f : X \to Y$ نسبت به d_p پیوسته است اگر و تنها اگر در p نسبت به d_X پیوسته باشد.

۳. فرض کنید (X, d) فضای متریک است، و $\varnothing \neq S \subset X$. ثابت کنید که تابع

$$X \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \operatorname{dist}(x, S)$$

پیوسته است.

۴. فرض کنید E و F فضاهایی نرم‌دار هستند، و $T : E \to F$ خطی است. ثابت کنید که حکم‌های زیر هم‌ارزند.

(i) T پیوسته است؛

(ii) T در 0 پیوسته است؛

(iii) $C \geq 0$ موجود است که به‌ازای هر $x \in E$، $\|T(x)\| \leq C\|x\|$.

۵. فرض کنید E و F فضاهایی نرم‌دار هستند، $T : E \to F$ خطی است، و $\dim E < \infty$. ثابت کنید که T پیوسته است. (راهنمایی: به‌ازای $x \in E$، تعریف کنید $|||x||| := \max\{\|x\|, \|T(x)\|\}$؛ نشان دهید که $|||\cdot|||$ یک نرم بر E است و گزارهٔ ب.۱ را به کار ببرید.)

۶. بر $C([0, 1], \mathbb{F})$ دو نرم $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_\infty$ را داریم که در مثال ۲.۱.۲ (پ) معرفی شدند. ثابت کنید که متریک‌های القا شده به وسیلهٔ این دو نرم، هم‌ارزند.

۴.۲ کمال

همان‌طور که می‌توانیم در فضاهای متریک دنباله‌های همگرا را تعریف کنیم، می‌توانیم از دنباله‌های کوشی نیز سخن بگوییم.

تعریف ۱.۴.۲ فرض کنید (X,d) فضای متریک است. دنبالهٔ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ در X کوشی نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر $\epsilon > 0$، $n_\epsilon > 0$ی موجود باشد که به‌ازای هر $n, m \geq n_\epsilon$، $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

مانند $\mathbb{R}^n$، حکم زیر برقرار است.

گزارهٔ ۲.۴.۲ فرض کنید (X,d) فضای متریک، و $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای همگرا در X است. دراین‌صورت $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی است.

برهان. فرض کنید $x := \lim_{n\to\infty} x_n$، و $\epsilon > 0$. دراین‌صورت $n_\epsilon > 0$ی موجود است که به‌ازای هر $n \geq n_\epsilon$، $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$. در نتیجه،

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad (n, m \geq n_\epsilon),$$

لذا $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی است. ∎

در $\mathbb{R}^n$، عکس این گزاره نیز برقرار است: هر دنبالهٔ کوشی همگرا است. آشکارا، این در مورد بعضی از فضاهای متریک نادرست است: دنبالهٔ $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی در فضای متریک $(0, 1)$ با متریک طبیعی است، ولی هیچ حدی در آن فضا ندارد. این مطلب، تعریف زیر را معنی‌دار می‌کند.

تعریف ۳.۴.۲ می‌گوییم فضای متریک (X,d) کامل است اگر هر دنبالهٔ کوشی در X همگرا باشد.

به فضایی نرم‌دار که با متریک القا شده با نرمش کامل باشد، فضای باناخ نیز گفته می‌شود.

مثال ۴.۴.۲ آ) $\mathbb{R}^n$ کامل است.

ب) در فضای متریک گسسته، هر دنبالهٔ کوشی در نهایت ثابت، و از این رو همگرا است. بنابراین فضاهای متریک گسسته، کامل هستند.

پ) فرض کنید $S \neq \varnothing$ مجموعه، و (Y,d) فضای متریک کامل است. ادعا می‌کنیم که فضای متریک $(B(S,Y), D)$ در مثال ۲.۱.۲ (ت)، کامل است. فرض کنید $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی در $B(S,Y)$ است. فرض کنید $\epsilon > 0$، و $n_\epsilon > 0$ را طوری انتخاب کنید که به‌ازای هر $n, m \geq n_\epsilon$، $D(f_n, f_m) < \epsilon$. به‌ازای هر $x \in S$،

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq D(f_n, f_m) < \epsilon \qquad (n, m \geq n_\epsilon).$$

در نتیجه، به‌ازای هر $x \in S$، $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی در Y است. چون Y کامل است، می‌توانیم $f : S \to Y$ را به‌صورت

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in S)$$

تعریف کنیم. نخست ادّعا می‌کنیم که f در $B(S,Y)$ قرار دارد و، در واقع، با متریک D، حد $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ است. برای اثبات، با فرضِ $x \in S$، بنا بر مثال ۹.۳.۲، به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$d(f_n(x), f(x)) = \lim_{m\to\infty} d(f_n(x), f_m(x)).$$

در نتیجه، به‌ازای هر $n \geq n_\epsilon$،

$$\begin{aligned} d(f_n(x),&f(x)) \\ &= \lim_{m\to\infty} d(f_n(x), f_m(x)) \leq \limsup_{m\to\infty} D(f_n, f_m) \leq \epsilon \qquad (x \in S). \end{aligned}$$

فرض کنید $n \geq n_\epsilon$، و $C := \sup_{x,y\in S} d(f_n(x), f_n(y))$، که بنابر تعریفِ $B(S,Y)$ متناهی است. بنابر نامساوی پیش، به‌ازای $x, y \in S$ دلخواه،

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y)) \\ &\leq 2\epsilon + C. \end{aligned}$$

بنابراین، f در $B(S,Y)$ قرار دارد. چون به‌ازای هر $x \in S$ و $n \geq n_\epsilon$، $d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon$، به‌دست می‌آوریم:

$$D(f_n, f) = \sup_{x\in S} d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon \qquad (n \geq n_\epsilon).$$

این نامساوی برای تضمین قرارگرفتن $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ در $(B(S,Y), D)$ کافی است.

گزارهٔ زیر مشخص می‌کند که چگونه می‌توان از فضاهای کامل، فضاهای کامل جدید به‌دست آورد.

گزارهٔ ۵.۴.۲ فرض کنید (X,d) فضایی متریک، و Y زیرفضای X است.

(i) اگر X کامل و Y در X بسته باشد آنگاه Y کامل است.

(ii) اگر Y کامل باشد، آنگاه در X بسته است.

برهان. فرض کنید X کامل و Y در X بسته است. فرض کنید $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی در Y است. دراین‌صورت $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ در X نیز دنباله‌ای کوشی است و از این رو حدی مثل $x \in X$ دارد. چون Y بسته است، بنابر نتیجهٔ ۵.۳.۲ باید $x \in Y$، و بنابراین Y کامل است. این (i) را ثابت می‌کند.

برای (ii)، فرض کنید $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در Y است که به $y \in X$ همگرا است. چون $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ در X همگرا است، پس در X و در نتیجه در Y کوشی است. چون Y کامل است، $y' \in Y$ی وجود دارد که $y' = \lim_{n\to\infty} y_n$. اگر $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ در Y به y' همگرا باشد، در X نیز چنین است. از یکتایی حد، نتیجه می‌شود $y' = y$. بنابراین y در Y قرار دارد. از این رو، بنابر نتیجهٔ ۵.۳.۲، Y در X بسته است. ∎

مثال ۶.۴.۲ فرض کنید (X, d_X) و (Y, d_Y) فضای متریک هستند. تعریف می‌کنیم

$$C(X,Y) := \{f : X \to Y : \text{پیوسته است } f\}$$

و

$$C_b(X,Y) := B(X,Y) \cap C(X,Y).$$

آشکارا، $C_b(X,Y)$ زیرفضایِ فضای متریک $(B(X,Y), D)$ است. ادعا می‌کنیم که $C_b(X,Y)$ در $B(X,Y)$ بسته، و بنابراین اگر (Y, d_Y) کامل باشد، کامل است. فرض کنید $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $C_b(X,Y)$ است که به $f \in B(X,Y)$ همگرا است. ادعا می‌کنیم که f پیوسته نیز هست. برای اثبات، $x_0 \in X$ را ثابت بگیرید. ثابت می‌کنیم که f در x_0 پیوسته است. فرض کنید $\epsilon > 0$. چون $f_n \to f$ در $B(X,Y)$، $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ی وجود دارد که به‌ازای هر $n \geq n_\epsilon$، $D(f_n, f) < \frac{\epsilon}{3}$. $n \geq n_\epsilon$ را ثابت بگیرید. چون f_n در x_0 پیوسته است، مجموعهٔ $N := f_n^{-1}(B_{\frac{\epsilon}{3}}(f_n(x_0)))$ همسایگی x_0 است. فرض کنید $x \in N$، و توجه کنید که

$$\begin{aligned}
d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f(x_0)) \\
&\leq D(f_n, f) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + D(f_n, f) \\
&< \frac{2\epsilon}{3} + d(f_n(x), f_n(x_0)), \qquad \text{زیرا } n \geq n_\epsilon \\
&< \epsilon, \qquad \text{زیرا } x \in N
\end{aligned}$$

از این رو $N \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$، و در نتیجه $f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0))) \in \mathcal{N}_{x_0}$. چون $\epsilon > 0$ دلخواه بود، f در x_0 پیوسته است.

با توجه به گزارهٔ ۵.۴.۲، اثبات حکم زیر در نگاه اول ناممکن به نظر می‌رسد.

گزارهٔ ۷.۴.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک کامل، و $U \subset X$ باز است. دراین‌صورت (U, d_U) فضای متریک کاملی است که در آن d_U در مثال ۱۳.۳.۲ (ث) تعریف شده است.

برهان. اگر $U = X$، واضح است که $d_U = d$، و از این رو حکم آشکارا برقرار است. بنابراین فرض کنید $U \subsetneq X$.

فرض کنید $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی در (U, d_U) است. دراین‌صورت به آسانی دیده می‌شود که $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ در (X, d) نیزکوشی است. فرض کنید $x \in X$ حدّ آن در (X, d) است. نخست ادعا می‌کنیم که $x \in U$. برای نیل به تناقض، فرض کنید $x \in X \backslash U$. از تمرین ۳.۳.۲ نتیجه می‌گیریم که $\operatorname{dist}(x_n, X \backslash U) \to 0$. چون $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ در (U, d_U) کوشی است، $n_1 \in \mathbb{N}$ی موجود است که

$$\left| \frac{1}{\operatorname{dist}(x_n, X \backslash U)} - \frac{1}{\operatorname{dist}(x_m, X \backslash U)} \right| \leq d_U(x_n, x_m) \leq 1 \qquad (n, m \geq n_1).$$

بنابراین با ثابت نگه داشتن $m > n_1$،

$$\frac{1}{\operatorname{dist}(x_n, X \backslash U)} \leq \left| \frac{1}{\operatorname{dist}(x_n, X \backslash U)} - \frac{1}{\operatorname{dist}(x_m, X \backslash U)} \right| + \frac{1}{\operatorname{dist}(x_m, X \backslash U)}$$

$$\leq 1 + \frac{1}{\operatorname{dist}(x_m, X \backslash U)} \qquad (n \geq n_1).$$

در حالی که اگر $\operatorname{dist}(x_n, X \backslash U) \to 0$، چنین چیزی ناممکن است. در نتیجه $x \in U$.

چون d و d_U بر U هم‌ارزند، نتیجه می‌گیریم که $d_U(x_n, x) \to 0$. بنابراین x، حدّ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ در (U, d_U) است. ∎

در نگاه اول، کمترین چیزی که می‌توان گفت این است که گزارهٔ ۷.۴.۲ پارادوکس به نظر می‌رسد. هر زیرمجموعهٔ باز یک فضای متریک کامل با متریکی هم‌ارز، کامل پنداشته می‌شود. آیا این مطلب و گزارهٔ ۵.۴.۲ (ii)، بی‌درنگ نتیجه نمی‌دهند که هر زیرمجموعهٔ باز فضای متریک کامل، بسته نیز هست؟ این سخن آشکارا نادرست است. اگر تعریف زیرفضای یک فضای متریک را به یاد آورید، این پارادوکس مرتفع می‌شود: (U, d_U) زیرفضای فضای متریک (X, d) نیست، هر چند که دو متریک d و d_U، بر U هم‌ارزند.

اکنون یک ویژگی معروف فضاهای متریک کامل را ارائه می‌دهیم. به این منظور نخست به یک تعریف نیاز داریم.

تعریف ۸.۴.۲ فرض کنید (X,d) فضای متریک است. قطر زیرمجموعهٔ $S \neq \varnothing$ از X با

$$\operatorname{diam}(S) := \sup\{d(x,y) : x,y \in S\}$$

تعریف می‌شود.

قضیهٔ ۹.۴.۲ (قضیهٔ اشتراک کانتور) فرض کنید (X,d) فضای متریک کامل، و $(F_n)_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های بستهٔ ناتهی X است که $\cdots \supset F_۳ \supset F_۲ \supset F_۱$ و به‌علاوه، $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = ۰$. دراین‌صورت $\bigcap_{n=۱}^{\infty} F_n$ دقیقاً یک عضو دارد.

برهان. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض کنید $x_n \in F_n$. ادعا می‌کنیم که دنبالهٔ $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$ کوشی است. برای اثبات، فرض کنید $\epsilon > ۰$. $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ را طوری انتخاب کنید که به‌ازای هر $n \geq n_\epsilon$، $\operatorname{diam}(F_n) < \epsilon$. فرض کنید $n,m \geq n_\epsilon$. چون دنبالهٔ $(F_n)_{n=۱}^{\infty}$ نزولی است، نتیجه می‌گیریم که $x_n, x_m \in F_{n_\epsilon}$، و در نتیجه

$$d(x_n,x_m) \leq \operatorname{diam}(F_{n_\epsilon}) < \epsilon.$$

پس دنبالهٔ $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$ در واقع کوشی، و از این رو همگرا، مثلاً به x، در X است. $\bigcap_{n=۱}^{\infty} F_n$ بسته، و لذا آشکارا بنابر نتیجهٔ ۵.۳.۲، شامل x است.

برای اثبات $\bigcap_{n=۱}^{\infty} F_n = \{x\}$، برای نیل به تناقض، فرض کنید که $x' \in \bigcap_{n=۱}^{\infty} F_n$ مخالف x است. فرض کنید $\epsilon_۰ := d(x,x') > ۰$، و $n \in \mathbb{N}$ را آن قدر بزرگ انتخاب کنید که $\operatorname{diam}(F_n) < \epsilon_۰$. چون $x, x' \in F_n$،

$$d(x,x') \leq \operatorname{diam}(F_n) < \epsilon_۰ = d(x,x'),$$

که ناممکن است. ∎

نشان می‌دهیم که هر فضای متریک، به مفهومی که به‌طور دقیق بیان خواهد شد، زیرفضای فضای متریک کاملی است.

تعریف ۱۰.۴.۲ فرض کنید (X,d) فضای متریک است. تکمیل شدهٔ (X,d)، عبارت است از فضای متریک $(\tilde{X},\tilde{d})$ به همراه تابع $\iota : X \to \tilde{X}$ با ویژگی‌های زیر:

آ) $(\tilde{X},\tilde{d})$ کامل است؛

ب) به‌ازای هر $x,y \in X$، $\tilde{d}(\iota(x),\iota(y)) = d(x,y)$؛

پ) $\iota(X)$ در $\tilde{X}$ چگال است.

پیش از هر چیز، نشان می‌دهیم که هر فضای متریک یک تکمیل شده دارد، و سپس نشان می‌دهیم که این تکمیل شده (به یک معنی مشخص) یکتا است.

برای مشخص کردن اینکه منظورمان از یکتایی تکمیل شده چیست، به تعریفی دیگر نیازمندیم.

تعریف ۱۱.۴.۲ فرض کنید (X, d_X) و (Y, d_Y) فضای متریک هستند. تابع $f : X \to Y$ را طولپایی(یا طولپا) می‌گوییم اگر

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y) \qquad (x, y \in X).$$

اگر f دوسویی هم باشد، می‌گوییم یکریختی طولپا است.

لم ۱۲.۴.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک است، $(\tilde{X}_۱, \tilde{d}_۱)$ و $(\tilde{X}_۲, \tilde{d}_۲)$ تکمیل شده‌های (X, d)، و $\iota_۱ : X \to \tilde{X}_۱$ و $\iota_۲ : X \to \tilde{X}_۲$ نگاشت‌های متناظر با آنها، مطابق تعریف ۱۰.۴.۲ هستند. دراین‌صورت یکریختی طولپای یکتای $f : \tilde{X}_۱ \to \tilde{X}_۲$ موجود است که $f \circ \iota_۱ = \iota_۲$.

برهان. با تعریف f شروع می‌کنیم. فرض کنید $x \in \tilde{X}_۱$. چون $\iota_۱(X)$ در $\tilde{X}_۱$ چگال است، دنباله‌ای مثل $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$ در X وجود دارد که $x = \lim_{n\to\infty} \iota_۱(x_n)$. آشکار است که دنبالهٔ $(\iota_۱(x_n))_{n=۱}^{\infty}$ در $\tilde{X}_۱$ کوشی است، و تعریف ۱۰.۴.۲ (ب) نشان می‌دهد که $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی در X است. دوباره بنابر تعریف ۱۰.۴.۲(ب)، $(\iota_۲(x_n))_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی، و بنابراین همگرا در $\tilde{X}_۲$ است. فرض کنید $f(x) := \lim_{n\to\infty} \iota_۲(x_n)$.

نخست ثابت می‌کنیم که f خوش‌تعریف است، یعنی به انتخاب دنبالهٔ $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$ وابسته نیست. برای اثبات، فرض کنید $(x'_n)_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای دیگر در X است که $x = \lim_{n\to\infty} \iota_۱(x'_n)$. در نتیجه

$$d(x_n, x'_n) = \tilde{d}_۱(\iota_۱(x_n), \iota_۱(x'_n)) \leq \tilde{d}_۱(\iota_۱(x_n), x) + \tilde{d}_۱(x, \iota_۱(x'_n)) \to ۰,$$

و از این رو

$$\begin{aligned}\tilde{d}_۲(\iota_۲(x'_n), f(x)) &\leq \tilde{d}_۲(\iota_۲(x'_n), \iota_۲(x_n)) + \tilde{d}_۲(\iota_۲(x_n), f(x)) \\ &= d(x'_n, x_n) + \tilde{d}_۲(\iota_۲(x_n), f(x)) \\ &\to ۰.\end{aligned}$$

در مجموع، $f(x) = \lim_{n\to\infty} \iota_۲(x'_n)$، و لذا f خوش‌تعریف است.

حال، ثابت می‌کنیم که f طولپا است. فرض کنید $x, y \in \tilde{X}_۱$، و $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$ و $(y_n)_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌هایی متناظر در X هستند که به‌ترتیب در تعریف $f(x)$ و $f(y)$ مورد استفاده قرار می‌گیرند. از

$$\begin{aligned}\tilde{d}_۲(f(x), f(y)) &= \lim_{n\to\infty} \tilde{d}_۲(\iota_۲(x_n), \iota_۲(y_n))\\ &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} \tilde{d}_۱(\iota_۱(x_n), \iota_۱(y_n))\\ &= \tilde{d}_۱(x, y),\end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که f طولپا است. این بی‌درنگ یک‌به‌یک بودن f را نیز ثابت می‌کند.

آشکارا، $f \circ \iota_۱ = \iota_۲$، پس $f\left(\tilde{X}_۱\right) \supset \iota_۲(X)$ باید در $\tilde{X}_۲$ چگال باشد. ادعا می‌کنیم که $f\left(\tilde{X}_۱\right)$ زیرفضای کامل $\tilde{X}_۲$، و از این رو بسته است (این نتیجه می‌دهد که $f\left(\tilde{X}_۱\right)$ برابر با کل $\tilde{X}_۲$ است). فرض کنید $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای در $\tilde{X}_۱$ باشد که $(f(x_n))_{n=۱}^{\infty}$ در $\tilde{X}_۲$ کوشی است. چون f طولپا است، $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$ نیز در $\tilde{X}_۱$ کوشی، و بنابراین همگرا به $x \in \tilde{X}_۱$ی است. دوباره، چون f طولپا است، $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ در $\tilde{X}_۲$.

سرانجام، برای اثبات یکتایی f، فرض کنید $\tilde{f} : \tilde{X}_۱ \to \tilde{X}_۲$ نگاشتی دیگر بر طبق صورت این لم است. فرض کنید $x \in \tilde{X}_۱$. بنابر تعریف ۱۰.۴.۲ (پ)، دنباله‌ای مانند $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$ در X موجود است که $\lim_{n\to\infty} \iota_۱(x_n) = x$. نتیجه می‌گیریم که

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(\iota_۱(x_n)) = \lim_{n\to\infty} \iota_۲(x_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(\iota_۱(x_n)) = \tilde{f}(x).$$

چون $x \in \tilde{X}_۱$ دلخواه بود، $f = \tilde{f}$. ∎

به بیان غیر رسمی (ولی احتمالاً قابل فهم‌تر)، لم ۱۲.۴.۲ ادعا می‌کند که تکمیل شدهٔ هر فضای متریک (در صورت وجود!)، با در نظر گرفتن یکریختی طولپا، یکتا است.

شگفت‌آور است که اثبات وجود تکمیل شدهٔ فضای متریکِ داده شده آسان است.

قضیهٔ ۱۳.۴.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک است. دراین‌صورت (X, d) تکمیل شده‌ای دارد که با در نظر گرفتن یکریختیِ طولپا، یکتا است.

برهان. بنابر لم ۱۲.۴.۲، تنها باید وجود تکمیل شده ثابت شود. کافی است یک فضای متریک کامل، و یک طولپای ι از X به آن فضا را بیابیم: دراین‌صورت کافی است فرض کنید $\tilde{X} := \overline{\iota(X)}$. فضای متریک کاملی که X را در آن می‌نشانیم عبارت است از فضای باناخ $C_b(X, \mathbb{R})$.

$x_\circ \in X$ را ثابت بگیرید. به‌ازای $x \in X$، تعریف کنید

$$f_x : X \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto d(x,t) - d(x_\circ, t).$$

بنابر مثال ۹.۳.۲، آشکار است که به‌ازای هر $x \in X$، f_x پیوسته است، و همچنین، بنابر نامساوی $(***)$ در مثال ۹.۳.۲،

$$|f_x(t)| \leq d(x, x_\circ) + d(t,t) = d(x, x_\circ) \qquad (t \in X).$$

از این رو f_x در $C_b(X, \mathbb{R})$ هم قرار می‌گیرد. ادعا می‌کنیم که نگاشت

$$\iota : X \to C_b(X, \mathbb{R}), \qquad x \mapsto f_x$$

طولپا است. برای اثبات، $x, y \in X$ را ثابت بگیرید و توجه کنید که دوباره بنابر $(***)$،

$$D(\iota(x), \iota(y)) = \sup_{t \in X} |f_x(t) - f_y(t)| = \sup_{t \in X} |d(x,t) - d(y,t)| \leq d(x,y);$$

از سوی دیگر، داریم

$$D(\iota(x), \iota(y)) = \sup_{t \in X} |f_x(t) - f_y(t)| \geq |f_x(y) - f_y(y)| = d(x,y),$$

که این ادعا را ثابت می‌کند. ∎

بنابر یکتایی تکمیل شده نسبت به یکریختی طولپا، حق داریم که از تکمیل شدهٔ فضای متریک سخن بگوییم. برای سهولت در نمادگذاری، فضای متریک را با تصویر طبیعی آن در تکمیل شده‌اش یکسان می‌گیریم.

اکنون به یکی از اساسی‌ترین قضیه‌ها در مورد فضاهای متریک کامل می‌پردازیم.

قضیهٔ ۱۴.۴.۲ (قضیهٔ میتاگ ـ لِفلِر بورباکی) فرض کنید $((X_n, d_n))_{n=\circ}^{\infty}$ دنباله‌ای از فضاهای متریک کامل، و به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_n : X_n \to X_{n-1}$ پیوسته با نگارهٔ چگال است. دراین‌صورت

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n)(X_n)$$

در $X_\circ$ چگال است.

برهان. نخست به استقرا، متریک‌های جدید $\tilde{d}_0$، $\tilde{d}_1$، $\tilde{d}_2$، ... را بر X_0، X_1، X_2، ... طوری تعریف می‌کنیم که

- به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}_0$، $\tilde{d}_n$ و d_n هم‌ارزند،
- به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}_0$، $\left(X_n, \tilde{d}_n\right)$ کامل است، و
- به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و $x, y \in X_n$، $\tilde{d}_{n-1}(f_n(x), f_n(y)) \leq \tilde{d}_n(x, y)$.

این تعریف با فرضِ $\tilde{d}_0 := d_0$ و، به محض تعریف $\tilde{d}_0$،...،$\tilde{d}_{n-1}$، به‌ازای هر n، با فرضِ

$$\tilde{d}_n(x,y) := d_n(x,y) + \tilde{d}_{n-1}(f_n(x), f_n(y)) \qquad (x, y \in X_n),$$

انجام می‌شود. در ادامه، فضاهای X_0،X_1، X_2، ... را که به جای d_0، d_1، d_2،...، به متریک‌های $\tilde{d}_0$، $\tilde{d}_1$، $\tilde{d}_2$،...، مجهز هستند در نظر می‌گیریم.

فرض کنید $U_0 \subset X_0$ باز و ناتهی است. باید ثابت کنیم

$$U_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (f_1 \circ \cdots \circ f_n)(X_n) \neq \varnothing.$$

چون $f_1(X_1)$ در X_0 چگال است، $x_1 \in X_1$ی موجود است که $f_1(x_1) \in U_0$. چون f_1 در x_1 پیوسته است، $\delta_1 \in (0, 1]$ی موجود است که $\overline{f_1(B_{\delta_1}(x_1))} \subset U_0$. فرض کنید $U_1 := B_{\delta_1}(x_1)$. چون $f_2(X_2)$ در X_1 چگال است، $x_2 \in X_2$ای وجود دارد که $f_2(x_2) \in U_1$. چون f_2 در x_2 پیوسته است، $\delta_2 \in (0, \frac{1}{2}]$ی وجود دارد که $\overline{f_2(B_{\delta_2}(x_2))} \subset U_1$. فرض کنید $U_2 := B_{\delta_2}(x_2)$، و این روش را ادامه دهید.

به این صورت، دنبالهٔ $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ از گوی‌های باز را به‌دست می‌آوریم که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\overline{f_n(U_n)} \subset U_{n-1}$، و حداکثرِ شعاع U_n، $\frac{1}{n}$ است. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}_0$ و $m \in \mathbb{N}$، فرض کنید

$$Y_{n,m} := \overline{(f_{n+1} \circ \cdots \circ f_{n+m})(U_{n+m})}.$$

نتیجه می‌شود که $Y_{n,m} \neq \varnothing$، $\operatorname{diam}(Y_{n,m}) \leq \frac{2}{n+m}$، و $Y_{n,m+1} \subset Y_{n,m}$. بنابر قضیهٔ اشتراک کانتور، $y_n \in \bigcap_{m=1}^{\infty} Y_{n,m}$ی وجود دارد. از این ساختار نتیجه می‌شود $f_n(y_n) = y_{n-1}$، و از این رو به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $(f_1 \circ \cdots \circ f_n)(y_n) = y_0$. در نتیجه

$$y_0 \in U_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n)(X_n).$$

■

نام «قضیهٔ میتاگ ـ لِفلِر» برای قضیهٔ ۱۴.۴.۲، ممکن است گمراه‌کننده به نظر بیاید، با این وجود قضیهٔ میتاگ ـ لفلر مشهور در آنالیز مختلط (قضیه آ.۱) را می‌توان از این قضیه نتیجه گرفت (ضمیمهٔ (آ) را نگاه کنید؛ برای این منظور علاوه بر زمینه‌ای از متغیرهای مختلط، به مباحثی از بخش‌های ۱.۳ تا ۴.۳ نیز نیاز دارید). به نتیجه‌ای دیگر از قضیهٔ ۱۴.۴.۲ می‌پردازیم.

لم ۱۵.۴.۲ فرض کنید (X,d) فضای متریک است، و $U_1,\ldots,U_n$ زیرمجموعه‌های باز چگال X هستند. دراین‌صورت $U_1\cap\cdots\cap U_n$ در X چگال است.

برهان. به استقرا، آشکار است که کافی است فقط حالت $n=2$ را در نظر بگیریم. فرض کنید $x\in X$، و $\epsilon>0$. چون U_1 در X چگال است، $B_\epsilon(x)\cap U_1\neq\varnothing$. چون $B_\epsilon(x)\cap U_1$ باز ـــ و در نتیجه همسایگی هر نقطهٔ خود ـــ است، از چگال بودن U_2 نتیجه می‌شود $B_\epsilon(x)\cap U_1\cap U_2\neq\varnothing$. از اینکه $\epsilon>0$ دلخواه بود، نتیجه می‌گیریم $x\in\overline{U_1\cap U_2}$. ∎

قضیهٔ ۱۶.۴.۲ (قضیهٔ بئر) فرض کنید (X,d) فضای متریک کامل، و $(U_n)_{n=1}^\infty$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های باز چگال در X است. دراین‌صورت $\bigcap_{n=1}^\infty U_n$ در X چگال است.

برهان. بنابر لم ۱۵.۴.۲، می‌توان $U_1\cap\cdots\cap U_n$ را جایگزین U_n کرد، پس بدون کاسته شدن از کلیّت می‌توان فرض کرد $\cdots\supset U_2\supset U_1$. فرض کنید $(X_0,d_0):=(X,d)$، و $(X_n,d_n):=(U_n,d_{U_n})$، که در آن به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$، d_{U_n} طبق مثال ۱۳.۳.۲ (ث) تعریف می‌شود. به‌علاوه، فرض کنید به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $f_n:X_n\to X_{n-1}$ نگاشت شمول است. چون به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$، d و d_{U_n} بر X_n هم‌ارزند، آشکارا، f_1، f_2، ... پیوسته‌اند. بنابر فرض، (X_0,d_0) کامل است، و بنابر گزارهٔ ۷.۴.۲، به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$، (X_n,d_n) نیز کامل است. از قضیهٔ ۱۴.۴.۲ نتیجه می‌شود که

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(f_1\circ\cdots\circ f_n)(X_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$$

در $X_0=X$ چگال است. ∎

گزارهٔ زیر، نتیجهٔ فوری قضیهٔ بئر است (متممها را در نظر بگیرید).

قضیهٔ ۱۷.۴.۲ فرض کنید (X,d) فضای متریک کامل، و $(F_n)_{n=1}^\infty$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های بستهٔ X است که $\bigcup_{n=1}^\infty F_n$ درون ناتهی دارد. دراین‌صورت دست‌کم یکی از مجموعه‌های F_1، F_2، ... درون ناتهی دارد.

برای دیدن توان قضیهٔ بئر، به مثالی از حسابان می‌پردازیم. همه می‌دانیم که تابع‌هایی پیوسته وجود دارند که در برخی نقاط مشتق‌پذیر نیستند (مثلاً تابع قدرمطلق را در نظر بگیرید)، و آوردن مثال‌هایی از تابع‌های پیوسته که در تعدادی متناهی، و حتی شمارا نقطه، مشتق‌پذیر نیستند، چندان دشوار نیست. ولی آیا تابعی پیوسته بر یک بازه وجود دارد که در هیچ نقطه از دامنه‌اش مشتق‌پذیر نباشد؟ در مثال زیر، به این پرسش پاسخ می‌دهیم.

مثال ۱۸.۴.۲ به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض کنید F_n از $f \in C([۰, ۲], \mathbb{R})$هایی تشکیل شده است که به‌ازای $t \in [۰, ۱]$ای،

$$\sup_{h\in(۰,۱)} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{h} \leq n.$$

آشکارا، اگر $f \in C([۰, ۲], \mathbb{R})$ در نقطهٔ $t \in [۰, ۱]$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه باید

$$\sup_{h\in(۰,۱)} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{h} < \infty,$$

و لذا $f \in \bigcup_{n=۱}^{\infty} F_n$. بنابراین اگر هر تابع پیوسته بر $[۰, ۲]$ در نقطه‌ای از $[۰, ۱]$ مشتق‌پذیر باشد، باید $C([۰, ۲], \mathbb{R}) = \bigcup_{n=۱}^{\infty} F_n$. با استفاده از نتیجهٔ ۱۷.۴.۲، نشان می‌دهیم که این ناممکن است.

برای آنکه بتوان نتیجهٔ ۱۷.۴.۲ را به‌کاربرد، نخست باید نشان دهیم به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، مجموعه‌های F_n در $C([۰, ۲], \mathbb{R})$ بسته هستند. $n \in \mathbb{N}$ را ثابت بگیرید، و فرض کنید $(f_m)_{m=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای در F_n است که به‌ازای $f \in C([۰, ۲], \mathbb{R})$ی، $\|f_m - f\|_\infty \to ۰$. به‌ازای هر $m \in \mathbb{N}$، $t_m \in [۰, ۱]$ی موجود است که

$$\sup_{h\in(۰,۱)} \frac{|f_m(t_m+h) - f_m(t_m)|}{h} \leq n.$$

بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید $(t_m)_{m=۱}^{\infty}$ به $t \in [۰, ۱]$ای همگرا است (در غیراین صورت، زیردنباله‌ای همگرا از $(t_m)_{m=۱}^{\infty}$ را جایگزین آن می‌کنیم). $h \in (۰, ۱)$ و $\epsilon > ۰$ را ثابت بگیرید، و $m_\epsilon \in \mathbb{N}$ را آن قدر بزرگ اختیار کنید که

$$\left.\begin{matrix} |f(t+h) - f(t_m+h)| \\ \|f - f_m\|_\infty \\ |f(t_m) - f(t)| \end{matrix}\right\} < \frac{\epsilon}{۴} h \qquad (m \geq m_\epsilon).$$

به‌ازای هر $m \geq m_\epsilon$، از نامساوی‌های بالا نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
&|f(t+h)-f(t)| \\
&\quad \leq \underbrace{|f(t+h)-f(t_m+h)|}_{<\frac{\epsilon}{4}h} + \underbrace{|f(t_m+h)-f_m(t_m+h)|}_{<\frac{\epsilon}{4}h} \\
&\quad + \underbrace{|f_m(t_m+h)-f_m(t_m)|}_{\leq nh} + \underbrace{|f_m(t_m)-f(t_m)|}_{<\frac{\epsilon}{4}h} + \underbrace{|f(t_m)-f(t)|}_{<\frac{\epsilon}{4}h} \\
&\quad \leq nh + \epsilon h,
\end{aligned}$$

و از این رو

$$\frac{|f(t+h)-f(t)|}{h} \leq n+\epsilon.$$

چون h و ϵ دلخواه بودند، $f \in F_n$. بنابراین F_n بسته است.

برای نیل به تناقض، فرض کنید که هر $f \in C([۰,۲],\mathbb{R})$ در نقطه‌ای از $[۰,۱)$ مشتق‌پذیر است، و از این رو $C([۰,۲],\mathbb{R}) = \bigcup_{n=۱}^{\infty} F_n$. بنابر نتیجهٔ ۱۷.۴.۲، $n_۰ \in \mathbb{N}$، $f \in C([۰,۲],\mathbb{R})$، و $\epsilon > ۰$، موجودند که $B_\epsilon(f) \subset F_{n_۰}$. بنابر قضیهٔ تقریب وایرشتراس (نتیجهٔ ۸.۳.۴ زیر)، $B_\epsilon(f)$ دست‌کم شامل یک چندجمله‌ای مانند p است. چون $B_\epsilon(f)$ باز است، $\delta > ۰$ی موجود است که $B_\delta(p) \subset B_\epsilon(f) \subset F_{n_۰}$. با جایگزین کردن p به جای f، و δ به جای ϵ، بدون کاسته شدن از کلیت، می‌توان فرض کرد که f بر $[۰,۲]$ پیوسته مشتق‌پذیر است.

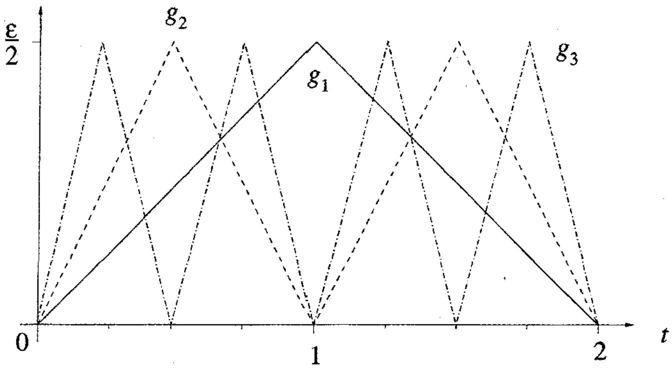
به‌ازای هر $k \in \mathbb{N}$، و $j = ۰,\ldots,k$، فرض کنید $t_j := \frac{۲j}{k}$. «تابع دندانه‌ای» $g_k : [۰,۲] \to \mathbb{R}$ را به‌صورت

$$g_k(t) := \begin{cases} \frac{\epsilon}{۲}k(t-t_{j-۱}), & t \in [t_{j-۱}, t_{j-۱}+\frac{۱}{k}], \\ \frac{\epsilon}{۲}k(t_j - t), & t \in [t_j - \frac{۱}{k}, t_j] \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم که در آن $j = ۰,\ldots,n$ و $t \in [t_{j-۱}, t_j]$.

دراین‌صورت g_k پیوسته است و $\|g_k\|_\infty = \frac{\epsilon}{۲}$، ولی به‌ازای هر $t \in [۰,۱)$،

$$\sup_{h\in(۰,۱)} \frac{|g_k(t+h)-g_k(t)|}{h} = \frac{\epsilon}{۲}k. \qquad (*)$$



شکل ۳.۲ تابع‌های دندانه‌ای

چون $f + g_k \in B_\epsilon(f) \subset F_{n_0}$، $t \in [0, 1]$ ای وجود دارد که

$$\sup_{h\in(0,1)} \frac{|(f+g_k)(t+h) - (f+g_k)(t)|}{h} \leq n_0.$$

با این وجود از اینجا نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\sup_{h\in(0,1)} & \frac{|g_k(t+h) - g_k(t)|}{h} \\ & \leq \sup_{h\in(0,1)} \frac{|(f+g_k)(t+h) - (f+g_k)(t)|}{h} + \sup_{h\in(0,1)} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{h} \\ & \leq n_0 + \|f'\|_\infty,\end{aligned}$$

که اگر $k \in \mathbb{N}$ را به قدر کافی بزرگ اختیار کنیم که $\frac{\epsilon}{2}k > n_0 + \|f'\|_\infty$، $(*)$ نقض می‌شود.

بنابراین، مجموعه‌های F_1، F_2، ...، درون تهی دارند، از این رو $\bigcup_{n=1}^\infty F_n$ نمی‌تواند برابر با $C([0, 2], \mathbb{R})$ باشد، و در نتیجه تابعی وجود دارد که بر $[0, 1]$ پیوسته است و هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیست.

تمرین‌ها

۱. فرض کنید (X, d) فضای متریک، $p \in X$، و d_p متریک راه‌آهن فرانسهٔ متناظر است. ثابت کنید (X, d_p) کامل است.

۲. فرض کنید (X, d) فضای متریک کامل، و $(x_n)_{n=1}^\infty$ دنباله‌ای در X است که به‌ازای $\theta \in (0, 1)$ ای، و به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $d(x_{n+1}, x_n) \leq \theta\, d(x_n, x_{n-1})$. ثابت کنید $(x_n)_{n=1}^\infty$ همگرا است.

۳. با استفاده از تمرین پیش، قضیهٔ نقطهٔ ثابت باناخ را ثابت کنید: اگر (X, d) فضای متریک کامل باشد، و در مورد $f: X \to X$ به‌ازای $\theta \in (0, 1)$ ی،

$$d(f(x), f(y)) \leq \theta\, d(x, y) \qquad (x, y \in X),$$

آنگاه $x \in X$ ی یکتا موجود است که $f(x) = x$.

۴. فرض کنید (X, d) فضای متریک است، و $\varnothing \neq S \subset X$. ثابت کنید

$$\operatorname{diam}(S) = \inf\{r > 0 : S \subset B_r(x) \text{ ،} x \in S \text{ به‌ازای هر}\}.$$

۵. با مثالی نشان دهید که در قضیهٔ اشتراک کانتور حتی برای حکم $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$، باز هم فرض $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$ را نمی‌توان حذف کرد.

۶. فرض کنید E فضای نرم‌دار با پایهٔ هَمِل شمارا است. ثابت کنید که فضای E باناخ است اگر و تنها اگر $\dim E < \infty$. (راهنمایی: می‌توان از این واقعیت که همهٔ زیرفضاهای با بعد متناهیِ فضای نرم‌دار بسته هستند (نتیجهٔ ب.۳)، و سپس از نتیجهٔ ۱۷.۴.۲ استفاده کرد.)

۷. فرض کنید $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $C([0, 1], \mathbb{F})$ است که نقطه‌ای به تابع $f: [0, 1] \to \mathbb{F}$ همگرا است.

آ) به‌ازای $\theta > 0$ و $n \in \mathbb{N}$، فرض کنید

$$F_n := \{t \in [0, 1] : |f_n(t) - f_k(t)| \leq \theta \text{ ،} k \geq n \text{ به‌ازای هر}\}$$

ثابت کنید F_n بسته است، و $[0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

ب) فرض کنید $\epsilon > 0$، و I زیربازهٔ بستهٔ ناتباهیدهٔ $[0, 1]$ است. ثابت کنید که یک بازهٔ بستهٔ ناتباهیدهٔ J در I° موجود است که

$$|f(t) - f(s)| \leq \epsilon \qquad (t, s \in J).$$

(راهنمایی: (آ) را به‌ازای $\theta := \frac{\epsilon}{3}$، و نتیجهٔ ۱۷.۴.۲ را به کار ببرید.)

پ) فرض کنید I یک زیربازهٔ بستهٔ ناتباهیدهٔ $[0, 1]$ است. ثابت کنید که دنبالهٔ $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ از زیربازه‌های بستهٔ ناتباهیدهٔ I موجود است که $I_1 \supset I_1^\circ \supset I_2 \supset I_2^\circ \supset I_3 \supset \ldots$، و

- طول I_n، حداکثر $\frac{1}{n}$ است، و
- به‌ازای هر $s, t \in I_n$، $|f(t) - f(s)| \leq \frac{1}{n}$.

در مورد مقدار f در همهٔ نقاط $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ چه می‌توان گفت؟

ت) نتیجه بگیرید که مجموعهٔ نقاطی در $[0, 1]$ که f بر آن پیوسته است، در $[0, 1]$ چگال است.

۵.۲ فشردگی در فضاهای متریک

مفهوم فشردگی یکی از مهم‌ترین مفهوم‌ها در توپولوژی (و از جهت درک کردن، یکی از سخت‌ترین مفهوم‌ها) است.

تعریف ۱.۵.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک است و $S \subset X$. هر پوشش باز برای S عبارت است از گردایهٔ $\mathcal{U}$ از زیرمجموعه‌های باز X که $S \subset \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$.

تعریف ۲.۵.۲ زیرمجموعهٔ K از فضای متریک (X, d) را فشرده می‌گوییم اگر به‌ازای هر پوشش باز $\mathcal{U}$ از K، $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ موجود باشند که $K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$.

تعریف ۲.۵.۲ اغلب چنین بیان می‌شود که «هر مجموعه فشرده است اگر و تنها اگر هر پوشش باز آن، دارای زیرپوششی متناهی باشد».

مثال ۳.۵.۲ آ) فرض کنید (X, d) فضای متریک، و $S \subset X$ متناهی است؛ یعنی، $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. فرض کنید $\mathcal{U}$ پوشش بازی برای X است. دراین‌صورت به‌ازای هر $j = 1, \ldots, n$، $U_j \in \mathcal{U}$ یی موجود است که $x_j \in U_j$. در نتیجه، $S \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$. بنابراین، S فشرده است.

ب) فرض کنید (X, d) فضای متریک، و $\varnothing \neq K \subset X$ فشرده است. $x_0 \in K$ را ثابت بگیرید. چون $\{B_r(x_0) : r > 0\}$ پوششی باز برای K است، $r_1, \cdots r_n > 0$ وجود دارند که

$$K \subset B_{r_1}(x_0) \cup \cdots \cup B_{r_n}(x_0).$$

با قرار دادن $R := \max\{r_1, \ldots, r_n\}$، آشکار است که $K \subset B_R(x_0)$، و از این رو $\operatorname{diam}(K) \leq 2R < \infty$. این یعنی، به عنوان مثال، هر زیرمجموعهٔ بی‌کران $\mathbb{R}^n$ (یا، به‌طور کلی، هر فضای نرم‌دار) نمی‌تواند فشرده باشد. به ویژه، تنها فضای نرم‌دار فشرده $\{0\}$ است.

پ) فرض کنید $X = (\circ, 1)$ به متریک معمولی مجهز است. به‌ازای $r \in (\circ, 1)$، فرض کنید $U_r := (r, 1)$. دراین‌صورت $\{U_r : r \in (\circ, 1)\}$ پوششی باز برای $(\circ, 1)$ است که هیچ زیرپوشش متناهی ندارد.

پیش از آنکه به مثال‌هایی بیشتر (و جالب‌تر) از فضاهای متریک فشرده بپردازیم، تعدادی از ویژگی‌های موروثی را ثابت می‌کنیم.

گزارهٔ ۴.۵.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک، و Y زیرفضای X است.

(i) اگر X فشرده و Y در X بسته باشد آنگاه Y فشرده است.

(ii) اگر Y فشرده باشد آنگاه در X بسته است.

برهان. برای (i)، فرض کنید $\mathcal{U}$ پوششی باز برای Y است. چون Y در X بسته است، خانوادهٔ $\mathcal{U} \cup \{X \backslash Y\}$ پوششی باز برای X است. چون X فشرده است، این پوشش زیرپوششی متناهی دارد، یعنی $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ وجود دارند که

$$X = U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup X \backslash Y.$$

اشتراک دو طرف با Y را به‌دست می‌آوریم، و در می‌یابیم که $Y \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$.

برای (ii)، فرض کنید $x \in X \backslash Y$. به‌ازای هر $y \in Y$، $\epsilon_y, \delta_y > \circ$ وجود دارند که $B_{\epsilon_y}(x) \cap B_{\delta_y}(y) = \varnothing$. چون $\{B_{\delta_y}(y) : y \in Y\}$ پوششی باز برای Y است، $y_1, \ldots, y_n \in Y$ وجود دارند که

$$Y \subset B_{\delta_{y_1}}(y_1) \cup \cdots \cup B_{\delta_{y_n}}(y_n).$$

با فرضِ $\epsilon := \min\{\epsilon_{y_1}, \ldots, \epsilon_{y_n}\}$، نتیجه می‌گیریم

$$B_\epsilon(x) \cap Y \subset B_\epsilon(x) \cap \Big(B_{\delta_{y_1}}(y_1) \cup \cdots \cup B_{\delta_{y_n}}(y_n)\Big) = \varnothing,$$

و از این رو $B_\epsilon(x) \subset X \backslash Y$. چون $x \in X \backslash Y$ دلخواه بود، $X \backslash Y$ باز است. ∎

گزارهٔ ۵.۵.۲ فرض کنید (K, d_K) فضای متریک فشرده، (Y, d_Y) فضای متریک دلخواه، و $f : K \to Y$ پیوسته است. دراین‌صورت $f(K)$ فشرده است.

برهان. فرض کنید $\mathcal{U}$ پوششی باز برای $f(K)$ است. دراین‌صورت بنابر نتیجهٔ ۱۰.۳.۲، $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ پوششی باز برای K است. بنابراین، $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ وجود دارند که

$$K = f^{-1}(U_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_n)$$

از این رو

$$f(K) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$$

و حکم ثابت شده است. ∎

نتیجهٔ ۶.۵.۲ فرض کنید (K, d) فضای متریک فشردهٔ ناتهی، و $f : K \to \mathbb{R}$ پیوسته است. دراین‌صورت f مینیمم و ماکسیمم خود را بر K می‌گیرد.

برهان. فرض کنید $M := \sup f(K)$. چون $f(K)$ فشرده است، کران‌دار است، و از این رو $M < \infty$. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $y_n \in f(K)$ای موجود است که $y_n > M - \frac{1}{n}$؛ آشکار است که $M = \lim_{n\to\infty} y_n$. چون $f(K)$ در $\mathbb{R}$ بسته است، $M \in f(K)$. بنابراین، $x_\circ \in K$ی وجود دارد که $f(x_\circ) = M$.

بحثی مشابه، حکم را برای $\inf f(K)$ نیز ثابت می‌کند. ∎

خط حقیقی $\mathbb{R}$ ویژگی بولتسانو_وایرشتراس را دارد: هر دنبالهٔ کران‌دار در $\mathbb{R}$، زیردنباله‌ای همگرا دارد. لم زیر ادعا می‌کند که فضاهای متریک فشرده از ویژگی مشابهی برخوردارند:

لم ۷.۵.۲ فرض کنید (K, d) فضای متریک فشرده است. دراین‌صورت هر دنباله در K، زیردنباله‌ای همگرا دارد.

برهان. فرض کنید $(x_n)_{n=1}^\infty$ دنباله‌ای در K است. فرض کنید $(x_n)_{n=1}^\infty$ هیچ زیردنبالهٔ همگرا ندارد. این یعنی به‌ازای هر $x \in X$ (که مسلماً نمی‌تواند حدّ زیردنباله‌ای از $(x_n)_{n=1}^\infty$ باشد!) $\epsilon_x > \circ$ی موجود است که $B_{\epsilon_x}(x)$ تنها تعدادی متناهی از جمله‌های $(x_n)_{n=1}^\infty$ را در بر دارد؛ یعنی $n_x \in \mathbb{N}$ی وجود دارد که به‌ازای هر $n \geq n_x$، $x_n \notin B_{\epsilon_x}(x)$. چون $\{B_{\epsilon_x}(x) : x \in K\}$ پوششی باز برای K است، $x'_1, \dots, x'_m \in K$ موجودند که

$$K = B_{\epsilon_{x'_1}}(x'_1) \cup \cdots \cup B_{\epsilon_{x'_m}}(x'_m).$$

این یعنی به‌ازای هر $n \geq \max\{n_{x'_1}, \dots, n_{x'_m}\}$،

$$x_n \notin B_{\epsilon_{x'_1}}(x'_1) \cup \cdots \cup B_{\epsilon_{x'_m}}(x'_m) = K,$$

که ناممکن است. ∎

گزارهٔ ۸.۵.۲ فرض کنید (K, d) یک فضای متریک فشرده است. دراین‌صورت K کامل و تفکیک‌پذیر است.

برهان. فرض کنید $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی در K است. بنابر لم ۷.۵.۲، $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ زیردنباله‌ای همگرا مانند $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ دارد که حدّ آن را با x نشان می‌دهیم. فرض کنید $\epsilon > 0$. در این صورت $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ ای موجود است که به‌ازای هر $k \geq k_\epsilon$، $d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$. به‌علاوه، $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ ای موجود است که به‌ازای هر $n, m \geq n_\epsilon$، $d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$. $k_0 \geq k_\epsilon$ را آن قدر بزرگ اختیار کنید که $n_{k_0} \geq n_\epsilon$. به‌ازای هر $n \geq n_\epsilon$،

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_{k_0}}) + d(x_{n_{k_0}}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

در نتیجه، $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

برای اثبات تفکیک‌پذیر بودن K، نخست توجه کنید که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\{B_{\frac{1}{n}}(x) : x \in K\}$، گردایهٔ همهٔ گوی‌های باز به شعاع $\frac{1}{n}$ در K، پوششی باز برای K است. چون K فشرده است، این پوشش باز، زیرپوششی متناهی دارد: به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، عدد صحیح و مثبت m_n، و $x_{1,n}, \dots, x_{m_n,n} \in K$ موجودند

$$K = B_{\frac{1}{n}}(x_{1,n}) \cup \cdots \cup B_{\frac{1}{n}}(x_{m_n,n}).$$

آشکارا، مجموعهٔ $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_{1,n}, \dots, x_{m_n,n}\}$ شمارا است. ادعا می‌کنیم که این مجموعه در K چگال نیز هست. برای اثبات، فرض کنید $x \in K$، و $\epsilon > 0$. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ آن‌قدر بزرگ است که $\frac{1}{n} < \epsilon$. چون $K = B_{\frac{1}{n}}(x_{1,n}) \cup \cdots \cup B_{\frac{1}{n}}(x_{m_n,n})$، $j \in \{1, \dots, m_n\}$ ای وجود دارد که $x \in B_{\frac{1}{n}}(x_{j,n})$، و بنابراین $x_{j,n} \in B_\epsilon(x)$. ∎

اکنون به دو مفهوم مرتبط با فشردگی می‌پردازیم.

تعریف ۹.۵.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک است. دراین‌صورت:

آ) می‌گوییم X کلاً کران‌دار است اگر به‌ازای هر $\epsilon > 0$، $x_1, \dots, x_n \in X$ موجود باشند که

$$X = B_\epsilon(x_1) \cup \cdots \cup B_\epsilon(x_n).$$

ب) می‌گوییم X فشردهٔ دنباله‌ای است اگر هر دنباله در X، زیردنباله‌ای همگرا داشته باشد.

بعضی از رابطه‌های میان فشردگی، کلاً کران‌داری، و فشردگی دنباله‌ای سرراست هستند. هر فضای متریک فشرده، آشکارا کلاً کران‌دار، و همچنین بنابر لم ۷.۵.۲، فشردهٔ دنباله‌ای است. از سوی دیگر،

به آسانی دیده می‌شود که $(\circ, ۱)$ کلاً کران‌دار است، ولی فشرده نیست. قضیهٔ زیر به بهترین روش ممکن، فشردگی، کلاً کران‌داری، و فشردگی دنباله‌ای را به هم مرتبط می‌کند.

قضیهٔ ۱۰.۵.۲ گزاره‌های زیر در مورد فضای متریک (X, d) هم‌ارزند.

(i) X فشرده است.

(ii) X کامل و کلاً کران‌دار است.

(iii) X فشردهٔ دنباله‌ای است.

برهان. بنابر لم ۷.۵.۲، (iii)$\Longleftarrow$(i).

(ii)$\Longleftarrow$(iii): با همان بحث برهان قضیهٔ ۸.۵.۲ می‌توان ثابت کرد X کامل است. فرض کنید که X کلاً کران‌دار نیست. دراین‌صورت $\epsilon_\circ$ی موجود است که به‌ازای هر انتخاب $x'_۱, \ldots, x'_n \in X$،

$$B_{\epsilon_\circ}(x'_۱) \cup \ldots \cup B_{\epsilon_\circ}(x'_n) \subsetneq X.$$

این فرایند را به‌کار می‌بریم تا به استقرا دنباله‌ای در X بسازیم که زیردنبالهٔ همگرا ندارد. فرض‌کنید $x_۱ \in X$ دلخواه است. $x_۲ \in X \backslash B_{\epsilon_\circ}(x_۱)$ را انتخاب کنید. سپس $x_۳ \in X \backslash (B_{\epsilon_\circ}(x_۱) \cup B_{\epsilon_\circ}(x_۲))$ را انتخاب کنید. اگر به همین نحو ادامه بدهید، دنبالهٔ $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$ در X به‌دست می‌آید که

$$x_{n+۱} \notin B_{\epsilon_\circ}(x_۱) \cup \cdots \cup B_{\epsilon_\circ}(x_n) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

از این ساختار آشکار است که

$$d(x_n, x_m) \geq \epsilon_\circ \qquad (n, m \in \mathbb{N}, \quad n \neq m),$$

و از این رو هیچ زیردنباله‌ای از $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$ کوشی نیست. اگر X فشردهٔ دنباله‌ای باشد، چنین چیزی ناممکن است.

(i)$\Longleftarrow$(ii): فرض کنید $\mathcal{U}$ پوشش باز X است، و هیچ زیرپوشش متناهی ندارد. چون X کلاً کران‌دار است، می‌توان آن را با تعدادی متناهی از گوی‌های باز به شعاع ۱ پوشاند. در نتیجه دست‌کم $x_۱ \in X$ی وجود دارد که $B_۱(x_۱)$ را نمی‌توان با تعدادی متناهی از مجموعه‌های در $\mathcal{U}$ پوشاند. دوباره بنابر کلاً کران‌دار بودن X، گوی باز $B_۱(x_۱)$ با تعدادی متناهی از گوی‌های باز به شعاع $\frac{۱}{۲}$ (که لزوماً مرکز آنها در $B_۱(x_۱)$ نیست) پوشانده می‌شود. در نتیجه، دست‌کم $x_۲ \in X$ی موجود است

که $B_{\frac{1}{2}}(x_2) \cap B_1(x_1)$ با تعدادی متناهی از مجموعه‌های در $\mathcal{U}$ پوشانده نمی‌شود. اگر این روش ساختن را ادامه دهیم، دنبالهٔ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ در X را به‌دست می‌آوریم که

$$B_{\frac{1}{n}}(x_n) \cap \cdots \cap B_{\frac{1}{2}}(x_2) \cap B_1(x_1)$$

با تعدادی متناهی از مجموعه‌های در $\mathcal{U}$ پوشانده نمی‌شود. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض کنید

$$F_n := \overline{B_{\frac{1}{n}}(x_n) \cap \cdots \cap B_{\frac{1}{2}}(x_2) \cap B_1(x_1)}.$$

چون $\operatorname{diam}(F_n) \leq \frac{2}{n} \to 0$، بنابر قضیهٔ اشتراک کانتور، به‌ازای $x \in X$ ی، $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$. فرض کنید $U_0 \in \mathcal{U}$ چنان است که $x \in U_0$، و $\epsilon > 0$ چنان است که $B_\epsilon(x) \subset U_0$. $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ را طوری انتخاب کنید که $\frac{2}{n_\epsilon} < \epsilon$. چون $\operatorname{diam}(F_{n_\epsilon}) \leq \frac{2}{n_\epsilon}$، $F_{n_\epsilon} \subset B_\epsilon(x) \subset U_0$. به ویژه، $\{U_0\}$ پوشش متناهی $B_{\frac{1}{n_\epsilon}}(x_{n_\epsilon}) \cap \cdots \cap B_1(x_1)$ است، که بنابر شیوهٔ ساخت ما ناممکن است. ■

نتیجهٔ ۱۱.۵.۲ فرض کنید (X, d) فضای متریک کلاًکران‌دار است. دراین‌صورت تکمیل شدهٔ آن فشرده است.

برهان. فرض کنید $\left(\tilde{X}, \tilde{d}\right)$ تکمیل شدهٔ (X, d) است. به‌ازای $r > 0$ و $x \in X$، گوی‌های باز به شعاع r و مرکز x در X و $\tilde{X}$ را به‌ترتیب به‌صورت $B_r(x; X)$ و $B_r\left(x; \tilde{X}\right)$ می‌نویسیم.

فرض کنید $\epsilon > 0$. چون X کلاًکران‌دار است، $x_1, \ldots, x_n \in X$ وجود دارند که

$$X = B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_1; X) \cup \cdots \cup B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_n; X) \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}\left(x_1; \tilde{X}\right) \cup \cdots \cup B_{\frac{\epsilon}{2}}\left(x_n; \tilde{X}\right).$$

اکنون، $\overline{B_{\frac{\epsilon}{2}}\left(x_1; \tilde{X}\right)} \cup \cdots \cup \overline{B_{\frac{\epsilon}{2}}\left(x_n; \tilde{X}\right)}$ زیرمجموعهٔ بستهٔ $\tilde{X}$ و شامل X است، و بنابراین با $\tilde{X}$ برابر است. چون به‌ازای $j = 1, \ldots, n$، $\overline{B_{\frac{\epsilon}{2}}\left(x_j; \tilde{X}\right)} \subset B_\epsilon\left(x_j; \tilde{X}\right)$،

$$\tilde{X} = B_\epsilon\left(x_1; \tilde{X}\right) \cup \cdots \cup B_\epsilon\left(x_n; \tilde{X}\right).$$

بنابراین، $\tilde{X}$ کلاًکران‌دار، و در نتیجه بنابر قضیهٔ ۱۰.۵.۲، فشرده است. ■

با قضیهٔ هاینه ـ بورل، که زیرمجموعه‌های فشردهٔ $\mathbb{R}^n$ را سرشت‌نمایی می‌کند، احتمالاً از طریق حسابان چندمتغیره آشنا هستید. در پایان این بخش، آن را از قضیهٔ ۱۰.۵.۲ نتیجه می‌گیریم، پس موجودیِ فضاهای متریک فشرده و نافشرده‌مان افزایش می‌یابد.

نتیجهٔ ۱۲.۵.۲ (قضیهٔ هاینه ـ بورل) فرض کنید $K \subset \mathbb{R}^n$. دراین‌صورت K فشرده است اگر و تنها اگر در $\mathbb{R}^n$ کران‌دار و بسته باشد.

برهان. با توجه به مثال ۳.۵.۲ (ب) و قضیهٔ ۴.۵.۲ (ii)، قسمتِ «تنها اگر» آشکار است.

برعکس، ابتدا توجه کنید که چون K کران‌دار است، $r > ۰$ ی وجود دارد که $K \subset [-r, r]^n$. چون K در $\mathbb{R}^n$ و از این رو در $[-r, r]^n$ بسته است، با کمک قضیهٔ ۴.۵.۲ (i)، و بدون کاسته شدن از کلیّت، می‌توانیم فرض کنیم $K = [-r, r]^n$.

K به عنوان زیرمجموعه‌ای بسته از فضای متریک کامل، کامل است. پس کافی است ثابت کنیم که K کلاً کران‌دار است. فرض کنید $\epsilon > ۰$. به‌ازای $m \in \mathbb{N}$ و $j \in \{۱, \ldots, m\}$، فرض کنید

$$I_j := \left[-r + (j - ۱)\frac{۲r}{m}, -r + j\frac{۲r}{m}\right],$$

و توجه کنید که

$$[-r, r] = \bigcup_{j=۱}^{m} I_j,$$

و از این رو

$$K = \bigcup_{(j_۱,\ldots,j_n)\in\{۱,\ldots,m\}^n} I_{j_۱} \times \cdots \times I_{j_n}.$$

فرض کنید $(j_۱, \ldots, j_n) \in \{۱, \cdots, m\}^n$، و $x, y \in I_{j_۱} \times \cdots \times I_{j_n}$. بنابراین، فاصلهٔ اقلیدسی x و y را می‌توان با

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=۱}^{n}(x_k - y_k)^۲} \leq \sqrt{\sum_{k=۱}^{n}\left(\frac{۲r}{m}\right)^۲} = \frac{۲r}{m}\sqrt{n}$$

تخمین زد. فرض کنید m آن‌قدر بزرگ است که $\frac{۲r}{m}\sqrt{n} < \epsilon$. به‌ازای $(j_۱, \ldots, j_n) \in \{۱, \ldots, m\}^n$، فرض کنید $x_{(j_۱,\ldots,j_n)} \in I_{j_۱} \times \cdots \times I_{j_n}$. بنابر تخمین بالا، $I_{j_۱} \times \ldots \times I_{j_n} \subset B_\epsilon\left(x_{(j_۱,\cdots,j_n)}\right)$، و لذا

$$K \subset \bigcup_{(j_۱,\ldots,j_n)\in\{۱,\ldots,m\}^n} B_\epsilon\left(x_{(j_۱,\ldots,j_n)}\right).$$

در نتیجه، K کلاً کران‌دار، و از این رو فشرده است. ∎

در بیرونِ قلمرو فضای n بعدی اقلیدسی، قضیهٔ هاینه ـ بورل برقرار نیست، و حتی نادرست است: این قضیه برای فضاهای متریک دلخواه بی‌معنی است. پیش از هر چیز دیگر، هر فضای متریک در خود بسته است، و لذا بسته بودن فضا بستگی بسیار به فضای متریکی دارد که این مجموعه را در آن در نظر گرفته‌ایم. ثانیاً، اینکه زیرمجموعه‌ای از یک فضای متریک، کران‌دار باشد، به چه معنی است؟ البته، می‌توانیم مجموعه‌ای را که قطر متناهی دارد کران‌دار تعریف کنیم، ولی چون هر متریک هم‌ارز با متریکی است که مقدارهای خود را در $[0, 1)$ می‌گیرد، و چون فشردگی نه به واسطهٔ یک متریک ویژه، بلکه به وسیلهٔ مجموعه‌های باز مشخص می‌شود، کران‌داری را نمی‌توان برای سرشت‌نمایی فشردگی در فضاهای متریک دلخواه استفاده کرد.

در فضاهای نرم‌دار نیز، مانند $\mathbb{R}^n$، هنوز صحبت از مجموعه‌های کران‌دار بامعنی است، ولی قضیهٔ هاینه ـ بورل برقرار نیست.

مثال ۱۳.۵.۲ فرض کنید $E = C([0, 1], \mathbb{F})$ به $\|\cdot\|_\infty$ مجهز است، و $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ به‌صورت

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto t^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

تعریف شده است. این دنباله، در گوی واحد بستهٔ $B_1[0]$ از E قرار دارد. اگر قضیهٔ هاینه ـ بورل برای E درست باشد، دراین‌صورت $B_1[0]$ فشرده است، و در نتیجه $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ زیردنباله‌ای همگرا، مانند $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$، دارد که حدّ آن f است. چون به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_n \in S_1[0]$ و چون $S_1[0]$ بسته است، آشکارا $f \in S_1[0]$؛ یعنی $\|f\|_\infty = 1$. از سوی دیگر، همگرایی در E همان همگرایی یکنواخت است و آن نیز مستلزم همگرایی نقطه‌ای است. بنابراین، به‌ازای هر $t \in [0, 1)$،

$$f(t) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(t) = \lim_{k\to\infty} t^{n_k} = 0.$$

پس چون f پیوسته است، $f(1) = 0$ و از این رو $f \equiv 0$، که تناقض است.

