دانشگاه پیام نور

تحقیق در عملیات (۱)

دکتر عادل آذر

دانشگاه پیام نور

تحقیق درعملیات (۱)

(رشتهٔ مدیریت دولتی، بازرگانی، حسابداری)

ترجمه وتألیف: دکتر عادل آذر

دانشگاه پیام‌نور
۸۰۴

گروه مدیریت دولتی
(د/۴۸)

سرشناسه	:	آذر، عادل، ۱۳۴۵-
عنوان و پدید آور	:	تحقیق در عملیات (۱) (رشتهٔ مدیریت دولتی، بازرگانی، حسابداری) / ترجمه و تألیف: عادل آذر.
مشخصات نشر	:	تهران: دانشگاه پیام‌نور، ۱۳۷۸.
مشخصات ظاهری	:	د، ۲۳۴ ص.: جدول، نمودار.
فروست	:	دانشگاه پیام‌نور؛ ۸۰۴. گروه مدیریت دولتی؛ ۴۸/د. (... سری انتشارات متون درسی، طرح درسنامه)
شابک	:	978 - 964 - 455 -670- 8
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا
یادداشت	:	کتابنامه: ص ۲۳۳-۲۳۴.
موضوع	:	۱. آموزش از راه دور ایران.
موضوع	:	۲. تحقیق عملیاتی ـ آموزش برنامه ای.
شناسه افزوده	:	الف. دانشگاه پیام نور. ب. عنوان.
رده بندی کنگره	:	LC۵۸۰۸/الف۹آ۳۷
رده بندی دیویی	:	۳۷۸/۱۷۵۰۹۵۵
شمارهٔ کتابشناسی ملی	:	۱۵۴۹۰-۷۸م

تحقیق در عملیات (۱)

ترجمه و تألیف: دکتر عادل آذر

ویراستار علمی: دکتر منصور مومنی

حروفچینی، صفحه آرایی و طراحی جلد: مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: انتشارات دانشگاه پیام‌نور

شمارگان: ۱۰۰۰۰ نسخه

نوبت و تاریخ چاپ: چاپ اول بهمن ۱۳۷۸، چاپ چهاردهم دی ۱۳۸۷

شابک: ۸ - ۶۷۰ - ۴۵۵ - ۹۶۴ - ۹۷۸

ISBN: 978 - 964 - 455 - 670 - 8

قیمت: ۱۳۶۰۰ ریال

بسم‌الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار ناشر

کتابهای دانشگاه پیام‌نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف به صورت درسنامه، آزمایشی، قطعی، متون آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شود. کتاب **درسنامه** (د) نخستین ثمرهٔ کوششهای علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصلهای مصوب تهیه می‌شود و پس از داوری علمی در گروههای آموزشی چاپ می‌شود. با تجدیدنظر صاحب اثر و دریافت بازخوردها و اصلاح کتاب، درسنامه به صورت **آزمایشی** (آ) چاپ می‌شود. با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و کتاب به صورت **قطعی** (ق) چاپ می‌شود. در صورت ضرورت، در کتابهای چاپ قطعی نیز می‌تواند تجدیدنظرهای اساسی به عمل آید.

متون آزمایشگاهی (م) متونی است که دانشجویان با استفاده از آن و راهنمایی مربیان کارهای عملی آزمایشگاهی را انجام می‌دهند. کتابهای **فرادرسی** (ف) و **کمک‌درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه می‌شوند. کتابهای فرادرسی با تأیید معاونت پژوهشی و کتابهای کمک‌درسی با تأیید شورای انتشارات تهیه می‌شوند.

مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی

فهرست

مقدمه

تحقیق در عملیات، یکی از رشته‌های دانشگاهی است که بر اساس ترکیبی از رشته‌های مختلف (چون ریاضی، آمار، اقتصاد، مهندسی و ...) بنا شده است. از آنجا که علم مدیریت نیز یک علم بین رشته‌ای است، از این جهت، این دو رشته بی‌شباهت به همدیگر نیستند.

یکی از وظایف مهّم مدیریت تصمیم‌گیری است. فنون تحقیق در عملیات با توجه به قابلیت فوق‌العاده‌ای که در فرموله‌کردن مسائل سازمانی و حل آنها دارند، مدیران را در ایفای این نقش (تصمیم‌گیری) یاری می‌دهند. با توجه به پیچیدگی محیط سازمانی و تأثیرپذیری از عوامل متعدد «درون‌زا» و «برون‌زا»، مدیریت به ابزاری توانمند نیاز دارد که وی را در اندازه‌گیری این عوامل و یا هدایت و کنترل آنها یاری رساند. به جرأت می‌توان گفت که فنون تحقیق در عملیات یکی از کارآمدترین ابزارهای مدیریت در این راستا هستند.

اگرچه تحقیق در عملیات در دانشکده‌های ریاضی به عنوان یک رشتهٔ مستقل مطرح است، ولی به دلیل کارساز بودن آن برای رشته‌های مدیریت و دیگر رشته‌های مرتبط مثل حسابداری، اقتصاد و مهندسی صنایع، این علم در چندین درس مستقل به دانشجویان ارائه می‌گردد. بر اساس مصوبات شورای عالی برنامه‌ریزی وزارت فرهنگ و آموزش عالی، دانشجویان رشتهٔ مدیریت دولتی، مدیریت بازرگانی و حسابداری باید ۶ واحد درسی را در قالب دروس تحقیق در عملیات (۱) و (۲) بگذرانند.

کتاب حاضر (که به پیشنهاد گروه مدیریت و حسابداری دانشگاه پیام‌نور تهیه شده است) بر اساس سرفصل مصوب درس تحقیق در عملیات (۱) برای رشته‌های مدیریت (دولتی، بازرگانی و صنعتی) و حسابداری تنظیم شده است.

این کتاب شامل ۵ فصل به شرح زیر است:

فصل اول: کلیات تحقیق در عملیات (ویژگیها و فرآیند)

فصل دوم: برنامه‌ریزی خطی (مدلسازی)

فصل سوم: برنامه‌ریزی خطی (روش هندسی)

فصل چهارم: برنامه‌ریزی خطی (روش سیمپلکس)

فصل پنجم: برنامه‌ریزی خطی (تحلیل عناصر تابلوی سیمپلکس و مسئله ثانویه)

در نهایت مقدمه‌ای بر تحلیل حساسیت، تحت عنوان بخش آخر آورده شده است. در انتهای کتاب لیست کامل منابع مورد استفاده آمده است. ذکر این نکته ضروری است که بخشهایی از کتاب ترجمه آزاد از منابع انگلیسی است که در لیست منابع ذکر شده‌اند، در این راستا، استفاده از منبع شماره (۱) برای تهیه فصل ۱، ۲ و ۳ قابل توجه است.

علیرغم اینکه در تهیهٔ کتاب، تلاش شده است، مفاهیم و فنون تحقیق در عملیات با زبان ساده و با استفاده از مثال مطرح شوند ولی مطمئناً رهنمودهای مدرسین و دانشجویان عزیز می‌تواند به سادگی و خودآموز شدن کتاب بیافزاید.

«و من‌الله التوفیق»

تابستان ۱۳۷۸

عادل آذر

فصل اوّل

کلیات تحقیق در عملیات

(ویژگیها و فرآیند)

اهداف فصل

اهداف کلی این فصل آشنایی دانشجویان با تعریف و تاریخچهٔ تحقیق در عملیات (OR) است. تحقیق در عملیات دارای ویژگیها و فرآیندی است، که دانشجویان با آن در این فصل آشنا خواهند شد. همچنین رویکرد تحقیق در عملیات برای حل مسأله تشریح خواهد شد.

۱.۱ مقدمه

تحقیق در عملیات[1] کاربرد یک رویکرد علمی است که درصدد حل مسائل مدیریتی است و هدف آن کمک به مدیران جهت تصمیم‌گیری بهتر است. تحقیق در عملیات بر مجموعه‌ای از فنون ریاضی تأکید دارد که یا در حوزه «علم مدیریت» توسعه یافته‌اند و یا از سایر رشته‌های علوم؛ ریاضی، طبیعی، آمار و مهندسی اقتباس شده‌اند.

تحقیق در عملیات اگرچه علم نوپایی است ولی در حوزه صنعت و بازرگانی بسیار شناخته شده و جا افتاده است. کاربردهای این علم بسیار وسیع است و معمولاً بکارگیری آن در مؤسسات صنعتی و تجاری به نحو بارزی «نشان از اعتبار» آن دارد.

در تحقیقات بسیاری که در خصوص بکارگیری فنون تحقیق در عملیات انجام گرفته است، مشخص شده است که نتایج حاصل از بکارگیری این علم بسیار رضایتبخش بوده است. به همین خاطر، امروزه این علم در بسیاری از رشته‌های دانشگاهی به عنوان درس اجباری تدریس می‌شود و در بسیاری از دانشگاههای جهان در قالب یک رشتهٔ مستقل آموزش داده می‌شود.

تحقیق در عملیات معمولاً در قالب عناوینی چون؛ علم مدیریت[2]، روشهای مقداری[3]،

---

1. operations Research
2. Management science
3. Quantitative Methods

تحلیل مقداری[1] و علم تصمیم‌گیری[2] نیز بیان می‌گردد. در بسیاری از متون (از جمله این کتاب) بجای واژهٔ تحقیق در عملیات از مخفف انگلیسی آن یعنی OR استفاده می‌شود.

هدف ما در این کتاب آشنایی دانشجویان و خوانندگان عزیز با مدلها و فنون پرکاربرد تحقیق در عملیات (OR) است. اگرچه سعی شده است، فنون OR به نحو مناسبی در این کتاب معرفی شوند ولی بخاطر سپردن چند اصل اساسی در استفاده از این کتاب ضرورت دارد:

اوّل: تحقیق در عملیات را در انواع مختلفی از سازمانهای دولتی، نظامی، خدماتی، بازرگانی، صنعتی، آموزشی و بهداشتی می‌توان بکار برد.

دوّم: با وجود اینکه فنون ریاضی ارائه شده در این کتاب به روش دستی حل شده‌اند، ولی در اغلب موارد برنامه‌هایی برای حل آنها با استفاده از «رایانه» وجود دارد.

سوّم: باید بخاطر داشت که تحقیق در عملیات، چیزی بیش از مجموعه‌ای از فنون ریاضی است. این علم نیز همانند سایر علوم با مسایل و مشکلات به طریق منطقی برخورد می‌کند. نگاه OR به مسائل مدیریتی یک نگاه سیستماتیک و منطقی است.

۱.۲ پیدایش تحقیق در عملیات

موضوع تحقیق در عملیات در طول جنگ جهانی دوّم توسط دانشمندان انگلیسی توسعه و گسترش یافت. مدیریت جنگی انگلیس در آن برهه، گروهی از دانشمندان راکه با مسائل تاکتیکی و استراتژیک در رابطه با دفاع هوایی و زمینی تخصص داشتند، مأمور تحقیقاتی در این زمینه نمود. دلیل اصلی انجام چنین مطالعاتی، محدودیت منابع و بودجه نظامی بود. بدین سبب لازم بود که چگونگی استفادهٔ مناسب و حداکثر از منابع نظامی مورد بررسی و مطالعه قرار گیرد. چنانچه از نام تحقیق در عملیات مستفاد می‌گردد، علّت بکارگیری آن ماهیت مطالعه تیمی بود که بر روی عملیات (نظامی) تحقیق می‌نمودند. دانشمندان، مسائل گوناگونی را مورد تحقیق قرار داده و نیز براساس مطالعهٔ کمّی از عملیات، شیوه‌های معینی را پیشنهاد می‌نمودند که موفقیت قابل ملاحظه را به همراه داشت. نتایج ارزشمند حاصل از تحقیق در عملیات توسط تیم انگلیسی، به سرعت مدیریت نظامی ایالات متحده را به فعالیتهایی در این زمینه ترغیب نمود. نوآوریهای موفقیت‌آمیز توسط تیمهای آمریکایی شامل توسعه الگوهای جدید پرواز، برنامه‌ریزی در مین‌گذاری دریا، بهره‌برداری مؤثر از تجهیزات الکترونیکی می‌شد. در این رابطه گروههای تحقیق در عملیات مشابهی در دیگر کشورها از جمله کانادا و فرانسه مشغول به فعالیت شدند. این گروهها که معمولاً جهت اجرای عملیات تعیین می‌شدند در انگلستان به نام «تحقیق در عملیات» شناخته شدند و نیز گاهی در آمریکا با نامهای دیگری نظیر «تحلیل عملیات»،

---

1. Quantitative Analysis
2. Decision science

«ارزیابی عملیات»، «تحقیق در عملیات»، «تحلیل سیستمها»، «ارزیابی سیستمها» و «تحقیق در سیستمها» بکار برده می‌شدند. نام «پژوهش عملیاتی» یا «تحقیق در عملیات «یا بطور ساده "OR" امروزه بطور وسیعی در تمام دنیا برای شیوه جدید مطالعه علمی و سیستماتیک عملیات مورد استفاده قرار می‌گیرد.

پس از جنگ، موفقیت گروههای نظامی توجه مدیران صنعتی را به خود جلب نمود. مدیران در جستجوی راه‌حلهایی برای مسائل خود بودند که بر اثر ورود تخصص شغلی در تشکیلات تجاری، روزبه روز حادتر می‌شدند. زیرا، با وجود این واقعیت که اصولاً مشاغل تخصصی برای خدمت به هدف کلی یک سازمان به وجود می‌آیند، اهداف فردی این مشاغل ممکن است همواره با مقاصد آن سازمان سازگار نباشند. این وضع منجر به مسائل تصمیم‌گیری پیچیده‌ای شده است که نهایتاً سازمانها را مجبور نموده تا درصدد استفاده از مؤثرترین روشهای OR برآیند.

همزمان با رونق اقتصادی بعد از جنگ، مسائل ناشی از افزایش تخصص و پیچیدگی در سازمانها پدیدار گردید. تعداد زیادی از کارشناسان، منجمله مشاورین صنعتی و اقتصادی که در خلال جنگ با گروههای تحقیق در عملیات همکاری داشتند، بتدریج درمی‌یافتند که محتوای مسائل صنعتی و اقتصادی با مسائل نظامی فرقی ندارد و تنها شکل آنها با یکدیگر متفاوت است. به این ترتیب، تحقیق در عملیات به خدمت صنعت، اقتصاد، و فعالیتهای دولتی درآمد. تنها در اوایل دهه ۱۹۵۰ بود که بخش صنعت در آمریکا به جذب کارشناسان OR به دلایلی از قبیل: فشار روبه افزون تقاضا برای بهره‌برداری بیشتر، پایان منازعه دو کشور کره و توسعه سریع تکنولوژیکی در بخش صنعت گرایش پیدا نمود.

دست کم دو عامل دیگر نیز در رشد روزافزون تحقیق در عملیات نقش تعیین‌کننده داشتند. عامل اول پیشرفتهای چشمگیری بود که در همان اوایل در زمینه توسعه فنون مربوط به تحقیق در عملیات صورت گرفت. بعد از جنگ، دانشمندانی که در گروههای OR کار کرده و یا در مورد آن مطالعاتی داشتند، انگیزه کافی برای پیگیری تحقیقات مربوط را پیدا کردند و در این راه به پیشرفتهای مهمّی دست یافتند. ابداع «روش سیمپلکس»[1] برای حل مسائل «برنامه‌ریزی خطی»[2] توسط جرج دتزیگ[3] در سال ۱۹۴۷ از اولین و مهمترین دستاوردهای این پژوهشها بود. برخی از ابزارهای متعارف تحقیق در عملیات، نظیر «برنامه‌ریزی پویا»، «نظریه صف» و «نظریهٔ موجودیها» تا سال ۱۹۵۰ نسبتاً توسعه یافته بودند.

پیشرفت مؤثر در رشتهٔ تحقیق در عملیات تا اندازهٔ زیادی مرهون توسعهٔ همزمان کامپیوتر(رایانه)است،که توانایی عجیبی درسرعت محاسباتی و ذخیره کردن و بازخوانی اطلاعات

---

1. Simplex Method
2. Linear Programming
3. George Dantzig

دارد. در حقیقت اگر رایانه ساخته نشده بود، تحقیق در عملیات با داشتن مسائل محاسباتی در مقیاس وسیع، موقعیت نویدبخش فعلی را در انواع زمینه‌های عملیاتی کسب نمی‌کرد.

پیشرفت چشمگیر مبانی ریاضی فنون تحقیق در عملیات از یک طرف و توسعه تکنولوژیک رایانه از طرف دیگر، دامنه کاربرد تحقیق در عملیات را به جایی کشانده که امروزه سازمانها درصدد تهیه سیستمهای هوشمند با استفاده از «منطق فازی»[1] هستند. این دسته از فنون تصمیم‌گیری درصدد بهبود تصمیمات مدیران در شرایط مبهم و نادقیق هستند. روشهای جدید تحقیق در عملیات به طراحان «سیستمهای اطلاعاتی مدیریت»[2] یاری خواهند داد تا با تهیهٔ «سیستمهای خبره»[3] و «سیستمهای پشتیبانی تصمیم»[4] مدیران را در برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری هرچه بهتر و واقعی‌تر حمایت کنند.

۱.۳ تعریف تحقیق در عملیات

تحقیق در عملیات تقریباً به تناسب کاربران متفاوت آن دارای تعاریف متعددی است. این علم با توجه به نوع کاربرد آن در سازمانها توسط افراد مختلف تعریف شده است که مهمترین تعاریف از OR به شرح زیر است:

۱. تحقیق در عملیات به مجموعه‌ای از روشهای علمی و فنونی گفته می‌شود که جهت شناخت مسائل درون سیستم به کار می‌روند و درصدد جواب بهینه[5] برای مسائل هستند.

۲. تحقیق در عملیات عبارتست از کاربرد روشهای علمی برای مطالعه و بررسی فعالیتها و عملیات پیچیده در سازمانهای بزرگ.

شاید بتوان مهمترین تعریف از OR را به صورت زیر بیان کرد:

«کاربرد روش علمی برای تحلیل و حل مسائل و تصمیمات مدیریتی».

آنچه بیشتر از هر چیز بیانگر مفهوم OR است، ویژگیهای آن خواهد بود که در بخشهای بعدی به شرح آنها پرداخته می‌شود.

۱.۴ ویژگیهای تحقیق در عملیات

از مهمترین ویژگیهای OR می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. تمرکز اصلی و اولیه OR بر تصمیم‌گیری مدیران است.

۲. رویکرد OR یک رویکرد علمی است.

---

1. Fuzzy Logic
2. Management Information systems
3. Expert systems
4. Decision support systems
5. optimum

۳. در OR مسائل و تصمیمات با نگاه سیستمی بررسی می‌شوند.
۴. رشتهٔ OR یک رشته از ترکیب چندین رشتهٔ مستقل است. به عبارت دیگر OR یک دانش بین رشته‌ای[1] است.
۵. در OR از مدلهای ریاضی استفاده می‌شود.
۶. در OR از رایانه به وفور استفاده می‌شود.
حال به تشریح هر یک از این ویژگیها پرداخته می‌شود.

۱.۴.۱ تصمیم‌گیری: کانون توجه OR

یک «تصمیم»، نتیجه فرآیند انتخاب یک گزینه بهتر از بین دو یا چند گزینه متفاوت است، که ما را در رسیدن به مقصود (آرمان) یاری می‌دهد. این فرآیند؛ «تصمیم‌گیری»[2] نامیده می‌شود. بزعم هربرت سایمون تصمیم‌گیری، مترادف با کل فرآیند مدیریت است. برای نشان دادن اهمیت تصمیم‌گیری به دیگر وظایف مدیریت همچون برنامه‌ریزی نگاه کنید. در تعریف برنامه‌ریزی گفته می‌شود که برنامه‌ریزی عبارتست از؛ مجموعه‌ای از تصمیمات همچون: چه کاری باید انجام گیرد؟ (what)، چه وقت؟ (when)، چگونه؟ (How)، کجا؟ (where)، توسط چه کسی؟ (by whom)

پر واضح است که برنامه‌ریزی به تصمیم‌گیری اشاره دارد: دیگر وظایف مدیریت همانند سازماندهی و کنترل نیز به عنوان ترکیبی از تصمیم‌گیری بررسی می‌شوند.

در تحقیق در عملیات امر تصمیم‌گیری و بررسی مسائل در قالب یک فرآیند سیستماتیک مورد توجه قرار می‌گیرد. این فرآیند دارای مراحل زیر است:
۱. تعریف مسأله
۲. شناخت راه‌حلهای ممکن
۳. ارزیابی راه‌حلهای ممکن
۴. انتخاب یک راه‌حل

تصمیم‌گیری یکی از وظایف مدیران برای حل مشکل یا مسأله است. بنابراین تا مسأله‌ای حادث نشود، تصمیم‌گیری برای مدیران ضرورت پیدا نمی‌کند. هر مسأله‌ای دارای ابعاد و تعریفی است که باید بخوبی بیان گردد. پس از تعریف مسأله، باید راه‌حلهای ممکن[3] جهت حل مسأله را شناسایی نمود. با محک زدن راه‌حلهای شناخته شده، بهترین راه‌حل برای حل مسأله توسط مدیر انتخاب می‌شود.

---

1. Interdisciplinary
2. Decision Making
3. Alternatives

۱.۴.۲ رویکرد علمی

رویکرد علمی (یا به تعبیر مشهورتر روش علمی) یک فرآیند فرموله شده است که توسط دکارت فیلسوف معروف فرانسوی در قرن هفدهم تعریف شد. این رویکرد شامل مراحل زیر است:

مرحله (۱) **تعریف مسأله:** مسأله باید برای تحلیل، تعریف شده و شرایط مشاهده تعیین گردد.

مرحله (۲) **مشاهده:** مشاهدات مختلف تحت شرایط متفاوت هستند که رفتار سیستم دربرگیرندهٔ مسأله را تعیین می‌کنند.

مرحله (۳) **فرضیه:** براساس مشاهده (تجربه) است که فرضیات مربوط به بهترین جواب برای مسأله شکل می‌گیرد.

مرحله (۴) **آزمایش:** برای آزمون فرضیات (فرضیه) یک آزمایش تجربی و قابل اندازه‌گیری باید طراحی شود.

مرحله (۵) **اجرای آزمایش:** آزمایش (آزمایشات) طراحی شده باید اجراء شوند و نتایج آزمایش ثبت و ضبط شود.

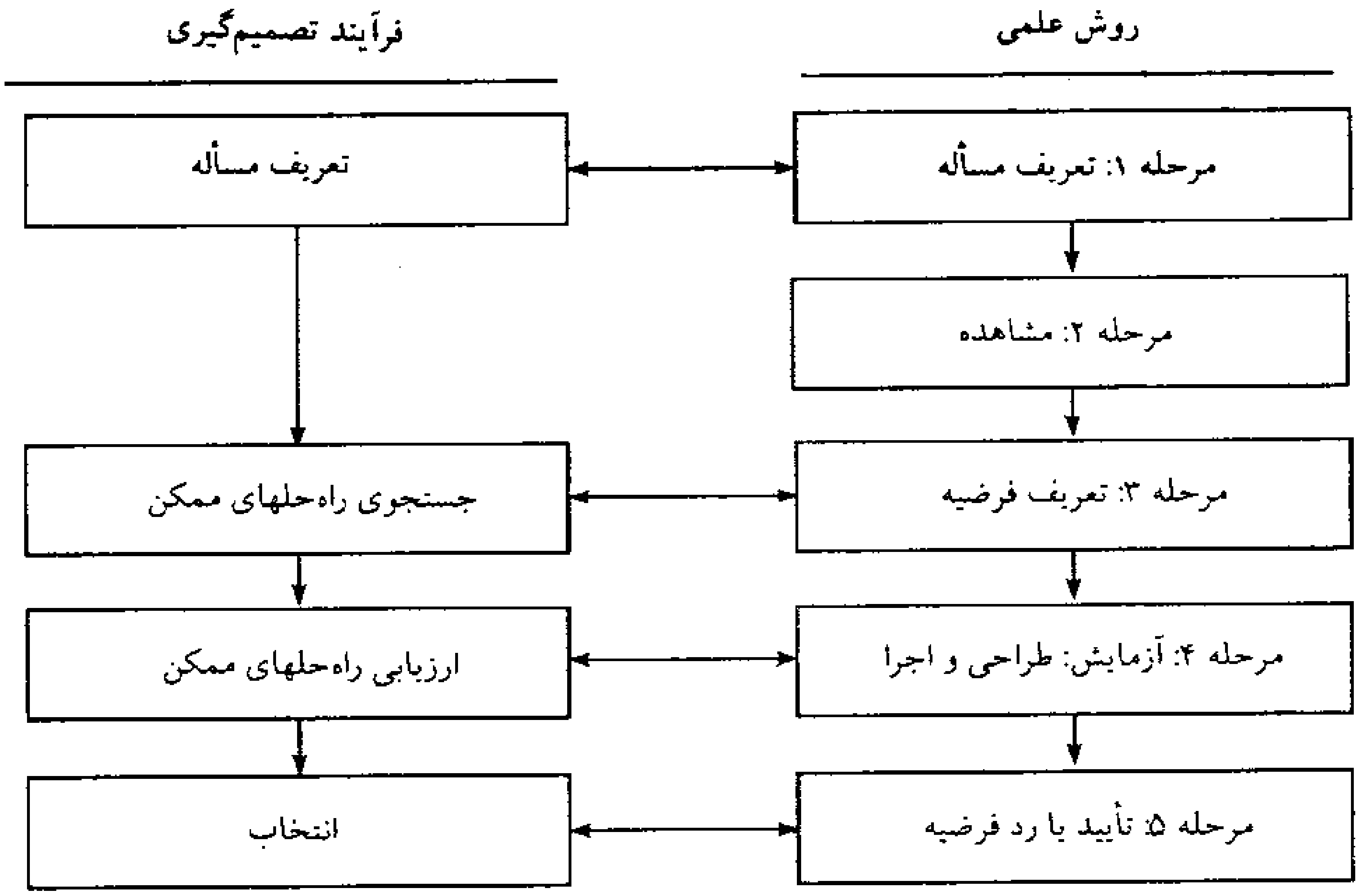
مرحله (۶) **تأیید یا رد فرضیه:** با استفاده از نتایج آزمایشات به بررسی صحت یا سقم فرضیات می‌پردازیم. با استفاده از نتایج آزمایشات می‌توان دریافت که آیا فرضیه تأیید می‌گردد یا رد.

شش مرحلهٔ روش علمی قابل بکارگیری در تصمیم‌گیری نیز هستند. برای مثال ارزیابی راه‌حلهای ممکن از طریق آزمایشات علمی امکان‌پذیر است. روابط بین رویکرد علمی و فرآیند تصمیم‌گیری به خوبی در شکل ۱.۱ نشان داده شده است.

تحقیق در عملیات از این رویکرد علمی برای حل مسأله استفاده می‌کند. برای هر یک از مراحل اشاره شده در شکل ۱.۱ متدولوژی مشخصی در OR بوجود آمده است. هسته مرکزی روش علمی در OR بر این ایده است که باید مسأله را به عنوان یک سیستم (کل) بررسی کرد.

۱.۴.۳ نگاه سیستمی

سومین ویژگی OR استفاده از تئوری سیستم و تحلیلهای نظام‌گرا می‌باشد. یک «سیستم»؛ مجموعه‌ای از افراد، منابع، مفاهیم و رویه‌هایی است که به گونه‌ای در تعامل با همدیگر قرار گرفته‌اند که در راستای رسیدن به هدفی مشخص، وظایفی را انجام دهند. باید توجه داشت که در OR مقصود از سیستم؛ یک سازمان، بخشی از یک سازمان و یا مسأله تحت مطالعه و بررسی است. بدیهی است هر سیستم را به عنوان یک کل می‌توان به زیر سیستمهای کوچکتر تقسیم کرد. هر زیرسیستم می‌تواند به عنوان یک مسأله مورد بررسی و مطالعه قرار گیرد. نکته



شکل ۱.۱ روابط بین رویکرد علمی و فرآیند تصمیم‌گیری

قابل بحث در OR نگاه به یک مسأله (زیر سیستم) در ارتباط ارگانیک با سایر اجزاء یا زیرسیستمها می‌باشد.

هر سیستم قابل تقسیم به سه بخش عمده به شرح زیر می‌باشد:

. داده‌ها[1]

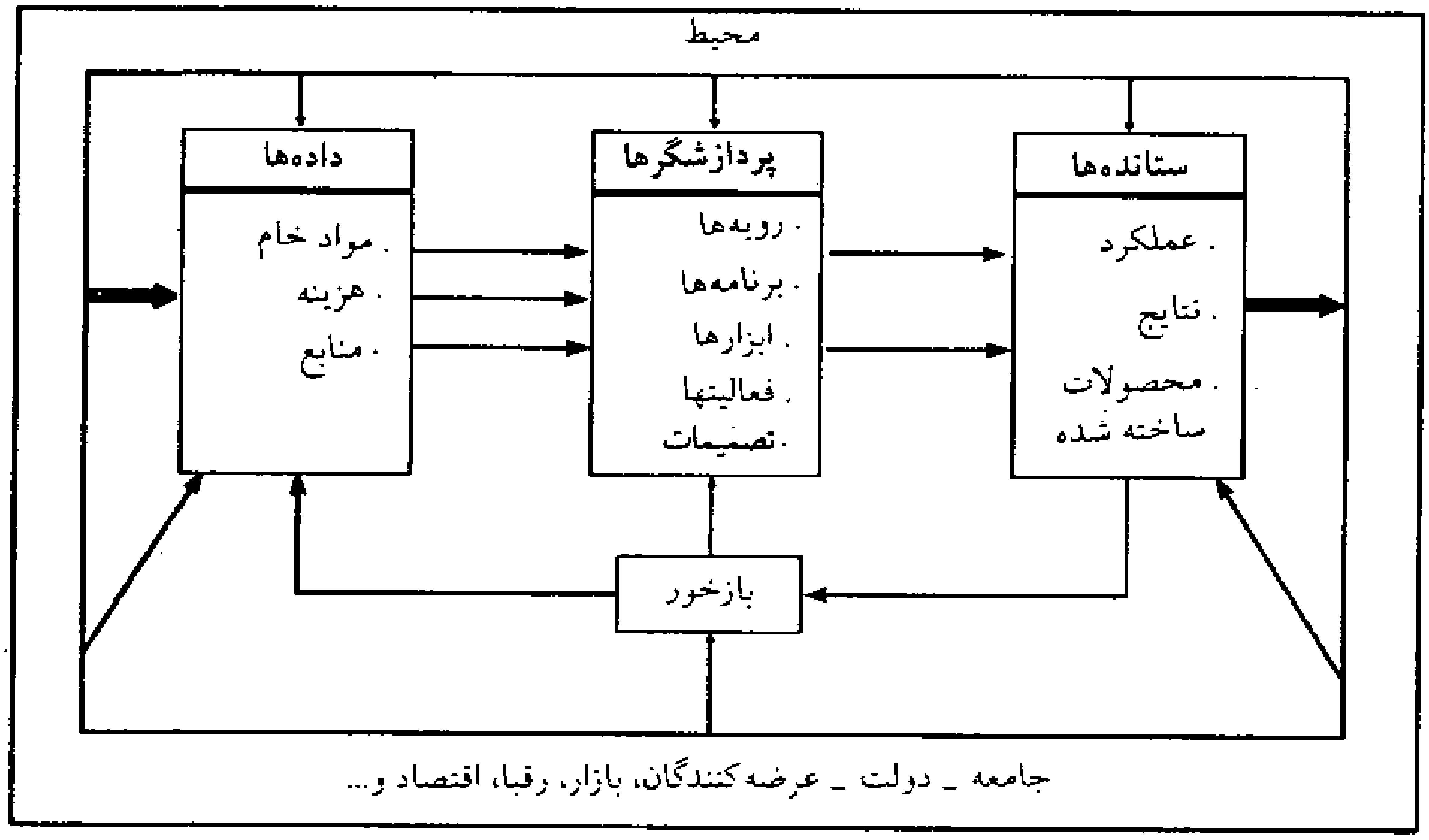
. پردازشگرها[2]

. ستانده‌ها[3]

اجزاء متفاوت سیستم توسط محیط خود محاصره شده‌اند و اغلب بوسیلهٔ مکانیسم بازخور[4] در ارتباط با همدیگر قرار می‌گیرند. شکل ۱.۲ نشان‌دهندهٔ بخشهای سیستم و محیط سیستم می‌باشد.

در هر سیستم «داده‌ها» شامل عناصری هستند که وارد سیستم می‌شوند. به عنوان مثال می‌توان به مواردی چون موادخام برای یک کارخانه تولید و یا دانشجویان یک دانشگاه اشاره کرد. «پردازشگرهای» سیستم شامل عناصری است که جهت تبدیل داده‌ها به ستانده‌ها ضروری

1. Inputs
2. processes
3. outputs
4. Feedback



شکل ۱.۲ سیستم و محیط

هستند. به عنوان مثال در یک دانشگاه قسمت پردازش سیستم شامل؛ آموزش دادن، یادگیری، امتحان و استفاده از کلاسها، آزمایشگاهها و کتابخانه خواهد بود. «ستانده‌ها» شامل محصولات ساخته شده و یا نتایج پردازشگرهای سیستم است. به عنوان مثال می‌توان از فارغ‌التحصیلان دانشگاه بعنوان ستانده‌های سیستم دانشگاه یاد کرد. اطلاعاتی که با بررسی ستانده‌های سیستم برای تصمیم‌گیرنده حاصل می‌شود، «باز خور» نامیده می‌شود. براساس این اطلاعات، است که تصمیم‌گیرنده به اصلاح داده‌ها و یا پردازشگرها یا هر دو آنها می‌پردازد.

عناصر فراوانی وجود دارد که نه جزء داده‌های سیستم به شمار می‌آیند و نه جزء پردازشگرها و ستانده‌های سیستم. ولی به شدت عملکرد سیستم را تحت تأثیر قرار می‌دهند و در نیل به هدف (آرمان) سیستم اثر می‌گذارند. این عوامل را تحت عنوان «محیط» سیستم بیان می‌کنند. یکی از راههای تعیین عناصر محیط سیستم پاسخ به دو سؤال اساسی زیر است که توسط چرچمن پیشنهاد شده است:

۱. آیا دستکاری کردن این «عنصر» امکان‌پذیر است؟

۲. آیا ماهیت (وجود) این عنصر به اهداف سیستم مربوط می‌شود؟

اگر و فقط اگر پاسخ سؤال اوّل، «نه» باشد. پس پاسخ سؤال دوّم «بله» است. بنابراین این عنصر باید به عنوان جزئی از محیط سیستم در نظر گرفته شود. محیط یک سیستم از اجزای مختلفی همچون؛ اجتماعی، سیاستی، اقتصادی، فرهنگی، بازار و ... تشکیل شده است.

امروزه، مدیران به خوبی دریافته‌اند که اتخاذ تصمیم در یک بخش از سازمان نه تنها ممکن است بر عملیات آن بخش خاص تأثیر بگذارد بلکه ممکن است بر عملیات دیگر بخشهای سازمان تأثیر معنی‌دار داشته باشد. بنابراین تا جایی که امکان‌پذیر باشد در بررسیهای OR کل نظام سازمان در نظر گرفته می‌شود. چنین رویکردی را اصطلاحاً یک «رویکرد سیستمی» گویند. در چنین رویکردی است که هر مسأله در ارتباط تنگاتنگ با کل سیستم در نظر گرفته می‌شود و در تعامل با کلیهٔ اجزای سیستم تعریف و فرموله می‌گردد.

۱.۴.۴ تحقیق در عملیات یک رویکرد بین رشته‌ای

بسیاری از مسائل مدیریتی دارای جنبه‌های اقتصادی، روانشناسی، اجتماعی، مهندسی، ریاضی، فیزیکی و. . . هستند. تنها با تشکیل یک گروه با تخصصهای متفاوت است که می‌توان به راه‌حلهای نو و پیشرفته برای مسائل گریبانگیر سازمانها دست یافت. هر متخصص با استفاده از دانش خود می‌تواند زاویه‌ای از مسائل را مورد موشکافی قرار دهد و به یک راه‌حل برسد. برآیند راه‌حلهای مختلف و بررسیهای متعدد، منجر به یک راه‌حل واقعی برای مسأله خواهد شد. بر این اساس بسیاری از مسائل در OR توسط گروههای چند رشته‌ای (به طور متوسط گروههای سه نفره) مورد بررسی قرار می‌گیرند. در بسیاری از موارد که مسأله از ابعاد ساده‌تری برخوردار است، می‌توان از یک فرد متخصص که دارای اطلاعات لازم از رشته‌های مورد نیاز باشد نیز استفاده کرد.

۱.۴.۵ مدلها در OR

استفاده از مدلها، خصوصاً مدلهای ریاضی، ستون (اساس) علم OR است. مدل؛ «ساده شده یا تجرید واقعیت است.» مدل معمولاً سادهٔ شدهٔ واقعیت است. چون اغلب واقعیت مسأله از پیچیدگی زیادی برخوردار است. لذا انعکاس کامل پیچیدگی مسأله بسیار مشکل است و اغلب غیرممکن می‌نماید. خواص «ساده‌سازی» و «انتزاعی بودن» مدلها در OR نیل به هدف واقعی را با مشکل مواجه می‌سازد. به عبارت دیگر یک مدل ساده شده نمی‌تواند وضعیت واقعی مسأله را بیان کند.

بیان سیستمها یا مسائل از طریق مدلها می‌تواند به انحاء مختلف انجام گیرد. و با درجات متفاوتی از ساده‌سازی همراه باشد. مدلها با توجه به درجهٔ انتزاعی بودن به سه دسته تقسیم می‌شوند.

۱. مدل شمایلی[1]: یک مدل شمایلی، جایگزین فیزیکی از سیستم است که معمولاً در

---

1. Iconic Model

اندازه‌های متفاوت از اصل سیستم نشان داده می‌شود. این دسته از مدلها با کمترین انتزاع از واقعیت همراه هستند. نمونه‌هایی از ماکت سه بعدی از هواپیما، اتومبیل و یا شمایل مربوط به خط تولید و یا یک پل، از این نوع مدلها هستند. همچنین می‌توان به تصاویر و کنکاشهای کامپیوتری به طور دو بعدی اشاره نمود.

۲. مدل قیاسی[1]: مدل قیاسی عیناً مشابه سیستم واقعی نیست ولی رفتار مدل همانند رفتار سیستم است. این نوع مدلها در قالب نمودارهای دو بعدی بیان می‌شوند. به عبارت دیگر، مدلهای قیاسی از نوع مدلهای فیزیکی هستند که شکل آنها با شکل سیستم متفاوت است. به عنوان مثال می‌توان به نمودار سازمانی اشاره کرد که نشان‌دهندهٔ ساختار، روابط، مسئولیتها و مسیرهای نظارت می‌باشد.

«مدلهای قیاسی در مقایسه با مدلهای شمایلی از سطح انتزاع بیشتری برخوردارند.»

۳. مدل ریاضی: پیچیدگی روابط در برخی از سیستمها مانع از آن می‌شود که بتوان شکل سیستم و یا رفتار آن را با استفاده از مدلهای شمایلی یا قیاسی نشان داد. بنابراین ساده‌سازی واقعیت و انتزاع از آن باید بیشتر باشد. ناچار از مدلهایی که از نمادها و سمبولها کمک می‌گیرند برای بیان انتزاع رفتار سیستم استفاده می‌شود. با توجه به پیچیدگی مسائل در دنیای تصمیم‌گیری، اکثر تحلیلها در OR با استفاده از مدلهای ریاضی انجام می‌گیرد. این نوع مدلها اغلب به صورت کلی بیان می‌شوند و می‌توانند برای توصیف موقعیتهای متفاوت بکار روند. دلایل عمده‌ای که باعث شده است در OR از مدلهای ریاضی استفاده شود، عبارتند از:

الف) استفاده از مدلهای ریاضی باعث می‌شود که موقعیتهای خیلی پیچیده را تعریف و تعیین کرد.

ب) مدلهای ریاضی باعث می‌شوند که زمان عملیات واقعی را شبیه‌سازی کرد. این دسته از مدلها باعث می‌شوند که رفتار واقعی سیستم را در طول سالهای آینده به زمان حال آورد و در یک زمان کوتاه (دقیقه یا احیاناً ثانیه) مشاهده کرد.

ج) دستکاری کردن مدل (تغییر ایجاد کردن در عناصر مدل) بسیار ساده‌تر از دستکاری کردن سیستم واقعی است. به عبارت دیگر، آزمایش سیستم را ساده‌تر و امکان‌پذیر می‌سازد.

د) هزینهٔ آزمایش و خطا در مدل بسیار کمتر از آزمایش و خطا در سیستم واقعی است. به تعبیر دیگر، هزینه رفع عیب در مدل بسیار پایینتر از رفع عیب در سیستم واقعی است.

هـ) امروزه محیط با عدم قطعیت همراه است. بنابراین مدلسازی واقعیت به مدیر اجازه می‌دهد که ریسک در تصمیم‌گیری را محاسبه کند.

و) مدلها زمینه آموزش و یادگیری را فراهم می‌کنند.

---

1. Analog Model

طبقه‌بندی مدلهای ریاضی در تحقیق در عملیات

مدلهای ریاضی OR معمولاً به سه مقوله؛ ۱- قطعی ۲- احتمالی و ۳- ترکیبی، دسته‌بندی می‌شوند. مدلهای قطعی به مدلهایی گفته می‌شود که در شرایط اطمینان کامل ساخته می‌شوند و پارامترها، نماد و سمبولهای بکار گرفته شده در آن به طور قطع و یقین رخ می‌دهد. در مقابل دسته‌ای دیگر از مدلهای OR وجود دارند که در شرایط نامعین و تصادفی رخ می‌دهند. در این دسته از مدلها؛ پارامترها و ارزش مقادیر به طور تصادفی رخ می‌دهند و از یک تابع احتمال پیروی می‌کند. در این دسته از مدلها برخلاف مدلهای قطعی، گزینه‌های جایگزین و ممکن نیز قابل تصور می‌باشد. برخی از فنون OR، ترکیبی از مدلهای قطعی و احتمالی هستند. به عبارت دیگر این دسته از مدلها هم در شرایط قطعی و هم در شرایط احتمالی مورد استفاده قرار می‌گیرند. به این دسته از مدلها، مدلهای «ترکیبی» گفته می‌شود. شکل ۱.۳ بیانگر طبقه‌بندی مدلهای ریاضی در OR است.

تفکیک بین مدلهای بهینه‌یابی از نظر «خطی»[1] و «غیرخطی»[2] براساس ماهیت تابع هدف و یا محدودیتهای مدل می‌باشد. در مدلهای برنامه‌ریزی خطی کلیهٔ روابط بیان شده در مدل به صورت خطی خواهد بود. از جمله این مدلها می‌توان به مدلهای «حمل‌ونقل» و «تخصیص» اشاره کرد. در حالی که در مدلهای بهینه‌یابی غیرخطی، حداقل یکی از روابط بیان شده در مدل ممکن است خطی نباشد. در این صورت مدل از نوع غیرخطی تلقی می‌شود.

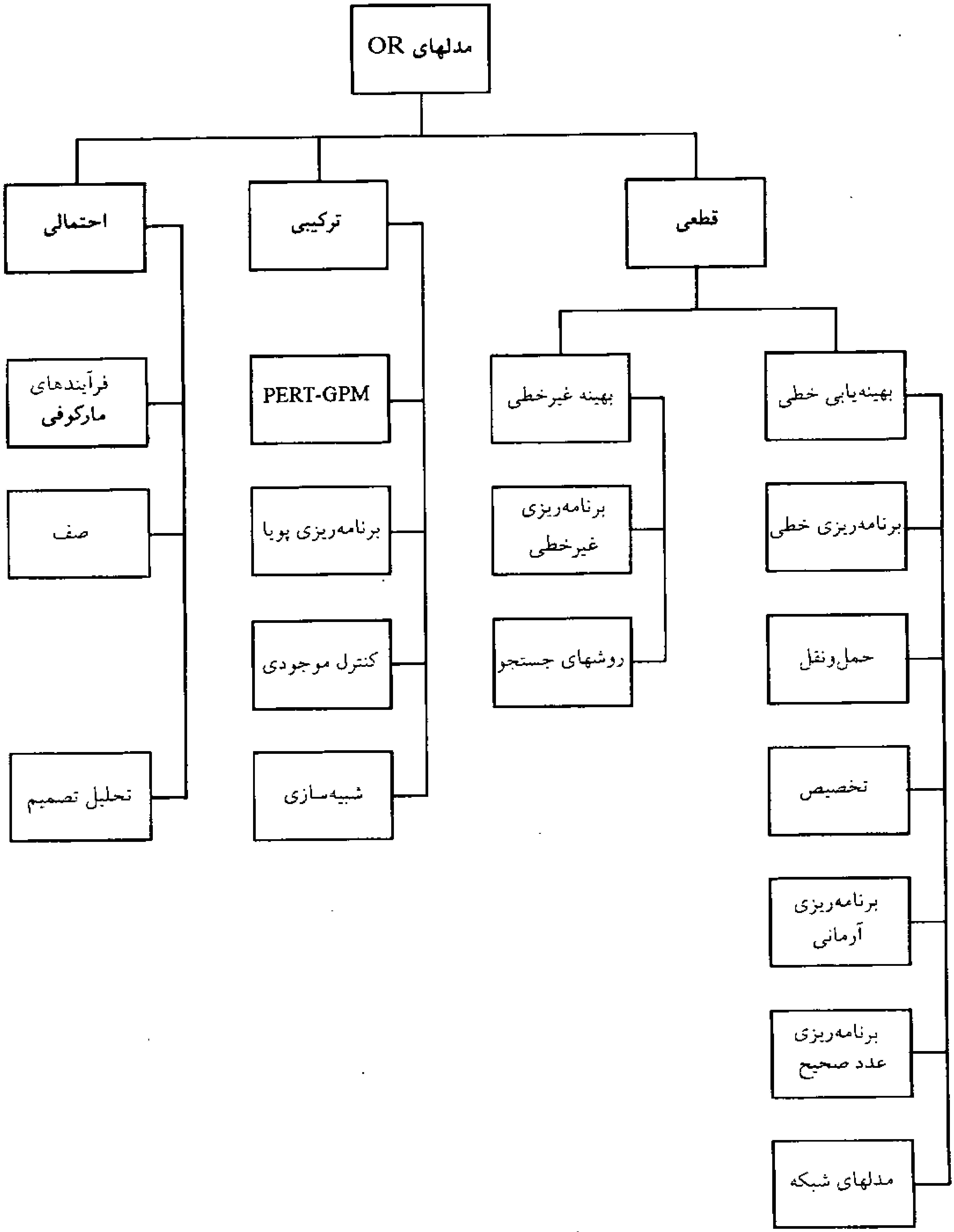
مهمترین مدلهای احتمالی؛ از نوع «مارکوفی» و «تئوری صف» هستند که امروزه هریک از این مدلها در قالب دروس تخصصی جداگانه تدریس می‌شوند. از جمله فنون ترکیبی OR می‌توان به «برنامه‌ریزی پویا»، «کنترل موجودی»، PERT-CPM و «شبیه‌سازی» اشاره کرد که هم در شرایط قطعی مورد استفاده قرار می‌گیرند و هم با اندک تغییراتی در مفروضات کاربردی آنها در شرایط احتمالی نیز قابل استفاده هستند.

۱.۴.۶ استفاده از رایانه در OR

پیشرفت محیرالعقول رایانه، یکی از عوامل اساسی پیشرفت سریع OR شد. مسائل مشکل و پیچیده‌ای که غالباً OR با آنها سروکار دارد، نیازمند انجام محاسبات فوق‌العاده زیادی است. اغلب اوقات انجام این عملیات به روش دستی امکان‌پذیر نیست. در نتیجه با توسعه رایانه با قدرت محاسباتی میلیونها بار سریعتر از روش دستی، انفجار عجیبی در شکوفایی این علم پدید آمد.

پیشرفت رایانه، منجر به تهیهٔ نرم‌افزارهایی برای حل مسائل پیچیده در OR شد. علیرغم

1. Linear
2. Nonlinear

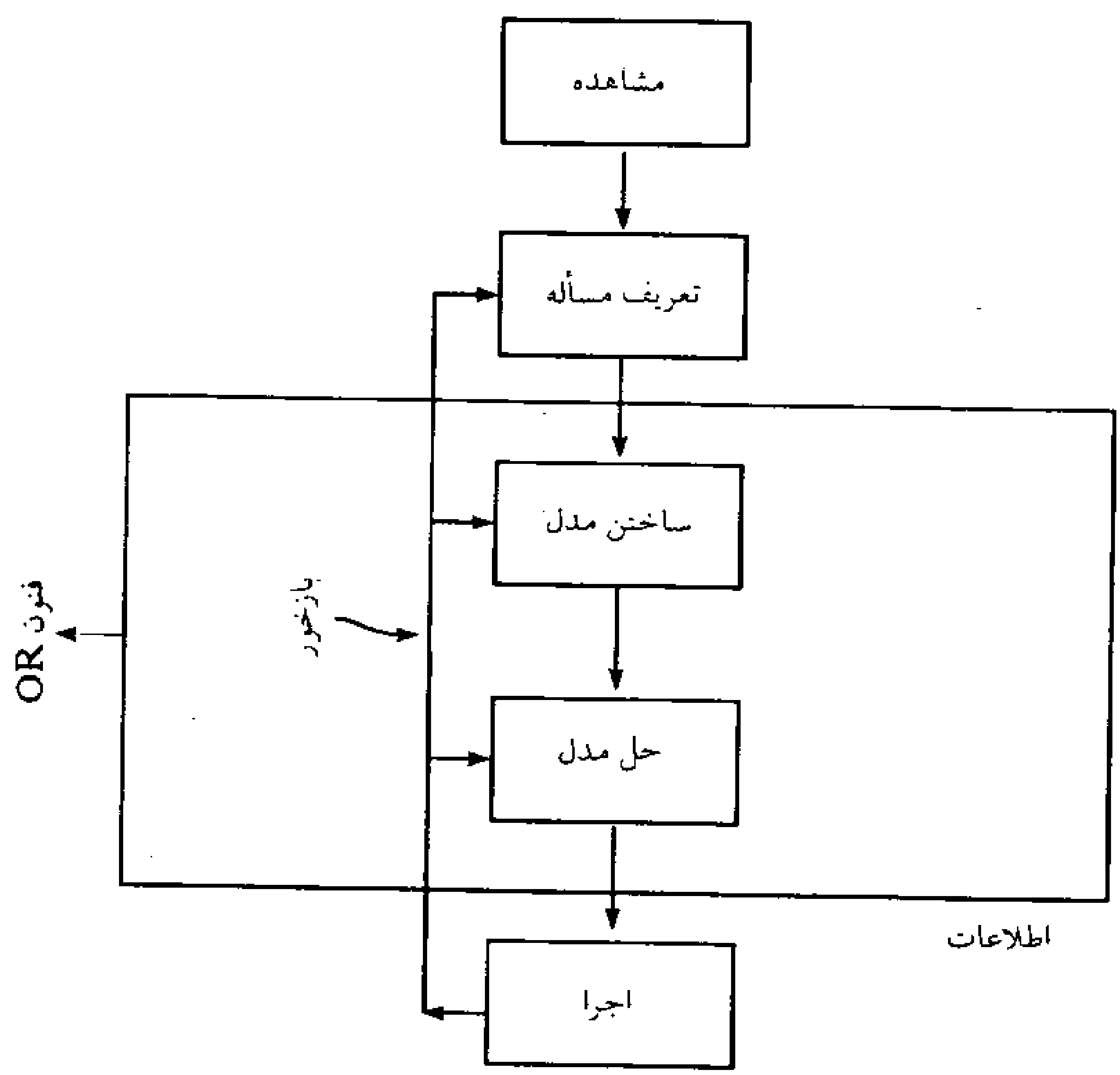


شکل ۱.۳ طبقه‌بندی مدلهای ریاضی در OR

اینکه در سال ۱۹۸۴ تنها تعداد اندکی نرم‌افزار تهیه شده بود ،باید گفت در حال حاضر تعداد نرم‌افزارهای کارآمد OR به بیش از ۱۰۰ عدد می‌رسد. رشد فزایندهٔ نرم‌افزارهای OR باعث شده است که فنون OR هرچه بیشتر از تئوری به عمل نزدیکتر شوند و دامنهٔ آنها به مؤسسات تجاری و صنعتی بیش از پیش کشیده شود. از جمله نرم‌افزارهای آموزشی می‌توان به نرم‌افزارهای AB:QM ، QSB+ اشاره کرد که به ترتیب توسط Sang M. Lee و همچنین Yih - Long - Chang و همکارش S. Sullivan طراحی شده‌اند. مهمترین نرم‌افزارهای کاربردی و حرفه‌ای شامل LINDO ، GAMS و LINGO می‌باشند که امروزه به وفور در کشور ما مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱.۵ رویکرد تحقیق در عملیات برای حل مسأله

ویژگی اصلی OR و فنون آن تأکید بر رویکرد سیستماتیک و منطقی در حل مسأله بود. بواسطهٔ داشتن این ویژگی است که فنون آن را در قالب «روش علمی» معرفی می‌کنند. این رویکرد همچنانکه در شکل ۱.۴ نشان داده شده است، دارای مراحل زیر است:



شکل ۱.۴ فرآیند حل مسأله در OR

۱- مشاهده ۲- تعریف مسأله ۳- ساختن مدل ۴- حل مدل ۵- اجرای نتایج
حال به شرح و تحلیل هریک از مراحل پنج‌گانه فوق می‌پردازیم.

۱.۵.۱ مشاهده

اولین قدم در فرآیند تحقیق در عملیات تعریف مسأله‌ای است که در سیستم یا سازمان وجود دارد. هر سیستم به طور مداوم در معرض مسائل و مشکلاتی است که مانع رسیدن آن سیستم به اهداف خود می‌شوند. مدیر باید خود و یا متخصصانی داشته باشد تا به «مشاهده» عوامل سازمان و روابط در تعامل با هم پردازد تا بتواند به «آسیب‌شناسی» سازمانی و تعریف مساله دست یابد. بسیاری از سازمانها سعی می‌کنند، علاوه بر گروههای آسیب‌شناسی درون سازمان از مشاوران خارج از سازمان نیز استفاده کنند. مشاوران خارج از سازمان کمک می‌کنند که بسیاری از مسائل را که از نظر افراد درون سازمانی جزء لاینفک عملیات محسوب می‌شود، شناسایی و تعریف کننده تمام تلاش مدیران و گروههای مشاوره در سازمان شناسایی مسأله براساس مشاهدات به عمل آمده از فرآیند عملیات در سازمان و محیط می‌باشد.

۱.۵.۲ تعریف مسأله

هرگاه مشخص شد که در سازمان مسأله‌ای وجود دارد. باید آن را به دقت و وضوح تعریف کرد. تعریف نادرست و نامشخص مسأله می‌تواند موجب ساده‌انگاری آن گردد و منجر به جواب نامناسبی برای آن شود. بنابراین «تدقیق» مسأله و درجه‌ای که مسأله می‌تواند بر عملکرد واحدهای سازمانی مؤثر باشد، از ملزومات تعریف مسأله است. 'ز آنجا که وجود مسأله در سازمان موجب خواهد شد که هدف سازمان به خوبی حاصل نشود، پس تعریف روش حصول اهداف[1] و آرمانهای[2] سازمانی ضروری است. توجه به هدف موجب می‌شود که توجه به آنچه واقعاً مسأله است معطوف گردد.

۱.۵.۳ ساختن مدل

مدل در تحقیق در عملیات بیان خلاصه و مجردی از یک مسأله در دنیای واقعی و سازمانی است. مدل می‌تواند در قالب یک شکل یا نمودار بیان گردد. امّا اغلب در OR، مدل شامل مجموعه‌ای از روابط ریاضی خواهد بود. روابط ریاضی مدل در OR از اعداد و نمادها تشکیل یافته است. به عنوان مثال فرض کنید یک مؤسسه تجاری کالایی را می‌خواهد بفروش برساند. هزینه تولید کالا ۵ ریال و قیمت فروش ۲۰ ریال می‌باشد. مدلی که بیانگر کل سود حاصل از

---

1. objectives
2. Goals

فروش کالا باشد، عبارت است از:

$$Z = ۲۰X - ۵X$$

در این معادله X نشان‌دهندهٔ تعداد محصولاتی است که فروش خواهد رفت. و Z کل سود حاصل از این تجارت خواهد بود. نمادهای X و Z، «متغیر»[1] خوانده می‌شوند. علّت اینکه از اصطلاح متغیر استفاده می‌شود، این است که هیچ عدد مشخص و از قبل تعریف شده‌ای برای X و Z در نظر گرفته نشده است. تعداد واحدهای فروخته شده (X) و سود کل (Z) می‌توانند در محدودهٔ تعریف شده، هر مقداری به خود بگیرند. به عبارت دیگر آنها می‌توانند تغییر کنند. این دو متغیر کاملاً از هم متمایز هستند. Z یک متغیر «وابسته» است. زیرا مقدار آن وابسته به تعداد واحدهای فروش رفته است. متغیر X یک متغیر «مستقل» است. زیرا تعداد واحدهای فروش رفته به هیچ چیز دیگر در این معادله وابسته نیست.

اعداد ۲۰ و ۵ ریال در معادله، «پارامتر»[2] گفته می‌شوند. پارامترها مقادیر ثابتی هستند که عموماً ضرایب متغیرها (نمادها) در یک معادله می‌باشند. پارامترها معمولاً در طول فرآیند حل یک مسأله خاص ثابت باقی می‌مانند. مقدار پارامترها از داده‌های حاصل از محیط بدست می‌آیند.

یک معادله، در حالت کلی خود به عنوان «رابطهٔ کارکردی»[3] شناخته می‌شود. همچنین به یک معادله، «رابطه» نیز گفته می‌شود. این اصطلاح از این واقعیت اشتقاق می‌شود که سود؛ Z، تابعی از تعداد واحدهای فروخته شده؛ X، است و این معادله، سود را به واحدهای فروخته‌شده ربط می‌دهد.

علیرغم آنکه در این مثال، فقط یک رابطهٔ کارکردی تعریف شده است ولی آن را مدل نیز می‌گویند. با این وجود این مدل بیانگر کل حقیقت مسأله نیست. حال فرض کنید که این محصول از آهن ساخته می‌شود و مؤسسه ۱۰۰ کیلوگرم آهن در دسترس دارد. برای تولید هر واحد محصول X، ۴ کیلوگرم آهن لازم است. حال ما می‌توانیم یک رابطهٔ ریاضی دیگر برای بیان مصرف محصول از آهن به صورت زیر تعریف کنیم:

$$۴X = ۱۰۰ \text{ کیلوگرم}$$

معادله بیانگر این واقعیت است که هر واحد محصول تولیدی ۴ کیلوگرم از ۱۰۰ کیلوگرم آهن موجود را مصرف خواهد کرد. بنابراین مدل شامل دو رابطه به صورت زیر است:

$$Z = ۲۰X - ۵X$$
$$۴X = ۱۰۰$$

1. variable
2. parameter
3. Functional Relationship

رابطه سود در مدل فوق «تابع هدف»[1] خوانده می‌شود. به رابطه مربوط به مصرف کالا از آهن یک «محدودیت»[2] گفته می‌شود. به عبارت دیگر، مؤسسه در تلاش است تا جایی که امکان دارد، سود خود را حداکثر کندولی ناچار است که سود خود را تا جایی که آهن در دسترس اجازه می‌دهد، افزایش دهد. یعنی میزان افزایش در سود محدود به منابع در دسترس (۱۰۰ کیلوگرم آهن) خواهد بود. با توجه به مفاهیم بیان شده، می‌توانیم دو معادله فوق را به صورت زیر نمادگذاری کنیم:

maximize $Z = ۲۰X - ۵X$

subject To:

$۴X = ۱۰۰$

ترجمه مدل فوق به صورت زیر است:

حداکثر سازی $Z = ۲۰X - ۵X$

به شرط اینکه :

$۴X = ۱۰۰$

از این پس برای نوشتن مدل بجای کلمات «فارسی» و یا واژه‌های کامل «انگلیسی» از خلاصه زیر استفاده می‌شود:

Max $Z = ۲۰X - ۵X$

s.t :

$۴X = ۱۰۰$

این مدل بیانگر یک مسأله مدیریتی است که درصدد تعیین تعداد تولید مؤسسه خود است. بنابراین متغیر X، مقدار «تصمیم بالقوه»[3] مدیر را بیان می‌کند. بنابراین X را به عنوان «متغیر تصمیم»[4] می‌شناسند. پس از تکمیل مدل، باید آن را از نظر اینکه نشان‌دهندهٔ عملیات سیستم باشد، مورد بازبینی قرار داد. مدیر باید اطمینان حاصل کند که مدل ساخته شده، بیانگر رفتار واقعی سیستم است.

۱.۵.۴ حل مدل

مسأله فرموله شده در قالب یک مدل OR باید براساس فنون مورد استفاده در OR حل شود. هریک از فنون تحقیق در عملیات برای حل یک مدل خاص کاربرد دارند بنابراین نوع مدل و فن حل مدل دو بخش مجزا در OR می‌باشند. ما براحتی می‌توانیم تشخیص دهیم که آیا مدل ساخته شده قابل حل خواهد بود یا خیر. با توجه به اینکه مدل بیانگر مسأله است، پس حل آن

1. objective function
2. Gonstraint
3. Potential Decision
4. Decision Variable

به معنی حل مسأله مورد توجه مدیریت خواهد بود.

برای مثال مدل تعریف شده در بخش قبل؛ یعنی:

$$\text{Max } Z = ۲۰X - ۵X$$

s.t :

$$۴X = ۱۰۰$$

با استفاده از عملیات جبری زیر قبل حل است.

$$۴X = ۱۰۰ \Rightarrow X = \frac{۱۰۰}{۴} = ۲۵ \text{ واحد}$$

جایگزین کردن مقدار ۲۵ برای X در معادله سود باعث می‌شود:

$$Z = ۲۰X - ۵X = ۲۰(۲۵) - ۵(۲۵) \Rightarrow Z = ۳۷۵ \text{ ریال}$$

بنابراین، اگر مدیر تصمیم به تولید ۲۵ واحد از محصول بگیرد، مؤسسه سودی معادل ۳۷۵ ریال حصول خواهد کرد. توجه داشته باشید که مقدار متغیر تصمیم بیانگر تصمیم واقعی مدیر نیست، بلکه به منزلهٔ «اطلاعات»[1] است که مدیر را در اتخاذ تصمیم واقعی یاری خواهد داد. پس اطلاعات بیانگر داده‌های پردازش شده توسط مدل حل شده می‌باشند.

۱.۵.۵ اجرای نتایج

فنون حل مسأله در OR فراهم‌کنندهٔ اطلاعاتی هستند که مدیر را در تصمیم‌گیری بهتر یاری می‌دهند. البته مدیر نباید نتایج حاصل از حل مدل را بدون تفکر و تعمق مدیریتی بکارگیرد. در تصمیم‌گیری نهایی، مدیر باید اطلاعات حاصل از حل مدل و تجربیات خود و مشاوران را ترکیب نماید. چنانچه مدیر اطلاعات بدست آمده از حل مدل را با استفاده از فنون OR بلااستفاده بگذارد، عملاً باید تمامی مراحل طی شده در فرآیند علمی OR را به فراموشی سپرد. مطالعهٔ علمی تا زمانیکه به مورد اجرا گذاشته نشود از ارزش ناچیزی برخوردار است. ارزش واقعی فرآیند مطالعهٔ علمی به تأثیر آن بر عملکرد سیستم مورد مطالعه خواهد بود.

۱.۵.۶ تکرار پذیر بودن فرآیند OR

تکمیل مراحل پنجگانهٔ فرآیند OR ضرورتاً به معنای اکمال فرآیند نیست. ای بسا در هر مرحله از ساخت مدل، حل و اجراء ضرورت بازنگری پدید آید. به عنوان مثال در بسیاری از موارد در حین ساخت مدل ممکن است بعدی جدید از مسأله روشن شود و یا اینکه در مرحله حل مدل و یا اجرای آن نیاز به تغییر ساختار مدل و یا تعریف مسأله بوجود آید. بنابراین در هر مرحله نیاز به «بازخور» ضرورت پیدا می‌کند. همچنین اطلاعات جدید بدست آمده از محیط و آیندهٔ

---

1. Information

سازمان ممکن است تماماً ساختار مسأله و مدل را تحت تأثیر قرار دهد. بنابراین با گذر زمان و روشن شدن افق مسأله، فرآیند OR تکرار می‌شود و این تفکر که «برای یک مسأله فقط یک مدل و یک جواب وجود دارد و لاغیر»، مردود خواهد بود و همواره باید مدل را بازنگری و بازسازی کرد. بازنگری در هر مرحله فرآیند OR با استفاده از عامل «بازخور» در سیستم و یا فرآیند حاصل می‌شود.

براساس شکل ۱.۴ درمی‌یابیم که به مجموعه فنون ساخت مدل و حل آن، فنون تحقیق در عملیات گویند نتیجهٔ حاصل از مجموعه فنون OR را اطلاعات گویند که ملاک تصمیم‌گیری نهایی مدیریت قرار می‌گیرد.

۱.۶ قلمرو استفاده از OR

در حالی که مطالعات نسبتاً اندکی در خصوص میزان توسعه و موفقیت فنون تحقیق در عملیات انجام گرفته است، شواهد نشان می‌دهد که به کارگیری فنون OR با نتایج جالب توجهی همراه بوده است. جزئیات یک بررسی که توسط «انجمن مدیریت آمریکا» منتشر شده است، نشان می‌دهد که از مجموع ۳۲۴ شرکتی که از فنون تحقیق در عملیات استفاده کرده‌اند ۱۳۰ شرکت آنها بهبود قابل توجهی در عملیات گزارش کرده‌اند. هفده شرکت اعلام کرده‌اند که در اثر استفاده از فنون OR صرفه‌جویی بیش از صدهزار دلار داشته‌اند و ۱۸ شرکت صرفه‌جویی بیش از ۳۰۰ هزار دلار را اظهار کرده‌اند. اگرچه بسیاری از آنها تمایل بیشتر به استفاده از فنون OR پس از اولین استفاده نشان داده‌اند تنها ۲ شرکت از ۳۲۴ شرکت اظهار داشته‌اند که میزان توجه آنها به استفاده از فنون OR کاهش یافته است. البته هیچ یک اظهار به قطع استفاده از فنون OR نکرده‌اند.

دیگر تحقیقات نشان می‌دهند که میزان منافع حاصل از فنون OR در مؤسسات روبه رشد است و نرخ استفاده از فنون تحقیق در عملیات صعودی است. با این وجود وسعت استفاده از فنون OR با توجه به نوع کاربرد متفاوت است. جدول ۱.۱ چگونگی استفاده از فنون OR را با توجه به زمینه‌های مختلف نشان می‌دهد. نتایج جدول نشان می‌دهد که بیشترین کاربرد فنون OR در زمینه «تولید» و «برنامه‌ریزی بلندمدت» بوده است.

بررسیهای به عمل آمده از تحقیقات نشان می‌دهد که میزان استفاده از مدلهای OR با توجه به پیچیدگی ریاضی مدل، حجم داده‌های مورد استفاده مدل متفاوت است. یک بررسی اجمالی و کیفی نشان می‌دهد که فراوانی استفاده از مدلهای برنامه‌ریزی خطی بیشتر از سایر مدلها می‌باشد. با این وجود فراوانی استفاده از مدلهای OR در مقایسه با هم متفاوت است که خلاصه آن در جدول ۱.۲ آمده است.

جدول ۱.۱ مقایسهٔ زمینه‌های کاربردی فنون OR

زمینه کاربردی	بررسی ۱۹۵۸ AMA n = ۶۳۱ (درصد)	۱۹۵۸ هووی - واگنر n = ۹۰ مؤسسه (درصد)	۱۹۶۵ شوماخر ـ اسمیت n = ۶۵ مؤسسه (درصد)	۱۹۷۵ گی‌تر n = ۲۷۵ مؤسسه (درصد)
تولید	۲۴	۳۲	۶۸	۴۹
برنامه‌ریزی بلندمدت	۲۳	۳۹	۵۵	داده وجود ندارد.
فروش و بازاریابی	۲۵	۱۴	۲۰	۱۶
کنترل موجودی	۲۱	۳۱	۶۸	۳۱
حمل‌ونقل	۱۵	۱۸	۴۱	۹
مدیریت عالی	۱۵	داده وجود ندارد.	داده وجود ندارد.	داده وجود ندارد.
پژوهش	۱۴	داده وجود ندارد.	داده وجود ندارد.	داده وجود ندارد.
مالی	۱۳	داده وجود ندارد.	داده وجود ندارد.	داده وجود ندارد.
حسابداری	۱۱	۱۱	۱۳	داده وجود ندارد.
خرید	۸	داده وجود ندارد.	داده وجود ندارد.	داده وجود ندارد.
پرسنلی	۸	داده وجود ندارد.	داده وجود ندارد.	داده وجود ندارد.
کنترل کیفیت	داده وجود ندارد.	۲۲	۳۸	۲۰
تعمیر و نگهداری	داده وجود ندارد.	۱۱	۲۴	۱۹
مکان‌یابی کارخانه	داده وجود ندارد.	۱۰	۲۴	۱۱
جایگزینی تجهیزات	داده وجود ندارد.	۱۰	۲۰	۱۲
بسته‌بندی	داده وجود ندارد.	۹	۵	داده وجود ندارد.
بودجه‌بندی سرمایه	داده وجود ندارد.	۷	۲۹	۲۰
شرکتهایی که از فنون OR استفاده می‌کنند	داده وجود ندارد.	۴۲/۶	۶۱/۵	۴۸/۴

جدول ۱.۲ فراوانی استفاده از مدلهای OR

نام مدل	فراوانی	نام مدل	فراوانی
برنامه‌ریزی خطی	بسیار زیاد	شبیه سازی	زیاد
برنامه‌ریزی عدد صحیح	بسیار زیاد	برنامه‌ریزی پویا	کم
برنامه‌ریزی آرمانی	بسیار زیاد	تئوری صف	کم
حمل‌ونقل و تخصیص	زیاد	فرآیندهای مارکوفی	کم
کنترل موجودی	زیاد	تحلیل تصمیم	کم
مدلهای شبکه	زیاد	برنامه‌ریزی غیرخطی	کم
PERT-CPM	زیاد	روشهای جستجو	کم

به دلیل اهمیت تحقیق در عملیات و به منظور فعالیت در این زمینه، انجمنهای حرفه‌ای در کشورهای مختلف بوجود آمده‌اند. در سال ۱۹۵۲ «انجمن تحقیق در عملیات» آمریکا پایه‌گذاری شد، که امروزه ۸۰۰۰ عضو دارد. «مؤسسه علوم مدیریت» نیز که در سال ۱۹۵۳ تأسیس گردید، اکنون دارای ۶۵۰۰ عضو است. هریک از این دو انجمن نشریه‌ای خاص خود دارند، که به ترتیب با نام «تحقیق در عملیات» و «علوم مدیریت» منتشر می‌شوند. این دو انجمن مشترکاً نیز نشریه «ریاضیات تحقیق در عملیات» و «فصل مشترکها» را چاپ می‌کنند. علاوه بر نشریات فوق، نشریات علمی مشابهی در کشورهای امریکا، انگلیس، فرانسه، هندوستان، ژاپن، کانادا و آلمان غربی به چاپ می‌رسند. در حقیقت بیست و نه کشور (از جمله آمریکا) عضو «فدراسیون بین‌المللی انجمنهای تحقیق در عملیات» هستند و هر کدام نیز یک انجمن ملی تحقیق در عملیات دارند.

۱.۷ خلاصه فصل اوّل

تحقیق در عملیات عبارتست از کاربرد روش علمی برای تحلیل و حل مسائل و تصمیمات مدیریتی است. تاریخچهٔ تحقیق در عملیات به جنگ جهانی دوّم برمی‌گردد که تاکنون گسترش چشمگیری داشته است. امروزه تحقیق در عملیات در قالب عناوینی چون؛ علم مدیریت، روشهای مقداری، تحلیل مقداری و علم تصمیم‌گیری در بین سایر علوم دانشگاهی بیان می‌گردد.

تحقیق در عملیات دارای ویژگیهای متعددی است که از مهمترین آنها می‌توان نگاه سیستمی به مسأله و بین رشته‌ای بودن این علم را بیان کرد. همچنین رویکرد تحقیق در عملیات برای حل مسأله را می‌توان به شرح زیر ذکر نمود:

۱- مشاهده ۲- تعریف مسأله ۳- ساختن مدل ۴- حل مدل ۵- اجرای نتایج مدل

در انتهای فصل نیز قلمرو استفاده از OR و وسعت کاربرد آن آورده شده است.

۱.۸ مسائل فصل

۱.۸.۱ سؤالات تکمیلی و چهارگزینه‌ای

۱. کاربرد روش علمی برای تحلیل و حل مسائل و تصمیمهای مدیریتی را .... گویند.

۲. در رابطهٔ $Z = 10X - 2X$، متغیر Z یک متغیر .... است.

۳. در رابطهٔ $Z = 80X - 10X$، متغیر X یک متغیر .... است.

۴. حل مدل به منزلهٔ حل .... است.

۵. شبیه سازی یکی از فنون .... تحقیق در عملیات است.

۶. در فرآیند تحقیق در عملیات پس از مشاهده باید:

الف) مسأله را تعریف کرد. ب) مدل را حل کرد.

ج) مدل را ساخت. د) مدل را اجرا کرد.

۷. کدامیک از فنون زیر در دستهٔ فنون قطعی OR قرار می‌گیرند؟

الف) CPM ب) حمل‌ونقل

ج) فرآیندهای مادکوفی د) شبیه سازی

۸. کدامیک از مدلهای زیر، انتزاعی‌ترین نوع مدلها است؟

الف) شمایلی ب) قیاسی

ج) ریاضی د) شمایلی و قیاسی

۹. فراوانی استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی در OR کدام است؟

الف) بسیار زیاد ب) زیاد

ج) کم د) بسیار کم

۱۰. کدامیک از اصطلاحات زیر مترادف علم تحقیق در عملیات است؟

الف) علم مدیریت ب) تحلیل مقداری

ج) پژوهش عملیاتی د) (الف، ب و ج)

۱۱. شکل‌گیری تحقیق در عملیات از چه سازمانهایی شروع شد؟

الف) بازرگانی ب) نظامی

ج) بیمارستانها د) خدماتی

۱۲. کانون توجه OR بر چیست؟

الف) حل مسأله ب) فرضیه سازی

ج) تصمیم‌گیری د) سازماندهی

۱۳. کدامیک از نرم‌افزارهای زیر آموزشی است؟

الف) QSB^+ ب) LINDO

ج) GAMS د) LINGO

۱۴. در معادلهٔ $Z = 40x - 5x$، عدد ۲۰ را با چه اصطلاحی ذکر می‌کنند؟

الف) متغیر　　ب) متغیر وابسته

ج) متغیر مستقل　　د) پارامتر

۱۵. بیشترین زمینه بکارگیری فنون OR کدامیک از موارد زیر است؟

الف) خرید　　ب) حمل‌ونقل

ج) تولید　　د) بسته‌بندی

۱.۸.۲ تمرینات

۱. دلایل استفاده از مدلهای ریاضی را بنویسید؟

۲. اجزاء سیستم را بنویسید و هریک را توضیح دهید؟

۳. ویژگیهای تحقیق در عملیات را بنویسید؟

۴. روش اساسی تعیین عناصر محیط سیستم (رویه چرچمن) را بنویسید؟

۵. فرآیند تصمیم‌گیری را توضیح دهید؟

۶. روش علمی را توضیح دهید؟

۷. فرآیند تحقیق در عملیات را توضیح دهید؟

۸. مدلهای ترکیبی در تحقیق در عملیات، چه نوع مدلهایی هستند؟

۱.۹ پاسخنامه سؤالات تکمیلی و چهارگزینه‌ای :

۱. تحقیق در عملیات	۲. وابسته	۳. مستقل	۴. مسأله
۵. ترکیبی	۶. الف	۷. ب	۸. ج
۹. الف	۱۰. د	۱۱. ب	۱۲. ج
۱۳. الف	۱۴. د	۱۵. الف	

فصل دوم

برنامه‌ریزی خطی[1]

(مدلسازی)[2]

اهداف فصل

هدف اصلی این فصل آشنایی دانشجویان با صورت کلی برنامه‌ریزی خطی (LP) است. در این فصل با ارائه نمونه‌های مختلف، علم و هنر مدلسازی خطی به دانشجویان آموخته می‌شود.

۲.۱ مقدمه

پیچیدگی و ناآرام بودن محیط سازمانها، باعث شده است که مدیران به آسانی تصمیم‌گیری نکنند. مدیران برای رسیدن به یک هدف مشخص با محدودیتهای بسیاری چون محدودیت منابع، انرژی، نیروی انسانی، مواد، پول و ... مواجه هستند. هدف اغلب مدیران و سازمانها، رسیدن به سود بیشتر و یا به عبارت دیگر حداکثر کردن[3] سود می‌باشد. در ضمن سازمانهایی وجود دارند که درصدد حداقل کردن[4] هزینه، ضایعات و ... خود هستند.

با افزایش عوامل و فاکتورهای تصمیم‌گیری و با تنوع محدودیتهای نیل به هدف، مدیر ناچار است که از روشهای کمّی برای برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری استفاده کند. یکی از روشهای متداول برای بهینه کردن یک هدف با توجه به محدودیتهای مختلف، برنامه‌ریزی خطی است. همچنانکه در فصل قبل گفته شد، برنامه‌ریزی خطی شامل مدلی است که دارای یک تابع هدف و چند محدودیت است که روابط خطی بین متغیرهای آن در تابع هدف و محدودیتها وجود دارد.

سه گام اساسی در بکارگیری برنامه‌ریزی خطی در عمل باید در نظر گرفته شود. اولاً؛ مسأله باید به گونه‌ای تعریف شود که با استفاده از برنامه‌ریزی خطی قابل حل باشد. دوماً؛ مسأله باید در قالب یک مدل ریاضی فرموله شود. ثالثاً؛ مسأله باید با استفاده از یک تکنیک مشخص ریاضی قابل حل باشد. نام برنامه‌ریزی خطی برگرفته است از این واقعیت است که؛

1. Linear Programming
2. Model Formulation
3. Maximize
4. Minimize

«روابط کارکردی [1] در مدل ریاضی خطی هستند و تکنیک حل مدل شامل مراحل ریاضی از پیش تعیین شده به عنوان یک برنامه [2] می‌باشد.»

۲.۲ مدلسازی

هر مدل برنامه‌ریزی خطی شامل اجزاء و ویژگیهای مشخصی است. اجزاء مدل عبارتند از؛ متغیرهای تصمیم [3]، تابع هدف [4] و محدودیتهای مدل. ساختار تابع هدف و محدودیتهای مدل برنامه‌ریزی خطی از متغیرهای تصمیم و پارامترها شکل می‌گیرد. «متغیرهای تصمیم شامل نمادهای ریاضی است که سطح فعالیت هر مؤسسه را بیان می‌کنند.» به عنوان مثال یک کارخانه سازندهٔ وسایل الکتریکی را در نظر بگیرید که تمایل دارد x_1 رادیو، x_2 تلویزیون و x_3 ویدیو تولید کند. نمادهای x_1 ، x_2 و x_3 هر یک بیانگر مقادیر ناشناخته از سطح تولید رادیو، تلویزیون و ویدیو هستند. مقادیر نهایی x_1 ، x_2 و x_3 که بوسیلهٔ کارخانه تعیین می‌شود، یک «تصمیم» را برای کارخانه بیان می‌کند (برای مثال $x_1 = 100$ بیانگر این است که کارخانه تصمیم گرفته است که ۱۰۰ دستگاه رادیو تولید کند).

تابع هدف مدل یک رابطهٔ ریاضی خطی است که هدف مؤسسه را در قالب متغیرهای تصمیم توصیف می‌کند. تابع هدف همواره به صورت «حداکثر کردن» و یا «حداقل کردن» بیان می‌شود. (برای مثال حداکثر کردن سود و یا حداقل کردن هزینهٔ کالاهای تولیدی ممکن است هدف کارخانه باشد). محدودیتهای مدل نیز بیانگر روابط خطی بین متغیرهای تصمیم هستند. محدودیتها بوسیلهٔ محیط عملیاتی [5] به مؤسسه تحمیل می‌شوند. محدودیتها اغلب ناشی از محدودیت منابع و یا «سیاستگذاریهای» داخلی مؤسسه می‌باشند. برای مثال اگر فقط ۴۰ ساعت کاری برای تولید رادیو در کارخانه موجود باشد، کارخانه ناچار است این محدودیت را در نیل به هدف در نظر داشته باشد. مقادیری که به صورت «مقادیر ثابت در تابع هدف و در محدودیتها بیان می‌شود (همانند ۴۰ ساعت کار در دسترس)، پارامترهای مدل خوانده می‌شوند.»

برای فرموله کردن هر مسأله‌ای می‌توان یک چارچوب منظم [6] را اعمال کرد. ما در این کتاب توصیه می‌کنیم که همواره مراحل زیر را برای فرموله کردن اعمال کنید.

مرحله اوّل: متغیرهای تصمیم را تعریف کنید.

مرحله دوّم: تابع هدف را فرموله کنید.

مرحله سوّم: محدودیتهای مدل را فرموله کنید.

---

1. Functional Relationships
2. Programe
3. Decision Variables
4. objective function
5. Operating Environment
6. Systematic Format

هنر فرموله کردن یک مسأله در دنیای واقعی بسیار پیچیده و وقت‌گیر است. و البته همچنانکه اکاف[1] بیان می‌کند، کاملاً شبیه هنر کوزه‌گری است که در ضمن ساختن آن باید هربار برای بهبود مدل و زیباسازی آن تلاش کرد. با این وجود، تجربه نشان داده است که رعایت مراحل فوق فرد مبتدی را در مدلسازی یاری خواهد داد. بنابراین بجای در نظر گرفتن کل مسأله، باید آنرا به صورت جزء به جزء شناخت و سپس فرموله نمود. در ضمن قبل از هر اقدامی برای فرموله کردن مسأله باید بخوبی آن را مطالعه کرد و پس از درک اجزاء آن، فرموله کردن مسأله را آغاز نمود.

مراحل سه‌گانهٔ فرموله کردن به تفصیل در بخش بعدی ضمن بیان مثالهایی کاربردی تشریح می‌شود. مسائلی که در بخش بعدی فرموله می‌شوند، مسائل مبتلا به سازمانها هستند که دانشجو با فراگیری آنها باید قادر به فرموله کردن اکثر مسائل واقعی با اندک تغییراتی باشد.

۲.۳ مثالهایی کاربردی از مدلسازی

۲.۳.۱ مسأله ترکیب تولید

شرکتی می‌خواهد بداند که از هر یک از سه محصولش چه مقدار تولید کند تا با رعایت محدودیت منابع حداکثر سود کل را نایل شود. نیروی کار و مواد مورد نیاز و همچنین سهم سود هر یک از سه محصول در جدول زیر آمده است:

	منابع مورد نیاز			
منابع	محصول ۱	محصول ۲	محصول ۳	مقدار در دسترس
نیروی کار (ساعت / واحد)	۵	۲	۴	۲۴۰ ساعت
مواد (کیلوگرم / واحد)	۴	۶	۳	۴۰۰ کیلوگرم
سهم سود هر واحد	۳/	۵	۲	—

نیروی کار موجود روزانه ۲۴۰ ساعت و مواد در دسترس در هر روز ۴۰۰ کیلوگرم می‌باشد. هدف تعیین مقدار تولید از سه محصول است به طوری که سود کل حاصل از تولید آنها حداکثر شود. حال این مسأله را در قالب یک مدل برنامه‌ریزی خطی با عنایت به چارچوب بیان شده در بخش ۲. ۲ فرموله می‌کنیم.

1. Ackoff

متغیرهای تصمیم مسأله :

سه متغیر تصمیم این مسأله، مقدار تولید محصول ۱، ۲ و ۳ است که باید در طول روز تولید شوند. این مقادیر را می‌توان با نمادهای زیر بیان نمود:

مقدار تولید از محصول ۱ : x_1

مقدار تولید از محصول ۲ : x_2

مقدار تولید از محصول ۳ : x_3

تابع هدف :

تابع هدف مسأله، حداکثرکردن سودکل حاصل از تولید سه محصول است. کل سود، از مجموع سود هر سه محصول بدست می‌آید. سود هر محصول از حاصلضرب سود ناشی از هر یک واحد در مقدار تولید آن بدست می‌آید. سود محصول ۱، از ضرب، سود یک واحد از آن در مقدار تولید آن، $۳x_1$، و سود محصول ۲، از ضرب سود یک واحد از آن در مقدار تولید آن، $۵x_2$، و سود محصول ۳، از ضرب سود یک واحد از آن در مقدار تولید آن، $۲x_3$، بدست می‌آید. بنابراین سود کل، Z، عبارت است از:

$$\text{Maximize } Z = ۳x_1 + ۵x_2 + ۲x_3$$

محدودیتهای مدل :

در این مسأله، محدودیتها شامل مقادیر محدود نیروی کار و مواد در دسترس برای تولید هستند. تولید هر یک از سه محصول به نیروی کار و مواد بستگی دارد. نیروی کار لازم برای تولید هر یک واحد از محصول اوّل ۵ ساعت است. بنابراین کل نیروی کار لازم برای تولید محصول ۱، $۵x_1$ است. همینطور محصول ۲ مساوی با، $۲x_2$ ساعت و محصول ۳ مساوی با $۴x_3$ ساعت نیروی کار نیاز دارند. کل موجودی نیروی کار نیز ۲۴۰ ساعت است. بنابراین محدودیت نیروی کار عبارت است از:

نیروی کار - ساعت $\quad ۵x_1 + ۲x_2 + ۴x_3 \leq ۲۴۰$

محدودیت مواد نیز به همین طریق فرموله می‌شود. برای تولید هر یک واحد محصول ۴ کیلوگرم مواد، برای هر واحد محصول ۲، ۶کیلوگرم و برای هر واحد از محصول ۳، سه کیلوگرم مواد مورد نیاز است. پس می‌توان محدودیت مواد را بدین گونه نوشت:

مواد - کیلوگرم $\quad ۴x_1 + ۶x_2 + ۳x_3 \leq ۴۰۰$

علاوه بر محدودیتهای فوق، دسته‌ای دیگر از محدودیتها را باید اضافه کرد که بیان کنندهٔ «نامنفی بودن» متغیرهای تصمیم می‌باشند. چراکه تولید منفی از یک محصول غیرمنطقی و نامفهوم است. این محدودیتها از نظر ریاضی چنین بیان می‌شوند:

$x_1 \geq 0$ و $x_2 \geq 0$ و $x_3 \geq 0$

در اکثر مسائل برنامه‌ریزی خطی شرط نامنفی بودن متغیرها وجود دارد. امّا چنانچه مسأله‌ای مستلزم استفاده از متغیرهای منفی باشد می‌توان روش حل مسایل برنامه‌ریزی خطی را باز هم بکار برد. وجود یک یا چند متغیر منفی در مسأله برنامه‌ریزی خطی زمانی رخ می‌دهد که متغیر تصمیم بیانگر سود یا زیان شرکت و یا نرخ رشد تولید یا نرخ کاهش تولید باشد. زیان‌ده بودن بازده شرکت و یا کاهش نرخ رشد به معنای وجود یک متغیر تصمیم است.

در فرموله کردن محدودیتهای مدل، این سؤال ممکن است مطرح شود که چرا از نامساوی $\leq$ استفاده شده است در حالی که از تساوی (=) نیز می‌توان استفاده کرد. شرط تساوی به معنی مصرف تمام منابع در تولید سه محصول است. در حالی که شرط کوچکتر یا مساوی ($\leq$) اجازه می‌دهد که اگر شرط بهینگی (جواب نهایی) ایجاب نماید، مقداری از منابع بدون استفاده باقی بماند. در بعضی از موارد راه حلی که مقداری از منبعی را بدون استفاده باقی می‌گذارد، نتیجه‌ای بهتر یا سودی بیشتر، در مقایسه با جوابی که تمام منابع را استفاده می‌کند نتیجه می‌دهد. نامساوی $\leq$ به سادگی شرایط انعطاف‌پذیری برای این گونه موارد پدید می‌آورد.

مدل خلاصه شدهٔ مسأله ترکیب تولید :

مسأله برنامه‌ریزی خطی را به طور کامل و استاندارد به صورت زیر می‌توان خلاصه نمود:

بیشینه کردن $Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$

به شرط آنکه :

$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 240$

$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 400$

x_1 و x_2 و $x_3 \geq 0$

۲.۳.۲ مسأله رژیم غذایی

مدیر هتل استقلال درصدد تهیهٔ یک برنامهٔ غذایی برای صبحانهٔ میهمانان خود می‌باشد. مدیر هتل در تلاش است که صبحانه در عالیترین شکل دارای کالری کلسیم، پروتئین و فیبر باشد و چربی و کلسترول آن در حد پایینی باشد. همچنین وی درصدد حداقل کردن کل هزینهٔ صبحانه است. جدول زیر نشان‌دهندهٔ مشخصات هر یک از غذاها با ترکیبات موجود در آنها می‌باشد. ستون آخر جدول نشان‌دهندهٔ هزینهٔ هر غذا می‌باشد.

نام غذا	کالری	چربی (g)	کلسترول (mg)	آهن (mg)	کلسیم (mg)	پروتئین (g)	فیبر (g)	هزینه (ریال)
۱. آرد بادام (فنجان)	۹۰	۰	۰	۶	۲۰	۳	۵	۱۸۰
۲. آردبرنج (فنجان)	۱۱۰	۲	۰	۴	۴۸	۴	۲	۲۲۰
۳. سوپ جو (فنجان)	۱۰۰	۲	۰	۲	۱۲	۵	۳	۱۰۰
۴. پنیر (قاچ)	۹۰	۲	۰	۳	۸	۶	۴	۱۲۰
۵. تخم‌مرغ (عدد)	۷۵	۵	۲۷۰	۱	۳۰	۷	۰	۱۰۰
۶. گوشت گوسفند (قاچ)	۳۵	۳	۸	۰	۰	۲	۰	۹۰
۷. پرتقال (عدد)	۶۵	۰	۰	۱	۲۵	۱	۱	۴۰
۸. شیر (۲٪ فنجان)	۱۰۰	۴	۱۲	۰	۲۵۰	۹	۰	۱۶۰
۹. آب انار (فنجان)	۱۲۰	۰	۰	۰	۳	۱	۰	۵۰۰
۱۰. نان برشته (قاچ)	۶۵	۱	۰	۱	۲۶	۳	۳	۷۰

مدیر هتل می‌خواهد که برنامهٔ غذایی دارای حداقل ۴۲۰ کالری، ۵ میلی‌گرم آهن، ۴۰۰ میلی‌گرم کلسیم، ۲۰ گرم پروتئین و ۱۲ گرم فیبر باشد. همچنین او می‌خواهد که میزان چربی بیشتر از ۲۰ گرم و میزان کلسترول بیشتر از ۳۰ میلی‌گرم نباشد.

حال مسأله را به گونه‌ای فرموله خواهیم کرد که ضمن ارائه یک برنامهٔ غذایی مطلوب، هزینهٔ آن حداقل گردد.

متغیرهای تصمیم مسأله :

این مسأله دارای ۱۰ متغیر تضمیم است که بیانگر مقدار استاندارد از هر نوع غذا است که در برنامهٔ نهایی صبحانه استفاده خواهند شد. به شرح زیر:

تعداد فنجان آرد بادام $x_{۱}$:

تعداد فنجان آرد برنج $x_{۲}$:

تعداد فنجان سوپ جو $x_{۳}$:

تعداد قاچ پنیر $x_{۴}$:

تعداد تخم‌مرغ $x_{۵}$:

تعداد قاچ گوشت گوسفند $x_{۶}$:

تعداد پرتغال $x_{۷}$:

تعداد فنجان شیر $x_{۸}$:

تعداد فنجان آب انار $x_{۹}$:

تعداد قاچ نان برشته $x_{۱۰}$:

تابع هدف :

هدف در این مسأله حداقل کردن هزینهٔ هر صبحانه و برنامهٔ غذایی است. کل هزینه از مجموع هزینه‌های هریک از غذاها در برنامهٔ صبحانه حاصل می‌شود. به صورت زیر:

$$\text{Minimize } Z = ۱۸۰\,x_۱ + ۲۲۰\,x_۲ + ۱۰۰\,x_۳ + ۱۲۰\,x_۴ + ۱۰۰\,x_۵ + ۹۰\,x_۶ + ۴۰\,x_۷ + ۱۶۰\,x_۸ + ۵۰۰\,x_۹ + ۷۰\,x_{۱۰}$$

محدودیتهای مدل :

محدودیتها عبارتند از سطوح مورد نیاز از هر یک از ترکیبات مواد برای هر مهمان می‌باشد که باید در برنامهٔ صبحانه دیده شود. به شرح زیر:

$۹۰\,x_۱ + ۱۱۰\,x_۲ + ۱۰۰\,x_۳ + ۹۰\,x_۴ + ۷۵\,x_۵ + ۳۵\,x_۶ + ۶۵\,x_۷ + ۱۰۰\,x_۸ + ۱۲۰\,x_۹ + ۶۵\,x_{۱۰}$ کالری ۴۲۰ $\geq$

$۲\,x_۱ + ۲\,x_۳ + ۲\,x_۴ + ۵\,x_۵ + ۳\,x_۶ + ۴\,x_۸ + x_{۱۰}$ گرم چربی ۲۰ $\leq$

$۲۷۰\,x_۵ + ۸\,x_۶ + ۱۲\,x_۸$ میلی‌گرم کلسترول ۳۰ $\leq$

$۶\,x_۱ + ۴\,x_۲ + ۲\,x_۳ + ۳\,x_۴ + x_۵ + x_۷ + x_{۱۰}$ میلی‌گرم آهن ۵ $\geq$

$۲۰\,x_۱ + ۴۸\,x_۲ + ۱۲\,x_۳ + ۸\,x_۴ + ۳۰\,x_۵ + ۲۵\,x_۷ + ۲۵۰\,x_۸ + ۳\,x_۹ + ۲۶\,x_{۱۰}$ میلی‌گرم کلسیم ۴۰۰ $\geq$

$۳\,x_۱ + ۴\,x_۲ + ۵\,x_۳ + ۶\,x_۴ + ۷\,x_۵ + ۲\,x_۶ + x_۷ + ۹\,x_۸ + x_۹ + ۳\,x_{۱۰}$ گرم پروتئین ۲۰ $\geq$

$۵\,x_۱ + ۲\,x_۲ + ۳\,x_۳ + ۴\,x_۴ + x_۷ + ۳\,x_{۱۰}$ گرم فیبر ۱۲ $\geq$

خلاصه مدل :

با اضافه کردن محدودیتهای غیرمنفی، مدل کامل برنامه‌ریزی خطی برای رژیم غذایی صبحانه هتل استقلال به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\text{Min } Z = ۱۸۰\,x_۱ + ۲۲۰\,x_۲ + ۱۰۰\,x_۳ + ۱۲۰\,x_۴ + ۱۰۰\,x_۵ + ۹۰\,x_۶ + ۴۰\,x_۷ + ۱۶۰\,x_۸ + ۵۰۰\,x_۹ + ۷۰\,x_{۱۰}$$

S.t:

$$۹۰\,x_۱ + ۱۱۰\,x_۲ + ۱۰۰\,x_۳ + ۹۰\,x_۴ + ۷۵\,x_۵ + ۳۵\,x_۶ + ۶۵\,x_۷ + ۱۰۰\,x_۸ + ۱۲۰\,x_۹ + ۶۵\,x_{۱۰} \geq ۴۲۰$$

$$۲\,x_۲ + ۲\,x_۳ + ۲\,x_۴ + ۵\,x_۵ + ۳\,x_۶ + ۴\,x_۸ + x_{۱۰} \leq ۲۰$$

$$۲۷۰\,x_۵ + ۸\,x_۶ + ۱۲\,x_۸ \leq ۳۰$$

$$۶\,x_۱ + ۴\,x_۲ + ۲\,x_۳ + ۳\,x_۴ + x_۵ + x_۷ + x_{۱۰} \geq ۵$$

$$۲۰\,x_۱ + ۴۸\,x_۲ + ۱۲\,x_۳ + ۸\,x_۴ + ۳۰\,x_۵ + ۲۵\,x_۷ + ۲۵۰\,x_۸ + ۳\,x_۹ + ۲۶\,x_{۱۰} \geq ۴۰۰$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 2x_6 + x_7 + 9x_8 + x_9 + 3x_{10} \geq 20$$
$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_7 + 3x_{10} \geq 12$$
$$x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } x_3 \text{ و } x_4 \text{ و } x_5 \text{ و } x_6 \text{ و } x_7 \text{ و } x_8 \text{ و } x_9 \text{ و } x_{10} \geq 0$$

۲.۳.۳ مسأله سرمایه‌گذاری

شخصی هفتاد میلیون ریال سرمایه دارد که می‌خواهد در بخشهای مختلف سرمایه‌گذاری نماید. زمینه‌های مختلف سرمایه‌گذاری عبارتند از: اوراق قرضه با ۸/۵٪ بازده سالانه، سپرده بانکی با ۵٪ بازده سالانه، اسناد خزانه با ۶/۵٪ بازده سالانه و خرید سهام با ۱۳٪ بازده سالانه. زمینه‌های سرمایه‌گذاری همگی پس از یکسال قابل ارزیابی و بازنگری هستند. هر زمینه سرمایه‌گذاری دارای ریسک مختص بخود است. بنابراین سرمایه‌گذار به منظور کاهش ریسک درصدد تقسیم سرمایهٔ خود بین بخشهای مختلف سرمایه‌گذاری است. برای گریز از ریسک سرمایه‌گذار سیاست سرمایه‌گذاری را به صورت زیر مشخص کرده است:

۱. مجموع سرمایه‌گذاری در اوراق قرضه بیشتر از ۲۰٪ کل سرمایه نباشد.

۲. مبلغ سرمایه‌گذاری در سپرده بانکی بیش از مجموع سرمایه‌گذاری در سه زمینه دیگر نباشد.

۳. مجموع سرمایه‌گذاری در اسناد خزانه و سپرده بانکی حداقل ۳۰٪ کل سرمایه باشد.

۴. به منظور ایجاد حاشیه اطمینان نسبت مجموع سرمایه‌گذاری در سپرده بانکی و اسناد خزانه به مجموع سرمایه‌گذاری در اوراق قرضه و خرید سهام ۱/۲ به ۱ باشد.

حال مسأله را به منظور حداکثر کردن کل بازده سالانه ناشی از سرمایه‌گذاری در زمینه‌های مختلف فرموله خواهیم کرد. با توجه به این نکته که سرمایه‌گذار تمایل دارد کل سرمایه خود را سرمایه‌گذاری نماید.

متغیرهای تصمیم:

چهار متغیر تصمیم برای این مسأله وجود دارد که هر یک از آنها مبلغ سرمایه‌گذاری را در هر زمینهٔ خاص نشان می‌دهد.

مبلغ سرمایه‌گذاری در اوراق قرضه	X_1:
مبلغ سپرده بانکی	X_2:
مبلغ سرمایه‌گذاری در اسناد خزانه	X_3:
مبلغ سرمایه‌گذاری در خرید سهام	X_4:

تابع هدف :

هدف سرمایه‌گذار حداکثر کردن کل بازده سالانه ناشی از سرمایه‌گذاری در چهار زمینهٔ مختلف است. کل بازده از مجموع بازده هر یک از زمینه‌های سرمایه‌گذاری حاصل خواهد شد. بنابراین تابع هدف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Maximize } Z = ۰/۰۸۵x_۱ + ۰/۰۵x_۲ + ۰/۰۶۵x_۳ + ۰/۱۳۰x_۴$$

که در آن؛

مجموع بازده حاصل از تمام زمینه‌های سرمایه‌گذاری = Z

کل بازده ناشی از سرمایه‌گذاری در اوراق قرضه : $۰/۰۸۵x_۱$

کل بازده ناشی از سرمایه‌گذاری در سپرده‌بانکی : $۰/۰۵x_۲$

کل بازده ناشی از سرمایه‌گذاری در اسناد خزانه : $۰/۰۶x_۳$

کل بازده ناشی از سرمایه‌گذاری برای خرید سهام : $۰/۱۳x_۴$

می‌باشد.

محدودیتهای مدل :

در این مسأله، محدودیتها بیانگر سیاستهای تعیین شده برای تقسیم کل سرمایه در زمینه‌های مختلف سرمایه‌گذاری هستند. هر سیاست به صورت یک محدودیت ریاضی تعریف شده است.

اولین سیاست این بود که کل مبلغ قابل سرمایه‌گذاری در اوراق قرضه بیش از ۲۰٪ سرمایه نباشد. کل سرمایه هفتاد میلیون ریال است، پس ۲۰٪ آن چهارده میلیون ریال خواهد شد. بنابراین؛ محدودیت متناظر عبارتست از:

$x_۱ \leq ۱۴۰۰۰۰۰۰$ ریال

دیگر سیاست آن است که سرمایه‌گذاری در بانک (سپرده بانکی) بیش از کل مبلغ سرمایه‌گذاری در ۳ زمینه دیگر نباشد. از آنجا که میزان سپرده بانکی؛ $x_۲$ است و کل سرمایه‌گذاری در دیگر زمینه‌ها؛ $x_۱ + x_۳ + x_۴$ است. محدودیت متناظر عبارتست از:

$x_۲ \leq x_۱ + x_۳ + x_۴$

از آنجا که برای بکارگیری تکنیک حل در برنامه‌ریزی خطی لازم است که مدل به صورت استاندارد نوشته شود. پس کلیهٔ متغیرها به سمت چپ محدودیت انتقال خواهد یافت و سمت راست به صورت مقدار عددی تعریف می‌شود. بنابراین می‌توان محدودیت دوّم را به صورت زیر نوشت:

$x_۲ - x_۱ - x_۳ - x_۴ \leq ۰$

در سیاست سوّم مشخص شد که مجموع مبلغ سرمایه‌گذاری در سپرده بانکی و اسناد

خزانه حداقل ۳۰٪ کل سرمایه باشد. از آنجا که ۳۰٪، هفتاد میلیون ریال مساوی با ۲۱ میلیون ریال خواهد شد، پس می‌توان نوشت:

$x_2 + x_3 \geq 21000000$ ریال

سیاست چهارم بیانگر، نسبت سرمایه‌گذاری در سپرده بانکی و اسناد خزانه به مجموع سرمایه‌گذاری در اوراق قرضه و سهام است. این نسبت باید حداقل ۱/۲ به ۱ باشد. یعنی

$$\frac{x_2 + x_3}{x_1 + x_4} \geq 1/20$$

این محدودیت نیز در برنامه‌ریزی خطی یک محدودیت غیراستاندارد است. چون به صورت کسری تعریف شده است. پس باید آن را به صورت زیر تغییر داد:

$$x_2 + x_3 \geq 1/20\,(x_1 + x_4)$$

پس:

$$x_2 + x_3 - 1/20\,x_1 - 1/20\,x_4 \geq 0$$

نهایتاً، سرمایه‌گذار تمایل داشت که کل سرمایهٔ هفتاد میلیون ریالی خود را سرمایه‌گذاری کند. بنابراین مجموع سرمایه‌گذاری در چهار زمینه باید مساوی هفتاد میلیون ریال باشد. یعنی:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 70000000$ ریال

خلاصه مدل :

با اضافه کردن محدودیتهای غیرمنفی، مدل کامل مسأله سرمایه‌گذاری به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\text{Max } Z = 0/085\,x_1 + 0/050\,x_2 + 0/065\,x_3 + 0/130\,x_4$$

S.t:

$$\begin{aligned}
x_4 &\leq 14000000 \\
x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &\leq 0 \\
x_2 + x_3 &\geq 21000000 \\
-1/20\,x_1 + x_2 + x_3 - 1/20\,x_4 &\geq 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 70000000 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0.
\end{aligned}$$

۲.۳.۴ مسأله بازاریابی

یک فروشگاه زنجیره‌ای برای بالا بردن فروش خود درصدد است که تبلیغات را در سطح وسیعی برنامه‌ریزی کند. سه نوع وسیله تبلیغاتی موجود عبارتند از: آگهی تجاری تلویزیون، آگهی تجاری رادیو و ستون تبلیغاتی روزنامه. هزینه هر بار تبلیغات و تعداد مشتریانی که در معرض

هر بار تبلیغات قرار می‌گیرند، برحسب نوع وسیلهٔ تبلیغات در جدول زیر داده شده است:

وسیلهٔ تبلیغات	تعداد افرادی که در معرض تبلیغات قرار می‌گیرند	هزینه (تومان)
آگهی تجاری تلویزیون	۲۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰
آگهی تجاری رادیو	۱۲۰۰۰	۶۰۰۰۰
روزنامه	۹۰۰۰	۴۰۰۰۰

شرکت باید محدودیتهای زیر را در تبلیغات خود مدنظر داشته باشد:

۱. کل بودجهٔ تبلیغات ۱۰۰۰۰۰۰ تومان است.

۲. مجوز تعداد تبلیغات تلویزیون حداکثر چهار نوبت است.

۳. مجوز تعداد تبلیغات رادیو حداکثر ۱۰ نوبت است.

۴. مجوز تعداد آگهی روزنامه برای ۷ نوبت است.

۵. مجموع آگهیهای تبلیغاتی در سه وسیله نباید بیشتر از ۱۵ نوبت باشد.

حال مسأله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله می‌کنیم.

متغیرهای تصمیم :

در این مسأله ۳ نوع متغیر تصمیم وجود دارد که هر یک از آنها بیانگر تعداد تبلیغات در هر وسیله است. به شرح زیر:

تعداد آگهی تجاری تلویزیون : x_1

تعداد آگهی تجاری رادیو : x_2

تعداد آگهی تبلیغاتی روزنامه : x_3

تابع هدف :

تابع هدف این مسأله با مسائل قبلی متفاوت است. برخلاف مسائل قبلی که هدف حداکثر کردن سود و یا حداقل نمودن هزینه بود، در این مدل هدف این است که تعداد کل شنونده‌ای که در معرض آگهیهای تبلیغاتی شرکت قرار می‌گیرند، حداکثر شود.

در این مسأله اگر کل افراد شنونده‌ای که در معرض تبلیغات شرکت قرار می‌گیرند حداکثر شود، شرکت به هدف خود نایل شده است. یعنی:

$$\text{Maximize } Z = 20000\,x_1 + 12000\,x_2 + 9000\,x_3$$

که در آن؛

کل شنونده‌هایی است که در معرض تبلیغات شرکت قرار می‌گیرند. Z

تعداد افرادی است که در معرض آگهیهای تجاری تلویزیون شرکت قرار می‌گیرند. $۲۰۰۰۰ x_1$:

تعداد افرادی است که در معرض آگهیهای تجاری رادیو شرکت قرار می‌گیرند. $۱۲۰۰۰ x_2$:

تعداد افرادی است که آگهیهای تبلیغاتی شرکت را در روزنامه مطالعه می‌کنند. $۹۰۰۰ x_3$:

محدودیتهای مدل :

اولین محدودیت مدل، محدودیت بودجهٔ تبلیغاتی شرکت است که یک میلیون تومان است. پس می‌توان این محدودیت را به صورت زیر فرموله کرد:

$۱۵۰۰۰۰ x_1 + ۶۰۰۰۰ x_2 + ۴۰۰۰۰ x_3 \leq ۱۰۰۰۰۰۰$ تومان

براساس جدول داده‌های مسأله، هزینه هر بار تبلیغ در تلویزیون، رادیو و روزنامه به ترتیب؛ ۱۵۰، ۶۰ و ۴۰ هزار تومان است. پس:

کل هزینهٔ تبلیغات در تلویزیون $۱۵۰۰۰۰ x_1$:

کل هزینهٔ تبلیغات در رادیو $۶۰۰۰۰ x_2$:

و کل هزینهٔ تبلیغات در روزنامه $۴۰۰۰۰ x_3$:

خواهد بود. پس مجموع آنها حداکثر باید مساوی با بودجهٔ شرکت باشد.

سه محدودیت دیگر شرکت از سهمیه اختصاص داده شده برای هر یک از وسایل تبلیغاتی بدست می‌آید. سهمیه تبلیغات شرکت برای تلویزیون، رادیو و روزنامه به ترتیب؛ ۴، ۱۰ و ۷ نوبت می‌باشد. بنابراین:

نوبت آگهی تلویزیون $x_1 \leq ۴$

نوبت آگهی رادیو $x_2 \leq ۱۰$

نوبت آگهی روزنامه $x_3 \leq ۷$

آخرین محدودیت کارکردی مدل، محدودیت مربوط به نوبتهای تبلیغاتی شرکت است که نباید بیش از ۱۵ نوبت باشد. این محدودیت نیز عبارتست از:

$x_1 + x_2 + x_3 \leq ۱۵$ نوبت تبلیغاتی

خلاصه مدل :

با اضافه کردن محدودیتهای غیرمنفی مدل کامل مسأله به شرح زیر فرموله می‌شود:

$$\text{Max } Z = ۲۰۰۰۰ x_1 + ۱۲۰۰۰ x_2 + ۹۰۰۰ x_3$$

s.t:

$$۱۵۰۰۰۰ x_۱ + ۶۰۰۰۰ x_۲ + ۴۰۰۰۰ x_۳ \leq ۱۰۰۰۰۰۰$$
$$x_۱ \leq ۴$$
$$x_۲ \leq ۱۰$$
$$x_۳ \leq ۷$$
$$x_۱ + x_۲ + x_۳ \leq ۱۵$$
$$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$$

۲.۳.۵ مسأله حمل‌ونقل

یک شرکت حمل‌ونقل درصدد حمل تلویزیونهای تولیدی از سه کارخانه به سه شهر مختلف است. عرضهٔ ماهانه هر کارخانه و تعداد تقاضای ماهانهٔ هر شهر در جداول زیر داده شده است:

کارخانه	عرضه تلویزیون
	دستگاه
۱. تهران	۳۰۰
۲. اراک	۲۰۰
۳. اصفهان	۲۰۰

شهر	تعداد تقاضا
A - شیراز	۱۵۰
B - بوشهر	۲۵۰
C - اهواز	۲۰۰

هزینهٔ حمل هر دستگاه تلویزیون از هر کارخانه به هر شهر به نسبت مسافت و کیفیت راه تغییر می‌کند و به شرح جدول زیر است (هزینه حمل به تومان است).

از کارخانه	به شهر A	B	C
۱	۱۶	۱۸	۱۱
۲	۱۴	۱۲	۱۳
۳	۱۳	۱۵	۱۷

مسأله را به گونه‌ای فرموله کنید که ضمن تأمین تقاضای هر شهر، کل هزینهٔ حمل نیز حداقل گردد:

متغیرهای تصمیم :

این مسأله دارای ۹ متغیر تصمیم است که بیانگر تعداد تلویزیون (دستگاه) حمل شده از هر کارخانه به هر شهر خواهد بود. یعنی:

x_{ij} : تعداد تلویزیون قابل حمل از کارخانه i ام به شهر j ام

که در آن؛

i= تهران (۱) و اراک (۲) و اصفهان (۳)

j= شیراز (A) و بوشهر (B) و اهواز (C)

خواهد بود.

برخلاف مسائل قبلی، متغیر تصمیم در این مسأله دارای دو «اندیس» می‌باشد. اندیس اوّل (i) بیانگر نام کارخانه و اندیس دوم (j) نشان‌دهندهٔ نام شهر خواهد بود. به عنوان مثال $x_{۳A}$ بیانگر تعداد تلویزیونی است که از کارخانه شماره ۳ (اصفهان) به شهر A (شیراز) حمل می‌شود.

تابع هدف :

تابع هدف عبارتست از حداقل کردن کل هزینهٔ حمل‌ونقل می‌باشد. بنابراین تابع هدف که‌از مجموع هزینهٔ حمل تلویزیون از هر کارخانه به هر شهر بدست می‌آید. به شرح زیر خواهد بود:

$$\text{Minimize } Z = ۱۶x_{۱A} + ۱۸x_{۱B} + ۱۱x_{۱C} + ۱۴x_{۲A} + ۱۲x_{۲B} + ۱۳x_{۲C} + ۱۳x_{۳A} + ۱۵x_{۳B} + ۱۷x_{۳C}$$

محدودیتهای مدل :

محدودیتهای این مسأله از تعداد تلویزیون قابل عرضه در هر کارخانه و تعداد تقاضای هر شهر ساخته می‌شوند. در مجموع شش محدودیت کارکردی برای مسأله وجود دارد. یک محدودیت به ازای هر کارخانهٔ عرضه‌کننده و یکی به ازای هر شهر تقاضاکننده، برای مثال کارخانه‌ای که در شهر تهران وجود دارد حداکثر می‌تواند ۳۰۰ دستگاه تلویزیون را به شهرهای متقاضی ارسال کند. بنابراین محدودیت عرضهٔ شهر ۱ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$x_{۱A} + x_{۱B} + x_{۱C} \leq ۳۰۰$ تلویزیون ــ عرضه کارخانهٔ تهران

محدودیت عرضه، به دو دلیل باید به صورت کوچکتر یا مساوی (≤) تعریف شود. اوّل اینکه بیشتر از ۳۰۰ دستگاه قابل حمل نیست، چون کل ظرفیت کارخانهٔ ۱، ۳۰۰ دستگاه است و دوّم اینکه اگر کمتر از ۳۰۰ دستگاه ارسال شود، هیچ مشکلی پدید نمی‌آید، چون کل عرضه

کارخانه‌ها ۱۰۰ واحد بیشتر از کل تقاضای شهرها می‌باشد. با همین استدلال محدودیتهای عرضه برای کارخانه‌های ۲ و ۳ به صورت ≥ تعریف می‌شوند. بدین صورت:

$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 200$ عرضه کارخانهٔ اراک ــ تلویزیون

$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 200$ عرضه کارخانهٔ اصفهان ــ تلویزیون

سه محدودیت دیگر که بیانگر تعداد تقاضای هر شهر می‌باشد، قابل تعریف می‌باشند. به طوری که تعداد تلویزیون ارسالی از سه کارخانه به هر شهر باید تقاضای آن شهر را برآورده سازد. محدودیتهای تقاضا باید به صورت مساوی تعریف شوند. چون همهٔ تقاضا قابل دستیابی می‌باشد.

بنابراین داریم:

$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 150$ تقاضای شهر شیراز ــ تلویزیون

$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 250$ تقاضای شهر بوشهر ــ تلویزیون

$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 200$ تقاضای شهر اهواز ــ تلویزیون

خلاصه مدل :

با اضافه کردن محدودیتهای غیرمنفی، مدل کامل برنامه‌ریزی خطی برای مسأله حمل‌ونقل به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\text{Min } Z = 16x_{1A} + 18x_{1B} + 11x_{1C} + 14x_{2A} + 12x_{2B} + 13x_{2C} + 13x_{3A} + 15x_{3B} + 17x_{3C}$$

s.t:

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 300$$
$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 200$$
$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 200$$
$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 150$$
$$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 250$$
$$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 200$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3 \text{ و } j = A, B, C)$$

۲.۳.۶ مسأله امتزاج

یک شرکت نفتی سه درجه سوخت اتومبیل ــ سوپر، معمولی و فوق‌العاده را از ترکیب سه مادهٔ خام نفتی تولید می‌کند. پالایشگاه می‌خواهد به گونه‌ای ترکیب بهینه مواد خام در هر نوع سوخت را پیدا کند که سود خالص خود را حداکثر نماید. حداکثر موجودی از هر نوع ماده خام

برحسب بشکه و هزینهٔ هر بشکه مادهٔ خام به شرح جدول زیر می‌باشد:

ماده خام	حداکثر موجودی روزانه (بشکه)	هزینه هر بشکه (دلار)
۱	۴۵۰۰	۱۲
۲	۲۷۰۰	۱۰
۳	۳۵۰۰	۱۴

به منظور اطمینان از امتزاج مناسب، هر درجه‌ای از سوخت دارای مشخصات معینی است. هر درجه‌ای از سوخت باید حداقل لازم را از مادهٔ خام نوع ۱ به علاوه ترکیبی از دیگر اجزاء به شرح زیر داشته باشد:

درجه سوخت	مشخصات ترکیب	قیمت‌فروش‌هربشکه(دلار)
سوپر	حداقل ۵۰٪ از ماده ۱ حداکثر ۳۰٪ از ماده ۲	۲۳
معمولی	حداقل ۴۰٪ از ماده ۱ حداکثر ۲۵٪ از ماده ۳	۲۰
فوق‌العاده	حداقل ۶۰٪ از ماده ۱ حداکثر ۱۰٪ از ماده ۲	۱۸

شرکت می‌خواهد، حداقل ۳۰۰۰ بشکه از هر درجه‌ای از سوخت اتومبیل تولید کند.

حال مسأله را به گونه‌ای فرموله می‌کنیم که ضمن بیان میزان تولید هر نوع سوخت، سود حاصل از فروش تولیدات نیز حداکثر شود.

متغیرهای تصمیم :

متغیرهای تصمیم در این مسأله باید مقدار هر یک از مواد اولیهٔ مورد استفاده در هر نوع سوخت را مشخص نمایند. بنابراین نه متغیر تصمیم به شرح زیر باید تعریف شود:

X_{ij} : تعداد بشکه‌ای که به طور روزانه از مادهٔ اولیهٔ نوع i که در سوخت درجهٔ j استفاده می‌شود.

که در آن؛ $i = ۱, ۲, ۳$ و (فوق‌العاده) e ، (معمولی) P و (سوپر) $j = S$

برای مثال X_{1s} نشان‌دهندهٔ تعداد بشکه‌ای است که روزانه از مادهٔ اولیهٔ نوع ۱ در سوخت سوپر استفاده می‌شود. کل تولیدات برحسب درجهٔ سوخت عبارت خواهد شد از:

سوپر	$x_{1s} + x_{2s} + x_{3s}$
معمولی	$x_{1p} + x_{2p} + x_{3p}$
فوق‌العاده	$x_{1e} + x_{2e} + x_{3e}$

تابع هدف :

در این مسأله، تابع هدف از نوع حداکثر سازی است. هدف حداکثر نمودن سود ناشی از تولیدات انواع مختلف سوخت است که با تفاضل هزینهٔ تولید هر بشکه از قیمت فروش آن بشکه بدست می‌آید. فروش کل هر درجه‌ای از سوخت از حاصلضرب تعداد کل بشکه‌های تولیدی در قیمت فروش هر بشکه بدست می‌آید. هزینهٔ تولید نیز با ضرب قیمت هر بشکه از هر مادهٔ اولیه در تعداد کل بشکه‌های مصرفی در سوختها بدست می‌آید. به صورت زیر:

$$\text{Maximize } Z = ۲۳(x_{1s} + x_{2s} + x_{3s}) + ۲۰(x_{1p} + x_{2p} + x_{3p}) + ۱۸(x_{1e} + x_{2e} + x_{3e})$$
$$- ۱۲(x_{1s} + x_{1p} + x_{1e}) - ۱۰(x_{2s} + x_{2p} + x_{2e}) - ۱۴(x_{3s} + x_{3p} + x_{3e})$$

با ساده کردن تابع فوق، تابع هدف اصلی مسأله به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\text{Max } Z = ۱۱x_{1s} + ۱۳x_{2s} + ۹x_{3s} + ۸x_{1p} + ۱۰x_{2p} + ۶x_{3p} + ۶x_{1e} + ۸x_{2e} + ۴x_{3e}$$

محدودیتهای مدل :

این مدل دارای محدودیتهای متعددی است. اولین مجموعه از محدودیتها بیان‌کنندهٔ مقدار مواد اولیه در دسترس می‌باشد که به طور روزانه فرموله می‌شوند:

بشکه	$x_{1s} + x_{1p} + x_{1e} \le ۴۵۰۰$
بشکه	$x_{2s} + x_{2p} + x_{2e} \le ۲۷۰۰$
بشکه	$x_{3s} + x_{3p} + x_{3e} \le ۳۵۰۰$

گروه بعدی محدودیتها برای رعایت مشخصات ترکیب در هر نوع سوخت تعریف خواهند شد. اولین مشخصهٔ ترکیب آن است که سوخت سوپر باید از حداقل ۵۰٪ ماده اولیه ۱ تشکیل شود که به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\frac{X_{1s}}{x_{1s} + x_{2s} + x_{3s}} \ge ۰/۵۰$$

براساس محدودیت فوق، باید نسبت ماده اولیه بکار رفته در سوخت درجهٔ سوپر، X_{1s}، به

مجموع تولید سوخت درجهٔ سوپر، $x_{1s} + x_{2s} + x_{3s}$ باید حداقل ۵۰٪ باشد. نگارش مجدد این محدودیت در قالب یک مدل برنامه‌ریزی خطی استاندارد به صورت زیر خواهد بود:

$$X_{1s} \geq 0/50\,(x_{1s} + x_{2s} + x_{3s})$$

و

$$0/50\,X_{1s} - 0/50X_{2s} - 0/50X_{3s} \geq 0$$

دیگر مشخصهٔ ترکیب در سوخت سوپر آن بوده که حداکثر ۳۰٪ از مادهٔ اولیهٔ نوع ۲ باید در ساخت آن استفاده شود. که به صورت زیر بیان خواهد شد:

$$\frac{X_{2s}}{x_{1s} + x_{2s} + x_{3s}} \leq 0/30$$

و

$$0/70\,X_{2s} - 0/30X_{1s} - 0/30X_{3s} \leq 0$$

به همین طریق دو مشخصهٔ ترکیب برای سوخت معمولی به صورت زیر فرموله می‌شوند:

$$0/60\,X_{1p} - 0/40X_{2p} - 0/40X_{3p} \geq 0$$

$$0/75\,X_{3p} - 0/25X_{1p} - 0/25X_{2p} \leq 0$$

همچنین دو مشخصهٔ ترکیب دیگر برای سوخت درجهٔ فوق‌العاده به صورت زیر باید تعریف شود:

$$0/40\,X_{1e} - 0/60X_{2e} - 0/60\,X_{3e} \geq 0$$

$$0/90\,X_{2e} - 0/10X_{1e} - 0/10\,X_{3e} \leq 0$$

مجموعهٔ آخر؛ محدودیتهای مسأله، بیانگ جداقل نیاز برای تولید هر درجه‌ای از سوخت (سوپر، معمولی و فوق‌العاده) می‌باشد، که عبارتند از:

$x_{1s} + x_{2s} + x_{3s} \geq 3000$	بشکه
$x_{1p} + x_{2p} + x_{3p} \geq 3000$	بشکه
$x_{1e} + x_{2e} + x_{3e} \geq 3000$	بشکه

خلاصه مدل :

مدل کامل برنامه‌ریزی خطی با اضافه کردن محدودیتهای غیرمنفی برای مسأله امتزاج به شرح زیر است:

$$\text{Max } Z = 11\,x_{1s} + 13\,x_{2s} + 9\,x_{3s} + 8\,x_{1p} + 10\,x_{2p} + 6\,x_{3p} + 6\,x_{1e} + 8\,x_{2e} + 4\,x_{3e}$$

s.t:

$$x_{1s} + x_{1p} + x_{1e} \leq 4500$$

$$x_{2s} + x_{2p} + x_{2e} \leq 2700$$

$$x_{3s} + x_{3p} + x_{3e} \leq 3500$$

$$
\begin{aligned}
&۰/۵۰\, x_{۱s} - ۰/۵۰\, x_{۲s} - ۰/۵۰\, x_{۳s} \geq ۰\\
&۰/۷۰\, x_{۳s} - ۰/۳۰\, x_{۱s} - ۰/۳۰\, x_{۲s} \leq ۰\\
&۰/۶۰\, x_{۱p} - ۰/۴۰\, x_{۲p} - ۰/۴۰\, x_{۳p} \geq ۰\\
&۰/۷۵\, x_{۳p} - ۰/۲۵\, x_{۱p} - ۰/۲۵\, x_{۲p} \leq ۰\\
&۰/۴۰\, x_{۱e} - ۰/۶۰\, x_{۲e} - ۰/۶۰\, x_{۳e} \geq ۰\\
&۰/۹۰\, x_{۳e} - ۰/۱۰\, x_{۱e} - ۰/۱۰\, x_{۲e} \leq ۰\\
&\qquad x_{۱s} + x_{۲s} + x_{۳s} \geq ۳۰۰۰\\
&\qquad x_{۱p} + x_{۲p} + x_{۳p} \geq ۳۰۰۰\\
&\qquad x_{۱e} + x_{۲e} + x_{۳e} \geq ۳۰۰۰\\
&\qquad\qquad X_{ij} \geq ۰ \quad (i = ۱, ۲, ۳;\ j = s, p, e)
\end{aligned}
$$

۲.۳.۷ مسأله زمانبندی چند دوره‌ای

شرکت تولیدکنندهٔ رایانه‌های شخصی درصدد تهیهٔ برنامه زمانبندی برای تولید محصولات خود است. ظرفیت عادی تولید برای شرکت ۱۶۰ رایانه در هفته است. همچنین شرکت توانایی تولید ۵۰ کامپیوتر را در نوبت اضافه کاری دارد. هزینهٔ مونتاژ، بازرسی و بسته‌بندی هر رایانه در وقت عادی ۱۹۰۰۰۰ تومان است. تولید هر رایانه در وقت اضافی ۲۶۰۰۰۰ تومان هزینه دارد. در ضمن هزینهٔ نگهداری هر رایانه در انبار برای تحویل در ماه آینده ۱۰۰۰۰ تومان می‌باشد. جدول زیر تعداد سفارشات رایانه را برای ۶ هفته نشان می‌دهد.

هفته	سفارشات رایانه
۱	۱۰۵
۲	۱۷۰
۳	۲۳۰
۴	۱۸۰
۵	۱۵۰
۶	۲۵۰

شرکت تولیدکننده درصدد تهیه سفارشات در زمان مقرر می‌باشد و حاضر نیست هیچ یک از مشتریان خود را از دست بدهد. مسأله را به گونه‌ای فرموله کنید که ضمن حداقل کردن هزینه‌های تولید و انبارداری، برنامه زمانی لازم برای تولید را در ظرفیت عادی و اضافه کاری ارایه دهد. به عبارت دیگر مشخص کنید که تعداد تولید در هر هفته در وقت عادی و اضافه کاری چقدر باید باشد تا هزینه‌های کارخانه حداقل گردند. در ضمن مدیر شرکت می‌خواهد در انتهای هفته ششم

موجودی انبار صفر باشد.

مراحل فرمولهٔ کردن :

متغیرهای تصمیم : این مسأله دارای سه مجموعهٔ متفاوت از متغیرهای تصمیم می‌باشد. دستهٔ اوّل بیانگر متغیرهای تصمیم برای تولید رایانه در زمان عادی برای هر هفته، دستهٔ دوّم شامل متغیرهای تصمیم جهت تولید در زمان اضافه کاری برای هر هفته و دسته سوم شامل متغیرهای تصمیم به عنوان موجودی انبار هر هفته می‌باشد. بنابراین تعداد متغیرهای تصمیم این مدل ۱۷ متغیر خواهند بود. از آنجا که تعداد متغیرهای تصمیم مدل بسیار زیادند. پس از بکارگیری نماد X جهت معرفی متغیرها خودداری کرده و از حرف اوّل معادل انگلیسی؛ زمان عادی (R)، اضافه کاری (O) و موجودی انبار (I)، جهت معرفی آنها استفاده می‌کنیم. به صورت زیر:

تعداد تولید رایانه در هفته j در زمان عادی $R_j : (j = ۱,۲,۳,۴,۵,۶)$

تعداد تولید رایانه در هفته j در زمان اضافه کاری $O_j : (j = ۱,۲,۳,۴,۵,۶)$

تعداد رایانه مازاد که در هفته j در انبار نگهداری می‌شود. $I_j : (j = ۱,۲,۳,۴,۵)$

بنابراین مشخص شد که ۶ متغیر تصمیم برای تولید رایانه در وقت عادی، شش متغیر تصمیم دیگر برای تولید رایانه در نوبت اضافه کاری و فقط ۵ متغیر برای موجودی انبار انتهای هفته تعریف می‌شود. چون سیاست شرکت بر آن است که در انتهای هفته ششم موجودی انبار صفر باشد.

تابع هدف :

هدف مسأله، حداقل نمودن هزینهٔ تولید و انبارداری در طول یک دورهٔ ۶ هفته است. به صورت زیر:

$$\text{Minimize } Z = ۱۹۰۰۰۰ (R_۱ + R_۲ + R_۳ + R_۴ + R_۵ + R_۶)$$
$$+ ۲۶۰۰۰۰ (O_۱ + O_۲ + O_۳ + O_۴ + O_۵ + O_۶)$$
$$+ ۱۰۰۰۰ (I_۱ + I_۲ + I_۳ + I_۴ + I_۵)$$

محدودیتهای مدل :

این مدل دارای سه دسته محدودیت است، دو دستهٔ آنها بیان‌کنندهٔ ظرفیت تولید در زمان عادی و اضافه کاری است. در حالی که دسته سوم تعیین‌کننده زمانبندی تولید در هفته خواهد بود. گفته شد که ظرفیت عادی تولید ۱۶۰ رایانه در هر هفته خواهد بود. پس می‌توان ۶ محدودیت به صورت زیر تعریف نمود:

$R_j \leq 160 \; (j = 1,2,3,4,5,6)$ رایانه در هفته j

ظرفیت تولید در زمان (اضافه کاری ۵۰ رایانه در هر هفته می‌باشد. بنابراین می‌توان ۶ محدودیت دیگر به صورت زیر تعریف کرد:

$O_j \leq 50 \; (j = 1,2,3,4,5,6)$ رایانه در هفته j

شش محدودیت بعدی، تعداد تولید هفتگی در زمان عادی، اضافه کاری و موجودی انبار مورد نیاز را برای برآورده ساختن سفارشات نشان می‌دهد.

به شرح زیر:

هفته ۱: $R_1 + O_1 - I_1 \geq 105$

هفته ۲: $R_2 + O_2 + I_1 - I_2 \geq 170$

هفته ۳: $R_3 + O_3 + I_2 - I_3 \geq 230$

هفته ۴: $R_4 + O_4 + I_3 - I_4 \geq 180$

هفته ۵: $R_5 + O_5 + I_4 - I_5 \geq 150$

هفته ۶: $R_6 + O_6 + I_5 \geq 250$

محدودیتهای فوق نشان می‌دهند که تعداد تولید در هفته j $(R_j + O_j)$ به علاوهٔ موجودی ابتدای دوره، منهای موجودی انتهای دوره باید حداقل مساوی با تعداد سفارشات آن هفته باشد. برای مثال تعداد تولید رایانه در زمان عادی هفته دوم؛ R_2، به علاوهٔ تعداد تولید در زمان اضافه کاری آن هفته، O_2، به علاوهٔ موجودی انتهای دورهٔ هفته اوّل، I_1، منهای مازاد تقاضا در هفته دوم، I_2، باید حداقل مساوی ۱۷۰ رایانه باشد. چون تعداد سفارشات هفته دوّم ۱۷۰ رایانه می‌باشد.

خلاصه مدل :

مدل کامل برنامه‌ریزی خطی با اضافه نمودن محدودیتهای غیرمنفی به شرح زیر خلاصه می‌شود:

$$\text{Min } Z = 190000\,(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6)$$
$$+ 260000\,(O_1 + O_2 + O_3 + O_4 + O_5 + O_6)$$
$$+ 10000\,(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5)$$

s.t:

$$R_j \leq 160 \; (j = 1,2,3,4,5,6)$$
$$O_j \leq 50 \; (j = 1,2,3,4,5,6)$$
$$R_1 + O_1 - I_1 \geq 105$$
$$R_2 + O_2 + I_1 - I_2 \geq 170$$

$$R_۳ + O_۳ + I_۲ - I_۳ \geq ۲۳۰$$
$$R_۴ + O_۴ + I_۳ - I_۴ \geq ۱۸۰$$
$$R_۵ + O_۵ + I_۴ - I_۵ \geq ۱۵۰$$
$$R_۶ + O_۶ + I_۵ \geq ۲۵۰$$
$$R_j \geq ۰ \ (j = ۱,۲,\ldots,۶) \ ; \ O_j \geq ۰ \ (j = ۱,۲,\ldots,۶); \ I_j \geq ۰ \ (j = ۱,۲,\ldots,۵)$$

۲.۳.۸ مسأله ترکیب محصولات کشاورزی

کشاورزی دارای زمینی است که مساحت آن ۲۰۰۰ هکتار است. زمین این کشاورز به ۳ قطعهٔ مجزا تقسیم شده است. قطعهٔ اوّل ۵۰۰ هکتار، قطعه دوّم ۸۰۰ هکتار و قطعهٔ سوم ۷۰۰ هکتار مساحت دارد. زمین کشاورز برای کشت ذرت، پیاز و لوبیا مناسب است. حداکثر زمین قابل کشت برای هر یک از محصولات و سود حاصل از هر هکتار برحسب نوع محصول قابل کشت در جدول زیر داده شده است:

محصول	حداکثر سطح قابل کشت (هکتار)	سود هر هکتار (ریال)
ذرت	۹۰۰	۶۰۰۰۰
پیاز	۷۰۰	۲۵۰۰۰۰
لوبیا	۱۰۰۰	۳۰۰۰۰

هر یک از محصولات را می‌توان در هر کدام از قطعات سه گانه کشت نمود. امّا شرایط زیر باید رعایت شود:

۱. حداقل ۶۰٪ هر قطعه زمین باید زیر کشت برود.

۲. کشاورز می‌خواهد که در هر سه قطعه زمین نسبت مساحت زیر کشت به کل مساحت مساوی باشد.

حال مسأله را به گونه‌ای فرموله می‌کنیم که ضمن مشخص شدن مقدار محصول کشت شده در هر قطعه، سود کل کشاورز حداکثر شود.

متغیرهای تصمیم :

متغیرهای تصمیم این مسأله، شامل هر محصول کشت شده در هر قطعه زمین است. به عبارت دیگر:

X_{ij} : $(i = ۱,۲,۳ ; j = ۱,۲,۳)$ مساحت کشت شده برای محصول i در قطعه زمین j

است. به عنوان مثال $X_{۱۳}$، بیانگر مساحت زیر کشت محصول ذرت در قطعه سوم می‌باشد.

بنابراین مسأله دارای نه متغیر تصمیم خواهد بود.

تابع هدف :

هدف این مسأله حداکثر کردن سود ناشی از کشاورزی است. تابع هدف از حاصلضرب سطح زیر کشت هر محصول در سود هر هکتار بدست می‌آید. پس تابع هدف به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\text{Maximize } Z = ۶۰۰۰۰۰ (x_{۱۱} + x_{۱۲} + x_{۱۳}) + ۴۵۰۰۰۰ (x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳}) + ۳۰۰۰۰۰ (x_{۳۱} + x_{۳۲} + x_{۳۳})$$

محدودیتهای مسأله :

محدودیتهای این مسأله بیانگر محدودیت مساحت هر قطعه زمین و شرایط ذکر شده از سوی کشاورز است. مجموعهٔ اوّل محدودیتها؛ معرّف حد بالا و پایین سطح زیر کشت در هر قطعه زمین است. حد بالا به طور طبیعی همان مساحت قطعه زمین j است و حد پایین به ۶۰٪ مساحت هر قطعه زمین محدود خواهد شد. در نتیجه محدودیتهای زیر را خواهیم داشت:

برای قطعه زمین شماره ۱ $\quad ۳۰۰ \leq x_{۱۱} + x_{۲۱} + x_{۳۱} \leq ۵۰۰$

برای قطعه زمین شماره ۲ $\quad ۴۸۰ \leq x_{۱۲} + x_{۲۲} + x_{۳۲} \leq ۸۰۰$

برای قطعه زمین شماره ۳ $\quad ۴۲۰ \leq x_{۱۳} + x_{۲۳} + x_{۳۳} \leq ۷۰۰$

معادلات فوق، همگی از فرم غیراستاندارد برخوردارند. پس تمام محدودیتهای فوق به شکل استاندارد تبدیل می‌شوند. یعنی همهٔ متغیرها به سمت چپ معادلات انتقال می‌یابند و سمت راست شامل مقادیر ثابت خواهد بود. پس هر یک از محدودیتهای فوق به دو محدودیت خاص تبدیل می‌شوند. به صورت زیر:

محدودیت حداقل برای قطعه زمین ۱ $\quad x_{۱۱} + x_{۲۱} + x_{۳۱} \geq ۳۰۰$

محدودیت حداکثر برای قطعه زمین ۱ $\quad x_{۱۱} + x_{۲۱} + x_{۳۱} \leq ۵۰۰$

محدودیت حداقل برای قطعه زمین ۲ $\quad x_{۱۲} + x_{۲۲} + x_{۳۲} \geq ۴۸۰$

محدودیت حداکثر برای قطعه زمین ۲ $\quad x_{۱۲} + x_{۲۲} + x_{۳۲} \leq ۸۰۰$

محدودیت حداقل برای قطعه زمین ۳ $\quad x_{۱۳} + x_{۲۳} + x_{۳۳} \geq ۴۲۰$

محدودیت حداکثر برای قطعه زمین ۳ $\quad x_{۱۳} + x_{۲۳} + x_{۳۳} \leq ۷۰۰$

از داده‌های جدول مسأله مشخص شد که مساحت زیر کشت هر محصول محدود و مشخص است. پس باید سه محدودیت دیگر برای محدود نمودن مساحت زیر کشت هر

محصول تعریف کرد. این دسته از محدودیتها عبارتند از:

مساحت زیرکشت ذرت ـ هکتار $x_{۱۱} + x_{۱۲} + x_{۱۳} \leq ۹۰۰$

مساحت زیرکشت پیاز ـ هکتار $x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳} \leq ۷۰۰$

مساحت زیرکشت لوبیا ـ هکتار $x_{۳۱} + x_{۳۲} + x_{۳۳} \leq ۱۰۰۰$

آخرین دسته از محدودیتهای این مسأله به سیاست کشاورز برمی‌گردد که می‌خواهد نسبت مساحت زیرکشت هر قطعه به کل مساحت آن برای هر سه قطعه مساوی باشد. یعنی:

$$\frac{x_{۱۱} + x_{۲۱} + x_{۳۱}}{۵۰۰} = \frac{x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۳۲}}{۸۰۰} = \frac{x_{۳۱} + x_{۳۲} + x_{۳۳}}{۷۰۰}$$

واضح است که مدل استاندارد برنامه‌ریزی خطی (LP)، نمی‌تواند محدودیت فوق را شامل شود. پس باید آن را به محدودیتهای زیر تبدیل کرد:

$$\frac{x_{۱۱} + x_{۲۱} + x_{۳۱}}{۵۰۰} = \frac{x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۳۲}}{۸۰۰}$$

$$\frac{x_{۱۱} + x_{۲۱} + x_{۳۱}}{۵۰۰} = \frac{x_{۱۳} + x_{۲۳} + x_{۳۳}}{۷۰۰}$$

$$\frac{x_{۱۲} + x_{۲۲} + x_{۳۲}}{۸۰۰} = \frac{x_{۰۳} + x_{۲۳} + x_{۳۳}}{۷۰۰}$$

اگرچه محدودیت اولیه تساوی نسبتها، به یک فرم متعارف تبدیل شده است ولی باید آنها را به شکل استاندارد LP تبدیل نمود. به صورت زیر:

$$۸۰۰\,(x_{۱۱} + x_{۲۱} + x_{۳۱}) - ۵۰۰\,(x_{۱۲} + x_{۲۲} + x_{۳۲}) = ۰$$

$$۷۰۰\,(x_{۱۱} + x_{۲۱} + x_{۳۱}) - ۵۰۰\,(x_{۱۳} + x_{۲۳} + x_{۳۳}) = ۰$$

$$۷۰۰\,(x_{۱۲} + x_{۲۲} + x_{۳۲}) - ۸۰۰\,(x_{۱۳} + x_{۲۳} + x_{۳۳}) = ۰$$

خلاصه مدل:

مدل کامل برنامه‌ریزی خطی مسأله با اضافه کردن محدودیتهای غیرمنفی برای مسأله فوق بدین صورت خواهد بود:

$$\text{Min } Z = ۶۰۰۰۰\,(x_{۱۱} + x_{۱۲} + x_{۱۳}) + ۴۵۰۰۰۰\,(x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳}) + ۳۰۰۰۰\,(x_{۳۱} + x_{۳۲} + x_{۳۳})$$

s.t:

$$x_{۱۱} + x_{۲۱} + x_{۳۱} \geq ۳۰۰$$

$$x_{۱۱} + x_{۲۱} + x_{۳۱} \leq ۵۰۰$$

$$x_{۱۲} + x_{۲۲} + x_{۳۲} \geq ۴۸۰$$

$$x_{۱۲} + x_{۲۲} + x_{۳۲} \leq ۸۰۰$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33} \geq 420$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33} \leq 700$$
$$x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 900$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 700$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33} \leq 1000$$
$$800\,(x_{11}+x_{21}+x_{31}) - 500\,(x_{12}+x_{22}+x_{32}) = 0$$
$$700\,(x_{11}+x_{21}+x_{31}) - 500\,(x_{13}+x_{23}+x_{33}) = 0$$
$$700\,(x_{12}+x_{22}+x_{32}) - 800\,(x_{13}+x_{23}+x_{33}) = 0$$
$$X_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3\,;\, j = 1, 2, 3)$$

۲.۳.۹ مسأله برش چوب

یک شرکت چوب بری باید سفارشهایی را به ابعاد زیر تهیه و به متقاضیان تسلیم نماید.

ابعاد چوبهای سفارشی	مقدار سفارش
$1'' \times 2'' \times 11'$	۱۳۰۰
$1'' \times 4'' \times 11'$	۱۰۰۰
$2'' \times 2'' \times 11'$	۷۰۰

این سفارشات باید از تخته‌های استاندارد به ابعاد $11' \times 4'' \times 2''$ تهیه گردد. شرکت چوب‌بری در نظر دارد که سفارشات را به گونه‌ای برآورده سازد که حداقل تخته استاندارد را مورد استفاده قرار دهد. حال مسأله را به گونه‌ای فرموله خواهیم کرد که ضمن تهیهٔ سفارشات، حداقل تختهٔ استاندارد استفاده شود.

متغیرهای تصمیم : در این مسأله، متغیرهای تصمیم بستگی به تعداد برشهایی دارد که از یک تختهٔ استاندارد $11' \times 4'' \times 2''$ می‌توان داشت. برش تختهٔ استاندارد در تهیهٔ سفارشات به پنج طریق زیر امکانپذیر است:

از این دو متغیرهای تصمیم عبارتند از:

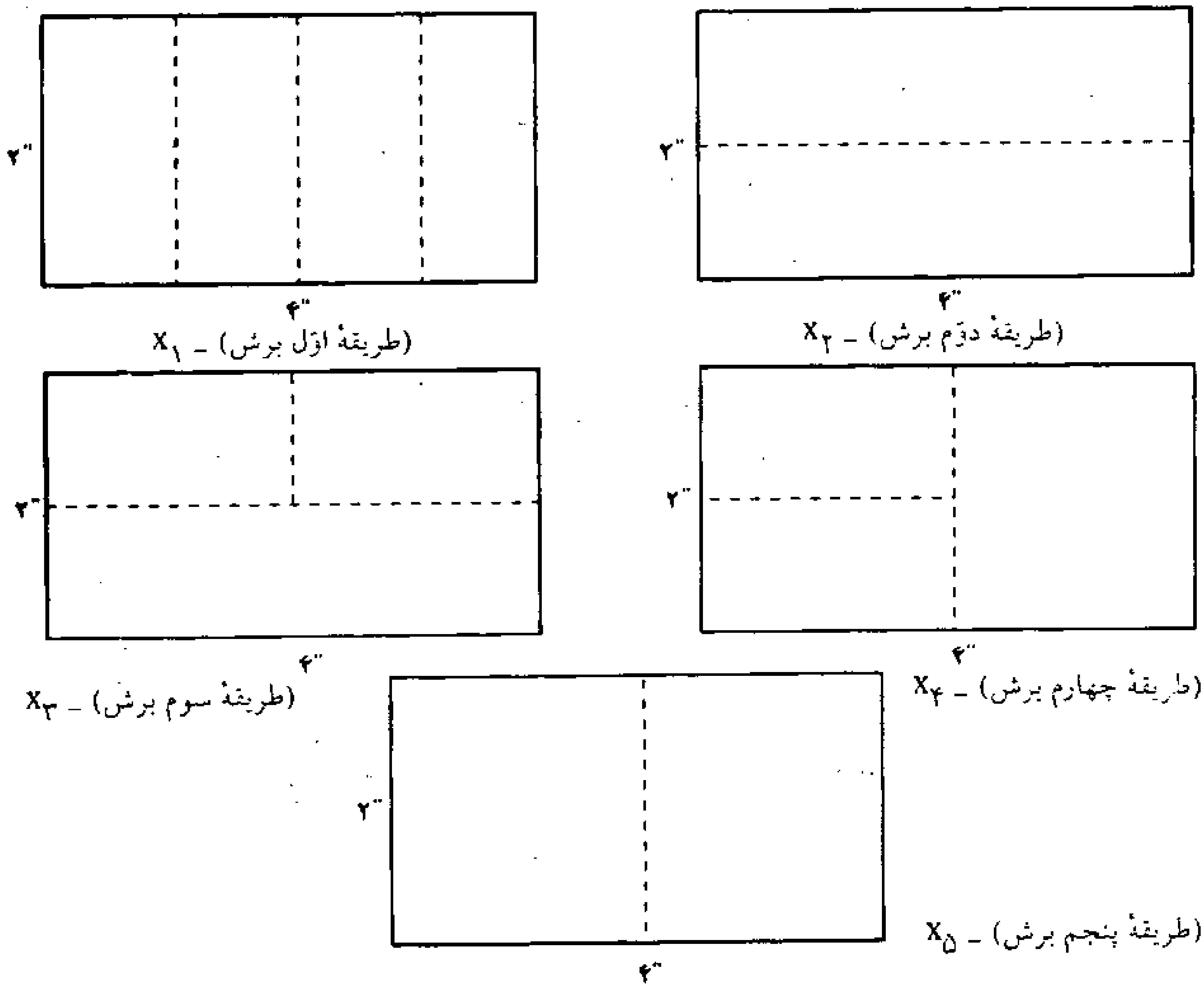
X_1 : تعداد تخته‌های استانداردی که دارای طریقهٔ اوّل برش هستند.

X_2 : تعداد تخته‌های استانداردی که دارای طریقهٔ دوم برش هستند.

X_3 : تعداد تخته‌های استانداردی که دارای طریقهٔ سوم برش هستند.

X_4 : تعداد تخته‌های استانداردی که دارای طریقهٔ چهارم برش هستند.

X_5 : تعداد تخته‌های استانداردی که دارای طریقهٔ پنجم برش هستند.



تابع هدف : هدف مسألهٔ، حداقل کردن تعداد تخته‌های استاندارد مورد استفاده برای تهیهٔ سفارشات متقاضیان می‌باشد. بنابراین تابع هدف از مجموع تخته‌هایی که دارای هر پنج طریقهٔ برش هستند بدست می‌آید. یعنی:

$$\text{Minimize } Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

محدودیتهای مدل : تعداد محدودیتهای کارکردی مدل به اندازهٔ تعداد طرق سفارش داده شده می‌باشد. بنابراین مدل دارای سه محدودیت می‌باشد. با توجه به اینکه در طریقهٔ اوّل برش چهار تخته به ابعاد ″۱۱ × ″۲ × ″۱ بدست می‌آید و همچنین در برش نوع سوم و چهارم به ترتیب دو تخته به ابعاد مذکور بدست می‌آید، شرط تهیهٔ سفارشات نوع ″۱۱ × ″۲ × ″۱ به قرار زیر نوشته می‌شود:

$$۴x_1 + ۲x_3 + ۲x_4 \geq ۱۳۰۰$$

به طریق مشابه محدودیتهای متناظر با سفارشات ″۱۱ × ″۴ × ″۱ و ″۱۱ × ″۲ × ″۲ به صورت زیر نوشته می‌شود:

برای ابعاد ″۱۱ × ″۴ × ″۱ $\quad ۲x_1 + x_3 \geq ۱۰۰۰$

برای ابعاد ″۱۱ × ″۲ × ″۲ $\quad x_4 + ۲x_5 \geq ۷۰۰$

$$\text{Min } Z = x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵$$

s.t:

$$۴x_۱ + ۲x_۳ + ۲x_۴ \geq ۱۳۰۰$$
$$۲x_۲ + x_۳ \geq ۱۰۰۰$$
$$x_۴ + ۲x_۵ \geq ۷۰۰$$
$$x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵ \geq ۰$$

۲.۴ مدل عمومی برنامه‌ریزی خطی

در تمامی مثالهایی که پیش از این بررسی شد، یک مدل کلی برنامه‌ریزی خطی (LP) وجود داشت. در هر مسأله؛ متغیرهای تصمیم، یک تابع هدف و محدودیتهای مدل وجود داشت که با همدیگر یک مدل ریاضی را بیان می‌کردند. اکنون مفید خواهد بود که دانشجو نمادها و مدل کلی برنامه‌ریزی خطی را که به صورت زیر معرفی می‌شود، بخاطر بسپارد تا در مطالب آینده قادر باشد به راحتی از آنها استفاده نماید.

متغیرهای تصمیم : در هر مسأله، متغیرهای تصمیم که نشان‌دهندهٔ سطح یک فعالیت یا مقدار تولید است، معرفی شد. در این مدل کلی n متغیر تصمیم به صورت زیر تعریف می‌شوند.

مقدار فعالیت ۱	$X_۱$:
مقدار فعالیت ۲	$X_۲$:
مقدار فعالیت j	X_j :
	⋮
مقدار فعالیت n	X_n :

یا

مقدار فعالیت jام	$X_j : (j = ۱, ۲, \ldots, n)$

تابع هدف : تابع هدف نشان‌دهندهٔ جمع کل سهم هر متغیر تصمیم در هدف مدل است و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\text{Max (Min) } Z = C_۱ X_۱ + C_۲ X_۲ + \ldots + C_j X_j + \ldots + C_n X_n$$

که در آن؛

ارزش کل تابع هدف $= Z$

سهم هر واحد فعالیت jام در تابع هدف $C_j : (j = ۱, ۲, \ldots, n)$ می‌باشد.

محدودیتهای مدل : محدودیتهای یک مدل برنامه‌ریزی خطی بیانگر محدودیت موجودی منابع در مسأله است. مقدار موجودی هر یک از m منبع در دسترس را با b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ نشان می‌دهیم. a_{ij} مقدار لازم از منبع نوع iام برای تولید یک واحد از فعالیت jام $(j = 1, 2, \ldots, n)$ تعریف می‌شود. بنابراین نامعادلات محدودیتها را می‌توان به شرح زیر تعریف کرد:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\
&\vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + x_n a_{in} &\le b_i \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + x_n a_{mn} &\le b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n &\ge 0
\end{aligned}
$$

در این مدل محدودیتها از نوع $\le$ نشان داده شده است. محدودیتها می‌توانند به شکل بزرگتر یا مساوی $(\ge)$ یا مساوی $(=)$ نیز باشند. یعنی:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i$$

یا

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

مدل عمومی مسأله برنامه‌ریزی خطی را به شرح زیر می‌توان خلاصه کرد:

$$\text{Max (min) } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_jX_j + \ldots + C_nX_n$$

s.t:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \ (\le = \ge)\ b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \ (\le = \ge)\ b_2 \\
&\vdots \\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \ (\le = \ge)\ b_i \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \ (\le = \ge)\ b_m \\
&x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

به مسأله ۲.۳.۱ برمی‌گردیم و مجدداً این مسأله را با نمادهای مدل عمومی بررسی می‌کنیم. مدل این مثال عبارت است از:

$$\text{Max } Z = ۳x_۱ + ۵x_۲ + ۲x_۳$$
s.t:
$$۵x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳ \leq ۲۴۰$$
$$۴x_۱ + ۶x_۲ + ۳x_۳ \geq ۴۰۰$$
$$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$$

با استفاده از نمادهای مدل عمومی این مثال به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\text{Max } Z = C_۱X_۱ + C_۲X_۲ + C_۳X_۳$$
s.t:
$$a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + a_{۱۳}x_۳ \leq b_۱$$
$$a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + a_{۲۳}x_۳ \leq b_۲$$
$$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$$

و پارامترهای مدل عبارتند از:

$$C_۱ = ۳,\ C_۲ = ۵,\ C_۳ = ۲$$
$$a_{۱۱} = ۵,\ a_{۱۲} = ۲,\ a_{۱۳} = ۴,\ b_۱ = ۲۴۰$$
$$a_{۲۱} = ۴,\ a_{۲۲} = ۶,\ a_{۲۳} = ۳,\ b_۲ = ۴۰۰$$

بالاخره با استفاده از علامت جمع (Σ) مدل عمومی مسأله LP را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\text{Max (Min) } Z = \sum_{j=۱}^{n} c_j x_j$$
s.t:
$$\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_j \ (\leq = \geq)\ b_i \quad (i = ۱, ۲, \ldots, m)$$
$$x_j \geq ۰ \quad (j = ۱, ۲, \ldots, n)$$

بنابراین مسأله ۲.۳.۱ را می‌توان با استفاده از علامت Σ به صورت بیان کرد:

$$\text{Max } Z = \sum_{j=۱}^{۳} C_jX_j$$
s.t:
$$\sum_{j=۱}^{۳} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = ۱, ۲)$$
$$x_j \geq ۰ \quad (j = ۱, ۲, ۳)$$

مقادیر c_j، a_{ij} و b_i پارامترهای مدل LP هستند که مقادیر ثابت و مشخصی فرض می‌شوند.

۲.۵ خلاصه فصل دوّم:

در این فصل ابتداء مراحل سه‌گانه مدلسازی (تعریف متغیرهای تصمیم، تعریف تابع هدف، تعریف محدودیتهای مدل) بیان شد و سپس با تشریح نمونه‌های متفاوتی از مسائل برنامه‌ریزی خطی علم و هنر مدلسازی تشریح شد. موارد مورد بحث مدلسازی در این فصل عبارتند از:

۱- مسأله ترکیب تولید ۲- مسأله رژیم غذایی ۳- مسأله سرمایه‌گذاری ۴- مسأله بازاریابی ۵- مسأله حمل‌ونقل ۶- مسأله امتزاج ۷- مسأله زمانبندی چند دوره‌ای ۸- مسأله ترکیب محصولات کشاورزی ۹- مسأله چوب‌بری

در نهایت مدل عمومی برنامه‌ریزی خطی (LP) ارائه گردید و چند نمونه از مسائل متن فصل بیان عمومی شد.

۲.۶ مسائل

۱. یک شرکت تولیدکنندهٔ اسباب‌بازی سه نوع اسباب‌بازی تولید می‌کند. نیروی کار مورد نیاز و هزینهٔ هر واحد تولیدی از آنها طبق جدول زیر تعریف شده است:

نوع اسباب‌بازی	هزینه هر واحد تولید (ریال)	نیروی‌کارموردنیازهرواحد(ساعت)
A	۷۰۰	۲
B	۱۰۰۰	۳
C	۵۰۰	۲

کل بودجهٔ کارخانه ۲۰۰۰۰۰ ریال است و کل ساعات کار کارخانه ۶۰۰ ساعت است. تقاضای اسباب‌بازی نوع A، ۲۰۰ واحد، نوع B، ۳۰۰ واحد و برای نوع C، ۱۵۰ واحد می‌باشد. قیمت فروش هر واحد از اسباب‌بازیها به ترتیب؛ ۲۰۰۰، ۱۵۰۰۰ و ۱۲۰۰۰ ریال می‌باشد. مسأله را به گونه‌ای فرموله کنید که ضمن برآورده ساختن تقاضای هر یک از اسباب‌بازیها سود کل تولیدات حداکثر شود.

۲. یک شرکت حمل‌ونقل دارای ۹۰ کامیون است که می‌توانند کالاهای تولیدی را از سه انبار به سه شهر حمل نمایند. وی می‌تواند که همواره ۳۰ کامیون را به هر یک از مسیرهای مربوط اختصاص دهد. ولی مدیر شرکت می‌خواهد به گونه‌ای عمل کند که سود کل ناشی از حمل‌ونقل حداکثر شود. جدول زیر سود ناشی از هر بار حمل را در مسیر انبارهای A، B و C به شهرهای ۱، ۲ و ۳ نشان می‌دهد:

شهر: / انبار:	۱	۲	۳
A	۱۸۰	۲۱۰	۱۶۰
B	۱۰۰	۷۰	۹۰
C	۱۴۰	۸۰	۲۲۰

ارقام داخل جدول سود هر بار حمل‌ونقل را به هزار تومان به هر یک از شهرها نشان می‌دهد. شرکت می‌تواند، حداکثر ۴۰ کامیون را به شهر ۱، ۶۰ کامیون را به شهر ۲ و ۵۰ کامیون را به شهر ۳ بفرستد. مدیر شرکت می‌خواهد بداند که چه تعداد کامیون را به هر مسیر (از انبار به شهر) اختصاص دهد که سود کل حمل‌ونقل او حداکثر شود. مسأله را بـه صـورت یک مـدل برنامه‌ریزی خطی (LP) فرموله کنید.

۳. کشاورزان یک منطقه زراعی تصمیم دارند که عملیات کاشت، داشت و برداشت را به شکل تعاونی انجام دهند، تا از قابلیتهای یکدیگر و امکانات دولتی استفاده کرده و تولید جمعی را افزایش دهند. این منطقه از سه مزرعه تشکیل شده است. دو عامل زمین و آب امکانات کاشت این مزارع را محدود می‌نمایند. اطلاعات مربوط به آب موجود و زمین قابل کشت سه مزرعه در جدول زیر آمده است.

مزرعه	زمین قابل کشت (هکتار)	آب موجود (هزار متر مکعب)
۱	۴۰۰	۶۰۰
۲	۶۰۰	۸۰۰
۳	۳۰۰	۳۷۵

محصولات مناسب کشت در این منطقه زراعی عبارت از چغندرقند، پنبه و ذرت است. میزان عملکرد در هکتار و آب مورد نیاز این سه محصول با یکدیگر متفاوتند. به علاوه، برای حصول به ترکیب مناسبی از سه محصول، کاشت هر محصول نمی‌تواند از یک مقدار مشخصی بیشتر باشد، این اطلاعات در جدول زیر آمده‌اند.

محصول	حداکثر کشت (هکتار)	مصرف آب (هزار متر مکعب)	سود خالص (تومان در هکتار)
چغندرقند	۶۰۰	۳	۴۰۰۰۰
پنبه	۵۰۰	۲	۳۰۰۰۰
ذرت	۳۲۵	۱	۱۰۰۰۰

کشاورزان سه منطقه توافق کرده‌اند که نسبت زمین کاشته شده به زمین موجود برای هر سه مزرعه مساوی باشد. مسأله را به منظور حداکثر کردن سود کل منطقه کشاورزی فرموله کنید.

۴. یک مؤسسه دامداری مایل است که با توجه به مواد موجود، خوراک مورد نیاز دامهای خود را با حداقل هزینه تأمین نماید. میزان عناصر مغذی موجود در هر کیلوگرم از این مواد (برحسب تعداد واحد عنصر غذایی در ماده موجود)، مقداری از این عناصر مغذی که در روز مورد نیاز است، و هزینه هر یک از مواد در جدول زیر آمده است:

عناصر مغذی	ذرت	مواد آلی	یونجه	حداقل احتیاجات روزانه
قندها	۹۰	۲۰	۴۰	۲۰۰
پروتئین	۳۰	۸۰	۶۰	۱۸۰
ویتامینها	۱۰	۲۰	۴۰	۱۵۰
قیمت	۲۱	۱۸	۱۵	

مسأله را در قالب یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

۵. پزشک یک تیم فوتبال درصدد تهیه یک رژیم غذایی برای بازیکنان تیم است. بدین منظور وی سعی دارد، استانداردهای بهداشتی را برای آنها تعریف کند. دستورالعمل زیر برگرفته از این استانداردهاست:

۱. مقدار کالری بین ۱۵۰۰ تا ۲۰۰۰.
۲. حداقل ۵ میلی‌گرم آهن.
۳. بین ۲۰ تا ۶۰ گرم چربی.
۴. حداقل ۳۰ گرم پروتئین.
۵. حداقل ۴۰ گرم کربوهیدرات.
۶. حداکثر ۳۰ میلی‌گرم کلسترول.

پزشک تیم بدین منظور برنامهٔ غذایی خود را براساس ۶ غذا تنظیم خواهد کرد. میزان ترکیبات هر غذا و هزینهٔ هر واحد از آنها به شرح جدول زیر است. پزشک تیم می‌خواهد یک رژیم غذایی برای بازیکنان تهیه کند که بتواند ضمن برآورده کردن نیازمندی غذایی اعضای تیم، هزینهٔ غذا نیز حداقل گردد. مسأله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی (LP) فرموله کنید.

نوع غذا	کالری	آهن (mg)	پروتئین (g)	کربوهیدرات (g)	چربی (g)	کلسترول (mg)	هزینه (ریال)
مرغ	۵۲۰	۴/۴	۱۷	۰	۳۰	۱۸۰	۸۰۰
ماهی	۵۰۰	۳/۳	۸۵	۰	۵	۹۰	۳۷۰
گوشت‌گوسفند	۸۶۰	۰/۳۰	۸۲	۰	۷۵	۳۵۰	۲۳۰
گوشت گاو	۶۰۰	۳/۴	۱۰	۳۰	۳	۰	۹۰
سیب‌زمینی	۵۰	۰/۵۰	۶	۰	۰	۰	۷۵
کالباس	۴۶۰	۲/۲	۱۰	۷۰	۰	۰	۴۰
شیر (۲٪)	۲۴۰	۰/۲	۱۶	۲۲	۱۰	۲۰	۸۳

۶. یک شرکت تولیدکننده مصالح ساختمانی اخیراً سفارشی برای الوار در ۳ اندازهٔ مختلف دریافت کرده است.

تعداد سفارش	اندازه
۷۰۰	۷ متر
۱۲۰۰	۹ متر
۳۰۰	۱۰ متر

طول الوارهای موجود در شرکت همگی دارای استاندارد ۲۵ متری است. بنابراین شرکت باید الوارهای استاندارد را به اندازه‌های سفارش شده برش دهد. این شرکت مایل است بداند الوارهای استاندارد را با چه الگویی برش بزنند تا تعداد کل تخته‌های الوار مورد نیاز برای تأمین سفارش حداقل گردد. مسأله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

۷. کارخانه‌ای تولید یکی از محصولات غیر سودآور خط تولید خود را متوقف ساخته است. بدین ترتیب، ظرفیت تولیدی قابل ملاحظه‌ای آزاد گردیده است. مدیریت درصدد است تا از این ظرفیت اضافی به منظور تولید سه محصول، که آنها را محصولات ۱، ۲ و ۳ می‌نامیم، استفاده کند. ظرفیت آزاد ماشین‌آلات مورد نیاز تولید این سه محصول در زیر آمده است:

نوع ماشین	زمان موجود (ماشین ساعت در هفته)
فرز	۵۰۰
تراش	۳۵۰
سنگ	۱۵۰

میزان ماشین ساعت لازم برای تولید این محصولات به شرح زیر است:

نوع ماشین	ضریب بهره‌وری (برحسب ماشین ساعت لازم برای هر محصول)		
	محصول ۱	محصول ۲	محصول ۳
فرز	۹	۳	۵
تراش	۵	۴	۰
سنگ	۳	۰	۲

بخش فروش پس از مطالعه بازار به این نتیجه رسیده است که میزان تولید محصولات ۱ و ۲ هرچه باشد به فروش خواهد رفت، امّا فروش بالقوه محصول ۳ بیش از ۲۰ واحد در هفته نیست. سود هر واحد از محصولات ۱، ۲ و ۳ به ترتیب مساوی ۳۰، ۱۲ و ۱۵ دلار است. مدل برنامه‌ریزی خطی فوق را به منظور تعیین میزان تولید هر یک از محصولات و با هدف حداکثر کردن سود فرموله نمایید.

۸. یک شرکت تبلیغاتی می‌خواهد یک برنامهٔ تبلیغاتی را از طریق سه وسیله رادیو، تلویزیون و مجله به اجرا درآورد. هدف از برنامهٔ تبلیغاتی آگاهی حداکثر مشتریان بالقوه شرکت از برنامهٔ تبلیغی می‌باشد. نتایج مطالعات بازاریابی در جدول زیر آورده شده است.

شرح	تلویزیون		رادیو	مجله
	ساعات مناسب	ساعات عادی		
هزینهٔ هر بار تبلیغ (تومان)	۷۵۰۰۰	۴۰۰۰۰	۳۰۰۰۰	۱۵۰۰۰
تعداد مشتریان بالقوه‌ای که از تبلیغ اطلاع پیدا می‌کنند	۹۰۰۰۰۰	۴۰۰۰۰۰	۵۰۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰
تعداد مشتریان زنی که از تبلیغ اطلاع پیدا می‌کنند	۴۰۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰

حداکثر بودجهٔ تبلیغاتی شرکت ۸۰۰۰۰۰ تومان می‌باشد. شرکت خواهان این امر است که:

۱. حداقل ۲ میلیون نفر از زنان از تبلیغ آگاهی پیدا کنند.

۲. حداکثر بودجهٔ تبلیغ در تلویزیون ۵۰۰۰۰۰ تومان باشد.

۳. حداقل سه بار تبلیغ در ساعات عادی روز در تلویزیون و دو بار در وقتهای مناسب به عمل آید.

۴. تعداد تبلیغات در مجله و رادیو بین ۵ تا ۱۰ بار باشد.
مسأله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

۹. یک رستوران به منظور ارائه خدمات در هر روز به تعدادی خدمتکار به صورت زیر نیازمند است.

اوقات روز	حداقل تعداد مورد نیاز
۲_۶	۴
۶_۱۰	۸
۱۰_۱۴	۱۰
۱۴_۱۸	۷
۱۸_۲۲	۱۲
۲۲_۲	۴

هر خدمتکار هشت ساعت متوالی در روز کار می‌کند. هدف تعیین کمترین تعداد خدمتکار مورد نیاز است که احتیاجات فوق را برآورده نماید. مسأله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

۱۰. یک شرکت تولیدکننده دارای ۴ ماشین تولیدی است. این شرکت اخیراً قراردادی را برای تولید سه نوع محصول منعقد کرده است. تعداد سفارش برای محصول نوع ۱، ۴۰۰ واحد، برای محصول نوع ۲، ۵۷۰ واحد و برای محصول نوع ۳، ۳۲۰ واحد است. زمان مورد نیاز (برحسب دقیقه) برای تولید هر یک از محصولات برحسب نوع ماشین تولیدی در جدول زیر آمده است:

محصول	ماشین			
	۱	۲	۳	۴
۱	۳۵	۴۱	۳۴	۳۹
۲	۴۰	۳۶	۳۲	۴۳
۳	۳۸	۳۷	۳۳	۴۰

کل ساعات تولیدی برای هر یک از ماشینها به ترتیب؛ ۱۵۰، ۲۴۰، ۲۰۰ و ۲۵۰ ساعت است. سود خالص ناشی از هر محصول به ازای هر ماشین در جدول زیر (براساس هزار ریال) آمده است:

محصول	ماشین ۱	۲	۳	۴
۱	۷۸	۷۸	۸۲	۷۹
۲	۶۷	۸۹	۹۲	۶۳
۳	۸۴	۸۱	۹۰	۵۸

تولیدکننده می‌خواهد بداند که از هر محصول به ازای هر ماشین چه تعداد تولید کند که سود کل تولیدات او حداکثر شود. مسأله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

۱۱. یک پالایشگاه با استفاده از چهار نوع ماده اوّلیه سه نوع گازوییل درجهٔ ۱، ۲ و ۳ را می‌سازد. جدول زیر حداکثر مقدار موجود از هر ماده اولیه و هزینهٔ هر بشکه از آنها را نشان می‌دهد:

ماده اولیه	حداکثر بشکه در دسترس به طور روزانه	هزینهٔ هر بشکه (ریال)
۱	۵۰۰۰	۹۰۰۰۰
۲	۲۴۰۰	۷۰۰۰۰
۳	۴۰۰۰	۱۲۰۰۰۰
۴	۱۵۰۰	۶۰۰۰۰

در ضمن هر نوع گازوییل دارای مشخصات استانداردی از ترکیبات مواد اوّلیه چهارگانه می‌باشد. جدول زیر بیانگر مشخصات ترکیبات و قیمت هر بشکه از انواع گازوییل می‌باشد.

درجهٔ گازوییل	مشخصهٔ ترکیبات	قیمت فروش هر بشکه (ریال)
۱	حداقل ۴۰٪ از ماده اولیه ۱ حداکثر ۲۰٪ از مادهٔ اولیه ۲ حداقل ۳۰٪ از مادهٔ اولیه ۳	۱۲۰۰۰۰۰
۲	حداقل ۴۰٪ از مادهٔ اولیه ۳	۱۸۰۰۰۰۰
۳	حداکثر ۵۰٪ از مادهٔ اولیه ۲ حداقل ۱۰٪ از مادهٔ اولیه ۱	۱۰۰۰۰۰۰

پالایشگاه تمایل دارد که از هر نوع گازوییل حداقل ۳۰۰۰ بشکه تولید کند. مدیر

پالایشگاه می‌خواهد به گونه‌ای چهار نوع مادهٔ اولیه را ترکیب کند که ضمن رعایت مشخصهٔ ترکیبات، سود کل تولیدات را حداکثر نماید.

مسأله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

۱۲. یک تولیدکننده تلویزیون رنگی ۱۴ اینچ درصدد تهیهٔ برنامه زمانبندی تولید خود طی ۵ ماه آینده می‌باشد. آمار تولید گذشته نشان می‌دهد که ۲۰۰۰ دستگاه تلویزیون در ماه قابل تولید است. همچنین می‌توان در وقت اضافه کاری ۶۰۰ دستگاه دیگر در ماه تولید کرد. هزینهٔ هر دستگاه تلویزیون رنگی ۱۴ اینچ ۱۰۰۰۰۰ تومان در نوبت عادی کار و ۱۵۰۰۰۰ تومان در نوبت اضافه کاری است. تعداد سفارشات طی ۵ ماه آینده به شرح جدول زیر است:

ماه	تعداد تلویزیون سفارش داده شده
۱	۱۲۰۰
۲	۲۱۰۰
۳	۲۴۰۰
۴	۳۰۰۰
۵	۴۰۰۰

هزینهٔ انبارداری در ماه ۲۰۰۰ تومان به ازاء هر دستگاه تلویزیون است. موجودی انتهای ماه پنجم باید صفر باشد. مدیر تولید می‌خواهد بداند که در هر ماه چند دستگاه تلویزیون باید تولید کند که ضمن برآورده کردن سفارشات کل هزینه‌های تولید و انبارداری او حداقل گردد. مسأله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

۱۳. شرکت ایران دوخت، تولیدکنندهٔ چهار نوع لباس مردانه است. این شرکت اخیراً قراردادی را با یک فروشگاه انعقاد کرده است که در آن تعهد نموده است که از امروز تا حداکثر ۷۲ ساعت دیگر لباسهای مورد نیاز را تحویل دهد. بنابراین کارخانه باید به طور تمام وقت فعالیت کند. لباسهای تولید شده بوسیلهٔ یک کامیون به فروشگاه حمل خواهند شد که کل ظرفیت کامیون ۱۲۰۰ جین از لباسهای نوع C یا D است. هر جین از لباسهای نوع A و B سه برابر لباسهای نوع C و D فضا لازم دارند. کل بودجهٔ تولیدی شرکت ۲۵ هزار ریال است که همهٔ قابل هزینه شدن در تولید لباسها می‌باشد. شرکت تولیدی دارای دو انبار است که انبار شماره ۱ آن به لباسهای نوع A و B اختصاص دارد و انبار شماره ۲ به لباسهای نوع C و D. ظرفیت هریک از انبارها ۵۰۰ جین است. منابع مورد نیاز، هزینهٔ تولید و سود هر جین از لباسهای مختلف در جدول زیر داده شده است:

نوع لباس	زمان پردازش (ساعت)	هزینه (ریال)	سود (ریال)
A	۰/۱۰	۳۶	۹۰
B	۰/۲۵	۴۸	۱۲۵
C	۰/۰۸	۲۵	۴۵
D	۰/۲۱	۳۵	۶۵

مسأله را به گونه‌ای فرموله کنید که ضمن تعیین تعداد تولید از هر نوع لباس (جین)، سود کل شرکت، حداکثر شود.

۱۴. یک شرکت یخچال سازی، چهار نوع یخچال A، B و C و D را تولید می‌کند. این شرکت فقط دو کارخانه تولیدی در اختیار دارد. کارخانه اوّل قادر است روزانه ۲۰ دستگاه از نوع A، ۵۰ دستگاه از نوع B، ۳۰ دستگاه از نوع C و ۱۵ دستگاه از نوع D را تولید نماید. همچنین کارخانه شماره ۲ می‌تواند، روزانه ۶۰ دستگاه از نوع A، ۲۵ دستگاه از نوع B، ۱۵ دستگاه از نوع C و ۲۵ دستگاه از نوع D تولید کند. هزینه عملیاتی کارخانه ۱ روزانه ۹۰۰۰۰ تومان و برای کارخانه شماره ۲ روزانه ۱۱۰۰۰۰ تومان می‌باشد.

اگر این شرکت در هفته سفارش برای ۱۹۰ یخچال از نوع A، ۱۷۰ دستگاه از نوع B ۹۰ دستگاه از نوع C و ۱۰۰ یخچال از نوع D داشته باشد، هر یک از دو کارخانه چند روز در هفته می‌بایست کار کند تا سفارشهای موردنظر با حداقل هزینه ساخته شوند. مدل برنامه‌ریزی خطی این مسأله را بنویسید.

۱۵. یک شرکت بازرگانی قیمت خرید و فروش یک کالای معین را طی چهار ماه آینده می‌داند. قیمت خرید (C_i) و قیمت فروش (P_i) در هر ماه (i) در جدول زیر داده شده است. ضمناً ظرفیت انبار این شرکت بازرگانی حداکثر ۱۰۰۰۰ واحد است ولی هزینه‌ای ندارد.

	ماه i			
	۱	۲	۳	۴
C_i	۵	۶	۷	۸
P_i	۴	۸	۶	۷

فرض کنید مقدار فروش در آغاز هر ماه به توسط مقدار خریداری شده تعیین می‌شود. در آغاز ماه اوّل ۲۰۰۰ واحد از کالا در انبار موجود است. این شرکت می‌خواهد بداند در هر ماه چقدر کالا خریداری کند و چقدر بفروش رساند تا حداکثر سود را داشته باشد.

یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای این مسأله بنویسید.

۱۶. یک سرمایه‌گذار جوان مبلغ ۲۵۰۰۰۰ واحد اندوخته‌اش را در پروژه‌های مختلف می‌خواهد سرمایه‌گذاری کند. وی با کمک یک سازمان مشاوره شش گزینه برای سرمایه‌گذاری تعیین کرده است. بعد از تجزیه و تحلیلهای بسیار دقیق، مشاور، اطلاعات زیر را در مورد فرصتهای سرمایه‌گذاری و برآورد بازده آنها در اختیار این شخص قرار داده است.

گزینه‌های سرمایه‌گذاری	برآورد بازده (٪)
قرضه عمومی	۱۹
سهام عمومی	۱۳/۵
سهام نوع A	۱۵
سهام نوع B	۱۷
سهام تضمینی	۲۵
سهام ممتاز	۱۴

این سرمایه‌گذار می‌خواهد حداکثر، ۵۰۰۰۰ ریال در خرید اوراق قرضه عمومی سرمایه‌گذاری کند. همچنین مایل است حداکثر ۱۰٪ در خرید سهام نوع A، و سهام نوع B و سهام تضمینی سرمایه‌گذاری کند. مبلغ سرمایه‌گذاری شده در سهام ممتاز نیز باید حداقل با مبلغ سرمایه‌گذاری شده در خرید سهام عادی برابر باشد. به هر حال در مورد نباید بیش از ۲۵٪ کل مبلغ، سرمایه‌گذاری شود. این سرمایه‌گذار جوان می‌خواهد بداند در هر مورد چقدر سرمایه‌گذاری کند تا بیشترین بازگشت مورد انتظار را به دست آورد. یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای این مسأله فرموله کنید.

۱۷. شرکتی دو نوع کلاه شاپو تولید می‌کند. مدت زمان تولید یک کلاه از نوع اوّل دو برابر زمان لازم برای تولید یک کلاه از نوع دوّم است. اگر تمام کلاهها فقط از نوع دوم باشند، شرکت می‌تواند روزانه جمعاً ۵۰۰ کلاه تولید کند. حداکثر فروش روزانه کلاههای نوع اوّل و دوّم در بازار ۱۵۰ و ۲۵۰ عدد است. فرض کنید که سود حاصل از فروش هر کلاه از نوع اوّل و دوّم به ترتیب ۸ تومان و ۵ تومان منظور شود. مطلوب است تعیین تعداد کلاههایی که باید از نوع اوّل و دوّم تولید شوند تا سود کل بیشینه شود. مسأله را در قالب یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

۱۸. چهار فرآورده متوالیاً روی دو ماشین پردازش می‌شوند. مدت زمان لازم برای پردازش هر واحد از هر فرآورده روی دو ماشین (برحسب ساعت) در جدول زیر داده شده است.

ماشین	فرآوردهٔ ۱	فرآوردهٔ ۲	فرآوردهٔ ۳	فرآوردهٔ ۴
	زمان (ساعت) برای هر واحد			
۱	۲	۳	۴	۲
۲	۳	۲	۱	۲

هزینهٔ کل تولید یک واحد از هر فرآورده مستقیماً با زمان مورد استفاده از ماشین متناسب می‌باشد. فرض کنید هزینهٔ هر ساعت استفاده از ماشینهای ۱ و ۲ به ترتیب برابر ۱۰ تومان و ۱۵ تومان می‌باشد. کل زمان در نظر گرفته شده برای تمام فرآورده‌های روی ماشینها ۱ و ۲ برابر ۵۰۰ و ۳۰۰ ساعت می‌باشد. اگر بهای فروش هر واحد از فرآورده‌های ۳،۲،۱ و ۴ به ترتیب برابر ۶۵، ۷۰، ۵۵ و ۴۵ تومان باشد، برای بیشینه ساختن سود خالص کل، مسأله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله نمایید.

۱۹. فرض کنید تعداد «حداقل» اتوبوس مورد نیاز در ساعت iام روز برابر b_i، ($i = 1, 2, \ldots, 24$) باشد. هر اتوبوس ۶ ساعت متوالی کار می‌کند. اگر تعداد اتوبوسها در ساعت iام از حداقل مورد نیاز، b_i، بیشتر شود، اضافه هزینه‌ای برابر C_i برای هر ساعت کار هر اتوبوس اضافی در نظر گرفته می‌شود. مسأله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید تا بتواند هزینهٔ اضافی کل را حداقل سازد.

۲۰. مدل عمومی برنامه‌ریزی خطی را برای مسأله ۲.۳.۲ بنویسید.

۲۱. مدل عمومی برنامه‌ریزی خطی را برای مسأله ۲.۳.۵ بنویسید.

۲۲. وجه تسمیه برنامه‌ریزی خطی را توضیح دهید و آن را بنویسید.

فصل سوم

برنامه‌ریزی خطی

(روش هندسی[1])

اهداف فصل

در این فصل دانشجویان با مفروضات برنامه‌ریزی خطی و شیوه حل ترسیمی مسائل دو متغیره آشنا خواهند شد. همچنین در این فصل دانشجویان باید بتوانند موارد خاص برنامه‌ریزی خطی را در حالت ترسیمی تشخیص دهند.

۳.۱ مقدمه

مدیر هر سازمانی معمولاً درصدد یافتن بهترین راه حل نیل به یک هدف با عنایت به محدودیتهای درون سازمانی و برون سازمانی است. محدودیتهای ایجاد شده برای سازمانها و مدیران می‌تواند ناشی از محدودیت منابع همانند نیروی کار، مواد اولیه، انرژی یا بودجه باشد. یکی از اهداف اساسی هر سازمانی نیل به حداکثر سود می‌باشد. به عبارت دیگر، مدیر درصدد «حداکثر کردن»[2] سود مؤسسه می‌باشد. از طرف دیگر بخشی از واحدهای سازمان مانند واحد تولید و یا بسته‌بندی نیز هستند که درصدد «حداقل کردن»[3] هزینه‌های خود می‌باشند. یکی از مهمترین فنون تحقیق در عملیات که به مدیران کمک می‌کند با توجه به محدودیتهای موجود به هدف خود در شکل بهینه نایل آیند، فن «برنامه‌ریزی خطی» (LP[4]) می‌باشد.

شروع برنامه‌ریزی خطی در سال ۱۹۴۱ با تحقیقات اقتصاددان معروف لئونتیف[5] همراه می‌باشد. همزمان با وی دانشمند دیگری بنام هیچکاک[6] مدل حمل ونقل را به طریق برنامه‌ریزی خطی تفسیر نمود و همین تفسیر در سال ۱۹۴۷ توسط کوپ مَنز[7] انجام گرفت. در سال ۱۹۴۵

---

1. Graphical Method
2. Maximize
3. Minimize
4. Linear programming
5. W. W. Leontief
6. Hitchcock
7. Koopmans

نیز مسأله دایت[1] ـ شامل ترکیبات مختلف از مواد برای حصول به نتیجه خاصی می‌باشد ـ توسط استیگلر[2] بررسی گردید. پیشرفت فن برنامه‌ریزی خطی (LP) و حل آن مدیون آقای جرج دنتزیگ[3] ریاضی‌دان معروف و همکاران وی می‌باشد.

دنتزیگ به اتفاق همکارانش از جمله مارشال وود[4] در سال ۱۹۴۷ در یکی از پروژه‌های نیروی هوایی آمریکا از برنامه‌ریزی خطی استفاده نمودند و برای حل مسأله موردنظر روشی سیستماتیک به نام «روش سیمپلکس»[5] را بوجود آورند.

سه قدم اساسی برای استفاده از فن برنامه‌ریزی خطی وجود دارد. اوّل؛ مسأله باید به گونه‌ای تعریف شود که با استفاده از فن برنامه‌ریزی خطی قابل حل باشد. دوم؛ مسأله باید در قالب یک مدل ریاضی فرموله شود. و سوم اینکه؛ مدل باید با استفاده از فن ریاضی «قطعی و معین» قابل حل باشد. به عبارت دیگر فن برنامه‌ریزی خطی یکی از مهمترین فنون OR در شرایط تصمیم‌گیری قطعی (غیر احتمالی) است.

توسعه برنامه‌ریزی خطی را در زمره مهمترین پیشرفتهای علمی اواسط قرن بیستم به حساب می‌آورند، و باید قبول کرد که این ارزیابی بی‌مورد نیست. زیرا تأثیر آن در زمینه‌های مختلف از سال ۱۹۵۰ میلادی تا امروز فوق‌العاده بارز بوده است. برنامه‌ریزی خطی، اکنون دیگر از جمله ابزارهای متعارفی است که باعث صرفه‌جویی هزارها تا میلیونها ریال برای واحدهای صنعتی و بازرگانی می‌شود و استفاده از آن در سایر بخشهای جامعه نیز به سرعت روبه گسترش است. در حال حاضر می‌توان گفت که حدود یک چهارم کل محاسبات علمی که توسط رایانه انجام می‌گیرد به برنامه‌ریزی خطی و مشتقات آن مربوط می‌شود.

نام برنامه‌ریزی خطی (LP) برگرفته از این واقعیت است که کلیهٔ روابط ریاضی بکار گرفته در مدل «ریاضی خطی» هستند و کلیهٔ فنون حل مشتمل بر مراحلی هستند که به «برنامه»[6] معروفند. به طور خلاصه، برنامه‌ریزی خطی نوعاً به مسایل تخصیص «منابع محدود» بین «فعالیتهای رقیب» در جهت یافتن «بهترین راه حل ممکن (بهینه)» مربوط می‌شود. به عبارت دیگر، چنانچه انجام پاره‌ای از فعالیتها منوط به بهره‌گیری از منابع محدودی که مورد نیاز مشترک آنهاست باشد، مسأله تخصیص منابع و در نتیجه تعیین حجم فعالیتها مطرح خواهد شد.

۳.۲ مفروضات برنامه‌ریزی خطی

یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی در صورتی خطی است که دارای مفروضات زیر باشد:

---

1. Diet problem
2. Stigler
3. George D. Dantizig
4. Marshall Wood
5. Simplex Method
6. programme

۱. فرض تناسب[1]
۲. فرض جمع‌پذیری[2]
۳. فرض بخش‌پذیری[3]
۴. فرض معین بودن[4]

کلیهٔ مدلهای فرموله شده در فصل دوّم از خواص (مفروضات) چهارگانه فوق برخوردارند. حال به شرح هر یک از این مفروضات با توجه به مدل عمومی برنامه‌ریزی خطی (بخش ۲.۴) می‌پردازیم.

۳.۲.۱ فرض تناسب

منظور از فرض تناسب، این است که هر فعالیت به تنهایی و مستقل از سایر فعالیتها عمل می‌کند. به عبارت دیگر؛ آهنگ تغییر یا شیب رابطهٔ تابعی ثابت است. بنابراین چنانچه متغیر تصمیم برابر مقداری تغییر کند، مقدار تابع نیز دقیقاً به همان نسبت تغییر می‌کند. به عنوان مثال موردی را در نظر بگیرید که $a_{11} = ۵$ و $x_1 = ۲$ و $a_{11} . x_1 = ۱۰$ باشد. اگر x_1 به مقدار ۵٪ افزایش یابد (یعنی $x_1 = ۲٫۱$) مقدار تابع نیز ۱۰/۵ می‌شود که دقیقاً ۵٪ افزایش یافته است. این خصوصیت همواره برای محدودیتهای مدل و تابع هدف برقرار است.

۳.۲.۲ فرض جمع‌پذیری

این فرض بیانگر این واقعیت است که باید روابط ریاضی بین متغیرها در مدل (چه در تابع هدف و چه در محدودیتها) به صورت جمع جبری بیان گردد. بنابراین در مدل برنامه‌ریزی خطی، هیچ‌گاه حاصلضرب دو متغیر دیده نمی‌شود. به عنوان مثال به رابطه‌های زیر توجه کنید:

رابطه ۱: $۳x_1 + ۵x_2 - x_1 . x_3 \leq ۵۰$

رابطه ۲: $۳x_1 + ۵x_2 - x_3 \leq ۵۰$

رابطهٔ ۱ یک رابطه غیرخطی است، چون از حاصلضرب x_1 و x_3 $(x_1 . x_3)$ در آن استفاده شده است. در حالی که رابطه ۲ یک رابطهٔ خطی است، چون رابطه x_1، x_2 و x_3 به صورت جمع جبری بیان شده است.

۳.۲.۳ فرض بخش‌پذیری

این خصوصیت برنامه‌ریزی خطی به واقعیت «غیر عدد صحیح»[5] بودن متغیرهای تصمیم (x_j)

---

1. Proportionality
2. Additivity
3. Divisibility
4. Deterministic
5. Non-Integer

در مدل توجه دارد. در مدل برنامه‌ریزی خطی متغیرهای تصمیم هر مقدار دلخواهی (چه عدد صحیح ـ چه غیر عدد صحیح) می‌توان در جواب نهایی مسأله داشته باشند. در برخی از مدلهای طراحی شده برای مسائل واقعی متغیرهای تصمیم صرفاً مقدار صحیح می‌توانند داشته باشند. به عنوان مثال اگر مسأله فرموله شده بیانگر ترکیب بهینه تعداد تولید «یخچال» باشد. در این صورت x فقط می‌تواند مقادیر صحیح داشته باشد و مقدار اعشار برای متغیر معرف تعداد تولید یخچال بی‌معنا خواهد بود. بنابراین مدل فوق‌الذکر اگرچه ممکن است که تمام مفروضات دیگر برنامه‌ریزی خطی را داشته باشد ولی «عدد صحیح» بودن مقادیر تولید به معنی نقض مدل عمومی برنامه‌ریزی خطی است. بنابراین فرض بخش‌پذیری به معنای آن است که هر واحد فعالیت به هر کسر دلخواهی قابل تقسیم است و لذا متغیرهای تقسیم می‌توانند مقادیر غیرصحیح نیز داشته باشند. این خصومت مدل برنامه‌ریزی خطی براساس محدودیتهای غیرمنفی مدل عمومی LP ($x_1, x_2, \ldots x_n \geq 0$) تضمین می‌شود.

۳.۲.۴ معین (قطعی) بودن:

بدین معنی است که کلیهٔ پارامترهای (C_j ، b_i ، a_{ij}) مدل عمومی برنامه‌ریزی خطی در افق برنامه‌ریزی مقادیر ثابتی هستند. اگرچه تعیین پارامترهای مدل در اکثر مواقع به طور قطعی امکان‌پذیر است ولی در برخی موارد افق برنامه‌ریزی آنقدر بلندمدت است که مقادیر پارامترها دستخوش تغییر می‌شوند. در چنین مواقعی می‌توان از فن «تحلیل حساسیت»[1] برای بررسی تأثیر تغییرات بر جواب بهینه مدل استفاده کرد.