به‌طورکلی، گوی واحد بستهٔ فضای نرم‌دار E فشرده است اگر و تنها اگر $\dim E < \infty$ (قضیهٔ ب.۵).

تمرین‌ها

۱. ثابت کنید که فضای متریک گسستهٔ (X, d) فشرده است اگر و تنها اگر X متناهی باشد.

۲. فرض کنید (X, d) فضای متریک، و $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در X با حدّ x_0 است. نشان دهید زیرمجموعهٔ $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ از X فشرده است.

۳. فرض کنید (X,d) فضای متریک، و F و K زیرفضاهایی از X هستند که F در X بسته، و K فشرده است. ثابت کنید

$$F\cap K\neq\varnothing \iff \inf\{d(x,y):\, x\in F, y\in K\}=0.$$

اگر فرضِ بسته بودن K در X را جایگزین فشردگی آن کنیم چه روی می‌دهد؟

۴. فرض کنید (K_1,d_1)، ...، (K_n,d_n) فضای متریک فشرده، و $K:=K_1\times\cdots\times K_n$ به یکی از دو متریک (هم‌ارز) D_1 و D_∞ در مثال ۱۳.۳.۲(ب) مجهز است. ثابت کنید K فشرده است.

۵. به‌طور کلّی، فرض کنید $((K_n,d_n))_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از فضاهای متریک فشرده، و $K:=\prod_{n=1}^{\infty}K_n$ به متریک d در مثال ۲.۱.۲ (ح) مجهز است. نشان دهید که (K,d) فشرده است.

۶. فرض کنید E فضای نرم‌دار، و $K,L\subset E$ فشرده هستند. ثابت کنید که $K+L:=\{x+y:\, x\in K,\, y\in L\}$ نیز فشرده است.

۷. زیرمجموعهٔ S از فضای متریک (X,d) را فشردهٔ نسبی می‌گوییم اگر $\overline{S}$ فشرده باشد. نشان دهید که $S\subset X$ فشردهٔ نسبی است اگر و تنها اگر هر دنباله در S زیردنباله‌ای همگرا در X داشته باشد. اگر فضای X فشرده باشد، کدام مفهوم آشنا هم‌ارزِ فشردگی نسبی است؟

۸. فرض کنید (X,d_X) و (Y,d_Y) فضاهایی متریک هستند. تابع $f:X\to Y$ را یکنواخت‌پیوسته می‌گوییم اگر به‌ازای هر $\epsilon>0$، $\delta>0$ی موجود باشد که اگر $d_{\mathrm{X}}(x,y)<\delta$ آنگاه

$$d_Y\big(f(x),f(y)\big)<\epsilon$$

ثابت کنید که هر تابع پیوسته از فضای متریک فشرده به فضای متریک دیگر، یکنواخت‌پیوسته است.

۹. لم پوششی لبگ. فرض کنید (K,d) فضای متریک فشرده، و $\mathcal{U}$ پوششی باز برای K است. ثابت کنید که $L(\mathcal{U})>0$ی (عدد لبگ $\mathcal{U}$) وجود دارد که هر $\varnothing\neq S\subset K$ با شرط $\operatorname{diam}(S)<L(\mathcal{U})$، در عضوی از $\mathcal{U}$ است.

ملاحظه‌ها

مفهوم فضاهای متریک قدمتی تقریباً صد ساله دارد: اصول موضوع آن نخستین بار در سال ۱۹۰۶ و در رسالهٔ موریس فرشه [FRÉCHET 06]نمایان شد. فرشه به جای فضاهای متریک، از رده‌های (E)

سخن می‌گوید، و فاصلهٔ دو عضو نسبت به متریک داده شده، *écart* آنها نامیده می‌شود (که معادل فرانسویِ فاصله یا شکاف است). چند سال بعد، فِلیکس هاوسدورف، ریاضی‌دان آلمانی، در رسالهٔ خود [HAUSDORFF 14] بر رده‌های (E) فرشه نامی تازه گذاشت: آنها را *metrische Räume* نامید که در ادبیات انگلیسی به فضاهای متریک ترجمه شد. بیشتر آنچه که در بخش‌های ۱.۲، ۲.۲، ۳.۲، و ۵.۲ آمده است، را می‌توان در [HAUSDORFF 14] یافت.

آنچه که ما آن را نیم‌متریک نامیده‌ایم معمولاً متریک‌نما نامیده می‌شود. با این وجود، نگاشت p، از فضایی خطی به $[\circ, \infty)$ که در همهٔ اصل‌های موضوع نرم صدق می‌کند به‌جز اینکه به‌ازای xهای ناصفر، ممکن است $p(x) = \circ$، را یک نیم‌نرم، و نه نرم‌نما می‌گویند. از همین رو است که ما از اصطلاح‌های استاندارد عدول کرده‌ایم، و بنابر آن، به‌ازای نیم‌نرم p، $p(x-y)$ معرف نیم‌متریک است، و این نیم‌متریک، متریک است اگر و تنها اگر p نرم باشد.

قضیهٔ میتاگ‌ـلِفلِر (قضیهٔ ۱۴.۴.۲) از آنِ بورباکی و بر گرفته از رساله‌ای ماندگار و «متعلق به او» با نام *Eléments de mathématique* است [BOURBAKI 60]. اینکه ملکیت درون گیومه قرار دارد، به این دلیل است که نیکولا بورباکی یک شخص نیست بلکه نام مستعار گروهی از ریاضی‌دانان فرانسوی است که در سال ۱۹۳۵ بنیان‌گذاری شد، و از سال ۱۹۳۹ به بعد شروع به انتشار مجموعهٔ چند جلدیِ *Eléments de mathématique* با هدف بازسازی ریاضیات کرد. اعضای نیکولا بورباکی باید به مجرد رسیدن به سن پنجاه سالگی آن را ترک گویند و اعضای جدید جایگزین افرادی می‌شوند که کناره‌گیری کرده‌اند. بنابراین نیکولا بورباکی ریاضی‌دانی به راستی فناناپذیر است! بر خلاف ادعا (و باور) بسیاری، نیکولا بورباکی حتی نام ژنرالی فرانسوی در جنگ ۱۸۷۱ فرانسه و پروس نیست: در آن جنگ ژنرالی با نام بورباکی حضور داشت ولی نام کوچک او چارلز دنیس بود (در سال ۱۸۶۲ تاج و تخت پادشاهی یونان به وی پیشنهاد شد که نپذیرفت، و در جنگ فرانسه و پروس، برای رهایی از تحقیر شکست، در تلاشی نافرجام اقدام به خودکشی کرد).

بنابر دلیلی موجّه، عمومیت قضیهٔ ۱۴.۴.۲ از نتیجه‌ای که در [BOURBAKI 60] آمده کمتر است. همچنان‌که ژان اشترل در [ESTERLE 84] متذکر می‌شود:

> ضمناً، خواننده‌ای که علاقه دارد با روشی فرانسوی، نتیجه‌ای به روشنی نتیجهٔ ۲.۲ [$\approx$ قضیهٔ ۱۴.۴.۲] را به گونه‌ای دور از ذهن بنویسد، به قضیهٔ ارائه شده توسط بورباکی [...] رجوع کند.

در صورت و اثبات قضیهٔ ۱۴.۴.۲ از [DALES 78] پیروی کرده‌ایم.

گاهی (بخصوص در کتاب‌های قدیمی) به قضیهٔ بئر با عنوان قضیهٔ رسته‌ای بئر ارجاع می‌شود. این نام‌گذاری، دلایلی تاریخی دارد. زیرمجموعه‌ای از یک فضای متریک را هیچ‌جا چگال می‌گوییم

اگر درون بستار آن، تهی باشد. زیرمجموعه‌های این فضا، که اجتماعی شمارا از مجموعه‌های هیچ‌جا چگال هستند، از رستهٔ اول، و سایر زیرمجموعه‌ها از رستهٔ دوم نامیده می‌شوند. با این اصطلاح‌ها، قضیهٔ بئر (یا نتیجهٔ ۱۷.۴.۲) حکم می‌کند که هر فضای متریک کامل، از رستهٔ دوم است. اصطلاح‌های رستهٔ اول یا دوم دوام نیاورده‌اند (امروزه وقتی ریاضی‌دانان صحبت از رسته می‌کنند چیزی کاملاً متفاوت مدّ نظرشان است)، ولی برچسب قضیهٔ رسته، تا امروز زنده مانده است.

موریس فرشه در سال ۱۹۷۳، و در سن ۹۴ سالگی، ده‌ها سال پس از اینکه مفهومی که در رسالهٔ خود معرفی کرده بود به جزئی جدانشدنی از ریاضیات تبدیل شد، درگذشت.

۳

توپولوژی عمومی

چرا می‌کوشیم مفهوم‌هایی مانند همگرایی و پیوستگی را به فضاهایی تعمیم دهیم که حتی از فضاهای متریک هم مجردتر هستند؟

پاسخ آن است که پیش‌تر، در سطحی بسیار مقدماتی، با پدیده‌هایی روبه‌رو شده‌ایم که در چارچوب فضاهای متریک نمی‌گنجند: مثلاً، همگرایی نقطه‌ای ــ پایه‌ای‌ترین مفهوم همگرایی برای توابع ــ را، چنانکه در این فصل نشان می‌دهیم، نمی‌توان به عنوان همگرایی با متریک توصیف کرد.

همگرایی و پیوستگی در فضای متریک بر مفهوم «نزدیک بودن» نقطه‌ها استوار هستند: دو نقطه به اندازهٔ کافی به هم نزدیک هستند اگر فاصلهٔ آنها، که به وسیلهٔ متریکی مشخص اندازه‌گیری می‌شود، به اندازهٔ کافی کوچک باشد. بنابراین، بیرون رفتن از محدودهٔ فضاهای متریک و معنادار ماندن بحث دربارهٔ همگرایی و پیوستگی باید بر صورت اصل موضوعی شدهٔ مفهوم نزدیک بودن مبتنی باشد. چنین اصل‌بندی‌ای وجود دارد (و به‌طور شگفت‌آوری ساده است): این اصل، در قلب مفهوم فضای توپولوژیک جای دارد (به دلایل فنّی، روشی تا حدّی متفاوت، ولی هم‌ارز را دنبال می‌کنیم).

۱.۳ فضاهای توپولوژیک ــ تعریف‌ها و مثال‌ها

هر فضای توپولوژیک، مجموعه‌ای است با کمترین ساختار کافی که در آن بتوانیم از تابع‌های پیوسته سخن بگوییم. از دیدگاه نتیجهٔ ۱۰.۳.۲، یکی از رهیافت‌های مناسب، اصل‌بندی مفهوم مجموعهٔ باز است:

تعریف ۱.۱.۳ فرض کنید X مجموعه است. هر توپولوژی بر X عبارت است از زیرمجموعه‌ای مثل $\mathcal{T}$ از $\mathfrak{P}(X)$ که:

آ) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$؛

ب) اگر $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ دلخواه باشد آنگاه $\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$ در $\mathcal{T}$ قرار دارد؛

پ) اگر $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ آنگاه $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

می‌گوییم مجموعه‌های عضو $\mathcal{T}$ باز هستند. هر مجموعه همراه با توپولوژی‌ای روی آن، فضای توپولوژیک نامیده می‌شود.

اغلب، فضای توپولوژیک X با توپولوژی $\mathcal{T}$ را به‌صورت $(X, \mathcal{T})$ می‌نویسیم؛ گاهی هم که این توپولوژی بدیهی یا بی‌ربط است، به‌طور ساده می‌نویسیم X.

مثال ۲.۱.۳ آ) فرض کنید (X, d) فضای متریک است و $\mathcal{T}$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌هایی از X است که به مفهوم تعریف ۳.۲.۲ باز هستند. بنابر گزارهٔ ۵.۲.۲، $\mathcal{T}$ در واقع یک توپولوژی است. آشکار است که $\mathcal{T}$ به متریک خاص d بستگی ندارد و تنها به ردهٔ هم‌ارزی آن وابسته است: هر متریک بر X که با d هم‌ارز باشد، همین توپولوژی را به وجود می‌آورد. به فضاهای توپولوژیکِ از این دست متریک‌پذیر می‌گوییم.

ب) فرض کنید X مجموعه است، و $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(X)$. این دقیقاً حالتی خاص از مثال اول است: X را به متریک گسسته مجهز کنید. به این گونه فضاهای توپولوژیک گسسته می‌گوییم.

پ) فرض کنید X مجموعه است، و $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$. به این گونه فضاهای توپولوژیک آشفته می‌گوییم.

ت) فرض کنید X مجموعه است، و $\mathcal{T}$ شامل $\varnothing$ و همهٔ زیرمجموعه‌هایی از X است که متمم متناهی دارند.

ث) فرض کنیذ X مجموعه، و $\mathcal{T}$ شامل $\varnothing$ و همهٔ زیرمجموعه‌هایی از X است که متمم شمارا دارند.

ج) فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است ، و $Y \subset X$. توپولوژی نسبی (یا توپولوژی القا شده از X) بر Y عبارت است از گردایهٔ

$$\mathcal{T}|_Y := \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}$$

از زیرمجموعه‌های Y. آشکارا، این گردایه توپولوژی‌ای بر Y است. دراین‌صورت، فضای $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ را زیرفضای X می‌گوییم.

آیا هر فضای توپولوژیک، متریک‌پذیر است؟ البته که نه، و دلیل آن این است.

تعریف ۳.۱.۳ فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ را هاوسدورف می‌گوییم اگر به‌ازای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$، مجموعه‌های $U, V \in \mathcal{T}$ موجود باشند که $x \in U$، $y \in V$، و $U \cap V = \varnothing$.

به‌طور غیر رسمی، تعریف ۳.۱.۳ اغلب چنین بیان می‌شود که «در فضای هاوسدورف، نقطه‌ها را می‌توان با مجموعه‌های باز از هم جدا کرد».

مثال ۴.۱.۳ آ) فرض کنید (X, d) فضای متریک است، و $x, y \in X$ که $x \neq y$. در نتیجه $\epsilon := \frac{1}{2}d(x, y) > 0$. فرض کنید $U := B_\epsilon(x)$، و $V := B_\epsilon(y)$. در نتیجه $U \cap V = \varnothing$، و لذا X هاوسدورف است.

ب) اگر X مجموعه‌ای با بیش از یک عضو باشد، همراه با توپولوژی آشفتهٔ هاوسدورف (و بنابراین متریک‌پذیر) نیست.

پ) فرض کنید X مجموعه‌ای نامتناهی است که به توپولوژی مثال ۲.۱.۳ (ت) مجهز است، و X هاوسدورف است. فرض کنید $x, y \in X$ که $x \neq y$. دراین‌صورت مجموعه‌هایی باز در X، مانند U و V موجود هستند که $x \in U$، $y \in V$، و $U \cap V = \varnothing$. در حالی که این مستلزم آن است که $X = (X \backslash U) \cup (X \backslash V)$ متناهی باشد، که تناقض است.

ت) به‌طور مشابه، اگر X مجموعه‌ای ناشمارا باشد که به توپولوژی مثال ۲.۱.۳ (ث) مجهز است، فضای توپولوژیک حاصل هاوسدورف نیست (تمرین ۱ زیر را ببینید).

به زودی با فضاهایی هاوسدورف مواجه می‌شویم که متریک‌پذیر نیستند.

با در دست داشتن مفهوم مجموعه‌های باز، می‌توان زیر مجموعهٔ بستهٔ فضای توپولوژیک را تعریف کرد:

تعریف ۵.۱.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است. زیرمجموعهٔ F از X بسته نامیده می‌شود اگر $X \backslash F$ باز باشد.

مانند فضاهای متریک، گزارهٔ زیر برقرار است.

گزارهٔ ۶.۱.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است.

(i) $\varnothing$ و X بسته هستند.

(ii) اگر $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های بستهٔ X باشد آنگاه $\bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\}$ بسته است.

(iii) اگر $F_۱$ و $F_۲$ زیرمجموعه‌های بستهٔ X باشند آنگاه $F_۱ \cup F_۲$ بسته است.

البته، می‌توان توپولوژی بر یک مجموعهٔ داده شده را با ارائهٔ مجموعه‌هایی به عنوان مجموعه‌های بسته نیز تعریف کرد، و سپس بررسی کرد که این مجموعه‌ها در شرایط (i) تا (iii)ی گزارهٔ ۶.۱.۳ صدق می‌کنند، و متمم آنها را به عنوان مجموعه‌های باز تعریف کرد؛ آشکار است که این روش با تعریف ۱.۱.۳ هم‌ارز است.

مثال ۷.۱.۳ فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار است. یادآوری می‌کنیم که ایده‌آل سرهٔ $\mathfrak{p}$ از R (یعنی، $\mathfrak{p} \subsetneq R$) را اوّل می‌گوییم اگر $ab \in \mathfrak{p}$ نتیجه دهد $a \in \mathfrak{p}$ یا $b \in \mathfrak{p}$. به عنوان مثال، فرض کنید $R = \mathbb{Z}$؛ هر ایده‌آل $\mathbb{Z}$ به‌ازای $n \in \mathbb{N}_۰$ی به شکل $n\mathbb{Z} := \{nm : m \in \mathbb{Z}\}$ است، و این ایده‌آل، ایده‌آل اول $\mathbb{Z}$ است اگر و تنها اگر n صفر یا اول باشد. فرض کنید

$$\mathrm{Spec}(R) := \{\mathfrak{p} : \text{ایده‌آل اول } R \text{ است } \mathfrak{p}\}$$

اکنون با مشخص کردن زیرمجموعه‌هایی ویژه از $\mathrm{Spec}(R)$ به عنوان مجموعه‌های بسته، توپولوژی‌ای بر $\mathrm{Spec}(R)$ تعریف می‌کنیم.

به‌ازای هر ایده‌آل I از R، فرض کنید

$$V(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : I \subset \mathfrak{p}\},$$

به ویژه، $V(R) = \varnothing$ و $V(\{۰\}) = \mathrm{Spec}(R)$. فرض کنید $\mathcal{I}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های R، و $\sum\{I : I \in \mathcal{I}\}$ مجموعهٔ همهٔ مجموع‌های متناهی $\sum_{j=۱}^{n} a_j$ است که به‌ازای هر $j = ۱, \ldots, n$، a_j در عضوی از $\mathcal{I}$ است. آشکار است که $\sum\{I : I \in \mathcal{I}\}$ هم ایده‌آل R است، و به آسانی می‌توان دید که

$$\bigcap\{V(I) : I \in \mathcal{I}\} = V\left(\sum\{I : I \in \mathcal{I}\}\right).$$

فرض کنید $I_۱$ و $I_۲$ ایده‌آل‌های R هستند، و I ایده‌آلی از R است که با مجموعهٔ $\{ab : a \in I_۱, b \in I_۲\}$ تولید شده است. به آسانی می‌توان دید که I دقیقاً شامل عضوهایی از R به شکل $\sum_{j=۱}^{n} a_j b_j$ است که در آن $a_۱, \ldots, a_n \in I_۱$ و $b_۱, \ldots, b_n \in I_۲$. ادعا می‌کنیم که $V(I_۱) \cup V(I_۲) = V(I)$. اگر $\mathfrak{p}$ ایده‌آلی اوّل شامل $I_۱$ یا $I_۲$ باشد، آشکار است که $I \subset \mathfrak{p}$ و در نتیجه، $V(I_۱) \cup V(I_۲) \subset V(I)$.

برعکس، فرض کنید $\mathfrak{p} \in V(I)$ و، بدون کاسته شدن از کلیّت، فرض کنید $\mathfrak{p} \notin V(I_1)$. از این رو $a \in I_1$ ی موجود است که $a \notin \mathfrak{p}$. چون $\mathfrak{p} \in V(I)$، نتیجه می‌شود که

$$\{ab : b \in I_2\} \subset I \subset \mathfrak{p}$$

و چون $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول است، $I_2 \subset \mathfrak{p}$؛ یعنی $\mathfrak{p} \in V(I_2)$. در مجموع، حکم $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I)$ را به‌دست می‌آوریم.

پس مجموعه‌های به شکل $V(I)$، که در آن I ایده‌آلی از R است، مجموعه‌های بستهٔ یک توپولوژی بر $\mathrm{Spec}(R)$ اند. به این توپولوژی، توپولوژی زاریسکی می‌گوییم.

می‌توانیم با مفهوم باز بودن، همسایگی را در فضاهای توپولوژیک تعریف کنیم.

تعریف ۸.۱.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، و $x \in X$. زیرمجموعهٔ N از X را همسایگی x می‌گوییم اگر زیرمجموعهٔ باز U از X موجود باشد که $x \in U \subset N$. گردایهٔ همهٔ همسایگی‌های x را با $\mathcal{N}_x$ نشان می‌دهیم.

گزارهٔ زیر، مانند حالت فضاهای متریک ثابت می‌شود.

گزارهٔ ۹.۱.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، و $x \in X$. دراین‌صورت:

(i) اگر $N \in \mathcal{N}_x$ و $N \subset M$ آنگاه $M \in \mathcal{N}_x$؛

(ii) اگر $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_x$ آنگاه $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_x$.

به‌علاوه، زیرمجموعهٔ U از X باز است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $y \in U$، $U \in \mathcal{N}_y$.

گزارهٔ زیر جالب است، زیرا نشان می‌دهد که توپولوژی را می‌توان به جای اصل‌بندی مجموعه‌های باز، از طریق اصل‌بندی مفهوم همسایگی نیز تعریف کرد.

قضیهٔ ۱۰.۱.۳ فرض کنید X مجموعه است، و به‌ازای هر $x \in X$، $\varnothing \neq \mathfrak{N}_x \subset \mathfrak{P}(X)$ موجود است که:

آ) به‌ازای هر $N \in \mathfrak{N}_x$، $x \in N$؛

ب) اگر $N \in \mathfrak{N}_x$ و $N \subset M$ آنگاه $M \in \mathfrak{N}_x$؛

پ) اگر $N_1, N_2 \in \mathfrak{N}_x$ آنگاه $N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{N}_x$؛

ت) به‌ازای هر $N \in \mathfrak{N}_x$، $U \in \mathfrak{N}_x$ ی موجود است که $U \subset N$، و به‌ازای هر $y \in U$، $U \in \mathfrak{N}_y$.

فرض کنید $\mathcal{T}$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های U از X است که به‌ازای هر $y \in U$، $U \in \mathfrak{N}_y$. دراین‌صورت $\mathcal{T}$ یگانه توپولوژی بر X است که به‌ازای هر $x \in X$، $\mathfrak{N}_x = \mathcal{N}_x$.

برهان. آشکارا، $\varnothing$ و X در $\mathcal{T}$ هستند.

فرض کنید $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ و $y \in \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$. در نتیجه، $U_\circ \in \mathcal{U}$ای وجود دارد که $y \in U_\circ$؛ یعنی $U_\circ \in \mathfrak{N}_y$. بنا بر (ب)، $\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\} \in \mathfrak{N}_y$. چون y دلخواه بود، این یعنی $\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{T}$.

فرض کنید $U_۱, U_۲ \in \mathcal{T}$، و $y \in U_۱ \cap U_۲$؛ یعنی $U_۱, U_۲ \in \mathfrak{N}_y$. از (پ) نتیجه می‌شود که $U_۱ \cap U_۲ \in \mathfrak{N}_y$. دوباره از دلخواه بودن y نتیجه می‌گیریم که $U_۱ \cap U_۲ \in \mathcal{T}$.

در مجموع، $\mathcal{T}$ یک توپولوژی است، و از این رو می‌توان به‌ازای $x \in X$، از $\mathcal{N}_x$ صحبت کرد (توجه کنید که تاکنون، هیچ استفاده‌ای از (ت) نشده است).

فرض کنید $x \in X$، و $N \in \mathfrak{N}_x$. بنا بر (ت)، $U \in \mathfrak{N}_x$ی وجود دارد که به‌ازای هر $y \in U$، $U \in \mathfrak{N}_y$. بنا بر تعریف $\mathcal{T}$، U باز است، و چون $x \in U \subset N$، $N \in \mathcal{N}_x$. برعکس، اگر $N \in \mathcal{N}_x$، $U \in \mathcal{T}$ای وجود دارد که $x \in U \subset N$. بنا بر تعریف $\mathcal{T}$، $U \in \mathfrak{N}_x$، و لذا بنا بر (ب)، $N \in \mathfrak{N}_x$. بنابراین، به‌ازای هر $x \in X$، $\mathfrak{N}_x = \mathcal{N}_x$.

بنا بر بخش «به‌علاوهٔ» گزارهٔ ۹.۱.۳، آشکار است که $\mathcal{T}$ با این ویژگی به‌طور یکتا تعیین می‌شود. ■

مثال ۱۱.۱.۳ فرض کنید S مجموعه‌ای ناتهی، (Y, d) فضایی متریک، و $F(S, Y)$ مجموعهٔ همهٔ تابع‌های از S به Y است. فرض کنید $\varnothing \neq \mathcal{C} \subset \mathfrak{P}(S)$ تحت اجتماع‌های متناهی بسته است. به‌ازای $f \in F(S, Y)$، $C \in \mathcal{C}$، و $\epsilon > ۰$، فرض کنید

$$N_{f,C,\epsilon} := \left\{ g \in F(S,Y) : \sup_{x \in C} d(f(x), g(x)) < \epsilon \right\},$$

و به‌ازای $f \in F(S, Y)$، فرض کنید

$$\mathfrak{N}_f := \{N \subset F(S,Y) : N \supset N_{f,C,\epsilon} \text{ به‌ازای } \epsilon > ۰ \text{ و } C \in \mathcal{C} \text{ای}\}.$$

ادعا می‌کنیم که $\mathfrak{N}_f$ در شرایط (آ) تا (ت)ی قضیهٔ ۱۰.۱.۳ صدق می‌کند. (آ) و (ب) بدیهی هستند، و چون به‌ازای $C_۱, C_۲ \in \mathcal{C}$، و $\epsilon_۱, \epsilon_۲ > ۰$،

$$N_{f,C_۱,\epsilon_۱} \cap N_{f,C_۲,\epsilon_۲} \supset N_{f,C_۱ \cup C_۲, \min\{\epsilon_۱, \epsilon_۲\}}$$

(پ) برقرار است. برای اثبات برقراری (ت)، فرض کنید $N \in \mathfrak{N}_f$، و از این رو $C \in \mathcal{C}$ای، و $\epsilon > \circ$ی موجودند که $U := N_{f,C,\epsilon} \subset N$. فرض کنید $g \in U$، از این رو $\sup_{x\in C} d(f(x), g(x)) < \epsilon$، و فرض کنید $\delta := \epsilon - \sup_{x\in C} d(f(x), g(x)) > \circ$. اثبات $N_{g,C,\delta} \subset U$ سرراست است، پس $U \in \mathfrak{N}_g$. چون $g \in U$ دلخواه بود، $\mathfrak{N}_f$ در قضیهٔ ۱۰.۱.۳ (ت) نیز صدق می‌کند.

پس، بنا بر قضیهٔ ۱۰.۱.۳، توپولوژی یکتای $\mathcal{T}_\mathcal{C}$ را بر $F(S,Y)$ داریم که به‌ازای هر $f \in F(S,Y)$، $\mathfrak{N}_f = \mathcal{N}_f$ (تعریف $\mathcal{T}_\mathcal{C}$ ممکن است گیج‌کننده به نظر بیاید، ولی در بخش بعد نشان می‌دهیم که این گونه توپولوژی‌ها را می‌توان برای تسخیر پدیده‌هایی معروف در آنالیز، مانند همگرایی یکنواخت و نقطه‌ای، به کار برد).

در مثال ۱۱.۱.۳ دستگاهی از همسایگی‌ها در هر نقطهٔ $F(S,Y)$ ساختیم، که هر کدام از این همسایگی‌ها از مجموعه‌های ابتدایی‌تر مشخصی تشکیل شده بودند. این کار، انگیزه‌ای برای تعریف زیر است.

تعریف ۱۲.۱.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، و $x \in X$. هر پایه برای $\mathcal{N}_x$ عبارت است از زیرمجموعهٔ $\mathcal{B}_x$ از $\mathcal{N}_x$ که به‌ازای هر $N \in \mathcal{N}_x$، $B \in \mathcal{B}_x$ی موجود است که $B \subset N$. همسایگی‌های در $\mathcal{B}_x$ را پایه‌ای می‌گوییم.

مثال ۱۳.۱.۳ آ) در مثال ۱۱.۱.۳، به‌ازای $f \in F(S,Y)$ مجموعه‌های به شکل $N_{f,C,\epsilon}$ که در آن $C \in \mathcal{C}$ و $\epsilon > \circ$ پایه‌ای برای $\mathcal{N}_f$ تشکیل می‌دهند.

ب) فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، و $x \in X$. دراین‌صورت $\{U \in \mathcal{N}_x : U$ باز است$\}$ پایه‌ای برای $\mathcal{N}_x$ است.

پ) فرض کنید (X, d) فضای توپولوژیک است، و $x \in X$. دراین‌صورت $\{B_\epsilon(x) : \epsilon > \circ\}$ و $\{B_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ پایه‌هایی برای $\mathcal{N}_x$ هستند.

اکنون با در دست داشتن مفهوم پایه برای همسایگی، می‌توانیم فضاهایی توپولوژیک ارائه دهیم که هاوسدورف هستند، ولی متریک‌پذیر نیستند.

تعریف ۱۴.۱.۳ فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ را شمارای اول می‌گوییم اگر به‌ازای هر $x \in X$، پایه‌ای شمارا برای $\mathcal{N}_x$ وجود داشته باشد.

مثال ۱۵.۱.۳ آ) بنابر مثال ۱۳.۱.۳ (پ)، هر فضای توپولوژیک متریک‌پذیر، شمارای اول است.

ب) فرض کنید S مجموعه‌ای ناشمارا، و Y فضایی متریک با بیش از یک عضو است، و $\mathcal{F} := \{F \subset S : F$ متناهی است$\}$. ادعا می‌کنیم که فضای توپولوژیک $(F(S,Y), \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ مثال ۱۱.۱.۳، شمارای اول ــ و لذا متریک‌پذیر ــ نیست، ولی هاوسدورف است.

فرض کنید $f, g \in F(S,Y)$ که $f \neq g$. بنابراین $x \in S$ی وجود دارد که $f(x) \neq g(x)$. فرض کنید $\epsilon := \frac{1}{2} d(f(x), g(x))$. در نتیجه،

$$N_{f,\{x\},\epsilon} \cap N_{g,\{x\},\epsilon} = \varnothing,$$

از این رو $(F(S,Y), \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ هاوسدورف است.

فرض کنید $f \in F(S,Y)$ است، و $\mathcal{N}_f$ پایه‌ای شمارا مانند $\{B_1, B_2, \ldots\}$، دارد. ابتدا ادعا می‌کنیم که $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{f\}$. برای اثبات، برای نیل به تناقض، فرض کنید $g \neq f$ عضو $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ است. چون $(F(S,Y), \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ هاوسدورف است، $N \in \mathcal{N}_f$ی وجود دارد که $g \notin N$، و بنا بر تعریف پایه برای $\mathcal{N}_f$، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای $m \in \mathbb{N}$ی، $g \notin B_m$: که با فرض ما تناقض دارد. بی‌درنگ بنا بر تعریف $\mathcal{N}_f$، به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $F_n \in \mathcal{F}$ و $\epsilon_n > 0$ی موجود است که $N_{f,F_n,\epsilon_n} \subset B_n$. در نتیجه،

$$\{f\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} N_{f,F_n,\epsilon_n} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{f\}.$$

$g : S \to Y$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \\ y\text{ای مخالف } f(x), & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

این امکان‌پذیر است، زیرا Y بیش از یک عضو دارد. چون S ناشمارا است، باید $S \supsetneq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$، پس $g \neq f$. با این وجود، آشکار است که $g \in \bigcap_{n=1}^{\infty} N_{f,F_n,\epsilon_n}$، که ناممکن است. در نتیجه، $(F(S,Y), \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ شمارای اول نیست، و از این رو متریک‌پذیر نیست.

چون در فضاهای توپولوژیک دلخواه مفهوم مجموعه‌های بسته را داریم می‌توانیم بستار زیرمجموعه‌ای دلخواه را هم تعریف کنیم.

تعریف ۱۶.۱.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است. به‌ازای هر $S \subset X$، بستار S به‌صورت

$$\overline{S} := \bigcap \{F : F \subset X \text{ بسته و شامل } S \text{ است}\}$$

تعریف می‌شود.

مثال ۱۷.۱.۳ فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار است، و $\mathrm{Spec}(R)$ به توپولوژی زاریسکی مجهز است. فرض کنید $S \subset \mathrm{Spec}(R)$. ادعا می‌کنیم که

$$\overline{S} = V\left(\bigcap\{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in S\}\right).$$

چون $\bigcap\{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in S\}$ ایده‌آل R است، $V\left(\bigcap\{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in S\}\right)$ بسته (و آشکارا شامل S) است، از این رو

$$\overline{S} \subset V\left(\bigcap\{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in S\}\right).$$

فرض کنید I ایده‌آلی از R است که $\overline{S} = V(I)$. در نتیجه به‌ازای هر $\mathfrak{p} \in S$، $I \subset \mathfrak{p}$، و از این رو $I \subset \bigcap\{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in S\}$، که به نوبهٔ خود نتیجه می‌دهد که

$$V\left(\bigcap\{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in S\}\right) \subset V(I) = \overline{S},$$

از این رو تساوی برقرار است.

همانند فضاهای متریک، گزارهٔ زیر درست است.

قضیهٔ ۱۸.۱.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، و $S \subset X$. دراین‌صورت

$$\overline{S} = \{x \in X : N \cap S \neq \varnothing \text{ ،} N \in \mathcal{N}_x \text{ به‌ازای هر}\}.$$

برهان این قضیه، تقریباً رونوشت کلمه به کلمهٔ برهان گزارهٔ ۱۳.۲.۲ است.

مانند مفهوم همسایگی، از مفهوم بستار نیز می‌توان برای تعریف توپولوژی بر مجموعه‌ای داده شده استفاده کرد.

تعریف ۱۹.۱.۳ فرض کنید X مجموعه است. عمل بستار کوراتوفسکی عبارت است از تابع $\mathrm{cl} : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ که در شرط‌های زیر صدق کند:

آ) $\mathrm{cl}(\varnothing) = \varnothing$،

ب) به‌ازای هر $S \subset X$، $S \subset \mathrm{cl}(S)$،

پ) به‌ازای هر $S \subset X$، $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(S)) = \mathrm{cl}(S)$، و

ت) به‌ازای هر $S, T \subset X$، $\mathrm{cl}(S \cup T) = \mathrm{cl}(S) \cup \mathrm{cl}(T)$.

بی‌درنگ، بستار در فضای توپولوژیک، عمل بستار کوراتوفسکی است: (آ)، (ب)، و (پ) آشکارا برقرارند، و (ت) به آسانی محقق می‌شود (تمرین ۲ی زیر را نگاه کنید).

قضیهٔ ۲۰.۱.۳ فرض کنید X مجموعه‌ای است که به عمل بستار کوراتوفسکی cl مجهز است. دراین‌صورت، زیرمجموعه‌های Fی از X که $\mathrm{cl}(F) = F$، زیرمجموعه‌های بستهٔ توپولوژی یکتای $\mathcal{T}$ بر X را تشکیل می‌دهند.

برهان. قرار دهید

$$\mathcal{T} := \{U \subset X : \mathrm{cl}(X \backslash U) = X \backslash U\}.$$

نشان می‌دهیم که $\mathcal{T}$ توپولوژی‌ای بر X است که به‌ازای هر $S \subset X$، $\overline{S} = \mathrm{cl}(S)$.

مجموعهٔ $F \subset X$ را $\mathcal{T}$ـ‌بسته گوییم هرگاه متمم آن نسبت به X در $\mathcal{T}$ باشد؛ یعنی $\mathrm{cl}(F) = F$. برقراری ویژگی‌های (i)، (ii)، و (iii)ی گزارهٔ ۶.۱.۳ را برای خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های $\mathcal{T}$ـ‌بستهٔ X بررسی می‌کنیم.

بنابر تعریف ۱۹.۱.۳ (آ) و (ب)، $\varnothing$ و X، $\mathcal{T}$ـ‌بسته هستند، و بنابر (ت)، اجتماع هر دو مجموعهٔ $\mathcal{T}$ـ‌بسته دوباره $\mathcal{T}$ـ‌بسته است.

بنابر (ت)، به‌ازای هر $S, T \subset X$ که $S \subset T$، مشاهده می‌کنیم که

$$\mathrm{cl}(S) \subset \mathrm{cl}(S) \cup \mathrm{cl}(T) = \mathrm{cl}(S \cup T) = \mathrm{cl}(T).$$

فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های $\mathcal{T}$ـ‌بسته است، و $F_\circ \in \mathcal{F}$. دراین‌صورت، بنابر آنچه در بالا گفته شد،

$$\mathrm{cl}\left(\bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\}\right) \subset \mathrm{cl}(F_\circ) = F_\circ.$$

چون $F_\circ \in \mathcal{F}$ دلخواه بود، نتیجه می‌گیریم

$$\mathrm{cl}\left(\bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\}\right) \subset \bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\}.$$

بنابر (ب)، عکس این شمول نیز روی می‌دهد، از این رو $\bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\}$، $\mathcal{T}$ـ‌بسته است.

در مجموع، $\mathcal{T}$ توپولوژی‌ای بر X است.

فرض کنید $S \subset X$. بنابر (ب)، $S \subset \mathrm{cl}(S)$ و در نتیجه $\overline{S} \subset \mathrm{cl}(S)$، زیرا بنابر (پ)، $\mathrm{cl}(S)$ $\mathcal{T}$ـ‌بسته است. از سوی دیگر، $S \subset \overline{S}$ نتیجه می‌دهد

$$\mathrm{cl}(S) \subset \mathrm{cl}(\overline{S}) = \overline{S},$$

پس $\overline{S} = \mathrm{cl}(S)$. ∎

با تعریف شدن بستار، چگال بودن را هم تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۱.۱.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است. دراین‌صورت $D \subset X$ را چگال در X می‌گوییم اگر $\overline{D} = X$.

مثال ۲۲.۱.۳ فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار است، و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. بنا بر مثال ۱۷.۱.۳،

$$\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R) : \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}\}.$$

اکنون فرض کنید که R حوزهٔ صحیح است؛ یعنی، $ab = 0$ نتیجه می‌دهد $a = 0$ یا $b = 0$ (که با اول بودن ایده‌آل صفر، (0)، یکی است). به عنوان مثال، $\mathbb{Z}$ و هر میدان حوزهٔ صحیح است، در حالی که $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ حوزهٔ صحیح نیست. دراین‌صورت

$$\overline{\{(0)\}} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R) : (0) \subset \mathfrak{q}\} = \operatorname{Spec}(R);$$

یعنی زیرمجموعهٔ تک‌عضوی $\{(0)\}$ در $\operatorname{Spec}(R)$ چگال است.

این مثال نشان می‌دهد که در فضاهای توپولوژیک دلخواه، ممکن است پدیده‌هایی دور از انتظار ببینیم که در فضاهای متریک روی نمی‌دهند: زیرمجموعهٔ تک‌عضوی در فضایی متریک چگال است اگر و تنها اگر کل فضا مجموعه‌ای تک‌عضوی باشد. مثال ۲۲.۱.۳ به هیچ عنوان این گونه نیست: طیف زاریسکی حلقه‌های جابه‌جایی، اشیایی مهم در جبر جابه‌جایی و هندسهٔ جبری هستند.

با در دست داشتن تعریف چگال بودن، می‌توان تفکیک‌پذیری را تعریف کرد.

تعریف ۲۳.۱.۳ هر فضای توپولوژیک را تفکیک‌پذیر می‌گوییم اگر زیرمجموعه‌ای شمارا و چگال داشته باشد.

شاید تصور شود که مانند فضاهای متریک، زیرفضایِ فضای توپولوژیک تفکیک‌پذیر مجدداً تفکیک‌پذیر است، ولی نشان خواهیم داد که این درست نیست. این را بهانهٔ تعریفی دیگر (و در واقع، دو تعریف) قرار می‌دهیم.

تعریف ۲۴.۱.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است. دراین‌صورت:

آ) پایه برای $\mathcal{T}$ عبارت است از گردایهٔ $\mathcal{B}$ از مجموعه‌های باز که هر مجموعهٔ باز، اجتماعی از مجموعه‌های در $\mathcal{B}$ باشد.

ب) زیرپایه برای $\mathcal{T}$ عبارت است از گردایهٔ $\mathcal{S}$ از مجموعه‌های باز که گردایهٔ همهٔ اشتراک‌های متناهیِ مجموعه‌های در $\mathcal{S}$، پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ باشد.

مثال ۲۵.۱.۳ آ) فرض‌کنید (X,d) فضای متریک است. دراین‌صورت $\{B_r(x) : x \in X, r > 0\}$ پایه‌ای برای توپولوژی القا شده به وسیلهٔ d است.

ب) فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار است. به‌ازای $a \in R$، فرض کنید

$$V(a) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) : a \in \mathfrak{p}\}.$$

آشکارا، $V(a)$ برابر با $V(aR)$ است، و از این رو به‌ازای هر $a \in R$ بسته است. فرض کنید $F \subset \operatorname{Spec}(R)$ بسته است؛ یعنی، به‌ازای ایده‌آلی مثل I از R، $F = V(I)$. در نتیجه

$$F = V(I) = \bigcap \{V(a) : a \in I\}.$$

از این رو $\{\operatorname{Spec}(R) \backslash V(a) : a \in R\}$ پایه‌ای برای توپولوژی زاریسکی است.

فرض کنید X مجموعه است، و $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(X)$ این ویژگی را دارد که به‌ازای هر B_1 و B_2 در $\mathcal{B}$، اشتراک آنها تهی و یا در $\mathcal{B}$ است. دراین‌صورت، به سادگی می‌توان نشان داد که گردایهٔ همهٔ اجتماع‌های مجموعه‌های $\mathcal{B}$، توپولوژی‌ای بر X است که $\mathcal{B}$ پایهٔ آن است. به‌طور کلی، اگر $\mathcal{S} \subset \mathfrak{P}(X)$ دلخواه باشد، گردایهٔ همهٔ اجتماع‌های اشتراک‌های متناهی مجموعه‌های در $\mathcal{S}$، توپولوژی‌ای بر X است که $\mathcal{S}$ زیرپایهٔ آن است.

مثال ۲۶.۱.۳ فرض کنید $X = \mathbb{R}^2$. به‌ازای $a, b \in \mathbb{R}$، فرض کنید

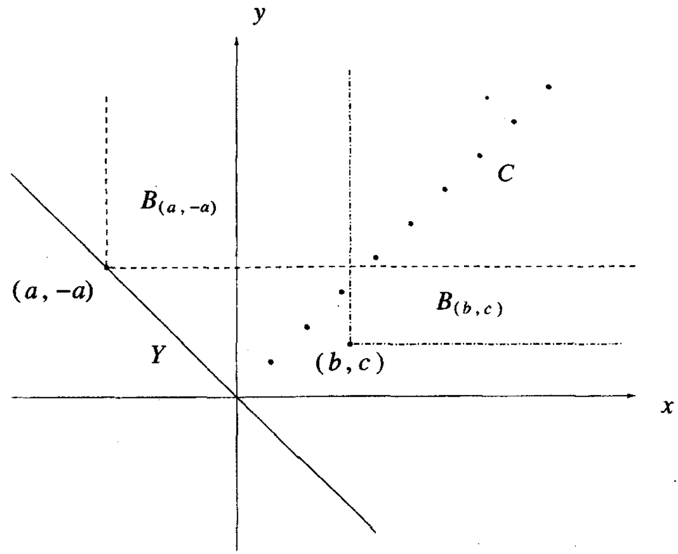
$$B_{a,b} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq a,\ y \geq b\}.$$

دراین‌صورت $\mathcal{B} := \{B_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}\}$ تحت اشتراک‌های متناهی پایدار است. در نتیجه، بنا بر تبصرهٔ پیش، توپولوژیِ (لزوماً یکتای) $\mathcal{T}$ بر X موجود است که $\mathcal{B}$ پایهٔ آن است. ابتدا ادعا می‌کنیم که $(X, \mathcal{T})$ تفکیک‌پذیر است. نشان می‌دهیم که $C := \{(n,n) : n \in \mathbb{N}\}$ در X چگال است. فرض کنید C در X چگال نیست. دراین‌صورت $\varnothing \neq U := X \backslash \overline{C}$ باز، و لذا شامل مجموعه‌ای به شکل $B_{a,b}$ است که در آن $a, b \in \mathbb{R}$. در حالی که اگر $n \geq \max\{a,b\}$، آشکارا، $(n,n) \in C \cap B_{a,b}$، که تناقض است.

فرض کنید $Y := \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$. به‌ازای هر $a \in \mathbb{R}$،

$$Y \cap B_{a,-a} = \{(a,-a)\}.$$

بنابراین، همهٔ زیرمجموعه‌های تک‌عضوی Y نسبت به $\mathcal{T}|_Y$ باز هستند، پس فضای توپولوژیک $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ باید گسسته باشد. آشکارا Y ناشمارا است، که اگر تفکیک‌پذیر باشد چنین چیزی ناممکن است.



شکل ۱.۳ فضایی تفکیک‌پذیر با زیرفضایی تفکیک‌ناپذیر

این بخش را با بحثی مختصر در مورد مرز و درون زیرمجموعه‌های فضاهای توپولوژیک پایان می‌دهیم: این تعریف‌ها و نتیجه‌ها همانند حالت فضاهای متریک هستند، و برهان‌های متناظر به‌کار می‌آیند.

تعریف ۲۷.۱.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، و $S \subset X$. دراین‌صورت مرز S به‌صورت

$$\partial S := \{x \in X : N \cap S \neq \varnothing \text{ و } N \cap (X\backslash S) \neq \varnothing \text{ ،} N \in \mathcal{N}_x \text{ به‌ازای هر}\},$$

تعریف می‌شود.

گزارهٔ ۲۸.۱.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، و $S \subset X$. دراین‌صورت:

(i) $\partial S = \partial(X\backslash S)$؛

(ii) ∂S بسته است؛

(iii) $\overline{S} = S \cup \partial S$.

تعریف ۲۹.۱.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است. به‌ازای هر $S \subset X$، درون S به‌صورت

$$S^\circ := \bigcup \{U : \text{باز، در } S \text{ است } U \subset X\},$$

تعریف می‌شود.

گزارهٔ ۳۰.۱.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، و $S \subset X$. دراین‌صورت

$$S^\circ = \{x \in X : S \in N_x\} = S \backslash \partial S.$$

تمرین‌ها

۱. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیکِ مثال ۲.۱.۳ (ث) است؛ یعنی $U \subset X$ باز است اگر و تنها اگر U تهی باشد یا متمم شمارا داشته باشد. ثابت کنید که X شمارا است اگر و تنها اگر $(X, \mathcal{T})$ گسسته باشد و اگر و تنها اگر $(X, \mathcal{T})$ هاوسدورف باشد.

۲. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، و $S, T \subset X$. ثابت کنید که $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$ و $\overline{S} \backslash \overline{T} \subset \overline{S \backslash T}$.

۳. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار است، و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. ثابت کنید که $\{\mathfrak{p}\}$ در $\operatorname{Spec}(R)$ بسته است اگر و تنها اگر $\mathfrak{p}$ ایده‌آل ماکسیمال R باشد.

۴. فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ را شمارای دوم می‌گوییم اگر $\mathcal{T}$ پایه‌ای شمارا داشته باشد. ثابت کنید

آ) هر فضای شمارای دوم، شمارای اول است؛

ب) هر فضای متریک تفکیک‌پذیر، شمارای دوم است.

۵. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای تفکیک‌پذیر مثال ۲۶.۱.۳ است. ثابت کنید که X شمارای اول است، ولی شمارای دوم نیست (این فضا هاوسدورف نیست؛ در مثال ۱۴.۵.۳ زیر، در مورد فضایی هاوسدورف و تفکیک‌پذیر ــ به آسانی شمارای اول بودن آن ثابت می‌شود ــ بحث می‌کنیم که شمارای دوم نیست).

۶. برهانی توپولوژیک برای نامتناهی بودن اعداد اوّل. به‌ازای هر $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{N}$، فرض کنید

$$N_{a,b} := \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}.$$

به‌ازای $a \in \mathbb{Z}$، فرض کنید $\mathfrak{N}_a$ متشکل از مجموعه‌های Nی است که به‌ازای $b \in \mathbb{N}$ی، $N_{a,b} \subset N$.

آ) ثابت کنید که به‌ازای هر $a \in \mathbb{Z}$، دستگاه $\mathfrak{N}_a$ در فرض‌های قضیهٔ ۱۰.۱.۳ صدق می‌کند، و از این رو توپولوژی یکتای $\mathcal{T}$ بر $\mathbb{Z}$ موجود است که به‌ازای هر $a \in \mathbb{Z}$، $\mathfrak{N}_a = \mathcal{N}_a$.

ب) ثابت کنید که زیرمجموعه‌های باز $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$، تهی و یا نامتناهی هستند.

پ) ثابت کنید که به‌ازای هر $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{N}$، مجموعهٔ $N_{a,b}$ هم باز است هم بسته.

ت) ثابت کنید

$$\mathbb{Z}\backslash\{-۱, ۱\} = \bigcup\{N_{۰,p} : \text{اول است } p\}$$

ث) نتیجه بگیرید که تعدادی نامتناهی عدد اول وجود دارد.

۷. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، و $S \subset X$. ثابت کنید که $X\backslash S^\circ = \overline{X\backslash S}$، و $X\backslash\overline{S} = (X\backslash S)^\circ$.

۸. فضاهای خارج قسمتی. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک، و $\approx$ رابطه‌ای هم‌ارزی بر X است. به‌ازای هر $x \in X$، فرض کنید $[x]$ ردهٔ هم‌ارزی آن نسبت به $\approx$، و $X/\approx$ نشان‌دهندهٔ گردایهٔ همهٔ $[x]$هایی است که $x \in X$. ثابت کنید که گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های U از $X/\approx$ که $\{x \in X : [x] \in U\} \in \mathcal{T}$ توپولوژی‌ای بر $X/\approx$ است (این توپولوژی را توپولوژی خارج‌قسمتی بر $X/\approx$، و فضای توپولوژیک حاصل را فضای خارج‌قسمتی X نسبت به $\approx$ می‌گوییم).

۲.۳ پیوستگی و همگرایی تورها

می‌توان همگرایی دنباله‌ها در فضاهای توپولوژیک را مانند فضاهای متریک تعریف کرد.

تعریف ۱.۲.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است. می‌گوییم دنبالهٔ $(x_n)_{n=۱}^\infty$ در X، همگرا به $x \in X$ است اگر به‌ازای هر $N \in \mathcal{N}_x$، $n_N \in \mathbb{N}$ی موجود باشد که به‌ازای هر $n \geq n_N$، $x_n \in N$.

این تعریف کاملاً روشن است، ولی اگر کسی تلاش کند که نتیجه‌هایی مشابه آنچه را دربارهٔ دنباله‌های همگرا در فضاهای متریک می‌دانیم ثابت کند، مشکلات بروز می‌کنند. به عنوان مثال، گزارهٔ ۴.۳.۲ برای فضاهای توپولوژیک کلّی درست نیست.

مثال ۲.۲.۳ فرض کنید X مجموعه‌ای ناشمارا است که به توپولوژی مثال ۲.۱.۳ (ث) مجهز است؛ یعنی مجموعه‌های باز عبارت‌اند از $\varnothing$ و مجموعه‌های با متمم شمارا. $x_\circ \in X$ را ثابت بگیرید. دراین‌صورت $\{x_\circ\}\backslash X$ بسته نیست، و از این رو $\overline{X\backslash\{x_\circ\}} = X$. فرض کنید $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $X\backslash\{x_\circ\}$ است، و $U := X\backslash\{x_1, x_2, \ldots\}$. بنا بر طبیعت این توپولوژی، U باز، و لذا همسایگی $x_\circ$ است. ولی بنا بر تعریف، به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \notin U$، و لذا $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ نمی‌تواند همگرا به $x_\circ$ باشد.

مثالی دیگر که کمتر مطرح می‌شود، برای نشان دادن عدم برقراری گزارهٔ ۴.۳.۲ برای فضاهای توپولوژیک دلخواه، در تمرین ۱۱ زیر ارائه می‌شود.

پس پیوستگی بر فضاهای توپولوژیک دلخواه را چگونه تعریف کنیم؟ البته، می‌توانستیم همانند فضاهای متریک این کار را با دنباله‌ها انجام دهیم، ولی بنا بر مثال ۲.۲.۳، احتمال دارد که با مشکلاتی غیر منتظره روبه‌رو شویم. در بین چهار شرط هم‌ارز قضیهٔ ۷.۳.۲، شرط چهارم هیچ ارجاع صریحی به متریک ندارد. از این رو از آن به عنوان تعریف پیوستگی استفاده می‌کنیم.

تعریف ۳.۲.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T}_X)$ و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ فضای توپولوژیک هستند. دراین‌صورت $f : X \to Y$ را در $x_\circ \in X$، پیوسته می‌گوییم اگر به‌ازای هر $N \in \mathcal{N}_{f(x_\circ)}$، $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_{x_\circ}$. اگر f در هر نقطهٔ X پیوسته باشد، می‌گوییم f پیوسته است.

مانند فضاهای متریک (نتیجهٔ ۱۰.۳.۲)، با همان برهان،

گزارهٔ ۴.۲.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T}_X)$ و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ فضای توپولوژیک هستند. دراین‌صورت برای $f : X \to Y$ حکم‌های زیر هم‌ارزند.

(i) f پیوسته است.

(ii) به‌ازای هر زیرمجموعهٔ باز U از Y، $f^{-1}(U)$ در X باز است.

(iii) به‌ازای هر زیرمجموعهٔ بستهٔ F از Y، $f^{-1}(F)$ در X بسته است.

مثال ۵.۲.۳ آ) فرض کنید $(X, \mathcal{T}_X)$ و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ فضاهایی توپولوژیک هستند که X گسسته است. دراین‌صورت هر تابع $f : X \to Y$ پیوسته است.

ب) فرض کنید $(X, \mathcal{T}_X)$ فضای توپولوژیک آشفته (یعنی $\mathcal{T}_X = \{\varnothing, X\}$) است، $(Y, \mathcal{T}_Y)$ فضای هاوسدورف است، و $f : X \to Y$ پیوسته است. ادعا می‌کنیم که f ثابت است. در

غیراین صورت، $x, y \in X$ وجود دارند که $f(x) \neq f(y)$. $U, V \in \mathcal{T}_Y$ را طوری انتخاب کنید که $f(x) \in U$، $f(y) \in V$، و $U \cap V = \varnothing$. چون f پیوسته است، $f^{-1}(U)$ در X باز، و ناتهی است زیرا شامل x است. بنا بر تعریف توپولوژی آشفته، $f^{-1}(U)$ باید برابر با X باشد. به این ترتیب، نتیجه می‌شود که $y \in f^{-1}(U)$، و بنابراین $f(y) \in U$، که تناقض است (فرض هاوسدورف بودن $(Y, \mathcal{T}_Y)$ را نمی‌توان حذف کرد؛ اگر Y نیز آشفته باشد، هر نگاشت از X به Y پیوسته است).

این دو مثال، به گونه‌ای مؤثر نشان می‌دهند که چگونه تابع‌های پیوسته بین فضاهای توپولوژیک، به توپولوژی‌هایی که آن فضاها به آنها مجهزند بستگی دارند. گاهی می‌خواهیم نگاشت‌هایی ویژه بین مجموعه‌ها پیوسته باشند و از این رو، توپولوژی‌ها را تعدیل می‌کنیم.

تعریف ۶.۲.۳ فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است، و $\mathcal{T}_۱$ و $\mathcal{T}_۲$ توپولوژی‌هایی بر X هستند. $\mathcal{T}_۱$ و $\mathcal{T}_۲$ را مقایسه‌پذیر می‌گوییم اگر $\mathcal{T}_۱ \subset \mathcal{T}_۲$ یا $\mathcal{T}_۲ \subset \mathcal{T}_۱$. اگر $\mathcal{T}_۲ \subset \mathcal{T}_۱$، می‌گوییم $\mathcal{T}_۱$ ضعیف‌تر از $\mathcal{T}_۲$، یا به‌طور هم‌ارز، $\mathcal{T}_۲$ قوی‌تر از $\mathcal{T}_۱$ است.

آشکارا، $\mathcal{T}_۱$ قوی‌تر از $\mathcal{T}_۲$ است اگر و تنها اگر $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_۱) \to (X, \mathcal{T}_۲)$ پیوسته باشد.

گزارهٔ ۷.۲.۳ فرض کنید X مجموعه است، $((Y_i, \mathcal{T}_i))_{i \in \mathbb{I}}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک است، و به‌ازای هر $i \in \mathbb{I}$، $f_i : X \to Y_i$ تابع است. دراین‌صورت توپولوژی‌ای بر X وجود دارد که ضعیف‌ترین توپولوژی بر X است و همهٔ نگاشت‌های f_i پیوسته هستند. گردایهٔ $\{f_i^{-۱}(U) : i \in \mathbb{I}, U \in \mathcal{T}_i\}$ زیرپایه‌ای برای این توپولوژی است.

برهان. فرض کنید $\mathcal{S} := \{f_i^{-۱}(U) : i \in \mathbb{I}, U \in \mathcal{T}_i\}$، و $\mathcal{T}$ گردایهٔ همهٔ اجتماع‌های اشتراک‌های متناهی مجموعه‌های در $\mathcal{S}$ است. دراین‌صورت $\mathcal{T}$ توپولوژی‌ای بر X است که $\mathcal{S}$ پایهٔ آن است، و بنا بر گزارهٔ ۴.۲.۳، هر $f_i : (X, \mathcal{T}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ به تابعی پیوسته تبدیل می‌شود.
فرض کنید $\mathcal{T}'$ توپولوژی‌ای بر X است که به‌ازای هر $i \in \mathbb{I}$، $f_i : (X, \mathcal{T}') \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ پیوسته است. بنابرگزارهٔ ۴.۲.۳، آشکار است که $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}'$، و لذا $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$؛ یعنی $\mathcal{T}$ ضعیف‌تر از $\mathcal{T}'$ است. ■

مناسبت گزارهٔ ۷.۲.۳، در بخش بعد روشن می‌شود.

همان‌گونه که در آغاز این بخش دیدیم، دنباله‌ها ابزاری بسیار محدود در مطالعهٔ فضاهای توپولوژیک (و تابع‌های پیوستهٔ روی آنها) هستند. با این وجود، هنگامی که در فصل پیش فضاهای متریک را مطالعه می‌کردیم، ورود دنباله‌ها در بحث‌ها اغلب بسیار مناسب بود. آیا راهی برای «کمک» دنباله‌ها

جهت استفاده در فضاهای توپولوژیک کلّی وجود دارد؟ وجود دارد، ولی به‌کارگیری آن، هزینه دارد: باید به جای $\mathbb{N}$، مجموعه‌های اندیس‌گذار کلّی‌تر را قرار دهیم.

تعریف ۸.۲.۳ می‌گوییم مجموعهٔ مرتب $\mathbb{A}$ جهت‌دار است اگر به‌ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$، $\gamma \in \mathbb{A}$یی موجود باشد که $\alpha \preceq \gamma$ و $\beta \preceq \gamma$.

مثال ۹.۲.۳ آ) هر مجموعهٔ کلاً مرتب، جهت‌دار است. به ویژه، $\mathbb{N}$ جهت‌دار است.

ب) فرض کنید S مجموعه است. دراین‌صورت $\mathfrak{P}(S)$ با ترتیب جزئیت، جهت‌دار است.

تعریف ۱۰.۲.۳ هر تور یا دنبالهٔ تعمیم یافته در مجموعهٔ S، عبارت است از تابعی از مجموعه‌ای جهت‌دار به S.

اگر $\mathbb{A}$ مجموعه‌ای باشد که به عنوان دامنهٔ تور به کار رفته است، اغلب از نماد $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ استفاده می‌کنیم؛ اگر در مورد $\mathbb{A}$ بیم ابهام نرود، می‌نویسیم $(x_\alpha)_\alpha$. آشکار است که دنباله، حالتی خاص از تور است.

مثال ۱۱.۲.۳ فرض کنید $a < b$ عددهای حقیقی هستند. هر افراز $\mathcal{P}$ از $[a, b]$، متشکل از تعدادی متناهی از اعداد $t_۰$، $t_۱$، ...، t_n است که $a = t_۰ < t_۱ < \cdots < t_n = b$. می‌نویسیم

$$\mathcal{P} = \{a = t_۰ < t_۱ < \cdots < t_n = b\}. \qquad (*)$$

گردایهٔ $\mathbb{P}$، متشکل از همهٔ افرازهای $[a, b]$، به‌طور طبیعی مرتب است؛ اگر $\mathcal{P}$ مطابق $(*)$ باشد، و

$$\mathcal{Q} = \{a = s_۰ < s_۱ < \cdots < s_m = b\},$$

تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q} \quad :\Longleftrightarrow \quad \{t_۰, t_۱, \ldots, t_n\} \subset \{s_۰, s_۱, \ldots, s_m\}.$$

آشکارا، این تعریف $\mathbb{P}$ را به مجموعه‌ای جهت‌دار تبدیل می‌کند. برای $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ی مطابق $(*)$، شناسهٔ $\mathcal{P}$ عبارت است از nـتایی $\xi = (\xi_۱, \ldots, \xi_n)$ که به‌ازای $j = ۱, \ldots, n$، $\xi_j \in [t_{j-۱}, t_j]$. به‌ازای $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$، شناسهٔ ξ، و تابع $f : [a, b] \to \mathbb{R}$، جمع ریمان متناظر به‌صورت

$$R(f; \mathcal{P}, \xi) := \sum_{j=۱}^{n} f(\xi_j)(t_j - t_{j-۱})$$

تعریف می‌شود. اگر به‌ازای هر $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$، شناسهٔ $\xi_{\mathcal{P}}$ را ثابت بگیریم، جمع‌های ریمان $(R(f; \mathcal{P}, \xi_{\mathcal{P}}))_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}}$، تور تشکیل می‌دهند.

آشکار است که تعریف ۱.۲.۳ را چگونه باید به تورهای کلّی تعمیم داد.

تعریف ۱۲.۲.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است. می‌گوییم تور $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ در X، همگرا به $x \in X$ است اگر به‌ازای هر $N \in \mathcal{N}_x$، $\alpha_N \in \mathbb{A}$ی موجود باشد که به‌ازای هر $\alpha \in \mathbb{A}$، اگر $\alpha_N \preceq \alpha$ آنگاه $x_\alpha \in N$. دراین‌صورت، می‌گوییم x حدّ $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ است، و می‌نویسیم $x = \lim_\alpha x_\alpha$ یا $x_\alpha \to x$.

نماد $\lim_\alpha x_\alpha = x$ را باید با احتیاط به کار برد: حد تور در فضای توپولوژیک، لزوماً یکتا نیست. یک مثال ساده، و البته افراطی، فضای توپولوژیک آشفتهٔ با بیش از یک عضو است: هر تور به هر نقطه‌ای همگرا است. بنابراین، نوشتن $\lim_\alpha x_\alpha = x$ به این معنی نیست که x حد تور $(x_\alpha)_\alpha$ است، بلکه یعنی x یکی از حدهای این تور است.

اکنون چند مثال از تورهای همگرا ارائه می‌دهیم که ممکن است بعضی از آنها آشناتر باشند.

مثال ۱۳.۲.۳ آ) در مثال ۱۱.۲.۳، فرض کنید f انتگرال‌پذیر ریمان بر $[a, b]$ است. دراین‌صورت $(R(f; \mathcal{P}, \xi_\mathcal{P}))_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}}$ همگرا است، یعنی

$$\lim_{\mathcal{P}} R(f; \mathcal{P}, \xi_\mathcal{P}) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

برعکس، اگر به‌ازای هر انتخاب $(\xi_\mathcal{P})_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}}$ از شناسه‌ها $(R(f; \mathcal{P}, \xi_\mathcal{P}))_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}}$ همگرا باشد و اگر این حد مستقل از $(\xi_\mathcal{P})_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}}$ باشد آنگاه f انتگرال‌پذیر ریمان است.

ب) فرض کنید $S \neq \varnothing$ مجموعه، و (Y, d) فضای متریک است. می‌گوییم تور $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ در $F(S, Y)$ بر S به $f \in F(S, Y)$ نقطه‌ای‌همگرا است اگر به‌ازای هر $x \in S$، $\lim_\alpha f_\alpha(x) = f(x)$؛ یعنی، هرگاه به‌ازای هر $x \in S$ و هر $\epsilon > 0$، $\alpha_{x,\epsilon} \in \mathbb{A}$یی موجود باشد که

$$d(f_\alpha(x), f(x)) < \epsilon \qquad (\alpha \in \mathbb{A}, \alpha_{x,\epsilon} \preceq \alpha);$$

وگوییم $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ بر S به f یکنواخت‌همگرا است اگر به‌ازای هر $\epsilon > 0$، $\alpha_\epsilon \in \mathbb{A}$یی موجود باشد که

$$d(f_\alpha(x), f(x)) < \epsilon \qquad (x \in S, \alpha \in \mathbb{A}, \alpha_\epsilon \preceq \alpha).$$

(در حالتی که $S \subset \mathbb{R}^n$، $Y = \mathbb{R}$، و $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ دنباله است، این تعریف‌ها همان تعریف‌های آشنا هستند.)

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان این مفهوم‌های همگرایی را با توپولوژی‌های $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ (که در مثال ۱۱.۱.۳ مورد بحث واقع شد) توصیف کرد، که در آن $\varnothing \neq \mathcal{C} \subset \mathfrak{P}(S)$ تحت اجتماع‌های متناهی پایدار است. فرض کنید $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ توری در $F(S,Y)$ است، و $f \in F(S,Y)$. چون گردایهٔ مجموعه‌های $\{N_{f,C,\epsilon} : C \in \mathcal{C}, \epsilon > \circ\}$ پایه‌ای برای $\mathcal{N}_f$ است، آشکارا، $\lim_\alpha f_\alpha = f$ با توپولوژی $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$، اگر و تنها اگر به‌ازای هر $C \in \mathcal{C}$ و هر $\epsilon > \circ$، $\alpha_{C,\epsilon} \in \mathbb{A}$یی موجود باشد که

$$\sup_{x\in C} d(f_\alpha(x), f(x)) < \epsilon \qquad (\alpha \in \mathbb{A}, \alpha_{C,\epsilon} \preceq \alpha).$$

فرض کنید $\mathcal{F}$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی S، و $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ در $F(S,Y)$ به $f \in F(S,Y)$ نقطه‌ای‌همگرا است. فرض کنید $F \in \mathcal{F}$، مثلاً $F = \{x_\backslash, \ldots, x_n\}$، و $\epsilon > \circ$. دراین‌صورت، به‌ازای $j = \backslash, \ldots, n$، $\alpha_{j,\epsilon} \in \mathbb{A}$یی وجود دارد که

$$d(f_\alpha(x_j), f(x_j)) < \epsilon \qquad (\alpha \in \mathbb{A}, \alpha_{j,\epsilon} \preceq \alpha).$$

چون $\mathbb{A}$ جهت‌دار است، $\alpha_{F,\epsilon} \in \mathbb{A}$یی وجود دارد که به‌ازای هر $j = \backslash, \ldots, n$، $\alpha_{j,\epsilon} \preceq \alpha_{F,\epsilon}$. در نتیجه،

$$\max_{j=\backslash,\ldots,n} d(f_\alpha(x_j), f(x_j)) < \epsilon \qquad (\alpha \in \mathbb{A}, \alpha_{F,\epsilon} \preceq \alpha),$$

پس همگرایی با توپولوژی $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ روی می‌دهد. برعکس (می‌توان به‌سادگی تحقیق کرد که) اگر تور با توپولوژی $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ همگرا باشد، نقطه‌ای‌همگرا است. بنابراین، گاهی توپولوژی $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ را توپولوژی همگرایی نقطه‌ای (بر S) می‌نامیم.

به‌طور مشابه، همگرایی یکنواخت چیزی جز همگرایی با $\mathcal{T}_{\{S\}}$ نیست، از این رو گاهی به این توپولوژی با عنوان توپولوژی همگرایی یکنواخت ارجاع می‌دهیم.

همان طورکه در آغاز این بخش دیدیم، دنباله‌ها ابزاری نامناسب برای مطالعهٔ فضاهای توپولوژیک هستند زیرا از جمله، گزارهٔ ۴.۳.۲ برقرار نیست. به‌طوری‌که معلوم خواهد شد، اگر تورها را جایگزین دنباله‌ها کنیم، این وضع تغییر می‌کند.

گزارهٔ ۱۴.۲.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، و $S \subset X$. دراین‌صورت $\overline{S}$ شامل نقاطی از X است که حدّ توری در S باشند.

برهان. فرض کنید $x \in \overline{S}$. $\mathcal{N}_x$ را با عکس شمول جهت‌دار کنید؛ یعنی،

$$M \preceq N \quad :\Longleftrightarrow \quad N \subset M \quad (N, M \in \mathcal{N}_x).$$

بنا بر گزارهٔ ۱۸.۱.۳، به‌ازای هر $N \in \mathcal{N}_x$، $x_N \in N \cap S$ی وجود دارد. دراین‌صورت، $(x_N)_{N\in\mathcal{N}_x}$ توری در S است که $x = \lim_N x_N$.

فرض کنید $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ توری در S است که $x = \lim_\alpha x_\alpha$، و $x \in U := X\backslash\overline{S}$. دراین‌صورت، $\alpha_U \in \mathbb{A}$یی وجود دارد که به‌ازای هر $\alpha \in \mathbb{A}$ با شرط $\alpha_U \preceq \alpha$، $x_\alpha \in U \subset X\backslash S$، و این ناممکن است. ∎

نتیجهٔ ۱۵.۲.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است. دراین‌صورت $F \subset X$ بسته است اگر و تنها اگر حدّ هر تور در F و همگرا در X، در F باشد.

گزارهٔ ۱۴.۲.۳، مثال‌هایی بیشتر (و طبیعی‌تر از فضاهای آشفته) را برای عدم یکتایی حد در فضاهای توپولوژی دلخواه به‌دست می‌دهد.

مثال ۱۶.۲.۳ فرض‌کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار است که حوزه‌ای صحیح است. دراین‌صورت، زیرمجموعهٔ تک‌عضوی $\{(\circ)\}$ در $\mathrm{Spec}(R)$ چگال است (مثال ۲۲.۱.۳). از این‌رو بنا بر گزارهٔ ۱۴.۲.۳، تور ثابت $((\circ))_\alpha$ بدون توجه به مجموعهٔ اندیس‌گذار آن به هر نقطه در $\mathrm{Spec}(R)$ همگرا است. اگر R میدان نباشد (مثلاً $R = \mathbb{Z}$)، $\mathrm{Spec}(R)$ عضوهایی غیر از $(\circ)$ دارد. در این حالت، تور $((\circ))_\alpha$ حدهایی متعدد دارد، یعنی هر نقطه در $\mathrm{Spec}(R)$ حدّ آن است.

قضیهٔ بعد نشان می‌دهد که نقش تعریف ۳.۱.۳ دربارهٔ یکتایی حد در فضاهای توپولوژیک اساسی است.

گزارهٔ ۱۷.۲.۳ برای فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$، حکم‌های زیر هم‌ارزند.

(i) X هاوسدورف است.

(ii) هر تور همگرا در X، حدّ یکتا دارد.

برهان. (ii) $\Longleftarrow$ (i): فرض کنید $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ توری در X است که به‌ازای $x, x' \in X$ که $x \neq x'$، $x_\alpha \to x$ و $x_\alpha \to x'$. بنا بر تعریف ۳.۱.۳، $N \in \mathcal{N}_x$ و $M \in \mathcal{N}_{x'}$ وجود دارند که $N \cap M = \varnothing$. بنا بر تعریف همگرایی، $\alpha_N, \alpha_M \in \mathbb{A}$یی وجود دارند که به‌ازای هر $\alpha \in \mathbb{A}$، اگر $\alpha_N \preceq \alpha$ آنگاه $x_\alpha \in N$، و به‌ازای هر $\alpha \in \mathbb{A}$، اگر $\alpha_M \preceq \alpha$ آنگاه $x_\alpha \in M$. چون $\mathbb{A}$ جهت‌دار است، می‌توان $\alpha \in \mathbb{A}$ را طوری یافت که $\alpha_N \preceq \alpha$ و $\alpha_M \preceq \alpha$. در نتیجه αیی یافت می‌شود که $x_\alpha \in N \cap M$، و این ناممکن است زیرا $N \cap M = \varnothing$.

(i) $\Longleftarrow$ (ii): فرض کنید X هاوسدورف نیست. دراین‌صورت $x, y \in X$ی وجود دارند که $x \neq y$، و به‌ازای هر $N \in \mathcal{N}_x$ و $M \in \mathcal{N}_y$، $N \cap M \neq \varnothing$. $\mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y$ را به این صورت جهت‌دار کنید که به‌ازای هر $(N_1, M_1), (N_2, M_2) \in \mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y$،

$$(N_1, M_1) \preceq (N_2, M_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad N_2 \subset N_1 \text{ و } M_2 \subset M_1.$$

به‌ازای هر $(N, M) \in \mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y$، $x_{(N,M)}$ را در $N \cap M$ انتخاب کنید. بررسی تور بودن $(x_{(N,M)})_{(N,M)\in\mathcal{N}_x\times\mathcal{N}_y}$ و نشان دادن همگرایی آن به x و y سرراست است. ∎

خواهیم دید که با جایگزینی تورها به جای دنباله‌ها، مشابه قضیهٔ ۷.۳.۲ برقرار است.

قضیهٔ ۱۸.۲.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T}_X)$ و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ فضای توپولوژیک هستند، و $x_\circ \in X$. دراین‌صورت، برای تابع $f : X \to Y$ حکم‌های زیر هم‌ارزند.

(i) f در $x_\circ$ پیوسته است.

(ii) به‌ازای هر تور $(x_\alpha)_\alpha$ در X که $\lim_\alpha x_\alpha = x_\circ$، $\lim_\alpha f(x_\alpha) = f(x_\circ)$.

برهان. (ii) $\Longleftarrow$ (i): فرض کنید $(x_\alpha)_\alpha$ توری در X است که $\lim_\alpha x_\alpha = x_\circ$، و $N \in \mathcal{N}_{f(x_\circ)}$. بنابر تعریف پیوستگی در یک نقطه، $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_{x_\circ}$. در نتیجه اندیس $\alpha_{f^{-1}(N)}$ی وجود دارد که به‌ازای هر α که $\alpha_{f^{-1}(N)} \preceq \alpha$، $x_\alpha \in f^{-1}(N)$. ولی این یعنی برای این αها، $f(x_\alpha) \in N$. چون $N \in \mathcal{N}_{f(x_\circ)}$ دلخواه بود، $\lim_\alpha f(x_\alpha) = f(x_\circ)$.

(i) $\Longleftarrow$ (ii): فرض کنید $N \in \mathcal{N}_{f(x_\circ)}$، و برای نیل به تناقض فرض کنید $f^{-1}(N) \notin \mathcal{N}_{x_\circ}$. در نتیجه، به‌ازای هر زیرمجموعهٔ باز U از X شامل $x_\circ$، $U \not\subset f^{-1}(N)$. فرض کنید $\mathcal{U}_{x_\circ}$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های باز X شامل $x_\circ$ است. دراین‌صورت $\mathcal{U}_{x_\circ}$ زیرمجموعه‌ای جهت‌دار (با عکس شمول) از $\mathcal{N}_{x_\circ}$ است. بنابر فرض، به‌ازای هر $U \in \mathcal{U}_{x_\circ}$، می‌توان $x_U \in U \backslash f^{-1}(N)$ی را انتخاب کرد. آشکار است که $\lim_U x_U = x_\circ$. در حالی که، چون به‌ازای هر $U \in \mathcal{U}_{x_\circ}$، $f(x_U) \notin N$، باید $f(x_U) \not\to f(x_\circ)$. ∎

می‌توان از قضیهٔ ۱۸.۲.۳ برای بیان وصفی دیگر از توپولوژی معرفی شده در گزارهٔ ۷.۲.۳ استفاده کرد.

گزارهٔ ۱۹.۲.۳ فرض کنید X مجموعه است، $((Y_i, \mathcal{T}_i))_{i\in\mathbb{I}}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک است، به‌ازای هر $i \in \mathbb{I}$، $f_i : X \to Y_i$ تابع است، و $\mathcal{T}$ ضعیف‌ترین توپولوژی بر X است که همهٔ نگاشت‌های f_i پیوسته شوند. دراین‌صورت، تور $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ در $(X, \mathcal{T})$ به $x \in X$ همگرا است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $i \in \mathbb{I}$، $(f_i(x_\alpha))_{\alpha\in\mathbb{A}}$ در $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ به $f_i(x)$ همگرا باشد.

برهان. فرض کنید $x = \lim_\alpha x_\alpha$ در $(X, \mathcal{T})$. چون هر $f_i : X \to Y_i$ پیوسته است، به‌ازای هر $i \in \mathbb{I}$، $\lim_\alpha f_i(x_\alpha) = f_i(x)$ در $(Y_i, \mathcal{T}_i)$.

برعکس، فرض کنید به‌ازای هر $i \in \mathbb{I}$، $\lim_\alpha f_i(x_\alpha) = f_i(x)$ در $(Y_i, \mathcal{T}_i)$. فرض کنید N همسایگی x در $(X, \mathcal{T})$ است. بنابر تعریف همسایگی، مجموعهٔ باز U در $(X, \mathcal{T})$ وجود دارد که $x \in U \subset N$. بنابر توصیفی که در گزارهٔ ۷.۲.۳ از زیرپایه‌ای از $\mathcal{T}$ به عمل آمد، $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$، همراهِ مجموعه‌های $U_j \in \mathcal{T}_{i_j}$، $j = 1, \ldots, n$، موجودند که

$$x \in f_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_{i_n}^{-1}(U_n) \subset U.$$

چون به‌ازای $j = 1, \ldots, n$، $\lim_\alpha f_{i_j}(x_\alpha) = f_{i_j}(x)$، باید α_1، …، α_n در $\mathbb{A}$ موجود باشند که

$$f_{i_j}(x_\alpha) \in U_j \qquad (j = 1, \ldots, n,\ \alpha \in \mathbb{A},\ \alpha_j \preceq \alpha).$$

چون $\mathbb{A}$ جهت‌دار است، $\alpha_N \in \mathbb{A}$یی وجود دارد که به‌ازای هر $j = 1, \ldots, n$، $\alpha_j \preceq \alpha_N$. در نتیجه،

$$x_\alpha \in f_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_{i_n}^{-1}(U_n) \subset U \subset N \qquad (\alpha \in \mathbb{A},\ \alpha_N \preceq \alpha),$$

از این رو $x = \lim_\alpha x_\alpha$ در $(X, \mathcal{T})$. ■

تمرین‌ها

۱. فرض کنید $(X, \mathcal{T}_X)$، $(Y, \mathcal{T}_Y)$، و $(Z, \mathcal{T}_Z)$ فضاهایی توپولوژیک هستند، $g : X \to Y$ در $x_\circ \in X$ و $f : Y \to Z$ در $g(x_\circ) \in Y$ پیوسته است. ثابت کنید که $f \circ g$ در $x_\circ$ پیوسته است.

۲. فرض کنید $(X, \mathcal{T}_X)$، و $(Y, \mathcal{T}_Y)$، فضای توپولوژیک هستند، و $\mathcal{B}_Y$ و $\mathcal{S}_Y$ به‌ترتیب، پایه و زیرپایه‌ای برای $\mathcal{T}_Y$ هستند. ثابت کنید که $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $B \in \mathcal{B}_Y$، $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$، و اگر و تنها اگر به‌ازای هر $S \in \mathcal{S}_Y$، $f^{-1}(S) \in \mathcal{T}_X$.

۳. فرض کنید $(X, \mathcal{T}_X)$ و $(Y, \mathcal{T}_Y)$، فضای توپولوژیک هستند، X_1 و X_2 دو زیرفضای X که $X = X_1 \cup X_2$، و هر دو باز یا هر دو بسته هستند. نشان دهید که $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر به‌ازای $j = 1, 2$، $f|_{X_j}$ پیوسته باشد.

۴. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک شمارای اوّل است. ثابت کنید که به‌ازای هر $S \subset X$، بستار S شامل $x \in X$هایی است که حد دنباله‌ای در S هستند.

۵. فرض کنید R و S حلقه‌های جابه‌جایی و یک‌دار، و $\phi : R \to S$ همریختی یکانی حلقه‌ها است، یعنی نگاشتی جمعی و ضربی که همانی R را به همانی S می‌نگارد. ثابت کنید

آ) به‌ازای هر ایده‌آل I از S، نگارهٔ وارون آن، $\phi^{-1}(I)$، ایده‌آلی از R است؛ اگر I سره یا اول باشد $\phi^{-1}(I)$ نیز چنین است؛

ب) اگر $\mathrm{Spec}(S)$ و $\mathrm{Spec}(R)$ به توپولوژی زاریسکی مجهز شوند، نگاشت

$$\phi^* : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R), \qquad \mathfrak{p} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{p})$$

پیوسته است.

۶. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک، و $\approx$ رابطه‌ای هم‌ارزی بر X است. ثابت کنید که توپولوژی خارج‌قسمتی بر $X/\approx$ (تمرین ۸.۱.۳ را نگاه کنید) قوی‌ترین توپولوژی بر $X/\approx$ است که نسبت به آن نگاشت خارج‌قسمتی

$$X \to X/\approx, \qquad x \mapsto [x]$$

پیوسته است.

۷. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، و $f, g : X \to \mathbb{F}$ پیوسته هستند. ثابت کنید $f + g$، fg، و (به‌شرطی که به‌ازای هر $x \in X$، $f(x) \neq 0$) $\frac{1}{f}$ هم پیوسته هستند.

۸. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک، و $f, g : X \to \mathbb{R}$ پیوسته هستند. ثابت کنید که $\max\{f, g\}$ و $\min\{f, g\}$ پیوسته هستند.

۹. فرض کنید $(X, \mathcal{T}_X)$، و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ فضای توپولوژیک هستند، $S \subset X$، و $f : X \to Y$ پیوسته است. ثابت کنید که $f(\overline{S}) \subset \overline{f(S)}$.

۱۰. فرض کنید $(X, \mathcal{T}_X)$، و $(Y, \mathcal{T}_Y)$، فضای توپولوژیک هستند، Y هاوسدورف است، D در X چگال است، و $f, g : X \to Y$ تابع‌هایی پیوسته هستند که $f|_D = g|_D$. ثابت کنید که $f = g$. اگر فرض هاوسدورف بودن Y را حذف کنیم چه روی می‌دهد؟

۱۱. فرض کنید $\mathcal{F}$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی $[0, 1]$، و $F([0, 1], \mathbb{F})$ به توپولوژی $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ مجهز است. ثابت کنید که تابع‌های پیوسته از $[0, 1]$ به $\mathbb{F}$ در $(F([0, 1], \mathbb{F}), \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ چگال هستند، ولی هیچ دنباله‌ای از تابع‌های پیوسته از $[0, 1]$ به $\mathbb{F}$ که به تابع $f : [0, 1] \to \mathbb{F}$ که با

$$f(t) := \begin{cases} 1, & t \notin [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

تعریف شده همگرا باشد، وجود ندارد (راهنمایی: بنا بر مثال ۱۳.۲.۳(ب)، همگرایی در $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ همگرایی نقطه‌ای است، و با استفاده از تمرین ۷.۴.۲ ثابت کنید که f نمی‌تواند حدّ دنباله‌ای از تابع‌های پیوسته باشد).

۱۲. فرض کنید (X,d) فضای متریک است. تور $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ را کوشی می‌گوییم اگر به‌ازای هر $\epsilon > 0$، $\alpha_\epsilon \in \mathbb{A}$یی موجود باشد که به‌ازای هر $\alpha,\beta \in \mathbb{A}$، اگر $\alpha_\epsilon \preceq \alpha,\beta$ آنگاه $d(x_\alpha, x_\beta) < \epsilon$.

آ) ثابت کنید که هر تور همگرا در X، کوشی است.

ب) ثابت کنید که X کامل است اگر و تنها اگر هر تور کوشی در X همگرا باشد.

۳.۳ فشردگی

فشردگی در فضاهای توپولوژیک، مانند حالت متریک تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۳.۳ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، و $S \subset X$. هر پوشش باز برای S عبارت است از گردایهٔ $\mathcal{U}$ از زیرمجموعه‌های باز X که $S \subset \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$.

تعریف ۲.۳.۳ زیرمجموعهٔ K از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را فشرده می‌گوییم اگر به‌ازای هر پوشش باز $\mathcal{U}$ از K، $U_1,\dots,U_n \in \mathcal{U}$ موجود باشند که $K \subset U_1 \cup \dots \cup U_n$.

پیش از همراه کردن این تعریف با چند مثال (متریک‌ناپذیر)، تعریفی دیگر می‌آوریم.

تعریف ۳.۳.۳ می‌گوییم فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ ویژگی اشتراک متناهی دارد هرگاه به‌ازای هر گردایهٔ $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های بستهٔ X با ویژگی $\bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\} = \varnothing$، $F_1,\dots,F_n \in \mathcal{F}$ موجود باشند که $F_1 \cap \dots \cap F_n = \varnothing$.

اثبات حکم زیر سرراست است (کافی است متمم‌ها را در نظر بگیرید).

گزارهٔ ۴.۳.۳ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است. حکم‌های زیر هم‌ارزند.

(i) X فشرده است.

(ii) X ویژگی اشتراک متناهی دارد.

ویژگی اشتراک متناهی را به این دلیل طرح کردیم که گاهی بررسی آن ساده‌تر از بررسی فشردگی است.

مثال ۵.۳.۳ فرض کنید که R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار است. ادعا می‌کنیم که $\mathrm{Spec}(R)$ ویژگی اشتراک متناهی دارد (و از این رو فشرده است). فرض کنید $\mathcal{I}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های R است که

$$\bigcap\{V(I) : I \in \mathcal{I}\} = V\left(\sum\{I : I \in \mathcal{I}\}\right) = \varnothing.$$

این ایجاب می‌کند که $\sum\{I : I \in \mathcal{I}\} = \mathcal{R}$: در غیراین صورت، بنا بر مثال ۴.۳.۱ ایده‌آلی ماکسیمال شامل $\sum\{I : I \in \mathcal{I}\}$ موجود است، و چون ایده‌آل‌های ماکسیمال اول هستند، این تناقض است. چون $1 \in \sum\{I : I \in \mathcal{I}\}$، $I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{I}$ و به‌ازای $j = 1, \ldots, n$، $a_j \in I_j$ موجودند که $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$. این نتیجه می‌دهد که $1 \in I_1 + \cdots + I_n$. چون R تنها ایده‌آلی از R است که شامل ۱ است، باید $I_1 + \cdots + I_n = R$، و در نتیجه

$$\varnothing = V(R) = V(I_1 + \cdots + I_n) = V(I_1) \cap \cdots \cap V(I_n).$$

در نتیجه $\mathrm{Spec}(R)$ ویژگی اشتراک متناهی دارد.

همان‌طورکه انتظار می‌رود، بسیاری از ویژگی‌های فضاهای متریک فشرده در واقع در مورد فضاهای توپولوژیک فشرده نیز برقرارند.

گزارهٔ ۶.۳.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک، و Y زیرفضایی از X است.

(i) اگر X فشرده و Y در X بسته باشد آنگاه Y فشرده است.

(ii) اگر X هاوسدورف و Y فشرده باشد آنگاه Y در X بسته است.

برهان. (i) مانند فضاهای متریک ثابت می‌شود (گزارهٔ ۴.۵.۲ (i)).

برای اثبات (ii)، فرض کنید $x \in X \backslash Y$. به‌ازای هر $y \in Y$، زیرمجموعه‌های باز U_y و V_y از X وجود دارند که $x \in U_y$، $y \in V_y$، و $U_y \cap V_y = \varnothing$. چون $\{V_y : y \in Y\}$ پوششی باز برای Y است، $y_1, \ldots, y_n \in Y$ وجود دارند که

$$Y \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}.$$

با فرض، $U := U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$، به‌دست می‌آوریم

$$U \cap Y \subset U \cap (V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}) = \varnothing,$$

از این رو $X \backslash Y$ همسایگی x است. چون $x \in X \backslash Y$ دلخواه بود، $X \backslash Y$ باز است. ∎

فرض هاوسدورف بودن X در گزارهٔ ۶.۳.۳ (ii) را نمی‌توان حذف کرد.

مثال ۷.۳.۳ فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار است که حوزهٔ صحیح است، ولی میدان نیست؛ مثلاً $R = \mathbb{Z}$. دراین‌صورت زیرمجموعهٔ تک‌عضوی $\{(\circ)\}$ از $\mathrm{Spec}(R)$ در $\mathrm{Spec}(R)$ چگال است، ولی بسته نیست (در غیراین صورت $(\circ)$ تنها ایده‌آل اول R است، و این باعث می‌شود که R میدان شود). با این وجود، آشکارا $\{(\circ)\}$ که زیرمجموعه‌ای تک‌عضوی است، فشرده است.

گزارهٔ زیر نیز مانند حالت متریک (با همان برهان) برقرار است.

گزارهٔ ۸.۳.۳ فرض کنید $(K, \mathcal{T}_K)$ فضای توپولوژیک فشرده، $(Y, \mathcal{T}_Y)$ فضای توپولوژیک دلخواه، و $f : K \to Y$ پیوسته است. دراین‌صورت $f(K)$ فشرده است.

نتیجهٔ ۹.۳.۳ فرض کنید $(K, \mathcal{T}_K)$ فضای توپولوژیک فشردهٔ ناتهی، و $f : K \to \mathbb{R}$ پیوسته است. دراین‌صورت f مینیمم و ماکسیمم خود بر K را می‌گیرد.

اکنون با استفاده ازگزارهٔ ۸.۳.۳، یکی از مفیدترین نتیجه‌ها را در مورد فضاهای توپولوژیک فشرده ثابت می‌کنیم. نخست تعریفی دیگر بیان می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۳.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T}_X)$ و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ فضای توپولوژیک هستند. هر همسان‌ریختی بین X و Y عبارت است از نگاشتی دوسویی مانند $f : X \to Y$ که هردوی f و f^{-1} پیوسته هستند. اگر همسان‌ریختی‌ای بین X و Y وجود داشته باشد، این دو فضا همسان‌ریخت نامیده می‌شوند.

به‌طور خلاصه: دو فضای توپولوژیک همسان‌ریخت را نمی‌توان فضاهای توپولوژیک متفاوت دانست؛ یعنی، هر ویژگی توپولوژیکی که یکی از آنها داشته باشد، دیگری نیز از آن بهره‌مند است.

قضیهٔ ۱۱.۳.۳ فرض کنید $(K, \mathcal{T}_K)$ و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ فضاهایی توپولوژیک هستند که K فشرده و Y هاوسدورف است، و فرض کنید که $f : K \to Y$ دوسویی و پیوسته است. دراین‌صورت f همسان‌ریختی است.

برهان. گزارهٔ ۴.۲.۳ (iii) را برای f^{-1} تحقیق می‌کنیم. فرض کنید که $F \subset K$ بسته است. چون f دوسویی است، آشکارا نگارهٔ وارون F تحت f^{-1} دقیقاً $f(F)$ است.

چون K فشرده است، بنا بر گزارهٔ ۶.۳.۳ (i)، F نیز فشرده است. در نتیجه بنا بر گزارهٔ ۸.۳.۳ $f(F)$ در Y فشرده، و از این رو (چون Y هاوسدورف است) بنا بر گزارهٔ ۶.۳.۳ (ii) بسته است. به این ترتیب گزارهٔ ۴.۲.۳ (iii) در مورد f^{-1} برقرار است، و در نتیجه پیوستگی f^{-1} ثابت می‌شود. ∎

نتیجهٔ ۱۲.۳.۳ فرض کنید X مجموعه است، و $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ توپولوژی‌هایی مقایسه‌پذیر بر X هستند که هر یک از آنها X را به فضای هاوسدورف فشرده تبدیل می‌کند. دراین‌صورت $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

یک فضای متریک فشرده است اگر و تنها اگر هر دنباله در این فضا زیردنباله‌ای همگرا داشته باشد. همان‌طورکه در بخش پیش دیدیم، دنباله‌ها برای بحث در مورد فضاهای توپولوژیک کلّی، مناسب نیستند. اکنون، به روشی مشابه، با به‌کارگیری تورها فضاهای توپولوژیک فشرده را سرشت‌نمایی می‌کنیم. نخست نیاز داریم که منظور از زیرتور را مشخص کنیم.

تعریف ۱۳.۳.۳ فرض کنید که $\mathbb{A}$ و $\mathbb{B}$ مجموعه‌های جهت‌دار هستند. نگاشت $\phi : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ را هم‌پایان می‌گوییم اگر به‌ازای هر $\alpha \in \mathbb{A}$، $\beta_\alpha \in \mathbb{B}$ای موجود باشد که به‌ازای هر $\beta \in \mathbb{B}$، اگر $\beta_\alpha \preceq \beta$ آنگاه $\alpha \preceq \phi(\beta)$.

تعریف ۱۴.۳.۳ فرض کنید S مجموعه‌ای ناتهی است، و $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ و $(y_\beta)_{\beta\in\mathbb{B}}$ تورهایی در S هستند. دراین‌صورت می‌گوییم $(y_\beta)_{\beta\in\mathbb{B}}$ زیرتور $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ است اگر به‌ازای نگاشت آغازی‌ای مانند $\phi : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$، $y_\beta = x_{\phi(\beta)}$.

اگر $(y_\beta)_\beta$ زیرتور $(x_\alpha)_\alpha$ باشد، گاهی به جای $(y_\beta)_\beta$ یا $(x_{\phi(\beta)})_\beta$ می‌نویسیم $(x_{\alpha_\beta})_\beta$.

البته، هر زیردنبالهٔ دنباله زیرتور آن است. ولی تأکید می‌کنیم که زیرتور دنباله لزوماً زیردنباله نیست: در مثال ۲۲.۳.۳ی زیر، با دنباله‌ای روبه‌رو هستیم که زیرتور همگرا دارد، ولی زیردنبالهٔ همگرا ندارد.

با وجود این، مانند دنباله‌ها، حکم زیر برقرار است.

گزارهٔ ۱۵.۳.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک، $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ توری در X، و $x \in X$ یک حدّ $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ است. دراین‌صورت هر زیرتور $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ نیز به x همگرا است.

برهان. فرض کنید $(y_\beta)_{\beta\in\mathbb{B}}$ زیرتور $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ با نگاشت هم‌پایان $\phi : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ است.

فرض کنید $N \in \mathcal{N}_x$. چون $x = \lim_\alpha x_\alpha$، $\alpha_N \in \mathbb{A}$ای وجود دارد که به‌ازای هر $\alpha \in \mathbb{A}$، اگر $\alpha_N \preceq \alpha$ آنگاه $x_\alpha \in N$. چون ϕ هم‌پایان است، $\beta_N \in \mathbb{B}$ای وجود دارد که به‌ازای هر $\beta \in \mathbb{B}$، اگر $\beta_N \preceq \beta$ آنگاه $\alpha_N \preceq \phi(\beta)$. در نتیجه به ازای هر $\beta \in \mathbb{B}$، اگر $\beta_N \preceq \beta$ آنگاه $y_\beta = x_{\phi(\beta)} \in N$. ■

تعریف و گزارهٔ زیر نیز مفید هستند.

تعریف ۱۶.۳.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک، و $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ توری در X است. نقطهٔ

$x \in X$ را نقطهٔ انباشتگی $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ می‌گوییم اگر به‌ازای هر $\alpha \in \mathbb{A}$ و هر $N \in \mathcal{N}_x$، $\beta \in \mathbb{A}$ای وجود داشته باشد که $\alpha \preceq \beta$ و $x_\beta \in N$.

گزارهٔ ۱۷.۳.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک، و $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ توری در X است. دراین‌صورت به‌ازای $x \in X$ حکم‌های زیر هم‌ارزند.

(i) x یک نقطهٔ انباشتگی $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ است.

(ii) زیرتوری از $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ به x همگرا است.

برهان. (ii) $\Longleftarrow$ (i): فرض کنید $\mathbb{B} := \mathbb{A}\times\mathcal{N}_x$. به‌ازای $(\alpha_۱, N_۱), (\alpha_۲, N_۲) \in \mathbb{B}$ تعریف کنید:

$$(\alpha_۱, N_۱) \preceq (\alpha_۲, N_۲) \quad :\Longleftrightarrow \quad \alpha_۱ \preceq \alpha_۲ \text{ و } N_۲ \subset N_۱.$$

این تعریف $\mathbb{B}$ را به مجموعه‌ای جهت‌دار تبدیل می‌کند. فرض کنید $(\alpha, N) \in \mathbb{B}$. بنابر تعریف نقطهٔ انباشتگی، $\phi(\alpha, N) \in \mathbb{A}$ای وجود دارد که $\alpha \preceq \phi(\alpha, N)$ و $x_{\phi(\alpha,N)} \in N$. نگاشت $\phi : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ هم‌پایان است، و تور $(x_{\phi(\alpha,N)})_{(\alpha,N)\in\mathbb{B}}$ به x همگرا است.

(i) $\Longleftarrow$ (ii): فرض کنید $\mathbb{B}$ مجموعه‌ای جهت‌دار، و $\phi : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ هم‌پایان است و $(x_{\phi(\beta)})_{\beta\in\mathbb{B}}$ به x همگرا است. فرض کنید $N \in \mathcal{N}_x$ و $\alpha \in \mathbb{A}$. چون ϕ هم‌پایان است، $\beta_\alpha \in \mathbb{B}$ای وجود دارد که به‌ازای هر $\beta \in \mathbb{B}$، اگر $\beta_\alpha \preceq \beta$ آنگاه $\alpha \preceq \phi(\beta)$. چون $x = \lim_\beta x_{\phi(\beta)}$، $\beta_N \in \mathbb{B}$ای وجود دارد که به‌ازای هر $\beta \in \mathbb{B}$، اگر $\beta_N \preceq \beta$ آنگاه $x_{\phi(\beta)} \in N$. چون $\mathbb{B}$ جهت‌دار است، $\beta \in \mathbb{B}$ای وجود دارد که $\beta_\alpha \preceq \beta$ و $\beta_N \preceq \beta$. در نتیجه $\alpha \preceq \phi(\beta)$ و $x_{\phi(\beta)} \in N$. ■

اکنون می‌توانیم مشابه قضیهٔ ۱۰.۵.۲ را برای فضاهای توپولوژیک دلخواه ثابت کنیم.

قضیهٔ ۱۸.۳.۳ برای فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ حکم‌های زیر هم‌ارزند:

(i) X فشرده است.

(ii) هر تور در X زیرتوری همگرا دارد.

برهان. (ii) $\Longleftarrow$ (i): فرض کنید $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ توری در X است. بنابر گزارهٔ ۱۷.۳.۳، کافی است ثابت کنیم که $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ نقطهٔ انباشتگی دارد. برای نیل به تناقض، فرض کنید $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ هیچ نقطهٔ انباشتگی ندارد. دراین‌صورت، به‌ازای هر $x \in X$، همسایگی U_x از x (که در صورت لزوم با کوچک کردن آن می‌توان آن را باز انتخاب کرد) و اندیس $\alpha_x \in \mathbb{A}$ای وجود دارد که به‌ازای هر $\alpha \in \mathbb{A}$، اگر

$\alpha_x \preceq \alpha$ آنگاه $x_\alpha \notin U_x$. گردایهٔ $\{U_x : x \in X\}$ پوششی باز برای X است. چون X فشرده است، $x_1, \ldots, x_n \in X$ وجود دارند که

$$X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}.$$

$\alpha \in \mathbb{A}$ را طوری انتخاب کنید که به‌ازای $j = 1, \cdots, n$، $\alpha_{x_j} \preceq \alpha$. پس

$$x_\alpha \notin U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n} = X,$$

که ناممکن است.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): فرض کنید X فشرده نیست. دراین‌صورت پوشش باز $\mathcal{U}$ از X موجود است که هیچ زیرپوشش متناهی ندارد. فرض کنید $\mathbb{U}$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی $\mathcal{U}$ است که با ترتیب شمول مرتب شده است. به‌ازای هر $\upsilon \in \mathbb{U}$، عضوی مثل x_υ در

$$X \backslash \bigcup\{U : U \in \upsilon\} = \bigcap\{X \backslash U : U \in \upsilon\}$$

وجود دارد (در غیراین صورت، $\mathcal{U}$ زیرپوششی متناهی خواهد داشت). بنا بر فرض، تور $(x_\upsilon)_{\upsilon \in \mathbb{U}}$ نقطهٔ انباشتگی‌ای مانند $x \in X$ دارد.

$U \in \mathcal{U}$ را ثابت بگیرید. بنا بر تعریف، $\{U\} \in \mathbb{U}$. بنابراین، بنا بر تعریف نقطهٔ انباشتگی، به‌ازای هر همسایگی N از x عضو $\upsilon_U \in \mathbb{U}$ وجود دارد که $\{U\} \preceq \upsilon_U$ (یعنی $U \in \upsilon_U$) و $x_{\upsilon_U} \in N$. چون

$$x_{\upsilon_U} \in \bigcap\{X \backslash V : V \in \upsilon_U\} \subset X \backslash U,$$

باید $N \cap (X \backslash U) \neq \varnothing$. فرض کنید $x \in U$. با توجه به اینکه دراین‌صورت U همسایگی باز x است، بحث پیش نشان می‌دهد که $U \cap (X \backslash U) \neq \varnothing$، و این ناممکن است. در نتیجه $x \in X \backslash U$.

چون $U \in \mathcal{U}$ دلخواه است، سرانجام به‌دست می‌آوریم

$$x \in \bigcap\{X \backslash U : U \in \mathcal{U}\} = X \backslash \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\} = \varnothing,$$

که این نیز ناممکن است. ■

در مثال ۲۲.۳.۳ی زیر خواهیم دید که حکم متناظر در مورد زیردنباله‌های دنباله‌ها در فضاهای فشرده، برای فضاهای توپولوژیک دلخواه نادرست است.

اکنون زمینهٔ قضیهٔ تیخونوف را، که یکی از اساسی‌ترین نتیجه‌ها در توپولوژی عمومی است، مهیّا می‌کنیم.

تعریف ۱۹.۳.۳ فرض کنید $((X_i,\mathcal{T}_i))_{i\in\mathbb{I}}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک است، و $X:=\prod_{i\in\mathbb{I}}X_i$. دراین‌صورت توپولوژی حاصل‌ضربی بر X عبارت است از ضعیف‌ترین توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X که تصویرهای مختصی

$$\pi_i: X\to X_i,\qquad f\mapsto f(i)\qquad\qquad (i\in\mathbb{I})$$

پیوسته هستند. $(X,\mathcal{T})$ را حاصل‌ضرب توپولوژیک $((X_i,\mathcal{T}_i))_{i\in\mathbb{I}}$ می‌گوییم.

بنا برگزارهٔ ۷.۲.۳ توپولوژی حاصل‌ضربی وجود دارد، و مجموعه‌های بازآن اجتماع‌های مجموعه‌های به شکل

$$\pi_{i_۱}^{-۱}(U_۱)\cap\cdots\cap\pi_{i_n}^{-۱}(U_n),$$

هستند که درآن $i_۱,\ldots,i_n\in\mathbb{I}$ و به‌ازای $j=۱,\ldots,n$، $U_j\in\mathcal{T}_{i_j}$. بنا برگزارهٔ ۱۹.۲.۳ می‌دانیم که تور $(f_\alpha)_\alpha$ در $(X,\mathcal{T})$ به f همگرا است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $i\in\mathbb{I}$، $(\pi_i(f_\alpha))_\alpha=(f_\alpha(i))_\alpha$ در $(X_i,\mathcal{T}_i)$ به $f(i)=\pi_i(f)$ همگرا باشد: این توپولوژی حاصل‌ضربی توپولوژی همگرایی مختصاتی است. واقعیت دوم نشان می‌دهد که پیش‌تر در دو مورد ویژه به‌طور ضمنی با توپولوژی حاصل‌ضربی روبه‌رو شده‌ایم.

مثال ۲۰.۳.۳ آ) فرض کنید $S\neq\varnothing$ مجموعه، و (Y,d) فضای متریک است. دراین‌صورت $F(S,Y)$ نمادی دیگر برای Y^S است، و توپولوژی حاصل‌ضربی بر Y^S برابر با توپولوژی همگرایی نقطه‌ای، $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$، است، که در آن $\mathcal{F}$ گردایهٔ زیرمجموعه‌های متناهی S است.

ب) فرض کنید که $((X_n,d_n))_{n=۱}^\infty$ دنباله‌ای از فضاهای متریک است. دراین‌صورت، بنا بر تمرین ۱.۳.۲، توپولوژی حاصل‌ضربی بر $X:=\prod_{n=۱}^\infty X_n$ متریک‌پذیر با متریک زیر است: به‌ازای $(x_۱,x_۲,\ldots),(y_۱,y_۲,\ldots)\in X$،

$$d((x_۱,x_۲,\ldots),(y_۱,y_۲,\ldots))=\sum_{n=۱}^\infty\frac{۱}{۲^n}\frac{d_n(x_n,y_n)}{۱+d_n(x_n,y_n)}.$$

قضیهٔ ۲۱.۳.۳ (قضیهٔ تیخونوف) فرض کنید $((K_i,\mathcal{T}_i))_{i\in\mathbb{I}}$ خانواده‌ای ناتهی از فضاهای توپولوژیک فشرده است. دراین‌صورت حاصل‌ضرب توپولوژیک آنها نیز فشرده است.

برهان. فرض کنید که $(f_\alpha)_\alpha$ توری در $K:=\prod_{i\in\mathbb{I}}K_i$ است. فرض کنید $\mathbb{J}\subset\mathbb{I}$ ناتهی است و $f\in K$. $(\mathbb{J},f)$ را نقطهٔ انباشتگی جزئی $(f_\alpha)_\alpha$ می‌گوییم اگر $f|_{\mathbb{J}}$ نقطهٔ انباشتگی $(f_\alpha|_{\mathbb{J}})_\alpha$ در

$\prod_{j\in\mathbb{J}} K_j$ باشد. آشکارا، نقطهٔ انباشتگی جزئی $(\mathbb{J}, f)$ نقطهٔ انباشتگی $(f_\alpha)_\alpha$ است اگر و تنها اگر $\mathbb{J}$ و $\mathbb{I}$ برابر باشند.

فرض کنید که $\mathcal{P}$ مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های انباشتگی جزئی $(f_\alpha)_\alpha$ است. به‌ازای هر $(\mathbb{J}_f, f), (\mathbb{J}_g, g) \in \mathcal{P}$، تعریف کنید

$$(\mathbb{J}_f, f) \preceq (\mathbb{J}_g, g) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \mathbb{J}_f \subset \mathbb{J}_g \text{ و } g|_{\mathbb{J}_f} = f.$$

چون به‌ازای هر $i \in \mathbb{I}$، K_i فشرده است، بنا بر قضیهٔ ۱۸.۳.۳، تور $(f_\alpha)_\alpha$ به‌ازای هر $i \in \mathbb{I}$ نقطهٔ انباشتگی جزئی $(\{i\}, f_i)$ را دارد؛ به‌ویژه $\mathcal{P}$ تهی نیست.

فرض کنید که $\mathcal{Q}$ زیرمجموعه‌ای کلاً مرتب از $\mathcal{P}$ است. فرض کنید $\mathbb{J}_g := \bigcup\{\mathbb{J}_f : (\mathbb{J}_f, f) \in \mathcal{Q}\}$. $g \in K$ را به‌ازای هر $j \in \mathbb{J}_f$ که $(\mathbb{J}_f, f) \in \mathcal{Q}$ به‌صورت $g(j) := f(j)$ (و دلخواه بر $\mathbb{I}\backslash\mathbb{J}_g$) تعریف می‌کنیم. چون $\mathcal{Q}$ کلاً مرتب است، g خوش‌تعریف است. ادعا می‌کنیم که $(\mathbb{J}_g, g)$ نقطهٔ انباشتگی جزئی $(f_\alpha)_\alpha$ است. فرض کنید که $N \subset \prod_{j\in\mathbb{J}_g} K_j$ همسایگی $g|_{\mathbb{J}_g}$ است. بنا بر گزارهٔ ۷.۲.۳ می‌توان فرض کرد

$$N = \pi_{j_1}^{-1}(U_{j_1}) \cap \cdots \cap \pi_{j_n}^{-1}(U_{j_n}),$$

که در آن $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{J}_g$، و $U_{j_1} \subset K_{j_1}$، ...، $U_{j_n} \subset K_{j_n}$ باز هستند. فرض کنید $(\mathbb{J}_h, h) \in \mathcal{Q}$ چنان است که $\{j_1, \ldots, j_n\} \subset \mathbb{J}_h$ (این امکان‌پذیر است زیرا $\mathcal{Q}$ کلاً مرتب است). چون $(\mathbb{J}_h, h)$ نقطهٔ انباشتگی جزئی $(f_\alpha)_\alpha$ است، به‌ازای هر اندیس α، اندیس βای وجود دارد که $\alpha \preceq \beta$ و

$$f_\beta(j_k) = \pi_{j_k}(f_\beta) \in U_{j_k} \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

پس $f_\beta \in N$. بنابراین $(\mathbb{J}_g, g)$ در واقع نقطهٔ انباشتگی جزئی $(f_\alpha)_\alpha$، و از این رو در $\mathcal{P}$ است.

بنا بر لم زرن، $\mathcal{P}$ عضوی ماکسیمال مانند $(\mathbb{J}_{\max}, f_{\max})$ دارد. فرض کنید که $\mathbb{J}_{\max} \subsetneq \mathbb{I}$؛ یعنی $i_0 \in \mathbb{I}\backslash\mathbb{J}_{\max}$ای موجود است. چون $(\mathbb{J}_{\max}, f_{\max})$ نقطهٔ انباشتگی جزئی $(f_\alpha)_\alpha$ است، زیرتور $(f_{\alpha_\beta})_\beta$ از $(f_\alpha)_\alpha$ موجود است که به‌ازای هر $j \in \mathbb{J}_{\max}$، $\pi_j(f_{\alpha_\beta}) \to \pi_j(f_{\max})$. چون K_{i_0} فشرده است، می‌توان زیرتور $(f_{\alpha_{\beta_\gamma}})_\gamma$ از $(f_{\alpha_\beta})_\beta$ را چنان یافت که $\pi_{i_0}(f_{\alpha_{\beta_\gamma}})_\gamma$ به x_{i_0}ی در K_{i_0} همگرا باشد. $\tilde{f} \in K$ را به‌صورت $\tilde{f}|_{\mathbb{J}_{\max}} = f_{\max}$ و $\tilde{f}(i_0) = x_{i_0}$ تعریف کنید. در نتیجه $\left(\mathbb{J}_{\max} \cup \{i_0\}, \tilde{f}\right)$ نقطهٔ انباشتگی جزئی $(f_\alpha)_\alpha$ است، که با ماکسیمال بودن $(\mathbb{J}_{\max}, f_{\max})$ در تناقض است. ■

اکنون از قضیهٔ تیخونوف استفاده می‌کنیم و فضای توپولوژیک فشرده‌ای ارائه می‌دهیم که حاوی دنباله‌ای است که زیردنبالهٔ همگرا ندارد:

مثال ۲۲.۳.۳ فرض کنید که $\mathbb{I}$ مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های اکیداً صعودی در $\mathbb{N}$، یعنی دنباله‌های $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ که $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$، است. به‌سادگی دیده می‌شود که عدد اصلی $\mathbb{I}$ برابر $\mathfrak{c}$ است؛ هر چند که به این نیاز نداریم. به‌ازای هر $i = (n_k)_{k=1}^{\infty}$ در $\mathbb{I}$، دنبالهٔ $(f_n(i))_{n=1}^{\infty}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_n(i) := \begin{cases} (-1)^k, & \text{اگر به‌ازای } k \in \mathbb{N}\text{ی } n = n_k \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

از این رو $(f_n(i))_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $[-1, 1]$ است که زیردنبالهٔ $(f_{n_k}(i))_{k=1}^{\infty}$ آن واگرا است. بنا بر قضیهٔ تیخونوف، حاصل‌ضرب توپولوژیک $[-1, 1]^{\mathbb{I}}$ فشرده است. فرض کنید که دنبالهٔ $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ زیردنباله‌ای همگرا مانند $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ دارد. بنا بر تعریف توپولوژی حاصل‌ضربی، به‌ازای هر $i \in \mathbb{I}$، $(f_{n_k}(i))_{k=1}^{\infty}$ همگرا است. با توجه به ساختار ما، چنین چیزی به‌ازای $i = (n_k)_{k=1}^{\infty}$ امکان ندارد. البته، دنبالهٔ $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ زیرتور همگرا دارد.

به عنوان کاربردی دیگر از قضیهٔ تیخونوف، برهان قضیهٔ آرزلاـآسکولی را در ضمیمهٔ پ ارائه خواهیم داد.

در پایان این بخش، در مورد رده‌ای از فضاهای توپولوژیک احتمالاً نافشرده بحث می‌کنیم که با وجود این، به‌طور منطقی به فشرده بودن نزدیک هستند.

تعریف ۲۳.۳.۳ فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است. می‌گوییم X فشردهٔ موضعی است اگر به‌ازای هر $x \in X$، $\mathcal{N}_x$ شامل زیرمجموعه‌ای فشرده از X باشد.

مثال ۲۴.۳.۳ آ) فضاهای فشرده (آشکارا) فشردهٔ موضعی هستند.

ب) $\mathbb{R}^n$ فشردهٔ موضعی است ولی فشرده نیست.

پ) هر فضای توپولوژیک گسسته فشردهٔ موضعی است.

ت) فرض کنید E، فضای خطی $C([0, 1], \mathbb{F})$، مجهز به نرم $\|\cdot\|_\infty$ است، و فرض کنید که این فضا فشردهٔ موضعی است. دراین‌صورت 0 همسایگی فشرده‌ای، مانند K دارد. بنا بر تعریف همسایگی، $\epsilon > 0$ی موجود است که $B_\epsilon(0) \subset K$، و چون K در E بسته است،

$B_\epsilon[\circ] = \overline{B_\epsilon(\circ)} \subset K$. از این رو $B_\epsilon[\circ]$ فشرده است. چون

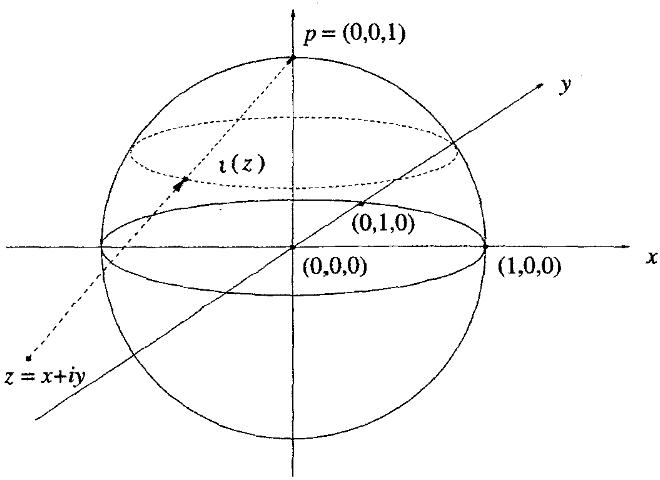
$$B_\epsilon[\circ] \to B_\backslash[\circ], \qquad x \mapsto \frac{\backslash}{\epsilon} x$$

همسان‌ریختی است، $B_\backslash[\circ]$ نیز فشرده است. مانند آنچه در مثال ۱۳.۵.۲ دیده‌ایم، چنین چیزی درست نیست (با به کارگیری قضیهٔ ب.۵ به جای مثال ۱۳.۵.۲، می‌توان دید که هیچ فضای نرم‌دار با بعد نامتناهی، فشردهٔ موضعی نیست).

با این وجود، اگر چه $\mathbb{R}^n$ فشرده نیست، به فضای فشردهٔ مشخصی نزدیک است. این مطلب را به‌ازای $n = ۲$ با مثال نشان می‌دهیم.

مثال ۲۵.۳.۳ می‌توانیم $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^۲$ را با صفحهٔ xy در $\mathbb{R}^۳$ یکی بگیریم. فرض کنید $\mathbb{C}_\infty$ کرهٔ واحد در $\mathbb{R}^۳$ است (یعنی، بردارهای با طول اقلیدسی یک): این فضا فشرده است. فرض کنید که $p = (\circ, \circ, ۱)$. دراین‌صورت، به‌ازای هر $z = x + iy \in \mathbb{C}$ خطی یکتا در $\mathbb{R}^۳$ وجود دارد که $(x, y, \circ)$ را به p وصل می‌کند. فرض کنید که $\iota(z)$ نقطهٔ برخورد این خط و $\mathbb{C}_\infty$ است. دراین‌صورت $\iota : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ نگاشتی یک‌به‌یک و پیوسته با نگارهٔ $\mathbb{C}_\infty \backslash \{p\}$ و همسان‌ریختی‌ای روی نگاره‌اش است (مسلماً همهٔ این‌ها نیاز به بررسی دارند). گاهی به کرهٔ $\mathbb{C}_\infty$ کرهٔ ریمان می‌گویند.

جالب توجه است که مشابه این ساخته را می‌توان برای فضاهای هاوسدورف و فشردهٔ موضعی دلخواه به کار برد.



شکل ۲.۳ کرهٔ ریمان

قضیهٔ ۲۶.۳.۳ فرض کنید که $(X,\mathcal{T})$ فضای هاوسدورف و فشردهٔ موضعی است. دراین‌صورت فضای هاوسدورف فشردهٔ $(X_\infty,\mathcal{T}_\infty)$، فشرده‌سازی تک‌نقطه‌ای X، به همراه نگاشت $\iota : X \to X_\infty$ موجود است که

(i) ι روی نگاره‌اش همسان‌ریختی است، و

(ii) $X_\infty\backslash\iota(X)$ تنها شامل یک نقطه است.

به‌علاوه، $(X_\infty,\mathcal{T}_\infty)$ درحد همسان‌ریختی یکتا است.

برهان. فرض کنید ∞ نقطه‌ای است که در X نیست، و فرض کنید $X_\infty := X\cup\{\infty\}$. تعریف کنید

$$\mathcal{T}_\infty := \mathcal{T}\cup\{X_\infty\backslash K : \text{فشرده است } K\subset X\}.$$

از این تعریف آشکار است که $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}_\infty$ و به‌ازای هر $U\in\mathcal{T}_\infty$، $X\cap U\in\mathcal{T}$ (چون X هاوسدورف است، همهٔ زیرمجموعه‌های فشردهٔ آن بسته هستند).

ادعا می‌کنیم که $\mathcal{T}_\infty$ توپولوژی‌ای بر X_∞ است. آشکار است که $\varnothing, X_\infty\in\mathcal{T}_\infty$.

فرض کنید $\mathcal{U}$ خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌های در $\mathcal{T}_\infty$ است. اگر $\mathcal{U}\subset\mathcal{T}$، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم که زیرمجموعهٔ فشردهٔ K از X وجود دارد که $X_\infty\backslash K\in\mathcal{U}$. چون به‌ازای هر $U\in\mathcal{U}$، $K\cap U\in\mathcal{T}|_K$، $V\in\mathcal{T}$ای وجود دارد که

$$\bigcup\{K\cap U : U\in\mathcal{U}\} = K\cap V.$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned}\bigcup\{U : U\in\mathcal{U}\} &= \bigcup\{K\cap U : U\in\mathcal{U}\}\cup(X_\infty\backslash K)\\ &= (K\cap V)\cup(X_\infty\backslash K)\\ &= V\cup(X_\infty\backslash K)\\ &= X_\infty\backslash((X\backslash V)\cap K).\end{aligned}$$

چون K فشرده، و $X\backslash V$ بسته است، زیرمجموعهٔ $(X\backslash V)\cap K$ از X در K بسته و از این رو فشرده است. از اینجا نتیجه می‌شود که $\bigcup\{U : U\in\mathcal{U}\}\in\mathcal{T}_\infty$.

فرض کنید $U_1, U_2\in\mathcal{T}_\infty$. اگر $U_1, U_2\subset X$، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. بنابراین فرض کنید که به‌ازای زیرمجموعهٔ فشردهٔ K_2 از X، $U_2 = X_\infty\backslash K_2$. اگر $U_1\subset X$، نتیجه می‌گیریم

$$U_1\cap U_2 = U_1\cap(X_\infty\backslash K_2) = U_1\cap(X\backslash K_2),$$

که به $\mathcal{T}$ متعلق است، زیرا $K_۲$ بسته است. اگر $U_۱ \not\subset X$، مجموعهٔ فشردهٔ $K_۱ \subset X$ وجود دارد که $U_۱ = X_\infty \backslash K_۱$. چون $K_۱ \cup K_۲$ نیز فشرده است (تمرین ۱ زیر را نگاه کنید)،

$$U_۱ \cap U_۲ = X_\infty \backslash (K_۱ \cup K_۲) \in \mathcal{T}_\infty.$$

در مجموع، $\mathcal{T}_\infty$ توپولوژی‌ای بر X_∞ است. بنابر نکات بیان شده در آغاز این برهان، $\mathcal{T}_\infty|_X$ همان $\mathcal{T}$ است، پس نشانندهٔ طبیعی $\iota : X \to X_\infty$ در واقع روی نگارهٔ خود همسان‌ریختی است.

ادعا می‌کنیم که $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ هاوسدورف است. برای اثبات فرض کنید $x, y \in X_\infty$ و $x \neq y$. بدون کاسته شدن از کلیّت، فرض کنید که $y = \infty$. فرض کنید که $K \subset X$ همسایگی فشردهٔ x است. دراین‌صورت $U \in \mathcal{T}$ای وجود دارد که $x \in U \subset K$. فرض کنید $V := X_\infty \backslash K$. دراین‌صورت $V \in \mathcal{T}_\infty$، $\infty \in V$، و $U \cap V = \varnothing$.

فرض کنید $\mathcal{U}$ پوششی باز برای X_∞ است. دراین‌صورت $U_۰ \in \mathcal{U}$ای وجود دارد که $\infty \in U_۰$. از این رو، زیرمجموعهٔ فشردهٔ K از X موجود است که $U_۰ = X_\infty \backslash K$. چون $\{X \cap U : U \in \mathcal{U}\}$ پوششی باز برای K است، $U_۱, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$، موجودند که $K \subset U_۱ \cup \cdots \cup U_n$. از اینجا نتیجه می‌شود که

$$X_\infty = U_۰ \cup K = U_۰ \cup U_۱ \cup \cdots \cup U_n.$$

از این رو، X_∞ فشرده است.

فرض کنید که $(X'_\infty, \mathcal{T}'_\infty)$ فضای هاوسدورف و فشردهٔ دیگری است که شامل کپی همسان‌ریخت X است، و $X'_\infty \backslash X$ تنها شامل یک نقطه، مثلاً ∞'، است. $f : X_\infty \to X'_\infty$ را بر X به‌صورت همانی، و $f(\infty) := \infty'$ تعریف کنید، و فرض کنید $U \in \mathcal{T}'_\infty$. دراین‌صورت دو امکان وجود دارد: $U \in \mathcal{T}$ یا $\infty' \in U$. اگر $U \in \mathcal{T}$ آنگاه $f^{-۱}(U) = U \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\infty$. فرض کنید $\infty' \in U$. دراین‌صورت $K := X_\infty \backslash U$ زیرمجموعه‌ای از X است که در X'_∞ بسته و از این رو فشرده است. در نتیجه $f^{-۱}(U) = X_\infty \backslash K \in \mathcal{T}_\infty$. بنابراین در هر صورت، $f^{-۱}(U)$ در $\mathcal{T}_\infty$ قرار دارد. چون $U \in \mathcal{T}'_\infty$ دلخواه بود، f پیوسته است. با عوض کردن نقش X_∞ و X'_∞ پیوستگی $f^{-۱}$ به‌دست می‌آید، پس f همسان‌ریختی است. به این ترتیب یکتایی ثابت می‌شود. ■

توجه کنید که این شیوهٔ ساخت هنگامی که X فشرده است نیز به کار می‌آید.

تمرین‌ها

۱. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است و $K_۱$، ...، K_n زیرمجموعه‌های فشردهٔ X هستند. ثابت کنید که $K_۱ \cup \cdots \cup K_n$ فشرده است.

۲. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک و $\mathcal{B}$ پایهٔ $\mathcal{T}$ است. ثابت کنید که X فشرده است اگر و تنها اگر هر پوشش باز $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ از X زیرپوششی متناهی داشته باشد.

۳. لم دینی. فرض کنید $(K, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک فشرده، $f : K \to \mathbb{R}$ پیوسته، و $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ توری از تابع‌های پیوسته از K به $\mathbb{R}$ است که به‌ازای هر $x \in K$، $f(x) = \lim_\alpha f_\alpha(x)$ و به‌ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ که $\alpha \preceq \beta$ و هر $x \in K$، $f_\beta(x) \preceq f_\alpha(x)$. ثابت کنید که $(f_\alpha)_\alpha$ بر K یکنواخت‌همگرا به f است (راهنمایی: $\epsilon > \circ$ را ثابت بگیرید و به‌ازای هر $\alpha \in \mathbb{A}$، مجموعهٔ $U_\alpha := \{x \in K : \circ \leq f_\alpha(x) - f(x) < \epsilon\}$ را در نظر بگیرید).

۴. فرض کنید $(X, \mathcal{T}_X)$ فضای توپولوژیک، $((Y_i, \mathcal{T}_i))_{i \in \mathbb{I}}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ حاصل‌ضرب توپولوژیک آنها است. ثابت کنید که $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $i \in \mathbb{I}$، $\pi_i \circ f : X \to Y_i$ پیوسته باشد، که در آن $\pi_i : Y \to Y_i$ تصویر مختصی است.

۵. فرض کنید $(X_\backslash, \mathcal{T}_\backslash)$، ...، $(X_n, \mathcal{T}_n)$ فضاهای توپولوژیک هستند، و به‌ازای هر $j = \backslash, \ldots, n$، $\mathcal{B}_j$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}_j$ است. ثابت کنید که زیرمجموعه‌هایی از $X_\backslash \times \cdots \times X_n$ به شکل $B_\backslash \times \cdots \times B_n$ که در آن به‌ازای $j = \backslash \ldots, n$، $B_j \in \mathcal{B}_j$، پایه‌ای برای توپولوژی حاصل‌ضربی بر $X_\backslash \times \cdots \times X_n$ تشکیل می‌دهند.

۶. فرض کنید $((X_i, \mathcal{T}_i))_{i \in \mathbb{I}}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک است. مجموعه‌های به شکل $\prod_{i \in \mathbb{I}} U_i$ که در آن به‌ازای $i \in \mathbb{I}$، $U_i \in \mathcal{T}_i$، پایه‌ای برای توپولوژی‌ای بر $\prod_{i \in \mathbb{I}} X_i$ به نام توپولوژی جعبه‌ای تشکیل می‌دهند. ثابت کنید که توپولوژی جعبه‌ای قوی‌تر از توپولوژی حاصل‌ضربی است، و این دو توپولوژی بر هم منطبق هستند اگر و تنها اگر به‌ازای هر $i \in \mathbb{I}$ بجز تعدادی متناهی، $(X_i, \mathcal{T}_i)$ آشفته باشد.

۷. فرض‌کنید $((X_i, \mathcal{T}_i))_{i \in \mathbb{I}}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک، و $(X, \mathcal{T})$ حاصل‌ضرب توپولوژیک آنها است. ثابت کنید که $(X, \mathcal{T})$ هاوسدورف است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $i \in \mathbb{I}$، $(X_i, \mathcal{T}_i)$ هاوسدورف باشد.

۸. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک و $X \times X$ به توپولوژی حاصل‌ضربی مجهز است. ثابت کنید که $\{(x, x) : x \in X\}$ در $X \times X$ بسته است اگر و تنها اگر X هاوسدورف باشد.

۹. فرض کنید E فضایی نرم‌دار بر $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ است. هر تابعک خطی بر E عبارت است از نگاشتی مانند $\phi : E \to \mathbb{F}$ با این خاصیت که به‌ازای هر $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ و $x, y \in E$،

$\phi(\lambda x + \mu y) = \lambda\phi(x) + \mu\phi(y)$. فرض کنید $\mathcal{F}$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی E است، و

$$K := \{\phi \in \mathbb{F}^E : \text{تابعکی خطی بر } E \text{ است که به‌ازای هر } x \in E ، |\phi(x)| \leq \|x\| \ \phi\} .$$

قضیهٔ علااوغلو-بورباکی را ثابت کنید: $(K, \mathcal{T}_{\mathcal{F}}|_K)$ فشرده است.

۱۰. ثابت کنید که $\mathbb{Q}$ با توپولوژی القا شده از $\mathbb{R}$ فشردهٔ موضعی نیست.

۴.۳ همبندی

به‌طور شهودی، فضای توپولوژیک را همبند می‌گوییم اگر بتوان بدون «پریدن» از روی «گسل» از نقطه‌ای از فضا به نقطه‌ای دیگر «قدم زد». این را چگونه می‌توان به‌طور دقیق تعریف کرد؟

تعریف ۱.۴.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است. هر مسیر در X عبارت از نگاشتی پیوسته از $[\circ, \text{۱}]$ به X است.

البته، هر بازهٔ کران‌دار، بسته، و ناتباهیده در $\mathbb{R}$ را می‌توان به عنوان دامنهٔ یک مسیر به کار گرفت.

تعریف ۲.۴.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، و $x_\circ, x_\text{۱} \in X$. دراین‌صورت $x_\circ$ و $x_\text{۱}$ را می‌توان با مسیری در X به هم وصل کرد اگر مسیر $\gamma : [\circ, \text{۱}] \to X$ وجود داشته باشد که $\gamma(\circ) = x_\circ$ و $\gamma(\text{۱}) = x_\text{۱}$. می‌گوییم γ، $x_\circ$ را به $x_\text{۱}$ وصل می‌کند.