۳.۳ روش ترسیمی حل مسأله برنامه‌ریزی خطی

در فرآیند تحقیق در عملیات اشاره شد که پس از ساختن مدل، به مرحله حل آن می‌رسیم. در واقع یک مدل ریاضی به خودی خود ارزش کاربردی و تحلیلی ندارد. اهمیت و ارزش مدل به نتایج آن است که پس از حل حاصل می‌شوند. گفته شد که در مدل برنامه‌ریزی خطی روابط از نوع خطی هستند. روابط خطی یکی از ساده‌ترین روابطی هستند که برای حل آنها می‌توان از شیوهٔ «ترسیمی» استفاده کرد. روش ترسیمی در مدلهای برنامه‌ریزی خطی به مدلهایی محدود می‌شود که حداکثر دارای دو متغیر تصمیم هستند. برای حل این نوع مدلها می‌توان از یک دستگاه مختصات استفاده کرد. استفاده از شیوهٔ ترسیمی برای مدلهایی که سه متغیره هستند نیز با استفاده از دستگاههای سه بعدی تا حدودی امکان‌پذیر است ولی چنانچه تعداد متغیرهای تصمیم بیش از ۳ باشد، حل مدل به شیوه ترسیمی به هیچ وجه امکانپذیر نخواهد بود. اگرچه

---

1. Sensitivity Analysis

شیوه ترسیمی حل مدل صرفاً جنبهٔ تئوریک دارد، ولی در این فصل به طور مفصل مورد بحث قرار می‌گیرد. چون شیوه ترسیمی، روش بسیار ساده‌ای برای درک مفاهیم پیچیدهٔ LP و مفاهیم بعدی کتاب خواهد بود حال روش ترسیمی را با استفاده از مسأله ترکیب تولید تشریح می‌کنیم.

مثال ۳.۱ کارخانه‌ای درصدد تولید دو نوع محصول است که میزان مصرف هر واحد از آنها از منابع (نیروی کار و مواد اولیه) به صورت زیر است. سود حاصل از تولید هر واحد از محصولات نیز داده شده است.

محصول	منابع مورد نیاز: نیروی کار (نفر - ساعت)	منابع مورد نیاز: مواد اولیه kg	سود (ریال)
۱	۱	۴	۴۰
۲	۲	۳	۵۰

متغیرهای تصمیم مدل عبارتند از:

x_1 = تعداد تولید از محصول نوع ۱

x_2 = تعداد تولید از محصول نوع ۲

تابع هدف عبارت است از؛ حداکثر کردن سود ناشی از تولید:

$$\text{Max } Z = ۴۰\, x_1 + ۵۰\, x_2$$

محدودیتهای مدل به ترتیب شامل محدودیت نیروی کار و محدودیت مواد اولیه خواهد بود.

محدودیت نیروی کار (نفر ــ ساعت) $x_1 + ۲\, x_2 \leq ۴۰$

محدودیت مواد اولیه (kg) $۴\, x_1 + ۳x_2 \leq ۱۲۰$

علاوه بر محدودیتهای کارکردی فوق، باید محدودیتهای غیرمنفی را برای متغیرهای تصمیم به مدل اضافه کرد. حال کلیّت مدل ترکیب تولید به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\text{Max } Z = ۴۰\, x_1 + ۵۰\, x_2$$

s.t:

$$x_1 + ۲\, x_2 \leq ۴۰$$
$$۴\, x_1 + ۳\, x_2 \leq ۱۲۰$$
$$x_1, x_2 \geq ۰$$

برای حل مدل فوق با استفاده از روش ترسیمی، ابتداء یک دستگاه مختصات تشکیل می‌دهیم که محور افقی آن x_1 و محور عمودی آن با x_2 مدّرج می‌شود. سپس به رسم هریک از

محدودیتها در دستگاه مختصات می‌پردازیم. این عمل با در نظر گرفتن هر یک از محدودیتها به صورت یک معادله (خط مستقیم) امکان‌پذیر است. حالا به رسم محدودیت نیروی کار توجه کنید:

ابتداء آن را به صورت خط $x_1 + 2x_2 = 40$ تعریف می‌کنیم.

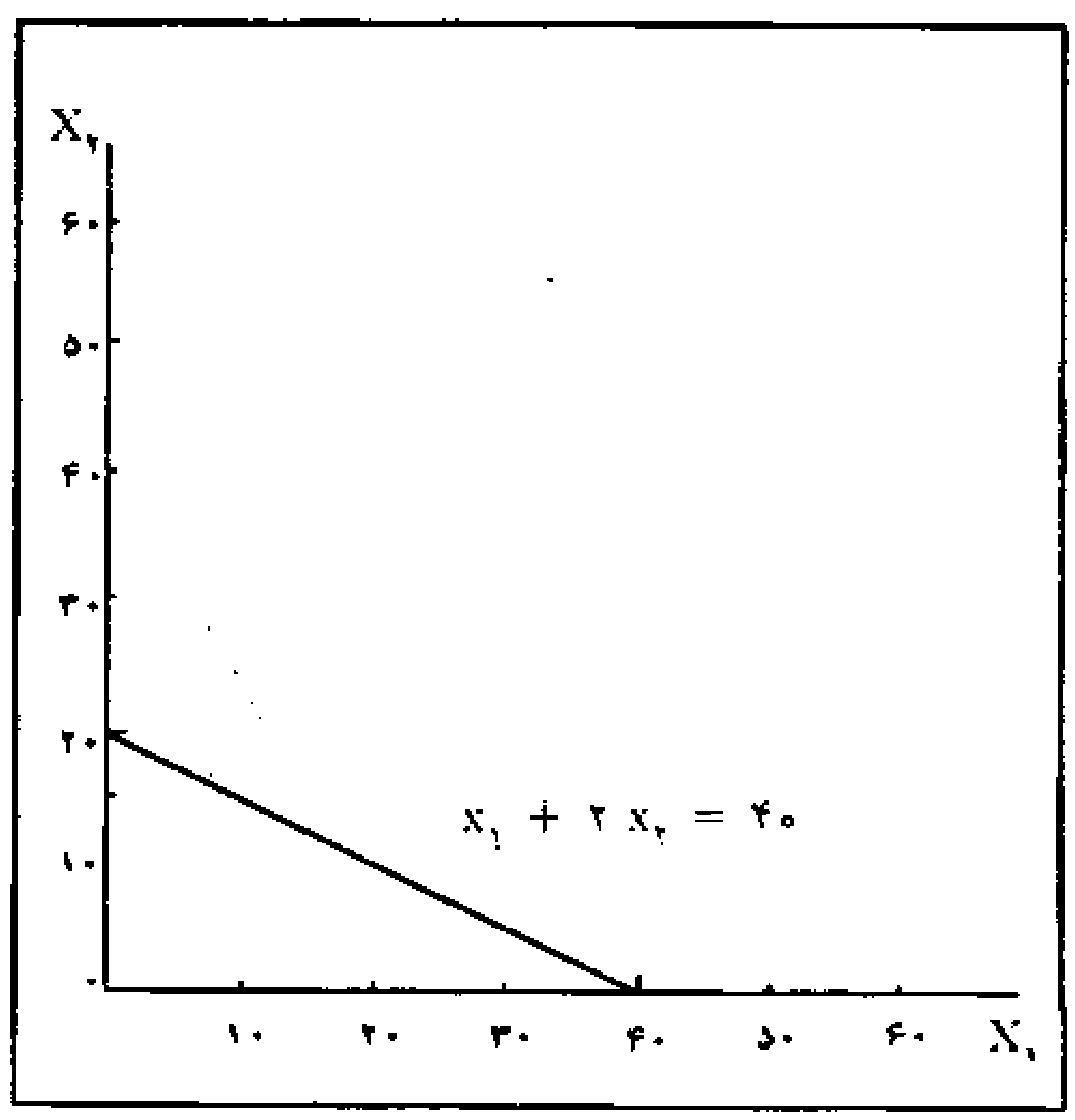
ساده‌ترین روش برای رسم یک خط تعیین دو نقطه بر روی محورها و سپس متصل کردن آن نقاط با استفاده از یک خط مستقیم است. نقطهٔ اوّل می‌تواند با استفاده از $x_1 = 0$ و سپس حل معادله برحسب x_2 معلوم می‌شود. یعنی:

$$(0) + 2x_2 = 40$$
$$x_2 = 20$$

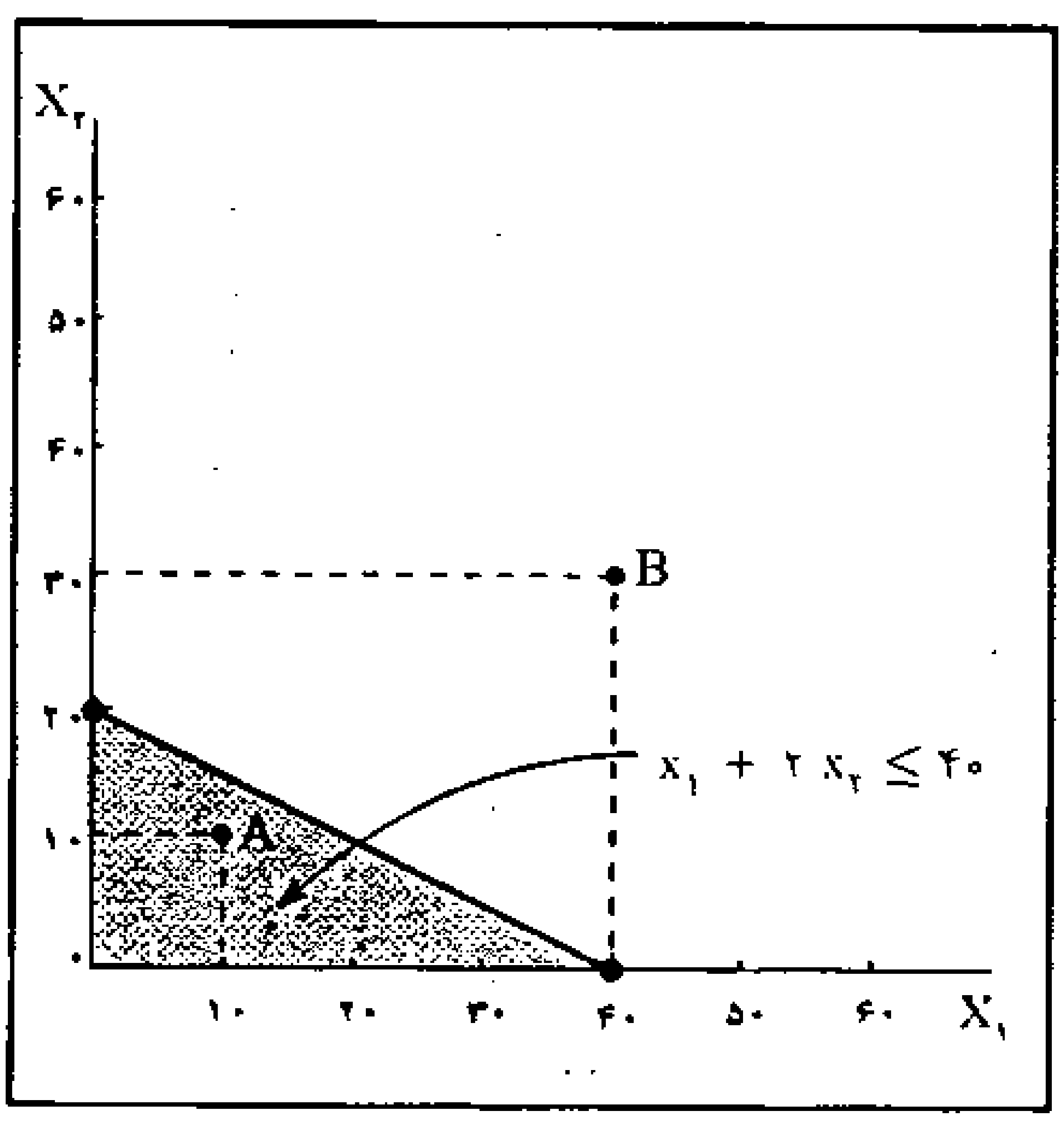
نقطهٔ دوّم نیز با $x_2 = 0$ و حل معادله برحسب x_1 بدست می‌آید. به صورت زیر:

$$x_1 + 2(0) = 40$$
$$x_1 = 40$$

واضح است که نقطهٔ ($x_1 = 0$ و $x_2 = 20$) بر روی محور عمودی و نقطهٔ ($x_1 = 40$ و $x_2 = 0$) بر روی محور افقی قرار دارد. حال با استفاده از یک خط مستقیم این دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم، همچنانکه در شکل ۳.۱ نشان داده شده است. توجه دارید که برای سادگی در ترسیم نامعادله به معادله تبدیل شده است. پس «خط» بدست آمده در نمودار بیانگر تمامیت محدودیت نیروی کار نیست. زیرا محدودیت شامل کلیهٔ نقاط کوچکتر یا مساوی (≤) ۴۰ است نه مقادیر مساوی (=) ۴۰. ناحیهٔ مربوط به محدودیت نیروی کار در شکل ۳.۲ به صورت



شکل ۳.۱ ترسیم خط محدودیت نیروی کار



شکل ۳.۲ ناحیهٔ مربوط به محدودیت نیروی کار

هاشور خورده نشان داده شده است.

حال آزمون صحت ترسیم ناحیه مربوط به محدویت اوّل مدل با استفاده از بررسی دو نقطه انجام می‌گیرد. نقطهٔ A را در شکل ۳.۲ در نظر بگیرید. این نقطه در تقاطع ($x_1 = ۱۰$ و $x_2 = ۱۰$) قرار دارد. مقدار نقطهٔ A را در محدودیت مربوط جایگذاری کنید:

$$x_1 + ۲x_2 \leq ۴۰ \rightarrow ۱۰ + ۲(۱۰) \leq ۴۰$$

$$۳۰ \leq ۴۰ \text{ ساعت}$$

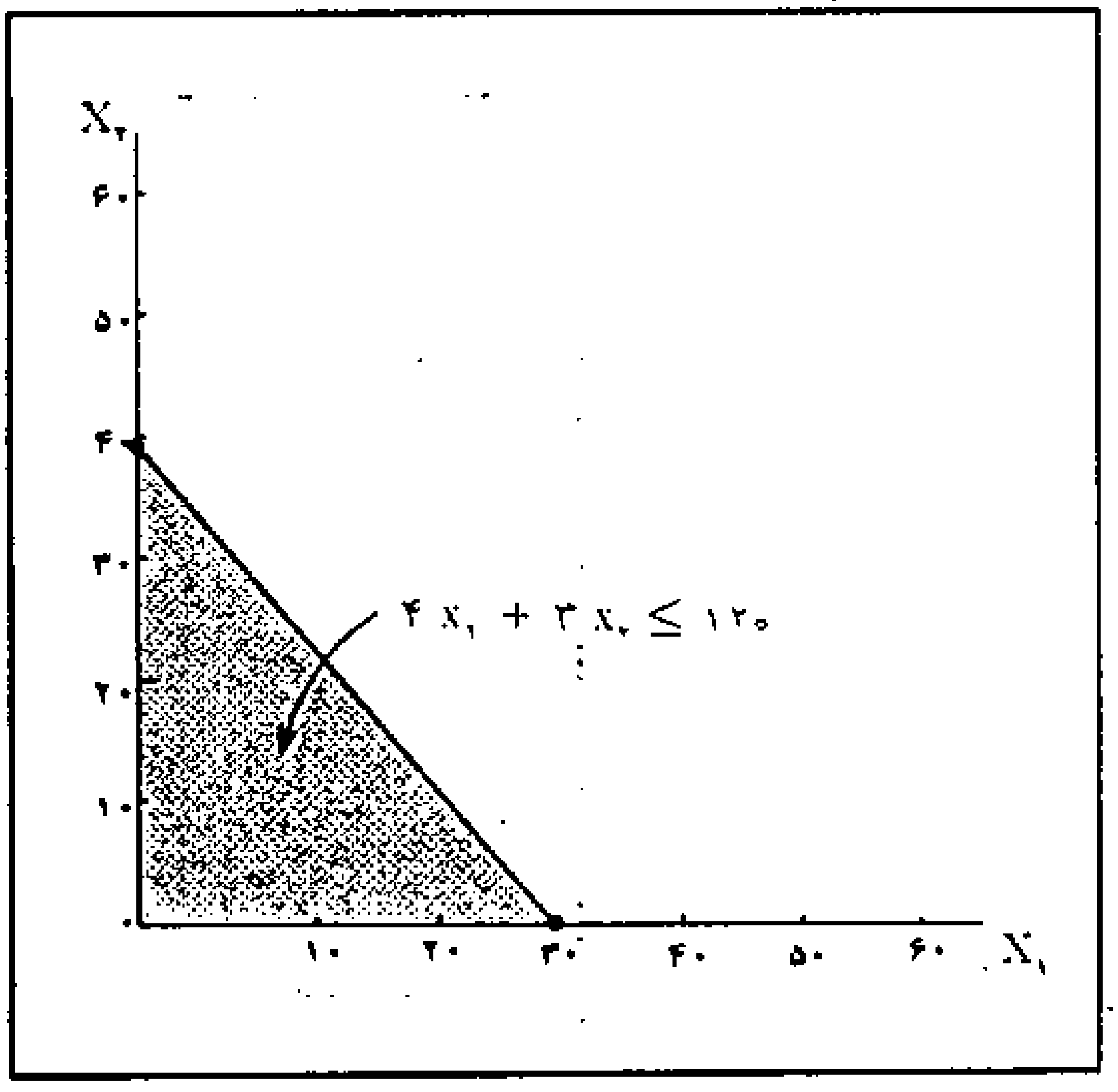
مشخص می‌گردد که نقطهٔ A واقعاً جزئی از ناحیه مربوط به محدودیت نیروی کار است. بنابراین از نظر ریاضی در محدودیت مربوط صدق می‌کند. حال به بررسی نقطهٔ B بپردازید. نقطهٔ B دارای مختصات ($x_1 = ۴۰$ و $x_2 = ۳۰$) است.

$$۴۰ + ۲(۳۰) \leq ۴۰$$

$$۱۰۰ \leq ۴۰ \text{ ساعت}$$

براساس شکل ۳.۲، نقطهٔ B خارج از ناحیه مربوط به محدودیت نیروی کار قرار دارد. بنابراین از نظر ریاضی نباید در محدودیت مربوط صدق کند. همچنانکه بررسی ریاضی نشان می‌دهد مقدار ۱۰۰ کوچکتر یا مساوی ۴۰ نیست.

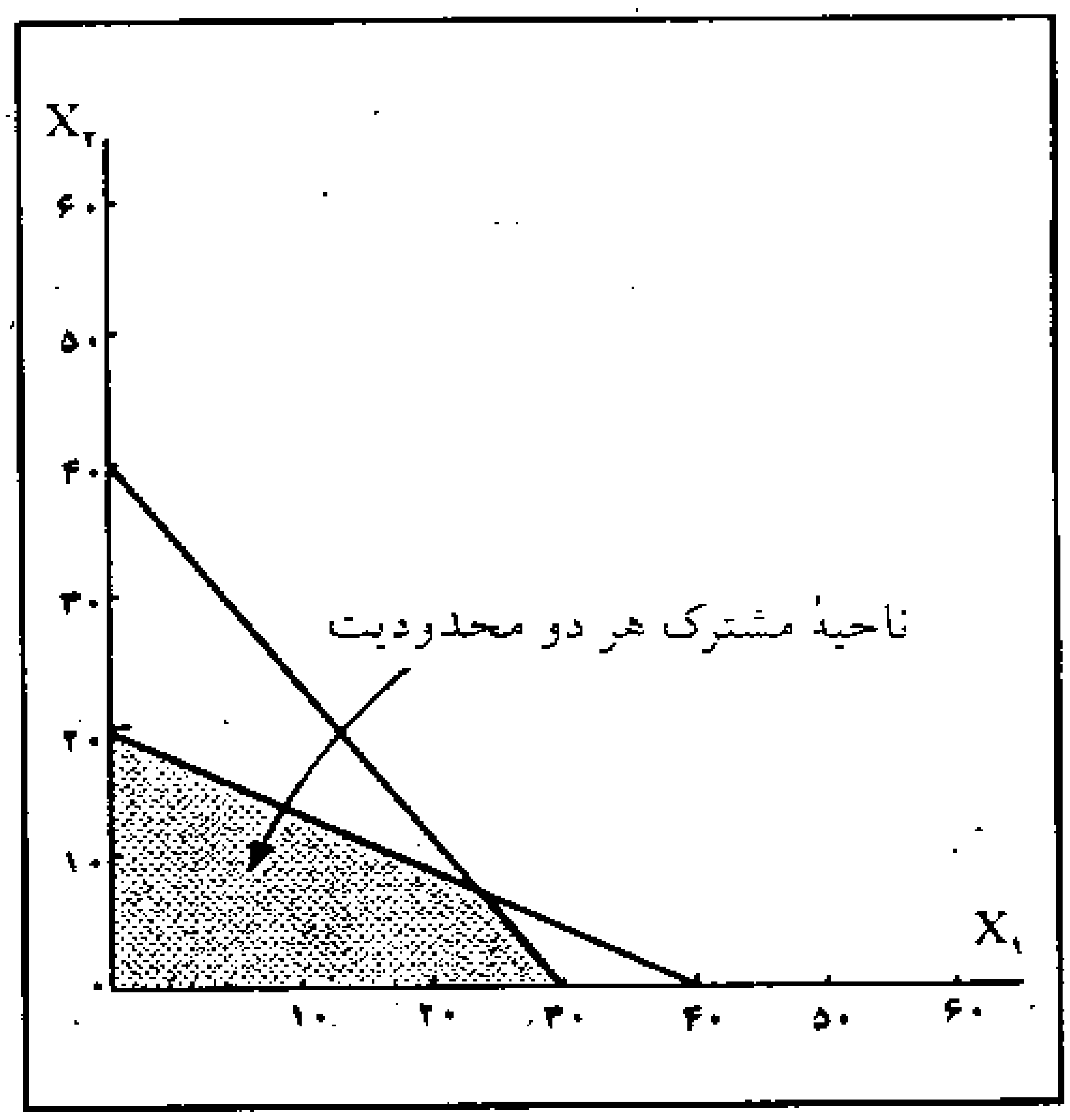
به طریق مشابه محدودیت مواد اولیه مسأله ترسیم می‌شود. همچنانکه در شکل ۳.۳ نشان داده شده است. خط مربوط به معادله دوّم مدل حد فاصل بین نقاط ($x_1 = ۰$ و $x_2 = ۴۰$) و ($x_1 = ۳۰$ و $x_2 = ۰$) می‌باشد و ناحیهٔ مربوط به نامعادله دوّم مدل به صورت هاشور خورده



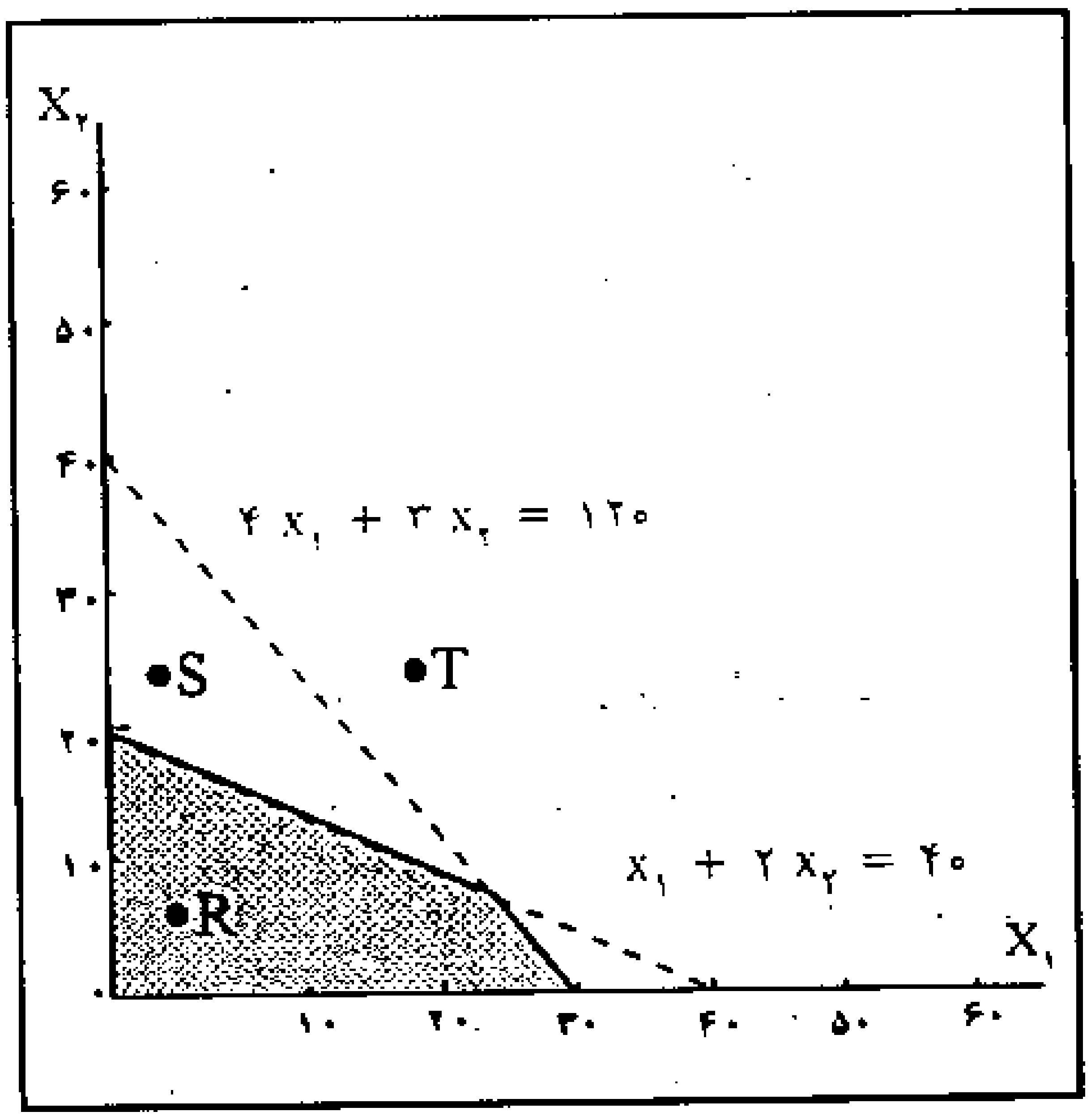
شکل ۳.۳ ناحیه مربوط به محدودیت مواد اولیه

در منطقه کوچکتر یا مساوی (≥) خط قرار گرفته است.

ترکیب دو شکل ۳.۲ و ۳.۳ منجر به نمایش هندسی محدودیتهای مدل به طور همزمان خواهد شد که در شکل ۳.۴ آمده است. ناحیه هاشور خورده در شکل ۳.۴ شامل مجموعه نقاطی است که در هر دو محدودیت صدق خواهد کرد. به عنوان مثال نقاط R، S و T را در شکل ۳.۵ در نظر بگیرید. نقطهٔ R هر دو محدودیت مدل را ارضاء می‌کند. بنابراین این نقطه یک



شکل ۳.۴ نمایش همزمان دو محدودیت



شکل ۳.۵ ناحیه موجه محدودیتها

«جواب موجه»[1] می‌باشد. نقطه S محدودیت اوّل را $(x_1 + 2x_2 \le 40)$ نقض می‌کند ولی در محدودیت دوّم $(4x_1 + 3x_2 \le 120)$ صدق می‌کند. بنابراین آن را یک «جواب غیرموجه»[2] می‌گویند. نقطه T نیز به طریق مشابه یک نقطهٔ غیرموجه است، چون در هیچ یک از محدودیتهای مدل صدق نمی‌کند.

ناحیهٔ هاشور خوردهٔ شکل ۳.۵، «ناحیه موجه»[3] نامیده می‌شود. زیرا تمامی نقاط این ناحیه، محدودیتهای مدل را ارضاء می‌کنند و در آنها صدق می‌نمایند. بنابراین یکی از نقاط این ناحیه منجر به حداکثر سود شرکت تولیدی در مسأله ۳.۱ خواهد شد. قدم بعدی در روش ترسیمی حل مدل، یافتن «نقطهٔ بهینه» است. نقطهٔ بهینهٔ این مسأله، نقطه‌ای است که سود به‌ازای آن در ناحیهٔ موجه حداکثر می‌شود.

---

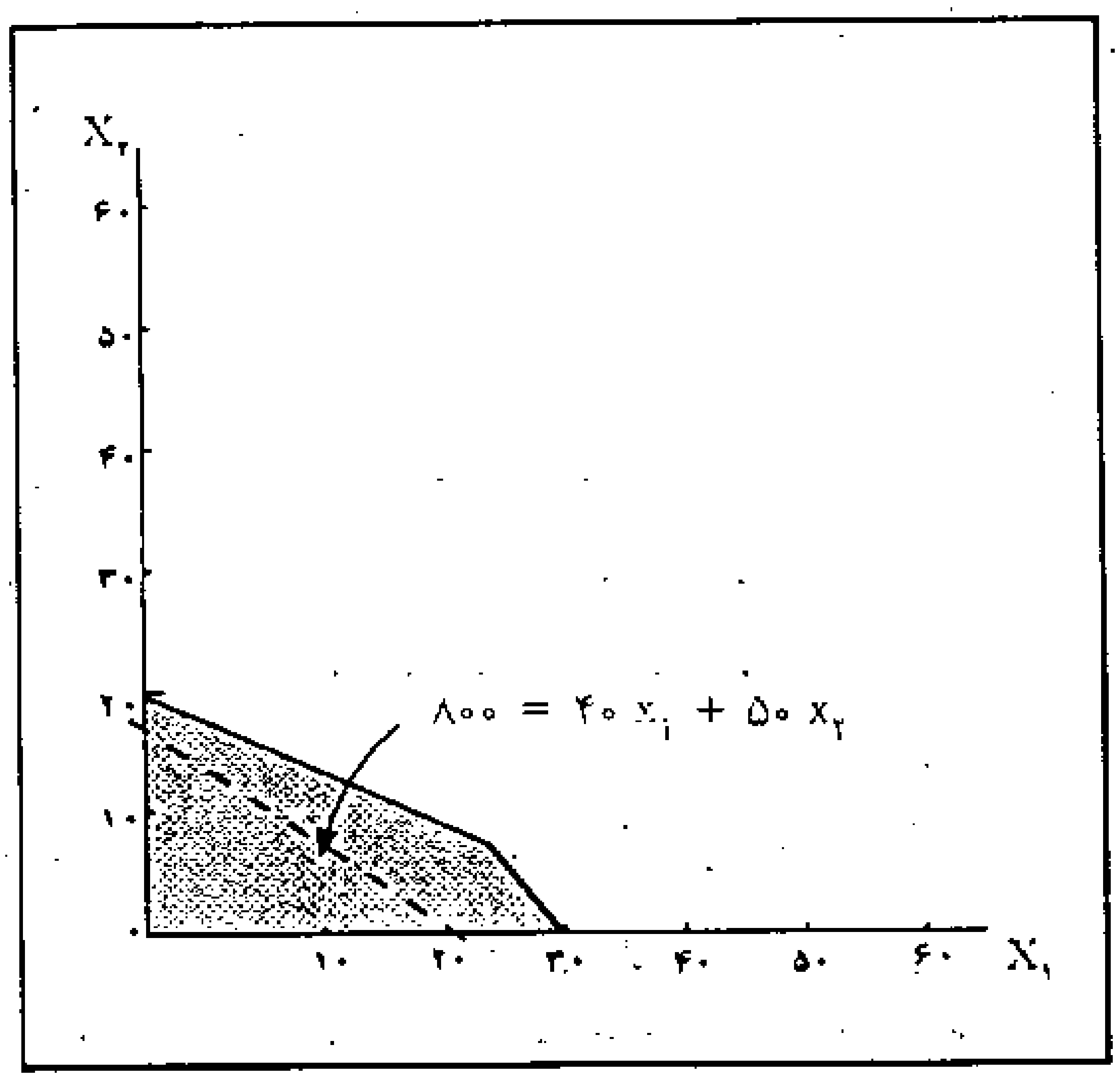
1. Feasible Solution
2. Infeasible Solution
3. Feasible Area

۳.۳.۱ نقطه (جواب) بهینه[1]

قدم دوّم در روش ترسیمی حل مدلهای برنامه‌ریزی خطی تعیین نقطهٔ موجه‌ای است که بزرگترین مقدار سود به ازاء آن حاصل می‌شود. برای بدست آوردن این نقطه ابتداء تابع هدف را به‌ازای یک مقدار دلخواه ترسیم کنید. برای مثال اگر مقدار سود ؛ Z، ۸۰۰ ریال باشد، تابع هدف عبارت خواهد بود از:

$$۴۰ x_1 + ۵۰ x_2 = ۸۰۰$$

ترسیم این خط کاملاً شبیه رویهٔ ترسیم خطوط مربوط به محدودیتها می‌باشد. نمایش هندسی این تابع در شکل ۳.۶ به صورت خط چین آمده است. همچنانکه واضح است، تمام نقاط خط مربوط به سود ۸۰۰ ریال در ناحیه موجه مدل قرار گرفته است. خط بدست آمده نشان می‌دهد که هر ترکیبی از x_1 و x_2 بر روی این خط ارزش معادل ۸۰۰ ریال برای Z به همراه دارد.

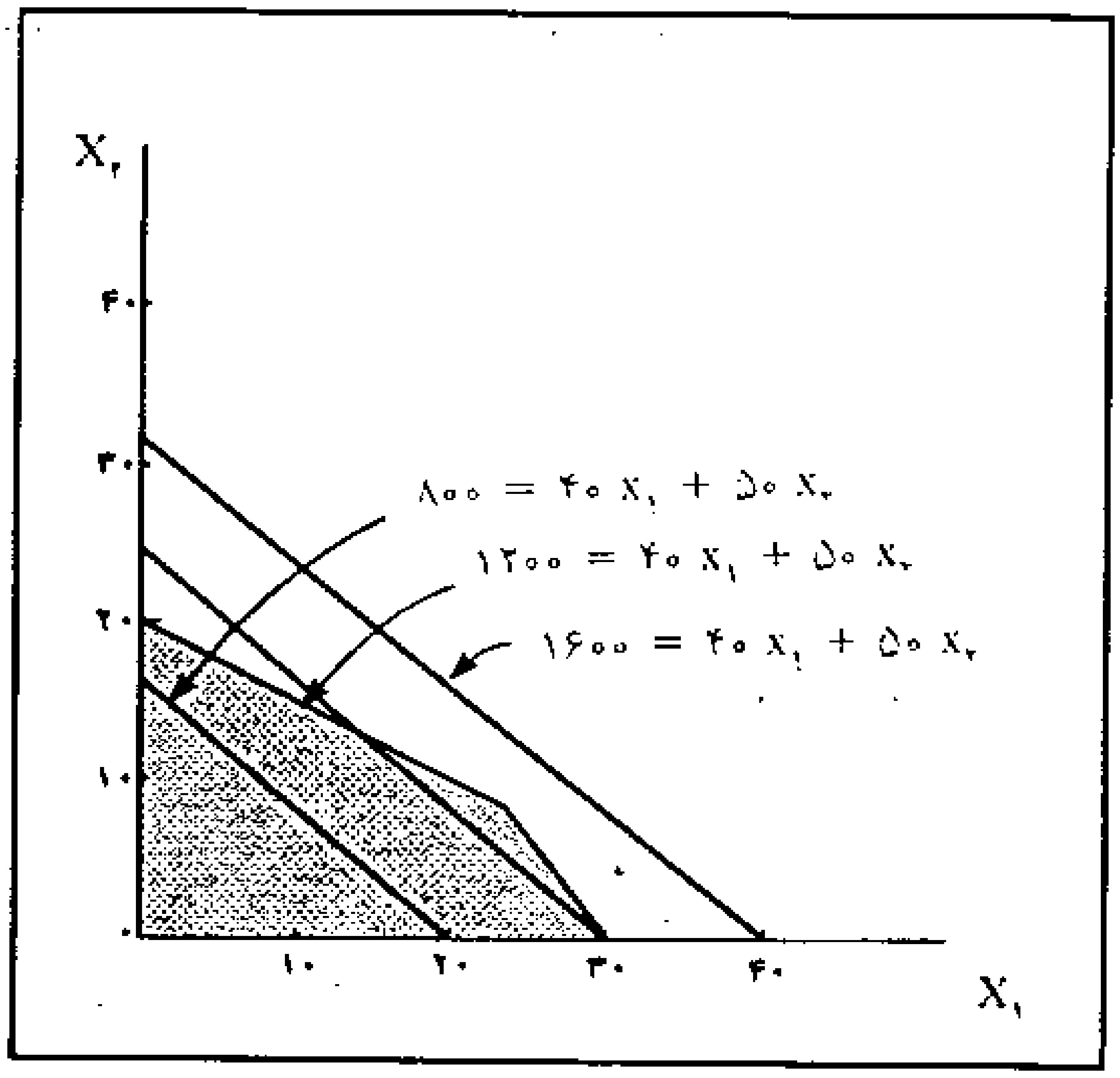


شکل ۳.۶ خط تابع هدف به ازای ۸۰۰ = Z ریال

همچنانکه شکل ۳.۶ نشان می‌دهد، هنوز امکان افزایش سود از ۸۰۰ ریال به مقادیر بالاتر وجود دارد. چون بخشی از مقادیر موجه برای x_1 و x_2 وجود دارند که بالاتر از خط ۸۰۰ = Z ریال قرار گرفته‌اند. برای مثال به مقادیر ۱۲۰۰ ریال و ۱۶۰۰ ریال برای تابع Z در شکل ۳.۷ توجه کنید.

همچنانکه در شکل ۳.۷ مشخص شده است، بخشی از خط ۱۲۰۰ =Z ریال خارج از

1. Optimal Solution



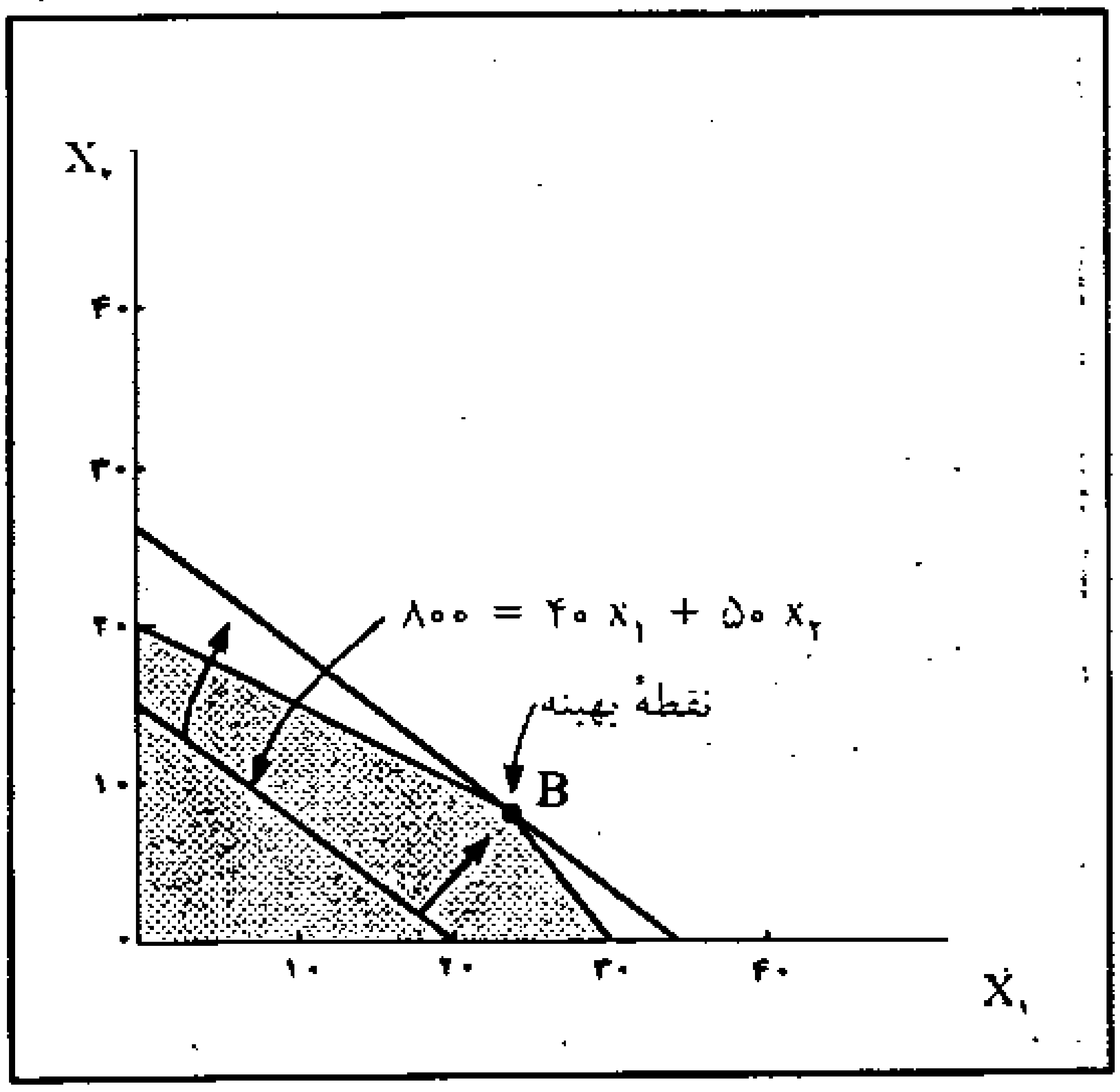
شکل ۳.۷ خطوط تابع هدف برای مقادیر ۸۰۰ =Z، ۱۲۰۰ =Z و ۱۶۰۰ =Z ریال

ناحیه موجه قرار گرفته است ولی بخشی از خط هنوز در داخل ناحیه موجه قرار دارد. بنابراین، این خط نشان می‌دهد که هنوز نقاط موجهی وجود دارند که امکان افزایش سود را از ۸۰۰ ریال به ۱۲۰۰ ریال و یا بیشتر دارند. این امر بدین معنی است که هیچ نقطهٔ موجهی وجود ندارد که سود حاصل از آن ۱۶۰۰ ریال باشد. بنابراین مشخص می‌شود که حداکثر سود حاصل از تولید محصولات کارخانه کمتر از ۱۶۰۰ ریال و بیشتر از ۱۲۰۰ ریال است.

با بررسی شکل ۳.۷ مشاهده می‌شود که با دور شدن خط تابع هدف از مبدأ مختصات ($X_1 = ۰$ و $X_2 = ۰$) بر مقدار سود افزوده می‌شود. با عنایت به این خاصیت می‌توان گفت: «حداکثر سود در نقطه‌ای حاصل خواهد شد که خط تابع هدف ضمن مماس بودن بر یک نقطهٔ موجه نسبت به مبدأ مختصات در دورترین فاصله قرار گیرد.» این نقطه در مثال ما، نقطه B است که در شکل ۳.۸ نشان داده شده است.

برای پیدا کردن نقطهٔ B، خط مربوط به $Z = ۸۰۰$ را به سمت بالا انتقال دهید. بدیهی است، خطوط موازی بیشماری با خط $۴۰ X_1 + ۵۰ X_2 = ۸۰۰$ قابل ترسیم است.

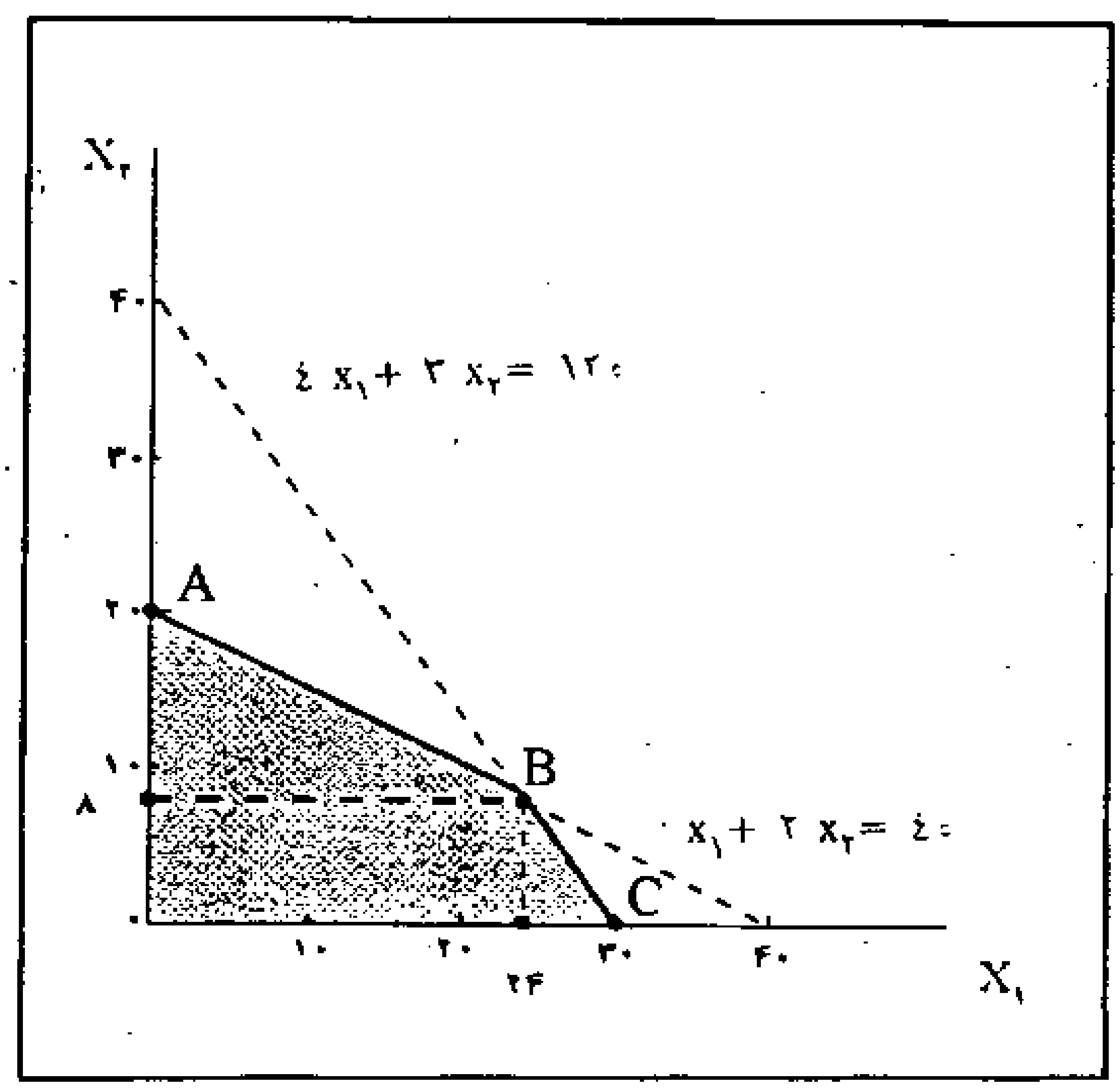
خط $Z = ۸۰۰$ را آنقدر به سمت بالای ناحیه موجه انتقال دهید تا به آخرین نقطهٔ ناحیهٔ موجه برسید. این نقطه همان نقطهٔ B است. پس آخرین نقطهٔ موجه، بهترین نقطه‌ای است که حداکثر سود؛ Z، به ازاء آن حاصل خواهد شد. بنابراین، «جواب بهینه» بهترین جواب موجه است.



شکل ۳.۸ تعیین نقطه (جواب) بهینه

۳.۳.۲ تعیین مقادیر متغیرهای تصمیم

سومین مرحله در رویکرد ترسیمی حل مدل LP بدست آوردن مقادیر x_1 و x_2 در نقطهٔ بهینه است. در مثال ما، همچنانکه از شکل ۳.۹ برمی‌آید، می‌توان به طریق ترسیمی دریافت که نقطهٔ B در تقاطع ($x_1 = ۲۴$ و $x_2 = ۸$) قرار دارد. این نحوهٔ استخراج مقادیر متغیرهای تصمیم در



شکل ۳.۹ تعیین مقادیر جواب به روش هندسی

صورتی امکان دارد که ترسیم هندسی محدودیتها با دقت زیادی انجام گرفته باشد. چنانچه در ترسیم نمودار دقت لازم به عمل نیآید، ناچاریم مقادیر متغیرهای تصمیم را به طور تقریبی استخراج کنیم. حال برای تعیین مقادیر جواب به رویه‌ای اشاره خواهد شد که به عنوان یک قاعدهٔ کلی قابل استفاده در کلیهٔ موارد ترسیمی است. برای ارائه این قاعده ابتداء ناچاریم چند خاصیت نقطهٔ جواب را بیان کنیم.

در شکل ۳.۸، همچنانکه تابع هدف افزایش می‌یابد، به نقطه‌ای می‌رسیم که آخرین نقطهٔ ناحیه موجه است. این نقطه در «مرز» ناحیه موجه قرار دارد. پس «نقطهٔ بهینه همواره در مرز ناحیه موجه قرار دارد.» چون نقاط مرزی شامل دورترین نقاط نسبت به مبدأ مختصات هستند. این ویژگی مسائل برنامه‌ریزی خطی باعث می‌شود که تعداد نقاط کاندید برای جواب بهینه به شدت کاهش یابد. با این وجود باز می‌توان تعداد نقاط کاندید برای جواب بهینه را با استفاده از خاصیت دیگر برنامه‌ریزی خطی کاهش داد.

جواب بهینه علاوه بر قرارگرفتن در مرز ناحیه موجه، «همواره بر روی یک گوشه» از مرز قرار دارد. گوشه؛ شامل نقطه‌ای است که در تقاطع «حداقل دو خط» از خطوط مرزی قرار می‌گیرد. خطوط مرزی مثال ما شامل خطوط مربوط به محدودیتهای نیروی کار $(x_1 + 2x_2 \le 40)$ و مواد اولیه $(4x_1 + 3x_2 \le 120)$ و همچنین خطوط (محورهای) مربوط به $x_1 \ge 0$ و $x_2 \ge 0$ می‌باشد. گوشه‌های بدست آمده (نقاط A، B و C) در شکل ۳.۹ «نقاط حدی»[1] هستند. علّت نامگذاری آنها این است که براساس این نقاط «حد» ناحیه موجه مشخص می‌شود. می‌توان به طریق ریاضی ثابت کرد که در برنامه‌ریزی خطی «جواب بهینه همواره در نقطهٔ حدی» قرار دارد. بنابراین در مثال ما جواب بهینه به یکی از نقاط A، B و C محدود می‌شود. نقطهٔ حدی بهینه، آخرین نقطه‌ای است که خط تابع هدف در ناحیه موجه بر آن مماس می‌شود. این خاصیت در شکل ۳.۸ نشان داده شده است.

از شکل ۳.۹ درمی‌یابیم که جواب بهینه گوشهٔ B است. از آنجا که نقطه B از تقاطع دو خط مرزی $x_1 + 2x_2 = 40$ و $4x_1 + 3x_2 = 120$ بوجود آمده است، پس می‌توان با حل همزمان این دو معادله، مقادیر x_1 و x_2 را بدست آورد.

$$\text{دستگاه معادلات}\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 40 & \text{معادله ۱} \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 & \text{معادله ۲} \end{cases}$$

طرفین معادله (۱) را در ۴ ـ ضرب کرده و مجدداً دستگاه معادلات را بنویسید:

---

1. Extreme points

$$\begin{cases} -۴x_1 - ۸x_۲ = -۱۶۰ \\ ۴x_1 + ۳x_۲ = ۱۲۰ \end{cases}$$

حال با حذف x_1 از دستگاه معادلات داریم:

$$-۵x_۲ = -۴۰$$

$$x_۲ = ۸$$

بنابراین با مشخص شدن مقدار $x_۲$ می‌توانیم، به کمک یکی از معادلات اصلی مقدار x_1 را نیز تعیین کرد. پس به کمک معادله (۱) داریم:

$$x_1 + ۲(۸) = ۴۰$$

$$x_1 = ۲۴$$

حال مقدار تابع هدف؛ Z، را به ازاء گوشه ($x_1 = ۲۴$ و $x_۲ = ۸$) تعیین می‌کنیم:

$$Z = ۴۰x_1 + ۵۰x_۲$$

$$Z = ۴۰(۲۴) + ۵۰(۸)$$

$$Z = ۱۳۶۰ \text{ ریال}$$

بنابراین با استفاده از رویهٔ فوق مشخصات هر یک از گوشه‌های موجه را بدست آورده و در جدول ۳.۱ خلاصه کرده‌ایم.

جدول ۳.۱ مشخصات نقاط حدی (گوشه‌های موجه)

مقدار تابع هدف (z)	مختصات (x_1 و $x_۲$)	نام گوشه
$Z = ۱۰۰۰$	$(x_1 = ۰, x_۲ = ۲۰)$	A
$Z^* = ۱۳۶۰$	$(x_1 = ۲۴, x_۲ = ۸)$	B
$Z = ۱۲۰۰$	$(x_1 = ۳۰, x_۲ = ۰)$	C

پرواضح است که گوشهٔ B، بهترین گوشه است. چون نسبت به سایر نقاط حدی (A و C) دارای سود بیشتری است و از آنجا که براساس خاصیت مدلهای برنامه‌ریزی خطی، جواب بهینه همواره بر روی گوشه قرار دارد، پس این نقطهٔ همان جواب بهینهٔ مدل ترکیب تولید در مثال ۳.۱ خواهد بود.

تحلیل مثال فوق و مفاهیم بیان شده در حل ترسیمی ما را به سه خاصیت اساسی برای جوابهای گوشه موجه می‌رسند. خاصیت اوّل رابطه این جوابها با جواب بهینه را بیان می‌کند.

خاصیت ۱) جواب بهینه مسأله برنامه‌ریزی خطی، «قطعاً» یکی از جوابهای گوشهٔ موجه است. این خاصیت در شکل ۳.۹ به وضوح دیده می‌شود. علیرغم اینکه مدل دارای نقاط مرزی

متعددی است. جواب بهینه نقطهٔ B است که از تقاطع دو خط مرزی تشکیل شده است. یعنی گوشه می‌باشد.

خاصیت ۲) تعداد جوابهای گوشه موجه «متناهی» است.

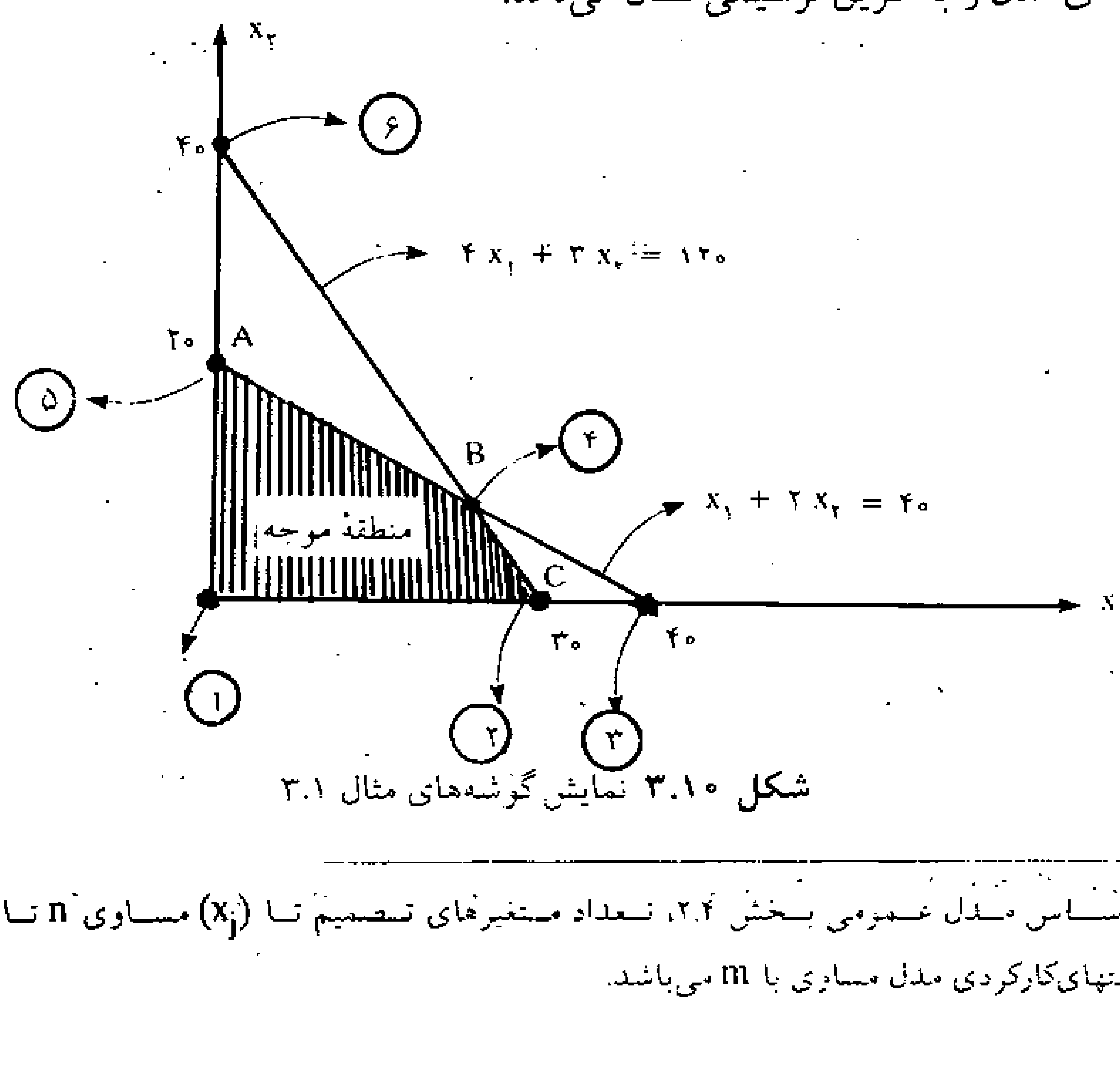
در مثال ۳.۱ که فقط ۴ گوشه موجه وجود دارند، این خاصیت بدیهی به نظر می‌رسد. برای اینکه متوجه شوید که چرا در حالت کلی تعداد جوابهای گوشه موجه متناهی است، یادآوری می‌کنیم که هر جواب گوشه موجه جواب همزمان یک دستگاه n معادله‌ای است که از بین $(m + n)$ معادله محدودیت انتخاب شده است. تعداد ترکیبات مختلف انتخاب n معادله از میان $(m + n)$ معادله موجود برابر با

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

است، که عددی قابل شمارش است.[1] البته این عدد در حقیقت «حداکثر» تعداد جوابهای گوشه موجه را نشان می‌دهد. در مثال ۳.۱ که تعداد متغیر تصمیم دو $(n = ۲)$ و تعداد محدودیتهای کارکردی مساوی ۲$(m = ۲)$ می‌باشد، تعداد

$$\frac{۴!}{۲!۲!} = ۶$$

گوشه برای مدل وجود دارد که فقط ۴ مورد آنها موجه است. شکل ۳.۱۰ به خوبی تعداد گوشه‌های مدل را به طریق ترسیمی نشان می‌دهد.



شکل ۳.۱۰ نمایش گوشه‌های مثال ۳.۱

---

۱. براساس مدل عمومی بخش ۲.۴، تعداد متغیرهای تصمیم تا (x_j) مساوی n تا و تعداد محدودیتهای کارکردی مدل مساوی با m می‌باشد.

با استفاده از خاصیت ۲ و پس از انجام محاسبات لازم، جواب بهینه مسأله بدست آمد. به عبارت دیگر، با بدست آوردن و مقایسه کردن تمام جوابهای گوشه موجه که تعدادی متناهی است، عاقبت جواب بهینه بدست خواهد آمد. جدول ۳.۱، حاصل استفاده از خاصیت ۲ را بخوبی نشان می‌دهد.

خاصیت ۳) چنانچه یک جواب گوشه موجه از تمام جوابهای گوشه موجه «مجاور» خود (از نقطه نظر تابع هدف) بهتر باشد، در این صورت از تمام جوابهای گوشه موجه بهتر خواهد بود (یعنی جواب بهینه است).[1]

در شکل ۳.۱۰ بخوبی می‌توان صحت خاصیت ۳ را دریافت. در شکل مشخص است که گوشهٔ B نسبت به دو گوشهٔ موجه مجاور خود یعنی A و C بهتر است چون براساس جدول ۳.۱ از مقدار Z بیشتری برخوردار است. پس این گوشه، جواب بهینهٔ مدل است. در حالیکه گوشهٔ A نسبت به دو گوشهٔ موجه مجاور خود یعنی مبدأ مختصات ($x_1 = ۰$ و $x_2 = ۰$) و B از چنین خاصیتی برخوردار نیست. یعنی علیرغم بهتر بودن نسبت به مبدأ مختصات مقدار Z کمتری نسبت به B برخوردار است. پس این گوشهٔ موجه قطعاً بهینه نخواهد بود. «اهمیت خاصیت ۳ در آن است که برای بدست آوردن جواب بهینه لازم نیست تا تمام جوابهای گوشه موجه را آزمایش کرد.»

حال با توجه به مفاهیم بیان شده و خواص سه گانهٔ حل مدل برنامه‌ریزی خطی، مراحل رویکرد ترسیمی حل مدل LP به صورت زیر خلاصه می‌شود:

۱. محدودیتهای مدل را در قالب یک معادله در دستگاه مختصات رسم کنید. با توجه به نوع نامعادله ناحیه موجه را تعیین کنید (فضای مشترک محدودیتها را هاشور بزنید).

۲. تابع هدف را به ازای یک مقدار دلخواه ترسیم کنید، سپس خط تابع هدف را برای تعیین نقطهٔ بهینه به سمت مناسب انتقال دهید. نقطهٔ بهینه آخرین نقطهٔ ناحیهٔ موجه است که تابع هدف بر آن مماس می‌شود.

۳. دستگاه معادلات مشترک گوشهٔ بهینه را حل کنید تا مقادیر متغیرهای تصمیم در گوشهٔ بهینه معین گردد.

«یا»

۲. دستگاه معادلات مربوط به هر یک از گوشه‌های ناحیه موجه را حل کنید تا ارزش متغیرهای تصمیم در هر گوشه تعیین شود.

۳. مقادیر گوشه‌های موجه را در تابع هدف جای‌گذاری کنید تا مقدار Z به ازای آن گوشه مشخص شود. ضمن مقایسهٔ مقدار Z، گوشهٔ بهینه را معین کنید.

---

۱. دو گوشه در صورتی مجاور همدیگر خواهند بود که در یک خط مرزی مشترک باشند. به عنوان مثال گوشه A و B مجاور همدیگر هستند چون در خط مرزی $x_1 + ۲x_2 = ۴۰$ مشترک می‌باشند.

۳.۴ روش حل ترسیمی برای یک مدل حداقل‌سازی

مثال ۳.۱ مراحل حل روش ترسیمی مدل برنامه‌ریزی خطی را که هدف آن حداکثر کردن سود بود، نشان داد. به عبارت دیگر تابع هدف مسأله بیان شده در مثال ۳.۱ از نوع "Max" (حداکثرسازی) بود. چنانچه یک مدل برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف "Minimize (Min)" ـ حداقل‌سازی ـ دو متغیره نیز وجود داشته باشد، می‌توان به حل آن با استفاده از روش ترسیمی پرداخت.

مثال ۳.۲ مدل حداقل‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

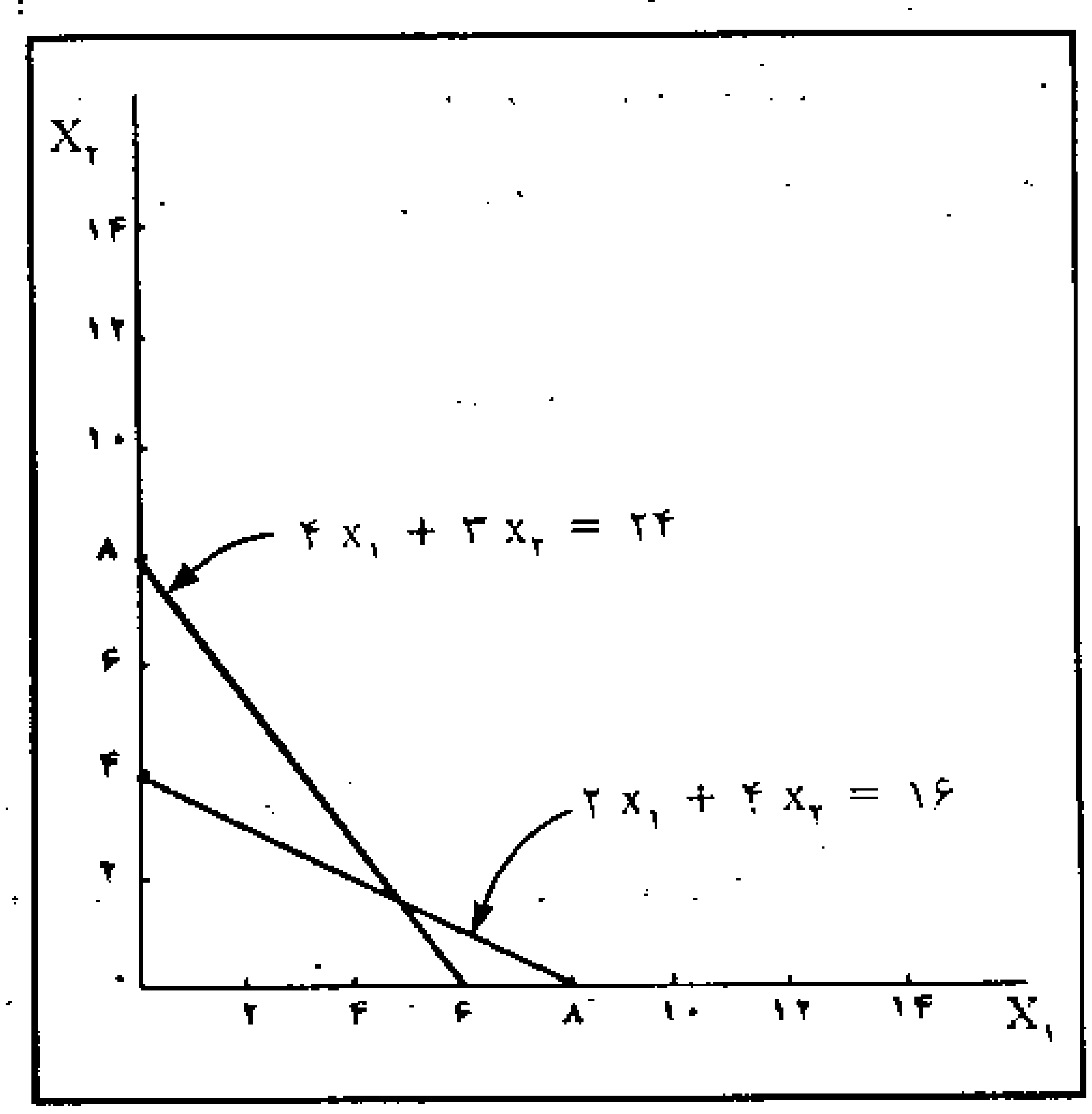
$$\text{Min } Z = ۶x_۱ + ۳x_۲$$

s.t:

$$۲x_۱ + ۴x_۲ \geq ۱۶$$
$$۴x_۱ + ۳x_۲ \geq ۲۴$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

مراحل حل ترسیمی مدل فوق کاملاً مشابه مدل حداکثرسازی است که به شرح زیر به ذکر آنها برای رسیدن به جواب بهینهٔ مدل فوق می‌پردازیم.

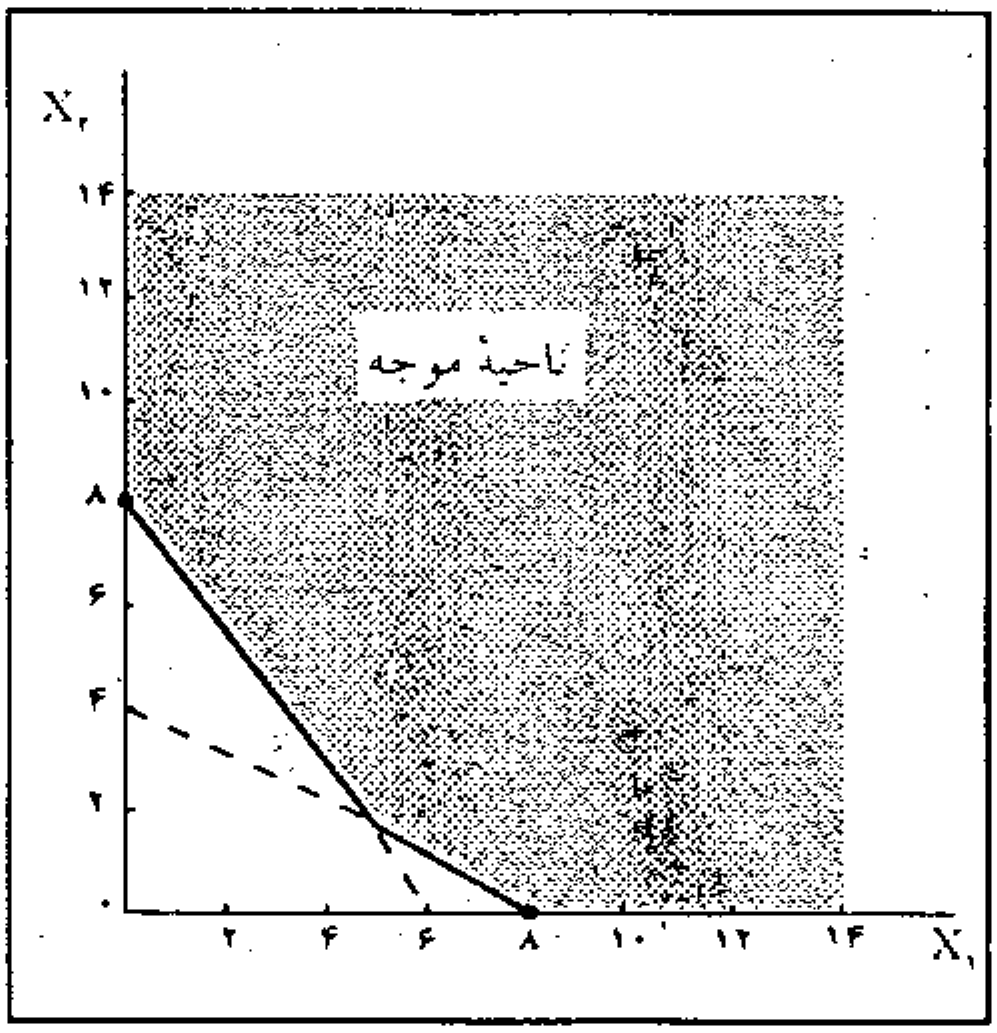
اولین قدم، رسم معادلات مربوط به دو محدودیت مدل است. همچنانکه در شکل ۳.۱۱ نشان داده شده است.



شکل ۳.۱۱ معادلات مربوط به محدودیتهای مثال ۳.۲

حال ناحیهٔ مشترک موجه هر دو محدودیت را پیدا می‌کنیم. به طوری که قیود بزرگتر یا مساوی (≥) مربوط به هر دو محدودیت را بیان کند. منطقهٔ هاشور خورده در شکل ۳.۱۲ نیز به خوبی این مهّم را نشان می‌دهد.

بعد از پیدا کردن ناحیه موجه، قدم دوّم؛ تعیین دوّم گوشهٔ بهینه است.

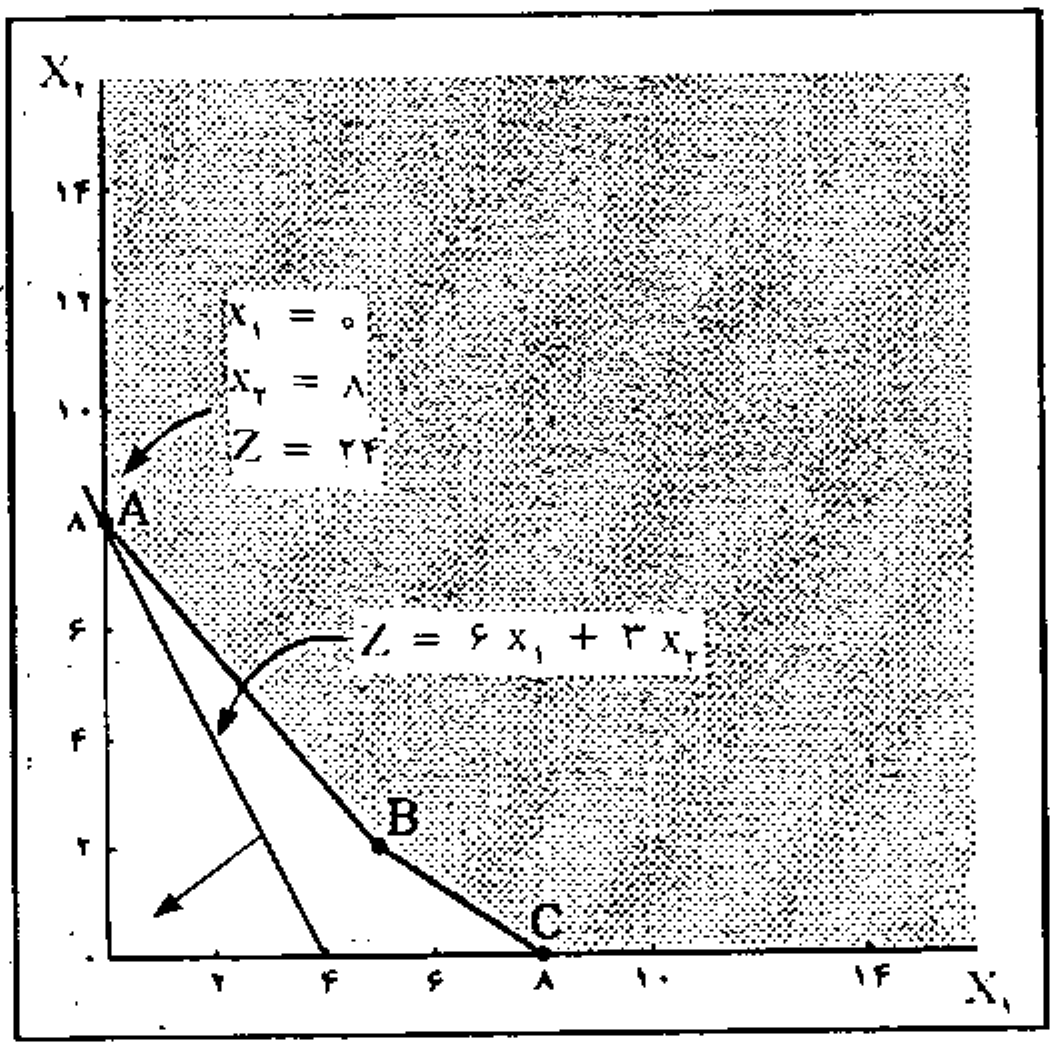


شکل ۳.۱۲ ناحیه موجه مدل مثال ۳.۲

به خاطر دارید که در مدل حداکثرسازی، بهترین نقطهٔ مرزی، نقطه‌ای بود که دارای «بیشترین» فاصله نسبت به مبدأ مختصات بود. برعکس در مدل حداقل‌سازی، بهترین نقطهٔ مرزی نقطه‌ای است که دارای «کمترین» فاصله نسبت به مبدأ مختصات باشد. به عبارت دیگر در مدل حداکثرسازی، گوشهٔ بهینه، «دورترین گوشهٔ حدی» نسبت به مبدأ مختصات است ولی در مدل حداقل‌سازی، گوشهٔ بهینه، «نزدیکترین گوشهٔ حدی» به مبدأ مختصات است. چون هرچه مقدار متغیرهای تصمیم کوچکتر باشد، مقدار Z کمتر خواهد بود. مفاهیم فوق در قالب شکل ۳.۱۳ به خوبی بیان شده‌اند. شکل ۳.۱۳ نقاط گوشه‌ای (A، B و C) و خط تابع هدف را نشان می‌دهد.

همچنانکه تابع هدف به سمت پایین (مبدأ مختصات) انتقال می‌یابد، آخرین نقطه‌ای که تابع هدف از منطقهٔ موجه با آن مماس می‌شود، نقطه A است. به عبارت دیگر، گوشهٔ A، آخرین گوشه‌ای است که بدون غیر موجه شدن خط تابع هدف، مقدار Z را حداقل می‌کند.

آخرین مرحله در روش ترسیمی، پیدا کردن مقادیر x_1 و x_2 در گوشهٔ A است. از آنجا که



شکل ۳.۱۳ جواب (گوشه) بهینه

گوشهٔ A از تقاطع معادلات مرزی $x_1 = ۰$ و $۴x_1 + ۳x_2 = ۲۴$ حاصل شده است، پس داریم:

$$x_1 = ۰$$
$$۴(۰) + ۳x_2 = ۲۴$$
$$x_2 = ۸$$

بنابراین گوشهٔ بهینهٔ مدل در مثال ۳.۲ عبارتست از: ($x_1 = ۰$ و $x_2 = ۸$). مقدار هزینهٔ تولید به ازاء گوشهٔ بهینه؛ Z، برابر است با:

$$Z = ۶x_1 + ۳x_2$$
$$Z = ۶(۰) + ۳(۸)$$
$$Z = ۲۴$$

به طریق مشابه می‌توان مختصات گوشه‌های B و C را پیدا کرد که توصیه می‌شود دانشجویان عزیز به عنوان «تمرین» این کار را انجام دهند!

۳.۵ موارد خاص در برنامه‌ریزی خطی

در بخشهای قبلی این فصل، اشکال اساسی و استاندارد برنامه‌ریزی خطی به صورت حداکثرسازی (Max) و حداقل‌سازی (Min) بیان شد. با این وجود، موارد خاصی از مسائل برنامه‌ریزی خطی وجود دارد. اگرچه این دسته از مدلهای برنامه‌ریزی خطی کمتر در دنیای واقع رخ می‌دهند ولی در اینجا با چگونگی تشخیص آنها و خواص هر یک آشنا می‌شویم. موارد

خاص در برنامه‌ریزی خطی شامل حالتهای زیر است:

۱. جواب بهینه چندگانه[1]

۲. فاقد ناحیه موجه (جواب)[2]

۳. ناحیه جواب بیکران[3]

۴. جواب تبهگن[4]

حال به تشریح هر یک از موارد فوق می‌پردازیم.

۳.۵.۱ جواب بهینه چندگانه

مسائل برنامه‌ریزی خطی در فرم استاندارد دارای یک نقطه (گوشه) بهینه هستند. تابع هدف در این گوشه حداقل یا حداکثر می‌گردد. جواب بهینه در مقایسه با سایر جوابهای مدل برنامه‌ریزی خطی بهترین است. فرم خاصی از مدلهای برنامه‌ریزی خطی وجود دارد که بیش از یک گوشهٔ بهینه دارند. در این نوع مدلها تعداد نقاط بهینه بی‌نهایت است. به عنوان نمونه به مثال ۳.۳ توجه کنید.

مثال ۳.۳ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۴۰\,x_۱ + ۳۰\,x_۲$$

s.t:

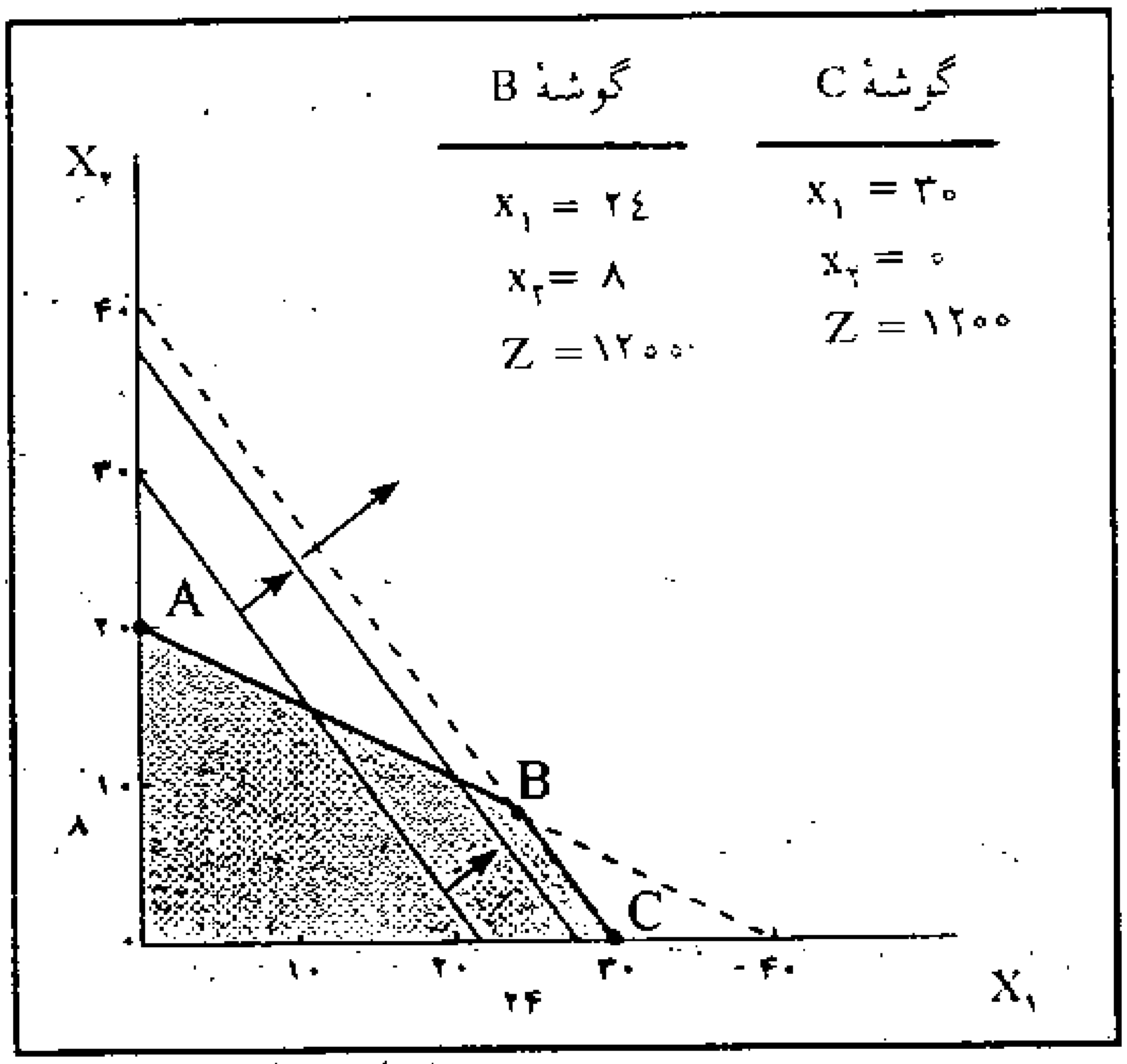
$$\begin{aligned} x_۱ + ۲\,x_۲ &\le ۴۰ \\ ۴\,x_۱ + ۳\,x_۲ &\le ۱۲۰ \\ x_۱, x_۲ &\ge ۰ \end{aligned}$$

نمایش هندسی، حل این مدل در شکل ۳.۱۴ دیده می‌شود.

همچنانکه در شکل دیده می‌شود خط تابع هدف، موازی با خط محدودیت $۴\,x_۱ + ۳\,x_۲ = ۱۲۰$ قرار گرفته است. به عبارت دیگر شیب هر دو خط با همدیگر یکسان است. بنابراین همچنان که خط تابع هدف به بالا انتقال می‌یابد، بجای مماس شدن با یک نقطه حدی، بر پاره‌خط رابط نقاط B و C منطبق می‌شود. این بدان معنی است که تمامی نقاط قرار گرفته بر روی پاره‌خط BC جزء نقاط بهینهٔ مدل قرار می‌گیرند. و به عبارت بهتر، هر نقطه بر روی این پاره‌خط سودی مساوی ۱۲۰۰ (Z=۱۲۰۰) خواهد داشت. این نوع مدلها را در برنامه‌ریزی

---

1. Multiple Optimal Solution
2. Infeasible Solution
3. Unbounded Solution
4. Degenerate Solution



شکل ۳.۱۴ نمایش هندسی مثال ۳.۳ با جواب بهینه چندگانه

خطی، مدلهای دارای «جواب بهینه چندگانه» گویند. با توجه به اینکه در برنامه‌ریزی خطی به دنبال گوشه بهینه (خاصیت ۱) خواهیم بود، پس نقاط انتهای پاره‌خط BC به عنوان گوشه‌های بهینه تعریف می‌شوند. گوشه‌های بهینهٔ B و C، جوابهای بهینهٔ «جایگزین» همدیگر نیز گفته می‌شوند.

مدیران برای تصمیم‌گیری، درصدد یافتن سناریوهای تصمیم‌گیری متفاوت با سود حداکثر هستند. با این نگاه جواب بهینهٔ چندگانه برای مدیران خشنودکننده نیز هست! چون مدیر در تصمیم‌گیری خود دارای انعطاف‌پذیری لازم و قدرت مانور مناسب خواهد بود. به عنوان نمونه در مثال ۳.۳ مدیر با دو سناریوی بهینه روبرو است که با توجه به شرایط تصمیم‌گیری می‌تواند سناریوی مناسب خود را انتخاب کند. چنانچه شرایط بازار تنوع کالا را می‌طلبد، می‌تواند از گوشهٔ B استفاده کند یعنی؛ ($x_1 = ۲۴$ و $x_2 = ۸$) و اگر بازار شرایط حجم تولید در یک کالا طلب می‌کند، از نقطهٔ C استفاده خواهد کرد.

۳.۵.۲ فاقد ناحیه موجه (جواب)

در برخی از مسائل برنامه‌ریزی خطی نمی‌توان برای کلیهٔ محدودیتهای مدل ناحیهٔ مشترک پیدا کرد. بنابراین مسأله فاقد ناحیهٔ موجه خواهد بود. در این گونه مدلها پیدا کردن جواب بهینه بی‌معنا است. نمونهٔ این دسته از مدلها را در مثال ۳.۴ خواهید دید.

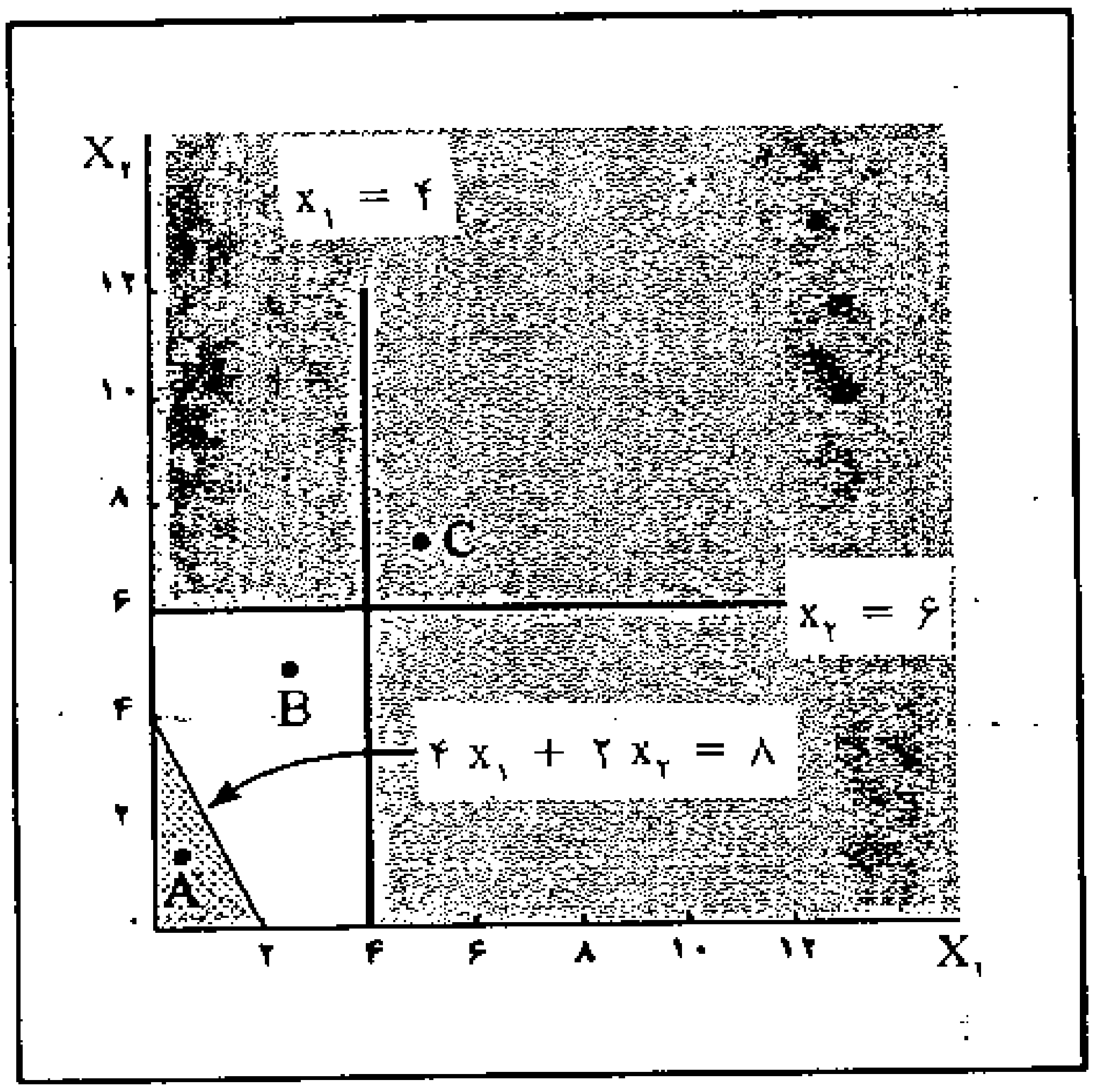
مثال ۳.۴ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۵x_۱ + ۳x_۲$$

s.t:

$$۴x_۱ + ۲x_۲ \leq ۸$$
$$x_۱ \geq ۴$$
$$x_۲ \geq ۶$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

شکل ۳.۱۵ بیانگر منطقهٔ موجه هر یک از محدودیتهای مدل فوق است. همچنان که مشخص است، محدودیتهای مدل دارای ناحیه مشترک نیستند. به عبارت دیگر محدودیتهای مدل در تناقض با همدیگر هستند. بنابراین نمی‌توان برای همهٔ آنها ناحیهٔ مشترک پیدا کرد.



شکل ۳.۱۵ نمایش هندسی مدل مثال ۳.۴ فاقد ناحیه موجه

نقطهٔ A در شکل فوق فقط محدودیت $۴x_۱ + ۲x_۲ \leq ۸$ را ارضاء می‌کند و نقطهٔ B در هیچ یک از آنها صدق نمی‌کند، از آنجا که هیچ نقطه‌ای نمی‌توان یافت که در هر سه محدودیت صدق کند، پس مدل مثال ۳.۴ فاقد ناحیه موجه است و قابل حل نیست. آنچه مسلم است، مدلهای فاقد ناحیه موجه در عالم واقع وجود خارجی ندارند. علّت بروز چنین مدلهایی تعریف نادرست مسأله و مشاهدات غیرواقعی از محیط سازمانی است. گاهی اوقات نیز علیرغم تعریف صحیح مسأله و مشاهدهٔ درست، در فرموله کردن مسأله دچار خطا می‌شوند، در نتیجه چنین

مدلی ایجاد می‌شود. با مشاهدهٔ چنین وضعیتی برای مدل مسأله باید درصدد رفع عیب آن برآمد.

۳.۵.۳ ناحیه جواب بیکران

در برخی از مسائل ناحیه موجه مدل طراحی شده، بوسیلهٔ محدودیتها محصور نمی‌شود. به عبارت دیگر ناحیه موجه در میان معادلات مرزی بسته نمی‌شود. در چنین مدلهایی ممکن است تابع هدف به نحو نامحدودی افزایش (کاهش) یابد و هیچ‌گاه به نقطهٔ حداکثر (حداقل) نرسد. مدل ارائه شده در مثال ۳.۵ نمونهٔ خوبی از چنین مدلهایی است.

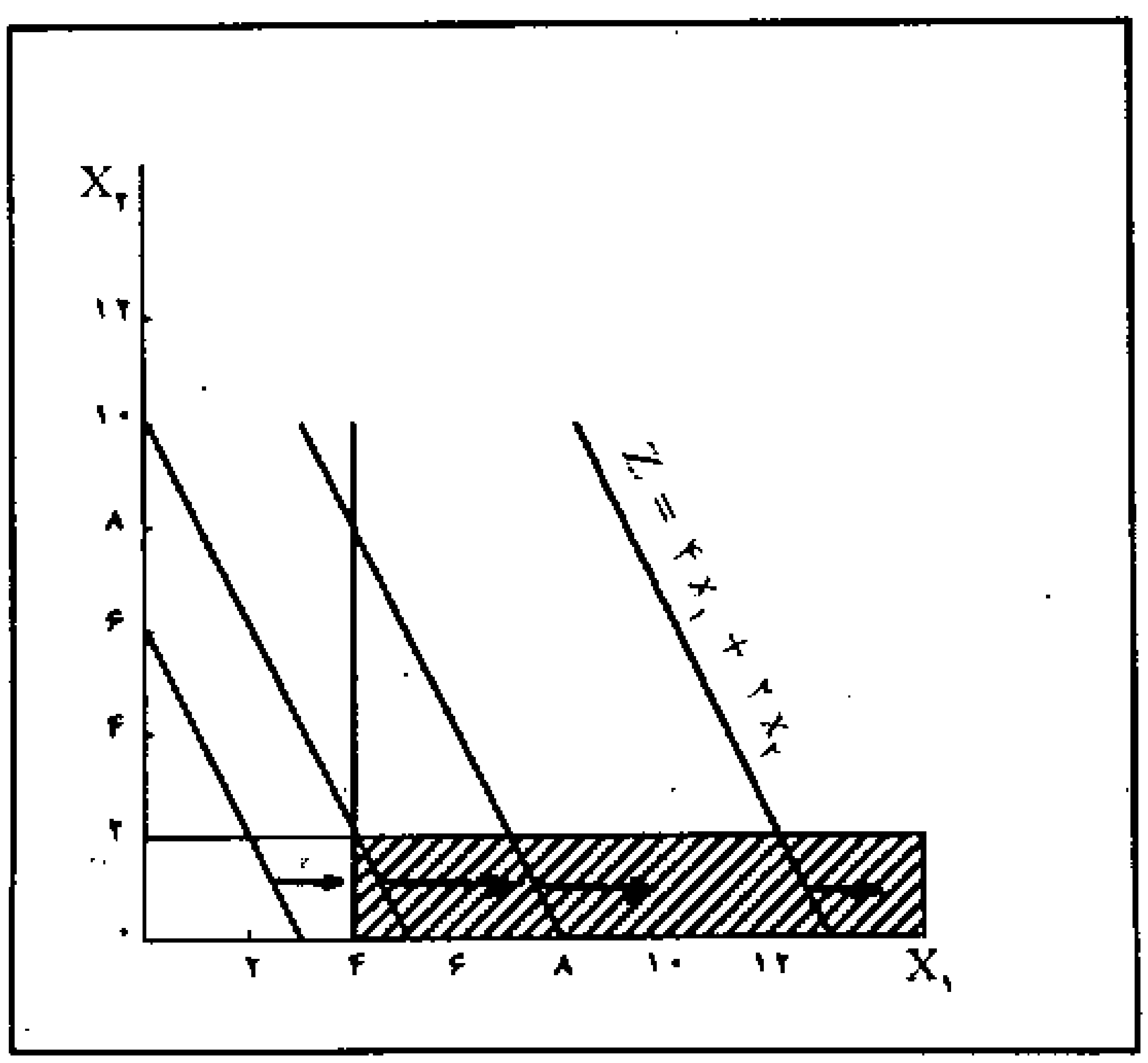
مثال ۳.۵ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۴x_۱ + ۲x_۲$$

s.t:

$$x_۱ \geq ۴$$
$$x_۲ \leq ۸$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

در شکل ۳.۱۶ نشان داده شده است که چگونه تابع هدف این مدل بدون هیچ گونه حدومرزی در حال افزایش است. به طوری که هیچ‌گاه جواب بهینه حاصل نمی‌شود.



شکل ۳.۱۶ نمایش هندسی مسأله با ناحیه موجه بیکران بدون گوشهٔ بهینه

واضح است که سود نامحدود در عالم واقع غیرممکن است. بنابراین چنین مورد خاصی از برنامه‌ریزی خطی وجود خارجی ندارند. علّت پدید آمدن چنین حالتی؛ اشتباه در تعریف مسأله و یا اشتباه در فرموله کردن آن خواهد بود.

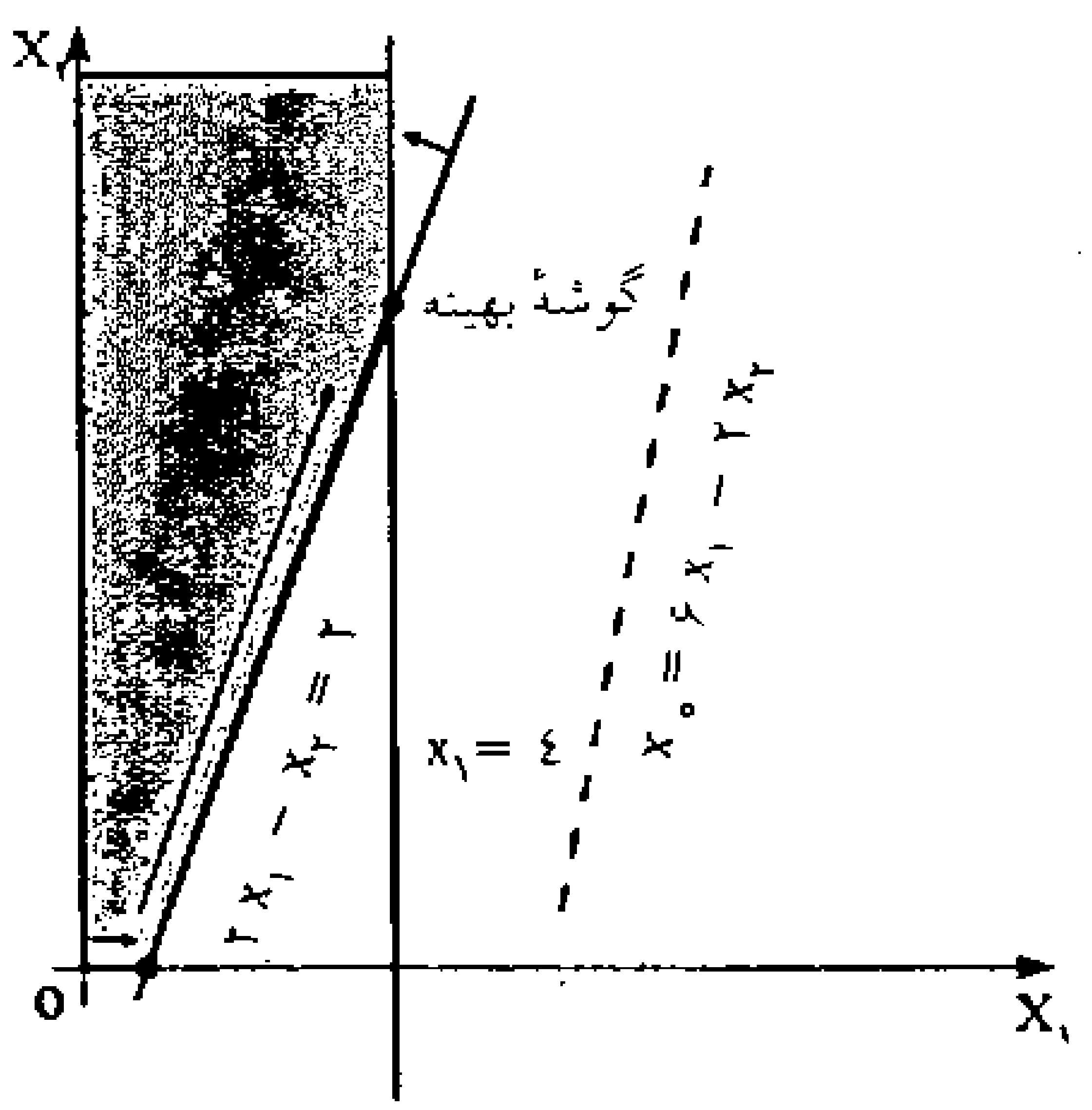
مدلهایی از برنامه‌ریزی خطی وجود دارند که علیرغم بیکران بودن ناحیه موجه دارای جواب بهینه گوشه‌ای هستند. نمونه‌ای از این نوع مدلها در مثال ۳.۶ و شکل ۳.۱۷ دیده می‌شود.

مثال ۳.۶ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۶x_۱ - ۲x_۲$$

s.t:

$$۲x_۱ - x_۲ \leq ۲$$
$$x_۱ \leq ۴$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$



شکل ۳.۱۷ ناحیه جواب بیکران با جواب گوشه بهینه

همچنانکه از روش ترسیمی حل مثال ۳.۶ مشخص می‌شود، فضای موجه مسأله بیکران است و می‌توان گوشه‌ای را پیدا کرد که تابع هدف به ازای آن گوشه حداکثر می‌شود. بنابراین، این نوع مدلها را مدلهای دارای «ناحیه جواب بیکران دارای گوشه بهینه» گویند. گوشهٔ بهینه در مدل فوق عبارتست از: ($x_۱ = ۴$ و $x_۲ = ۶$) که مقدار تابع هدف به ازای آن مساوی‌است با:

$$Z^* = ۶(۴) - ۲(۶) = ۱۲.$$

۳.۵.۴ جواب تبهگن

برای تشکیل هر گوشه در برنامه‌ریزی خطی دو معادله مرزی کافی است. اگر گوشه‌ای موجه از بیش از دو معادله مرزی تشکیل شود، برخی از معادلات در آن زاید خواهند بود. تعداد معادلات مرزی زاید مساوی است با تعداد معادلاتی که از گوشه می‌گذرند منهای ۲. گوشه‌ای که از بیش از دو معادلهٔ مرزی تشکیل شده باشد را گوشهٔ «تبهگن» گویند. مثال ۳.۷ و شکل ۳.۱۸ بیانگر مفهوم تبهگنی می‌باشند.

مثال ۳.۷ مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۴x_۱ + ۶x_۲$$

s.t:

$$۶x_۱ + ۴x_۲ \le ۲۴$$

$$x_۲ \le ۳$$

$$۵x_۱ + ۱۰x_۲ \le ۴۰$$

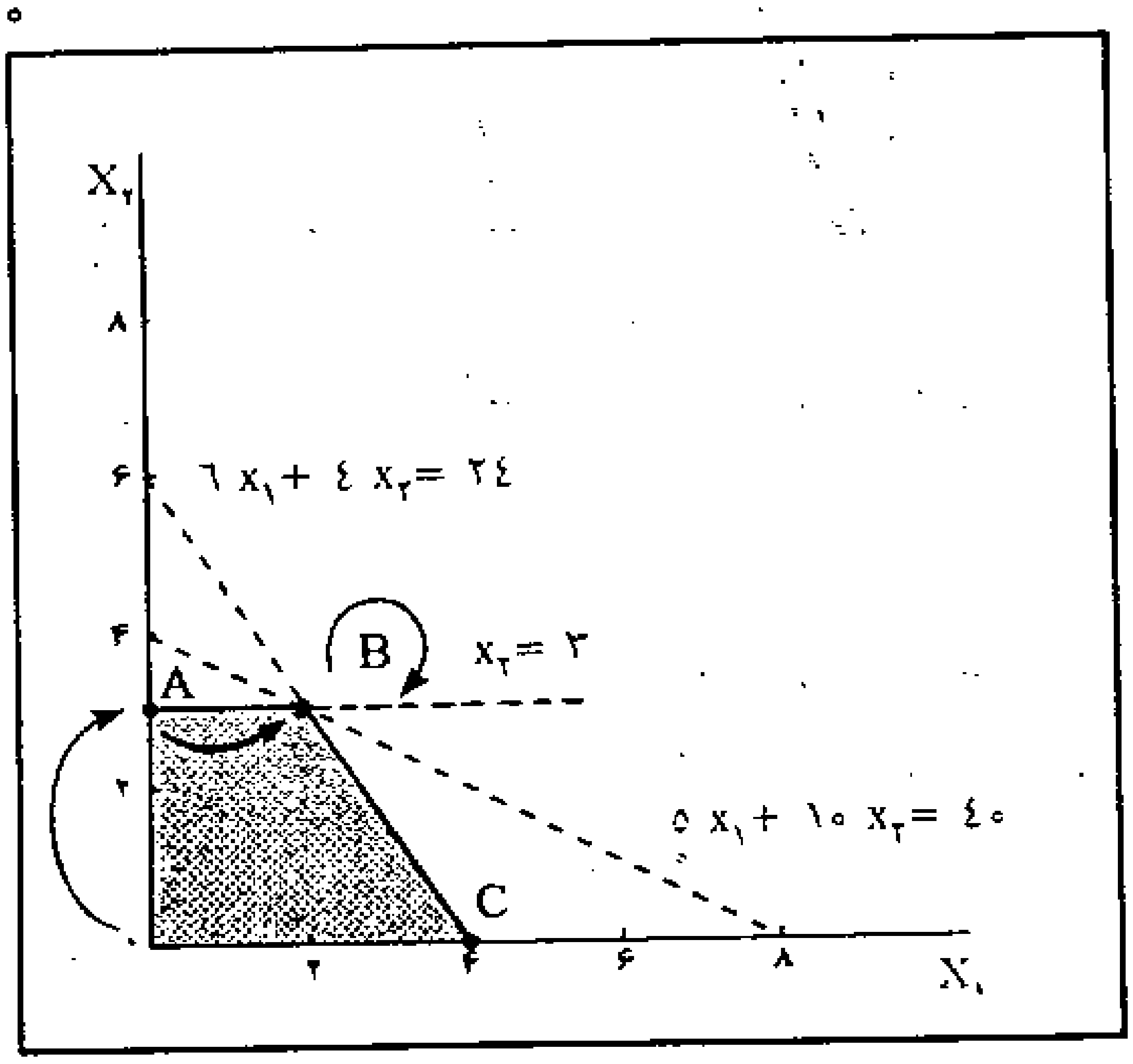
$$x_۱, x_۲ \ge ۰$$

حال مسأله فوق به روش ترسیمی در شکل ۳.۱۸ دیده می‌شود. همچنانکه واضح است، جواب بهینه در گوشهٔ B واقع شده است که ($x_۱ = ۲$ و $x_۲ = ۳$) است. گوشهٔ B از سه معادله مرزی؛

$$۶x_۱ + ۴x_۲ = ۲۴$$

$$x_۲ = ۳$$

$$۵x_۱ + ۱۰x_۲ = ۴۰$$



شکل ۳.۱۸ نمایش هندسی جواب تبهگن

تشکیل شده است. با توجه به تعریف گوشه، واضح است که یکی از معادلات مرزی فوق زاید است. گوشهٔ B با ترکیب دو تا از معادلات فوق بدست می‌آید. چنین گوشه‌ای را «گوشه تبهگن» گویند. و مسأله‌ای که دارای گوشهٔ تبهگن باشد، به عنوان یکی از حالتهای خاص برنامه‌ریزی خطی تعریف می‌شود.

پس آندسته از مدلهای برنامه‌ریزی خطی که دارای گوشهٔ تبهگن (گوشه بهینه تبهگن یا گوشهٔ موجه تبهگن) باشند به مدل تبهگن برنامه‌ریزی خطی معروف هستند.

۳.۶ واژگان کلیدی فصل :

● **جواب:** مجموعه‌ای از مقادیر که به متغیرهای تصمیم اختصاص می‌یابد یک جواب نامیده می‌شود.

● **جواب موجه:** جوابی است که در تمام محدودیتها صدق می‌کند.

● **جواب غیرموجه:** جوابی است که در محدودیتهای مدل صدق نمی‌کند.

● **جواب بهینه:** جوابی است موجه، که مقدار تابع هدف مدل به ازای آن بهترین حالت خود (حداکثر یا حداقل) را حصول می‌کند.

● **معادله مرزی**[1]: معادله مرزی هر محدودیت با جایگزین کردن علایم $\leq$ ، $\geq$ با علامت = بدست می‌آید. علّت نامیدن معادله با علامت مساوی (=) با اصطلاح مرزی این است که معادلات بدست آمده، مرز منطقه موجه را مشخص می‌کنند.

● **ناحیه موجه:** مجموعه جوابهای موجه را، ناحیهٔ موجه گویند.

● **جواب گوشه:** نقاط پدید آمده در اثر تقاطع حداقل دو معادله مرزی را، جواب گوشه گویند.

● **نقطهٔ حدی**[2]: هر گوشه بر روی معادلات مرزی را یک نقطهٔ حدی گویند. چون حد ناحیه موجه به کمک گوشه‌ها معین می‌شود، این نقاط را نقاط حدی نام نهاده‌اند.

● **تابع Max:** تابع هدف حداکثرسازی را تابع Max (یا گاهی مدل Max) گویند.

● **تابع Min:** تابع هدف حداقل‌سازی را تابع Min (یا گاهی مدل Min) گویند.

۳.۷ خلاصه فصل سوم

در این فصل مشخص شد که هر مدل برنامه‌ریزی خطی (LP) دارای چهار خاصیت (فرض) اساسی است که عبارتند از:

۱. تناسب ۲. جمع پذیری ۳. بخش‌پذیری ۴. معین (قطعی) بودن

---

1. Boundary Equation
2. Extreme Point

هر مدلی که حداقل یکی از مفروضات فوق را دارا نباشد، از نوع خطی نیست.

بخش عمدهٔ این فصل به حل هندسی مدلهای دو متغیره از نوع Min و Max اختصاص یافته است. با استفادهٔ از شیوهٔ هندسی به بیان مفاهیم کلیدی برنامه‌ریزی خطی چون؛ معادلات مرزی، نقاط حدی، گوشه، جواب، گوشه‌های مجاور، جواب موجه و غیرموجه و جواب بهینه پرداخته شد.

در نهایت مهمترین موارد خاص برنامه‌ریزی خطی چون:

۱. جواب بهینهٔ چندگانه
۲. فاقد ناحیه موجه (جواب)
۳. ناحیه جواب بیکران
۴. جواب تبهگن

تشریح شد.

۳.۸ مسائل فصل

۳.۸.۱ سؤالات تکمیلی و چهارگزینه‌ای

۱. نقطهٔ بهینه همواره در .... ناحیه موجه قرار دارد.

۲. نقطهٔ بهینه علاوه بر قرارگرفتن بر روی مرز ناحیه موجه، همواره بر روی یک .... از مرز قرار دارد.

۳. گوشه، نقطه‌ای است که در تقاطع .... دو خط از خطوط مرزی قرار گیرد.

۴. گوشهٔ تبهگن گوشه‌ای است که از .... معادله مرزی تشکیل شده باشد.

۵. مجموعه جوابهای موجه را ناحیه .... گویند.

۶. اگر یک گوشه موجه نسبت به تمام گوشه‌های مجاور خود بهتر (از نظر تابع هدف) باشد، آن گوشه:

الف) بهینه است.
ب) غیربهینه است.
ج) حداقل یکی از محدودیتها را نقض می‌کند.
د) اطلاعات برای اظهارنظر کافی نیست.

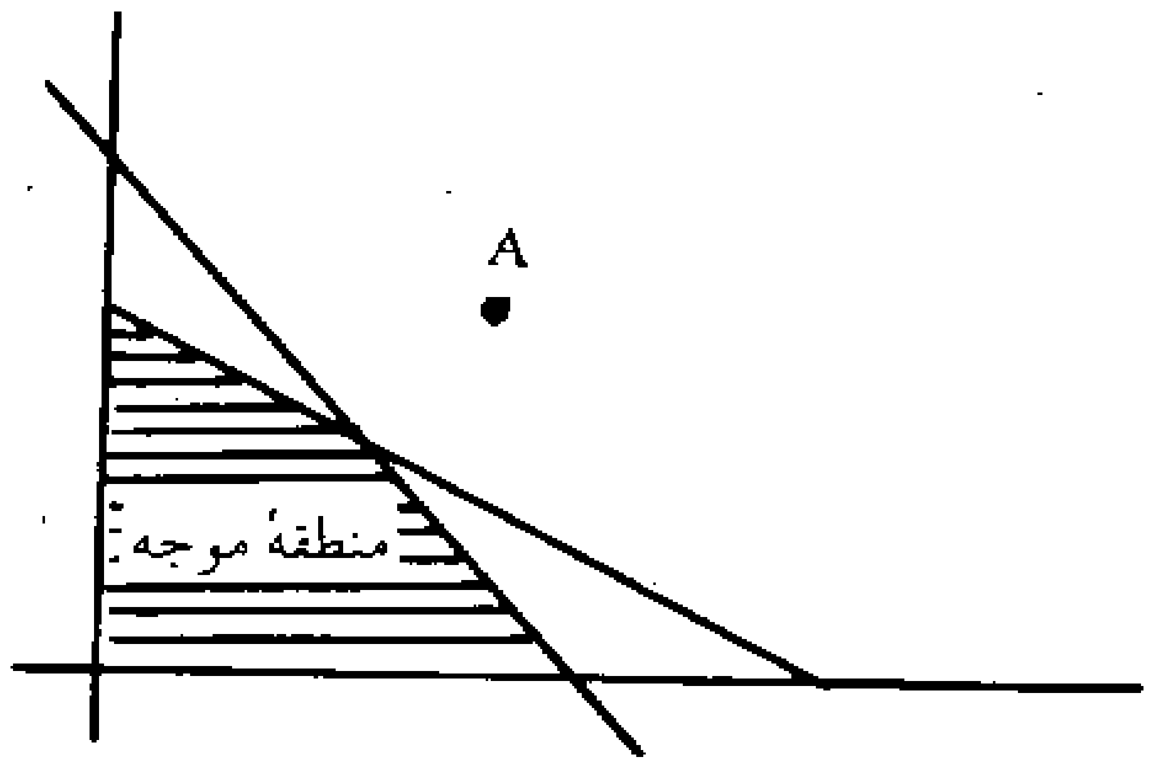
۷. در مدل Max ، گوشهٔ بهینه:

الف) نزدیکترین نقطهٔ حدی به مبدأ مختصات است.
ب) دورترین نقطهٔ حدی به مبدأ مختصات است.
ج) غیرموجه است.
د) در حداقل یک محدودیت مدل صدق می‌کند.

۸. شکل زیر بیانگر ناحیه موجه یک مدل برنامه‌ریزی خطی است. نقطهٔ A در این مدل، چه نقطه‌ای است؟

الف) بهینه　　　ب) موجه

ج) مرزی　　　د) غیرموجه



۹. کدامیک از مفروضات زیر از ورود حالات احتمالی در مسائل برنامه‌ریزی خطی جلوگیری می‌کند؟

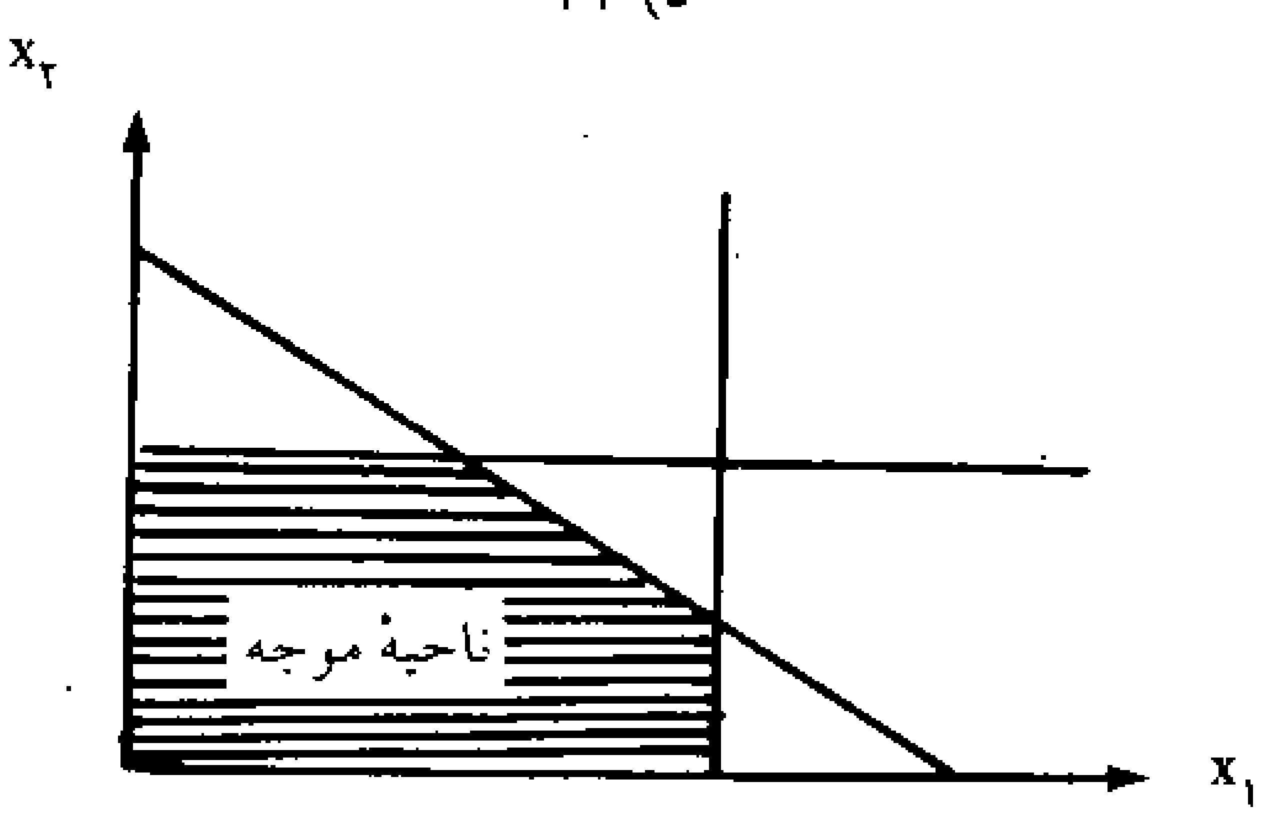
الف) تناسب　　　ب) جمع‌پذیری

ج) بخش‌پذیری　　　د) معین بودن

۱۰. نمایش ترسیمی یک مسأله LP به صورت زیر داده شده است. تعداد گوشه‌های این مدل برابر است با:

الف) ۴　　　ب) ۶

ج) ۱۰　　　د) ۱۲



۱۱. در برنامه‌ریزی خطی کدام گزینه در خصوص جواب موجه درست است؟

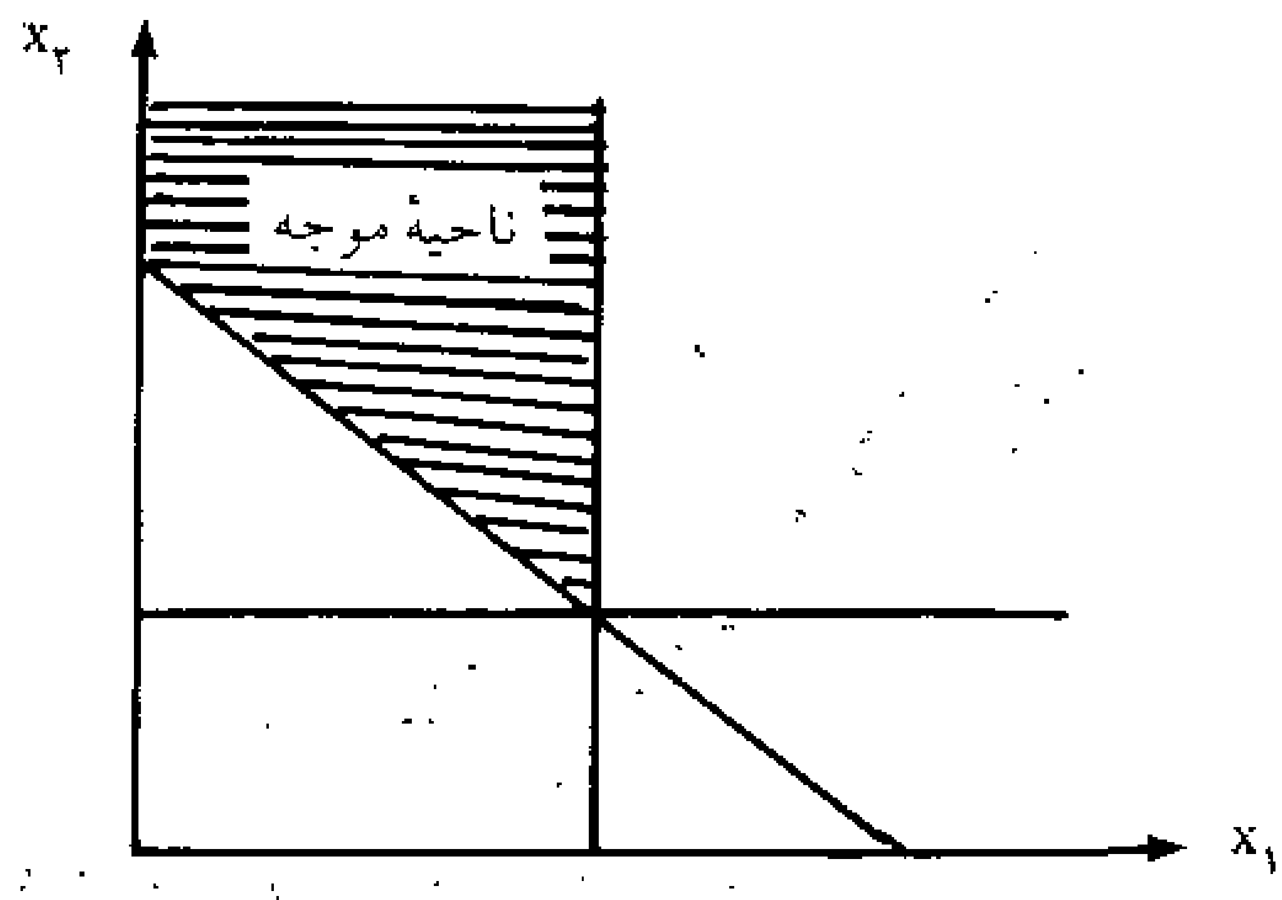
الف) همواره یک گوشه است.　　　ب) همواره بهینه است.

ج) در تمام محدودیتها صدق می‌کند.　　　د) جداقل در یکی از محدودیتها صدق می‌کند.

۱۲. منطقهٔ موجه یک مسأله LP به صورت زیر است. این مسأله دارای چند محدودیت بزرگتر یا مساوی (≥) است؟

الف) ۱ ب) ۲

ج) ۳ د) ۴



۱۳. مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

جواب ($x_2 = \frac{1}{2}$ و $x_1 = 2$)

$$\text{Max } Z = 10x_1 + 20x_2$$

s.t:

$$\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الف) یک گوشهٔ موجه است. ب) یک نقطه در داخل منطقه موجه است.

ج) یک گوشهٔ غیرموجه است. د) یک نقطه در خارج از منطقه موجه است.

۱۴. فرض بخش‌پذیری در برنامه‌ریزی خطی عبارت است از:

الف) استقلال متغیرها از همدیگر

ب) وجود جمع جبری بین متغیرها

ج) معین بودن فضای تصمیم‌گیری

د) اتخاذ هر مقدار صحیح و غیرصحیح بوسیله هر یک از متغیرهای تصمیم

۱۵. رابطه $x_1 + x_2 + x_2 \cdot x_3 \leq 10$ در یک مدل وجود دارد. کدامیک از فروض برنامه‌ریزی خطی در این رابطه رعایت نشده است؟

الف) تناسب ب) جمع‌پذیری

ج) معین بودن د) (الف و ب)

۱۶. اگر در یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی سه فرض، تناسب، جمع‌پذیری و معین بودن صادق باشد و فقط فرض بخش‌پذیری برقرار نباشد. مدل بدست آمده چگونه مدلی است؟

الف) خطی　　ب) عدد صحیح

ج) غیرخطی　　د) احتمالی

۱۷. یک مسأله برنامه‌ریزی خطی می‌تواند:

الف) دارای بی‌نهایت گوشه باشد.　　ب) دارای بی‌نهایت جواب گوشه بهینه باشد.

ج) دارای بی‌نهایت گوشه غیرموجه باشد. د) دارای بی‌نهایت جواب موجه باشد.

۱۸. اگر یک مدل برنامه‌ریزی خطی دارای یک محدودیت ≤ و یک محدودیت ≥ باشد، این مدل می‌تواند:

الف) بدون ناحیه موجه باشد.　　ب) دارای جواب بهینه گوشه‌ای باشد.

ج) ناحیه موجه بیکران داشته باشد.　　د) (الف، ب و ج)

۱۹. در مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر تابع هدف با محدویت اوّل موازی است. با توجه به حل ترسیمی این مسأله چه حالت خاصی دارد؟

$$\text{Max } Z = x_۱ + ۲x_۲$$

s. t.

$$۲x_۱ + ۴x_۲ \geq ۸$$
$$x_۱ - x_۲ \leq ۴$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

الف) بهینهٔ چندگانه　　ب) تبهگن و بهینهٔ چندگانه

ج) تبهگن در گوشه بهینه　　د) ناحیه جواب بیکران

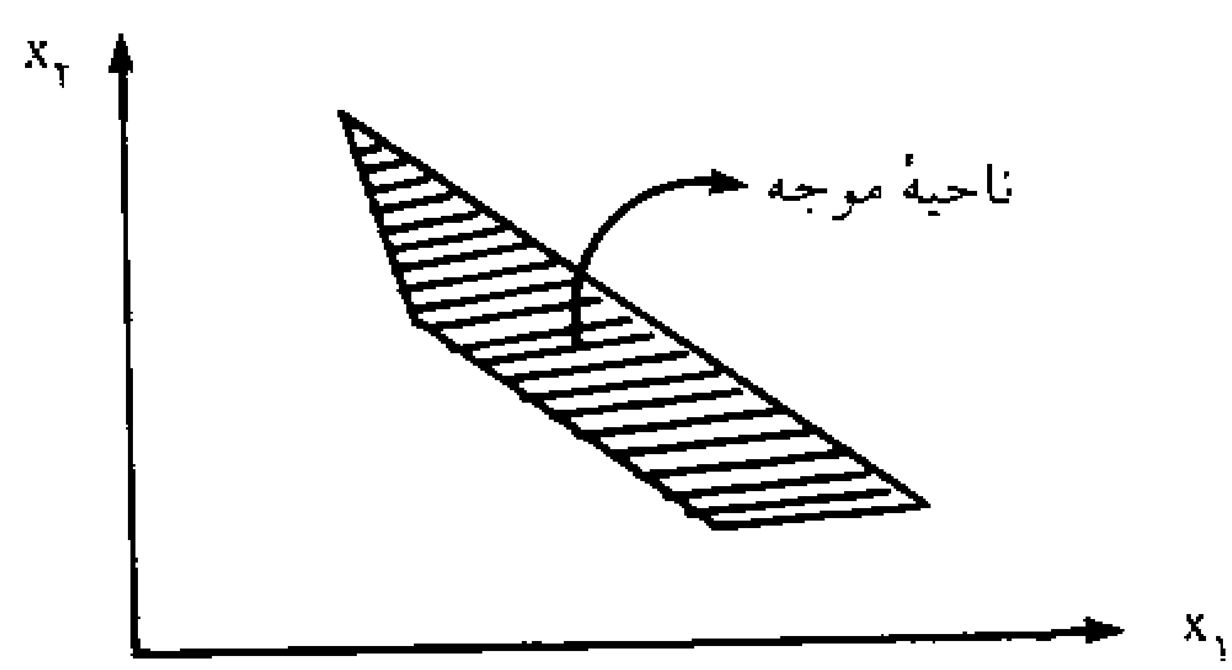
۲۰. ناحیه موجه یک مدل LP به صورت زیر است، این مسأله دارای:

الف) چهار محدودیت به صورت کوچکتر مساوی (≤) است.

ب) چهار محدودیت به صورت بزرگتر مساوی (≥) است.

ج) سه محدودیت به صورت ≥ و یک محدودیت ≤ است.

د) سه محدودیت به صورت ≥ و یک محدودیت = است.



۳.۸.۲ تمرینات

۱. جواب بهینهٔ مدل زیر را به روش ترسیمی بدست آورید؟

$$\text{Min } Z = ۳x_۱ + ۵x_۲$$

s.t:

$$\begin{aligned} x_۱ + x_۲ &= ۱۰۰ \\ x_۱ \quad &\geq ۵۰ \\ x_۲ &\geq ۲۰ \\ x_۱, x_۲ &\geq ۰ \end{aligned}$$

۲. جواب بهینهٔ مسأله زیر را به روش ترسیمی بدست آورید؟

$$\text{Max } Z = ۳x_۱ + ۶x_۲$$

s.t:

$$\begin{aligned} ۳x_۱ + ۲x_۲ &\leq ۱۸ \\ x_۱ + x_۲ &\geq ۵ \\ x_۱ \quad &\leq ۴ \\ x_۱, x_۲ &\geq ۰ \end{aligned}$$

۳. مسأله زیر را با استفاده از روش ترسیمی حل کرده و جواب بهینه آن را تعیین کنید؟

$$\text{Max } Z = ۱/۵x_۱ + x_۲$$

s.t:

$$\begin{aligned} x_۱ \quad &\leq ۴ \\ x_۲ &\leq ۶ \\ x_۱ + x_۲ &\leq ۵ \\ x_۱, x_۲ &\geq ۰ \end{aligned}$$

۴. مسأله زیر را به روش ترسیمی حل کنید؟

$$\text{Max } Z = ۵x_۱ + x_۲$$

s.t:

$$\begin{aligned} x_۱ &\leq ۶ \\ x_۱ + ۳x_۲ &\leq ۱۲ \\ ۳x_۱ + ۴x_۲ &= ۲۴ \\ x_۱, x_۲ &\geq ۰ \end{aligned}$$

۵. مسأله زیر را با استفاده از روش ترسیمی حل کرده و جواب بهینهٔ آن را بدست آورید؟

$$\text{Min } Z = 8x_1 + 6x_2$$

s.t:

$$4x_1 + 2x_2 \geq 20$$
$$-6x_1 + 4x_2 \leq 12$$
$$x_1 + x_2 \geq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

۶. مسائل زیر را به روش ترسیمی حل کنید و معین کنید هر یک از آنها از چه حالت خاصی برخوردارند؟

الف)

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

s.t:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$4x_1 + x_2 \leq 8$$
$$4x_1 - x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

ب)

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

s.t:

$$x_1 - x_2 \leq 10$$
$$2x_1 - x_2 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

۷. مسائل زیر را به روش ترسیمی حل کنید و تعیین کنید کدام صورت خاص از برنامه‌ریزی خطی هستند؟

الف)

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 14x_2$$

s.t:

$$2x_1 + 7x_2 \leq 21$$
$$7x_1 + 2x_2 \leq 21$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

ب)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

s.t:

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

۸. مسأله زیر را به روش ترسیمی حل کنید. تفاوت اساسی آن با مدلهای مطرح شده در متن فصل چیست؟ (راهنمایی، ناحیه موجه یک نقطه است!).

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2$$

s.t:

$$x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1 = 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

۳.۸ پاسخنامه سؤالات تکمیلی و چهارگزینه‌ای

۱. مرز	۲. گوشه	۳. حداقل	۴. بیش از دو
۵. موجه	۶. الف	۷. ب	۸. د
۹. د	۱۰. ج	۱۱. ج	۱۲. ب
۱۳. ب	۱۴. د	۱۵. د	۱۶. ب
۱۷. د	۱۸. د	۱۹. د	۲۰. ج

فصل چهارم

برنامه‌ریزی خطی

(روش سیمپلکس[1])

اهداف فصل

هدف اصلی این فصل آشنا کردن دانشجویان با «روش سیمپلکس» برای حل مسائل دو متغیره و چند متغیره خطی است. به علاوه دانشجویان با مطالعه این فصل می‌توانند موارد خاص LP را از موارد استاندارد تشخیص دهند.

۴.۱ مقدمه

در این فصل، یک رویکرد ریاضی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی معرفی خواهد شد. این رویکرد «روش سیمپلکس» نامیده می‌شود. روش سیمپلکس یک فن کلی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی است. در این روش، ابتدا مدل وارد یک جدول می‌شود و سپس یک سری مراحل ریاضی بر روی جدول اجرا می‌گردد. مراحل ریاضی روش سیمپلکس به نحو اثربخشی بیانگر فرآیند حرکت در روش ترسیمی می‌باشد که جهت حرکت را از یک گوشه به گوشه دیگر نشان می‌دهد. برخلاف روش ترسیمی که باید تمام گوشه‌های موجه را برای پیدا کردن گوشه بهینه جستجو کنیم، در روش سیمپلکس همواره از یک گوشه به گوشه‌ای بهتر حرکت کرده تا اینکه بهترین گوشه پیدا شود و توقف نماییم.

---

1. Simplex Method

۴.۲ تبدیل مدل برنامه‌ریزی خطی به فرم استاندارد

اولین قدم در حل یک مدل برنامه‌ریزی خطی با استفاده از روش سیمپلکس تبدیل مدل به فرم استاندارد است. فرم استاندارد مدل برنامه‌ریزی خطی، عبارت است از یک مدل با تابع هدف Max و با محدودیتهایی به فرم مساوی (=) به جای کوچکتر مساوی (≤) یا بزرگتر مساوی (≥). رویه‌ای شناخته شده برای تبدیل محدودیت کوچکتر مساوی (≤) به محدودیت مساوی (=) وجود دارد. با اضافه کردن یک متغیر جدید به هر محدودیت ≤ می‌توان به یک معادله = دست یافت. متغیرهای اضافه شده به نامعادلات کوچکتر مساوی را «متغیر کمبود» گویند و آنها را با "S" نشان می‌دهند. رویهٔ تبدیل مدل Max به فرم استاندارد را با ذکر مثال ۴.۱ ادامه می‌دهیم.

مثال ۴.۱ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۴۰ x_1 + ۵۰ x_2$$

s.t:

$$x_1 + ۲ x_2 \leq ۴۰ \quad \text{(محدودیت نیروی کار (نفر ـ ساعت}$$

$$۴ x_1 + ۳ x_2 \leq ۱۲۰ \quad \text{محدودیت مواد اولیه (kg)}$$

$$x_1, x_2 \geq ۰$$

مدل فوق همان مدل مربوط به مسأله ترکیب تولید در فصل سوم (مثال ۳.۱) است.

با اضافه کردن یک متغیر کمبود (S) به هر یک از محدودیتهای مدل می‌توانیم، نامعادلات را به تساوی تبدیل کنیم. در نتیجه معادلات زیر بدست می‌آید:

$$x_1 + ۲ x_2 S_1 = ۴۰$$

$$۴ x_1 + ۳ x_2 + S_2 = ۱۲۰$$

متغیرهای کمکی S_1 و S_2 باید به گونه‌ای به خود مقدار بگیرند که سمت چپ معادله با سمت راست آن مساوی باشد. برای مثال جواب فرضی ($x_1 = ۵$ و $x_2 = ۱۰$) را در نظر بگیرید. با جای‌گذاری این مقدار در معادلات فوق خواهیم داشت:

$$x_1 + ۲ x_2 + S_1 = ۴۰$$

$$۵ + ۲ (۱۰) + S_1 = ۴۰$$

$$S_1 = ۱۵$$

«و»

$$۴x_۱ + ۳x_۲ + S_۲ = ۱۲۰$$
$$۴(۵) + ۳(۱۰) + S_۲ = ۱۲۰$$
$$S_۲ = ۷۰$$

در این مثال ($x_۱ = ۱۰$ و $x_۲ = ۵$)، بیانگر یک جواب فرضی است که منجر به مصرف تمام منابع نخواهند شد. همچنانکه دیده می‌شود، برای تولید ۵ واحد از محصول نوع ۱ و ۱۰ واحد از محصول نوع ۲ فقط ۲۵ ساعت کار لازم است. در حالیکه کل نیروی انسانی موجود ۴۰ ساعت است، پس ۱۵ ساعت از نیروی کار بلااستفاده مانده است. بنابراین $S_۱$ بیانگر «نیروی کار بلااستفاده (موجودی نیروی کار)» خواهد بود. به همین طریق تولید ۵ واحد از محصول ۱؛ $x_۱$ و ۱۰ واحد از محصول ۲؛ $x_۲$ فقط منجر به مصرف ۵۰ کیلوگرم از مواد اولیه می‌شود. بنابراین $S_۲$ بیانگر «مواد اولیه بلااستفاده» خواهد بود که مقدار آن مساوی ۷۰ کیلوگرم است. پس بطور کلی می‌توان متغیرهای کمبود را بیانگر «منابع مصرف نشده»[1] نام نهاد. به عبارت دیگر متغیرهای کمبود بیانگر «موجودی منابع» خواهند بود.

ضریب ۴۰ برای $x_۱$ و ضریب ۵۰ برای $x_۲$ در تابع هدف به ترتیب بیانگر سهم هر واحد از محصول ۱ و ۲ در سودآوری هستند. امّا این سؤال مطرح می‌شود که سهم هر واحد از متغیرهای کمبود در ایجاد سود چقدر است؟ واقعیت این است که متغیرهای کمبود «هیچ» سهمی در ایجاد سود ندارند. چون بیانگر منابع مصرف نشده هستند.

سود تنها در صورتی ایجاد می‌شود که منابع در تولید $x_۱$ و $x_۲$ به کار رفته باشند. بنابراین ضریب متغیرهای کمبود در تابع هدف مساوی «صفر» خواهد بود و تابع هدف را براساس آنها باید به صورت زیر نوشت:

$$\text{Max } Z = ۴۰x_۱ + ۵۰x_۲ + ۰S_۱ + ۰S_۲$$

همچون متغیرهای تصمیم، مقدار متغیرهای کمبود همواره غیرمنفی ($۰ \geq$) است. چون منبع «منفی» چیزی غیرممکن می‌باشد. بنابراین برای این مدل باید نوشت:

$$x_۱, x_۲, S_۱, S_۲ \geq ۰$$

1. Unused Resources

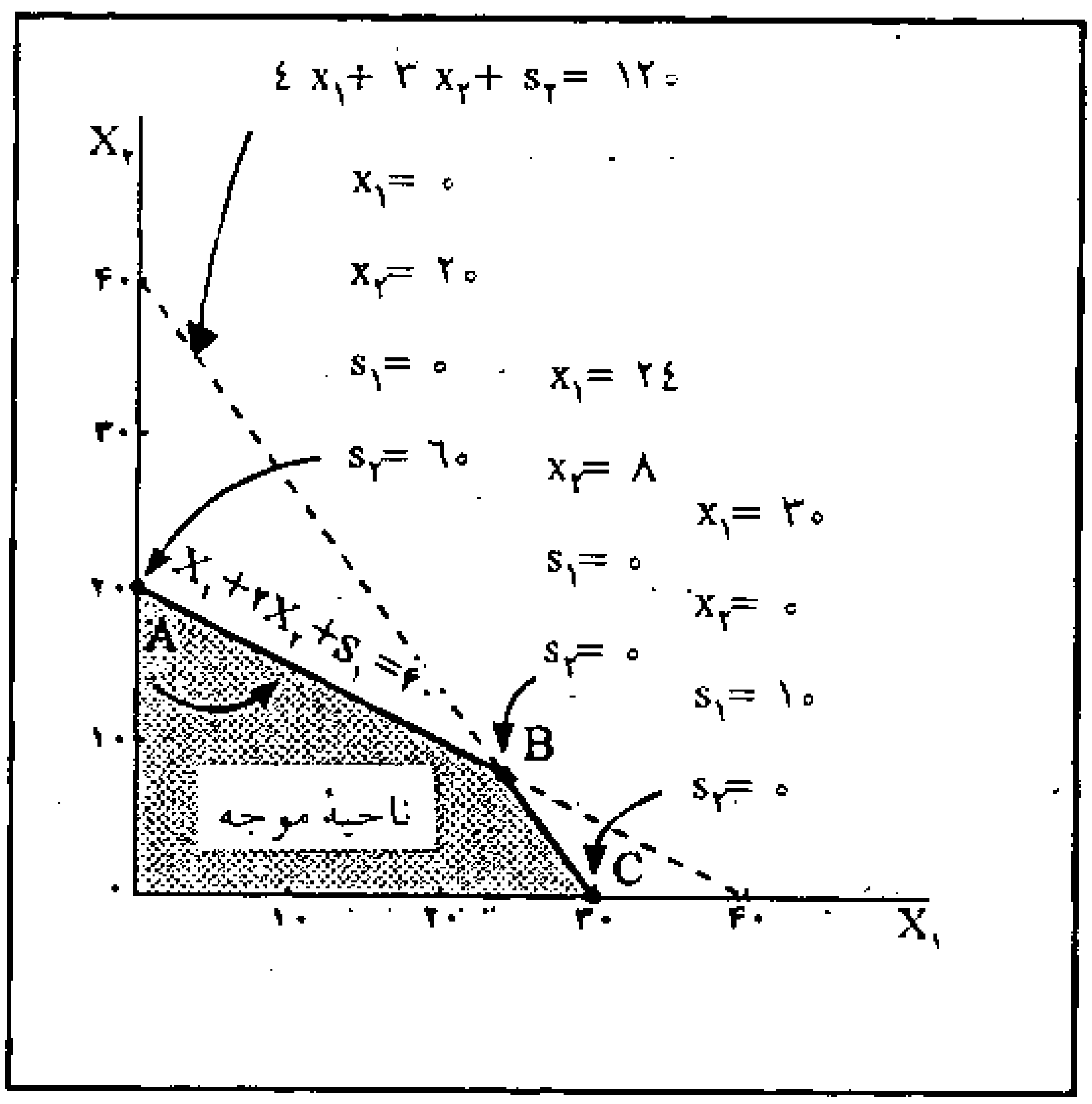
براساس مفاهیم فوق، خلاصه مدل استاندارد مثال ۴.۱ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

s.t:

$$x_1 + 2x_2 + S_1 = 40$$
$$4x_1 + 3x_2 + S_2 = 120$$
$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

شکل ۴.۱ نشان‌دهنده راه حل ترسیمی مسأله استاندارد فوق است که بیانگر مقادیر متغیرهای تصمیم و کمبود در هر گوشه است. براساس جوابهای بدست آمده، تابع هدف در گوشهٔ B حداکثر شده است که بیانگر گوشهٔ بهینه است.



شکل ۴.۱ نقاط مربوط به جوابهای A ، B و C برای متغیرهای تصمیم و کمبود

واضح است که همیشه مدل برنامه‌ریزی خطی فقط دارای محدودیتهای کوچکتر مساوی نخواهد بود. چنانچه مدل دارای محدودیتهای بزرگتر مساوی ($\geq$) باشد، دیگر نمی‌توان با اضافه کردن متغیرهای کمبود مدل را به فرم استاندارد تبدیل نمود. جهت اجرای رویه

استانداردسازی این دسته از مدلها به مثال زیر توجه نمایید.

مثال ۴.۲ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } Z = ۶x_۱ + ۳x_۲$$

s.t:

$$۲x_۱ + ۴x_۲ \geq ۱۶$$

$$۴x_۱ + ۳x_۲ \geq ۲۴$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

اولاً، گفته شد که یک مدل استاندارد، مدلی است که دارای تابع هدف Max باشد. برای تبدیل هر تابع هدف Min به تابع هدف Max می‌توان از تعریف ریاضی زیر استفاده کرد:

$$\boxed{\text{Min } Z = \text{Max } (-Z)}$$

به بیان دیگر، برای تبدیل یک تابع هدف Min به تابع هدف Max، می‌توان طرفین تابع هدف Min را در ۱- ضرب کرد. چنانچه Z- را حداکثر کنیم، همانند آن می‌ماند که تابع Z را حداقل نموده‌ایم. پس برای مثال فوق داریم:

$$\text{Max } (-Z) = -۶x_۱ - ۳x_۲$$

s.t:

$$۲x_۱ + ۴x_۲ \geq ۱۶$$

$$۴x_۱ + ۳x_۲ \geq ۲۴$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

برای تبدیل محدودیتهای $\geq$ به تساوی، به جای اضافه کردن یک متغیر کمبود، ناچار باید یک «متغیر مازاد»[1] از آن کم کنیم. در حالیکه یک متغیر کمبود که به محدودیت $\leq$ اضافه

1. Surplus variable

می‌شود، بیانگر منابع مصرف نشده است، یک متغیر مازاد که از محدودیت ≤ کسر می‌شود، بیانگر منبعی است که بیش از حداقل لازم مصرف شده است. همانند متغیر کمبود، یک متغیر مازاد با نماد "S" نشان داده می‌شود. و باید به صورت غیرمنفی (۰≤) تعریف شود. در ادبیات OR، هم متغیرهای کمبود و هم متغیرهای مازاد تحت عنوان «متغیرهای کمکی»[1] نام برده می‌شوند. ما نیز از این پس بجای واژه‌های اصلی از متغیر کمکی استفاده خواهیم کرد مگر اینکه ضرورتی به ذکر دقیق عنوان متغیر S باشد.

حال با استفاده از متغیرهای کمکی S_1 و S_2 هر یک از محدودیتهای مدل مثال ۴.۲ را به تساوی تبدیل می‌کنیم. پس:

$$2x_1 + 4x_2 - S_1 = 16$$
$$4x_1 + 3x_2 - S_2 = 24$$

جهت درک بهتر متغیرهای مازاد S_1 و S_2 به جواب آزمایش زیر توجه کنید:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 10$$

با جایگزین کردن مقدار جواب آزمایشی، در معادلات خواهیم داشت:

$$2(0) + 4(10) - S_1 = 16$$
$$-S_1 = 16 - 40$$
$$S_1 = 24$$

برای تولید صفر واحد x_1 و ۱۰ واحد x_2 به ۴۰ واحد از منبع اوّل نیاز داریم. در حالیکه حداقل منبع موجود ۱۶ واحد است. بنابراین $S_1 = 24$، بیانگر ۲۴ واحد منبع مصرف شده بیش از حداقل موجودی از منبع (۱۶≤) می‌باشد. به همین طریق برای منبع دوّم داریم:

$$4(0) + 4(10) - S_2 = 24$$
$$-S_2 = 24 - 40$$
$$S_2 = 16$$

همچون متغیرهای کمبود، نقش متغیرهای مازاد در ایجاد سود (هزینه) مساوی صفر

---

1. Slack variables

است. پس آنها را با ضریب صفر در تابع هدف نشان می‌دهند. براساس مفاهیم بیان شده، می‌توان فرم استاندارد شده مثال ۴.۲ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\text{Max } (-Z) = -6x_1 - 3x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

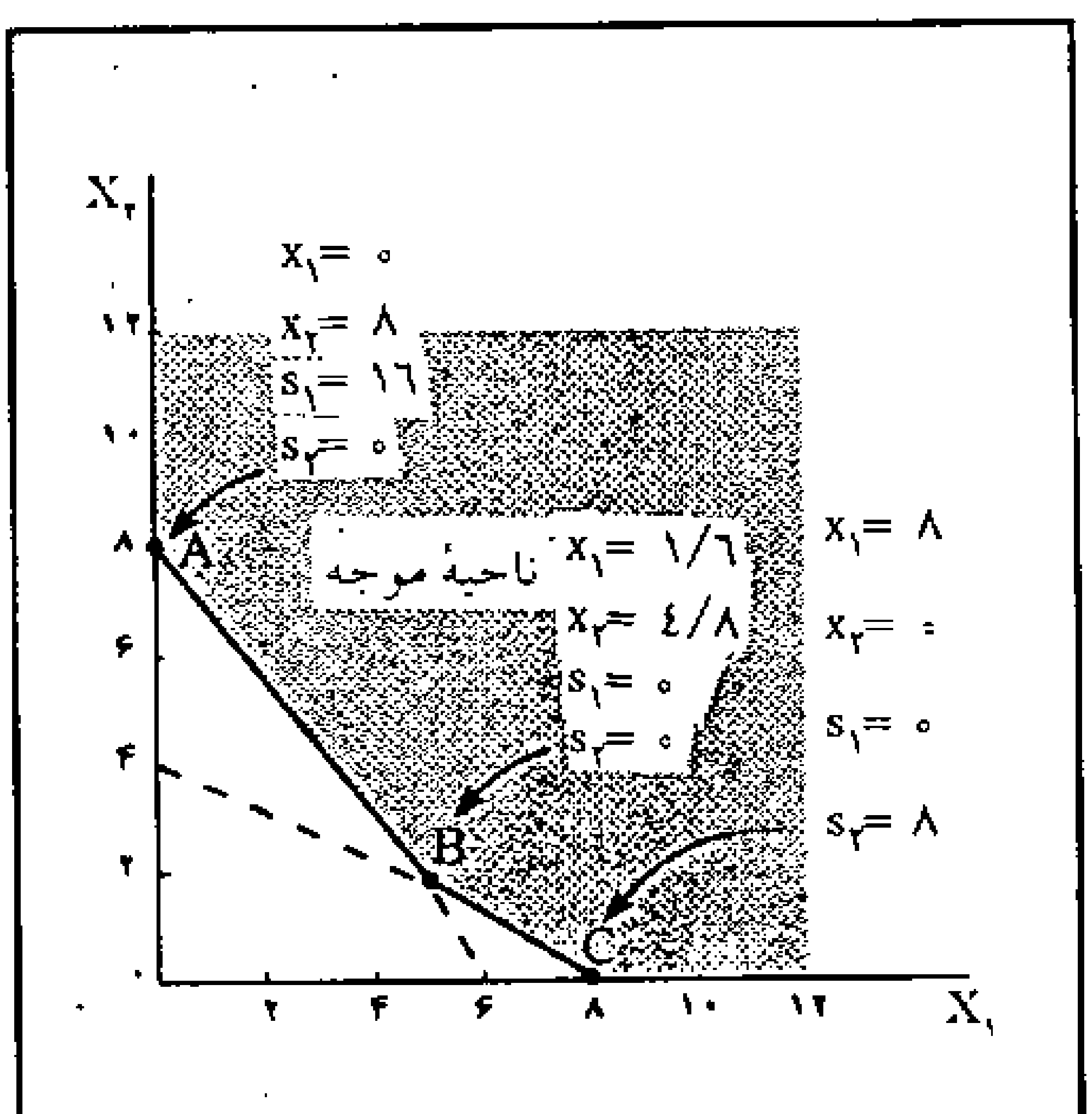
s.t:

$$2x_1 + 4x_2 - S_1 = 16$$

$$4x_1 + 3x_2 - S_2 = 24$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

شکل ۴.۲ جوابهای ترسیمی مثال را با توجه به S_1 و S_2 نشان می‌دهد.



شکل ۴.۲ حل ترسیمی مثال ۲-۴ و نمایش هندسی گوشه‌های مدل استاندارد شده

چنانچه در یک مدل برنامه‌ریزی خطی محدودیت مساوی (=) وجود داشته باشد، آن محدودیت خود دارای فرم استاندارد است. بنابراین ضرورتی به استفاده از متغیر کمکی برای استاندارد کردن آن نخواهد بود. بنابراین عیناً محدودیت مساوی به عنوان یکی از محدودیتهای

مدل استاندارد آورده می‌شود.

به طور خلاصه رویه تبدیل مدل برنامه‌ریزی خطی به شکل استاندارد به شرح زیر تکرار می‌شود:

الف) اگر مدل به صورت حداکثرسازی (Max) باشد:

۱. محدودیت کوچکتر مساوی ($\leq$) را با اضافه کردن متغیر کمکی به تساوی تبدیل کنید.

۲. محدودیت بزرگتر مساوی ($\geq$) را با کسر کردن متغیر کمکی به تساوی تبدیل کنید.

۳. محدودیت مساوی را عیناً بنویسید.

ب) اگر مدل به صورت حداقل‌سازی (Min) باشد:

۱. طرفین تابع هدف را در ۱ - ضرب کنید و آن را با Max بنویسید.

۲. محدودیت کوچکتر مساوی ($\leq$) را با اضافه کردن متغیر کمکی به تساوی تبدیل کنید.

۳. محدودیت بزرگتر مساوی ($\geq$) را با کسر کردن متغیر کمکی به تساوی تبدیل کنید.

۴. محدودیت تساوی (=) را عیناً بنویسید.

۴.۳ حل همزمان معادلات

پس از تبدیل مدل برنامه‌ریزی خطی به شکل استاندارد، می‌توان به حل معادلات مدل استاندارد به طور همزمان برای بدست آوردن هر جواب ممکن پرداخت. برای درک این مفهوم به مثال ۴.۳ توجه نمایید.

مثال ۴.۳ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۴۰\, x_۱ + ۵۰\, x_۲$$

s.t:

$$x_۱ + ۲\,x_۲ \leq ۴۰$$

$$۴\,x_۱ + ۳\,x_۲ \leq ۱۲۰$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

در مثال ۴.۱ دریافتیم که فرم استاندارد مدل فوق عبارتست از:

$$\text{Max } Z = 40\,x_1 + 50\,x_2 + 0\,S_1 + 0\,S_2$$

s.t:

$$x_1 + 2\,x_2 + S_1 = 40$$

$$4\,x_1 + 3\,x_2 + S_2 = 120$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

توجه دارید که مدل فوق دارای دو معادله و ۴ مجهول (شامل دو متغیر تصمیم و دو متغیر کمکی) است. وضعیتی که حل همزمان معادلات را به طور مستقیم غیرممکن می‌سازد. «روش سیمپلکس» این مشکل با مساوی صفر قرار دادن برخی از متغیرها حل می‌کند. تعداد متغیرهایی که مقدار آنها مساوی صفر خواهد بود مساوی با n (تعداد متغیرهای تصمیم) است. برای مدل فوق $m + n = 4$ (تعداد متغیرها) و $m = 2$ (تعداد محدودیتها) است. بنابراین دو تا $(4 - 2 = 2)$ از متغیرها باید مساوی صفر باشد. برای مثال اجازه دهید $x_1 = 0$ و $S_1 = 0$ باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$0 + 2\,x_2 + 0 = 40$$

$$0 + 3\,x_2 + 0 = 120$$

اوّل، x_2 را در معادله ۱ بدست می‌آوریم:

$$2\,x_2 = 40$$

$$x_2 = 20$$

سپس معادله دوّم را برحسب S_2 حل می‌کنیم:

$$3\,x_2 + S_2 = 120$$

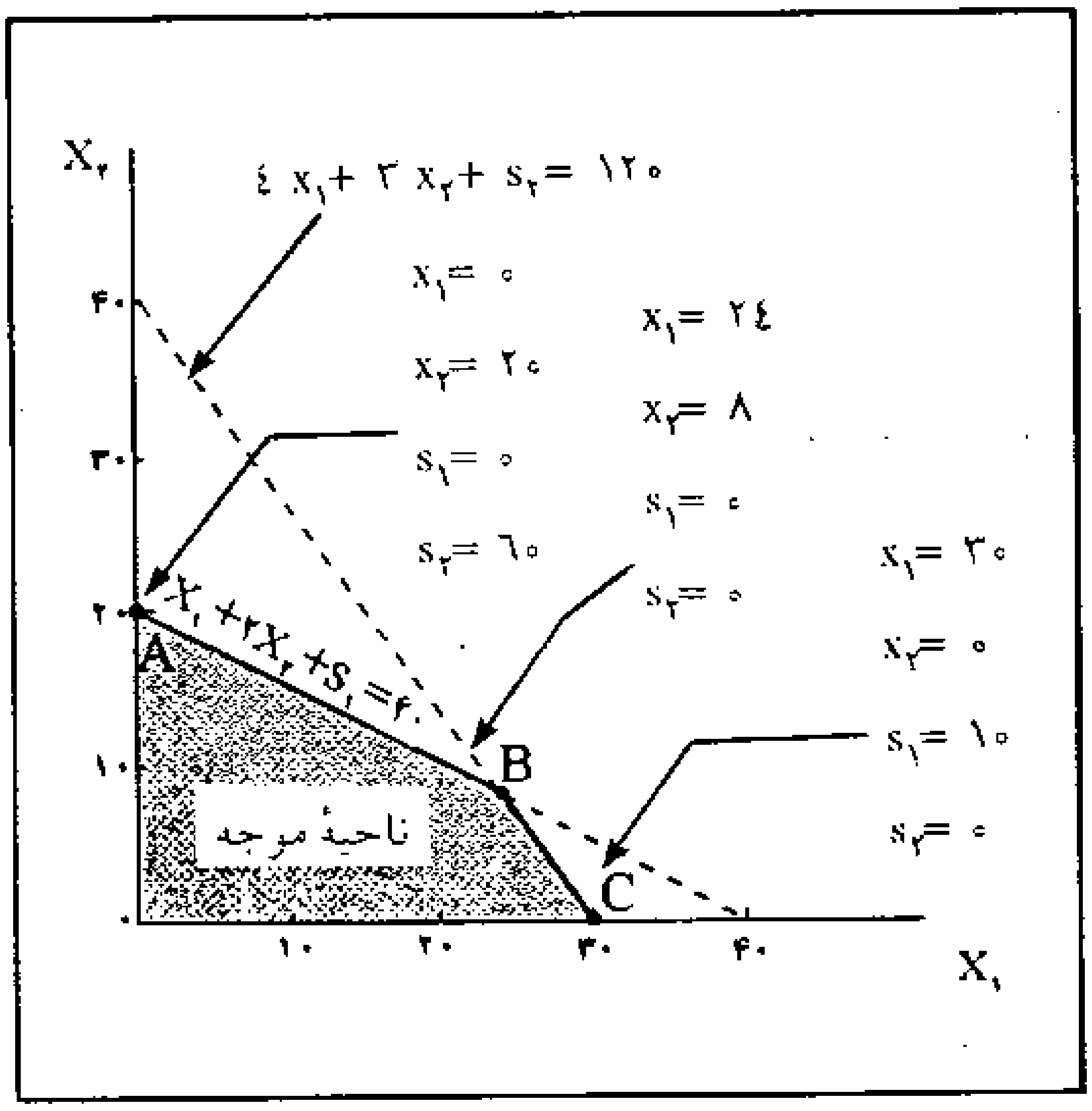
$$3\,(20) + S_2 = 120$$

$$S_2 = 60$$

جواب بدست آمده، همان گوشه A در شکل ۴.۳ می‌باشد. شکل ۴.۳ نشان‌دهندهٔ مختصات A به ازای $(x_1 = 0$، $x_2 = 20$، $S_1 = 0$ و $S_2 = 60)$ می‌باشد که از حل همزمان معادلات مدل بدست آمده‌اند. جواب بدست آمدهٔ فوق یک «جواب موجه اساسی»[1] نامیده می‌شود. «جواب

1. basic Feasible Solution

موجه»[1] جوابی است که در محدودیتهای مدل صدق می‌کند. امّا یک جواب موجه اساسی، جوابی است که ضمن ارضاء محدودیتهای مدل، m متغیر آن بزرگتر از صفر و n متغیر آن $(m + n - m)$ مساوی صفر خواهد بود[2].



شکل ۴.۳ جوابهای ترسیمی نقاط A، B و C مثال ۴.۳

به جواب آزمایشی دوّم، در صورتی که ($x_2 = 0$ و $S_2 = 0$) باشد، دقت نمایید. مقدار متغیرهای دیگر براساس دستگاه معادلات زیر بدست می‌آید:

$$x_1 + 2x_2 + S_1 = 40$$
$$4x_1 + 3x_2 + S_2 = 120$$

یعنی:

$$x_1 + 0 + S_1 = 40$$
$$4x_1 + 3(0) + 0 = 120$$

1. Feasible Solution

۲. چنانچه بیش از n متغیر مدل استاندارد مساوی صفر باشد، جواب موجه اساسی را تبهگن (degenerate) گویند که در بخش (۴.۹.۴) بحث خواهد شد.

حل به ازای x_1:

$$4x_1 = 120$$
$$x_1 = 30$$

حل به ازای S_1:

$$30 + S_1 = 40$$
$$S_1 = 10$$

این جواب موجه اساسی، همان گوشه C در شکل ۴.۳ است. نقطه‌ای که ($x_1 = 30$، $S_1 = 10$، $x_2 = 0$ و $S_2 = 0$) است.

نهایتاً به جواب ($S_1 = 0$ $S_2 = 0$) توجه کنید. اگر این جواب را در معادلات مدل قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$x_1 + 2x_2 + 0 = 40$$
$$4x_1 + 3x_2 + 0 = 120$$

دستگاه معادلات فوق دارای دو معادله و دو مجهول است. پس می‌توان آن را با استفاده از «عملیات ردیفی»[1] حل کرد. در عملیات ردیفی، می‌توان معادلات را در مقدار ثابتی ضرب کرد و از دیگر معادلات ~~کسر یا~~ اضافه کرد. بدون اینکه هیچ اثری در مقدار متغیرهای تصمیم داشته باشد. براساس این قاعده عمومی، می‌توان معادله بالایی را در عدد ۴ ضرب کرد؛

$$4x_1 + 8x_2 = 160$$

و سپس معادله دوّم را از آن کسر کرد:

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 = 160 \\ -4x_1 - 3x_2 = 120 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 5x_2 = 40 \quad}$$
$$x_2 = 8$$

بعد با جایگذاری کردن x_2 در یکی از معادلات مقدار x_1 را بدست آورد:

$$x_1 + 2(8) = 40$$
$$x_1 = 24$$

1. Row operations

این جواب موجه اساسی همان گوشه B است که مختصات آن ($x_1 = ۲۴$ ، $x_1 = ۸$ ، $S_1 = ۰$ و $S_۲ = ۰$) است. جوابهای سه‌گانه فوق دلیل محکمی بر صحت تعریف جواب موجه اساسی هستند. در هر سه جواب آزمایشی، تعداد متغیر بزرگتر از صفر مساوی با $m = ۲$ است و تعداد متغیرهای مساوی صفر برابر $n = ۲$ است.

با این وجود همچنان دو سؤال اساسی در تعیین جوابهای فوق باقی است:

۱. چگونه، نوع متغیرهایی که باید مقدار صفر داشته باشند، شناسایی می‌شود؟

۲. چگونه، جواب بهینه تشخیص داده می‌شود؟

استفاده از روش سیمپلکس در حل مدل برنامه‌ریزی خطی پاسخی به هر دو سؤال فوق خواهد داد. روش سیمپلکس مجموعه‌ای از مراحل ریاضی است که در هر مرحله تعیین می‌کند، کدامیک از متغیرها باید مساوی صفر باشد و چه هنگام به یک جواب بهینه خواهیم رسید.

۴.۴ روش سیمپلکس

روش سیمپلکس به مجموعه‌ای از مراحل ریاضی برای حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی گفته می‌شود که در یک جدول که به «تابلوی سیمپلکس»[1] معروف است انجام می‌گیرد. تابلوی سیمپلکس مدل را به گونه‌ای سازماندهی می‌کند که به‌کارگیری مراحل ریاضی را آسانتر می‌سازد. مراحل روش سیمپلکس با استفاده از مثال ۴.۴ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثال ۴.۴ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۴۰ x_1 + ۵۰ x_۲ + ۰ S_1 + ۰ S_۲$$

s.t:

$$x_1 + ۲ x_۲ + S_1 = ۴۰$$

$$۴ x_1 + ۳ x_۲ + S_۲ = ۱۲۰$$

$$x_1, x_۲, S_1, S_۲ \geq ۰$$

تابلوی اوّلیه سیمپلکس برای این مدل با ستونها و سطرهای مورد استفاده در جدول ۴.۱ نشان داده شده است.

---

1. Simplex Tableau

جدول ۴.۱ جدول اساسی (تابلوی) سیمپلکس

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست

در تابلوی سیمپلکس، همواره ستون اوّل با عنوان «متغیرهای اساسی» نامگذاری می‌شود و ستون آخر آن بیانگر «مقادیر سمت راست» معادلات مدل است. ستونهای مابین ستون اوّل و آخر بیانگر نام متغیرهای مورد استفاده در مدل است.

سطر اوّل تابلوی سیمپلکس، به ضرایب متغیرها در تابع هدف اختصاص دارد و معمولاً این سطر را «سطر صفر»[1] گویند. برای نوشتن سطر صفر به صورت زیر عمل می‌شود:

الف) تابع هدف را به فرم Max تبدیل کنید.

ب) مقادیر سمت راست تابع هدف را به سمت چپ معادله انتقال دهید تا مقدار سمت راست تابع مساوی صفر قرارگیرد.

پس در مثال ۴.۴ داریم:

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$Z - 4x_1 - 50x_2 = 0$$

بدین طریق تابع هدف به فرم یکی از معادلات استاندارد مدل درآمده است.

قدم بعدی برای پرکردن تابلوی سیمپلکس، تعیین یک جواب موجه اساسی است. به عبارت دیگر، تعیین اینکه کدامیک از متغیرها باید دارای مقدار صفر باشند و کدامیک دارای مقدار بزرگتر از صفر خواهند بود؟! روش سیمپلکس همواره «مبدأ مختصات» مدل را به عنوان جواب موجه اساسی اولیه انتخاب می‌کند. زیرا مقدار متغیرهای تصمیم در این گوشه براحتی قابل تعریف خواهد بود. در این گوشه تمام متغیرهای تصمیم مدل مساوی صفر هستند و مقدار متغیرهای کمکی مساوی با مقادیر سمت راست محدودیتهای مدل است. به عبارت دیگر این نقطه راحت‌ترین نقطه برای شروع روش سیمپلکس است. در مثال ما ($x_1 = 0$، $x_2 = 0$) و بنابراین متغیرهای S_1 و S_2 تشکیل‌دهندهٔ متغیرهای اساسی ما خواهند بود. بنابراین:

1. Zero - Row

$$x_1 + 2x_2 + S_1 = 40$$
$$0 + 2(0) + S_1 = 40$$
$$S_1 = 40$$

«و»

$$4x_1 + 3x_2 + S_2 = 120$$
$$4(0) + 3(0) + S_2 = 120$$
$$S_2 = 120$$

به عبارت دیگر، در مبدأ مختصات که هیچ تولیدی صورت نمی‌گیرد، تمامی منابع بلااستفاده هستند. بنابراین ردیفهای بعدی تابلوی سیمپلکس به محدودیتهای مدل اختصاص می‌یابند که در مثال ما متغیرهای معرف آنها S_1 و S_2 خواهند بود. بنابراین بخشی از جدول ۴.۱ مشخص‌شده و به صورت جدول ۴.۲ درمی‌آید.

جدول ۴.۲ جواب موجه اساسی

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0						۰
S_1						۴۰
S_2						۱۲۰

جدول ۴.۲ نشان می‌دهد که در این گوشه ($x_1 = 0$، $x_2 = 0$، $S_1 = 40$ و $S_2 = 120$) می‌باشند. بنابراین هنوز تولیدی صورت نگرفته است. یعنی کلیهٔ منابع دست نخورده باقی مانده و لذا مقدار سود حاصل از تولید مساوی صفر (سمت راست مقابل Z_0) است. یعنی:

$$Z - 40x_1 - 50x_2 = 0$$
$$Z - 40(0) - 50(0) = 0$$
$$Z = 0$$

پس تابلوی اوّلیه سیمپلکس بیانگر مبدأ مختصات مدل برنامه‌ریزی خطی است.

مرحله بعد، انتقال ضرایب متغیرهای مدل چه در تابع هدف و چه در محدودیتها به درون تابلوی سیمپلکس است. بدین منظور یک بار دیگر فرم قابل انتقال مدل به درون تابلوی سیمپلکس را با استفاده از توضیحات فوق برای مدل مثال ۴.۴ بازنویسی می‌کنیم.

$$\text{سطر صفر}: Z - ۴۰x_۱ - ۵۰x_۲ - ۰S_۱ - ۰S_۲ = ۰$$
$$\text{s.t:}$$
$$\text{سطر ۱}: x_۱ + ۲x_۲ + S_۱ = ۴۰$$
$$\text{سطر ۲}: ۴x_۱ + ۳x_۲ + S_۲ = ۱۲۰$$
$$X_۱, X_۲, S_۱, S_۲ \geq ۰$$

با توجه به اینکه عناوین متغیرهای مدل در سطر اوّل بین ستون «متغیرهای اساسی» و ستون» مقادیر سمت راست»[1] ذکر شده است، پس از سطر صفر ($Z_۰$) شروع کرده و ضرایب هر یک از متغیرها را از معادلهٔ مربوط به تابع هدف استخراج کرده و در ذیل نام آن می‌نویسیم. به عنوان نمونه، ضرایب (Z، $X_۱$، $X_۲$، $S_۱$، $S_۲$) در سطر صفر به ترتیب (۱، ۴۰ -، ۵۰ -، ۰، ۰) نوشته می‌شود. به همین طریق ضرایب متغیرها در سطر ۱ و ۲ به ترتیب از محدودیتها استخراج می‌شود و به درون تابلو انتقال می‌یابد. حاصل جدول ۴.۳ خواهد شد.

از مفاهیم بیان شده تا اینجا درمی‌یابیم که در یک جواب موجه اساسی، متغیرهای

جدول ۴.۳ تابلوی اوّلیه سیمپلکس برای مثال ۴-۴

متغیرهای اساسی	Z	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	مقادیر سمت راست
$Z_۰$	۱	۴۰ -	۵۰ -	۰	۰	۰
$S_۱$	۰	۱	۲	۱	۰	۴۰
$S_۲$	۰	۴	۳	۰	۱	۱۲۰

مساوی صفر را «متغیرهای غیراساسی»[2] و متغیرهای بزرگتر از صفر را «متغیرهای اساسی»[3] گویند. بنابراین در تابلوی اوّل سیمپلکس، اگر مدل از نوع Max با محدودیتهای کوچکتر مساوی (≥) باشد، همواره متغیرهای اساسی (غیرصفر) متغیرهای کمکی خواهند بود و متغیرهای غیراساسی (مساوی صفر) متغیرهای تصمیم هستند.

۴.۴.۱ انتخاب متغیر ورودی

فرض کنید، کارخانه تولیدکننده در مثال ۴.۴ تصمیم به تولید $x_۱$ دارد. با این تصمیم باید گفت از نظر روش سیمپلکس $x_۱$ یک متغیر اساسی خواهد شد. با تولید هر واحد $x_۱$ سود شرکت ۴۰ ریال افزایش خواهد یافت. با تولید هر واحد $x_۱$ بخشی از منابع نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد.

---

1. Right - Hand - Side
2. Non - basic variables
3. Basic variables

برای مثال اگر $x_1 = ۱$ باشد، پس:

$$x_1 + ۲x_2 + S_1 = ۴۰$$
$$۱ + ۲(۰) + S_1 = ۴۰$$
$$S_1 = ۳۹$$

«و»

$$۴x_1 + ۳x_2 + S_2 = ۱۲۰$$
$$۴(۱) + ۳(۰) + S_2 = ۱۲۰$$
$$S_2 = ۱۱۶$$

واضح است که با تولید هر واحد x_1، منبع نیروی کار ۱ واحد و منبع مواد اولیه ۴ واحد کاهش می‌یابد. این تغییر و تحول در منابع منجر به افزایش سود (تابع هدف) از صفر به ۴۰ می‌شود.

$$Z = ۴۰(۱) + ۵۰(۰)$$
$$Z = ۴۰$$

برعکس، اگر $x_2 = ۱$ باشد، ۲ واحد از منابع اوّل و ۳ واحد از منبع دوّم مصرف می‌شود و به‌ازای مقادیر مصرف از منابع، سود از صفر به ۵۰ می‌رسد. پس به صرفه است که ابتدا شرکت به تولید x_2 بپردازد.

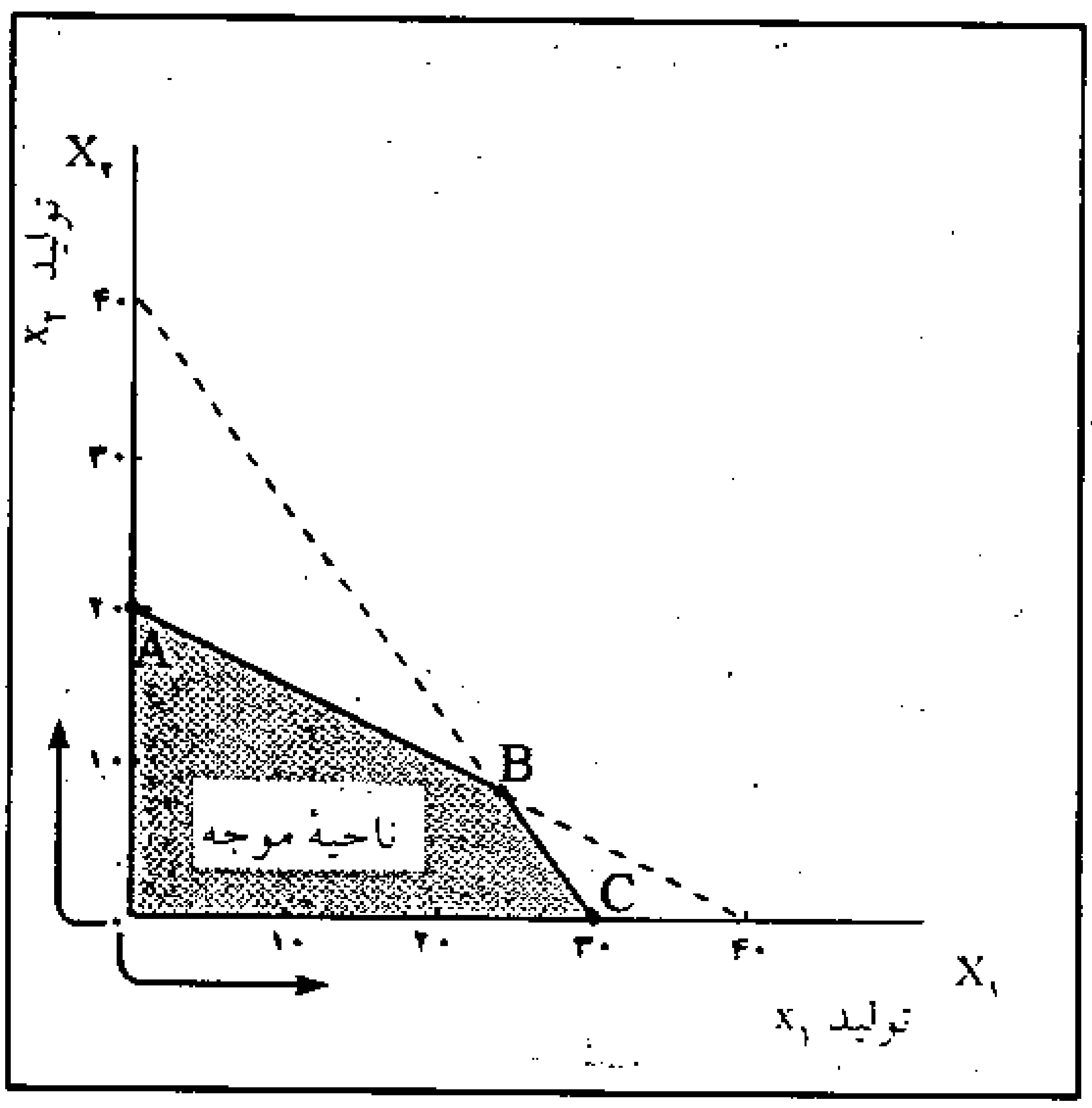
مفاهیم فوق قابل تعمیم به تابلوی سیمپلکس برای انتخاب متغیر مناسب برای تولید نیز می‌باشد. در قالب اصطلاحات روش سیمپلکس می‌توان گفت x_2 متغیری است که باید در مرحلهٔ بعدی «وارد پایه» شود. چگونگی تعیین متغیر ورودی براساس ضرایب سطر صفر (Z_0) انجام می‌گیرد. از آنجا که مقادیر سمت راست تابع هدف به سمت چپ انتقال یافته است، پس آن متغیری برای ورود انتخاب می‌شود که دارای «منفی‌ترین» ضریب در ردیف Z_0 باشد. با مراجعه به جدول ۴.۳ معلوم می‌شود که x_2 نسبت به سایر متغیرهای غیراساسی دارای بیشترین ضریب منفی (یعنی ۵۰ −) است. بنابراین x_2 به عنوان متغیر ورودی انتخاب می‌شود. ستون مربوط به x_2 را «ستون لولا»[1] نامیده و آن را علامت‌گذاری می‌کنیم. جدول ۴.۴ چگونگی مشخص شدن ستون لولا را نشان می‌دهد.

1. Pivot column

جدول ۴.۴ انتخاب متغیر ورودی

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	۴۰ -	$\boxed{-۵۰}$	۰	۰	۰
S_1	۰	۱	۲	۱	۰	۴۰
S_2	۰	۴	۳	۰	۱	۱۲۰

انتخاب متغیر ورودی در شکل ۴.۴ به تصویر کشیده شده است. در مبدأ مختصات هیچ چیز تولید نشده است. در روش سیمپلکس ما از یک گوشه به «گوشه مجاور»[1] حرکت می‌کنیم.



شکل ۴.۴ نمایش هندسی انتخاب نوع متغیر ورودی مثال ۴.۴

در این حرکت متغیری که تاکنون غیراساسی (با مقدار صفر) بوده است، جای‌گزین یک متغیر غیر صفر (اساسی) می‌شود. در شکل ۴.۴ می‌توان برای پیدا کردن جواب بهتر یا در طول محور x_1 حرکت کرد و یا در طول محور x_2 از آنجا که تولید هر واحد x_2 سود بیشتری نصیب شرکت می‌کند، پس در طول محور x_2 حرکت خواهیم کرد. پس متغیر ورودی ما x_2 خواهد بود.

1. Adjacent - Corner

۴.۴.۲ انتخاب متغیر خروجی

در مثال ما، هر جواب موجه اساسی فقط شامل دو متغیر غیر صفر می‌باشد. پس یکی از متغیرهای اساسی فعلی (تابلوی اول سیمپلکس)؛ S_1 و S_2، باید پایه را ترک کرده و جای خود را به x_2 (متغیر ورودی) بدهد. به عبارت دیگر می‌خواهیم تا امکان دارد، منابع موجود را صرف تولید محصول نوع ۲؛ x_2، نماییم. اولاً در محدودیت نیروی کار، چنانچه کل منبع را صرف x_2 کنیم (یعنی $x_1 = 0$ باشد)، خواهیم داشت:

$$x_1 + 2x_2 + S_1 = 40 \quad \text{ساعت نیروی کار}$$
$$1(0) + 2x_2 + 0 = 40$$
$$x_2 = 20$$

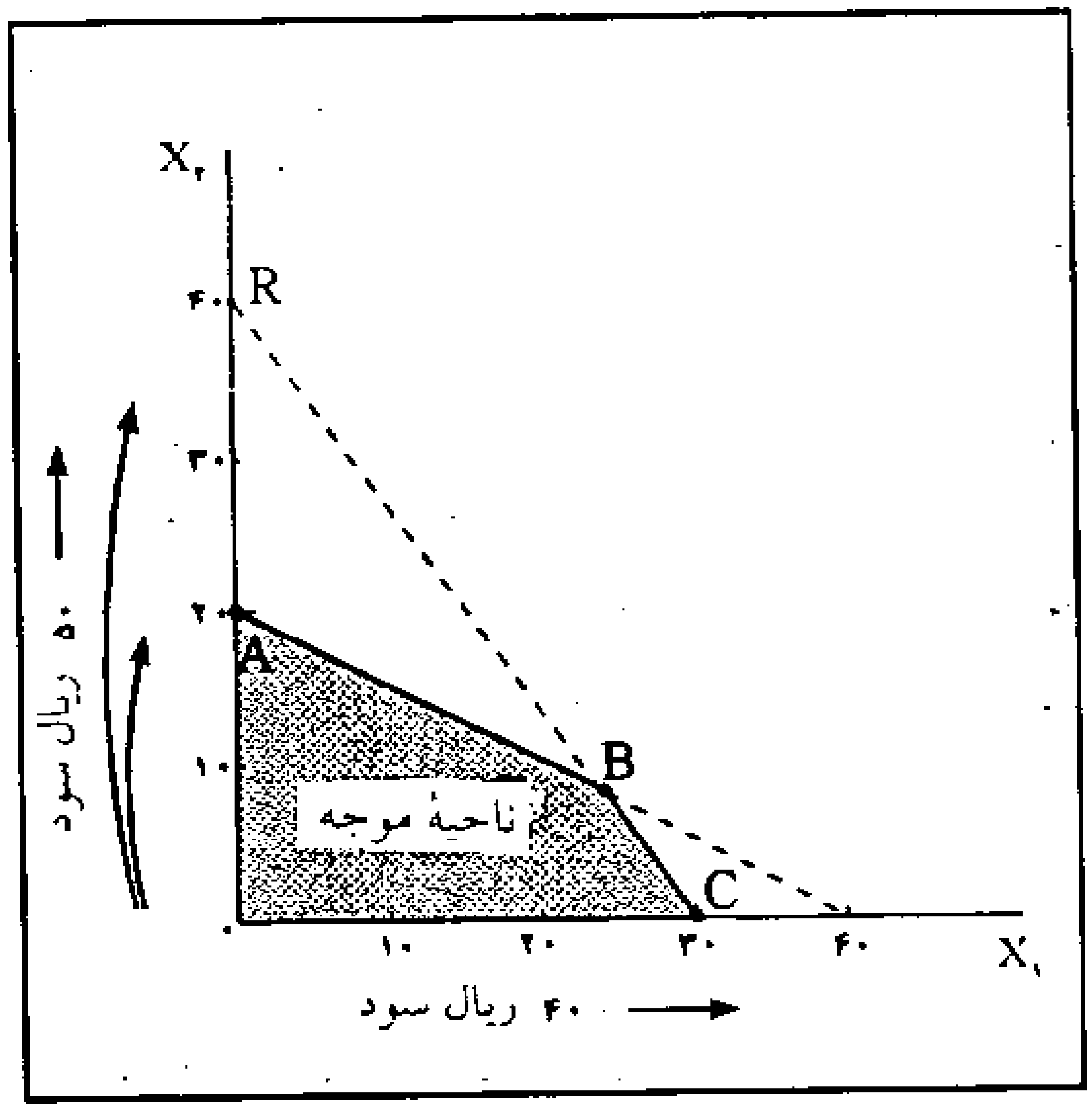
به عبارت دیگر کل نیروی کار موجود، برای تولید ۲۰ واحد از x_2 کافی است. با تحلیل مشابهی در خصوص مصرف مواد اولیه داریم:

$$4x_1 + 3x_2 + S_2 = 120$$
$$4(0) + 3x_2 + 0 = 120$$
$$x_2 = 40$$

بنابراین مواد اولیه کارخانه کفاف تولید ۴۰ واحد از کالای نوع ۲ را خواهد داد. امّا متأسفانه فقط می‌توان ۲۰ واحد (حداکثر) از x_2 تولید کرد! چون با کمبود نیروی کار روبرو هستیم. در واقع با توجه به هر دو محدودیت نیروی کار و مواد اولیه باید تصمیم به تولید x_2 گرفت. بنابراین به حداقل تولید x_2 باید راضی شد! این تحلیل در شکل ۴.۵ بخوبی به تصویر کشیده شده است.

مشخص شد که باید در طول محور x_2 حرکت کرد. ما می‌توانیم از مبدأ مختصات یا به نقطهٔ A یا به نقطهٔ R برویم. واضح است که باید نقطه A را انتخاب کرد، چون در ناحیه موجه قرار دارد. در حالی که گوشه R یک گوشهٔ غیرموجه می‌باشد و امکان انتقال به آنجا وجود ندارد.

تحلیل فوق برای انتخاب متغیر ورودی در روش سیمپلکس «بوسیلهٔ تقسیم کردن مقادیر سمت راست بر مقادیر مثبت ستون لولا انجام می‌گیرد. برای این تابلو داریم:



شکل ۴.۵ تعیین جواب موجه اساسی جدید

متغیرهای اساسی	مقادیر سمت راست	
S_1	۴۰ ÷ ۲ = ۲۰	متغیر اساسی که باید از پایه خارج شود
S_2	۱۲۰ ÷ ۳ = ۴۰	

«متغیر خروجی»[1] متغیری است که دارای «حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر مثبت ستون لولا باشد. طبق این قاعده S_1 به عنوان متغیر خروجی انتخاب می‌شود. جدول ۴.۵ ردیف S_1 را به عنوان ردیف خروجی نشان می‌دهد. ردیف مربوط به متغیر خروجی را «سطر لولا»[2] نیز می‌گویند.

جدول ۴.۵ ستون لولا، سطر لولا، عنصر لولا

ستون لولا

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	-۴۰	-۵۰	۰	۰	۰
S_1	۰	۱	۲	۱	۰	۴۰
S_2	۰	۴	۳	۰	۱	۱۲۰

سطر لولا

عنصر لولا

1. Leaving basic variable
2. Pivot Row

عدد ۲ که در تقاطع ستون لولا و سطر لولا قرار گرفته است، «عنصر لولا»[1] نامیده می‌شود. عدد لولا، سطر لولا و ستون لولا، همگی ابزارهای مناسب و کارآمدی در تهیه تابلوی بعدی سیمپلکس خواهند بود. حال همه چیز مهیای تهیهٔ تابلوی دوّم سیمپلکس و یک جواب «بهتر» است.

۴.۴.۳ تهیهٔ یک تابلوی جدید سیمپلکس

تابلوی ۴.۶ بیانگر تابلوی دوّم سیمپلکس با جواب موجه اساسی جدید یعنی x_2 و S_2 می‌باشد. مقادیر مختلف ردیفها براساس فرمولهای مختلف سیمپلکس بدست می‌آیند. اولاً، عناصر ردیف x_2، که «ردیف لولای جدید» نامیده می‌شود، با تقسیم نمودن هر یک از عناصر ردیف لولای قدیم (تابلوی اوّل) بر عنصر لولا بدست می‌آیند. فرمول این محاسبات به شرح زیر است:

$$\frac{\text{مقادیر ردیف لولای قدیم}}{\text{عدد لولا}} = (\text{مقادیر ردیف لولای جدید})$$

جدول ۴.۶ متغیرهای اساسی و مقادیر ردیف لولای جدید در تابلوی دوّم سیمپلکس

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0						
x_2	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	۰	۲۰
S_2						

برای محاسبهٔ ضرایب دیگر ردیفها در ردیف Z_0 و S_2 فرمول زیر کارساز است:

$$\left(\begin{array}{c}\text{مقادیر مربوط}\\ \text{به ردیف}\\ \text{لولای جدید}\end{array} \times \begin{array}{c}\text{ضریب مربوط}\\ \text{در ستون}\\ \text{لولا}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{مقادیر}\\ \text{ردیف}\\ \text{قدیم}\end{array}\right) = (\text{مقادیر ردیف جدید})$$

براساس فرمول فوق برای محاسبهٔ ضرایب ردیفهای باقیمانده هم به ضرایب سطر مربوطه در تابلوی قدیم نیاز داریم و هم به ضرایب بدست آمده در تابلوی جدید. برای نمونه به جدول ۴.۷ که جهت محاسبهٔ ضرایب S_2 در تابلوی دوّم به کار رفته است دقت نمایید.

---

1. Pivot Number

جدول ۴.۷ چگونگی محاسبهٔ ضرایب S_2 در تابلوی دوّم (جدید)

مقادیر ردیف جدید	=	(مقادیر مربوط به ردیف لولای جدید	×	ضریب مربوط در ستون لولا)	−	مقادیر ردیف قدیم	ستون
۰	=	۰)	×	(۳	−	۰	Z
$\frac{5}{2}$	=	$\frac{1}{2}$)	×	(۳	−	۴	x_1
۰	=	۱)	×	(۳	−	۳	x_2
$-\frac{3}{2}$	=	$\frac{1}{2}$)	×	(۳	−	۰	S_1
۱	=	۰)	×	(۳	−	۱	S_2
۶۰	=	۲۰)	×	(۳	−	۱۲۰	سمت راست

این مقادیر در تابلوی سیمپلکس در جدول ۴.۹ وارد شده است. به همین طریق مقادیر ردیف Z_0 در تابلوی جدید سیمپلکس محاسبه شده است. چگونگی محاسبه ضرایب جدید Z_0 به شرح جدول ۴.۸ است.

جدول ۴.۸ محاسبهٔ ضرایب جدید ردیف Z_0 تابلوی دوّم

مقادیر ردیف جدید	=	(مقادیر مربوط به ردیف لولای جدید	×	ضریب مربوط در ستون لولا)	−	مقادیر ردیف قدیم	ستون
۱	=	۰)	×	(−۵۰	−	۱	Z
−۱۵	=	$\frac{1}{2}$)	×	(−۵۰	−	−۴۰	x_1
۰	=	۱)	×	(−۵۰	−	−۵۰	x_2
۲۵	=	$\frac{1}{2}$)	×	(−۵۰	−	۰	S_1
۰	=	۰)	×	(−۵۰	−	۰	S_2
۱۰۰۰	=	۲۰)	×	(−۵۰	−	۰	سمت راست

بدین طریق تابلوی کامل سیمپلکس بدست می‌آید. براساس تابلوی زیر متغیرهای اساسی شامل (X_2 و S_2) است و متغیرهای غیراساسی شامل x_1 و S_1 می‌باشد. پس در این جواب موجه اساسی، مقدار متغیرهای تصمیم و کمکی به صورت زیر است:

($x_1 = 0$ و $x_2 = 20$ و $S_1 = 0$ و $S_2 = 60$)

جدول ۴.۹ تابلوی دوّم سیمپلکس برای مثال ۴-۴.

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	۱۵-	۰	۲۵	۰	۱۰۰۰
x_2	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	۲۰
s_2	۰	$\frac{۵}{۲}$	۰	$-\frac{۳}{۲}$	۱	۶۰

براساس جواب بدست آمده در این گوشه (همان گوشه A در شکل ۴.۵) به ازای تولید ۲۰ واحد از کالای نوع دوّم، منبع نیروی کار مصرف شده و ۶۰ واحد از مواد اولیه همچنان بلااستفاده می‌باشد. البته به ازای مصرف این مقدار از منابع سودی معادل ۱۰۰۰ ریال عاید خواهد شد.