تعریف ۳.۴.۳ فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ را مسیری‌همبند می‌گوییم اگر هر دو نقطهٔ آن را بتوان با مسیری در X به هم وصل کرد.

مثال ۴.۴.۳ فرض کنید E فضایی نرم‌دار است. یادآوری می‌کنیم که زیرمجموعهٔ C از E محدّب است اگر به‌ازای هر $x, y \in C$، پاره‌خط $\{x + t(y - x) : t \in [\circ, \text{۱}]\}$ نیز در C قرار گیرد. آشکارا، کل فضا و همهٔ زیرمجموعه‌های تک‌عضوی آن محدب هستند. همهٔ گوی‌های باز نیز چنین‌اند. فرض کنید $x_\circ \in E$، $r > \circ$، و $x, y \in B_r(x_\circ)$؛ دراین‌صورت

$$\begin{aligned} \|x + t(y - x) - x_\circ\| &= \|(\text{۱} - t)x + ty - (\text{۱} - t)x_\circ - tx_\circ\| \\ &\leq (\text{۱} - t)\|x - x_\circ\| + t\|y - x_\circ\| \\ &< r \qquad (t \in [\circ, \text{۱}]). \end{aligned}$$

به‌طور مشابه، می‌توان ثابت کرد که همهٔ گوی‌های بسته محدب هستند. هر زیرمجموعهٔ محدب C از E مسیری‌همبند است: به‌ازای $x_۰, x_۱ \in C$، تابع

$$\gamma : [۰, ۱] \to E, \qquad t \mapsto x_۰ + t(x_۱ - x_۰)$$

مسیری در C است که $x_۰$ را به $x_۱$ وصل می‌کند. به ویژه، همهٔ بازه‌های احتمالاً بی‌کران یا تباهیده در $\mathbb{R}$، مسیری‌همبند هستند.

در ادامه یک ویژگی موروثی برای مسیری‌همبند بودن می‌آید که به‌سادگی ثابت می‌شود.

گزارهٔ ۵.۴.۳ فرض کنید که $(X, \mathcal{T}_X)$ و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ فضاهایی توپولوژیک هستند که X همبند مسیری، و $f : X \to Y$ پیوسته است. دراین‌صورت $f(X)$ مسیری‌همبند است.

برهان. فرض کنید $y_۰, y_۱ \in f(X)$، و $x_۰$ و $x_۱$ عضوهایی از X هستند که به‌ازای $j = ۰, ۱$، $y_j = f(x_j)$. فرض کنید $\gamma : [۰, ۱] \to X$ مسیری است که $x_۰$ را به $x_۱$ وصل می‌کند. دراین‌صورت $f \circ \gamma$ مسیری در $f(X)$ است که $y_۰$ را به $y_۱$ وصل می‌کند. ∎

مثال ۶.۴.۳ آ) به‌ازای $n \in \mathbb{N}$، فرض کنید $\mathbb{S}^{n-۱}$ کرهٔ واحد در $\mathbb{R}^n$، یعنی گردایهٔ همهٔ بردارهای با طول اقلیدسی یک در $\mathbb{R}^n$ است. ادعا می‌کنیم که $\mathbb{S}^{n-۱}$ به‌ازای $n \geq ۲$ مسیری‌همبند است. این را به استقرا بر n ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n = ۲$ درستی حکم، به آسانی دیده می‌شود: زیرمجموعهٔ محدب $[۰, ۲\pi]$ از $\mathbb{R}$، و در نتیجه بنا بر گزارهٔ ۵.۴.۳، $\mathbb{S}^۱$ به عنوان نگارهٔ

$$[۰, ۲\pi] \to \mathbb{R}^۲, \qquad \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$$

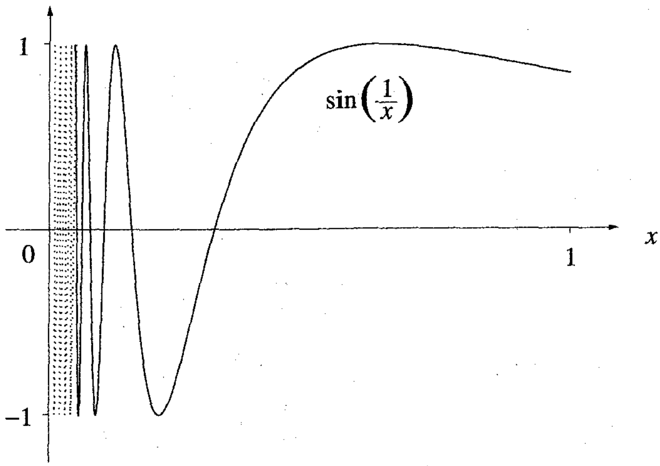
مسیری‌همبند است. فرض کنید که به‌ازای nی که $n \geq ۲$، $\mathbb{S}^{n-۱}$ مسیری‌همبند است. دراین‌صورت $\mathbb{S}^n$ نگارهٔ نگاشت پیوستهٔ زیر است

$$[۰, ۲\pi] \times \mathbb{S}^{n-۱} \to \mathbb{R}^{n+۱}, \qquad (\theta, x) \mapsto (\cos\theta, (\sin\theta)x).$$

چون بنا بر فرض استقرا و تمرین ۲ی زیر، $[۰, ۲\pi] \times \mathbb{S}^{n-۱}$ مسیری‌همبند است، از گزارهٔ ۵.۴.۳ نتیجه می‌شود که $\mathbb{S}^n$ مسیری‌همبند است.

ب) زیرفضای

$$\left\{ \left(x, \sin\left(\frac{۱}{x}\right) \right) : x \in (۰, ۱] \right\}$$



شکل ۳.۳

از $\mathbb{R}^۲$ نگارهٔ فضای مسیری‌همبند $(۰,۱]$ تحت نگاشت پیوستهٔ

$$(۰,۱] \to \mathbb{R}^۲, \qquad x \mapsto \left(x, \sin\left(\frac{۱}{x}\right)\right)$$

است و بنابراین مسیری‌همبند است.

اگرچه مسیری‌همبند بودن احتمالاً شهودی‌ترین مفهوم همبندی است، کارکردن با آن اغلب بسیار محدودکننده است. در اینجا تعریفی «سره» از همبندی می‌آوریم.

تعریف ۷.۴.۳ فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را همبند می‌گوییم اگر هیچ $U,V \in \mathcal{T}$ ناتهی موجود نباشد که $U \cap V = \varnothing$ و $U \cup V = X$. در غیراین صورت، X را ناهمبند می‌گوییم.

اگر X همبند نباشد، زیرمجموعه‌های باز ناتهی U و V از X وجود دارند که $U \cap V = \varnothing$ و $U \cup V = X$. در نتیجه U و V بسته نیز هستند. گاهی به زیرمجموعه‌هایی از فضاهای توپولوژیک که هم باز و هم بسته هستند بسته‌باز می‌گویند. آشکارا، فضای توپولوژیک X همبند است اگر و تنها اگر تنها زیرمجموعه‌های بسته‌باز آن زیرمجموعه‌های بدیهی باشند: $\varnothing$ و X.

مثال ۸.۴.۳ آ) ادعا می‌کنیم که $[۰,۱]$ همبند است. در غیر این صورت، مجموعه‌های باز ناتهی $U,V \subset [۰,۱]$ موجودند که $U \cap V = \varnothing$ و $U \cup V = [۰,۱]$. بدون کاسته شدن از

کلیت، فرض کنید $0 \in U$، پس $0 \notin V$. چون U در $[0,1]$ باز است، $\epsilon > 0$ی وجود دارد که $[0,\epsilon) \subset U$؛ این نتیجه می‌دهد که $b := \inf V \geq \epsilon > 0$. چون V در $[0,1]$ بسته نیز هست، به آسانی دیده می‌شود که $b \in V$. فرض کنید $a := \sup\{t \in U : t < b\}$. آشکارا، $a \leq b$، و چون U در $[0,1]$ بسته است، $a \in U$، از این رو $a < b$. در نتیجه $(a,b) \subset [0,1] \backslash (U \cup V)$، که ناممکن است.

ب) هر فضای گسسته با بیش از یک نقطه ناهمبند است.

پ) فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ فضای توپولوژیک دلخواه است، و $S,T \subset X$ ناتهی هستند و $U,V \in \mathcal{T}$ای موجودند که $S \subset U$، $T \subset V$، و $U \cap V = \varnothing$. دراین‌صورت زیرفضای $S \cup T$ از X ناهمبند است (این مثال، مثال قبل را در بر می‌گیرد). به عنوان نمونه، $(-\infty,-2] \cup [-1,2) \cup [7,\pi^2]$ زیرفضای ناهمبند $\mathbb{R}$ است.

همبندی به مفهوم تعریف ۷.۴.۳ با مسیری‌همبند بودن چه ارتباطی دارد؟ پاسخ اینجا است.

گزارهٔ ۹.۴.۳ فرض کنید که $(X,\mathcal{T})$ فضای توپولوژیک مسیری‌همبند است. دراین‌صورت X همبند است.

برهان. فرض کنید که X ناهمبند است. دراین‌صورت زیرمجموعه‌های باز ناتهی U و V از X موجودند که $U \cap V = \varnothing$ و $U \cup V = X$. فرض کنید $x_0 \in U$ و $x_1 \in V$. چون X مسیری‌همبند است، x_0 و x_1 با مسیری مانند γ به هم وصل می‌شوند. ولی دراین‌صورت، $\gamma^{-1}(U)$ و $\gamma^{-1}(V)$ باز، ناتهی، و جدا از هم هستند، و اجتماع آنها $[0,1]$ است. بنابراین $[0,1]$ همبند نیست، که بنا بر مثال پیشین ناممکن است. ∎

مثال ۱۰.۴.۳ آشکارا، هر بازه (احتمالاً بی‌کران یا تباهیده) در $\mathbb{R}$ مسیری‌همبند و از این رو همبند است. برعکس، فرض کنید $\varnothing \neq I \subset \mathbb{R}$ زیرفضایی همبند است. اگر I بازه نباشد، دراین‌صورت $c \in \mathbb{R}\backslash I$ای وجود دارد که $(-\infty,c)\cap I \neq \varnothing$ و $(c,\infty)\cap I \neq \varnothing$. آشکارا، $U := I\cap(-\infty,c)$ و $V := I \cap (c,\infty)$ در I باز هستند و $U \cap V = \varnothing$ و $U \cup V = I$. بنابراین، تنها زیرمجموعه‌های همبند (یا به‌طور هم‌ارز، همبند مسیری) $\mathbb{R}$ بازه‌ها هستند.

گزارهٔ زیر، مشابه گزارهٔ ۵.۴.۳ برای همبندی است.

گزارهٔ ۱۱.۴.۳ فرض کنید $(X,\mathcal{T}_X)$ و $(Y,\mathcal{T}_Y)$ فضاهایی توپولوژیک هستند که X همبند، و $f : X \to Y$ پیوسته است. دراین‌صورت $f(X)$ همبند است.

برهان. فرض کنید $U, V \in \mathcal{T}_Y|_{f(X)}$ چنان‌اند که

$$U \cup V = f(X) \quad \text{و} \quad U \cap V = \varnothing.$$

دراین‌صورت آشکارا $f^{-1}(U)$ و $f^{-1}(V)$ در $\mathcal{T}_X$ هستند، $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$ و $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = X$. چون X همبند است، این تساوی تنها هنگامی ممکن است که $f^{-1}(U)$ یا $f^{-1}(V)$ تهی باشد، که این نیز تنها هنگامی روی می‌دهد که U یا V تهی باشد. بنابراین $f(X)$ همبند است. ∎

نتیجهٔ ۱۲.۴.۳ (قضیهٔ مقدار میانی) فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک همبند، و $f : X \to \mathbb{R}$ پیوسته است. دراین‌صورت به‌ازای هر $x_1, x_2 \in X$ و $c \in \mathbb{R}$ که $f(x_1) \leq c \leq f(x_2)$، $x_0 \in X$ی وجود دارد که $f(x_0) = c$.

برهان. چون $f(X)$ زیرفضای همبند $\mathbb{R}$ است، یک بازه و از این رو شامل $[f(x_1), f(x_2)]$ است. ∎

آیا مسیری‌همبند بودن واقعاً قوی‌تر از همبندی است؟ برای پاسخ به این پرسش، گزارهٔ دیگری ثابت می‌کنیم.

گزارهٔ ۱۳.۴.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک، و Y زیرفضای همبند چگال X است. دراین‌صورت X همبند است.

برهان. فرض کنید $U, V \in \mathcal{T}$ و $U \cap V = \varnothing$ و $U \cup V = X$. چون $Y \cap U, Y \cap V \in \mathcal{T}|_Y$، $(Y \cap U) \cap (Y \cap V) = \varnothing$، و $(Y \cap U) \cup (Y \cap V) = Y$، بنا بر همبندی Y، $Y \cap U = Y$ یا $Y \cap V = Y$؛ بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید که $Y \cap U = Y$ (یعنی $Y \subset U$). چون U بسته‌باز است، از این رو $X = \overline{Y} \subset U$، پس $U = X$ و در نتیجه $V = \varnothing$. ∎

مثال ۱۴.۴.۳ فرض کنید X بستار فضای همبند (مسیری)

$$Y := \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0, 1]\right\}$$

در $\mathbb{R}^2$ است. گزارهٔ ۱۳.۴.۳ بی‌درنگ نتیجه می‌دهد که X همبند است. به‌سادگی می‌توان دید که

$$X = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0, 1]\right\} \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}.$$

ادعا می‌کنیم که مسیر $\gamma : [\circ, \text{۱}] \to X$ ی وجود ندارد که $\gamma(\circ) \in \{\circ\} \times [-\text{۱}, \text{۱}]$ و $\gamma(\text{۱}) \in Y$. برای نیل به تناقض، فرض کنید که چنین مسیری وجود دارد، و $\gamma_\text{۱}, \gamma_\text{۲} : [\circ, \text{۱}] \to \mathbb{R}$ تابع‌های مختصی آن هستند؛ یعنی به‌ازای $t \in [\circ, \text{۱}]$، $\gamma(t) = (\gamma_\text{۱}(t), \gamma_\text{۲}(t))$. قرار دهید $F := \gamma^{-\text{۱}}(\{\circ\} \times [-\text{۱}, \text{۱}])$. دراین‌صورت F بسته و از این رو شامل $a := \sup F$ است. آشکارا، $a < \text{۱}$. در صورت لزوم با جایگزینی $[a, \text{۱}]$ به جای $[\circ, \text{۱}]$، می‌توان فرض کرد که به‌ازای هر $t \in (\circ, \text{۱}]$، $\gamma_\text{۱}(t) > \circ$.

فرض کنید $\epsilon > \circ$ دلخواه است. چون $\gamma_\text{۱}$ پیوسته است، $\gamma_\text{۱}([\circ, \epsilon]) \subset \mathbb{R}$ همبند و از این رو بازه است. آشکارا، $\gamma_\text{۱}([\circ, \epsilon])$ شامل صفر و ناتباهیده است. بنابراین، $\delta > \circ$ ی وجود دارد که $[\circ, \delta] \subset \gamma_\text{۱}([\circ, \epsilon])$. چون $\{\sin(\frac{\text{۱}}{x}) : x \in (\circ, \delta]\} = [-\text{۱}, \text{۱}]$ و

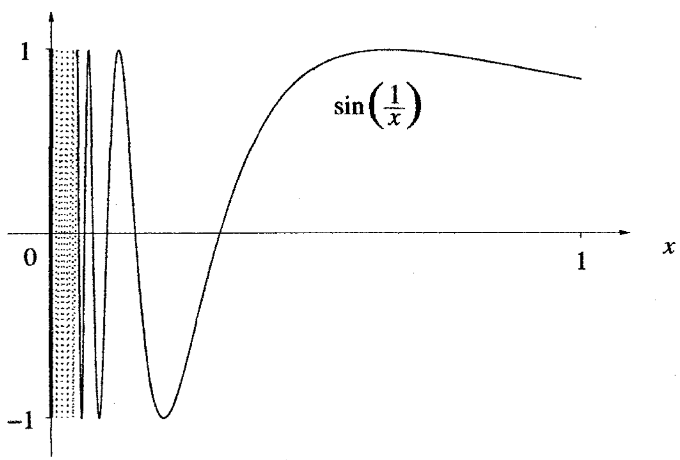
$$\gamma_\text{۲}(t) = \sin\left(\frac{\text{۱}}{\gamma_\text{۱}(t)}\right) \qquad (t \in (\circ, \text{۱}]),$$

نتیجه می‌شود که $\gamma_\text{۲}([\circ, \epsilon]) = [-\text{۱}, \text{۱}]$.

فرض کنید $r > \circ$ آن قدر کوچک است که $[-\text{۱}, \text{۱}] \not\subset [\gamma_\text{۲}(\circ) - r, \gamma_\text{۲}(\circ) + r]$. بنا بر پیوستگی $\gamma_\text{۲}$ در $\circ$، $\epsilon > \circ$ ی وجود دارد که

$$\gamma_\text{۲}([\circ, \epsilon]) \subset [\gamma_\text{۲}(\circ) - r, \gamma_\text{۲}(\circ) + r],$$

و این در صورتی که $\gamma_\text{۲}([\circ, \epsilon]) = [-\text{۱}, \text{۱}]$، امکان ندارد.



شکل ۴.۳ بستار $\{(x, \sin(\frac{\text{۱}}{x})) : x \in (\circ, \text{۱}]\}$ در $\mathbb{R}^\text{۲}$

دربارهٔ فضای ناهمبند چه می‌توان گفت؟ تاکنون با مثال‌هایی اندک از فضاهای ناهمبند مواجه شده‌ایم ـــ به عنوان مثال فضاهای گسسته و $(۱,۲) \cup [۷,۸)$ ـــ که با اجتماع‌های جدا از هم «بلوک‌های سازندهٔ» همبند پدید آمده‌اند. نشان می‌دهیم که در حالت کلّی هم همین پدیده روی می‌دهد. ابتدا باید منظورمان از بلوک سازندهٔ همبند را به‌طور دقیق مشخص کنیم.

تعریف ۱۵.۴.۳ فرض کنید که $(X,\mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است. هر مؤلفهٔ X عبارت است از زیرفضایی همبند از X که به‌طور سره در زیرفضای همبند دیگری از X نباشد.

همان طور که در قضیهٔ ۱۷.۴.۳ زیر نشان خواهیم داد، هر فضای توپولوژیک را می‌توان با مؤلفه‌هایش «بلوک‌بندی» کرد.

گزارهٔ ۱۶.۴.۳ فرض کنید که $(X,\mathcal{T})$ فضای توپولوژیک، و $\mathcal{Y}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای همبند X است که به‌ازای هر $Y_۱, Y_۲ \in \mathcal{Y}$، $Y_۱ \cap Y_۲ \neq \varnothing$. دراین‌صورت $\bigcup\{Y : Y \in \mathcal{Y}\}$ همبند است.

برهان. قرار دهید $Y_\circ := \bigcup\{Y : Y \in \mathcal{Y}\}$. برای اثبات همبندی $Y_\circ$، فرض کنید $U, V \in \mathcal{T}$ چنان‌اند که

$$(Y_\circ \cap U) \cap (Y_\circ \cap V) = \varnothing, \qquad (Y_\circ \cap U) \cup (Y_\circ \cap V) = Y_\circ .$$

از این رو به‌ازای هر $Y \in \mathcal{Y}$

$$(Y \cap U) \cap (Y \cap V) = \varnothing, \qquad (Y \cap U) \cup (Y \cap V) = Y,$$

و چون همهٔ زیرفضاهای $Y \in \mathcal{Y}$ همبند هستند، هر $Y \in \mathcal{Y}$ در U یا V است. فرض کنید که $Y_۱, Y_۲ \in \mathcal{Y}$ وجود دارند که $Y_۱ \subset U$ و $Y_۲ \subset V$. این ایجاب می‌کند که

$$Y_۱ \cap Y_۲ \subset (Y_\circ \cap U) \cap (Y_\circ \cap V) = \varnothing,$$

که امکان ندارد. از این رو، به‌ازای هر $Y \in \mathcal{Y}$، $Y \subset U$، یا به‌ازای هر $Y \in \mathcal{Y}$، $Y \subset V$. در نتیجه $Y_\circ \subset U$ یا $Y_\circ \subset V$. این بحث همبندی $Y_\circ$ را ثابت می‌کند. ■

قضیهٔ ۱۷.۴.۳ فرض کنید که $(X,\mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است. دراین‌صورت:

(i) به‌ازای هر $x \in X$، مؤلفهٔ یکتای Y_x از X شامل x وجود دارد؛

(ii) به‌ازای هر $x \in X$، مؤلفهٔ Y_x بسته است؛

(iii) به‌ازای هر $x, y \in X$، مؤلفه‌های Y_x و Y_y برابر یا جدا از هم هستند.

برهان. به‌ازای $x \in X$، فرض کنید

$$\mathcal{Y}_x := \{Y \subset X : \quad \text{و همبند است } x \text{ شامل } Y\}.$$

توجه کنید که $\mathcal{Y}_x \neq \varnothing$ زیرا $\{x\} \in \mathcal{Y}_x$. چون $x \in \bigcap\{Y : Y \in \mathcal{Y}_x\}$، بنا بر گزارهٔ ۱۶.۴.۳ $Y_x := \bigcup\{Y : Y \in \mathcal{Y}_x\}$ همبند است. Y_x بنا بر تعریف شامل x است و به‌طور سره در هیچ زیرفضای همبند دیگر X نیست. بنابراین قسمت (i) ثابت می‌شود (یکتایی از (iii) نتیجه خواهد شد).

برای (ii)، توجه کنید که بنا بر گزارهٔ ۱۳.۴.۳، $\overline{Y_x}$ نیز همبند است، از این رو $\overline{Y_x} = Y_x$.

برای (iii)، فرض کنید $x, y \in X$ و $Y_x \cap Y_y \neq \varnothing$. دراین‌صورت بنا بر گزارهٔ ۱۶.۴.۳، $Y_x \cup Y_y$ همبند است، پس $Y_x \cup Y_y = Y_x$ و از این رو $Y_y \subset Y_x$. با عوض کردن نقش x و y نتیجه می‌شود $Y_x = Y_y$. ■

تسامحاً، هر فضای توپولوژیک اجتماع جدا از هم مؤلفه‌های خود است.

مثال ۱۸.۴.۳ آ) اگر $(X, \mathcal{T})$ همبند باشد آنگاه X تنها مؤلفهٔ X است.

ب) مؤلفه‌های $[-۱, ۰) \cup [۲, ۳] \cup (\pi, ۷)$ عبارت‌اند از $[-۱, ۰)$، $[۲, ۳]$، و $(\pi, ۷)$.

پ) در هر فضای گسسته، مؤلفه‌ها عبارت‌اند از زیرمجموعه‌های تک‌عضوی.

ت) ادعا می‌کنیم که مؤلفه‌های $\mathbb{Q}$، با توپولوژی القایی از $\mathbb{R}$، عبارت‌اند از زیرمجموعه‌های تک‌عضوی (هر چند که $\mathbb{Q}$ گسسته نیست). هر زیرفضای همبند $\mathbb{Q}$ زیرفضای همبند $\mathbb{R}$، است و در نتیجه، بنا بر مثال ۱۰.۴.۳ بازه است. چون تنها بازه‌های در $\mathbb{Q}$ بازه‌های تباهیده (یعنی بازه‌های دارای تنها یک عضو) هستند، ادعا ثابت می‌شود.

ث) مجموعهٔ کانتور، C، به‌صورت زیر ساخته می‌شود. فرض کنید $C_۱ := [۰, ۱]$،

$$C_۲ := \left[۰, \frac{۱}{۳}\right] \cup \left[\frac{۲}{۳}, ۱\right],$$

$$C_۳ := \left[۰, \frac{۱}{۹}\right] \cup \left[\frac{۲}{۹}, \frac{۱}{۳}\right] \cup \left[\frac{۲}{۳}, \frac{۷}{۹}\right] \cup \left[\frac{۸}{۹}, ۱\right],$$

و به همین صورت ساختن $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$ را ادامه دهید. C_{n+1} را با حذف «یک سوم میانی» همهٔ بازه‌هایی که C_n از آنها تشکیل شده است به‌دست بیاورید. تعریف کنید $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. آشکارا، C زیرمجموعهٔ بستهٔ $[0, 1]$ و از این رو فشرده است. به آسانی دیده می‌شود که C نامتناهی است: بنابراین شیوهٔ ساخت، مجموعهٔ کانتور شامل $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{9}$، $\frac{1}{27}$، ... است (در واقع، C حتی ناشمارا است؛ تمرین ۷ زیر را نگاه کنید). به‌ازای $n \in \mathbb{N}$، فرض کنید که χ_n تابع مشخصهٔ C_n است؛ یعنی

$$\chi_n(t) := \begin{cases} 1, & t \in C_n \\ 0, & \text{در غیراین‌صورت} \end{cases}$$

و فرض کنید

$$\mu(C_n) := \int_0^1 \chi_n(t)\, dt$$

قدر ژردان C_n است، پس به آسانی با استقرا ثابت می‌شود که

$$\mu(C_n) = \frac{2}{3}\mu(C_{n-1}) = \cdots = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}$ و $a \leq b$ و $[a, b] \subset C$. فرض کنید $a < b$، و $n \in \mathbb{N}$ را آن قدر بزرگ انتخاب کنید که $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} < b - a$. از سوی دیگر، چون $[a, b] \subset C_n$،

$$b - a \leq \mu(C_n) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

که با انتخاب n در تناقض است. از این رو $a = b$، و لذا هیچ بازهٔ ناتباهیده‌ای در C نیست. در نتیجه مؤلفه‌های C زیرمجموعه‌های تک‌عضوی آن هستند.

پدیده‌ای که در این سه مثال نمایان شد (فضاهایی که تنها مؤلفه‌های آنها زیرمجموعه‌های تک‌عضوی هستند، لزوماً گسسته نیستند) تعریفی دیگر را موجه می‌کند.

تعریف ۱۹.۴.۳ فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ را کلاً ناهمبند می‌گوییم اگر به‌ازای هر $x \in X$، مؤلفهٔ X شامل x، $\{x\}$ باشد.

در واقع، فضای توپولوژیک کلاً ناهمبند است اگر و تنها اگر زیرمجموعه‌های همبند آن تک‌عضوی باشند.

در پایان این بخش، به تشریح حالت‌های موضعیِ همبندی و مسیری‌همبند بودن می‌پردازیم.

تعریف ۲۰.۴.۳ می‌گوییم فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ (مسیری)همبند موضعی است اگر به‌ازای هر $x \in X$، $\mathcal{N}_x$ پایه‌ای متشکل از مجموعه‌های (مسیری)همبند داشته باشد.

مثال ۲۱.۴.۳ در فضاهای نرم‌دار گوی‌های باز مسیری‌همبند هستند. بنابراین هر زیرمجموعهٔ بازِ یک فضای نرم‌دار، مسیری‌همبند موضعی است.

به آسانی می‌توان فضاهای (مسیری)همبند موضعی یافت که (مسیری)همبند نیستند، مثلاً $(-۱, ۰) \cup (۰, ۱)$، ولی نادرستی عکس آن کمتر آشکار است.

مثال ۲۲.۴.۳ فرض کنید

$$X = \{(x, ۰) : x \in [۰, ۱]\} \cup \{(۰, y) : y \in [۰, ۱]\} \cup \bigcup_{n=۱}^{\infty} \{(\frac{۱}{n}, y) : y \in [۰, ۱]\} \subset \mathbb{R}^۲.$$

به‌طور شهودی می‌توان X را شانه‌ای با بی‌نهایت دندانه در نظر گرفت.

ادعا می‌کنیم که X مسیری‌همبند است. برای اثبات، فرض کنید $(x_۰, y_۰), (x_۱, y_۱) \in X$، و $\gamma : [۰, ۱] \to \mathbb{R}^۲$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$\gamma(t) := \begin{cases} (x_۰, (۱ - ۳t)y_۰), & t \in [۰, \frac{۱}{۳}], \\ (x_۰ + (۳t - ۱)(x_۱ - x_۰), ۰), & t \in [\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}], \\ (x_۱, (۳t - ۲)y_۱), & t \in [\frac{۲}{۳}, ۱]. \end{cases}$$

به آسانی می‌توان دید که γ مسیری در X است که $(x_۰, y_۰)$ را به $(x_۱, y_۱)$ وصل می‌کند. برای نشان دادن اینکه X همبند موضعی نیست (مسیری‌همبند بودن موضعی به کنار)، فرض کنید $y' \in (۰, ۱]$، $r \in (۰, y')$، و فرض کنید C شامل $(۰, y')$ است و $C \subset X \cap B_r((۰, y'))$. چون $r < y'$، بی‌درنگ $C \cap \{(x, ۰) : x \in [۰, ۱]\} = \varnothing$، پس

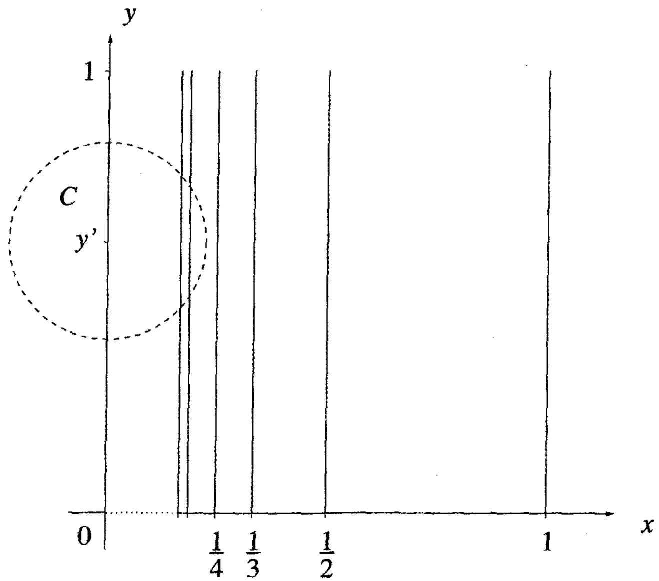
$$C \subset \{(۰, y) : y \in [۰, ۱]\} \cup \bigcup_{n=۱}^{\infty} \left\{ \left(\frac{۱}{n}, y \right) : y \in [۰, ۱] \right\}.$$

این، به نوبهٔ خود، نتیجه می‌دهد که

$$\{۰\} \subset I \subset \{۰\} \cup \left\{ \frac{۱}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \qquad (**)$$

که در آن I نگارهٔ C تحت تصویر بر محور x است. اکنون فرض کنید که C همبند است. چون تصویر از $\mathbb{R}^۲$ بر محور x پیوسته است، $I \subset \mathbb{R}$ نیز همبند و از این رو بازه است. از $(**)$ نتیجه می‌گیریم که $I = \{۰\}$. سرانجام، فرض کنید که C همسایگی $(۰, y')$ است، و لذا $\epsilon > ۰$ی وجود دارد که $X \cap B_\epsilon((۰, y')) \subset C$. چون به‌ازای $n \in \mathbb{N}$ی که $\frac{۱}{n} < \epsilon$، $(\frac{۱}{n}, y') \in X \cap B_\epsilon((۰, y'))$، باید نقطه‌هایی ناصفر در I موجود باشند، که ناممکن است.

در مجموع، $X \cap B_r((۰, y'))$ نمی‌تواند شامل همسایگی همبندی از $(۰, y')$ باشد، پس X همبند موضعی نیست.



شکل ۵.۳ فضایی که مسیری‌همبند است ولی همبند موضعی نیست.

به روشی مشابه می‌توان نشان داد که فضای مثال ۱۴.۴.۳ که همبند است ولی مسیری‌همبند نیست، همبند موضعی نیست (تمرین ۱۲ زیر را ببینید).

گزارهٔ زیر دلیلی برای اهمیت همبندی موضعی است.

گزارهٔ ۲۳.۴.۳ فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک همبند موضعی، و U زیرفضایی باز از X است. دراین‌صورت مؤلفه‌های U باز هستند.

برهان. فرض کنید Y مؤلفهٔ U است، و $x \in Y$. چون U باز است، U همسایگی x در X است و از این رو شامل همسایگی همبندی از x در X، مانند N، است. چون $x \in Y \cap N$، بنا بر گزارهٔ

۱۶.۴.۳، $Y \cup N$ همبند است. سرانجام قضیهٔ ۱۷.۴.۳(i) نشان می‌دهد که $N \subset Y$، و لذا Y همسایگی x است. چون $x \in Y$ دلخواه بود، باز بودن Y ثابت می‌شود. ∎

نتیجهٔ ۲۴.۴.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک همبند موضعی است. دراین‌صورت مؤلفه‌های X باز (و از این رو بسته‌باز) هستند.

مسیری‌همبند بودن موضعی همراه با همبندی، مسیری‌همبند بودن را نتیجه می‌دهد؛ اما در واقع، شرطی ضعیف‌تر هم کافی است.

گزارهٔ ۲۵.۴.۳ فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک همبند است. دراین‌صورت حکم‌های زیر هم‌ارزند.

(i) X مسیری‌همبند است.

(ii) هر نقطهٔ X همسایگی‌ای دارد که مسیری‌همبند است.

برای اثبات، به دو شیوهٔ ساختن مسیر نیاز داریم که در آینده هم سودمند خواهند بود.

- فرض کنید که γ مسیری در فضای توپولوژیک X است. دراین‌صورت مسیر وارون، $\gamma^{-۱} : [۰, ۱] \to X$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\gamma^{-۱}(t) := \gamma(۱ - t) \qquad (t \in [۰, ۱]).$$

- فرض کنید X فضای توپولوژیک است، و $\gamma_۱, \gamma_۲ : [۰, ۱] \to X$ دو مسیر دلخواه‌اند که $\gamma_۱(۱) = \gamma_۲(۰)$. دراین‌صورت الحاق آنها، $\gamma_۱ \odot \gamma_۲ : [۰, ۱] \to X$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\gamma_۱ \odot \gamma_۲)(t) := \begin{cases} \gamma_۱(۲t), & t \in [۰, \frac{۱}{۲}], \\ \gamma_۲(۲t - ۱), & t \in [\frac{۱}{۲}, ۱]. \end{cases}$$

برهان گزارهٔ ۲۵.۴.۳. چون به‌ازای هر $x \in X$، $X \in \mathcal{N}_x$، تنها (i)$\Longrightarrow$(ii) نیاز به اثبات دارد. $x_۰ \in X$ را ثابت بگیرید، و فرض کنید

$$Y := \{x \in X : \text{را می‌توان با مسیری به هم وصل کرد } x_۰ \text{ و } x\}.$$

آشکارا $x_\circ \in Y$، و لذا $Y \neq \varnothing$. اثبات مسیری‌همبند بودن Y هم ساده است: به‌ازای $x_1, x_2 \in Y$ فرض کنید γ_j مسیر وصل‌کنندهٔ $x_\circ$ به x_j است که در آن $j = 1, 2$. این نتیجه می‌دهد که $\gamma_1^{-1} \odot \gamma_2$، x_1 را به x_2 وصل می‌کند.

فرض کنید $x \in Y$، و $N \in \mathcal{N}_x$ مسیری‌همبند است. فرض کنید $y \in N$. دراین‌صورت $x_\circ$ و x را، و نیز x و y را می‌توان با مسیری به هم وصل کرد. با الحاق مسیرهای متناظر نتیجه می‌شود که $x_\circ$ و y را می‌توان با مسیری به‌هم وصل کرد. در نتیجه $y \in Y$، و چون $y \in N$ دلخواه بود، $N \subset Y$، و لذا Y همسایگی x است. چون x دلخواه بود، Y باز است.

فرض کنید $x \in \overline{Y}$، و $N \in \mathcal{N}_x$ مسیری‌همبند است. چون $x \in \overline{Y}$، $y \in N \cap Y$ای موجود است. از این رو $x_\circ$ را می‌توان با مسیری به y، و y را می‌توان با مسیری به x وصل کرد؛ با الحاق این مسیرها نتیجه می‌شود که $x_\circ$ و x را می‌توان با مسیری به هم وصل کرد. در نتیجه $x \in Y$، و لذا $\overline{Y} = Y$.

دیدیم که $Y \neq \varnothing$ بسته‌باز است. چون X همبند است، $X = Y$، و لذا X مسیری‌همبند است. ■

نتیجهٔ ۲۶.۴.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای همبندی است که مسیری‌همبند موضعی هم هست. دراین‌صورت X مسیری‌همبند است.

مثال ۲۷.۴.۳ آ) هر زیرمجموعهٔ باز همبند فضای نرم‌دار، مسیری‌همبند است.

ب) فضای مطرح شده در مثال ۱۴.۴.۳ همبند است، ولی مسیری‌همبند نیست و لذا مسیری‌همبند موضعی نیست (در واقع، حتی همبند موضعی هم نیست، هر چند که اثبات این موضوع سخت‌تر است؛ تمرین ۱۲ زیر را نگاه کنید).

تمرین‌ها

۱. فرض کنید $\mathcal{C}$ خانوادهٔ زیرمجموعه‌های محدب فضایی خطی است. ثابت کنید که $\bigcap\{C : C \in \mathcal{C}\}$ محدب است. آیا $\bigcup\{C : C \in \mathcal{C}\}$ لزوماً محدب است؟

۲. فرض کنید $((X_i, \mathcal{T}_i))_{i \in \mathbb{I}}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک، و $(X, \mathcal{T})$ حاصل‌ضرب توپولوژیک آنها است. ثابت کنید که $(X, \mathcal{T})$ مسیری‌همبند است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $i \in \mathbb{I}$، $(X_i, \mathcal{T}_i)$ مسیری‌همبند باشد.

۳. ثابت کنید که $\mathbb{R}^n\backslash\{۰\}$ همبند (مسیری) است اگر و تنها اگر $n \geq ۲$، و نتیجه بگیرید که به‌ازای $n \geq ۲$، $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}$ همسان‌ریخت نیستند.

۴. فرض کنید $(X, \mathcal{T}_X)$ و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ فضاهای توپولوژیک همبندند. ثابت کنید که $X \times Y$ با توپولوژی حاصل‌ضربی هم همبند است (راهنمایی: به‌ازای $y \in Y$ای ثابت، گزارهٔ ۱۶.۴.۳ را برای خانوادهٔ $\{(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y) : x \in X\}$ به کار ببرید).

۵. فرض کنید $((X_i, \mathcal{T}_i))_{i\in\mathbb{I}}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک، و $(X, \mathcal{T})$ حاصل‌ضرب توپولوژیک آنها است. ثابت کنید که $(X, \mathcal{T})$ همبند است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $i \in \mathbb{I}$، $(X_i, \mathcal{T}_i)$ همبند باشد. برای اثبات قسمت «اگر»، می‌توانید روند زیر را در پیش بگیرید.

آ) از تمرین ۴ برای اثبات این ادعا در حالتی که $\mathbb{I}$ متناهی است استفاده کنید.

ب) $(x_i)_{i\in\mathbb{I}} \in X$ را ثابت بگیرید. به‌ازای هر $\mathbb{J} \subset \mathbb{I}$، $X_{\mathbb{J}}$ را مجموعهٔ همهٔ $(y_i)_{i\in\mathbb{I}} \in X$هایی بگیرید که به‌ازای هر $i \in \mathbb{I}\backslash\mathbb{J}$، $y_i = x_i$. با استفاده از (آ) ثابت کنید که اگر $\mathbb{J}$ متناهی باشد، $X_{\mathbb{J}}$ همبند است.

پ) با استفاده از (ب) و گزارهٔ ۱۶.۴.۳ ثابت کنید که $\bigcup\{X_{\mathbb{J}} : \mathbb{J} \subset \mathbb{I}$ متناهی است$\}$ همبند است.

ت) در پایان با استفاده از (پ) و گزارهٔ ۱۳.۴.۳، برهان را کامل کنید و ثابت کنید X همبند است.

۶. فرض کنید G گروه توپولوژیک است، یعنی گروهی مجهز به توپولوژی هاوسدورف که

$$G \times G \to G, \quad (x, y) \mapsto xy \quad \text{و} \quad G \to G, \quad x \mapsto x^{-۱}$$

پیوسته‌اند، و فرض کنید $G_۰$ مؤلفه‌ای از G است که عضو همانی در آن قرار دارد. ثابت کنید که $G_۰$ زیرگروه نرمال بستهٔ G است.

۷. ثابت کنید که $t \in [۰, ۱]$ در مجموعهٔ کانتور C است اگر و تنها اگر بسط سه‌سه‌ای با رقم‌های ۰ یا ۲ داشته باشد؛ یعنی، دنباله‌ای مانند $(\sigma_n)_{n=۱}^{\infty}$ در $\{۰, ۲\}$ وجود داشته باشد که $t = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sigma_n}{۳^n}$. نتیجه بگیرید که $|C| = \mathfrak{c}$.

۸. فرض کنید $((X_i, \mathcal{T}_i))_{i\in\mathbb{I}}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک، و $(X, \mathcal{T})$ حاصل‌ضرب توپولوژیک آنها است. ثابت کنید که $(X, \mathcal{T})$ کلاً ناهمبند است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $i \in \mathbb{I}$، $(X_i, \mathcal{T}_i)$ کلاً ناهمبند باشد.

۹. فرض کنید $(X,\mathcal{T}_X)$ فضایی همبند، و $(Y,\mathcal{T}_Y)$ فضایی کلاً ناهمبند است. ثابت کنید که هر نگاشت پیوستهٔ $f:X\to Y$ باید ثابت باشد.

۱۰. می‌گوییم فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ صفربعدی است اگر به‌ازای هر $x,y\in X$ که $x\neq y$، $U,V\in\mathcal{T}$ موجود باشند که $x\in U$، $y\in V$، $U\cap V=\varnothing$، و $U\cup V=X$.

آ) ثابت کنید که هر فضای صفربعدی، کلاً ناهمبند و هاوسدورف است.

ب) ثابت کنید که $\mathbb{Q}$ (مانند هر زیرفضای کلاً ناهمبند $\mathbb{R}$) صفربعدی است.

پ) فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ فضایی هاوسدورف است که $\mathcal{T}$ پایه‌ای از مجموعه‌های بسته‌باز دارد. ثابت کنید که X صفربعدی است.

ت) فرض کنید $(K,\mathcal{T})$ فضای هاوسدورف فشرده است. ثابت کنید که K صفربعدی است اگر و تنها اگر $\mathcal{T}$ پایه‌ای از مجموعه‌های بسته‌باز داشته باشد (راهنمایی: اگر K صفربعدی باشد، زیرمجموعه‌های بسته‌باز K پایه‌ای برای توپولوژی هاوسدورفی ضعیف‌تر از $\mathcal{T}$ تشکیل می‌دهند).

۱۱. فرض کنید

$$X:=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}\qquad \text{و} \qquad Y:=\{0,1\}$$

توپولوژی‌های مربوطهٔ خود را به عنوان زیرفضاهایی از $\mathbb{R}$ دارند، و $X\times Y$ به توپولوژی حاصل‌ضربی مجهز است. رابطهٔ هم‌ارزی $\approx$ را بر $X\times Y$ به‌صورت زیر تعریف کنید

$$(x_1,y_1)\approx(x_2,y_2)\qquad :\Longleftrightarrow\qquad x_1=x_2\neq 0.$$

ثابت کنید که فضای خارج‌قسمتی $(X\times Y)/\approx$ کلاً ناهمبند است، ولی هاوسدورف (و از این رو صفربعدی) نیست.

۱۲. نشان دهید که زیرفضای همبند

$$\left\{\left(x,\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right):x\in(0,1]\right\}\cup\{(0,y):y\in[-1,1]\}$$

از $\mathbb{R}^2$ همبند موضعی نیست.

۵.۳ ویژگی‌های تفکیک

در فضاهای متریک، با استفاده از متریک می‌توانیم نقطه‌ها را از هم تفکیک کنیم: هر دو نقطهٔ متمایز فاصله‌ای اکیداً مثبت دارند. در فضاهای توپولوژیک کلی، تفکیک نقطه‌ها پیچیده‌تر است.

پیش‌تر با یکی از اصل‌های موسوم به اصل‌های تفکیک، یعنی با ویژگی تفکیک هاوسدورف (تعریف ۳.۱.۳) مواجه شدیم. این بخش به بحث پیرامون دیگر ویژگی‌های تفکیک اختصاص دارد: برخی قوی‌تر، و بعضی ضعیف‌تر از ویژگی هاوسدورف.

اولین اصل تفکیک بسیار ضعیف است.

تعریف ۱.۵.۳ فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ را فضای T_0 یا فضای کولموگوروف می‌گوییم اگر به‌ازای هر $x, y \in X$ با شرط $x \neq y$، مجموعهٔ باز $U \subset X$ موجود باشد که $x \in U$ و $y \notin U$، یا $y \in U$ و $x \notin U$.

مثال ۲.۵.۳ آ) فرض کنید X مجموعه‌ای دلخواه با دست‌کم دو عضو و مجهز به توپولوژی آشفته است. دراین‌صورت X، T_0 نیست.

ب) فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار است، و $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R)$ و $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید $\mathfrak{q} \not\subset \mathfrak{p}$. بنا بر تعریف توپولوژی زاریسکی، مجموعهٔ باز $U := \operatorname{Spec}(R) \backslash V(\mathfrak{q})$ شامل $\mathfrak{p}$ است ولی شامل $\mathfrak{q}$ نیست. بنابراین $\operatorname{Spec}(R)$، T_0 است.

اصل تفکیک بعدی تا اندازه‌ای قوی‌تر است.

تعریف ۳.۵.۳ فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ را فضای T_1 می‌گوییم اگر به‌ازای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$، مجموعه‌های باز $U, V \subset X$ موجود باشند که $x \in U$ ولی $y \notin U$، و $y \in V$ ولی $x \notin V$.

آشکارا هر فضای T_1، T_0 و هر فضای هاوسدورف، T_1 است. ولی عکس این شمول‌ها چگونه است؟ گزارهٔ زیر به ما کمک می‌کند.

گزارهٔ ۴.۵.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است. دراین‌صورت X، فضای T_1 است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $x \in X$، $\{x\}$ بسته باشد.

برهان. فرض کنید که X فضای T_1 است و $x \in X$. به‌ازای هر $y \in X$ با شرط $x \neq y$، زیرمجموعهٔ

باز U_y از X موجود است که $y \in U_y$، ولی $x \notin U_y$. در نتیجه

$$X\backslash\{x\} = \bigcup\{U_y : y \in X, x \neq y\}$$

باز، و از این رو $\{x\}$ بسته است.

برعکس، فرض کنید که همهٔ زیرمجموعه‌های تک‌عضوی X بسته هستند، و فرض کنید $x, y \in X$ چنان هستند که $x \neq y$. دراین‌صورت $U := X\backslash\{y\}$ و $V := X\backslash\{x\}$ در شرط‌های تعریف ۳.۵.۳ صدق می‌کنند. ∎

مثال ۵.۵.۳ آ) فرض کنید X مجموعه‌ای دلخواه، و $\mathcal{T}$ توپولوژی تشکیل شده از $\varnothing$ و زیرمجموعه‌هایی از X است که متمم متناهی دارند. دراین‌صورت آشکارا همهٔ زیرمجموعه‌های تک‌عضوی X بسته‌اند، از این رو بنا بر گزارهٔ ۴.۵.۳، X فضای T_1 است. در حالی که، به‌جز وقتی X متناهی است، فضای $(X, \mathcal{T})$ هاوسدورف نیست (مثال ۴.۱.۳(پ) را نگاه کنید).

ب) فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار است. همان‌طور که دیدیم، $\mathrm{Spec}(R)$ همواره T_0 است. بنا بر گزارهٔ ۴.۵.۳ و تمرین ۳.۱.۳، $\mathrm{Spec}(R)$ فضایی T_1 است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل اول R ماکسیمال باشد. به عنوان مثال، اگر R حوزهٔ صحیح باشد و میدان نباشد (مثلاً $R = \mathbb{Z}$) آنگاه $\mathrm{Spec}(R)$ فضای T_0 است ولی T_1 نیست.

T در T_0 و T_1 از کلمهٔ آلمانی «Trennungsaxiom» (اصل تفکیک) گرفته شده است. فضاهای هاوسدورف را گاهی T_2 می‌گویند، و معمولاً بعضی از نویسندگان ویژگی‌های تفکیک را با برچسبی به شکل T_t نشان‌دار می‌کنند، که در آن t عددی نامنفی (و تا آنجا که من می‌دانم حداکثر پنج) است.

اصل تفکیک بعدی ما از جنسی متفاوت است؛ این اصل نه برحسب توپولوژی، بلکه با تابع‌های پیوسته تعریف می‌شود.

به‌ازای فضاهای متریک (X, d_X) و (Y, d_Y)، از نماد $C_b(X, Y)$ برای مجموعهٔ همهٔ تابع‌های پیوستهٔ در $B(X, Y)$ استفاده می‌کنیم. اگر X صرفاً فضای توپولوژیک باشد نیز همان نماد را به‌کار می‌بریم.

تعریف ۶.۵.۳ فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضای T_1 است. دراین‌صورت X را کاملاً منظم می‌گوییم اگر به‌ازای هر $x \in X$ و هر مجموعهٔ بستهٔ $F \subset X$ که $x \notin F$، $f \in C_b(X, \mathbb{R})$ ی وجود داشته باشد که $f(X) \subset [0, 1]$، $f(x) = 1$، و $f|_F = 0$.

مثال ۷.۵.۳ آ) فرض کنید (X,d) فضایی متریک است، $x_\circ \in X$، و $F \subset X$ بسته است و $x_\circ \notin F$. برای اجتناب از حالت بدیهی، فرض می‌کنیم که $F \neq \varnothing$. تعریف کنید

$$g : X \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \operatorname{dist}(x,F).$$

دراین‌صورت g پیوسته است، $g|_F = \circ$ و $g(x_\circ) \neq \circ$. $f : X \to \mathbb{R}$ را با

$$f(x) := \min\left\{\frac{g(x)}{g(x_\circ)}, \text{۱}\right\} \qquad (x \in X)$$

تعریف کنید. دراین‌صورت $f(X) \subset [\circ, \text{۱}]$، $f(x_\circ) = \text{۱}$، و $f|_F = \circ$، از این رو X کاملاً منظم است.

ب) خط سارجن‌فری عبارت است از $\mathbb{R}$ مجهز به توپولوژی سارجن‌فری، یعنی گردایهٔ همهٔ اجتماع‌های بازه‌های نیم‌باز $[a,b)$ که $a < b$. توپولوژی سارجن‌فری قوی‌تر از توپولوژی معمولی است، زیرا به‌ازای هر $a < b$،

$$(a,b) = \bigcup\{[c,b) : a < c < b\}$$

در توپولوژی سارجن‌فری باز است. فرض کنید $a \in \mathbb{R}$؛ دراین‌صورت نیم‌خط

$$[a,\infty) = \bigcup\{[a,b) : b \in \mathbb{R},\ b > a\}$$

در توپولوژی سارجن‌فری باز است، و چون در توپولوژی معمولی بسته است، در توپولوژی سارجن‌فری هم بسته است. در نتیجه اگر $a < b$، بازهٔ نیم‌باز

$$[a,b) = [a,\infty)\backslash[b,\infty)$$

در توپولوژی سارجن‌فری بسته‌باز است. فرض کنید $F \subset \mathbb{R}$ در توپولوژی سارجن‌فری بسته است، و $x \in \mathbb{R}\backslash F$. بنا بر تعریف توپولوژی سارجن‌فری، a و b موجودند که $a < b$ و $x \in [a,b) \subset \mathbb{R}\backslash F$. فرض کنید f تابع مشخصهٔ $[a,b)$ است. چون $[a,b)$ در توپولوژی سارجن‌فری بسته‌باز است، f پیوسته است (و آشکارا $f(\mathbb{R}) \subset [\circ, \text{۱}]$، $f(x) = \text{۱}$، و $f|_F = \circ$). در نتیجه خط سارجن‌فری کاملاً منظم است (هر چند که متریک‌پذیر نیست؛ مثال ۱۴.۵.۳ زیر را نگاه کنید).

پ) هر زیرفضای فضای کاملاً منظم، کاملاً منظم است.

رابطهٔ کاملاً منظم بودن با آن اصل‌های تفکیک که تاکنون با آنها مواجه شده‌ایم چگونه است؟ نتیجهٔ زیر کاملاً سرراست است.

گزارهٔ ۸.۵.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای کاملاً منظم است، $x \in X$، و $F \subset X$ بسته است و $x \notin F$. دراین‌صورت زیرمجموعه‌های باز U و V از X وجود دارند که $x \in U$، $F \subset V$، و $U \cap V = \varnothing$. به ویژه، X هاوسدورف است.

برهان. فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}$ پیوسته است و $f(x) = ۱$ و $f|_F = ۰$. فرض کنید

$$U := \left\{ y \in X : \ f(y) > \frac{۱}{۲} \right\}, \qquad V := \left\{ y \in X : \ f(y) < \frac{۱}{۲} \right\}.$$

در نتیجه U و V باز هستند، $x \in U$، $F \subset V$، و $U \cap V = \varnothing$.

زیرمجموعه‌های تک‌عضوی فضای $T_۱$ بسته‌اند، از این رو بی‌درنگ X هاوسدورف است. ∎

آیا کاملاً منظم بودن و ویژگی تفکیک هاوسدورف هم‌ارزند؟ در مثال زیر به این سؤال پاسخ (منفی) داده‌ایم.

مثال ۹.۵.۳ به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، دستگاه $\mathfrak{N}_x$ از همسایگی‌ها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. اگر $x \neq ۰$، فرض کنید $\mathfrak{N}_x$ دستگاه همسایگی‌های x در توپولوژی معمولی است؛ اگر $x = ۰$، فرض کنید $\mathfrak{N}_x$ مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی است که به‌ازای $\epsilon > ۰$ ی، مجموعه‌ای به شکل

$$(-\epsilon, \epsilon) \backslash \left\{ \frac{۱}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

را در بر دارند. بنابر قضیهٔ ۱۰.۱.۳، توپولوژی یکتای $\mathcal{T}$ بر $\mathbb{R}$ موجود است که به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $\mathfrak{N}_x = \mathcal{N}_x$. آشکارا، $\mathcal{T}$ قوی‌تر از توپولوژی معمولی بر $\mathbb{R}$ است و از این رو هاوسدورف است.

فرض کنید

$$F = \left\{ \frac{۱}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

بنابر روش تعریف $\mathcal{T}$، آشکار است که $\mathbb{R} \backslash F$ همسایگی هر نقطه‌اش است، و لذا F بسته است. فرض کنید که $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ کاملاً منظم است. بنابر گزارهٔ ۸.۵.۳، مجموعه‌های $U, V \in \mathcal{T}$ موجودند که $۰ \in U$، $F \subset V$، و $U \cap V = \varnothing$. بنابر تعریف $\mathcal{N}_۰$، $\epsilon > ۰$ ی وجود دارد که

$$(-\epsilon, \epsilon) \backslash \left\{ \frac{۱}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subset U,$$

و بنا بر تعریف $\mathcal{N}_x$ به‌ازای $x \neq \circ$، به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ عددی مانند $\epsilon_n > \circ$ وجود دارد که

$$\left(\frac{\backslash}{n} - \epsilon_n, \frac{\backslash}{n} + \epsilon_n\right) \subset V.$$

چون $U \cap V = \varnothing$،

$$\left((-\epsilon, \epsilon) \backslash \left\{\frac{\backslash}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}\right) \cap \left(\frac{\backslash}{n} - \epsilon_n, \frac{\backslash}{n} + \epsilon_n\right) = \varnothing \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

در حالی که این نامساوی به‌ازای $\epsilon > \frac{\backslash}{n}$ ناممکن است (در ضمن، این مثال شمارای اول است، ولی متریک‌پذیر نیست زیرا در غیر این‌صورت کاملاً منظم می‌شد).

بحث پیرامون اصل‌های تفکیک را با یکی دیگر از آنها به پایان می‌بریم.

تعریف ۱۰.۵.۳ فضای $(X, \mathcal{T})$ را (که $T_\backslash$ است) نرمال می‌گوییم اگر به‌ازای هر مجموعهٔ بستهٔ $F, G \subset X$ با شرط $F \cap G = \varnothing$، مجموعه‌های باز $U, V \subset X$ وجود داشته باشند که $F \subset U$، $G \subset V$، و $U \cap V = \varnothing$.

مثال ۱۱.۵.۳ آ) فرض کنید (X, d) فضایی متریک است و $F, G \subset X$ بسته‌اند (و برای اجتناب از حالت بدیهی، ناتهی‌اند). دراین‌صورت

$$f : X \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \operatorname{dist}(x, F) - \operatorname{dist}(x, G)$$

پیوسته است. فرض کنید

$$U := \{x \in X : f(x) < \circ\}, \qquad V := \{x \in X : f(x) > \circ\}.$$

دراین‌صورت U و V بازند و $F \subset U$، $G \subset V$، و $U \cap V = \varnothing$. بنابراین X نرمال است.

ب) فرض کنید $(K, \mathcal{T})$ فضای هاوسدورف فشرده است، و $F, G \subset K$ بسته و جدا از هم هستند (و دوباره برای اجتناب از حالت بدیهی، فرض کنید ناتهی‌اند). $x \in F$ را ثابت بگیرید. به‌ازای هر $y \in G$، $U_y, V_y \in \mathcal{T}$ وجود دارند که $x \in U_y$، $y \in V_y$، و $U_y \cap V_y = \varnothing$. آشکارا، $\{V_y : y \in G\}$ پوششی باز برای G است، و چون G (به عنوان زیرفضای بستهٔ فضایی فشرده) فشرده است، $y_\backslash, \ldots, y_n \in Y$ وجود دارند که

$$G \subset V_{y_\backslash} \cup \cdots \cup V_{y_n}.$$

فرض کنید

$$U_x := U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}, \qquad V_x := V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}.$$

دراین‌صورت U_x و V_x باز هستند و $x \in U_x$، $G \subset V_x$، و $U_x \cap V_x = \varnothing$. آشکارا $\{U_x : x \in F\}$ پوششی باز برای F است و بنابراین $x_1, \ldots, x_m \in F$ موجودند که

$$F \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}.$$

با فرضِ

$$U := U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}, \qquad V := V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_m},$$

زیرمجموعه‌هایی باز از X به‌دست می‌آوریم که $F \subset U$، $G \subset V$، و $U \cap V = \varnothing$. در مجموع، K نرمال است.

آشکارا همهٔ فضاهای نرمال، هاوسدورف هستند، و مثال ۹.۵.۳ نشان می‌دهد که عکس این مطلب نادرست است. ولی رابطهٔ بین نرمال بودن و کاملاً منظم بودن چیست؟ در فصل بعد پاسخی کامل خواهیم داد. در اینجا به ارائهٔ مثالی از یک فضای کاملاً منظم که نرمال نیست قناعت می‌کنیم.

ابتدا یک ویژگی ارثی مقدماتی را برای کاملاً منظم بودن ثابت می‌کنیم.

گزارهٔ ۱۲.۵.۳ فرض کنید $((X_i, \mathcal{T}_i))_{i \in \mathbb{I}}$ خانواده‌ای از فضاهای کاملاً منظم، و $(X, \mathcal{T})$ حاصل‌ضرب توپولوژیک آنها است. دراین‌صورت X کاملاً منظم است.

برهان. به‌ازای هر $i \in \mathbb{I}$، مطابق معمول $\pi_i : X \to X_i$ را برای نشان دادن تصویر مختصی iام به‌کار می‌بریم.

فرض کنید که $x = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ و $y = (y_i)_{i \in \mathbb{I}}$ نقطه‌هایی متمایز از X هستند. بنابراین $i_0 \in \mathbb{I}$ی وجود دارد که $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. چون X_{i_0} فضای T_1 است، $U_{i_0}, V_{i_0} \in \mathcal{T}_{i_0}$ وجود دارند که $x_{i_0} \in U_{i_0}$، $y_{i_0} \notin U_{i_0}$، $y_{i_0} \in V_{i_0}$، و $x_{i_0} \notin V_{i_0}$. فرض کنید $U := \pi_{i_0}^{-1}(U_{i_0})$ و $V := \pi_{i_0}^{-1}(V_{i_0})$. از این رو $U, V \subset X$ باز هستند، $x \in U$، $y \notin U$، $y \in V$، و $x \notin V$. بنابراین X فضای T_1 است.

فرض کنید $\varnothing \neq F \subset X$ بسته است، و $x = (x_i)_{i \in \mathbb{I}} \in X \backslash F$. بنا بر تعریف توپولوژی حاصل‌ضربی، $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ و به‌ازای $j = 1, \ldots, n$، $U_j \in \mathcal{T}_{i_j}$ موجودند که

$$x \in \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \subset X \backslash F.$$

فضاهای X_{i_1}،...،X_{i_n} کاملاً منظم‌اند. از این رو به‌ازای $j = 1, \dots, n$، $f_j \in C_b(X_{i_j}, \mathbb{R})$ای موجود است که $f_j(X_{i_j}) \subset [0, 1]$،

$$f_j(x_{i_j}) = 1, \qquad f|_{X_{i_j} \setminus U_j} = 0.$$

تعریف کنید

$$f : X \to \mathbb{R}, \qquad y \mapsto \prod_{j=1}^{n} f_j(\pi_{i_j}(y)).$$

دراین‌صورت f پیوسته است، $f(X) \subset [0, 1]$، $f(x) = 1$، و $f|_F = 0$. در مجموع، X کاملاً منظم است. ∎

در ادامه، گزاره‌ای شگفت‌آور در مورد زیرفضاهای گسستهٔ فضاهای نرمال ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۳.۵.۳ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای نرمال تفکیک‌پذیر، و D زیرفضای گسسته و بستهٔ X است. دراین‌صورت D نمی‌تواند عدد اصلی $\mathfrak{c}$ یا بزرگ‌تر داشته باشد.

برهان. فرض کنید $S \subset D$. دراین‌صورت S و $D \setminus S$ در D بسته‌اند (D گسسته است!)، و چون D در X بسته است، S و $D \setminus S$ در X هم بسته‌اند. از این رو بنا بر نرمال بودن X، $U_S, V_S \in \mathcal{T}$ای وجود دارند که $S \subset U_S$، $D \setminus S \subset V_S$، و $U_S \cap V_S = \varnothing$.

فرض کنید C زیرمجموعهٔ شمارای چگال X است، و تعریف کنید

$$f : \mathfrak{P}(D) \to \mathfrak{P}(C), \qquad S \mapsto C \cap U_S.$$

ادعا می‌کنیم که f یک‌به‌یک است. فرض کنید $S, T \subset D$ و $S \neq T$. می‌توانیم فرض کنیم $S \setminus T \neq \varnothing$. در نتیجه $U_S \cap V_T$ ناتهی (و باز) است. چون C در X چگال است، نتیجه می‌گیریم که $C \cap U_S \cap V_T \neq \varnothing$. از سوی دیگر به سبب انتخاب U_T و V_T داریم $C \cap U_T \cap V_T = \varnothing$. در نتیجه، $C \cap U_S \neq C \cap U_T$.

یک‌به‌یک بودن f نتیجه می‌دهد که

$$|\mathfrak{P}(D)| \leq |\mathfrak{P}(C)| \leq 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c},$$

و چون $|D| < |\mathfrak{P}(D)|$، ادعا محقق می‌شود. ∎

مثال ۱۴.۵.۳ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ صفحهٔ سارجن‌فری، یعنی حاصل‌ضرب توپولوژیک خط سارجن‌فری در خودش، است. بنا بر مثال ۷.۵.۳(ب) و گزارهٔ ۱۲.۵.۳، X کاملاً منظم است.

چون مجموعه‌های به شکل

$$[a,b)\times[c,d) \qquad (a<b,\ c<d)$$

پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ می‌سازند، و به این دلیل که هر چنین مجموعه‌ای اشتراکی ناتهی با $\mathbb{Q}^2$ دارد، آشکار است که $(X,\mathcal{T})$ تفکیک‌پذیر است و به وضوح $\mathcal{T}$ قوی‌تر از توپولوژی معمول بر $\mathbb{R}^2$ است. چون

$$D := \{(x,-x) : x\in\mathbb{R}\}$$

در $\mathbb{R}^2$ با توپولوژی معمولی بسته است، با توپولوژی $\mathcal{T}$ هم بسته است. به‌ازای $x\in\mathbb{R}$ و $a,b\in\mathbb{R}$ با شرط $x<a$ و $-x<b$، توجه کنید که

$$D\cap([x,a)\times[-x,b)) = \{(x,-x)\},$$

و لذا $(D,\mathcal{T}|_D)$ گسسته است (با مثال ۲۶.۱.۳ مقایسه کنید). آشکارا عدد اصلی D برابر $\mathfrak{c}$ است که بنا بر قضیهٔ ۱۳.۵.۳ اگر X نرمال باشد چنین چیزی ناممکن است (این مثال همچنین نشان می‌دهد که خط سارجن‌فری نمی‌تواند متریک‌پذیر باشد؛ در غیراین صورت صفحهٔ سارجن‌فری هم متریک‌پذیر، و از این رو نرمال است).

تمرین‌ها

۱. ثابت کنید که فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ فضای T_1 است اگر و تنها اگر هر تور ثابت در X حدی یکتا داشته باشد.