مراحل محاسباتی که برای بدست آوردن تابلوی دوّم سیمپلکس بیان شد، در واقع همان عملیات ردیفی برای حل همزمان دستگاه مدل است که در بخش قبلی بحث شد. برای بدست آوردن ضرایب تابلوی بعدی (تابلوی سوم سیمپلکس) می‌توان مراحل مشابهی را انجام داد. چنانچه در شکل ۴.۵ مشاهده شد، هر تکرار در سیمپلکس متناظر با انتقال از یک گوشهٔ موجه به گوشهٔ موجه مجاور (البته بهتر) است. یا به تعبیر بهتر حرکت از یک جواب به جواب بهتر است.

۴.۴.۴ تابلوی بهینه سیمپلکس

مراحلی که برای بدست آوردن تابلوی دوّم سیمپلکس گفته شد، برای بدست آوردن سومین تابلوی سیمپلکس براساس تابلوی دوّم مجدداً تکرار می‌شود.

اولاً؛ ستون لولا یا متغیر ورودی براساس منفی‌ترین مقدار ردیف Z_0 مشخص می‌شود. براساس این قاعده متغیر ورودی x_1 خواهد بود. چون دارای ضریب ۱۵ − در ردیف Z_0 است و تنها متغیر منفی نیز می‌باشد.

ثانیاً؛ متغیر خروجی یا سطر لولا را براساس حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر مثبت تعیین می‌کنیم. براساس این قاعده متغیر خروجی S_2 خواهد بود:

متغیرهای اساسی	مقادیر سمت راست	
x_2	$۲۰ \div \frac{۱}{۲} = ۴۰$	
S_2	$۶۰ \div \frac{۵}{۲} = ۲۴$	متغیر خروجی S_2 می‌باشد.

ستون لولا، سطر لولا و عدد لولا در جدول ۴.۱۰ تعیین شده است.

ضریب x_1 در سطر صفر جدول ۴.۱۰ نشان می‌دهد که به ازای تولید هر واحد محصول

جدول ۴.۱۰ سطر لولا، ستون لولا، عدد لولا در تابلوی دوّم سیمپلکس

ستون لولا

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	۱۵-	۰	۲۵	۰	۱۰۰۰
x_2	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	۰	۲۰
S_2	۰	$\frac{5}{2}$	۰	$-\frac{3}{2}$	۱	۶۰

عدد لولا

سطر لولا

نوع ۱، ۱۵ ریال سود کل شرکت اضافه می‌شود. در حالیکه هر واحد تولید از محصول نوع ۱ در تابع هدف مسأله دارای ۴۰ ریال سود می‌باشد. شاید این اختلاف موجب تعجب گردد و این سؤال را در ذهن ایجاد کند که علّت آن چیست؟ می‌دانیم که در این مرحله از تصمیم‌گیری، تولید x_1 نیاز به منابعی دارد که در مرحله قبل در تولید x_2 (حداقل بخشی از آنها) به کار رفته‌اند. بنابراین تولید x_1 به معنی کاهش تولید بخشی از x_2 خواهد شد. پس به صرفه است که بخشی از سود بدست آمده از x_2 را به ازای سود بیشتر برای تولید x_1 از دست بدهیم. بنابراین «خالص افزایش»[1] در سود در اثر تولید هر واحد x_1 و کاهش در تولید x_2 مساوی ۱۵ ریال خواهد بود. برای تشکیل تابلوی سوّم سیمپلکس مجدداً به فرمولهای سیمپلکس برای ضرایب سطر جدید لولا و ضرایب سایر ردیفهای تابلوی جدید برگردید. ضرایب سطر جدید لولا در تابلوی سوم با تقسیم نمودن کلیه ضرایب سطر S_2 در تابلوی دوّم بر عدد لولا (یعنی عدد $\frac{5}{2}$) بدست می‌آید. ضرایب جدید مربوط به تابلوی سوّم در جدول ۴.۱۱ به طور کامل آمده است. جهت روشن‌تر شدن نحوه محاسبات به جداول ۴.۱۲ و ۴.۱۳ مراجعه کنید.

جدول ۴.۱۱ تابلوی سوم سیمپلکس مثال ۴-۴

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	۰	۰	۱۶	۶	۱۳۶۰
x_2	۰	۰	۱	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	۸
S_2	۰	۱	۰	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	۲۴

«شرط بهینگی»[2] یک تابلوی سیمپلکس آن است که تمام مقادیر سطر صفر (Z_0) «غیرمنفی» باشند. یعنی اینکه افزایش در هیچ یک از متغیرهای غیراساسی، منجر بـه افـزایش

1. Net Increase
2. Optimal Condition

جدول ۴.۱۲ محاسبه ضرایب Z_0 تابلوی سوّم سیمپلکس

ستون	مقادیر ردیف قدیم	−	(ضریب مربوط در ستون لولا	×	مقادیر مربوط به ردیف لولای جدید)	=	مقادیر ردیف جدید
Z	۱	−	(−۱۵	×	۰)	=	۱
x_1	−۱۵	−	(−۱۵	×	۱)	=	۰
x_2	۰	−	(−۱۵	×	۰)	=	۰
S_1	۲۵	−	(−۱۵	×	−۳/۵)	=	۱۶
S_2	۰	−	(−۱۵	×	۲/۵)	=	۶
سمت راست	۱۰۰۰	−	(−۱۵	×	۲۴)	=	۱۳۶۰

جدول ۴.۱۳ محاسبهٔ ضرایب ردیف x_2 در تابلوی سوم سیمپلکس

ستون	مقادیر ردیف قدیم	−	(ضریب مربوط در ستون لولا	×	مقادیر مربوط به ردیف لولای جدید)	=	مقادیر ردیف جدید
Z	۰	−	(۱/۲	×	۰)	=	۰
x_1	۱/۲	−	(۱/۲	×	۱)	=	۰
x_2	۱	−	(۱/۲	×	۰)	=	۱
S_1	۱/۲	−	(۱/۲	×	−۳/۵)	=	۴/۵
S_2	۰	−	(۱/۲	×	۲/۵)	=	−۱/۵
سمت راست	۲۰	−	(۱/۲	×	۲۴)	=	۸

سود نمی‌شود. طبق این قاعده، تابلوی سوم سیمپلکس برای مثال ۴.۴ از شرط بهینگی برخوردار است. پس مسأله به گوشهٔ بهینهٔ رسیده است و جواب مسأله در این گوشه عبارتست از:

$$x_1 = ۲۴, x_2 = ۸, S_1 = ۰, S_2 = ۰, Z^* = ۱۳۶۰$$

جواب بدست آمده، همان گوشهٔ B در شکل ۳.۴ می‌باشد.

۴.۴.۵ خلاصه مراحل روش سیمپلکس

روش سیمپلکس که در بخش قبل توضیح داده شد، مهمترین روش حل مدلهای برنامه‌ریزی خطی است که برای استفاده از آن باید مراحل زیر را در نظر گرفت:

۱. مدل مسأله را به فرم استاندارد تبدیل کنید. یعنی تابع هدف از نوع Max و نامعادلات را به معادله تبدیل کنید.

۲. تابلوی اولیه سیمپلکس را براساس جواب موجه اساسی در مبدأ مختصات مدل تنظیم کنید.

۳. ستون لولا (متغیر ورودی) را براساس منفی‌ترین ضریب سطر صفر ($Z_۰$) تعیین کنید.

۴. سطر لولا (متغیر خروجی) را براساس حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر مثبت ستون لولا تعیین کنید.

۵. ضرایب سطر لولای جدید را با استفاده از فرمول زیر محاسبه کنید:

$$\text{ضرایب سطر لولای جدید} = \frac{\text{ضرایب سطر لولای قدیمی}}{\text{عدد لولا}}$$

۶. ضرایب دیگر ردیفها را در تابلوی جدید براساس فرمول زیر محاسبه کنید:

$$\text{ضرایب سطر جدید} = \begin{array}{c}\text{ضرایب}\\ \text{سطر}\\ \text{قدیمی}\end{array} - \left(\begin{array}{c}\text{ضرایب مربوط}\\ \text{به سطر}\\ \text{لولای جدید}\end{array} \times \begin{array}{c}\text{ضرایب مربوط}\\ \text{در ستون}\\ \text{لولا}\end{array}\right)$$

۷. شرط بهینگی را با کنترل عناصر ردیف $Z_۰$ بررسی کنید. اگر همهٔ مقادیر سطر صفر تابلوی سیمپلکس غیرمنفی (≥ ۰) باشند، جواب بهینه حاصل شده است و گرنه (وجود عنصر منفی در سطر $Z_۰$) به مرحلهٔ ۳ برگردید و مراحل سیمپلکس را تکرار کنید.

۴.۵ مثالی دیگر و مروری به مفاهیم برنامه‌ریزی خطی

در این بخشهای مفاهیم بیان شده در فصل سوم (روش هندسی) مرور شده و تلاش می‌شود واژگان روش هندسی حل برنامه‌ریزی خطی با روش سیمپلکس تطبیق داده شود. به دانشجویان عزیز توصیه می‌شود برای درک بهتر این بخش مجدداً فصل سوم بخصوص بخش ۳.۶ (واژگان کلیدی فصل) را مطالعه نمایند.

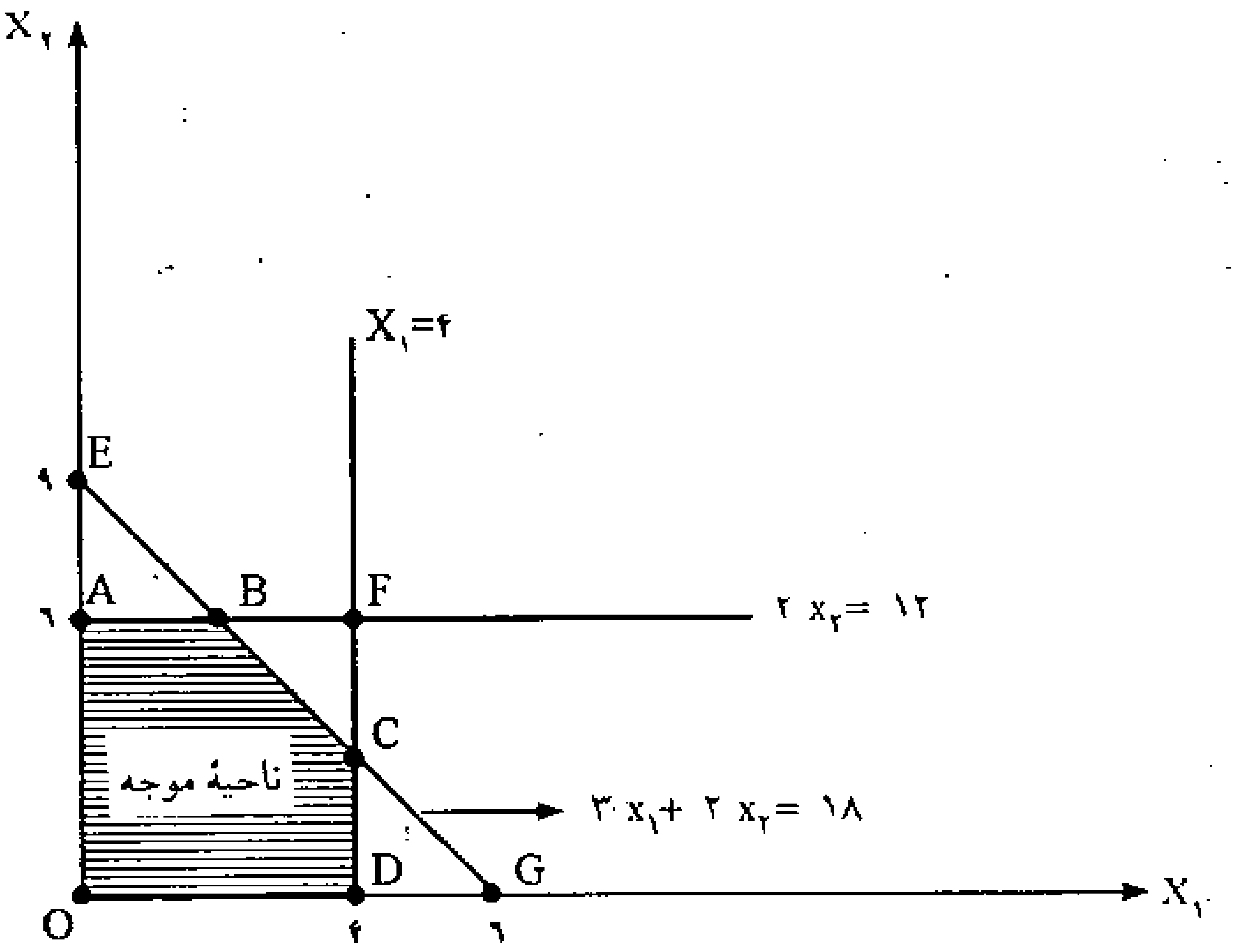
مثال ۴.۵ مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۳x_۱ + ۵x_۲$$

s.t:

$$\begin{aligned} x_۱ &\leq ۴ \\ ۲x_۲ &\leq ۱۲ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ &\leq ۱۸ \\ x_۱, x_۲ &\geq ۰ \end{aligned}$$

شکل ۴.۶ بیانگر روش حل ترسیمی مدل فوق است. با استفاده از این شکل به مرور مفاهیم ضروری فصل می‌پردازیم.



شکل ۴.۶ نمایش هندسی ناحیهٔ موجه مثال ۴.۶

الف) معادلات مرزی : چنانچه کلیهٔ محدودیتهای $\geq$ یا $\leq$ مساوی با علامت = جای‌گزین شوند، معادلات بدست آمده را معادلات مرزی گویند. در مثال فوق ناحیهٔ موجه براساس معادلات مرزی:

$$x_۱ = ۴$$
$$۲\,x_۲ = ۱۲$$
$$۳\,x_۱ + ۲\,x_۲ = ۱۸$$
$$x_۱ = ۰$$
$$x_۲ = ۰$$

بدست آمده است. بنابراین مسأله دارای پنج معادلهٔ مرزی خواهد بود.

ب) گوشه: جوابی است که از تقاطع دو معادلهٔ مرزی (حداقل دو معادلهٔ مرزی) بدست آمده باشد. به هر یک از نقاط A، B، C، D، E، F و G توجه شود، این خاصیت برای آنها وجود دارد. به عنوان مثال به گوشهٔ A توجه کنید. معادلات مرزی این گوشه عبارتند از: $x_۱ = ۰$ و $۲\,x_۲ = ۱۲$. (برای تمرین، معادلات مرزی سایر گوشه‌ها را بدست آورید؟). معادلات مرزی

تشکیل‌دهندهٔ هر گوشه را «معادلات معرف»[1] آن گوشه نیز می‌گویند.

ج) گوشه غیرموجه: جوابی است که علیرغم گوشه‌ای بودن در ناحیهٔ موجه قرار نگرفته است. به تعبیر ریاضی در حداقل یکی از معادلات مدل صدق نمی‌کند. برای مثال به گوشهٔ E توجه کنید. این گوشه اگرچه در محدودیتهای ۱ و ۳ صدق می‌کند، ولی محدودیت دوّم را نقض می‌کند. بنابراین خارج از ناحیهٔ مشترک سه محدودیت (ناحیهٔ موجه) قرار گرفته است.

د) گوشهٔ موجه: جواب گوشه‌ای است که در مرز ناحیهٔ موجه قرار گرفته است. گوشه‌های موجه را «نقاط حدی» نیز می‌گویند. گوشه‌های O ، A ، B ، C و D گوشه‌های موجه مثال فوق هستند. گوشه‌های فوق‌الذکر در تمام محدودیتهای مدل صدق می‌کنند.

هـ) گوشه‌های مجاور: دو گوشه را در صورتی مجاور گویند که دارای معادلهٔ مرزی (معادلهٔ معرف) مشترک باشند. گوشه‌های A و B را درنظر بگیرید. این دو گوشه مجاور همدیگر قرار گرفته‌اند. چون دارای یک معادلهٔ مشترک (رابط) هستند که عبارتست از: $۲x_۲ = ۱۲$

و) مدل استاندارد: اگر مدل اولیه برنامه‌ریزی خطی به مدلی با تابع هدف Max با معادلات مساوی تبدیل شود، مدل بدست آمده را مدل استاندارد گویند. تبدیل نامعادلات $\leq$ و $\geq$ به تساوی (=) با استفاده از متغیرهای کمکی (S) انجام می‌گیرد. بنابراین مدل ارایه شده در مثال ۴.۵ به صورت زیر استاندارد می‌شود:

$$\text{Max } Z = ۳x_۱ + ۵x_۲ + ۰S_۱ + ۰S_۲$$

s.t:

$$\begin{array}{lllllll} x_۱ & + & & S_۱ & & & = ۴ \\ & & ۲x_۲ & + & S_۲ & & = ۱۲ \\ ۳x_۱ & + & ۲x_۲ & + & & S_۳ & = ۱۸ \\ x_۱, & & x_۲, & S_۱, & S_۲, & S_۳ \geq & ۰ \end{array}$$

پس همواره مدل استاندارد دارای m محدودیت و m + n متغیر خواهد بود.

بر این اساس مدل استاندارد برنامه‌ریزی خطی را «مدل گسترده برنامه‌ریزی خطی»[2] نیز می‌گویند.

ز) جواب اساسی: یک‌جواب‌گوشه‌ای است که شامل متغیرهای تصمیم (X) و متغیرهای کمکی (S) است. در این گوشه؛ تعداد متغیرها مساوی با m + n متغیر است. بنابراین جواب اساسی، براساس مدل گسترده تعریف می‌شود. به عنوان مثال جواب اساسی مربوط به گوشهٔ F در شکل ۴.۶ را درنظر بگیرید. در این جواب اساسی خاص مقدار متغیرهای تصمیم و کمکی

---

1. defining Equations
2. Augmented Linear Programming Model

عبارتست از:

$(x_1 = 4$ و $x_2 = 6$ و $S_1 = 0$ و $S_2 = 0$ و $S_3 = -6)$

جواب اساسی را «جواب گسترده»[1] نیز می‌نامند. برای مثال جواب اساسی فوق، گسترده شدهٔ جواب گوشه‌ای $(x_1 = 4$ و $x_2 = 6)$ است.

ح) **جواب اساسی موجه:** یک جواب اساسی است که تمام متغیرهای مدل گسترده (استاندارد) به ازاء آن غیرمنفی (≥ 0) هستند. به عبارت دیگر، جواب اساسی موجه، جواب گسترده یک گوشه موجه می‌باشد. به عنوان مثال به گوشهٔ B توجه کنید. جواب گوشه‌ای در این نقطه؛ $(x_1 = 2$ و $x_2 = 6)$ می‌باشد. حال جواب گسترده (اساسی) این گوشه را می‌نویسیم:

$(x_1 = 0$ و $x_2 = 6$ و $S_1 = 2$ و $S_2 = 0$ و $S_3 = 0)$

همچنانکه مشاهده می‌شود، تمام متغیرهای جواب اساسی بدست آمده غیرمنفی هستند. پس این جواب اساسی، یک جواب اساسی موجه است، و همچنانکه در تعریف جواب اساسی گفته شد، m متغیر آن $(m=3)$ بزرگتر از صفر و n متغیر آن $(n=2)$ مساوی صفر است.

جهت درک بهتر مفاهیم فوق، کلیهٔ مشخصات گوشه و جواب اساسی (موجه و غیرموجه) مدل در جداول ۴.۱۴ و ۴.۱۵ خلاصه شده است. خوانندگان می‌توانند، بخوبی وجوه تفاوت و اشتراک «گوشه» و «جواب اساسی» را با مقایسهٔ لازم درک کنند.

جدول ۴.۱۴ جدول جوابهای اساسی و گوشه‌های موجه مدل ۴.۵

مقدار Z	متغیرهای غیراساسی	متغیرهای اساسی	جواب اساسی موجه $(x_1, x_2, S_1, S_2, S_3)$	معادلات معرف	جواب گوشه موجه (x_1, x_2)	نام گوشه
۰	$(x_1$ و $x_2)$	(S_1, S_2, S_3)	(۰، ۰، ۴، ۱۲، ۱۸)	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$	(۰، ۰)	O
۳۰	(x_1, S_2)	(S_1, x_2, S_3)	(۰، ۶، ۴، ۰، ۶)	$x_1 = 0$ $2x_2 = 12$	(۰، ۶)	A
۳۶*	(S_2, S_3)	(S_1, x_2, x_1)	(۲، ۶، ۲، ۰، ۰)	$2x_2 = 12$ $3x_1 + 2x_2 = 18$	(۲، ۶)	B
۲۷	(S_1, S_3)	(S_2, x_2, x_1)	(۴، ۳، ۰، ۶، ۰)	$3x_1 + 2x_2 = 18$ $x_1 = 4$	(۴، ۳)	C
۱۲	(S_1, x_2)	(S_2, S_3, x_1)	(۴، ۰، ۰، ۱۲، ۶)	$x_1 = 4$ $x_2 = 0$	(۴، ۰)	D

1. Augmented Solution

با مقایسهٔ ستونهای متغیرهای اساسی و متغیرهای غیراساسی می‌توان به این نکته پی برد که برای رفتن به یک گوشهٔ مجاور باید یک متغیر اساسی جای خود را با متغیر دیگری که تاکنون غیراساسی بوده است، عوض کند. به عبارت دیگر در هر حرکت (انتقال) از گوشه‌ای به گوشهٔ دیگر یک متغیر اساسی با یک متغیر غیراساسی جابجا می‌شوند. این خاصیت، بیانگر مفهوم متغیر ورودی و متغیر خروجی در روش سیمپلکس هستند. به عنوان مثال به گوشه‌های A و B توجه کنید، با مقایسهٔ متغیرهای اساسی این دو گوشه درمی‌یابیم که x_1 جایگزین S_3 شده است. پس برای انتقال از گوشهٔ A به گوشهٔ B متغیر ورودی x_1 و متغیر خروجی S_3 بوده است.

با بررسی ستون «جواب اساسی موجه» مشخص می‌شود که کلیهٔ متغیرهای تعریف شده غیرمنفی هستند. این خاصیت، بخوبی صحت تعریف بیان شده از جواب اساسی موجه را نشان می‌دهد. در حالی که بررسی جدول ۴.۱۵ نشان می‌دهد که برخی از متغیرهای جواب اساسی، منفی هستند. پس این جواب اساسی غیرموجه می‌باشد.

جدول ۴.۱۵ جدول جوابهای اساسی و گوشه‌های غیرموجه مثال ۴.۵

متغیرهای غیراساسی	متغیرهای اساسی	جواب اساسی غیرموجه $(x_1, x_2, S_1, S_2, S_3)$	معادلات معرف	جواب گوشه غیرموجه (x_1, x_2)	گوشه
(x_1, S_3)	(S_1, x_2, S_2)	$(0, 9, 4, -6, 0)$	$x_1 = 0$ $3x_1 + 2x_2 = 18$	$(0, 9)$	E
(x_1, S_2)	(S_3, x_2, x_1)	$(4, 6, 0, 0, -6)$	$x_1 = 4$ $2x_2 = 12$	$(4, 6)$	F
(S_1, S_2)	(S_3, S_1, x_1)	$(6, 0, -2, 12, 0)$	$x_2 = 0$ $3x_1 + 2x_2 = 18$	$(6, 0)$	G

با بررسی جدول ۴.۱۵ به راحتی می‌توان به یک قاعدهٔ کلی رسید که اگر جواب اساسی موجه نباشد، «حداقل یکی از متغیرهای اساسی دارای مقدار منفی خواهند شد و در روش سیمپلکس در سمت راست تابلو، مقدار منفی» پیدا خواهد شد. نکتهٔ قابل توجه دیگر در جداول فوق این است که معادلات معرف هر گوشه، به ازاء مقادیر جواب گوشه به حالت تساوی (=) می‌رسند. بنابراین گوشه بر روی هر معادله که قرار می‌گیرد، متغیر کمکی آن گوشه صفر خواهد شد. پس روش دیگر برای تشخیص معادلات معرف یک گوشه، بررسی مقدار متغیرهای کمکی آن گوشه است. معادله‌ای که متغیر کمکی آن مساوی صفر باشد، به عنوان معادلهٔ معرف گوشه درنظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال به گوشهٔ B توجه کنید. چون ($S_1 = 0$ و $S_2 = 0$) است. پس

معادلات معرف آن معادلهٔ ۱ و معادلهٔ ۲ خواهد بود.

محدودیتهایی که نقطهٔ بهینه بر روی معادلهٔ مرزی آنها قرار می‌گیرد و متغیر کمکی آنها مساوی صفر است. به «محدودیتهای فعال»[1] معروف هستند. محدودیتی که در تعریف گوشهٔ بهینه نقشی نداشته باشد و یا متغیر کمکی آن بزرگتر از صفر باشد به «محدودیت غیرفعال» معروف است. برای مثال محدودیتهای فعال گوشهٔ بهینه (گوشهٔ B) در مثال فوق عبارتند از:

$$۲x_۲ \leq ۱۲$$

$$۳x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۸$$

و محدودیت غیرفعال $x_۱ \leq ۴$ خواهد بود. چون هیچ نقشی در تعریف آن ندارد. پس باید $S_۱ > ۰$ و $S_۲$ و $S_۳$ مساوی صفر در این جواب اساسی موجه باشند. (البته چنین است!).

محدودیتهای فعال را «محدودیتهای الزام‌آور»[2] و محدودیتهای غیرفعال را «محدودیتهای غیرالزام‌آور»[3] نیز می‌گویند.

ط) جوابهای گوشه موجه متناهی است: بیاد داریم که تعداد گوشه‌های یک مدل با m محدودیت و n متغیر تصمیم مساوی با $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ بود. بنابراین تعداد جوابهای گوشه‌ای موجه حداکثر مساوی با کل جوابهای گوشه‌ای است (البته امری غیرممکن است!). از طرفی به یاد داریم که «روش سیمپلکس» یک روش کارآمد بود که همواره از یک گوشه، به گوشهٔ بهتر حرکت می‌کرد. پس برخلاف روش هندسی حل مدل، روش سیمپلکس به جستجوی تمام گوشه‌های موجه نمی‌پردازد. حل مسألهٔ ۴.۵ به کمک روش سیمپلکس بخوبی نشان می‌دهد که در این روش به جای بررسی تمام گوشه‌های موجه (۵ گوشه) تنها به بررسی ۳ گوشهٔ موجه می‌پردازیم. این خاصیت روش سیمپلکس نقش فوق‌العاده‌ای در صرفه‌جویی زمانِ جستجو برای مسائل بزرگ (با تعداد گوشه‌های زیاد موجه) دارد.

«شرط توقف» روش سیمپلکس برگرفته از این خاصیت است که؛ «اگر یک جواب گوشهٔ موجه از تمام جوابهای گوشهٔ مجاور خود (از نقطه نظر تابع هدف) بهتر باشد»، آن گوشه، یک گوشهٔ بهینه و جواب نهایی مدل است. بر اساس این خاصیت، روش سیمپلکس قدم به قدم از یک جواب به جواب موجه بهتر حرکت می‌کند. به محض اینکه حرکت بعدی موجب بدتر شدن تابع هدف شود، روش سیمپلکس توقف می‌کند. چون جواب قبلی بدتر از جواب فعلی نیز بوده است، پس جواب فعلی یک جواب بهینه می‌باشد، حال با استفاده از مفاهیم فوق به حل مدل مثال ۴.۵ به روش سیمپلکس می‌پردازیم.

پس از وارد کردن مدل استاندارد در تابلوی اوّل سیمپلکس، $x_۲$ به عنوان متغیر ورودی انتخاب شده است. چون دارای منفی‌ترین مقدار (۵ −) در ردیف $Z_۰$ است. برای انتخاب متغیر

---

1. Active Constraints
2. Binding Constraints
3. Non Binding C.

جدول ۴.۱۶ تابلوهای سیمپلکس برای حل مثال ۵-۴

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	مقادیر سمت راست	
Z_0	۱	-۳	-۵	۰	۰	۰	۰	
S_1	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۴	تابلوی
S_2	۰	۰	۲	۰	۱	۰	۱۲	اوّل
S_3	۰	۳	۲	۰	۰	۱	۱۸	
Z_0	۱	-۳	۰	۰	۵/۲	۰	۳۰	
S_1	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۴	تابلوی
x_2	۰	۰	۱	۰	۱/۲	۰	۶	دوّم
S_3	۰	۳	۰	۰	-۱	۱	۶	
Z_0	۱	۰	۰	۰	۳/۲	۱	۳۶	
S_1	۰	۰	۰	۱	۱/۳	-۱/۳	۲	تابلوی
x_2	۰	۰	۱	۰	۱/۲	۰	۶	سوّم
x_1	۰	۱	۰	۰	-۱/۳	۱/۳	۲	(بهینه)

خروجی، از حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست تابلو بر عناصر مثبت ستون x_2 (لولا) استفاده شده است. پس چون:

$$\text{حداقل حاصل تقسیم} = \left\{-, \frac{۱۲}{۲}, \frac{۱۸}{۲}\right\} = ۶$$

حداقل حاصل تقسیم مربوط به S_2 می‌باشد، سطر خروجی تابلوی اوّل مربوط به S_2 خواهد بود. عنصر لولا از تقاطع ستون x_2 و سطر S_2 بدست می‌آید که مساوی ۲ می‌باشد و با علامت ○ مشخص شده است. حال با استفاده از فرمولهای معمول عملیات سیمپلکس، تابلوی دوّم را تشکیل می‌دهیم. یعنی برای بدست آوردن ضرایب سطر x_2 در تابلوی دوم (سطر لولای جدید)، مقادیر سطر لولای تابلوی اوّل را بر عنصر لولا (یعنی عدد ۲) تقسیم می‌کنیم. برای بدست آوردن ضرایب ردیف Z_0، S_1 و S_3 نیز از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

(ضرایب‌مربوط‌به‌سطرلولای جدید × ضرایب‌مربوط درستون‌لولا) − ضرایب‌سطرقدیم = ضرایب‌سطر جدید

به عنوان مثال برای Z_0 داریم:

ستون	ضرایب سطر قدیم	–	(ضرایب مربوط در ستون لولا	×	ضرایب مربوط به سطر لولای جدید)	=	ضرایب سطر جدید
Z	۱	–	(– ۵	×	۰)	=	۱
x_1	– ۳	–	(– ۵	×	۰)	=	– ۳
x_2	– ۵	–	(– ۵	×	۱)	=	۰
S_1	۰	–	(– ۵	×	۰)	=	۰
S_2	۰	–	(– ۵	×	$\frac{۱}{۲}$)	=	$\frac{۵}{۲}$
S_3	۰	–	(– ۵	×	۰)	=	۰
سمت راست	۰	–	(– ۵	×	۶)	=	۳۰

تابلوی دوّم، هنوز بهینه نیست. چون دارای ضریب منفی در سطر صفر (Z_0) است. پس متغیر ورودی x_1 و متغیر خروجی را S_3 تعیین کرده و تابلوی سوم را تهیه می‌کنیم. تابلوی سوّم دارای شرط بهینگی است. چون کلیهٔ عناصر ردیف Z_0 غیرمنفی است. براساس تابلوی سوّم سیمپلکس جواب بهینه عبارتست از:

$$x_1 = ۲ \quad x_2 = ۶ \quad S_1 = ۴ \quad S_2 = S_3 = ۰ \quad Z^* = ۳۶$$

جواب بهینهٔ بدست آمده از روش سیمپلکس متناظر با گوشهٔ B است که به طریق تحلیلی و هندسی به عنوان گوشهٔ بهینه تعیین شد.

تابلوهای اوّل، دوّم و سوّم سیمپلکس به ترتیب متناظر با گوشه‌های موجه O، A و B هستند. به عبارت دیگر، روش سیمپلکس در این مثال از گوشهٔ مربوط به مبدأ مختصات (O) شروع کرده و در جهت محور x_2 به گوشهٔ A رفته و سپس به گوشهٔ بهتر یعنی B انتقال یافته است. چون گوشهٔ B نسبت به دو گوشهٔ موجه مجاور خود (یعنی A و C) بهتر است پس یک گوشهٔ بهینه است. روش سیمپلکس نیز براساس این منطق توقف نموده است.

ی) **متغیر اساسی و متغیر غیراساسی:** در یک جواب اساسی موجه، برخی از متغیرها مثبت و برخی صفر (m متغیر بزرگتر از صفر و n متغیر مساوی صفر) هستند. آن دسته از متغیرهایی که دارای مقدار بزرگتر از صفر هستند، به عنوان «متغیر اساسی» نام برده می‌شوند و متغیرهایی که دارای مقدار صفر هستند، «متغیر غیراساسی» نامیده می‌شوند. در روش سیمپلکس مقدار متغیرهای اساسی مساوی با مقادیر سمت راست و مقدار متغیرهای غیراساسی مساوی با صفر است. متغیرهای اساسی در روش سیمپلکس، متغیرهایی هستند که اساس تعریف سطرهای مربوط به محدودیتها در هر تابلوی سیمپلکس قرار می‌گیرند، و در اولین ستون تابلوی سیمپلکس قرار می‌گیرند. به عنوان مثال متغیرهای اساسی تابلوی دوّم به ترتیب:

$$S_1 = 4 \quad x_2 = 6 \quad S_3 = 6$$

و متغیرهای غیراساسی تابلوی دوّم: $x_1 = S_2 = 0$ خواهند بود.

۴.۶ روش سیمپلکس برای حل مسألهٔ حداقل‌سازی

در بخشهای قبلی فصل، روش سیمپلکس برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی از نوع «حداکثرسازی» توضیح داده شد. بطور کلی مراحل روش سیمپلکس قابل استفاده برای حل هر نوع مسأله برنامه‌ریزی خطی می‌باشد. با این وجود در حل مسائل «حداقل‌سازی» باید اندک تغییراتی در فرآیند طبیعی سیمپلکس داد. در این بخش ضمن ارائه یک مثال از نوع Min روش سیمپلکس را برای حل این نوع مدلها تشریح خواهیم کرد.

مثال ۴.۶ مدل زیر را درنظر بگیرید:

$$\text{Min } Z = 6x_1 + 3x_2$$

s.t:

$$2x_1 + 4x_2 \geq 16$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 24$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

به یاد داریم که فرم استاندارد مدل Min به صورت زیر انجام می‌گرفت:

$$\text{Max } (-Z) = -6x_1 - 3x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

s.t:

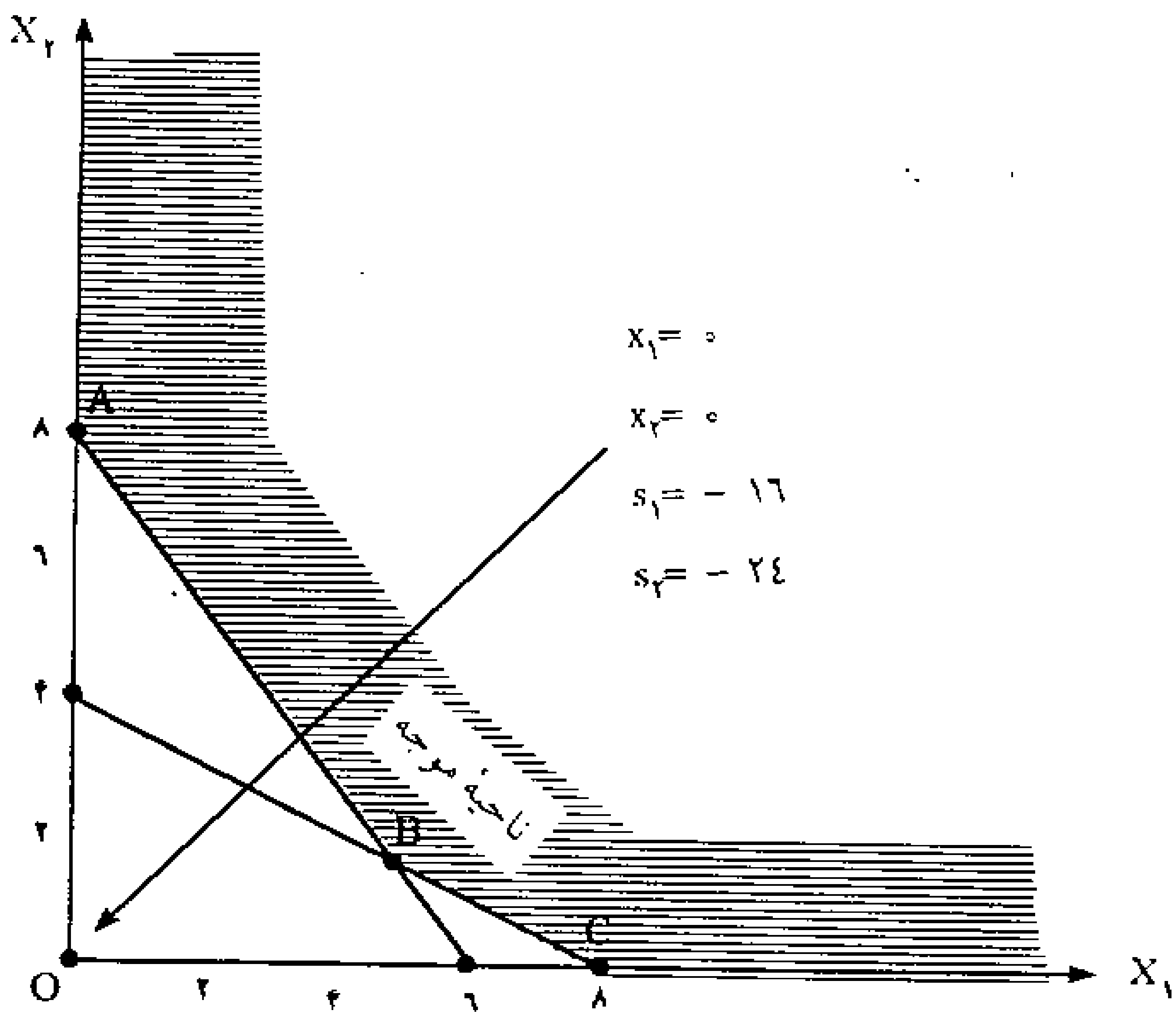
$$2x_1 + 4x_2 - S_1 = 16$$
$$4x_1 + 3x_2 - S_2 = 24$$
$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

گفته شد که روش سیمپلکس همواره جواب اساسی اولیه خود را از مبداء مختصات آغاز می‌کند. جایی که $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$ باشد. در بررسی این جواب برای مدل فوق داریم:

$$2x_1 + 4x_2 - S_1 = 16$$
$$2(0) + 4(0) - S_1 = 16$$
$$S_1 = -16$$

منفی شدن متغیر کمکی یک پدیدهٔ غیرمنطقی و بی‌معنی است. ظاهراً در حل مدل Min ،

متغیرهای کمکی در پیدا کردن جواب اولیه غیرکارآمد هستند. دلیل غیرکارآمد بودن متغیرهای مازاد (S_1 و S_2) در شکل ۴.۷ نشان داده شده است: جواب در مبداء مختصات خارج از ناحیهٔ موجه قرار گرفته است. به عبارت دیگر مبداء مختصات یک جواب نقض‌کنندهٔ محدودیتهای مدل است.



شکل ۴.۷ نمایش هندسی مثال ۶-۴

به منظور رفع این مشکل و داشتن یک جواب در مبداء مختصات، ما ناچاریم «متغیر مصنوعی»[1] به معادلهٔ مربوطه اضافه کنیم. متغیرهای مصنوعی را در این کتاب همواره با R نشان می‌دهیم. پس برای محدودیت اوّل داریم:

$$2x_1 + 4x_2 - S_1 + R_1 = 16$$

متغیر مصنوعی؛ R، نه معنای متغیر کمبود می‌دهد و نه متغیر مازاد. بلکه باعث می‌شود، «ناحیه موجه مسأله آنقدر بزرگتر شود که مبداء مختصات به عنوان یک جواب موجه اساسی تلقی شود.» و شرط غیرمنفی بودن متغیرها در مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی رعایت شود. به عبارت دیگر ما به «طور مصنوعی یک جواب موجه اساسی» ایجاد می‌کنیم. حال به بررسی جواب ($x_1 = 0$، $x_2 = 0$ و $S_1 = 0$) در محدودیت اوّل می‌پردازیم. پس:

---

1. Artificial variable

$$۲x_1 + ۴x_2 - S_1 + R_1 = ۱۶$$
$$۲(۰) + ۴(۰) - ۰ + R_1 = ۱۶$$
$$R_1 = ۱۶$$

برخلاف متغیرهای کمکی، متغیرهای مصنوعی، هیچ گونه معنای فیزیکی و واقعی ندارند.

بلکه به طریق ساختگی کمک می‌کنند که روش سیمپلکس از مبدأ مختصات حرکات انتقالی خود را آغاز کند. با توجه به غیرواقعی بودن این دسته از متغیرها، باید تلاش شود که در اولین فرصت آنها را از جواب مسأله حذف کرد. چون بزرگ شدن منطقهٔ موجه، این احتمال را بوجود می‌آورد که جواب بهینه بر روی یکی از نقاط گوشه‌ای که در منطقه موجه ناشی از اضافه‌شدن R قرار دارد، واقع گردد. بدیهی است این جواب چون در ناحیهٔ موجه مسأله اصلی قرار ندارد، جوابی غیرموجه برای مسأله خواهد بود. برای جلوگیری از قرارگرفتن جواب بهینه بر روی یکی از نقاط گوشه منطقه موجه ناشی از اضافه شدن متغیر مصنوعی، از تابع هدف استفاده کرده و با بستن جریمه‌ای معادل M به متغیر مصنوعی در تابع هدف (M عددی بسیار بزرگ است) این کار صورت می‌گیرد. جریمه باکم‌کردن مقدار M.R از سمت راست تساوی تابع هدف Max (و با اضافه کردن M.R به سمت راست تساوی تابع هدف Min) بسته می‌شود. از آنجا که اساسی شدن متغیر مصنوعی در تابلوی بهینهٔ سیمپلکس برخلاف خواستهٔ تابع هدف مسأله، موجب کاهش (افزایش) Z به میزانی معادل M برابر مقدار متغیر اساسی مصنوعی می‌گردد، لذا جریمه تخصیص یافته از اساسی شدن R در تابلوی بهینه به شدت جلوگیری می‌کند. با صفر شدن مقدار R ناحیه موجه مسألهٔ گسترده شده به حالت اصلی خود برگشته (کوچک می‌شود) و جواب بهینه بدست آمده بر روی یکی از نقاط گوشه‌ای ناحیه موجه اصلی مسأله قرار خواهد گرفت.

براساس مفاهیم فوق فرم استاندارد (گسترده شده) و قابل انتقال یک مسأله Min با محدودیتهای $\geq$ (مثال ۴.۶) به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Max } (-Z) = -۶x_1 - ۳x_2 - MR_1 - MR_2$$

s.t:

$$۲x_1 + ۴x_2 - S_1 + R_1 = ۱۶$$
$$۴x_1 + ۳x_2 - S_2 + R_2 = ۲۴$$
$$x_1, x_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq ۰$$

تابلوی اولیه سیمپلکس برای مسأله فوق به کمک R_1 و R_2 به جای S_1 و S_2 به عنوان جواب موجه اساسی (مبداء مختصات مدل) تشکیل می‌شود. پس داریم:

جدول ۴.۱۷ تابلوی مقدماتی سیمپلکس مسأله ۴.۶

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	مقادیر سمت‌راست
Z_0	۱-	۶	۳	۰	۰	M	M	۰
R_1	۰	۲	۴	۱-	۰	۱	۰	۱۶
R_2	۰	۴	۳	۰	۱-	۰	۱	۲۴

با مراجعه به تابلوی سیمپلکس در مثالهای قبل درمی‌یابیم که هر تابلوی سیمپلکس باید دارای دو ویژگی اساسی باشد:

اوّل : ضریب متغیرهای اساسی آن در ردیف Z_0 مساوی صفر باشد.

دوّم : ضرایب متغیرهای پایه آن (اساسی آن) در محدودیتها تشکیل ماتریس واحد (I) بدهد.

در جدول ۴.۱۷ ویژگی دوّم برقرار است ولی ضریب متغیرهای اساسی (R_1 و R_2) در سطر صفر (Z_0) غیرصفر است. بنابراین این تابلو، تابلوی اوّل سیمپلکس مسأله نیست بنابراین عملاً تابلوی «مقدماتی» نامیده شده است.

برای تبدیل تابلوی مقدماتی (جدول ۴.۱۷) به تابلوی اوّل سیمپلکس باید با استفاده از «عملیات ردیفی» ضرایب R_1 و R_2 را در سطر صفر به عدد صفر تبدیل کرد. بدین منظور ردیف مربوط به R_1 در M ــ و ردیف مربوط به R_2 نیز در M ــ ضرب شده و مجموع آنها ضرایب ردیف Z_0 جمع می‌شود. یعنی:

مجموع	ردیف R_1	M -	[	۰	۲	۴	۱-	۰	۱	۰	۱۶	]
	ردیف R_2	M -	[	۰	۴	۳	۰	۱-	۰	۱	۲۴	]
	به‌اضافهٔ											
	ردیف Z_0		[	۱-	۶	۳	۰	۰	M	M	۰	]
	ردیف Z_0 در تابلوی اوّل سیمپلکس		[	۱-	$6-6M$	$3-7M$	M	M	۰	۰	$-40M$	]

بر این اساس تابلوی اوّل سیمپلکس در جدول ۴.۱۸ بدست می‌آید. همچنانکه واضح است جدول ۴.۱۸ از ضرایب جدید ردیف Z_0 (حاصل عملیات جبری فوق) و ضرایب R_1 و R_2 در جدول ۴.۱۷ تشکیل شده است.

جدول ۴.۱۸ تابلوی اوّل سیمپلکس مسأله

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	مقادیر سمت‌راست
Z_0	۱ -	۶ - ۶M	۳ - ۷M	M	M	۰	۰	۴۰M -
R_1	۰	۲	۴	۱ -	۰	۱	۰	۱۶
R_2	۰	۴	۳	۰	۱ -	۰	۱	۲۴

حال کلیهٔ شرایط برای اجرای روش سیمپلکس فراهم شده است، در این راستا از کلیهٔ مفاهیم و فرمولهای محاسباتی سیمپلکس استفاده می‌شود. نتایج اجرای مراحل معمول سیمپلکس منجر به حل مسأله ۴.۶ شده است. حل این مدل طی چهار تابلوی سیمپلکس بدست آمده است در جدول ۴.۱۹ جزئیات آن دیده می‌شود.

از آنجاکه تمام ضرایب ردیف Z_0 در تابلوی چهارم غیرمنفی هستند، پس تابلوی بهینه و نهایی مسأله ۴.۶ بدست آمده است. جواب بهینهٔ مسأله عبارتست از:

$$(x_1 = ۰ \text{ و } x_2 = ۸ \text{ و } S_1 = ۱۶ \text{ و } S_2 = ۰ \text{ و } R_1 = ۰ \text{ و } R_2 = ۰)$$

جدول ۴.۱۹ حل مثال ۴.۶ به روش سیمپلکس

	متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	مقادیرسمت‌راست
تابلوی اوّل	Z_0	۱ -	۶-۶M	۳-۷M	M	M	۰	۰	۴۰M -
	R_1	۰	۲	۴	۱ -	۰	۱	۰	۱۶
	R_2	۰	۴	۳	۰	۱ -	۰	۱	۲۴
تابلوی دوّم	Z_0	۱ -	$\frac{۹}{۲} - \frac{۵}{۲}M$	۰	$\frac{۳}{۴} - \frac{۳}{۴}M$	M	$\frac{۳}{۴} + \frac{۷}{۴}M$	۰	۱۲M - ۱۲ -
	x_2	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$-\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	۴
	R_2	۰	$\frac{۵}{۲}$	۰	$\frac{۳}{۴}$	۱ -	$-\frac{۳}{۴}$	۱	۱۲
تابلوی سوّم	Z_0	۱ -	۰	۰	$-\frac{۳}{۵}$	$\frac{۹}{۵}$	$\frac{۳}{۵} + M$	$-\frac{۹}{۵} + M$	$-\frac{۱۶۸}{۵}$
	x_2	۰	۰	۱	$-\frac{۲}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۸}{۵}$
	x_1	۰	۱	۰	$\frac{۳}{۱۰}$	$-\frac{۲}{۵}$	$-\frac{۳}{۱۰}$	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۲۴}{۵}$
تابلوی چهارم	Z_0	۱ -	۲	۰	۰	۱	M	۱ + M -	۲۴ -
	x_2	۰	$\frac{۴}{۳}$	۱	۰	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	۸
	S_1	۰	$\frac{۱۰}{۳}$	۰	۱	$-\frac{۴}{۳}$	۱ -	$\frac{۴}{۳}$	۱۶

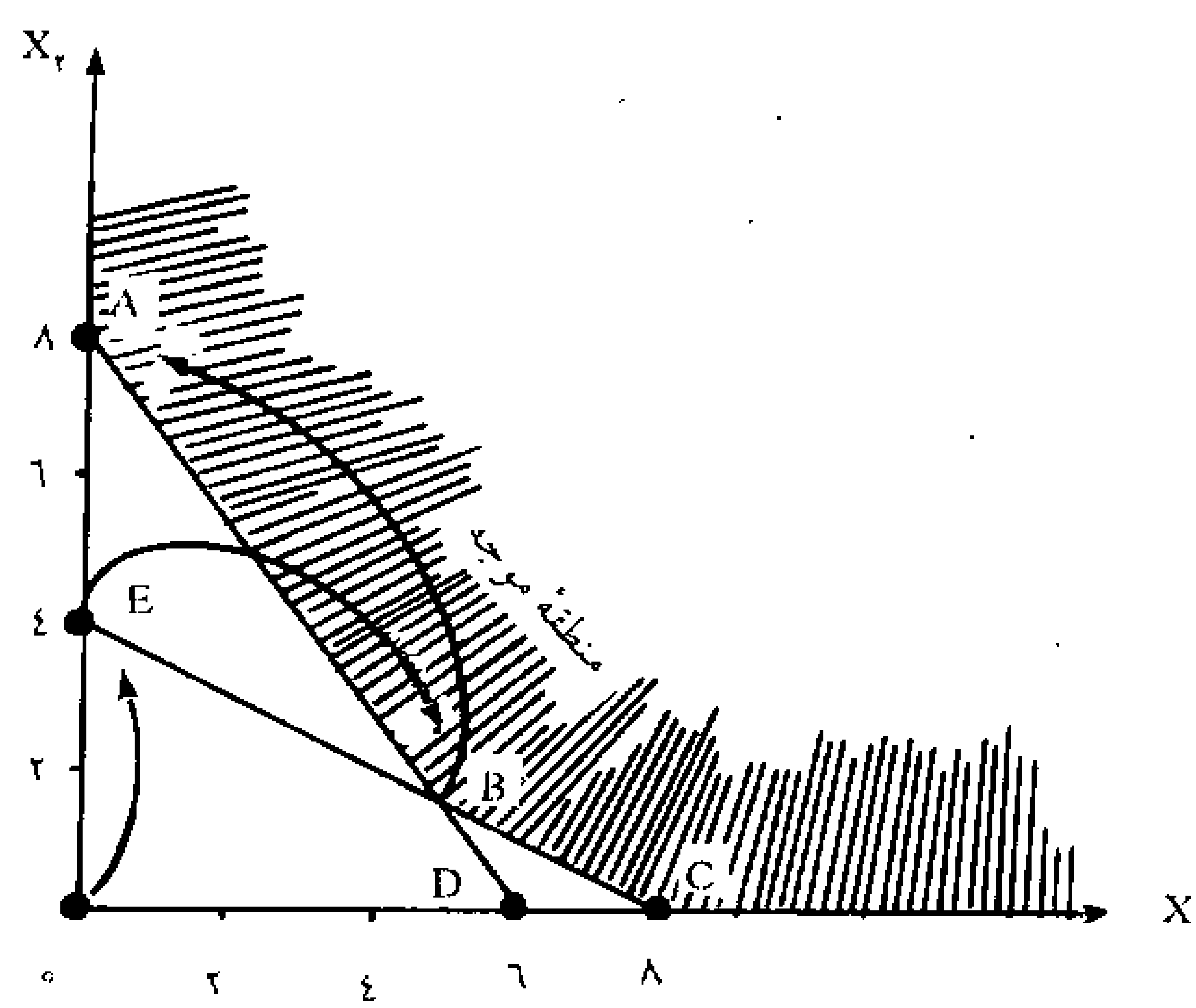
و ۲۴ ـ =Z^* شده است.

تابع هدف مدل در مثال ۴.۶ در اصل از نوع Min است. برای بدست آوردن مقدار واقعی Z باید جواب بدست آمده را در ۱ ـ ضرب کنیم. یعنی:

$$\text{Min } Z = \text{Max}(-Z) = -(-۲۴) = ۲۴$$

جواب بدست آمده از روش سیمپلکس را با روش ترسیمی (شکل ۴.۷) مقایسه کنید. با تطبیق روش سیمپلکس در مسألهٔ حداقل‌سازی با روش ترسیمی درمی‌یابیم که همچون گذشته هر تابلوی سیمپلکس معادل یک جواب گوشه‌ای در روش ترسیمی است. با توجه به استفاده از متغیر مصنوعی تا زمانی که متغیر مصنوعی در پایه وجود دارد، گوشهٔ معادل تابلوی سیمپلکس یک جواب گوشه‌ای غیرموجه است و زمانی که کلیهٔ متغیرهای مصنوعی غیراساسی می‌شوند، مسأله بر اساس روش سیمپلکس وارد یک گوشهٔ موجه می‌شود. برای درک بهتر مفاهیم فوق مجدداً نمایش هندسی مدل را در شکل ۴.۸ ترسیم می‌کنیم. مسیر حرکت سیمپلکس را با فلش مشخص کرده‌ایم.

تابلوی اوّل سیمپلکس متناظر با مبدأ مختصات است که یک گوشه غیرموجه است. انتقال از گوشهٔ O به گوشهٔ مجاور E حرکت بعدی سیمپلکس است که باز هم یک گوشهٔ غیرموجه است. این امر بخوبی از جداول سیمپلکس برمی‌آید. نشان غیرموجه بودن گوشه‌های O و E، وجود متغیر مصنوعی به عنوان متغیر اساسی است. تابلوی سوم، نشان می‌دهد که به



شکل ۴.۸ نمایش هندسی مسیر حرکت روش سیمپلکس در مدل مثال ۴.۶

گوشهٔ موجه B رسیده‌ایم چون هر دو متغیر مصنوعی R_1 و R_2 غیراساسی شده‌اند. چون گوشهٔ B بهینه نیست، پس تکرار بعدی سیمپلکس انتقال از جواب موجه B به جواب بهینهٔ A می‌باشد. تابلوی چهارم سیمپلکس بیانگر گوشهٔ A است که در آنجا ($x_1 = ۰$ و $x_2 = ۸$) است.

۴.۷ مسأله با ترکیبی از محدودیتها[1]

در بخشهای قبلی صرفاً مسائلی مورد بحث روش سیمپلکس قرار گرفت که یا از نوع Max بودند با محدودیتهای کوچکتر مساوی (≤) و یا از نوع Min با محدودیتهای بزرگتر مساوی (≥). در این بخش سعی می‌شود، نوع خاصی از مدلهای برنامه‌ریزی خطی را با روش سیمپلکس حل کنیم که دارای آمیخته از محدودیتهای ≤ ، ≥ و مساوی (=) هستند. برای مثال به نمونه زیر توجه کنید.

مثال ۴.۷ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۴۰۰\,x_1 + ۲۰۰\,x_2$$

s.t:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= ۳۰ \\ ۲\,x_1 + ۸\,x_2 &\geq ۸۰ \\ x_1 &\leq ۲۰ \\ x_1, x_2 &\geq ۰ \end{aligned}$$

برای حل با استفاده از روش سیمپلکس، اولین قدم آن است که نامعادلات را به معادله تبدیل کنیم. اولین محدودیت از نوع تساوی (=) است. بنابراین خود یک معادله است که به هیچ نوع متغیر کمبود یا مازاد نیاز ندارد. اگرچه ظاهراً این محدودیت، شرایط لازم را برای اجرای روش سیمپلکس دارد، امّا اجازه بدهید به بررسی آن در مبدأ مختصات (شروع روش سیمپلکس) بپردازیم:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= ۳۰ \\ ۰ + ۰ &= ۳۰ \\ ۰ &\neq ۳۰ \end{aligned}$$

از آنجا که صفر مساوی ۳۰ نیست، پس محدودیت در این شکل (یعنی مساوی) یک محدودیت

1. Mixed Constraints problem

امکان‌پذیر برای اجرای روش سیمپلکس نخواهد بود. بنابراین ناچاریم، یک «متغیر مصنوعی» به آن اضافه کنیم. یعنی:

$$x_1 + x_2 + R_1 = 30$$

حال در مبدأ مختصات، جایی که $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$ است. داریم:

$$0 + 0 + R_1 = 30$$
$$R_1 = 30$$

پس هرگاه «یک محدودیت در شکل اصلی خود به صورت مساوی (=) تعریف شود باید یک متغیر مصنوعی برای اجرای روش سیمپلکس به آن اضافه کرد.» پس با توجه به نوع تابع هدف از قاعدهٔ جریمه M استفاده می‌کنیم. یعنی چنانچه تابع هدف از نوع Max باشد، جریمهٔ MR ـ را به تابع هدف اضافه می‌کنیم و اگر از نوع Min باشد، هزینه سنگین M.R را به تابع هدف اضافه خواهیم کرد.

محدودیت دوّم مسأله نیز از نوع بزرگتر مساوی (≥) است. پس با استفاده از متغیر کمکی آن را به معادله تبدیل می‌کنیم و سپس برای اجرای روش سیمپلکس یک متغیر مصنوعی؛ R_2، به آن اضافه خواهیم کرد. پس:

$$2x_1 + 8x_2 - S_2 + R_2 = 80$$

محدودیت سوّم مسأله نیز از نوع ≤ است که با استفاده از متغیر کمکی S_3 به فرم استاندارد تبدیل می‌شود. یعنی:

$$x_1 + S_3 = 20$$

حال مدل قابل استفاده برای اجرای روش سیمپلکس به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\text{Max } Z = 400x_1 + 200x_2 - MR_1 - MR_2$$

s.t:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + R_1 &= 30 \\ 2x_1 + 8x_2 - S_2 + R_2 &= 80 \\ x_1 + S_3 &= 20 \\ x_1, x_2, S_2, S_3, R_1, R_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

با تبدیل تابع هدف به فرم معادله‌ای با مقدار سمت راست صفر می‌توان تابلوی مقدماتی سیمپلکس را در جدول ۴.۲۰ آورد.

جدول ۴.۲۰ تابلوی مقدماتی سیمپلکس مسأله ترکیبی

متغیرهای اساسی	z	x_1	x_2	R_1	S_2	R_2	S_3	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	–۴۰۰	–۲۰۰	M	۰	M	۰	۰
R_1	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۳۰
R_2	۰	۲	۸	۰	–۱	۱	۰	۸۰
S_3	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۲۰

حال ضمن استفاده از عملیات ردیفی تلاش می‌کنیم ضرایب R_2, R_1 را در سطر Z_0 به عدد صفر تبدیل کنیم. به صورت زیر:

مجموع	ردیف R_1	-M	[۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۳۰]
	ردیف R_2	-M	[۰	۲	۸	۰	-۱	۱	۰	۸۰]
	به اضافه									
	ردیف Z_0		[۱	-۴۰۰	-۲۰۰	M	۰	M	۰	۰]
	حاصل:									
	ردیف Z_0 در تابلوی اوّل سیمپلکس		[۱	-۴۰۰-۳M	-۲۰۰-۹M	۰	M	۰	۰	-۱۱۰M]

بنابراین جدول ۴.۲۰ با جایگزین کردن حاصل عملیات ردیفی برای ردیف Z_0 به تابلوی اوّل سیمپلکس مثال ۴.۷ تبدیل می‌شود. نتیجهٔ عملیات در تابلوی اوّل جدول ۴.۲۱ آمده است. جدول ۴.۲۱ همچنین بیانگر تابلوهای دوّم و سوّم و چهارم سیمپلکس می‌باشد.

براساس تابلوی چهارم، جواب بهینهٔ مدل عبارتست از:

$$(X_1 = ۲۰ \text{ و } X_2 = ۱۰, S_2 = ۴۰, S_3 = ۰, R_1 = ۰, R_2 = ۰)$$

$$Z^* = ۱۰۰۰۰$$

حال چگونگی تبدیل هر سه نوع مدل برنامه‌ریزی خطی را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

محدودیت	اصلاح	ضریب تابع هدف Max	ضریب تابع هدف Min
کوچکترمساوی(≤)	اضافه کردن یک متغیر کمکی	۰	۰
مساوی (=)	اضافه کردن یک متغیر مصنوعی	- M	M
بزرگتر مساوی (≥)	اضافه کردن یک متغیر کمکی	۰	۰
	و		
	اضافه کردن یک متغیر مصنوعی	- M	M

جدول ۴.۲۱ تکرارهای سیمپلکس برای مثال ۴.۷

متغیرهای اساسی	z	x_1	x_2	R_1	S_2	R_2	S_3	مقادیرسمت‌راست	
Z_0	۱	-۴۰۰-۳M	-۲۰۰-۹M	۰	M	۰	۰	-۱۱۰M	تابلوی
R_1	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۳۰	اوّل
R_2	۰	۲	۸	۰	-۱	۱	۰	۸۰	
S_3	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۲۰	
Z_0	۱	-۲۵۰-۳/۴ M	۰	۰	-۲۵-۱/۸ M	۲۵+۹/۸ M	۰	۲۰۰۰-۲۰ M	تابلوی
R_1	۰	۳/۴	۰	۱	۱/۸	-۱/۸	۰	۲۰	دوّم
X_2	۰	۱/۴	۱	۰	-۱/۸	۱/۸	۰	۱۰	
S_3	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۲۰	
Z_0	۱	۰	۰	۰	-۲۵-۱/۸ M	۲۵+۹/۸ M	۲۵۰+۳/۴M	۹۰۰۰-۵M	تابلوی
R_1	۰	۰	۰	۱	۱/۸	-۱/۸	-۳/۴	۵	سوم
X_2	۰	۰	۱	۰	-۱/۸	۱/۸	-۱/۴	۵	
X_1	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۲۰	
Z_0	۱	۰	۰	۲۰۰۰ + M	۰	M	۲۰۰	۱۰۰۰۰	تابلوی
S_2	۰	۰	۰	۸	۱	-۱	-۶	۴۰	چهارم
X_2	۰	۰	۱	۰	۰	۰	-۱	۱۰	(بهینه)
X_1	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۲۰	

آن دسته از مدلهایی که در حل آنها به روش سیمپلکس، از متغیر مصنوعی استفاده شد، بواسطهٔ استفاده از عدد بسیار بزرگ M (ام بزرگ) در تابع هدف آنها، روش حل آنها را «روش M بزرگ»[1] گویند. پس چنانچه از اصطلاح «روش M بزرگ» و یا «روش M» (در مباحث بعدی استفاده شد، تعجب نکنید! منظور از این واژه استفاده از متغیر مصنوعی با ضریب M در تابع هدف مسأله است و بیانگر استفاده از متغیر مصنوعی با ضریب M در تابع هدف برای اجرای روش سیمپلکس می‌باشد.

۴.۸ روش سیمپلکس دو مرحله‌ای[2]

یک عیب روش M بزرگ خطای محاسباتی است که امکان دارد از نسبت دادن یک مقدار خیلی بزرگ به ثابت M بوجود آید. برای روشن کردن این نکته، فرض کنید در مثال ۴.۷، M = ۱۰۰۰۰

1. Big - M. Method
2. Two - Phase Simplex Method

باشد. پس در تابلوی اوّل سیمپلکس (جدول ۴.۲۱)، ضرایب $x_۱$ و $x_۲$ در سطر صفر به ترتیب (۳۰۰۰۰۰ ـ ۴۰۰ ـ) و (۹۰۰۰۰ ـ ۲۰۰ ـ) می‌شوند. مشاهده می‌شود که اثر ضرایب اصلی $x_۱$ و $x_۲$ که به ترتیب برابر ۴۰۰ و ۲۰۰ می‌باشند) در مقایسه با اعداد بزرگی که بوسیلهٔ ضرایب M بوجود آمده‌اند خیلی ناچیز است. به علّت خطای ناشی از گرد کردن اعداد، که از خصوصیات ذاتی هر رایانه است، جواب مسأله ممکن است نسبت به مقادیر نسبی ضرایب اصلی $x_۱$ و $x_۲$ در تابع هدف غیرحساس شود. برآمد خطرناک آن است که با $x_۱$ و $x_۲$ چنان رفتار شود که گویی آنها در تابع هدف دارای ضرایب مساوی هستند.

برای برطرف کردن این اشکال، در روش جدید مسأله در دو مرحله حل می‌شود (از این جهت آن را روش «دو مرحله‌ای» گویند) و استفاده از ثابت M کنار گذاشته می‌شود. این دو مرحله به شرح زیر خلاصه می‌شوند.

مرحله I) با قرار دادن مجموع متغیرهای مصنوعی به جای تابع هدف اصلی، مسأله جدیدی می‌سازیم. آنگاه تابع هدف جدید را با قیود مسأله اصلی «حداقل» می‌سازیم. اگر مسأله دارای یک ناحیه موجه باشد، مقدار حداقل تابع هدف جدید مساوی با صفر خواهد شد (که حاکی از صفر شدن تمام متغیرهای مصنوعی است) و باید به مرحله II برویم. بنابراین تابع هدف مسأله مرحله I (که به مسأله فرعی نیز معروف است) عبارتست از:

$$\text{Min } R_۰ = \Sigma R_i$$

مرحله II) از تابلوی بهینهٔ مرحلهٔ I به عنوان یک جواب اولیه برای مسأله اصلی استفاده می‌کنیم. در این مرحله باید دقت شود که بجای ردیف $R_۰$ در تابلوی نهایی مرحله I، تابع هدف اصلی مسأله در فرم Max (با متغیرهای تصمیم) آورده می‌شود. پس از کنترل کردن شرایط متغیرهای اساسی (ضرایب در ردیف صفر مساوی صفر و در محدودیتها، تشکیل ماتریس واحد دهند)، عملیات معمول روش سیمپلکس برای رسیدن به جواب بهینه ادامه می‌یابد، روش دومرحله‌ای سیمپلکس با استفاده از مثال ۴.۸ تشریح می‌شود.

مثال ۴.۸ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } Z = ۴x_۱ + x_۲$$

s.t:

$$\begin{aligned} ۳x_۱ + x_۲ &= ۳ \\ ۴x_۱ + ۳x_۲ &\geq ۶ \\ x_۱ + ۲x_۲ &\leq ۳ \\ x_۱, x_۲ &\geq ۰ \end{aligned}$$

ابتداء مسأله مرحله I ضمن استاندارد کردن محدودیتها (مدل گسترده) نوشته می‌شود:

$$\text{Min } R_0 = R_1 + R_2$$

s.t:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + \quad R_1 \quad &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - S_2 + \quad R_2 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + \quad S_3 \quad &= 3 \\ x_1, \; x_2, \; S_2, S_3, R_1, R_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

باید توجه داشت که صرف‌نظر از نوع تابع هدف مسأله اصلی، تابع هدف مسأله فرعی مرحله I همواره از نوع «حداقل‌سازی» خواهد بود.

مسأله فرعی ۱ با تبدیل تابع هدف Min به تابع هدف Max در جدول ۴.۲۲ وارد می‌شود.

جدول ۴.۲۲ تابلوی مقدماتی مسأله فرعی مرحله I مثال ۴.۸

متغیرهای اساسی	R_0	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	مقادیرسمت‌راست
R_0	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰
R_1	۰	۳	۱	۰	۱	۰	۰	۳
R_2	۰	۴	۳	۱ –	۰	۱	۰	۶
S_3	۰	۱	۲	۰	۰	۰	۱	۳

همانند روش M بزرگ سطر صفر باید به گونه‌ای تعریف شود، که شرایط لازم برای متغیرهای اساسی فراهم شود. بنابراین با استفاده از عملیات ردیفی ضرایب R_2 و R_2 در سطر صفر به صفر تبدیل می‌شود. بدین منظور عناصر سطر R_1 در ۱ – و عناصر سطر R_2 نیز در ۱ – ضرب شده با سطر R_0 جمع می‌شوند. سپس جدولی تهیه می‌شود که دارای شرایط تابلوی اوّل سیمپلکس جهت مسأله مرحله I باشد. نتایج عملیات روش سیمپلکس برای بهینه کردن در جدول ۴.۲۳ آمده است.

چون R_0 مساوی صفر شده است، پس به تابلوی آخر سیمپلکس مسأله مرحله I رسیده‌ایم. حال تابلوی آخر را ملاک حل مسأله در مرحله II قرار می‌دهیم. «پس شرط اتمام مرحله I، غیرمنفی شدن ضرایب سطر R_0 و مساوی شدن R_0 با صفر است.»

قبل از شروع به حل مرحله II، ابتدا باید تابع هدف مسأله مرحله II را بنویسیم. گفته شد که تابع مورد استفاده، همان تابع هدف اصلی مسأله در فرم Max است. پس:

جدول ۴.۲۳ مراحل حل مسأله مرحلهٔ I مثال ۴.۸

متغیرهای اساسی	R_0	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	مقادیر سمت راست	
R_0	۱ −	۷ −	۴ −	۱	۰	۰	۰	۹ −	تابلوی
R_1	۰	۳	۱	۰	۱	۰	۰	۳	اوّل
R_2	۰	۴	۳	۱ −	۰	۱	۰	۶	
S_3	۰	۱	۲	۰	۰	۰	۱	۳	
R_0	۱ −	۰	$-\frac{5}{3}$	۱	$\frac{7}{3}$	۰	۰	۲ −	تابلوی
X_1	۰	۱	$\frac{1}{3}$	۰	$\frac{1}{3}$	۰	۰	۱	دوّم
R_2	۰	۰	$\frac{5}{3}$*	۱ −	$-\frac{4}{3}$	۱	۰	۲	
S_3	۰	۰	$\frac{5}{3}$	۰	$-\frac{1}{3}$	۰	۱	۲	
R_0	۱ −	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	تابلوی
X_1	۰	۱	۰	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{5}$	۰	$\frac{3}{5}$	سوم
X_2	۰	۰	۱	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	۰	$\frac{6}{5}$	
S_3	۰	۰	۰	۱	۱	۱ −	۱	۰	

* چنانچه بیش از یک متغیر شرایط متغیر خروجی داشته باشند. یکی را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. در اینجا هم R_2 و R_3 هر دو دارای حداقل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر ستون x_2 بوده‌اند که به دلخواه R_2 به عنوان متغیر خروجی انتخاب شده است.

$$\text{Min } Z = 4x_1 + x_2 \Rightarrow \text{Max } (-Z) = -4x_1 - x_2$$

حال تابع هدف $\text{Max } (-Z)$ را به معادلهٔ قابل ورود به تابلوی سیمپلکس درمی‌آوریم. یعنی:

$$-Z + 4x_1 + x_2 = 0$$

این معادلهٔ جایگزین ردیف R_0 در تابلوی آخر **مرحلهٔ I می‌شود.**

مرحله II) متغیرهای مصنوعی را از تابلوی آخر مرحله I حذف می‌کنیم. زیرا با اتمام مرحله I، متغیرهای مصنوعی، غیراساسی شده‌اند. یعنی مسأله به ناحیه موجه اصلی مدل رسیده است و گوشهٔ متناظر با تابلوی آخر مرحله I، یک گوشهٔ موجه می‌باشد. و دیگر نیازی به متغیرهای مصنوعی نخواهیم داشت. جدول اولیه مسأله مرحله II با قرار دادن معادلهٔ Z_0 به جای R_0 به دست می‌آید. این جدول به شکل زیر است.

جدول ۴.۲۴ از آن جهت مقدماتی است که متغیرهای x_1 و x_2 در آن علیرغم اساسی بودن دارای ضریب غیر صفر در سطر Z_0 هستند. پس باید ابتدا سطر Z_0 تابلوی فوق را اصلاح کرد و سپس به اجرای مراحل معمول سیمپلکس پرداخت. نتایج روش سیمپلکس در مرحله II به

جدول ۴.۲۴ جدول مقدماتی مرحله II مثال ۴.۸

متغیرهای اساسی	z	$x_۱$	$x_۲$	$S_۲$	$S_۳$	مقادیرسمت‌راست
$Z_۰$	-۱	۴	۱	۰	۰	۰
$X_۱$	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۵}$	۰	$\frac{۳}{۵}$
$X_۲$	۰	۰	۱	$-\frac{۳}{۵}$	۰	$\frac{۶}{۵}$
$S_۳$	۰	۰	۰	۱	۱	۰

تفضیل در جدول ۴.۲۵ آمده است.

بدین طریق جواب بهینهٔ مثال ۴.۸ بدست می‌آید. به طوری که:

$$x_۱ = \frac{۳}{۵} \quad x_۲ = \frac{۶}{۵} \quad S_۲ = S_۳ = R_۱ = R_۲ = ۰$$

و $Z^* = \frac{۱۸}{۵}$ شده است.

جدول ۴.۲۵ مراحل حل مسأله مرحله II مثال ۴.۸

	متغیرهای اساسی	z	$x_۱$	$x_۲$	$S_۲$	$S_۳$	مقادیرسمت‌راست
	$Z_۰$	-۱	۰	۰	$-\frac{۱}{۵}$	۰	$-\frac{۱۸}{۵}$
	$X_۱$	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۵}$	۰	$\frac{۳}{۵}$
	$X_۲$	۰	۰	۱	$-\frac{۳}{۵}$	۰	$\frac{۶}{۵}$
	$S_۳$	۰	۰	۰	۱	۱	۰
تابلوی بهینه	$Z_۰$	-۱	۰	۰	۰	$\frac{۱}{۵}$	$-\frac{۱۸}{۵}$
	$X_۱$	۰	۱	۰	۰	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۳}{۵}$
	$X_۲$	۰	۰	۱	۰	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{۶}{۵}$
	$S_۲$	۰	۰	۰	۱	۱	۰

آنچه مسلم است، صرف‌نظر از عملیات ردیفی در روش دو مرحله‌ای، کلیهٔ مفاهیم بیان شده در خصوص روش M بزرگ و مراحل انتقال در سیمپلکس برای روش دو مرحله‌ای سیمپلکس نیز قابل تکرار است. در روش دو مرحله‌ای نیز با اضافه کردن متغیر مصنوعی به محدودیتهای مساوی و $\geq$ ، فضای موجه اصلی مسأله به گونه‌ای گسترش می‌یابد که مبدأ مختصات مدل به صورت مصنوعی جزء ناحیه موجه مسأله تلقی شود. تا بدین وسیله بتوان مراحل روش سیمپلکس را برای حل مدل شروع کرد. بلافاصله تلاش می‌شود متغیرهای مصنوعی از پایه خارج شوند. با خروج متغیرهای مصنوعی و غیراساسی شدن آنها کم‌کم به

ناحیه موجه اصلی مسأله نزدیک می‌شویم. به طوریکه در تابلوی آخر مرحله ۱ که کلیهٔ متغیرهای مصنوعی غیراساسی شده‌اند، گوشهٔ بدست آمده یک گوشه موجه در ناحیه واقعی موجه مسأله است. لذا در مرحلهٔ دوم (II) به جستجوی گوشهٔ بهینه در ناحیه موجه اصلی مسأله می‌پردازیم.

مراحل بیان شده در روش دو مرحله‌ای، دقیقاً همانند روش M بزرگ است. با این تفاوت که در روش M با جریحه بستن به متغیرهای مصنوعی در تابع هدف سعی می‌شود در یک گوشهٔ غیرموجه توقف نکنیم ولی در روش دو مرحله‌ای با حداقل کردن متغیرهای مصنوعی آنها را به صفر شدن (غیر اساسی شدن) سوق می‌دهیم. با این توصیف باید گفت حتی «تعداد تکرارهای سیمپلکس در هر دو روش کاملاً با همدیگر مساوی است.»

مثال ۴.۹ مدل زیر را در نظر بگیرید و آن را با استفاده از روش دو مرحله‌ای حل کنید؟

$$\text{Max } Z = ۳x_۱ - x_۲$$

s.t:

$$\begin{aligned} ۲x_۱ + x_۲ &\geq ۲ \\ x_۱ + ۳x_۲ &\leq ۳ \\ x_۲ &\leq ۴ \\ x_۱, x_۲ &\geq ۰ \end{aligned}$$

حل:

مرحله I) ابتدا مسأله فرعی مرحله I را می‌نویسیم.

$$\text{Min } R_۰ = R_۱ \Rightarrow \text{Max } (-R_۰) = -R_۱$$

s.t:

$$\begin{aligned} ۲x_۱ + x_۲ - S_۱ + R_۱ &= ۲ \\ x_۱ + ۳x_۲ + S_۲ &= ۳ \\ x_۲ + S_۳ &= ۴ \\ x_۱, x_۲, S_۱, S_۲, S_۳, R_۱ &\geq ۰ \end{aligned}$$

حال با تهیهٔ معادلهٔ قابل انتقال به تابلوی سیمپلکس، تابلوی مقدماتی مرحله I را تهیه می‌کنیم. پس:

$$-R_۰ + R_۱ = ۰$$

جدول ۴.۲۶، تابلوی مقدماتی مرحله I و مراحل سیمپلکس را تا رسیدن به تابلوی آخر

جدول ۴.۲۶ مراحل سیمپلکس در مرحله I برای مثال ۴.۹

متغیرهای اساسی	R_0	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	مقادیر سمت راست	
R_0	-۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	تابلوی
R_1	۰	۲	۱	-۱	۰	۰	۱	۲	مقدماتی
S_2	۰	۱	۳	۰	۱	۰	۰	۳	
S_3	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۴	
R_0	-۱	-۲	-۱	۱	۰	۰	۰	-۲	تابلوی
R_1	۰	۲	۱	-۱	۰	۰	۱	۲	اوّل
S_2	۰	۱	۳	۰	۱	۰	۰	۳	
S_3	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۴	
R_0	-۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	تابلوی
X_1	۰	۱	۱/۲	-۱/۲	۰	۰	۱/۲	۱	دوّم
S_2	۰	۰	۵/۲	۱/۲	۱	۰	-۱/۲	۲	
S_3	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۴	

مرحله I نشان می‌دهد.

تابلوی دوّم جدول ۴.۲۶ نشان می‌دهد که به پایان مرحله I رسیده‌ایم. چون کلیهٔ عناصر ردیف R_0 غیرمنفی است و مقدار تابع هدف در این گوشه مساوی صفر $(R_0 = ۰)$ شده است. بنابراین در تابلوی دوّم، مدل به یک گوشه موجه رسیده است.

مرحله II) با استفاده از جواب بدست آمده در مرحله I معادله Z_0 را به جای معادله R_0 قرار می‌دهیم و با بدست آوردن تابلوی مقدماتی مرحله I، روش سیمپلکس را برای بدست آوردن جواب بهینه دنبال می‌کنیم. نتایج در جدول ۴.۲۷ آمده است.

واضح است که در تابلوی مقدماتی مرحله دوّم، متغیرهای اساسی شرط لازم را برای اجرای روش سیمپلکس ندارند. چون x_1 که یک متغیر اساسی است دارای ضریب غیر صفر در سطر صفر است. پس با ضرب کردن ردیف x_1 در عدد ۳ و جمع کردن با سطر Z_0 می‌توان به تابلوی اوّل مرحله II رسید. چون تابلوی بدست آورده دارای ضریب منفی در سطر صفر است، پس بهینه نیست و با ورود S_1 به جای S_2 از تابلوی اوّل به تابلوی دوّم سیمپلکس می‌رسیم که یک تابلوی بهینه است. بنابراین مثال ۴.۹ دارای جواب بهینهٔ زیر است:

$$(x_1 = ۳,\ x_2 = ۰,\ S_1 = ۴,\ S_2 = ۰,\ S_3 = ۴,\ R_1 = ۰)$$

و $Z^* = ۹$.

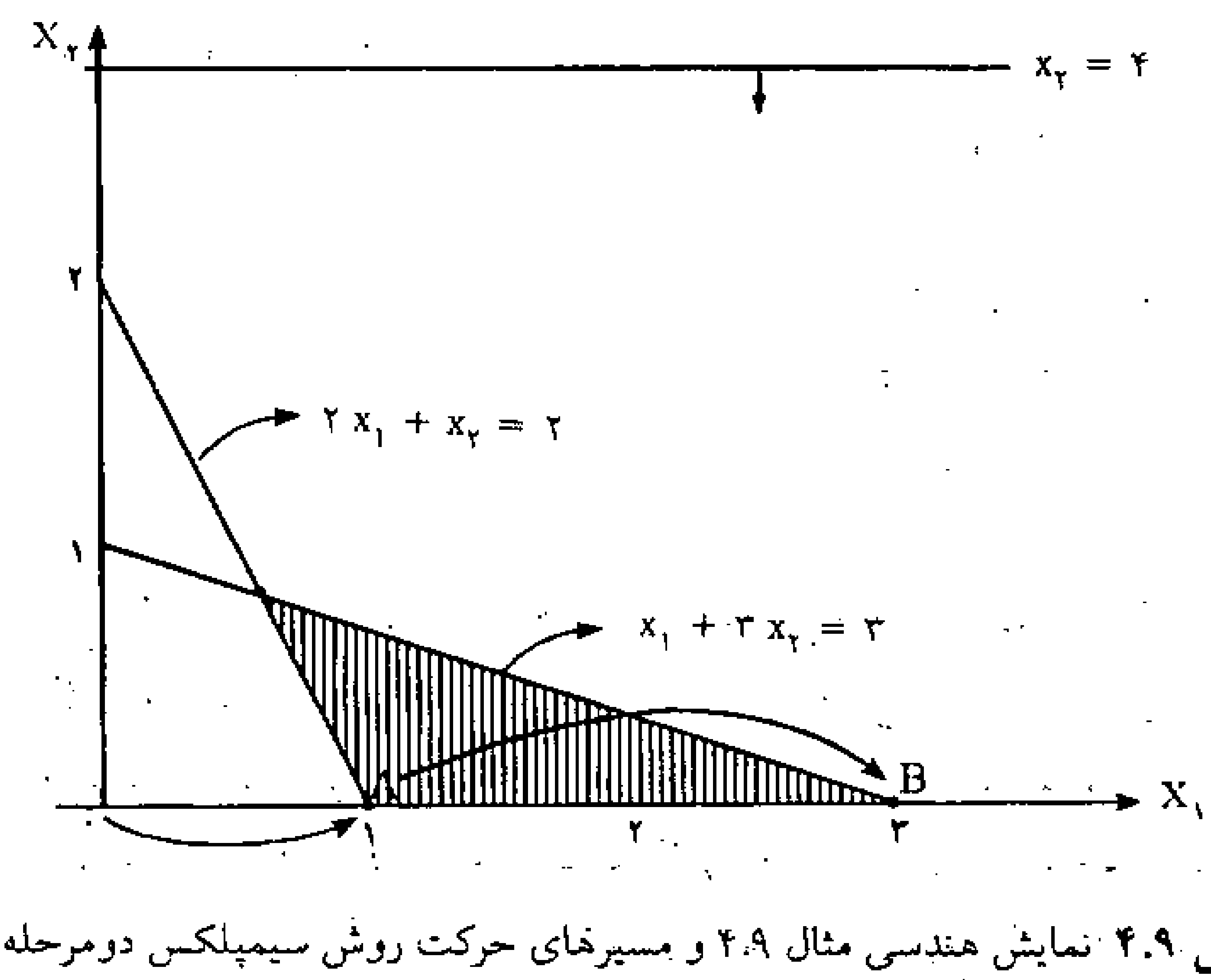
حال به بررسی مسیر حرکت براساس روش ترسیمی طی مرحله I و مرحله II روش دو

جدول ۴.۲۷ مراحل سیمپلکس در مرحله II برای مثال ۴.۹

متغیرهای اساسی	z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	مقادیرسمت راست	
Z_0	۱	−۳	۱	۰	۰	۰	۰	تابلوی مقدماتی
x_1	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۰	۱	
S_2	۰	۰	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	۲	
S_3	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۴	
Z_0	۱	۰	$\frac{۵}{۲}$	$-\frac{۳}{۲}$	۰	۰	۳	تابلوی اوّل
x_1	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۰	۱	
S_2	۰	۰	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	۲	
S_3	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۴	
Z_0	۱	۰	۱۰	۰	۳	۰	۹	تابلوی سوم (بهینه)
x_1	۰	۱	۳	۰	۱	۰	۳	
S_1	۰	۰	۵	۱	۲	۰	۴	
S_3	۰	۰	۲	۰	۰	۱	۴	

مرحله‌ای می‌پردازیم. تا معلوم شود، این روش هیچ تفاوتی با روش M بزرگ از نظر مسیر حرکت و تعداد تکرارهای سیمپلکس ندارد.

با بررسی شکل ۴.۹ می‌توان دریافت که در مرحله I، از مبدأ مختصات (گوشه O) به اولین



شکل ۴.۹ نمایش هندسی مثال ۴.۹ و مسیرهای حرکت روش سیمپلکس دومرحله‌ای

گوشهٔ موجه (گوشهٔ A) انتقال صورت گرفته است. در مرحلهٔ II چون گوشهٔ A بهینه نیست، طی یک تکرار از گوشهٔ A به گوشهٔ مجاور آن (یعنی گوشهٔ B) حرکت صورت گرفته است. گوشهٔ B بهترین گوشهٔ موجه می‌باشد. بنابراین آخرین تابلوی مرحله دوّم (یعنی تابلوی دوّم) نیز دارای شرط بهینگی است. پس توقف روش سیمپلکس دو مرحله‌ای انجام گرفته است. با یک بررسی ساده می‌توان دریافت مسیر $O \to A \to B$ در روش دو مرحله‌ای همان مسیر پیموده شده در روش M بزرگ است! (جهت بررسی صحت، مسأله را با روش M بزرگ حل کنید).

۴.۹ موارد خاص در برنامه‌ریزی خطی

حالتهای خاصی در برنامه‌ریزی خطی وجود دارد که احیاناً روش سیمپلکس را تحت تأثیر قرار می‌دهد. طرز تشخیص موارد خاص برنامه‌ریزی خطی بحث مهمّی در ارائه روش سیمپلکس است. در این بخش ضمن ارائه مثالهایی دیگر برای روش سیمپلکس، تلاش می‌شود چگونگی تشخیص موارد خاص برنامه‌ریزی خطی در فضای n بعدی نیز به کمک تابلوی سیمپلکس بیان گردد.

۴.۹.۱ جواب بهینه چندگانه

در بخش ۳.۵.۱ توضیح داده شد که در صورتی که شیب تابع هدف مسأله با یکی از محدودیتهای فعال در جواب بهینه موازی باشد، مسأله دارای جواب بهینه چندگانه است. به عنوان نمونه به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴.۱۰ مدل زیر را در نظر بگیرید:

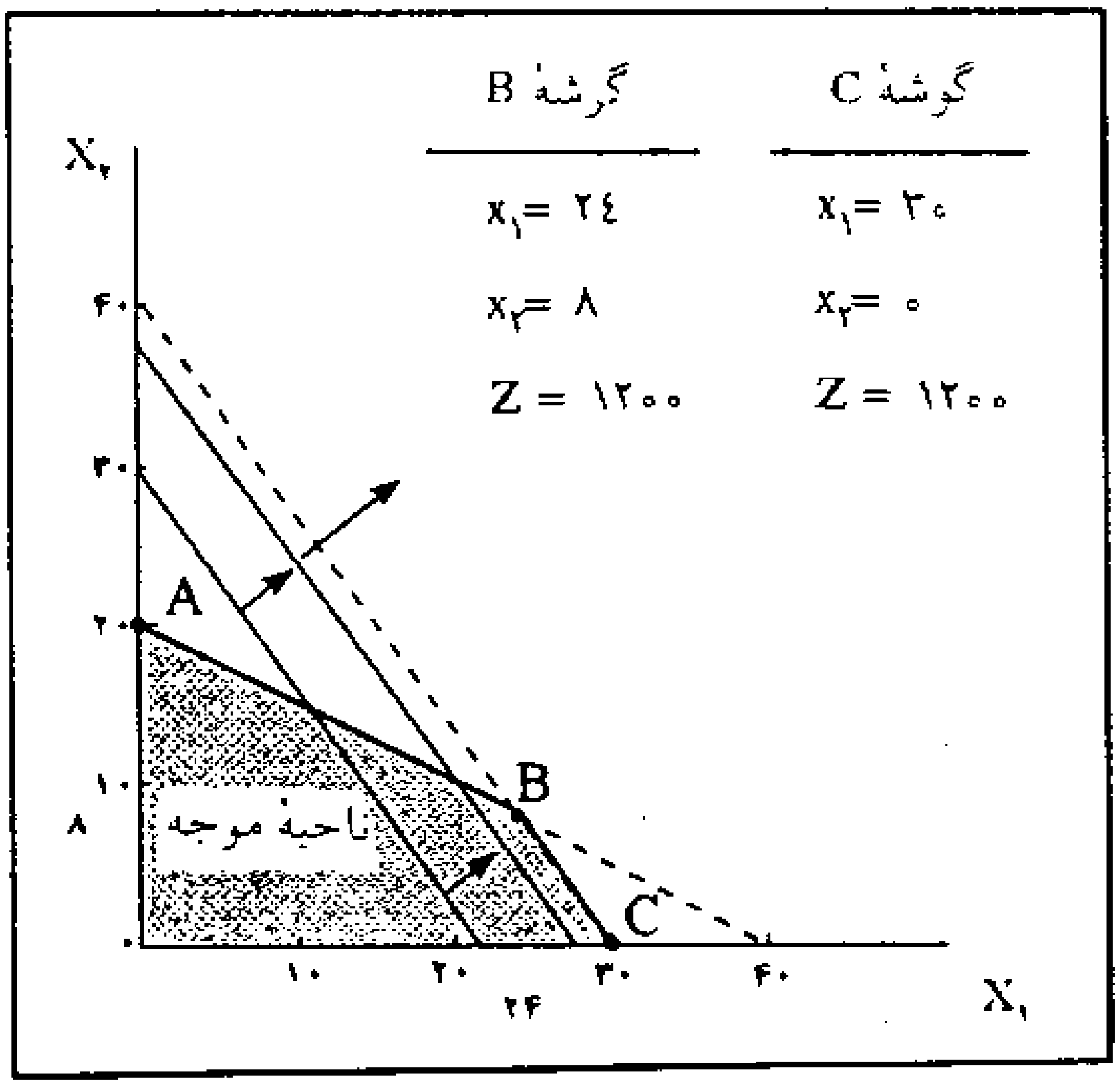
$$\text{Max } Z = ۴۰\,x_۱ + ۳۰\,x_۲$$

s.t:

$$\begin{aligned} x_۱ + ۲\,x_۲ &\leq ۴۰ \\ ۴\,x_۱ + ۳\,x_۲ &\leq ۱۲۰ \\ x_۱, x_۲ &\geq ۰ \end{aligned}$$

جواب بهینهٔ مدل فوق براساس شکل ۴.۱۰، مجموعه نقاط پاره‌خط B-C می‌باشد و براساس اصل گوشه‌ای بودن جواب بهینه مدل برنامه‌ریزی خطی، این مدل دارای دو گوشهٔ بهینه تحت عنوان B و C است. بنابراین مقدار Z^* در هر دو گوشه با همدیگر مساوی است.

اکنون این مدل را با استفاده از روش سیمپلکس حل می‌کنیم. تا مشخص شود که چگونه یک مسأله با جواب بهینهٔ چندگانه براساس تابلوی سیمپلکس قابل تشخیص می‌باشد. بعد از



شکل ۴.۱۰ روش هندسی حل مثال ۴.۱۰

نوشتن مدل استاندارد مسأله، آن را وارد تابلوی سیمپلکس کرده و مراحل معمول سیمپلکس اجرا می‌شود. جدول ۴.۲۸ بیانگر تابلوهای اوّل و دوّم سیمپلکس مثال ۴.۱۰ می‌باشد.

واضح است که تابلوی دوّم جدول ۴.۲۸ یک تابلوی بهینه است، چون هیچ یک از عناصر ردیف Z_0 منفی نیستند. این تابلو همان گوشهٔ C در شکل ۴.۱۰ می‌باشد. امّا یک نکته در ردیف Z_0 دیده می‌شود که با مفاهیم بیان شده در تابلوهای بهینهٔ سیمپلکس در مثالهای قبلی تفاوت دارد. تاکنون در هر تابلوی بهینهٔ سیمپلکس فقط متغیرهای اساسی دارای ضریب صفر در سطر Z_0 بوده‌اند و متغیرهای غیراساسی همواره مقادیر بزرگتر از صفر داشتند. (برای اطمینان به تابلوی بهینهٔ مثالهای قبل مراجعه کنید!). برخلاف تابلوهای قبلی در تابلوی بهینه این مثال x_2 که

جدول ۴.۲۸ حل مسأله ۴.۱۰ به روش سیمپلکس

	متغیرهای اساسی	z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیرسمت راست
تابلوی اوّل	Z_0	۱	۴۰-	۳۰-	۰	۰	۰
	S_1	۰	۱	۲	۱	۰	۴۰
	S_2	۰	۴	۳	۰	۱	۱۲۰
تابلوی دوّم	Z_0	۱	۰	$\boxed{0}$	۰	۱۰	۱۲۰۰
	S_1	۰	۰	$\frac{5}{4}$	۱	$-\frac{1}{4}$	۱۰
	X_1	۰	۱	$\frac{3}{4}$	۰	$\frac{1}{4}$	۳۰

یک متغیر غیراساس است دارای ضریب صفر در Z_0 است! این بدین معنی است که اگر x_2 را اساسی کنیم، مقدار Z^* هیچ تغییری نمی‌کند. پس می‌توان نتیجه گرفت که علاوه بر جواب بهینه $(x_1 = 30, x_2 = 0)$ ــ گوشهٔ C ــ یک جواب بهینهٔ جایگزین نیز وجود دارد. چنانچه x_2 را به عنوان متغیر ورودی جایگزین S_1 نماییم، جواب جایگزین (گوشه B) بدست می‌آید. نتایج به عنوان تابلوی سوّم سیمپلکس در جدول ۴.۲۹ دیده می‌شود.

جدول ۴.۲۹ تابلوی سوم سیمپلکس، جواب جایگزین

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیرسمت راست
Z_0	۱	۰	۰	$\boxed{0}$	۱۰	۱۲۰۰
x_1	۰	۱	۰	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	۸
x_2	۰	۰	۱	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	۲۴

قاعده کلی: «هرگاه ضریب یک متغیر غیراساسی در سطر صفر (Z_0) تابلوی بهینه سیمپلکس مساوی صفر باشد،» آن مسأله دارای جواب بهینهٔ چندگانه است.

چنانچه در یک تابلوی سیمپلکس بیش از یک متغیر شرایط مساوی برای ورود (ستون لولا) داشته باشند، به دلخواه یکی از آنها را به عنوان متغیر ورودی انتخاب می‌کنیم. پدیدهٔ حالات مشابه در متغیر ورودی، یکی از علایم چندگانه بودن جواب بهینه است.

۴.۹.۲ فاقد ناحیه موجه (جواب)

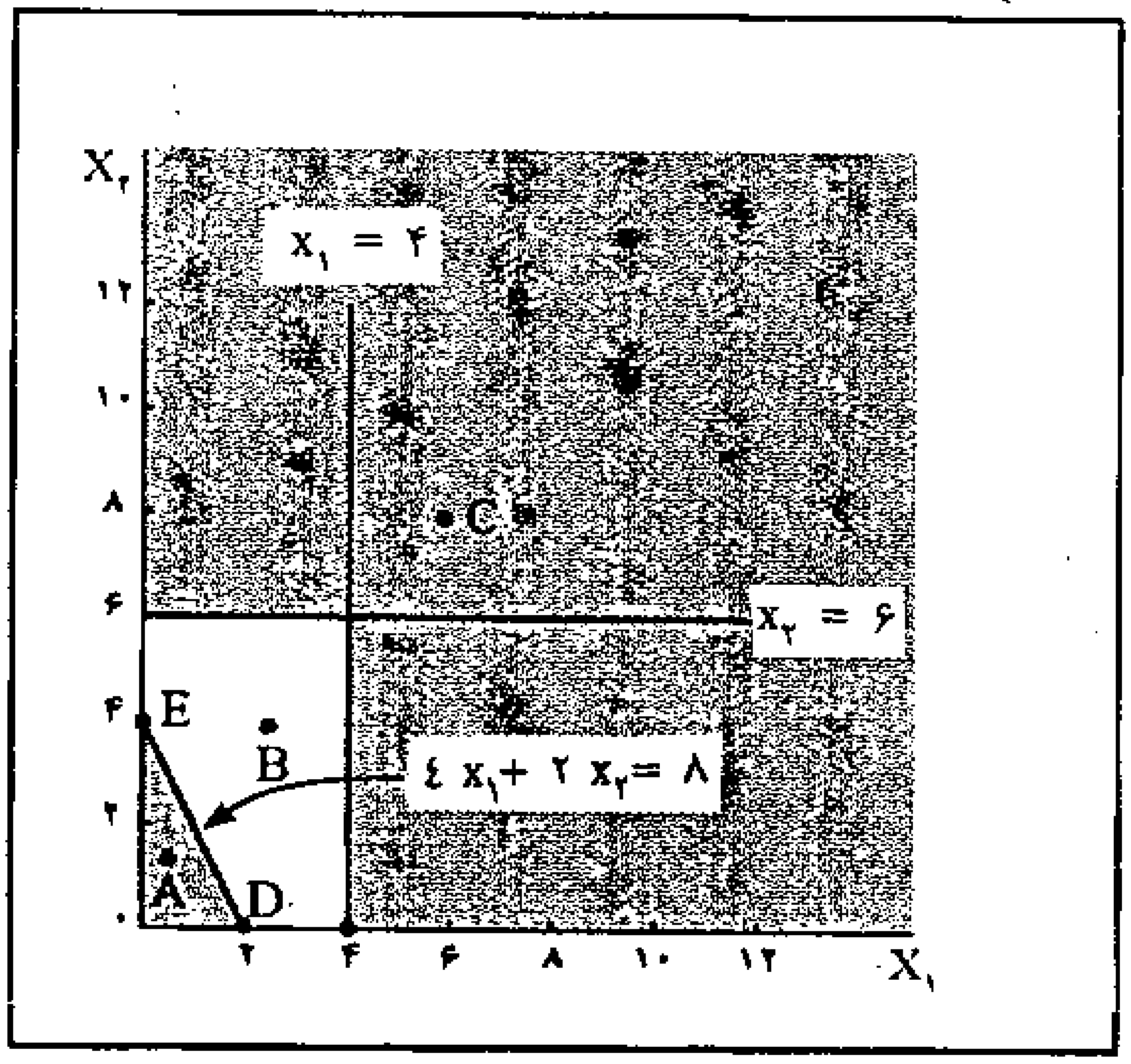
مدلی که محدودیتهای آن نسبت به هم ناسازگار باشند و ناحیهٔ موجه مشترکی برای محدودیتهای آن قابل تعریف نباشد، یک مسأله بدون ناحیه موجه خواهد بود. در همین راستا به مثال ۴.۱۱ توجه کنید. روش ترسیمی حل این مثال نشان می‌دهد که محدودیتها در تعارض با همدیگر هستند. بنابراین تعریف ناحیه موجه مدل امکان ندارد.

مثال ۴.۱۱ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$

s.t:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ x_1 &\ge 4 \\ x_2 &\ge 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$



شکل ۴.۱۱ روش حل ترسیمی مدل

تشخیص این حالت خاص برنامه‌ریزی خطی براساس متغیرهای اساسی آخرین تابلوی سیمپلکس امکان‌پذیر است. بیاد داریم که چنانچه در تابلوی سیمپلکس، حداقل یکی از متغیرهای اساسی متغیر مصنوعی باشد، آن گوشه یک گوشهٔ غیرموجه است. بنابراین چنانچه در تابلوی آخر سیمپلکس حداقل یکی از متغیرهای مصنوعی مقدار بزرگتر از صفر داشته باشد، مدل دارای ناحیه موجه نیست. چون گوشهٔ موجهی برای مسأله وجود ندارد، پس **جریمه‌های** تعیین شده برای متغیرهای مصنوعی نتوانسته است، منطقهٔ موجه اضافه شده را مجدداً به اندازه منطقه موجه اصلی مسأله برساند.

مفاهیم فوق بخوبی با حل مدل فوق درک می‌شود. برای حل مدل ابتدا آن را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم. سپس آن را به روش M بزرگ حل می‌کنیم.

$$\text{Max } Z = ۵x_۱ + ۳x_۲ - MR_۲ - MR_۳$$

s.t:

$$۴x_۱ + ۲x_۲ + S_۱ = ۸$$
$$x_۱ - S_۲ + R_۲ = ۴$$
$$x_۲ - S_۳ + R_۳ = ۶$$
$$x_۱, x_۲, S_۱, S_۲, S_۳, R_۲, R_۳ \geq ۰$$

نتایج حل در جدول ۴.۳۰ آمده است.

جدول ۴.۳۰ حل مثال ۴.۱۱ به روش M بزرگ

متغیرهای اساسی	Z	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$R_۲$	$S_۳$	$R_۳$	مقادیرسمت‌راست	
$Z_۰$	۱	۵ -	۳ -	۰	۰	M	۰	M	۰	تابلوی
$S_۱$	۰	۴	۲	۱	۰	۰	۰	۰	۸	مقدماتی
$R_۲$	۰	۱	۰	۰	۱ -	۱	۰	۰	۴	
$R_۳$	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱ -	۱	۶	
$Z_۰$	۱	$-۵-M$	$-۳-M$	۰	M	۰	M	۰	$-۱۰M$	تابلوی
$S_۱$	۰	۴	۲	۱	۰	۰	۰	۰	۸	اوّل
$R_۲$	۰	۱	۰	۰	۱ -	۱	۰	۰	۴	
$R_۳$	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱ -	۱	۶	
$Z_۰$	۱	۰	$-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}M$	$\frac{۵}{۴}+\frac{۱}{۴}M$	M	۰	M	۰	$۱۰-۸M$	تابلوی
$x_۱$	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	۰	۰	۰	۰	۲	دوّم
$R_۲$	۰	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۴}$	۱ -	۱	۰	۰	۲	
$R_۳$	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱ -	۱	۶	
$Z_۰$	۱	$۱+M$	۰	$\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}M$	M	۰	M	۰	$۱۲-۶M$	تابلوی
$x_۲$	۰	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	۰	۰	۰	۴	سوّم
$R_۲$	۰	۱	۰	۰	۱ -	۱	۰	۰	۴	
$R_۳$	۰	۲ -	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۰	۱ -	۱	۲	

تابلوی مقدماتی، متناظر با هیچ گوشه‌ای نیست. چون متغیرهای مصنوعی در این تابلو، هنوز شرایط متغیرهای اساسی را ندارند. دارای ضریب M (غیر صفر) در سطر $Z_۰$ هستند. با ضرب کردن ردیف $R_۲$ و ردیف $R_۳$ در M ــ و جمع با $Z_۰$ تابلوی مقدماتی بـه تـابلوی اوّل سیمپلکس دست می‌یابیم. تابلوی اوّل متناظر با گوشهٔ O در شکـل ۴.۱۱ است. تـابلوی دوّم متناظر با گوشه D و تابلوی سوم نشان‌دهندهٔ گوشه E می‌باشد. تمامی گوشه‌های بدست آمده (O، D و E) غیر موجه هستند.

تابلوی آخر (سوم) سیمپلکس نشان می‌دهد که کلیهٔ ضرایب ردیف $Z_۰$ غیرمنفی هستند. یعنی جواب بهینهٔ مدل حاصل شده است!! در حالیکه هنوز متغیرهای مصنوعی ($R_۲$ و $R_۳$) با مقدار غیر صفر در پایه قرار دارند. پس نتیجه گرفته می‌شود که مثال ۴.۱۱ فاقد ناحیه موجه است و جواب بهینه‌ای نمی‌توان برای آن یافت.

روش سیمپلکس دو مرحله‌ای، یکی دیگر از روشهای حل مدلهای دارای متغیر مصنوعی است. چنانچه در پایان مرحله I، تابلوی بهینه، دارای متغیر مصنوعی با مقدار بزرگتر از صـفر باشد، معلوم می‌شود که مدل فاقد ناحیه موجه است، والاّ، باید در پایان مرحله I به گوشه‌ای از آن دست می‌یافتیم.

قاعده کلی: «هرگاه در یک تابلوی بهینه سیمپلکس حداقل یکی از متغیرهای مصنوعی اساسی بوده و دارای مقدار بزرگتر از صفر (چه در روش M بزرگ، چه در روش دو مرحله‌ای) باشد، مدل برنامه‌ریزی خطی موردنظر فاقد ناحیه موجه (جواب) است.»

۴.۹.۳ ناحیه جواب بیکران

در برخی از مدلهای برنامه‌ریزی خطی، ناحیه موجه توسط محدودیتها از تمام جهات بسته نمی‌شود. این نوع مدلها را دارای «ناحیه جواب بیکران» گویند. این دسته از مدلها یا دارای جواب بهینهٔ گوشه‌ای نیستند و تابع هدف به نحو نامحدودی افزایش (کاهش) می‌یابد و یا علیرغم نامحدود بودن ناحیه جواب، دارای گوشهٔ بهینه می‌باشند. در این راستا به مثالهای ۴.۱۲ و ۴.۱۳ توجه کنید. مثال ۴.۱۲ بیانگر «ناحیه جواب بیکران» بدون گوشهٔ بهینه است و مثال ۴.۱۳ نشان‌دهندهٔ جواب گوشه‌ای بهینه در ناحیه موجه بیکران است.

مثال ۴.۱۲ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = x_1 + 3x_2$$

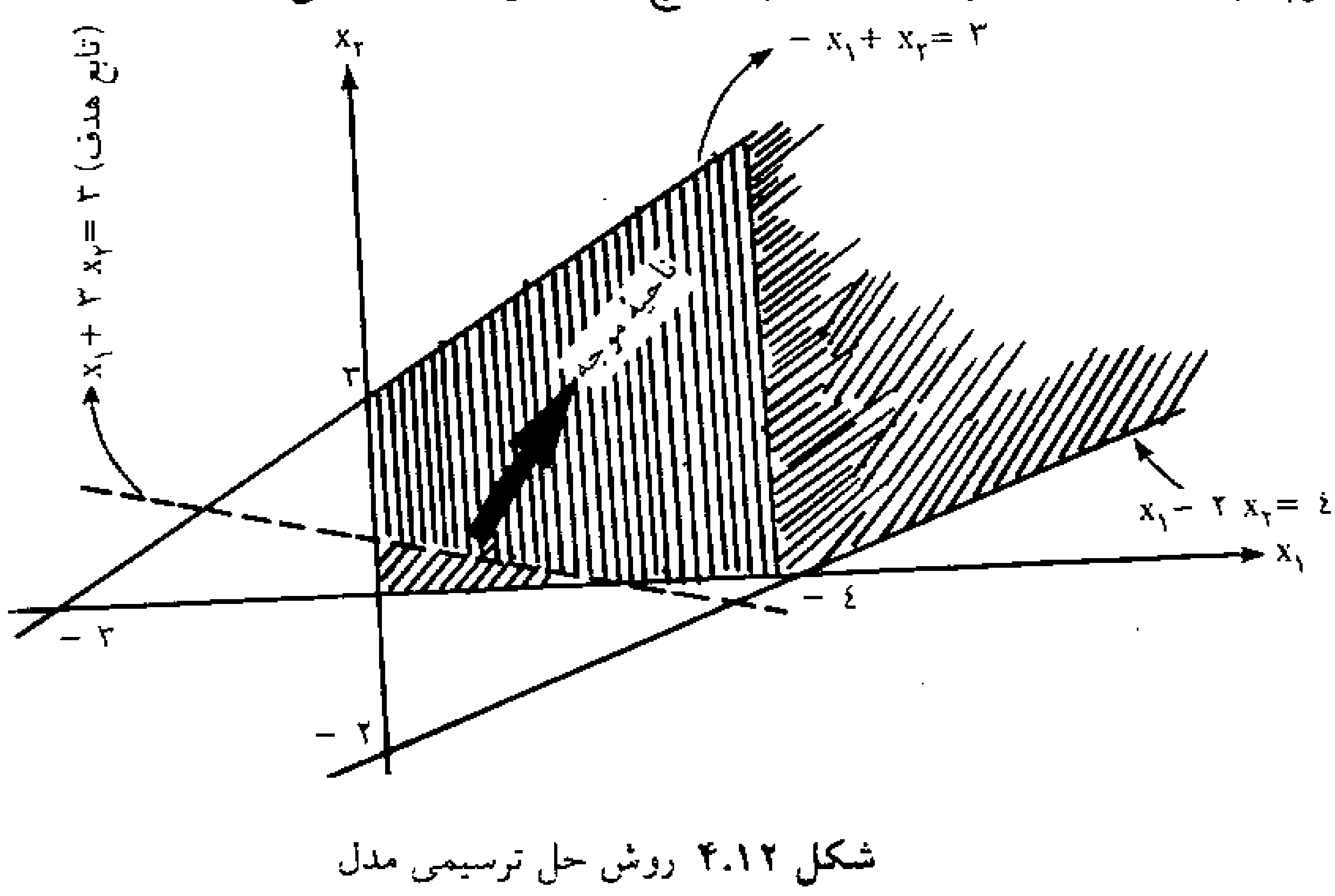
s.t:

$$x_1 - 2x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

شکل ۴.۱۲ بخوبی نشان می‌دهد که مدل دارای ناحیه جواب بیکران است و تابع هدف هرچه به سمت راست (بالا) انتقال یابد، هیچ گاه به گوشه بهینه نمی‌رسد.



شکل ۴.۱۲ روش حل ترسیمی مدل

حال ببینم، این نوع مدلها، چگونه در روش سیمپلکس قابل تشخیص هستند. بدین منظور مسأله را به کمک روش سیمپلکس حل می‌کنیم. نتایج در جدول ۴.۳۱ آمده است.

جدول ۴.۳۱ حل مدل به روش سیمپلکس

	متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیرسمت‌راست
تابلوی اوّل	Z₀	۱	۱ −	۳ −	۰	۰	۰
	S۱	۰	۱	۲ −	۱	۰	۴
	S۲	۰	۱ −	۱	۰	۱	۳
تابلوی دوّم	Z₀	۱	۴ −	۰	۰	۳	۹
	S۱	۰	۲ −	۰	۱	۲	۱۰
	X۲	۰	۱ −	۱	۰	۱	۳

در تابلوی دوّم، همچنان ردیف Z_0 دارای عنصر منفی است (یعنی تابلو بهینه نیست) ولی امکان انتخاب متغیر خروجی (همه عناصر ستون لولا منفی هستند) وجود ندارد! در چنین وضعیتی می‌توان گفت مدل برنامه‌ریزی خطی دارای ناحیه جواب بیکران بدون گوشهٔ بهینه است.

مثال ۴.۱۳ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۶x_1 - ۲x_2$$

s.t:

$$۲x_1 - x_2 \leq ۲$$
$$x_1 \leq ۴$$
$$x_1, x_2 \geq ۰$$

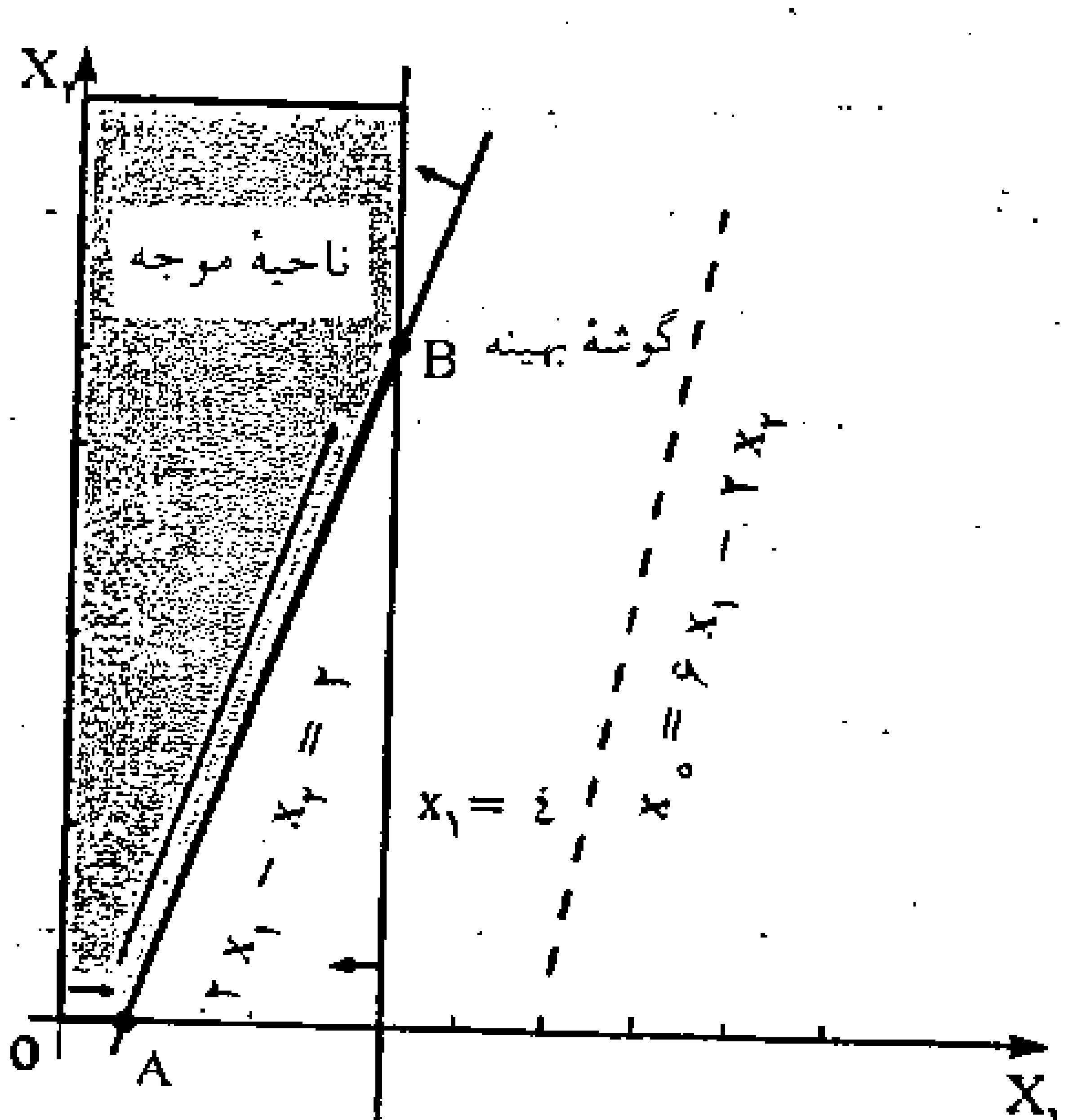
روش حل ترسیمی مثال فوق نشان می‌دهد که علیرغم بیکران بودن ناحیه موجه، گوشهٔ B ، جواب بهینهٔ مسأله است.

در این نوع مدلها، علیرغم بیکران بودن ناحیه موجه، خوشبختانه روش سیمپلکس ما را به گوشه بهینه هدایت می‌کند. به عبارت دیگر، حالت عدم انتخاب متغیر خروجی در این نوع مدلها پیش نخواهد آمد. جدول ۴.۳۲ نتایج حل مدل با استفاده روش سیمپلکس است. همچنانکه تابلوی سوّم نشان می‌دهد. جواب بهینهٔ مدل عبارتست از:

$(x_1 = ۴, x_2 = ۶, S_1 = ۰, S_2 = ۰$ و $Z^* = ۱۲)$

جدول ۴.۳۲ حل مثال ۴.۱۳ به روش سیمپلکس

	متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیرسمت راست
تابلوی اوّل	Z_0	۱	۶-	۲	۰	۰	۰
	S_1	۰	۲	۱-	۱	۰	۲
	S_2	۰	۱	۰	۰	۱	۴
تابلوی دوّم	Z_0	۱	۰	۲-	۳	۰	۶
	x_1	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۱
	S_2	۰	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۱	۳
تابلوی سوم	Z_0	۱	۰	۰	۲	۲	۱۲
	x_1	۰	۱	۰	۰	۱	۴
	x_2	۰	۰	۱	۱-	۲	۶



شکل ۴.۱۳ روش حل ترسیمی مثال ۴.۱۳

جواب بدست آمده متناظر با گوشهٔ B است که در شکل ۴.۱۳ مشخص شده است.

قاعده کلی: «هرگاه در تابلوی آخر سیمپلکس، امکان انتخاب متغیر ورودی وجود داشته باشد ولی متغیر خروجی بدلیل مثبت نبودن ضرایب ستون لولا قابل تعریف نباشد، مدل برنامه‌ریزی خطی دارای ناحیه جواب بیکران است.»

یکی از قواعد متعارف برای تشخیص بیکران بودن ناحیه موجه آن است که حداقل یکی

از متغیرهای تصمیم در مدل برنامه‌ریزی خطی دارای ضرایب منفی یا صفر در محدودیتها باشد. البته این قاعده لزوماً دلالت بر عدم وجود گوشهٔ بهینه ندارد. اگرچه این قاعده دلالت بر بیکرانی ناحیه موجه دارد ولی برخی از مدلهای برنامه‌ریزی خطی وجود دارند که علیرغم نداشتن چنین خاصیتی، دارای ناحیه جواب بیکران هستند. در این راستا مجدداً مثال ۴.۱۲ را مشاهده کنید. هیچ یک از متغیرهای تصمیم (x_2, x_1) دارای خاصیت ضرایب صفر و منفی در محدودیتها نیستند ولی ناحیه جواب مدل بیکران است. پس قاعدهٔ فوق، علامتی برای تشخیص بیکرانی ناحیه موجه است، همچنان که در خصوص مثال ۴.۱۳ مصداق دارد. ضریب x_2 در محدودیت اوّل ۱ ــ و در محدودیت دوّم مساوی صفر است.

۴.۹.۴ جواب تبهگن

برای برخی از مدلهای برنامه‌ریزی خطی ممکن است، بیش از یک متغیر در تابلوی سیمپلکس شرایط خروج داشته باشند. به عبارت دیگر در تقسیم مقادیر سمت راست تابلوی سیمپلکس بر عناصر مثبت ستون لولا بیش از یک متغیر دارای کوچکترین حاصل تقسیم باشند. در این حالت، می‌توان به دلخواه یکی را غیراساسی کرد و متغیر ورودی را جایگزین آن نمود. بدیهی است پس از انتقال از تابلوی موردنظر به تابلوی بعدی سیمپلکس متغیر (متغیرهای) دیگر که شرایط خروج را داشته‌اند ولی بدلیل انتخاب دلخواه اساسی باقی مانده‌اند، مقدار صفر در سمت راست خواهند داشت. این حالت دلالت بر تبهگن بودن گوشهٔ بدست آمده دارد. «پس شرط تبهگن بودن یک گوشه آن است که حداقل یکی از متغیرهای اساسی آن گوشه در سمت راست تابلوی سیمپلکس دارای مقدار صفر باشد.»

یک گوشهٔ تبهگن ممکن است از نوع بهینه باشد و یا اینکه از نوع موقت باشد. اگر گوشهٔ تبهگن از نوع موقت باشد، باید از آن گذر کرد. برای گذر از گوشه، مراحل معمول سیمپلکس را اجرا باید کرد[1]. شرط بهینگی به طریق معمول برای توقف عملیات سیمپلکس ملاک عمل خواهد بود. اگر در تابلوی بهینه، همچنان حداقل یکی از مقادیر سمت راست صفر باشد، آن گوشه یک گوشه بهینه تبهگن خواهد بود. بنابراین می‌توان گفت در گوشه بهینه بیش از دو معادلهٔ معرّف وجود دارد که فقط دو تا از آنها ضروری می‌باشد. مثال ۴.۱۴ بیانگر یک مسأله با جواب بهینه تبهگن است و مثال ۴.۱۵ نشان‌دهندهٔ یک مسأله با گوشه تبهگن موقت خواهد بود. چگونگی تبهگن بودن گوشهٔ بهینه در مثال ۴.۱۴ به طریق هندسی در شکل ۴.۱۴ نشان داده شده است.

---

۱. در برخی از مدلهای تبهگن، ممکن است اجرای روش سیمپلکس دچار دور شود و هیچگاه جواب بهینه حاصل نشود. در این دسته از مدلها باید رفع تبهگنی به عمل آید، که از حوصله این متن خارج است و علاقه‌مندان را به مطالعهٔ منبع شماره (۱و۲) توصیه می‌کنیم.

مثال ۴.۱۴ مدل زیر را در نظر بگیرید:

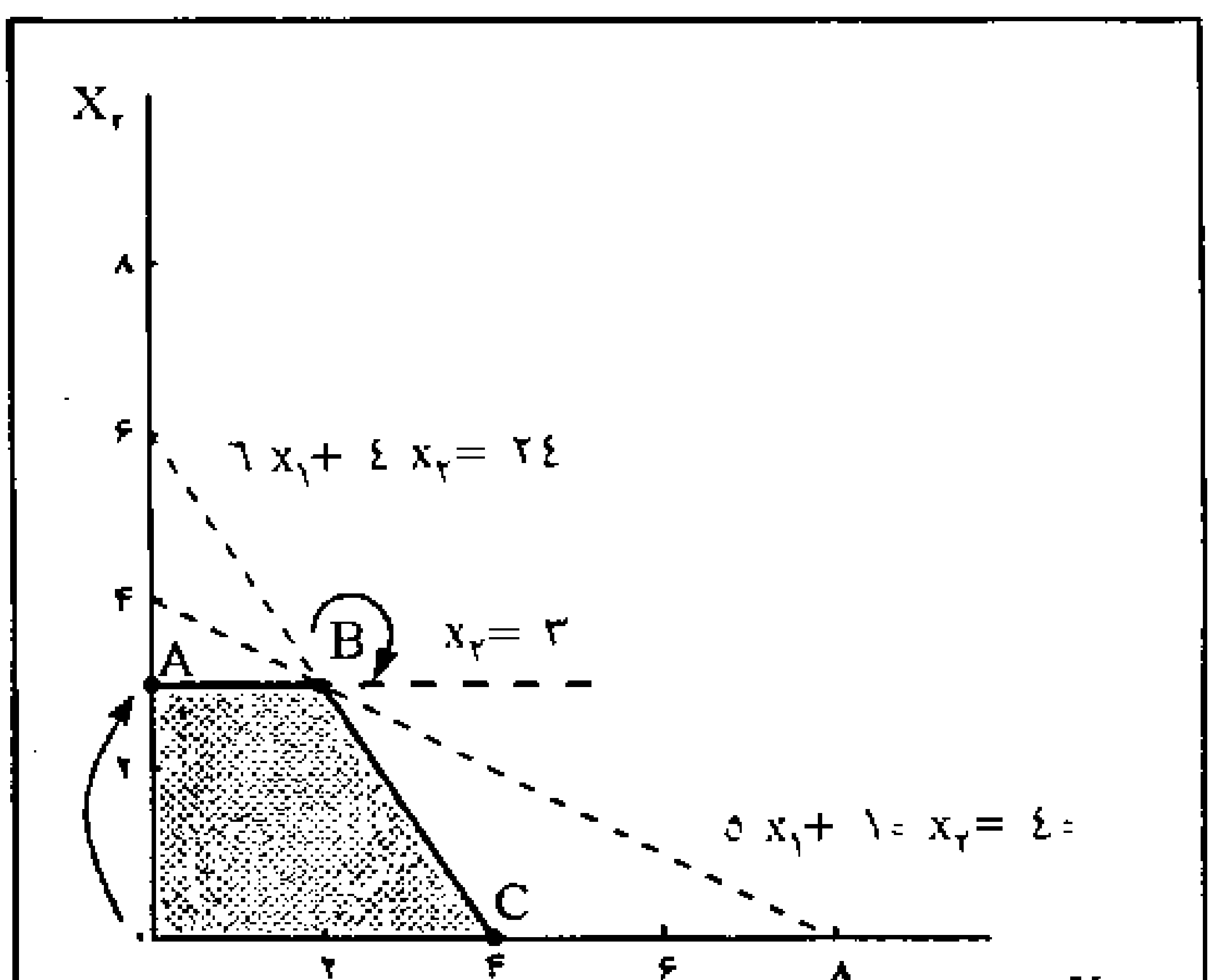
$$\text{Max } Z = ۴x_1 + ۶x_2$$

S.t:

$$۶x_1 + ۴x_2 \le ۲۴$$
$$x_2 \le ۳$$
$$۵x_1 + ۱۰x_2 \le ۴۰$$
$$x_1, x_2 \ge ۰$$

در شکل ۴.۱۴ مشخص شده است که گوشه B، گوشهٔ بهینه است. این گوشه دارای سه معادله معرف به شرح زیر است:

$$۶x_1 + ۴x_2 + S_1 = ۲۴$$
$$x_2 + S_2 = ۳$$
$$۵x_1 + ۱۰x_2 + S_3 = ۴۰$$



شکل ۴.۱۴ نمایش هندسی جواب (گوشه) بهینه تبهگن

با توجه به تعریف گوشه، یکی از معادلات مرزی فوق زاید است. بنابراین طبق قاعده بیان شده برای گوشه بهینه تبهگن، باید در تابلوی بهینه سیمپلکس یک متغیر اساسی با مقدار سمت راست مساوی با صفر برای S_1، S_2 یا S_3 مشاهده شود. حل مثال ۴.۱۴ به روش سیمپلکس در جدول ۴.۳۳ بیانگر این مفهوم است. (تابلوی سوّم و چهارم را مشاهده کنید).

جدول ۴.۳۳ حل مثال ۴.۱۴ به روش سیمپلکس

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	مقادیرسمت راست	
Z_0	۱	−۴	−۶	۰	۰	۰	۰	تابلوی اوّل
S_1	۰	۶	۴	۱	۰	۰	۲۴	
S_2	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۳	
S_3	۰	۵	۱۰	۰	۰	۱	۴۰	
Z_0	۱	−۴	۰	۰	۶	۰	۱۸	تابلوی دوّم
S_1	۰	۶	۰	۱	−۴	۰	۱۲	
X_2	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۳	
S_3	۰	۵	۰	۰	−۱۰	۱	۱۰	
Z_0	۱	۰	۰	۰	−۲	۴/۵	۲۶	تابلوی سوّم
S_1	۰	۰	۰	۱	۸	−۶/۵	۰	
X_2	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۳	
X_1	۰	۱	۰	۰	−۲	۱/۵	۲	
Z_0	۱	۰	۰	۱/۴	۰	۱/۲	۲۶	تابلوی چهارم
S_2	۰	۰	۰	۱/۸	۱	−۳/۲۰	۰	
X_2	۰	۰	۱	−۱/۸	۰	۳/۲۰	۳	
X_1	۰	۱	۰	۱/۴	۰	−۱/۱۰	۲	

جواب بهینه ($x_1 = ۲$ و $x_2 = ۳$) و $Z^* = ۲۶$ است.

در تابلوی دوّم جدول ۴.۳۳ مشاهده می‌شود که هم متغیر S_1 و هم متغیر S_3 دارای حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست به ستون لولا (یعنی هر دو مساوی ۲ شده است) هستند. بنابراین هم می‌توان x_1 را جایگزین S_1 کرد و هم جایگزین S_3. در این مثال به دلخواه عمل شده است و x_1 به جای S_3 آمده است. طبق تعریف باید در تابلوی بعدی انتظار داشت، در سمت راست تابلو مقدار صفر پیدا شود (البته چنین شده است، مقدار سمت راست S_1 را مشاهده کنید). بنابراین تابلوی سیمپلکس وارد یک گوشهٔ تبهگن شده است. این گوشه همان گوشه B در شکل ۴.۱۴ می‌باشد.

بررسی تابلوی سوّم نشان می‌دهد که شرط بهینگی برقرار نیست. براین اساس تابلو را ادامه داده‌ایم تا به تابلوی چهارم سیمپلکس رسیده‌ایم. تابلوی چهارم یک تابلوی بهینه است. ولی انتقال از تابلوی سوّم به تابلوی چهارم، هیچ تأثیری بر مقادیر x_1، x_2، حتی Z نداشته است. با این توصیف تابلوی چهارم نیز بیانگر گوشه B می‌باشد. در این گوشه، جواب بهینه تبهگن

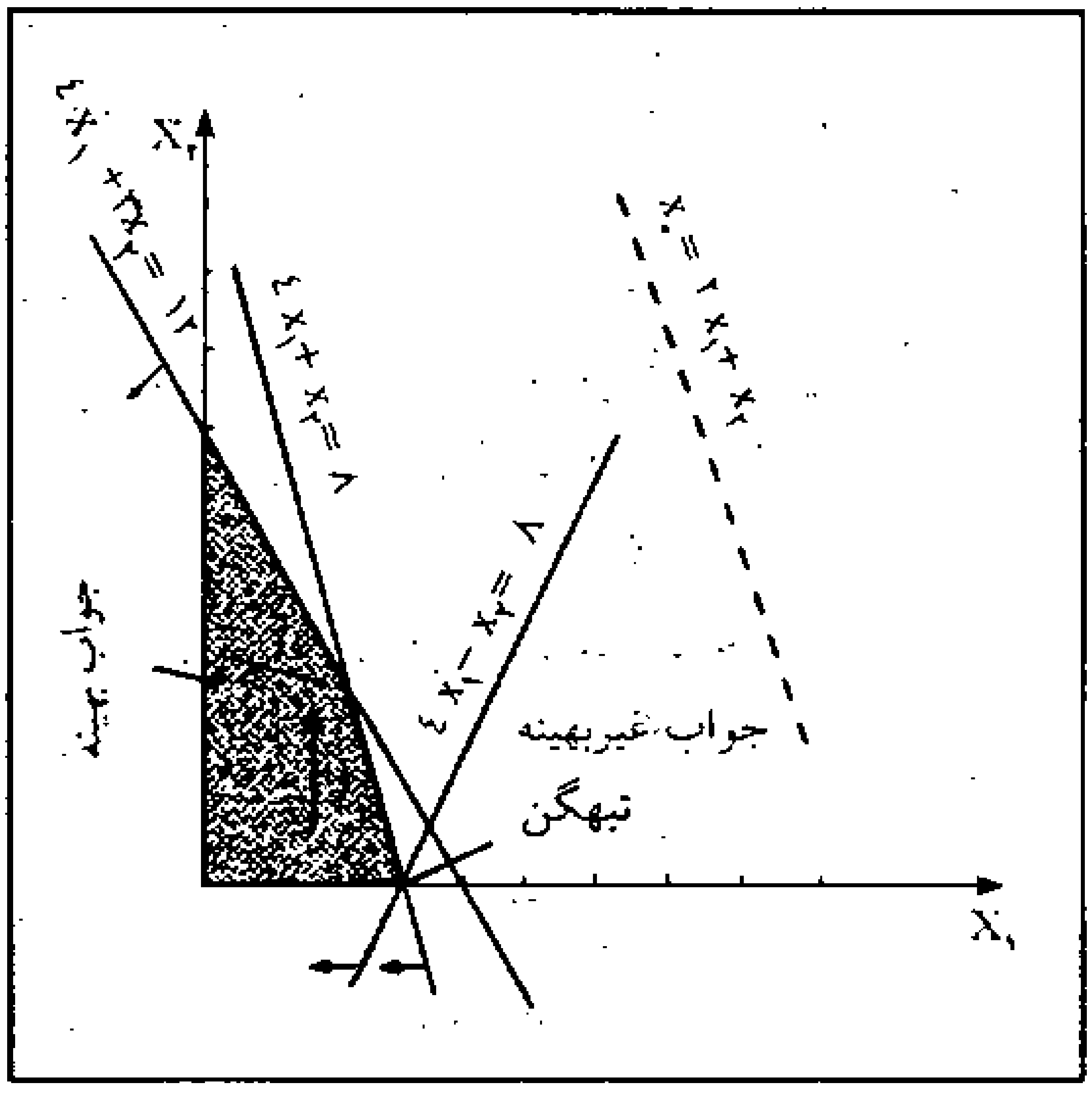
حاصل شده است. پس هم تابلوی سوّم و هم تابلوی چهارم بیانگر گوشه B هستند. اکنون این سؤال پیش می‌آید، اگر چنین است، پس چرا نمی‌توان در تکراری که جواب تبهگن برای اولین بار ظاهر می‌شود توقف نمود؟ جواب این سؤال این است که نمی‌توان مطمئن بود که پیدایش اولین جواب تبهگن به معنای رسیدن به جواب بهینه است. به عبارت دیگر ممکن است، مسأله «موقتاً» تبهگن باشد. باید آنقدر سیمپلکس را ادامه داد که به شرط بهینگی رسید. این نکته به خوبی در مثال ۴.۱۵ و شکل ۴.۱۵ مشاهده می‌شود.

مثال ۴.۱۵ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۲x_۱ + x_۲$$

s.t:

$$۴x_۱ + ۳x_۲ \leq ۱۲$$
$$۴x_۱ + x_۲ \leq ۸$$
$$۴x_۱ - x_۲ \leq ۸$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$



شکل ۴.۱۵ نمایش هندسی جواب غیربهینه تبهگن

روش حل به طریق سیمپلکس (جدول ۴.۳۴) نشان می‌دهد که از مبدأ مختصات (O) به یک گوشهٔ تبهگن انتقال خواهیم یافت. تابلوی دوّم نشان‌دهندهٔ این واقعیت است. در حالی که جواب بهینه که از تابلوی سوّم به دست می‌آید، تبهگن نیست. لذا مسأله فوق موقتاً تبهگن است.

جدول ۴.۳۴ حل مثال ۴.۱۵ به روش سیمپلکس.

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	مقادیرسمت راست	
Z_0	۱	−۲	−۱	۰	۰	۰	۰	تابلوی اوّل
S_1	۰	۴	۳	۱	۰	۰	۱۲	
S_2	۰	۴	۱	۰	۱	۰	۸	
S_3	۰	۴	−۱	۰	۰	۱	۸	
Z_0	۱	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	۴	تابلوی دوّم
S_1	۰	۰	۲	۱	−۱	۰	۴	
X_1	۰	۱	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	۲	
S_3	۰	۰	−۲	۰	−۱	۱	۰	
Z_0	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	۰	۵	تابلوی سوّم (بهینه)
X_2	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۲	
X_1	۰	۱	۰	$-\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	۰	$\frac{۳}{۲}$	
S_3	۰	۰	۰	۱	−۲	۱	۴	

تبهگنی در این حالت برطرف شده است. چون در تابلوی سوّم دیگر در مقادیر سمت راست صفر دیده نمی‌شود. جدول ۴.۳۴، تکرارهای سیمپلکس را برای مثال ۴.۱۵ نشان می‌دهد.

جواب ترسیمی این مدل در شکل ۴.۱۵ نشان می‌دهد که، جواب حاصل از تابلوی اوّل مربوط به مبدأ مختصات $(x_2 = ۰, x_1 = ۰)$ است و تابلوی دوّم متناظر با گوشهٔ تبهگن $(x_2 = ۰, x_1 = ۲)$ می‌باشد. تابلوی بهینه براساس گوشهٔ بهینه $(x_2 = ۲, x_1 = \frac{۳}{۲})$ تعریف شده است. بنابراین جواب بهینهٔ مدل در حالت گسترده عبارتست از:

$$(x_1 = \frac{۳}{۲},\quad x_2 = ۲,\quad S_1 = ۰,\quad S_2 = ۰,\quad S_3 = ۴ \quad و \quad Z^* = ۵)$$

قاعده کلی: «هرگاه در یک تابلوی سیمپلکس، حداقل یکی از متغیرهای اساسی مساوی صفر باشد، گوشهٔ متناظر با آن تابلو تبهگن است. اگر تابلوی بدست آمده بهینه باشد، آن گوشه، گوشهٔ بهینهٔ تبهگن گفته می‌شود و اگر تابلوی حاصل غیربهینه باشد، گوشهٔ متناظر یا از نوع تبهگن موقت است، که تابلوی بعدی سیمپلکس دیگر در سمت راست، صفر نخواهد داشت یا اینکه از نوع بهینهٔ تبهگن است که تابلوی بعدی همچنان دارای مقادیر صفر در سمت راست خواهد بود.»

۴.۱۰ متغیرهای منفی

مدلهای برنامه‌ریزی خطی که تاکنون مورد تحلیل قرار گرفتند، همگی دارای متغیرهای غیرمنفی (≥ ۰) بودند. در مسایل واقعی ممکن است، لزومی نداشته باشد که متغیرها غیرمنفی باشند.

برای مثال موقعی که متغیر تصمیم مسأله نرخ تولید باشد، مقدار منفی آن نشان‌دهندهٔ کاهش نرخ تولید و مقدار مثبت آن نشان‌دهندهٔ افزایش نرخ تولید است.

در روش سیمپلکس، استفاده از متغیر منفی امکان‌پذیر نیست. از این رو هر مسأله‌ای که دارای متغیر منفی باشد، می‌باید به مسأله‌ای با متغیرهای غیرمنفی تبدیل شود. در دو مورد وجود متغیرهای منفی تعادل فرآیند معمول سیمپلکس را بر هم می‌زنند:

۱. متغیرهای آزاد در علامت ۲. متغیرهای منفی با حد معین

۴.۱۰.۱ متغیرهای آزاد در علامت:

متغیرهایی که می‌توانند هر مقدار منفی، مثبت یا صفر داشته باشند به متغیرهای آزاد در علامت معروف هستند. برای استفاده از روش سیمپلکس در حل مسایل دارای متغیر آزاد در علامت از فرمول زیر برای تبدیل مسأله به فرم مناسب سیمپلکس استفاده می‌شود.

$$\boxed{X_i = X_i' - X_i''}$$

در رابطهٔ فوق دو متغیر غیرمنفی X_i'' و X_i' جایگزین متغیر آزاد در علامت X_i شده‌اند. با تغییر متغیر X_i، کل مدل براساس $X_i' - X_i''$ تنظیم شده و سپس مراحل معمول سیمپلکس اجرا می‌شود. مثال ۴.۱۶ چگونگی حل مسائل با متغیر آزاد در علامت را نشان می‌دهد. در این مثال X_1 آزاد در علامت است.

مثال ۴.۱۶ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۹x_1 + ۱۸x_2$$

s.t:

$$۶x_1 + ۳x_2 \geq ۱۸$$
$$۲x_1 + ۲x_2 \leq ۱۶$$
$$x_2 \geq ۰, x_1 \text{ آزاد در علامت}$$

با جایگزین کردن $x_1' - x_1''$ به جای x_1 این مسأله به فرم مناسب تبدیل می‌شود:

$$\text{Max } Z = ۹(x_1' - x_1'') + ۱۸x_2$$

s.t:

$$۶(x_1' - x_1'') + ۳x_2 \geq ۱۸$$
$$۲(x_1' - x_1'') + ۲x_2 \leq ۱۶$$
$$x_1', x_1'', x_2 \geq ۰$$

با تبدیل محدودیتهای نامعادله به محدودیتهای تساوی (=) مسأله استاندارد زیر بدست می‌آید.

$$\text{Max } Z = ۹x_۱' - ۹x_۱'' + ۱۸x_۲ + ۰S_۱ + ۰S_۲ - MR_۱$$

s.t:

$$۶x_۱' - ۶x_۱'' + ۳x_۲ - S_۱ + R_۱ = ۱۸$$
$$۲x_۱' - ۲x_۱'' + ۲x_۲ + S_۲ = ۱۶$$
$$x_۱', x_۱'', x_۲, S_۱, S_۲, R_۱ \geq ۰$$

حل مدل فوق با استفاده از روش سیمپلکس در جدول ۴.۳۵ آمده است.

روش حل مدل تغییر متغیر یافته مثال ۴.۱۶، روش M بزرگ است. عنایت دارید که در جدول ۴.۳۵ با تابلوی اوّل، سیمپلکس آغاز شده است. به عبارت دیگر از قید کردن تابلوی مقدماتی خودداری شده است و ضمن عملیات ردیفی سطر صفر $(Z_۰)$ برای متغیرهای اساسی به عدد صفر تبدیل شده است. تابلوی چهارم جدول ۴.۳۵ نشان می‌دهد که جواب بهینه عبارتست از: $(x_۱' = ۰, x_۱'' = ۲, x_۲ = ۱۰, S_۱ = ۰, R_۱ = ۰, S_۲ = ۰)$ و $Z^* = ۱۶۲$ می‌باشد.

برای تعیین متغیرهای اصلی مسأله مثال ۴.۱۶، مجدداً متغیرها را به فرم اصلی

جدول ۴.۳۵ حل مثال ۴.۱۶ به روش سیمپلکس

متغیرهای اساسی	Z	$x_۱'$	$x_۱''$	$x_۲$	$S_۱$	$R_۱$	$S_۲$	مقادیر سمت راست	
$Z_۰$	۱	$-۹-۶M$	$۹+۶M$	$-۱۸-۳M$	M	۰	۰	$-۱۸M$	تابلوی
$R_۱$	۰	۶	-۶	۳	-۱	۱	۰	۱۸	اوّل
$S_۲$	۰	۲	-۲	۲	۰	۰	۱	۱۶	
$Z_۰$	۱	۰	۰	$-\frac{۲۷}{۲}$	$-\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۲}+M$	۰	۲۷	تابلوی
X'	۰	۱	-۱	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	۰	۳	دوّم
$S_۲$	۰	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	۱	۱۰	
$Z_۰$	۱	۲۷	-۲۷	۰	-۶	$۶+M$	۰	۱۰۸	تابلوی
$X_۲$	۰	۲	-۲	۱	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۰	۶	سوّم
$S_۲$	۰	-۲	۲	۰	$\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۲}{۳}$	۱	۴	
$Z_۰$	۱	۰	۰	۰	۳	$-۳+M$	$\frac{۲۷}{۲}$	۱۶۲	تابلوی
$X_۲$	۰	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	۱	۱۰	چهارم
$X_۱''$	۰	-۱	۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	۲	(بهینه)

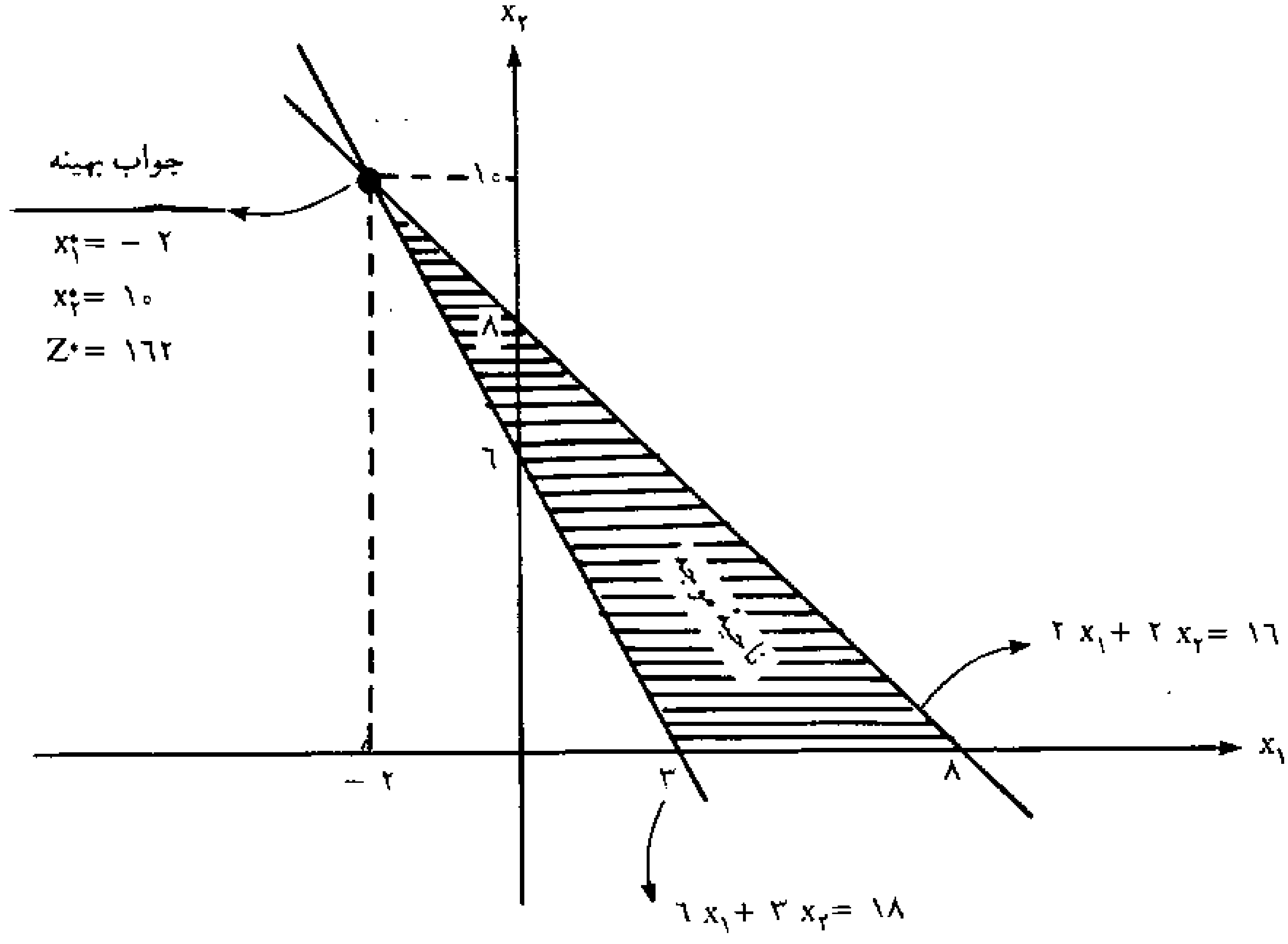
برمی‌گردانیم. داشتیم:

$$x_1 = x'_1 - x''_1$$

در نتیجه:

$$x_1 = 0 - 2 = -2$$

بنابراین گوشه بهینه $(x_1 = -2, x_2 = 10)$ خواهد بود که مقدار $Z^* = 162$. شکل ۴.۱۶ نمایش هندسی مسأله ۴.۱۶ است. همچنان که شکل نشان می‌دهد برخلاف مدلهای بیان شده در بخشهای قبلی، ناحیه موجه شامل بخشی از ربع دوّم دستگاه مختصات است. این امر ناشی از آزاد در علامت بودن x_1 است.



شکل ۴.۱۶ نمایش هندسی مدل با قید آزاد در علامت x_1

روش سیمپلکس، حرکت را از مبدأ مختصات (تابلوی اوّل) آغاز کرده و به گوشهٔ $(x_1 = 3, x_2 = 0)$ انتقال یافته است. در تابلوی سوّم، به گوشهٔ $(x_1 = 0, x_2 = 6)$ حرکت انجام گرفته است. سپس در تابلوی بهینه (تابلوی چهارم) گوشهٔ بهینه حصول یافته است. توجه دارید که چون مبدأ مختصات جزء ناحیه موجه اصلی مسأله نیست، با استفاده از متغیر مصنوعی R_1، ناحیه موجه به طور مصنوعی آنقدر بزرگ شده است که مبدأ مختصات برای شروع روش سیمپلکس جزء ناحیه موجه محسوب شود. در تابلوی دوّم که به گوشهٔ موجه رسیده‌ایم، R_1 از متغیرهای اساسی خارج شده است.

۴.۱۰.۲ متغیرهای با حد پایین منفی
مورد دیگری که متغیرها می‌توانند منفی باشند، وجود یک حد پایین منفی است. مثلاً $x_1 \geq -20$ یک متغیر حد پایین ۲۰ ـ است. این بدین معنی است که x_1 علاوه بر مقادیر بزرگتر مساوی صفر می‌تواند مقدار منفی تا ۲۰ ـ داشته باشد. این مورد نیز دقیقاً مشابه متغیرهای آزاد در علامت است با این تفاوت که مقدار ثابت ۲۰ جایگزین x_1'' شده است. داشتیم که:

$$x_1 = x_1' - x_1''$$

پس می‌توان نوشت:

$$x_1 = x_1' - 20$$
$$x_1' \geq 0$$

و با جایگزین کردن تعریف جدید x_1 در مدل، مسأله را به فرم مناسب روش سیمپلکس درآورد. ممکن است، تصور شود که می‌توان محدودیت مثال را به فرم $x_1 \leq 20$ ـ تبدیل کرد ولی این عمل امکان‌پذیر نیست، چراکه در روش سیمپلکس وجود مقدار منفی برای هیچ متغیری قابل قبول نیست. یعنی باید قید آزاد در علامت بودن x_1 را در مدل با تعریف جدید محدودیت در نظر گرفت که مجدداً ما را به تغییر متغیر x_1 مجبور می‌سازد.

۴.۱۱ خلاصه فصل چهارم
روش هندسی معمولاً برای حل مدلهای ساده و دو متغیره کارآیی دارد. در این فصل با یکی از مهمترین فنون حل LP آشنا شدیم که «روش سیمپلکس» نام دارد. علاوه بر تشریح روش سیمپلکس در حالت استاندارد، چگونگی حل مدلهای غیراستاندارد با استفاده از این روش نیز بیان شد. از مهمترین روشهای سیمپلکس می‌توان به روش «M بزرگ» و «دو مرحله‌ای» اشاره کرد.

در نهایت چگونگی تشخیص موارد خاص برنامه‌ریزی خطی با استفاده از تابلوی نهایی سیمپلکس بیان شد. از جمله موارد قابل ذکر در این فصل می‌توان به متغیرهای منفی، آزاد در علامت و منفی با حد پایین اشاره کرد.

۴.۱۲ مسائل فصل
۴.۱۲.۱ سؤالات تکمیلی و چهارگزینه‌ای
۱. متغیرهایی که نامعادلات را به معادله تبدیل می‌کنند، متغیرهای . . . . نامیده می‌شوند.

۲. اضافه کردن متغیر مصنوعی (R) به محدودیت، موجب . . . . منطقه موجه می‌گردد.

۳. هر تابلوی سیمپلکس از نظر هندسی، همواره متناظر با یک . . . . است.

۴. اگر یک گوشهٔ موجه، از نظر تابع هدف نسبت به گوشه‌های مجاور خود بهتر باشد، آن گوشه، جواب . . . . است.

۵. در صورتی که یک محدودیت نیازی به متغیر کمکی (S) نداشته باشد، آن محدودیت یک محدودیت . . . . است.

۶. اگر متغیر خروجی مطابق با قاعدهٔ «حداقل نسبت اعداد سمت راست بر مقادیر مثبت ستون لولا نباشد»، حداقل یک متغیر اساسی در تابلوی بعد . . . . خواهد شد.

۷. محدودیتی به عنوان محدودیت فعال (الزام‌آور) تلقی می‌شود که از میان گوشه‌ای که جواب . . . . بر روی آن قرار دارد، عبور کند.

۸. برای تبدیل یک محدودیت کوچکتر مساوی (≤) به تساوی (=) باید از متغیر . . . . . . استفاده کرد.

۹. هر یک از متغیرهای کمبود و مازاد را متغیر . . . . گویند.

۱۰. برای تبدیل تابع هدف Min به تابع هدف Max باید طرفین معادله را در . . . . ضرب کرد.

۱۱. در جواب موجه اساسی، متغیرهای مساوی صفر را متغیر . . . . گویند.

۱۲. در صورتی که کلیهٔ متغیرهای مصنوعی غیراساسی شوند، تابلوی سیمپلکس متناظر با یک گوشه . . . . شده است.

۱۳. کدامیک از متغیرهای زیر می‌تواند متغیر کمکی تلقی شود؟

الف) متغیر تصمیم　　ب) متغیر مازاد

ج) متغیر کمبود　　د) (ب و ج)

۱۴. اگر در یک نقطه، m متغیر مقدار بزرگتر از صفر داشته باشند و n متغیر مقدار صفر، آن جواب: (توجه: تعداد کل متغیرهای مدل m + n است)

الف) موجه اساسی است.　　ب) موجه غیراساسی است.

ج) غیرموجه است.　　د) غیراساسی است.

۱۵. شروع روش سیمپلکس، همواره از:

الف) یک گوشهٔ غیرموجه است.　　ب) مبدأ مختصات است.

ج) یک جواب موجه غیرگوشه‌ای است.　د) یک جواب غیر موجه غیر گوشه‌ای است.

۱۶. در روش سیمپلکس، متغیر خروجی، متغیری است که دارای؛

الف) حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر منفی ستون لولا باشد.

ب) حداکثر حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر مثبت ستون لولا باشد.

ج) حداکثر حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر منفی ستون لولا باشد.

د) حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر مثبت ستون لولا باشد.

۱۷. اگر در یک تابلوی سیمپلکس، حداقل یکی از متغیرهای اساسی، مصنوعی با مقدار بزرگتر از صفر باشد، گوشهٔ متناظر با آن تابلو حتماً یک گوشهٔ:

الف) موجه است. ب) بهینه است.

ج) غیرموجه است. د) تبهگن است.

۱۸. اگر تابلوی بهینه سیمپلکس مدل دارای مقدار صفر برای یک متغیر غیراساسی در سطر صفر باشد، آن مدل حتماً دارای حالت خاص:

الف) بهینه چندگانه است. ب) فاقد ناحیه جواب است.

ج) تبهگن است. د) ناحیه جواب بیکران است.

۱۹. کدامیک از گزینه‌های زیر جایگزین محدودیت $x \geq -۱۰$ است؟

الف) $x = -۱۰$ ب) $x = x' - ۱۰$ آزاد در علامت x'

ج) $-x' \leq ۱۰$ د) $x = x' - ۱۰$

$x' \geq ۰$

۲۰. مدل زیر داده شده است:

$$\text{Max } Z = ۳x_۱ + x_۲$$

s.t:

$$x_۱ + x_۲ \leq ۱۰۰$$

$x_۱ \geq ۰$, $x_۲$ آزاد در علامت

مدل جایگزین کدام است؟

الف)

$$\text{Max } Z = ۳x_۱ + x'_۲ - x''_۲$$

s.t:

$$x_۱ + x_۲ \leq ۱۰۰$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

ب)

$$\text{Max } Z = ۳x'_۱ - ۳x''_۱ + x_۲$$

s.t:

$$x'_۱ - x''_۱ + x_۲ \leq ۱۰۰$$

$$x'_۱, x''_۱, x_۲ \geq ۰$$

ج)

$$\text{Max } Z = ۳x_۱ + x'_۲ - x''_۲$$

s.t:

$$x_۱ + x'_۲ - x''_۲ \leq ۱۰۰$$

$$x_۱, x'_۲, x''_۲ \geq ۰$$

د)

$$\text{Max } Z = ۳x_۱ + x_۲$$

s.t:

$$x_۱ + x'_۲ - x''_۲ \leq ۱۰۰$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

۲۱. مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۱۶x_۱ + ۲x_۲$$

s.t:

$$۲x_۱ - x_۲ \leq ۲$$
$$x_۱ \leq ۴$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

کدام گزینه صحیح است؟

الف) منطقه موجه یک نقطه است.　　ب) جواب بهینه چندگانه دارد.

ج) منطقه موجه نامحدود است.　　د) فاقد جواب موجه

۲۲. تعداد متغیرهای کمکی برای مسأله زیر چقدر است؟

$$\text{Min } Z = ۲x_۱ + ۵x_۲ + ۳x_۳$$

s.t:

$$۲x_۱ + x_۳ \leq ۲$$
$$x_۲ + x_۳ \geq ۵$$
$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۰$$
$$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$$

الف) ۳

ب) ۲

ج) ۱

د) ۴

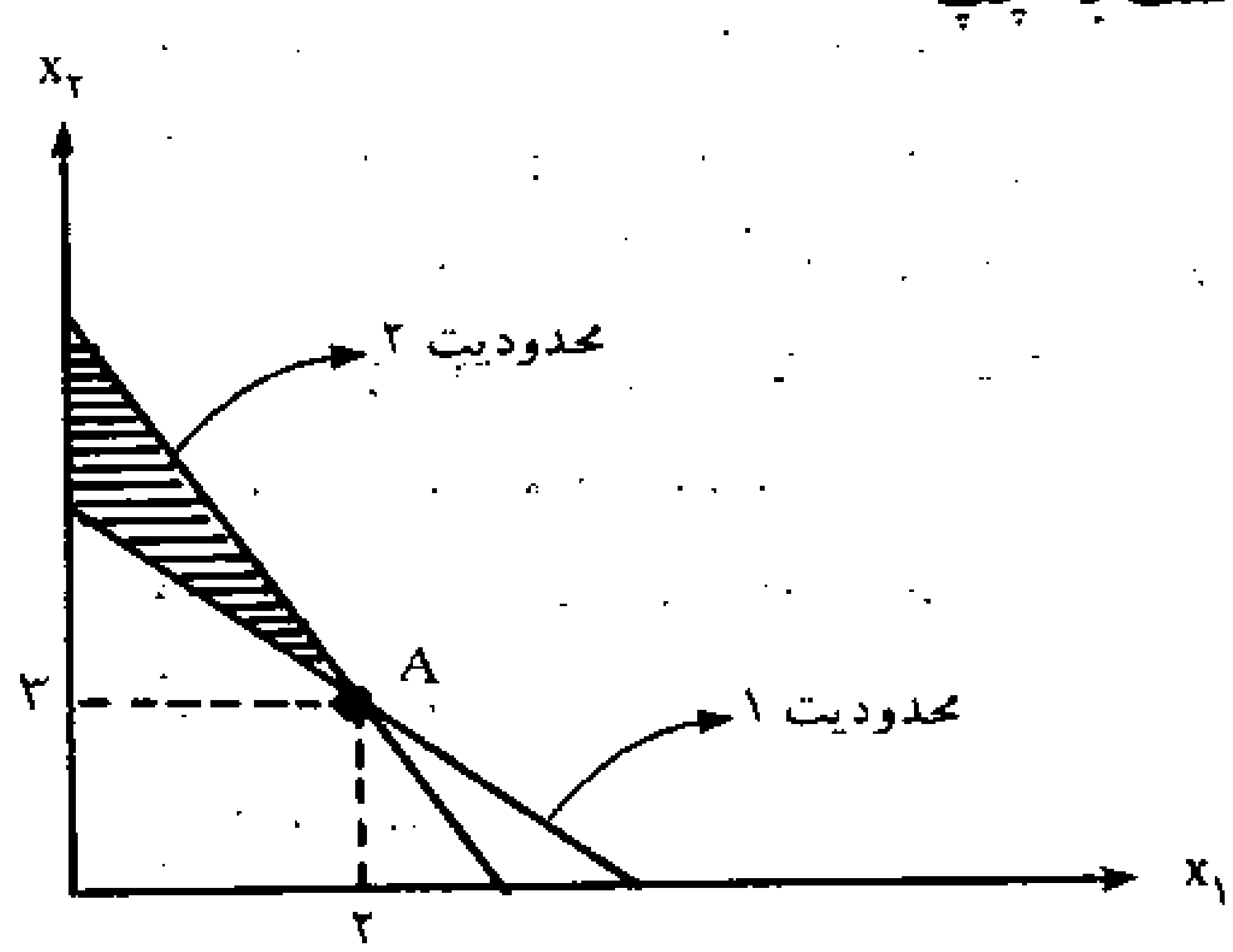
۲۳. منطقه موجه یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر مشخص شده است. در گوشهٔ A مقدار متغیرهای کمکی ($S_۱$ و $S_۲$) به ترتیب از راست به چپ چقدر است؟

الف) (۰, ۰)

ب) (۱, ۰)

ج) (۰, ۱)

د) (۱, ۱)



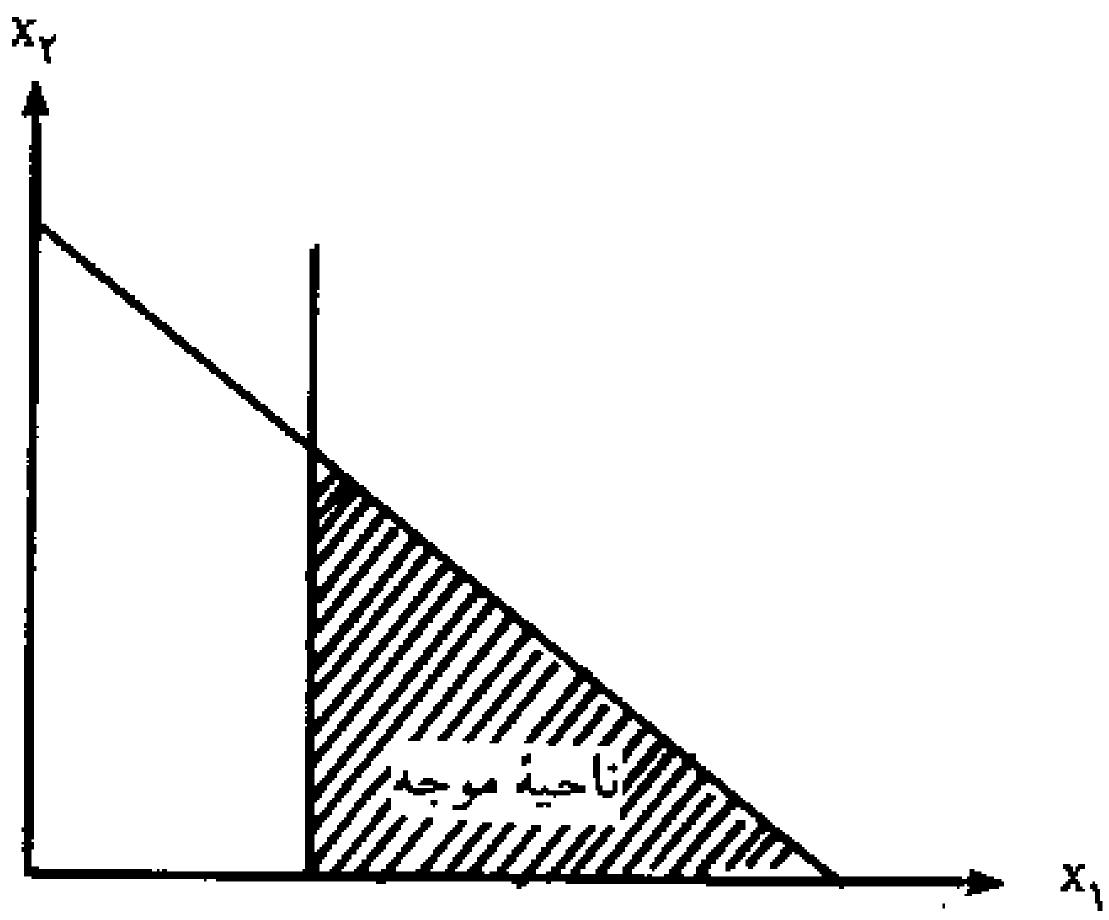
۲۴. برای حل مسأله زیر به روش simplex بـه چند متغیر مصنوعی نیاز است؟

الف) ۱

ب) ۲

ج) ۳

د) صفر



۲۵. یک مسأله برنامه‌ریزی خطی دارای ۱۰ متغیر تصمیم، ۸ متغیر کمکی، ۳ متغیر مصنوعی و ۹ محدودیت است. تعداد متغیرهای اساسی این مسأله در تابلوی سیمپلکس چند تا است؟

الف) ۳ | ب) ۸

ج) ۹ | د) ۱۰

۲۶. تعداد تکرارهای سیمپلکس در روش M بزرگ در مقایسه با روش سیمپلکس دو مرحله‌ای همواره:

الف) کمتر است. | ب) بیشتر است.

ج) متفاوت است. | د) مساوی است.

۲۷. انتقال از یک تابلوی سیمپلکس به تابلوی بعدی به معنای انتقال از یک جواب:

الف) غیر گوشه به جواب گوشه است. | ب) غیر گوشه به جواب غیر گوشه است.

ج) گوشه به جواب غیر گوشه است. | د) گوشه به جواب گوشه است.

۲۸. در یک تابلوی سیمپلکس متغیر ورودی وجود دارد ولی تمامی عناصر ستون لولا غیرمثبت هستند، حتماً مدل برنامه‌ریزی خطی مربوطه:

الف) دارای جواب بهینه چندگانه است. | ب) دارای ناحیه جواب بیکران است.

ج) فاقد ناحیه موجه است. | د) دارای جواب تبهگن است.

۲۹. در روش سیمپلکس دو مرحله‌ای همواره عنصر لولا:

الف) منفی است. | ب) مثبت است.

ج) صفر است. | د) کوچکتر مساوی صفر است.

۳۰. مسأله LP زیر داده شده است. مقدار Z^* در گوشهٔ بهینه چقدر است؟

$$\text{Max } Z = ۱۰x_۱ - x_۲ + ۵x_۳ - ۳x_۴ + x_۵$$

s.t:

$$۳x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ + x_۴ + \frac{۱}{۳}x_۵ \leq ۹۰$$

$$x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵ \geq ۰$$

الف) ۹۰۰
ب) ۲۷۰
ج) ۳۰۰
د) ۴۵۰

۳۱. در روش سیمپلکس دو مرحله‌ای، تابلوی نهایی مرحله I (با فرض محدود بودن ناحیه موجه) بیانگر یک گوشهٔ:

الف) لزوماً بهینه
ب) غیرموجه
ج) موجه
د) مبدأ مختصات

۳۲. تابلوی نهایی یک مسأله LP به صورت زیر است: کدام گزینه صحیح است؟

متغیرهای اساسی	Z	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$R_۲$	مقادیرسمت راست
$Z_۰$	۱	۱	۰	$M+۳$	M	۰	$۳۰ - ۱۰M$
$X_۲$	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۱۰
$R_۲$	۰	۰	۰	-۱	-۱	۱	۲۰

الف) مدل دارای جواب بهینه جایگزین است.
ب) مدل فاقد ناحیه جواب است.
ج) مدل دارای ناحیه جواب بیکران است.
د) مدل دارای جواب تبهگن است.

۳۳. تابلوی نهایی یک مسأله LP به صورت زیر است. کدام گزینه صحیح است؟

الف) مدل دارای جواب بهینه چندگانه است.
ب) مدل دارای جواب بهینه تبهگن است.
ج) مدل فاقد ناحیه موجه است.
د) مدل دارای ناحیه جواب بیکران است.

متغیرهای اساسی	Z	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	مقادیرسمت راست
$Z_۰$	۱	۰	۰	۲	۰	۴۲
$X_۲$	۰	۰	۱	$\frac{۷}{۴۵}$	$-\frac{۲}{۴۵}$	$\frac{۷}{۳}$
$X_۱$	۰	۱	۰	$-\frac{۲}{۴۵}$	$\frac{۷}{۴۵}$	$\frac{۷}{۳}$

۳۴. تابع هدف مرحله I مدل زیر در روش دو مرحله‌ای سیمپلکس کدام است؟

$$\text{Max } Z = 5x_1 - 6x_2$$

s.t:

$$x_1 + 5x_2 \geq 15$$
$$x_1 + x_2 = 5$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الف) $\text{Min } R_0 = R_1$

ب) $\text{Min } R_0 = R_1 + R_2$

ج) $\text{Min } R_0 = R_1 + R_2 + R_3$

د) $\text{Max } R_0 = R_1 + R_2 + R_3$

۳۵. تابلوی سیمپلکس زیر را در نظر بگیرید. تعداد محدودیتهای مساوی (=) در مدل آن چند تا است؟ (هیچ متغیری از تابلوی زیر حذف نشده است).

الف) ۱　　ب) ۲

ج) ۳　　د) هیچ

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	مقادیرسمت راست
Z_0	۱	۰	۱۰	۰	۰	۲	۱	۲۴۰
X_1	۰	۱	۱	۰	۰	۰	$\frac{1}{6}$	۲۰
X_3	۰	۰	$\frac{1}{3}$	۱	۰	$-\frac{1}{6}$	۰	۱۰
S_1	۰	۰	$\frac{1}{3}$	۰	۱	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	۱۰

۴.۱۲.۲ تمرینات

۱. تابلوی سیمپلکس زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات موردنظر پاسخ دهید؟

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	مقادیرسمت راست
Z_0	۱	۰	۰	۱۰	۲	۴	۰	۴۲۰
X_2	۰	۰	۱	-2	۱	$-\frac{1}{2}$	۰	۱۰
X_1	۰	۱	۰	۲	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۴۰
S_3	۰	۰	۰	۸	-3	$\frac{3}{2}$	۱	۳۰

الف) تابلوی فوق چگونه تابلویی از روش سیمپلکس است؟ چرا؟

ب) متغیرهای غیراساسی را مشخص کنید؟

ج) جواب مربوط به این تابلو را بنویسید؟

د) مدل این تابلوی سیمپلکس دارای چند محدودیت است؟

ه) اگر هیچ متغیری از مدل حذف نشده باشد. تعداد محدودیتهای مساوی مدل را بنویسید؟

و) اگر هیچ متغیری از مدل حذف نشده باشد، تعداد محدودیتهای کوچکتر مساوی مدل را بنویسید؟

۲. تابلوی سیمپلکس زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات موردنظر پاسخ دهید؟ (تابلوی داده شده بیانگر تمام متغیرهای مورد استفاده در حل مدل LP است):

متغیرهای اساسی	Z	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	سمت راست
$Z_۰$	۱	۰	۰	$\frac{۵}{۲}$	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۳۰
$X_۲$	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	۰	۰	۱۰
$S_۲$	۰	۰	۰	$-\frac{۳}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۲۰
$X_۱$	۰	۱	۰	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱۰

الف) تعداد محدودیتهای مدل را بنویسید؟

ب) چند تا از محدودیتهای مدل به صورت مساوی است؟ چرا؟

ج) مدل LP مربوط به این تابلو چه حالت خاصی از LP است؟ چرا؟

د) با توجه به جواب بند ج، جواب جایگزین را بدست آورید؟

۳. جواب بهینهٔ مدل LP زیر را با استفاده از روش ترسیمی و سیمپلکس بدست آورید؟

$\text{Max } Z = ۴x_۱ + ۵x_۲$

s.t:

$$x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۰$$
$$۶x_۱ + ۶x_۲ \leq ۳۶$$
$$x_۱ \leq ۴$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

۴. مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

s.t:

$$x_1 + x_2 \geq 3$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الف) جواب بهینهٔ مدل را به روش ترسیمی بدست آورید؟

ب) جواب بهینهٔ مدل را به روش M بزرگ بدست آورید؟

ج) مسیر حرکت سیمپلکس را بر روی شکل بند الف مشخص کنید؟

د) جواب بهینهٔ مدل را به روش سیمپلکس دو مرحله‌ای بدست آورید؟

۵. مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

الف) مسأله را به روش ترسیمی حل کنید؟

ب) مدل را به روش سیمپلکس حل کنید؟

$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2$$

s.t:

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_2 \geq 2$$
$$x_1 \geq 0$$

۶. مسأله زیر را در نظر بگیرید. مسأله را به روش M بزرگ حل کرده و مشخص کنید که چه حالت خاصی از برنامه‌ریزی خطی است؟ چرا؟

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

s.t:

$$x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1 + x_2 \geq 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

۷. مسأله زیر را در نظر بگیرید. مسأله را به روش سیمپلکس دو مرحله‌ای حل کنید و

گوشه‌های مربوط به هر تابلوی سیمپلکس را به طریق هندسی نمایش دهید؟

$$\text{Min } Z = x_1 - 2x_2$$

s.t:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2 \\ -x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

۸. مدلهای زیر را با استفاده از روش M بزرگ حل کنید؟

الف)

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

s.t:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

ب)

$$\text{Min } Z = -3x_1 + x_2 + x_3$$

s.t:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 3 \\ -2x_1 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

ج)

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$

s.t:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 20 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

۹. مدلهای زیر را با استفاده از روش سیمپلکس دو مرحله‌ای حل کنید؟

الف)

$$\text{Min } Z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

s.t:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 10 \\ x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

ب)

$$\text{Min } Z = -x_1 + 2x_2 - x_3$$

s.t:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

۱۰. مدلهای برنامه‌ریزی خطی زیر را حل کنید (روش هندسی و سیمپلکس) و نوع خاص آنها را مشخص کنید؟

الف)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 9x_2$$

s.t:

$$x_1 + 4x_2 \le 8$$
$$x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

ب)

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

s.t:

$$x_1 - x_2 \le 10$$
$$2x_1 - x_2 \le 40$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

ج)

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 14x_2$$

s.t:

$$2x_1 + 7x_2 \le 21$$
$$7x_1 + 2x_2 \le 21$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

د)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2$$

s.t:

$$2x_1 + x_2 \le 2$$
$$3x_1 + 4x_2 \ge 12$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

۴.۱۳ پاسخنامه سؤالات تکمیلی و چهارگزینه‌ای

۱. کمکی	۲. بزرگتر شدن	۳. گوشه	۴. بهینه
۵. مساوی	۶. منفی	۷. بهینه	۸. کمبود (کمکی)
۹. کمکی	۱۰. منهای یک (۱ −)	۱۱. غیراساسی	۱۲. موجه
۱۳. د	۱۴. الف	۱۵. ب	۱۶. د
۱۷. ج	۱۸. الف	۱۹. د	۲۰. ج
۲۱. ج	۲۲. ب	۲۳. الف	۲۴. الف
۲۵. ج	۲۶. د	۲۷. د	۲۸. ب
۲۹. ب	۳۰. د	۳۱. ج	۳۲. ب
۳۳. الف	۳۴. ب	۳۵. د	

فصل پنجم

برنامه‌ریزی خطی

(تحلیل عناصر تابلوی سیمپلکس و مسأله ثانویه)[1]

اهداف فصل

دانشجویان در این فصل نحوهٔ تفسیر عناصر تابلوی سیمپلکس را فرا خواهند گرفت. همچنین با مفاهیم «قیمت سایه» و برنامه ثانویه آشنا می‌شوند و یکی از فنون حل برنامه‌ریزی خطی را تحت عنوان «سیمپلکس ثانویه» فرا می‌گیرند.

۵.۱ مقدمه

تابلوی بدست آمده از روش سیمپلکس، دارای اطلاعات مفیدی است که تا حدودی با برخی از آنها در فصل چهارم آشنا شدید. در این بخش اختصاصاً به تحلیل هر یک عناصر تابلوی سیمپلکس در قالب یک مسأله تولیدی خواهیم پرداخت. سپس با استفاده از مفاهیم بیان شده به تعریف «مسأله ثانویه»[2] خواهیم پرداخت.

اصطلاح ثانویه، به این واقعیت اشاره دارد که هر مسأله برنامه‌ریزی خطی دارای دو فرم است. «فرم اولیه (اصلی)»[3] و فرم دوّم که «ثانویه»[4] نامیده می‌شود. برای هر جواب اولیه یک جواب ثانویه متناظر وجود دارد. بنابراین می‌توان انتظار داشت که خواص و ویژگیهای یک

---

1. Dual Problem

۲. Dual Problem ، در برخی از متون از واژه‌های، دوگان، مزدوج، همتا و همزاد به جای ثانویه استفاده می‌شود.

3. Primal Problem

4. Dual

مسأله اولیه شدیداً به خصوصیات. مسأله دیگر (ثانویه) ارتباط داشته باشد. جواب بهینهٔ شکل اولیه مسأله دارای اطلاعات کاملی درباره جواب شکل ثانویه مسأله است.

جواب مسأله ثانویه، ارائه‌کننده اطلاعات بااهمیتی است. با استفاده از این اطلاعات می‌توان پارامترهای مسأله برنامه‌ریزی خطی را تفسیر و تعبیر کرد. از اینرو، مسأله ثانویه اطلاعاتی درباره ارزش منابع در اختیار مدیر قرار می‌دهد. این اطلاعات به مدیر در اتخاذ تصمیم راجع به استفاده از منابع اضافی کمک می‌کند.

۵.۲ تحلیل عناصر تابلوی سیمپلکس

مفاهیم اقتصادی عناصر تابلوی سیمپلکس در مباحث مربوط به فصل چهارم تا حدودی بیان شد. در این بخش ضمن مرور مباحث گذشته، مفاهیم به نحو روشنتری بازگو خواهند شد. بدین منظور به طرح مسأله ترکیب تولید که در فصول قبل نیز مورد استفاده بود می‌پردازیم.

مثال ۵.۱ یک شرکت تولید در صدد تولید سه نوع محصول مختلف است. برای تولید هر یک از محصولات به نیروی کار (نفر / ساعت) و مواد اولیه (kg) نیاز دارد. جدول زیر منابع موجود، میزان مصرف هر واحد محصول از منابع و سود حاصل از تولید هر واحد از محصولات را نشان می‌دهد.

جدول ۵.۱ اطلاعات مربوط به مسأله تولید

منابع مورد نیاز	محصولات			منابع موجود
	۱	۲	۳	
نیروی کار (نفر ـ ساعت)	۲	۲	۱	۴۳۰
مواد اولیه (kg)	۳	۱	۲	۴۶۰
سود حاصل از تولید هر واحد	۳	۳	۵	ـ

حال مسأله فوق را می‌توان به صورت زیر فرموله کرد:

تعریف متغیرهای تصمیم: سه متغیر تصمیم این مسأله، مقدار تولید محصول ۱، ۲ و ۳ است. این مقادیر را می‌توان با نمادهای زیر معرفی کرد.

x_1: مقدار تولید محصول ۱

x_2: مقدار تولید محصول ۲

x_3: مقدار تولید محصول ۳

تابع هدف: ترکیب مسأله تولید با کسب حداکثر کردن سود است. یعنی:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

محدودیتهای مسأله: براساس اطلاعات مسأله، می‌توان یک محدودیت برای نیروی کار و محدودیتی برای مواد اولیه تعریف کرد. به صورت زیر:

نیروی کار (نفر / ساعت) $2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$

مواد اولیه (کیلوگرم) $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 460$

علاوه بر محدودیتهای فوق، باید شرط غیرمنفی بودن x_1، x_2، x_3 را نیز به محدودیتها اضافه کرد. چون تولید منفی، معنا و مفهومی ندارد. حال تمامیت مسأله ۵.۱ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

s.t:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 460$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

برای حل مسأله، ابتداء فرم استاندارد (گسترده) آن را می‌نویسیم. بدین منظور از متغیرهای کمکی S_1 و S_2 استفاده خواهیم کرد. پس:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 0S_1 + 0S_2$$

s.t:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 430$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + S_2 = 460$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0$$

حل مدل با استفاده از روش سیمپلکس در جدول ۵.۲ آمده است.

جدول ۵.۲ حل مسأله به روش سیمپلکس

	متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	مقادیرسمت راست
تابلوی	Z_0	۱	-۳	-۳	-۵	۰	۰	۰
اوّل	S_1	۰	۲	۲	۱	۱	۰	۴۳۰
	S_2	۰	۳	۱	۲	۰	۱	۴۶۰
تابلوی	Z_0	۱	$\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	۰	$\frac{5}{2}$	۱۱۵۰
دوّم	S_1	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	۲۰۰
	X_3	۰	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	۰	$\frac{1}{2}$	۲۳۰
تابلوی	Z_0	۱	$\frac{14}{3}$	۰	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{3650}{3}$
سوّم	X_2	۰	$\frac{1}{3}$	۱	۰	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{400}{3}$
(بهینه)	X_3	۰	$\frac{4}{3}$	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{490}{3}$

برای تحلیل عناصر سیمپلکس باید به ستون موردنظر و متغیر معرف سطر مربوط (متغیر اساسی) توجه داشت. مقادیر مثبت در سطری که متغیر اساسی آن متغیر کمکی باشد، به معنای استفاده از آن منبع برای تولید یک واحد از محصولی (افزایش یک واحد متغیر ورودی) است که در بالای ستون این عدد قرار گرفته است و در صورتی که متغیر اساسی مربوط به آن سطر متغیر تصمیم باشد به معنای کاهش آن متغیر اساسی است، که در ازاء افزایش یک واحد از متغیر ورودی صورت می‌پذیرد و برعکس اعداد منفی به معنای افزایش منبع (در مورد متغیر کمکی) و یا افزایش تولید (در مورد متغیر تصمیم) است.

۵.۲.۱ تفسیر عناصر تابلوی اوّل :

عناصر تابلوی اوّل سیمپلکس، همان ضرایب فنی در محدودیتهای کارکردی (a_{ij})، مقادیر سمت راست محدودیتها (b_i) و ضرایب سودآوری هر یک از محصولات در تابع هدف (c_j) برای مثال ۵.۱ می‌باشند. مقادیر سطر صفر تابلوی اوّل بیانگر ضرایب متغیرهای مدل استاندارد در تابع هدف است که جهت استفاده در تابلوی سیمپلکس به سمت چپ معادله هدف انتقال یافته‌اند. یعنی:

$$Z - 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0$$

بنابراین علامت منفی در سطر صفر تابلوی سیمپلکس به معنای افزایش در مقدار Z به اندازهٔ مقدار بیان شده و علامت مثبت به معنای کاهش در تابع هدف است. مقادیر صفر نیز به

معنای عدم تأثیر مثبت و منفی در مقدار تابع هدف (Z) خواهد بود. بنابراین ۳ – و ۵ – به ترتیب بیانگر میزان افزایش در تابع هدف مسأله به ازای تولید هر یک از محصولات نوع ۱، ۲ و یا ۳ هستند. بدیهی است با توجه به اینکه، جواب موجه اساسی با استفاده از متغیرهای کمکی شکل گرفته است، پس گوشهٔ متناظر با تابلوی اوّل بیانگر مبدأ مختصات مدل است و مقدار تابع هدف در این نقطه مساوی صفر ($Z = ۰$) خواهد بود.

مقادیر قید شده در ردیف S_1 و S_2 به ترتیب از چپ به راست برگرفته از مدل استاندارد هستند که با مفاهیم آن به تفصیل در بخشهای مربوط به فصل چهارم آشنا شدیم.

۵.۲.۲ تفسیر عناصر تابلوی دوّم :

برای تفسیر تابلوی دوّم سیمپلکس از مقادیر سمت راست تابلو آغاز خواهیم کرد. بررسیها نشان می‌دهد که به ازای مصرف ۲۳۰ نفر – ساعت از نیروی کار و تمام مواد اولیه (چون S_2 غیراساسی است)، فقط امکان تولید ۲۳۰ واحد از محصول نوع سوّم وجود دارد. با توجه به تولید x_3، مقدار سود کل مساوی است با:

سود کل ۱۱۵۰ = (سود حاصل از تولید هر واحد x_3) ۵ × (تعداد تولید x_3) ۲۳۰

اعداد ستون x_1 مقادیر $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۲}$ در ستون مربوط به x_1 نشان می‌دهد که برای تولید یک واحد x_1 (پایه‌ای شدن x_1) لازم است که $\frac{۱}{۲}$ از منبع اوّل مصرف شود و میزان تولید x_3 باید $\frac{۳}{۲}$ کاهش یابد. ممکن است این سؤال به ذهن خطور کند که برای تولید هر واحد x_1 براساس مدل اولیه (تابلوی اوّل) باید ۲ نفر – ساعت نیروی انسانی (S_1) مصرف شود، پس چگونه است که در تابلوی دوّم مقدار مصرف نیروی کار برای تولید هر واحد x_1 کاهش یافته است؟! پاسخ این سؤال از آن جا روشن خواهد شد که بدانیم برای تولید x_1 علاوه بر ۲ نفر – ساعت نیروی کار به ۳ کیلوگرم مواد اولیه نیز نیاز داریم. که در تولید x_3 به طور کامل مصرف شده است. بنابراین چنانچه بخواهیم x_1 تولید کنیم، چاره‌ای جزء کاهش تولید x_3 برای آزاد کردن مواد اولیه نداریم. لذا معلوم می‌شود که برای تولید هر واحد x_1 باید $\frac{۳}{۲}$ محصول سوّم کاهش یابد. واضح است که با کاهش تولید هر واحد x_3، یک نفر – ساعت نیروی کار و ۲ کیلوگرم مواد اولیه آزاد می‌شود. با این وجود مازاد بر نیروی کار آزاد شده به ازای کاهش x_3 به اندازه $\frac{۳}{۲}$ باید برای تولید هر واحد x_1، $\frac{۱}{۲}$ نیروی کار نیز از منبع موجود ($S_1 = ۲۰۰$) مصرف شود. یعنی برای تولید هر واحد x_1 خواهیم داشت:

۲ = (میزان مصرف هر واحد x_3 از s_1) ۱ × (کاهش در تولید x_3) $\frac{۳}{۲}$ + (مصرف از منبع موجود s_1) $\frac{۱}{۲}$ = نیروی کار

۳ = (میزان مصرف هر واحد x_3 از مواد اولیه) ۲ × (کاهش در تولید x_3) $\frac{۳}{۲}$ = مواد اولیه

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا تولید x_1 به صرفه هست یا خیر؟ برای پاسخ به این سؤال باید به «تحلیل هزینه ــ منفعت» حاصل از تولید یک واحد x_1، کاهش x_3 به اندازه $\frac{۳}{۲}$ پرداخت. به صورت زیر:

$-\frac{۹}{۲}$ = (سود از دست رفتهٔ ناشی از کاهش x_3) ۵ × (کاهش در تولید x_3) $\frac{۳}{۲}$ - (زیان حاصل از مصرف $\frac{۱}{۲}$ نیروی کار) ۰ - (سود حاصل از تولید هر واحد x_1) ۳

نتیجهٔ تحلیل هزینهٔ منفعت تولید x_1 نشان می‌دهد که با تولید یک واحد x_1، سود کل $\frac{۹}{۲}$ کاهش خواهد یافت. با توجه به قرینه بودن عناصر ضرایب معادله Z در تابلوی سیمپلکس، مقدار $\frac{۹}{۲}$ ذیل x_1 در سطر صفر همان مقدار بدست آمده با تحلیل هزینه منفعت ($-\frac{۹}{۲}$) می‌باشد. بنابراین x_1 نمی‌تواند، متغیر ورودی در این تابلو باشد.

اعداد ستون x_2: اعداد $\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۱}{۲}$ در ذیل ستون x_2 نشان می‌دهد که برای تولید هر واحد x_2 باید مقدار $\frac{۳}{۲}$ از S_1 مصرف کرد و تولید x_3 را $\frac{۱}{۲}$ کاهش داد تا مواد اولیه لازم و همچنین کمبود نیروی کار ($\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}-۲$) فراهم آید. بنابراین می‌توان نیروی کار و مواد اولیه مورد نیاز x_2 را به صورت زیر تأمین کرد:

۲ = (میزان مصرف هر واحد x_3) ۱ × (کاهش در تولید x_3) $\frac{۱}{۲}$ + (مصرف از منبع موجود) $\frac{۳}{۲}$ = نیروی کار

۱ = (میزان مصرف هر واحد x_3) ۲ × (کاهش در تولید x_3) $\frac{۱}{۲}$ = مواد اولیه

ضریب x_2 در سطر صفر تابلوی دوّم مساوی $\frac{۱}{۲}$ ــ است. یعنی اینکه به ازای تولید هر واحد x_2، سود کل شرکت $\frac{۱}{۲}$ افزایش خواهد داشت. بنابراین x_2 شرایط ورود به پایه (اساسی) را دارد. نتایج تحلیل هزینه ــ منفعت x_2 نیز چنین امری را تأیید می‌کند:

$\frac{۱}{۲}$ = (سود از دست رفتهٔ ناشی از کاهش $x_۳$) ۵ × (کاهش در تولید $x_۳$) $\frac{۱}{۲}$ − (زیان حاصل از مصرف $\frac{۳}{۲}$ نیروی کار) ۰ − (سود حاصل از یک واحد $x_۲$) ۳

اعداد ستون $S_۳$: چون منبع مواد اولیه شرکت به طور کامل در تولید $x_۳$ مورد استفاده قرار گرفته است، برای داشتن یک واحد از آن باید تولید $x_۳$ را به اندازه $\frac{۱}{۲}$ کاهش داد. بدیهی است کاهش تولید $x_۳$ موجب آزاد شدن نیروی کار می‌گردد. پس:

$\frac{۱}{۲}$ = (میزان مصرف $x_۳$ از نیروی کار) ۱× (کاهش در تولید $x_۳$) $\frac{۱}{۲}$ = (نیروی کار آزاد شده ($S_۱$))

از آنجا که افزایش در منبع با علامت منفی در تابلوی سیمپلکس بیان می‌گردد، مقدار افزایش در $S_۱$ به صورت، $-\frac{۱}{۲}$ ذیل ستون $S_۳$ آمده است.

می‌دانیم که ضریب $S_۳$ در تابع هدف صفر است. پس وجود هر واحد $S_۳$ و $S_۱$ هیچ گونه سودی برای شرکت نخواهد داشت. از طرف دیگر برای داشتن یک واحد $S_۳$، ناچاریم، $x_۳$ را به اندازه $\frac{۱}{۲}$ کاهش دهیم. هر واحد $x_۳$ نیز دارای سودی برابر ۵ ریال است. پس به ازای کاهش $x_۳$ به اندازه $\frac{۱}{۲}$، سود کل شرکت $\frac{۵}{۲}$ $(= ۵ \times \frac{۱}{۲})$ کاهش می‌یابد (ضریب $S_۳$ در سطر صفر را ببینید).