۲. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ فضایی T_1 است که $\mathcal{T}$ پایه‌ای از مجموعه‌های بسته‌باز دارد. ثابت کنید که X کاملاً منظم است.

۳. فرض کنید $((X_i,\mathcal{T}_i))_{i\in\mathbb{I}}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک است که حاصل‌ضرب توپولوژیک آنها کاملاً منظم است. ثابت کنید که به‌ازای هر $i\in\mathbb{I}$، X_i کاملاً منظم است.

۴. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ فضایی کاملاً منظم با بی‌نهایت عضو است. ثابت کنید که دنبالهٔ $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ از زیرمجموعه‌های باز ناتهی X موجود است که به‌ازای هر $n\neq m$، $U_n\cap U_m=\varnothing$. نتیجه بگیرید که X زیرفضایی گسسته و شمارای نامتناهی دارد. (راهنمایی: ابتدا ثابت کنید که زیرمجموعه‌ای باز و ناتهی مثل U از X وجود دارد که $X\setminus\overline{U}$ نامتناهی است.)

۵. فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را لیندلف می‌گوییم اگر به‌ازای هر پوشش باز $\mathcal{U}$ از X، $U_۱, U_۲, \ldots \in \mathcal{U}$، موجود باشند که $X = \bigcup_{n=۱}^{\infty} U_n$؛ یعنی هر پوشش باز زیرپوششی شمارا داشته باشد.

آ) فرض کنید که X فضای σـ فشرده است؛ یعنی دنبالهٔ $(K_n)_{n=۱}^{\infty}$ از زیرمجموعه‌های فشردهٔ X موجود است که $X = \bigcup_{n=۱}^{\infty} K_n$. ثابت کنید که X لیندلف است.

ب) فرض کنید که $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ است. ثابت کنید که X لیندلف است اگر و تنها اگر هر پوشش باز $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ از X زیرپوششی شمارا داشته باشد (لذا به ویژه هر فضای شمارای دوم، لیندلف است).

پ) ثابت کنید که هر زیرفضای بستهٔ یک فضای لیندلف، لیندلف است.

۶. فرض کنید که $(X,\mathcal{T})$ فضای لیندلف کاملاً منظم است، و $F, G \subset X$ بسته و جدا از هم هستند.

آ) ثابت کنید که به‌ازای هر $x \in F$ و $y \in G$، زیرمجموعه‌های باز U_x و V_y از X وجود دارند که $x \in U_x$، $y \in V_y$، $G \cap \overline{U}_x = \varnothing$، و $F \cap \overline{V}_y = \varnothing$.

ب) ثابت کنید که دنباله‌های $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$ در F و $(y_n)_{n=۱}^{\infty}$ در G موجودند که $F \subset \bigcup_{n=۱}^{\infty} U_{x_n}$ و $G \subset \bigcup_{n=۱}^{\infty} V_{y_n}$.

پ) فرض کنید

$$U := \bigcup_{n=۱}^{\infty} U_{x_n} \setminus (\overline{V}_{y_۱} \cup \cdots \cup \overline{V}_{y_n})$$

و

$$V := \bigcup_{n=۱}^{\infty} V_{y_n} \setminus (\overline{U}_{x_۱} \cup \cdots \cup \overline{U}_{x_n}).$$

ثابت کنید که U و V باز و جدا از هم هستند و $F \subset U$ و $G \subset V$، و نتیجه بگیرید که X نرمال است.

۷. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ خط سارجن‌فری است. نشان دهید که X لیندلف (و از این رو بنابر تمرین قبل نرمال) است. می‌توانید فرایند زیر را در پیش بگیرید.

آ) فرض کنید $\mathcal{U}$ پوششی باز برای X است. ثابت کنید که بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که $\mathcal{U}$ از مجموعه‌های به شکل $[a,b)$ که $a<b$ تشکیل شده است.

ب) فرض کنید $\mathcal{V} := \{(a,b) : [a,b) \in \mathcal{U}\}$ و $C := X \backslash \bigcup\{V : V \in \mathcal{V}\}$. ثابت کنید که C شمارا است.

پ) ثابت کنید که $\mathbb{R}\backslash C$ با توپولوژی معمولی $\mathbb{R}$ لیندلف است، و با استفاده از این مطلب و (ب) ثابت کنید که $\mathcal{U}$ زیرپوششی شمارا دارد.

در مورد نرمال بودن حاصل‌ضرب توپولوژیک خانواده‌ای از فضاهای نرمال چه نتیجه‌ای می‌توانید بگیرید؟

۸. ثابت کنید که هر زیرفضای بستهٔ فضای نرمال، نرمال است.

ملاحظه‌ها

در سال ۱۸۹۵، ریاضی‌دان فرانسوی هانری پوانکاره کتابی با عنوان آنالیسیس سیتوس (عبارتی لاتین به معنی تحلیل مواضع) منتشر کرد که نخستین تلاش برای مطالعهٔ منظم پدیده‌ای محسوب می‌شود که بعدها توپولوژی (برگرفته از کلمه‌های یونانی توپوس[1]، به معنی مکان، و لوگوس[2]، به معنی مطالعه، و بنابراین در مجموع به معنی مکان‌شناسی) نامیده شد. فرشه [FRÉCHET 06] و دیگران این تلاش را ادامه دادند.

نام فلیکس هاوسدورف، که فضاهای هاوسدورف به نام او نامیده شده‌اند، با ارائهٔ تعریفی جدید همراه با نامی جدید (البته، به آلمانی) در [HAUSDORFF 14] مطرح شد. او از رهیافت قضیهٔ ۱۰.۱.۳، یعنی اصل موضوعی کردن مفهوم همسایگی، استفاده کرد. عمل‌های بستار کوراتفسکی، که رهیافتی دیگر ولی هم‌ارز با رهیافت توپولوژی فراهم می‌کند، به وسیلهٔ ریاضی‌دان لهستانی کازیمیش کوراتفسکی در اوایل دههٔ ۱۹۲۰ معرفی شدند. رهیافتی که با اصل موضوعی کردن باز بودن ارائه دادیم، این روزها متداول‌ترین است.

معرفی‌هایی جدید از توپولوژی عمومی، از جمله عبارت‌اند از کتاب‌هایی که به وسیلهٔ جان ال. کلی [KELLEY 55]، جرج اف. سیمونز [SIMMONS 63]، استفن ویلارد [WILLARD 70]، گراهام جی. اُ. جیمسون [JAMEMSON 74]، و جیمز آر. مانکرز [MUNKRES 00] نگاشته شده‌اند.

1. *topos* 2. *logos*

توپولوژی حاصل‌ضربی را آندری ان. تیخونوفِ جوان، هنگامی که اندکی بیش از بیست سال داشت، در سال ۱۹۲۶ کشف کرد. جالب است که معلم او پاوِل اس. الکساندروف دربارهٔ اینکه این مفهوم اصلاً مفهومی خوب باشد مردّد بود. این مفهوم خوب بود، و تیخونوف با استفاده از آن قضیه‌ای مشهور را ثابت کرد که اکنون به نام او نامگذاری شده است. امروزه، برهان‌هایی گوناگون از قضیهٔ تیخونوف در دسترس است؛ برهانی که ما بیان کردیم از پاول آر. چرنوف [CHERNOFF 92] است. چون قضیهٔ تیخونوف در مورد حاصل‌ضرب‌های دکارتی است، که وجود شیء آن با لم زرن (یا صورت‌های هم‌ارز آن) تضمین می‌شود، چندان شگفت‌آور نیست که همهٔ برهان‌های آن به شکلی متکی به لم زرن باشند. جالب است که قضیهٔ تیخونوف، نه‌تنها از لم زرن نتیجه می‌شود، بلکه با آن هم‌ارز است [KELLEY 50].

تعریف ما از کلاً ناهمبندی تعریفی «استاندارد» محسوب می‌شود، به این معنی که امروزه بیشتر متن‌ها آن را همین‌گونه تعریف می‌کنند. ولی استثناهایی هم وجود دارد: به عنوان مثال، [SIMMONS 63] فضایی را که ما آن را در تمرین ۱۰.۴.۳ صفربُعدی نام نهادیم کلاً ناهمبند می‌نامد.

نام‌هایی که برای اصل‌های تفکیک در نظر گرفته شده است نیز چندان استاندارد نیستند. به عنوان مثال، در [KELLEY 55] فضاهای نرمال و کاملاً منظم لزوماً $T_۱$ نیستند، و فضایی که ما آن را کاملاً منظم می‌نامیم در [KELLEY 55] فضای تیخونوف نامیده می‌شود. عبارت $T_۱$ برای نخستین بار در رسالهٔ بنیادی الکساندروف و هاینتس هوپف [ALEXANDROFF & HOPF 35] نمایان شد: در این رساله، نویسندگان پنج اصل تفکیک T_j را به‌ازای $j = ۱, \ldots, ۵$ در نظر می‌گیرند. اصل $T_۲$ امروزه اصل تفکیک هاوسدورف نامیده می‌شود، و به غیر از اصل $T_۱$، اسامی آنها از خطر مصون نبوده‌اند. نویسندگان دیگر به اصل‌های تفکیک برچسب T_t زده‌اند که در آن t عددی غیر از ۱،...،۵ است: این‌گونه است که اصل $T_۰$ وجود پیدا کرد (به عنوان مثال، گاهی به فضاهای کاملاً منظم ــ به‌طور تقلیدی ــ با عنوان فضاهای $T_{۳\frac{۱}{۲}}$ ارجاع می‌شود). اصل تفکیک در گزارهٔ ۸.۵.۳، که از کاملاً منظم بودن نتیجه می‌شود و ویژگی هاوسدورف را نتیجه می‌دهد، منظم بودن نامیده می‌شود. مثالِ پس از این قضیه، فضایی هاوسدورف است که منظم نیست. گرچه آشکار نیست ولی درست است که منظم بودن در واقع ضعیف‌تر از کاملاً منظم بودن است؛ مثالی به عنوان تمرین در [WILLARD 70] داده شده است.

کوراتفسکی، تیخونوف، و الکساندروف همگی علی‌رغم تلاش‌هایی که به مقتضیات سیاسی در کشورهای خود داشتند، زندگی تخصصی موفق و طولانی داشتند، و همگی بعد از هشتاد سالگی از دنیا رفتند. تیخونوف در سال ۱۹۰۶ قبل از به وجود آمدن اتحاد شوروی به دنیا آمد، و در سال ۱۹۹۳ پس از فروپاشی آن از دنیا رفت.

اوضاع سیاسی قرن بیستم اجازه نداد که فلیکس هاوسدورف در صلح از دنیا برود. به خاطر یهودی بودنش، در سال ۱۹۴۲ از تبعید قریب‌الوقوع خود به بازداشتگاه زندانیان سیاسی ترسین‌شتات در چکسلواکیِ اشغال شده آگاه شد. او، همسر، و دخترخوانده‌اش که مایل نبودند از آنچه از شأن انسانیشان در ۱۹۴۲ باقی‌مانده بود دست بکشند، به زندگی خود پایان دادند.

۴

دستگاه‌های تابع‌های پیوسته

فضاهای توپولوژیک از ابتدا به این دلیل مطرح شدند که محیط طبیعی تابع‌های پیوسته هستند.

به‌ازای دو فضای توپولوژیک X و Y، بسته به توپولوژی‌های این دو فضا، تعداد تابع‌های پیوسته از X به Y ممکن است تغییر عمده‌ای داشته باشد: هر چیزی ممکن است؛ از «پیوسته بودن همهٔ تابع‌ها» تا «پیوسته بودن تنها تابع‌های ثابت». در این فصل به تابع‌های پیوسته از فضاهای توپولوژیک به $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ علاقه‌مندیم. در فضای متریک، خود متریک به آسانی تعداد بسیاری از این گونه تابع‌ها را فراهم می‌آورد. ولی آیا در غیاب متریک، می‌توان چیز معنی‌داری گفت؟

۱.۴ لم اوریسون و کاربردها

فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضایی توپولوژیک است. آیا تابعی پیوسته و ناثابت از X به $\mathbb{R}$ وجود دارد؟

اگر X نرمال باشد، با لم اوریسون، که برای اثبات آن به گزارهٔ زیر نیاز داریم، پاسخی شگفت‌آور (با برهانی به‌طور شگفت‌آور آسان) ارائه می‌شود.

لم ۱.۱.۴ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ نرمال است، $F \subset X$ بسته، و $U \subset X$ باز است و $F \subset U$. دراین‌صورت زیرمجموعهٔ باز V از X موجود است که

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

برهان. چون F و $X \backslash U$ بسته و جدا از هم هستند، بنا بر تعریف نرمال بودن، مجموعه‌های باز جدا از هم $V, W \subset X$ موجودند که $F \subset V$ و $X \backslash U \subset W$. چون $V \cap W = \varnothing$ (یعنی $V \subset X \backslash W$)، و چون $X \backslash W$ بسته است، همان طور که ادعا شد،

$$\overline{V} \subset X \backslash W \subset (X \backslash (X \backslash U)) = U.$$

■

قضیهٔ ۲.۱.۴ (لم اوریسون) فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک نرمال است، و F و G زیرمجموعه‌های بستهٔ جدا از هم X هستند. دراین‌صورت تابع پیوستهٔ $f : X \to \mathbb{R}$ موجود است که $f(X) \subset [۰, ۱]$، $f|_F = ۰$، و $f|_G = ۱$.

برهان. چون $X \backslash G$ باز و شامل F است، بنا بر لم ۱.۱.۴، مجموعهٔ باز $U_{\frac{۱}{۲}} \subset X$ وجود دارد که

$$F \subset U_{\frac{۱}{۲}} \subset \overline{U}_{\frac{۱}{۲}} \subset X \backslash G.$$

با بحثی مشابه، زیرمجموعه‌های باز $U_{\frac{۱}{۴}}$ و $U_{\frac{۳}{۴}}$ از X را به‌دست می‌آوریم به‌طوری‌که

$$F \subset U_{\frac{۱}{۴}} \subset \overline{U}_{\frac{۱}{۴}} \subset U_{\frac{۱}{۲}} \subset \overline{U}_{\frac{۱}{۲}} \subset U_{\frac{۳}{۴}} \subset \overline{U}_{\frac{۳}{۴}} \subset X \backslash G.$$

در مرحلهٔ بعد، مجموعه‌های باز $U_{\frac{۱}{۸}}$، $U_{\frac{۳}{۸}}$، $U_{\frac{۵}{۸}}$ و $U_{\frac{۷}{۸}}$ در X را به‌دست می‌آوریم به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} F &\subset U_{\frac{۱}{۸}} \subset \overline{U}_{\frac{۱}{۸}} \subset U_{\frac{۱}{۴}} \subset \overline{U}_{\frac{۱}{۴}} \\ &\subset U_{\frac{۳}{۸}} \subset \overline{U}_{\frac{۳}{۸}} \subset U_{\frac{۱}{۲}} \subset \overline{U}_{\frac{۱}{۲}} \subset U_{\frac{۵}{۸}} \subset \overline{U}_{\frac{۵}{۸}} \subset U_{\frac{۳}{۴}} \subset \overline{U}_{\frac{۳}{۴}} \subset U_{\frac{۷}{۸}} \subset \overline{U}_{\frac{۷}{۸}} \subset X \backslash G. \end{aligned}$$

فرض کنید که D مجموعهٔ عددهای گویای دوتایی در $(۰, ۱)$ است، یعنی همهٔ عددهای به شکل $\frac{m}{۲^n}$ که در آن $n \in \mathbb{N}$، و $m \in \{۱, ۲, \dots, ۲^n - ۱\}$. با ادامهٔ فرایندی که پیش‌تر طراحی شد، به‌ازای هر $t \in D$، زیرمجموعهٔ باز U_t از X را به‌دست می‌آوریم که به‌ازای هر $s, t \in D$ با شرط $s < t$،

$$F \subset U_s \subset \overline{U}_s \subset U_t \subset \overline{U}_t \subset X \backslash G.$$

تابع $f : X \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$f(x) := \begin{cases} \sup\{t \in D : x \notin U_t\}, & x \notin \bigcap_{t \in D} U_t \\ ۰, & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

آشکار است که $f(X) \subset [۰, ۱]$، $f|_F = ۰$، و $f|_G = ۱$. تنها اثبات پیوستگی f باقی می‌ماند.
چون $f(X) \subset [۰, ۱]$، کافی است ثابت کنیم که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ باز U از $[۰, ۱]$ با توپولوژی نسبی، $f^{-۱}(U)$ باز است. چون $\{[۰, a), (b, ۱] : a, b \in [۰, ۱]\}$ زیرپایهٔ این توپولوژی است، کافی است ثابت کنیم که به‌ازای هر $a \in [۰, ۱]$، $f^{-۱}([۰, a))$ و $f^{-۱}((a, ۱])$ باز هستند.

فرض کنید $a \in [\circ, \text{۱}]$. از تعریف f نتیجه می‌شود که $f(x) < a$ اگر و تنها اگر $t \in D$ای موجود باشد که $t < a$ و $x \in U_t$. بنابراین

$$f^{-\text{۱}}([\circ, a)) = \bigcup_{t<a} U_t$$

باز است. همچنین $f(x) > a$ اگر و تنها اگر $t \in D$ای موجود باشد که $t > a$ و $x \notin \overline{U}_t$. بنابراین

$$f^{-\text{۱}}((a, \text{۱}]) = \bigcup_{t>a} X \backslash \overline{U}_t$$

نیز باز است.

این نشان می‌دهد که f پیوسته است. ∎

به آسانی دیده می‌شود که در لم اوریسون، می‌توان هر بازهٔ $[a, b]$ که $a < b$ را جایگزین $[\circ, \text{۱}]$ کرد.

نتیجهٔ ۳.۱.۴ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک نرمال است، F و G زیرمجموعه‌های بستهٔ جدا از هم X هستند، و $a < b$. دراین‌صورت تابع پیوستهٔ $f: X \to \mathbb{R}$ موجود است که $f(X) \subset [a, b]$، $f|_F = a$، و $f|_G = b$.

برهان. بنا بر لم اوریسون، تابع پیوستهٔ $g: X \to [\circ, \text{۱}]$ موجود است که $g|_F = \circ$ و $g|_G = \text{۱}$. با تعریف $f: X \to [a, b]$ به‌صورت

$$f(x) := (b - a)g(x) + a \qquad (x \in X),$$

حکم ثابت می‌شود. ∎

به عنوان نتیجهٔ مستقیم دیگری از لم اوریسون، می‌توانیم رابطهٔ بین نرمال بودن و کاملاً منظم بودن را روشن کنیم.

نتیجهٔ ۴.۱.۴ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضایی نرمال است. دراین‌صورت X کاملاً منظم است.

نتیجه‌های دیگری نیز به‌دست می‌آیند.

نتیجهٔ ۵.۱.۴ فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضای هاوسدورف فشردهٔ موضعی است. دراین‌صورت X کاملاً منظم است.

برهان. فشرده‌سازی تک‌نقطه‌ای X، فضای هاوسدورفی فشرده، بنابراین نرمال، و از این رو کاملاً منظم است. فضای X به عنوان زیرفضایی از فضایی کاملاً منظم، کاملاً منظم است. ■

نتیجهٔ ۶.۱.۴ به‌ازای هر فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ حکم‌های زیر هم‌ارزند.

(i) X فضای هاوسدورف فشرده است.

(ii) مجموعهٔ اندیس‌گذار $\mathbb{I}$ موجود است که X با زیرفضایی بسته از $[\circ, \text{۱}]^{\mathbb{I}}$ همسان‌ریخت است.

برهان. (i)$\Longrightarrow$(ii): فرض کنید

$$\mathbb{I} := \{f \in C(X, \mathbb{R}) : f(X) \subset [\circ, \text{۱}]\},$$

و تعریف کنید

$$\iota : X \to [\circ, \text{۱}]^{\mathbb{I}}, \qquad x \mapsto (f(x))_{f \in \mathbb{I}}.$$

آشکارا، ι پیوسته است، و بنابر لم اوریسون یک‌به‌یک نیز هست. از این رو $\iota : X \to \iota(X)$ تابعی پیوسته و دوسویی از فضایی فشرده به فضایی هاوسدورف است. پس بنا بر قضیهٔ ۱۱.۳.۳، ι در واقع همسان‌ریختی‌ای بین X و $\iota(X)$ است. سرانجام چون X فشرده است، $\iota(X)$ فشرده و بنابراین در فضای هاوسدورف $[\circ, \text{۱}]^{\mathbb{I}}$ بسته است.

(ii)$\Longrightarrow$(i): چون $[\circ, \text{۱}]^{\mathbb{I}}$ فضای هاوسدورف فشرده است، هر زیرفضای بستهٔ آن هم این گونه است. ■

در ادامه، لم اوریسون را در مورد مسئلهٔ متریک‌پذیری فضاهای توپولوژیک به کار می‌بریم. پیش‌تر با تعدادی اندک از ویژگی‌های لازم برای متریک‌پذیر بودن فضاهای توپولوژیک مواجه شده‌ایم: ویژگی تفکیک هاوسدورف، شمارای اول، و نرمال بودن. با این وجود هیچ‌یک از این ویژگی‌ها کافی نیستند.

ابتدا لمی فنّی را ثابت می‌کنیم.

لم ۷.۱.۴ فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک، و $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ است، و فرض کنید به‌ازای هر $U \in \mathcal{B}$ و هر $x \in U$، تابع پیوستهٔ $f_{U,x} : X \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $f_{U,x}(x) = \text{۱}$ و $f_{U,x}|_{X \setminus U} = \circ$. دراین‌صورت $\mathcal{T}$ ضعیف‌ترین توپولوژی بر X است که همهٔ تابع‌های در $\{f_{U,x} : U \in \mathcal{B}, x \in U\}$ پیوسته‌اند.

برهان. فرض کنید که $\mathcal{T}'$ ضعیف‌ترین توپولوژی بر X است که نسبت به آن، همهٔ تابع‌های در $\{f_{U,x} : U \in \mathcal{B}, x \in U\}$ پیوسته‌اند. آشکارا، $\mathcal{T}$ قوی‌تر از $\mathcal{T}'$ است. برای نیل به تناقض فرض

کنید که مجموعهٔ $U \in \mathcal{T}$ وجود دارد که در $\mathcal{T}'$ نیست. بدون کاسته شدن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم $U \in \mathcal{B}$. اگر U در $\mathcal{T}'$ نباشد، آنگاه $X \backslash U$ نسبت به توپولوژی $\mathcal{T}'$ بسته نیست. بنابراین $x \notin X \backslash U$ای (یعنی $x \in U$) موجود است که در بستار $X \backslash U$ نسبت به توپولوژی $\mathcal{T}'$ قرار دارد. فرض کنید $(x_\alpha)_\alpha$ توری در $X \backslash U$ است که $x_\alpha \to x$ نسبت به $\mathcal{T}'$. در نتیجه

$$۱ = f_{U,x}(x) = \lim_\alpha f_{U,x}(x_\alpha) = ۰,$$

که ناممکن است. بنا براین $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}'$ بر هم منطبق هستند. ■

نتیجهٔ ۸.۱.۴ فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضای کاملاً منظم است. دراین‌صورت $\mathcal{T}$ ضعیف‌ترین توپولوژی بر X است که همهٔ تابع‌های در $C_b(X, \mathbb{R})$ پیوسته‌اند.

تعریف زیر پیش‌تر در تمرین ۴.۱.۳ داده شده است، ولی تکرار آن ضرری ندارد.

تعریف ۹.۱.۴ می‌گوییم فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ شمارای دوم است اگر $\mathcal{T}$ پایه‌ای شمارا داشته باشد.

قضیهٔ ۱۰.۱.۴ (قضیهٔ متریک‌سازی اوریسون) فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضای شمارای دوم و نرمال است. دراین‌صورت X متریک‌پذیر است.

برهان. فرض کنید که $\{U_۱, U_۲, U_۳, \ldots\} \subset \mathcal{T}$ پایه‌ای شمارا برای $\mathcal{T}$ است و

$$\mathbb{A} := \{(n, m) \in \mathbb{N}^۲ : \overline{U}_n \subset U_m\}.$$

ادعا می‌کنیم که به‌ازای هر $m \in \mathbb{N}$ و هر $x \in U_m$، $n \in \mathbb{N}$ی وجود دارد که $x \in U_n \subset \overline{U}_n \subset U_m$ (به ویژه، (n, m) در $\mathbb{A}$ است). در واقع بنا بر لم ۱.۱.۴، $U \in \mathcal{T}$ و $x \in U \subset \overline{U} \subset U_m$. چون $\{U_۱, U_۲, \ldots\}$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ است، n مورد نظر وجود دارد.

بنا بر لم اوریسون، به‌ازای هر $(n, m) \in \mathbb{A}$، تابع پیوستهٔ $f_{n,m} : X \to \mathbb{R}$ موجود است که $f_{n,m}(X) \subset [۰, ۱]$، $f_{n,m}|_{\overline{U}_n} = ۱$، و $f_{n,m}|_{X \backslash U_m} = ۰$. تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$d(x, y) := \sum_{(n,m) \in \mathbb{A}} \frac{۱}{۲^{n+m}} |f_{n,m}(x) - f_{n,m}(y)| \qquad (x, y \in X).$$

به‌طور مستقیم ثابت می‌شود که d نیم‌متریکی بر X است. برای اثبات اینکه d در واقع متریک است، فرض کنید که $x, y \in X$ چنان‌اند که $x \neq y$. چون X هاوسدورف است، $m \in \mathbb{N}$ی موجود است که $x \in U_m$

و $y \notin U_m$. بنابر آنچه گذشت، $n \in \mathbb{N}$ ی موجود است که $x \in \overline{U}_n \subset U_m$، و لذا $(n,m) \in \mathbb{A}$.
چون $f_{n,m}|_{\overline{U}_n} = ۱$ و $f_{n,m}|_{X \setminus U_m} = ۰$، $|f_{n,m}(x) - f_{n,m}(y)| = |f_{n,m}(x)| = ۱$ و از این رو $d(x,y) \geq \frac{۱}{۲^{n+m}} > ۰$.

بررسی پیوسته بودن تابع همانی از $(X,\mathcal{T})$ به (X,d) سرراست است ــ زیرا هر تابع $f_{n,m}$ پیوسته است ــ لذا توپولوژی القا شده به وسیلهٔ d ضعیف‌تر از $\mathcal{T}$ است. از سوی دیگر هر تابع $f_{n,m}$ با شرط $(n,m) \in \mathbb{A}$ نسبت به d پیوسته است، و از لم ۷.۱.۴ نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{T}$ ضعیف‌تر از توپولوژی (X,d) است. ∎

نتیجهٔ ۱۱.۱.۴ به‌ازای هر فضای هاوسدورف فشردهٔ $(K,\mathcal{T})$، حکم‌های زیر هم‌ارزند.

(i) K شمارای دوم است.

(ii) K متریک‌پذیر است.

برهان. (ii)$\Longleftarrow$(i) بی‌درنگ از قضیهٔ متریک‌سازی به دست می‌آید.
برای اثبات عکس، توجه کنید که هر فضای متریک‌پذیر فشرده همواره تفکیک‌پذیر و از این رو بنا بر تمرین ۴.۱.۳ شمارای دوم است. ∎

لم زیر پیش‌تر به عنوان (حالتی خاص از) مثال ۶.۴.۲ برای فضاهای متریک ثابت شده است؛ با این وجود برهان ارائه شده در آنجا برای فضاهای توپولوژیک کلی هم به کار می‌آید.

لم ۱۲.۱.۴ فرض کنید که $(X,\mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است. دراین‌صورت $C_b(X,\mathbb{F})$ با نرم $\|\cdot\|_\infty$ که به‌صورت

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\} \qquad (f \in C_b(X,\mathbb{F}))$$

تعریف می‌شود، فضای باناخ است.

به لم ۱۲.۱.۴ در اثبات کاربردی دیگر از لم اوریسون نیاز داریم.

قضیهٔ ۱۳.۱.۴ (قضیهٔ توسیع تیتسه) فرض کنید که $(X,\mathcal{T})$ فضای نرمال، Y زیرفضایی بسته، و $f : Y \to \mathbb{R}$ پیوسته است و $f(Y) \subset [a,b]$. در این‌صورت تابع پیوستهٔ $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ موجود است که توسیع f است و $\tilde{f}(X) \subset [a,b]$.

برهان. اگر $a = b$ حکم آشکار است، بنابراین فرض کنید $a < b$. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $a = -۱$ و $b = ۱$.

قرار دهید $f_۰ := f$، و فرض کنید

$$F_۰ := \left\{x \in Y : f_۰(x) \leq -\frac{۱}{۳}\right\}, \qquad G_۰ := \left\{x \in Y : f_۰(x) \geq \frac{۱}{۳}\right\}.$$

دراین‌صورت $F_۰$ و $G_۰$ بسته و جدا از هم هستند. بنابر نتیجهٔ ۳.۱.۴، تابع پیوستهٔ $g_۰ : X \to [-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}]$ موجود است که $g_۰|_{F_۰} = -\frac{۱}{۳}$ و $g_۰|_{G_۰} = \frac{۱}{۳}$. فرض کنید $f_۱ := f_۰ - g_۰|_Y$، در نتیجه $f_۱(Y) \subset [-\frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۳}]$. فرض کنید

$$F_۱ := \left\{x \in Y : f_۱(x) \leq -\frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۳}\right\}, \qquad G_۱ := \left\{x \in Y : f_۱(x) \geq \frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۳}\right\}.$$

دوباره از نتیجهٔ ۳.۱.۴ تابع پیوستهٔ $g_۱ : X \to [-\frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۳}]$ را به‌دست می‌آوریم که $g_۱|_{F_۱} = -\frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۳}$ و $g_۱|_{G_۱} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۳}$. قرار دهید $f_۲ := f_۱ - g_۱|_Y$ و توجه کنید که $f_۲(Y) \subset [-\frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳}]$. با ادامهٔ این روند تابع‌های پیوستهٔ $f_۰$، $f_۱$، $f_۲$، ... بر Y و $g_۰$، $g_۱$، $g_۲$، ... بر X را به‌دست می‌آوریم که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}_۰$،

$$f_n(Y) \subset \left[-\left(\frac{۲}{۳}\right)^n, \left(\frac{۲}{۳}\right)^n\right], \qquad g_n(X) \subset \left[-\frac{۱}{۳}\left(\frac{۲}{۳}\right)^n, \frac{۱}{۳}\left(\frac{۲}{۳}\right)^n\right].$$

به‌علاوه

$$f_n = f_۰ - (g_۰ + g_۱ + \cdots + g_{n-۱})|_Y \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

فرض کنید $\epsilon > ۰$. چون

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \|g_n\|_\infty \leq \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۳}\left(\frac{۲}{۳}\right)^n = ۱ < \infty, \tag{$*$}$$

$n_\epsilon \in \mathbb{N}$ ی موجود است که

$$\left\|\sum_{k=n+۱}^{m} g_k\right\|_\infty \leq \sum_{k=n+۱}^{m} \|g_k\|_\infty < \epsilon \qquad (m > n \geq n_\epsilon).$$

بنابراین دنبالهٔ $(\sum_{k=0}^{n} g_k)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی در فضای باناخ $C_b(X,\mathbb{R})$ است و از این رو به تابعی مثل $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ همگرا است. بنا بر $(*)$، به‌ازای هر $x \in X$،

$$\left|\tilde{f}(x)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |g_n(x)| \leq \|g_n\|_\infty = 1,$$

و لذا $\tilde{f}(X) \subset [-1,1]$. به‌علاوه به‌ازای هر $x \in Y$،

$$\left|f(x) - \tilde{f}(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} g_k(x)\right| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

از این رو $\tilde{f}$ همان‌طور که ادعا شده بود توسیع f است. ∎

گزارهٔ زیر نتیجهٔ زیبای لم اوریسون و قضیهٔ توسیع تیتسه است و نشان می‌دهد که نرمال بودن دقیقاً شرطی است که این دو نتیجه را ممکن کند.

نتیجهٔ ۱۴.۱.۴ حکم‌های زیر برای فضای $(X,\mathcal{T})$ که T_1 است هم‌ارزند.

(i) X نرمال است.

(ii) به‌ازای هر $F, G \subset X$ بسته و جدا از هم، تابع پیوستهٔ $f : X \to \mathbb{R}$ موجود است که $f(X) \subset [0,1]$، $f|_F = 0$، و $f|_G = 1$.

(iii) به‌ازای هر $F, G \subset X$ بسته و جدا از هم، تابع پیوستهٔ $f : X \to \mathbb{R}$ موجود است که $f|_F = 0$، و $f|_G = 1$.

(iv) به‌ازای هر زیرفضای بستهٔ Y از X و هر تابع پیوستهٔ $f : Y \to \mathbb{R}$ با شرط $f(Y) \subset [a,b]$، تابع پیوستهٔ $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ موجود است که $\tilde{f}(X) \subset [a,b]$ و $\tilde{f}|_Y = f$.

(v) به‌ازای هر زیرفضای بستهٔ Y از X و هر تابع پیوستهٔ $f : Y \to \mathbb{R}$، تابع پیوستهٔ $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ موجود است که $\tilde{f}|_Y = f$.

برهان. (ii)$\Longrightarrow$(i) لم اوریسون است، و (iii)$\Longrightarrow$(ii) بدیهی است.

(i)$\Longrightarrow$(iii): فرض کنید $F, G \subset X$ بسته و جدا از هم هستند، و فرض کنید f تابعی است که در (iii) آمده است. قرار دهید

$$U := \left\{x \in X : f(x) < \frac{1}{2}\right\}, \qquad V := \left\{x \in X : f(x) > \frac{1}{2}\right\}.$$

دراین‌صورت U و V باز و جدا از هم هستند و $F \subset U$ و $G \subset V$.

(iv)$\Longrightarrow$(i) قضیهٔ توسیع تیتسه است.

(iv)$\Longrightarrow$(v): فرض کنید $g := \arctan \circ f$. دراین‌صورت $g : Y \to \mathbb{R}$ پیوسته است و $g(Y) \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. بنا بر (iv)، تابع پیوستهٔ $\tilde{g} : X \to \mathbb{R}$ موجود است که توسیع g است و $\tilde{g}(X) \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

ممکن است تصور کنید که باید قرار دهیم $\tilde{f} := \tan \circ \tilde{g}$. با این رهیافت، حتی با وجود اینکه g مقدارهای $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ را نمی‌گیرد، با استناد به (iv) نمی‌توان این را که این دو مقدار در نگارهٔ $\tilde{g}$ قرار نمی‌گیرند، رد کرد، لذا $\tan \circ \tilde{g}$ ممکن است بر تمام X تعریف نشود. برای رهایی از این مشکل بار دیگر از (iv) استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $F := \tilde{g}^{-1}(\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\})$. دراین‌صورت F بسته است و با Y اشتراک تهی دارد. تابع $h : F \cup Y \to [0, 1]$ را طوری تعریف کنید که $h|_F = 0$ و $h|_Y = 1$. در این صورت h پیوسته است زیرا F و Y در $F \cup Y$ بسته‌باز هستند، و (iv) توسیع پیوستهٔ $\tilde{h} : X \to [0, 1]$ از h را فراهم می‌آورد. در نتیجه $\tilde{h}\tilde{g}$ توسیعی پیوسته از g است که همهٔ مقدارهای آن در $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ است. بنابراین $\tilde{f} := \tan \circ \left(\tilde{h}\tilde{g}\right)$ توسیعی پیوسته از f است.

(v)$\Longrightarrow$(iii): فرض کنید $F, G \subset X$ بسته و جدا از هم هستند. قرار دهید $Y := F \cup G$ و $f : Y \to \mathbb{R}$ را به‌صورت $f|_F := 0$ و $f|_G := 1$ تعریف کنید. بنابراین f پیوسته است، و از این رو توسیعی پیوسته بر کل X دارد. این توسیع در (iii) صدق می‌کند. ∎

تمرین‌ها

۱. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضایی T_1 است که به‌ازای هر $F \subset X$ بسته و هر $U \subset X$ باز با شرط $F \subset U$، زیرمجموعهٔ باز V از X موجود است که $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$. ثابت کنید که X نرمال است.

۲. ثابت کنید که هر زیرمجموعهٔ باز فضای هاوسدورف فشرده، فشردهٔ موضعی است، و نتیجه بگیرید که به‌ازای هر فضای هاوسدورف فشردهٔ موضعی مانند $(X, \mathcal{T})$، به‌ازای هر $x \in X$، دستگاه همسایگی $\mathcal{N}_x$ پایه‌ای از مجموعه‌های فشرده دارد.

۳. فرض کنید (X, d) فضایی متریک است (و لذا X نرمال و لم اوریسون برقرار است)، و $F, G \subset X$ ناتهی، بسته، و جدا از هم هستند. توصیفی «قابل لمس» از تابع f بیان شده در لم اوریسون بر حسب $\operatorname{dist}(\cdot, F)$ و $\operatorname{dist}(\cdot, G)$ ارائه دهید.

۴. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضایی کاملاً منظم، $K \subset X$ فشرده، و $F \subset X$ بسته است و $K \cap F = \varnothing$. ثابت کنید که تابع پیوستهٔ $f : X \to \mathbb{R}$ موجود است که $f(X) \subset [0, 1]$، $f|_K = 1$، و $f|_F = 0$.

۵. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای نرمال، و $\{U_1, \ldots, U_n\}$ پوششی باز برای X است.

آ) ثابت کنید که پوشش باز $\{V_1, \ldots, V_n\}$ از X موجود است که به‌ازای هر $j = 1, \ldots, n$، $\overline{V}_j \subset U_j$.

ب) ثابت کنید که تابع‌های پیوسته‌ای مانند $f_1, \ldots, f_n : X \to [0, \infty)$ وجود دارند که $f_1 + \cdots + f_n = 1$، و به‌ازای هر $j = 1, \ldots, n$، $\overline{\{x \in X : f_j(x) \neq 0\}} \subset U_j$.

۶. به‌ازای هر فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ ثابت کنید که حکم‌های زیر هم‌ارزند.

(i) X کاملاً منظم است.

(ii) به‌ازای مجموعهٔ اندیس‌گذار $\mathbb{I}$، X با زیرفضایی از $[0, 1]^{\mathbb{I}}$ همسان‌ریخت است.

(iii) X با زیرفضایی از فضایی هاوسدورف و فشرده همسان‌ریخت است.

۷. ثابت کنید که فضای هاوسدورف $(X, \mathcal{T})$ پایه‌ای از مجموعه‌های بسته‌باز دارد اگر و تنها اگر به‌ازای مجموعهٔ اندیس‌گذاری مثل $\mathbb{I}$، X با زیرفضایی از $\{0, 1\}^{\mathbb{I}}$ همسان‌ریخت باشد (در اینجا $\{0, 1\}$ به توپولوژی گسسته مجهز است).

۸. با مثالی نشان بدهید که در قضیهٔ توسیع تیتسه، شرط بسته بودن Y را نمی‌توان برداشت.

۹. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای نرمال، و Y زیرفضایی بسته از X است. ثابت کنید که نگاشت تحدید

$$C_b(X, \mathbb{R}) \to C_b(Y, \mathbb{R}), \qquad f \mapsto f|_Y$$

پیوسته و پوشا است، و نتیجه بگیرید که اگر $C_b(X, \mathbb{R})$ تفکیک‌پذیر باشد آنگاه $C_b(Y, \mathbb{R})$ نیز چنین است. اگر $\mathbb{C}$ را جایگزین $\mathbb{R}$ کنیم چه روی می‌دهد؟

۲.۴ فشرده‌سازی استون - چخ

در قضیهٔ ۲۶.۳.۳ دیدیم که هر فضای هاوسدورف فشردهٔ موضعی مانند X، زیرفضای فضایی هاوسدورف و فشرده (یعنی فشرده‌سازی تک‌نقطه‌ای آن X_∞) است. این فشرده‌سازی مینیمال است: فقط یک نقطه دارد که در X نیست.

بنابر تمرین ۶.۱.۴، فضاهای توپولوژیکی که «فشرده‌سازی» دارند (یعنی با زیرفضایی از فضایی هاوسدورف و فشرده همسان‌ریخت هستند) دقیقاً همان فضاهای کاملاً منظم هستند. در این بخش نشان می‌دهیم که در میان فشرده‌سازی‌های فضای کاملاً منظم، یک فشرده‌سازی ویژه به عنوان ماکسیمال ــ مفهومی که به‌طور دقیق تعریف می‌شود ــ مطرح است.

با نگاهی به تابع‌های پیوسته بر فضای هاوسدورف فشرده شروع می‌کنیم. این مجموعه از تابع‌ها تحت عمل‌های نقطه‌ای، حلقهٔ جابه‌جایی و یک‌دار است؛ پس می‌توانیم از ایده‌آل‌های این حلقه صحبت کنیم.

گزارهٔ ۱.۲.۴ فرض کنید که $(K,\mathcal{T})$ فضای هاوسدورف فشرده است. دراین‌صورت به‌ازای هر $\mathfrak{m}\subset C(K,\mathbb{F})$ حکم‌های زیر هم‌ارزند.

(i) $\mathfrak{m}$ ایده‌آل ماکسیمال $C(K,\mathbb{F})$ است.

(ii) نگاشت خطی ضربی ناصفری مانند $\phi : C(K,\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ موجود است که $\mathfrak{m}=\{f\in C(K,\mathbb{F}) : \phi(f)=\circ\}$.

(iii) $x\in K$ای موجود است که $\mathfrak{m}=\{f\in C(K,\mathbb{F}) : f(x)=\circ\}$.

برهان. (iii)$\Longrightarrow$(ii): نگاشت $C(K,\mathbb{F})\ni f\mapsto f(x)$ ناصفر (تابع‌های ثابت پیوسته‌اند)، خطی، و ضربی است، و ویژگی مورد نظر را دارا است.

(ii)$\Longrightarrow$(i): به آسانی می‌توان بررسی کرد که $\mathfrak{m}$ ایده‌آل $C(K,\mathbb{F})$ است. برای اثبات اینکه $\mathfrak{m}$ ماکسیمال است، ابتدا توجه کنید که ϕ پوشا است: ϕ ناصفر و خطی است، از این رو نگارهٔ ϕ زیرفضای خطی ناصفر فضای خطی یک‌بعدی $\mathbb{F}$، و در نتیجه تمام $\mathbb{F}$ است. فرض کنید I ایده‌آلی از $C(K,\mathbb{F})$ است که $\mathfrak{m}\subsetneq I$. چون ϕ پوشا است، $\phi(I)$ ایده‌آلی از $\mathbb{F}$ است، و چون $I\neq\mathfrak{m}$، $\phi(I)$ نمی‌تواند ایده‌آل صفر باشد. چون $\mathbb{F}$ میدان است و از این رو به‌جز $(\circ)$ و $\mathbb{F}$ ایده‌آلی ندارد، $\phi(I)=\mathbb{F}$. فرض کنید که $I\subsetneq C(K,\mathbb{F})$، و $f\in C(K,\mathbb{F})\backslash I$. چون $\phi(I)=\mathbb{F}$، $g\in I$ای موجود است که $\phi(g)=\phi(f)$. این به نوبهٔ خود نشان می‌دهد که $f-g\in\mathfrak{m}$، و لذا

$$f=g+\underbrace{(f-g)}_{\in\mathfrak{m}\subset I}\in I,$$

که تناقض است.

(iii)$\Longrightarrow$(i): به‌ازای هر $x\in K$، فرض کنید

$$\mathfrak{m}_x:=\{f\in C(K,\mathbb{F}) : f(x)=\circ\}.$$

فرض کنید که به‌ازای هر $x \in K$، $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_x$. چون $\mathfrak{m}$ ماکسیمال است، این حکم هم‌ارز است با اینکه به‌ازای هر $x \in K$، $\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{m}_x$. بنابراین به‌ازای هر $x \in K$، $f_x \in \mathfrak{m}$ی موجود است که $f_x(x) \neq \circ$.
به‌ازای هر $x \in K$، فرض کنید

$$U_x := \{y \in K : f_x(y) \neq \circ\}.$$

دراین‌صورت $\{U_x : x \in K\}$ پوششی باز برای K است و بنابراین زیرپوششی متناهی دارد: $x_۱, \ldots, x_n \in K$، وجود دارند که

$$K = U_{x_۱} \cup \cdots \cup U_{x_n}.$$

فرض کنید

$$f := f_{x_۱}\bar{f}_{x_۱} + \cdots + f_{x_n}\bar{f}_{x_n}.$$

در نتیجه $f \in \mathfrak{m}$ و به‌ازای هر $x \in K$، $f(x) > \circ$. چون $\frac{۱}{f}$ نیز پیوسته است، $۱ = f\frac{۱}{f} \in \mathfrak{m}$، که اگر $\mathfrak{m} \neq C(K, \mathbb{F})$ ناممکن است. ∎

نتیجهٔ ۲.۲.۴ فرض کنید که $(K, \mathcal{T})$ فضای فشرده و هاوسدورف، و $\phi : C(K, \mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ نگاشتی ضربی، خطی و ناصفر است. دراین‌صورت $x \in K$ای یکتا موجود است که

$$\phi(f) = f(x) \qquad (f \in C(K, \mathbb{F})).$$

برهان. فرض کنید $\mathfrak{m} = \{f \in C(K, \mathbb{F}) : \phi(f) = \circ\}$. بنابر گزارهٔ ۱.۲.۴، $x \in K$ای موجود است که $\mathfrak{m} = \{f \in C(K, \mathbb{F}) : f(x) = \circ\}$. توجه کنید که $\phi(۱) = ۱$: چون $\phi(۱) = \phi(۱^۲) = \phi(۱)^۲$، باید $\phi(۱) \in \{\circ, ۱\}$، و $\phi(۱) = \circ$ ناممکن است زیرا در غیراین صورت، به‌ازای هر $f \in C(K, \mathbb{F})$، $\phi(f) = \phi(f)\phi(۱) = \circ$. فرض کنید $f \in C(K, \mathbb{F})$ دلخواه است. از این رو $f - f(x)۱ \in \mathfrak{m}$، و لذا

$$\phi(f) = \phi(f - f(x)۱) + \phi(f(x)۱) = f(x)\phi(۱) = f(x).$$

که وجود x را ثابت می‌کند. یکتایی از لم اوریسون نتیجه می‌شود. ∎

گزارهٔ زیر اطلاعاتی در مورد نگاشت‌های خاصی بین فضاهای تابع‌های پیوسته فراهم می‌آورد.

گزارهٔ ۳.۲.۴ فرض کنید $(K, \mathcal{T}_K)$ و $(L, \mathcal{T}_L)$ فضاهای هاوسدورف فشرده هستند. در این صورت به‌ازای هر نگاشت $\phi : C(K, \mathbb{F}) \to C(L, \mathbb{F})$، حکم‌های زیر هم‌ارزند:

(i) ϕ خطی، و همریختی یکانی حلقه‌ها است، یعنی خطی و ضربی است و همانی $C(K,\mathbb{F})$ را به همانی $C(L,\mathbb{F})$ می‌نگارد.

(ii) نگاشت پیوستهٔ $\kappa : L \to K$ موجود است که

$$\phi(f) = f \circ \kappa \qquad (f \in C(K,\mathbb{F})).$$

به‌علاوه، این κ لزوماً یکتا است.

برهان. (i)$\Longleftarrow$(ii) بدیهی است.

(ii)$\Longrightarrow$(i): به‌ازای هر $x \in L$، تعریف کنید

$$\phi_x : C(K,\mathbb{F}) \to \mathbb{F}, \qquad f \mapsto \phi(f)(x).$$

می‌توان بررسی کرد که ϕ_x ناصفر، خطی و ضربی است. از این رو بنابر نتیجهٔ ۲.۲.۴، $\kappa(x) \in K$ای موجود است که

$$\phi(f)(x) = f(\kappa(x)) \quad (f \in C(K,\mathbb{F})).$$

باقی می‌ماند که ثابت کنیم $\kappa : L \to K$ پیوسته است. آنچه آشکار است این است که اگر K به ضعیف‌ترین توپولوژی که با آن همهٔ تابع‌های در $C(K,\mathbb{F})$ پیوسته‌اند مجهز شود، κ پیوسته است. ولی بنابر نتیجهٔ ۸.۱.۴، این توپولوژی چیزی به‌جز $\mathcal{T}_K$ نیست.

سرانجام، اثبات یکتایی نتیجهٔ ۲.۲.۴، یکتایی κ را نتیجه می‌دهد. ∎

اکنون می‌توانیم نتیجهٔ اصلی این بخش را صورت‌بندی (و ثابت) کنیم.

قضیهٔ ۴.۲.۴ (فشرده‌سازی استون ـ چخ) فرض کنید که $(X,\mathcal{T}_X)$ فضای توپولوژیک کاملاً منظم است. در این صورت فضای هاوسدورف فشردهٔ βX ــ یعنی فشرده‌سازی استون ـ چخ X ــ همراه با نگاشت پیوستهٔ $\iota : X \to \beta X$، که همسان‌ریختی‌ای به‌روی زیرمجموعه‌ای چگال از βX است، با ویژگی جهانی زیر موجود است. اگر $(K,\mathcal{T}_K)$ فضای هاوسدورف فشرده، و $\kappa : X \to K$ پیوسته باشد آنگاه نگاشت پیوستهٔ $\hat{\kappa} : \beta X \to K$ موجود است که نمودار

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\kappa"'] & \beta X \arrow[d, dashed, "\hat{\kappa}"] \\
 & K
\end{tikzcd}$$

جابه‌جا می‌شود. به‌علاوه βX تحت همسان‌ریختی یکتا است.

برهان. فرض کنید که $\tilde{X} := \prod_{f\in C_b(X,\mathbb{R})} \overline{f(X)}$ به توپولوژی حاصل‌ضربی مجهز است، و از این رو بنا بر قضیهٔ تیخونوف فشرده است، و تعریف کنید

$$\iota : X \to \tilde{X}, \qquad x \mapsto (f(x))_{f\in C_b(X,\mathbb{R})}.$$

بنابر تعریف توپولوژی حاصل‌ضربی، ι پیوسته است. به‌علاوه، چون X کاملاً منظم است، ι یک‌به‌یک است، و بی‌درنگ از نتیجهٔ ۸.۱.۴ نتیجه می‌شود که ι همسان‌ریختی‌ای به‌روی نگاره‌اش است. فرض کنید $\beta X := \overline{\iota(X)}$. به‌ازای $f \in C_b(X,\mathbb{R})$، فرض کنید که $\pi_f : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ تصویر مختصی منسوب به f است. $\hat{f} : \beta X \to \mathbb{R}$ را به این صورت تعریف کنید که به‌ازای هر $\omega \in \beta X$، $\hat{f}(\omega) := \pi_f(\omega)$. در نتیجه $\hat{f} \circ \iota = f$. با یکی گرفتن X و نگاره‌اش در βX، مشاهده می‌کنیم که $\hat{f}$ توسیع پیوستهٔ (لزوماً یکتای) f به همهٔ βX است. به آسانی دیده می‌شود که

$$C_b(X,\mathbb{R}) \to C(\beta X,\mathbb{R}), \qquad f \mapsto \hat{f}$$

خطی و یکریختی یکانی حلقه‌ها است.

فرض کنید که $(K, \mathcal{T}_K)$ فضایی هاوسدورف و فشرده، و $\kappa : X \to K$ پیوسته است. دراین‌صورت

$$C(K,\mathbb{R}) \to C_b(X,\mathbb{R}), \qquad f \mapsto f \circ \kappa$$

همریختی یکانی حلقه‌ها است. با توجه به یکریختی بین $C_b(X,\mathbb{R})$ و $C(\beta X,\mathbb{R})$، گزارهٔ ۳.۲.۴ نگاشت پیوستهٔ $\hat{\kappa} : \beta X \to K$ را به‌دست می‌دهد که

$$f(\hat{\kappa}(\iota(x))) = f(\kappa(x)) \qquad (f \in C(K,\mathbb{R}), x \in X).$$

در نتیجه $\hat{\kappa} \circ \iota = \kappa$.

فرض کنید که $\hat{\kappa}_۱, \hat{\kappa}_۲ : \beta X \to K$ موجودند که به‌ازای $j = ۱, ۲$، $\hat{\kappa}_j \circ \iota = \kappa$. دراین‌صورت $\kappa_۱$ و $\kappa_۲$ بر زیرمجموعهٔ چگال $\iota(X)$ منطبق، و از این رو (چون K هاوسدورف است) با هم برابرند (تمرین ۱۰.۲.۳)، که یکتایی $\hat{\kappa}$ را ثابت می‌کند.

برای اثبات یکتایی βX تحت همسان‌ریختی، فرض کنید $\beta_۱ X$ و $\beta_۲ X$ فشرده‌سازی‌های استون-چخ X با نگاشت‌های متناظر $\iota_j : X \to \beta_j X$، به‌ازای $j = ۱, ۲$، هستند. دراین‌صورت $\iota_۱$ و $\iota_۲$ توسیع‌های پیوستهٔ $\hat{\iota}_۱ : \beta_۲ X \to \beta_۱ X$ و $\hat{\iota}_۲ : \beta_۱ X \to \beta_۲ X$ را دارند که $\hat{\iota}_۱ \circ \iota_۲ = \iota_۱$ و $\hat{\iota}_۲ \circ \iota_۱ = \iota_۲$. در نتیجه $\hat{\iota}_۱$ و $\hat{\iota}_۲$ وارون هم هستند، و لذا $\beta_۱ X$ و $\beta_۲ X$ به واسطهٔ $\hat{\iota}_۱$ و $\hat{\iota}_۲$ همسان‌ریخت هستند. ∎

گزارهٔ زیر محصول فرعی برهان قضیهٔ ۴.۲.۴، دست‌کم به‌ازای $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ است، ولی آن را از صورت این قضیه نتیجه می‌گیریم.

نتیجهٔ ۵.۲.۴ فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک کاملاً منظم است. در این‌صورت هر $f \in C_b(X, \mathbb{F})$ توسیع یکتایی مانند $\hat{f} \in C(\beta X, \mathbb{F})$ دارد، و از این رو

$$C_b(X, \mathbb{F}) \to C(\beta X, \mathbb{F}), \qquad f \mapsto \hat{f} \qquad (**)$$

یکریختی یکانی حلقه‌ها و طولپایی فضاهای باناخ است.

برهان. به‌ازای $f \in C_b(X, \mathbb{F})$ قضیهٔ ۴.۲.۴ را با $K := \overline{f(X)}$ و $\kappa := f$ به کار ببرید. یکتایی $\hat{f}$ از چگال بودن X در βX نتیجه می‌شود، که همچنین نشان می‌دهد که $(**)$ همریختی یکانی حلقه‌ها و طولپایی فضاهای باناخ است. اگر $g \in C(\beta X, \mathbb{F})$ آنگاه تحدید آن به X، یعنی f، در $C_b(X, \mathbb{F})$ قرار می‌گیرد و یکتایی $\hat{f}$ نتیجه می‌دهد که $\hat{f} = g$. از این رو $(**)$ دوسویی است. ■

اکنون به کمک فشرده‌سازی استون ـ چخ می‌توانیم یک شاخهٔ بحث ویژگی‌های تفکیک را ببندیم. به استثنای نرمال بودن، به آسانی دیده می‌شود که زیرفضاها همهٔ ویژگی‌های تفکیک را که در مورد آنها بحث کردیم، به ارث می‌برند. این در مورد نرمال بودن نه‌تنها نابدیهی، بلکه نادرست است.

مثال ۶.۲.۴ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای کاملاً منظم دلخواهی است که نرمال نیست، به عنوان مثال صفحهٔ سارجن‌فری مثال ۱۴.۵.۳. بنا بر قضیهٔ ۴.۲.۴، می‌توانیم X را با زیرفضایی چگال از فشرده‌سازی استون ـ چخ آن، βX، یکی بگیریم. βX به عنوان فضای هاوسدورف فشرده، نرمال است در حالی که X که زیرفضای آن است، نرمال نیست.

به‌طورکلی، وجود فشرده‌سازی استون ـ چخ برکات فراوانی دارد. هنگامی که در مورد تابع‌های پیوستهٔ کران‌دار بر فضایی کاملاً منظم بحث می‌کنیم، می‌توانیم فضای هاوسدورف فشرده‌ای را، که عموماً شیء خوش‌رفتارتری است، جایگزین فضای داده شده کنیم. از سوی دیگر برای بیشتر فضاهای کاملاً منظم، فشرده‌سازی استون ـ چخ بسیار بزرگ است و دور از شهود است که بتوان گفت چیزی فراتر از آن وجود دارد و فشرده است. تمرین‌های پایان این بخش اشاره‌ای به عظیم‌الجثه و غریب بودن فضای $\beta\mathbb{N}$ دارند.

تمرین‌ها

۱. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای هاوسدورف فشرده است. در این‌صورت بنا بر گزارهٔ ۱.۲.۴،

$$\mathfrak{m}_x := \{f \in C(K, \mathbb{F}) : f(x) = 0\}$$

ایده‌آل ماکسیمال، و از این رو ایده‌آل اول حلقهٔ جابه‌جایی $C(K,\mathbb{F})$ است. ثابت کنید که

$$K \to \operatorname{Spec}(C(K,\mathbb{F})), \qquad x \mapsto \mathfrak{m}_x$$

همسان‌ریختی‌ای به‌روی زیرفضایی از $\operatorname{Spec}(C(K,\mathbb{F}))$، تشکیل شده از ایده‌آل‌های ماکسیمال $C(K,\mathbb{F})$، است. (راهنمایی: ثابت کنید که این نگاشت پیوسته است و از این رو $\{\mathfrak{m}_x : x \in K\}$ با توپولوژی القا شده از $\operatorname{Spec}(C(K,\mathbb{F}))$ هاوسدورف است.)

۲. فرض کنید $(K,\mathcal{T})$ فضای هاوسدورف فشردهٔ تفکیک‌پذیر است. ثابت کنید که تابعی پیوسته و پوشا از $\beta\mathbb{N}$ به‌روی K موجود است، که در آن $\mathbb{N}$ به توپولوژی گسسته مجهز است.

۳. خودتوان در حلقهٔ جابه‌جایی و یک‌دار R عضوی مانند $e \in R$ است که $e^۲ = e$؛ به عنوان مثال ۰ و ۱ خودتوان هستند. ثابت کنید که فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ همبند است اگر و تنها اگر $C_b(X,\mathbb{F})$ خودتوانی به‌جز تابع‌های ثابت ۰ و ۱ نداشته باشد، و نتیجه بگیرید که هر فضای کاملاً منظم، همبند است اگر و تنها اگر فشرده‌سازی استون ـ چخ آن همبند باشد.

۴. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ فضای توپولوژیک گسسته است.

آ) ثابت کنید که پیمایهٔ خطی خودتوان‌های $C_b(X,\mathbb{F})$ در $C_b(X,\mathbb{F})$ چگال است.

ب) نتیجه بگیرید که βX به مفهوم تمرین ۱۰.۴.۳ صفربعدی (و از این رو کلاً ناهمبند) است.

۵. فرض کنید که $\mathbb{N}$ به توپولوژی گسسته مجهز است.

آ) ثابت کنید که هر دنبالهٔ در $\mathbb{N}$، در $\beta\mathbb{N}$ همگرا است اگر و تنها اگر در نهایت ثابت باشد.

ب) فرض کنید $x \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. ثابت کنید که $\mathcal{N}_x$ پایهٔ شمارا ندارد (و لذا $\beta\mathbb{N}$ شمارای اول و در نتیجه متریک‌پذیر نیست).

۶. ثابت کنید که $\beta\mathbb{N}$ عدد اصلی یکسان با $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ دارد. فرایند زیر را در پیش گیرید.

آ) ثابت کنید که $[۰,۱]^{[۰,۱]}$ با توپولوژی حاصل‌ضربی، فضای هاوسدورف فشردهٔ تفکیک‌پذیر است، و نتیجه بگیرید که $|\beta\mathbb{N}| \geq \left|[۰,۱]^{[۰,۱]}\right| = \left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right|$.

ب) ثابت کنید که عدد اصلی $C_b(\mathbb{N},\mathbb{R}) = B(\mathbb{N},\mathbb{R})$ برابر $\mathfrak{c}$ است، و نتیجه بگیرید که $|\beta\mathbb{N}| \leq \left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right|$ (از این رو، بنا بر قضیهٔ کانتور ـ برنشتاین، $|\beta\mathbb{N}| = \left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right|$).

۳.۴ قضیه‌های استون ـ وایرشتراس

در مثال ۱۸.۴.۲ از قضیهٔ کلاسیک تقریب وایرشتراس استفاده کردیم: هر تابع پیوسته بر بازهٔ فشرده را می‌توان به‌طور یکنواخت با دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌ها تقریب زد.

در این بخش این نتیجه را به تابع‌های پیوسته بر فضاهای فشردهٔ هاوسدورف دلخواه تعمیم می‌دهیم. نخستین سؤالی که پیش می‌آید این است که منظور از چندجمله‌ای بر یک فضای فشردهٔ هاوسدورف دلخواه چیست.

تعریف ۱.۳.۴ هر جبر عبارت است از حلقه‌ای جابه‌جایی مانند A که فضایی برداری بر $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ است و

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) \qquad (\lambda \in \mathbb{F}, a, b \in A).$$

اگر A یک‌دار باشد، آن را یکانی می‌نامیم. زیرفضای خطی B از A را که زیرحلقه نیز هست، زیرجبر می‌گوییم؛ اگر A یک‌دار باشد و این عضو همانی در B باشد، B را زیرجبر یکانی می‌گوییم.

البته، تابع‌های پیوسته بر بازهٔ فشرده، جبری یکانی تشکیل می‌دهند که مجموعهٔ چندجمله‌ای‌ها زیرجبر یکانی آن است، و قضیهٔ تقریب وایرشتراس چیزی جز این نمی‌گوید که زیرجبر تابع‌های پیوستهٔ تشکیل شده از چندجمله‌ای‌ها در آن چگال است. قضیهٔ وایرشتراس را در همین جهت تعمیم می‌دهیم. با یک تعریف آغاز می‌کنیم.

تعریف ۲.۳.۴ فرض کنید $(K, \mathcal{T})$ فضای فشردهٔ هاوسدورف، و A زیرجبر یکانی بستهٔ $C(K, \mathbb{C})$ است. دراین‌صورت $\varnothing \neq S \subset K$ را Aـ پادمتقارن می‌گوییم اگر به‌ازای هر $f \in A$ با شرط $f(S) \subset \mathbb{R}$، نتیجه شود که f بر S ثابت است.

البته، بدون توجه به ماهیت A، زیرمجموعه‌های تک‌عضوی K آشکارا Aـ پادمتقارن هستند. نخستین لم ما وجود مجموعه‌های Aـ پادمتقارن «بزرگ» را به‌ازای هر زیرجبر بستهٔ A از $C(K, \mathbb{C})$ محقق می‌کند. برای اینکه دقیقاً منظورمان را از «بزرگ» مشخص کنیم، چند نماد معرفی می‌کنیم.

فرض کنید $(K, \mathcal{T})$ فضای فشردهٔ هاوسدورف دلخواه است و $\varnothing \neq F \subset K$ بسته است، و تعریف کنید

$$\|f\|_F = \sup\{|f(x)| : x \in F\} \qquad (f \in C(K, \mathbb{C})).$$

آشکارا، اگر $F = K$ آنگاه $\|\cdot\|_K$ همان نرم $\|\cdot\|_\infty$ است. بنابر لم اوریسون، به‌ازای هر $F \subsetneq K$، $f \in C(K, \mathbb{C})$ای ناصفر موجود است که $\|f\|_F = 0$. بنابراین $\|\cdot\|_F$ در حالت کلی نرم نیست،

بلکه تنها نیم‌نرم است؛ با وجود این هنوز در نابرابری مثلثی صدق می‌کند و اسکالرها به صورت قدر مطلق بیرون می‌آیند. فرض کنید که E زیرفضایی از $C(K,\mathbb{C})$ است و $f \in C(K,\mathbb{C})$. تعریف می‌کنیم

$$\operatorname{dist}_F(f,E) := \inf\{\|f-g\|_F : g \in E\}.$$

البته، اگر $F = K$، $\operatorname{dist}_F(f,E)$ چیزی جز $\operatorname{dist}(f,E)$ نیست.

لم ۳.۳.۴ فرض کنید $(K,\mathcal{T})$ فضای فشردهٔ هاوسدورف است، $f \in C(K,\mathbb{C})$، و A زیرجبر یکانی بستهٔ $C(K,\mathbb{C})$ (بر $\mathbb{C}$) است. دراین‌صورت زیرمجموعهٔ Aـپادمتقارن بستهٔ F از K موجود است که $\operatorname{dist}_F(f,A) = \operatorname{dist}(f,A)$.