۵.۲.۳ تقلیل عناصر تابلوی سوم

متغیرهای اساسی در تابلوی سوم، گوشه‌ای را بیان می‌کند که مختصات آن با $x_۲$, $x_۳$ تعریف می‌گردد (متغیرهای اساسی آن؛ $x_۲$ و $x_۳$ هستند). و متغیرهای غیراساسی این تابلو شامل؛ $S_۱$، $S_۳$ و $x_۱$ خواهند بود. به عبارت دیگر، ترکیب بهینهٔ تولید با $x_۲$ و $x_۳$ بدست می‌آید. به طوری که جواب بهینه عبارتست از:

$$x_۱ = ۰$$

$$x_۲ = \frac{۴۰۰}{۳}$$

$$x_۳ = \frac{۴۹۰}{۳}$$

بنابراین مقدار سود کل حاصل از این ترکیب، عبارتست از:

$$Z = ۳x_۱ + ۳x_۲ + ۵x_۳$$

$$Z^* = ۳(۰) + ۳\left(\frac{۴۰۰}{۳}\right) + ۵\left(\frac{۴۹۰}{۳}\right) = \frac{۳۶۵۰}{۳}$$

و امّا تحلیل ستونهای $S_۱$، $S_۳$ و $x_۱$

اعداد ستون x_1: مقادیر ستون x_1 در سطرهای x_2, x_3 قرار گرفته‌اند. بنابراین باید به ازای تولید هر واحد x_1، مقدار تولید x_2 را $\frac{1}{3}$ و x_3 را $\frac{4}{3}$ کاهش داد. پس منابع مورد نیاز x_1 از کاهش سایر تولیدات فراهم خواهد شد. به شرح زیر:

$$\text{نیروی کار} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\text{کاهش در}\\ \\ \text{تولید } x_2\end{pmatrix} \times 2\begin{pmatrix}\text{میزان مصرف}\\ \\ \text{یک واحد } x_2\end{pmatrix} + \frac{4}{3}\begin{pmatrix}\text{کاهش در}\\ \\ \text{تولید } x_3\end{pmatrix} \times 1\begin{pmatrix}\text{میزان مصرف}\\ \\ \text{یک واحد } x_3\end{pmatrix} = 2$$

$$\text{مواد اولیه} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\text{کاهش در}\\ \\ \text{تولید } x_2\end{pmatrix} \times 1\begin{pmatrix}\text{میزان مصرف}\\ \\ \text{یک واحد } x_2\end{pmatrix} + \frac{4}{3}\begin{pmatrix}\text{کاهش در}\\ \\ \text{تولید } x_3\end{pmatrix} \times 2\begin{pmatrix}\text{میزان مصرف}\\ \\ \text{یک واحد } x_3\end{pmatrix} = 3$$

تحلیل هزینه ــ منفعت تولید x_1، کاهش در تولید x_2, x_3 نشان می‌دهد که تولید x_1 به صرفه نیست. نتایج به شرح زیر است:

$$30\begin{pmatrix}\text{سود حاصل}\\ \text{از تولید}\\ \text{یک واحد } x_1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\text{کاهش در}\\ \\ \text{تولید} x_2\end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix}\text{کاهش در}\\ \\ \text{تولید } x_3\end{pmatrix} \times 5\begin{pmatrix}\text{سود از دست}\\ \text{رفته کاهش}\\ \text{تولید} x_3\end{pmatrix} = -\frac{14}{3}$$

اعداد ستون S_1: با توجه غیراساسی بودن S_1، پس باید گفت تمام منبع اوّل در تولید x_2 و x_3 به کار رفته است. پس برای داشتن یک واحد S_1 چاره‌ای جزء کاهش x_2 یا x_3 (یا هر دو) نیست. مقادیر $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{3}$ ــ ذیل ستون S_1 نشان می‌دهد که برای داشتن یک نفر ــ ساعت S_1 باید x_2 را $\frac{2}{3}$ کاهش و x_3 را $\frac{1}{3}$ افزایش داد. به صورت زیر:

$$(\text{بدست آوردن یک واحد } S_1) = \frac{2}{3}(\text{کاهش در تولید} x_2) \times 2 - \frac{1}{3}(\text{افزایش در تولید } x_3) \times 1 = 1$$

تحلیل کاهش x_2، افزایش x_3 نشان‌دهندهٔ به صرفه بودن مصرف تمام S_1 و عدم نگهداری آن در انبار است. چون مصرف نکردن یک نفر ــ ساعت نیروی کار موجب کاهش سود کل به اندازه $\frac{1}{3}$ می‌شود. به صورت زیر:

$$0\begin{pmatrix}\text{زمان ناشی}\\ \text{از نگهداری}\\ \text{یک واحد } S_1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}\text{کاهش در}\\ \text{تولید}\\ \text{محصول } x_2\end{pmatrix} \times 3\begin{pmatrix}\text{سود از}\\ \text{دست رفته}\\ \text{ناشی از } x_2\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\text{افزایش در}\\ \\ \text{تولید } x_3\end{pmatrix} \times 5\begin{pmatrix}\text{سود بدست}\\ \text{آمده}\\ \text{ناشی از } x_3\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}$$

اعداد ستون S_2: برای داشتن یک کیلوگرم مواد اولیه باید x_3 را $\frac{2}{3}$ کاهش و x_2 را $\frac{1}{3}$ افزایش داد.

$$1 - 1 \times \begin{pmatrix} \text{افزایش در} \\ \\ \text{تولید } x_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \text{مصرف یک} \\ \\ \text{واحد } x_3 \end{pmatrix} \times 2 \begin{pmatrix} \text{کاهش در} \\ \\ \text{تولید } x_3 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \text{بدست آوردن} \\ \\ \text{یک واحد } S_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{7}{3} - 5 \times \begin{pmatrix} \text{کاهش در} \\ \\ x_3 \end{pmatrix} \frac{2}{3} - 3 \times \begin{pmatrix} \text{افزایش در} \\ \\ x_2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} + \begin{pmatrix} \text{زیان ناشی} \\ \text{از مصرف} \\ \text{نکردن } S_1 \end{pmatrix} \quad 0$$

۵.۳ مفهوم قیمت سایه‌ای[1]

روش سیمپلکس، علاوه بر مفاهیم بیان شده در بخش قبل و ارائه جواب بهینه، اطلاعات باارزشی نیز برای تحلیل بیشتر مدل بدست می‌دهد. یکی از این اطلاعات مفید «قیمت سایه‌ای» است که تحت عنوان «ارزش اقتصادی منابع از آن یاد می‌شود.

قیمت سایه‌ای؛ عبارتست از؛ «ارزش نهایی»[2] منابع به کار رفته در تولید قیمت سایه‌ای منبع iام (با y_i نشان داده می‌شود) مبین آهنگ افزایش Z در اثر افزایش یک واحد به این منبع (b_i) است. در روش سیمپلکس، قیمت سایه‌ای هر منبع موردنظر را می‌توان از طریق ضریب متغیر کمکی آن منبع در سطر صفر تابلوی بهینه بدست آورد. مفهوم بیان شده برای قیمت سایه‌ای براساس ثابت فرض کردن سایر شرایط و فقط تغییر در منبع (منابع) معنی می‌دهد.

در برخی از تحلیلها از واژهٔ «فرصت از دست رفته»[3] نیز به جای قیمت سایه‌ای استفاده می‌شود. قیمت سایه‌ای با فرض ایجاد یک واحد منبع اضافی، به عنوان ارزش نهایی (واقعی) ایجاد شده در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر، تصمیم‌گیرنده براساس قیمت سایه‌ای درمی‌یابد که چنانچه یک واحد منبع از نوع iام فراهم کند، چه مقدار سود کل او افزایش می‌یابد. ولی می‌توان قیمت سایه‌ای را به گونه‌ای دیگر نیز تعبیر کرد. بدین صورت که به ازاء نداشتن هر واحد منبع iام چقدر سود از دست می‌رود. به عبارت بهتر، ضرر نداشتن هر واحد منبع iام چقدر است!

تابلوی سوم سیمپلکس در جدول ۵.۲ نشان می‌دهد که قیمت سایه‌ای هر نفر ــ ساعت

1. Shadow Price
2. Marginal Value
3. Oppertunity Cost

نیروی کار (منبع اوّل) مساوی $\frac{۱}{۳}$ و هر کیلوگرم مواد اولیه (منبع دوّم) $\frac{۷}{۳}$ است. (ضرایب $S_۱$ و $S_۲$ در سطر صفر $(Z_۰)$ تابلوی بهینه را ببینید). به عبارت دیگر ارزش واقعی هر واحد از منابع به ترتیب $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۷}{۳}$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$Z^* = \frac{1}{3}(S_1 \text{ ارزش واقعی هر واحد از نیروی کار}) \times 430 + \frac{7}{3}(S_2 \text{ ارزش واقعی هر واحد مواد اولیه}) \times 460$$
$$= \frac{3650}{3}$$

قیمت سایه‌ای برای منبع iام معرف حداکثر قیمتی است که پرداخت آن برای افزایش یک واحد از این منبع، مقرون به صرفه است. چنانچه قیمت سایه‌ای یک منبع «از قیمت بازار» آن بیشتر باشد، آنگاه میزانی که از این منبع مصرف می‌شود را باید تا جایی که دیگر چنین رابطه‌ای برقرار نباشد، افزایش داد.

۵.۴ قیمت سایه‌ای برای مدلهای غیراستاندارد

در بخش قبل چگونگی استخراج قیمت سایه‌ای برای مدلهای از نوع Max با محدودیتهای کوچکتر مساوی $(\leq)$ بیان شد. اگر این نوع مدلها را به عنوان «مدل استاندارد» بپذیریم، هر مدلی که دارای محدودیت بزرگتر مساوی $(\geq)$ یا مساوی باشد، به عنوان یک مدل غیراستاندارد جهت استخراج قیمت سایه‌ای تلقی خواهد شد. استخراج قیمت سایه‌ای در این دسته از مدلها اندکی با مدل استاندارد متفاوت است.

به یاد داریم که برای حل مدلهای با محدودیت مساوی و بزرگتر مساوی با استفاده از روش سیمپلکس به متغیر مصنوعی نیاز پیدا می‌کردیم. برای بدست آوردن قیمت سایه‌ای در این نوع محدودیتها باید از ضرایب متغیر مصنوعی در سطر صفر $(Z_۰)$ استفاده کرد. به صورت زیر:

الف) اگر تابع هدف از نوع Max باشد، مقدار قیمت سایه‌ای پس از حذف مقدار M از ضریب R در سطر صفر تابلوی بهینه بدست می‌آید.

ب) اگر تابع هدف اصلی مدل از نوع Min باشد، مقدار قیمت سایه‌ای پس از حذف مقدار M از ضریب R در سطر صفر تابلوی بهینه و ضرب در ۱ ــ بدست می‌آید.

حال مفاهیم فوق با ذکر مثال زیر مجدداً تکرار می‌شوند.

مثال ۵.۲ مدل زیر را در نظر بگیرید و جواب بهینهٔ آن را با استفاده از روش M بزرگ بدست آورید و سپس قیمت سایه‌ای هر یک از منابع (محدودیتها) را استخراج کنید؟

$$\text{Min } Z = ۱۰ x_۱ + ۱۵ x_۲$$

s.t:

$$x_۱ + ۵ x_۲ \geq ۸$$
$$x_۱ + x_۲ \geq ۴$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

حل: ابتدا مسأله را با استفاده از متغیرهای کمکی و مصنوعی به فرم گسترده تبدیل می‌کنیم:

$$\text{Max } (-Z) = -۱۰ x_۱ - ۱۵ x_۲ - MR_۱ - MR_۲$$

s.t:

$$x_۱ + ۵ x_۲ - S_۱ + R_۱ = ۸$$
$$x_۱ + x_۲ - S_۲ + R_۲ = ۴$$
$$x_۱, x_۲, S_۱, S_۲, R_۱, R_۲ \geq ۰$$

حل مسأله را با استفاده از روش سیمپلکس آغاز می‌کنیم. توجه داشته باشید که، ضرورتاً باید ضرایب $R_۱$ و $R_۲$ در تابلوی مقدماتی به صفر تبدیل شوند. این عمل با استفاده از عملیات ردیفی انجام گیرد. حل مسأله با استفاده از روش سیمپلکس در جدول ۵.۳ آمده است. در این

جدول ۵.۳ حل مثال ۵.۲ به روش M بزرگ

	متغیرهای اساسی	z	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$R_۱$	$R_۲$	مقادیرسمت راست
تابلوی مقدماتی	$Z_۰$	-۱	۱۰	۱۵	۰	۰	M	M	۰
	$R_۱$	۰	۱	۵	-۱	۰	۱	۰	۸
	$R_۲$	۰	۱	۱	۰	-۱	۰	۱	۴
تابلوی اوّل	$Z_۰$	-۱	$۱۰-۲M$	$۱۵-۶M$	M	M	۰	۰	$-۱۲M$
	$R_۱$	۰	۱	۵	-۱	۰	۱	۰	۸
	$R_۲$	۰	۱	۱	۰	-۱	۰	۱	۴
تابلوی دوّم	$Z_۰$	-۱	$۷-\frac{۴}{۵}M$	۰	$۳-\frac{۱}{۵}M$	M	$-۳+\frac{۶}{۵}M$	۰	$-۲۴-\frac{۱۲}{۵}M$
	$X_۲$	۰	$\frac{۱}{۵}$	۱	$-\frac{۱}{۵}$	۰	$\frac{۱}{۵}$	۰	$\frac{۸}{۵}$
	$R_۲$	۰	$\frac{۴}{۵}$	۰	$\frac{۱}{۵}$	-۱	$-\frac{۱}{۵}$	۱	$\frac{۱۲}{۵}$
تابلوی سوّم (بهینه)	$Z_۰$	-۱	۰	۰	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۳۵}{۴}$	$M-\frac{۵}{۴}$	$M-\frac{۳۵}{۴}$	-۴۵
	$X_۲$	۰	۰	۱	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۱}{۴}$	۱
	$X_۱$	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۵}{۴}$	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۵}{۴}$	۳

جدول، تابلوی مقدماتی پس از عملیات ردیفی به تابلوی اوّل سیمپلکس تبدیل شده است. بدین منظور ردیف R_1 و R_2 در $M-$ ضرب شده و با ردیف Z_0 جمع شده‌اند.

تابع هدف مسأله اصلی از نوع Min است. با استفاده از ضرب طرفین در ۱ − تابع Z به $Ma(-Z)$ تبدیل شده است. بنابراین پس از حذف ضریب M از ضرایب R_1 و R_2 در سطر صفر تابلوی بهینه و ضرب مقادیر ثابت در ۱ − قیمت سایه‌ای مدل مثال ۵.۲ بدست می‌آید:

$$\frac{5}{4} = \left(\underset{\text{حذف}}{M} - \frac{5}{4}\right) - = \text{قیمت سایه‌ای منبع اوّل}$$

$$\frac{35}{4} = \left(\underset{\text{حذف}}{M} - \frac{35}{4}\right) - = \text{قیمت سایه‌ای منبع دوم}$$

هر واحد از منبع اوّل دارای قیمت سایه‌ای (ارزش واقعی) $\frac{5}{4}$ و هر واحد از منبع دوّم دارای ارزش واقعی $\frac{35}{4}$ می‌باشد. یعنی اینکه:

$$Z^* = \frac{5}{4} \times 8\ (\text{مقدار منبع اوّل}) + \frac{35}{4} \times 4\ (\text{مقدار منبع دوّم}) = 45$$

قاعده کلی: «برای استخراج قیمت سایه‌ای؛ چنانچه:

۱. محدودیت از نوع کوچکتر مساوی ($\leq$) باشد. ضریب متغیر کمکی در تابلوی بهینه در سطر Z_0 ملاک عمل است.

۲. محدودیت از نوع بزرگتر مساوی ($\geq$) یا مساوی باشد؛ ضریب متغیر مصنوعی در تابلوی بهینه در سطر Z_0 ملاک عمل قرار می‌گیرد. به طوریکه مقدار M بزرگ حذف شده و ملاک عمل، قدر مطلق مقدار ثابت، عددی خواهد بود.»

۵.۵ مسأله ثانویه

برنامه ثانویه یک مسأله عبارتست از یک برنامه خطی به منظور یافتن ارزشهایی (قیمت سایه‌ای) که ملاک ارزیابی منابع مورد استفاده قرار می‌گیرند. ارزش واقعی منابع باید به نحوی تعیین شوند که مجموع ارزش نسبت داده شده به هزینه استفاده از منابع (یا هزینهٔ تولید) حداقل گردد. برنامه ثانویه یک مسأله وسیله‌ای است که جهت ارزشیابی منابع مورد استفاده برای تولید (یا مصرف) در مقابل راه‌حلهای دیگر در بکارگیری آن منابع (مثلاً فروش آنها).

در راستای نوشتن مسأله ثانویه یک بار دیگر مثال ۵.۱ و تابلوی بهینهٔ آن را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۳x_۱ + ۳x_۲ + ۵x_۳$$

s.t:

$$۲x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ \leq ۴۳۰$$ نیروی کار (نفر ـ ساعت)

$$۳x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ \leq ۴۶۰$$ مواد اولیه (کیلوگرم)

$$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$$

تابلوی بهینه:

متغیرهای پایه	Z	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	مقادیر سمت راست
$Z_۰$	۱	$\frac{۱۴}{۳}$	۰	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۷}{۳}$	$\frac{۳۶۵۰}{۳}$
$x_۲$	۰	$\frac{۱}{۳}$	۱	۰	$\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۴۰۰}{۳}$
$x_۳$	۰	$\frac{۴}{۳}$	۰	۱	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۴۹۰}{۳}$

در این مسأله واضح است که شرکت برای بدست آوردن حد مطلوب سودآوری ($Z^* = \frac{۳۶۵۰}{۳}$) شرکت باید از $x_۲$ و $x_۳$ به ترتیب $\frac{۴۰۰}{۳}$ و $\frac{۴۹۰}{۳}$ تولید داشته باشد. می‌دانیم که برای تولید محصولات باید منابعی را (مواد اولیه ـ نیروی کار) مصرف کرد. اگر قیمت سایه‌ای (ارزش واقعی) هر منبع iام را y_i نشان دهیم، می‌توان یک تابع هدف جدید تعریف کرد که درصدد حداقل کردن مجموع ارزش واقعی منابع بکار رفته در تولیدات باشد. پس اگر $y_۱$ ارزش واقعی هر واحد از منبع نیروی کار و $y_۲$ قیمت (ارزش) واقعی هر واحد از منبع مواد اولیه باشد. مجموع ارزش واقعی منابع بکار رفته برای ترکیب تولید عبارت است از:

$$\text{Min } y_۰\ ۴۳۰y_۱ + ۴۶۰y_۲$$

حال به سراغ ارزش واقعی منبع به کار رفته در هر واحد از تولیدات می‌رویم. در تولید هر واحد $x_۱$، ۲ نفر ـ ساعت نیروی کار و ۳ کیلوگرم مواد اولیه به کار می‌رود. که ارزش واقعی آنها برابر است با:

$$۲y_۱ + ۳y_۲$$

به همین ترتیب مجموع ارزش واقعی منابع به کار رفته در هر واحد $x_۲$, $x_۳$ به شرح زیر است:

ارزش واقعی منابع به کار رفته در یک واحد $x_۲$: $۲y_۱ + y_۲$

ارزش واقعی منابع به کار رفته در یک واحد $x_۳$: $۳y_۱ + ۲y_۲$

قیمت سایه‌ای هر منبع، «سود بدست آمده به ازای یک واحد اضافی از منبع» نیز نام دارد.

پس می‌توان گفت در صورتی تولید $x_۱$ به صرفه است که؛ $۲y_۱ + ۳y_۲$ حداقل به اندازه سود حاصل از هر واحد از $x_۱$ $(C_۱ = ۳)$ باشد. پس می‌توان یک محدودیت کارکردی برای $x_۱$

برحسب قیمت سایه‌ای منابع به کار رفته در آن به صورت زیر تعریف کرد:

$$۲y_۱ + ۳y_۲ \geq ۳$$

به طریق مشابه می‌توان گفت که در صورتی که تولید $x_۳$,$x_۲$ به صرفه است که مجموع قیمت سایه‌ای منابع به کار رفته در یک واحد آنها حداقل مساوی $C_۲ = ۳$ و $C_۳ = ۵$ باشد. یعنی:

به ازای $x_۲$ $\quad ۲y_۱ + y_۲ \geq ۳$

به ازای $x_۳$ $\quad ۳y_۱ + ۲y_۲ \geq ۵$

رابطه‌های فوق، گویای این واقعیت است که سهم ترکیب منابع مورد استفاده در سود دست کم باید به اندازه‌ای باشد که به کار گرفتن آنها در یک واحد از تولید jام عاید می‌شود. در غیر این صورت، از منابع به بهترین وجه ممکن استفاده نشده است. واضح است که ارزش واقعی منابع بکار رفته ($y_۱$ ، $y_۲$) حداقل می‌تواند صفر باشد. ارزش واقعی منفی برای نیروی کار و مواد اولیه منطقی نیست. پس قید غیرمنفی بودن $y_۱$ و $y_۲$ ($y_۱, y_۲ \geq ۰$) نیز قابل تعریف است. به عبارت دیگر $y_i \geq ۰$ گویای آن است که سهم سود منبع i، (۳و۲و۱ =i) باید غیرمنفی باشد، در غیر این صورت بهتر است که از چنین منبعی اصلاً استفاده نشود.

حال با مسأله‌ای دیگر از ترکیب تولید کارخانه روبرو هستیم که به آن «مسأله ثانویه» می‌گوییم. خلاصه مسأله ثانویه عبارتست از:

$$\text{Min } y_۰ = ۴۳۰\, y_۱ + ۴۶۰\, y_۲$$

s.t:

$$\begin{aligned} ۲y_۱ + ۳y_۲ &\geq ۳ \\ ۲y_۱ + y_۲ &\geq ۳ \\ ۳y_۱ + ۲y_۲ &\geq ۵ \\ y_۱, y_۲ &\geq ۰ \end{aligned}$$

بهترین حالت برای جواب مدل فوق، آن است که سمت چپ محدودیتها با سمت راست خود «مساوی» باشند. یعنی مقدار متغیرهای کمکی آنها مساوی صفر باشد. چون در آن صورت «فرصت از دست رفته‌ای» نخواهیم داشت. محدودیتی که سمت چپ آن بزرگتر از سمت راست باشد، ارزش تولید نخواهد داشت. چون هزینه‌ای که بابت تولید یک واحد آن متحمل می‌شویم، بیش از سود یک واحد از آن است. لذا با تولید نکردن آن می‌توان از منابع آزاد شده در سایر تولیدات به نحو مطلوب استفاده کرد.

اکنون از مفاهیم فوق که بگذریم، می‌توان تعاریف زیر را برای نوشتن مسأله ثانویه یک مسأله به کار برد:

۱. چنانچه مسأله اولیه از نوع Max باشد، مسأله ثانویه آن از نوع Min است.

۲. هر متغیر ثانویه (y_i) متناظر است با یک محدودیت در مسأله اولیه. در مثال فوق که دو محدودیت وجود دارد، پس مسأله ثانویه دارای دو متغیر $y_۱, y_۲$ است.

۳. عناصر سمت راست (b_i) در مسأله اولیه، ضرایب تابع هدف در مسأله ثانویه را تشکیل می‌دهند. در مثال فوق $b_۱ = ۴۳۰$ و $b_۲ = ۴۶۰$ است. پس تابع هدف مسأله ثانویه عبارت می‌شود از:

$$Z = ۴۳۰\ y_۱ + ۴۶۰\ y_۲$$

۴. a_{ij} ضرایب محدودیتها در مسأله اولیه متناظر با a_{ji} در مسأله ثانویه است.

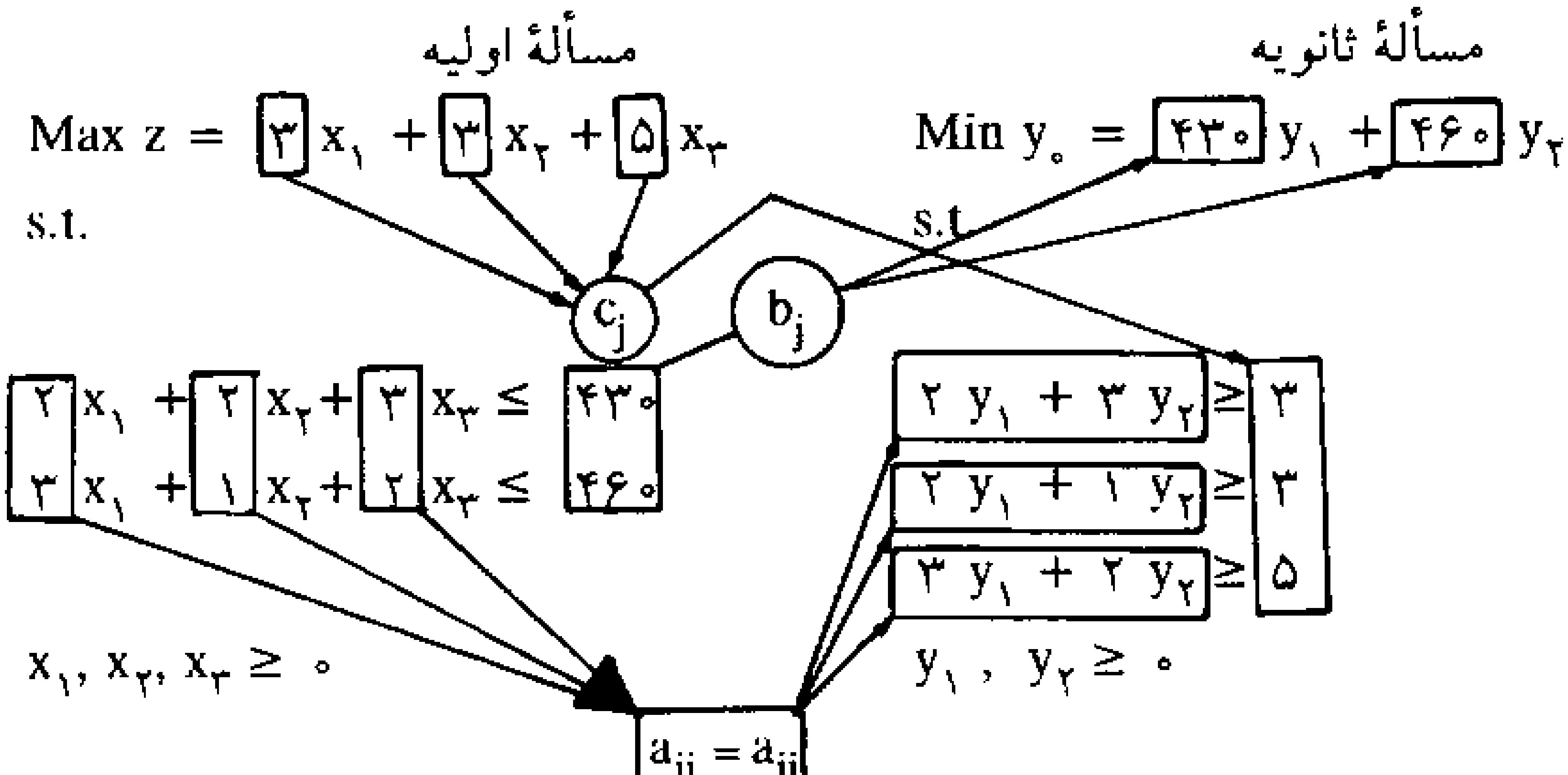
مسأله اولیه (a_{ij})				مسأله ثانویه (a_{ji})
$a_{۱۱}$	=	۲	=	$a_{۱۱}$
$a_{۱۲}$	=	۳	=	$a_{۲۱}$
$a_{۲۱}$	=	۲	=	$a_{۱۲}$
$a_{۲۲}$	=	۱	=	$a_{۲۲}$
$a_{۳۱}$	=	۳	=	$a_{۱۳}$
$a_{۳۲}$	=	۲	=	$a_{۲۳}$

۵. ارزشهای C_j در مسأله اولیه مقادیر سمت راست مسأله ثانویه را تشکیل می‌دهند.

۶. کلیهٔ محدودیتها در مسأله Max اولیه به صورت $\le$ است در حالیکه کلیه محدودیتها در مسأله Min ثانویه از نوع $\ge$ است.

۷. کلیهٔ متغیرهای اولیه و ثانویه غیرمنفی هستند.

شکل ۵.۱ به‌خوبی‌روابط‌بین‌مسأله‌اولیه و مسأله ثانویه را برای صورتبندی نشان می‌دهد.



شکل ۵.۱ ارتباط بین مسأله اولیه و مسأله ثانویه در صورتبندی

۵.۶ روابط مسأله اولیه و مسأله ثانویه در شکل عمومی

معمولاً در ادبیات تحقیق در عملیات سعی می‌شود، شکل عمومی مدلها معرفی شود. بنابراین با توجه به مفاهیم هفتگانه بخش ۵.۵، فرم عمومی مسأله اولیه و مسأله ثانویه به شکل زیر خواهد بود:

فرم عمومی مسأله اولیه:

$$\text{Max } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n$$

s.t:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &\le b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &\le b_2 \\ \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &\le b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\ge 0 \end{aligned}$$

معمولاً مدل فوق به صورت زیر خلاصه‌تر می‌شود. عامل خلاصه کردن نماد جمع جبری Σ می‌باشد.

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

s.t:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\le b_i \ (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j &\ge 0 (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

فرم عمومی مسأله ثانویه، براساس فرم عمومی مسأله اولیه می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\text{Min } y_0 = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

s.t:

$$\begin{aligned} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m &\ge C_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m &\ge C_2 \\ \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m &\ge C_m \\ y_1, y_2, \dots, y_m &\ge 0 \end{aligned}$$

حال فرم عمومی فوق با استفاده از نماد Σ خلاصه‌تر می‌شود:

$$\text{Min } y_\circ = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

s.t:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \geq C_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$
$$y_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

مثال ۵.۳ مدل اولیهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 10x_2 + 8x_3$$

s.t:

$$5x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 100$$
$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 4x_3 \leq 120$$
$$2x_1 + 6x_3 \leq 90$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

مسأله ثانویه مدل فوق را با توجه به شکل عمومی مسأله اولیه بنویسید؟

حل: ابتدا متناظر با هر یک از محدودیتها یک متغیر y در نظر می‌گیریم. y_1 قیمت سایه‌ای منبع (محدودیت) اوّل، y_2 قیمت سایه‌ای محدودیت دوّم و y_3 قیمت سایه‌ای منبع سوم است.

پس داریم:

$$\text{Min } y = 100y_1 + 120y_2 + 90y_3$$

s.t:

$$5y_1 + \frac{1}{2}y_2 + 2y_3 \geq 5$$
$$3y_1 + \frac{3}{2}y_2 \geq 10$$
$$-y_1 + 4y_2 + 6y_3 \geq 8$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

همچنان که واضح است، تمامی مفاهیم هفت‌گانهٔ بخش ۵.۵ برای نوشتن مسأله ثانویه فوق رعایت شده است.

۵.۷ موارد خاص در فرم عمومی مسأله اولیه و مسأله ثانویه

تبدیل یک مسأله اولیه به مسأله ثانویه در بخش قبلی با این شرط انجام گرفت که مسائل اولیه از نوع Max با محدودیتهای کوچکتر مساوی ($\leq$) و متغیرهای غیرمنفی باشند. مسائل برنامه‌ریزی خطی در شکل واقعی خود دارای انواع از محدودیتهای $\leq$، $\geq$ یا $=$ و همچنین

متغیرهای غیرمنفی و آزاد در علامت هستند. در این بخش به چگونگی نوشتن مدل ثانویه این نوع از مسائل اولیه خواهیم پرداخت.

۵.۷.۱ محدودیت مساوی (=)

مسأله اولیه زیر دارای یک محدودیت به شکل مساوی است.

$$\text{Max } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2$$

s.t:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &\leq b_2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

محدودیت مساوی را می‌توان به صورت دو نامعادله زیر نوشت:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1$$
$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \geq b_2$$

محدودیت دوّم (≤) را می‌توان با ضرب کردن دو طرف نامعادله در ۱ ــ به ≥ تبدیل نمود:

$$-a_{11} x_1 - a_{12} x_2 \leq -b_1$$

حال مسأله اصلی را می‌توان به شکل زیر با محدودیتهای ≥ بازنویسی کرد:

$$\text{Max } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2$$

s.t:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &\leq b_1 \\ -a_{11} x_1 - a_{12} x_2 &\leq -b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &\leq b_2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

مسأله اکنون دارای فرم مناسب برای تشکیل مسأله ثانویه است. چرا که کلیهٔ محدودیتها به صورت کوچکتر مساوی (≥) می‌باشند. حال متناظر با محدودیت اوّل متغیر y'_1 و متناظر با محدودیت دوّم متغیر ثانویه؛ y''_1، و برای محدودیت سوّم، متغیر ثانویه y_2 را به کار می‌بریم. پس داریم:

$$\text{Min } y_0 = b_1 y'_1 - b_1 y''_1 + b_2 y_2$$

s.t:

$$\begin{aligned} a_{11} y'_1 - a_{11} y''_1 + a_{21} y_2 &\geq C_1 \\ a_{12} y'_1 - a_{12} y''_1 + a_{22} y_2 &\geq C_2 \\ y'_1, y''_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

در تمام روابط مدل ضرایب y_1' و y_1'' قرینه هستند. پس با فاکتورگیری از ضرایب آنها، مسأله ثانویه به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\text{Min } y_0 = b_1 (y_1' - y_1'') + b_2 y_2$$

s.t:

$$\begin{aligned} a_{11} (y_1' - y_1'') + a_{12} y_2 &\geq C_1 \\ a_{12} (y_1' - y_1'') + a_{22} y_2 &\geq C_2 \\ y_1', y_1'', y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

بنابراین براساس تعریف متغیر آزاد در علامت می‌توان $y_1' - y_1''$ را معادل متغیر ثانویه y_1 گرفت که هر مقداری قادر است به خود اختصاص دهد. و مسأله ثانویه برحسب y_1 و y_2 به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\text{Min } y_0 = b_1 y_1 + b_2 y_2$$

s.t:

$$\begin{aligned} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 &\geq C_1 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 &\geq C_2 \end{aligned}$$

$y_1, y_2 \geq 0$ آزاد در علامت

قاعده کلی (۱) به ازاء هر محدودیت مساوی در مسأله اولیه یک متغیر آزاد در علامت در مسأله ثانویه وجود دارد.

مثال ۵.۴ مسأله اولیه زیر را در نظر بگیرید و مسأله ثانویه را بنویسید؟

مسأله اولیه	مسأله ثانویه
$\text{Max } Z = 5x_1 + 10x_2$	$\text{Min } y_0 = 20y_1 + 24y_2 + 10y_3$
s.t:	s.t:
$8x_1 + 4x_2 \leq 20$	$8y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 5$
$x_1 + 8x_2 = 24$	$4y_1 + 8y_2 + 3y_3 \geq 10$
$2x_1 + 3x_2 \leq 10$	$y_1, y_3 \geq 0$
$x_1, x_2 \geq 0$	y_2 آزاد در علامت

همچنان که واضح است، y_2 که متناظر با محدودیت مساوی است، به صورت آزاد در

علامت تعریف شده است.

۵.۷.۲ متغیر آزاد در علامت

چنانچه یک مسأله دارای متغیر آزاد در علامت باشد، عکس شرایط محدودیت مساوی عمل می‌شود. فرض کنید در مدل کلی زیر $x_۲$ آزاد در علامت باشد:

$$\text{Max } Z = C_۱ X_۱ + C_۲ X_۲$$

s.t:

$$\begin{aligned} a_{۱۱} x_۱ + a_{۱۲} x_۱ &\le b_۱ \\ a_{۲۱} x_۱ + a_{۲۲} x_۲ &\le b_۲ \\ x_۱, x_۲ &\ge ۰ \text{ آزاد در علامت} \end{aligned}$$

قبلاً گفته شد که با استفاده از تغییر متغیر $x_۲ = x'_۲ - x''_۲$، مدل را می‌توان به یک مدل با متغیرهای غیرمنفی تبدیل کرد: یعنی:

$$\text{Max } Z = C_۱ X_۱ + C_۲ (x'_۲ - x''_۲)$$

s.t:

$$\begin{aligned} a_{۱۱} x_۱ + a_{۱۲} (x'_۲ - x''_۲) &\le b_۱ \\ a_{۲۱} x_۱ + a_{۲۲} (x'_۲ - x''_۲) &\le b_۲ \\ x_۱, x'_۲, x''_۲ &\ge ۰ \end{aligned}$$

بدین ترتیب مسأله ثانویه را می‌توان با استفاده از قواعد هفت‌گانه به صورت زیر نوشت:

$$\text{Min } y_۰ = b_۱ y_۱ + b_۲ y_۲$$

s.t:

$$\begin{aligned} a_{۱۱} y_۱ + a_{۲۱} y_۲ &\ge C_۱ \\ a_{۱۲} y_۱ + a_{۲۲} y_۲ &\ge C_۲ \\ - a_{۱۲} y_۱ - a_{۲۲} y_۲ &\ge - C_۲ \\ y_۱, y_۲ &\ge ۰ \end{aligned}$$

با ضرب کردن طرفین محدودیت سوم در ۱ ــ می‌توان نوشت:

$$\text{Min } y_۰ = b_۱ y_۱ + b_۲ y_۲$$

s.t:

$$\begin{aligned} a_{۱۱} y_۱ + a_{۲۱} y_۲ &\ge C_۲ \\ a_{۱۲} y_۱ + a_{۲۲} y_۲ &\ge C_۲ \\ a_{۱۲} y_۱ + a_{۲۲} y_۲ &\le C_۲ \\ y_۱, y_۲ &\ge ۰ \end{aligned}$$

دو محدودیت آخر مدل فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a_{11}\, y_1 + a_{22}\, y_2 = C_2$$

این محدودیت متناظر x_2 است که آزاد در علامت بود.

پس مسأله ثانویه مدل اولیه به صورت زیر فرمول‌بندی خواهد شد:

$$\text{Min } y_0 = b_1\, y_1 + b_2\, y_2$$

s.t:

$$\begin{aligned} a_{11}\, y_1 + a_{21}\, y_2 &\geq C_1 \\ a_{12}\, y_1 + a_{22}\, y_2 &= C_2 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

> قاعده کلی (۲) متناظر هر «متغیر آزاد در علامت» مسأله ثانویه باید یک محدودیت «مساوی» در مسأله ثانویه تعریف شود.

مثال ۵.۵ مسأله اولیه زیر را در نظر بگیرید و مسأله ثانویه آن را بنویسید؟

مسأله ثانویه

$$\text{Min } y_0 = 40\, y_1 + 20\, y_2 + 100\, y_3 + 60\, y_4$$

s.t:

$$\begin{aligned} y_1 + 10\, y_3 + y_4 &\geq 4 \\ 3\, y_1 + 2\, y_2 + 6\, y_3 + 2\, y_4 &\geq 10 \\ 4\, y_1 + y_2 + 20\, y_3 &\geq 6 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

y_3, y_4 آزاد در علامت

مسأله اولیه

$$\text{Max } Z = 4\, x_1 + 10\, x_2 + 6\, x_3$$

s.t:

$$\begin{aligned} x_1 + 3\, x_2 + 4\, x_3 &\leq 40 \\ 2\, x_2 + x_3 &\leq 20 \\ 10\, x_1 + 6\, x_2 + 20\, x_3 &= 100 \\ x_1 + 2\, x_2 &= 60 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

همچنانکه در مسأله ثانویه مشاهده می‌شود، y_3 و y_4 که متناظر محدودیتهای مساوی سوم و چهارم هستند، آزاد در علامت تعریف شده‌اند.

۵.۷.۳ تابع هدف Min

بسیاری از مدلهای اولیه دارای تابع هدف Min (حداقل‌سازی) هستند. برای نوشتن مسأله ثانویه این نوع از مسائل باید طبق مفاهیم و قواعد زیر عمل کرد:

۱. چنانچه مسأله اولیه از نوع Min باشد، مسأله ثانویه از نوع Max است.

۲. متناظر با هر یک از محدودیتها یک متغیر ثانویه (y_i) تعریف شود.

۳. عناصر سمت راست محدودیتها، ضرایب متغیرهای ثانویه در تابع هدف هستند.

۴. a_{ij} در مسأله اولیه به a_{ji} در مسأله ثانویه تبدیل می‌شود.

۵. مقادیر C_j در مسأله اولیه، مقادیر سمت راست محدودیتهای مسأله ثانویه خواهند بود.

۶. کلیهٔ محدودیتهای مسأله اولیه از نوع بزرگتر مساوی ($\geq$) است، در حالیکه به محدودیتهای $\leq$ در مسأله ثانویه تبدیل خواهند شد.

۷. کلیهٔ متغیرهای اولیه و ثانویه از نوع غیرمنفی ($\geq$ ۰) هستند.

آنچه مسلم است، تمام مفاهیم فوق، مشابه مفاهیم هفت‌گانه.مدل اولیه از نوع Max است. با این تفاوت که شرط Max به Min تبدیل شده است و قید $\geq$ به $\leq$ تبدیل گردیده است. به مثال ۵.۶ توجه نمایید.

مثال ۵.۶ مسأله اولیه زیر را در نظر بگیرید و مسأله ثانویه آن را بنویسید؟

مسأله اولیه

$$\text{Min } Z = x_۱ + ۲\,x_۲ + x_۳$$

s.t:

$$\begin{aligned} ۲\,x_۱ - ۳\,x_۲ + x_۳ &\leq ۶ \\ ۲\,x_۱ + ۳\,x_۲ + x_۳ &\geq ۱ \\ x_۱, x_۲, x_۳ &\geq ۰ \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{تبدیل محدودیت}}$$

مسأله ثانویه

$$\text{Min } Z = x_۱ + ۲\,x_۲ + x_۳$$

s.t:

$$\begin{aligned} -۲\,x_۱ + ۳\,x_۲ - x_۳ &\geq -۶ \\ ۲\,x_۱ + ۳\,x_۲ + x_۳ &\geq ۱ \\ x_۱, x_۲, x_۳ &\geq ۰ \end{aligned}$$

طرفین نامعادلهٔ اوّل در ۱ ـ ضرب شده است تا مسأله اولیه از نوع Min با محدودیتهای $\geq$ حاصل گردد. حال براساس مدل متناسب، مسأله ثانویه براساس قاعده‌های هفت‌گانه نوشته می‌شود:

$$\text{Max } y_۰ = -۶\,y_۱ + y_۲$$

s.t:

$$\begin{aligned} -۲\,y_۱ + ۲\,y_۲ &\leq ۱ \\ ۳\,y_۱ + ۳\,y_۲ &\leq ۲ \\ -y_۱ + y_۲ &\leq ۱ \\ y_۱, y_۲ &\geq ۰ \end{aligned}$$

مسأله اولیه با تابع هدف Min نیز ممکن است دارای موارد خاص:

۱. محدودیت مساوی　　　　　　۲. متغیر آزاد در علامت

نیز باشد. در این صورت، طبق قاعدهٔ کلی ۱ و ۲، متناظر با محدودیت مساوی (=) متغیر آزاد در علامت ثانویه و متناظر با متغیر آزاد در علامت یک محدودیت مساوی در مسأله ثانویه باید تعریف کرد.

مثال ۵.۷ مسأله اولیه زیر را در نظر بگیرید و مسأله ثانویه آن را بنویسید؟

مسأله اولیه

$$\text{Min } Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

s.t:

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$$
$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

و

x_3 آزاد در علامت

مسأله ثانویه

$$\text{Max } y_0 = 6y_1 + y_2$$

s.t:

$$2y_1 + 2y_2 \leq 1$$
$$-3y_1 + 2y_2 \leq 2$$
$$y_1 - y_2 = 1$$

y_1 آزاد در علامت

و

$$y_2 \geq 0$$

با استفاده از راه‌حلها و قواعد بیان شده در بخشهای قبل، تنها عمل لازم برای نوشتن مسأله ثانویه این است که مسأله اولیه را به یکی از فرمهای جدول ۵.۴ درآورد.

با استفاده از مفاهیم این جدول می‌توان به روال معمول مسأله ثانویه را به کمک ستون دیگر بدست آورد. لیکن دقت داشته باشید که شکلهای دو ستون را در هنگام فرموله کردن مسأله اولیه با یکدیگر مخلوط نکنید. (مثلاً حداکثر کردن Z با محدودیتهای $\geq$ همراه نباشد). ترکیب کردن دو ستون جدول ۵.۴ در هنگام نوشتن مسأله ثانویه مجاز نخواهد بود.

۵.۸ قضایای ثانویه

براساس روابط مسائل اولیه و ثانویه می‌توان بین این مسائل و جوابهای آنها خواصی را دریافت کرد. نتیجهٔ خواص موردنظر در قالب قضایای ثانویه بیان می‌گردد. مهمترین خواص

جدول ۵.۴ مسائل متناظر اولیه و ثانویه و روابط فی‌مابین

مسأله از نوع Max	مسأله از نوع Min
تعداد محدودیتها	تعداد متغیرها
محدودیت کوچکتر مساوی (≤)	متغیر غیرمنفی
محدودیت مساوی (=)	متغیر آزاد در علامت
متغیر غیرمنفی (۰ ≤)	محدودیت بزرگتر مساوی (≥)
متغیر آزاد در علامت	محدودیت مساوی (=)
تعداد متغیرها	تعداد محدودیتها
ضریب تابع هدف برای متغیر زام	عدد سمت راست برای محدودیت زام
عدد سمت راست برای محدودیت iام	ضریب تابع هدف متغیر iام
ضریب فنی در محدودیت iام برای متغیر زام (a_{ij})	ضریب فنی در محدودیت زام برای متغیر iام (a_{ji})

(قضایای) ثانویه عبارتند از:

قضیه ۱. ثانویه مسأله ثانویه، مسأله اولیه است.

برای درک این قضیه به مثال ۵.۸ توجه کنید.

مثال ۵.۸ مسأله اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۸x_۱ + ۴x_۲$$

s.t:

$$x_۱ + x_۲ \leq ۱۰$$
$$۵x_۱ + x_۲ \leq ۱۵$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

مسأله ثانویه مثال فوق عبارتست از:

$$\text{Min } y_۰\ ۱۰y_۱ + ۱۵y_۲$$

s.t:

$$y_۱ + ۵y_۲ \geq ۸$$
$$y_۱ + y_۲ \geq ۴$$
$$y_۱, y_۲ \geq ۰$$

مسأله ثانویه را به عنوان یک مسأله اولیه در نظر بگیرید و ثانویه آن را بنویسید. می‌دانیم که متناظر هر محدودیت یک متغیر ثانویه وجود دارد و متناظر هر متغیر یک محدودیت ثانویه.
پس اگر متناظر با محدودیت اوّل، x_1 و برای محدودیت دوّم x_2 را در نظر بگیریم، داریم:

$$\text{Max } Z = 8x_1 + 4x_2$$

s.t:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 10 \\ 5x_1 + x_2 &\le 15 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

برای نوشتن مسائل ثانویه از جدول ۵.۴ و قواعد کلی بیان شده در بخشهای قبلی استفاده شده است. همچنانکه واضح است مدل فوق، همان مدل مثال ۵.۸ (مساله اولیه) است.

> قضیه ۲. چنانچه $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ یک جواب موجه مسأله اولیه و $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ جواب موجه مسأله ثانویه باشد، در این صورت، رابطهٔ؛
>
> $$z \le y_0 \quad \text{یعنی} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$
>
> برقرار است.

صحت رابطهٔ فوق براساس بررسی چند جواب موجه در مثال ۵.۹ نشان داده می‌شود.
مثال ۵.۹ مسأله اولیه زیر و مسأله ثانویه آن را در نظر بگیرید:

مسأله ثانویه	مسأله اولیه
$\text{Min } y_0 = 10y_1 + 15y_2$	$\text{Max } Z = 8x_1 + 4x_2$
s.t:	s.t:
$y_1 + 5y_2 \ge 8$	$x_1 + x_2 \le 10$
$y_1 + y_2 \ge 4$	$5x_1 + x_2 \le 15$
$y_1, y_2 \ge 0$	$x_1, x_2 \ge 0$

یک جواب موجه دلخواه از هر مسأله انتخاب می‌شود. مثلاً $(x_1 = 5, x_2 = 0)$ برای مسأله اولیه و جواب موجه $(y_1 = 4$ و $y_2 = 4)$ از مسأله ثانویه را در نظر بگیرید. محاسبهٔ مقدار

تابع هدف (z و y_0) به ازای جوابهای آزمایشی چنین نشان می‌دهد:

$$\left.\begin{aligned} Z &= 8(5) + 4(0) = 40 \\ y_0 &= 10(4) + 15(4) = 100 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z < y_0$$

به یک جواب موجه آزمایشی دیگر توجه کنید:

$$(x_1 = 2, x_2 = 4) \Rightarrow Z = 8(2) + 4(4) = 36$$

$$(y_1 = 2, \ y_2 = 2) \Rightarrow y_0 = 10(2) + 15(2) = 50$$

مجدداً می‌توان صحت رابطه $Z < y_0$ را دریافت.

از آنجا که هر Z موجه غیر بهینه در مسأله اولیه کوچکتر از Z^* است ($Z < Z^*$) و هر y_0 موجه در مسأله ثانویه بزرگتر از y_0^* بهینه (یعنی $y_0 > y^*$) است و با توجه به این نکته که مقدار بهینه تابع هدف مسأله اولیه و ثانویه برابر است (قضیه ۳). پس:

$$\boxed{Z < Z^* = y_0^* \leq y_0}$$

قضیه ۳. چنانچه $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ و $(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ به ترتیب جوابهای بهینه مسأله اولیه و ثانویه باشند، در این صورت رابطه‌های زیر برقرار است:

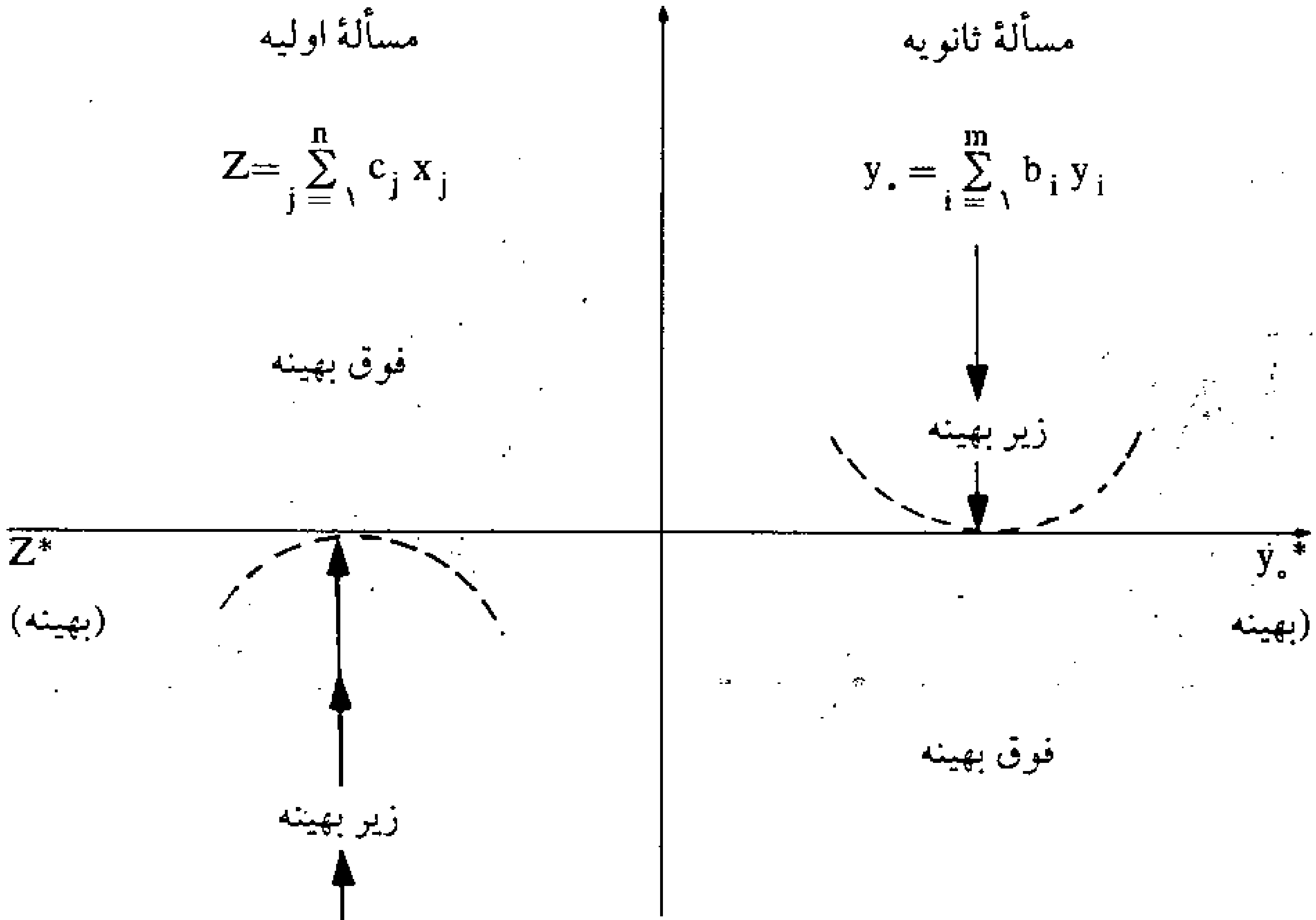
$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \Rightarrow Z^* = y_0^*$$

رابطه فوق به نام قضیه ثنویت[1] خوانده می‌شود. زیرا قضیه بنیادی در ثانویه است.

مفاهیم قضایای ۲ و ۳ را به خوبی می‌توان در شکل ۵.۲ نشان داد. براساس این شکل جهت حرکت در مسأله اولیه از جوابهای موجه زیر بهینه به سمت جواب بهینه است و جوابهای غیرموجه فوق بهینه هستند. در منطقه موجه برای پیدا کردنِ جوابِ بهینه تابع هدف از پایین به بالاترین نقطهٔ ناحیه موجه انتقال می‌یابد. بدیهی است، تابع هدف را به جوابهای بالاتر از جواب بهینه (فوق بهینه) نمی‌توان انتقال داد، چون شرط موجه بودن را ندارند. برعکس در مسأله ثانویه که یک مسأله Min است، تابع هدف از بدترین نقاط موجه (هزینه‌های بالا) به سمت کوچکترین نقطه از نظر تابع هدف در منطقه موجه انتقال می‌یابد (یعنی انتقال تابع هدف از بالا به پایین منطقه موجه است.). بنابراین پایین‌ترین نقطهٔ حدی در منطقه موجه، نقطهٔ بهینه (y^*_0) است. تابع هدف Min مسأله ثانویه قابل انتقال به نقاط فوق بهینه (پایین‌تر) نیست.

---

1. Duality Theorem



شکل ۵.۲ دامنه تغییرات مقدار $Z = y_0$ برای انواع جوابهای اساسی

چون این رتبه از نقاط از نظر مسأله ثانویه غیرموجه هستند. پس به یک قاعده کلی می‌توان دست یافت که تنها نقطهٔ موجه مشترک بین مسأله اولیه و ثانویه، همان گوشهٔ بهینه است. سایر جوابها از نظر مسأله اولیه یا ثانویه و یا هر دو غیر موجه هستند.

مثال ۵.۱۰ چگونگی روابط جوابهای مسأله اولیه و ثانویه را به خوبی نشان می‌دهد.

مثال ۵.۱۰ مسأله اولیه و مسأله ثانویه متناظر آن را در نظر بگیرید:

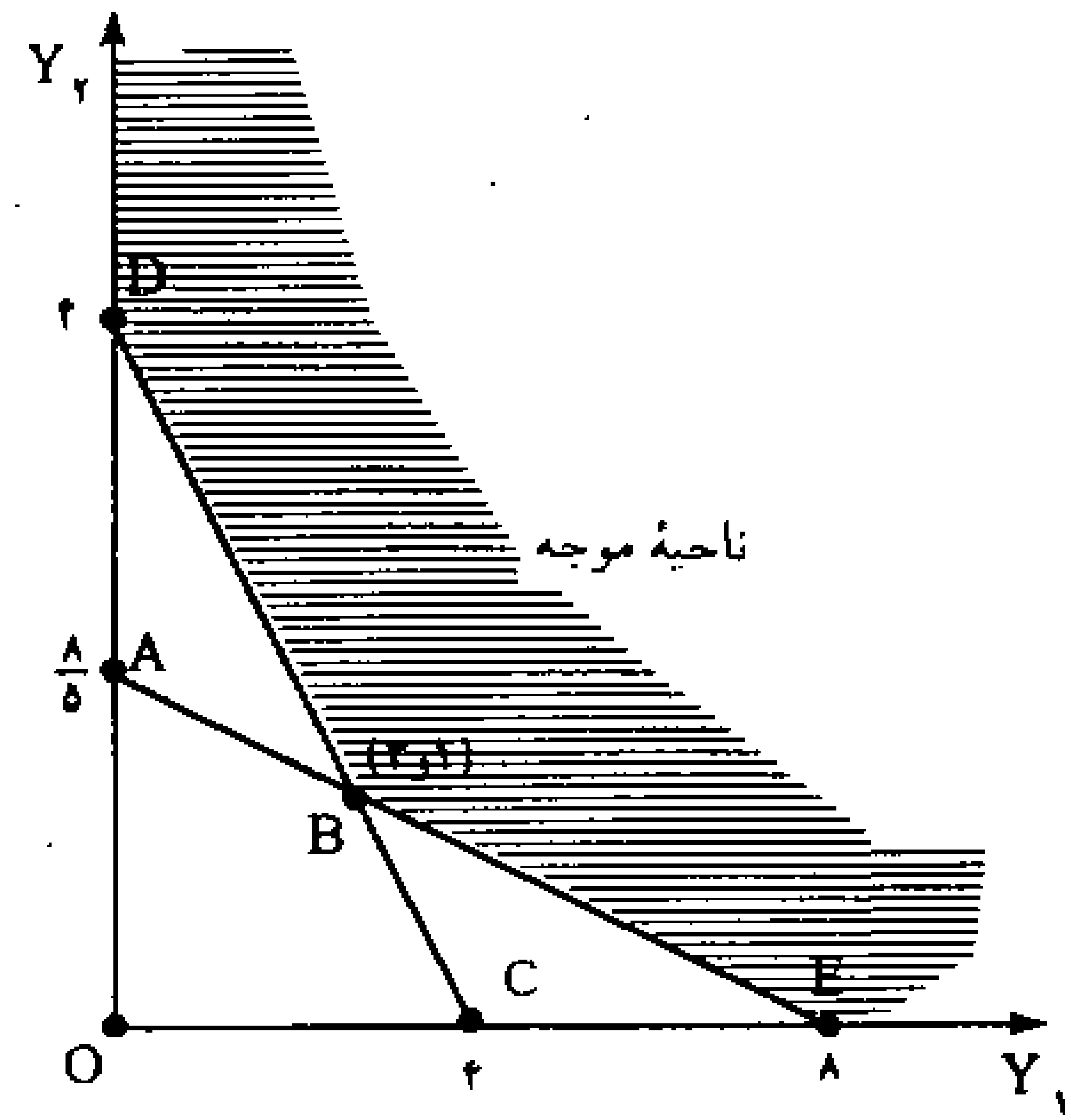
مسأله اولیه

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = 8x_1 + 4x_2 \\ &\text{s.t:} \\ &x_1 + x_2 \le 10 \\ &5x_1 + x_2 \le 15 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

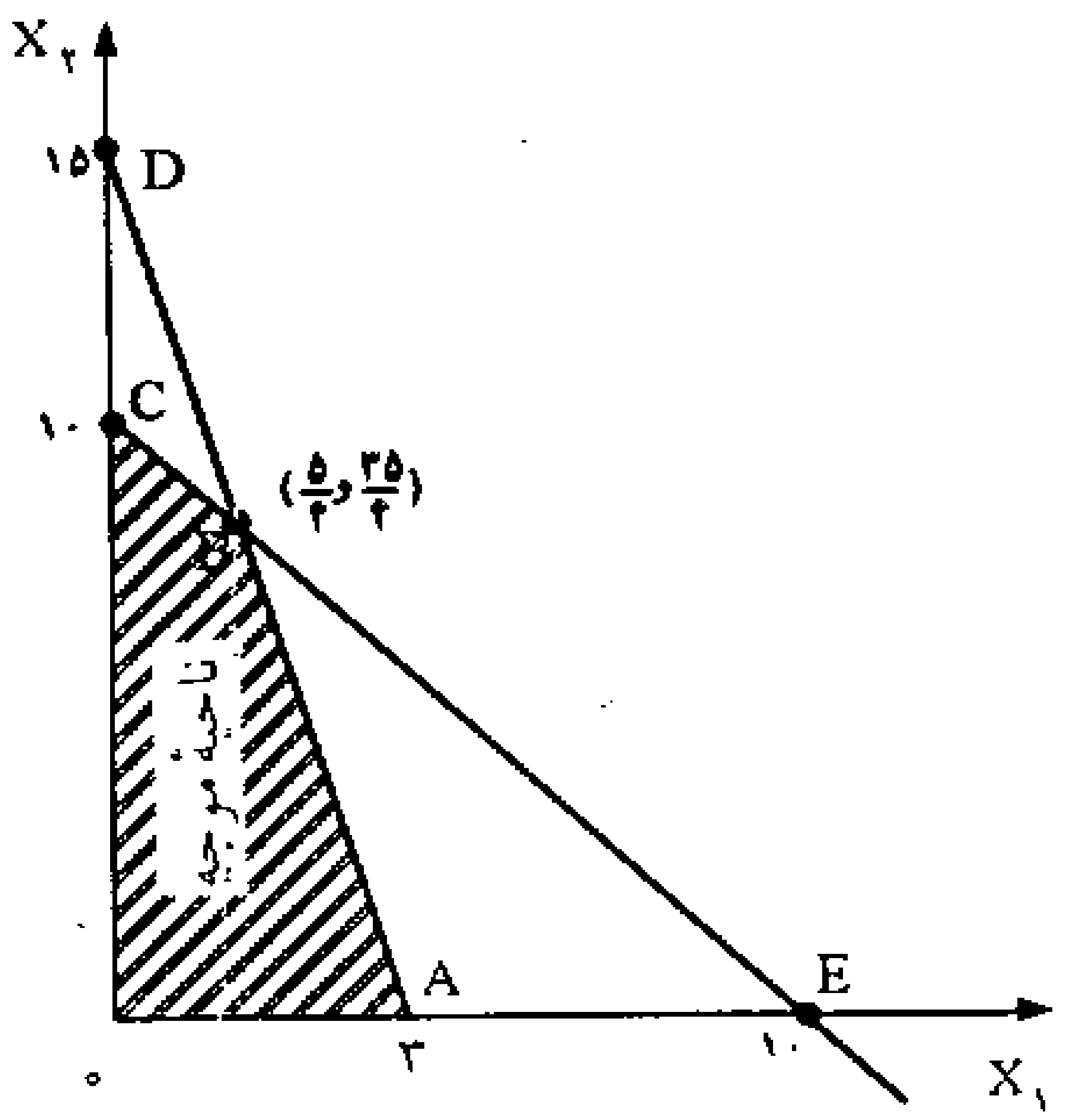
مسأله ثانویه

$$\begin{aligned} &\text{Min } y_0 = 10y_1 + 15y_2 \\ &\text{s.t:} \\ &y_1 + 5y_2 \ge 8 \\ &y_1 + y_2 \ge 4 \\ &y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

شکلهای زیر نشان‌دهندهٔ جواب موجه هریک از مسائل فوق هستند. در شکلهای ترسیم



نمایش هندسی مسأله ثانویه مثال ۵.۱۰



نمایش هندسی مسأله اولیه مثال ۵.۱۰

شده، سعی شده است، تناظر گوشه‌های مسأله اولیه در نمایش هندسی ناحیه موجه مسألهٔ ثانویه مشخص شده است. به عنوان مثال گوشهٔ B در مسأله ثانویه دقیقاً متناظر گوشهٔ B در مسأله اولیه است.

نمایش هندسی گوشه A و B و C و D و E و O در دو مسأله اولیه و ثانویه بخوبی صحّت قضایای ۲ و ۳ را نشان می‌دهد. تنها گوشه‌ای که در هر دو مسأله موجه است. همان گوشه بهینه (B) است که در آن گوشه ۲۵ = $Z^* = y_0^*$ است. گوشه‌های فوق بهینه مسأله اولیه (D و E) برای مسأله ثانویه زیر بهینه هستند و برعکس گوشه‌های فوق بهینهٔ مسأله ثانویه (O ، A و C) برای مسأله اولیه زیر بهینه تلقی می‌شوند. هر دو مسأله در گوشه B (که بهینه است) به تعادل می‌رسند.

به یاد داریم که تعداد گوشه‌های هر مسأله برنامه‌ریزی خطی طبق رابطهٔ $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ تعیین می‌شد. براساس این رابطه تعداد گوشه‌های هر دو مسأله مساوی ۶ خواهد بود. چون تعداد متغیرهای مسأله اولیه و تعداد محدودیتهای ثانویه مساوی n و تعداد محدودیتهای اولیه و تعداد متغیرهای ثانویه مساوی m خواهد بود. پس تعداد گوشه‌های هر دو مسأله باید کاملاً با هم برابر باشد. جدول ۵.۵ بیانگر مفاهیم فوق می‌باشد. این جدول بخوبی صحت رابطهٔ:

$$Z < Z^* = y_0^* < y_0$$

را نشان می‌دهد.

جدول ۵.۵ گوشه‌ها (جوابها) ی مربوط به مسأله اولیه و ثانویه مثال ۵.۱۰

گوشه	مسأله اولیه		Z	مسأله ثانویه	
	(x_1, x_2)	موجه ؟	(y_0)	موجه ؟	(y_1, y_2)
O	(۰, ۰)	بله	۰	خیر	(۰, ۰)
A	(۳, ۰)	بله	۲۴	خیر	$(۰, \frac{۸}{۵})$
B	$(\frac{۵}{۴} و \frac{۳۵}{۴})$	بله	۴۵*	بله	(۳, ۱)
C	(۰, ۱۰)	بله	۴۰	خیر	(۴, ۰)
D	(۰, ۱۵)	خیر	۶۰	بله	(۰, ۴)
E	(۱۰, ۰)	خیر	۸۰	بله	(۸، ۰

قضیه ۴. هر جواب اساسی در مسأله اولیه دارای یک «جواب اساسی مکمل»[1] در مسأله ثانویه است که بین متغیرهای آنها یک «رابطه لنگی مکمل»[2] وجود دارد.

جدول ۵.۶ به خوبی وجود رابطه لنگی مکمل بین جوابهای اساسی مسأله اولیه و ثانویه را نشان می‌دهد.

جدول ۵.۶ رابطه لنگی مکمل برای جوابهای اساسی مکمل

متغیر ثانویه مربوطه	متغیر اولیه
غیراساسی (m)	اساسی (m)
اساسی (n)	غیراساسی (n)

فرم استاندارد مسألهٔ اولیه، دارای n متغیر تصمیم و m متغیر کمکی است. در این مسأله به تعداد محدودیتها (m) متغیر اساسی و به تعداد متغیرهای تصمیم (n) متغیر غیراساسی وجود خواهد داشت. برعکس در مسأله ثانویه تعداد متغیرهای اساسی (n) به اندازه تعداد محدودیتها آن است و تعداد متغیرهای اساسی به اندازهٔ متغیرهای کمکی (m) مسأله اولیه خواهد بود.

از این به بعد متغیرهای اصلی (تصمیم) مسأله ثانویه را با y و متغیرهای کمکی آن را با t

1. Complementary basic Solution　　2. Complementary Slackness Relation

نشان خواهیم داد. پس می‌توان گفت، متغیر تصمیم مسأله اولیه (x) متناظر با متغیر کمکی مسأله ثانویه (t) خواهد بود و متغیر کمکی مسأله اولیه (S) با متغیر تصمیم مسأله ثانویه (y) متناظر می‌باشد. پس همواره می‌توان چنین نوشت:

$$\boxed{\begin{array}{l} X.t = 0 \\ S.y = 0 \end{array}}$$

خواص فوق را «رابطه لنگی مکمل» گویند که بین متغیرهای مسأله اولیه و ثانویه وجود دارد.

تفسیر عملی روابط فوق با توجه به جواب بهینه بدین صورت است؛ که اگر در مسأله ثانویه، ارزش منابع به کار رفته در تولید یک واحد کالا، بیشتر از بهره‌وری حاصل از فروش آن باشد (یعنی $t > 0$)، تولید آن می‌بایست متوقف گردد (یعنی $X = 0$). همچنین چنانچه برای مسأله اولیه، تصمیم به تولید کالایی گرفته شد ($X > 0$)، بدان معنا خواهد بود که ارزش منابع به کار گرفته شده در تولید یک واحد آن، دقیقاً برابر با بهره‌وری حاصل از تولید آن است (یعنی $t = 0$).

رابطه $S.y = 0$ نیز نشان می‌دهد که اگر برای مسأله کلیهٔ موجودی منبع مورد استفاده قرار نگیرد (یعنی $S > 0$)، پس آن منبع یکِ منابع غیرکمیاب است و بابت نداشتن آن فرصتی از دست نخواهد رفت، پس قیمت سایه‌ای آن مساوی صفر ($y = 0$) است. از طرف دیگر، اگر قیمت سایه‌ای منبعی مثبت ($y > 0$) باشد، نشان‌دهندهٔ آن است که آن منبع یک منبع کمیاب است و کلیهٔ موجودی آن در تولید محصولات استفاده شده است (یعنی $S = 0$).

یکبار دیگر، مسأله ۵.۱۰ را در نظر بگیرید. با مقایسهٔ نمایش هندسی مسأله اولیه و ثانویه درمی‌یابیم که هر جواب اساسی در مسأله اولیه دارای یک جواب مکمل در مسأله ثانویه است. جدول ۵.۵ بیانگر جوابهای اساسی مکمل در دو مسأله است. مهمترین فاکتور در تأیید مکمل بودن جوابها، مقدار تابع هدف برای دو مسأله است که در هر گوشهٔ هم نام با همدیگر برابر است.

به یاد داریم که مسأله برنامه‌ریزی خطی در فرم اصلی خود دارای یک مدل گسترده است که با استفاده از تبدیل نامعادلات به معادله تعریف می‌شد. پس با نوشتن مدل گسترده اولیه و ثانویه خواهیم داشت:

مدل گسترده ثانویه

$$\text{Min } y_0 = 10\, y_1 + 15\, y_2$$

s.t:

$$\begin{aligned} y_1 + 5\, y_2 - t_1 &= 8 \\ y_1 + y_2 - t_2 &= 4 \\ y_1, y_2 \ge 0 \text{ و } & t_1, t_2 \ge 0 \end{aligned}$$

مدل گسترده اولیه

$$\text{Max } Z = 8\, x_1 + 4\, x_2$$

s.t:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + S_1 &= 10 \\ 5\, x_1 + x_2 + S_2 &= 15 \\ x_1, x_2, S_1, S_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

جواب اساسی مسأله اولیه باید براساس (x_1, x_2, S_1, S_2) و جواب اساسی مسأله ثانویه باید براساس (y_1, y_2, t_1, t_2) تعریف شوند. جدول ۵.۷ نشان‌دهندهٔ جوابهای اساسی مکمل می‌باشد. گوشه‌های مربوط به هر یک از جوابهای اساسی (گسترده) نیز همان گوشه هم اسم در نمایش هندسی مسائل اولیه و ثانویه است.

جدول ۵.۷ رابطهٔ جواب اساسی مسأله اولیه و جواب اساسی مکمل ثانویه

نام گوشه	مسأله اولیه: جواب اساسی (x_1, x_2, S_1, S_2)	موجه؟	Z (y_0)	موجه ؟	جواب اساسی مکمل (y_1, y_2, t_1, t_2)
O	(۰, ۰, ۱۰, ۱۵)	بله	۰	خیر	(۰, ۰, – ۸, – ۴)
A	(۳, ۰, ۷, ۰)	بله	۲۴	خیر	$(۰, \frac{۸}{۵}, ۰, -\frac{۱۲}{۵})$
B	$(\frac{۵}{۴}, \frac{۳۵}{۴}, ۰, ۰)$	بله	*۴۵	بله	(۳, ۱, ۰, ۰)
C	(۰, ۱۰, ۰, ۵)	بله	۴۰	خیر	(۴, ۰, – ۴, ۰)
D	(۰, ۱۵, – ۵, ۰)	خیر	۶۰	بله	(۰, ۴, ۱۲, ۰)
E	(۱۰, ۰, ۰, – ۳۵)	خیر	۸۰	بله	(۸, ۰, ۰, ۴)

جواب اساسی موجه، جوابی است که کلیهٔ متغیرهای آن دارای مقدار بزرگتر مساوی صفر (≥ ۰) باشند. پس آن دسته از جوابهایی که دارای مقدار کوچکتر از صفر برای برخی از متغیرهای مدل دارای، موجه نیستند.

نتایج جدول ۵.۷ بخوبی صحت رابطه لنگی مکمل ($s.y = ۰$ و $x.t = ۰$) را نشان می‌دهد. جهت برقراری صحت روابط دو گوشهٔ دلخواه مثل B و D را در نظر بگیرید، و روابط را بررسی کنید. نتیجه به شرح زیر است:

گوشه B:

مسأله اولیه		مسأله ثانویه	$x.t = ۰, s.y = ۰$
$x_1 = \frac{۵}{۴}$	$\longleftrightarrow$	$t_1 = ۰ \Rightarrow$	$x_1 . t_1 = ۰$
$x_2 = \frac{۳۵}{۴}$	$\longleftrightarrow$	$t_2 = ۰ \Rightarrow$	$x_2 . t_2 = ۰$
$s_1 = ۰$	$\longleftrightarrow$	$y_1 = ۳ \Rightarrow$	$s_1 . y_1 = ۰$
$s_2 = ۰$	$\longleftrightarrow$	$y_2 = ۱ \Rightarrow$	$s_2 . y_2 = ۰$

گوشه D:

مسأله اولیه		مسأله ثانویه	$x.t=0$ و $s.y=0$
$x_1=0$	$\longleftrightarrow$	$t_1=12 \Rightarrow$	$x_1 . t_1 = 0$
$x_2=15$	$\longleftrightarrow$	$t_2=0 \Rightarrow$	$x_2 . t_2 = 0$
$s_1=-5$	$\longleftrightarrow$	$y_1=0 \Rightarrow$	$s_1 . y_1 = 0$
$s_2=0$	$\longleftrightarrow$	$y_2=4 \Rightarrow$	$s_2 . y_2 = 0$

براساس خواص فوق می‌توان جواب هر مسأله را براساس مسأله دیگر استخراج کرد.

برای نمونه فرض کنید جواب اساسی مسأله اولیه در گوشه C در دسترس است. یعنی:

$(x_1=0, x_2=10, s_1=0, s_2=5)$

پس احتمالاً، $t_1 > 0$ و حتماً $t_2 = 0$ است. همچنین احتمالاً $y_1 > 0$ و حتماً $y_2 = 0$ است. حال در محدودیتهای مسأله ثانویه مقادیر $t_2 = 0$ و $y_2 = 0$ را قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 - t_1 = 8 \\ y_1 + y_2 - t_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 5(0) - t_1 = 8 \\ y_1 + (0) - 0 = 4 \Rightarrow y_1 = 4 \end{cases}$$

حال می‌توان مقدار t_1 را با استفاده از معادله $y_1 - t_1 = 8$ پیدا کرد. پس:

$4 - t_1 = 8 \Rightarrow t_1 = -4$

پس جواب مسأله ثانویه (جواب اساسی مکمل) عبارت است از:

$(y_1 = 4,\ y_2 = 0, t_1 = -4, t_2 = 0)$

۵.۹ تعیین جواب بهینهٔ یک مسأله با استفاده از تابلوی بهینهٔ مسأله دیگر

تابلوی بهینه هر مسأله اولیه (ثانویه) دارای اطلاعات باارزشی است که از آن جمله می‌توان به استخراج جواب بهینه یک مسأله براساس تابلوی بهینهٔ دیگری اشاره کرد. به یاد داریم که ضرایب متغیرهای تصمیم در تابع هدف مسأله اولیه، مقادیر سمت راست محدودیتهای مسأله ثانویه قرار می‌گرفتند و مقادیر سمت راست محدودیتهای مسأله اولیه به عنوان ضرایب متغیرهای ثانویه در تابع هدف به کار برده می‌شدند. همچنین a_{ij} در مسأله اولیه به a_{ji} در مسأله ثانویه تبدیل می‌شدند.

تغییرات فوق براساس تابلوهای سیمپلکس، همواره بین مسأله اولیه و ثانویه و حل آنها به روش سیمپلکس نیز برقرار است. خاصیت و ارتباط بین تابلوهای سیمپلکس مسأله اولیه و ثانویه، بخصوص در تابلوی بهینه بسیار کارساز است. به طوری که براساس ارتباط بین فرم عمومی مسأله اولیه و مسأله ثانویه و همچنین رابطه لنگی مکمل می‌توان جوابهای بهینه هر

مسأله را از تابلوی بهینهٔ مسأله دیگر استخراج کرد. مراحل کار با استفاده از مثالهای ۵.۱۱ و ۵.۱۲ نشان داده شده است.

مثال ۵.۱۱ مسأله اولیه و مسأله ثانویه متناظر آن را در نظر بگیرید:

مسأله اولیه

$$\text{Max } Z = 8x_1 + 4x_2$$

s.t:

$$x_1 + x_2 \le 10$$
$$5x_1 + x_2 \le 15$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$\Longrightarrow$

مسأله ثانویه

$$\text{Min } y_0 = 10y_1 + 15y_2$$

s.t:

$$y_1 + 5y_2 \ge 8$$
$$y_1 + y_2 \ge 4$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

با اضافه کردن متغیرهای کمکی به مسأله اولیه خواهیم داشت:

$$\text{Max } Z = 8x_1 + 4x_2$$

s.t:

$$x_1 + x_2 + S_1 = 10$$
$$5x_1 + x_2 + S_2 = 15$$
$$x_1, x_2, S_1, S_2 \ge 0$$

حل مسأله اولیه با استفاده از روش سیمپلکس به شرح جدول ۵.۸ است.

جدول ۵.۸ حل مسأله اولیه مثال ۵.۱۱ به روش سیمپلکس

	متغیرهای اساسی	z	x_1	x_2	s_1	s_2	مقادیر سمت راست
تابلوی اوّل	Z_0	۱	-8	-4	۰	۰	۰
	S_1	۰	۱	۱	۱	۰	۱۰
	S_2	۰	۵	۱	۰	۱	۱۵
تابلوی دوّم	Z_0	۱	۰	$-\frac{12}{5}$	۰	$\frac{8}{5}$	۲۴
	S_1	۰	۰	$\frac{4}{5}$	۱	$-\frac{1}{5}$	۷
	X_1	۰	۱	$\frac{1}{5}$	۰	$\frac{1}{5}$	۳
تابلوی سوم (بهینه)	Z_0	۱	۰	۰	۳	۱	۴۵
	X_2	۰	۰	۱	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{35}{4}$
	X_1	۰	۱	۰	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$

حال با استفاده از تابلوی بهینه مسأله اولیه (تابلوی سوّم) به استخراج جواب بهینهٔ مسأله ثانویه می‌پردازیم. چون مسأله اولیه از نوع Max با محدودیتهای $\leq$ است. پس؛ مقدار متغیرهای ثانویه براساس ضریب متغیرهای تصمیم و کمکی در سطر صفر $(Z_۰)$ تابلوی بهینه مسأله اولیه تعیین می‌شود. یعنی:

$(y_۱ = ۳, y_۲ = ۱, t_۱ = ۰, t_۲ = ۰)$

مقدار $y_۱$ همان قیمت سایه‌ای منبع اوّل (ضریب $S_۱$ در سطر صفر تابلوی بهینه) و مقدار $y_۲$ همان قیمت سایه‌ای منبع دوّم (یعنی ۱) می‌باشد.

اکنون، مسأله ثانویه را بررسی می‌کنیم. ابتدا فرم استاندارد را به فرم گسترده و قابل حل با استفاده از روش M بزرگ تبدیل می‌کنیم. برای اینکار از متغیرهای کمکی ($t_۱$ و $t_۲$) و متغیرهای مصنوعی ($A_۱$ و $A_۲$) استفاده می‌شود. پس:

$$\text{Max}\ (-y_۰) = -۱۰\,y_۱ - ۱۵\,y_۲ - MA_۱ - MA_۲$$

s.t:

$$\begin{aligned} y_۱ + ۵\,y_۲ - t_۱ + A_۱ &= ۸ \\ y_۱ + y_۲ - t_۲ + A_۲ &= ۴ \\ y_۱, y_۲, t_۱, t_۲, A_۱, A_۲ &\geq ۰ \end{aligned}$$

حل مسأله فوق با استفاده از روش M بزرگ در جدول ۵.۹ آمده است. تابلوی مقدماتی سیمپلکس با استفاده از عملیات ردیفی به تابلوی اوّل تبدیل شده است. این تابلو متناظر با گوشهٔ O (مبدأ مختصات است). نتایج تابلوی بهینه جدول ۵.۹ نشان می‌دهد که جواب بهینهٔ ثانویه عبارتست از:

$(y_۱^* = ۱, y_۲^* = ۳, t_۱^* = ۰, t_۲^* = ۰$ و $Z^* = y_۰^* = ۴۵)$

برای تعیین جواب بهینه مسأله اولیه، با توجه به اینکه کلیهٔ محدودیتهای مدل ثانویه از نوع بزرگتر مساوی ($\geq$) می‌باشند، می‌توان ضرایب متغیرهای کمکی مسأله ثانویه در سطر صفر $(y_۰)$ تابلوی بهینه را ملاک عمل قرار داد. یعنی: $(x_۱^* = \frac{۵}{۴}, x_۲^* = \frac{۳۵}{۴})$.

همچنین مقدار $S_۱$ و $S_۲$ را از ضریب $y_۱$ و $y_۲$ در سطر صفر $(y_۰)$ تابلوی بهینه استخراج می‌کنیم. که در نتیجه؛ $(S_۱ = ۰, S_۲ = ۰)$ خواهد بود.

بدیهی است برای استخراج مقدار متغیرهای تصمیم می‌توان به جای متغیرهای کمکی مسأله ثانویه (t) در سطر صفر تابلوی بهینه از ضرایب متغیرهای مصنوعی (A) نیز استفاده کرد. با این توجه که باید ثابت M بزرگ را حذف کرده و از قدر مطلق مقادیر عددی استفاده کرد.

جدول ۵.۹ حل مسأله ثانویه مثال ۵.۱۱ به روش M بزرگ

متغیرهای اساسی	$y_۰$	$y_۱$	$y_۲$	$t_۱$	$t_۲$	$A_۱$	$A_۲$	مقادیرسمت‌راست
$y_۰$	۱ −	۱۰	۱۵	۰	۰	M	M	۰
$A_۱$	۰	۱	۵	۱ −	۰	۱	۰	۸
$A_۲$	۰	۱	۱	۰	۱ −	۰	۱	۴
$y_۰$	۱ −	۱۰ − ۲M	۱۵ − ۶M	M	M	۰	۰	۱۲M −
$A_۱$	۰	۱	۵	۱ −	۰	۱	۰	۸
$A_۲$	۰	۱	۱	۰	۱ −	۰	۱	۴
$y_۰$	۱ −	$۷-\frac{۴}{۵}M$	۰	$۳-\frac{۱}{۵}M$	M	$\frac{۶}{۵}M-۳$	۰	$-۲۴-\frac{۱۲}{۵}M$
$y_۲$	۰	$\frac{۱}{۵}$	۱	$-\frac{۱}{۵}$	۰	$\frac{۱}{۵}$	۰	$\frac{۸}{۵}$
$A_۲$	۰	$\frac{۴}{۵}$	۰	$\frac{۱}{۵}$	۱ −	$-\frac{۱}{۵}$	۱	$\frac{۱۲}{۵}$
$y_۰$	۱ −	۰	۰	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۳۵}{۴}$	$M-\frac{۵}{۴}$	$M-\frac{۳۵}{۴}$	۴۵ −
$y_۲$	۰	۰	۱	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$+\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۱}{۴}$	۱
$y_۱$	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۵}{۴}$	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۵}{۴}$	۳

یعنی:

$$x_۱^* = -(\cancel{M}-\frac{۵}{۴}) = \frac{۵}{۴}$$

$$x_۲^* = -(\cancel{M}-\frac{۳۵}{۴}) = \frac{۳۵}{۴}$$

مثال ۵.۱۱، به تشریح موردی پرداخت که محدودیتهای مدل اولیه صرفاً از نوع $\leq$ بود و بنابراین محدودیتهای مسأله ثانویه نیز صرفاً از نوع $\geq$ تعریف شد. در مثال بعدی بـه حـالتی اشاره داریم که مدل اولیه دارای محدودیت مساوی است و بالطبع مدل ثانویه آن دارای متغیر آزاد در علامت خواهد بود.

مثال ۵.۱۲ مسأله اولیه و ثانویه متناظر آن را در نظر بگیرید:

مسأله اولیه

$$\text{Max } Z = ۵x_۱ + ۱۲x_۲ + ۴x_۳$$

s.t:

$$x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ \leq ۵$$
$$۲x_۱ - x_۲ + ۳x_۳ = ۲$$
$$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$$

مسأله ثانویه

$$\text{Min } y_۰ = ۵y_۱ + ۲y_۲$$

s.t:

$$y_۱ + ۲y_۲ \geq ۵$$
$$۲y_۱ - y_۲ \geq ۱۲$$
$$y_۱ + ۳y_۲ \geq ۴$$
$$y_۱ \geq ۰$$

و $y_۲$ آزاد در علامت

جواب بهینهٔ مسأله اولیه که با استفاده از روش سیمپلکس حل شده است در جدول ۵.۱۰ آمده است. در این مدل برای حل به روش سیمپلکس از متغیر مصنوعی $R_۲$ جهت محدودیت دوّم استفاده شده است. در ضمن روش حل M بزرگ بوده است.

جدول ۵.۱۰ تابلوی بهینه مسأله اولیه مثال ۵.۱۲

متغیرهای اساسی	z	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$R_۲$	مقادیر سمت راست
$Z_۰$	۱	۰	۰	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{۲۹}{۵}$	$-\frac{۲}{۵}+M$	$\frac{۱۴۱}{۵}$
$X_۲$	۰	۰	۱	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۸}{۵}$
$X_۱$	۰	۱	۰	$\frac{۷}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۹}{۵}$

برای تعیین جواب بهینه مسأله ثانویه متناظر، ابتدا یادآوری می‌کنیم که $y_۱$ متناظر با $S_۱$ است و $y_۲$ متناظر با محدودیت دوّم (با قید =) می‌باشد. بنابراین $y_۲$ آزاد در علامت خواهد بود. یعنی می‌توان مسأله ثانویه را با تغییر متغیر $y_۲ = y_۲' - y_۲''$ به حالت غیرمنفی تبدیل کرد. بنابراین در تابلوی بهینه مسأله ثانویه به جای $y_۲$ از دو متغیر غیرمنفی $y_۲'$ و $y_۲''$ استفاده می‌شود. بر این اساس مسأله ثانویه به صورت زیر تغییر داده شده و شکل قابل حل به روش سیمپلکس بدست می‌آید:

$$\text{Min } y_۰ = ۵y_۱ + ۲y_۲' - ۲y_۲''$$

s.t:

$$\begin{aligned} y_۱ + ۲y_۲' - ۲y_۲'' - t_۱ + A_۱ &= ۵ \\ ۲y_۱ - y_۲' + y_۲'' - t_۲ + A_۲ &= ۱۲ \\ y_۱ + ۳y_۲' - ۳y_۲'' - t_۳ + A_۳ &= ۴ \\ y_۱, y_۲', y_۲'', t_۱, t_۲, t_۳, A_۱, A_۲, A_۳ &\geq ۰ \end{aligned}$$

حال می‌توان رابطهٔ لنگی مکمل را برای مسأله غیر استاندارد فوق به صورت زیر تعریف کرد:

$$\boxed{\begin{gathered} S \cdot y = ۰ \\ X \times t = ۰ \\ \text{یا} \\ X \times A = ۰ \end{gathered}}$$

در نتیجه با حل مسأله ثانویه می‌توان به تابلوی بهینه در جدول ۵.۱۱ رسید.

جدول ۵.۱۱ حل مسأله ثانویه به روش M بزرگ برای مثال ۵.۱۲

متغیرهای اساسی	y_0	y_1	y_2'	y_2''	t_1	t_2	t_3	A_1	A_2	A_3	مقادیرسمت‌راست
y_0	-1	0	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{8}{5}$	0	$M-\frac{9}{5}$	$M-\frac{8}{5}$	M	$\frac{141}{5}$
t_3	0	0	0	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-1	$\frac{3}{5}$
y_2''	0	0	-1	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
y_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{29}{5}$

براساس جدول بهینه مسأله ثانویه، $y_1 = \frac{29}{5}$ ، $y_1' = 0$ و $y_2'' = \frac{2}{5}$ و $y_0^* = \frac{141}{5}$ است. بنابراین $y_2 = y_1' - y_2'' = -\frac{2}{5}$ خواهد شد. (توجه دارید که y_2 آزاد در علامت است). مقایسهٔ بین جوابهای اولیه و ثانویه نشان می‌دهد که

$$\text{Max } Z = \frac{141}{5} = \text{Min } y_0$$

اگر جوابهای اولیه و جوابهای اساسی ثانویه را با همدیگر مقایسه کنیم، همواره مشخص می‌شود که $Z \le y_0$ است. به عنوان مثال جواب مسأله اولیه $(x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = \frac{1}{3})$ و جواب آزمایشی مسأله ثانویه $(y_1 = 7, y_2 = 2)$ را در نظر بگیرید. این دسته از جوابهای موجه مقدار $Z = \frac{55}{3}$ و $y_0 = 39$ را بدست می‌دهد. پس مشخص می‌شود در این دسته از جوابها $Z < y_0$ است. تنها جایی $Z = y_0$ خواهد شد که گوشه هر دو مسأله بهینه باشد. بنابراین $Z = y_0 = \frac{141}{5}$ براساس گوشهٔ بهینه حاصل شده است. حال با توجه به رابطهٔ لنگی مکمل بین جوابهای اساسی مسأله اولیه و مسأله ثانویه، می‌توان متناظر زیر را بین متغیرهای اولیه و ثانویه تشکیل داد:

متغیرهای اولیه	S_1	R_1	X_1	X_2	X_3	Z^*
متغیرهای ثانویه	y_1	y_2	A_1	A_2	A_3	y_0^*

با بررسی ضرایب S_1 و R_1 در ردیف Z_0 در جدول بهینه مسأله اولیه نتایج زیر بدست می‌آید:

	S_1	R_1	
ضرایب Z_0 در تابلوی بهینه	$\frac{29}{5}$	$(-\frac{2}{5}) + M$	حذف
متغیر ثانویه	y_1	y_2	

با اغماض نمودن مقدار ثابت M مشخص می‌شود که مقادیر y_1 و y_2 در تابلوی بهینه مسأله ثانویه عبارتند از: $(y_1^* = \frac{29}{5},\quad y_2^* = -\frac{2}{5})$

با یک بررسی مشابه می‌توان ضرایب A_1 ، A_2 و A_3 در ردیف y_0 تابلوی بهینهٔ مسأله ثانویه را به متغیرهای تصمیم و کمکی مسأله اولیه تعمیم داد. به صورت زیر:

	A_1	A_2	A_3
ضرایب ردیف y_0 در تابلوی بهینه	$M - \frac{9}{5}$	$M - \frac{8}{5}$	M
متغیرهای اولیه	x_1	x_2	x_3

با ندیده‌گرفتن ضریب‌ثابت M و تبدیل‌ردیف y_0 به Min باضریب (۱ −) می‌توان مقادیر سمت راست را برای تابلوی بهینه مسأله اولیه بدست آورد. یعنی $(x_1^* = \frac{9}{5}, x_2^* = \frac{8}{5}, x_3^* = 0)$.
البته جواب فوق را با استفاده از ضرایب متغیرهای کمکی (t) نیز می‌توان بدست آورد.

مثال ۵.۱۳ مسأله اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

s. t.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4$$
$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

جواب بهینهٔ مسأله فوق را با استفاده از روش هندسی پیدا کنید؟

بدیهی است با توجه به ۵ بعدی بودن مسأله اولیه نمی‌توان آن را با استفاده از روش هندسی حل کرد. ولی چون دارای دو محدودیت است. براحتی می‌توان با تبدیل نمودن مسأله فوق به مسأله ثانویه، جواب بهینه آن را به روش هندسی پیدا نمود. پس مسأله ثانویه را می‌نویسیم:

در نمایش هندسی مسأله واضح است که نقطهٔ بهینه از تلاقی دو محدودیت ۱ و ۵ حاصل شده است. یعنی سایر محدودیتها غیرفعال هستند. همچنین باید گفت چون منطقهٔ موجه صرفاً با داشتن محدودیت اوّل و پنجم تشکیل می‌شود، سایر محدودیتها «زاید»[1] هستند. بنابراین گوشهٔ بهینه ثانویه را می‌توان به کمک محدودیتهای ۱ و ۵ بدست آورد.

۱. به آن محدودیتی که وجود یا عدم وجود آن در تعریف ناحیه موجه تأثیری نداشته باشد، محدودیت زاید گویند و چنانچه قابل تشخیص باشد، بهتر است برای ساده کردن مدل، آن را از مدل حذف کرد.