برهان. فرض کنید

$$\mathcal{F} := \{\varnothing \neq F \subset K : \operatorname{dist}_F(f,A) = \operatorname{dist}(f,A) \text{ و } F \text{ بسته است}\}$$

آشکار است که $K \in \mathcal{F}$، و لذا $\mathcal{F} \neq \varnothing$. فرض کنید $\mathcal{F}$ با عکس شمول مرتب شده است؛ یعنی،

$$F_1 \preceq F_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad F_2 \subset F_1 \quad (F_1, F_2 \in \mathcal{F}).$$

فرض کنید $\mathcal{G}$ زیرمجموعه‌ای کلاً مرتب از $\mathcal{F}$ است، و قرار دهید $G_0 := \bigcap\{G : G \in \mathcal{G}\}$. آشکار است که G_0 نیز بسته است، و چون K ویژگی اشتراک متناهی دارد و $\mathcal{G}$ کلاً مرتب است، $G_0 \neq \varnothing$. ادعا می‌کنیم که $G_0 \in \mathcal{F}$. برای اثبات، $g \in A$ را ثابت بگیرید و توجه کنید که به‌ازای هر $G \in \mathcal{G}$، مجموعهٔ

$$\{x \in G : |f(x) - g(x)| \geq \operatorname{dist}(f,A)\}$$

فشرده و ناتهی است. دوباره با استفاده از ویژگی اشتراک متناهی K نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\{x \in G_0 : |f(x)-g(x)| \geq \operatorname{dist}(f,A)\}\\ = \bigcap_{G\in\mathcal{G}} \{x \in G : |f(x)-g(x)| \geq \operatorname{dist}(f,A)\}\end{aligned}$$

نیز فشرده و ناتهی است، و لذا $\|f-g\|_{G_0} \geq \operatorname{dist}(f,A)$. چون $g \in A$ دلخواه بود، نتیجه می‌گیریم که $\operatorname{dist}_{G_0}(f,A) \geq \operatorname{dist}(f,A)$. چون عکس این نابرابری آشکارا برقرار است، مشاهده می‌کنیم که $G_0 \in \mathcal{F}$. پس بنا بر لم زرن، $\mathcal{F}$ عضوی ماکسیمال (یعنی مینیمال نسبت به شمول مجموعه‌ای) دارد. فرض کنید که $F \in \mathcal{F}$ این مجموعهٔ مینیمال است.

ادعا می‌کنیم که F، Aـ پادمتقارن است. فرض کنید که جز این باشد، از این رو تابع $g \in A$ وجود دارد که حقیقی‌مقدار است، و بر F ثابت نیست. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید که $g(F) \subset [\circ, \text{۱}]$ و $[\circ, \text{۱}]$ کوچک‌ترین بازهٔ شامل $g(F)$ است. قرار دهید

$$F_\text{۱} := \left\{x \in F : g(x) \leq \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\right\}, \qquad F_\text{۲} := \left\{x \in F : g(x) \geq \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\right\}.$$

دراین‌صورت $F_\text{۱}$ و $F_\text{۲}$ زیرمجموعه‌های بستهٔ سرهٔ ناتهی F هستند که اجتماع آنها کل F است. بنابر مینیمال بودن F، $h_\text{۱}, h_\text{۲} \in A$ای موجودند که به‌ازای $j = \text{۱}, \text{۲}$، $\|f - h_j\|_{F_j} < \operatorname{dist}(f, A)$. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ تعریف کنید

$$g_n := (\text{۱} - g^n)^{\text{۲}^n}, \qquad k_n := g_n h_\text{۱} + (\text{۱} - g_n) h_\text{۲},$$

از این رو به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $g_n, k_n \in A$. ثابت می‌کنیم که اگر $n \in \mathbb{N}$ به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، $\|f - k_n\|_F < \operatorname{dist}(f, A)$ و در نتیجه به تناقض می‌رسیم.

ابتدا $x \in F_\text{۱} \cap F_\text{۲}$ را در نظر بگیرید و توجه کنید که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\begin{aligned}
|f(x) - k_n(x)| & \\
&= |g_n(x)f(x) + (\text{۱} - g_n(x))f(x) - g_n(x)h_\text{۱}(x) + (\text{۱} - g_n(x))h_\text{۲}(x)| \\
&\leq g_n(x)|f(x) - h_\text{۱}(x)| + (\text{۱} - g_n(x))|f(x) - h_\text{۲}(x)| \\
&\leq g_n(x)\|f - h_\text{۱}\|_{F_\text{۱}} + (\text{۱} - g_n(x))\|f - h_\text{۲}\|_{F_\text{۲}} \\
&< \operatorname{dist}(f, A).
\end{aligned}$$

به‌ازای $x \in F_\text{۱} \backslash F_\text{۲}$،

$$\begin{aligned}
\text{۱} &\geq g_n(x) \\
&\geq \text{۱} - \text{۲}^n g(x)^n, \qquad \text{بنابر نابرابری برنولی} \\
&\geq \text{۱} - \left(\frac{\text{۲}}{\text{۳}}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

درنتیجه $\|g_n - \text{۱}\|_{F_\text{۱} \backslash F_\text{۲}} \to \circ$، پس $\|k_n - h_\text{۱}\|_{F_\text{۱} \backslash F_\text{۲}} \to \circ$. چون $\|f - h_\text{۱}\|_{F_\text{۱}} < \operatorname{dist}(f, A)$، $n_\text{۱} \in \mathbb{N}$ی را به‌دست می‌آوریم که به‌ازای هر $n \geq n_\text{۱}$، $\|f - k_n\|_{F_\text{۱} \backslash F_\text{۲}} < \operatorname{dist}(f, A)$.

به‌ازای $x \in F_\text{۲} \backslash F_\text{۱}$، ابتدا ملاحظه کنید که $g_n(x) \leq \frac{\text{۱}}{(\text{۱} + g(x)^n)^{\text{۲}^n}}$، زیرا

$$g_n(x)(\text{۱} + g(x)^n)^{\text{۲}^n} = (\text{۱} - g(x)^n)^{\text{۲}^n}(\text{۱} + g_n(x))^{\text{۲}^n} = (\text{۱} - g(x)^{\text{۲}n})^{\text{۲}^n} \leq \text{۱},$$

از این رو

$$\begin{aligned} \circ &\leq g_n(x) \\ &\leq \frac{۱}{(۱+g(x)^n)^{۲n}} \\ &\leq \frac{۱}{۱+۲^n g(x)^n}, \qquad \text{بنابر نابرابری برنولی} \\ &\leq \frac{۱}{۲^n g(x)^n} \\ &\leq \left(\frac{۳}{۴}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

درنتیجه $\|g_n\|_{F_۲\backslash F_۱} \to \circ$، وازاین رو $\|k_n - h_۲\|_{F_۲\backslash F_۱} \to \circ$. چون $\|f-h_۲\|_{F_۲} < \operatorname{dist}(f, A)$، $n_۲ \in \mathbb{N}$ی موجود است که به‌ازای هر $n \geq n_۲$، $\|f - k_n\|_{F_۲\backslash F_۱} < \operatorname{dist}(f, A)$.

فرض کنید که $n \geq \max\{n_۱, n_۲\}$، و $x_\circ \in F$ چنان است که

$$|f(x_\circ) - k_n(x_\circ)| = \|f - k_n\|_F.$$

چون $F = F_۱ \cup F_۲$، سه امکان وجود دارد: $x_\circ \in F_۱ \cap F_۲$، $x_\circ \in F_۱\backslash F_۲$، یا $x_\circ \in F_۲\backslash F_۱$. بنابر تخمین‌های بالا، در هر یک از این حالت‌ها

$$\operatorname{dist}_F(f, A) \leq \|f - k_n\|_F = |f(x_\circ) - k_n(x_\circ)| < \operatorname{dist}(f, A),$$

که چنین چیزی اگر $F \in \mathcal{F}$، ناممکن است. ∎

با اثبات لم ۳.۳.۴، نتیجهٔ اصلی این بخش به آسانیِ شگفت‌آوری به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۴.۳.۴ (قضیهٔ استون ـ وایرشتراس مختلط) فرض کنید که (K, T) فضای فشردهٔ هاوسدورف، و A زیرجبری از $C(K, \mathbb{C})$ با ویژگی‌های زیر است.

آ) $۱ \in A$،

ب) به‌ازای هر $x, y \in K$ که $x \neq y$، $f \in A$ای وجود دارد که $f(x) \neq f(y)$،

پ) اگر $f \in A$ آنگاه $\bar{f} \in A$، که در آن $\bar{f}$ مزدوج f است.

دراین‌صورت A در $C(K, \mathbb{C})$ چگال است.

برهان. آشکار است که جایگزینی بستار A به جای A تأثیری در ویژگی‌های (آ)، (ب)، و (پ) نمی‌گذارد.

فرض کنید که $f \in C(K, \mathbb{C})$. بنابر لم ۳.۳.۴، زیرمجموعهٔ Aـ پادمتقارن $\varnothing \neq F \subset K$ موجود است که $\operatorname{dist}_F(f, A) = \operatorname{dist}(f, A)$. فرض کنید که $x, y \in F$ وجود دارند که $x \neq y$. بنابر (ب)، $f \in A$ای موجود است که $f(x) \neq f(y)$. چون بنابر (پ) $\bar{f} \in A$، $\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ و $\operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$ عضو A هستند، و چون $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$، آشکار است که $\operatorname{Re} f(x) \neq \operatorname{Re} f(y)$ یا $\operatorname{Im} f(x) \neq \operatorname{Im} f(y)$. اما بنابر تعریف مجموعهٔ Aـ پادمتقارن، چنین چیزی ناممکن است.

نتیجه می‌گیریم که F مجموعه‌ای تک‌عضوی، مانند $\{x_\circ\}$ است. چون تابع ثابت $f(x_\circ)\mathbf{1}$ در A است، مشاهده می‌کنیم که

$$\operatorname{dist}(f, A) = \operatorname{dist}_F(f, A) \leq \|f - f(x_\circ)\mathbf{1}\|_F = \circ,$$

از این رو $f \in A$. ∎

شرط بسته بودن A تحت مزدوج‌گیریِ نقطه‌ای را نمی‌توان برداشت.

مثال ۵.۳.۴ فرض کنید $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ (یعنی قرص واحد بسته در $\mathbb{C}$)، و A زیرجبر $C(K, \mathbb{C})$ متشکل از تابع‌هایی است که بر $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ تمام‌ریخت هستند. این مجموعه زیرجبری بسته از $C(K, \mathbb{C})$ است که در شرط‌های (آ) و (ب)ی قضیهٔ ۴.۳.۴ صدق می‌کند، ولی برابر $C(K, \mathbb{C})$ نیست.

قضیهٔ استون ـ وایرشتراس حقیقی به‌سادگی از حالت مختلط آن نتیجه می‌شود.

نتیجهٔ ۶.۳.۴ (قضیهٔ استون ـ وایرشتراس حقیقی) فرض کنید $(K, \mathcal{T})$ فضای فشردهٔ هاوسدورف، و A زیرجبری از $C(K, \mathbb{R})$ با ویژگی‌های زیر است.

آ) $\mathbf{1} \in A$،

ب) به‌ازای هر $x, y \in K$ با شرط $x \neq y$، $f \in A$ای وجود دارد که $f(x) \neq f(y)$،

دراین‌صورت A در $C(K, \mathbb{R})$ چگال است.

برهان. فرض کنید $A_{\mathbb{C}} := \{f + ig : f, g \in A\}$. دراین‌صورت $A_{\mathbb{C}}$ زیرجبری از $C(K, \mathbb{C})$ است که در شرط‌های قضیهٔ استون ـ وایرشتراس مختلط صدق می‌کند و از این رو در $C(K, \mathbb{C})$ چگال است. این به نوبهٔ خود نتیجه می‌دهد که A در $C(K, \mathbb{R})$ چگال است. ∎

برای تصدیق عمومیت قضیهٔ ۴.۳.۴ و نتیجهٔ ۶.۳.۴، نتیجهٔ زیر را می‌آوریم.

نتیجهٔ ۷.۳.۴ فرض کنید $K \subset \mathbb{R}^n$ فشرده، و $f : K \to \mathbb{F}$ پیوسته است. دراین‌صورت دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌های n متغیره با ضریب‌های در $\mathbb{F}$ موجود است که به‌طور یکنواخت بر K به f همگرا است.

برهان. قضیهٔ ۴.۳.۴ یا نتیجهٔ ۶.۳.۴ را برای جبر همهٔ چندجمله‌ای‌های n متغیره با ضریب‌های در $\mathbb{F}$ به کار ببرید. ∎

و تنها به منظور یادآوری، گزارهٔ زیر را می‌آوریم.

نتیجهٔ ۸.۳.۴ (قضیهٔ تقریب وایرشتراس) فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}$ و $a < b$، و $f : [a, b] \to \mathbb{F}$ پیوسته است. دراین‌صورت دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌ها با ضریب‌های در $\mathbb{F}$ موجود است که به‌طور یکنواخت بر $[a, b]$ به f همگرا است.

اگر چه رهیافت ما به قضیهٔ تقریب وایرشتراس (از راه لم ۳.۳.۴ و قضیهٔ استون ـ وایرشتراس) بسیار کوتاه و زیبا (و شاید تردستانه) است، اشکال‌های خود را نیز دارد: برای یک تابع پیوسته بر یک بازهٔ فشرده، به نوعی از وجود دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌های یکنواخت همگرا به f آگاهی داریم، ولی هیچ اطلاعی از اینکه این چندجمله‌ای‌ها به‌ازای fی مشخص به چه شکل‌اند نداریم (لم ۳.۳.۴ متکی به لم زرن است). برهانی دیگر برای قضیهٔ تقریب که هم مقدماتی است و به چیزی فراتر از حسابان سال اول نیاز ندارد، و هم ساختاری است، در تمرین ۱ زیر طرح می‌شود.

به عنوان کاربردی دیگر از قضیهٔ استون ـ وایرشتراس، یک سرشت‌نمایی دیگر از متریک‌پذیری فضاهای فشردهٔ هاوسدورف ارائه می‌دهیم.

گزارهٔ ۹.۳.۴ به‌ازای هر فضای فشردهٔ هاوسدورف $(K, \mathcal{T})$، حکم‌های زیر هم‌ارزند.

(i) $C(K, \mathbb{F})$ تفکیک‌پذیر است.

(ii) K متریک‌پذیر است.

برهان. (i)$\Longrightarrow$(ii): فرض کنید که $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ زیرمجموعهٔ چگال شمارای $C(K, \mathbb{F})$ است، و تعریف کنید

$$d : K \times K \to [0, \infty), \qquad (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{1 + |f_n(x) - f_n(y)|}.$$

دراین‌صورت d متریکی بر K است که $\mathrm{id}:(K,\mathcal{T})\to(K,d)$ پیوسته (و آشکارا، دوسویی)، و از این رو بنا بر قضیهٔ ۱۱.۳.۳، همسان‌ریختی است.

(i)$\Longleftarrow$(ii): فرض کنید که K متریک‌پذیر است. از این رو بنا بر نتیجهٔ ۱۱.۱.۴، K شمارای دوم است. فرض کنید $\{U_۱, U_۲, \ldots\}$ پایه‌ای شمارا برای $\mathcal{T}$ است، و (مانند برهان قضیهٔ متریک‌سازی اوریسون)

$$\mathbb{A} := \{(n,m)\in\mathbb{N}^۲ : \overline{U}_n \subset U_m\},$$

و (دوباره مانند برهان قضیهٔ متریک‌سازی) به‌ازای هر $(n,m)\in\mathbb{A}$، تابع پیوستهٔ $f_{n,m}:X\to\mathbb{R}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $f_{n,m}(X)\subset[۰,۱]$، $f_{n,m}|_{\overline{U}_n}=۱$، و $f_{n,m}|_{X\setminus U_m}=۰$. مسلماً $S:=\{f_{n,m}:(n,m)\in\mathbb{A}\}$ همچون Π_S، گردایهٔ همهٔ حاصل‌ضرب‌های متناهی عضوهای S، شمارا است. اگر $\mathbb{F}:=\mathbb{R}$، تعریف کنید $\mathbb{F}_۰:=\mathbb{Q}$، و اگر $\mathbb{F}=\mathbb{C}$، تعریف کنید $\mathbb{F}_۰:=\{q+ir:q,r\in\mathbb{Q}\}$؛ در هر حال، $\mathbb{F}_۰$ زیرمیدانی شمارا از $\mathbb{F}$ است. دراین‌صورت ترکیب‌های خطی عضوهای Π_S روی $\mathbb{F}_۰$ زیرمجموعه‌ای شمارا از $C(K,\mathbb{F})$ تشکیل می‌دهند که بستار آن زیرجبری ــ تفکیک‌پذیر ــ از $C(K,\mathbb{F})$ است. بی‌درنگ نتیجه می‌شود که $۱\in A$، و اگر $f\in A$ آنگاه $\bar{f}\in A$ (اگر $\mathbb{F}=\mathbb{R}$، بی‌معناست). فرض کنید $x,y\in K$ و $x\neq y$. مانند برهان قضیهٔ متریک‌سازی اوریسون، مشاهده می‌کنیم که $(n,m)\in\mathbb{A}$ای وجود دارد که $f_{n,m}(x)\neq f_{n,m}(y)$. از این رو بنابر قضیه‌های استون ـ وایرشتراس مختلط و حقیقی، A با $C(K,\mathbb{F})$ برابر است، و لذا $C(K,\mathbb{F})$ تفکیک‌پذیر است. ∎

در پایان این بخش، به فضاهای فشردهٔ موضعی باز می‌گردیم.

تعریف ۱۰.۳.۴ فرض کنید که $(X,\mathcal{T})$ فضای فشردهٔ موضعی و هاوسدورف است. گوییم تابع پیوستهٔ $f:X\to\mathbb{F}$ در بی‌نهایت صفر می‌شود اگر به‌ازای هر $\epsilon>۰$، زیرمجموعهٔ فشردهٔ K از X موجود باشد که به‌ازای هر $x\in X\setminus K$، $|f(x)|<\epsilon$. گردایهٔ همهٔ تابع‌های پیوسته از X به $\mathbb{F}$ که در بی‌نهایت صفر می‌شوند با $C_۰(X,\mathbb{F})$ نشان داده می‌شود.

مثال ۱۱.۳.۴ آ) هر تابع پیوسته بر فضای فشرده در بی‌نهایت صفر می‌شود.

ب) تابع پیوستهٔ f بر خط حقیقی (به مفهوم تعریف ۱۰.۳.۴) در بی‌نهایت صفر می‌شود اگر و تنها اگر

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = ۰ = \lim_{t\to-\infty} f(t).$$

گزارهٔ زیر انتخاب این اصطلاح را توجیه می‌کند.

گزارهٔ ۱۲.۳.۴ فرض کنید که $(X,\mathcal{T})$ فضای فشردهٔ موضعی و هاوسدورف با فشرده‌سازی تک‌نقطه‌ای X_∞ است. دراین‌صورت تابع پیوستهٔ $f : X \to \mathbb{F}$ در بی‌نهایت صفر می‌شود اگر و تنها اگر توسیع پیوستهٔ $\tilde{f} : X_\infty \to \mathbb{F}$ از f موجود باشد که $\tilde{f}(\infty) = ۰$.

برهان. فرض کنید که f در بی‌نهایت صفر شود، و $\tilde{f}$ توسیع یکتای f به X_∞ است که $\tilde{f}(\infty) = ۰$. باید ثابت کنیم که $\tilde{f}$ در بی‌نهایت پیوسته است. فرض کنید $\epsilon > ۰$ و $K \subset X$ فشرده را طوری انتخاب می‌کنیم که به‌ازای هر $x \in X\backslash K$، $|f(x)| < \epsilon$. از تعریف توپولوژی بر X_∞ نتیجه می‌شود که $X_\infty\backslash K$ در $\mathcal{N}_\infty$ است. بنابراین به‌ازای هر $\epsilon > ۰$، $\tilde{f}^{-۱}(B_\epsilon(۰))$ همسایگی بی‌نهایت است.

برعکس، فرض کنید f توسیع پیوسته‌ای مثل $\tilde{f}$ داشته باشد که در ∞ صفر می‌شود. فرض کنید $\epsilon > ۰$. دراین‌صورت $\tilde{f}^{-۱}(B_\epsilon(۰))$ همسایگی باز ∞ و از این رو به‌ازای مجموعهٔ فشردهٔ $K \subset X$ به شکل $X_\infty\backslash K$ است؛ یعنی به‌ازای هر $x \in X\backslash K$، $|f(x)| < \epsilon$. ∎

پس می‌توان تابع‌های پیوسته بر فضای فشردهٔ موضعی و هاوسدورف را که در بی‌نهایت صفر می‌شوند با تابع‌هایی بر فشرده‌سازی تک‌نقطه‌ای آنکه در نقطهٔ ∞ صفر می‌شوند یکی گرفت.

با در نظر گرفتن این مطلب، می‌توانیم صورتی از قضیهٔ استون ـ وایرشتراس را برای فضاهای فشردهٔ موضعی به‌طور هم‌زمان بر $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ ثابت کنیم.

قضیهٔ ۱۳.۳.۴ فرض کنید که $(X,\mathcal{T})$ فضای فشردهٔ موضعی و هاوسدورف، و A زیرجبری از $C_۰(X,\mathbb{F})$ با ویژگی‌های زیر است.

آ) به‌ازای هر $x \in X$، $f \in A$ای موجود است که $f(x) \neq ۰$.

ب) به‌ازای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$، $f \in A$ای موجود است که $f(x) \neq f(y)$.

پ) اگر $f \in A$ آنگاه $\bar{f} \in A$، که در آن $\bar{f}$ مزدوج f است (که در حالت $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ بی‌معنی است).

دراین‌صورت A در $C_۰(X,\mathbb{F})$ چگال است.

برهان. بنابر گزارهٔ ۱۲.۳.۴، می‌توانیم $C_۰(X,\mathbb{F})$ و در نتیجه A را زیرجبری از $C(X_\infty,\mathbb{F})$ در نظر بگیریم. فرض کنید $A^\# := \{f + \lambda ۱ : f \in A, \lambda \in \mathbb{F}\}$، از این رو $A^\#$ زیرجبری از $C(X_\infty,\mathbb{F})$ است که شامل ۱ و تحت مزدوج‌گیری بسته است. فرض کنید $x, y \in X_\infty$ و $x \neq y$. اگر $x, y \in X$، از (ب) نتیجه می‌شود که $f \in A \subset A^\#$ی موجود است که $f(x) \neq f(y)$. اگر $y = \infty$، از (آ)

نتیجه می‌شود که $A^{\#}$ $f \in A \subset$ ی موجود است که $f(y) = ۰ \neq f(x)$. در مجموع به‌ترتیب از قضیهٔ ۴.۳.۴ و نتیجهٔ ۶.۳.۴ نتیجه می‌شود که $A^{\#}$ در $C(X_\infty, \mathbb{F})$ چگال است. فرض کنید که $f \in C_۰(X, \mathbb{F})$ و $\epsilon > ۰$. دراین‌صورت $g \in A^{\#}$ ی موجود است که $\|f - g\|_\infty < \frac{\epsilon}{۲}$. فرض کنید $h := g - g(\infty)۱$، و لذا $h \in A$. چون $f(\infty) = ۰$،

$$|g(\infty)| \leq |f(\infty) - g(\infty)| \leq \|f - g\|_\infty < \frac{\epsilon}{۲}.$$

از این رو به‌دست می‌آوریم

$$\|f - h\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty + |g(\infty)| < \frac{\epsilon}{۲} + \frac{\epsilon}{۲} = \epsilon.$$

بنابراین A در $C_۰(X, \mathbb{F})$ چگال است. ∎

چون هر فضای فشرده، فشردهٔ موضعی است، قضیهٔ ۱۳.۳.۴ برای فضاهای فشرده نیز به‌کار می‌آید و قضیهٔ ۴.۳.۴ و نتیجهٔ ۶.۳.۴ را بهبود می‌بخشد: شرط (آ) در قضیهٔ ۱۳.۳.۴ به شکلی قابل توجه ضعیف‌تر از شرط (آ) در قضیهٔ ۴.۳.۴ و نتیجهٔ ۶.۳.۴ است.

تمرین‌ها

۱. برهانی ساختاری برای قضیهٔ تقریب وایرشتراس. فرض کنید که $f : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ پیوسته است. به‌ازای $n \in \mathbb{N}$، چندجمله‌ای برنشتاین nاُم f به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$B_n(t) := \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} t^k (۱ - t)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad (t \in [۰, ۱]).$$

ثابت کنید که دنبالهٔ $(B_n)_{n=۱}^{\infty}$ به طور یکنواخت بر $[۰, ۱]$ به f همگرا است. فرایند زیر را در پیش بگیرید.

آ) به‌ازای $n \in \mathbb{N}$ و $t \in [۰, ۱]$، اتحادهای زیر را به‌ترتیب ثابت کنید.

$$۱ = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} t^k (۱ - t)^{n-k},$$

$$۰ = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} t^k (۱ - t)^{n-k} (k - nt),$$

$$n = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} t^{k-۱} (۱ - t)^{n-k-۱} (k - nt)^۲,$$

و

$$\frac{t(\text{۱}-t)}{n}=\sum_{k=\circ}^{n}\binom{n}{k}t^k(\text{۱}-t)^{n-k}\left(t-\frac{k}{n}\right)^{\text{۲}}.$$

(راهنمایی: اتحاد دوم را با مشتق‌گیری از اتحاد اول، و اتحاد سوم را با مشتق‌گیری از اتحاد دوم به‌دست آورید.)

ب) ثابت کنید که

$$|B_n(t)-f(t)|\le\sum_{k=\circ}^{n}\binom{n}{k}t^k(\text{۱}-t)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(t)\right| \qquad (t\in[\circ,\text{۱}]).$$

پ) $\epsilon>\circ$ را ثابت بگیرید، و (با استفاده از پیوستگی یکنواخت f بر $[\circ,\text{۱}]$) $\delta>\circ$ را طوری انتخاب کنید که به‌ازای هر $s,t\in[\circ,\text{۱}]$، اگر $|s-t|<\delta$ آنگاه $|f(s)-f(t)|<\frac{\epsilon}{\text{۲}}$. $t\in[\circ,\text{۱}]$ را ثابت بگیرید و فرض کنید $N_\delta:=\{k\in\{\circ,\dots,n\}:|\frac{k}{n}-t|<\delta\}$. ثابت کنید که

$$\sum_{k\in N_\delta}\binom{n}{k}t^k(\text{۱}-t)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(t)\right|<\frac{\epsilon}{\text{۲}}.$$

ت) با ϵ، δ، t، و N_δی قسمت (پ) ثابت کنید که

$$\begin{aligned}\sum_{k\notin N_\delta}\binom{n}{k}t^k(\text{۱}-t)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(t)\right| &\le \text{۲}\|f\|_\infty\sum_{k\notin N_\delta}\binom{n}{k}t^k(\text{۱}-t)^{n-k}\\ &\le\frac{\text{۲}\|f\|_\infty}{\delta^{\text{۲}}}\frac{t(\text{۱}-t)}{n}\\ &\le\frac{\text{۲}\|f\|_\infty}{\text{۴}\delta^{\text{۲}}n}.\end{aligned}$$

ث) نتیجه بگیرید که $n_\epsilon\in\mathbb{N}$ی موجود است که به‌ازای هر $t\in[\circ,\text{۱}]$ و هر $n\ge n_\epsilon$، $|B_n(t)-f(t)|<\epsilon$.

۲. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ فضای فشردهٔ هاوسدورف است. ثابت کنید که K صفربعدی است (برای تعریف، تمرین ۱۰.۴.۳ را نگاه کنید) اگر و تنها اگر پیمایهٔ خطی خودتوان‌ها در $C(K,\mathbb{F})$ چگال باشد.

۳. چندجمله‌ای مثلثاتی مختلط بر $\mathbb{R}$ عبارت است از تابعی $\mathbb{C}$ـ مقدار به شکل

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

که در آن $n \in \mathbb{N}$ و $c_{-n}, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$. با استفاده از قضیهٔ استون ـ وایرشتراس مختلط ثابت کنید که به‌ازای هر تابع پیوستهٔ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ با دورهٔ تناوب 2π، دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌های مثلثاتی مختلط وجود دارد که به‌طور یکنواخت بر $\mathbb{R}$ به f همگرا است.

۴. چندجمله‌ای مثلثاتی حقیقی بر $\mathbb{R}$ عبارت است از تابعی $\mathbb{R}$ـ مقدار به شکل

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

که در آن $n \in \mathbb{N}$ و $a_{-n}, b_{-n}, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$. ثابت کنید که به‌ازای هر تابع پیوستهٔ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با دورهٔ تناوب 2π، دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌های مثلثاتی حقیقی وجود دارد که به‌طور یکنواخت بر $\mathbb{R}$ به f همگرا است (هشدار: فضای همهٔ چندجمله‌ای‌های مثلثاتی حقیقی بر $\mathbb{R}$ جبر نیست).

۵. فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضای فشردهٔ موضعی و هاوسدورف است. ثابت کنید که X فشرده است اگر و تنها اگر تابع ثابت ۱ در $C_{\circ}(X, \mathbb{F})$ باشد.

۶. فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضای فشردهٔ موضعی و هاوسدورف است. ثابت کنید که X، σـ فشرده است (تمرین ۵.۵.۳ را نگاه کنید) اگر و تنها اگر $f \in C_{\circ}(X, \mathbb{R})$ی موجود باشد که به‌ازای هر $x \in X$، $\circ < f(x) \leq 1$.

۷. فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضای فشردهٔ موضعی و هاوسدورف، و $C_{\circ\circ}(X, \mathbb{F})$ مجموعهٔ همهٔ تابع‌های پیوستهٔ $f : X \to \mathbb{F}$ است که به‌ازای مجموعهٔ فشرده‌ای مثل K که $K \subset X$، $f|_{X \setminus K} = \circ$.

آ) ثابت کنید که $C_{\circ\circ}(X, \mathbb{F})$ و $C_{\circ}(X, \mathbb{F})$ ایده‌آل‌هایی در $C_b(X, \mathbb{F})$ هستند.

ب) ثابت کنید که $C_{\circ}(X, \mathbb{F})$ در $C_b(X, \mathbb{F})$ بسته است.

پ) ثابت کنید که $C_{\circ\circ}(X, \mathbb{F})$ در $C_{\circ}(X, \mathbb{F})$ چگال است.

۸. فرض کنید که $(X, \mathcal{T}_X)$ و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ فضاهای فشردهٔ موضعی و هاوسدورف هستند، و $X \times Y$ به توپولوژی حاصل‌ضربی مجهز است. ثابت کنید که $X \times Y$ فشردهٔ موضعی است، و به‌ازای هر

$f \in C_{\circ}(X \times Y, \mathbb{F})$ و $\epsilon > \circ$، $g_{\backslash}, \ldots, g_n \in C_{\circ\circ}(X, \mathbb{F})$ و $h_{\backslash}, \ldots, h_n \in C_{\circ\circ}(Y, \mathbb{F})$ موجودند که

$$\left| f(x,y) - \sum_{j=\backslash}^{n} g_j(x) h_j(y) \right| < \epsilon \qquad (x \in X, y \in Y).$$

ملاحظه‌ها

پاوِل اس. اوریسون که «لم» و قضیهٔ متریک‌سازی به‌نام او نام‌گذاری شده‌اند، دوست نزدیک و همکار الکساندروف بود. وی که دو سال کوچک‌تر از الکساندروف بود، تقریباً شش دهه کمتر از او عمر کرد؛ اوریسون در بازدیدی از فرانسه در سال ۱۹۲۴، هنگام شنا در دریا غرق شد. او تنها ۲۶ سال داشت.

قضیهٔ متریک‌سازی اوریسون شرطی کافی برای متریک‌پذیری ارائه می‌دهد، که اگر فضا فشرده باشد لازم نیز هست. شرط لازم و کافی برای متریک‌پذیری فضاهای توپولوژیک کلی، با قضیهٔ ناگاتا_اسمیرنوف که گاهی قضیهٔ بینگ ــ ناگاتا ــ اسمیرنوف هم نامیده می‌شود، ارائه می‌شود (به عنوان مثال، [Munkres 00] را نگاه کنید).

فشرده‌سازی استون ــ چخ به‌طور مستقل توسط مارشال اچ. استون [Stone 37] امریکایی، و ادوارد چخ، اهل چک کشف شد.

همچنین در مقالهٔ تاریخی [Stone 37] تعمیمی از قضیهٔ تقریب وایرشتراس وجود دارد که بعدها به قضیهٔ استون ــ وایرشتراس معروف شد. برهانی که در این کتاب ارائه شد کار ریاضیدان برزیلی، سیلویو ماکادو است [Machado 77].

فرض کنید که $(K, \mathcal{T})$ فضای فشردهٔ هاوسدورف است. بنا بر تمرین ۱.۲.۴، فضای K را می‌توان با ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقهٔ یکانی $C(K, \mathbb{C})$ یکی گرفت؛ یعنی همهٔ اطلاعات در مورد K پیش‌تر در ساختار جبری $C(K, \mathbb{C})$ کدگذاری شده‌اند. این به ما اجازهٔ تعمیمی دور از ذهن از توپولوژی، به نام توپولوژی ناجابه‌جایی را می‌دهد.

برگشت جبر مختلطِ A عبارت است از نگاشت

$$A \to A, \qquad a \mapsto a^*$$

که به‌ازای هر $a, b \in A$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$، $(\lambda a + \mu b)^* = \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} b^*$، $(ab)^* = b^* a^*$، و $a^{**} = a$.

به عنوان مثال، برگشت $A = C(K, \mathbb{C})$ همان مزدوج‌گیریِ نقطه‌ای است. مثال‌های دیگر از یک جبر همراه با برگشت، به‌ازای nی در $\mathbb{N}$، مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های $n \times n$ بر $\mathbb{C}$ (با جمع و ضرب اسکالر

درایه‌ای، و ضرب ماتریسی به عنوان عمل ضرب) است: به‌ازای هر ماتریس a، ماتریس a^* با ترانهاده کردن a و مزدوج‌گیری درایه‌های آن به‌دست می‌آید.

اکنون فرض کنید که A نه‌تنها به برگشت، بلکه به نرم $\|\cdot\|$ هم مجهز است که A را به فضای باناخ تبدیل می‌کند و به‌ازای هر $a, b \in A$، در $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ و $\|a^*a\| = \|a\|^۲$ صدق می‌کند. دراین‌صورت A را C^*ـ جبر می‌گوییم. البته، $C(K, \mathbb{C})$، C^*ـ جبر جابه‌جایی است. قضیهٔ شگفت‌آور گلفاند ـ نایمارک عبارت است از اینکه همهٔ C^*ـ جبرهای جابه‌جایی یکانی به این شکل هستند! بنابراین C^* ـ جبر جابه‌جایی یکانی چیزی جز فضای هاوسدورف فشرده در لباسی مبدل نیست: هر قضیه در مورد چنین جبری تبدیل به قضیه‌ای در مورد فضای منسوب به آن می‌شود. به عنوان مثال، $A = C(K, \mathbb{C})$ خودتوان‌های نابدیهی دارد اگر و تنها اگر K همبند باشد، و پیمایهٔ خطی خودتوان‌ها در A چگال است اگر و تنها اگر K صفربعدی باشد (تمرین‌های ۳.۲.۴ و ۲.۳.۴).

به جای در نظر گرفتن C^*ـ جبرهای جابه‌جایی به عنوان بدل فضاهای توپولوژیک، می‌توان نظر مخالف داشت و گفت که فضاهای فشردهٔ هاوسدورف چیزی جز C^*ـ جبرهای مبدل نیستند. ممکن است این امر ساختگی به نظر آید، ولی دنیایی جدید و دست نخورده از اشیاء ریاضی را می‌گشاید: C^*ـ جبرهای ناجابه‌جایی. یک مثال می‌زنیم. فرض کنید A مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های مختلط است؛ اگر $n \geq ۲$، این جبر ناجابه‌جایی است. به‌ازای هر $a \in A$، تعریف کنید

$$\|a\| := \sup\{\|ax\| : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| \leq ۱\},$$

که در آن $\mathbb{C}^n$ به نرم اقلیدسی $\mathbb{R}^{۲n}$ مجهز است. این نرم A را به C^*ـ جبری یکانی با بعد متناهی تبدیل می‌کند، و چون ناجابه‌جایی است، نمی‌تواند به‌ازای یک فضای فشردهٔ هاوسدورفی مثل K به شکل $C(K, \mathbb{C})$ باشد.

هر C^*ـ جبرــ جابه‌جایی یا ناجابه‌جاییــ را می‌توان مجموعه‌ای از عملگرهای خطی کران‌دار بر فضای هیلبرت دانست. پرداختن به جزئیات در اینجا بسیار به دور از هدف‌های این کتاب است، ولی درکوتاه سخن این بدان‌معنی است که هر C^*ـ جبر جبری از ماتریس‌هایی است که می‌توانند «به‌طور نامتناهی بزرگ» (به هر معنی) باشند.

می‌توان تصویری خوب از C^*ـ جبرهای ناجابه‌جایی در حالت بعد متناهی به‌دست آورد، و این کار را می‌توان با ابزارهای ریاضی‌ای انجام داد که به‌طور شگفت‌آوری مقدماتی هستند. کتاب درسی [Farenick 01]، که برای دانشجویان کارشناسی نوشته شده، قویاً توصیه می‌شود. در زمینهٔ C^* ـ جبرها، همچنین کتاب پیشرفته‌تر [Murphy 90] که نیاز به پیش‌زمینه‌ای در آنالیز تابعی و مختلط دارد هم پیشنهاد می‌شود.

۵

توپولوژی جبری مقدماتی

یکی از بن‌مایه‌های عمدهٔ هر دیسیپلین ریاضی، رده‌بندی شیءهای آن است: چه وقت دو شیء «اساساً یکسان» هستند؟

به عنوان مثال، شیءهای مورد مطالعه در جبر خطی، فضاهای برداری با بعد متناهی هستند. می‌توان دو فضای برداری را «اساساً یکسان» دانست اگر به عنوان فضاهای خطی یکریخت باشند، و در جبر خطی مقدماتی یاد می‌گیریم که دو فضای‌برداری با بعد متناهی (روی یک میدان) یکریخت هستند اگر و تنها اگر بعد آنها برابر باشد. به عنوان مثال، $\mathbb{R}^3$ و فضای برداری همهٔ چندجمله‌ای‌های حقیقی حداکثر از درجهٔ ۲ یکریخت هستند. زیرا هر دو سه‌بعدی‌اند، ولی $\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{R}^2$ یکریخت نیستند زیرا بعد آنها متفاوت است.

بعد فضای برداری با بعد متناهی چیزی است که به آن پایای عددی می‌گوییم: بعد در واقع عددی است که به هر چنین فضای برداری اختصاص می‌یابد و به وسیلهٔ آن می‌توان فضاها را از هم تشخیص داد.

چه خوب بود اگر می‌توانستیم فضاهای توپولوژیک را هم به همین سادگی رده‌بندی کنیم، ولی این انتظار زیادی است. مفهوم بعد برای فضاهای توپولوژیک وجود دارد (در این کتاب تنها با فضاهای صفر بعدی برخورد کرده‌ایم؛ تمرین ۱۰.۴.۳ را نگاه کنید)، و پایاهای عددی دیگری برای (دست کم بعضی از) فضاهای توپولوژیک وجود دارد. هر چند به‌طور کلی، صرف ساختار عددها برای رده‌بندی شیءهایی به گوناگونی فضاهای توپولوژیک، بسیار ضعیف است.

بنابراین، در توپولوژی جبری اغلب به جای عددها از شیءهای جبری (عمدتاً گروه‌ها) به عنوان پایا استفاده می‌شود. به هر فضای توپولوژیک گروهی ویژه اختصاص می‌یابد که اگر فضاها «اساساً یکسان» باشند آنگاه گروه‌های متناظر آنها نیز چنین خواهند بود.

۱.۵ هوموتوپی و گروه بنیادی

اگر دو فضای توپولوژیک همسان‌ریخت باشند، آنگاه «یکسان»اند به این مفهوم که با هیچ ویژگی توپولوژیکی نمی‌توان بین آنها فرق گذاشت. بنابراین به عنوان مثال، قرص واحد بسته در $\mathbb{R}^n$، که فشرده است، نمی‌تواند با قرص واحد باز، که فشرده نیست، همسان‌ریخت باشد. البته، اغلب نتیجه‌گیری در مورد همسان‌ریخت بودن دو فضا سرراست نیست.

قرص واحد بسته در $\mathbb{R}^۲$ و مرز آن $\mathbb{S}^۱$، فضاهای فشرده، همبند، و متریک‌پذیرند. چرا نباید همسان‌ریخت باشند؟ می‌توان با ابزار مقدماتی نشان داد که آنها همسان‌ریخت نیستند (تمرین ۱ زیر را نگاه کنید)، ولی این استدلال نیاز به حقه‌ای کوچک نیز دارد. در مورد قرص واحد بسته در $\mathbb{R}^۲$ و طوق بسته چطور؟ این فضاها هم فشرده، همبند و متریک‌پذیرند، ولی ـــ به‌جز در حالتی که طوق، دایره است ـــ شگرد تمرین ۱ به کار نمی‌آید.

در این بخش نشان می‌دهیم که قرص واحد بسته در $\mathbb{R}^۲$ نمی‌تواند با طوق همسان‌ریخت باشد (مثال ۲۷.۱.۵ زیر)، ولی برای این منظور به ابزارهایی جدید و قوی‌تر از آنچه تاکنون تهیه کرده‌ایم نیاز داریم. همان‌طور که انتظار می‌رود، توسعهٔ این ابزارها نیاز به تعریف‌هایی جدید دارد.

تعریف ۱.۱.۵ فرض کنید $(X, \mathcal{T}_X)$ و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ فضاهایی توپولوژیک هستند. دو نگاشت پیوستهٔ $f, g : X \to Y$ را هوموتوپیک می‌گوییم و می‌نویسیم $f \sim g$ اگر نگاشت پیوستهٔ $F : [۰, ۱] \times X \to Y$ موجود باشد که

$$F(۰, x) = f(x), \qquad F(۱, x) = g(x) \qquad (x \in X).$$

می‌گوییم نگاشت F هوموتوپی بین f و g است.

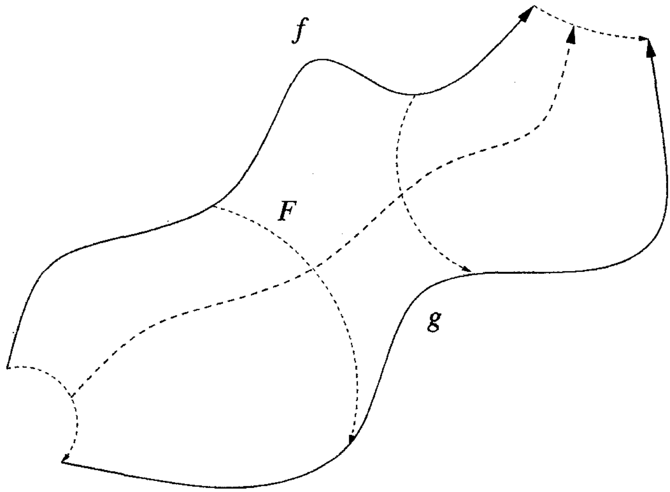
به‌طور شهودی، می‌توان هر هوموتوپی را روش «دگردیسی» تابعی به تابعی دیگر در نظر گرفت.

مثال ۲.۱.۵ آ) فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک دلخواه، و $C \neq \varnothing$ زیرمجموعه‌ای محدب از فضایی نرم‌دار است. دراین‌صورت هر دو نگاشت پیوستهٔ $f, g : X \to C$ هوموتوپیک هستند. فقط فرض کنید

$$F(t, x) := (۱ - t)f(x) + t\, g(x) \qquad (t \in [۰, ۱],\ x \in X).$$

ب) فرض کنید $X = [۰, ۲\pi]$، و $Y = \mathbb{S}^۲$. فرض کنید

$$f : [۰, ۲\pi] \to \mathbb{S}^۲, \qquad \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta, ۰)$$



شکل ۱.۵ هوموتوپی

و

$$g : [\circ, ۲\pi] \to \mathbb{S}^{۲}, \quad \theta \mapsto (\circ, \circ, ۱).$$

بین f و g هوموتوپی‌ای به‌صورت

$$F(t,\theta) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{۲}t\right)\cos\theta, \cos\left(\frac{\pi}{۲}t\right)\sin\theta, \sin\left(\frac{\pi}{۲}t\right)\right)$$

تعریف کنید که در آن $t \in [\circ, ۱]$ و $\theta \in [\circ, ۲\pi]$.

پ) فرض کنید که $(X, \mathcal{T}_X)$ فضای توپولوژیک دلخواه است، $(Y, \mathcal{T}_Y)$ کلاً ناهمبند است، و $f, g : X \to Y$ هوموتوپیک هستند. فرض کنید $F : [\circ, ۱] \times X \to Y$ هوموتوپی‌ای بین f و g است. $x \in X$ را ثابت بگیرید و $F_x : [\circ, ۱] \to Y$ را با $F_x(t) := F(t, x)$ تعریف کنید. دراین‌صورت F_x پیوسته است، و از این رو $F_x([\circ, ۱])$ زیرفضایی همبند از Y است. در نتیجه چون Y کلاً ناهمبند است، $F_x([\circ, ۱])$ تنها یک عضو دارد، و از این رو

$$f(x) = F(\circ, x) = F_x(\circ) = F_x(۱) = F(۱, x) = g(x).$$

بنابراین f و g برابرند.

تعریف ۳.۱.۵ فرض کنید $(X, \mathcal{T}_X)$ و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ فضای توپولوژیک هستند. دراین‌صورت می‌گوییم X و Y به‌طور هوموتوپیک هم‌ارز هستند یا یک نوع هوموتوپی دارند اگر نگاشت‌های پیوستهٔ $f : X \to Y$ و $g : Y \to X$ موجود باشند که $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$ و $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$. دراین‌صورت نگاشت‌های f و g را هم‌ارزی‌های هوموتوپی می‌گوییم.

مثال ۴.۱.۵ آ) آشکارا هر دو فضای همسان‌ریخت به‌طور هوموتوپیک هم‌ارزند.

ب) فرض کنید که $C_۱$ و $C_۲$ به‌ترتیب زیرفضاهای محدب ناتهی فضاهای نرم‌دار $E_۱$ و $E_۲$ هستند. فرض کنید $f : C_۱ \to C_۲$ و $g : C_۲ \to C_۱$ نگاشت‌های پیوستهٔ دلخواه هستند. با توجه به مثال ۲.۱.۵(آ)، آشکار است که $f \circ g \sim \mathrm{id}_{C_۲}$ و $g \circ f \sim \mathrm{id}_{C_۱}$، از این رو $C_۱$ و $C_۲$ به‌طور هوموتوپیک هم‌ارزند. به ویژه، هر زیرمجموعهٔ محدب فضایی نرم‌دار به‌طور هوموتوپیک هم‌ارز فضایی تک‌عضوی است. این بی‌درنگ نشان می‌دهد که هم‌ارزی هوموتوپیک مفهومی بسیار ضعیف‌تر از همسان‌ریختی است.

پ) فرض کنید E فضایی نرم‌دار است، $x_۰ \in E$، و $۰ \leq r \leq R \leq \infty$. دراین‌صورت طوق بسته به مرکز $x_۰$، شعاع داخلی r، و شعاع خارجی R، عبارت است از مجموعهٔ

$$A_{r,R}[x_۰] := \{x \in E : r \leq \|x - x_۰\| \leq R\}.$$

(البته می‌توان طوق باز و نیم‌باز را هم در نظر گرفت.) در حالتی که $r = R < \infty$، طوق $A_{r,R}[x_۰]$ چیزی جز کرهٔ $S_r[x_۰]$ نیست.

فرض کنید که $۰ < r \leq \rho \leq R$. ادعا می‌کنیم که $S_\rho[x_۰]$ و $A_{r,R}[x_۰]$ به‌طور هوموتوپیک هم‌ارزند. فرض کنید

$$f : A_{r,R}[x_۰] \to S_\rho[x_۰], \qquad x \mapsto \frac{\rho}{\|x - x_۰\|}(x - x_۰) + x_۰,$$

و فرض کنید که $g : S_\rho[x_۰] \to A_{r,R}[x_۰]$ نگاشت شمول است. دراین‌صورت آشکار است که $f \circ g = \mathrm{id}_{S_\rho[x_۰]}$. تعریف کنید

$$F(t, x) := \frac{(۱ - t)\rho + t\|x - x_۰\|}{\|x - x_۰\|}(x - x_۰) + x_۰ \qquad (t \in [۰, ۱], x \in A_{r,R}[x_۰]).$$

دراین‌صورت به آسانی دیده می‌شود که F هوموتوپی‌ای بین $g \circ f$ و $\mathrm{id}_{A_{r,R}[x_۰]}$ است.
چون هر دو کره در E همسان‌ریخت هستند، $A_{r,R}[x_۰]$ و هر کره در E به‌طور هوموتوپیک هم‌ارزند.

ت) ادعا می‌کنیم که مجموعهٔ کانتور C (مثال ۱۸.۴.۳ (ث)) و $\mathbb{Q}$ به‌طور هوموتوپیک هم‌ارز نیستند. فرض کنید که هم‌ارزی‌های هوموتوپی $f : C \to \mathbb{Q}$ و $g : \mathbb{Q} \to C$ موجودند. در نتیجه بنا بر مثال ۲.۱.۵ (پ) (به یاد آورید که هر دوی C و $\mathbb{Q}$ کلاً ناهمبند هستند)، $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$ و $g \circ f = \mathrm{id}_C$؛ یعنی C و $\mathbb{Q}$ همسان‌ریخت هستند. در حالی که C فشرده است و $\mathbb{Q}$ فشرده نیست.

این فهرست چندان تحسین‌برانگیز نیست. به ویژه هنوز فاقد ابزارهای رضایت‌بخش برای بررسی عدم هم‌ارزی هوموتوپیک دو فضا هستیم.

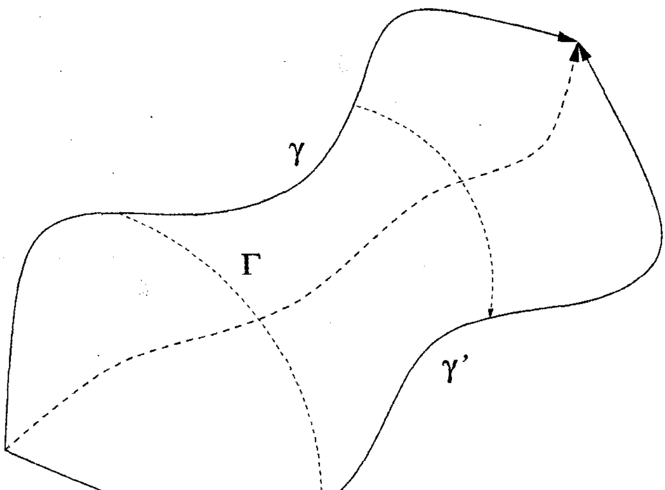
تعریف ۵.۱.۵ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است. دو مسیر $\gamma, \gamma' : [۰, ۱] \to X$ که $\gamma(۰) = x_۰ = \gamma'(۰)$ و $\gamma(۱) = x_۱ = \gamma'(۱)$ را هوموتوپیک مسیری می‌گوییم و می‌نویسیم $\gamma \simeq \gamma'$ اگر نگاشت پیوستهٔ $\Gamma : [۰, ۱] \times [۰, ۱] \to X$، که آن را هوموتوپی مسیری بین γ و γ' می‌گوییم، موجود باشد که

$$\Gamma(۰, s) = \gamma(s), \quad \Gamma(۱, s) = \gamma'(s) \quad (s \in [۰, ۱])$$

و نیز

$$\Gamma(t, ۰) = x_۰, \quad \Gamma(t, ۱) = x_۱ \quad (t \in [۰, ۱]).$$

بنابراین هوموتوپی مسیری اندکی قوی‌تر از هوموتوپی صِرف است: در حالی که γ به شکل γ' درمی‌آید، آن را با $\gamma(۰) = \gamma'(۰)$ و $\gamma(۱) = \gamma'(۱)$ کنترل می‌کنیم.



شکل ۲.۵ هوموتوپی مسیری

مثال ۶.۱.۵ آ) فرض کنید که $C \neq \varnothing$ زیرمجموعه‌ای محدب از فضایی نرم‌دار است، و $x_\circ \in C$ دلخواه است. به‌ازای هر مسیر γ در C با شرط $x_\circ = \gamma(\text{۱}) = \gamma(\circ)$، تعریف می‌کنیم

$$\Gamma(t,s) := tx_\circ + (\text{۱}-t)\gamma(s) \qquad (t,s \in [\circ,\text{۱}]).$$

نتیجه می‌شود که Γ هوموتوپی مسیری بین γ و γ' است که به‌ازای هر $s \in [\circ,\text{۱}]$، به‌صورت $\gamma'(s) := x_\circ$ تعریف می‌شود.

ب) فرض کنید $X = \mathbb{R}^{\text{۲}}\backslash\{(\circ,\circ)\}$،

$$\gamma : [\circ,\text{۱}] \to X, \qquad s \mapsto (\cos(\text{۲}\pi s), \sin(\text{۲}\pi s)),$$

و به‌ازای هر $s \in [\circ,\text{۱}]$، $\gamma'(s) := (\text{۱},\circ)$. به‌طور شهودی، آشکار است که γ و γ' هوموتوپیک مسیری نیستند: γ دایرهٔ واحد را توصیف می‌کند، و هنگامی که کوشش می‌کنیم آن را بدون خرد شدن به شکل تک نقطهٔ $(\text{۱},\circ)$ درآوریم، مبدأ به‌سادگی «گیر می‌افتد». مسلماً این استدلال مقبول ریاضی نیست. بعداً به این مثال بر می‌گردیم و برهانی جدی برای هوموتوپیک مسیری نبودن γ و γ' ارائه می‌دهیم؛ اما هنوز ابزار لازم را نداریم. با این وجود، به آسانی دیده می‌شود که γ و γ' به مفهوم تعریف ۱.۱.۵ هوموتوپیک هستند. $F : [\circ,\text{۱}]^{\text{۲}} \to X$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$F(t,s) := (\cos(\text{۲}\pi s(\text{۱}-t)), \sin(\text{۲}\pi s(\text{۱}-t))) \qquad (t,s \in [\circ,\text{۱}]).$$

دراین‌صورت F هوموتوپی‌ای بین γ و γ' است، اما هوموتوپی مسیری نیست.

برای راحتی، چند نمادگذاری و نام‌گذاری انجام می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۵ فرض کنید که $(X,\mathcal{T})$ فضای توپولوژیک، و $\gamma : [\circ,\text{۱}] \to X$ مسیر است. می‌گوییم γ از $x_\circ \in X$ شروع می‌شود (یا $x_\circ$ نقطهٔ شروع γ است) اگر $\gamma(\circ) = x_\circ$، و می‌گوییم $x_\text{۱} \in X$ نقطهٔ پایان γ است (یا γ در $x_\circ$ پایان می‌پذیرد) اگر $\gamma(\text{۱}) = x_\text{۱}$. مجموعهٔ همهٔ مسیرهایی در X را که از $x_\circ$ شروع می‌شوند و در $x_\text{۱}$ پایان می‌پذیرند با $P(X;x_\circ,x_\text{۱})$ نشان می‌دهیم. اگر $x_\circ = x_\text{۱}$، به جای $P(X;x_\circ,x_\text{۱})$ می‌نویسیم $P(X,x_\circ)$؛ به مسیرهای در $P(X,x_\circ)$ مسیرهای بسته یا طوقه‌ها و $x_\circ$ را نقطهٔ پایهٔ آنها می‌گوییم.

قضیهٔ ۸.۱.۵ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، و $x_\circ, x_\text{۱} \in X$. دراین‌صورت $\simeq$ رابطه‌ای هم‌ارزی بر $P(X;x_\circ,x_\text{۱})$ است.

برهان. مسلماً هر مسیری که از $x_۰$ شروع می‌شود و در $x_۱$ پایان می‌پذیرد هوموتوپیک مسیری با خودش است، از این رو $\simeq$ انعکاسی است.

فرض کنید $\gamma \simeq \gamma'$ و $\Gamma : [۰, ۱]^۲ \to X$ هوموتوپی مسیری متناظر است. $\tilde{\Gamma} : [۰, ۱]^۲ \to X$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$\tilde{\Gamma}(t,s) = \Gamma(۱-t, s) \quad (t, s \in [۰, ۱]).$$

دراین‌صورت $\tilde{\Gamma}$ یک هوموتوپی مسیری بین γ' و γ است، و از این رو $\simeq$ متقارن است.

فرض کنید $\gamma \simeq \gamma'$ و $\gamma' \simeq \gamma''$. فرض کنید Γ و Γ' هوموتوپی‌های مسیری متناظر هستند. $\tilde{\Gamma}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$\tilde{\Gamma}(t,s) := \begin{cases} \Gamma(۲t, s), & t \in \left[۰, \frac{۱}{۲}\right], s \in [۰, ۱], \\ \Gamma'(۲t-۱, s), & t \in [\frac{۱}{۲}, ۱], s \in [۰, ۱]. \end{cases}$$

دراین‌صورت $\tilde{\Gamma}$ هوموتوپی مسیری بین γ و γ'' است. بنابراین، $\simeq$ متعدی هم هست. ∎

اکنون می‌توانیم «گروه» بنیادی فضای توپولوژیک را تعریف کنیم.

تعریف ۹.۱.۵ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، و $x_۰ \in X$. دراین‌صورت به مجموعهٔ همهٔ رده‌های هم‌ارزی طوقه‌های در $P(X; x_۰)$ نسبت به $\simeq$ گروه بنیادی X می‌گوییم و آن را با $\pi_۱(X, x_۰)$ نشان می‌دهیم.

صِرفِ گروه نامیدن یک شیء آن را به گروه تبدیل نمی‌کند. برای اینکه ثابت کنیم که گروه بنیادی فضا را می‌توان به گروه تبدیل کرد، چند لم ثابت می‌کنیم.

لم ۱۰.۱.۵ فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، $x_۰, x_۱, x_۲ \in X$، و $\gamma_۱, \gamma'_۱ \in P(X; x_۰, x_۱)$ و $\gamma_۲, \gamma'_۲ \in P(X; x_۱, x_۲)$ و $\gamma_۱ \simeq \gamma'_۱$ و $\gamma_۲ \simeq \gamma'_۲$. دراین‌صورت $\gamma_۱ \odot \gamma_۲, \gamma'_۱ \odot \gamma'_۲ \in P(X; x_۰, x_۲)$ هم هوموتوپیک مسیری هستند.

برهان. فرض کنید که $\Gamma_۱, \Gamma_۲ : [۰, ۱] \times [۰, ۱] \to X$ هوموتوپی‌های مسیری موردنظر هستند. $\tilde{\Gamma} : [۰, ۱] \times [۰, ۱] \to X$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$\tilde{\Gamma}(t,s) := \begin{cases} \Gamma_۱(t, ۲s), & t \in [۰, ۱], s \in [۰, \frac{۱}{۲}], \\ \Gamma'_۲(t, ۲s-۱) =, & t \in [۰, ۱], s \in [\frac{۱}{۲}, ۱]. \end{cases}$$

$\tilde{\Gamma}$ هوموتوپی مسیری‌ای بین $\gamma_۱ \odot \gamma_۲$ و $\gamma'_۱ \odot \gamma'_۲$ است. ∎

لم ۱۱.۱.۵ فرض کنید که $(X,\mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، $x_۰, x_۱, x_۲, x_۳ \in X$، و به‌ازای $j = ۱, ۲, ۳$، $\gamma_j \in P(X; x_{j-۱}, x_j)$. دراین‌صورت

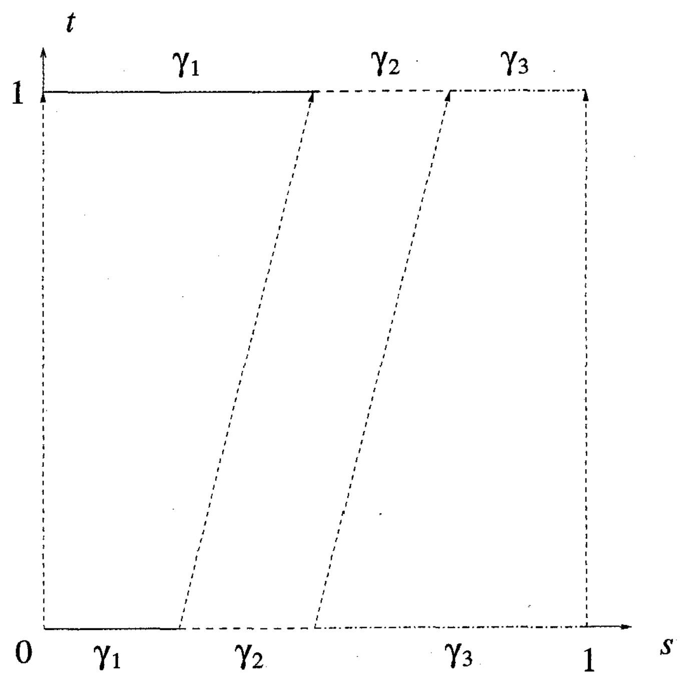
$$(\gamma_۱ \odot \gamma_۲) \odot \gamma_۳, \gamma_۱ \odot (\gamma_۲ \odot \gamma_۳) \in P(X; x_۰, x_۳)$$

هوموتوپیک مسیری هستند.

برهان. $\Gamma : [۰, ۱]^۲ \to X$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$\Gamma(t,s) := \begin{cases} \gamma_۱\left(\frac{۴s}{۱+t}\right), & ۰ \le s \le \frac{t+۱}{۴}, \\ \gamma_۲(۴s - ۱ - t), & \frac{t+۱}{۴} \le s \le \frac{t+۲}{۴}, \\ \gamma_۳\left(۱ - \frac{۴(۱-s)}{۲-t}\right), & \frac{t+۲}{۴} \le s \le ۱. \end{cases}$$

ممکن است که این تعریف در نگاه اول پیچیده به نظر بیاید، ولی در واقع ایدهٔ پشت آن، همان‌طور که در شکل ۳.۵ نشان داده شده، کاملاً ساده است.



شکل ۳.۵ شرکت‌پذیری الحاق مسیری به پیمانهٔ هوموتوپی مسیری

به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که Γ هوموتوپی مسیری بین $(\gamma_1 \odot \gamma_2) \odot \gamma_3$ و $\gamma_1 \odot (\gamma_2 \odot \gamma_3)$ است. ∎

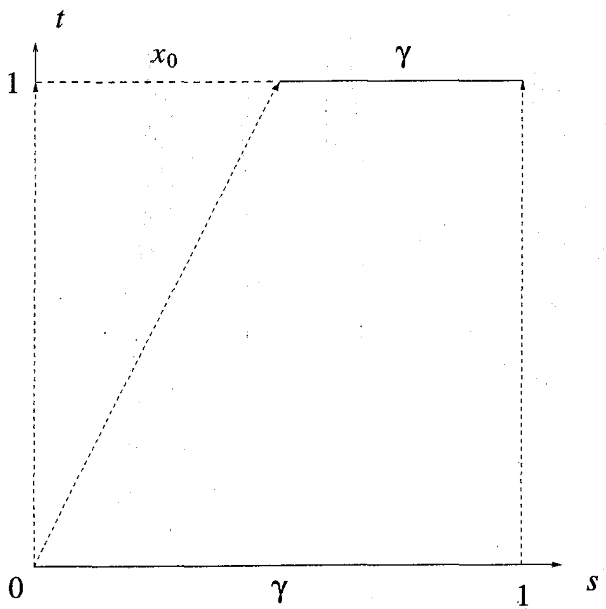
اگر x نقطه‌ای در فضایی توپولوژیک باشد، همان x را برای نشان دادن طوقهٔ ثابت با نقطهٔ پایهٔ x به‌کار می‌بریم، که به‌ازای $t \in [0, 1]$، به‌صورت $\gamma(t) := x$ تعریف می‌شود.

لم ۱۲.۱.۵ فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، $x_0, x_1 \in X$، و $\gamma \in P(X; x_0, x_1)$. دراین‌صورت $\gamma, x_0 \odot \gamma, \gamma \odot x_1 \in P(X; x_0, x_1)$ هوموتوپیک مسیری هستند.

برهان. $\Gamma : [0, 1]^2 \to X$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$\Gamma(t, s) := \begin{cases} x_0, & 0 \le s \le \frac{1}{2}t, \\ \gamma\left(\frac{2s-t}{2-t}\right), & \frac{1}{2}t \le s \le 1. \end{cases}$$

دراین‌صورت Γ هوموتوپی مسیری بین γ و $x_0 \odot \gamma$ است. مانند برهان لم ۱۱.۱.۵، ایدهٔ پشت تعریف Γ در شکل ۴.۵ نمایان‌تر است.