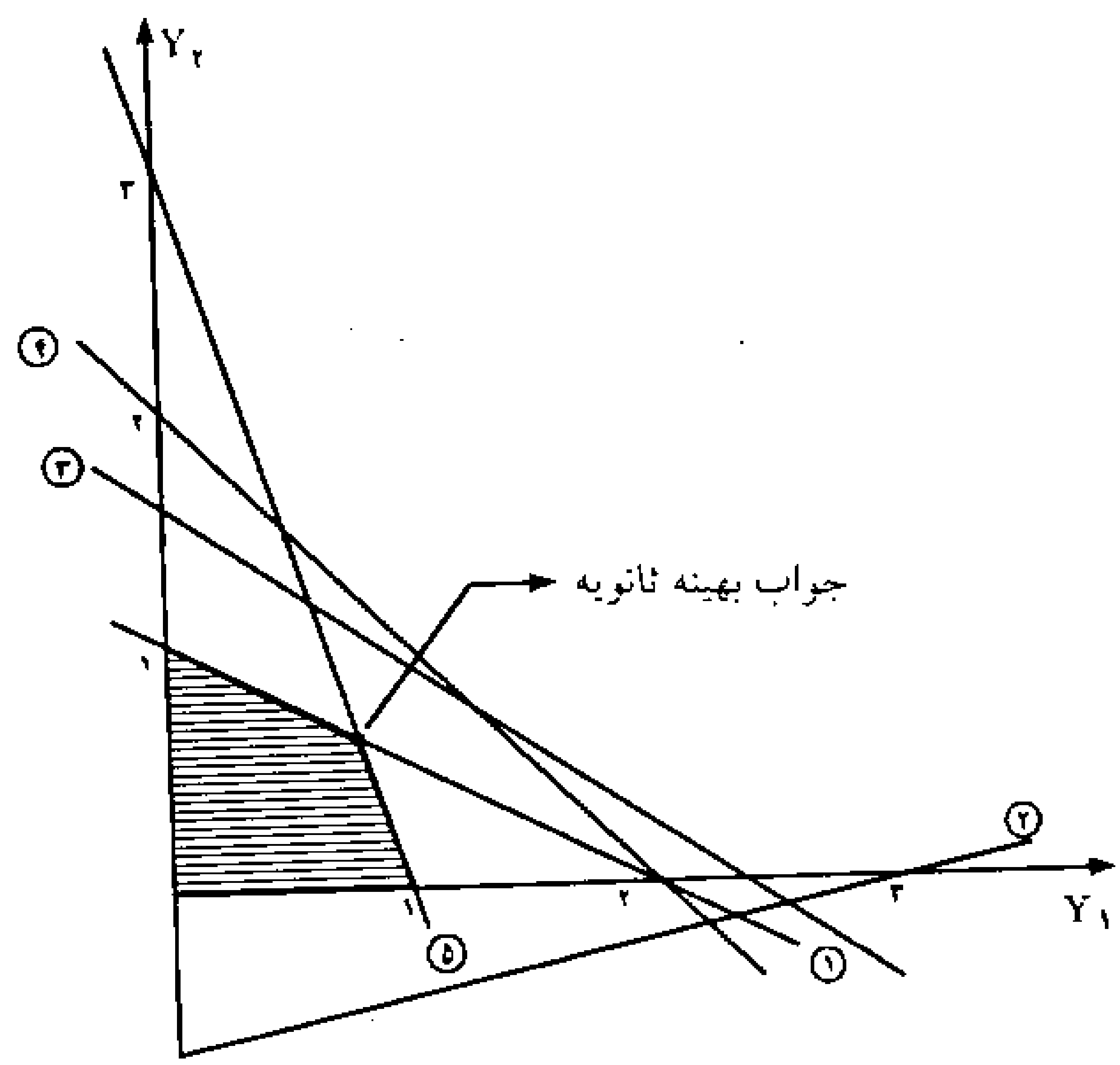
یعنی:

حل به طریق هندسی:

$$\text{Max } y_{\circ} = ۴y_۱ + ۳y_۲$$

s. t.

$$\begin{aligned} y_۱ + ۲y_۲ &\le ۲ \\ y_۱ - ۲y_۲ &\le ۳ \\ ۲y_۱ + ۳y_۲ &\le ۵ \\ y_۱ + y_۲ &\le ۲ \\ ۳y_۱ + y_۲ &\le ۳ \\ y_۱, y_۲ &\ge \circ \end{aligned}$$



$$\begin{cases} y_۱ + ۲y_۲ = ۲ \\ ۳y_۱ + y_۲ = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۳y_۱ - ۶y_۲ = -۶ \\ ۳y_۱ + y_۲ = ۳ \end{cases}$$

$$-۵y_۲ = -۳ \Rightarrow y_۲^* = \frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow y_۱ + ۲\left(\frac{۳}{۵}\right) = ۲ \Rightarrow \qquad y_۱^* = \frac{۴}{۵}$$

در نتیجه Max تابع هدف مساوی ۵ = $y_{\circ}^*$ خواهد شد. بنابراین براساس روابط مسائل اولیه و ثانویه می‌توان دریافت که ۵ = Z^* خواهد بود.

با استفاده از رابطهٔ لنگی مکمل می‌توان فهمید که $x_۲^* = x_۳^* = x_۴^* = \circ$ است. چون متغیرهای کمکی معادلات ثانویه آنها مثبت است. یعنی: $(t_۲^* > \circ, t_۳^* > \circ, t_۴^* > \circ)$. از آنجا که $t_۱^* = t_۵^* = \circ$ هستند، پس می‌توان نتیجه گرفت $t_۱^* \ge \circ$ و $t^*_۵ \ge \circ$ هستند.

بنابراین می‌توان با مثبت انگاشتن $x_۱^*$ و $x_۵^*$ و مساوی قرار دادن $x_۲^*$، $x_۳^*$، و $x_۵^*$ با صفر

معادلات مسأله اولیه را در حالت بهینه به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{cases} x_۱^* + ۳\,x_۵^* = ۴ \\ ۲\,x_۱^* + x_۵^* = ۳ \end{cases}$$

با حل این دستگاه دو مجهولی می‌توان دریافت که؛

$$\begin{cases} x_۱^* = ۱ \\ x_۵^* = ۱ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Z^* = y_۰^* = ۵$$

خواهد شد.

بنابراین جواب بهینه مسأله اولیه با استفاده از قضایای ثانویه و روابط مسأله اولیه و ثانویه حاصل شد. پس جواب بهینه حاصل از مفاهیم فوق برای هر دو مسأله به شرح زیر است:

مسأله ثانویه:

$$\left(y_۱^* = \frac{۴}{۵},\ y_۲^* = \frac{۳}{۵},\ t_۱^* = ۰,\ t_۲^* = \frac{۱۷}{۵},\ t_۳^* = \frac{۸}{۵},\ t_۴^* = \frac{۳}{۵},\ t_۵^* = ۰\right)$$

مسأله اولیه:

$$\left(x_۱^* = ۱,\ x_۲^* = ۰,\ x_۳^* = ۰,\ x_۴^* = ۰,\ x_۵^* = ۱,\ S_۱^* = ۰,\ S_۲^* = ۰\right)$$

حال به بررسی صحت رابطه لنگی مکمل به شرح زیر می‌پردازیم:

جواب بهینهٔ مسأله اولیه		**جواب بهینهٔ مسأله ثانویه**	$x.t = ۰, s.y = ۰$
$x_۱ = ۱$	$\longleftrightarrow$	$t_۱ = ۰ \Rightarrow$	$x_۱ . t_۱ = ۰$
$x_۲ = ۰$	$\longleftrightarrow$	$t_۲ = \frac{۱۷}{۵} \Rightarrow$	$x_۲ . t_۲ = ۰$
$x_۳ = ۰$	$\longleftrightarrow$	$t_۳ = \frac{۸}{۵} \Rightarrow$	$x_۳ . t_۳ = ۰$
$x_۴ = ۰$	$\longleftrightarrow$	$t_۴ = \frac{۳}{۵} \Rightarrow$	$x_۴ . t_۴ = ۰$
$x_۵ = ۰$	$\longleftrightarrow$	$t_۵ = ۰ \Rightarrow$	$x_۵ . t_۵ = ۰$
$S_۱ = ۰$	$\longleftrightarrow$	$y_۱ = \frac{۴}{۵} \Rightarrow$	$S_۱ . y_۱ = ۰$
$S_۲ = ۰$	$\longleftrightarrow$	$y_۲ = \frac{۳}{۵} \Rightarrow$	$S_۲ . y_۲ = ۰$

۵.۱۰ روابط بین ناحیه جواب مسأله اولیه و مسأله ثانویه

با توجه به روابط بین شده بین فرم اولیه مسأله و مسأله ثانویه آن می‌توان روابط زیر را بین ناحیه جواب مسأله اولیه و ثانویه بیان کرد:

۱. هرگاه مسأله اولیه دارای ناحیه موجه محدود باشد، مسأله ثانویه آن دارای ناحیه موجه بیکران با گوشهٔ بهینه است.

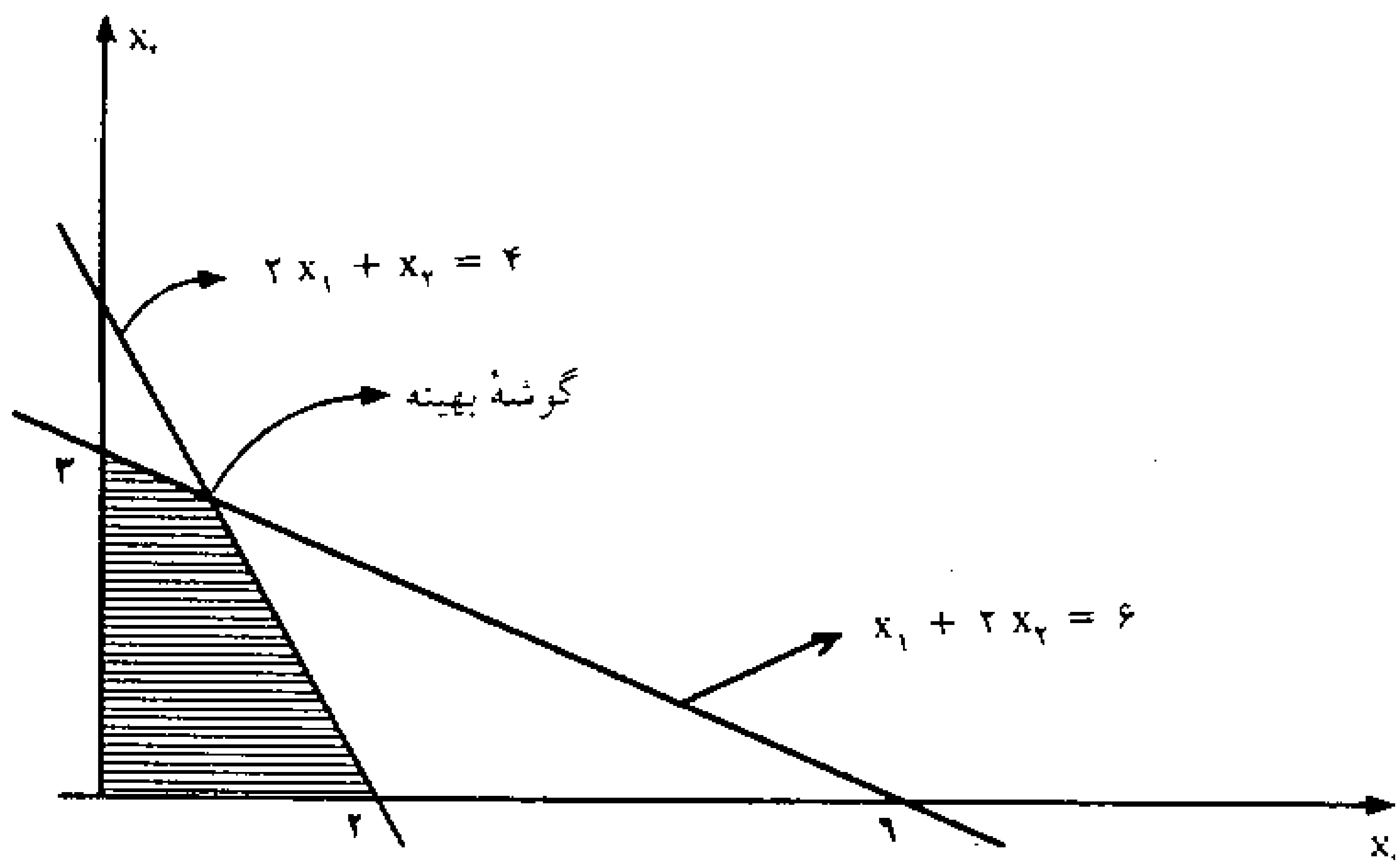
مثال ۵.۱۴ مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۲x_۱ + ۲x_۲$$

s. t.:

$$۲x_۱ + x_۲ \leq ۴$$
$$x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

روش ترسیمی حل مثال ۵.۱۴ نشان می‌دهد که ناحیه موجه این مسأله محدود است.



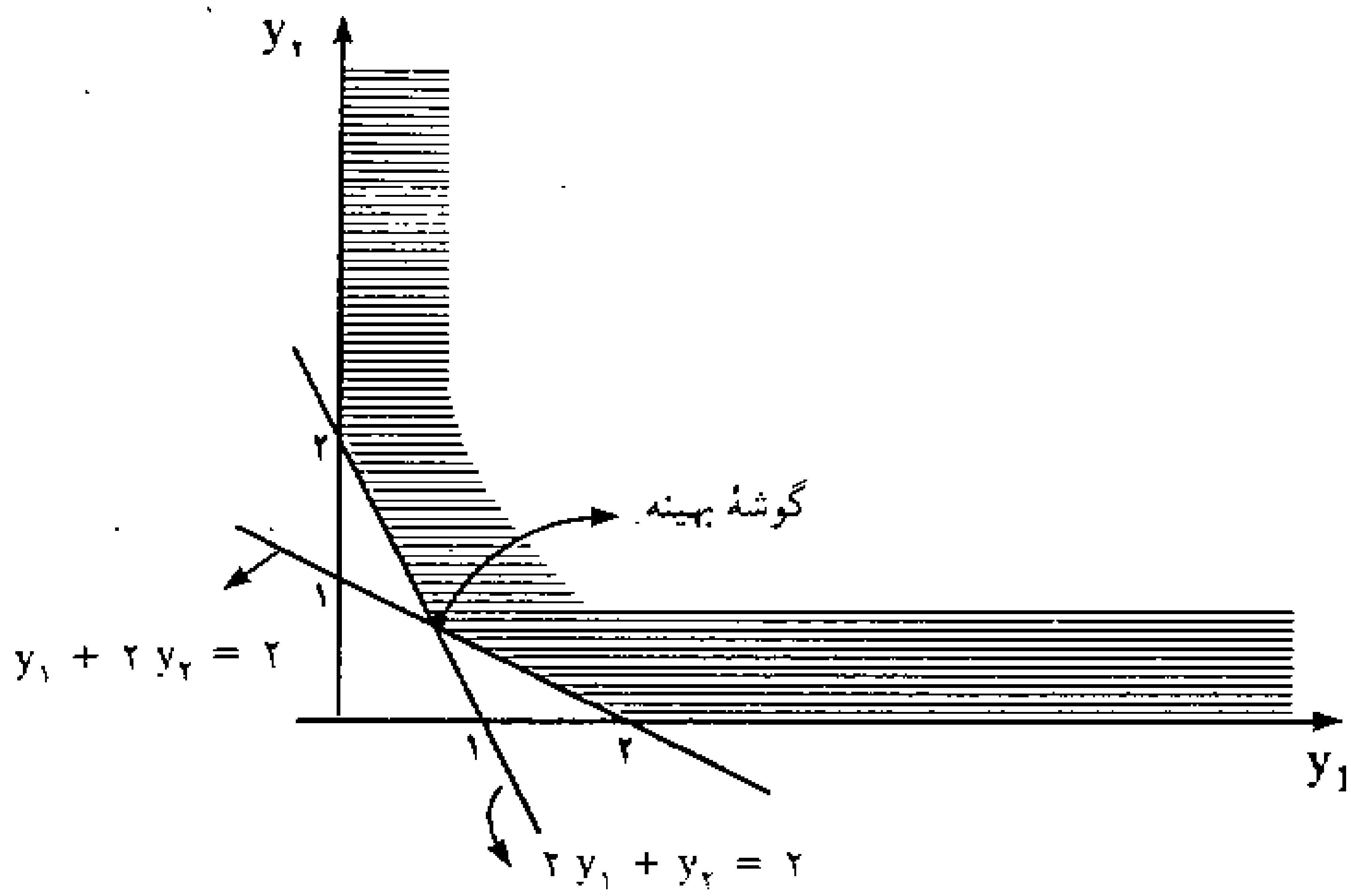
شکل ۵.۴ روش ترسیمی حل مثال ۵.۱۴

حال مسأله ثانویه مثال ۵.۱۴ نوشته می‌شود.

$$\text{Max } y_۰ = ۴y_۱ + ۶y_۲$$

s. t.:

$$۲y_۱ + y_۲ \geq ۲$$
$$y_۱ + ۲y_۲ \geq ۲$$
$$y_۱, y_۲ \geq ۰$$



شکل ۵.۵ نمایش هندسی ناحیه موجه مسأله ثانویه

مقایسه شکل ۵.۴ و ۵.۵ به خوبی صحت رابطه ۱ را نشان می‌دهد.

۲. هرگاه مسأله اولیه دارای ناحیه موجه بیکران بدون گوشه بهینه باشد. مسأله ثانویه آن فاقد ناحیه موجه خواهد بود. یعنی مسأله ثانویه جواب بهینه نخواهد داشت.

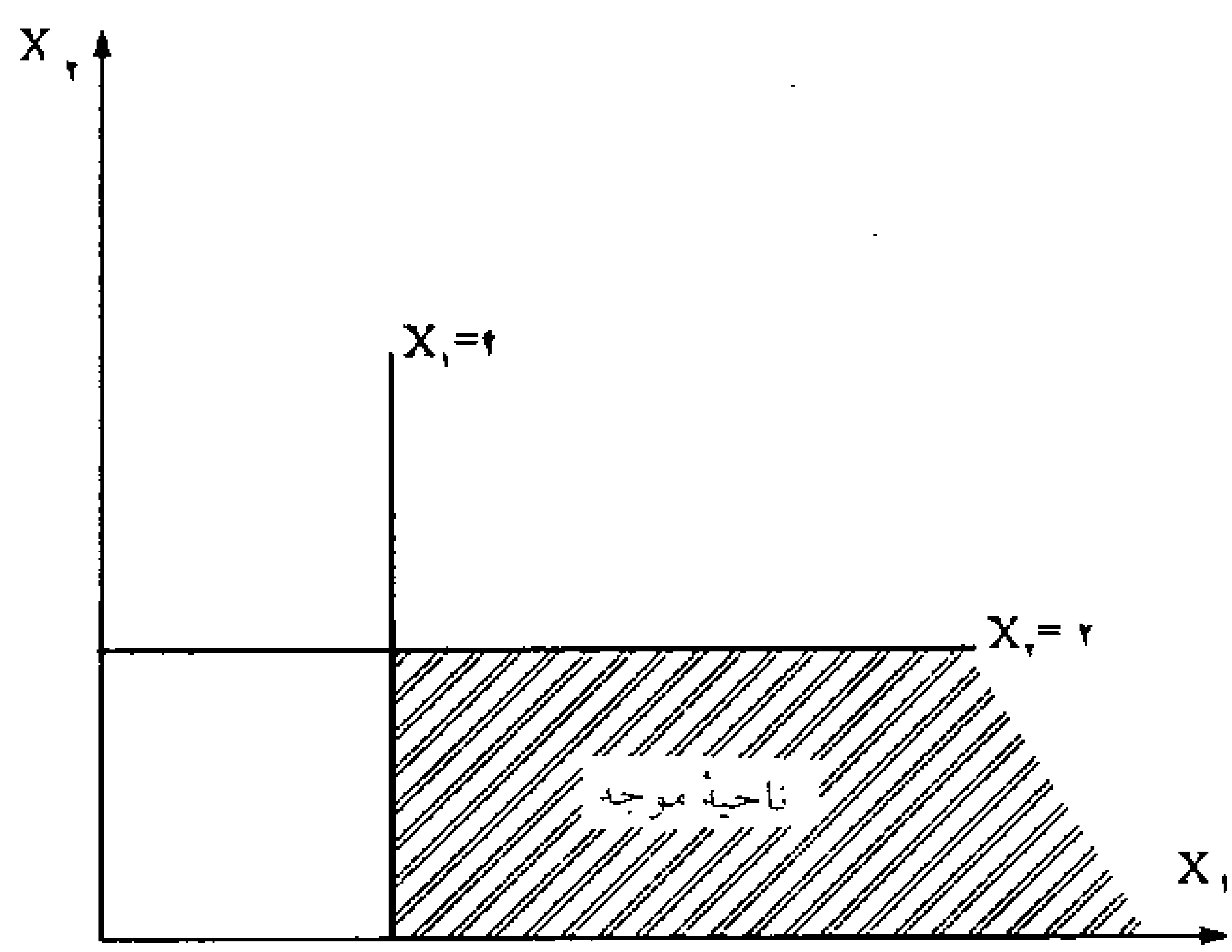
مثال ۵.۱۵ و اشکال ۵.۶ و ۵.۷ به خوبی صحت این رابطه را نشان می‌دهند.

مثال ۵.۱۵ مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۴x_۱ + ۲x_۲$$

s.t :

$$x_۱ \geq ۴$$
$$x_۲ \leq ۲$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$



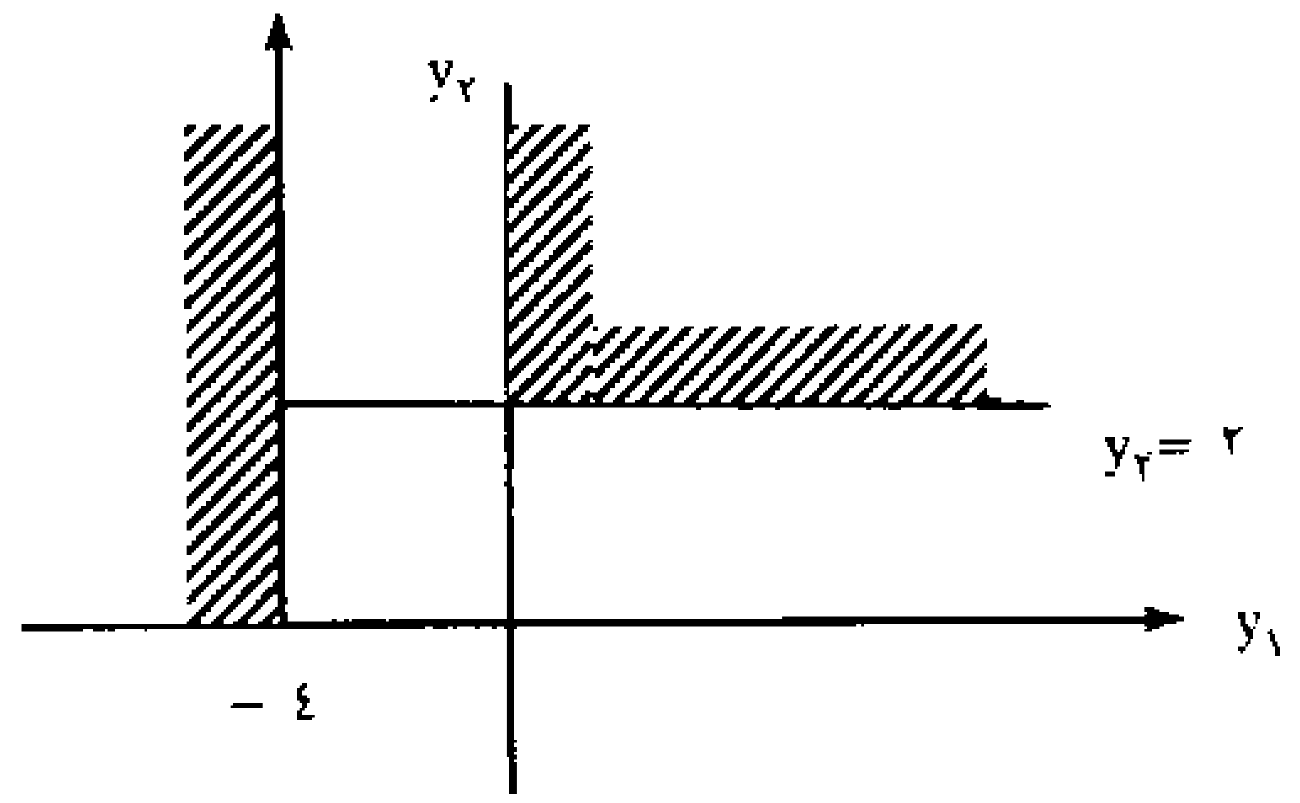
شکل ۵.۶ نمایش هندسی ناحیه موجه مسأله اولیه

حال ضمن نوشتن مسأله ثانویه مثال ۵.۱۵، آن را به روش هندسی نمایش می‌دهیم.

$$\text{Min } y_0 = ۴y_1 + ۲y_2$$

s.t :

$$-y_1 \geq ۴$$
$$y_2 \geq ۲$$
$$y_1, y_2 \geq ۰$$



شکل ۵.۷ نمایش هندسی مسأله ثانویه

در مثال فوق براساس نمایش هندسی، مشخص شده است که مسألهٔ اولیه دارای ناحیه موجه بیکران بدون گوشهٔ بهینه است. در مقابل نمایش هندسی مسأله ثانویه آن هیچ گونه ناحیه موجه مشترکی برای محدودیتها ندارد. به عبارت دیگر محدودیتهای ثانویه مسأله در تعارض با همدیگر قرار دارند.

۳. هر گاه مسأله اولیه فاقد ناحیه موجه باشد، ثانویه آن یا دارای ناحیه جواب بیکران بدون گوشهٔ بهینه است یا فاقد ناحیه موجه (جواب) خواهد بود.

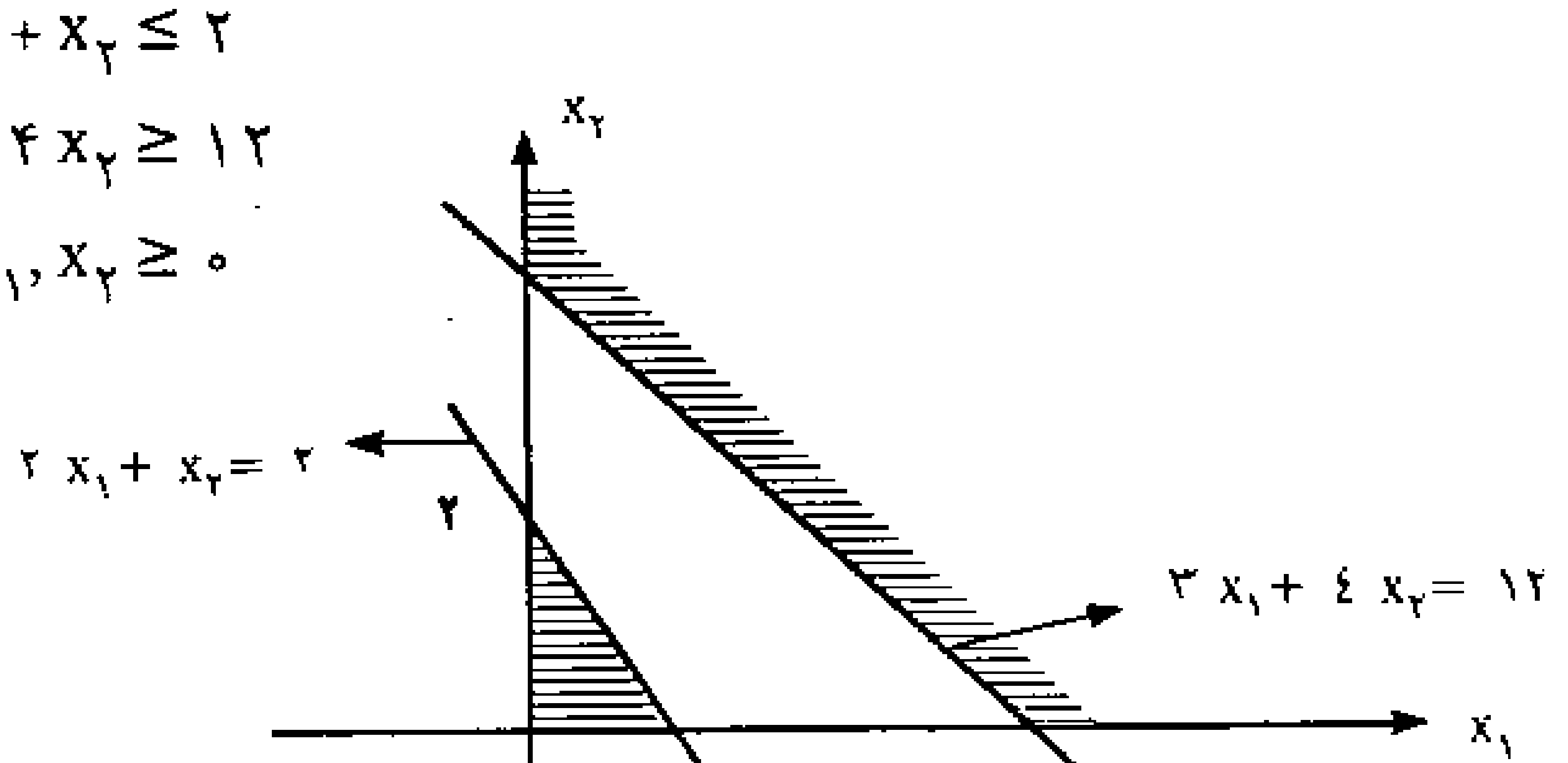
حال با استفاده از مثالهای ۵.۱۶ و ۵.۱۷ صحت رابطهٔ فوق را بررسی می‌کنیم.

مثال ۵.۱۶ مدل زیر را درنظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۳x_1 + ۳x_2$$

s.t :

$$۲x_1 + x_2 \leq ۲$$
$$۳x_1 + ۴x_2 \geq ۱۲$$
$$x_1, x_2 \geq ۰$$



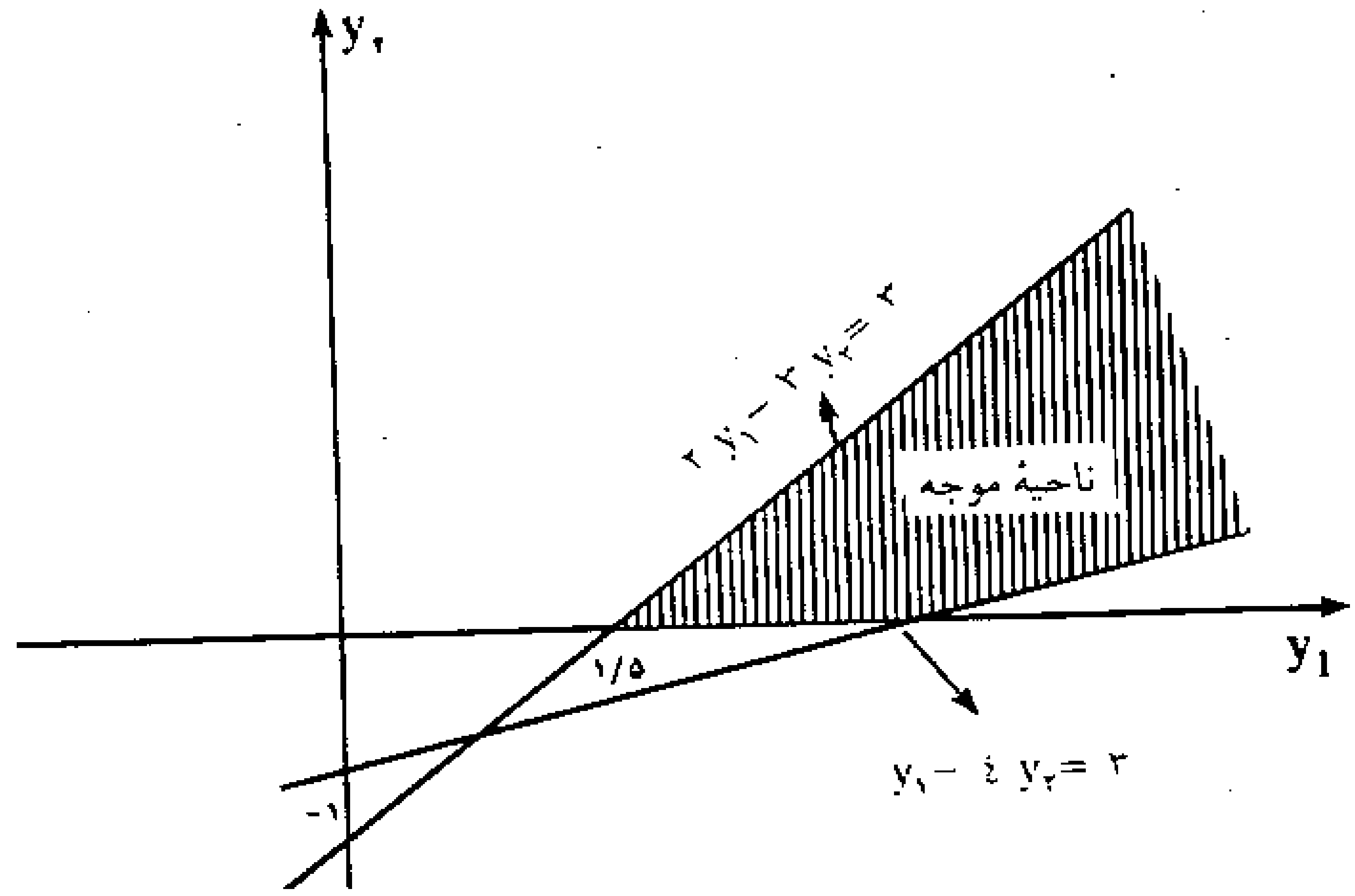
شکل ۵.۸ نمایش هندسی ناحیه جواب مسأله اولیه

حال مسألهٔ ثانویه را نوشته و آن را در شکل ۵.۹ نمایش می‌دهیم.

$$\text{Min } y_{۰} = ۲y_{۱} - ۱۲y_{۲}$$

s.t :

$$۲y_{۱} - ۳y_{۲} \geq ۳$$
$$y_{۱} - ۴y_{۲} \geq ۳$$
$$y_{۱}, y_{۲} \geq ۰$$



شکل ۵.۹ نمایش هندسی مسأله ثانویه

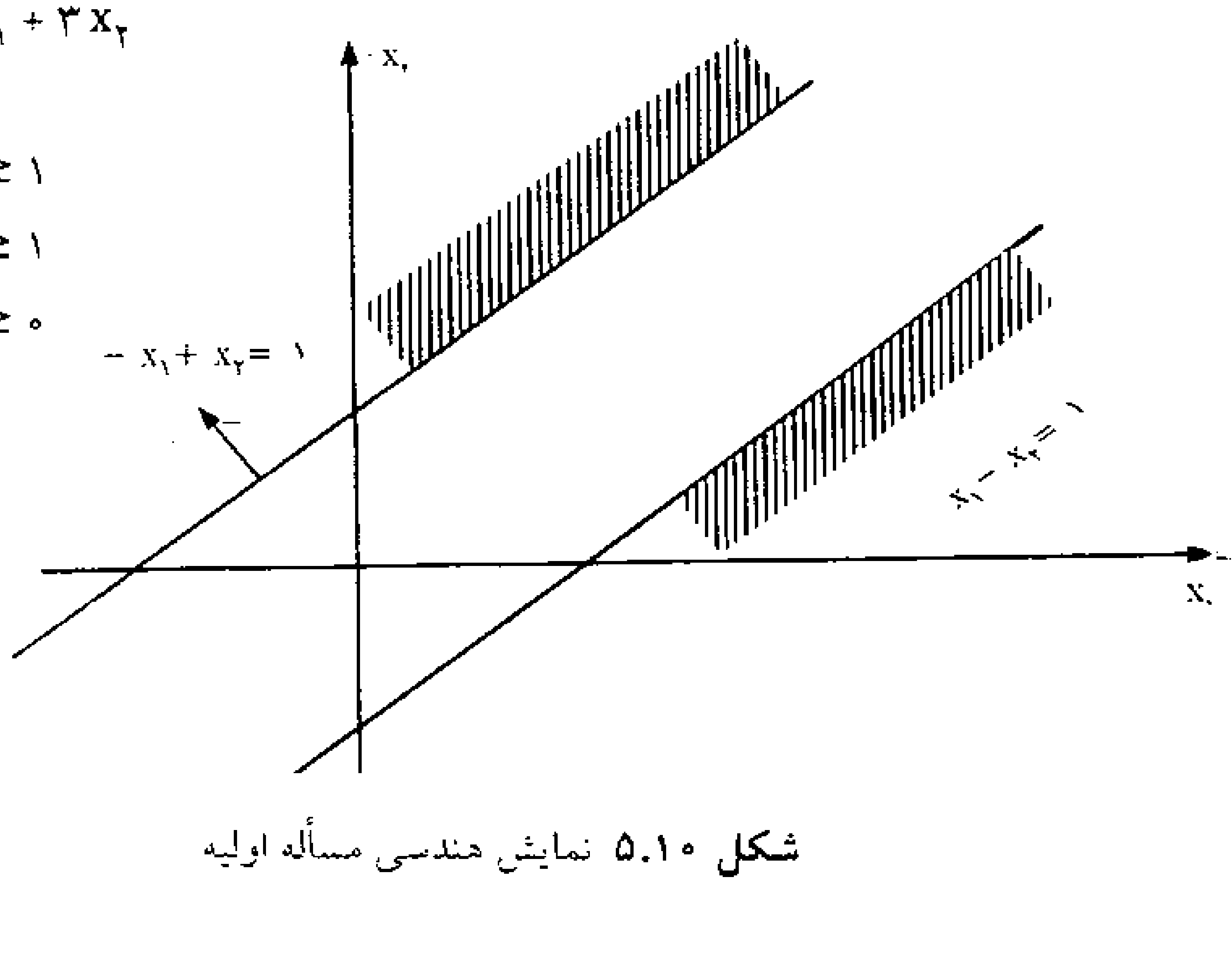
با بررسی نمایش هندسی مسأله اولیه مشخص می‌شود که مسأله اولیه فاقد ناحیه موجه است ولی شکل ۵.۹ نشان می‌دهد که مسأله ثانویه آن دارای ناحیه موجه (جواب) بیکران بدون گوشه بهینه است. حال به ذکر مثال ۵.۱۷ می‌پردازیم که نشان‌دهندهٔ شق دوّم از رابطهٔ فوق می‌باشد.

مثال ۵.۱۷ مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۳x_{۱} + ۳x_{۲}$$

s.t :

$$x_{۱} - x_{۲} \geq ۱$$
$$-x_{۱} + x_{۲} \geq ۱$$
$$x_{۱}, x_{۲} \geq ۰$$



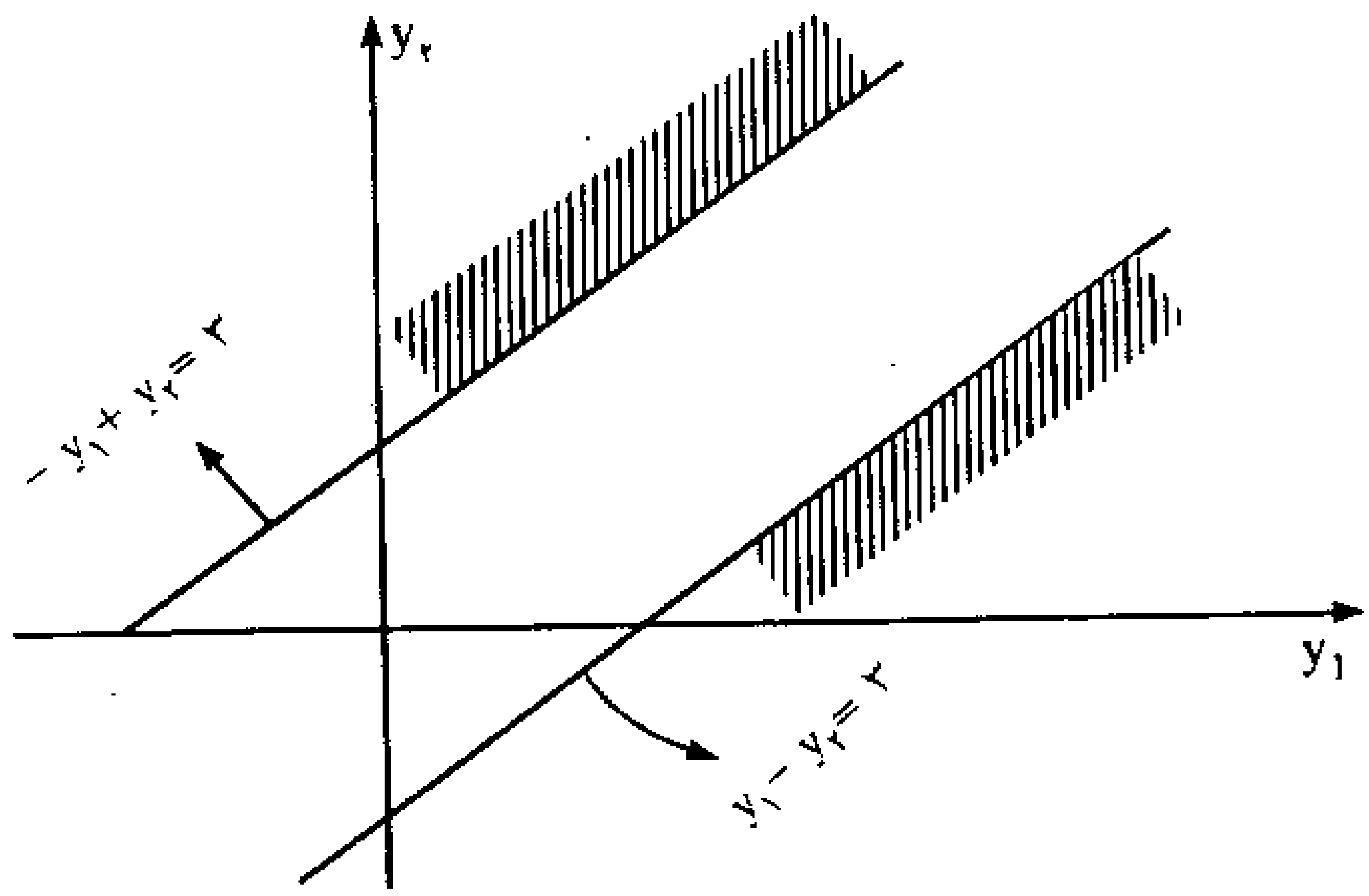
شکل ۵.۱۰ نمایش هندسی مسأله اولیه

بررسی مسأله ثانویه مدل فوق نشان می‌دهد که مسأله ثانویه نیز فاقد ناحیه موجه است.

$$\text{Min } y_{۰} = -y_{۱} - y_{۲}$$

s.t :

$$-y_{۱} + y_{۲} \geq ۳$$
$$y_{۱} - y_{۲} \geq ۳$$
$$y_{۱}, y_{۲} \geq ۰$$



شکل ۵.۱۱ نمایش هندسی مسأله ثانویه

بنابراین مثال ۵.۱۷ برخلاف مثال ۵.۱۶ که مسأله ثانویه آن علیرغم مسأله اولیه دارای ناحیه موجه بیکران بوده، نه مسأله اولیه و نه مسأله ثانویه آن هیچ کدام ناحیه موجه ندارند. بنابراین طی مثالهای ۵.۱۶ و ۵.۱۷ صحّت رابطهٔ سوم تأکید می‌شود.

براساس روابط فوق می‌توان دریافت که هر دو مسأله می‌توانند فاقد ناحیه موجه باشند ولی هر دو مسأله نمی‌توانند دارای ناحیه جواب بیکران بدون گوشهٔ بهینه باشند.

۵.۱۱ روش سیمپلکس ثانویه[1]

در بحث روش M بزرگ و روش سیمپلکس دومرحله‌ای گفته شد که در برخی از مدلهای برنامه‌ریزی خطی نمی‌توان یک جواب موجه براساس متغیرهای کمکی پیدا کرد که امکان آغاز روش سیمپلکس وجود داشته باشد. به عبارت دیگر، روش سیمپلکس برای شروع از مبدأ مختصات مدل آغاز می‌کند که برای برخی از مدلهای برنامه‌ریزی خطی ممکن است، مبدأ مختصات جزو ناحیهٔ موجه اصلی مسأله نباشد. بنابراین با اضافه کردن متغیر مصنوعی فضای (ناحیه) موجه به طور مصنوعی بزرگتر می‌شد تا مبدأ مختصات به عنوان یک جواب آغازین برای سیمپلکس محسوب شود.

حال فرض کنید برای مسأله اولیه برنامه‌ریزی خطی، امکان تشکیل اولین راه‌حل موجه (مبدأ مختصات) با اضافه کردن متغیرهای کمبود (S) وجود نداشته باشد، امّا در صورت نوشتن

1. Dual Simplex Method

مسأله ثانویه برای مدل می‌توان از مبدأ مختصات آغاز کرد. بنابراین بجای استفاده از متغیر مصنوعی در برنامهٔ اولیه مسأله، ابتداء مسأله ثانویه را نوشته و سپس از طریق سیمپلکس عادی به حل مسأله ثانویه می‌پردازیم. امّا می‌توان بجای استفاده از مسأله ثانویه در حل مسأله، آن را به حالت مسأله اولیه حفظ کرده و عیناً عملیاتی را مشابه با آنچه در انتقالات مسأله ثانویه انجام می‌گردد، در این حالت برای مسأله اولیه انجام داد.

روش حل مسأله اولیه براساس منطق مسأله ثانویه به «روش سیمپلکس ثانویه» معروف است که توسط «لیمک»[1] برای اولین بار معرفی شد. مراحل استفاده از روش سیمپلکس ثانویه به شرح زیر است:

مرحله ۱. مسأله را به فرم استاندارد سیمپلکس ثانویه تبدیل کنید. مسأله استاندارد سیمپلکس ثانویه یک مسأله Max است که تمام محدودیتهای آن کوچکتر یا مساوی $(\leq)$ خواهند بود و تمام متغیرهای تصمیم در تابع هدف دارای ضریب «غیرمثبت» خواهند بود $(c_j \leq 0)$.

مرحله ۲. یک جواب اساسی اولیه را که بهینه ولی غیرموجه است، انتخاب کنید و تابلوی اوّل سیمپلکس را تهیه کنید. براساس شکل استاندارد، جواب اولیه با متغیرهای کمکی (S) تعریف می‌شود و حتماً مبدأ مختصات است.

مرحله ۳. منفی‌ترین مقدار سمت راست (b_i) را به عنوان سطر لولا انتخاب کنید. متغیر مربوط به سطر لولا را متغیر خروجی بنامید. به مرحلهٔ ۴ بروید. در صورتی که تمام اعداد سمت راست دارای مقدار غیرمنفی باشند، جواب اساسی موجه و بهینه است. پس توقف کنید.

مرحله ۴. برای انتخاب متغیر ورودی از حداقل حاصل تقسیم عناصر ردیف Z_0 بر قدر مطلق عناصر منفی سطر لولا استفاده کنید. عنصر لولا حتماً یک عدد منفی است. اگر تمام عناصر سطر لولا غیرمنفی باشند، مسأله فاقد ناحیه موجه است.

مرحله ۵. عملیات ردیفی روش سیمپلکس را به طور معمول انجام دهید تا به تابلوی جدید برسید و سپس به مرحلهٔ ۳ بروید.

مثال ۵.۱۸ مدل LP زیر را درنظر بگیرید:

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

s.t :

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 3$$
$$4x_1 + 2x_3 \geq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

---

1. Lemke

مدل را با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه حل می‌کنیم.

مرحله ۱. ابتداء مسأله به فرم استاندارد تبدیل می‌شود. برای این منظور تابع هدف و نامعادلات مسأله در ۱ ـ ضرب می‌شود. پس:

$$\text{Max } (-Z) = -10x_1 - 5x_2 - 4x_3$$

s.t :

$$\begin{aligned} -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\leq -3 \\ -4x_1 - 2x_3 &\leq -10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

مرحله ۲. برای پیدا کردن جواب اساسی اولیه، متغیرهای کمکی را به نامعادلات مدل استاندارد اضافه می‌کنیم. تابلوی اوّل سیمپلکس براساس متغیرهای کمکی تشکیل می‌شود. این جواب فوق بهینه است ولی غیرموجه می‌باشد.

$$\text{Max } (-Z) = -10x_1 - 5x_2 - 4x_3$$

s.t :

$$\begin{aligned} -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + S_1 &= -3 \\ -4x_1 - 2x_3 + S_2 &= -10 \\ x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

جدول ۵.۱۲ تابلوی اوّل سیمپلکس ثانویه

ستون لولا

متغیرهای‌اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	مقادیرسمت‌راست	
Z_0	۱ ـ	۱۰	۵	۴	۰	۰	۰	
S_1	۰	۳ ـ	۲ ـ	۳	۱	۰	۳ ـ	
S_2	۰	۴ ـ	۰	۲ ـ	۰	۱	۱۰ ـ	سطر لولا

همچنان که تابلوی اوّل نشان می‌دهد، شرط بهینگی جواب اساسی (غیرمنفی بودن عناصر سطر صفر) برقرار است ولی مقادیر سمت راست منفی هستند. پس جواب بهینه و غیرموجه است. بنابراین باید تلاش کنیم که مسأله را با حفظ بهینگی، به سمت فضای موجه تا رسیدن به اولین جواب اساسی موجه سوق دهیم. این کار با مرحلهٔ ۳ انجام می‌گیرد.

مرحله ۳. منفی‌ترین مقدار سمت راست به عنوان «سطر لولا» انتخاب می‌شود و متغیر

معرف آن متغیر خروجی خواهد بود. پس $S_۲$ با منفی‌ترین مقدار سمت راست در تابلوی اوّل سیمپلکس، متغیر خروجی خواهد بود.

مرحله ۴. برای انتخاب ستون لولا (متغیر ورودی) عناصر ردیف $Z_۰$ را بر قدر مطلق عناصر منفی سطر لولا ($S_۲$) تقسیم کنید. حداقل حاصل تقسیم را به عنوان ستون لولا معین کنید. با توجه به اینکه عناصر منفی سطر لولا مربوط به $x_۱$ و $x_۲$ می‌باشند. پس داریم:

$$\text{Min}\left\{\frac{۱۰}{|-۴|},\ \frac{۴}{|-۲|}\right\} = ۲$$

بنابراین متغیر ورودی $x_۲$ می‌باشد. و عنصر لولا ۲ ــ خواهد بود. (توجه کنید که عنصر لولا منفی است!).

مرحله ۵. جواب اساسی جدید را محاسبه کنید. حاصل تابلوی دوّم سیمپلکس است که در جدول ۵.۱۳ آمده است.

جدول ۵.۱۳ تابلوی دوّم سیمپلکس

ستون لولا

متغیرهای اساسی	Z	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	مقادیر سمت راست
$Z_۰$	۱ ـ	۲	۵	۰	۰	۲	۲۰ ـ
$S_۱$	۰	۹ ـ	۲ ـ	۰	۱	$\frac{۳}{۲}$	۱۸ ـ
$x_۳$	۰	۲	۰	۱	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۵

سطر لولا

مجدداً به مرحلهٔ ۳ برگردید. چون هنوز در سمت راست تابلوی فوق مقدار منفی وجود دارد، پس تابلوی بهینه حاصل نشده است. پس $S_۱$ به عنوان متغیر خروجی انتخاب می‌شود و $x_۱$ متغیر ورودی خواهد بود. با توجه به عنصر لولا (عدد ۹ ــ) عملیات ردیفی را برای بدست آوردن تابلوی سوّم ادامه دهید. حاصل در جدول ۵.۱۴ آمده است.

جدول ۵.۱۴ تابلوی سوّم سیمپلکس

متغیرهای اساسی	Z	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	مقادیر سمت راست
$Z_۰$	۱ ـ	۰	$\frac{۴۱}{۹}$	۰	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۷}{۳}$	۲۴ ـ
$x_۱$	۰	۱	$\frac{۲}{۹}$	۰	$-\frac{۱}{۹}$	$-\frac{۱}{۶}$	۲
$x_۳$	۰	۰	$-\frac{۴}{۹}$	۱	$\frac{۲}{۹}$	$-\frac{۱}{۶}$	۱

با توجه به غیرمنفی بودن کلیهٔ عناصر سمت راست، جواب بهینه در تابلوی سوم، حاصل شده است. پس با حفظ بهینگی، اولین گوشهٔ موجه عبارتست از:

$(x_۱ = ۲, x_۲ = ۰, x_۳ = ۱, S_۱ = ۰, S_۲ = ۰)$

و مقدار Z^* مساوی است با:

$\text{Min } Z = \text{Max}(-Z) = -(-۲۴) = ۲۴$

شرط لازم برای اجرای سیمپلکس ثانویه، بهینه بودن مسأله ثانویه است و شرط لازم برای سیمپلکس اولیه[1]. موجه بودن مسأله اولیه است. بر همین سیمپلکس اولیه با حفظ موجه بودن، جواب به سوی بهینگی پیش می‌رود و به آخرین گوشهٔ موجه‌ای که می‌رسیم، به عنوان گوشهٔ بهینه توقف می‌کنیم. برعکس در سیمپلکس ثانویه با حفظ بهینگی به سوی موجه شدن پیش خواهیم رفت. به عبارت دیگر، در حالی که مسأله اولیه درصدد بهینگی[2] است، مسأله ثانویه در جستجوی موجه شدن[3] است.

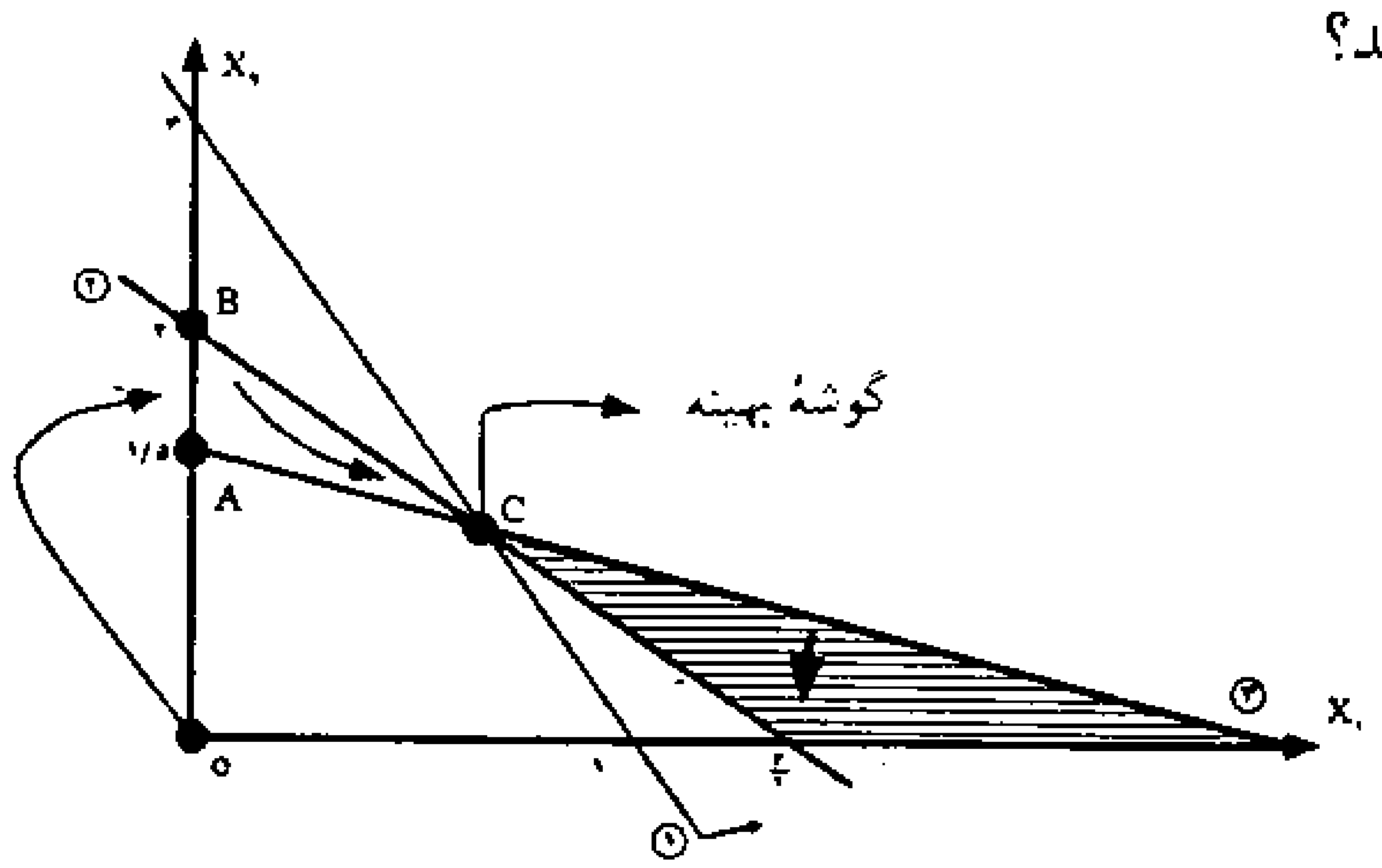
مثال ۵.۱۹ مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\text{Min } Z = ۲x_۱ + x_۲ \\ &\text{s.t}: \\ &۳x_۱ + x_۲ \geq ۳ \\ &۴x_۱ + ۳x_۲ \geq ۶ \\ &x_۱ + ۲x_۲ \leq ۳ \\ &x_۱, x_۲ \geq ۰ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Max } (-Z) = -۲x_۱ - x_۲ \\ &\text{s.t}: \\ &-۳x_۱ - x_۲ + S_۱ = -۳ \\ &-۴x_۱ - ۳x_۲ + S_۲ = -۶ \\ &x_۱ + ۲x_۲ + S_۳ = ۳ \\ &x_۱, x_۲, S_۱, S_۲, S_۳ \geq ۰ \end{aligned}$$

مسأله را با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه حل کنید و مسیر حرکت را به طریق هندسی نشان دهید؟

$$\begin{aligned} &\text{Min } Z = ۲x_۱ + x_۲ \\ &\text{s.t}: \\ &۳x_۱ + x_۲ \geq ۳ \\ &۴x_۱ + ۳x_۲ \geq ۶ \\ &x_۱ + ۲x_۲ \leq ۳ \\ &x_۱, x_۲ \geq ۰ \end{aligned}$$



1. Primal Simplex
2. Optimality
3. Feasibility

حل مسأله براساس Dual simplex به شرح زیر است:

	Z	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$		
Z	-۱	۲	۱	۰	۰	۰	۰	
$S_۱$	۰	-۳	-۱	۱	۰	۰	-۳	(گوشه O)
$S_۲$	۰	-۴	-۳	۰	۱	۰	-۶ →	
$S_۳$	۰	۱	۲	۰	۰	۱	۳	
Z	-۱	$+\frac{۲}{۳}$	۰	۰	$\frac{۱}{۳}$	۰	-۲	
$S_۱$	۰	$-\frac{۵}{۳}$	۰	۱	$-\frac{۱}{۳}$	۰	-۱ →	(گوشه B)
$x_۲$	۰	$\frac{۴}{۳}$	۱	۰	$-\frac{۱}{۳}$	۰	۲	
$S_۳$	۰	$-\frac{۵}{۳}$	۰	۰	$\frac{۲}{۳}$	۱	-۱	
Z	-۱	۰	۰	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	۰	$\frac{۱۲}{۵}$	
$x_۱$	۰	۱	۰	$-\frac{۳}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	۰	$\frac{۳}{۵}$	(گوشه C)
$x_۲$	۰	۰	۱	$\frac{۴}{۵}$	$-\frac{۳}{۵}$	۰	$\frac{۶}{۵}$	
$S_۳$	۰	۰	۰	-۱	۱	۱	۰	

مدل از گوشهٔ O به گوشهٔ B انتقال یافته است. یعنی گوشهٔ مجاور را رعایت نکرده است. دلیل آن این است که محدودیت سوم یک محدودیت زاید است و لذا قابل حذف است. این امر از مقادیر سمت راست تابلوی دوّم نیز مشخص می‌گردد. هم می‌توان متغیر $S_۱$ را خروجی گرفت و هم $S_۳$ را می‌توان به عنوان سطر لولا انتخاب می‌کرد. بنابراین در گوشهٔ بهینه محدودیت سوّم قابل حذف است. به همین دلیل در سمت راست تابلوی سوم مقدار $S_۳$ مساوی صفر شده است. بنابراین مدل دارای جواب بهین تبهگن است و محدودیت سوم آن در این گوشه زاید است.

۵.۱۲ خلاصه فصل پنجم

اهمیت الگوریتم سیمپلکس دریافتن جواب بهینه و تفسیر نتایج حاصل از آن است. در این فصل ابتدا هر یک از عناصر تابلوی سیمپلکس تفسیر اقتصادی شده است، سپس مفهوم اصلی فصل یعنی «قیمت سایه‌ای» بیان گردیده است.

هر مسأله (برنامه) اوّلیه دارای یک همزاد یا مزدوجی است که به مسأله (برنامه) ثانویه معروف است. اهمیت مسأله ثانویه در تفسیر اقتصادی نتایج آن است که در این فصل به تفصیل

بیان شده است. درنهایت ضمن تشریح روابط مسائل اولیه و ثانویه، «روش سیمپلکس ثانویه» توضیح داده شده است.

۵.۱۳ مسائل فصل

۵.۱۳.۱ سئوالات تکمیلی و چهارگزینه‌ای :

۱. در تحلیل اقتصادی عناصر تابلوی سیمپلکس مقدار منفی ذیل ستون متغیر کمکی و سطر متغیر تصمیم به معنی .... در آن متغیر تصمیم است.

۲. در تحلیل اقتصادی عناصر تابلوی سیمپلکس مقدار مثبت ذیل ستون متغیر تصمیم و سطر متغیر تصمیم به معنی .... در آن متغیر تصمیم است.

۳. هر مسألهٔ اولیه دارای یک مسأله .... است.

۴. سمت چپ هر محدودیت ثانویه به معنای ارزش واقعی منابع به کار رفته در یک واحد متغیر .... است.

۵. محدودیتی که تأثیری در ایجاد منطقه موجه نداشته باشد و وجود یا عدم وجود آن موجب تغییر در ناحیه موجه نگردد، محدودیت .... نامیده می‌شود.

۶. هر گاه در مسأله اولیه یک متغیر آزاد در علامت وجود داشته باشد، محدودیت متناظر به آن در مسألهٔ ثانویه به صورت .... تعریف می‌شود.

۷. هر محدودیت در مسأله اولیه دارای یک .... متناظر در مسأله ثانویه است.

۸. در روش سیمپلکس ثانویه عنصر لولا همواره .... است.

۹. در تابلوی بهینه مسألهٔ اولیه همواره مقدار تابع هدف .... مقدار تابع هدف مسأله ثانویه در تابلوی بهینهٔ آن است.

۱۰. متغیر کمکی مسأله ثانویه متناظر با متغیر .... مسأله اولیه است.

۱۱. مسأله اولیه زیر را درنظر بگیرید:

مسأله ثانویه آن دارای چند محدودیت است؟

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 - x_3$$

s.t :

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 100$$

$$x_2 \geq 100$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الف) ۱   ب) ۳

ج) ۲   د) ۴

۱۲. مسأله اولیه زیر را در نظر بگیرید:

مسأله ثانویه آن دارای چند متغیر آزاد در علامت است؟

$$\text{Min } Z = 5x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

s.t :

$$x_1 + x_2 = 20$$

الف) ۲   ب) ۳

ج) ۱　　　　د) ۴

$x_2 - \frac{1}{2}x_3 \geq 10$

$x_1 - x_3 = 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

و x_3 آزاد در علامت

۱۳. مسأله اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$\text{Max } Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

S.t :

$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

جواب مسأله اولیه $(x_1 = \frac{9}{5}, x_2 = \frac{8}{5}, x_3 = 0)$ است. اگر گوشهٔ متناظر ثانویه آن $(y_2 = -\frac{2}{5}$ و $y_1 = \frac{29}{5})$ باشد. جواب تعریف شده مسأله اولیه چه نوعی گوشه‌ای است؟

الف) غیرموجه　　　　ب) مجاور گوشهٔ بهینه

ج) بهتر از گوشهٔ بهینه　　　　د) بهینه

۱۴. اگر در جواب بهینهٔ مسأله اولیه $x_1^* = 3$ باشد، مقدار متغیر کمکی محدودیت معادل آن در مسأله ثانویه، چقدر خواهد بود؟

الف) بزرگتر از صفر　　　　ب) مساوی صفر

ج) بزرگتر یا مساوی صفر　　　　د) مساوی ۳

۱۵. ضریب S_2 در ردیف Z_0 تابلوی بهینه سیمپلکس مساوی ۱۰ است. متغیر متناظر آن در مسأله ثانویه:

الف) یک متغیر غیراساسی است.　　　　ب) دارای مقدار صفر است.

ج) یک متغیر اساسی است.　　　　د) آزاد در علامت است.

۱۶. در روش سیمپلکس ثانویه، سطر خروجی عبارت است از:

الف) کوچکترین حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر ستون لولا

ب) کوچکترین مقدار مثبت

ج) منفی‌ترین مقدار سمت راست

د) بزرگترین مقدار منفی

۱۷. در روش سیمپلکس ثانویه انتخاب متغیر ورودی چگونه انجام می‌گیرد؟

الف) منفی‌ترین عنصر ردیف Z_0 در تابلوی سیمپلکس

ب) بزرگترین مقدار مثبت ردیف Z_0 در تابلوی سیمپلکس

ج) کوچکترین حاصل تقسیم عناصر ردیف Z_0 تابلوی سیمپلکس بر عناصر مثبت سطر لولا

د) کوچکترین حاصل تقسیم عناصر ردیف Z_0 تابلوی سیمپلکس بر قدر مطلق عناصر منفی سطر لولا

۱۸. مسأله زیر را درنظر بگیرید. تعداد متغیرها و محدودیتهای مسأله ثانویه آن به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

$$\text{Max } Z = ۳x_۱ + ۲x_۲ - ۴x_۳$$

s.t :

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۰$$

$$x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ \geq ۱۲$$

$$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$$

الف) (۳ و ۲)

ب) (۲ و ۳)

ج) (۳ و ۳)

د) (۲ و ۲)

۱۹. در صورتی که Z مقدار تابع هدف یک مسأله حداکثرسازی با محدودیتهای کوچکتر مساوی باشد و $y_۰$ مقدار تابع هدف مسأله ثانویه آن، آنگاه:

الف) $Z = y_۰$ ب) $Z \leq y_۰$

ج) $Z \geq y_۰$ د) $Z > y_۰$

۲۰. در یک تابلوی سیمپلکس شرط بهینگی برقرار است و در سمت راست تابلو برای متغیرهای اساسی مقدار منفی وجود دارد. جواب اساسی بدست آمده؛

الف) بهینه است. ب) غیرموجه است.

ج) موجه است. د) در کلیهٔ محدودیتهای مدل صدق می‌کند.

۲۱. در صورتی که $y_۰$ نشان‌دهندهٔ، مقدار تابع هدف ثانویه مسأله زیر باشد، مقدار آن برابر است با:

$$\text{Max } Z = ۳x_۱ + ۴x_۲$$

s.t :

$$۳x_۱ + ۲x_۲ \geq ۰$$

$$x_۱ - \frac{۱}{۲}x_۲ \leq ۰$$

$$۲x_۱ + x_۲ \leq ۰$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

الف) صفر ب) ۴

ج) ۶ د) ۸

۲۲. قسمتی از جدول اوّل و نهایی (بهینه) یک مسأله LP به صورت زیر داده شده است: کدام گزینه است؟

الف) $Z^* = ۲۵۰$ ب) $Z^* = ۱۰۰$

ج) $Z^* = ۲۰۰$ د) $Z^* = ۲۹۰$

متغیرهای اساسی	Z	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	مقادیر سمت راست
$Z_۰$	۱						۰
$S_۱$	۰						۲۰
$S_۲$	۰						۵۰
$Z_۰$	۱	۰	۰	۲	۵	۰	?
$x_۳$	۰				تابلوی بهینه		
$S_۲$	۰						

۲۳. تابلوی نهایی یک مسأله LP به صورت زیر داده شده است. قیمت سایه‌ای منابع به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

الف) (۱ و ۲) ب) (۲ و ۱)

ج) (۸ و ۶) د) (۰ و ۰)

اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	سمت راست
Z_0	۱	۰	۰	۱	۲	۱۱۶
x_1	۰	۱	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	۸
x_2	۰	۰	۱	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	۶

۲۴. در صورتی که قیمت منابع مسأله سئوال ۲۲ در بازار ۵۰٪ باشد. خرید کدام یک از منابع را توصیه می‌کنید؟

الف) هر دو منبع ب) فقط منبع اوّل

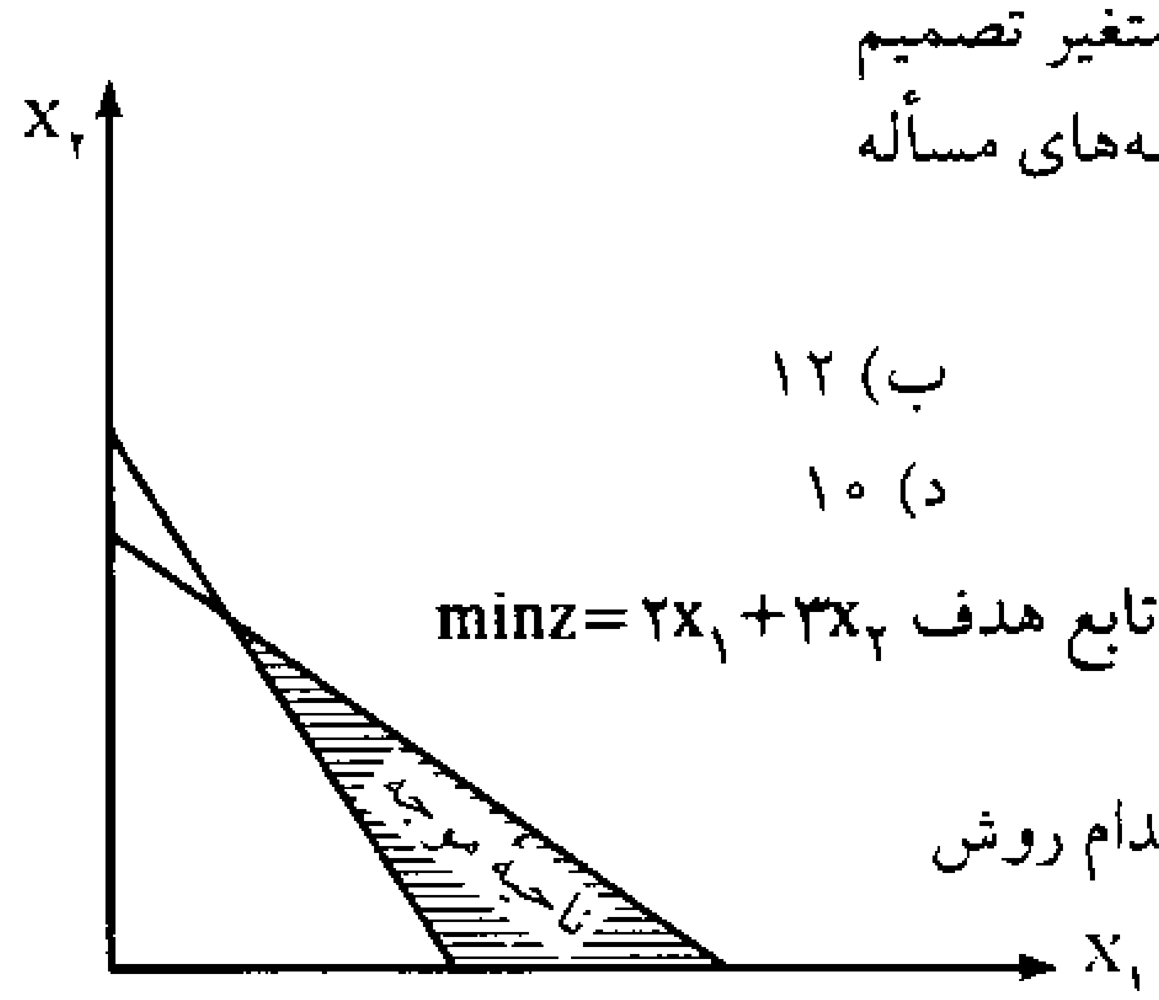
ج) فقط منبع دوّم د) هیچ یک از منابع

۲۵. اگر یک مسأله اولیه دارای دو متغیر تصمیم و سه محدودیت کارکردی باشد. تعداد گوشه‌های مسأله ثانویه آن چقدر است؟

الف) ۲۰ ب) ۱۲

ج) ۸ د) ۱۰

۲۶. ناحیهٔ موجه یک مسأله LP با تابع هدف $\min z = 2x_1 + 3x_2$ به شرح زیر است:



برای حل آن به کمک روش سیمپلکس از کدام روش می‌توان استفاده کرد؟

الف) روش دومرحله‌ای ب) روش M بزرگ

ج) روش سیمپلکس ثانویه د) (الف، ب و ج)

۲۷. مسأله اولیه فاقد ناحیه موجه است. مسأله ثانویه آن؛

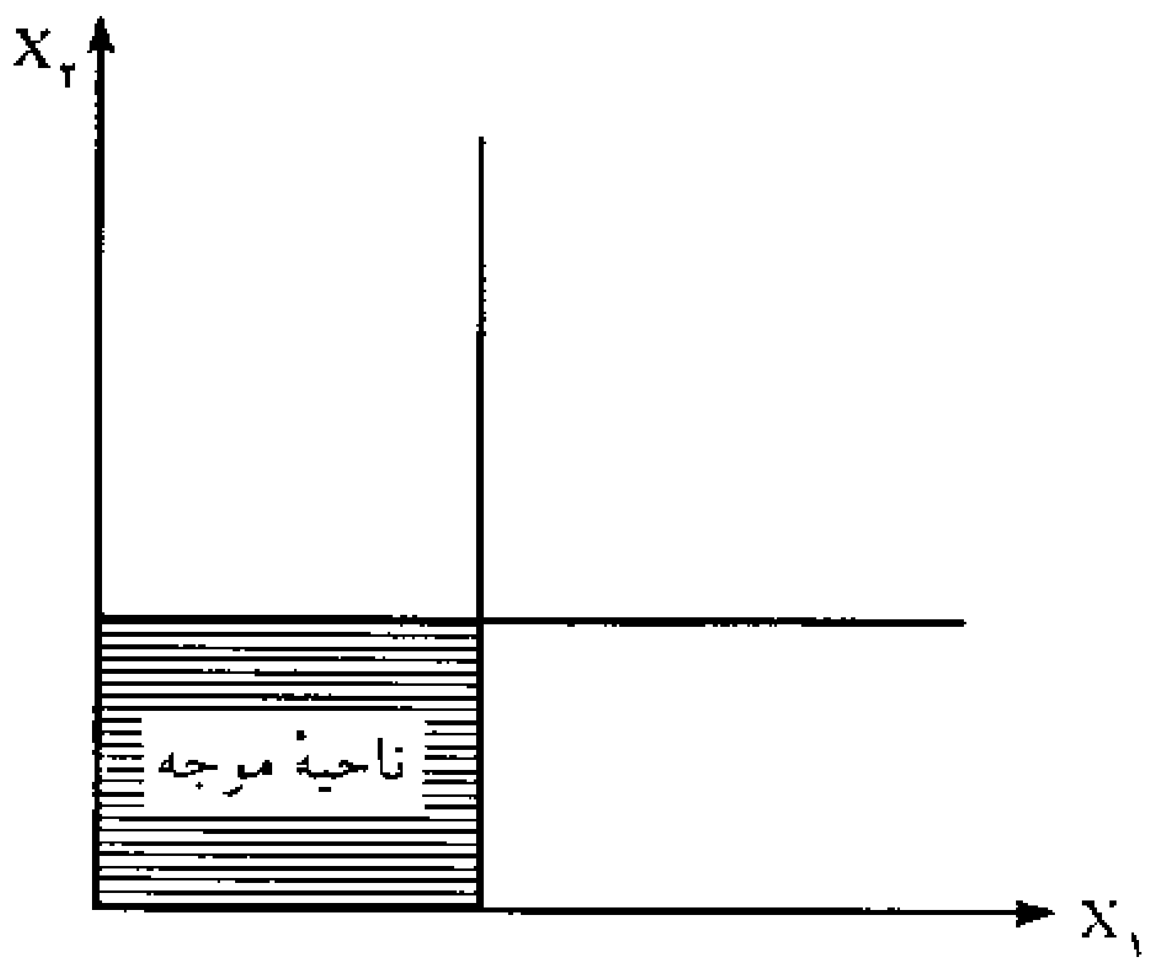
الف) فاقد ناحیه موجه است.

ب) دارای ناحیه موجه بیکران بدون گوشه بهینه است.

ج) دارای ناحیه موجه محدود است.

د) (الف یا ب)

۲۸. ناحیه موجه مسأله اولیه به صورت زیر است.



کدام گزینه صحیح است؟

الف) مسأله ثانویه دارای ناحیه موجه بیکران بدون گوشهٔ بهینه است.

ب) مسأله ثانویه دارای ناحیه موجه بیکران با گوشه بهینه است.

ج) مسأله ثانویه فاقد ناحیه موجه است.

د) مسأله ثانویه دارای ناحیه موجه محدود است.

۲۹. تابلوی اوّل سیمپلکس ثانویه متناظر با چه گوشه‌ای است؟

الف) موجه ب) بهینه

ج) مبدأ مختصات د) غیر از مبدأ مختصات

۳۰. متغیرهای اساسی جدول بهینه مسأله زیر $x_1 = ۴۰$، $x_2 = ۱۱۰$ و $S_2 = ۹۰$ می‌باشد. مقدار بهینه تابع هدف مسأله ثانویه برابر است با:

$$\text{Max } Z = ۲۰x_1 + ۱۰x_2$$

s.t :

$$x_1 + x_2 = ۱۵۰$$
$$x_1 \leq ۴۰$$
$$x_2 \geq ۲۰$$
$$x_1, x_2 \geq ۰$$

الف) ۶۵۰ ب) ۱۹۰۰

ج) ۲۰۰ د) ۱۰

۳۱. جواب مسأله ثانویه مربوط به مدل زیر کدام است؟

$$\text{Min } Z = ۴x_1 - ۷x_2 + ۹x_3$$

s.t :

$$x_1 + ۲x_2 + ۴x_3 \geq ۴$$
$$x_1, x_2 \geq$$
x_3 آزاد در علامت

الف) بهینه چندگانه

ب) تبهگن موقت

ج) تبهگن غیرموقت

د) فاقد ناحیه موجه (بدون جواب بهینه)

۵.۱۳.۲ تمرینات

۱. جدول (تابلوی) اوّل و بهینه یک مسأله برنامه‌ریزی تولید به صورت زیر داده شده است. x_1، x_2 و x_3 به ترتیب متغیرهای تصمیم مسأله هستند. عناصر هر یک از تابلوها را تحلیل اقتصادی کنید؟

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	مقادیر سمت راست	
Z_0	۱	۳-	۲-	۵-	۰	۰	۰	۰	
S_1	۰	۱	۲	۱	۱	۰	۰	۴۳۰	تابلوی
S_2	۰	۳	۰	۲	۰	۱	۰	۴۶۰	اوّل
S_3	۰	۱	۴	۰	۰	۰	۱	۴۲۰	
Z_0	۱	۴	۰	۰	۱	۲	۰	۱۳۵۰	
x_2	۰	$-\frac{1}{4}$	۱	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	۰	۱۰۰	تابلوی
x_3	۰	$\frac{3}{2}$	۰	۱	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۲۳۰	بهینه
S_3	۰	۲	۰	۰	۲-	۱	۱	۲۰	

همچنین با استفاده از مفهوم قیمت سایه‌ای مقدار ۱۳۵۰ =Z^* را کنترل کنید.

۲. مسأله اولیه زیر را درنظر بگیرید و مسأله ثانویه آن را بنویسید؟

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 10x_4$$

s.t :

$$x_1 + x_2 - x_4 \le 100$$
$$x_2 - x_3 \ge 80$$
$$x_1 + x_2 - 3x_4 = 90$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$ آزاد در علامت

۳. مسألهٔ اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } Z = 100x_2 + 80x_3 - x_5$$

s.t :

$$2x_1 + 3x_2 - x_4 \ge 20$$
$$x_2 + x_3 - x_5 \ge 30$$
$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 + x_5 = 25$$
$$x_5 \ge 2$$
$$x_1 \le 10$$
$$x_1, x_2, x_5 \ge 0$$
x_3, x_4 آزاد در علامت

۴. مسألهٔ زیر را به روش سیمپلکس ثانویه حل کنید؟

الف)

$$\text{Max } Z = -2x_1 - 2x_2$$

s.t :

$$2x_1 + x_2 \ge 6$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

ب)

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

s.t :

$$2x_1 + 3x_2 + \frac{1}{2}x_3 \ge 12$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 \le 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

ج) $\text{Min } Z = ۱۰x_۱ + ۵x_۲ + ۴x_۳$

s.t :

$$۳x_۱ + ۲x_۲ - ۳x_۳ \geq ۳$$
$$۴x_۱ + ۲x_۳ \geq ۱۰$$
$$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$$

۵. مسألهٔ اولیهٔ زیر را درنظر بگیرید:

$\text{Min } Z = ۳x_۱ + ۲x_۲$

s.t :

$x_۱ + x_۲ \leq ۱۰$

$x_۱ + ۲x_۲ \geq ۱۴$

$x_۱, x_۲ \geq ۰$

با استفاده از روش هندسی جواب بهینهٔ مسألهٔ اولیه و ثانویهٔ آن را پیدا کنید؟

۶. مسألهٔ اولیه زیر را درنظر بگیرید:

$\text{Max } Z = ۲x_۱ + ۳x_۳$

s.t :

$-۳x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ \leq ۵$

$-۲x_۱ - x_۲ \leq ۱$

$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$

ضمن نوشتن مسأله ثانویه و حل آن به روش ترسیمی نتایج و مفاهیم بدست آمده را بیان کنید؟

۷. مسائل زیر را درنظر بگیرید:

الف) $\text{Max } Z = ۴x_۱ + ۳x_۲$

s.t :

$$-۲x - x_۲ \leq -۴$$
$$۲x_۱ - ۲x_۲ \leq ۵$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

ب) $\text{Max } Z = ۳x_۱ + ۵x_۲$

s.t :

$$x_۱ - x_۲ \leq -۲$$
$$-x_۱ + x_۲ \leq -۲$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

الف) مسألهٔ ثانویه هر یک را بنویسید.

ب) با استفاده از روش ترسیمی هر یک مسائل را حل کنید و روابط ناحیهٔ جواب اولیه و ثانویه را بیان کنید.

۸. مسألهٔ LP زیر را درنظر بگیرید؟

$\text{Max } Z = ۲x_۱ + ۳x_۲$

s.t :

$x_۱ + x_۲ \geq ۳$

$x_۱ - ۲x_۲ \leq ۴$

$x_۱, x_۲ \geq ۰$

الف) مسأله را با استفاده از روش M بزرگ حل کنید؟

ب) عناصر هر یک از تابلوهای سیمپلکس را تحلیل کنید؟

ج) جواب بهینهٔ مسأله ثانویه را با استفاده از تابلوی بهینه بدست آمده استخراج کنید؟

۹. مسأله اولیه زیر و تابلوی آخر آن داده شده است:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2$$

s.t :

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0$$

الف) جواب بهینه مسأله ثانویه را با استفاده از تابلوی داده شده بدست آورید؟

ب) جواب بند الف را با روش حل ترسیمی مسأله ثانویه کنترل کنید.

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	۰	۰	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$M+\frac{3}{2}$	$M-\frac{1}{2}$	۵
x_1	۰	۱	۰	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۱
x_2	۰	۰	۱	۰	-1	۰	۱	۲

ج) تابلوی سیمپلکس فوق چه مفهومی را در خصوص ناحیهٔ موجه مسأله اولیه بیان می‌کند؟

۱۰. مدل زیر را درنظر بگیرید:

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

s.t :

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 3$$

$$4x_1 + 2x_3 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الف) مسألهٔ زیر را با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه حل کنید؟

ب) مسألهٔ ثانویهٔ مدل فوق را بنویسید؟ و آن را حل کنید؟

ج) جوابهای بدست آمده از بند الف و ب را مقایسه کنید؟ به چه نتیجهٔ مفیدی دست خواهید یافت؟ بنویسید.

۵.۱۴ پاسخنامهٔ سئوالات تکمیلی و چهارگزینه‌ای

۱. افزایش	۲. کاهش	۳. ثانویه	۴. تصمیم
۵. زاید	۶. مساوی	۷. متغیر	۸. منفی
۹. مساوی	۱۰. تصمیم	۱۱. ب	۱۲. الف
۱۳. د	۱۴. ب	۱۵. ج	۱۶. ج
۱۷. د	۱۸. ب	۱۹. ب	۲۰. ب
۲۱. الف	۲۲. ب	۲۳. الف	۲۴. د
۲۵. د	۲۶. د	۲۷. ب	۲۸. ج
۲۹. ب	۳۰. د		

سخن آخر

مقدمه‌ای بر تحلیل حساسیت[1]

یکی از مفروضات برنامه‌ریزی خطی این است که پارامترهای مدل (c_j , b_i , a_{ij})، مقادیری معین و قطعی هستند. امّا می‌دانیم، مقدار هر پارامتری که در مدل به کار می‌رود، صرفاً بر مبنای فرضیات و پیش‌بینیهایی برآورد می‌گردد. این برآوردها بر مبنای داده‌هایی انجام می‌شود که معمولاً ناقص است و گاهی اساساً موجود نیست. از این پارامترهایی که ابتدا در فرموله کردن وارد می‌شوند فقط در حد یک تخمین تجربی و حتیٰ سرانگشتی به شمار می‌آیند.

ارزش جواب بهینه حاصل از مدل برنامه‌ریزی خطی تا زمانی است که تمام پارامترهای اولیه به کار رفته در مدل بدون تغییر باقی بمانند. عواملی چون کسب اطلاعات بهتر و دقیقتر از پارامتر و یا نوسانات بازار و گذر زمان و یا سیاستهای تصمیم‌گیران و . . . ممکن است موجب تغییر (تغییراتی) در اجزای مدل شود. بنابراین تعیین میزان «حساسیت» جواب بهینه بدست آمده برای یک مسأله به انواع تغییرات در داده‌ها و پارامترهای آن بروز می‌کند.

منظور از تحلیل حساسیت بررسی تأثیر تغییرات محتمل پارامترها بر روی جواب بهینه است. از این نقطه‌نظر، پارامترها به دو دستهٔ کلی تقسیم می‌شوند. برخی پارامترها می‌توانند مقادیر منطقی مختلفی را اختیار کنند و در عین حال تأثیری بر روی بهینگی جواب نداشته باشد. امّا در مقابل، اندک تغییری در بعضی از پارامترهای دیگر ممکن است اصولاً به جواب بهینهٔ جدیدی منجر شود. اهمیت این موضوع وقتی بیشتر می‌شود که در اثر این تغییرات مقدار تابع هدف بهینهٔ قبلی کاملاً نامناسب و حتیٰ در مواردی غیرموجه گردد! بنابراین هدف اصلی تحلیل حساسیت، شناختن این نوع پارامترهای کاملاً حساس است تا تخمین آنها با دقت بیشتری انجام شود و در عین حال جوابی انتخاب گردد که درمجموع به ازاء تمام مقادیر محتمل پارامترها، به عنوان یک جواب خوب مطرح باشد. با این توصیف؛ «بررسی تغییرات در جواب بهینه بر اثر

1. Sensitivity Analysis

تغییرات در داده‌های مختلف یک مسأله را تحلیل حساسیت یا تحلیل پس‌بهینگی [1] می‌نامند.»
در تحلیل حساسیت، مهمترین تغییراتی که تأثیرشان بر جواب بهینه مورد بررسی قرار می‌گیرند، عبارتند از:

۱. تغییر در ضرایب تابع هدف مدل (c_j)
۲. تغییر در میزان منابع موجود یا مقادیر سمت راست محدودیتها (b_i)
۳. تغییر در ضرایب فنی متغیرها یا ضرایب متغیرها در محدودیتها (a_{ij})
۴. اضافه شدن یک (چند) متغیر تصمیم جدید
۵. اضافه شدن یک (چند) محدودیت جدید

برای درک بهتر تغییرات پنج‌گانه فوق و اهمیت بحث تحلیل حساسیت مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۴۰\, x_۱ + ۵۰\, x_۲$$

s.t :

$$x_۱ + ۲x_۲ \le ۴۰ \qquad \text{محدودیت نیروی کار (نفر ــ ساعت)}$$
$$۴x_۱ + ۳x_۲ \le ۱۲۰ \qquad \text{محدودیت مواد اولیه (چوب)}$$
$$x_۱, x_۲ \ge ۰$$

در مدل فوق $x_۱$ بیانگر میزان تولید صندلی و $x_۲$ بیانگر میزان تولید میز است. هر عدد صندلی تولیدی دارای سود ۴۰ ریالی و هر عدد میز دارای سودی ۵۰ ریالی است، برای تولید هر عدد صندلی به یک نفر ــ ساعت نیروی کار و ۴ کیلوگرم چوب نیاز است. برای تولید هر عدد میز به ۲ نفر ــ ساعت نیروی کار و ۳ کیلو چوب نیاز داریم. کل نیروی کار موجود ۴۰ نفر ساعت و کل مواد اولیه (چوب) موجود ۱۲۰ کیلوگرم است.

مدل فوق با استفاده از روش ترسیمی حل شده است که جواب بهینهٔ آن به شرح زیر است:

$$\begin{cases} x_۱ = ۲۴ \\ x_۲ = ۸ \\ Z^* = ۱۳۶۰ \end{cases}$$

حال فرض کنید به دلیل نوسانات بازار و شرایط اقتصادی تغییرات زیر در اجزای مدل ایجاد شده است:

1. Postoptimality Analysis

۱. سود هر عدد صندلی تولیدی در بازار از ۴۰ ریال به ۳۰ ریال کاهش یافته است. این تغییر چه تأثیری بر جواب بهینهٔ فوق دارد؟

۲. میزان چوب در دسترس از ۱۲۰ به ۱۰۰ کیلوگرم کاهش یافته است. این کاهش چه تأثیری بر جواب بهینهٔ فوق خواهد داشت؟

۳. میزان مصرف هر عدد میز از محدودیت نیروی کار از ۲ به ۳ نفر ــ ساعت افزایش یافته است. تأثیر این تغییر بر جواب بهینهٔ فوق چه خواهد بود؟

۴. مدیریت کارخانه تصمیم گرفته است که در کنار میز و صندلی، محصول جدیدی (x_3) تولید کند که هر عدد آن سودی معادل ۴۵ ریال دارد و میزان مصرف آن از نیروی کار و چوب به ترتیب ۱ نفر ــ ساعت و ۲ کیلوگرم است. یعنی مدل فوق به صورت زیر تغییر کرده است:

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2 + 45x_3$$

s.t :

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 40 \quad \text{محدودیت نیروی کار}$$
$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 120 \quad \text{محدودیت چوب}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

اثر این تصمیم بر جواب بهینهٔ مدل اولیه چیست؟

۵. مدیریت کارخانه، تاکنون از محدودیت آلومینیوم مورد استفاده در میز و صندلی غفلت کرده است. بنابراین جدیداً متوجه شده است که باید محدودیت زیر را به مدل فوق اضافه کند:

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \leq 20 \quad \text{محدودیت آلومینیوم (کیلوگرم)}$$

بنابراین مدل اولیه به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

s.t :

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$
$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

یعنی اینکه مدل به جای دو محدودیت دارای ۳ محدودیت است. فکر می‌کنید تأثیر این افزایش محدودیت بر جواب بهینهٔ مدل اولیه چیست؟

اولین راه حلّی که برای بررسی تغییرات ایجاد شده به ذهن می‌رسد، آن است که مجدداً مدل را با اعمال تغییرات بازنویسی کرده (همانند موردهای ۴ و ۵) و به حل آن پرداخت. بالاخره یا جواب بهینهٔ قبلی بدون تغییر می‌ماند و یا تغییر خواهد کرد! در ادبیات OR این راه‌حل بسیار ابتدایی و غیراقتصادی جلوه می‌کند. فن تحلیل حساسیت، فن بسیار کارآمدی است که قادر است با مبنا قرار دادن جواب بهینهٔ مدل اولیه، اثر تغییر (تغییرات) ایجاد شده را با سرعت بیشتری بررسی کند. درواقع به کمک فن تحلیل حساسیت می‌توان، بدون حل مجدد مسأله، به بررسی تأثیر یا عدم تأثیر هر یک از تغییرات پنج‌گانهٔ فوق بر جواب بهینهٔ مدل اصلی پرداخت!

با این توصیف، پاسخ به سئوالات پنج‌گانهٔ فوق مستلزم تشریح ریاضی فن تحلیل حساسیت است که موضوع اصلی «درس تحقیق در عملیات (۲)» می‌باشد. بنابراین در این بخش از درس تحقیق در عملیات (۱)، صرفاً به آشنایی اجمالی با بحث تحلیل حساسیت بسنده می‌شود و انشاءا... به طور مفصل در جلد دوّم کتاب راجع آن بحث خواهیم کرد.

منابع و مآخذ

1. Taylor III, W. Bernard, "*Introduction to Management Science*", Fifth Edition, Prentice-Hall International Editions, 1996.
2. Eppen G.D., F.G. Gould and C.P. Schmidt, "*Introductory Management Science*", "Fourth Edition, Prentice-Hall International, Inc., 1993.
3. Render B. and R.M. Stair, "*Quantitative Analysis for Management*", Third Edition, Allyn and Bacon Inc. London, 1990.
4. Ackoff, R.L. and M.W. Sasieni, "*Fundamentals of Operations Research*", John Wiley and Sons, 1968.
5. Lee, Sang M., Moore and Taylor, "*Management Science*", Third Edition, Allyn and Bacon Inc., 1987.
6. Hillier, F.S. and G.J. Lieberman, "*Operations Research*", Fifth Edition, 1990.
7. Taha, Hamdy A., "*Operations Research, An Introduction*", Fifth Edition, New York, Mac Millan, 1992.
8. Wagner, Harvey M., "*Principles of Operations Research*", Third Edition, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1988.
9. Teichroew, P., "An *Introduction to Management Science*", New York, John Wiley and Sons, 1980.
10. Churchman, C.W., R.L. Ackoff and E.L. Arnoff, "*Introduction to operations Research*", New York, John Wiley and Sons, 1957.
11. Ullmann, E. John, "*Quantitative Methods in Management*", Mc Graw-Hill Inc., 1994.
12. Bronson, Richard, "*Operation Research*", Mc Graw-Hill, 1992.
13. Budnik, Frank S., Dennis Mc Leavey and Richard Mojena, "*Principles of operations Research for Management*", 2nd ed., Irwin Inc., 1982.
14. Turban E. Fraim and R. Meredith, "*Fundamentals of Management Science*", Fourth Edition, Business publication Inc., 1994.

۱۵. هیلیر، فردریک س. و جراله ج، لیبرمن، «*تحقیق در عملیات - برنامه‌ریزی خطی*»، جلد اوّل، ترجمهٔ محمد مدرّس و اردوان آصف وزیری، نشر تند، چاپ پنجم، ۱۳۷۱.

۱۶. مهرگان، محمدرضا، «*پژوهش عملیاتی*». چاپ سوّم، نشر سالکان، ۱۳۷۴.

۱۷. اصغرپور، محمدجواد، «*برنامه‌ریزی خطی*»، چاپ دوم، دانشگاه الزهرا، ۱۳۶۳.

۱۸. طه، صمدی، «*آشنایی با تحقیق در عملیات*»، ترجمهٔ محمدباقر بازرگان، جلد اوّل، مرکز نشر دانشگاهی تهران، ۱۳۶۶.

۱۹. لی، مور و تیلور، «*پژوهش عملیاتی*»، جلد اوّل، ترجمهٔ محمدعلی گرامتی، انتشارات فتح دانش، ۱۳۷۴.

۲۰. فرنچ و همکاران، «*فنون تحقیق در عملیات*»، ترجمهٔ حمید ابریشمی و محمدرضا حمیدی‌زاده، انتشارات دانشگاه تهران، چاپ اوّل، ۱۳۷۶.