شکل ۴.۵ الحاق با مسیرهای ثابت

به روشی مشابه، یک هوموتوپی مسیری بین γ و $\gamma \odot x_1$ ساخته می‌شود. ∎

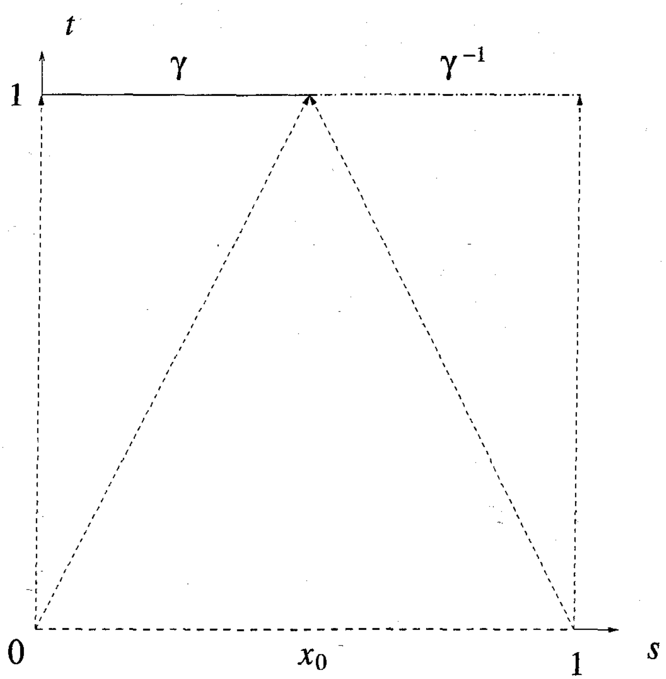
لم ۱۳.۱.۵ فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضایی توپولوژیک است، $x_\circ, x_۱ \in X$، و $\gamma \in P(X; x_\circ, x_۱)$. دراین‌صورت $\gamma \odot \gamma^{-۱} \in P(X, x_\circ)$ و $x_\circ$، و نیز $\gamma^{-۱} \odot \gamma \in P(X, x_۱)$ و $x_۱$ هموتوپیک مسیری هستند.

برهان. $\Gamma : [\circ, ۱]^۲ \to X$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$\Gamma(t,s) := \begin{cases} \gamma(۲s), & \circ \leq s \leq \frac{۱}{۲}t, \\ \gamma(t), & \frac{۱}{۲}t \leq s \leq ۱ - \frac{۱}{۲}t, \\ \gamma(۲ - ۲s), & ۱ - \frac{۱}{۲}t \leq s \leq ۱. \end{cases}$$

ایدهٔ این تعریف هم در شکل ۵.۵ نمایان است.

دراین‌صورت Γ هموتوپی مسیری بین $x_\circ$ و $\gamma \odot \gamma^{-۱}$ است.



شکل ۵.۵ الحاق با مسیر وارون

به‌طور مشابه می‌توان هموتوپی مسیری‌ای بین $\gamma^{-۱} \odot \gamma$ و $x_۱$ به دست آورد. ∎

با ترکیب لم‌های ۱۰.۱.۵ تا ۱۳.۱.۵، قضیهٔ زیر به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۱۴.۱.۵ فرض کنید که (X, T) فضای توپولوژیک است، $x_\circ \in X$. دراین‌صورت $\pi_1(X, x_\circ)$ با عمل

$$[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] := [\gamma_1 \odot \gamma_2] \qquad ([\gamma_1], [\gamma_2] \in \pi_1(X, x_\circ))$$

که در آن $[\gamma] \in \pi_1(X, x_\circ)$ ردهٔ هم‌ارزی $\gamma \in P(X, x_\circ)$ است، گروه است.

برهان. با توجه به لم ۱۰.۱.۵، $\cdot$ خوش تعریف است.
شرکت‌پذیری $\cdot$ از لم ۱۱.۱.۵ نتیجه می‌شود، بنابر لم ۱۲.۱.۵، $[x_\circ]$ عضو همانی $(\pi_1(X, x_\circ), \cdot)$ است، و بنابر لم ۱۳.۱.۵، هر $[\gamma] \in \pi_1(X, x_\circ)$ وارون دارد، که همان $[\gamma^{-1}]$ است.
در مجموع، $\pi_1(X, x_\circ)$ گروه است. ■

مثال ۱۵.۱.۵ آ) فرض کنید که C زیرمجموعه‌ای محدب از فضایی نرم‌دار است، و $x_\circ \in C$. بنابر مثال ۶.۱.۵(آ)، آشکار است که $\pi_1(C, x_\circ) = \{[x_\circ]\} \cong \{\circ\}$.

ب) اکنون به گروه بنیادی دایرهٔ واحد $\mathbb{S}^1$ بر می‌گردیم. در پایان بخش بعد $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, \circ))$ (مثال ۷.۲.۵ زیر) را با کمک نظریهٔ فضاهای پوششی محاسبه می‌کنیم: این گروه (یکریخت با) $\mathbb{Z}$ است. به‌طور شهودی، می‌توان محاسبه کرد که به‌ازای $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, \circ))$، $\gamma \in P(\mathbb{S}^1, (1, \circ))$ چگونه حول مبدأ دور می‌زند، که در آن چرخش برخلاف حرکت عقربه‌های ساعت مثبت و در جهت آن منفی شمرده می‌شود. پارامتری‌سازی متعارف $\mathbb{S}^1$ به‌صورت

$$\gamma : [\circ, 1] \to \mathbb{S}^1, \qquad t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

یک بار حول $(\circ, \circ)$ بر خلاف حرکت عقربه‌های ساعت می‌چرخد، و بنابراین متناظر با $1 \in \mathbb{Z}$ است (به ویژه، γ و $(1, \circ)$ نمی‌توانند در $\mathbb{S}^1$ هوموتوپیک مسیری باشند). در حال حاضر هنوز ابزاری نظری برای برگرداندن این ایده به برهان جدی ریاضی در اختیار نداریم، و به این اعتقاد که $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, \circ))$ برابر با $\mathbb{Z}$ است، قناعت می‌کنیم.
بنابراین، گروه بنیادی را تعریف، و آن را در دو حالت ــ نه کاملاً خوب در حالت $\mathbb{S}^1$ ــ محاسبه کرده‌ایم. ولی با آن چه می‌توان کرد؟

حکم زیر یکی از ویژگی‌های اساسی گروه اصلی است.

گزارهٔ ۱۶.۱.۵ فرض کنید که $(X, \mathcal{T}_X)$ و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ فضاهای توپولوژیک هستند، $x_\circ \in X$،

و $f : X \to Y$ پیوسته است. دراین‌صورت

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0)), \qquad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

همریختی گروهی است. به‌علاوه، اگر $(Z, \mathcal{T}_Z)$ فضای توپولوژیک دیگر، و $g : Y \to Z$ پیوسته باشد، آن‌گاه $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. به ویژه، اگر f همسان‌ریختی باشد آنگاه f_* یکریختی گروهی است.

برهان. سرراست است. ■

مثال ۱۷.۱.۵ فرض کنید C زیرمجموعهٔ محدب ناتهی‌ای از فضایی نرم‌دار است. دراین‌صورت C و $\mathbb{S}^1$، کرهٔ واحد در $\mathbb{R}^2$، نمی‌توانند همسان‌ریخت باشند؛ در غیراین صورت به‌ازای $x_0 \in C$ای $\pi_1(C, x_0)$ و $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ یکریخت‌اند، و این ناممکن است. به ویژه، $\mathbb{S}^1$ و گوی واحد بسته در $\mathbb{R}^2$ همسان‌ریخت نیستند (برای برهانی متفاوت و مقدماتی‌تر تمرین ۱ زیر را نگاه کنید).

برای بیان کاربردی دیگر از گروه بنیادی، تعریفی دیگر ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱۸.۱.۵ فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است. زیرفضای Y از X را درون‌بَر می‌گوییم اگر درون‌بری‌ای از Y (یعنی نگاشتی پیوسته مانند $r : X \to Y$ که بر Y همانی است) موجود باشد.

مثال ۱۹.۱.۵ کرهٔ واحد $\mathbb{S}^{n-1}$ درون‌بر $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ است. تابع زیر درون‌بری است:

$$r : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}, \qquad x \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$

گزارهٔ ۲۰.۱.۵ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک، Y زیرفضای X، و $r : X \to Y$ درون‌بری Y است و $y_0 \in Y$. دراین‌صورت همریختی گروهی $\iota_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, y_0)$، که در آن $\iota : Y \to X$ شمول متعارف است، یک‌به‌یک است.

برهان. فرض کنید که $r : X \to Y$ درون‌بری Y است؛ یعنی r وارون چپ پیوستهٔ ι است. در نتیجه، r_* وارون چپ ι_* است. بنابراین، ι_* یک‌به‌یک است. ■

مثال ۲۱.۱.۵ آ) در مثال ۶.۱.۵(ب)، ادعا کردیم که مسیرهای

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}, \qquad t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

و $(۱,۰)$ در $\mathbb{R}^۲\backslash\{(۰,۰)\}$ هوموتوپیک مسیری نیستند زیرا $(۰,۰)$ به گونه‌ای «در راه بود». روش دیگر بیان این مطلب به زبان گروه بنیادی $\pi_۱(\mathbb{R}^۲\backslash\{(۰,۰)\},(۱,۰))$ این است که $[\gamma]$ و $[(۱,۰)]$ عضوهای متمایز $\pi_۱(\mathbb{R}^۲\backslash\{(۰,۰)\},(۱,۰))$اند. با آنچه تاکنون در مورد گروه‌های بنیادی فرا گرفته‌ایم، اکنون می‌توانیم اثباتی جدی (با یک اشکال که بعداً حل می‌شود) برای این ادعا ارائه بدهیم. چون $\gamma([۰,۱]) \subset \mathbb{S}^۱$، مسیر γ نیز عضوی از $\pi_۱(\mathbb{S}^۱,(۱,۰))$ را به‌دست می‌دهد که برای تمایز آن از $[\gamma] \in \pi_۱(\mathbb{R}^۲\backslash\{(۰,۰)\},(۱,۰))$، آن را با $[\gamma]_{\mathbb{S}^۱}$ نشان می‌دهیم؛ به‌طور مشابه، ردهٔ هم‌ارزی $(۱,۰)$ در $P(\mathbb{S}^۱,(۱,۰))$ را با $[(۱,۰)]_{\mathbb{S}^۱}$ نشان می‌دهیم. در مثال ۱۵.۱.۵(ب)، خود را (با دست تکان دادن‌های بسیار) متقاعد کرده بودیم که $[\gamma]_{\mathbb{S}^۱} \neq [(۱,۰)]_{\mathbb{S}^۱}$. چون $\mathbb{S}^۱$ درون‌بر $\mathbb{R}^۲\backslash\{(۰,۰)\}$ است، نگاشت متعارف از $\pi_۱(\mathbb{S}^۱,(۱,۰))$ به $\pi_۱(\mathbb{R}^۲\backslash\{(۰,۰)\},(۱,۰))$ یک‌به‌یک است، از این رو همان‌طور که در مثال ۶.۱.۵(ب) ادعا کردیم، $[\gamma] \neq [(۱,۰)]$ (البته، این «برهان» متکی به برخی ادعاهای ثابت نشده دربارهٔ $\pi_۱(\mathbb{S}^۱,(۱,۰))$ است: این ادعاها به‌طور کامل و جدی در مثال ۷.۲.۵ زیر ثابت می‌شوند).

ب) اگر باور کنیم که $\pi_۱(\mathbb{S}^۱,(۱,۰))$ ناصفر است (مثال ۱۵.۱.۵(ب))، دراین‌صورت $\mathbb{S}^۱$ نمی‌تواند با هیچ درون‌بر زیرمجموعه‌ای محدب و ناتهی از فضایی خطی و نرم‌دار، همسان‌ریخت باشد. به ویژه، $\mathbb{S}^۱$ درون‌بر گوی واحد بستهٔ $\mathbb{R}^۲$ نیست.

مثال اخیر کاربردی زیبا دارد.

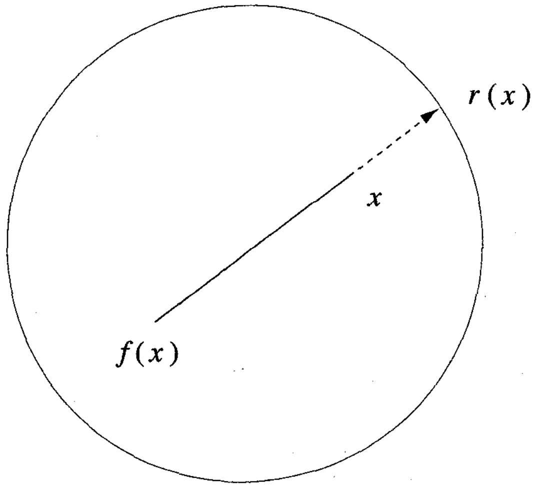
قضیهٔ ۲۲.۱.۵ (قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوؤر به‌ازای $n = ۱,۲$) فرض کنید که $n = ۱,۲$، و B_n گوی واحد بسته در $\mathbb{R}^n$ است. دراین‌صورت هر نگاشت پیوستهٔ $f : B_n \to B_n$ نقطهٔ ثابت دارد.

برهان. فرض کنید f هیچ نقطهٔ ثابتی ندارد؛ یعنی به‌ازای هر $x \in B_n$، $f(x) \neq x$. به‌ازای هر $x \in B_n$، فرض کنید $r(x)$ نقطهٔ برخورد یکتای خطی با نقطهٔ شروع $f(x)$ و گذرنده از x (در همین راستا) با $\mathbb{S}^{n-۱}$ است.

بی‌درنگ r پیوسته است و اگر $x \in \mathbb{S}^{n-۱}$، $r(x) = x$. بنابراین r درون‌بر $\mathbb{S}^{n-۱}$ است. تا اینجای اثبات به $n = ۱,۲$ نیاز نداریم.

اگر $n = ۱$، این حکم ناممکن است زیرا دراین‌صورت $r([-۱,۱]) = \{-۱,۱\} = \mathbb{S}^۰$ همبند خواهد شد. اگر $n = ۲$، بنا بر مثال ۲۱.۱.۵(ب) ناممکن است. ∎

شکل زیر ایدهٔ این برهان را نشان می‌دهد.



شکل ۶.۵ برهان قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر

با روش‌هایی پیچیده‌تر ــ که در این کتاب آنها را بیان نمی‌کنیم ــ می‌توان نشان داد که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mathbb{S}^{n-1}$ درون‌بر B_n نیست، از این رو قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر در هر بعدی برقرار است.

تا پایان این بخش، بر دو پرسش دیگر در مورد گروه بنیادی تمرکز می‌کنیم. پرسش اول این است که: وابستگی گروه بنیادی به نقطهٔ پایهٔ طوقه‌ها چگونه است؟ به‌ازای فضای $(X, \mathcal{T})$ و $x_0, x_1 \in X$، $\pi_1(X, x_0)$ و $\pi_1(X, x_1)$ چه رابطه‌ای با هم دارند؟ به‌طور کلی، چیزی نمی‌توان گفت مگر اینکه x_0 و x_1 در یک مؤلفهٔ X قرار داشته باشند (تمرین ۶ زیر). ولی اگر x_0 و x_1 علاوه‌بر قرار گرفتن در یک مؤلفه بتوانند با مسیری به هم وصل شوند، وضعیت متفاوت است.

گزارهٔ ۲۳.۱.۵ فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، و $x_0, x_1 \in X$ چنان هستند که $\alpha \in P(X; x_0, x_1)$ی وجود دارد. دراین‌صورت

$$\phi_\alpha : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1), \qquad [\gamma] \mapsto [\alpha^{-1} \odot \gamma \odot \alpha]$$

یکریختی گروهی است.

برهان. از لم ۱۰.۱.۵ نتیجه می‌شود که ϕ_α خوش‌تعریف است.

با استفاده از لم‌های ۱۱.۱.۵، ۱۳.۱.۵، و سپس ۱۲.۱.۵، در می‌یابیم که ϕ_α در واقع همریختی گروهی با وارون زیر است

$$\pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0), \qquad [\gamma] \mapsto [\alpha \odot \gamma \odot \alpha^{-1}].$$

این برهان را کامل می‌کند. ∎

نتیجهٔ ۲۴.۱.۵ فرض کنید که $(X, \mathcal{T}_X)$ فضای توپولوژیک مسیری‌همبند است. دراین‌صورت به‌ازای هر $x_0, x_1 \in X$، $\pi_1(X, x_0)$ و $\pi_1(X, x_1)$ یکریخت هستند.

اگر چه $\pi_1(X, x_0)$ و $\pi_1(X, x_1)$، بدون توجه به انتخاب x_0 و x_1، یکریخت هستند، این یکریختی لزوماً متعارف نیست و به انتخاب مسیر واصل x_0 و x_1 بستگی دارد.

در گزارهٔ ۱۶.۱.۵ دیدیم که هر نگاشت پیوستهٔ f بین دو فضای توپولوژیک، همریختی‌ای مثل f_* بین گروه‌های بنیادی القا می‌کند. قضیهٔ پایانی این بخش به ما می‌گوید که اگر f و g پیوسته و هموتوپیک باشند، f_* و g_* چه ارتباطی با هم دارند.

قضیهٔ ۲۵.۱.۵ فرض کنید که $(X, \mathcal{T}_X)$ و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ فضاهایی توپولوژیک هستند، $x_0 \in X$، و $f, g : X \to Y$ هوموتوپیک هستند. دراین‌صورت:

(i) اگر $F : [0, 1] \times X \to Y$ هوموتوپی‌ای بین f و g باشد آنگاه

$$\alpha : [0, 1] \to Y, \qquad t \mapsto F(t, x_0)$$

مسیری در $P(Y; f(x_0), g(x_0))$ است.

(ii) نمودار

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[dd, "\phi_\alpha"] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \\ & \pi_1(Y, g(x_0)) \end{tikzcd}$$

که در آن ϕ_α طبق قضیهٔ ۲۳.۱.۵ تعریف می‌شود، جابه‌جا می‌شود.

برهان. (i) بدیهی است.

برای اثبات (ii)، نیاز داریم که نشان دهیم

$$\alpha \odot (g \circ \gamma) \simeq (f \circ \gamma) \odot \alpha \qquad (\gamma \in P(X, x_0)).$$

فرض کنید $\gamma \in P(X, x_0)$، و $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to [0, 1] \times X$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$\gamma_0(t) := (0, \gamma(t)), \qquad \gamma_1(t) := (1, \gamma(t)) \qquad (t \in [0, 1]).$$

به‌علاوه، فرض کنید

$$c : [0, 1] \to [0, 1] \times X, \qquad t \mapsto (t, x_0).$$

دراین‌صورت بی‌درنگ

$$F \circ \gamma_0 = f \circ \gamma, \qquad F \circ \gamma_1 = g \circ \gamma, \qquad F \circ c = \alpha.$$

تعریف کنید

$$G : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1] \times X, \qquad (t, s) \mapsto (t, \gamma(s)),$$

و فرض کنید $\beta_1, \ldots, \beta_4$ پارامتری‌سازی پاره‌خط‌هایی هستند که $\partial([0, 1] \times [0, 1])$ را می‌سازند؛ یعنی به‌ازای هر $t \in [0, 1]$،

$$\beta_1(t) := (0, t), \qquad \beta_2(t) := (t, 1), \qquad \beta_3(t) := (1, t), \qquad \beta_4(t) := (t, 0).$$

بی‌درنگ

$$G \circ \beta_1 = \gamma_0, \qquad G \circ \beta_3 = \gamma_1, \qquad G \circ \beta_2 = G \circ \beta_4 = c.$$

مسیرهای الحاق‌شدهٔ $\beta_1 \odot \beta_2$ و $\beta_4 \odot \beta_3$ در $[0, 1]^2$ هستند، که زیرمجموعهٔ محدب $\mathbb{R}^2$ است، و از این رو به وسیلهٔ هوموتوپی مسیری‌ای مانند B، هوموتوپیک مسیری هستند. از این رو $G \circ B$ یک هوموتوپی مسیری در $[0, 1] \times X$ بین $\gamma_0 \odot c$ و $c \odot \gamma_1$ است، و در نتیجه $F \circ (G \circ B)$ هوموتوپی مسیری‌ای بین

$$(F \circ \gamma_0) \odot (F \circ c) = (f \circ \gamma) \odot \alpha, \qquad (F \circ c) \odot (F \circ \gamma_1) = \alpha \odot (g \circ \gamma)$$

است. این (ii) را ثابت می‌کند. ∎

نتیجهٔ ۲۶.۱.۵ فرض کنید که $(X, \mathcal{T}_X)$ و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ فضاهای توپولوژیک هستند، $x_0 \in X$، و $f : X \to Y$ هم‌ارزی هوموتوپی است. دراین‌صورت $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ یکریختی گروهی است.

برهان. فرض کنید که $g : Y \to X$ چنان است که $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$ و $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$. بنا بر قضیهٔ ۲۵.۱.۵، به‌ازای یکریختی گروهی مناسب ϕ، نمودار جابه‌جایی زیر را داریم

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(X, g(f(x_0))) \arrow[dd, dashed, "\phi"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "(g \circ f)_*"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \\
& \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

یعنی، $\mathrm{id} = \phi \circ (g \circ f)_* = (\phi \circ g_*) \circ f_*$. به ویژه، $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ وارون چپ دارد، و در نتیجه یک‌به‌یک است.

به روش مشابه، یکریختی گروهی‌ای مانند

$$\psi : \pi_1(Y, f(g(f(x_0)))) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

را به‌دست می‌آوریم که

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(Y, f(g(f(x_0)))) \arrow[dd, dashed, "\psi"] \\
\pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[ur, "(f \circ g)_*"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \\
& \pi_1(Y, f(x_0))
\end{tikzcd}$$

جابه‌جا می‌شود؛ یعنی، $\mathrm{id} = \psi \circ (f \circ g)_* = (\psi \circ f_*) \circ g_*$. بنابراین آشکار است که $\psi \circ f_* : \pi_1(X, g(f(x_\circ))) \to \pi_1(Y, f(x_\circ))$ وارون راست دارد و در نتیجه پوشا است، و چون ψ دوسویی است، $f_* : \pi_1(X, g(f(x_\circ))) \to \pi_1(Y, f(g(f(x_\circ))))$ نیز باید پوشا باشد. چون $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$، $\alpha \in P(X; g(f(x_\circ)), x_\circ)$ی وجود دارد ــ قضیهٔ ۲۵.۱.۵(i) را نگاه کنید ــ که $f \circ \alpha \in P(X; f(g(f(x_\circ))), f(x_\circ))$. با استفاده از $\phi_\alpha : \pi_1(X, g(f(x_\circ))) \to \pi_1(X, x_\circ)$ و

$$\phi_{f\circ\alpha} : \pi_1(Y, f(g(f(x_\circ)))) \to \pi_1(Y, f(x_\circ))$$

به شکلی که در گزارهٔ ۲۳.۱.۵ آمده است، نمودار جابه‌جایی زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(X, g(f(x_\circ))) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(g(f(x_\circ)))) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \phi_\alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{f\circ\alpha}} \\
\pi_1(X, x_\circ) & \xrightarrow[f_*]{} & \pi_1(Y, f(x_\circ))
\end{array}$$

چون ϕ_α و $\phi_{f\circ\alpha}$ یکریختی گروهی هستند، $f_* : \pi_1(X, x_\circ) \to \pi_1(Y, f(x_\circ))$ پوشا نیز هست. در مجموع، $f_* : \pi_1(X, x_\circ) \to \pi_1(Y, f(x_\circ))$ دوسویی، و بنابراین یکریختی گروهی است.

∎

مثال ۲۷.۱.۵ فرض کنید که A طوقی بسته در $\mathbb{R}^2$ با شعاع داخلی اکیداً مثبت است، و $x_\circ \in A$. بنا بر مثال ۴.۱.۵(پ)، A و $\mathbb{S}^1$ از یک نوع هوموتوپی هستند، از این رو بنابر نتیجه‌های ۲۶.۱.۵ و ۲۴.۱.۵، $\pi_1(A, x_\circ) \cong \mathbb{Z}$. با استفادهٔ دوباره از نتیجهٔ ۲۶.۱.۵ مشاهده می‌کنیم که اگر C زیرمجموعهٔ محدب ناتهی دلخواه فضایی نرم‌دار باشد آن‌گاه A و C نمی‌توانند از یک نوع هوموتوپی باشند. به‌ویژه، A و گوی واحد بسته در $\mathbb{R}^2$ به‌طور هوموتوپیک هم‌ارز نیستند، و در نتیجه همسان‌ریخت نیستند.

تمرین‌ها

۱. با روش‌های مقدماتی (یعنی بدون استفاده از مفهوم هوموتوپی) ثابت کنید که B_2 و $\mathbb{S}^1$ همسان‌ریخت نیستند. (راهنمایی: اگر دو نقطهٔ متمایز از B_2 و $\mathbb{S}^1$ برداشته شود در مورد همبندی این دو فضا چه می‌توان گفت؟)

۲. فرض کنید $(X,\mathcal{T}_X)$، $(Y,\mathcal{T}_Y)$، و $(Z,\mathcal{T}_Z)$ فضاهایی توپولوژیک، و $g,g' : X \to Y$ و $f,f' : Y \to Z$ نگاشت‌هایی پیوسته هستند که $g \sim g'$ و $f \sim f'$. ثابت کنید که $f \circ g \sim f' \circ g'$.

۳. فرض کنید $(X,\mathcal{T}_X)$ و $(Y,\mathcal{T}_Y)$ فضاهایی توپولوژیک هستند. ثابت کنید که $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی بر مجموعهٔ همهٔ نگاشت‌های پیوسته از X به Y است.

۴. زیرمجموعهٔ S از فضای نرم‌دار را ستاره‌ای‌شکل به مرکز $x_\circ \in S$ می‌گوییم اگر به‌ازای هر $t \in [\circ,\text{۱}]$ و $x \in S$، $tx + (\text{۱}-t)x_\circ \in S$.

آ) ثابت کنید که هر مجموعهٔ محدب، ستاره‌ای‌شکل است، ولی عکس این مطلب درست نیست.

ب) ثابت کنید که هر مجموعهٔ ستاره‌ای‌شکل، مسیری‌همبند است.

پ) فرض کنید که S ستاره‌ای‌شکل به مرکز $x_\circ$، و $\gamma : [\circ,\text{۱}] \to S$ مسیری است که $\gamma(\circ) = \gamma(\text{۱}) = x_\circ$. ثابت کنید که $\gamma \simeq x_\circ$.

۵. فرض کنید $(X,\mathcal{T}_X)$ و $(Y,\mathcal{T}_Y)$ فضاهایی توپولوژیک هستند، $x_\circ \in X$، $y_\circ \in Y$، $X \times Y$ به توپولوژی حاصل‌ضربی مجهز است، و $\pi^X : X \times Y \to X$ و $\pi^Y : X \times Y \to Y$ تصویرهای متعارف هستند. ثابت کنید که

$$\pi^X_* \times \pi^Y_* : \pi_\text{۱}(X \times Y, (x_\circ, y_\circ)) \to \pi_\text{۱}(X, x_\circ) \times \pi_\text{۱}(Y, y_\circ),$$
$$[\gamma] \mapsto \left(\pi^X_*([\gamma]), \pi^Y_*([\gamma])\right)$$

یکریختی گروهی است.

۶. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است، $x_\circ \in X$، و $Y_{x_\circ}$ مؤلفهٔ X شامل $x_\circ$ است. ثابت کنید که شمول $Y_{x_\circ}$ در X یکریختی گروهی‌ای بین $\pi_\text{۱}(Y_{x_\circ}, x_\circ)$ و $\pi_\text{۱}(X, x_\circ)$ القا می‌کند.

۷. فرض کنید که G گروهی توپولوژیک با عضو همانی e است. به‌ازای $\gamma_\text{۱}, \gamma_\text{۲} \in P(G,e)$، تعریف کنید

$$\gamma_\text{۱} \boxdot \gamma_\text{۲} : [\circ,\text{۱}] \to G, \qquad t \mapsto \gamma_\text{۱}(t)\gamma_\text{۲}(t).$$

آ) به‌ازای $\gamma_\text{۱}, \gamma'_\text{۱}, \gamma_\text{۲}, \gamma'_\text{۲} \in P(G,e)$ که $\gamma_\text{۱} \simeq \gamma'_\text{۱}$ و $\gamma_\text{۲} \simeq \gamma'_\text{۲}$، ثابت کنید که $\gamma_\text{۱} \boxdot \gamma_\text{۲} \simeq \gamma'_\text{۱} \boxdot \gamma'_\text{۲}$.

ب) ثابت کنید که

$$\gamma_۱ \odot \gamma_۲ \simeq \gamma_۱ \boxdot \gamma_۲ \simeq \gamma_۲ \odot \gamma_۱ \qquad (\gamma_۱, \gamma_۲ \in P(G, e))$$

(راهنمایی: به‌ازای $\gamma_۱, \gamma_۲ \in P(G, e)$، $(\gamma_۱ \odot e) \boxdot (e \odot \gamma_۲)$ چیست؟)

پ) نتیجه بگیرید $\pi_۱(G, e)$ آبلی است.

۲.۵ فضاهای پوششی

در بخش پیشین، گروه بنیادی فضا را تعریف کردیم، و نشان دادیم که این گروه برای فضاهایی ویژه بدیهی است. با این وجود، هنوز هیچ گروه بنیادی نابدیهی‌ای به‌دست نیاورده‌ایم (مثال ۱۵.۱.۵(ب) بیشتر بحث اکتشافی بود تا محاسبهٔ جدی).

در این بخش به‌طور جدی ثابت می‌کنیم که همان‌طور که در مثال ۱۵.۱.۵(ب) ادعا کردیم، $\pi_۱(\mathbb{S}^۱, (۱, ۰))$ در واقع (یکریخت با) $\mathbb{Z}$ است. به این منظور نظریهٔ فضاهای پوششی را تا اندازه‌ای توسعه می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۵ فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک است. دراین‌صورت فضای پوششی X عبارت است از زوج $\left(\left(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}\right), p\right)$ که

آ) $\left(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}\right)$ فضای توپولوژیک است؛

ب) $p : \tilde{X} \to X$ پوشا و پیوسته است؛

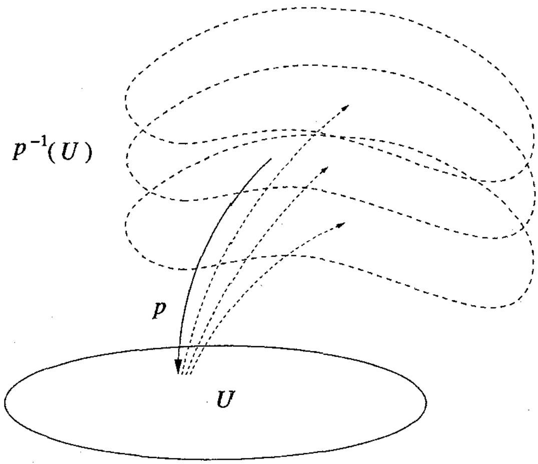
پ) هر $x \in X$ همسایگی بازی مانند U دارد که $p^{-۱}(U)$ اجتماعی جدا از هم از خانوادهٔ $\mathcal{V}$ از زیرمجموعه‌های باز $\tilde{X}$ است که به‌ازای هر $V \in \mathcal{V}$، $p|_V$ همسان‌ریختی‌ای به‌روی U است.

نگاشت p را نگاشت پوششی، و عضوهای $\mathcal{V}$ را برگ‌های $p^{-۱}(U)$ می‌گوییم.
به‌طور شهودی، این برگ‌ها را می‌توان پوشش U تصور کرد (دلیل نامگذاری هم همین است).

مثال زیر به‌طور خاص مورد علاقهٔ ما است.

مثال ۲.۲.۵ نگاشت

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^۱, \qquad x \mapsto (\cos(۲\pi x), \sin(۲\pi x))$$



شکل ۷.۵ فضای پوششی

را در نظر بگیرید. فرض کنید $(x_\circ, y_\circ) \in \mathbb{S}^1$. می‌توانیم تنها حالتی را در نظر بگیریم که $x_\circ > \circ$ (زیرا همهٔ حالت‌های دیگر، یعنی $x_\circ < \circ$، $y_\circ > \circ$، و $y_\circ < \circ$، مشابه هستند). دراین‌صورت $U := \{(x,y) \in \mathbb{S}^1 : x > \circ\}$ همسایگی باز $(x_\circ, y_\circ)$ است که

$$p^{-1}(U) = \bigcup \left\{ \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4} \right) : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

به آسانی دیده می‌شود که به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، p به‌طور همسان‌ریخت $(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$ را به‌روی U می‌نگارد.

آنچه فضاهای پوششی را برای هدف ما جالب می‌کند این است که مسیرها را می‌توان از فضای توپولوژیک به فضای پوششی «ارتقا» داد.

لم ۳.۲.۵ فرض کنید که (X, T) فضای توپولوژیک و $\left(\left(\tilde{X}, \tilde{T}\right), p\right)$ فضای پوششی X است، و فرض کنید $x_\circ \in X$ و $\tilde{x}_\circ \in \tilde{X}$ و $p(\tilde{x}_\circ) = x_\circ$. دراین‌صورت به‌ازای هر مسیر γ در X با نقطهٔ شروع $x_\circ$، مسیر یکتای $\tilde{\gamma}$ در $\tilde{X}$ با نقطهٔ آغازین $\tilde{x}_\circ$ وجود دارد که $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

برهان. به‌ازای هر $x \in X$، فرض کنید U_x همسایگی بازی است که در تعریف ۱.۲.۵ مشخص شد. دراین‌صورت $\{\gamma^{-1}(U_x) : x \in X\}$ پوششی باز برای $[\circ, 1]$ است. به‌ازای هر $s \in [\circ, 1]$،

$x_s \in X$ و $a_s < b_s$ موجودند که

$$s \in [0,1] \cap (a_s, b_s) \subset [0,1] \cap [a_s, b_s] \subset \gamma^{-1}(U_{x_s}).$$

چون $\{(a_s, b_s) : s \in [0,1]\}$ پوششی بازبرای $[0,1]$، و $[0,1]$ فشرده است، $s_1, \ldots, s_m \in [0,1]$ موجودند که

$$[0,1] \subset (a_{s_1}, b_{s_1}) \cup \ldots \cup (a_{s_m}, b_{s_m}) \subset \underbrace{[a_{s_1}, b_{s_1}]}_{\subset\gamma^{-1}(u_{x_{s_1}})} \cup \ldots \cup \underbrace{[a_{s_m}, b_{s_m}]}_{\subset\gamma^{-1}(u_{x_{s_m}})}.$$

بنابراین می‌توانیم $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ را طوری بیابیم که به‌ازای $j = 1, \ldots, n$، $x_j \in X$ی وجود دارد که $[t_{j-1}, t_j] \subset \gamma^{-1}(U_{x_j})$.

فرض کنید x_1 عضوی از X باشد که $[t_0, t_1] \subset \gamma^{-1}(U_{x_1})$. فرض کنید که V_1 برگ یکتایی از $p^{-1}(U_{x_1})$ شامل $\tilde{x}_0$ است. تعریف کنید

$$\tilde{\gamma}(t) := (p|_{V_1})^{-1}(\gamma(t)) \qquad (t \in [t_0, t_1]).$$

حال فرض کنید x_2 عضوی از X است که $[t_1, t_2] \subset \gamma^{-1}(U_{x_2})$ و V_2 برگ یکتایی از $p^{-1}(U_{x_2})$ شامل $\tilde{\gamma}(t_1)$ است. دراین‌صورت تعریف کنید

$$\tilde{\gamma}(t) := (p|_{V_2})^{-1}(\gamma(t)) \qquad (t \in [t_1, t_2]).$$

سپس، $x_3 \in X$ را طوری انتخاب کنید که $[t_2, t_3] \subset \gamma^{-1}(U_{x_3})$ و به همین شیوه ادامه دهید.

به همین ترتیب مسیر $\tilde{\gamma}$ را در $\tilde{X}$ به‌دست می‌آوریم که $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ و $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

فرض کنید که $\tilde{\gamma}'$ مسیری دیگر با این دو ویژگی است. فرض کنید که $\mathcal{V}_1$ گردایهٔ همهٔ برگ‌های $p^{-1}(U_{x_1})$ است. در نتیجه، چون $\gamma([t_0, t_1]) \subset U_{x_1}$،

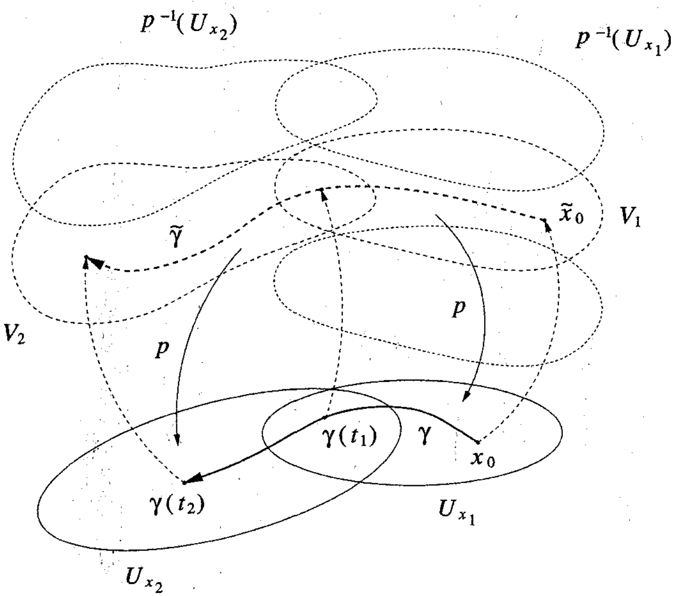
$$\tilde{\gamma}'([t_0, t_1]) \subset p^{-1}(U_{x_1}) = \bigcup\{V : V \in \mathcal{V}_1\}.$$

چون $\tilde{\gamma}'([t_0, t_1])$ همبند است، و برگ‌های $p^{-1}(U_{x_1})$ در $p^{-1}(U_{x_1})$ بسته‌باز هستند، برگی مانند $V_1' \in \mathcal{V}_1$ وجود دارد که $\tilde{\gamma}'([t_0, t_1]) \subset V_1'$. چون $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{x}_0$، آشکار است که $V_1' = V_1$، و چون $p \circ \tilde{\gamma}' = \gamma$، مشاهده می‌کنیم که

$$\tilde{\gamma}'(t) = (p|_{V_1})^{-1}(\gamma(t)) = \tilde{\gamma}(t) \qquad (t \in [t_0, t_1]).$$

به همین ترتیب، در می‌یابیم که به‌ازای هر $t \in [0,1]$، $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t)$. ∎

طرح زیر ایدهٔ برهان را منتقل می‌کند.



شکل ۸.۵ ارتقای مسیر

مسیر $\tilde{\gamma}$ در لم ۳.۲.۵ را ارتقای γ با نقطهٔ شروع $\tilde{x}_\circ$ می‌گوییم. بنابراین مسیرها را می‌توانیم به فضاهای پوششی ارتقا دهیم. هوموتوپی‌های مسیری را چطور؟

لم ۴.۲.۵ فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضایی توپولوژیک و $\left(\left(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}\right), p\right)$ فضای پوششی X است، و فرض کنید $x_\circ \in X$ و $\tilde{x}_\circ \in \tilde{X}$ و $p(\tilde{x}_\circ) = x_\circ$. دراین‌صورت به‌ازای هر نگاشت پیوستهٔ $\Gamma : [\circ, ۱]^۲ \to X$ با شرط $\Gamma(\circ, \circ) = x_\circ$، نگاشت یکتای $\tilde{\Gamma} : [\circ, ۱]^۲ \to \tilde{X}$ موجود است که $\tilde{\Gamma}(\circ, \circ) = \tilde{x}_\circ$ و $p \circ \tilde{\Gamma} = \Gamma$. به‌علاوه، اگر Γ هوموتوپی مسیری باشد، $\tilde{\Gamma}$ هم هست.

برهان. به‌ازای هر $x \in X$، فرض کنید U_x همسایگی بازی است که در تعریف ۱.۲.۵ مشخص شد. با بحثی مشابه برهان لم ۳.۲.۵، $\circ = t_\circ < t_۱ < \cdots < t_n = ۱$، و $\circ = s_\circ < s_۱ < \cdots < s_m = ۱$ را به‌دست می‌آوریم که به‌ازای هر $j \in \{۱, \ldots, n\}$ و $k \in \{۱, \ldots, m\}$، $x_{j,k} \in X$ی موجود است که $\Gamma([t_{j-۱}, t_j] \times [s_{k-۱}, s_k]) \subset U_{x_{j,k}}$.

فرض کنید که $V_{۱,۱}$ برگی شامل $\tilde{x}_\circ$ از $p^{-۱}(U_{۱,۱})$ است، و تعریف کنید

$$\tilde{\Gamma}(t, s) := (p|_{V_{۱,۱}})^{-۱}(\Gamma(t, s)) \qquad ((t, s) \in [t_\circ, t_۱] \times [s_\circ, s_۱]).$$

فرض کنید که $V_{۲,۱}$ برگی از $p^{-۱}(U_{x_{۲,۱}})$ شامل $\tilde{\Gamma}(t_۱, s_۰)$ است. چون برگ‌ها بسته‌باز هستند، و $\tilde{\Gamma}(t_۱, [s_۰, s_۱])$ همبند است، نتیجه می‌گیریم که $\tilde{\Gamma}(t_۱, [s_۰, s_۱]) \subset V_{۲,۱}$. تعریف

$$\tilde{\Gamma}(t, s) := (p|_{V_{۲,۱}})^{-۱}(\Gamma(t, s)) \qquad ((t, s) \in [t_۱, t_۲] \times [s_۰, s_۱]),$$

$\tilde{\Gamma}$ را به نگاشتی پیوسته به $[t_۰, t_۲] \times [s_۰, s_۱]$ گسترش می‌دهد. با ادامهٔ این روند، تابع پیوستهٔ $\tilde{\Gamma} : [۰, ۱] \times [s_۰, s_۱] \to \tilde{X}$ را به دست می‌آوریم که $\tilde{\Gamma}(۰, ۰) = \tilde{x}_۰$.

اینک فرض کنید که $V_{۱,۲}$ برگی از $p^{-۱}(U_{x_{۱,۲}})$ شامل $\tilde{\Gamma}(t_۰, s_۱)$ است. دوباره بسته‌باز بودن برگ‌ها نتیجه می‌دهد که $\tilde{\Gamma}([t_۰, t_۱], s_۱) \subset V_{۱,۲}$، از این رو

$$\tilde{\Gamma}(t, s) := (p|_{V_{۱,۲}})^{-۱}(\Gamma(t, s)) \qquad ((t, s) \in [t_۰, t_۱] \times [s_۱, s_۲])$$

$\tilde{\Gamma}$ را بر $([t_۰, t_۱] \times [s_۱, s_۲]) \cup ([۰, ۱] \times [s_۰, s_۱])$ به طور پیوسته گسترش می‌دهد. فرض کنید که $V_{۲,۲}$ برگی از $p^{-۱}(U_{x_{۲,۲}})$ شامل $\tilde{\Gamma}(t_۱, s_۱)$ است. دوباره بسته‌باز بودن نتیجه می‌دهد که $\tilde{\Gamma}(t_۱, [s_۱, s_۲]) \subset V_{۲,۲}$ و $\tilde{\Gamma}([t_۱, t_۲], s_۱) \subset V_{۲,۲}$، از این رو

$$\tilde{\Gamma}(t, s) := (p|_{V_{۲,۲}})^{-۱}(\Gamma(t, s)) \qquad ((t, s) \in [t_۱, t_۲] \times [s_۱, s_۲])$$

گسترشی پیوسته از $\tilde{\Gamma}$ به $([t_۰, t_۲] \times [s_۱, s_۲]) \cup ([۰, ۱] \times [s_۰, s_۱])$ تعریف می‌کند. با تکرار این بحث، سرانجام نگاشت پیوستهٔ $\tilde{\Gamma} : [۰, ۱] \times [s_۰, s_۲] \to \tilde{X}$ را به دست می‌آوریم که $p \circ \tilde{\Gamma} = \Gamma$ و $\tilde{\Gamma}(۰, ۰) = \tilde{x}_۰$.

مرحلهٔ بعد، توسیع $\tilde{\Gamma}$ (با همان روش پیش) به $[۰, ۱] \times [s_۰, s_۳]$، و سپس به $[۰, ۱] \times [s_۰, s_۴]$ است و به همین ترتیب تا جایی که بر همهٔ $[۰, ۱] \times [۰, ۱]$ تعریف شود. این وجود $\tilde{\Gamma}$ را ثابت می‌کند.

برای اثبات یکتایی نگاشت، فرض کنید که $\tilde{\Gamma}' : [۰, ۱]^۲ \to \tilde{X}$ نگاشتی پیوسته است که $p \circ \tilde{\Gamma}' = \Gamma$ و $\tilde{\Gamma}'(۰, ۰) = \tilde{x}_۰$. فرض کنید که $V_{۱,۱}$ برگی از $p^{-۱}(U_{x_{۱,۱}})$ شامل $\tilde{x}_۰$ است. چون $\tilde{\Gamma}'([t_۰, t_۱] \times [s_۰, s_۱])$ همبند است، $\tilde{\Gamma}'([t_۰, t_۱] \times [s_۰, s_۱]) \subset V_{۱,۱}$، از این رو

$$\tilde{\Gamma}'(t, s) := (p|_{V_{۱,۱}})^{-۱}(\Gamma(t, s)) = \tilde{\Gamma}(t, s) \qquad ((t, s) \in [t_۰, t_۱] \times [s_۰, s_۱]).$$

بنابراین $\tilde{\Gamma}'$ و $\tilde{\Gamma}$ بر $[t_۰, t_۱] \times [s_۰, s_۱]$ بر هم منطبق‌اند. مانند برهان قسمت وجود نشان می‌دهیم که $\tilde{\Gamma}'$ و $\tilde{\Gamma}$ بر $[۰, ۱] \times [s_۰, s_۱]$، سپس بر $[۰, ۱] \times [s_۰, s_۲]$، به همین ترتیب، و سرانجام بر $[۰, ۱] \times [۰, ۱]$ بر هم منطبق‌اند.

در پایان، فرض کنید که Γ هوموتوپی مسیری است؛ یعنی به‌ازای $s \in \{۰, ۱\}$، نگاشت‌های

$$[۰, ۱] \to X, \qquad t \mapsto \Gamma(t, s)$$

ثابت هستند. دراین‌صورت بحث یکتایی لم ۳.۲.۵ نتیجه می‌دهد که

$$[0, 1] \to X, \quad t \mapsto \tilde{\Gamma}(t, s)$$

نیز به‌ازای $s \in \{0, 1\}$ ثابت، و از این رو $\tilde{\Gamma}$ هوموتوپی مسیری است. ∎

باید توجه شود که لم ۴.۲.۵، لم ۳.۲.۵ را به عنوان حالتی خاص در بر می‌گیرد، و تنها در بخشی از برهان خود که در مورد هوموتوپی مسیری است، به لم ۳.۲.۵ متکی است.

نتیجه‌ای ساده از لم ۴.۲.۵ به‌صورت زیر است.

نتیجهٔ ۵.۲.۵ فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک و $\left(\left(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}\right), p\right)$ فضای پوششی X است، $x_0 \in X$ و $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ و $p(\tilde{x}_0) = x_0$، و γ و γ' مسیرهای هوموتوپیک مسیری در X با نقطهٔ شروع x_0 هستند. دراین‌صورت ارتقاهای آنها با نقطهٔ شروع $\tilde{x}_0$، $\tilde{\gamma}$ و $\tilde{\gamma}'$، نیز هوموتوپیک مسیری هستند.

قضیهٔ ۶.۲.۵ فرض کنید که $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک $\left(\left(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}\right), p\right)$ یک فضای پوششی X است، و $x_0 \in X$ و $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ و $p(\tilde{x}_0) = x_0$. دراین‌صورت:

(i) هم‌ارزی ارتقایی

$$\phi : \pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(\{x_0\}), \quad [\gamma] \mapsto \tilde{\gamma}(1)$$

خوش‌تعریف است؛

(ii) اگر $\tilde{X}$ مسیری‌همبند باشد آنگاه ϕ پوشا است؛

(iii) اگر $\tilde{X}$ همبند ساده باشد، یعنی $\tilde{X}$ مسیری‌همبند باشد و $\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{x}_0\right) = \{0\}$، آنگاه ϕ دوسویی است.

برهان. فرض کنید $\gamma, \gamma' \in P(X, x_0)$ هوموتوپیک مسیری هستند. دراین‌صورت بنا بر نتیجهٔ ۵.۲.۵، ارتقاهای آنها نیز این‌گونه‌اند، و از این رو، به ویژه نقطه‌های انتهایی یکسان دارند. این (i) را ثابت می‌کند.

فرض کنید $\tilde{X}$ مسیری‌همبند، و $\tilde{x} \in p^{-1}(\{x_0\})$ دلخواه است. بنابر تعریف مسیری‌همبند بودن، مسیر $\tilde{\gamma}$ در $\tilde{X}$ موجود است که $\tilde{x}_0$ را به $\tilde{x}$ وصل می‌کند. فرض کنید $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$ (از این رو آشکارا $\tilde{\gamma}$ ارتقای γ با نقطهٔ شروع $\tilde{x}_0$ است)، لذا $\tilde{x} = \phi([\gamma])$. این (ii) را ثابت می‌کند.

برای اثبات (iii)، فرض کنید $[\gamma_1]$، $[\gamma_2]$ عضوهایی از $\pi_1(X, x_0)$ باشند که $\phi([\gamma_1]) = \phi([\gamma_2])$؛ یعنی ارتقاهای $\tilde{\gamma}_1$ و $\tilde{\gamma}_2$ نقطهٔ پایانی یکسانی مانند $\tilde{x}_1$ دارند. در نتیجه $\tilde{\gamma}_1 \odot \tilde{\gamma}_2^{-1}$ عضوی از

$\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{x}_0\right) = \{0\}$ را نمایش می‌دهد، از این رو هوموتوپی مسیری $\tilde{\Gamma}$ بین $\tilde{\gamma}_1 \odot \tilde{\gamma}_2^{-1}$ و $\tilde{x}_0$ وجود دارد. پس با فرضِ $\Gamma := p \circ \tilde{\Gamma}$، هوموتوپی مسیری‌ای بین $\gamma_1 \odot \gamma_2^{-1}$ و x_0 فراهم می‌کنیم، از این رو $[x_0] = [\gamma_1 \odot \gamma_2^{-1}] = [\gamma_1] \cdot [\gamma_2]^{-1}$ و بنابراین $[\gamma_1] = [\gamma_2]$. این (iii) را ثابت می‌کند. ■

اکنون از قضیهٔ ۶.۲.۵ استفاده و $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۷.۲.۵ فرض کنید

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, \qquad x \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)),$$

که همان‌طور که در مثال ۲.۲.۵ دیدیم، $\mathbb{R}$ را به فضای پوششی $\mathbb{S}^1$ تبدیل می‌کند، و توجه کنید که $p^{-1}(\{(1, 0)\}) = \mathbb{Z}$. چون $\mathbb{R}$ همبند ساده است، قضیهٔ ۶.۲.۵ بی‌درنگ نتیجه می‌دهد که هم‌ارزی ارتقایی $\phi : \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) \to \mathbb{Z}$ نگاشتی دوسویی است. تنها می‌ماند ثابت کنیم که این نگاشت همریختی گروهی است.

فرض کنید $n, m \in \mathbb{Z}$، و γ_n و γ_m عضوهایی از $P(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ هستند که ارتقاهای آنها، $\tilde{\gamma}_n, \tilde{\gamma}_m \in P(\mathbb{R}, 0)$، در $\tilde{\gamma}_n(1) = n$ و $\tilde{\gamma}_m(1) = m$ صدق می‌کنند. تعریف کنید

$$\tilde{\alpha} : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto n + \tilde{\gamma}_m(t),$$

از این رو $\tilde{\alpha} \in P(\mathbb{R}; n, n + m)$ و $p \circ \tilde{\alpha} = \gamma_m$. بنابراین مسیر $\tilde{\gamma}_n \odot \tilde{\alpha}$ خوش‌تعریف است، و در

$$p \circ (\tilde{\gamma}_n \odot \tilde{\alpha}) = \gamma_n \odot \gamma_m$$

صدق می‌کند. چون 0 نقطهٔ شروع $\tilde{\gamma}_n \odot \tilde{\alpha}$، و نقطهٔ پایانی آن $n + m$ است، نتیجه می‌گیریم که $\tilde{\gamma}_n \odot \tilde{\alpha}$ ارتقای $\gamma_n \odot \gamma_m$ با نقطهٔ شروع 0، یعنی $\widetilde{\gamma_n \odot \gamma_m}$ است. در مجموع، در می‌یابیم که

$$\phi([\gamma_n] \cdot [\gamma_m]) = \left(\widetilde{\gamma_n \odot \gamma_m}\right)(1) = (\tilde{\gamma}_n \odot \tilde{\alpha})(1) = n + m.$$

این حکم را ثابت می‌کند.

تمرین‌ها

۱. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، و تعریف کنید

$$p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \qquad z \mapsto z^n,$$

که در آن $\mathbb{S}^1$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}$ در نظر گرفته می‌شود. ثابت کنید که $(\mathbb{S}^1, p_n)$ فضای پوششی $\mathbb{S}^1$ است.

۲. فرض کنید $(X, \mathcal{T}_X)$ و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ فضاهایی توپولوژیک هستند، Y گسسته است، $X \times Y$ به توپولوژی حاصل‌ضربی مجهز است، و $p : X \times Y \to X$ تصویر بر مختص اول است. ثابت کنید که $(X \times Y, p)$ فضای پوششی X است.

۳. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک همبند است، $\left(\left(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}\right), p\right)$ فضای پوششی $(X, \mathcal{T})$ است، و $n \in \mathbb{N}$ و $x \in X$ وجود دارند که $p^{-1}(\{x\})$، n عضو دارد. ثابت کنید که به‌ازای هر $y \in X$، $p^{-1}(\{y\})$، n عضو دارد (راهنمایی: ثابت کنید که مجموعهٔ $\{y \in X : p^{-1}(\{y\})$، n عضو دارد$\}$ ناتهی و در X بسته‌باز است).

۴. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک، و $\left(\left(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}\right), p\right)$ فضای پوششی $(X, \mathcal{T})$ است و $\tilde{X}$ مسیری‌همبند است. ثابت کنید که $p : \tilde{X} \to X$ همسان‌ریختی است اگر به‌ازای $x_0 \in X$ی، $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$.

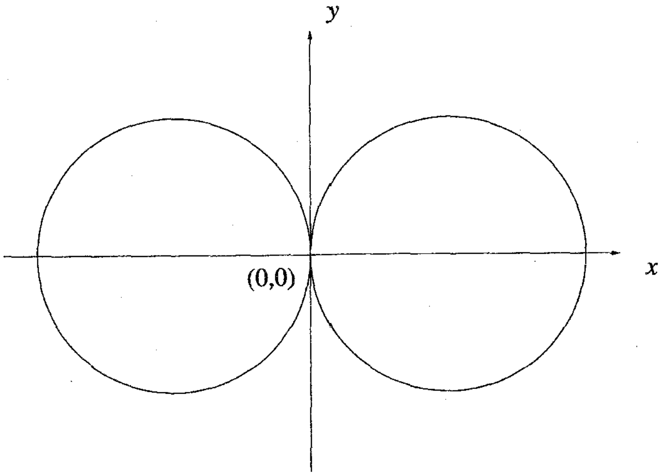
ملاحظه‌ها

آنچه در این فصل انجام داده‌ایم حداکثر فرو بردن یک انگشت در اقیانوس پهناور توپولوژی جبری است.

تنها گروه‌های بنیادی که در این فصل محاسبه کرده‌ایم $\{0\}$ و $\mathbb{Z}$ هستند و با کمک تمرین ۵.۱.۵ به آسانی می‌توان به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، فضاهایی با گروه بنیادی $\mathbb{Z}^n$ فراهم کرد. همهٔ این مثال‌ها آبلی هستند. در حالی که گروه‌های بنیادی به‌طور کلی آبلی نیستند: گروه بنیادی زیرمجموعهٔ ∞ـ شکل زیر از $\mathbb{R}^2$، گروه آزاد با دو مولد است. این نتیجه‌ای از قضیهٔ سایفرت ـ وان کمپن است (برای جزئیات، [MASSEY 91] را نگاه کنید).

گروه بنیادی تنها (و به هیچ وجه اصلی‌ترین) پایای جبری فضاهای توپولوژیک نیست. همان‌طور که با نگاهی به نماد $\pi_1(X, x_0)$ برای گروه بنیادی X در x_0 می‌توان حدس زد، به‌ازای $n \geq 2$، گروه‌های $\pi_n(X, x_0)$ هم موجودند. بر خلاف گروه بنیادی، این گروه‌های با هوموتوپی بالاتر همیشه آبلی هستند. پایاهای مهم دیگری که در توپولوژی جبری مورد مطالعه قرار می‌گیرند عبارت‌اند از گروه‌های مانستگی و همانستگی. حتی تعریف این گروه‌ها ــ بدون محاسبهٔ آنها ــ به تدارکی وسیع، فراتر از هدف این کتاب، نیازمند است.

بعضی از کتاب‌های مقدماتی در مورد توپولوژی جبری عبارت‌اند از [MUNKRES 84] و



شکل ۹.۵ فضایی با گروه بنیادی غیرآبلی

[MASSEY 91]. کتاب درسی دورهٔ کارشناسی [MUNKRES 00] نیز به بحث گروه اصلی و فضاهای پوششی محدود است، ولی مطالبی بسیار بیشتر از کتاب حاضر را پوشش می‌دهد.

اگر چه بعد از توپولوژی عمومی در مورد توپولوژی جبری بحث کردیم، منصفانه است که بگوییم توپولوژی جبری قدیمی‌تر است. تلاش‌های انجام شده برای رده‌بندی انواع مختلف سطح‌ها به نیمهٔ نخست قرن نوزدهم بر می‌گردد. مفهوم هوموتوپی (در راستای تعریف گروه بنیادی) برای نخستین‌بار در سال ۱۸۸۵ در آنالیزیس سیتوس پوانکاره نمایان می‌شود.

همچنین یکی از مشهورترین مسئله‌های توپولوژی ــ و در تمام ریاضیات ــ یعنی حدس پوانکاره منسوب به پوانکاره است.

هر رویهٔ ۳ـبعدی بسته که هم‌ارز هوموتوپیک $\mathbb{S}^3$ باشد، با $\mathbb{S}^3$ همسان‌ریخت است.

(رویهٔ ۳ـبعدی بسته، فضای توپولوژیک فشرده‌ای است که مانند $\mathbb{S}^3$، «به‌طور موضعی شبیه $\mathbb{R}^3$» است.) البته، می‌توان با جایگزینی عدد طبیعی دلخواه n به جای ۳، حدس پوانکاره را تعمیم داد. به‌گونه‌ای شگفت‌آور، $n = ۳$ تنها مقداری است که برای آن حدس پوانکارهٔ تعمیم‌یافته هنوز حل نشده است. این مسئله به‌ازای $n = ۱$ ساده است، و حالت $n = ۲$ برای پوانکاره معلوم بود. ریاضی‌دان امریکایی استیون اسمیل این حدس را به‌ازای $n \geq ۵$ ثابت کرد و مدال فیلدز را در سال ۱۹۶۶ دریافت کرد. سرانجام، امریکایی دیگری، مایکل فریدمن، حالت $n = ۴$ را ثابت کرد (و در سال ۱۹۸۶ به مدال فیلدز دست یافت). در سال ۲۰۰۲ گریگوری پرلمن از مؤسسهٔ استکلف در سن‌پترزبورگ روسیه

ادعا کرد که حدس اصلی پوانکاره را حل کرده است، ولی در حال حاضر برهان او هنوز در حال بررسی است. اگر ادعای پرلمن درست باشد، این کار وی را نه‌تنها مشهور، بلکه ثروتمند نیز می‌کند. در سال ۲۰۰۰ مؤسسهٔ ریاضی کلِی، سازمانی خصوصی و غیرانتفاعی در کمبریج، ماساچوست، حدس پوانکاره را در زمرهٔ هفت مسئلهٔ دارای جایزهٔ میلیونی خود قرار داد: اولین کسی که یکی از این مسئله‌ها را حل کند، یک میلیون دلار امریکا به عنوان جایزه دریافت خواهد کرد.

آ

قضیهٔ میتاگ ـ لفلر کلاسیک بر اساس قضیهٔ بورباکی

قضیهٔ میتاگ ـ لفلر برای متغیرهای مختلط به‌قرار زیر است.

قضیهٔ آ.۱ (قضیهٔ میتاگ ـ لفلر) فرض کنید که $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ باز، $\{c_۱, c_۲, c_۳, \ldots\}$ زیرمجموعه‌ای گسسته از Ω، و $(r_n)_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از تابع‌های گویا به شکل

$$r_n(z) = \sum_{j=۱}^{m_n} \frac{a_{j,n}}{(z-c_n)^j} \qquad (n, m_n \in \mathbb{N},\ \ a_{۱,n}, \ldots, a_{m_n,n} \in \mathbb{C},\ \ z \in \Omega \backslash \{c_n\})$$

است. دراین‌صورت تابع برخه‌ریخت f بر Ω موجود است که $\{c_۱, c_۲, c_۳, \ldots\}$ مجموعهٔ قطب‌های آن است و به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، جزء تکین f در c_n برابر با r_n است.

این قضیه معمولاً در درس‌های مربوط به متغیرهای مختلط مورد بحث قرار می‌گیرد، و احتمالاً در هر متن پیرامون این موضوع (مانند [CONWAY 78]) می‌توان برهانی برای آن یافت. امّا ارتباط این قضیه با قضیهٔ ۱۴.۴.۲ چیست؟ با پیروی از [ESTERLE 84]، در این ضمیمه نشان می‌دهیم که قضیهٔ میتاگ ـ لفلر را می‌توان از قضیهٔ ۱۴.۴.۲ نتیجه گرفت. در این برهان، علاوه بر قضیهٔ ۱۴.۴.۲، به اطلاعاتی از متغیرهای مختلط، و پیش‌زمینهٔ توپولوژیک از بخش‌های ۱.۳ تا ۴.۳ نیاز داریم.

نخست باید فضاهای متریک کامل را به تصویر در بیاوریم. به این منظور لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم آ.۲ فرض کنید که $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{R}^m$ باز است. دراین‌صورت دنبالهٔ $(K_n)_{n=۱}^{\infty}$ از زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω با ویژگی‌های زیر موجود است.

(i) $\Omega = \bigcup_{n=۱}^{\infty} K_n$؛

(ii) به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $K_n \subset K_{n+۱}^{\circ}$؛

(iii) به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، هر مؤلفهٔ $\mathbb{R}^m_\infty \backslash K_n$ شامل مؤلفه‌ای از $\mathbb{R}^m_\infty \backslash \Omega$ است.

برهان. اگر $\Omega = \mathbb{R}^m$، $K_n := B_n[\circ]$ به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ هدف ما را برآورده می‌کند.

بنابراین می‌توان فرض کرد $\Omega \neq \mathbb{R}^m$. دراین‌صورت تعریف می‌کنیم

$$K_n := \left\{x \in \Omega : \|x\| \leq n, \quad \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^m \backslash \Omega) \geq \frac{1}{n}\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

به آسانی دیده می‌شود که (i) و (ii) برقرارند.

فرض کنید که $n \in \mathbb{N}$، و C مؤلفهٔ $\mathbb{R}^m_\infty \backslash K_n$ است، که در آن $\mathbb{R}^m_\infty$ فشرده‌سازی تک‌نقطه‌ای $\mathbb{R}^m$ است.

حالت ۱: $\infty \in C$.

فرض کنید C_∞ مؤلفه‌ای از $\mathbb{R}^m_\infty \backslash \Omega$ شامل ∞ است، دراین‌صورت $C_\infty \subset \mathbb{R}^m_\infty \backslash K_n$ همبند و شامل ∞ است، در نتیجه $C_\infty \subset C$.

حالت ۲: $\infty \notin C$.

زیرمجموعهٔ $C_\circ := \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| > n\} \cup \{\infty\}$ از $\mathbb{R}^m_\infty \backslash K_n$ همبند است. چون C مؤلفهٔ $\mathbb{R}^m_\infty \backslash K_n$ است، $C_\circ \subset C$ یا $C_\circ \cap C = \varnothing$. چون $\infty \in C_\circ$ و $\infty \notin C$، حالت اول نمی‌تواند روی دهد، از این رو $C_\circ \cap C = \varnothing$؛ یعنی به‌ازای هر $x \in C$، $\|x\| \leq n$ و از این رو بنابر تعریف K_n، به‌ازای هر $x \in C$، $\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^m \backslash \Omega) < \frac{1}{n}$. در نتیجه، $x_\circ \in \mathbb{R}^m \backslash \Omega$ای موجود است که $B_{\frac{1}{n}}(x_\circ) \cap C \neq \varnothing$. توجه کنید که بنابر تعریف K_n، $B_{\frac{1}{n}}(x_\circ) \subset \mathbb{R}^m \backslash K_n$. چون $B_{\frac{1}{n}}(x_\circ)$ همبند است، از گزارهٔ ۱۶.۴.۳ نتیجه می‌شود که $B_{\frac{1}{n}}(x_\circ) \subset C$. مانند حالت اول، مشاهده می‌کنیم که C مؤلفهٔ $\mathbb{R}^m_\infty \backslash \Omega$ شامل $x_\circ$ را در بر می‌گیرد. ∎

با کمک لم آ.۲ می‌توانیم متریکی روی فضای تابع‌های پیوسته بر زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^m$ معرفی کنیم.

گزارهٔ آ.۳ فرض کنید که $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{R}^m$ باز، و $(K_n)_{n=1}^\infty$ دنباله‌ای است که در لم آ.۲ معرفی شد. به‌ازای $f, g \in C(\Omega, \mathbb{F})$ تعریف کنید

$$d_n(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in K_n\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

و

$$d(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{d_n(f, g)}{1 + d_n(f, g)}.$$

دراین‌صورت:

(i) d متریکی بر $C(\Omega,\mathbb{F})$ است که به‌ازای هر $f,g,h \in C(\Omega,\mathbb{F})$،

$$d(f+h,g+h)=d(f,g);$$

(ii) توپولوژی القایی با d بر $C(\Omega,\mathbb{F})$ با $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}|_{C(\Omega,\mathbb{F})}$ یکی است، که در آن $\mathcal{K}$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω است؛

(iii) فضای متریک $(C(\Omega,\mathbb{F}),d)$ کامل است.

برهان. (i) آشکار است.

برای اثبات (ii)، فرض کنید $\mathcal{C} := \{K_n : n \in \mathbb{N}\}$. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که d توپولوژی $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}|_{C(\Omega,\mathbb{F})}$ را القا می‌کند. چون $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}$، آشکار است که $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}|_{C(\Omega,\mathbb{F})}$ قوی‌تر از $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}|_{C(\Omega,\mathbb{F})}$ است. از سوی دیگر، $\{K_n^{\circ} : n \in \mathbb{N}\}$ پوششی باز برای Ω است. بنابراین به‌ازای هر $K \in \mathcal{K}$، $n \in \mathbb{N}$ی موجود است که $K \subset K_n^{\circ} \subset K_n$. در نتیجه $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}|_{C(\Omega,\mathbb{F})}$ و $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}|_{C(\Omega,\mathbb{F})}$ بر هم منطبق هستند.

فرض کنید $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی در $(C(\Omega,\mathbb{F}),d)$ است. دراین‌صورت به‌ازای هر $x \in \Omega$، دنبالهٔ $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ در $\mathbb{F}$ کوشی است، از این رو $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ موجود است. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ بر هر $K \in \mathcal{K}$ به‌طور یکنواخت به $f : \Omega \to \mathbb{F}$ همگرا است. فرض کنید $x_{\circ} \in \Omega$، و $\epsilon > \circ$ و $\overline{B_\epsilon(x_\circ)} \subset \Omega$. چون $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ بر $\overline{B_\epsilon(x_\circ)}$ به‌طور یکنواخت به f همگرا است، $f|_{\overline{B_\epsilon(x_\circ)}}$ پیوسته است، و چون $\overline{B_\epsilon(x_\circ)}$ همسایگی $x_\circ$ است، تابع f در $x_\circ$ پیوسته است. این (iii) را ثابت می‌کند. ∎

برای اثبات قضیهٔ آ.۱، قضیهٔ ۱۴.۴.۲ را نه برای کلّ $C(\Omega,\mathbb{C})$، بلکه برای زیرفضایی از آن به‌کار می‌گیریم.

تعریف آ.۴ فرض کنید که $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ باز است. دراین‌صورت فضای همهٔ تابع‌های تمام‌ریخت روی Ω را با $H(\Omega)$ نشان می‌دهیم.

در نتیجهٔ زیر از گزارهٔ آ.۳، $\mathbb{C}$ را با $\mathbb{R}^۲$ یکی می‌گیریم.

نتیجهٔ آ.۵ فرض کنید $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ باز، و d متریکی است که در گزارهٔ آ.۳ معرفی شد. دراین‌صورت $H(\Omega)$ زیرفضایی بسته از $(C(\Omega,\mathbb{C}),d)$ (و بنابراین کامل) است.

برهان. فرض کنید $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $H(\Omega)$ است که با متریک d به $f \in C(\Omega, \mathbb{C})$ همگراست، و از این رو بنابر گزارهٔ آ.۳(ii)، به‌طور یکنواخت بر همهٔ زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω به f همگرا است. مشهور است که دراین‌صورت f تمام‌ریخت است (به عنوان مثال [قضیهٔ ۱.۲، CONWAY 78] را نگاه کنید). ∎

اینک به کمک قضیهٔ ۱۴.۴.۲ قضیهٔ آ.۱ را ثابت می‌کنیم.

برهان (قضیهٔ آ. ۱). فرض کنید که $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای است که در لم آ.۲ مشخص شد، و به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\Omega_{n-1} := K_n^{\circ}$. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}_0$، $\tilde{d}_n$ متریکی بر $H(\Omega_n) \subset C(\Omega_n, \mathbb{C})$ است که در گزارهٔ آ.۳ مشخص شد.

فرض کنید $n \in \mathbb{N}_0$ ثابت باشد، و $S_n := \{m \in \mathbb{N} : c_m \in \Omega_n\}$. چون K_{n+1} فشرده، و $\{c_1, c_2, \dots\}$ گسسته است، هر S_n متناهی (و احتمالاً تهی) است. بنابراین، تابع گویای $R_n := \sum_{m \in S_n} r_m$ خوش‌تعریف است (مجموع، متناهی است). فرض کنید که X_n مجموعهٔ تابع‌های برخه‌ریخت f بر Ω_n است که $f - R_n$ گسترشی تمام‌ریخت به همهٔ Ω_n دارد، و بر آن متریکی به‌صورت زیر تعریف کنید

$$d_n(f, g) := \tilde{d}_n(f - R_n, g - R_n) \qquad (f, g \in X_n).$$

در نتیجه بنا بر نتیجهٔ آ.۵، (X_n, d_n) فضای متریک کامل است. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض کنید که $\phi_n : X_n \to X_{n-1}$ نگاشت تحدید است. با توجه به گزارهٔ آ.۳(ii)، آشکار است که ϕ_n پیوسته است.

ادعا می‌کنیم که ϕ_n نگارهٔ چگال دارد. فرض کنید $g \in X_{n-1}$، پس $g - R_{n-1} \in H(\Omega_{n-1})$. چون به‌ازای هر $m \in S_n \setminus S_{n-1}$، قطب‌های تابع گویای r_m خارج Ω_{n-1} هستند، در نتیجه $g - R_n$ در $H(\Omega_{n-1})$ است. بنابر لم آ.۲ و قضیهٔ تقریب رونگه [نتیجهٔ ۱۴.۱، CONWAY 78]، می‌توان دنبالهٔ $(q_m)_{m=1}^{\infty}$ از تابع‌های گویا با قطب‌های خارج از Ω_{n-1} (و در نتیجه در $H(\Omega_{n-1})$) یافت که $\tilde{d}_{n-1}(g - R_n, q_m) \to 0$. در نتیجه، وقتی $m \longrightarrow \infty$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} d_{n-1}(g, \phi_n(q_m + R_n)) &= \tilde{d}_{n-1}(g - R_{n-1}, q_m + R_n - R_{n-1}) \\ &= \tilde{d}_{n-1}(g - R_n + \underbrace{(R_n - R_{n-1})}_{\in H(\Omega_{n-1})}, q_m + \underbrace{(R_n - R_{n-1})}_{\in H(\Omega_{n-1})}) \\ &= \tilde{d}_{n-1}(g - R_n, q_m) \\ &\to 0 \end{aligned}$$

و در نتیجه، $\phi_n(X_n)$ در $X_{n-۱}$ چگال است.

از قضیهٔ ۱۴.۴.۲ نتیجه می‌گیریم که $\bigcap_{n=۱}^{\infty}(\phi_۱ \circ \cdots \circ \phi_n)(X_n)$ در $X_۰$ چگال، و بنابراین به‌ویژه، ناتهی است. فرض کنید $(g_n)_{n=۰}^{\infty}$ دنباله‌ای است که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}_۰$، $g_n \in X_n$، و به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\phi_n(g_n) = g_{n-۱}$. اگر $z \in \Omega_n \backslash \{c_m : m \in S_n\}$، $f : \Omega \backslash \{c_۱, c_۲, \ldots\} \to \mathbb{C}$ را به‌صورت $f(z) := g_n(z)$ تعریف می‌کنیم. چون $\Omega = \bigcup_{n=۱}^{\infty} \Omega_n$، تابع برخه‌ریختی با ویژگی‌های مطلوب بر Ω تعریف کرده‌ایم. ∎

ب

نادرستی قضیهٔ هاینه ـ بورل در فضاهای با بعد نامتناهی

نخست نشان می‌دهیم که قضیهٔ هاینه ـ بورل در هر فضای نرم‌دار با بعد متناهی برقرار است.

گزارهٔ زیر، بیانی اساسی برای این منظور است.

گزارهٔ ب.۱ فرض کنید E فضایی خطی با بعد متناهی (بر $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{F} = \mathbb{C}$)، و $\|\cdot\|$ و $|||\cdot|||$ نرم‌هایی بر E هستند. دراین‌صورت عدد ثابت $C \geq 0$ موجود است که

$$\|x\| \leq C|||x|||, \qquad |||x||| \leq C\|x\| \qquad (x \in E).$$

برهان. فرض کنید که $e_1, \ldots, e_n \in E$ پایه‌ای برای E است. به‌ازای $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$، فرض کنید

$$|x| := \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}.$$

آشکارا، $|\cdot|$ یک نرم بر E است.

قرار دهید $C_1 := \|e_1\| + \cdots + \|e_n\|$، و توجه کنید که

$$\|x\| \leq |\lambda_1|\|e_1\| + \cdots + |\lambda_n|\|e_n\| \leq C_1|x| \qquad (x \in E).$$

نشان می‌دهیم که $C_2 \geq 0$یی موجود است که به‌ازای هر $x \in E$، $|x| \leq C_2\|x\|$.

فرض کنید چنین نیست. دراین‌صورت دنبالهٔ $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ در E موجود است که به‌ازای هر $m \in \mathbb{N}$، $|x_m| > m\|x_m\|$. فرض کنید که

$$y_m := \frac{x_m}{|x_m|} \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

به‌ازای هر $m \in \mathbb{N}$، $\lambda_{1,m}, \ldots, \lambda_{n,m} \in \mathbb{F}$ یکتا موجودند که $y_m = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,m} e_j$. در نتیجه

$$1 = |y_m| = \max\{|\lambda_{1,m}|, \ldots, |\lambda_{n,m}|\} \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

به ویژه، دنبالهٔ $((\lambda_{1,m}, \ldots, \lambda_{n,m}))_{m=1}^{\infty}$ در $\mathbb{F}^n$ کران‌دار است، و از این رو ــ بنا بر قضیهٔ بولتسانو- وایرشتراس (به‌ازای $\mathbb{R}^n$ اگر $\mathbb{F} = \mathbb{R}$، و به‌ازای $\mathbb{R}^{2n}$ اگر $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) ــ زیردنباله‌ای همگرا مانند $((\lambda_{1,m_k}, \ldots, \lambda_{n,m_k}))_{k=1}^{\infty}$ با حد $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ دارد. در نتیجه، $(y_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ با $|\cdot|$، به $y := \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ همگرا است. از این رو لازم است که $|y| = 1$، و بنابراین $y \neq 0$. چون $\|\cdot\| \leq C_1 |\cdot|$، مشاهده می‌کنیم که با $\|\cdot\|$ هم $y = \lim_{k\to\infty} y_{m_k}$. ولی،

$$\|y_m\| = \left\| \frac{x_m}{|x_m|} \right\| = \frac{\|x_m\|}{|x_m|} < \frac{1}{m} \to 0,$$

از این رو $y = 0$. این ناممکن است.

به‌ازای $C' := \max\{C_1, C_2\}$،

$$\|x\| \leq C'|x|, \qquad |x| \leq C'\|x\| \qquad (x \in E),$$

و به‌طور مشابه، $C'' \geq 0$ی فراهم می‌آوریم که

$$|||x||| \leq C''|x|, \qquad |x| \leq C''|||x||| \qquad (x \in E).$$

در نتیجه، به‌ازای $C := C'C''$،

$$\|x\| \leq C|||x|||, \qquad |||x||| \leq C\|x\| \qquad (x \in E).$$

■

به عنوان نتیجه‌ای فوری، هر دو نرم بر فضای برداری با بعد متناهیِ E، به متریک‌هایی هم‌ارز منجر می‌شوند، و اگر E با یک نرم باناخ باشد، با هر نرمی باناخ است. بنابراین، اگر $\dim E = n$، و e_1، ...، e_n پایه‌ای برای E باشد، نگاشت

$$\mathbb{F}^n \to E, \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$$

پیوسته با وارون پیوسته است و دنباله‌های کوشی را به دنباله‌های کوشی می‌برد (وارون آن نیز چنین عمل می‌کند).

بنابراین نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم.

نتیجهٔ ب.۲ فرض کنید E فضای نرم‌دار با بعد متناهی است. دراین‌صورت E فضای باناخ است، و زیرمجموعه‌ای از E فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کران‌دار باشد.

ترکیب این نتیجه و گزارهٔ ۵.۴.۲(ii) نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌دهد:

نتیجهٔ ب.۳ فرض کنید E فضای نرم‌دار، و F زیرفضایی از آن با بعد متناهی است. در این صورت F در E بسته است.

بنابر نتیجهٔ ب.۲، قضیهٔ هاینه ـ بورل در هر فضای نرم‌دار با بعد متناهی برقرار است. برای اثبات عکس این مطلب، به لم زیر نیاز داریم.

لم ب.۴ (لم ریس) فرض کنید که E فضای نرم‌دار، و F زیرفضای سرهٔ (یعنی $F \neq E$) بستهٔ E است. دراین‌صورت به‌ازای هر $\theta \in (0, 1)$، $x_\theta \in E$ای موجود است که $\|x_\theta\| = 1$، و به‌ازای هر $x \in F$، $\|x - x_\theta\| \geq \theta$.

برهان. فرض کنید که $x_0 \in E \backslash F$، و $\delta := \operatorname{dist}(x_0, F)$. اگر $\delta = 0$، بسته بودن F نتیجه می‌دهد $x_0 \in F$، که تناقض است. بنابراین $\delta > 0$. چون $\theta \in (0, 1)$، $\frac{\delta}{\theta} > \delta$. $y_\theta \in F$ را طوری انتخاب کنید که $0 < \|x_0 - y_\theta\| < \frac{\delta}{\theta}$، و فرض کنید

$$x_\theta := \frac{y_\theta - x_0}{\|y_\theta - x_0\|},$$

از این رو آشکارا $\|x_\theta\| = 1$. فرض کنید $x \in F$، و توجه کنید که

$$\|x - x_\theta\| = \left\| x - \frac{y_\theta - x_0}{\|y_\theta - x_0\|} \right\| = \frac{1}{\|y_\theta - x_0\|} \big\| \|y_\theta - x_0\| x - y_\theta + x_0 \big\|.$$

چون $x, y_\theta \in F$، $\|y_\theta - x_0\| x - y_\theta \in F$، از این رو

$$\big\| \|y_\theta - x_0\| x - y_\theta + x_0 \big\| \geq \operatorname{dist}(x_0, F) = \delta.$$

در نهایت، به‌دست می‌آوریم

$$\|x - x_\theta\| = \frac{1}{\|y_\theta - x_0\|} \big\| \|y_\theta - x_0\| x - y_\theta + x_0 \big\| > \frac{\theta}{\delta} \delta = \theta.$$

چون $x \in F$ دلخواه بود، این برهان را کامل می‌کند. ∎

اکنون می‌توانیم قضیهٔ زیر را ثابت کنیم.

قضیهٔ ب.۵ به‌ازای هر فضای نرم‌دار E، گزاره‌های زیر هم‌ارزند.

(i) هر زیرمجموعهٔ بسته و کران‌دار E فشرده است.

(ii) کرهٔ واحد بستهٔ E فشرده است.

(iii) $\dim E < \infty$.

برهان. (i)$\Longrightarrow$(ii) بدیهی است.

(ii)$\Longrightarrow$(iii): فرض کنید که $\dim E = \infty$. دنباله‌ای در $S_۱[۰]$ می‌سازیم که زیردنبالهٔ همگرا نداشته باشد، از این رو بنابر قضیهٔ ۱۰.۵.۲، $S_۱[۰]$ نمی‌تواند فشرده باشد.

$x_۱ \in E$ای را انتخاب کنید که $\|x_۱\| = ۱$. چون $\dim E = \infty$، فضای یک‌بعدی $F_۱$ که با $x_۱$ پدید می‌آید، برابر با E نیست. پس بنابر لم ریس، $x_۲ \in E$ای موجود است که به‌ازای هر $x \in F_۱$، $\|x_۲ - x\| \geq \frac{۱}{۲}$، از این رو به ویژه، $\|x_۲ - x_۱\| \geq \frac{۱}{۲}$. چون $\dim E = \infty$، فضای دوبعدی $F_۲$ که با $\{x_۱, x_۲\}$ پدید می‌آید نیز برابر با E نیست. دوباره بنابر لم ریس، $x_۳ \in E$ای موجود است که به‌ازای هر $x \in F_۲$، $\|x_۳ - x\| \geq \frac{۱}{۲}$، و از این رو به ویژه، به‌ازای $j = ۱, ۲$، $\|x_۳ - x_j\| \geq \frac{۱}{۲}$. فرض کنید که $F_۳$ پدیدآمدهٔ خطی $\{x_۱, x_۲, x_۳\}$ است، از این رو $F_۳ \neq E$. با به‌کارگیری دوبارهٔ لم ریس، $x_۴ \in E$ به‌دست می‌آید، و به همین ترتیب.

پس به استقرا، دنبالهٔ $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$ در $S_۱[۰]$ به‌دست می‌آید که

$$\|x_n - x_m\| \geq \frac{۱}{۲} \qquad (n \neq m).$$

آشکار است که هیچ زیردنبالهٔ $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$ نمی‌تواند کوشی باشد.

سرانجام، (iii)$\Longrightarrow$(i) همان نتیجهٔ ب.۲ است. ∎

پ

قضیهٔ آرزلا ـ آسکولی

همان‌طور که در مثال ۱۳.۵.۲ دیده‌ایم، قضیهٔ هاینه ـ بورل برای $C([\circ,1],\mathbb{F})$ (و به‌طور کلی، برای هر فضای نرم‌دار با بعد نامتناهی؛ پیوست ب را نگاه کنید) نادرست است.

قضیهٔ آرزلا ـ آسکولی را می‌توان جایگزینی مناسب برای قضیهٔ هاینه ـ بورل در فضاهای تابع‌های پیوسته در نظر گرفت. در این پیوست این قضیه را از قضیهٔ تیخونوف نتیجه می‌گیریم.

برای اثبات قضیهٔ آرزلا ـ آسکولی، به دو مفهوم نیاز داریم: فشردگی نسبی، که در تمرین ۷.۵.۲ معرفی شد، و هم‌پیوستگی.

تعریف پ.۱ فرض کنید (X,T) فضای توپولوژیک، و (Y,d) فضای متریک است. در این صورت خانوادهٔ $\mathfrak{F}$ از تابع‌های از X به Y را هم‌پیوسته در $x_\circ$ می‌گوییم اگر به‌ازای هر $\epsilon > \circ$، $N \in \mathcal{N}_{x_\circ}$ی موجود باشد که به‌ازای هر $f \in \mathfrak{F}$ و $x \in N$، $d(f(x_\circ), f(x)) < \epsilon$. اگر $\mathfrak{F}$ در همهٔ نقطه‌های X هم‌پیوسته باشد، می‌گوییم هم‌پیوسته است.

اگر $\mathfrak{F}$ فقط از یک تابع، مانند f، تشکیل شده باشد، آنگاه $\mathfrak{F}$ هم‌پیوسته است اگر و تنها اگر f پیوسته باشد.

فرض کنید (K,T) فضای فشرده، (Y,d) فضای متریک، و $f: K \to Y$ پیوسته است. دراین‌صورت $f(K)$ فشرده است و بنابراین قطر متناهی دارد، یعنی f به‌طور قطع در $C_b(K,Y)$ قرار دارد. در نتیجهٔ زیر، $C(K,Y) = C_b(K,Y)$ به متریک D در مثال ۲.۱.۲(ت) مجهز است.

قضیهٔ پ.۲ (قضیهٔ آرزلا ـ آسکولی) فرض کنید (K,T) فضای توپولوژیک فشرده، و (Y,d) فضای متریک کامل است. دراین‌صورت به‌ازای $\mathfrak{F} \subset C(K,Y)$، گزاره‌های زیر هم‌ارزند.

(i) $\mathfrak{F}$ در $C(K,Y)$ فشردهٔ نسبی است.

(ii) آ) به‌ازای هر $x \in X$، $\{f(x) : f \in \mathfrak{F}\}$ در Y فشردهٔ نسبی است.

ب) $\mathfrak{F}$ هم‌پیوسته است.

برهان. (ii)$\Longrightarrow$(i): به‌ازای هر $x \in K$، فرض کنید

$$\pi_x : C(K,Y) \to Y, \qquad f \mapsto f(x).$$

دراین‌صورت π_x پیوسته است، از این رو $\pi_x(\overline{\mathfrak{F}})$ در Y فشرده و شامل $\{f(x) : f \in \mathfrak{F}\}$ است. در نتیجه، $\{f(x) : f \in \mathfrak{F}\}$ در Y فشردهٔ نسبی است. این (ii)(آ) را ثابت می‌کند.

برای نیل به تناقض، فرض کنید (ii)(ب) نادرست است؛ یعنی فرض کنید $x_\circ \in X$ و $\epsilon_\circ > \circ$ی وجود دارند که به‌ازای هر $N \in \mathcal{N}_{x_\circ}$، $f_N \in \mathfrak{F}$ و $x_N \in N$ی وجود دارند که $d(f_N(x_\circ), f_N(x_N)) \geq \epsilon_\circ$. چون $\overline{\mathfrak{F}}$ فشرده است، تور $(f_N)_{N \in \mathcal{N}_{x_\circ}}$، که در آن $\mathcal{N}_{x_\circ}$ با عکس شمول مجموعه‌ای مرتب شده است، زیرتوری مثل $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ دارد که همگرا (با D) به یک $f \in \overline{\mathfrak{F}}$ است. فرض کنید $N_\circ \in \mathcal{N}_{x_\circ}$ چنان است که به‌ازای هر $x \in N_\circ$، $d(f(x_\circ), f(x)) < \frac{\epsilon_\circ}{۳}$ (این امکان‌پذیر است زیرا f پیوسته است)، فرض کنید که $\phi : \mathbb{A} \to \mathcal{N}_{x_\circ}$ نگاشت هم‌پایان مرتبط با زیرتور $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ است، و $\alpha \in \mathbb{A}$ چنان است که $D(f_\alpha, f) < \frac{\epsilon_\circ}{۳}$ و $\phi(\alpha) \subset N_\circ$. دراین‌صورت

$$\begin{aligned}
d(f_\alpha(x_\circ),&f_\alpha(x_{\phi(\alpha)})) \\
&\leq d(f_\alpha(x_\circ), f(x_\circ)) + d(f(x_\circ), f(x_{\phi(\alpha)})) + d(f(x_{\phi(\alpha)}), f_\alpha(x_{\phi(\alpha)})) \\
&\leq D(f_\alpha, f) + d(f(x_\circ), f(x_{\phi(\alpha)})) + D(f_\alpha, f) \\
&< \frac{۲\epsilon_\circ}{۳} + d(f(x_\circ), f(x_{\phi(\alpha)})) \\
&< \frac{۲\epsilon_\circ}{۳} + \frac{\epsilon_\circ}{۳} \qquad \text{زیرا } \phi(\alpha) \subset N_\circ \\
&= \epsilon_\circ.
\end{aligned}$$

این با انتخاب f_N و x_N به‌ازای $N \in \mathcal{N}_{x_\circ}$ در تناقض است. (توجه کنید که در این قسمت برهان هیچ استنادی به کامل بودن Y یا فشردگی K نداشتیم.)

(i)$\Longrightarrow$(ii): چون (آ) و (ب) با جایگزینی بستار $\mathfrak{F}$ به‌جای $\mathfrak{F}$ همچنان برقرارند، می‌توانیم بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنیم که $\mathfrak{F}$ بسته است.

فرض کنید $(f_\alpha)_\alpha$ توری در $\mathfrak{F}$ است. نشان می‌دهیم که این تور زیرتوری همگرا دارد.

به‌ازای $x \in K$، فرض کنید $K_x := \overline{\{f(x) : f \in \mathfrak{F}\}}$، از این رو بنابر (آ)، K_x فشرده است. دراین‌صورت قضیهٔ تیخونوف، فشردگی حاصل‌ضرب توپولوژیک $\prod_{x \in K} K_x$ را نتیجه می‌دهد.

بنابراین، $(f_\alpha)_\alpha$ زیرتوری مثل $(f_\beta)_{\beta\in\mathbb{B}}$ دارد که به‌ازای هر $x \in K$، $(f_\beta(x))_{\beta\in\mathbb{B}}$ همگرا است. در نتیجه بنابر تمرین ۱۲.۲.۳(آ)، به ویژه، به‌ازای هر $\epsilon > \circ$ و $x \in K$، $\beta_{x,\epsilon} \in \mathbb{B}$ای موجود است که به‌ازای هر $\beta, \gamma \in \mathbb{B}$، اگر $\beta_{x,\epsilon} \preceq \beta, \gamma$ آنگاه $d(f_\beta(x), f_\gamma(x)) < \epsilon$.

$\epsilon > \circ$ را ثابت بگیرید. به‌ازای هر $x \in X$، همسایگی باز U_x از x را طوری انتخاب کنید که به‌ازای هر $x' \in U_x$، $d(f(x), f(x')) < \frac{\epsilon}{۳}$. آشکارا، $\{U_x : x \in K\}$ پوششی باز برای K است. چون K فشرده است، $x_۱, \ldots, x_n \in K$ موجودند که

$$K = U_{x_۱} \cup \cdots \cup U_{x_n}.$$

$\beta_\epsilon \in \mathbb{B}$ را طوری انتخاب کنید که به‌ازای هر $j = ۱, \ldots, n$ و هر $\beta, \gamma \in \mathbb{B}$، اگر $\beta_\epsilon \preceq \beta, \gamma$ آنگاه $d(f_\beta(x_j), f_\gamma(x_j)) < \frac{\epsilon}{۳}$. فرض کنید $x \in K$، و $j \in \{۱, \ldots, n\}$ را طوری انتخاب کنید که $x \in U_{x_j}$. دراین‌صورت به‌ازای هر $\beta, \gamma \in \mathbb{B}$، اگر $\beta_\epsilon \preceq \beta, \gamma$،

$$\begin{aligned} d(f_\beta(x), f_\gamma(x)) &\leq d(f_\beta(x), f_\beta(x_j)) + d(f_\beta(x_j), f_\gamma(x_j)) + d(f_\gamma(x_j), f_\gamma(x)) \\ &< \frac{\epsilon}{۳} + \frac{\epsilon}{۳} + \frac{\epsilon}{۳} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

در نتیجه به‌ازای هر $\beta, \gamma \in \mathbb{B}$ اگر $\beta_\epsilon \preceq \beta, \gamma$ آن‌گاه $D(f_\beta, f_\gamma) \leq \epsilon$، از این رو $(f_\beta)_{\beta\in\mathbb{B}}$ توری کوشی در $C(K, Y)$ است. چون بنابر مثال ۴.۴.۲(پ)، $B(K, Y)$ کامل است، از تمرین ۱۲.۲.۳(ب) نتیجه می‌شود که $(f_\beta)_{\beta\in\mathbb{B}}$ به $f \in B(K, Y)$ای همگرا است. مانند مثال ۶.۴.۲، که در آن بحث در حالتی است که دامنه، فضای متریک است، مشاهده می‌شود که $f \in C(K, Y)$. ∎

فرض کنید (K, T) فضای توپولوژیک فشرده است. دراین‌صورت $C(K, \mathbb{F})$ فضایی نرم‌دار است، و از این رو صحبت از مجموعه‌های کران‌دار بامعنی است. به عنوان نتیجه‌ای بی‌درنگ از قضیهٔ پ.۲ در می‌یابیم که چه چیزی می‌تواند به عنوان قضیهٔ هاینه ـ بورل بعد نامتناهی بیان شود.

نتیجهٔ پ.۳ فرض کنید که (K, T) فضای توپولوژیک فشرده است. دراین‌صورت زیرمجموعه‌ای از $C(K, \mathbb{F})$ فشرده است اگر و تنها اگر بسته، کران‌دار، و هم‌پیوسته باشد.

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی

A-antisymmetric set	مجموعهٔ A ـ پادمتقارن
accumulation point	نقطهٔ انباشتگی
partial ~	جزئی
Alaoglu, Leonidas	علاوغلو، لئونیداس
Alaoglu-Bourbaki theorem	قضیهٔ علاوغلو ـ بورباکی
Alexandroff (Alexandrov), Pavel S.	الکساندروف، پاول اس.
algebra	جبر
unital ~	یکانی
Analysis situs	آنالیزیس سیتوس
Arzelà, Cesare	آرزلا، چزاره
Arzelà-Ascoli theorem	قضیهٔ آرزلا ـ آسکولی
Ascoli, Giulio	آسکولی، جولیو
axiom of choice	اصل انتخاب
Baire, René Louis	بئر، رنه لویی
Baire's	بئر
category theorem	قضیهٔ رسته ~
theorem	قضیه ~
ball	گوی

closed ~	بسته
open ~	باز
Banach, Stefan	باناخ، استفان
Banach space	فضای باناخ
Banach's fixed point theorem	قضیهٔ نقطهٔ ثابت باناخ
base	پایه
for a neighborhood system	برای دستگاه همسایگی
for a topology	برای یک توپولوژی
Bernstein, Felix	برنشتاین ـ فلیکس
Bernstein polynomial	چندجمله‌ای برنشتاین
bijection	دوسویی
Bing, R H	بینگ، آر اچ
Bing-Nagata-Smirnoff theorem	قضیهٔ بینگ ـ ناگاتا ـ اسمیرنوف
Bolzano, Bernard	بولتسانو، برنارد
Bolzano-Weierstraß theorem	قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس
Borel, Émile	بورل، امیل
boundary	مرز
Bourbaki, Charles Denis	بورباکی، چارلز دنیس
Bourbaki, Nicolas	بورباکی، نیکلا
Bourbaki's Mittag-Leffler theorem	قضیهٔ میتاگ ـ لفلر بورباکی
Brouwer, Luitzen Egbertus	براوۋر، لوئیتزن اخبرتوس
Brouwer's fixed point theorem	قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوۋر
C^*-algebra	C^* ـ جبر
Cantor, Georg	کانتور، گئورگ
Cantor set	مجموعهٔ کانتور
Cantor's intersection theorem	قضیهٔ اشتراک کانتور
Cantor-Bernstein theorem	قضیهٔ کانتور ـ برنشتاین
cardinal	عدد اصلی

finite ~	متناهی
infinite ~	نامتناهی
cardinal number	عدد اصلی
cardinality	عدد اصلی
Cartesian product	حاصل‌ضرب دکارتی
Cauchy, Augustin - Louis	کوشی، اوگوستن ـ لویی
Cauchy	کوشی
net	تور ~
sequence	دنباله ~
Čech, Eduard	چخ، ادوارد
Chernoff, Paul R.	چرنوف، پاول آر.
choice function	تابع انتخاب
clopen set	مجموعهٔ بسته‌باز
closed	بسته
ball	گوی ~
interval	بازه ~
manifold	رویه ~
path	مسیر ~
base point of ~ ~	نقطهٔ پایه ~
set	مجموعه ~
closure	بستار
Cohen, Paul	کوهن، پاول
compact set	مجموعهٔ فشرده
compactification	فشرده‌سازی
one-point ~	تک‌نقطه‌ای
Stone-Čech ~	استون ـ چخ
compactness	فشردگی
comparable topologies	توپولوژی‌های مقایسه‌پذیر

complement	متمم
completely regular space	فضای کاملاً منظم
completness	کمال
completion	تکمیل
component	مؤلّفه
composition	ترکیب
connectedness	همبندی
continuity	پیوستگی
at a point	در یک نقطه
continuum hypothesis	فرض پیوستار
convergence	همگرایی
coordinatewise ~	مختصاتی
of a net	تور
of a sequence	دنباله
poinwise	نقطه‌ای
uniform	یکنواخت
convex set	مجموعهٔ محدب
coordinate	مختص
coordinate projection	تصویر مختصی
coordinatewise convergence	همگرایی مختصاتی
covering	پوششی
map	نگاشت ~
space	فضا ~
de Morgan, Augustus	دمورگن، اوگاستس
de Morgan's rules	قوانین دمورگن
dense subset	زیرمجموعهٔ چگال
Descartes, René(Renatus Cartesius)	دکارت، رنه(رناتوس کارتزیوس)
diameter	قطر

Dini, Ulisse	دینی، اولیسّه
Dini's lemma	لم دینی
directed set	مجموعهٔ جهت‌دار
disjoint sets	مجموعه‌های جدا از هم
distance	فاصله
Euclidean ~	اقلیدسی
domain	دامنه
element	عضو
maximal ~	ماکسیمال
empty set	مجموعهٔ تهی
equicontinuity	هم‌پیوستگی
at a point	در یک نقطه
equivalence	هم‌ارزی
class	~ رده
relation	~ رابطه
Esterle, Jean	استرل، ژان
Euclid	اقلیدس
finite intersection property	ویژگی اشتراک متناهی
Fraenkel, Abraham	فرانکل، آبراهام
Fréchet, Maurice	فرشه، موریس
Freedman, Michael	فریدمن، مایکل
French railroad metric	متریک راه‌آهن فرانسه
function	تابع
bijective ~	دوسویی
bounded ~	کران‌دار
continuous ~	پیوسته
nowhere differentiable ~	هیچ‌جا مشتق‌پذیر
vanishing at infinity	صفر شونده در بی‌نهایت

holomorphic ~	تمامریخت
injective ~	یک‌به‌یک
inverse ~	وارون
isometric ~	طولپا
meromorphic ~	برخه‌ریخت
singular part of ~	جزء تکین ~ ~
rational ~	گویا
Riemann integrable ~	انتگرال‌پذیر ریمان
surjective ~	پوشا
uniformly continuous ~	یکنواخت‌پیوسته
fundamental group	گروه بنیادی
Gelfand, Israel	گلفاند، ایسرائیل
Gelfand-Naimark theorem	قضیهٔ گلفاند ـ نایمارک
group	گروه
cohomology ~	همانستگی
fundamental ~	اصلی
higher homotopy ~	هوموتوپی بالاتر
homology ~	مانستگی
homomorphism	همریختی ~
isomorphism	یکریختی ~
topological ~	توپولوژیک
half-open interval	بازهٔ نیم‌باز
Hamel, Georg	هامل، گئورگ
Hamel basis	پایهٔ هامل
Hausdorff, Felix	هاوسدورف، فلیکس
Hausdorff space	فضای هاوسدورف
Heine - Eduard	هاینه ـ ادوئارت
Heine-Borel theorem	قضیهٔ هاینه ـ بورل

Hilbert, David	هیلبرت، داوید
homeomorphic	همسانریخت
homeomorphism	همسانریختی
homotopic	هوموتوپیک
homotopically equivalent	هم‌ارز هوموتوپیک
homotopy	هوموتوپی
equivalence	هم‌ارزی ~
type	نوع ~
ideal	ایده‌آل
maximal ~	ماکسیمال
prime ~	اوّل
idempotent	خودتوان
identity map	نگاشت همانی
image	نگاره
inverse ~	وارون
index	اندیس
set	مجموعه ~
infinitude of primes	نامتناهی بودن اعداد اوّل
injection	یک‌به‌یک بودن
interior	درون
intermediate value theorem	قضیهٔ مقدار میانی
intersection	اشتراک
interval	بازه
closed ~	بسته
degenerate ~	تباهیده
half-open ~	نیم‌باز
open ~	باز
inverse	وارون

function	تابع ~
image	نگاره ~
involution	برگشت
isometry	طولپایی
Jameson, Graham J. O.	جیمسون، گراهام جی. اُ.
Jordan, Camille	ژردان، کامیّ
Jordan content	قدر ژردان
Kelley, John L.	کلی، جان ال.
Kolmogorov, Andrey	کولموگروف، آندری
Kolmogorov space	فضای کولموگروف
Kuratowski, Kazimierz	کوراتفسکی، کازیم‌یش
Kuratowski closure operation	عمل بستار کوراتفسکی
Lebesgue, Henri	لبگ، هانری
Lebesgue number	عدد لبگ
Lebesgue's covering lemma	لم پوششی لبگ
lifting	ارتقا
correspondence	هم‌ارزی
of a path	مسیر
of a path homotopy	هوموتوپی مسیری
limit	حد
of a net	تور
of a sequence	دنباله
uniqueness of ~	یکتایی ~
in Hausdorff spaces	در فضاهای هاوسدورف
in metric spaces	در فضاهای متریک
linear	خطی
functional	تابعک ~
space	فضای ~

finite-dimensional ~ ~	با بعد متناهی
loop	طوقه
Machado, Silvio	ماکادو، سیلویو
manifold	رویه
map	نگاشت
cofinal ~	آغازی
identity ~	همانی
quotient ~	خارج‌قسمتی
maximal	ماکسیمال
element ~	عضو ~
ideal ~	ایده‌آل ~
metric	متریک
French railroad ~	راه‌آهن فرانسه
metric space	فضای متریک
complete ~	کامل
completion of ~	تکمیل شده ~
discrete ~	گسسته
separable ~	تفکیک‌پذیر
sequentially compact ~	فشردهٔ دنباله‌ای
subspace of ~	زیرفضا ~
totally bounded ~	کلاً کران‌دار
Mittag - Leffler, Magnus Gustaf (Gösta)	میتاگ ـ لفلر، مانگنوس گوستاو (یوستا)
Mittag-Leffler theorem	قضیهٔ میتاگ ـ لفلر
Bourbaki's ~	بورباکی
Munkres, James R.	مانکرز، جیمز آر.
Nagata, Masayoshi	ناگاتا، ماسایوشی
Nagata-Smirnoff theorem	قضیهٔ ناگاتا ـ اسمیرنوف
neighborhood	همسایگی

basic ~	پایه ~
net	تور
Cauchy ~	کوشی
convergent ~	همگرا
noncommutative topology	توپولوژی ناجابه‌جایی
norm	نرم
normal space	فضای نرمال
normed space	فضای نرم‌دار
number	عدد
algebraic ~	جبری
transcendental ~	متعالی
one-point compactification	فشرده‌سازی تک‌نقطه‌ای
open	باز
ball	گوی ~
cover	پوشش ~
interval	بازه ~
set	مجموعه ~
ordered	مرتب
n-tuple	nـ تایی ~
pair	زوج ~
set	مجموعه ~
ordering	ترتیب
partition	افراز
path	مسیر
closed ~	بسته
base point of ~	نقطهٔ پایه ~
connecting two points	وصل کنندهٔ دو نقطه
endpoint of ~	نقطهٔ پایان ~

homotopic ~	هوموتوپیک
homotopy ~	هوموتوپی
lifting of ~	ارتقا ~
lifting of ~	ارتقا ~
reversed ~	وارون
starting point of ~	نقطهٔ شروع ~
path connectedness	مسیری‌همبندی بودن
Perelman, Grigori	پرلمن، گریگوری
Poincaré, Henri	پوانکاره، هانری
Poincaré conjecture	حدس پوانکاره
generalized ~	تعمیم ~
pole	قطب
positive definitness	مثبت معین بودن
power set	مجموعهٔ توانی
prime	اوّل
ideal	ایده‌آل ~
number	عدد ~
product	حاصل‌ضرب
Cartesian ~	دکارتی
topological ~	توپولوژیک
topology	توپولوژی ~
pseudometric	متریک‌نما
quotient	خارج‌قسمتی
map	نگاشت ~
space	فضا ~
topology	توپولوژی ~
range	برد
regular space	فضای منظم

relation	رابطه
equivalence ~	هم‌ارزی
reflexive ~	انعکاسی
symmetric ~	متقارن
transitive ~	متعدی
restriction	تحدید
retract	درون‌بر
retraction	درون‌بری
Riemann, Bernhard	ریمان، برنهارت
Riemann	ریمان
sphere	کره ~
sum	مجموع ~
Riesz, Marcel	ریس، مارسل
Riesz' lemma	لم ریس
ring	حلقه
commutative ~	جابه‌جایی
homomorphism	همریختی ~
Runge, Carl	رونگه، کارل
Runge's approximation theorem	قضیهٔ تقریب رونگه
Russell, Bertrand	راسل، برتراند
Russell's antinomy	پارادوکس راسل
Seifert, Herbert	سایفرت، هربرت
Seifert-van Kampen theorem	قضیهٔ سایفرت ـ فن کمپن
semimetric	نیم‌متریک
seminorm	نیم‌نرم
sequence	دنباله
Cauchy ~	کوشی
convergent ~	همگرا

generalized ~	تعمیم‌یافته
set	مجموعه
A-antisymmetric ~	A ـ پادمتقارن
clopen ~	بسته‌باز
closed ~	بسته
compact ~	فشرده
convex ~	محدب
countable ~	شمارا
countably infinite ~	شمارای نامتناهی
directed ~	جهت‌دار
empty ~	تهی
finite ~	متناهی
of all sets	همهٔ مجموعه‌ها
open ~	باز
ordered ~	مرتب
totally ~	کلاً ~
relatively compact ~	فشردهٔ نسبی
star-shaped ~	ستاره‌ای‌شکل
uncountable ~	ناشمارا
set-theoretic difference	تفاضل نظریهٔ مجموعه‌ای
sheet	برگ
Simmons, George F.	سیمونز، جرج اف.
singleton	تک‌عضوی
Skölem, Thoralf	اسکولم، تورالف
Smale, Steven	اسمیل، استیون
Sorgenfrey, Robert	سارجن‌فری، رابرت
Sorgenfrey	سارجن‌فری
line	خط ~

plane	صفحه ~
topology	توپولوژی ~
space	فضا
Banach ~	باناخ
Hausdorff ~	هاوسدورف
linear ~	خطی
finite-dimensional ~	با بعد متناهی
metric ~	متریک
complete ~	کامل
discrete ~	گسسته
separable ~	تفکیک‌پذیر
sequentially compact ~	فشردهٔ دنباله‌ای
totally bounded ~	کلاً کران‌دار
normed ~	نرم‌دار
quotient ~	خارج‌قسمتی
topological ~	توپولوژیک
chaotic ~	آشفته
completely regular ~	کاملاً منظم
connected ~	همبند
disconnected ~	ناهمبند
discrete ~	گسسته
first countable ~	شمارای اوّل
Hausdorff ~	هاوسدورف
Lindelöff ~	لیندلف
locally (path) connected ~	(مسیری)همبند موضعی
locally compact ~	فشردهٔ موضعی
metrizable ~	متریک‌پذیر
normal ~	نرمال

path connected ~	مسیری‌همبند
regular ~	منظم
σ-compact ~	σـ فشرده
second countable ~	شمارای دوم
separable ~	تفکیک‌پذیر
simply connected ~	همبند ساده
totally disconnected ~	کلاً ناهمبند
zero-dimensional ~	صفر بعدی
Stone, Marshall H. ~	استون، مارشال اچ.
Stone-Čech compactification	فشرده‌سازی استون ـ چخ
Stone-Weiestraß theorem	قضیهٔ استون ـ وایرشتراس
complex ~	مختلط
for locally compact spaces	برای فضاهای فشردهٔ موضعی
real ~	حقیقی
subalgebra	زیرجبر
unital ~	یکانی
subbase	زیرپایه
subcover	زیرپوشش
subnet	زیرتور
convergent ~	همگرا
subsequence	زیردنباله
convergent ~	همگرا
subset	زیرمجموعه
dense ~	چگال
nowhere dense ~	هیچ‌جا چگال
of the first category	از ردهٔ اوّل
of the second category	از ردهٔ دوم
proper ~	سره

subspace	زیرفضا
of a metric space	فضای متریک
of a topological space	فضای توپولوژیک
surjection	پوشایی
symmetry	تقارن
T_0-space	فضای $T_۰$
T_1-space	فضای $T_۱$
T_2-space	فضای $T_۲$
$T_{3\frac{1}{2}}$-space	فضای $T_{۳\frac{۱}{۲}}$
Tietze, Heinrich	تیتسه، هاینریش
Tietze's extension theorem	قضیهٔ توسیع تیتسه
Tikhonov (Tikhonov), Anderi (Andrey) N.	تیخونوف، آندری
topological space	فضای توپولوژیک
chaotic ~	آشفته
completely regular ~	کاملاً منظم
connected ~	همبند
disconnected ~	ناهمبند
discrete ~	گسسته
first countable ~	شمارای اول
Hausdorff ~	هاوسدورف
Lindelöf ~	لیندلف
locally (path) connected ~	(مسیری)همبند موضعی
locally compact ~	فشردهٔ موضعی
metrizable ~	متریک‌پذیر
normal ~	نرمال
path connected ~	مسیری‌همبند
regular ~	منظم
σ-compact ~	σـ فشرده

second countable ~	شمارای دوم
separable ~	تفکیک‌پذیر
simply connected ~	همبند ساده
totally disconnected ~	کلاً ناهمبند
zero-dimensional ~	صفر بعدی
topology	توپولوژی
box ~	جعبه‌ای
coarser ~	ضعیف‌تر
finer ~	قوی‌تر
of coordinatewise convergence	همگرایی مختصاتی
of pointwise convergence	همگرایی نقطه‌ای
of uniform convergence	همگرایی یکنواخت
product ~	حاصل‌ضربی
quotient ~	خارج‌قسمتی
relative ~	نسبی
Sorgenfrey ~	سارجن‌فری
Zariski ~	زاریسکی
totally ordered set	مجموعهٔ کلاً مرتب
triangle inequality	نامساوی مثلثی
trigonometric polynomial	چندجمله‌ای مثلثاتی
complex ~	مختلط
real ~	حقیقی
Tychonoff space	فضای تیخونوف
Tychonoff's theorem	قضیهٔ تیخونوف
Tychonoff, Andrey N.	تیخونوف، آندری ان.
Uhrysohn, Pavel S.	اوریسون، پاول اس.
Uhrysohn's	اوریسون
lemma	لم ~

metrization theorem	قضیهٔ متریک‌سازی ~
uniform continuity	پیوستگی یکنواخت
union	اجتماع
universal	جهانی
upper bound	کران بالا
van Kampen, Egbert	وان کمپن، اخبرت
Weierstraß, Karl	وایرشتراس، کارل
Weierstraß approximation theorem	قضیهٔ تقریب وایرشتراس
constructive proof of ~	برهان ساختاری ~
well-ordering principle	اصل خوش‌ترتیبی
Willard, Stephen	ویلارد، استفان
Zariski, Oscar	زاریسکی، اُسکار
Zariski topology	توپولوژی زاریسکی
Zermelo, Ernst	زرملو، ارنست
Zermelo-Fraenkel set theory	نظریهٔ مجموعهٔ زرملو ـ فرانکل
Zermelo-Fraenkel-Skölem set theory	نظریهٔ مجموعهٔ زرملو ـ فرانکل ـ اسکولم
Zorn, Max	زرن، ماکس
Zorn's lemma	لم زرن

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی

آرزلا، چزاره	Arzelà, Cesare
آسکولی، جولیو	Ascoli, Giulio
اجتماع	union
ارتقا	lifting
هم‌ارزی ~	correspondence
مسیر	of a path
هوموتوپی مسیری	of a path homotopy
استرل، ژان	Esterle, Jean
استون، مارشال اچ.	Stone, Marshall H.
اسکولم، تورالف	Skölem, Thoralf
اسمیرنوف، ولادیمیر	Smirnoff, Vladimir
اسمیل، استفان	Smale, Steven
اشتراک	intersection
اصل خوش‌ترتیبی	well-ordering principle
اصل انتخاب	axiom of choice
افراز	partition
اقلیدس	Euclid
الکساندروف، پاول اس.	Alexandroff (Alexandrov), Pavel S.

آنالیزیس سیتوس	Analysis situs
اندیس	index
مجموعه ~	set
اوریسون، پاول اس.	Uhrysohn, Pavel S.
اوریسون	Uhrysohn's
لم ~	lemma
قضیهٔ متریک‌سازی ~	metrization theorem
اوّل	prime
ایده‌آل ~	ideal
عدد ~	number
ایده‌آل	ideal
اوّل	prime ~
ماکسیمال	maximal ~
بئر	Baire's
قضیهٔ رسته ~	category theorem
قضیه ~	theorem
باز	open
گوی ~	ball
پوشش ~	cover
بازه ~	interval
مجموعه ~	set
بازه	interval
بسته	closed ~
تباهیده	degenerate ~
نیم‌باز	half-open ~
باز	open ~
باناخ، استفان	Banach, Stefan
براوؤر، لوئیتزن اخبرتوس یان	Brouwer, Luitzen Egbertus Jan

برد	range
برگشت	involution
برگ	sheet
برنشتاین، فلیکس	Bernstein, Felix
بستار	closure
بسته	closed
بازه ~	interval
رویه ~	manifold
گوی ~	ball
مجموعه ~	set
مسیر ~	path
نقطهٔ پایه ~	base point of ~ ~
بورباکی، چارلز دنیس	Bourbaki, Charles Denis
بورباکی، نیکلا	Bourbaki, Nicolas
بورل، امیل	Borel, Émile
بولتسانو، برنارد	Boltzano, Bernard
بینگ، آر اچ	Bing, R H
پارادوکس راسل	Russell's antinomy
پایه	base
برای دستگاه همسایگی	for a neighborhood system
برای توپولوژی	for a topology
هامل	Hamel
پرلمن، گریگوری	Perelman, Grigori
پوانکاره، هانری	Poincaré, Henri
پوششی	covering
فضا ~	space
نگاشت ~	map
پوشایی	surjection

پیوستگی	continuity
در یک نقطه	at a point
یکنواخت	uniform ~
تابع	function
انتخاب	choice ~
انتگرال‌پذیر ریمان	Riemann integrable ~
برخه‌ریخت	meromorphic ~
جزء تکین ~ ~	singular part of ~
پوشا	surjective ~
پیوسته	continuous ~
صفر شونده در بی‌نهایت	vanishing at infinity
هیچ‌جا مشتق‌پذیر	nowhere differentiable ~
تمامریخت	holomorphic ~
دوسویی	bijective ~
طولپا	isometric ~
کران‌دار	bounded ~
گویا	rational ~
وارون	inverse ~
یک به یک	injective ~
یکنواخت‌پیوسته	uniformly continuous ~
تحدید	restriction
ترتیب	ordering
ترکیب	composition
تسلسل مسیرها	concatenation of paths
تصویر مختصی	coordinate projection
تفاضل نظریهٔ مجموعه‌ای	set-theoretic difference
تقارن	symmetry
تک‌عضوی	singleton

completion	تکمیل شده
topology	توپولوژی
box ~	جعبه‌ای
product ~	حاصل‌ضربی
quotient ~	خارج‌قسمتی
Zariski ~	زاریسکی
Sorgenfrey ~	سارجن‌فری
coarser ~	ضعیف‌تر
finer ~	قوی‌تر
noncommutative ~	ناجابه‌جایی
relative ~	نسبی
of coordinatewise convergence	همگرایی مختصاتی
of pointwise convergence	همگرایی نقطه‌ای
of uniform convergence	همگرایی یکنواخت
comparable topologies	توپولوژی‌های مقایسه‌پذیر
net	تور
Cauchy ~	کوشی
convergent ~	همگرا
Tietze, Heinrich	تیتسه، هاینریش
Tikhonov (Tikhonov), Anderi (Andrey) N.	تیخونوف، آندری ان.
algebra	جبر
unital ~	یکانی
universe	جهانی
oriented	جهت‌دار
Jameson, Graham J. O.	جیمسون، گراهام جی. اُ.
Čech, Eduard	چخ، ادوارد
Chernoff, Paul R.	چرنوف، پاول آر.
Bernstein polynomial	چندجمله‌ای برنشتاین

trigonometric polynomial	چندجمله‌ای مثلثاتی
complex ~	مختلط
real ~	حقیقی
product	حاصل‌ضرب
topological ~	توپولوژیک
Cartesian ~	دکارتی
limit	حد
of a net	تور
of a sequence	دنباله
uniqueness of ~	یکتایی ~
in metric spaces	در فضاهای متریک
in Hausdorff spaces	در فضاهای هاوسدورف
Poincaré conjecture	حدس پوانکاره
generalized ~	تعمیم ~
ring	حلقه
commutative ~	جابه‌جایی
homomorphism	همریختی ~
quotient	خارج‌قسمتی
topology	توپولوژی ~
space	فضا ~
map	نگاشت ~
linear	خطی
functional	تابعک ~
space	فضا ~
finite-dimensional ~ ~	با بعد متناهی
idempotent	خودتوان
domain	دامنه
interior	درون

retract	درون‌بر
retraction	درون‌بری
Descartes, René (Renatus Cartesius)	دکارت، رنه (رناتوس کارتزیوس)
de Morgan, Augustus	دمورگن، اوگاستس
sequence	دنباله
generalized ~	تعمیم‌یافته
Cauchy ~	کوشی
convergent ~	همگرا
bijection	دوسویی بودن
Dini, Ulisse	دینی، اولیسّه
relation	رابطه
reflexive ~	انعکاسی
transitive ~	متعدی
symmetric ~	متقارن
equivalence ~	هم‌ارزی
Russell, Bertrand	راسل، برتراند
Runge, Carl	رونگهٔ، کارل
manifold	رویه
Riesz, Marcel	ریس، مارسل
Riemann, Bernhard	ریمان، برنهارت
Riemann	ریمان
sphere	کره ~
sum	مجموع ~
Zariski, Oscar	زاریسکی، اسکار
Zermelo, Ernst	زرملو، ارنست
Zorn, Max	زرن، ماکس
subbase	زیرپایه
subcover	زیرپوشش

subnet	زیرتور
convergent ~	همگرا
subalgebra	زیرجبر
unital ~	یکانی
subsequence	زیردنباله
convergent ~	همگرا
subspace	زیرفضا
a topological space	فضای توپولوژیک
a metric space	فضای متریک
subset	زیرمجموعه
of the first category	از رستهٔ اوّل
of the second category	از رستهٔ دوم
dense ~	چگال
proper ~	سره
nowhere dense ~	هیچ‌جا چگال
Jordan, Camille	ژردان، کامیّ
C^*-algebra	C^*- جبر
Sorgenfrey, Robert	سارجن فری، رابرت
Sorgenfrey	سارجن‌فری
line	خط ~
plane	صفحه ~
topology	توپولوژی ~
Seifert, Herbert	سایفرت، هربرت
Simmons, George F.	سیمونز، جرج اف.
isometry	طولپایی
loop	طوقه
number	عدد
algebraic ~	جبری

Lebesgue ~	لبگ
transcendental ~	متعالی
cardinal, cardinal number, cardinality	عدد اصلی
finite ~	متناهی
infinite ~	نامتناهی
element	عضو
Alaoglu, Leonidas	علااوغلو، لئونیداس
Kuratowski closure operation	عمل بستار کوراتفسکی
distance	فاصله
Fréchet, Maurice	فرشه، موریس
continuum hypothesis	فرض پیوستار
Fraenkel, Abraham	فرانکل، آبراهام
Freedman, Michael	فریدمن، مایکل
compactness	فشردگی
compactification	فشرده‌سازی
Stone-Čech ~	استون ـ چخ
one-point ~	تک‌نقطه‌ای
space	فضا
Euclidean ~	اقلیدسی
Banach ~	باناخ
Tychonoff ~	تیخونوف
topological ~	توپولوژیک
chaotic ~	آشفته
separable ~	تفکیک‌پذیر
σ-compact ~	σ ـ فشرده
first countable ~	شمارای اوّل
second countable ~	شمارای دوم
zero-dimensional ~	صفر بعدی

فشردهٔ موضعی	locally compact ~
کاملاً منظم	completely regular ~
کلاً ناهمبند	totally disconnected ~
گسسته	discrete ~
لیندلف	Lindelöf ~
متریک‌پذیر	metrizable ~
مسیری‌همبند	path connected ~
منظّم	regular ~
ناهمبند	disconnected ~
نرمال	normal ~
هاوسدورف	Hausdorff ~
همبند	connected ~
همبند ساده	simply connected ~
(مسیری)همبند موضعی	locally (path) connected ~
خطی	linear ~
با بعد متناهی	finite-dimensional ~
خارج‌قسمتی	quotient ~
کولموگوروف	Kolmogorov ~
متریک	metric ~
تفکیک‌پذیر	separable ~
تکمیل شده ~ ~	completion of ~
زیرفضای ~	subspace of ~
فشردهٔ دنباله‌ای	sequentially compact ~
کامل	complete ~
کلاً کران‌دار	totally bounded ~
گسسته	discrete ~
نرم‌دار	normed ~
هاوسدورف	Hausdorff ~

قدر ژردان	Jordan content
قضیه	theorem
آرزلا ـ آسکولی	Arzelà-Ascoli ~
استون ـ وایرشتراس	Stone-Weiestraß ~
مختلط	complex ~
برای فضاهای فشردهٔ موضعی	for locally compact spaces ~
حقیقی	real ~
اشتراک کانتور	Cantor's intersection ~
بولتسانو ـ وایرشتراس	Bolzano-Weierstraß ~
بینگ ـ ناگاتا ـ اسمیرنوف	Bing-Nagata-Smirnoff ~
تقریب رونگه	Runge's approximation ~
تقریب وایرشتراس	Weierstraß approximation ~
برهان ساختاری	constructive proof of ~
توسیع تیتسه	Tietze's extension ~
تیخونوف	Tychonoff ~
سایفرت ـ وان کمپن	Seifert - van Kampen ~
علااوغلو ـ بورباکی	Alaoglu - Bourbaki ~
کانتور ـ برنشتاین	Cantor-Bernstein
گلفاند ـ نایمارک	Gelfand-Naimark ~
مقدار میانی	intermediate value ~
میتاگ ـ لفلر بورباکی	Bourbaki's Mittag-Leffler ~
ناگاتا ـ اسمیرنوف	Nagata-Smirnoff ~
نقطهٔ ثابت باناخ	Banach's fixed point ~
نقطهٔ ثابت براوئر	Brouwer's fixed point ~
هاینه ـ بورل	Heine-Borel ~
قطر	diameter
قوانین دمورگن	de Morgan's rules
کانتور، گئورگ	Cantor, Georg

کران بالا	upper bound
کمال	completness
کوراتفسکی، کازیمیش	Kuratowski, Kazimierz
کوشی، اوگوستن ـ لویی	Cauchy, Augustin - Louis
کوشی	Cauchy
تور ~	net
دنباله ~	sequence
کولموگروف، آندری	Kolmogorov, Andrey
کوهن، پاول	Cohen, Paul
کیلی، جان ال.	Kelley, John L.
گروه	group
بنیادی	fundamental ~
توپولوژیک	topological ~
مانستگی	homology ~
همانستگی	cohomology ~
همریختی ~	homomorphism
هوموتوپی بالاتر	higher homotopy ~
یکریختی ~	isomorphism
گلفاند، ایسرائیل	Gelfand, Israel
گوی	ball
باز	open
بسته	closed
لبگ، هانری	Lebesgue, Henri
لم	Lemma
پوششی لبگ	Lebesgue's covering ~
دینی	Dini's ~
ریس	Riesz' ~
زرن	Zorn's ~

لیندلف، ارنست	Lindelöf, Ernst
ماکادو، سیلویو	Machado, Silvio
ماکسیمال	maximal
ایده‌آل ~	ideal
عضو ~	element
مانکرز، جیمز آر.	Munkres, James R.
متریک	metric
راه‌آهن فرانسه	French railroad ~
متریک‌نما	pseudometric
متمم	complement
مثبت معین بودن	positive definitness
مرتب	ordered
n ـ تایی ~	n-tuple
زوج ~	pair
مجموعه ~	set
مرز	boundary
مسیر	path
ارتقا ~	lifting of
بسته	closed ~
نقطهٔ پایان ~	endpoint of ~
نقطهٔ پایه ~	base point of ~
نقطهٔ شروع ~	starting point of ~
وارون	reversed ~
وصل کنندهٔ دو نقطه	connecting two points
هوموتوپی	homotopy ~
ارتقا ~	lifting of ~
هوموتوپیک	homotopic ~
مسیری‌همبندی	path connectedness

set	مجموعه
A-antisymmetric ~	A ـ پادمتقارن
open ~	باز
closed ~	بسته
clopen ~	بسته‌باز
power ~	توانی
empty ~	تهی
directed ~	جهت‌دار
star-shaped ~	ستاره‌ای‌شکل
countable ~	شمارا
countably infinite ~	شمارای نامتناهی
compact f ~	فشرده
relatively compact ~	فشردهٔ نسبی
Cantor ~	کانتور
totally ordered ~	کلاً مرتب
finite ~	متناهی
convex ~	محدب
ordered ~	مرتب
uncountable ~	ناشمارا
of all sets	همهٔ مجموعه‌ها
disjoint sets	مجموعه‌های جدا از هم
coordinate	مختص
component	مؤلّفه
Mittag - Leffler, Magnus Gustaf (Gösta)	میتاگ ـ لفلر، مانگنوس گوستاو (یوستا)
Nagata, Masayoshi	ناگاتا، ماسایوشی
infinitude of primes	نامتناهی بودن اعداد اوّل
Naimark, Mark	نایمارک، مارک
norm	نرم

set theory	نظریهٔ مجموعه
Zermelo-Fraenkel ~	زرملو ـ فرانکل
Zermelo-Fraenkel-Skölem ~	زرملو ـ فرانکل ـ اسکولم
accumulation point	نقطهٔ انباشتگی
partial ~	جزئی
image	نگاره
inverse	وارون
map	نگاشت
cofinal ~	آغازی
quotient ~	خارج‌قسمتی
identity ~	همانی
semimetric	نیم‌متریک
seminorm	نیم‌نرم
triangle inequality	نامساوی مثلثی
homotopy type	نوع هوموتوپی
inverse	وارون
function	تابع ~
image	نگاره ~
van Kampen, Egbert	وان کمپن، اخبرت
Weierstraß, Karl	وایرشتراس، کارل
finite intersection property	ویژگی اشتراک متناهی
Willard, Stephen	ویلارد، استفان
Hamel, Georg	هامل، گئورگ
Hausdorff, Felix	هاوسدورف، فلیکس
Heine, Eduard	هاینه، ادوئارت
equivalence	هم‌ارزی
relation	رابطه ~
class	رده ~

همبندی	connectedness
هم‌پیوستگی	equicontinuity
در یک نقطه	at a point
همسایگی	neighborhood
پایه	basic ~
همگرایی	convergence
تور	of a net
دنباله	of a sequence
مختصاتی	coordinatewise ~
نقطه‌ای	poinwise ~
یکنواخت	uniform ~
یک‌به‌یک بودن	injection

مراجع

[ALEXANDROFF & HOPF 35] PAUL(=PAVEL) ALEXANDROFF and HEINZ HOPF. 1935. *Topologie*, Band I. Berlin: Springer - Verlag.

[BOURBAKI 60] NICOLAS BOURBAKI. 1960. *Topologie générale*, Chapître II. Paris: Hermann.

[CHERNOFF 92] PAUL R. CHERNOFF. 1992. A simple proof of Tychonoff's theorem via nets. *American Mathematical Monthly* 99, 932-934.

[CONWAY 78] JOHN B. CONWAY. 1978. *Functions of One Complex Variable.* 2nd ed. New York: Springer - Verlag.

[DALES 78] H. GARTH DALES. 1978. Automatic continuity: A survey. *Bulletin of the London Mathematical Society* 10, 129-183.

[ESTERLE 84] JEAN ESTERLE. 1984. Mittag-Leffler methods in the theory of Banach algebras and a new approach to Michael's problem In *Proceedings of the Conference on Banach Algebras and Several Complex Variables* (New Haven, 1983).Contemporary Mathematics 32, 107-129. Providence, RI: American Mathematical Society.

[FARENICK 01] DOUGLAS R. FARENICK. 2001. *Algebras of Linear Transformations.* New York: Springer-Verlag.

[FRÉCHET 06] MAURICE FRÉCHET. 1906. Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* XXII, 1-74.

[HALMOS 74] PAUL R. HALMOS. 1974. *Naive Set Theory.* New York: Springer - Verlag.

[HAUSDORFF 14] FELIX HAUSDORFF. 1914. *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig: Verlag von Veit.

[JAMESON 74] GRAHAM J. O. JAMESON. 1974. *Topology and Normed Spaces.* Londong: Chapman & Hall, London.

[KELLEY 50] JOHN L. KELLEY. 1950. The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice. *Fundamenta Mathematica* 37, 75-76.

[KELLEY 55] JOHN L. KELLEY. 1955. *General Topology.* New York: Van Nostrand.

[MACHADO 77] SILVIO MACHADO. 1977. On Bishop's generalization of the Weierstrass-Stone theorem. *Indagationes Mathematicae* 39, 218-224.

[MASSEY 91] WILLIAM S. MASSEY. 1991. *A Basic Course in Algebraic Topology.* New York: Springer - Verlag.

[MUNKRES 84] JAMES R. MUNKRES. 1984. *Elements of Algebraic Topology.* Reading, MA: Addison-Wesley.

[MUNKRES 00] JAMES R. MUNKRES. 2000. *Topology.* 2^{nd} ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall.

[MURPHY 90] GERARD J. MURPHY. 1990. *C^*-Algebras and Operator Theory.* Boston: Academic Press.

[SIMMONS 63] GEORGE F. SIMMONS. 1963. *Introduction to Topology and Modern Analysis.* International Student Edition. Singapore: McGraw-Hill.

[STONE 37] MARSHALL H. STONE. 1937. Applications of the theory of Boolean rings to general topology. *Transactions of the American Mathematical Society* 41, 375-481.

[WILLARD 70] STEPHEN WILLARD. 1970. *General Topology.* Reading, MA: Addison-Wesley.

نمایه